



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
MECÁNICA – TERMOFLUIDOS

ANÁLISIS NUMÉRICO ESTADÍSTICO DEL FLUJO DE TAYLOR-COUPETTE
TURBULENTO

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
JAVIER ADALBERTO JAIMES ARRIAGA

TUTOR PRINCIPAL
MARTÍN SALINAS VÁZQUEZ
INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

MÉXICO, D.F. ENERO 2016

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Solorio Ordaz Francisco Javier

Secretario: Dr. Ascanio Gasca Gabriel

Vocal: Dr. Salinas Vázquez Martín

1 er. Suplente: Dr. Vicente y Rodríguez William

2 do. Suplente: Dr. González Oropeza Rogelio

Lugar donde se realizó la tesis: Instituto de Ingeniería UNAM

TUTOR DE TESIS:

Dr. Martín Salinas Vázquez

FIRMA

Agradecimientos

En general es complicado el apartado de agradecimientos, siempre corres el riesgo de excluir a personas (o, instituciones) que formaron parte de tu desarrollo académico, profesional, tanto como de tu persona; caso aparte la difícil tarea de elegir el orden en el que los mencionas. Empezaré agradeciendo la infinita paciencia del dr. Martín. Los ratos agradables con mis compañeros del «laboratorio» de CFD (con ustedes fue divertido desaprovechar el tiempo). Al dr. William, creo que fui su peor alumno. Al «favorito del laboratorio», por múltiples ocasiones en las que me orientó. A los miembros del jurado, que tienen la difícil tarea de evaluar mi proyecto de posgrado. En general a todos los profesores que aportaron su granito de arena en mi formación académica. Al CONACYT, en definitiva sin su apoyo no se podrían llevar a cabo los posgrados. A mis amigos de la facultad (con ustedes también fue divertido desaprovechar el tiempo). A mis Arriaga. A los Figueroa y, especialmente, a mis abuelos Tito y Julia. A gabs, me apoyaste desinteresadamente en la recta final de esta etapa.

Y por último, pero no menos importante, a mi núcleo familiar cuento con ustedes siempre....
mama, carnal, carnala.

Mención especial a mi viejo que sigue dándome la motivación.

Dedicatoria

A mi viejo. A mi abuelo Tito.

Resumen

El flujo en un sistema de Taylor-Couette en régimen turbulento es estudiado. Para esto se desarrolló un código numérico en coordenadas cilíndricas que implementa la simulación de grandes escalas (LES, por sus siglas en inglés) para modelar la turbulencia. Con el fin de evaluar la efectividad del código, se intentan reproducir algunos aspectos del trabajo de *Dong (2007)* quien realizó una simulación numérica directa (DNS, por sus siglas en inglés) del flujo en cuestión. Incluso se comparan los resultados de las curvas de cantidad de movimiento angular contra el ancho del espacio anular con datos experimentales de *Smith & Townsend (1982)*. Siguiendo a *Dong (2007)*, se realizaron cuatro simulaciones distintas, donde el único parámetro que se varía es el número de Reynolds, en régimen laminar $Re=1000$ y en régimen turbulento $Re=3000$, $Re=5000$ y $Re=8000$. Se identifican vórtices con dos escalas de longitud distintas, vórtices de pequeña escala del orden del espesor de la capa límite y vórtices del orden del ancho del espacio entre los cilindros [*Barcilon et al. (1979)*]. Se analiza con particular énfasis las características tridimensionales de la turbulencia en el flujo, así como de las estructuras turbulentas cercanas a la región de las paredes de ambos cilindros. Se realiza un enfoque en las características promedio del flujo comparándolas con las características instantáneas del flujo. Se obtienen gradientes de presión radial. Por último se comparan perfiles de velocidad angular promedio, cantidad de movimiento angular promedio y fluctuaciones de velocidad angular a lo largo del espacio anular en la dirección radial con datos de la simulación DNS de *Dong (2007)*.

Motivación y objetivo

La dinámica de fluidos computacional es una herramienta muy poderosa, que está desarrollándose a pasos agigantados. Una de sus principales aplicaciones esta en la simulación de flujos de gran interés en la ingeniería. Una razón para el desarrollo de códigos numéricos es dar solución a las ecuaciones diferenciales que modelan el movimiento de los fluidos, en adición se obtiene una gran cantidad de información del flujo en cuestión. Un aspecto muy importante a tomar en cuenta es que las herramientas más poderosas para simulación de fluidos (LES, DNS) son principalmente aplicadas con el objetivo de profundizar en la investigación de tópicos tales como la turbulencia, lo cual mejora el desarrollo de aplicaciones computacionales para predecir el comportamiento de flujos turbulentos (modelos de turbulencia) lo cual repercute directamente en los parámetros de diseño en el ámbito ingenieril.

El principal objetivo, es comprobar el correcto funcionamiento de un código numérico recientemente desarrollado, para simular flujos turbulentos en coordenadas cilíndricas. Así como el estudio de la turbulencia en un flujo sencillo.

Además, de forma particular:

- Validar el código numérico, comparando cantidades estadísticas con datos de la literatura
- Además de, comprobar la correcta simulación de la hidrodinámica del flujo
- En adición, analizar las estructuras características de la turbulencia limitada por paredes

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	II
Motivación y objetivo	III
1. Introducción	5
1.1. Breve reseña del fenómeno físico	5
1.1.1. El número de Taylor	5
1.1.2. Distintos modos de flujo en el sistema de Taylor-Couette	6
1.1.3. Régimen turbulento y estructuras del flujo	9
1.1.3.1. Estructuras de pared: ' <i>streaks</i> '	9
1.1.3.2. Vórtices de Gortler	10
1.2. Métodos en el análisis de la dinámica de fluidos	10
1.2.1. Enfoque numérico	11
1.3. Modelos de turbulencia	12
1.3.1. Breve definición de turbulencia	12
1.3.2. Modelos basados en RANS (promedio de Reynolds de las ecuaciones de Navier-Stokes)	12
1.3.2.1. Modelos de viscosidad turbulenta lineal	13
1.3.2.2. Modelo (de la ecuación) de esfuerzos de Reynolds	13
1.3.3. Simulación de grandes escalas (LES)	14
1.3.4. Simulación numérica directa (DNS)	14
1.4. Métodos para identificación de vórtices	15
1.4.1. Tensor gradiente de velocidad	15
1.4.1.1. Criterio-Q	15
1.4.1.2. Criterio- Δ	15
1.4.1.3. Criterio- λ_2	16
1.4.2. Vorticidad	16
2. Ecuaciones de gobierno	18
2.1. Ecuaciones de gobierno en coordenadas cilíndricas	18
2.2. Transformación de coordenadas cilíndricas a coordenadas cilíndricas generalizadas	19
2.2.1. Ecuación de continuidad	20
2.2.2. Ecuación de cantidad de movimiento dirección axial	20
2.2.3. Ecuación de cantidad de movimiento dirección radial	20
2.2.4. Ecuación de cantidad de movimiento dirección angular	20
2.2.5. Ecuación de la energía	21
2.3. Forma vectorial de las coordenadas cilíndricas generalizadas	21
3. Esquema numérico y modelo de turbulencia	24
3.1. Simulación de Grandes Escalas (LES)	25
3.1.1. Modelo sub-malla	28

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	2
4. Detalles numéricos	31
4.1. Condiciones iniciales y de frontera	31
4.1.1. Condición de frontera periódica	32
4.2. Dimensiones del dominio computacional y malla computacional	33
5. Resultados	35
5.1. Comparación con datos experimentales	35
5.2. Campos instantáneos de velocidad	36
5.3. Estructura del flujo de vórtices	37
5.4. Turbulencia en la pared	38
5.5. Características estadísticas	42
5.6. Gradiente de presión	45
6. Conclusiones	47
6.1. Trabajos futuros y recomendaciones	48
Bibliografía	48

Índice de figuras

1.1. Vórtices de Taylor.	5
1.2. Inestabilidad centrífuga en un flujo entre cilindros concéntricos.	6
1.3. Límites de <i>flujo de entrada</i> y de <i>flujo de salida</i>	7
1.4. Regímenes observados en un sistema de cilindros concéntricos girando independiente- mente. <i>Andereck, Liu & Swinney (1986)</i>	7
1.5. Visualizaciones de distintos regímenes de flujo, cilindros girando en contra. Fotografías tomadas de <i>Andereck, Liu & Swinney (1986)</i>	8
1.6. Visualizaciones de distintos regímenes de flujo, cilindros girando a favor. Fotografías tomadas de <i>Andereck, Liu & Swinney (1986)</i>	9
1.7. 'Streaks' en la pared del cilindro exterior. Fotografía tomada de <i>Barcilon et al. (1979)</i>	9
1.8. 'Streaks' en flujo turbulento cerca de la pared. Mecanismo de formación de 'streaks' por vórtices longitudinales. Tomada de <i>Chernyshenko & Baig (2005)</i>	10
1.9. Vórtices de Gortler. Tomado de <i>Winoto, Mitsudharmadi & Shah (2005)</i>	11
4.1. Condición de periodicidad	32
4.2. Condición de periodicidad en dirección angular	32
4.3. Coordenadas cilíndricas	33
5.1. Comparación de los perfiles de cantidad de movimiento angular medio normalizados entre la simulación presentada ($Re=8000$) y los datos de <i>Smith & Townsend (1982)</i>	35
5.2. Campos de velocidad radial instantáneo en un plano radial-axial para $Re=1000, 3000,$ 5000 y 8000 , de arriba a abajo respectivamente	36
5.3. Iso-superficies de criterio Q instantáneo, método de identificación de vórtices por <i>Hunt</i> <i>et al. (1988)</i> : $Re=3000$ y $Re=8000$, $Q/(d/w_o) = 1$	37
5.4. Trayectoria en espiral de los vórtices.	37
5.5. Iso-superficies de presión instantánea: $Re=5000$ y 8000 , $p/p_{ref} = 1.153$ y $p/p_{ref} =$ 1.1435 ; respectivamente.	38
5.6. Mecanismo de formación de 'streaks'	39
5.7. Contornos de velocidad angular instantánea en dos superficies cerca de la pared interior (izquierda) y exterior (derecha) en $Re=8000$	39
5.8. Contornos de velocidad angular en una superficie cerca de la pared del cilindro interior en $Re=3000$	40
5.9. Turbulencia en la pared del cilindro interior para $Re=3000, 5000$ y 8000 , $Q/(d/w_o) = 1$	41
5.10. Comparación entre patrones de un campo instantáneo y un campo medio promediado en el tiempo en un plano axial-radial ($Re=8000$).	42
5.11. Iso-superficies de criterio Q de datos promedio. $Re=3000$, $Q/(d/w_o) = 1$	43
5.12. Perfiles de cantidad de movimiento angular promedio en diferentes números de Rey- nolds. Gráficas lado derecho tomadas de <i>Dong (2007)</i>	43
5.13. Perfiles de velocidad angular promedio en diferentes números de Reynolds. Gráficas lado derecho tomadas de <i>Dong (2007)</i>	44
5.14. Perfiles de fluctuaciones de velocidad angular r.m.s. en diferentes números de Reynolds. Gráficas lado derecho tomadas de <i>Dong (2007)</i>	44
5.15. Gradiente de presión radial: plano angular-radial (izquierdo) y plano axial-radial (de- recho).	45

Capítulo 1

Introducción

1.1. Breve reseña del fenómeno físico.

Los flujos anulares contenidos en un sistema entre cilindros concéntricos, en donde la rotación de uno o de ambos cilindros provoca el movimiento del fluido contenido entre ellos, fue estudiado por primera vez por Couette en 1890. El objetivo principal fue medir la viscosidad del fluido. Más tarde el profesor G.I. Taylor hizo estudios respecto a la estabilidad de un fluido viscoso contenido entre cilindros concéntricos, *Taylor (1923)*. De ahí de tomar el nombre en conjunto de Taylor-Couette para referirse a los sistemas donde se encuentra un fluido confinado entre cilindros concéntricos. En el trabajo pionero de *Taylor (1923)* se analiza a fondo la primer inestabilidad que se presenta en el flujo. El flujo toma la forma de vórtices toroidales girando alrededor del cilindro interior, este flujo se conoce como flujo de vórtices de Taylor, en la figura 1.1 se observan los vórtices de Taylor en un plano axial-radial. Esta inestabilidad en el flujo surge de una competencia entre la fuerza centrífuga, que se produce debido al giro del cilindro, que impulsa el fluido cercano a la pared del cilindro interior hacia la pared del cilindro exterior, y el gradiente de presión radial que tiende a regresar el fluido a su posición original, una figura esquemática se muestra en 1.2. Este movimiento de vórtices alternados en la dirección genera límites entre ellos que se conocen como límite de *flujo de salida* y límite de *flujo de entrada*, los cuales coinciden con movimientos del flujo en la dirección radial positiva y en la dirección radial negativa (figura 1.3).

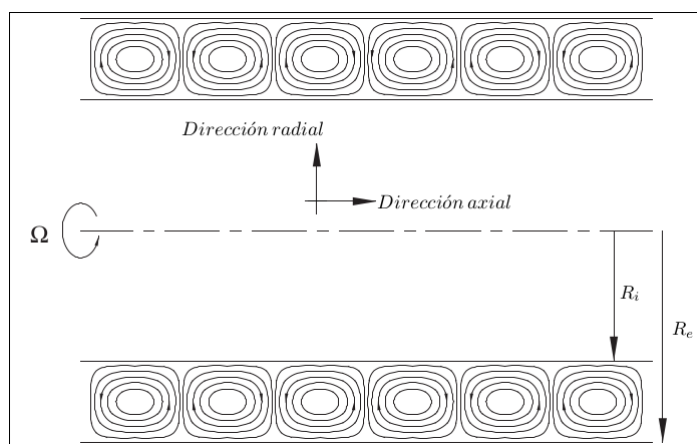


Figura 1.1: Vórtices de Taylor.

1.1.1. El número de Taylor

Una cantidad adimensional que nos da una medida de la relación entre las fuerzas inerciales en un marco rotacional y los efectos viscosos es el número de Taylor, Ta . Existen varias definiciones del

número de Taylor (Ta) en la literatura. Tomando la definición de Ta encontrada en *Barcilon et al. (1979)* para el cilindro interior girando,

$$Ta_m = \frac{R_i \Omega_i^2 d^3}{\nu^2} = \frac{U^2 d^2}{\nu^2} \cdot \frac{d}{R_i} = Re^2 \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) \quad (1.1)$$

donde Ω_i es la velocidad angular del cilindro interior y $U = R_i \Omega_i$, R_i , R_e son los radios del cilindro interior y del cilindro exterior, respectivamente; y la diferencia de ambos es el ancho del espacio anular $d = R_e - R_i$, el parámetro geométrico $\eta = R_i/R_e$ es la razón entre los radios y $\nu = \mu_f/\rho$ es la viscosidad cinemática, donde μ_f es la viscosidad dinámica del fluido y ρ la densidad del fluido. El número de Taylor (Ta) está íntimamente relacionado con el número de Reynolds (Re) el cuál es la razón entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas,

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu_f} = \frac{V D}{\nu} \quad (1.2)$$

donde V es la velocidad del flujo y D representa una longitud característica (el diámetro del tubo, etc). Se observa una cerrada similitud en las definiciones de Ta y Re , el Ta es considerado un número de Reynolds en un marco de referencia rotacional. Otro parámetro de control es la razón entre las velocidades de rotación de los cilindros,

$$\mu = \frac{\Omega_e}{\Omega_i}$$

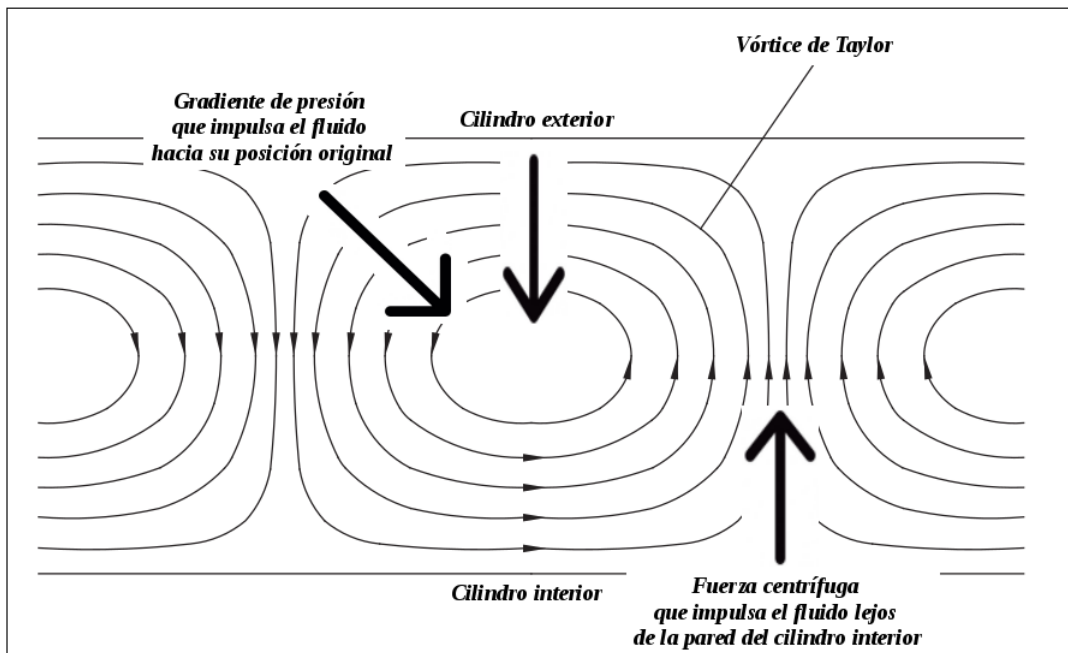


Figura 1.2: Inestabilidad centrífuga en un flujo entre cilindros concéntricos.

1.1.2. Distintos modos de flujo en el sistema de Taylor-Couette

Con el incremento de la velocidad de rotación de los cilindros, el flujo de vórtices de Taylor sufre una serie de transiciones entre distintos modos de flujo. Una de las investigaciones más sobresalientes en el estudio de los distintos modos del flujo en un sistema de cilindros concéntricos girando en direcciones distintas y en la misma dirección fue el realizado por *Andereck, Liu & Swinney (1986)*. Ellos construyeron, en base a sus experimentos, un diagrama donde se registran los distintos modos de flujo a distintas condiciones de rotación de los cilindros (figura 1.4). En este diagrama se observan una gran cantidad de modos distintos que surgen en el flujo en un sistema de cilindros concéntricos

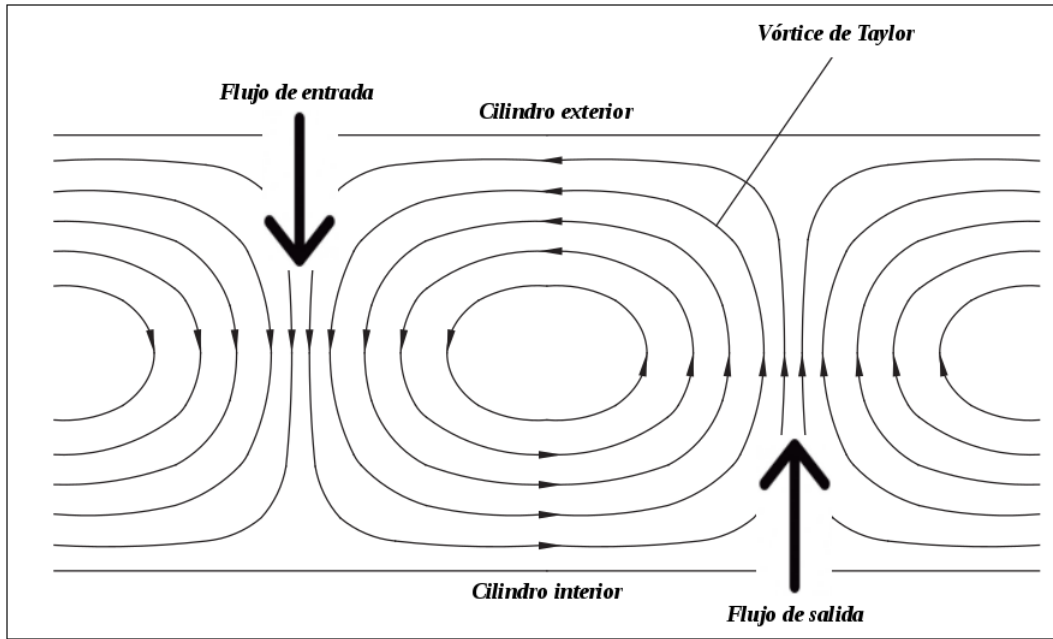


Figura 1.3: Límites de *flujo de entrada* y de *flujo de salida*.

girando independientemente. Ya sea para cuando los dos cilindros giran en la misma dirección ó para cuando los cilindros giran en direcciones contrarias. Los múltiples modos de flujo son resultado del carácter no lineal del flujo.

Ellos realizaron múltiples experimentos variando el número de Reynolds de ambos cilindros (R_i y R_o , número de Reynolds cilindro interior y exterior respectivamente). Entre los regímenes de flujo en el caso de cilindros girando en direcciones contrarias, reconocieron un flujo de vórtices en espiral, caracterizado por vórtices que giran alrededor del cilindro interior con una cierta inclinación respecto a un plano angular-radial, partiendo de los extremos con pendientes contrarias y uniéndose los vórtices a la mitad de la longitud total de los cilindros (figura 1.5a). Un flujo de vórtices ondulatorio con movimientos periódicos tanto en la dirección axial como en la angular. Un flujo de ondas moduladas en los vórtices de Taylor (figura 1.5c). Flujo de vórtices en espiral interpenetrándose, el cual se caracteriza por espirales en las zonas superior e inferior de los cilindros que en breves espacios de tiempo se vuelve inestable formando ondas produciendo un flujo de vórtices en espiral ondulado (figura 1.5b). Flujo

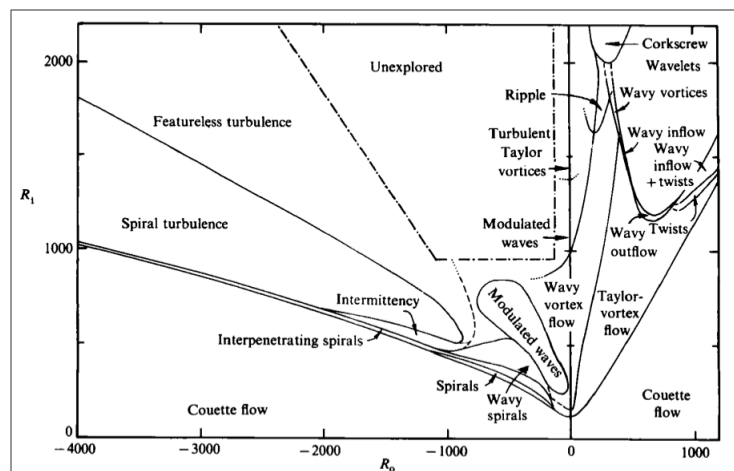


Figura 1.4: Regímenes observados en un sistema de cilindros concéntricos girando independientemente. *Andereck, Liu & Swinney (1986)*.

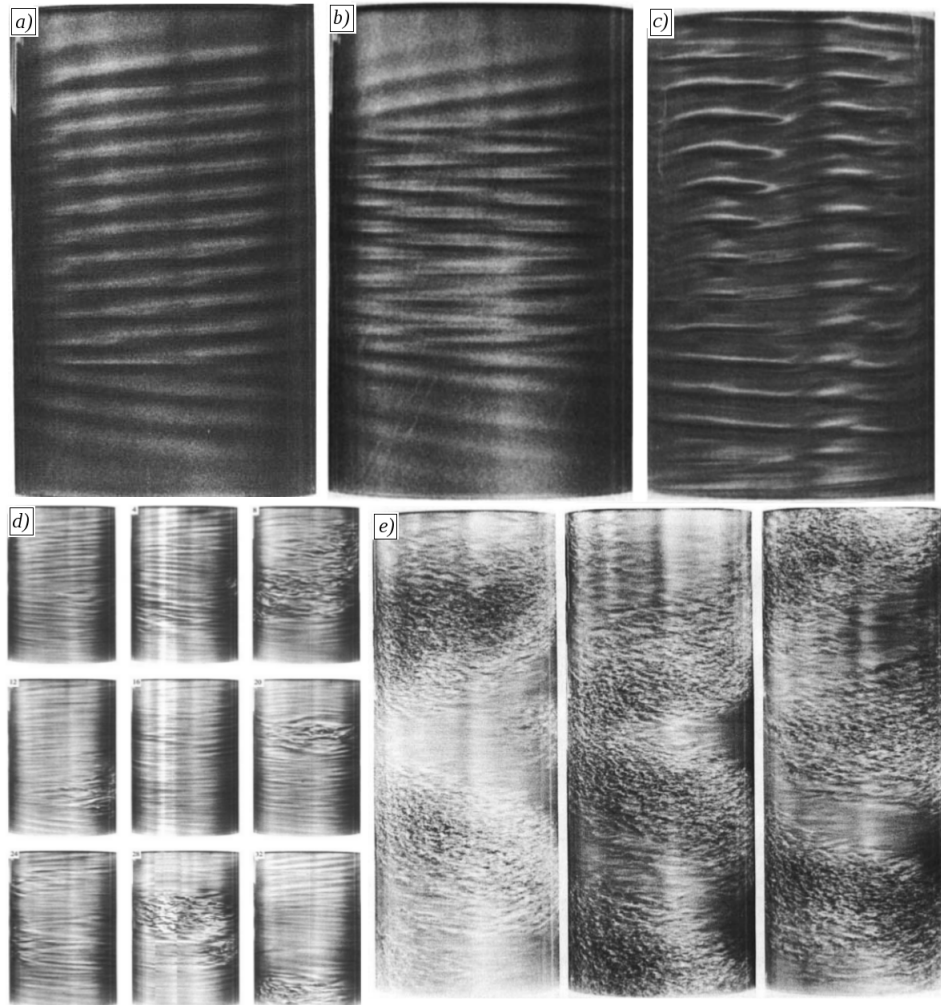


Figura 1.5: Visualizaciones de distintos regímenes de flujo, cilindros girando en contra. Fotografías tomadas de *Andereck, Liu & Swinney (1986)*.

con «spots» turbulentos partiendo de un flujo de vórtices en espiral, se caracteriza por la aparición de pequeñas regiones turbulentas formándose y descomponiéndose en posiciones aleatorias en el flujo (figura 1.5d). Ubicaron una zona de transición en la que una mezcla de los flujos antes mencionados toma lugar. Un flujo de espirales turbulentas, el cual consiste en un flujo que se alterna periódicamente con estructuras de turbulencia en espiral y bandas de flujo laminar. Un flujo de espirales turbulentas que se forman en las zonas superior e inferior de los cilindros los cuales se unen en la zona media de la longitud total de los cilindros formando un patrón como una V (figura 1.5e).

En el caso de cilindros girando en la misma dirección, la cantidad de modos de flujo no es menos, registraron un flujo de vórtices «retorcido», caracterizado por una estructura interna parecida a una cuerda de los vórtices de Taylor (figura 1.6a). Observaron otros flujos con características ondulatorias, dos flujos distintos son el flujo con límite de *flujo de entrada* ondulatorio y flujo con límite de *flujo de salida* ondulatorio, en estos dos flujos la característica principal que comparten es que un límite permanece recto mientras el otro presenta un comportamiento ondulatorio, en la figura 1.6 se muestran fotografías para el *flujo de entrada* ondulatorio (figura 1.6b) y para el *flujo de salida* ondulatorio (figura 1.6c). Otro flujo en el cual ambos límites presentan un comportamiento ondulatorio moviéndose en diferentes velocidades angulares, denominado flujo de «wavelets» se muestra en la figura 1.6d.

Estos son los distintos modos de flujo que se presentan en un sistema de cilindros concéntricos girando ya sea en direcciones opuestas o en la misma dirección reportados en el trabajo de *Andereck, Liu & Swinney (1986)* así como en otros trabajos de la literatura.

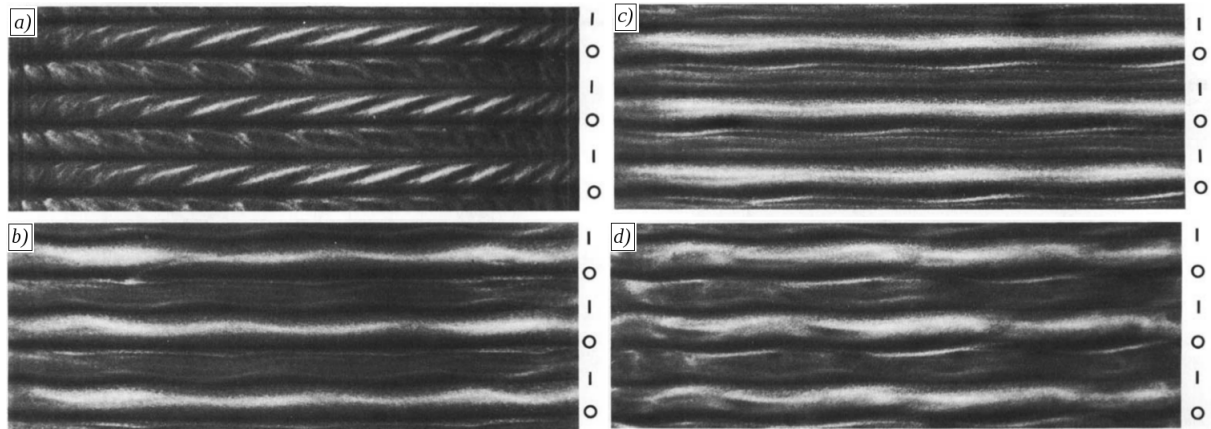


Figura 1.6: Visualizaciones de distintos regímenes de flujo, cilindros girando a favor. Fotografías tomadas de *Andereck, Liu & Swinney (1986)*.

1.1.3. Régimen turbulento y estructuras del flujo

Se revisó con particular interés el trabajo publicado por *Barcilon et al. (1979)*. En el cual se lleva a cabo un estudio de la estructura del flujo de Taylor-Couette en un régimen turbulento. En este trabajo se reporta la estructura del flujo de vórtices turbulento caracterizado por dos escalas de longitud: una escala del orden del ancho del espacio anular completo que caracteriza el flujo de vórtices de Taylor y una escala mucho más pequeña del orden del espesor de la capa límite, que se hace visible por el patrón de 'streaks' en forma de «espigas» visibles en las paredes y que son la huella que dejan los vórtices de Gortler que surgen como un resultado de la inestabilidad centrífuga en la capa límite en una pared curva (figura 1.7). A continuación abordaremos brevemente dos nuevos conceptos mencionados en la presente sección en orden de tener un mejor conocimiento de la estructura del flujo: las estructuras de pared y los vórtices de Gortler.

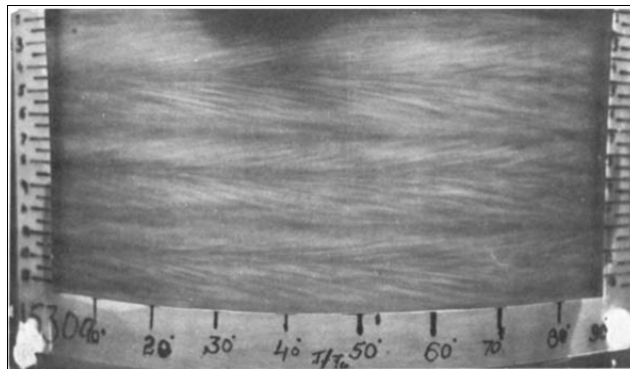


Figura 1.7: 'Streaks' en la pared del cilindro exterior. Fotografía tomada de *Barcilon et al. (1979)*.

1.1.3.1. Estructuras de pared: 'streaks'

El patrón conocido como 'streaks' son una huella que dejan los flujos turbulentos cercanos a paredes. En mediciones experimentales y cálculos numéricos, desde un punto de vista cinemático, los 'streaks' son regiones donde el movimiento instantáneo del fluido es lento (figura 1.8a). Un mecanismo de formación de 'streaks' son los movimientos normales a la pared. Por ejemplo, el movimiento de los vórtices a lo largo de la pared moviéndose en dirección del flujo y girando en direcciones alternadas capturando fluido y desplazándolo (movimiento advectivo) en dirección ascendente desde la pared y en dirección descendente hacia la pared (figura 1.8b). El fluido desplazado desde la pared se mueve más lento que el fluido promedio, mientras el fluido desplazado hacia la pared se mueve más rápido que el fluido promedio. Esto genera un perfil de velocidad ondulatorio en la dirección del flujo a lo

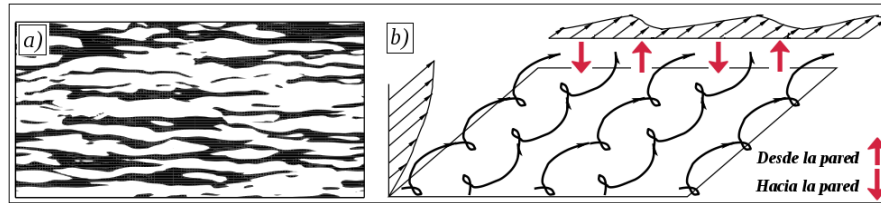


Figura 1.8: 'Streaks' en flujo turbulento cerca de la pared. Mecanismo de formación de 'streaks' por vórtices longitudinales. Tomada de *Chernyshenko & Baig (2005)*.

largo de la longitud transversal. Los 'streaks' observados por *Barcilon et al. (1979)* son causados por el movimiento de los vórtices de Gortler a lo largo de la pared del cilindro exterior, con el objetivo de entender la dinámica esencial de los vórtices de Gortler la siguiente sección se encargara de una breve descripción de este fenómeno.

1.1.3.2. Vórtices de Gortler

Los vórtices de Gortler son vórtices que giran uno al lado del otro en direcciones opuestas, que pueden desarrollarse en una capa límite a lo largo de una superficie curva, como se muestran en la figura 1.9a. La formación de estos vórtices es debido a una inestabilidad centrífuga que causa un desequilibrio entre la fuerza centrífuga y el gradiente de presión radial en la capa límite sobre la superficie curva, análogo a los vórtices de Taylor. Un parámetro adimensional que nos proporciona una relación con el inicio de esta inestabilidad es el número de Gortler, G_θ . El cual, siguiendo a *Winoto, Mitsudharmadi & Shah (2005)*, se define

$$G_\theta = \left(\frac{U_\infty \theta}{\nu} \right) \sqrt{\frac{\theta}{R}} \quad (1.3)$$

los vórtices se presentan cuando se excede de un G_θ crítico, donde U_∞ es la velocidad de la corriente libre, θ es el espesor de cantidad de movimiento basado en el perfil de capa límite de Blasius y R el radio de curvatura. El número de Gortler G_θ relaciona los efectos centrífugos y los efectos viscosos en una capa límite.

Sí la capa límite es pequeña comparada con el radio de curvatura de la superficie, la presión permanece constante a lo largo de la capa límite. Sin embargo, sí el espesor de la capa límite es de alrededor del mismo orden del radio de curvatura de la pared, el efecto de la fuerza centrífuga actúa creando una variación de presión. Esto ocasiona la aparición de los vórtices de Gortler. Los vórtices se amplifican *aguas abajo* resultando en una capa límite tridimensional debido a la distribución de cantidad de movimiento en el sentido de la corriente que causa una variación del espesor de la capa límite en la dirección transversal al flujo, esto da como resultado la formación de dos regiones: la de *corriente ascendente* y la de *corriente descendente*. Las regiones de *corriente ascendente* y *corriente descendente* son análogas a las regiones de *flujo de salida* y de *flujo de entrada* en los vórtices de Taylor.

Así mismo, hay que tener en mente la similitud que existe entre estas inestabilidades (vórtices de Gortler y vórtices de Taylor), las cuales se pueden presentar en el mismo flujo, mientras los vórtices de Taylor tienen una escala de longitud del orden del ancho del espacio anular; los vórtices de Gortler tienen una escala de longitud del orden del espesor de la capa límite.

En la siguiente sección se reseñan brevemente los principales métodos de análisis de la dinámica de fluidos.

1.2. Métodos en el análisis de la dinámica de fluidos

En la mecánica de fluidos se han desarrollado distintas técnicas para realizar estudios del comportamiento de los fluidos, los cuales se pueden resumir en tres distintos enfoques mostrados en el cuadro 1.1.

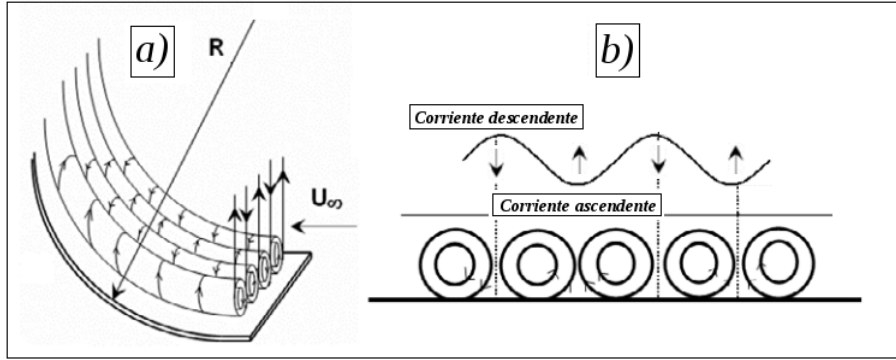


Figura 1.9: Vórtices de Gortler. Tomado de *Winoto, Mitsudharmadi & Shah (2005)*.

Los métodos analíticos parten del enfoque de la naturaleza matemática de las ecuaciones que gobiernan el flujo. Buscan encontrar una solución, tomando en cuenta suposiciones sobre el carácter físico del flujo para obtener ecuaciones simplificadas que describen el comportamiento del flujo y sean posibles de resolver. La principal dificultad de manejar este enfoque es por la naturaleza matemática de las ecuaciones que son ecuaciones en derivadas parciales no lineales lo que hace muy difícil resolver las ecuaciones, excepto para problemas de flujo de fluidos sencillos (flujo de Couette, flujo de Poiseuille).

Por su parte, el principal enfoque de los métodos experimentales es el físico, se han desarrollado técnicas para visualizar el comportamiento del flujo de fluidos (LIF) así como para conocer sus patrones de movimiento (PIV, LDA). Una de las dificultades para la implementación de dispositivos experimentales es la instrumentación y el posible efecto que esto genere en el fenómeno de análisis lo que deriva en mediciones erróneas.

Por otro lado, el enfoque de los métodos numéricos está de alguna manera relacionado con el enfoque analítico, pues consiste en encontrar una solución a las ecuaciones de gobierno de los fluidos. La forma en la que se aproximan estas soluciones es simplificando las ecuaciones algebraicamente, digamos que de unas ecuaciones en derivadas parciales no lineales se puede «simplificar» hasta obtener un sistema de ecuaciones lineales (¡grandes sistemas de ecuaciones lineales!) las que se pueden resolver con la ayuda de computadoras. Esta rama del estudio de los fluidos (o, esta rama de la física) también se conoce como dinámica de fluidos computacional (CFD, por sus siglas en inglés), es un campo que se ha desarrollado aceleradamente en las últimas décadas debido al gran impulso que ha tenido el avance de la tecnología computacional, con lo que incluso se ha llegado a obtener soluciones exactas (DNS) de las ecuaciones de gobierno de los fluidos. Una de los mayores problemas que sigue siendo un reto para las ciencias computacionales radica en la disminución en el tiempo de cálculo de los sistemas de ecuaciones.

Mecánica de fluidos →	Métodos analíticos
	Métodos experimentales (PIV, LDA)
	Métodos numéricos (CFD)

Cuadro 1.1: Enfoques de análisis en mecánica de fluidos.

1.2.1. Enfoque numérico

En el cuadro 1.2 se observan los pasos básicos a seguir para realizar un análisis desde un enfoque numérico:

En la sección que sigue se abunda en un tópico muy importante (además de interesante) en el análisis de fluidos: la turbulencia y la forma en la que se cuantifica en CFD.

a) Pre-procesamiento	1. Se define la geometría del problema
	2. Se discretiza el volumen que ocupa el fluido
	3. Se define el modelado físico (ecs. de gobierno)
	4. Se definen las condiciones de frontera
b) La simulación empieza, las ecuaciones se resuelven iterativamente	
c) Un post-procesador se utiliza para el análisis y visualización de la solución	

Cuadro 1.2: Procedimiento básico en un análisis numérico.

1.3. Modelos de turbulencia

El análisis y predicción de la turbulencia es uno de los problemas fundamentales en el estudio de la dinámica de fluidos. La mayor dificultad radica en la naturaleza caótica y aleatoria del fenómeno de la turbulencia. Debido a lo impredecible del fenómeno, se ha hecho corriente trabajar con las formas promediadas de las ecuaciones de gobierno. Se han generado modelos para resolver hasta cierto orden las escalas de la turbulencia, a continuación se hace una breve reseña de algunos modelos de turbulencia, además de una definición de la misma.

1.3.1. Breve definición de turbulencia

En el siglo XIX, Osborne Reynolds llevó a cabo un experimento para visualizar el flujo en un tubo. Él observó un flujo laminar bien ordenado y su transición a un movimiento caótico con el aumento de la velocidad en el tubo, hasta alcanzar un cierto valor. Razón a esto se vinculó a un número adimensional llamado número de Reynolds, Re (sección 1.1.1) $Re = VD/\nu$. El número de Reynolds mide la razón entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas. Para un Re muy pequeño el flujo permanece ordenado con líneas de corriente paralelas unas a otras, para un Re muy grande, en algún momento la estructura de flujo laminar se pierde dando lugar a una estructura de flujo dominada por vórtices de gran escala. Así bien, la turbulencia se puede definir como sigue:

Es un estado de movimiento del fluido que es caracterizado por una vorticidad caótica y aparentemente aleatoria.

La turbulencia es de particular interés en el ámbito ingenieril porque muchos flujos que se encuentran en ingeniería son turbulentos, por ejemplo, en un intercambiador de calor la turbulencia mejora la mezcla y así aumenta el coeficiente de transferencia de calor. El comportamiento caótico de la turbulencia la hace extremadamente difícil de calcular, por lo mismo se recurre a modelar el comportamiento turbulento con distintos métodos. A continuación describimos brevemente distintos modelos de turbulencia.

1.3.2. Modelos basados en RANS (promedio de Reynolds de las ecuaciones de Navier-Stokes)

Para obtener el promedio de Reynolds de las ecuaciones de Navier-Stokes (N-S, se utilizará la abreviación en adelante), se recurre a un concepto de estadística el cual define que cualquier propiedad instantánea puede ser definida por la suma de la propiedad promedio y las fluctuaciones de la propiedad,

$$\phi(\text{espacio}, \text{tiempo}) = \bar{\phi}(\text{espacio}) + \phi'(\text{espacio}, \text{tiempo}) \quad (1.4)$$

Esta descomposición se conoce también como *descomposición de Reynolds*. Si se aplica el concepto anterior a las variables primitivas en las ecuaciones de N-S, se obtienen las ecuaciones RANS para un flujo incompresible y estacionario, las ecuaciones se encuentran en notación tensorial,

$$\rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \rho \bar{f}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-\bar{p} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u'_i u'_j} \right] \quad (1.5)$$

En el lado derecho de la ecuación 1.5 aparece un término ($\overline{\rho u'_i u'_j}$) que tiene dimensiones de esfuerzo aunque en un sentido físico es la contribución que tiene el campo de velocidades fluctuante. Es por eso

que es mejor conocido como el tensor de *esfuerzos de Reynolds*. Este término agrega nuevas variables dependientes al sistema de ecuaciones lo cual requiere de modelos adicionales para cerrar el sistema y resolver las ecuaciones. Se han desarrollado muchos modelos de turbulencia para resolver esta cuestión, a continuación veremos brevemente algunos de ellos.

1.3.2.1. Modelos de viscosidad turbulenta lineal

En estos modelos de turbulencia los esfuerzos de Reynolds se modelan a partir de una relación constitutiva lineal con el campo de deformación del flujo medio, como

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \kappa \delta_{ij} \quad (1.6)$$

donde

μ_t es la viscosidad turbulenta

$\kappa = \frac{1}{2} \overline{(u'_i u'_i)}$ es la energía cinética turbulenta

Existen distintas variantes de los modelos de viscosidad turbulenta, dependiendo de la forma de obtener el coeficiente de viscosidad turbulenta resolviendo ecuaciones algebraicas o de transporte (una o dos).

1. *Modelos algebraicos*. Los modelos algebraicos, también llamados modelos de turbulencia de cero ecuaciones, son modelos en los que no se resuelve ninguna ecuación de transporte sino que se calcula desde las mismas variables del flujo. Este tipo de modelos no son capaces de dar buenos resultados para flujos muy complejos, aunque pueden dar resultados razonablemente buenos en flujos sencillos.
2. *Modelos de una sola ecuación*. Los modelos de turbulencia de una ecuación resuelven una ecuación de transporte, por lo regular la energía cinética turbulenta κ . El primer modelo que se desarrolló fue *el modelo de una ecuación de Prandtl*.
3. *Modelos de dos ecuaciones*. Los modelos de turbulencia de dos ecuaciones actualmente son los más populares, son modelos que han tenido una gran recepción en ingeniería para su aplicación en múltiples problemas. Además es una área muy activa de la investigación y se siguen desarrollando modelos de dos ecuaciones más precisos. Muy a menudo se resuelve la energía cinética turbulenta κ y otra variable la cual depende del modelo elegido, ya sea la disipación turbulenta ϵ o la disipación específica ω . La primera variable determina la energía de la turbulencia y la segunda determina la escala de la turbulencia.

1.3.2.2. Modelo (de la ecuación) de esfuerzos de Reynolds

El modelo de esfuerzos de Reynolds, es el modelo más complejo que se utiliza aún. Está basado en las ecuaciones dinámicas para el tensor de esfuerzos de Reynolds ($\overline{\rho u'_i u'_j}$). Las ecuaciones se pueden obtener a partir de las ecuaciones de N-S y son,

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_k \tau_{ij})}{\partial x_k} = - \left(\tau_{ik} \frac{\partial (\bar{u}_j)}{\partial x_k} + \tau_{jk} \frac{\partial (\bar{u}_i)}{\partial x_k} \right) + \rho \epsilon_{ij} - \prod_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + C_{ijk} \right) \quad (1.7)$$

Los primeros dos términos de la ecuación 1.7 son los términos de producción y no requieren aproximación o modelado. Los otros términos son,

$$\prod_{ij} = p' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)$$

que es a menudo conocido como el término de presión-deformación. Este término redistribuye la energía cinética turbulenta entre los componentes del tensor de esfuerzos de Reynolds, pero no cambia la energía cinética total. El siguiente término,

$$\rho \epsilon_{ij} = 2\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}$$

que es el tensor disipación. Y el último término es,

$$C_{ijk} = \overline{\rho u'_i u'_j u'_k} + \overline{p' u'_i} \delta_{jk} + \overline{p' u'_j} \delta_{ik}$$

que es conocido como la difusión turbulenta. Los términos de disipación, presión-deformación y difusión turbulenta, no pueden ser calculados con base en otros términos de las ecuaciones mismas, deben ser modelados. Uno de los modelos más simples para definir la disipación es considerar isotropía,

$$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3} \epsilon \delta_{ij}$$

Esto es, se puede resolver una ecuación para la disipación junto con las ecuaciones para los esfuerzos de Reynolds. Aunque existen modelos más sofisticados.

Para un conocimiento más profundo sobre los modelos de turbulencia, revisar *Ferziger & Perić (2002)*.

1.3.3. Simulación de grandes escalas (LES)

La simulación de grandes escalas (LES) es una de las técnicas más populares para simulación de flujos turbulentos. La principal idea de LES para modelar la turbulencia es, que da solución a las grandes escalas y modela las pequeñas escalas con un modelo sub-malla. Matemáticamente podemos pensar en un campo de velocidad separado en una parte resuelta y una parte sub-malla. La parte resuelta del campo representa las escalas mayores, mientras la parte sub-malla representa las escalas pequeñas, cuyo efecto en el campo resuelto es valorado por el modelo sub-malla. Una operación de filtrado puede ser aplicado a un campo espacial y temporal $\phi(\mathbf{x}, t)$ y realizar un filtrado espacial, un filtrado temporal o, ambos. El campo filtrado denotado por una barra, está definido como,

$$\overline{\phi(\mathbf{x}, t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{r}, t') G(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t') dt' d\mathbf{r}$$

donde G es el núcleo de filtrado. La expresión anterior también se puede escribir de la siguiente manera,

$$\overline{\phi} = G \star \phi$$

el núcleo de filtrado G tiene asociado una escala de longitud de corte Δ y una escala de tiempo de corte τ_c , las escalas más pequeñas que Δ son eliminadas desde el campo filtrado $\overline{\phi}$. El campo dividido en sus partes filtrada y sub-escala se define,

$$\phi = \overline{\phi} + \phi'$$

Las ecuaciones de gobierno que se utilizan en LES parten de las ecuaciones de N-S filtradas. Una manera de realizar el filtrado de una manera más sencilla es simplemente con el tamaño de la malla, en donde las escalas más pequeñas son filtradas por la resolución de la malla, para un conocimiento más profundo revisar en *Salinas-Vázquez & Métais (2002)*.

1.3.4. Simulación numérica directa (DNS)

Otra alternativa es la simulación numérica directa (DNS) que resuelve numéricamente las ecuaciones de N-S sin modelo de turbulencia alguno. El rango completo de escalas espaciales y temporales es resuelto. Todas las escalas espaciales de la turbulencia son resueltas en la malla computacional, desde las escalas disipativas más pequeñas hasta las escalas integrales, asociadas con los movimientos que contienen más energía cinética. Las escalas más pequeñas resueltas están dadas por la escala de Kolmogorov, η_k , que se define,

$$\eta_k = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}$$

Donde ν es la viscosidad cinemática y ϵ es la disipación de la energía cinética turbulenta. La resolución de malla más adecuada para una DNS es regularmente muy fina, dando como resultado una

gran cantidad de nodos N donde se debe cumplir que la mayor escala de longitud L debe encontrarse dentro del dominio,

$$Nh > L$$

Donde h es el espaciado entre nodos y además se debe cumplir $h \leq \eta_k$ para resolver la escala de Kolmogorov. El avance en el tiempo, regularmente un esquema explícito, con pasos de tiempo suficientemente pequeños para que se pueda representar el movimiento de una partícula de fluido a través de las escalas espaciales más pequeñas. Estas características hacen de una DNS un método muy costoso computacionalmente hablando. Es por eso que esta alternativa solo es usada en la investigación, para obtener un mejor entendimiento de la física de la turbulencia. No es muy popular para aplicaciones en ingeniería.

En definición misma de turbulencia aparece el concepto de vórtice, en la siguiente sección nos ocupamos de algunos métodos para identificación de vórtices.

1.4. Métodos para identificación de vórtices

Múltiples problemas de ingeniería son a menudo dominados por estructuras en las que interactúan vórtices de distintos tamaños. Aunque estas estructuras son una constante tratada por ingenieros y científicos, aún no se ha encontrado una definición de *vórtice* totalmente clara. Existen un gran número de métodos para identificación de vórtices, técnicas para visualización de vórtices y definición de vórtices en la literatura. En la presente tesis se analiza un fluido particular que es dominado completamente por estructuras de vórtices, por lo que es necesario describir brevemente algunos métodos para identificar vórtices.

1.4.1. Tensor gradiente de velocidad

El tensor gradiente de velocidad se define como $D_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Este tensor es de segundo orden, y se puede descomponer en dos partes, una simétrica y una anti-simétrica, $D_{ij} = S_{ij} + \Omega_{ij}$, donde $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ es el tensor tasa de deformación y $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ es el tensor de vorticidad.

La ecuación característica del tensor gradiente de velocidad es,

$$\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0$$

donde P , Q y R son los tres invariantes del tensor gradiente de velocidad. Usando la definición del tensor gradiente de velocidad descompuesto, estas invariantes se pueden expresar,

$$\begin{aligned} P &= -\text{tr}(D) = -S_{ij} \\ Q &= \frac{1}{2} (P^2 - \text{tr}(D^2)) = \frac{1}{2} \|\Omega\|^2 - \|S\|^2 \\ R &= -\det(D) \end{aligned}$$

1.4.1.1. Criterio-Q

El criterio-Q esta basado en el tensor gradiente de velocidad y define un vórtice como *una región del fluido conectada con el segundo invariante del tensor gradiente de velocidad positivo*, esto es $Q > 0$. Además esta región debe cumplir con una presión menor a la presión ambiente. Desde la definición del segundo invariante podemos notar que Q representa un balance entre la tasa de deformación y la magnitud de la vorticidad, definiendo los vórtices donde la vorticidad es mayor que la tasa de deformación del fluido [ver en *Hunt et al. (1988)*].

1.4.1.2. Criterio- Δ

Otro criterio también basado en el tensor gradiente de velocidad es el criterio- Δ , este criterio define un vórtice como *una región donde los eigenvalores del tensor gradiente de velocidad son complejos y el patrón de líneas de corriente es un espiral o esta cerrada*. Analizando el discriminante, tenemos que

$$\Delta = \left(\frac{1}{3}Q\right)^3 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 > 0$$

cuando existen eigenvalores complejos (Δ es positivo).

El núcleo de un vórtice es una región en el espacio donde la vorticidad es suficientemente fuerte para causar que el tensor tasa de deformación sea dominado por el tensor de rotación, por ejemplo cuando el tensor gradiente de deformación tiene eigenvalores complejos. Desde que la definición de un vórtice depende del tensor tasa de deformación, es independiente del marco de referencia del observador, así sí una región es o no es un vórtice depende de su entorno [ver en *Chong et al. (1990)*].

1.4.1.3. Criterio- λ_2

Partiendo del término del gradiente en las ecuaciones de N-S, encontramos

$$a_{i,j} = -\frac{1}{\rho}p_{,ij} + \nu u_{i,jkk}$$

donde $a_{i,j}$ es el gradiente de aceleración y $p_{,ij}$ es el Hessian de la presión y es simétrico (la notación $,i$ indica una derivada con respecto a x_i). Por lo tanto, $a_{i,j}$ se puede descomponer en una parte simétrica y una parte anti-simétrica. La parte anti-simétrica es conocida como la ecuación de transporte de la vorticidad y la parte simétrica,

$$\frac{DS_{ij}}{Dt} + \Omega_{ik}\Omega_{kj} + S_{ik}S_{kj} = -\frac{1}{\rho}p_{,ij}$$

El primer término del lado izquierdo representa la deformación dependiente del tiempo y el segundo término representa los efectos viscosos. Estos dos efectos se van a despreciar, tomando en cuenta solo $S^2 + \Omega^2$ considerado para determinar la existencia de una presión mínima local debido a un vórtice, y define un núcleo de un vórtice como una región conectada con dos eigenvalores negativos de $S^2 + \Omega^2$. Debido a la condición de simetría de $S^2 + \Omega^2$, tiene eigenvalores positivos. Si los eigenvalores λ_1 , λ_2 y λ_3 cumplen con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$, para que se cumpla la definición de vórtice se requiere que $\lambda_2 < 0$ dentro del núcleo del vórtice [ver en *Jeong & Hussain (1995)*].

1.4.2. Vorticidad

La vorticidad esta definida por $\omega = \nabla \times V$ y es igual a dos veces la rotación del fluido en (\mathbf{x}, t) . En base a lo definido anteriormente, la vorticidad puede ser usada para identificar vórtices. Un problema asociado con este método es que la vorticidad no puede distinguirse entre movimientos de vórtices y movimientos cortantes, es decir los valores de rotación del fluido se pueden llegar a unir a los valores de deformación del fluido dando como resultado una identificación errónea de los vórtices. La vorticidad se puede observar por medio de isosuperficies de $|\omega|$.

Capítulo 2

Ecuaciones de gobierno

Este capítulo trata alrededor de las ecuaciones que gobiernan el flujo de fluidos: la ecuación de continuidad, la ecuación de cantidad de movimiento y la ecuación de la energía. Se va a tratar con las ecuaciones en coordenadas cilíndricas, un marco de referencia adecuado para analizar el flujo entre cilindros concéntricos.

2.1. Ecuaciones de gobierno en coordenadas cilíndricas

Las ecuaciones presentadas están adimensionalizadas con respecto a valores de referencia obteniendo parámetros adimensionales que relacionan el comportamiento del flujo, estos son:

$$Re = \frac{U_o d}{\nu}, M = \frac{U_o}{c}, Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

donde α es la difusividad térmica.

Y $d = R_e - R_i$ es el espacio entre cilindros donde R_i es el radio del cilindro interior y R_e es el radio del cilindro exterior. La velocidad de referencia es $U_o = R_i w_o$ y w_o es la velocidad angular del cilindro interior y ν es la viscosidad cinemática. Finalmente la constante c es la velocidad del sonido.

Además z, r, θ son las direcciones axial, radial y angular respectivamente y u, v, w son las componentes de la velocidad en las direcciones z, r, θ , respectivamente. Las ecuaciones de cantidad de movimiento en coordenadas cilíndricas pueden ser escritas en forma compacta de la siguiente forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} + \frac{1}{r} D = 0 \quad (2.1)$$

donde:

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$A = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u + p - \tau_{zz} \\ \rho u v - \tau_{rz} \\ \rho u w - \tau_{\theta z} \\ \rho u H + q_z - u\tau_{zz} - v\tau_{rz} - w\tau_{\theta z} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v - \tau_{rz} \\ \rho v v + p - \tau_{rr} \\ \rho v w - \tau_{\theta r} \\ \rho v H + q_r - u\tau_{rz} - v\tau_{rr} - w\tau_{\theta r} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho u w - \tau_{\theta z} \\ \rho v w - \tau_{\theta r} \\ \rho w w + p - \tau_{\theta\theta} \\ \rho w H + q_\theta - u\tau_{\theta z} - v\tau_{\theta r} - w\tau_{\theta\theta} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v - \tau_{rz} \\ \rho v v - \rho w w - \tau_{rr} + \tau_{\theta\theta} \\ 2\rho v w - 2\tau_{\theta r} \\ \rho v H + q_r - u\tau_{rz} - v\tau_{rr} - w\tau_{\theta r} \end{pmatrix}$$

la energía total esta definida como $E = \frac{T}{[\gamma(\gamma-1)M^2]} + \frac{1}{2}u_i u_i$ y la entalpía total es $H = E + \frac{p}{\rho}$.

Los componentes del tensor de esfuerzos se definen:

$$\tau_{zz} = \frac{2\mu}{3Re} \left[2 \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) \right] \quad (2.3)$$

$$\tau_{rr} = \frac{2\mu}{3Re} \left[-\frac{\partial u}{\partial z} + 2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) \right] \quad (2.4)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{2\mu}{3Re} \left[-\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} + 2 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) \right] \quad (2.5)$$

$$\tau_{rz} = \frac{\mu}{Re} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] \quad (2.6)$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{\mu}{Re} \left[\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \quad (2.7)$$

$$\tau_{\theta r} = \frac{\mu}{Re} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) + \frac{\partial w}{\partial r} \right] \quad (2.8)$$

los componentes del vector flujo de calor son:

$$q_z = \frac{-\mu}{Pr(\gamma-1)M^2 Re} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.9)$$

$$q_r = \frac{-\mu}{Pr(\gamma-1)M^2 Re} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (2.10)$$

$$q_\theta = \frac{-\mu}{Pr(\gamma-1)M^2 Re} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (2.11)$$

donde el número de Prandtl Pr se asume que es constante. El sistema de ecuaciones se cierra con una ecuación de estado para obtener la presión $p = \frac{\rho T}{\gamma M^2}$.

2.2. Transformación de coordenadas cilíndricas a coordenadas cilíndricas generalizadas

El código numérico utiliza coordenadas generalizadas, por medio de una matriz jacobeanas se realiza la transformación de coordenadas cilíndricas (z, r) a coordenadas generalizadas (ξ, η) . Por lo tanto, las derivadas para las coordenadas axial z y radial r deben ser expresadas en términos de las nuevas variables. Usando la regla de la cadena, se pueden derivar las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{J} \left[\frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right] = r_\eta^* \frac{\partial}{\partial \xi} - r_\xi^* \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{J} \left[-\frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right] = z_\xi^* \frac{\partial}{\partial \eta} - z_\eta^* \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (2.13)$$

donde J es el determinante de la matriz de transformación. Con el fin de abreviar las expresiones, se abrevian los términos de la matriz de transformación como $r_\eta = \frac{\partial r}{\partial \eta}$, de modo que $J = z_\xi r_\eta - z_\eta r_\xi$; y el asterisco denota un termino ya dividido por J .

Ahora, aplicando las derivadas r y z a la ecuación 2.1 la expresión queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (Ar_\eta - Bz_\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (-Ar_\xi + Bz_\xi) \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} - \frac{1}{r} D \quad (2.14)$$

los vectores A y B contienen términos pre-multiplicados por $\frac{1}{r}$. Como $r = r(\xi, \eta)$, cuando se deriva con respecto a ξ y η se debe aplicar la regla de la cadena. A continuación se presentan las ecuaciones de gobierno resumidas. Con el fin de abreviar las expresiones, las derivadas interiores no están escritas en términos de ξ, η , sin embargo, tenemos que tomar en cuenta que las derivadas de las direcciones axial y radial deben ser calculadas con las ecuaciones 2.12 y 2.13.

2.2.1. Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\rho u r_\eta - \rho v z_\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (-\rho u r_\xi + \rho v z_\xi) \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho w)}{\partial \theta} - \frac{(\rho v)}{r} \quad (2.15)$$

2.2.2. Ecuación de cantidad de movimiento dirección axial

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho w)}{\partial t} = & -\frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\rho u u + p - \frac{2\mu}{3Re} \left[2 \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right] \right) r_\eta - (\rho u v - \tau_{rz}) z_\eta \right] \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\rho u u + p - \frac{2\mu}{3Re} \left[2 \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right] \right) r_\xi - (\rho u v - \tau_{rz}) z_\xi \right] \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{2\mu}{3Re} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) r_\eta \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{2\mu}{3Re} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) r_\xi \right] \\ & \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho u w - \tau_{\theta z}] - \frac{1}{r} [\rho v w - \tau_{rz}] \right\} \quad (2.16) \end{aligned}$$

2.2.3. Ecuación de cantidad de movimiento dirección radial

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho v)}{\partial t} = & -\frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\rho v v - \tau_{rz}) r_\eta - \left(\rho v v + p - \frac{2\mu}{3Re} \left[-\frac{\partial u}{\partial z} + 2 \frac{\partial v}{\partial r} \right] \right) z_\eta \right] \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(\rho v v - \tau_{rz}) r_\xi - \left(\rho v v + p - \frac{2\mu}{3Re} \left[-\frac{\partial u}{\partial z} + 2 \frac{\partial v}{\partial r} \right] \right) z_\xi \right] \\ & \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{2\mu}{3Re} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) z_\eta \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{2\mu}{3Re} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) z_\xi \right] \right\} \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{2\mu}{3Re} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho v w - \tau_{\theta r}] - \frac{1}{r} \left[\rho (v v - w w) - \frac{2\mu}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) \right) \right] \quad (2.17) \end{aligned}$$

2.2.4. Ecuación de cantidad de movimiento dirección angular

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho w)}{\partial t} = & -\frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\rho u w - \frac{\mu}{Re} \frac{\partial w}{\partial z} \right) r_\eta - \left(\rho v w - \frac{\mu}{Re} \frac{\partial w}{\partial r} \right) z_\eta \right] \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\rho u w - \frac{\mu}{Re} \frac{\partial w}{\partial z} \right) r_\xi - \left(\rho v w - \frac{\mu}{Re} \frac{\partial w}{\partial r} \right) z_\xi \right] \\ & \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} r_\eta - \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) z_\eta \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} r_\xi - \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) z_\xi \right) \right] \right\} \\ & - \frac{1}{r^2} \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho w w + p - \tau_{\theta \theta}] - \frac{1}{r} [2\rho v w - 2\tau_{\theta r}] \quad (2.18) \end{aligned}$$

2.2.5. Ecuación de la energía

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} = & -\frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\rho u H + q_z - u \frac{2\mu}{3Re} \left[2 \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right] - v \tau_{rz} - w \frac{\mu}{Re} \frac{\partial w}{\partial z} \right) r_\eta \right. \right. \\
& - \left. \left(\rho v H + q_r - u \tau_{rz} - v \frac{2\mu}{3Re} \left[2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right] - w \frac{\mu}{Re} \frac{\partial w}{\partial r} \right) z_\eta \right] \\
& - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\rho u H + q_z - u \frac{2\mu}{3Re} \left[2 \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right] - v \tau_{rz} - w \frac{\mu}{Re} \frac{\partial w}{\partial z} \right) r_\xi \right. \\
& - \left. \left(\rho v H + q_r - u \tau_{rz} - v \frac{2\mu}{3Re} \left[2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right] - w \frac{\mu}{Re} \frac{\partial w}{\partial r} \right) z_\xi \right] \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\mu}{Re} \left[u \frac{2}{3} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) - w \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] r_\eta \right. \\
& - \left. \frac{\mu}{Re} \left[\frac{2}{3} v \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) - w \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) \right] z_\eta \right] \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\mu}{Re} \left[u \frac{2}{3} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) - w \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] r_\xi \right. \\
& - \left. \frac{\mu}{Re} \left[\frac{2}{3} v \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) - w \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) \right] z_\xi \right] \\
& \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\mu}{Re} \left[\frac{2}{3} v \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) - w \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) \right] \right\} \\
& - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho w H + q_\theta - u \tau_{\theta z} - v \tau_{\theta r} - w \tau_{\theta \theta}] - \frac{1}{r} [\rho v H + q_r - u \tau_{rz} - v \tau_{rr} - w \tau_{\theta r}]
\end{aligned} \tag{2.19}$$

2.3. Forma vectorial de las coordenadas cilíndricas generalizadas

Tomando en cuenta las expresiones para transformar las variables, las ecuaciones en coordenadas cilíndricas generalizadas pueden escribirse:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t} = & -\frac{1}{J} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{A} r_\eta - \hat{B} z_\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (-\hat{A} r_\xi + \hat{B} z_\xi) \right] \right. \\
& + \left. \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{A}_r r_\eta - \hat{B}_r z_\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (-\hat{A}_r r_\xi + \hat{B}_r z_\xi) \right] \right\} \\
& - \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} - \frac{1}{r} D - \frac{1}{r^2} \hat{B}_{rr}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

definimos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
1) \tilde{\tau}_{zz} &= \frac{2\mu}{3Re} \left(2 \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) & 2) \tau_{rz} &= \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 3) \tilde{\tau}_{\theta z} &= \frac{\mu}{Re} \frac{\partial w}{\partial z} \\
4) \tilde{\tau}_{rr} &= \frac{2\mu}{3Re} \left(2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & 5) \tilde{\tau}_{\theta r} &= \frac{\mu}{Re} \frac{\partial w}{\partial r} & 6) \tau_1 &= \frac{2\mu}{3Re} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) \\
7) \tau_2 &= \frac{\mu}{Re} \frac{\partial u}{\partial \theta} & 8) \tau_3 &= \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right)
\end{aligned}$$

Con el objetivo de evaluar C y D , utilizamos las siguientes relaciones:

$$\tau_{\theta z} = \tilde{\tau}_{\theta z} + \frac{1}{r} \tau_2, \quad \tau_{\theta r} = \tilde{\tau}_{\theta r} + \frac{1}{r} \tau_3, \quad \tau_{rr} = \tilde{\tau}_{rr} - \frac{1}{r} \tau_1, \quad \tau_{\theta \theta} = -\tilde{\tau}_{zz} - \tilde{\tau}_{rr} + \frac{2}{r} \tau_1 \tag{2.21}$$

finalmente, todos los vectores requeridos en 2.20 se pueden escribir:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u + p - \tilde{\tau}_{zz} \\ \rho u v - \tau_{rz} \\ \rho u w - \tilde{\tau}_{\theta z} \\ \rho u H + q_z - u\tilde{\tau}_{zz} - v\tau_{rz} - w\tilde{\tau}_{\theta z} \end{pmatrix}, \hat{B} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v v - \tau_{rz} \\ \rho v v + p - \tilde{\tau}_{rr} \\ \rho v w - \tilde{\tau}_{\theta r} \\ \rho v H + q_r - u\tau_{rz} - v\tilde{\tau}_{rr} - w\tilde{\tau}_{\theta r} \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_1 \\ 0 \\ -\tau_2 \\ u\tau_1 - w\tau_2 \end{pmatrix}, \hat{B}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_1 \\ -\tau_3 \\ v\tau_1 - w\tau_3 \end{pmatrix}, \hat{B}_{rr} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tau_1 \\ \tau_3 \\ w\tau_3 - v\tau_1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w w - \left(\tilde{\tau}_{\theta z} + \frac{1}{r}\tau_2 \right) \\ \rho v w - \left(\tilde{\tau}_{\theta r} + \frac{1}{r}\tau_3 \right) \\ \rho w w + p - \left(-\tilde{\tau}_{zz} - \tilde{\tau}_{rr} + \frac{2}{r}\tau_1 \right) \\ \rho w H + q_\theta - u \left(\tilde{\tau}_{\theta z} + \frac{1}{r}\tau_2 \right) - v \left(\tilde{\tau}_{\theta r} + \frac{1}{r}\tau_3 \right) - w \left(-\tilde{\tau}_{zz} - \tilde{\tau}_{rr} + \frac{2}{r}\tau_1 \right) \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v v - \rho w w - \left(\tilde{\tau}_{rr} - \frac{1}{r}\tau_1 \right) + \left(-\tilde{\tau}_{zz} - \tilde{\tau}_{rr} + \frac{2}{r}\tau_1 \right) \\ 2\rho v w - 2 \left(\tilde{\tau}_{\theta r} + \frac{1}{r}\tau_3 \right) \\ \rho v H + q_r - u\tau_{rz} - v \left(\tilde{\tau}_{rr} - \frac{1}{r}\tau_1 \right) - w \left(\tilde{\tau}_{\theta r} + \frac{1}{r}\tau_3 \right) \end{pmatrix}$$

Una deducción más detallada de las ecuaciones se puede ver en *Sandberg (2007)*.

Capítulo 3

Esquema numérico y modelo de turbulencia

El sistema de ecuaciones del capítulo anterior se resuelve con el esquema de diferencias finitas de McCormak explícito modificado, de segundo orden en el tiempo y cuarto orden en el espacio. Este tipo de esquema, *corrector-predictor*, utiliza un paso intermedio en cada paso de tiempo. En una dimensión se escribe:

Predictor

$$(U_j)^{(1)} = U_j + \frac{\lambda}{6} (-f_{j+2} + 8f_{j+1} - 7f_j) + (\delta t)S_j \quad (3.1)$$

Corrector

$$(U_j)^{n+1} = \frac{1}{2} (U_j + (U_j)^{(1)}) + \frac{\lambda}{12} (7f_{j-2} - 8f_{j-1} + f_j) + \frac{(\delta t)}{2} S_j^{(1)} \quad (3.2)$$

Los índices (n) , $(n+1)$ y (1) indican respectivamente los valores de la función en el tiempo t , $t + \Delta t$ y en el *sub-paso* de tiempo. De la ecuación 2.20, la formulación generalizada en tres dimensiones en coordenadas cilíndricas se escribe:

Predictor

$$\begin{aligned} U_{i,j,k}^1 = & U_{i,j,k}^n - J_{i,j,k}^P \left\{ \left(-\frac{1}{J}\right) \left[\frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left(\frac{7}{6} \left[\left(\hat{A}_{i+1,j,k}^n - \hat{A}_{i,j,k}^n \right) r_\eta - \left(\hat{B}_{i+1,j,k}^n - \hat{B}_{i,j,k}^n \right) z_\eta \right] \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{6} \left[\left(\hat{A}_{i+2,j,k}^n - \hat{A}_{i+1,j,k}^n \right) r_\eta - \left(\hat{B}_{i+2,j,k}^n - \hat{B}_{i+1,j,k}^n \right) z_\eta \right] \right] \right. \\ & \left. + \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \left(\frac{7}{6} \left[\left(-\hat{A}_{i+1,j,k}^n + \hat{A}_{i,j,k}^n \right) r_\xi + \left(\hat{B}_{i+1,j,k}^n - \hat{B}_{i,j,k}^n \right) z_\xi \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{6} \left[\left(-\hat{A}_{i+2,j,k}^n + \hat{A}_{i+1,j,k}^n \right) r_\xi + \left(\hat{B}_{i+2,j,k}^n - \hat{B}_{i+1,j,k}^n \right) z_\xi \right] \right) \right. \\ & + \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left(\frac{7}{6} \left[\left(\hat{A}_{ri+1,j,k}^n - \hat{A}_{ri,j,k}^n \right) r_\eta - \left(\hat{B}_{ri+1,j,k}^n - \hat{B}_{ri,j,k}^n \right) z_\eta \right] \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{6} \left[\left(\hat{A}_{ri+2,j,k}^n - \hat{A}_{ri+1,j,k}^n \right) r_\eta - \left(\hat{B}_{ri+2,j,k}^n - \hat{B}_{ri+1,j,k}^n \right) z_\eta \right] \right) \right. \\ & + \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \left(\frac{7}{6} \left[\left(-\hat{A}_{ri+1,j,k}^n + \hat{A}_{ri,j,k}^n \right) r_\xi + \left(\hat{B}_{ri+1,j,k}^n - \hat{B}_{ri,j,k}^n \right) z_\xi \right] \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{6} \left[\left(-\hat{A}_{ri+2,j,k}^n + \hat{A}_{ri+1,j,k}^n \right) r_\xi + \left(\hat{B}_{ri+2,j,k}^n - \hat{B}_{ri+1,j,k}^n \right) z_\xi \right] \right) \right) \\ & + \left(-\frac{1}{r} \right) \frac{\Delta t}{\Delta \theta} \left[\frac{7}{6} \left(C_{i+1,j,k}^n - C_{i,j,k}^n \right) - \frac{1}{6} \left(C_{i+2,j,k}^n - C_{i+1,j,k}^n \right) \right] \\ & + \left(-\frac{1}{r} \right) \left[\frac{7}{6} \left(D_{i+1,j,k}^n - D_{i,j,k}^n \right) - \frac{1}{6} \left(D_{i+2,j,k}^n - D_{i+1,j,k}^n \right) \right] \\ & \left. + \left(-\frac{1}{r^2} \right) \left[\frac{7}{6} \left(\hat{B}_{rri+1,j,k}^n - \hat{B}_{rri,j,k}^n \right) - \frac{1}{6} \left(\hat{B}_{rri+2,j,k}^n - \hat{B}_{rri+1,j,k}^n \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Corrector

$$\begin{aligned}
U_{i,j,k}^{n+1} = & \frac{1}{2} \left[U_{i,j,k}^1 + U_{i,j,k}^n \right] - \frac{1}{2} J_{i,j,k}^C \left\{ \left(-\frac{1}{J} \right) \left[\frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left(\frac{7}{6} \left[\left(\hat{A}_{i,j,k}^1 - \hat{A}_{i-1,j,k}^1 \right) r_\eta - \left(\hat{B}_{i,j,k}^1 - \hat{B}_{i-1,j,k}^1 \right) z_\eta \right] \right. \right. \right. \\
& - \frac{1}{6} \left[\left(\hat{A}_{i-1,j,k}^1 - \hat{A}_{i-2,j,k}^1 \right) r_\eta - \left(\hat{B}_{i-1,j,k}^1 - \hat{B}_{i-2,j,k}^1 \right) z_\eta \right] \left. \right. \\
& + \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \left(\frac{7}{6} \left[\left(-\hat{A}_{i,j,k}^1 + \hat{A}_{i-1,j,k}^1 \right) r_\xi + \left(\hat{B}_{i,j,k}^1 - \hat{B}_{i-1,j,k}^1 \right) z_\xi \right] \right. \\
& \left. - \frac{1}{6} \left[\left(-\hat{A}_{i-1,j,k}^1 + \hat{A}_{i-2,j,k}^1 \right) r_\xi + \left(\hat{B}_{i-1,j,k}^1 - \hat{B}_{i-2,j,k}^1 \right) z_\xi \right] \right) \\
& + \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left(\frac{7}{6} \left[\left(\hat{A}_{ri,j,k}^1 - \hat{A}_{ri-1,j,k}^1 \right) r_\eta - \left(\hat{B}_{ri,j,k}^1 - \hat{B}_{ri-1,j,k}^1 \right) z_\eta \right] \right. \\
& \left. - \frac{1}{6} \left[\left(\hat{A}_{ri-1,j,k}^1 - \hat{A}_{ri-2,j,k}^1 \right) r_\eta - \left(\hat{B}_{ri-1,j,k}^1 - \hat{B}_{ri-2,j,k}^1 \right) z_\eta \right] \right) \\
& + \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \left(\frac{7}{6} \left[\left(-\hat{A}_{ri,j,k}^1 + \hat{A}_{ri-1,j,k}^1 \right) r_\xi + \left(\hat{B}_{ri,j,k}^1 - \hat{B}_{ri-1,j,k}^1 \right) z_\xi \right] + \right. \\
& \left. - \frac{1}{6} \left[\left(-\hat{A}_{ri-1,j,k}^1 + \hat{A}_{ri-2,j,k}^1 \right) r_\xi + \left(\hat{B}_{ri-1,j,k}^1 - \hat{B}_{ri-2,j,k}^1 \right) z_\xi \right] \right) \\
& + \left(-\frac{1}{r} \right) \frac{\Delta t}{\Delta \theta} \left[\frac{7}{6} \left(C_{i,j,k}^1 - C_{i-1,j,k}^1 \right) - \frac{1}{6} \left(C_{i-1,j,k}^1 - C_{i-2,j,k}^1 \right) \right] \\
& + \left(-\frac{1}{r} \right) \left[\frac{7}{6} \left(D_{i,j,k}^1 - D_{i-1,j,k}^1 \right) - \frac{1}{6} \left(D_{i-1,j,k}^1 - D_{i-2,j,k}^1 \right) \right] \\
& \left. + \left(-\frac{1}{r^2} \right) \left[\frac{7}{6} \left(\hat{B}_{rri,j,k}^1 - \hat{B}_{rri-1,j,k}^1 \right) - \frac{1}{6} \left(\hat{B}_{rri-1,j,k}^1 - \hat{B}_{rri-2,j,k}^1 \right) \right] \right\} \tag{3.4}
\end{aligned}$$

$J_{i,j,k}^P$ y $J_{i,j,k}^C$ son los determinantes de la matriz de transformación calculados con esquemas hacia *adelante* y hacia *atrás*, respectivamente.

3.1. Simulación de Grandes Escalas (LES)

La técnica LES consiste en tratar de simular de manera determinista solo las grandes escalas del flujo, las escalas menores son entonces filtradas, pero estadísticamente tienen influencia en el movimiento de grandes escalas. Las ecuaciones LES se obtienen por la aplicación de un filtro espacial de paso bajo $G_\Delta(\mathbf{x})$ de tamaño Δ en las ecuaciones de N-S. Esto elimina las escalas más pequeñas que el tamaño del filtro Δ llamado las escalas sub-malla. Matemáticamente, la operación de filtrado corresponde con la convolución de cualquier cantidad $f(\mathbf{x}, t)$ del flujo por la función filtro $G_\Delta(\mathbf{x})$, en la forma

$$\bar{f}(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{y}, t) G_\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \tag{3.5}$$

y el campo escala sub-malla es la salida del flujo actual con respecto al campo filtrado, esto es la desviación del campo actual respecto del campo filtrado,

$$f = \bar{f} + f' \tag{3.6}$$

Partimos de la ecuación 2.14,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (Ar_\eta - Bz_\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (-Ar_\xi + Bz_\xi) \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} - \frac{1}{r} D \tag{3.7}$$

donde,

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^T \tag{3.8}$$

La ecuación 3.7 representa la evolución de la densidad (ecuación de continuidad), la cantidad de movimiento y la energía total definida para un gas ideal por,

$$E = \frac{T}{[\gamma(\gamma-1)M^2]} + \frac{1}{2}u_i u_i \quad (3.9)$$

A , B , C y D son los flujos (fluxes) que para un fluido Newtoniano están definidos por,

$$A = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u + p - \tau_{zz}^* \\ \rho u v - \tau_{rz}^* \\ \rho u w - \tau_{\theta z}^* \\ \rho u(E + \frac{p}{\rho}) - k \frac{\partial T}{\partial z} - u\tau_{zz}^* - v\tau_{rz}^* - w\tau_{\theta z}^* \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v u - \tau_{rz}^* \\ \rho v v + p - \tau_{rr}^* \\ \rho v w - \tau_{\theta r}^* \\ \rho v(E + \frac{p}{\rho}) - k \frac{\partial T}{\partial r} - u\tau_{rz}^* - v\tau_{rr}^* - w\tau_{\theta r}^* \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w u - \tau_{\theta z}^* \\ \rho w v - \tau_{\theta r}^* \\ \rho w w + p - \tau_{\theta\theta}^* \\ \rho w(E + \frac{p}{\rho}) - k \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} - u\tau_{\theta z}^* - v\tau_{\theta r}^* - w\tau_{\theta\theta}^* \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho w v - \tau_{rz}^* \\ \rho v v - \rho w w - \tau_{rr}^* + \tau_{\theta\theta}^* \\ 2\rho v w - 2\tau_{\theta r}^* \\ \rho v(E + \frac{p}{\rho}) - k \frac{\partial T}{\partial r} - u\tau_{rz}^* - v\tau_{rr}^* - w\tau_{\theta r}^* \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

donde

$$\begin{aligned} \tau_{zz}^* &= \frac{2}{3}\mu \left[2\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) \right] & \tau_{rz}^* &= \mu \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] \\ \tau_{rr}^* &= \frac{2}{3}\mu \left[-\frac{\partial u}{\partial z} + 2\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) \right] & \tau_{\theta z}^* &= \mu \left[\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \\ \tau_{\theta\theta}^* &= \frac{2}{3}\mu \left[-\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} + 2\frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) \right] & \tau_{\theta r}^* &= \mu \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) + \frac{\partial w}{\partial r} \right] \end{aligned}$$

Regresando a la definición del filtro en la ecuación 3.6 y aplicando el filtro a las ecuaciones de N-S obtenemos,

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = -\frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{A}r_\eta - \bar{B}z_\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (-\bar{A}r_\xi + \bar{B}z_\xi) \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \bar{D} \quad (3.11)$$

con

$$\bar{E} = \frac{\bar{T}}{[\gamma(\gamma-1)M^2]} + \frac{1}{2}\overline{u_i u_i} \quad (3.12)$$

y la ecuación de estado,

$$\bar{p} = \overline{\rho R T} \quad (3.13)$$

Introducimos el promedio de Favre:

$$\tilde{f} = \frac{\rho \bar{f}}{\bar{f}}$$

Entonces de la ecuación 3.8 se tiene,

$$\bar{U} = \left(\bar{\rho}, \bar{\rho} \tilde{u}, \bar{\rho} \tilde{v}, \bar{\rho} \tilde{w}, \bar{\rho} \tilde{E} \right)^T \quad (3.14)$$

y la energía total queda de la siguiente manera,

$$\bar{E} = \tilde{E} = \frac{\bar{T}}{[\gamma(\gamma-1)M^2]} + \frac{1}{2}\overline{u_i u_i} \quad (3.15)$$

Los flujos de 3.10 quedan,

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{u} \\ \overline{\rho u\tilde{u}} + \bar{p} - \overline{\tau_{zz}^*} \\ \overline{\rho v\tilde{u}} - \overline{\tau_{rz}^*} \\ \overline{\rho w\tilde{u}} - \overline{\tau_{\theta z}^*} \\ \overline{\rho u(E + \frac{p}{\rho})} - k\frac{\partial T}{\partial z} - \overline{u\tau_{zz}^*} - \overline{v\tau_{rz}^*} - \overline{w\tau_{\theta z}^*} \end{pmatrix} & \bar{B} &= \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{v} \\ \overline{\rho v\tilde{v}} + \bar{p} - \overline{\tau_{rr}^*} \\ \overline{\rho v\tilde{u}} - \overline{\tau_{\theta r}^*} \\ \overline{\rho v\tilde{v}} - \overline{\tau_{rz}^*} - \overline{v\tau_{rr}^*} - \overline{w\tau_{\theta r}^*} \\ \overline{\rho v(E + \frac{p}{\rho})} - k\frac{\partial T}{\partial r} - \overline{u\tau_{rz}^*} - \overline{v\tau_{rr}^*} - \overline{w\tau_{\theta r}^*} \end{pmatrix} \\ \bar{C} &= \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{w} \\ \overline{\rho w\tilde{w}} - \overline{\tau_{\theta z}^*} \\ \overline{\rho w\tilde{u}} - \overline{\tau_{\theta r}^*} \\ \overline{\rho w\tilde{v}} + \bar{p} - \overline{\tau_{\theta\theta}^*} \\ \overline{\rho w(E + \frac{p}{\rho})} - k\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta} - \overline{u\tau_{\theta z}^*} - \overline{v\tau_{\theta r}^*} - \overline{w\tau_{\theta\theta}^*} \end{pmatrix} & \bar{D} &= \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{v} \\ \overline{\rho v\tilde{v}} - \overline{\rho w\tilde{w}} - \overline{\tau_{rr}^*} + \overline{\tau_{\theta\theta}^*} \\ \overline{2\rho v\tilde{w}} - \overline{2\tau_{\theta r}^*} \\ \overline{\rho v(E + \frac{p}{\rho})} - k\frac{\partial T}{\partial r} - \overline{u\tau_{rz}^*} - \overline{v\tau_{rr}^*} - \overline{w\tau_{\theta r}^*} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

con la ecuación de estado filtrada,

$$\bar{p} = \bar{\rho}R\tilde{T} \quad (3.17)$$

Ahora introducimos el tensor de esfuerzos sub-malla,

$$\mathcal{T}_{ij} = -\overline{\rho u_i u_j} + \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j \quad (3.18)$$

que podemos separar en su parte isotrópica y deviatórica,

$$\mathcal{T}_{ij} = \mathcal{T}_{ij} - \frac{1}{3}\mathcal{T}_{ll}\delta_{ij} + \frac{1}{3}\mathcal{T}_{ll}\delta_{ij} \quad (3.19)$$

donde

$$\tau_{ij} = \mathcal{T}_{ij} - \frac{1}{3}\mathcal{T}_{ll}\delta_{ij}$$

Las ecuaciones 3.16 y 3.15 quedan,

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{u} \\ \overline{\rho u\tilde{u}} + \bar{p} - \frac{1}{3}\mathcal{T}_{ll} - \tau_{ij} - \overline{\tau_{zz}^*} \\ \overline{\rho v\tilde{u}} - \overline{\tau_{rz}^*} \\ \overline{\rho w\tilde{u}} - \overline{\tau_{\theta z}^*} \\ \overline{\rho u(E + \frac{p}{\rho})} - k\frac{\partial T}{\partial z} - \overline{u\tau_{zz}^*} - \overline{v\tau_{rz}^*} - \overline{w\tau_{\theta z}^*} \end{pmatrix} & \bar{B} &= \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{v} \\ \overline{\rho v\tilde{v}} + \bar{p} - \frac{1}{3}\mathcal{T}_{ll} - \tau_{ij} - \overline{\tau_{rr}^*} \\ \overline{\rho v\tilde{u}} - \overline{\tau_{\theta r}^*} \\ \overline{\rho v\tilde{v}} - \overline{\tau_{rz}^*} - \overline{v\tau_{rr}^*} - \overline{w\tau_{\theta r}^*} \\ \overline{\rho v(E + \frac{p}{\rho})} - k\frac{\partial T}{\partial r} - \overline{u\tau_{rz}^*} - \overline{v\tau_{rr}^*} - \overline{w\tau_{\theta r}^*} \end{pmatrix} \\ \bar{C} &= \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{w} \\ \overline{\rho w\tilde{w}} - \overline{\tau_{\theta z}^*} \\ \overline{\rho w\tilde{u}} - \overline{\tau_{\theta r}^*} \\ \overline{\rho w\tilde{v}} + \bar{p} - \frac{1}{3}\mathcal{T}_{ll} - \tau_{ij} - \overline{\tau_{\theta\theta}^*} \\ \overline{\rho w(E + \frac{p}{\rho})} - k\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta} - \overline{u\tau_{\theta z}^*} - \overline{v\tau_{\theta r}^*} - \overline{w\tau_{\theta\theta}^*} \end{pmatrix} & \bar{D} &= \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{v} \\ \overline{\rho v\tilde{v}} - \overline{\rho w\tilde{w}} - \overline{\tau_{rr}^*} + \overline{\tau_{\theta\theta}^*} \\ \overline{2\rho v\tilde{w}} - \overline{2\tau_{\theta r}^*} \\ \overline{\rho v(E + \frac{p}{\rho})} - k\frac{\partial T}{\partial r} - \overline{u\tau_{rz}^*} - \overline{v\tau_{rr}^*} - \overline{w\tau_{\theta r}^*} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.20)$$

y

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{T}}{[\gamma(\gamma - 1)M^2]} + \frac{1}{2}\tilde{u}_i\tilde{u}_i - \frac{1}{2}\mathcal{T}_{ll} \quad (3.21)$$

Existe una formulación más elegante propuesta por *Comte & Lesieur (1997)* a través de la introducción de una *macro-presión* y una *macro-temperatura*. La *macro-presión* se define,

$$\varpi = \bar{p} - \frac{1}{3}\mathcal{T}_{ll} \quad (3.22)$$

y la *macro-temperatura* es,

$$\vartheta = \tilde{T} - \frac{1}{2C_v\bar{\rho}}\mathcal{T}_u \quad (3.23)$$

La ecuación 3.17 se puede entonces escribir en función de la *macro-presión* y la *macro-temperatura*,

$$\varpi = \bar{\rho}R\vartheta + \frac{3\gamma - 5}{6}\mathcal{T}_u \quad (3.24)$$

Además para un $\gamma = 1.4$ se puede encontrar en *Comte & Lesieur (1997)* que se justifica el despreciar el segundo término del lado derecho de la ecuación 3.24. De esta manera podemos escribir,

$$\varpi \simeq \bar{\rho}R\vartheta \quad (3.25)$$

Por lo tanto sí se conoce $\bar{\rho}$ y ϑ se puede calcular ϖ .

Introducimos un modelo más, el vector flujo de calor sub-malla, denotado por \mathbf{Q} , con componentes

$$Q_i = -\overline{(\rho e - p)u_i} + (\bar{\rho}\tilde{e} + \varpi)\tilde{u}_i \quad (3.26)$$

La expresión final de los flujos filtrados es,

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{u} + \varpi - \tau_{iz} - \tau_{zz}^* \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v} - \tau_{rz}^* \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{w} - \tau_{\theta z}^* \\ \bar{\rho}\tilde{u}(\tilde{E} + \frac{\varpi}{\rho}) - Q_i - k\frac{\partial T}{\partial z} - \overline{u\tau_{zz}^*} - \overline{v\tau_{rz}^*} - \overline{w\tau_{\theta z}^*} \end{pmatrix} \\ \bar{B} &= \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{u} - \tau_{rz}^* \\ \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{v} + \varpi - \tau_{ir} - \tau_{rr}^* \\ \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{w} - \tau_{\theta r}^* \\ \bar{\rho}\tilde{v}(\tilde{E} + \frac{\varpi}{\rho}) - Q_i - k\frac{\partial T}{\partial r} - \overline{u\tau_{rz}^*} - \overline{v\tau_{rr}^*} - \overline{w\tau_{\theta r}^*} \end{pmatrix} \\ \bar{C} &= \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{w} \\ \bar{\rho}\tilde{w}\tilde{u} - \tau_{\theta z}^* \\ \bar{\rho}\tilde{w}\tilde{v} - \tau_{\theta r}^* \\ \bar{\rho}\tilde{w}\tilde{w} + \varpi - \tau_{i\theta} - \tau_{\theta\theta}^* \\ \bar{\rho}\tilde{w}(\tilde{E} + \frac{\varpi}{\rho}) - Q_i - k\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} - \overline{u\tau_{\theta z}^*} - \overline{v\tau_{\theta r}^*} - \overline{w\tau_{\theta\theta}^*} \end{pmatrix} \\ \bar{D} &= \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{u} - \tau_{rz}^* \\ \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{v} - \bar{\rho}\tilde{w}\tilde{w} - \tau_{rr}^* + \tau_{\theta\theta}^* \\ \frac{2\bar{\rho}\tilde{v}\tilde{w} - 2\tau_{\theta r}^*}{2} \\ \bar{\rho}\tilde{v}(\tilde{E} + \frac{\varpi}{\rho}) - Q_i - k\frac{\partial T}{\partial r} - \overline{u\tau_{rz}^*} - \overline{v\tau_{rr}^*} - \overline{w\tau_{\theta r}^*} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.27)$$

3.1.1. Modelo sub-malla

Los modelos más comunes para los términos sub-malla basados en viscosidad turbulenta cierran el sistema, estos son

$$\tau_{ij} \simeq \bar{\rho}\nu_t\bar{S}_{ij} \quad (3.28)$$

$$Q_{ij} \simeq \bar{\rho}C_p\frac{\nu_t}{Pr_t}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i} \quad (3.29)$$

donde \mathbf{S} es el tensor de rapidez de deformación. Los términos difusivos y de viscosidad molecular se pueden considerar de poca importancia para números de Reynolds suficientemente grandes. Por lo tanto la ecuación 3.27 se puede reemplazar por,

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{u} + \varpi - \tilde{\tau}_{zz}^* - \bar{\rho}\nu_t S_{zz} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v} - \tilde{\tau}_{rz}^* - \bar{\rho}\nu_t S_{rz} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{w} - \tilde{\tau}_{\theta z}^* - \bar{\rho}\nu_t S_{\theta z} \\ \bar{\rho}\tilde{u}(\tilde{E} + \frac{\varpi}{\rho}) - [\bar{k} + \frac{\bar{\rho}C_p\nu_t}{Pr_t}]\frac{\partial\vartheta}{\partial z} - \tilde{u}\tilde{\tau}_{zz}^* - \tilde{v}\tilde{\tau}_{rz}^* - \tilde{w}\tilde{\tau}_{\theta z}^* - 2\bar{\rho}\nu_t(uS_{zz} + vS_{rz} + wS_{\theta z}) \end{pmatrix} \\
\bar{B} &= \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v} - \tilde{\tau}_{rz}^* - \bar{\rho}\nu_t S_{rz} \\ \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{v} + \varpi - \tilde{\tau}_{rr}^* - \bar{\rho}\nu_t S_{rr} \\ \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{w} - \tilde{\tau}_{\theta r}^* - \bar{\rho}\nu_t S_{\theta r} \\ \bar{\rho}\tilde{v}(\tilde{E} + \frac{\varpi}{\rho}) - [\bar{k} + \frac{\bar{\rho}C_p\nu_t}{Pr_t}]\frac{\partial\vartheta}{\partial r} - \tilde{u}\tilde{\tau}_{rz}^* - \tilde{v}\tilde{\tau}_{rr}^* - \tilde{w}\tilde{\tau}_{\theta r}^* - 2\bar{\rho}\nu_t(uS_{rz} + vS_{rr} + wS_{\theta r}) \end{pmatrix} \\
\bar{C} &= \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{w} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{w} - \tilde{\tau}_{\theta z}^* - \bar{\rho}\nu_t S_{\theta z} \\ \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{w} - \tilde{\tau}_{\theta r}^* - \bar{\rho}\nu_t S_{\theta r} \\ \bar{\rho}\tilde{w}\tilde{w} + \varpi - \tilde{\tau}_{\theta\theta}^* - \bar{\rho}\nu_t S_{\theta\theta} \\ \bar{\rho}\tilde{w}(\tilde{E} + \frac{\varpi}{\rho}) - [\bar{k} + \frac{\bar{\rho}C_p\nu_t}{Pr_t}]\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta} - \tilde{u}\tilde{\tau}_{\theta z}^* - \tilde{v}\tilde{\tau}_{\theta r}^* - \tilde{w}\tilde{\tau}_{\theta\theta}^* - 2\bar{\rho}\nu_t(uS_{\theta z} + vS_{\theta r} + wS_{\theta\theta}) \end{pmatrix} \\
\bar{D} &= \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v} - \tilde{\tau}_{rz}^* - \bar{\rho}\nu_t S_{rz} \\ \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{v} - \bar{\rho}\tilde{w}\tilde{w} - \tilde{\tau}_{rr}^* + \tilde{\tau}_{\theta\theta}^* + \bar{\rho}\nu_t(S_{\theta\theta} + S_{rr}) \\ \frac{2\bar{\rho}\tilde{v}\tilde{w}}{2\bar{\rho}\tilde{v}\tilde{w} - 2\tilde{\tau}_{\theta r}^*} - 2\bar{\rho}\nu_t S_{\theta r} \\ \bar{\rho}\tilde{v}(\tilde{E} + \frac{\varpi}{\rho}) - [\bar{k} + \frac{\bar{\rho}C_p\nu_t}{Pr_t}]\frac{\partial\vartheta}{\partial r} - \tilde{u}\tilde{\tau}_{rz}^* - \tilde{v}\tilde{\tau}_{rr}^* - \tilde{w}\tilde{\tau}_{\theta r}^* - 2\bar{\rho}\nu_t(uS_{rz} + vS_{rr} + wS_{\theta r}) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

se asume un número de Prandtl constante $Pr = C_p\bar{\mu}(\vartheta)/\bar{k}(\vartheta) = 0.7$.

Nuestro modelo de escala sub-malla es el modelo de función estructura selectiva [ver *Metais & Lesieur (1996)*]. La viscosidad turbulenta local, $\nu_t(\mathbf{x}, t)$, esta dada por,

$$\nu_t(\mathbf{x}, \Delta, t) = C_{ssf}\Delta\sqrt{\tilde{F}_2(\mathbf{x}, \Delta, t)} \tag{3.31}$$

donde C_{ssf} se puede representar como una función de la constante de Kolmogorov C_K : $C_{ssf} = f(C_K^{-3/2})$ y es $C_{ssf} = 0.104$ para $C_K = 1.4$. Δ es igual a $(\Delta x\Delta y\Delta z)^{1/3}$, donde $\Delta x, \Delta y$ y Δz son el tamaño de la malla local en las tres direcciones espaciales.

$\tilde{F}_2(\mathbf{x}, \Delta, t)$ es la función estructura de la velocidad de segundo orden construida con el campo \tilde{u} . \tilde{F}_2 se calcula en un punto \mathbf{x} con un promedio estadístico local de diferencias de velocidad entre \mathbf{x} y seis puntos vecinos alrededor de \mathbf{x} en la malla computacional. Por último, el número de Prandtl turbulento se toma igual a 0.6.

Capítulo 4

Detalles numéricos

4.1. Condiciones iniciales y de frontera

La geometría del sistema que se analiza consiste en dos cilindros concéntricos, con radios R_i y R_e , con un espacio entre ellos, denotado $d = R_e - R_i$. El código numérico se encuentra en coordenadas cilíndricas, donde la dirección z indica la dirección axial, a lo largo del eje de los cilindros; r la dirección radial, en dirección perpendicular al eje de los cilindros, y hacia las paredes de los cilindros y θ la dirección angular, alrededor de los cilindros (figura 4.3). El espacio anular entre los cilindros contiene un fluido, que es impulsado por el cilindro interior mientras el cilindro exterior permanece en reposo, las condiciones en las fronteras son:

Dirección axial. En la dirección axial, en los extremo de los cilindros se aplican condiciones de frontera periódicas, esto es equivalente a tener cilindros muy largos y despreciar los efectos en las paredes de los extremos.

Dirección radial. En la dirección radial, se considera una condición de *no-deslizamiento* en las paredes de los cilindros. En la pared del cilindro interior se considera un valor fijo de velocidad, en la dirección angular. La temperatura se considera constante. La presión en la pared es obtenida resolviendo las ecuaciones de N-S en la pared.

$$r = R_i, u = v = 0, w = w_{ref} = w_o$$

$$r = R_e, u = v = w = 0$$

$$T = cte, \frac{\partial P}{\partial n} = 0$$

Dirección angular. En la dirección angular, se consideran condiciones de frontera periódicas.

Cabe mencionar que se maneja un código compresible, donde se obtiene la presión en cada paso de tiempo mediante una expresión que relaciona la energía y la densidad con la presión. Debido a las características físicas del flujo se le considera como incompresible, entonces ¿porque resolver las ecuaciones de N-S compresibles para dar solución a un flujo incompresible? se debe tener en mente lo difícil que es desarrollar un código incompresible que además debe resolver una ecuación de Poisson para resolver el campo de presiones lo cual implica un alto costo computacional.

Por otro lado un código incompresible, puede proporcionar una muy buena aproximación del flujo. Para números de Mach M , suficientemente pequeños y cambios de temperatura prácticamente nulos se tiende al límite incompresible. Teniendo la certeza de un buen funcionamiento del código, se puede realizar una modificación en la ecuación de estado por una que modela un flujo cuasi-incompresible, esta alternativa ha sido implementada con gran éxito en códigos similares en coordenadas cartesianas. Para más detalles revisar en *Perrin & Hu (2006)*.

4.1.1. Condición de frontera periódica

Las condiciones de frontera periódicas hacen referencia al método para calcular las diferencias finitas en los límites de los dominios. Para calcular unas diferencias *hacia adelante* en el último nodo $i = n$ se recurre a tomar el nodo que sigue, en este caso el primer nodo $i = 1$.

En nodo $i = n$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta x} = \frac{u_1 - u_n}{\Delta x}$$

Cuando son diferencias *hacia atrás*, calculadas en el primer nodo $i = 1$, el nodo que sigue hacia atrás en este caso es $i = n$,

En nodo $i = 1$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} = \frac{u_1 - u_{1-1}}{\Delta x} = \frac{u_1 - u_n}{\Delta x}$$

En el caso de diferencias centradas,

En nodo $i = 1$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} = \frac{u_2 - u_{1-1}}{2\Delta x} = \frac{u_2 - u_n}{2\Delta x}$$

En nodo $i = n$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta x} = \frac{u_1 - u_{n-1}}{2\Delta x}$$

La condición de periodicidad es equivalente a tener, en el caso unidimensional, una línea seguida de la otra infinitamente (figura 4.1). De este modo, es adecuado implementar condiciones de frontera periódicas en las caras superior e inferior de los cilindros para simular cilindros con una longitud infinita.

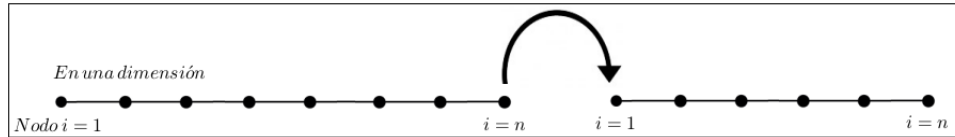


Figura 4.1: Condición de periodicidad

En el caso de la dirección angular, se recurre a la condición de periodicidad con el fin de cerrar el dominio por completo, formando una circunferencia.

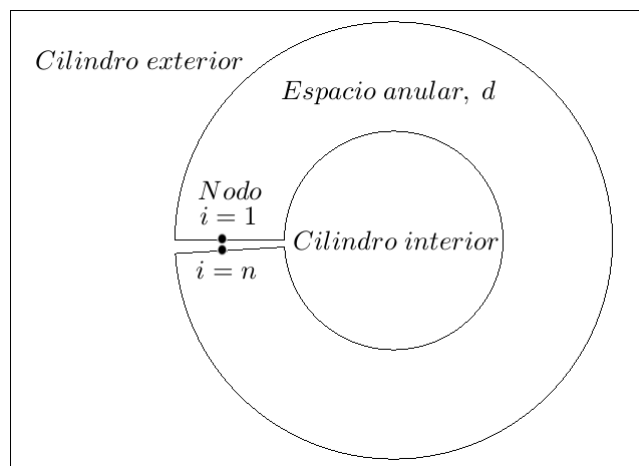


Figura 4.2: Condición de periodicidad en dirección angular

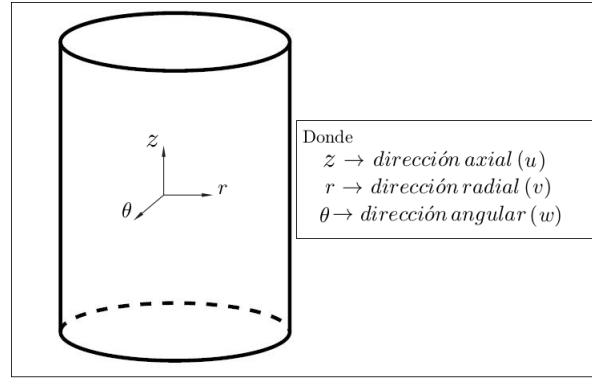


Figura 4.3: Coordenadas cilíndricas

4.2. Dimensiones del dominio computacional y malla computacional

Las dimensiones del dominio computacional son,

$$\begin{aligned} \text{Dirección axial } L_x &\rightarrow \pi d \\ \text{Dirección radial } L_y &\rightarrow 2d \\ \text{Dirección angular } L_z &\rightarrow 2\pi \end{aligned}$$

La malla computacional la conforman 1,047,375 elementos, divididos en $95 \times 105 \times 105$ en las direcciones angular, radial y axial, respectivamente. En orden de simular correctamente las regiones cerca de las paredes de los cilindros, una malla no-uniforme con un espaciamento tangencial es usado en la dirección radial. El espaciamento en las direcciones angular y axial se mantiene constante. Los valores son,

$$\text{Dirección axial } \Delta x = 0.0334L_{ref}$$

$$\text{Dirección radial } \Delta y_{min} = 0.0031L_{ref} \quad \Delta y_{max} = 0.0158L_{ref}$$

$$\text{Dirección angular } \Delta z = 0.0598L_{ref}$$

Las simulaciones se llevan a cabo para una relación de radios $\eta = R_i/R_e = 0.5$.

Uno de los principales objetivos es validar el código numérico, por lo que se recurre a reproducir el trabajo de *Dong (2007)*. Se analizan cuatro casos distintos en cuatro Re distintos (ver cuadro 4.1). Siguiendo la definición del número de Reynolds de *Andereck, Liu & Swinney (1986)*,

$$Re = \frac{R_i \omega_o (R_e - R_i)}{\nu} = \frac{U_o d}{\nu}$$

Como se mencionó en la *sección 1.1*, el número de Reynolds es una medida de las fuerzas inerciales en relación con las fuerzas viscosas. Por otro lado la definición del número de Taylor es muy similar, relaciona las fuerzas inerciales producidas por el movimiento rotacional de un fluido contra los efectos viscosos. De ahí que estén íntimamente relacionadas estas cantidades adimensionales. En el presente trabajo vamos a utilizar el número de Reynolds en orden de comparar nuestros datos con los datos de *Dong (2007)* y *Smith & Townsend (1982)*.

	Re
Caso 1	1000
Caso 2	3000
Caso 3	5000
Caso 4	8000

Cuadro 4.1: Casos a analizar

Capítulo 5

Resultados

5.1. Comparación con datos experimentales

Se realizó una comparación entre el perfil de cantidad de movimiento angular promedio y datos experimentales de *Smith & Townsend (1982)*. En la figura 5.1 se muestra una gráfica con los datos. Los datos experimentales para el Re más pequeño ($Re=8664$) que se encuentran en *Smith & Townsend (1982)* solo están disponibles para la región cerca del cilindro interior, con el fin de observar el comportamiento en la región central del espacio anular se añadieron los resultados para $Re=17226$. Se observa cierta desviación en la región cerca del cilindro interior entre los datos experimentales y la simulación LES, en las regiones cerca de las paredes se presentan gradientes de velocidad muy grandes debido a la condición de *no-deslizamiento*. En estas regiones la malla debe ser lo suficientemente fina para captar estos gradientes, posiblemente el uso de una malla relativamente gruesa sea la razón de la desviación de los datos en esta región. En la región central, los datos experimentales tienen una ligera pendiente positiva, aunque la cantidad de movimiento angular promedio prácticamente es constante, la variación es mínima. Por otro lado en los datos de la simulación LES se observa un comportamiento ligeramente lineal, donde casi tiende a ser constante la cantidad de movimiento angular. En *Smith & Townsend (1982)* se reportan experimentos para una razón de radios de $\eta = 0.667$ que es ligeramente diferente de las simulaciones $\eta = 0.5$, además la diferencia en los números de Reynolds de los datos en la zona central del espacio anular es casi dos veces mayor, todo esto sugiere la desviación en los datos. En general, se observa un acuerdo razonable en el comportamiento entre los datos de la simulación y los datos experimentales, se observan gradientes de velocidad en las regiones cercanas a las paredes y el cambio de la cantidad de movimiento angular en la zona central es casi lineal sin presentarse grandes cambios.

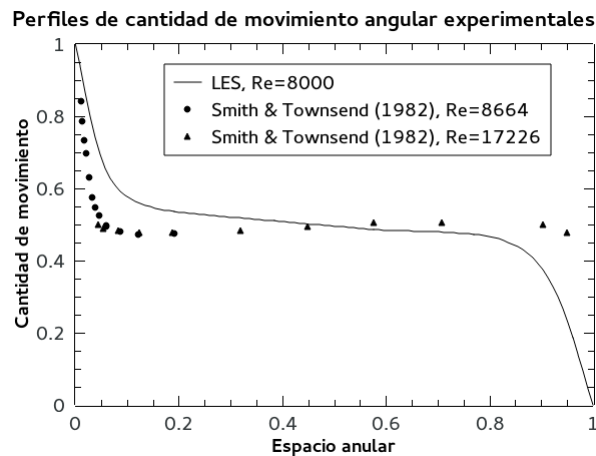


Figura 5.1: Comparación de los perfiles de cantidad de movimiento angular medio normalizados entre la simulación presentada ($Re=8000$) y los datos de *Smith & Townsend (1982)*

5.2. Campos instantáneos de velocidad

En esta sección se analizan las estructuras del flujo que se forman en el sistema de Taylor-Couette en régimen turbulento. En la figura 5.2 se observan los campos de velocidad instantáneos en un plano radial-axial, desde el lado izquierdo al derecho para $Re=1000$, 3000 , 5000 y 8000 . Las paredes del cilindro interior y exterior corresponden a $r/d = 1.0$ y 2.0 , respectivamente. Se recurre a la herramienta *Surface LIC* para ilustrar las líneas de corriente proyectadas en un plano.

Para $Re=1000$, se observan un par de vórtices de Taylor que ocupan el espacio anular por completo aunque se presentan ligeras inestabilidades en las regiones de *flujo de salida* y *flujo de entrada* de los vórtices, esto debido a que se observa una transición del flujo laminar al flujo turbulento. Con el aumento del número de Reynolds a $Re=3000$, se observa una distorsión más pronunciada de los vórtices de Taylor. Se pueden aún identificar claramente dos pares de vórtices de Taylor, junto con vórtices de menor escala en las regiones de *flujo de entrada* y *flujo de salida* de los vórtices. Los vórtices de Taylor tienen una escala de longitud del orden del ancho del espacio anular. Los vórtices que tienen una escala menor al ancho del espacio anular, una escala del orden del espesor de capa límite son vórtices de Gortler, los cuales emergen desde la pared del cilindro interior.

En $Re=5000$, el flujo se caracteriza principalmente por la presencia de un número de vórtices con una distribución aparentemente aleatoria y con escalas de menor tamaño que el espacio anular. Se hace más difícil identificar vórtices de Taylor debido al carácter distorsionado del flujo. Se puede reconocer una mayor distribución de vórtices de menor escala que emergen de la pared del cilindro interior, los cuales tienen una mayor concentración en las regiones de *flujo de salida* de los vórtices de Taylor; también se pueden observar en las regiones cerca de la pared del cilindro exterior en los límites de *flujo de entrada*.

Para cuando el número de Reynolds se incrementa a $Re=8000$, se observa el espacio anular con una mayor cantidad de vórtices de menor escala, los vórtices de Taylor difícilmente se distinguen. Un gran número de vórtices de menor escala se observan cerca de la pared del cilindro interior, distribuidos de forma aleatoria. Por otro lado, se observa un incremento de vórtices de menor escala cerca de la pared del cilindro exterior, aunque considerablemente menor que en la pared del cilindro interior.

Todos estos cambios que se presentan en el flujo se deben a que se está observando una zona donde el flujo laminar se transforma en flujo turbulento. Las observaciones alrededor de los vórtices de pequeña escala, que surgen regularmente en las paredes de los cilindros son consistentes con los resultados presentados por *Dong (2007)* de una DNS. Además, el trabajo de *Barçilon et al. (1979)* sugiere la presencia de estos vórtices de pequeña escala identificándolos como los vórtices de Gortler.

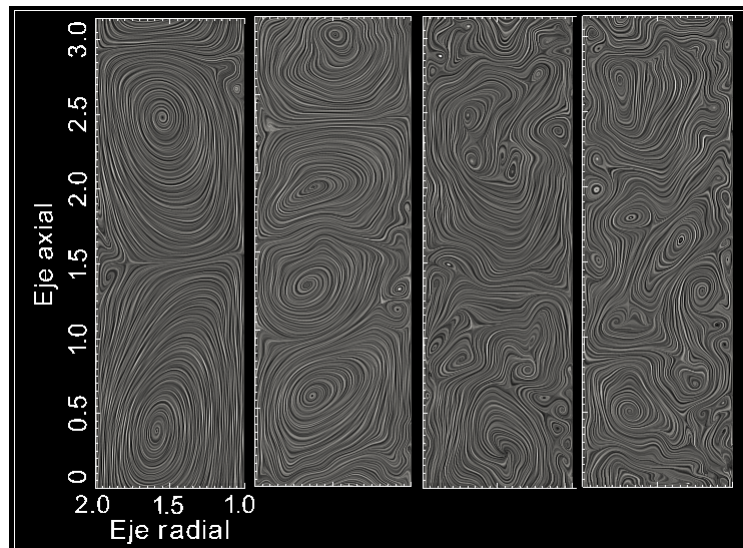


Figura 5.2: Campos de velocidad radial instantáneo en un plano radial-axial para $Re=1000$, 3000 , 5000 y 8000 , de arriba a abajo respectivamente

5.3. Estructura del flujo de vórtices

Con el fin de explorar las características estructurales de los vórtices en el espacio tridimensional, visualizamos iso-superficies de criterio Q (sección 1.6.1.1) en la figura 5.3 se observan las iso-superficies de $Q/(d/w_o) = 1$ para $Re=3000$ y $Re=5000$. En ambas se observan claramente estructuras vorticiales en el flujo, que se extienden a lo largo de la dirección angular. Para el caso de $Re=3000$, la distribución axial de estas estructuras es desigual. Se concentran principalmente en las límites de *flujo de salida* entre los vórtices de Taylor. Estos vórtices parecen originarse desde la pared del cilindro interior y alargarse angularmente lejos de la pared en una trayectoria como de espiral hacia la pared del cilindro exterior. Examinando detenidamente se puede observar que la orientación de los vórtices esta levemente desviada por un pequeño ángulo con respecto al plano radial-angular, tomando los vórtices una trayectoria en espiral alrededor del cilindro (figura 5.4). Para el caso de $Re=8000$ se pueden realizar observaciones similares. Sin embargo en $Re=8000$ se observa una mayor población de vórtices, distribuidos en mayor cantidad a lo largo del eje del cilindro, esto debido a lo anteriormente visto en la sección 5.2, donde se observa una población abundante de vórtices de pequeña escala.

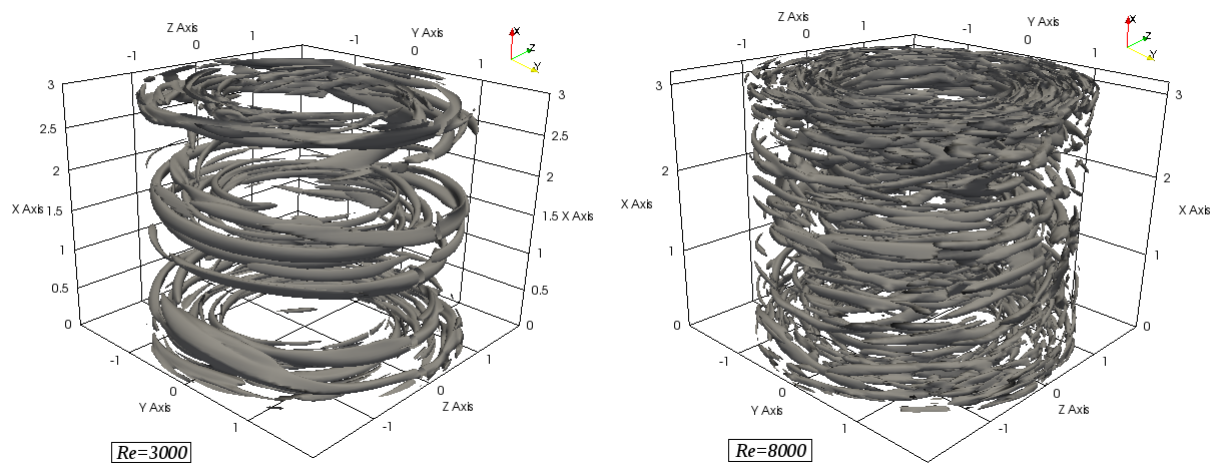


Figura 5.3: Iso-superficies de criterio Q instantáneo, método de identificación de vórtices por *Hunt et al. (1988)*: $Re=3000$ y $Re=8000$, $Q/(d/w_o) = 1$

Por otro lado, en la figura 5.5 se observan iso-superficies de presión instantáneas para $Re=5000$ (lado izquierdo) y $Re=8000$ (lado derecho), estas iso-superficies están calculadas cerca de la pared del

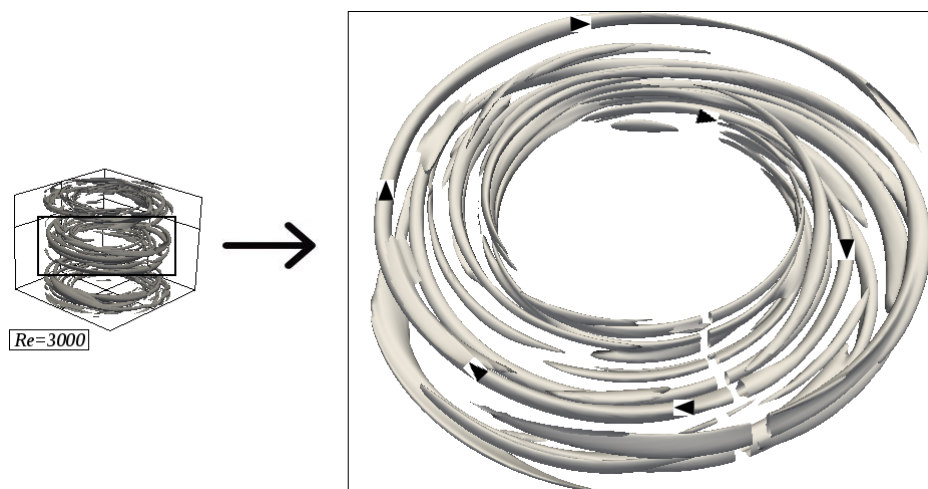


Figura 5.4: Trayectoria en espiral de los vórtices.

cilindro interior y se puede observar el nacimiento de los vórtices de pequeña escala. Se observa una mayor cantidad en el caso de $Re=8000$. Esto es una muestra del cambio en el campo de presión, en el que se generan gradientes de presión debido a la formación de los vórtices (en la *sección 5.6* se analiza con más detalle el campo de presión).

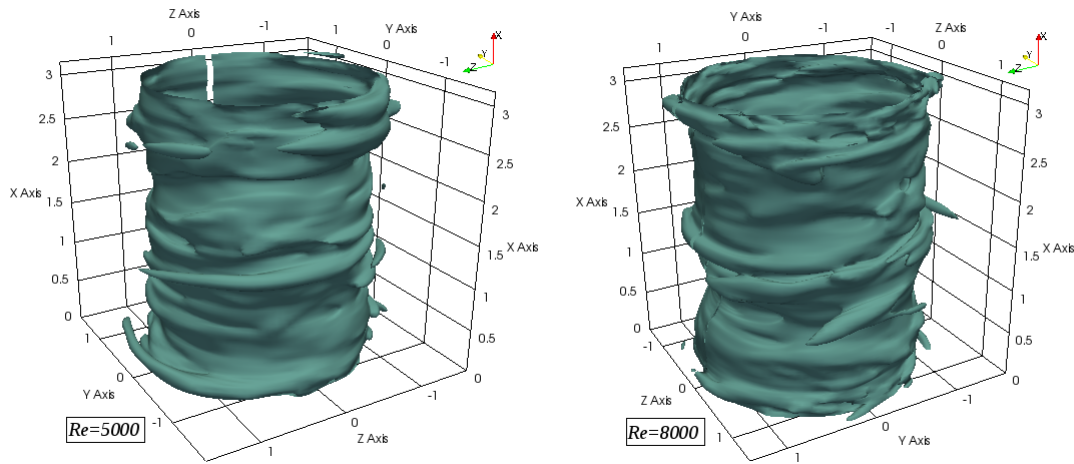


Figura 5.5: Iso-superficies de presión instantánea: $Re=5000$ y 8000 , $p/p_{ref} = 1.153$ y $p/p_{ref} = 1.1435$; respectivamente.

5.4. Turbulencia en la pared

Las estructuras turbulentas cerca de las paredes dejan una huella en ellas, la cual es una característica común de flujos turbulentos: los 'streaks' (*sección 1.1.2*). En el flujo de Taylor-Couette la pared del cilindro interior está sembrada con 'streaks' de alta velocidad, mientras la pared del cilindro exterior está sembrada con 'streaks' de baja velocidad. Este patrón de 'streaks' es producido por los límites de *flujo de entrada* y *flujo de salida* de los vórtices de pequeña escala, los cuales forman zonas de alta velocidad y zonas de baja velocidad, respectivamente (ver figura 5.6). Esto está comprobado tanto por análisis experimentales como numéricos [*Barcilon et al. (1979)* y *Dong (2007)*].

En la figura 5.7 se presentan contornos de velocidad angular cerca de la pared del cilindro interior (lado izquierdo) y del cilindro exterior (lado derecho) a una distancia de $0.033d$ para un $Re=8000$. Se observan zonas de velocidad positiva que se extienden en dirección angular en la pared del cilindro interior, estas líneas coinciden con los límites de *flujo de entrada* de los vórtices de pequeña escala, asimismo se observan zonas de velocidad negativa a lo largo de la dirección angular las cuales coinciden con los límites de *flujo de salida* de los vórtices de pequeña escala. Por otro lado, en la pared del cilindro exterior, de igual manera se pueden observar regiones de velocidad positiva y negativa, coincidentes con los límites de *flujo de entrada* y *flujo de salida*, respectivamente, de los vórtices de pequeña escala que se forman cerca de la pared exterior. Esto es una analogía al patrón de 'streaks' observados en los resultados de *Dong (2007)* para un flujo de Taylor-Couette, así como los reportados en la literatura alrededor de la capa límite turbulenta. En contraste con los resultados de *Dong (2007)*, en el presente trabajo no se pudo lograr una mejor aproximación debido al espaciamiento de la malla en la dirección radial donde la resolución no fue la adecuada justo en la región cercana a las paredes para captar con mayor precisión dicho patrón del flujo.

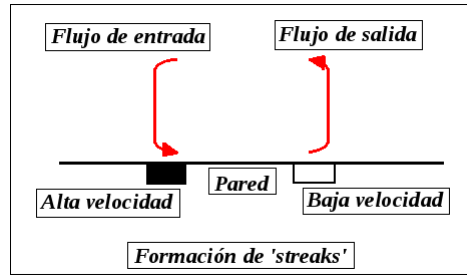
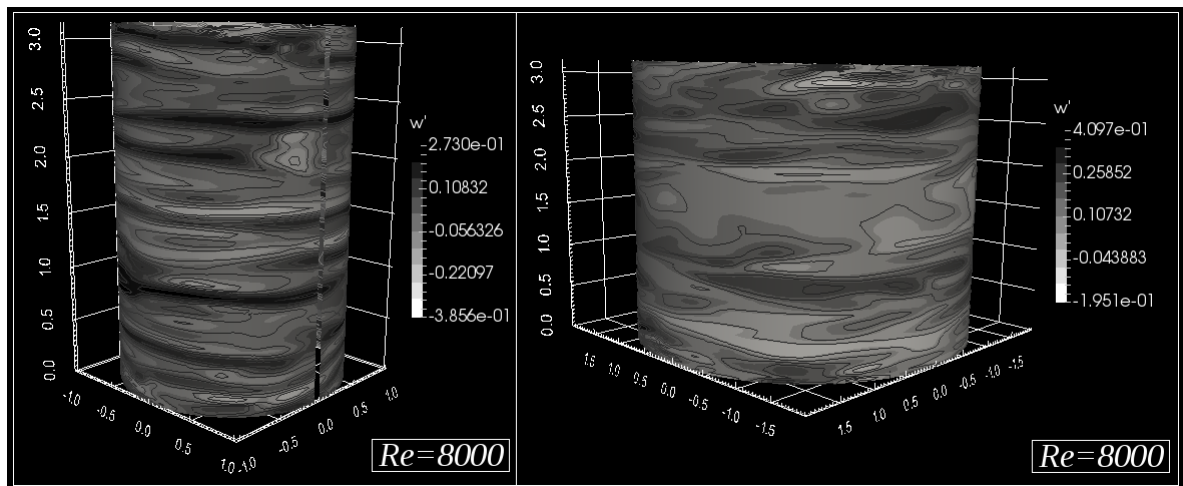


Figura 5.6: Mecanismo de formación de 'streaks'

Figura 5.7: Contornos de velocidad angular instantánea en dos superficies cerca de la pared interior (izquierda) y exterior (derecha) en $Re=8000$.

Por otra parte, la figura 5.8 muestra contornos de velocidad angular cerca de la pared del cilindro interior para el caso de $Re=3000$ que están promediados en el tiempo, se incluye una imagen de la estructura del flujo en un plano radial-axial con el fin de ilustrar el patrón de trayectoria que tienen los vórtices y la huella que dejan en la pared del cilindro. Las flechas color rojo indican la dirección del flujo en el plano radial-axial, el límite de *flujo de salida* del vórtice coincide con franjas de baja velocidad en los contornos mostrados en el lado derecho de la imagen. En comparación, los límites de *flujo de entrada* de los vórtices dejan constancia de su paso en las franjas de alta velocidad que se observan en los contornos. Se observan en los contornos de velocidad claramente los límites de *flujo de entrada* y de *flujo de salida* referentes al paso de los vórtices, en este caso vórtices de Taylor perfectamente organizados (el análisis referente a las características promedio del flujo se ve en profundidad en la siguiente sección).

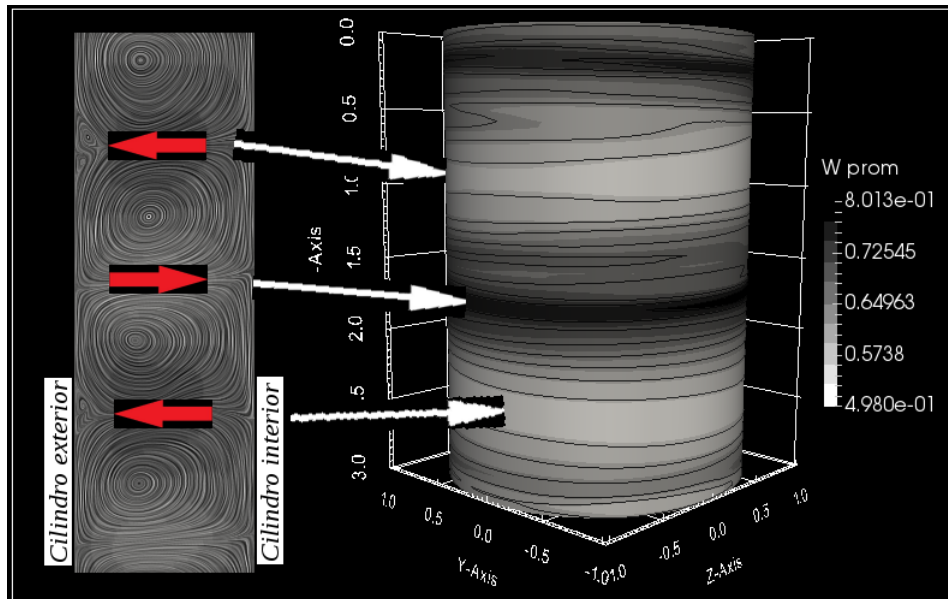


Figura 5.8: Contornos de velocidad angular en una superficie cerca de la pared del cilindro interior en $Re=3000$.

En la figura 5.9 se observan iso-superficies de criterio Q para diferentes números de Reynolds cerca de la pared del cilindro interior. Estas estructuras del flujo son los vórtices que se encuentran cerca de la pared del cilindro interior, las cuales coinciden con los vórtices de Gortler de pequeña escala. Además se incluye la estructura del flujo que se observa en un plano radial-axial con el objetivo de mostrar los vórtices que forman estas estructuras en la pared. Análogo a los resultados presentados en la *sección 5.3*, las estructuras observadas son otra evidencia de los vórtices de pequeña escala que se forman en la región cercana a la pared del cilindro interior. Es notorio el incremento de estructuras con el aumento del número de Reynolds, coincidente con lo discutido en la *sección 5.2*.

En el caso de $Re=3000$ se observan una menor cantidad de estructuras, con una distribución desigual a lo largo de la dirección axial, se observa que las estructuras coinciden con los límites de *flujo de salida* de los vórtices, que son las regiones donde surgen principalmente los vórtices de pequeña escala. Con el incremento en el número de Reynolds a $Re=5000$ se observa una mayor distribución de estructuras a lo largo de la dirección axial, coincidente con el incremento de vórtices de pequeña escala. Tampoco se observa un ordenamiento en la distribución de estructuras. De igual manera se pueden realizar observaciones similares para el caso de $Re=8000$.

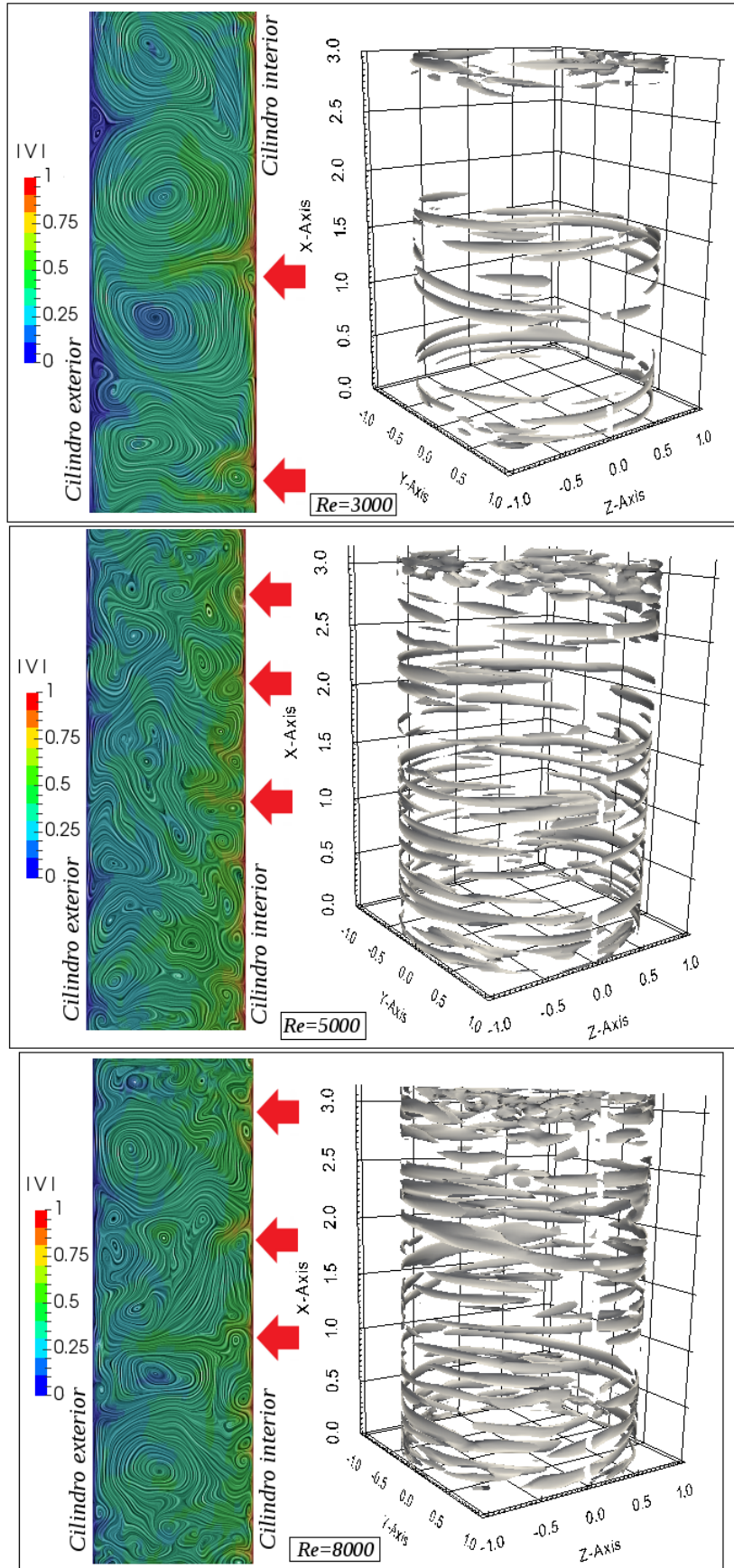


Figura 5.9: Turbulencia en la pared del cilindro interior para $Re=3000$, 5000 y 8000 , $Q/(d/w_o) = 1$

5.5. Características estadísticas

Un análisis de algunas características estadísticas se lleva a cabo en esta sección. En la figura 5.10 se observan, de arriba hacia abajo, el patrón de movimiento del flujo en un plano axial-radial de una foto instantánea y el campo de velocidad promedio en $Re=8000$. En el campo de flujo instantáneo abundan los vórtices de pequeña escala, y difícilmente se identifican los vórtices de Taylor (figura superior 5.10). Por otro lado, el promedio temporal del campo de velocidad revela la presencia de vórtices de Taylor ordenados que se encuentran ocultos bajo las fluctuaciones turbulentas (figura inferior 5.10). Instantáneamente las fluctuaciones turbulentas se superponen a estos vórtices de Taylor ordenados, distorsionando los límites de *flujo de entrada* y de *flujo de salida*. Con el incremento en el número de Reynolds, los vórtices de Taylor permanecen ocultos por el incremento abrumador de las fluctuaciones turbulentas en el flujo instantáneo (figura 5.2). Los resultados presentados están en buen acuerdo con los resultados presentados por *Dong (2007)*.

Por otro lado, en la figura 5.11 se observan iso-superficies de criterio Q en el espacio tridimensional calculadas con datos promediados en el tiempo para un $Re=3000$. Estas estructuras revelan la existencia de vórtices de Taylor perfectamente organizados. Como se mencionó anteriormente, este flujo subyace a las fluctuaciones turbulentas que dominan el flujo instantáneamente (figura 5.3). Se ilustra en un plano radial-axial la estructura de los vórtices de Taylor, donde se observan dos pares de vórtices de Taylor cantidad que coincide con el número de estructuras visualizadas mediante un valor de criterio Q .

En las figuras 5.12 y 5.13 se observan los perfiles de cantidad de movimiento angular promedio y los de velocidad angular promedio en diferentes números de Reynolds comparados con perfiles similares presentados por *Dong (2007)* para una DNS, el promedio de los datos se ha hecho sobre el tiempo, además de a lo largo de la dirección axial. La velocidad angular promedio ha sido normalizada por la velocidad angular del cilindro interior w_o y la cantidad de movimiento angular por $R_i w_o$.

En los perfiles de velocidad angular de los resultados LES se observan gradientes de velocidad justo en las regiones cercanas a ambas paredes de los cilindros interior y exterior. Con el aumento en el número de Reynolds estos gradientes tienden a ser mayores, análogo al comportamiento de la capa límite que disminuye su espesor. En la zona central del espacio anular entre los cilindros, se

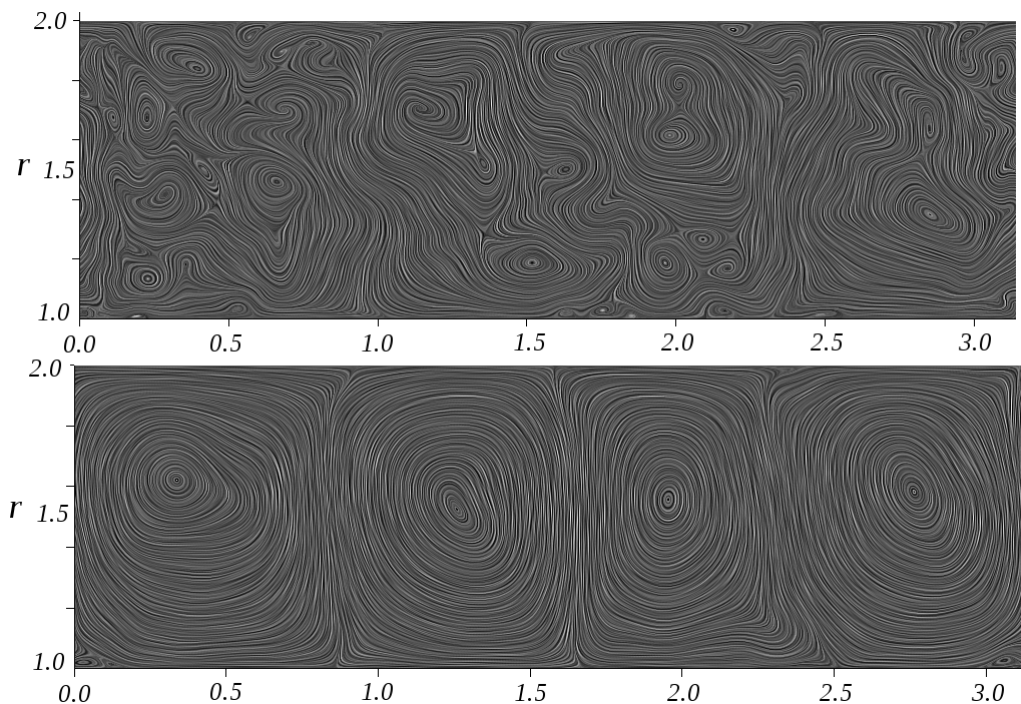


Figura 5.10: Comparación entre patrones de un campo instantáneo y un campo medio promediado en el tiempo en un plano axial-radial ($Re=8000$).

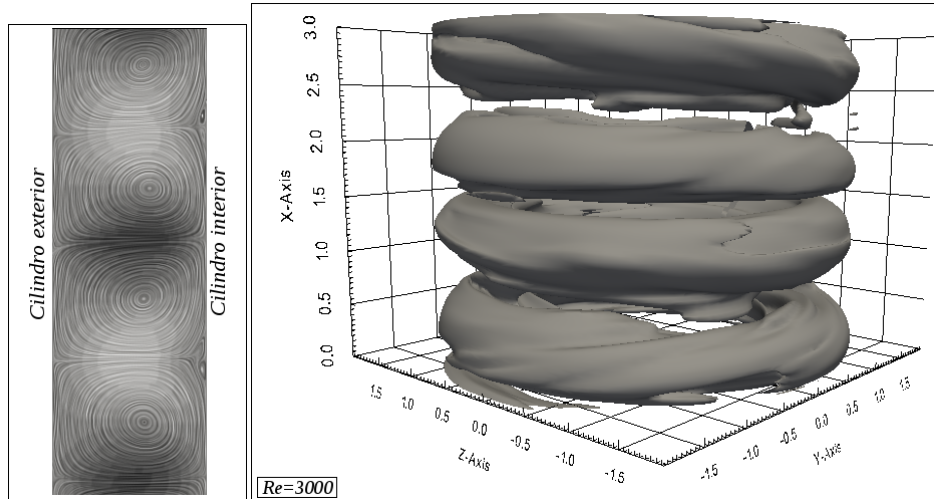


Figura 5.11: Iso-superficies de criterio Q de datos promedio. $Re=3000$, $Q/(d/w_o) = 1$

observa una caída de velocidad casi lineal. En comparación, en las curvas DNS se observa el mismo comportamiento casi lineal en la caída de la velocidad en la zona central, los gradientes en las regiones cercanas a las paredes de ambos cilindros son más pronunciados.

Los perfiles de cantidad de movimiento angular presentan un comportamiento casi constante en la zona central del espacio anular, tanto para LES como DNS, aunque se observa una ligera pendiente negativa en las curvas LES. En las regiones cercanas a las paredes se observan gradientes los cuales son mayores con el aumento en el número de Reynolds. En el caso de $Re=1000$ existe una notable diferencia entre LES y DNS en el comportamiento cercano a las paredes. Si bien esto se debe al carácter laminar del flujo, lo que deriva en cálculos imprecisos debido al uso de un modelo de turbulencia, en este caso no se debió usar.

Los resultados del presente trabajo tienen una concordancia razonable con los presentados por *Dong (2007)*. Aunque la resolución de la malla computacional, la cual fue la misma en todas las simulaciones, no fue la adecuada para obtener simulaciones con una mejor aproximación a los resultados de la literatura, de ahí el contraste con los datos comparados.

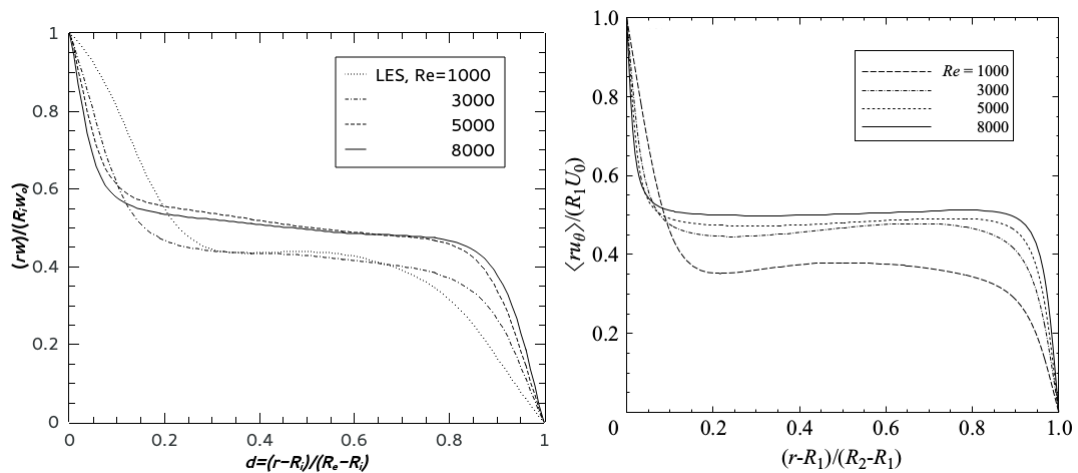


Figura 5.12: Perfiles de cantidad de movimiento angular promedio en diferentes números de Reynolds. Gráficas lado derecho tomadas de *Dong (2007)*.

En la figura 5.14 se muestra una comparativa entre los perfiles de fluctuaciones de velocidad r.m.s. (normalizado por w_o). Se observan claramente dos picos, esto indica fuertes fluctuaciones de velocidad justo en las regiones cerca de la pared de ambos cilindros; además es notorio que el pico cercano

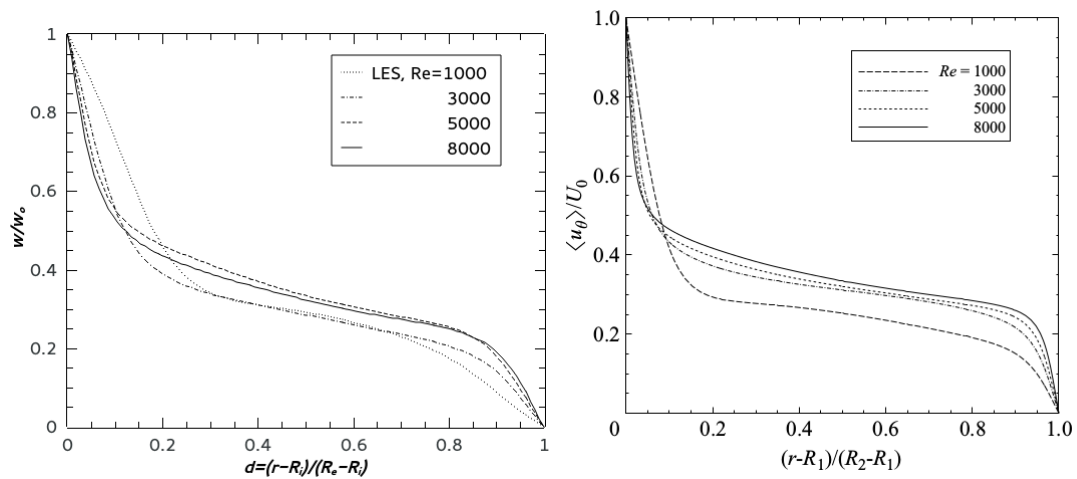


Figura 5.13: Perfiles de velocidad angular promedio en diferentes números de Reynolds. Gráficas lado derecho tomadas de *Dong (2007)*.

a la pared del cilindro interior es mayor, observándose en estas regiones las mayores fluctuaciones de velocidad. Estos picos en los perfiles tienden a pegarse a las paredes de ambos cilindros con el incremento en el número de Reynolds, haciendo notar que las principales fluctuaciones de velocidad se generan en las regiones cercanas a las paredes, coincidiendo con la escala donde se generan los vórtices de Gortler. En la zona central del espacio anular las fluctuaciones de velocidad tienden a mostrar un comportamiento casi constante para los números de Reynolds más grandes ($Re=5000$ y 8000). Se observa una similitud en el comportamiento entre las curvas LES y las DNS, aunque una notable diferencia se puede apreciar en el perfil de fluctuaciones para el caso de $Re=1000$. Esto, como se comentó anteriormente, es debido a que al utilizar la alternativa LES, el simular flujos con bajos números de Reynolds puede dar resultados poco precisos.

En general los perfiles presentados tienen una buena aproximación con los datos de la literatura.

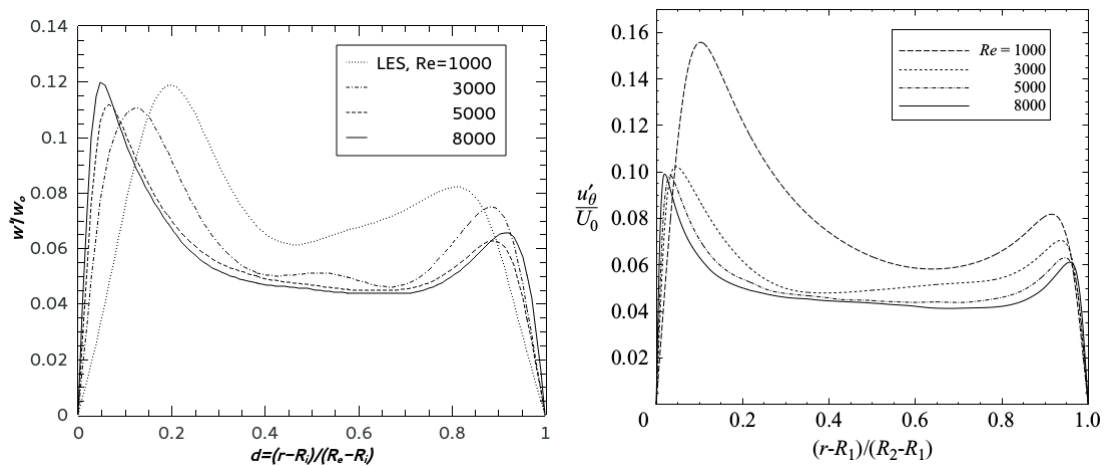


Figura 5.14: Perfiles de fluctuaciones de velocidad angular r.m.s. en diferentes números de Reynolds. Gráficas lado derecho tomadas de *Dong (2007)*.

5.6. Gradiente de presión

Sí bien el problema de Couette entre cilindros concéntricos parte de la suposición de que no existe gradiente de velocidad y que el flujo solo se mueve debido al movimiento del cilindro, es evidente que este gradiente de presión existe. En la figura 5.15 se observan de arriba hacia abajo, un plano radial-angular y un plano radial-axial con campos de presión. Se puede observar en las regiones cercanas a la pared del cilindro exterior altas presiones debido a los efectos de la fuerza centrífuga. En el plano radial-axial, en la zona entre $0.2d$ y $0.8d$ se observan núcleos de baja presión a lo largo de la dirección axial, estos núcleos coinciden con los centros de rotación de los vórtices de Taylor. Además en esta misma región se observan gradientes de presión en dirección radial alternados entre los núcleos de baja presión, los cuales coinciden con los límites de *flujo de entrada* y *flujo de salida* de los vórtices.

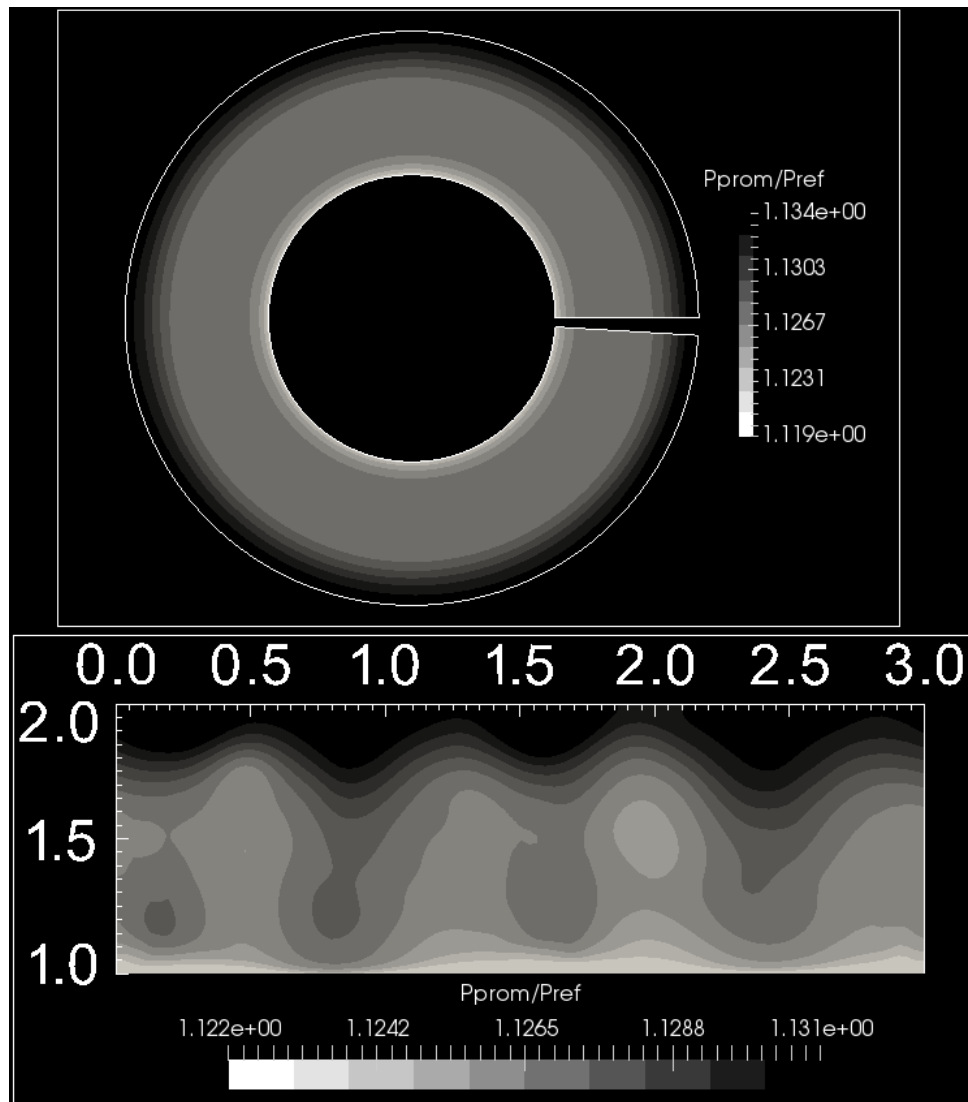


Figura 5.15: Gradiente de presión radial: plano angular-radial (izquierdo) y plano axial-radial (derecho).

Capítulo 6

Conclusiones

En el presente trabajo se probó un código recientemente desarrollado por el Dr. Salinas-Vázquez, un código numérico en diferencias finitas usando la técnica de simulación de grandes escalas (LES) para simular flujos turbulentos en coordenadas cilíndricas. El código resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes compresibles, si bien para flujos con números de Mach suficientemente bajos y cambios de temperatura muy pequeños se tiende al límite incompresible. El flujo que se eligió para realizar la prueba del código fue el flujo de Taylor-Couette, el cual ha sido ampliamente estudiado por lo que los datos para realizar la validación del código y comparar resultados esta disponible en la literatura. A este respecto se intentó reproducir casi en su totalidad el trabajo hecho por *Dong (2007)*, tomando en cuenta que presenta resultados de una simulación numérica directa (DNS).

VALIDACIÓN. Si bien los resultados presentados en este trabajo comparados con los encontrados en *Smith & Townsend (1982)* muestran una ligera desviación, se tomó en cuenta el comportamiento que esta en acuerdo razonable.

VÓRTICES DE GORTLER, VÓRTICES DE TAYLOR. El aspecto hidrodinámico del flujo se capta con una aproximación realmente razonable, el cual se puede observar claramente en las imágenes tridimensionales. Se visualiza la estructura tridimensional y bidimensional de los vórtices. Los resultados concuerdan con los de la literatura.

'STREAKS' EN LAS PAREDES. Se observan notorias diferencias entre los resultados presentados y los que existen para una DNS, sin embargo se aprecian regiones de velocidad positiva y regiones de velocidad negativa, correspondientes con los límites de *flujo de entrada* y de *flujo de salida*, respectivamente, de los vórtices de Gortler.

PERFILES DE VELOCIDAD PROMEDIO. Los perfiles presentados comparados con los de la literatura muestran un acuerdo razonable en el comportamiento de las curvas, exhibiendo desviaciones en las regiones de mayores gradientes (cerca de las paredes de los cilindros) y ligeras diferencias en la zona central del espacio anular entre los distintos números de Reynolds. La mayor desviación en los resultados comparados se presenta en el caso de $Re=1000$, que corresponde a un régimen laminar por lo cual el haber utilizado un modelo de turbulencia derivó en cálculos imprecisos del comportamiento del flujo en este caso.

GRADIENTE DE PRESIÓN RADIAL. Se observan núcleos de baja presión en el centro de rotación de los vórtices, así como gradientes de presión radial que coinciden con los límites de *flujo de entrada* y *flujo de salida* de los vórtices.

En un aspecto general se obtuvo una buena aproximación de la predicción del flujo en un sistema de Taylor-Couette en régimen turbulento a pesar de las diferencias evidentes en ambos resultados.

6.1. Trabajos futuros y recomendaciones

Existen varios aspectos a tomar en cuenta para mejorar los resultados presentados:

MALLA COMPUTACIONAL. Si bien no se realizaron análisis exhaustivos en materia de elegir una malla computacional adecuada para cada simulación, lo recomendable es que se lleve a cabo un estudio al respecto.

ESTADO «ESTADÍSTICAMENTE» ESTACIONARIO. Los cálculos se llevan a cabo en largos periodos de tiempo, esto aunado con los distintos ensayos que se realizaron ocasiono que no se alcanzara un estado «estadísticamente» estacionario en algunas simulaciones, lo lógico es que se presenten los análisis estadísticos después de alcanzar dicho estado con lo que los resultados mejorarían.

FLUJO INCOMPRESIBLE. Se deja como recomendación añadir una ecuación de estado que modela un flujo cuasi-incompresible que ya ha sido probada en códigos en coordenadas cartesianas.

Bibliografía

- [1] Andereck, Liu & Swinney (1986). Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders. *J. Fluid Mech.*, vol. 164, pp. 155-183.
- [2] Barçilon *et al.* (1979). Marginal instability in Taylor-Couette flows at a very high Taylor numbers. *J. Fluid Mech.*, vol. 94, pp. 453-463.
- [3] Chernyshenko & Baig (2005). The mechanism of streak formation in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, vol. 544, pp. 99-131.
- [4] Chong *et al.* (1990). A general classification of three-dimensional flow fields. *Phys. Fluids*, vol. 2, pp. 765-777.
- [5] Dong (2007). Direct numerical simulation of turbulent Taylor-Couette flow. *J. Fluid Mech.*, vol. 587, pp. 373-393.
- [6] Ferziger & Perić (2002). *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 3rd edition. Springer.
- [7] Hunt *et al.* (1988). Eddies, Streams, and Convergence Zones in Turbulent Flows. *Center for Turbulence Research Report CTR-S88*, pp. 193-208.
- [8] Jeong & Hussain (1995). On the identification of a vortex. *J. Fluid Mech.*, vol. 285, pp. 69-94.
- [9] Métais & Lesieur (1996). Nes trends in large eddy simulations of turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 28, pp. 45-82.
- [10] Perrin & Hu (2006). An Explicit Finite-Difference Scheme for Simulation of Moving Particles. Postprint version: published in *Journal of Computational Physics*, vol. 212, pp. 166-187.
- [11] Salinas-Vázquez & Métais (2002). Large-eddy simulation of the turbulent flow through a heated square duct. *J. Fluid Mech.*, vol. 453, pp. 201-238.
- [12] Sandberg (2007). Governing equations for a new compressible Navier-Stokes solver in general cylindrical coordinates. *Aerodynamics & Flight Mechanics Group of University of Southampton*. Report No. AFM-07/07.
- [13] Smith & Townsend (1982). Turbulent Couette flow between concentric cylinders at large Taylor numbers. *J. Fluid Mech.*, vol. 123, pp. 187-217.
- [14] Taylor (1923). Stability of a Viscous Liquid contained between Two Rotating Cylinders. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, vol. 223, pp. 289.
- [15] Winoto, Mitsudharmadi & Shah (2005). Visualizing Gortler Vortices. *Journal of Visualization*, vol. 8, no. 4, pp. 315-322.