



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISIÓN DE INGENIERÍA
MECÁNICA E INDUSTRIAL

TESIS

"Análisis de la simulación numérica de los
diferentes métodos de representación
de la batimetría del Rio Carrizal"

Que para obtener el Título de

INGENIERO MECÁNICO

PRESENTA:

JONATHAN ARTURO SÁNCHEZ
MUÑOZ

Director: Dr. William Vicente y Rodríguez

Ciudad Universitaria, D. F. 3, a Diciembre de 2008



Agradecimientos

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Objetivo.....	1
1.2. Motivación social y ambiental.....	1
1.3. Principales alternativas numéricas para la simulación de flujos en ríos.....	5
1.4. Estructura de la tesis.....	6

2. ECUACIONES DE TRANSPORTE

2.1 Introducción.....	8
2.2 Ecuación de Continuidad.....	8
2.3 Ecuación de Conservación de la cantidad de movimiento.....	9
2.4 Promediado de las ecuaciones.....	10

3. MÉTODO DE SOLUCION

3.1 Introducción.....	14
3.2 Método de volúmenes finitos.....	14
3.3 Método de volúmenes finitos para celdas cortadas.....	21
3.4 Discretización mediante los volúmenes finitos de las ecuaciones gobernantes para las celdas cortadas.....	23
3.4.1 Terminio transitorio.....	23
3.4.2 Terminio convectivo.....	24
3.4.3 Terminio difusivo.....	25
3.4.4 Terminio fuente.....	25
3.5 Cut cell method.....	26

3.6	Método escalar.....	29
3.6.1	Discretización de van leer en términos de la convección escalar.....	30

4. PREDICCIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO EN EL RIO CARRIZAL

4.1	Introducción.....	33
4.2	Configuración simulada.....	33
4.3	Detalles numéricos.....	38
4.3.1	Detalles numéricos para mallas BFC.....	39
4.3.2	Detalles numéricos para cut-cell method.....	41
4.4	Resultados de la simulación.....	44
4.4.1	Campos de Velocidad.....	44
4.4.2	Campos de Presión.....	47
4.4.3	Energía Cinética Turbulenta.....	48

5. CONCLUSIONES

Conclusiones.....	50
-------------------	----

APÉNDICES

A. MODELOS DE TURBULENCIA

Introducción

A.1	Cierres de segundo orden.....	53
A.2	Modelos de viscosidad turbulenta.....	59
A.3	Modelo $k-\varepsilon$	60

B. ESQUEMAS DE DISCRETIZACIÓN

<i>B.1 Esquemas lineales</i>	64
<i>B.1.1 Diferencias desplazadas de primer orden</i>	64
<i>B.1.2 Diferencias centradas</i>	64
<i>B.1.3 Híbrido</i>	65

C. ARCHIVO DE DATOS DE ENTRADA Q1

<i>Archivo de datos de entrada Q1</i>	67
---	----

REFERENCIAS	77
--------------------------	----

INTRODUCCIÓN

1.1 OBJETIVO

El objetivo de esta tesis es simular y comparar numéricamente el comportamiento del flujo en el Río Carrizal, mediante las diferentes técnicas de representación de la batimetría, conocidas como Mallas BFC (Body Fitted Coordinates) y Celda cortada (Cut-Cell Method). La finalidad de esta comparación es encontrar el método que arroje la información necesaria que permita que en trabajos futuros, las simulaciones numéricas se lleven a cabo con estructuras de control de flujo.

La hidrodinámica se modela a partir de resolver las ecuaciones de transporte de conservación de cantidad de movimiento y masa promediadas en el tiempo (promedio de Reynolds) por medio del método de volúmenes finitos. El sistema se cierra vía un modelo de turbulencia. El modelo utilizado fue el modelo k- ϵ estándar (Launder (1974) y Jones (1972)).

1.2 MOTIVACIÓN SOCIAL Y AMBIENTAL

La situación geográfica de un país beneficia o perjudica las condiciones de vida de sus habitantes; México se encuentra en el borde sudoccidental de la placa norteamericana. Es un territorio muy inestable que se encuentra entre las placas del Pacífico, de Cocos y del Caribe, además se caracteriza por tener grandes cadenas montañosas muy cerca de la costa y grandes cuencas endorreicas, conocidas en México como bolsones.

Es claro que desde los desiertos de Sonora, hasta las selvas húmedas de Chiapas, pasando por las montañas del centro del país, México presenta climas casi contradictorios. En general el norte del país, especialmente la región que cercana a la Sierra Madre Occidental, es de tipo desértico, en

cambio en las zonas centrales encontramos climas templados, que pronto pasan a ser tropicales.

Las zonas tropicales que se encuentra en la parte baja del Golfo de México y el Pacífico, se caracterizan por ser muy cálidas y lluviosas. Estas regiones se sitúan al sureste del país y son de particular interés para este trabajo, ya que es ahí, donde se encuentra el estado de Tabasco, el cual alberga al Río Carrizal.

Tabasco es un estado que tiene una superficie de 24 578 [km²], lo que representa el 1.3% de la superficie nacional, esta entidad se encuentra 17°15' y 18°39' de latitud norte, y los 91° 00' y 94°17' de longitud oeste; abarcando desde los llanos costeros del Golfo de México hasta las serranías de Chiapas.

La mayor parte de la superficie (75.22%) se localiza en la región hidrográfica número 30, o región del GRIJALVA-USUMACINTA, formada por las cuencas hidrográficas del Grijalva, Usumacinta y la laguna de Términos, que en el estado ocupan el 41.45%, el 29.24% y el 4.53%. Esto tiene como consecuencia que esta entidad de la república presente el mayor escurrimiento de agua a lo largo del año, pues el volumen anual descargado por este sistema al Golfo de México es de 125 millones de metros cúbicos; cifra que representa el 35% del escurrimiento acuífero del país [1].

Estos ríos (Grijalva y Usumacinta), son considerados ríos maduros, debido a que se encuentran en la zona mas baja de su caudal y la planicie por la que corren les permite tener corrientes anchas y lentas, caracterizadas por meandros y divisiones en varios brazos.

El Río Grijalva es un claro ejemplo, pues en la zona central del estado se divide en varios brazos, conocidos localmente con los nombres de Río Carrizal, Río Samaria y el Río Mezcapala, estos ríos convergen en torno a Villahermosa, donde se vuelven a unir y reciben nuevamente el nombre de Río Grijalva.

El Carrizal es un brazo muy delgado del Mezcapala con una corriente que pasa por la parte norte de la ciudad de Villahermosa, trayendo consigo una corriente de oeste a este que al salir de la ciudad se une de nueva cuenta con

el Mezcapala para continuar su recorrido. Al paso por la ciudad colinda con las colonias, Samarcanda , Bosques de Saloya, Tierra Colorada y el Espejo además de pasar por zonas importantes para el comercio y la industria.

Estas características del Río Carrizal son el motivo por el cual grandes extensiones de terreno tabasqueño están propensas a sufrir inundaciones durante los meses de crecida, dando año con año muestra de que la situación se agravará si no se logra controlar el flujo de estos ríos.

La respuesta a esta problemática la ha dado la CONAGUA, (Comisión Nacional del Agua), solicitando al Instituto de Ingeniería de la UNAM hacer una revisión de esta situación, mediante un modelo físico, que pudiera predecir el comportamiento del gasto que fluye por el Carrizal, además de verificar si las estructuras propuestas por Comisión Federal de Electricidad, podrían controlar y disminuir los problemas ocasionados por el desbordamiento del Río [2].



Figura 1.1. Sección del Río Carrizal utilizada para la simulación del flujo.

El Modelo Físico debe poder reproducir los fenómenos, mediante un escenario físico simplificado, sin embargo el desarrollo y estudio experimental de un modelo de estas características requiere materiales que sean capaces de igualar las condiciones reales, situación que puede alargar el tiempo y los costos de construcción.

Debido a esta petición es, que junto al modelo físico construido por el Instituto de Ingeniería de la UNAM, se propuso realizar un estudio mediante técnicas modernas de simulación numérica, que complementen los resultados obtenidos.

El estudio esta sustentado por una técnica moderna de simulación numérica denominada por sus siglas en ingles CFD (Computational Fluids Dynamics), la cual fue desarrollada por ingenieros y matemáticos hace 40 años, con el propósito de resolver problemas de transferencia de masa y de calor en la aeronáutica, en vehículos aerodinámicos, en ingeniería química, ventilación, así como diseños industriales.

El rápido avance de estas modernas técnicas computacionales y las metodologías de solución numérica desarrolladas en las últimas décadas, han logrado que la CFD sea usada en muchas aplicaciones de la industria para la investigación y en una amplia cantidad de problemas ambientales. Con el paso de los años la CFD se ha convertido en una alternativa y herramienta suplementaria a los métodos tradicionales en las investigaciones sistemáticas de diversos controles en la morfología de ríos, estructura del flujo y transporte de sedimentos, jugando de esta forma un papel importante en la gestión de ríos y en la predicción de inundaciones.

Cabe señalar que el flujo en la corriente de un río es muy complejo debido a los efectos de las topografías irregulares en los flujos de los ríos naturales; Además considerando las grandes dimensiones que esto implica, el modelado de los ríos naturales ha sido en muy exigente. No obstante, las cuestiones mayores en el modelado del flujo del río son las apropiadas representaciones de las complejas condiciones del flujo en los modelos CFD.

Cuestiones como la resolución de la malla, la dependencia de la malla, la representación de la rugosidad en las paredes, el apropiado modelo de turbulencia, etc. Son todos objetos de intensos debates. No obstante con un modelo numérico y condiciones de frontera que proporcionen la representación adecuada del flujo del río estudiado, las simulaciones con CFD pueden aportar considerables ideas y dejar claras las explicaciones de la estructura del flujo que se miden a partir de prácticas de campo y mediciones de laboratorio.

Conocida esta técnica y con la intención de lograr una adecuada predicción del comportamiento del Río Carrizal, se ha decidido realizar para este trabajo una investigación que permita y ofrezca la información que ayude a encontrar la representación que más y mejor se asemeje al comportamiento natural.

1.3 PRINCIPALES ALTERNATIVAS DE NUMÉRICAS PARA FLUJOS EN RÍOS

Las ecuaciones constitutivas para la simulación de flujos están establecidas y se encuentran en un conjunto de ecuaciones diferenciales, conocidas como ecuaciones de Navier-Stokes, estas son apropiadas para el modelado de ríos.

De igual forma existen diferentes caminos de solución numérica y representación de la turbulencia, esto da origen a diferentes técnicas de CFD, las cuales simulan las propiedades físicas de los fluidos, resolviendo numéricamente ecuaciones antes mencionadas.

Entre estas técnicas se encuentran la Simulación Numérica Directa (Direct Numerical Simulation, DNS), la alternativa de Ecuaciones Promediadas (Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations, RANS) y la Simulación de GrandesEscala (Large Eddy Simulation, LES).

En una SIMULACION NUMERICA DIRECTA las ecuaciones de Navier-Stokes son resueltas numéricamente sin ningún modelo de turbulencia, esto significa que todo el rango de escalas tanto espacial como temporal de la turbulencia deben ser resuelto, es decir en la DNS se discretizan directamente y son resueltas numéricamente, la ecuación de conservación de masa, la de cantidad de movimiento y energía. La discretización resuelve todas las escalas de las variables del flujo, ya sean espaciales o temporales y por tanto no requiere de ninguna aproximación o modelo. Sin embargo hoy en día a causa de las limitadas capacidades de los equipos de computo, el uso de la simulación directa esta limitado a el estudio de algunos muy simples pero fundamentales problemas, tales como canales turbulentos o flujos en tuberías.

LARGE EDDY SIMULATION o LES es una técnica usada para resolver ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan flujos turbulentos, estas ecuaciones son resueltas para las fluctuaciones de mayor tamaño, modelando sobre ellas el efecto de las de menor tamaño. Esta técnica puede mejorar sustancialmente la predicción de la aerodinámica del flujo, sobre todo en flujos con estructuras transitorias de vorticidad que dominan los procesos. Sin embargo la alternativa LES utilizada en la simulación de flujos en ríos esta aun en desarrollo.

La última alternativa, es la de ecuaciones promediadas (REYNOLDS AVERAGE NAVIER-STOKES EQUATIONS, RANS), la cual es extensamente utilizada en casos prácticos de interés industrial y consiste en promediar todas las escalas espaciales y temporales de las fluctuaciones turbulentas, resolviendo las ecuaciones de transporte en términos de las variables medias del sistema, éste sistema se simula en tres dimensiones y en coordenadas cartesianas.

Debido a las características de la DNS y LES, se ha decidido que la opción más viable para el estudio del fenómeno a tratar es la alternativa RANS. Esta es usada en el código numérico de Dinámica de Fluidos Computacionales, PHOENICS (Parabolic Hyperbolic or Eliptic Numerical Integration Code Series), el cual es utilizado para la simulación del sistema a resolver en esta tesis.

1.4 ESTRUCTURA DE LA TESIS

En el capítulo posterior, CAPÍTULO 2, se presentan las ecuaciones de transporte que gobiernan el movimiento del flujo en el río. También se deducen las ecuaciones promediadas que resuelven el modelo numérico.

En el CAPÍTULO 3 se presenta el método de solución, que es utilizado en la resolución de las ecuaciones de transporte descritas en el capítulo anterior que describe el flujo.

En el CAPÍTULO 4 se muestra los resultados de la simulación numérica, es decir el comportamiento aerodinámico del río simulado con ambas técnicas.

En el CAPÍTULO 5 se presentan las conclusiones y las recomendaciones para posteriores investigaciones.

Los apéndices A y B, presentan los esquemas de discretización del término convectivo y los modelos de turbulencia utilizados.

ECUACIONES DE TRANSPORTE

2.1 INTRODUCCIÓN

Las tres alternativas para simular el flujo en el río, de acuerdo con el capítulo anterior, son: Simulación Numérica Directa (Direct Numerical Simulations, DNS), Simulación de Grandes Escalas (Large Eddy Simulation, LES) y uso de las Ecuaciones Promediadas (Reynolds, Averaged Navier-Stokes Equations, RANS). Las exigencias computacionales de DNS, así como la demanda de medios avanzados de cómputo y el escaso desarrollo en la simulación de ríos para la alternativa LES, dan como resultado que este trabajo utilice la alternativa RANS, la cual será explicada en este capítulo.

Inicialmente se presentan las ecuaciones instantáneas de transporte que gobiernan el flujo que se estudia numéricamente en esta tesis. Cabe mencionar que los parámetros fundamentales requeridos para la simulación de flujos en ríos, son la presión y la velocidad del fluido. Estos parámetros son gobernados por las ecuaciones constitutivas de Navier-Stokes las cuales están basadas en los principios físicos de continuidad y conservación de cantidad de movimiento.

2.2 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

La ecuación de continuidad expresa la conservación de masa. Esta ecuación es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

donde: \vec{v} y ρ son la velocidad y la densidad del fluido.

2.3 ECUACIÓN DE LA CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La ecuación de cantidad de movimiento es:

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}\vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau}' + \rho\vec{f}_m \quad (2.2)$$

En donde p es la presión, $\vec{\tau}'$ es el tensor de esfuerzos viscosos y \vec{f}_m son las fuerzas másicas, como por ejemplo la gravedad \vec{g} y ρ es la densidad.

El tensor de esfuerzos viscosos, según la ley de Navier-Poisson para fluidos newtonianos esta dado como [3]:

$$\vec{\tau}' = \mu(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T) + (\mu_v - \frac{2}{3}\mu)(\nabla \cdot \vec{v})\vec{\delta} \quad (2.3)$$

Donde μ es la viscosidad molecular de la mezcla, μ_v es el coeficiente de viscosidad volumétrico, y $\vec{\delta}$ es la delta de Kronecker. Por lo general el coeficiente de viscosidad volumétrica se desprecia [4]. Este tensor también es conocido como el tensor de esfuerzos de Reynolds.

Si se sustituye la ecuación (2.3) en la (2.2), podremos obtener las ecuaciones de Navier Stokes.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) + \nabla \cdot (\rho\vec{v}\vec{v}) = -\nabla p + \nabla \left[\mu \left(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \vec{v})\vec{\delta} \right) \right] + \rho\vec{g} \quad (2.4)$$

El primer término de la izquierda de la ecuación (2.4) representa la velocidad de cambio de momentum por unidad de volumen respecto del tiempo, el segundo término representa el cambio de momentum resultante del movimiento advectivo. Del lado derecho de la ecuación, el primer término es la fuerza resultante de la diferencial de presiones, el segundo término combina las fuerzas viscosas resultantes del movimiento del fluido y el producido por las fluctuaciones turbulentas de las partículas del fluido. El tercer término representa las fuerzas gravitatorias.

2.4 PROMEDIADO DE LAS ECUACIONES

El flujo en los sistemas analizados en esta Tesis, como en la mayor parte de los problemas de interés práctico, es turbulento. Una de las características de los flujos turbulentos es la variación aleatoria e irregular tanto en el espacio como en el tiempo de las propiedades del fluido.

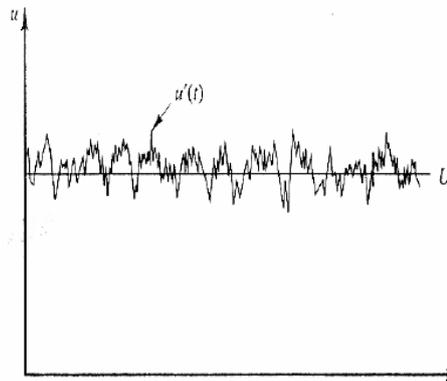


Figura 2.1 Esta gráfica representa la variación aleatoria e irregular en el espacio y el tiempo de las propiedades del fluido.

El promediado de las ecuaciones instantáneas de conservación es una de las alternativas para la simulación de flujos turbulentos en el modelado de ríos. Con este método se promedian todas las fluctuaciones de las escalas temporales y se resuelven las ecuaciones de transporte para los valores

medios de las propiedades del fluido. Estas ecuaciones no son cerradas, por lo cual se requieren modelos que reemplacen los términos no cerrados.

Ahora bien en flujos con densidad variable se pueden usar dos tipos de promedios. Uno es el promedio de Reynolds [5], no ponderado con la densidad, usado generalmente en flujos con densidad constante y el otro es el propuesto por Favre [3 y 6], que es ponderado con la densidad.

Para efectos de este trabajo, se considera la densidad como una constante, por lo tanto utilizaremos los promedios de Reynolds

Con fines ilustrativos, se define a Φ como cualquier propiedad transportada, por ejemplo, la fracción másica de la especie (Y_α), la entalpía (h) o las componentes de velocidad (\bar{v}). Estos valores instantáneos de las propiedades se escribirán en términos de un promedio y una fluctuación turbulenta:

$$\Phi = \bar{\Phi} + \Phi' \tag{2.5}$$

Los dos promedios $\bar{\Phi}$ están definidos como:

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{n_e} \sum_{i=1}^{n_e} \Phi^i \tag{2.6}$$

Promedio muestral de Reynolds

En donde Φ^i es la muestra i del conjunto de realizaciones n_e de un experimento.

Al considerar el promedio en el tiempo se considera a la fluctuación como:

$$\bar{\phi}' = 0 \tag{2.7}$$

Por tanto se define al promedio de Reynolds como:

$$\Phi = \bar{\Phi} \tag{2.8}$$

Por la naturaleza del fluido analizado en esta tesis, cuya densidad se puede considerar constante, se puede aplicar el promedio de Reynolds en las ecuaciones instantáneas de transporte.

Si el promedio de Reynolds es aplicado a las ecuaciones instantáneas de continuidad, cantidad de movimiento, se obtiene (2.1) y (2.2) :

$$\rho \nabla \cdot \overline{\vec{v}} = 0 \tag{2.9}$$

$$\rho \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \overline{\phi \vec{v}} = -\nabla \overline{p} + \nabla \cdot \underbrace{\left[\mu \left(\nabla \overline{\vec{v}} + \overline{\phi \vec{v}^T} - \frac{2}{3} \overline{\phi \vec{v} \vec{v}} \right) \right]}_I - \underbrace{\rho \nabla \cdot \overline{\phi' \vec{v}'}}_{II} + \rho \overline{\vec{g}} \tag{2.10}$$

Además, si se aplica el promedio de Reynolds en la ecuación homogénea se obtiene:

$$\rho \frac{\partial \overline{\phi_z}}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \overline{\phi_z \vec{v}} = \underbrace{-\nabla \cdot \overline{\phi' \nabla \phi_z}}_I + \underbrace{\rho \nabla \cdot \overline{\phi' \vec{v}'}}_{II} \tag{2.11}$$

La ecuación anterior tiene una forma idéntica a las correspondientes ecuaciones instantáneas, con un término adicional $\overline{\phi' \nabla \phi_z}$, que involucra las fluctuaciones de la velocidad y el escalar ϕ , y que representa físicamente el transporte convectivo de ϕ por movimientos turbulentos. En flujos turbulentos, el término de difusión laminar (I), de las ecuaciones anteriores, es generalmente despreciable frente al término de difusión turbulenta (II). Por lo tanto, las ecuaciones (2.9), (2.10), y (2.11) se escriben como [5]:

$$\rho \nabla \cdot \overline{\vec{v}} = 0 \tag{2.12}$$

$$\rho \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \overline{\phi \vec{v}} = -\nabla \overline{p} + \rho \nabla \cdot \overline{\phi' \vec{v}'} + \rho \overline{\vec{g}} \tag{2.13}$$

$$\rho \frac{\partial \overline{\phi_z}}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \overline{\phi_z \vec{v}} = \rho \nabla \cdot \overline{\phi' \vec{v}'} \tag{2.14}$$

Si las fluctuaciones no son conocidos a priori, las ecuaciones RANS no pueden ser cerradas a menos que un modelo provea las relaciones con el significado global de las propiedades físicas del flujo, por lo cual se han desarrollado varios modelos de turbulencia, ya que con un apropiado modelo de turbulencia y con conjunto de condiciones de frontera para el fluido, el río puede ser modelado.

Si el flujo es de baja velocidad ($Ma \ll 1$) generalmente se supone que las fluctuaciones de la presión son despreciables [7].

Los flujos turbulentos $\bar{v}'\Phi'$ de la ecuación (2.13) y (2.14) son los términos desconocidos que requieren modelización. El cierre del término $\bar{v}'\bar{v}'$ de la ecuación media de cantidad de movimiento (2.13) se trata en el apéndice A.

El tratamiento del término $\rho\bar{v}'\Phi'$, se puede consultar en Jones et al [7] y [8], y Lindstedt [9].

MÉTODO DE SOLUCIÓN

3.1 INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se presenta el método de solución de las ecuaciones que gobiernan el flujo turbulento en el modelado de un río, las cuales abordamos en el capítulo 2 de esta Tesis.

Para resolver las ecuaciones que caracterizan la hidrodinámica del flujo medio, se utilizará el método de volúmenes finitos, que se describe a continuación.

3.2 MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS.

El desarrollo de la dinámica de fluidos computacional, así como el rápido avance de los medios computacionales, han ocasionado que los investigadores desarrollen y perfeccionen la alternativa conocida como Método de los volúmenes finitos. Esta técnica es más simple y numéricamente más eficiente que las otras, además se ha convertido en una de las técnicas más utilizadas en las simulaciones en tres dimensiones.

Las ecuaciones medias de continuidad, cantidad de movimiento y del modelo de turbulencia introducidas en el capítulo anterior, se pueden representar mediante una ecuación general de transporte, donde la variable dependiente está representada por $\bar{\phi}$:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\phi}) + \rho \nabla \cdot (u_i \bar{\phi}) - \nabla \cdot (\Gamma_\phi \nabla_\phi \bar{\phi}) = \bar{S}_\phi \quad (3.1)$$

donde Γ_ϕ es el coeficiente de difusión y \bar{S}_ϕ es el término fuente. Los términos del lado derecho de la ecuación (3.1) son el término transitorio, convectivo y de

difusión respectivamente. Los términos Γ_ϕ y S_ϕ están especificados para cada variable $\bar{\phi}$. (Para la ecuación de continuidad, $\bar{\phi} = 1$).

La ecuación (3.1) se puede discretizar con el método de volúmenes finitos. En este método, el dominio se divide en pequeños volúmenes de control, asociando a cada uno de ellos un punto nodal. De forma similar se discretiza el tiempo en intervalos temporales.

La ecuación diferencial se integra en cada volumen de control y en cada intervalo temporal, el resultado es una ecuación discretizada que relaciona los valores de $\bar{\phi}$ para un determinado grupo de puntos nodales. Esta ecuación algebraica expresa el principio de conservación de $\bar{\phi}$ en el volumen finito, de la misma manera que la ecuación diferencial lo expresa para un volumen infinitesimal. La ecuación algebraica para un nodo P puede expresarse en forma general como:

$$\sum_{l \in \text{vecinas}} \Gamma_{\phi, l} (\bar{\phi}_l^T - \bar{\phi}_l^B) + S_\phi (\bar{\phi}_P^T - \bar{\phi}_P^B) = 0 \tag{3.2}$$

donde el subíndice l representa las celdas vecinas, i la cara entre las celdas P e l , T el valor correspondiente en el intervalo temporal anterior, y B el término fuente. La deducción detallada de la ecuación (3.2) puede consultarse en [10], [5] y numerosos textos de fluido dinámica computacional.

En el caso de una malla cartesiana, decalada (“staggered”) y uniforme (celdas de iguales dimensiones espaciales), un volumen de control tridimensional es como la que se muestra en la figura 3.1. En una malla decalada, las variaciones se encuentran definidas en el centro de la celda, mientras que las componentes de velocidad correspondientes a la celda se encuentran desplazadas en cada dirección a las caras de la celda.

En la figura 3.2 se muestra la notación de la celda y de sus vecinas. Dada una celda P, sus vecinas se notarán según las iniciales de los puntos cardinales en

las direcciones X e Y y como Low y High (en ingles) en la dirección z . Las caras de la celda se notan con la misma nomenclatura, pero con letras minúsculas.

El tiempo también se discretiza. Las celdas en la dirección temporal se llaman intervalos temporales. La celda P en el paso temporal se nota como T .

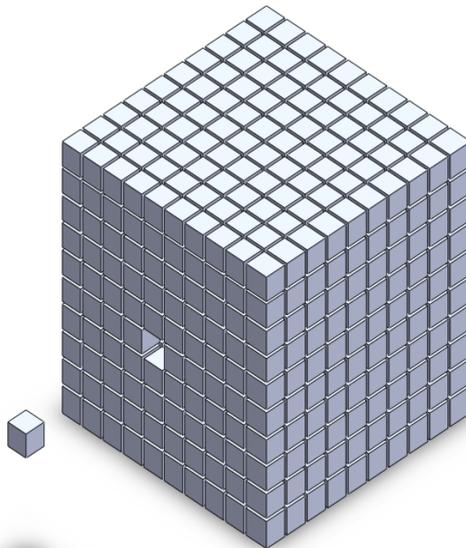


Figura 3.1. Representación del sistema discretizado en volúmenes finitos.

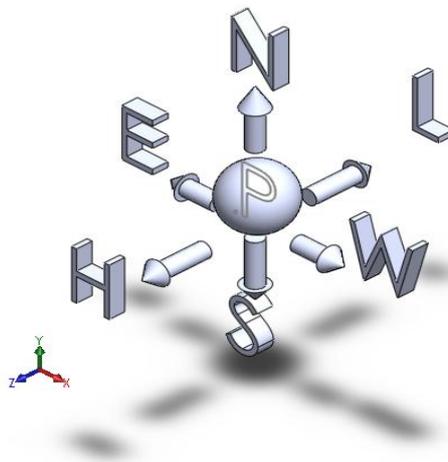


Figura 3.2 Diagrama esquemático del Punto P de una celda y la dirección de sus vecinas.

A continuación, se presentan los términos de la ecuación discretizada (3.2).

Definiendo los símbolos F, D, Pe como:

$$F = \rho \bar{v}_i, \quad D = \frac{\Gamma}{\delta_i}, \quad Pe = \frac{F}{D} \quad (3.3)$$

donde \bar{v}_i es la velocidad en la cara i, δ_i es la distancia entre los nodos que incluyen la cara i y Pe es de número de Peclet, que es un radio entre la convección y la difusión, \bar{v} es la velocidad en la cara i y x_i . (Las expresiones F y D representan el efecto de los términos convectivo y difusivo de la ecuación de transporte (3.1) respectivamente.

Los coeficientes a_i de la ecuación (3.2) son:

$$a_i = F_i - D_i \quad (3.4)$$

Los valores F y D en la cara de la celda de la ecuación (3.4) son:

$$F_i = \rho \bar{v}_i \Delta_i, \quad D_i = \frac{\Gamma_i \Delta_i}{\delta_i} \quad i=n, s, e, w \quad (3.5)$$

donde Δ_i es la longitud de la cara i.

Para determinar F_i se necesita conocer ρ que como ya se menciono se considera como constante y \bar{u}_i en la cara de la celda. El cálculo del término convectivo de la ecuación de transporte (3.1) requiere también el conocimiento de la variables escalar, $\bar{\phi}$, en la cara de la celda. La velocidad \bar{v}_i está calculada en la cara de la malla decalada, pero $\bar{\phi}$ esta calculado en el nodo y necesita

ser interpolados a la cara para calcular los coeficientes a_i de la ecuación discretizada (3.2).

La obtención de estas variables en la cara de la celda es importante en precisión y convergencia de la solución. El cálculo de $\bar{\phi}$ da lugar a los llamados esquemas de discretización. La función $f(|Pe|)$ de la ecuación (3.4) depende del esquema de interpolación. Por ejemplo, en el esquema de diferencias desplazadas $f(P) = 1$, y para el sistema híbrido [10]:

$$f(P) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{Pe}{|Pe|} \right) \quad (3.6)$$

En el apéndice B se presentan algunos esquemas de discretización lineales y no lineales de alto orden, que se utilizan en esta Tesis en la discretización del término convectivo de las ecuaciones de cantidad de movimiento y del modelo de turbulencia.

El coeficiente para el término transitorio es:

$$a_T = \frac{\rho_T \Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (3.7)$$

Para el cálculo del término D_i (3.5) se necesita obtener el coeficiente de difusión, Γ , en la cara de la celda. El coeficiente Γ no es necesariamente una constante, sino probablemente función de valores variables que se conocen en los nodos y por lo tanto es necesario interpolarlo a la cara. Esta interpolación puede ser aritmética o armónica. Para la cara e , por ejemplo, estas interpolaciones son:

$$\Gamma_e = \frac{2\delta_e}{\Delta \left(\frac{1}{\Gamma_P} + \frac{1}{\Gamma_P} \right)} \quad (3.8)$$

El término fuente de la ecuación general (3.1), $\bar{\delta}_\phi$, se linealiza como:

$$\bar{\delta}_{\phi,v} \quad (3.9)$$

donde el término $\bar{S}_{\phi,v}$ se elige de acuerdo con la relación existente entre \bar{S}_ϕ y $\bar{\phi}$, en el caso de depender el primero del segundo. El objetivo de la linealización del término fuente es mejorar la convergencia de la solución.

Con esta suposición, los términos B y a_p de la ecuación (3.2) son:

$$B \quad (3.10)$$

$$a_p \quad (3.11)$$

La ecuación (3.2) se aplica en cada celda del dominio, para cada $\bar{\phi}$ y para cada paso temporal Δt , por lo que se tiene un sistema de ecuaciones lineales (los coeficientes a pueden depender, directa o indirectamente de $\bar{\phi}$, por lo que el sistema es realmente pseudo-lineal).

Para resolver este sistema de ecuaciones se puede utilizar cualquier método de resolución de ecuaciones lineales.

En el cálculo de las velocidades, a partir de las ecuaciones de cantidad de movimiento, se tiene el inconveniente de que la presión, cuyo gradiente aparece como término fuente en estas ecuaciones de cantidad de movimiento, no tiene una ecuación propia para calcularla. Una solución ampliamente utilizada es transformar la ecuación de continuidad en una ecuación para la presión.

Entre los algoritmos iterativos que se basan en este procedimiento están los de la familia SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure- Linked Equations) ([11], [10] y [9]). El algoritmo utilizado en esta Tesis para resolver el problema de acoplamiento velocidad-presión pertenece a esta familia.

El proceso de solución de este sistema de ecuaciones es iterativo y durante éste, las ecuaciones del sistema, en general, no se cumplen; el imbalance entre la parte izquierda y derecha de la ecuación se denomina residuo. La convergencia del proceso iterativo se da cuando los residuos disminuyen.

Para procurar o acelerar esta convergencia se utiliza un método de relajación de algunas de las variables dependientes y propiedades. Se emplean dos tipos de relajación: la inercial y la lineal. La relajación inercial se emplea para las velocidades y los parámetros de turbulencia, y aumenta la dominancia diagonal de la matriz de coeficientes el agregar a la ecuación de cualquier variable ϕ el término fuente:

$$S_{\phi} = \frac{V_P}{\Delta t_f} (\phi^* - \phi) \tag{3.12}$$

donde V_P es el volumen de la celda P, Δt_f es el intervalo de tiempo falso y el superíndice n se refiere al número de iteración.

Para la presión y la densidad se emplea la relajación lineal dada por:

$$p_{sol}^{n+1} = \alpha (p_{sol}^n - p_{sol}^{n-1}) + p_{sol}^n \quad (3.13)$$

donde α es el factor de relajación, el súper índice sol se refiere al valor de la propiedad proporcionado por el “solver” en la iteración actual. El factor de relajación, α , normalmente toma valores entre 0 y 1.

El criterio de convergencia utilizado para detener el proceso iterativo para un paso temporal dado y pasar al siguiente es tal que, para cada variable, la suma de los valores absolutos de los residuos en todo el dominio sea menor que un determinado porcentaje de un valor de referencia.

En esta Tesis, se usa el código de fluido dinámica computacional PHOENICS [13] para resolver las ecuaciones que describen aerodinámica del flujo: continuidad, cantidad de movimiento y turbulencia.

3.3 MÉTODO DE LOS VOLÚMENES FINITOS PARA LAS CELDAS CORTADAS (CUT-CELL)

Hoy en día la dinámica de fluidos computacional juega un papel importante en el diseño industrial. Como parte del análisis CFD (Computational Fluids Dynamic), el dominio debe ser dividido en una malla compatible con las técnicas numéricas que se usan para resolver las ecuaciones que gobiernan los flujos [12].

Las alternativas a la generación de mallas en geometrías complejas, como la de la batimetría en un río, son el uso de las de mallas que se ajustan al contorno del cuerpo (Body Fitted Coordinates, BFC) o celdas cortadas (Cut-Cell Method).

Las Mallas BFC, que se ajustan al contorno del cuerpo, se caracterizan por la deformación del volumen de control hasta obtener la geometría deseada, sin embargo, la representación de la batimetría de un río se puede volver complicada. Adicional a lo anteriormente expuesto, la convergencia del método puede dificultarse por la adición de términos fuente debidos a la deformación de la celda o volumen.

En las Celdas cortadas, la malla computacional es cortada del entorno para conformar la geometría de interés. La ventaja que se tiene al usar esta técnica, es que resulta una malla cartesiana con lo cual no se deforma la celda y se puede encontrar la convergencia más fácil.

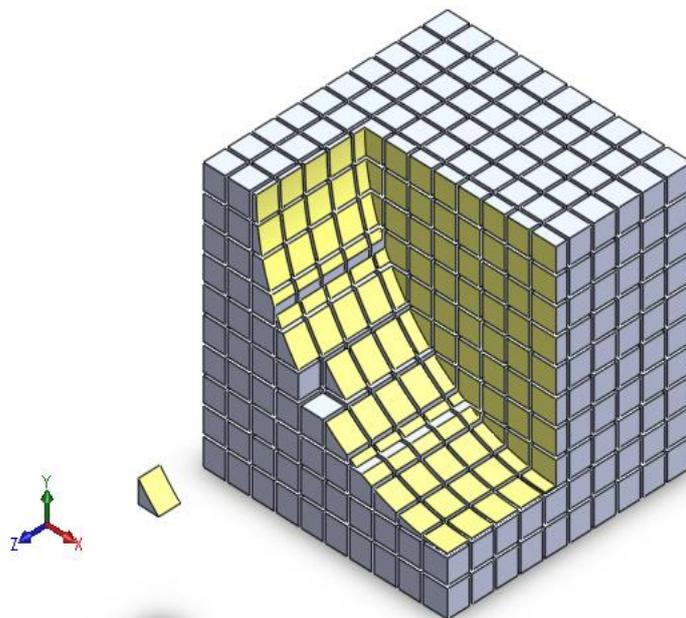


Figura 3.3 Muestra de una malla cartesiana en 3 dimensiones. Representación esquemática de las celdas cortadas, estas se encuentran en la frontera de la geometría de interés.

La desventaja de este tipo de mallado es que no representa adecuadamente la curvatura o la inclinación de las superficies.

3.4 DISCRETIZACIÓN MEDIANTE LOS VOLUMENES FINITOS DE LAS ECUACIONES GOBERNANTES PARA LAS CELDAS CORTADAS

La integración de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el flujo sobre un volumen de control regular ha sido discutida en muchos textos [10 y 13]. Sin embargo, esta integración sobre celdas irregulares merece atención. La integración puede ser expresada como:

$$\int \int \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{\phi}) dx dy + \int \int \nabla \cdot (\rho \bar{v} \bar{\phi}) dx dy - \int \int \nabla \cdot (\Gamma_{\phi} \nabla \phi) dx dy = \int \int \bar{S}_{\phi} dx dy \quad (3.14)$$

donde las integrales se aplican sobre la extensión de una celda en particular

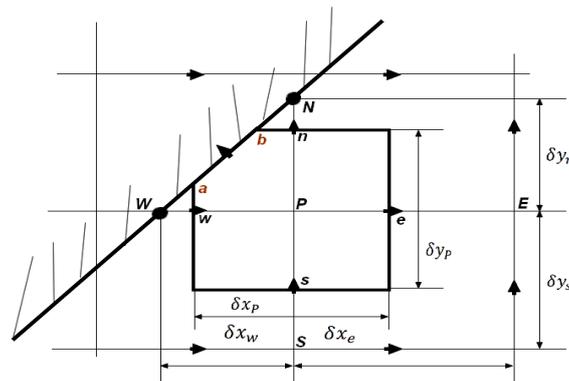


Fig. 3.4 Límite de las celdas cortadas en una malla cartesiana escalonada

3.4.1 TERMINO TRANSITORIO

Para el límite del volumen de control cortado mostrado en la Fig. 3.4, la discretización llega a ser.

$$\int \int \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{\phi}) dx dy = \frac{(\rho \phi)_p^n - (\rho \phi)_p^o}{\Delta t} A_p \quad (3.15)$$

donde los subíndices n y o representan los nuevos y viejos valores para un tiempo de paso Δt . A_p es el área del límite de celda "P" mostrado en la Fig. 3.4 y este necesita ser evaluado para cada límite de celda cortada. Para una celda normal sin cortar, sin embargo $A_p = \Delta x_p \Delta y_p$.

3.4.2 TERMINO CONVECTIVO

El flujo convectivo puede ser evaluado como

$$\iint \nabla \cdot (\rho \vec{v} \bar{\phi}) dx dy = c_n \phi_n - c_s \phi_s + c_e \phi_e - c_w \phi_w \pm c_{ab} \phi_{ab} \quad (3.16)$$

donde $\phi_n, \phi_s, \phi_e, \phi_w$ y ϕ_{ab} son los valores de ϕ al norte, sur, este, oeste, y en la cara ab de la celda siendo integradas. c_n, c_s, c_e, c_w y c_{ab} como flujos de masa en cada cara y serán evaluadas de la siguiente manera

$$c_n = q_n (\rho v)_n \Delta x_p \quad (3.17)$$

$$c_s = q_s (\rho v)_s \Delta x_p \quad (3.18)$$

$$c_e = q_e (\rho v)_e \Delta y_p \quad (3.19)$$

$$c_w = q_w (\rho v)_w \Delta y_p \quad (3.20)$$

$$c_{ab} = \rho u_{ab} \Delta S_{ab} \quad (3.21)$$

donde el flujo de masa a través de las caras de las celda por ejemplo $(\rho v)_n$ son interpoladas linealmente basadas en el valor de su nodo vecino por el volumen de control u y v . Para volúmenes de control escalares a causa del escalonamiento adoptado esos flujos de masa son disponibles sin necesidad de interpolación. Δx_p y Δy_p son mostrados en la Fig. 3.4. u_{ab} es la velocidad normal a la superficie cortada ab y ΔS_{ab} Es el tamaño de la superficie de la celda cortada ab .

Para tomar el valor de la propiedad en la cara de cada celda en cuenta en las ecuaciones (3.17)-(3.21) cuatro coeficientes son introducidos. Estos están definidos como:

$$q_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta x_p}, \quad q_s = \frac{\Delta x_s}{\Delta y_p}, \quad q_e = \frac{\Delta y_e}{\Delta y_p}, \quad q_w = \frac{\Delta y_w}{\Delta y_p}, \quad (3.22)$$

donde $\Delta x_n, \Delta x_s, \Delta y_s, \Delta y_w$ son los tamaños reales de las caras celdas norte, sur, este, oeste. Para los límites de las celdas cortadas esos factores varían entre 0 y 1. Para las celdas cortadas mostradas en la Fig.3.4 La integración de los términos de convección involucra la evaluación de los flujos de convección a través de las caras n, s, e, w y ab . Para una superficie impermeable el flujo convectivo en ab es cero. Como parte del cálculo del flujo ϕ debe ser evaluado en las caras de las celdas.

3.4.3 TERMINO DIFUSIVO

El término difusivo puede ser integrado como

$$\begin{aligned} \iint \nabla \cdot (\Gamma_\phi \nabla \phi) dx dy = & \left[q_n \Delta x_p \Gamma_{\phi_n} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - q_n \Delta x_p \Gamma_{\phi_n} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n \right] \\ & + \left[q_s \Delta x_p \Gamma_{\phi_s} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_s - q_w \Delta x_p \Gamma_{\phi_w} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] - (1 - q_w) \Delta y_p \Gamma_{\phi_{ab}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{ab} \\ & + (1 - q_n) \Delta x_p \Gamma_{\phi_{ab}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{ab} \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde el subíndice ab representa el valor del parámetro en la cara ab de la frontera de la celda cortada mostrada en la Fig. 3.4.

La tarea clave en la discretización del término difusivo es la precisa evaluación de los gradientes de la cara de la celda de ϕ . Aquí, para las caras interiores, son usadas diferencias de segundo orden. Sin embargo, esto es menos directo para conseguir aproximaciones de gradientes de alto orden para los lados de las caras en las límites (n, w y ab en la Fig. 3.4) de una celda cortada.

3.4.4 TERMINO FUENTE

$$\iint \bar{S}_\phi dx dy = S_\phi A_p \quad (3.24)$$

Habiendo evaluado la convección, el flujo difusivo y los términos fuente, las ecuaciones discretizadas para ϕ pueden ser escritas en forma general.

$$a_P \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{nb} + S_P \quad (3.25)$$

donde el subíndice nb indica los vecinos de la celda "P". Las detalladas expresiones del coeficiente a_P y a_{nb} en la ecuación (3.25) dependen del esquema particular adoptado para discretizar el término convectivo.

3.5 CUT CELL METHOD

El método cartesiano cut-cell proporciona una flexible y eficiente alternativa al tradicional método BFC. La aproximación del método "cut-cell" usa un fondo con una malla cartesiana para la mayoría de los dominios con un especial manejo aplicado a las celdas que son cortadas por cuerpos sólidos y así mantienen una frontera conformando la malla.

Así,

$$P_i = \{(x_0, y_0), \dots, (x_j, y_j), \dots, (x_n, y_n)\} \quad (3.26)$$

Define la i -ésima región sólida.

Los puntos de intersección de un determinado segmento de línea [17 y 18] , definidos por empezar y terminar en las coordenadas (x_s, y_s) y (x_e, y_e) respectivamente, se encuentran de la siguiente manera. Antes de proceder es necesario determinar tanto la pendiente Q del segmento de línea como las celdas donde se encuentran el punto inicial y final. La ubicación (I_s, J_s) de la celda que contiene la coordenada inicial.

$$I_s = \text{int}\left(\frac{x_s - x_0}{\Delta x}\right) + 1 \quad \text{y} \quad J_s = \text{int}\left(\frac{y_s - y_0}{\Delta y}\right) + 1 \quad (3.27)$$

Este proceso es repetido para todas las subsecuentes celdas intersecadas por el segmento de línea hasta alcanzar la celda (I_e, J_e) . Los casos donde Q descansa sobre otro cuadrante se pueden tratar análogamente.

Un enfoque similar se puede usar en un espacio de tres dimensiones, pero la superficie del cuerpo es definida usando una triangulación de superficie adaptada. En esta superficie, la triangulación tiene solo la suficiente calidad para dar una correcta representación del cuerpo ya que no se usa directamente para discretizar la solución del flujo, representaciones obtenidas de sistemas CAD son apropiadas normalmente.

Inicialmente, todas las celdas en el fondo de la malla son marcadas como celdas de flujo o celdas sólidas. Una vez que todas las intersecciones de las celdas cortadas han sido establecidas, las celdas que intersecan la frontera de cualquier región sólida son registradas como celdas cortadas. Barridas a través de la malla son hechas para identificar que celdas o serie de celdas son delimitadas por sólidos o celdas parcialmente cortadas, esas son registradas como celdas sólidas. Tres tipos de celdas son formadas en el dominio computacional. Estas tipo de celdas son mostradas en la figura 3.6 las celdas cortadas, las de flujo y las sólidas.

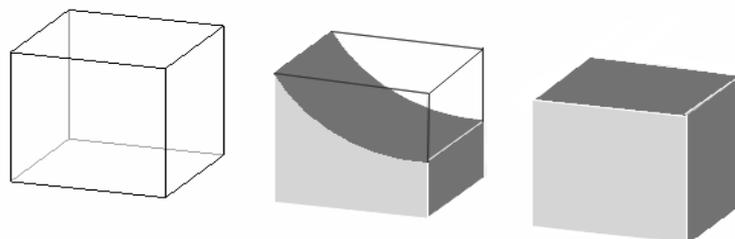


Figura 3.6 Representación esquemática de los tres tipos de celdas que se pueden encontrar en un dominio donde se utiliza el método Cut-Cell. A la izquierda se observa una celda de flujo, en el centro una celda cortada y a la derecha una celda sólida.

Para un método de volúmenes finitos, la dirección de la normal hacia el exterior debe de ser conocida para cada cara del sólido, y el área de cada cara de las celdas no cortadas y el volumen de las celdas sin cortar de las celdas debe de

ser determinado. En la implementación original, 16 tipos de celdas se utilizaron para calcular esta información geométrica. El área del fluido en los lados de las celdas puede ser calculada, basándonos en los puntos de intersección en los bordes de las celdas. Si la cara de los sólidos es ahora aproximada a un cuadrilátero no plano, este vector normal y el área pueden ser calculados usando [14 y 17].

$$|S| = \sqrt{(S_x^L - S_x^R)^2 + (S_y^L - S_y^R)^2 + (S_z^L - S_z^R)^2} \quad (3.28)$$

$$n = \frac{1}{|S|} \begin{pmatrix} S_x^R - S_x^L \\ S_y^R - S_y^L \\ S_z^R - S_z^L \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

$$V = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^M P_i \cdot n_i S_i \quad (3.30)$$

donde S_{xyz}^{LR} es la cara derecha o izquierda de la celda cartesiana cuando es vista desde la dirección x , y o z . P_i , n_i y S_i son el centroide, el vector normal y el área en la i -ésima cara de la celda.

Dentro del método cartesiano “cut-cell” es necesario usar un volumen finito, solucionador de flujo, basado en conducción y balance de flujo alrededor de los bordes de las celdas. Este planteamiento permite el inusual número de bordes que existirán en las celdas cortadas a ser consideradas.

3.6 MÉTODO ESCALAR (SCALAR EQUATION METHOD SEM)

En esta sección se explica el método escalar, utilizado en las mallas BFC, con la finalidad de representar la interacción existente entre los fluidos de la simulación [16].

En este método se emplea el escalar Ψ que representa la fracción del volumen del líquido en el volumen de control de una celda. Cuando sólo hay un

gas en esta celda $\Psi = 0$, si únicamente es líquido $\Psi = 1$. El valor de Ψ toma un valor intermedio entre 0 y 1 cuando el fluido es bifásico.

El valor de Ψ es usado para actualizar el valor de las propiedades.

Los campos de la densidad y la viscosidad que afectan el fluido pueden ser calculados por las siguientes expresiones:

$$\rho = \rho_G(1 - \Psi) + \rho_L(\Psi) \quad (3.31)$$

$$\mu = \mu_G(1 - \Psi) + \mu_L(\Psi) \quad (3.32)$$

Donde ρ_G , ρ_L son respectivamente las densidades del gas y del líquido y μ_G , μ_L son la viscosidad dinámica del gas y del líquido respectivamente.

Para la interface se asume que las propiedades ρ y μ varían linealmente con Ψ de un fluido a otro.

El método escalar es gobernado por las ecuaciones de transporte y como se mencionó anteriormente Ψ es la fracción de volumen del líquido que hay en un volumen de control:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Psi \cdot u) = 0 \quad (3.33)$$

donde Ψ esta determinada por la convección.

3.6.1 DISCRETIZACIÓN DE VAN LEER EN TÉRMINOS DE LA CONVECCIÓN ESCALAR.

Al integrar la ecuación (3.33) y usando la fórmula de Green para cada celda como se muestra en la figura 3.1 y con las direcciones mostradas en la figura 3.2 se tiene que:

$$\iint_{V} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dV dt + \int_s \Psi \vec{u} ds_i = 0 \quad (3.34)$$

La cual escrita en forma discreta queda:

$$\Psi_P^{n+1} = \Psi_P^n - \sum_{i=1}^F \frac{\vec{u}_i^{n+1} \cdot \vec{n}_i A_i \Delta t}{V_P} \Psi_{i(U)}^n \quad (3.35)$$

Para el cual se tiene que i es la suma sobre las caras F del volumen de control P . El segundo término de la derecha de la ecuación (3.35) es la sumatoria de los términos del flujo. El valor $\Psi_{i(B)}^n$ es el valor de Ψ en la cara, la cual en PHOENICS puede ser tomada a aguas arriba U del flujo. La velocidad u_i^{n+1} es el último valor que esta toma en la cara y n es la superficie normal de la cara i .

Todo el esquema aguas arriba considera el transporte de una variable, Ψ , a través de la cara de la celda (por ejemplo, la cara norte), como se muestra en la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} \Psi_n &= \Psi_P \quad \text{para} \quad \Psi_n > 0 \\ \Psi_n &= \Psi_N \quad \text{para} \quad \Psi_n < 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde Ψ_P y Ψ_N son los valores de Ψ de los nodos al final del paso temporal.

El término $\vec{u}_i^{n+1} \cdot \vec{n}_i A_i \Delta t V_P^{-1}$ de la ecuación (3.35) representa la sumatoria de los flujos y es el número de estabilidad de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL):

$$\sigma_i = \frac{\vec{u}_i^{n+1} \cdot \vec{n}_i A_i \Delta t}{V_P} \quad (3.37)$$

Por lo tanto, la ecuación (3.18) puede ser escrita en términos de σ_i ,

$$\Psi_P^{n+1} = \Psi_P^n - \sum_{i=1}^F \sigma_i \Psi_{i(U)}^n \quad (3.38)$$

Cuando los esquemas de diferenciación de primer orden. Varios métodos numéricos pueden usarse para evitar este error numérico conocido como difusión numérica. Este estudio adopta el esquema de Van Leer TVD, como el método más simple y el más económico de los esquemas de alto orden disponibles, los métodos de altos orden disponibles. La aproximación de Van Leer es un método explícito de diferencias finitas el cual modifica el primer orden de la formulación aguas arriba usando la teoría de características:

$$\begin{aligned} \Psi_n &= \Psi_P + \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)_P \cdot (dy - u_n dt) / 2 \quad \text{para} \quad \Psi_n > 0 \\ \Psi_n &= \Psi_N - \left(\frac{d\Psi}{dy} \right)_N \cdot (dy + u_n dt) / 2 \quad \text{para} \quad \Psi_n < 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Donde Ψ_P y Ψ_N son los valores de Ψ al final del paso temporal.

El término $\frac{d\Psi}{dy}$ está basado en valores al comienzo del paso temporal, lo cual

implica que el método es implícito por naturaleza.

Éste gradiente es especificado tal que reduce el esquema para el contraviento en la presencia del extremo local.

La aproximación de la variación total (TVD) ofrece ventajas de un esquema de alto orden mientras este evita caer o excederse.

La formulación explícita del criterio de Courant coloca el límite máximo sobre el incremento del tiempo para la estabilidad de la solución:

$$dt = \min\left(\frac{dy}{v}, \frac{dz}{w}\right)$$

Donde el mínimo es con respecto a cada celda de la malla, no sólo en la interface.

COMPARACIÓN DE LA SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL RÍO CARRIZAL MEDIANTE LOS DIFERENTES MÉTODOS DE REPRESENTACIÓN

4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan los resultados de las simulaciones numéricas que comparan las mallas BFC y el método cut-cell. Las ecuaciones que modelan el fenómeno han sido ya presentadas en el capítulo 2 y la forma en que han sido resueltas se presenta en el capítulo 3.

Inicialmente se muestran la representación de batimetría en ambos métodos dentro del código de simulación numérica PHOENICS, así como la configuración a simular y los detalles numéricos que se usaron para simularlos. Después se presenta un análisis cualitativo de los resultados del modelo numérico. Finalmente son comparadas las simulaciones realizadas para los diferentes métodos.

4.2 CONFIGURACIÓN SIMULADA

La sección del Río Carrizal simulada comprende 1000 m aguas abajo y 1200 m aguas arriba, esta sección se localiza en el punto de partida de los ríos Samaria y Carrizal en el poblado Macayo en los límites entre Tabasco y Chiapas. Las medidas utilizadas para las simulaciones numéricas están

escalas 1/60, estas medidas son las del modelo construido por el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

La figura 4.1 y la figura 4.2 representan la batimetría del Rio Carrizal [2], en el código de simulación numérica PHOENICS.

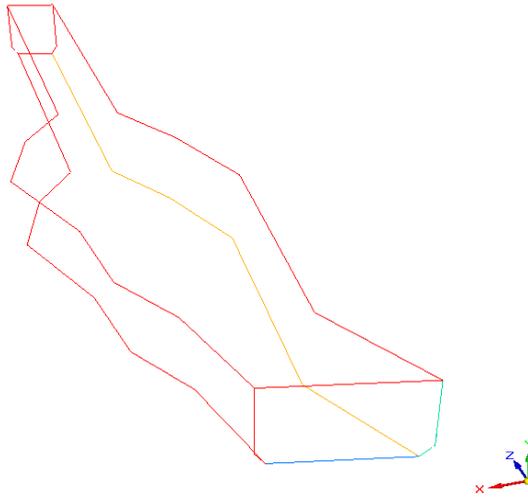


Figura 4.1 Representación en el código Numérico PHOENICS del volumen de control en mallas BFC (Body Fitted coordinates)

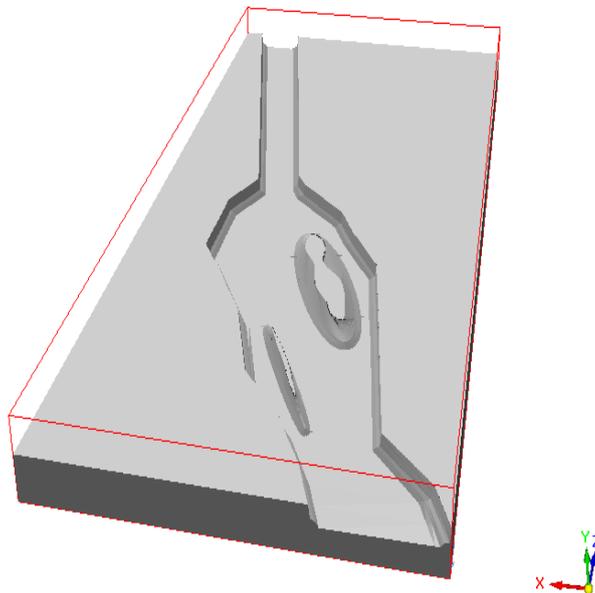


Figura 4.2 Representación en el código Numérico PHOENICS del volumen de control, para el método Cut-cell.

El dominio computacional para las mallas BFC tiene en la dirección del eje X una longitud de 6 [m], en la dirección del eje Z una longitud de 37.76 [m] y en

la dirección del eje Y una longitud de 8.33 [m] y el método Cut-cell, tiene en la dirección del eje X una longitud de 18.33 [m], en la dirección del eje Z una longitud de 37.76 [m] y en la dirección del eje Y una longitud de 8.33 [m].

Ahora bien, parte de la temática que estudia la mecánica de fluidos comprende el tema relacionado con la modelación y el análisis adimensional, en esta teoría se definen con una serie de elementos conocidos como números adimensionales, los cuales facilitan la comprensión y el análisis de algunos fenómenos y la forma en que estos afectarán, en nuestro caso, al flujo de agua. Las propiedades usadas para la simulación numérica fueron obtenidas mediante uno de estos parámetros adimensionales.

Un canal abierto es gobernado básicamente por los efectos de viscosidad y gravedad relativa a las fuerzas de inercia del flujo, por tanto los parámetros adimensionales utilizados en canales abiertos son el número de Froude que relaciona el efecto de las fuerzas de inercia y las fuerzas de gravedad que actúan sobre un fluido y el número de Reynolds, que relaciona las fuerzas inerciales con las fuerzas viscosas.

Dependiendo del efecto de la viscosidad relativa a la inercia, el flujo puede ser laminar, turbulento o en transición.

El flujo es laminar si las fuerzas viscosas son tan fuertes comparadas con las de inercia, que la viscosidad juega un papel importante para determinar el comportamiento del flujo. En flujo laminar las partículas del fluido parecen moverse en recorridos calmados o definidos, o líneas de corriente, y las capas son infinitamente delgadas del fluido parecen moverse en recorridos definidos, o líneas de corriente, y las capas de infinitamente delgadas del fluido parecen deslizarse sobre capas adyacentes.

El flujo es turbulento si las fuerzas viscosas son débiles comparadas con las fuerzas de inercia. En un flujo turbulento, las partículas del fluido se mueven en recorridos irregulares los cuales no son calmados ni determinados pero en su conjunto todavía representan el movimiento hacia delante de la corriente total.

Entre los estados laminar y turbulento de la corriente, hay un estado mixto o de transición.

El efecto de la viscosidad relativo al de la inercia puede representarse por el número de Reynolds. En la mayor parte de canales abiertos el flujo laminar ocurre raramente. Por tanto diferenciar el régimen de un flujo en un río conociendo el número de Reynolds, no ofrece mucha información ya que se sabe que el flujo es turbulento.

El número adimensional que muestra el efecto de la gravedad sobre el estado del flujo se representa por una relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas de gravedad, es conocido como número de Froude.

Con base en este número es posible distinguir el flujo en tres tipos o estados, flujo subcrítico, crítico y el supercrítico.

Para calcular el número de Froude y determinar el estado en que se encuentra el flujo se usa la siguiente relación:

$$Fr = v / \sqrt{gD}$$

En ella se relaciona la velocidad, gravedad y la profundidad hidráulica, esta definida como el cociente entre el área mojada y el ancho de la superficie del canal.

El flujo crítico presenta una combinación de fuerzas inerciales y gravitacionales que lo hacen inestable, convirtiéndolo en cierta manera en un estado intermedio y cambiante entre dos tipos de flujo. Debido a esto es bastante inaceptable y poco recomendable, usarlo en el diseño de estructuras hidráulicas; este tipo de número de Froude es igual a 1 y en esta condición no se generan resaltos hidráulicos (disipadores de energía).

El flujo supercrítico se presenta cuando las fuerzas inerciales tienen mayor influencia que las fuerzas gravitacionales. Además de esto, el flujo se presenta a velocidades y pendientes altas, y a profundidades pequeñas. Cuando existe un flujo de este tipo en un canal un aumento en la cantidad de energía provoca una disminución de la profundidad de la lámina de agua. El número de Froude, en este caso, es mayor a 1. Este estado de flujo propicia la formación de resaltos hidráulicos, estos aumentan su capacidad de disipación de energía en

ciertos intervalos, alcanzando la mayor capacidad para flujos con Froude mayores a 9.

Para el régimen subcrítico las fuerzas inerciales son sobrepasadas en importancia por las gravitacionales; en estos flujos se tienen velocidades y pendientes bajas, pero las profundidades de lamina de agua, por el contrario, son mayores que las que se presentan en el flujo supercrítico. Para este tipo de flujo un aumento en la energía se traduce en un aumento en la profundidad de la lámina de agua. El número de Froude en este estado es menor a 1.

La velocidad inicial para la simulación numérica fue obtenida con el número de Froude y los datos experimentales del modelo a escala construido por el instituto de ingeniería de la UNAM, mediante el siguiente despeje:

$$Fr_m = Fr_p$$

$$v_m / \sqrt{gD_m} = v_p / \sqrt{gD_p}$$

$$v_m = v_p \sqrt{D_m / D_p}$$

donde se obtiene una velocidad inicial de 0.071 [m/s] y una profundidad hidráulica de 0.75 [m].

La configuración experimental consta de una entrada de agua de 6 [m] X .75 [m], en ambos metodos.

En el caso del método Cut-Cell se considera un flujo en estado permanente, uniforme, así como las condiciones de frontera:

$$\tau = 0$$

en la superficie libre y la condición de:

$$v = 0$$

en el fondo del rio.

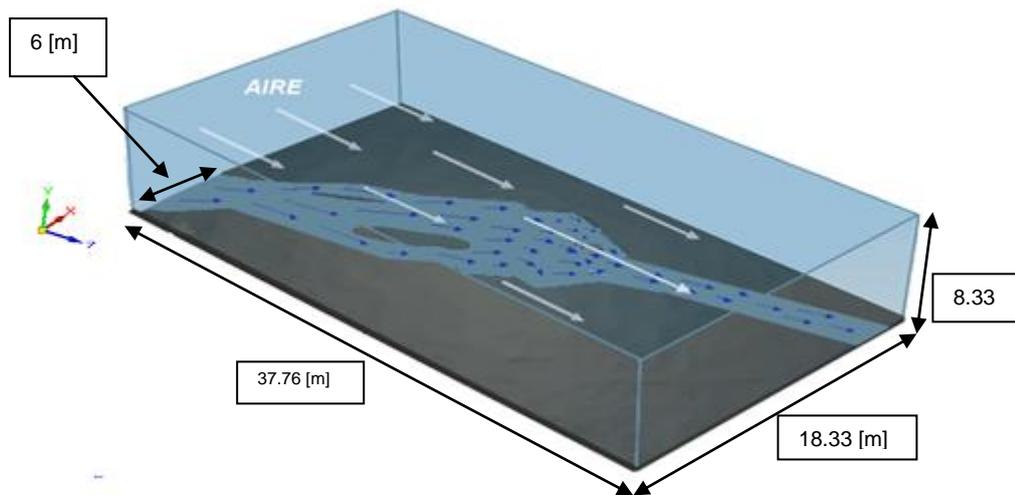


Figura 4.3. Representación esquemática de la Simulación

4.3 DETALLES NUMERICOS

La simulación se realiza en tres dimensiones en coordenadas cartesianas para ambos casos. La configuración mostrada en la figura 4.3 muestra las medidas de las simulaciones, así como la configuración. Como ya se mencionó, la intención de este trabajo es simular el comportamiento del Río Carrizal mediante los diferentes métodos de representación de la batimetría. En el método Body fitted coordinates, se incluye el Scalar Equation Method con la finalidad de representar la interacción existente entre los fluidos de la simulación.

A continuación se explicará la desratización que se ha utilizado para la simulación de ambos casos, mostrando las zonas de interés, así como la densidad de mallado para cada zona.

Antes de continuar cabe mencionar que en ambos modelos numéricos, la turbulencia se simula con el modelo de turbulencia $k-\varepsilon$. La descripción del sistema se captura en el archivo Q1, en el cual se incluyen las condiciones

iniciales y de frontera, así como las variables a resolver tales como la velocidad, la presión, la energía cinética turbulenta, además del sistema de discretización. El archivo Q1 es una interface entre el usuario y el código numérico PHOENICS.

4.3.1 DETALLES NUMERICOS MALLAS BFC

El dominio del cálculo se discretiza en el plano XY, XZ y YZ, la configuración se ilustran en las figuras 4.5, 4.6, 4.7 ; Debido a la dificultad que se presenta al tratar de representar los planos discretizados, se muestra todo el dominio y la respectiva desratización de cada plano.

El dominio completo de la desratización para las mallas BFC (body fitted coordinates) se presenta en la figura 4.4.

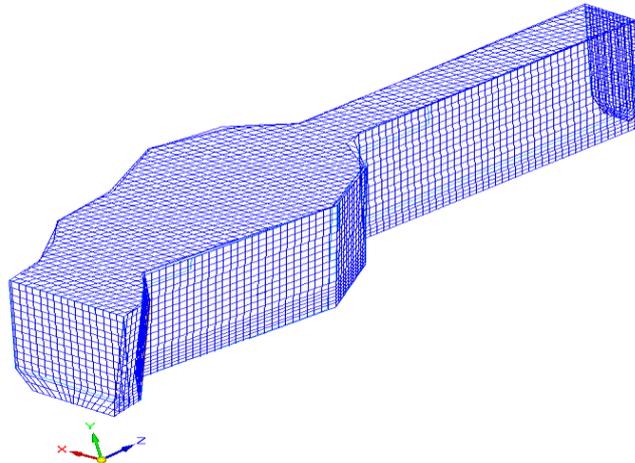


Figura 4.4 Representación esquemática de la discretización para las mallas BFC.

La figura 4.5 representa el mallado del plano XY, en la dirección X se tiene 50 celdas, en una sola región y 40 celdas en la dirección Y, dividida en dos subregiones, cada una con 20 celdas.

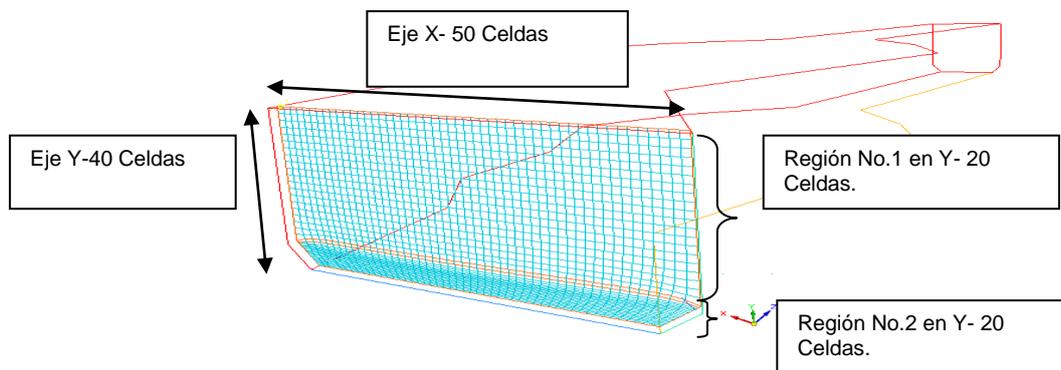


Figura 4.5 Representación esquemática de la discretización en el plano XY en las mallas BFC.

De esta manera, se tiene una distancia total de la región en la dirección X de la simulación de 6 [m] y de 8.33 [m] en el eje Y.

En el plano YZ, representado en la figura 4.6, se observan siete regiones que

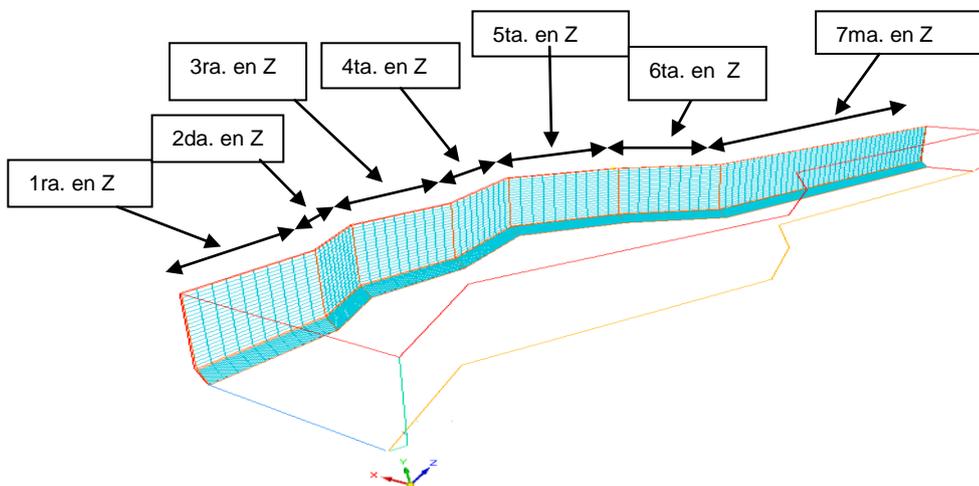


Figura 4.6 Representación esquemática de la discretización en el plano YZ en las mallas

en total suman una distancia total de 37.766 [m] en la dirección del eje Z, en este eje se tienen 100 celdas, las primeras 6 con 10 celdas por región y la última región con 40 celdas.

El mallado en el plano XZ se muestra en la figura 3.7, se puede observar la división en las siete regiones en el eje Z y la región en el eje X.

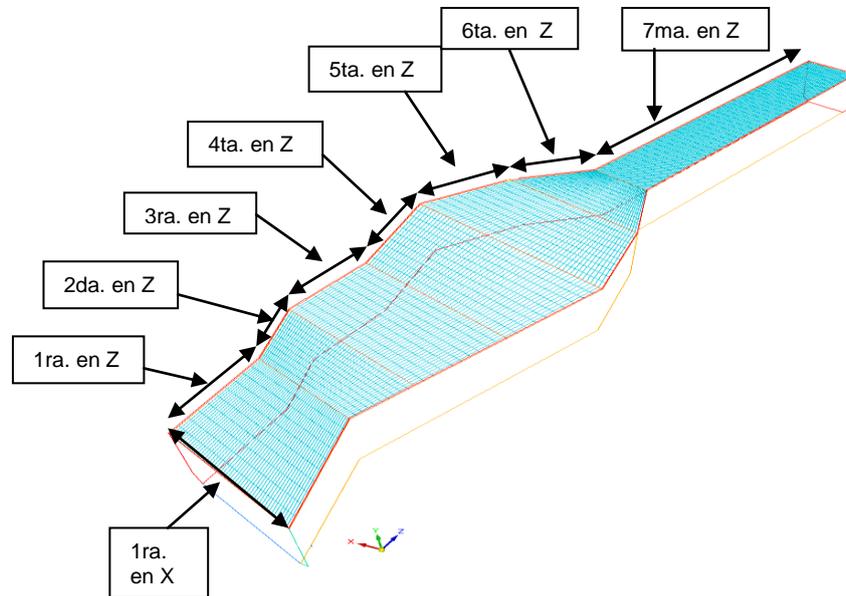


Figura 4.7 Representación esquemática de la discretización en el plano XZ en las mallas
De esta manera se tiene un mallado de 50X40X100 celdas en el dominio computacional de las mallas BFC.

Para las simulaciones en este método se considera un flujo en estado transitorio, se simula de igual manera la interacción entre el agua y el aire mediante el método escalar.

4.3.2 DETALLES NUMERICOS CUT CELL METHOD

Para simular el flujo en el río, también se utiliza la técnica de simulación CUT CELL presentada en el capítulo 3. Con esta técnica, el dominio de cálculo se discretiza en los planos XY, XZ y YZ, estas configuraciones se ilustran en la figuras 4.9, 4.10, 4.11. El dominio completo de la discretización para el método Cut-cell se presentan en la figura 4.8.

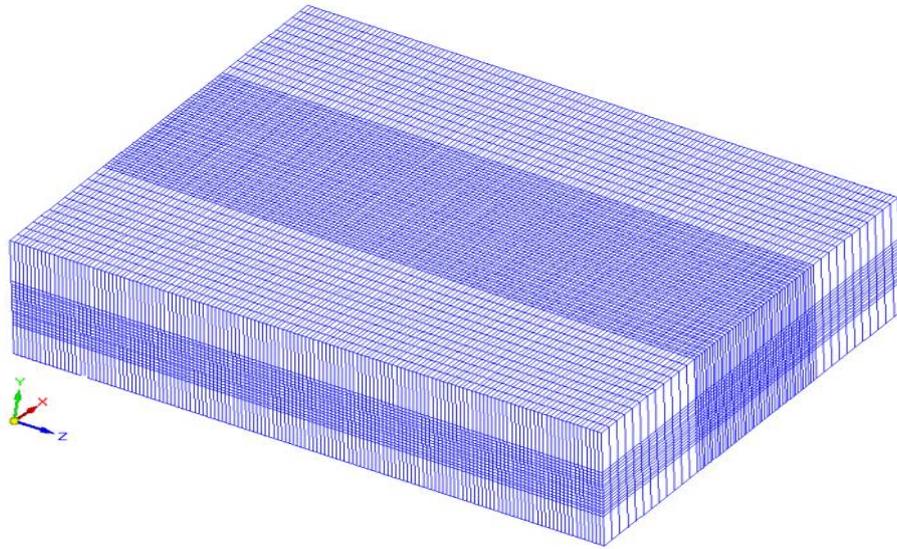


Figura 4.8 Representación esquemática de la discretización para el método Cut-Cell.

La figura 4.9 representa el mallado del plano XZ. El eje X se divide en 3 regiones. La primera región consta de 12 celdas, la segunda de 81 y la tercera de 12, para un total de 105 celdas. La figura 4.9 muestra la localización de estas regiones.

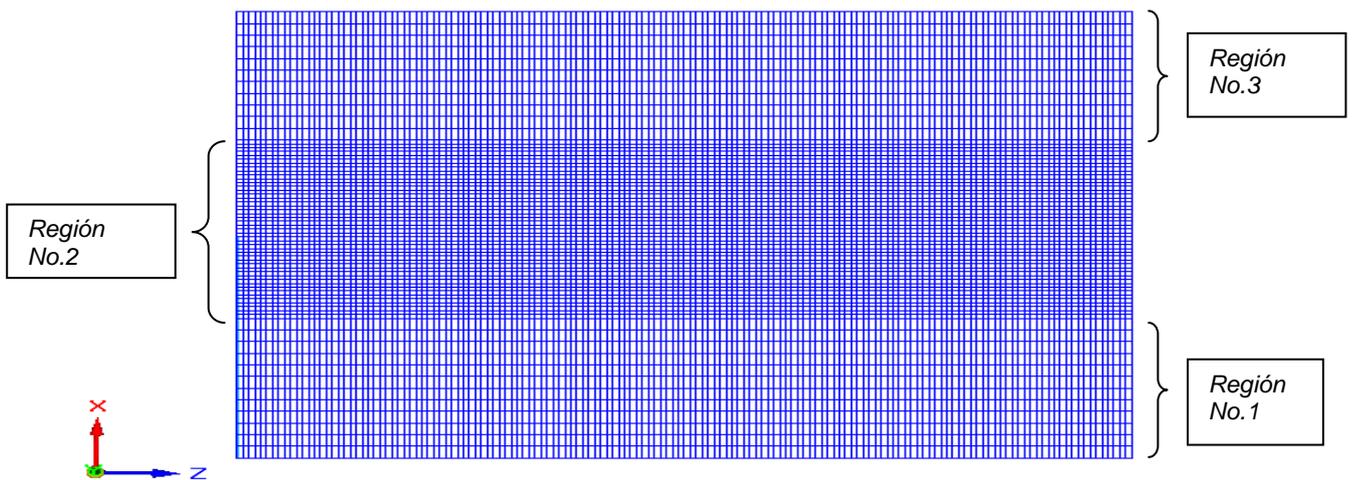


Figura 4.9 Representación esquemática de la discretización para el plano XZ.

La distancia total en la dirección X de la simulación de 18.33 [m]. La mayor densidad de celdas en el plano XZ se encuentra en la región número 2.

El eje Z divide en 1 región, con 150 celdas, esta es presentada en la figura 4.10.

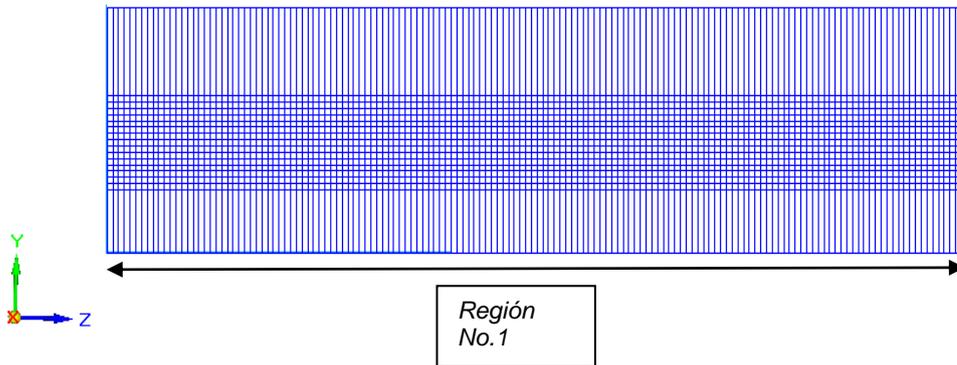


Figura 4.10 Representación esquemática de la discretización para el plano YZ.

La distancia total de la región en la dirección Z de 37.766 [m].

El mallado en el plano XY se muestra en la figura 4.11. El eje Y, se divide en 3 regiones. La primera región consta de 1 celda, la segunda de 14 y la tercera de 1, para un total de 16. La figura 3.11 muestra la localización de estas regiones

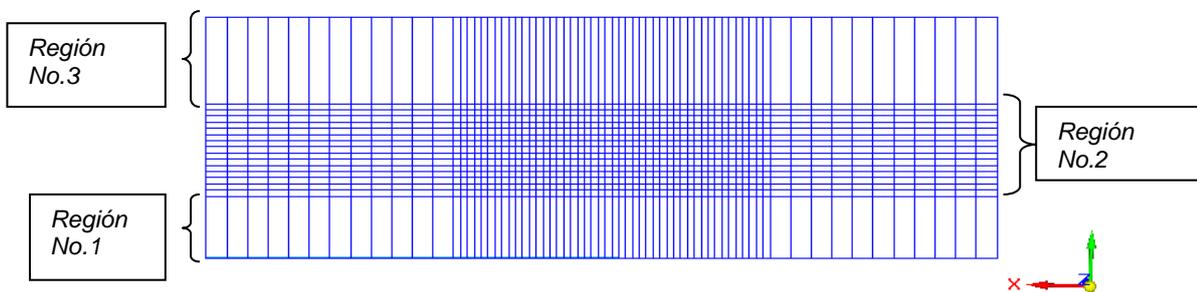


Figura 4.11 Representación esquemática de la discretización para el plano XY.

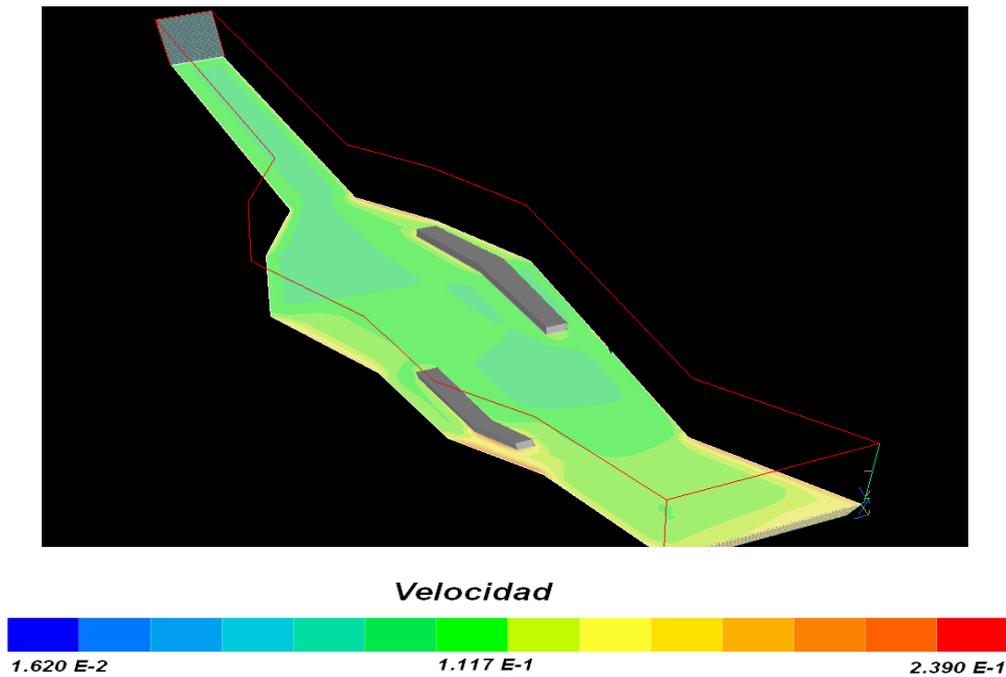


Figura 4.13 Campos de velocidad Body fitted Coordinates

Las figuras 4.14 y 4.15 muestran las zonas donde se encuentran los valores máximos de velocidad obtenidos para ambas simulaciones. Para el método Cut-Cell, esta zona es más grande, la razón de que el método de Body fitted coordinates no se aprecie de igual manera se debe a que la escala incluye la velocidad del aire.

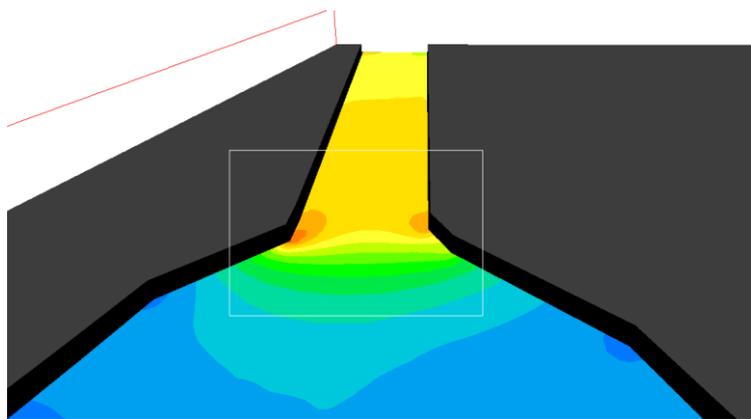


Figura 4.14 Zonas de máxima velocidad Cut-Cell. La velocidad que se alcanza en esta zona es de 0.2403 [m/s]

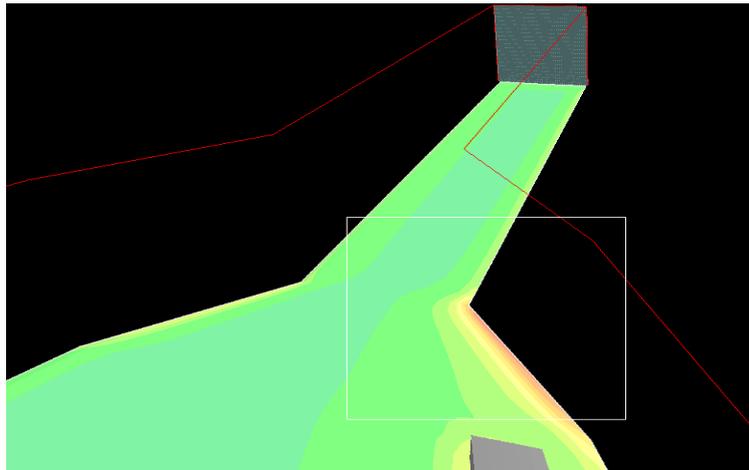
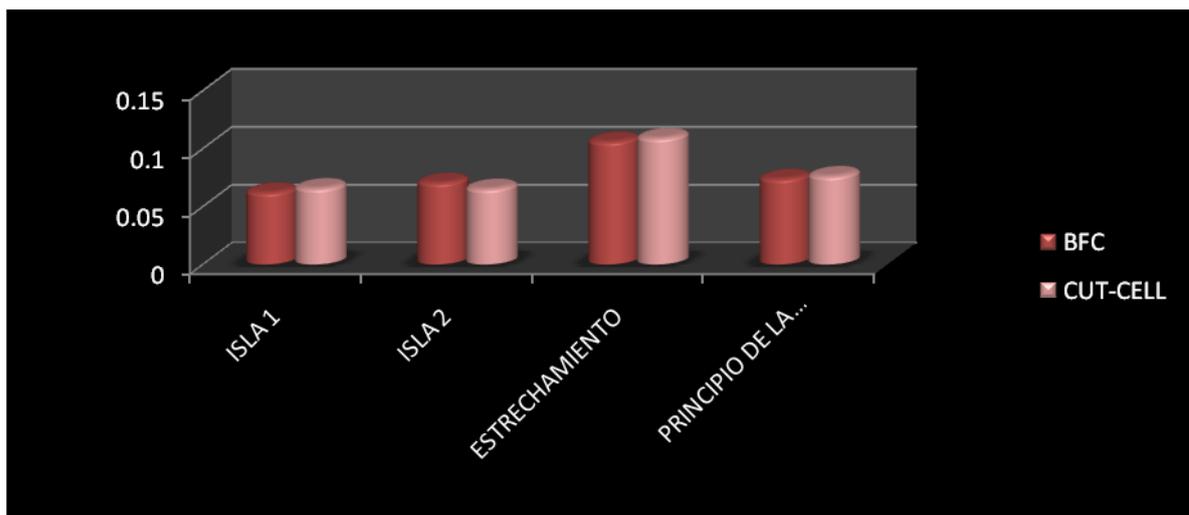


Figura 4.15 Zonas máxima velocidad método Body fitted coordinates .La velocidad que se alcanza en esta zona es de 0.239 [m/s]

En estas figuras se observa que al pasar esta zona disminuye la velocidad. En el método Cut-Cell, es más claro visualizar esta zona de menor velocidad; De igual manera, se puede observar en el método Body fitted coordinates, sin embargo, la información proporcionada por la simulación numérica es escasa, con respecto a la que nos ofrece el método Cut Cell, ya que este muestra ser más sensible a los cambios existentes a lo largo de la batimetría.



Grafica 4.1 Valores obtenidos en las simulaciones numéricas en determinados puntos de la batimetría

La grafica 4.1 muestra una comparación entre las velocidades obtenidas para ambos métodos en cuatro puntos estratégicos, estos son la zona cercana a la isla 1, la isla 2, la sección donde la sección transversal disminuye y el inicio de la simulación. Los porcentajes de variación entre ambos métodos se muestran en la siguiente tabla:

	BFC	CUT-CELL	%
ISLA 1	0.06211001	0.0657	5.78005059
ISLA 2	0.07047569	0.06526	7.40069377
ESTRECHAMIENTO	0.10601692	0.1091	2.90810184
PRINCIPIO DE LA BATIMETRÍA	0.07387102	0.07621	3.16630256

Como se observa los porcentajes de variación en los puntos estratégicos son menores al 10 %.

4.4.2 CAMPOS DE PRESIÓN

Las figuras 4.16 y 4.17 muestran las caídas de presión para ambos métodos, como se puede observar, esta zona es donde se estrecha el canal y el flujo se acelera. Es claro que el método Cut cell es mas sensible pues esta zona es mas amplia, además percibe variaciones mas pequeñas.

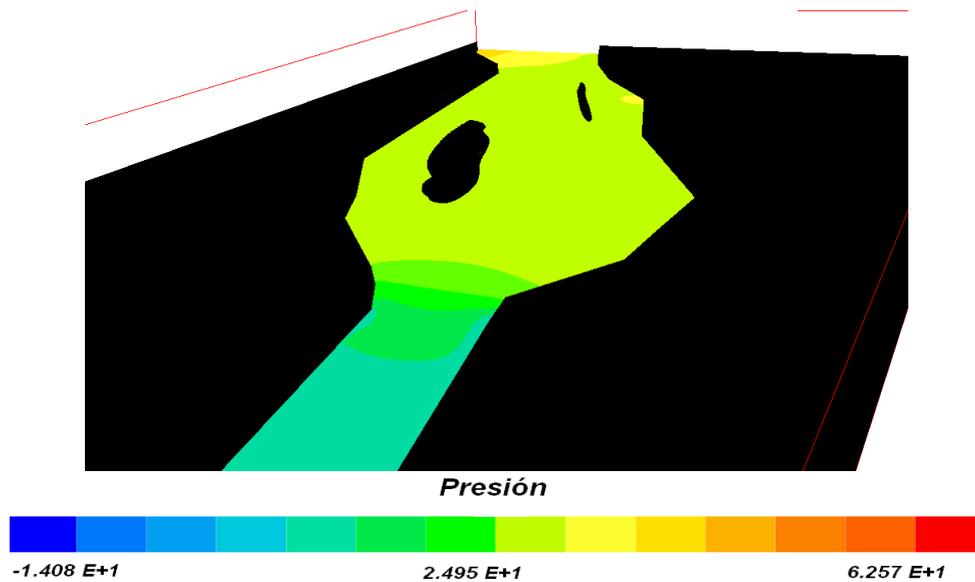


Figura 4.16 Zonas donde se aprecian las caídas de presión para el método Cut Cell



Figura 4.17 Zonas donde se aprecian las caídas de presión para el método Body Fitted Coordinates.

4.4.3 ENERGÍA CINÉTICA TURBULENTA

Como era de esperarse, la variación máxima de energía cinética turbulenta se presentaría en la zona donde el flujo se aceleraría, esto provocado por la variación en el área y el choque del flujo. La figura 4.18 muestra que efectivamente, en la simulación numérica realizada con el Cut-Cell method, la zona donde el flujo presenta una mayor aceleración es la misma zona donde el flujo presenta una mayor turbulencia.

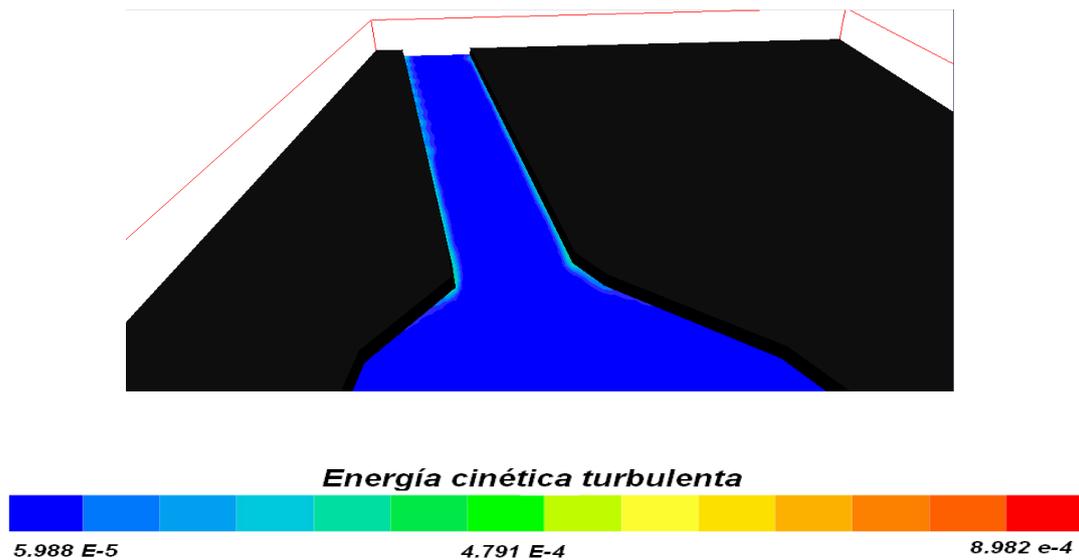


Figura 4.18 Zonas donde se aprecia la energía cinética turbulenta Cut-Cell Method.

En el método Body Fitted coordinates, aunque existe energía cinética turbulenta no se aprecia debido a la escala, pues este método incluye las escalas del aire.

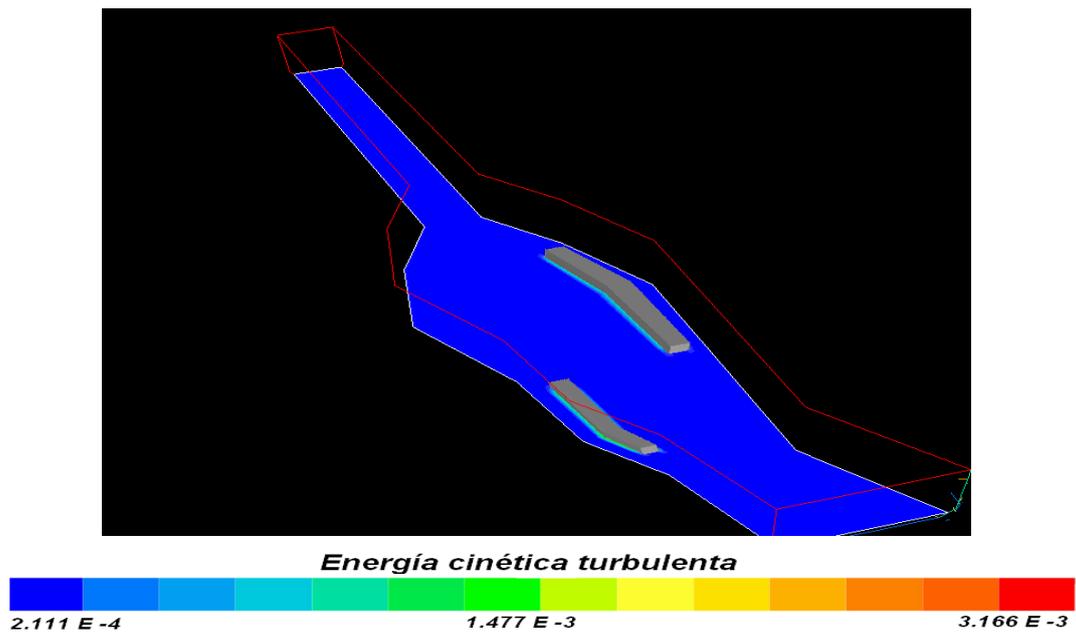


Figura 4.19 Zonas donde se aprecia la energía cinética turbulenta Body Fitted Coordinates.

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

5.1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo de tesis, se ha simulado el flujo de agua en el Río Carrizal, mediante los diferentes métodos de representación de la batimetría. Las simulaciones numéricas permiten obtener información cualitativa y cuantitativa del flujo en un río, con el fin de encontrar un método adecuado de representación.

El método utilizado en las simulaciones se basa en la resolución de las ecuaciones promediadas con el método de volúmenes finitos. Las ecuaciones que se resuelven son: continuidad y conservación de la cantidad de movimiento en términos de valores medios. El término de convección turbulenta resultante del promedio de la ecuación de transporte, se modela mediante modelo de turbulencia del tipo $k - \epsilon$. Los resultados obtenidos en ambas simulaciones son comparados y se observa las ventajas proporcionadas por los diferentes métodos.

Las alternativas a la generación de la batimetría, son las mallas BFC (Body Fitted Coordinates) o celdas cortadas (Cut-Cell Method).

Las Mallas BFC se ajustan al contorno del cuerpo, se caracterizan por la deformación del volumen de control hasta obtener la geometría deseada, sin embargo, la representación de la batimetría de un río se puede volver complicada. Adicional a lo anteriormente expuesto, la convergencia del método puede dificultarse por la adición de términos fuente debidos a la deformación de la celda o volumen.

En las Celdas cortadas, la malla computacional es cortada del entorno para conformar la geometría de interés. La ventaja que se tiene al usar esta técnica,

es que resulta una malla cartesiana con lo cual no se deforma la celda y se puede encontrar la convergencia más fácil.

5.2 FLUJO DEL RÍO

Las magnitudes de la velocidad se incrementan por la disminución en el área de la sección transversal. Se observa que justo esta zona es, para ambos métodos, donde se presenta la velocidad máxima. Esta velocidad máxima tiene una variación de 2.9 % entre ambos métodos; Sin embargo, el método Cut-Cell muestra más ampliamente lo ocurrido en la zona, que el método Body fitted coordinates.

La energía cinética turbulenta es, al igual que la velocidad, representada mejor en el método Cut-Cell, ya que esta aparece precisamente en la zona donde se esperaba, es decir la zona donde se reduce la sección transversal y el fluido se acelera. En el método Body Fitted coordinates, aunque existe energía cinética turbulenta no se aprecia debido a la escala, pues este método incluye las escalas del aire.

Se puede concluir que el método adecuado para la representación de la batimetría de un río, en el código numérico PHOENICS, es el método Cut-Cell, ya que ha demostrado ofrecer más y mejores resultados, que el método Body Fitted Coordinates. La dificultad para ofrecer resultados por el método BFC, se puede atribuir a que debido a la complejidad de la geometría, las celdas se deforman de tal manera que la convergencia es más difícil de alcanzar.

5.3 TRABAJOS FUTUROS

En este trabajo solo se ha considerado experimentar con la batimetría del río; sin embargo, el verdadero sentido de este trabajo es seleccionar uno de los métodos de representación de batimetría, para realizar simulaciones con

estructuras de control de flujo, así como simulaciones numéricas con secciones más grandes del río. Por lo que, el siguiente trabajo sería simular estas estructuras de geometría compleja, pero este trabajo ya se está haciendo en el Instituto de Ingeniería.

MODELOS DE TURBULENCIA

Introducción

En este apéndice se introducen, de forma concisa, algunos de los modelos que se pueden utilizar para representar el efecto de la turbulencia en el flujo del río simulado en esta tesis. Los modelos se clasifican en dos categorías:

- Modelos de tipo “difusividad turbulenta”, esencialmente variantes del método conocido como $k-\varepsilon$.
- Cierres de segundo orden, en la forma de modelos de transporte de los esfuerzos de Reynolds.

Reynolds, seguida por los cierres de segundo orden que constituyen el transporte de esfuerzos Reynolds utilizado en este trabajo. A continuación se presenta el modelo de turbulencia $k-\varepsilon$ estándar, que es el modelo utilizado en esta tesis.

A-1 Cierres de Segundo Orden

La ecuación de transporte exacta para los esfuerzos de Reynolds $\overline{u_i'' u_j''}$ es [18]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i'' u_j''} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_k u_i'' u_j''} = - \underbrace{\left(\overline{u_i'' \frac{\partial p'}{\partial x_j} + u_j'' \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \right)}_{(a)}$$

$$- \underbrace{\left(\overline{u_i'' \frac{\partial p'}{\partial x_j} + u_j'' \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \right)}_{(b)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i'' u_j'' u_k''}}_{(c)}$$

$$-\rho \underbrace{\left(\overline{u_i'' u_k''} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u_j'' u_k''} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right)}_{(d)}$$

$$-\underbrace{\left(\overline{\tau_{ik}} \frac{\partial u_j''}{\partial x_k} + \overline{\tau_{ik}} \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \right)}_{(e)}$$

(A.1)

Los términos del lado derecho de la ecuación (A.1) representan: El efecto del gradiente de presión media (a) , la correlación entre gradientes de presión fluctuante y fluctuaciones de velocidad (b), el transporte turbulento de los esfuerzos de Reynolds (c), la producción de los esfuerzos de Reynolds por velocidad de deformación media(d), y la disipación viscosa (e). De los términos anteriores, en (a), (b), (c), y (e) están presentes correlaciones desconocidas, y por tanto requieren modelización.

Si se hace uso de la definición (2.5) del capítulo 2, el término que expresa el efecto del gradiente de presión media (a), se puede escribir como:

$$-\left(\overline{u_i''} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \overline{u_j''} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \right) = \frac{\overline{\rho' u_j''}}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\overline{\rho' u_i''}}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \tag{A.2}$$

La correlación $\overline{\rho' u_j''}$ se puede modelar de una ecuación de conservación truncada como ([18]):

$$\overline{\rho' u_j''} = -\frac{1}{4.3} \frac{\tilde{k}}{\epsilon} \overline{u_i'' u_j''} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \tag{A.3}$$

donde $k = 1/2 \overline{u_i'' u_i''}$ es la energía cinética turbulenta y ε es su tasa de disipación. La contribución de este término es muy pequeña y frecuentemente se desprecia ([19] y [20]).

Con fines de modelización, la correlación entre gradientes de presión fluctuante y fluctuaciones de velocidad, (b), frecuentemente se divide en una parte redistributiva y una parte isótropa [21]:

$$\left(\overline{u_i'' \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{u_j'' \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \right) = - \left(\overline{u_i'' \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{u_j'' \frac{\partial p'}{\partial x_i}} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{u_k'' \frac{\partial p'}{\partial x_k}} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{u_k'' \frac{\partial p'}{\partial x_k}} \quad (\text{A.4})$$

La parte isótropa se divide en dos términos, uno de transporte por presión y otro de dilatación por presión:

$$-\frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{u_k'' \frac{\partial p'}{\partial x_k}} = \underbrace{-\frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_k} u_k''}}_{(I)} + \underbrace{-\frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{p' \frac{\partial u_k''}{\partial x_k}}}_{(II)} \quad (\text{A.5})$$

En flujos de baja velocidad $Ma \ll 1$, el término (II) de la ecuación (A.5) generalmente se desprecia [22]. El término (I) se suma al término de transporte turbulento de los esfuerzos de Reynolds © para formar el término:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{C_{ijk}} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{p' u_k''} \right) \quad (\text{A.6})$$

El término $\overline{C_{ijk}}$ se modela mediante un cierre de tipo gradiente [23]:

$$C_{ijk} = -C_s \frac{\tilde{k}}{\varepsilon} u_k'' u_i'' \frac{\partial u_i'' u_j''}{\partial x_l} \quad (\text{A.7})$$

El término \odot es la correlación de la disipación viscosa:

$$\overline{\tau_{ik} \frac{\partial u_j''}{\partial x_k}} + \overline{\tau_{ik} \frac{\partial u_i''}{\partial x_k}} = \overline{\rho} \varepsilon_{ij} \quad (\text{A.8})$$

Si se supone isotropía local, el término ε_{ij} se puede escribir en función de la disipación de energía cinética turbulenta ε como [22]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (\text{A.9})$$

La tasa de disipación de la energía cinética turbulenta, $\tilde{\varepsilon}$, se calcula de la siguiente ecuación de transporte, deducida por procedimientos similares a los utilizados en el caso de densidad constante [22]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho \tilde{\varepsilon}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\rho \tilde{\varepsilon} u_j} = & \underbrace{-C_{\varepsilon 1} \bar{\rho} \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{k}} u_k'' u_j'' \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j}}_{(A)} - \underbrace{C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\tilde{k}}}_{(B)} + \underbrace{C_{\varepsilon 3} \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{k}} \frac{\overline{\rho' u_j''}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}}_{(C)} \\ & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{\varepsilon} \bar{\rho} \frac{\tilde{k}}{\tilde{\varepsilon}} u_j'' u_k'' \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right)}_{(D)} \end{aligned} \quad (A.10)$$

donde, de acuerdo con lo expuesto anteriormente, el término © se desprecia.

La parte redistributiva de la correlación entre gradientes de presión fluctuante y fluctuaciones de velocidad, expresión (A.4), usualmente se divide en dos partes: una que incluye cantidades turbulentas, y otra que incluye la tasa de deformación media.

Modelos para este término se han propuesto por ejemplo por Launder et al [7] (modelo ML), Gibson y Younis [24] (modelo MG) y Musonge [25] (modelo MJ).

Denotando al término redistributivo como Π_{ij} , los modelos se escriben como:

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} = & -C_1 \bar{\rho} \tilde{\varepsilon} \left(\frac{u_i'' u_j''}{\tilde{k}} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) + C_2 \delta_{ij} \bar{\rho} u_l'' u_m'' \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m} - C_3 \bar{\rho} P_{ij} + C_4 \bar{\rho} \tilde{k} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ & - \frac{2}{3} C_4 \bar{\rho} \tilde{k} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - \left(\frac{2}{3} C_2 + C_3 \right) \left(\bar{\rho} u_l'' u_j'' \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_i} + \bar{\rho} u_l'' u_i'' \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (A.11)$$

donde $P_{ij} = -\rho \left(u_i'' u_k'' \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} + u_j'' u_k'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \right)$.

Las constantes de las ecuaciones (A.7), (A.10), y (A.11) se presentan en la tabla 1.

Sustituyendo las ecuaciones (A.6), (A.9) y (A.11) en la ecuación de los esfuerzos de Reynolds (A.1) se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho u_i'' u_j'' \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho \tilde{u}_k u_i'' u_j'' \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_{ijk} \right) \rho \left(u_i'' u_k'' \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} + u_j'' u_k'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \rho \varepsilon \delta_{ij} + \Pi_{ij} \tag{A.12}$$

Modelo	MG	ML	MJ
C _{ε1}	1.4	1.44	1.40
C _{ε2}	1.8	1.90	1.90
C _{ε3}	0.15	0.15	0.18
C _{ε4}	0.22	0.21	0.22
C ₁	3	1.50	3.00
C ₂	0.3	-0.582	-0.44
C ₃	-	0.764	0.46
C ₄	-	-0.182	-0.23

Tabla 1: Constantes de las ecuaciones (A.7), (A.10) y (A.11).

A-2 Modelos de Viscosidad Turbulenta

Un método alternativo para determinar los esfuerzos de Reynolds $u_i'' u_j''$, son los modelos basados en el concepto de viscosidad turbulenta, que suponen que, de la misma manera que en flujo laminar los esfuerzos viscosos son proporcionales al gradiente de la velocidad, en un flujo turbulento los esfuerzos causados por las fluctuaciones turbulentas son proporcionales al gradiente de la velocidad media. Esta relación entre los esfuerzos de Reynolds y las variables medias es:

$$\rho u_i'' u_j'' = -\bar{\rho} \nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \left(\bar{\rho} \tilde{k} + \bar{\rho} \nu_T \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \tag{A.13}$$

donde $\nu_T \leftarrow \mu_T / \bar{\rho}$ es la viscosidad turbulenta. A diferencia de la viscosidad molecular $\nu = \mu / \rho$, ν_T no es una propiedad del fluido, sino una característica del estado del flujo, y puede variar significativamente de un punto a otro dentro del mismo flujo.

Para el flujo turbulento de escalar, el concepto de viscosidad turbulenta (o, propiamente, de difusividad turbulenta se expresa como:

$$\rho u_i'' u_\alpha'' = -\bar{\rho} \frac{\nu_T}{S_{c_T}} \frac{\partial \bar{\phi}_\alpha}{\partial x_i} \tag{A.14}$$

donde S_{c_T} es el número de Schmidt/Prandtl turbulento.

La viscosidad turbulenta ν_T puede calcularse de diferentes formas, dando lugar a una variedad de modelos con un número de variable de ecuaciones diferenciales. Los más populares de estos modelos son, probablemente, los de

la familia del modelo $k - \varepsilon$. Las variantes utilizadas en este trabajo se presentan a continuación.

A-3 Modelo K- ε

En este modelo, ν_T se define como:

$$\nu_T = C_\mu \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{\varepsilon}} \tag{A.15}$$

Donde C_μ es una constante determinada experimentalmente. Los valores de \tilde{k} y $\tilde{\varepsilon}$ se calculan a través de la ecuaciones de transporte.

La ecuación para la energía cinética turbulenta, \tilde{k} se obtiene de la ecuación (A.1), haciendo $i = j$, aplicando la hipótesis de isotropía local, y dividiendo entre dos:

$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \frac{\partial (\tilde{u}_j \tilde{k})}{\partial x_j} + \rho \overline{u_i'' u_j''} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''} \right)}_{(a)} - \rho \tilde{\varepsilon} \tag{A.16}$$

Los esfuerzos de Reynolds $\overline{u_i'' u_j''}$ se expresan de acuerdo con la ecuación (A.13).

El término (a) se aproxima como:

$$-\left(\frac{1}{2}\overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''}\right) \approx \frac{\mu_T}{\sigma_k} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \quad (\text{A.17})$$

Sustituyendo las expresiones (A.13) y (A.17) en la ecuación (A.18), se obtiene:

$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_j \tilde{k}) = \bar{\rho} (P_k - \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho} \frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) \quad (\text{A.18})$$

donde:

$$P_k = \nu_T \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{2}{3} \left(\tilde{k} + \nu_T \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \quad (\text{A.19})$$

Aplicando hipótesis similares a las utilizadas para la ecuación de \tilde{k} (A.18), la ecuación para la disipación de la energía cinética turbulenta, $\tilde{\varepsilon}$, se obtiene a partir de la ecuación (A.10):

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_j \tilde{\varepsilon}) = \bar{\rho} \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{k}} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \tilde{\varepsilon}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho} \frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right) \quad (\text{A.20})$$

Las constantes de las ecuaciones (A.18) y (A.20) se muestran en la tabla 2.

C_μ	σ_k	σ_ε	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$
0.09	1.0	1.314	1.44	1.92

Tabla 2: Constantes del modelo $k-\varepsilon$ estándar.

El modelo $k-\varepsilon$ tal y como ha sido presentado se comporta satisfactoriamente en flujos sencillos, normalmente flujos parabólicos para los que el modelo fue desarrollado en los años 70's. En flujos más complejos, incluyendo aquellos con rotación o con curvatura apreciable en las líneas de corriente (como los investigados en esta tesis), las hipótesis de isotropía en las que se basa el modelo no son aplicables, y las predicciones proporcionadas por el modelo son, en general, menos satisfactorias. La popularidad de este tipo de modelos, en la que sin duda juega un papel importante su sencillez y economía, ha dado lugar a una serie de modificaciones, o variantes, que intentan paliar estas deficiencias sin tener que abandonar la hipótesis de viscosidad turbulenta a favor de cierres de segundo orden.

ESQUEMAS DE DISCRETIZACIÓN

Introducción

En este apéndice se presentan los esquemas lineales que se usan en la discretización de término convectivo de la ecuación general (2.1) introducida en el capítulo 2.

En la formulación de la ecuación discretizada (2.2), se requiere conocer la densidad ρ y la variable escalar, ϕ , en la cara de la celda. Estas variables se calculan en el nodo de la celda, por lo que es necesario interpolar entre celdas para conocer su valor en la cara. Este cálculo de ϕ y ρ en la cara de la celda da lugar a los llamados esquemas de discretización. La determinación de los valores de estas variables en la cara es importante para la precisión y convergencia de la solución numérica.

A continuación, se presentan los esquemas de discretización lineales que se usan en esta tesis. Estos esquemas se describirán en base al sistema de celdas que se ilustra en la figura 1. Como ejemplo, se obtendrá el valor de ϕ en la cara e de la celda P. La velocidad en la cara e se considerará, sin pérdida de generalidad, positiva ($u_e > 0$).

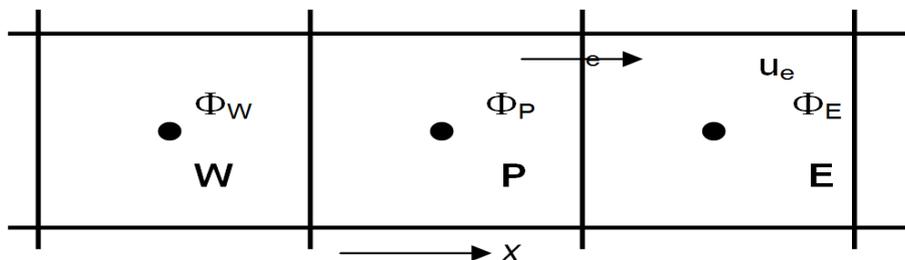


Figura 1. Diagrama esquemático de celdas.

B-1 Esquemas Lineales

B.1.1 Diferencias desplazadas de primer orden

Con este esquema se supone que el valor de la variable ϕ en la cara e es igual al nodo adyacente aguas arriba, es decir, para $u_e > 0$ [29]:

$$\phi_e = \phi_P \quad (B.1)$$

Esta alternativa es de implementación sencilla, acotada y altamente estable casi bajo cualquier situación pero tiene los inconvenientes de su precisión, que es de primer orden y de presentar problemas de difusión numérica. Esta falsa difusión es mayor si en el flujo no hay una alineación en la dirección de la dirección del flujo y las líneas de malla, como por ejemplo en flujos de recirculación.

B.1.2 Diferencias Centradas

Este esquema supone la variación lineal de ϕ entre los nodos P y E; por tanto, el valor de la cara e es:

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \quad (B.2)$$

Este esquema tiene una precisión de segundo orden pero tiene el inconveniente de no estar acotado, por lo que puede presentar inestabilidades numéricas. El límite de estabilidad de este esquema viene dado en función del

número de Peclet (ecuación 3.3 del capítulo 3), que es un parámetro comparativo entre los procesos convectivo y difusivo.

Para situaciones en que los procesos convectivos dominan sobre los difusivos ($Pe > 2$), por ejemplos flujos con número de Reynolds altos, el esquema presenta oscilaciones numéricas.

B.1.3 Híbrido

Este esquema fue introducido por Spalding [30] y consiste en combinar los esquemas de diferencias desplazadas y centradas para calcular el valor de la propiedad ϕ en la cara del volumen de control. La selección del esquema se hace en función del número de Peclet de la celda:

- Si $Pe \leq 2$, se usan diferencias centradas:

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \quad (B.3)$$

- Si $Pe > 2$, se usan diferencias desplazadas:

$$\phi_e = \phi_P, \quad Pe > 2 \quad (B.4)$$

Para flujos con bajo número de Reynolds/Peclet el esquema utilizando es el de diferencias centradas, y por tanto resulta de orden 2; sin embargo, el esquema presenta problemas asociados al esquema de diferencias desplazadas cuando el flujo esta denominado por los procesos de convección $Pe > 2$.

Los esquemas lineales de alto orden presentan una buena precisión, pero no están acotados, por lo que pueden presentar oscilaciones numéricas. Su uso no es recomendado en el cálculo de cantidades que no aceptan valores negativos, o en general de cantidades acotadas (tales como concentraciones), pues la oscilaciones introducidas por el modelo pueden sacar al escalar de su dominio de definición.

C-1 Archivo de datos de entrada Q1

El archivo Q1 contiene los datos de las condiciones de frontera para la simulación numérica.

A continuación, se presenta el archivo Q1, escrito en el lenguaje de entrada del programa Phoenix, PIL (Phoenix Input Language).

C-2 Q1 BFC (body fitted coordinates)

TALK=T;RUN(1, 1)

```

*****
Q1 created by VDI menu, Version 3.5, Date 05/06/03
CPVNAM=VDI;SPPNAM=Core
*****
IRUNN = 1 ;LIBREF = 0
*****
Group 1. Run Title
TEXT(primer caso )
*****
Group 2. Transience
STEADY=F
* Set overall time and no. of steps
TLAST = GRND
LSTEP = 9000
*****
Groups 3, 4, 5 Grid Information
* Overall number of cells, RSET(M,NX,NY,NZ,tolerance)
RSET(M,50,40,100)
* Set overall domain extent:
* xulast yulast zulast
name
* Set overall domain extent:
* xulast yulast zulast
name
XSI= 6.00000E+00; YSI= 8.33000E+00; ZSI= 3.776600E+01
RSET(D,CHAM )
* Set objects: x0 y0 z0
* dx dy dz
name
XPO= 0.000000E+00; YPO= 0.000000E+00; ZPO= 0.000000E+00
XSI= 1.100000E+03; YSI= 4.250000E+01; ZSI= 2.266000E+03
RSET(B,WATER )
XPO= 0.000000E+00; YPO= 0.000000E+00; ZPO= 0.000000E+00
XSI= 1.100000E+03; YSI= 4.250000E+01; ZSI= 0.000000E+00
RSET(B,IN )
XPO= 0.000000E+00; YPO= 0.000000E+00; ZPO= 2.266000E+03
XSI= 1.100000E+03; YSI= 1.000000E+02; ZSI= 0.000000E+00
RSET(B,SALIDA1 )
XPO= 0.000000E+00; YPO= 1.000000E+02; ZPO= 0.000000E+00
XSI= 1.100000E+03; YSI= 0.000000E+00; ZSI= 2.266000E+03
RSET(B,SUP )
XPO= 0.000000E+00; YPO= 4.250000E+01; ZPO= 0.000000E+00

```

```

XSI= 0.000000E+00; YSI= 5.750000E+01; ZSI= 2.266000E+03
RSET(B,EAST )
XPO= 1.100000E+03; YPO= 4.250000E+01; ZPO= 0.000000E+00
XSI= 0.000000E+00; YSI= 5.750000E+01; ZSI= 2.266000E+03
RSET(B,WEST )
XPO= 0.000000E+00; YPO= 4.250000E+01; ZPO= 0.000000E+00
XSI= 1.100000E+03; YSI= 5.750000E+01; ZSI= 0.000000E+00
RSET(B,LOW )
XPO= 1.100000E+02; YPO= 0.000000E+00; ZPO= 6.798000E+02
XSI= 1.100000E+02; YSI= 5.500000E+01; ZSI= 4.078799E+02
RSET(B,ISLA1 )
XPO= 8.579999E+02; YPO= 0.000000E+00; ZPO= 3.399000E+02
XSI= 1.100001E+02; YSI= 5.500000E+01; ZSI= 2.945800E+02
RSET(B,ISLA2 )
*****

```

Group 6. Body-Fitted coordinates

BFC=T

READCO(mbgr1)

* Set points

```

XPO= 0.000000E+00; YPO= 2.000000E+02; ZPO= 0.000000E+00; GSET(P,PA1 )
XPO= 0.000000E+00; YPO= 4.000000E+01; ZPO= 0.000000E+00; GSET(P,PA2 )
XPO= 3.000000E+01; YPO= 1.350000E+01; ZPO= 0.000000E+00; GSET(P,PA3 )
XPO= 3.400000E+02; YPO= 1.350000E+01; ZPO= 0.000000E+00; GSET(P,PA4 )
XPO= 3.630000E+02; YPO= 4.000000E+01; ZPO= 0.000000E+00; GSET(P,PA5 )
XPO= 3.630000E+02; YPO= 2.000000E+02; ZPO= 0.000000E+00; GSET(P,PA6 )
XPO= 2.180000E+02; YPO= 2.000000E+02; ZPO= 2.370000E+02; GSET(P,PB1 )
XPO= 2.180000E+02; YPO= 4.000000E+01; ZPO= 2.370000E+02; GSET(P,PB2 )
XPO= 2.380000E+02; YPO= 1.350000E+01; ZPO= 2.370000E+02; GSET(P,PB3 )
XPO= 4.750000E+02; YPO= 1.350000E+01; ZPO= 2.370000E+02; GSET(P,PB4 )
XPO= 5.030000E+02; YPO= 4.000000E+01; ZPO= 2.370000E+02; GSET(P,PB5 )
XPO= 5.030000E+02; YPO= 2.000000E+02; ZPO= 2.370000E+02; GSET(P,PB6 )
XPO= 2.450000E+02; YPO= 2.000000E+02; ZPO= 3.790000E+02; GSET(P,PC1 )
XPO= 2.450000E+02; YPO= 4.000000E+01; ZPO= 3.790000E+02; GSET(P,PC2 )
XPO= 2.650000E+02; YPO= 1.350000E+01; ZPO= 3.790000E+02; GSET(P,PC3 )
XPO= 6.170000E+02; YPO= 1.350000E+01; ZPO= 3.790000E+02; GSET(P,PC4 )
XPO= 6.450000E+02; YPO= 4.000000E+01; ZPO= 3.790000E+02; GSET(P,PC5 )
XPO= 6.450000E+02; YPO= 2.000000E+02; ZPO= 3.790000E+02; GSET(P,PC6 )
XPO= 2.870000E+02; YPO= 2.000000E+02; ZPO= 6.020000E+02; GSET(P,PD1 )
XPO= 2.870000E+02; YPO= 4.000000E+01; ZPO= 6.020000E+02; GSET(P,PD2 )
XPO= 3.070000E+02; YPO= 1.350000E+01; ZPO= 6.020000E+02; GSET(P,PD3 )
XPO= 7.130000E+02; YPO= 1.350000E+01; ZPO= 6.020000E+02; GSET(P,PD4 )
XPO= 7.350000E+02; YPO= 4.000000E+01; ZPO= 6.020000E+02; GSET(P,PD5 )
XPO= 7.350000E+02; YPO= 2.000000E+02; ZPO= 6.020000E+02; GSET(P,PD6 )
XPO= 3.370000E+02; YPO= 2.000000E+02; ZPO= 8.630000E+02; GSET(P,PE1 )
XPO= 3.370000E+02; YPO= 4.000000E+01; ZPO= 8.630000E+02; GSET(P,PE2 )
XPO= 3.570000E+02; YPO= 1.350000E+01; ZPO= 8.630000E+02; GSET(P,PE3 )
XPO= 9.070000E+02; YPO= 1.350000E+01; ZPO= 8.630000E+02; GSET(P,PE4 )
XPO= 9.300000E+02; YPO= 4.000000E+01; ZPO= 8.630000E+02; GSET(P,PE5 )
XPO= 9.300000E+02; YPO= 2.000000E+02; ZPO= 8.630000E+02; GSET(P,PE6 )
XPO= 5.020000E+02; YPO= 2.000000E+02; ZPO= 1.097000E+03; GSET(P,PF1 )
XPO= 5.020000E+02; YPO= 4.000000E+01; ZPO= 1.097000E+03; GSET(P,PF2 )
XPO= 5.250000E+02; YPO= 1.350000E+01; ZPO= 1.097000E+03; GSET(P,PF3 )
XPO= 8.980000E+02; YPO= 1.350000E+01; ZPO= 1.097000E+03; GSET(P,PF4 )
XPO= 9.200000E+02; YPO= 4.000000E+01; ZPO= 1.097000E+03; GSET(P,PF5 )
XPO= 9.200000E+02; YPO= 2.000000E+02; ZPO= 1.097000E+03; GSET(P,PF6 )
XPO= 6.710000E+02; YPO= 2.000000E+02; ZPO= 1.274000E+03; GSET(P,PG1 )
XPO= 6.710000E+02; YPO= 4.000000E+01; ZPO= 1.274000E+03; GSET(P,PG2 )
XPO= 6.990000E+02; YPO= 1.350000E+01; ZPO= 1.274000E+03; GSET(P,PG3 )
XPO= 8.230000E+02; YPO= 1.350000E+01; ZPO= 1.274000E+03; GSET(P,PG4 )
XPO= 8.440000E+02; YPO= 4.000000E+01; ZPO= 1.274000E+03; GSET(P,PG5 )
XPO= 8.440000E+02; YPO= 2.000000E+02; ZPO= 1.274000E+03; GSET(P,PG6 )
XPO= 9.520000E+02; YPO= 2.000000E+02; ZPO= 2.266000E+03; GSET(P,PH1 )
XPO= 9.520000E+02; YPO= 4.000000E+01; ZPO= 2.266000E+03; GSET(P,PH2 )
XPO= 9.720000E+02; YPO= 1.350000E+01; ZPO= 2.266000E+03; GSET(P,PH3 )
XPO= 1.100000E+03; YPO= 1.350000E+01; ZPO= 2.266000E+03; GSET(P,PH4 )
XPO= 1.121000E+03; YPO= 4.000000E+01; ZPO= 2.266000E+03; GSET(P,PH5 )

```

XPO= 1.121000E+03;YPO= 2.000000E+02;ZPO= 2.266000E+03;GSET(P,PH6)

* Set lines/arcs

GSET(L,LA1,PA1,PA2,20,1.0)
 GSET(L,LA2,PA2,PA3,20,1.0)
 GSET(L,LA3,PA3,PA4,50,1.0)
 GSET(L,LA4,PA4,PA5,20,1.0)
 GSET(L,LA5,PA5,PA6,20,1.0)
 GSET(L,LA6,PA6,PA1,50,1.0)
 GSET(L,LB1,PB1,PB2,20,1.0)
 GSET(L,LB2,PB2,PB3,20,1.0)
 GSET(L,LB3,PB3,PB4,50,1.0)
 GSET(L,LB4,PB4,PB5,20,1.0)
 GSET(L,LB5,PB5,PB6,20,1.0)
 GSET(L,LB6,PB6,PB1,50,1.0)
 GSET(L,LC1,PC1,PC2,20,1.0)
 GSET(L,LC2,PC2,PC3,20,1.0)
 GSET(L,LC3,PC3,PC4,50,1.0)
 GSET(L,LC4,PC4,PC5,20,1.0)
 GSET(L,LC5,PC5,PC6,20,1.0)
 GSET(L,LC6,PC6,PC1,50,1.0)
 GSET(L,LD1,PD1,PD2,20,1.0)
 GSET(L,LD2,PD2,PD3,20,1.0)
 GSET(L,LD3,PD3,PD4,50,1.0)
 GSET(L,LD4,PD4,PD5,20,1.0)
 GSET(L,LD5,PD5,PD6,20,1.0)
 GSET(L,LD6,PD6,PD1,50,1.0)
 GSET(L,LE1,PE1,PE2,20,1.0)
 GSET(L,LE2,PE2,PE3,20,1.0)
 GSET(L,LE3,PE3,PE4,50,1.0)
 GSET(L,LE4,PE4,PE5,20,1.0)
 GSET(L,LE5,PE5,PE6,20,1.0)
 GSET(L,LE6,PE6,PE1,50,1.0)
 GSET(L,LF1,PF1,PF2,20,1.0)
 GSET(L,LF2,PF2,PF3,20,1.0)
 GSET(L,LF3,PF3,PF4,50,1.0)
 GSET(L,LF4,PF4,PF5,20,1.0)
 GSET(L,LF5,PF5,PF6,20,1.0)
 GSET(L,LF6,PF6,PF1,50,1.0)
 GSET(L,LG1,PG1,PG2,20,1.0)
 GSET(L,LG2,PG2,PG3,20,1.0)
 GSET(L,LG3,PG3,PG4,50,1.0)
 GSET(L,LG4,PG4,PG5,20,1.0)
 GSET(L,LG5,PG5,PG6,20,1.0)
 GSET(L,LG6,PG6,PG1,50,1.0)
 GSET(L,LH1,PH1,PH2,20,1.0)
 GSET(L,LH2,PH2,PH3,20,1.0)
 GSET(L,LH3,PH3,PH4,50,1.0)
 GSET(L,LH4,PH4,PH5,20,1.0)
 GSET(L,LH5,PH5,PH6,20,1.0)
 GSET(L,LH6,PH6,PH1,50,1.0)
 GSET(L,L1A,PA1,PB1,10,1.0)
 GSET(L,L1B,PB1,PC1,10,1.0)
 GSET(L,L1C,PC1,PD1,10,1.0)
 GSET(L,L1D,PD1,PE1,10,1.0)
 GSET(L,L1E,PE1,PF1,10,1.0)
 GSET(L,L1F,PF1,PG1,10,1.0)
 GSET(L,L1G,PG1,PH1,40,1.0)
 GSET(L,L2A,PA2,PB2,10,1.0)
 GSET(L,L2B,PB2,PC2,10,1.0)
 GSET(L,L2C,PC2,PD2,10,1.0)
 GSET(L,L2D,PD2,PE2,10,1.0)
 GSET(L,L2E,PE2,PF2,10,1.0)
 GSET(L,L2F,PF2,PG2,10,1.0)
 GSET(L,L2G,PG2,PH2,40,1.0)
 GSET(L,L3A,PA3,PB3,10,1.0)
 GSET(L,L3B,PB3,PC3,10,1.0)

```

GSET(L,L3C,PC3,PD3,10,1.0)
GSET(L,L3D,PD3,PE3,10,1.0)
GSET(L,L3E,PE3,PF3,10,1.0)
GSET(L,L3F,PF3,PG3,10,1.0)
GSET(L,L3G,PG3,PH3,40,1.0)
GSET(L,L4A,PA4,PB4,10,1.0)
GSET(L,L4B,PB4,PC4,10,1.0)
GSET(L,L4C,PC4,PD4,10,1.0)
GSET(L,L4D,PD4,PE4,10,1.0)
GSET(L,L4E,PE4,PF4,10,1.0)
GSET(L,L4F,PF4,PG4,10,1.0)
GSET(L,L4G,PG4,PH4,40,1.0)
GSET(L,L5A,PA5,PB5,10,1.0)
GSET(L,L5B,PB5,PC5,10,1.0)
GSET(L,L5C,PC5,PD5,10,1.0)
GSET(L,L5D,PD5,PE5,10,1.0)
GSET(L,L5E,PE5,PF5,10,1.0)
GSET(L,L5F,PF5,PG5,10,1.0)
GSET(L,L5G,PG5,PH5,40,1.0)
GSET(L,L6A,PA6,PB6,10,1.0)
GSET(L,L6B,PB6,PC6,10,1.0)
GSET(L,L6C,PC6,PD6,10,1.0)
GSET(L,L6D,PD6,PE6,10,1.0)
GSET(L,L6E,PE6,PF6,10,1.0)
GSET(L,L6F,PF6,PG6,10,1.0)
GSET(L,L6G,PG6,PH6,40,1.0)
  * Set frames
GSET(F,F1,PA1,PA2,PA3,-,PA4,PA5,PA6,-)
GSET(F,F2,PH1,PH2,PH3,-,PH4,PH5,PH6,-)
GSET(F,F7,PA1,PB1.PC1.PD1.PE1.PF1.PG1,PH1,PH2,PH3,PG3.PF3.PE3.PD3.$
PC3.PB3,PA3,PA2)
GSET(F,F4,PA3,PB3.PC3.PD3.PE3.PF3.PG3,PH3,-,PH4,PG4.PF4.PE4.PD4.PC$
4.PB4,PA4,-)
GSET(F,F5,PA4,PB4.PC4.PD4.PE4.PF4.PG4,PH4,PH5,PH6,PG6.PF6.PE6.PD6.$
PC6.PB6,PA6,PA5)
GSET(F,F8,PA6,PB6.PC6.PD6.PE6.PF6.PG6,PH6,-,PH1,PG1.PF1.PE1.PD1.PC$
1.PB1,PA1,-)
  * Match a grid mesh
GSET(M,F1,-J+I,1,41,1,LAP10)
GSET(M,F2,-J+I,1,41,101,LAP10)
GSET(M,F7,+K-J,1,41,1,TRANS)
GSET(M,F4,+K+I,1,1,1,TRANS)
GSET(M,F5,+K+J,51,1,1,TRANS)
GSET(M,F8,+K-I,51,41,1,TRANS)
  * Copy/Transfer/Block grid planes
GSET(B,1,50,1,40,1,100,TRANS)
*****
NONORT = T
*****
  Group 7. Variables: STOREd,SOLVEd,NAMED
ONEPHS = T
  * Non-default variable names
NAME(141) =SURN ; NAME(142) =VFOL
NAME(143) =SDIS ; NAME(144) =ENUT
NAME(145) =PRPS ; NAME(146) =DEN1
NAME(147) =WCRT ; NAME(148) =VCRT
NAME(149) =UCRT ; NAME(150) =VPOR
  * Solved variables list
SOLVE(P1 ,U1 ,V1 ,W1 ,SURN,VFOL)
  * Stored variables list
STORE(VPOR,UCRT,VCRT,WCRT,DEN1,PRPS,ENUT,SDIS)
  * Additional solver options
SOLUTN(P1 ,Y,Y,Y,N,N,N)
TURMOD(KEMODL)
*****

```

Group 8. Terms & Devices
 TERMS (SURN,N,N,N,N,N,Y)
 TERMS (VFOL,N,N,N,N,N,Y,Y)
 GALA = T
 RUPLIM = 6.000000E-01 ;RLOLIM = 4.000000E-01

Group 9. Properties
 RHO1 = 9.982300E+02
 ENUL = 1.006000E-06
 CP1 = 4.181800E+03
 TMP1 = 3.000000E+02
 DVO1DT = 3.330000E-03
 PRT (EP) = 1.314000E+00

Group 10. Inter-Phase Transfer Processes

Group 11. Initialise Var/Porosity Fields
 FIINIT(U1) = 0.000000E+00 ;FIINIT(V1) = 0.000000E+00
 FIINIT(W1) = 0.000000E+00 ;FIINIT(KE) = 1.001000E-10
 FIINIT(EP) = 1.001000E-10 ;FIINIT(SURN) = 0.000000E+00
 FIINIT(VFOL) = 1.001000E-10 ;FIINIT(SDIS) = 1.001000E-10
 FIINIT(ENUT) = 1.001000E-10 ;FIINIT(PRPS) = -1.000000E+00
 FIINIT(DEN1) = 1.189000E+00 ;FIINIT(WCRT) = 1.001000E-10
 FIINIT(VCRT) = 1.001000E-10 ;FIINIT(UCRT) = 1.001000E-10
 FIINIT(VPOR) = 1.000000E+00
 No PATCHes used for this Group

INIADD = F

Group 12. Convection and diffusion adjustments
 No PATCHes used for this Group

Group 13. Boundary & Special Sources

INLET (BFCIN ,LOW ,2,0,0,0,0,1,9000)
 VALUE (BFCIN ,P1 , 7.100000E+02)
 VALUE (BFCIN ,U1 , 0.000000E+00)
 VALUE (BFCIN ,V1 , 0.000000E+00)
 COVAL (BFCIN ,W1 , FIXVAL , 0.710000E-01)
 VALUE (BFCIN ,KE , 0.000000E+00)
 VALUE (BFCIN ,EP , 0.000000E+00)
 COVAL (BFCIN ,SURN, FIXFLU , 0.0710000E-01)
 VALUE (BFCIN ,VFOL, 1.000000E-03)

PATCH (BFCSUP ,NORTH ,4,0,0,0,0,1,9000)
 COVAL (BFCSUP ,P1 , 1.000000E+00, 0.000000E+00)
 COVAL (BFCSUP ,SURN, FIXVAL , 0.000000E+00)
 COVAL (BFCSUP ,VFOL, 0.000000E+00, 1.000000E-03)

PATCH (BUOYANCY,PHASEM,0,0,0,0,0,1,9000)
 COVAL (BUOYANCY,U1 , FIXFLU , GRND1)
 COVAL (BUOYANCY,V1 , FIXFLU , GRND1)
 COVAL (BUOYANCY,W1 , FIXFLU , GRND1)

PATCH (EAST ,EAST ,5,0,0,0,0,1,9000)
 COVAL (EAST ,P1 , 1.000000E+00, 0.000000E+00)

PATCH (WEST ,WEST ,6,0,0,0,0,1,9000)
 COVAL (WEST ,P1 , 1.000000E+00, 0.000000E+00)

PATCH (LOW ,LOW ,7,0,0,0,0,1,9000)
 COVAL (LOW ,P1 , 1.000000E+00, 0.000000E+00)

BUOYA = 0.000000E+00 ; BUOYB = -9.810000E+00
 BUOYC = 0.000000E+00

```

*****
Group 14. Downstream Pressure For PARAB
*****

Group 15. Terminate Sweeps
LSWEEP = 10
SELREF = F
*****

Group 16. Terminate Iterations
LITER (SURN) = 1
*****

Group 17. Relaxation
RELAX(P1 ,LINRLX, 3.000000E-01)
RELAX(U1 ,FALSDT, 5.000000E-03)
RELAX(V1 ,FALSDT, 5.000000E-03)
RELAX(W1 ,FALSDT, 5.000000E-03)
RELAX(KE ,FALSDT, 5.000000E-04)
RELAX(EP ,FALSDT, 5.000000E-04)
KELIN = 0
*****

Group 18. Limits
VARMAX(U1 ) = 1.000000E+01 ;VARMIN(U1 ) = -1.000000E+01
VARMAX(V1 ) = 1.000000E+01 ;VARMIN(V1 ) = -1.000000E+01
VARMAX(W1 ) = 1.000000E+01 ;VARMIN(W1 ) = -1.000000E+01
VARMAX(SURN) = 1.000000E+00 ;VARMIN(SURN) = 0.000000E+00
*****

Group 19. EARTH Calls To GROUND Station
USEGRD = T ;USEGRX = T
GENK = T
SURF = T
IDISPB = 1 ;IDISPC = 9000
IPRPSA = 67
*****

Group 20. Preliminary Printout
ECHO = T
*****

Group 21. Print-out of Variables
*****

Group 22. Monitor Print-Out
IXMON = 5 ;IYMON = 5 ;IZMON = 50
NPRMON = 100000
NPRMNT = 1
TSTSWP = -1
*****

Group 23. Field Print-Out & Plot Control
NPRINT = 100000
NTPRIN = 100000 ;ISTPRF = 1 ;ISTPRL = 10000
ISWPRF = 1 ;ISWPRL = 100000
No PATCHes used for this Group
*****

Group 24. Dumps For Restarts
DISPA = 100 ;DISPB = 1 ;DISPC = 9000
CSG1 ='M'

> DOM, SIZE, 6.000000E+00, 8.330000E+00, 37.760000E+00
> DOM, MONIT, 5.000000E+00, 5.000000E+00, 5.000000E+00
> DOM, SCALE, 1.000000E+00, 1.000000E+00, 1.000000E+00
> DOM, SNAPSIZ, 1.000000E-02

> OBJ, NAME, WATER
> OBJ, POSITION, 0.000000E+00, 0.000000E+00, 0.000000E+00
> OBJ, SIZE, 6.000000E+00, 0.7500000E+00, 37.760000E+00
> OBJ, CLIPART,
> OBJ, TYPE, BLOCKAGE
> OBJ, COLOR-MODE, 1
> OBJ, OPAQUE, 50

```

```

> OBJ, MATERIAL, 67
> OBJ, TIME_LIMITS, ALWAYS_ACTIVE
> OBJ, SCAL_FIXF, 2.000000E+00
> OBJ, INI_VEL_Z_1, 5.000000E-01

> OBJ, NAME, IN
> OBJ, POSITION, 0.000000E+00, 0.000000E+00, 0.000000E+00
> OBJ, SIZE, 5.000000E+01, 1.700000E+01, 0.000000E+00
> OBJ, CLIPART, _____
> OBJ, TYPE, USER_DEFINED

> OBJ, NAME, SALIDA1
> OBJ, POSITION, 0.000000E+00, 0.000000E+00, 1.000000E+02
> OBJ, SIZE, 6.000000E+00, 0.75000000E+00, 0.000000E+00
> OBJ, CLIPART, _____
> OBJ, TYPE, OUTLET
> OBJ, COLOR-MODE, 1
> OBJ, OPAQUE, 50
> OBJ, PRESSURE, 0.000000E+00
> OBJ, TEMPERATURE, SAME
> OBJ, COEFFICIENT, GRND1
> OBJ, TIME_LIMITS, ALWAYS_ACTIVE
> OBJ, TURBULENCE, 0.000000E+00, 0.000000E+00

> OBJ, NAME, SUP
> OBJ, POSITION, 0.000000E+00, 4.000000E+01, 0.000000E+00
> OBJ, SIZE, 6.000000E+00, 0.000000E+00, 37.760000E+00
> OBJ, CLIPART, _____
> OBJ, VISIBLE, -1
> OBJ, TYPE, USER_DEFINED

> OBJ, NAME, EAST
> OBJ, POSITION, 0.000000E+00, 1.700000E+00, 0.000000E+00
> OBJ, SIZE, 0.000000E+00, 8.330000E+00, 37.760000E+00
> OBJ, CLIPART, EAST
> OBJ, VISIBLE, -1
> OBJ, TYPE, USER_DEFINED

> OBJ, NAME, WEST
> OBJ, POSITION, 6.000000E+00, 1.700000E+00, 0.000000E+00
> OBJ, SIZE, 0.000000E+00, 2.300000E+01, 1.000000E+02
> OBJ, CLIPART, WEST
> OBJ, VISIBLE, -1
> OBJ, TYPE, USER_DEFINED

> OBJ, NAME, LOW
> OBJ, POSITION, 0.000000E+00, 1.700000E+00, 0.000000E+00
> OBJ, SIZE, 6.000000E+00, 2.300000E+00, 0.000000E+00
> OBJ, CLIPART, LOW
> OBJ, VISIBLE, -1
> OBJ, TYPE, USER_DEFINED

> OBJ, NAME, ISLA1
> OBJ, POSITION, 6.000000E+00, 0.000000E+00, 3.000000E+00
> OBJ, SIZE, 5.000000E+00, 2.200000E+01, 1.800000E+01
> OBJ, CLIPART, ISLA1
> OBJ, TYPE, BLOCKAGE
> OBJ, MATERIAL, 198
> OBJ, TIME_LIMITS, ALWAYS_ACTIVE

> OBJ, NAME, ISLA2
> OBJ, POSITION, 3.900000E+00, 0.000000E+00, 1.500000E+00
> OBJ, SIZE, 6.000000E+00, 2.200000E+00, 1.300000E+00
> OBJ, CLIPART, ISLA2
> OBJ, TYPE, BLOCKAGE
> OBJ, MATERIAL, 198

```

> OBJ, TIME_LIMITS, ALWAYS_ACTIVE
STOP

C-3 Q1 Cut-Cell Method

TALK=T;RUN(1, 1)

```
*****
  Q1 created by VDI menu, Version 3.5, Date 05/06/03
  CPVNAM=VDI;SPPNAM=Core
  *****
  IRUNN =    1 ;LIBREF =    0
  *****
  Group 1. Run Title
  TEXT(No title has been set for this run.  )
  *****
  Group 2. Transience
  STEADY = T
  *****
  Groups 3, 4, 5 Grid Information
  * Overall number of cells, RSET(M,NX,NY,NZ,tolerance)
  RSET(M,105,16,150)
  *****
  Group 6. Body-Fitted coordinates
  *****
  Group 7. Variables: STOREd,SOLVEd,NAMED
  ONEPHS = T
  * Non-default variable names
  NAME(149) =VPOR ; NAME(150) =EPKE
  * Solved variables list
  SOLVE(P1 ,U1 ,V1 ,W1 )
  * Stored variables list
  STORE(EPKE,VPOR)
  * Additional solver options
  SOLUTN(P1 ,Y,Y,Y,N,N,Y)
  TURMOD(KEMODL)

  *****
  Group 8. Terms & Devices
  DENPCO = T
  *****
  Group 9. Properties
  TEMP0 = 2.730000E+02
  RHO1  = 1.000000E+03
  ENUL  = 1.100000E-06
  CP1   = 1.000000E+00
  PRT (EP ) = 1.314000E+00
  *****
  Group 10. Inter-Phase Transfer Processes
  *****
  Group 11. Initialise Var/Porosity Fields
  FIINIT(P1 ) = 1.000000E-01 ;FIINIT(U1 ) = 5.000000E-02
  FIINIT(VPOR) = 1.000000E+00

  CONPOR(PARED , 0.00,CELL ,1,105,15,16,1,150)

  INIADD = F
  *****
  Group 12. Convection and diffusion adjustments
  No PATCHes used for this Group
  *****
  Group 13. Boundary & Special Sources
```

```
INLET (LOW ,LOW ,2,0,0,0,0,1,1)
VALUE (LOW ,P1 , 6.455000E+01)
VALUE (LOW ,U1 , 0.000000E+00)
VALUE (LOW ,V1 , 0.000000E+00)
VALUE (LOW ,W1 , 6.455000E-02)
VALUE (LOW ,KE , 0.000000E+00)
VALUE (LOW ,EP , 0.000000E+00)
```

```
EGWF = T
*****
```

```
Group 14. Downstream Pressure For PARAB
*****
```

```
Group 15. Terminate Sweeps
LSWEEP = 3000
RESFAC = 1.000000E-03
```

```
*****
```

```
Group 16. Terminate Iterations
*****
```

```
Group 17. Relaxation
RELAX(P1 ,LINRLX, 3.000000E-01)
RELAX(U1 ,FALSDT, 1.000000E-04)
RELAX(V1 ,FALSDT, 1.000000E-04)
RELAX(W1 ,FALSDT, 1.000000E-04)
RELAX(KE ,FALSDT, 1.000000E-04)
RELAX(EP ,FALSDT, 1.000000E-04)
KELIN = 3
*****
```

```
Group 18. Limits
VARMAX(P1 ) = 1.000000E+05 ;VARMIN(P1 ) = -1.000000E+05
VARMAX(U1 ) = 1.000000E+01 ;VARMIN(U1 ) = -1.000000E+01
VARMAX(V1 ) = 1.000000E+01 ;VARMIN(V1 ) = -1.000000E+01
VARMAX(W1 ) = 1.000000E+01 ;VARMIN(W1 ) = -1.000000E+01
*****
```

```
Group 19. EARTH Calls To GROUND Station
USEGRD = T ;USEGRX = T
GENK = T
ASAP = T
PARSOL = T
IDISPB = 1 ;IDISPC = 3000
*****
```

```
Group 20. Preliminary Printout
ECHO = T
*****
```

```
Group 21. Print-out of Variables
*****
```

```
Group 22. Monitor Print-Out
IXMON = 99 ;YMON = 15 ;IZMON = 1
NPRMON = 100000
NPRMNT = 1
TSTSWP = -1
*****
```

```
Group 23. Field Print-Out & Plot Control
NPRINT = 100000
ISWPRF = 1 ;ISWPRL = 100000
No PATCHes used for this Group
*****
```

```
Group 24. Dumps For Restarts
```

```
GVIEW(P,-3.537509E-01,4.772065E-01,-8.044469E-01)
GVIEW(UP,6.804930E-02,8.709093E-01,4.867091E-01)
```

```
> DOM, SIZE, 1.833300E+01, 8.330000E+00, 3.776660E+01
> DOM, MONIT, 1.591660E+01, 1.658320E+00, 1.258890E-01
> DOM, SCALE, 1.000000E+00, 1.000000E+00, 1.000000E+00
```

```

> DOM, SNAPSHOT, 1.000000E-02
> GRID, RSET_X_1, 12, 1.000000E+00
> GRID, RSET_X_2, 81, 1.000000E+00
> GRID, RSET_X_3, 11, 1.000000E+00
> GRID, RSET_X_4, 1, 1.000000E+00
> GRID, RSET_Y_1, 1, 1.000000E+00
> GRID, RSET_Y_2, 3, 1.000000E+00
> GRID, RSET_Y_3, 10, 1.000000E+00
> GRID, RSET_Y_4, 1, 1.000000E+00
> GRID, RSET_Y_5, 1, 1.000000E+00
> GRID, RSET_Z_1, 150, 1.000000E+00

> OBJ, NAME, B1
> OBJ, POSITION, 0.000000E+00, 0.000000E+00, 0.000000E+00
> OBJ, SIZE, 3.776660E+01, 1.833300E+01, 1.666630E+00
> OBJ, ROT-ANGLE, 0.000000E+00, 2.700000E+02, 2.700000E+02
> OBJ, CLIPART, riosoloo
> OBJ, ROTATION24, 0
> OBJ, TYPE, BLOCKAGE
> OBJ, MATERIAL, 198

> OBJ, NAME, ENTRADA
> OBJ, POSITION, 0.000000E+00, 9.000000E-01, 0.000000E+00
> OBJ, SIZE, 5.700000E+00, 7.500000E-01, 0.000000E+00
> OBJ, CLIPART, default
> OBJ, ROTATION24, 1
> OBJ, TYPE, USER_DEFINED

> OBJ, NAME, SALIDA
> OBJ, POSITION, 1.440000E+01, 1.000000E+00, 3.776660E+01
> OBJ, SIZE, 3.033300E+00, 6.500000E-01, 0.000000E+00
> OBJ, CLIPART, cube12t
> OBJ, ROTATION24, 1
> OBJ, TYPE, OUTLET
> OBJ, PRESSURE, 0.000000E+00
> OBJ, TEMPERATURE, SAME
> OBJ, COEFFICIENT, 1.000000E+03
> OBJ, TURBULENCE, SAME , SAME
STOP

```

- [2] Jiménez, A.A., Osnaya, J., Gracia, J. y Franco, V. 2004 “Estudio en un modelo físico de las estructuras de control sobre el río Carrizal, en el Estado de Tabasco”, Informe final, elaborado para CNA, Instituto de Ingeniería, UNAM.
- [3] Aris, R. Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics. Prentice Hall International Series in the Physical and Chemical Engineering Sciences. 1962.
- [4] Warnatz, J., Mass, U., Dibble, R. W. Combustion. Springer. 1996.
- [5] Ferziger, H. H., Peric, M. Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer-Verlag. 1996.
- [6] Favre, A. Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics. SIAM. 1969.
- [7] Jones, W. P. Models for Turbulent Flows with Variable Density and Combustion. En *W. Kollmann*, editor, “*Prediction Methods for Turbulent Flows*”. Lecture Series 1979-2. Von Karman Institute for Fluid Dynamics. Rhode Saint Genese, Bélgica. 1979.
- [8] Jones, W. P. Turbulence Modeling and Numerical Solutions Methods for Variable Density and Combustion Flows. pp 306-374. Academic Press. 1994.
- [9] Lindstedt, R. P., Váos, E. M. Modeling of Premixed Flames with Second Moment Methods. *Combustion and flame*, 116:461-485. 1999

- [10] Patankar, S. V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Science. Hemisphere Publishing Corporation. 1980.
- [11] Patankar, S. V., Spalding, D. B. A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three Dimensional Parabolic Flows. Int. J. Heat and Mass Transfer, 15. pp. 1787-1806. 1972.
- [12] J. Thompson, Z.Warsi, C.Wayne-Mastin, Numerical Grid Generation: Foundation and Applications, Elsevier, Amsterdam, 1985.
- [13] H.K. Versteeg, W. Malalasekera, An Introduction to Computational Fluid Dynamics, Addison-Wesely, Reading MA, 1995.
- [14] G. Yang, D. Causon, D. Ingram, Calculation of compressible flows about complex moving geometries using a 3D Cartesian cut cell method, Int. J. Numer. Methods Fluids 33 (2000) 1121–1151.
- [15] S. Cieslak, S. Ben Khelil, I. Choqiet, A. Merlen, Cut cell strategy for 3D blast wave numerical simulation, Shock Waves 10 (6) (2001) 421–429
- [16] Ben Haj M. Ed. Al. Two-Dimesional free surface modeling for a non dimensional Dam-Break problem, Ninth international PHOENICS User Conference, September 23-27-2007 Moscow ,Russia.
- [17] G. Yang, D. Causon, D. Ingram, R. Saunders, P. Batten, A Cartesian cut cell method for compressible flows. Part A. Static body problems, Aeronaut. J. 101 (1001) (1997) 47–56.
- [18] Briggs, G.A. Plume Rise and Buoyancy Effects. Atmospheric Science and Power Production, pp. 327-366. 1984.

- [19] Spalding, D. B. Mathematical Modeling of Fluid Dynamics, Heat Transfer and Mass Transfer Process. Technical Report HTS/8011, Imperial College of Science Technology and Medicine. 1980
- [20] Spalding, D. B. A Novel Finite-Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivates. Int. Journal. Num. Methods Engineering, 4, pp. 551. 1972.
- [21] Biagioli, F. Comparison Between Presumed and Monte Carlo PDF Transport Methods for Turbulent Combustion Modeling. AIAA-Journal of Propulsion and Power, 13(1):109-116. 1997.
- [22] Briggs, G.A. Plume Rise and Buoyancy Effects. Atmospheric Science and Power Production, pp. 327-366. 1984.
- [23] Daly, B. J., Harlow, F. H. Transport Equations in Turbulence. Physics of Fluids, 3(11):2634-2649. 1970.
- [24] Dahm WJA, Southerland K, Band Buch KA (1991) Direct, high resolution, four-dimensional measurements of the fine scale structure of $Sc \gg 1$ molecular mixing in turbulent flows. Phys Fluids A 3(5):1115–1127.
- [25] Lumey, J. L. Pressure-Strain Correlation. Physics of Fluids. 18(6):750. 1975.