

Capítulo 4

Recuperación de la marca de agua

4.1 *Introducción*

La marca de agua incrustada en las bandas *contourlet* de la imagen derivadas de la descomposición multiescala y multiresolución mediante la técnica de espectro disperso debe ser recuperada luego de que la imagen ha sufrido posibles ataques.

Desde el punto de vista de un sistema de transmisión de información, la recuperación de la marca de agua consiste en la detección de señales binarias en canales con ruido aditivo Gaussiano. Lo anterior se asume considerando el teorema del límite central y la diversidad de ataques independientes a los cuales se puede someter la imagen marcada.

4.2 *Recuperación de la marca de agua*

Sea $R = Y' + N$, la banda Y' de la imagen marcada luego de haber sufrido algún ataque. Realizando el producto interno de R con cada uno de los códigos pseudoaleatorios conocidos a priori $\langle R, P_i \rangle$, para cada uno de los bits incrustados se obtiene:

$$r_i = \frac{\langle R, P_i \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle} \quad (4.1)$$

donde r_i es la i -ésima salida del correlador.

Es decir, la imagen marcada y atacada se descompone en sus coeficientes *contourlet* y se realiza la correlación entre los bits de la banda marcada y el código pseudoaleatorio correspondiente al i -ésimo bit de la marca de agua codificada. Debido a la ortogonalidad entre los códigos, al hacer la correlación el resto de los bits esparcidos por los demás códigos son rechazados.

Dado que la correlación es una operación lineal y asumiendo que la distribución de los coeficientes *contourlet* sigue una distribución normal con media nula, a la salida del correlador el ruido es una variable aleatoria independiente Gaussiana con media cero [8]. Por lo tanto, la salida del correlador es una variable aleatoria Gaussiana continua cuya media es +1 ó -1 dependiendo de si se incrustó un “uno” binario o un “cero” binario respectivamente y se puede reescribir de la siguiente forma para cada bit recuperado i :

$$r_i = w_{i,s} + n_i \quad (4.2)$$

donde $s = \{1, -1\}$ $i = \{1, 2, \dots, h\}$, h es el número de bits que conforman la marca de agua codificada y n es el ruido.

Para cada bit recuperado, sea la hipótesis H_1 : se incrustó un “+1” y la hipótesis H_2 : se incrustó un “-1” correspondiente a la incrustación de un símbolo s_1 “uno binario” y un símbolo s_2 “cero binario” respectivamente. Para la variable aleatoria r , sean las probabilidades condicionales $p(r/s_1)$ y $p(r/s_2)$ cuyas funciones de densidad de probabilidad se muestran en la figura 4.1 y están dadas por:

$$p(r/s_1) = \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r-a_1}{\sigma_r} \right)^2} \quad (4.3)$$

$$p(r/s_2) = \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r-a_2}{\sigma_r} \right)^2} \quad (4.4)$$

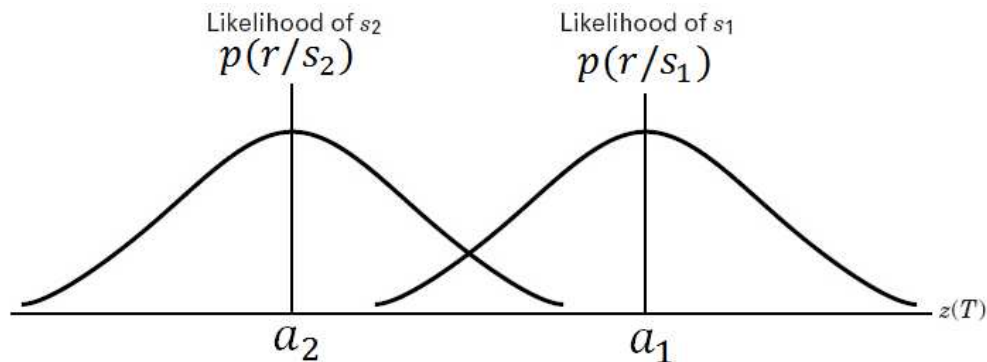


Figura 4.1 Probabilidades condicionales $p(r/s_1)$ y $p(r/s_2)$.

Sean las probabilidades a posteriori $P(s_1/r)$ y $P(s_2/r)$, y el criterio de decisión en el receptor es:

$$P(s_1/r) \underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} P(s_2/r) \quad (4.5)$$

Es decir, si la probabilidad de que se haya incrustado un s_1 dado que se obtuvo r es mayor a la probabilidad de que se haya incrustado un s_2 luego de obtener r , se escoge la hipótesis H_1 , sino la hipótesis H_2 . Empleado el teorema de Bayes se obtiene la razón de máxima verosimilitud, también conocida como el criterio del mínimo error pues se minimizan las decisiones incorrectas.

$$L(r) = \frac{p(r/s_1)}{p(r/s_2)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(s_2)}{P(s_1)} \quad (4.6)$$

Sustituyendo $p(r/s_1)$ y $p(r/s_2)$ se obtiene

$$L(r) = \frac{\frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r-a_1}{\sigma_r}\right)^2}}{\frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r-a_2}{\sigma_r}\right)^2}} = \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r-a_1}{\sigma_r}\right)^2}}{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r-a_2}{\sigma_r}\right)^2}} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(s_2)}{P(s_1)} \quad (4.7)$$

Obteniendo el logaritmo natural de la función $L(r)$:

$$\ln(L(r)) = l(r) \underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \frac{P(s_2)}{P(s_1)} \quad (4.8)$$

En el caso equiprobable $P(s_1) = P(s_2) = .5$

$$\ln \frac{P(s_2)}{P(s_1)} = 0 \quad (4.9)$$

Despejando r :

$$r \underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{a_1 + a_2}{2} = \gamma_0 \quad (4.10)$$

Es decir, para un valor de r mayor al valor del umbral γ_0 se decide que se incrustó un “uno binario” y para r inferior al valor del umbral se decide que se incrustó un “cero binario”. Dado que la hipótesis H_1 : se incrustó un “ $a_1 = +1$ ” y la hipótesis H_2 : se incrustó un “ $a_2 = -1$ ”, el umbral es $\gamma_0 = 0$; por lo tanto cada bit w estimado se obtiene a partir de:

$$w = \text{sgn}(r) \quad (4.11)$$

Sin embargo, basados en [19], adoptamos una variante de la técnica de incrustación de la marca de agua llamada *espectro disperso mejorado*, como se describe en el subtema 4.6.

4.3 Decodificación de la marca de agua

Luego de la recuperación de los bits incrustados en los coeficientes *contourlet* es necesario realizar la decodificación de la marca de agua previamente codificada utilizando códigos convolucionales.

4.3.1 Decodificador de Viterbi

La decodificación se efectúa mediante el uso del algoritmo de Viterbi [8]. Cada rama del diagrama de *trellis* de decodificación se etiqueta con la distancia de Hamming entre la secuencia recibida y la correspondiente palabra en cada rama del diagrama de *trellis* del codificador. Las palabras de las ramas del diagrama de *trellis* son los símbolos que se esperaba recibir de la salida del codificador como resultado de todas las transiciones de estados. El algoritmo de decodificación utiliza como métrica la distancia de Hamming para buscar el camino de menor distancia acumulada en el enrejado. Al llegar dos ramas al mismo nodo se escoge el trayecto con la menor distancia de Hamming acumulada y en caso de empate se elige al azar alguna de las dos.

Es posible configurar el decodificador de Viterbi en modo de decisión suave y decisión dura. En decisión dura al decodificador se introducen los bits recibidos y se realiza el cálculo de una medida de similitud o distancia entre la señal recibida y todos los caminos

que conducen a todos los nodos en un mismo tiempo. En decisión suave el decodificador se alimenta con una cadena de bits que contiene información de confianza sobre el valor de “uno” o de “cero” de cada bit que se recibe y la métrica que se utiliza es la distancia euclidiana. En la siguiente imagen se ilustra la diferencia entre decisión dura y decisión suave

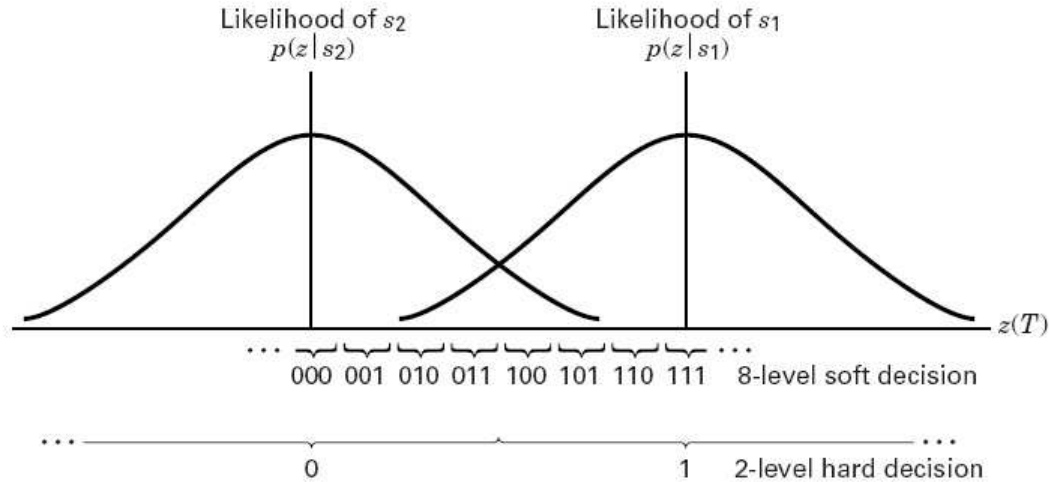


Figura 4.2 Comparación entre decisión dura y decisión suave.

En la práctica el beneficio de realizar la decodificación con decisión suave con 8 niveles de decisión es el incremento en 2dB de la razón señal a ruido a la salida del decodificador [8]. En la sección de resultados se muestra la diferencia entre utilizar decisión suave o decisión dura en la decodificación de la marca de agua y su repercusión en la calidad de la marca de agua recuperada.

4.4 El sistema visual humano

Para sacar provecho de la descomposición multidireccional que brinda la transformada *contourlet* y poder explotarla para mejorar la robustez de la marca de agua, resulta imprescindible conocer las siguientes características principales del sistema visual humano:

1. El sistema visual humano funciona como un filtro pasobajas pues tiene un número limitado de células receptoras de luz en el área de la fovea (área de mayor densidad de fotorreceptores).
2. El brillo aparente no depende de la luminancia absoluta, también depende del brillo en las regiones vecinas [21].
3. De acuerdo con [6], el ojo humano es menos sensible al ruido en bandas cuya orientación es de 45° .
4. El ojo es menos sensible al ruido en áreas donde el brillo en la imagen es muy alto o muy bajo.
5. El sistema visual humano es menos sensible al ruido en áreas de gran textura, pero es más sensible en los bordes de dichas áreas.



Figura 4.3 Ejemplo de la característica número 2 del sistema visual humano. El brillo absoluto de los cuadrados interiores es el mismo.

En este trabajo se explotan las características número 3 y 5. Considerando la característica número 3, las bandas *contourlet* donde se inserta la marca de agua deben contener bandas con direcciones diagonales. En cuanto a la propiedad número 5, las regiones de gran textura corresponden con las altas frecuencias y la descomposición direccional se efectúa sobre la versión pasobanda en la descomposición piramidal Laplaciana. Es decir, utilizando la transformada *contourlet* se puede incrustar la marca de agua en una banda de alta frecuencia.

4.5 Índice estructural de similitud

Para conocer la calidad de la imagen marcada es necesario contar con una medida que nos indique la similitud entre la imagen original y la imagen marcada. Existen diferentes medidas para ello. Una de ellas es la razón señal pico a ruido PSNR *Peak Signal to Noise Ratio*, la cual se obtiene a partir del error cuadrático medio y el valor máximo de intensidad que puede tomar un pixel en la imagen. Usualmente es expresada en decibeles. Para unas imágenes I_1 e I_2 de tamaño $M \times N$:

$$MSE = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{[I_1(m,n) - I_2(m,n)]^2}{M \times N} \quad (4.12)$$

$$PSNR = 10 \log_{10} \left(\frac{I_{max}^2}{MSE} \right) \quad (4.13)$$

donde I_{max} es el máximo valor de intensidad que puede tomar cada pixel de la imagen.

Basados en [7] adoptamos una novedosa medida de medición de las diferencias entre una imagen distorsionada y una imagen de referencia basada en la comparación de la información estructural de las imágenes asumiendo que el sistema visual humano está adaptado para extraer información estructural de una escena [7]. Dicha medida es llamada índice de similitud estructural SSI *Structural Similarity Index* y logra penalizar los errores de acuerdo a su visibilidad.

Concretamente el SSI contempla la medición de la similitud entre dos imágenes considerando tres parámetros: luminancia, contraste y estructura de la imagen. La información estructural de una imagen es la que representa el arreglo de los objetos presentes en la escena y es independiente de la iluminación y contraste.

Sean dos imágenes \mathbf{X} e \mathbf{Y} , considerando que una de ellas es la imagen de referencia, la medida de la luminancia de cada imagen es estimada como el valor medio de la intensidad:

$$\mu_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (4.14)$$

La función de luminancia $l(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ depende de μ_x y μ_y y está dada por:

$$l(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{2\mu_x\mu_y + C_1}{\mu_x^2\mu_y^2 + C_1} \quad (4.15)$$

El contraste de cada imagen se estima a partir de la desviación estándar pues considera la diferencia entre el nivel de intensidad de cada pixel de la imagen y el nivel de intensidad promedio:

$$\sigma_x = \left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.16)$$

La comparación de contraste de las imágenes $c(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ es una función de sus desviaciones estándar y se obtiene por la siguiente expresión:

$$c(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{2\sigma_x\sigma_y + C_2}{\sigma_x^2\sigma_y^2 + C_2} \quad (4.17)$$

La función de similitud estructural está dada por:

$$s(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\sigma_{xy} + C_3}{\sigma_x\sigma_y + C_3} \quad (4.18)$$

Las funciones de luminancia contraste y estructura son combinadas para derivar la medida de similitud $SSI(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ entre dos imágenes:

$$SSI(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = f(l(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), c(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), s(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) \quad (4.19)$$

El índice SSI cumple con las siguientes condiciones:

$$SSI(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = SSI(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$$

$$SSI(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq 1$$

$$SSI(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 1 \text{ si } \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

El índice de similitud estructural total se calcula a partir del producto de las 3 funciones cuya contribución al índice estructural total se controla con los parámetros α , β y γ .

$$SSI(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = [l(\mathbf{X}, \mathbf{Y})]^\alpha \cdot [c(\mathbf{X}, \mathbf{Y})]^\beta \cdot [s(\mathbf{X}, \mathbf{Y})]^\gamma \quad (4.20)$$

Los parámetros C_1 , C_2 y C_3 que se introducen al cociente de las funciones l , c y s , respectivamente, tienen el propósito de dar estabilidad cuando el denominador es cercano a cero, siendo $C_1 = (K_1L)^2$, $C_2 = (K_2L)^2$, L es el rango dinámico de cada pixel de la imagen ($L = 255$ representando cada pixel con 8 bits), $K_1 \ll 1$, $K_2 \ll 1$ y $C_3 = \frac{C_2}{2}$. De [7] adoptamos los valores $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $K_1 = .01$ y $K_2 = .03$, obteniendo la siguiente expresión para el cálculo del SSI:

$$SSI(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{(2\mu_x\mu_y + C_1)(2\sigma_{xy} + C_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)} \quad (4.21)$$

Para la medición de la calidad de la imagen marcada es mejor calcular el índice SSI localmente en vez de calcularlo en toda la imagen porque los parámetros estadísticos de la imagen y las distorsiones presentes en la misma varían en el espacio. Basados en [7], realizamos el cómputo del SSI sobre ventanas de tamaño 11×11 recorridas pixel por pixel en toda la imagen. Para dar mayor peso al valor central de cada ventana se multiplica por una máscara Gaussiana w de desviación estándar 1.5. Así se tiene que:

$$\mu_x = \sum_{i=1}^N w_i x_i \quad (4.22)$$

$$\sigma_x = \left(\sum_{i=1}^N w_i (x_i - \mu_x)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.23)$$

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1}^N w_i (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) \quad (4.24)$$

El índice MSSI *Mean Structural Similarity Index* total de la imagen es el promedio de los índices calculados de manera local:

$$SSIM = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M SSI_j \quad (4.25)$$

En este trabajo se realizó la implementación del algoritmo que realiza el cálculo del SSIM y se utilizó tanto la PSNR como el SSIM para medir la calidad de la imagen marcada con respecto a la imagen original.

4.6 Algoritmo de inserción y recuperación de la marca de agua

Basados en los algoritmos de espectro disperso simple y de espectro disperso mejorado en el dominio *contourlet* publicados en [20], implementamos el algoritmo de espectro disperso mejorado utilizando la codificación y decodificación mediante código convolucional de la marca de agua binaria. Enseguida se describen los algoritmos de inserción y recuperación de marca de agua utilizados en esta tesis, los cuales pueden tener variantes menores para realizar comparaciones al realizar las pruebas de los mismos. Dichas variantes son la selección de diferentes bandas *contourlet* o la configuración del decodificador en modo de decisión suave o decisión dura.

4.6.1 Algoritmo 1

4.6.1.1 Inserción de la marca de agua

La marca de agua binaria $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ es codificada con el código convolucional de tasa $\frac{1}{3}$ y longitud restringida $K = 5$ cuyos polinomios generadores son $g_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$, $g_2 = [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1]$ y $g_3 = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$. A la salida del codificador, mostrado en la figura 2.14, se obtiene la marca de agua binaria codificada $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_h)$.

Posteriormente, se realiza la descomposición *contourlet* de la imagen original. Las bandas resultantes se muestran en la figura 4.4.

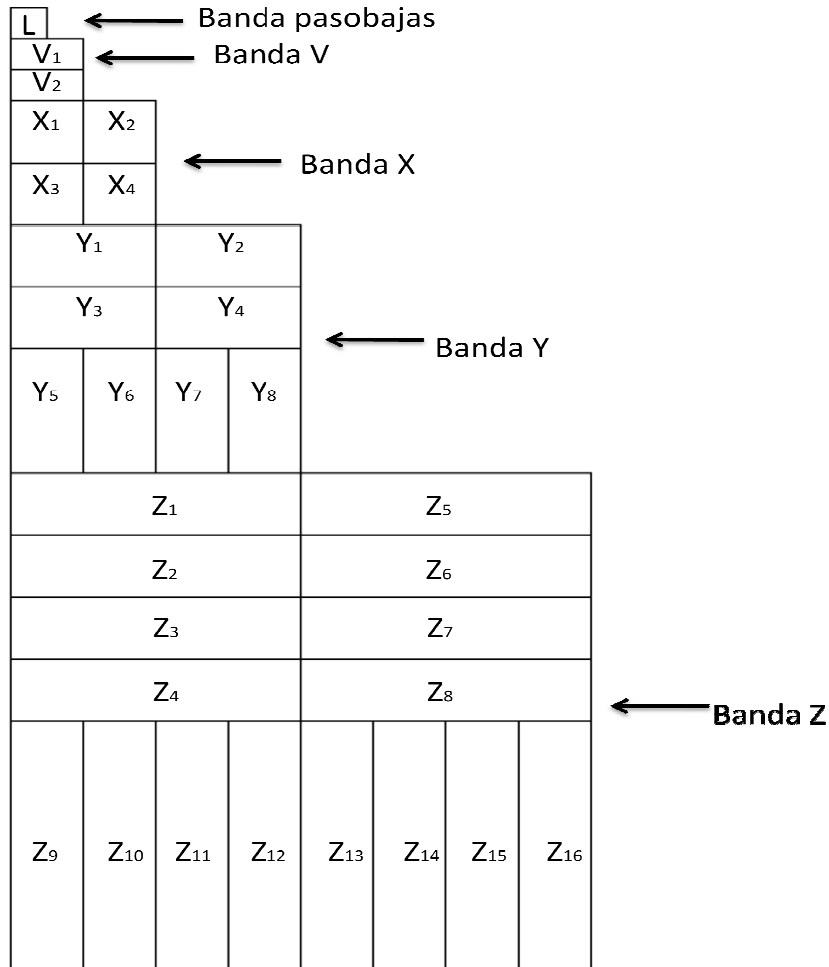


Figura 4.4 Descomposición *contourlet* empleada en el sistema de marcado de agua.

Luego de la descomposición *contourlet* se selecciona la banda en la que se desee incrustar la marca de agua y los coeficientes presentes en ella se arreglan en una matriz del tamaño de dicha banda. En la técnica más simple de espectro disperso descrita en 3.5, cada bit de la marca de agua es modulado por la secuencia pseudoaleatoria e incrustada en los coeficientes de la banda *contourlet* seleccionada. Esto es:

$$Y' = Y + \gamma \sum_{i=1}^h w_i P_i \quad (4.26)$$

donde Y es la banda *contourlet* seleccionada para la inserción de la marca de agua, γ es el parámetro de intensidad de los bits insertados y $\{P_1, P_2, \dots, P_h\}$ es el conjunto de matrices que contienen los "chips" de las secuencias pseudoaleatorias binarias (para más detalles se

puede consultar el subtema 3.5). Una vez esparcida la marca de agua codificada en la banda, se realiza la síntesis *contourlet* para obtener la imagen marcada.

4.6.1.2 Recuperación de la marca de agua

La imagen marcada, luego de sufrir diferentes procesamientos, es descompuesta en los mismos niveles de descomposición *contourlet* en que se descompuso en el proceso de inserción de la marca de agua. Sea $R = Y' + N$ la banda *contourlet* seleccionada luego de que la imagen sufrió posibles ataques. Realizando el producto interno $\langle R, P_i \rangle$ se obtiene un valor estimado del bit de la marca de agua como se muestra en el subtema 4.2.

Los bits recuperados son decodificados mediante el algoritmo de Viterbi y se obtiene la marca de agua recuperada \hat{b} .

4.6.2 Algoritmo 2

4.6.2.1 Inserción de la marca de agua

La marca de agua binaria \bar{b} es codificada con el mismo código convolucional utilizado en el algoritmo 1 obteniendo a la salida del codificador la marca de agua codificada \bar{w} .

Dado que la banda *contourlet* en la que se incrusta la marca de agua es en sí misma una fuente de interferencia que puede inclusive ser mucho más intensa que el ruido introducido por los ataques, basados en [19] utilizamos una técnica llamada espectro disperso mejorado ISS (*Improved Spread Spectrum*) cuyo propósito es incrementar la robustez de la marca de agua reduciendo la interferencia propia de la banda en la que se incrusta. Esto se logra modulando la energía de cada bit de la marca de agua mediante la variación de la amplitud de la secuencia pseudoaleatoria por una función dependiente del bit a incrustar y de la proyección de la banda sobre cada secuencia pseudoaleatoria. Es decir, por cada bit w de la marca de agua codificada \bar{w} que se inserta se calcula:

$$Y' = Y + (\gamma w - \lambda y)P \quad (4.27)$$

donde Y es la banda *contourlet* en la que se incrusta la marca de agua, Y' es la banda con la marca de agua incrustada, γ es un parámetro de intensidad del bit w insertado también llamado factor de multiplicación, $y \triangleq \frac{\langle Y, P \rangle}{\langle P, P \rangle}$ es la proyección de la banda Y sobre la secuencia P , y λ es el factor que controla la remoción de la interferencia introducida por la misma banda Y . La ecuación anterior indica que para un valor óptimo de λ la distorsión de la banda es removida de la proyección de Y sobre P de tal manera que al hacer la correlación en la recuperación, en ausencia de ruido o ataques, la proyección de Y' sobre cada P dé como resultado γw , es decir, el bit w insertado ponderado por γ . Luego de haber insertado la marca de agua en la banda, se obtiene la imagen marcada a partir de la síntesis de los coeficientes *contourlet*.

4.6.2.2 Recuperación de la marca de agua

Asumiendo que los ataques a la imagen introducen ruido AWGN, en el detector se recibe:

$$R = Y' + N = Y + (\gamma w - \lambda y)P + N \quad (4.28)$$

donde R es la banda *contourlet* en el detector. El criterio que se utiliza para saber si se insertó un “uno” o un “cero” es el siguiente:

$$r = \frac{\langle R, P \rangle}{\langle P, P \rangle} = \frac{\langle Y + (\gamma w - \lambda y)P + N, P \rangle}{\langle P, P \rangle} = \gamma w + y(1 - \lambda) + n \quad (4.29)$$

donde, $n = \frac{\langle N, P \rangle}{\langle P, P \rangle}$.

En la ecuación anterior se observa que mientras más cercano a 1 sea λ menor es la distorsión propia de la banda *contourlet* y en el caso de ausencia de ruido $r = \gamma w$, por lo que la recuperación de cada bit en el caso de espectro disperso mejorado se puede realizar a partir de $r = \frac{\langle R, P \rangle}{\langle P, P \rangle}$, es decir, como en el caso de espectro disperso simple.

De acuerdo a [19] es posible obtener un valor $\lambda = \lambda_{\text{optimo}}$ que minimiza la probabilidad de error en la etapa de decisión de la recuperación de la marca de agua. Para ello se procede de la siguiente forma:

La distorsión esperada al insertar un bit de la marca de agua es:

$$\begin{aligned} E[D] &= E[|Y' - Y|] = E[|(\gamma w - \lambda y)P|] = E[(\gamma w - \lambda y)P, (\gamma w - \lambda y)P] \quad (4.30) \\ &= E[(\gamma w - \lambda y)^2 \sigma_P^2] = \left(\gamma^2 + \frac{\lambda^2 \sigma_y^2}{N \sigma_P^2} \right) \sigma_P^2 \end{aligned}$$

Donde N es el número de elementos de P , que es igual al número de coeficientes de la banda *contourlet*. Haciendo que la distorsión sea igual a la introducida por el método de espectro disperso simple, se fuerza que $E[D] = \sigma_P^2$

$$\left(\gamma^2 + \frac{\lambda^2 \sigma_y^2}{N \sigma_P^2} \right) \sigma_P^2 = \sigma_P^2, \therefore \gamma = \frac{N \sigma_P^2 - \lambda^2 \sigma_y^2}{N \sigma_P^2} \quad (4.31)$$

En el detector sea la hipótesis H_1 : se incrustó un “+1” y la hipótesis H_2 : se incrustó un “-1” correspondiente a la inserción de un símbolo s_1 y un símbolo s_2 , respectivamente. Para la variable aleatoria r , sean las probabilidades condicionales $p(r/s_1)$ y $p(r/s_2)$ cuyas funciones de densidad de probabilidad se muestran en la figura 4.1 y están dadas por las ecuaciones (4.3) y (4.4).

La probabilidad de cometer un error en la etapa de decisión es:

$$Pe = P(H_2/s_1)P(s_1) + P(H_1/s_2)P(s_2) \quad (4.32)$$

Asumiendo que se tiene el caso equiprobable: $P(s_1) = P(s_2) = .5$

$$Pe = P(H_2/s_1) = P(H_1/s_2) \quad (4.33)$$

$$P(H_2/s_1) = \int_{-\infty}^{\gamma_0} p(r/s_1) dr \quad (4.34)$$

$$P(H_1/s_2) = \int_{\gamma_0}^{\infty} p(r/s_2) dr \quad (4.35)$$

Como $P(s_1) = P(s_2) = .5$, el umbral γ_0 está dado por: $\gamma_0 = \frac{\gamma b_1 + \gamma b_2}{2}$, donde $b_1 = +1$, $b_2 = -1$

$$Pe = \int_{\gamma_0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r - \gamma b_2}{\sigma_r} \right)^2} dr \quad (4.36)$$

Haciendo el cambio de variable $u = \frac{r-\gamma b_2}{\sigma_r}$, $dr = \sigma_r du$

$$Pe = \int_{u_0 = \frac{\gamma b_1 - \gamma b_2}{2\sigma_r}}^{u=\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = Q(u_0) = Q\left(\frac{\gamma b_1 - \gamma b_2}{2\sigma_r}\right) \quad (4.37)$$

Como $b_1 = +1$, $b_2 = -1$,

$$Pe = Q\left(\frac{\gamma}{\sigma_r}\right) \quad (4.38)$$

donde $\gamma = \frac{N\sigma_P^2 - \lambda^2 \sigma_Y^2}{N\sigma_P^2}$ y $\sigma_r^2 = \frac{\sigma_n^2 + (1-\lambda)^2 \sigma_y^2}{N\sigma_P^2}$.

Lo que se busca es minimizar la probabilidad de error lo cual ocurre para el valor máximo del argumento de la función $Q(x)$.

Obteniendo el valor de λ que maximiza $\frac{\gamma}{\sigma_r}$, $\frac{\partial(\frac{\gamma(\lambda)}{\sigma_r(\lambda)})}{\partial \lambda} = 0$ se obtiene [19]

$$\lambda_{\text{ópt}} = \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_y^2} + \frac{N\sigma_P^2}{\sigma_y^2} \right) - \sqrt{\left(1 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_y^2} + \frac{N\sigma_P^2}{\sigma_y^2} \right)^2 - 4 \frac{N\sigma_P^2}{\sigma_y^2}} \right) \quad (4.39)$$

$\lambda_{\text{ópt}}$ es el valor de λ que minimiza la probabilidad de cometer un error en la decisión, y que reduce la interferencia de la banda *contourlet* en la que se incrusta la marca de agua.

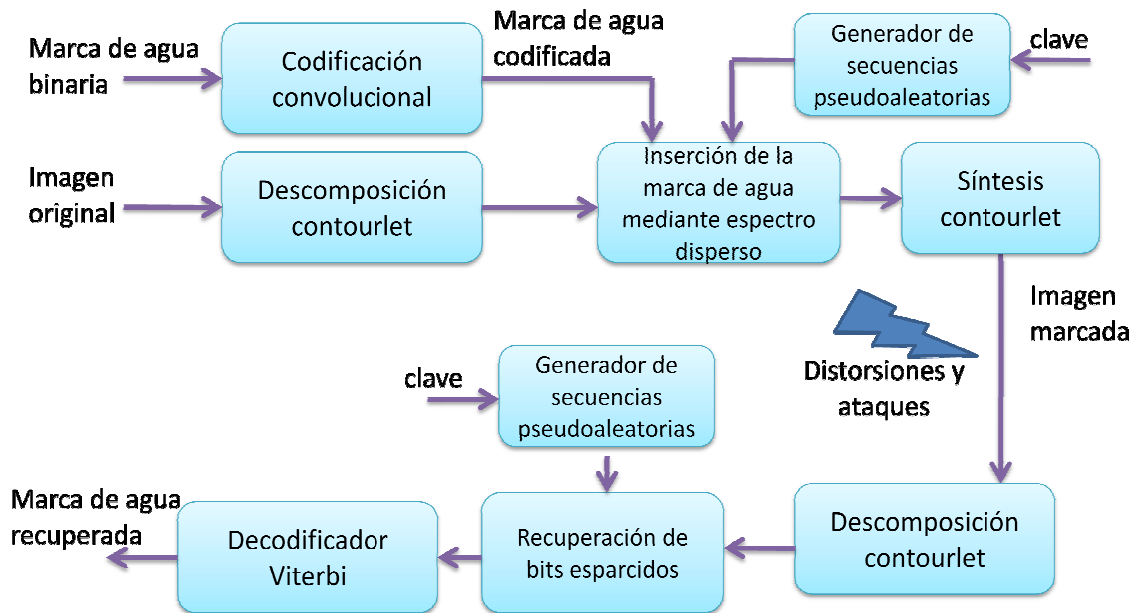


Figura 4.5 Diagrama de bloques del algoritmo de inserción de marca de agua propuesto.