ANALISIS DE INVERSIONES EN EL CAMPO DE INGENIERIA

PARTE I

FECHAS	HORARIO	T E M A S	PROFESOR
1/MARZO- 7/ABRIL/94	17:00-19:00 MA-MI-JUE.	I. CONCEPTO Y NATURALEZA DE LAS DECISIONES ECONOMICAS Y SU APLICACION A LAS INVER-- SIONES DE CAPITAL	M. EN I. RUBEN TELLEZ SANCHEZ
		II. DESARROLLO Y ANALISIS DE MODELOS MATEMATICOS PARA EL CALCULO DE LA TASA DE RECUPERACION	
		III. APLICACION DE MODELOS MATEMATICOS A LA COMPARACION ECONOMICA DE ALTER- NATIVAS	

DIRECCION DEL PROFESOR DEL CURSO: M. EN I. RUBEN TELLEZ SANCHEZ. PROFESOR DEL DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE SISTEMAS DE LA DEP-FI, UNAM. EDIFICIO "B"-408, DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA, CIUDAD UNIVERSITARIA, MEXICO, D.F. C.P. 0410, APDO. POSTAL 70-256. TEL. 622-32-84.

ANALISIS DE INVERSIONES EN EL CAMPO DE LA INGENIERIA I

OBJETIVO

Al finalizar el curso, el asistente será capaz de comparar desde el punto de vista económico, diferentes sistemas y resoler problemas prácticos con una adecuada comparación económica de alternativas.

A QUIEN VA DIRIGIDO

A todos los profesionales cuyas responsabilidades exigen tomar decisiones económicas.

TEMARIO

CONCEPTO Y NATURALEZA DE LAS DECISIONES ECONOMICAS Y SU APLICACION A LAS INVERSIONES DE CAPITAL.

Las funciones de un ejecutivo. La generación de alternativas. Responsabilidad por la toma de Decisiones Económicas. Valores No-Monetarios. Medida de la eficiencia económica. Eficiencia Económica contra eficiencia Mecánica. Definición de Ingeniería Económica. Naturaleza de las decisiones. Grado de certeza. Proceso de la toma de decisiones. Las inversiones de capital. El incentivo de la utilidad. Fuentes de capital. El costo por el uso del capital. El valor del dinero en el tiempo. Tasa mínima interna de recuperación. Diferencias entre el enfoque contable y el criterio de análisis económico.

DESARROLLO Y ANALISIS DE MODELOS MATEMATICOS PARA EL CALCULO DE LA TASA DE RECUPERACION.

Nomenclatura, Interés simple. Factor de un pago único con interés compuesto. Factor de actualización de un pago único. Factor de interés compuesto de una serie uniforme de pagos. Factor del fondo de amortización. Factor de recuperación del capital. Factor de actualización de una serie uniforme de pagos. Observación a los modelos matemáticos anteriores.

Series de pagos con grad. es de incremento. Gradientes de incremento aritmético. Gradiente de incremento geométrico. Valores límite de las fórmulas. Interés continuo. Interés nominal e interés efectivo. Tasa de descuento. Interpolación. Pagos por adelantado. La amortización del capital y el pago de interés. Series perpetuas de pagos uniformes y el valor capitalizado.

APLICACION DE MODELOS MATEMATICOS A LA COMPARACION ECONOMICA DE ALTERNATIVAS.

Métodos de comparación de alternativas. Resolución de problemas prácticos con aplicación de los modelos matemáticos, anteriores a la comparación económica de alternativas con los criterios del: Costo anual, valor presente y cálculo de la tasa de recuperación. Significado e interpretación de resultados con cada uno de los criterios anteriores. Criterios de comparación suponiendo futuros reemplazos. Determinación del nivel más económico de inversión. La inversión adicional. Diferimiento de inversiones. El método de flujo de efectivo para el cálculo de la tasa de recuperación de un proyecto de inversión propuesto. Criterios para el análisis de alternativas con períodos de vida económica diferentes.

EXPOSITOR:

RUBEN TELLEZ SANCHEZ

EVALUACION DEL PERSONAL DOCENTE

CURSO: ANALISIS DE INVERSIONES EN EL CAMPO DE INGENIERIA.

FECHA: MARZO 1° / ABRIL 7 / 1994

	CONFERENCISTA	DOMINIO DEL TEMA	EFICIENCIA EN EL USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES	MANTENIMIENTO DEL INTERES. (COMUNICACION CON LOS ASISTENTES, AMENIDAD, FACILIDAD DE EXPRESION).	PUNTUALIDAD	
1.	M.I. RUBEN TELLEZ SANCHEZ					
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						
8.						
9.						

ESCALA DE EVALUACION: 1 a 10

EVALUACION DE LA ENSEÑANZA

SU EVALUACION SINCERA NOS AYUDARA A MEJORAR LOS PROGRAMAS POSTERIORES QUE DISEÑAREMOS PARA USTED.

ANALISIS DE INVERSIONES EN EL CAMPO DE INGENIERIA

MARZO 1° / ABRIL 7 / 1994

	TEMA	ORGANIZACION Y DESARROLLO DEL TEMA	GRADO DE PROFUNDIDAD LOGRADO EN EL TEMA	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO EN EL TEMA	UTILIDAD PRACTICA DEL TEMA	
1	CONCEPTO Y NATURALEZA DE LAS DECISIONES ECONOMICAS Y SU APLICACION A LAS INVERSIONES DE CAPITAL					
2	DESARROLLO Y ANALISIS DE MODELOS MATEMATICOS PARA EL CALCULO DE LA TASA DE RECUPERACION					
3	APLICACION DE MODELOS MATEMATICOS A LA COMPARACION ECONOMICA DE ALTERNATIVAS					
ESCALA DE EVALUACION: 1 a 10						

EVALUACION DEL CURSO

	CONCEPTO	
1.	APLICACION INMEDIATA DE LOS CONCEPTOS EXPUESTOS	
2.	CLARIDAD CON QUE SE EXPUSIERON LOS TEMAS	
3.	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO EN EL CURSO	
4.	CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO	
5.	CONTINUIDAD EN LOS TEMAS DEL CURSO	
6.	CALIDAD DE LAS NOTAS DEL CURSO	
7.	GRADO DE MOTIVACION LOGRADO EN EL CURSO	
	EVALUACION TOTAL	

ESCALA DE EVALUACION: 1 A 10

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS INSTITUCIONALES

ANALISIS DE INVERSIONES EN
EL CAMPO DE LA INGENIERIA
DEL 1o. DE MARZO AL 7 DE ABRIL

COMISION FEDERAL DE ELCTRICIDAD

TEMA 1

CONCEPTOS Y NATURALEZA DE LAS DECISIONES ECONOMICAS Y SU APLICACION A LAS INVERSIONES DE CAPITAL

EXPOSITOR:
RUBEN TELLEZ SANCHEZ

MEXICO, D.F.

TEMA I

CONCEPTO Y NATURALEZA DE LAS DECISIONES ECONOMICAS Y SU APLICACION A LAS INVERSIONES DE CAPITAL.

Contenido

TEMA I

CONCEPTO Y NATURALEZA DE LAS DECISIONES ECONOMICAS.

LAS FUNCIONES DE UN EJECUTIVO.

En toda empresa, y en general, en cualquier organización, los elementos directivos de la misma, deben orientar todas sus actividades y enfocar su actitud a dos funciones primordiales.

Una primera función a la que el ejecutivo ve sujetas la mayoría de sus actividades normales y rutinarias, es la de alcanzar primero y sostener después, las normas y niveles pre-establecidos de operación general de la organización, los cuadros básicos de funcionamiento en todos aquellos aspectos que afectan a la vida de la empresa; una primera función a la que genéricamente podemos referirnos como: "alcanzar y mantener las normas" y que se refleja en todo el cúmulo de labores rutinarias como son las de vigilar que las actividades se desarrollen conforme a lo planeado, que los costos no excedan al costo " norma " prefijado, que la obra de mano ejecute el trabajo de acuerdo con el procedimiento y rendimientos pre-determinados, que las materias primas y la obra de mano que se requieran, se encuentren disponibles en todo momento (problema de inventarios), que los materiales sean suministrados de acuerdo con el programa y en las cantidades requeridas, que se mantenga y no disminuya la calidad especificada del producto y así sucesivamente.

El "mantener las normas", es en muchas ocasiones la tarea calificada como la más importante que deben llevar a cabo los ejecutivos, y por otro lado, nadie niega que esa función absorve mucho tiempo y exige un gran esfuerzo.

Sin embargo, existe otra función del ejecutivo y que consiste en mejorar esas "normas" fijadas, de tal manera que la compañía pueda mejorar la calidad de sus productos, ampliar la gama de los mismos, abrirse nuevos mercados, incrementar la productividad de sus trabajadores y la eficiencia en general de sus métodos, etc..., y en cuanto a rendimientos económicos, aumentar o al menos mantener su nivel de utilidades.

frente a las condiciones que plantea una competencia creciente. En esta segunda función, el ejecutivo debe generar alternativas, lo - cual logra sometiendo a prueba todas las rutinas, procedimientos y métodos implantados dentro de su esfera de responsabilidades y buscando otras posibles alternativas de acción, adaptándolas o no, de acuerdo con criterios económicos.

Este segundo papel, es vital, ya que dentro de una industria competitiva, cualquier empresa que se contente solo con mantener sus - "normas" pre-existentes, se encontrará en poco tiempo, en decadencia a causa de la presión de la competencia.

La empresa que se limita a mantener con éxito su statuquo, mientras otras compañías mejoran sus métodos y aumentan sus utilidades, descubrirá eventualmente que no puede igualar los precios establecidos por sus competidores progresistas.

Desgraciadamente, muchos ejecutivos no están preparados para desarrollar esta función tan importante, ya que con demasiada frecuencia, carecen totalmente de preparación para la toma de decisiones económicas, y lo que es aún peor, en muchas ocasiones subestiman y desprecian esta área de actuación, lo cual origina que no obstante lo intensamente que un ejecutivo trabaje en su papel de "mantener las normas", su empresa y él individualmente como administrador, pueden fracasar.

A un directivo le es normalmente difícil reconocer que la forma en - que se están llevando a cabo las actividades, está mal o al menos es deficiente y susceptible de mejora. Es frecuente que los distintos-niveles dentro de la empresa, ya sean los constituídos por gerentes, administradores, supervisores, sobrestantes y obreros, sean renuentes a aceptar cambios que obliguen a encauzar su forma de actuar y de pensar, por senderos y rutinas diferentes a los seguidos anteriormente-por un largo periódo. Que cierto es aquello que decia Ortega y Gasset de que: "el hombre es un animal de costumbres...."

...

Por otro lado, esta segunda función a que hacemos referencia, implica una actitud constante de estudio, análisis e investigación, que redunde en una actualización continua de conocimientos en aspectos técnicos, administrativos, económicos, etc..., actitud que es poco frecuente encontrar en los profesionales que ya han salido de las aulas de los centros educativos, pues implica, un sacrificio constante, adicional al que ya de por si, originan las arduas labores y problemas de cada día.

En la Industria de la construcción el número de obras que deben ganarse en base a demostrar competencia, es cada vez mayor; los concursos son mas "cerrados", se reducen los márgenes para cometer errores; lo que implica que para continuar "compitiendo", es necesario actualizar nuestros conocimientos en aspectos como: análisis de costos, procedimientos y técnicas constructivas, planeación, programación y control de obras, especialización en áreas específicas, control administrativo a nivel obra y empresa, mecanismos de presentación e interpretación de resultados, mecanización de operaciones, análisis de inversiones, selección económica de alternativas, etc..,

En este curso, trataremos de establecer las funciones desde el punto de vista económico del ejecutivo, entendido este, en su acepción más general, como aquel en quien recae la responsabilidad de la toma de decisiones, y de presentar los principios y los procedimientos que deben normar lo que se ha dado en llamar una "toma de decisiones económicas".

Analicemos esta segunda función de un ejecutivo como un proceso de dos fases consistentes en:

1) Generar alternativas.
2) Evaluarlas y adoptarlas o no, después de analizarlas ampliamente desde el punto de vista de los criterios económicos.

Solo si el ejecutivo tiene conciencia clara de estos criterios, podrá llevar a cabo una búsqueda inteligente de alternativas y después, tomar decisiones económicamente correctas.

No nos referimos tan solo a una "motivación" general sobre la necesidad de conocer estos criterios y técnicas en forma somera, ya que nadie puede captar ni estar convencido de la necesidad de implantar determinadas mejoras o innovaciones si no las conoce profundamente.

LA GENERACION DE ALTERNATIVAS.

La segunda función del ejecutivo se desprende de la primera. Tanto si se tienen dificultades para mantener una "norma" establecida, como si no se les tiene, la "norma" misma puede ser la base de investigación, para encontrar un medio más económico para efectuar una acción determinada. Así por ejemplo, en el caso de una obra en construcción, el director de la misma puede hacerse preguntas como las siguientes: ¿ se seleccionó el equipo más adecuado en cuanto a número, tipo y capacidad de unidades ?, ¿ puede acelerarse el proceso de construcción mediante otra secuela de ataque de los diferentes frentes ?, ¿ el número de personal obrero y técnico ubicado en cada frente es el adecuado ?, ¿ debe incrementarse ?, ¿ debe disminuirse ?.., ¿ el sistema establecido para la elaboración y presentación a cobro de las estimaciones, es eficiente, oportuno y acorde al ritmo de las erogaciones ?....

Luego de un análisis profundo y sistematizado, el director de una obra, podrá determinar, con plena conciencia en los criterios económicos, si los juicios presupuestos originalmente eran los adecuados o conviene seguir nuevas alternativas.

Lo anterior, a nivel obra. Pero a nivel empresa de construcción, ¿no deberiamos plantearnos preguntas tales como : ¿ nuestro sistema de contabilidad es el adecuado?, ¿ nuestra presentación de resultados en las obras y el análisis de los mismos, es ágil, claro y oportuno ?, ¿ la departamentalización y número de empleados y oficinistas es el adecuado ?...

A partir de cada acto que se efectue de acuerdo con normas establecidas, un ejecutivo entrenado a pensar bajo esta línea de acción, podrá generar otras alternativas económicas.

La toma de decisiones económicas invade cualquier área de actividades de un ejecutivo, desde el aspecto ventas, promociones, concursos, cotizaciones, etc..., hasta el de producción, construcción, cobros,... y desde las finanzas hasta el aspecto técnico ingenieril.

Una función muy importante del ejecutivo es el estar propiciando continuamente mejoras y cambios, aunque bien es cierto que el mero cambio, por si mismo, no implica necesariamente una decisión económica. Otro claro ejemplo en el medio de la construcción, lo constituye el problema de un proyectista y calculista quien debe decidir entre hacer una estructura de acero o de concreto o mixta, atendiendo a factores como pueden ser: distintos tipos de cimentaciones dependiendo del peso de la superestructura en cada una de las alternativas, costos de conservación y mantenimiento dentro de un cierto horizonte económico, valor de recuperación de la estructura, disponibilidad de personal especializado en la localidad, etc...

" Cada peso que se gasta, se propone gastar o se propone no gastar, constituye la base de una decisión económica "..., en nuestro medio, ¿ cuántas veces el hecho de erogar o no-erogar, se autoriza por mera costumbre o "inercia"?...

Si un ejecutivo decide no hacer ningún cambio a una situación existente, esta de hecho, tomando una decisión económica, ya que la decisión de no hacer nada, implica la decisión de continuar haciendo las cosas de la misma manera y de rechazar todas las posibles alternativas de acción, tanto las generadas por él mismo después de un análisis crítico, como de las que desconoce por no haberlas buscado.

Una decisión no puede decirse que constituye una auténtica decisión económica a menos que:

...

1) Todas las alternativas hayan sido generadas y planteadas.

2) Todos los elementos de costo y de beneficio hayan sido considerados para cada alternativa.

3) Se sigan criterios, técnicas y procedimientos correctos para la evaluación y selección final de una alternativa.

Así por ejemplo, en el caso particular de la posibilidad de reemplazar una máquina existente, la decisión económica puede ser: aprobar el gasto de $ 80,000.00 para la compra de una máquina nueva, o rechazar este gasto y conservar la existente, o gastar -- $ 45,000.00 en una diferente, o autorizar $ 130,000.00 por una -- nueva de mayor capacidad, o invertir $ 25,000.00 en la reparación y mejora de la máquina actual. La decisión que se tome no será - normalmente la correcta si se toma solo en base a la liquidez que se tenga en el momento dado.

Analicemos más detenidamente el aspecto de la generación de alternativas de acción, como paso inicial del proceso de una toma de decisiones.

" Un análisis económico puede definirse como la comparación entre altenativas, en la cual, las diferencias entre ellas, se expresan, hasta donde es factible, en términos monetarios ".

.) Cuando en una comparación de este tipo entre altenativas, estan involucrados de alguna forma, aspectos de índole técnica en ge general, se dice que se trata de un análisis de ingeniería económica.

.) " Las decisiones se toman entre alternativas ": no hay propiamente una decisión, si no hay al menos dos cursos de acción posibles.

.) Antes de tomar una decisión es necesario dejar claramente definidos los beneficios, ventajas y desventajas de cada una de las alternativas posibles, expresando los efectos o consecuencias- de la posible implantación de cada alternativa, en forma tal - que sean conmensurables entre si: es decir, los beneficios y -

costos, las ventajas y desventajas de cada alternativa, deben ser apreciados y valuados numéricamente, y estos números a su vez, expresados en las mismas unidades para poder ser comparados. Para efecto de las decisiones económicas, las unidades normalmente empleadas, y de hecho las únicas que sirven para tal fin, son las unidades monetarias.

Para hacer conmensurables y comparables las características de las diversas alternativas, pueden sugerirse dos pasos: primero, expresar cada una de las características en sus unidades físicas más apropiadas, y segundo, convertir mediante el establecimiento de una escala de valores, las unidades físicas, en unidades monetarias.

De no ser conmensurables entre sí las diferencias entre las alternativas, puede correrse el peligro de que al compararlas, se dé igual peso a diferencias triviales que a diferencias realmente importantes entre ellas.

" Debe reconocerse que solo las diferencias entre alternativas, son relevantes en su comparación".

Si por ejemplo, al comparar dos procedimientos constructivos, se estima que el factor obra de mano, será igual en ambas alternativas, o sea, que se estima tenga el mismo costo en una y en otra, podrá excluirse dicho factor para efectos de la comparación entre ellas, ya que es claro que dicho factor, al afectar igualmente a ambas alternativas, no aportará juicio alguno para la selección de una u otra.

En ocasiones se argumenta que el análisis económico de una situación para efectos de una toma de decisiones, es inútil, pues la alternativa a seguir es evidente. Aparentemente este sería el caso de un empresario que expresara: "... Tengo una máquina que tiene más de 15 años de estar funcionanado y a la cual ya no es físicamente posible seguir reparando y manteniendo en operación, por lo que sin necesidad de ningún análisis, ni de la aplicación de técnicas y fórmulas sofisticadas, concluyo que debo cambiarla por otra..." Sin embargo, podríamos hacer notar a este empresario, que de hecho, sí tomó una decisión y que ésta se inició hace varios años, pues es muy factible-que un análisis revele que debería haber cambiado esa máquina hace más de 8 años por ejemplo, y que su decisión, (aún sin haber sido fruto de un razonamiento conciente), fué equivocada, al haber optado de hecho, por la alternativa de absorver los sobrecostos de - un mantenimiento y reparaciones antieconómicas durante los últimos 8 años, rechazando ademas, los ahorros que la compra de una nueva- máquina le hubieran originado, de haberse llevado a cabo el reemplazo, económicamente justificado, de la máquina actual.

De lo anterior, concluimos que la toma de decisiones económicas en un sentido integral, incluye tanto la generación como la evaluación de las alternativas y que dado que la selección de una alternativa es siempre el objeto de una decisión, el proceso de la toma de una decisión económica, prosigue si y solo si, las posibles alternativas a seguir, han sido planteadas.

Ahora bien, la selección de la alternativa final nunca debe ser objeto de adivinanza ni dejada al " designio de los dioses ".

Ni la intuición ni las corazonadas, son del todo realistas ni confiables. Sin embargo, se puede arguir y debe aceptarse, el hecho - de que mucha de la información de que se dispone para la toma de - una decisión, está basada en meras estimaciones. A esto, puede -- responderse afirmando que esas estimaciones logradas por medio de un cuidadoso estudio de la información disponible, son de cualquier manera más confiables que meras adivinanzas o elucubraciones intuitivas. Lo anterior no quiere decir que la llamada "int uición", que- se orienta al futuro, pero que de hecho involucra consciente o in-- conscientemente, ciertos recuerdos y experiencias del pasado, no -- tenga en ocasiones cierto grado de validez.

RESPONSABILIDAD POR LA TOMA DE DECISIONES ECONOMICAS.

El que un ejecutivo no este ejerciendo la segunda función a que se ha aludido, se manifiesta principalmente en una decidida tendencia a no hacer cambios, es decir, a seguir haciendo lo mismo y de la misma manera; y en el hecho de que rara vez, una inversión o una erogación se justifiquen mediante un criterio económico adecuado.

Muchos ejecutivos no sienten verdadera responsabilidad por los costos que generan o por los costos que de hecho "protegen" al mantener el statusquo. Consciente o inconscientemente, consideran el llevar a cabo erogaciones monetarias, como una consecuencia inherente e inevitable de su trabajo: como un privilegio obvio de la función ejecutiva... y cuando un ejecutivo se acostumbra a esta actitud, llega a considerar que estos costos son responsabilidad de la compañía. Si reflexionara en esto, se daría cuenta que estos costos son de su responsabilidad ya que se ubican dentro de su esfera administrativa, y es él, y no "la compañía", quien selecciona la alternativa a seguir de entre todas las demás posibles y por tanto responsable de su seguimiento.

Ahora bien, las necesidades de capital en muchos proyectos alcanzan cifras considerables. Obviamente, ese capital requerido se obtiene de diversas fuentes, internas o externas a la empresa, y es natural que tanto a los que aportan ese capital, como a los encargados de controlar su gasto, les preocupe el que sea utilizado de la manera más efectiva, ya que el éxito de un proyecto ingenieril o de un negocio en general, se mide en términos de su eficiencia financiera.

Por lo anterior, el Directivo debe combinar en cada proyecto de inversión, la técnica con los requerimientos y limitaciones financieras, sin olvidar además otros valores involucrados como pueden ser los de carácter social, humano, estético, político, etc...

El problema más serio que se deriva de aceptar o rechazar proposiciones o peticiones de adjudicación de fondos y recursos a determinados renglones (lo cual de hecho, representa alternativas de inversión), sobre la base de que tan urgentes son, radica en que el programa de utilización de recursos queda supeditado a un concurso de personalidades.

Las partidas mas importantes se adjudican al Departamento que ha - sido más elocuente en la solicitud de fondos y más persistente en- la presentación de sus requerimientos, y no al Departamento que por haber realizado un estudio económico con que respaldar su petición, ha presentado esta, en forma tardía. En una organización, toda decisión de adjudicación e inversión de fondos, debería estar respaldada y justificada con un análisis económico.

El primer criterio que debe seguirse en la selección de alternativas de inversión, es el de dar el mejor uso posible a los recursos, normalmente limitados, con que cuenta una organización obteniendo - el más alto posible rendimiento de ellos.

Estos recursos limitados con que contamos para realizar inversionnes, pueden ser de varios tipos, como bienes raices, espacio disponible, fuerza de trabajo, (técnico, obrero, administrativo...), - materiales, equipo, dinero efectivo, capacidad crediticia, etc..., pero dado que en el ámbito comercial se acostumbra expresar el valor de la mayoría de los recursos, en términos monetarios, es necesario evaluar las disponibilidades y sus limitaciones en términos de dinero.

Al evaluar una inversión propuesta, acostumbramos preguntar, si será suficientemente productiva. Este término de " suficientemente- productiva ", se refiere, como veremos en forma detallada más adelante, a la comparación entre la tasa de recuperación que esperamos obtener de dicha inversión considerando el costo total que dicha inversión implica, con la tasa de recuperación que pudiesemos obtener de otras inversiones, y teniendo como límite, una cierta tasa interna mínima atractiva de recuperación.

Sin embargo, no todas las posibles consecuencias que representa el- seguir una alternativa, pueden ser reducidas a términos monetarios, de donde se desprende que es necesario contemplar un segundo criterio en el análisis de selección de alternativas, que tome en consi-

...

deración estos factores o aspectos a los que denominaremos: valores " no-monetarios " o " no-cuantitativos ".

Con los recientes adelantos de las matemáticas, estadistica, técnicas de computación, etc..., que permiten el manejo de problemas -- económicos más complejos, el ingeniero tiene la oportunidad de jugar un papel aún más importante en el proceso de la toma de decisiones, ya que no solo cuenta con las bases matemáticas y científicas para- comprender el uso de tales técnicas, sino que además tiene el criterio ingenieril que permite reconocer las limitaciones prácticas de- estas técnicas y el efecto de la falta de información que comunmente existe en las situaciones reales, todo lo cual lo capacita para- seleccionar la alternativa más adecuada y realista.

El privilegio u obligación de un ejecutivo de señalar y elegir una- alternativa, no va desligada a la responsabilidad de demostrar que- su sugestión es la más adecuada de entre otras. Desde el inicio debe estar consciente de todos los costos resultantes de su decisión.

" Las decisiones deben estar basadas en las consecuencias que se - prevee implique la posible implantación de cada una de las alternativas ".

En muchas ocasiones, existe la deformación de considerar solo el - valor inicial de una inversión, siendo que frecuentemente los costos futuros que se generan pueden ser con mucho, más importantes - que el inicial. Así por ejemplo, la decisión de invertir $100,000.00 en una máquina, debe estar ligada a la consideración de costos futuros como pueden ser: obra de mano de operación, consumo de energía, desperdicio de material, necesidad de supervisión extra, mantenimiento y conservación necesarios, seguros, impuestos, etc... También deben considerarse beneficios o ingresos especiales, como el- valor de rescate. Todo lo cual implica que el análisis completo - de la alternativa, debe hacerse dentro de un cierto periódo que -- constituye el " horizonte económico ".

VALORES NO MONETARIOS O NO CUANTITATIVOS.

Pocas decisiones, de tipo personal o de negocios, son hechas sobre la base únicamente de consideraciones financieras. Aún más, las consideraciones sobre la eficiencia económica de un proyecto pueden verse influenciadas en gran parte por aspectos no monetarios.

" Las decisiones entre alternativas de inversión deben también considerar y dar peso, a todas aquéllas consecuencias esperadas y que se originan de la implantación de cada uno de los posibles cursos de acción, y que por una u otra razones, no pueden reducirse o expresarse en términos monetarios ".

A este tipo de factores, es frecuente referirse también con otros términos como son: factores de juicio, impoderables, intangibles, etc...

Las decisiones tácticas y recomendaciones relativas a la factibilidad de proyectos ingenieriles, deben tener en cuenta toda una serie de factores monetarios y no monetarios. Entre estos últimos podemos nombrar leyes y principios económicos, situación imperante de los negocios en un momento dado, valores sociales y humanos, objetivos personales y de grupo, gustos de consumidores, reglamentaciones gubernamentales, legislación de orden fiscal y económico, etc...

Las consideraciones sobre aspectos no monetarios adquieren especial importancia en el caso particular de las decisiones de tipo personal y en el terreno de los intereses particulares.

MEDIDA DE LA EFICIENCIA ECONOMICA:

La actividad ingenieril se desarrolla dentro de dos entornos, el físico y el económico. El éxito que se alcance manejando o alterando el entorno físico para producir bienes y servicios depende del conocimiento que se tenga de las leyes físicas. Sin embargo, el beneficio que reporten esos bienes y servicios, depende de la utilidad que proporcionen, medida esta en términos económicos. Se podrían enumerar muchos ejemplos de estructuras, máquinas, procesos, etc..., que presentan un excelente diseño físico y mecánico, pero escaso o nulo sentido económico. Por esta razón, es esencial que los proyectos ingenieriles se evaluen en términos de beneficio y de costo antes de ser aceptados.

" El pre-requisito esencial para el éxito de un proyecto ingenieril, es su factibilidad económica ".

La función normal del ingeniero consiste en manejar los elementos de un entorno, el físico, para crear utilidad en un segundo entorno, el económico.

El objetivo de todo proyecto ingenieril, es el de obtener la mayor utilidad posible, por unidad de recurso empleado, lo cual se logra mediante la más efectiva utilización de materiales, energía, obra de mano, etc..., y en general, de cualquier tipo de recurso. El grado de eficiencia que se alcance en la utilización de los recursos se mide mediante la expresión de caracter general:

$$\boxed{\text{eficiencia} = \frac{\text{resultado obtenido}}{\text{insumos.}} = \frac{\text{out put}}{\text{in put}}}$$

lo cual no es mas que el cociente entre los resultados obtenidos y los recursos empleados. Esta expresión mide el éxito de la actividad ingenieril dentro del entorno físico, en un primer nivel de eficiencia, que se conoce como "eficiencia mecánica" o también: --- "eficiencia física o tecnológica". Dentro de este primer nivel,- tanto el resultado obtenido como el insumo total requerido se expresan en unidades tales como kilowats,Btu, horas/máquina, etc.... Cuando este tipo de unidades físicas está involucrado, la eficiencia siempre será menor que la unidad o menor que el 100%.

Sin embargo, para un ingeniero también le es fundamental un segundo nivel de eficiencia, la " eficiencia económica " o " eficiencia financiera ", la cual se determina con la misma fórmula general de la eficiencia, solo que traduciendo y expresando las unidades físicas tanto del "input" como del "output" a su equivalencia en valores - monetarios, de acuerdo con alguna escala de valorización adecuada- en cada caso, lo que convierte la expresión general a la forma:

$$\boxed{\text{eficiencia económica} = \frac{\text{beneficio}}{\text{costo}}}$$

Es bien sabido que la eficiencia física no puede alcanzar valores mayores de 100%.

En cambio, la eficiencia económica sí pude exceder de dicho valor,- y de hecho, solo sera aceptable cuando eso suceda,. Una alta efi-- ciencia física no es garantía de una alta eficiencia económica. Una baja eficiencia física, no es razón suficiente para dejar de considerar una alternativa, ya que pueden existir otras circunstancias- económicas que compensen esa baja eficiencia física.

Consideremos el ejemplo de una planta de generación de energía, cuya eficiencia física sea tan solo de un 14%. Supongamos que la producción obtenida en forma de energía eléctrica y expresada en Btu, tiene un valor económico de 8 unidades monetarias por millón de unidades- producidas y que el insumo necesario en la forma de gas natural y expresado en Btu, tiene un valor económico de 0.70 unidades monetarias por millón de unidades de gas consumido. En estas condiciones:

$$\text{eficiencia mecánica} = 0.14$$

$$\text{eficiencia económica} = \frac{\text{Btu output x valor de la energía eléctrica}}{\text{Btu input x valor del gas natural.}}$$

$$= 0.14 \times \frac{8 \text{ unidades monetarias}}{0.70 \text{ unidades monetarias}}$$

$$= 1.6$$

lo cual indica una eficiencia económica de un 160%.

Otro ejemplo:

Si un inversionista decide expander su negocio y adquirir un cierto número de camiones, podrá seleccionar el tipo de camión mediante su eficiencia mecánica, pero la factibilidad y conveniencia de la inversión general, deberá contemplarla a través de la eficiencia económica, en donde el "output" o beneficio, será la retribución económica que se obtenga por el servicio de los camiones, y el "input" o costo, debe incluir los costos de operación, de depreciación, los intereses del capital invertido, los impuestos y todos los demás gastos asociados.

La forma más comunmente empleada para estimar la eficiencia financiera, es mediante la llamada " tasa de recuperación ", sobre un capital invertido, expresada en porciento: *(de aquí la denominación común de: "porcentaje de recuperación")*

$$\boxed{\text{tasa de recuperación (anual)} = \frac{\text{utilidad neta (anual)}}{\text{capital invertido.}}}$$

Un ejemplo de determinación de la eficiencia mecánica instantánea, la constituyen los medidores eléctricos para determinar en un instante dado, el output de un motor.

Para la evaluación final de la mayoría de los proyectos, aún en aquellos en los cuales el aspecto técnico ingenieril juega un papel muy importante, la eficiencia económica debe prevalecer sobre la eficiencia física. Esto es debido a que la función y meta de la ingenieria, es crear utilidad y obtener el máximo nivel de beneficio dentro del entorno económico, por medio de la óptima utilización de los elementos del entorno físico; y dado que este objetivo se traduce en máximizar el servicio, y el nivel de servicio puede expresarse en términos monetarios, se concluye que el criterio económico es la base de una evaluación, y la meta, la maximización del beneficio.

EFICIENCIA ECONOMICA CONTRA EFICIENCIA MECANICA.

La meta de todo ingeniero y en general, de la actividad empresarial y gerencial, es la de lograr una eficiencia económica dentro de rangos factibles y aceptables y no la simple búsqueda de eficiencia mecánica.

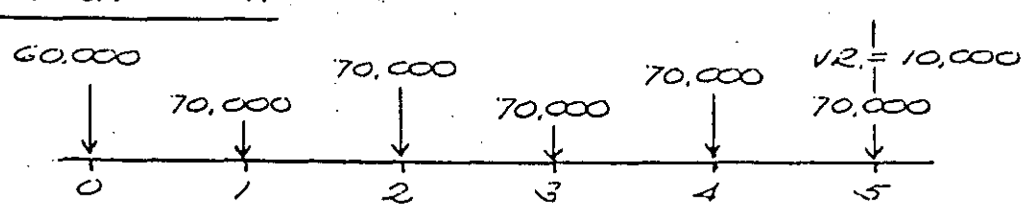
Ejemplo: Supongamos que para resolver una necesidad operativa y después de una investigación, se nos presentan dos alternativas:

Alternativa " A ": adquirir una máquina (A) con precio inicial de $ 60,000.00, con costo anual de operación (incluyendo obra de mano, combustibles, mantenimiento, etc...) de $ 70,000.00 (el cual suponemos uniforme por simplificación). Vida económica estimada de 5 años, y valor de recuperación de $ 10,000.00 al término de ese periódo.

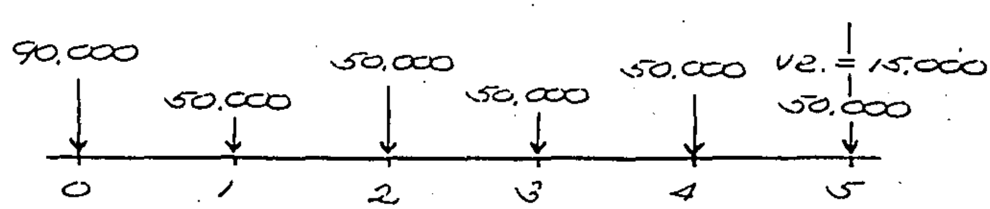
Alternativa " B ": Adquirir una máquina (B) para el mismo trabajo, con precio de adquisición de $ 90,000.00; gastos de operación de $ 50,000.00 anuales, Vida económica estimada de 5 años y valor de recuperación de $ 15,000.00

Representamos las dos alternativas de la siguiente manera:

alternativa A:



alternativa B:



El monto total del desembolso neto durante los 5 años para la alternativa " A ", es de $ 400,000.00 y para la alternativa "B" de $ 325,000.00.

(Hacemos notar que no estamos considerando en estas sumas el-factor tiempo, y por tanto la variación del valor del dinero - con el tiempo y como demostraremos posteriormente, la simple suma de costos es insuficiente para comparar dos alternativas.)

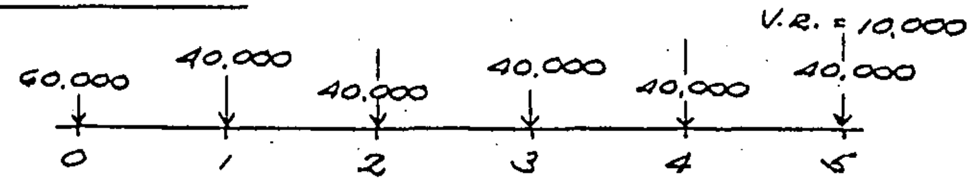
Observamos que " B " tiene mayor eficiencia mecánica, dado que-hemos supuesto que en un mismo periódo ambas máquinas tienen el mismo rendimiento en cuanto a producción de servicio se refiere, pero el insumo de " B ", medido por sus gastos de operación anual es de $ 50,000.00, en tanto que el de " A ", es de $ 70,000.00. Esto es explicable ya que el sobrecosto inicial de la máquina -- " B " con respecto a la " A ", sugiere ventajas en la construcción de " B " (quizás mayor nivel de automatización, menor requerimiento de obra de mano, más precisión, etc...), y por tanto una mayor eficiencia mecánica.

Conclusión: " B ", realiza el mismo trabajo que " A " pero con - menor cantidad total de pesos a lo largo de los 5 años considerados de comparación, luego " B ", tiene mayor eficiencia económica.

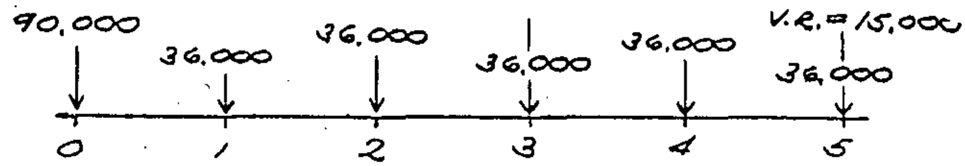
En este caso " B " tiene mayor eficiencia económica y también la mayor eficiencia mecánica, lo cual es mera coincidencia. La búsqueda de alta eficiencia económica, no necesariamente coincide - con la búsqueda de alta eficiencia mecánica o tecnológica, ya que si esto fuera cierto, la elección de la alternativa más económica pudiera ser realizada en base solo a la eficiencia mecánica.

En efecto, supongamos ahora que se propone el empleo de las mismas dos máquinas anteriores " A " y " B ", pero en condiciones - de menor ritmo de trabajo; y en base a esta menor utilización, - los costos de operación anuales se calculan en $ 40,000.00 para- " A " y en $ 36,000.00 para " B ". La nueva situación puede representarse:

alternativa A:



alternativa B:



El desembolso total para " A " es ahora de $ 250,000.00 y de $255,000.00 para " B ".

Observamos ahora que la máquina " B " aún la de mayor eficiencia mecánica, tiene ahora menor eficiencia económica que " A ".

Lo anterior demuestra que no hay ninguna " receta " para la selección de la alternativa más económica; por lo que habrá que hacer un análisis para cada conjunto de circunstancias. La selección de la alternativa más económica, cambió de " B " a " A "; de la máquina con mayor eficiencia mecánica, a la de menor eficiencia mecánica.

La distinta selección fué originada en este caso por un cambio en el ritmo de utilización del equipo; pero también pudiera haber sido causada por diversos factores como cambios en el costo horario de la obra de mano, en el costo unitario de la energía, en el valor de renta por metro cuadrado de piso, o cualquier otro factor de costo.

El efecto combinado de todos estos elementos de costo, debe ser evaluado, para cada situación, por el ejecutivo encargado de tomar una decisión, asi como la variación de dicho efecto combinado debido a cambios en las condicionantes del medio ambiente.

El ejemplo también ilustra el hecho de que la alternativa que se seleccione en determinadas circunstancias, puede llegar a rechazarse si estas condiciones han variado.

El análisis de alternativas con baja eficiencia mecánica, es tan necesario como el de alternativas de alta eficiencia mecánica.

La afirmación de que el objetivo primordial de la ingenieria es lograr una eficiencia económica satisfactoria, no va en contradicción con otros objetivos de la ingenieria, como son: la exactitud, la confiabilidad, la seguridad, etc..., ya que, estas cuestiones son decididas por consideraciones económicas, y pudiera suceder por ejemplo que en determinadas circunstancias, no sea economicamente factible o conveniente, diseñar un cierto mecanismo con un nivel de absoluta exactitud, ciento por ciento de confiabilidad, o perfecta seguridad, por implicar esto un alto costo y resultar antieconómico.

DEFINICION DE INGENIERIA ECONOMICA.

Cualquier concepción de la Ingenieria presenta dos enfoques: uno, concerniente al aprovechamiento de los recursos materiales y fuerzas de la naturaleza, y el otro, la busqueda continua de la satisfacción de las necesidades humanas; y dado que los recursos con que normalmente contamos, son escasos respecto a las necesidades, de aqui se desprende la esencial relación de la Ingenieria con la Economía.

El término Ingenieria Económica puede definirse como:

" El conjunto de conocimientos, técnicas y prácticas de análisis y síntesis, incluyendo consideraciones sobre factores humanos, necesarios para la evaluación del beneficio que reportan productos y servicios, generados por la actividad ingenieril, en relación a su costo ".

La primera función de la Ingeniería Económica, es la evaluación cuantitiva de los proyectos ingenieriles, en términos de beneficio y costo, antes de que estos sean ejecutados. En este aspecto, la Ingeniería Económica es similar a la Ingeniería de diseño cuya función es la de " diseñar " materiales, dimensiones y combinación de elementos estructurales de un proyecto, antes de que este sea realizado.

Un estudio económico presenta dos etapas:

a) recopilación de datos.

b) procesamiento matemático de los datos.

Ninguno de estos dos pasos constituye un fin en sí mismo, sino medios de alcanzar el verdadero y último objetivo: la determinación de la bondad y factibilidad económica de una alternativa, a fin de justificar su elección y autorizar su implementación.

Ahondemos un poco más respecto a la importancia que guarda el aspecto: " económico " dentro de la Ingeniería.

Recopilando algunas definiciones que diversos autores dan de lo que es Ingeniería, tenemos que:

" La Ingeniería, más que una ciencia, es la aplicación de varias ciencias; es un arte que requiere la habilidad e ingenio para adoptar y aprovechar los conocimientos humanos para el beneficio de la raza humana".

" La Ingeniería es la profesión en la que el conocimiento de las ciencias matemáticas y naturales, adquirido por el estudio, la experiencia y la práctica, es aplicado con juicio al desarrollo de formas de emplear, económicamente, los recursos y fuerzas de la naturaleza para el beneficio de la humanidad ".

Es de todos conocida la definición muy antigua, muy breve, pero muy rica en sentido, que nos dice que:

" Ingeniero es el que hace con un peso, lo que otro que no es Ingeniero, hace con dos"....

A través de estas y muchas otras definiciones que pudiésemos buscar de Ingeniería, nos damos cuenta, que si bien es cierto que la función básica de la Ingeniería es la búsqueda de la satisfacción de las necesidades humanas mediante la aplicación de los conocimientos al mejor aprovechamiento de los recursos que brinda la naturaleza, su actuación se sanciona, se califica y se aprecia definitivamente en base a su eficiencia económica.

La actividad ingenieril, en cualquiera de sus ramas, aún en aquellas profundamente científicas o técnicas, si no se orienta en cuanto a su aplicación con un enfoque económico, no está cumpliendo con las metas inherentes a la Ingeniería.

Desde este punto de vista, refiriendonos a cualquiera de las ramas y aspectos de la Ingeniería , podemos afirmar que:

" La Ingeniería que no es económica, deja de ser Ingeniería...

Lo anterior es tan contundente, que últimamente ha empezado a rechazarse el término " Ingeniería Económica " para designar a un área específica de conocimientos y técnicas enfocadas al análisis y toma de decisiones, ya que de hecho este término compete a la Ingeniería en general y no a una rama o enfoque particular o específico de la misma.

NATURALEZA DE LAS DECISIONES.

Las rachas de buena suerte o las noches de fortuna, atestiguan el hecho de que los jugadores y aventureros algunas veces ganan. Sin embargo, podemos también hablar de infinidad de ocasiones en las que un " volado " o la "inspiración del momento ", han fallado rotundamente en cuanto a lograr un beneficio.

Por lo anterior, debido a una sincera necesidad por parte de ingenieros, científicos y administradores en general, de contar con un sistemático y lógico proceso de análisis para la toma de decisiones, es por lo que se han creado diversos métodos análiticos que constituyen las herramientas de lo que constituye hoy en día, la administración-científica.

Sin embargo, tanto la intuición, como los " métodos analíticos " son reconocidos y tienen cada uno su lugar dentro del proceso de la toma de decisiones, en cuanto que la intuición, aunque se ubica en el presente, de manera inconsciente e informal, involucra recuerdos y experiencias del pasado, en los cuales se basa para hacer ciertas predicciones en el futuro.

El implantar un sistema analítico, cuesta esfuerzo y dinero, y algunas decisiones menores no justifican esa erogación, por lo que podemos afirmar que los métodos analíticos, serán empleados siempre que esto sea técnicamente factible y justificable económicamente. Fuera de estos límites, el buen juicio y la intuición, basados en la experiencia, son y serán siempre recursos necesarios y legitimos.

Al analizar una situación para efectos de una toma de decisiones habrá que determinar su "grado de sensibilidad", esto es, el qué tan vulnerable y sensible es con pequeños cambios en los factores condicionantes de esa situación. La consecuencia inmediata de la "alta-sensibilidad" de una situación dada, será la de tener que garantizar, mediante estudios minuciosos, la validez de los datos que intervendrán en la toma de decisiones, y dado que los factores que pueden influir en una decisión pueden ser muy numerosos, habrá que dar primacia a aquellos a los que la situación es más sensible.

...

Por lo que respecta a los aspectos que se busca optimizar, cuando en una situación de decisión se presentan varios objetivos, es probable que, haya que reconocer, que no hay un curso de acción que optimice simultaneamente todos los objetivos. En esta circunstancia será necesario seleccionar la alternativa que equilibre de la mejor manera posible los objetivos en conflicto; es decir una alternativa que "suboptimice".

Respecto a la amplitud del periódo de estudio, podemos apuntar que los análisis basados en un horizonte económico muy corto, no necesariamente tendrán la misma eficiencia, que los que completen un horizonte mayor.

Un horizonte de comparación muy corto, puede distorsionar seriamente los valores. Un horizonte muy largo introduce incertidumbre. A medida que se alarga el horizonte de comparación, las predicciones respecto al comportamiento futuro de los factores que afecten una decisión empezarán a debilitarse en cuanto a su credibilidad.

GRADOS DE CERTEZA.

Podemos clasificar las decisiones, dentro de tres categorias generales que caracterizan las condiciones de la situación decisional y que sugieren métodos de análisis específicos en cada caso. Estas categorias son:

a) Decisiones suponiendo certeza.
b) Decisiones que reconocen riego.
c) Decisiones admitiendo incertidumbre.

.) En el primer caso, al suponer certeza, se considera que todas las condiciones del problema se conocen con seguridad; estamos basando el análisis en un conjunto de suposiciones que suponemos tienen una alta esperanza de ocurrencia.

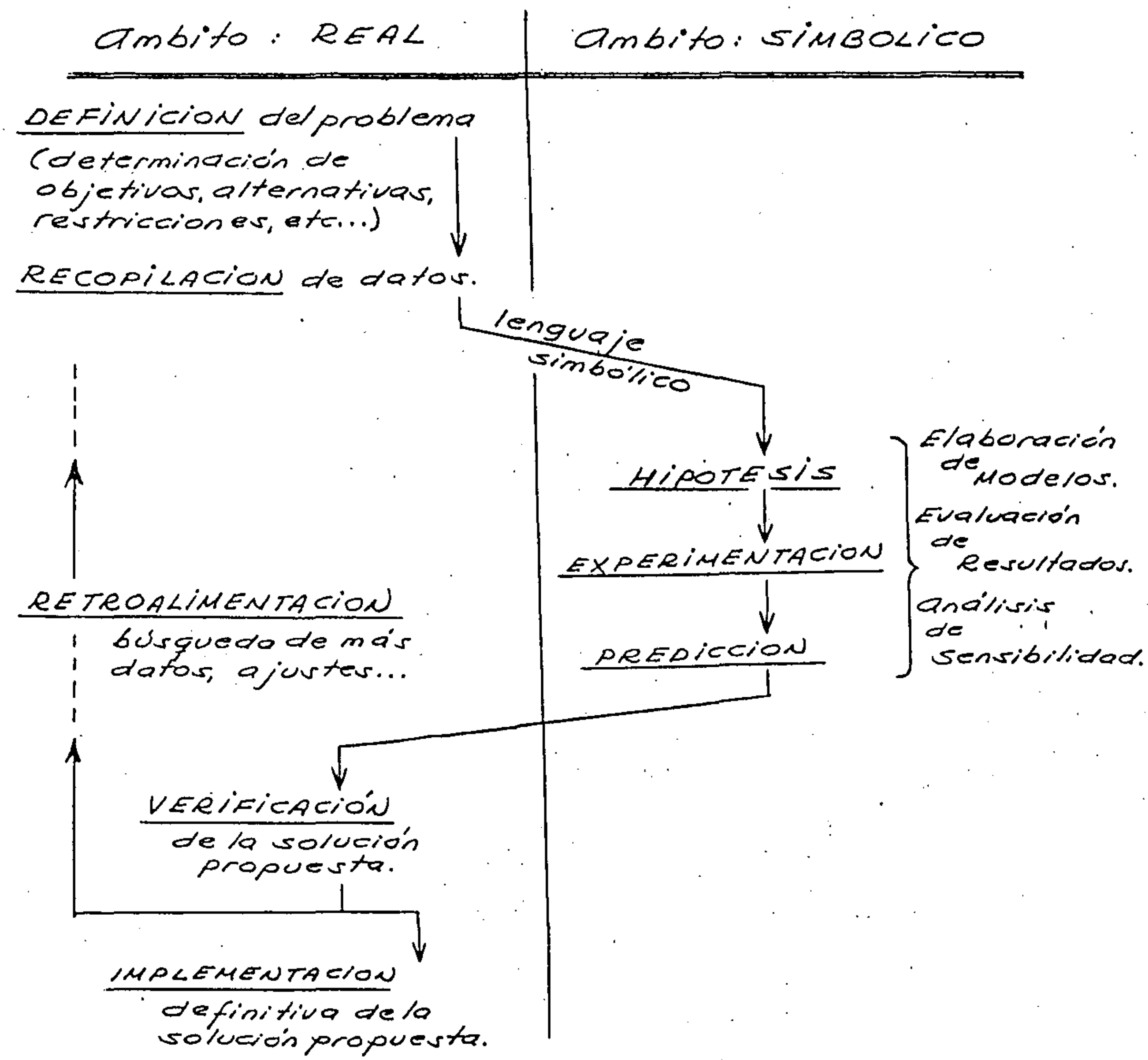
.) En el segundo caso, el análisis considera poder obtener buenas estimaciones sobre la probabilidad de ocurrencia de las futuras condiciones y del efecto económico de dichas condiciones. Es frecuente que la determinación del valor de dichas probabilidades implique erogaciones originadas por investigaciones y experimentaciones...

.) El considerar decisiones bajo condiciones de incertidumbre, implica que el análista considera prudente incluír los efectos de diferentes factores, pero le resulta imposible hacer estimaciones sobre las probabilidades de ocurrencia de esos factores y sobre el verdadero efecto de las mismas en la situación decisional.

PROCESO DE LA TOMA DE DECISIONES.

La toma de decisiones se desarrolla dentro de los ámbitos: el real, en el que tienen lugar los problemas del diario, y del simbólico, en el que se trata de representar a los problemas del ámbito real para su estudio y resolución.

Esquemáticamente el proceso puede representarse:



DEFINICION DEL PROBLEMA Y RECOPILACION DE DATOS.

El problema se origina en el ámbito real, dentro de los diversos campos de la actividad humana.

Los datos son los que definen y clasifican a un problema.

El conjunto de datos permite al analista elaborar un modelo que represente en el ámbito simbólico al problema del ámbito real.

El lenguaje simbólico permite traducir la información del ámbito real, a una forma utilizable en el ámbito simbólico.

Se formulan hipótesis respecto al comportamiento del modelo y se someten a prueba experimentándolas para tratar de simular las reacciones del modelo.

De esta experimentación surge una predicción de comportamiento.

La solución implicada en el modelo se lleva al ámbito real y se observan los resultados prácticos en esa realidad, es decir:

si la predicción sobre el comportamiento del modelo resulta válida, el problema esta resuelto. Si no, el ciclo se vuelve a repetir tratando de recopilar más información que amplie la visión del problema.

Se dice que el proceso es sistemático en cuanto a que se procede paso a paso dentro de una secuela lógica.

La definición del problema se inicia con el establecimiento preciso de los objetivos, alternativas y restricciones a las que debe sujetarse la solución que se proponga y por la captación de información relativa al problema, debiendo ser esta información, tan abundante como sea factible y de la mejor calidad posible.

Será necesario analizar el grado de sensibilidad de las alternativas y considerar la posibilidad de suboptimización. A medida que las ramificaciones e implicaciones de un problema son más amplias, la definición de las metas es más compleja.

Una preliminar búsqueda de soluciones, implica el enlistar todos los posibles cursos de acción.

La cantidad y calidad de los datos recopilados es fundamental, ya que todos los demás pasos del proceso, descansan en dichos datos, y ninguno de los pasos puede compensar la falta de ellos.

Ya se había comentado el que en toda decisión intervienen factores que no pueden traducirse a pesos y centavos; estos son los factores no-monetarios o intangibles.

La distinción entre los factores tangibles y los intangibles, radica en la mayor o menor facilidad y exactitud con que pueden ser expresados cuantitativamente. Como ya hemos visto, ejemplos de intangibles pueden ser: consideraciones de seguridad, reputaciones, amistades, relaciones públicas, etc...

ELABORACION DEL MODELO.

Un modelo es la representación del ámbito real en el campo de lo simbólico. Se inicia la estructuración de un modelo desde el momento de fijar objetivos y alternativas.

Un modelo muestra la relación de causa a efecto entre objetivos y restricciones.

Se maneja de tal manera que muestre el resultado final de seguir un determinado curso de acción.

Dado que las situaciones de decisión varian muy ampliamente, son necesarios varios tipos de modelos. Consideramos tres clases: físicos, esquemáticos y matemáticos. Especialmente nos interesan los modelos matemáticos para su uso en estudios económicos.

Los modelos físicos pueden ser de menor, mayor o de igual tamaño que el objeto que representan. Ejemplos de estos modelos en el campo de la ingeniería, lo constituyen: modelos de canales, rompeolas, cortinas, sistemas de tuberias, etc...

Los modelos esquemáticos son representaciones gráficas de diversas situaciones. Ejemplos de estos modelos, son los Organigramas, que muestran la división y delegación de autoridades, las gráficas de proceso de flujo de producción, las redes econométricas, redes de camino crítico, gráficas de punto de equilibrio, etc...

Los modelos matemáticos están constituídos por ecuaciones y fórmulas. Como ejemplos podemos nombrar a los modelos probabilísticos, a los modelos estadísticos, a los modelos de programación lineal, etc... Una fórmula matemática para la determinación del momento flexionante en una viga, es un modelo matemático.

EVALUACION.

El mérito de un modelo, radica en que tan eficazmente represente el comportamiento y reacciones de las situaciones que se ubican en el ámbito real. La prueba última y definitiva de un modelo, se presenta cuando las predicciones en cuanto al comportamiento del problema, se someten a la realidad.

Cada tipo de modelo se evalua en forma diferente. Un buen modelo contribuye a completar el análisis de un problema en cuanto a que hace más fácil y objetivo observar y preveer los resultados originados por los diversos factores que afectan a la situación en estudio.

Una vez que todo el proceso de la toma de decisiones ha sido seguido, a final de cuentas, quien debe tomar la decisión final en cuanto a la solución a implementar será aquella autoridad quién en última instancia deba asumir la responsabilidad de los resultados y efectos que dicha decisión pueda implicar en un futuro.

Pero debemos recordar una vez más que para que una decisión constituya autenticamente una " decisión económica ", el analista deberá tomar en consideración para la estructuración de su modelo, todos los factores de tipo monetario y todos los de tipo no-monetario o imponderables que afecten a beneficios o a costos en su situación decisional particular.

LAS INVERSIONES DE CAPITAL.

Las inversiones sólidas de capital son tan importantes para la economía de una empresa individual como para la economía nacional en conjunto. La expansión de las empresas y la introducción en ellas de adelantos tecnológicos, administrativos, organizacionales, etc... representa un factor muy importante para el desarrollo económico de ellas mismas y del pais, y contribuyen considerablemente a aumentar la productividad y a elevar el nivel de vida, ya que normalmente estas inversiones se traducen en creación de fuentes de empleo, generación de impuestos, incremento del ahorro, etc...

En especial debemos tener presente, que la Industria de la Construcción, es una de las que individualmente, dentro de la Economía en general, más intervienen directa o indirectamente en la integración del Producto Bruto Nacional.

Los problemas implicados en la definición de las políticas de inversión de capital y en la selección de las posibilidades de inversión, se cuentan entre los más difíciles que afrontan los ejecutivos en negocios. Las inversiones de capital no representan un área aislada en la toma de decisiones. Implican el conocimiento profundo de las alternativas de producción, pronósticos del mercado, conocimiento de los precios tanto de adquisición de materias primas como de venta de los productos en el mercado, posibilidades y costo de financiamientos, costo de la obra de mano, rendimientos, legislación laboral, legislación fiscal, etc...

El proceso de la toma de decisiones en el ámbito de las inversiones, se basa en estimaciones sobre el futuro. Las inversiones en propiedades inmuebles, generalmente no pueden recuperarse en periódos de tiempo cortos. Normalmente una vez que una compañía ha asignado fondos para una determinada inversión, se ha comprometido a seguir un sendero futuro del cual no podrá desviarse fácilmente. Por consiguiente, los elementos de incertidumbre y riesgo son particularmente grandes en las decisiones que se relacionan con la inversión de capital, y ésto, aunado muy frecuentemente por desgracia a un desconocimiento por parte de los empresarios de los principios del Análisis Económica y de su propia realidad financiera y económica, induce a los ejecutivos de negocios a tener que confiar en corazonadas, medidas de costumbre o reglas generales. En vista de la importancia vital de las decisiones, esto es inadmisible. Un plan económicamente sólido para las inversiones de capital, establece un procedimiento, una mecánica, para detectar, recopilar, analizar y evaluar todos los datos sobre la realidad de las condiciones en las que se pretende invertir a fin de poder seleccionar las propuestas más convenientes.

Las empresas de éxito, generalmente tienen más proyectos de inversiones potenciales que fondos disponibles para realizarlos, por lo que, la escasez de fondos es un factor determinante en el criterio para aprobar los proyectos de inversión a los que vayan a adjudicarse los limitados recursos con que cuenta la empresa, la cual, en estas condiciones, se ve obligada a establecer elementos de juicio, mecanismos y criterios para seleccionar entre las alternativas propuestas.

Se pueden distinguir diversos tipos de proyectos de inversión de capital: proyectos no lucrativos, proyectos de utilidades no conmensurables, proyectos de reposición de equipo, proyectos de inversión en activos, proyectos de expansión, proyectos para la reducción de costos de operación Y/o de producción, proyectos para mejorar la calidad de la producción, proyectos para lograr el mantenimiento de cierto nivel de utilidades, proyectos de investigación y desarrollo, etc...; y los elementos de juicio que se emplean para evaluar la conveniencia de una inversión de capital propuesta, dependen de la naturaleza de la misma inversión, así por ejemplo, los proyectos de inversión que llamamos " no lucrativos", implican gastos que se originan de requerimientos legislativos, de tipo contractual, etc.., como pudiera ser el caso de una reglamentación que obligara a las empresas a la implantación de sistemas para el control de emanaciones, o a la construcción de tapiales para garantizar la seguridad de los transeuntes, o a la obligación de invertir en cursos para la alfabetización, la capacitación técnica de los trabajadores, u orientado a su desarrollo social y humano.

Puesto que gastos de éste tipo son obligatorios, una empresa no tiene necesidad de establecer criterios para evaluar la conveniencia de estas erogaciones.

Por otro lado, los proyectos de " utilidades no-conmensurables ", se refieren a inversiones cuyo objetivo es el de aumentar utilidades,-pero cuyo monto no puede calcularse dentro de un grado razonable de exac titud. A éste tipo de inversiones pertenecen los gastos en publicidad, los de promoción, las erogaciones en cursos de actualización impartidos al personal técnico y administrativo, el costo de asesorías para la revisión de los sistemas operativos de una empresa, las inversiones para-otorgar una nueva prestación a los empleados y trabajadores a fin de mejorar su condición y estado de ánimo, etc.. Puede suponerse que una compañía interesada en maximizar sus utilidades, no realizará inversiones-de este tipo, a menos que esté convencida de que en última instancia, -estas rendirán una utilidad. Desafortunadamente en la mayoría de los casos, es virtualmente imposible medir exactamente el ingreso marginal derivado de tales gastos.

Con respecto a las inversiones de capital de ésta categoria, la empresa debe confiar primordialmente en el criterio de su gerentes más bien que en datos cuantitativos.

Sin embargo existen otro tipo de inversiones en las cuales no solo es-factible, sino en cierto aspecto obligatorio, justificar plenamente mediante un análisis económico, /o estimación cuantitiva de las utilidades y del rendimiento que se espera obtener de dicha inversión. La reposición de equipo, la inversión en activos, etc.., son ejemplo de este tipo de inversiones. Si se demuestra que los ahorros en costo que se -derivarán de la adquisición de una nueva maquinaria para la substitución de una existente, van a proporcionar un rendimiento satisfactorio sobre la inversión de capital correspondiente, entonces el reemplazo-se vuelve económicamente conveniente y justificado.

Aunque en lo sucesivo, nos ocupemos principalmente del uso de los datos cuantitivos para determinar la conveniencia de los desembolsos de capital, es muy importante reconocer que en el análisis de factibilidad económica del último tipo de inversiones descitas, deben hacerse intervenir, el factor riesgo, que varia según la naturaleza de cada proyecto-y los elementos no-cuantitivos o no-monetarios, sobre los cuales ya se hizo mención anteriormente, ya que ambos elementos pueden ser determinantes en la decisión final. Por tanto, aspectos como las buenas relaciones con el personal de trabajo, el mantenimiento de una posición de prestigio dentro de una industria, el hacer frente a la competencia, y el cumplimiento de las leyes estatales y municipales, entre muchos otros que pudiésemos citar, pueden ser los motivos que decidan una inversión, independientemente de las posibilidades de costo e ingresos. Serían ejemplo de tales erogaciones, las encaminadas a actividades tendientes a proporcionar servicios y prestaciones para los trabajadores, a la introducción de máquinaria para poder hacer frente a la competencia, a los desembolsos para investigaciones y desarrollo de nuevas técnicas y procedimientos de producción y control, a garantizar la salud y seguridad de los trabajadores, etc..

En los estudios de inversión deben incluirse todos los factores de costo y de ingreso que se estimen inherentes a los proyectos bajo consideración. Es así, que debe reflejarse cualquier ahorro previsto en los costos de materiales o los que se deriven de la utilización del equipo o de la fuerza de trabajo. Igualmente deben preveerse hasta donde sea factible los cambios que pudiesen presentarse en los costos directos, por concepto de obra de mano, materiales y manejo de los mismos, utilización del equipo, rendimientos, mantenimiento, reparaciones, etc... así como de los aumentos o disminuciones en costos indirectos específicos tales como impuestos, seguros, fianzas, administración de oficinas centrales y de campo, financiamiento, etc...

De igual manera habrá que considerar todos los beneficios directos e indirectos que cada una de las alternativas de inversión ofrezca.

Ambos factores: de egresos e ingresos, de costos y de beneficios, deberán contemplarse dentro del horizonte económico que se considere adecuado en cada caso.

EL INCENTIVO DE LA UTILIDAD.

El incentivo que existe en cualquier decisión de invertir, es el de obtener una utilidad. Toda erogación que encierre la esperanza de originar una utilidad, puede considerarse como " inversión ", y de hecho este efecto es lo que define al concepto de inversión.

La esperanza de obtener una utilidad es la motivación que induce a una persona a invertir, y en consecuencia a renunciar a satisfacer sus necesidades presentes, con la esperanza de poder satisfacer mayor número de necesidades en el futuro. Esta motivación es la que rige las inversiones de cualquier índole: personales, industriales, del sector público, etc... La utilidad puede también explicarse como el resultado de la productividad del capital.

FUENTES DE CAPITAL.

Los suministros de capital de una empresa, pueden provenir de varias " fuentes " y cada una de ellas puede tener diferente " costo " para la empresa.

En términos generales, podemos clasificar las llamadas " fuentes de capital " de una empresa en:

a) Fuentes Internas.
b) Fuentes Externas.

Las fuentes internas de capital están constituídas por:

1) El capital Constitutivo o Social de la empresa, integrado por las aportaciones directas de los socios o accionistas.

2) Las utilidades no distribuidas de ejercicios anteriores comunmente llamadas " pendientes por aplicar " y que al no ser retiradas por los socios, se dejan dentro de la empresa, para incrementar el capital de trabajo. Este capital, de hecho constituye un préstamo de los socios a la empresa, para permitir las operaciones propias de la misma.

3) Los fondos de depreciación.

Las fuentes externas de capital quedan representadas por los préstamos otorgados a la empresa, por instituciones de crédito, inversionistas particulares, etc...

El capital Social es aquel que es propiedad de quienes lo usan y quienes esperan recibir en retribución: una " utilidad ".

La retribución correspondiente al capital prestado por las fuentes de financiamiento externas, se denomina: " interés ".

El prestamista solo recibe un " interés " que es prefijado en monto y plazo y no participa de ningún otro beneficio derivado de la inversión que se haga con el capital, pero por otra parte, tampoco está sujeto a riesgos ni contingencias, al menos en circuntancias normales.

Es de hacerse notar que dentro de las " utilidades " que percibe el dueño del capital podemos distinguir dos partes: un " interés ",similar al que percibe como remuneración el capital prestado, y que corresponde al " costo " propiamente dicho del capital empleado; y una segunda parte que representa una compensación adicional al dueño del capital por el riesgo en que incurr al realizar la inversión con su propio dinero.

Esta subdivisión solo es válida desde el punto de vista de un análisis económico, ya que, como veremos más tarde, el punto de vista contable no acepta el impactar la " utilidad " (al menos para efectos de libros) con éste interés, o costo interno del dinero.

Cuando en una empresa, no es posible lograr el ingreso de nuevo capital social ni conseguir más préstamos externos, el capital disponible para nuevas inversiones quedará limitado a las fuentes internas de financiamiento y su incremento estará constituído solamente por la retención de las utilidades (si las hay) y por los fondos que en cada periódo se integran a las reservas de depreciación de los activos existentes.

Sin embargo, aun en aquellos casos en que para incrementar los recursos de la empresa, sea factible recurrir al aumento del capital social mediante el ingreso de nuevos accionistas, se encuentra normalmente, cierta resistencia a seguir esta alternativa, sobre todo en las empresas pequeñas y medianas, ya que el aceptar nuevos socios implica, para el grupo actual de dueños, normalmente reducido, el sacrificar el control que tienen de la empresa.

Para calcular el " costo del capital " de la compañía, habrá que estimar primero el costo de cada una de sus fuentes de financiamiento y analizar después la composición de la disponibilidad total.

El problema de determinar este costo del capital, la más conveniente composición de los fondos y el interefecto en los costos de cada una de las fuentes de capital, es sumamente complejo pero de gran importancia para la planeación financiera de una empresa.

Dichas complejidades provienen fundamentalmente de la dificultad de calcular el costo de cada fuente de financiamiento (que además es variable y sensible a muchos factores) y del hecho de que al realizar una inversión, los fondos empleados rara vez pueden identificarse con su fuente y más bien pueden considerarse emanados de algún tipo de crisol de capitales en el cual todos los disponibles se funden y pierden su identidad.

EL COSTO POR EL USO DEL CAPITAL.

De acuerdo con el principo del incentivo de la utilidad, cada peso gastado debe satisfacer la esperanza de utilidad del dueño del capital. Por otro lado, vemos en el inciso anterior que las fuentes de financiamiento de una empresa pueden ser <u>internas</u>, constituidas por el capital que en forma general llamaremos " capital propio ", y <u>externas</u>, constituídas por " capital prestado ". A cada tipo de capital corresponde una remuneración distinta de acuerdo con sus características propias.

El término: " interés ", se emplea para designar el pago o renta correspondiente al uso del dinero y representa el costo del mismo. (Recordemos que incluida dentro del concepto " utilidad", hemos distinguido una parte constituída por un " interés " por el uso mismo del capital). Esta renta que se paga por el uso del capital, en escencia es la misma que se paga o se impacta en los costos, por ejemplo, por el uso de maquinaria o equipo, ya sea éste propio o rentado.

Sin embargo, es evidente que una empresa se encuentra en situación distinta si opera con capital propio, que si lo hace con la misma cantidad de dinero, solo que con capital prestado. Hay una clara e importante diferencia entre el uso de capital propio y el uso de capital prestado, y entre los conceptos de utilidad e interés.

El capital que proviene de un préstamo, normalmente presenta las siguientes características: ha sido solicitado por tiempo determinado, transcurrido el cual, se ha prometido reintegrarlo; el interés que por su uso se pagará, ha sido previamente fijado y no depende del resultado de la inversión a que el dinero se ha destinado, es decir, teoricamente al menos, no está sujeto al elemento riesgo. -- Por otro lado, tampoco será incrementado ni recibirá beneficio alguno adicional, si las utilidades que se obtengan de la inversión, resultan ser mayores que las previstas. Cuando el prestamista de un capital analiza y determina la tasa de interés que le es atractiva y a la cual está dispuesto a prestar su dinero, toma en cuenta: el riesgo en el que considera poder incurrir de que su dinero no le sea devuelto

(riesgo que trata de reducir al mínimo mediante la exigencia de garantias colaterales, avales de terceros, etc...), sus gastos administrativos y el margen de utilidad que espera obtener.

A diferencia de lo anterior, la inversión del capital propio, tiene como esperanza de retribución, una utilidad, pero de hecho nada garantiza al inversionista que dicha utilidad será obtenida, ni el tiempo en el que se obtenga, y lo que es más, casi siempre existe el riesgo de que ni el capital inicial invertido pueda ser recuperado. Se desprende de aqui, lo justo de la diferencia en monto -- que normalmente existe entre " utilidad " e " interés ".

Otra muy importante diferencia entre utilidad e interés, es - el tratamiento que la legislación fiscal dá a uno y a otro. Para - el que percibe un interés, éste constituye un beneficio, una utilidad, la cual está gravada fiscalmente; en cambio, para el que paga- dicho interés, ésta erogación representa un costo, el cual es deducible fiscalmente. Las tasas de impuesto con las que el fisco grava los ingresos obtenidos en calidad de interés (como remuneración por dinero que ha sido prestado), y en calidad de utilidad (por - una inversión realizada), son muy distintas. Es claro que el im-- pacto financiero que representa el pago del impuesto correspondiente en cada caso, debe estimarse y considerarse previamente en el análisis de toda alternativa de inversión.

La obligación de compensar con un rédito ó de " pagar " por- el uso de un capital a su propietario puede constituir una obligación legal como es el caso de la obligación contractual originada- por el préstamo de cierto capital a un interés y a un plazo predeterminado. O puede ser una obligación moral, como es la contraida por los dirigentes de una empresa con respecto a los accionistas - cuyos fondos manejan y a quienes deben redituar unos " dividendos". Aún en el caso de capital propio, existe una obligación de sentido común de reconocer un costo de nuestro propio capital, derivado del hecho de que al invertir ese capital en esa alternativa, se están -

rechazando las utilidades o beneficios que hubiere proporcionado ese capital invertido en otra alternativa.

En forma genérica, a la tasa de interés que constituye la recompensa por el uso del capital en cualquier forma de inversión, se le denomina frecuentemente " tasa de recuperación del capital ", ó simplemente " tasa de recuperación ".

Aún en el caso de inversiones efectuadas por alguna dependencia gubernamental, debe considerarse, al hacer el análisis de factibilidad económica, un costo correspondiente al capital por emplear y debe fijarse una tasa de recuperación al proyecto, ya que dicho capital por emplear, ha sido obtenido por medio de recaudación de impuestos, de los particulares, y habrá que reconocer que éstos hubiesen obtenido una cierta tasa de recuperación al invertir su dinero, de no haberseles privado de este mediante el cobro de un impuesto.

De cualquier manera y sea cual sea la fuente de la cual provienen los fondos por emplear debemos reconocer que " usar dinero, cuesta dinero ".

Hay varias razones que justifican el hecho de tener que considerar un costo al capital por emplear, y que se expresa mediante una " tasa de recuperación ", cada vez que se analiza una inversión. Entre ellas podemos nombrar: 1°. la tasa de recuperación, remunera al dueño del capital por el hecho de no poder usarlo mientras aquel a quien se le ha confiado, lo está usando. 2º la tasa de recuperación compensa al dueño del capital por el riesgo que está corriendo al invertir su capital. 3º la tasa de recuperación, constituye un incentivo para que el dueño del capital invierta.

A menos que el impacto económico correspondiente al " costo del Capital " sea considerado de alguna manera en un análisis de inversión, el estudio resultante será inexacto, equivoco e inútil.

Aunque la inclusión del interés es indispensable en el estudio de inversiones, la determinación de un tipo de interés apropiado es una tarea que presenta algunas dificultades. A veces se considera erróneamente al interés como si fuese igual al rendimiento sobre la inversión. Queremos volver a insistir en que el rendimiento sobre la inversión consiste de dos elementos: interés y utilidad. El primero representa el costo del dinero empleado; el segundo, el mismo costo más una recompensa por el riesgo y la incertidumbre. El costo del capital invertido (expresado en el interés), constituye el elemento de criterio mínimo para la aceptación de proyectos de inversión de capital que se emprenden para obtener utilidades. Una empresa debe recuperar, por lo menos, el costo correspondiente al dinero empleado antes de que pueda considerar que ha obtenido una utilidad real sobre su nueva inversión. Por otra parte, el elemento de criterio de aceptación mínimo que puede considerarse como una recompensa por el riesgo y la incertidumbre, varía con la naturaleza del riesgo incurrido.

Al elegir entre las inversiones potenciales, una compañía solo debería aceptar aquellas propuestas cuyo rendimiento esperado sobrepase, cuando menos, el costo del capital. Haciendo una comparación muy sencilla, sería antieconómico para una persona pedir dinero prestado con el propósito de realizar una inversión, si es que no va a poder invertir estos fondos en forma que le proporcionen un rendimiento mayor que los intereses que debe pagar. El costo del capital constituye el elemento de criterio mínimo de aceptación o la tasa mínima de rendimiento sobre la nueva inversión. Proyectos de capital que rindan ingresos inferiores a ésta tasa mínima aceptable, diluyen el capital de los accionistas y conducen a las empresas a un proceso de descapitalización.

Desafortunadamente, el determinar el costo del capital de una empresa es quizás el área más compleja y sujeta a controversias en el campo de las finanzas.

COSTO DE OPORTUNIDAD DEL CAPITAL.

Todo propietario de capital, tiene más de una alternativa para invertir su dinero. Cada vez que acepta una de esas alternativas, renuncia a la oportunidad de invertir en otras alternativas y por tanto, renuncia también al beneficio que esas otras alternativas le hubiesen reportado. Esta situación da lugar al concepto de " Costo de oportunidad ". Ejemplificando el concepto anterior a un caso muy sencillo, supongamos que una persona tiene dos oportunidades para invertir sus ahorros: adquirir bonos financieros que le reportarán un 15% de interese anual o invertir en una casa para habitarla con su familia. Si decide invertir sus ahorros en la compra de la casa, de hecho está rechazando la oportunidad de adquirir los bonos y por tanto rechaza también una utilidad del 15% sobre su capital, y debe reconocer entonces que esta tasa: 15%, que deja de percibir, constituye el costo del capital con el que va a financiar la compra de la casa, aunque éste capital sea suyo. Por tanto, antes de decidirse deberá comparar ésta utilidad (que dejará de percibir) con la utilidad (en éste caso, satisfacción) que le proporcionará la posesión de una casa propia para él y su familia.

Lo anterior deja de manifiesto, que ni para el capital propio, puede evitar considerar un costo: "el costo de oportunidad ", cuando se pretende aplicarlo a una inversión o al logro de un satisfactor. Desde el momento en que el propietario de un cierto capital decide invertir en determinada alternativa y partiendo de la base de que los recursos con que cuenta son limitados, está de hecho renunciando a la posibilidad de invertir en otras alternativas, aunque una de ellas pudiera ser, en el peor de los casos, simplemente dejar el dinero en el Banco ganando un cierto interés por bajo que este sea. Por otro lado debe analizar si la utilidad esperada, usualmente expresada en términos de una tasa de interés anual, es suficiente para justificar la inversión en la alternativa propuesta; y aunque estrictamente hablando, no existe costo del capital (ya que éste es propio), al invertirlo debe esperarse, como mínimo, recibir una utilidad al menos igual a la de las alternativas rechazadas, siendo esta utilidad rechazada y perdida, lo que constituye el costo de oportunidad del capital.

En orden a determinar si la tasa de recuperación esperada en una cierta inversión es suficiente, debe compararse esta tasa esperada con -- las tasas que pudieran obtenerse de usar el capital en otras alternativas.

En la industria, un empresario tiene básicamente dos alternativas de inversión del capital de la firma: una es invertir el dinero dentro de la misma empresa (como capital de trabajo para las operaciones propias de la misma), y otra es invertirlo fuera de la empresa (en compra de bonos financieros, acciones de otras empresas, etc..)

Veamoslo de esta forma: es cierto que no debería aprobarse la inversión del capital social de la empresa, (o la reinversión de las utilidades obtenidas, en su caso), dentro de la misma, si la tasa de - recuperación que se espera obtener es inferior a la que se pudiese- obtener con alguna inversión fuera de la empresa. Las oportunidades externas y sus tasas de recuperación, constituyen, desde este punto- de vista, un criterio de límite inferior para la inversión interna.- Sin embargo, la alternativa de invertir externamente a la empresa, - es muy raro que pudiese representar una situación adecuada, ya que, por un lado, dentro del campo industrial, lo normal es que a una empresa se le presenten internamente una infinidad de alternativas y posibilidades de inversión de fondos para mejorar su situación económica, para incrementar su nivel de ingresos, reducir costos de producción- u operación,inversiones en maquinaria de producción, equipo de transporte, equipo de oficina para la implementación de nuevos sistemas - administrativos, inversiones en medidas para aumentar las prestaciones del personal, etc... y por otro lado, si a la luz de una realidad, las mejores alternativas de inversión se presentan en el exterior, no hay razón para continuar con ese negocio y en consecuencia la empresa debe liquidarse.

Solo en una situación particular en la que se tenga en un momento dado, un superavit de recursos monetarios, se podría justificar que ciertos fondos fuesen destinados a la compra de bonos o acciones aún de - relativo bajo interés, cuando se prevea que, de no proceder así, dichos fondos permanecerán " inactivos " en una cuenta bancaria sin obtener ninguna recuperación.

Se sobre entiende que para que lo anterior pueda justificarse, la situación descrita es meramente temporal y circunstancial, ya que de no ser así lo mejor es que los administradores de la empresa,- reintegren el capital a los accionistas de la misma, por resultar evidente que de seguir dicho capital invertido en la empresa, no- podrá rendir a sus dueños una tasa de recuperación mínima esperada. Es claro que un administrador, actua incorrectamente cuando- retiene ese capital sabiendo que no puede satisfacer esas mínimas esperanzas de utilidad de los inversionistas.

Resulta entonces claro, que el costo de oportunidad de la empresa está determinado por el costo de oportunidad de sus accionistas,- ya que cada accionista, al momento de invertir en la empresa, mediante la compra de nuevas acciones o conservando las anteriormente adquiridas o prestando dinero para la operación de la empresa, está rechazando otras oportunidades de inversión y de hecho, las- utilidades que estas últimas le hubiesen podido proporcionar. -- Esas oportunidades y esas esperanzas, se convierten en consecuencia, en el costo de oportunidad del capital social de la empresa.

No podemos mencionar el costo de oportunidad sin dejar de observar que sugiere un medio de determinar el costo del capital.

Si el financiamiento se lleva a cabo con fondos ajenos, es decir, con capital prestado, la tasa de interés que se paga por el uso - del dinero claramente establece el costo del capital.

EL VALOR DEL DINERO CON EL TIEMPO.

Hemos visto que el dinero debe estar " ganando " cuando menos, lo que hemos llamado el costo del capital y esto da origen al concepto del valor del dinero con el tiempo, el cual puede ilustrarse de la siguiente manera:

Supongamos un préstamo de $ 1,000.00 que será usado durante los - próximos cuatro años. Consideramos que el costo del capital es de anual.
50%

En estas condiciones, la cantidad adeudada al cabo del primer año está constituida por la cantidad original $ 1,000.00 más $ 500.00 correspondientes al costo del capital, o sea, $ 1,500.00; al final del segundo año, serán $ 1,500.00, más el costo del capital por ese año, $ 750.00, lo que da un total de $ 2,250.00; al final del tercer año la cantidad será de $ 2,250.00 más $ 1,125.00, o sea, $ 3,375.00 y al final del cuarto año, serán $ 3,375.00 más $ 1,687.50, o sea, $ 5,062.50 .

Lo anterior constituye un proceso de interés compuesto, esto es, la acumulación de intereses sobre el capital original y sobre los intereses anteriormente generados.

Aplicando el concepto del valor del dinero con el tiempo en el ejemplo anterior, observamos que $ 1,000.00 de hoy, tienen un valor de $ 1,500.00 dentro de un año y de $ 2,250.00 dentro de dos, de $ 3,375.00 dentro de tres, y de $ 5,062.50 dentro de cuatro. En forma inversa, también podemos decir que una cantidad de $ 5,062.50 dentro de cuatro años, equivalen a $ 1,000.00 hoy.

Claro que lo anterior es considerando una tasa de incremento del valor del dinero con el tiempo, de 50% anual, lo cual no siempre será cierto, ya que podrá ser mayor o menor de acuerdo con las condiciones de cada caso particular, pero al menos, lo que podemos asegurar es que dicho valor nunca es cero.

Como ejemplo de que lo anterior es cierto, preguntémonos si alguien nos querrá prestar $ 1,000.00 ofreciéndole nosotros reintegrarle los mismos $ 1,000.00 al cabo de un año; aún dandole plenas garantías de que su dinero le será entregado sin falta y en fecha determinada. Si nadie acepta, la razón será que $ 1,000.00 de hoy, no equivalen a $ 1,000.00 dentro de un año. Si la mínima cantidad que alguien exige le sea pagada dentro de un año para otorgarnos el prestamo de $ 1,000.00 es de $ 1,500.00, esto significa que el valor del dinero con el tiempo se valúa en 50% anual.

Lo anterior nos lleva además a otra consideración: supongamos que nos informan que las erogaciones que se llevarán a cabo en cierta inversión, serán: $ 1,000.00 el día de hoy, $ 1,500.00 al terminar el primer año y $ 2,250.00 al terminar el segundo año. No podemos decir, que el costo de la inversión está representado por la suma de las erogaciones: $ 1,000.00 más $ 1,500.00, mas $ 2,250.00 --- igual a $ 4,750.00 ya que estaríamos sumando cantidades cuyo monto está expresado en distinto tiempo; es decir, si bien es cierto que el desembolso real si será de $ 4,750.00, también lo es el -- hecho de que esta erogación no será efectuada de un golpe en un - momento dado, sino que parte al menos de la misma, será diferida una y dos años.

Lo correcto es, sumar las tres cantidades, pero una vez que han - sido expresadas " en un mismo tiempo ", asi por ejemplo, si actualizamos los valores de cada año al momento actual y consideramos por otro lado que la tasa representativa del valor del dinero con el tiempo, es de un $ 50%, tenemos:

Valor actual, de $ 1,000.00 gastados hoy:	$	1,000.00
Valor equivalente actual de $ 1,500.00, que se gastarán dentro de un año:		1,000.00
Valor equivalente actual de $ 2,250.00, que se gastarán dentro de dos años.		1,000.00
Suma actualizada de las erogaciones, al día de hoy:	$	3,000.00

Podemos establecer, que en reconocimiento del concepto de valor - de dinero con el tiempo, las cantidades de un cierto flujo de --- efectivo, deberán ser traducidas a un mismo punto del tiempo, an-- tes de ser sumadas o comparadas entre si; y es muy importante que quede claro que no pueden sumarse o compararse, cantidades expresadas en distintos puntos del tiemp.

Ahora bien, detengamonos un momento a pensar: ¿ Cuál es la razón de fondo de que siempre que analizamos una alternativa de inversión, h necesidad de considerar un incremento del valor del dinero con el -- tiempo ?. La primera respuesta que se nos ocurre es que el tener que pagar un interés, constituye un hecho en el ámbito de los negocios y en general en el medio mercantil. Pero entonces surge a su vez, otra pregunta aún más compleja: ¿ Cómo se explica y se justifica que en los negocios, el interés del dinero, sea un hecho ?.

En economía se explica lo anterior mediante un análisis de la situación de la oferta y de la demanda de fondos para inversión. Desde el punto de vista de la oferta, el interés es necesario como incentivo para invertir. Desde el punto de vista de la demanda, el interés es posible dado que el capital es productivo.

Desde el punto de vista de la oferta, si una persona presta dinero que ha ahorrado, se priva de poder satisfacer en ese momento ciertas necesidades. No puede emplear su dinero en la adquisición de bienes de consumo, si se lo ha prestado a alguien, o si lo ha invertido en la compra de maquinaría o equipo (esto es, en bienes de producción), o ha comprado acciones de una empresa, o lo ha pagado como impuestos al gobierno. En todos estos casos requiere la existencia de un incentivo que lo compense del diferimiento que estas inversiones implican, de la satisfacción inmediata de sus necesidades.

Por otro lado hay que reconocer que otro incentivo, como es el "sentimiento de seguridad", puede en un momento dado, ser más importante que el incentivo: interés. Es común que cierta cantidad de fondos se invierten a tasas menores de interés, pero en condiciones de menor riesgo, ya que la sensación de confianza y seguridad que una inversión de este tipo proporciona, compensa una tasa de recuperación baja relativamente a las que pudieran brindar otras alternativas de inversión pero que implicasen mayor riesgo. Sin embargo, en términos generales podemos afirmar que mientras mayor sea la tasa de interés, mayor es la motivación para diferir el consumo, e invertir con la esperanza de obtener un interés sobre nuestro dinero.

Es razonable suponer que si desaparecieran las perspectivas de obtener un interés como remuneración a la inversión del dinero, también desaparecerían los estímulos para invertir...

Ahora, desde el punto de vista de la demanda, ¿ cómo es posible pagar interés ?, esto es, ¿ cómo puede una empresa encontrar conveniente pedir dinero prestado y pagar el interés requerido por ello ?; ¿ cómo -- puede una sociedad pagar dividendos a sus accionistas, lo cual no es- más que una remuneración por la inversión de su dinero ?. La respuesta es que los bienes de capital son productivos. El capital y los -- bienes de producción (maquinaría, equipo, estructuras, etc...), son productivos. Es por esto que una empresa puede pagar un interés sobre dinero prestado, o puede atraer capital de socios que invertirá en bienes de producción, y pagarles posteriormente dividendos mayores que el interés que pudieran haber obtenido simplemente prestando su - dinero.

Con lo anterior tenemos la doble explicación al interés: "El interés puede existir porque el capital es productivo, y es necesario que el interés exista para que haya un incentivo substancial para la inversión ".

Pero quizás, más correcto que decir que los bienes de capital son productivos, sería afirmar que bajo circunstancias favorables, bienes - de capital específicos son suficientemente productivos para generar- una recuperación atractiva, y por otro lado, el problema de establecer si bajo determinadas circunstancias, bienes de capital específicos serán lo suficientemente productivos para generar una recuperación atractiva, es un problema de Ingeniería Económica. Cada situación deberá ser examinada a la luz de los beneficios y costos que las circunstancias permitan estimar. Las consideraciones de tipo técnico que un problema de este tipo implica, hacen necesaria la intervención de conceptos de Ingeniería Económica para su solución.

Un analista, conocedor de los principios y las técnicas de la Ingeniería Económica, está capacitado para hacer recomendaciones respecto a- la conveniencia o nó, de invertir en bienes de producción, ya que puede determinar si dichos bienes, bajo las circunstancias específicas del caso, serán tan productivas como para generar una tasa de recuperación (interés) lo suficientemente atractiva para justificar la inversión en ellas.

TASA MINIMA INTERNA DE RECUPERACION.

Los estados financieros de un negocio, el Balance General y el Estado de Pérdidas y Ganancias principalmente, muestran la utilidad total general obtenida por medio de la inversión realizada, pero debemos notar que de ellos solo podemos determinar la productividad promedio de cada peso. Desgraciadamente el sistema contable no está diseñado para ser más específico al respecto.

Antes de aprobar una inversión debemos insistir en que cada peso: a) garantice una tasa de recuperación y b) que ésta no sea menor que una tasa mínima de recuperación prefijada.

La determinación de la tasa mínima de recuperación se deriva de la forma o criterio de la empresa para aplicar y distribuir sus fondos disponibles, normalmente limitados y cubrir una demanda casi siempre mayor que ellos.

Normalmente, cada año, una empresa podrá predecir con mayor o menor aproximación la disponibilidad de fondos con que podrá contar en ese período para cubrir los gastos de las operaciones que sus inversiones demanden. El suministro de fondos podrá provenir como ya hemos visto, principalmente de reinversión de utilidades, de liquidación y fondos de depreciación de activos fijos, líneas de crédito, créditos externos diversos o de incrementos de capital social, etc., sin embargo, generalmente ocurre que, el programa de suministros es escaso en comparación con la demanda de fondos y recursos monetarios que requieren las alternativas de inversión que se presentan.

Para ilustrar el problema supongamos que el requerimiento de fondos para el periodo siguiente, se calcula pudiera ser hasta de - - - - - $ 100,000,000.00 aproximadamente, pero se estima que entre todas las diversas fuentes de financiamiento se podrán obtener solamente unos $ 70,000.000.00 . El objetivo del director de fianzas, será obviamente, invertir los $ 70,000.000.00 disponibles, en aquellas alternativas de inversión que ofrezcan la mayor retribución y tener que rechazar proposiciones por un monto de $ 30,000,000.00 que prometen menor retribución.

Para lograr esto, partamos de la suposición de que el analista esté en posición de poder enumerar sus alternativas de inversión en orden decreciente de acuerdo con su retribución estimada y calcular el monto de la Inversión Requerida para cada alternativa, (a juzgar por - ejemplo, por la demanda estimada en el mercado, de los productos de - cada una de las diversas líneas de producción: A,B,C, etc..., como - podria ser el caso de una empresa fabricante de bienes de consumo).

Alternativas	Inversión Requerida para cada alternativa	Tasa probable de Recuperación.	Monto acumulado de Inversión
A	5,000,000.00	61% o más	5,000,000.00
B	12,000,000.00	61% - 58%	17,000,000.00
C	15,000,000.00	57% - 54%	32,000,000.00
D	10,000,000.00	53% - 50%	42,000,000.00
E	19,000,000.00	49% - 46%	61,000,000.00
F	9,000,000.00	45% - 42%	70,000,000.00
- - -	- - -	- - -	- - -
G	13,000,000.00	41% - 39%	83,000,000.00
H	6,000,000.00	38% - 36%	89,000,000.00
I	11,000,000.00	menos de 35%	100,000,000.00

En estas condiciones, el fondo disponible de $ 70,000,000.00 deberá - ser aplicado solo a aquellos proyectos que prometan una tasa de recuperación de 42% o más. Esto significa que la tasa interna mínima de recuperación aceptable para el próximo periodo y dadas las condiciones anteriores, es de 42%, que es la tasa mínima de recuperación que esperamos obtener al invertir en el proyecto F, ya que bloquear recursos en alguna de las alternavas G, H, o I, que ofrecen tasa de recuperación máxima menor de 42%, equivale a aliminar la posibilidad de invertir en una alternativa que brinde 42% o más.

Esto quiere decir que cualquier inversión que ofrezca 42% o más debe ser aprobada y cualquier proyecto que ofrezca una tasa menor, debe ser rechazada. También quiere decir que $ 30,000,000.00 de inversiones que prometen tasas de recuperación hasta de un 41% serán rechazadas. La tasa mínima de recuperación establece el límite inferior, abajo del cual no podemos invertir, es decir, establece la tasa interna mínima aceptable de recuperación.

Enfocado desde otro punto de vista, podemos decir que si en una serie de alternativas de inversión: la alternativa A es preferible a la alternativa B, la B es preferible a la C, etc...., M es la alternativa menos preferible aceptada y N es la alternativa más preferible no aceptada; el costo de oportunidad a considerar al capital, para cualquier alternativa B por ejemplo, de inversión, es la tasa de recuperación de N, ya que representa la utilidad que rechazamos automáticamente cuando aceptamos invertir en B. Así por ejemplo en el caso ilustrado, al agotarse los recursos disponibles con la alternativa F, se establece como costo de oportunidad, la tasa de 41%.

En la tabla anterior, las alternativas: A, B, C, H, I, pueden interpretarse como alternativas de inversión de diversa índole que se le presentan a un inversionista en un momento dado. O pudieran ser diversos artículos producidos por una fábrica y cuyo volumen de producción individual no puede incrementar a voluntad por estar condicionado por la demanda en el mercado; de no ser así, la empresa aplicaría la totalidad de sus recursos a producir los artículos A y B que mayor recuperación le proporcionan, aúnque también por otro lado, desearía contar con los recursos económicos suficientes para, producir la mayor variedad posible de artículos, aún los que le reportan bajo margen de utilidad, con el fin de presentar al consumidor una gama más amplia de productos e incrementar así el área de su propio mercado. Dado que ni una ni otra alternativa son posibles, dada la limitación del mercado, por una parte, y lo limitado de sus recursos por otra, debe optar por aplicar los recursos de que dispone, para ir saturando cada uno de los renglones A, B, C,... sucesivamente, hasta - el agotamiento de dichos recursos, lo cual sucede en el ejemplo planteado, en la alternativa F. Para el caso de una empresa constructora, , las alternativas pudieran significar obras o conjuntos de obras, - que considera puede solicitar y obtener de diversas fuentes de trabajo durante el próximo año y con cada una de las cuales, en condiciones normales y por experiencias pasadas (dado que conoce el tipo de obra que ejecuta cada fuente, precios unitarios, condiciones de trabajo, forma de pago, etc,), espera poder obtener, al finalizar cada una de ellas, una tasa de recuperación dentro del rango expresado en la tabla.

Para efectos del ejemplo planteado, los porcentajes indicados en la tabla, como probables tasas de recuperación, se refieren a tasas de utilidad neta contablemente hablando, es decir solo faltando deducir el costo del capital empleado, costo que, como veremos más adelante, y salvo el caso de que haya constituido una erogación efectiva, la - Contabilidad no registra, reconociéndose solo como costo desde el -- punto de vista de análisis económico, para efectos de calcular la utilidad neta (económica), y determinar así la bondad económica de la inversión.

Al referirse, para efectos del grupo de alternativas I, de tasas probables de recuperación de "menos del 32%", se sobre entiende que la tasa pueda ser menor del 32% pero mayor que el porcentaje indicativo del costo del capital, ya que ni siquiera seria aceptable una inversión cuya tasa de recuperación fuese igual al costo del capital, porque en esas condiciones, el inversionista solo cubriría sus costos - pero no tendría ningún margen adicional que le compensara de los riesgos en que incurre o de las desventajas u obligaciones que adquiere.

Por lo anterior el límite mínimo que se marque para considerar aceptable la tasa de recuperación de una alternativa, será superior al - costo del capital en el porcentaje que el inversionista considere -- que queda compensado su riesgo.

Debe tomarse en consideración, que para el caso de algunas empresas su costo "promedio" de capital, pudiese resultar más bajo que para otras, ya que si bien es cierto deben recurrir normalmente a dinero prestado para operar, el cual es caro, u operar con su capital social, que también lo es, cuentan en ocasiones con posibles anticipos, o con el financiamiento de proveedores y subcontratistas, por el cual normalmente no pagan, y que puede representar en monto y en proporción a las otras fuentes de financiamiento, un renglón considerable. Cuando más, se podrá decir que el costo del financiamiento proporcionado por proveedores, está representado por el porcentaje de "descuentos por pronto pago", que se deja de percibir al no poder cubrir oportunamente el importe de las compras . Financiamientos o ingresos de este tipo (ya que un anticipo no puede considerarse estrictamente como financiamiento aunque si capital disponible de trabajo), pueden abatir fuertemente el costo promedio del capital en el "crisol" de capitales de la empresa, ya que cabe recordar que el costo del capital de trabajo es el promedio de los costos de capital proveniente de las diversas fuentes de financiamiento, que como se dijo anteriormente, se funden en un solo crisol para efectos de la operación de la empresa, lo cual hace muy difícil identificar, una cantidad de dinero empleado, con la fuente de financiamiento especifica de la cual proviene.

Ahora bien, debemos reconocer, que las cosas no son en la realidad tan simples como se plantea en el ejemplo de la tabla. Por ejemplo, es probable que sea muy difícil preveer las oportunidades que se presentarán en el transcurso del próximo año o asegurar que no se presentarán otras que las supuestas. El límite del monto de capital proveniente de financiamiento externo, normalmente no es fijo, y más bien puede afirmarse que varia de acuerdo con las oportunidades y perspectivas que se presentan a la empresa, los resultados que va obteniendo, su situación en cuanto a prestigio, solidez, etc... Otros factores pueden influir, además de la probable tasa de recuperación, en el grado de atractivo que presenten las diversas alternativas, como pueden ser, la duración del período en que se espera obtener los rendimientos de cada alternativa, o el grado de riesgo que se considere asociado a cada una de ellas; así por ejemplo, pudiera suce-- der que se decidiese invertir en la alternativa G en lugar de la F, por implicar esta última un riesgo mucho mayor que la primera, no obstante la G, ofrezca menor tasa de recuperación.

Es indudable, que las diversas alternativas de inversión, normal-- mente implican diferente grado de riesgo y que el grado de riesgo influye considerablemente en la tasa mínima que resulta atractiva para invertir en cada alternativa.

Es un hecho reconocido en el ámbito real de los negocios, que una empresa con escaso capital propio, y por tanto con mayor necesidad de capital prestado, y que en general representa alto riesgo para quien le presta, consigue ese dinero prestado a una tasa de inte-- rés mucho más alto que el que se brinda a empresas más consolida-- das y con mayor respaldo económico. Empresas en dificultades, difí cilmente encuentran financiamiento externo, aún siendo caro. A em- presas en auge, se les brinda diversas oportunidades de financia-- miento, a tasas de interés bajas, por el hecho de que quienes in- vierten en ellas reconocen una garantía para su capital y muy ba-- jas probabilidades para el elemento riesgo.

Sin embargo, no obstante las objeciones expresadas y las dificul-- tades que puedan presentarse en cada caso particular, debe quedar claro el principio de que la tasa mínima interna de recuperación - debe ser analizada teniendo como objetivo fundamental el lograr -- dentro de la situación y condiciones particulares de cada empresa, el mejor aprovechamiento posible de los recuros de que dispone.

por todos los criterios expuestos, si a una empresa se le presen-- tan en un momento dado, amplias oportunidades de inversión por un lado, con la posibilidad de obtener de ellas altas tasas de recu-- peración, y por otro lado, se encuentra con que los recursos de -- que dispone para llevar a cabo dichas inversiones, resultan esca-- sos, en relación al monto de capital que las mismas requieren, su tasa mínima atractiva de recuperación será muy alta. Si por el con trario, durante cierto período, el mercado le ofrece reducidas alternativas de inversión con bajas tasas probables de recuperación, y además dispone de capital para operar, su tasa mínima atractiva de recuperación disminuirá sensiblemente, al menos mientras dichas circunstancias prevalezcan.

Si en las condiciones del ejemplo planteado en la tabla, se llegara a determinar que en promedio, el costo de capital de los $ 70,000,000.00 disponibles para operar, ya considerando la composición de dicho capital y el costo individual de las diversas fuentes de financiamiento que lo integra, es de un 32%, la tasa mínima atractiva de recuperación seguiría siendo de 42%, ya que prevalece el argumento de que: "invertir en una alternativa que ofrezca una tasa de recuperación inferior a 42%, equivale a eliminar la posibilidad de invertir en otra alternativa que ofrezca 42%, o más, dado que los recursos son limitados". En estas circunstancias nos damos cuenta de que para efectos de la determinación de la tasa mínima de recuperación, el dato de un 32%, para el costo del capital, resulta irrelevante, (al menos en éste ejemplo, y dada la diferencia entre el 32% y el 42%).

Lo que cabría pensar en este caso, es en la posibilidad de conseguir mayor capital para invertir, aún a una tasa de interés más alta, con el consiguiente incremento del costo promedio del costo del capital, ahora en un 32%, y aplicarlo a alternativas de los grupos G, H, o I, solo teniendo cuidado de que la diferencia entre el costo promedio del capital empleado en las diversas inversiones (ya en estas condiciones, mayor de 32%), y la tasa mínima esperada de recuperación de dichas inversiones (ya menor del 42%), sea tal que compense, de acuerdo con las consideraciones hechas anteriormente, los riesgos en que se incurre al invertir, al aceptar dinero prestado, etc...

Obviamente el objetivo que persigue un inversionista es el de obtener las tasas más altas de recuperación posibles "después" de impuestos y no "antes" de impuestos. Frecuentemente sucede que los mejores proyectos después de impuestos, no son los mismos que los mejores antes de impuestos. Esto se explica por el hecho de que pa ra distintas circunstancias se presentan diferencias en cuanto a los factores que son fiscalmente deducibles en un caso y en otro, o al hecho de que distintos tipos de inversiones se rigen por diferente legislación fiscal y por tanto, por distintas tasas impositivas. Por lo anterior, podemos concluir que es conveniente y en ocasiones necesario,realizar los análisis económicos "después de impuestos".

Es muy conveniente hacer notar que los criterios en cuanto a la tasa mínima interna de recuperación, una vez fijada ésta dentro de una empresa, sean observados en todos los niveles de la misma y no únicamente en los niveles gerenciales. Es decir, que los efectos que la tasa mínima establecida debe tener en toda decisión de inversión dentro de la empresa, se contemple no solo en las decisiones que se tomen en las altas esferas de la Dirección, sino también en las que se tomen en los departamentos de operación, compras, etc... Es frecuente observar que en las decisiones que se toman en estratos inferiores, no se siguen las políticas de inversión dictadas por la gerencia y normalmente se toman sin previo análisis económico y solo en base a tradición, costumbre, inercia o mera intuición. Es absurdo suponer que en una empresa constructora por ejemplo, se están obteniendo efectivamente los beneficios de una adecuada política de inversiones, si esta solo se aplica en las decisiones a alto nivel gerencial, pero en el departamento de adquisición de equipos, se compra maquinaría sin justificación económica real en cuanto a la oportunidad del momento, capacidad, etc., o no se reemplaza equipo que ya ha superado su período de vida económica y continua en operación.

Resumiendo todo lo anterior, podriamos concluir que los elementos básicos en la determinación de la tasa interna mínima atractiva de recuperación son normalmente:

. La naturaleza de las alternativas de inversión que se presentan a la empresa.
. El monto de la inversión que cada una de dichas alternativas demanda.

. La tasa de recuperación esperada en cada alternativa .
. El monto disponible de los recursos con los que se hará frente a esas inversiones.
. El costo promedio real de ese capital disponible para invertir.
. El grado de riesgo que cada alternativa de inversión implique.

Hay que tener presente que la tasa interna mínima atractiva de recuperación es dinámica y cambiante, en función de las variaciones de cada uno de los factores anteriores. No existe una cifra determinada y fija como tasa mínima aceptable de recuperación, que sea apropiada bajo todas las circunstancias. Dicha tasa deberá ser analizada y establecida en cada caso y para cada situación.

DIFERENCIA ENTRE EL ENFOQUE CONTABLE Y EL CRITERIO DE ANALISIS ECONOMICO.

Un análisis económico tiene por objeto determinar si un cierto capital debe ser invertido o aplicado a otro fin distinto del actual.

Un estudio económico tiene como elementos, cursos de acción que aún no se han realizado. Tiene que ver con "eventos futuros": ¿ se debe seguir cierto curso de acción?, ¿el procedimiento es más económico?. El análisis económico proporciona bases para las decisiones.

Ahora bien, una vez que se ha tomado la decisión de invertir y el capital ha sido invertido, se desean conocer los resultados financieros, para lo cual se establecen mecanismos y procedimientos específicamente orientados para la determinación de los resultados financieros y el control de las operaciones: todos los cuales constituyen la contabilidad general y la contabilidad de costos.

La contabilidad es en este sentido, la historia de un negocio; se refiere a eventos pasados. Actua ya conociendo ingresos y egresos. Estima resultados y calcula cual fué la tasa de recuperación.

El análisis económico recomienda una cierta inversión. Si la decisión se toma basada en el estudio económico, la contabilidad comprobará posteriormente si el estudio económico y las recomendaciones fueron correctas.

La con tabilidad tiene la ventaja de trabajar con hechos históricos, financieros ya acaecidos, el analisis económico solo cuenta con estimaciones sobre el futuro.

Posteriormente, las observaciones de la contabilidad pueden ser aprovechadas por el analista económico, pero deben saber ser interpretadas.

Como en un experimento, la contabilidad registra todos los eventos significativos financieramente hablando, de una inversión y de estos hace posible determinar los resultados y preparar un reporte financiero.

Interpretando correctamente estos reportes se toman las decisiones en el campo económico por los dirigentes.

Se trata de dos funciones distintas pero conectadas.

El contador nunca afecta las operaciones de un "costo de Capital", a menos que hayan sido efectuadas erogaciones, como pueden ser pagos de intereses bancarios, pago de hipotecas, etc..., mientras que el analista económico carga a cada peso, de la responsabilidad de cubrir el "costo del capital". Así por ejemplo, si la adquisición de activos o la operación de la empresa son financiadas completamente por capital social, no hay que pagar fisicamente un interés como se haría en el caso de que el dinero fuese prestado. En este caso, la Contabilidad no impacta los costos con el importe de un interés correspondiente al capital empleado. Sin embargo, quien realice el análisis económico de la inversión, debe considerar un interés correspondiente al capital empleado y emanado del concepto del costo de oportunidad.

Muy frecuentemente surgen conflictos entre los Ingenieros y los Contadores debido a su distinto enfoque y punto de vista respecto a los costos. Estas controversias reflejan un mutuo desconocimiento de los objetivos y de los procedimientos que cada uno de ellos aplica para propósitos distintos. Es necesario el reconocimiento por ambos, de la diferencia en los objetivos de su actuación.

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS INSTITUCIONALES

ANALISIS DE INVERSIONES EN
EL CAMPO DE LA INGENIERIA

DEL 1o. DE MARZO AL 7 DE ABRIL

COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD

TEMA II

DESARROLLO Y ANALISIS DE MODELOS MATEMATICOS PARA EL CALCULO DE TASAS DE RECUPERACION

EXPOSITOR:
RUBEN TELLEZ SANCHEZ

MEXICO, D.F.

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. APDO. Postal M-2285
Teléfonos: 512-8955 512-5121 521-7335 521-1987 Fax 510-0573 521-4020 AL 26

TEMA II

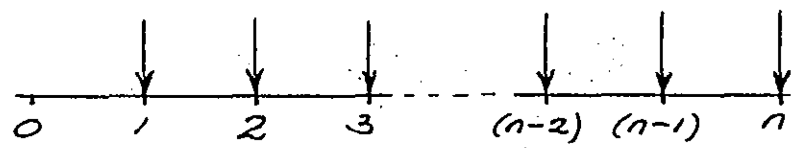
DESARROLLO Y ANALISIS DE MODELOS MATEMATICOS PARA EL CALCULO DE LA TASA DE RECUPERACION

TEMARIO:

DESARROLLO Y ANALISIS DE MODELOS MATEMATICOS PARA EL CALCULO DE LA TASA DE RECUPERACION

NOMENCLATURA.

Para representar en forma objetiva el flujo de efectivo resultante de una inversión, resulta muy útil el empleo de una "escala de tiempo". En esta escala, las unidades de tiempo son los periódos de interés, que no necesariamente constituyen meses o años. Cuando las erogaciones o los ingresos se llevan a cabo a lo largo de un periódo, en la escala de tiempo, se acostumbra representar el flujo de efectivo, concentrado al final de dicho periódo:



Para el desarrollo de fórmulas para el cálculo de la tasa de recuperación utilizaremos la siguiente momenclatura:

P: Representa la suma presente de dinero. En la escala de tiempo ocurre en el punto cero, es decir, al principio del periódo inicial.

F: Representa la suma de dinero a una fecha específica futura. En la escala de tiempo, ocurre en el punto (n), es decir, al terminar el último periódo. En mucha de la literatura técnica relativa, es frecuente se represente con (S).

A: Representa el Importe de cada pago, en una serie uniforme de pagos que se efectuan al final de cada periódo. En mucha de la literatura técnica relativa, es frecuente se representa con (R).

i: Designa a la tasa de interés generada al final de cada período.

n: Representa el número de períodos de interés considerados.

El interés, (i), es la tasa de recuperación, o la recuperación en si, correspondiente a una inversión. La reinversión de intereses, y el pago de intereses sobre esos intereses, origina el proceso de interés compuesto. Se observa que este proceso refleja el concepto inherente del "valor del dinero con el tiempo", es decir, el hecho de que cada peso "crece" con el tiempo.

Para la determinación del interés por período, es necesario interpretar correctamente lo siguiente:

10% computado trimestralmente", indica el que se consideran cuatro períodos de interés, de 3 meses de duración cada uno y en los que se genera un 2.5 % de interés al final de cada uno de ellos.

" 10 % de interés" (sin más indicaciones), indica un interés de 10% anual. En el primer caso, el interés de 10 % es un " interés nominal", ya que el hecho de que se pague parcialmente por adelantado, da lugar a que el " interés efectivo " sea mayor.

En el segundo caso, el interés nominal y el efectivo, coinciden.

Interés Simple:

El interés simple se calcula mediante la expresión:

$$I = Pni$$

or tanto: $F = P + I = P + Pni = P (1+ni)$

Ordinariamente la unidad de tiempo para el período de interés se considera de 1 año. Cuando es necesario calcular el interés correspondiente a una fracción de año, se considera por mera simplificación, constituido el año por 12 meses, de 30 días, con un total de 360 días. Estas consideraciones dan lugar al"interés simple ordinario ". Si se calcula sobre la base de 365 se genera el " interés simple exacto".

En la práctica, el interés simple se emplea en préstamos a corto plazo y cuando el período se mide en días.

Ejemplo:

Calcularel interés simple que originan $ 1,000. a una tasa de interés de 6 % anual, durante 60 días.

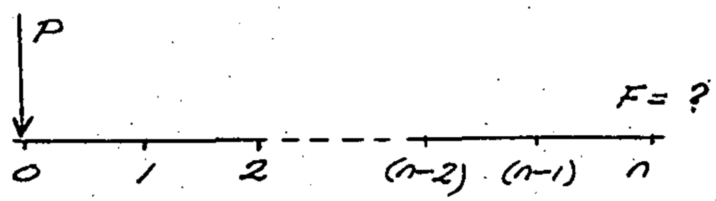
$$I = P.n.i$$

$$I = 1{,}000 \times 60 \times \left(\frac{0.06}{365}\right)$$

$$I = \$\ 9.86$$

FACTOR DE UN PAGO ÚNICO CON INTERES COMPUESTO

¿Que monto final (F) origina un capital inicial (P) invertido durante (n) periodos, a una tasa de interes compuesto: (i)?



datos: P, n, i
$F = ?$

El valor de P con el tiempo será:

al final del primer periodo: $P + Pi = P(1+i)$
al final del segundo periodo: $P(1+i) + P(1+i)i = P(1+i)^2$
= =

Por el método de inducción matemática, se puede concluir que al final de n periodos, la cantidad acumulada será: $F = P(1+i)^n$

al factor: $(1+i)^n$ se le denomina:
"factor de un pago único con interes compuesto"

y se representa:

a) $({}_{i-n}spcaf.)$ que significa: "single-payment compound-amount factor"

b) $(F/P,\ i\%,\ n)$

y es el factor por el cual hay que multiplicar un pago único P para encontrar la cantidad acumulada F al final de n periodos, a una tasa de interes i.

Conclusión:

$$\boxed{\begin{aligned} F &= P(1+i)^n \\ F &= P \cdot {}_{i-n}spcaf = P \cdot (F/P,\ i,\ n) \end{aligned}}$$

Ejemplo:

¿Cuál es la cantidad acumulada (F) por una inversión de ¢5,000. durante 7 años a una tasa de interés del 15 % anual?

$F = P \cdot {}_{i-n}spcaf$

$F = 5{,}000 \cdot {}_{15-7}spcaf = 5{,}000\ (F/P,\ 15,\ 7)$

$F = 5{,}000\ (1+0.15)^7 = 5{,}000 \times 2.6600 = ¢\,13{,}300.^{00}$

Ejemplo:

Consideremos el mismo problema con el que se ejemplificó el interes simple:

Calcular el monto de los intereses que generan $1.000. invertidos a una tasa de interes de 6 % anual durante 60 dias, considerando interes COMPUESTO.

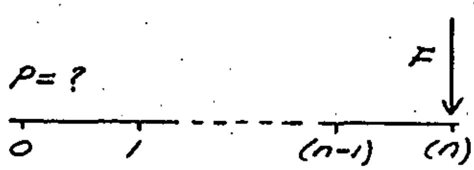
$$F = P \cdot (1+i)^n = 1.000. \left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{60} = \$\, 1,009.^{91}$$

$$\therefore \text{Intereses} = F - P = 1.009.^{91} - 1.000.^{''} = \$\, 9.^{91}$$

resultado que es solo ½ % que el obtenido con interes simple, lo que podria justificar que para préstamos a corto plazo, se emplease el criterio de interes simple.

FACTOR DE ACTUALIZACION DE UN PAGO UNICO.

¿Que capital inicial (P) origina un capital final (F) después de haber sido invertido durante (n) periodos a una tasa (i) de interes compuesto?



datos: F, n, i %
P= ?

Mediante un proceso inverso al anterior, podemos concluir que:

$$P = F \frac{1}{(1+i)^n}$$

al factor: $\frac{1}{(1+i)^n}$ se le denomina: "factor de actualización de un pago único".

y se representa:

a) ${}_{i-n}$sppwf que significa: single payment present worth factor.

b) (P/F, i %, n)

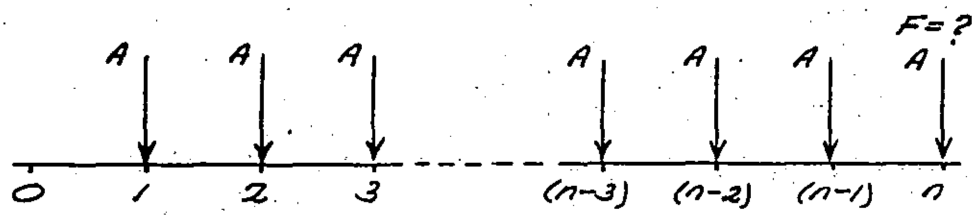
y es el factor por el cual se multiplica un valor futuro F, para obtener el valor presente P que lo originó.

Conclusión:

$$\boxed{\begin{array}{l} P = F \dfrac{1}{(1+i)^n} \\ P = F \cdot {}_{i-n}\text{sppwf} = F \cdot (P/F, i, n) \end{array}}$$

FACTOR DE INTERES COMPUESTO DE UNA SERIE UNIFORME DE PAGOS.

¿Qué capital final (F), origina la inversión uniforme de una cantidad constante (A), al final de cada uno de (n) periodos y a una tasa (i) de interes compuesto?



datos: A, n, i%.
F = ?

Cada pago A origina diferente interes compuesto, pues cada uno de ellos tiene un período de inversión distinto: el primer pago A, será invertido durante (n−1) periodos, el segundo A, (n−2) periodos, etc..., el último A, ocurre en el punto (n) y no origina interes.

En estas condiciones, la suma F estará integrada:

$$F = A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-3} + \cdots + A(1+i)^2 + A(1+i) + A \quad (1)$$

multiplicando ambos miembros por $(1+i)$:

$$F(1+i) = A(1+i)^n + A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + \cdots + A(1+i)^3 + A(1+i)^2 + A(1+i) \quad (2)$$

restando la ecuación (1) de la (2):

$$F(1+i) - F = A(1+i)^n - A$$

$$F(1+i-1) = A\left[(1+i)^n - 1\right]$$

de donde: $F = A\left[\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$

al factor: $\left[\dfrac{(1+i)^n-1}{i}\right]$ se le denomina: "factor de interes compuesto de una serie uniforme de pagos."

y se representa:

a) $({}_{i-n}\,uscaf)$ que significa: "uniform series compound amount factor."

b) $(F/A, i\%, n)$

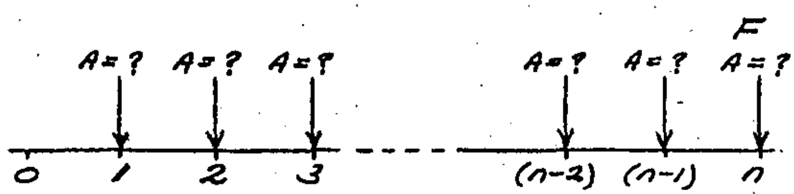
y es el factor por el cual se multiplica el valor A de cada pago uniforme, para obtener el importe acumulado F, después de n periodos y a una tasa de interes compuesta i:

Conclusión:

$$\boxed{\begin{aligned} F &= A\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \\ F &= A \cdot {}_{i-n}\,uscaf = A \cdot (F/A, i\%, n) \end{aligned}}$$

FACTOR DEL FONDO DE AMORTIZACION

¿Qué capital constante (A) hay que invertir periodicamente durante (n) periodos, con una tasa (i) de interes compuesto, para acumular un capital final (F)?



datos: F, n, i%
A = ?

despejando A en la expresión anterior:

$$A = F \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

al factor: $\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$ se le denomina :

"factor del fondo de amortización."

y se representa:

a) $({}_{i-n}sfdf)$ que significa:

sinking fund deposit factor.

b) $(A/F, i\%, n)$

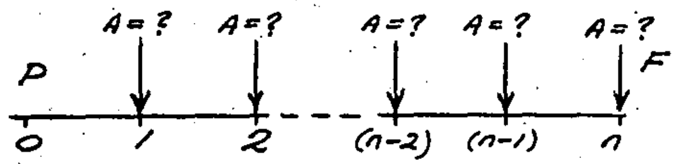
y es el factor por el que hay que multiplicar el monto final F para encontrar el importe A de los pagos uniformes y constantes que lo originan durante n periodos y a una tasa i de interes compuesto.

Conclusión:

$$\boxed{\begin{gathered} A = F \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] \\ A = F \cdot {}_{i-n}sfdf = F \cdot (A/F, i\%, n) \end{gathered}}$$

FACTOR DE RECUPERACION DEL CAPITAL:

¿Qué monto uniforme (A) se debe invertir a una tasa (i) de interes compuesto, al final de cada periodo, durante (n) periodos, para obtener el mismo monto final (F) que se obtendria si se invirtiera una cantidad inicial (P) durante el mismo tiempo y a la misma tasa de interes (i) ?



datos: P, n, i%.
A= ?

Habiamos determinado que: $$A = F \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

pero por otro lado, tenemos que : $F = P\,(1+i)^n$

substituyendo resulta: $$A = P \cdot \left[\frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

al factor: $\left[\frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$ se le denomina: "factor de recuperación del capital"

y se representa:

a) $({}_{i-n}crf)$ que significa: "capital recovery factor."

b) $(A/P, i\%, n)$

y es el factor por el cual se multiplica (P) para encontrar el valor de los pagos (A) que lo recuperan al final de (n) periodos a una tasa (i) de interes compuesto.

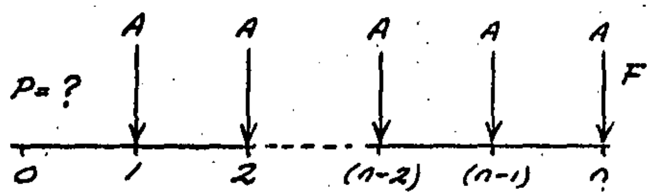
Conclusión:

$$A = P \left[\frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = P \cdot {}_{i-n}crf = P \cdot (A/P, i\%, n)$$

FACTOR DE ACTUALIZACIÓN DE UNA SERIE UNIFORME DE PAGOS.

¿Cuál es el capital inicial (P) que invertido durante (n) periodos a una tasa (i) de interes compuesto, produce el mismo capital final (F), que una serie uniforme de pagos (A) al final de cada uno de los (n) periodos y a la misma tasa de interes (i) ?



datos: $A, i\%, n$
$P = ?$

despejando el valor de (P) en la última expresión desarrollada: $P = A \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$

al factor: $\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$ se le denomina:

"factor de actualización de una serie uniforme de pagos"

y se representa:

a) $({}_{i-n}uspwf)$ que significa: "uniform series present worth factor"

b) $(P/A, i\%, n)$

y es el factor por el cual hay que multiplicar el valor del pago uniforme (A) al final de cada uno de (n) periodos y a una tasa (i) de interes compuesto, para encontrar el valor (P) que recuperan.

Conclusión:

$$P = A \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$$

$$P = A \cdot {}_{i-n}uspwf = A \cdot (P/A, i\%, n)$$

OBSERVACIONES A LOS MODELOS MATEMATICOS ANTERIORES.

1°) Para el cálculo númerico de los valores que se obtienen de los 6 modelos matemáticos desarrollados anteriormente, se puede optar por:

a) Cálculo directo a partir de la expresión algebraica.

b) Empleo de "tablas" en las que se indica el factor resultante en cada uno de los modelos, para distintos valores de (i) y de (n).

c) Utilización de "calculadoras electrónicas " de las específicamente denominadas "financieras".

2°) Frecuentemente, en el planteamiento de algunos problemas de análisis económico, se conoce la suma (P) que será solicitada como préstamo o invertida inicialmente, así como la corriente futura de pagos (A) que su amortización o recuperación origine, o la cantidad futura (F) acumulada al final de un cierto horizonte económico; y lo que se busca es calcular la tasa de recuperación (i) de la inversión, o el número (n) de periódos necesarios para la misma.

En estas condiciones y para el caso específico de "pago único", si la incógnita es la tasa de recuperación, el problema se reduce a despejar (i) de la expresión:

$$F = P\,(1+i)^n$$

de donde :

$$\boxed{i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1}$$

En los demás casos, (y aun en el caso de "pago único" cuando la incógnita es n), el problema es más complejo como para ser resuelto despejando directamente los valores de (i) o de (n) de las expresiones algebraicas, y el método más razonable en estas condiciones resulta ser el de interpolación entre valores tabulados, o el empleo de calculadoras electrónicas financieras.

3°) ALGUNAS RELACIONES ENTRE LAS FORMULAS.

De la deducción de las fórmulas, se desprende:

$$ {}_{i-n}spcaf = \frac{1}{{}_{i-n}sppwf} \qquad {}_{i-n}uscaf = \frac{1}{{}_{i-n}sfdf} \qquad {}_{i-n}crf = \frac{1}{{}_{i-n}uspwf} $$

empleando otra notación, las mismas relaciones adquieren la siguiente forma:

$$ (F/P, i\%, n) = \frac{1}{(P/F, i\%, n)} \qquad (F/A, i\%, n) = \frac{1}{(A/F, i\%, n)} \qquad (A/P, i\%, n) = \frac{1}{(P/A, i\%, n)} $$

Puede demostrarse que:

$$ 1 + {}_{i-1}spcaf + {}_{i-2}spcaf + \ldots + {}_{i-(n-2)}spcaf + {}_{i-(n-1)}spcaf = {}_{i-n}uscaf $$

y también:

$$ {}_{i-1}sppwf + {}_{i-2}sppwf + \ldots + {}_{i-(n-1)}sppwf + {}_{i-n}sppwf = {}_{i-n}uspwf $$

---

a partir de:

$$ {}_{i-n}crf - i = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - i = \frac{i(1+i)^n - i\left[(1+i)^n - 1\right]}{(1+i)^n - 1} $$

$$ = \frac{i(1+i)^n - i(1+i)^n + i}{(1+i)^n - 1} $$

$$ = \frac{i}{(1+i)^n - 1} = {}_{i-n}sfdf $$

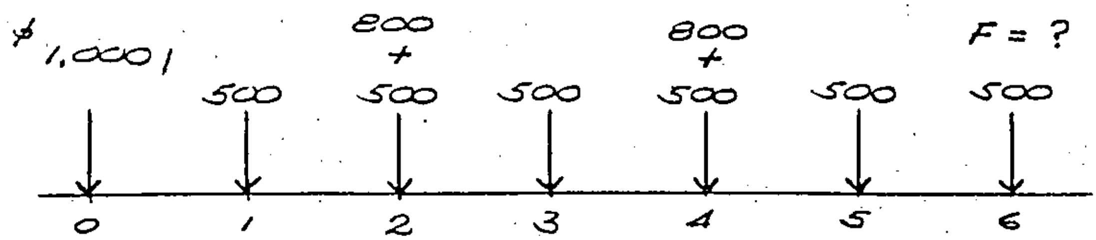
$$ \boxed{\begin{array}{l} {}_{i-n}crf - i = {}_{i-n}sfdf \\ (A/P, i, n) - i = (A/F, i, n) \end{array}} $$

o también:

$$ \boxed{\begin{array}{l} {}_{i-n}sfdf + i = {}_{i-n}crf \\ (A/F, i, n) + i = (A/P, i, n) \end{array}} $$

Ejemplo:

Dada la siguiente serie de pagos:



calcular el importe de la cantidad final (F) acumulada al final de los 6 periodos, considerando una tasa de interes del 10% en cada periodo.

$$F = 1{,}000 \cdot (1+0.10)^6 + 800(1+0.10)^4 + 800(1+0.10)^2 + $$
$$+ 500\left[\frac{(1+0.10)^6 - 1}{0.10}\right]$$

lo cual puede representarse:

$$F = 1{,}000 \cdot {}_{10-6}\,spcaf + 800 \cdot {}_{10-4}\,spcaf + 800 \cdot {}_{10-2}\,spcaf +$$
$$+ 500 \cdot {}_{10-6}\,uscaf$$

o también:

$$F = 1{,}000\ (F/P, 10\%, 6) + 800\ (F/P, 10\%, 4) +$$
$$+ 800\ (F/P, 10\%, 2) + 500\ (F/A, 10\%, 6)$$

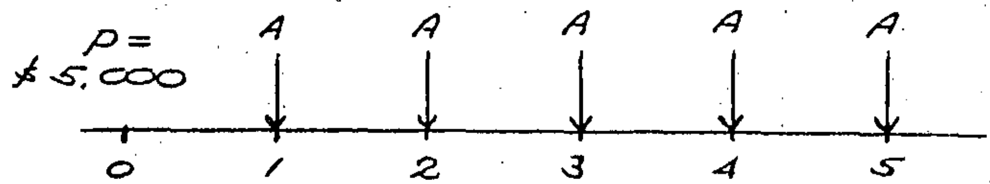
$$F = 1{,}000 \times 1.7716 + 800 \times 1.4641 + 800 \times 1.2100 +$$
$$+ 500 \times 7.7156$$

$$F = \$1{,}771.^{60} + 1{,}171.^{28} + 968 + 3{,}857.^{80}$$

$$F = \$\,7{,}768.^{68}$$

Ejemplo:

Supongamos un capital inicial: $P =$ ₡5,000., invertido a una tasa: $i = 10\%$ en cada período, durante: $n = 5$ períodos



Calculemos el importe de cada uno de los pagos periódicos (A):

$$A = P \cdot {}_{i-n}crf = P \cdot (A/P,\ i\%,\ n)$$

$$A = 5{,}000 \cdot {}_{10-5}crf = 5{,}000 \cdot (A/P,\ 10\%,\ 5)$$

$$A = ₡5{,}000 \times 0.26380 = ₡\ 1{,}319.$$

Sigamos ahora, paso a paso el proceso de recuperación del capital (P) inicialmente invertido, mediante 5 pagos iguales con importe: $A =$ ₡1,319.

PERIODO	Adeudo al principio del periodo	Intereses generados al final del periodo	Capital mas intereses adeudados al final del periodo	Pago al final del periodo	Capital adeudado al final del periodo después del pago periódico	Capital ya recuperado
1	5,000	500	5,500	1,319	4,181 *	** 819
2	4,181	418	4,599	1,319	3,280	901
3	3,280	328	3,608	1,319	2,289	991
4	2,289	229	2,518	1,319	1,199	1,090
5	1,199	120	1,319	1,319	0	1,199
						5,000

* 5,500 − 1,319 = 4,181   ** 1,319 − 500 = 819

SERIES DE PAGOS CON GRADIENTE DE INCREMENTO

En algunos problemas de Ingeniería Económica, el flujo de efectivo puede comportarse como una serie de ingresos o egresos que se incrementan o disminuyen en cada período. Este puede ser el caso, por ejemplo, de los costos de mantenimiento de un cierto equipo, los cuales, es normal que muestren un incremento año con año.

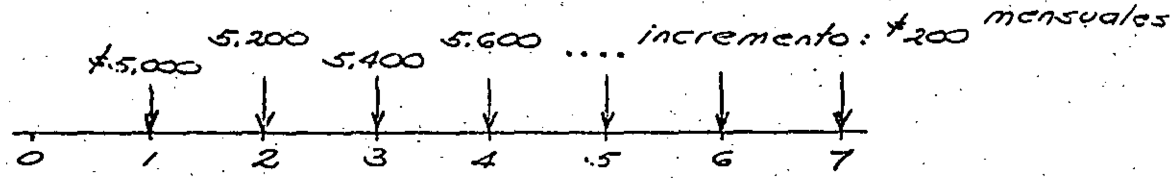
Si el incremento es el mismo en cada período, se hablará de una: "SERIE DE PAGOS CON GRADIENTE DE INCREMENTO ARITMETICO"; si los incrementos varían cada período en función de un factor constante, se tendrá una: "SERIE DE PAGOS CON GRADIENTE DE INCREMENTO GEOMETRICO".

En ambos casos, podrá tratarse también de un decremento.

Aun en el caso de que en una serie de pagos, estos varíen en forma irregular, habría que estudiar la posibilidad de ajustar dicha serie, a una de las series anteriores.

A) GRADIENTE DE INCREMENTO ARITMETICO

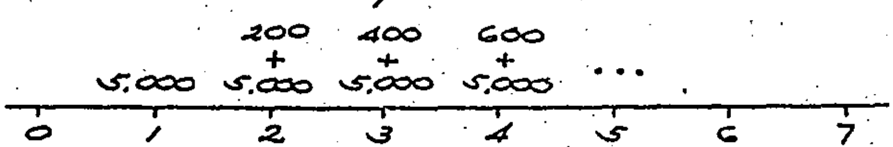
Supongamos la siguiente serie de pagos:



considerem
os: $i = 8\%$

Calcular los valores de (F) o de (P) en una serie como la anterior, sería muy laborioso aplicando sólo las fórmulas anteriores.

La serie anterior puede representarse:



Ya que los ¢5,000. mensuales constituyen una serie uniforme que puede ser manejada con los modelos matemáticos establecidos anteriormente, fijemos nuestra atención en la parte afectada por el gradiente de incremento mensual en este caso, de ¢200. y al que vamos a representar con: (g). En estas condiciones, esa parte de la serie, puede representarse, generalizando además, a un horizonte de (n) períodos, de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & g & 2g & (n-3)g & (n-2)g & (n-1)g \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \; --- & (n-2) & (n-1) & n \end{array}$$

Trataremos de traducir la serie anterior a:

una <u>SERIE UNIFORME EQUIVALENTE.</u>

de la siguiente manera:

$$F = g \cdot \underbrace{{}_{(n-2)}}_{\text{número de períodos faltantes.}} spcaf + 2g \cdot {}_{(n-3)}spcaf + \dots + (n-2)g \cdot {}_{1}spcaf + (n-1)g \sim (1)$$

Multiplicando la igualdad (1) por $({}_{1}spcaf)$

$$F \cdot {}_{1}spcaf = \overbrace{g \cdot {}_{(n-1)}spcaf}^{\text{se obtiene de:}} + 2g \cdot {}_{(n-2)}spcaf + \dots + (n-2)g \cdot {}_{2}spcaf + (n-1)g \cdot {}_{1}spcaf \sim (2)$$

$${}_{(n-2)}spcaf \cdot {}_{1}spcaf = (1+i)^{n-2} \cdot (1+i)^{1} = (1+i)^{n-1} = {}_{(n-1)}spcaf$$

Restando (1) de (2):

$$F - F \cdot {}_{1}spcaf = -g \cdot {}_{(n-1)}spcaf - g \cdot {}_{(n-2)}spcaf - \dots - g \cdot {}_{2}spcaf - g \cdot {}_{1}spcaf + (n-1)g$$

cambiando de signos en ambos miembros y sacando a (g) como factor común:

$$\underbrace{F \, {}_{1}spcaf - F}_{\substack{= F \cdot (1+i) - F \\ = F + Fi - F = Fi}} = g \underbrace{\left[{}_{(n-1)}spcaf + {}_{(n-2)}spcaf + \dots + {}_{2}spcaf + {}_{1}spcaf + 1 \right]}_{= {}_{n}uscaf} - ng$$

(ver: "Relaciones entre las fórmulas")

$$F \cdot i = g \cdot {}_{n}uscaf - ng \sim (3)$$

Multiplicando por el factor: ${}_{n}sfdf$ (que es el recíproco de: ${}_{n}uscaf$)

$$F \cdot i \cdot {}_{n}sfdf = g \cdot \underbrace{{}_{n}uscaf \cdot {}_{n}sfdf}_{=1} - ng \cdot {}_{n}sfdf$$

dado que: $F \cdot {}_{n}sfdf = A$

despejando:

$$A = \frac{g}{i} - \frac{n \cdot g}{i} \, {}_{n}sfdf \quad \therefore$$

$$\boxed{\begin{array}{c} A = g \left[\frac{1}{i} - \frac{n}{i} \, {}_{i-n}sfdf \right] \\ A = g \cdot {}_{i-n}asf \end{array}}$$

al factor: $\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{i} \, {}_{i-n}sfdf \right]$ se le denomina:

– <u>factor de serie aritmética</u> y <u>se representa:</u>

a) ${}_{i-n}asf$ que significa: arithmetic series factor

b) $(A/g, i\%, n)$

y es el factor por el cual hay que multiplicar el gradiente de una serie aritmética, para encontrar el valor (A) de una serie uniforme.

Así, para el ejemplo propuesto, el valor de los pagos (A) de una serie uniforme equivalente, será:

$$A = 5{,}000 + 200 \, {}_{8-7}asf = 5{,}000 + 200 \times 2.6937 = \$\,5{,}538.^{74}$$

Por otro lado, de la ecuación 3 se puede obtener el valor de (F):

$$\boxed{F = \frac{g}{i}\left[{}_{i-n}uscaf - n\right] = g\left[\frac{(F/A,i,n)-n}{i}\right] = g\,(F/g,i,n)}$$

También puede encontrarse el Valor Presente de la serie con gradiente aritmético:

$$P = A\cdot{}_n uspwf = g\cdot\left[\frac{1}{i}-\frac{n}{i}\,{}_n sfdf\right]{}_n uspwf$$

$$P = g\cdot\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i\,(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

$$\boxed{\begin{gathered} P = g\cdot\frac{1}{i}\left({}_{i-n}uspwf - n\cdot{}_{i-n}sppwf\right) = \frac{g}{i}\left[(P/A,i,n) - n\,(P/F,i,n)\right] \\ P = g\cdot{}_{i-n}gpwf = g\cdot(P/g,i,n) \end{gathered}}$$

al factor: $\frac{1}{i}\left[(P/A,i,n)-n\,(P/F,i,n)\right]$ se le denomina: "<u>factor de actualización del gradiente de una serie aritmética.</u>"

y se representa:

a) ${}_{i-n}gpwf$ que significa: gradient present worth factor.

b) $(P/g,\ i\%,\ n)$

Es claro que la relación entre los factores anteriores puede establecerse:

$$(P/g,\ i\%,\ n) = (A/g,\ i\%,\ n)\cdot(P/A,\ i\%,\ n)$$

$$(F/g,\ i\%,\ n) = (A/g,\ i\%,\ n)\cdot(F/A,\ i\%,\ n)$$

y también:

$$(A/g,\ i\%,\ n) = (P/g,\ i\%,\ n)\cdot(A/P,\ i\%,\ n)$$

Los valores de los factores: $(A/g,i\%,n)$ y $(P/g,i\%,n)$ están tabulados para diversos valores de (i) y de (n).

B) GRADIENTE DE INCREMENTO GEOMETRICO.

Consideremos una serie de pagos del tipo:

$$\begin{array}{ccccccc} & A_1 & A_1\cdot j & A_1\cdot j^2 & A_1\cdot j^{n-3} & A_1\cdot j^{n-2} & A_1\cdot j^{n-1} \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & (n-2) & (n-1) & n \end{array}$$

Calculemos el valor de (F) acumulado al término de (n) periodos:

$$F = A_1\cdot(1+i)^{n-1} + A_1\cdot j\,(1+i)^{n-2} + \cdots + A_1\cdot j^{n-3}(1+i)^2 + A_1\cdot j^{n-2}(1+i) + A_1\cdot j^{n-1} \qquad (1)$$

multiplicando ambos miembros por: $\dfrac{(1+i)}{j}$

$$F\frac{(1+i)}{j} = \frac{A_1}{j}(1+i)^n + A_1\cdot(1+i)^{n-1} + A_1\cdot j(1+i)^{n-2} + \cdots + A_1\cdot j^{n-4}(1+i)^3 + A_1\cdot j^{n-3}(1+i)^2 + A_1\cdot j^{n-2}(1+i) \qquad (2)$$

restando la ecuación (2) de la (1):

$$F - F\frac{(1+i)}{j} = -\frac{A_1}{j}(1+i)^n + A_1\cdot j^{n-1}$$

$$F\left[1 - \frac{(1+i)}{j}\right] = A_1\left[j^{n-1} - \frac{(1+i)^n}{j}\right]$$

$$F\left[j - (1+i)\right] = A_1\left[j^n - (1+i)^n\right]$$

por tanto:

$$\boxed{F = A_1\left[\frac{j^n - (1+i)^n}{j - (1+i)}\right]} \qquad (I)$$

para:
$j \neq i \quad j \geq 0$

En esta expresión, (j) debe ser expresado como el factor por el que se multiplica la cantidad inicial (A_1). El valor $(i\,\%)$ se expresa en decimales.

Ahora bien, si (j) se expresa no como factor, sino como porcentaje de incremento sobre la cantidad base (A_1), se puede demostrar que:

$$\boxed{F = A_1\left[\frac{(1+i)^n - (1+j)^n}{i - j}\right]} \qquad (II)$$

para:
$j \neq i \quad j \geq 0$

así por ejemplo, si en una serie con gradiente de incremento geométrico, la cantidad inicial (A_1) crece geométricamente en un 7% en cada periodo, ∴

en la expresión (I) se entrará con : $j = 1.07$

en la expresión (II) se entrará con : $j = 0.07$

al factor : $\left[\frac{(1+i)^n - (1+j)^n}{i-j}\right]$

se le denomina :

"factor de serie geométrica"

y se representa :

$(F/A_1, i, j, n)$

$$\therefore \quad \boxed{F = A_1 \cdot (F/A_1, i, j, n)}$$

Para el caso de que : $i = j$ la expresión (II) se reduce a :

$$\underline{F = A_1 \cdot n\,(1+i)^{n-1}}$$

Por otro lado, de las mismas expresiones se deduce que :

$$(F/A_1, i, j, n) = (F/A_1, j, i, n) \sim (3)$$

a partir del valor de (F) en (II), se pueden calcular los valores de (P) y el de (A), correspondiente este último, a una serie uniforme equivalente:

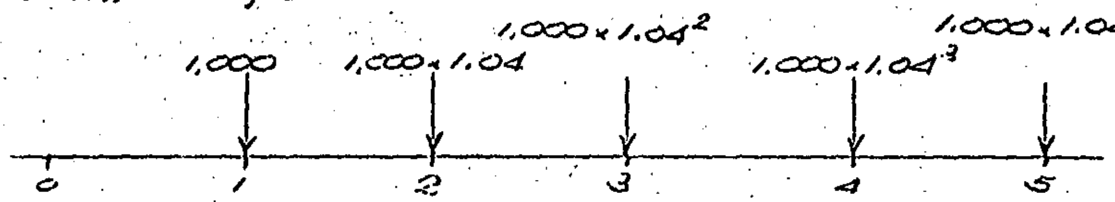
$$P = \begin{cases} \bullet\ \text{para} : j \neq i \quad j \geq 0 \\ A_1\left[\dfrac{1-(1+j)^n(1+i)^{-n}}{i-j}\right] = A_1\left[\dfrac{1-(F/P, j, n)\cdot(P/F, i, n)}{i-j}\right] \\ \qquad = A_1 \cdot (P/A_1, i, j, n) \\ \bullet\ \text{para} : i = j \\ A_1 \cdot \dfrac{n}{1+i} \end{cases}$$

Los valores de los factores : $(F/A_1, i, j, n)$ y $(P/A_1, i, j, n)$ están tabulados para diversos valores de : i, j, n debiendo tenerse presente la relación (3) para el mayor aprovechamiento de las tablas.

Ejemplo:

¿Cuál es el importe acumulado de los costos de conservación y mantenimiento de un equipo, al cabo de 5 meses, si se considera tendrán un incremento sostenido geométrico de 4% mensual sobre una erogación de 1,000 u.m. en el primer mes y se considera además que el costo del dinero es de 5% mensual?

La representación en una escala de tiempos de la situación anterior, será:



• usando (I):

$$F = A_1\left[\frac{j^n-(1+i)^n}{j-(1+i)}\right]_{\substack{con:\\ j=1.04\\ i=0.05\\ n=5}} = 1,000\left[\frac{(1.04)^5-(1+0.05)^5}{1.04-(1+0.05)}\right]$$

$$F = 1,000 \times 5.9629 = 5,962.^{90}\ um$$

• usando (II):

$$F = A_1\left[\frac{(1+i)^n-(1+j)^n}{i-j}\right]_{\substack{con:\\ j=0.04\\ i=0.05\\ n=5}} = 1,000\left[\frac{(1+0.05)^5-(1+0.04)^5}{0.05-0.04}\right]$$

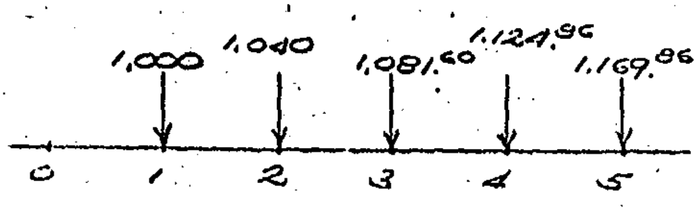
$$F = 1,000 \times 5.9629 = 5,962.^{90}\ um.$$

• usando las tablas:

$$F = 1,000\,[F/A_1, i, j, n] = 1,000\,[F/A_1, 5\%, 4\%, 5]$$

$$F = 1,000 \times 5.9629 = 5,962.^{90}\ um.$$

• calculando directamente en la escala de tiempos:



$$\begin{aligned}
F = 1000\,(F/P, 5\%, 4) &= 1,215.^{50}\\
+\,1,040\,(F/P, 5\%, 3) &= 1,203.^{90}\\
+\,1,081.^{60}\,(F/P, 5\%, 2) &= 1,192.^{50}\\
+\,1,124.^{86}\,(F/P, 5\%, 1) &= 1,181.^{14}\\
+\,1,169.^{86} &= 1,169.^{86}\\
\hline
F = \Sigma: &\ 5,962.^{90}\ um.
\end{aligned}$$

VALORES LIMITE DE LAS FORMULAS.

o) Si el número de periodos (n) tiende a adquirir valores muy grandes, es decir : $\underline{n \to \infty}$:

$${}_{i-\infty}spcaf = (F/P, i, \infty) = (1+i)^{\infty} = \infty$$

$${}_{i-\infty}sppwf = (P/F, i, \infty) = \frac{1}{(1+i)^{\infty}} = 0$$

$${}_{i-\infty}uscaf = (F/A, i, \infty) = \frac{(1+i)^{\infty} - 1}{i} = \infty$$

$${}_{i-\infty}sfdf = (A/F, i, \infty) = \frac{i}{(1+i)^{\infty} - 1} = 0$$

$${}_{i-\infty}crf = (A/P, i, \infty) = \frac{i(1+i)^{\infty}}{(1+i)^{\infty} - 1}$$

por medio de este cociente llegamos a una indeterminación, pero por otro lado :

$${}_{i-\infty}crf = (A/P, i, \infty) = {}_{i-\infty}sfdf + i = 0 + i = i$$

$${}_{i-\infty}uspwf = (P/A, i, \infty) = \frac{1}{{}_{i-\infty}crf} = \frac{1}{i}$$

$${}_{i-\infty}asf = (A/g, i, \infty) = \frac{1}{i}$$

o) Si la tasa de interes (i), adquiere o tiende a valer cero : $\underline{i \to 0}$

$${}_{0-n}spcaf = (F/P, 0, n) = 1$$

$${}_{0-n}sppwf = (P/F, 0, n) = 1$$

$${}_{0-n}uscaf = (F/A, 0, n) = n$$

$${}_{0-n}sfdf = (A/F, 0, n) = \frac{1}{n}$$

$${}_{0-n}crf = (A/P, 0, n) = \frac{1}{n}$$

$${}_{0-n}uspwf = (P/A, 0, n) = n$$

$${}_{0-n}asf = (A/g, 0, n) = \frac{n-1}{2}$$

INTERES CONTINUO.

Para el desarrollo de las fórmulas mostradas anteriormente, se aceptó inicialmente que todos los pagos ocurren en forma discreta, es decir, en cada período se consideran agrupados en un solo pago ocurriendo éste al final del período. Como consecuencia, a los intereses correspondientes se les aplican las mismas consideraciones. Surge la duda de si un sistema de pagos e intereses como el anterior refleja la realidad, y de no ser así, cual es el grado de error que introducen las suposiciones hechas.

Por un lado, es cierto que ciertos pagos en realidad se concentran en un punto específico del tiempo, como es el caso del pago para la compra de un equipo o del ingreso que se obtiene por su venta, (valor de recuperación), los cuales se ubican en la escala de tiempo, al inicio y al final del primero y último períodos respectivamente, lo cual sí refleja la realidad, pero otros efectivos de caja ocurren en forma más o menos contínua en el transcurso de un período, como sucede por ejemplo, con erogaciones semanales para el pago de obra de mano, o mensuales o bimestrales, para cubrir los gastos por concepto de energía, materiales, impuestos, operación en general, etc.., y suponerlos todos ellos concentrados o representados al final de un período, digamos anual, es evidente que configura una situación muy diferente de la real. Quizás un modelo en que se considerasen todos estos pagos fluyendo continuamente, como una corriente de agua, a lo largo del período, sería probablemente más apegado a la realidad que considerarlos concentrados al final del año. Además hay casos en que ni la inversión inicial, por ejemplo, es puntual, ya que se distribuye a lo largo de uno o varios períodos, como es el caso de la construcción de una obra en la que los pagos para sufragar los gastos de la misma, se distribuyen a todo lo largo del período que dura la construcción.

El criterio del " interés continuo " proviene de la suposición de que los costos y los beneficios se generan en cada día, en cada hora y en cada minuto de la operación.

La verdad es que uno y otro criterios, representan e implican un conjunto de suposiciones y consideraciones, ya que en general en el ámbito real, el flujo de efectivo ni obedece totalmente a un modelo discreto, ni se comporta como un líquido que fluye continuamente. Ambos métodos proporcionan resultados aproximados y sin embargo los rangos de error que implican no son de tal magnitud que invaliden alguno de los criterios.

Sin embargo, la costumbre establecida, sobre todo en los campos de la idustria y el comercio, propician el empleo del sistema discreto. En general, el tratamiento que se da al dinero dentro de los sistemas comunmente aceptados, de pagos, compras, inversiones en bonos y acciones, otorgamiento de préstamos, hipotecas, etc.., se ajusta al sistema discreto.

El criterio de interés continuo tiene aplicación en el desarrollo de ciertos modelos matemáticos para la toma de decisiones o en aquellos casos en que por la naturaleza misma del flujo de efectivo, se hace conveniente el empleo de dicha criterio.

INTERES NOMINAL E INTERES EFECTIVO.

Muchas transacciones comerciales, estipulan que el cálculo de intereses, así como su cargo o abono, se haga en periódos uniformes menores de un año; Sin embargo, aún en estos casos, es costumbre indicar la tasa de interés de esa inversión en base anual, aunque -- los periodos de pago o cálculo de los intereses sean menores de un año. Así por ejemplo, si una tasa de interés es de 60% cada 6 meses, se acostumbra referirse a ella como una tasa de 60% anual, solo que al interés calculado de esta manera se le designa como: --- " tasa nominal de interés " para diferenciarla de la tasa real o - efectiva que es algo mayor que el 60%.

Asi por ejemplo, el interés real anual o efectivo de un capital de \$ 100.00 invertido a una tasa de 60% computado semestralmente, se calcula:

Intereses generados en los primeros 6 meses:

$$I = \$\ 100 \times 0.30 = \$\ 30.00$$

Capital total al iniciar el segundo semestre:

$$P + Pi = \$\ 100.00 + \$\ 30.00 = \$\ 130.00$$

Interes sobre el capital anterior al final del segundo Semestre:

$$I = \$\ 130.00 \times 0.30 = \$\ 39.00$$

Interés total acumulado durante el año:

$$\$\ 30.00 + \$\ 39.00 = \$\ 69.00$$

Tasa real en el año de interés:

$$\frac{\$\ 69.00}{100} = 0.6900 = 69.00\ \%$$

A esta tasa real de interés, con base anual, se le denomina: "tasa de interés efectiva ". De aquí en adelante vamos a emplear la denominación " tasa real " para períodos menores de un año y " tasa efectiva" exclusivamente para indicar la tasa real correspondiente a un año.

Cuando se dé como dato la tasa nominal, para poder aplicar las fórmulas, habrá que calcular primero la tasa real por período y trabajar con el número de períodos correspondientes a esa tasa real. Las tasas nominales, no sirven para base de comparación entre alternativas sino hasta que han sido convertidas a tasas efectivas.

La tasa efectiva de interés es el interés anual total percibido por unidad de capital empleado, considerando que este interés (cuando es computado en períodos menores de un año), es invertido por el resto del año tan pronto como se genera, en los mismos términos y condiciones de inversión a que esta sujeto el capital principal.

Ejemplo:

Calcular el capital acumulado y la tasa efectiva de interes de un capital de ₡ 100. invertido a una tasa de 6 % computada cada 3 meses, durante 10 años.

Tasa real de interes en el trimestre: $6/4 = 1.5\%$

Número de periodos trimestrales en los 10 años: 40

Cantidad acumulada al término de los 10 años:

$$F = P_{1.5-40}\,spcaf = P\,(F/P,\,1.5,\,40) = 100.\ (1+0.015)^{40}$$

$$F = 100 \cdot 1.8140 = 181.^{40}$$

Analicemos más detenidamente el proceso:

El capital acumulado al cabo de un año, correspondiente a cada peso invertido, será:

$$F = ₡1.^{..}\ {}_{15-4}spcaf = ₡\ 1.0614$$

En consecuencia, el importe de los intereses ganados por año/por peso:

$$F - P = ₡1.0614 - ₡1.00 = ₡0.0614$$

lo que equivale a una tasa efectiva de interes del: 6.14 %

Generalizando:

$$\text{tasa efectiva de interes} = \left[\frac{F-P}{P}\right] = \left[\frac{P\,{}_{i'-M}\,spcaf - P}{P}\right]$$

$$\boxed{\text{tasa efectiva de interes} = \left({}_{i'-M}\,spcaf - 1\right) = (1+i')^{M} - 1}$$

donde (i') es la tasa real por periodo y (M) es el número de periodos que hay en un año, correspondientes a la tasa real (i')

Cuando se tiene como dato, la tasa nominal de interes anual (r), la expresión toma la forma:

$$\boxed{\text{tasa efectiva de interes} = \left(1+\frac{r}{M}\right)^{M} - 1}$$

Para el caso particular del interes continuo, el número de periodos (M) en cada uno de los cuales se computo el interes, tiende a ser muy grande, es decir:

$$M \to \infty$$

y en estas condiciones, si en la expresión: $\left(1+\frac{r}{M}\right)^{M}$

llamamos: $\frac{M}{r} = K$ de donde: $M = K \cdot r$

substituyendo: $\left(1+\frac{1}{K}\right)^{K \cdot r} = \left[\left(1+\frac{1}{K}\right)^{K}\right]^{r}$

ahora bien, al tender: $M \to \infty$, también: $K \to \infty$

y recordando que: $\lim_{K \to \infty} \left\{\left(1+\frac{1}{K}\right)^{K}\right\} = e$

entonces: $\lim_{M \to \infty} \left(1+\frac{r}{M}\right)^{M} = e^{r}$

en estas condiciones, para el caso del interes continuo se tendria:

$$\boxed{\text{tasa efectiva de interes} = e^{r} - 1}$$

Ejemplo: ¿Que tasa de interes es más atractiva para quien invierte un capital:

- 24% computado mensualmente

ó
- 100% computada semestralmente ?

- 24% (nominal anual) computada mensualmente:

  tasa real mensual: $24/12 = 2\%$

  número de periodos en un año: 12

  tasa efectiva de interés:

$$\text{spcaf}_{2-12} - 1 = 2.25219 - 1 = 1.25219 = 125.219\%$$

- 100% (nominal anual) computada semestralmente:

  tasa real semestral: $100/2 = 50\%$

  número de periodos en un año: 2

  tasa efectiva de interes:

$$\text{spcaf}_{50-2} - 1 = 2.2500 - 1 = 1.2500 = 125.00\%$$

$\therefore$ resulta más atractiva una tasa de 24% computada mensualmente.

Ejercicio:

¿Qué tasa de interes real mensual es equivalente a una tasa de 20% computada trimestralmente ?

por un lado:

$$i_{efect.} = (1+i)^{12} - 1$$

por otro lado:

$$i_{efect.} = \left(1 + \frac{0.20}{4}\right)^4 - 1$$

igualando ambas expresiones:

$$(1+i)^{12} - \cancel{1} = (1+0.05)^4 - \cancel{1}$$

sacando raiz cuarta:

$$(1+i)^3 = 1+0.05$$

$$1+i = (1.05)^{1/3}$$

$$i = (1.05)^{1/3} - 1$$

$$i = 0.01639 = 1.639\ \%$$

real mensual

comprobación:

cálculo de las tasas efectivas de interes:

$$spcaf_{1.639-12} - 1 = (F/P,\ 1.639,\ 12) - 1 = 0.2155 = 21.55\%$$

$$spcaf_{5-4} - 1 = (F/P,\ 5,\ 4) - 1 = 0.2155 = 21.55\%$$

Ejemplo: Calcular la tasa efectiva de interes a que es invertido un capital de ₡1,000. si la tasa anual (nominal) es de 80% y es computada en periodos:

anual, semestral, trimestral, mensual, diario y continuo.

Calcular la cantidad (F) acumulada en cada caso al cabo de un año.

Periodo de computación	Número de periodos en un año	Tasa de interes real en el periodo	Cálculo	Tasa efectiva de interes	Cantidad (F) acumulada en un año.
					$F = 1,000(1+i')^n$
anual	1	80/1 = 80%	$_{80-1}spcaf - 1 = 1.80000 - 1 = 0.80$	80.00%	₡ 1,800.
semestral	2	80/2 = 40%	$_{40-2}spcaf - 1 = 1.96000 - 1 = 0.96$	96.00%	₡ 1,960.
trimestral	4	80/4 = 20%	$_{20-4}spcaf - 1 = 2.07360 - 1 = 1.07360$	107.36%	₡ 2,073.60
mensual	12	80/12 = 6.667%	$_{6.667-12}spcaf - 1 = 2.16943 - 1 = 1.16943$	116.94%	₡ 2,169.43
diario	360	80/360 = 0.2222 %	$_{0.222-360}spcaf - 1 = 2.22339 - 1 = 1.22339$	122.34%	₡ 2,223.39
continuo	$\rightarrow \infty$	$80/\infty \rightarrow 0$	$e^{0.80} - 1 = 2.22554 - 1 = 1.22554$	122.55%	₡ 2,225.54

El ejemplo anterior ilustra la diferencia entre tasa nominal y tasa real y la necesidad de especificar cual tasa se conoce como dato al hacer el análisis de una alternativa.

Observamos que si en el sistema de interés continuo y en el de interés discreto, se trabaja con la misma tasa efectiva, la cantidad acumulada al final de un año es la misma, lo cual indica que la diferencia entre sus tasas nominales, es irrelevante y así por ejemplo, una tasa efectiva de interés de 122.554 % acumula en el ejemplo anterior una F = $ 2.225.54 tanto por el sistema discreto como por el continuo, ya que con el sistema de interes discreto, se tendria: $F = P(1+i)^n$

$\therefore F = 1.000(1+1.22554)^1 = \$2.225.54$

Es claro que en el sistema de interés continuo, la tasa nominal anual siempre será distinta de la tasa efectiva, ya que la primera vale (r) y la segunda ($e^r - 1$), razón por la cual, en las tablas de interés continuo siempre se indica la tasa efectiva con la cual se calculan, y la nominal a la cual corresponde. En cambio en el sistema de interés discreto, la tasa nominal será igual a la tasa efectiva, excepto cuando los intereses se computen en periodos menores de un año.

Vemos en el ejemplo, que los valores obtenidos para el interés continuo son muy similares a los correspondientes al interés discreto, con periodo de computación diario y aún a los de periodo de computación mensual.

TASA DE DESCUENTO.

En todos los casos que anteceden, hemos considerado que los intereses son computados y pagados al final de cada periódo de interés. Cuando el pago de los intereses se hace por adelantado, es decir, al inicio del periódo, se dice que este pago constituye un "descuento".

Si un capital (P) inicial, es invertido y acumula una cantidad (F) al final de un cierto periódo, entonces: (F- P) representa los intereses:

sobre P, (si en los intereses son pagados al final del periódo).

sobre F, (si los intereses son descontados al inicio del periódo).

en estas condiciones:

tasa de interés : $i = \frac{F-P}{P} = \frac{F}{P} - 1$

tasa de descuento: $d = \frac{F-P}{F} = 1 - \frac{P}{F}$

de las expresiones anteriores se deduce que: $\boxed{i = \frac{d}{1-d}}$

También puede demostrarse que para el caso de la tasa de descuento:

$$\boxed{F = P\ \frac{1}{(1-d)^n} = P(1-d)^{-n} \quad ; \quad P = F(1-d)^n}$$

Ejemplo:

Calcular el descuento por anticipado correspondiente a un préstamo de ¢1,000 pagaderos dentro de 10 años, si la tasa de descuento es del 84%. computada mensualmente.

Tasa de descuento (nominal) = 84%.
Tasa de descuento real mensual = $84/12 = 7\%$.
Número de periodos mensuales en 10 años = 120

La cantidad (P) que será entregada al prestatario después de descontar por adelantado los intereses, será:

$$P = F(1-d)^n = 1{,}000\ (1-0.07)^{120} = 1{,}000\ (0.93)^{120}$$

$$P = 1{,}000 \times 0.00017 = ¢0.17$$

So el descuento por anticipado será:

$$\text{Descuento} = F - P = 1{,}000 - 0.17 = ¢999.^{83}$$

INTERPOLACION.

Cuando en un momento dado, los valores requeridos para determinados (i) ó (n), no se encuentran en las talbas, y con el fin de no tener que calcularlos directamente a partir de las fórmulas, puede interpolarse entre los dos valores más cercanos al buscado.

Pero dado que los factores no son lineales, aceptamos que al interpolar estamos introduciendo errores, los cuales habrá que estimar para ver si están dentro de cierto rango de tolerancia, ya que para ciertos factores y para determinado rango de valores (i) y de (n), el error que se introduce al interpolar linealmente, puede ser considerable.

En cada caso, el buen juicio y el criterio, determinarán si es prudente calcular los valores buscados mediante la interpolación o es necesario partir directamente de las fórmulas.

Ejemplo:

Calcular el valor de: ${}_{32\%-15}crf = (A/P,\ 32\%,\ 15)$

teniendo como datos los valores proporcionados por las tablas:

$${}_{30-15}crf = 0.305978$$

$${}_{35-15}crf = 0.353926$$

0.305978		0.353926
30	32	35

Procediendo por interpolación tendremos que:

$$\begin{aligned} {}_{32-15}crf &= 0.305978 + (0.353926 - 0.305978) \times 2/5 \\ &= 0.305978 + 0.019179 \\ &= 0.325157 \end{aligned}$$

Calculémoslo directamente a partir de la fórmula:

$${}_{32-15}crf = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{0.32(1+0.32)^{15}}{(1+0.32)^{15} - 1}$$

cálculo de: $(1.32)^{15}$

$$\log (1.32)^{15} = 15 \log 1.32 = 15 \times 0.120574 = 1.80861$$

$$\therefore (1.32)^{15} = \text{antilog } 1.80861 = 64.35894$$

$${}_{32-15}crf = \frac{0.32 \times 64.35894}{64.35894 - 1} = 0.3250505$$

Vemos que en este caso, la diferencia entre los valores obtenidos por interpolación y por la fórmula, es apenas de: 0.03%

Ejemplo:

Calcular el valor de: ${}_{15-28}spcaf$

teniendo como dato los valores: ${}_{15\%-25}spcaf = 32.919$

$${}_{15\%-30}spcaf = 66.212$$

32.919		66.212
n=25	n=28	n=30

Procediendo por interpolación:

$$_{15\text{-}28}spcaf = 32.919 + (66.212 - 32.919) \times 3/5 =$$
$$= 32.919 + 19.976$$
$$= 52.895$$

Calculémoslo directamente :

$$_{15\text{-}28}spcaf = (1 + 0.15)^{28}$$
$$\log (1.15)^{28} = 28 \log 1.15 = 28 \times 0.060698 = 1.699544$$
$$(1.15)^{28} = \text{antilog } 1.699544 = 50.066$$

Vemos que en este caso, el error debido a la interpolación es de 5.65%, que en un caso específico, pudiese tener consecuencias apreciables.

Otro procedimiento que en este caso pudiese seguirse, sería:

$$_{15\text{-}28}spcaf = (1+0.15)^{28} = (1+0.15)^{25} \cdot (1+0.15)^{3}$$

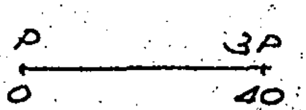
donde los valores de estos 2 factores sí están tabulados :

$$(1+0.15)^{28} = 32.919 \times 1.5209 = 50.066$$

método con el cual también se encuentra el valor exacto.

Ejemplo:

¿A qué tasa de interes, computado trimestralmente, se triplica un capital P invertido a 10 años? Calcular la tasa real trimestral, la tasa nominal anual y la tasa efectiva.



Periodos trimestrales en 10 años = 40

$$\cancel{P} \cdot {}_{i-40}spcaf = 3\cancel{P}$$
$$_{i-40}spcaf = 3$$

en tablas se pueden encontrar los valores

$$_{2\frac{1}{2}-40}spcaf = 2.6851 \qquad 2.6851 \quad 3.0 \quad 3.262$$
$$_{3-40}spcaf = 3.2620 \qquad 2\tfrac{1}{2} \quad x \quad 3$$

$$x \text{ — } (3.000 - 2.6851)$$
$$0.5 \text{ — } (3.262 - 2.6851)$$

Interpolando se obtiene :

$$i = 2.5\% + x = 2.5 + \left(\frac{3.00 - 2.6851}{3.262 - 2.6851}\right) \times 0.5 = 2.5 + 0.2729$$

$$i = 2.7729\% \quad \text{(tasa real trimestral)}$$

La tasa nominal será: $2.7729 \times 4 = 11.09\%$

~~la tasa efectiva:~~

$$\underset{2.7729-4}{spcaf}-1 = (1+0.027729)^4 - 1 = 0.1156526 = 11.56\%$$

En este caso, el problema también puede resolverse mediante la fórmula:

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1 = \sqrt[40]{\frac{3\cancel{P}}{\cancel{P}}} - 1 = \sqrt[40]{3} - 1 = 1.027845 - 1$$

$i = 2.78459\ \%$ (tasa real trimestral)

tasa nominal: $2.7846 \times 4 = 11.14\%$

tasa efectiva:

$$\underset{2.7846-4}{spcaf} - 1 = 1.116123 - 1$$

$$\therefore i = 11.61\ \%$$

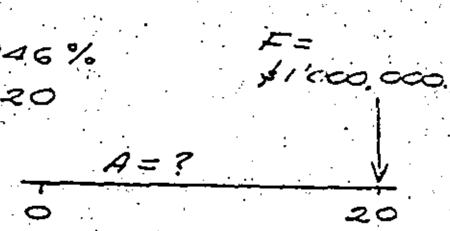
La diferencia entre los resultados se debe al error de aproximación introducido al interpolar linealmente.

Ejemplo: Una familia se propone acumular durante los próximos 5 años: ¢1'000,000. Si se tiene oportunidad de invertir al 11.14% anual computado trimestralmente, ¿cuánto debe ahorrar trimestralmente?

Otra familia se propone lo mismo, pero no se compromete a ahorrar trimestralmente sino en forma anual; ¿cuánto debe ahorrar en estas condiciones?

La tasa real trimestral es: $11.14/4 = 2.7846\%$

Periodos trimestrales en 5 años: $5 \times 4 = 20$

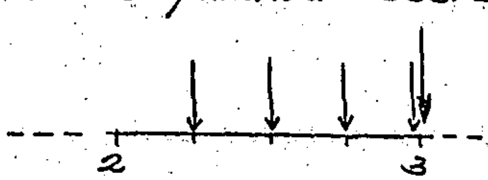


$A = F \cdot (A/F, i, n)$

$A = 1'000,000 \cdot (A/F, 2.7846, 20)$

$A = 1'000,000 \cdot 0.038038 = ¢38,038.$/trimestrales.

La 2ª familia deberá ahorrar anualmente para alcanzar la misma meta:



$F = A \cdot (F/A, i, n) = 38,038. \cdot (F/A, 2.7846, 4)$

$F = 38,038. \times 4.1702 = ¢158,626.^{04}$/anuales

Comprobación de que ambas familias lograrán su meta:

la 1ª familia:

$F = ¢38,038. (F/A, 2.7846, 20)$

$F = ¢1'000,000.$

la 2ª familia:

$F = ¢158,626.^{04} (F/A, 11.6123, 5)$

$F = ¢1'000,000.$

$i_{ef} = (F/P, 2.7846, 4) - 1$

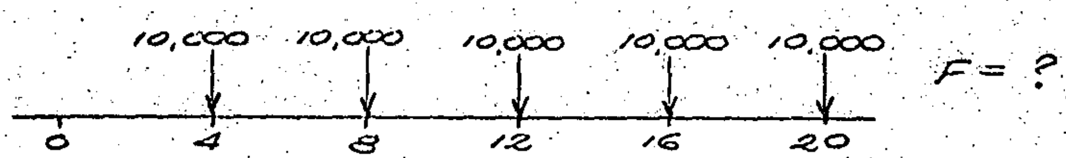
Ejemplo:

Una persona espera recibir un bono por ¢10,000 al final de cada año y por los próximos 5 años. Si planea invertir cada bono tan pronto lo reciba, a un 48 % anual computado trimestralmente, ¿cuánto tendrá acumulado al término de los 5 años?

De las condiciones planteadas:

tasa real trimestral: $48/4 = 12\%$

número de periodos trimestrales en 5 años: $5 \times 4 = 20$



1º procedimiento:

$$F = 10{,}000 \cdot (F/p, 12\%, 16) + 10{,}000 \cdot (F/p, 12\%, 12) + $$
$$+ 10{,}000 \cdot (F/p, 12\%, 8) + 10{,}000 \cdot (F/p, 12\%, 4) + 10{,}000$$

$$F = 61{,}304 + 38{,}959 + 24{,}760 + 15{,}735 + 10{,}000$$
$$F = ¢\,150{,}758.$$

2º procedimiento:

$$F = 10{,}000 \cdot (A/F, 12\%, 4) \cdot (F/A, 12\%, 20)$$
$$F = 10{,}000 \times 0.20923 \times 72.05244 = ¢\,150{,}758.$$

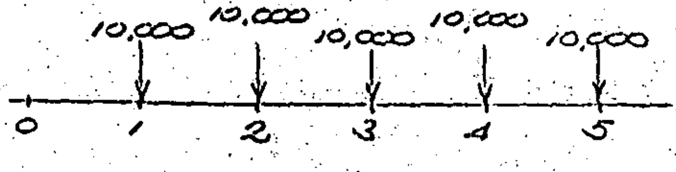
3º procedimiento:

$$F = 10{,}000 \cdot (A/p, 12\%, 4) \cdot (F/A, 12\%, 16) + 10{,}000$$
$$F = 10{,}000 \times 0.32923 \times 42.75328 + 10{,}000 = ¢\,150{,}758.$$

4º procedimiento:

Calculemos la tasa efectiva correspondiente a una tasa real trimestral de 12 %:

$$\text{tasa efectiva} = (F/p, 12\%, 4) - 1 = 0.57352$$
$$= 57.352\,\%$$



calculemos el factor:

$$(F/A, 57.352\%, 5) = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+0.57352)^5 - 1}{0.57352} = 15.0758$$

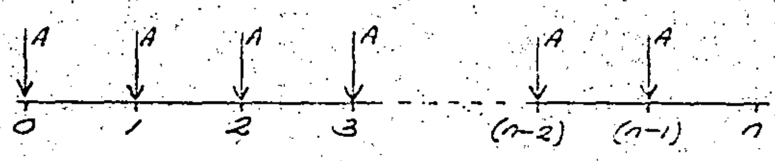
$$F = ¢10{,}000 \times 15.0758 = ¢\,150{,}758.$$

PAGOS POR ADELANTADO.

A diferencia del condicionamiento planteado en el desarrollo de los modelos matemáticos para series uniformes, en los cuales los pagos (A) se realizan al término de cada uno de los (n) periodos, existen en la práctica comercial, situaciones como son: el alquiler de inmuebles, la renta de vehiculos, el pago de las primas de seguros, etc..., en las cuales los pagos (A) uniformes, se efectuan al inicio de cada periodo, constituyendo una:

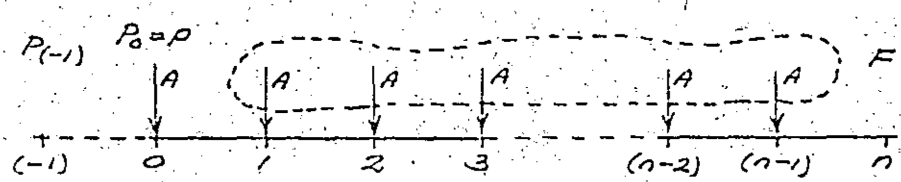
SERIE UNIFORME DE PAGOS POR ADELANTADO

la cual se representaria:



En estas condiciones, para el cálculo del Valor Presente (P), se puede proceder:

a) calcular $P_{(-1)}$ aplicando la fórmula anteriormente desarrollada: (P/A) para el punto (-1) y trasladando este valor de $P_{(-1)}$ al punto (0) calculando la (F) correspondiente:



$$P_{(-1)} = A \cdot (P/A, i, n)$$

$$P_0 = P = P_{(-1)} \cdot \underbrace{(F/P, i, 1)}_{(1+i)^1}$$

$$\therefore \; P_{adel.} = P_{final} \cdot (1+i)$$

$$\underline{P_{adel.} = A \cdot (P/A, i, n)(1+i)}$$

b) calcular un valor (P) equivalente a una serie de (n-1) pagos (A) ubicados de: 1 a (n-1) (area punteada), y después sumarle un pago (A) (el pago ubicado en 0 :

$$P_0 = P = A \cdot (P/A, i, n-1) + A$$

Con igual razonamiento, el valor de (F) puede determinarse:

c) calculando (F) en el punto (n-1), aplicando el modelo (F/A) desde el punto (-1) y transladando el valor obtenido al punto (n) mediante el modelo (F/P):

$$F = A \cdot (F/A, i, n) \cdot \underbrace{(F/P, i, 1)}_{(1+i)^1}$$

$$\therefore \; \underline{F_{adel.} = A \cdot (F/A, i, n) \cdot (1+i)}$$

d) calcular (F) a partir del valor de $P_0 = P$ obtenido de los incisos (a) ó (b)

<u>Ejemplo:</u>

Mostrar la diferencia entre las cantidades (P) y (F) equivalentes a una serie de pagos (A):

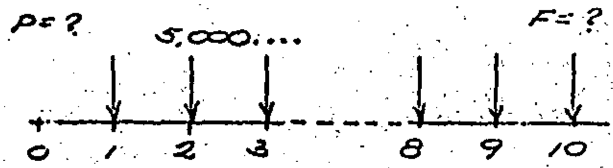
- ubicados al final de cada uno de los (n) periodos
- ubicados al inicio de cada uno de los (n) periodos.

datos: $\left\{ A = \$5{,}000 \quad i = 19\% \quad n = 10 \right.$

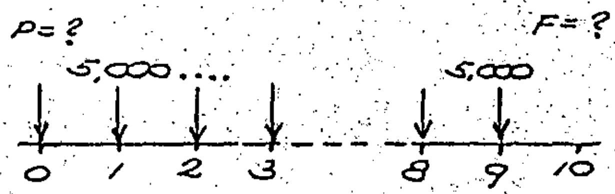
<u>1° caso (pagos al final)</u>

$P = 5{,}000\,(P/A, 19, 10) = \$21{,}694.^{67}$

$F = 5{,}000\,(F/A, 19, 10) = \$123{,}544.^{31}$



<u>2° caso (pagos al inicio)</u>



procedimiento (a):

$P = A \cdot (P/A, i, 10) \cdot (F/P, i, 1)$

$P = \underbrace{5{,}000\,(P/A, 19, 10)}_{P_{(-1)}} \cdot (F/P, 19, 1) = \$25{,}816.^{66}$

procedimiento (b):

$P = 5{,}000\,(P/A, 19, 9) + 5{,}000 = \$25{,}816.^{66}$

procedimiento (c):

$F = 5{,}000 \cdot (F/A, 19, 10) \cdot (F/P, 19, 1) = \$147{,}017.^{73}$

procedimiento (d):

$F = P(F/P, 19, 10) = 25{,}816.^{66}\,(F/P, 19, 10) = \$147{,}017.^{73}$

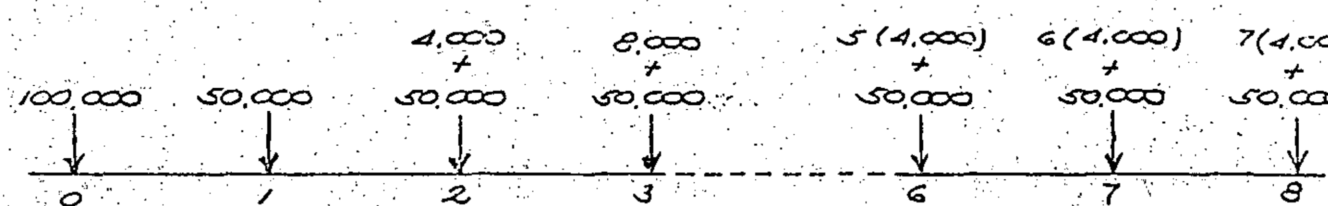
Observamos que entre los 2 casos, la diferencia entre las (P)'s y las (F)'s es precisamente de : 19%

$P_{od.} = 21{,}694.^{67}\,\underbrace{(1+i)}_{19\%} = 25{,}816.^{66}$ $\quad F_{od} = 123{,}544.^{31} \times 1.19 = 147{,}017.^{73}$

De los resultados anteriores, concluimos que es claro que a quien pide prestado o debe hacer los pagos, le conviene que le cobren de acuerdo con el criterio de anualidades al final de cada periodo, mientras que a quien va a percibir los pagos, le conviene el criterio de anualidades por anticipado.

Ejemplo:

Un equipo ya instalado cuesta $100,000. Se considera tendrá un costo de operación de $50,000 durante el primer año, los que se calcula se incrementarán en $4,000 cada año. Si se estima, para el capital una tasa de interes anual de 50%, ¿cuál será el costo acumulado del equipo después de 8 años de operación?



$$F = 100{,}000 \cdot (F/P, 50\%, 8) + [50{,}000 + 4{,}000\,(A/G, 50\%, 8)] \cdot (F/A, 50\%, 8)$$

50 - 8 asf

$$F = 100{,}000 \times 25.628 + [50{,}000 + 4{,}000 \times 1.6751] \times 49.257$$

$$F = 2'562{,}890 + 2'792{,}892 \qquad = \$\,5'355{,}782.$$

Otro procedimiento:

$$F = [100{,}000 + 50{,}000 \cdot (P/A, 50\%, 8) + 4{,}000\,(P/G, 50\%, 8)] \cdot (F/P, 50\%, 8)$$

$$F = [100{,}000 + 50{,}000 \times 1.9219 + 4{,}000 \times 3.220] \times 25.628$$

$$F = \$\,5'355{,}782.$$

Ejemplo:

En una Obra, un Maestro presta a los trabajadores pequeñas cantidades de dinero, cobrando intereses del 5% mensualmente pero por adelantado. Si después de un mes, la deuda no es cubierta, nuevamente cobra el 5%, y así, hasta que la cuenta es liquidada ¿cuál es la tasa efectiva equivalente de interes, que el Maestro está cobrando?

De acuerdo con el enunciado, la tasa de descuento real mensual es de un 5%:

$$d_{real\,mens.} = 5\%$$

entonces:

$$i_{real\,mensual\,equiv.} = \frac{d}{1-d} = \frac{0.05}{1-0.05} = 0.05263$$

$$i_{efect.} = {}_{5.263-12}spcaf - 1 = (1+0.05263)^{12} - 1$$
$$= 1.85058 - 1$$
$$= 0.85058 = 85.058\%$$

Supongamos la misma situación, solo que considerando ahora plazos de interes semanales:

la taza de descuento es: $d_{real\,semanal} = 5\%$

$$i_{real\,semanal\,equiv.} = 0.05263 = 5.263\%$$

$$i_{efect.} = {}_{5.263-52}spcaf - 1 = (1+0.05263)^{52} - 1$$
$$= 14.399 - 1$$
$$= 13.399$$
$$= 1339.9\%$$

Si el descuento fuese diario:

$$d_{real\,diario} = 5\%$$

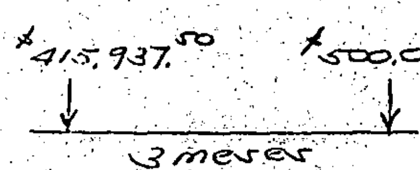
$$i_{real\,diario\,equiv.} = 5.263\%$$

$$i_{efect.} = {}_{5.263-365}spcaf - 1 = 135'097,183 - 1$$
$$= 135'097,182$$
$$= 13,509'718,200\%$$

Ejemplo:

Un individuo solicita en un Banco, un préstamo de ₡ 500,000 a un plazo de 3 meses. Al serle otorgado dicho préstamo se le hace entrega de: ₡ 415,937.50

Se pregunta, ¿cuál es la tasa efectiva equivalente de interes que el Banco le está cobrando?



$$d = \frac{F-P}{F} = \frac{500{,}000 - 415{,}937.^{50}}{500{,}000} = \frac{84{,}062.^{50}}{500{,}000} = 0.1681 = 16.81\%$$

esta es la tasa de descuento real trimestral.

∴ la tasa de descuento nominal anual será:

$$16.81 \times 4 = 67.24\%$$

la tasa de interes (i) equivalente será:

$$i = \frac{d}{1-d} = \frac{0.1681}{1-0.1681} = \frac{0.1681}{0.8319} = 0.202068/\text{trimestral}$$

$$i_{efectiva} = \underset{20.2068-4}{spcaf} - 1 = (1+0.202068)^4 - 1$$
$$= 2.0879 - 1$$
$$= 1.0879 \quad = 108.79\%$$

Para calcular la cantidad que debía dársele líquida al cliente, el empleado del Banco procedió de la siguiente manera, sabiendo que la tasa de descuento establecida por la institución es de: 67.24% (vg.: 57.24% + 10% comisión) anual nominal:

tasa de descuento real trimestral: $\frac{67.24}{4} = 16.81\%$

descuento al cliente: ₡500,000 × 0.1681 = ₡84,062.50

por tanto, cantidad líquida a entregarle:

$$P = ₡500{,}000 - 84{,}062.^{50} = ₡\,415{,}937.^{50}$$

Cantidad que también pudo calcular:

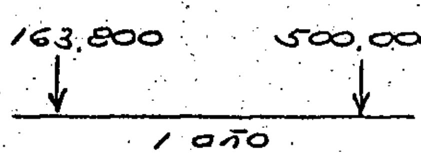
$$P = F(1-d)^n = 500{,}000\,(1-0.1681)^1$$
$$= 500{,}000 \times 0.8391$$
$$= ₡\ 415{,}937.^{50}$$

Si el préstamo se hubiese solicitado a un año:

tasa de descuento anual nominal: 67.24 %
(y real)

descuento anticipado = 500,000 × 0.6724
= 336,200.

cantidad líquida a entregar:
$500,000 − 336,200 = $163,800.



∴ su situación real es:
recibe $163,800 ahora, y
debe pagar $500,000
dentro de un año.

$$i_{efect.} = \frac{d}{1-d} = \frac{0.6724}{1-0.6724} = \frac{0.6724}{0.3276} = 2.0525$$

o también:

$$i_{efect.} = \frac{F-P}{P} = \frac{500,000-163,800}{163,800} = 2.0525$$

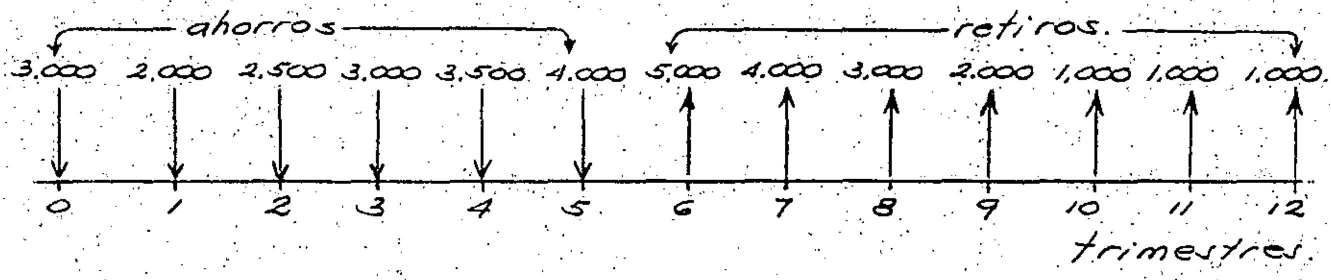
$$\therefore \quad i_{efectiva} = 205.25\ \%$$

La traducción de la tasa de descuento (d) con que realmente se afecta la operación, a una tasa (i efectiva) equivalente, es solo con el fin de poder comparar la alternativa estudiada, con otras alternativas cuyas tasas de recuperación se expresan normalmente en base anual.

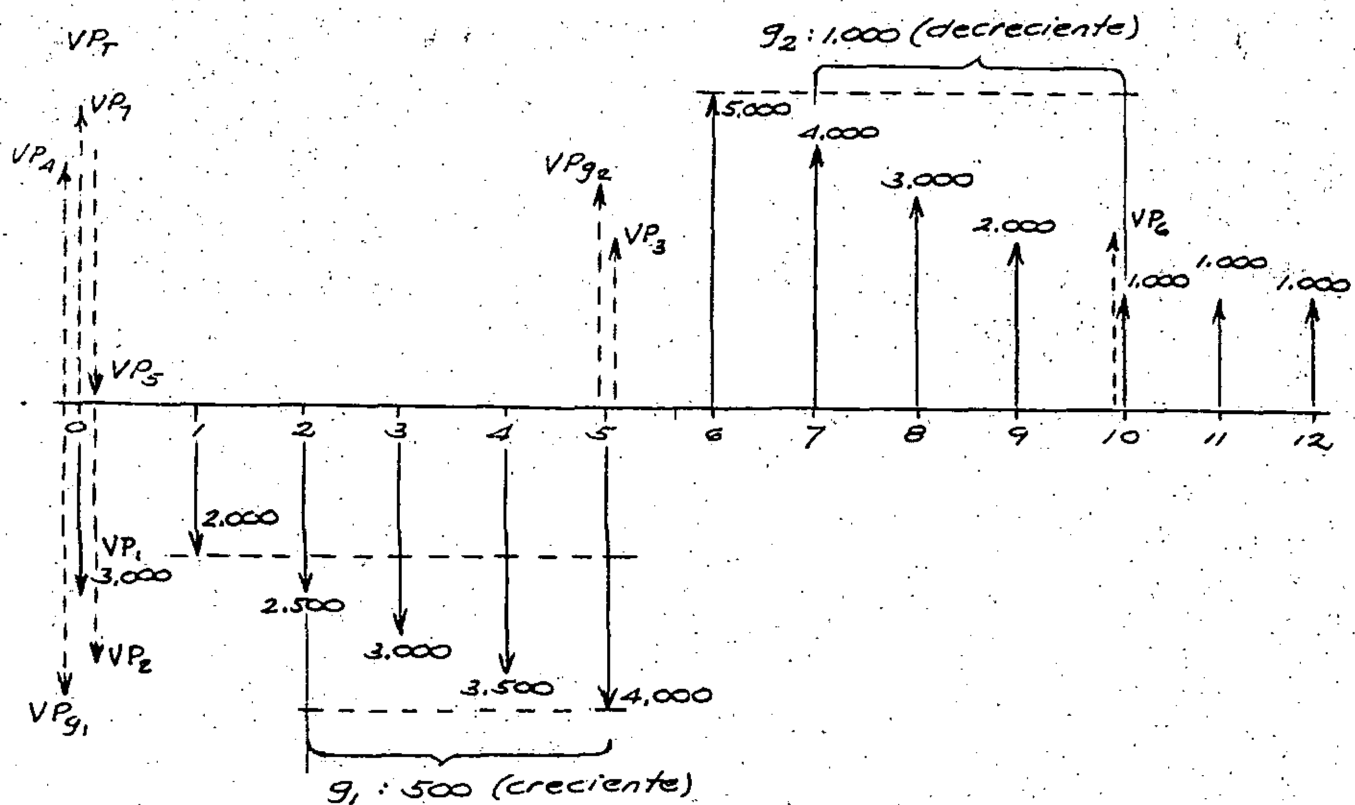
Esta (i efect.) es solo equivalente a cada situación, y esta es la razón por la cual se obtienen diferentes valores de la tasa efectiva equivalente, a partir del comportamiento de una tasa de descuento aplicada realmente en periodos trimestrales, semestrales, anuales, etc...

Ejemplo: Se planea crear un fondo de ahorro efectuando inversiones durante los primeros 5 trimestres a una tasa del 20% trimestral y retiros graduales a partir del trim. 6 y hasta el trim. 12, todo de acuerdo al proceso indicado en el diagrama de flujo que a continuación se detalla.

Se quiere calcular: el Valor Presente, el Valor Futuro y el importe de los pagos de una serie uniforme equivalente a la secuela de ahorros y retiros anterior.



Representemos en una forma gráfica más objetiva, tanto la secuela de ahorros y retiros, como la posición de los Valores Presentes parciales que se pueden obtener con la subdivisión del flujo de efectivo:



$VP_1 = 3.000.$

VP_2 : correspondiente a una serie unif. de ahorros de: ¢2.000.

$$VP_2 = 2.000 \cdot (P/A, 20\%, 5) = ¢5.981.$$

VP_{g_1} : serie de ahorros con gradiente de incremento aritmético (g_1 = ¢500.)

$$VP_{g_1} = 500\ (P/g, 20, 5) = 500 \times 4.906 = ¢2.453.$$

VP_3 : Valor Presente (ubicado en el $^{trim.}$5) correspondiente a una serie uniforme de retiros por: 5.000.

$$VP_3 = 5.000 \cdot (P/A, 20, 5) = ¢14.953.$$

VP_4 : Translado de VP_3 a 0 :

$$VP_4 = 14.953. \cdot (P/F, 20, 5) = ¢6.009.$$

VP_{g_2} : Valor Presente (ubicado en el $^{trim.}$5) correspondiente a una serie con gradiente de decremento aritmético (g_2 = 1.000)

$$VP_{g_2} = 1.000\ (P/g, 20, 5) = 1.000 \times 4.906 = ¢4.906.$$

VP_5 : Traslado de VP_{g_2} a 0:

$$VP_5 = 4.906.\ (P/F, 20, 5) = ¢1.972.$$

VP_6 : Valor Presente (ubicado en el $^{trim.}$10) de serie unif. de: 1.000

$$VP_6 = 1.000 \cdot (P/A, 20, 2) = ¢1.528.$$

VP_7 : Traslado de VP_6 a 0:

$$VP_7 = 1.528\ (P/F, 20, 10) = ¢247.$$

Determinemos el VP_{TOTAL} dando signo (+) a los depósitos y (−) a los retiros:

$$VP_{TOTAL} = VP_1 + VP_2 + VP_{g_1} - (VP_4 - VP_5) - VP_7$$

$$VP_{TOTAL} = 3.000 + 5.981. + 2.453. - (6.009 - 1.972) - 247 = ¢7.150.$$

El que el valor de VP_{TOTAL} haya resultado (+) significa que los ahorros depositados, superan a los retiros.

El valor (A) de los pagos de una serie uniforme equivalente, será:

$$A = 7.150 \cdot (A/P, 20, 12) = ¢1.611.$$

lo cual significa que toda la secuela de ahorros y retiros equivale a una serie de ahorros de ¢1.611. depositados al final de cada ^{trimestre}, durante 12 trimestres

La cantidad (F) acumulada al final de los 12 ^{trimestres} será:

$$F = 7.150\ (F/P, 20, 12) = ¢63.750.$$

que constituye el remanente de la serie de ahorros y retiros.

LA AMORTIZACION DEL CAPITAL Y EL PAGO DE INTERESES

Para el caso de una serie uniforme de pagos (A) aplicados a la recuperación de un capital (P) invertido a una tasa (i) y a (n) periodos y para el cual se desarrolló el factor: (A/P, i, n), hemos visto que el importe constante de cada uno de los pagos (A), se aplica tanto al pago de intereses como a la amortización en sí del capital invertido, siendo mayor lo que se abona a intereses en un pago cualquiera (k esimo) que lo que se abona por el mismo concepto en el pago subsecuente (k+1 esimo); contrariamente a lo que sucede con la cantidad aplicada a la amortización del capital, la cual va siendo creciente en cada pago, a lo largo de la serie de pagos (A).

Se podría demostrar que:

E_k: cantidad abonada a capital en el pago k esimo.

$$\boxed{E_k = A\,(P/F,\ i,\ n-k+1)}$$

I_k: cantidad abonada a intereses en el pago k esimo.

$$\boxed{I_k = A - E_k = A\left[1-(P/F,\ i,\ n-k+1)\right]}$$

Refiriéndonos al ejemplo en el que se siguió paso a paso el proceso de recuperación de un capital de A= \$5,000 invertido a una tasa de 10% durante 5 periodos la aplicación de los modelos anteriores, daría los resultados numéricos siguientes, que coinciden con los obtenidos directamente.

$E_1 = \$1{,}319.\ (P/F,\ 10\%,\ \underbrace{5}_{5-1+1}) = \$819.$ $\quad I_1 = 1{,}319. - 819. = \$500.$

$E_2 = \$1{,}319.\ (P/F,\ 10\%,\ 4) = \$901.$ $\quad I_2 = 1{,}319. - 901. = \$418.$

$E_3 = \$1{,}319.\ (P/F,\ 10\%,\ 3) = \$991.$ $\quad I_3 = 1{,}319. - 991. = \$328.$

$E_4 = \$1{,}319.\ (P/F,\ 10\%,\ 2) = \$1{,}090.$ $\quad I_4 = 1{,}319. - 1{,}090. = \$229.$

$E_5 = \$1{,}319.\ (P/F,\ 10\%,\ 1) = \$1{,}199.$ $\quad I_5 = 1{,}319. - 1{,}199. = \$120.$

Ejercicio:

Un individuo compra un terreno de \$18,800. y tiene que hacer un pago inicial de \$3,760. El saldo: \$15,040. deberá pagarlo durante 8 años a una tasa de 10% computada mensualmente.

Las mensualidades serán de:

$$A = P(A/P, i, n) = 15{,}040\,(A/P,\ \underbrace{0.834}_{10/12},\ \underbrace{96}_{8\times 12}) = \$228.^{22}$$

El comprador, después de realizar sus pagos durante 2 años, quiere saber cuanto ha capitalizado a esa fecha:

El capital aun no pagado puede determinarse actualizando el valor de los 72 pagos mensuales aun faltantes, con una tasa de 10/12 %:

$$VP = \$228.^{22} \cdot (P/A,\ 10/12\ \%,\ 72) = \$\ 12{,}319.$$

por tanto, el capital ya pagado por el comprador a esa fecha, es de:

$$\$\ 15{,}040 - 12{,}319. = \$\ 2{,}721.$$

y su inversión total ya cubierta en el terreno, es de:

$$2{,}721. + 3{,}760 = \$\ 6{,}481.$$

Debe hacerse notar, que del total de pagos que el comprador ha realizado a esa fecha, y que importan:

$$24 \times \$228.^{22} = \$\ 5{,}477.^{28}$$

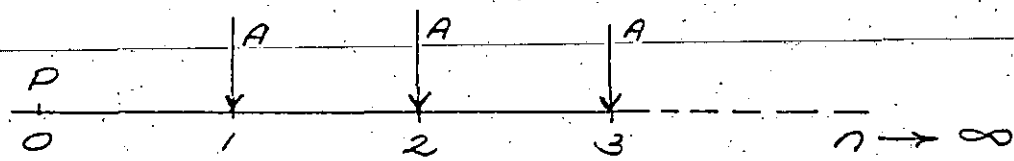
solo \$2,721. han sido aplicados a amortización de capital y habiéndose aplicado los \$2,756.^{28} restantes, al pago de intereses.

Se podría demostrar que aproximadamente, a los 4 años 9 meses, se habrá amortizado del orden de un 50% del capital adeudado.

SERIES PERPETUAS DE PAGOS UNIFORMES Y EL VALOR CAPITALIZADO

Una serie de pagos uniformes que se prolongue indefinidamente, constituye una serie "a perpetuidad".

Es poco frecuente encontrar una serie de este tipo; sin embargo, cuando una inversión se estime tendrá una vida del orden de 50 años, o más, puede ser tratada para efectos prácticos, como una serie infinita.



dado que:

$$A = P \cdot \underbrace{(A/P, i, n)}_{\rightarrow i} \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \qquad\qquad P = A \cdot \underbrace{(P/A, i, n)}_{\rightarrow 1/i} \quad \text{cuando: } n \rightarrow \infty$$

$$\therefore \boxed{A = P \cdot i} \qquad\qquad \therefore \boxed{P = A/i}$$

Este valor presente (P) constituye el: "valor capitalizado" de una serie de pagos uniformes que se prolongan indefinidamente.

Ejemplo:

¿Qué importe mensual puede retirarse indefinidamente de una cuenta en la que se han invertido ₡4'000.000. a una tasa efectiva de 45% neta anual (después de impuestos)?

Analicemos primero cual es la tasa real mensual correspondiente a una tasa efectiva de 45%:

$$i{-}12^{spcaf} - 1 = (1+i)^{12} - 1 = 0.45$$
$$(1+i)^{12} = 1.45$$
$$1+i = (1.45)^{1/12}$$
$$i = 1.03145 - 1$$
$$i = 0.03145$$
$$i = 3.145\%$$

otra forma:

$$i' = \sqrt[n]{F/P} - 1$$
$$i = \sqrt[12]{1.45/1} - 1$$
$$i = 1.03145 - 1$$
$$i = 0.03145 = 3.145\%$$

[explicación: necesitamos calcular la tasa real mensual ya que ese es el periodo en el que se harán los retiros de capital, los cuales desde ese momento no generarán más intereses. Ahora bien, la tasa real mensual no es simplemente: $45/12 = 3.75\%$ ya que esta tasa mensual, origina una tasa efectiva de:

$$3.75{-}12^{spcaf} - 1 = 55.55\%$$

y no del 45% efectivo neto que efectivamente se recibe]

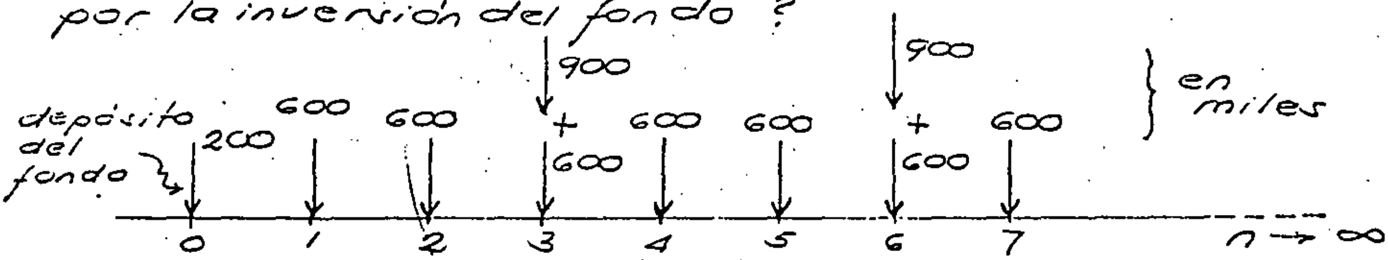
Regresando al problema, el retiro que mensualmente puede hacerse indefinidamente es:

$$A = P \cdot i$$
$$A = ₡\,4'000.000 \times 0.03145$$
$$A = ₡\,125,800 \text{ /mensuales}$$

Ejercicio :

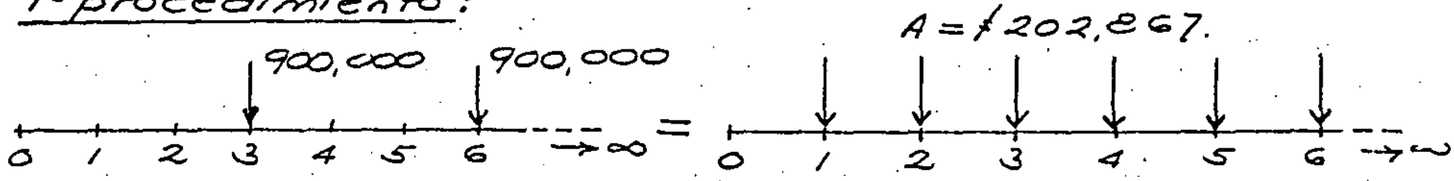
Una Institución Filantrópica, decide instituir un premio anual de: ₡ 600.000 más otro a ₡ 900.000 trianual. Se estima que los gastos iniciales de constitución serán de: ₡ 200.000.

¿Cuál es el fondo que debe depositar inicialmente la Institución o "Valor capitalizado" de la corriente de egresos que implican los premios, si se quiere garantizar la vigencia de los mismos indefinidamente, contando con poder recibir un interes de 42% anual por la inversión del fondo ?



Calculemos primero, la parte del fondo que requiere el premio trianual :

1° procedimiento :



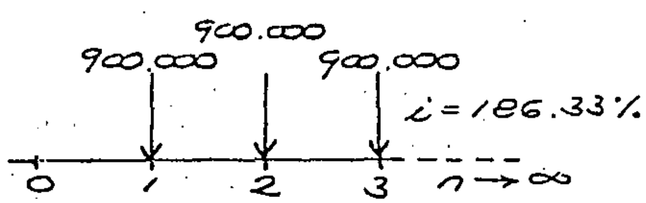
$$A = ₡900.000 \cdot (A/F, 42\%, 3) = ₡\ 202,867.$$

$$P = \frac{A}{i} = \frac{202,867}{0.42} = 483,017$$

2° procedimiento :

Convirtamos cada 3 periodos en uno solo, con una tasa de interes correspondiente :

$$_{42\%-3}spcaf - 1 = 1.8633 = 186.33\ \%$$



$$\therefore\ P = \frac{A}{i} = \frac{900.000}{1.8633}$$

$$P = ₡\ 483,017.$$

Calculemos el importe total del fondo :

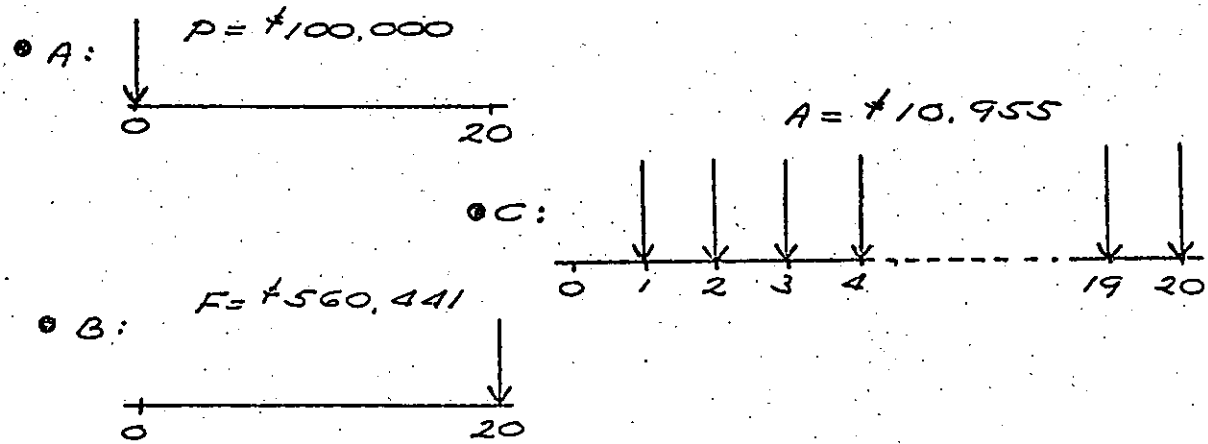
$$P = \underbrace{₡200.000}_{\text{gastos constitución}} + \underbrace{₡483,017.}_{\text{premio trianual}} + \underbrace{\frac{₡\ 600.000}{0.42}}_{\text{premio anual}} = ₡\ 2'111,588$$

SIGNIFICADO DEL CONCEPTO: Equivalencia entre Alternativas.

Supongamos que en un momento dado, al querer comprar un artículo, se nos presentan las siguientes alternativas para su pago :

- A) Pagar $ 100.000. ahora
- B) Pagar $ 560,441. dentro de 20 meses.
- C) Pagar $ 10,955. al final de cada mes, durante los próximos 20 meses.

Estas alternativas se representarían en una escala de tiempos, de la siguiente manera :



Lo primero que se nos ocurriría para comparar las alternativas, sería expresar los diferentes flujos de efectivos en una sola cantidad equivalente ubicada en un mismo punto de la escala de tiempos, es decir, en un mismo momento físico, dado que ahora las cantidades que constituyen las distintas formas de pago, están expresadas en distintos puntos del tiempo y por tanto no son comparables debido al principio del " valor del dinero con el tiempo ".

Supongamos que decidimos expresar los pagos de cada alternativa mediante una única cantidad equivalente, ubicada en el momento cero, o lo que es lo mismo, vamos a Actualizar o encontrar el Valor Presente del flujo de pagos de cada alternativa; y para lo cual fijamos como la tasa de interés del dinero, nuestra tasa mínima atractiva de recuperación. Supongamos que en el momento actual en que debemos tomar la decisión, dicha tasa la estimamos en un 9% real mensual, (que corresponde a una tasa efectiva de: 181%), en estas condiciones tenemos :

- Valor Presente de la alternativa (A) :

$VP_A =$ \$ 100,000.

- Valor Presente de la alternativa (B) :

$VP_B =$ \$ 560,441. (P/F, 9%, 20)

= \$ 560,441. X 0.17843

$VP_B =$ \$ 100,000.

- Valor Presente de la alternativa (C) :

$VP_C =$ \$ 10.955. (P/A, 9%, 20)

= \$ 10,955. X 9.12855

$VP_C =$ \$ 100,000.

Nos encontramos ahora, con que expresados en un mismo punto del tiempo, especificamente en el punto cero, las 3 alternativas equivalen a \$ 100,000. bajo la tasa mínima atractiva de recuperación de 9%.

Dada esta situación decimos que las 3 alternativas son " equivalentes ", lo cual evidentemente no significa que las 3 alternativas sean iguales, sino que solo sus valores en el tiempo son iguales, y esto, a una tasa de interés del 9% real mensual.

Nos preguntamos ahora ¿ cuál es en estas circunstancias el criterio para decidir entre una u otra de las alternativas ? Sabemos que varios factores del tipo no - monetario pudiesen ser determinantes para la selección de una alternativa; así por ejemplo, si no tenemos la liquidez suficiente para pagar \$ 100,000. ahora, esto es determinante al menos, para rechazar la alternativa (A) y aceptar alguna de las otras alternativas mediante las cuales se difiere el pago de la deuda. Otros argumentos de este tipo, pudieran ser, riesgo, necesidad de emplear los fondos disponibles en otros fines, imagen ante el acreedor, situación general de los negocios, etc... Pero haciendo abstracción por un momento de los argumentos de tipo no - monetario, (sin que esto implique ni negar su importancia ni dejar de reconocer que en determinadas circunstancias pudiesen ser determinantes), no preguntamos si : ¿no hay otro argumento estrictamente de caracter monetario que nos ayude a decidir sobre una de las 3 alternativas ?, o bien ¿ nos es indiferente cual de las alternativas se seleccione ?

Antes de tratar de responder en forma directa las preguntas anteriores, analicemos primero dos situaciones alternas.

Supongamos primero, que en lugar de la tasa de 9%, hubiésemos estimado como t.i.m.a.r. en el momento de la decisión, una tasa del 11% real mensual (que corresponde a una tasa efectiva de 250%). Al actualizar las corrientes de egresos y determinar el Valor Presente de cada alternativa, se tendrá :

- Valor Presente de la alternativa (A) :

$VP_A =$ \$ 100,000.

- Valor Presente de la alternativa (B) :

$VP_B =$ \$ 560,441. (P/F, 11%, 20) $VP_B =$ \$ 69,514.

- Valor Presente de la alternativa (C)

$VP_C =$ \$ 10,955. (P/A, 11%, 20) $VP_C =$ \$ 87,238.

Observamos que en estas nuevas condiciones, la alternativa (B) tiene el menor costo equivalente, por lo que ahora constituye la alternativa a seleccionar, ya que en términos practicos, significa que nos convendrá mucho más diferir el pago de la deuda por 20 meses y pagar al final \$ 560,441. e invertir durante el mismo período los \$ 100,000. a una tasa del 11% con lo que obtendriamos una cantidad mucho mayor.

Enfoquémoslo desde otro de punto de vista:No seleccionamos (A) sobre (B), puesto que optar por (A) significaría gastar - - ($\longrightarrow$ invertir) ahora \$ 100,000. y evitar tener que pagar - - ($\longrightarrow$ ahorrar $\longrightarrow$ recibir) \$ 560,441. dentro de 20 meses, pero visualizada como si fuese una " inversión ", esta no nos es atractiva, pues la tasa de recuperación que ofrece, es tan solo del 9% que resulta inferior al límite establecido por la tasa estimada como mínima atractiva de recuperación, que ahora es del **11%**, por lo que como inversión no nos interesa y la alternativa (A) debe ser rechazada.

Si ahora nuestro acreedor nos solicitase el que la deuda fuese pagada ahora, esto solo nos sería atractivo, si el mismo aceptase recibir \$ 69,514. ahora en lugar de los \$ 100,000.

Un razonamiento similar podría aplicarse a la comparación de la alternativa (C) con respecto a la alternativa (B).

=====================================

Supongamos ahora, que en lugar de la tasa de 9% estimásemos como t.i.m.a.r. en el momento de la decisión, una tasa del 7% real mensual (que corresponde a una tasa efectiva de 125%). Al actualizar las corrientes de egresos y determinar el Valor Presente de las alternativas, se obtendría :

- Valor Presente de la alternativa (A) :

$VP_A = \$\ 100,000.$

- Valor Presente de la alternativa (B) :

$VP_B = \$\ 560,441.\ (P/F,\ 7\%,\ 20)$ $VP_B = \$\ 144,829.$

- Valor Presente de la alternativa (C) :

$VP_C = \$\ 10,955.\ (P/A,\ 7\%,\ 20)$ $VP_C = \$\ 116,057.$

La alternativa (A) presenta en estas condiciones, el menor costo equivalente, por lo que constituye la alternativa preferible.

No pagar los \$ 100,000. ahora e invertirlos a una tasa del 7% a 20 meses (lo que equivale a optar por B), no nos daria la cantidad suficiente para pagar la deuda de \$ 560,441. dentro de 20 meses. En efecto, ya que con esta inversión obtendríamos :

$F = 100,000.\ (F/P,\ 7\%,\ 20);\ F = 386,968. < 560,441.$

=====================================

Teniendo como antecedente los resultados de las dos situaciones anteriores, regresemos a la disyuntiva planteada inicialmente por la " equivalencia " entre las alternativas (A), (B), y (C) al heber estimado como t.i.m.a.r. una tasa de 9% en el momento - de la compra del artículo.

Analizando más a fondo las diferencias entre las alternativas - - (A) y (B), obervamos que :

Seleccionar (A) sobre (B), significaría gastar $ 100,000. ahora, con lo cual se evitaría ($\longrightarrow$se ahorraría) gastar - - - $ 560,441. dentro de 20 meses.

Visto como si fueses una inversión :

Elegir (A), equivale a pagar ($\longrightarrow$ invertir) ahora $ 100,000., y no tener que pagar ($\longrightarrow$ ahorrar $\longrightarrow$ recibir) $ 560,441. dentro de 20 meses.

¿ Nos conviene esta inversión propuesta ?, ¿ cuál sería la tasa de recuperación de esta inversion ?, calculémosla :

$$\$\ 100{,}000.\ (F/P, i\%, 20) = \$\ 560{,}441.$$

despejando :

$$(F/P, i\%, 20) = 5.60441$$

en las tablas, se obtiene que el valor de (i) necesario para que el factor (F/P) adquiera el valor 5.60441 es i = 9%.

Ahora bien, dado que este valor es igual al de la tasa estipulada como mínima atractiva de recuperación, concluimos que la inversión propuesta, representada por la alternativa (A), debe ser aceptada, por lo que podemos decir que la alternativa (A), es preferible a la alternativa (B), lo cual se expresa :

$$A \succ B$$

Recordemos que por definición, la tasa mínima atractiva de recuperación es aquella tasa mínima ante la cual responderiámos " si " a cualquier propuesta de inversión que la asegurase. Por otro lado, al definir el concepto de tasa mínima atractiva de recuperación, dejamos establecido el que una vez fijada esta, cualquier alternativa que ofrezca una tasa igual o superior a ella, debe ser aceptada y cualquiera que brinde una tasa menor debe ser rechazada; y dado que, en el ejemplo anterior se estimó que la tasa mínima era del 9%, y al analizar la alternativa (A) (enfocada- como inversión) sobre la alternativa (B), se determinó que - - ofrecía una tasa de recuperación igual a dicha tasa mínima del 9% concluímos que debe aceptarse la inversión propuesta por (A) al ser comparada con la alternativa (B).

De la misma manera, al comparar las alternativas (B) y (C), observamos que :

Seleccionar (C) sobre (B), significa gastar $ 10,955. al- mes, durante 20 meses para evitar (ahorrar) pagar $ 560,441.- al final de esos mismos 20 meses. Visto de otra forma: equivale- a invertir $ 10,955. al final de cada mes, y recibir (no tener que pagar) $ 560,441. al final de los 20 meses. Para calcular la tasa de recuperación que la alternativa (C) ofrece, enfocada como si fuese una inversión cuya recuperación está representada por (B), procederiamos :

$$\$\ 10,955.\ (F/A,\ i\%,\ 20) = \$\ 560,441.$$

despejando $(F/A,\ i\%,\ 20) = 51.158$

de las tablas obtenemos $i = 9\%$.

y siendo esta tasa igual a la tasa mínima de recuperación establecida, siguiendo un razonamiento similar al anterior, concluímos - que la alternativa (C) es preferible a la (B), lo que se ex-- presa :

$$C \succ B$$

Por último, al hacer la comparación entre (A) y (C) observamos que :

Seleccionar (A) sobre (C) significa gastar $ 100,000. ahora y evitar (ahorrar) pagar $ 10,955. durante los próximos- meses, lo cual visto en otra forma, equivale a invertir (pagar) ahora $ 100,000. y recibir (no tener que pagar) $ 10,955. al final de cada mes, durante los próximos 20 meses. La tasa de- recuperación que la alternativa (A) ofrece, enfocada como si -- fuese una inversión cuya recuperación esta representada por (C) sería:

$$\$ \quad 100{,}000. \quad (A/P, i\%, 20) = \$ \quad 10{,}955.$$

despejando $\quad (A/P, i\%, 20) = \quad 0.1095.$

de las tablas obtenemos $\quad i = 9\%$

y siendo esta tasa igual a la tasa mínima de recuperación estable cida, mediante un razonamiento análogo anterior, concluímos que - la alternativa (A) es preferible a la alternativa (C), lo -- cual se expresa:

$$A \succ C$$

Por las tres comparaciones sucesivas anteriores, concluímos final mente que de entre las alternativas (A), (B) y (C) pro - puestas, debemos optar por la alternativa (A), ya que : - - - $A \succ C \succ B$.

Todo lo anterior demuestra que aún siendo " equivalentes " cier - tas alternativas propuestas, no son en si, iguales, sino que solo están ligadas por su valor a través del tiempo y que el hecho de- elegir entre ellas, no cae al terreno de la indiferencia, sino -- que basados en principios y conceptos básicos definidos anterior- mente, y sin tomar en consideración otros factores de tipo no -mo netario que pudiesen influir, podemos aun en estos casos estable- cer criterios de juicio que nos permiten seleccionar económicamen te de alguna de ellas.

Hay que hacer notar que las 3 alternativas anteriores se refie-- ren a distintas formas de pago, y el hecho de enfocar cada una de ellas, como inversiones cuya recuperación es " el no tener que - pagar " en alguna de las otras fomras, no constituye sino un me- ro artificio que en nada altera la concepción real del problema y- que en cambio, si nos auxilia en el análisis económico de la si-- tuación para efectos de seleccionar la alternativa que resulte -- más económica.

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS INSTITUCIONALES

ANALISIS DE INVERSIONES EN
EL CAMPO DE LA INGENIERIA

DEL 1o. DE MARZO AL 7 DE ABRIL

COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD

TEMA III

APLICACIONES DE MODELOS MATEMATICOS A LA COMPARACION DE ALTERNATIVAS

EXPOSITOR:

RUBEN TELLEZ SANCHEZ

MEXICO, D.F.

TEMA III

APLICACION DE MODELOS MATEMATICOS A LA COMPARACION ECONOMICA DE ALTERNATIVAS

TEMARIO

METODOS DE COMPARACION ENTRE ALTERNATIVAS.

Vamos a aplicar todo lo anteriormente visto para el análisis de una alternativa, a la comparación entre 2 ó más alternativas.

Expondrêmos los 3 métodos más comunmente empleados en el campo industrial y mediante los cuales resulta muy práctico comparar alternativas de inversión que presenten distintas series de ingresos y egresos a lo largo del horizonte económico de comparación.

Los métodos a que se hace referencia son:

1) Método del costo anual equivalente, con tasa mínima atractiva de recuperación, establecida y aplicada como tasa de interés.

2) Método del valor presente, con tasa mínima atractiva de recuperación establecida y aplicada como tasa de interés.

3) Método de la tasa de recuperación, en donde se calcula directamente la tasa de recuperación probable de cada una de las inversiones propuestas y se comparan con la tasa mínima atractiva de recuperación establecida.

Como demostraremos en el transcurso de este Tema, los diversos criterios y métodos para la comparación económica de alternativas de inversión, son "equivalentes", es decir, que aplicados cada uno de ellos al análisis de todas las posibles alternativas de acción en una situación decisional, conducen al mismo resultado en cuanto a la alternativa que finalmente deba seleccionarse. Sin embargo, la distinta estructura de los modelos matemáticos que cada criterio emplea, asi como las características y diferencias substanciales de procedimiento que cada método sugiere, implican el tener que llevar a cabo en cada caso y para cada criterio, una correcta y adecuada interpretación de los resultados meramente numéricos que se obtengan.

Llegaremos también a la conclusión de que cada método presenta ventajas y desventajas al ser empleado como elemento de juicio en cada caso particular, debido a que en cada método se dá distinto peso a los diferentes factores de costo o ingreso, lo cual origina que para determinados tipos de problemas y circunstancias, los resultados numéricos que se obtengan aplicando un cierto método, resulten más objetivos y faciles de interpretar que los que se pudiesen obtener al aplicar otro método.

Una de las principales diferencias que presentan los métodos de comparación de alternativas mencionadas, radica en el hecho de que por un lado, en los métodos del Costo Anual y del Valor Presente, para las transformaciones que de acuerdo a estos métodos deben hacerse del flujo de efectivo real que cada alternativa de inversión presente dentro de un cierto horizonte económico, se impacta ya, una cierta tasa de recuperación, (normalmente la tasa interna mínima atractiva de recuperación del analista, en el momento del análisis), lo cual implica que al interpretar los resultados numéricos que se obtengan, deberá tomarse en cuenta que dicha tasa ya ha sido incluída como costo propiamente dicho, delcapital a emplear en la inversión propuesta. En cambio, en el método de la Tasa de Recuperación, para cada alternativa de inversión propuesta, se calcula directamente la tasa de recuperación que se espera obtener de la inversión, en función del flujo de ingresos y egresos que dicha alternativa presenta, comparándose dicha tasa esperada con la Tasa interna mínima atractiva de recuperación, procediéndose entonces a calificar la alternativa de inversión analizada como atractiva o no, pero sin olvidar tomar en cuenta también, el factor de riesgo que dicha alternativa implica.

Los criterios del Costo Anual, del Valor Presente y de la Tasa de Recuperación, así como las sistematizaciones derivadas de los mismos y que en este Tema analizaremos, son los especialmente adecuados para el análisis y comparación económica de alternativas de inversión en el campo microeconómico. Existen otros métodos de aplicación de estos criterios, especialmente diseñados para análisis de proyectos de inversión en el campo macroeconómico. Tal es el caso del llamado criterio de la Relación: Beneficio / Costo: (B/C).

Ahora bien, dado que al comparar alternativas lo que nos interesa son sus diferencias relativas y debido al hecho de que en muchos de los problemas que se nos presentan en el campo de la Ingeniería Económica, las diversas alternativas que tomamos en cuenta, son para un mismo fín, es decir, son para resolver un mismo problema, y si aceptamos someterlas a análisis y a comparación, es porque consideramos que en principio, --

cualquiera de ellas nos resolverá el problema, solo que pretendemos seleccionar la que nos resulte más económica, es por esto que normalmente y en términos generales, todas las alternativas que intervienen en la comparación, representan para nosotros el mismo beneficio. Por lo anterior, casi siempre al establecer las diferencias entre ellas, lo hacemos en base a los costos ó egresos en general y en ocasiones, el único ingreso considerado, es el valor de recuperación al final de la vida económica.

Exceptuando el caso anterior, y cuando los ingresos o beneficios monetarios en general, difieran en las alternativas en estudio, en cuanto al momento de su ocurrencia, distribución de montos o en cuanto a su seriación, deben tomarse en cuenta junto con los egresos e incluirse en el flujo de efectivo total; de otra manera el análisis resultaria incompleto y erroneo.

En éstas condiciones, todo análisis económico se inicia con la estimación de los ingresos y egresos totales que cada alternativa implica, tanto en monto como en fecha de ocurrencia (lo que se llama establecer el "flujo de efectivo" o "flujo de caja"). La etapa anterior está íntimamente ligada a la determinación del periódo dentro del cual cada alternativa deba ser estudiada, es decir, su horizonte económico.

Una vez establecidos los elementos anteriores, puede suceder que a primera vista una de las alternativas se muestre obviamente como la más económica, lo cual haga innecesario cualquier análisis posterior.

Ahora bien, rara vez ocurre lo anterior. Normalmente las alternativas presentan flujos de caja tales que muestran costos iniciales relativamente bajos y erogaciones altas a lo largo del horizonte económico, o bien, erogaciones altas iniciales que originan beneficios futuros y reducción de costos futuros. El análisis en estos casos se reduce a investigar si éstas inversiones mayores iniciales se compensan y justifican con los beneficios y ahorros que originan.

METODO DEL COSTO ANUAL (O DEL BENEFICIO ANUAL)

Este método consiste fundamentalmente, en traducir el flujo de efectivo de cada una de las alternativas por comparar, en una serie uniforme anual -- equivalente, lo que permitirá poder comparar, ya homogeneizadas, alternati-- vas que en la realidad, presentan flujos de efectivo totalmente diferentes - entre si.

El "costo o beneficio anual" resultante, es simplemente un modelo de -- costo o beneficio en base a una tasa mínima atractiva de recuperación; es so lo la representación de lo que en la realidad estimamos sucederá de seguir - cada una de las alternativas propuestas, solo que transformando los flujos - de efectivo, en series uniformes equivalentes.

El método puede emplearse para comparar las alternativas en base al cos to que implican o el beneficio que apartan, razón por la cual, el método tam bien se conoce como del "beneficio anual". La alternativa con el costo anual equivalente más bajo o con el beneficio anual equivalente más alto, según el caso. será la que deba seleccionarse.

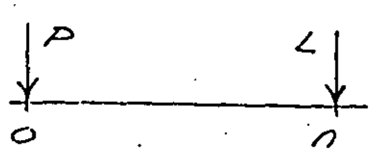
Adoptaremos la siguiente nomenclatura para la aplicación del método:

- P: Monto de la inversión inicial total; costo inicial total del equipo; costo ya instalado y funcionando.
- V.R. ó L: Valor de recuperación del activo al final de un período dado; normalmente al final de su vida económica.
- n: Horizonte económico delanálisis; Vida económica del activo, expresada normalmente en años.
- I.U.: Serie uniforme de Ingresos al final de cada período.
- E.U.: Serie uniforme de Egresos al final de cada período.
- CA : Costo anual uniforme equivalente.
- BA : Beneficio anual uniforme equivalente.

Para la aplicación del método, seguiremos dos criterios :

a) El de la Recuperación del Capital
b) El del Fondo de Amortización.

a) Criterio del Fondo para la Recuperación del Capital.



Distribuyendo P y L en anualidades a lo largo de (n) periodos y a una tasa (i) igual a la tasa interna mínima atractiva de recuperación :

$$\boxed{CA = P \cdot {}_{i-n}crf - L \cdot {}_{i-n}sfdf} \quad (1)$$

pero sabemos que: ${}_{i-n}sfdf = {}_{i-n}crf - i$

substituyendo en (1): $C.A. = P \cdot {}_{i-n}crf - L\,({}_{i-n}crf - i)$

por tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l} C.A. = (P-L)\cdot {}_{i-n}crf + L\cdot i \\ \text{ó} \\ C.A. = (P-L)\cdot (A/P, i, n) + L\cdot i \end{array}}$$

Los dos sumandos de la expresión anterior representan:

.) la recuperación de la fracción (P-L) con sus intereses correspondientes, más

.) los intereses correspondientes a la porción faltante(L) la cual será recuperada al final.

(Partimos de la base de que la cantidad total a recuperar deberá -- ser, por un lado, la cantidad total invertida (P), y por otro, los intereses de esa cantidad (P) durante (n) periodos y a una tasa --- (i); solo que, la cantidad a recuperar mediante los pagos anuales - es solo (P-L), ya que la cantidad (L), se espera recuperarla al final de los (n) periodos).

La fórmula anterior es aplicable para valores de cero o negativos de (L), con solo las consideraciones algebraicas correspondien-- tes.

La fórmula(1)puede aplicarse directamente también para encontrar las anualidades uniformes equivalentes, y de hecho, constituye otro criterio para encontrarlas.

b) Criterio del Fondo de Amortización

Partiendo de la fórmula(1), podemos substituir ahora el valor de: crf, sabiendo que:

$${}_{i-n}crf = {}_{i-n}sfdf + i$$

de donde: $C.A. = P \cdot {}_{i-n}sfdf + P\cdot i - L\cdot {}_{i-n}sfdf$

finalmente:

$$\boxed{\begin{array}{l} C.A. = (P-L)\,{}_{i-n}sfdf + P\cdot i \\ \text{ó} \\ C.A. = (P-L)\cdot (A/F, i, n) + P\cdot i \end{array}}$$

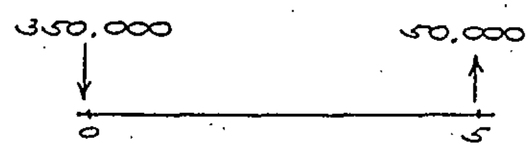
En donde los dos sumandos de la expresión, se pueden interpretar como:

•) el importe anual del fondo de amortización que reintegrará la porción $(P-L)$ del capital sin incluir los intereses.

•) el interes anual de la inversión inicial total (P)

EJEMPLO:

El costo de un equipo ya instalado y funcionando es de: ₡ 350,000. con un valor estimado de recuperación de: ₡ 50,000. al final de los 5 años de su vida util. La tasa interna mínima atractiva de recuperación se estima en un 25% anual. Se desea calcular el costo anual equivalente de la inversión propuesta.



a) Con el criterio de la recuperación del capital:

$$C.A. = (P-L)_{i-n} crf + L \cdot i = (P-L) \cdot (A/P, i, n) + L \cdot i$$
$$C.A. = (350{,}000 - 50{,}000)_{25-5} crf + 50{,}000 \; (0.25)$$
$$C.A. = 300{,}000 \times 0.372 + 12{,}500$$
$$C.A. = 111{,}554.02 + 12{,}500 = ₡\, 124{,}054.^{02}$$

b) Con el criterio del fondo de amortización:

$$C.A. = (P-L)_{i-n} sfdf + P \cdot i = (P-L) \cdot (A/F, i, n) + P \cdot i$$
$$C.A. = (350{,}000 - 50{,}000)_{25-5} sfdf + 350{,}000 \; (0.25)$$
$$C.A. = 300{,}000 \times 0.12185 + 87{,}500$$
$$C.A. = 36{,}554.^{02} + 87{,}500 = ₡\, 124{,}054.^{02}$$

Logicamente, en ambos casos el resultado es el mismo, ya que las dos fórmulas provienen de la misma expresión (1). Sin embargo, en cada caso se muestra un distinto concepto en el manejo de los elementos integrantes del costo de la inversión.

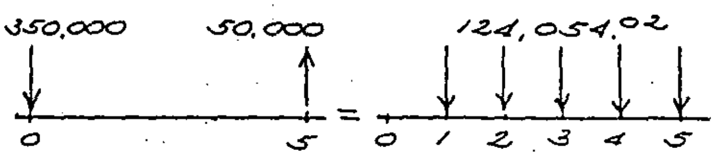
En el primer caso, el comprador abona anualmente:

•) una cantidad de ₡ 111,554.^{02} para pagar la deuda entera por concepto de la inversión inicial menos lo que espera recuperar al final: ¢50.000, e incluyendo los intereses correspondientes;

- ·) otra cantidad de ¢12.500 para cubrir solamente los intereses de la parte correspondiente al valor de recuperación: ¢50.000 que espera recuperar con la venta del equipo.

En el segundo caso, el comprador paga una cantidad: ¢36,554.^{02} para ir cubriendo anualmente la fracción (P−L), sin intereses, más una segunda cantidad: ¢87,500. que cubre los intereses anuales de la deuda completa.

De los dos criterios anteriores, se concluye que las alternativas son equivalentes:



Resolviendo directamente el problema, mediante la fórmula original (1) se tendría:

$$C.A. = 350{,}000\ (A/P, 25, 5) - 50{,}000\ (A/F, 25, 5)$$
$$C.A. = 350{,}000 \times 0.372 - 50{,}000 \times 0.12185 = ¢\ 124{,}054.^{02}$$

Aun habría un cuarto criterio para resolver el problema, consistente en encontrar el Valor Presente de la recuperación (L) multiplicándola por el factor (P/F). La diferencia entre el costo inicial (P) y el valor presente de la recuperación (L) se multiplica por el factor de recuperación del capital (crf ó A/P) para encontrar el valor de los pagos uniformes equivalentes anuales a lo largo de los (n) periodos.

Lo anterior se expresa algebraicamente:

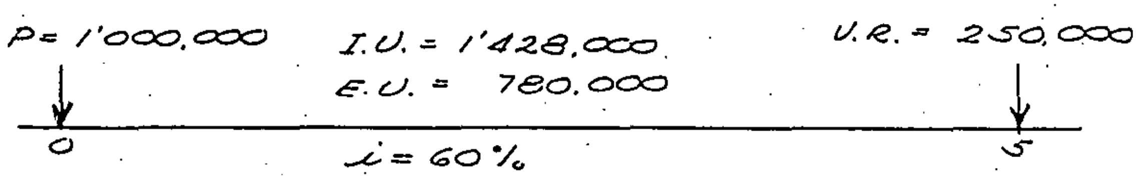
$$C.A. = [P - L \cdot {}_{i-n}sppwf] \cdot {}_{i-n}crf$$
$$\text{ó}: \quad C.A. = [P - L\,(P/F, i, n)] \cdot (A/P, i, n)$$

Aplicando este criterio a los datos del problema:

$$C.A. = [350{,}000 - 50{,}000\ (P/F, 25, 5)] \cdot (A/P, 25, 5)$$
$$C.A. = [350{,}000 - 50{,}000 \times 0.3277] \cdot 0.37185$$
$$C.A. = 124{,}054.^{02}$$

Ejemplo:

Un áctivo representa una inversión inicial total de \$ 1,000.000. - Se le suponen 5 años de vida económica y una recuperación final - de \$ 250,000. La inversión implica una corriente anual de ingre-- sos de \$ 1,428,000. y de gastos de \$ 780,000 durante los 5 años. Se desea determinar si el proyecto de inversión se justifica, teniendo en cuenta que la tasa atractiva mínima de recuperación se estima en 60% en el momento de realizar el análisis.



$$B.A. = -1'000,000\ (A/P,\ 60\%,\ 5) - 780,000 + 1'428,000 + 250,000\ (A/F\ 60\%,\ 5)$$

$$= -663,253 - 780,000 + 1'428,000 + 15,813 = \$560.$$

Empleando otra nomenclatura:

$$BA = -\left[(P-L)_{i-n}\, crf + L \cdot i\right] + I.U. - E.U.$$

$$= -\left[(1'000,000 - 250,000)_{60-5}\, crf + 250,000 \times (0.60)\right] + 1'428,000 - 780,000 = \$560.$$

Concluimos que la inversión resulta en un beneficio anual de ---- \$ 560., y nos preguntamos si: ¿ con esta cifra, la inversión resulta ser atractiva?; hágase notar que se está buscando el B. A., (Beneficio Anual) por lo que los gastos se consideran con signo - negativo y los ingresos con signo positivo, y dado que el B.A., - resultó ser mayor que O, esto significa que de esta inversión se pueda esperar un beneficio mayor al 60%. Específicamente puede decirse que la inversión, sí se recupera con una tasa del 60%, más una cantidad adicional de \$ 560. Anuales.

Observemos que en el método del Costo Anual, esta cantidad adicional al 60%, nos es expresada, no en función de un porcentaje, sino de un monto anual uniforme, equivalente a ese porcentaje.

Entonces, mientras el resultado mumérico del Beneficio Anual (B.A) en el problema anterior se mantenga mayor que cero, esto indicará que la inversión nos brinda una tasa de recuperación mayor que el

60% , siendo este excedente tanto mayor como mayor sea el valor -- de dicho resultado numérico.

Pero más todavía, aún en el caso de que el valor del B.A., resultase igual a cero, la inversión propuesta deberá aceptarse, pues este resultado deberá interpretarse como que la inversión se recupera " exactamente " al 60%, y siendo el 60%, el valor estimado de - nuestra tasa interna mínima atractiva de recuperación, <u>la alternativa es aceptable.</u>

<u>Ejemplo</u>: 123

Una máquina (A) cuesta 10,000 um. ya instalada con un valor de rescate de 4,000 um. al término de 6 años; gastos de operación anual de 5,000 um. durante los 3 primeros años y de ----- 6,000 um. durante los 3 últimos. La máquina (B), cuesta 8,000um. con 3,000 um. de recuperación al cabo de 6 años. Gastos de operación de 5,500 um. durante los 3 primeros años, y de 6,500 um. -- durante los últimos tres. Los incrementos en los costos de operación, se pueden entender como generados por el incremento en los costos de mantenimiento y reparaciones y por la pérdida de eficiencia motivada por la edad. La tasa mínima atractiva es de 40%.

El problema se puede representar:

<u>alternativa (A)</u>:

						VR = 4.000
10.000	5.000	5.000	5.000	6.000	6.000	6.000
0	1	2	3	4	5	6

<u>alternativa (B)</u> $i = 40\%$

						VR = 3.000
8.000	5.500	5.500	5.500	6.500	6.500	6.500
0	1	2	3	4	5	6

$$CA_A = (10{,}000 - 4{,}000)\ {}_6crf + 4{,}000\,(0.40) + \left[5{,}000\ {}_3uspwf + 6{,}000\ {}_3uspwf \cdot {}_3sppwf\right] \cdot {}_6crf = \$9{,}636.$$

otra forma:

$$CA_A = 10{,}000\,(A/P, 40\%, 6) + 5{,}000\,(P/A, 40\%, 3)\cdot(A/P, 40\%, 6) + 6{,}000\,(F/A, 40\%, 3)\cdot(A/F, 40\%, 6) - 4{,}000\,(A/F, 40\%, 6) = \$9.636.$$

$$CA_B = \left[8.000 - 3.000\,(P/F, 40\%, 6) + 5.500\,(P/A, 40\%, 3) + 6.500\,(P/A, 40\%, 3)\cdot(P/F, 40\%, 3)\right]\cdot(A/P, 40\%, 6) = \$9.273$$

$$\therefore CA_A > CA_B \Rightarrow B \succ A$$

Como hemos visto en este ejemplo, en el caso de que las alternativas por comparar presenten corrientes anuales de flujo, irregulares, habrá que convertirlas en una corriente uniforme equivalente, lo cual puede lograrse actualizando la corriente a una fecha dada, y distribuir luego este costo a su costo anual uniforme equivalente.

SIGNIFICADO DE LA COMPARACION DE ALTERNATIVAS MEDIANTE EL CRITERIO DEL COSTO ANUAL.

La comparación de dos alternativas mediante el criterio del Costo Anual, tiene más significado e interpretación que el solo hecho de concluir que una alternativa (A) tiene mayor o menor Costo Anual que una alternativa (B).

Otra mayor significación se refiere a la mayor inversión que una de las alternativas implica respecto a la otra.

Ejemplo:

Un equipo (A) cuesta \$ 22,000 ya instalado. Se estima tendrá un costo anual de operación de \$ 7,000 durante los 5 años calculados de vida económica. La máquina (B) cuesta \$ 17,000 y tiene gastos de \$ 10,000. Para ambas máquinas el valor de recuperación se considera nulo. Se fija una tasa mínima de recuperación de 46%.

	0	1	2	3	4	5
A:	22,000	7.000	7.000	7.000	7.000	7.000
B:	17.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000

Calculando el Costo Anual:

$$CA_A = 22.000\,(A/P, 46\%, 5) + 7.000 = 11.900 + 7.000 = 18.900$$

$$CA_B = 17.000\,(A/P, 46\%, 5) + 10.000 = 9.200 + 10.000 = 19.200$$

Diferencia a favor de (A) : \$ 300. anuales.

Observamos que la diferencia reelevante entre (A) y (B), lo constituye el hecho de que (A) implica una inversión adicional de \$ 5,000 inicialmente respecto a (B); pero (A) representa también por otro lado, un ahorro anual de \$ 3,000 respecto a (B). De aqui surge la pregunta de si: ¿la inversión adicional de \$ 5,000 se justifica teniendo en cuenta que se requiere una tasa del 46%? Dicho de otra manera: ¿ los \$ 5,000 de inversión inicial, se alcanzan a recuperar con una tasa de 46% de interes, con los ahorros de \$ 3,000 anuales? Esta situación se representa:

inversión inicial adicional

	0	1	2	3	4	5
	5,000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000

$\underbrace{3.000 \quad 3.000 \quad 3.000 \quad 3.000 \quad 3.000}_{\text{ahorros.}}$

$$\text{Ahorro} - \underset{\text{(anuales)}}{\text{Costos}} = 3.000 - 5.000\,(A/P, 46\%, 5)$$

$$= 3.000 - 2.700 = \$\,300.$$

que es el mismo resultado obtenido anteriormente y que significa que la inversión extra inicial en (A) sí se recupera con una tasa de interes del 46% más una suma adicional de $ 300 anuales durante 5 años.

- Supongamos ahora que los gastos anuales de (B) son de $ 9,300 en lugar de $ 10,000.

A: 22.000 E.U. = 7.000

0 — 5

$CA_A = 22.000\,(A/P,\,46\%,\,5) + 7.000 = 11.900 + 7.000 = 18.900$

B: 17.000 E.U. = 9.300

0 — 5

$CA_B = 17.000\,(A/P,\,46\%,\,5) + 9.300 = 9.200 + 9.300 = 18.500$

Diferencia a favor de B: ✗ 400/año

Esto significa que la inversión adicional de $ 5,000 en (A) no se alcanza a recuperar con los ahorros de $ 2,300 anuales: hay un déficit de $ 400 -- anuales durante los 5 años, por lo que dicha sobreinversión no se justifica y por tanto la alterantiva por seleccionar es la (B).

- Consideramos ahora, que los gastos anuales de (B) son de $ 9,700:

A: 22.000 E.U. = 7.000

0 — 5

$CA_A = 22.000\,(A/P,\,46\%,\,5) + 7.000 = 11.900 + 7.000 = 18.900$

B: 17.000 E.U. = 9.700

0 — 5

$CA_A = 17.000\,(A/P,\,46\%,\,5) + 9.700 = 9.200 + 9.700 = 18.900$

Diferencia: 0

En este caso, la inversión extra de $ 5,000 de (A), se recupera exactamente a una tasa de 46% y si hemos considerado que esta es la tasa mínima --- atractiva de recuperación fijada por el inversionista, la sobre-inversión sí - se justifica y por tanto, habrá que seguir la alternativa (A).

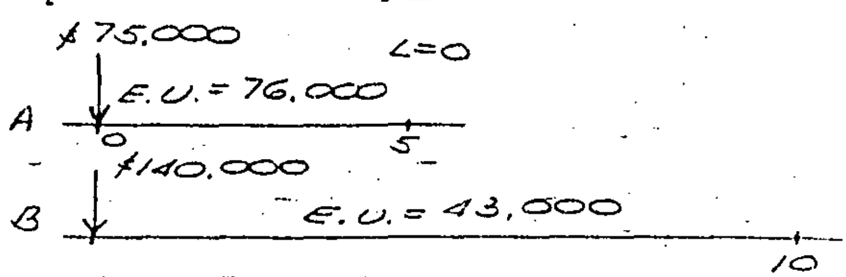
El hecho de que la selección entre dos alternativas se realice desde el punto de vista de la inversión inicial que una de ellas representa, no significa que se esté haciendo un análisis solo parcial del problema, ya que en última instancia, la finalidad es determinar cual de las dos alternativas es más conveniente.

SELECCION ENTRE ALTERNATIVAS DE DISTINTO HORIZONTE ECONOMICO DE COMPARACION

Hasta ahora nos hemos limitado a comparar alternativas de inversión con iguales periodos de análisis. Pero, ¿ qué criterio debemos seguir para decidir entre alternativas con distinto horizonte de comparación, o en el caso de activos depreciables, con distinta vida económica?

Ejemplo:

Se nos presenta el problema de decidir sobre la adquisición entre un equipo A cuyo costo inicial total es de $75,000., 5 años de vida económica y gastos anuales de operación, considerados uniformes, de $ 76,000., y otro equipo B con $ 140,000., de inversión inicial, $ 43,000., de gastos anuales de operación y vida económica de 10 años. En ambos casos, se considera que el valor de recuperación es despreciable. Por otro lado, quien debe decidir, considera que la tasa interna mínimia atractiva de recuperación de la empresa en el momento actual, es de 55%.



$$CA_A = 75.000\,(A/P,\ 55\%,\ 5) + 76.000 = \$\,122.441.$$

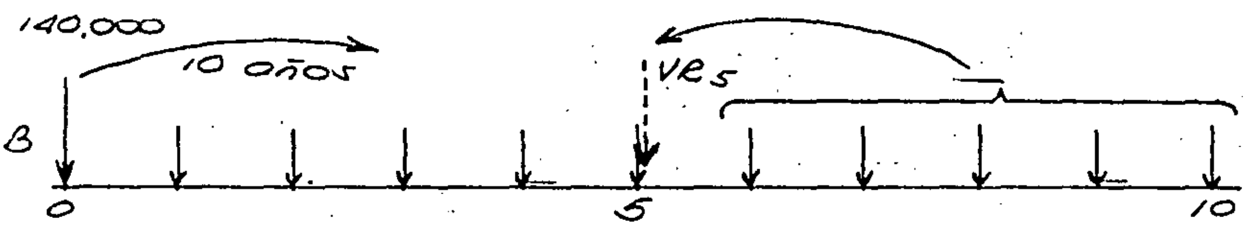
$$CA_B = 140.000\,(A/P,\ 55\%,\ 10) + 43.000 = \underline{120.974.}$$

diferencia a favor de B: $ 1.467.

Al comparar simplemente, CA contra CA, implícitamente estamos solo considerando un horizonte de comparación de 5 años para ambas alternativas y haciendo caso omiso a la corriente de costos en la alternativa B a partir del 5° año en adelante. En estas condiciones, resulta que existe una diferencia a favor de B, de $ 1,467., anuales.

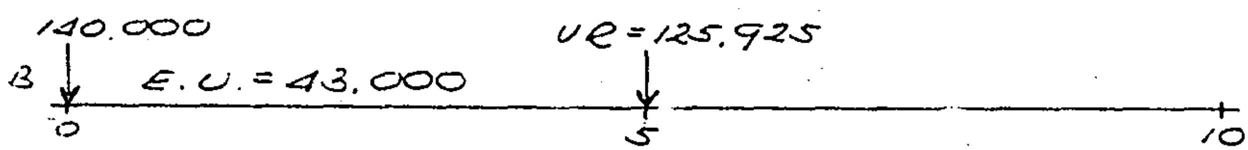
Esto, bajo cierto punto de vista, es correcto, ya que se podría considerar que lo que ocurra en B después del 5° año, pertenece al Análisis comparativo de alternativas que se vaya a hacer a partir de dicho periodo; sin embargo, nos queda la duda de si la decisión actual no sería afectada por la decisión o curso de acción que se siguiese en la alternativa A a partir del 5° año. Analizaremos esto más adelante, pero por lo pronto, sigamos ahondando en el primer criterio de despreciar lo que ocurra en B a partir del 5° año.

Podría argumentarse que de la corriente de costos de B, la parte que no podemos ignorar, para efectos del análisis de los primeros 5 años, es la parte correspondiente a la amortización de la inversión inicial. Actualizando al año 5, la corriente de costos anuales correspondientes a este concepto, se tendría:



$$VR_5 = 140{,}000\ (A/P,55\%,10)\cdot(P/A,55\%,5) = \$125.925$$

Esta cantidad vendría a representar el valor teorico de recuperación que el equipo B tendría al terminar el 5°año; y analizando el costo anual en estas condiciones se tendría:



$$CA_B = 140.000\ (A/P,55\%,5) - 125.925\ (A/F,55\%,5) + 43.000 = \$120.974.$$

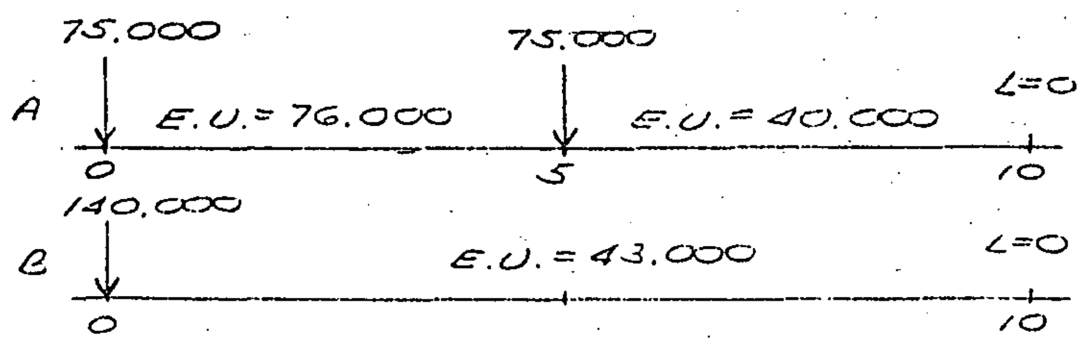
que es el mismo valor para el costo anual que el obtenido anteriormente. Esto puede explicarse de la siguiente manera:

El hecho de tratar de estimar e introducir en el análisis un valor de recuperación del equipo B al final del 5°año, tiene como finalidad tratar de eliminar los problemas que presenta la --

existencia de diferentes vidas económicas en las alternativas. -- Sin embargo, el considerar un valor de rescate al equipo al final del 5°año y por otro lado establecer que la vida económica de la máquina es de 10 años, es incongruente, a menos que el valor de--- rescate que se considere, sea precisamente el de $ 125,925., Ahora bien, esto no es tan fácil de aceptar, pues por un lado, si hemos supuesto que el período de vida económica es de 10 años para el equipo B, los $ 120,974., serán el costo anual mínimo (por definición de vida económica), por lo que sería lógico suponer que el costo anual uniforme equivalente en un período menor al de la vida económica, como lo es el de 5 años, fuese mayor de $120,974., lo cual implicaría que el valor de rescate al final del año 5 fuese menor a $ 125,925., Y por otro lado, si el valor de rescate -- fuese mayor que $ 125,925., esto daría lugar a que el costo anual durante los proposición inicial de que la vida económica del equipo es de 10 años.

Todo lo anterior es por lo que respecta al equipo B; pero, ¿ cómo influirá en la decisión lo que pueda ocurrir en la alternativa A a partir del 5°año?

Supongamos que el análista tiene elementos para proveer - que en la alternativa A, al terminar la vida económica del primer equipo, se substituirá al final del 5° año, por un equipo ya mejorado tecnológicamente, con mismo costo inicial de $ 75,000., 5 -- años de vida económica, pero solo $ 40,000., de gastos anuales:



$$CA_A = [75{,}000 + 76{,}000\,(P/A, 55\%, 5) + 75{,}000\,(P/F, 55\%, 5) + 40{,}000\,(P/A, 55\%, 5)(P/F, 55\%, 5)] \cdot (A/P, 55\%, 10) = \$118{,}822.$$

$$CA_B = \qquad = 120{,}974.$$

Vemos que el considerar una suposición sobre el reemplazo del primer equipo A, ha provocado que A sea ahora la alternativa óptima.

De todo lo anterior, se podría concluir que:

el criterio de despreciar la corriente de gastos que se origina en la alternativa de mayor vida, a partir de la terminación de la vida económica de la alternativa más corta, solo es válido si:

a) Se estima que en cada alternativa, de haber reemplazos futuros, estos plantearán condiciones totalmente similares a las condiciones del primer ciclo.

b) El periodo total en el que sean necesarios los servicios de las alternativas A y B, se considere indefinido o represente un común múltiplo de las vidas económicas de las alternativas consideradas.

Sin embargo debe reconocerse que este criterio, normalmente se sigue " por defecto", es decir, porque no hay buenas bases para considerar que sucederá lo contrario a lo que establecen las condiciones (a) y (b). En todos aquellos casos en que se prevea que las condiciones van a cambiar en los siguientes ciclos será necesario estimar la corriente de ingresos y egresos correspondiente y tomarla en cuenta para el análisis de las alternativas.

Al respecto de la condición (b), podemos hacer notar que el último ejemplo ilustra el hecho de que una vez que se há llegado, mediante la suposición de futuros reemplazos, a un horizonte económico común múltiplo para ambas alternativas, se puede proceder a la comparación numérica, ya que las decisiones que se tomen de ese periódo en adelante, en cualquiera o en ambas alternativas, serán irrelevantes a la decisión que se tome en el momento presente.

OBSERVACIONES FINALES:

Con todo lo anterior podemos concluir que para la comparación de alternativas con distinta vida económica, se puede proceder:

1º) Seleccionando un "período de estudio" o "período de análisis", igual para ambas alternativas y que consideremos representativo de una situación que suponemos será repetitiva en ciclos subsecuentes.
Este período de análisis, normalmente se hará coincidir con el período de vida económica de la alternativa de menor horizonte económico.

2º) Suponer futuros reemplazos en una o en ambas alternativas con el fin de llegar a igualar los horizontes económicos de estudio.

Por lo que respecta a una variante al primer criterio, consistente en estimar un Valor de Recuperación para la alternativa de mayor duración, en una fecha ubicada a la terminación del período de análisis seleccionado, menor a su vida económica, solo se tendrán resultados distintos a los obtenidos con el criterio anterior de calcular el costo anual equivalente sobre su período completo de vida económica, si el Valor de Rescate que se considere, es diferente al que se obtenga de la actualización parcial de la corriente de anualidades correspondientes al período excedente al de análisis; pero claro está, que esto solo podrá hacerse, cuando se cuente con datos que efectivamente nos permitan suponer el que dicho Valor de Recuperación será distinto en esa fecha, basándonos en experiencias previas respecto a precios de mercado, condiciones de oferta y demanda, etc... Lo anterior querría decir que la depreciación de la inversión inicial en dicha alternativa no obedece a un modelo lineal.

Con respecto al segundo criterio, solo se obtendrán resultados diferentes a los obtenidos con el "período representativo de estudio" del primer criterio, si los reemplazos que se supongan, presentan condiciones distintas con respecto a las condiciones planteadas en la alternativa inicial a la cual reemplazar, en lo referente a monto de la inversión inicial, costos de operación y mantenimiento, eficiencia, valor de recuperación, etc..., de tal forma, que ya en el análisis de conjunto, las variantes introducidas por el o los reemplazos, puedan provocar que cambie el sentido de la decisión en cuanto a la alternativa a seleccionar, planteada por el primer criterio.

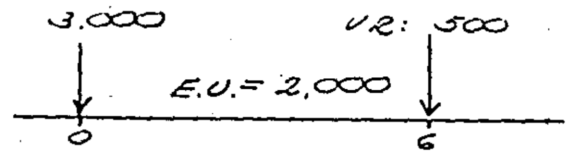
Vuelve a ser claro, que el proceder a suponer estos reemplazos, solo es justificable si realmente contamos con elementos de juicio que nos permitan suponer la estructura de dichos reemplazos y el futuro cambio de condiciones.

Ejemplo

Se requiere comprar un equipo, para lo cual se tienen 2 alternativas:

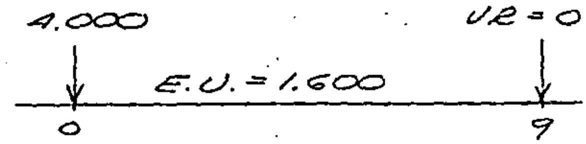
Equipo Tipo I:

costo inicial : 3,000 um.
vida económica : 6 periodos
V.R. : 500 um.
costo anual c.o.m : 2,000 um.



Equipo Tipo II:

costo inicial : 4.000 um.
vida económica : 9 periodos
V.R. : 0
costo anual c.o.m. : 1.600 um.



Tasa interna mínima atractiva considerada: 15% real/perd.

$CA_I = (3.000-500)(A/P, 15\%, 6) + 500(0.15) + 2.000 = 2.735$ um.

$CA_{II} = 4.000 \cdot (A/P, 15\%, 9) + 1.600 = 2.440$ um.

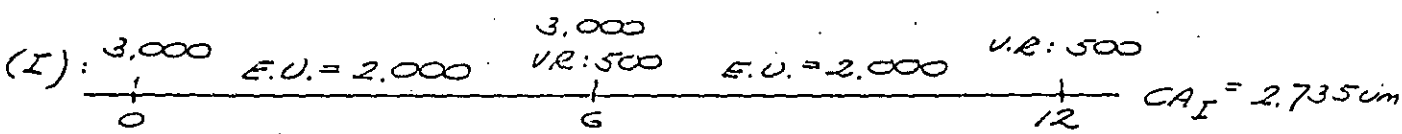
$\therefore CA_{II} < CA_I \Rightarrow II \succ I.$

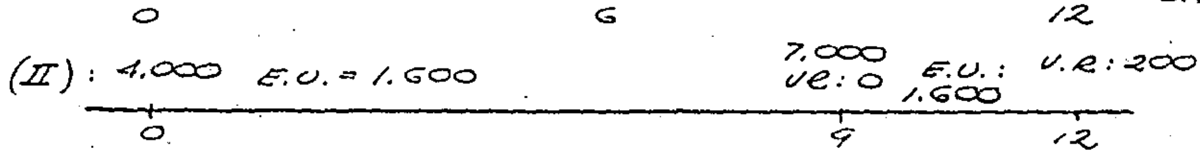
Supongamos ahora que:

1° para la empresa en cuestión, el equipo se requerirá durante 12 periodos.

2° se prevee que mientras para el equipo (I) se podrá hacer un reemplazo a partir del periodo 6 con un equipo similar, para el equipo (II) se estima que el reemplazo se llevará a cabo a partir del periodo 9 con otro cuyo costo se estima en 7.000 um. y que tendrá valor de recuperación después de 3 años de uso, de 200 um.

La situación puede ahora resumirse:





$$CA_{II} = [4.000 + 7.000(P/F, 15\%, 9) - 200(P/F, 15\%, 12)] \cdot (A/P, 15\%, 12) + 1.600$$

$CA_{II} = 2.650$ um.

$\therefore CA_{II} < CA_I \Rightarrow II \succ I$

Lo que significa que dentro de las nuevas condiciones supuestas, el equipo II, sigue siendo el más conveniente.

DETERMINACION DEL NIVEL MAS ECONOMICO DE INVERSION.

Hay ocasiones en que se nos presentan alternativas "graduadas" de inversión para resolver un mismo problema. Así por ejemplo, imaginemos el caso de que con diversos equipos pudiésemos en principio asegurar un cierto volumen de producción requerido, con calidad similar y dentro de un tiempo especificado, pero presentando cada uno de estos posibles equipos, características y condiciones distintas, en cuanto aspectos como el monto de la inversión inicial y las condiciones de pago de dicha inversión, cantidad de obra de mano consumida por unidad producida, grado requerido de especialización para los operarios, costo de las refacciones y de las reparaciones, costo y periodicidad especificada para el mantenimiento adecuado, importe de las primas de seguros, periódo de utilización del equipo, valor de recuperación que se considera poder obtener al final de la vida útil, etc..., diferencias tales, que originan el que no obstante las diversas máquinas propuestas resuelvan el problema desde el punto de vista de producción, desde el punto de vista económico, presentan diferencias substanciales, razón por la cual, es- necesario analizar las posibles alternativas con este enfoque, haciendo intervenir todas sus diferencias relativas tanto del tipo monetario como del no-monetario; ya que sabemos que a fin de cuentas, el criterio económico será el determinante para la selección de una de las alternativas.

El panorama que se presenta en estas circunstancias, se resume en el hecho de que los diversos equipos pueden seleccionarse entre un amplio rango, que va desde aquel que implica alta inversión inicial pero bajos costos de operación, mantenimiento, etc..., y alto valor probable de recuperación, hasta aquel de bajo costo total inicial (incluyendo compra, derechos, transportes, instalación, puesta en marcha, pruebas iniciales, etc..), pero elevados costos anuales equivalentes durante su vida útil y bajo valor de recuperación al final de la misma. La incógnita - en cuarto a la alternativa por adoptar, se refleja en preguntas tales como: ¿ cuál es el equipo óptimo desde el punto de vista económico ?, ¿"hasta cuál " de los niveles de inversión representado por los diversos equipos - disponibles, debe alcanzarse ?, o enfocado esto mismo de otra manera, y habiendo ya determinada la conveniencia de invertir en uno de los equipos: ¿ se justifica la inversión adicional que implica el equipo del siguiente nivel de inversión?...

Problemas de este tipo, pueden resolverse mediante cualquiera de los métodos de comparación de alternativas, como son: el del Costo - Anual, el del Valor Presente y el del cálculo de la Tasa de Recuperación.

Ejemplo:

Se desea analizar la posibilidad de recubrir una red de tuberías de vapor, con material aislante para evitar en lo posible las pérdidas por calor. A medida que se incrementa el espesor del material aislante, la inversión inicial será mayor, pero se lograrán menores pérdidas anuales por pérdida de calor.

Tipo de aislamiento (número de espesor)	dato ? importe de la inversión inicial	√ dato pérdida estimada anual por pérdidas por calor	Costo Anual uniforme equivalente de recuperación del capital	Costo Total anual equivalente
0 (sin aislamiento)	0	\$238.000	0	\$238.000
#1	\$36.200	115.000	\$44.300	159.300
#2	46.300	60.000	56.659	116.659
#3	61.000	35.000	74.648	109.648
#4	79.400	23.000	97.165	120.165
#5	109.600	18.000	134.122	152.122
#6	146.100	16.000	178.789	194.789

La obtención del Costo Total anual indicado en la columna última, se logra tal como se ejemplifica para el caso del aislamiento #1:

36.200   E.U. 115.000   VR=0

0 ———————— 5

$$C.A. = 36.200\ (A/P, 120, 5) + 115.000$$

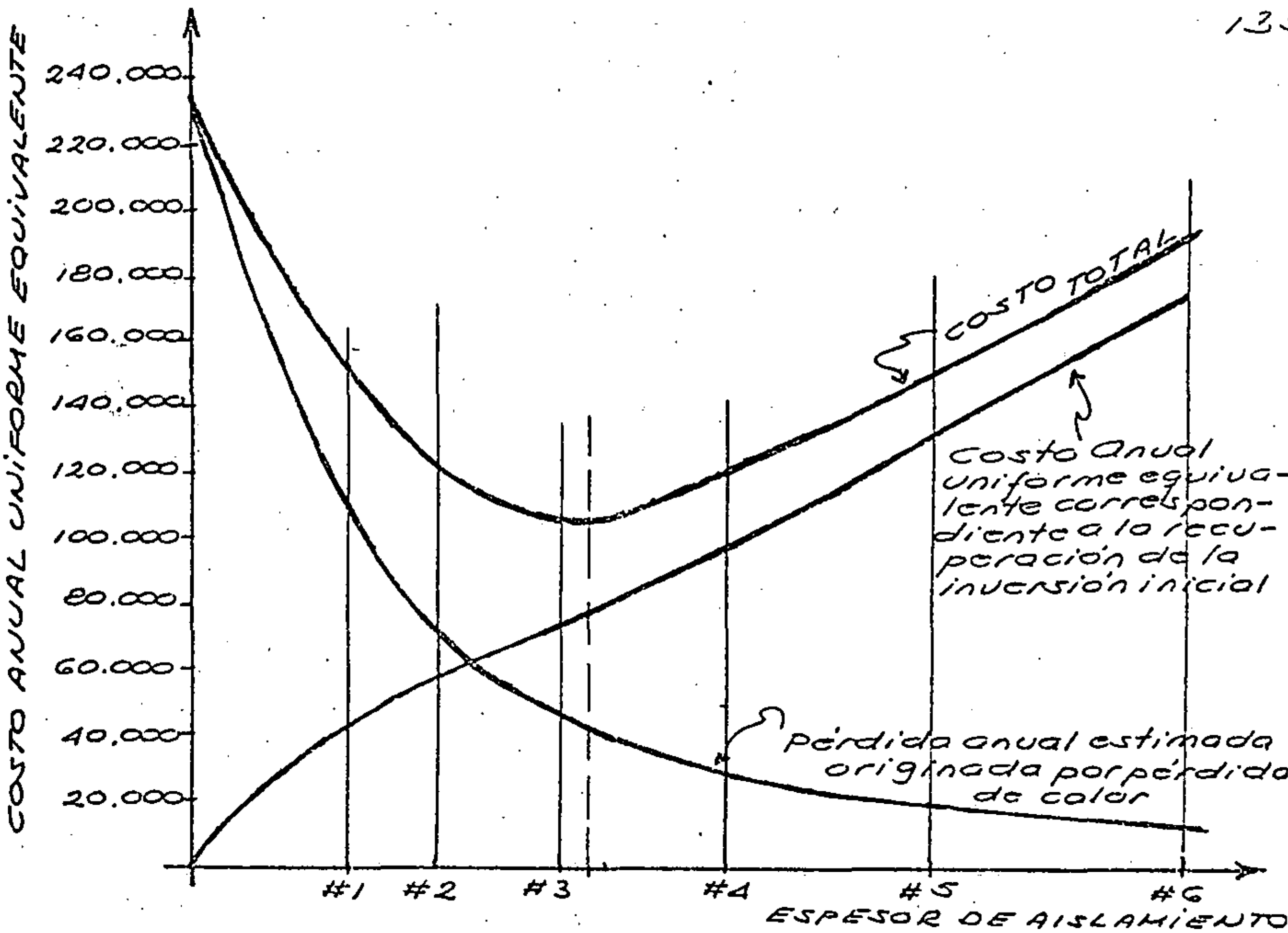
$$C.A. = \underbrace{44.300}_{\text{resultado en 4ª columna}} + \underbrace{115.000}_{\text{dato en 3ª columna}}$$

$$C.A = 159.300.$$

Los valores estimados de los factores relativos a costos y ahorros se muestran en el cuadro anterior.

Se ha considerado que el recubrimiento tendrá una vida util de 5 -- años. La tasa mínima atractiva de recuperación se considera de un - 120 % .

Observamos en la tabla, que el Costo Anual uniforme equivalente menor, es el que corresponde al recubrimiento de espesor # 3, y notamos además que a medida que se aumenta el espesor, (1a. columna), se incrementa el monto de la inversión inicial, (2a. columna), pero decrecen las pérdidas por fuga de calor, (3a. columnas), todo lo cual origina que los costos anuales totales (5a. columna), disminuyan hasta un mínimo que corresponde precisamente a la alternativa del espesor # 3.



Sin embargo a partir de este Valor mínimo, el Costo Anual equivalente de los subsecuentes niveles de inversión, va aumentando.

El comportamiento de los factores de costo y ahorro anteriores, se muestra en la gráfica anterior.

La razón por la cual los Costos Anuales uniformes equivalente a los aislatnes de espesores # 4 en adelante, van creciendo, se explica por el hecho de que la inversión total que cada uno de los niveles de inversión implica, va siendo cada vez menos atractiva dada la incersión inicial requerida y los beneficios que esta genera debido a los ahorros originados por la menor pérdida de calor. Dicho de otra forma : la inversión adicional que cada uno de los diferentes espesores de aislamiento implica, comparativamente a la alternativa anterior, (esto a partir del espesor # 3), ya no se justifica, dados los ahorros adicionales que por una menor pérdida de calor origina; al menos, considerando una tasa mínima de recuperación de 120%.

Esto último queda de manifiesto, si la comparación entre las alternativas, se realiza no en base a la inversión total que cada una de ellas implica, sino comparativamente, es decir analizando la inversión adicional ó extra, que cada nivel de inversión representa con respecto al nivel anterior y comparando con el ahorro adicional por la disminución en la pérdida de calor, que esta inversión adicional origina.

Resolvamos el problema anterior con este criterio de análisis, tal como se muestra en el cuadro siguiente, y en el cual se observa que la inversión extra de $ 14,700. que el aislamiento de espesor # 3 representa comparativamente respecto al de # 2, origina ahorros de $ 25,000. adicionales anuales por disminución en las pérdidas por calor. El resultado de $ 7,011. positivos anuales, significa que esa inversión adicional no solo se recupera con una tasa de 120% anuales durante 5 años, con los ahorros adicionales que origina, sino que de hecho, su tasa de recuperación es mayor que el 120% en una cantidad representada anualmente por un superhabit de $ 7.011 anuales. En cambio, la inversión adicional por $ 18,400. que el aislamiento de espesor # 4 implica comparativamente con el de espesor # 3, no se alcanza a recuperar con los ahorros de $ 12,000. anuales adicionales que origina, durante 5 años y con una tasa de 120% anual por lo cual existe un deficit anual de $ 10,517. para que dicha recuperación se lograse.

Tipo de espesor del aislamiento	Inversión Inicial.	Inversión Adicional	Costo de recuperación del capital de la inversión adicional	Pérdida anual por pérdidas de calor	Ahorro anual originado por la inversión adicional	Ahorro neto después de recuperación de la inversión adicional.
—	0	—	—	238.000	—	—
#1	36.200	dif. 36.200	$\times (A/P, 120\%, 5) = 44.300$	115,000	dif. 123.000	(123,000 − 44.300) = +78.700
#2	46.300	dif 10.100	" = 12,360	60,000	dif 55.000	(55.000 − 12,360) = +42.640
#3	61.000	14.700	" = 17.989	35.000	25,000	(25,000 − 17.989) = + 7.011.
#4	79.400	18,400	" = 22,517	23.000	12,000	(12.000 − 22.517) = −10.517
#5	109.600	30,200	" = 36.957	18.000	5.000	(5,000 − 36.957) = −31.957
#6	146.100	36.500	" = 44.667	16.000	2.000	(2,000 − 44.667) = −42.667

maximización:

#3	61.000			35,000		
#3-A	65,086	dif 4.086	$\times (A/P, 120\%, 5) = 5,000$	30,000	dif. 5,000	(5,000 − 5,000) = 0

~~En el cuadro anterior, el primer renglón, correspondiente al espe-~~ sor " 0 " (lo que equivale a no usar ningún aislamiento), no -- presenta valores, ya que se trata de un análisis compartativo, y no existe alternativa anterior a la alternativa de : " no usar aislamientos ".

Ahora bien ¿ porqué no optar por la alternativa de aislante con espesor # 1 que es la que mayor ahorro neto origina: $ 78,700. ?

La respuesta a lo anterior, lo constituye el hecho de que buscamos - invertir en todas las alternativas favorables; y todas aquellas que brinden tasas anuales de recuperación de 120% o más, son atractivas, razón por la cual debemos invertir hasta en la alternativa de espesor # 3. Recordemos que la pregunta originalmente planteada fué: ¿ hasta que nivel de inversión es conveniente invertir ?. No invertir en la alternativa de espesor # 3, equivale a rechazar una posibilidad de inversión que nos reditua inclusive más del 120%.

El que las inversiones adicionales que implica los aislamientos con espesores # 1 y # 2, se recuperen con una tasa aún mayor que la- de la inversión adicional de la alternativa de espesor # 3, no im - plica que ésta última no deba aceptarse.

En este estado de cosas, si quisiésemos optimizar nuestra inversión deberiamos tratar de conseguir un aislamiento con espesor intermedio entre- los de # 3 y # 4, tal que presentase el menor costo anual equivalente (de acuerdo con el primer criterio de análisis con base en - la inversión total), y que coincidiese con el punto inferior de - la curva de Costos Anuales uniformes equivalentes. Este espesor sería el que se muestra en la gráfica correspondiente y que corresponde a un aislamiento de espesor # 3 - A. Si este valor óptimo tratáse de calcularse con el criterio de análisis de la inversión adicional, - sería el correspondiente a aquel cuyo : " ahorro neto después de recuperar la inversión adicional (a una tasa del 120%), " fuese de cero ", lo cual significaria que la inversión adicional se recuperase exactamente al 120%, que es el límite mínimo atractivo de inversión. Este sería el caso de un aislamiento de espesor # 3 - A que tuviese un costo inicial de $ 65,086. y pérdida anual por calor-de $ 30,000. y por tanto con inversión adicional de $ 4,086.- y ahorro adicional de $ 5,000, con respecto a la alternativa de-espesor # 3, lo que cumpliría con lo anterior y representaría a la-maximización en cuanto a nivel de inversión se refiere.

Hacemos notar que el método del Costo Anual, solo nos muestra cual es el nivel de inversión más económico, y nos indica si una inver - sión se recupera a una tasa del 120% ó mayor, pero sin decirnos - especificamente los valores de dichas tasas. Este mismo problema -- puede resolverse con el método de la Tasa de Recuperación que se -- aplica tal como se mostrará más adelante y con el cual si pueden -- calcular las tasa de recuperación de cada alternativa por cuanto-corresponde a la inversión total y a las inversiones adicionales de - cada nivel.

Es de hacerse notar que en este caso y por la naturaleza del problema, la comparación de las alternativas se realizó en base a determinar el costo total mínimo.

En algún otro porblema, en que se contase no solo con los egresos sino con los ingresos esperados en cada alternativa, el criterio sería la búsqueda de la utilidad máxima.

========================

El método del Costo Anual también es sumamente útil para la determinación del periódo más económico de utilización de un activo depreciable, es decir, de su periódo de Vida Económica.

EJEMPLO:

Un equipo de construcción tiene un precio total de adquisición de \$ 14'000,000. y aceptemos que dado el comportamiento y montos relativos de los costos de operación y mantenimiento que para un equipo de este tipo se presentan en la realidad durante el transcurso de los años de utilización, se considera prudente ajustar la ---- corriente de dichos costos, a un modelo de serie uniforme con gradiente de incremento geométrico. Supongamos por tanto, que los -- costos por este concepto son: \$ 1'000,000. el primer año y un incremento anual geométrico de : j=80% sobre la cantidad inicial. - Se pide calcular los costos anuales uniformes equivalentes correspondientes a los primeros 9 años de utilización, así como el periódo de Vida Económica del equipo. Se considera como t.i.m.a.r : i=60% y se estima que los Valores de Recuperación al final de cada uno de los 9 años pudieran ser respectivamente: \$ 8'500,000., \$ 6'000,000., \$ 4'000,000., \$ 3'000,000., \$ 1,500,000., -------- \$ 1'000,000., \$ 750,000., \$ 250,000. y \$ 250,000.

Calculo de los Costos Anuales uniformes equivalentes:

1 año: 14. mill. (0) — V.R.: 8.5 mill., 1 mill. (1)

	ver (A) uniforme correspondientes a la serie geométrica:		
CA_1 = 14'000,000 (A/P, 60%, 1)	+ 1'000,000.	− 8'500,000 (A/F, 60%, 1)	
CA_1 = 22'400,000	+ 1'000,000.	− 8'500,000	= 14'900,000

2 años: 14. mill. (0) — 1. mill. (1) — V.R.: 6 mill., 1.8 mill. (2)

CA_2 = 14'000,000 (A/P, 60%, 2)	+ 1'308,000	− 6'000,000 (A/F, 60%, 2)	
CA_2 = 13'785,000	+ 1'308,000	− 2'310,000	= 12'783,000.

3 años: 14 mill. (0) — 1. mill. (1) — 1.8 mill. (2) — V.R.: 4 mll., 3.24 mll. (3)

CA_3 = 14'000,000 (A/P, 60%, 3)	+ 1'682,000	− 4'000,000 (A/F, 60%, 3)	
CA_3 = 11'113,000	+ 1'682,000	− 775,000	= 12'020,000.
CA_4 = 14'000,000 (A/P, 60%, 4)	+ 2'130,000	− 3'000,000 (A/F, 60%, 4)	
CA_4 = 9'913,000.	+ 2'130,000	− 324,000	= 11'719,000.
CA_5 = 14'000,000 (A/P, 60%, 5)	+ 2'660,000	− 1'500,000 (A/F, 60%, 5)	
CA_5 = 9'286,000	+ 2'660,000	− 95,000	= 11'847,000.
CA_6 = 14'000,000 (A/P, 60%, 6)	+ 3'277,000	− 1'000,000 (A/F, 60% 6)	
CA_6 = 8'932,000	+ 3'277,000	− 38,000.	= 12'171,000.
CA_7 = 14'000,000 (A/P, 60%, 7)	+ 3'991,000	− 750,000 (A/F, 60%, 7)	
CA_7 = 8'725,000	+ 3'991,000	− 17,400	= 12'699,000
CA_8 = 14'000,000 (A/P, 60%, 8)	+ 4'809,000	− 250,000 (A/F, 60%, 8)	
CA_8 = 8'600,000	+ 4'809,000	− 3,600	= 13'405,000
CA_9 = 14'000,000 (A/P, 60%, 9)	+ 5'743,000	− 250,000 (A/F, 60%, 9)	
CA_9 = 8'524,000	+ 5'743,000	− 2,200	= 14'265,000

Cálculo de las anualidades uniformes equivalentes, correspondientes a la serie geométrica: $\begin{cases} j = 80\% = 0.8 \\ i = 60\% = 0.6 \\ A_1 = 1'000,000\ ;\ n: 1 \text{ a } 9 \end{cases}$

1 año:

1.mll

0 1

$$A = 1'000,000$$

---

2 años:

$$F = A_1\left[\frac{(1+i)^n - (1+j)^n}{i-j}\right] = 1 \times \left[\frac{(1+0.6)^2 - (1+0.8)^2}{0.6-0.8}\right]$$

1.0 1.8 mll.

0 1 2

$$F = 3.4 \text{ mill.}$$

$$A = F\,(A/F, i, n) = 3.4\,(A/F, 60\%, 2) = 1'308,000$$

---

3 años:

$$F = 1 \times \left[\frac{(1.6)^3 - (1.8)^3}{0.6-0.8}\right] = 8.68 \text{ mill.}$$

1.0 1.8 3.24

0 1 2 3

$$A = 8.68\,(A/F, 60\%, 3) = 1'682,000$$

---

4 años:

$$F = 1 \times \left[\frac{(1.6)^4 - (1.8)^4}{0.6-0.8}\right] = 19.718 \text{ mill.}$$

$$A = 19.718\,(A/F, 60\%, 4) = 2'130,000$$

---

5 años:

$$F = 1 \times \left[\frac{(1.6)^5 - (1.8)^5}{0.6-0.8}\right] = 42.048 \text{ mll.}$$

$$A = 42.048\,(A/F, 60\%, 5) = 2'660,000$$

---

6 años:

$$F = 1 \times \left[\frac{(1.6)^6 - (1.8)^6}{0.6-0.8}\right] = 86.175 \text{ mll.}$$

$$A = 86.175\,(A/F, 60\%, 6) = 3'277,000$$

---

7 años:

$$F = 1 \times \left[\frac{(1.6)^7 - (1.8)^7}{0.6-0.8}\right] = 171.892 \text{ mll.}$$

$$A = 171.892\,(A/F, 60\%, 7) = 3'991,000$$

---

8 años:

$$F = 1 \times \left[\frac{(1.6)^8 - (1.8)^8}{0.6-0.8}\right] = 336.250 \text{ mll.}$$

$$A = 336.25\,(A/F, 60\%, 8) = 4'809,000$$

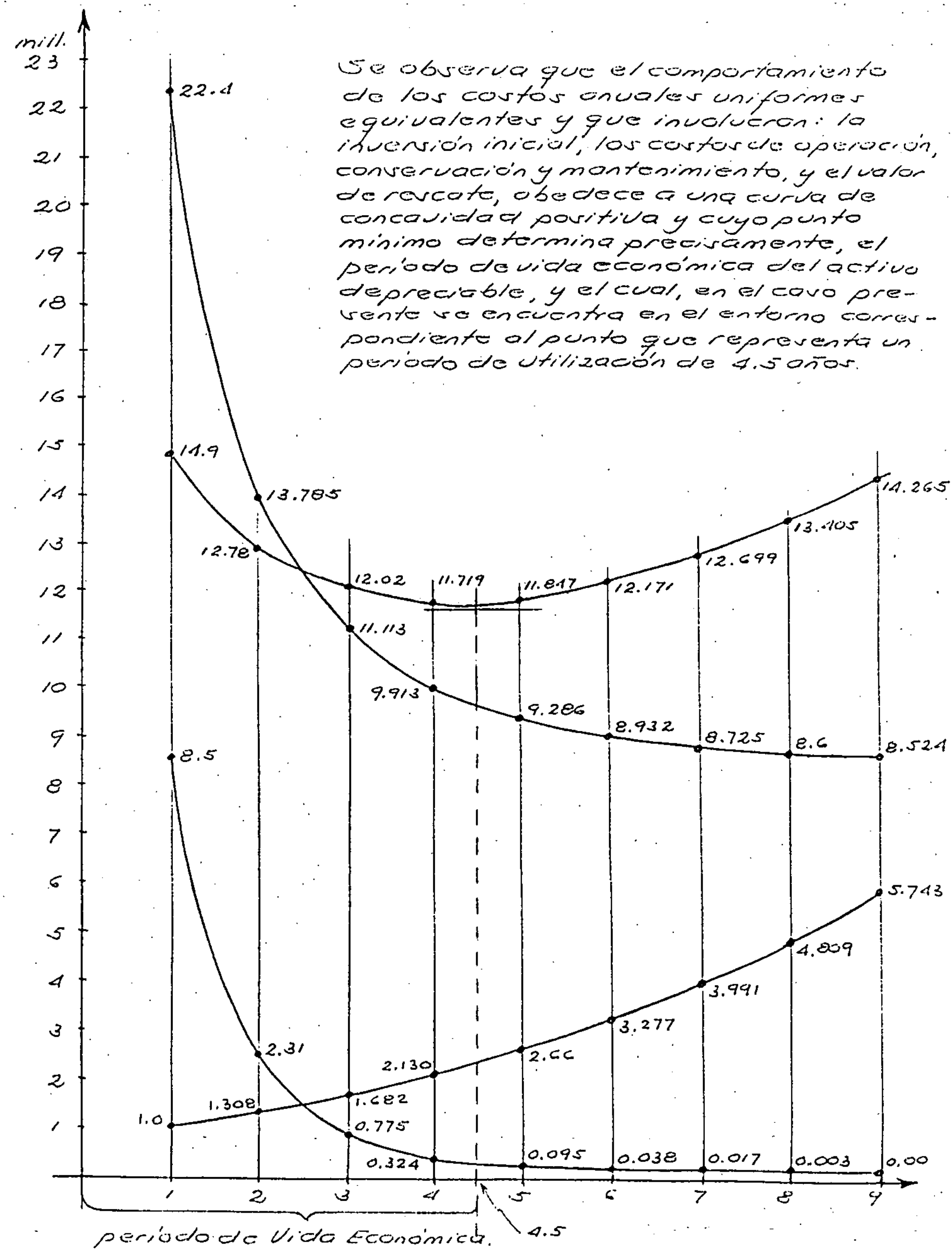
---

9 años:

$$F = 1 \times \left[\frac{(1.6)^9 - (1.8)^9}{0.6-0.8}\right] = 648.199 \text{ mll.}$$

$$A = 648.199\,(A/F, 60\%, 9) = 5'743,000$$

Se observa que el comportamiento de los costos anuales uniformes equivalentes y que involucran: la inversión inicial, los costos de operación, conservación y mantenimiento, y el valor de rescate, obedece a una curva de concavidad positiva y cuyo punto mínimo determina precisamente, el periodo de vida económica del activo depreciable, y el cual, en el caso presente se encuentra en el entorno correspondiente al punto que representa un periodo de utilización de 4.5 años.



METODO DEL VALOR PRESENTE.

El método consiste fundamentalmente, en "traducir" los flujos de efectivo o las diferencias futuras entre alternativas, a una sòla cantidad equivalente expresada en el momento presente, o en un mismo "punto" de la escala de tiempo.

Lo más frecuente, es que las cantidades que constituyen un flujo de efectivo, se "lleven" al punto cero o momento actual, sin embargo, en ocasiones pudiera ser más conveniente, por representatividad, por facilidad de comparación con otras alternativas, etc..., expresar concentrada la corriente de efectivo en otro punto cualquiera del tiempo distinto del punto cero.

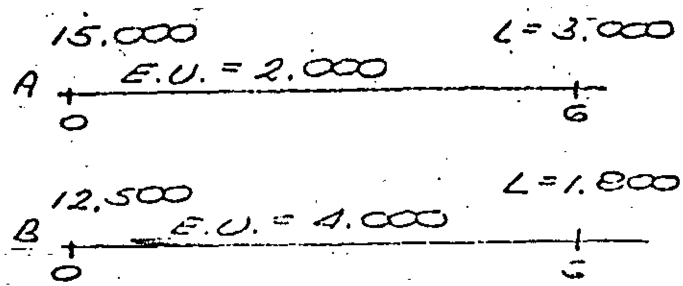
Para indicar que una cantidad ó una serie de ingresos y/o egresos, ha sido expresada en el punto cero, diremos que ha sido " actualizada ".

Es frecuente escuchar que para indicar lo anterior, se emplee el término " descontar ". Así, se dirá que una cantidad o una serie ha sido " descontada " al momento actual, sin embargo nosotros consideramos que el término" actualizar " es más correcto.

Veamos cual es la mecánica y el significado de la comparación de alternativas con el método del Valor Presente:

EJEMPLO:

Consideremos dos alternativas A y B, con los flujos de efectivo que se muestran en sus respectivas escalas de tiempo. Supongamos además, que la tasa mínima atractiva de recuperación se fija en 70%. ¿Cual de las dos alternativas es más conveniente?



Llevando la corriente de gastos y el valor de recuperación al momento actual (cero) se tiene:

$$VP_{CA} = 15.000 - 3{,}000\,(P/F, 70\%, 6) + 2.000\,(P/A, 70\%, 6)$$
$$= 15{,}000 - 124 + 2{,}739 = ₡\ 17.615.$$

$$VP_{CB} = 12{,}500 - 1{,}800\,(P/F, 70\%, 6) + 4.000\,(P/A, 70\%, 6)$$
$$= 12{,}500 - 75 + 5.478 = ₡\ 17.903$$

diferencia a favor de A: ₡ 288.

Ya que actualizamos considerando como positivos los gastos, el Valor Presente que nos es favorable es el de la alternativa A, por representar el Costo actualizado equivalente menor.

El significado del resultado anterior es el hecho de que la sobre-inversión inicial de \$ 2,500. que la alternativa A implica sobre la B, se justifica plenamente, ya que no solo se recupera a una tasa de 70% en el periódo de 6 años con los ahorros de \$ 2,000. anuales y con un mayor valor de recuperación por \$ 1,200., al final del periódo de servicio analizado, sino que reditúa un 70%, más un porcentaje adicional correspondiente a una cantidad total expresada en el momento actual, de \$ 288.

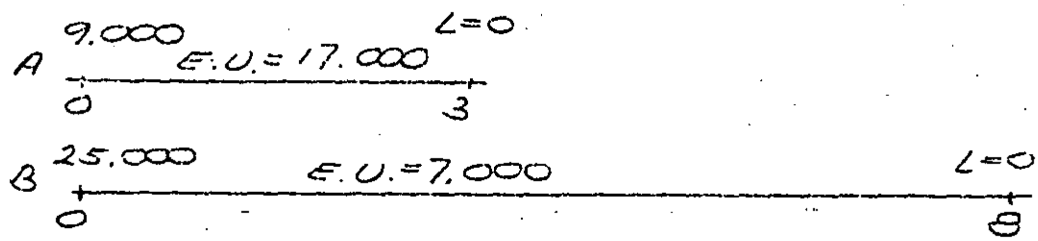
Si la diferencia hubiese sido cero, aún la alternativa más atractiva sería la A, ya que dicho resultado se interpretaría como que la sobre-inversión de A, sobre B, se recupera exactamente con una tasa de intereses del 70%.

En el caso de que la diferencia hubiese sido negativa, esto significaría que la inversión adicional en A no se alcanzaría a recuperar con una tasa del 70%, y siendo esta la tasa mínima atractiva de recuperación, la alternativa A sería rechazada y aceptada la B.

El método del Valor Presente puede ser empleado también para la comparación entre alternativas con distintos periódos de vida económica.

EJEMPLO:

Consideramos dos alternativas de selección de equipos cuyas características se indican en las escalas de tiempo correspondientes. Supongamos una tasa mínima atractiva de recuperación de 60%.



Recordemos que en términos generales, el tratamiento de un problema de éste tipo puede ser abordado con dos criterios:

a) Considerar como horizonte de comparación, el periódo correspondiente a la alternativa más corta, en este caso: 3 años. Dicho de otra forma, despreciar los futuros posibles eventos y sus consecuencias, más allá de los 3 años.

b) Predecir los cursos de acción que pudiesen seguirse a partir del 3er. año, a fin de buscar igualar los horizontes económicos en ambas alternativas A y B.

Apliquemos primero el criterio (a). Comparemos las alternativas con el método del Costo Anual y con el del Valor Presente:

Con el método del Costo Anual:

$$CA_A = 9.000\ (A/P,\ 60\%,\ 3) + 17.000 = \$\ 24.144$$

$$CA_B = 25.000\ (A/P,\ 60\%,\ 8) + 7.000 = \underline{22.358}$$

diferencia a favor de B = \$ 1.786/año

Con el método del Valor Presente:

$$VP_{CA} = 9.000 + 17.000\ (P/A,\ 60\%,\ 3) = 30.416$$

$$VP_{CB} = [25.000\ (A/P,\ 60\%\ 8) + 7.000] \cdot (P/A,\ 60,\ 3) = \underline{28.166}$$

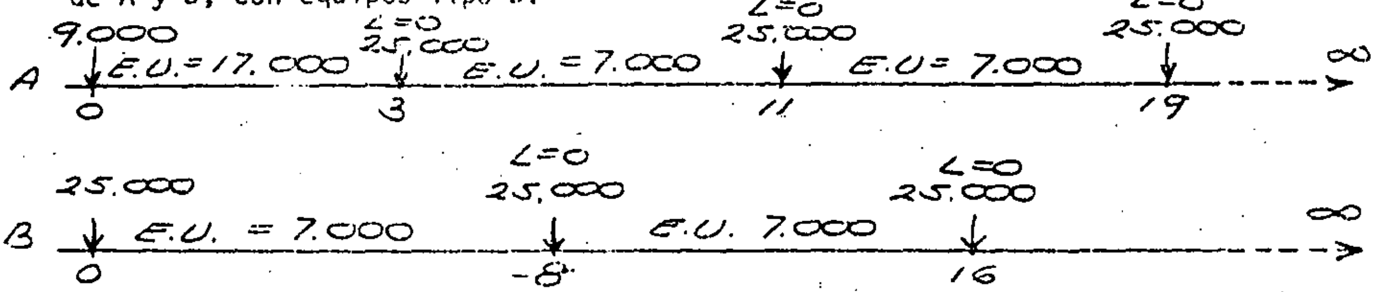
diferencia a favor de B : \$ 2.250 pres.

Los resultados son equivalentes: $2.250 = 1.786\ (P/A,\ 60\%,\ 3)$

De lo anterior, se desprende que el equipo B es el más económico.

Apliquemos ahora el criterio (b). Recordamos que una primera postura en cuanto a la suposición sobre los reemplazos que pudiesen hacerse a continuación tanto de A como de B para igualar sus periódos de comparación, sería la de suponer reemplazos futuros idénticos a los originales en cada alternativa, hasta un común múltiplo que en este caso sería de 24 años. Pero ya vimos anteriormente que esta situación nos conduce al mismo resultado, aún numericamente, que el obtenido al aplicar el criterio (a).

Consideremos entonces que los reemplazos en cada alternativa, se harán con equipos al menos tan eficientes economicamente, como el más económico disponible actualmente. Dado, que al menos en base al criterio (a), el equipo más económico, resultó ser el B, supongamos una corriente indefinida de reemplazos a partir de A y B, con equipos Tipo B:



actualizando cada una de las corrientes de costos recordando que: $(P/A,i,n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{i}$ ∴ $(P/A,60\%,\infty) = \frac{1}{0.6} = 1.67$

se tiene:

$$VP_{CA} = 9.000 + 17.000\,(P/A,60\%,3) + [25{,}000\,(A/P,60\%,8) + 7.000]\cdot(P/A,60\%,\infty)\cdot(P/F,60\%,3)$$

$$= \$\ 39.510.$$

$$VP_{CB} = [25{,}000\,(A/P,60\%,8) + 7.000]\cdot(P/A,60\%,\infty)$$

$$= \$\ 37.260.$$

diferencia a favor de B: $ 2.250

$$VP_{CB} < VP_{CA} \Rightarrow B > A$$

Que es el mismo resultado obtenido con el criterio A, al analizar únicamente los 3 primeros años.

Este resultado pudo haberse previsto, ya que si observamos las corrientes de costo expresados en las escalas de tiempo, notaremos que al reemplazar en el año 3, a A, con una máquina tipo B, a partir del año 3 se establece para ambas alternativas una situación idéntica, pudiendo entonces " simplificarse " en ambas alternativas dichos periódos a partir del año 3.

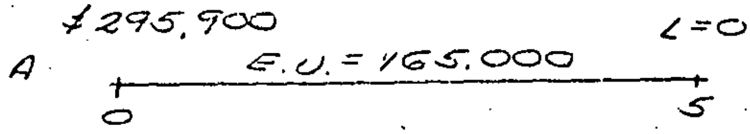
Por lo anterior, el suponer reemplazos a partir del año 3, introducirá efectos en la comparación de alternativas y provocará cambio en el resultado obtenido con el criterio (a), solo a medida que el equipo de reemplazo de A, a partir del año 3, sea más eficiente económicamente que el equipo B. Así, un equipo un poco más económico que el B, igualará las alternativas; y un equipo de mayor economía aún, empleado, como reemplazo de A a partir del 3°. año, dará supremacía a la alternativa A. Esto se explica, por el hecho de la más pronta utilización y aprovechamiento de mejoras tecnológicas en A, a partir del 3°. año.

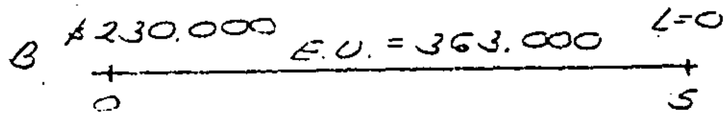
El método del Valor Presente muestra en determinadas circunstancias, ventajas y desventajas de las alternativas en estudio, en una forma no apreciable en el método del Costo Anual.
Así por ejemplo, en aquellas situaciones en las que la inversión inicial es predominante sobre el efecto que pudieran tener los costos anuales, de operación por ejemplo, dentro del comportamiento general de un conjunto de alternativas, el método del Valor Presente pone de manifiesto, con todo su " Peso ", el efecto de las diferencias en las inversiones iniciales, lo que permitirá por otro lado, poder juzgar sobre la importancia, o no importancia, de dichos costos iniciales.
Las características fundamentales del método son: el que las cantidades ubicadas en el momento actual (o en el punto del tiempo en el cual se "actualiza" el flujo de efectivo), se muestran con su valor real, y el que las diferencias entre alternativas puedan expresarse y compararse a través de cantidades (sumas) únicas y expresadas en un solo punto y no por medio de una serie de sumas o cantidades anuales, tal como sucede en el método del Costo Anual, lo que en ocasiones pudiese distorsionar la visión de conjunto sobre una situación dada.

EJEMPLO

Al Gerente de una planta de proceso le son presentadas dos cotizaciones A Y B para la implantación de un sistema que le permitirá elevar su volumen anual de producción. Después de realizar un análisis económico, llega a la conclusión de que la alternativa A es preferible a la B y avisa al agente de ventas del sistema B, que su proposición ha sido descartada, a lo cual este responde estar dispuesto a hacer una rebaja en el precio inicial del sistema que ofrece. ¿Cual es el descuento que debe otorgar el agente de ventas de B, de forma tal - que su sistema se convierta en la alternativa económicamente más a tractiva para el Gerente?

Las características de los sistemas A y B son las siguientes:





El Gerente estima su tasa mínima atractiva de recuperación en 60 %. Dado que lo que es factible de variarse es el precio inicial, convie ne analizar el problema con el criterio del Valor Presente:

$$VP_{CA} = 295{,}900 + 165{,}000\,(P/A,60\%,5)$$
$$= \$\ 544{,}674.$$

$$VP_{CB} = 230{,}000 + 363{,}000\,(P/A,60\%,5)$$
$$= \$\ 777{,}303$$

diferencia a favor de A: $\$$ 232,629.

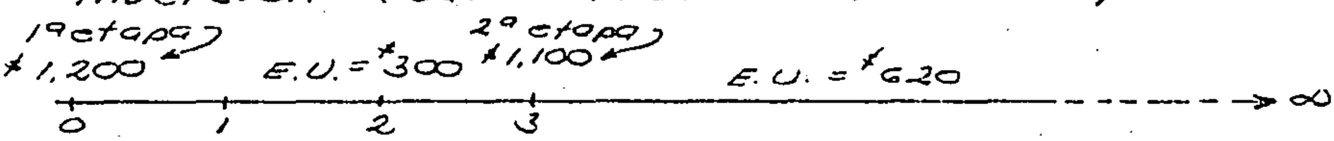
Lo cual quiere decir que la alternativa A no solo no es $ 65,900.00 más cara (como podría juzgarse si solo se atendiese al monto de las intervensiones iniciales) sino que es $232,629.00 más barata (esta - cifra, expresando la diferencia al momento cero), por lo que, para que el sistema B se convierta en el más atractivo, habrá que avisar al - agente de ventas que debe implementarlo totalmente gratis y acompañar su regalo con un cheque por más de $ 2,629.00, ya que aún con un cheque de $ 2,629.00 exactamente, la alternativa A, seguirá siendo la más económica por el hecho que la sobre-inversión que representa, con respecto a B, se recuperaría exactamente aún al 60%, que es la tasa que ha sido fijada como tasa mínima atractiva de recuperación.

EJEMPLO:

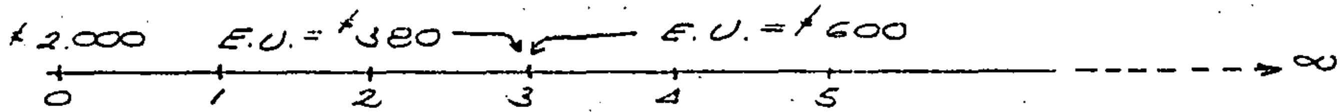
Veamos el caso de una empresa en que se planea el crecimiento y la expansión de la misma, y para decidir sobre la construcción de una ampliación de la planta, se presentan dos alternativas: La primera es llevar a cabo la construcción en dos etapas con diferencia de 3 años entre ellas, y la segunda consiste en construír desde el principio la ampliación completa ya con la capacidad que se espera necesitar dentro de 3 años. Ambas alternativas presentan ventajas y desventajas como son: El costo de la construcción de la planta de dos partes, es más costosa que la construcción en una sola etapa, lo cual es obvio por la duplicación de ciertos trabajos y actividades como supervisión y dirección de la obra, costos indirectos, y el tener que efectuar trabajos que en la segunda etapa deban destruírse, etc. . . , por otro lado, si la ampliación se construye desde el principio con la capacidad total, durante los primeros años funcionará a capacidad sobrada, siendo por tanto, muy ineficiente y por tanto más costosa su operación en esta etapa, pero también es muy probable que si se hace de una sola vez, quede mucho más integrada en su conjunto, de tal manera que su operación, ya en los años futuros sea más eficiente y por tanto más económica que si se planea y construye en 2 partes.

Ya funcionando se supone continuará operando un número indefinido - de años. Los resultados de los estudios para una y otra alternativa se le presentan a la empres de la siguiente manera, ya expresadas en la escala de tiempos:

- Construir en dos etapas: diferimiento de la inversión (cantidades en millones de pesos)



- Construir de una sola vez:



se considera una tasa mínima atractiva de: 90%

$$VP_{2\ etapas} = 1.200 + 300\,(P/A, 90\%, 3) + \left[1.100 + \underbrace{620\,(P/A, 90\%, \infty)}_{620/0.90}\right] \cdot (P/F, 90\%, 3)$$

$$VP_{2\ etapas} = 1.200 + 285 + 261 = \$\ 1'746\ (mill.)$$

$$VP_{1\ etapa} = 2.000 + 380\,(P/A, 90\%, 3) + \underbrace{600\,(P/A, 90\%, \infty)}_{600/0.90} \cdot (P/F, 90\%, 3)$$

$$VP_{1\ etapa} = 2.000 + 361 + 97 = \underline{\$\ 2'458.}\ (mill.)$$

diferencia a favor de "construir en 2 etapas" : $ 712 (mill.)

Lo anterior demuestra que la sobre-inversión actual de $800 millones que implica el construir en una sola etapa la ampliación de la planta, no se justifica, con los ahorros que origina en cuanto a la -- construcción total y en cuanto a la operación en los años futuros; ésto, al menos considerando una tasa de interés mínima de 90%.

Ejemplo:

A un industrial, le es ofrecido un equipo de segunda mano en ¢ 950,000. Estima que le costará unos ¢ 70,000 el traslado, la instalación y el "hechar a andar" dicho equipo; y que los costos de operación conservación y mantenimiento serían de ¢ 1'400,000 anuales, durante los 3 años que considera poder utilizarlo y al fin de los cuales podría venderlo en unos ¢ 250,000.

Por otro lado, averigua que una máquina similar, nueva, le cuesta ¢ 1'500,000 ya instalada, con costos de operación estimados en ¢ 1'000,000. y valor de recuperación al final de los 3 años que la emplearía, de ¢ 500,000.

¿Debe aceptar la oferta del equipo usado o debe adquirirlo nuevo? y en todo caso, ¿hasta cuánto podría ofrecer él por el equipo usado?

El industrial estima su tasa interna mínima atractiva de recuperación al momento en que debe tomar su decisión, en 55%.

Para calcular el valor límite máximo atractivo (P) al cual le conviene adquirir el equipo usado, procederá de la siguiente manera:

equipo usado: P (0) — E.U. = 1'400,000 — V.R: 250,000 (3)

equipo nuevo: 1'500,000 (0) — E.U. = 1'000,000 — VR.: 500,000 (3)

$$VP_c \text{ eq. usado} = P + 1'400,000\,(P/A, 55\%, 3) - 250,000\,(P/F, 55\%, 3)$$

$$VP_c \text{ eq. nuevo} = 1'500,000 + 1'000,000\,(P/A, 55\%, 3) - 500,000\,(P/F, 55\%, 3)$$

El valor límite se obtendrá cuando:

$$VP_c \text{ eq. nuevo} - VP_c \text{ eq. usado} = 0$$

o bien:

$$VP_c \text{ eq. nuevo} = VP_c \text{ eq. usado}$$

numericamente:

$$1'500,000 + 1'000,000\,(P/A, 55\%, 3) - 500,000\,(P/F, 55\%, 3) - P - 1'400,000\,(P/A, 55\%, 3) + 250,000\,(P/F, 55\%, 3) = 0$$

$$P = 1'500{,}000 + (1'000{,}000 - 1'400{,}000)(P/A, 55\%, 3) -$$
$$- (500{,}000 - 250{,}000)(P/F, 55\%, 3)$$

$$P = 1'500{,}000 - 400{,}000\,(P/A, 55\%, 3) - 250{,}000\,(P/F, 55\%, 3)$$
$$P = 1'500{,}000 \quad - 531{,}973 - 67{,}713$$
$$P = \quad 900{,}314.$$

que constituye el valor de (P) límite, o el valor de (P) en el punto de equilibrio de la decisión, y dado que el valor propuesto (P) para la compra del equipo usado es:

$$P = 950{,}000 + 70{,}000$$
$$P = 1'020{,}000 > 900{,}314.$$

luego, la compra del equipo usado, no es atractiva en estas condiciones, por lo que deberá procederse a adquirir el equipo nuevo, a menos que, con una contra-oferta, pudiese obtenerse el equipo usado en menos de :

$$\not{\,}830{,}314 \quad (= 900{,}314 - 70{,}000)$$

de tal forma que el costo total de adquisición del equipo, resultase menor de ⊄ 900,314.

El Método del Valor Presente, también permite la determinación - del NIVEL DE INVERSION MAS CONVENIENTE en el caso de alternativas mutuamente excluyentes que representen niveles sucesivos o - graduales de inversión, tal como el caso del recubrimiento de la tubería analizado con el Método del Costo Anual:

EJEMPLO :

Después de un estudio detallado de los presupuestos respectivos, se concluye que la construcción, operación y mantenimiento de un edificio de productos, presenta las alternativas que se señalan- en el cuadro siguiente y que implican varios niveles crecientes- de inversión inicial (incluyendo compra del terreno y construcción) con el consiguiente incremento en el monto de los gastos- totales anuales de operación, conservación, mantenimiento, im -- puestos, seguros, etc... por un lado, pero tambien con un aumento gradual del Ingreso Bruto anual esperado y del Valor de Recuperación tanto por el terreno como por el inmueble, al final de- un período de 10 años, considerado como horizonte económico prudente y realista, dada la naturaleza del negocio, mercado, competencia, ubicación, etc...

En base a un análisis cuidadoso de la situación imperante en el- momento de la selección del nivel de inversión más conveniente,- se considera prudente fijar como tasa interna mínima atractiva- de recueprración, una tasa de 125% efectiva.

alternativas	Inversión Inicial	Ingreso Bruto anual	Gastos anuales (o.c. y m.)	Valor de recuperación.
T-1	₡ 110	₡ 243	₡ 54	₡ 66
T-2	160	413	92	86
T-3	230	610	122	114
T-4	430	720	144	240
T-5	640	820	164	305

(cantidades en millones de pesos)

Comparemos las alternativas propuestas a traves del:

<u>Valor Presente de los beneficios de la inversión total:</u>

Inv. inicial 110 — V.R 66

I.U. : 243
E.U. : 54

0 — 10

(alternativa: T-1)

$$VP_{T-1} = -110 + (243-54)(P/A, 125, 10) + 66\,(P/F, 125, 10)$$
$$= -110 \qquad + 151.15 \qquad + 0.02$$

VP_{T-1} : $\underline{+41.17}$

160 — 86

I.U. : 413
E.U. : 92

0 — 10

(alternativa: T-2)

$$VP_{T-2} = -160 + (413-92)(P/A, 125, 10) + 86\,(P/F, 125, 10)$$

VP_{T-2} : $\underline{+96.75}$

230 — 114

I.U. : 610
E.U. : 122

0 — 10

(alternativa: T-3)

$$VP_{T-3} = -230 + (610-122)(P/A, 125, 10) + 114\,(P/F, 125, 10)$$

VP_{T-3} : $\underline{+160.32}$

430 — 240

I.U. : 720
E.U. : 144

0 — 10

(alternativa: T-4)

$$VP_{T-4} = -430 + (720-144)(P/A, 125, 10) + 240\,(P/F, 125, 10)$$

VP_{T-4} : $\underline{+30.73}$

640 — 305

I.U. : 820
E.U. : 164

0 — 10

(alternativa: T-5)

$$VP_{T-5} = -640 + (820-164)(P/A, 125, 10) + 305\,(P/F, 125, 10)$$

VP_{T-5} : $\underline{-115.27}$

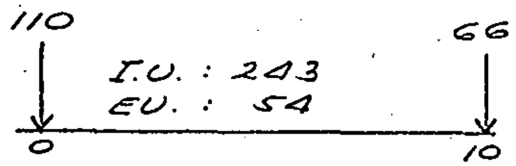
La alternativa más activa será la (T - 3) que presenta el V.P. más alto (ya que se están comparando las alternativas en función del beneficio neto).

Con el fin de maximizar la utilidad, habría que investigar la posibilidad de una alternativa que representase una inversión mayor que la de (T - 3) y cuyo V.P. de las utilidades fuese superior a los $ 160.32 millones, lo que representaria el nivel máximo de inversión, antes de iniciar el decenso de los V.P.

El análisis de las alternativas podría también llevarse a cabo mediante el análisis del: Valor Presente de los beneficios de la inversión adicional correspondiente a la inversión inicial, a los ingresos anuales, a los gastos de operación y a los valores de recuperación, que cada alternativa representa respecto a la anterior :

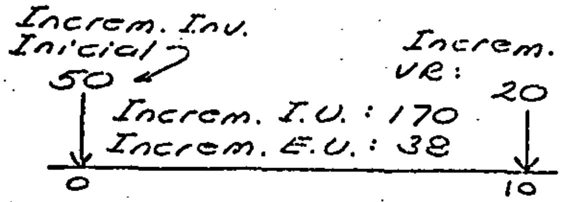
Alt.	Invers. inicial	Increm. Invers. Inicial	Ingres. Brut. anuales	Increm. Ingres. Brutos anuales	Gastos	Increm. Gastos	Valor Recup.	Increm. Valor Recup.
T-1	110	—	243	—	54	—	66	—
T-2	160	50	413	170	92	38	86	20
T-3	230	70	610	197	122	30	114	28
T-4	430	200	720	110	144	22	240	126
T-5	640	210	820	100	164	20	305	65

(cantidades en millones de pesos)



(alternativa : T-1)

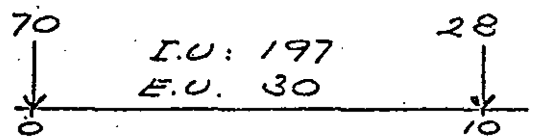
$$V.P._{T\text{-}1\,(adic)} = \underline{+41.17}$$



(alternativa : T-2)

$$VP_{T\text{-}2} = -50 + (170-38)\,(P/A, 125, 10) + 20\,(P/F, 125, 10)$$

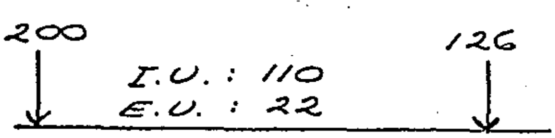
$$V.P._{T\text{-}2\,(adic.)} = \underline{+55.58}$$



(alternativa : T-3)

$$VP_{T\text{-}3} = -70 + (197-30)\,(P/A, 125, 10) + 28\,(P/F, 125, 10)$$

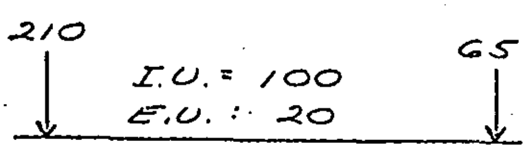
$$V.P._{T\text{-}3\,(adic.)} = \underline{+63.57}$$



(alternativa : T-4)

$$VP_{T\text{-}4} = -200 + (110-22)\,(P/A, 125, 10) + 126\,(P/F, 125, 10)$$

$$V.P._{T\text{-}4\,(adic.)} = \underline{-129.^{59}}$$



(alternativa : T-5)

$$VP_{T\text{-}5} = -210 + (100-20)\,(P/A, 125, 10) + 65\,(P/F, 125, 10)$$

$$V.P._{T\text{-}5\,(adic.)} = \underline{-146.^{00}}$$

Como ratificación a los resultados obtenidos con el criterio de la inversión total, concluimos que la alternativa más conveniente es la (T - 3), ya que la inversión extra o adicional que implica respecto a la (T - 2) se recupera con una tasa mayor que el 125% en tanto que la inversión extra de la (T - 4) respecto a la (T - 3) no se alcanza a recuperar al 125% y por tanto, no se justifica con el incremento adicional de gastos, ingresos y valor de recuperación, al menos con una t.i.m.a.r. de 125% y dentro de un horizonte económico de 10 años.

Nuevamente la maximización de las utilidades estaria lograda por una alternativa de mayor nivel de inversión que (T - 3) y cuyo V.P. en el cuadro anterior fuese 0 , ya que esto significaria que la inversión adicional respecto a (T - 3), se recupera exáctamente al 125%.

METODO DE LA TASA DE RECUPERACION

Este método de comparación de alternativas, consiste en calcular directamente la tasa de recuperación que se espera obtener de cada una de las alternativas de inversión propuestas, lo que se analiza a partir del flujo de ingresos y de egresos que en cada una de ellas se prevée, y seleccionando aquella que ofrezca la tasa de recuperación más alta, pero teniendo en cuenta la tasa interna mínima atractiva de recuperación de quien debe decidir.

El procedimiento a implementar para lograr lo anterior se basa en el hecho de que, en el proceso de una inversión, los ingresos brutos provenientes de la misma, tienen como finalidad:

a) recuperar todas las erogaciones, costos directos e indirectos, que la inversión implique.

b) proporcionar una recuperación o utilidad.

Ahora bien, al establecer la ecuación:

$$\boxed{\text{Costos} = \text{Ingresos}}$$

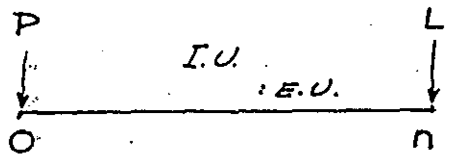
la variable que hace que se verifique la ecuación anterior es precisamente: la tasa de recuperación, o tasa de interes (i), y desde este punto de vista, podemos decir que:

"la tasa de recuperación (i) es el interes que hace que los costos (o erogaciones totales) sean equivalentes a los ingresos"

Dado que una inversión implicará ingresos y egresos, siempre se podrá calcular algún valor de (i), sin embargo, solo si el importe total de los ingresos es mayor que el de los egresos, el valor de esa tasa de interés será mayor que cero.

Claro está que para establecer la ecuación entre costos e ingresos, ambos deberán estar expresados en el mismo "tiempo", lo cual puede lograrse transportando todo el flujo de efectivo al punto 0 por ejemplo, para obtener el Valor Presente, o traduciéndolo a una serie uniforme equivalente.

Así por ejemplo, para el caso general y traducido el flujo de efectivo a una serie de anualidades uniforme equivalente:



La ecuación:

Costos = Ingresos

quedaría:

$$P \cdot {}_{i-n}crf + E.U. = I.U. + L \cdot {}_{i-n}sfdf$$

$$P \cdot {}_{i-n}crf - L \cdot {}_{i-n}sfdf + E.U. = I.U.$$

dado que: ${}_{i-n}sfdf = {}_{i-n}crf - i$

$$\boxed{(P-L)\ {}_{i-n}crf + L \cdot i + E.U. = I.U.}$$

usando otra notación:

$$\boxed{(P-L)\ (A/P,\ i\%,\ n) + L\,i + E.U. - I.U. = 0}$$

en la cual, la tasa (i) que verifica la ecuación se determina por iteraciones

De igual manera, solo que transportando el flujo de efectivo al punto 0 a fin de igualar Valores Presentes, se llegaría a:

$$\pm P \pm \sum_{j=1}^{n} F\,(P/F,\ i\%,\ j) \pm A\,(P/A,\ i\%,\ n) = 0$$

en donde el signo se aplicará dependiendo de si se trata de una erogación o de un ingreso.

EJEMPLO:

Se propone invertir en un inmueble en cuya compra inicial se requieren: $\$\,450{,}000$, y sobre el cual se espera recibir un ingreso de $\$\,75{,}000$ anuales con erogaciones de $\$\,30{,}000$ durante 10 años, al cabo de los cuales, se calcula se podrá vender en $\$\,200{,}000$. Se pide calcular la tasa de recuperación de la inversión.

$I.U. = 75{,}000/\text{año}$

$P = ¢400{,}000$ $\quad E.U. = 30{,}000/\text{año}$ $\quad L = 200{,}000$

0 ———————————————————— 10

Establezcamos la ecuación:

$$\text{Costos} = \text{Ingresos}$$

de acuerdo con la expresión desarrollada:

$$(P-L)\,{}_{i-n}crf + L\,i + E.U. = I.U.$$

que para los datos anteriores queda:

$$(400000-200{,}000)\,{}_{i-10}crf + 200{,}000\,(i) + 30{,}000 = 75{,}000$$

Para determinar el valor de (i), hagamos un primer intento con $i = 0\%$ (lo cual equivale a investigar si los ingresos netos son suficientes para recuperar los costos, sin tener en cuenta el factor: "valor del dinero con el tiempo")

$$200{,}000\,{}_{0-10}crf + 200{,}000\,(0) + 30{,}000 = 75{,}000$$

recordando que: $\quad \underset{i \to 0\%}{crf} \longrightarrow \frac{1}{n}$

entonces: $\quad {}_{0-10}crf \longrightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{10} = 0.1$

$$\therefore \qquad 20{,}000 + 30{,}000 \neq 75{,}000$$
$$50{,}000 < 75{,}000$$

restando ¢50,000 en ambos miembros de la desigualdad

$$0 < 25{,}000$$

lo que quiere decir que considerando una tasa de interes de 0%, los costos anuales < que los beneficios anuales por una diferencia de ¢25,000, lo que significa que a una tasa de 0% la inversión se recupera, más una utilidad adicional de ¢25,000 anuales.

Esta diferencia de ¢25,000, respecto a la inversión inicial, representa un porcentaje de:

$$400{,}000 \text{ ——————— } 100$$
$$25{,}000 \text{ ——————— } x$$

$$\therefore \; i \sim \frac{25{,}000}{400{,}000} \times 100 = 6.25\,\%$$

Hagamos un 2° intento considerando: $i = 7\%$

$$200{,}000 \; {}_{7\text{-}10}crf + 200{,}000\,(0.07) + 30{,}000 = 75{,}000$$
$$28{,}476 + 14{,}000 + 30{,}000 \neq 75{,}000$$
$$72{,}475 < 75{,}000$$
$$0 < 2{,}524$$

∴ a una tasa de interes del 7%:

$$C.A < BA \quad \text{por } \$\,2{,}524.$$

Hagamos un 3° intento considerando $i = 8\%$

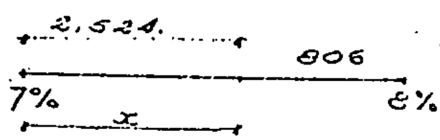
$$200{,}000 \; {}_{8\text{-}10}crf + 200{,}000\,(0.08) + 30{,}000 = 75{,}000$$
$$29{,}806 + 16{,}000 + 30{,}000 \neq 75{,}000$$
$$75{,}806 > 75{,}000$$
$$806 > 0$$

∴ a una tasa de interes del 8%

$$CA > BA \quad \text{por } \$\,806.$$

es decir, impactando una tasa de interes de 8% (como costo del dinero con el tiempo), los costos exceden a los ingresos, la inversión no se alcanza a recuperar por $ 806 anuales.

Interpolando:



$$x \;\text{———}\; 2{,}524$$
$$(8-7) \;\text{———}\; (2{,}524 + 806)$$

$$i = 7.0 + x = 7.0 + \frac{2{,}524}{(2{,}524 + 806)}\,(1.0)$$
$$i = 7.0 + 0.76$$

∴ la tasa de interes de la inversión propuesta es de:

$$i = 7.76\%$$

tratándose en este caso de una tasa <u>realmensual</u> que habrá que comparar (traducida a tasa efectiva de interés) con nuestra tasa interna mínima atractiva de recuperación para juzgar finalmente si la inversión propuesta nos es atractiva o no.

tasa efectiva de interes de la inversión propuesta:

$$i = \; spcaf - 1 = 2.4518 - 1 = 1.4518 = 145.18\%$$

Como mero indicador para el 2° tanteo, conviene indicar que:

si $P > L$, i final > i aprox. (obtenida con $i = 0\%$)
si $P = L$, i final = i (obtenida con $i = 0\%$)
si $P < L$, i final < i aprox. (obtenida con $i = 0\%$)

EJEMPLO

Se quiere calcular la tasa de recuperación de la inversión en un predio cuyo costo inicial es de: $ 425,000, y el cual, se espera produzca al ser rentado: $ 22,000 anuales netos (ya después de gastos) durante 5 años, al término de los cuales, se considera poder venderlo en: $ 625,000. Se establece por otro lado, que la "timar" es de 15%.

$P = 425,000$ — I.U. $I = 22,000/$ mes — $L = 625,000$ (0 … 5)

Establezcamos directamente la ecuación:

Costos = Ingresos

$$425,000\ {}_{i-5}crf = 22,000 + 625,000\ {}_{i-5}sfdf$$

Para un primer intento con una tasa de interes de 0%, recordemos que:

$${}_{i-n}crf \xrightarrow[i \to 0]{} \frac{1}{n} \qquad {}_{i-n}sfdf \xrightarrow[i \to 0]{} \frac{1}{n}$$

$$\therefore \quad 425,000\ (1/5) = 22,000 + 625,000\ (1/5)$$
$$85,000 < 22,000 + 125,000$$
$$85,000 < 147,000$$
$$0 < 62,000$$

$\therefore$ considerando $i = 0\%$: C.A. < B.A. por $ 62,000

Esta diferencia, con respecto a la inversión inicial de $ 425,000 representa un porcentaje de:

425,000 ———— 100
62,000 ———— x

$$\therefore \quad i \sim \frac{62,000}{425,000}(100) = 14.59\%$$

como $P<L$, la tasa final (i) deberá ser menor que la resultante de la primera aproximación.

Hagamos por tanto, un 2° intento considerando: $i = 12\%$

$$425{,}000\ {}_{12-5}crf = 22{,}000 + 625{,}000\ {}_{12-5}sfdf$$

$$117{,}899 < 22{,}000 + 98{,}481$$

$$117{,}899 < 120{,}381$$

$$0 < 2{,}482$$

∴ a una tasa de $i=12\%$: C.A. < B.A. por $ 2,482.

Hagamos un 3° intento considerando $i = 13\%$

$$425{,}000\ {}_{13-5}crf = 22{,}000 + 625{,}000\ {}_{13-5}sfdf$$

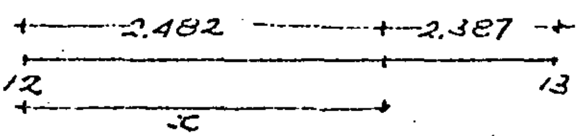
$$120{,}834 > 22{,}000 + 96{,}447$$

$$120{,}834 > 118{,}447$$

$$2{,}387 > 0$$

∴ a una tasa de $i=13\%$: C.A. > B.A. por $ 2,387

Para calcular la tasa de recuperación exacta, procedamos a interpolar:



$$x \text{ ——— } 2.482$$

$$(13-12) \text{ ——— } (2{,}482 + 2{,}387)$$

$$i = 12 + x = 12 + \frac{2.482}{(2.482 + 2.387)}(1.0)$$

$$i = 12 + 0.51$$

$$i = 12.51\ \%$$

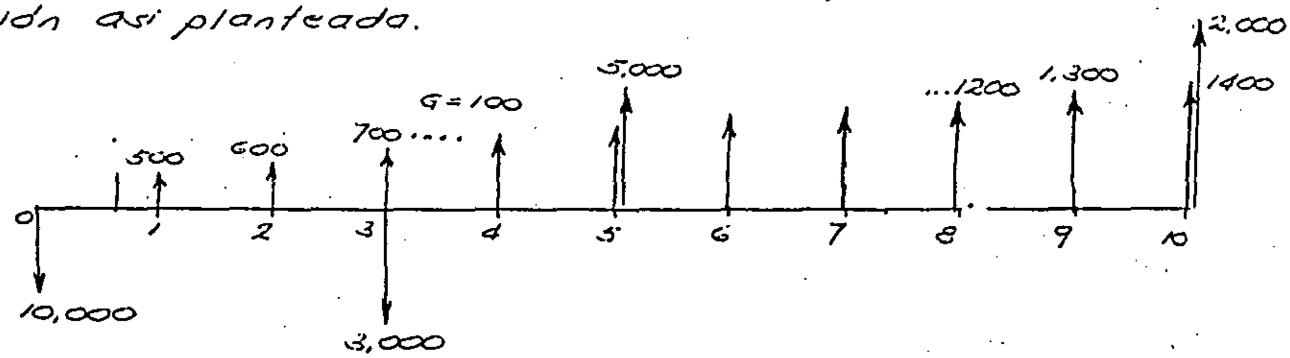
como tasa real mensual.

$$\text{tasa efectiva de interes. equival.} = {}_{12.51-12}spcaf - 1 = 311.43\%$$

EJEMPLO

Se propone una inversión que requiere egresos de: ¢10.000. al inicio y ¢3.000 tres meses después; y se preveen ingresos de: ¢500. al mes primero, ¢600. a los dos meses y así sucesivamente cantidades con incremento de ¢100. mensuales hasta el 10° mes. Se recibirán también cantidades globales adicionales de ¢ 5,000. en el 5° mes y de ¢2,000 en el 10° mes.

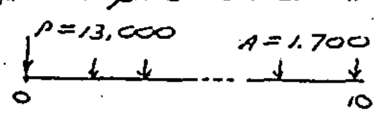
Se pide calcular la tasa de recuperación de la inversión así planteada.



Traduciendo el flujo de efectivo a V.P., dando signo (−) a los egresos y signo (+) a los ingresos e igualando la suma algebraica a 0, se obtiene:

$$0 = -10,000 - 3,000\ (P/F,\ i\%,\ 3) + 5,00\ \ (P/A,\ i\%,\ 10)$$
$$+ 100\ (P/G,\ i\%,\ 10) + 5,000\ (P/F,\ i\%,\ 5) + 2,000\ (P/F,\ i\%,\ 10)$$

Hagamos una comparación muy burda entre ingresos y egresos solo con el fin de tener una primera orientación para proceder al 1° tanteo:



donde $P = 10000 + 3.000 = 13,000$

y $A = 500 + \underbrace{500}_{\substack{prom: \\ 10 \times G \div 2}} + \dfrac{(5.000 + 2.000)}{10}$

$A = 1.700$

$P = A\ (P/A,\ i\%,\ 10)$

$1.3,000 = 1.700\ (P/A,\ i\%,\ 10)$

$7.65 = \ \ \ (P/A,\ i\%,\ 10)$

buscando en las tablas se encuentra para la igualdad anterior, un valor de : $i = 5.2\%$

Procedamos a un primer tanteo con: $i = 5\%$

$0 \neq -10{,}000 - 2{,}591.^{51} + 3{,}960.^{97} + 3{,}164.^{90} + 3{,}917.^{63} + 1{,}227.^{83}$
$0 \neq -420.^{28}$

2° tanteo con $i = 4\%$

$0 \neq -10{,}000 - 2{,}666.^{99} + 4{,}055.^{45} + 3{,}388.^{10} + 4{,}109.^{64} + 1{,}351.^{13}$
$0 \neq +237.^{33}$

Interpolando:

237.33 ——— 0 ——— $-420.^{28}$
4% ——— 5%
$\vdash$— x —$\dashv$

237.33 ——— x
$(237.33 + 420.^{28})$ ——— $(5-4)$

$$x = \frac{237.33}{657.61}(1) = 0.36$$

$$\therefore\ i = 4 + 0.36 = 4.36\,\%$$

como valor de la tasa de interes real mensual
La tasa efectiva correspondiente seria:

$$\text{tasa efectiva} = {}_{4.36-12}\text{spcaf} - 1 = (1 + 0.0436)^{12} - 1$$
$$= 1.67 - 1 = 0.67$$

$$\therefore\ i = 67\%$$

Idéntico resultado se obtendria estableciendo la ecuación de costos e ingresos en base a una serie uniforme equivalente, en cuyo caso, la expresión del flujo de efectivo adquiere la forma:

$$0 = -10{,}000\ (A/P, i\%, 10) - 3{,}000\ (P/F, i\%, 3)\cdot(A/P, i\%, 10) +$$
$$+ 500 + 100\ (A/G, i\%, 10) + 5{,}000\ (P/F, i\%, 5)\cdot(A/P, i\%, 10) +$$
$$+ 2{,}000\ (A/F, i\%, 10)$$

Procediendo a un primer tanteo con $i = 4\%$

$0 \neq -1{,}232.^{91} - 328.^{82} + 500 + 417.^{70} + 506.^{68} + 166.^{58}$
$0 \neq 29.^{23}$

2° tanteo con $i = 5\%$
$0 \neq -1{,}295.05 - 335.^{61} + 500 + 409.^{90} + 507.^{35} + 159.^{01}$
$0 \neq -54.40$

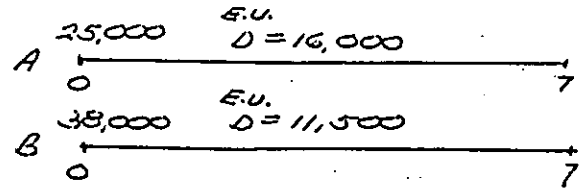
interpolando

29.23 ——— 0 ——— 54.40
4% ——— 5%
$\vdash$— x —$\dashv$

se obtiene una tasa real mensual de: $i = 4.36\%$
y una efectiva de: 67%

EJEMPLO

Analicemos dos alternativas de inversión cuya finalidad sea la de reducir costos, en un proceso ya establecido de producción:



La alternativa B implica una sobre-inversión inicial comparativamente más alta con respecto a A de ¢13,000.; pero la cual, se prevee originará ahorros anuales uniformes de ¢ 4,500. Lo anterior implica que se incrementen los ingresos netos anuales durante un horizonte económico de 7 años propuesto, a costa de una inversión adicional inicial de ¢ 13,000.

Dada que no contamos con los datos de la corriente completa de ingresos y egresos que cada alternativa implica a lo largo de 7 años, solo podemos hacer un análisis COMPARATIVO entre A y B, y analizar si se justifica la inversión adicional en B, con los ahorros que origina.

Establezcamos la igualdad entre los costos anuales adicionales y ahorros anuales, para calcular la tasa (i) que verifique dicha ecuación:

$$\overbrace{(38{,}000 - 25{,}000)\;{}_{i-7}crf}^{\text{costo anual adicional}} = \overbrace{16{,}000 - 11{,}500}^{\text{ingreso (ahorro) anual adicional}} \qquad (1)$$

$$13{,}000\;{}_{i-7}crf = 4{,}500$$

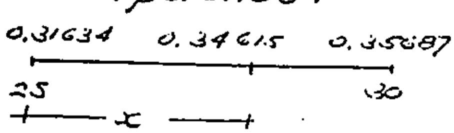
$${}_{i-7}crf = 0.34615$$

en tablas se observa que:

$${}_{25-7}crf = 0.31634$$

$${}_{30-7}crf = 0.35687$$

interpolando:



$$i = 25 + \frac{(0.34615 - 0.31634)}{(0.35687 - 0.31634)}(30 - 25)$$

$$i = 25 + 3.68$$

$$i = 28.68\ \%$$

El valor de : 28.68 % es la tasa de interes que hace a los costos equivalentes a los ingresos en la ecuación anterior. Es la tasa de recuperación de la inversión adicional de los $ 13,000, que se recupera con los ahorros de $ 4,500 anuales que origina durante los 7 años.

Faltaría comparar esta tasa con nuestra tasa interna mínima atractiva de recuperación, y suponiendo por ejemplo, que esta fuese en ese momento dado, de un 18 %, calificaríamos de inmediato la sobre inversión de $ 13,000 que la alternativa B representa, como muy atractiva.

Debe quedar claro, que este análisis solo determina si la inversión adicional que B implica respecto a A, se justifica ; es decir, sólo provee del criterio que permite elegir entre ambos alternativas.

La tasa de recuperación calculada, es la tasa de recuperación de la inversión extra, pero de ninguna manera de la inversión total, ya que para estimar esta, sería necesario contar con el dato del flujo de ingresos y egresos generales que cada una de las alternativas A y B implica.

Sin embargo, se trata de un problema de reducción de costos en un proceso ya en operación y plenamente justificado económicamente, y la duda por resolver se refiere exclusivamente a la conveniencia o no de llevar a cabo o no la sobre inversión que B requiere.

Ahora bién; la ecuación (1) puede expresarse :

$$38{,}000\,{}_{i-7}crf + 11{,}500 = 25{,}000\,{}_{i-7}crf + 16{,}000$$

de donde resulta que la tasa de recuperación (i) también establece una equivalencia entre los costos anuales.

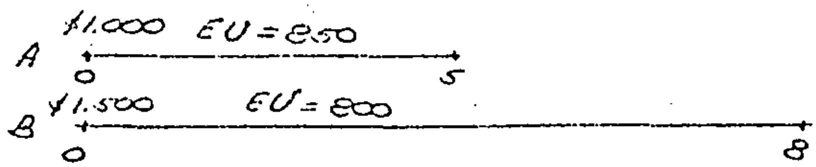
La importancia de lo anterior, radica en el hecho de que en ocasiones, resulta más simple calcular los costos anuales de las alternativas por comparar e igualarlos, que calcular el monto de la inversión adicional y de los ahorros que esta origina, para efectos del cálculo de la tasa de recuperación de la misma.

Esto resulta particularmente útil, en la comparación de alternativas con vidas económicas diferentes.

EJEMPLO

Una inversión A requiere un costo inicial de $1.000.; costos trimestr. uniformes equivalentes, de operación, conservación y mantenimiento de $850. y se le supone una vida económica de 5 trimest. Una alternativa B, implica $1.500 de costo inicial, costos de operación, conservación y mantenimiento uniformes trimestr. de $800 y se le considera una vida económica de 8 trimest. Se estima la tasa interna mínima atractiva de recuperación en un 80 %. El valor de recuperación de ambas alternativas al final de sus respectivos periodos, se considera despreciable.

Gráficamente, las alternativas anteriores se pueden representar :



Expresando los Costos trimest. uniformes equivalentes de cada alternativa, e igualándolos, se tiene :

$$1.000\,(A/P,\ i\%,\ 5) + 850 = 1.500\,(A/P,\ i\%,\ 8) + 800$$

1ª aproximación : con $i = 0\%$

$$1.000\,(A/P,\ 0\%,\ 5) + 850 = 1.500\,(A/P,\ 0\%,\ 8) + 800$$

recordando que: $\underset{i \to 0}{i\text{-}n^{crf}} \longrightarrow \frac{1}{n}$

$$1.000\,(1/5) + 850 \neq 1.500\,(1/8) + 800$$
$$1.050 > 988$$
$$62 > 0$$

∴ a una tasa de : $i = 0\%$: $CA_A > CA_B$ por \$62

o sea, que la alternativa de inversión extra, tiene menor C.A. a una tasa del 0%, por lo tanto, hay ventaja de \$62 trimestr. si la inversión se considera a 0%.

Expresando esta ventaja como un porcentaje de la inversión adicional inicial de \$500 que la alternativa B implica :

$$i \doteq \frac{62}{500} \doteq 12.4\,\%$$

pero: $P > L$ ∴ $i_{final} > i_{aprox.}$

2^a aproximación: con $i = 15\%$

$$1{,}000\ (A/P,\ 15\%,\ 5) + 850 \neq 1{,}500\ (A/P,\ 15\%,\ 8) + 800$$
$$1{,}14\overline{8} > 1{,}134$$
$$14 > 0$$

$\therefore$ a una tasa: $i = 15\%$ $\quad CA_A > CA_B$ por \$14.

$$i \doteq 15 + \frac{14}{500} \doteq 15 + 2.8 \doteq 17.8\%$$

3^a aproximación: con $i = 20\%$

$$1{,}000\ (A/P,\ 20\%,\ 5) + 850 \neq 1{,}500\ (A/P,\ 20\%,\ 8) + 800$$
$$1{,}184 < 1{,}191$$
$$0 < 7$$

$\therefore$ a una tasa: $i = 20\%$ $\quad CA_A < CA_B$ por \$7.

interpolando:

14	7
15%	20%
← x →	

$$x \text{ — } 14$$
$$(20-15) \text{ — } (14+7)$$

$$\therefore\ i = 15 + x = 15 + \frac{14}{14+7}(20-15) = 15 + \frac{14}{21} \cdot 5 = 18.3\%$$

como tasa real trimestral.

$$\therefore\ i_{efect.\,equiv.} = spcaf_{18.3-4} - 1 = 95.86\% > 80\%.$$

y dado que el valor de esta tasa de recuperación correspondiente a la inversión extra de \$500, es mayor que la tasa mínima atractiva de recuperación estimada en un 80% en el momento de la toma de la decisión, concluimos que se justifica invertir en la alternativa B.

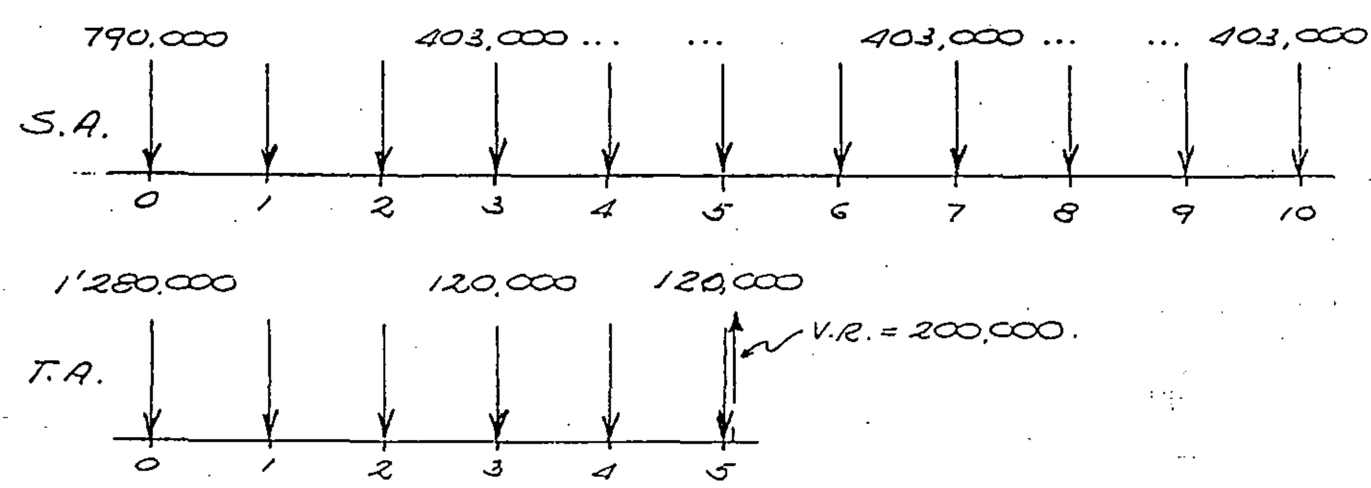
EJEMPLO:

A un fabricante se le presentan 2 alternativas en cuanto a la adquisición de una maquinaria que le es necesaria dentro de su planta de elaboración de productos.
Los 2 posibles modelos a elegir entre los cuales ha llegado a la conclusión - debe decidir, presentar las siguientes características:

	Semiautomática	totalmente Automática.
Inversión Total inicial	$ 790,000.	$ 1'280,000.
Gastos estimados anuales (considerados uniformes)	$ 403,000.	$ 120,000.
Valor esperado de Recuperación	0	$ 200,000.
Vida de servicio considerada (en años)	10	5

Determinar cual es la alternativa que más le conviene, si estima en el momento de decidir, que su Tasa interna mínima atractiva de recuperación es de un 70%.

En las condiciones anteriores, el diagrama de flujo de efectivo para cada una de las alternativas anteriores seria:



1o. Criterio de Análisis:

Analizando las alternativas con el método del Costo Anual y considerando que no contamos con mayores elementos de juicio para suponer un reemplazo de la alternativa (T.A.)a partir del 5o. año, que introdujese cambios considerables en esta alternativa en dos periodos conjuntos de 10 años en total, de acuerdo con lo establecido anteriormente, procederíamos:

$$CA_{S.A.} = 790{,}000.\ (A/P,\ 70\%,\ 10) + 403{,}000. \qquad = \quad 958{,}757.$$

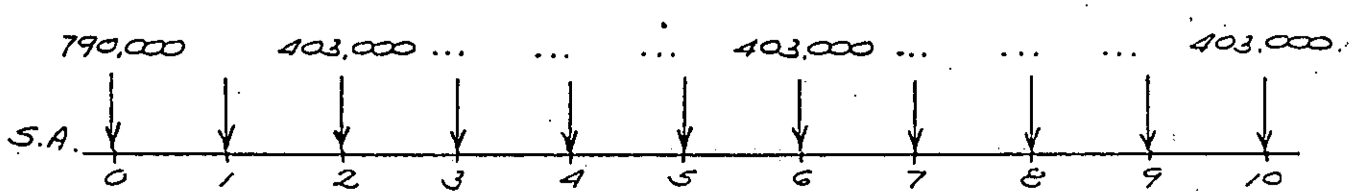
$$CA_{T.A.} = (1'280{,}000 - 200{,}000)\ (A/P,\ 70\%, 5) + + 200{,}000\ (0.70) + 120{,}000 \qquad = 1'073{,}279.$$

$$CA_{S.A.} < CA_{T.A.} \Rightarrow S.A. \succ T.A.$$

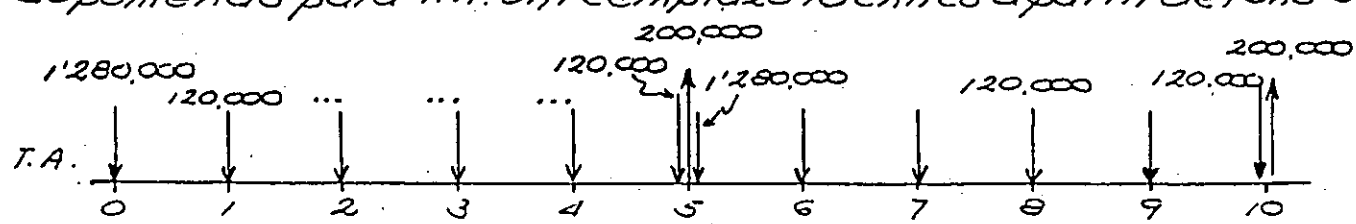
Lo que se interpreta en el sentido de que la sobre-inversión inicial que la maquinaria Totalmente Automática implica respecto a la Semi Automática,no se justifica con los ahorros que origina, al menos bajo un t.i.m.a.r. de 70%.

2o. Criterio de Análisis:

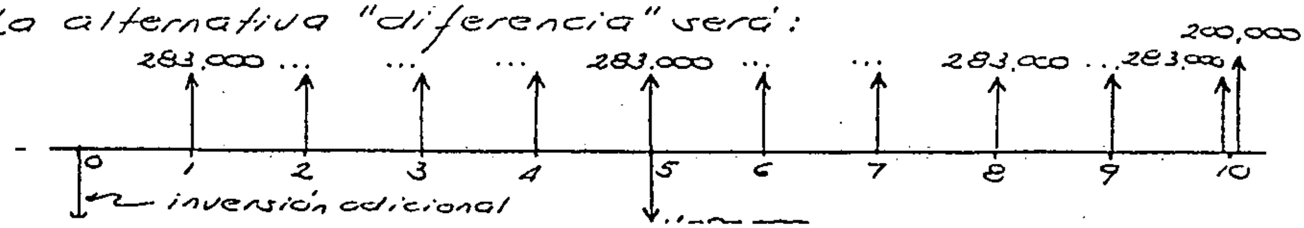
Comparemos ahora las alternativas con el método de la Tasa de Recuperación, procediendo de la siguiente manera:



Suponiendo para T.A. un reemplazo idéntico a partir del año 5:



La alternativa "diferencia" será:



La tasa de recuperación de la inversión adicional, que la máquina (T.A.) implica respecto a la máquina (S.A.), puede calcularse llevando la corriente de inversiones y ahorros anterior, a valor presente:

$$-490{,}000 + 283{,}000\ (P/A,\ i\ \%,\ 10) - 1'080{,}000\ (P/F,\ i\ \%, 5) + 200{,}000\ (P/F,\ i\ \%,\ 10) = 0$$

y mediante iteraciones e interpolación, se puede determinar que la tasa que verifica la ecuación es :

$$i = 39.9\ \%$$

<u>3o. Criterio de Análisis:</u>

Idéntico resultado se alcanzaria igualando las expresiones de los Costos Anuales de las dos alternativas:

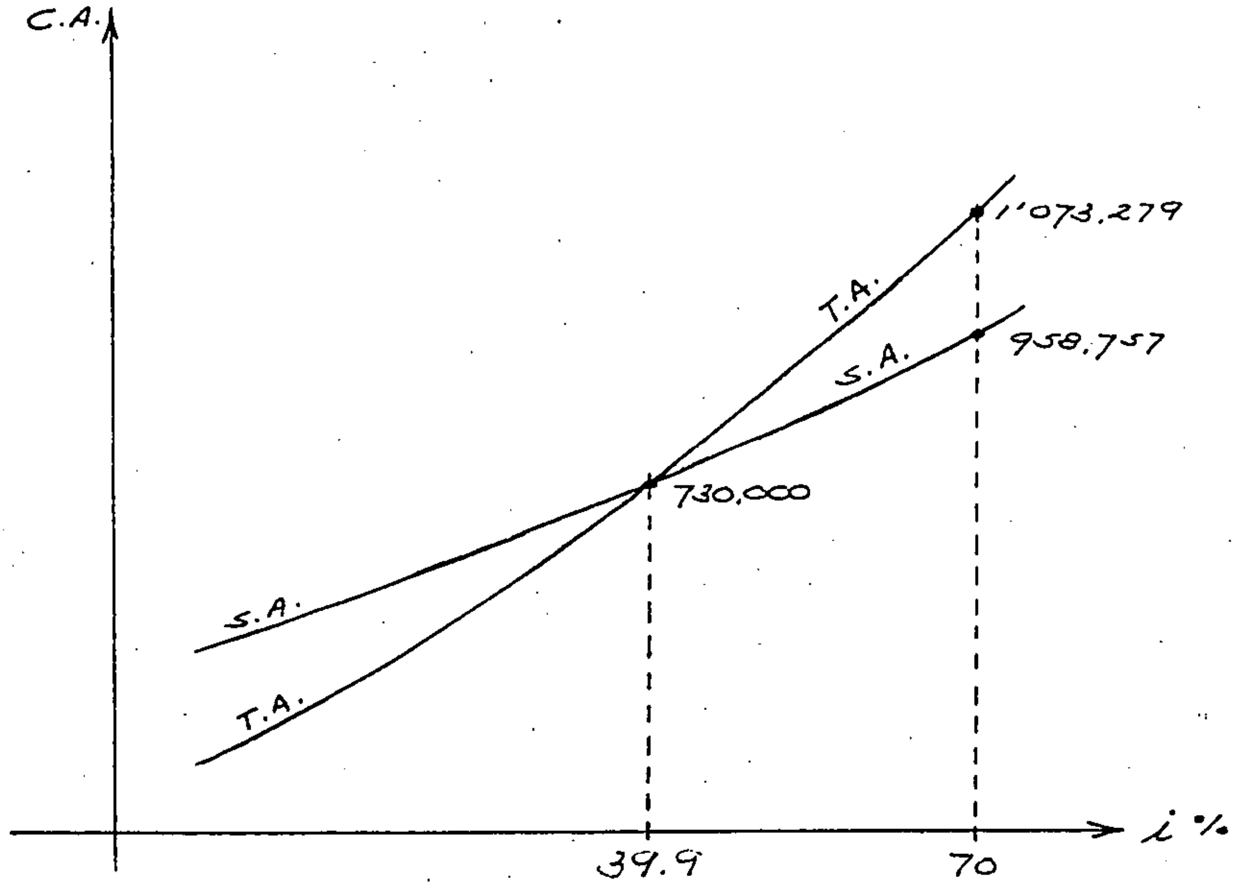
$$790{,}000\ (A/P,\ i\ \%, 10) + 403{,}000. = 1'280{,}000 (A/P,\ i\ \%,\ 5) + 120{,}000 - 200{,}000\ (A/F,\ i\%,\ 5)$$

resolviendo la ecuación anterior por iteraciones se obtendría:

$$i = 39.9\ \%$$

Ahora bién, dado que la tasa resultante de recuperación de la inversión adicional inicial es menor que la tasa mínima estipulada, la máquina de menor inversión inicial, la semi-automática, es la que deba ser comprada, Si la tasa resultante hubiese sido igual al 70% o mayor, si hubiese optado por la máquina totalmente automatizada.

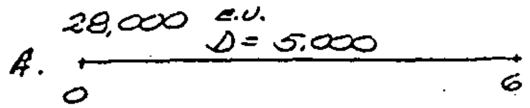
La tasa de 39.9% obtenida, puede visualizarse como el valor del " punto de equilibrio " o tasa de equilibrio de (i). Para ilustrar lo anterior, grafiquemos el Costo Anual uniforme equivalente de cada una de las 2 alternativas para diversos valores de (i), considerando los costos como positivos y los ingresos como negativos, lo que da lugar a la siguiente figura:



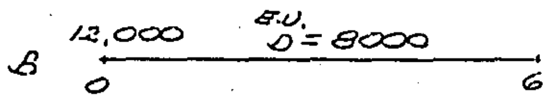
En la gráfica se observa que para valores de i menores al 39.9 %, los Costos Anuales de la máquina Totalmente Automática son menores que los correspondientes de la Semi Automática; y para valores de mayores al 39.9 %, los de la Totalmente Automática son mayores que los de la Semi Automática, por tanto, si la Tasa mínima atractiva de recuperación se hubiese fijado en un valor de 30% -- por ejemplo, se optaria por la máquina totalmente Automática ya - que siendo mayor el valor de 39.9 % encontrado, esta significaria que la inversión adicional inicial requerida por la Máquina (T.A.), se recupera a una tasa mayor que la mínima atractiva especificada, con los ahorros que origina respecto a la (S.A.).

Equivalencia entre los métodos de comparación de alternativas

Comparemos las alternativas siguientes, mediante los 3 métodos estudiados:



Consideremos una t.i.m.a.r. = 12%



Con el método del Costo Anual:

$$CA_A = 28{,}000\ (A/P, 12\%, 6) + 5{,}000 = 11{,}810.^{32}$$
$$CA_B = 12{,}000\ (A/P, 12\%, 6) + 8{,}000 = 10{,}918.^{71}$$

diferencia en contra de A : $891.^{61}$

Con el método del Valor Presente:

$$VP_A = 28{,}000 + 5{,}000\ (P/A, 12\%, 6) = 48{,}557.^{04}$$
$$VP_B = 12{,}000 + 8{,}000\ (P/A, 12\%, 6) = 44{,}891.^{26}$$

diferencia en contra de A : $3{,}665.^{78}$

Equivalencia entre los dos resultados anteriores:

$$891.^{61} = 3{,}665.^{78}\ (A/P, 12\%, 6)$$

Con el método de la Tasa de Recuperación:

la ecuación a plantear sobre la "alternativa diferencia" será:

$$(28{,}000 - 12{,}000)\ (A/P, i\%, 6) = (8{,}000 - 5{,}000)$$
$$16{,}000\ (A/P, i\%, 6) = 3{,}000$$

despejando:

$$(A/P, i\%, 6) = 0.1875$$

en tablas se leen los siguientes valores:

para $i = 3.5\%$ $(A/P, i\%, 6) = 0.18767$
para $i = 4.0\%$ $(A/P, i\%, 6) = 0.19076$
para $i = 3.0\%$ $(A/P, i\%, 6) = 0.1846$

interpolando, se obtiene:

$$i = 3.47\% < 12\%$$

De los 3 métodos se desprende que la sobreinversión en A, no se recupera ni siquiera al 12%, por lo que la alternativa B es la más conveniente.

Cada uno de los resultados anteriores sugiere conclusiones equivalentes, pero tiene diferentes significados y por tanto diferente interpretación.

En el caso del método del Costo Anual, el que la diferencia en costos anuales sea en contra de A, se interpreta en el sentido de que la inversión inicial adicional de $16,000, que A implica, no se alcanza a recuperar al 12% establecido como tasa interna mínima atractiva de recuperación, con los ahorros de $3,000 anuales que origina. Hay un faltante de $891.61 anualmente para que esto suceda. Por otro lado, el método no nos indica la tasa (menor al 12%) que dicha sobreinversión inicial reditua.

En el método del Valor Presente, la diferencia de $3,665.78 en contra de A, representa un deficit por esta cantidad, acumulado en el momento actual, en el momento 0, para que la inversión adicional que implica A se recupere al 12%. Este método tampoco indica la tasa, menor de 12% y por tanto insuficiente, que la inversión adicional de $16,000 reditua.

Los dos resultados anteriores son equivalentes, lo que se demuestra en la igualdad:

891.61 . (P/A, 12%, 6) = $3,665.98

Habrá que recordar, por otro lado, que en ambos casos, si la diferencia hubiese sido cero, (o mayor que cero, lógicamente) la alternativa más conveniente hubiese sido la A.

El método de la Tasa de Recuperación nos indica que la tasa con que la inversión adicional de $16,000.00 se recupera, mediante los ahorros en costo anual de operación que origina, es apenas de un 3.47% que resulta insuficiente considerando una tasa mínima de recuperación fijada de 12%.

Sin embargo en el caso particular que nos ocupa, el método de la tasa de recuperación, solo puede indicarnos la tasa de recuperación de la inversión adicional, pero no la de la inversión total, por carecer de datos respecto a la corriente completa de ingresos y egresos que cada alternativa presente.

Puede decirse que en la mayoria de los casos, el resultado expresado mediante la tasa de recuperación de las inversiones, es mas objetivo y representativo, a los ojos de aquellos que dentro de una empresa, deben tomar las decisiones en cuanto a destinar los recursos de la empresa en las alternativas más favorables para la misma.

Hay muchas ocasiones en que un análisis superficial de una - situación dada, puede conducirnos a una valorización erronea de la tasa de interes que se está pagando por el capital en esa situación dada.

Veamos un ejemplo:

Supongamos que un predio está en venta por \$ 2'400,000 en -- las siguientes condiciones:

\$ 400,000 en efectivo y \$ 2'000,000 pagaderos mensualmente - durante 15 años a una tasa nominal del 60%. Se requiere pagar -- además : \$ 60,000. de gastos de apertura de crédito.

Ahora bien, si se paga al contado, se logra un descuento y en estas condiciones el predio podrá adquirirse por \$ 2'100,000 y - lógicamente, no habrá gastos adicionales por apertura y tramitación de crédito.

Los pagos uniformes mensuales para cubrir los \$ 2'000,000 serán:

número de meses : 15 x 12 = 180
tasa real mensual: 60/12 = 5%

∴ A = 2'000,000 (A/P, 5%, 180)
A = \$ 100,015./ mes durante 15 años.

Se presentan entonces al comprador 2 alternativas:

a) Pagar: \$ 400,000 + 60,000 = 460,000 de inmediato y
\$ 100,015 mensualmente durante 15 años.

b) Pagar: \$2'100,000 y terminar la transacción.

Es claro entonces, que de cualquier manera, debe desembolsar al menos: \$ 460,000 en forma inmediata, por lo que las alternativas se reducen en última instancia, a conseguir \$ 1'640,000 -- más (para que con los \$ 460,000 se completen los \$ 2'100,000 y -

se compre al contado) o pagar $ 100,015. mensuales durante 15 -- años. Es decir:

$ 1'640,000 ahora contra $ 100,015 mensuales

La tasa real que al comprador le representa optar por los pagos mensuales, es de:

$$1'640,000\ (A/P,\ i\%,\ 180) = 100,015.$$

$$(A/P,\ 1\%,\ 180) = \frac{100,015.}{1'640,000.} = 0.06098$$

$i = 6.1\ \%$ como tasa real mensual

$$i_{efect.} = \underset{c.1-12}{spcaf} - 1 = (1 + 0.061)^{12} - 1$$

$$= 2.0351 - 1$$

$$= 1.0351$$

$$\therefore\ i_{efect.} = 103.51\ \%$$

que es la tasa real que debe tomar en cuenta el comprador como -- costo del capital, al tomar su decisión y que resulta ser mucho -- más alta que la tasa de interes del 60% que a la luz de las con-- diciones reales, representa una tasa de interes solo aparente.

======================

DETERMINACION DELNIVEL MAS ECONOMICO DE INVERSION.

El problema de determinar el nivel más económico de inversión, en una serie de alternativas " graduales ", también puede resol-- verse mediante el Método de la Tasa de Recuperación.

EJEMPLO

Determinar el espesor más económico del aislante con el cual - se desea recubrir la red de tuberias del problema planteado con anterioridad y resuelto con el Método del Costo Anual.

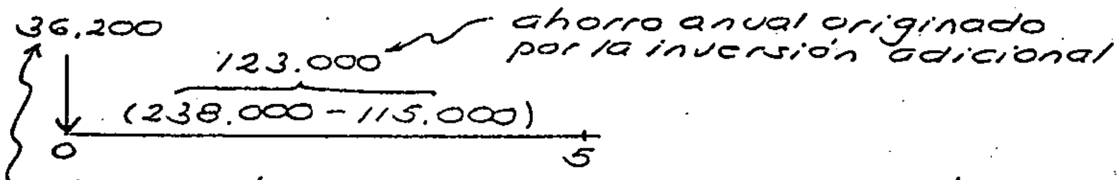
Refiriéndonos a los datos de los cuadros de las páginas 134y137y dado que no se cuenta más que con los egrésos generados en cada alternativa, el análi--

sis, entre las mismas, solo podrá ser comparativo, por lo que únicamente podemos proceder calculando la:

<u>Tasa de recuperación de la inversión adicional</u>

que cada alternativa de espesor de aislamiento, implica respecto a la de un espesor menor. En el caso del espesor "0", (no poner aislante), no hay alternativa anterior, en estas condiciones:

- <u>Para el aislamiento de espesor #1</u> (respecto a "0")



inversión adicional al pasar de: 0 a 36,200

En estas condiciones, la ecuación:

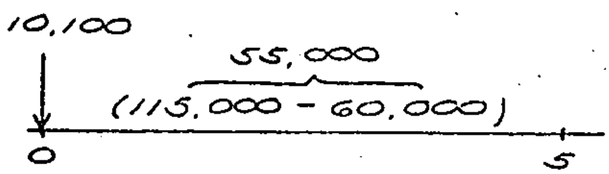
Costos = Ingresos

queda:

$$36{,}200\,(A/P,\ i\%,\ 5) = 123.000$$

de donde: $i = 339.57\ \%$

- <u>Para el aislamiento de espesor #2</u> (respecto a #1)

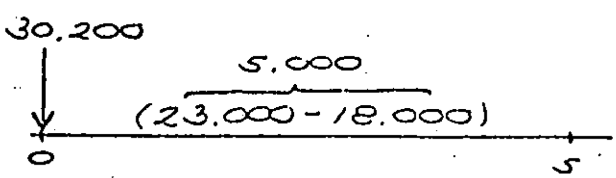


La ecuación queda:

$$10.100\,(A/P,\ i\%,\ 5) = 55.000$$

de donde: $i = 544.50\ \%$

- <u>Para el aislamiento de espesor #5</u> (respecto a #4)



(observamos que ni aun la suma aritmética de la corriente de A, (¢25.000) recupera a ¢30.200)

La ecuación queda:

$$30.200\,(A/P,\ i\%,\ 5) = 5.000$$

de donde: $i = -5.99\ \%$

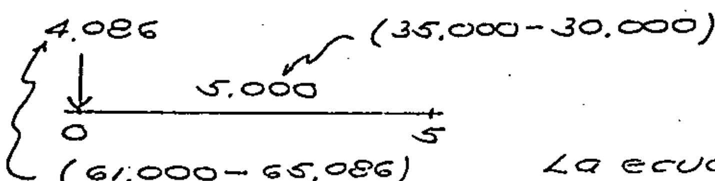
Procediendo de igual manera con los restantes espesores, encontramos los resultados que se resumen en el siguiente cuadro:

espesor del aislamiento	tasa de recuperación de la inversión adicional
0	——
#1	339.57 %
#2	544.50 %
#3	168.86 %
#4	58.75 % < 120. %
#5	− 5.99 %
#6	− 31.88 %

La alternativa más atractiva de inversión es la que corresponde al aislamiento de espesor #3 cuya tasa de recuperación (de la inversión adicional y no de la inversión total) es de:

$$168.86\,\% > 120\,\%$$

Nuevamente, en el plan de maximización, de contarse con un aislamiento de espesor #3-A, cuya inversión inicial fuese: ¢ 65,086 y pérdida anual por pérdidas de calor de: ¢30.000, constituiría la alternativa óptima, ya que la inversión adicional que implicara respecto a la alternativa de aislamiento #3, se recuperaría:



La ecuación: Costos = Ingresos, quedaría:

$$4.086\,(A/P,\, i\%,\, 5) = 5{,}000$$

de donde: $i = 120\,\% = t.i.m.a.r.$

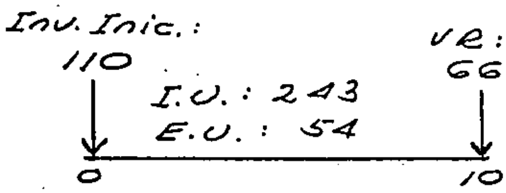
Nota: queremos recalcar que no estamos calculando la tasa de recuperación de la inversión total, y dado que buscamos responder a la pregunta: ¿"hasta qué nivel" es atractivo invertir? procedemos comparando nivel por nivel hasta aquel en que la tasa de recuperación de la inversión adicional, no sea menor a la t.i.m.a.r.

EJEMPLO :

Resolvamos el problema del edificio de productos resuelto anteriormente con el método del Valor Presente, ahora por medio del cálculo de la Tasa de Recuperación.

A partir de los datos constatados en la tabla de la página 156, calculemos la : TASA DE RECUPERACION DE LA INVERSION TOTAL de cada una de las alternativas : T-1, T-2, T-3, T-4, y T-5, de la siguiente manera:

Para la Alternativa (T-1) :



Estableciendo la ecuación:

Costos = Ingresos

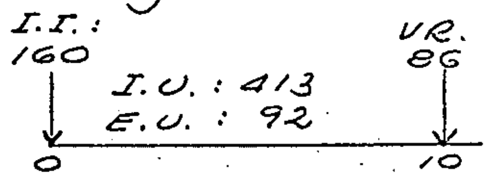
y expresando ambos miembros de la misma en anualidades uniformes equivalentes :

$$(110-66)(A/P, i, 10) + 66(i) + 54 = 243$$

calculando el valor de (i) en la ecuación anterior con el auxilio de tablas financieras e interpolando o bien, mediante una calculadora financiera, se obtiene :

$$i = 171.82\ \%$$

de igual manera, para la Alternativa (T-2) :



La ecuación tendría la forma:

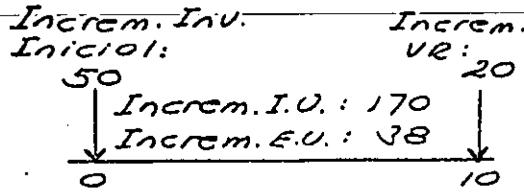
$$(160-86)(A/P, i, 10) + 86(i) + 92 = 413$$

de donde se obtiene: $i = 200.62\ \%$

De manera similar y a partir de los datos de la tabla de la página 157, se puede calcular la :

TASA DE RECUPERACION DE LA INVERSION ADICIONAL que cada alternativa implica respecto a la anterior, de la siguiente manera :

Para la alternativa (T-2): (respecto a: T-1)



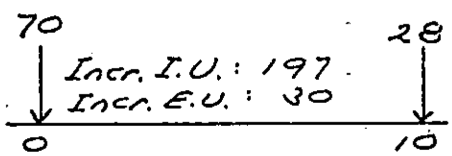
La ecuación: Costos = Ingresos quedaría planteada:

$$(50-20)\,(A/P, i, 10) + 20(i) + 38 = 170$$

de donde se obtiene: $i = 264\%$

[Para el caso de la alternativa (T-1) no puede realizarse este tipo de análisis comparativo puesto que no existe alternativa anterior a la misma, por lo que la tasa (i) será al igual que en el caso de la "inversión total": $i = 171.82\%$

Para la alternativa (T-3): (respecto a T-2)



$$(70-28)\,(A/P, i; 10) + 28(i) + 30 = 197$$

de donde se obtiene: $i = 238.57\%$

El resumen de los resultados que se obtienen aplicando los 2 criterios anteriores a todas las alternativas, se muestra en la siguiente tabla:

alternativa	tasa de recup. de la inversión total:	tasa de recup. de la inversión adicional:
T-1	171.82 %	171.82 %
T-2	200.62 %	264. %
T-3	212.17 %	238.57 %
T-4	133.94 %	43.55 %
T-5	102.45 %	36.95 %

< 125%

< 125%

De ambos criterios se desprende, confirmando los reusltados obtenidos con el Método del Valor Presente, que la alternativa más económica es la (T - 3).

La maximización se obtendría con una alternativa hipotética entre (T-2) y (T-3) ó entre (T-3) y (T-4) -- con tasa de recuperación de la inversión total, mayor de - - 212.17% y tasa de recuperación de la inversión adicional de 125% exactamente.

Vistas en forma aislada, y de no existir las otras alternativas de inversión, cada una de ellas, (excepto T-5) representa una buena alternativa de inversión, pués todas ellas - ofrecen una tasa de recuperación para la inversión total mayor de 125%, pero al existir otras opciones o " niveles " de inversión, y ser mutuamente excluyentes (solo se invierte en una de ellas), se busca invertir en la que más alta - tasa de recuperación ofrece para la inversión, siempre y - - cuando la recuperación adicional que implique respecto a la- alternativa anterior, se justifique a si misma con los beneficios que origine, y se recupere a una tasa no menor de la- t.i.m.a.r.

Y así por ejemplo, en el caso de la alternativa (T-4) que ofrece una tasa de recuperación de 133.94% > 125%, la inversión adicional que implica comparativamente con la (T-3), no se justifica a si misma con los beneficios y ahorros que- ella misma origina, pues se recupera a una tasa de 43.55% - que resulta ser menor que el 125% (t.i.m.a.r.)

Esto, de hecho es lo que origina que la inversión total disminuya comparativamente en su recuperación, de 212.17% en - la (T-3) a 133.94% en la (T-4).

Veamos ahora la sistematización de los principios vertidos en el último tema, en el método que en la literatura de lengua inglesa se denomina: "discounted cash flow method", para el cálculo de la tasa de recuperación de una inversión propuesta y cuya mecánica consiste fundamentalmente en actualizar ("descontar") la corriente neta de efectivo (net cash flow) a distintas tasas de interes, razón por la cual la denominación correcta del método en nuestra terminología, consideramos sería la de: "método del flujo actualizado de efectivo."

EJEMPLO

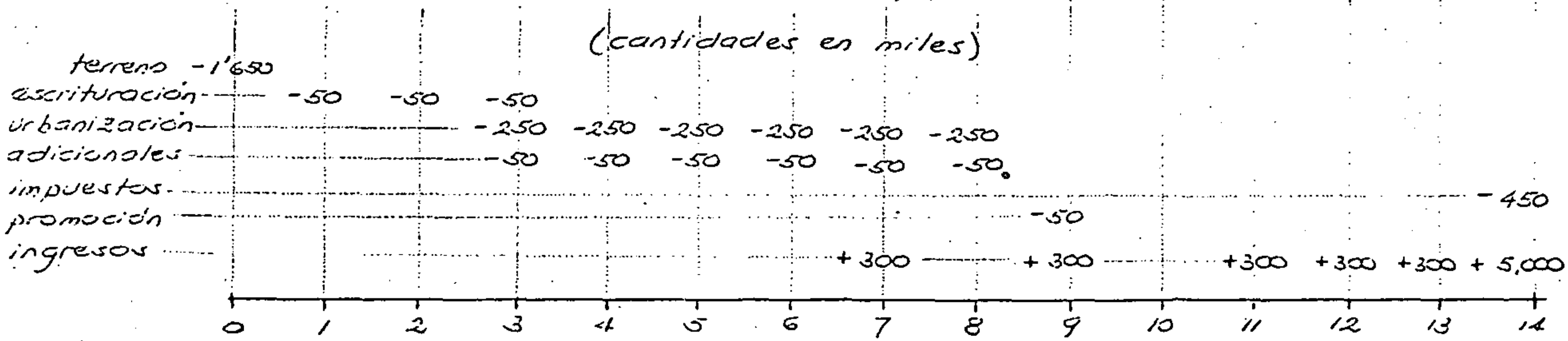
Consideremos la posible inversión en un predio el cual se pretende fraccionar y urbanizar para efecto de vender los lotes resultantes y cuyo flujo de efectivo se prevea bajo los siguientes condiciones:

◦) Compra inicial del predio	: $ 1'650,000.
◦) Pago de escrituras y gastos notariales	: 150,000.
Erogados en 3 pagos de $50,000 cada uno durante el: 1°, 2° y 3° meses	
◦) Obras de urbanización	: 1'500,000.
Erogados a razón de $250,000 mensuales durante los meses 3°, 4°, 5°, 6° 7° 8°	
◦) Trabajos adicionales de acondicionamiento, decoración, etc...	: 200,000.
Erogados a razón de $50,000 durante los mismos meses 3° a 8°.	
◦) Pago global de impuestos, el cual se supone concentrado al final durante el mes 14°	: 450,000.
◦) Gastos de promoción de ventas durante el 9° mes	: 50,000
Suma bruta de egresos	: $ 4'100,000.

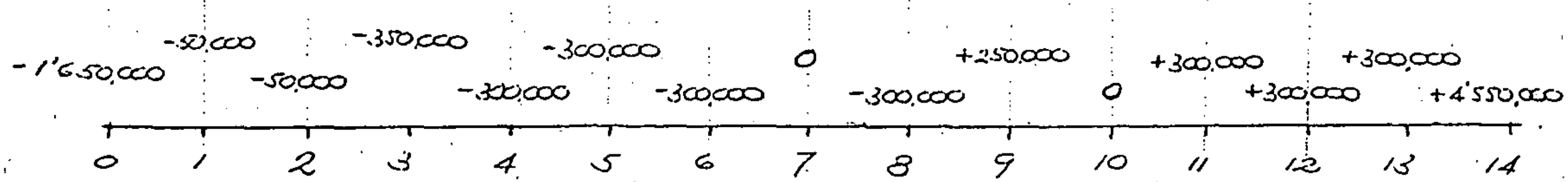
Por otro lado, se espera captar los ingresos por concepto de la venta de los lotes, de la siguiente forma:

◦) $300,000 durante los meses: 7°, 9°, 11°, 12°, 13°	: $ 1'500,000.
◦) Durante el mes 14°	5'000,000
Suma bruta de ingresos esperados	: $ 6'500,000

Indicando en una escala de tiempos de 14 meses de duración, el flujo de efectivo anterior, adjudicando signo (-) a los egresos y (+) a los ingresos y siguiendo la convención usual de considerar concentrados al final del periodo los movimientos de efectivo supuestos a lo largo de cada uno de ellos, la escala resultante nos queda:



Sumando algebraicamente las cantidades indicadas en cada uno de los periodos, obtenemos el flujo neto de efectivo (net cash flow):



Procedamos a elaborar la siguiente tabla:

mes	flujo neto de efectivo	Factor de actualización sppwf. al 8%	V. P. al 8%	Factor de actualización sppwf. al 5%	V.P. al 5%
0	-1'650.000	1.000	-1'650,000	1.000	-1'650.000
1	- 50,000	0.92593	- 46.297	0.95238	- 47.619
2	- 50.000	0.85734	- 42,867	0.90703	- 45.351
3	-350.000	0.79383	-277,841	0.86384	-302,344
4	-300.000	0.73503	-220,509	0.82270	-246,810
5	-300,000	0.68058	-204.174	0.78353	-235.059
6	-300,000	0.63017	-189.051	0.74622	-223,866
7	0	———	0	———	0
8	-300.000	0.54027	-162.081	0.67684	-203,052
9	+250,000	0.50025	+125.063	0.64461	+161,152
10	0	~~0.42888~~	0	———	0
11	+300,000	0.42888	+128,664	0.58468	+175.404
12	+300,000	0.39711	+119.133	0.55684	+167,052
13	+300,000	0.36770	+110,310	0.53032	+159,096
14	+4'550,000	0.34046	+1'549.093	0.50507	+2'298,068
	+2'400,000		- 760.557		+ 6.671.

La segunda columna es la actualización de las cantidades individuales en cada periodo, con una tasa de interes del 0%, por lo que está constituida sencillamente por el flujo neto de efectivo y tiene como interpretación el determinar simplemente si la suma bruta de los ingresos esperados, supera a la suma total de los ingresos presupuestados, sin impactar aun con valor alguno el costo del dinero con el tiempo.

La 3ª y 5ª columnas son los factores de actualización a tasas de 8% y 5% respectivamente, así por ejemplo:

$${}_{8-0}sppwf = 1.000 \qquad {}_{5-0}sppwf = 1.000$$

$${}_{8-1}sppwf = 0.92593 \qquad {}_{5-1}sppwf = 0.95238$$

$${}_{8-2}sppwf = 0.85734 \qquad {}_{5-2}sppwf = 0.90703$$

La 4ª y 6ª columnas son la actualización (Valores Presentes) del flujo neto de efectivo, con un primer tanteo considerando una tasa del 8% y un segundo tanteo a un 5%.

Con los valores "suma algebraica" de las 2 columnas anteriores, se procede a una interpolación a fin de determinar el valor de la tasa de interes que establece y verifica la igualdad en la ecuación de costos e ingresos:

6.671 760.557

5% 8%

x

$$x \text{ —— } 6.671$$
$$(8-5) \text{ —— } 767.228$$

$$i = 5 + \frac{6.671}{767.228} \times 3 = 5 + 0.026$$

$$i = 5.03\ \%$$

Dado que los periodos seleccionados para el análisis del problema y por ende, de la escala de tiempos, fueron mensuales, la tasa obtenida: 5.03 % será la tasa real mensual, por lo que es necesario obtener la tasa efectiva a fin de poder comparar la tasa que brinda la alternativa de inversión ofrecida, con la tasa interna mínima atractiva de recuperación o con las tasas de recuperación de otras alternativas de inversión y que estén expresadas, como es normal, en forma de tasa anual.

$$i_{efect.} = {}_{5.03-12}spcaf - 1$$
$$= (1 + 0.0503)^{12} - 1$$
$$= 1.80202 - 1$$
$$= 0.80202$$

$$\therefore\ i = 80.2\ \%$$

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

"Engineering Economy"
E. Paul De Garmo
Ed. Collier Mac Millan (5a. edición) en adelante

"Engineering Economics"
James L. Riggs
Mc. Graw Hill Book Company.

"Principles of Engineering Economy"
E. Grant - Ireson
Ronald Press. (5a. edición) en adelante

"Engineering Economy"
H.G. Thuesen
W.J. Fabrycky
Prentice Hall. (5a. edición en adelante)

"Managerial and Engineering Economy"
George Taylor
Ed. Van Nostrand
Ed. Litton Educational Publishing Inc.

"Economic Analysis for Engineering and Managerial Decisión-making"
N.N. Barish
Mc. Graw Hill Book Company

"Analytic Models for Managerial and Engineering Economics".
Schweyer
Ed. Reinhold.

"Engineering Economy: Analysis of Capital Expenditures"
Gerald W. Smith
The Iowa State University Press

"Engineering Economy: A Behavioral Approach"
Anthony J. Tarquin
Leland T. Blank
Mc. Graw Hill Book Company.

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS INSTITUCIONALES

ANALISIS DE INVERSIONES EN
EL CAMPO DE LA INGENIERIA

DEL 1o. DE MARZO AL 7 DE ABRIL

COMISION FEDERAL DE ELCTRICIDAD

TABLAS FINANCIERAS

EXPOSITOR:

RUBEN TELLEZ SANCHEZ

MEXICO, D.F.

½% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, ½, N)	(P/F, ½, N)	(A/P, ½, N)	(P/A, ½, N)	(A/F, ½, N)	(F/A, ½, N)	(A/G, ½, N)	N
1	1.0050	.99503	1.0051	.9949	1.0001	.9998	.0000	1
2	1.0100	.99008	.50385	1.9847	.49885	2.0046	.4613	2
3	1.0150	.98515	.33674	2.9696	.33174	3.0143	.9537	3
4	1.0201	.98025	.25318	3.9497	.24818	4.0292	1.4531	4
5	1.0252	.97538	.20305	4.9248	.19805	5.0491	1.9462	5
6	1.0303	.97052	.16963	5.8951	.16463	6.0741	2.4413	6
7	1.0355	.96570	.14576	6.8606	.14076	7.1043	2.9364	7
8	1.0407	.96089	.12786	7.8213	.12286	8.1396	3.4304	8
9	1.0459	.95611	.11393	8.7772	.10893	9.1800	3.9231	9
10	1.0511	.95136	.10279	9.7282	.09779	10.225	4.4140	10
11	1.0563	.94663	.09368	10.674	.08868	11.276	4.9063	11
12	1.0616	.94192	.08609	11.616	.08109	12.332	5.3959	12
13	1.0669	.93723	.07966	12.553	.07466	13.394	5.8857	13
14	1.0723	.93257	.07415	13.485	.06915	14.460	6.3752	14
15	1.0776	.92793	.06938	14.413	.06438	15.532	6.8614	15
16	1.0830	.92332	.06520	15.336	.06020	16.610	7.3489	16
17	1.0884	.91872	.06152	16.255	.05652	17.693	7.8351	17
18	1.0939	.91415	.05824	17.168	.05324	18.781	8.3198	18
19	1.0993	.90961	.05531	18.078	.05031	19.874	8.8046	19
20	1.1048	.90508	.05268	18.983	.04768	20.974	9.2892	20
21	1.1103	.90058	.05029	19.883	.04529	22.078	9.7715	21
22	1.1159	.89610	.04812	20.779	.04312	23.183	10.253	22
23	1.1215	.89164	.04614	21.671	.04114	24.304	10.735	23
24	1.1271	.88721	.04433	22.558	.03933	25.425	11.216	24
25	1.1327	.88280	.04266	23.440	.03766	26.552	11.695	25
26	1.1384	.87841	.04112	24.318	.03612	27.685	12.173	26
27	1.1441	.87404	.03969	25.192	.03469	28.823	12.652	27
28	1.1498	.86969	.03837	26.062	.03337	29.967	13.129	28
29	1.1555	.86536	.03714	26.927	.03214	31.116	13.605	29
30	1.1613	.86106	.03599	27.788	.03099	32.272	14.081	30
31	1.1671	.85678	.03491	28.644	.02991	33.433	14.555	31
32	1.1730	.85251	.03390	29.497	.02890	34.600	15.029	32
33	1.1788	.84827	.03296	30.345	.02795	35.772	15.501	33
34	1.1847	.84405	.03206	31.189	.02706	36.951	15.974	34
35	1.1906	.83986	.03122	32.029	.02622	38.135	16.446	35
40	1.2207	.81918	.02765	36.164	.02265	44.147	18.790	40
45	1.2516	.79901	.02488	40.198	.01988	50.311	21.113	45
50	1.2831	.77933	.02266	44.133	.01766	56.630	23.416	50
55	1.3155	.76014	.02085	47.971	.01585	63.109	25.699	55
60	1.3487	.74142	.01934	51.716	.01434	69.751	27.960	60
65	1.3828	.72317	.01806	55.366	.01306	76.561	30.201	65
70	1.4177	.70536	.01697	58.928	.01197	83.543	32.422	70
75	1.4535	.68799	.01603	62.401	.01103	90.701	34.622	75
80	1.4902	.67105	.01520	65.790	.01020	98.040	36.802	80
85	1.5278	.65453	.01447	69.094	.00947	105.56	38.961	85
90	1.5663	.63841	.01383	72.318	.00883	113.27	41.099	90
95	1.6059	.62269	.01325	75.462	.00825	121.18	43.218	95
100	1.6464	.60736	.01273	78.528	.00773	129.29	45.316	100

1% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 1, N)$	$(P/F, 1, N)$	$(A/P, 1, N)$	$(P/A, 1, N)$	$(A/F, 1, N)$	$(F/A, 1, N)$	$(A/G, 1, N)$	N
1	1.0100	.99010	1.0100	.9900	1.0000	.9999	.0000	1
2	1.0201	.98030	.50757	1.9701	.49757	2.0097	.4864	2
3	1.0303	.97059	.34006	2.9406	.33006	3.0297	.9813	3
4	1.0406	.96099	.25631	3.9014	.24631	4.0598	1.4751	4
5	1.0510	.95147	.20606	4.8528	.19607	5.1003	1.9675	5
6	1.0615	.94205	.17257	5.7947	.16257	6.1512	2.4581	6
7	1.0721	.93273	.14865	6.7273	.13865	7.2125	2.9469	7
8	1.0828	.92349	.13071	7.6507	.12071	8.2845	3.4349	8
9	1.0936	.91435	.11675	8.5649	.10675	9.3672	3.9209	9
10	1.1046	.90530	.10560	9.4701	.09560	10.460	4.4047	10
11	1.1156	.89634	.09647	10.366	.08647	11.565	4.8872	11
12	1.1268	.88746	.08886	11.253	.07886	12.680	5.3682	12
13	1.1380	.87868	.08242	12.132	.07242	13.807	5.8476	13
14	1.1494	.86998	.07691	13.002	.06691	14.945	6.3253	14
15	1.1609	.86137	.07213	13.863	.06213	16.094	6.8010	15
16	1.1725	.85284	.06795	14.716	.05795	17.255	7.2754	16
17	1.1842	.84440	.06427	15.560	.05427	18.427	7.7483	17
18	1.1961	.83604	.06099	16.396	.05099	19.611	8.2192	18
19	1.2080	.82776	.05806	17.223	.04806	20.807	8.6883	19
20	1.2201	.81957	.05542	18.043	.04542	22.015	9.1560	20
21	1.2323	.81145	.05304	18.854	.04304	23.235	9.6222	21
22	1.2446	.80342	.05087	19.658	.04087	24.467	10.086	22
23	1.2571	.79547	.04889	20.453	.03889	25.712	10.549	23
24	1.2696	.78759	.04708	21.240	.03708	26.969	11.010	24
25	1.2823	.77979	.04541	22.020	.03541	28.239	11.469	25
26	1.2952	.77207	.04387	22.792	.03387	29.521	11.927	26
27	1.3081	.76443	.04245	23.556	.03245	30.816	12.383	27
28	1.3212	.75686	.04113	24.313	.03113	32.124	12.830	28
29	1.3344	.74937	.03990	25.062	.02990	33.445	13.291	29
30	1.3478	.74195	.03875	25.804	.02875	34.779	13.742	30
31	1.3612	.73461	.03768	26.539	.02768	36.127	14.191	31
32	1.3748	.72733	.03667	27.266	.02667	37.488	14.640	32
33	1.3886	.72013	.03573	27.986	.02573	38.863	15.086	33
34	1.4025	.71301	.03484	28.699	.02484	40.251	15.531	34
35	1.4166	.70595	.03401	29.405	.02401	41.653	15.973	35
40	1.4887	.67169	.03046	32.831	.02046	48.878	18.164	40
45	1.5647	.63909	.02771	36.090	.01771	56.471	20.314	45
50	1.6446	.60808	.02552	39.192	.01552	64.462	22.423	50
55	1.7284	.57857	.02373	42.142	.01373	72.839	24.491	55
60	1.8165	.55049	.02225	44.950	.01225	81.655	26.520	60
65	1.9092	.52378	.02100	47.622	.01100	90.920	28.508	65
70	2.0065	.49836	.01993	50.163	.00993	100.65	30.457	70
75	2.1089	.47418	.01902	52.582	.00902	110.89	32.366	75
80	2.2164	.45117	.01822	54.883	.00822	121.64	34.236	80
85	2.3295	.42927	.01752	57.072	.00752	132.95	36.067	85
90	2.4483	.40844	.01690	59.156	.00690	144.83	37.859	90
95	2.5732	.38862	.01636	61.138	.00636	157.32	39.614	95
100	2.7044	.36976	.01587	63.024	.00587	170.44	41.330	100

1½% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, 1½, N)	(P/F, 1½, N)	(A/P, 1½, N)	(P/A, 1½, N)	(A/F, 1½, N)	(F/A, 1½, N)	(A/G, 1½, N)	N
1	1.0150	.98522	1.0150	.9852	1.0000	1.0000	.0000	1
2	1.0302	.97066	.51131	1.9557	.49631	2.0148	.4917	2
3	1.0456	.95632	.34340	2.9120	.32840	3.0450	.9857	3
4	1.0613	.94219	.25946	3.8540	.24446	4.0905	1.4760	4
5	1.0772	.92827	.20910	4.7823	.19410	5.1518	1.9653	5
6	1.0934	.91455	.17554	5.6967	.16054	6.2290	2.4511	6
7	1.1098	.90103	.15157	6.5977	.13657	7.3223	2.9351	7
8	1.1264	.88772	.13359	7.4853	.11859	8.4320	3.4161	8
9	1.1433	.87460	.11962	8.3598	.10462	9.5585	3.8952	9
10	1.1605	.86168	.10844	9.2214	.09344	10.701	4.3716	10
11	1.1779	.84894	.09930	10.070	.08430	11.862	4.8456	11
12	1.1956	.83640	.09169	10.906	.07669	13.039	5.3169	12
13	1.2135	.82404	.08525	11.730	.07025	14.235	5.7863	13
14	1.2317	.81166	.07973	12.542	.06473	15.448	6.2524	14
15	1.2502	.79987	.07495	13.342	.05995	16.680	6.7165	15
16	1.2689	.78805	.07077	14.130	.05577	17.930	7.1781	16
17	1.2879	.77640	.06708	14.906	.05208	19.199	7.6374	17
18	1.3073	.76493	.06381	15.671	.04881	20.487	8.0939	18
19	1.3269	.75363	.06088	16.424	.04588	21.794	8.5482	19
20	1.3468	.74249	.05825	17.167	.04325	23.121	8.9998	20
21	1.3670	.73152	.05587	17.898	.04087	24.468	9.4493	21
22	1.3875	.72071	.05371	18.619	.03871	25.834	9.8959	22
23	1.4083	.71006	.05173	19.329	.03673	27.222	10.340	23
24	1.4294	.69957	.04993	20.028	.03493	28.630	10.782	24
25	1.4509	.68923	.04827	20.718	.03327	30.059	11.221	25
26	1.4726	.67904	.04674	21.397	.03174	31.510	11.658	26
27	1.4947	.66901	.04532	22.066	.03032	32.983	12.093	27
28	1.5171	.65912	.04400	22.725	.02900	34.477	12.525	28
29	1.5399	.64938	.04278	23.374	.02778	35.994	12.955	29
30	1.5630	.63979	.04164	24.014	.02664	37.534	13.382	30
31	1.5864	.63033	.04058	24.644	.02558	39.097	13.807	31
32	1.6102	.62102	.03958	25.265	.02458	40.683	14.229	32
33	1.6344	.61184	.03864	25.877	.02364	42.293	14.649	33
34	1.6589	.60280	.03776	26.479	.02276	43.928	15.067	34
35	1.6838	.59389	.03694	27.073	.02194	45.586	15.482	35
40	1.8139	.55129	.03343	29.913	.01843	54.261	17.522	40
45	1.9541	.51174	.03072	32.550	.01572	63.606	19.501	45
50	2.1051	.47504	.02857	34.997	.01357	73.673	21.422	50
55	2.2677	.44096	.02683	37.269	.01183	84.518	23.283	55
60	2.4430	.40933	.02539	39.378	.01039	96.201	25.087	60
65	2.6318	.37997	.02419	41.335	.00919	108.78	26.833	65
70	2.8351	.35271	.02317	43.152	.00817	122.34	28.523	70
75	3.0542	.32741	.02230	44.839	.00730	136.95	30.157	75
80	3.2903	.30392	.02155	46.405	.00655	152.68	31.737	80
85	3.5445	.28212	.02089	47.858	.00589	169.63	33.262	85
90	3.8185	.26188	.02032	49.207	.00532	187.89	34.734	90
95	4.1135	.24310	.01982	50.460	.00482	207.57	36.155	95
100	4.4314	.22566	.01937	51.622	.00437	228.76	37.524	100

2% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	Single Payment		Uniform Series					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, 2, N)	(P/F, 2, N)	(A/P, 2, N)	(P/A, 2, N)	(A/F, 2, N)	(F/A, 2, N)	(A/G, 2, N)	N
1	1.0200	.98039	1.0200	.9804	1.0000	1.0000	.0000	1
2	1.0404	.96117	.51507	1.9415	.49507	2.0199	.4934	2
3	1.0612	.94232	.34677	2.8837	.32677	3.0603	.9851	3
4	1.0824	.92385	.26263	3.8076	.24263	4.1214	1.4733	4
5	1.1040	.90573	.21217	4.7132	.19217	5.2033	1.9584	5
6	1.1261	.88798	.17853	5.6012	.15853	6.3078	2.4401	6
7	1.1486	.87056	.15452	6.4717	.13452	7.4339	2.9189	7
8	1.1716	.85350	.13651	7.3252	.11651	8.5826	3.3940	8
9	1.1950	.83676	.12252	8.1619	.10252	9.7541	3.8659	9
10	1.2189	.82035	.11133	8.9822	.09133	10.949	4.3347	10
11	1.2433	.80427	.10218	9.7865	.08218	12.168	4.8001	11
12	1.2682	.78850	.09456	10.574	.07456	13.411	5.2622	12
13	1.2935	.77304	.08812	11.347	.06812	14.679	5.7209	13
14	1.3194	.75788	.08261	12.105	.06261	15.973	6.1764	14
15	1.3458	.74302	.07783	12.848	.05783	17.292	6.6288	15
16	1.3727	.72846	.07365	13.577	.05365	18.638	7.0778	16
17	1.4002	.71417	.06997	14.291	.04997	20.011	7.5236	17
18	1.4282	.70017	.06670	14.991	.04670	21.411	7.9660	18
19	1.4567	.68644	.06378	15.677	.04378	22.839	8.4052	19
20	1.4859	.67298	.06116	16.350	.04116	24.296	8.8412	20
21	1.5156	.65979	.05879	17.010	.03879	25.781	9.2739	21
22	1.5459	.64685	.05663	17.657	.03663	27.297	9.7033	22
23	1.5768	.63417	.05467	18.291	.03467	28.843	10.129	23
24	1.6084	.62173	.05287	18.913	.03287	30.420	10.552	24
25	1.6405	.60954	.05122	19.522	.03122	32.028	10.972	25
26	1.6733	.59759	.04970	20.120	.02970	33.669	11.388	26
27	1.7068	.58583	.04829	20.706	.02829	35.342	11.802	27
28	1.7409	.57439	.04699	21.280	.02699	37.049	12.212	28
29	1.7758	.56313	.04578	21.843	.02578	38.790	12.619	29
30	1.8113	.55208	.04465	22.395	.02465	40.565	13.023	30
31	1.8475	.54126	.04360	22.937	.02360	42.377	13.423	31
32	1.8844	.53065	.04261	23.467	.02261	44.224	13.821	32
33	1.9221	.52024	.04169	23.987	.02169	46.108	14.215	33
34	1.9606	.51004	.04082	24.497	.02082	48.031	14.606	34
35	1.9998	.50004	.04000	24.997	.02000	49.991	14.994	35
40	2.2079	.45291	.03656	27.354	.01656	60.398	16.886	40
45	2.4377	.41021	.03391	29.489	.01391	71.888	18.701	45
50	2.6914	.37154	.03182	31.422	.01182	84.573	20.440	50
55	2.9715	.33652	.03014	33.174	.01014	98.579	22.103	55
60	3.2808	.30480	.02877	34.760	.00877	114.04	23.694	60
65	3.6223	.27607	.02763	36.196	.00763	131.11	25.212	65
70	3.9993	.25004	.02667	37.497	.00667	149.96	26.661	70
75	4.4155	.22647	.02586	38.676	.00586	170.77	28.041	75
80	4.8751	.20512	.02516	39.743	.00516	193.75	29.355	80
85	5.3824	.18579	.02456	40.710	.00456	219.12	30.604	85
90	5.9420	.16827	.02406	41.586	.00408	247.13	31.791	90
95	6.5611	.15241	.02360	42.379	.00360	278.05	32.917	95
100	7.2440	.13804	.02320	43.097	.00320	312.20	33.984	100

2½% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 2\frac{1}{2}, N)$	$(P/F, 2\frac{1}{2}, N)$	$(A/P, 2\frac{1}{2}, N)$	$(P/A, 2\frac{1}{2}, N)$	$(A/F, 2\frac{1}{2}, N)$	$(F/A, 2\frac{1}{2}, N)$	$(A, G, 2\frac{1}{2}, N)$	N
1	1.0250	.97561	1.0250	.9756	1.0000	1.0000	.0000	1
2	1.0506	.95182	.51884	1.9273	.49384	2.0243	.4938	2
3	1.0768	.92860	.35014	2.8559	.32514	3.0755	.9827	3
4	1.1038	.90595	.26582	3.7618	.24082	4.1524	1.4681	4
5	1.1314	.88386	.21525	4.6457	.19025	5.2562	1.9496	5
6	1.1596	.86230	.18155	5.5079	.15655	6.3875	2.4269	6
7	1.1886	.84127	.15750	6.3492	.13250	7.5472	2.9002	7
8	1.2184	.82075	.13947	7.1699	.11447	8.7358	3.3695	8
9	1.2488	.80073	.12546	7.9707	.10046	9.9542	3.8346	9
10	1.2800	.78120	.11426	8.7518	.08926	11.203	4.2955	10
11	1.3120	.76215	.10511	9.5140	.08011	12.483	4.7524	11
12	1.3448	.74356	.09749	10.257	.07249	13.795	5.2052	12
13	1.3785	.72543	.09105	10.982	.06605	15.140	5.6539	13
14	1.4129	.70773	.08554	11.690	.06054	16.518	6.0985	14
15	1.4482	.69047	.08077	12.331	.05577	17.931	6.5391	15
16	1.4844	.67363	.07660	13.054	.05160	19.379	6.9756	16
17	1.5216	.65720	.07293	13.711	.04793	20.864	7.4081	17
18	1.5596	.64117	.06967	14.353	.04467	22.385	7.8365	18
19	1.5986	.62553	.06676	14.978	.04176	23.946	8.2609	19
20	1.6386	.61028	.06415	15.588	.03915	25.543	8.6813	20
21	1.6795	.59539	.06179	16.184	.03679	27.182	9.0976	21
22	1.7215	.58087	.05965	16.765	.03465	28.861	9.5100	22
23	1.7645	.56671	.05770	17.331	.03270	30.583	9.9183	23
24	1.8087	.55288	.05591	17.884	.03091	32.347	10.322	24
25	1.8539	.53940	.05428	18.424	.02928	34.156	10.723	25
26	1.9002	.52624	.05277	18.950	.02777	36.010	11.119	26
27	1.9477	.51341	.05138	19.463	.02638	37.910	11.512	27
28	1.9964	.50089	.05009	19.964	.02509	39.858	11.900	28
29	2.0463	.48867	.04889	20.453	.02389	41.854	12.285	29
30	2.0975	.47675	.04778	20.929	.02278	43.901	12.665	30
31	2.1499	.46512	.04674	21.395	.02174	45.998	13.042	31
32	2.2037	.45378	.04577	21.848	.02077	48.148	13.415	32
33	2.2588	.44271	.04486	22.291	.01986	50.352	13.784	33
34	2.3152	.43191	.04401	22.723	.01901	52.610	14.149	34
35	2.3731	.42138	.04321	23.144	.01821	54.926	14.511	35
40	2.6850	.37244	.03984	25.102	.01484	67.399	16.261	40
45	3.0378	.32918	.03727	26.832	.01227	81.512	17.917	45
50	3.4370	.29095	.03526	28.361	.01026	97.480	19.483	50
55	3.8886	.25716	.03365	29.713	.00865	115.54	20.959	55
60	4.3996	.22729	.03235	30.908	.00735	135.98	22.351	60
65	4.9777	.20089	.03128	31.964	.00628	159.11	23.659	65
70	5.6318	.17756	.03040	32.897	.00540	185.27	24.887	70
75	6.3719	.15694	.02965	33.722	.00465	214.87	26.038	75
80	7.2092	.13871	.02903	34.451	.00403	248.36	27.115	80
85	8.1565	.12260	.02849	35.095	.00349	286.26	28.122	85
90	9.2283	.10836	.02804	35.665	.00304	329.13	29.062	90
95	10.441	.09578	.02765	36.168	.00265	377.63	29.937	95
100	11.813	.08465	.02731	36.613	.00231	432.51	30.751	100

3% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradiant Factor	
N	$(F/P, 3, N)$	$(P/F, 3, N)$	$(A/P, 3, N)$	$(P/A, 3, N)$	$(A/F, 3, N)$	$(F/A, 3, N)$	$(A/G, 3, N)$	N
1	1.0300	.97087	1.0300	.9709	1.0000	1.0000	.0000	1
2	1.0609	.94260	.52262	1.9134	.49262	2.0299	.4920	2
3	1.0927	.91514	.35354	2.8286	.32354	3.0908	.9795	3
4	1.1255	.88849	.26903	3.7170	.23903	4.1835	1.4622	4
5	1.1592	.86261	.21836	4.5796	.18836	5.3090	1.9401	5
6	1.1940	.83749	.18460	5.4170	.15460	6.4682	2.4129	6
7	1.2298	.81310	.16051	6.2301	.13051	7.6622	2.8809	7
8	1.2667	.78941	.14246	7.0196	.11246	8.8920	3.3440	8
9	1.3047	.76642	.12844	7.7859	.09844	10.158	3.8022	9
10	1.3439	.74410	.11723	8.5300	.08723	11.463	4.2555	10
11	1.3842	.72243	.10808	9.2524	.07808	12.807	4.7040	11
12	1.4257	.70139	.10046	9.9537	.07046	14.191	5.1475	12
13	1.4685	.68096	.09403	10.634	.06403	15.617	5.5863	13
14	1.5126	.66113	.08853	11.296	.06853	17.086	6.0201	14
15	1.5579	.64187	.08377	11.937	.05377	18.598	6.4491	15
16	1.6046	.62318	.07961	12.560	.04961	20.156	6.8732	16
17	1.6528	.60502	.07595	13.166	.04595	21.760	7.2926	17
18	1.7024	.58740	.07271	13.753	.04271	23.413	7.7072	18
19	1.7534	.57030	.06982	14.323	.03982	25.116	8.1169	19
20	1.8060	.55369	.06722	14.877	.03722	26.869	8.5219	20
21	1.8602	.53756	.06487	15.414	.03487	28.675	8.9221	21
22	1.9160	.52190	.06275	15.936	.03275	30.535	9.3176	22
23	1.9735	.50670	.06082	16.443	.03082	32.451	9.7084	23
24	2.0327	.49194	.05905	16.935	.02905	34.425	10.094	24
25	2.0937	.47762	.05743	17.412	.02743	36.457	10.475	25
26	2.1565	.46370	.05594	17.876	.02594	38.551	10.852	26
27	2.2212	.45020	.05457	18.326	.02457	40.707	11.224	27
28	2.2878	.43709	.05329	18.763	.02329	42.929	11.592	28
29	2.3566	.42436	.05212	19.188	.02212	45.217	11.954	29
30	2.4272	.41200	.05102	19.600	.02102	47.573	12.313	30
31	2.5000	.40000	.05000	20.000	.02000	50.000	12.666	31
32	2.5750	.38835	.04905	20.388	.01905	52.500	13.016	32
33	2.6522	.37704	.04816	20.765	.01816	55.075	13.360	33
34	2.7318	.36606	.04732	21.131	.01732	57.727	13.700	34
35	2.8137	.35539	.04654	21.486	.01654	60.459	14.036	35
40	3.2619	.30657	.04326	23.114	.01326	75.397	15.649	40
45	3.7814	.26445	.04079	24.518	.01079	92.715	17.154	45
50	4.3837	.22812	.03887	25.729	.00887	112.79	18.556	50
55	5.0819	.19678	.03735	26.774	.00735	136.06	19.859	55
60	5.8913	.16974	.03613	27.675	.00613	163.04	21.066	60
65	6.8296	.14642	.03515	28.452	.00515	194.32	22.183	65
70	7.9173	.12630	.03434	29.123	.00434	230.57	23.213	70
75	9.1783	.10895	.03367	29.701	.00367	272.61	24.162	75
80	10.640	.09398	.03311	30.200	.00311	321.33	25.034	80
85	12.334	.08107	.03265	30.630	.00265	377.82	25.834	85
90	14.299	.06993	.03226	31.002	.00226	443.31	26.566	90
95	16.576	.06033	.03193	31.322	.00193	519.22	27.234	95
100	19.217	.05204	.03165	31.598	.00165	607.23	27.843	100

4% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 4, N)$	$(P/F, 4, N)$	$(A/P, 4, N)$	$(P/A, 4, N)$	$(A/F, 4, N)$	$(F/A, 4, N)$	$(A/G, 4, N)$	N
1	1.0400	.96154	1.0400	.9615	1.0000	1.0000	.0000	1
2	1.0816	.92456	.53020	1.8860	.49020	2.0399	.4900	2
3	1.1248	.88900	.36035	2.7750	.32035	3.1215	.9736	3
4	1.1698	.85481	.27549	3.6298	.23549	4.2464	1.4506	4
5	1.2166	.82193	.22463	4.4517	.18463	5.4162	1.9213	5
6	1.2653	.79032	.19076	5.2420	.15076	6.6328	2.3853	6
7	1.3159	.75992	.16661	6.0019	.12661	7.8981	2.8429	7
8	1.3685	.73069	.14853	6.7326	.10853	9.2140	3.2940	8
9	1.4233	.70259	.13449	7.4352	.09449	10.582	3.7387	9
10	1.4802	.67567	.12329	8.1108	.08329	12.005	4.1769	10
11	1.5394	.64958	.11415	8.7603	.07415	13.486	4.6086	11
12	1.6010	.62460	.10655	9.3849	.06655	15.025	5.0339	12
13	1.6650	.60058	.10014	9.9855	.06014	16.626	5.4529	13
14	1.7316	.57748	.09467	10.563	.05467	18.291	5.8655	14
15	1.8009	.55527	.08994	11.118	.04994	20.023	6.2717	15
16	1.8729	.53391	.08582	11.652	.04582	21.824	6.6716	16
17	1.9478	.51338	.08220	12.165	.04220	23.697	7.0652	17
18	2.0257	.49363	.07899	12.659	.03899	25.644	7.4526	18
19	2.1068	.47465	.07614	13.133	.03614	27.670	7.8338	19
20	2.1911	.45639	.07358	13.590	.03358	29.777	8.2087	20
21	2.2787	.43884	.07128	14.029	.03128	31.968	8.5775	21
22	2.3698	.42196	.06920	14.450	.02920	34.247	8.9402	22
23	2.4646	.40573	.06731	14.856	.02731	36.617	9.2969	23
24	2.5632	.39013	.06559	15.246	.02559	39.081	9.6475	24
25	2.6658	.37512	.06401	15.621	.02401	41.644	9.9921	25
26	2.7724	.36069	.06257	15.982	.02257	44.310	10.330	26
27	2.8833	.34682	.06124	16.329	.02124	47.083	10.663	27
28	2.9986	.33348	.06001	16.662	.02001	49.966	10.990	28
29	3.1186	.32066	.05888	16.983	.01888	52.964	11.311	29
30	3.2433	.30832	.05783	17.291	.01783	56.083	11.627	30
31	3.3730	.29647	.05686	17.588	.01686	59.326	11.936	31
32	3.5079	.28506	.05595	17.873	.01595	62.699	12.240	32
33	3.6483	.27410	.05510	18.147	.01510	66.207	12.539	33
34	3.7942	.26356	.05432	18.411	.01432	69.855	12.832	34
35	3.9460	.25342	.05358	18.664	.01358	73.650	13.119	35
40	4.8009	.20829	.05052	19.792	.01052	95.022	14.476	40
45	5.8410	.17120	.04826	20.719	.00826	121.02	15.704	45
50	7.1064	.14072	.04655	21.482	.00655	152.66	16.811	50
55	8.6460	.11566	.04523	22.108	.00523	191.15	17.806	55
60	10.519	.09506	.04420	22.623	.00420	237.98	18.696	60
65	12.798	.07814	.04339	23.046	.00339	294.95	19.490	65
70	15.570	.06422	.04275	23.394	.00275	364.27	20.195	70
75	18.944	.05279	.04223	23.680	.00223	448.60	20.820	75
80	23.048	.04339	.04181	23.915	.00181	551.21	21.371	80
85	28.042	.03566	.04148	24.108	.00148	676.05	21.856	85
90	34.117	.02931	.04121	24.267	.00121	827.93	22.282	90
95	41.508	.02409	.04099	24.397	.00099	1012.7	22.654	95
100	50.501	.01980	.04081	24.504	.00081	1237.5	22.979	100

5% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 5, N)$	$(P/F, 5, N)$	$(A/P, 5, N)$	$(P/A, 5, N)$	$(A/F, 5, N)$	$(F/A, 5, N)$	$(A/G, 5, N)$	N
1	1.0500	.95238	1.0500	.9524	1.0000	1.0000	.0000	1
2	1.1025	.90703	.53781	1.8593	.48781	2.0499	.4874	2
3	1.1576	.86384	.36722	2.7231	.31722	3.1524	.9671	3
4	1.2155	.82271	.28202	3.5458	.23202	4.3100	1.4386	4
5	1.2762	.78353	.23098	4.3294	.18098	5.5255	1.9021	5
6	1.3400	.74622	.19702	5.0756	.14702	6.8017	2.3575	6
7	1.4070	.71069	.17282	5.7862	.12282	8.1418	2.8048	7
8	1.4774	.67684	.15472	6.4631	.10472	9.5483	3.2441	8
9	1.5513	.64461	.14069	7.1077	.09069	11.026	3.6753	9
10	1.6288	.61392	.12951	7.7216	.07951	12.577	4.0986	10
11	1.7103	.58469	.12039	8.3062	.07039	14.206	4.5140	11
12	1.7958	.55684	.11283	8.8631	.06283	15.916	4.9214	12
13	1.8856	.53033	.10646	9.3934	.05646	17.712	5.3211	13
14	1.9799	.50507	.10103	9.8985	.05103	19.598	5.7128	14
15	2.0789	.48102	.09634	10.379	.04634	21.577	6.0969	15
16	2.1828	.45812	.09227	10.837	.04227	23.656	6.4732	16
17	2.2919	.43630	.08870	11.273	.03870	25.839	6.8418	17
18	2.4065	.41553	.08555	11.689	.03555	28.131	7.2029	18
19	2.5269	.39574	.08275	12.085	.03275	30.538	7.5565	19
20	2.6532	.37690	.08024	12.462	.03024	33.064	7.9025	20
21	2.7859	.35895	.07800	12.821	.02800	35.718	8.2412	21
22	2.9252	.34186	.07597	13.162	.02597	38.503	8.5725	22
23	3.0714	.32558	.07414	13.488	.02414	41.429	8.8966	23
24	3.2250	.31008	.07247	13.798	.02247	44.500	9.2135	24
25	3.3862	.29531	.07095	14.093	.02095	47.725	9.5234	25
26	3.5555	.28125	.06956	14.375	.01957	51.111	9.8261	26
27	3.7333	.26786	.06829	14.642	.01829	54.667	10.122	27
28	3.9200	.25510	.06712	14.898	.01712	58.400	10.411	28
29	4.1160	.24295	.06605	15.140	.01605	62.320	10.693	29
30	4.3218	.23138	.06505	15.372	.01505	66.436	10.968	30
31	4.5379	.22037	.06413	15.592	.01413	70.757	11.237	31
32	4.7647	.20987	.06328	15.802	.01328	75.295	11.500	32
33	5.0030	.19988	.06249	16.002	.01249	80.060	11.756	33
34	5.2531	.19036	.06176	16.192	.01176	85.063	12.005	34
35	5.5158	.18130	.06107	16.374	.01107	90.316	12.249	35
40	7.0397	.14205	.05828	17.158	.00828	120.79	13.277	40
45	8.0846	.11130	.05626	17.773	.00626	159.69	14.364	45
50	11.466	.08721	.05478	18.255	.00478	209.33	15.223	50
55	14.634	.06833	.05367	18.633	.00367	272.69	15.966	55
60	18.678	.05354	.05283	18.929	.00283	353.56	16.605	60
65	23.838	.04195	.05219	19.161	.00219	456.76	17.153	65
70	30.424	.03287	.05170	19.342	.00170	588.48	17.621	70
75	38.829	.02575	.05132	19.484	.00132	756.59	18.017	75
80	49.557	.02018	.05103	19.596	.00103	971.14	18.352	80
85	63.248	.01581	.05080	19.683	.00080	1244.9	18.634	85
90	80.723	.01239	.05063	19.752	.00063	1594.4	18.871	90
95	103.02	.00971	.05049	19.805	.00049	2040.4	19.068	95
100	131.48	.00761	.05038	19.847	.00038	2609.7	19.233	100

6% Interest Factors for Discrete Compounding Factors

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 6, N)$	$(P/F, 6, N)$	$(A/P, 6, N)$	$(P/A, 6, N)$	$(A/F, 6, N)$	$(F/A, 6, N)$	$(A/G, 6, N)$	N
1	1.0600	.94340	1.0600	.9434	1.0000	1.0000	.0000	1
2	1.1236	.89000	.54544	1.8333	.48544	2.0599	.4852	2
3	1.1910	.83962	.37411	2.6729	.31411	3.1835	.9610	3
4	1.2624	.79210	.28860	3.4650	.22860	4.3745	1.4269	4
5	1.3382	.74726	.23740	4.2123	.17740	5.6370	1.8833	5
6	1.4185	.70496	.20337	4.9172	.14337	6.9751	2.3301	6
7	1.5036	.66506	.17914	5.5823	.11914	8.3936	2.7673	7
8	1.5938	.62742	.16104	6.2097	.10104	9.8972	3.1949	8
9	1.6894	.59190	.14702	6.8016	.08702	11.491	3.6130	9
10	1.7908	.55840	.13587	7.3600	.07587	13.180	4.0217	10
11	1.8982	.52679	.12679	7.8867	.06679	14.971	4.4210	11
12	2.0121	.49698	.11928	8.3837	.05928	16.869	4.8109	12
13	2.1329	.46884	.11296	8.8525	.05296	18.881	5.1917	13
14	2.2608	.44231	.10759	9.2948	.04759	21.014	5.5632	14
15	2.3965	.41727	.10296	9.7121	.04296	23.275	5.9257	15
16	2.5403	.39365	.09895	10.105	.03895	25.671	6.2791	16
17	2.6927	.37137	.09545	10.477	.03545	28.212	6.6237	17
18	2.8542	.35035	.09236	10.827	.03236	30.904	6.9594	18
19	3.0255	.33052	.08962	11.158	.02962	33.759	7.2864	19
20	3.2070	.31181	.08719	11.469	.02719	36.784	7.6048	20
21	3.3995	.29416	.08501	11.763	.02501	39.991	7.9148	21
22	3.6034	.27751	.08305	12.041	.02305	43.390	8.2163	22
23	3.8196	.26180	.08128	12.303	.02128	46.994	8.5096	23
24	4.0488	.24698	.07968	12.550	.01968	50.814	8.7948	24
25	4.2917	.23300	.07823	12.783	.01823	54.862	9.0719	25
26	4.5492	.21982	.07690	13.003	.01690	59.154	9.3412	26
27	4.8222	.20737	.07570	13.210	.01570	63.703	9.6027	27
28	5.1115	.19564	.07459	13.406	.01459	68.525	9.8565	28
29	5.4182	.18456	.07358	13.590	.01358	73.637	10.102	29
30	5.7433	.17412	.07265	13.764	.01265	79.055	10.341	30
31	6.0879	.16426	.07179	13.929	.01179	84.798	10.573	31
32	6.4531	.15496	.07100	14.083	.01100	90.886	10.798	32
33	6.8403	.14619	.07027	14.230	.01027	97.339	11.016	33
34	7.2507	.13792	.06960	14.368	.00960	104.17	11.227	34
35	7.6858	.13011	.06897	14.498	.00897	111.43	11.431	35
40	10.285	.09723	.06646	15.046	.00646	154.75	12.358	40
45	13.764	.07265	.06470	15.455	.00470	212.73	13.141	45
50	18.419	.05429	.06344	15.761	.00344	290.32	13.796	50
55	24.649	.04057	.06254	15.990	.00254	394.14	14.340	55
60	32.985	.03032	.06188	16.161	.00188	533.09	14.790	60
65	44.142	.02265	.06139	16.289	.00139	719.03	15.160	65
70	59.071	.01693	.06103	16.384	.00103	967.86	15.461	70
75	79.051	.01265	.06077	16.455	.00077	1300.8	15.705	75
80	105.78	.00945	.06057	16.509	.00057	1746.4	15.903	80
85	141.56	.00706	.06043	16.548	.00043	2342.7	16.061	85
90	189.44	.00528	.06032	16.578	.00032	3140.7	16.189	90
95	253.52	.00394	.06024	16.600	.00024	4208.7	16.290	95
100	339.26	.00295	.06018	16.617	.00018	5637.8	16.371	100

7% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 7, N)$	$(P/F, 7, N)$	$(A/P, 7, N)$	$(P/A, 7, N)$	$(A/F, 7, N)$	$(F/A, 7, N)$	$(A/G, 7, N)$	N
1	1.0700	.93458	1.0700	.9346	1.0000	1.000	.0000	1
2	1.1449	.87344	.55310	1.8080	.48310	2.0699	.4830	2
3	1.2250	.81630	.38105	2.6242	.31105	3.2148	.9548	3
4	1.3107	.76290	.29523	3.3871	.22523	4.4398	1.4153	4
5	1.4025	.71299	.24389	4.1001	.17389	5.7506	1.8648	5
6	1.5007	.66635	.20980	4.7665	.13980	7.1531	2.3030	6
7	1.6057	.62275	.18555	5.3892	.11555	8.6539	2.7302	7
8	1.7181	.58201	.16747	5.9712	.09747	10.259	3.1463	8
9	1.8384	.54394	.15349	6.5151	.08349	11.977	3.5515	9
10	1.9671	.50835	.14238	7.0235	.07238	13.816	3.9459	10
11	2.1048	.47510	.13336	7.4986	.06336	15.783	4.3294	11
12	2.2521	.44402	.12590	7.9426	.05590	17.888	4.7023	12
13	2.4098	.41497	.11965	8.3576	.04965	20.140	5.0647	13
14	2.5785	.38782	.11435	8.7454	.04435	22.550	5.4165	14
15	2.7590	.36245	.10980	9.1078	.03980	25.128	5.7581	15
16	2.9521	.33874	.10586	9.4466	.03586	27.887	6.0895	16
17	3.1587	.31658	.10243	9.7631	.03243	30.839	6.4108	17
18	3.3798	.29587	.09941	10.059	.02941	33.998	6.7223	18
19	3.6164	.27651	.09675	10.335	.02675	37.378	7.0240	19
20	3.8696	.25842	.09439	10.593	.02439	40.994	7.3161	20
21	4.1404	.24152	.09229	10.835	.02229	44.864	7.5988	21
22	4.4303	.22572	.09041	11.061	.02041	49.004	7.8723	22
23	4.7404	.21095	.08871	11.272	.01871	53.434	8.1367	23
24	5.0722	.19715	.08719	11.469	.01719	58.175	8.3922	24
25	5.4273	.18425	.08581	11.653	.01581	63.247	8.6389	25
26	5.8072	.17220	.08456	11.825	.01456	68.674	8.8772	26
27	6.2137	.16093	.08343	11.986	.01343	74.481	9.1070	27
28	6.6486	.15041	.08239	12.137	.01230	80.695	9.3288	28
29	7.1140	.14057	.08145	12.277	.01145	87.344	9.5425	29
30	7.6120	.13137	.08059	12.409	.01059	94.458	9.7485	30
31	8.1449	.12278	.07980	12.531	.00980	102.07	9.9469	31
32	8.7160	.11474	.07907	12.646	.00907	110.21	10.137	32
33	9.3250	.10724	.07841	12.753	.00841	118.92	10.321	33
34	9.9778	.10022	.07780	12.853	.00780	128.25	10.498	34
35	10.676	.09367	.07723	12.947	.00723	138.23	10.668	35
40	14.973	.06678	.07501	13.331	.00501	199.62	11.423	40
45	21.001	.04762	.07350	13.605	.00350	285.73	12.035	45
50	29.455	.03395	.07246	13.800	.00246	406.51	12.528	50
55	41.313	.02421	.07174	13.939	.00174	575.90	12.921	55
60	57.943	.01726	.07123	14.039	.00123	813.47	13.232	60
65	81.268	.01230	.07087	14.109	.00087	1146.6	13.475	65
70	113.98	.00877	.07062	14.160	.00062	1614.0	13.666	70
75	159.86	.00626	.07044	14.196	.00044	2269.5	13.813	75
80	224.21	.00446	.07031	14.222	.00031	3188.8	13.927	80
85	314.47	.00318	.07022	14.240	.00022	4478.2	14.014	85
90	441.06	.00227	.07016	14.253	.00016	6286.7	14.081	90
95	618.62	.00162	.07011	14.262	.00011	8823.1	14.131	95
100	867.64	.00115	.07008	14.269	.00008	12381.7	14.170	100

8% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 8, N)$	$(P/F, 8, N)$	$(A/P, 8, N)$	$(P/A, 8, N)$	$(A/F, 8, N)$	$(F/A, 8, N)$	$(A/G, 8, N)$	N
1	1.0800	.92593	1.0800	.9259	1.0000	1.0000	.0000	1
2	1.1664	.85734	.56077	1.7832	.48077	2.0799	.4807	2
3	1.2597	.79383	.38803	2.5770	.30804	3.2463	.9487	3
4	1.3604	.73503	.30192	3.3121	.22192	4.5060	1.4038	4
5	1.4693	.68059	.25046	3.9926	.17046	5.8665	1.8463	5
6	1.5868	.63017	.21632	4.6228	.13632	7.3358	2.2762	6
7	1.7138	.58349	.19207	5.2063	.11207	8.9227	2.6935	7
8	1.8509	.54027	.17402	5.7466	.09402	10.636	3.0984	8
9	1.9989	.50025	.16008	6.2468	.08008	12.487	3.4909	9
10	2.1589	.46320	.14903	6.7100	.06903	14.486	3.8712	10
11	2.3316	.42889	.14008	7.1389	.06008	16.645	4.2394	11
12	2.5181	.39712	.13270	7.5360	.05270	18.976	4.5956	12
13	2.7196	.36770	.12642	7.9037	.04652	21.495	4.9401	13
14	2.9371	.34046	.12130	8.2442	.04130	24.214	5.2729	14
15	3.1721	.31524	.11683	8.5594	.03683	27.151	5.5943	15
16	3.4259	.29189	.11298	8.8513	.03298	30.323	5.9045	16
17	3.6999	.27027	.10963	9.1216	.02963	33.749	6.2036	17
18	3.9959	.25025	.10670	9.3718	.02670	37.449	6.4919	18
19	4.3156	.23171	.10413	9.6035	.02413	41.445	6.7696	19
20	4.6609	.21455	.10185	9.8181	.02185	45.761	7.0369	20
21	5.0337	.19866	.09983	10.016	.01983	50.422	7.2939	21
22	5.4364	.18394	.09803	10.200	.01803	55.455	7.5411	22
23	5.8713	.17032	.09642	10.371	.01642	60.892	7.7785	23
24	6.3410	.15770	.09498	10.528	.01498	66.763	8.0065	24
25	6.8483	.14602	.09368	10.674	.01368	73.104	8.2253	25
26	7.3962	.13520	.09251	10.809	.01251	79.953	8.4351	26
27	7.9879	.12519	.09145	10.935	.01145	87.349	8.6362	27
28	8.6269	.11592	.09049	11.051	.01049	95.337	8.8288	28
29	9.3171	.10733	.08962	11.158	.00962	103.96	9.0132	29
30	10.062	.09938	.08883	11.257	.00883	113.28	9.1896	30
31	10.867	.09202	.08811	11.349	.00811	123.34	9.3583	31
32	11.736	.08520	.08745	11.434	.00745	134.21	9.5196	32
33	12.675	.07889	.08685	11.513	.00685	145.94	9.6736	33
34	13.689	.07305	.08630	11.586	.00630	158.62	9.8207	34
35	14.785	.06764	.08580	11.654	.00580	172.31	9.9610	35
40	21.724	.04603	.08386	11.924	.00386	259.05	10.569	40
45	31.919	.03133	.08259	12.108	.00259	386.49	11.044	45
50	46.900	.02132	.08174	12.233	.00174	573.75	11.410	50
55	68.911	.01451	.08118	12.318	.00118	848.89	11.690	55
60	101.25	.00988	.08080	12.376	.00080	1253.1	11.901	60
65	148.77	.00672	.08054	12.416	.00054	1847.1	12.060	65
70	218.59	.00457	.08037	12.442	.00037	2719.9	12.178	70
75	321.19	.00311	.08025	12.461	.00025	4002.3	12.265	75
80	471.93	.00212	.08017	12.473	.00017	5886.6	12.330	80
85	693.42	.00144	.08012	12.481	.00012	8655.2	12.377	85
90	1018.8	.00098	.08008	12.487	.00008	12723.9	12.411	90
95	1497.0	.00067	.08005	12.491	.00005	18701.5	12.436	95
100	2199.6	.00045	.08004	12.494	.00004	27484.5	12.454	100

9% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, 9, N)	(P/F, 9, N)	(A/P, 9, N)	(P/A, 9, N)	(A/F, 9, N)	(F/A, 9, N)	(A/G, 9, N)	N
1	1.0900	.91743	1.0900	.9174	1.0000	1.0000	.0000	1
2	1.1881	.84168	.56847	1.7591	.47847	2.0899	.4784	2
3	1.2950	.77219	.39506	2.5312	.30506	3.2780	.9425	3
4	1.4115	.70843	.30867	3.2396	.21867	4.5730	1.3923	4
5	1.5386	.64993	.25709	3.8896	.16709	5.9846	1.8280	5
6	1.6770	.59627	.22292	4.4858	.13292	7.5232	2.2496	6
7	1.8280	.54704	.19869	5.0329	.10869	9.2002	2.6572	7
8	1.9925	.50187	.18068	5.5347	.09068	11.028	3.0510	8
9	2.1718	.46043	.16680	5.9952	.07680	13.020	3.4311	9
10	2.3673	.42241	.15582	6.4176	.06582	15.192	3.7976	10
11	2.5804	.38754	.14695	6.8051	.05695	17.559	4.1508	11
12	2.8126	.35554	.13965	7.1606	.04965	20.140	4.4909	12
13	3.0657	.32618	.13357	7.4868	.04357	22.952	4.8180	13
14	3.3416	.29925	.12843	7.7861	.03843	26.018	5.1325	14
15	3.6424	.27454	.12406	8.0606	.03406	29.360	5.4345	15
16	3.9702	.25187	.12030	8.3125	.03030	33.002	5.7243	16
17	4.3275	.23108	.11705	8.5435	.02705	36.972	6.0022	17
18	4.7170	.21200	.11421	8.7555	.02421	41.300	6.2685	18
19	5.1415	.19449	.11173	8.9500	.02173	46.017	6.5234	19
20	5.6043	.17843	.10955	9.1285	.01955	51.158	6.7673	20
21	6.1086	.16370	.10762	9.2922	.01762	56.763	7.0004	21
22	6.6584	.15018	.10591	9.4423	.01591	62.871	7.2231	22
23	7.2577	.13778	.10438	9.5801	.01438	69.530	7.4356	23
24	7.9109	.12641	.10302	9.7065	.01302	76.787	7.6383	24
25	8.6228	.11597	.10181	9.8225	.01181	84.698	7.8315	25
26	9.3989	.10640	.10072	9.9289	.01072	93.321	8.0154	26
27	10.244	.09761	.09974	10.026	.00974	102.72	8.1905	27
28	11.166	.08955	.09885	10.116	.00885	112.96	8.3570	28
29	12.171	.08216	.09806	10.198	.00806	124.13	8.5153	29
30	13.267	.07537	.09734	10.273	.00734	136.30	8.6655	30
31	14.461	.06915	.09669	10.342	.00669	149.57	8.8082	31
32	15.762	.06344	.09610	10.406	.00610	164.03	8.9436	32
33	17.181	.05820	.09556	10.464	.00556	179.79	9.0717	33
34	18.727	.05340	.09508	10.517	.00508	196.97	9.1932	34
35	20.413	.04899	.09464	10.566	.00464	215.70	9.3082	35
40	31.408	.03184	.09296	10.757	.00296	337.86	9.7956	40
45	48.325	.02069	.09190	10.881	.00190	525.83	10.160	45
50	74.353	.01345	.09123	10.961	.00123	815.04	10.429	50
55	114.40	.00874	.09079	11.014	.00079	1260.0	10.626	55
60	176.02	.00568	.09051	11.047	.00051	1944.6	10.768	60
65	270.82	.00369	.09033	11.070	.00033	2998.0	10.870	65
70	416.70	.00240	.09022	11.084	.00022	4618.9	10.942	70
75	641.14	.00156	.09014	11.093	.00014	7112.7	10.993	75
80	986.47	.00101	.09009	11.099	.00009	10950.6	11.029	80
85	1517.8	.00066	.09006	11.103	.00006	16854.8	11.055	85
90	2335.3	.00043	.09004	11.106	.00004	25939.2	11.072	90
95	3593.1	.00028	.09002	11.108	.00003	39916.6	11.084	95
100	5528.4	.00018	.09002	11.109	.00002	61422.7	11.093	100

10% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 10, N)$	$(P/F, 10, N)$	$(A/P, 10, N)$	$(P/A, 10, N)$	$(A/F, 10, N)$	$(F/A, 10, N)$	$(A/G, 10, N)$	N
1	1.1000	.90909	1.1000	.9091	1.0000	1.000	.0000	1
2	1.2100	.82645	.57619	1.7355	.47619	2.0999	.4761	2
3	1.3310	.75132	.40212	2.4868	.30212	3.3099	.9365	3
4	1.4641	.68302	.31547	3.1698	.21547	4.6409	1.3810	4
5	1.6105	.62092	.26380	3.7907	.16380	6.1050	1.8100	5
6	1.7715	.56448	.22961	4.3552	.12961	7.7155	2.2234	6
7	1.9487	.51316	.20541	4.8683	.10541	9.4870	2.6215	7
8	2.1435	.46651	.18745	5.3349	.08745	11.435	3.0043	8
9	2.3579	.42410	.17364	5.7589	.07364	13.579	3.3722	9
10	2.5937	.38555	.16275	6.1445	.06275	15.937	3.7253	10
11	2.8530	.35050	.15396	6.4950	.05396	18.530	4.0639	11
12	3.1384	.31863	.14676	6.8136	.04676	21.383	4.3883	12
13	3.4522	.28967	.14078	7.1033	.04078	24.522	4.6987	13
14	3.7974	.26333	.13575	7.3666	.03575	27.974	4.9954	14
15	4.1771	.23940	.13147	7.6060	.03147	31.771	5.2788	15
16	4.5949	.21763	.12782	7.8236	.02782	35.949	5.5492	16
17	5.0544	.19785	.12466	8.0215	.02466	40.543	5.8070	17
18	5.5598	.17986	.12193	8.2013	.02193	45.598	6.0524	18
19	6.1158	.16351	.11955	8.3649	.01955	51.158	6.2860	19
20	6.7273	.14865	.11746	8.5135	.01746	57.273	6.5080	20
21	7.4001	.13513	.11562	8.6486	.01562	64.001	6.7188	21
22	8.1401	.12285	.11401	8.7715	.01401	71.401	6.9188	22
23	8.9541	.11168	.11257	8.8832	.01257	79.541	7.1084	23
24	9.8495	.10153	.11130	8.9847	.01130	88.495	7.2879	24
25	10.834	.09230	.11017	9.0770	.01017	98.344	7.4579	25
26	11.917	.08391	.10916	9.1609	.00916	109.17	7.6185	26
27	13.109	.07628	.10826	9.2372	.00826	121.09	7.7703	27
28	14.420	.06935	.10745	9.3065	.00745	134.20	7.9136	28
29	15.862	.06304	.10673	9.3696	.00673	148.62	8.0488	29
30	17.448	.05731	.10608	9.4269	.00608	164.48	8.1761	30
31	19.193	.05210	.10550	9.4790	.00550	181.93	8.2961	31
32	21.113	.04736	.10497	9.5263	.00497	201.13	8.4090	32
33	23.224	.04306	.10450	9.5694	.00450	222.24	8.5151	33
34	25.546	.03914	.10407	9.6085	.00407	245.46	8.6149	34
35	28.101	.03559	.10369	9.6441	.00369	271.01	8.7085	35
40	45.257	.02210	.10226	9.7790	.00226	442.57	9.0962	40
45	72.887	.01372	.10139	9.8628	.00139	718.87	9.3740	45
50	117.38	.00852	.10086	9.9148	.00086	1163.8	9.5704	50
55	189.04	.00529	.10053	9.9471	.00053	1880.4	9.7075	55
60	304.46	.00328	.10033	9.9671	.00033	3034.6	9.8022	60
65	490.34	.00204	.10020	9.9796	.00020	4893.4	9.8671	65
70	789.60	.00127	.10013	9.9873	.00013	7886.9	9.9112	70
75	1271.8	.00079	.10008	9.9921	.00008	12709.0	9.9409	75
80	2048.2	.00049	.10005	9.9951	.00005	20474.0	9.9609	80
85	3298.7	.00030	.10003	9.9969	.00003	32979.7	9.9742	85
90	5312.5	.00019	.10002	9.9981	.00002	53120.2	9.9830	90
95	8555.9	.00012	.10001	9.9988	.00001	85556.8	9.9889	95
100	13780.6	.00007	.10001	9.9992	.00001	137796.1	9.9927	100

11% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, 11, N)	(P/F, 11, N)	(A/P, 11, N)	(P/A, 11, N)	(A/F, 11, N)	(F/A, 11, N)	(A/G, 11, N)	N
1	1.1100	.90090	1.1100	.9009	1.0000	1.000	.0000	1
2	1.2321	.81162	.58394	1.7125	.47394	2.1099	.4739	2
3	1.3676	.73119	.40922	2.4437	.29922	3.3420	.9305	3
4	1.5180	.65873	.32233	3.1024	.21233	4.7097	1.3698	4
5	1.6850	.59345	.27057	3.6958	.16057	6.2277	1.7922	5
6	1.8704	.53464	.23638	4.2305	.12638	7.9128	2.1975	6
7	2.0761	.48166	.21222	4.7121	.10222	9.7831	2.5862	7
8	2.3045	.43393	.19432	5.1461	.08432	11.859	2.9584	8
9	2.5580	.39093	.18060	5.5370	.07060	14.163	3.3143	9
10	2.8394	.36219	.16980	5.8892	.05980	16.721	3.6543	10
11	3.1517	.31729	.16112	6.2065	.05112	19.561	3.9787	11
12	3.4984	.28584	.15403	6.4923	.04403	22.712	4.2878	12
13	3.8832	.25752	.14815	6.7498	.03815	26.211	4.5821	13
14	4.3104	.23200	.14323	6.9818	.03323	30.094	4.8618	14
15	4.7845	.20901	.13907	7.1908	.02907	34.404	5.1274	15
16	5.3108	.18829	.13552	7.3791	.02552	39.189	5.3793	16
17	5.8950	.16963	.13247	7.5487	.02247	44.500	5.6180	17
18	6.5434	.15282	.12984	7.7016	.01984	50.395	5.8438	18
19	7.2632	.13768	.12756	7.8392	.01756	56.938	6.0573	19
20	8.0622	.12404	.12558	7.9633	.01558	64.201	6.2589	20
21	8.9490	.11174	.12384	8.0750	.01384	72.264	6.4490	21
22	9.9334	.10067	.12231	8.1757	.01231	81.213	6.6282	22
23	11.026	.09069	.12097	8.2664	.01097	91.146	6.7969	23
24	12.238	.08171	.11979	8.3481	.00979	102.17	6.9554	24
25	13.585	.07361	.11874	8.4217	.00874	114.41	7.1044	25
26	15.079	.06631	.11781	8.4880	.00781	127.99	7.2442	26
27	16.738	.05974	.11699	8.5478	.00699	143.07	7.3753	27
28	18.579	.05382	.11626	8.6016	.00626	159.81	7.4981	28
29	20.623	.04849	.11561	8.6501	.00561	178.39	7.6130	29
30	22.891	.04368	.11502	8.6937	.00502	199.01	7.7205	30
31	25.409	.03935	.11451	8.7331	.00451	221.90	7.8209	31
32	28.204	.03545	.11404	8.7686	.00404	247.31	7.9146	32
33	31.307	.03194	.11363	8.8005	.00363	275.52	8.0020	33
34	34.751	.02878	.11326	8.8293	.00326	306.83	8.0835	34
35	38.573	.02592	.11293	8.8552	.00293	341.58	8.1594	35
40	64.999	.01538	.11172	8.9510	.00172	581.81	8.4659	40
45	109.52	.00913	.11101	9.0079	.00101	986.60	8.6762	45
50	184.55	.00542	.11060	9.0416	.00060	1668.7	8.8105	50

12% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 12, N)$	$(P/F, 12, N)$	$(A/P, 12, N)$	$(P/A, 12, N)$	$(A/F, 12, N)$	$(F/A, 12, N)$	$(A/G, 12, N)$	N
1	1.1200	.89286	1.1200	.8929	1.0000	1.0000	.0000	1
2	1.2544	.79719	.59170	1.6900	.47170	2.1200	.4717	2
3	1.4049	.71178	.41635	2.4018	.29635	3.3743	.9246	3
4	1.5735	.63552	.32924	3.0373	.20924	4.7793	1.3588	4
5	1.7623	.56743	.27741	3.6047	.15741	6.3528	1.7745	5
6	1.9738	.50663	.24323	4.1114	.12323	8.115	2.1720	6
7	2.2106	.45235	.21912	4.5637	.09912	10.088	2.5514	7
8	2.4759	.40388	.20130	4.9676	.08130	12.299	2.9131	8
9	2.7730	.36061	.18768	5.3282	.06768	14.775	3.2573	9
10	3.1058	.32197	.17698	5.6502	.05698	17.548	3.5846	10
11	3.4785	.28748	.16842	5.9376	.04842	20.654	3.8952	11
12	3.8959	.25668	.16144	6.1943	.04144	24.132	4.1896	12
13	4.3634	.22918	.15568	6.4235	.03568	28.028	4.4682	13
14	4.8870	.20462	.15087	6.6281	.03087	32.392	4.7316	14
15	5.4735	.18270	.14682	6.8108	.02682	37.279	4.9802	15
16	6.1303	.16312	.14339	6.9739	.02339	42.752	5.2146	16
17	6.8659	.14565	.14046	7.1196	.02046	48.883	5.4352	17
18	7.6899	.13004	.13794	7.2496	.01794	55.749	5.6427	18
19	8.6126	.11611	.13676	7.3657	.01676	63.439	5.8375	19
20	9.6462	.10367	.13388	7.4694	.01388	72.051	6.0201	20
21	10.803	.09256	.13224	7.5620	.01224	81.698	6.1913	21
22	12.100	.08264	.13081	7.6446	.01081	92.501	6.3513	22
23	13.552	.07379	.12956	7.7184	.00956	104.60	6.5009	23
24	15.178	.06588	.12846	7.7843	.00846	118.15	6.6406	24
25	16.999	.05882	.12750	7.8431	.00750	133.33	6.7708	25
26	19.039	.05252	.12665	7.8956	.00665	150.33	6.8920	26
27	21.324	.04689	.12590	7.9425	.00590	169.37	7.0049	27
28	23.883	.04187	.12524	7.9844	.00524	190.69	7.1097	28
29	26.749	.03738	.12466	8.0218	.00466	214.58	7.2071	29
30	29.959	.03338	.12414	8.0551	.00414	241.32	7.2974	30
31	33.554	.02980	.12369	8.0849	.00369	271.28	7.3810	31
32	37.581	.02661	.12328	8.1116	.00328	304.84	7.4685	32
33	42.090	.02376	.12292	8.1353	.00292	342.42	7.5302	33
34	47.141	.02121	.12260	8.1566	.00260	384.51	7.5964	34
35	52.798	.01894	.12232	8.1766	.00232	431.65	7.6576	35
40	93.040	.01075	.12130	8.2437	.00130	767.07	7.8987	40
45	163.98	.00610	.12074	8.2825	.00074	1358.2	8.0572	45
50	288.99	.00346	.12042	8.3045	.00042	2399.9	8.1597	50

13% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, 13, N)	(P/F, 13, N)	(A/P, 13, N)	(P/A, 13, N)	(A/F, 13, N)	(F/A, 13, N)	(A/G, 13, N)	N
1	1.1300	.88496	1.1300	.8850	1.0000	1.0000	.0000	1
2	1.2769	.78315	.59949	1.6680	.46949	2.1299	.4694	2
3	1.4428	.69305	.42352	2.3611	.29353	3.4068	.9187	3
4	1.6304	.61332	.33620	2.9744	.20620	4.8497	1.3478	4
5	1.8424	.54276	.28432	3.5172	.15432	6.4802	1.7570	5
6	2.0819	.48032	.25015	3.9975	.12015	8.3226	2.1467	6
7	2.3525	.42506	.22611	4.4225	.09611	10.404	2.5170	7
8	2.6584	.37616	.20839	4.7987	.07839	12.757	2.8684	8
9	3.0040	.33289	.19487	5.1316	.06487	15.415	3.2013	9
10	3.3945	.29459	.18429	5.4262	.05429	18.419	3.5161	10
11	3.8358	.26070	.17584	5.6869	.04584	21.813	3.8133	11
12	4.3344	.23071	.16899	5.9176	.03899	25.649	4.0935	12
13	4.8979	.20417	.16335	6.1217	.03335	29.984	4.3572	13
14	5.5346	.18068	.15867	6.3024	.02867	34.882	4.6049	14
15	6.2541	.15989	.15474	6.4623	.02474	40.416	4.8374	15
16	7.0672	.14150	.15143	6.6038	.02143	46.670	5.0551	16
17	7.9859	.12522	.14861	6.7290	.01861	53.737	5.2588	17
18	9.0240	.11081	.14620	6.8399	.01620	61.723	5.4490	18
19	10.197	.09807	.14413	6.9379	.01413	70.747	5.6264	19
20	11.522	.08678	.14235	7.0247	.01235	80.944	5.7916	20
21	13.020	.07680	.14081	7.1015	.01081	92.467	5.9453	21
22	14.713	.06796	.13948	7.1695	.00948	105.48	6.0880	22
23	16.626	.06015	.13832	7.2296	.00832	120.20	6.2204	23
24	18.787	.05323	.13731	7.2828	.00731	136.82	6.3430	24
25	21.229	.04710	.13643	7.3299	.00643	155.61	6.4565	25
26	23.989	.04168	.13565	7.3716	.00565	176.84	6.5613	26
27	27.108	.03689	.13498	7.4085	.00498	200.83	6.6581	27
28	30.632	.03265	.13439	7.4412	.00439	227.94	6.7474	28
29	34.614	.02889	.13387	7.4700	.00387	258.57	6.8295	29
30	39.114	.02557	.13341	7.4956	.00341	293.18	6.9052	30
31	44.199	.02262	.13301	7.5182	.00301	332.30	6.9747	31
32	49.945	.02002	.13266	7.5383	.00266	376.50	7.0385	32
33	56.438	.01772	.13234	7.5560	.00234	426.44	7.0970	33
34	63.775	.01568	.13207	7.5717	.00207	482.88	7.1506	34
35	72.065	.01388	.13183	7.5855	.00183	546.65	7.1998	35
40	132.77	.00753	.13099	7.6343	.00099	1013.6	7.3887	40
45	244.62	.00409	.13053	7.6608	.00053	1874.0	7.5076	45
50	450.71	.00222	.13029	7.6752	.00029	3459.3	7.5811	50

14% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 14, N)$	$(P/F, 14, N)$	$(A/P, 14, N)$	$(P/A, 14, N)$	$(A/F, 14, N)$	$(F/A, 14, N)$	$(A/G, 14, N)$	N
1	1.1400	.87719	1.1400	.8772	1.0000	1.000	.0000	1
2	1.2996	.76947	.60729	1.6466	.46729	2.1399	.4672	2
3	1.4815	.67497	.43073	2.3216	.29073	3.4396	.9129	3
4	1.6889	.59208	.34321	2.9137	.20321	4.9211	1.3369	4
5	1.9254	.51937	.29128	3.4330	.15128	6.6100	1.7398	5
6	2.1949	.45559	.25716	3.8886	.11716	8.535	2.1217	6
7	2.5022	.39964	.23319	4.2882	.09319	10.730	2.4831	7
8	2.8525	.35056	.21557	4.6388	.07557	13.232	2.8246	8
9	3.2519	.30751	.20217	4.9463	.06217	16.085	3.1462	9
10	3.7071	.26975	.19171	5.2161	.05171	19.337	3.4489	10
11	4.2261	.23662	.18339	5.4527	.04339	23.044	3.7332	11
12	4.8178	.20756	.17667	5.6602	.03667	27.270	3.9997	12
13	5.4923	.18207	.17116	5.8423	.03116	32.088	4.2490	13
14	6.2612	.15971	.16661	6.0020	.02661	37.580	4.4819	14
15	7.1378	.14010	.16281	6.1421	.02281	43.841	4.6990	15
16	8.1371	.12289	.15962	6.2650	.01962	50.979	4.9010	16
17	9.2763	.10780	.15692	6.3728	.01692	59.116	5.0888	17
18	10.574	.09456	.15462	6.4674	.01462	68.392	5.2629	18
19	12.055	.08295	.15266	6.5503	.01266	78.967	5.4242	19
20	13.743	.07276	.15099	6.6231	.01099	91.022	5.5734	20
21	15.667	.06383	.14954	6.6869	.00955	104.76	5.7111	21
22	17.860	.05599	.14830	6.7429	.00830	120.43	5.8380	22
23	20.361	.04911	.14723	6.7920	.00723	138.29	5.9549	23
24	23.211	.04308	.14630	6.8351	.00630	158.65	6.0623	24
25	26.461	.03779	.14550	6.8729	.00550	181.86	6.1609	25
26	30.165	.03315	.14480	6.9060	.00480	208.32	6.2514	26
27	34.388	.02908	.14419	6.9351	.00419	238.49	6.3342	27
28	39.203	.02551	.14366	6.9606	.00366	272.88	6.4039	28
29	44.691	.02238	.14320	6.9830	.00320	312.08	6.4791	29
30	50.948	.01963	.14280	7.0026	.00280	356.77	6.5422	30
31	58.081	.01722	.14245	7.0198	.00245	407.72	6.5997	31
32	66.212	.01510	.14215	7.0349	.00215	465.80	6.6521	32
33	75.482	.01325	.14188	7.0482	.00188	532.01	6.6998	33
34	86.040	.01162	.14165	7.0598	.00165	607.49	6.7430	34
35	98.096	.01019	.14144	7.0700	.00144	693.54	6.7824	35
40	188.87	.00529	.14075	7.1050	.00075	1341.9	6.9299	40
45	363.66	.00275	.14039	7.1232	.00039	2590.4	7.0187	45
50	700.19	.00143	.14020	7.1326	.00020	4994.2	7.0713	50

15% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 15, N)$	$(P/F, 15, N)$	$(A/P, 15, N)$	$(P/A, 15, N)$	$(A/F, 15, N)$	$(F/A, 15, N)$	$(A/G, 15, N)$	N
1	1.1500	.86957	1.1500	.8696	1.0000	1.000	.0000	1
2	1.3225	.75614	.61512	1.6257	.46512	2.1499	.4651	2
3	1.5208	.65752	.43798	2.2832	.28798	3.4724	.9071	3
4	1.7490	.57175	.35027	2.8549	.20027	4.9933	1.3262	4
5	2.0113	.49718	.29832	3.3521	.14832	6.7423	1.7227	5
6	2.3130	.43233	.26424	3.7844	.11424	8.7536	2.0971	6
7	2.6600	.37594	.24036	4.1604	.09036	11.066	2.4498	7
8	3.0590	.32690	.22285	4.4873	.07285	13.726	2.7813	8
9	3.5178	.28426	.20957	4.7715	.05957	16.785	3.0922	9
10	4.0455	.24719	.19925	5.0187	.04925	20.303	3.3831	10
11	4.6523	.21494	.19107	5.2337	.04107	24.349	3.6549	11
12	5.3502	.18691	.18448	5.4206	.03448	29.001	3.9081	12
13	6.1527	.16253	.17911	5.5831	.02911	34.351	4.1437	13
14	7.0756	.14133	.17469	5.7244	.02469	40.504	4.3623	14
15	8.1369	.12290	.17102	5.8473	.02102	47.579	4.5649	15
16	9.3575	.10687	.16795	5.9542	.01795	55.716	4.7522	16
17	10.761	.09293	.16537	6.0471	.01537	65.074	4.9250	17
18	12.375	.08081	.16319	6.1279	.01319	75.835	5.0842	18
19	14.231	.07027	.16134	6.1982	.01134	88.210	5.2307	19
20	16.366	.06110	.15976	6.2593	.00976	102.44	5.3651	20
21	18.821	.05313	.15842	6.3124	.00842	118.80	5.4883	21
22	21.644	.04620	.15727	6.3586	.00727	137.62	5.6010	22
23	24.891	.04018	.15628	6.3988	.00628	159.27	5.7039	23
24	28.624	.03493	.15543	6.4337	.00543	184.16	5.7978	24
25	32.918	.03038	.15470	6.4641	.00470	212.78	5.8834	25
26	37.856	.02642	.15407	6.4905	.00407	245.70	5.9612	26
27	43.534	.02297	.15353	6.5135	.00353	283.56	6.0318	27
28	50.064	.01997	.15306	6.5335	.00306	327.09	6.0959	28
29	57.574	.01737	.15265	6.5508	.00265	377.16	6.1540	29
30	66.210	.01510	.15230	6.5659	.00230	434.73	6.2066	30
31	76.141	.01313	.15200	6.5791	.00200	500.94	6.2541	31
32	87.563	.01142	.15173	6.5905	.00173	577.08	6.2970	32
33	100.69	.00993	.15150	6.6004	.00150	664.65	6.3356	33
34	115.80	.00864	.15131	6.6091	.00131	765.34	6.3705	34
35	133.17	.00751	.15113	6.6166	.00113	881.14	6.4018	35
40	267.85	.00373	.15056	6.6417	.00056	1779.0	6.5167	40
45	538.75	.00186	.15028	6.6543	.00028	3585.0	6.5829	45
50	1083.6	.00092	.15014	6.6605	.00014	7217.4	6.6204	50

20% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 20, N)$	$(P/F, 20, N)$	$(A/P, 20, N)$	$(P/A, 20, N)$	$(A/F, 20, N)$	$(F/A, 20, N)$	$(A/G, 20, N)$	N
1	1.2000	.83333	1.2000	.8333	1.0000	1.0000	.0000	1
2	1.4400	.69445	.65455	1.5277	.45455	2.1999	.4545	2
3	1.7280	.57870	.47473	2.1064	.27473	3.6399	.8791	3
4	2.0736	.48225	.38629	2.5887	.18629	5.3679	1.2742	4
5	2.4883	.40188	.33438	2.9906	.13438	7.4415	1.6405	5
6	2.9859	.33490	.30071	3.3255	.10071	9.9298	1.9788	6
7	3.5831	.27908	.27742	3.6045	.07742	12.915	2.2901	7
8	4.2998	.23257	.26061	3.8371	.06061	16.498	2.5756	8
9	5.1597	.19381	.24808	4.0309	.04808	20.798	2.8364	9
10	6.1917	.16151	.23852	4.1924	.03852	25.958	3.0738	10
11	7.4300	.13459	.23110	4.3270	.03110	32.150	3.2892	11
12	8.9160	.11216	.22527	4.4392	.02527	39.580	3.4840	12
13	10.699	.09346	.22062	4.5326	.02062	48.496	3.6596	13
14	12.839	.07789	.21689	4.6105	.01689	59.195	3.8174	14
15	15.406	.06491	.21388	4.6754	.01388	72.034	3.9588	15
16	18.488	.05409	.21144	4.7295	.01144	87.441	4.0851	16
17	22.185	.04507	.20944	4.7746	.00944	105.92	4.1975	17
18	26.623	.03756	.20781	4.8121	.00781	128.11	4.2975	18
19	31.947	.03130	.20646	4.8435	.00646	154.73	4.3860	19
20	38.337	.02608	.20536	4.8695	.00536	186.68	4.4643	20
21	46.004	.02174	.20444	4.8913	.00444	225.02	4.5333	21
22	55.205	.01811	.20369	4.9094	.00369	271.02	4.5941	22
23	66.246	.01510	.20307	4.9245	.00307	326.23	4.6474	23
24	79.495	.01258	.20255	4.9371	.00255	392.47	4.6942	24
25	95.394	.01048	.20212	4.9475	.00212	471.97	4.7351	25
26	114.47	.00874	.20176	4.9563	.00176	567.36	4.7708	26
27	137.36	.00728	.20147	4.9636	.00147	681.84	4.8020	27
28	164.84	.00607	.20122	4.9696	.00122	819.21	4.8291	28
29	197.81	.00506	.20102	4.9747	.00102	984.05	4.8526	29
30	237.37	.00421	.20085	4.9789	.00085	1181.8	4.8730	30
31	284.84	.00351	.20070	4.9824	.00070	1419.2	4.8907	31
32	341.81	.00293	.20059	4.9853	.00059	1704.0	4.9061	32
33	410.17	.00244	.20049	4.9878	.00049	2045.8	4.9193	33
34	492.21	.00203	.20041	4.9898	.00041	2456.0	4.9307	34
35	590.65	.00169	.20034	4.9915	.00034	2948.2	4.9406	35
40	1469.7	.00068	.20014	4.9966	.00014	7343.6	4.9727	40
45	3657.1	.00027	.20005	4.9986	.00005	18281.3	4.9876	45
50	9100.1	.00011	.20002	4.9994	.00002	45497.2	4.9945	50

25% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 25, N)$	$(P/F, 25, N)$	$(A/P, 25, N)$	$(P/A, 25, N)$	$(A/F, 25, N)$	$(F/A, 25, N)$	$(A/G, 25, N)$	N
1	1.2500	.80000	1.2500	.8000	1.0000	1.0000	.00000	1
2	1.5625	.64000	.69444	1.4400	.44444	2.2500	.44444	2
3	1.9531	.51200	.51230	1.9520	.26230	3.8125	.85246	3
4	2.4414	.40960	.42344	2.3616	.17344	5.7656	1.2249	4
5	3.0518	.32768	.37185	2.6893	.12185	8.2070	1.5631	5
6	3.8147	.26214	.33882	2.9514	.08882	11.259	1.8683	6
7	4.7684	.20972	.31634	3.1611	.06634	15.073	2.1424	7
8	5.9605	.16777	.30040	3.3289	.05040	19.842	2.3872	8
9	7.4506	.13422	.28876	3.4631	.03876	25.802	2.6048	9
10	9.3132	.10737	.28007	3.5705	.03007	33.253	2.7971	10
11	11.642	.08590	.27349	3.6564	.02349	42.566	2.9663	11
12	14.552	.06872	.26845	3.7251	.01845	54.208	3.1145	12
13	18.190	.05498	.26454	3.7801	.01454	68.760	3.2437	13
14	22.737	.04398	.26150	3.8241	.01150	86.949	3.3559	14
15	28.422	.03518	.25912	3.8593	.00912	109.687	3.4530	15
16	35.527	.02815	.25724	3.8874	.00724	138.109	3.5366	16
17	44.409	.02252	.25576	3.9099	.00576	173.636	3.6084	17
18	55.511	.01801	.25459	3.9279	.00459	218.045	3.6698	18
19	69.389	.01441	.25366	3.9424	.00366	273.556	3.7222	19
20	86.736	.01153	.25292	3.9539	.00292	342.945	3.7667	20
21	108.420	.00922	.25233	3.9631	.00233	429.681	3.8045	21
22	135.525	.00738	.25186	3.9705	.00186	538.101	3.8365	22
23	169.407	.00590	.25148	3.9764	.00148	673.626	3.8634	23
24	211.758	.00472	.25119	3.9811	.00119	843.033	3.8861	24
25	264.698	.00378	.25095	3.9849	.00095	1054.791	3.9052	25
26	330.872	.00302	.25076	3.9879	.00076	1319.489	3.9212	26
27	413.590	.00242	.25061	3.9903	.00061	1650.361	3.9346	27
28	516.988	.00193	.25048	3.9923	.00048	2063.952	3.9457	28
29	646.235	.00155	.25039	3.9938	.00039	2580.939	3.9551	29
30	807.794	.00124	.25031	3.9950	.00031	3227.174	3.9628	30
31	1009.742	.00099	.25025	3.9960	.00025	4034.968	3.9693	31
32	1262.177	.00079	.25020	3.9968	.00020	5044.710	3.9746	32
33	1577.722	.00063	.25016	3.9975	.00016	6306.887	3.9791	33
34	1972.152	.00051	.25013	3.9980	.00012	7884.609	3.9828	34
35	2465.190	.00041	.25010	3.9984	.00010	9856.761	3.9858	35

30% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, 30, N)	(P/F, 30, N)	(A/P, 30, N)	(P/A, 30, N)	(A/F, 30, N)	(F/A, 30, N)	(A/G, 30, N)	N
1	1.3000	.76923	1.3000	.7692	1.0000	1.000	.0000	1
2	1.6900	.59172	.73478	1.3609	.43478	2.2999	.4348	2
3	2.1969	.45517	.55063	1.8161	.25063	3.9899	.8277	3
4	2.8560	.35013	.46163	2.1662	.16163	6.1869	1.1782	4
5	3.7129	.26933	.41058	2.4355	.11058	9.0430	1.4903	5
6	4.8267	.20718	.37839	2.6427	.07830	12.755	1.7654	6
7	6.2748	.15937	.35687	2.8021	.05687	17.582	2.0062	7
8	8.1572	.12259	.34192	2.9247	.04192	23.857	2.2156	8
9	10.604	.09430	.33124	3.0190	.03124	32.014	2.3962	9
10	13.785	.07254	.32346	3.0915	.02346	42.619	2.5512	10
11	17.921	.05580	.31773	3.1473	.01773	56.404	2.6832	11
12	23.297	.04292	.31345	3.1902	.01345	74.326	2.7951	12
13	30.287	.03302	.31024	3.2232	.01024	97.624	2.8894	13
14	39.373	.02540	.30782	3.2486	.00782	127.91	2.9685	14
15	51.185	.01954	.30598	3.2682	.00598	167.28	3.0344	15
16	66.540	.01503	.30458	3.2832	.00458	218.46	3.0892	16
17	86.503	.01156	.30351	3.2948	.00351	285.01	3.1345	17
18	112.45	.00889	.30269	3.3036	.00269	371.51	3.1718	18
19	146.18	.00684	.30207	3.3105	.00207	483.96	3.2024	19
20	190.04	.00526	.30159	3.3157	.00159	630.15	3.2275	20
21	247.06	.00405	.30122	3.3198	.00122	820.20	3.2479	21
22	321.17	.00311	.30094	3.3229	.00094	1067.2	3.2646	22
23	417.53	.00240	.30072	3.3253	.00072	1388.4	3.2781	23
24	542.79	.00184	.30055	3.3271	.00055	1805.9	3.2890	24
25	705.62	.00142	.30043	3.3286	.00043	2348.7	3.2978	25
26	917.31	.00109	.30033	3.3297	.00033	3054.3	3.3049	26
27	1192.5	.00084	.30025	3.3305	.00025	3971.6	3.3106	27
28	1550.2	.00065	.30019	3.3311	.00019	5164.1	3.3152	28
29	2015.3	.00050	.30015	3.3316	.00015	6714.4	3.3189	29
30	2619.9	.00038	.30011	3.3320	.00011	8729.7	3.3218	30
31	3405.9	.00029	.30009	3.3323	.00009	11350.0	3.3242	31
32	4427.6	.00023	.30007	3.3326	.00007	14756.0	3.3261	32
33	5755.9	.00017	.30005	3.3327	.00005	19184.0	3.3276	33
34	7482.7	.00013	.30004	3.3328	.00004	24940.0	3.3287	34
35	9727.5	.00010	.30003	3.3329	.00003	32423.0	3.3297	35

40% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 40, N)$	$(P/F, 40, N)$	$(A/P, 40, N)$	$(P/A, 40, N)$	$(A/F, 40, N)$	$(F/A, 40, N)$	$(A/G, 40, N)$	N
1	1.4000	.71429	1.40000	.7143	1.00000	1.0000	.0000	1
2	1.9600	.51020	.81667	1.2244	.41667	2.3999	.4167	2
3	2.7440	.36443	.62936	1.5889	.22936	4.3599	.7798	3
4	3.8415	.26031	.54077	1.8492	.14077	7.1039	1.0923	4
5	5.3782	.18593	.49136	2.0351	.09136	10.945	1.3579	5
6	7.5295	.13281	.46126	2.1679	.06126	16.323	1.5810	6
7	10.541	.09486	.44192	2.2628	.04192	23.853	1.7663	7
8	14.757	.06776	.42907	2.3306	.02907	34.394	1.9185	8
9	20.660	.04840	.42034	2.3790	.02034	49.152	2.0422	9
10	28.925	.03457	.41432	2.4135	.01432	69.813	2.1419	10
11	40.495	.02469	.41013	2.4382	.01013	98.738	2.2214	11
12	56.693	.01764	.40718	2.4559	.00718	139.23	2.2845	12
13	79.370	.01260	.40510	2.4685	.00510	195.92	2.3341	13
14	111.11	.00900	.40363	2.4775	.00363	275.29	2.3728	14
15	155.56	.00643	.40259	2.4839	.00259	386.41	2.4029	15
16	217.79	.00469	.40184	2.4885	.00185	541.08	2.4262	16
17	304.91	.00328	.40132	2.4918	.00132	759.77	2.4440	17
18	426.87	.00234	.40094	2.4941	.00094	1064.6	2.4577	18
19	597.62	.00167	.40067	2.4958	.00067	1491.5	2.4681	19
20	836.67	.00120	.40048	2.4970	.00048	2089.1	2.4760	20
21	1171.3	.00085	.40034	2.4978	.00034	2925.8	2.4820	21
22	1639.8	.00061	.40024	2.4984	.00024	4097.1	2.4865	22
23	2295.8	.00044	.40017	2.4989	.00017	5737.0	2.4899	23
24	3214.1	.00031	.40012	2.4992	.00012	8032.8	2.4925	24
25	4499.8	.00022	.40009	2.4994	.00009	11247.2	2.4944	25

50% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, 50, N)	(P/F, 50, N)	(A/P, 50, N)	(P/A, 50, N)	(A/F, 50, N)	(F/A, 50, N)	(A/G, 50, N)	N
1	1.5000	.66667	1.5000	.6667	1.00000	1.000	.0000	1
2	2.2500	.44444	.90000	1.1111	.40000	2.500	.4000	2
3	3.3750	.29630	.71053	1.4074	.21053	4.750	.7368	3
4	5.0625	.19753	.62308	1.6049	.12308	8.125	1.0153	4
5	7.5937	.13169	.57583	1.7366	.07583	13.187	1.2417	5
6	11.390	.08779	.54812	1.8244	.04812	20.781	1.4225	6
7	17.085	.05853	.53108	1.8829	.03108	32.171	1.5648	7
8	25.628	.03902	.52030	1.9219	.02030	49.257	1.6751	8
9	38.443	.02601	.51335	1.9479	.01335	74.886	1.7506	9
10	57.665	.01734	.50882	1.9653	.00882	113.33	1.8235	10
11	86.497	.01156	.50585	1.9768	.00585	170.99	1.8713	11
12	129.74	.00771	.50388	1.9845	.00388	257.49	1.9067	12
13	194.61	.00514	.50258	1.9897	.00258	387.23	1.9328	13
14	291.92	.00343	.50172	1.9931	.00172	581.85	1.9518	14
15	437.89	.00228	.50114	1.9954	.00114	873.78	1.9656	15
16	656.84	.00152	.50076	1.9969	.00076	1311.6	1.9756	16
17	985.26	.00101	.50051	1.9979	.00051	1968.5	1.9827	17
18	1477.8	.00068	.50034	1.9986	.00034	2953.7	1.9878	18
19	2216.8	.00045	.50023	1.9991	.00023	4431.6	1.9914	19
20	3325.2	.00030	.50015	1.9994	.00015	6648.5	1.9939	20
21	4987.8	.00020	.50010	1.9996	.00010	9973.7	1.9957	21
22	7481.8	.00013	.50007	1.9997	.00007	14961.7	1.9970	22
23	11222.7	.00009	.50004	1.9998	.00004	22443.5	1.9979	23
24	16834.1	.00006	.50003	1.9998	.00003	33666.2	1.9985	24
25	25251.2	.00004	.50002	1.9999	.00002	50500.3	1.9990	25

60% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	(F/P, 60, N)	(P/F, 60, N)	(A/P, 60, N)	(P/A, 60, N)	(A/F, 60, N)	(F/A, 60, N)	(A/G, 60, N)	N
1	1.6000	.62500	1.6000	.6250	1.0000	1.000	.0000	1
2	2.5600	.39063	.98462	1.0156	.38462	2.6000	.3846	2
3	4.0959	.24414	.79380	1.2597	.19380	5.1599	.6977	3
4	6.5535	.15259	.70804	1.4123	.10804	9.2559	.9464	4
5	10.485	.09537	.66325	1.5077	.06325	15.809	1.1395	5
6	16.777	.05960	.63803	1.5673	.03803	26.295	1.2863	6
7	26.843	.03725	.62322	1.6045	.02322	43.072	1.3958	7
8	42.949	.02328	.61430	1.6278	.01430	69.915	1.4759	8
9	68.719	.01455	.60886	1.6424	.00886	112.66	1.5337	9
10	109.95	.00909	.60551	1.6515	.00551	181.58	1.5748	10
11	175.92	.00568	.60343	1.6571	.00343	291.53	1.6037	11
12	281.47	.00355	.60214	1.6607	.00214	467.45	1.6238	12
13	450.35	.00222	.60134	1.6629	.00134	748.92	1.6377	13
14	720.57	.00139	.60083	1.6643	.00083	1199.2	1.6472	14
15	1152.9	.00087	.60052	1.6652	.00052	1919.8	1.6536	15
16	1844.6	.00054	.60033	1.6657	.00033	3072.7	1.6579	16
17	2951.4	.00034	.60020	1.6661	.00020	4917.4	1.6609	17
18	4722.3	.00021	.60013	1.6663	.00013	7868.8	1.6628	18
19	7555.7	.00013	.60008	1.6664	.00008	12591.0	1.6641	19
20	12089.0	.00008	.60005	1.6665	.00005	20147.0	1.6650	20

70% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 70, N)$	$(P/F, 70, N)$	$(A/P, 70, N)$	$(P/A, 70, N)$	$(A/F, 70, N)$	$(F/A, 70, N)$	$(A/G, 70, N)$	N
1	1.7000	.58824	1.7000	.5882	1.0000	1.000	.0000	1
2	2.8900	.34602	1.0703	.9343	.37037	2.700	.3704	2
3	4.9130	.20354	.87889	1.1378	.17889	5.590	.6619	3
4	8.3520	.11973	.79521	1.2575	.09521	10.502	.8845	4
5	14.198	.07043	.75304	1.3279	.05304	18.855	1.0497	5
6	24.137	.04143	.73025	1.3693	.03025	33.053	1.1692	6
7	41.033	.02437	.71749	1.3937	.01749	57.191	1.2537	7
8	69.757	.01434	.71018	1.4080	.01018	98.224	1.3122	8
9	118.58	.00843	.70595	1.4165	.00595	167.98	1.3520	9
10	201.59	.00496	.70349	1.4214	.00349	286.56	1.3787	10
11	342.71	.00292	.70205	1.4244	.00205	488.16	1.3963	11
12	582.62	.00172	.70120	1.4261	.00120	830.88	1.4079	12
13	990.45	.00101	.70071	1.4271	.00071	1413.5	1.4154	13
14	1683.7	.00059	.70042	1.4277	.00042	2403.9	1.4202	14
15	2862.4	.00035	.70024	1.4280	.00024	4087.7	1.4233	15
16	4866.0	.00021	.70014	1.4282	.00014	6950.1	1.4252	16
17	8272.3	.00012	.70008	1.4284	.00008	11816.0	1.4265	17
18	14063.0	.00007	.70005	1.4284	.00005	20089.0	1.4272	18
19	23907.0	.00004	.70003	1.4285	.00003	34152.0	1.4277	19
20	40642.0	.00002	.70002	1.4285	.00002	58059.0	1.4280	20

80% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

	SINGLE PAYMENT		UNIFORM SERIES					
	Compound Amount Factor	Present Worth Factor	Capital Recovery Factor	Present Worth Factor	Sinking Fund Factor	Compound Amount Factor	Gradient Factor	
N	$(F/P, 80, N)$	$(P/F, 80, N)$	$(A/P, 80, N)$	$(P/A, 80, N)$	$(A/F, 80, N)$	$(F/A, 80, N)$	$(A/G, 80, N)$	N
1	1.8000	.55556	1.8000	.5556	1.00000	1.0000	.0000	1
2	3.2400	.30864	1.1571	.8642	.35714	2.8000	.3571	2
3	5.8319	.17147	.96556	1.0356	.16556	6.0399	.6291	3
4	10.497	.09526	.88423	1.1309	.08423	11.871	.8288	4
5	18.895	.05292	.84470	1.1838	.04470	22.369	.9706	5
6	34.012	.02940	.82423	1.2132	.02423	41.265	1.0682	6
7	61.221	.01633	.81328	1.2295	.01328	75.277	1.1337	7
8	110.19	.00907	.80733	1.2386	.00733	136.49	1.1767	8
9	198.35	.00504	.80405	1.2437	.00405	246.69	1.2044	9
10	357.04	.00280	.80225	1.2465	.00225	445.05	1.2219	10
11	642.68	.00156	.80125	1.2480	.00125	802.10	1.2328	11
12	1156.8	.00086	.80069	1.2489	.00069	1444.7	1.2396	12
13	2082.2	.00048	.80038	1.2494	.00038	2601.6	1.2437	13
14	3748.1	.00027	.80021	1.2496	.00021	4683.8	1.2462	14
15	6746.5	.00015	.80012	1.2498	.00012	8431.9	1.2477	15

90% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

N	SINGLE PAYMENT Compound Amount Factor (F/P, 90, N)	Present Worth Factor (P/F, 90, N)	UNIFORM SERIES Capital Recovery Factor (A/P, 90, N)	Present Worth Factor (P/A, 90, N)	Sinking Fund Factor (A/F, 90, N)	Compound Amount Factor (F/A, 90, N)	Gradient Factor (A/G, 90, N)	N
1	1.9000	.52632	1.9000	.52632	1.00000	1.0000	.00000	1
2	3.6100	.27701	1.2448	.80332	.34483	2.9000	.34483	2
3	6.8589	.14579	1.0536	.94912	.15361	6.5009	.59908	3
4	13.032	.07673	.97480	1.0258	.07480	13.368	.77867	4
5	24.760	.04039	.93788	1.0662	.03788	26.401	.90068	5
6	47.045	.02126	.91955	1.0374	.01955	51.161	.98081	6
7	89.386	.01119	.91018	1.0986	.01018	98.207	1.0319	7
8	169.83	.00589	.90533	1.1045	.00533	187.59	1.0637	8
9	322.68	.00310	.90280	1.1076	.00280	357.42	1.0831	9
10	613.10	.00163	.90147	1.1093	.00147	680.11	1.0947	10

100% Interest Factors for Discrete Compounding Periods

N	SINGLE PAYMENT Compound Amount Factor (F/P, 100, N)	Present Worth Factor (P/F, 100, N)	UNIFORM SERIES Capital Recovery Factor (A/P, 100, N)	Present Worth Factor (P/A, 100, N)	Sinking Fund Factor (A/F, 100, N)	Compound Amount Factor (F/A, 100, N)	Gradient Factor (A/G, 100, N)	N
1	2.000	.50000	2.0000	.50000	1.0000	1.000	.00000	1
2	4.000	.25000	1.3333	.75000	.33333	3.000	.33333	2
3	8.000	.12500	1.1428	.87500	.14286	7.000	.57143	3
4	16.000	.06250	1.0666	.93750	.00667	15.000	.73333	4
5	32.000	.03125	1.0322	.96875	.03226	31.000	.83871	5
6	64.00	.01562	1.0158	.98438	.01587	63.00	.90476	6
7	128.00	.00781	1.0078	.99219	.00787	127.00	.94488	7
8	256.00	.00391	1.0039	.99609	.00392	255.00	.96863	8
9	512.00	.00195	1.0019	.99805	.00196	511.00	.98239	9
10	1024.0	.00098	1.0009	.99902	.00098	1023.0	.99022	10

TABLE A-24

50.00% COMPOUND INTEREST FACTORS

	SINGLE PAYMENTS		UNIFORM SERIES PAYMENTS				
N	COMPOUND AMOUNT F/P	PRESENT WORTH P/F	SINKING FUND A/F	COMPOUND AMOUNT F/A	CAPITAL RECOVERY A/P	PRESENT WORTH P/A	N
1	1.5000	0.6667	1.00000	1.000	1.50000	0.6667	1
2	2.2500	0.4444	0.40000	2.500	0.90000	1.1111	2
3	3.3750	0.2963	0.21053	4.750	0.71053	1.4074	3
4	5.0625	0.1975	0.12308	8.125	0.62308	1.6049	4
5	7.5937	0.1317	0.07583	13.187	0.57583	1.7366	5
6	11.3906	0.0878	0.04812	20.781	0.54812	1.8244	6
7	17.0859	0.0585	0.03108	32.172	0.53108	1.8829	7
8	25.6288	0.0390	0.02030	49.258	0.52030	1.9220	8
9	38.4431	0.0260	0.01335	74.886	0.51335	1.9480	9
10	57.6647	0.0173	0.00882	113.329	0.50882	1.9653	10
11	86.4969	0.0116	0.00585	170.994	0.50585	1.9769	11
12	129.7453	0.0077	0.00388	257.491	0.50388	1.9846	12
13	194.6179	0.0051	0.00258	387.236	0.50258	1.9897	13
14	291.9265	0.0034	0.00172	581.854	0.50172	1.9931	14
15	437.8896	0.0023	0.00114	873.780	0.50114	1.9954	15
16	656.8340	0.0015	0.00076	1311.669	0.50076	1.9970	16
17	985.2505	0.0010	0.00051	1968.503	0.50051	1.9980	17
18	1477.875	0.0007	0.00034	2953.753	0.50034	1.9986	18
19	2216.811	0.0005	0.00023	4431.625	0.50023	1.9991	19
20	3325.214	0.0003	0.00015	6648.434	0.50015	1.9994	20
22	7481.723	0.0001	0.00007	14961.450	0.50007	1.9997	22
24	16833.85	0.0001	0.00003	33665.730	0.50003	1.9999	24
25	25250.77	0.0000	0.00002	50499.570	0.50002	1.9999	25
26	37876.13	0.0000	0.00001	75750.310	0.50001	1.9999	26
28	85221.13	0.0000	0.00001	170440.30	0.50001	2.0000	28
30	191747.4	0.0000	0.00000	383493.10	0.50000	2.0000	30
32	431431.1	0.0000	0.00000	862861.50	0.50000	2.0000	32
34	970718.8	0.0000	0.00000	1941437.0	0.50000	2.0000	34

TABLE A-25

PRESENT WORTH GRADIENT FACTORS(P/G)

N	1%	2%	3%	4%	5%	6%	N
2	0.958	0.958	0.941	0.924	0.906	0.890	2
3	2.895	2.841	2.772	2.702	2.634	2.569	3
4	5.773	5.612	5.437	5.267	5.101	4.945	4
5	9.566	9.233	8.887	8.554	8.235	7.934	5
6	14.271	13.672	13.074	12.506	11.966	11.458	6
7	19.860	18.895	17.952	17.066	16.230	15.449	7
8	26.324	24.868	23.478	22.180	20.968	19.840	8
9	33.626	31.559	29.609	27.801	26.124	24.576	9
10	41.764	38.943	36.305	33.881	31.649	29.601	10
11	50.721	46.984	43.530	40.377	37.496	34.869	11
12	60.479	55.657	51.245	47.248	43.621	40.335	12
13	71.018	64.932	59.416	54.454	49.984	45.961	13
14	82.314	74.783	68.010	61.961	56.550	51.711	14
15	94.374	85.183	76.996	69.735	63.284	57.553	15
16	107.154	96.109	86.343	77.744	70.156	63.457	16
17	120.662	107.535	96.023	85.958	77.136	69.399	17
18	134.865	119.436	106.009	94.350	84.200	75.355	18
19	149.754	131.792	116.274	102.893	91.323	81.304	19
20	165.320	144.577	126.794	111.564	98.484	87.228	20
21	181.546	157.772	137.544	120.341	105.663	93.111	21
22	198.407	171.354	148.504	129.202	112.841	98.939	22
23	215.903	185.305	159.651	138.126	120.004	104.699	23
24	234.009	199.604	170.965	147.101	127.135	110.379	24
25	252.717	214.231	182.426	156.103	134.223	115.971	25
26	272.011	229.169	194.020	165.121	141.253	121.466	26
27	291.875	244.401	205.725	174.135	148.217	126.858	27
28	312.309	259.908	217.525	183.142	155.105	132.140	28
29	333.280	275.674	229.407	192.120	161.907	137.307	29
30	354.790	291.684	241.355	201.061	168.617	142.357	30
31	376.822	307.921	253.354	209.955	175.228	147.284	31
32	399.360	324.369	265.392	218.792	181.734	152.088	32
33	422.398	341.016	277.457	227.563	188.130	156.766	33
34	445.919	357.845	289.536	236.260	194.412	161.317	34
35	469.916	374.846	301.619	244.876	200.575	165.741	35
36	494.375	392.003	313.695	253.405	206.618	170.037	36
37	519.279	409.305	325.755	261.839	212.538	174.205	37
38	544.622	426.738	337.788	270.175	218.333	178.247	38
39	570.396	444.291	349.786	278.406	224.003	182.163	39
40	596.579	461.953	361.742	286.530	229.540	185.955	40
42	650.167	497.560	365.495	302.437	240.234	193.171	42
44	705.288	533.474	408.989	317.869	250.412	199.911	44
46	761.870	569.618	432.177	332.810	260.079	206.192	46
48	819.829	605.921	455.017	347.244	269.242	212.033	48
50	879.089	642.316	477.472	361.163	277.910	217.456	50

TABLE A-25

PRESENT WORTH GRADIENT FACTORS(P/G)

N	7%	8%	9%	10%	15%	20%	N
2	0.873	0.857	0.841	0.826	0.756	0.694	2
3	2.506	2.445	2.386	2.329	2.071	1.852	3
4	4.794	4.650	4.511	4.378	3.786	3.299	4
5	7.646	7.372	7.111	6.862	5.775	4.906	5
6	10.978	10.523	10.092	9.684	7.937	6.581	6
7	14.714	14.024	13.374	12.763	10.192	8.255	7
8	18.789	17.806	16.887	16.028	12.481	9.883	8
9	23.140	21.808	20.570	19.421	14.755	11.434	9
10	27.715	25.977	24.372	22.891	16.979	12.887	10
11	32.466	30.266	28.247	26.396	19.129	14.233	11
12	37.350	34.634	32.158	29.901	21.185	15.467	12
13	42.330	39.046	36.072	33.377	23.135	16.588	13
14	47.371	43.472	39.962	36.800	24.972	17.601	14
15	52.445	47.886	43.806	40.152	26.693	18.509	15
16	57.526	52.264	47.584	43.416	28.296	19.321	16
17	62.592	56.588	51.281	46.581	29.783	20.042	17
18	67.621	60.842	54.885	49.639	31.156	20.680	18
19	72.598	65.013	58.386	52.582	32.421	21.244	19
20	77.508	69.090	61.776	55.406	33.582	21.739	20
21	82.339	73.063	65.050	58.109	34.645	22.174	21
22	87.079	76.926	68.204	60.689	35.615	22.555	22
23	91.719	80.672	71.235	63.146	36.499	22.887	23
24	96.254	84.300	74.142	65.481	37.302	23.176	24
25	100.676	87.804	76.926	67.696	38.031	23.428	25
26	104.981	91.184	79.586	69.794	38.692	23.646	26
27	109.165	94.439	82.124	71.777	39.289	23.835	27
28	113.226	97.569	84.541	73.649	39.828	23.999	28
29	117.161	100.574	86.842	75.414	40.315	24.141	29
30	120.971	103.456	89.027	77.076	40.753	24.263	30
31	124.654	106.216	91.102	78.639	41.147	24.368	31
32	128.211	108.857	93.068	80.108	41.501	24.459	32
33	131.643	111.382	94.931	81.485	41.818	24.537	33
34	134.950	113.792	96.693	82.777	42.103	24.604	34
35	138.135	116.092	98.358	83.987	42.359	24.661	35
36	141.198	118.284	99.931	85.119	42.587	24.711	36
37	144.144	120.371	101.416	86.178	42.792	24.753	37
38	146.972	122.358	102.815	87.167	42.974	24.789	38
39	149.688	124.247	104.134	88.091	43.137	24.820	39
40	152.292	126.042	105.376	88.952	43.283	24.847	40
42	157.180	129.365	107.643	90.505	43.529	24.889	42
44	161.660	132.355	109.645	91.851	43.723	24.920	44
46	165.758	135.038	111.410	93.016	43.878	24.942	46
48	169.498	137.443	112.962	94.022	44.000	24.958	48
50	172.905	139.593	114.325	94.889	44.096	24.970	50

TABLE A-25

PRESENT WORTH GRADIENT FACTORS(P/G)

N	25%	30%	35%	40%	45%	50%	N
2	0.640	0.592	0.549	0.510	0.476	0.444	2
3	1.664	1.502	1.362	1.239	1.132	1.037	3
4	2.893	2.552	2.265	2.020	1.810	1.630	4
5	4.204	3.630	3.157	2.764	2.434	2.156	5
6	5.514	4.666	3.983	3.428	2.972	2.595	6
7	6.773	5.622	4.717	3.997	3.418	2.946	7
8	7.947	6.480	5.352	4.471	3.776	3.220	8
9	9.021	7.234	5.889	4.858	4.058	3.428	9
10	9.987	7.887	6.336	5.170	4.277	3.584	10
11	10.846	8.445	6.705	5.417	4.445	3.699	11
12	11.602	8.917	7.005	5.611	4.572	3.784	12
13	12.262	9.314	7.247	5.762	4.668	3.846	13
14	12.833	9.644	7.442	5.879	4.740	3.890	14
15	13.326	9.917	7.597	5.969	4.793	3.922	15
16	13.748	10.143	7.721	6.038	4.832	3.945	16
17	14.108	10.328	7.818	6.090	4.861	3.961	17
18	14.415	10.479	7.895	6.130	4.882	3.973	18
19	14.674	10.602	7.955	6.160	4.898	3.981	19
20	14.893	10.702	8.002	6.183	4.909	3.987	20
21	15.078	10.783	8.038	6.200	4.917	3.991	21
22	15.233	10.848	8.067	6.213	4.923	3.994	22
23	15.362	10.901	8.089	6.222	4.927	3.996	23
24	15.471	10.943	8.106	6.229	4.930	3.997	24
25	15.562	10.977	8.119	6.235	4.933	3.998	25
26	15.637	11.005	8.130	6.239	4.934	3.999	26
27	15.700	11.026	8.137	6.242	4.935	3.999	27
28	15.752	11.044	8.143	6.244	4.936	3.999	28
29	15.796	11.058	8.148	6.245	4.937	4.000	29
30	15.832	11.069	8.152	6.247	4.937	4.000	30
31	15.861	11.078	8.154	6.248	4.938	4.000	31
32	15.886	11.085	8.157	6.248	4.938	4.000	32
33	15.906	11.090	8.158	6.249	4.938	4.000	33
34	15.923	11.094	8.159	6.249	4.938	4.000	34
35	15.937	11.098	8.160	6.249	4.938	4.000	35
36	15.945	11.101	8.161	6.249	4.938	4.000	36
37	15.957	11.103	8.162	6.250	4.938	4.000	37
38	15.965	11.105	8.162	6.250	4.938	4.000	38
39	15.971	11.106	8.162	6.250	4.938	4.000	39
40	15.977	11.107	8.163	6.250	4.938	4.000	40
42	15.984	11.109	8.163	6.250	4.938	4.000	42
44	15.990	11.110	8.163	6.250	4.938	4.000	44
46	15.993	11.110	8.163	6.250	4.938	4.000	46
48	15.995	11.111	8.163	6.250	4.938	4.000	48
50	15.997	11.111	8.163	6.250	4.938	4.000	50

TABLE A.25 Discrete Compounding: i = 5%

Geometric series present worth factor, $(P\|A_1, i, j, n)$					
n	$j = 4\%$	$j = 6\%$	$j = 8\%$	$j = 10\%$	$j = 15\%$
1	0.9524	0.9524	0.9524	0.9524	0.9524
2	1.8957	1.9138	1.9320	1.9501	1.9955
3	2.8300	2.3344	2.9396	2.9954	3.1379
4	3.7554	3.8643	3.9759	4.0904	4.3831
5	4.6721	4.8535	5.0419	5.2375	5.7595
6	5.5799	5.8521	6.1383	6.4393	7.2604
7	6.4792	6.8602	7.2661	7.6983	8.9043
8	7.3609	7.8779	8.4261	9.0173	10.7047
9	8.2521	8.9053	9.6192	10.3091	12.6765
10	9.1258	9.9425	10.8464	11.8467	14.8362
11	9.9913	10.9996	12.1087	13.3632	17.2016
12	10.8485	12.0466	13.4070	14.9519	19.7922
13	11.6976	13.1137	14.7425	16.6163	22.6295
14	12.5386	14.1910	16.1161	18.3599	25.7371
15	13.3715	15.2785	17.5289	20.1866	29.1407
16	14.1968	16.3764	18.9821	22.1002	32.8683
17	15.0137	17.4848	20.4769	24.1050	36.9510
18	15.8231	18.6037	22.0143	26.2052	41.4226
19	16.6248	19.7332	23.5956	28.4055	46.3200
20	17.4189	20.8736	25.2222	30.7105	51.6838
21	18.2054	22.0247	26.8952	33.1253	57.5584
22	18.9844	23.1869	28.6160	35.6550	63.9925
23	19.7559	24.3601	30.3860	38.3053	71.0394
24	20.5202	25.5445	32.2066	41.0817	78.7575
25	21.2771	26.7401	34.0791	43.9904	87.2100
26	22.0269	27.9472	36.0052	47.0375	96.4687
27	22.7695	29.1657	37.9863	50.2298	106.6086
28	23.5050	30.3959	40.0240	53.5741	117.7142
29	24.2335	31.6377	42.1199	57.0776	129.8774
30	24.9551	32.8914	44.2757	60.7480	143.1931
31	25.6698	34.1571	46.4931	64.5931	157.7095
32	26.3777	35.4348	48.7739	68.6213	173.7095
33	27.0789	36.7246	51.1198	72.8414	191.2713
34	27.7734	38.0267	53.5328	77.2624	210.4400
35	28.4612	39.3413	56.0146	81.8940	231.4343
36	29.1426	40.6683	58.5674	86.7461	254.4280
37	29.8174	42.0080	61.1932	91.8292	279.6116
38	30.4858	43.3605	63.8939	97.1544	307.1937
39	31.1478	44.7258	66.6719	102.7332	337.4026
40	31.8036	46.1042	69.5291	108.5776	370.4806
41	32.4531	47.4957	72.4681	114.7004	406.7256
42	33.0964	48.9004	75.4910	121.1147	446.4138
43	33.7335	50.3185	78.6002	127.8344	489.8817
44	34.3647	51.7501	81.7983	134.8742	537.4895
45	34.9898	53.1953	85.0878	142.2491	589.6314
46	35.6089	54.6543	88.4713	149.9753	646.7391
47	36.2221	56.1272	91.9514	158.0693	709.2857
48	36.8296	57.6141	95.5310	166.5488	777.7891
49	37.4312	59.1152	99.2128	175.4321	852.8167
50	38.0271	60.6306	102.9998	184.7384	934.9897

TABLE A.26 Discrete Compounding: i = 5%

Geometric series future worth factor, (F/A1, i, j, n)					
n	j = 4%	j = 6%	j = 8%	j = 10%	j = 15%
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.0900	2.1100	2.1300	2.1500	2.2000
3	3.2751	3.3391	3.4029	3.4675	3.6325
4	4.5648	4.6971	4.8328	4.9719	5.3350
5	5.9629	6.1944	6.4349	6.6846	7.3508
6	7.4777	7.8423	8.2260	8.6293	9.7297
7	9.1169	9.6530	10.2241	10.8323	12.5292
8	10.8886	11.6393	12.4492	13.3227	15.8157
9	12.8016	13.8151	14.9225	16.1324	19.6655
10	14.8650	16.1953	17.6677	19.2970	24.1666
11	17.0885	18.7959	20.7100	22.8555	29.4205
12	19.4824	21.6340	24.0771	26.8514	35.5439
13	22.0576	24.7279	27.7992	31.3324	42.6714
14	24.8255	28.0972	31.9087	36.3513	50.9577
15	27.7905	31.7650	36.4414	41.9604	60.5813
16	30.9893	35.7477	41.4356	48.2420	71.7475
17	34.4118	40.0754	46.9333	55.2490	84.6925
18	38.0803	44.7720	52.9800	63.5660	99.6803
19	42.0101	49.8049	59.6259	71.7792	117.0482
20	46.2175	55.3838	66.9220	81.4840	137.1324
21	50.7195	61.3601	74.9290	92.2857	160.3556
22	55.5342	67.8277	83.7093	104.3003	187.1948
23	60.6905	74.8220	93.3313	117.6556	218.1993
24	66.1756	82.3835	103.8604	132.4927	254.0308
25	72.0519	90.5516	115.4040	148.9670	295.3260
26	78.3203	99.3710	128.0227	167.2501	343.0112
27	85.0088	108.8890	141.8202	187.5308	398.0186
28	92.1420	119.1558	156.8902	210.0173	461.4548
29	99.7484	130.2252	173.3713	234.9391	534.5932
30	107.8545	142.1549	191.3572	262.5492	618.8983
31	116.4906	155.0051	210.9877	293.1261	716.0550
32	125.6893	168.8445	232.4047	326.9767	828.9013
33	135.4907	183.7401	255.7620	364.4393	956.9604
34	145.9032	199.7677	281.2262	405.6864	1105.5146
35	156.9928	217.0071	308.9776	451.7284	1276.5951
36	168.7684	235.5436	339.2119	502.4173	1473.5004
37	181.3317	255.4680	372.1403	558.4508	1700.4322
38	194.6684	276.8775	407.9933	620.3773	1961.5765
39	208.8385	299.8756	447.0182	688.0005	2262.2007
40	223.6968	324.5729	489.4844	764.3853	2608.2356
41	239.8927	351.0873	535.6832	847.0639	3006.5103
42	256.8804	379.5445	585.9798	940.0422	3464.8795
43	274.9172	410.0788	640.5658	1041.8080	3992.3730
44	294.0535	442.8332	699.9507	1154.1385	4599.3787
45	314.3832	477.9603	764.5147	1278.1095	5297.8426
46	335.9435	515.6229	834.6609	1414.9055	6101.5040
47	358.8155	555.9948	910.8680	1565.8303	7026.1639
48	383.0741	599.2602	993.6434	1732.3193	8089.9944
49	408.7984	645.6171	1083.5562	1915.9525	9313.8949
50	436.0716	695.2754	1181.1404	2118.4691	10721.9004

TABLE A.27 Discrete Compounding: i = 8%

Geometric series present worth factor, $(P/A_1\ i,j,n)$					
n	j = 4%	j = 6%	j = 8%	j = 10%	j = 15%
1	0.9259	0.9259	0.9259	0.9259	0.9259
2	1.8176	1.8347	1.8519	1.8690	1.9119
3	2.6762	2.7207	2.7778	2.8295	2.9617
4	3.5030	3.6021	3.7037	3.8079	4.0796
5	4.2922	4.4613	4.6296	4.8043	5.2699
6	5.0659	5.3046	5.5556	5.8192	6.5374
7	5.8042	6.1323	6.4815	6.8529	7.8971
8	6.5151	6.9447	7.4074	7.9057	9.3242
9	7.1997	7.7420	8.3333	8.9780	10.8545
10	7.8590	8.5246	9.2593	10.0702	12.4839
11	8.4939	9.2926	10.1852	11.1826	14.2190
12	9.1052	10.0465	11.1111	12.3157	16.0665
13	9.6939	10.7863	12.0370	13.4696	18.0338
14	10.2608	11.5125	12.9630	14.6450	20.1268
15	10.8067	12.2252	13.8889	15.8421	22.3592
16	11.3324	12.9245	14.8148	17.0614	24.7343
17	11.8386	13.6114	15.7407	18.3033	27.2634
18	12.3260	14.2852	16.6667	19.5682	29.9564
19	12.7954	14.9466	17.5926	20.8565	32.8239
20	13.2475	15.5957	18.5185	22.1687	35.8773
21	13.6827	16.2329	19.4444	23.5051	39.1258
22	14.1019	16.8582	20.3704	24.8663	42.5906
23	14.5055	17.4719	21.2963	26.2527	46.2771
24	14.8942	18.0743	22.2222	27.6648	50.2024
25	15.2685	18.6655	23.1481	29.1031	54.3822
26	15.6289	19.2458	24.0741	30.5679	58.8329
27	15.9760	19.8153	25.0000	32.0599	63.5721
28	16.3102	20.3743	25.9259	33.5796	68.6184
29	16.6321	20.9229	26.8519	35.1273	73.9919
30	16.9420	21.4614	27.7778	36.7033	79.7136
31	17.2404	21.9899	28.7037	38.3094	85.8061
32	17.5278	22.5086	29.6296	39.9447	92.2935
33	17.8046	23.0177	30.5556	41.6104	99.2015
34	18.0711	23.5173	31.4815	43.3069	106.5571
35	18.3277	24.0078	32.4074	45.0348	114.3895
36	18.5748	24.4891	33.3333	46.7947	122.7296
37	18.8128	24.9615	34.2593	48.5872	131.6102
38	19.0419	25.4252	35.1852	50.4129	141.0664
39	19.2626	25.8803	36.1111	52.2724	151.1355
40	19.4751	26.3269	37.0370	54.1663	161.8573
41	19.5797	26.7653	37.9630	56.0953	173.2739
42	19.8768	27.1956	38.8889	58.0600	185.4306
43	20.0665	27.6179	39.8148	60.0611	198.3752
44	20.2493	28.0324	40.7407	62.0993	212.1587
45	20.4252	28.4392	41.6667	64.1752	226.8357
46	20.5945	28.8385	42.5926	66.2896	242.4639
47	20.7576	29.2304	43.5185	68.4431	259.1051
48	20.9149	29.6150	44.4444	70.6365	276.8249
49	21.0662	29.9925	45.3704	72.8705	295.6032
50	21.2119	30.3636	46.2963	75.1459	315.7844

TABLE A.28 Discrete Compounding: i = 8%

Geometric series future worth factor, $(F/A_1\ i,j,n)$					
n	j = 4%	j = 6%	j = 8%	j = 10%	j = 15%
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.1200	2.1400	2.1600	2.1800	2.2300
3	3.3712	3.4348	3.4992	3.5644	3.7309
4	4.7658	4.9006	5.0388	5.1806	5.5502
5	6.3169	6.5551	6.8024	7.0591	7.7433
6	8.0389	8.4278	8.8160	9.2343	10.3741
7	9.9473	10.5097	11.1081	11.7446	13.5171
8	12.0529	12.8541	13.7106	14.6329	17.2595
9	14.3923	15.4763	16.6584	17.9472	21.6982
10	16.9670	18.4039	19.9900	21.7400	26.9519
11	19.8046	21.6670	23.7482	26.0739	33.1536
12	22.9204	25.2987	27.9797	31.0129	40.4583
13	26.3830	29.3348	32.7382	36.6324	49.0452
14	30.1379	33.8145	38.0747	43.0152	59.1216
15	34.2806	38.7805	44.0579	50.2540	70.9270
16	38.8240	44.2795	50.7547	58.4515	84.7383
17	43.8029	50.3623	58.2410	67.7226	100.8749
18	49.2551	57.0840	66.6003	78.1949	119.7062
19	55.2213	64.5051	75.9244	90.0104	141.6582
20	61.7459	72.6911	86.3140	103.3271	167.2225
21	68.8705	81.7135	97.8801	118.3268	196.9669
22	76.6655	91.6501	110.7443	135.1867	231.5458
23	85.1687	102.5857	125.0404	154.1419	271.7142
24	94.4469	114.6123	140.9151	175.4276	318.3428
25	104.5660	127.3107	158.5295	199.3115	372.4354
26	115.6071	142.3435	178.0604	226.0912	435.1492
27	127.6173	157.2858	199.7015	256.0966	507.8179
28	140.7131	175.7710	223.6657	289.6944	591.8767
29	154.9656	194.9443	250.1861	327.2909	689.4026
30	170.4315	215.9583	279.5182	369.3373	802.1302
31	187.3634	238.9784	311.9424	416.3337	932.5124
32	205.7256	264.1648	347.7654	468.8347	1083.2569
33	225.6917	291.7730	387.3237	527.4552	1257.4626
34	247.3954	321.9554	430.9857	592.8768	1458.7810
35	270.9314	354.9629	479.1547	665.8546	1691.2583
36	296.6060	391.0460	532.2724	747.2254	1959.7669
37	324.4384	430.4769	590.8224	837.9162	2269.7001
38	354.6516	473.5512	655.3338	938.0534	2627.4007
39	387.4733	520.5895	726.3857	1051.4740	3040.1361
40	423.0575	571.9402	804.6119	1176.7367	3516.2718
41	461.7355	627.9811	890.7054	1316.1049	4065.4371
42	503.6674	689.1225	985.4243	1471.2103	4698.7151
43	549.1538	755.8093	1089.5977	1643.6714	5428.8019
44	598.4664	828.5245	1204.1322	1835.4052	6270.5578
45	651.9818	907.7919	1330.0187	2048.5017	7240.6974
46	709.9816	994.1799	1468.3407	2285.2723	8358.7225
47	772.8549	1088.3048	1620.2820	2548.2737	9647.0049
48	841.0011	1190.8351	1787.1306	2840.3330	11131.2077
49	914.8517	1302.4957	1970.3181	3164.5769	12841.1914
50	994.8732	1424.0729	2171.3769	3524.4620	14810.7076