



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Convección natural en un fluido confinado entre esferas concéntricas (Bajo número de Rayleigh)

Tesis que para obtener el grado de
Ingeniero Mecánico.
Presenta:

Juan José Vidal Amaro

Dr. Rubén Ávila Rogríguez
Director de Tesis

México, D.F., noviembre de 2008



FACULTAD DE INGENIERÍA

Con mucho amor y felicidad
A mis papás Rubén y Elia
por haber creado las mejores condiciones
para mi desarrollo... y lo que falta.
A toda mi gran familia Amaro y Vidal
por ser el complemento de alegrías, risas,
cobijo y cultura que también hace falta.
A todos mis demás seres cercanos y muy queridos
por las aventuras, desventuras
e inolvidables experiencias que hemos compartido

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) por haberme recibido y proporcionado una formación integral a través de la Facultad de Ingeniería.

Al Departamento de Termofluidos de la Facultad de Ingeniería de la UNAM por brindarme los recursos para el desarrollo de la presente tesis.

Al Departamento de Super Cómputo y al Departamento de Visualización Científica de la Dirección General de Servicios de Cómputo Académico (DGSCA), por las facilidades brindadas para la ejecución del código computacional y para la visualización de los resultados que se obtuvieron en este trabajo.

Índice general

Nomenclatura	ix
1. Introducción	1
2. Descripción Física del Sistema.	5
2.1. Esferas concéntricas con distribución radial de temperaturas sin generación volumétrica de calor.	5
2.2. Esferas concéntricas con distribución radial de temperaturas y generación volumétrica de calor.	7
2.3. Esferas concéntricas sin generación volumétrica de calor con la influencia de polos fríos.	8
3. Ecuación de difusión de calor en esferas concéntricas y su solución para el caso unidimensional.	11
3.1. Solución analítica de la ecuación de conducción de calor en esferas concéntricas sin generación volumétrica de calor	12
3.2. Solución analítica de la ecuación de conducción de calor en esferas concéntricas, con generación volumétrica de calor. . . .	14
4. Solución numérica de la ecuación general de difusión de calor en esferas concéntricas.	17
4.1. El método de Elementos Espectrales y la discretización de la región anular esférica del sistema de esferas concéntricas.	18

4.2.	Solución numérica de la ecuación de difusión de calor en coordenadas cartesianas sin generación volumétrica de calor. . . .	21
4.3.	Solución numérica de la ecuación de difusión de calor en coordenadas cartesianas con generación volumétrica de calor . . .	22
4.4.	Solución de la ecuación de difusión de calor en tres dimensiones para el sistema de esferas concéntricas sin generación volumétrica de calor con la influencia de polos fríos.	25
5.	Convección natural en el sistema de esferas concéntricas.	29
5.1.	Modelos Matemáticos del Fenómeno de Convección Natural. .	29
5.2.	Solución Numérica del Problema de Convección Natural en Esferas Concéntricas	34
5.2.1.	Valores del número de Nusselt.	34
5.2.2.	Flujo base en el ánulo esférico.	35
6.	Conclusiones y Trabajo a Futuro.	45
A.	Ecuación general de conducción de calor en esferas concéntricas (coordenadas esféricas)	47
B.	Algoritmo cubo-esfera	53
	Bibliografía	57

Índice de figuras

2.1. Esquema de la estructura interna terrestre	6
2.2. Modelo para el análisis de conducción de calor en el sistema esférico por capas	7
2.3. Esquema del proceso de conducción de calor con generación de energía térmica uniforme en todo el volumen	8
2.4. Esquema del sistema de esferas concéntricas con polos fríos . .	9
3.1. Esquema del sistema esférico por capas para el análisis del fenómeno de conducción de calor.	13
3.2. Diagrama del sistema esférico por capas con generación volumétrica uniforme de calor \dot{q}_{gen}	16
4.1. División del sistema esférico en 6 elementos iguales mediante el algoritmo de cubo esfera.	19
4.2. Colocación de los nodos en el interior de cada macro elemento.	20
4.3. Solución analítica y solución numérica del problema de difusión de calor en esferas concéntricas	21
4.4. Solución analítica y solución numérica para el problema de conducción de calor en esferas concéntricas con generación volumétrica de calor en estado transitorio.	23
4.5. Solución analítica y solución numérica del problema de conducción de calor en esferas concéntricas con generación volumétrica de calor en estado permanente.	24

4.6.	Distribución de temperaturas $t = 0(s)$	26
4.7.	Distribución de temperaturas en el estado transitorio.	27
4.8.	Distribución de temperaturas en el estado estacionario del sistema esférico con polos fríos.	28
5.1.	Magnitud del vector Velocidad.	35
5.2.	Magnitud de Velocidad para diferentes formas del campo gravitatorio radial.	36
5.3.	Hubicación simétrica de las celdas convectivas en el sistema esférico.	37
5.4.	Celda convectiva interior.	37
5.5.	Celda convectiva exterior.	38
5.6.	Regiones de flujo entre dos celdas convectivas.	39
5.7.	Flujo entre dos celdas convectivas.	40
5.8.	Región de flujo entre tres celdas convectivas.	41
5.9.	Mapa de flujo en esferas concéntricas.	43
A.1.	Volumen de control diferencial, $(dr, rd\theta, r\sin(\theta) d\theta)$ para el análisis de conducción en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)	48
B.1.	Descomposición de una esfera en seis regiones	54
B.2.	Transformación de posiciones cubo-esfera	54

Nomenclatura

Alfabeto Latino

C_p	capacidad térmica específica a presión constante [J/kg·K]
\hat{e}_r	vector director unitario radial [1]
\hat{e}_θ	vector director unitario azimutal [1]
\hat{e}_ϕ	vector director unitario meridional [1]
\dot{E}_{alm}	rapidez de variación de energía térmica [W]
g	constante de proporción del campo de gravedad [1/s ²]
\vec{g}	vector de campo gravitacional [m/s ²]
k	conductividad térmica [W/m·K]
n	número de puntos por elemento []
P	campo de presiones [N/m ²]
P_o	componente hidrostática del campo de presiones [N/m ²]
P^*	componente hidrodinámica del campo de presiones [N/m ²]
q	transferencia de calor [W]
\dot{q}_{gen}	generación de calor por unidad de volumen [W/m ³]
q''	flujo de calor por unidad de área [W/m ²]
r_1	radio de la esfera interna [m]
r_2	radio de la esfera externa [m]
T	temperatura [K]
T_1	temperatura en la esfera interna [K]
T_2	temperatura en la esfera externa [K]
T_{prom}	temperatura promedio de la esfera en el estado estacionario [K]
t	tiempo [s]
u	energía interna específica [J/kg]
\vec{V}	vector velocidad [m/s]

Símbolos Griegos

α	coeficiente de difusividad térmica [m^2/s]
β	coeficiente de expansión volumétrica [$1/\text{K}$]
$\delta\rho$	variación en la densidad debido a la temperatura [kg/m^3]
ρ	densidad del fluido [kg/m^3]
ν	viscosidad cinemática [m^2/s]
μ	viscosidad dinámica [$\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$]

Operadores

\cdot	producto punto entre dos vectores
∇	operador vectorial en derivadas parciales
$\frac{D}{Dt}$	derivada material

Números adimensionales

Nu	Número de Nusselt
Ra	Número de Rayleigh

Capítulo 1

Introducción

La evolución térmica y mecánica de los planetas está gobernada primordialmente por procesos de convección en su interior, provocando diversos fenómenos físicos y químicos ocurrentes tanto en la superficie sólida de éstos como en su interior.

La tectónica de placas, la actividad sísmica y volcánica así como la formación de montañas en la corteza terrestre son ejemplos de fenómenos provocados por un proceso de transporte de energía desde el interior de la tierra (núcleo) hacia la superficie de la misma mediante convección térmica en el manto terrestre.

De lo anterior, se desprende la necesidad de comprender cómo es que ocurre este fenómeno y cuáles son los patrones característicos del flujo convectivo; estas interrogantes son precisamente las inquietudes que motivan el desarrollo del presente trabajo.

En el proceso de convección en el manto terrestre influyen muchos aspectos complejos tales como el calentamiento interno, la variación de la viscosidad del manto terrestre con respecto a la temperatura, cambios de fase, la misma geometría esférica del globo, además del efecto del campo gravitatorio radial.

Este último aspecto complica la posibilidad de realizar experimentos de laboratorio. Trabajos analíticos sobre este fenómeno, en el que el calentamiento ocurre desde la esfera interior, se han realizado, dejando de lado la parte física y dinámica del problema, enfocándose en la obtención de los patrones de convección existentes en este tipo de geometrías. El resultado de

dichos trabajos ha sido la predicción de la ocurrencia de patrones de convección simétricos al rededor de la esfera (Busse, 1975) (Busse and Riahi, 1982).

Sin embargo para obtener una solución que involucre a la parte dinámica, se hace necesario introducir el análisis numérico, haciendo uso de códigos computacionales capaces de resolver el problema, así como de un equipo de cómputo con suficiente capacidad de cálculo.

Análisis numéricos sobre la estabilidad del sistema esférico, en los que se incluye la condición de no deslizamiento en las superficies esféricas, se reportan en (Joseph and Carmi, 1966), en donde se establece que cuando el número de Rayleigh es menor que el valor crítico, no debe existir movimiento de convección siempre y cuando el campo de gravedad tenga una distribución espacial con la misma forma que la distribución de temperaturas, de otro modo el sistema se torna inestable y se puede iniciar el fenómeno de convección. El valor del número de Rayleigh crítico es reportado como función de la relación de radios en la esfera.

La geometría esférica por sí sola introduce un elemento de complejidad debido a que el flujo se confina únicamente entre dos paredes curvas cerradas, es decir que no tienen bordes o límites, además el área de la pared interna es menor que el área de la pared externa. Por otro lado, los análisis numéricos más utilizados se basan en métodos dependientes de mayas computacionales y algunos de estos ejercicios se encuentran limitados por la existencia de problemas relacionados con la discretización del dominio esférico, éste es el llamado problema de singularidad geométrica en los polos (Ratcliff et al., 1996).

Para realizar el análisis de convección en el manto terrestre y comprender su comportamiento básico, en la mayoría de los trabajos realizados hasta el momento, se ha tomado como base al modelo de convección natural Rayleigh-Bénard (Bercovici et al., 1989), (Hernlund and Tackley, 2003), (Yanagisawa and Yamagishi, 2005).

El sistema Rayleigh-Bénard es uno de los diferentes sistemas hidrodinámicos fuera del equilibrio en el cual, una capa horizontal de fluido caliente se encuentra colocada por debajo de otra capa de fluido de menor temperatura (Chandrasekhar, 1990). Debido a la expansión térmica del fluido en la capa caliente, éste experimentará una reducción de densidad. Si la diferencia de temperaturas entre ambas capas no es lo suficientemente grande, un proceso de conducción entre ellas se mantiene estable, de otro modo el sistema se vuelve inestable y un proceso convectivo se despierta.

Partiendo del sistema Rayleigh-Bénard en una geometría de esferas concéntricas, Bercovici et al. (1989) determinaron que para valores del número de Rayleigh entre $2000 \leq Ra \leq 70000$, dos son los patrones de convección térmica preferidos o dominantes en el espacio tridimensional anular situado entre el par de esferas concéntricas; el primer patrón está caracterizado por seis columnas cilíndricas ascendentes del fluido de mayor temperatura, mientras que el segundo patrón de convección se caracteriza por cuatro columnas cilíndricas ascendentes de fluido caliente. No hay preferencia sobre cualquiera de los dos patrones de convección antes mencionados, es decir cualquiera de los dos tiene la misma oportunidad de ocurrir, sin embargo, ambos patrones de convección son logrados mediante la introducción de perturbaciones en el campo de temperaturas, que dan como resultado la formación de uno u otro patrón convectivo. La forma que adquieren los flujos ascendentes es básicamente cilíndrica con un cambio en su forma cerca de la esfera externa (corteza), mientras que el fluido descendente crea una red de flujos de forma plana que se dispersan hacia la parte interior del sistema. Ambos patrones de flujo existen y se mantienen para diferentes valores del número de Rayleigh mayores al valor crítico ($Ra=712$) (Bercovici et al., 1989), sin embargo, este valor del número de Rayleigh crítico es válido si se desprecia la acción de las fuerzas viscosas en las superficies esféricas.

En el ámbito computacional, mejoras en el rendimiento y ejecución de los códigos de solución del problema se han logrado mediante la incorporación de una nueva forma de discretizar el espacio esférico. El método de “esfera cúbica” se desarrolló con el fin de resolver los problemas que se presentan al tratar de dar solución a las ecuaciones diferenciales parciales que describen a los fenómenos en la naturaleza, cuando se trabaja con geometrías esféricas. Con este método, se proyectan las caras de un cubo que se circunscribe en una esfera, sobre la superficie de ésta, dividiéndola en seis regiones las cuales a su vez pueden volver a ser subdivididas (Ronchi et al., 1996). Con este enfoque, Hernlund and Tackley (2003) reprodujeron un resultado similar al logrado por Bercovici et al. (1989), sin embargo, la relación entre el tiempo de cómputo requerido para los cálculos y el número de puntos que utilizaron en la malla numérica, demostró la eficiencia y potencial de esta técnica para abordar problemas que involucran geometrías esféricas.

Con el fin de determinar los patrones de convección térmica existentes en el sistema de esferas concéntricas, con una menor influencia de las perturbaciones del campo de temperaturas sobre de éstos, Yanagisawa y Yamagishi (2005) introdujeron perturbaciones al campo de temperaturas con ordenes de magnitud menores, disminuyendo su influencia sobre los patrones convectivos obtenidos. En el mismo estudio, se estableció con una mayor exactitud la

relacion entre los números de Nusselt y Rayleigh para la geometría esférica, se reprodujeron patrones de convección similares a los reportados por Bercofici et al. (1989) y al realizar simulaciones con números de Rayleigh muy altos, $2 \times 10^6 \leq Ra \leq 1 \times 10^8$, encontraron que las celdas convectivas reducen su tamaño y se tornan irregulares.

En el presente trabajo, se pretende reproducir los resultados obtenidos en los trabajos antes descritos, empleando el algoritmo de esfera cúbica (Cubed Sphere) aprovechando el incremento en el rendimiento computacional y la simplificación en la discretización del dominio que éste permite. Se emplea también, para la solución de las ecuaciones de gobierno, el método de elementos espectrales.

En el capítulo 2 se presenta la descripción física del sistema de esferas concéntricas y los modelos empleados para la solución de los problemas de difusión de calor: sin generación volumétrica de calor, con generación volumétrica de calor y con enfriamiento en los polos de la esfera externa.

En los capítulos 3 y 4, se presentan estudios sobre el fenómeno de difusión de calor en el sistema de esferas concéntricas y se realiza una comparación de los resultados obtenidos mediante el método numérico con la solución analítica existente. Se realizan también, estudios de difusión de calor considerando generación volumétrica de energía en el interior del sistema, de igual forma se comparan estos resultados con los obtenidos mediante la solución analítica. Por último, se estudia un problema tridimensional de difusión de calor, sin generación volumétrica de energía térmica y con enfriamiento en los polos de la esfera externa.

Finalmente, en el capítulo 5 se reporta el estudio realizado sobre el fenómeno de convección natural en el sistema esférico, con gravedad radial, con la superficie de la esfera interna a una mayor temperatura que la superficie de la esfera exterior y se reportan los resultados obtenidos para un bajo número de Rayleigh.

Capítulo 2

Descripción Física del Sistema.

En el presente capítulo se describe el modelo físico correspondiente a cada uno de los fenómenos de difusión analizados; en la sección 2.1 se presenta la descripción del sistema esférico formado por el núcleo (esfera interna) de radio r_1 a temperatura T_1 , la esfera exterior de radio r_2 a temperatura T_2 ($T_1 > T_2$) y el espacio entre ambas (ánulo esférico) considerado como sólido.

En la sección 2.2 se presenta el modelo en el que se considera además, la generación de energía térmica por unidad de volumen constante en todo el ánulo esférico.

La sección 2.3 muestra el modelo empleado para el análisis del proceso conductivo, sin generación interna de calor y con enfriamiento en los polos.

2.1. Esferas concéntricas con distribución radial de temperaturas sin generación volumétrica de calor.

En la figura 2.1 se muestra el esquema mas simple de la estructura interna de la tierra; ésta se divide fundamentalmente en tres regiones principales: el núcleo, el manto y la corteza.

Tanto el núcleo como la corteza son sólidos. En la escala geológica del tiempo, el material del manto se comporta como un fluido altamente viscoso.

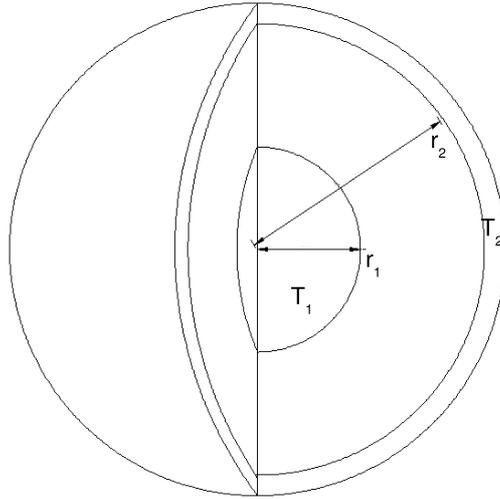


Figura 2.1: Esquema de la estructura interna terrestre. La esfera interna (núcleo) de radio r_1 se encuentra a una temperatura T_1 , la esfera externa (corteza) con radio r_2 se encuentra a una temperatura T_2 , el ánulo esférico entre r_1 y r_2 (manto) se comporta como un fluido muy viscoso. La razón de aspecto es $\frac{r_1}{r_2} = 0.35$.

Sin embargo, con el fin de validar el programa utilizado y el algoritmo “cubo-esfera” para discretizar el dominio, en esta sección se considera al ánulo esférico como un sólido, a través del cual se transmite energía desde el núcleo caliente hacia la corteza mediante un fenómeno de conducción de calor. El modelo que reproduce tal configuración es el que se muestra en la figura 2.2, donde q es la rapidez a la cual se transfiere la energía en forma de calor desde el núcleo hacia la corteza, sus unidades son $q(\text{W})$, T_1 y T_2 son las temperaturas en el núcleo y en la corteza respectivamente donde $T_1 > T_2$, k es la conductividad térmica del material sólido en el ánulo esférico y sus unidades son $k \left[\frac{\text{W}}{\text{mK}} \right]$.

En la figura 2.2, tanto la superficie de la esfera interna como la superficie de la esfera externa mantienen una temperatura uniforme y constante; el espacio anular esférico se encuentra sujeto a la diferencia de temperaturas entre la superficie de menor radio y la superficie de radio mayor; tal diferencia de temperaturas (gradiente de temperaturas) genera un flujo de calor por conducción desde el núcleo hacia la esfera exterior; es de esperarse que el

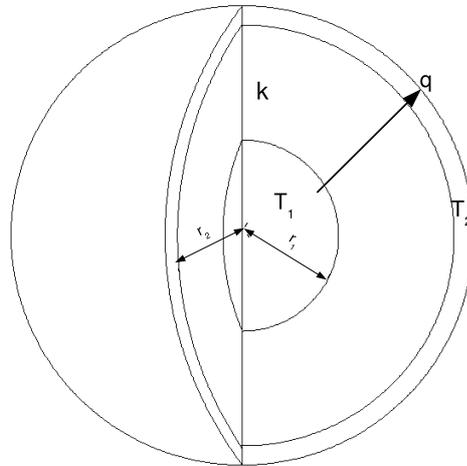


Figura 2.2: Modelo para el análisis de conducción en el sistema esférico por capas, con ánulo esférico sólido con conductividad térmica k y transferencia calor por conducción q .

flujo de calor se mantenga en la dirección radial puesto que es la dirección en la que se encuentra el gradiente, entanto que en cualquier otra dirección, azimutal o meridional, no debe existir flujo alguno de calor debido a que la variación de temperaturas es únicamente en la dirección radial.

2.2. Esferas concéntricas con distribución radial de temperaturas y generación volumétrica de calor.

Cuando se considera la generación de energía térmica por unidad de volumen \dot{q}_{gen} de manera uniforme en todo el volumen del ánulo esférico, donde la esfera interna tiene una temperatura T_1 , la esfera externa tiene una temperatura T_2 y el ánulo esférico es sólido con conductividad térmica k , el modelo empleado es el de la figura 2.3.

De manera similar a lo expuesto en la sección 2.1, la temperatura es uniforme tanto en la superficie de la esfera interna como en la esfera exterior; el espacio anular entre ambas esferas es de un material sólido con conductividad

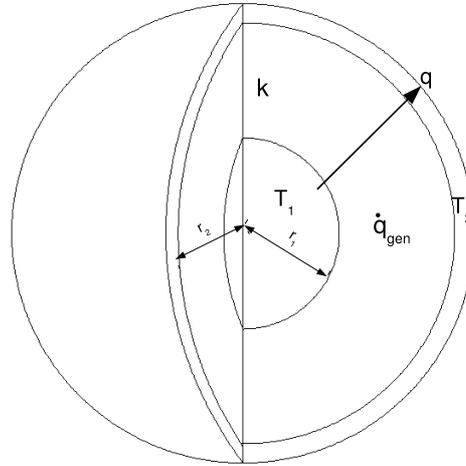


Figura 2.3: Esquema del proceso de conducción de calor con generación de energía térmica \dot{q}_{gen} por unidad de volumen.

térmica k constante, en el que ahora se experimenta una generación de energía térmica por unidad de volumen \dot{q}_{gen} ; es de esperarse que se presente una transferencia de calor por conducción q desde el núcleo hacia la corteza debido a la diferencia de temperaturas y que la generación de energía volumétrica modifique la distribución de temperaturas.

El término de generación volumétrica de energía \dot{q}_{gen} , representa las reacciones que pudieran ocurrir en el espacio sólido intermedio, reacciones de tipo químico, nuclear etc., la cuales pueden ocurrir de manera exotérmica (Incropera and De With, 1999).

2.3. Esferas concéntricas sin generación volumétrica de calor con la influencia de polos fríos.

Esta sección está dedicada a la descripción del sistema esférico, donde la temperatura en la superficie de la esfera exterior no es uniforme debido a que los polos, poseen una temperatura menor que la temperatura de las regiones ubicadas en el ecuador de la misma.

2.3 Esferas concéntricas sin generación volumétrica de calor con la influencia de polos fríos.

El espacio anular esférico es de un material sólido con conductividad térmica constante k . En la esfera interna se encuentra la temperatura mayor del sistema T_1 , en la capa externa la distribución de temperaturas no es uniforme; la temperatura de la superficie situada en el ecuador de la esfera externa ($54.73^\circ < \phi < 109.47^\circ$) se encuentra a una temperatura T_2 mayor a la temperatura de la superficie polar T_3 ($0^\circ < \phi < 54.73^\circ$), de modo que $T_1 > T_2 > T_3$, tal como se esquematiza en la figura 2.4.

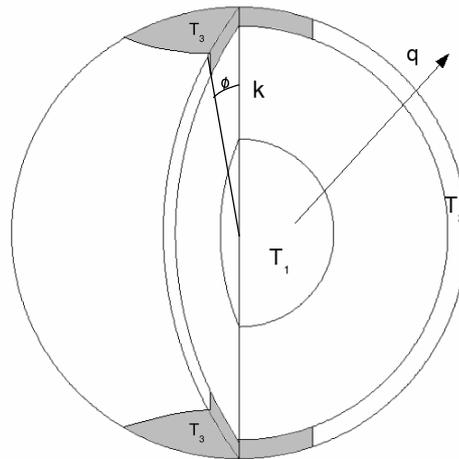


Figura 2.4: La superficie exterior posee una temperatura no uniforme, los polos ($0^\circ < \phi < 54.73^\circ$) son regiones con una temperatura menor que la región ecuatorial de la esfera externa ($54.73^\circ < \phi < 109.47^\circ$).

De un análisis cualitativo de dicho sistema, puede apreciarse que la influencia de los polos fríos, provoca diferencias de temperatura tanto en la dirección radial como las direcciones azimutal y meridional θ y ϕ (tomando como marco de referencia un sistema coordenado esférico), por lo que se trata de un problema en tres dimensiones. Es de esperarse que se presenten flujos de calor en dichas direcciones, sobre todo en las regiones próximas a los polos.

Capítulo 3

Ecuación de difusión de calor en esferas concéntricas y su solución para el caso unidimensional.

En el presente capítulo se presentan los modelos matemáticos, en coordenadas esféricas, que rigen el fenómeno de conducción de calor en esferas concéntricas para los casos descritos en el capítulo 2.

En el apéndice A se desarrolla la ecuación general de transferencia de calor por conducción en coordenadas esféricas, cuya solución se obtiene en las secciones 3.1 y 3.2.

En la sección 3.1 se resuelve la ecuación general de transferencia de calor por conducción para las condiciones descritas en la sección 2.1, es decir para una temperatura uniforme y constante tanto en la esfera interna como en la externa y el espacio sólido entre ambas con conductividad térmica constante, sin generación volumétrica de calor.

En la sección 3.2 se resuelve la ecuación general de transferencia de calor por conducción para el sistema de esferas concéntricas, considerando una temperatura uniforme y constante tanto en la esfera interna como en la externa y el espacio sólido entre ambas con conductividad térmica constante, con generación volumétrica de calor, tal como se describió en la sección 2.2.

3.1. Solución analítica de la ecuación de conducción de calor en esferas concéntricas sin generación volumétrica de calor

Como se recordará, en la figura 2.2 se esquematiza la configuración correspondiente al sistema compuesto por la esfera interna con temperatura T_1 , el espacio esférico anular formado por un material sólido con conductividad térmica constante k y la esfera externa con distribución uniforme de temperatura T_2 , además no existen transformaciones de energía química, nuclear, etc. en energía térmica o viceversa. Como la distribución de temperaturas es radial y uniforme, no existe transferencia de calor por conducción en las direcciones angulares \hat{e}_θ y \hat{e}_ϕ , por tanto la única dirección en la que existe conducción, es la radial \hat{e}_r .

Tomando en cuenta las condiciones anteriores, la ecuación general de conducción de calor en el ánulo esférico (A.15), se reduce a lo siguiente:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.1)$$

Donde $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$, es la difusividad térmica del espacio anular esférico con unidades de $\alpha(\frac{\text{m}^2}{\text{s}})$. Una consideración extra puede realizarse: cuando la transferencia de calor se encuentra en estado estacionario, la cantidad de energía que ingresa en el volumen de control sale en el mismo lapso, así pues, no existe variación alguna en la cantidad total de energía interna en el volumen de control, por lo que el término que contabiliza tal variación en la ecuación (3.1) es igual a cero, dando como resultado la ecuación diferencial ordinaria siguiente (dado que la temperatura varía espacialmente sólo en la dirección radial y no es dependiente del tiempo):

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT(r)}{dr} \right) = 0 \quad (3.2)$$

al integrar y reordenar los términos

$$\frac{dT(r)}{dr} = \frac{C_1}{r^2}$$

volviendo a integrar

$$\int dT(r) = \int \frac{C_1}{r^2} dr$$

$$T(r) = \frac{-C_1}{r} + C_2 \quad (3.3)$$

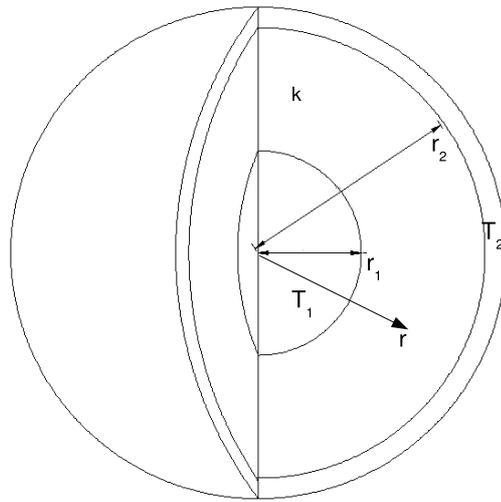


Figura 3.1: Esquema del sistema esférico por capas para el análisis del fenómeno de conducción de calor.

Tomando en cuenta la figura 3.1; en $r = r_1 \Rightarrow T = T_1$, por tanto

$$T_1 = \frac{-C_1}{r_1} + C_2$$

$$C_2 = T_1 + \frac{C_1}{r_1} \quad (3.4)$$

De igual forma en $r = r_2 \Rightarrow T = T_2$; por tanto

$$C_1 = -(T_2 + C_2)r_2 \quad (3.5)$$

al sustituir (3.5) en (3.4) y resolver para C_1 y C_2 se obtiene

$$C_2 = \frac{T_2 r_2 - T_1 r_1}{r_2 - r_1} \quad (3.4a)$$

$$C_1 = \frac{r_1 r_2 (T_1 - T_2)}{r_1 - r_2} \quad (3.5a)$$

Finalmente sustituyendo las ecuaciones (3.4a) y (3.5a) en la ecuación (3.3):

$$T(r) = \frac{1}{r_2 - r_1} \left[r_1 T_1 \left(\frac{r_2}{r} - 1 \right) + r_2 T_2 \left(1 - \frac{r_1}{r} \right) \right] \quad (3.6)$$

La ecuación (3.6) es la solución analítica para el campo de temperaturas en el ánulo esférico, mostrado en la figura 3.1, de la ecuación de conducción de calor unidimensional (3.2) en estado estacionario.

3.2. Solución analítica de la ecuación de conducción de calor en esferas concéntricas, con generación volumétrica de calor.

En la sección 2.2 se describió el sistema compuesto por un núcleo con una temperatura uniforme T_1 , el ánulo esférico con conductividad térmica constante k y la superficie externa con temperatura uniforme T_2 , además existe generación volumétrica de energía \dot{q}_{gen} como se muestra en la figura 2.3. Debido a que la distribución de temperaturas es radial y uniforme, no existe transferencia de calor por conducción en las direcciones angulares \hat{e}_θ y \hat{e}_ϕ , por tanto la única dirección en la que existe conducción, es la radial \hat{e}_r .

Tomando en cuenta las condiciones anteriores, la ecuación general de conducción de calor (A.15), adopta la siguiente forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}_{gen}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.7)$$

De la misma manera que en el caso anterior, cuando la transferencia de calor se encuentra en estado estacionario, el término del lado derecho de la

ecuación (3.7) es igual a cero puesto que no hay una acumulación neta de la energía total; debido a que la temperatura varía espacialmente sólo en la dirección radial y no depende del tiempo, la ecuación anterior (3.7) se transforma en la ecuación diferencial ordinaria siguiente:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT(r)}{dr} \right) = -\frac{\dot{q}_{gen}}{k} r^2 \quad (3.8)$$

después de integrar

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{\dot{q}_{gen} r}{3k} + \frac{C_1}{r^2}$$

volviendo a integrar

$$T(r) = -\frac{\dot{q}_{gen} r^2}{3k} \frac{1}{2} - \frac{C_1}{r} + C_2$$

$$T(r) = -\frac{\dot{q}_{gen} r^2}{6k} - \frac{C_1}{r} + C_2 \quad (3.9)$$

En la figura 3.2 puede apreciarse que en $r = r_1 \Rightarrow T = T_1$, por tanto

$$C_2 = T_1 + \frac{C_1}{r_1} + \frac{\dot{q}_{gen} r_1^2}{6k} \quad (3.10)$$

Así también en $r = r_2 \Rightarrow T = T_2$, por tanto

$$C_2 = T_2 + \frac{C_1}{r_2} + \frac{\dot{q}_{gen} r_2^2}{6k} \quad (3.11)$$

al sustituir la ecuación (3.11) en (3.10) y resolver para C_1 y C_2 se obtiene:

$$C_1 = \frac{(T_2 - T_1) + \frac{\dot{q}_{gen}}{6k} (r_2^2 - r_1^2)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \quad (3.10a)$$

$$C_2 = \frac{(T_2 - T_1) + \frac{\dot{q}_{gen}}{6k} (r_2^2 - r_1^2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) r_1} + \frac{\dot{q}_{gen} r_1^2}{6k} + T_1 \quad (3.11a)$$

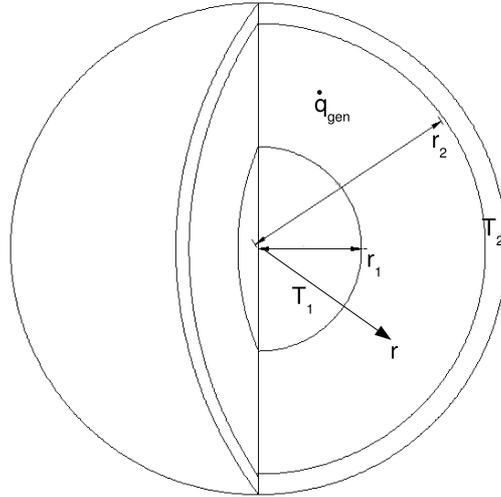


Figura 3.2: Diagrama del sistema esférico por capas con generación volumétrica uniforme de calor \dot{q}_{gen} .

Finalmente sustituyendo las ecuaciones (3.10a) y (3.11a) en la ecuación (3.9), el resultado es el siguiente:

$$T(r) = T_1 + \frac{\dot{q}_{gen}}{6k}(r_1^2 - r^2) + \frac{(T_2 - T_1) + \frac{\dot{q}_{gen}}{6k}(r_2^2 - r_1^2)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) \quad (3.12)$$

La ecuación (3.12) es la solución analítica para el campo de temperaturas en el ánulo esférico, mostrado en la figura 3.2, de la ecuación de conducción de calor unidimensional con generación uniforme de energía q_{gen} (3.8) en estado estacionario.

Capítulo 4

Solución numérica de la ecuación general de difusión de calor en esferas concéntricas.

En el presente capítulo se presenta la solución numérica de la ecuación general de conducción de calor en coordenadas cartesianas para el sistema de esferas concéntricas y se compara con la solución analítica obtenida en el capítulo 3.

La ecuación general de conducción de calor en coordenadas cartesianas es la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial kT}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial kT}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial kT}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.1)$$

(Incropera and De With, 1999)

Se resuelve la ecuación 4.1, para los casos mencionados en el capítulo 2, utilizando el método de elementos espectrales y dividiendo el dominio en 6 macro elementos, mediante el algoritmo de esfera cúbica, utilizando un polinomio de expansión de orden 21.

En la sección 4.1 se describe la forma mediante la cual se divide el dominio; las secciones 4.2 y 4.3 muestran los resultados del método numérico utilizado y su comparación con las soluciones analíticas para los casos de difusión unidimensional: sin generación volumétrica de calor y con generación volumétrica de calor.

Por último en la sección 4.4 se reporta la solución del problema de difusión de calor, sin generación volumétrica de energía, en tres dimensiones para el sistema esférico con enfriamiento en los polos de la esfera exterior.

4.1. El método de Elementos Espectrales y la discretización de la región anular esférica del sistema de esferas concéntricas.

La solución numérica de la ecuación general de conducción de calor en coordenadas cartesianas es obtenida mediante el método de elementos espectrales h/p, empleando el código NEKTON (Rönquist, 1980) (Patera, 1984), el cual se ejecutó en la supercomputadora “Kan Balam” de la Universidad Nacional Autónoma de México, utilizando uno de los 1348 procesadores AMD Opteron 285 con frecuencia de reloj de 2.6 GHz, pertenecientes a los 337 nodos de cálculo con 8Gb de memoria RAM del sistema HP Cluster Platform 4000 - Kan Balam.

La discretización del espacio anular esférico se realizó en seis elementos con forma y tamaño semejantes los cuales, al ser contiguos unos a otros forman una red o malla que recibe el calificativo de computacional o numérica.

Mientras más pequeños sean los elementos, la malla será mas “fina” y por tanto, los errores asociados a las aproximaciones de los valores de las propiedades buscadas serán menores; sin embargo, a medida que se refina la malla, el tiempo de cálculo en la computadora aumenta de manera considerable.

Para dividir el dominio esférico y obtener la malla numérica, se utilizó el algoritmo de cubo-esfera (vease apéndice B), el cual consiste en la proyección de los lados de un cubo circunscrito en una esfera, sobre la superficie de ésta, produciendo seis grandes elementos, los cuales integran una malla como la que se muestra en la figura 4.1.

El método de elementos espectrales, se origina a partir del método de residuos pesados y está basado en la formulación Bubnov-Galerkin, en el cual, las funciones con las que se aproximan las variables dependientes (ρ , P , \vec{V} , T), que aparecen en las ecuaciones de conservación (continuidad, cantidad de movimiento lineal, energía), son iguales a las funciones de peso utilizadas en el método de residuos pesados. Las funciones de expansión y en consecuencia

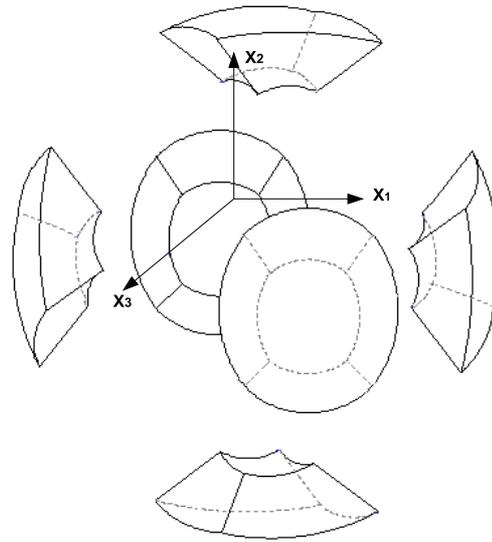


Figura 4.1: División del sistema esférico en 6 elementos iguales mediante el algoritmo de cubo esfera.

las funciones de peso, en el método de elementos espectrales, están definidas por los polinomios de expansión Gauss-Lobatto-Legendre (Patera, 1984) (Karniadakis and Sherwin, 1999).

El método de elementos espectrales, es uno de los métodos numéricos de solución de ecuaciones diferenciales parciales, constituidos por la relación h/p . El valor h es la cantidad de macro elementos que dan forma a la malla numérica y p es el orden del polinomio de expansión dentro de cada elemento h . Si la interpolación se realiza utilizando una función lineal, la exactitud en los resultados dependerá del tamaño de cada elemento h y por ende del número de éstos en la malla. Si por el contrario, como sucede en el método de elementos espectrales, la malla numérica se forma con un menor número de macro elementos h , la convergencia de los resultados obtenidos se conseguirá incrementando el orden del polinomio de interpolación p dentro de cada macro elemento (Patera, 1984) (Karniadakis and Sherwin, 1999) (Ávila, 2008).

Los nodos en el interior y en la frontera de cada elemento, se ubican en las raíces de los polinomios de interpolación Gaus-Logato-Legendre y el empleo de éstos, conduce a un aumento en la cantidad de puntos dentro de cada macro elemento, como se muestra en la figura 4.2. La solución para las variables (ρ, P, \vec{V}, T) de las ecuaciones de conservación en su forma

débil (Patera, 1984) (Lin and Atluri, 2001), se realiza mediante la integral numérica, utilizando el procedimiento de Cuadratura Gaussiana, del tipo Gauss-Lobatto-Legendre, con el que se transforma al conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas, en un sistema de ecuaciones algebraicas, en donde las incógnitas son los valores de las variables (ρ, P, \vec{V}, T) en cada nodo de la malla numérica (Patera, 1984) (Karniadakis and Sherwin, 1999) (Lin and Atluri, 2001) (Ávila, 2008).

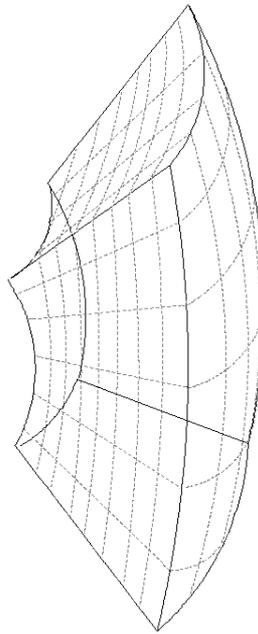


Figura 4.2: Colocación de los nodos en el interior de cada macro elemento.

El número de macro elementos utilizados en el presente trabajo es de seis, que representa el menor número de elementos con los que se ha discretizado el dominio de esferas concéntricas hasta el momento. El orden del polinomio de interpolación dentro de cada elemento, está restringido por el tiempo de cómputo disponible; para el fenómeno de conducción de calor se requiere una menor cantidad de cálculos que aquellos para el fenómeno de convección, el orden del polinomio de interpolación seleccionado es de 21.

4.2. Solución numérica de la ecuación de difusión de calor en coordenadas cartesianas sin generación volumétrica de calor.

La ecuación de difusión de calor sin generación volumétrica de energía en coordenadas cartesianas se resolvió mediante el método de elementos espectrales. En la figura 4.3 se compara el resultado numérico con la solución analítica de la ecuación de difusión de calor sin generación de energía térmica en coordenadas esféricas (3.6).

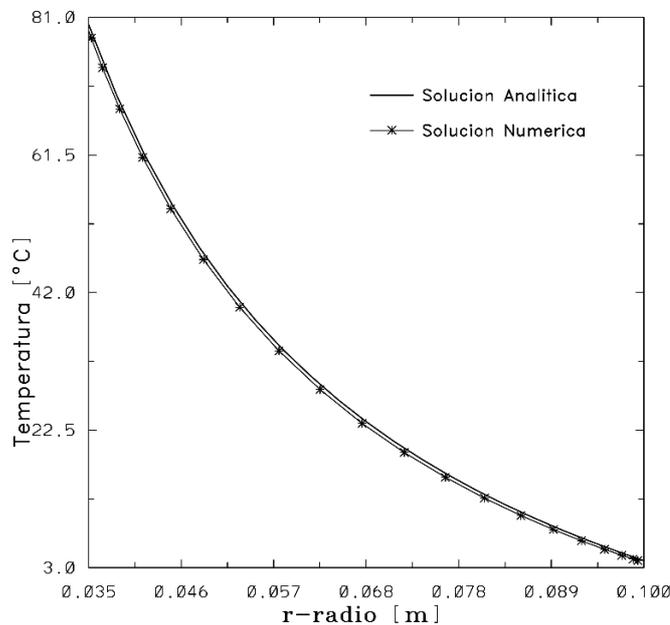


Figura 4.3: Solución analítica y solución numérica del problema de difusión de calor en esferas concéntricas; la temperatura de la esfera interna es de 80 °C y la externa de 4 °C.

El método numérico conduce a la obtención de una solución satisfactoria para el problema estudiado, el error promedio obtenido con respecto a la solución analítica es de 2.4% el cual es un valor pequeño, tomando en cuenta que el número de macro elementos utilizados es de 6 y el polinomio de interpolación es de orden 21.

Como puede observarse, la solución numérica se ajusta de manera muy

adecuada a la solución analítica; las diferencias mayores entre una y otra solución, se encuentran en el centro de cada uno de los elementos y aún cuando es en ésta región en donde el error alcanza el valor mayor de 3.5 %, la solución es una buena aproximación y la distribución de temperaturas mantiene la forma de la solución analítica con apenas pequeñas desviaciones.

La temperatura promedio en el sistema, obtenida a partir del método numérico, es de $\bar{T}_{num} = 28.2416$ ($^{\circ}C$), mientras que la temperatura promedio obtenida a partir de la solución analítica, es de $\bar{T}_{an} = 29.3021$ ($^{\circ}C$). Con un error de 3.61 % con respecto a la solución analítica, la solución numérica obtenida con este procedimiento es bastante satisfactoria. Es evidente que el valor de la temperatura promedio debe ser menor que el simple promedio aritmético de la temperatura en la esfera interna y la temperatura en la esfera externa, pues la distribución de temperaturas real no es lineal, como quedaría implícito al realizar el simple promedio aritmético.

El valor promedio de la solución analítica, es obtenido mediante el teorema del valor promedio de una función continua (Teorema 1), utilizando la ecuación de conducción de calor en esferas concéntricas (3.6), con $r_1 = 0.035$ (m), $r_2 = 0.1$ (m), $T_1 = 80$ ($^{\circ}C$), $T_2 = 4$ ($^{\circ}C$).

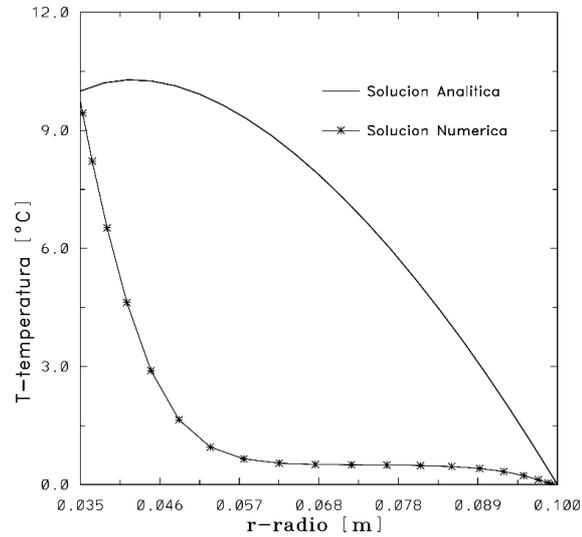
Teorema 1. *Teorema del valor promedio de una función continua (Thomas et al., 2006).*

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

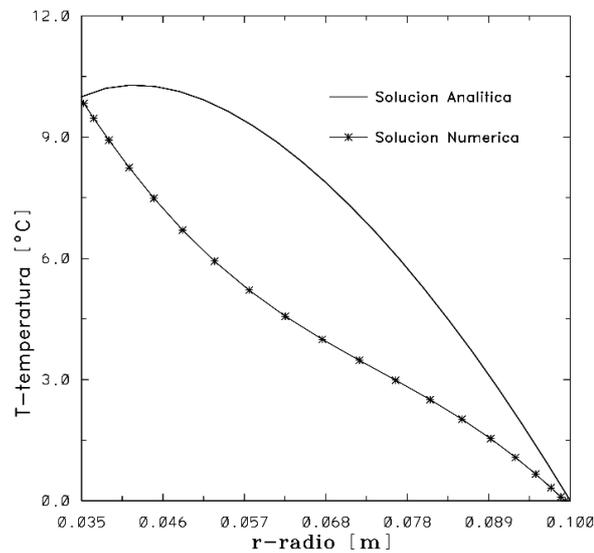
4.3. Solución numérica de la ecuación de difusión de calor en coordenadas cartesianas con generación volumétrica de calor

En las figuras 4.4 y 4.5 se muestra la comparación de la solución analítica en coordenadas esféricas de la ecuación de difusión de calor con generación volumétrica de calor (3.12) con la solución numérica obtenida mediante el método de elementos espectrales, se muestra además la evolución del sistema en el tiempo, en el que las propiedades físicas en el anulo esférico son las siguientes: $k = 0.569$ ($\frac{W}{m \cdot K}$), $\rho = 999.8402811$ ($\frac{kg}{m^3}$), $C_p = 4217.7936$ ($\frac{J}{kg \cdot K}$), $T_1 = 10$ ($^{\circ}C$), $T_2 = 0$ ($^{\circ}C$), el valor del término fuente es $\dot{q}_{gen} = 1000$ ($\frac{W}{m^3}$).

En la figura 4.4(a) se presenta la distribución de temperaturas al tiempo $t = 0.5 \times 10^{-4}$ (s), la figura 4.4(b) muestra la distribución de temperaturas en



(a) $t = 0.5 \times 10^{-4}$ (s)



(b) $t = 0.4 \times 10^{-3}$ (s)

Figura 4.4: Solución analítica y solución numérica para el problema de conducción de calor en esferas concéntricas con generación volumétrica de calor en estado transitorio.

el tiempo $t = 0.4 \times 10^{-3}$ (s) y la figura 4.5 muestra el perfil de temperaturas en estado estacionario $t > 0.1 \times 10^{-1}$ (s).

Puede observarse en la figura 4.5 el efecto que la presencia del término de generación volumétrica de calor tiene sobre la distribución de temperaturas; en el estado estacionario, la temperatura de cada punto en el ánulo esférico aumenta con relación a la temperatura alcanzada en ausencia del término fuente, esto se debe a que ahora la cantidad de energía que se transfiere es mayor, pues no sólo existe la transferencia de energía debida a la temperatura mayor del núcleo sino que ahora también se agrega la transferencia debida al término fuente.

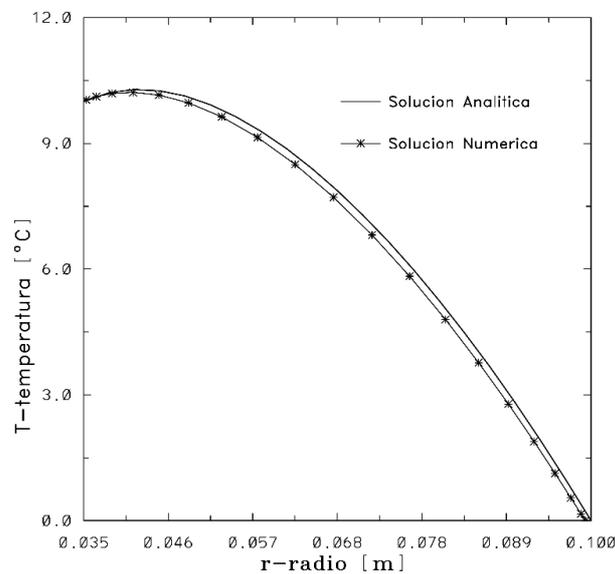


Figura 4.5: Solución analítica y solución numérica del problema de conducción de calor en esferas concéntricas con generación volumétrica de calor en estado permanente $t > 0.1 \times 10^{-1}$ (s).

En las figuras 4.4(a) y 4.4(b), el perfil de temperaturas decreciente en la dirección radial indican el sentido del flujo de energía, el cual ocurre, de acuerdo con la Segunda Ley de la Termodinámica, desde la esfera interna hacia la superficie externa del sistema, sin embargo, en el estado estacionario, mostrado en la figura 4.5, ésta condición deja de ser del todo válida pues como puede observarse, la temperatura mayor en todo el sistema no ocurre en el núcleo sino en un radio mayor de aproximadamente $r_{T_{mayor}} = 0.04$ (m), desde el cual y hacia ambos lados de este valor del radio, la temperatura disminuye;

de lo anterior se infiere que en el estado estacionario: el núcleo deja de ser la región desde la cual fluye energía para transformarse en un receptor de la misma.

Los valores de la solución numérica son el promedio del radio y de la temperatura en la esfera. El error promedio de la solución numérica con respecto a la solución analítica es de 3.9% y aún cuando es un error mayor al obtenido en la solución del problema de conducción de calor sin generación interna de calor, la aproximación obtenida reproduce en buena manera el perfil de temperaturas obtenido mediante la solución analítica, es pertinente recordar que la cantidad de elementos y el orden del polinomio de expansión en geometrías esféricas para cada elemento es muy inferior al de la mayoría de los trabajos reportados hasta el momento, por lo que las soluciones obtenidas son una buena aproximación con los recursos de cómputo disponibles.

4.4. Solución de la ecuación de difusión de calor en tres dimensiones para el sistema de esferas concéntricas sin generación volumétrica de calor con la influencia de polos fríos.

Como se introdujo en la sección 2.3, para éste caso en particular, el sistema está formado por dos esferas concéntricas en el cual la esfera interna tiene la temperatura mayor $T_1 = 80$ (°C), la esfera externa de menor temperatura que el núcleo, no mantiene una distribución uniforme de temperaturas; existen regiones frías ubicadas en los polos a $T_3 = 0$ (°C) y regiones de mayor temperatura que éstas en la zona ecuatorial a $T_2 = 4$ (°C) (ver figura 2.4).

A diferencia de los casos de difusión anteriores en los cuales la distribución de temperaturas es uniforme tanto en el núcleo como en la corteza, los polos fríos del presente sistema provocan gradientes de temperatura no sólo en la dirección radial sino también en las direcciones angulares, éste cambio en la configuración física del sistema conduce a considerar ahora también a los términos que contienen las derivadas parciales con respecto a θ y a ϕ de la ecuación (A.15).

La solución analítica de dicha ecuación, sin embargo, no existe debido a que es una ecuación diferencial en derivadas parciales con respecto a cua-

tro variables, r , θ , ϕ y el tiempo t ; aún cuando la ecuación se simplificara tratando de obtener su solución para el estado estacionario, su solución con respecto a las tres variables restantes es imposible. Hasta el momento no se encuentra reportada ninguna solución analítica para éste caso en ningún trabajo publicado.

En el presente trabajo se ha obtenido una solución numérica para el problema planteado utilizando el método de elementos espectrales con 6 elementos y un polinomio de interpolación de orden 21; dicha solución se presenta a continuación de manera gráfica para lo cual se han utilizado los programas especializados en visualización de datos OPENDX y AMIRA.

Se resolvió la ecuación general de difusión de calor en tres dimensiones en coordenadas cartesianas sin generación volumétrica de calor \dot{q}_{gen} , ecuación (4.1); todo el sistema se ha considerado isotrópico con valores constantes en las siguientes propiedades: conductividad térmica $k = 0.569(\frac{W}{m^2})$, densidad $\rho = 999.84028(\frac{kg}{m^3})$ y capacidad térmica a presión constante de $C_p = 4217.7936(\frac{J}{kgK})$.

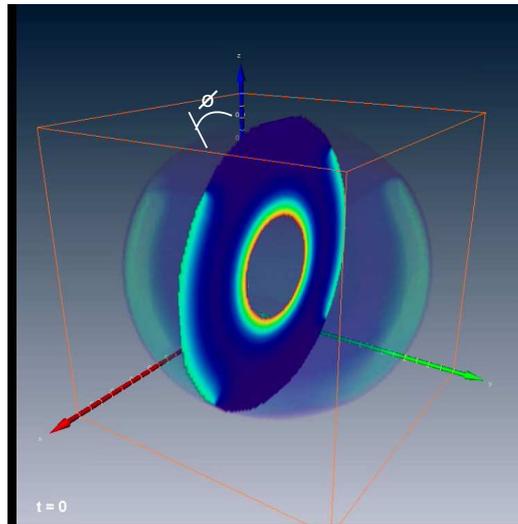


Figura 4.6: Distribución de temperaturas al inicio de los cálculos $t = 0(s)$.

La figura 4.6 muestra la distribución de temperaturas del sistema en el tiempo $t = 0(s)$; tanto el espacio confinado entre las superficies interior y exterior como las regiones polares de la esfera externa ($0^\circ < \phi < 54.7^\circ \cup 109.47^\circ < \phi < 180^\circ$) se encuentran a una temperatura inicial de $T = 0(^\circ C)$ (con coloración azul oscuro). Para las regiones polares, este valor de temperatura se mantendrá constante, siendo por tanto una condición de frontera

4.4 Solución de la ecuación de difusión de calor en tres dimensiones para el sistema de esferas concéntricas sin generación volumétrica de calor con la influencia de polos fríos.

del propio sistema; para el ánulo esférico, esta temperatura es sólo el valor inicial, el cual sufrirá cambios a medida que el sistema evoluciona hacia el estado estacionario. La coloración roja indica la zona de mayor temperatura $T = 80^{\circ}\text{C}$, que corresponde a la superficie de la esfera interna. La coloración verde claro en la región ecuatorial de la esfera externa, indica otra región que se mantendrá a una temperatura constante $T = 4^{\circ}\text{C}$, siendo también otra condición de frontera del sistema.

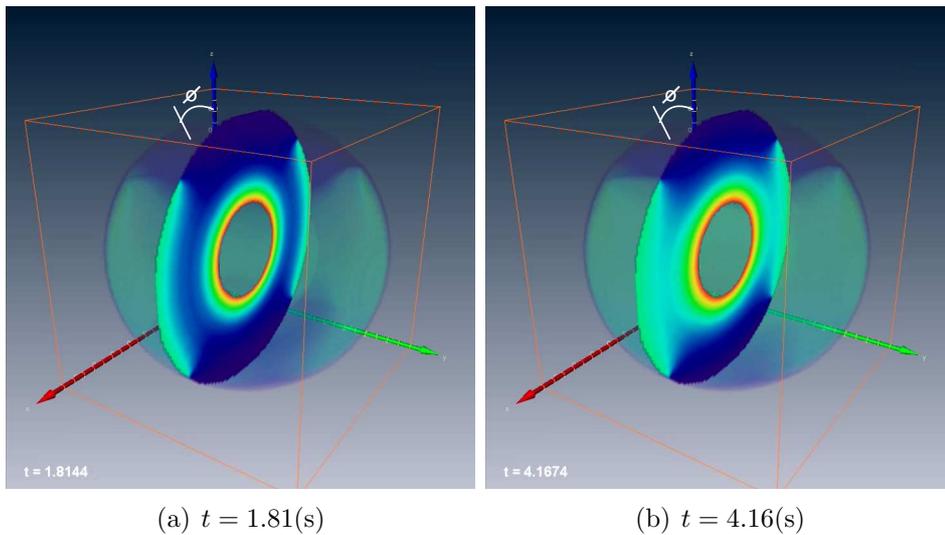


Figura 4.7: Distribución de temperaturas en el estado transitorio.

En la figura 4.7 puede apreciarse la distribución de temperaturas en el estado transitorio del sistema analizado; la figura 4.7(a) muestra, en el tiempo $t = 1.81$ (s), el inicio de la transferencia de energía evidenciado por el aumento de temperatura, desde el núcleo y desde la región ecuatorial hacia el espacio anular esférico. En este instante, la temperatura aumenta de manera uniforme desde el núcleo generando isothermas esféricas, pues la región cercana a él no es modificada por las condiciones de frontera en la superficie de la esfera exterior. A medida que transcurre el tiempo y como es evidente en la figura 4.7(b), el aumento de temperatura ha ocurrido desde el núcleo y desde la región ecuatorial hacia el ánulo esférico y la distribución de temperaturas de todo el sistema no es uniforme en las direcciones angulares ni en la dirección radial. Las condiciones de frontera muestran ya la influencia que tendrán sobre el perfil de temperaturas final.

Por último, en el estado estacionario, mostrado en la figura 4.8, se aprecia que la distribución de temperaturas no es uniforme, confirmando de esta

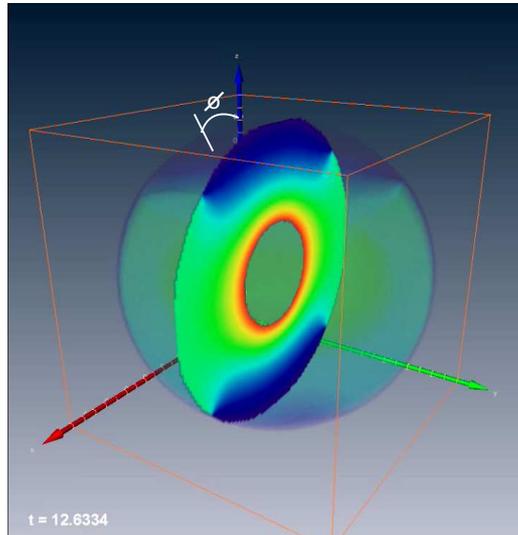


Figura 4.8: Distribución de temperaturas en el estado estacionario $t > 12.6$ (s).

manera que se trata de un problema de difusión de calor tridimensional.

Puede apreciarse por la coloración verde claro en la figura 4.8, la influencia que sobre la distribución de temperaturas del sistema tiene la temperatura en los polos, influencia que en la dirección del ángulo azimutal $\phi = 0^\circ$, provoca que la temperatura se mantenga por abajo de 4°C (coloración verde claro) inclusive hasta la mitad del espacio anular esférico, pues la coloración azul ($T \approx 0^\circ\text{C}$) se extiende hasta un poco más de la mitad en dicho espacio.

Capítulo 5

Convección natural en el sistema de esferas concéntricas.

En este capítulo se presenta el estudio realizado sobre el fenómeno de convección natural en el ánulo esférico considerando un fluido con densidad y viscosidad constante, sin embargo, en los términos de flotación de las ecuaciones de gobierno, se ha considerado la aproximación de Boussinesq, que implica que la densidad presenta una variación en la dirección en que actúa la fuerza e gravedad.

Se han realizado simulaciones numéricas, en las que se ha incrementado el número de Rayleigh hasta un valor de $Ra = 3$, y se ha encontrado el flujo base existente en el espacio anular esférico.

En la sección 5.1 se presentan los modelos matemáticos que describen al fenómeno.

En la sección 5.2 se presenta y discute el flujo base obtenido en los cálculos.

5.1. Modelos Matemáticos del Fenómeno de Convección Natural.

El fluido en movimiento en el interior del ánulo esférico, debe satisfacer los principios de conservación de masa, conservación de cantidad de movimiento y conservación de energía.

Las tres condiciones anteriores expresadas como ecuaciones en forma vectorial para un fluido newtoniano incompresible con propiedades físicas constantes son las siguientes (White, 2003):

$$\frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (5.1)$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (5.2)$$

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} + P (\nabla \cdot \vec{V}) = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (5.3)$$

donde el operador:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)$$

representa la derivada material de una función vectorial o escalar cualquiera.

La densidad ρ es considerada constante con una excepción. La variación de la temperatura provoca variaciones en la densidad del fluido, induciendo las fuerzas de flotación que son causantes del movimiento del mismo cuando éste se encuentra inmerso en un campo gravitatorio, como lo es el campo gravitacional terrestre. Tal variación en la densidad del fluido es tomada en cuenta en el término de las fuerzas externas de la ecuación (5.2), ésta es la aproximación de Boussinesq (Chandrasekhar, 1990).

La consideración anterior se hace efectiva en la ecuación de conservación de cantidad de movimiento de la siguiente manera:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = (\rho + \delta\rho) \vec{g} - \nabla (P_o + P^*) + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (5.4)$$

Donde se ha incluido el término $\delta\rho$ que representa la variación de la densidad, con respecto a la densidad de referencia (constante) en el medio,

debido a la variación de la temperatura, además se ha tomado en cuenta que la presión P está compuesta por un término referente a la presión hidrostática P_o y otro referente a la presión hidrodinámica P^* .

En la ausencia de variaciones de temperatura en el fluido, la variación de la densidad $\delta\rho$ es inexistente y debido a que ésta es la única razón por la cual se induce movimiento en el fluido, en la ecuación (5.4), los términos que contienen al vector velocidad, el término de la presión hidrodinámica y el término de la variación de la densidad $\delta\rho$ son iguales a cero, dando el siguiente resultado:

$$0 = \rho \vec{g} - \nabla P_o$$

que es la condición de equilibrio hidrostático, usando este resultado en la ecuación (5.4) se obtiene

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \delta\rho \vec{g} - \nabla P^* + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (5.5)$$

La ecuación (5.5), es la ecuación de conservación de cantidad de movimiento adecuada para el proceso de convección natural, que junto con la ecuaciones de conservación de masa (5.1) y conservación de energía (5.3) rigen el comportamiento del fluido.

La variación de la densidad con respecto a la temperatura puede obtenerse si se conoce la ecuación de estado del fluido de que se trate.

En el presente trabajo, se realizó el estudio sobre un sistema como el mostrado en la figura 2.1, donde el fluido confinado entre la esfera interna y la esfera externa es agua, la temperatura de la esfera interna es de $80^\circ C$ y la temperatura de la esfera externa es de $4^\circ C$ (condiciones Dirichlet).

Para el agua, la relación de densidad-temperatura es aproximada mediante el siguiente polinomio de 4° grado (Inaba and Fukuda, 1984);

$$\rho = \frac{\rho_r}{1 + aT + bT^2 + cT^3 + dT^4} \quad (5.6)$$

donde ρ_r es la densidad de referencia del agua a $T_r = 0^\circ C$; los coeficientes a , b , c y d tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 a &= -0.67896452 \times 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \\
 b &= 0.907294338 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-2} \\
 c &= -0.96456812 \times 10^{-7} \text{ } ^\circ\text{C}^{-3} \\
 d &= 0.873702983 \times 10^{-9} \text{ } ^\circ\text{C}^{-4}
 \end{aligned}$$

Las propiedades del agua, como se mencionó en la discusión previa, se consideran constantes y tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 k &= 0.569 \left(\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right) \\
 C_p &= 4217.12 \left(\frac{\text{W}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right) \\
 \mu &= 1.75 \times 10^{-3} \left(\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right)
 \end{aligned}$$

La relación entre las fuerzas de flotación y las fuerzas viscosas, representadas en el número de Rayleigh, para el caso de esferas concéntricas se define de la siguiente manera:

$$Ra = \frac{\beta g \Delta T (r_{ext} - r_{int})^3}{\nu \alpha} \quad (5.7)$$

Donde β es el coeficiente de expansión volumétrica del fluido y se define como:

$$\beta = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) \quad (5.8)$$

La densidad ρ en la ecuación anterior, se calcula mediante la expresión (5.6); la temperatura a la cual se evalúa el coeficiente de expansión volumétrica β , es la temperatura promedio del fluido confinado y que corresponde al estado estacionario del problema de conducción de calor sin generación volumétrica de energía, que como se reportó en la sección 4.2 tiene el valor de $\bar{T}_{num} = 28.2416$ ($^\circ\text{C}$).

El número de Nusselt en cualquier radio r_m , que es una relación entre la transferencia de calor por convección y la transferencia de calor por conducción, para el arreglo de esferas concéntricas queda definido de la siguiente manera (Yanagisawa and Yamagishi, 2005):

$$Nu_{r_m} = \frac{r_1 \Delta r}{r_2 \Delta T} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_m} \quad (5.9)$$

El número de Nusselt en el caso difusivo puede calcularse mediante la obtención de la derivada indicada en la ecuación (5.9). La función de temperatura por derivar es la solución de la ecuación de difusión de calor sin generación volumétrica de energía (3.6), que por ser función únicamente del radio, tiene la siguiente derivada:

$$\left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{r_m} = \frac{r_1 r_2 \Delta T}{\Delta r} \left. \frac{1}{r^2} \right|_{r_m} \quad (5.10)$$

Evaluada tanto en el radio interno r_1 como en el radio externo r_2 , se tiene:

$$\left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{r_1} = \frac{r_2 \Delta T}{r_1 \Delta r} \quad (5.11)$$

$$\left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{r_2} = \frac{r_1 \Delta T}{r_2 \Delta r} \quad (5.12)$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión del número de Nusselt, obtenemos el valor de este parámetro adimensional para el caso de difusión de calor, evaluado en la esfera interna como en la esfera externa, valores que deben ser reproducidos en los cálculos.

$$Nu_{dif} \Big|_{r_1} = \frac{r_1 \Delta r}{r_2 \Delta T} \frac{r_2 \Delta T}{r_1 \Delta r} = 1$$

$$Nu_{dif} \Big|_{r_2} = \frac{r_1 \Delta r}{r_2 \Delta T} \frac{r_1 \Delta T}{r_2 \Delta r} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 = 0.1225$$

5.2. Solución Numérica del Problema de Convección Natural en Esferas Concéntricas

Las ecuaciones de conservación se resolvieron haciendo uso del método numérico de elementos espectrales. El ánulo esférico se discretizó en 6 macro elementos y el polinomio de interpolación utilizado fué de orden 11. Se consideró la acción, sobre el ánulo esférico, de una fuerza de gravedad radial $\vec{g} = -g \vec{x}$, donde \vec{x} es el vector de posición de cualquier punto ubicado dentro del ánulo esférico y g tiene un valor constante con unidades $g \left(\frac{1}{s^2}\right)$.

El sistema está sujeto inicialmente al campo de temperaturas obtenido de la solución numérica del problema de difusión de calor unidimensional sin generación volumétrica de calor, ver figura 4.3.

A partir de este campo de temperaturas y debido a la fuerza de gravedad radial, el sistema evoluciona hasta generar los patrones de convección existentes en este tipo de geometrías.

5.2.1. Valores del número de Nusselt.

El número de Nusselt local se ha evaluado de la siguiente manera:

$$Nu_{r_m} = \frac{r_2}{r_1} \frac{\Delta r}{k \Delta T} k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r_m} = \frac{r_2}{r_1} \frac{\Delta r}{k \Delta T} q_{r_m}$$

Donde q_{r_m} es el valor del flujo de calor existente en la dirección radial del sistema esférico evaluado en el radio r_m .

Para el fenómeno puramente difusivo, el valor obtenido del Nusselt en la esfera interna es de $Nu_{r_1} = 1.038$; resultado que es congruente con el valor esperado de $Nu_{r_1} = 1$, que indica que todo el transporte de energía desde la esfera interior hasta la esfera exterior es llevado a cabo mediante el fenómeno de conducción de calor sin intervención del fenómeno de convección natural. La desviación de 3.8 % con respecto al valor esperado es atribuible al error asociado a los cálculos, que implican truncar cifras en cada iteración para obtener la solución aproximada.

El valor obtenido del número de Nusselt en la esfera externa es $Nu_{r_2} = 0.1175$, que representa un error de 4.08 % con respecto al valor esperado de $Nu_{r_2} = 0.1225$.

5.2.2. Flujo base en el ánulo esférico.

El tiempo de cómputo, es un inconveniente para realizar un cálculo con numeros de Rayleigh cercanos al valor del Rayleigh crítico, que para la relación de radios utilizada en el presente trabajo es de $Ra = 5600$ (Travnikov et al., 2003), por tal motivo, se ha realizado un cálculo, en el cual el campo de gravedad presenta una distribución diferente al perfil de temperaturas, es decir diferente a la variación de la temperatura en la dirección radial.

De acuerdo con lo publicado en (Joseph and Carmi, 1966), cuando el campo gravitatorio tiene la misma distribución espacial que la distribución de temperaturas en el ánulo esférico, el fluido debe permanecer estático con números de Rayleigh por debajo del valor crítico. Si el campo gravitatorio tiene un distribución espacial diferente a la del campo de temperaturas, el sistema se vuelve inestable y puede despertarse el movimiento, como sucede en el caso presentado a continuación.

Se presenta el flujo base en el ánulo esférico correspondiente a un número de Rayleigh subcrítico con valor de $Ra = 3 < Ra_{cr} = 5600$, obtenido en el estado estacionario mostrado en la figura 5.1, que corresponde a la magnitud del vector velocidad en un punto sobre el ánulo esférico, con coordenadas $(-0.2631E-01, 0.8950E-01, -0.2631E-01)[m]$.

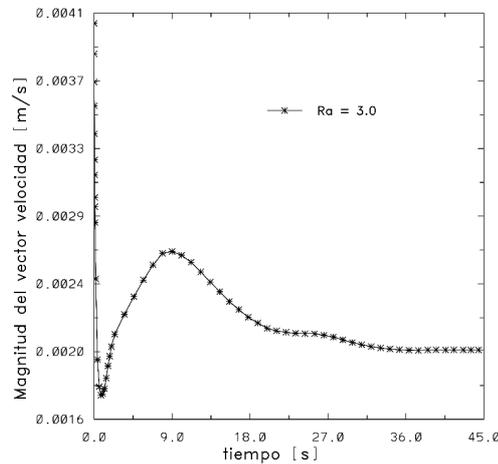


Figura 5.1: Magnitud del vector velocidad. A partir de $t = 35(s)$ se alcanza el estado estacionario.

En la figura 5.2, se muestra la comparación de la magnitud del vector de velocidad para el mismo punto, considerando dos formas diferentes del

campo gravitatorio radial, una correspondiente al caso reportado en el presente trabajo y la otra considerando una distribución de gravedad del tipo $g(r) = \frac{1}{r^2}$, que es la forma de la variación de la temperatura en dirección radial. Según lo mencionado líneas arriba, la magnitud del vector velocidad debería ser cero, sin embargo, el error asociado al cálculo del campo gravitatorio en cada punto, ocasiona que tal magnitud, aún cuando se acerca a cero, tenga los valores que se muestran hasta el tiempo $t = 0.8(s)$, tiempo en el cual el cálculo pierde convergencia numérica y el programa aborta.

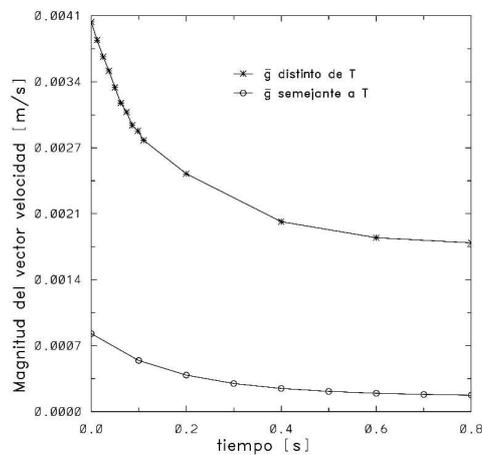


Figura 5.2: Magnitud de la velocidad con $Ra = 3$.

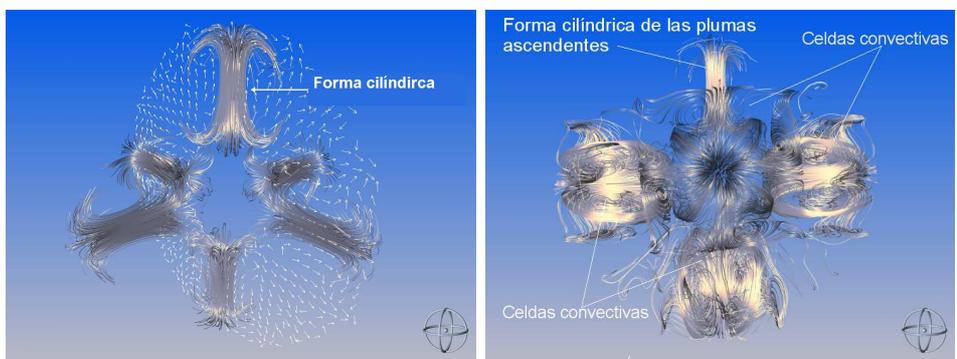
Como puede apreciarse, cuando se considera una distribución geométrica del campo gravitatorio radial igual a la distribución de temperaturas en el ánulo esférico, se requiere de una mayor precisión en los cálculos, que es alcanzable mediante el aumento del grado del polinomio de expansión o mediante una disminución del intervalo de tiempo entre un cálculo y otro; ambos casos requieren de un tiempo de cómputo mayor al disponible para la realización del presente trabajo.

Debido a que el número de Rayleigh es muy bajo, el número de Nusselt permanece inalterado $Nu_{r1} = 1.038$, así como el campo de temperaturas, sin embargo, se mantiene un flujo base en el sistema de esferas concéntricas, debido al campo de gravedad con forma $\vec{g} = g\vec{x}$, el cual se presenta a continuación.

La gráfica de los vectores de velocidad sobre diversos planos en el ánulo esférico, revela la existencia de seis regiones de flujo “ascendente” (plumas ascendentes) ubicadas simétricamente sobre el sistema esférico. Al visualizar

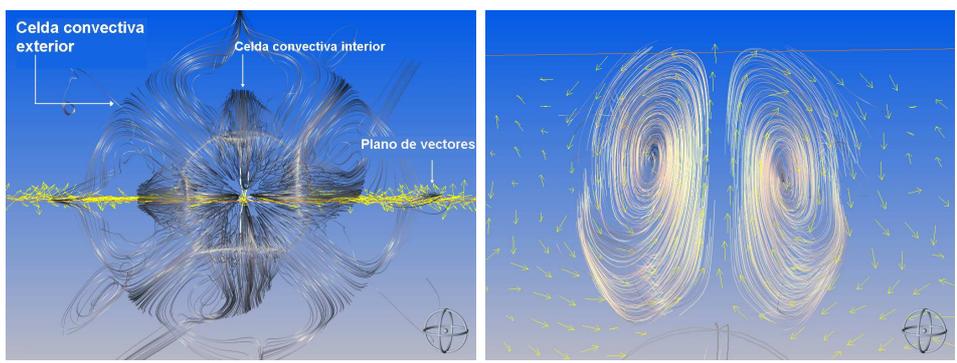
las líneas de corriente cercanas a estas plumas, se observa que mantienen una forma cilíndrica y que en realidad se trata de la formación de 6 celdas convectivas todas con más o menos el mismo tamaño y forma (véase fig.5.3(a) y fig.5.3(b)).

La vista superior de cualquiera de las celdas convectivas, como la mostrada en la figura 5.4(a), revela que están compuestas por una zona interior y una exterior. Al colocar un plano de vectores de velocidad que coincida con las líneas de corriente que dan forma a la celda interior y desde una perspectiva lateral, puede observarse que ésta se forma con cuatro grandes vórtices, distribuidos simétricamente al rededor de la pluma convectiva. Cada vortice



(a) Hubicación simétrica de las plumas ascendentes con forma cilíndrica (b) Pluma ascendente y celdas convectivas.

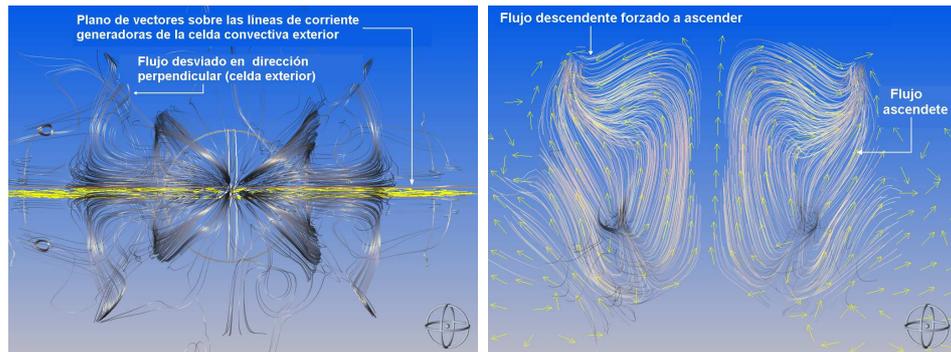
Figura 5.3: Hubicación simétrica de las celdas convectivas en el sistema esférico.



(a) Vista superior de una celda convectiva. (b) Vórtices de la celda convectiva interior.

Figura 5.4: Celda convectiva interior.

hace circular por la parte interna de la celda convectiva al fluido caliente que proviene de la esfera interior hacia la esfera exterior; el fluido más frío (de mayor densidad), regresa por la parte exterior de éstos vortices hacia la esfera interior (Véanse figuras 5.4(a) y 5.4(b)).

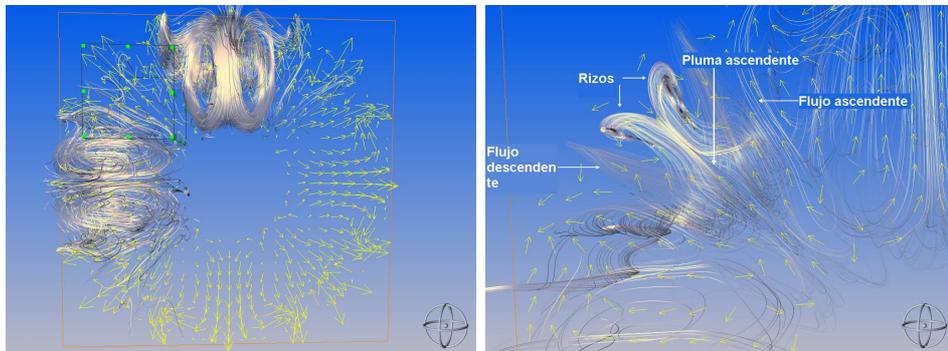


(a) Flujo desviado perpendicularmente de su dirección original de ascenso. (b) Plano de flujo totalmente ascendente.

Figura 5.5: Celda convectiva exterior.

Por otro lado, al colocar un plano de vectores de velocidad sobre las líneas de corriente que se extienden más allá de la celda interior y que dan origen a la parte exterior de la celda convectiva (ver figura 5.5(a)), y al observar esta región desde una perspectiva lateral (ver figura 5.5(b)), nos damos cuenta que estas zonas del flujo no forman vortices ni son zonas de recirculación de fluido, por el contrario, todo el flujo es ascendente, de modo que el fluido que originalmente ascendió por la parte interna de la celda convectiva, al llegar a la esfera exterior disminuye de temperatura (aumenta su densidad) y ahora desciende desde la parte superior de la celda convectiva, se ve impelido de nueva cuenta hacia la esfera exterior por flujos de mayor temperatura provenientes de la esfera interna. El fluido que de ésta manera ha llegado a la esfera externa, el proveniente de la parte interna de la celda convectiva y el ascendente desde la esfera interna, ahora se desvía en dirección perpendicular al plano formado por estos flujos, es decir, perpendicular al plano de vectores de velocidad (mostrado en las figuras 5.5(a) y 5.5(b)), para posteriormente descender, formando de éste modo la parte exterior de la celda convectiva.

La figura 5.6(a) muestra que los planos que intersectan a cuatro celdas convectivas, son planos donde el flujo es totalmente ascendente, además son los planos de flujo que originan la parte exterior de las celdas convectivas, por lo que la figura 5.5(b) es un acercamiento a dichos planos sobre una celda convectiva.



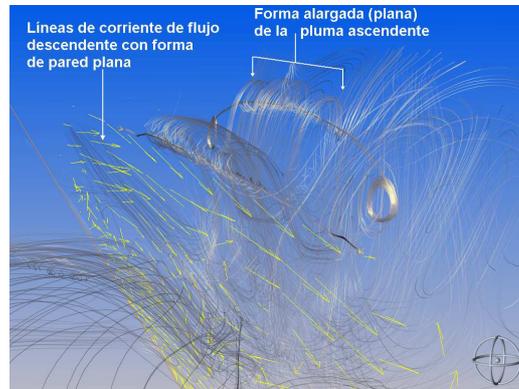
(a) Plano de flujo ascendente. (b) Región de flujo entre dos celdas convectivas.

Figura 5.6: Regiones de flujo entre dos celdas convectivas.

En la figura 5.6(a) se encuentra enmarcada una de las regiones que ubica-
 das entre dos celdas convectivas. Es evidente que en éstas zonas existe el flujo
 ascendente que se ha mencionado, sin embargo, como se verá en las siguientes
 imágenes, éstas también son grandes regiones de distribución de fluido y de
 flujo descendente. La figura 5.6(b) muestra, en la región comprendida entre
 dos celdas convectivas, la formación de una pluma de fluido ascendente que,
 al llegar a la parte superior del sistema esférico, se divide formando un par
 de rizos (el plano de vectores de velocidad mostrado es el mismo que inter-
 secta a las cuatro celdas convectivas de la figura 5.6(a)). En la figura 5.6(b)
 pueden apreciarse también, dos bandas de líneas de corriente que marginan
 a la pluma ascendente y sus rizos, un plano de vectores que coincida con
 éstas líneas mostrará que se trata de regiones en donde el fluido desciende
 formando una pared aplanada que sale del plano de vectores mostrado en la
 figura. Al exterior de éstas dos bandas, el fluido asciende nuevamente para
 encontrarse con el flujo proveniente de la celda convectiva exterior, obligando
 a éste último a moverse de la manera antes explicada.

Las imágenes 5.7(a) y 5.7(b) de la región de flujo entre dos celdas, mues-
 tran que las plumas ascendentes en ésta zona son de forma mas bien plana
 y que los rizos que se originan, distribuyen al fluido en una manera similar
 al movimiento de un tornillo, los vectores mostrados se hubican sobre las
 líneas de corriente que marginan a la pluma convectiva; en la figura 5.7(b)
 se aprecia muy bien que el fluido desciende por éstas zonas que tienen una
 distribución de pared aplanada.

Otra región que es necesario analizar, es la ubicada justo entre tres cuales-
 quiera celdas de convección. La figura 5.8(a) muestra la perspectiva superior



(a) Redistribución del fluido en forma de tornillo.



(b) Flujo descendente a manera de pared plana marginal circundante de la pluma ascendente.

Figura 5.7: Flujo entre dos celdas convectivas.

de una celda convectiva y la vista lateral de dos mas abajo entre las cuales se encuentran las regiones de interés, resaltadas sobre la línea de un plano de vectores de velocidad que servirá como referencia. El plano interesecta únicamente a dos celdas convectivas, la mas próxima al observador y la que se encuentra justo por debajo de ésta, sobre este plano, cuatro son las zonas ubicadas entre tres celdas convectivas, como se muestra en la figura 5.8(b).

La figura 5.8(b) es la vista lateral del plano de vectores mencionado y las cuatro regiones de interés. Puede apreciarse que éstas, son zonas donde el flujo es descendente. Al colocar líneas de corriente (fig. 5.8(c)) nos damos cuenta que tienen una forma cilíndrica y que se “alimentan” de los flujos provenientes de las celdas convectivas aledañas (ilustradas por los prismas

rectangulares en la figura) y de los rizos con forma de tornillo que se mencionaron con anterioridad. La figura 5.8(d) confirma, con la ayuda de los vectores de velocidad, que esta pluma cilíndrica ubicada entre tres celdas convectivas es de flujo descendente.

Con la descripción anterior de las tres diferentes regiones de flujo, se puede obtener el mapa general de flujo mostrado en las figuras 5.9(a), 5.9(b) y 5.9(c).

En la figura 5.9(a) se muestra el mapa general de flujo. Seis son las grandes celdas convectivas en las que el fluido recircula mediante cuatro grandes vortices, la ubicación de éstas queda esquematizada por las plumas sólidas de la figura 5.9(a). Las regiones situadas entre dos celdas convectivas, forman una serie de paredes interconectadas de flujo descendente con una pluma ascendente de forma plana en el centro de ellas, como puede apreciarse en

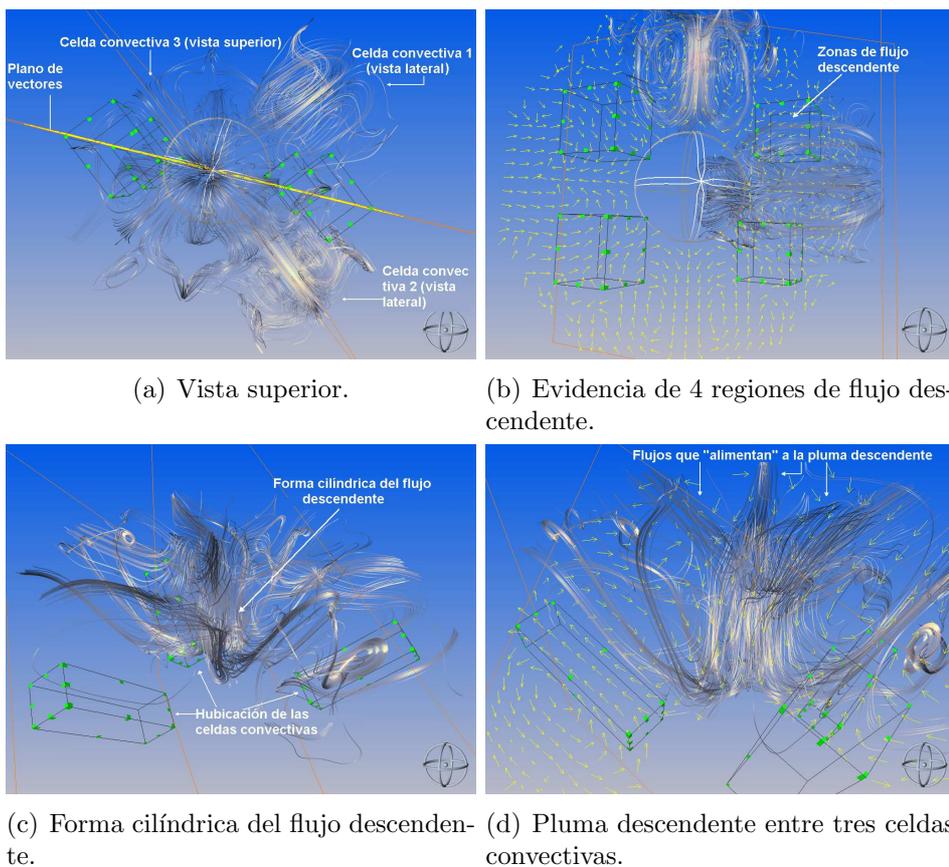
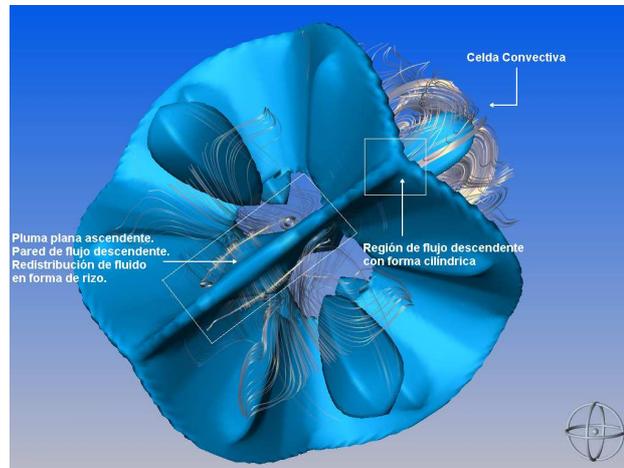
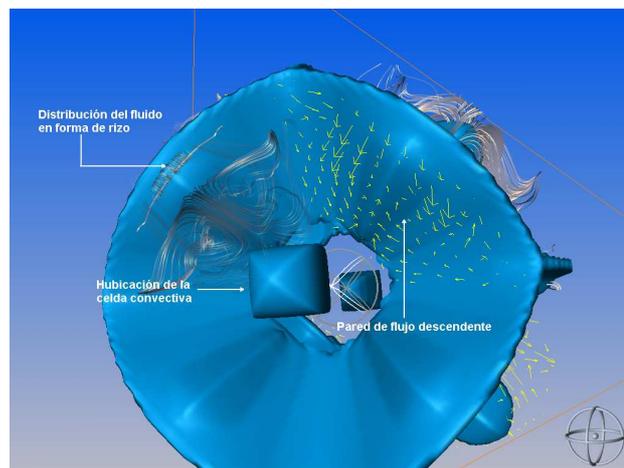


Figura 5.8: Región de flujo entre tres celdas convectivas.

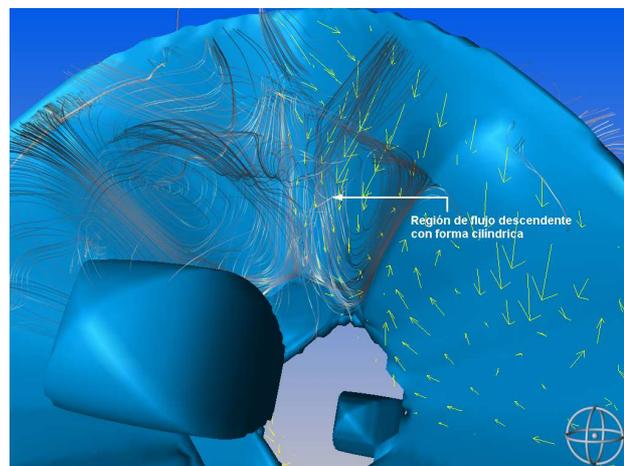
la figura 5.9(b). Los vértices formados por la intersección de las paredes, geométrica mente ubicados entre tres celdas convectivas, son regiones donde el flujo desciende manteniendo una estructura cilíndrica, como la que se muestra en las figuras 5.8(c) y 5.9(c).



(a) Mapa general del flujo.



(b) Paredes de flujo descendente, con una pluma aplana-da de flujoascendente en el centro.



(c) Flujo cilíndrico descendente en la intersección de tres paredes de flujo.

Figura 5.9: Mapa de flujo en esferas concéntricas.

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajo a Futuro.

Con el procedimiento utilizado en el presente trabajo, se han podido obtener buenos resultados en la solución del problema de difusión de calor y convección natural en la geometría esférica con núcleo caliente.

El empleo del algoritmo “Cubo-Esfera”, ha permitido contar con una discretización del dominio sin los problemas relacionados a la propia geometría, garantizando que las coordenadas de los puntos en los que se ha dado solución a las ecuaciones de conservación se encuentren efectivamente sobre la superficie de la esfera y utilizando únicamente seis macro elementos con un polinomio de interpolación de orden 21 para el problema de difusión y de orden 11 en el problema de convección, lo que ha permitido reducir el tiempo de cómputo asociado a calculos que involucran un numero mayor de macroelementos, con una pequeña pérdida de exactitud, que se ve reflejada en errores no mayores a 3.5 % en promedio y con el que se ha podido corroborar que el valor del número de Nusselt para el caso difusivo es igual a 1.

Los patrones de convección obtenidos coinciden con lo publicado en (Bercovici et al., 1989), donde uno de los dos patrones de convección reportados se forma por seis plumas cilíndricas ascendentes y una serie de flujos descendentes que las rodean.

Los patrones de convección obtenidos se han generado sin la introducción de perturbaciones de ningún tipo, permitiéndole evolucionar por sí solo con únicamente la distribución de temperaturas en la esfera, obtenido del proceso de difusión, como condición inicial. Se ha hecho la consideración de un fluido

viscoso en todo el ánulo esférico, de modo que se toma en cuenta la influencia de las superficies que forman las fronteras del sistema, por lo que el resultado, es el patrón de flujo que de manera natural se presentaría en este tipo de sistemas con las características mencionadas.

Además, se ha obtenido un mapa general del flujo base en todo el ánulo esférico, que aclara de mejor forma lo que ocurre en cada una de las regiones del globo, complementa los trabajos precedentes y en el cual, pueden ubicarse zonas de recirculación, redistribución, descenso y estancamiento del fluido.

El sistema esférico con gravedad radial, es un sistema altamente inestable. La verificación de la condición de no movimiento del fluido con números de Rayleigh menores al valor crítico, requiere de un aumento en el grado del polinomio de interpolación del método de elementos espectrales o una disminución del intervalo de tiempo entre un cálculo y otro así como de asegurar que tanto la variación de la temperatura como el campo gravitatorio tengan la misma distribución geométrica.

Una consideración más que puede hacerse y que conduciría a la realización de un trabajo posterior, es el concerniente la intruducción de un modelo de cambio de la viscosidad del fluido con respecto a la temperatura. Es posible que la consideración de este fenómeno en los cálculos, dé como resultado un cambio en el patrón de convección obtenido.

Dado que la investigación del fenómeno de convección natural en esta geometría tiene como motivación el brindar un poco de luz sobre lo que ocurre en sistemas que tienen una configuración como la de las capas internas de la tierra, introducir rotación en el sistema con respecto a un eje es el evidente paso necesario; trabajo que queda pendiente.

Apéndice A

Ecuación general de conducción de calor en esferas concéntricas (coordenadas esféricas)

Para el desarrollo de la ecuación de difusión de calor en el sistema esférico por capas, representado por la figura 2.3 (en el cual existe una fuente de energía térmica así como una diferencia de temperaturas entre el núcleo y la esfera externa y el espacio anular esférico entre ellas es de un material sólido con conductividad térmica k), se define una pequeña porción del espacio esférico tridimensional como volumen de control diferencial para el análisis de conducción de calor en coordenadas esféricas (ver figura A.1), en el cual se analizan todas las interacciones de energía térmica involucradas y se realiza el balance correspondiente, tal como queda establecido en la ecuación de conservación de energía (A.1) para cualquier sistema cerrado.

$$\dot{E}_{\text{ent}} - \dot{E}_{\text{sal}} + \dot{E}_{\text{gen}} - \dot{E}_{\text{dest}} = \dot{E}_{\text{alm}} \quad (\text{A.1})$$

Donde \dot{E}_{ent} representa todos los flujos de energía térmica que ingresan al volumen de control, \dot{E}_{sal} son todos los flujos de energía térmica salientes del volumen de control, \dot{E}_{gen} representa a la energía que se genera dentro del volumen de control, la cual incluye a todas las transformaciones de cualquier tipo de energía (mecánica, nuclear, etc.) en energía térmica; \dot{E}_{dest} es la energía térmica que se transforma en cualquier otro tipo de energía dentro del volumen de control y finalmente \dot{E}_{alm} representa la variación total de la

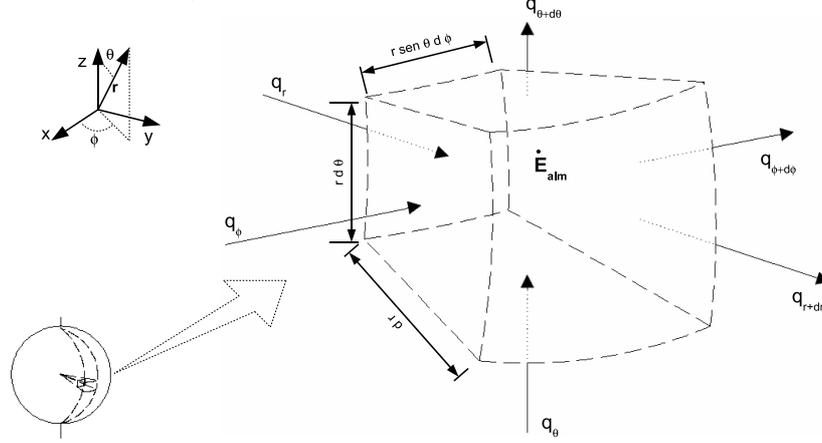


Figura A.1: Volumen de control diferencial, $(dr, rd\theta, r\text{sen}(\theta)d\phi)$, para el análisis de conducción en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

energía térmica en el volumen de control, la cual puede aumentar o disminuir; todas las anteriores son la medida de la variación de dichas cantidades en el transcurso del tiempo y sus unidades son $\dot{E}(W)$.

Tomando en cuenta la figura A.1, dichas interacciones de energía quedan definidas como sigue:

$$\dot{E}_{\text{ent}} = q_r + q_\theta + q_\phi \quad (\text{A.2})$$

$$\dot{E}_{\text{sal}} = q_{r+dr} + q_{\theta+d\theta} + q_{\phi+d\phi} \quad (\text{A.3})$$

$$\dot{E}_{\text{gen}} = \dot{q}_{\text{gen}} r^2 \text{sen}(\theta) dr d\theta d\phi \quad (\text{A.4})$$

$$\dot{E}_{\text{dest}} = \dot{q}_{\text{des}} r^2 \text{sen}(\theta) dr d\theta d\phi \quad (\text{A.5})$$

$$\dot{E}_{\text{alm}} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} r^2 \text{sen}(\theta) dr d\theta d\phi \quad (\text{A.6})$$

Donde q_r, q_θ, q_ϕ son las velocidades de transferencia de calor por conducción en las superficies de control r, θ y ϕ mientras que $q_{r+dr}, q_{\theta+d\theta}, q_{\phi+d\phi}$ son las velocidades de transferencia de calor por conducción en las superficies opuestas, todas las anteriores tienen unidades $q(W)$, \dot{q}_{gen} y \dot{q}_{des} son las velocidades de generación y destrucción de energía térmica en el volumen de control con unidades de $(\frac{W}{m^3})$; ρ es la densidad del material constitutivo del sistema $\rho(\frac{kg}{m^3})$, C_p es la capacidad térmica específica del mismo material

$C_p(\frac{J}{kgK})$ y $\frac{\partial T}{\partial t}$ es la variación de la temperatura $T(K)$ del sistema en el tiempo $t(s)$; $r^2 \text{sen}(\theta) dr d\theta d\phi$ es la diferencial de volúmen en el sistema esférico.

Reemplazando las expresiones (A.2) a (A.6) en la ecuación (A.1) obtenemos:

$$q_r + q_\theta + q_\phi - (q_{r+dr} + q_{\theta+d\theta} + q_{\phi+d\phi}) + \dot{q}_{gen} r^2 \text{sen}(\theta) dr d\theta d\phi - \dot{q}_{des} r^2 \text{sen}(\theta) dr d\theta d\phi = \rho C_p r^2 \text{sen}(\theta) \frac{\partial T}{\partial t} dr d\theta d\phi \quad (A.7)$$

Los fujos salientes de calor pueden expresarse como una expansión en series de Taylor, dejando de lado los términos de orden superior, de la manera siguiente:

$$f(x + dx) = f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx \quad (A.8)$$

$$q_{r+dr} = q_r + \frac{\partial q_r}{\partial r} dr \quad (A.8a)$$

$$q_{\theta+d\theta} = q_\theta + \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} d\theta \quad (A.8b)$$

$$q_{\phi+d\phi} = q_\phi + \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} d\phi \quad (A.8c)$$

De modo que al sustituir dichas expresiones en la ecuación (A.7) y reduciendo los términos, la ecuacion queda del siguiente modo

$$-\frac{\partial q_r}{\partial r} dr - \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} d\theta - \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} d\phi + \dot{q}_{gen} r^2 \text{sen}(\theta) dr d\theta d\phi - \dot{q}_{des} r^2 \text{sen}(\theta) dr d\theta d\phi = \rho C_p r^2 \text{sen}(\theta) \frac{\partial T}{\partial t} dr d\theta d\phi \quad (A.9)$$

Por otro lado, la velocidad de transferencia de calor por conducción se puede evaluar a través de la ley de Fourier, que en coordenadas esféricas se define de la manera siguiente:

$$\mathbf{q}'' = -k \nabla T = -k \frac{\partial T}{\partial r} \hat{e}_r - \frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{e}_\theta - \frac{k}{r \text{sen} \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \quad (A.10)$$

Donde \mathbf{q}'' es el flujo de calor por unidad de área perpendicular a la dirección del flujo \mathbf{q}'' ($\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$); en cada una de las direcciones coordenadas del sistema esférico, los flujos son:

$$\begin{aligned} q_r'' &= -k \frac{\partial T}{\partial r} \\ q_\theta'' &= -\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \\ q_\phi'' &= -\frac{k}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \end{aligned}$$

La transferencia de calor por conducción, a través de cualquier superficie m , en términos del flujo de calor por unidad de área en la misma superficie, es la siguiente:

$$q_m = q_m'' dA_m$$

de modo que en el sistema esférico

$$\begin{aligned} q_r &= -k \frac{\partial T}{\partial r} r^2 \operatorname{sen}(\theta) d\theta d\phi \\ q_\theta &= -\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} r \operatorname{sen}(\theta) dr d\phi \\ q_\phi &= -\frac{k}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} r dr d\theta \end{aligned}$$

arreglando cada término

$$q_r = -k r^2 \operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial T}{\partial r} d\theta d\phi \quad (\text{A.11})$$

$$q_\theta = -k \operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} dr d\phi \quad (\text{A.12})$$

$$q_\phi = -\frac{k}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} dr d\theta \quad (\text{A.13})$$

Al sustituir las ecuaciones (A.11) a (A.13) en (A.9) se tiene:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial r} \left(-k r^2 \text{sen}(\theta) \frac{\partial T}{\partial r} d\theta d\phi \right) dr - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-k \text{sen}(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} dr d\phi \right) d\theta - \\
& \quad \frac{\partial}{\partial \phi} \left(-\frac{k}{\text{sen}\theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} dr d\theta \right) d\phi + \dot{q}_{gen} r^2 \text{sen}(\theta) dr d\theta d\phi - \\
& \quad \dot{q}_{des} r^2 \text{sen}(\theta) dr d\theta d\phi = \rho C_p r^2 \text{sen}(\theta) \frac{\partial T}{\partial t} dr d\theta d\phi \quad (\text{A.14})
\end{aligned}$$

arreglando cada término, tomando en cuenta que la conductividad térmica k puede no ser constante, la ecuación (A.14) queda como sigue:

$$\begin{aligned}
& \text{sen}(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(k r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr d\phi d\theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \text{sen}(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) dr d\phi d\theta + \\
& \quad \frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} \right) dr d\theta d\phi + \dot{q}_{gen} r^2 \text{sen}(\theta) dr d\theta d\phi - \\
& \quad \dot{q}_{des} r^2 \text{sen}(\theta) dr d\theta d\phi = \rho C_p r^2 \text{sen}(\theta) \frac{\partial T}{\partial t} dr d\theta d\phi
\end{aligned}$$

finalmente cancelando las diferenciales dr , $d\theta$ y $d\phi$ y reordenando al producto $r^2 \text{sen}(\theta)$, la ecuación anterior resulta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(k r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \text{sen}(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \\
& \quad \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \dot{q}_{gen} - \dot{q}_{des} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.15})
\end{aligned}$$

La ecuación (A.15) es la forma general de la ecuación de conducción de calor en coordenadas esféricas, recordando que los términos \dot{q}_{gen} y \dot{q}_{des} representan a las transformaciones de las diversas formas de energía (química, nuclear, etc.) en energía térmica y viceversa. De su solución, se obtiene la distribución de temperaturas en cualquier sistema con geometría esférica.

Apéndice B

Algoritmo cubo-esfera

El algoritmo cubo-esfera es utilizado para generar el dominio computacional del sistema de esferas concéntricas. Este algoritmo se ha desarrollado para resolver ecuaciones diferenciales parciales en geometrías esféricas (Ronchi et al., 1996). Cuando se intenta resolver numéricamente algún problema que involucre geometrías esféricas, se presentan complicaciones en la discretización de la superficie de la geometría, especialmente en los polos. Esta desventaja se conoce en la literatura como “problema de singularidad geométrica en el polo”.

La idea principal de este algoritmo es la descomposición de una esfera en seis regiones idénticas obtenidas por medio de la proyección de las caras de un cubo, inscrito dentro de una esfera, hacia la superficie de ésta, ver fig. B.1. Las caras laterales son etiquetadas con los números I-IV y la superior e inferior con V y VI respectivamente.

A continuación se presentan las relaciones que permiten transformar la posición de cualquier punto situado sobre la superficie de la esfera, en una posición sobre alguna de las caras del cubo o viceversa. Considere un cubo con lados de longitud $2a$ inscrito en una esfera de radio $R = a\sqrt{3}$ de tal manera que los ocho vértices del cubo toquen la esfera. El cubo está orientado de tal manera que los ejes del sistema cartesiano (X, Y, Z) sean normales a sus caras (ver fig. B.2).

Las coordenadas cartesianas (x, y) son las correspondientes a la cara del cubo de tal manera que $x, y \in [-a, +a]$ y (λ, θ) son las coordenadas de

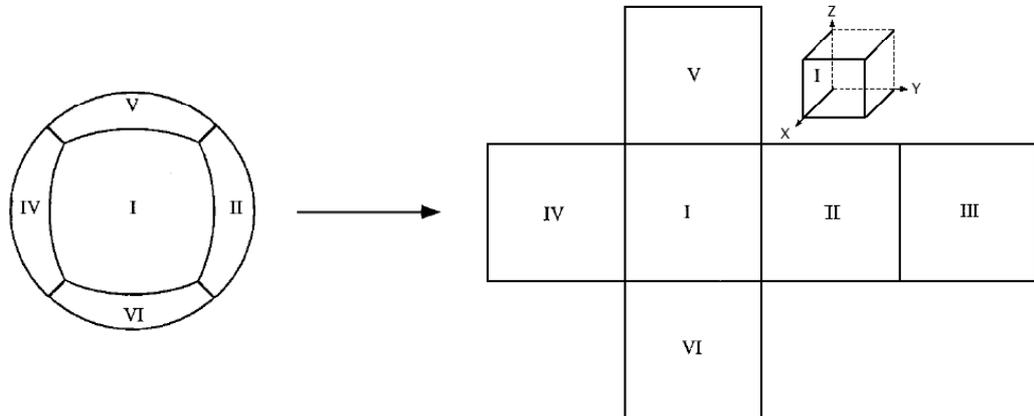


Figura B.1: Descomposición de una esfera en seis regiones, cada región se obtiene por la proyección de las caras de un cubo inscrito hacia la superficie de la esfera.

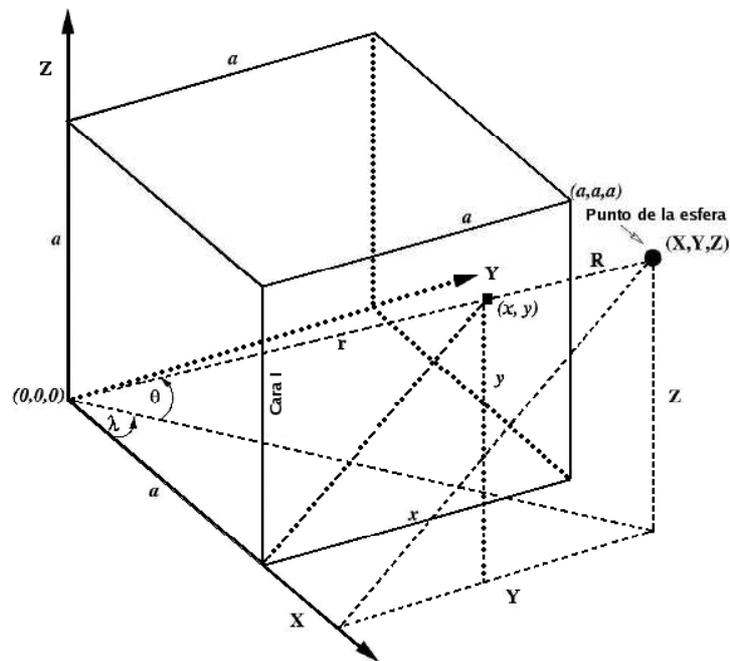


Figura B.2: Esquema para la transformación de posiciones de la esfera hacia el cubo o viceversa.

longitud y latitud respectivamente, en donde:

$$\begin{aligned}
 X &= R \cos \lambda \cos \theta \\
 Y &= R \sin \lambda \cos \theta \\
 Z &= R \sin \theta
 \end{aligned}
 \tag{B.1}$$

En la fig. B.2 se muestra solamente la cara I normal al eje X y el primer octante del cubo. Del esquema es posible obtener las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\sin \theta = \frac{Z}{R} = Z, \quad \tan \lambda = \frac{x}{a} = \frac{Y}{X}, \quad \frac{Y}{Z} = \frac{x}{y},$$

$$r^2 = a^2 + x^2 + y^2 \quad (\text{B.2})$$

Relacionando las ecs. (B.1) con las ecs. (B.2) es posible escribir:

$$\begin{aligned} x &= a \tan \lambda \\ y &= a \tan \theta \sec \lambda \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Las ecs. (B.3) son llamadas *transformaciones gnómicas básicas* entre el cubo y su esfera circunscrita. Las leyes de transformación para las caras restantes se obtienen mediante una rotación sobre la esfera y se presentan detalladamente en (Nair et al., 2004). En la siguiente tabla se presentan las ecuaciones que nos permiten relacionar las coordenadas cartesianas para las posiciones en la esfera (X, Y, Z) y las coordenadas cartesianas para las posiciones en la cara del cubo (x, y) , empleadas en este trabajo.

Cara	Transformaciones básicas	Cubo-esfera	Esfera-cubo
I	$x = a \tan \lambda$ $y = a \tan \theta \sec \lambda$	$(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(a, x, y)$	$(x, y) = a\left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right)$
II	$x = -a \cot \lambda$ $y = a \tan \theta \csc \lambda$	$(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(-x, a, y)$	$(x, y) = \left(\frac{-X}{Y}, \frac{Z}{Y}\right)$
III	$x = a \tan \lambda$ $y = a \tan \theta \csc \lambda$	$(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(-a, -x, y)$	$(x, y) = a\left(\frac{Y}{X}, \frac{-Z}{X}\right)$
IV	$x = -a \cot \lambda$ $y = -a \tan \theta \csc \lambda$	$(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(x, -a, y)$	$(x, y) = \left(\frac{-X}{Y}, \frac{-Z}{Y}\right)$
V	$x = a \sin \lambda \cot \theta$ $y = -a \cos \lambda \cot \theta$	$(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(-y, x, a)$	$(x, y) = a\left(\frac{Y}{Z}, \frac{-X}{Z}\right)$
VI	$x = -a \sin \lambda \cot \theta$ $y = -a \cos \lambda \cot \theta$	$(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(y, x, -a)$	$(x, y) = a\left(\frac{-Y}{Z}, \frac{-X}{Z}\right)$

Tabla B.1: Ecuaciones para la transformación de las seis caras del cubo

Bibliografía

- Bercovici, D., Schubert, G., Glatzmaier, G. A., and Zebib, A. (1989). Three-dimensional thermal convection in a spherical shell. *Journal of Fluid Mechanics*, 206:75–104.
- Busse, F. H. (1975). Patterns of Convection in Spherical Shells. *Journal of Fluid Mechanics*, 72:67–85.
- Busse, F. H. and Riahi, N. (1982). Patterns of Convection in Spherical Shells. Part 2. *Journal of Fluid Mechanics*, 123:283–301.
- Chandrasekhar, S. (1990). *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover, New York.
- Hernlund, J. and Tackley, P. (2003). Three-dimensional spherical shell convection at infinite Prandtl number using the 'cubed sphere' method. *Computational Fluid and Solid Mechanics*, 1:931–933.
- Inaba, H. and Fukuda, T. (1984). An experimental study of natural convection in an inclined rectangular cavity filled with water at its density extremum. *J. of Heat Transfer*, 106:109–115.
- Incropera, F. P. and De With, D. P. (1999). *Fundamentos de Transferencia de Calor*. Prentice Hall.
- Joseph, D. D. and Carmi, S. (1966). Subcritical Convective Instability Part 2. Spherical Shells. *Journal of Fluid Mechanics*, 26:769–777.
- Karniadakis, G. and Sherwin, S. (1999). *Spectral/hp Element Methods for CFD*. Oxford University Press.
- Lin, H. and Atluri, S.Ñ. (2001). The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method for solving Incompressible Navier-Stokes Equations. *CMES*, 2:117–142.

- Nair, R., Thomas, S., and Loft, R. (2004). A Discontinuous Galerkin Transport Scheme on the Cubed Sphere. *Monthly Weather Review*, 133:814–828.
- Patera, A. T. (1984). A spectral element method for Fluid Dynamics; Laminar flow in a channel expansion. *J. of Comput. Phys.*, 54:468.
- Ratcliff, J., Scubert, G., and Zebib, A. (1996). Effects of temperature-dependent viscosity on thermal convection in a spherical shell. *Physica D.*, 97:242–252.
- Ronchi, C., Iacono, R., and Paolucci, P. (1996). The “Cubed Sphere”: A New Method for the Solution of Partial Differential Equations in Spherical Geometry. *Journal of Computational Physics*, 124:93–114.
- Rønquist, E. M. (1980). *Optimal spectral element methods for the unsteady three-dimensional incompressible navier-stokes equations*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., and Giordano, F. R. (2006). *Cálculo Una Variable*. Pearson Education.
- Travnikov, V., Egbers, C., and Hollerbach, R. (2003). The Geo-Flow Experiment on ISS (Part 2): Numerical Simulation. *Adv. Space. Res.*, 32:181–189.
- White, F. M. (2003). *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, Fifth Edition.
- Yanagisawa, T. and Yamagishi, Y. (2005). Rayleigh-Benard Convection in Spherical Shell with Infinite Prandtl Number at High Rayleigh Number. *Journal of the Earth Simulator*, 4:11–17.
- Ávila, R. (2008). The Spectral Element Method and the Meshless Local Petrov Galerkin method for the solution of the fluid equations. Short course on Computational Fluid Dynamics.