

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
CURSOS ABIERTOS
ANALISIS ESTRUCTURAL
DEL 26 DE SEPTIEMBRE AL 7 DE OCTUBRE DE 1994.
DIRECTORIO DE PROFESORES

DR. EN I. JOSE LUIS CAMBA CASTANEDA
DIRECTOR
CAMBA Y ASOCIADOS
CAMPECHE 305
COL. CONDESA
06100 MEXICO, D.F.
TEL. 564 30 02 564 33 28

ING. AGUSTIN DEMENECHI COLINA
PROFESOR
FACULTAD DE INGENIERIA
CIUDAD UNIVERSITARIA
04510 MEXICO, D.F.
TEL. 606 47 47 548 96 69

ING. MIGUEL A. RODRIGUEZ VEGA
JEFE DEL DEPTO. DE ESTRUCTURAS
FACULTAD DE INGENIERIA
CIUDAD UNIVERSITARIA
04510 MEXICO, D.F.
TEL. 622 80 02

DR. EN I. JOSE LUIS TRIGOS SUAREZ
DIRECTOR GENERAL
TRIGOS INGENIEROS CONSULTORES, S.A.
TEL. 689 68 88 689 66 39

DR. GUSTAVO AYALA M.

DR. CAROLAN ...

... 22 23 24 ...
... DIRECCION ...
... EN I. ...

... 23 24 ...
... MEXICO ...
... DIRECCION ...
... EN I. ...

... 23 24 ...
... MEXICO ...
... DIRECCION ...
... EN I. ...

... 23 24 ...
... MEXICO ...
... DIRECCION ...
... EN I. ...

... 23 24 ...
... MEXICO ...
... DIRECCION ...
... EN I. ...

... 23 24 ...
... MEXICO ...
... DIRECCION ...
... EN I. ...

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
CURSOS ABIERTOS
ANALISIS ESTRUCTURAL
Del 26 de septiembre al 7 de octubre de 1994.
DIRECTORIO DE ASISTENTES

1. Luis Alonso Barreiro Quintán
Calculista
Proyectos Estructurales Asoc., S.C.
Darwin 30
Col. Anzures
México, D.F.
Tel. 514 12 01
2. Ing. Francisco Compean Castillo
Gerente de Construcción
Edif. de vivienda del Centro
Eucalipto 12
Izcalli del Bosque
Naucalpan, Edo. de México
Tel. 378 42 28
3. Ing. Lourdes Esqueda Garnica
Gerente de sistemas
ESGA Ing. en estructura, S.A.C.V.
Manuel Doblado 84 piso 1
Col. Centro
06500 México, D.F.
Tel. 398 30 14
4. Ing. Angélica Ma. Hinojosa Arechiga
Residente de obra
Aurum Promociones
Periferico sur 3395 A-201
Col. Rincón del Pedregal
14120 México, D.F.
Tel. 326 70 33
5. Ing. Arq. Francisco Gabriel Sánchez Aldana
Director técnico
Estructuras modulares, S.A.
Acueducto de Querétaro No. 20
Vista del Valle
53290 Naucalpan, Edo. de México
Tel. 360 45 91
6. Ricardo Tejero Andrade
Tajín 679
03650 México, D.F.
Tel. 677 42 83
7. Ing. Juan Carlos Valdés Salazar
Profesor Consultor
Tecnológico de Monterrey
Km. 3½ Carr. Lago de Guadalupe
Villas de la Hacienda
52492 Atizapán de Zaragoza, Edo. de Méx.
Tel. 326 55 45

1950

THE UNITED STATES OF AMERICA
DEPARTMENT OF THE ARMY
OFFICE OF THE ADJUTANT GENERAL
WASHINGTON, D. C.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
CURSOS ABIERTOS
ANALISIS ESTRUCTURAL
Del 26 de septiembre al 7 de octubre de 1994.

FECHA	HORARIO	TEMA	PROFESOR
Lunes 26	17 a 19 Hrs. 19 a 21 Hrs.	El proceso de diseño y construcción Métodos energéticos y de flexibilidad	M.I. José L. Trigos Suárez Dr. José L. Camba Castañeda
Martes 27	17 a 21 Hrs.	Métodos energéticos y de flexibilidad	Dr. J. Luis Camba Castañeda
Miércoles 28 y Jueves 29	17 a 21 Hrs.	Métodos de rigideces	Ing. Miguel A. Rodríguez Vega
Viernes 30 y Lunes 3	17 a 21 Hrs.	Análisis Dinámico de estructuras	Ing. J. Luis Trigos Suárez
Martes 4 y Miércoles 5	17 a 21 Hrs.	Interacción suelo, cimentación, estructura	M.I. Agustín Demenechi Colina
Jueves 6 y Viernes 7	17 a 21 Hrs.	Métodos del elemento finito (introducción)	Dr. Gustavo Ayala M.

EVALUACION DEL PERSONAL DOCENTE

CURSO: Análisis Estructural

FECHA: Del 26 de septiembre al 7 de octubre de 1994

CONFERENCISTA	DOMINIO DEL TEMA	USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES	COMUNICACION CON EL ASISTENTE	PUNTUALIDAD
M.I. José Luis Trigos Suárez				
Dr. José Luis Camba Castañeda				
Ing. Miguel A. Rodríguez Vega				
M.I. Agustín Demenechi Colina				
Dr. Gustavo Ayala M.				

EVALUACION DE LA ENSEÑANZA

ORGANIZACION Y DESARROLLO DEL CURSO	
GRADO DE PROFUNDIDAD LOGRADO EN EL CURSO	
ACTUALIZACION DEL CURSO	
APLICACION PRACTICA DEL CURSO	

EVALUACION DEL CURSO

CONCEPTO	CALIF.
CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO	
CONTINUIDAD EN LOS TEMAS	
CALIDAD DEL MATERIAL DIDACTICO UTILIZADO	
	<input style="width: 50px; height: 20px;" type="text"/>

ESCALA DE EVALUACION: 1 A 10

1.- ¿LE AGRADO SU ESTANCIA EN LA DIVISION DE EDUCACION CONTINUA?

SI	NO
----	----

SI INDICA QUE "NO" DIGA PORQUE.

2.- MEDIO A TRAVES DEL CUAL SE ENTERO DEL CURSO:

PERIODICO EXCELSIOR		FOLLETO ANUAL		GACETA UNAM		OTRO MEDIO	
PERIODICO EL UNIVERSAL		FOLLETO DEL CURSO		REVISTAS TECNICAS			

3.- ¿QUE CAMBIOS SUGERIRIA AL CURSO PARA MEJORARLO?

4.- ¿RECOMENDARIA EL CURSO A OTRA(S) PERSONA(S)?

SI		NO	
----	--	----	--

5.- ¿QUE CURSOS LE SERVIRIA QUE PROGRAMARA LA DIVISION DE EDUCACION CONTINUA.

6.- OTRAS SUGERENCIAS:



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

C:# 95 ANALISIS ESTRUCTURAL.

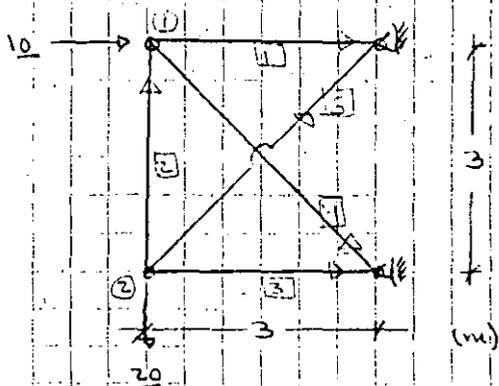
METODOS DE RIGIDECES:
CONTAMINACION

ING. MIGUEL A. RODRIGUEZ VEGA.

ING. MIGUEL A. RODRIGUEZ VECA

DIAGRAMAS DE ELEMENTOS MECANICOS DE CASOS GENERALES DE CARGAS, EN VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS, AUXILIARES PARA EL METODO DE SUPERPOSICION.

	TIPO DE CARGA	DIAGRAMA DE MOMENTO FLEXIONANTE	DIAGRAMA DE FUERZA CORTANTE
CARGAS ACTUANDO EN LAS BARRAS			
CARGAS ACTUANDO EN LOS NUDOS			



$k = 200 \text{ E.m}$

$u_{1,3} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$u_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$

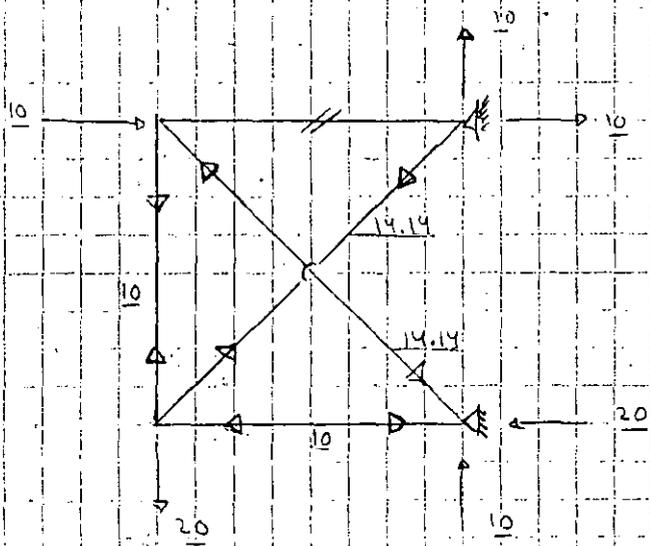
$u_4 = \begin{Bmatrix} 0.71 \\ -0.71 \end{Bmatrix}$

$u_6 = \begin{Bmatrix} 0.71 \\ 0.71 \end{Bmatrix}$

$$[K] = \begin{matrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ \begin{Bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -0.71 & 0.71 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ -0.71 & -0.71 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} 300 & -100 \\ -100 & 300 \\ 0 & 0 \\ 0 & 200 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 0 & -100 \\ 0 & 300 \\ 300 & 0 \\ 100 & 200 \end{Bmatrix} \end{matrix}$$

$f = F = \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{Bmatrix}$

$k = \begin{Bmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{Bmatrix}$



MATRIZ DE CONTINUIDAD: [a]

-1.000	0.000	0	0
0.000	1.000	0.000	-1.000
0	0	-1.000	0.000
-0.707	0.707	0	0
0	0	-0.707	-0.707

VECTOR DE FUERZAS: {F}

10.00
0.00
0.00
-20.00

MATRIZ DE RIGIDEZ DE LAS BARRAS: [k]

200.000	0	0	0	0
0	200.000	0	0	0
0	0	200.000	0	0
0	0	0	200.000	0
0	0	0	0	200.000

MATRIZ DE CONTINUIDAD TRANSPUESTA: [a]t

-1.000	0.000	0	-0.707	0
0.000	1.000	0	0.707	0
0	0.000	-1.000	0	-0.707
0	-1.000	0.000	0	-0.707

PRODUCTO: [a]t * [k]

-200.00	0.00	0.00	-141.42	0.00
0.00	200.00	0.00	141.42	0.00
0.00	0.00	-200.00	0.00	-141.42
0.00	-200.00	0.00	0.00	-141.42

MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA: [K] = [a]t * [k] * [a]

299.9981	-100.0	0.0	0.0
-100.0	299.9981	0.0	-200.0
0.0	0.0	299.9981	100.0
0.0	-200.0	100.0	299.9981

DESPLAZAMIENTOS
{d} = [K]-1 * {F}

0.00
-0.10
0.05
-0.15

DEFORMACIONES
{e} = [a] * {d}

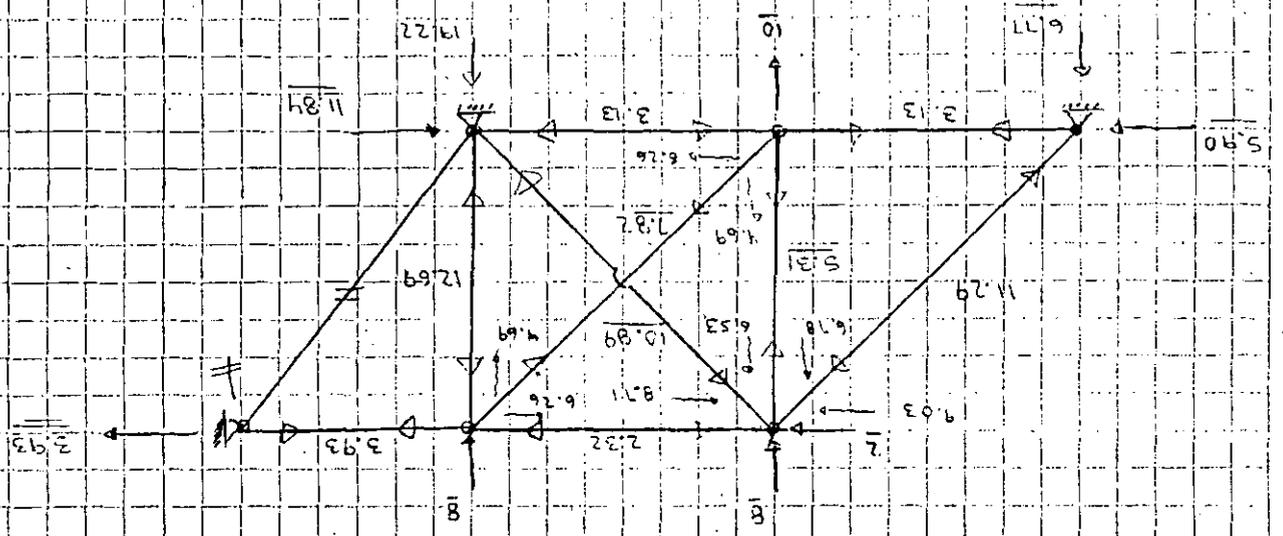
-0.00
0.05
-0.05
-0.07
0.07

ELEM. MEC. {p}
{p} = [k] * {e}

1	-0.00
	10.00
3	-10.00
	-14.14
5	14.14

COMPROBACION
{F} = [a]t * {p}

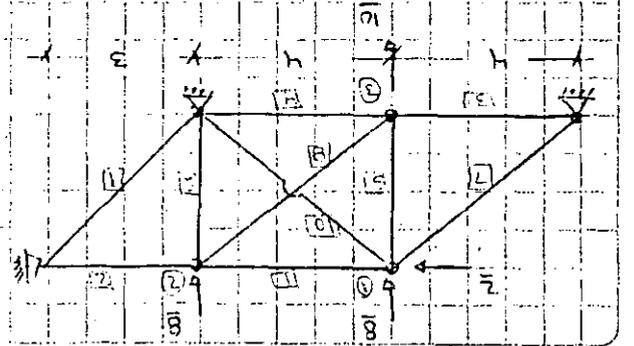
10.00
0.00
-0.00
-20.00



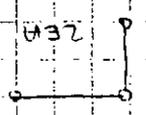
$$[K] = \begin{bmatrix} 0.7359 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2947 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8107 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.67 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.50 \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.67 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.50 \end{bmatrix}$$



$$[K]^{-1} = \begin{bmatrix} 1.356 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.478 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



MATRIZ DE CONTINUIDAD: [a]

-1.000	0.000	1	0	0	0
0	0	-1.000	0.000	0	0
0	0	0	0	1.000	0.000
0	0	0	0	-1.000	0.000
0.000	1.000	0	0	0.000	-1.000
0	0	0.000	1.000	0	0
0.800	0.600	0	0	0	0
0	0	0.800	0.600	-0.800	-0.600
0	0	0	0	0	0
-0.800	0.600	0	0	0	0

VECTOR DE FUERZAS: {F}

2.00
-8.00
0.00
-8.00
0.00
-10.00
0
0
0
0

MATRIZ DE RIGIDEZ DE LAS BARRAS: [k]

0.500	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.667	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.500	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.500	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.667	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.667	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.200	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.200	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0.236	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.200

MATRIZ DE CONTINUIDAD TRANSPUESTA: [a]t

-1.000	0	0	0	0.000	0	0.800	0	0	-0.800
0.000	0	0	0	1.000	0	0.600	0	0	0.600
1	-1.000	0	0	0	0.000	0	0.800	0	0
0	0.000	0	0	0	1.000	0	0.600	0	0
0	0	1.000	-1.000	0.000	0	0	-0.800	0	0
0	0	0.000	0.000	-1.000	0	0	-0.600	0	0

PRODUCTO: [a]t * [k]

-0.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.16	0.00	0.00	-0.16
0.00	0.00	0.00	0.00	0.67	0.00	0.12	0.00	0.00	0.12
0.50	-0.67	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.16	0.00	0
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.67	0.00	0.12	0.00	0
0.00	0.00	0.50	-0.50	0.00	0.00	0.00	-0.16	0.00	0
0.00	0.00	0.00	0.00	-0.67	0.00	0.00	-0.12	0.00	0

MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA: [K] = [a]t * [k] * [a]

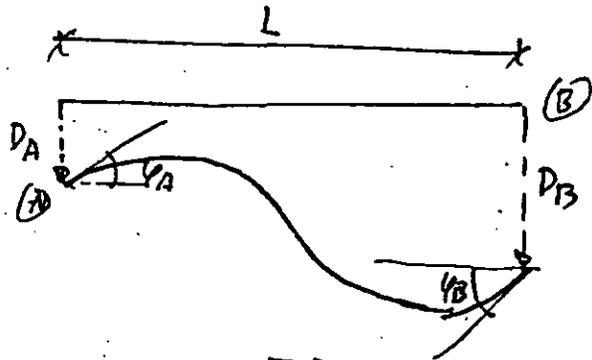
0.7560	0.00	-0.50	0.00	0.00	0.00
0.00	0.8107	0.00	0.00	0.00	-0.67
-0.50	0.00	1.2947	0.10	-0.13	-0.10
0.00	0.00	0.10	0.7387	-0.10	-0.07
0.00	0.00	-0.13	-0.10	1.1280	0.10
0.00	-0.67	-0.10	-0.07	0.10	0.7387

DESPLAZAMIENTOS {d} = [K] ⁻¹ * {F}	DEFORMACIONES {e} = [a] * {d}	ELEM. MEC. {p} {p} = [k] * {e}	COMPROBACION {F} = [a]t * {p}
-1.26	-4.64	1	2.00
-92.43	5.90		-8.00
-5.90	6.25	3	0.00
-19.04	-6.25		-8.00
6.25	7.98	5	-0.00
-100.39	-19.04		-10.00
	-56.46	7	
	39.09		
	0.00	9	
	-54.45		

[a] -

	φ_A	φ_B	D_A	D_B
1	1	0	$-\frac{1}{2}L$	$\frac{1}{2}L$
2	1	1	$-\frac{1}{2}L$	$\frac{1}{2}L$
3	0	1	$-\frac{1}{2}L$	$\frac{1}{2}L$

donde $\varphi_A, \varphi_B, D_A, D_B$ son los giros y
quedas de libertad de sus extremos



III. - Obtención de [K]

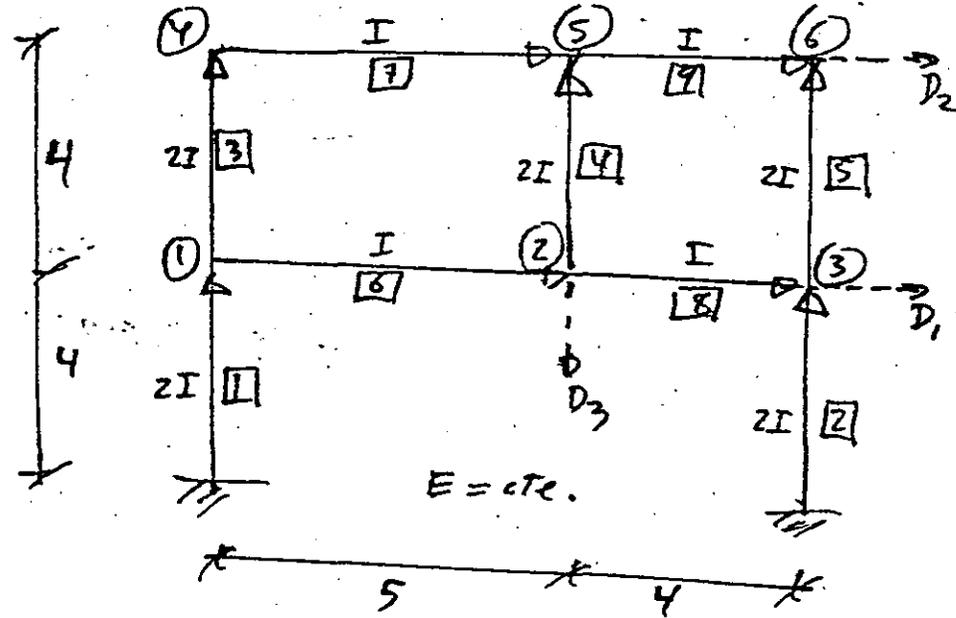
La matriz de rigidez de la estructura
[K] de orden $(m_v + m_D) \times (m_v + m_D)$ se obtien
drá con la conocida fórmula

$$[K] = [a]^T [k_l] [a]$$

Por ser $[k_l]$ diagonal la fórmula
se simplifica:

$$K_{ij} = \sum_{l=1}^{3m_D} a_{li} a_{lj} k_l$$

IV. - Ejemplo



Obtenemos [a] y [k]:

[a] =

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	D_1	D_2	D_3
[1]	0						0.25		
	1						0.50		
	1						0.25		
[2]			0				0.25		
			1				0.50		
			1				0.25		
[3]	1			0			-0.25	0.25	
	1			1			-0.50	0.50	
	0			1			-0.25	0.25	
[4]		1			0		-0.25	0.25	
		1			1		-0.50	0.50	
		0			1		-0.25	0.25	
[5]			1			0	-0.25	0.25	
			1			1	-0.50	0.50	
			0			1	-0.25	0.25	
[6]	1	0							0.2
	1	1							0.4
	0	1							0.2
[7]				1	0				0.2
				1	1				0.4
				0	1				0.2
[8]		1	0						-0.25
		1	1						-0.50
		0	1						-0.25
[9]					1	0			-0.25
					1	1			-0.50
					0	1			-0.25

[b] =

[1]	1.0
	1.0
	1.0
[2]	1.0
	1.0
	1.0
[3]	1.0
	1.0
	1.0
[4]	1.0
	1.0
	1.0
[5]	1.0
	1.0
	1.0
[6]	0.4
	0.4
	0.4
[7]	0.4
	0.4
	0.4
[8]	0.5
	0.5
	0.5
[9]	0.5
	0.5
	0.5

X EI

el método de las rigideces

Por Julio Dany Río

I. - Introducción

Se generalizan los conceptos presentados en páginas anteriores, solo que ahora consideramos deformaciones por flexión, fuerza axial y fuerza cortante

II. - Definiciones

1). - Matriz de rigidez una barra [a]

$$[K]_a = \begin{bmatrix} Y_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (Y_{AA} - Y_{AB}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{AB} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (Y_{BB} - Y_{AB}) \end{bmatrix}$$

O bien:

$$[K]_a = \begin{bmatrix} Y_N \\ (Y_{AA} - Y_{AB}) \\ Y_{AB} \\ (Y_{BB} - Y_{AB}) \end{bmatrix}$$

Donde:

a) Y_N es la rigidez por fuerza axial; si la barra es de sección constante

$$Y_N = EA/L$$

si esta es variable

$$Y_N = \int \frac{1}{EA} ds$$

b) Y_{AA}, Y_{BB}, Y_{AB} , son las rigideces angulares de la barra [a] (ver hoja 1), considerando deformaciones por flexión y cortante.

Si la barra es de sección constante

$$(Y_{AA} - Y_{AB}) = (Y_{BB} - Y_{AB}) = \frac{2EI}{L}$$

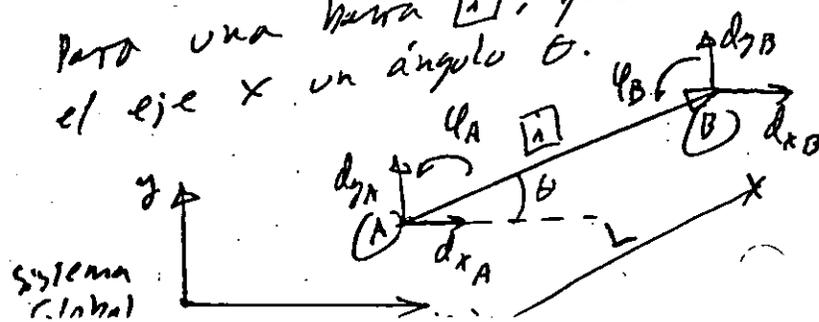
$$Y_{AB} = \frac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)}$$

donde c es el parámetro que se considera la deformación por cortante

$$c = 6(1+\nu) \frac{I}{A_c L^2}$$

2). - Matriz de continuidad [a]₁

para una barra [a], que forme con el eje x un ángulo θ .



La matriz $[a]_{ij}$ relaciona los desplazamientos de los nodos (A) y (B) con las deformaciones de la barra: $\delta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ (ver hoja 5) (δ = alargamiento de la barra). Es muy simple demostrar que $[a]_{ij}$ es igual a:

$$[a]_{ij} = \begin{matrix} & \delta_A & \theta_{1A} & \theta_{2A} & \delta_B & \theta_{1B} & \theta_{2B} \\ \begin{matrix} \delta \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \frac{-\sin\theta}{L} & \frac{\cos\theta}{L} & 1 & \frac{\sin\theta}{L} & \frac{-\cos\theta}{L} & 0 \\ \frac{-2\sin\theta}{L} & \frac{2\cos\theta}{L} & 1 & \frac{2\sin\theta}{L} & \frac{-2\cos\theta}{L} & 1 \\ \frac{-\sin\theta}{L} & \frac{\cos\theta}{L} & 0 & \frac{\sin\theta}{L} & \frac{-\cos\theta}{L} & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Observese que la matriz de rigidez acoplada de la barra ($[K]$) (en coordenadas globales) se puede obtener como:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{AA}] & [K_{AB}] \\ [K_{BA}] & [K_{BB}] \end{bmatrix} = [a]_{ij}^T [k]_{ij} [a]_{ij}$$

O bien:

$$K_{ij} = \sum_{l=1}^4 a_{li} a_{lj} k_l$$

por ser $[k]_{ij}$ diagonal.

III.- Obtención de $[K]$

La matriz de rigidez de la estructura $[K]$ de orden $3M_N \times 3M_N$, se obtendrá con la siguiente expresión

$$[K] = [a]^T [k] [a]$$

donde: $[a]$ es la matriz de continuidad de la estructura, obtenida a partir de las matrices $[a]_{ij}$ (ver ejemplo)

$[k]$ es la matriz diagonal formada por las rigideces de las barras por ser $[k]$ diagonal, se tiene que:

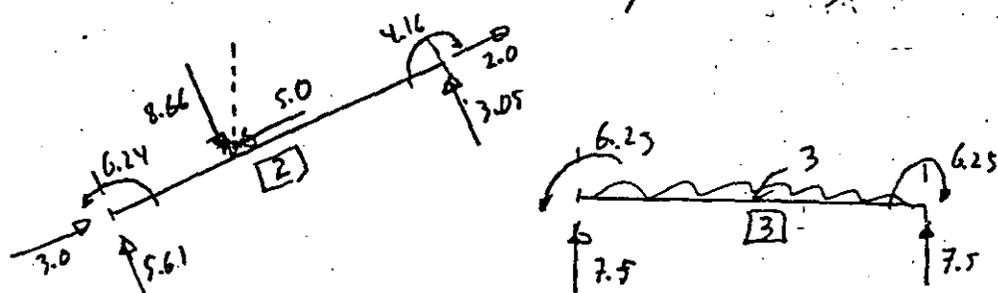
$$K_{ij} = \sum_{l=1}^{4M_B} a_{li} a_{lj} k_l$$

IV.- Obtención de los elementos mecánicos de las barras

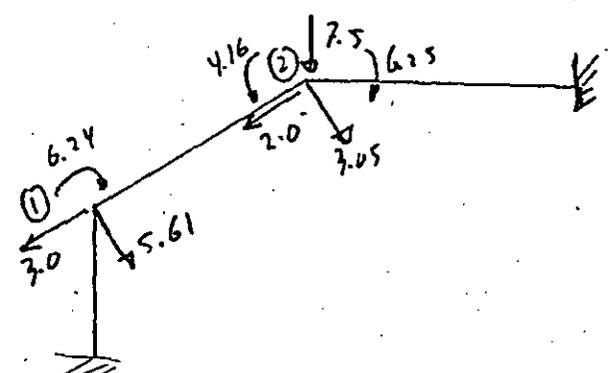
El vector $\{p\}$ de elementos mecánicos producidos por los desplazamientos de los nodos se obtendrá:

$$\{p\} = [K] [a] \{d\}$$

71.- Obtengamos las fuerzas de tracción de las barras (condición de empotramiento)



Las fuerzas ^{efectivas} totales ~~de tracción~~ de la estructura serán:



o sea que:

$$\{F_{ei}\} = \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.21 \\ -6.36 \\ -6.24 \\ -0.21 \\ -11.14 \\ -2.09 \end{bmatrix}$$

4).- Obtengamos los desplazamientos de los nodos $\{d\}$, resolviendo la ecuación:

$$\{F_{ei}\} = [K] \{d\}$$

$$\{d\} = \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix} \begin{bmatrix} -6710976 \\ -9.303599 \\ -6.376669 \\ 1.216520 \\ -29.011606 \\ 3.451168 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{EI}$$

5.- Obtengamos $\{p\}$

N	-11.63	
M ₁	-0.84	1
M ₂	-4.87	
M ₃	-4.03	
N	-5.48	
M ₁	-1.74	
M ₂	4.39	2
M ₃	6.13	
N	-3.65	
M ₁	-2.82	3
M ₂	-9.78	
M ₃	-6.96	

4.1. $\frac{1}{2} \times 11.63 \times 10^3$ (area)

1) ~~$M_A = 11.63$~~

$M_A = -5.71$ $V = -3.65$

$M_B = -8.90$

2) $M_A = 2.65$

$V = 2.63$

$M_B = 10.52$

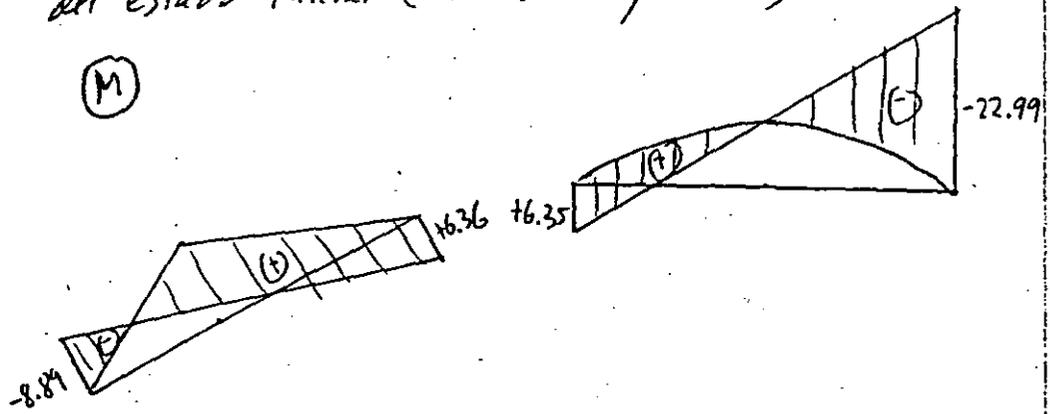
3) $M_A = -12.60$

$V = -5.87$

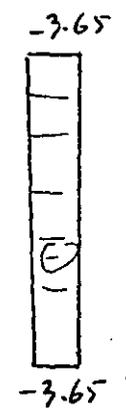
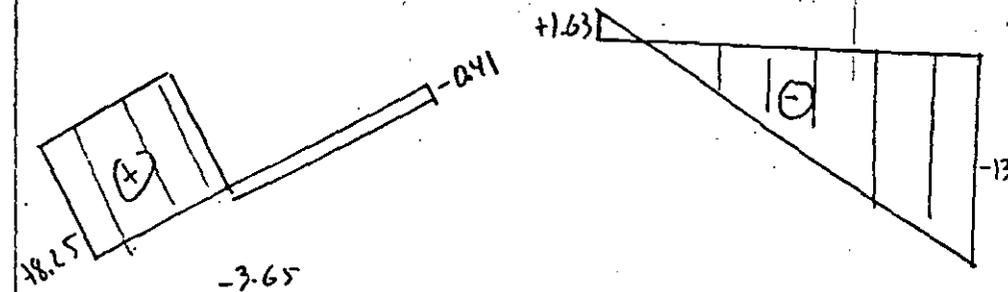
$M_B = -16.74$

7).- Obtengamos los diagramas de (M), (V), (N), sumando los elementos mecánicos producidos por f_1 a los del estado inicial (nulos en empotrados)

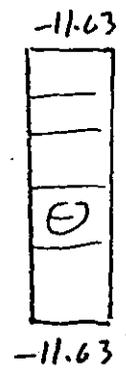
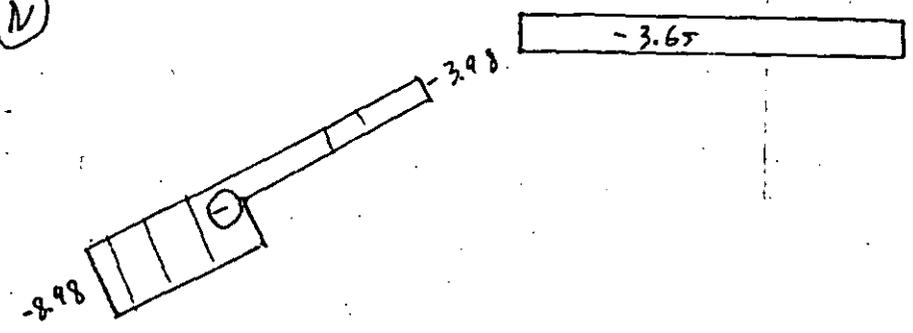
(M)



(V)



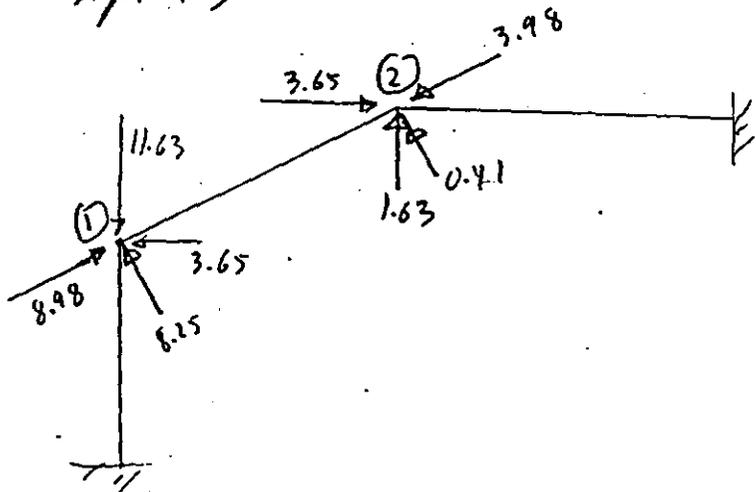
(N)



8) - EQUILIBRIO.

De acuerdo con el diagrama de (M) es obvio que los nudos están equilibrados en momentos.

Las fuerzas de nudo sobre tierra en los nudos (1) y (2), de acuerdo con los diagramas de (N) y (D), son las siguientes,



Es fácil verificar que (1) y (2) están en equilibrio en fuerzas.

Análisis de retículas planas por el método de las rigideces

por Julio Danny Ríos

I.- Definiciones

Matriz de rigidez de una barra [i]

$$[K]_i = \begin{bmatrix} Y_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (Y_{AA}-Y_{AB}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{AB} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (Y_{BB}-Y_{AB}) \end{bmatrix}$$

O bien:

$$[K]_i = \begin{bmatrix} Y_T \\ (Y_{AA}-Y_{AB}) \\ Y_{AB} \\ (Y_{BB}-Y_{AB}) \end{bmatrix}$$

Donde:

a) Y_T es la rigidez a torsión; si la barra es de sección constante

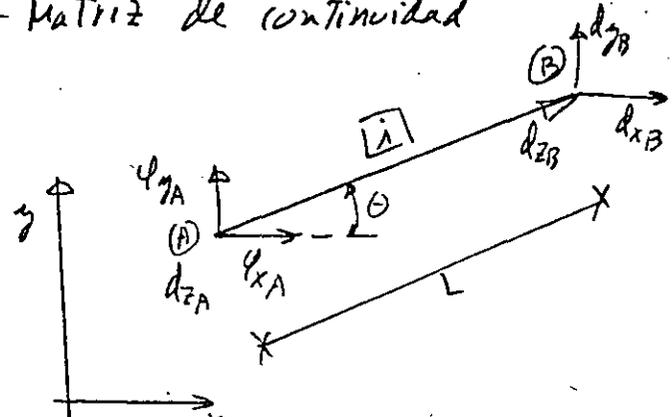
$$Y_T = EJ/L$$

si esta es de sección variable

$$Y_T = \frac{1}{\int \frac{ds}{EJ}}$$

b) (Ver hoja 6)

2.- Matriz de continuidad



(Sistema global)

$$[a]_i = \begin{matrix} & \phi_{xA} & \phi_{yA} & d_{zA} & \phi_{xB} & \phi_{yB} & d_{zB} \\ \theta_1 & -\cos\theta & -\sin\theta & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \theta_2 & \sin\theta & -\cos\theta & 1/L & 0 & 0 & -1/L \\ \theta_3 & \sin\theta & -\cos\theta & 2/L & \sin\theta & -\cos\theta & -2/L \\ \theta_4 & 0 & 0 & 1/L & \sin\theta & -\cos\theta & -1/L \end{matrix}$$

donde: θ_T = deformación torsionante.

Al igual que en un caso plano, se puede obtener con las mismas fórmulas, la rigidez acoplada.

III.- Obtención de [K]

(Ver hoja 7)

IV.- Obtención de los elementos mecánicos de las barras

(Ver hojas 7 y 8)

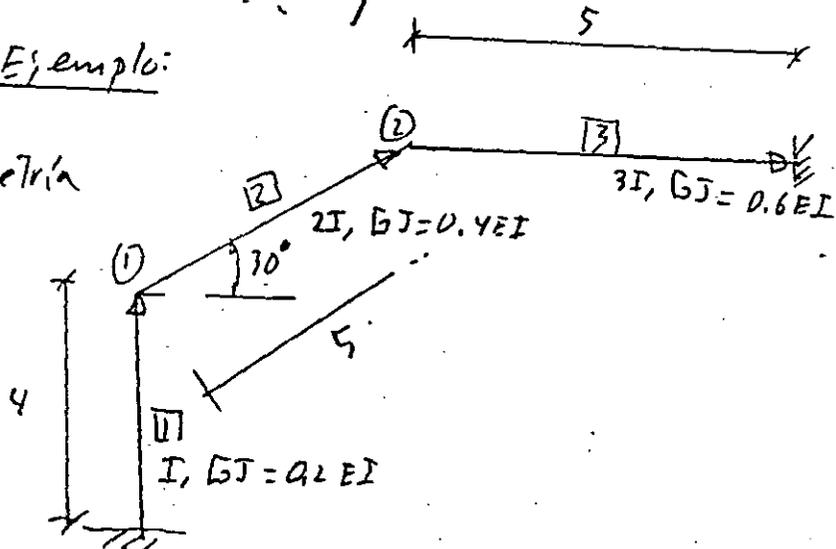
La diferencia con el método plano sea que:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ H_{21} \\ H_{12} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

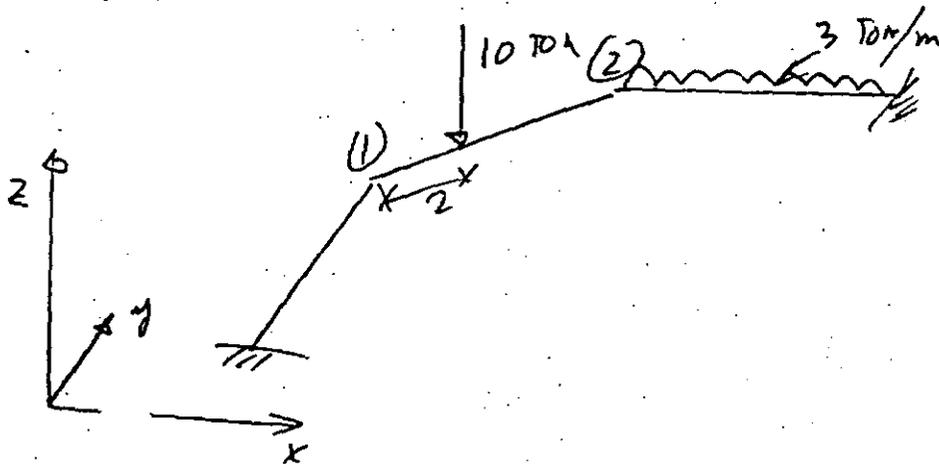
$M_T =$ Momento torsional

IV. - Ejemplo:

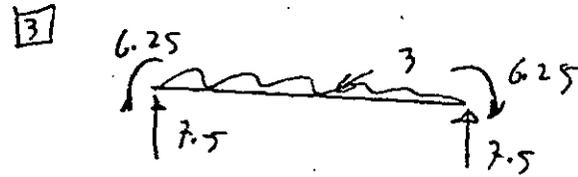
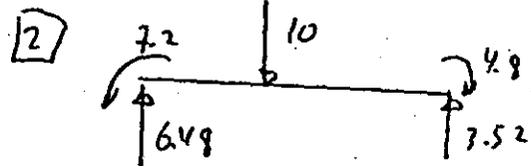
a) Geometría



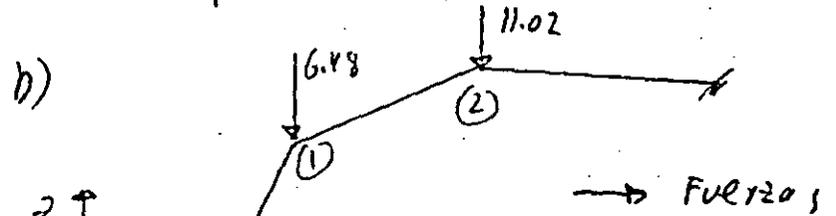
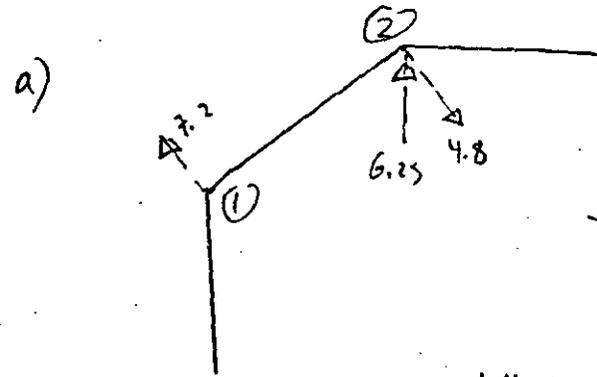
b) Cargas



V. - Fuerzas de fijación



Las fuerzas efectivas:



o sea que:

$$\{F_{eff}\} =$$

	-3.60
①	6.24
	-6.48
	2.40
②	2.09
	-11.02

2). - Urtegenams [A], Y (K)

	u_{y1}	d_{z1}	u_{y2}	p_{y2}	A_{z2}
1	1.0	0			
	0	-0.25			
	1.0	-0.50			
	1.0	-0.25			
[A] =	0.86603	-0.500	0	0.86603	0.500
2	0.500	-0.86603	0.2	0	-0.2
	0.500	-0.86603	0.4	0.500	-0.86603
	0	0	0.2	0.500	-0.86603
3			-1.0	0	0
			0	-1.0	0.2
			0	-1.0	0.4
			0	0	0.2

0.5
0.5
0.5
0.5
0.08
0.8
0.8
0.8
0.8
0.12
1.2
1.2
1.2

[k] =

XEI

3). - Urtegenams [K]

[K] =

	①		②	
	1.46000	-0.65818	-0.13500	0.2400
	-0.65818	1.27000	-0.41569	-0.38105
	-0.13500	-0.41569	0.37450	0.24000
	0.2400	-0.38105	0.2400	0.58000
①	-0.38105	0.58000	-0.41569	-0.65818
②	-0.2400	0.41569	-0.19200	-0.2400

XEI

$\{d\} = 0$

-45.867175
-16.846631
-126.572098
-24.398246
-30.035723
-113.172373

$\times \frac{1}{EI}$

(2)

5). - $\{d\}$

M_T	-0.84
M_1	15.82
M_2	8.71
M_3	-7.11
M_T	0.96
M_1	-8.82
M_2	0.09
M_3	8.91
M_T	2.93
M_1	8.88
M_2	-18.28
M_3	-27.16

(1)

(2)

(3)

6) M_A, M_B, V

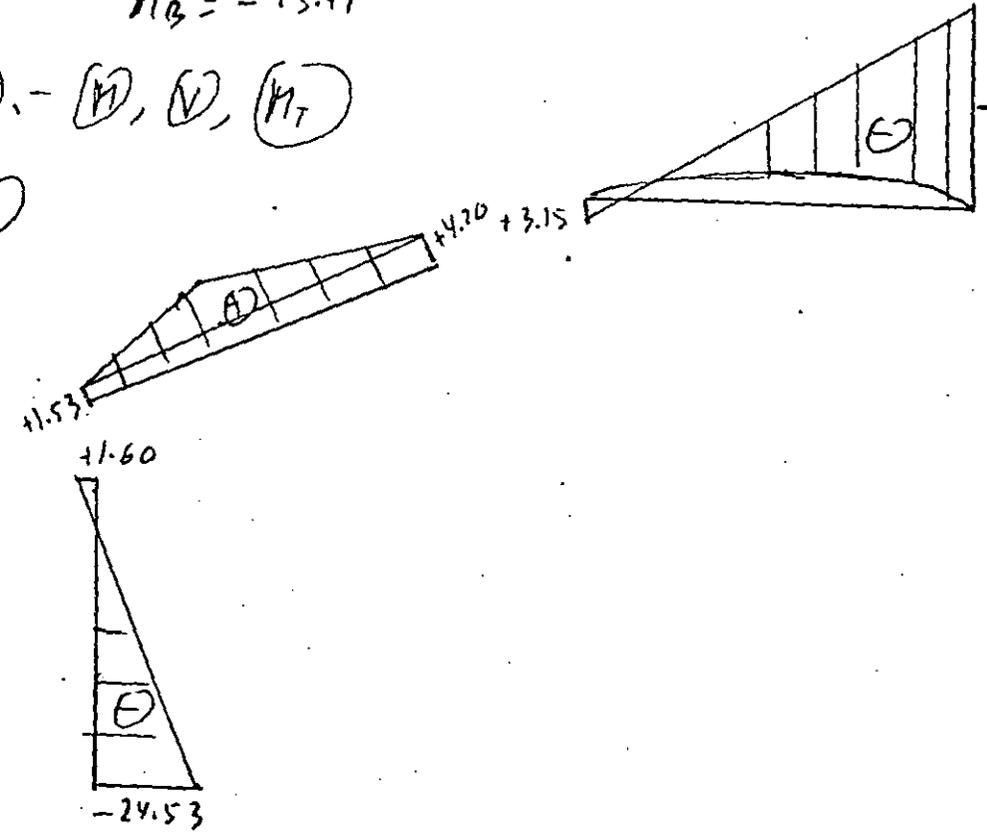
[1] $M_A = 24.53$
 $M_B = 1.60$ $V = 6.53$

[2] $M_A = -8.73$
 $M_B = 9.00$ $V = 0.05$

[3] $M_A = -9.40$
 $M_B = -45.44$ $V = -10.47$

7). - $(M), (V), (M_T)$

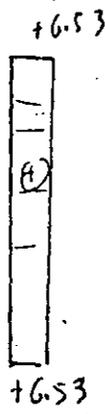
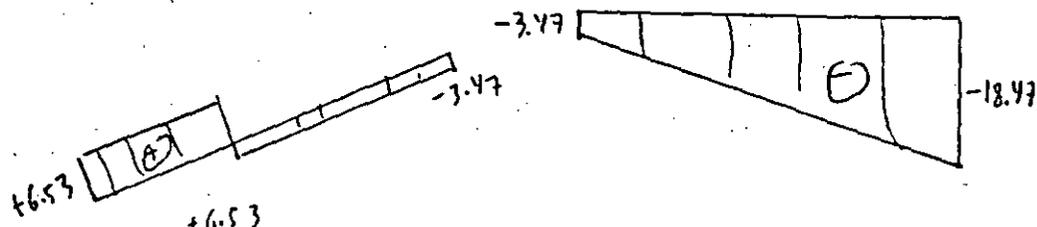
(M)



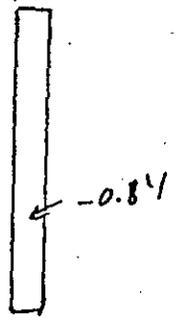
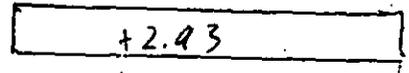
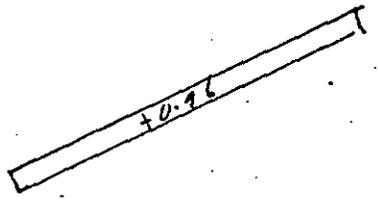
(1)

-51.69

(V)



(M_T)

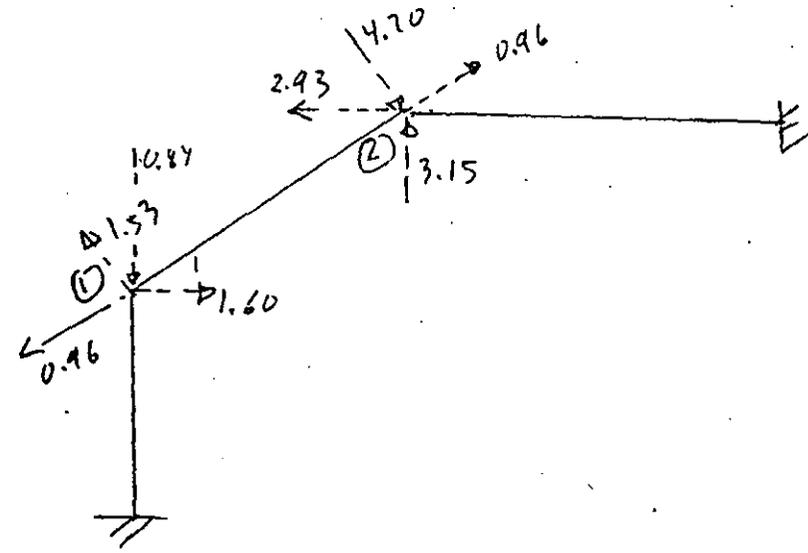


8).- Equilibrio

LI#

De acuerdo con el diagrama de (V) es obvio que los nudos están en equilibrio en la fuerza paralela a Z.

Los momentos de nudo sobre barra de acuerdo con los diagramas de (M), (M_T)



es fácil verificar que (1) y (2) están en equilibrio en momentos

Matriz de continuidad: [a]

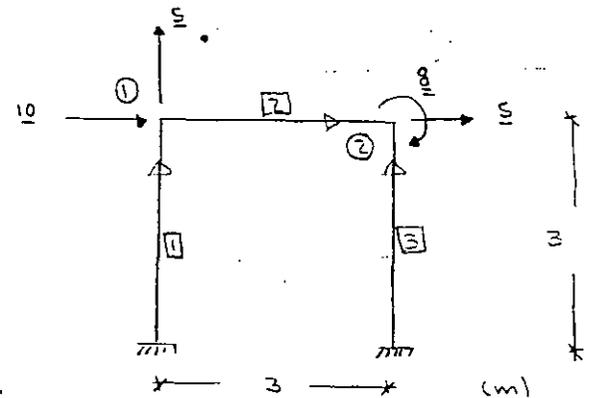
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	-0.333	-1.000	0.000	0.333	0.000
0.000	0.333	0.000	0.000	-0.333	1.000
-1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	-0.333	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.333	0.000	1.000
0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000

Vector de fuerzas: {F}

10.00
5.00
0.00
5.00
0.00
-6.00

Matriz de rigidez de las barras: [k]

1.333	-0.667	0.000	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.667	1.333	0.000	0	0	0	0	0	0	0	0
0.000	0.000	3.333	0	0	0	0	0	0	0	0
0.000	0.000	0.000	1.333	-0.667	0.000	0	0	0	0	0
0.000	0.000	0.000	-0.667	1.333	0.000	0	0	0	0	0
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	3.333	0	0	0	0	0
0.000	0.000	0.000	0	0	0	1.333	-0.667	0.000	0	0
0.000	0.000	0.000	0	0	0	-0.667	1.333	0.000	0	0
0.000	0.000	0.000	0	0	0	0.000	0.000	3.333	0	0



EI = 4EI
EA = 10EI

Matriz de Continuidad Transpuesta: [a]t

-0.333	0.333	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	1.000	-0.333	0.333	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	1.000	0.000	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	-0.333	0.333	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.333	-0.333	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Matrices: [a], [k]

MATRIZ DE CONTINUIDAD: [a]

-0.167	0.000	0.000	0	0	0
0.167	0.000	1.000	0	0	0
0.000	1.000	0.000	0	0	0
0.000	-0.200	-1.000	0.000	0.200	0.000
0.000	0.200	0.000	0.000	-0.200	1.000
-1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0	0	0	0.120	0.160	-1.000
0	0	0	0.120	0.160	0.000
0	0	0	-0.800	0.600	0.000

VECTOR DE FUERZAS: {F}

10.00
-3.00
-9.00
8.00
2.00
0.00

$u_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$ $n_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$u_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ $n_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$

$u_3 = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{Bmatrix}$ $n_3 = \begin{Bmatrix} -0.6 \\ -0.8 \end{Bmatrix}$

MATRIZ DE RIGIDEZ DE LAS BARRAS: [k]

1.000	-0.667	0.000	0	0	0	0	0	0
-0.667	1.333	0.000	0	0	0	0	0	0
0.000	0.000	5.000	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1.600	0.800	0.000	0	0	0
0	0	0	-0.800	1.600	0.000	0	0	0
0	0	0	0.000	0.000	8.000	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.800	-0.400	0.000
0	0	0	0	0	0	-0.400	0.800	0.000
0	0	0	0	0	0	0.000	0.000	3.000

MATRIZ DE CONTINUIDAD TRANSPUESTA: [a]^t

-0.167	0.167	0.000	0.000	0.000	-1.000	0	0	0
0.000	0.000	1.000	-0.200	0.200	0.000	0	0	0
0.000	1.000	0.000	-1.000	0.000	0.000	0	0	0
0	0	0	0.000	0.000	1.000	-0.120	0.120	-0.800
0	0	0	0.200	-0.200	0.000	-0.160	0.160	0.600
0	0	0	0.000	1.000	0.000	-1.000	0.000	0.000

PRODUCTO: [a]^t * [k]

-0.33	0.33	0.00	0.00	0.00	-6.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	5.00	-0.48	0.48	0.00	0.00	0.00	0.00
-0.67	1.33	0.00	-1.60	0.80	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	6.00	-0.14	0.14	-2.40
0.00	0.00	0.00	0.48	-0.48	0.00	-0.19	0.19	1.80
0.00	0.00	0.00	-0.80	1.60	0.00	-0.80	0.40	0.00

MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA: [K] = [a]^t * [k] * [a]

8.1111	0.00	0.33	-6.00	0.00	0.00
0.00	8.1667	0.48	0.00	-0.19	0.48
0.33	0.48	2.9333	0.00	-0.48	0.80
-6.00	0.00	0.00	7.9333	-1.39	0.14
0.00	-0.19	-0.48	-1.39	1.3333	-0.29
0.00	0.48	0.80	0.14	-0.29	2.4000

DESPLAZAMIENTOS DE LOS NUDOS: {d} = [K]⁻¹ * {F}

34.43	dx1
0.66	dy1
-1.53	g1
33.32	dx2
36.47	dy2
2.78	g2

DEFORMACIONES EN LAS BARRAS: {e} = [a] * {d}

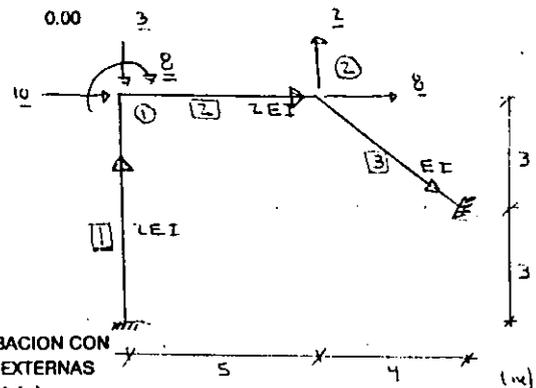
-5.74	ta1
4.21	tb1
0.68	ea1
8.69	ta2
-4.41	tb2
-1.11	ea2
-12.59	ta3
9.83	tb3
-4.77	ea3

ELEMEN. MEC. EN BARRAS: {p} = [k] * {e}

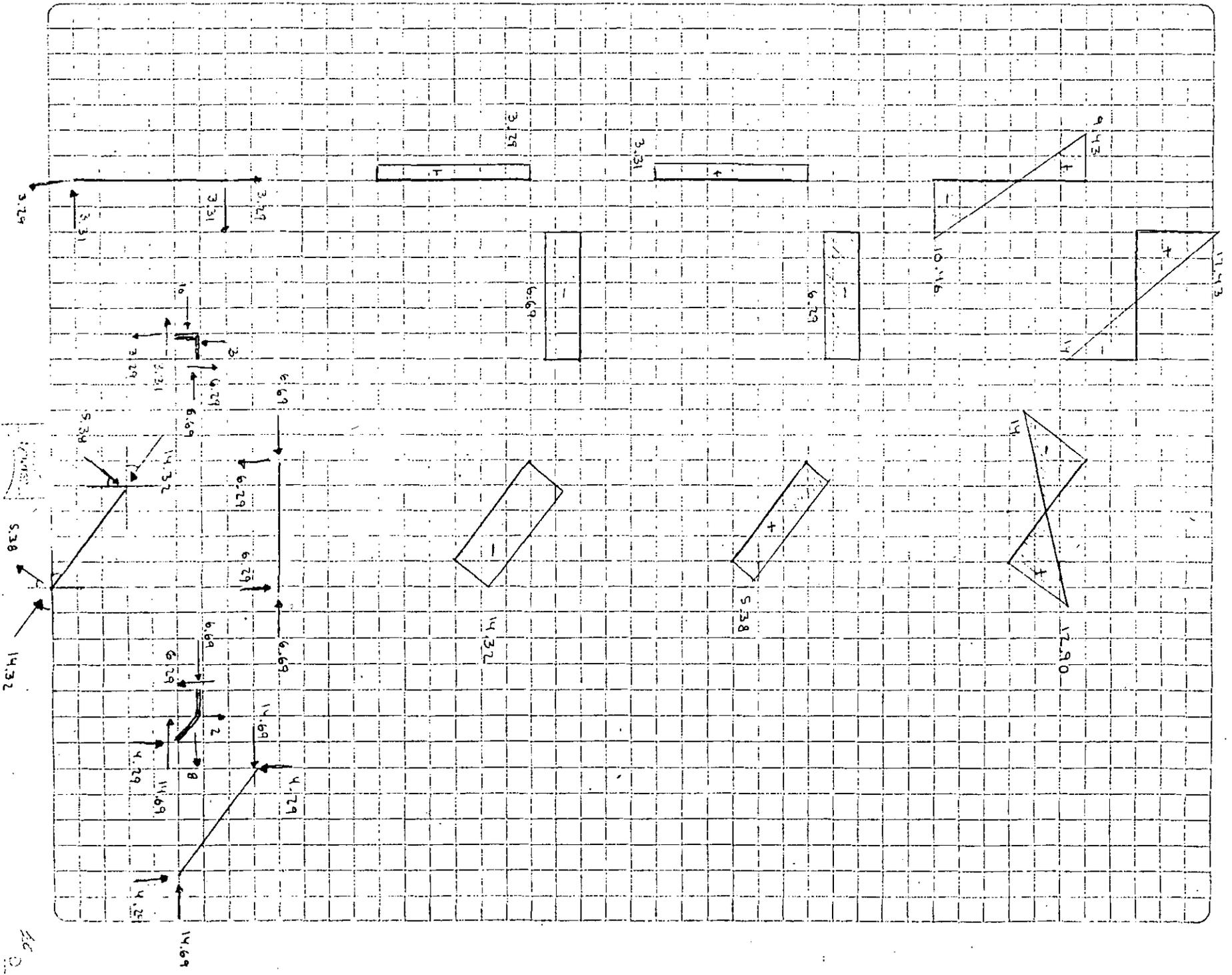
-10.46	ma1
9.43	mb1
3.29	na1
17.43	ma2
-14.00	mb2
-6.89	na2
-14.00	ma3
12.90	mb3
-14.32	na3

COMPROBACION CON FUERZAS EXTERNAS {F} = [a]^t * {p}

10.00	fx1
-3.00	fy1
-8.00	m1
8.00	fx2
2.00	fy2
0.00	m2



250



MATRIZ DE CONTINUIDAD: [a]

dx1			dx2			dx3		
0.1250	0.1250	0.0000	0	0	0	0	0	0
0.1250	-0.1250	1.0000	0	0	0	0	0	0
0.7071	0.7071	0.0000	0	0	0	0	0	0
0.0000	0.1667	1.0000	0.0000	0.1667	0.0000	0	0	0
0.0000	0.1667	0.0000	0.0000	0.1667	1.0000	0	0	0
-1.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0	0	0
0	0	0	-0.1600	-0.1200	-1.0000	0.1600	0.1200	0.0000
0	0	0	0.1600	0.1200	0.0000	0.1600	-0.1200	1.0000
0	0	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000

MATRIZ DE RIGIDEZ DE LAS BARRAS: [k]

1.414	0.707	0.000	0	0	0	0	0	0
-0.707	1.414	0.000	0	0	0	0	0	0
0.000	0.000	3.536	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1.333	-0.667	0.000	0	0	0
0	0	0	-0.667	1.333	0.000	0	0	0
0	0	0	0.000	0.000	3.536	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.900	-0.300	0.000
0	0	0	0	0	0	-0.300	0.900	0.000
0	0	0	0	0	0	0.000	0.000	2.000

MATRIZ DE CONTINUIDAD TRANSPUESTA: [a]^t

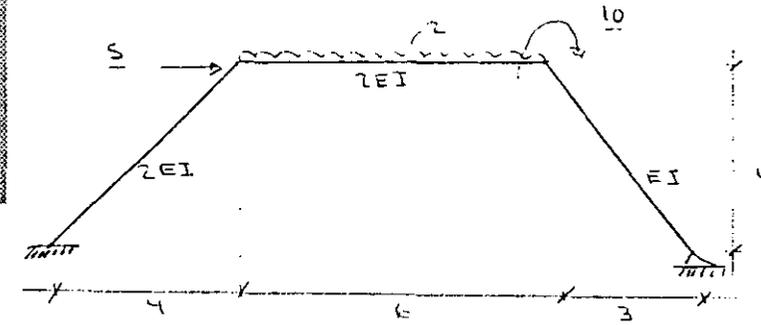
-0.1250	0.1250	0.7071	0.0000	0.0000	-1.0000	0	0	0
0.1250	-0.1250	0.7071	-0.1667	0.1667	0.0000	0	0	0
0.0000	1.0000	0.0000	-1.0000	0.0000	0.0000	0	0	0
0	0	0	0.0000	0.0000	1.0000	-0.1600	0.1600	-0.6000
0	0	0	0.1667	-0.1667	0.0000	-0.1200	0.1200	0.8000
0	0	0	0.0000	1.0000	0.0000	-1.0000	0.0000	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.1600	-0.1600	0.6000
0	0	0	0	0	0	0.1200	-0.1200	-0.8000
0	0	0	0	0	0	0.0000	1.0000	0.0000

PRODUCTO: [a]^t * [k]

-0.27	0.27	2.50	0.00	0.00	-3.33	0.00	0.00	0.00
0.27	-0.27	2.50	-0.33	0.33	0.00	0.00	0.00	0.00
-0.71	1.41	0.00	-1.33	0.67	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.33	-0.19	0.19	-1.20
0.00	0.00	0.00	0.33	-0.33	0.00	-0.14	0.14	1.60
0.00	0.00	0.00	-0.67	1.33	0.00	-0.80	0.40	0.00
0	0	0	0	0	0	0.192	-0.192	1.2
0	0	0	0	0	0	0.144	-0.144	-1.6
0	0	0	0	0	0	-0.4	0.8	0

VECTOR DE FUERZAS: {F}

5.00
-6.00
-6.00
0.00
-6.00
-4.00
0
0
0



$$u_1 = \begin{Bmatrix} 0.71 \\ 11.0 \\ 0.71 \end{Bmatrix}$$

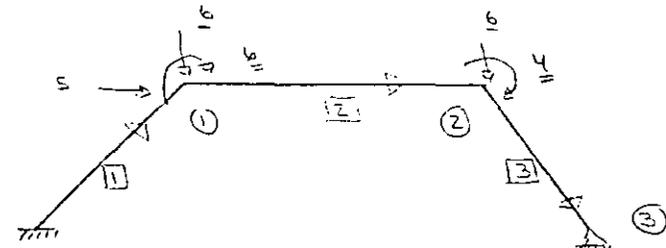
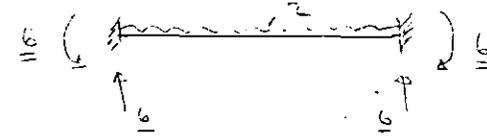
$$u_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

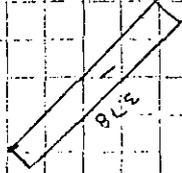
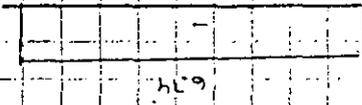
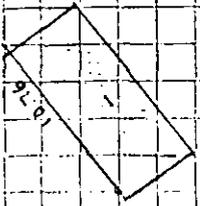
$$u_3 = \begin{Bmatrix} 0.6 \\ -0.8 \end{Bmatrix}$$

$$u_4 = \begin{Bmatrix} 0.71 \\ -0.71 \end{Bmatrix}$$

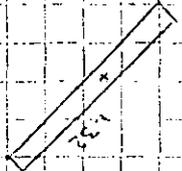
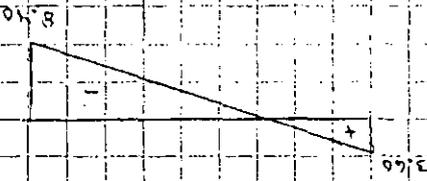
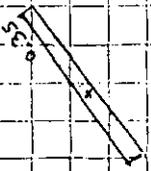
$$u_5 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$u_6 = \begin{Bmatrix} -0.8 \\ -0.6 \end{Bmatrix}$$

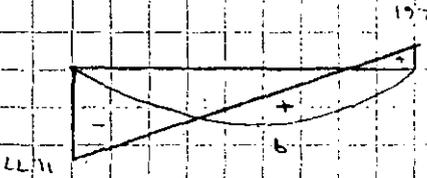




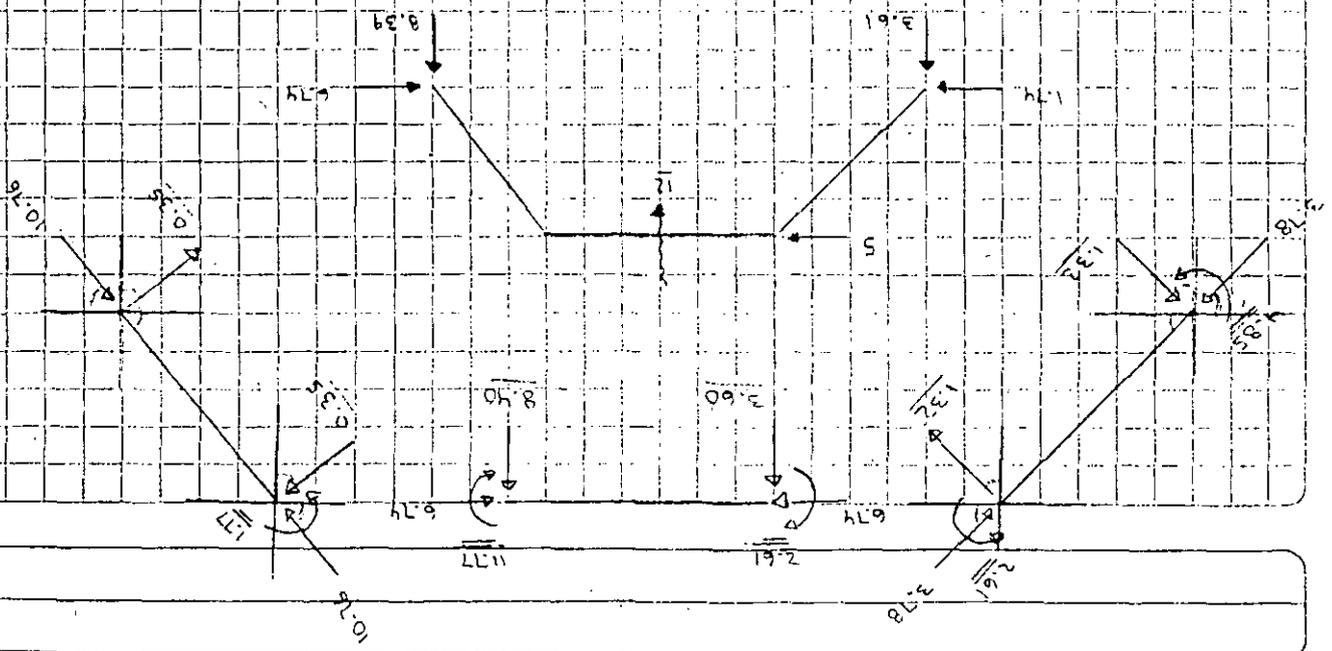
(7) \bar{N}



(7) \bar{V}



(7) \bar{M}





**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

ANALISIS ESTRUCTURAL

**ANALISIS DE EFECTOS DINAMICOS
INTERACCION SUELO - CIMENTACION - ESTRUCTURA
METODO DEL ELEMENTO FINITO (INTRODUCCION)**

M. EN I. JOSE LUIS TRIGOS

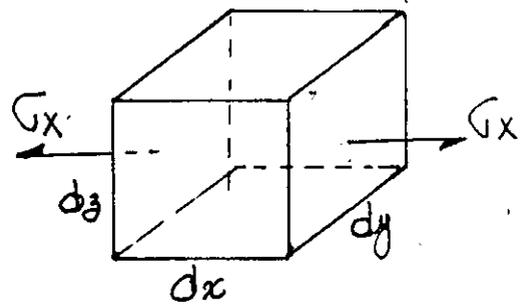
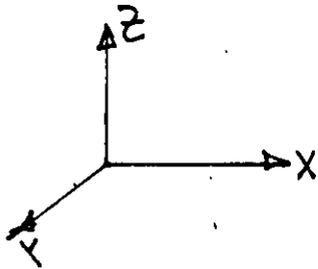
(Coordinador y Profesor)

**Profesor, Facultad de Ingeniería, UNAM
Ingeniero Civil, Consultor**

**Apartado 74 - 171, México D. F. 09080
(525) 689 - 6888 FAX 689 - 6639**

MEXICO

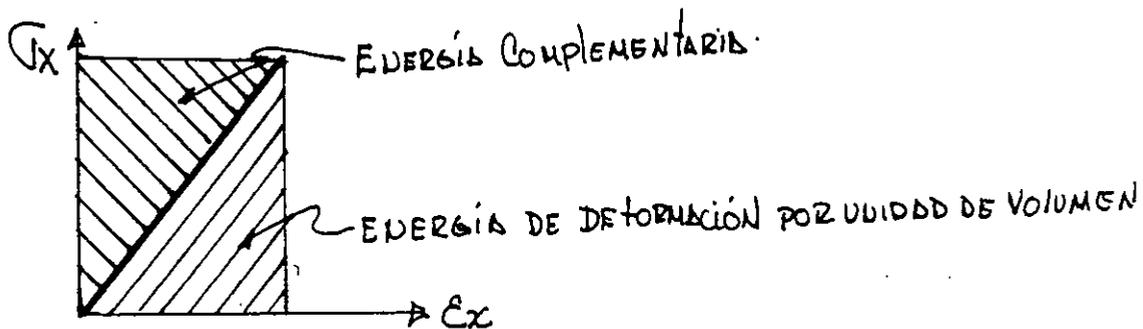
Energía Elástica de Deformación por Esfuerzo Normal



U = energía elástica interna

$$dU = \underbrace{\frac{1}{2} \sigma_x dy dz}_{\text{Trabajo promedio}} \times \underbrace{\epsilon_x dx}_{\text{distancia}} = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy dz \quad (1)$$

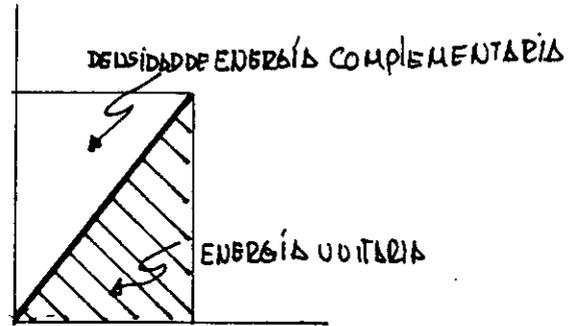
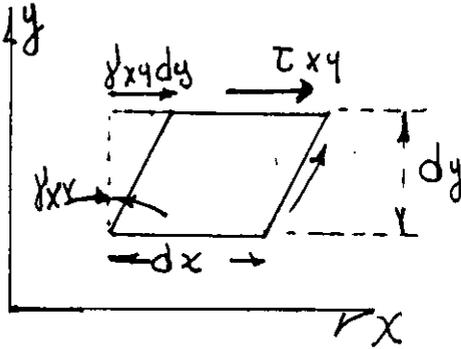
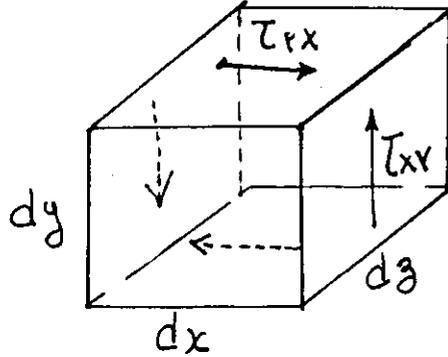
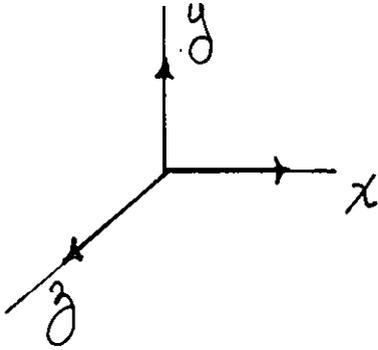
TRABAJO



Para un cuerpo elástico perfecto no hay disipación de energía y el trabajo hecho por un elemento es almacenado como energía de deformación interna recuperable de (1) la densidad de energía.

$$\frac{dU}{dV} = U_0 = \frac{\sigma_x \epsilon_x}{2} \quad (2)$$

Energía elástica de deformación por esfuerzo cortante



$$dU_{\text{corte}} = \frac{1}{2} \tau_{xx} dx dz \times \gamma_{xx} dy = \frac{1}{2} \tau_{xx} \gamma_{xx} dx dy dz$$

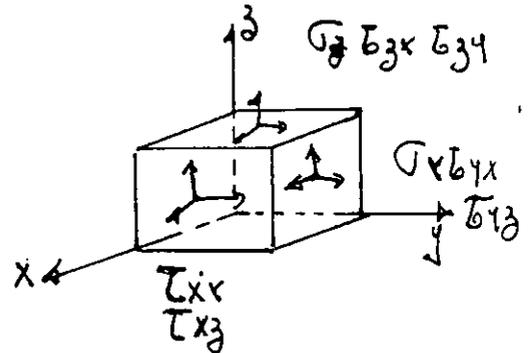
la densidad de energía por esfuerzo cortante es

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{\text{corte}} = \frac{1}{2} \tau_{xx} \gamma_{xx} \tag{4}$$

Aceptando el principio de superposición para un estado multiaxial de esfuerzos.

La densidad de energía de deformación es

$$[\sigma_{ij}]$$



$$\frac{dU}{dV} = U_0 = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x + \frac{1}{2} \sigma_y \epsilon_y + \frac{1}{2} \sigma_z \epsilon_z + \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} + \frac{1}{2} \tau_{yz} \gamma_{yz} + \frac{1}{2} \tau_{zx} \gamma_{zx} \quad (5)$$

Expresando (5) matricialmente se obtiene

$$U_0 = \frac{1}{2} [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} [\sigma] \{\epsilon\} \quad (6)$$

Substituyendo en (5) la ley generalizada de Hooke (7)

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \epsilon_y &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \epsilon_z &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \quad (7)$$

se obtiene.

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (8)$$

Para materiales elásticos lineales homogéneos e isotrópicos se puede obtener una expresión similar a (8) en términos de las deformaciones en lugar de los esfuerzos, la energía total se obtiene de

$$U = \iiint_V U_0 dx dy dz \quad (9)$$

la ecuación (5), es importante al establecer las leyes de plasticidad y (8) es importante en análisis de esfuerzos por métodos energéticos.

Substituyendo (6) en (9) se obtiene

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \epsilon_x + \tau_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \delta_{xy} + \tau_{yz} \delta_{yz} + \tau_{zx} \delta_{zx}) dV \\
 &= \frac{1}{2} \iiint_V [\sigma] \{\epsilon\} dx dy dz \quad (10)
 \end{aligned}$$

Para barras axialmente cargadas, con flexión y cortante (10) queda.

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \epsilon_x + \tau_{xy} \delta_{xy}) dx dy dz \quad (11)$$

Para materiales elásticos lineales

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \text{y} \quad \delta_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (12)$$

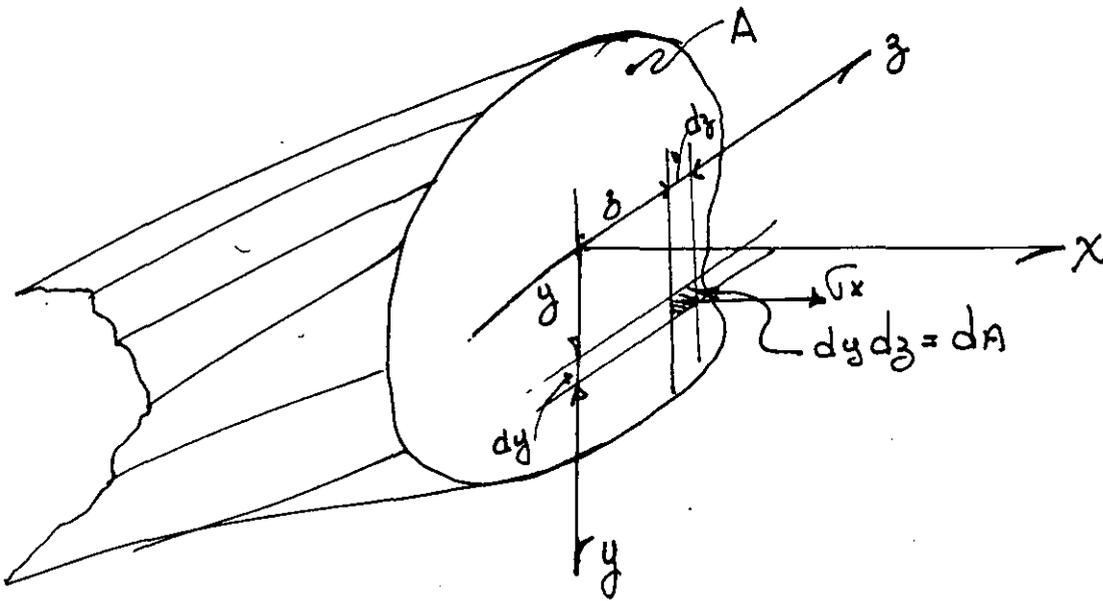
de (12) y (11) se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 U &= \underbrace{\iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dx dy dz}_{\text{Para carga axial, y flexión en vigas}} + \underbrace{\iiint_V \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dx dy dz}_{\text{Para cortante en vigas.}} \quad (13)
 \end{aligned}$$

Energía de deformación para barras cargadas axialmente

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{\text{Carga axial}}{\text{Sección Transversal}}, \quad A = \iint_S dy dz \quad (14)$$

N y A son funciones de x únicamente.



Por lo tanto (13) se reduce a

$$U_N = \iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \iiint_V \frac{N^2}{2A^2 E} dx dy dz$$

$$= \int \frac{N^2}{2A^2 E} \left[\iint_A dy dz \right] dx \Rightarrow \int \frac{N^2}{2EA} dx$$

$$\boxed{U_N = \int_L \frac{N^2}{2EA} dx} \quad (15)$$

Energía de deformación en flexión en este caso

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y \quad (16)$$

De (16) y (13) se obtiene

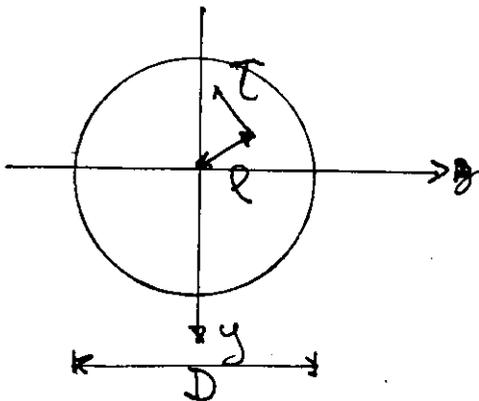
$$\begin{aligned} U_M &= \iiint \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \iiint \frac{1}{2E} \left(-\frac{M y}{I} \right)^2 dx dy dz \\ &= \int \frac{M^2}{2EI^2} \left[\iint y^2 dy dz \right] dx = \int \frac{M^2}{2EI} dx \end{aligned}$$

$$U_M = \int_L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (17)$$

Energía de deformación para secciones circulares en torsión

Para este caso

$$\tau = \frac{M_T}{J} \rho \quad (18)$$



Subst (18) en (13)

$$\begin{aligned} U_T &= \iiint_V \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dx dy dz \\ &= \iiint \frac{1}{2G} \left(\frac{M_T}{J} \rho \right)^2 dx dy dz \end{aligned}$$

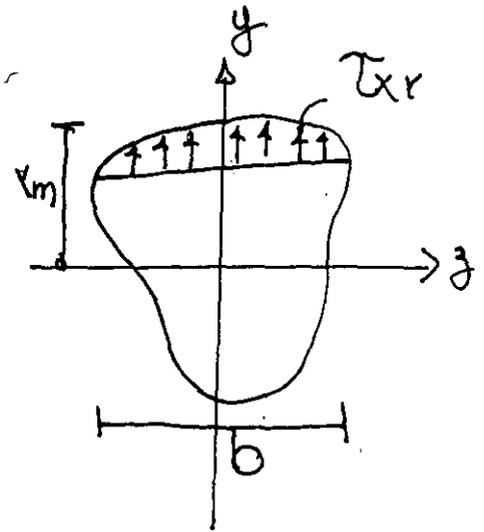
$$U_T = \int \frac{M_T^2}{2GJ^2} \left[\iint \rho^2 dy dz \right] dx = \int \frac{M_T^2}{2GJ} dx$$

Energía de deformación por cortante

En este caso $\tau_{xy} = \frac{V Q_y y_m}{b I}$

$V =$ Cortante en la sección

$Q_y^{y_m} = \int y da =$ momento estático de y a y_m .



$b =$ Ancho a la altura y de los ejes centroidales x, y

$I =$ Momento de Inercia de la sección.

Substituyendo (20) en (13)

$$U_V = \iiint \frac{1}{2G} \left(\frac{V Q_y y_m}{b I} \right)^2 dx dy dz = \int \frac{V^2}{2G I^2} \left[\int_A \left(\frac{Q_y y_m}{b} \right)^2 dy dz \right] dx$$

$$U_V = \int_L \frac{V^2}{2G I^2} \left[\int_A \left(\frac{Q_y y_m}{b} \right)^2 dy dz \right] dx \quad (21)$$

La expresión Total de la energía de deformación

será: $U = U_D + U_M + U_T + U_V$ o sea

$$U = \int \left\{ \frac{U^2}{2EA} + \frac{M^2}{2EI} + \frac{M^2}{2GJ} + \frac{V^2}{2G I^2} \left[\int_A \left(\frac{Q_y y_m}{b} \right)^2 dy dz \right] \right\} dx \quad (22)$$

Desplazamientos

El principio de conservación de energía (la energía no puede ser creada o destruida), puede adoptarse para calcular deformaciones en sistemas elásticos debidos a las cargas aplicadas. La primera Ley de la Termodinámica expresa este principio como

$$\text{Trabajo Realizado} = \text{Cambio de Energía}$$

Para un proceso adiabático (no se agrega o subtrae calor al sistema) y cuando no se genera calor en el sistema, y cuando las fuerzas aplicadas se aplican en forma estática (las fuerzas se aplican tan lentamente que se desprecia la energía -- cinética $\frac{1}{2} mv^2$), el caso especial de este ley para sistemas conservativos se reduce a

$$W_e = U$$

Donde: W_e = trabajo hecho por las fuerzas externas durante el proceso de carga.

U = Energía total de deformación almacenada en el Sistema.

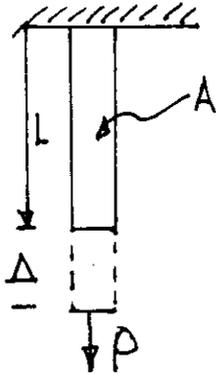
Similar a decir que la suma del trabajo externo W_e y el interno W_i deben ser cero.

$$W_e + W_i = 0$$

$U = -W_i$ las deformaciones siempre se oponen a las fuerzas internas. Es importante considerar la aplicación gradual de las cargas de cero a su valor total por lo tanto W_e será $\frac{1}{2}$ Fuerza total por el desplazamiento.

Ejemplos

a) Determine la deflexión de la viga mostrada



$$W_e = \frac{1}{2} P \Delta \quad \text{y de (22)}$$

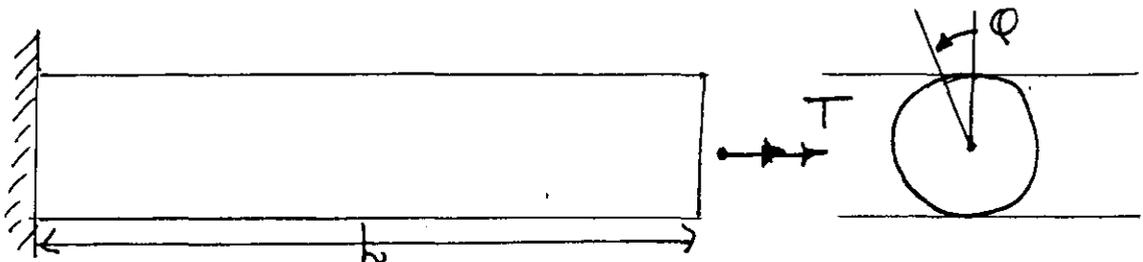
$$U = \frac{1}{2EA} \int M^2 dx$$

$$= \frac{P^2}{2EA} \int_0^L dx = \frac{P^2 L}{2EA}$$

$$\text{de (23)} \Rightarrow \frac{1}{2} P \Delta = \frac{P^2 L}{2EA}$$

$$\Delta = \frac{PL}{AE} \quad \text{Ley de Hooke}$$

b) Determine la rotación en el extremo de una flecha de sección circular.



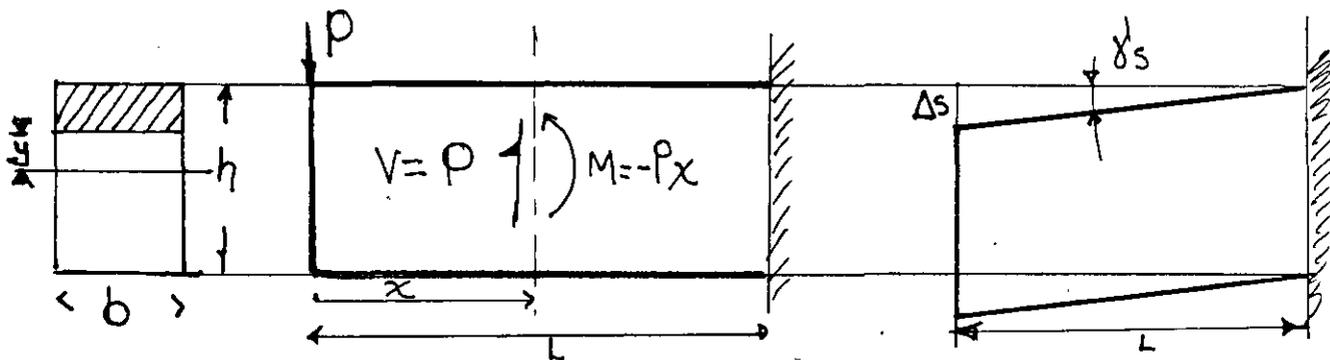
El trabajo externo $W_e = \frac{1}{2} T Q$ y el interno de (22)

$$U = \frac{T^2}{2GJ} \int_0^L dx = \frac{T^2 L}{2GJ} \quad \text{de (23)}$$

$$\frac{1}{2} T \varphi = \frac{T^2 L}{2GJ} \Rightarrow \varphi = \frac{T L}{GJ} \quad \text{que.}$$

coincide con los valores de los textos de Mecánica de Materiales.

c) Determinar la deflexión máxima en la viga mostrada considerando el efecto del cortante y de flexión.



Trabajo externo $W_e = \frac{1}{2} P \Delta s$, la energía interna consta de dos partes, una debida a los esfuerzos de flexión y otra a los esfuerzos de corte de (17) y (13).

$$U_{\text{Flexion}} = \frac{1}{2EI} \int_0^L M^2 dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L (-Px)^2 dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

$$\text{El esfuerzo de corte: } \tau = \frac{V Q y_m}{b I} = \frac{P}{2I} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2 \right]$$

que sustituido en la segunda parte de (13) se obtiene

Obtiene

$$U_{\text{corte}} = \iiint_V \frac{\tau^2}{2G} dx dy dz = \frac{1}{2G} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{P}{2I} \left[\frac{h^2}{2} - y^2 \right] \right\}^2 L b dy$$

$$= \frac{P^2 L b}{8G I^2} \times \frac{h^5}{30} = \frac{P^2 L b h^5}{240G} \left(\frac{12}{bh^3} \right)^2 = \frac{3P^2 L}{5AG}$$

donde $A = bh$ sección transversal. Entonces

$$U_e = U = U_{\text{flexión}} + U_{\text{corte}}$$

$$\frac{P\Delta}{2} = \frac{P^2 L^3}{6EI} + \frac{3P^2 L}{5AG} \quad \text{de donde}$$

$$\Delta = \underbrace{\frac{PL^3}{3EI}}_{\text{flexión}} + \underbrace{\frac{6PL}{5AG}}_{\text{corte}} \quad (24)$$

El término debido al cortante se puede interpretar

$$\tau_{\text{av}} = \frac{P}{A} = \frac{V}{A} \quad \text{cortante promedio.}$$

puesto que τ varía parabólicamente $\frac{6}{5}$ representa un factor de corrección numérico por lo tanto

$$\Delta_{\text{corte}} = \delta_s L = \alpha \frac{\tau_{\text{av}} L}{G} = \alpha \frac{VL}{AG} = \frac{6}{5} \frac{PL}{AG}$$

el valor α depende de la forma de la sección en general

puede variar con X de (24)

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI} \left(1 + \frac{3E}{10G} \frac{h^2}{L^2} \right) \quad (25)$$

suponiendo acero estructural

$$\frac{E}{G} = 2(1 + \nu) \doteq 2.5 \quad \text{y la ec. (25) queda}$$

$$\Delta = \left(1 + 0.75 \frac{h^2}{L^2}\right) \Delta_{\text{flexión}} \quad (26)$$

12

De (26) se observa que para una viga corta sea $h = L$ la deflexión total es $\Delta = 1.75 \Delta_{\text{flexión}}$ por lo cual la deformación de corte es muy importante para una viga flexible se $L = 10 h$.

$$\Delta = \left(1 + 0.75 \frac{h^2}{(10h)^2}\right) \Delta_{\text{flexión}}$$

$$\Delta = 1.0075 \Delta_{\text{flexión}}$$

La deflexión debida al corte se puede despreciar no siempre es posible considerar lo anterior.

Comparando las expresiones (1.1.6.1C) (1.1.6.2C) y (1.1.6.2C) para un claro $l = 5.00$ m y un peralte $h = 30$ cm se obtiene:

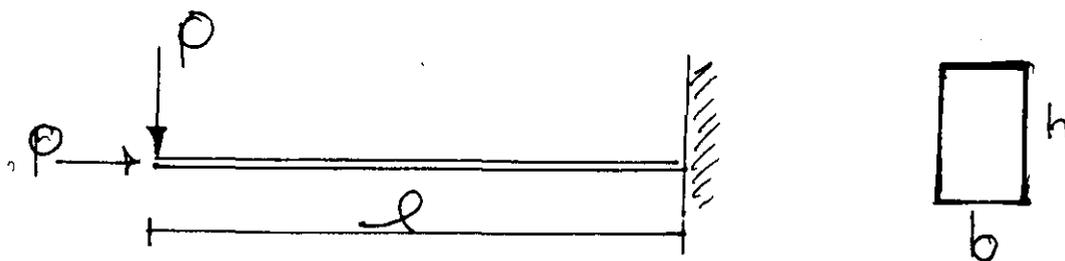
$$U_v = 0.00286 U_M$$

$$U_N = 0.0009 U_M$$

(a)

En la mayoría de los problemas estructurales elásticos lineales, la energía de deformación debida a la carga normal N y cortante V es despreciable respecto a la energía de deformación debida al momento flexionante M .

Cuando existe momento torsionante M_T (vigas en balcón, etc.), su energía de deformación es considerable y debe tomarse en cuenta su valor

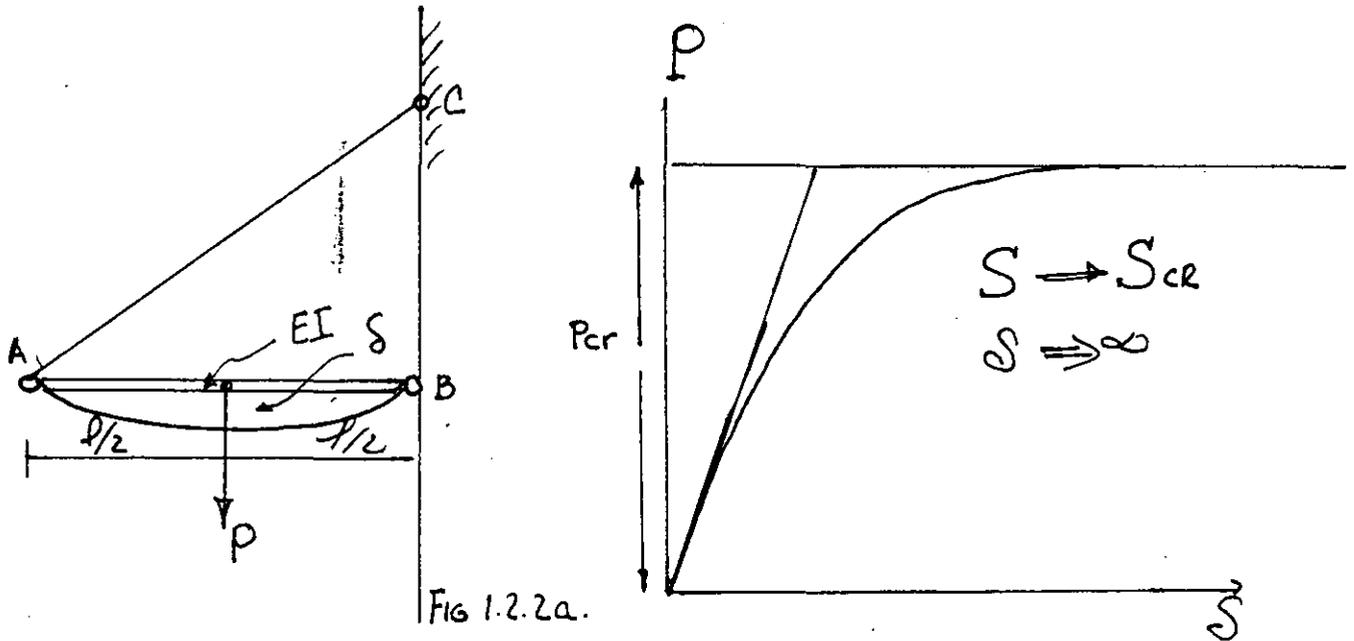


1.2 Principio de Superposición

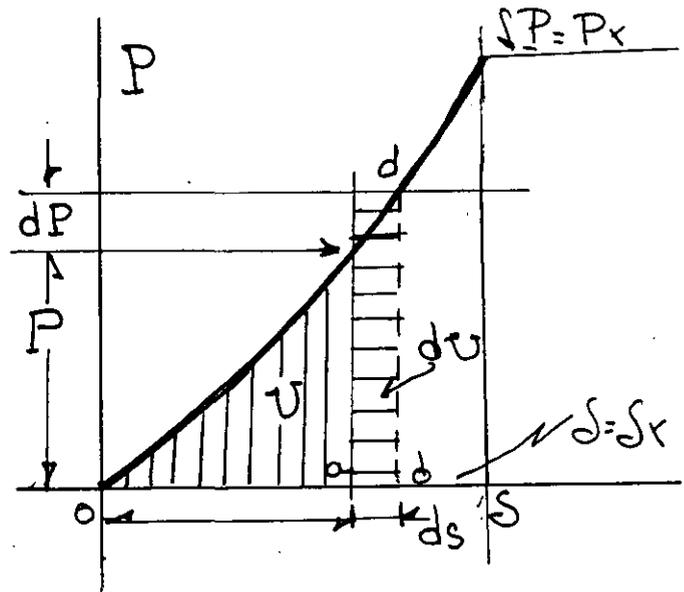
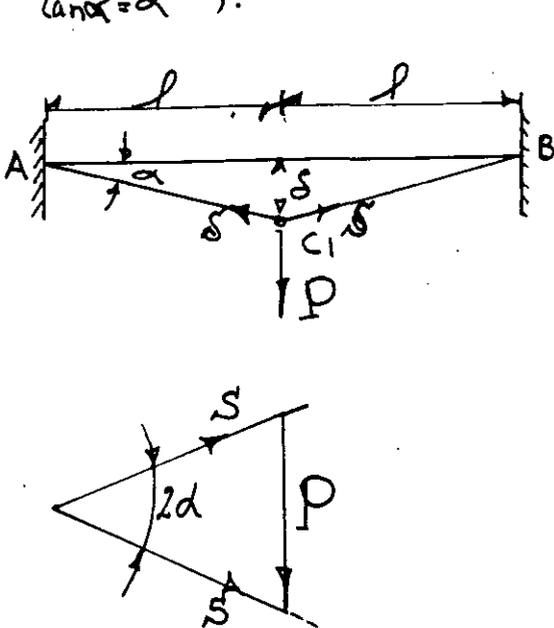
1.2.1.- Introducción

En los sistemas de cargas en los que las deflexiones son funciones lineales de las cargas, se puede obtener la deflexión en un punto cualquiera, mediante la suma de las deflexiones producidas individualmente en dicho punto por cada una de las cargas.

1.2.2.- Casos en que no rige el principio.



Otro ejemplo en el cual el principio de super posición no rige, sería el sistema mostrado en la fig. 1.2.2.b, formado por dos barras articuladas, bajo la acción de pequeñas deformaciones ($\tan \alpha \approx \alpha$).



pequeñas deformaciones: $\alpha \approx S/l$ 1.2.2b

Equilibrio: $S = \frac{P}{2\alpha}$ 1.2.2c.

Compatibilidad geométrica: la deformación axial unitaria es:

$$\epsilon = \frac{\sqrt{l^2 + S^2} - l}{l} \approx \frac{1}{2} \frac{S^2}{l^2} \quad 1.2.2d$$

Ley de Hooke:

$$\epsilon = \frac{S}{AE} \quad 1.2.2e$$

de 1.2.2 c,d y e se obtiene:

$$S = l \sqrt[3]{\frac{P}{AE}}, \quad P = \frac{S^3 AE}{l^3} \quad 1.2.2f$$

De nuevo se observa que la deflexión no es función lineal de P aunque el material cumple enteramente con la ley de Hooke y la relación entre y y P es representada por la curva de la figura 1.2.2.b. El área o a b representa el trabajo efectuado por P durante la deflexión y y es igual a la energía de deformación almacenada en la barras AC y CB., la cual es igual a :

$$U = \int_0^S P ds = \frac{AE}{l^3} \int_0^l s^3 ds = \frac{AE S^4}{4 l^3} \quad 1.2.2.g$$

$$o \quad U = \frac{l P^{4/3}}{4^3 \sqrt{AE}} \quad 1.2.2.h.$$

Es muy importante observar que en los ejemplos anteriores no es función de segundo grado de S o P , como se obtiene en los casos que el principio de superposición rige.

En los ejemplos anteriores, se observa que la acción de las fuerzas exteriores es considerablemente afectada por las pequeñas deformaciones del sistema, en el primer ejemplo hay una flexión adicional SS a la compresión S y la barra trabaja en flexo compresión.

1.2.3 Ecuaciones generales de superposicion
1.2.3.1 Introduccion

*

En el analisis de esfuerzos en estructuras estaticamente indeterminadas no solamente hay que considerar la geometria y estatica, si no tambien las propiedades elasticas tales como modulo de elasticidad momento de inercia, etc. Generalmente para llegar al dimensionamiento final de la estructura, se suponen dimensiones preliminares de los miembros y se efectua su analisis correspondiente, ciclo que puede repetirse en algunos casos hasta llegar al diseño final. En general los esfuerzos desarrollados en estructuras hiperestaticas son debidos no solo a las cargas, si no tambien a cambios de temperatura, asentamiento de apoyos, errores de fabricacion. etc.

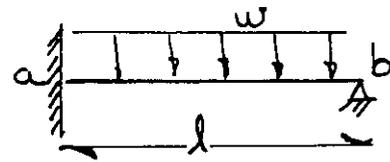
Es importante observar que la estructura este en condiciones de equilibrio estable. Con el proposito de ilustrar el uso de las ecuaciones generales de superposicion de causas y efectos, consideramos el siguiente ejemplo, viga con carga uniforme w .

*. En ambos metodos de rigidez y flexibilidad. debe regir el principio de superposicion.

empotrada en a y libremente apoyada en b.

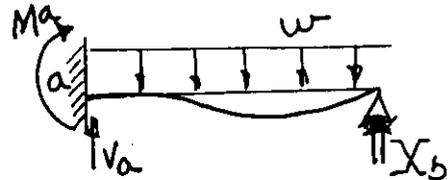
Estructura actual.

Δ_b = Deflexion de el punto b en la estructura debida a todas las causas.



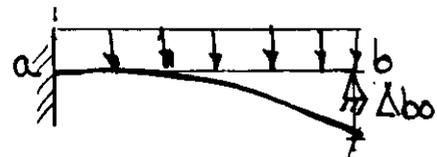
Estructura primaria.

Selecccion de redundante, X_b

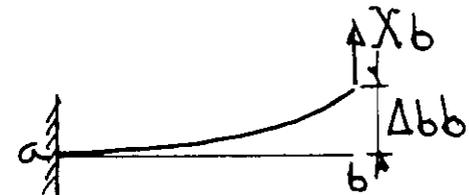


Condicion de equilibrio $X_b=0$

Δ_{b0} = Deflexion en direccion de la redundante con $X_b=0$



Δ_{bb} = Deflexion en direccion de la redundante debida a con



S_{bb} = Deflexion en direccion de la redundante debido a una fuerza unitaria



La ecuacion de superposicion, si el principio es valido

$$\Delta_b = \Delta_{b0} + \Delta_{bb} = \Delta_{b0} + X_b S_{bb} = 0 \quad (a)$$

de donde:

$$X_b = -\frac{\Delta_{b0}}{S_{bb}}$$

(S_{bb} o Δ_{bb} es llamado coeficiente de flexibilidad)

1.2.3.2. Ecuaciones generales de super posición en análisis de estructuras estáticamente indeterminadas de grado n.

Suponiendo que la estructura es hiperestática de grado n, se seleccionan las redundantes X1,X2,...,Xn, en una forma tal que la estructura primaria en condición de equilibrio.

Xi=0 sea estable e isostatica, aceptando la siguiente notacion:

Δ_i = Deflexion total del punto i debida a todas las cargas y efectos.

Δ_{i0} = Deflexion del punto i en direccion de la redundante Xi en condiciones de equilibrio estable isostatico Xi=0 .

Δ_{it} = Deflexion del punto i debida a un cambio de temperatura T.

Δ_{ia} = Deflexion del punto i debida a asentamientos de apoyo.

Δ_{ie} = Deflexiones en el punto i debido a errores de fabricacion.

S_{i1} = Deflexion en el punto i debida a la condicion X1=1

S_{i2} = Deflexion en el punto i debida a la condicion X2=1

.....

S_{in} = Deflexion en el punto i debido a la condicion $X_n=1$
Xn=1

Cualquier redundante puede suponerse que actua arbitrariamente en cierto sentido. Cualquier deflexion del punto de aplicacion de la redundante debera ser medida a lo largo de su linea de accion y sera positiva cuando el sentido es el mismo que el supuesto para la redundante.

Por lo tanto usando la notacion y convencion de signos mencionada, las ecuaciones generales de super posicion en sistemas estructurales coplanares y espaciales son:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{10} + \Delta_{1T} + \Delta_{1A} + \Delta_{1E} + X_1 S_{11} + X_2 S_{12} + \dots + X_n S_{1n} \\ \Delta_2 &= \Delta_{20} + \Delta_{2T} + \Delta_{2A} + \Delta_{2E} + X_1 S_{21} + X_2 S_{22} + \dots + X_n S_{2n} \\ &\vdots \\ \Delta_n &= \Delta_{n0} + \Delta_{nT} + \Delta_{nA} + \Delta_{nE} + X_1 S_{n1} + X_2 S_{n2} + \dots + X_n S_{nn} \end{aligned} \right\} (a)$$

Expresando (a) matricialmente se tiene

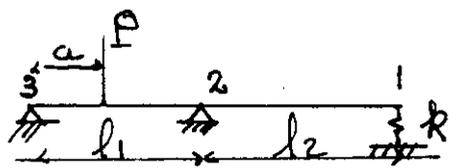
$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Delta_1 - \Delta_{10} - \Delta_{1T} - \Delta_{1A} - \Delta_{1E}) \\ (\Delta_2 - \Delta_{20} - \Delta_{2T} - \Delta_{2A} - \Delta_{2E}) \\ \vdots \\ (\Delta_n - \Delta_{n0} - \Delta_{nT} - \Delta_{nA} - \Delta_{nE}) \end{bmatrix} (b)$$

1.2.3.3. Ejemplos que ilustran el uso de las ecuaciones de super posicion.

Antes de estudiar los ejemplos es conveniente observar lo siguiente:

1. Nunca seleccionar como redundante una reaccion estaticamente determinada, ello conduciria a una estructura primaria en equilibrio inestable en condicion $X_i=0$
2. El sentido positivo de la redundante se puede seleccionar arbitrariamente, y su deflexion sera positiva si tiene el mismo sentido
3. Debe observarse que A_i , deflexion total del punto de aplicacion de la redundante X_i debida a todas las causas es casi siempre cero

Estructura actual



k Constante elastica resorte (L/F)

Estructura primaria
 $A_1 = X_1 k l_2$ (c)



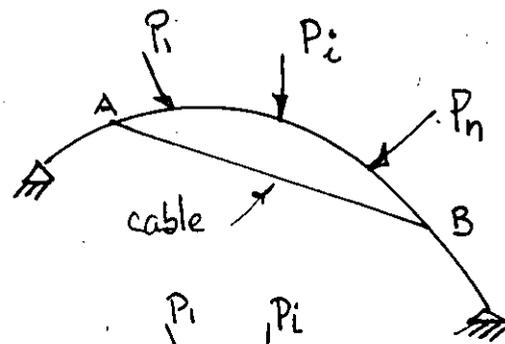
Condicion $X_1=0$



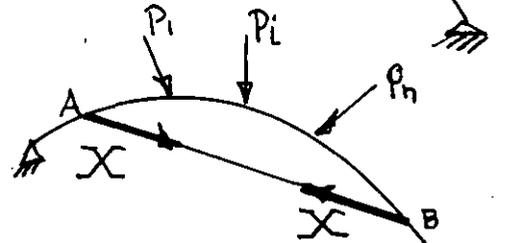
Condicion $X_1=1$
 De Ec. (a) se tiene
 $A_1 = A_{10} - X_1 S_{11}$ (d)
 de (c) y (d) se obtiene
 $X_1 = A_{10} / (S_{11} + k l_2 - 1)$ (e)



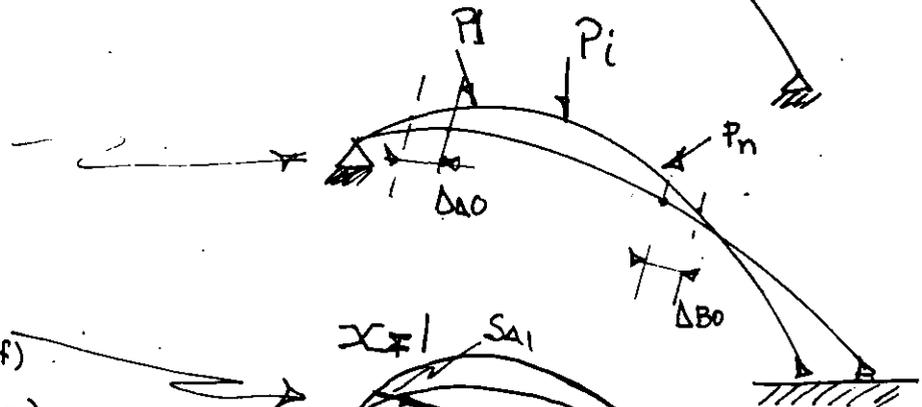
Estructura actual:
Arco coplanar con un tirane
AB bajo un sistema de cargas
 P_n



Estructura primaria:
Selección como redundante la
tensión en el cable, X



Condición $X=0$



Condición $X=1$

$$\Delta_{AB} = \Delta_{A0} + \Delta_{B0} \quad (f)$$

$$\Delta_A = \Delta_{A0} + X S_{A1} \quad (g)$$

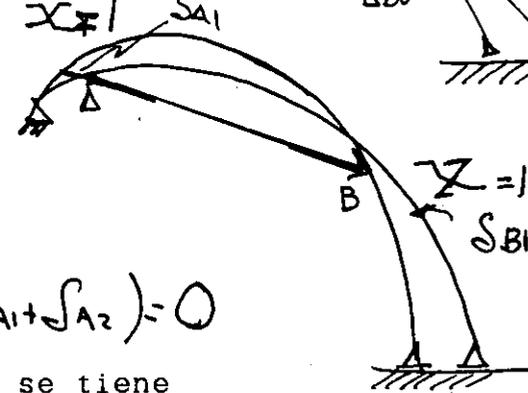
$$\Delta_B = \Delta_{B0} + X S_{B1} \quad (h)$$

Su mando (g) y (h)

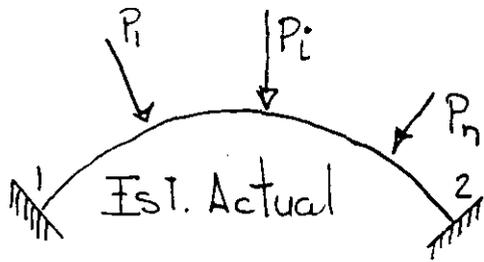
$$\Delta_A + \Delta_B = \Delta_{A0} + \Delta_{B0} + X (S_{A1} + S_{B1}) = 0$$

de donde despejando la redundante X se tiene

$$X = - \frac{\Delta_{A0} + \Delta_{B0}}{S_{A1} + S_{B1}} \quad (i)$$



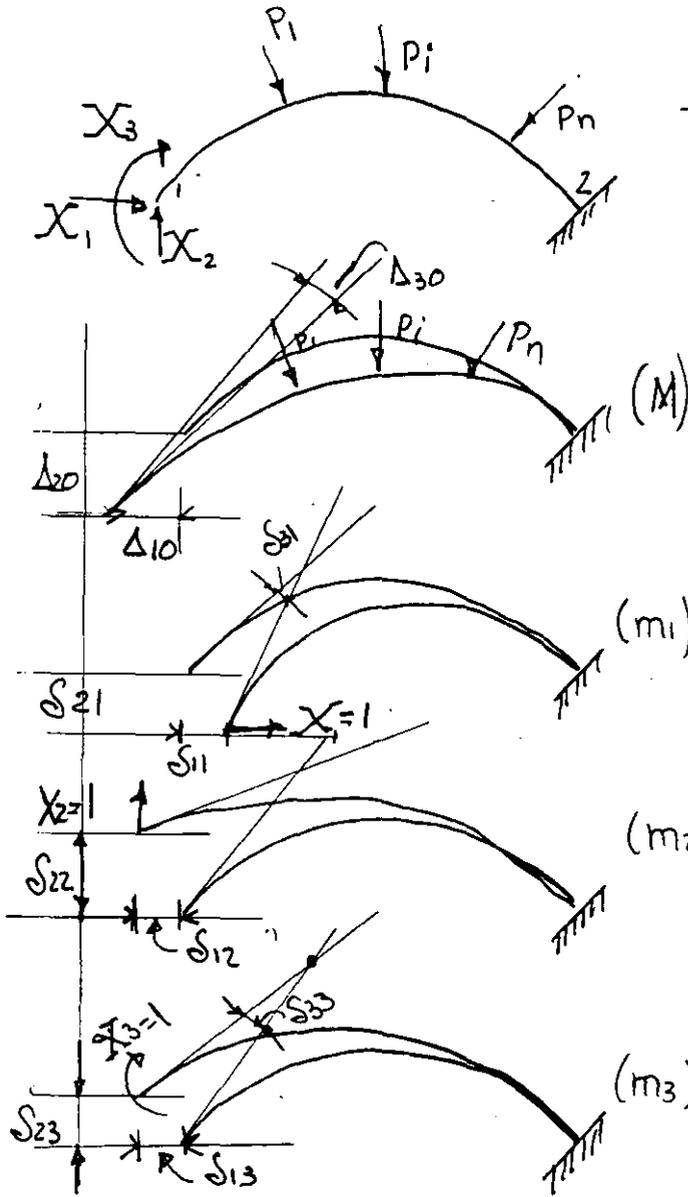
Problema hiperestático de orden 3



ESTRUCTURAS PRIMARIAS

Selección de redundantes

X_1, X_2, X_3 y condición de empotramiento $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$
Condición $X=0$



condición $X_1 = 1$

condición $X_2 = 1$

condición $X_3 = 1$

Las ecuaciones aplicando el principio de superposición

son: $\Delta_1 = \Delta_{10} + X_1 S_{11} + X_2 S_{12} + X_3 S_{13}$

$\Delta_2 = \Delta_{20} + X_1 S_{21} + X_2 S_{22} + X_3 S_{23}$ (d)

$\Delta_3 = \Delta_{30} + X_1 S_{31} + X_2 S_{32} + X_3 S_{33}$

Expresando (j) en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \\ \Delta_{30} \end{Bmatrix} \quad (k)$$

Aplicando el teorema de Castigliano y la expresion de la energia de deformacion por flexion, los coeficientes de flexibilidad son igual a

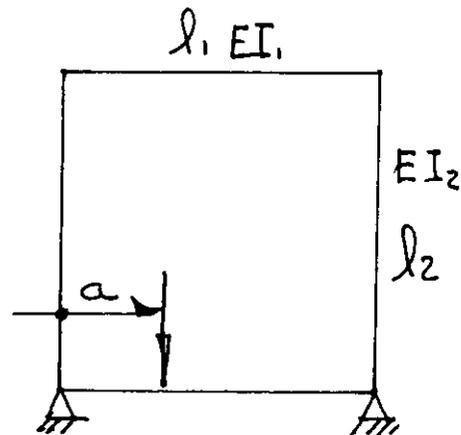
$$\Delta_{10} = \int \frac{M m_1}{EI} ds, \quad \Delta_{20} = \int \frac{M m_2}{EI} ds, \quad \Delta_{30} = \int \frac{M m_3}{EI} ds$$

$$S_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} ds, \quad S_{12} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} ds; \quad S_{33} = \int \frac{m_3^2}{EI} ds$$

$$S_{12} = S_{21} = \left[\int \frac{m_1 m_2}{EI} ds \right], \quad S_{13} = S_{31} = \int \frac{m_1 m_3}{EI} ds, \quad S_{23} = S_{32} = \int \frac{m_2 m_3}{EI} ds.$$

Marco continuo rectangular bajo la accion de una carga p

Estructura actual



selección de redundantes

En este caso las ecuaciones de superposición son:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{10} + X_1 S_{11} + X_2 S_{12} + X_3 S_{13} = 0 \\ \Delta_2 &= \Delta_{20} + X_1 S_{21} + X_2 S_{22} + X_3 S_{23} = 0 \quad (m) \\ \Delta_3 &= \Delta_{30} + X_1 S_{31} + X_2 S_{32} + X_3 S_{33} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \\ \Delta_{30} \end{Bmatrix} \quad (h)$$

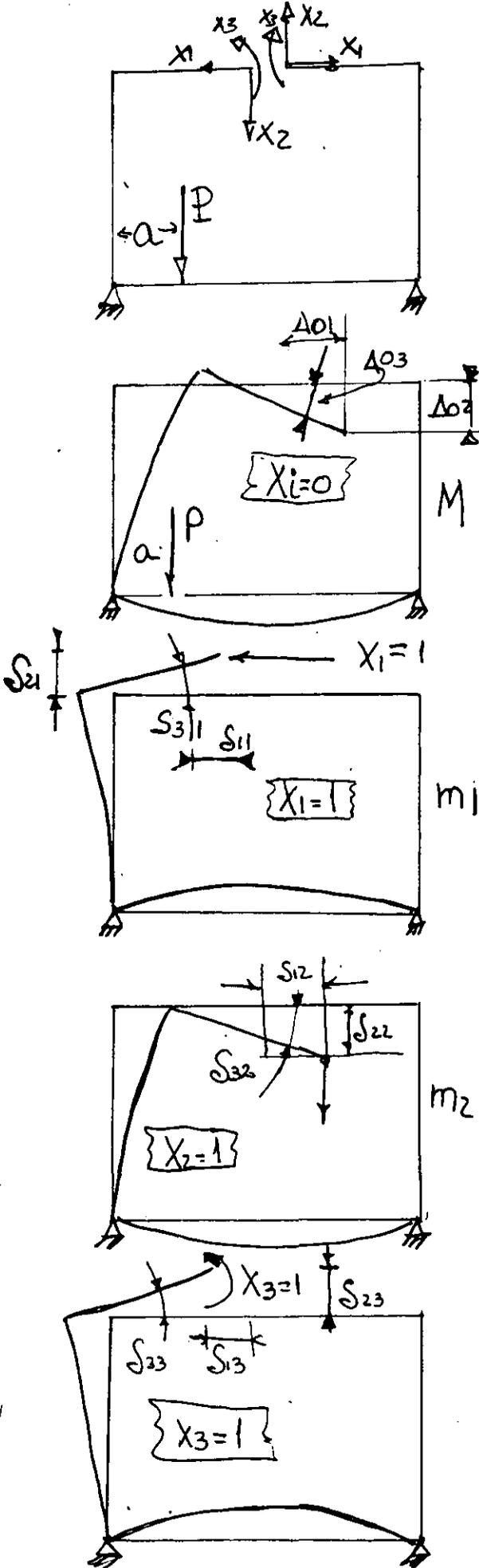
Del Teorema de Castigliano y la energía elástica de deformación se obtienen los coeficientes de flexibilidades S_{ij} y Δ_{i0}

$$\Delta_{01} = \int \frac{M m_1}{EI} ds, \quad \Delta_{02} = \int \frac{U m_2}{EI} ds, \quad \Delta_{03} = \int \frac{U m_3}{EI} ds$$

$$S_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} ds, \quad S_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} ds, \quad S_{33} = \int \frac{m_3^2}{EI} ds$$

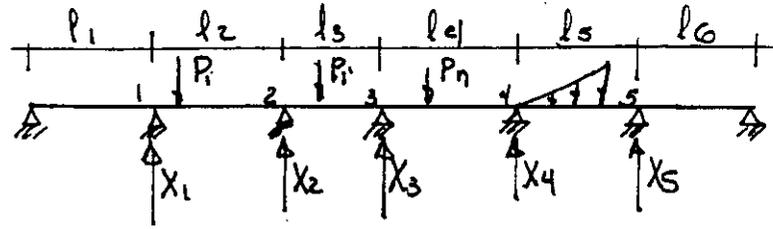
$$S_{12} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} ds, \quad S_{13} = \int \frac{m_1 m_3}{EI} ds, \quad S_{23} = \int \frac{m_2 m_3}{EI} ds$$

$$S_{12} = S_{21}, \quad S_{13} = S_{31}, \quad S_{23} = S_{32}$$

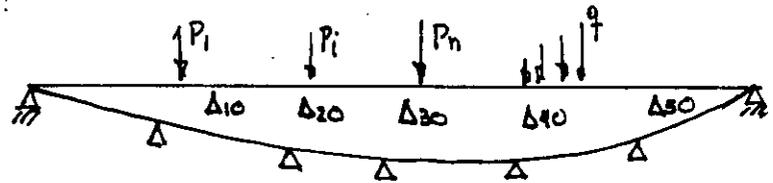


Viga continua de 7 apoyos

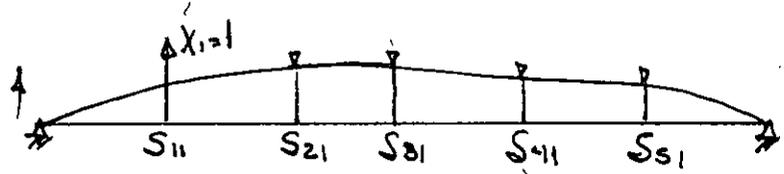
ESTRUCTURA ACTUAL Y PRIMARIA



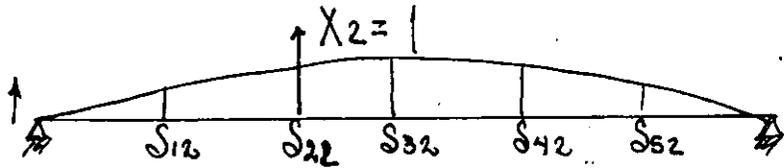
Condición $X_1 = 0$



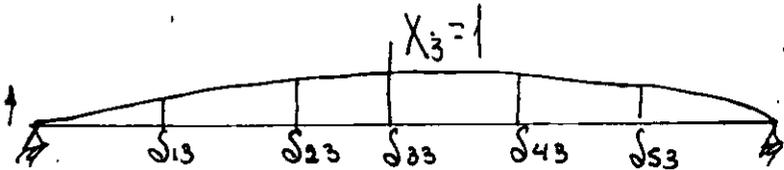
Condición $X_1 = 1$



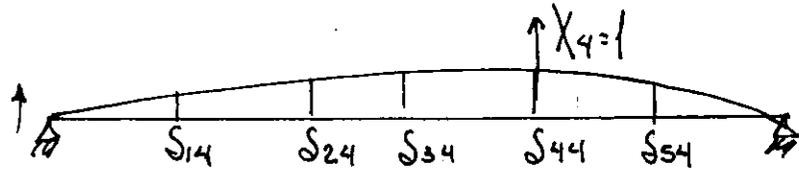
Condición $X_2 = 1$



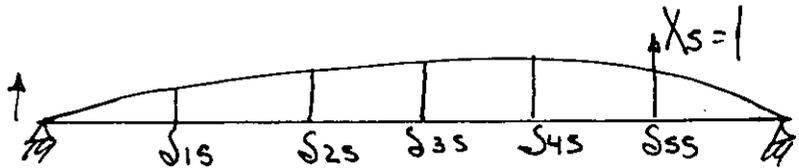
Condición $X_3 = 1$



Condición $X_4 = 1$



Condición $X_5 = 1$



Ecuación

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{10} + X_1 S_{11} + X_2 S_{12} + X_3 S_{13} + X_4 S_{14} + X_5 S_{15} = 0 \\ \Delta_2 &= \Delta_{20} + X_1 S_{21} + X_2 S_{22} + X_3 S_{23} + X_4 S_{24} + X_5 S_{25} = 0 \\ \Delta_3 &= \Delta_{30} + X_1 S_{31} + X_2 S_{32} + X_3 S_{33} + X_4 S_{34} + X_5 S_{35} = 0 \\ \Delta_4 &= \Delta_{40} + X_1 S_{41} + X_2 S_{42} + X_3 S_{43} + X_4 S_{44} + X_5 S_{45} = 0 \\ \Delta_5 &= \Delta_{50} + X_1 S_{51} + X_2 S_{52} + X_3 S_{53} + X_4 S_{54} + X_5 S_{55} = 0 \end{aligned}$$

$$[S_{ij}] \{X_j\} + \{\Delta_{j0}\} = 0$$

1.3 Generalización de la energía de deformación

La energía de deformación de una barra elástica puede representarse como una función de segundo grado de la carga o la deformación.

La misma conclusión es válida para cualquier estructura dentro del régimen elástico, siempre y cuando el principio de superposición pueda aplicarse, en la Fig. 1.3.1 suponiendo que las fuerzas se aplican simultáneamente e incrementan gradualmente hasta su valor final.

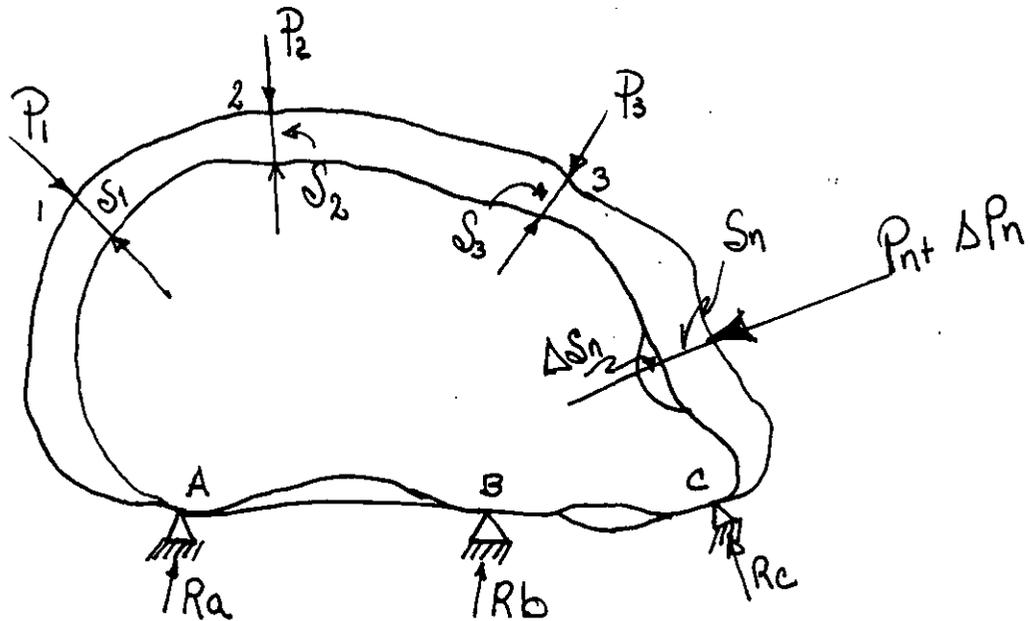


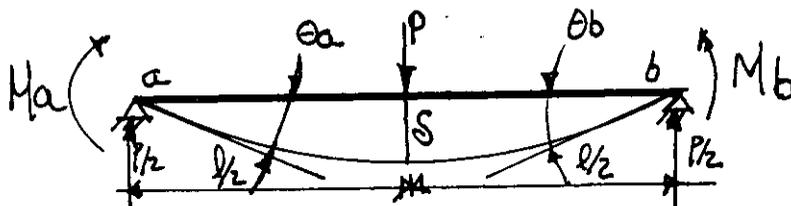
fig. 1.3.1

El principio de superposición rige, los desplazamientos serán funciones lineales de las cargas. El trabajo elástico de todas.

Las fuerzas externas es igual a la energía interna de deformación almacenada en el cuerpo elástico de la figura 1.3.1 y será

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i S_i = \frac{1}{2} (P_1 S_1 + P_2 S_2 + \dots + P_n S_n) \quad (1.3.1)$$

1.3.1. Ejemplo, viga libremente apoyada cargada como se indica en la fig. 1.3.1a



La energía de deformación es:

$$U = \frac{1}{2} (P S + M_a \theta_a + M_b \theta_b) \quad (a)$$

De la curva elástica de la viga se demuestra que:

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{P l^3}{48 E I} + \frac{M_a l^2}{16 E I} + \frac{M_b l^2}{16 E I} \\ \theta_a &= \frac{P l^2}{16 E I} + \frac{M_a l}{3 E I} + \frac{M_b l}{6 E I} \\ \theta_b &= \frac{P l^2}{16 E I} + \frac{M_a l}{6 E I} + \frac{M_b l}{3 E I} \end{aligned} \right\} (b)$$

Substituye (b) en (a) se obtiene

$$U = \frac{l^3}{96EI} \left(P^2 + \frac{6}{l} PMa + \frac{6}{l} PMb + \frac{16}{l^2} Ma^2 + \frac{16}{l^2} Mb^2 + \frac{16}{l^2} MaMb \right) \quad (c)$$

en (c) se observa que U es una función de segundo grado de las fuerzas y momentos P, Ma y Mb

Tarea

En el ejemplo de la viga de la fig. 1.3.1. a demostrar:

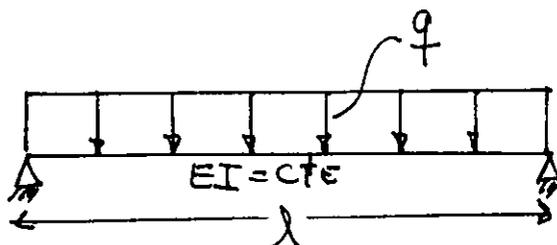
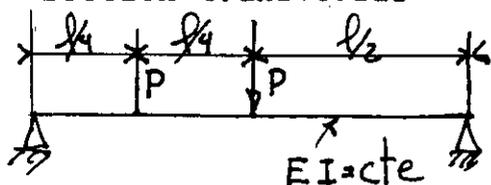
$$a) \frac{\partial U}{\partial P} = S, \quad \frac{\partial U}{\partial Ma} = \Theta_a, \quad \frac{\partial U}{\partial Mb} = \Theta_b$$

b) De (a) y (b) obtener U en función de los desplazamientos S, Θ_a , Θ_b

a) Demostrar que:

$$\frac{\partial U}{\partial S} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial \Theta_a} = Ma, \quad \frac{\partial U}{\partial \Theta_b} = Mb$$

Calcular la energía de deformación de las siguientes vigas de sección transversal



1.4 Teorema de Castigliano

Suponiendo que el principio de superposición rige y que U se expresa en función de las fuerzas externas se tiene que: LA DERIVADA DE LA ENERGIA DE DEFORMACION CON RESPECTO A UNA DE LAS FUERZAS O MOMENTOS EXTERNOS DA EL DESPLAZAMIENTO O EL GIRO DE LA FUERZA O MOMENTO CORRESPONDIENTE

$$\frac{\partial U}{\partial P_n} = S_n \quad (1.4.1)$$

Considerando el cuerpo elástico bajo la aplicación de P_1, P_2, \dots, P_n . Durante la aplicación de P_i se producen deformaciones y se almacena cierta energía de deformación dentro del cuerpo (Fig. 1.3.1.) Si subsecuentemente a P_n se aplica un incremento ΔP_n , la energía U incrementará

$$U + \Delta U = U + \frac{\partial U}{\partial P_n} \Delta P_n \quad (1.4.2)$$

Si en vez de aplicar ΔP_n después de las cargas se aplica antes se tiene

$$U + \Delta U = U + \Delta P_n (S_n + \Delta S_n) = U + \Delta P_n S_n \quad (1.4.3)$$

igualando (1.4.2.) con (1.4.3.) se demuestra (1.4.1.).

1.4.1. Ejemplos de aplicacion

La variacion de $M(x)$ es

$$M = Ma - Px \quad (a)$$

La energia de deformacion por flexion

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (b)$$

Del teorema de Castigliano

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \Delta a = \int \frac{M \frac{\partial M}{\partial P}}{EI} ds$$

$$\Delta a = \int_0^l \frac{M m_1}{EI} ds \quad (c)$$

Sustituyendo (a) en (c)

$$\Delta a = \frac{1}{EI} \int_0^l (Ma - Px)(-x) dx$$

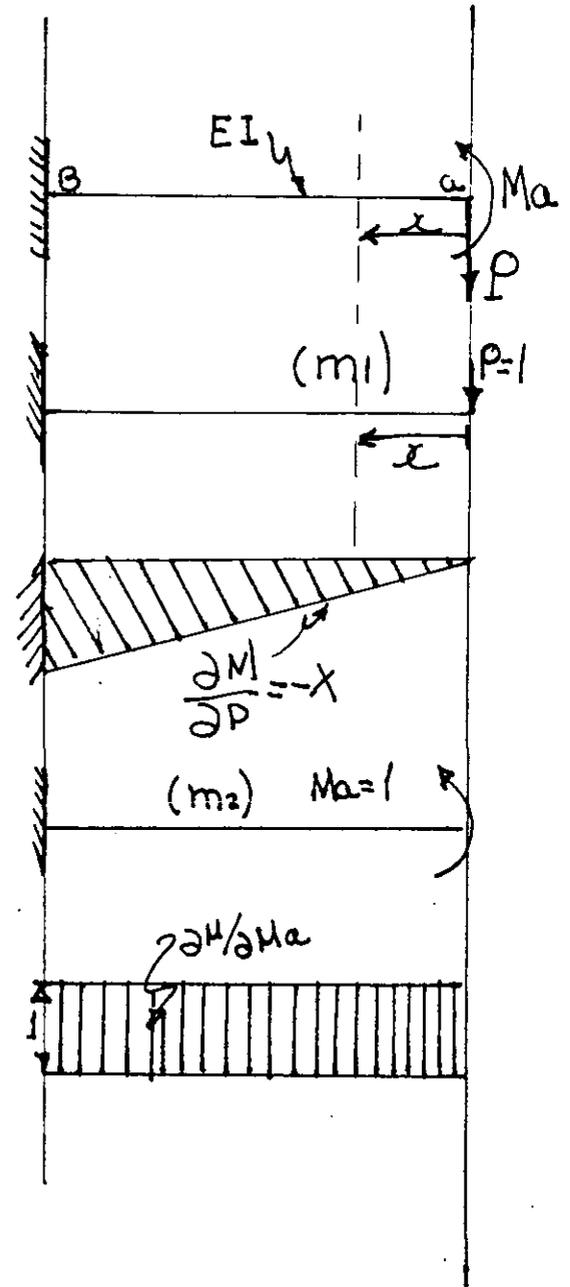
$$\Delta a = \frac{Pl^3}{EI} - \frac{Mal^2}{2EI} \quad (d)$$

De nuevo del teorema de Castigliano

$$\frac{\partial U}{\partial Ma} = \Theta a = \int_0^l \frac{M \frac{\partial M}{\partial Ma}}{EI} dx = \int_0^l \frac{M m_2}{EI} dx \quad (e)$$

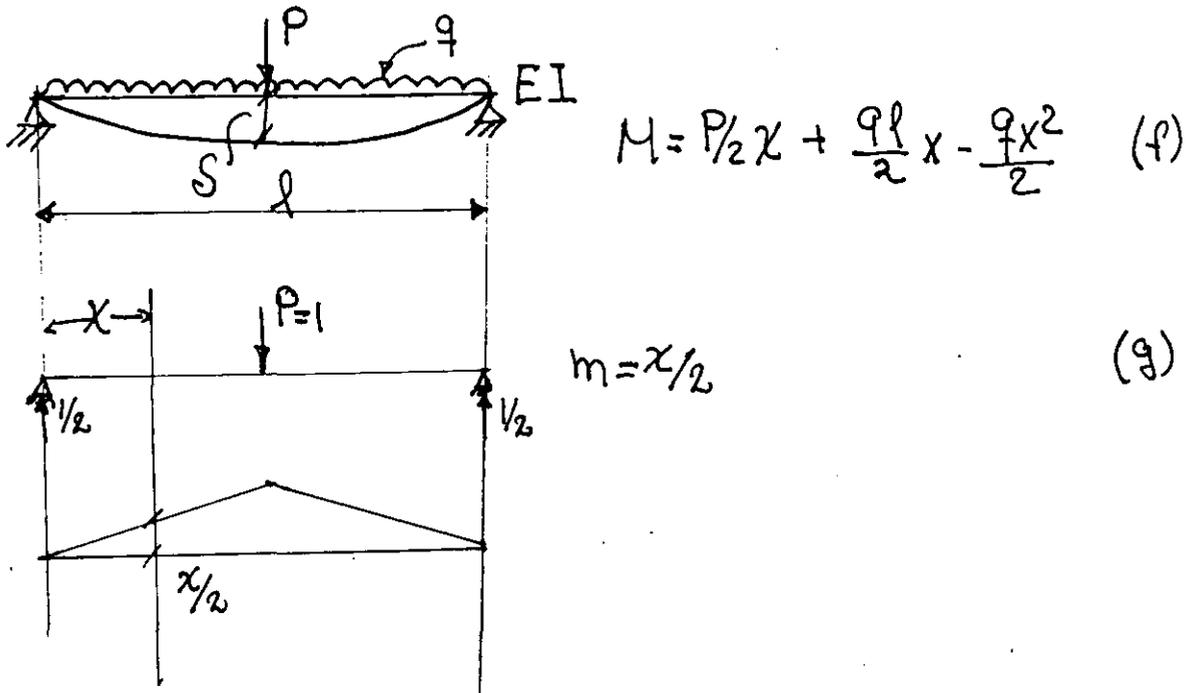
Sustituyendo (a) en (e) se obtiene

$$\Theta a = \frac{1}{EI} \int_0^l (Ma - Px)(l) dx = \frac{Mal}{EI} - \frac{Pl^2}{2EI}$$



En el ejemplo anterior no se calculo en funcion de las fuerzas externas, sino se utilizo la energia de deformacion por flexion y se derivo bajo el signo integral.

Es importante observar que las derivadas corresponden a la variacion de momento flexionante debido a causas unitarias P y Ma.



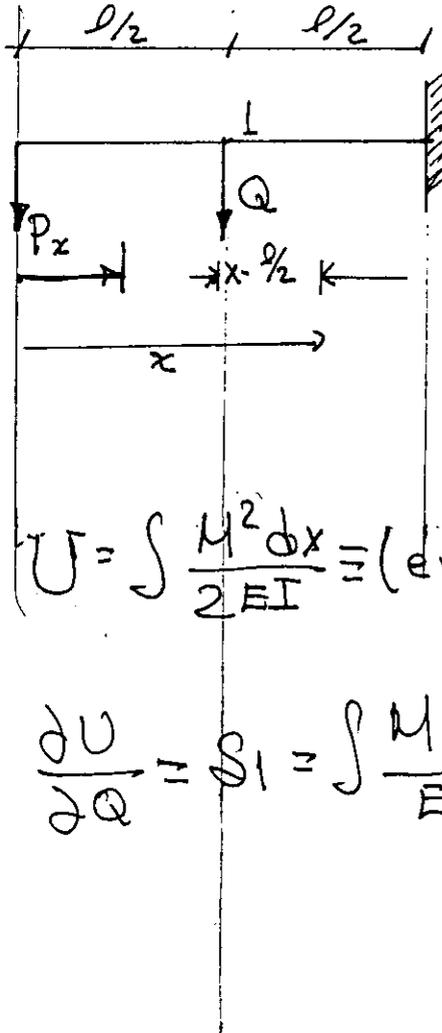
De la energia de deformacion por flexion y el teorema de Castigliano.

$$S = 2 \int \frac{M m}{EI} dx \quad (h)$$

Substituyendo (f) y (g) en (h) se obtiene

$$S = \frac{2}{EI} \int_0^{l/2} \left(\frac{P}{2} x + \frac{q l}{2} x - \frac{q x^2}{2} \right) \left(\frac{x}{2} \right) dx = \frac{P l^3}{48 EI} + \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EI} \quad (h)$$

En los casos en los cuales es necesario determinar los desplazamientos en un lugar donde no hay fuerzas o momentos, se agrega al sistema actual de fuerzas, una fuerza ficticia de magnitud infinitesimal, tal que no afecta al sistema actual de fuerzas y se obtiene el desplazamiento derivado con



$$M = Ma - P_x \quad 0 \leq x \leq l/2$$

$$M = Ma - P_x - Q(x - l/2)$$

$$\text{Para } l/2 \leq x \leq l$$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = m = -(x - l/2)$$

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} \equiv (\text{energía de deformación por flexión})$$

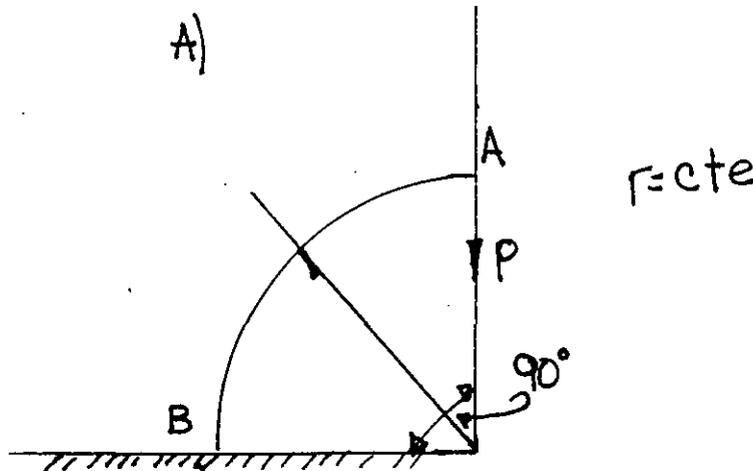
$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \delta_1 = \int \frac{M \frac{\partial M}{\partial Q}}{EI} dx = - \int_{l/2}^l \frac{1}{EI} (Ma - P_x)(x - l/2) dx$$

En conclusion se observa que la derivacion del teorema de Castigliano, fue basada en el principio de superposicion.

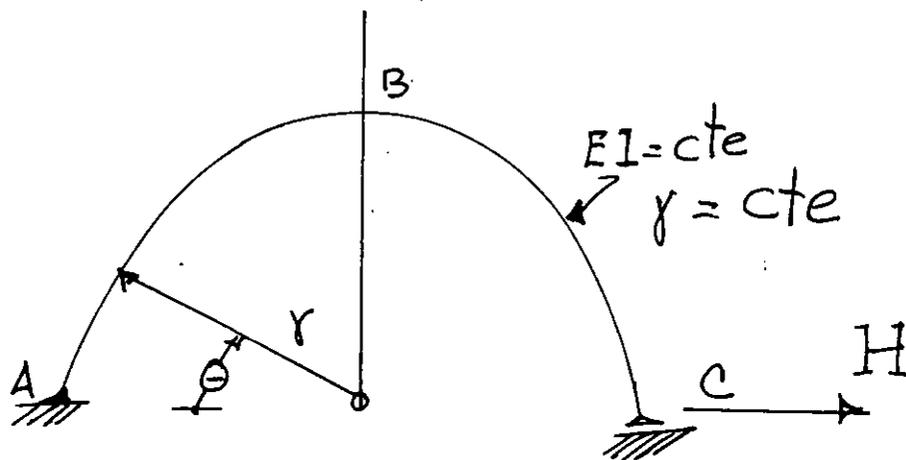
De alli que la energia de deformacion U debe ser una funcion de segundo grado de las fuerzas actuales. Si el principio de superposicion no rige y U no es funcion de segundo grado de las fuerzas, el Teorema de Castigliano no es aplicable, lo anterior se ilustra mediante ejemplos.

Ejemplos de tarea

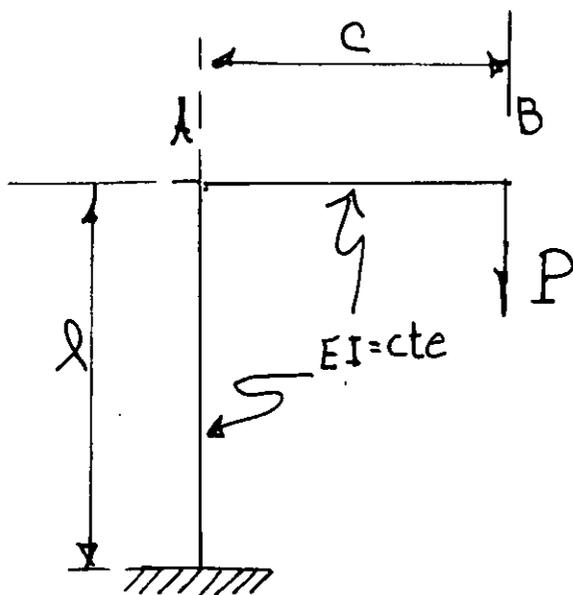
- a) Utilizando el teorema de Castigliano determinar los angulos en los extremos de una viga libremente apoyada con carga uniforme q , claro l , y rigidez flexionante $EI = \text{constante}$.
- b) Determinar los desplazamientos horizontales y vertical de la viga curva mostrada en A.



- c) Determinar el desplazamiento horizontal en c y el vertical en B en la estructura mostrada.



- d) Determinar los desplazamientos horizontal y vertical de A y B en la estructura mostrada.



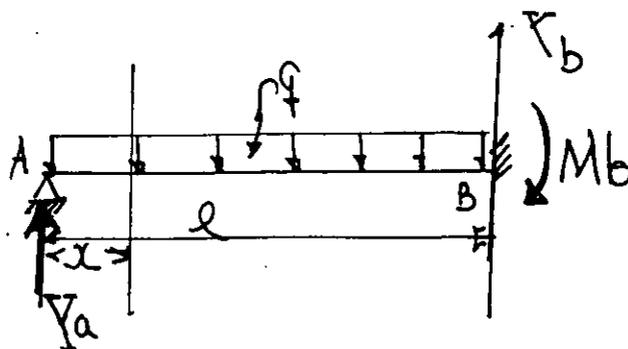
1.5 Teorema del trabajo mínimo

Se han considerado aplicaciones del teorema de Castigliano a sistemas de fuerzas estaticamente determinados. Aplicandolo a sistemas estaticamente indeterminados se concluye que la derivada de la energia de deformacion con respecto a cualquier redundante debera ser cero si su accion es la de prevenir desplazamientos en su punto de aplicacion, de alli que las magnitudes de las acciones redundantes en sistemas hiperestaticos seran tal sistema en dicho punto sera maxima o minima, lo anterior es el metodo del trabajo mínimo para calcular redundantes. En una estructura hiperestatico de grado "n" se tiene

$$(1.5.1) \quad \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0 \dots \dots \frac{\partial U}{\partial x_n} = 0$$

1.5.1 Ejemplos

- a) Viga empotrada en un extremo con carga uniforme (grado n=1).



La energía de deformación del sistema es

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI}$$

Del teorema del trabajo mínimo

$$\frac{\partial U}{\partial Y_a} = 0 = \frac{\partial}{\partial Y_a} \left[\int \frac{M^2 dx}{2EI} \right] = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial Y_a} dx \quad (b)$$

$$M = Y_a x - \frac{q x^2}{2} \quad (c)$$

$$\frac{\partial M}{\partial Y_a} = x \quad (d)$$

Sustituyendo (c) y (d) en (b) se obtiene

$$\int_0^l (Y_a x - \frac{q x^2}{2}) dx = \frac{l^3}{3} Y_a - \frac{q l^2}{8} = 0$$

de donde $Y_a = \frac{3}{8} q l$

En el sistema se tienen 3 reacciones $Y_a Y_b Y_c$ y 3 ecuaciones dos de estática y una del teorema de Castigliano.

en el ejemplo anterior, se considera como redundante M_b se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial M_b} = \frac{\partial}{\partial M_b} \left[\int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} \right] = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial M_b} dx = 0 \quad (f)$$

el momento flector es

$$M = \left(\frac{qL}{2} - \frac{M_b}{L} \right) x - \frac{qx^2}{2} \quad (g)$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_b} = -\frac{x}{L} \quad (h)$$

sustituyendo (g) y (h) en (f) se obtiene

$$\int_0^l \left[\left(\frac{qL}{2} - \frac{M_b}{L} \right) x - \frac{qx^2}{2} \right] \frac{x}{L} dx = 0 \quad (i)$$

integrando (i) y despejando M_b se obtiene

$$\boxed{M_b = \frac{qL^2}{8}} \quad (j)$$

METODOS MATRIICIALES DE ANALISIS
ESTRUCTURAL

2.1. Metodos de fuerzas y deformacion

En los metodos de analisis de sistemas estaticamente indeterminados, primero se seleccionaban las redundantes, y sus magnitudes se determinan mediante el teorema del trabajo minimo, considerando la energia de deformacion del sistema. Este procedimiento general es llamado el Metodo de fuerzas.

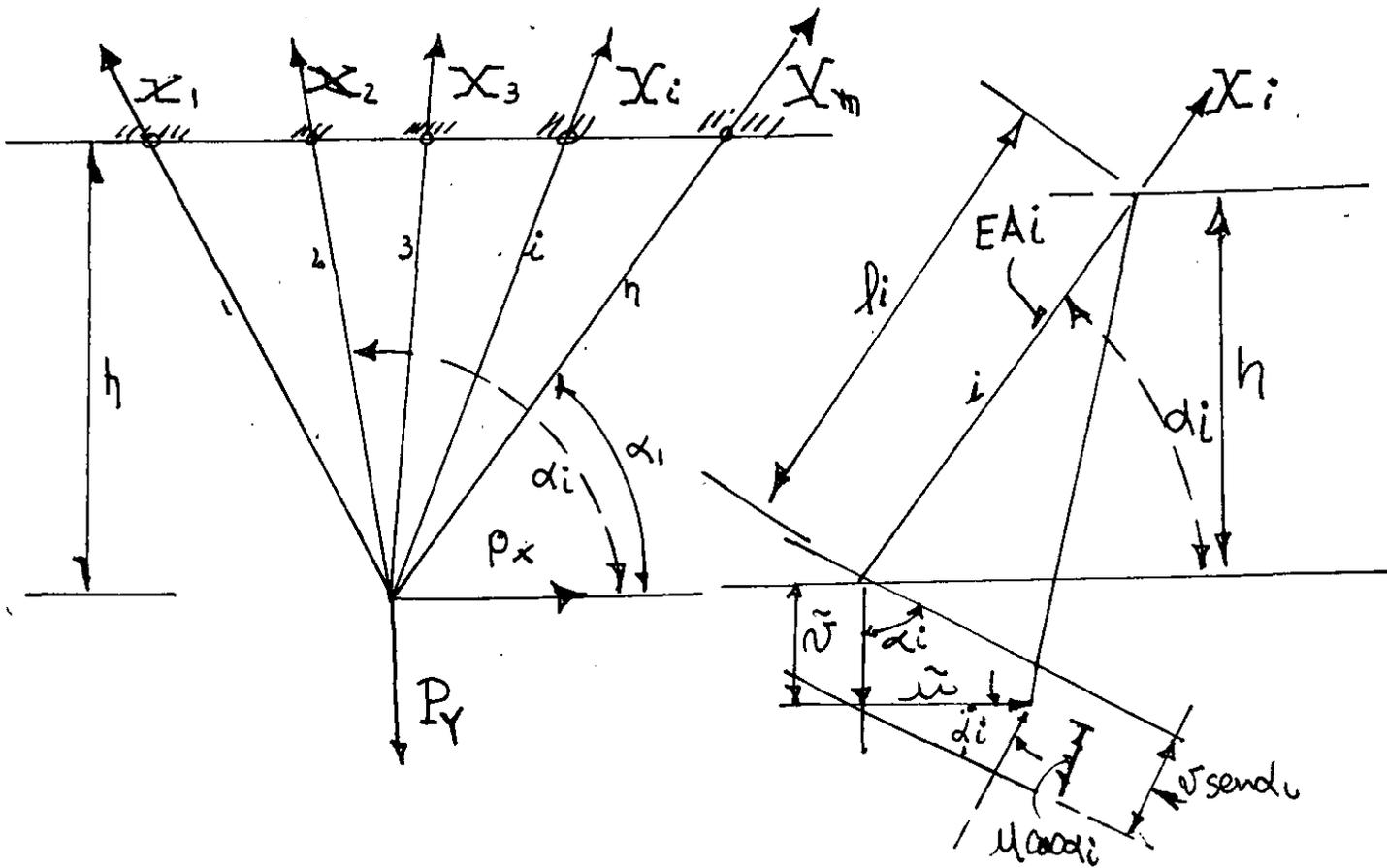


Fig. 2.1.
Para ilustrar en un mismo ejemplo

La distinción entre los dos métodos, consideremos la estructura estáticamente indeterminada coplanar mostrada en la figura 2.1 bajo la acción de dos fuerzas aplicadas con n barras, el número de redundantes será $n-2$. Entonces para determinar las redundantes X_1, X_2, \dots, X_{n-2} , se determina la energía de deformación del sistema en función de las fuerzas y usando el teorema del trabajo mínimo se obtienen las ecuaciones necesarias.

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial U}{\partial X_{n-2}} = 0 \quad (a)$$

Lo anterior es el método de las fuerzas. Para resolver el mismo problema, Navier sugirió el método de desplazamientos. La deformación del sistema de la figura 2.1. estará completamente determinado si conocemos las componentes horizontales y vertical u y v respectivamente. Suponiendo que los desplazamientos son pequeños.

" Navier," Resume des lecons", 2ed., p.345,
Paris, 1833.

La deformación axial de cualquier barra i será

$$\Delta l_i = v \operatorname{sen} \alpha_i - \mu \operatorname{cos} \alpha_i \quad (b)$$

y de la ley de Hooke su fuerza axial correspondiente será

$$X_i = \frac{E A_i}{l_i} (v \operatorname{sen} \alpha_i - \mu \operatorname{cos} \alpha_i) \quad (c)$$

de la fig. 2.1.

$$l_i = h / \operatorname{sen} \alpha_i \quad (d)$$

sustituyendo (d) en (c) se obtiene

$$X_i = \frac{E A_i}{h} (v \operatorname{sen} \alpha_i - \mu \operatorname{cos} \alpha_i) \operatorname{sen} \alpha_i \quad (e)$$

De las condiciones de equilibrio se obtiene

$$\sum_{i=1}^n X_i \operatorname{cos} \alpha_i = P_x$$

$$\sum_{i=1}^n X_i \operatorname{sen} \alpha_i = P_y$$

sustituyendo (e) en (f) y (g) se obtiene

$$v \sum_{i=1}^n A_i \operatorname{sen}^2 \alpha_i \operatorname{cos} \alpha_i - \mu \sum_{i=1}^n A_i \operatorname{cos}^2 \alpha_i \operatorname{sen} \alpha_i = \frac{P_x h}{E} \quad (i)$$

$$v \sum_{i=1}^n A_i \operatorname{sen}^3 \alpha_i - \mu \sum_{i=1}^n A_i \operatorname{sen}^2 \alpha_i \operatorname{cos} \alpha_i = \frac{P_y h}{E} \quad (j)$$

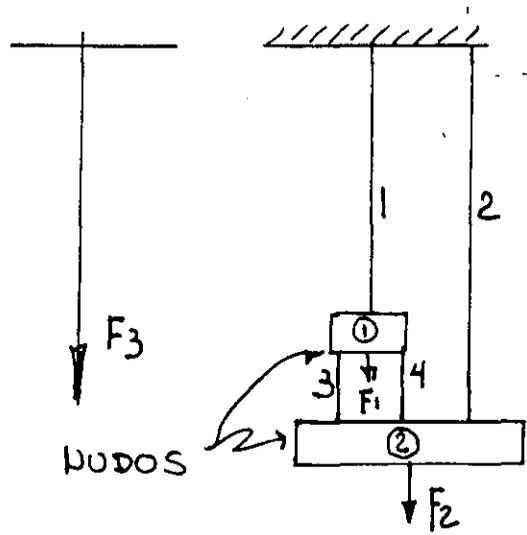
de (i) y (j) se determinan μ y v las

de (i) y (j) se determinan u y v las cuales substituidas en (e) obtenemos la fuerza X_i en cualquier barra del sistema. Se observa en este caso que la consideracion de las deformaciones directas del sistema resulta en una simplificacion substancial, especialmente si el numero de barras n es grande, puesto que solo tenemos que resolver dos ecuaciones con dos incognitas que son las deformaciones u y v . En el caso del metodo de las fuerzas tendremos que resolver $n-2$ ecuaciones con $n-2$ incognitas. Es conveniente observar que el metodo de las deformaciones involucro 3 etapas basicas que son:

Ecuación (b): Compatibilidad geometrica de deformaciones, u , v y Δl .

Ecuación (e): Ley de Hooke

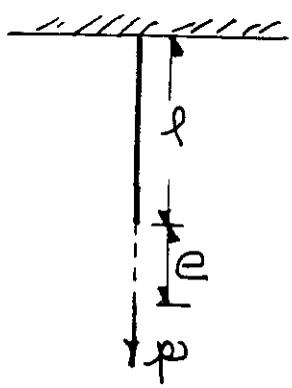
Ecuación (f) y (g): Equilibrio



barras

- $n_b = \text{numero de barras} = 4$
- $n_N = \text{numero de nudos} = 2$
- $P = \text{fuerzas axiales (P)}$
- $e = \text{alargamiento (s)}$

Rigidez de barra $k_i = \frac{P}{e} = \frac{\text{fuerza axial}}{\text{alargamiento}} = \frac{E A_i}{l_i}$



Al continuidad

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} = \begin{cases} \text{Def } \acute{o} \text{ alarg. de las} \\ \text{cuatro barras} \end{cases} \begin{cases} + \text{alarg} \\ - \text{acort} \end{cases}$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{cases} \text{desplazamientos nodales} \end{cases} \begin{cases} + \downarrow \\ - \uparrow \end{cases}$$

de la figura.

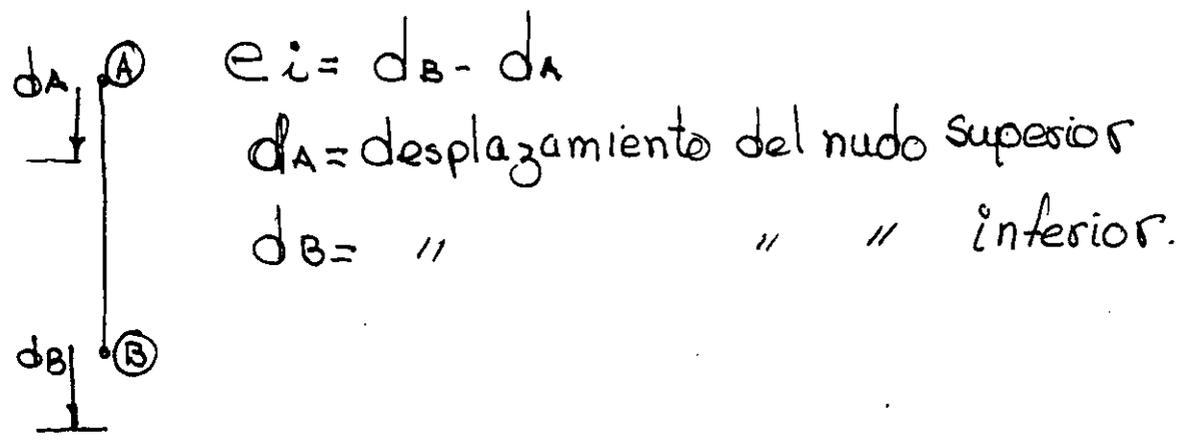
$$\begin{aligned} e_1 &= d_1 \\ e_2 &= d_2 \\ e_3 &= d_1 + d_2 \\ e_4 &= d_1 + d_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{e\} = [a] \{d\}$$

$$\boxed{\{e\} = [a] \{d\}} \quad (1)$$

donde $[a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; matriz de continuidad.

Observar que para una barra i cualquiera



B) Ley de Hooke.

sea $\{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}$ fuerzas axiales en las barras
 + tensión, - compresión

$p_1 = k_1 e_1$
 $p_2 = k_2 e_2$
 $p_3 = k_3 e_3$
 $p_4 = k_4 e_4$

$k_i = \frac{EA_i}{l_i}$ rigidez barra i .

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix}; \text{ o } \{p\} = [K] \{e\} \quad (2)$$

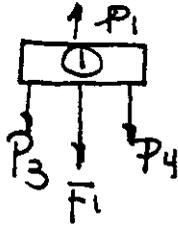
$\{p\} = [K] \{e\}$

$[K]$ matriz de rigidez de las barras.

c) Equilibrio: $\sum F_i = 0$ en cada nudo

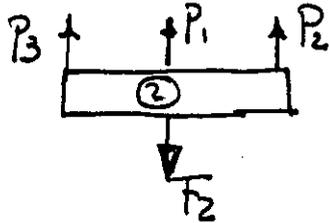
Sea: $\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$

Nudo 1



$$F_1 = P_1 + 0 - P_3 - P_4$$

Nudo 2



$$F_2 = 0 + P_2 + P_3 + P_4$$

$$\circ \quad \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} \quad \circ \quad \{F\} = [a]^T \{p\}$$

donde: $[a]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matriz de equilibrio

observar: matriz de equilibrio es la transpuesta de la matriz de continuidad.

Solucion del problema anterior por el metodo de desplazamientos (rigideces).

Incognitas: $\{e\}$, $\{d\}$, $\{p\}$

Datos: $[a]$, $[a]^T$, $[k]$, $\{F\}$

Subst. (1) en (2)

$$\{p\} = [k][a]\{d\} \quad (4)$$

Subst. (4) en (3)

$$\{F\} = [a]^T [k] [a] \{d\} \quad (5)$$

$$\circ \quad \{F\} = [K] \{d\} \quad (5a)$$

La matriz $[a]^T [k] [a]$ es cuadrada
Ejemplo; Suponiendo

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1 \text{ TON/cm.}$$

$$F_1 = 10 \text{ TON}$$

$$F_2 = 5 \text{ TON}$$

$$[K] = [a]^T [k] [a]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando operaciones

$$[K] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Observar que $[K]$ es simétrica
de (5a)

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

despejando $\{d\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \text{ cm} \\ 7 \text{ cm} \end{Bmatrix}$ subten (1)

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ subten (2)}$$

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Comprobacion de equilibrio: de (3)

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \text{ ton} \\ 5 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

Metodo de las fuerzas (flexibilidad)

Usando los tres principios fundamentales en el orden inverso
Equilibrio, Ley de Hooke, Continuidad.

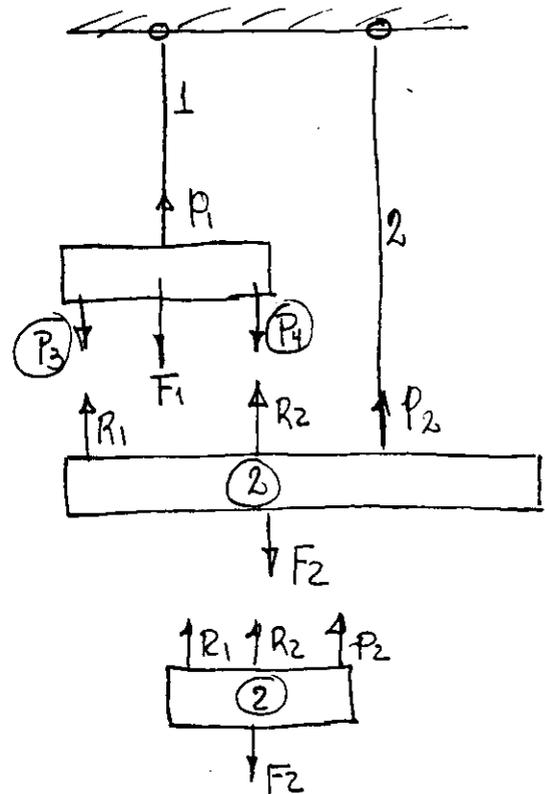
a) Equilibrio

$$F_1 = P_1 - R_1 - R_2$$

$$F_2 = P_2 + R_1 + R_2$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} [P_0] \\ [R] \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \{F\} &= [a_0^T \ a_R^T] \begin{Bmatrix} P_0 \\ R \end{Bmatrix} \\ &= a_0^T P_0 + a_R^T R. \end{aligned}$$



despejando a P_0

$$\{P_0\} = [a_0^T]^{-1} \{F\} - [a_0^T]^{-1} [a_R^T] [R]$$

en nuestro ejemplo

$$[a_0^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore [a_0^T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{P_0\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [F] - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [F] - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [R]$$

O bien

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}$$

ademas se tiene

$$P_3 = R_1$$

$$P_4 = R_2$$

Por lo tanto

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{b_0} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{b_R} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \quad \textcircled{a}$$

$$\begin{cases} P_1 = F_1 + R_1 + R_2 \\ P_2 = F_2 - R_1 - R_2 \\ P_3 = R_1 \\ P_4 = R_2 \end{cases}$$

(a) se puede escribir

$$\{P\} = [b_0] \{F\} + [b_R] \{R\} \quad \textcircled{b}$$

$$b_0 = \begin{bmatrix} (a_0^T)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_R = \begin{bmatrix} (-a_0^T)^{-1} a^T \\ I \end{bmatrix}$$

Ley de Hooke

$$\{p\} = [k] \{e\}$$

$$\{e\} = [k]^{-1} \{p\} \quad \textcircled{a} \quad [f] = [k]^{-1}_{Flex.}$$

subst \textcircled{b} en \textcircled{c}

$$\{e\} = [f][b_0]\{F\} + [f][b_R]\{R\} \quad \textcircled{d}$$

CONTINUIDAD.- Considerando los desplazamientos relativos de llamados

$$u_1, u_2 \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$d_1 = e_1$$

$$d_2 = e_2$$

$$u_1 = e_1 - e_2 + e_3$$

$$u_2 = e_1 - e_2 + e_4$$

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix}$$

$$\text{pero} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [b_0]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [b_R]^T$$

Por lo tanto

$$\{d\} = [b_o^T] \{e\} \quad (e)$$

$$\{u\} = [b_R^T] \{e\} \quad (f)$$

(Los valores de () deberan anularse)

subst (d) en (f)

$$\{u\} = [b_e^T] [f] [b_o] \{F\} + [b_e^T] [f] [b_R] \{R\}$$

como $\{u\} = 0$ se despeja $\{R\}$

$$\{R\} = -[b_e^T f b_e]^{-1} [b_R^T f b_o] \{F\}$$

(h) nos da los redundante $\{R\}$
subst (h) en (b) se obtiene $\{p\}$

$$\{p\} = b_o F - b_e (b^T f b_R)^{-1} (b_R^T f b_o) F$$

$$= \underbrace{[b_o - b_e (b_R^T f b_e)^{-1} b_R^T f b_o]}_{[b]} \{F\} \quad (i)$$

subst (i) c se obtiene $\{e\}$

$$(j) \{e\} = [f] [b] \{F\}$$

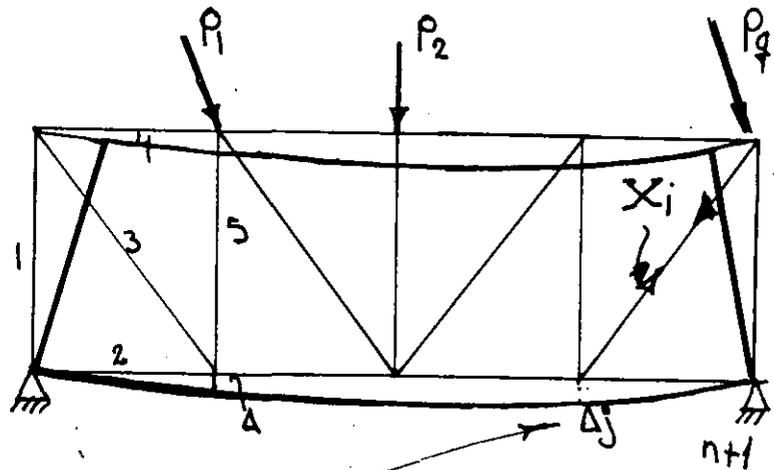
subst (j) en (e) se obtiene

$$\{d\} = [b_o^T] [f] [b] \{F\}$$

2.5 Aplicaciones de metodos matriciales a armaduras planas.

Para ilustrar el uso de metodos matriciales en el analisis de armaduras articuladas en los nudos, comensaremos considerando un problema de deflexiones. En la fig. 2.3.1. se tiene una armadura con miembros sujeta a sistema externo de cargas , y se requiere determinar la deflexion vertical del nudo j debida al sistema de cargas Si X_i representa las fuerzas axiales en la estructura real las fuerzas axiales en la estructura bajo la condicion de carga unitaria en j.

Estructura real o actual



Carga infinitesimal Q

condición $Q=1$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = 1$$

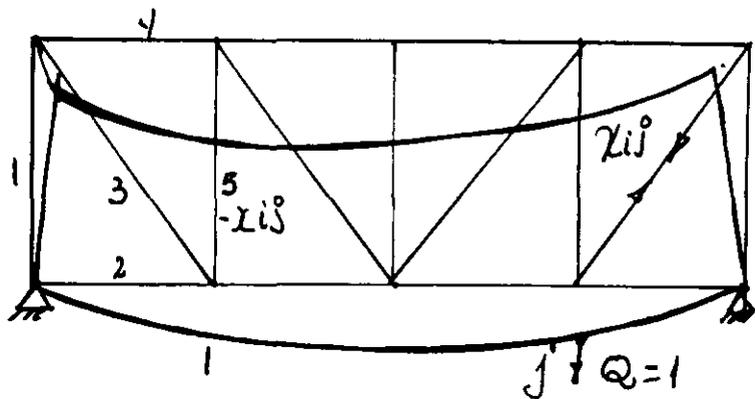


fig. 2.3.1

Del teorema de Castigliano y la energía de deformación por carga normal se tiene

$$U = \sum_{i=1}^m \frac{X_i^2 l_i}{2AE} \quad (a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \Delta_i = \sum_{i=1}^m \frac{X_i X_{ij} l_i}{EA_i} = \sum_{i=1}^m X_i X_{ij} P_i \quad (b)$$

donde $P_i = \frac{l_i}{EA_i}$ es el factor de flexibilidad de la barra i .

Si se desean calcular las n deflexiones verticales de nudos seleccionados debemos calcular los valores X_{ij} para una fuerza vertical unitaria aplicada en cada uno de los nudos. Supongamos que han sido calculados y que acomodamos los números de influencia en la forma de una matriz de orden $m \times n$ como sigue:

$$[X_{ij}] = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{mi} & X_{m2} & \dots & X_{mn} \end{bmatrix}$$

c) se denomina matriz de geometría de la armadura acomodando los factores de flexibilidad en forma de una matriz diagonal de orden $m \times m$.

$$(d) \quad [P_i] = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_m \end{bmatrix}$$

la cual es llamada matriz de flexibilidad de la armadura. Finalmente, suponiendo que las fuerzas axiales X_i producidas por el sistema de cargas han sido calculadas, y son arregladas en la forma de una matriz vector columna.

$$(e) \quad [X_i] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}$$

la cual es llamada matriz de carga. Ahora de acuerdo con las reglas de multiplicación de matrices las m ecuaciones (b) pueden expresarse matricialmente.

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \quad (f)$$

o sea con notación indicial

$$[\Delta_j] = [X_{ij}] [P_i] [X_i] \quad (g)$$

Como un ejemplo numerico, se considera la armadura mostrada en la fig. 2.3.2 la cual tiene $m=9$ miembros. Supongase que se requiere determinar la deflexion vertical de los nudos superiores a y b, bajo la accion de dos condiciones separadas de carga como se indica. La numeracion de los miembros se muestra en la figura, asi como sus dimensiones. Cada barra tiene una seccion transversal $A_i=1\text{pul}^2$ y un modulo de elasticidad $E=30 \times 10^3$

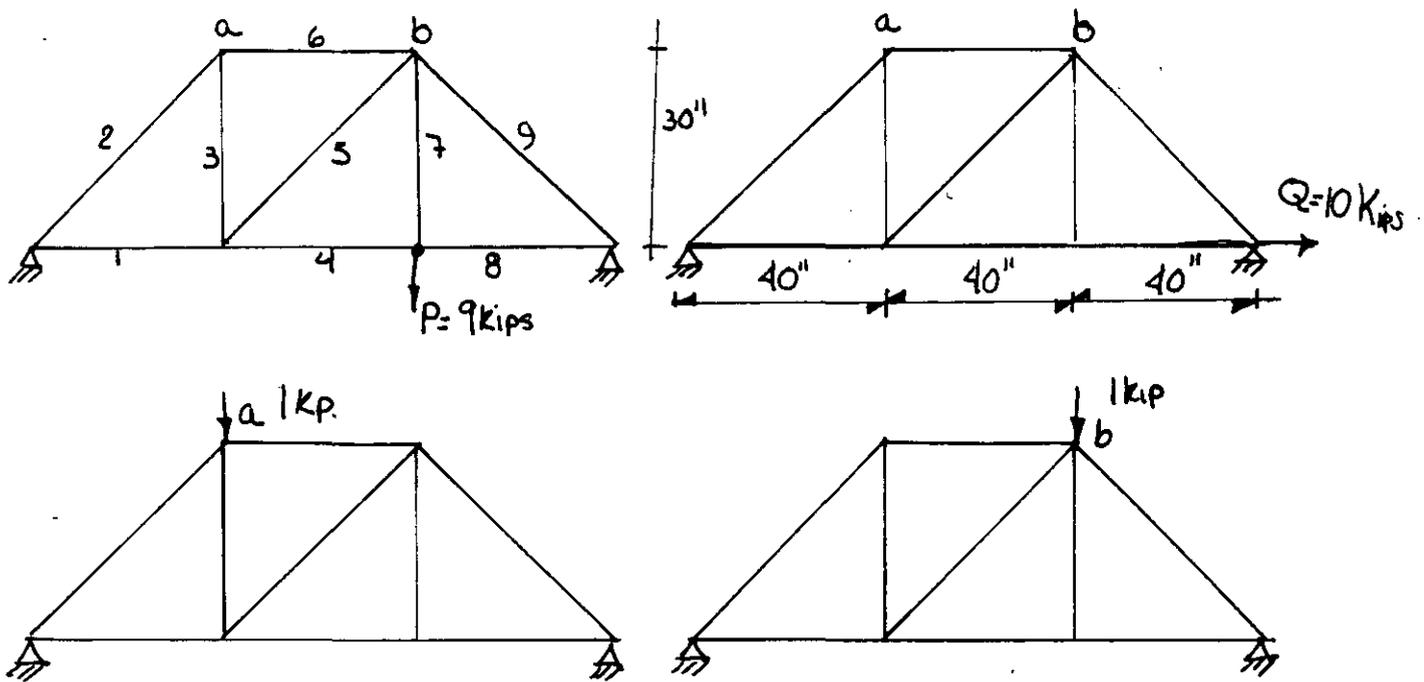


fig. 2.3.2

El procedimiento a seguir es el siguiente:

Sustituyendo (h), (i) y (j) en (g) se obtiene

$$[\Delta i] = [X_{ij}] [P_i] [X_u] \quad (9)$$

$$[\Delta i] = \frac{10}{9E} \begin{bmatrix} 8 & -10 & -3 & 4 & 5 & -8 & 0 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 3 & 8 & -5 & -4 & 0 & 8 & -10 \end{bmatrix} X$$

$$X \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (k)$$

$$= \frac{10}{9E} \begin{bmatrix} 32 & -50 & -9 & 16 & 25 & -32 & 0 & 16 & -25 \\ 16 & -25 & 9 & 32 & -25 & -16 & 0 & 32 & -50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \\ 8 \\ 5 \\ 4 \\ 9 \\ 8 \\ -10 \end{bmatrix} \quad (l)$$

$$= \frac{10}{9E} \begin{bmatrix} 860 & 640 \\ 147 & 800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0318 & 0.0525 \\ 0.0237 & 0.0296 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta a_p & \Delta b_p \\ \Delta a_q & \Delta b_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0318 & 0.0525 \\ 0.0237 & 0.0296 \end{bmatrix} \quad (m)$$



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

*CURSOS ABIERTOS
ANALISIS ESTRUCTURAL*

*METODOS ENERGETICOS Y METODO DE LAS
FLEXIBILIDADES PLANTEAMIENTO MATRICIAL*

DR. JOSE LUIS CAMBA CASTANEDA

**METODOS ENERGETICOS Y
METODO DE LAS FLEXIBILIDADES
Planteamiento Matricial**

1.- INTRODUCCION

2.- ENERGIA DE DEFORMACION.

Trabajo Real

Trabajo Virtual

Matriz de Flexibilidades no ensamblada

Matriz de Flexibilidades ensamblada

Teorema recíproco de Maxwell-Betti

3.- METODOS GENERALES DE ANALISIS

Método de las flexibilidades

Método de las Rigideces

4.- PROPIEDADES DE LAS MATRICES DE FLEXIBILIDADES Y RIGIDECES.

5.- SOLUCION MATRICIAL GENERALIZADA DEL METODO DE LAS FLEXIBILIDADES.

ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS

1.- INTRODUCCION.

El análisis estructural tiene como objetivo calcular el estado de esfuerzos y deformaciones en cualquier punto de una estructura.

Para el análisis de una estructuras se tendrán como datos la geometría y las cargas que actúan sobre ella y se calcularán las fuerzas internas y los desplazamientos.

En todo proceso de análisis estructural, deben considerarse los tres conceptos fundamentales:

1.1) Concepto de equilibrio

Toda estructura sometida a un sistema de fuerzas externas, deberá estar en equilibrio con las fuerzas internas en todos y cada uno de los miembros de dicha estructura, siendo las expresiones vectoriales que cumplan esa condición:

$$\left. \sum_{i=1}^n M_i \right\} F \left\{ = \left\{ 0 \right\} \quad (1.1)$$

$$\left. \sum_{i=1}^n M_i \right\} F \left\{ r_i \left\{ + \sum_{i=1}^n M_i \left\{ = \left\{ 0 \right\} \quad (1.2)$$

en las cuales:

M_i y F_i son los vectores que indican los pares y fuerzas

actuando en la estructura y r_i los vectores de posición de las fuerzas con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

Estas ecuaciones de equilibrio se pueden expresar escalar mentes como sigue:

en un plano		en el espacio:
$\sum F_i \cdot x = 0$		$\sum F_i \cdot x = 0$
$\sum F_i \cdot y = 0$		$\sum M_i \cdot x = 0$
$\sum M_i = 0$		$\sum F_i \cdot y = 0$
		$\sum M_i \cdot y = 0$
		$\sum F_i \cdot z = 0$
		$\sum M_i \cdot z = 0$

1.2.- Concepto continuidad (o compatibilidad)

Al aplicar las fuerzas externas, la estructura se deforma pero conserva las características de continuidad iniciales, siendo los desplazamientos finales compatibles con las condiciones de deformación de los apoyos.

El concepto de continuidad o compatibilidad establece que los desplazamientos son funciones continuas y derivables, por lo tanto una vez conocidos los desplazamientos se pueden conocer las deformaciones. Expresado en ecuaciones, se tendría:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{dU}{dx} & \gamma_{xy} &= \frac{dU}{dy} + \frac{dV}{dx} \\ \epsilon_y &= \frac{dV}{dy} & \gamma_{yz} &= \frac{dV}{dz} + \frac{dW}{dy} \\ \epsilon_z &= \frac{dW}{dz} & \gamma_{xz} &= \frac{dV}{dz} + \frac{dW}{dx} \end{aligned}$$

u, v y w 1, 2, 3
componentes de desplazamiento.

En forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [e] \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

$\{ \epsilon \} = [e] \{ \Delta \}$; $[e]$ = matriz cuadrada simétrica que representa la flexibilidad del elemento.

1.3.- Relaciones fuerza desplazamiento.

En el análisis estructural es indispensable para cualquier estructura de geometría dada, conocer las relaciones entre las fuerzas y los desplazamientos.

Si llamamos $\{F\}$ al vector de fuerzas y $\{D\}$ el vector desplazamientos, sus componentes serán de acuerdo con la Fig. 1.1

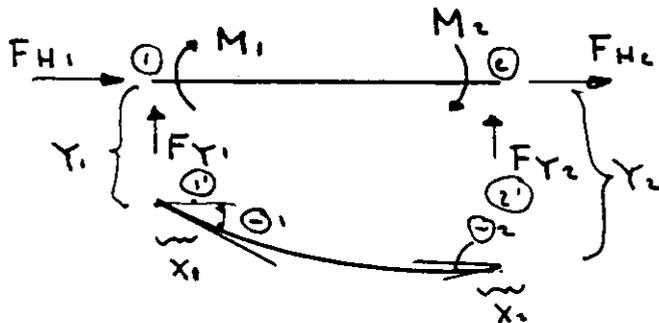


FIG. 1.1

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{Y_1} \\ F_{H_1} \\ M_1 \\ F_{Y_2} \\ F_{H_2} \\ M_2 \end{Bmatrix} ; \{D\} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ X_1 \\ \Theta_1 \\ Y_2 \\ X_2 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix}$$

y la relación entre ellos será: $\{F\} = [K] \{D\}$ (1.4)

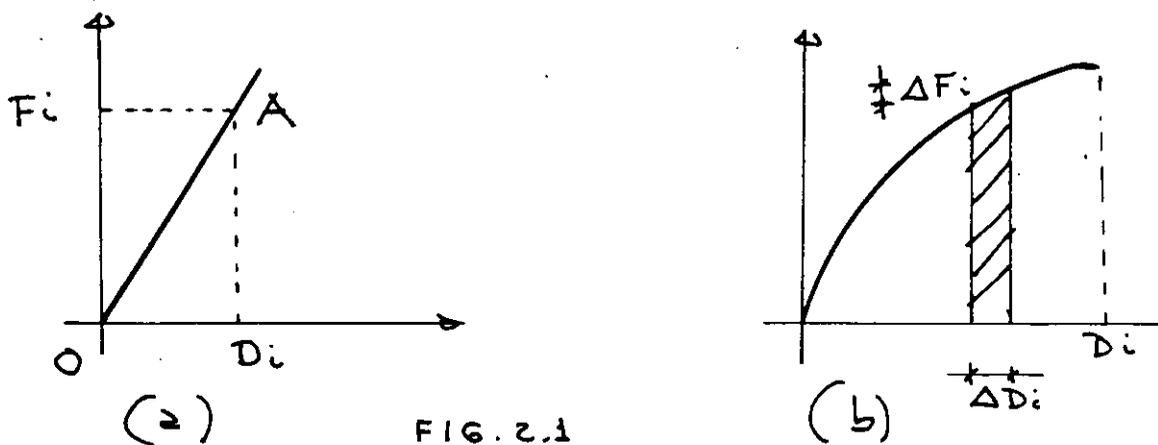
La matriz $[K]$ se determina a partir de la geometría de la estructura y de las características mecánicas del material.

Si la variación entre ellas es lineal, la matriz $[K]$ es una constante, y las estructuras que cumplen esta condición se les llama lineales (Ley de Hooke) y es aplicable el principio de superposición de efectos.

2.- ENERGIA DE DEFORMACION.

Si una fuerza F_i se aplica gradualmente a una estructura produce un desplazamiento D_i en la dirección en que se aplica la fuerza, ésta efectúa un trabajo, que se manifiesta por un incremento de la energía cinética de la masa, si ésta adquiere una aceleración o bien, en energía potencial si modifica su posición respecto al campo gravitacional.

Un sistema de fuerzas externo provoca un estado de deformación en una estructura, realizando un trabajo cada una de las fuerzas aplicadas que se permanece en la estructura bajo la forma de energía de deformación o energía interna. Si el sistema es perfectamente elástico el fenómeno es reversible (fig. 2.1a) y cuando se trata de un material elástico no lineal, corresponde a la (fig. 2.1b).



El trabajo hecho por un incremento de carga será: $W = F_i \Delta D_i$

El trabajo total efectuado será:

$$W = \int_0^{D_i} F d\Delta \quad (2.1)$$

Cuando se trata de un material elástico lineal, el trabajo hecho por la fuerza F_i es:

$$W = \frac{1}{2} F_i D_i.$$

Cuando un sistema de fuerzas se aplica gradualmente a la estructura y provocando desplazamientos en la dirección de las fuerzas aplicadas, el trabajo total externo o la energía de deformación será: $W = U = \frac{1}{2} (F_1 D_1 + F_2 D_2 + \dots + F_n D_n) = \frac{1}{2} \sum F_i D_i$ (2.2)

La ecuación anterior puede escribirse como:

$$[W] = \frac{1}{2} \{F\}^T \{D\} \quad (2.3)$$

en la cual $\{F\}^T$ es el transpuesto del vector $\{F\}$ que representa las fuerzas..

El área que se encuentra en la parte superior de la curva OA se le llama energía complementaria de deformación.

La expresión de igualdad del trabajo externo W y la energía de deformación o energía interna U , puede utilizarse para calcular deflexiones.

$$U = \frac{1}{2} \int \sigma_m \epsilon_m dV \quad (\text{Ref. 1}) \quad (2.4)$$

$$\text{Axial} : U_a = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{P^2 L}{A E} \quad (2.5)$$

$$\text{Flexión} : U_f = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{E I} dx \quad (2.6)$$

$$\text{Cortante} : U_r = \frac{1}{2} \int \frac{V^2}{A G} dx \quad (2.7)$$

$$\text{Torsión} : U_t = \frac{1}{2} \int \frac{T^2}{G J} dx \quad (2.8)$$

$$\sum = U_a + U_f + U_r + U_t \quad (2.9)$$

2.1.- Teorema de los Trabajos virtuales.

El nombre de virtual, se deriva del hecho de que un sistema ficticio (virtual) de fuerzas en equilibrio o un pequeño desplazamiento virtual se aplica a una estructura, relacionándolo con fuerzas o desplazamientos reales.

El método de los desplazamientos virtuales consiste en aplicar desplazamientos ficticios (virtuales) de cuerpo rígido en una estructura y calcular las reacciones reales, mediante el método energético.

Una variante sería la de calcular desplazamientos reales a través de fuerzas virtuales, como se indica a continuación.

Si en una estructura real, en equilibrio y deformada bajo un sistema de fuerzas reales aplicadas y llamando ϵ la deformación actual en cualquier punto y sus correspondientes desplazamientos en los puntos D_1, D_2, \dots, D_n , se introduce un sistema de fuerzas virtuales F_1, F_2, \dots, F_n en las coordenadas $1, 2, \dots, n$, provocando esfuerzos σ en esos puntos.

El principio del trabajo virtual establece que el producto de los desplazamientos reales y las fuerzas virtuales correspondientes es igual al producto de los desplazamientos internos y las fuerzas internas virtuales correspondientes, por lo tanto:

$$F_i D_i = \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV \quad (2.10)$$

en la cual:

σ = esfuerzos debidos a fuerzas virtuales F

ϵ = deformaciones reales compatibles con desplazamientos reales $\{D\}$

Cuando se trata de una sola fuerza virtual aplicada para calcular el desplazamiento D_j en la coordenada j , la ecuación anterior se escribe :

$$1 \cdot \overset{\downarrow}{D_j} = \int \left\{ \overset{\downarrow}{\sigma_{uj}} \right\}^T \left\{ \epsilon \right\} dV \quad (2.11)$$

$$\overset{\downarrow}{D_j} = \int \left\{ \overset{\downarrow}{\sigma_{uj}} \right\}^T \left\{ \epsilon \right\} dV \quad (2.12)$$

siendo $\left\{ \overset{\downarrow}{\sigma_{uj}} \right\}$ los esfuerzos virtuales correspondientes a la fuerza virtual unitaria en j y $\left\{ \epsilon \right\}$ la deformación real debida a la carga real.

Las expresiones del trabajo virtual en axial, flexión, cortante y torsión se indican a continuación.

Tipo de deformación	Componente de la fuerza virtual	Componente del desplaz. real	Trabajo virtual interno
Axial	p	$dL = \frac{P}{AE} dx$	$\int p \frac{P}{AE} dx \quad (2.13)$
Flexión	m	$d\theta = \frac{M}{EI} dx$	$\int m \frac{M}{EI} dx \quad (2.14)$
Cortante	v	$dy = c \frac{V}{AG} dx$	$\int cv \frac{V}{AG} dx \quad (2.15)$
Torsión	t	$d\beta = \frac{T}{GJ} dx$	$\int t \frac{T}{GJ} dx \quad (2.16)$

De la tabla anterior, para valuar la integral de flexión $m \frac{M}{EI} dx$, para elementos de sección transversal constante se utiliza para los casos mas comunes de cargas, la multiplicación directa de diagramas de momentos flexionantes.

Cálculo de deflexiones por el método de los trabajos virtuales.

1) Armaduras

En armaduras, la expresión para el cálculo de deflexiones es:

$$D_j = \sum_{i=1}^n \int p \frac{P_i}{AE} dx \quad (2.17)$$

Un resultado igual se logrará si multiplicamos matrices tales que:

$$D_j = \left\{ p \right\}^T \left[f_M \right]_{m \times m} \left\{ P \right\} \quad (2.18)$$

en la cual:

$\left\{ P \right\}^T$ es la transpuesta de la matriz $\left\{ P \right\}$, siendo esta última las fuerzas en los elementos debidas a una carga virtual unitaria actuando en la coordenada correspondiente.

$\left\{ P \right\}$ son las fuerzas en los elementos debidas a las cargas reales

$$Y \quad [f_M] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{AE} & & & 0 \\ & \frac{L_2}{AE} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & \frac{L_n}{AE} \end{bmatrix}$$

siendo los elementos de la diagonal principal la flexibilidad por deformación axial de los elementos aislados. A esta matriz se le conoce como la matriz de flexibilidades de la estructura no ensamblada. (Ref. 2)

Cuando se desea calcular las deflexiones en diferentes puntos de la estructura, la carga virtual deberá aplicarse por separado en cada una de las coordenadas deseadas y que corresponde al conjunto de fuerzas determinadas, la ecuación tendrá la forma:

$$[D]_{n \times p} = [P]_{m \times n}^T [f_M]_{m \times m} [p]_{m \times p} \quad (2.20)$$

p = fuerza en un elemento debido a una carga virtual actuando en la coordenadas. Los elementos de la matriz $[p]$ son las fuerzas debidas a cargas unitarias aplicadas en la coordenada correspondiente

$$f_M = \text{La flexibilidad del elemento} = \frac{L}{AE}$$

P = fuerza en un elemento debido a la carga real. Cada columna de la matriz $[P]$ son las fuerzas correspondientes a un caso de carga.

m = número de elementos

n = número de coordenadas en las cuales se desea conocer el desplazamiento.

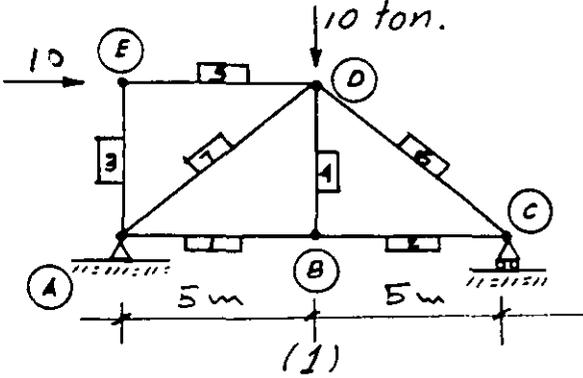
p = número de casos de carga.

El ejemplo No. 1 muestra la aplicación del cálculo de deformaciones en armaduras por trabajos virtuales.

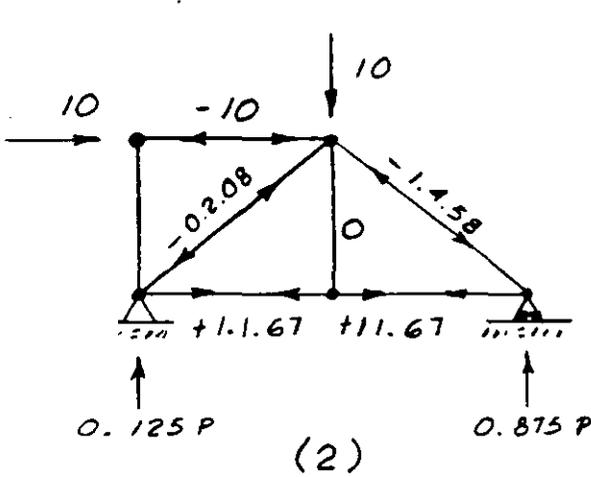
2.22.- Cálculo de deflexiones por trabajos virtuales en vigas y marcos.

En una estructura formada por varios miembros y sujeta a una carga cualesquiera en un miembro, de tal forma que los momentos extremos internos sean M_1, M_2 . Si se quieren calcular los desplazamientos en un extremo, se aplicaran momentos virtuales unita

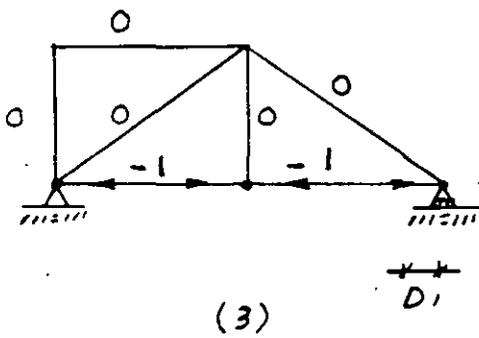
Ejemplo No. 1. Calcular el desplazamiento horizontal en el punto C y el movimiento relativo entre los nudos B y E de la armadura siguiente:



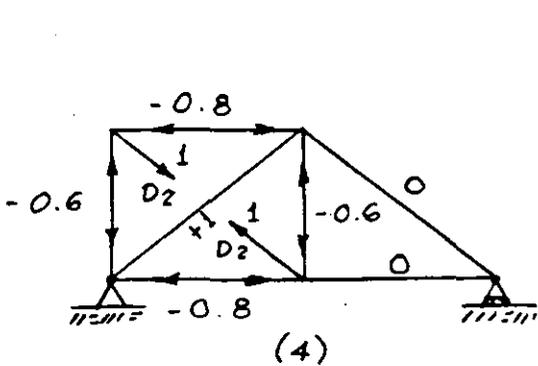
barras 1, 2, 3, 4 y 5 = AE
barras 6 y 7 = 1.25 AE



$$[P]_{7 \times 1} = \begin{Bmatrix} 11.67 \\ 11.67 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ -14.58 \\ -2.08 \end{Bmatrix}$$



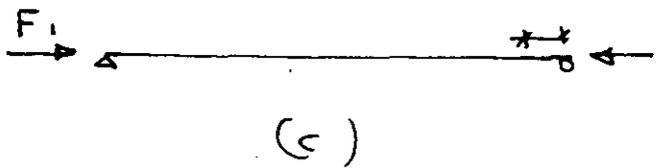
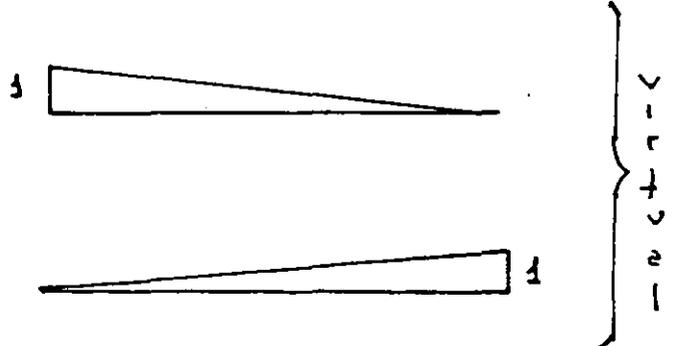
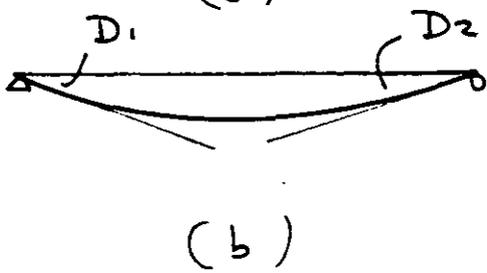
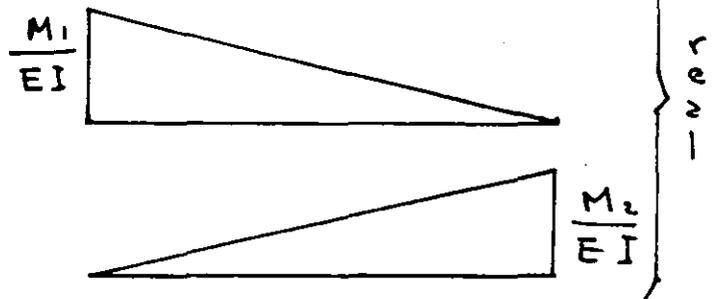
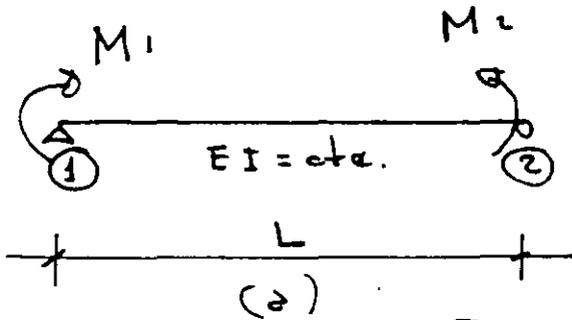
$$[P]_{7 \times 2} = \begin{bmatrix} -1 & -0.8 \\ -1 & 0 \\ 0 & -0.6 \\ 0 & -0.6 \\ 0 & -0.8 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$[f_M]_{7 \times 7} = \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 5 & & & & & & \\ & 5 & & & & & \\ & & 3.75 & & & & \\ & & & 3.75 & & & \\ & & & & 5 & & \\ & & & & & 5 & \\ & & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$[D]_{2 \times 1} = [P]_{7 \times 2}^T [f_M] [P]_{7 \times 1} = \frac{1}{AE} \begin{Bmatrix} -116.5 \\ -17 \end{Bmatrix}$$

rios en los extremos para calcular los giros debidos a flexión.



Por trabajos virtuales la contribución de desplazamientos por flexión en j será:

$$D_j = \int m \frac{M}{EI} dx = \frac{L}{6EI} (2M_1 m_1 + M_1 m_2 + M_2 m_1 + 2 M_2 m_2)$$

NOTA.- SI SE CONSIDERA EFECTOS DE AXIAL:

y expresándolo matricialmente:

$$[f_M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3EI} & \frac{1}{6EI} & 0 \\ \frac{1}{6EI} & \frac{1}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{AE} \end{bmatrix} L$$

$$\Delta D_j = \{m_u\}^T [f_M] \{M\}, \text{ en la cual: } \quad 2.21$$

en la cual:

$$\{m_u\} = \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} \quad \{M\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

$$[f_M] = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad 2.21A$$

Los elementos de $[f_M]$ son los giros izquierda y derecha debidos a momentos unitarios en un extremo de la viga. En forma semejante a la mencionada en armaduras, $[f_M]$ es la matriz de flexibilidad en flexión del elemento.

El desplazamiento en J sera la sumatoria de todos los elementos:

$$D_j = \sum_{i=1}^m \left\{ \mu_i \right\} \left\{ \begin{matrix} T \\ 2m \times 1 \end{matrix} \right\} \left[f_M \right]_{2m \times 2m} \left\{ \begin{matrix} M \\ 2m \times 1 \end{matrix} \right\} \quad (2.22)$$

en el cual:

$$\left\{ \mu_i \right\}_j = \begin{Bmatrix} m_{1j} \\ m_{2j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{Bmatrix} ; \quad M = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{Bmatrix} ; \quad [f_M] = \begin{bmatrix} [f_{M_1}] & & \\ & [f_{M_2}] & \\ & & \ddots \\ & & & [f_{M_n}] \end{bmatrix} \quad 2.23$$

A la matriz $[f_M]$ que contiene las matrices de flexibilidades separadas de todos los miembros se le llama matriz de flexibilidades no ensamblada.

Cuando se requiere conocer los desplazamientos de n coordenadas, la carga virtual unitaria debe aplicarse en cada una de las coordenadas separadamente para determinar los momentos en los extremos, arreglándolos en tal forma que

$$[m]_{2m \times n} = \begin{bmatrix} - \left\{ \begin{matrix} m \\ m \end{matrix} \right\} \begin{Bmatrix} 11 \\ 21 \\ \vdots \\ m1 \end{Bmatrix} & \left\{ \begin{matrix} m \\ m \end{matrix} \right\} \begin{Bmatrix} 12 \\ 22 \\ \vdots \\ n2 \end{Bmatrix} & \left\{ \begin{matrix} m \\ m \end{matrix} \right\} \begin{Bmatrix} 1n \\ 2n \\ \vdots \\ nn \end{Bmatrix} \end{bmatrix}$$

en la cual los elementos de cada submatriz son los momentos extremos en el elementos.

El primer subíndice indica el momento y el segundo la coordenada en la cual se aplica el momento unitario.

Cuando se trata de varios casos de carga, los desplazamientos se calcularán:

$$[D]_{n \times p} = [mu]_{2m \times n}^T [f_M]_{2m \times 2m} [M]_{2m \times p} \quad (2.24)$$

Matriz de flexibilidades ensamblada de la estructura.

Esta matriz puede determinarse a partir de las flexibilidades de cada uno de los elementos usando la ecuación 2.24. Los elementos de la matriz de flexibilidades puesto que son los desplazamientos en las coordenadas correspondientes debidos a una fuerza (o mom.) unitaria actuando separadamente en cada una de esas coordenadas, la carga real y la carga virtual son las mismas, por lo que la ecuación 2.24 quedará:

$$[f] = \sum_{s=1}^4 [mu]_s^T [f_M]_s [mu]_s \quad (2.25)$$

en la cual $[f]$ es la matriz de flexibilidades ensamblada de la estructura y el subíndice s se refiere a las cuatro causas que pueden provocar deformación: flexión, axial, cortante y torsión.

Cuando solo se considera flexión la ec. 2.25, quedaría:

$$[f]_{n \times n} = [mu]_{2m \times n}^T [f_M]_{2m \times 2m} [mu]_{2m \times n} \quad 2.26$$

en la cual:
 m = número de elementos
 n = de coordenadas

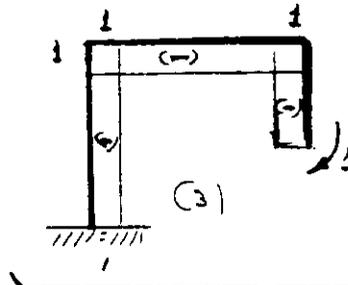
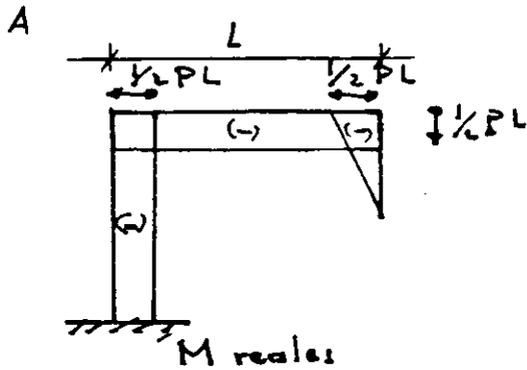
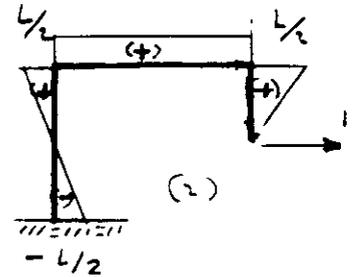
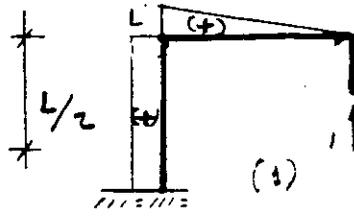
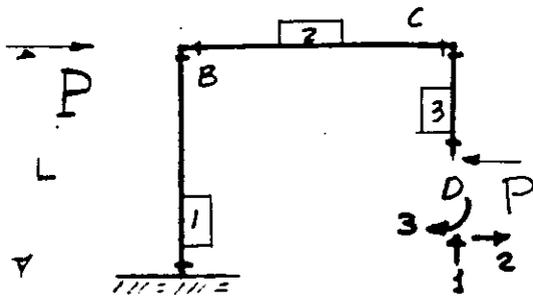
El ejemplo 2 muestra la aplicación de los conceptos anteriores.

Ejemplo No. 2 En el marco indicado se pide :

- A) Calcular los desplazamientos en D, debidos a flexión
- B) Calcular la matriz de flexibilidad.

(A)

$EI = cte.$



M virtuales

$$[m_u]_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} L & -L/2 & -1 \\ -L & -L/2 & 1 \\ L & L/2 & -1 \\ 0 & -L/2 & 1 \\ 0 & L/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M]_{6 \times 1} = PL \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[f_M]_{6 \times 6} = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\{D\}_{3 \times 1} = [m_u]_{6 \times 3}^T \cdot [f_M]_{6 \times 6} \cdot [M]_{6 \times 1} = \frac{PL^3}{EI} \begin{bmatrix} -0.75 \\ -0.29 \\ +1.12/L \end{bmatrix}$$

B) Calculo de la matriz de flexibilidad

$$[F]_{3 \times 3} = [mU]_{6 \times 3}^T [fm]_{6 \times 6} [mU]_{6 \times 3}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} L & -L/2 & -1 \\ L & L/2 & -1 \\ L & \frac{L}{2} & -1 \\ 0 & -L/2 & -1 \\ 0 & -L/2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & -L/2 & -1 \\ -L & -L/2 & 1 \\ L & L/2 & -1 \\ 0 & -L/2 & 1 \\ 0 & +L/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 8L^2 & 1.5L^2 & -9L \\ 1.5L^2 & 2.25L^2 & -3.75L \\ -9L & -3.75L & 15 \end{bmatrix}$$

2.3 Teorema recíproco de Maxwell-Betti.

Si un sistema de fuerzas F_1, F_2, F_n se aplica a una estructura en las coordenadas $1, 2, \dots, n$ provocan desplazamientos D_1F, D_2F, \dots, D_nF . Manteniendo el sistema de fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n , se aplica otro sistema de fuerzas Q_1, Q_2, \dots, Q_n , provocarán desplazamientos D_1Q, D_2Q, \dots, D_nQ y además desplazamientos D_1F, D_2F, \dots, D_nF en los puntos donde actúa el sistema F_1, F_2, \dots, F_n .

El trabajo externo total será:

$$W_{F+Q} = \frac{1}{2} \sum F_i D_i F + \frac{1}{2} \sum F_i D_i Q + \frac{1}{2} \sum Q_i D_i Q \quad 2.27$$

$$\text{invertiendo: } W_{Q+F} = \frac{1}{2} \sum Q_i D_i Q + \frac{1}{2} \sum Q_i D_i F + \frac{1}{2} \sum F_i D_i F \quad 2.28$$

$$\text{como } W_{F+Q} = W_{Q+F} : \frac{1}{2} \sum F_i D_i Q = \frac{1}{2} \sum Q_i D_i F \quad 2.29$$

Esta ecuación es el teorema recíproco de Betti cuyo enunciado sería que el trabajo externo hecho por un sistema de fuerzas F_i a través de desplazamientos debidos al sistema Q_i es igual al trabajo externo hecho por el sistema de fuerzas Q_i a través de desplazamientos provocados por el sistema F_i .

El teorema de Maxwell, consiste en aplicar el principio anterior a las deflexiones y haciendo que $F_i = 1$ en la coordenada i en el sistema de fuerzas F y $Q_j = 1$ en la coordenada j :

$$D_i Q = D_j F$$

que se puede escribir como $f_{ij} = f_{ji}$ 2.30

Estos desplazamientos se les llama coeficientes de flexibilidad como se vió en los ejemplos 1 y 2 y para una estructura de n coordenadas, estos coeficientes se arreglarán para formar una matriz de flexibilidades. Esta matriz deberá ser simétrica debido al

teorema recíproco de Maxwell - Betti.

3.- METODOS GENERALES DE ANALISIS.

Existen básicamente dos métodos generales, para la resolución de estructuras hiperestáticas principalmente y que son el método de las flexibilidades (o de las fuerzas) y el método de las rigideces (o de los desplazamientos) que se describen en los párrafos siguientes.

Mas adelante se analizan con detalle cada uno de estos métodos.

3.1.- Método de las flexibilidades.

En el inciso 2.2 al hablar de cálculo de deflexiones, se introdujo el concepto de matriz de flexibilidades de una estructura.

A continuación se definirá el método de las flexibilidades.

En este método las incógnitas son las fuerzas redundantes que se calculan superponiendo desplazamientos de estructuras isostáticas y planteando las ecuaciones para resolver las incógnitas con base en la compatibilidad de deformaciones de la estructura.

Las ecuaciones de compatibilidad son del tipo:

$$\{D\} + [f] \{F\} = \{0\}; \quad 3.1$$

en la cual :

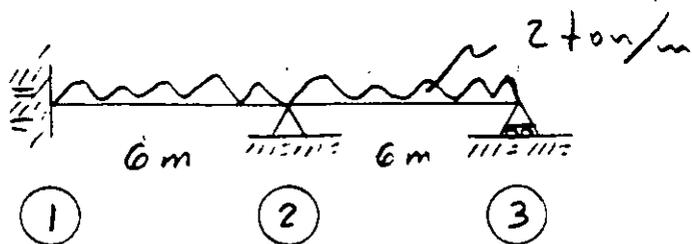
D = vector columna de los desplazamientos debidos a cargas externas.

F = vector de las fuerzas redundantes

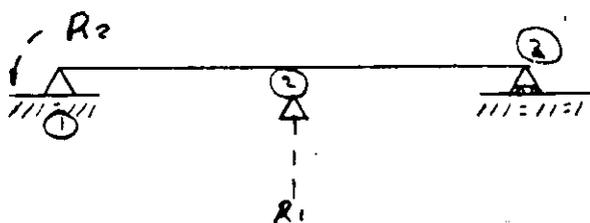
f = matriz de flexibilidades. Sus elementos representan desplazamientos debidos a fuerzas unitarias.

Ejemplo No. 3 Calcular las reacciones resolviendo por el metodo de las flexibilidades

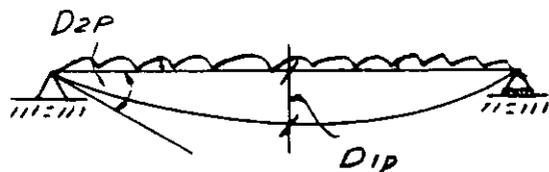
$EI = cta.$



a) Estructura primario

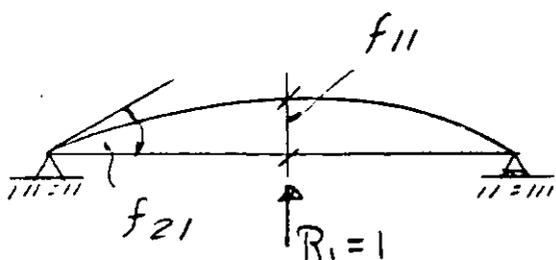


b) Desplazamientos debidos a las cargas



$$D = \begin{Bmatrix} -\frac{540}{EI} \\ -\frac{144}{EI} \end{Bmatrix}$$

c) Desplazamientos debidos a $R_1 = 1$

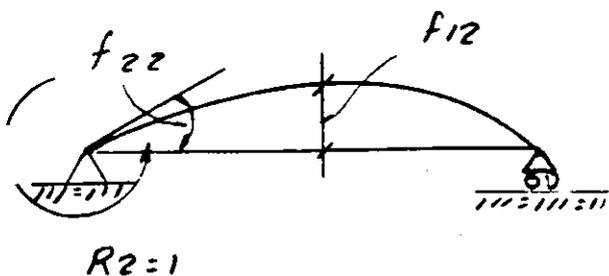


$$[F] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{36}{EI} & \frac{9}{EI} \\ \frac{9}{EI} & \frac{4}{EI} \end{bmatrix}$$

Ecuaciones de compatibilidad de deformaciones:

$$\{D\} + [F] \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

d) Desplazamiento debidos a $R_2 = 1$



$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = [F]^{-1} \{-D\}$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13.71 \\ 5.14 \end{Bmatrix} \text{ ton}$$

La secuela de cálculo seá entonces:

- 1) Determinar el grado de hiperestaticidad
- 2) Plantear la estructura primaria isostática
- 3) Determinar los desplazamientos debidos a las cargas en los puntos liberados.
- 4) Determinar los desplazamientos debidos a cada una de las redundantes supuestas con valores unitarios, que son los coeficientes de flexibilidadⁱ
- 5) Sumar los desplazamientos debidos a las cargas y a cada redundante con base en condiciones de compatibilidad de deformaciones.

A continuación se indica el ejemplo 3 de aplicación.

3.2.- Método de las rigideces.

En este método, las incógnitas son los desplazamientos nodales y los elementos mecánicos se calculan superponiendo una estructura a la cual se restringen los desplazamientos nodales calculando las fuerzas que provocan estas restricciones.

Posteriormente se van permitiendo uno a uno los desplazamientos en los nudos, calculando los coeficientes de rigidez correspondientes.

Finalmente con base en ecuaciones de equilibrio se calculan los desplazamientos y con éstos se determinan los elementos mecánicos por superposición.

Las ecuaciones de equilibrio son de la forma:

$$\{F\} + [K]\{D\} = \{0\} \quad (3.2)$$

en la cual:

$\{ F \}$ = vector columna que depende de las cargas externas
* $[K]$ = matriz de rigideces cuyos elementos representan fuerzas (o mom.)
debidas a desplazamientos unitarios.

No depende de las cargas

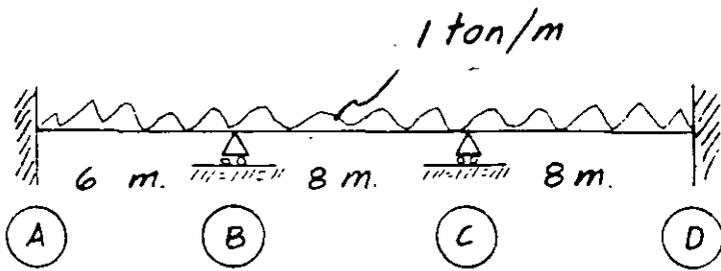
$\{ D \}$ = vector que representa las incógnitas que son los desplazamientos

La secuela de cálculo será:

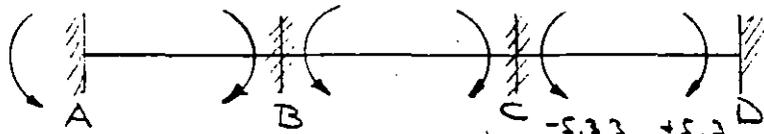
- 1) Encontrar el número de desplazamientos nodales posibles
- 2) Fijar los desplazamientos posibles calculando las fuerzas nodales de fijación correspondientes
- 3) Ir permitiendo desplazarse uno a uno los desplazamientos unitarios inicialmente impedidos, calculando las fuerzas correspondientes (coeficientes de rigidez)
- 4) Con base en las ecuaciones de equilibrio, calcular los desplazamientos
- 5) Los elementos mecánicos se obtendrán de superponer la estructura impedida de desplazarse en (2) con las correspondientes liberadas una a una

A continuación el ejemplo 4 muestra la aplicación de este método.

Ejemplo No. 4 - Calcular reacciones por el método de las rigideces.



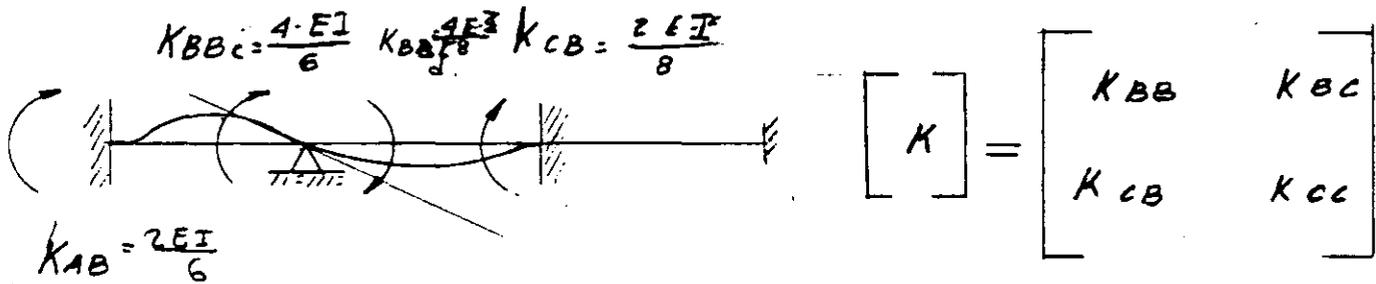
- 1) Incógnitas Θ_B y Θ_C
- 2) Fzas. nodales de fijación.



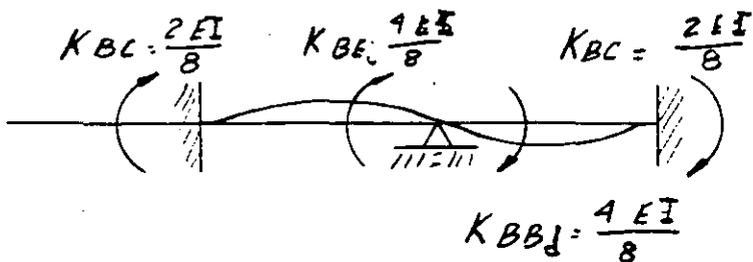
$$M_{AB} = -3 M_{BA}, \quad M_{BC} = -M_{CB} = +M_{CD} = -M_{DC} = -5.33 \text{ tm}$$

$$= +3 \text{ tm}$$

3.1) $\Theta_B = +1$



3.2) $\Theta_C = +1$



4) Ecu. de equilibrio: $\sum M_B = 0$

$$\{F\} = [K] \{D\}$$

$$\begin{Bmatrix} -2.33 \\ 0 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{4}{6} + \frac{4}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{2}{8} & \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = [K]^{-1} \{-F\} = \begin{Bmatrix} \frac{24}{EI} \\ -0.53 \end{Bmatrix}$$

4.- PROPIEDADES DE LAS MATRICES DE FLEXIBILIDADES Y DE RIGIDECES.

La relación entre la matriz de flexibilidad y la de rigidez se estableciera a través del siguiente ejemplo (Fig. 1a).

Los desplazamientos $\{D\}$ se pueden expresar en términos de desplazamientos de cada una de las fuerzas actuando y superponiendo: (figura 1b).

$$D_1 = f_{11}F_1 + f_{12} F_2 + \dots + f_{1n} F_n$$

$$D_2 = f_{21}F_1 + f_{22} F_2 + \dots + f_{2n} F_n$$

⋮

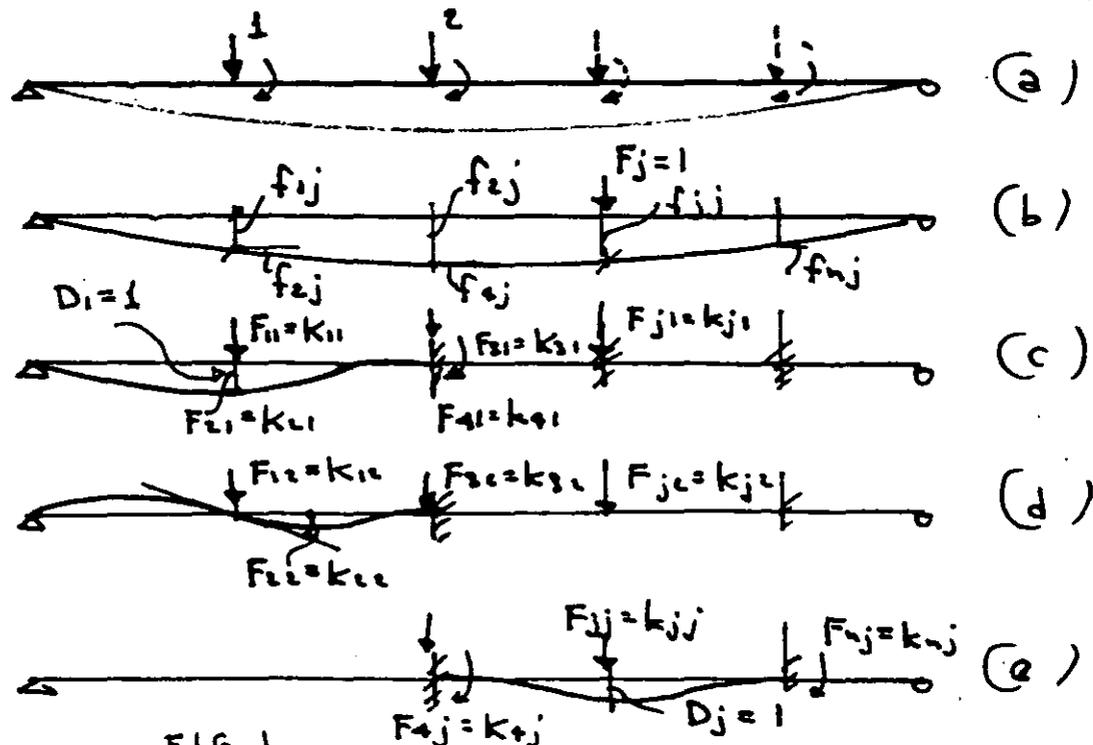
$$D_n = f_{n1}F_1 + f_{n2} F_2 + \dots + f_{nn} F_n$$

$$[f]_{n \times n} \{F\}_{n \times 1} = \{D\}_{n \times 1} \quad 4.1$$

resolviendo 4.1

$$\{F\}_{n \times 1} = [f]_{n \times n}^{-1} \{D\}_{n \times 1} \quad 4.2$$

La ecuación 4.2 puede usarse para determinar las fuerzas formando los elementos de la matriz de rigidez de la misma estructuras



Si la estructura es deformada por fuerzas F_{11} , F_{21} , F_{n1} , a través de coordenadas tales que el desplazamiento $D_1 = 1$, mientras que $D_2 = D_3 = \dots D_n = 0$, Fig.1(c)

$$\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ F_{31} \\ \vdots \\ F_{n1} \end{Bmatrix} = [f]^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En forma similar, las fuerzas requeridas para conservar la estructura deformada tal que $D_2 = 1$, mientras que $D_1 = D_3 = \dots = D_n = 0$ (fig.1d).

$$\begin{Bmatrix} F_{12} \\ F_{22} \\ F_{32} \\ \vdots \\ F_{n2} \end{Bmatrix} = [f]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En caso general, si $D_j = 1$, mientras todos los otros desplazamientos son cero, las ecuaciones serán:

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ F_{31} & \dots & \dots & \dots \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{bmatrix} = [f]^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

siendo las fuerzas F_{ij} de la izquierda en esta ecuación los elementos de la matriz de rigideces, por lo tanto:

$$[K] = [f]^{-1} \quad \text{ó} \quad [K]^{-1} = [f] \quad 4.3$$

La matriz de rigideces es la inversa de la de flexibilidades y viceversa, teniendo el mismo sistema de coordenadas para fuerzas y desplazamientos.

Sin embargo en el análisis por flexibilidad se transforma la estructura en isostática: y el sistema de coordenadas representan la localización y dirección de las restricciones y en cambio en rigideces, se agregan fuerzas para restringir desplazamientos de nudos, siendo su sistema de coordenada la localización y dirección de los desplazamientos incógnitas; por lo tanto la inversa de la matriz de flexibilidad utilizada en el método de las fuerzas en una matriz, en la cual los elementos son coeficientes de rigidez, pero no los que se utilizan en el análisis del método de rigidez y viceversa.

Propiedades de simetría.

Como se demostró en el teorema recíproco de Maxwell-Betti y con relación a la matriz de flexibilidades, hace que esta matriz sea simétrica. Como la ecuación 4.3 indica que la matriz de rigideces es la inversa de la matriz de flexibilidades, será también simétrica, es decir que los coeficientes de la matriz de rigideces serán entonces:

$$K_{ij} = K_{ji} \quad 4.4$$

Otra propiedad importante es que los coeficientes de la diagonal principal f_{ij} ó K_{ji} deben ser positivos ya que para el cálculo de f_{ij} el desplazamiento ocurrirá en la coordenada i debida a una fuerza unitaria en i , teniendo ambos la misma dirección y en forma semejante para K_{ii} , la fuerza necesaria en la coordenada i que provoca un desplazamiento unitario en i , tendrán la misma dirección.

Si en la ecuación (2.3) se substituyen los desplazamientos expresados en la ecuación 4.1, se tiene:

$$[W]_{1 \times 1} = \frac{1}{2} \left\{ F \right\}^T_{n \times 1} [f]_{n \times n} \left\{ F \right\} \quad (4.5)$$

y por otro lado, substituyendo la ecuación (3.2) de nuevo en la 4.1

$$[W]_{1 \times 1} = \frac{1}{2} \left\{ D \right\}^T \left[K \right] \left\{ D \right\} \quad (4.6)$$

De las ecuaciones 4.5 y 4.6, los miembros de la derecha tienen forma cuadrática de las variables F o D y ésta es positivamente definida si tiene valores positivos para cualquier valor no nulo de la variable y será cero si F ó D son cero.

Por lo anterior, las ecuaciones 4.5 y 4.6 representan el trabajo externo de fuerzas a través de desplazamientos y esta cantidad debe ser positiva en una estructura estable, deduciendo que en esa forma cuadrática, las matrices [f] y [K] son matrices positivamente definidas, siendo los determinantes de [f] y [K] mayores que cero.

Selección del método de las flexibilidades o de las rigideces.

Para seleccionar cualquiera de los dos métodos generales, es necesario haberse familiarizado con ellos, para poder decidir en cada caso cual sería de aplicación mas sencilla.

Sin embargo se pueden adelantar algunos comentarios:

1.- El número de incógnitas es en general mayor en el método de las rigideces que en flexibilidades, pero la formulación de las ecuaciones es mas sencilla y de mas fácil aplicación para programas de computadora, debido principalmente a la dificultad de programar la estructura primaria.

2.- Cuando el trabajo se hace con calculadoras y para sistemas relativamente pequeños, la selección dependerá de comparar el grado de hiperestaticidad en flexibilidades con el número de grados de libertad en rigideces.

5.- METODO DE LAS FLEXIBILIDADES.

En el inciso 3 se describió este método. A continuación se analizan en detalle la aplicación de matrices para su resolución.

5.1.- Matriz de transformación de fuerzas.

En una estructura estáticamente determinada cada una de las fuerzas internas de sus elementos puede expresarse en función de las fuerzas externas nodales, por medio de la ecuación de equilibrio:

$$p_1 = b_{11} F_1 + b_{12} + \dots + b_{1n} F_n$$

$$p_2 = b_{21} F_1 + b_{22} F_2 + \dots + b_{2n} F_n$$

$$p_m = b_{m1} F_1 + b_{m2} F_2 + \dots + b_{mn} F_n$$

en la cual p son las fuerzas internas y F el conjunto del sistema de cargas aplicada a la estructura.

No existe relación entre los subíndices de F y p

En forma matricial:

$$\{p\} = [b] \{F\} \quad (5.1)$$

en la cual

$$b = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

[b] es la matriz de transformación de fuerzas que relaciona las fuerzas internas con las externas.

La matriz $[b]$ es una matriz rectangular y el elemento b_{ij} representa el valor de la componente de p_i de la fuerza interna, producida por la fuerza externa F_j de valor unitario.

Cuando la estructura es hiperestática, las fuerzas internas no pueden determinarse en función de las cargas externas aplicando solamente ecuaciones de equilibrio. Sin embargo, haciendo la estructura isostática, que llamaremos primaria, suprimiendo las redundantes, como se hace en el método de las flexibilidades, se considera la estructura primaria sujeta primeramente a las cargas reales aplicadas y posteriormente a las redundantes. En esta forma, se pueden expresar las fuerzas internas de los elementos en función de las cargas externas F y de las redundantes o hiperestáticas R , como sigue:

$$\{p\} = [b_F] F + [b_R] R \quad (5.3)$$

o utilizando la propiedad de subdivisión de matrices:

$$\{p\} = \begin{bmatrix} b_F & \vdots & b_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F \\ R \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

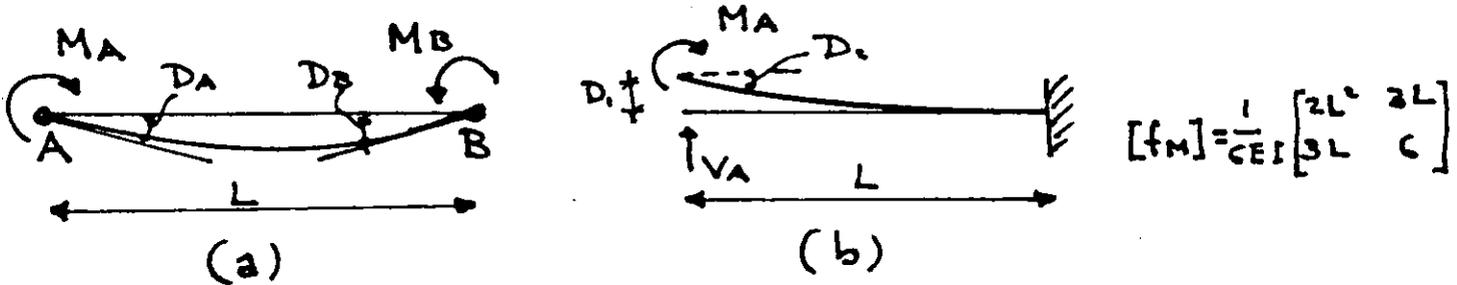
En la cual:

$[b_F]$ = matriz de transformación de fuerzas externas en la que cada columna representa los valores de p producidos por las fuerzas externas unitarias aplicadas a la estructura primaria con redundantes nulas.

$[b_R]$ = Matriz de transformación de fuerzas redundantes en la que cada columna representa los valores de p producidos por redundantes unitarias aplicadas a la estructura primaria con fuerzas externas nulas.

5.2.- Solución matricial generalizada por el método de las flexibilidades.

Considerando un elemento aislado, despreciando los efectos de fuerza axial



Los vectores de fuerzas internas y deformaciones se pueden expresar:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} ; \quad \{D\} = \begin{Bmatrix} D_A \\ D_B \end{Bmatrix}$$

quedando cada componente del vector desplazamiento con la misma componente del vector carga.

La matriz de flexibilidades de la barra será como se indicó anteriormente:

$$[f_M] = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y la relación con las deformaciones es:}$$

$$\{q\} = [f_M] \{P\} \quad (5.5)$$

Los vectores de fuerzas internas y deformaciones quedarán como sigue:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{Bmatrix} \quad D = \begin{Bmatrix} D_1 \\ \dots \\ D_2 \\ \dots \\ D_n \end{Bmatrix}$$

Los subíndices se refieren a la designación de cada elemento en que se ha descompuesto la estructura.

En la ecuación 5.4 se puede ver por el principio de contra-
gradiencia, tal y como se verá para el cálculo de los despla-
zamientos; que:

$$\begin{Bmatrix} D_F \\ \dots \\ D_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [b_F]^T \\ \dots \\ [b_R]^T \end{bmatrix} \{e\} \quad (5.6)$$

Siendo D_F los desplazamientos debidos a $\{F\}$ y D_R los desplazamientos debidos a las redundantes $\{R\}$, obteniéndose:

$$\{D_F\} = [b_F]^T \{e\} \quad (5.7)$$

$$\{D_R\} = [b_R]^T \{e\} \quad (5.8)$$

Para calcular las redundantes, se substituye el valor $\{p\}$ de la ecuación de equilibrio 5.3 en la ecuación que relaciona deformaciones y fuerzas, expresada en ecuación (5.5):

$$\{e\} = [f_M] \{p\} = [f_M] [b_F] \{F\} + [f_M] [b_R] \{R\} \quad (5.9)$$

Por último, si sustituimos el valor de las deformaciones obtenidas en 5.9, en la ecuación de continuidad 5.8, se tendrá:

$$\begin{aligned} \{D_R\} &= [b_R]^T \{e\} \\ &= [b_R]^T [f_M] [b_F] \{F\} + [b_R]^T [f_M] [b_R] \{R\} \end{aligned} \quad 5.10$$

y debido al principio de compatibilidad de deformaciones, las discontinuidades impuestas para obtener la estructura primaria isostática no existen realmente, los valores de $\{D_R\}$ deben ser nulos:

$$[b_R]^T [f_M] [b_F] \{F\} + [b_R]^T [f_M] [b_R] \{R\} = 0 \quad 5.11$$

Ecuación que permite calcular los valores de las redundantes.

El producto de las tres primeras matrices del primer miembro de la ecuación 5.11 y que están premultiplicando al vector F, representan la aplicación del principio de trabajos virtuales tal y como se expuso anteriormente en la ecuación 2.18. Este primer término da como resultado un vector de $nR \times 1$ y representa los desplazamientos debidos a las fuerzas aplicadas a la estructura.

En forma semejante, las tres primeras matrices del segundo término 5.11 y que están premultiplicando a las redundantes, representan la matriz de flexibilidades ensamblada de la estructura, tal y como se expuso en la ecuación 2.25. Esta matriz será siempre cuadrada, simétrica, no singular y de orden $n_R \times n_R$.

Este segundo término del primer miembro de la ecuación 5.11 representa físicamente los desplazamientos debidos a las redundantes.

La forma mas general de la ecuación 5.11 se escribe de la manera siguiente:

$$[b_R]^T [f_M] [b_F] \left\{ F \right\} + [b_R]^T [f_M] [b_R] \left\{ R \right\} = \left\{ D_a \right\} \quad 5.12$$

El vector D_a indica los desplazamientos reales que ocurren en los coordenadas seleccionadas en la estructura primaria, siendo iguales a cero generalmente en la práctica o iguales a los desplazamientos reales impuestos D_a , como serían asentamientos de apoyos, giros, efectos de temperatura, resortes elásticos, etc.

De la ecuación 5.11:

$$R = - [f]^{-1} [b_R]^T [f_M] [b_F] \left\{ F \right\} \quad 5.18$$

Con las redundantes R obtenidas, aplicando el principio de superposición se obtienen los elementos mecánicos:

$$\left\{ p \right\} = [b_F] \left\{ F \right\} + [b_R] \left\{ R \right\} \quad 5.3$$

Las ecuaciones anteriores son válidas para cualquier tipo de estructuras: armaduras, vigas, marcos, etc., tomando las flexibilidades correspondientes de axial, flexión, etc.

Para el caso de armaduras, es conveniente aplicar la ecuación equilibrio:

$$\{p\} = [b_F] \{F\} = \{p_0\}$$

siendo $\{p_0\}$ el vector de fuerzas internas en las barras debidas a fuerzas externas $\{F\}$ aplicada en la estructura primaria, quedando la ecuación 5.18

$$[b_R]^T [f_M] \{p_0\} + [b_R]^T [f_M] \{b_R\} \{R\} = 0 \quad 5.20$$

ecuaciones en las cuales no será necesario calcular $[b_F]$

Para calcular los desplazamientos, la ecuación 5.3 puede escribirse:

$$\{p\} = \begin{bmatrix} b_F \\ \vdots \\ b_R \end{bmatrix} \frac{F}{R} \quad (5.4)$$

$$\begin{Bmatrix} D_F \\ D_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_F^T \\ b_R^T \end{bmatrix} \{e\} \quad (5.21)$$

En la cual: $\{D_F\}$ = desplazamientos debidos a $\{F\}$
 $\{D_R\}$ = desplazamientos debidos a las redundantes

Por el principio de contragradencia:

$$\{D_F\} = [b_F]^T \{e\} \quad (5.22)$$

$$\{D_R\} = [b_R]^T \{e\} \quad (5.23)$$

Pero por continuidad o compatibilidad, dado que los elementos de la estructura no están realmente "cortados", los valores de D_R deben ser nulos.

Por otro lado como:

$$\{e\} = [f_M] \{p\} \quad (5.24)$$

que es la ley de Hooke al revés, substituyendo en 5.22

$$\{D\} = [b_F]^T \{e\} = [b_F]^T [f_M] \{p\} \quad (5.25)$$

Esta ecuación permite calcular los desplazamientos aplicando una fuerza unitaria en la estructura primaria isostática.

5.21.- Caso de fuerzas aplicadas en los elementos

La solución matricial generalizada requiere que las fuerzas estén aplicadas en los nudos, lo cual supone que en el caso de vigas y marcos que el momento flexionante entre nudos varía linealmente y que los desplazamientos entre nudos son nulos.

Sin embargo como en la práctica las cargas se aplican en cualquier punto, habrá que trasladarlas a los nudos previamente seleccionados, calculando además los desplazamientos locales debidos a estas cargas en los nudos externos del elemento considerado.

Las deformaciones locales deben tomar en cuenta las condiciones de frontera, establecidas para cada barra, cuando se subdivide la estructura en elementos. La expresión para obtener los desplazamientos según el sistema de redundantes basada en el teorema de trabajos virtuales, será:

$$\{D_i\} = [b_R]^T \{D\}$$

en la cual $\{D\}$ es el vector de desplazamientos impuesto a cada elemento debido a las cargas aplicadas sobre él.

5.3- Resumen de aplicación del método de las flexibilidades

5.31- Estructuras isostáticas.

- a) Las fuerzas internas se obtienen con la aplicación de la ecuación de equilibrio:

$$\{F\} = [b_F] \{D\}$$

- b) Los desplazamientos nodales se calcularán:

$$\{D\} = [b_M]^T [f_M] [b_F] \{F\} = [f] \{F\}$$

(Nota.- En el caso de vigas o marcos cargados en los elementos deberán trasladarse las cargas a los nudos).

El ejemplo No. 5 muestra la aplicación del método a una armadura isostática.

5.32.- Estructuras hiperestáticas.

- a) Definir la estructura primaria y por lo tanto especificar cuales son las redundantes
- b) Calcular vector de fuerzas y la matriz de transformación de redundantes $[b_R]$ y la asociada a las cargas $[b_F]$
- c) Calcular la matriz de flexibilidad no ensamblada de los elementos $[f_M]$
- d) Calcular el producto $[b_R]^T [f_M] [b_F]$ que es la matriz de flexib. asociada a las cargas
- e) Calcular la matriz de flexibilidades ensamblada de la estructura

$$[f]_{R \times R} = [b_R]^T [f_M] [b_R]$$

- f) Plantear y resolver las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones:

$$D_A = [D_{XF}] \{ F \} + [D_{RR}] \{ R \} = D_X \stackrel{!}{=} 0$$

- g) Si se desea calcular los desplazamientos.

$$D_A = [b_F]^T [f_M] \{ P \}$$

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de la secuela mencionada.

5.4-Variante propuesta para el cálculo de la matriz de flexibilidades en el caso de flexión. (ref. 3)

En las vigas y marcos, la matriz de flexibilidades de un elemento está formada por cuatro términos, como se vió en la ecuación 2.21A

$$\begin{bmatrix} f \\ M \end{bmatrix} = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para lograr que la matriz de flexibilidades sea diagonal, como sucede en el caso de las armaduras, debido a la forma de multiplicación del producto:

$$\int m \frac{M}{EI} dx$$

si en una estructura de n elementos, se llama $\{p\}$ a las fuerzas internas, y definimos tres ordenadas por elemento, en tal forma:

que $p_i = \begin{cases} M_a \\ M_b \\ M_c \end{cases}$, sean los momentos flexionantes de acuerdo con la Fig. 3.1

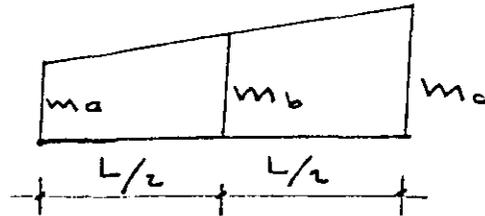
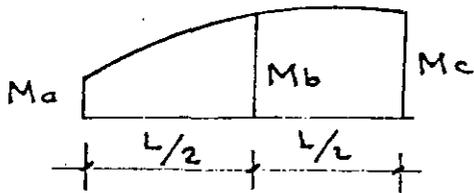


Fig. 3

Integrando un polinomio de grado 2, de la forma $Y = Ax^2 + Bx + C$, la integral será una función lineal de las ordenadas Y_a, Y_b y Y_c .

En el caso de carga uniformemente repartida la variación de M será parabólica y como la variación de m siempre es lineal, la integración del producto mM será:

$$\begin{bmatrix} f \\ M \end{bmatrix}_i = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21B)$$

que es semejante a la fórmula de Simpson. (Ref. 5), esta matriz será de la misma forma si se integra el producto M lineal multiplicado por m.

Se puede también diagonalizar la matriz de flexibilidad para el caso de variación de M en tercer o cuarto grado, integrando la ecuación de una cónica de 3° ó 4° grado, debido a la variación lineal de

Por tratarse de matrices diagonales, la ecuación 3.10 se puede almacenar en un vector de la forma:

$$\left\{ \begin{matrix} f \\ M \end{matrix} \right\}_i = \frac{L}{6EI} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{matrix} \right\} \quad (2.21c)$$

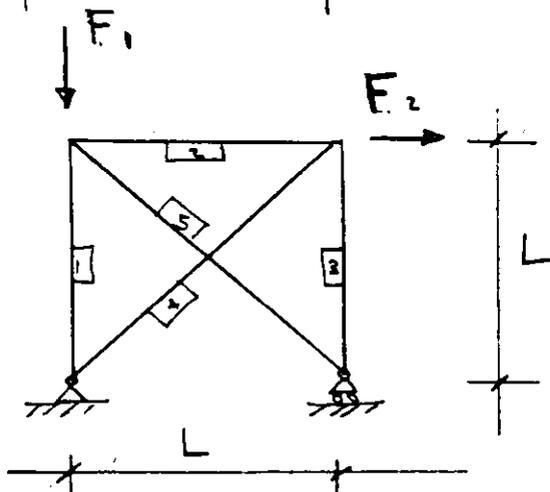
La ecuación **2.21c**, presenta ventajas importantes con relación a la matriz de flexibilidades en flexión de la forma (2.21A) :

- a) La matriz es diagonal, por lo tanto de mas fácil manejo operativo, a pesar de tener un renglón mas.
- b) En el caso de cargas uniformemente repartidas, utilizando la matriz diagonal, no es necesario pasar las cargas a los nudos y luego trasponerlas como se indicó en la pág. 35, simplificándose en forma considerable el trabajo.

El ejemplo No. 12 muestra la forma de aplicar la secuela de cálculo así como la variante mencionada, para resolver un marco rígido mediante el método de las flexibilidades.

EJEMPLO No.5- Calcular las fuerzas:

en las barras resolviendo por flexibilidad de y los desplaz. corresp. en la dirección de F_1 y F_2



$$\frac{L}{AE} = \text{constante.}$$

1.- La armadura es isostática

2.- La ecuación de equilibrio es

$$\{P\} = [b_F] \{F\}$$

Cálculo de b_F $F_1=1$ $F_2=1$

$$[b_F]_{5 \times 2} = \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $\{F\}$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_1 \\ 0 \\ -F_2 \\ \sqrt{2} F_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3.- Cálculo de desplazamientos

$$\{D\} = [b_F]^T [f_M] [b_F] \{F\}$$

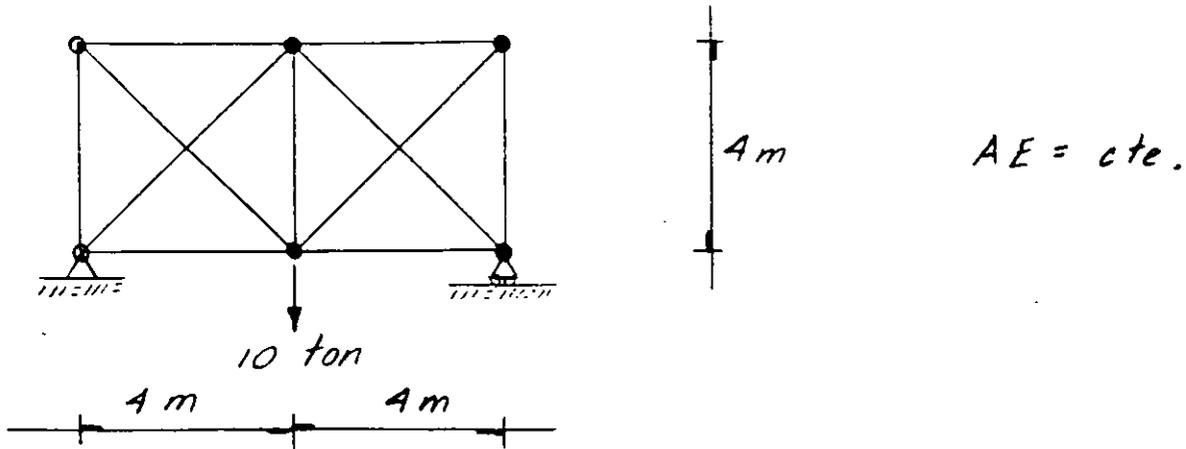
$$[f_M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[f] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_1/AE \\ 3F_2/AE \end{Bmatrix}$$

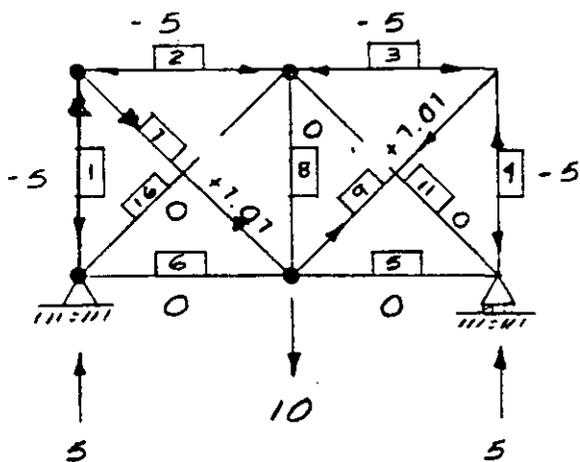
Ejemplo No. 6

Resolver la armadura por flexibilidades.



Solución:

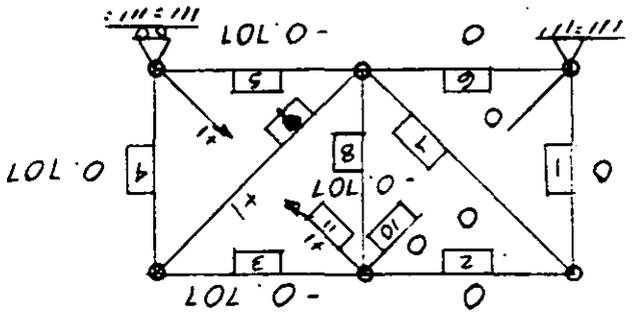
1. - La estructura es hiperestática en 2º grado y la estructura primaria seleccionada será la siguiente:



El vector de fuerzas internas:
 $P_0 = [bF] F$

El vector $\begin{Bmatrix} P_0 \\ 11 \times 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ +7.07 \\ 0 \\ +7.07 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}
 0 & +1 & 0 \\
 +1 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 \\
 -0.707 & -0.707 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & -0.707 & -0.707 \\
 -0.707 & -0.707 & 0 \\
 -0.707 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & -0.707 & -0.707
 \end{bmatrix} = [b_R]$$

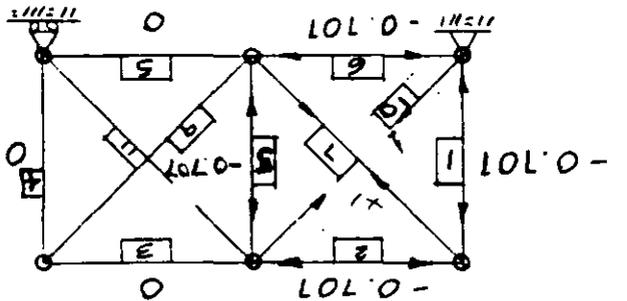


$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -0.707 & -0.707 & 0 & 0 \\
 -0.707 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -0.707 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -0.707 & -0.707 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

2ª columna de $[b_R]$

$$R_2 = 1$$

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -0.707 & -0.707 & 0 & 0 \\
 -0.707 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -0.707 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -0.707 & -0.707 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$



1ª columna de $[b_R]$

$$R_1 = 1$$

2) Obtención de $[b_R]^{9 \times 2}$

Cálculo de $[f]$

$$[f]_{11 \times 11} = \begin{bmatrix} 4 & & & & & & & & & & \\ & 4 & & & & & & & & & \\ & & 4 & & & & & & & & \\ & & & 4 & & & & & & & \\ & & & & 4 & & & & & & \\ & & & & & 4 & & & & & \\ & & & & & & 5.65 & & & & \\ & & & & & & & 4 & & & \\ & & & & & & & & 5.65 & & \\ & & & & & & & & & 5.65 & \\ & & & & & & & & & & 5.65 \end{bmatrix} \times \frac{1}{AE} \equiv \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 5.65 \\ 4 \\ 5.65 \\ 5.65 \\ 5.65 \end{bmatrix}$$

Calculando el producto $[br]^T [f] [p_0]$

$$[f][p_0] = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 5.65 \\ 4 \\ 5.65 \\ 5.65 \\ 5.65 \end{bmatrix} \times \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ +1.01 \\ 0 \\ +1.01 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -20 \\ -20 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ +40 \\ 0 \\ +40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[br]^T [f] [p_0] = \begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & +1 & -0.707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.707 & -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & -0.707 & +1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -20 \\ -20 \\ -20 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ +40 \\ 0 \\ +40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{[f_F]}_{D \times F} \{p_0\} = \begin{Bmatrix} 68.28 \\ 68.28 \end{Bmatrix} \times \frac{1}{AE}$$

Ahora calculando el producto $[b_R]^T [f_M] [b_R]$

$$\begin{matrix} [f_M] \\ 11 \times 11 \end{matrix} \begin{matrix} [b_R] \\ 11 \times 2 \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 5.65 \\ 4 \\ 5.65 \\ 5.65 \\ 5.65 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -0.707 \\ -0.707 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -0.707 \\ +1 \\ -0.707 \\ 0 \\ +1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.707 \\ -0.707 \\ -0.707 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.707 \\ 1 \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} -2.83 \\ -2.83 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2.83 \\ +5.65 \\ -2.83 \\ 0 \\ 5.65 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.83 \\ -2.83 \\ -2.83 \\ 0 \\ 0 \\ -2.83 \\ +5.65 \\ 0 \\ +5.65 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[f] = [b_R]^T [f_M] [b_R] = \begin{matrix} \begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & +1 & -0.707 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0.707 & -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & -0.707 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2.83 \\ -2.83 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2.83 \\ +5.65 \\ -2.83 \\ 0 \\ +5.65 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.83 \\ -2.83 \\ -2.83 \\ 0 \\ 0 \\ -2.83 \\ +5.65 \\ 0 \\ +5.65 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[f] = \begin{bmatrix} 19.32 & 2 \\ 2 & 19.32 \end{bmatrix} \frac{1}{AE}$$

La ecuación de compatibilidad de deformación será:

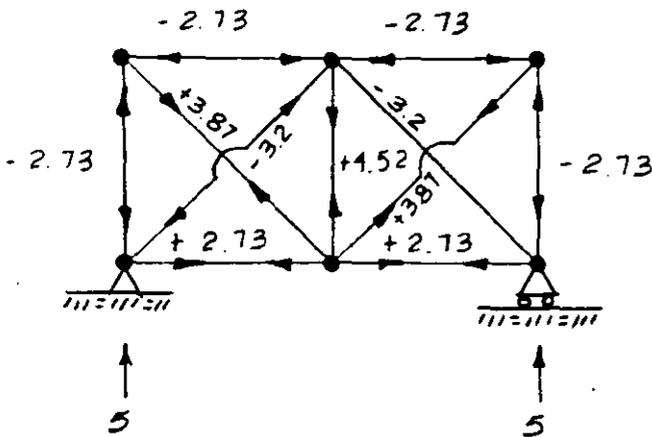
$$\{D_{XF}\} + \{f\} \{R\} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} 68.28 \\ 68.28 \end{bmatrix} \times \frac{1}{AE} + \begin{bmatrix} 19.32 & 2 \\ 2 & 19.32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.2 \\ 3.2 \end{Bmatrix}$$

Las fuerzas en las barras serán :

$$\{P\} = \{P_0\} + [bR] \quad \{R\} = \{0\}$$

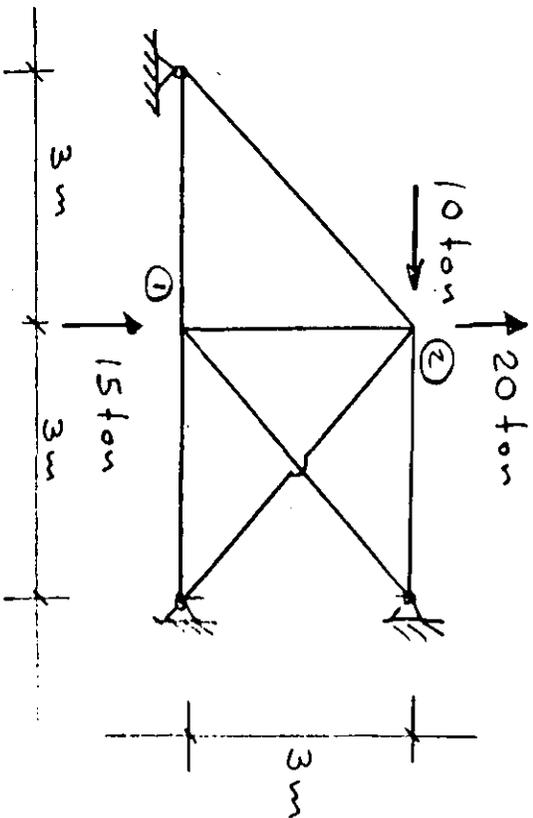
$$\begin{Bmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ +7.07 \\ 0 \\ +7.07 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.107 & 0 \\ -0.707 & 0 \\ 0 & -0.707 \\ 0 & -0.707 \\ 0 & -0.707 \\ -0.707 & 0 \\ +1 & 0 \\ -0.107 & -0.707 \\ 0 & +1 \\ +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -3.2 \\ -3.2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.73 \\ -2.73 \\ -2.73 \\ -2.73 \\ +2.73 \\ +2.73 \\ +3.87 \\ +4.52 \\ +3.87 \\ -3.2 \\ -3.2 \end{Bmatrix}$$



+ = tensión
- = compresión

Fuerzas finales en las barras (+ou)

Ejemplo No. 7 - Resolver la estructura por flexibilidad y calcular $\{P\}$, $\{D_{1x}\}$, $\{D_{2x}\}$

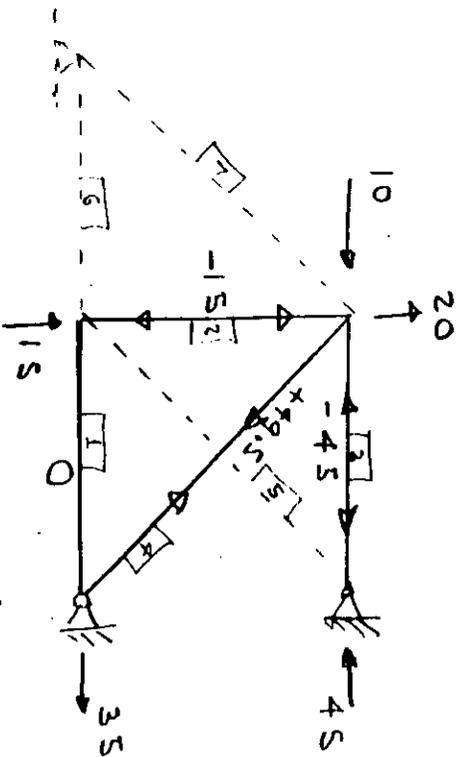


$$A = 30 \text{ cm}^2$$

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

Solución 1) CALCULO DE FUERZAS

La estructura es hiperestática en tercer grado y se seleccionará la siguiente estructura primaria.

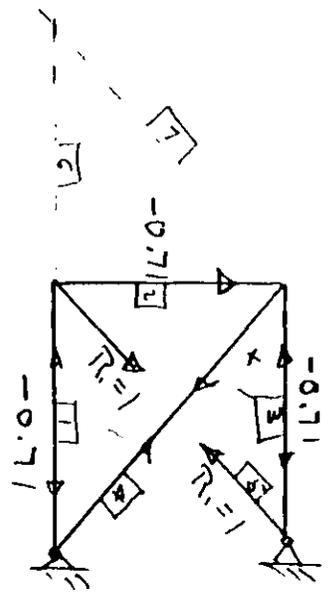


Cálculo de $P_0 =$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -15 \\ -45 \\ +49.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

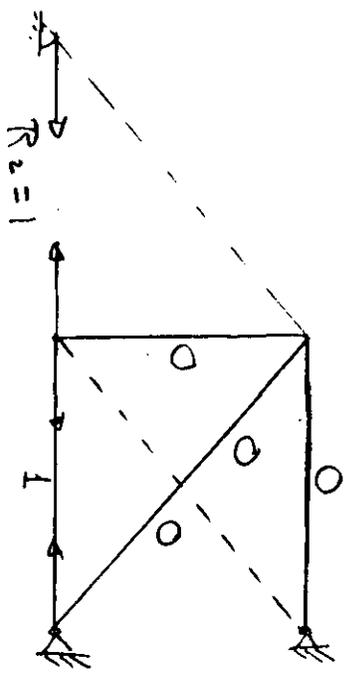
Obtención de $[b_R]$

1ª columna de $[b_R]$; $R_1 = 1$



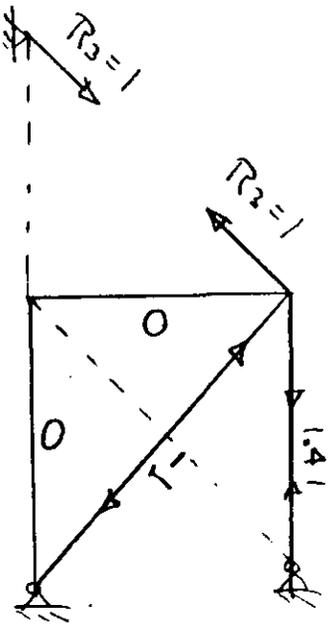
$$\begin{bmatrix} -0.71 \\ -0.71 \\ 1 \\ -0.71 \\ +1 \\ +1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2ª columna de $[b_R]$; $R_2 = 1$



$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

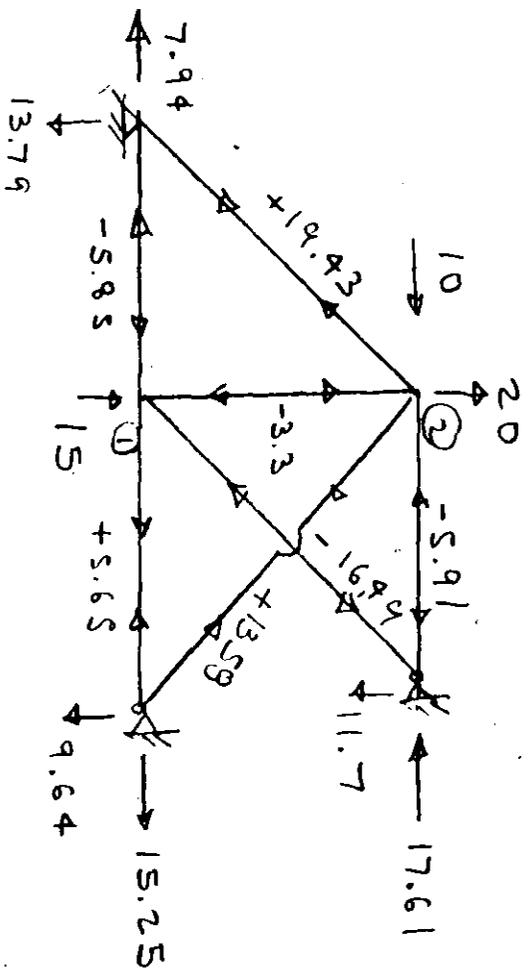
3ª columna de $[b_R]$; $R_3 = 1$



$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +1.41 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[b_R] =$$

$$\begin{bmatrix} -0.71 & 1 & 0 \\ -0.71 & 0 & 0 \\ -0.71 & 0 & +1.41 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



2) CALCULO DE DESPLAZAMIENTOS

Como se obtuvo directamente $\{P\}$ del equilibrio de la armadura bajo las cargas, se tendra que calcular $[b_F]$

$$[b_F] = \begin{bmatrix} F_{x1=1} & F_{y1=1} & F_{x2=1} & F_{y2=1} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & +19.41 & 0 & +11.71 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $\{D\} = [b_F]^T \{f\} \{P\}$

$$D_{ix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0.00027 \text{ m}$$

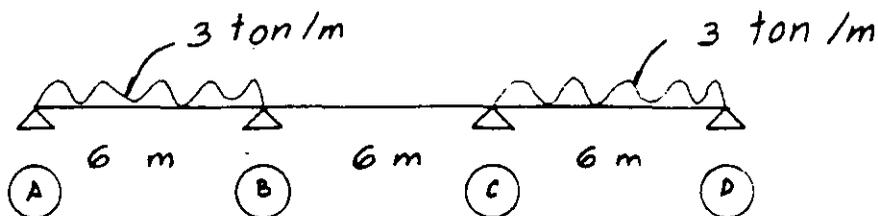
$$\frac{1}{AE} = \frac{16.95}{AE}$$

$$D_{2y} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ +1.41 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \left\{ \begin{matrix} -17.73 \\ +57.57 \end{matrix} \right\} \frac{1}{AE} = \frac{98.90}{AE}$$

$$= 0.00157 \text{ m}$$

Ejemplo No.- 8

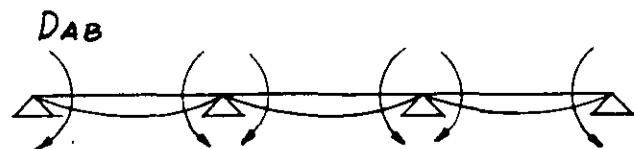
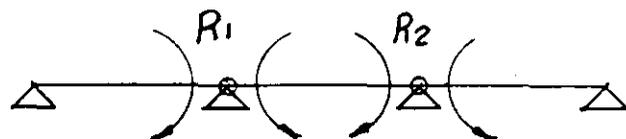
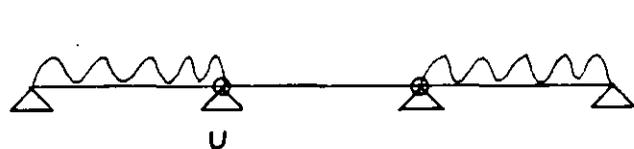
Resolver la viga siguiente por el método de la flexibilidad:



$EI = cte.$

Solución.-

El grado de hiperestaticidad es dos y se seleccionará la siguiente estructura primaria:



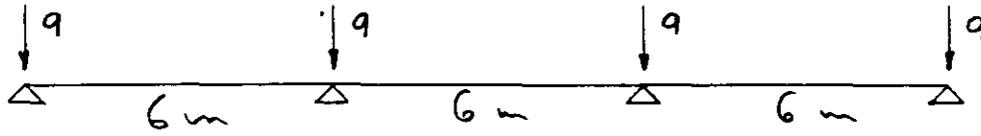
M_{AB} M_{BA} M_{BC} M_{CB} M_{CD} M_{DC}

Los vectores de fuerzas y desplazamientos será:

$$F = \begin{Bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \\ M_{BC} \\ M_{CB} \\ M_{CD} \\ M_{DC} \end{Bmatrix} \qquad D = \begin{Bmatrix} D_{AB} \\ D_{BA} \\ D_{BC} \\ D_{CB} \\ D_{CD} \\ D_{DC} \end{Bmatrix}$$

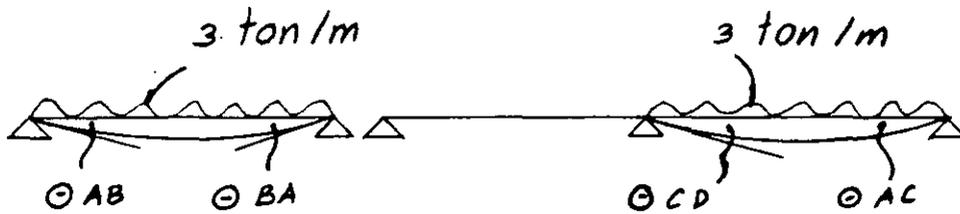
Como el sistema de fuerzas externas no está aplicado en los nudos, habrá que trasladarlo a los apoyos y calcular los giros en los extremos de las barras.

$$\Theta_F = \int m \frac{M}{EI} dx$$



El vector de carga será:

$$F = \begin{Bmatrix} -q \\ -q \\ -q \\ -q \end{Bmatrix}$$



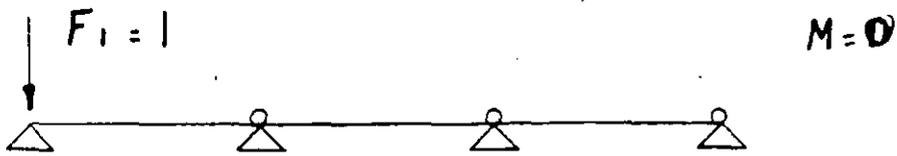
$$\ominus BA = \ominus BC = \ominus CD = \ominus DC = \frac{1}{3} Lk = \frac{27}{EI}$$

El vector de desplazamiento será:

$$\{D_i\} = \begin{Bmatrix} 27 \\ 27 \\ 0 \\ 0 \\ 27 \\ 27 \end{Bmatrix} \frac{1}{EI}$$

Cálculo de matrices de transformación de fuerzas.

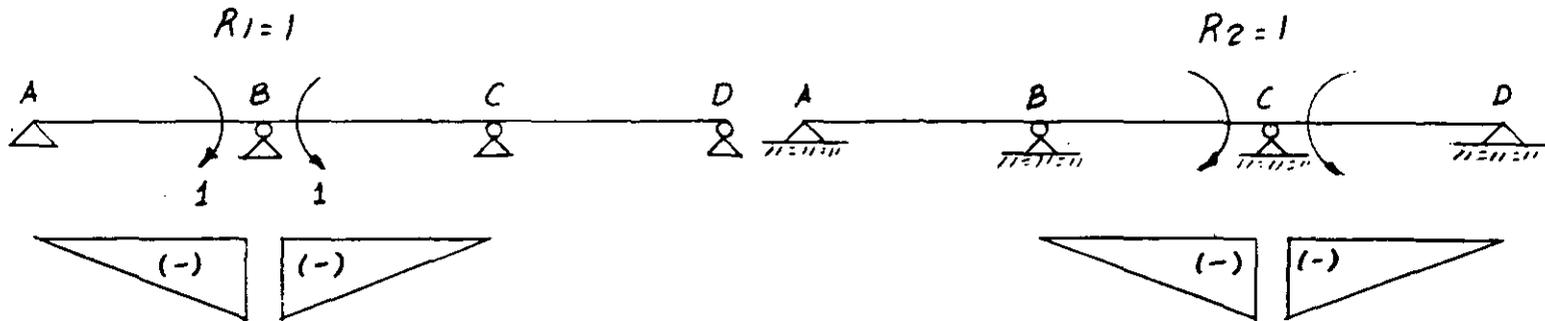
Trazando los diagramas de momentos debidos a fuerzas unitarias y redundantes unitarias:



Para las condiciones $F_2 = 1$, $F_3 = 1$ y $F_4 = 1$ tampoco producen momentos flexionales, por lo tanto la matriz $[b_F]$ será:

$$[b_F] = 0$$

Cálculo de $[b_R]$



La matriz de transformación de redundantes será:

$$[b_R]_{6 \times 2} = \begin{matrix} & R_1 & R_2 \\ M_{AB} & 0 & 0 \\ M_{BA} & -1 & 0 \\ M_{BC} & -1 & 0 \\ M_{CB} & 0 & -1 \\ M_{CD} & 0 & -1 \\ M_{DC} & 0 & 0 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $[f_M]$

La matriz de flexibilidades no ensamblada será:

$$[f_M] = \begin{bmatrix} [f_{AB}] & & \\ & [f_{BC}] & \\ & & [f_{CD}] \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

El producto $[b_R]^T [f_M] [b_F] = 0$

Cálculo del producto $[b_R]^T [f_M] [b_R]$, que es la matriz de flexibilidades ensamblada

$$[f] = [b_R]^T [f_M] [b_R] = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Los desplazamientos debidos a las cargas en las barras, referidas al sistema general serán:

$$\{D_i\} = [b_R] \{D\} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{27}{EI} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Por lo cual los desplazamientos totales debidos a las cargas serán:

$$\{D_{XF}\} = [f_F] \{F\} + [D_i] = 0 + \frac{27}{EI} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \frac{27}{EI} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

y la ecuación de compatibilidad de deformaciones será:

$$\{D_{XF}\} + [f] \{R\} = \{0\}$$

$$\frac{27}{EI} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

de donde $\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.4 \\ 5.4 \end{Bmatrix} \text{ ton-m}$

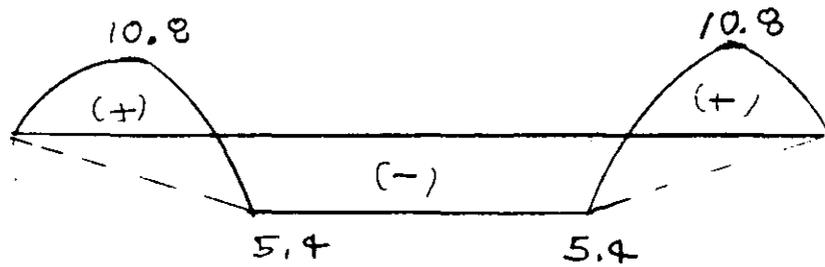
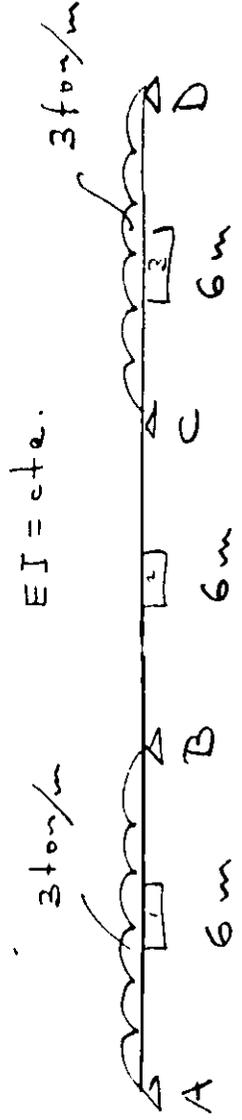


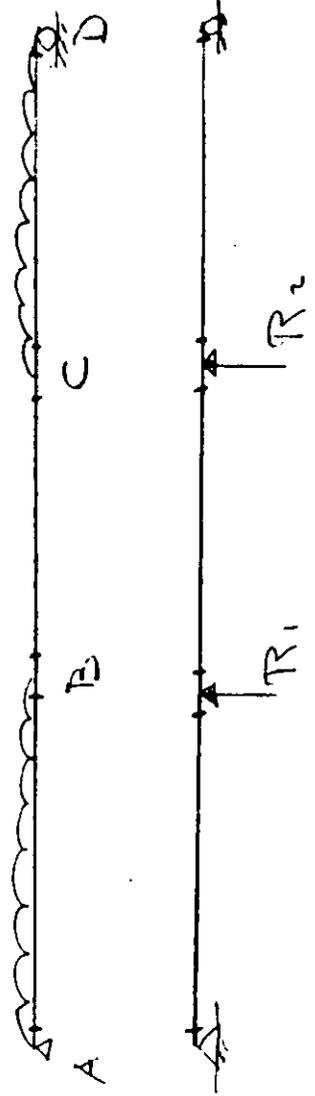
Diagrama de momentos flexionantes (ton-m)

EJEMPLO No 9 - Resolver la misma viga del ejemplo anterior por flexibilidades, utilizando otra estructura primaria.



Solución

1) Grado de hiperestaticidad = 2 y se selecciona la siguiente estructura primaria



Los vectores de fuerzas y desplazamiento serán

$$F = \begin{Bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \\ M_{BC} \\ M_{CB} \\ M_{CD} \\ M_{DC} \end{Bmatrix}; D = \begin{Bmatrix} D_{AB} \\ D_{BA} \\ D_{BC} \\ D_{CB} \\ D_{CD} \\ D_{DC} \end{Bmatrix}$$

Como el sistema de fuerzas externas no está aplicado en los nudos, habrá que trasladarlo a los apoyos y calcular los giros en los extremos de cada barra

Igual que en el ejemplo anterior



El vector de cargas será:

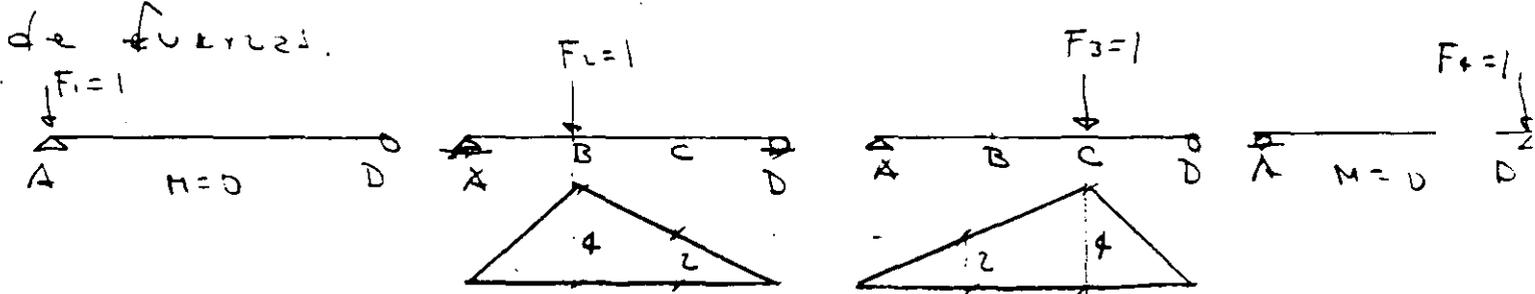
$$\{F\} = \begin{Bmatrix} q \\ q \\ q \\ q \end{Bmatrix}$$

$$\text{y } \Theta_{AB} = \Theta_{DA} = \Theta_{CD} = \Theta_{BC} = \frac{27}{EI}$$

(valores ya calculados)

$$D = \begin{Bmatrix} 27 \\ 27 \\ 0 \\ 0 \\ 27 \\ 27 \end{Bmatrix}$$

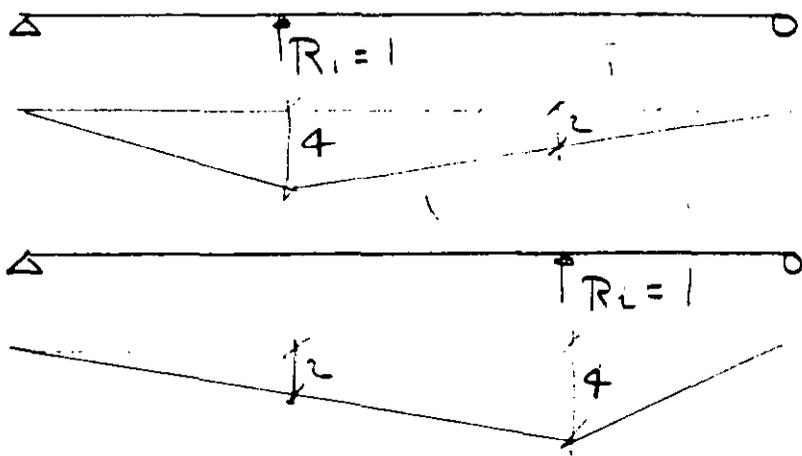
Cálculo de las matrices de transformación de fuerzas.



$$[b_F] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[f_M] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & 1 & 2 & & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $[b_R]$



$$[b_R] = \begin{matrix} R_1=1 & R_2=1 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & -2 \\ -4 & -2 \\ -2 & -4 \\ -2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Cálculo de $[f_F] = [b_R]^T [f_M] [b_F]$

$$[f_F] = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 & 96 & 84 & 0 \\ 0 & 84 & 96 & 0 \end{bmatrix}$$

∴ Los desplazamientos debidos a las cargas serán: los nodales + debidos a las cargas repartidas:

$$[f_F] \{ F \} + [b_R]^T \{ D_i \} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 & 96 & 84 & 0 \\ 0 & 84 & 96 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -9 \\ -9 \\ -9 \\ -9 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -4 & -4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 27 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 1620 \\ 1620 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -162 \\ -162 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 1782 \\ -1782 \end{Bmatrix}$$

$$[f] = [b_R]^T [f_M] [b_R] = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 96 & 84 \\ 84 & 96 \end{bmatrix}$$

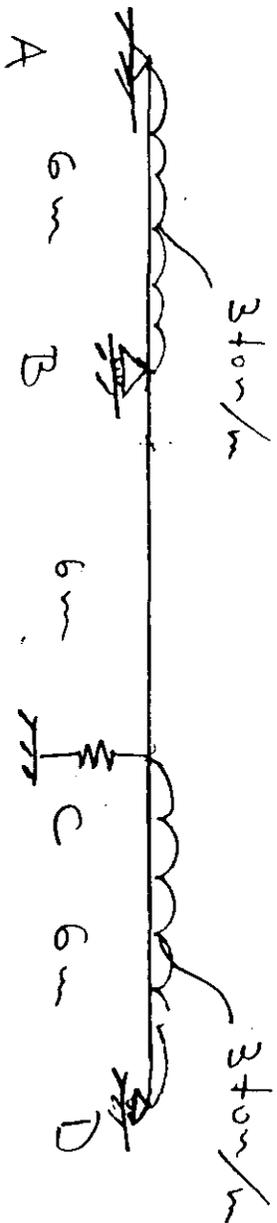
La ecuación de compatibilidad de deformaciones será:

$$\begin{cases} D_{XF} \\ D_{XR} \end{cases} + \begin{cases} D_{XR} \\ D_{XF} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -1782 \\ -1782 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 96 & 84 \\ 84 & 96 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} R_1 \\ R_2 \end{cases} = \begin{cases} 9.90 \\ 9.90 \end{cases} \text{ ton}$$

EjemPlo No. 10 - Resolver la viga de los dos ejemplos anteriores, sabiendo que en C hay un apoyo elástico.



$$k_{resorte} = \frac{EI}{20}$$

Solución:

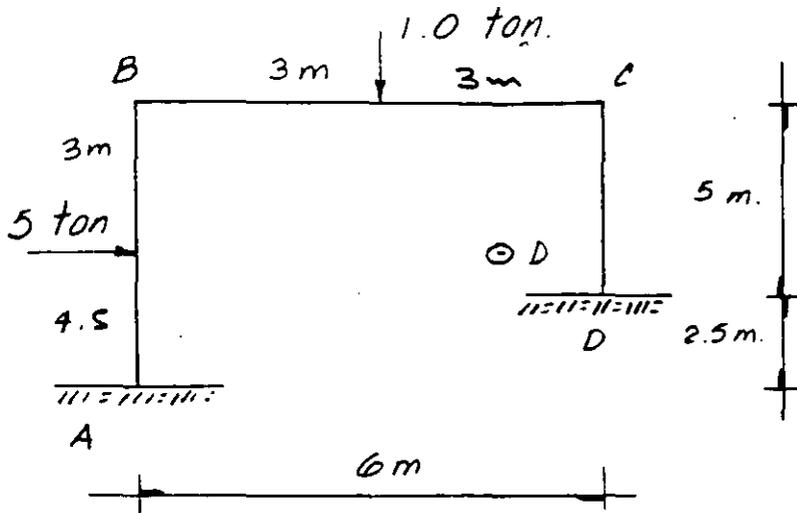
1) Las celdulas serán idénticas al los del ejemplo salvo las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones que serán:

$$D_{XF} \begin{Bmatrix} \\ \\ -1782 \\ \end{Bmatrix} + D_{XR} \begin{Bmatrix} \\ \\ 96 & 84 \\ 84 & 96 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_B \\ \Delta_C \\ R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{R_2}{k_{resorte}} \\ \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13.98 \\ 5.24 \end{Bmatrix} \text{ ton}$$

Ejemplo No. 11

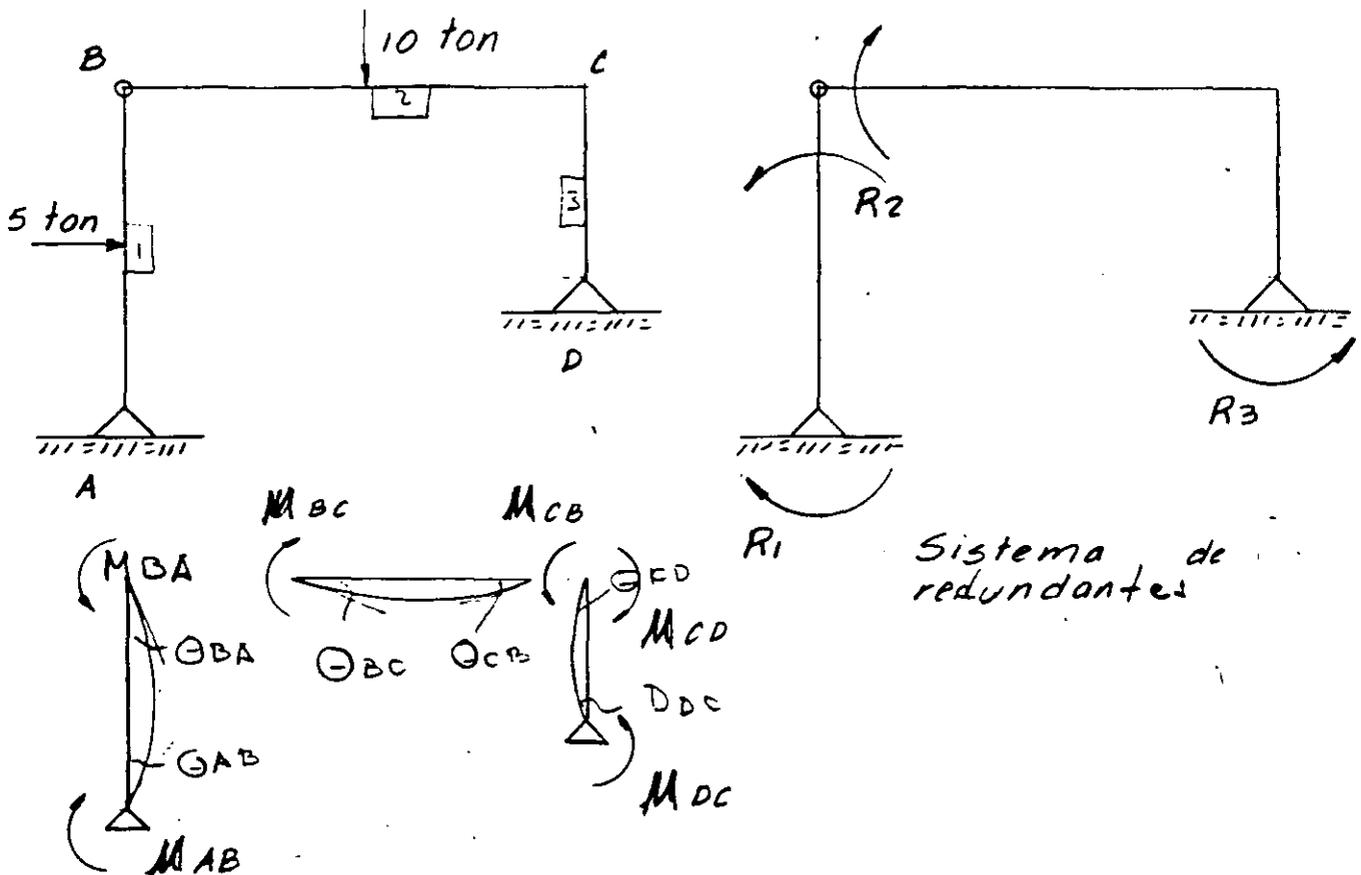
Resolver por flexibilidads considerando efectos de flexión y calcular los desplazamientos de los nudos.



$E \cdot I = 6600 \text{ ton} \cdot \text{m}^2$
 $\odot_D = +0.002 \text{ rad.}$

Solución.

La estructura es hiperestática en tercer grado y se seleccionará la siguiente estructura primaria:

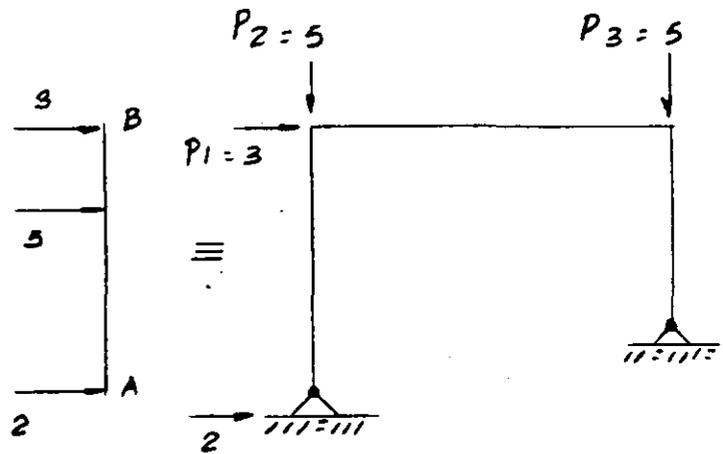


Sistema de redundantes

Los vectores de fuerzas internas y desplazamientos serán:

$$\{P^0\} = \begin{Bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \\ M_{BC} \\ M_{CB} \\ M_{CD} \\ M_{DC} \end{Bmatrix} \quad \{D\} = \begin{Bmatrix} D_{AB} \\ D_{BA} \\ D_{BC} \\ D_{CB} \\ D_{CD} \\ D_{DC} \end{Bmatrix}$$

Como el sistema de fuerzas externas no está aplicado en los nudos, habrá que trasladarlos a los apoyos; para hacerlo se aplicarán las ecuaciones de estática.

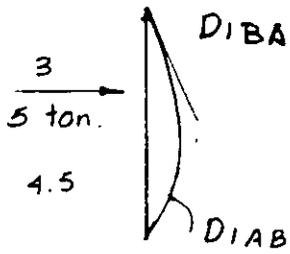


El vector de carga será:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

Además el sistema externo de cargas por estar aplicado en las barras impone deformaciones que se calculan con la expresión de trabajo virtuales.

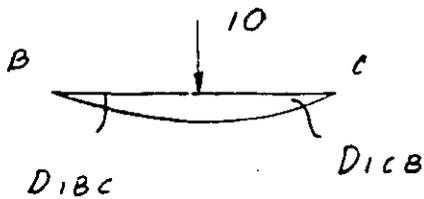
$$\Theta_F = \int m \frac{M}{EI} dx$$



Haciendo uso de las tablas para multiplicar diagramas:

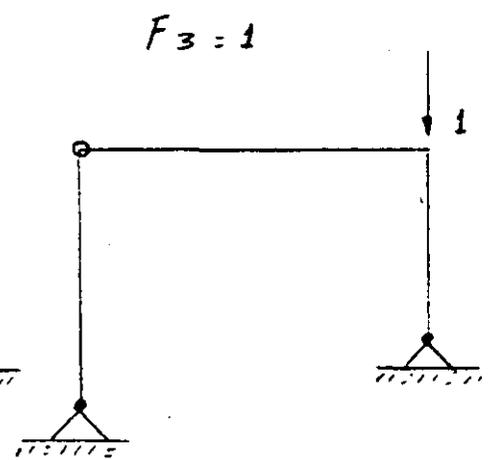
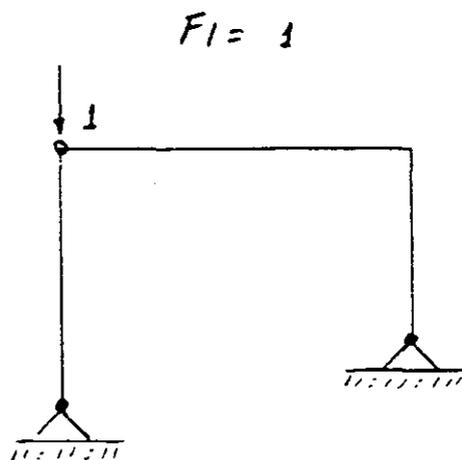
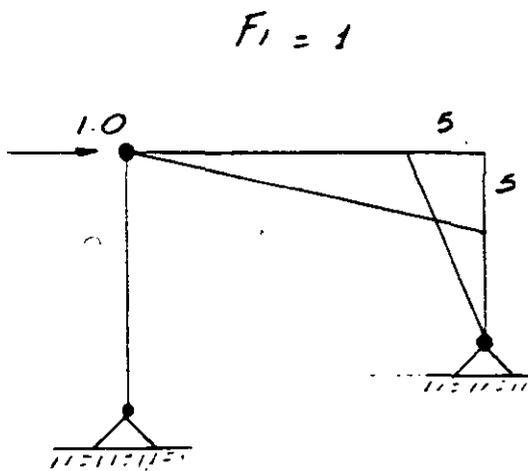
$$D_{1AB} = \frac{15.75}{E \cdot I}$$

$$D_{1AB} = \frac{18}{E \cdot I}$$



$$D_{1BC} = D_{1CB} = \frac{22.5}{E \cdot I} \quad \therefore D_1 = \begin{Bmatrix} 15.75 \\ 18 \\ 22.5 \\ 22.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{1}{E \cdot I}$$

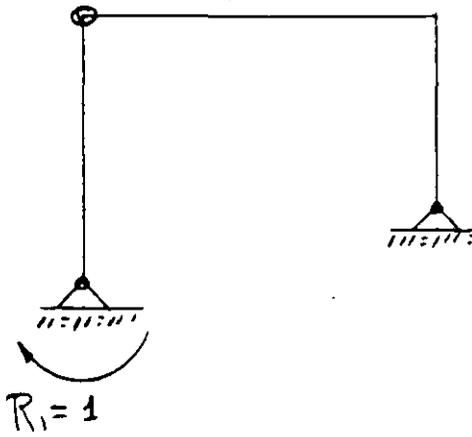
Para poder calcular las matrices de transformación de fuerzas, se calcularán los diagramas debidos a fuerzas externas unitarias y los de redundancia unitarias.



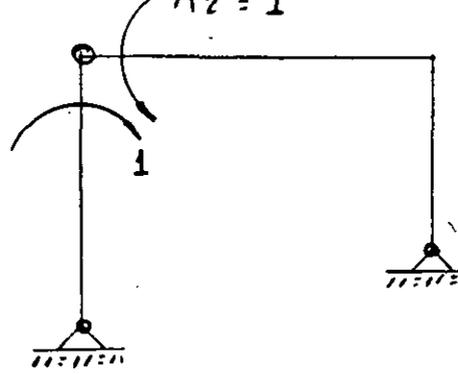
$M = 0$

$M = 0$

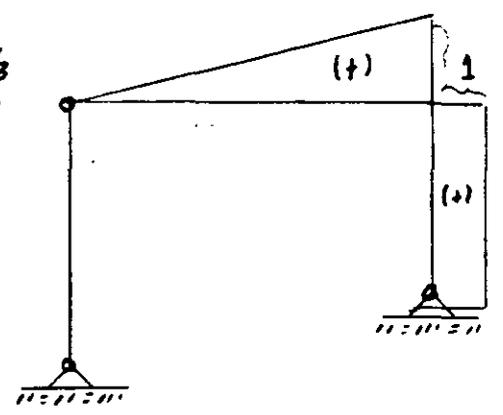
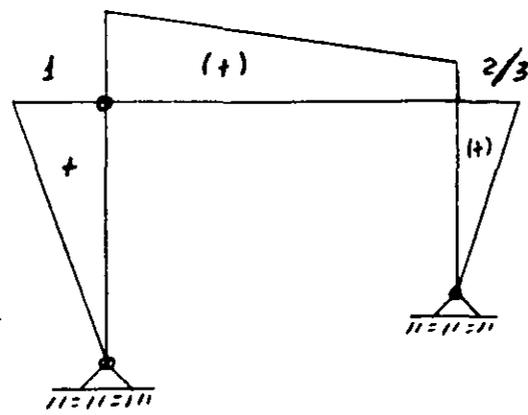
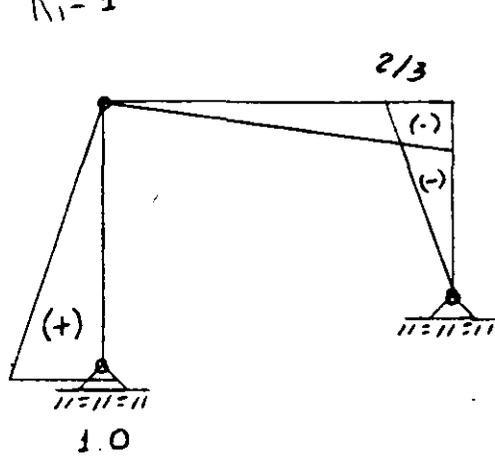
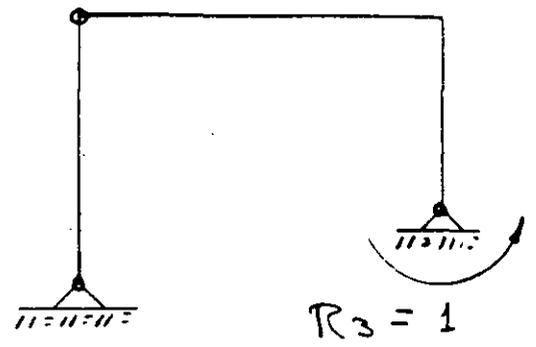
$R_1 = 1$



$R_2 = 1$



$R_3 = 1$



La matriz de transformación de carga será:

$$p_0 = [b_F] \{ F \}$$

	$F_1 = 1$	$F_2 = 1$	$F_3 = 1$	
M_{AB}	0	0	0	$[b_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
M_{BA}	0	0	0	
M_{BC}	0	0	0	
M_{CB}	-5	0	0	
M_{CD}	-5	0	0	
M_{DC}	0	0	0	

La matriz de transformación de redundante:

	R_1	R_2	R_3	
M_{AB}	1	0	0	$[b_R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & 1 \\ -2/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
M_{BA}	0	1	0	
M_{BC}	0	1	0	
M_{CB}	-2/3	2/3	1	
M_{CD}	-2/3	2/3	1	
M_{DC}	0	0	1	

Calculo de $[f_M]$

La matriz no ensamblada de la estructura será:

$$[f_M] = \begin{bmatrix} [f_{AB}] \\ [f_{BC}] \\ [f_{CD}] \end{bmatrix} = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 15 & 7.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7.5 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

Calculo del producto $[b_R]^T [f_M] [b_0] = [f_F]$

$$[b_R]^T [f] [b_0] = \begin{bmatrix} 73.33 & 0 & 0 \\ -103.33 & 0 & 0 \\ 135 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{6EI}$$

Cálculo del producto $[br]^T [f_m] [br]$, que es la matriz de flexibilidad ensamblada

$$[f] = \begin{bmatrix} 24.78 & -62.78 & -18 \\ -62.78 & 44.78 & 24 \\ -18 & 24 & 42 \end{bmatrix} \times \frac{1}{6EI}$$

A los desplazamientos producidos por el sistema de carga en los nudos, deberá sumarse el de las cargas aplicadas en las barras y que referido al sistema general, mediante la ecuación:

$$\{D_i\} = [br] \{D\} = \begin{Bmatrix} 0.75 \\ 55.50 \\ 22.50 \end{Bmatrix} \frac{1}{EI}$$

Por lo tanto los desplazamientos totales debidos al sistema de carga externa será:

$$\begin{aligned} \{D_{xp}\} &= [f_p] \{F\} + \{D_i\} \\ &= \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 73.33 & 0 & 0 \\ -103.33 & 0 & 0 \\ -135 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0.75 \\ 55.50 \\ 22.50 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 36.67 \\ -51.67 \\ -67.50 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0.75 \\ 55.50 \\ 22.50 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 37.42 \\ 3.91 \\ -45.00 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Las ecuaciones de compatibilidad de deformación serán:

$$\{D_{xp}\} + \{f\} \{R\} = \{0\}$$

$$\frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 37.42 \\ 3.97 \\ -45.00 \end{Bmatrix} + \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 24.78 & -6.28 & -18 \\ -6.28 & 44.78 & +24 \\ -18 & +24 & 42 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.002 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.60 \\ -3.21 \\ +3.20 \end{Bmatrix}$$

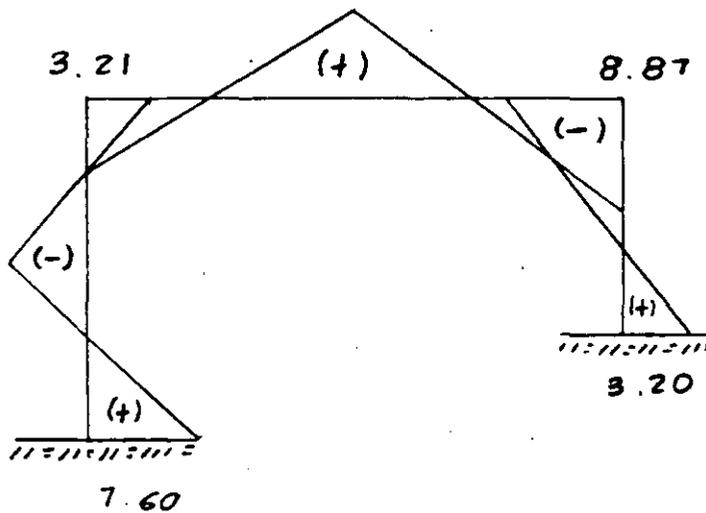
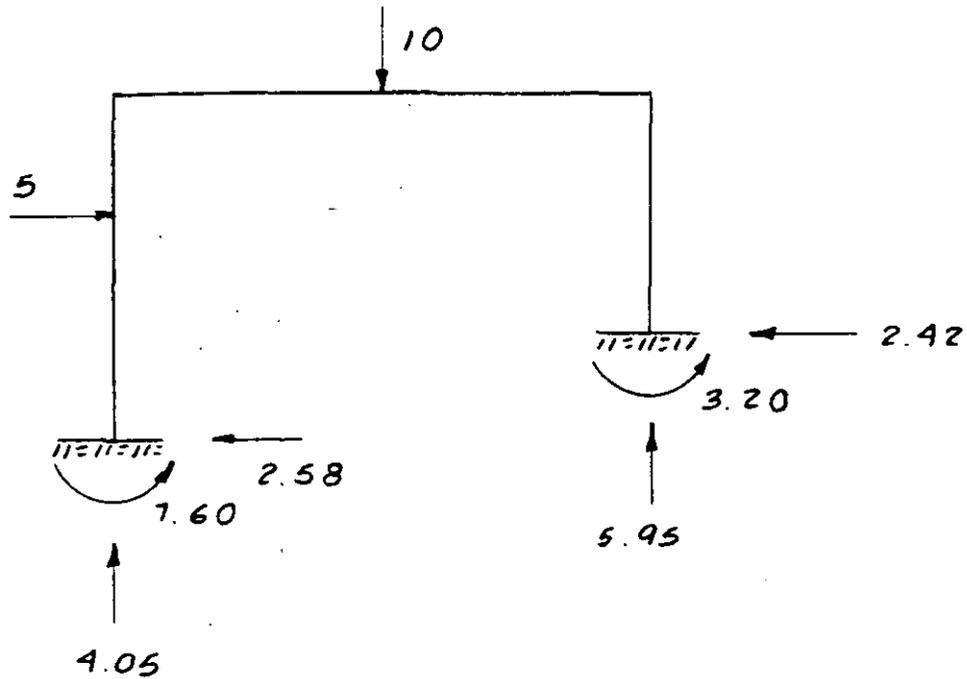


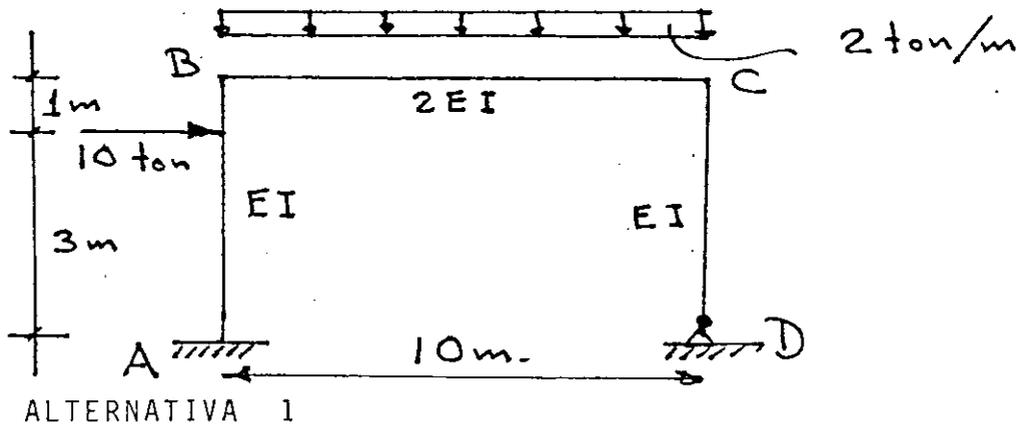
Diagrama de momentos finales las fuerzas internas se obtienen calculando por su superposición los efectos debidos a carga externas y por redundantes:

$$\{P\} = [b_F] \{F\} + [b_R] \{R\}$$

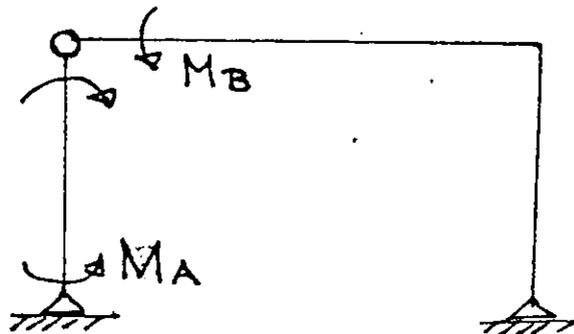
EJEMPLO No. 12

Analizar el marco siguiente utilizando el método de las flexibilidades.

- 1) Sin diagonalizar la matriz de flexibilidades.
- 2) Diagonalizándola (variante propuesta).

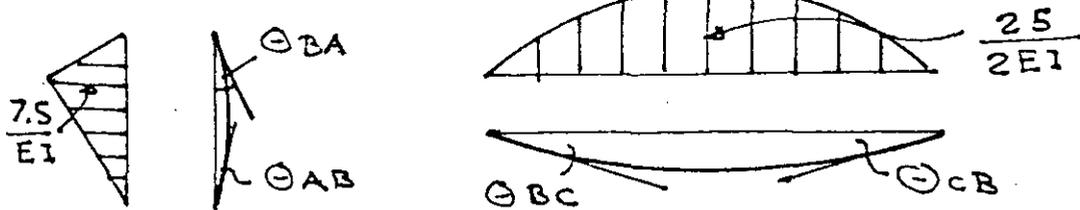


La estructura es hiperestática en segundo grado y se elegirá la siguiente estructura primaria, isostática.



Estructura isostática y sistema de Redundantes.

Como el sistema de cargas no se encuentra aplicado en los nudos, habrá que calcular las deformaciones angulares en los extremos y se trasladarán las cargas a los nudos.

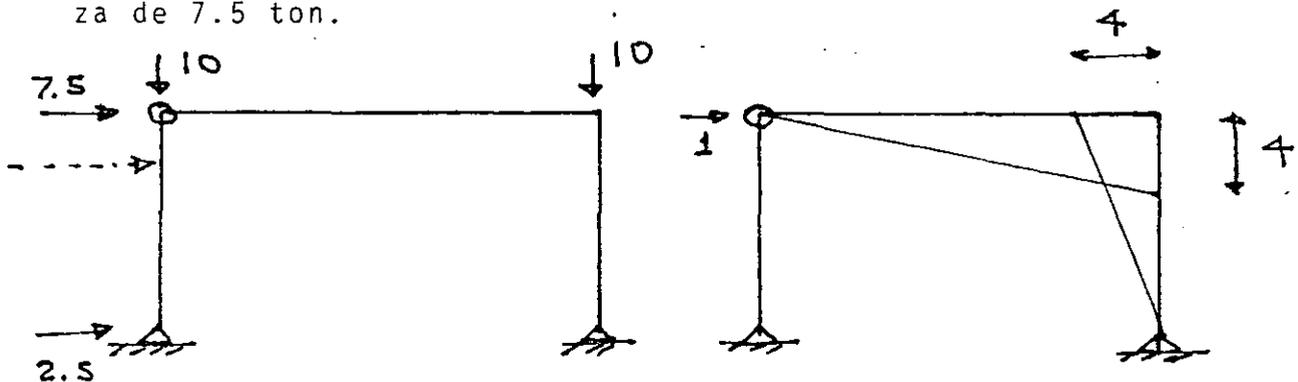


por el método de trabajos virtuales:

$$D = \begin{Bmatrix} \ominus AB \\ \omin� BA \\ \omin� BC \\ \omin� CB \\ \omin� CD \\ \omin� DC \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 6.25 \\ 8.75 \\ 41.66 \\ 41.66 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Los signos positivos indican que el sentido supuesto a los momentos virtuales aplicados fueron del mismo sentido que los desplazamientos.

El sistema de fuerza equivalente aplicado en los nudos se presenta en la figura, provocando efectos de flexión solo la fuerza de 7.5 ton.



Sistema de cargas equivalente y diagrama de momentos.

La matriz de flexibilidades ensamblada será:

$$[f] = [b_R]^T [f_M] [b_R] = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 26 & -19 \\ -19 & 46 \end{bmatrix}$$

Refiriendo los desplazamientos angulares debidos a las cargas intermedias, al sistema general de cordenas mediante la ecuación:

$$D_1 = [b_R]^T \left\{ D \right\} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 6.25 \\ 8.75 \\ 41.66 \\ 41.66 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 35.41 \\ -92.07 \end{bmatrix}$$

Finalmente, calculando el primer término de la ecuación de compatibilidad de deformaciones (3.8) y sumándole los desplazamientos debidos a las cargas intermedias se tendrá:

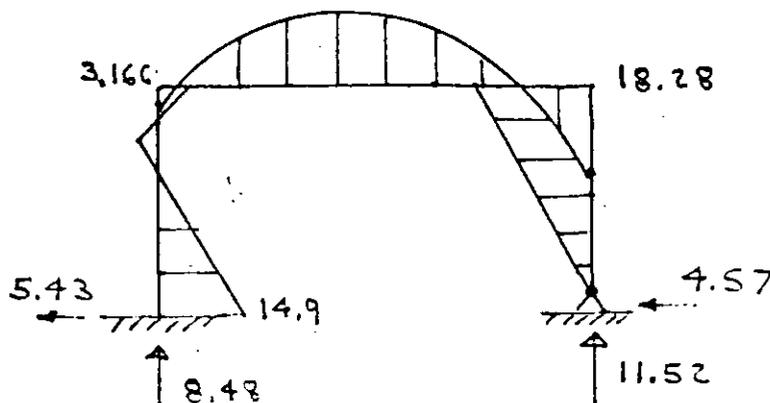
$$[b_R]^T [f_M] [b_F] \left\{ F \right\} + [b_R]^T \left\{ D \right\} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -90 \\ +115 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 35.41 \\ -92.09 \end{Bmatrix}$$

El segundo miembro de la ecuación (3.8) será:

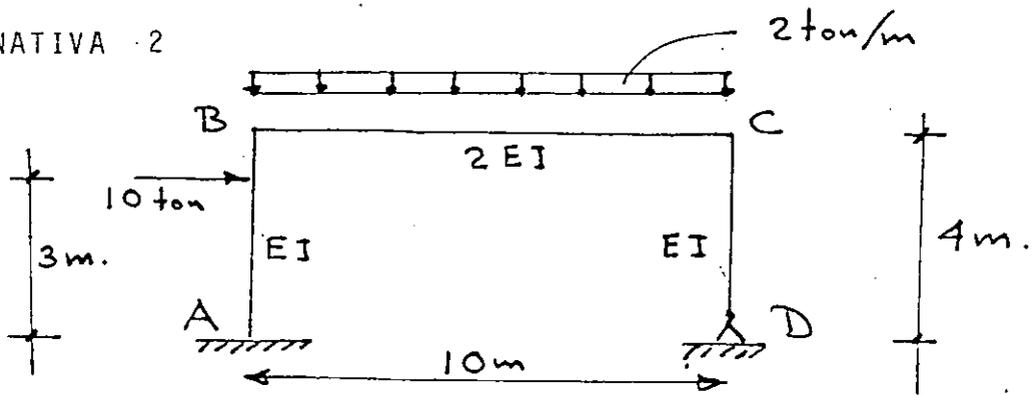
$$[b_R]^T [f_M] [b_R] \left\{ \begin{matrix} MA \\ MB \end{matrix} \right\} = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 26 & -19 \\ -19 & 46 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} MA \\ MB \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto:

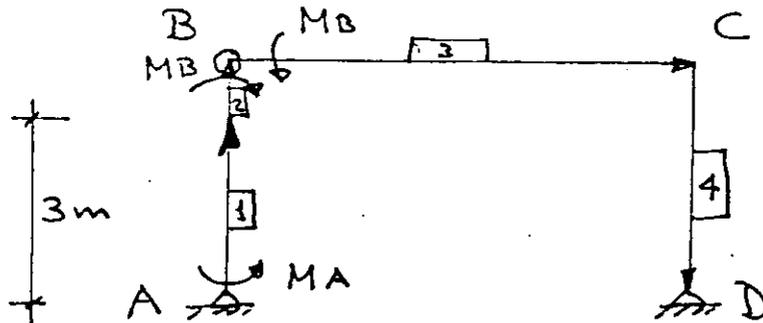
$$\frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -54.59 \\ +22.91 \end{Bmatrix} + \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 26 & -19 \\ -19 & 46 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} MA \\ MB \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \begin{matrix} MA = 3.166 \text{ ton-m} \\ MB = 14.9 \text{ ton-m} \end{matrix}$$



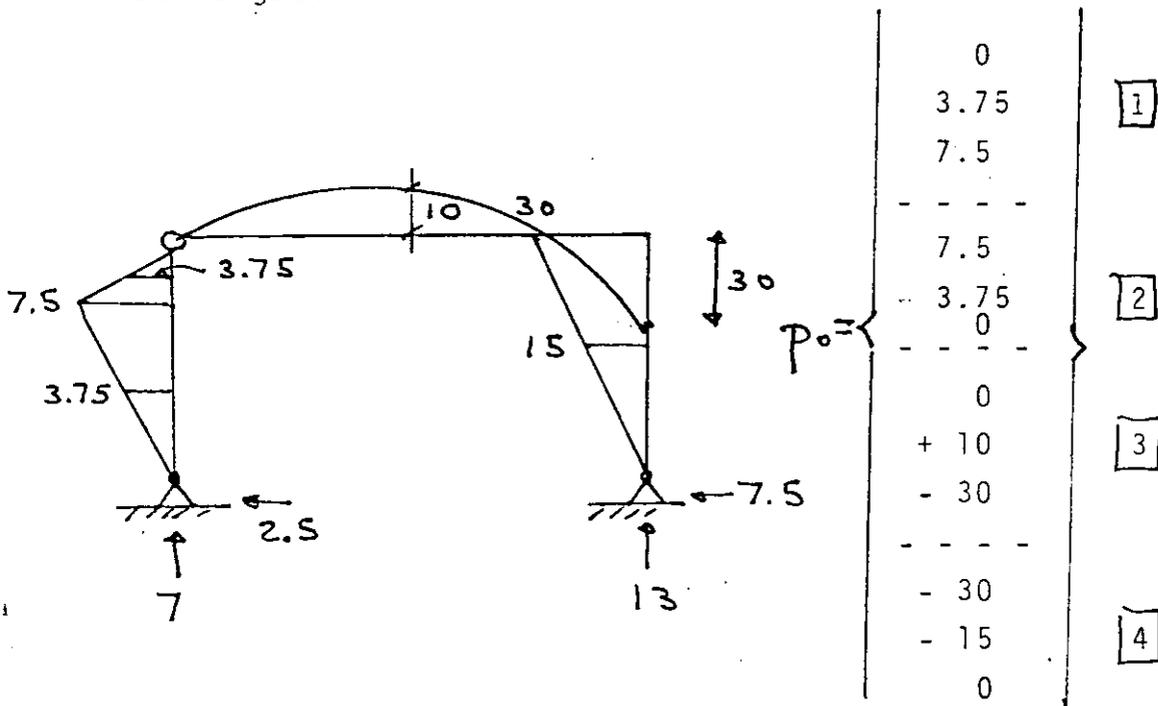
ALTERNATIVA 2



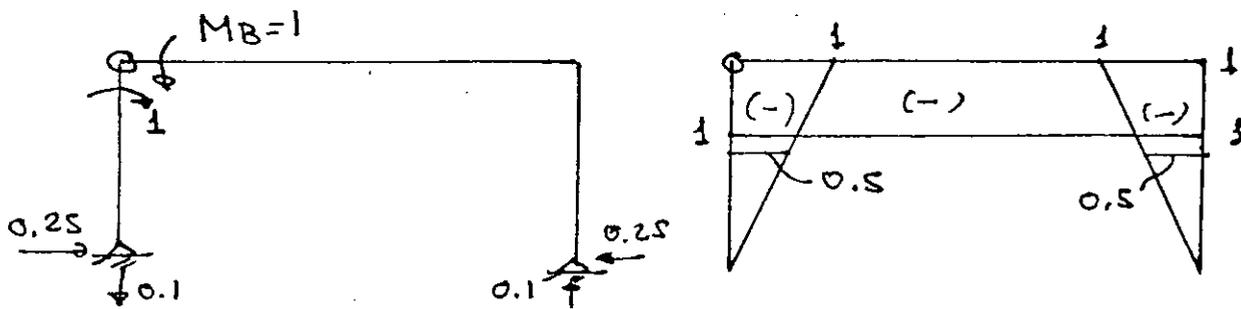
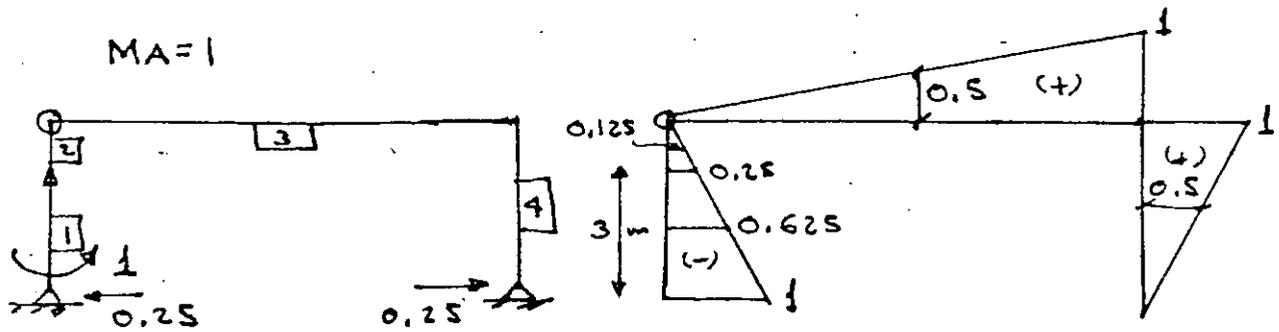
Seleccionando la misma estructura isostática que en el caso 1. y debido a la presencia de la carga concentrada, se tendrán 4 elementos:



Resolviendo la estructura isostática y calculando los momentos en los extremos y al centro de cada elemento, se obtiene el vector de cargas.



Obtención de la matriz de redundantes $[b_R]$



$$[b_R] = \begin{matrix} R1 = 1 & R2 = 1 \\ \left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ -0.625 & -0.375 \\ -0.25 & -0.75 \\ - & - \\ -0.25 & -0.75 \\ -0.125 & -0.875 \\ 0 & -1 \\ - & - \\ 0 & -1 \\ 0.5 & -1 \\ 1.0 & -1 \\ - & - \\ 1 & -1 \\ 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

Es evidente que para calcular P^o y b_R , se puede prescindir del trazo de diagramas de momentos.

La matriz de flexibilidades no ensamblada, de acuerdo con la ecuación 3.11, es una matriz diagonal:

$$[f_M] = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 3 & & & \\ 12 & & & \\ 3 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & 4 & & \\ & 1 & & \\ \hline & 5 & & \\ & 20 & & \\ & 5 & & \\ \hline & 4 & & \\ & 16 & & \\ & 4 & & \end{bmatrix} \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \\ [4] \end{matrix}$$

Nota.- El elemento 3 aparece dividido entre 2 porque la inercia de la viga es 2I

La matriz de flexibilidades ensamblada será:

$$[f] = [b_R]^T [f_M] [b_R] = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 26 & -19 \\ -19 & 46 \end{bmatrix}$$

Calculando ahora el producto:

$$[b_R]^T [f_M] \left. \right\} P_0 \left\{ = \frac{1}{6EI} \left. \right\} \begin{matrix} -325.54 \\ 137.5 \end{matrix}$$

Las ecuaciones de compatibilidad serán:

$$\frac{1}{6EI} \left. \right\} \begin{matrix} -325.54 \\ 137.50 \end{matrix} \left\{ + \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 26 & -19 \\ -19 & +26 \end{bmatrix} \right\} \begin{matrix} MA \\ MB \end{matrix} \left\{ = 0$$

De donde MA = 14.91 tm y MB = 3.16 tm

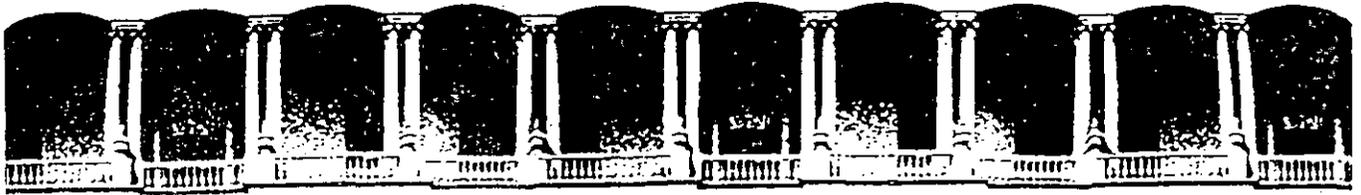
Comentarios:

1) Las operaciones matriciales son mas rápidas en esta segunda alternativa, debido a la diagonalización de la matriz de flexibilidades no ensamblada, como sucede en el caso de armaduras.

2) El resultado es directo sin necesidad de usar matrices de transformación de coordenadas locales a generales como en la alternativa 1.

REFERENCIAS

- 1.- Ghali A, Neville M, "Structural Analysis", Intext Educational Publisher, Scranton 1972
- 2.- Yuan-Yu Hsieh "Teoría de Estructuras" Prentice Hall Internacional, Madrid 1982
- 3.- Damy R. Julio, "Curso Análisis Estructural" DEPFI, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, D.F.
- 4.- H.H. West "Análisis de Estructuras" Compañía Editorial Continental, S.A. México. 1984
- 5.- W.A. Granville "Cálculo Diferencial e Integral" Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana 1952



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

*CURSOS ABIERTOS
ANALISIS ESTRUCTURAL*

METODOS DE RIGIDECES

ING. MIGUEL ANGEL RODRIGUEZ VEGA

ANALISIS ESTRUCTURAL
METODO DE LAS RIGIDECES

CONTENIDO:

- INTRODUCCION
- INDETERMINACION CINEMATICA
- COEFICIENTES DE RIGIDEZ
- ECUACIONES DEL EQUILIBRIO
- PROCEDIMIENTO PARA OBTENER ELEMENTOS MECANICOS EN VIGAS Y MARCOS HIPERESTATICOS
- PROPIEDADES DE LA MATRIZ DE RIGIDECES
- EJEMPLOS

ANALISIS ESTRUCTURAL
FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.

INTRODUCCION

En 1880 Heinrich Manderla realizó los primeros estudios considerando los desplazamientos de los nudos como incógnitas en el análisis de una armadura, tomando en cuenta las deformaciones producidas en los elementos de la estructura por la acción de momentos flexionantes y fuerzas axiales, para lo cual consideró que la armadura tenía nudos rígidos. Este procedimiento resultó inadecuado por la complejidad que resultaba el resolver un sistema de ecuaciones, ya que estaba en función de los desplazamientos angulares y lineales de cada nudo.

En 1892, Otto Mohr, desarrolló un método aproximado para el cálculo de los esfuerzos producidos por la flexión en una armadura con nudos rígidos, para lo cual también se necesitó resolver un sistema de ecuaciones, que estaba en términos de la rotación de los nudos.

En 1914, Alex Bendixen desarrolló el método pendiente-deflexión para el análisis de estructuras que requiere la solución de un sistema de ecuaciones en términos de los desplazamientos de los nudos. En 1915, G.A. Maney dió a conocer el desarrollo de éste método, el cual era muy semejante al presentado por Mohr.

En 1930, Hardy Cross, dió a conocer el método de la distribución de momentos, que consistía en lograr el equilibrio de los momentos en los nudos mediante aproximaciones sucesivas. Este método tuvo gran aceptación debido a que se evitó la necesidad de resolver el sistema de ecuaciones que se requería en el método de pendiente-deflexión. En 1935, R.C. Southwell propuso el método de relajación de aproximaciones sucesivas.

Con el advenimiento de las computadoras se eliminó la solución del sistema de ecuaciones simultáneas como un obstáculo para el análisis estructural, lo que permitió la utilización de un método muy generalizado, basándose en el método de pendiente-deflexión, donde las incógnitas son los desplazamientos de los nudos, a este método de análisis se le llamó método de las rigideces.

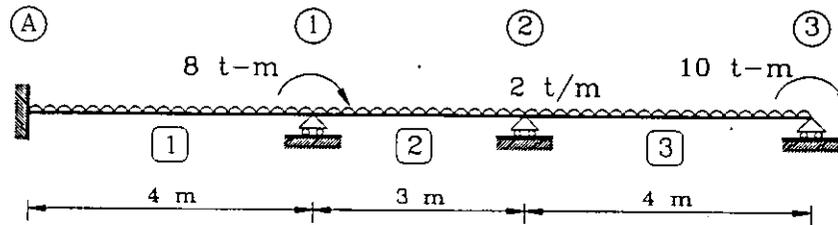
INDETERMINACION CINEMATICA.

En el método de las rigideces, al número total de los desplazamientos de los nudos no restringidos (y de los apoyos) se le llama número de grados de libertad o grado de indeterminación cinemática. En una estructura plana, se pueden tener desplazamientos lineales (en dos direcciones ortogonales), y desplazamientos angulares (giros) en cada nudo.

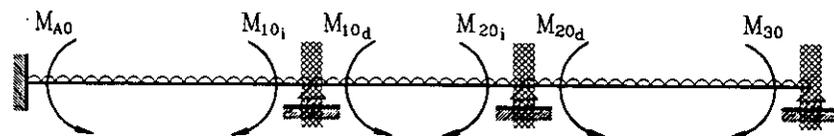
Para determinar el grado de indeterminación cinemática en una estructura, es importante decidir si se tomará en cuenta o no el alargamiento o acortamiento de los miembros estructurales (deformación axial de barras). Por ejemplo, en la figura 1, caso (a), si se toma en cuenta la deformación axial de barras, se tendrían 7 grados de indeterminación cinemática, sin embargo si no se toma en cuenta la deformación axial de las barras solo se tendrían 4 grados de libertad, como se ilustra en el caso (b) de la misma figura. En el caso de armaduras no se toman en cuenta las rotaciones de los nudos, únicamente los desplazamientos lineales de los nudos, como se observa en el caso (c) de la figura 1.

En el método de las rigideces, también llamado de los desplazamientos, se tendrá que definir una estructura restringida o primaria (también llamada cinemáticamente restringida) en la que se

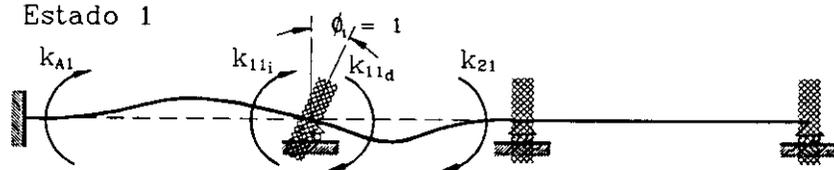
EJEMPLO 1



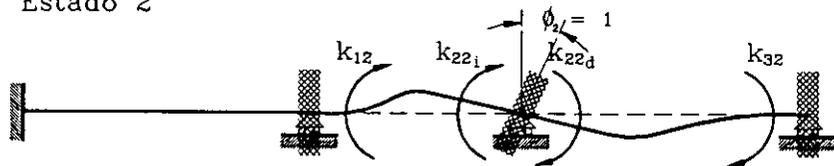
Estado 0



Estado 1



Estado 2



Estado 3



considera a todos los nudos empotrados y a partir de esto, se calculan los momentos de empotramiento que son los que habrá de equilibrar posteriormente. A este primer paso del método se le conoce como el estado I.

COEFICIENTES DE RIGIDEZ

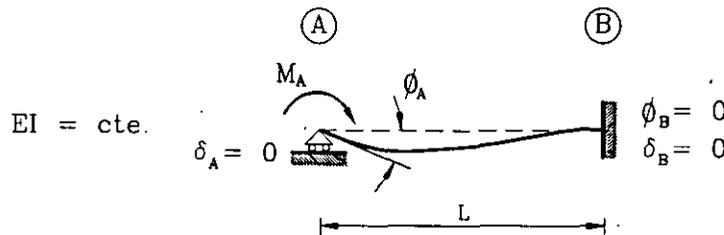
Por rigidez debemos de entender que es la capacidad que tiene un cuerpo para no deformarse cuando está sujeto a cargas externas, dicha deformación puede ser un giro o un desplazamiento. Al referirnos a cargas estamos considerando tanto fuerzas como momentos concentrados.

Las rigideces se expresan como sigue:

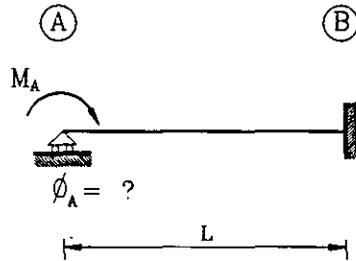
$$r_A = \frac{M}{\phi} \qquad r_E = \frac{V}{\delta}$$

- r_A = rigidez angular.
- M = momento en el extremo considerado.
- ϕ = giro en el extremo en donde se aplicó.
- r_E = rigidez de entrepiso.
- V = cortante de entrepiso.
- δ = desplazamiento relativo de entrepiso.

La rigidez angular de barras de sección constante, considerando únicamente deformaciones por momento flexionante, se calculará para el caso de la viga siguiente, donde el extremo A es un apoyo fijo y el extremo B es un empotramiento:



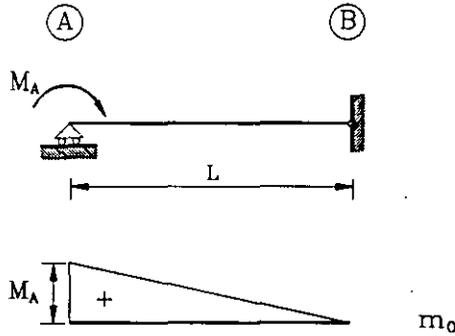
Como se vio anteriormente, la rigidez angular se calcula con la expresi3n: $r_A = M_A / \phi_A$, como nuestra inc3gnita es el giro en el punto A de la viga en estudio, tendremos que valuar el giro debido a un momento aplicado en A como se indica en la siguiente figura:



Aplicando el m3todo de las flexibilidades para resolver la viga hiperest3tica, tendremos la siguiente estructura primaria:

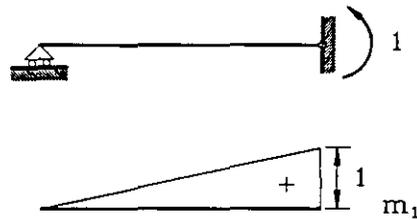
ESTRUCTURA PRIMARIA

ESTADO 0



$EI = \text{cte.}$

ESTADO I



resolviendo la ecuaci3n de compatibilidad: $\delta_{10} + R_1 f_{11} = 0$

donde:

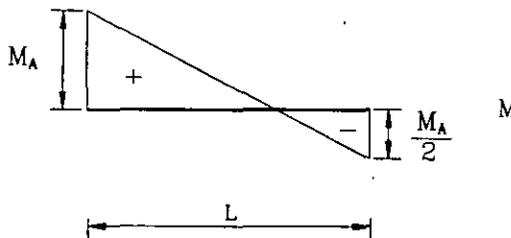
$$\delta_{10} = \frac{1}{6EI} (L)(M_A)(1) = \frac{M_A L}{6EI}$$

$$f_{11} = \frac{1}{3EI} (L)(1)(1) = \frac{L}{3EI}$$

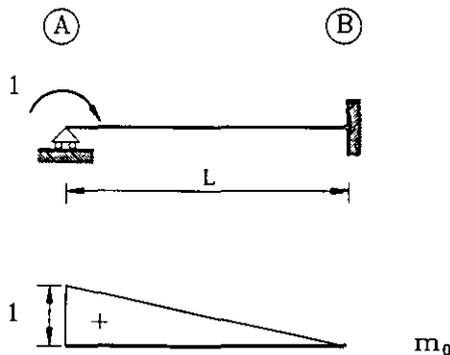
sustituyendo: $\frac{M_A L}{6EI} + R_1 \frac{L}{3EI} = 0$

resolviendo: $R_1 = -\frac{M_A}{2}$

Por lo tanto, el diagrama de momento flexionante final será:



Para poder determinar el valor de ϕ_A volveremos a emplear el método de las flexibilidades, aplicando un momento unitario en el punto A (en la dirección donde se quiere encontrar el giro), por lo que tendremos:



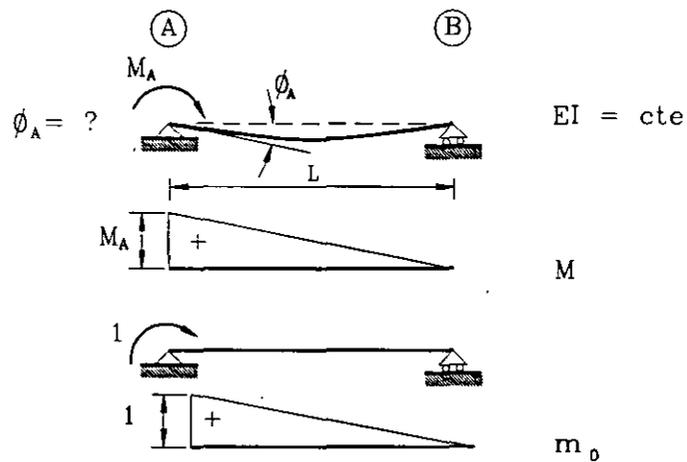
donde:
$$\phi = \int \frac{M m_0}{EI} ds$$

sustituyendo:
$$\phi_A = \frac{1}{6EI} (L)(1)(2M_A - \frac{M_A}{2}) = \frac{M_A L}{4EI}$$

conociendo:
$$r_A = \frac{M_A}{\phi_A}$$

sustituyendo:
$$r_A = \frac{4EI}{L}$$

En el caso de una viga, donde su extremo B es un apoyo fijo, el valor de su rigidez angular cambia, calculandose de la manera siguiente:



Su giro será:
$$\phi_A = \frac{1}{3EI} (L)(M_A)(1) = \frac{L M_A}{3EI}$$

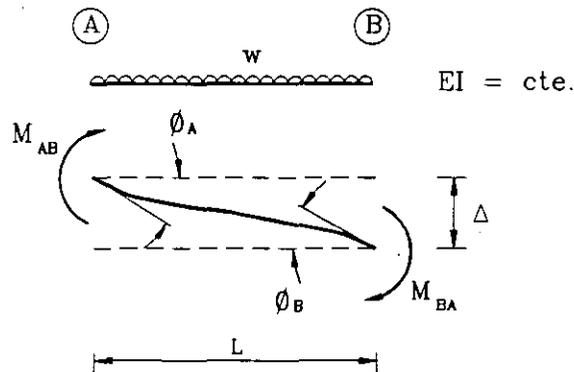
Su rigidez será:
$$r_A = \frac{3EI}{L}$$

ECUACIONES DEL EQUILIBRIO

La base del método pendiente-desviación está en las ecuaciones de

equilibrio, que nos definen los momentos en los extremos de cada barra en función de los desplazamientos angulares de sus extremos y de los desplazamientos lineales relativos entre sus extremos.

Si consideramos la siguiente barra, que se aisló de un sistema estructural estáticamente determinado y que está deformado debido a las rotaciones en los extremos ϕ_A , ϕ_B y un desplazamiento lineal relativo entre A y B, Δ . Los momentos en sus extremos los llamaremos M_{AB} y M_{BA} que están en función de sus deformaciones elásticas y de las cargas que actúan sobre la barra.



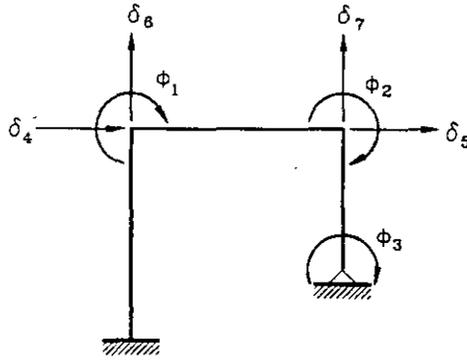
Para obtener los momentos M_{AB} y M_{BA} aplicaremos el método de superposición, sumando algebraicamente los efectos debido a:

1. El momento debido al giro ϕ_A del extremo A, manteniendo empotrado el extremo B.
2. El momento debido al giro ϕ_B del extremo B, manteniendo empotrado el extremo A.
3. El momento debido a la traslación relativo Δ entre los extremos A y B.
4. El momento debido a las cargas que actúan sobre la barra, sin alterar las deformaciones existentes en los extremos A y B.

Grados de indeterminación cinemática

G.I.C. = 7

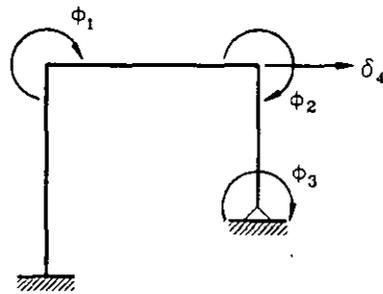
Se considera la deformación axial de barras.



(A)

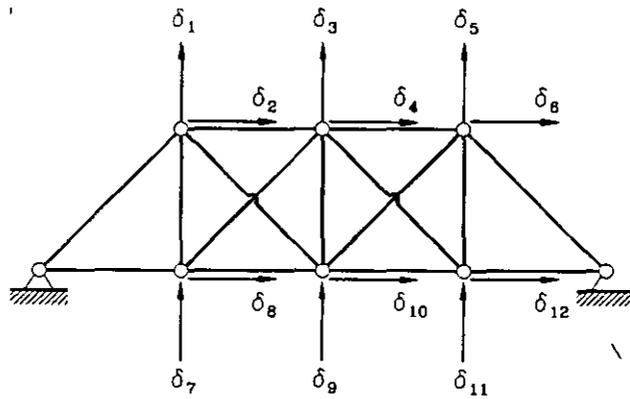
G.I.C. = 4

Se desprecia la deformación axial de barras.



(B)

G.I.C. = 12



(C)

FIGURA 1

Para determinar estos efectos se realizará lo siguiente:

1. Considerando la barra A-B, con las condiciones de soporte que se indican en la figura 2(A), donde el extremo A gira un ángulo ϕ_A , mientras que el extremo B está fijo, $\phi_B = 0$, y no hay desplazamiento relativo entre los extremos A y B, $\Delta = 0$.

Utilizando el método de la viga conjugada, figura 2(B), con el diagrama de momentos dividido entre EI como carga elástica, donde ϕ_A es la reacción en sentido positivo, de tal manera que sea la pendiente positiva que se busca de la viga real, por lo que tenemos la solución:

$$\text{haciendo: } \sum M_A = 0 \quad \left(\frac{M_{AB}^1 L}{2EI} \right) \left(\frac{L}{3} \right) - \left(\frac{M_{BA}^1 L}{2EI} \right) \left(\frac{2L}{3} \right) = 0$$

$$\text{donde: } M_{BA}^1 = \frac{1}{2} M_{AB}^1 \quad \dots (a)$$

$$\text{haciendo: } \sum M_B = 0 \quad (\phi_A L) - \left(\frac{M_{AB}^1 L}{2EI} \right) \left(\frac{2L}{3} \right) + \left(\frac{M_{BA}^1 L}{2EI} \right) \left(\frac{L}{3} \right) = 0$$

sustituyendo (a) en la expresión anterior:

$$M_{AB}^1 = \frac{4EI}{L} \phi_A$$

por lo tanto:

$$M_{BA}^1 = \frac{2EI}{L} \phi_A$$

2. Si consideramos la estructura de la figura 2(C), en donde ahora el extremo B se ha rotado un ángulo ϕ_B y el extremo A está empotrado, procediendo de manera similar al caso anterior llegamos a las siguientes expresiones:

$$M_{AB}^2 = \frac{1}{2} M_{BA}^2$$

$$M_{AB}^2 = \frac{2EI}{L} \phi_B$$

$$M_{BA}^2 = \frac{4EI}{L} \phi_B$$

3. Considerando la figura 2(D), donde ahora se tiene un desplazamiento relativo Δ entre los extremos de la barra (sin rotaciones por estar empotrados). Observando a la estructura y debido a simetría de la deformación con respecto al punto central de la barra, los dos momentos que actúan en los extremos deben ser iguales, es decir:

$$M_{AB}^3 = M_{BA}^3 = M^3$$

Deben ser de signo negativo, pues tienen sentido antihorario. Por el método de la viga conjugada, y considerando su respectivo diagrama de momentos como cargas elásticas sobre la viga conjugada, figura 2(E) se observa que debe actuar un momento igual a Δ en el extremo B, debido al desplazamiento obligado Δ en la viga real.

haciendo: $\sum M_B = 0 \quad \left(\frac{M^3 L}{2EI} \right) \left(\frac{2L}{3} \right) - \left(\frac{M^3 L}{2EI} \right) \left(\frac{L}{3} \right) - \Delta = 0$

donde: $M^3 = \frac{6EI}{L^2} \Delta$

por lo tanto: $M_{AB}^3 = M_{BA}^3 = - \frac{6EI}{L^2} \Delta$

4. Si consideramos a la barra A-B que no sufre deformaciones debido a las cargas que tenga sobre su claro, entonces podremos calcular los momentos de empotramiento perfecto (ANEXO A), y que se definen respectivamente en sus extremos por: M_{AB}^4 y M_{BA}^4 .

Sumando los cuatro efectos tendremos:

$$M_{AB} = M_{AB}^1 + M_{AB}^2 + M_{AB}^3 \pm M_{AB}^4$$

$$M_{BA} = M_{BA}^1 + M_{BA}^2 + M_{BA}^3 \pm M_{BA}^4$$

sustituyendo:

$$M_{AB} = \frac{4EI}{L} \phi_A + \frac{2EI}{L} \phi_B - \frac{6EI}{L^2} \Delta \pm M_{AB}^4$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L} \phi_A + \frac{4EI}{L} \phi_B - \frac{6EI}{L^2} \Delta \pm M_{BA}^4$$

Las ecuaciones anteriores fueron para una barra sujeta a giros en sus extremos A y B, con desplazamientos en uno de sus extremos, que son el caso general de las ecuaciones pendiente-deflexión. Para nuestro caso del método de las rigideces, y de forma matricial, las ecuaciones de equilibrio son:

$$(F) + (K)(D) = (0)$$

PROCEDIMIENTO PARA OBTENER ELEMENTOS MECANICOS EN VIGAS Y MARCOS HIPERESTATICOS

El procedimiento general para la solución de vigas y marcos hiperestáticos se describirá a continuación:

1.- Se determina el número de grados de libertad de la estructura.

2.- Se empotran todas las barras en sus extremos, menos en los apoyos de empotramiento, Estado I, logrando con ello una estructura cinemáticamente determinada.

3.- Se calculan los momentos de empotramiento en los extremos de las barras debidos a las cargas sobre ellas.

4.- Se liberan los nudos, Estados II, III, IV, etc. liberando los desplazamientos unitarios uno a uno que fueron impedidos en el paso 2, calculando las fuerzas necesarias para lograr estos desplazamientos (coeficientes de rigidez).

5.- Se plantean las ecuaciones del equilibrio, que será un sistema de n incógnitas, siendo n el número de grados de libertad cinemática de la estructura.

6.- Se resuelve el sistema de ecuaciones, obteniendo los desplazamientos de la estructura, tanto giros como desplazamientos lineales.

7.- Con los giros y desplazamientos lineales se obtienen los momentos en los extremos de las barras correspondientes, aplicando las ecuaciones del equilibrio para cada caso, superponiendo cada Estado.

8.- Se obtienen los diagramas de momentos de la estructura real, sumando los momentos obtenidos en paso 7 con los debidos a las cargas que actúan sobre las barras (superposición).

9.- Por último, se obtiene el diagrama de fuerzas cortantes aplicando la estática y el de fuerzas normales (si es el caso) por equilibrio interno de la estructura, así como sus reacciones.

PROPIEDADES DE LA MATRIZ DE RIGIDECES

- La matriz de rigideces debe ser cuadrada, de orden n por n , donde n sería igual al grado de indeterminación cinemática.

- Tiene propiedades de simetría: $k_{ij} = k_{ji}$

- Los coeficientes de la diagonal principal deben ser positivos.

- Debe ser una matriz positivamente definida, es decir, su determinante debe ser mayor que cero.

- La matriz de rigideces es la inversa de la de flexibilidades, sin embargo se debe tener en cuenta que por flexibilidades se basa en una estructura isostática, y el sistema de coordenadas representan la localización y dirección de las restricciones, y en cambio en rigideces, se restringen desplazamientos en nudos, siendo su sistema de coordenada la localización y dirección de los desplazamientos incógnitas, por lo tanto tanto la inversa de la matriz de flexibilidades utilizada en el método de las fuerzas es una matriz, en la cual los elementos son coeficientes de rigidez, pero no los que se utilizan en el análisis del método de rigidez y viceversa.

NOTA: Estos apuntes fueron elaborados por el Ing. Miguel Angel Rodríguez Vega. Profesor Facultad de Ingeniería. UNAM.



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

*CURSOS ABIERTOS
ANALISIS ESTRUCTURAL*

METODOS DE RIGIDECES

JULIO ERNESTO DAMY RIOS

— 1 —

i

UNA SISTEMATIZACION DEL ANALISIS DE MARCOS
PLANOS SIN CONSIDERAR DEFORMACIONES AXIALES
DE SUS BARRAS

Julio Dany Ríos (I)

I - RESUMEN

Se presenta un método para analizar marcos planos de cualquier forma, sin considerar deformaciones axiales en sus barras. En una forma sencilla se obtienen los grados de libertad, la matriz que relaciona éstos con los desplazamientos transversales de las barras, así como la matriz de rigidez de la estructura. En muchos casos se justifica no considerar deformaciones axiales de las barras, ya que este efecto es despreciable.

La ventaja del método radica en que se disminuye el número de incógnitas, lo que permite el uso ventajoso de mini y microcomputadoras, así como su aplicación manual.

II - INTRODUCCION

Antes del advenimiento de las computadoras, los marcos planos de cualquier forma se analizaban sin considerar deformaciones axiales de sus barras; la razón era evidente, las incógnitas eran los giros y los desplazamientos de los llamados grados de libertad, en vez de tres incógnitas por nudo, como es el caso al considerar deformaciones axiales. De hecho no se utilizaba el método de los desplazamientos en su forma explícita, sino que se usaba el método de Cross modificado combinado con los llamados diagramas de Williot-Mohr (Ref. 1) que relacionaban los desplazamientos transversales de cada barra; el procedimiento era bastante engorroso y difícil de sistematizar.

En la década de los sesenta apareció el programa STRESS desarrollado por el Dr. S. Fenves; es el primer programa que utiliza el método general de los desplazamientos, en la forma que hoy nos es tan conocida; considera deformaciones axiales, deformaciones por flexión y por cortante de todas las barras, lo cual implica que por cada nudo hay tres incógnitas: los desplazamientos d_x d_y y el giro φ de los nudos; este planteamiento es sólo posible gracias a la nueva herramienta, la computadora, que en aquella época no era una palabra de uso común como lo es ahora. El rápido desarrollo de las computadoras lanzó al olvido a Cross y a Williot-Mohr; sin embargo hay que hacer notar que en gran número de problemas estructurales, el considerar únicamente deformaciones por flexión de las barras, como lo hacían estos métodos, no introduce grandes errores en los resultados del análisis.

En el presente trabajo se introduce una forma de sistematizar un método de los desplazamientos, en donde el análisis de los marcos considera sólo flexión, lo cual, en muchos casos, disminuye el número de incógnitas a menos de la mitad de las del método general de los desplazamientos. La ventaja es evidente cuando se usan mini o microcomputadoras con poca capacidad de almacenamiento o cuando se tiene que efectuar al análisis manualmente. Otra modalidad de la presentación consiste en no utilizar un planteamiento matricial directo, que en muchos casos

(I) Profesor de la Facultad de Ingeniería, UNAM.

es muy deficiente, sino que se obtendrán expresiones sencillas que serán fáciles de programar

III - PLANTEAMIENTO GENERAL

Si no se consideran deformaciones axiales de las barras (d.a.b.) los marcos tienen un número limitado de desplazamientos independientes a los que se les llama los grados de libertad; ilustremos lo anterior con el ejemplo mostrado en la figura 1. Se trata de un marco de dos aguas con n_B (4) barras orientadas y n_N (3) nudos, al no considerar d.a.b. tendremos las siguientes restricciones que relacionan entre sí a los desplazamientos de sus nudos:

$$\begin{array}{lcl}
\text{barra 1} & d_{y1} & = 0 \\
\text{barra 2} & (d_{x2} - d_{x1}) \cos \theta + (d_{y2} - d_{y1}) \operatorname{sen} \theta & = 0 \\
\text{barra 3} & (d_{x3} - d_{x2}) \cos \theta - (d_{y3} - d_{y2}) \operatorname{sen} \theta & = 0 \\
\text{barra 4} & d_{y3} & = 0
\end{array}$$

estas cuatro ecuaciones son linealmente independientes, por lo que se puede elegir a dos desplazamientos independientes que llamaremos los grados de libertad (g.l.), se llamará n_D al número de esos g.l.; los otros cuatros desplazamientos dependen de los dos g.l. Arbitrariamente elegiremos como g.l. a d_{x1} y d_{x3} , a los que llamaremos D_1 y D_2 respectivamente, por lo tanto:

$$\begin{array}{lcl}
d_{x1} & = & D_1 \\
d_{y1} & = & 0 \\
d_{x2} & = & 1/2 (D_1 + D_2) \\
d_{y2} & = & 1/2 (D_1 - D_2) \cot \theta \\
d_{x3} & = & D_2 \\
d_{y3} & = & 0
\end{array}$$

estas relaciones se obtienen gráficamente usando el método de Williot-Mohr (Ref. 1)

Al aplicar el método de los desplazamientos, las incógnitas serán los dos g.l. y los tres giros de los nudos

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix}$$

El problema se reduce a obtener la matriz de rigidez $[K]$ que relaciona estos desplazamientos con los momentos aplicados en los nudos (M_i) y con las fuerzas aplicadas paralelamente a los g.l. (F_i), véase figura 2.

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & & & & \\ K_{11} & & & & K_{12} \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ K_{21} & & & & K_{22} \\ \vdots & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix}$$

Como se observa la matriz $[K]$ se ha subdividido en cuatro matrices que se obtendrán por separado, éstas son la matriz $[K_{11}]$ de orden $(n_N \times n_N)$, la matriz $[K_{22}]$ de orden $(n_D \times n_D)$ y la matriz $[K_{12}]$ de orden $(n_N \times n_D)$, la matriz $[K_{21}]$ es la transpuesta de $[K_{12}]$.

IV - ARMADURA ANALOGA

La relación que guardan entre sí los desplazamientos de un marco donde no se consideran d.a.b. es la misma que tienen los de un mecanismo de igual forma que el marco pero compuesto de barras indeformables doblemente articuladas (figura 3), al que se le llamará mecanismo análogo; para que esta analogía sea válida será necesario que los desplazamientos del mecanismo sean pequeños.

Por facilidad en la figura 3 se ha dibujado la configuración deformada del marco considerando nulos a los giros; lo cual no afecta a las relaciones entre los desplazamientos ya que éstas se fundan exclusivamente en no considerar d.a.b.

El problema de encontrar las relaciones entre los desplazamientos transversales de las barras (Δ_i) con los g.l. (D_i), se reduce a encontrar esas relaciones en el mecanismo análogo para lo cual estableceremos dos teoremas válidos sólo para desplazamientos pequeños.

Teorema 1

Los g.l. de un mecanismo están asociados a las barras que unidas a tierra se necesitan añadir para que el mecanismo se convierta en una armadura estáticamente estable (mecanismo indeformable) (ver figura 4). A esta armadura le llamaremos la armadura análoga (a.a.).

En la figura 4 (a) las barras asociadas a D_1 y D_2 son la 5 y 6, en la figura 4 (b) las asociadas a D_1 , D_2 y D_3 son las 6, 7 y 8 en la figura 4 (c) las asociadas a D_1 y D_2 son las 7 y 8

La demostración de este teorema es evidente ya que en las dos estructuras no hay d.a.b., obsérvese que hay varias alternativas de a. a. para un marco dado.

Teorema 2

El desplazamiento (d) de cualquier nudo en cualquier dirección es una función lineal de los g.l. (ésto es evidente por ser pequeños los desplazamientos)

$$(d) = \sum_{i=1}^{n_p} a_i D_i$$

los coeficientes a_i son las fuerzas axiales en las barras asociadas a los g.l. (b.a.g.l.), producidas por una fuerza unitaria paralela al desplazamiento (d) aplicada en la a.a. La demostración del teorema se funda en la aplicación del principio del trabajo virtual considerando que las únicas barras deformadas son las b.a.g.l. cuyas deformaciones son los valores de los g.l. (D_i).

A continuación aplicaremos estos dos teoremas al ejemplo ilustrado en la figura 5; se desea obtener el valor de d_{x2} en función de D_1 y D_2 ; resolviendo la armadura análoga se obtienen los resultados mostrados en la figura 5 (c), por lo tanto:

$$d_{x2} = 0.5 D_1 + 0.5 D_2$$

que es el mismo resultado que obtuvimos con anterioridad.

Usando también estos dos teoremas obtendremos las matrices $[H]$ de orden $(n_B \times n_D)$ y $[C]$ de orden $(2n_N \times n_D)$ que respectivamente relacionan a los g.l. $\{D_j\}$ con los desplazamientos transversales de las barras $\{\Delta_j\}$ y con los desplazamientos de los nudos (dx_i, dy_i)

$$\begin{Bmatrix} \Delta \\ d_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H \\ C \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} D \\ D \end{Bmatrix}$$

V - OBTENCIÓN DE LAS MATRICES $[H]$ y $[C]$

Para obtener la matriz $[H]$ se aplicarán los dos teoremas de la a.a. que ya hemos demostrado. El renglón j de $[H]$, asociado a la barra j , se obtiene aplicando un par de fuerzas unitarias aplicadas normalmente y en los extremos de la barra j y calculando las fuerzas axiales en las b.a.g.l.; en la figura 6 se ilustra el procedimiento para obtener el renglón 2 de la matriz $[H]$ del marco del ejemplo; el renglón 2 será $[-1.0 \quad +1.0]$.

A continuación obtendremos la matriz $[H]$ para nuestro ejemplo:

$$[H] = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ -1.0 & 1.0 \\ 1.0 & -1.0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Para obtener la matriz $[C]$ aplicaremos los teoremas de la a.a. El renglón j de $[C]$ asociado a un desplazamiento de un nudo, se obtiene aplicando una fuerza unitaria en el nudo en la dirección del desplazamiento y calculando las fuerzas en las b.a.g.l. Obtengamos $[C]$ para nuestro ejemplo:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.8660 & -0.8660 \\ 0 & 1.0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

VI - OBTENCIÓN DE LA MATRIZ $[K]$

1.- Obtención de $[K_{11}]$

Esta matriz es la más simple de obtener ya que relaciona $\{M\}$ con $\{F\}$ cuando $\{D\}$ es nulo, es muy fácil demostrar que el elemento i,j de la matriz $[K_{11}]$ es igual a:

$$K_{11}(ij) = \frac{A_{ik} A_{jk} r_k (1 + \delta_{ij})}{L}$$

r_k = Valor de $2 EI/L$ de la barra k

A_{jk}, A_{jk} = Elementos de la matriz $[A]$

δ_{ij} = Delta de Kronecker (= 1 si $i=j$, = 0 si $i \neq j$)

La matriz $[A]$ está definida de la siguiente forma:

$A_{ij} = 1$, si el nudo i es cualquier extremo de la barra j

$A_{ij} = 0$, en caso contrario

A continuación presentamos el valor de $[A]$ para nuestro ejemplo:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como la matriz $[A]$ está formada por ceros y unos y es función de las incidencias de las barras, se podrá omitir su cálculo cuando se programe la obtención de $[K_{11}]$, ya que ésta se obtendrá directamente con la llamada "regla de la suma" (o del ensamble) que utiliza las incidencias de las barras. Obtengamos $[K_{11}]$ para nuestro ejemplo, por facilidad supondremos EI constante:

$$r_1 = r_4 = 0.5 EI; \quad r_2 = r_3 = 0.3464 EI$$

$$[K_{11}] = \begin{bmatrix} 1.6928 & 0.3464 & 0.0000 \\ 0.3464 & 1.3856 & 0.3464 \\ 0.0000 & 0.3464 & 1.6928 \end{bmatrix} EI$$

2.- Obtención de $[K_{22}]$

La matriz $[K_{22}]$ que relaciona $\{F\}$ con $\{D\}$ cuando los giros $\{\psi\}$ son nulos se obtiene combinando los tres principios fundamentales del análisis estructural: continuidad, ley de Hooke y equilibrio.

Continuidad: $\begin{Bmatrix} \Delta \\ V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H \\ r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} D \\ \Delta \end{Bmatrix}$
 Ley de Hooke: $\begin{Bmatrix} V \\ F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r \\ H^T \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \\ V \end{Bmatrix}$ ←

La ecuación de equilibrio se obtiene a partir del principio de contragradencia, que nos dice que el trabajo efectuado por las fuerzas externas ($\{F^T\} \{D\}$) es igual al de las fuerzas internas ($\{V^T\} \{\Delta\}$); las variables usadas en estas ecuaciones son:

- $\{\Delta\}$ = Vector de los desplazamientos transversales de las barras
- $\{L\}$ = Vector de los valores de los g.l.
- $\{V\}$ = Vector de las fuerzas cortantes de cada barra
- $\{F\}$ = Vector de las fuerzas aplicadas paralelamente a los g.l.
- $\{r\}$ = Matriz diagonal con los valores de $12 EI/L^3$ de cada barra

Combinando las tres ecuaciones se obtiene:

o sea que:

$$\begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H^T & r' & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D \end{Bmatrix}$$

$$[K_{22}] = \begin{bmatrix} H^T & r' & H \end{bmatrix}$$

o bien el elemento ij de la matriz $[K_{22}]$ será:

$$K_{22} (ij) = \sum_{k=1}^{n_B} H_{ki} H_{kj} r'_k$$

Obtenemos $[K_{22}]$ para nuestro ejemplo:

$$r_1' = r_4' = 0.1875 EI ; r_2' = r_3' = 0.0624 EI$$

$$[K_{22}] = \begin{bmatrix} 0.3123 & -0.1248 \\ -0.1248 & 0.3123 \end{bmatrix} EI$$

3.- Obtención de $[K_{12}]$

La matriz $[K_{12}]$ que relaciona $\{M\}$ con $\{D\}$ cuando los giros $\{\psi\}$ son nulos, se obtendrá aplicando la relación que muestra la figura 7; por lo tanto,

$$[K_{12}] = [A] [r''] [H]$$

donde: $[r''] =$ Matriz diagonal con los valores de $6EI/L^2$ de cada barra

o bien simplificando:

$$K_{12} (ij) = \sum_{k=1}^{n_B} A_{ik} H_{kj} r''_k$$

obtenemos $[K_{12}]$ para nuestro ejemplo:

$$r_1'' = r_4'' = 0.3750 EI ; r_2'' = r_3'' = 0.1800 EI$$

$$[K_{12}] = \begin{bmatrix} 0.1950 & 0.1800 \\ 0 & 0 \\ 0.1800 & 0.1950 \end{bmatrix}$$

VII - APLICACION DEL METODO

Aplicaremos el método al ejemplo mostrado en la figura 8, cuya matriz $[K]$ ya se ha calculado; las fuerzas de fijación de cada barra se muestran en la misma figura. Obtenemos el vector $\{F_N\}$ fuerzas en los nudos:

$$\begin{aligned} F_{x1} &= 0 ; F_{y1} = -5.78 ; F_{x2} = 10. - 3.52 \times \text{sen } 30 \\ F_{y2} &= -5.78 - 3.52 \times \text{cos } 30 ; F_{x3} = -6.48 \times \text{sen } 30 \\ F_{y3} &= -6.48 \times \text{cos } 30 \end{aligned}$$

Obtenemos $\{F_D\}$ vector de fuerzas paralelas a los g.l., utilizando el principio de contragradiencia:

$$\{F_D\} = [C^T] \{F_N\}$$

obteniéndose los siguientes resultados:

$$\{F_N\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5.78 \\ 8.24 \\ -8.83 \\ -3.24 \\ -5.61 \end{bmatrix} ; \{F_D\} = \begin{bmatrix} -3.53 \\ 8.53 \end{bmatrix}$$

por lo tanto el vector $\{F\}$ será:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -4.81 \\ -0.73 \\ \dots 8.31 \\ -3.53 \\ 8.53 \end{Bmatrix}$$

La ecuación $\{F\} = [K]\{d\}$ se puede resolver utilizando el método de Gauss-Seidel (Ref.2), el cual es muy simple de programar o de ejecutar manualmente; se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.7325 \\ 1.4620 \\ \dots 0.2253 \\ 7.6117 \\ 34.9494 \end{Bmatrix} \times 1/EI$$

Por medio de las matrices $[H]$ y $[C]$ obtengamos los valores de $\{\Delta\}$ y $\{d_N\}$

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} 7.6117 \\ 27.3377 \\ -27.3377 \\ 34.9494 \end{Bmatrix} \times 1/EI \quad \{d_N\} = \begin{Bmatrix} 7.6117 \\ \dots 0 \dots \\ 21.2806 \\ -23.6751 \\ 34.9494 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 1/EI$$

Los momentos en los extremos de una barra j , producidos por los desplazamientos, se obtienen con las siguientes fórmulas:

$$M_{Aj} = r_j (2 \varphi_A + \varphi_B) + r_j'' \Delta_j$$

$$M_{Bj} = r_j (2 \varphi_B + \varphi_A) + r_j'' \Delta_j$$

estos momentos sumados a los de empotramiento nos dan los momentos finales; en la figura 9 se muestra el diagrama final de momentos flexionantes.

Para comprobar la solución se utiliza el principio del equilibrio; la suma de los momentos sobre los nudos debe ser nula y el valor final de $\{F_D\}$ debe ser nulo, condiciones que cumple la solución de nuestro ejemplo.

VIII - NOTACION

- d.a.b. = deformaciones axiales de las barras
- dx_i, dy_i = desplazamientos del nudo i
- g.l. = grado de libertad
- D_i = valor del g.l.i
- φ_i = giro en el nudo i
- $\{d\}$ = vector formado por los giros en los nudos y los valores de los g.l.
- M_i = momento aplicado en el nudo i
- F_i = fuerza aplicada paralelamente al g.l.i
- $[K]$ = matriz de rigidez de la estructura de orden $(n_N + n_D) \times (n_N + n_D)$
- n_N = número de nudos
- n_B = número de barras
- n_D = número de g.l.
- b.a.g.l. = barras asociadas a los grados de libertad

Δ_j

- desplazamiento transversal relativo de la barra j
(ver figura 7)

IX - REFERENCIAS

- (1) "Análisis Estructural", Jack C. McCormack, Editorial Harla, págs. 353, 362, 483 y 519.
- (2) "Numerical Methods in Finite Element Analysis", K.J. Bathe; E.L. Wilson

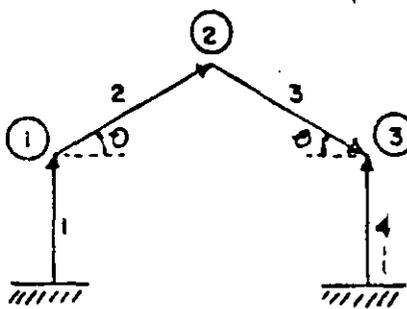


FIGURA 1

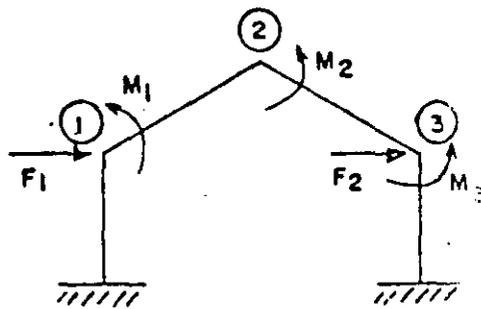
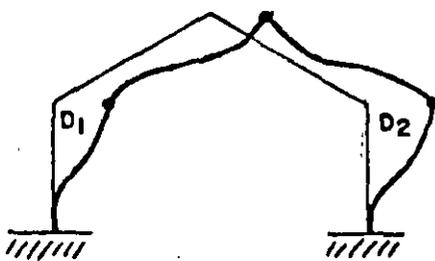
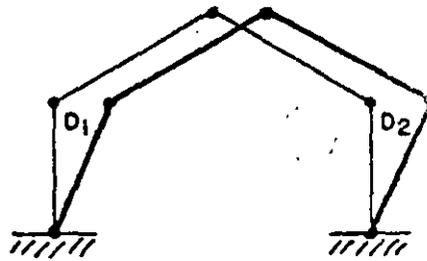


FIGURA 2

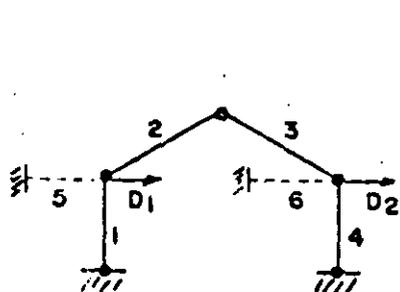


Marco

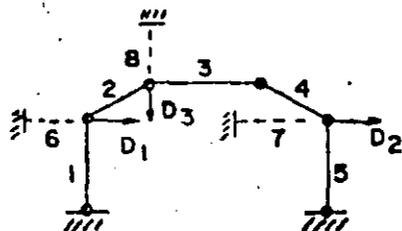


Mecanismo análogo

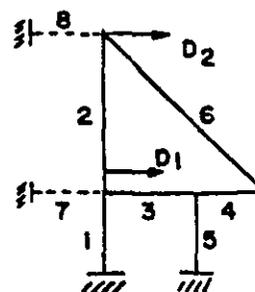
FIGURA 3



(a)

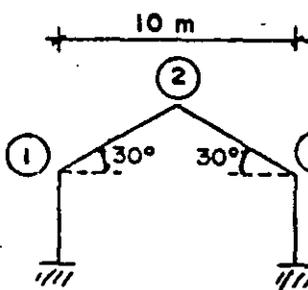


(b)

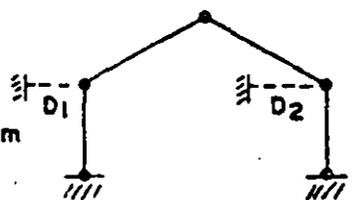


(c)

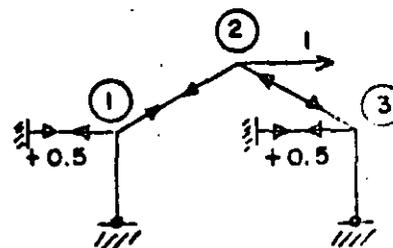
FIGURA 4



(a) Marco

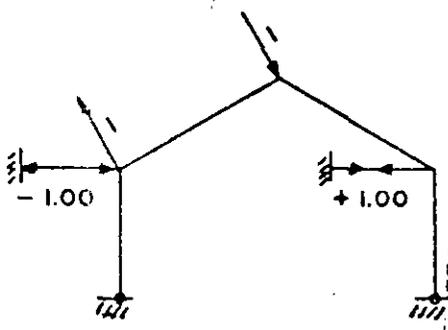


(b) Armadura análoga



(c) Solución armadura

FIGURA 5



NOTA: Para el sentido de las fuerzas unitarias se usará la siguiente regla.

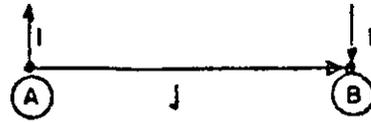
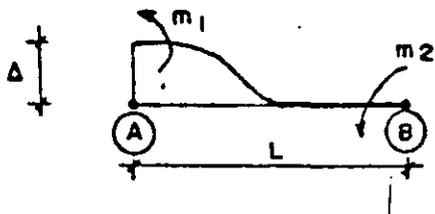


FIGURA 6



$$m_1 = m_2 = \frac{6EI}{L^2} \Delta$$

FIGURA 7

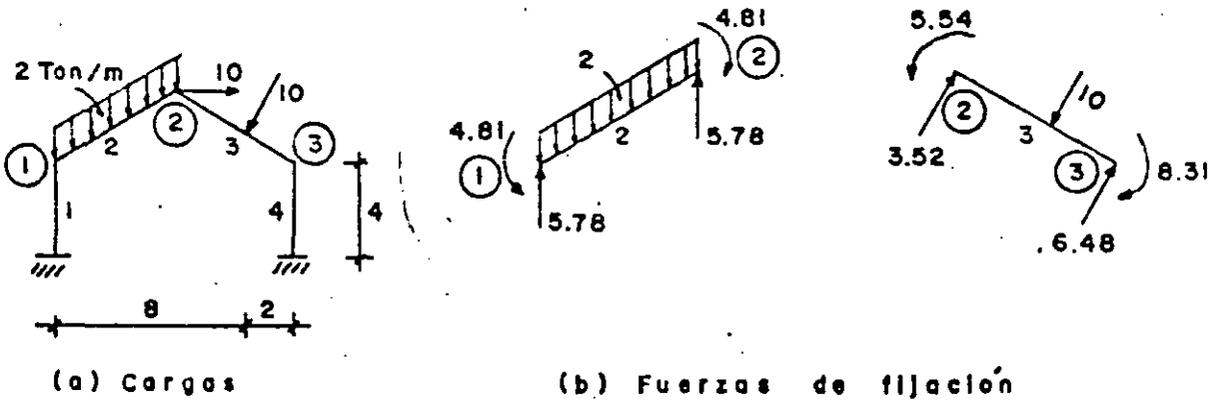


FIGURA 8

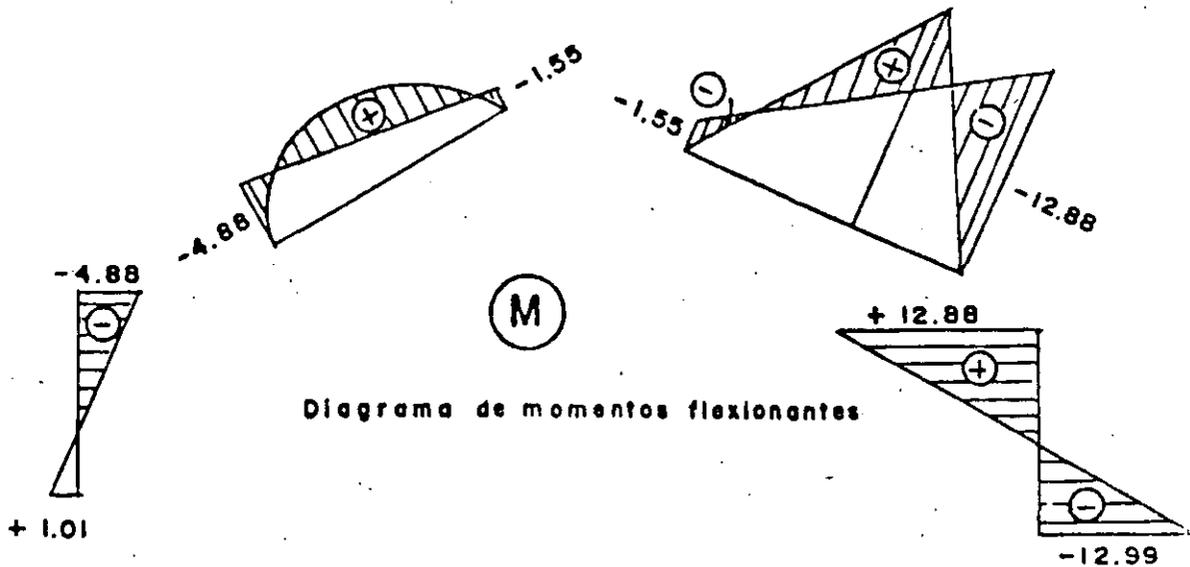
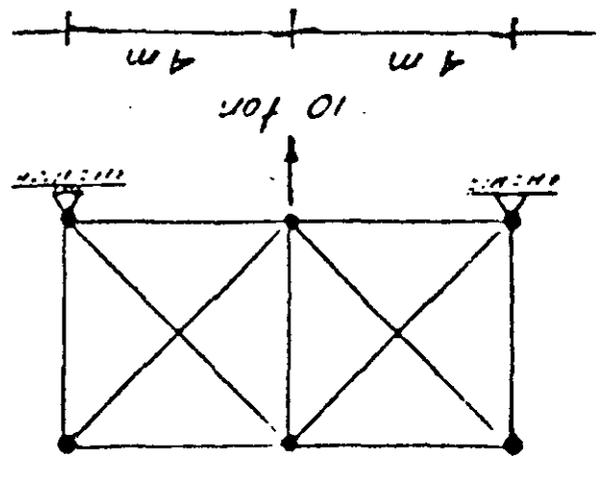


FIGURA 9

Resolver la armadura por flexibilidades.



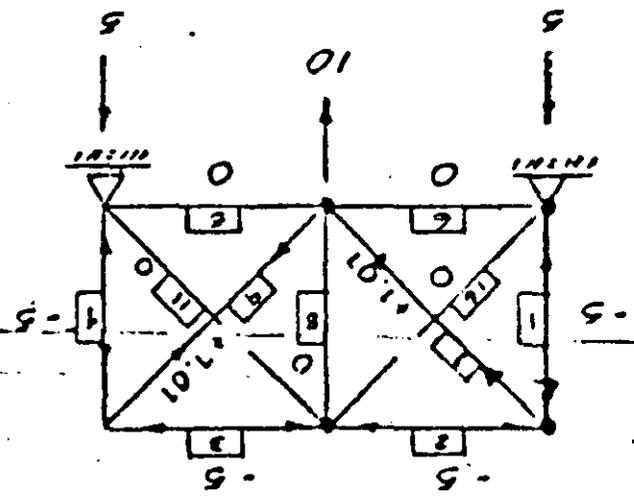
AE = etc.

Solucion:
 1. - la estructura es hiperestatica en 2º grado y la estructura primaria seleccionada sera lo siguiente:

El vector de fuerzas internas: $F = \{bf\}$

- 0
- +7.07
- 0
- +7.07
- 0
- 0
- 5
- 5
- 5
- 5
- 5
- 0

El vector P_0 $\{11 \times 1\}$

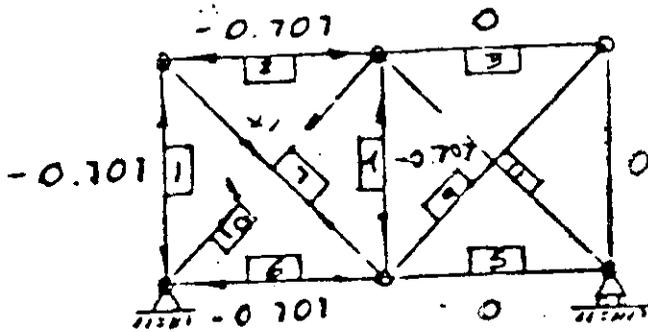


2) Obtención de $[b_R]$

1ª columna de $[b_R]$

12

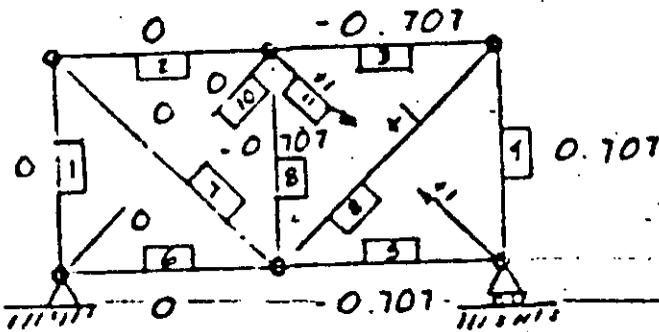
$$R_1 = 1$$



$$\begin{bmatrix} -0.707 \\ -0.707 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.707 \\ +1 \\ -0.707 \\ 0 \\ +1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2ª columna de $[b_R]$

$$R_2 = 1$$



$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.707 \\ -0.707 \\ -0.707 \\ 0 \\ 0 \\ -0.707 \\ +1 \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix}$$

$[b_R] =$

$$\begin{bmatrix} -0.707 & 0 \\ -0.707 & 0 \\ 0 & -0.707 \\ 0 & -0.707 \\ 0 & -0.707 \\ -0.707 & 0 \\ +1 & 0 \\ -0.707 & -0.707 \\ 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora calculando el producto $[b_R] [f_M] [b_K]$

$$\begin{bmatrix} f_A \\ \vdots \\ f_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_R \\ \vdots \\ b_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 5.65 \\ 4 \\ 5.65 \\ 5.65 \\ 5.65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.707 & 0 \\ -0.707 & 0 \\ 0 & -0.707 \\ 0 & -0.707 \\ 0 & -0.707 \\ -1 & 0 \\ -0.707 & 0 \\ +1 & 0 \\ -0.707 & -0.707 \\ 0 & 1 \\ +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.83 & 0 \\ -2.83 & 0 \\ 0 & -2.83 \\ 0 & -2.83 \\ 0 & -2.83 \\ -2.83 & 0 \\ +5.65 & 0 \\ -2.83 & -2.83 \\ 0 & +5.65 \\ 5.65 & 0 \\ 0 & +5.65 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_A \\ \vdots \\ f_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_R \\ \vdots \\ b_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & +1 & -0.707 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0.707 & -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & -0.707 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.83 & 0 \\ -2.83 & 0 \\ 0 & -2.83 \\ 0 & -2.83 \\ 0 & -2.83 \\ -2.83 & 0 \\ +5.65 & 0 \\ -2.83 & -2.83 \\ 0 & +5.65 \\ +5.65 & 0 \\ 0 & +5.65 \end{bmatrix}$$

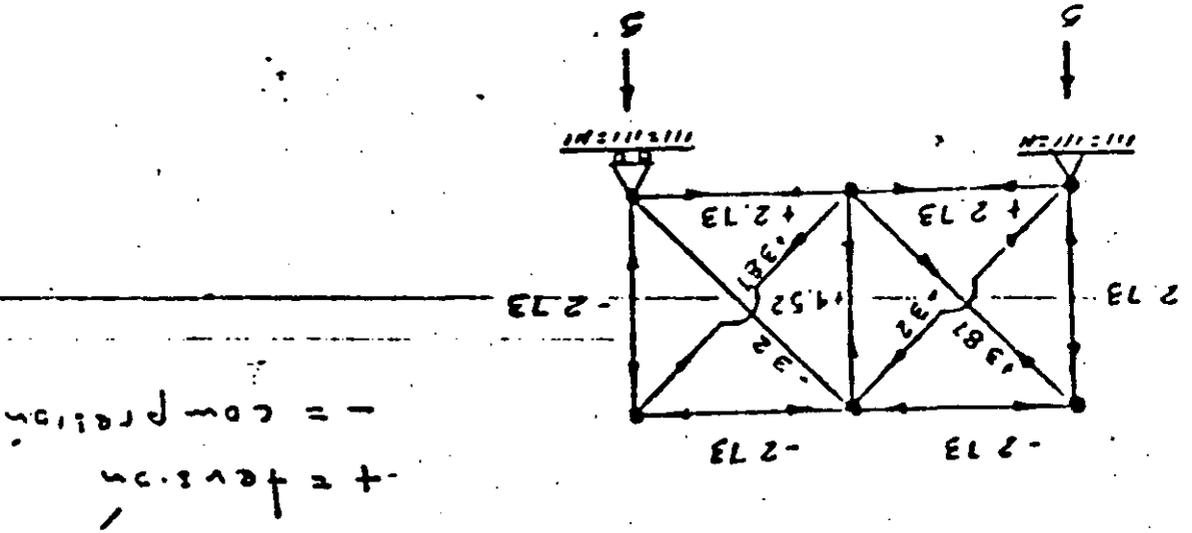
$$\begin{bmatrix} f \\ \vdots \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.32 & 2 \\ 2 & 19.32 \end{bmatrix} \frac{1}{AE}$$

La ecuación de compatibilidad de deformación será:

$$\{D_{XF}\} + \{f\} \{R\} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} 68.28 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \times \frac{1}{AE} + \begin{bmatrix} 19.32 & 2 \\ 2 & 19.32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.2 \\ 3.2 \end{Bmatrix}$$

FUERZAS FINALES EN LOS BARRIOS (+on)



$$\begin{Bmatrix} -2.73 \\ -2.73 \\ -2.73 \\ +2.73 \\ +2.73 \\ +2.73 \\ +3.81 \\ +3.81 \\ +4.52 \\ +3.81 \\ -3.2 \\ -3.2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.2 \\ -3.2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 & -0.101 \\ 0 & 101.0 \\ 0 & -0.101 \\ 0 & 101.0 \\ 0 & -0.101 \\ 0 & 101.0 \\ 0 & -0.101 \\ 0 & 101.0 \\ 0 & -0.101 \\ 0 & 101.0 \\ 0 & -0.101 \\ 0 & 101.0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ +101 \\ 0 \\ +101 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ -5 \\ -5 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

$$\{ P \} = \{ P_0 \} + [K R] = \{ 0 \}$$

Las fuerzas en los barros serian:

ANÁLISIS ESTRUCTURAL

análisis de marcos planos por el método de las flexibilidades

Por Julio Dany Ríos (F)

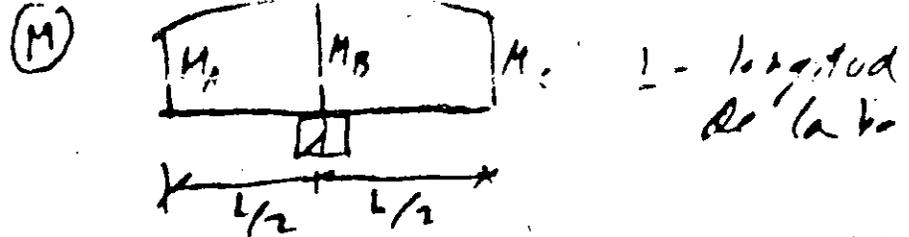
Definición: Se llama marco plano a todo elemento recto de sección constante que tenga momentos flectores y fuerzas cortantes sin discontinuidades

Vectores y matrices estructurales.

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} \{P\}_1 \\ \{P\}_2 \\ \vdots \\ \{P\}_{n_0} \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} n_0 = \text{número de barras} \\ \text{(Momentos flectores de las barras)} \end{array}$$

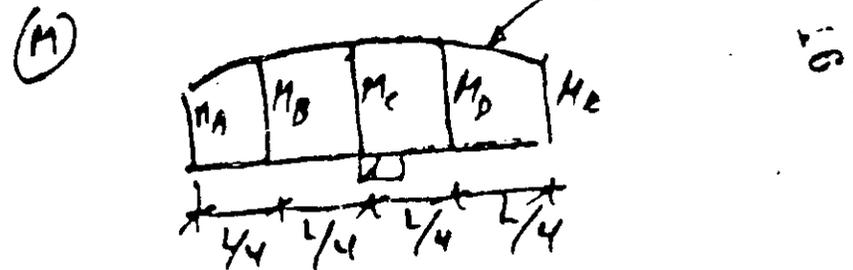
a) Si las cargas sobre la barra [i] son concentradas o uniformemente repartidas

$$\{P\}_i = \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \end{Bmatrix} \quad \text{(Momentos flectores)} \quad \text{antes}$$



b) Si la carga es lineal o parabólica

$$\{P\}_i = \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \\ M_D \\ M_E \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} 3^{\circ} \text{ o } 4^{\circ} \text{ grado} \end{array}$$



2. - $\{P\}$ = vector $\{P\}$ en la estructura isostática.

3. - $\{R\}$ = Vector de redundantes

4. - $[F] = \begin{bmatrix} [F]_1 & & \\ & [F]_2 & \\ & & \dots \end{bmatrix}$ (Matriz de flexibilidades de las barras)

a) Si ~~la carga es~~ $\{P\}$ es lineal o parabólica

$$[F]_{ij} = \frac{L^3}{48EI}$$

b) Si el diagrama de \mathcal{P} es un polinomio de 3° o 4° grado (comp. nivel o producción)

$$[F]_B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \frac{10EI}{L}$$

Nota: Por factores de matrices diagonales se pueden eliminar la diagonal en un vector.

a) $[F]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6EI \end{bmatrix} \frac{1}{L}$

b) $[F]_B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} \frac{10EI}{L}$

5.- $[b]_k = [b_1] \mid [b_2] \mid \dots$

donde: $\{b_i\}_k$ son los valores de $\{b\}_k$ en la estructura isostática, producidos por la redundante R_i unitaria.

6.- $\{H\} =$ Vector de las reacciones en los puntos

$\{H_0\} =$ Reacciones en la estructura isostática, producidos por la carga

7.- $[h] = [h_1] \mid [h_2] \mid \dots$

donde: $\{h_i\}_j$ vector de las reacciones en la estructura isostática, producidos por la redundante R_j unitaria.

8.- $\{d\} =$ Vector de desplazamientos de cualquier número de puntos.

9.- $[m_0] = [m_1] \mid [m_2] \mid \dots$

donde $\{m_i\}_j$ son los valores de $\{m\}_j$ en la estructura isostática, producidos por fuerzas unitarias aplicadas en los puntos j en la dirección en la que se busca el desplazamiento.

III. Formulas fundamentales

$$\boxed{[b_r]^T [F] [b_r]} \{R\} = -[b_r]^T [F] \{A\} \quad \text{--- (1)}$$

En este sistema de ecuaciones se resuelve el valor de los redundantes $\{R\}$

$$\boxed{\{f\} = \{f_0\} + [b_r] \{R\}} \quad \text{--- (2)}$$

Con la ec. (2) se obtienen los momentos flexionantes finales

$$\boxed{[b_r]^T [F] \{f\} = 0} \quad \text{--- (3)}$$

Esta ecuación se usa para congar la solución del problema

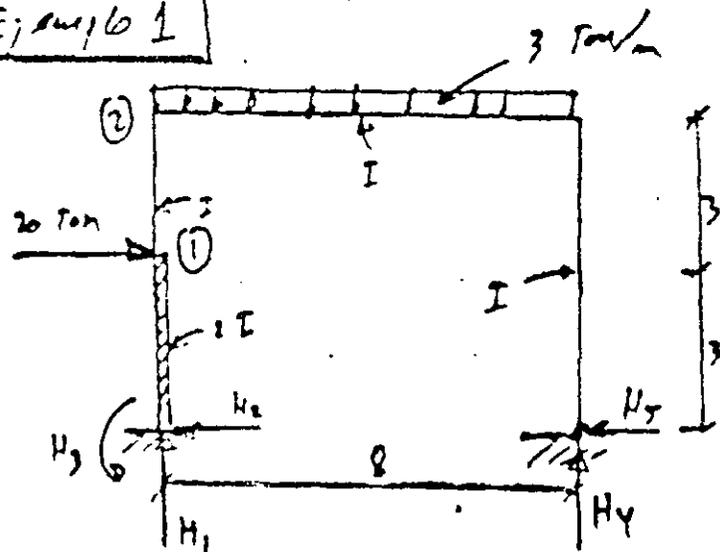
$$\boxed{\{H\} = \{H_0\} + [h] \{R\}} \quad \text{--- (4)}$$

Con la ec. (4) se obtienen las reacciones finales

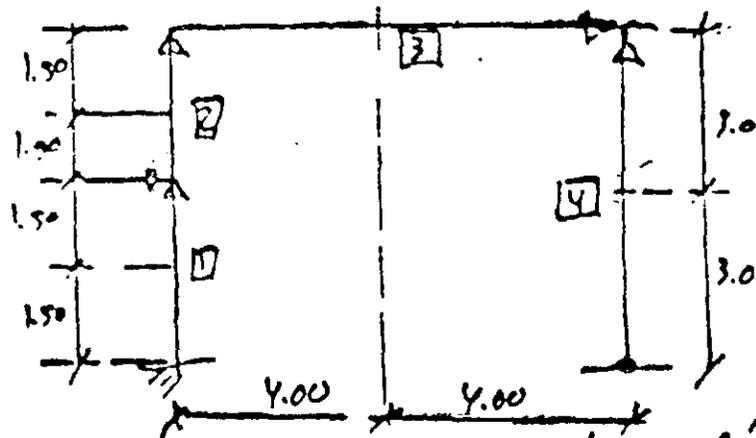
$$\boxed{\{d\} = [m_0]^T [F] \{f\}} \quad \text{--- (5)}$$

Con la ec. (5) se obtienen los desplazamientos

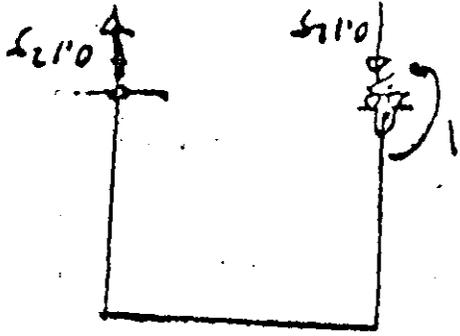
Ejemplo 1



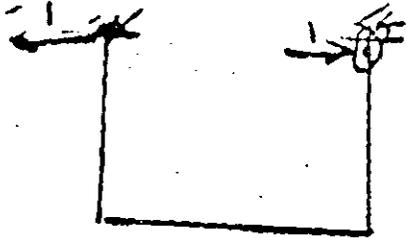
De acuerdo con la definición de momento, tenemos $M_0 = 4$



Todas las barras caen en el caso (a) (Diagrama de M lineal o parabólico)



$$\overline{R}_2 = 1$$



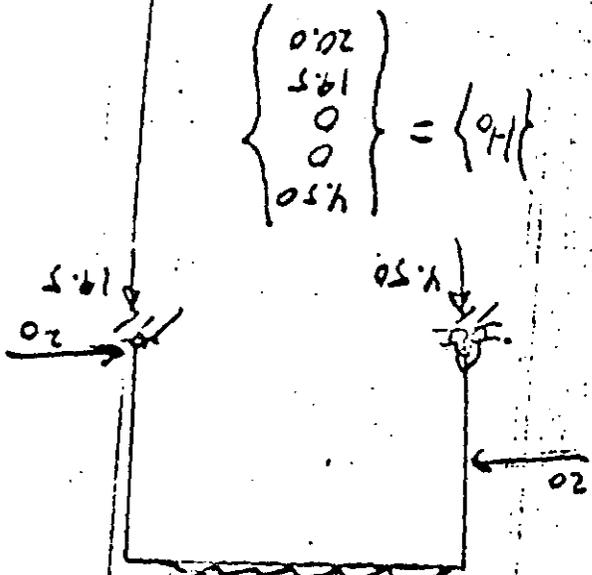
$$\overline{R}_1 = 1$$

Opciones [6]

A	0	+60	+120
B	-60	-66	-120
C	-60	-60	-60
D	0	-30	0
E	0	0	0
F	0	0	0

$$\{f_0\} =$$

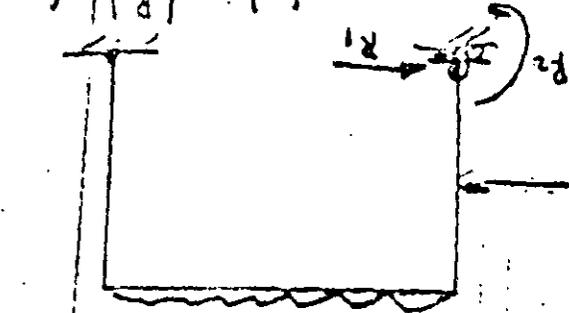
km-m



$$\begin{Bmatrix} 4.50 \\ 0 \\ 0 \\ 19.5 \\ 20.0 \end{Bmatrix} = \{f_0\}$$

Reduccion la resistencia por obtener $\{R\}$ y $\{f_0\}$

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \text{ (Reduccion)}$$



Elegimos la siguiente resistencia

Por lo tanto:

$$[b_R] = \begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ 1.50 & -1 \\ \hline 3.00 & -1 \\ 3.00 & -1 \\ 4.50 & -1 \\ \hline 6.00 & -1 \\ 6.00 & -1 \\ 6.00 & -0.5 \\ 6.00 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ -3.0 & 0 \\ -6.0 & 0 \end{array}$$

$R_1 = 1$ $R_2 = 1$

La diagonal de la matriz [F] será:

$$[F] = \begin{array}{c} 1.5 \\ 6 \\ \hline 1.5 \\ 3 \\ 12 \\ 3 \\ \hline 8 \\ 32 \\ 8 \\ \hline 6 \\ 24 \\ 6 \end{array} \quad \frac{1}{6EI}$$

Obtenemos {R}, con la ec. (1)

LS

$$[b_R]^T [F] [b_R] = \begin{bmatrix} 2565.0 & -238.5 \\ -238.5 & 43.0 \end{bmatrix} \frac{1}{6EI}$$

$$-[b_R]^T [F] \{b\} = \begin{Bmatrix} 32652.0 \\ -2076.0 \end{Bmatrix} \frac{1}{6EI}$$

Resolviendo el sistema de las ecuaciones:

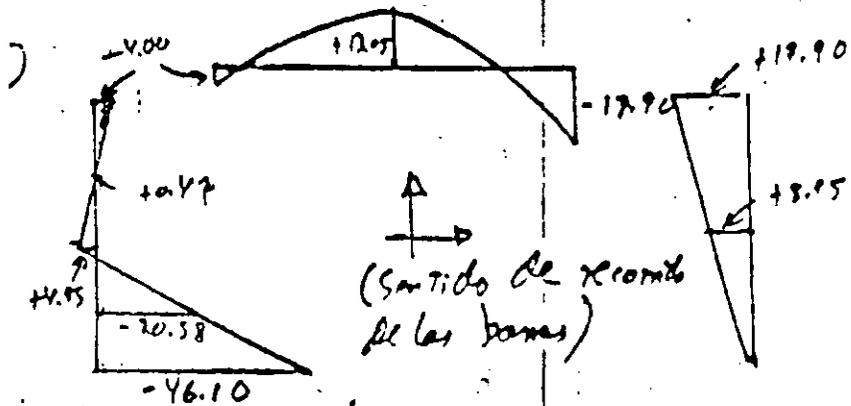
$$\begin{array}{l} R_1 = 17.02 \text{ ton} \\ R_2 = 46.10 \text{ ton-m} \end{array}$$

Obtenemos {p} con la ec. (2)

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} -46.10 \\ -20.53 \\ +4.95 \\ +4.95 \\ +0.47 \\ -4.00 \\ -4.00 \\ +13.07 \\ -17.90 \\ 0 \\ +8.95 \\ +12.90 \end{Bmatrix} \text{ ton-m}$$

LS

Diagrama (H) de momentos flexionantes:



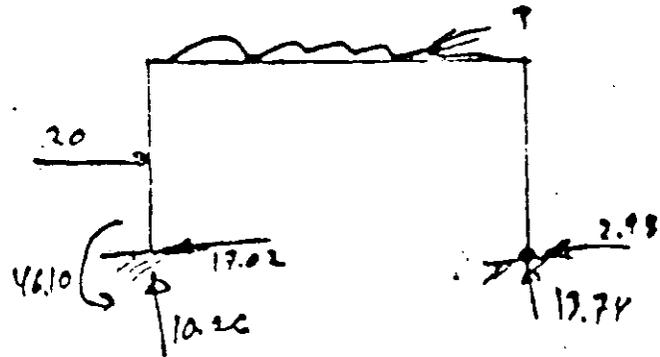
Reacciones:

Obtenemos $[h]$ (ver hoja 4)

$$[h] = \begin{bmatrix} 0 & 0.125 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -0.125 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtenemos las reacciones $\{H\}$ con la ecuación (4)

$$\{H\} = \begin{Bmatrix} 10.26 \\ 17.02 \\ 46.10 \\ 13.74 \\ 2.98 \end{Bmatrix}$$



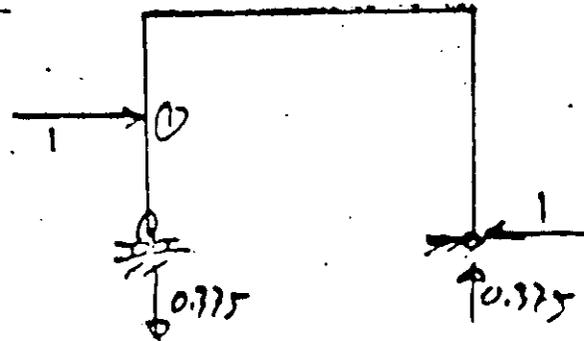
Comprobamos con la ec. (3)

$$[k_p]^{-1} [F] \{A\} = \begin{Bmatrix} 0.59 \\ -0.09 \end{Bmatrix} \frac{1}{6EI} \quad (OK)$$

Obtenemos los desplazamientos horizontales de los puntos 1 y 2 (d_{1x}, d_{2x})

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \end{Bmatrix}$$

d_{1x}



Simplificación de algunas expresiones:

La ecuación (1)

$$[F] \{R\} = - \{d\} \quad \dots (1)$$

donde:

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^{m_p} b_{R_k} b_{R_k} f_k$$
$$d_i = \sum_{k=1}^{m_p} b_{R_k} v_{R_k} f_k$$

La ecuación (3)

$$\{c\} = [b_R]^T [F] \{R\} = 0 \quad \dots (2)$$

donde:

$$c_i = \sum_{k=1}^{m_p} b_{R_k} f_k v_{R_k} (=0) \quad \dots (2)$$

La ecuación (5)

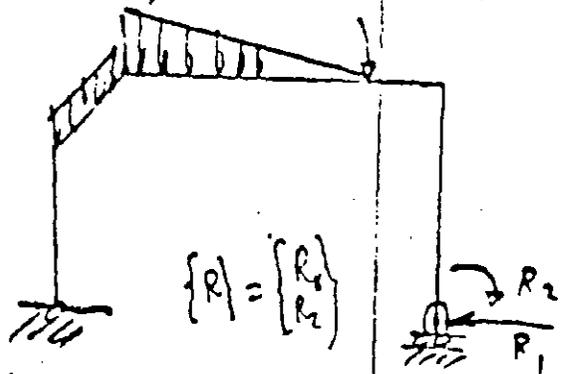
$$\{d\} = [m_0]^T [F] \{R\} \quad \dots (5)$$

donde:

$$d_i = \sum_{k=1}^{m_p} m_{0_k} v_{R_k} f_k$$

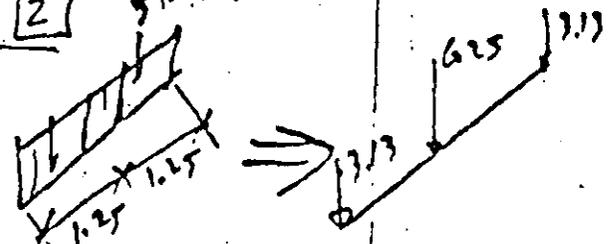
Donde: $m_p =$ no. de renglones de $\{R\}$

Escogemos la siguiente isostática:

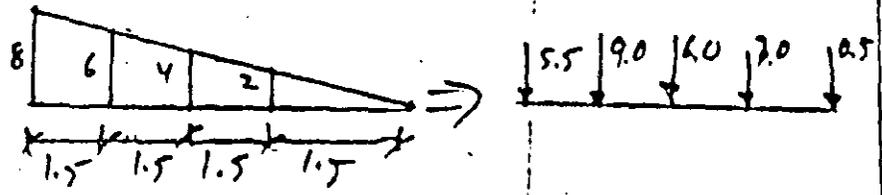


Para reducir la isostática sustituiremos las cargas repartidas por cargas concentradas equivalentes, (fórmulas de Newmark)

Borra [2] 5 ton/m

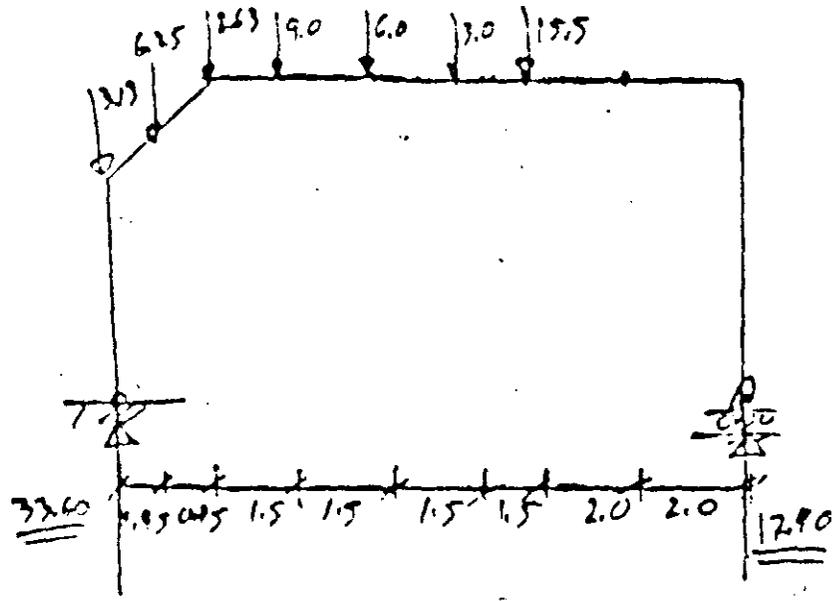


Borra [3]



Solución de la isostática

18



$$\{H_0\} = \begin{Bmatrix} 33.60 \\ 0 \\ 12.90 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Obtengamos $\{f_0\}$:

24

$$\begin{array}{r}
 \{P_0\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ +22.85 \\ +41.02 \\ +41.02 \\ +64.40 \\ +74.79 \\ +78.17 \\ +71.56 \\ +71.56 \\ +35.83 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ \boxed{4} \\ \boxed{5} \\ \boxed{6} \\ \boxed{7} \end{array}
 \end{array}$$

ton mm.

Obtained (F)

$$[F] =$$

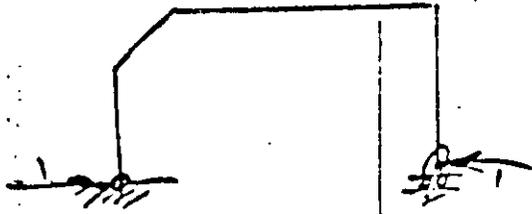
$$\begin{array}{r}
 \boxed{3} \\
 12 \\
 3 \\
 \hline
 2.5 \\
 10.0 \\
 2.5 \\
 \hline
 1.4 \\
 6.4 \\
 2.4 \\
 6.4 \\
 1.4 \\
 \hline
 4.0 \\
 16.0 \\
 4.0 \\
 \hline
 1.75 \\
 5.0 \\
 1.75
 \end{array}$$

$\times \frac{1}{6EI}$

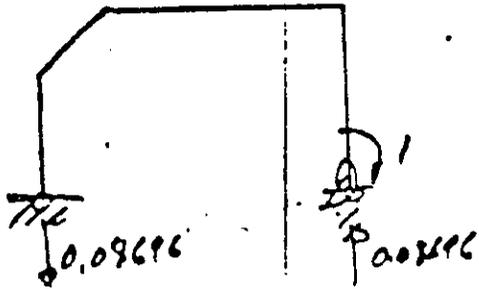
$\boxed{4}$

Obtenemos $[h] \rightarrow [b_R]$

$R_1 = 1$



$R_2 = 1$



$$[h] = \begin{bmatrix} 0 & -0.08696 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0.08696 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[b_R] =$

0	0
-1.5	0
-3.0	0
-3.0	0
-4.0	-0.07
-5.0	-0.13
-5.0	-0.13
-5.0	-0.26
-5.0	-0.39
-5.0	-0.52
-5.0	-0.65
-5.0	-0.65
-5.0	-0.83
-5.0	-1.00
0	+1.00
+2.5	+1.00
+5.0	+1.00

Obtenemos $\{R\}$ con la ec. (1)

$$[b_R]^T [F] [b_R] = \begin{bmatrix} 1411.50 & 159.68 \\ 157.68 & 21.45 \end{bmatrix} \frac{1}{\text{CFT}}$$

$$- [b_R]^T [F] \{P\} = \begin{bmatrix} 11870.13 \\ 1190.65 \end{bmatrix} \frac{1}{\text{CFT}}$$

Resolvamos las dos ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} R_1 &= +9.95 \\ R_2 &= -13.76 \end{aligned}$$

Obtenemos $\{p\}$ con la ec. (2)

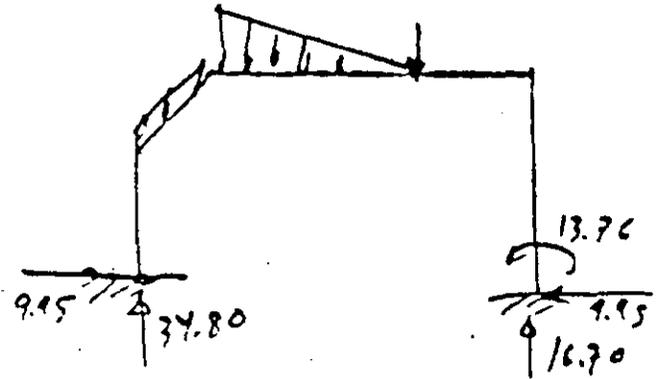
$$\{p\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -14.92 \\ -29.84 \\ -29.84 \\ -15.98 \\ -6.93 \\ -6.93 \\ +18.24 \\ +29.92 \\ +32.59 \\ +30.77 \\ +30.77 \\ -2.48 \\ -35.97 \\ -13.76 \\ +11.10 \\ +35.97 \end{Bmatrix} \text{ Ton-m}$$

Comprobamos con la ec. (3)

$$[K_R]^T [F] \{p\} = \begin{Bmatrix} 0.23 \\ -0.02 \end{Bmatrix} \frac{1}{6EE} \quad (\text{OK})$$

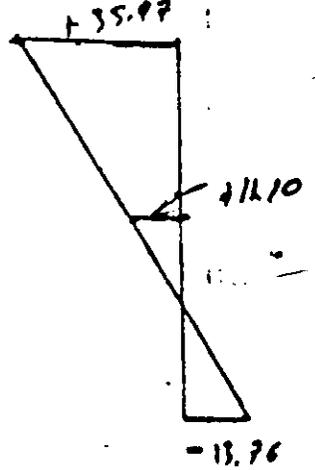
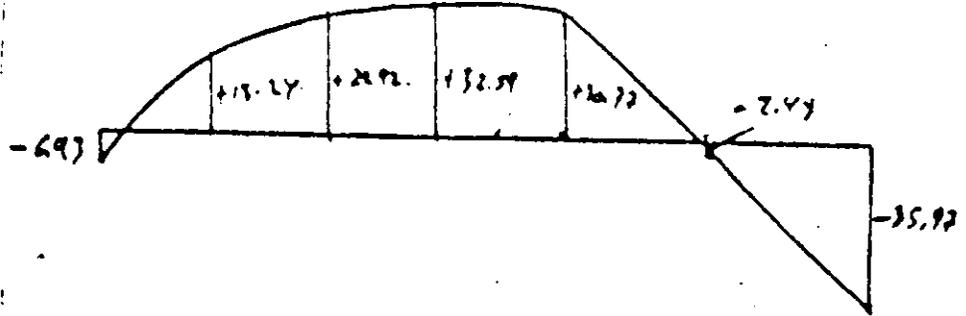
Obtenemos las reacciones $\{H\}$ con la ec. (4)

$$\{H\} = \begin{Bmatrix} 34.80 \\ 9.95 \\ 16.70 \\ 9.95 \\ -13.76 \end{Bmatrix}$$



Obtenemos el diagrama de $\{H\}$

(14)



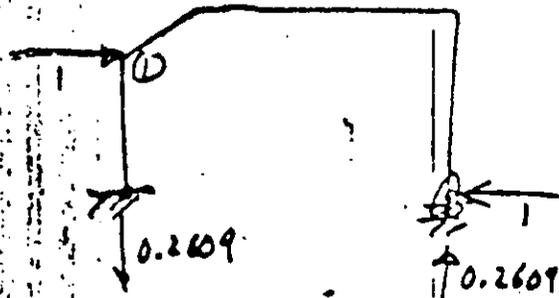
11

28

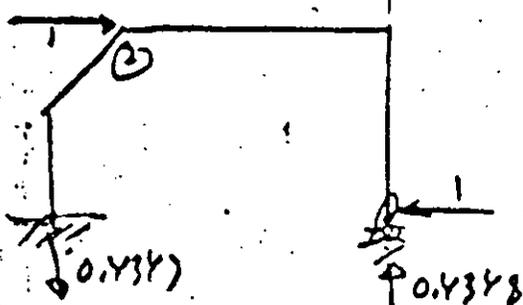
Ditanyakan d_{1x}, d_{2x}, d_{2y}

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{Bmatrix}$$

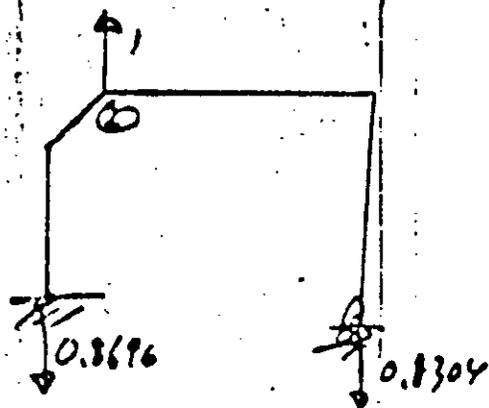
d_{1x}



d_{2x}



d_{2y}



Ditanyakan $[m_0]$

13

$$[m_0] =$$

0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
-1.20	-4.33	-0.65
-2.39	-4.65	-1.90
-2.39	-0.65	-1.30
-2.79	-1.30	-1.10
-3.17	-1.95	-0.91
-3.57	-2.61	-0.72
-3.96	-3.26	-0.52
-3.96	-3.26	-0.52
-4.48	-4.13	-0.26
-5.00	-5.00	0
0	0	0
+2.5	+2.5	0
+5.0	+5.0	0

$d_{1x} \quad d_{2x} \quad d_{2y}$

Ditanyakan $\{d\}$ on kee. (5)

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} -72.95 \\ -1012 \\ -46.83 \end{Bmatrix} \frac{1}{EI}$$

b) Si el diagrama de \mathbb{B} es un polinomio de 3^{er} o 4^{to} grado (comp. lineal o parabólica)

$$[F]_{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \frac{L}{10EI}$$

NOTA: Por tratarse de matrices diagonales se puede abreviar la diagonal en un vector.

a) $[F]_{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{L}{6EI}$

b) $[F]_{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 32 \\ 12 \\ 32 \\ 7 \end{bmatrix} \frac{L}{10EI}$

5. - $[b_R] = \left[\{b_{0,1}\} \mid \{b_{0,2}\} \mid \dots \right]$

donde: $\{b_{0,i}\}$ son los valores de $\{b\}$ en la estructura isostática, producidos por la redundante R_i unitaria.

6. - $\{H\}$ = Vector de las reacciones en los apoyos

$\{H_0\}$ = Reacciones en la estructura isostática, producidas por la carga

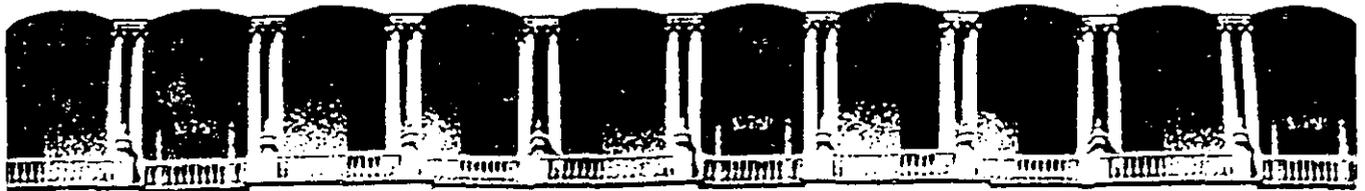
7. - $[h] = \left[\{H_{0,1}\} \mid \{H_{0,2}\} \mid \dots \right]$

donde: $\{H_{0,i}\}$ vector de las reacciones en la estructura isostática producidas por la redundante R_i unitaria.

8. - $\{d\}$ = Vector de desplazamientos de cualquier número de puntos.

9. - $[m_0] = \left[\{m_{0,1}\} \mid \{m_{0,2}\} \mid \dots \right]$

donde $\{m_{0,i}\}$ son los valores de $\{m\}$ en la estructura isostática producidos por fuerzas unitarias aplicadas en los puntos y en la dirección en la que se desea el desplazamiento.



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

*CURSOS ABIERTOS
ANALISIS ESTRUCTURAL*

*INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA Y DISEÑO
ESTRUCTURAL DE CIMENTACIONES*

M. en I. AGUSTIN DEMENECHI COLINA

SIMPOSIO SOBRE INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA Y DISEÑO ESTRUCTURAL
DE CIMENTACIONES

SMMS, SMIS, SMIE Septiembre de 1991

"INTERACCION ESTATICA SUELO-ESTRUCTURA"

Agustín Deméneghi Colina

Profesor del Departamento de Geotecnia
Facultad de Ingeniería, UNAM

RESUMEN Se presenta una breve descripción de los métodos de interacción estática suelo-estructura que se han desarrollado en la República Mexicana hasta la fecha. Se comenta sobre la necesidad de tomar en cuenta la variación de las propiedades de los materiales que forman la estructura y el terreno de cimentación. Se presentan algunas aplicaciones de la interacción estática suelo-estructura.

1. INTRODUCCIÓN

La cimentación de estructuras sobre suelos de mediana a alta compresibilidad plantea el problema de determinar los hundimientos totales y diferenciales, así como los elementos mecánicos (momento flexionante, fuerza cortante y fuerza normal), tanto en la subestructura como en la superestructura, ocasionados por los hundimientos del terreno de cimentación. Estos valores dependen por un lado de la compresibilidad del subsuelo y por otro de la rigidez de la estructura. Tomando en cuenta que con frecuencia en los análisis estructurales se considera a la estructura empotrada o articulada en su cimentación, o si se trata de una losa de apoyo se supone una presión de contacto uniforme, o que el cálculo de hundimientos del terreno de cimentación se realiza considerando la estructura de cimentación totalmente flexible, lo cual suele distar bastante de la realidad, se ve clara la necesidad de desarrollar métodos que tomen en cuenta los

efectos de los hundimientos y que, al mismo tiempo, permitan calcular los valores de estos últimos. A estas técnicas es lo que se denomina interacción estática suelo-estructura.

Por lo tanto, el propósito de la interacción estática suelo-estructura es llevar a cabo un análisis estructural tomando en cuenta el efecto de la rigidez del terreno de cimentación. La interacción suelo-estructura proporciona los diagramas de hundimientos diferenciales y de reacción del terreno de cimentación (véanse las figs 11 y 12), lo que a su vez permite determinar los diagramas de momento flexionante y fuerza cortante en la estructura de cimentación, considerando la influencia de la rigidez del suelo de cimentación, lo que conduce a un diseño racional de dicha subestructura. Algunos procedimientos de interacción consideran también el efecto de la superestructura, con lo que se conoce además el efecto de la rigidez del terreno en los elementos mecánicos de toda la estructura.

En este trabajo se presenta una breve descripción de los métodos de interacción estática que se han desarrollado hasta la fecha en la República Mexicana, así como algunas de sus aplicaciones. El lector que tenga interés en estudiar al detalle uno de los procedimientos de interacción puede consultar las referencias que se incluyen al final del texto.

Las características de alta compresibilidad de los sedimentos del subsuelo de la ciudad de México ha dado lugar a que se desarrollen un buen número de métodos de interacción suelo-estructura, teniendo la mayoría de ellos una buena dosis de mérito. Se puede afirmar que nuestro país es inclusive uno de los pioneros en este campo de estudio.

En el inciso 2 se trata el problema de la interacción suelo-estructura en cimentaciones someras, mientras que el inciso 3 contiene algunas técnicas para cimentaciones profundas. En el inciso 4 se comenta sobre la importancia de considerar en la forma más realista posible las propiedades mecánicas de los materiales de estructura y terreno de cimentación. El inciso 5 trata de ciertas aplicaciones de la interacción estática suelo-estructura. Finalmente, en el inciso 6 se presentan las conclusiones de este trabajo.

Cabe aclarar que no en todas las cimentaciones surge el problema de considerar la rigidez del suelo. Por ejemplo, para niveles de carga medianos y suelos muy rígidos, los hundimientos del suelo son muy pequeños y no se requiere tomarlos en cuenta en el análisis estructural. En el diseño estructural de zapatas de dimensiones usuales, la diferencia entre una reacción uniforme y la reacción real es pequeña y queda cubierta por los factores de seguridad empleados para el diseño estructural. En consecuencia, la interacción se aplica sobre todo a estructuras cimentadas sobre suelos de mediana a alta compresibilidad, en las que los asentamientos diferenciales tienen importancia en el comportamiento de dichas estructuras.

2. INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA EN CIMENTACIONES SOMERAS

2.1 Métodos de interacción suelo-estructura

Existen varios métodos para llevar a cabo la interacción estática suelo-estructura. A continuación describimos brevemente algunos de ellos.

En 1956, Samuel Chamecki, profesor de ingeniería estructural de la Universidad de Paraná, en Brasil, presenta uno de los primeros procedimientos para tomar en cuenta en forma racional la interacción suelo-estructura, aplicable a vigas y a marcos estructurales (Chamecki, 1956). Trata el caso de una viga con tres apoyos, desplantada en un suelo con un estrato de arcilla compresible; resuelve el problema utilizando unos coeficientes de transferencia de carga (que equivalen a la matriz de rigideces de la estructura) en la viga, y considerando una arcilla normalmente consolidada, en la que se conoce su índice de compresibilidad. Estableciendo la compatibilidad de deformaciones entre viga y suelo, resuelve el problema en forma explícita. A continuación trata el caso de marcos estructurales, y debido a que las relaciones esfuerzo-deformación unitaria en los suelos son no lineales, propone un procedimiento iterativo para la solución del problema, usando los coeficientes de transferencia de carga en la estructura y calculando los hundimientos del suelo por procedimientos usuales. Los valores de los asentamientos en las aproximaciones sucesivas oscilan alrededor de un valor medio y tienden a él. Para evitar un gran número de iteraciones, se aplica una corrección después de la primera iteración, calculando las cargas en las columnas con un promedio de los asentamientos obtenidos. En la mayoría de los casos prácticos no hay necesidad de correcciones adicionales para alcanzar la convergencia del procedimiento (Chamecki, 1956).

Otro procedimiento es el de Flores Victoria (1968), en el que para resolver el problema de la interacción suelo-estructura se establece la siguiente ecuación matricial

$$K \underline{\delta} = \underline{P} + \underline{K}_c \underline{P}_c - \underline{E} \underline{Q} \quad (1)$$

donde \underline{K} = matriz de rigidez del conjunto superestructura cimentación

$\underline{\delta}$ = vector de asentamientos de los nudos de la cimentación, los cuales deben ser iguales a los de las bases de las columnas inferiores de la superestructura

\underline{K}_c = matriz de transmisión de peso propio de traveses a cargas en nudos

\underline{P}_c = cargas debidas al peso propio de traveses

\underline{E} = matriz de transmisión de cargas del suelo a los nudos de la cimentación

\underline{Q} = cargas que la cimentación aplica al suelo

Los movimientos del suelo están dados por

$$\underline{F}_s \underline{Q}_s = \underline{\delta}_s \quad (2)$$

donde \underline{Q}_s = cargas aplicadas al suelo

\underline{F}_s = matriz de flexibilidades del suelo, que es función no lineal de \underline{Q}_s

$\underline{\delta}_s$ = vector de movimientos verticales de la superficie del suelo

Suponiendo que la cimentación no se despegas del suelo, las cargas \underline{Q} sobre la cimentación deben ser iguales a las cargas \underline{Q}_s . Los hundimientos $\underline{\delta}$ de la cimentación deben ser iguales a los del suelo, por lo que la ec 2 puede escribirse

$$\underline{F}_s \underline{Q} = \underline{\delta}$$

En la superestructura y cimentación, de la ec 1 debe tenerse

$$K \underline{\delta} = \underline{P}_T - \underline{E} \underline{Q} \quad (3)$$

donde $\underline{P}_T = \underline{P} + \underline{K}_c \underline{P}_c$

son las cargas del edificio sobre los nudos de la cimentación, junto con su peso propio. Las ecs 2 y 3 dan un planteamiento que en forma directa permite obtener como solución los asentamientos $\underline{\delta}$ del suelo y cimentación juntos, así como las fuerzas de contacto \underline{Q} . Para ello se requieren como datos las matrices \underline{K} y \underline{E} , y el vector \underline{P}_T , junto con las propiedades del suelo, localización y tamaño de las áreas rectangulares asociadas a cada \underline{Q} . Para conocer momentos, cortantes, fuerzas normales en columnas, etc. faltará calcular el efecto que producen $\underline{\delta}$ y \underline{Q} en el edificio y sumarlo con el efecto de las cargas verticales \underline{P} y \underline{P}_c .

La solución del problema se lleva a cabo substituyendo la ec 2 en la ec 3

$$K \underline{F}_s \underline{Q} = \underline{P}_T - \underline{E} \underline{Q}$$

de donde $(\underline{E} + \underline{K} \underline{F}_s) \underline{Q} = \underline{P}_T$

Finalmente $\underline{Q} = (\underline{E} + \underline{K} \underline{F}_s)^{-1} \underline{P}_T$

Conocida \underline{Q} , con la ec 2 se obtiene $\underline{\delta}$. No se posible despejar $\underline{\delta}$ de la ec 3 porque no existe la inversa de \underline{K} .

Flores Victoria señala que la matriz \underline{F}_s es función no lineal de \underline{Q} , lo que no permite resolver el problema directamente, sino que se requiere acudir a métodos iterativos.

Operando con las ecuaciones matriciales anteriores, el método iterativo tiene la interpretación física de aplicar una distribución de presiones al suelo $\underline{Q}^{(n)}$, y calcular asentamientos del suelo; con esos asentamientos determinar el estado de cargas que debe tener la estructura como reacción del suelo. Esa reacción se vuelve a aplicar al suelo, y así sucesivamente, hasta lograr

la convergencia; esta interpretación es debida a Chamecki (1956).

De acuerdo con Flores Victoria (1968), este procedimiento es divergente para suelos compresibles, como el de la ciudad de México, o para cimentaciones excesivamente rígidas. Esto lleva a usar un criterio de interpolación para lograr y acelerar la convergencia, el cual se basa en el concepto físico de permitir que $Q^{(n)}$ se modifique en un porcentaje razonable en cada ciclo, y difiera poco de $Q^{(n+1)}$.

El método de Flores Victoria se aplica con un programa de computadora, el cual proporciona los elementos mecánicos correspondientes.

En un trabajo posterior (Flores Victoria y Esteva, 1970) presentan además un procedimiento simplificado en el que se considera lo siguiente:

- El suelo es un medio elástico lineal semiinfinito
- Cimentación rectangular con una red ortogonal de trabes
- No se toma en cuenta la rigidez de la superestructura

Para las condiciones mencionadas, y empleando valores normalizados, los autores proporcionan los valores de los asentamientos de la estructura y de las reacciones del terreno sobre la misma. Estos resultados los presentan en forma tabular.

Los resultados del trabajo de Flores Victoria y Esteva (1970) son los que se emplean en las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Cimentaciones del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal de 1976 y en el Manual de Diseño de Obras Civiles de la Comisión Federal de Electricidad de 1980. Sin embargo, en las primeras no se incluye el cálculo de la magnitud de las reacciones del suelo de cimentación.

Para tomar en cuenta el comportamiento no lineal del suelo, Dany *et al* (1977) presentan un método incremental, que consiste en suponer que el vector de cargas se aplica gradualmente al conjunto en incrementos, siendo los incrementos suficientemente pequeños para que el sistema responda linealmente, con rigideces iguales a los valores tangentes que corresponden al estado de esfuerzos existente al iniciar la aplicación de los incrementos. Al aplicar el último incremento deben satisfacerse las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo.

Por su parte, Esteva *et al* (1977) proponen dos procedimientos de interacción. El primero es a base de aproximaciones sucesivas, y consiste en suponer inicialmente que la distribución de presiones en el terreno es igual a la de las carga aplicadas sobre el sistema estructural; con las reacciones y la correspondiente matriz secante de flexibilidades del suelo se obtiene una estimación de los desplazamientos del suelo, y una estimación de las deformaciones de la estructura, empleando matrices secantes de rigideces de la estructura y de flexibilidades del suelo. El proceso se repite un número de veces tal que los valores de los desplazamientos del suelo sean suficientemente parecidos en dos estimaciones sucesivas. El segundo método es un procedimiento incremental aproximado, que consiste en aplicar gradualmente la carga total en incrementos; en cada incremento se efectúa un ciclo semejante al del procedimiento de aproximaciones comentado antes; el resultado de dicho ciclo iterativo se toma como punto de partida para la aplicación de otro incremento de carga. Los autores proponen dos criterios alternativos: en el primero se logra el equilibrio al final de cada ciclo, pero no se logra la compatibilidad entre las deformaciones de la estructura y las del suelo; en el segundo se alcanza dicha compatibilidad, pero a costa de un desequilibrio. Por lo anterior, en ambos casos

debe hacerse una corrección en el siguiente ciclo (Esteve et al, 1977).

El Dr Leonardo Zeevaert (1973, 1980, 1983) ha trabajado profusamente en el desarrollo de métodos de interacción suelo-estructura. El método que utiliza consiste en formar la ecuación matricial de asentamientos o hundimientos (EMA), que relaciona los asentamientos del suelo en función de las cargas aplicadas en la superficie:

$$\underline{\delta} = \underline{D} \underline{q}$$

donde $\underline{\delta}$ = vector de asentamientos en el contacto cimentación suelo
 \underline{D} = matriz de asentamientos ocasionados por presiones unitarias
 \underline{q} = vector de cargas aplicadas en el contacto cimentación suelo

Para la formación de la matriz \underline{D} se emplea el concepto de valor de influencia, que es el esfuerzo ocasionado por una presión unitaria en la superficie, lo que facilita de manera importante la determinación de los elementos de la matriz \underline{D}

A continuación se forma la ecuación matricial de interacción (EMI), que relaciona las deformaciones de la estructura con las cargas que le transmite el suelo:

$$\underline{S} \underline{X} = \underline{\Delta}$$

donde \underline{S} = matriz de flexibilidades del suelo
 \underline{X} = vector de cargas del suelo sobre la estructura
 $\underline{\Delta}$ = vector de deformaciones de la estructura

La interacción de la estructura de cimentación con el suelo depende del valor de módulo de cimentación por área tributaria K , definido como el cociente de la carga sobre el suelo (en unidades de fuerza)

entre la deformación que produce. Debe notarse en la ecuación EMI que los valores del vector de deformaciones de la estructura $\underline{\Delta}$ son función del módulo K por área tributaria (Zeevaert 1980). Si los valores de K fuesen independientes entre sí, la ecuación matricial EMI daría los resultados definitivos de las reacciones incógnitas. Sin embargo, la hipótesis anterior no es exacta porque la masa del suelo debe considerarse como un medio continuo, donde los valores de K para los diferentes puntos considerados no son independientes entre sí y dependen de la distribución de esfuerzos de contacto con la estructura de cimentación. La interacción correcta entre la estructura de cimentación y la masa del suelo se obtiene utilizando las reacciones X_i obtenidas por EMI, en la ecuación matricial de hundimientos EMA, obteniéndose los desplazamientos verticales δ_i que proporcionan valores del módulo de cimentación iguales a los usados en la ecuación matricial de interacción EMI, $K_i = X_i / \delta_i$. Si los valores encontrados en esta forma no concuerdan con los utilizados inicialmente, no se tendrá la interacción correcta, ya que los módulos de cimentación no fueron correctamente elegidos, por lo cual será necesario utilizar la ecuación matricial EMA para conciliar este problema. Así pues, se deduce que las ecuaciones matriciales EMA y EMI quedan ligadas por los valores de K_i , los cuales son únicos para la solución de cada problema en particular y dependen de la distribución de las reacciones del suelo sobre la estructura de cimentación, rigidez de ésta y de la posición de las cargas que actúan sobre ella (Zeevaert, 1980).

Es posible hallar una matriz única de interacción para resolver el problema sin realizar iteraciones y obtener resultados más precisos (Zeevaert, 1983). La nueva ecuación matricial se denomina ecuación matricial de interacción suelo-estructura (EMISE), mediante el empleo de la cual no se necesitan

iteraciones para resolver el problema de interacción.

El procedimiento de Zeevaert (1980) se puede aplicar a cimentaciones compensadas, tomando en cuenta el efecto de las condiciones hidráulica en la interacción suelo-estructura.

Otro procedimiento de interacción estática suelo-estructura es el que propone Deméneghi (1979, 1983, 1985), el cual considera a las reacciones del terreno como un sistema de cargas sobre la estructura, manejándolas durante el proceso de análisis como incógnitas. El análisis estructural se lleva a cabo empleando el método de rigideces, pero el problema no se puede resolver en esta etapa porque sobran incógnitas, ya que se están agregando al vector de cargas las reacciones del suelo, que no se conocen. Las ecuaciones faltantes las proporciona el análisis de hundimientos del terreno de cimentación, en el que se obtienen las deformaciones del suelo en función de las cargas sobre el mismo (estas cargas son iguales y de sentido contrario a las reacciones del suelo sobre la estructura, por la tercera ley de Newton); en esta etapa se hace uso del concepto de valores de influencia de Zeevaert (1980), lo que facilita la determinación de los hundimientos del suelo en función de las cargas sobre el mismo (recuérdese que las cargas sobre el suelo no se conocen). Las deformaciones del suelo se sustituyen en las ecuaciones obtenidas inicialmente con el método de rigideces, lo que permite resolver el problema en forma directa, sin necesidad

de iteraciones. Con este procedimiento se obtienen los diagramas de deformaciones y de reacciones del suelo, en el contacto entre éste y la estructura de cimentación. Este procedimiento tiene la ventaja de que se puede tomar en cuenta el número de pisos que se desee de la superestructura, así como de que se puede programar en una computadora con relativa facilidad.

El método de Sánchez Martínez y Enríquez (1982) se emplea en cimentaciones someras y consiste en realizar un análisis del conjunto suelo-estructura como un sistema estructural único que se resuelve utilizando el método general de las rigideces. Cabe aclarar que es un método no iterativo.

El procedimiento consiste en considerar al suelo sustituido por una serie de resortes, en los que el módulo de reacción o la constante de cada resorte depende de toda la masa del suelo, es decir, no se consideran los resortes independientes entre sí, como se verá más adelante.

Se establece primero la matriz de rigideces de la estructura a partir de la de sus miembros. Las reacciones del suelo se toman en cuenta a través de resortes que se conectan con la cimentación de la estructura.

A continuación se obtiene la matriz de rigideces del suelo. Esta se determina dando desplazamientos verticales con valor unitario a cada uno de los resortes que lo idealizan y calculando las fuerzas que aparecen por este efecto en todos ellos. Al dar un desplazamiento unitario en un resorte aparecen fuerzas no sólo en el propio resorte, sino también en todos los demás, ya que ellos deben considerarse ligados de alguna forma por pertenecer a un medio continuo. Lo mismo sucede al aplicar sucesivamente desplazamientos unitarios en los demás resortes. El cálculo de la matriz

de rigideces del suelo es en general laborioso y algo complicado; sin embargo, se puede determinar dicha matriz en forma indirecta, teniendo en cuenta que la matriz de rigideces es la inversa de la de flexibilidades.

Las expresiones generales que se usan son

$$\underline{\delta} = \underline{S}_T^{-1} \underline{A} \quad (4)$$

donde $\underline{\delta}$ = vector de desplazamientos desconocidos
 \underline{A} = vector de acciones
 \underline{S}_T^{-1} = inversa de la matriz de rigideces del sistema

Además

$$\underline{S}_T = \underline{S}_E + \underline{S}_S$$

siendo \underline{S}_E = matriz de rigideces de la estructura
 \underline{S}_S = matriz de rigideces del suelo

La matriz de rigideces se obtiene en función de las de sus i miembros, como es usual en el análisis estructural usando computadoras.

La matriz de flexibilidades del suelo puede calcularse fácilmente determinando los hundimientos del terreno debidos a la aplicación de fuerzas unitarias. Sánchez Martínez y Enriquez emplean el procedimiento de Zeevaert (1980) para alcanzar este propósito. Llamando \underline{F}_S a la matriz de flexibilidades, la matriz de rigideces del suelo vale

$$\underline{S}_S = \underline{F}_S^{-1}$$

La matriz global del sistema estructura-suelo vale

$$\underline{S}_T = \underline{S}_E + \underline{S}_S$$

Aplicando la ec 4 se determinan los desplazamientos de la estructura y del suelo.

Los elementos mecánicos en los miembros se hallan a partir de sus matrices de rigidez, mientras que las fuerzas en el suelo se obtienen empleando la matriz de rigideces del suelo.

Para utilizar el procedimiento anterior los autores han desarrollado un programa de computadora.

El método de Sánchez Martínez y Enriquez es general, como lo es el método de las rigideces del análisis estructural en que se basa. Se puede considerar no sólo la estructura de cimentación, sino también la superestructura total del edificio, sin más limitaciones que la capacidad de la computadora que se emplee.

También el procedimiento se puede aplicar a la solución de estructuras de retículas de cimentación, constituidas por trabes horizontales en dos sentidos perpendiculares: el área de cimentación se divide en una serie de áreas tributarias que corresponden a las de las columnas y se considera en el centro de cada una de ellas los resortes que idealizan al terreno, y con cuyo comportamiento se establece la matriz de flexibilidades del suelo.

Los autores comentan que el problema podría atacarse utilizando alguno de los programas conocidos de análisis estructural, tomando del programa la matriz de rigideces de la estructura en estudio, modificándola para incluir los términos que representan el comportamiento del suelo e insertando nuevamente en el programa la matriz corregida.

Una propuesta de colaboración geotecnista-estructurista en el cálculo de interacción suelo-estructura es la que presentan Ellstein y Granados (1988), que deja a cada especialista la labor que le corresponde. El ingeniero de geotecnia obtiene la matriz de deformaciones del suelo en función de las características geométricas del proyecto y de un vector cualquiera de cargas bajadas por las columnas; la matriz de influencias en el suelo es invariable, así como el conjunto de curvas de compresibilidad; al variar el vector de cargas cambian los asentamientos, pero el nuevo cálculo se lleva a cabo con las mismas matrices de características del subsuelo. La estructura se representa mediante una parrilla de contratraves,

con las cargas y reacciones perpendiculares a su plano; su rigidez es la propia de las contratraves de la subestructura, más un cierto incremento calculado o estimado de la contribución de la estructura a tal rigidez. Se conocen las cargas en las columnas y con ellas se calculan los asentamientos s_i del suelo, suponiendo una rigidez nula de la estructura, de tal manera que pueden calcularse las constantes K_i de unos resortes virtuales localizados bajo los nudos de la parrilla; estos resortes son de Winkler en apariencia, pero en realidad están relacionados entre sí al tomar en cuenta la influencia de los asentamientos del suelo en los valores de K_i . Con la ayuda de un programa de computadora se aplican las cargas sobre la estructura, colocándose los resortes virtuales bajo los nudos para proveer las reacciones. El análisis arroja como resultados las fuerzas en los resortes contra los nudos, R_i , y sus deformaciones s_i ; se especifica la diferencia máxima permisible entre s_i (suelo) y s_i (resorte), por ejemplo 5%; si no se cumple esta diferencia, hay que calcular nuevos asentamientos s_i , utilizando un nuevo vector de presiones determinado con los valores de las reacciones R_i y con ellos establecer los nuevos valores de las constantes K_i , iterando para obtener las nuevas deformaciones de los resortes s_i , y así hallar las diferencias $s_i - s_i$. El proceso debe ser rápidamente convergente para la mayoría de los casos, obteniéndose finalmente la configuración real de asentamientos por efecto de la rigidez de la estructura. El geotecnista proporciona al estructurista los archivos de datos con las matrices de propiedades del suelo y coeficientes de influencia, para que éste puede llevar a cabo las iteraciones necesarias entre estructura y suelo (Ellstein y Granados, 1988).

Un enfoque novedoso que trata la interacción suelo-estructura en sus etapas de análisis y diseño (Moreno, 1990) comprende una serie

de opciones como considerar las características del suelo a partir del módulo de cimentación, características de la estructura, determinación de los elementos mecánicos (deflexiones, momento flexionante, giros, fuerza cortante), presentando éstos en forma de gráficas en pantalla o en impresora a escala. La ventaja de este enfoque es que simplifica la presentación de resultados, y que comprende en forma integral las etapas de análisis y diseño de la estructura de cimentación, ahorrando considerable tiempo al ingeniero que realiza el cálculo correspondiente (Moreno, 1990).

La interacción suelo-estructura se puede atacar utilizando el método del elemento finito (Zienkiewicz, 1977) en el terreno de cimentación. El inconveniente de esta técnica es que el número de datos y de operaciones es muy alto, y usualmente se requiere el uso de computadoras de gran capacidad.

2.2 Interacción suelo-estructura considerando el asentamiento y el giro de zapatas aisladas

El método de rigideces del análisis estructural establece que se debe satisfacer el equilibrio de momentos flexionantes en los nudos y el equilibrio de fuerzas cortantes en los ejes de las barras de la estructura. Esta condición se puede poner en forma matricial de la siguiente forma

$$K \delta + P_o + P_c = 0 \quad (5)$$

El significado de las cantidades de la ec 5 se presenta en los siguientes párrafos.

K es la matriz de rigideces de la estructura, dada por la suma de las matrices de rigidez de cada una de las barras, es decir

$$K = \sum K_i \quad (6)$$

donde K_i es la matriz de rigidez de cada

barra. A manera de ejemplo, en una barra con apoyos continuos (fig 1), la matriz de rigidez vale

$$K_b = \begin{bmatrix} 4EI/L & 2EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 \\ 2EI/L & 4EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \end{matrix} \quad (7)$$

δ es el vector de desplazamientos de la estructura, y está formado por los desplazamientos angulares (giros) de los nudos de la estructura y los desplazamientos lineales de los ejes de la estructura.

P_e es el vector de cargas de empotramiento, formado por los momentos y cortantes de empotramiento que transmiten las barras sobre los nudos de la estructura.

P_c es el vector de cargas externas concentradas, formado por los momentos concentrados sobre los nudos de la estructura y

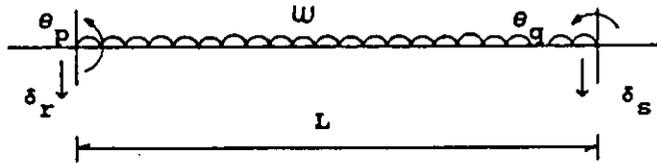


FIG 1 GRADOS DE LIBERTAD DE UNA BARRA

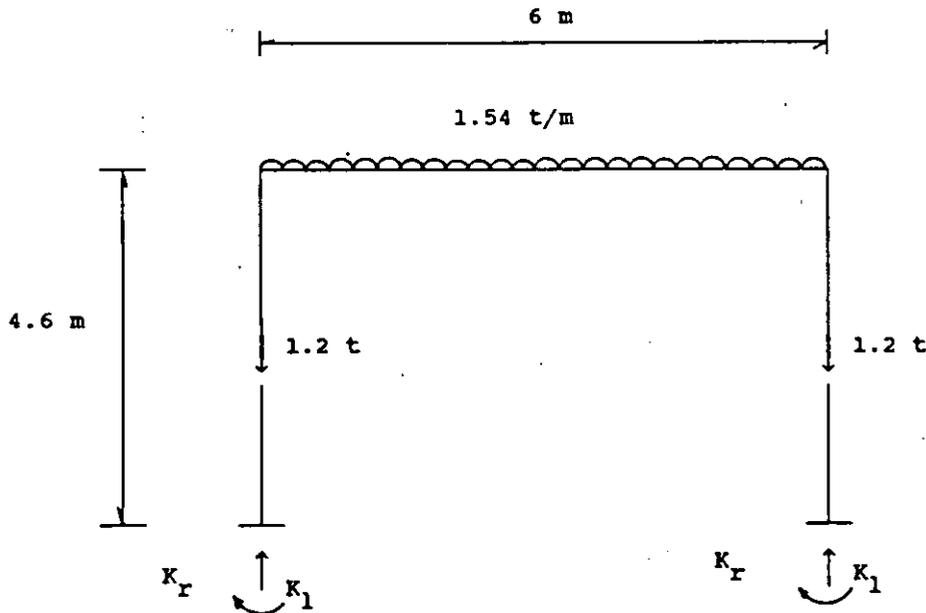


FIG 2 CARACTERÍSTICAS DE LA ESTRUCTURA

las fuerzas concentradas que actúan sobre los ejes de la estructura.

Cuando una estructura a base de zapatas aisladas sufre desplazamientos debidos a la deformabilidad del terreno de cimentación, se generan en la cimentación acciones que se pueden determinar usando los conceptos de rigidez angular K_r y rigidez lineal K_l del terreno de cimentación. Se define la rigidez angular como el cociente del momento M que actúa sobre una zapata y el giro en radianes θ que sufre esta zapata:

$$K_r = M / \theta \quad (8)$$

La rigidez lineal se define como el cociente entre la carga vertical Q que actúa sobre una zapata y el desplazamiento vertical δ que sufre la zapata:

$$K_l = Q / \delta \quad (9)$$

Los valores de K_r y K_l dependen de las propiedades de deformación del suelo.

De las ecs 8 y 9 se obtienen el momento y la carga vertical debidas a la reacción del suelo sobre la estructura:

$$M = K_r \theta \quad (10)$$

$$Q = K_l \delta \quad (11)$$

Conociendo los valores de K_r y K_l de un suelo, se pueden calcular los giros y los desplazamientos verticales que sufre una estructura cimentada sobre zapatas aisladas, ya que las acciones debidas a la deformabilidad del terreno se pueden incorporar, con relativa facilidad, en el vector de cargas concentradas sobre la estructuras P_c . Este procedimiento lo vamos a ilustrar mediante un ejemplo muy sencillo, como el mostrado en la fig 2, en el que vemos que las cargas sobre la estructura son la repartida de 1.54 t/m, las concentradas sobre las

columnas de 1.2 t y las debidas a la rigidez angular y lineal de las zapatas de cimentación. En la estructura:

Módulo de elasticidad del concreto
2 214 000 t/m²

Momento de inercia de las columnas
0.000675 m⁴

Momento de inercia de las trabes 0.0054 m⁴

En el terreno de cimentación

$K_l = 1880$ t/m $K_r = 720$ t.m / rad

A continuación presentamos el análisis detallado de la estructura.

Iniciamos numerando las barras y los grados de libertad de la estructura, los cuales se muestran en la fig 3. Las cargas sobre la estructura, correspondientes a los grados de libertad definidos, se aprecian en la fig 4. Con estos datos podemos formar las cantidades que aparecen en la ecuación matricial 5.

a) Vector de desplazamientos

El vector de desplazamiento vale (fig 3)

$$\underline{\delta} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{Bmatrix}$$

b) Matriz de rigideces

Para formar la matriz de rigideces de la estructura usamos la ec 6. Empezamos por visualizar los grados de libertad de cada barra

Barra	θ_p	θ_q	δ_r	δ_s
1	θ_3	θ_4	-	-
2	θ_5	θ_6	-	-
3	θ_3	θ_4	δ_1	δ_2

A continuación, aplicando la ec 6 formamos la matriz de rigidez de cada barra:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1299.52 & 649.76 \\ 649.76 & 1299.52 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_5 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1299.52 & 649.76 \\ 649.76 & 1299.52 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_6 \\ \theta_4 \end{matrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 7970.4 & 3985.2 & -1992.6 & 1992.6 \\ 3985.2 & 7970.4 & -1992.6 & 1992.6 \\ -1992.6 & -1992.6 & 664.2 & -664.2 \\ 1992.6 & 1992.6 & -664.2 & 664.2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{matrix}$$

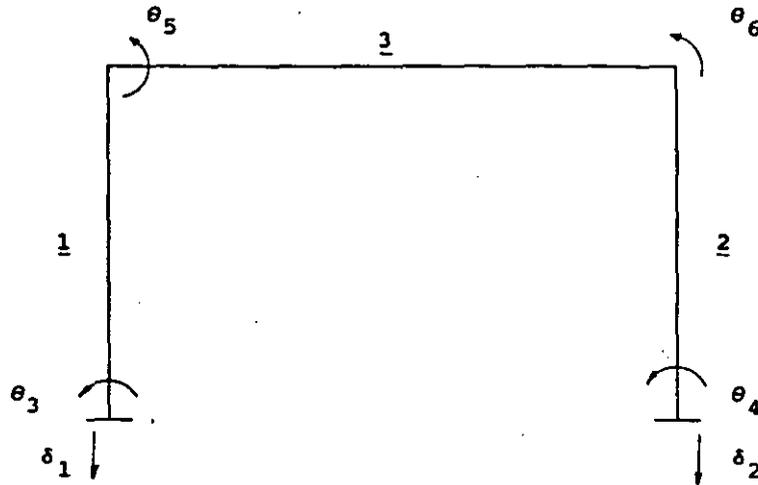


FIG 3 NUMERACIÓN Y GRADOS DE LIBERTAD DE LA ESTRUCTURA

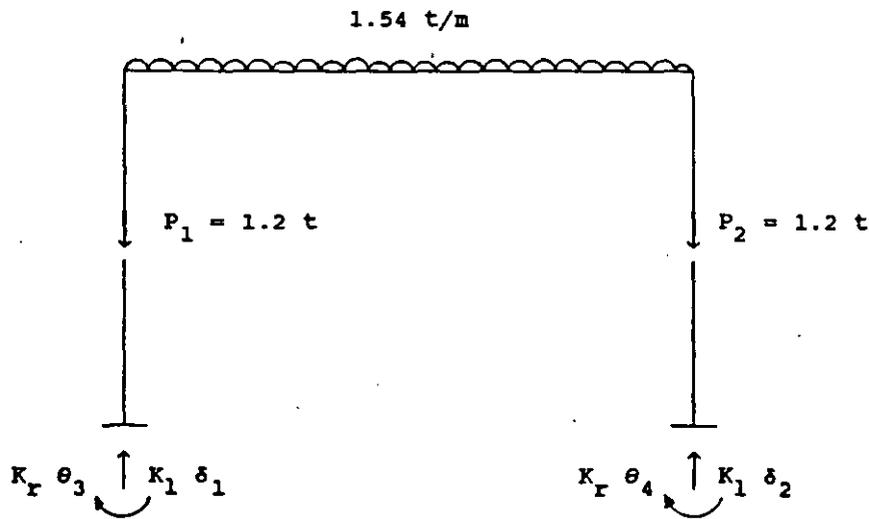


FIG 4 SISTEMA DE CARGAS SOBRE LA ESTRUCTURA

Sustituyendo en la ec 6

$$\underline{K} = \Sigma K_i = K_1 + K_2 + K_3$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \\ 664.2 & -664.2 & 0 & 0 & -1992.6 & -1992.6 \\ -664.2 & 664.2 & 0 & 0 & 1992.6 & 1992.6 \\ 0 & 0 & 1299.52 & 0 & 649.76 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1299.52 & 0 & 649.76 \\ -1992.6 & 1992.6 & 649.76 & 0 & 9269.92 & 3985.2 \\ -1992.6 & 1992.6 & 0 & 649.76 & 3985.2 & 9269.92 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{matrix}$$

c) Vector de cargas de empotramiento

$$\underline{P}_e = \begin{Bmatrix} -wL/2 \\ -wL/2 \\ 0 \\ 0 \\ wL^2/12 \\ -wL^2/12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.62 \\ -4.62 \\ 0 \\ 0 \\ 4.62 \\ -4.62 \end{Bmatrix}$$

Por simetría

$$\delta_1 = \delta_2, \quad \theta_3 = -\theta_4, \quad \theta_5 = -\theta_6$$

Por lo tanto

$$-5.82 + 1880 \delta_1 = 0$$

$$2019.52 \theta_3 + 649.76 \theta_5 = 0$$

$$649.76 \theta_3 + 5284.72 \theta_5 + 4.62 = 0$$

d) Vector de cargas concentradas

$$\underline{P}_c = \begin{Bmatrix} -1.2 + 1880 \delta_1 \\ -1.2 + 1880 \delta_2 \\ 720 \theta_3 \\ 720 \theta_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo el sistema

$$\delta_1 = 0.003096 \text{ m}$$

$$\theta_3 = 0.0002929$$

$$\theta_5 = -0.0009102$$

El momento que llega a la cimentación se puede obtener multiplicando el giro respectivo por su rigidez angular

$$M_3 = K_r \theta_3 = 720 (0.0002929) = 0.211 \text{ t.m}$$

La carga vertical sobre la zapata es igual al desplazamiento vertical por la rigidez lineal

$$P_1 = K_l \delta_1 = 1880 (0.003096) = 5.82 \text{ t}$$

También se pueden hallar las acciones que transmite la estructura a la zapata, empleando las siguientes expresiones, que proporcionan los elementos mecánicos que transmite una barra sobre el nudo

$$M_p = M_{op} + 4 EI \theta_p / L + 2 EI \theta_q / L - 6 EI \delta_r / L^2 + 6 EI \delta_s / L^2 \quad (12)$$

Sustituyendo valores en la ec 5

$$664.2 \delta_1 - 664.2 \delta_2 - 1992.6 \theta_5 - 1992.6 \theta_6 - 4.62 - 1.2 + 1880 \delta_1 = 0$$

$$-664.2 \delta_1 + 664.2 \delta_2 + 1992.6 \theta_5 - 1992.6 \theta_6 - 4.62 - 1.2 + 1880 \delta_2 = 0$$

$$1299.52 \theta_3 + 649.76 \theta_5 + 0 + 720 \theta_3 = 0$$

$$1299.52 \theta_4 + 649.76 \theta_6 + 0 + 720 \theta_4 = 0$$

$$-1992.6 \delta_1 + 1992.6 \delta_2 + 649.76 \theta_3 + 9269.92 \theta_5 + 3985.2 \theta_6 + 4.62 + 0 = 0$$

$$-1992.6 \delta_1 + 1992.6 \delta_2 + 649.76 \theta_4 + 3985.2 \theta_6 + 9269.92 \theta_6 - 4.62 + 0 = 0$$

$$M_q = M_{oq} + 2 EI \theta_p / L + 4 EI \theta_q / L - 6 EI \delta_r / L^2 + 6 EI \delta_o / L^2 \quad (13)$$

$$V_r = V_{or} - 6 EI \theta_p / L^2 - 6 EI \theta_q / L^2 + 12 EI \delta_r / L^3 - 12 EI \delta_o / L^3 \quad (14)$$

$$V_o = V_{oo} + 6 EI \theta_p / L^2 + 6 EI \theta_q / L^2 - 12 EI \delta_r / L^3 + 12 EI \delta_o / L^3 \quad (15)$$

donde M_{op} , M_{oq} , V_{or} y V_{oo} son los momentos y cortantes de empotramiento de barra sobre nudo.

Sustituyendo valores en las expresiones anteriores, para la barra 1 se halla el momento sobre la zapata (ec 13)

$$M_q = M_o = - 0.211 \text{ t.m}$$

Con la barra 3 se obtiene el cortante sobre el nudo de la izquierda (ec 14)

$$V_1 = 4.62 \text{ t}$$

La carga vertical sobre la zapata será la suma del cortante anterior y de la carga concentrada de 1.2 t. En consecuencia, la carga vertical sobre la zapata vale

$$\Sigma Q = 5.82 \text{ t}$$

El momento y la carga vertical sobre la zapata se emplean para la revisión de estabilidad por mecánica de suelos y para el diseño estructural de la zapata.

3. INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA EN CIMENTACIONES PROFUNDAS

3.1 Cimentaciones profundas sometidas a cargas verticales

Para el caso de cimentaciones profundas, Zeevaert (1980) trata los dos siguientes casos:

I. Cimentaciones en que la punta de los pilotes o pilas queda firmemente apoyada en un depósito de muy baja compresibilidad y gran espesor (fig 5).

II. Cimentaciones en que la punta de los pilotes o pilas queda firmemente apoyada en un estrato resistente de espesor limitado de baja compresibilidad, pero bajo el cual se localizan estratos compresibles (fig 6).

El caso I se puede resolver considerando que cada pilote tiene un módulo de reacción K_i constante e independiente de los demás pilotes. Así, el problema se reduce al de una cimentación apoyada sobre resortes (uno por cada pilote), en que la constante de cada resorte es independiente del resto de los resortes. Además, si todos los pilotes tienen la misma sección y longitud, su número es igual en cada línea, y se considera un valor del módulo de deformación constante

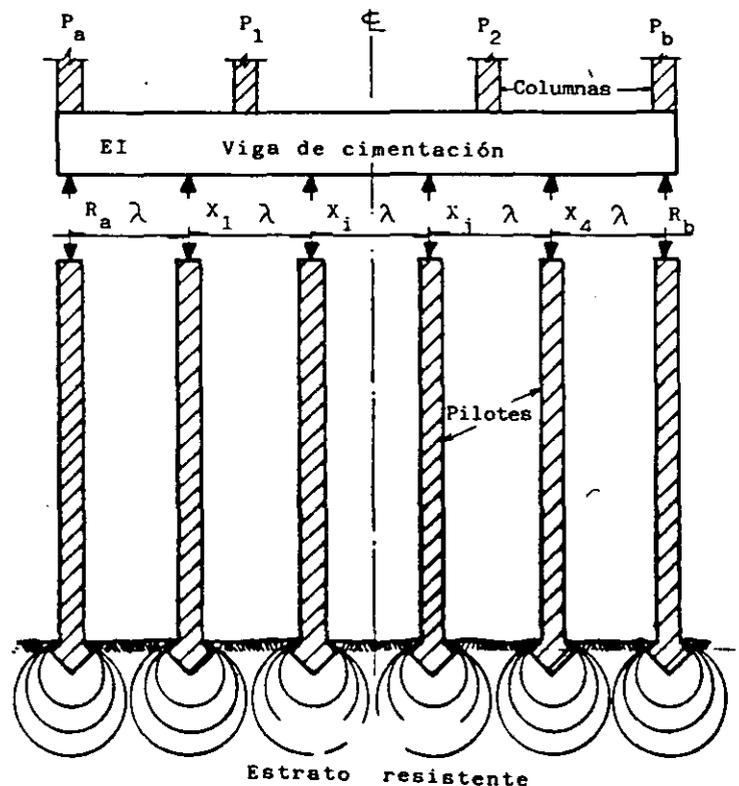


FIG 5 CIMENTACIÓN CON PILOTES. CASO I (ZEEVAERT, 1980)

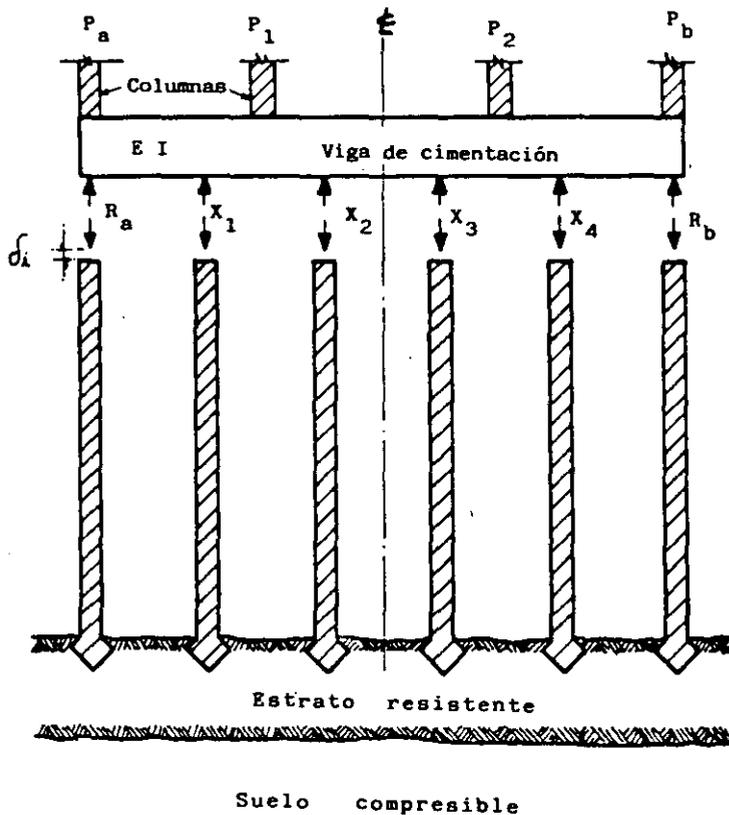


FIG 6 CIMENTACIÓN CON PILOTES. CASO II
(ZEEVAERT, 1980)

para el estrato resistente de apoyo de la punta de los pilotes, entonces K_i es igual para todos los pilotes (Zeevaert, 1980).

Cuando existe un depósito compresible subyaciendo al estrato resistente de apoyo (caso II, fig 6), el valor de K_i no se puede considerar constante para cualquier punto, ya que en este caso interviene la deformación de los estratos compresibles que subyacen al estrato resistente donde apoyan los pilotes. Por lo tanto, será necesario emplear el procedimiento indicado en el inciso 2.1, es decir, determinar las ecuaciones matriciales EMA y EMI, con la consideración adicional de que en el módulo de cimentación K_i hay que tomar en cuenta la deformación del estrato de apoyo del pilote y la deformación del propio pilote (Zeevaert, 1980).

3.2 Pilas o pilotes sujetos a cargas laterales

La construcción de estructura marinas fuera de la costa (offshore structures) requiere el uso de cimentaciones profundas a base de pilas o pilotes, y ha propiciado el desarrollo de métodos de análisis para estos elementos, sobre todo cuando están sometidos a fuerzas laterales debidas a atraque de embarcaciones o a efectos de oleaje. Uno de los primeros trabajos en este sentido es el de Matlock y Reese (1961), en el que establecen que para una solución racional de la interacción suelo-estructura es necesario que tanto las condiciones de equilibrio estático como las de compatibilidad de deformaciones se deben cumplir en todas las partes del sistema estructura-suelo. Usualmente tratan la estructura y los pilotes como elementos linealmente elásticos, pero comentan que las características del suelo son marcadamente no lineales; la solución al problema se alcanza mediante repetidos cálculos con la teoría de la elasticidad, con los valores de la rigidez del suelo ajustándolos en cada iteración.

Las características fuerza-deformación del suelo se tratan con una familia de curvas del tipo "p-y", como las mostradas en la fig 7, las cuales se obtienen a partir de las propiedades de cada suelo.

Matlock y Reese (1961) consideran al pilote como una viga, en la que se debe cumplir la ecuación diferencial

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = p \quad (16)$$

En el suelo se requiere un módulo secante de deformación E_s (correspondiente al nivel de esfuerzo con el que se esté trabajando), el cual está dado por

$$E_s = - p / y \quad (17)$$

donde p es la reacción del suelo sobre el pilote, por unidad de longitud (t/m, por ejemplo), y "y" es el desplazamiento lateral del pilote. Combinando las ecs 16 y 17 se obtiene la siguiente expresión

$$d^4y / dx^4 + (E_s / EI) y = 0 \quad (18)$$

La solución de la ec 18 se lleva a cabo con dos procedimientos. El primero consiste en suponer que E_s es proporcional a la profundidad $E_s = k x$. Mediante sucesivas soluciones de la ecuación diferencial se va logrando que la elástica de la viga se asemeje lo más posible a la curva p-y determinada a partir de las propiedades del suelo. Esto es necesario debido a las características no lineales de deformación del suelo. Esta solución se lleva a cabo con el auxilio de tablas y gráficas construidas ex-profeso para el caso.

El segundo procedimiento se emplea cuando se encuentran variaciones importantes en las propiedades del suelo, y cuando se requiere tomar en cuenta cambios en la rigidez del pilote, para lo cual se requiere el empleo de una computadora. Mediante soluciones su-

cesivas de la ecuación diferencial del pilote, haciendo repetidas referencias a la curva p-y del suelo, la computadora determina para cada tramo elegido del pilote el valor del módulo de deformación del suelo que satisface las condiciones de compatibilidad y de equilibrio entre suelo, pilote y superestructura. Se toman en cuenta variaciones en las condiciones de apoyo del pilote y el efecto de la posible socavación que se pudiera presentar en la parte superior del pilote. En la fig 8 se presentan los resultados de la aplicación de los métodos usados por Matlock y Reese (1961).

Debido a las cargas laterales sobre los pilotes, en la parte superior se alcanza con frecuencia el rango de comportamiento plástico del suelo en las curvas p-y, razón por la cual se han desarrollado métodos para tomar en cuenta el comportamiento del suelo cerca y en la falla, tanto para arcillas blandas (Matlock, 1970), como para arenas (Reese et al, 1974). En ambos casos se han comparado los resultados de las teorías con mediciones de campo y de laboratorio, obteniéndose en general acercamientos bastante satisfactorios a la realidad, sobre todo para fines prácticos.

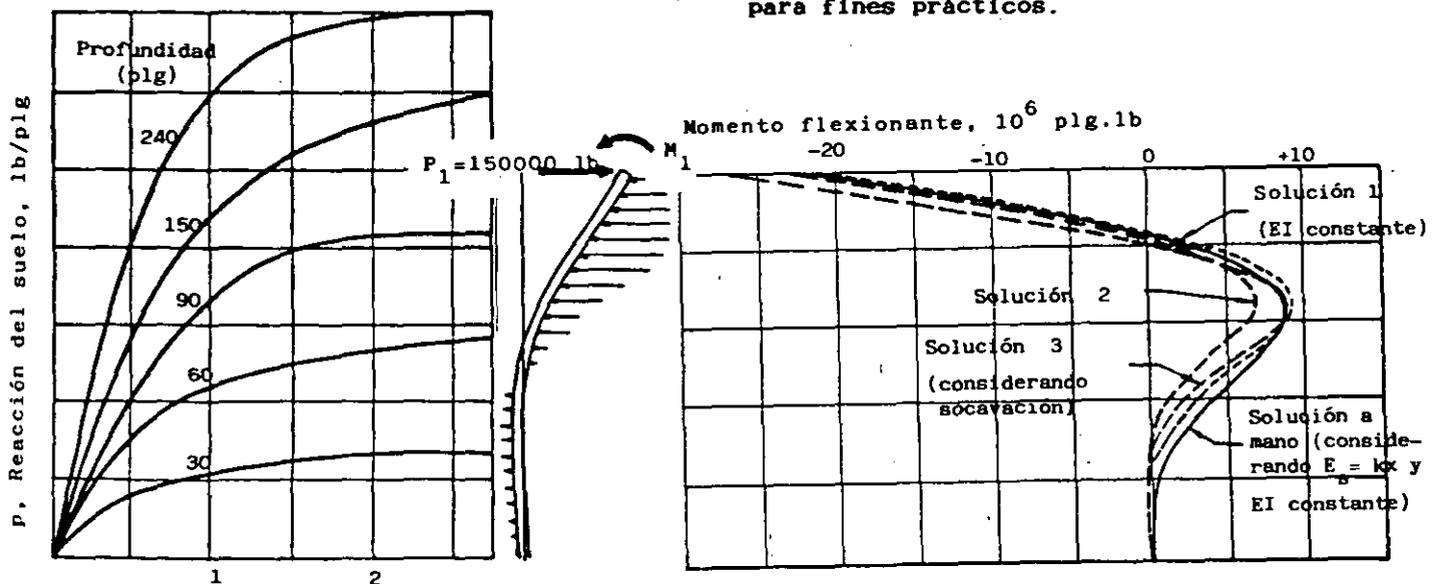


FIG 7 CURVAS TÍPICAS p-y, DETERMINADAS PARA EL SUELO A DIFERENTES PROFUNDIDADES (MATLOCK Y REESE, 1961)

FIG 8 COMPARACIÓN DE DIAGRAMAS DE MOMENTO FLEXIONANTE, DE LA SOLUCIÓN A MANO CON: (a) SOLUCIÓN 1, CON COMPUTADORA, AJUSTANDO LOS VALORES DE E_s CON LA PROFUNDIDAD, y (b) SOLUCIÓN 2, TOMANDO ADENÁS EN CUENTA LA VARIACIÓN DE LA RIGIDEZ DEL PILOTE CON LA PROFUNDIDAD (MATLOCK Y REESE, 1961)

También se ha empleado el método del elemento finito para tomar en cuenta, entre otros efectos, el desplazamiento relativo que puede ocurrir entre pilote y suelo durante la deformación lateral del elemento (Yegian y Wright, 1973). También se puede tomar en cuenta la influencia de dos o de tres pilotes cercanos entre sí (Yegian y Wright, 1973); el número de pilotes a considerar es pequeño, dada la gran cantidad de elementos que se tendrían que trazar para un número mayor de pilotes.

Por su parte, Zeevaert (1980) presenta un método muy completo para el análisis de pilas o pilotes sujetos a cargas laterales. Considera cinco casos principales de análisis de una pila o pilote:

- I. Pilote libre de girar en sus extremos
- II. Pilote empotrado en la estructura de cimentación y libre de girar en la punta
- III. Pilote libre de girar en la cabeza y empotrado en la base
- IV. Pilote empotrado en ambos extremos con giro en la base
- V. Restricción parcial del giro en los extremos de una pila

Para la solución de estos problemas se emplea la Ecuación Matricial de Interacción Horizontal (HEMI), la cual depende de las condiciones de apoyo y de las características estructurales del pilote. Por otra parte, se obtiene la Ecuación Matricial de Desplazamientos Horizontales (HEMA), la cual es función de las propiedades de deformación del suelo, considerando la influencia entre las diferentes reacciones del suelo sobre el pilote. Debe haber compatibilidad de deformaciones del pilote con la masa de suelo, para lo que se emplea el módulo horizontal de cimentación K_h , definido de manera análoga a como se hizo en el inciso 2.1 de este trabajo. El procedimiento de Zeevaert (1980) para pilas o pilotes sometidos a cargas laterales es similar al descrito en el inciso 2.1, en el que se varían los valores de K_h

mediante iteraciones hasta que se cumple la condición de compatibilidad de deformaciones entre pilote y suelo.

También se pueden combinar las matrices HEMI y HEMA, para hallar la matriz HEMISE, que permite resolver el problema de la interacción suelo-pilote sin necesidad de recurrir a iteraciones (Zeevaert, 1980). En las figs 9 y 10 se presenta la aplicación del método de Zeevaert a una pila sometida a una carga lateral de 10 t.

La publicación Manual de Diseño y Construcción de Pilas y Pilotes (1983), de la Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, contiene los valores del coeficiente de reacción horizontal K_h dados por Terzaghi (1955), para suelos sin y con cohesión, así como un procedimiento aproximado, tomado de

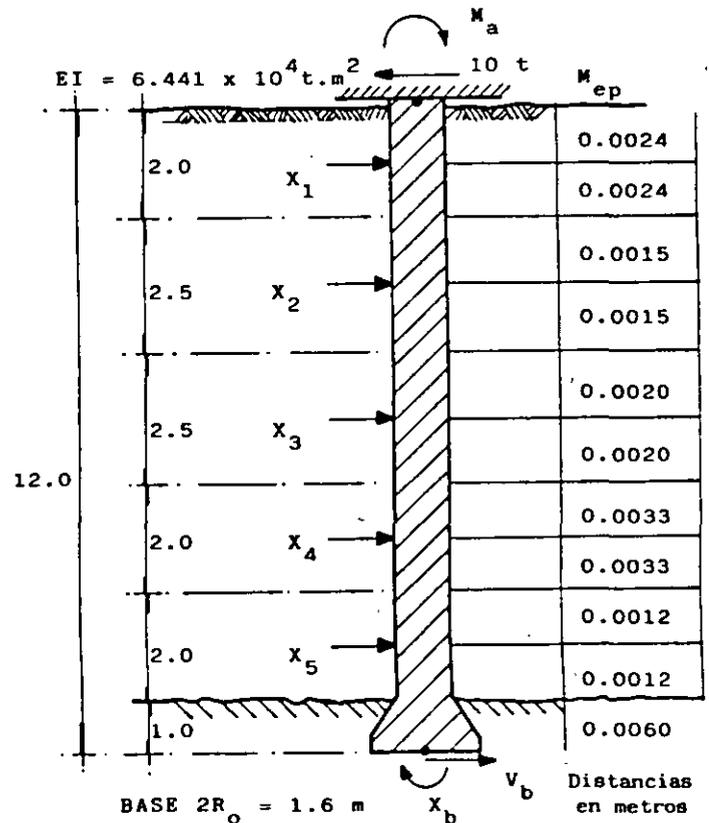


FIG 9 PILA SUJETA A FUERZAS HORIZONTALES (ZEEVAERT, 1980)

la Sociedad Geotécnica Canadiense (1978), que proporciona en forma gráfica las magnitudes de la deflexión y del momento flexionante en función de la profundidad a lo largo del pilote, haciendo uso de la rigidez relativa del sistema pilote-suelo.

4. PROPIEDADES DE LOS MATERIALES QUE FORMAN LA ESTRUCTURA Y EL TERRENO DE CIMENTACIÓN

Como se ha podido observar en los incisos anteriores, al trabajar con la interacción suelo-estructura se toma en cuenta tanto la estructura como el terreno de cimentación, por lo que es necesario conocer las propiedades de ambos medios.

En estructuras de concreto reforzado se acepta que el módulo de elasticidad del concreto tiende a disminuir con el tiempo. Así, Flores Victoria (1968) señala que en edificios de concreto, el módulo de elasticidad puede tomarse del orden de $3000 \sqrt{f'_c}$

al tener en cuenta que los asentamientos totales suceden a largo plazo. Nótese que este valor es bastante inferior al de $10000 \sqrt{f'_c}$ que usualmente se toma para cálculos a corto plazo.

Por su parte, Ellstein y Granados (1988) comentan que la magnitud de los asentamientos que determinan corresponde al 100 % de consolidación primaria, misma que tardará un cierto tiempo en ocurrir. Las deformaciones de la estructura no son instantáneas sino diferidas y por tanto las propiedades elásticas de los materiales estructurales no son las medidas con las pruebas rápidas usuales; para el caso del concreto armado en la ciudad de México, el componente diferido puede ser tomado en cuenta multiplicando el módulo de elasticidad del concreto por un factor menor que uno, probablemente del orden de 0.2 ó 0.25 (Ellstein y Granados, 1988).

Puede observarse que en general existe coincidencia en señalar que el módulo de elasticidad del concreto se debe reducir en forma importante cuando se lleva a cabo la interacción suelo-estructura a largo plazo.

La variación de los módulos de deformación es todavía más importante en el terreno de cimentación, sobre todo si se trata de suelos plásticos saturados, en los que la deformabilidad depende no sólo del nivel de esfuerzos sino también en forma importante del tiempo. En consecuencia, los módulos de deformación deben seleccionarse acordes con ambos factores: nivel de esfuerzos y tiempo.

El hecho de que el suelo tenga un comportamiento no lineal ha sido tomado en cuenta por la mayoría de los investigadores de la interacción suelo-estructura. Así, Chamecki (1956) trabaja con el índice de compresibilidad en una arcilla normalmente consolidada, al cual toma como una constante. Además, señala que el módulo de deformación de un suelo es función del estado de esfuerzo,

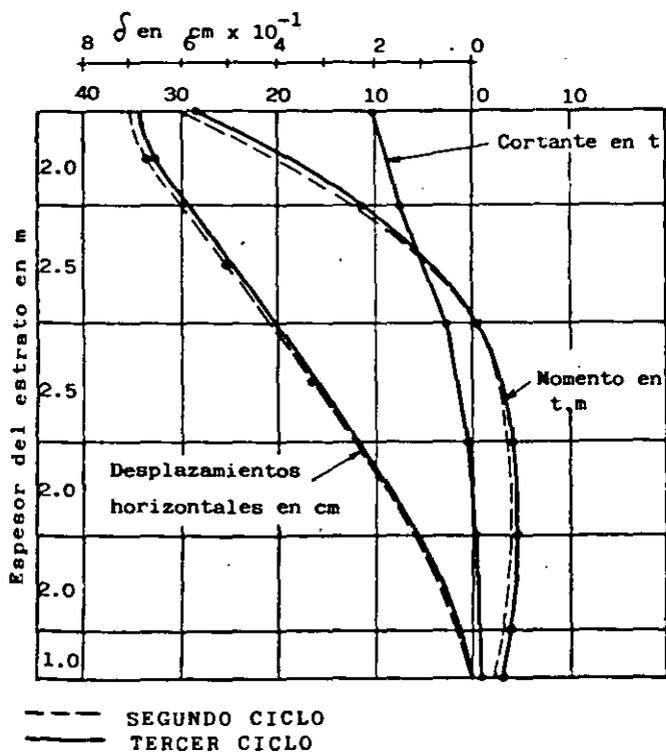


FIG 10 CORTANTES Y MOMENTOS FLEXIONANTES, Y DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES DE LA PILA (ZEEVAERT, 1980)

siendo la derivada de la curva esfuerzo-deformación unitaria, con respecto al esfuerzo. Debido a que las relaciones esfuerzo-deformación en los suelos son no lineales, Chamecki (1956) propone un método iterativo para la resolución de la interacción suelo-estructura.

Varios autores toman en cuenta el comportamiento no lineal de los suelos, proponiendo métodos iterativos para considerar este efecto (Flores Victoria, 1968; Flores Victoria y Esteva, 1970), en los que utilizan criterios para acelerar la convergencia de los métodos.

El comportamiento no lineal del terreno de cimentación es considerado por Dany *et al* (1977) y Esteva *et al* (1977), al utilizar matrices secantes de rigideces en la estructura y de flexibilidades en el suelo, para cada iteración.

Zeevaert (1980) señala que las reacciones efectivas en la orilla de la cimentación pueden resultar altas, lo que origina un flujo viscoplástico, y consecuentemente un relajamiento del esfuerzo de reacción bajo deformación constante en esos lugares. El esfuerzo límite efectivo o respuesta máxima que puede admitirse en condiciones estáticas en la orilla de la cimentación es igual a la resistencia de material, cuando se inicia un flujo viscoplástico incipiente (sin necesariamente alcanzar la capacidad de carga última en el borde de la cimentación). En suelos de alta sensibilidad podría establecerse la condición de que el esfuerzo máximo en el borde de la cimentación, en condiciones estáticas, no rebase el esfuerzo crítico (o de preconsolidación) correspondiente al quiebre de la curva de compresibilidad (Zeevaert, 1980).

En pilotes sujetos a cargas laterales el suelo alcanza niveles de esfuerzo cercanos a la falla: véanse las curvas p-y de la fig 7.

Inclusive, existen técnicas para tomar en cuenta el comportamiento plástico del terreno en estado de falla, tanto para suelos cohesivos (Matlock, 1970) como para suelos friccionantes (Reese *et al*, 1974).

5. APLICACIONES

Presentamos en este inciso algunas de las aplicaciones de la interacción estática suelo-estructura.

En la fig 11 se presenta una estructura reticular con una cimentación a base de una zapata corrida. (Pozas, 1980). Empleando interacción suelo-estructura se obtienen los resultados mostrados en la fig 12. Es interesante comparar estos resultados con los obtenidos suponiendo una reacción uniforme, los cuales se muestran en la fig 13. Como se puede observar los momentos en todos los nudos de la estructura difieren comparando ambos casos. En el nudo central inferior el momento con reacción uniforme es 31 % mayor que el que se obtiene tomando en cuenta la interacción suelo-estructura. En el nudo inferior izquierdo el momento es 320 % mayor con el primero que con el segundo método. Aun en la superestructura se deja sentir el efecto de la rigidez de la estructura: el momento sobre el nudo de la izquierda del primer piso, debido a la columna inferior, cambia inclusive de sentido (figs 12 y 13). En resumen, los momentos flexionantes determinados con reacción uniforme difieren de los momentos obtenidos tomando en cuenta la interacción, tanto en la superestructura como en la subestructura. Esta variación ocurre tanto en la magnitud como en el sentido de los momentos, pues en uno de los nudos estos llegan a cambiar de signo, tal como puede verse comparando las figs 12 y 13.

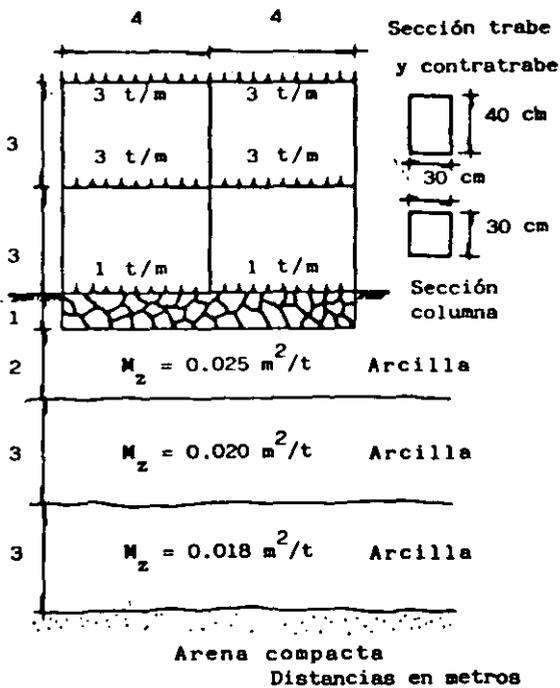
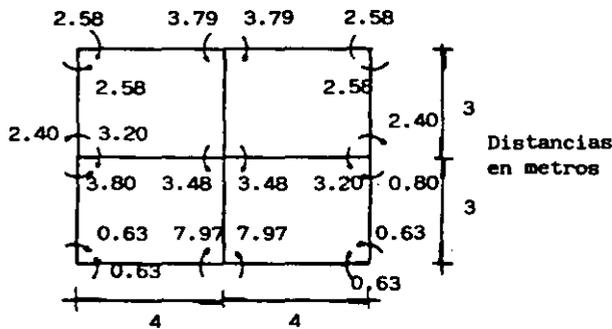
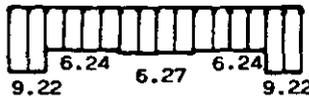


FIG 11 ESTRUCTURA RETICULAR (POZAS, 1980)



a) Momentos de barra sobre nudo, t.m



b) Reacciones del terreno, t/m



c) Hundimientos del terreno, m

FIG 12 RESULTADOS OBTENIDOS UTILIZANDO INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA (POZAS, 1980)

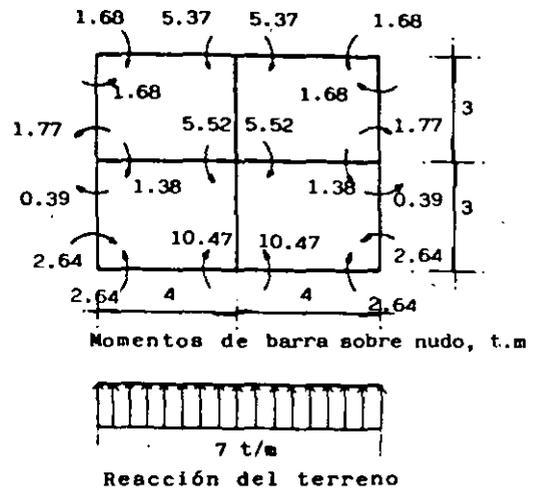


FIG 13 RESULTADOS OBTENIDOS SUPONIENDO REACCIÓN UNIFORME (POZAS, 1980)

Otro caso real de aplicación de la interacción suelo-estructura es el correspondiente a zapatas corridas que se emplean para tomar fuerzas laterales debidas a sismo a través de muros de cortante que se unen a las zapatas en diferentes tramos. En la fig 14 se muestran los resultados de un análisis de interacción suelo-viga flotante para una zapata de concreto reforzado. El módulo de elasticidad del concreto utilizado fue de $1,581,000 \text{ t/m}^2$ y los momentos de inercia en los diferentes tramos se indican en la fig 14. También pueden observarse las cargas que actúan en la zapata, así como la estratigrafía y propiedades del subsuelo. En la misma figura están graficados los diagramas de reacciones y de hundimientos del terreno, sirviendo el primero de ellos para la determinación de los elementos mecánicos y del diseño estructural de la zapata y el segundo para el conocimiento de los asentamientos totales y diferenciales de la cimentación (Deméneghi, 1990). Puede observarse que en el contacto del terreno de cimentación con las zapatas se presentan, teóricamente, esfuerzos de tensión, es decir, se obtienen reacciones negativas, fenómeno

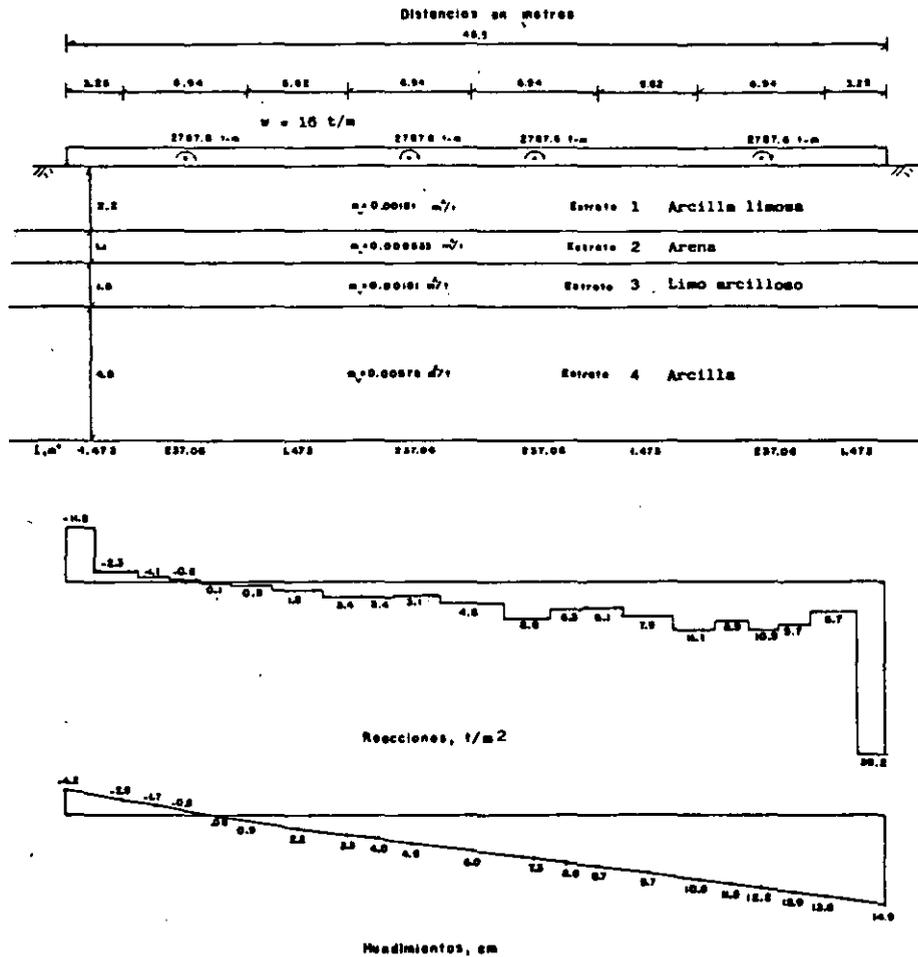


FIG. 14. RESULTADOS DEL ANALISIS DE INTERACCION SUELO - VIGA
FLOTANTE

debido a los momentos que transmiten los muros de cortante a la cimentación en uno de los extremos de las zapatas.

Otro ejemplo de interacción suelo-estructura consiste en el análisis de un marco estructural en el que se considera que sus apoyos tienen una rigidez al desplazamiento vertical y otra al giro; es decir, se considera por ejemplo un marco estructural cimentado en zapatas aisladas que pueden sufrir tanto un hundimiento vertical como un giro. En este sentido, este análisis es un poco más general que los análisis convencionales que suponen que los apoyos del marco estructural están empotrados o

articulados en el terreno de cimentación. La forma de llevar a cabo el análisis de interacción suelo-estructura para este caso se presentó en el inciso 2.2 de este trabajo. En la fig 15 se presenta la aplicación esta técnica a una estructura real, la cual está formada por una trabe de concreto reforzado de 0.5 m de ancho y de 2 m de peralte, apoyada sobre unas pilas de cimentación de concreto reforzado de diámetros de 1.12, 1.48 y 1.74 m. Las cargas que actúan sobre el marco se indican en la fig 15. Las pilas tienen los siguientes diámetros

Pila	Díámetro, m
1	1.12
2	1.48
3	1.74

El terreno de cimentación es una toba de origen volcánico que se encuentra al poniente de la ciudad de México, que tiene un módulo de deformación del orden de 8,000 a 10,000 t/m². El material comprendido entre la trabe superior y el nivel de desplante de las pilas es un relleno suelto cuya rigidez se desprecia para fines de análisis.

En la fig 15 se muestran los momentos flexionantes en los nudos de la estructura, correspondientes a un módulo de elasticidad del concreto reforzado de 2,214,000 t/m² y un módulo de elasticidad del terreno de cimentación de 8,000 t/m². Se pueden observar las altas magnitudes de los momentos flexionantes. En la fig 16 se indican las magnitudes de las fuerzas cortantes y en la fig 17 las de las fuerzas normales en las pilas. Nótese la fuerte redistribución de cargas debido a la interacción suelo-estructura. Así, en la

parte central de la estructura la carga en un nudo es de 150 t, mientras que por el efecto combinado de rigidez de estructura y suelo la carga en la pila que está bajo el nudo aumenta hasta 302 t (fig 17); en el nudo vecino la carga concentrada es de 480 t, mientras que la carga en la pila de abajo disminuye a 350 t. Un fenómeno similar se presenta en el resto del marco.

Con el propósito de observar la influencia de un aumento en la rigidez del terreno y una disminución en la rigidez de la estructura, se llevó a cabo un segundo análisis incrementando el módulo de elasticidad del suelo a 16,000 t/m² y disminuyendo el módulo de elasticidad del concreto a 1,265,000 t/m². Los resultados se muestran en las figs 18 a 20, para los momentos flexionantes, fuerzas cortantes y fuerzas normales, respectivamente. Como era de esperarse, la redistribución de carga es menor; así, en la fig 20, en el nudo donde la carga concentrada es de 150 t, en la pila aumenta a 253 t (en el primer análisis aumenta hasta 302 t). En el nudo vecino la carga concentrada de 480 t disminuye a 389 t

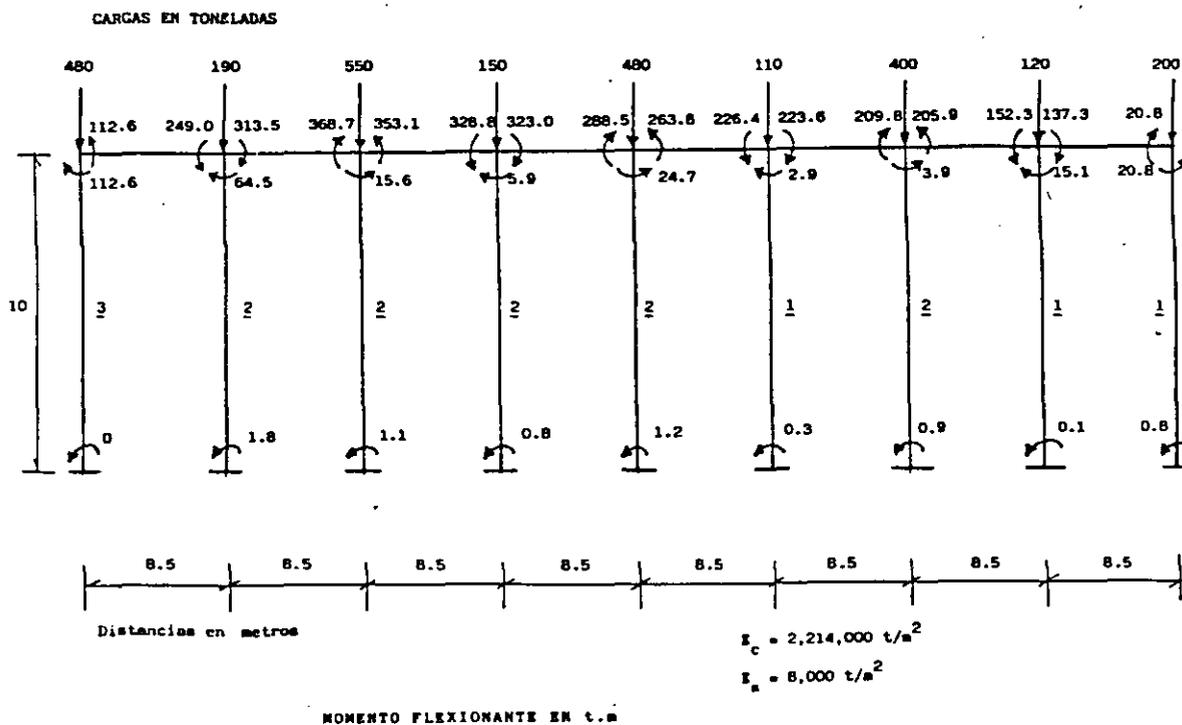


FIGURA 15

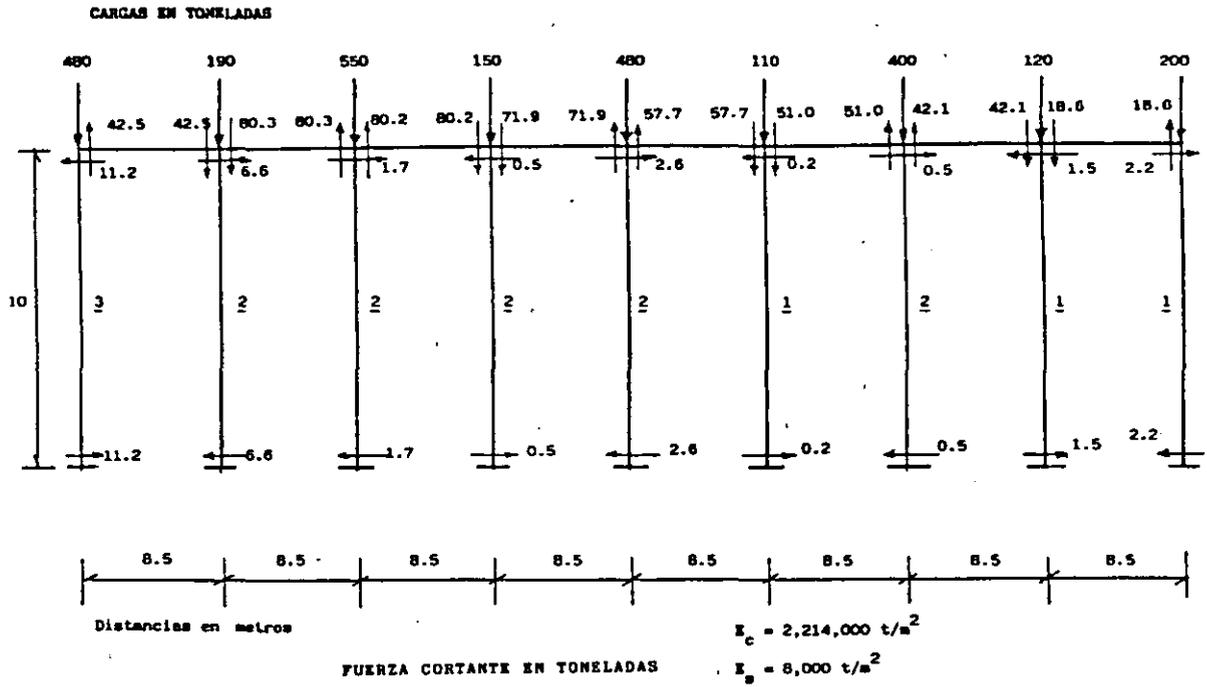


FIGURA 16

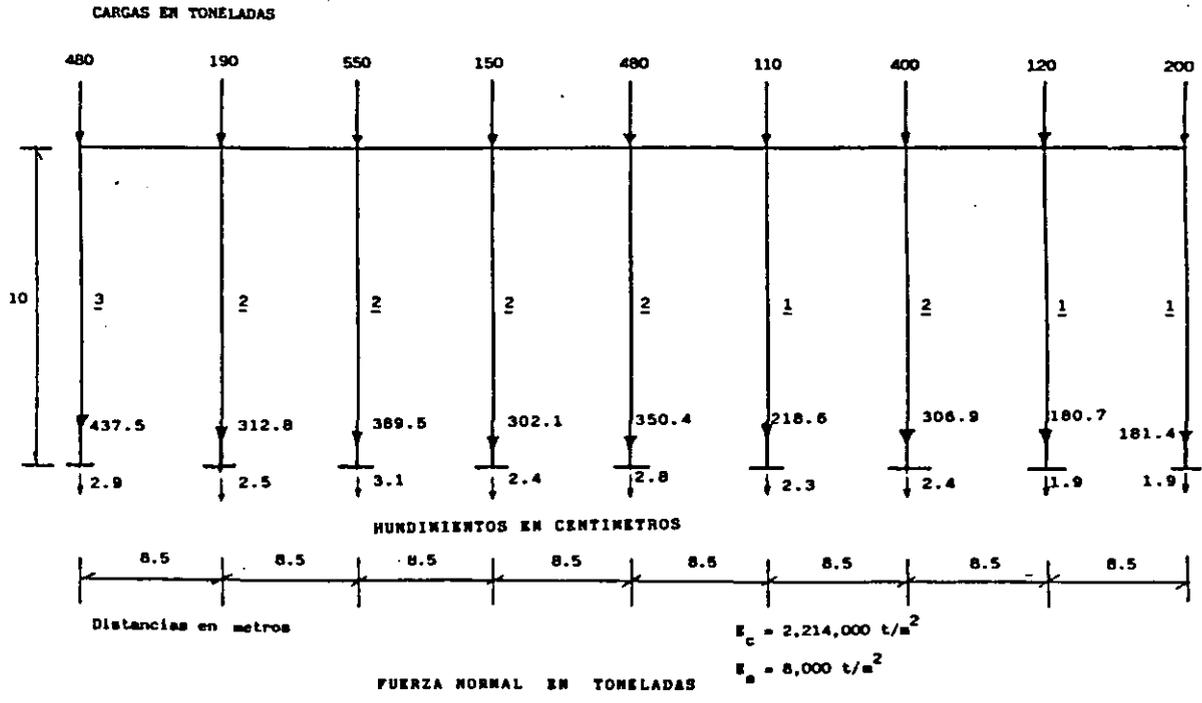


FIGURA 17

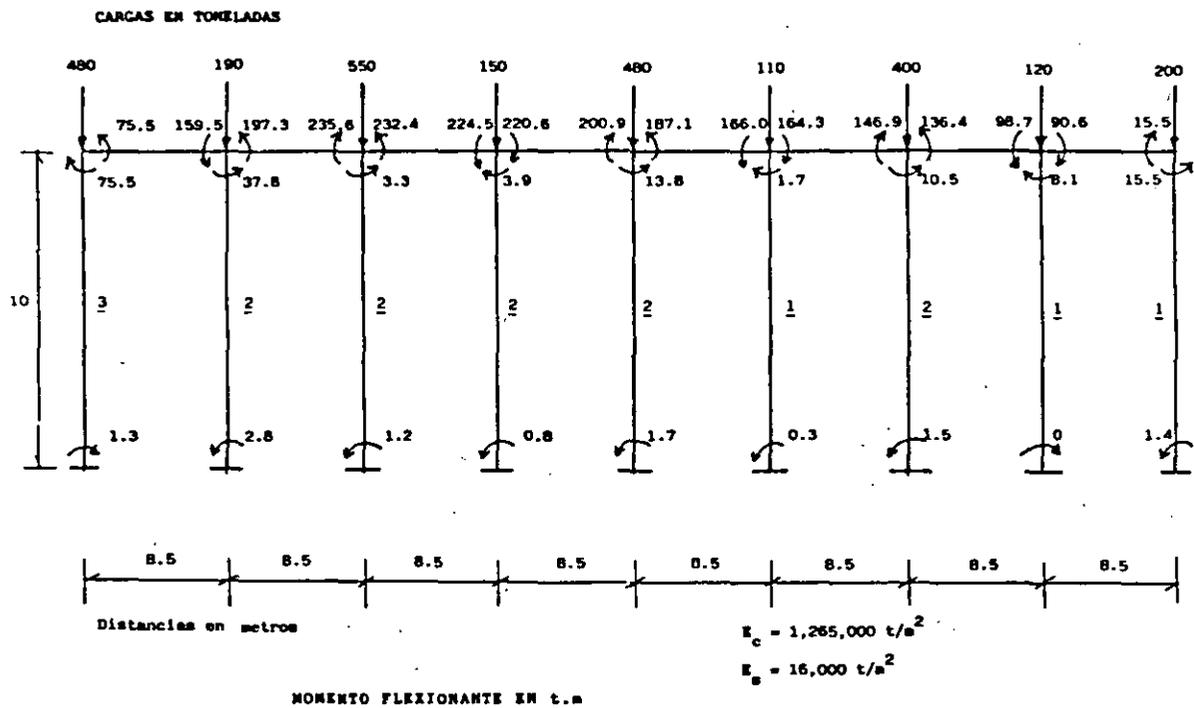


FIGURA 18

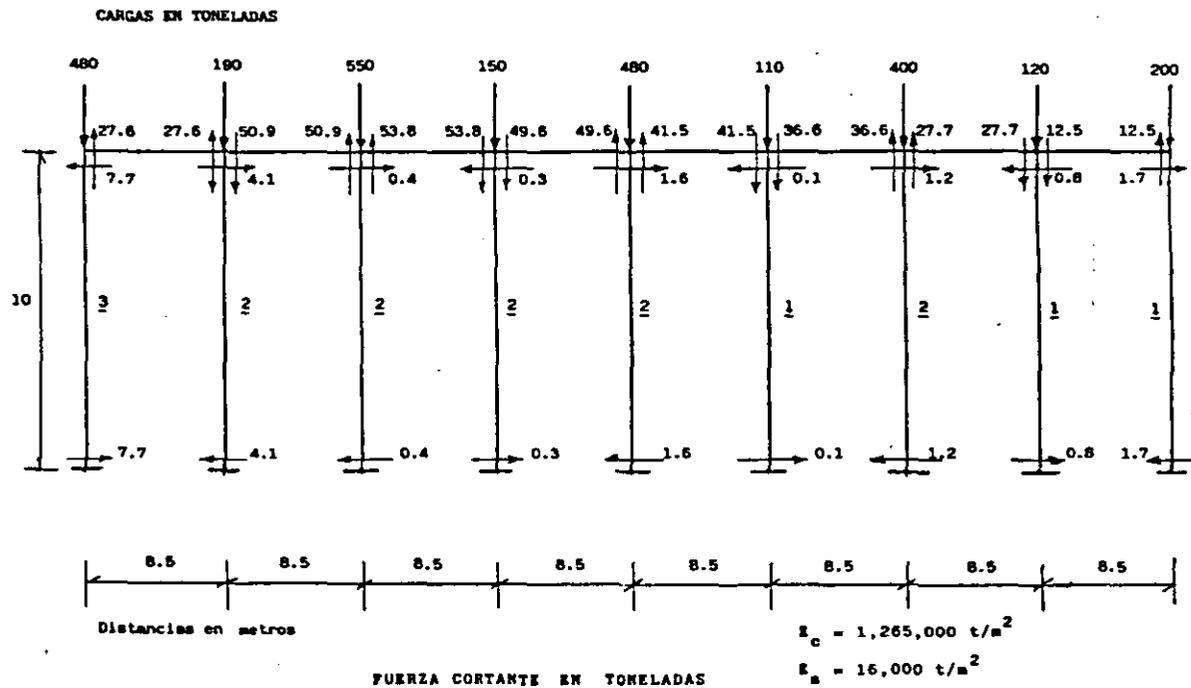


FIGURA 19

(en el primer análisis disminuyó a 350 t). De todas formas, el efecto de la interacción suelo-estructura en este caso también es importante.

Se han llevado a cabo mediciones en campo, en las cimentaciones reales, para verificar la validez de los análisis de interacción suelo-estructura. Meyerhof (1979) presenta los resultados que se describen en los siguientes párrafos.

Las observaciones indican que en zapatas rígidas cargadas uniformemente, con la excepción de arena suelta, la presión de contacto es mayor en la esquina y menor en el centro, como era de esperar de acuerdo a la teoría (fig 21; Meyerhof, 1979). Las mediciones anteriores también han mostrado que la heterogeneidad local de las propiedades del suelo cerca de la base tiene una influencia considerable en la distribución de la presión de contacto (sobre todo se deja sentir el efecto de la falta de confinamiento del suelo cerca de los extremos de la zapata). Por otro lado, las mediciones indican que el má-

ximo momento flexionante puede ser hasta 30 % mayor que el obtenido con el método de análisis convencional.

En las fig 22 y 23 se presentan resultados (Meyerhof, 1979) de mediciones en estructuras reales de gran tamaño (en el primer caso se trata de un edificio de 52 pisos y en el segundo de otro de 15 pisos). El análisis de las dos figuras permite afirmar que los valores teóricos determinados empleando los métodos de interacción suelo-estructura, es decir, considerando la rigidez de la estructura, son muy similares a los valores medidos en el campo (asentamiento, presión de contacto, momento flexionante y fuerza cortante).

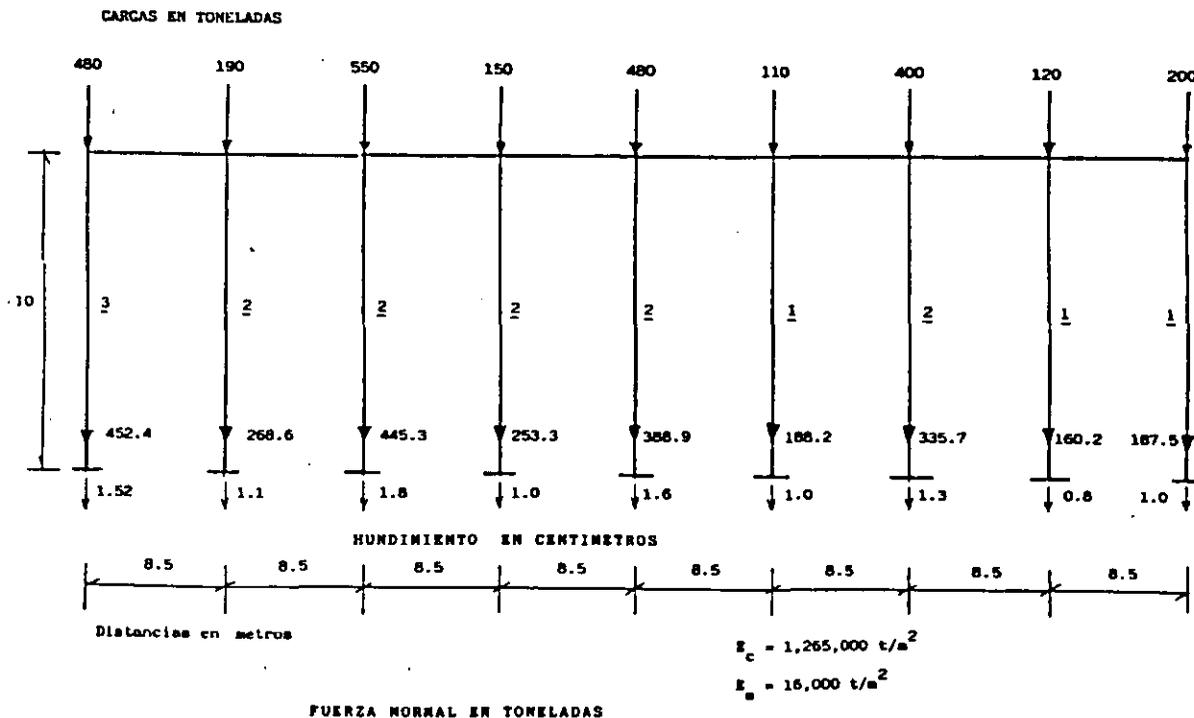


FIGURA 20

REFERENCIAS:
 ARENA — LEUSINK et al (1966)
 ARCILLA — SUTHERLAND Y LINDSAY (1961)

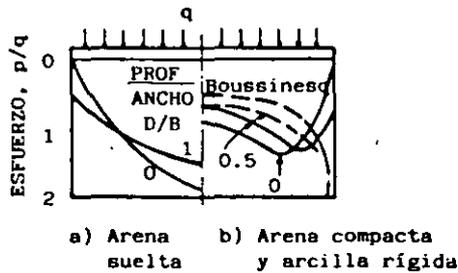
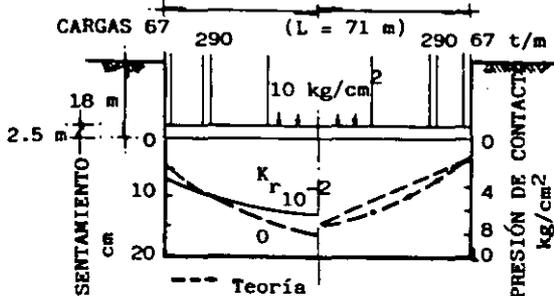


FIG 21 PRESIÓN DE CONTACTO SOBRE ZAPATAS RÍGIDAS CARGADAS UNIFORMEMENTE SOBRE ARENA Y ARCILLA (MEYERHOF, 1979)

REFERENCIA: FOCHT et al (1978) 52 PISOS + SÓTANO
 26.25 m 26.25 m

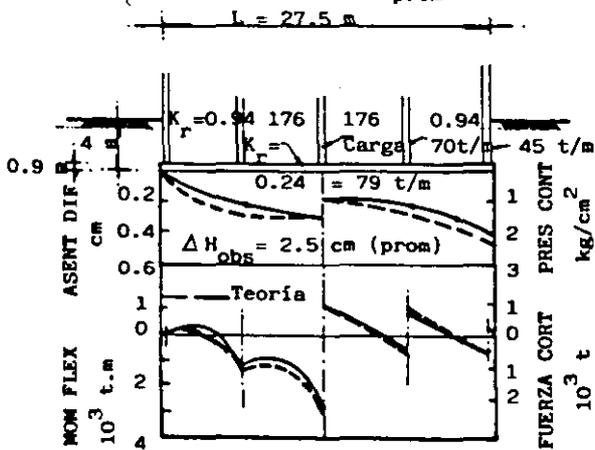


Arcilla arenosa muy preconsolidada $w = 20\%$
 $I_p = 40\%$ $c_u = 1.5 \text{ kg/cm}^2$

FIG 22 ASENTAMIENTO Y PRESIÓN DE CONTACTO PARA LOSAS SEMIRRÍGIDAS SOBRE ARCILLA (MEYERHOF, 1979)

REFERENCIA: EDEN et al (1973)

EDIFICIO DE 15 PISOS + SÓTANO ($B_{prom} = 18 \text{ m}$)



Arcilla poco preconsolidada $w = 45\%$ $I_p = 25\%$

FIG 23 ASENTAMIENTOS, PRESIÓN DE CONTACTO, MOMENTO FLEXIONANTE y FUERZA CORTANTE PARA LOSAS RÍGIDAS SOBRE ARCILLA (MEYERHOF, 1979)

En relación con la interacción estática suelo-estructura se puede concluir lo siguiente:

a) Existe un buen número de métodos que tratan el problema. En términos generales, la mayoría de ellos determinan las deformaciones del terreno de cimentación utilizando la matriz de flexibilidades del suelo. En cambio, en el análisis de la estructura, algunos procedimientos emplean la matriz de rigideces, mientras que otros usan la matriz de flexibilidades de la estructura. Cabe aclarar que prácticamente todos los métodos resuelven el problema, es decir, todos ellos obtienen los diagramas de asentamientos diferenciales del suelo y de reacciones del mismo, tomando en cuenta la rigidez de la estructura de cimentación. Inclusive, algunos de los procedimientos toman en cuenta el efecto de la superestructura (con todos sus pisos) en el análisis de interacción.

b) La mayoría de los procedimientos de interacción se presentan en forma bidimensional, en el plano (quizá por facilidad de exposición), pero se pueden extender en forma relativamente sencilla a tres dimensiones. El principal inconveniente de tratar el problema en el espacio es que el número de operaciones es elevado, lo cual cae fuera del alcance de la mayoría de las oficinas de cálculo estructural o de mecánica de suelos.

c) La solución del problema de interacción se puede realizar haciendo un análisis de la estructura y un análisis de deformaciones del suelo, y llevando a cabo después una combinación adecuada de ambos, que de hecho es lo que hacen la mayoría de los métodos presentados en los incisos anteriores. Se observa que el ingeniero de cimentaciones, al dedicarse a la interacción suelo-estructura, debe manejar en la forma más clara posible sus conceptos de análisis estructural y de mecánica de suelos.

d) Dada la gran cantidad de operaciones a realizar, la resolución de un problema de interacción suelo-estructura se lleva a cabo en general con el auxilio de programas de computadora, los cuales, actualmente, se pueden correr en una microcomputadora (o PC), con las que se cuenta en las oficinas de cálculo.

e) Un aspecto importante de la interacción suelo-estructura es el relativo a las propiedades de la estructura y el suelo. En la estructura el módulo de elasticidad del concreto, para fines de cálculo, disminuye con el tiempo. En el terreno de cimentación, la deformabilidad es función del nivel de esfuerzos, ya que el comportamiento de los suelos es no lineal. Además, en los sedimentos plásticos saturados la deformabilidad del suelo depende del tiempo. Por lo tanto, en los cálculos de interacción se debe tomar en cuenta en forma apropiada en cambio de las propiedades de los suelos con las variables mencionadas. Inclusive, en los extremos de una estructura de cimentación, o en pilotes sujetos a cargas laterales, el suelo alcanza niveles de esfuerzo cercanos a la falla, por lo que hay que considerar en estos casos el comportamiento plástico del terreno. Por lo anterior, conviene trabajar con los módulos secantes de deformación del suelo, acordes con el nivel de esfuerzos y, en caso de suelos finos saturados, con el tiempo.

f) Algunos procedimientos emplean el módulo de reacción K en la interacción suelo-estructura. Dado que K depende de las propiedades del suelo, es válido lo expuesto en el inciso (e) anterior respecto a la variabilidad de las propiedades de los suelos. Pero, además, en una cimentación continua el módulo K depende de la reacción del suelo y de las deformaciones de la cimentación, por lo que no se conoce a priori, sino que solo con iteraciones es posible determinar su valor. En consecuencia, en cimentaciones continuas no es posible asignar valores de K

en función del tipo de suelo, como se pretende hacer en ocasiones en la práctica.

g) En cimentaciones a base de zapatas aisladas, cuando no existe influencia de un cimiento sobre otro, ya sea por el tipo de terreno o porque estén las zapatas suficientemente separadas, se puede realizar la interacción suelo-estructura considerando módulos de reacción al desplazamiento vertical y al giro. En el inciso 2.2 se presentó un procedimiento que resuelve este caso, considerando las reacciones del suelo como cargas sobre la estructura.

h) La comparación de resultados entre considerar una reacción uniforme y tomar en cuenta la interacción suelo-estructura exhibe diferencias notables en los diagramas de hundimientos diferenciales, reacción del terreno y elementos mecánicos (momento flexionante y fuerza cortante), en la mayoría de los casos. Se puede presentar inclusive en algunos casos cambio de sentido en los momentos flexionantes de la estructura de cimentación o de la superestructura.

i) En cambio, la comparación entre observaciones de campo en estructuras reales con los métodos que toman en cuenta la rigidez de la estructura de cimentación, ha dado resultados promisorios, pues los valores determinados con los métodos de interacción son similares a los valores medidos en campo.

7. REFERENCIAS

- Chamecki, S (1956), "Structural rigidity in calculating settlements", Journal of the Soil Mech and Found Division, Proc ASCE, Vol 88, No SM1, enero
- Dany, J, Esteva, L y Guerra, R (1977), "Métodos incrementales en el análisis de cimentaciones continuas sobre terreno compresible", Memoria del Ier

- Congreso Nal sobre Ing Estructural, Soc Mex de Ing Estructural, México, D F
- Deméneghi, A (1979), "Un método para el análisis conjunto de la estructura y el suelo", Rev Ingeniería, Vol XLIX, No 3, pp 56-64
- Deméneghi, A (1983), "Interacción suelo-estructura", Rev Ingeniería, Vol LIII, No 4, pp 80-90
- Deméneghi, A (1985), "Non-iterative method for the analysis of soil-structure interaction", Proceedings of the XI Int Conf on Soil Mech and Found Eng, San Francisco, pp 733-736
- Deméneghi, A (1990), "Interacción suelo-viga flotante", Memorias de la XV Reunión Nal de Mec de Suelos, Soc Mex de Mec de Suelos, San Luis Potosi, SLP, Vol 1, pp 19-31
- Ellstein, A y Granados, R (1988), "La colaboración geotecnista-estructurista en el cálculo de interacción suelo-estructura", Memorias del 6to Congreso Nal de Ing Estructural, Soc Mex de Ing Estructural, Puebla, Pue
- Esteva, L, Guerra, R y Barradas, L (1977), "Aproximaciones sucesivas en el análisis de cimentaciones continuas sobre terreno compresible", Memoria del 1er Congreso Nal sobre Ing Estructural, Soc Mex de Ing Estructural, México, D F
- Flores Victoria, A (1968), Análisis de Cimentaciones sobre Suelos Compresibles, Instituto de Ingeniería, No 171, julio
- Flores Victoria, A y Esteva, L (1970), Análisis y Diseño de Cimentaciones sobre Terreno Compresible, Instituto de Ingeniería, No 258, febrero
- Manual de Diseño de Obras Civiles. C.2.2. Diseño Estructural de Cimentaciones (1980). Comisión Federal de Electricidad
- Matlock, H (1970), "Correlations for design of laterally loaded piles in soft clay", Second Annual Offshore Technology Conf, Houston, Tex, abril
- Matlock, H y Reese, L C (1961), "Foundation analysis of offshore pile supported structures", Proceedings of the Fifth Int Conf of Soil Mech and Found Eng, Paris, pp 17-22, July
- Meyerhof, G G (1979), "Soil-structure interaction and foundations", Memorias del VI Congreso Panamericano de Mec de Suelos e Ing de Cimentaciones, Vol I, pp 109-140, Lima, Perú
- Moreno, M (1990), "Análisis y diseño de cimentaciones", Seminario Técnico-Científico IMP-IIE-ININ, Mesa 7, Ing Civil, Cuernavaca, Mor
- Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Construcción de Cimentaciones, Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal (1976). (Véase publicación No 405 del Instituto de Ingeniería)
- Pozas, M (1980), "Un ejemplo del análisis de interacción suelo-estructura", Tesis profesional, Facultad de Ingeniería, UNAM
- Reese, L C, Cox, W R y Koop, F D (1974), "Analysis of laterally loaded piles in sand", Sixth Annual Offshore Technology Conf, Houston, Tex, may
- Sánchez Martínez, J L y Enriquez, P (1982), "Un método de solución al problema de interacción suelo-estructura en cimentaciones someras", Memorias del 3er

Congreso Nal de Ing Estructural, Morelia

✓ Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos (1983), Manual de Diseño y Construcción de Pilas y Pilotes, México. (Elaborado por el Instituto de Ingeniería y Sólum)

✓ Yegian, M y Wright, S G (1973), "Lateral soil resistance - Displacement relationships for pile foundations in soft clays", Fifth Annual Offshore Technology Conf., Houston, Tex, april-may

✓ Zeevaert, L (1973), Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions, Van Nostrand Reinhold, New York

✓ Zeevaert, L (1980), Interacción Suelo-Estructura de Cimentación, Limusa

✓ Zeevaert, L (1983), Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions, 2nd edition, Van Nostrand Reinhold, New York

Zienkiewicz, O C (1977), The Finite Element Method, 3rd edition, McGraw-Hill



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

ANALISIS ESTRUCTURAL

**UN METODO PARA EL ANALISIS TRIBERCIONAL DE LA LUTERCACION
ESTATICA SUELO ESTRUCTURA**

A. DERENECH

UN MÉTODO PARA EL ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL DE LA INTERACCIÓN ESTÁTICA SUELO-ESTRUCTURA

A Deméneghi
Facultad de Ingeniería, UNAM. México

RESUMEN

Se presenta un procedimiento para el análisis de interacción estática suelo-estructura en tres dimensiones, el cual toma en cuenta toda la estructura y todos los estratos del subsuelo. Esta técnica permite además conocer los elementos mecánicos en cualquier nudo de la estructura, incluyendo desde luego la estructura de cimentación. Con el propósito de ilustrar el empleo del método, se presenta un ejemplo sencillo de aplicación resuelto paso a paso.

ABSTRACT

A method for the three dimensional analysis of static soil-structure interaction is presented, in which the whole structure and all the subsoil strata are considered. With this technique we can determine the mechanical elements in each node of the structure, including the substructure. A simple illustrative example is presented for the explanation of the method.

1. INTRODUCCIÓN

Se han desarrollado hasta la fecha técnicas de interacción estática suelo-estructura bastante útiles la mayoría de ellas; sin embargo, muchos de estos métodos están elaborados para aplicarse únicamente en dos dimensiones, de manera que el análisis de una estructura se realiza en un plano, lo cual hace que se pierda la visualización del fenómeno tridimensional. Se puede intentar hacer análisis en dos direcciones ortogonales y superponer los efectos, para representar el fenómeno tridimensional, pero aun así el procedimiento es aproximado, y además no es posible conocer los elementos mecánicos en las vigas intermedias de la estructura de cimentación. Por lo tanto, es necesario desarrollar procedimientos que tomen en cuenta el efecto tridimensional en la interacción suelo-estructura.

En este artículo se presenta un método de interacción tridimensional que toma en cuenta toda la estructura y todos los estratos del subsuelo.

La técnica de interacción que se propone (Deméneghi 1983) consiste en considerar las reacciones del terreno de cimentación como cargas sobre la estructura, manejándolas como ingógnitas. Después se calculan los hundimientos del suelo en función de las cargas sobre él (estas cargas son iguales en magnitud y de sentido contrario a las reacciones, por la tercera ley de Newton). Finalmente se establece la compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo, lo que equivale a igualar los desplazamientos entre ambos medios; con esto se resuelve el problema, ya que se obtienen los hundimientos del suelo y las reacciones sobre la estructura. Como previamente se realizó el análisis estructural, es posible determinar además los giros en los nudos de la estructura. Con estos resultados se pueden calcular los elementos mecánicos en toda la estructura, incluyendo desde luego a la estructura de cimentación.

2. ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Para fines de interacción es conveniente utilizar el método de rigideces del análisis estructural, en el que la ecuación general de equilibrio de una estructura está dada por (Beaufait et al 1970)

$$K \underline{\delta} + \underline{P}_e + \underline{P}_c = 0 \tag{1}$$

donde

K = matriz de rigideces de la estructura

$\underline{\delta}$ = vector de desplazamientos

\underline{P}_e = vector de cargas de empotramiento

\underline{P}_c = vector de cargas concentradas

La matriz de rigideces de la estructura se puede obtener mediante la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras que forman la estructura. Para la determinación de los vectores de empotramiento en las vigas de la estructura de cimentación, debido a la reacción del terreno, consideramos una carga repartida de un extremo hasta la mitad de una barra y otra carga repartida de la mitad hasta el otro extremo de la barra. La convención de signos utilizada es la siguiente: los giros se consideran positivos en sentido antihorario y los desplazamientos lineales son positivos si van hacia abajo en una barra horizontal (o hacia la izquierda en barra vertical). Los momentos flexionantes son positivos en sentido horario, y las fuerzas cortantes son positivas si van hacia arriba en barra horizontal (o hacia la derecha en barra vertical). A

continuación presentamos las matrices de rigidez y los vectores de empotramiento para las siguientes condiciones de apoyo:

a) Barra con una articulación a la izquierda y un apoyo continuo a la derecha (fig 1)

La matriz de rigidez está dada por

$$K_m = \begin{bmatrix} \theta_q & \delta_r & \delta_s \\ 3EI/L & -3EI/L^2 & 3EI/L^2 \\ -3EI/L^2 & 3EI/L^3 & -3EI/L^3 \\ 3EI/L^2 & -3EI/L^3 & 3EI/L^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \end{matrix} \quad (2)$$

El vector de cargas de empotramiento vale

$$P_{em} = \begin{bmatrix} -wL^2/8 + (7/128)L^2 r_r + (9/128)L^2 r_s \\ -3wL/8 + (41/128)L r_r + (7/128)L r_s \\ -5wL/8 + (23/128)L r_r + (57/128)L r_s \end{bmatrix} \quad (3)$$

b) Barra con una articulación a la derecha y un apoyo continuo a la izquierda (fig 2)

La matriz de rigidez está dada por

$$K_m = \begin{bmatrix} \theta_p & \delta_r & \delta_s \\ 3EI/L & -3EI/L^2 & 3EI/L^2 \\ -3EI/L^2 & 3EI/L^3 & -3EI/L^3 \\ 3EI/L^2 & -3EI/L^3 & 3EI/L^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_p \\ \delta_r \\ \delta_s \end{matrix} \quad (4)$$

El vector de cargas de empotramiento vale

$$P_{em} = \begin{bmatrix} wL^2/8 - (9/128)L^2 r_r - (7/128)L^2 r_s \\ -5wL/8 + (57/128)L r_r + (23/128)L r_s \\ -3wL/8 + (7/128)L r_r + (41/128)L r_s \end{bmatrix} \quad (5)$$

La matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento para una barra con dos apoyos continuos se obtiene en forma similar a la de las barras anteriores (véase Beaufait et al 1970).

Como indicamos antes, la matriz de rigideces de toda la estructura es la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras de la estructura. El vector de cargas de empotramiento de toda la estructura se obtiene sumando los vectores de cargas de empotramiento de todas y cada una de

las barras. El vector de cargas concentradas es determina asignando a cada grado de libertad la carga concentrada que actúa sobre él. Con esto se realiza el análisis estructural de toda la estructura.

Por falta de espacio no presentamos las expresiones para la determinación de los elementos mecánicos, pero, a manera de ejemplo, para una barra con una articulación a la izquierda y un apoyo continuo a la derecha (fig 1)

$$M_q = - wL^2/8 + (7/128) L^2 r_r + (9/128) L^2 r_s + (3EI/L) \theta_q - (3EI/L^2) \delta_r + (3EI/L^2) \delta_s \quad (6)$$

$$V_r = - 3wL/8 + (41/128) L r_r + (7/128) L r_s - (3EI/L^2) \delta_q + (3EI/L^3) \delta_r - (3EI/L^3) \delta_s \quad (7)$$

3. HUNDIMIENTOS DEL TERRENO DE CIMENTACIÓN

En este inciso consideramos las cargas que transmite la estructura sobre el terreno de apoyo, las que son iguales en magnitud y de sentido contrario a las reacciones del suelo sobre la estructura, por la tercera ley de Newton. Calculemos los asentamientos del terreno en función de estas cargas; consideremos una reacción r_k actuando en la superficie (fig 3); la presión vertical vale $r_k d_k / a_k$, donde d_k y a_k son la longitud y el área en las que actúa la carga, respectivamente. La deformación del estrato de espesor H_{ij} , debida a la carga r_k vale

$$\delta_{ijk} = M_{z_{ij}} H_{ij} \sigma_{z_{ijk}}$$

Pero
$$\sigma_{z_{ijk}} = I_{ijk} r_k d_k / a_k$$

donde I_{ijk} es el valor de influencia, el cual está dado por el esfuerzo normal vertical en el punto ij , producido por una presión unitaria actuando en el área a_k (Zeevaert 1973).

$M_{z_{ij}}$ es el módulo lineal de deformación, es cual se define como el cociente de la deformación unitaria vertical del estrato, entre el esfuerzo normal vertical que la ocasiona.

En consecuencia
$$\delta_{ijk} = M_{z_{ij}} H_{ij} I_{ijk} r_k d_k / a_k$$

La deformación del estrato, debida a todas las cargas vale

$$\delta_{ij} = M_{z_{ij}} H_{ij} \sum_{k=1}^{n_r} I_{ijk} r_k d_k / a_k$$

donde n_r = número total de cargas r_k

El asentamiento bajo el punto i vale

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{n_e} M_{z_{ij}} H_{ij} \sum_{k=1}^{n_r} I_{ijk} r_k d_k / a_k \quad (8)$$

donde n_e = número total de estratos

En la ec 8 los hundimientos del terreno quedan en función de las cargas r_k .

4. COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES

En esta etapa se establece la compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo de cimentación, lo que equivale a considerar que tanto los desplazamientos de la estructura como los del terreno son iguales, es decir, que el suelo no se despega de la estructura. Analíticamente esto se alcanza sustituyendo los valores dados por la ec 8 en la ec 1. De esta manera desaparecen como incógnitas los desplazamientos lineales y quedan únicamente como incógnitas los giros en los nudos y las reacciones del terreno. Es fácil ver que el número de ecuaciones es el mismo que el de incógnitas, con lo que se puede resolver el sistema de ecuaciones y despejar los giros y las reacciones. Empleando la ec 8, ya conocidas las reacciones, se pueden determinar también los hundimientos del terreno de apoyo.

5. EJEMPLO ILUSTRATIVO

Presentamos en este inciso un ejemplo muy sencillo resuelto paso a paso, con el propósito de que el lector visualice las etapas requeridas para el análisis de interacción.

Se pide determinar las reacciones y los hundimientos del terreno, para la estructura mostrada en la fig 4, cuya cimentación es a base una losa corrida. Se piden también los elementos mecánicos. La estratigrafía y propiedades del subsuelo se muestran en la fig 5.

a) Análisis estructural

Primeramente numeramos las barras y los grados de libertad de la estructura, como se indica en la fig 6. Dada la simetría de la estructura, presentamos a continuación los de la barra 1 (articulación a la izquierda) y la barra 7 (articulación a

la derecha). Cabe aclarar que se desprecian efectos de torsión en las barras.

Barra	θ_p	θ_q	δ_r	δ_s
1	---	θ_{10}	δ_1	δ_2
7	θ_{10}	---	δ_2	δ_3

A continuación hallaremos las matrices de rigidez y los vectores de empotramiento de las barras 1 y 7. Las demás matrices y vectores se obtienen en forma similar. Aplicando la ec 2 para la barra 1:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1786.898 & -415.558 & 415.558 \\ -415.558 & 96.641 & -96.641 \\ 415.558 & -96.641 & 96.641 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{10} \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{matrix}$$

Aplicando la ec 4 para la barra 3

$$K_7 = \begin{bmatrix} 1786.898 & -415.558 & 415.558 \\ -415.558 & 96.641 & -96.641 \\ 415.558 & -96.641 & 96.641 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{10} \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{matrix}$$

La matriz de rigideces de toda la estructura es la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de la barra de la estructura (el rango de cada matriz se toma de 15 por 15). A manera de ejemplo se presenta a continuación la matriz de rigidez de la estructura para los primeros 5 grados de libertad.

$$K = \begin{bmatrix} 193.282 & -96.641 & 0 & -96.641 & 0 & \dots \\ -96.641 & 214.937 & -96.641 & 0 & -21.655 & \dots \\ 0 & -96.641 & 193.282 & 0 & 0 & \dots \\ -96.641 & 0 & 0 & 214.937 & -21.655 & \dots \\ 0 & -21.655 & 0 & -21.655 & 86.620 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \vdots \end{matrix}$$

El vector de desplazamientos, para los primeros cinco grados de libertad, vale

$$\underline{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Determinemos a continuación el vector de cargas de empotramiento. Aplicando la ec. para la barra 1:

$$\underline{P}_{e1} = \begin{bmatrix} -1.849 + 1.011 r_1 + 1.3 r_2 \\ -1.29 + 1.377 r_1 + 0.2352 r_2 \\ -2.15 + 0.7727 r_1 + 1.9148 r_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{GL} \\ 10 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

GL = grado de libertad

Aplicando la ec 5 para la barra 3:

$$\underline{P}_{e7} = \begin{bmatrix} 1.849 - 1.3 r_2 - 1.011 r_3 \\ -2.15 + 1.915 r_2 + 0.7727 r_3 \\ -1.29 + 0.2352 r_2 + 1.3773 r_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{GL} \\ 10 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Como ejemplo presentamos a continuación el vector de cargas de empotramiento de la estructura para los primeros 5 grados de libertad.

$$\underline{P}_e = \begin{bmatrix} -2.58 + 2.7546 r_1 + 0.2352 r_2 + 0.2352 r_4 \\ -6.88 + 0.7727 r_1 + 5.2069 r_2 + 0.7727 r_3 + 0.2352 r_5 \\ -2.58 + 0.2352 r_2 + 2.7546 r_3 + 0.2352 r_6 \\ -6.88 + 0.7727 r_1 + 5.2069 r_4 + 0.2352 r_5 + 0.7727 r_7 \\ -17.2 + 0.7727 r_2 + 0.7727 r_4 + 7.6592 r_5 + 0.7727 r_6 + 0.7727 r_8 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{GL} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \vdots \end{matrix}$$

GL = grado de libertad

El vector de cargas concentradas, para los primeros 5 grados

representa el esfuerzo en el punto ij debido a una presión unitaria colocada en el área k. Calculemos como ejemplo un valor de influencia, digamos el I_{115} . En la fig 7 se muestra la planta del área 5 y del punto 1. Colocamos una presión unitaria en el área 5 y calculamos el esfuerzo bajo el punto 1, a la mitad del estrato 1, es decir, a una profundidad de 1.2 m. Aplicando la ecuación de Boussinesq, se obtiene un esfuerzo vertical de 0.002988. Los demás valores de influencia se obtienen en forma similar. Sustituyendo valores en la ec (d)

$$\begin{aligned} \delta_1 = & 0.0154(2.4)[0.2271(4.3r_1)/4.6225+0.009375(6.45r_2)/9.245 \\ & +0.0001528(4.3r_3)/4.6225+0.009375(6.45r_4)/9.245 \\ & +0.002988(8.6r_5)/18.49+0.0001625(6.45r_6)/9.245 \\ & +0.0001528(4.3r_7)/4.6225+0.0001625(6.45r_8)/9.245 \\ & +0.00002824(4.3r_9)/4.6225] \\ & +0.0222(2.0)[0.1139(4.3r_1)/4.6225+0.04407(6.45r_2)/9.245 \\ & +0.002284(4.3r_3)/4.6225+0.04407(6.45r_4)/9.245 \\ & +0.028026(8.6r_5)/18.49+0.002638(6.45r_6)/9.245 \\ & +0.0022836(4.3r_7)/4.6225+0.002638(6.45r_8)/9.245 \\ & +0.0005157(4.3r_9)/4.6225] \end{aligned}$$

Sabemos que por simetría

$$r_1 = r_3 = r_7 = r_9 \quad r_2 = r_4 = r_6 = r_8$$

Sustituyendo valores y haciendo operaciones

$$\delta_1 = 0.012733 r_1 + 0.0033854 r_2 + 0.00063012 r_5 \quad (e)$$

En forma análoga se obtienen δ_2 y δ_5

$$\delta_2 = 0.0036877 r_1 + 0.020326 r_2 + 0.0021424 r_5 \quad (f)$$

$$\delta_5 = 0.0028714 r_1 + 0.010629 r_2 + 0.025023 r_5 \quad (g)$$

c) Compatibilidad de deformaciones

La compatibilidad de deformaciones entre la estructura y el terreno de cimentación se logra sustituyendo las ecs (e), (f) y (g) en las ecs (a), (b) y (c); así, se obtiene:

Grado de libertad 1

$$4.5029 r_1 - 2.8039 r_2 - 0.2923 r_5 - 12.18 = 0 \quad (a')$$

Grado de libertad 2

$$- 0.1852 r_1 + 8.6912 r_2 + 0.03202 r_5 - 6.88 = 0 \quad (b')$$

Grado de libertad 5

$$- 0.07071 r_1 + 2.2496 r_2 + 9.6411 r_5 - 17.2 = 0 \quad (c')$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$r_1 = 3.343 \text{ t/m} \quad r_2 = 0.8569 \text{ t/m} \quad r_5 = 1.609 \text{ t/m}$$

Los hundimientos del terreno de cimentación se obtienen sustituyendo los valores de las reacciones en las ecs (e), (f) y (g)

$$\delta_1 = 0.0465 \text{ m} \quad \delta_2 = 0.0332 \text{ m} \quad \delta_5 = 0.0590 \text{ m}$$

Para ilustrar la determinación de elementos mecánicos, utilizamos para la barra 1 las ecs 6 y 7

$$M_{10} = - 2.88 \text{ t.m} \quad V_1 = 4.8 \text{ t}$$

6. CONCLUSIONES

Como se puede apreciar en los incisos anteriores, es posible en forma relativamente sencilla llevar a cabo el análisis de interacción suelo-estructura en el espacio, sin necesidad de hacer iteraciones. Además, se toma en cuenta toda la estructura y todos los estratos del subsuelo.

Uno de los aspectos importantes es que para aplicar esta técnica en la práctica profesional, es necesario elaborar programas de computadora, los cuales utilizan grandes cantidades de memoria, ya que en tres dimensiones el número de grados de libertad es mucho mayor que el que se utiliza en análisis bidimensionales.

REFERENCIAS

Beaufait, F W, Rowan, W H, Hoadley, P G y Hackett, R M, Computer Methods of Structural Analysis, Prentice-Hall, 1970
Deméneghi, A, "Interacción suelo-estructura", Rev Ingeniería, Vol LIII, No 4, pp 80-90, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1983
Zeevaert, L, Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions, Van Nostrand Reinhold. 1973

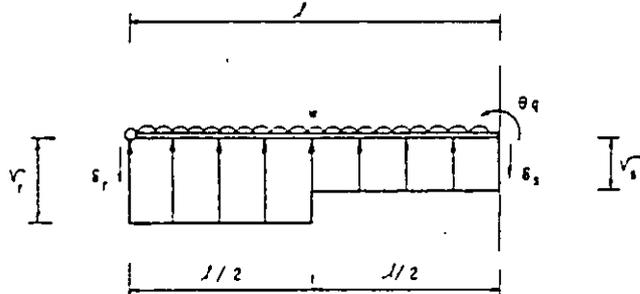


Figura 1. Barra articulada a la izquierda

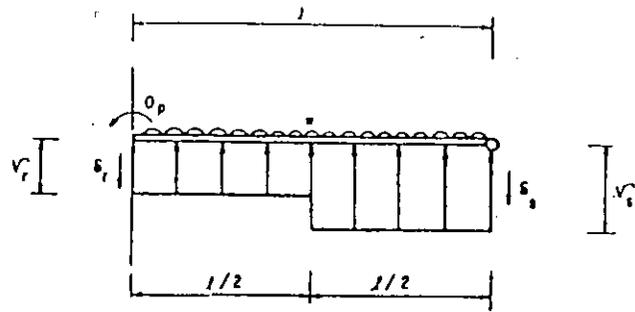


Figura 2. Barra articulada a la derecha

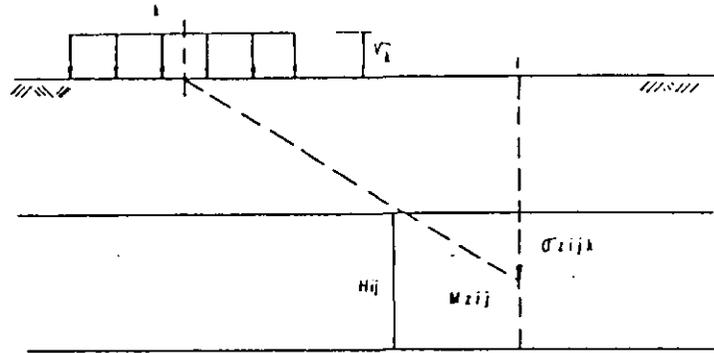
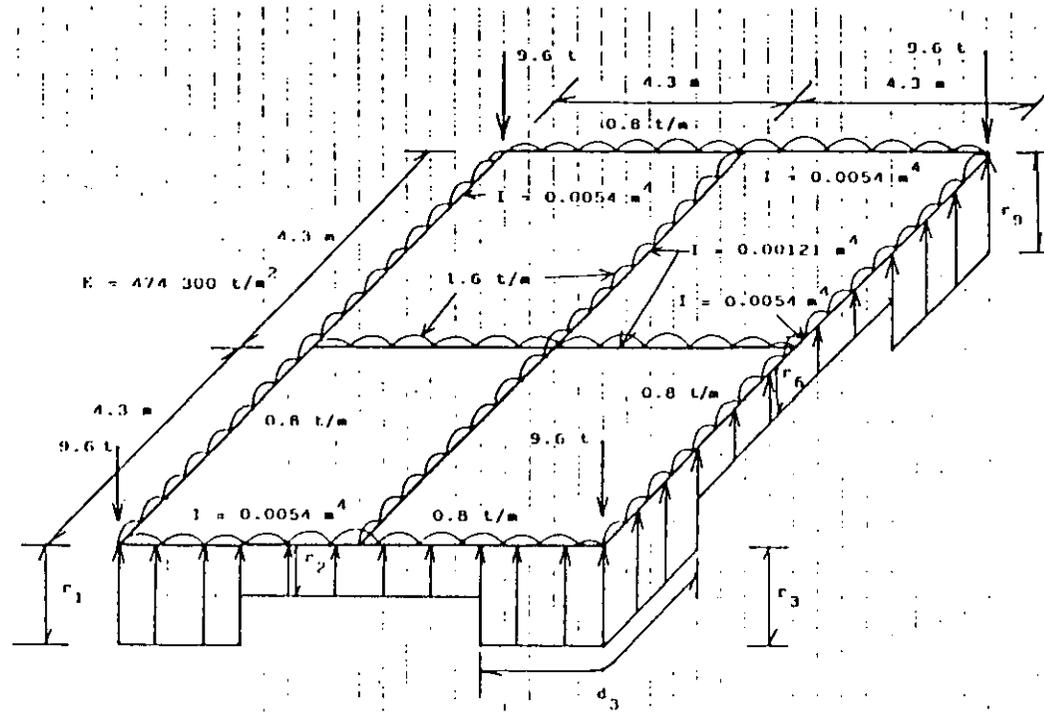


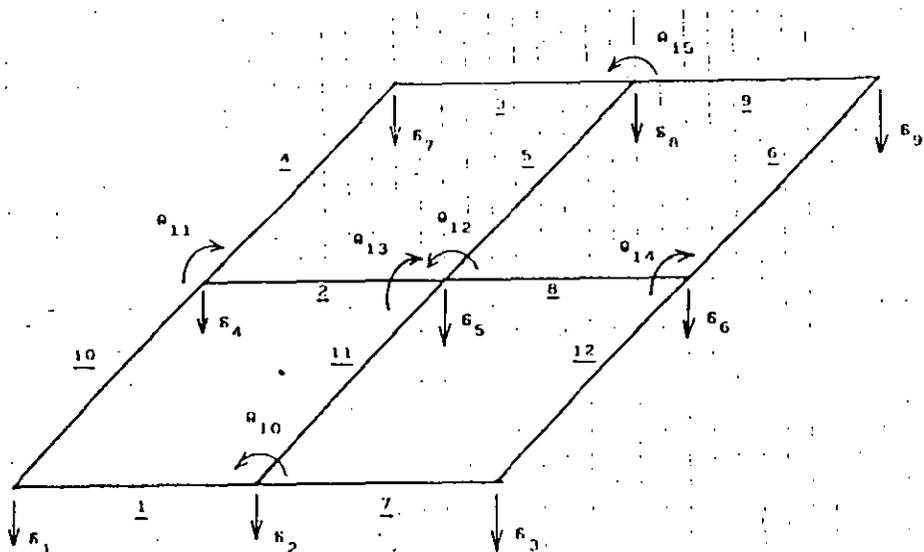
Figura 3. Cálculo de los hundimientos del terreno



GEOMETRÍA Y SISTEMA DE CARGAS SOBRE LA ESTRUCTURA Figura 4

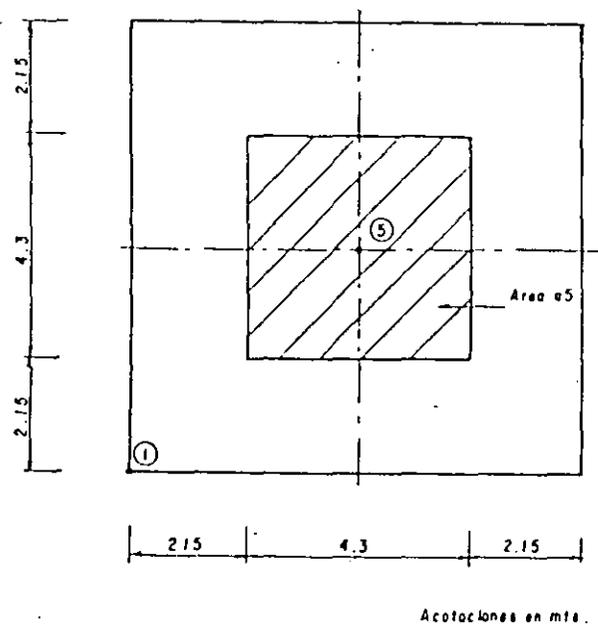
<i>M_z</i>	
$M_z = 0.0154 \text{ m}^2/\text{l}$	2.4m Estrato 1
$M_z = 0.0222 \text{ m}^2/\text{l}$	2.0m Estrato 2
Roca	

Figura 5. Estratigrafía y propiedades
(Ejemplo)



NUMERACIÓN DE BARRAS Y GRADOS DE LIBERTAD

Figura 6



Acotaciones en mts.

Figura 7. Determinación de los valores de influencia

12/1/73



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

ANALISIS ESTRUCTURAL

**METODO MIXTO DE FLEXIBILIDAD Y RIGIDECES
APLICACION A ANALISIS DE TUBERIA**

ING. JULIO DAMY RIOS

EXPOSITOR DR. JOSE LUIS CAMBA CASTAÑEDA

INTRODUCCION

I

El análisis estructural, a través del método de rigideces, resuelve el problema del análisis de sistemas estructurales, mediante la solución de la ecuación general $\{F\} = (K)\{d\}$, en donde el tamaño de la matriz de rigideces de la estructura (K) , mantiene una relación directa con el número de grados de libertad angular y lineal del sistema estructural.

En un planteamiento tradicional, el análisis estructural concibe como nudos de una estructura a todos aquellos puntos en que concurren dos o más elementos de la misma.

Es posible, a través de un planteamiento más elaborado reducir el número de nudos de una estructura si sólo se consideran como tales a los puntos en que concurren tres o más elementos de esta, lo cual reduce considerablemente el tamaño de la matriz de rigideces de la estructura (K) , siendo esto ventajoso desde el punto de vista de la solución matemática y sobre todo de la aplicación de computadores al análisis estructural.

Este planteamiento es de interés particular cuando se aplica al análisis estructural de sistemas de tuberías en dos o tres dimensiones, debido a que en estos sistemas estructurales existe por lo general un número suficientemente grande de puntos en que concurren solamente dos tramos de tubería (queiebres), como para pensar en un tratamiento especial para ellos, sin considerarlos como nudos.

CARACTERISTICAS

II

- 1.- NUDO.- Se considerarán como nudos sólo aquellos puntos de la estructura en que concurren tres o más tramos de barra y a los apoyos incompletos.
- 2.- TRAMO DE BARRA.- Se llamará así al tramo recto comprendido entre dos quiebres adyacentes de una barra.
- 3.- BARRA.- Se entenderá por barra, a la parte de tubería comprendida entre dos nudos.
- 4.- SECCION TRANSVERSAL.- La sección transversal de cada barra, será un anillo circular constante en toda su longitud.

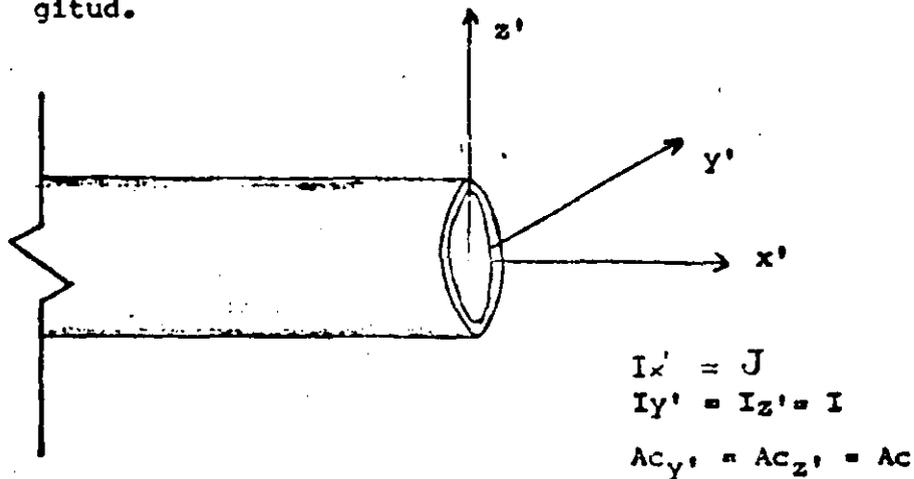


FIG 1 .- Propiedades de la sección transversal y ejes locales de referencia. (S.L.)

DEFINICIONES

A).- Para análisis en dos dimensiones.

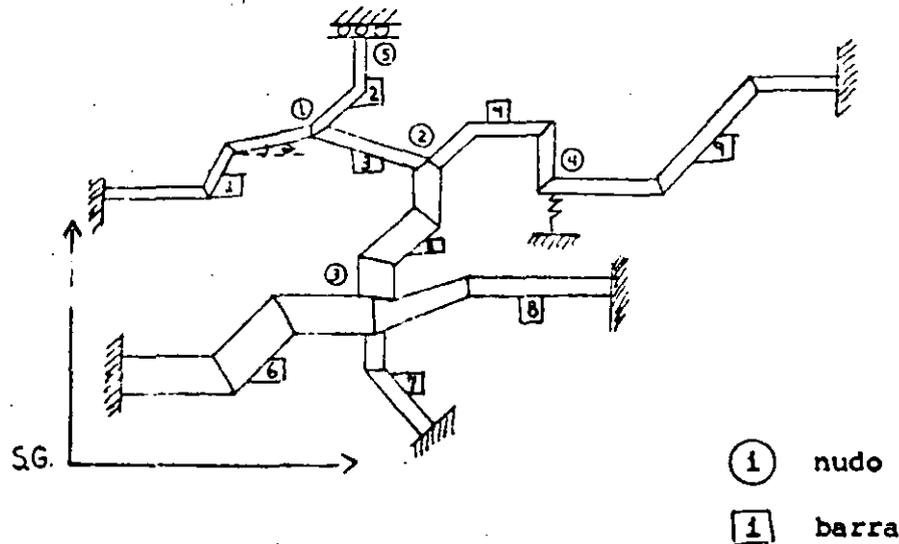
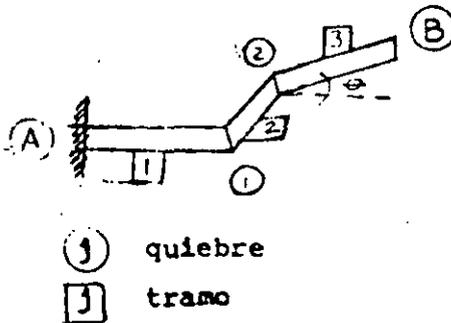


FIG. 2.- Tubería en el plano.

- Nótese que en un nudo pueden concurrir barras con diferente sección transversal.

S.G. = Sistema global de referencia.

A. 1.)- Matriz de transformación de coordenadas T para un tramo de barra.



$$(T)_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

FIG. 3.- Tramos de barra y ángulo θ para la barra 1 de la figura 2.

donde θ = inclinación del tramo de barra j referido al eje x positivo en el S.G. medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

A. 2.) Matriz de transporte entre los puntos (B) y (j) referidos al S.G.

$$(H_{bj}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -(Y_B - Y_j) & (X_B - X_j) & 1 \end{pmatrix}$$

Referido al tramo $[3]$ de la barra $[1]$ (fig. 3), B es el nudo (1) y j es el quiebre (2)

Nótese que para el tramo adyacente a un nudo, la matriz de transporte (H_{bj}) toma la forma de la matriz identidad (I) .

A. 3.) Matriz de flexibilidad del tramo $[j]$ en su extremo (j) referido al S. L. de referencia. (ver fig. 1)

$$(f'_{sb})_{[j]} = \begin{pmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3(1+C)}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{pmatrix}$$

(en S.L.)

donde: $C = G(1+\nu) \frac{I}{AcL}$

ν = Módulo de Poisson del material

Ac = Area de cortante de la sección transversal

B).- Para análisis en tres dimensiones.

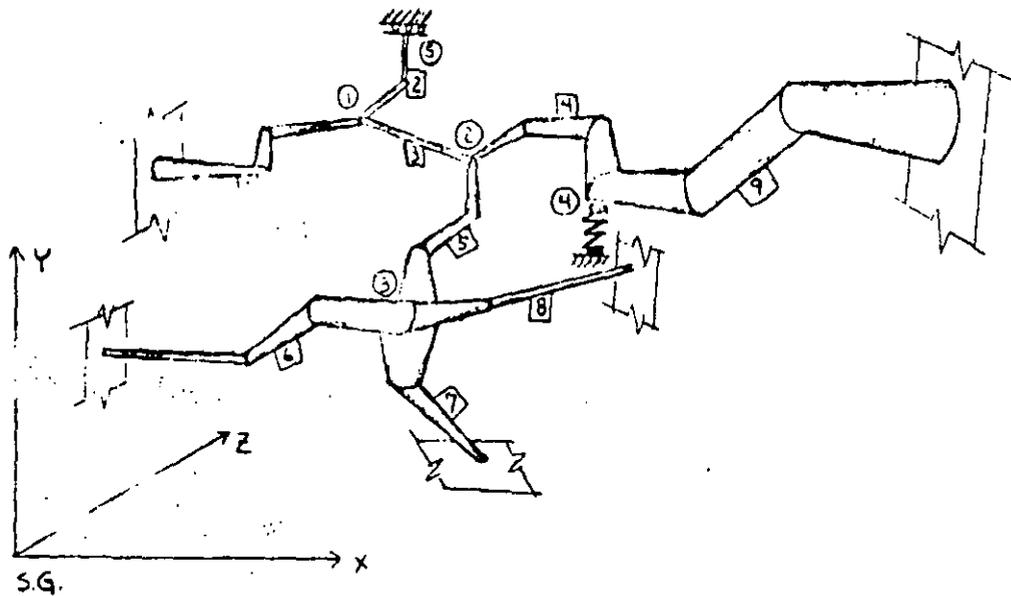


FIG. 4.- Tubería en el espacio.
Nótese que en el nudo pueden concurrir barras con diferente sección transversal.

① nudo

1 barra

S.G. Sistema global de referencia

B. 1.) .- Matriz de transformación de coordenadas (T) para un tramo de barra.

$$(T)_{ij} = \begin{bmatrix} \Lambda_{ij} & 0 \\ 0 & \Lambda_{ij} \end{bmatrix}$$

donde: $[\Lambda_{ij}] =$

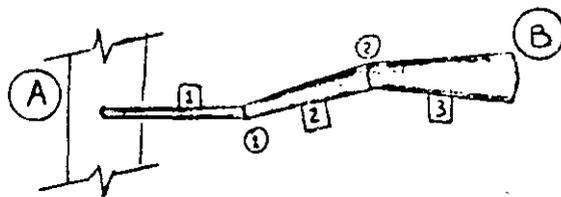
$C_{x'x}$	$C_{y'x}$	$C_{z'x}$
$C_{x'y}$	$C_{y'y}$	$C_{z'y}$
$C_{x'z}$	$C_{y'z}$	$C_{z'z}$

En la matriz $[\Lambda_{ij}]$ los elementos de las columnas 1, 2 y 3 son los cosenos directores de x' , y' y z' respectivamente, del tramo j en la barra i en S.L., con respecto al S.G. (ver fig 1 y fig 4)

B. 2.) .- Matriz de transporte entre los puntos B y j referidos al S.G.

$$[H_{Bj}] = \left(\begin{array}{c|c} [I] & 0 \\ \hline [h] & [I] \end{array} \right)$$

donde: $[h] = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & -(Z_B - Z_j) & (Y_B - Y_j) \\ \hline (Z_B - Z_j) & 0 & -(X_B - X_j) \\ \hline -(Y_B - Y_j) & (X_B - X_j) & 0 \end{array} \right)$



\textcircled{j} quiebre

\textcircled{j} tramo

FIG.5.- Tramos de barra y quiebres para la barra $\textcircled{1}$ de la figura 4 (para el tramo $\textcircled{1}$, B es el nudo $\textcircled{3}$ y j es el quiebre $\textcircled{1}$)

Nótese que para el tramo adyacente a un nudo, la matriz de transporte $[H_{Bj}]$ toma la forma de la matriz identidad $[I]$.

B. 3.) .- Matriz de flexibilidad del tramo \textcircled{j} en su extremo \textcircled{j} referido al S. L. de referencia. (ver fig. 1)

donde: $C = G(1+\nu) \frac{I}{AcL^2}$

$\nu \equiv$ Módulo de Poisson del material

$Ac =$ Area de cortante de la sección transversal

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$$\left\{ f_{88}^* \right\} [j] =$$

$\frac{L}{EA}$	0	0	0	0	0
0	$\frac{L^3(1+C)}{3EI}$	0	0	0	$\frac{L^2}{2EI}$
0	0	$\frac{L^3(1+C)}{3EI}$	0	$-\frac{L^2}{2EI}$	0
0	0	0	$\frac{L}{GJ}$	0	0
0	0	$-\frac{L^2}{2EI}$	0	$\frac{L}{EI}$	0
0	$\frac{L^2}{2EI}$	0	0	0	$\frac{L}{EI}$

(en S. L.)

PLANTEAMIENTO GENERAL

IV

La solución de la ecuación general planteada en el análisis estructural a través del método de rigideces

$$\{F\} = [K]\{d\} \quad \dots (1)$$

comprende las siguientes etapas:

- A.- Formación de la matriz de rigideces $[K]$
- B.- Cálculo del vector de fuerzas $\{F\}$
- C.- Obtención del vector de desplazamientos d mediante la solución de la ecuación general (1).
- D.- Obtención de los elementos mecánicos en los extremos de cada barra, calculados a partir del vector de desplazamiento $\{d\}$

Se tratarán aquí solamente los puntos A y B. Los puntos C y D corresponden a un planteamiento tradicional del análisis estructural.

A.- Formación de la matriz de rigideces $[K]$

1).- Formación de la matriz $[K]$ en forma topológica

Se entiende por forma topológica de la matriz K a la representación matricial de la relación que guardan los extremos de las barras con los nudos de la estructura

La matriz topológica $[K]$ para las estructuras de las figuras 2 y 4 es idéntica y tiene la siguiente forma, si el extremo B de las barras coincide con el nudo (1),

$$\textcircled{4} \textcircled{3}$$

$$[K] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 (k_{BB})_2 + (k_{BA})_2 & (k_{BA})_2 & 0 & 0 & (k_{BA})_2 \\
 + (k_{BB})_2 & & & & \\
 \hline
 (k_{AB})_2 & (k_{AA})_2 + (k_{AA})_2 & (k_{AB})_2 & (k_{AB})_2 & 0 \\
 + (k_{AA})_2 & & & & \\
 \hline
 0 & (k_{BA})_2 & (k_{BB})_2 + (k_{BB})_2 & 0 & 0 \\
 + (k_{BB})_2 + (k_{BB})_2 & & & & \\
 \hline
 0 & (k_{BA})_2 & 0 & (k_{BB})_2 + (k_{BB})_2 & 0 \\
 \hline
 (k_{AB})_2 & 0 & 0 & 0 & (k_{AA})_2 \\
 \hline
 \end{array}$$

(en S. G.)

Nótese que puede pensarse en una reordenación de la nomenclatura de los nudos a fin de obtener un menor ancho de banda de la matriz $[K]$, lo cual es conveniente desde el punto de vista de la aplicación de computadores.

2.- Obtención de las matrices (k_{AA}) , (k_{AB}) , (k_{BA}) y (k_{BB}) para cada barra en S. G.

Estas matrices están relacionadas entre sí a través de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 (k_{AA}) &= (H_{BA})(k_{BB})(H_{BA})^T \\
 (k_{AB}) &= -(H_{BA})(k_{BB}) \\
 (k_{BA}) &= -(k_{BB})(H_{BA})^T
 \end{aligned}$$

donde A y B son los extremos de la barra (ver figuras 3 y 5)

Por lo que sólo será necesario calcular (k_{BB}) de cada barra, y aplicar las expresiones anteriores para calcular (k_{AA}) , (k_{AB}) y (k_{BA}) .

Para calcular (k_{BB}) se procede de la manera siguiente:

Recuérdese que $(k_{BB}) = (f_{BB})^{-1}$, por lo que el problema se reduce a calcular (f_{BB}) en S. G., la cual se obtiene a

partir de la siguiente expresión : (Ver figuras 3 y 5).

$$\{f_{00}\}_I = \sum_{j=1}^{N^{\text{tramos}}} (H_{0j})^T \{f_{00}\}_j (H_{0j}) \quad (\text{en S.G.})$$

donde $\{H_{0j}\}$ y $\{f_{00}\}_j$ se encuentran referidas al S.G. de referencia.

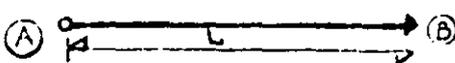
La matriz de flexibilidades del tramo j en el extremo B, referida al S.G. puede calcularse con la siguiente expresión.

$$\{f_{00}\}_j = \{T\}_j \{f_{00}\}_j \{T\}_j^T \quad (\text{en S.G.})$$

3).- Tratamiento de apoyos incompletos

Un apoyo incompleto puede no ser considerado como nudo, si se emplean las rigideces modificadas del tramo de barra que concurre en él.

A continuación se listan las matrices de rigideces modificadas para dos casos de interés práctico:



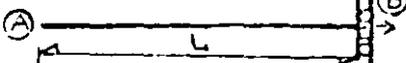
$(en\ S.L.)$

$\frac{EA}{L}$	0	0
0	$\frac{3EI}{L^3}$	$\frac{3EI}{L^2}$
0	0	0

$(k'_{AB}) =$

$\frac{EA}{L}$	0	0
0	$\frac{3EI}{L^3}$	$\frac{3EI}{L^2}$
0	$\frac{3EI}{L^2}$	$\frac{3EI}{L}$

$(k'_{BB}) =$



$(en\ S.L.)$

$\frac{EA}{L}$	0	0
0	0	0
0	0	$\frac{EI}{L}$

$(k'_{BB}) = (k'_{AA}) =$

$\frac{EA}{L}$	0	0
0	0	0
0	0	$-\frac{EI}{L}$

$(k'_{AB}) = (k'_{BA}) =$

Para obtener $\{k\}$ en S.G. se emplea la siguiente expresion:

$$\{k\} = \{T\}\{k'\}\{T\}^T$$

Con $\{T\}$ tal como fue definido en III

B.- Cálculo del vector de fuerzas $\{F\}$

Las cargas que pueden presentarse en un sistema de tuberías como el de las figuras 2 y 4, son las siguientes:

1.- Fuerzas externas aplicadas en:

- los nudos de la estructura
- los quiebres de las barras
- los tramos de cada barra

Considérese la barra $\boxed{1}$ de la fig. 2, cargada como se muestra en la figura 6

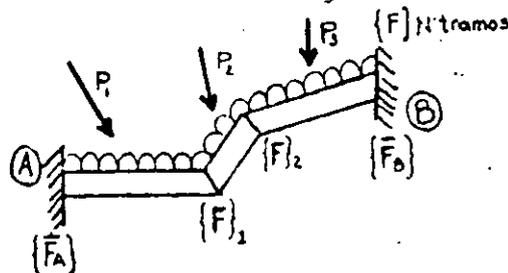


FIG. 6.- Barra $\boxed{1}$ cargada y fuerzas de fijación $\{\bar{F}_A\}$ y $\{F_b\}$



$\{F_j\}$ = Fuerzas quiebre
- Fuerzas fijación.

FIG. 7.- Barra $\boxed{1}$ en cantiliver.

Las fuerzas de fijación en el extremo B de la barra $\boxed{1}$, se obtienen a partir de la siguiente expresión:

$$\{\bar{F}_b\} = -\{k_{BB}\}\{d_b^*\}$$

donde $\{d_0^*\}$ es la matriz de desplazamientos del extremo B considerando a la barra en cantiliver (ver fig. 7) y se calcula con la siguiente expresión

$$\{d_0^*\} = \sum_{j=1}^{N_{\text{tramos}}} [H_{0j}]^T \{\tilde{f}_j\} \{F_j\}$$

En la expresión anterior, $\{F_j\}$ es el vector resultante de restar las fuerzas externas aplicadas en el quiebre \textcircled{j} ($\{F_j\}, \dots, \{F\}_{N_{\text{tramos}}}$ en la figura 6) menos las fuerzas de fijación producidas por las cargas externas aplicadas en los tramos adyacentes al quiebre \textcircled{j} ambas referidas al S.G.

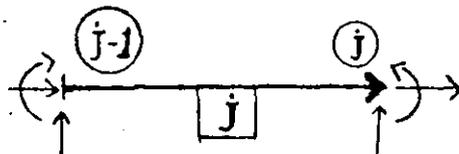
El vector $\{F_j\}$, tiene la forma siguiente para el caso de sistemas de tuberías en dos y tres dimensiones.

$$\{F_j\} = \begin{Bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{ja} \end{Bmatrix}$$

(S.F. 2D)

$$\{F_j\} = \begin{Bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{jz} \\ M_{jx} \\ M_{jy} \\ M_{ja} \end{Bmatrix}$$

(S.G. 3D)



Convención positiva del vector $\{F_j\}$

La matriz $[H_{0j}]$ se aplica tal como fue definida en III.

La matriz $\{\tilde{f}_j\}$ es la matriz de flexibilidades del segmento de barra comprendido entre el extremo origen \textcircled{A} y el quiebre \textcircled{j} respecto al extremo destino \textcircled{j} y está definida mediante la siguiente fórmula de recurrencia.

$$\{\tilde{f}_{j+1}\} = \{\tilde{f}_{j+1}\} + [H_{(j+1)0}] \{\tilde{f}_j\} [H_{0j}]$$

$1 \leq j \leq (N_{\text{tramos}} - 1)$

en donde $\{H_{AB}\}$ se aplica tal como fue definida en III y $\{f_{BB}\}$ se obtiene por un procedimiento similar al descrito en A.2.

Nótese que en la ecuación anterior se tiene que:

$$\{\tilde{F}_i\} = \{f_{BB}\}_i$$

y

$$\{\tilde{F}_{N\text{tramos}}\} = \{f_{BB}\}_i$$

Mediante el procedimiento descrito, se obtiene $\{d_B^x\}$ se calcula $\{\tilde{F}_B\}$ y se le suman las fuerzas de fijación en el extremo \textcircled{B} de la barra \boxed{i} producidas por las cargas aplicadas en el tramo adyacente a él, obteniéndose así el vector $\{\tilde{F}_B\}$ definitivo.

Una vez conocido el vector de fuerzas $\{\tilde{F}_B\}$ de la barra \boxed{i} se calcula el vector de fuerzas $\{\tilde{F}_A\}$ de la misma barra con la siguiente expresión:

$$\{\tilde{F}_A\} = \{\tilde{F}_A\}^* - \{H_{BA}\}\{\tilde{F}_B\}$$

donde: $\{\tilde{F}_A\}^*$ es el vector de fuerzas en el extremo \textcircled{A} de la barra \boxed{i} , producido por las cargas actuantes en ella considerándola en cantiliver, (ver fig. 7) y $\{H_{BA}\}$ se aplica tal como fue definida en III.

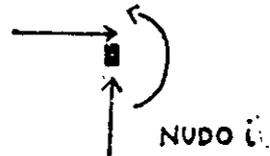
Los vectores de fuerzas $\{\tilde{F}_A\}$ y $\{\tilde{F}_B\}$ así obtenidos constituyen el estado I de cargas (fuerzas de fijación).

Al aplicar vectores de carga en sentido contrario a los del estado I, y sumar los que concurren en un nudo mas el vector de cargas aplicado en el mismo, se constituye el estado II de cargas.

La forma topológica del vector de cargas $\{F\}$ en la ecuación (1) para las estructuras de las figuras 2 y 4, siendo nudos destino el $\textcircled{1}$, $\textcircled{3}$ o $\textcircled{4}$, es la siguiente:

$$\{F\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\{\bar{F}_B\}_1 + \{\bar{F}_B\}_2 + \{\bar{F}_B\}_3 + \{F\}_1}{\quad} \\ \frac{\{\bar{F}_A\}_3 + \{\bar{F}_A\}_4 + \{\bar{F}_A\}_5 + \{F\}_2}{\quad} \\ \frac{\{\bar{F}_B\}_5 + \{\bar{F}_B\}_6 + \{\bar{F}_B\}_7 + \{\bar{F}_B\}_8 + \{F\}_3}{\quad} \\ \{\bar{F}_B\}_9 + \{\bar{F}_B\}_{10} + \{F\}_4 \end{array} \right\}$$

Convención positiva para los componentes del vector $\{F\}$



Estamos ahora en posibilidad de resolver la ecuación general $\{F\} = [K]\{d\}$ y obtener los desplazamientos de los nudos de la estructura y calcular a partir de ellos los elementos mecánicos que se generan en los extremos de las barras (inciso IV.C), lo cual puede hacerse a través de un planteamiento tradicional de análisis estructural.

A los elementos mecánicos así obtenidos, se les suman los vectores de fuerzas de fijación que constituyen el estado I de cargas para obtener los elementos mecánicos definitivos en los extremos de cada barra de la estructura.

2.- Fuerzas Producidas por Cambios de Temperatura

Es aplicable todo lo estipulado en B.1, pero ahora el problema es más sencillo, ya que la única diferencia con lo visto allá, es que la matriz d ahora se calcula de la manera siguiente:

α = Coeficiente de dilatación lineal del material

Δt = Cambio de temperatura

Para $\alpha = \text{cte}$

$\Delta t = \text{cte}$

$$\{d_B^*\} = \begin{cases} dx_B^* = \alpha \Delta t (X_B - X_A) \\ dy_B^* = \alpha \Delta t (Y_B - Y_A) \\ \phi_{z_B}^* = 0 \end{cases}$$

(S.G. 2D)

$$d = \begin{cases} dx_B^* = \alpha \Delta t (X_B - X_A) \\ dy_B^* = \alpha \Delta t (Y_B - Y_A) \\ dz_B^* = \alpha \Delta t (Z_B - Z_A) \\ \phi_{x_B}^* = 0 \\ \phi_{y_B}^* = 0 \\ \phi_{z_B}^* = 0 \end{cases}$$

(S.G. 3D)

Para $\alpha = \text{cte}$

$(\Delta t)_j$ = variable para cada tramo j

$$\{d_B^*\} = \begin{cases} dx_B^* = \sum_{j=1}^{N_{\text{tramos}}} \Delta t_j (\Delta x)_j \\ dy_B^* = \sum_{j=1}^{N_{\text{tramos}}} \Delta t_j (\Delta y)_j \\ \phi_{z_B}^* = 0 \end{cases} \quad (\text{S.G. 2D})$$

$$\{d_B^*\} = \begin{cases} dx_B^* = \sum_{j=1}^{N_{\text{tramos}}} \alpha \Delta t_j (\Delta x)_j & \phi_{x_B}^* = 0 \\ dy_B^* = \sum_{j=1}^{N_{\text{tramos}}} \alpha \Delta t_j (\Delta y)_j & \phi_{y_B}^* = 0 \\ dz_B^* = \sum_{j=1}^{N_{\text{tramos}}} \alpha \Delta t_j (\Delta z)_j & \phi_{z_B}^* = 0 \end{cases} \quad (\text{S.G. 3D})$$

3.- Fuerzas producidas por desplazamientos impuestos a los apoyos.

Es aplicable también ahora todo lo estipulado en B.1 y el problema resulta ser mas sencillo que los planteados en B.1 y B.2 puesto que ahora $\{\bar{F}_0\}$ se calcula directamente a partir de la siguiente expresión:

$$\{\bar{F}_0\} = [k_{0A}]\{\bar{d}_A\}$$

donde $\{\bar{d}_A\}$ es el vector de desplazamientos impuestos a la estructura en el apoyo A.



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

ANALISIS ESTRUCTURAL.

TEMA: INTER-ACCION SUELO ESTRUCTURA.

ING. AGUSTIN DE MENEGHI C.

ELABORADO POR AGUSTÍN DEMÉNEGHÍ C

20/IX/94

```
20 PRINT "PROGRAMA 'ISE3DES'"
30 PRINT "EN ESTE PROGRAMA SE TOMA EN CUENTA QUE CADA NUDO PUEDE TENER AREAS INT
ERNAS"
40 PRINT "LECTURA DE DATOS DE LA ESTRUCTURA"
50 READ N,NG,NGEM,NBIZQ,NBDER,NBART,NBC,NBSE,NE
60 PRINT "N = NUMERO DE NUDOS DE LA RETICULA =",N,"NG = NUMERO DE GRADOS DE LIBE
RTAD =",NG,"NBIZQ = NUMERO DONDE TERMINAN LAS BARRAS A LA IZQUIERDA =",NBIZQ,"NBD
ER = NUMERO DONDE TERMINAN LAS BARRAS A LA DERECHA =",NBDER
70 PRINT "NBART = NUMERO DONDE TERMINAN LAS BARRAS DOBLEMENTE ARTICULADAS =",NBA
RT,"NBC = NUMERO DONDE TERMINAN LAS BARRAS CONTINUAS =",NBC,"NBSE = NUMERO DONDE
TERMINAN LAS BARRAS DE LA SUPERESTRUCTURA =",NBSE
80 PRINT "NGEM = NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD PARA EL CALCULO DE LOS ELEMENTOS M
ECANICOS =",NGEM,"NE = NUMERO DE ESTRATOS =",NE
90 DIM E(NBSE),IN(NBSE),LO(NBSE),W(NBSE),P(NG),TP(NBSE),TQ(NBSE),DR(NBSE),DS(NB
SE)
100 DIM KR(NGEM,NGEM),OR(NG,NG),VE(NGEM)
110 DIM SCAL(NG),IPS(NG)
120 PRINT "PROPIEDADES DE LAS BARRAS"
130 PRINT "BARRA, E, I, L, W, TQ, DR, DS. BARRA ARTICULADA A LA IZQUIERDA"
140 FOR I=1 TO NBIZQ
150 READ I,E(I),IN(I),LO(I),W(I),TQ(I),DR(I),DS(I)
160 PRINT I,E(I),IN(I),LO(I),W(I),TQ(I),DR(I),DS(I)
170 NEXT I
180 PRINT "BARRA, E, I, L, W, TP, DR, DS. BARRA ARTICULADA A LA DERECHA"
190 FOR I=NBIZQ+1 TO NBDER
200 READ I,E(I),IN(I),LO(I),W(I),TP(I),DR(I),DS(I)
210 PRINT I,E(I),IN(I),LO(I),W(I),TP(I),DR(I),DS(I)
220 NEXT I
230 PRINT "BARRA, E, I, L, W, DR, DS. BARRA DOBLEMENTE ARTICULADA"
240 PRINT "BARRA, E, I, L, W, TP, TQ, DR, DS. BARRA CONTINUA"
250 FOR I=NBART+1 TO NBC
260 READ I,E(I),IN(I),LO(I),W(I),TP(I),TQ(I),DR(I),DS(I)
270 PRINT I,E(I),IN(I),LO(I),W(I),TP(I),TQ(I),DR(I),DS(I)
280 NEXT I
290 PRINT "BARRA, E, I, L, W, TP, TQ, DR, DS. BARRAS DE LA SUPERESTRUCTURA"
300 FOR I=NBC+1 TO NBSE
310 READ I,E(I),IN(I),LO(I),W(I),TP(I),TQ(I),DR(I),DS(I)
320 PRINT I,E(I),IN(I),LO(I),W(I),TP(I),TQ(I),DR(I),DS(I)
330 NEXT I
340 PRINT
350 PRINT "CARGAS CONCENTRADAS Y CARGAS DE EMPOTRAMIENTO"
360 FOR I=1 TO NG
370 READ I,P(I)
380 PRINT I,P(I)
390 NEXT I
400 PRINT
410 PRINT "BARRA, MOMENTO EN EL EXTREMO LIBRE DE LA BARRA"
420 DIM MO(NBDER)
430 PRINT
440 PRINT
450 PRINT "LECTURA DE DATOS DEL SUELO"
460 PRINT "N = NUMERO DE NUDOS DE LA RETICULA =",N,"NE = NUMERO DE ESTRATOS =",NE
```

```

470 DIM XP(N), YP(N), XI(N,4), XF(N,4), YI(N,4), YF(N,4), Z(NE), H(NE), MZ(NE), A(N), INF(
N,NE,N), AI(N,4), LR(N), X(NG), NAI(N), FLE(N,N)
480 PRINT "DATOS GEOMETRICOS"
490 PRINT "AREAS INTERNAS EN CADA NUDO"
500 PRINT "NUDO, NUMERO DE AREAS INTERNAS"
510 FOR I=1 TO N
520 READ I,NAI(I)
530 PRINT I,NAI(I);
540 NEXT I
550 PRINT
560 PRINT "(XP,YP):COORDENADAS DEL PUNTO, (XI,YI):COORDENADAS INICIALES DE LA CA
RGA REPARTIDA, (XF,YF):COORDENADAS FINALES DE LA CARGA REPARTIDA, LR:LONGITUD DE
LA REACCION r, A: AREA DE LA REACCION r, BR: ANCHO EQUIVALENTE DE LA REACCION r
"
570 PRINT "I,K1,XP,YP,XI,XF,YI,YF,LR"
580 FOR I=1 TO N
590 SUM=0
600 NA=NAI(I)
610 FOR K1=1 TO NA
620 READ I,K1,XP(I),YP(I),XI(I,K1),XF(I,K1),YI(I,K1),YF(I,K1)
630 PRINT I,K1,XP(I),YP(I),XI(I,K1),XF(I,K1),YI(I,K1),YF(I,K1)
640 A1(I,K1)=(XF(I,K1)-XI(I,K1))*(YF(I,K1)-YI(I,K1))
650 SUM=SUM+A1(I,K1)
660 NEXT K1
670 A(I)=SUM
680 NEXT I
690 PRINT "PUNTO, ESTRATO, PROFUNDIDAD, ESPESOR, MODULO DE DEFORMACION"
700 FOR J=1 TO NE
710 READ J,H(J),Z(J),MZ(J)
720 PRINT J,H(J),Z(J),MZ(J)
730 NEXT J
740 PRINT "LR = LONGITUD DE LA REACCION r"
750 FOR I=1 TO N
760 READ I,LR(I)
770 PRINT I,LR(I);
780 PRINT
790 NEXT I
800 PRINT "CALCULO DE LOS VALORES DE INFLUENCIA"
810 PRINT "PUNTO, ESTRATO, CARGA, VALOR DE INFLUENCIA"
820 FOR I=1 TO N
830 FOR J=1 TO NE
840 Z=Z(J)
850 FOR K=1 TO N
860 SUM=0
870 NA=NAI(I)
880 FOR K1=1 TO NA
890 X=XP(I)-XI(K,K1): Y=YP(I)-YI(K,K1)
900 GOSUB 2760
910 SIGZI=SIGZ
920 X=XP(I)-XF(K,K1)
930 GOSUB 2760
940 SIGZII=SIGZ
950 X=XP(I)-XI(K,K1): Y=YP(I)-YF(K,K1)
960 GOSUB 2760
970 SIGZIII=SIGZ
980 X=XP(I)-XF(K,K1)
990 GOSUB 2760
1000 SIGZIV=SIGZ
1010 SUM=SUM+ABS(SIGZI-SIGZII-SIGZIII+SIGZIV)
1020 NEXT K1
1030 INF(I,J,K)=SUM
1040 NEXT K
1050 NEXT J
1060 NEXT I
1070 REM FORMACION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ
1080 PRINT "BARRAS ARTICULADAS A LA IZQUIERDA"

```

```

1090 FOR M=1 TO NBIZQ
1100 J=TG(M):K=DR(M):L=DS(M)
1110 A1=3*E(M)*IN(M)/LO(M): A2=3*E(M)*IN(M)/LO(M)^2: A3=3*E(M)*IN(M)/LO(M)^3
1120 KR(J,J)=KR(J,J)+A1: KR(J,K)=KR(J,K)-A2: KR(J,L)=KR(J,L)+A2
1130 KR(K,K)=KR(K,K)+A3: KR(K,L)=KR(K,L)-A3: KR(L,L)=KR(L,L)+A3
1140 KR(K,J)=KR(J,K): KR(L,J)=KR(J,L): KR(L,K)=KR(K,L)
1150 VE(J)=VE(J)-(W(M)*LO(M)^2)/8: VE(K)=VE(K)-3*W(M)*LO(M)/8: VE(L)=VE(L)-5*W(M)
)*LO(M)/8
1160 L1=LO(M): L2=L1^2
1170 CR(J,K)=CR(J,K)+(7/128)*L2: CR(J,L)=CR(J,L)+(9/128)*L2
1180 CR(K,K)=CR(K,K)+(41/128)*L1: CR(K,L)=CR(K,L)+(7/128)*L1
1190 CR(L,K)=CR(L,K)+(23/128)*L1: CR(L,L)=CR(L,L)+(57/128)*L1
1200 NEXT M
1210 PRINT "BARRAS ARTICULADAS A LA DERECHA"
1220 FOR M=NBIZQ+1 TO NBER
1230 I=TP(M):K=DR(M):L=DS(M)
1240 A1=3*E(M)*IN(M)/LO(M): A2=3*E(M)*IN(M)/LO(M)^2: A3=3*E(M)*IN(M)/LO(M)^3
1250 KR(I,I)=KR(I,I)+A1: KR(I,K)=KR(I,K)-A2: KR(I,L)=KR(I,L)+A2
1260 KR(K,K)=KR(K,K)+A3: KR(K,L)=KR(K,L)-A3: KR(L,L)=KR(L,L)+A3
1270 KR(K,I)=KR(I,K): KR(L,I)=KR(I,L): KR(L,K)=KR(K,L)
1280 VE(I)=VE(I)+(W(M)*LO(M)^2)/8: VE(K)=VE(K)-5*W(M)*LO(M)/8: VE(L)=VE(L)-3*W(M)
)*LO(M)/8
1290 L1=LO(M): L2=L1^2
1300 CR(I,K)=CR(I,K)-(9/128)*L2: CR(I,L)=CR(I,L)-(7/128)*L2
1310 CR(K,K)=CR(K,K)+(57/128)*L1: CR(K,L)=CR(K,L)+(23/128)*L1
1320 CR(L,K)=CR(L,K)+(7/128)*L1: CR(L,L)=CR(L,L)+(41/128)*L1
1330 NEXT M
1340 PRINT "BARRAS DOBLEMENTE ARTICULADAS"
1350 PRINT "BARRAS CONTINUAS"
1360 FOR M=NBART+1 TO NBC
1370 I=TP(M): J=TQ(M): K=DR(M): L=DS(M)
1380 L1=LO(M): L2=L1^2: L3=L1^3: W1=W(M)
1390 A1=4*E(M)*IN(M)/L1: A2=6*E(M)*IN(M)/L2: A3=12*E(M)*IN(M)/L3
1400 KR(I,I)=KR(I,I)+A1: KR(I,J)=KR(I,J)+A1/2: KR(I,K)=KR(I,K)-A2: KR(I,L)=KR(I,
L)+A2: KR(J,J)=KR(J,J)+A1: KR(J,K)=KR(J,K)-A2: KR(J,L)=KR(J,L)+A2
1410 KR(K,K)=KR(K,K)+A3: KR(K,L)=KR(K,L)-A3: KR(L,L)=KR(L,L)+A3
1420 KR(J,I)=KR(I,J): KR(K,I)=KR(I,K): KR(L,I)=KR(I,L): KR(K,J)=KR(J,K): KR(L,J)
)=KR(J,L): KR(L,K)=KR(K,L)
1430 VE(I)=VE(I)+W1*L2/12: VE(J)=VE(J)-W1*L2/12: VE(K)=VE(K)-W1*L1/2: VE(L)=VE(L)
)-W1*L1/2
1440 CR(I,K)=CR(I,K)-(11/192)*L2: CR(I,L)=CR(I,L)-(5/192)*L2: CR(J,K)=CR(J,K)+(5
/192)*L2: CR(J,L)=CR(J,L)+(11/192)*L2
1450 CR(K,K)=CR(K,K)+(13/32)*L1: CR(K,L)=CR(K,L)+(3/32)*L1: CR(L,K)=CR(L,K)+(3/3
2)*L1: CR(L,L)=CR(L,L)+(13/32)*L1
1460 NEXT M
1470 PRINT "BARRAS DE LA SUPERESTRUCTURA"
1480 FOR M=NEC+1 TO NBSE
1490 I=TP(M): J=TQ(M): K=DR(M): L=DS(M)
1500 L1=LO(M): L2=L1^2: L3=L1^3: W1=W(M)
1510 A1=4*E(M)*IN(M)/L1: A2=6*E(M)*IN(M)/L2: A3=12*E(M)*IN(M)/L3
1520 KR(I,I)=KR(I,I)+A1: KR(I,J)=KR(I,J)+A1/2: KR(I,K)=KR(I,K)-A2: KR(I,L)=KR(I,
L)+A2: KR(J,J)=KR(J,J)+A1: KR(J,K)=KR(J,K)-A2: KR(J,L)=KR(J,L)+A2
1530 KR(K,K)=KR(K,K)+A3: KR(K,L)=KR(K,L)-A3: KR(L,L)=KR(L,L)+A3
1540 KR(J,I)=KR(I,J): KR(K,I)=KR(I,K): KR(L,I)=KR(I,L): KR(K,J)=KR(J,K): KR(L,J)
)=KR(J,L): KR(L,K)=KR(K,L)
1550 VE(I)=VE(I)+W1*L2/12: VE(J)=VE(J)-W1*L2/12: VE(K)=VE(K)-W1*L1/2: VE(L)=VE(L)
)-W1*L1/2
1560 NEXT M
1570 PRINT "I, J, KR(I, J)"
1582 FOR I=1 TO 16
1584 FOR J=1 TO 16
1586 REM PRINT I, J, KR(I, J)
1588 NEXT J
1589 NEXT I
1590 PRINT
1592 REM NB=NO DE BARRAS, NG=GRADOS DE LIBERTAD, N=REACCIONES, NE=ESTRATOS,

```

```

CR=COCFICIENTE DE R. A=AREA DE LA CARGA R
1595 REM MATRIZ DE FLEXIBILIDADES DEL SUELO
1600 PRINT "FLE"
1610 FOR I=1 TO N
1620 FOR K1=1 TO N
1630 SUM=0
1640 FOR J=1 TO NE
1650 SUM=SUM+WZ(J)*H(J)*INF(I,J,K1)*LR(K1)/A(K1)
1660 NEXT J
1670 FLE(I,K1)=SUM
1680 NEXT K1
1690 NEXT I
1700 REM ENSAMBLE DE MATRICES DE ESTRUCTURA Y SUELO
1710 PRINT
1720 PRINT "CR"
1730 FOR I=1 TO NG
1740 FOR J=1 TO N
1750 SUM=0
1760 FOR K=1 TO N
1770 SUM=SUM+KR(I,K)*FLE(K,J)
1780 NEXT K
1790 CR(I,J)=CR(I,J)+SUM
1800 NEXT J
1810 NEXT I
1820 PRINT "B"
1830 DIM B(NG)
1840 FOR I=1 TO NG
1850 B(I)=-VE(I)-F(I)
1860 PRINT I,B(I)
1870 NEXT I
1880 N1=N
1890 REM SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES
1900 FOR I=1 TO NG
1910 FOR J=N+1 TO NG
1920 CR(I,J)=KR(I,J)
1930 NEXT J
1940 NEXT I
1950 GOSUB 2800
1960 GOSUB 3230
1970 PRINT
1980 PRINT "GRADO DE LIBERTAD, REACCION HASTA N=",N1," ,GIROS LOS SIGUIENTES"
1990 FOR I=1 TO NG
2000 PRINT I,X(I);
2010 NEXT I
2020 PRINT
2030 PRINT
2040 PRINT "NUDO, HUNDIMIENTO DEL NUDO"
2050 DIM D(NGEM)
2060 FOR I=1 TO N1
2070 SUM=0
2080 FOR J=1 TO N1
2090 SUM=SUM+FLE(I,J)*X(J)
2100 NEXT J
2110 D(I)=SUM
2120 PRINT I,D(I);
2130 NEXT I
2140 PRINT
2150 PRINT
2160 PRINT "BARRA, GRADO DE LIBERTAD, MOMENTO O CORTANTE EN EL NUDO"
2170 DIM V(NGEN,NBSE)
2180 FOR N=1 TO NBIZO
2190 J=TO(N):K=DR(N):L=DS(N)
2200 A1=3*E(N)*IN(M)/LO(N): A2=3*E(N)*IN(M)/LO(M)^2: A3=3*E(N)*IN(M)/LO(M)^3
2210 W1=W(N): L1=LO(M): L2=L1^2
2220 V(J,M)=-W1*L2/8+A1*X(J)-A2*D(K)+A2*D(L)+(7/128)*L2*X(K)+(9/128)*L2*X(L)
2230 V(K,M)=-3*W1*L1/8-A2*X(J)+A3*D(K)-A3*D(L)+(41/128)*L1*X(K)+(7/128)*L1*X(L)

```

```

2240 V(L,M)=-5*W1*L1/8+A2*X(J)-A3*D(K)+A3*D(L)+(23/128)*L1*X(K)+(57/128)*L1*X(L)
2250 PRINT M,J,V(J,M),K,V(K,M),L,V(L,M)
2260 NEXT M
2270 FOR M=NBIZO+1 TO NBDER
2280 I=TP(M):K=DR(M):L=DS(M)
2290 A1=3*E(M)*IN(M)/LO(M):A2=3*E(M)*IN(M)/LO(M)^2:A3=3*E(M)*IN(M)/LO(M)^3
2300 W1=W(M):L1=LO(M):L2=L1^2
2310 V(I,M)=W1*L2/8+A1*X(I)-A2*D(K)+A2*D(L)-(9/128)*L2*X(K)-(7/128)*L2*X(L)
2320 V(K,M)=-5*W1*L1/8-A2*X(I)+A3*D(K)-A3*D(L)+(57/128)*L1*X(K)+(23/128)*L1*X(L)
2330 V(L,M)=-3*W1*L1/8+A2*X(I)-A3*D(K)+A3*D(L)+(7/128)*L1*X(K)+(41/128)*L1*X(L)
2340 PRINT M,I,V(I,M),K,V(K,M),L,V(L,M)
2350 NEXT M
2360 FOR M=NBART+1 TO NBC
2370 I=TP(M):J=TQ(M):K=DR(M):L=DS(M)
2380 W1=W(M):L1=LO(M):L2=L1^2:L3=L1^3
2390 A1=4*E(M)*IN(M)/L1:A2=6*E(M)*IN(M)/L2:A3=12*E(M)*IN(M)/L3
2400 V(I,M)=W1*L2/12+A1*X(I)+A1*X(J)/2-A2*D(K)+A2*D(L)-(11/192)*L2*X(K)-(5/192)*
L2*X(L)
2410 V(J,M)=-W1*L2/12+A1*X(I)/2+A1*X(J)-A2*D(K)+A2*D(L)+(5/192)*L2*X(K)+(11/192)
*L2*X(L)
2420 V(K,M)=-W1*L1/2-A2*X(I)-A2*X(J)+A3*D(K)-A3*D(L)+(13/32)*L1*X(K)+(3/32)*L1*X
(L)
2430 V(L,M)=-W1*L1/2+A2*X(I)+A2*X(J)-A3*D(K)+A3*D(L)+(3/32)*L1*X(K)+(13/32)*L1*X
(L)
2440 PRINT M,I,V(I,M),J,V(J,M),K,V(K,M),L,V(L,M)
2450 NEXT M
2451 FOR I=N1+1 TO NG
2452 D(I)=X(I)
2453 NEXT I
2460 FOR M=NBC+1 TO NBSE
2470 I=TP(M):J=TQ(M):K=DR(M):L=DS(M)
2480 W1=W(M):L1=LO(M):L2=L1^2:L3=L1^3
2490 A1=4*E(M)*IN(M)/L1:A2=6*E(M)*IN(M)/L2:A3=12*E(M)*IN(M)/L3
2500 V(I,M)=W1*L2/12+A1*X(I)+A1*X(J)/2-A2*D(K)+A2*D(L)
2510 V(J,M)=-W1*L2/12+A1*X(I)/2+A1*X(J)-A2*D(K)+A2*D(L)
2520 V(K,M)=-W1*L1/2-A2*X(I)-A2*X(J)+A3*D(K)-A3*D(L)
2530 V(L,M)=-W1*L1/2+A2*X(I)+A2*X(J)-A3*D(K)+A3*D(L)
2540 PRINT M,I,V(I,M),J,V(J,M),K,V(K,M),L,V(L,M)
2550 NEXT M
2560 PRINT "EQUILIBRIO DE FUERZAS VERTICALES"
2570 SUM=0
2580 FOR I=1 TO NBSE
2590 SUM=SUM+LO(I)*W(I)
2600 NEXT I
2610 PESO1=SUM
2620 SUM=0
2630 FOR I=1 TO N1
2640 SUM=SUM+P(I)
2650 NEXT I
2660 PESO2=ABS(SUM)
2670 PESO=PESO1+PESO2
2680 PRINT "PESO TOTAL =", PESO
2690 SUM=0
2700 FOR I=1 TO N1
2710 SUM=SUM+X(I)*LR(I)
2720 NEXT I
2730 REAC=SUM
2740 PRINT "REACCION TOTAL =", REAC
2750 END
2760 REM ECUACION DE DAMY
2770 R=SQR(X^2+Y^2+Z^2)
2780 SIGZ=((1/(X^2+Z^2)+1/(Y^2+Z^2))*X*Y*Z/R+ATN(X*Y/(Z*R)))/6.2832
2790 RETURN
2800 REM SUBROUTINA DECOMP
2810 N=NG
2820 FOR I=1 TO N

```

```

2830 IPS(I)=1: ROWN=0!
2840 FOR J=1 TO N
2850 IF ROWN>=ABS(CR(I,J)) THEN 2870
2860 ROWN=ABS(CR(I,J))
2870 NEXT J
2880 IF ROWN=0 THEN 2910
2890 SCAL(I)=1/ROWN
2900 GOTO 2940
2910 M=1
2920 GOSUB 3420
2930 SCAL(I)=0!
2940 NEXT I
2950 REM ELIMINACION GAUSSIANA CON PIVOTEO PARCIAL
2960 NM1=N-1
2970 FOR K=1 TO NM1
2980 BIG=0!
2990 FOR I=K TO N
3000 IP=IPS(I): SIZE=ABS(CR(IP,K))*SCAL(IP)
3010 IF SIZE<=BIG THEN 3030
3020 BIG=SIZE: IDXP=I
3030 NEXT I
3040 IF BIG<>0 THEN 3080
3050 M=2
3060 GOSUB 3420
3070 GOTO 3170
3080 IF IDXP=K THEN 3100
3090 J=IPS(K): IPS(K)=IPS(IDXP): IPS(IDXP)=J
3100 KP=IPS(K): PIVO=CR(KP,K)
3110 FOR I=K+1 TO N
3120 IP=IPS(I): EM=-CR(IP,K)/PIVO: CR(IP,K)=-EM
3130 FOR J=K+1 TO N
3140 CR(IP,J)=CR(IP,J)+EM*CR(KP,J)
3150 NEXT J
3160 NEXT I
3170 NEXT K
3180 KP=IPS(N)
3190 IF (CR(KP,N))<>0 THEN 3220
3200 M=2
3210 GOSUB 3420
3220 RETURN
3230 REM SUBROUTINA SOLVE
3240 N=NG: IP=IPS(1): X(1)=B(IP)
3250 FOR I=2 TO N
3260 IP=IPS(I): SUM=0!
3270 FOR J=1 TO I-1
3280 SUM=SUM+CR(IP,J)*X(J)
3290 NEXT J
3300 X(I)=B(IP)-SUM
3310 NEXT I
3320 IP=IPS(N): X(N)=X(N)/CR(IP,N)
3330 FOR IB=2 TO N
3340 I=N+1-IB: IP=IPS(I): SUM=0!
3350 REM I VA DESDE N-1 HASTA 1
3360 FOR J=I+1 TO N
3370 SUM=SUM+CR(IP,J)*X(J)
3380 NEXT J
3390 X(I)=(X(I)-SUM)/CR(IP,I)
3400 NEXT IB
3410 RETURN
3420 REM SUBROUTINA SING
3430 RETURN
3431 REM "N" = NUMERO DE NUDOS DE LA RETICULA =",N,"NG = NUMERO DE GRADOS DE LIBE
RTAD =",NG,"NBIZQ = NUMERO DONDE TERMINAN LAS BARRAS A LA IZQUIERDA =",NBIZQ,"NBD
ER = NUMERO DONDE TERMINAN LAS BARRAS A LA DERECHA="",NBDER
3432 REM "NBART = NUMERO DONDE TERMINAN LAS BARRAS DOBLEMENTE ARTICULADAS =",NBA
RT,"NBC = NUMERO DONDE TERMINAN LAS BARRAS CONTINUAS =",NBC,"NBSE = NUMERO DONDE

```




**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

ANALISIS ESTRUCTURAL

3. ANALISIS DE DEFORMACIONES EN LOS SUELOS.

ING. AGUSTIN DEMENEGHI COLINA.

3.1 Determinación de deformaciones en los suelos

Julio de 1991

3.1.1 Deformación de un suelo en el campo

Para ilustrar la forma de determinar las deformaciones del terreno de cimentación, consideremos un elemento de suelo que por peso propio está sometido al estado de esfuerzos mostrado en la fig 3.1a. Consideremos que este estado de esfuerzos se puede sustituir por una presión de confinamiento equivalente al esfuerzo normal en el plano octaédrico p_o , dada por el promedio de los tres esfuerzos normales

$$p_o = (1/3) (p_x + p_x + p_y) \quad (3.1)$$

Supongamos que las presiones horizontales p_x y p_y son iguales entre sí y proporcionales a la presión vertical p_z

$$p_x = p_y = K_o p_z$$

donde K_o es el coeficiente de presión en reposo del suelo. Sustituyendo en la ec 3.1

$$p_o = (1 + 2 K_o) p_z / 3 \quad (3.2)$$

La fig 3.1b muestra al elemento de suelo sometido a una presión de confinamiento equivalente p_o .

Supongamos ahora que se construye una cimentación y ésta ocasiona incrementos de esfuerzo normal σ_z , σ_x y σ_y en el elemento (fig 3.2). Estos incrementos de esfuerzo producen deformaciones verticales y horizontales en el elemento. En cimentaciones es usual que la deformación que interesa al ingeniero sea la deformación vertical δ_z del elemento. Existen varios métodos para determinar esta deformación; uno de ellos trata del empleo de la ley de Hooke, que consiste en lo siguiente

$$\epsilon_z = [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] / E \tag{3.3}$$

$$\delta_z = \epsilon_z H \tag{3.4}$$

donde ϵ_z = deformación unitaria del elemento
 E = módulo de elasticidad del material
 ν = relación de Poisson
 H = espesor del elemento

Los esfuerzos σ_x , σ_x y σ_y se pueden obtener con la teoría de Boussinesq, empleando las ecuaciones que se presentan en el inciso 3.4 de este capítulo.

3.1.2 Propiedades de deformación de los suelos

En los suelos ocurren diversos tipos de deformaciones: elástica, plástica, elastoplástica, viscosa, etc, por lo que el valor de E se tiene que tomar de acuerdo con el tipo de suelo y el fenómeno que se esté estudiando. Cabe aclarar que, dado que las relaciones esfuerzo-deformación en los suelos son no lineales, conviene con frecuencia trabajar con el módulo secante de deformación para determinar el valor de E correspondiente, utilizando niveles de esfuerzo lo más cercanos a la realidad.

A continuación veremos la forma de determinar los diferentes valores de E .

La determinación de las propiedades de deformación para el análisis de movimientos en una cimentación, se puede ilustrar considerando un elemento de suelo en una prueba de compresión triaxial, sometido al estado de esfuerzos que se muestra en la fig 3.3; consideremos adicionalmente que se trata de una arcilla saturada. Suponiendo que la probeta de suelo tiene un esfuerzo de confinamiento p_c y un esfuerzo desviador σ_r iniciales, primeramente se reduce el esfuerzo σ_r a cero (para representar la descarga por excavación, decremento de carga, etc), con lo que se obtiene el módulo de rebote elástico E .

del suelo (fig 3.4). A continuación, manteniendo aplicado el confinamiento p_c , se vuelve a aplicar el esfuerzo σ_r , con lo que se determina el módulo de recompresión E_{rc} (fig 3.4). Aplicando un esfuerzo de compresión σ_z se presentará un asentamiento adicional debido al incremento neto de carga $\sigma_n = \sigma_z - \sigma_r$, donde σ_z es el esfuerzo normal debido a la carga total de la estructura; a esta deformación se le puede denominar asentamiento por compresión; el módulo de deformación correspondiente será E_c (fig 3.4). Tenemos entonces tres módulos de deformación, a saber

$$E_c = \sigma_r / \epsilon_c$$

$$E_{rc} = \sigma_r / \epsilon_{rc}$$

$$E_c = \sigma_n / \epsilon_c$$

Dependiendo del tipo de deformación que se esté determinando, se emplea alguno de los módulos E_c , E_{rc} o E_c en la ley de Hooke de la ec 3.3.

Finalmente, y dado que el suelo es una arcilla saturada, manteniendo el esfuerzo σ_z constante se presentará una deformación a largo plazo ϵ_v^l (fig 3.4).

Vemos entonces que las propiedades de deformación para una cimentación se pueden determinar todas ellas en una prueba de compresión triaxial. Sin embargo, este tipo de ensaye resulta difícil de realizar en arcillas saturadas, debido fundamentalmente a que la deformación diferida ϵ_v^l toma mucho tiempo en esta prueba; por esta razón, las deformaciones debidas al incremento neto de carga, entre las que se encuentra la deformación a largo plazo, se determinan a partir de los resultados de una prueba de consolidación. Además, se ha observado que los módulos E_c y E_{rc} se pueden obtener a partir de una prueba de compresión no confinada, debido a que el esfuerzo efectivo cambia poco al ser extraída una muestra de arcilla saturada del terreno natural, es decir, se hace la consideración de que el esfuerzo efectivo en una prueba de compresión no confinada es aproximadamente igual al esfuerzo efectivo de campo. Con el módulo E_c se obtiene la componente elástica de la deformación debida al incremento neto de carga.

En resumen, la expansión por descarga y el asentamiento por recompresión se determinan con los módulos de rebote elástico y de recompresión, respectivamente, ambos obtenidos en una prueba de compresión no confinada. Con el módulo de rebote elástico se determina además la componente elástica de la deformación debida al incremento neto de presión de la cimentación. La componente plástica de la deformación instantánea, y la deformación diferida, ocasionadas por el incremento neto de carga de la cimentación, se determinan a partir de los resultados de una prueba de consolidación.

Las propiedades de deformación para la determinación de movimientos de la cimentación debidos a acciones sísmicas se obtienen a partir de ensayos de tipo dinámico como el péndulo de torsión (Zeevaert 1973), la columna resonante (Jaime et al 1987), etc.

En suelos friccionantes se sigue un procedimiento similar al de las arcillas, con la diferencia de que el efecto de la presión confinamiento es mayor y que el efecto del tiempo es mucho menor en estos materiales. Para suelos granulares existen procedimientos que toman en cuenta en forma explícita el efecto del confinamiento y que la relación esfuerzo-deformación en ellos es de tipo no lineal; una de estas técnicas se presenta en el inciso 3.7 de este capítulo (Deméneghi 1989).

3.2 Deformaciones permisibles

Las deformaciones calculadas deben compararse con las deformaciones permisibles de una cimentación, las cuales deben determinarse para cada estructura en particular. Por ejemplo, el asentamiento total y los asentamientos diferenciales de una cimentación dependen de la opinión de las siguientes personas involucradas en el diseño de la cimentación (Zeevaert 1991)

- a) Propietario del inmueble
- b) Inquilino
- c) Ingeniero estructurista
- d) Arquitecto
- e) Autoridad municipal

- f) Compañía de seguros
- g) Opinión pública

Por lo tanto, con el concurso de opinión de las personas mencionadas, se llegan a definir los movimientos permisibles de una cimentación.

Sin embargo, para que el lector se dé una idea de los asentamientos permisibles, y únicamente para fines de anteproyecto se presentan los valores de la tabla 3.1 (Sowers 1962).

3.3 Estados límite de servicio

Los reglamentos de construcción especifican los diferentes movimientos que se deben revisar en una cimentación, los cuales dependen de cada caso particular. Por ejemplo, las Normas de Cimentaciones del Distrito Federal establecen que para una cimentación compensada se deben revisar los estados límite de servicio que se indican a continuación. Cabe aclarar que este criterio se puede aplicar en general a cimentaciones superficiales, profundas, etc, con las modalidades propias de cada cimentación.

a) Desplazamientos instantáneos del suelo de cimentación

Los desplazamientos instantáneos en suelos finos saturados se pueden calcular utilizando la ley de Hooke (ec 3.3), considerando que la deformación del suelo ocurre a volumen aproximadamente constante. Véase el ejemplo 6.1, donde se trata el cálculo de expansiones y asentamientos por recompresión, considerándolos como movimientos instantáneos.

Los suelos granulares, debido a su permeabilidad relativamente alta, experimentan movimientos instantáneos de magnitud alta comparados con los desplazamientos diferidos. La determinación de deformaciones en suelos granulares se puede ver en los ejemplos 3.1, 5.4 y 5.5.

b) Deformaciones transitorias y permanentes del terreno de cimentación

Las propiedades de deformación para la determinación de deformaciones transitorias de la cimentación debidas a acciones sísmicas se obtienen a partir de ensayos de tipo dinámico como el péndulo de torsión (Zeevaert 1973), la columna resonante (Jaime et al), etc.

En la obtención de las deformaciones permanentes de un suelo ocasionadas por un sismo, el fenómeno de la repetición de carga es importante; por lo tanto, deben determinarse, en muestras en el laboratorio, las deformaciones permanentes acumuladas por la repetición de cargas. En forma aproximada y únicamente para fines de anteproyecto, se pueden emplear las siguientes expresiones

$$\delta_{pN} = \delta_p (1 + a \log N) \tag{3.5}$$

- donde δ_{pN} = deformación permanente debida a N repeticiones de carga
- δ_p = deformación permanente correspondiente a la primera aplicación de carga
- N = número de repeticiones de carga
- a = coeficiente que depende del tipo de suelo. Para suelos granulares a = 0.25
- log = logaritmo decimal (base 10)

c) Asentamiento diferido debido al incremento neto de carga

Considerando que la presión efectiva en una arcilla saturada no cambia en forma importante por una excavación, el asentamiento a largo plazo se calcula entonces empleando el incremento neto de carga, el cual es el resultado de sustraer de la presión o carga total transmitida al suelo por una subestructura o un elemento de ella, la presión o carga total previamente existente en el suelo al nivel de desplante (RCDF 1976). Además, si el terreno de cimentación consiste en arcilla, el asentamiento debido a cedencia lateral de suelo es usualmente pequeño en comparación con el asentamiento total; por esta razón, aun el asentamiento de cimentaciones en estratos de gran espesor de arcilla puede ser evaluado por métodos basados en

deformación unidimensional (Terzaghi y Peck 1967, art 41); es decir, para calcular los asentamientos diferidos únicamente hay que utilizar el esfuerzo normal vertical σ_z .

En el ejemplo 6.1 se presenta la valuación del asentamiento a largo plazo en una cimentación compensada. Cabe aclarar que si se desea obtener adicionalmente la evolución del hundimiento, se puede emplear la teoría de consolidación de Terzaghi-Zeevaert que considera adicionalmente la componente de deformación por viscosidad intergranular (consolidación secundaria); véase para esto Zeevaert (1985).

3.4 Incrementos de esfuerzo en la masa de suelo ocasionados por una carga repartida aplicada en la superficie

3.4.1 Carga uniforme

A continuación se presentan las expresiones para determinar los esfuerzos normales verticales bajo la esquina de un rectángulo sometido a una carga uniforme q aplicada en la superficie (fig 3.5).

Para σ_z (Damy 1985)

$$\sigma_z = \frac{q}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} \right) \frac{x-y-z}{A} + \text{ang tan } \frac{x-y}{z} \right] \quad (3.6)$$

Para σ_x y σ_y (Dashkó y Kagán 1980)

$$\sigma_x = \frac{q}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{x-y-z}{(x^2 + z^2) A} - \text{ang tan } \frac{z}{x} \frac{A}{y} + (1 - 2\nu) (\text{ang tan } y/x - \text{ang tan } \frac{y}{x} \frac{A}{z}) \right] \quad (3.7)$$

$$\sigma_y = \frac{q}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{x-y-z}{(y^2 + z^2) A} - \text{ang tan } \frac{z}{y} \frac{A}{x} + (1 - 2\nu) (\text{ang tan } x/y - \text{ang tan } \frac{x}{y} \frac{A}{z}) \right] \quad (3.8)$$

$$A = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (3.9)$$

3.4.2 Carga triangular

Cuando la carga que se aplica en la superficie es de tipo triangular (fig 3.6), se pueden utilizar las fórmulas de Hamilton Gray (Juárez Badillo y Rico 1980)

Bajo el punto A

$$\sigma_{zA} = \left[\frac{p L}{2 \pi B} \right] \left(\frac{z \sqrt{L^2 + B^2 + z^2}}{L^2 + z^2} - \frac{z}{\sqrt{L^2 + z^2}} + \right. \\ \left. + (B/L) \operatorname{ang} \operatorname{sen} \frac{B L}{\sqrt{B^2 L^2 + B^2 z^2 + L^2 z^2 + z^4}} \right) \quad (3.10)$$

Bajo el punto B

$$\sigma_{zB} = \left[\frac{p L}{2 \pi B} \right] \left(\frac{z}{\sqrt{L^2 + z^2}} - \frac{z^3}{(B^2 + z^2) \sqrt{B^2 + L^2 + z^2}} \right) \quad (3.11)$$

donde L es la longitud de la carga triangular.

3.5 Cimientos sujetos a carga vertical y momento

3.5.1 Reacción del terreno trapecial

En numerosas ocasiones en la práctica un cimiento se ve sometido a carga vertical y momento. Por ejemplo, una columna le trasmite usualmente a una zapata aislada carga vertical y momento. El efecto de un sismo se traduce en fuerzas cortantes y momentos al nivel de cimentación; así, un edificio alto desplantado sobre una losa de apoyo o un cajón de cimentación, en una región sísmica trasmite al terreno de cimentación un fuerte momento de volteo, el cual ocasiona deformaciones en dicho terreno que pueden llegar a ser muy importantes. Por lo tanto, se hace necesario determinar las deformaciones del suelo ocasionadas por una fuerza vertical y un

momento de volteo, tema que trataremos en este inciso.

Consideremos un cimiento sometido al sistema de cargas de la fig 3.7, y supongamos que la reacción del terreno es la suma de una reacción uniforme debida a la carga Q, y a una reacción debida al momento M. La reacción uniforme se obtiene del cociente Q/A, siendo A el rea del cimiento, mientras que la reacción provocada por el momento se obtiene en forma aproximada utilizando la fórmula de la escuadría: $\Delta\sigma = (M/I)$ y . Observamos que la reacción del suelo se calcula entonces con la siguiente expresión

$$\sigma = Q/A \pm (M/I) y$$

donde I = momento de inercia de la planta de la cimentación
y = distancia del centroide del área de la cimentación a la fibra donde se esté calculando el esfuerzo

En los puntos extremos A y B del cimiento los esfuerzos se calculan

$$\sigma_a = Q/A + (M/I) B/2 \tag{3.12}$$

$$\sigma_b = Q/A - (M/I) B/2 \tag{3.13}$$

Si el cimiento es rectangular de ancho B y longitud L

$$\sigma_a = Q / B L + 6 M / L B^2 \tag{3.14}$$

$$\sigma_b = Q / B L - 6 M / L B^2 \tag{3.15}$$

Por la tercera ley de Newton, la carga sobre el terreno es la de la fig 3.7, pero con sentido de arriba hacia abajo (fig 3.8).

Por lo tanto, para determinar las deformaciones del suelo provocadas por un cimiento con carga vertical y momento, es necesario determinar el estado de esfuerzo dentro de la masa de suelo ocasionado por la carga de tipo trapecial de la fig 3.8.

Cuando solo se desea determinar el esfuerzo normal vertical en la

masa de suelo, el problema se puede dividir en el de una carga rectangular σ_0 y de una carga triangular σ_0' (fig 3.8). El esfuerzo normal ocasionado por la primera se calcula con la fórmula de Damy (ec 3.6), mientras que para la carga triangular se pueden emplear las fórmulas de Hamilton Gray (fig 3.7, ecs 3.10 y 3.11).

Cuando se requiere conocer además del esfuerzo normal vertical σ_z , los esfuerzos normales horizontales σ_x y σ_y , el problema se puede resolver dividiendo la carga trapezoidal en un número n de cargas uniformes como se ilustra en la fig 3.9. Los esfuerzos buscados se obtienen aplicando las ecs 3.6 a 3.9, para cada una de las cargas uniformes en las que se dividió la carga trapezoidal.

3.5.2 Reacción triangular

Cuando el momento de volteo es alto, puede ocurrir que se presenten en un extremo esfuerzos teóricos de tensión entre cimiento y terreno (fig 3.10). En la realidad la resistencia a la tensión entre estos dos materiales es prácticamente nula, por lo que no existe dicha zona de tensión. Por lo anterior, se requiere determinar la reacción del terreno ignorando esta zona de tensión.

Supongamos una reacción triangular como la indicada en la fig 3.11. Por equilibrio de fuerzas verticales

$$\sigma_0 C / 2 = Q = \text{área del triángulo} \quad (3.16)$$

Tomando momentos con respecto a un eje que pasa por el punto A

$$\Sigma M_A = - Q C / 3 + Q B / 2 - M = 0$$

$$C = 1.5 B - 3 M / Q \quad (3.17)$$

$$\text{De la ec 3.16} \quad \sigma_0 = 2 Q / C \quad (3.18)$$

En consecuencia, dado un cimiento en el que las cargas Q y M ocasionan esfuerzos teóricos de tensión en el contacto entre terreno

y suelo, la reacción de este, supondiéndola triangular (fig 3.11), se obtiene utilizando la ec 3.17 para determinar la distancia C, y la ec 3.18 para obtener el esfuerzo σ_c .

Los esfuerzos en el interior del medio elástico, ocasionados por la carga triangular se hallan empleando las ecs 3.10 y 3.11 del inciso 3.4.2 anterior.

3.6 Fórmulas para deformaciones elásticas

3.6.1 Rectángulo cargado

Las deformaciones instantáneas en los suelos se pueden calcular de manera aproximada utilizando las expresiones que proporciona la teoría de la elasticidad.

El asentamiento de la superficie de un medio semiinfinito, homogéneo e isótropo, bajo la esquina de un rectángulo sometido a carga uniformemente repartida q, está dado por (Terzaghi 1943)

$$\delta = [q(1-\nu^2)/(\pi E)] \left(L \ln \frac{B + \sqrt{B^2 + L^2}}{L} + B \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + B^2}}{B} \right) \quad (3.19)$$

- donde B = ancho del rectángulo
- L = longitud del rectángulo
- E = módulo de elasticidad del medio
- ν = relación de Poisson del medio

Cuando el medio elástico tiene un espesor D, el asentamiento bajo la esquina de un rectángulo sometido a carga uniforme q está dado por (Juárez Badillo y Rico 1980)

$$\delta = [q(1-\nu^2)/E] \left[L \ln \frac{(B + \sqrt{L^2 + B^2}) \sqrt{L^2 + z^2}}{L (B + A)} + B \ln \frac{(L + \sqrt{L^2 + B^2}) \sqrt{B^2 + z^2}}{B (L + A)} \right] + (q/2\pi E) (1-\nu-2\nu^2) z \operatorname{ang} \tan \frac{L B}{z A} \quad (3.20)$$

$$A = \sqrt{L^2 + B^2 + z^2} \quad (3.21)$$

Cuando existe un medio estratificado como el de la fig 3.12, formado por n estratos de propiedades elásticas E y ν , el asentamiento de la superficie se puede calcular utilizando la ley de Hooke para cada estrato:

$$\epsilon_z = (1/E) [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \quad (3.22)$$

donde σ_z , σ_x y σ_y son los esfuerzos normales vertical y horizontales ocasionados por la carga aplicada en la superficie del medio, y ϵ_z es la deformación unitaria del estrato. La deformación, en unidades de longitud, del estrato está dada por

$$\delta = \epsilon_z H \quad (3.23)$$

donde H es el espesor del estrato.

La deformación de la superficie será la suma de las deformaciones de cada estrato.

3.6.2 Circulo cargado

En un círculo de radio R sometido a carga uniforme q en su superficie, el asentamiento bajo el centro está dado por (Zeevaert 1973)

$$\delta = [\pi (1 - \nu^2) R q] / 2 E \quad (3.24)$$

El giro del círculo ocasionado por un momento M vale (Richart el al 1970)

$$\theta = [3 (1 - \nu) M] / 8 G R^3 \quad (3.25)$$

en que $G = E / 2 (1 + \nu)$ (3.26)

Con las expresiones anteriores se pueden obtener las rigideces lineal y angular de un cimiento de planta circular. La rigidez lineal se define como la carga vertical entre el asentamiento que produce:

$$K_l = Q / \delta = 2 E R / (1 - \nu^2) \quad (3.27)$$

La rigidez angular se define como el cociente del momento entre el giro que produce:

$$K_\theta = M / \theta = 8 G R^3 / 3 (1 - \nu) \quad (3.28)$$

3.6.3 Giro de un rectángulo sometido a momento

El giro de un rectángulo sujeto a un momento M (fig 3.13) se puede calcular determinando la carga de tipo trapecial (ecs 3.14 y 3.15) o triangular (ecs 3.17 y 3.18) que actúa sobre el terreno. A continuación se divide la carga en un número n de cargas uniformes (fig 8) y se determinan los esfuerzos normales σ_z , σ_x y σ_y con las ecs 3.6 a 3.9, a la mitad de cada uno de los estratos del subsuelo. La deformación unitaria de cada estrato se obtiene aplicando la ley de Hooke (ec 3.22) y la deformación en unidades de longitud utilizando la ec 3.23. Esta operación se realiza bajo los puntos A y B de la fig 8, con lo que se determina, mediante la suma de las deformaciones de cada estrato, la deformación en la superficie. Con estos resultados se puede calcular el giro del rectángulo sometido a momento. En el ejemplo 6.1 se presenta una aplicación de este procedimiento.

En forma simplificada, se puede usar el siguiente artificio: se obtiene el momento de inercia del rectángulo I_r en el sentido que se está analizando, y se obtiene el radio equivalente a un círculo (Normas de Sismo 1987):

$$R = (4 I_r / \pi)^{1/4}$$

(3.29)

Con el radio equivalente R se emplea la ec 3.25 para determinar giro de la cimentación de planta rectangular.

Esfuerzos bajo el centro de un círculo sometido a una sobrecarga uniformemente repartida q (Yoder 1959)

$$\sigma_z = q \left[1 - \frac{z^3}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

$$\sigma_r = (q/2) \left[1 + 2\nu - 2(1 + \nu) \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{z^3}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

R = radio del círculo

Fórmula de Fröhlich para la determinación del giro de un cimiento corrido, apoyado sobre un medio elástico semiinfinito (Zeevaert 1973)

$$\theta = \text{ang tan} \left[\frac{16(1 - \nu^2) M'}{\pi E B^2} \right]$$

E = módulo de elasticidad

ν = relación de Poisson

B = ancho del cimiento

M' = momento por unidad de longitud

La fórmula de Fröhlich se recomienda cuando la longitud del cimiento es mayor o igual que tres veces el ancho del mismo.

Desplazamiento lateral producido por una fuerza lateral (horizontal)

$$s_h = \frac{(7 - 8\nu) Q_h}{32(1 - \nu) G R}$$

R = radio del círculo

37

TABLA 3.1
ASENTAMIENTOS PERMISIBLES

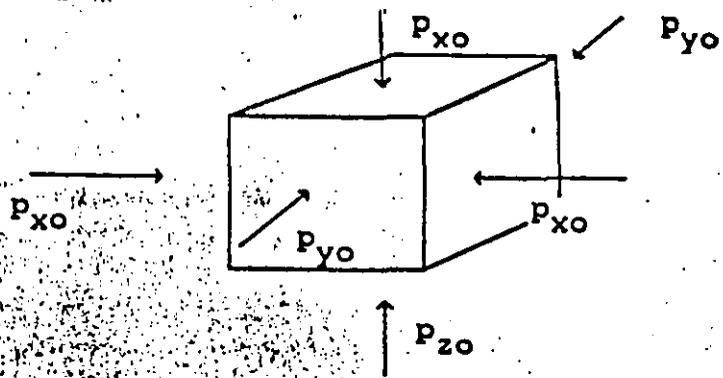
Asentamiento total permisible de la cimentación de una estructura, de tal forma que no se presente daño funcional en las siguientes instalaciones o elementos:

Obras de drenaje	15 a 30 cm
Accesos a la estructura	30 a 60 cm
Muros de mampostería	2.5 a 5 cm
Marcos estructurales de concreto o acero	5 a 10 cm
Losas o cajones de cimentación	7.5 a 30 cm

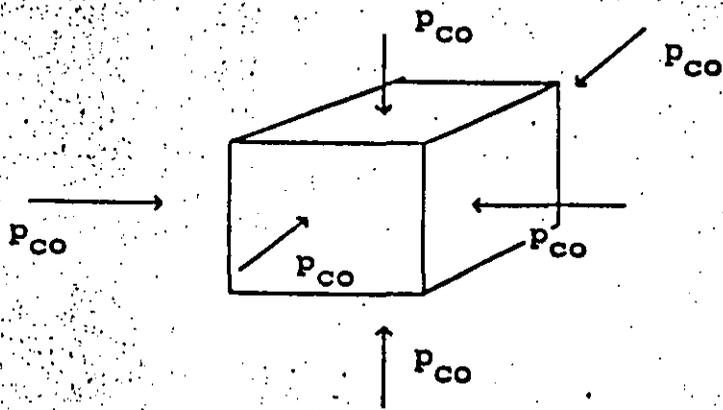
Los valores mayores son para asentamientos en terrenos de cimentación homogéneos y estructuras de buena calidad de construcción. Los valores menores son para asentamientos en terrenos de cimentación con estratigrafía errática y estructuras de regular calidad de construcción.

Tomado de Sowers (1962)

16



a) Estado de presión inicial



b) Presión de confinamiento equivalente

$$P_{co} = (1 + 2 K_o) P_{zo} / 3$$

FIG 3.1 PRESIÓN DE CONFINAMIENTO EQUIVALENTE

34.37

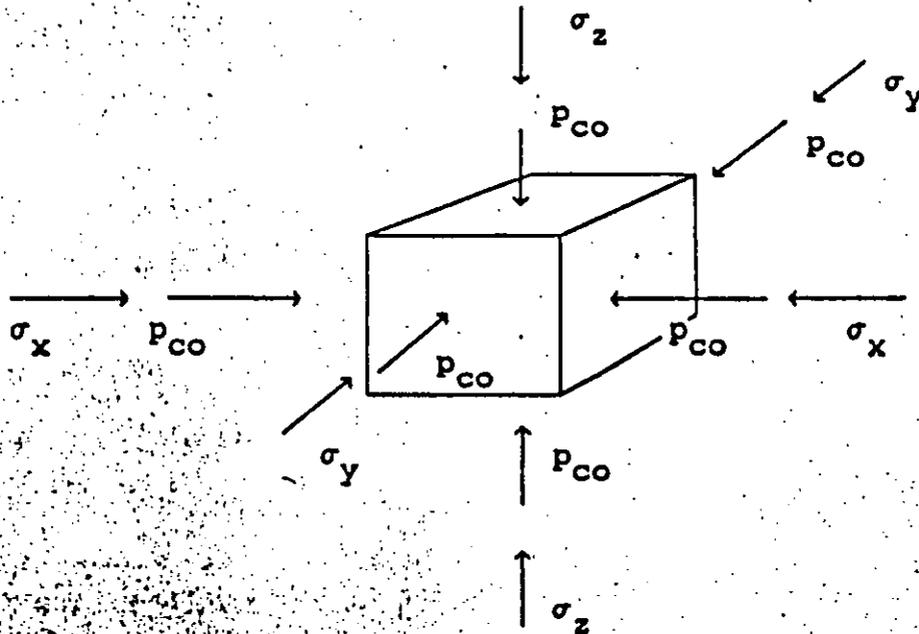


FIG 3.2 INCREMENTOS DE ESFUERZO σ_x , σ_x y σ_y SOBRE EL ELEMENTO

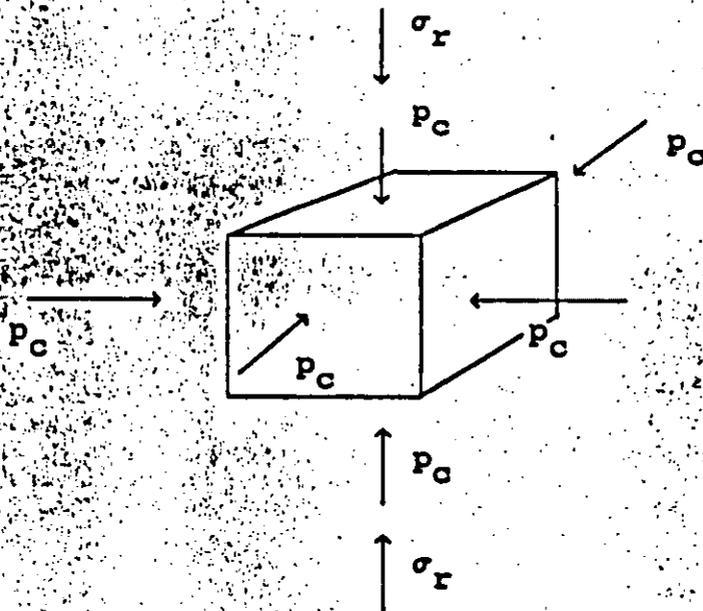
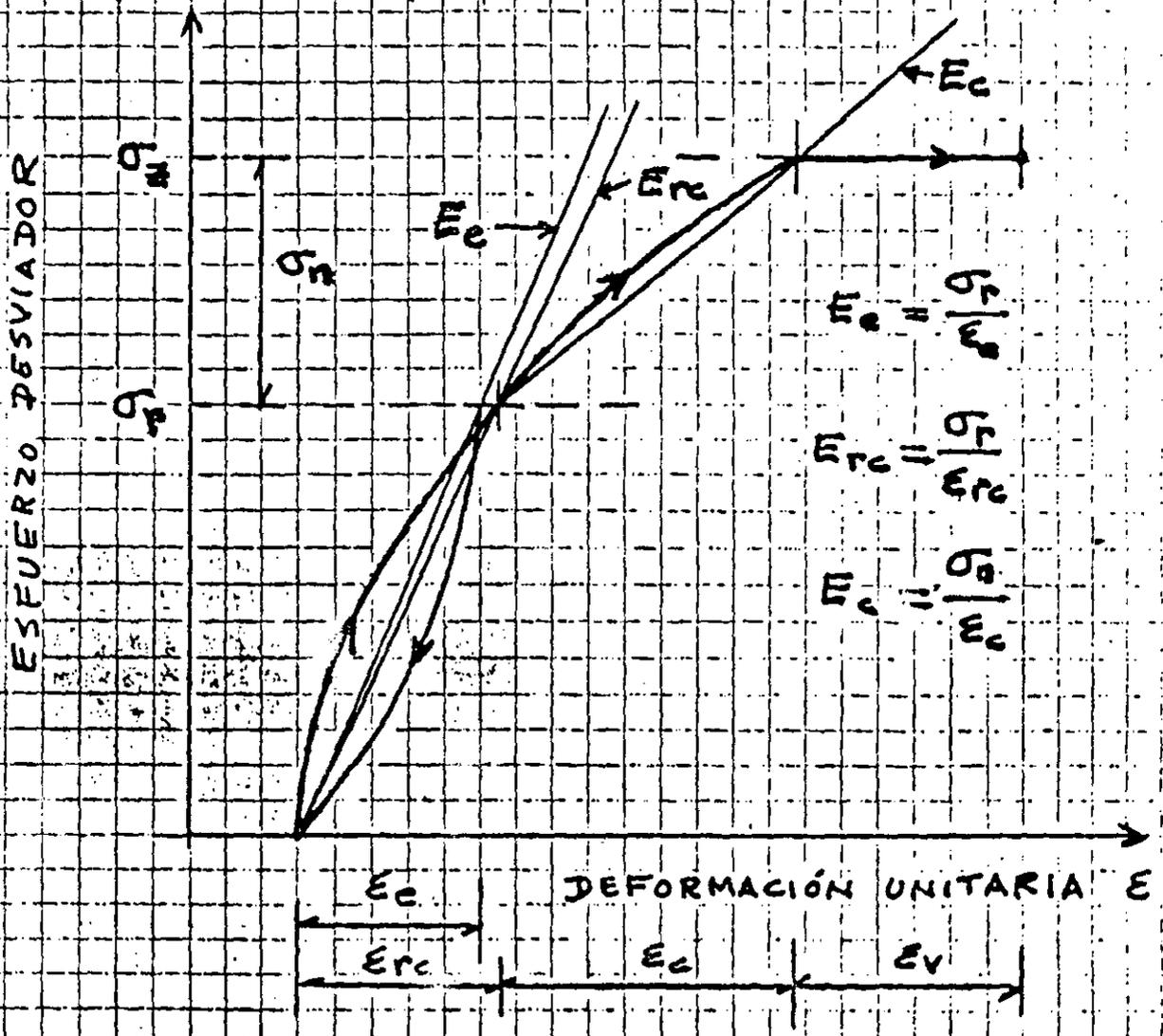
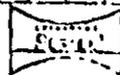


FIG 3.3 ELEMENTO DE SUELO EN UNA PRUEBA DE COMPRESIÓN TRIAXIAL



DETERMINACIÓN DE MÓDULOS DE DEFORMACIÓN

FIG 3.4



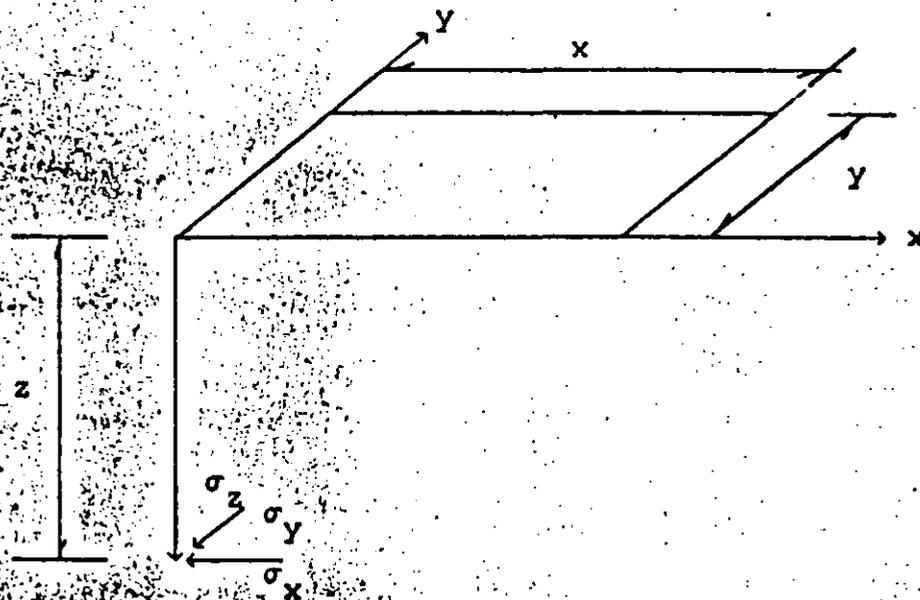


FIG 3.5 INCREMENTOS DE ESFUERZO NORMAL BAJO LA ESQUINA DE UN RECTÁNGULO CARGADO, EN UN MEDIO SEMIINFINITO

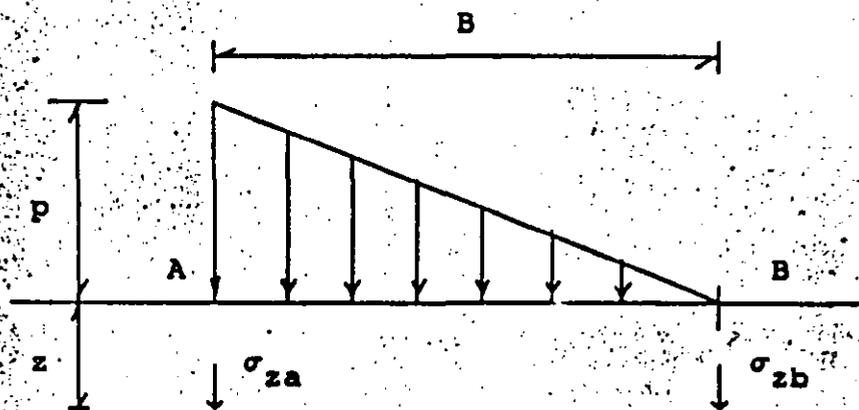


FIG 3.6 ESFUERZOS NORMALES OCASIONADOS POR UNA CARGA TRIANGULAR

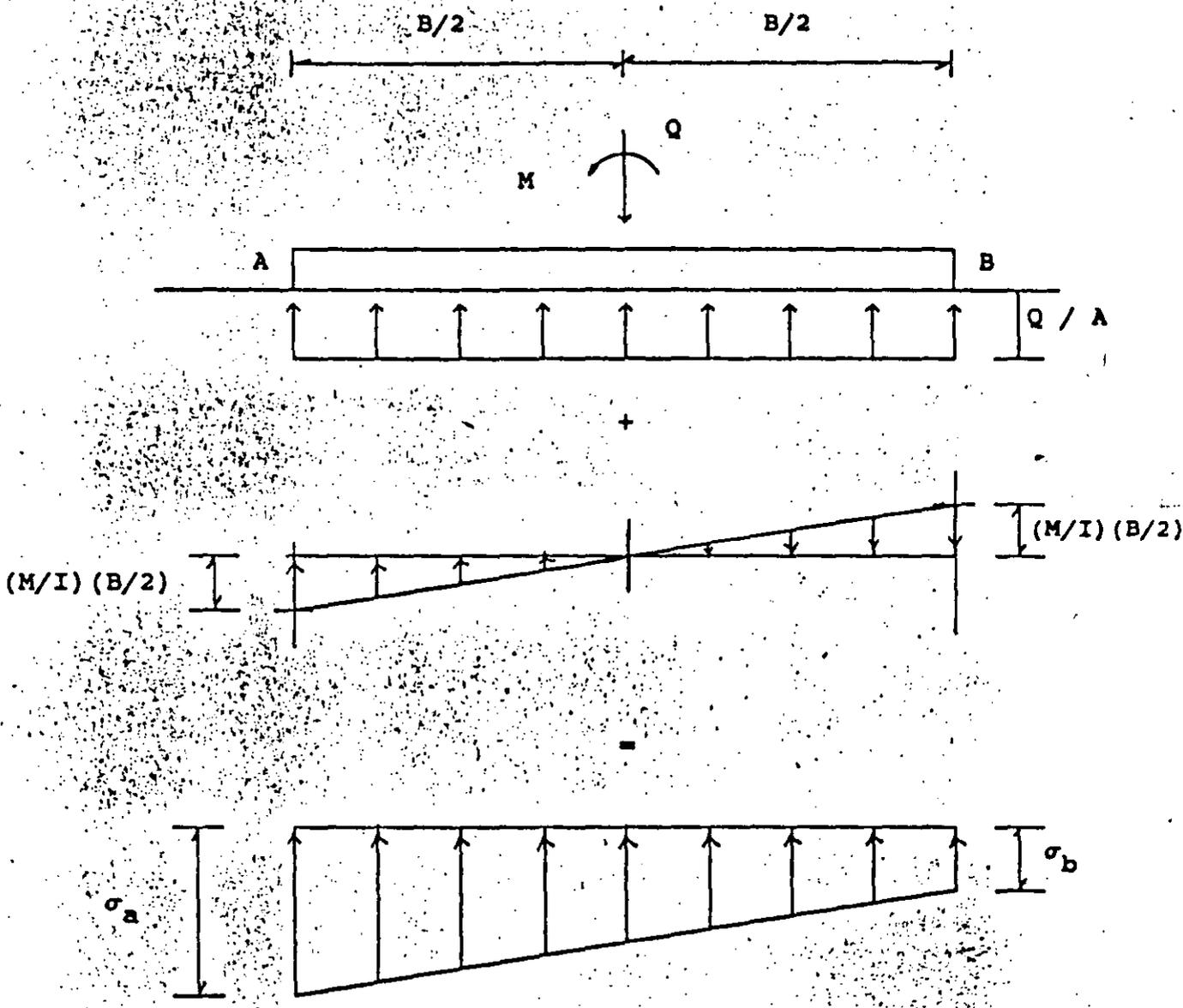


FIG 3.7 REACCIÓN DEL TERRENO. CIMIENTO SOMETIDO A CARGA VERTICAL Y MOMENTO

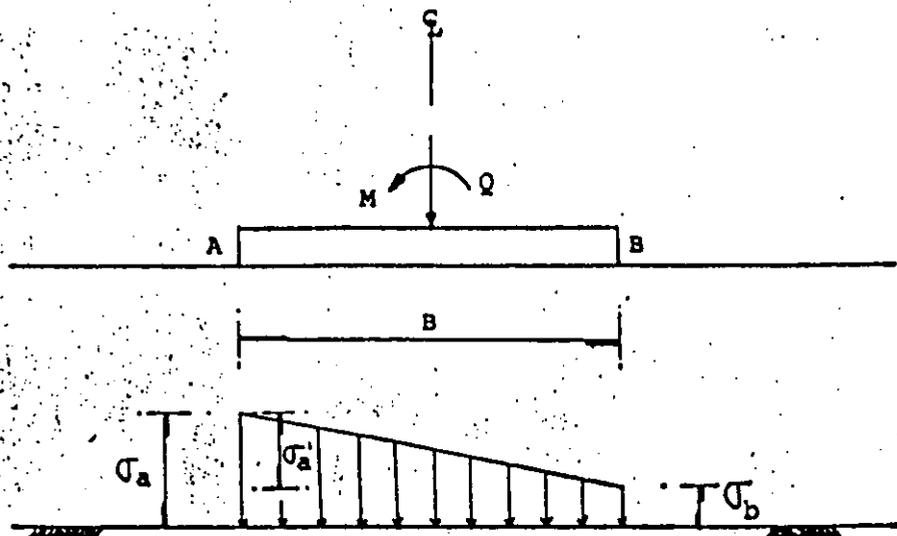


FIG. 3.8 CARGA TRAPEZIAL SOBRE EL TERRENO

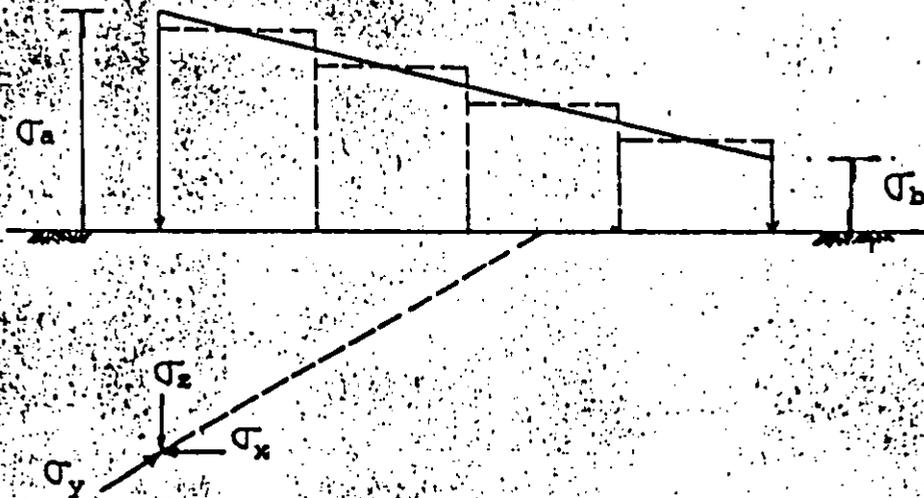


FIG. 3.9 CARGA TRAPEZIAL DIVIDIDA EN UN NUMERO n DE CARGAS UNIFORMES

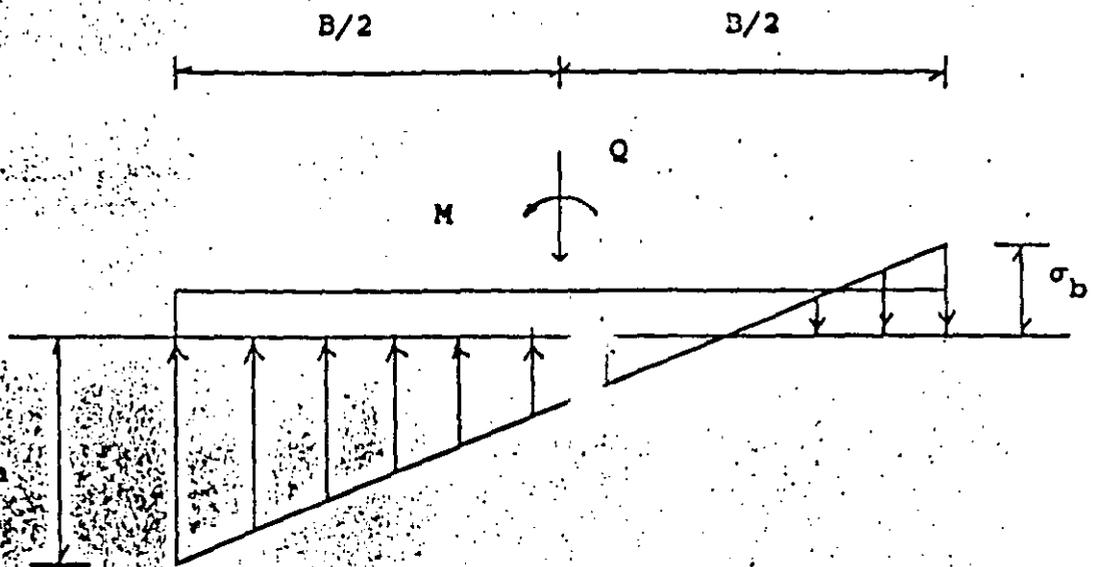


FIG 3.10 ESFUERZOS TEÓRICOS DE TENSIÓN EN EL CONTACTO CIMENTO-SUELO

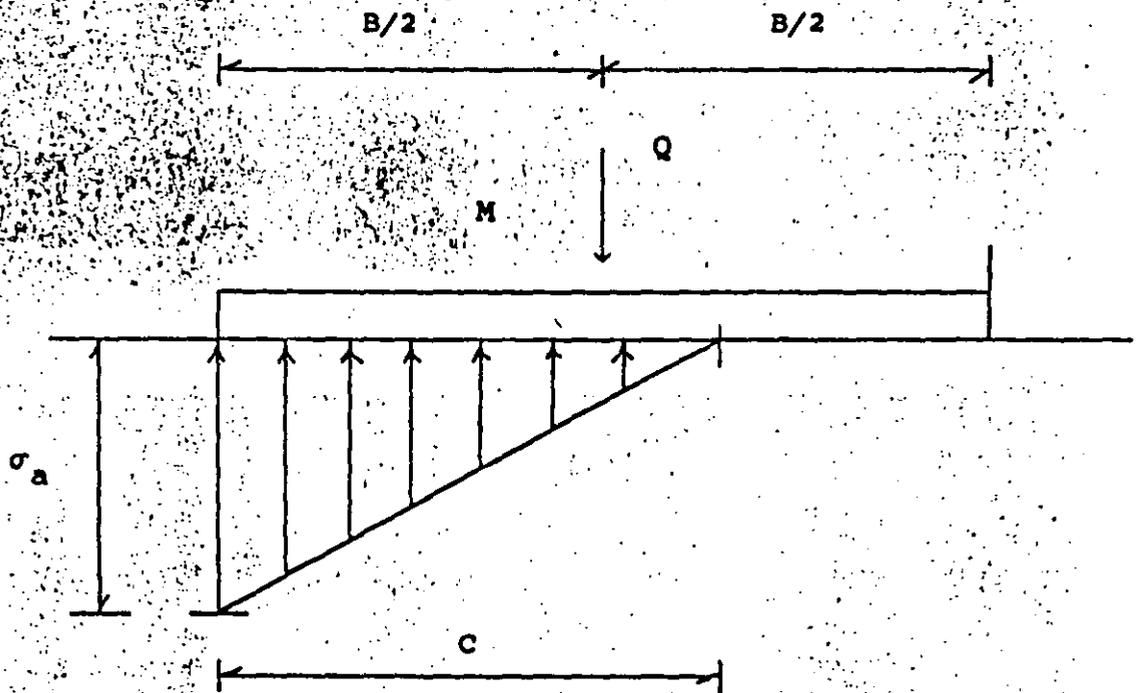


FIG 3.11 REACCIÓN DEL TERRENO TRIANGULAR

45

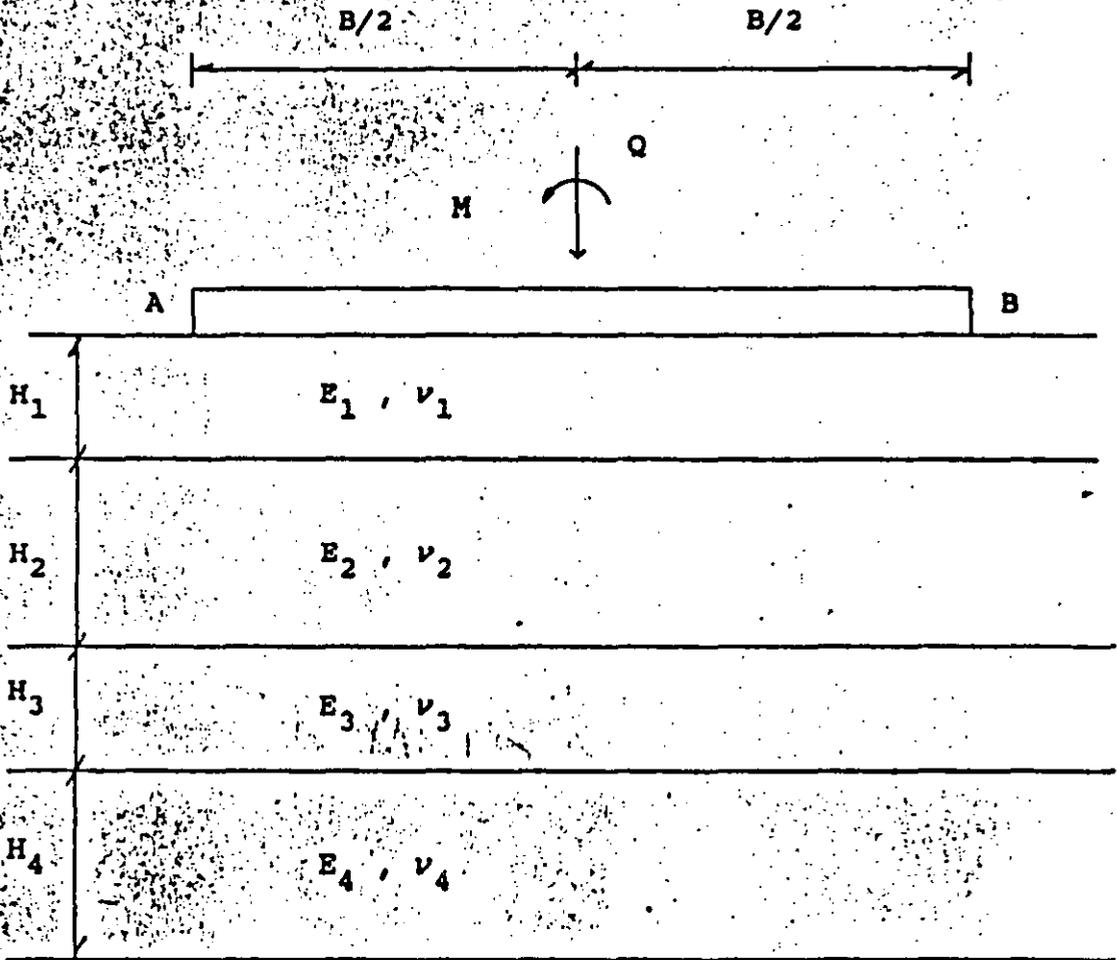


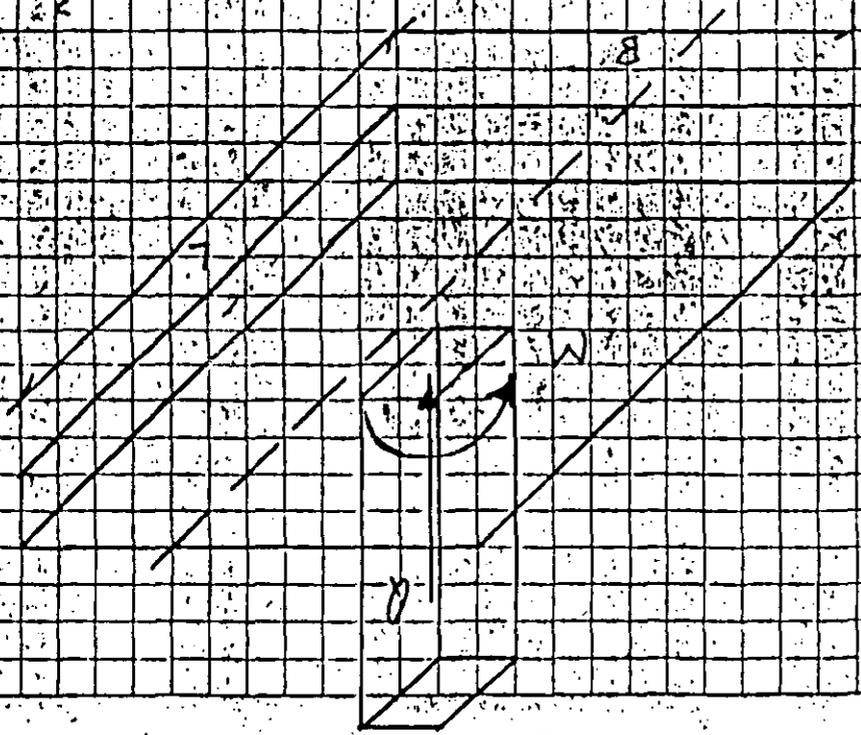
FIG 3.12 MEDIO ESTRATIFICADO



FIG. 3. B. GIRO DE UN RECTANGULO

$$E = \frac{L}{R} \cdot \frac{1}{2}$$

Eje de giro



ANÁLISIS SÍSMICO DE CIMENTACIONES

Agustín Deméneghi Colina*

Cuando se realiza el análisis sísmico de una cimentación, es usual que se cuente con un coeficiente sísmico para la región en cuestión, dado por el código del Estado donde se construirá la estructura correspondiente. Con este coeficiente sísmico se procede al análisis y diseño de la estructura, incluyendo desde luego en éste al de la estructura de cimentación.

Sin embargo, cuando el subsuelo del sitio está formado por sedimentos de consistencia blanda, se presenta un fenómeno de amplificación de las ondas sísmicas que llegan al lugar, el cual consiste en que, en la base constituida por terreno firme, se presenta una cierta aceleración, mientras que en la superficie del suelo blando la aceleración puede ser varias veces mayor que la del terreno firme (fig 1).

El comportamiento anterior se debe a que ocurre, por lo menos en forma parcial, la resonancia del suelo blando. Para ilustrar este fenómeno consideremos un sistema de un grado de libertad como el mostrado en la fig 2, en el que la base se somete a un movimiento dado por

$$x_0 = a \operatorname{sen} \Omega t$$

La velocidad de la base vale $\dot{x}_0 = a \Omega \cos \Omega t$

y la aceleración $\ddot{x}_0 = -a \Omega^2 \operatorname{sen} \Omega t$

La respuesta de la masa está dada por (Newmark y Rosenblueth 1976)

$$\text{Desplazamiento relativo} \quad y = a B_d \operatorname{sen} (\Omega t - \phi)$$

* Profesor del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM

Velocidad relativa

$$\dot{y} = a \Omega B_d \cos (\Omega t - \phi)$$

Aceleración relativa

$$\ddot{y} = - a \Omega^2 B_d \sin (\Omega t - \phi)$$

En las expresiones anteriores

$$B_d = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{1}{\left(\frac{\Omega}{\omega_1} \right)^2} \right]^2 + \left[2 \zeta \frac{1}{\left(\frac{\Omega}{\omega_1} \right)} \right]^2}}$$

$$\phi = \text{ang tan } \frac{2 \zeta \frac{\Omega}{\omega_1}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1} \right)^2}$$

ω_1 es la frecuencia circular del sistema

$$\omega_1 = \sqrt{K / M}$$

Los desplazamientos absolutos están dados por

Desplazamiento

$$x = x_0 + y$$

Velocidad

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \dot{y}$$

Aceleración

$$\ddot{x} = \ddot{x}_0 + \ddot{y}$$

Definamos el factor de amplificación de la aceleración como el cociente entre la máxima aceleración absoluta de la masa y la máxima aceleración de la base:

$$f_a = \max \ddot{x} / \max \ddot{x}_0$$

En la fig 3 se muestra la variación de f_a con el cociente T_1 / T , para amortiguamientos de 2 y 10 % del amortiguamiento crítico.

Recordemos que los períodos están dados por

$$T_1 = 2 \pi / \omega_1 \text{ (masa que vibra)} \quad \text{y} \quad T = 2 \pi / \Omega \text{ (base)}$$

Se observa en la fig 3 que la amplificación de la aceleración depende del cociente T_1 / T y del amortiguamiento. La máxima amplificación se presenta cuando $T_1 / T = 1$; al aumentar el amortiguamiento decrece el factor f_a . Para $T_1 / T \rightarrow \infty$ la amplificación de la aceleración es nula.

Un fenómeno similar sucede en el suelo blando, en el que éste hace las veces de la masa del ejemplo anterior. Consideremos un estrato de espesor H como el indicado en la fig 1, y supongamos que el desplazamiento de la base rígida está dado por

$$x_0(t) = C \exp(i\Omega t) = C (\cos \Omega t + i \sen \Omega t)$$

$$i = \sqrt{-1}$$

lo que implica que la base tiene un movimiento armónico de frecuencia Ω .

La solución del movimiento cuando existe amortiguamiento cae en el campo de los números complejos, lo que conduce a que haya un cambio tanto en la amplitud como en la fase del movimiento. Definiendo la función de amplificación $f_a = A(\Omega)$ como el valor absoluto del cociente de la máxima aceleración en la superficie del estrato entre la máxima aceleración en la base rígida, se obtiene (Roesset 1969)

$$A(\Omega) = 1 / \sqrt{\cosh^2 \alpha \cos^2 \beta + \sinh^2 \alpha \sen^2 \beta} \quad (1)$$

donde

$$\alpha = H \Omega \sqrt{[\sqrt{1 + (\eta \Omega / G)^2} - 1] / [1 + (\eta \Omega / G)^2]} / \sqrt{2} C_s \quad (2)$$

$$\beta = H \Omega \sqrt{[\sqrt{1 + (\eta \Omega / G)^2} + 1] / [1 + (\eta \Omega / G)^2]} / \sqrt{2} C_s \quad (3)$$

donde $C_s = \sqrt{G / \rho}$ = velocidad de la onda de cortante en el suelo blando

η = amortiguamiento del suelo blando
 Ω = frecuencia circular natural de la base rígida
 H = espesor del suelo blando
 G = módulo de rigidez al cortante dinámico del suelo blando
 ρ = masa específica del suelo blando

La respuesta depende de la hipótesis que se haga respecto al amortiguamiento. Se puede considerar que la viscosidad es inversamente proporcional a la frecuencia, de tal modo que $\eta \Omega / G = 2 \zeta$ sea una constante. Aplicando las ecs 1 a 3 se obtiene la respuesta del estrato.

Las frecuencias correspondientes a los modos naturales de vibrar del estrato se hallan con las siguientes expresiones

$$\omega_n = \text{frecuencia circular del modo } n \text{ de vibrar}$$

$$\omega_n = (2n - 1) \pi \sqrt{G / \rho} / 2 H = (2n - 1) \pi C_s / 2 H \quad (4)$$

Para pequeños valores de $(\eta \Omega / G)$, la función de amplificación, para los modos naturales de vibrar, vale aproximadamente (Roesset 1969):

$$A(\omega_n) = 4 / (2n - 1) \pi (2\zeta) \quad (5)$$

ζ = fracción del amortiguamiento crítico

En la fig 4 se muestra la variación de la función de amplificación con la frecuencia de vibración de la base firme, para un estrato de espesor $H = 30.5$ m, con una velocidad de la onda de cortante en el suelo blando $C_s = 229$ m/s y un peso volumétrico del suelo $\gamma = 2$ t/m³. La función de amplificación se obtiene empleando las ecs 1 a 3, considerando que $\eta \Omega / G = 2 \zeta$.

Vemos que la máxima respuesta se presenta cuando el terreno firme vibra con una frecuencia igual a la frecuencia correspondiente al primer modo de vibrar del estrato blando. Esto significa que si la frecuencia dominante de las ondas sísmicas que arriban a un sitio

coincide o está cercana a la frecuencia del primer modo de vibrar de un estrato de suelo blando, la aceleración en la superficie de éste puede ser varias veces superior a la aceleración en el terreno firme. En este ejemplo la amplificación de la aceleración es de 3.18 , para un amortiguamiento del suelo blando de 20 % del crítico.

En forma aproximada se pueden calcular las frecuencias de vibración y los valores correspondientes a los "picos" de la función de amplificación (fig 4), empleando las ecs 4 y 5 . En la tabla 1 se presentan los resultados para los primeros cinco modos de vibrar, considerando un amortiguamiento del 20 % del amortiguamiento crítico.

TABLA 1
VALORES APROXIMADOS DE LA FUNCIÓN DE AMPLIFICACIÓN A (ω_n)

n	ω_n s ⁻¹	f ciclos/s	T _{sn} s	A (ω_n)
1	11.78	1.875	0.533	3.183
2	35.34	5.625	0.178	1.061
3	58.90	9.375	0.107	0.637
4	82.47	13.125	0.076	0.455
5	106.03	16.875	0.059	0.354

$$\omega_n = (2n - 1) \pi C_s / 2 H \quad A(\omega_n) = 4 / (2n - 1)\pi (2\zeta)$$

$$f = \omega_n / 2\pi \quad T_{sn} = 2\pi / \omega_n$$

Desafortunadamente, no se puede controlar la frecuencia dominante de vibración de las ondas sísmicas que llegan a un sitio; en todo caso, es conveniente observar las frecuencias dominantes de los temblores que llegan a una localidad, para reconocer los estratos en los que se puede presentar el fenómeno de amplificación de aceleración que hemos comentado en los párrafos anteriores.

El razonamiento anterior es válido también en términos de los periodos de vibración de ondas y suelo blando. Vemos que la máxima

respuesta de aceleración se presenta cuando el período de vibración de la base firme coincide con el período natural del primer modo de vibrar, siendo esta respuesta de 3.18 en nuestro ejemplo (fig 4). Es decir, la aceleración en la superficie del terreno blando será 3.18 veces mayor que la aceleración en la base, si el amortiguamiento del suelo es de 20 %. Vemos entonces que la aceleración en la superficie del suelo blando depende fundamentalmente del cociente T_{s1} / T , donde T_{s1} es el período natural de vibración del estrato blando y T es el período dominante de vibración de las ondas sísmicas.

Para un estrato de suelo homogéneo (fig 1), los períodos de vibración están dados por

$$T_{sn} = 4 H \sqrt{\rho / G} / (2n - 1) \quad (6)$$

$n = 1, 2, \dots$

donde ρ = masa específica del suelo
 G = módulo de rigidez al cortante dinámico del suelo

El primer modo de vibrar, o modo fundamental, se obtiene para $n = 1$:

$$T_{s1} = 4 H \sqrt{\rho / G} \quad (7)$$

Para la estimación del período natural de vibración de un suelo estratificado véase Zeevaert (1973, 1980).

El período de vibración de la estructura se halla con los métodos usuales del análisis estructural. Sin embargo, cuando el terreno de cimentación está formado por un suelo blando, es importante considerar además el efecto de balanceo y de traslación horizontal de la cimentación. Así, el período de vibración acoplado de una estructura vale (Normas de Sismo 1987):

$$T_1 = \sqrt{T_o^2 + T_x^2 + T_r^2}$$

donde T_0 = período fundamental que tendría la estructura si se apoyara sobre una base rígida (este período se debe a la flexibilidad propia de la estructura) .

T_x = período natural que tendría la estructura si fuera infinitamente rígida y su base solo pudiera trasladarse en la dirección que se analiza

T_r = período natural que tendría la estructura si fuera infinitamente rígida y su base solo pudiera girar con respecto a un eje horizontal que pasara por el centroide de la superficie de desplante de la estructura y fuera perpendicular a la dirección que se analiza

Para el cálculo de los períodos de vibración anteriores, véase el Apéndice de las Normas de Sismo (inciso A7, interacción suelo-estructura).

Una vez que se conocen los períodos de vibración del suelo T_{s1} y de la estructura T_1 , se puede emplear el espectro de respuesta sísmica de Zeevaert (1980) para la determinación del factor de amplificación f_s (fig 5), definido como el cociente de la máxima aceleración en el centro de gravedad de la estructura entre la máxima aceleración en la superficie del terreno blando.

Vemos que la máxima respuesta se obtiene cuando $T_1 / T_{s1} = 1$. Por lo visto anteriormente, no se puede evitar la amplificación de la aceleración de un suelo blando, pero sí es factible evitar que coincidan el período natural de vibración del suelo con el período natural de vibración de una estructura.

La aceleración en la superficie del terreno la proporciona en la ciudad de México el Reglamento de Construcciones en las Normas de Sismo. Así, en el inciso 3 de éstas se señala que "la ordenada del espectro de aceleraciones para diseño sísmico "a", expresada como

fracción de la aceleración de la gravedad, está dada por la siguiente expresión:

$$a = (1 + 3 T / T_s) c / 4 , \text{ si } T \text{ es menor que } T_s''$$

La aceleración en la superficie del suelo se obtiene haciendo $T = 0$ en esta expresión (pues para $T = 0$ la estructura vibra igual que la superficie del terreno), por lo tanto $a = c_s = c / 4$ en la superficie. Las aceleraciones para las diferentes zonas estratigráficas del Distrito Federal se presentan a continuación (artículo 206 del Reglamento):

Zona	Coefficiente sísmico c	Coefficiente c_s (superficie)	Aceleración (superficie) cm/s^2
I	0.16	0.04	39
II	0.32	0.08	78
III	0.40	0.10	98

Vemos entonces que, por ejemplo, en la zona III la aceleración de diseño de la superficie del terreno es de 98 cm/s^2 .

También se puede utilizar el siguiente criterio para hallar "c" (Normas de Sismo, Apéndice): "en sitios en que se conozca el período dominante del terreno T_{s1} , y que se hallen en las parte sombreadas de la fig 3.1 (de esas Normas), también se adoptará $c = 0.4$ para estructuras del grupo B, y 0.6 para las del A; fuera de las partes sombreadas se adoptará

$$c = 1.6 T_{s1} / (4 + T_{s1}^2)$$

Vemos que el coeficiente sísmico depende del período de vibración dominante del suelo T_{s1} . Considerando que el coeficiente sísmico en la superficie $c_s = c / 4$ y que la aceleración en la superficie, en cm/s^2 , es igual a c_s por 980, en la fig 6 se presenta la variación de esta aceleración en función del período T_{s1} .

EJEMPLO

Determinar la respuesta de aceleración de un edificio sobre un estrato de suelo blando, con las siguientes características:

$$\text{Masa} = 217.5 \text{ t.s}^2/\text{m}$$

$$\text{Peso} = 2133 \text{ t}$$

$$\text{Período de la estructura } T_o = 0.3 \text{ s}$$

$$\text{Amortiguamiento en la estructura } \zeta_o = 5 \%$$

$$\text{Período por rotación } T_r = 0.76 \text{ s}$$

$$\text{Amortiguamiento en el terreno de cimentación } \zeta_r = 15 \%$$

$$\bullet \text{ Período por traslación } T_x = 0.22 \text{ s}$$

$$\text{Período del terreno de cimentación } T_{s1} = 2.4 \text{ s}$$

El periodo acoplado de la estructura vale

$$T_1 = \sqrt{T_o^2 + T_x^2 + T_r^2} = 0.85 \text{ s}$$

Obtenemos el cociente $T_1 / T_{s1} = 0.35$

Para entrar en el espectro de la fig 5 necesitamos el amortiguamiento acoplado del sistema, el cual está dado por (Zeevaert 1980):

$$\zeta_1 = \sqrt{1 - g_1}$$

$$g_1 = g_o g_r (T'_1)^2 / (g_o T_r^2 + g_r T_o^2)$$

donde $T'_1 = \sqrt{T_o^2 + T_r^2} = 0.817 \text{ s}$

$$g_o = 1 - \zeta_o^2 = 0.9975$$

$$g_r = 1 - \zeta_r^2 = 0.9775$$

Sustituyendo $g_1 = 0.98$ $\zeta_1 = 0.141$

Es decir, el sistema acoplado tiene un amortiguamiento de 14.1 % .

Entrando al espectro para diseño sísmico (fig 5, Zeevaert 1980), se obtiene un factor de amplificación $f_a = 1.9$.

Considerando una aceleración en la superficie de 98 cm/s^2 , la aceleración en el centro de gravedad de la estructura está dada por $(98)(1.9) = 186 \text{ cm/s}^2$.

REFERENCIAS

Newmark, N M y Rosenblueth, E, Fundamentos de Ingeniería Sísmica, Diana, 1976

Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo (RCDF), 1987

Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, 1986

Roesset, J M, "Fundamentals of soil amplification", Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 1969

Zeevaert, L, Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions, Van Nostrand Reinhold, 1973

Zeevaert, L, Interacción Suelo-Estructura de Cimentación, Limusa, 1980

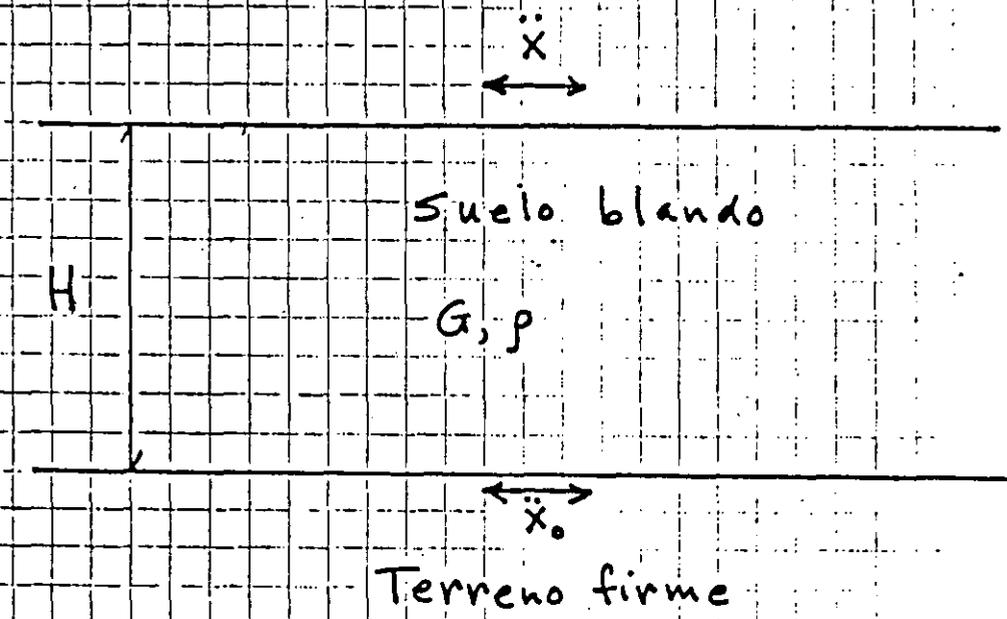


FIG 1

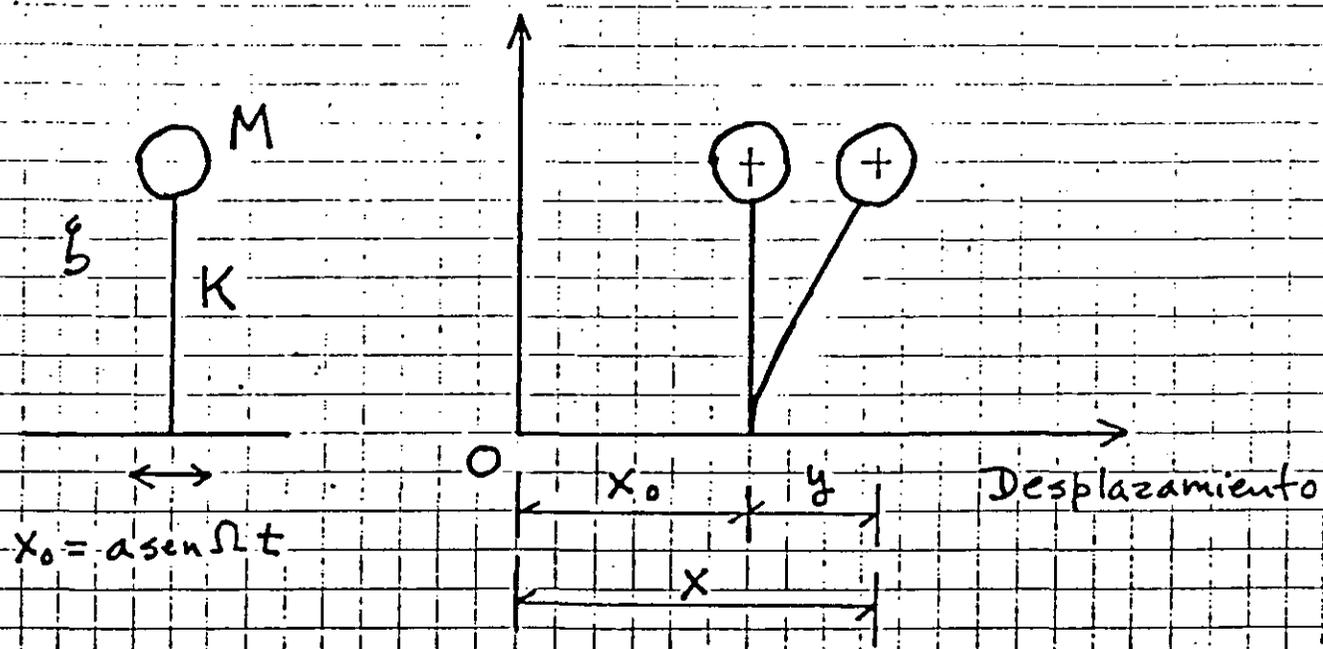


FIG 2

VARIACIÓN DEL FACTOR DE AMPLIFICACIÓN

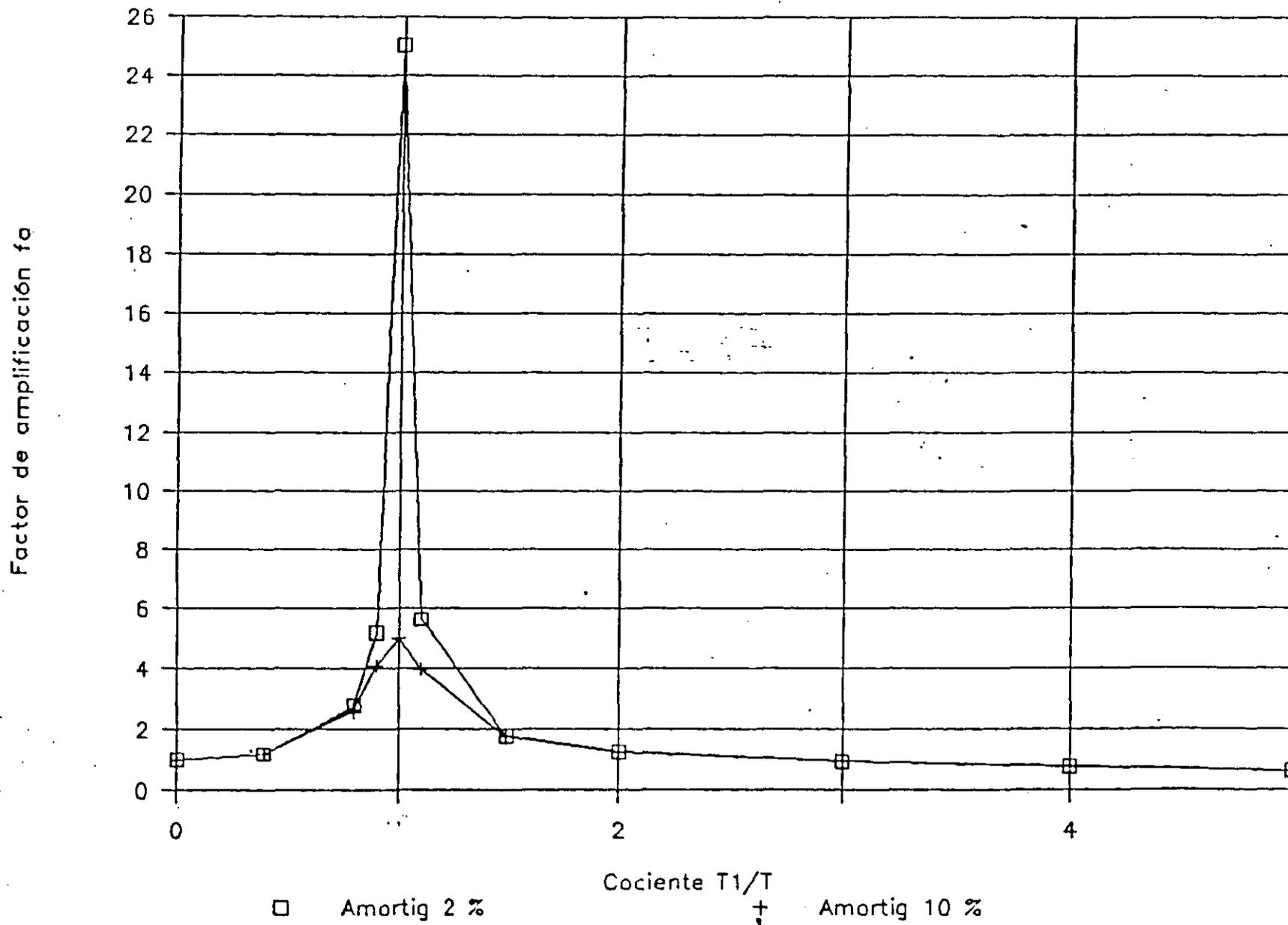


FIG 3

VARIACIÓN DEL FACTOR DE AMPLIFICACIÓN

AMORTIGUAMIENTO 20 % DEL CRÍTICO

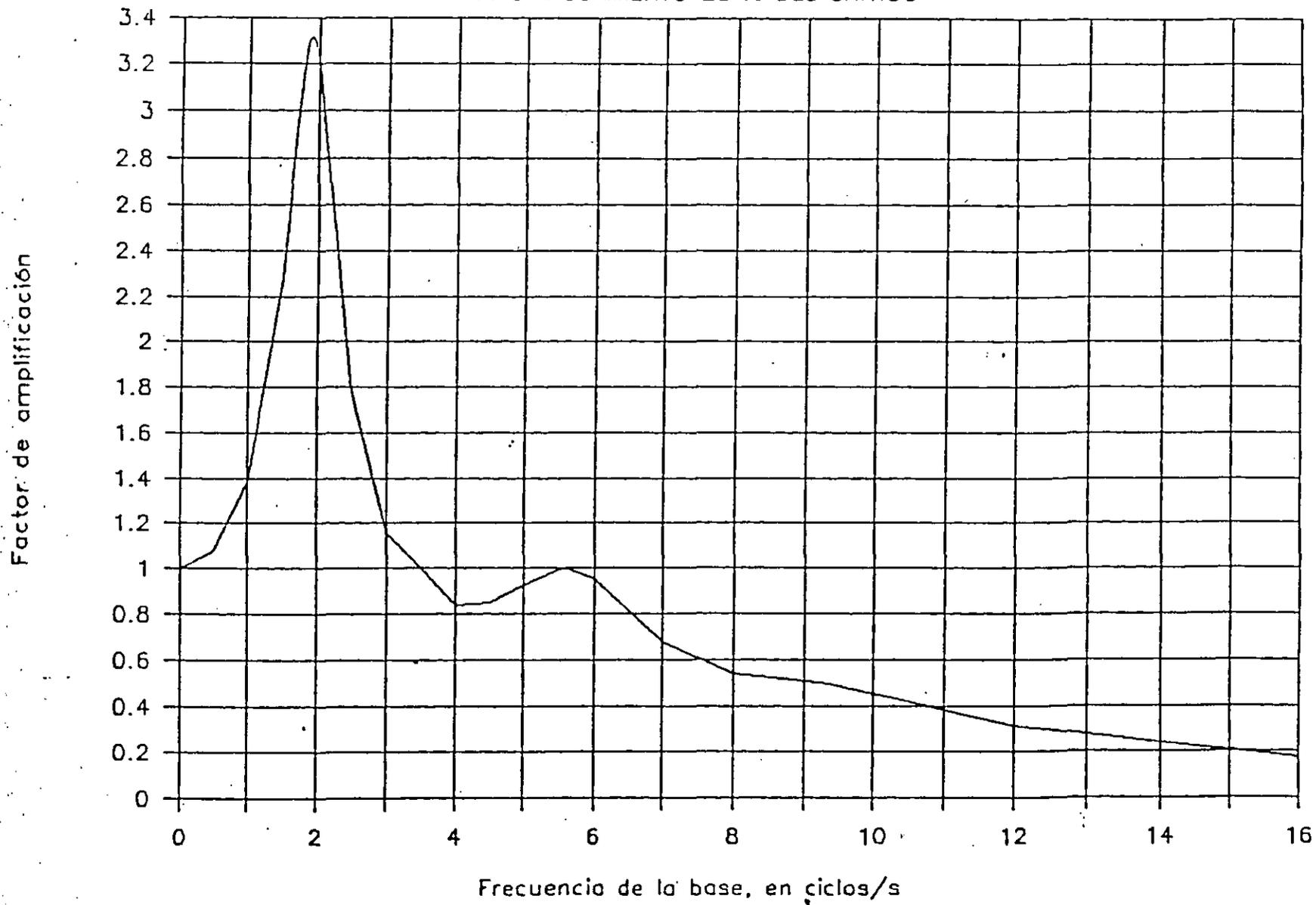
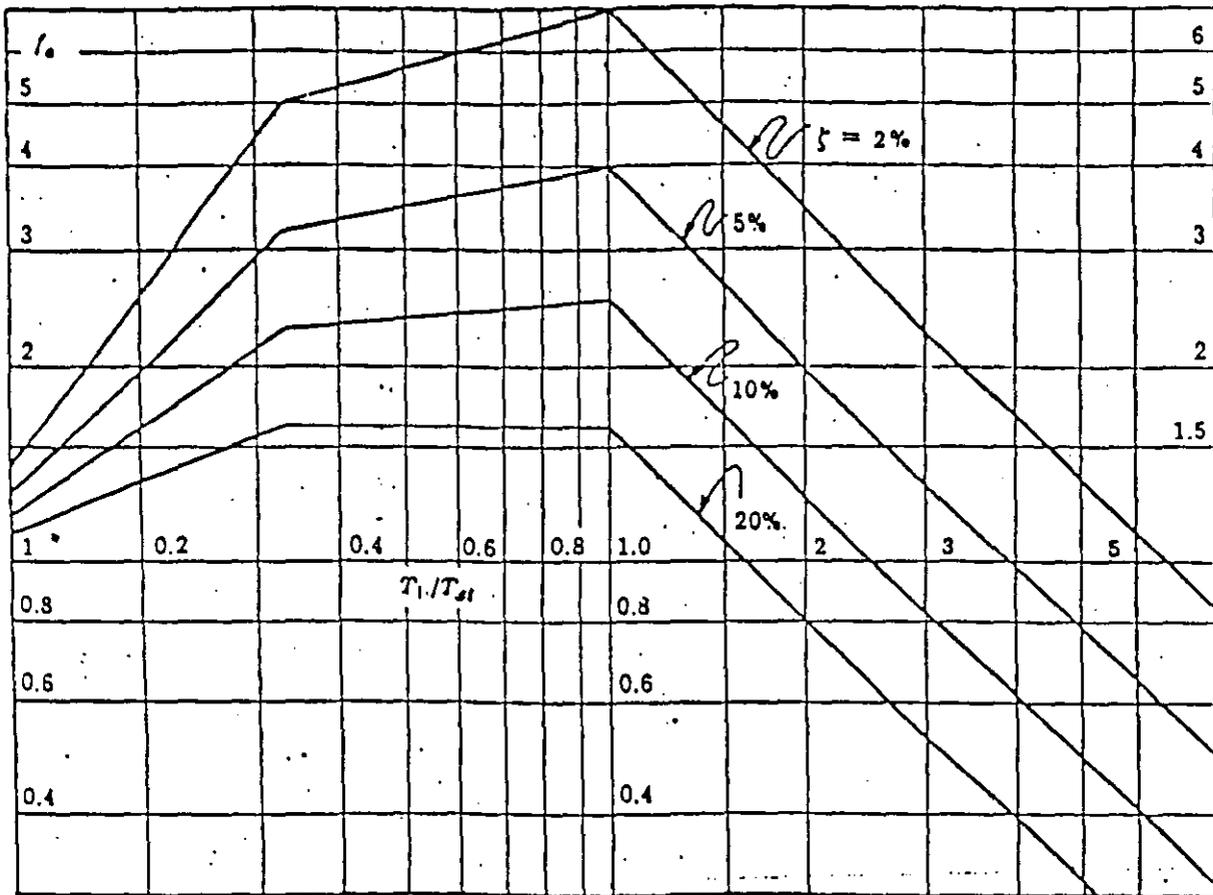


FIG 4



Especro envolvente para diseño sísmico. (Zeevaert 1980)

FIG 5

ESPECTRO DE RESPUESTA DEL TERRENO

CIUDAD DE MÉXICO

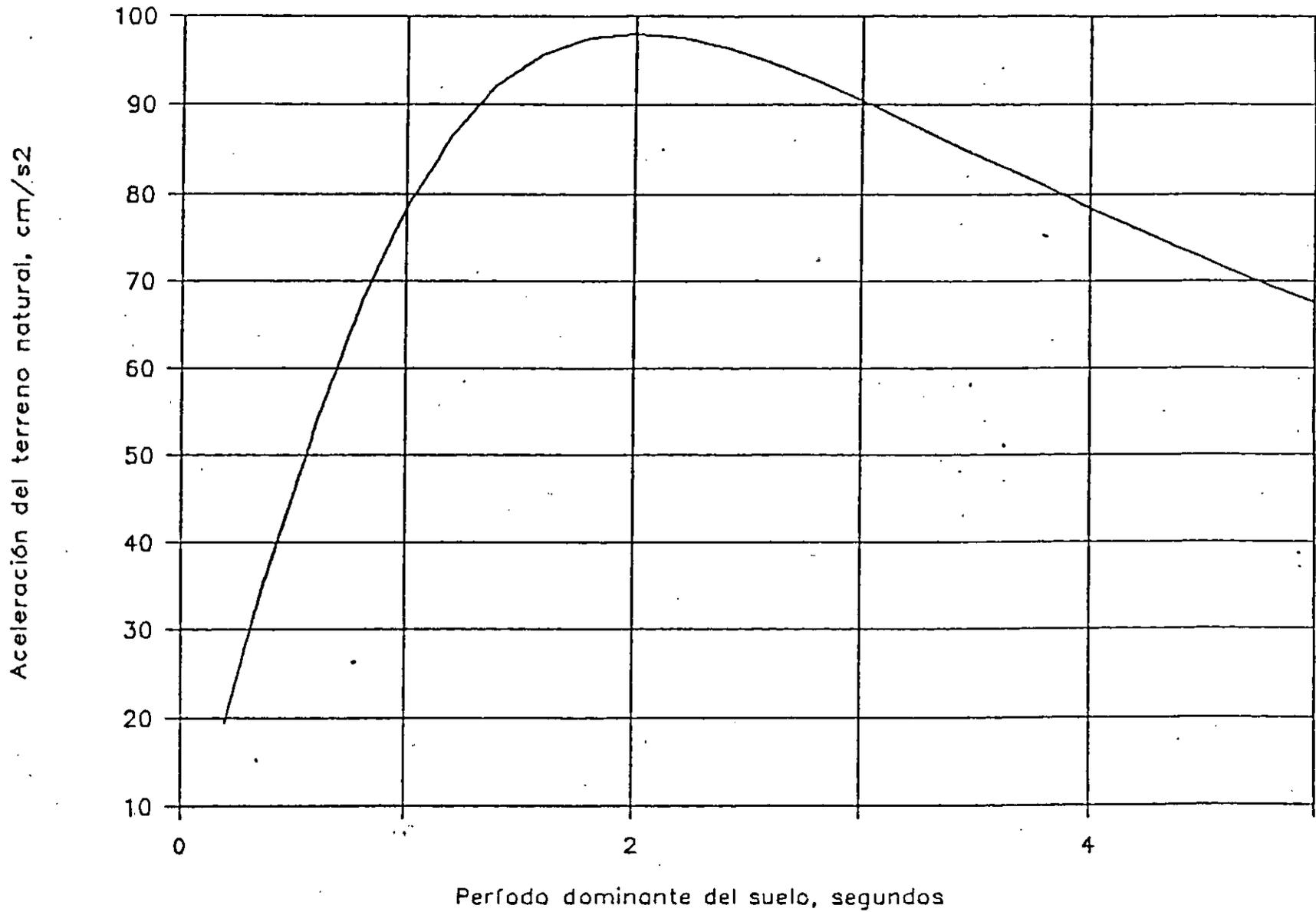


FIG 6

DINÁMICA DE SUELOS
VIBRACIONES

Agustín Deméneghi Colina*
Héctor Sanginés García**

Vibraciones libres

Consideremos un sistema de un grado de libertad, como el mostrado en la fig 1. Se trata de un cuerpo de masa M unido a una base firme mediante una barra de cierta rigidez. La rigidez K se define como el cociente de la fuerza horizontal aplicada en el centro de gravedad del cuerpo, dividida entre el desplazamiento horizontal que produce dicha fuerza, es decir:

$$K = P / \delta$$

El amortiguamiento C toma en cuenta las pérdidas de energía que se producen durante el movimiento (fundamentalmente por fricción interna en el sistema). Se ha observado experimentalmente que la pérdida de energía se puede representar mediante una fuerza que se opone al movimiento, la cual es proporcional a la velocidad del cuerpo; esta fuerza vale $C \dot{x}$.

Por el principio de D'Alembert, la fuerza de inercia es igual al producto $M \ddot{x}$, pero tiene sentido contrario a la aceleración. Esta fuerza de inercia se agrega al equilibrio dinámico del cuerpo.

El fenómeno físico que estamos estudiando consiste en dar inicialmente un desplazamiento horizontal δ_0 al cuerpo, para después soltarlo y dejarlo vibrar libremente.

* Profesor del Departamento de Geotecnia

** Jefe del Departamento de Geotecnia

División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM

El equilibrio dinámico de fuerzas en el cuerpo da lugar a la siguiente ecuación

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = 0 \quad (1)$$

Supongamos inicialmente que no hubiera amortiguamiento, $C = 0$ en la ec 1:

$$M \ddot{x} + K x = 0 \quad (2)$$

La ec 2 es una ecuación diferencial homogénea de segundo orden. Su ecuación característica es

$$M \lambda^2 + K \lambda^0 = 0 \quad M \lambda^2 + K = 0 \quad (3)$$

La solución de la ecuación característica es

$$\lambda_1 = \sqrt{-K/M} = \sqrt{K/M} i$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{-K/M} = -\sqrt{K/M} i$$

Denominemos a $\sqrt{K/M} = \omega =$ frecuencia circular natural del sistema

Cuando las raíces de una ecuación característica son complejas, la solución de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden está dada por

$$x = C_1 e^{at} \cos b t + C_2 e^{at} \operatorname{sen} b t$$

donde "a" es la parte real y "b" la parte imaginaria del número complejo. Por lo tanto

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t \quad (4)$$

$$\dot{x} = -C_1 \omega \operatorname{sen} \omega t + C_2 \omega \cos \omega t \quad (5)$$

De acuerdo con las condiciones iniciales, para $t = 0$, $\dot{x} = 0$. Sustituyendo en la ec 5

$$\begin{aligned} 0 &= C_2 \omega \quad (1) & \Rightarrow & \quad C_2 = 0 \\ \therefore x &= C_1 \cos \omega t \end{aligned}$$

Para $t = 0$, $x = \delta_0$. Sustituyendo en la ec 4

$$\therefore \delta_0 = C_1 \quad x = \delta_0 \cos \omega t \quad (6)$$

En la figura 2 se muestra la variación de x en función del tiempo t .

Se define el período T como el tiempo en que la masa pasa por el mismo punto, con el mismo sentido del movimiento. De la figura 2 se observa que

$$\omega T = 2\pi \quad \therefore \quad T = 2\pi / \omega$$

Pero $\omega = \sqrt{K / M}$ $\therefore \quad T = 2\pi \sqrt{M / K} \quad (7)$

T se conoce también como el período natural de vibración del sistema de un grado de libertad.

La velocidad se halla derivando la ec 6

$$\dot{x} = -\omega \delta_0 \sin \omega t \quad (8)$$

La aceleración se halla derivando la ec 8

$$\ddot{x} = -\omega^2 \delta_0 \cos \omega t = -\omega^2 x \quad (9)$$

Vemos que la aceleración es igual al desplazamiento multiplicado por el cuadrado de ω , con signo contrario.

Vibraciones libres amortiguadas

Consideremos ahora que si hay pérdida de energía en el sistema, es decir, que existe amortiguamiento: $C \neq 0$. El movimiento queda representado por la ec 1

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = 0 \quad (1)$$

La ecuación característica es

$$M \lambda^2 + C \lambda + K = 0 \quad (10)$$

Las raíces de la ec 10 son

$$\lambda_1 = -C / 2M + \sqrt{(C/2M)^2 - K/M}$$

$$\lambda_2 = -C / 2M - \sqrt{(C/2M)^2 - K/M}$$

Las raíces λ_1 y λ_2 pueden ser reales o complejas, dependiendo del valor del radical $\sqrt{(C/2M)^2 - K/M}$. Se distinguen tres casos.

Caso I. Dos raíces reales diferentes

Si las raíces son reales: $(C/2M)^2 - K/M > 0$. La solución de la ec 1 está dada por

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (11)$$

En este caso el sistema no vibra, sino que la masa después de haber sido desplazada una distancia δ_0 , regresa a su posición inicial. Este fenómeno se presenta cuando el amortiguamiento C es alto.

Caso II. Una raíz real

Se presenta cuando $(C/2M)^2 - K/M = 0$. Sólo existe una raíz real que vale

$$\lambda = -C/2M$$

La solución de la ec 1 es

$$x = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$

$$\dot{x} = C_1 \lambda e^{\lambda t} + C_2 (t \lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t})$$

De acuerdo con las condiciones iniciales, para $t = 0$, $x = \delta_0$, por lo tanto

$$C_1 = \delta_0$$

Para $t = 0$, $\dot{x} = 0$, por lo tanto

$$0 = C_1 \lambda + C_2 \quad C_2 = -\lambda \delta_0$$

Por lo tanto, la solución de la ec 1 es

$$x = \delta_0 e^{\lambda t} (1 - \lambda t)$$

$$x = \delta_0 e^{-(C/2M)t} [1 + (C/2M)t] \quad (12)$$

En la fig 3 se muestra la variación de x en función del tiempo.

Caso III. Dos raíces complejas

Ahora $(C/2M)^2 - K/M < 0$, y

$$\lambda_1 = -C/2M + \sqrt{K/M - (C/2M)^2} \quad i$$

$$\lambda_2 = -C/2M - \sqrt{K/M - (C/2M)^2} \quad i$$

Cuando las raíces de una ecuación característica son complejas, la solución de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden está dada por

$$x = C_1 e^{at} \cos b t + C_2 e^{at} \operatorname{sen} b t \quad (13)$$

donde "a" es la parte real y "b" la parte imaginaria del número complejo. Por lo tanto $a = -C / 2M$, y $b = \sqrt{K / M - (C/2M)^2}$.

Derivando la ec 13

$$\dot{x} = e^{at} (-C_1 b \operatorname{sen} bt + C_2 b \operatorname{cos} bt) + a e^{at} (C_1 \operatorname{cos} bt + C_2 \operatorname{sen} bt) \quad (14)$$

Para $t = 0$, $x = \delta_0$, por lo tanto, de la ec 13: $C_1 = \delta_0$.

Para $t = 0$, $\dot{x} = 0$. Sustituyendo en la ec 14: $C_2 = -a \delta_0 / b$

Sustituyendo en la ec 13

$$x = \delta_0 e^{at} [\operatorname{cos} bt - (a/b) \operatorname{sen} bt] \quad (15)$$

Pero $a = -C / 2M$, y $b = \sqrt{K / M - (C/2M)^2}$.

Hagamos $\zeta = C / C_{\text{crit}} = C / 2 \sqrt{MK}$

Al cociente de $\zeta = C / C_{\text{crit}}$ lo denominaremos porcentaje del amortiguamiento crítico:

$$\zeta = C / C_{\text{crit}} = C / 2 \sqrt{MK}$$

Por otra parte $\omega = \sqrt{K / M}$, por lo tanto $\zeta \omega = C / 2M$. Sustituyendo en la ec 15

$$x = \delta_0 e^{-\zeta \omega t} [\operatorname{cos} \omega \sqrt{1 - \zeta^2} t + (\zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}) \operatorname{sen} \omega \sqrt{1 - \zeta^2} t] \quad (16)$$

La fig 4 muestra la variación de x en función del tiempo.

Vibraciones estacionarias

Se denominan movimientos estacionarios cuando la acción sobre el sistema es de tipo armónico.

a) Vibraciones forzadas

Consideremos un cuerpo como el de la fig 1, que se somete a una fuerza estacionaria dada por $F = F_0 \text{ sen } \Omega t$. La ecuación de equilibrio dinámico queda

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = F_0 \text{ sen } \omega t \quad (17)$$

La respuesta de la masa está dada por (Newmark y Rosenblueth 1976)

$$x = \frac{F_0}{K} \frac{\text{sen} (\Omega t - \phi)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2 \zeta \frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2}} \quad (18)$$

$$\phi = \text{ang tan} \frac{2 \zeta \frac{\Omega}{\omega_1}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} \quad (19)$$

ω_1 es la frecuencia circular del sistema $\omega_1 = \sqrt{K / M}$

Consideremos ahora un sistema de un grado de libertad como el mostrado en la fig 5, en el que la base se somete a un movimiento dado por .

$$x_0 = a \text{ sen } \Omega t \quad (20)$$

La velocidad de la base vale $\dot{x}_0 = a \Omega \text{ cos } \Omega t \quad (20')$

y la aceleración $\ddot{x}_0 = - a \Omega^2 \text{ sen } \Omega t \quad (20'')$

La ecuación de equilibrio dinámico está dada por

$$M \ddot{x} + C \dot{y} + K y = 0$$

Pero, de la fig 5 $\ddot{x} = \ddot{x}_0 + \ddot{y}$

$$M (\ddot{x} + \ddot{y}) + C \dot{y} + K y = 0$$

$$M \ddot{y} + C \dot{y} + K y = -M \ddot{x}_0 \quad (21)$$

$$M \ddot{y} + C \dot{y} + K y = a \Omega^2 M \text{ sen } \Omega t \quad (22)$$

Vemos que la ec 22 es similar a la ec 17. Por lo tanto, se puede emplear la misma solución de la ec 17, con

$$F_0 \text{ sen } \Omega t = a \Omega^2 M \text{ sen } \Omega t$$

Con este cambio de variable, la respuesta de la masa está dada por

Desplazamiento relativo $y = a B_d \text{ sen } (\Omega t - \phi) \quad (23)$

Velocidad relativa $\dot{y} = a \Omega B_d \text{ cos } (\Omega t - \phi) \quad (23')$

Aceleración relativa $\ddot{y} = -a \Omega^2 B_d \text{ sen } (\Omega t - \phi) \quad (23'')$

En las expresiones anteriores

$$B_d = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2\right]^2 + \left[2 \zeta \frac{\Omega}{\omega_1}\right]^2}} \quad (24)$$

$$\phi = \text{ang tan } \frac{2 \zeta \frac{\Omega}{\omega_1}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} \quad (25)$$

ω_1 es la frecuencia circular del sistema

$$\omega_1 = \sqrt{K / M}$$

Los desplazamientos absolutos están dados por

$$\text{Desplazamiento} \quad x = x_0 + y \quad (26)$$

$$\text{Velocidad} \quad \dot{x} = \dot{x}_0 + \dot{y} \quad (27)$$

$$\text{Aceleración} \quad \ddot{x} = \ddot{x}_0 + \ddot{y} \quad (28)$$

Definamos el factor de amplificación de la aceleración como el cociente entre la máxima aceleración absoluta de la masa y la máxima aceleración de la base:

$$f_a = \max | \ddot{x} | / \max | \ddot{x}_0 | \quad (29)$$

$$\text{Es decir} \quad f_a = \max | \sin \Omega t + B_d \sin (\Omega t - \phi) | \quad (30)$$

En la fig 6 se muestra la variación de f_a con el cociente T_1 / T para amortiguamientos de 2 y 10 % del amortiguamiento crítico.

Recordemos que los períodos están dados por

$$T_1 = 2 \pi / \omega_1 \text{ (masa que vibra)} \quad \text{y} \quad T = 2 \pi / \Omega \text{ (base)}$$

Se observa en la fig 6 que la amplificación de la aceleración depende del cociente T_1 / T y del amortiguamiento. La máxima amplificación se presenta cuando $T_1 / T = 1$; al aumentar el amortiguamiento decrece el factor f_a . Para $T_1 / T \rightarrow \infty$ la amplificación de la aceleración es nula.

Vibración debida a rotación

Consideremos una masa como la indicada en la fig 7, vibrando libremente. La fuerza de inercia vale $F = M \ddot{x}$. De la figura $x = \theta H$, $\ddot{x} = \ddot{\theta} H$. Por lo tanto $F = M \ddot{\theta} H$.

El momento de volteo al nivel de cimentación, debido a la inercia de la masa vale

$$O_T = F H = M \ddot{\theta} H^2 = M H^2 \ddot{\theta}$$

Supongamos ahora que la cimentación está sometida a un momento estacionario dado por $O_T = O_{T_0} \text{ sen } \Omega t$. En el diagrama de cuerpo libre de la cimentación (fig 8) se muestran los momentos que actúan sobre ella. El equilibrio de momentos indica que

$$M H^2 \ddot{\theta} + C \dot{\theta} + K_r \theta = O_{T_0} \text{ sen } \Omega t \quad (31)$$

La ecuación dinámica obtenida para un sistema de un grado de libertad sometido a una fuerza vertical estacionaria es (ec 17)

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = F_0 \text{ sen } \Omega t \quad (32)$$

Las ecs 31 y 32 son similares, por lo que para hallar la solución de la ec 31 podemos emplear la solución de la ec 32, cambiando M por $M H^2$ y F_0 por O_{T_0} . Por lo tanto, la solución de la ec 31 es

$$\theta = \frac{O_{T_0}}{K_r} \frac{\text{sen } (\Omega t - \alpha)}{\sqrt{(1 - \Omega^2/\omega^2)^2 + 4 \zeta^2 (\Omega/\omega)^2}} \quad (33)$$

donde $\alpha = \text{ang tan } 2 \zeta \omega \Omega / (\omega^2 - \Omega^2) \quad (34)$

$$\omega = \sqrt{K_r / M H^2} = \sqrt{K_r / M} / H \quad (35)$$

$$\zeta = C / C_{\text{crit}} = C / 2 \sqrt{K_r M H^2} = C / 2 H \sqrt{K_r M} \quad (36)$$

Por lo anterior, el periodo natural de vibración por rotación de una masa está dado por

$$T_r = 2 \pi \sqrt{M H^2 / K_r} = 2 \pi H \sqrt{M / K_r} \quad (37)$$

$$T_r = 2 \pi \sqrt{W H^2 / K_r} \quad (38)$$

Vibración de un estrato de suelo

Un fenómeno similar al de vibración de un sistema de un grado de libertad sucede en un estrato de suelo blando, en el que éste hace las veces de la masa del sistema de un grado de libertad.

Consideremos un estrato de suelo de espesor H, como el indicado en la fig 9. El estudio de la vibración de este estrato se lleva a cabo estableciendo las ecuaciones de equilibrio dinámico de un elemento de suelo (fig 10); considerando una onda de cortante que viaja en dirección vertical, las fuerzas que actúan sobre el elemento son (Roesset 1969)

$$\text{Fuerza de inercia} \quad \rho \partial^2 u / \partial t^2$$

$$\text{Fuerza debida a la pérdida de energía} \quad \eta \partial^3 u / \partial t \partial z^2$$

Aplicando la segunda ley de Newton al elemento

$$\begin{aligned} -\tau_{zx} dx dz + (\tau_{zx} + \partial \tau_{zx} / \partial z) dx dz + \eta \partial^3 u / \partial t \partial z^2 dx dz \\ = (\rho \partial^2 u / \partial t^2) dx dz \end{aligned} \quad (39)$$

$$\text{Es decir} \quad \rho \partial^2 u / \partial t^2 = \partial \tau_{zx} / \partial z + \eta \partial^3 u / \partial t \partial z^2 \quad (40)$$

$$\text{Por la ley de Hooke} \quad \gamma_{zx} = (1/G) \tau_{zx}$$

$$y \quad \gamma_{zx} = \partial w / \partial x + \partial u / \partial z \quad \text{con } \partial w / \partial x = 0$$

$$\therefore \gamma_{zx} = \partial u / \partial z$$

Sustituyendo valores en la ec 40

$$\rho \partial^2 u / \partial t^2 = G \partial^2 u / \partial z^2 + \eta \partial^3 u / \partial t \partial z^2 \quad (41)$$

Para hallar el movimiento del estrato de espesor H se tiene que resolver una ecuación diferencial parcial de segundo orden (ec 41). Supongamos que el desplazamiento de la base rígida está dado por

$$x_0(t) = C \exp(i\Omega t) = C (\cos \Omega t + i \operatorname{sen} \Omega t) \quad (42)$$

$$i = \sqrt{-1}$$

lo que implica que la base tiene un movimiento armónico de frecuencia Ω .

La solución del movimiento cuando existe amortiguamiento cae en el campo de los números complejos, lo que conduce a que haya un cambio tanto en la amplitud como en la fase del movimiento. Definiendo la función de amplificación $f_a = A(\Omega)$ como el valor absoluto del cociente de la máxima aceleración en la superficie del estrato entre la máxima aceleración en la base rígida, se obtiene (Roesset 1969)

$$A(\Omega) = 1 / \sqrt{\cosh^2 \alpha \cos^2 \beta + \operatorname{senh}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta} \quad (43)$$

donde

$$\alpha = H \Omega \sqrt{[\sqrt{1 + (\eta \Omega / G)^2} - 1] / [1 + (\eta \Omega / G)^2]} / \sqrt{2} c_s \quad (44)$$

$$\beta = H \Omega \sqrt{[\sqrt{1 + (\eta \Omega / G)^2} + 1] / [1 + (\eta \Omega / G)^2]} / \sqrt{2} c_s \quad (45)$$

donde $c_s = \sqrt{G / \rho}$ = velocidad de la onda de cortante en el suelo blando

η = amortiguamiento del suelo blando

Ω = frecuencia circular natural de la base rígida

H = espesor del suelo blando

G = módulo de rigidez al cortante dinámico del suelo blando

ρ = masa específica del suelo blando

La respuesta depende de la hipótesis que se haga respecto al amortiguamiento. Se puede considerar que la viscosidad es inversamente proporcional a la frecuencia, de tal modo que $\eta \Omega / G = 2 \zeta$ sea una constante. Aplicando las ecs 43 a 45 se obtiene la respuesta del estrato.

Las frecuencias correspondientes a los modos naturales de vibrar del estrato se hallan con las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \omega_n &= \text{frecuencia circular del modo } n \text{ de vibrar} \\ \omega_n &= (2n - 1) \pi \sqrt{G / \rho} / 2 H = (2n - 1) \pi C_s / 2 H \end{aligned} \quad (46)$$

Para pequeños valores de $(\eta \Omega / G)$, la función de amplificación, para los modos naturales de vibrar, vale aproximadamente (Roesset 1969):

$$A(\omega_n) = 4 / (2n - 1) \pi (2\zeta) \quad (47)$$

ζ = fracción del amortiguamiento crítico

En la fig 11 se muestra la variación de la función de amplificación con la frecuencia de vibración de la base firme, para un estrato de espesor $H = 30.5$ m, con una velocidad de la onda de cortante en el suelo blando $C_s = 229$ m/s y un peso volumétrico del suelo $\gamma = 2$ t/m³. La función de amplificación se obtiene empleando las ecs 43 a 45, considerando que $\eta \Omega / G = 2 \zeta$.

Vemos que la máxima respuesta se presenta cuando el terreno firme vibra con una frecuencia igual a la frecuencia correspondiente al primer modo de vibrar del estrato blando. Esto significa que si la frecuencia dominante de las ondas sísmicas que arriban a un sitio coincide o está cercana a la frecuencia del primer modo de vibrar de un estrato de suelo blando, la aceleración en la superficie de éste puede ser varias veces superior a la aceleración en el terreno firme. En este ejemplo la amplificación de la aceleración es de 3.18, para un amortiguamiento del suelo blando de 20 % del crítico.

En forma aproximada se pueden calcular las frecuencias de vibración y los valores correspondientes a los "picos" de la función de amplificación (fig 11), empleando las ecs 46 y 47 . En la tabla 1 se presentan los resultados para los primeros cinco modos de vibrar, considerando un amortiguamiento del 20 % del amortiguamiento crítico.

TABLA 1
VALORES APROXIMADOS DE LA FUNCIÓN DE AMPLIFICACIÓN A (ω_n)

n	ω_n s ⁻¹	f ciclos/s	T _{sn} s	A (ω_n)
1	11.78	1.875	0.533	3.183
2	35.34	5.625	0.178	1.061
3	58.90	9.375	0.107	0.637
4	82.47	13.125	0.076	0.455
5	106.03	16.875	0.059	0.354

$$\omega_n = (2n - 1) \pi C_n / 2 H \quad A(\omega_n) = 4 / (2n - 1)\pi (2\zeta)$$

$$f = \omega_n / 2\pi \quad T_{sn} = 2\pi / \omega_n$$

Desafortunadamente, no se puede controlar la frecuencia dominante de vibración de las ondas sísmicas que llegan a un sitio; en todo caso, es conveniente observar las frecuencias dominantes de los temblores que llegan a una localidad, para reconocer los estratos en los que se puede presentar el fenómeno de amplificación de aceleración que hemos comentado en los párrafos anteriores.

El razonamiento anterior es válido también en términos de los periodos de vibración de ondas y suelo blando. Vemos que la máxima respuesta de aceleración se presenta cuando el período de vibración de la base firme coincide con el período natural del primer modo de vibrar, siendo esta respuesta de 3.18 en nuestro ejemplo (fig 11). Es decir, la aceleración en la superficie del terreno blando será 3.18 veces mayor que la aceleración en la base, si el amortiguamiento del

suelo es de 20 %. Vemos entonces que la aceleración en la superficie del suelo blando depende fundamentalmente del cociente T_{s1} / T , donde T_{s1} es el periodo natural de vibración del estrato blando y T es el periodo dominante de vibración de las ondas sísmicas.

Para un estrato de suelo homogéneo (fig 9), los periodos de vibración están dados por

$$T_{s_n} = 4 H \sqrt{\rho / G} / (2n - 1) \quad (48)$$

$n = 1, 2, \dots$

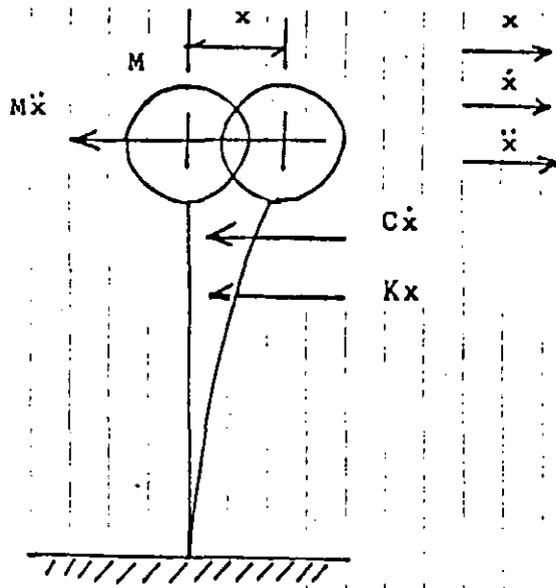
donde ρ = masa específica del suelo
 G = módulo de rigidez al cortante dinámico del suelo

El primer modo de vibrar, o modo fundamental, se obtiene para $n = 1$:

$$T_{s1} = 4 H \sqrt{\rho / G} \quad (49)$$

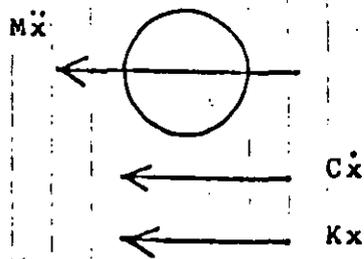
REFERENCIAS

- Newmark, N M y Rosenblueth, E, Fundamentos de Ingeniería Sísmica, Diana, 1976
- Roesset, J M, "Fundamentals of soil amplification", Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 1969



VIBRACIÓN LIBRE DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD

(a)



FUERZAS QUE ACTÚAN EN EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE LA MASA

(b)

FIGURA 1

VIBRACIÓN LIBRE SIN AMORTIGUAMIENTO

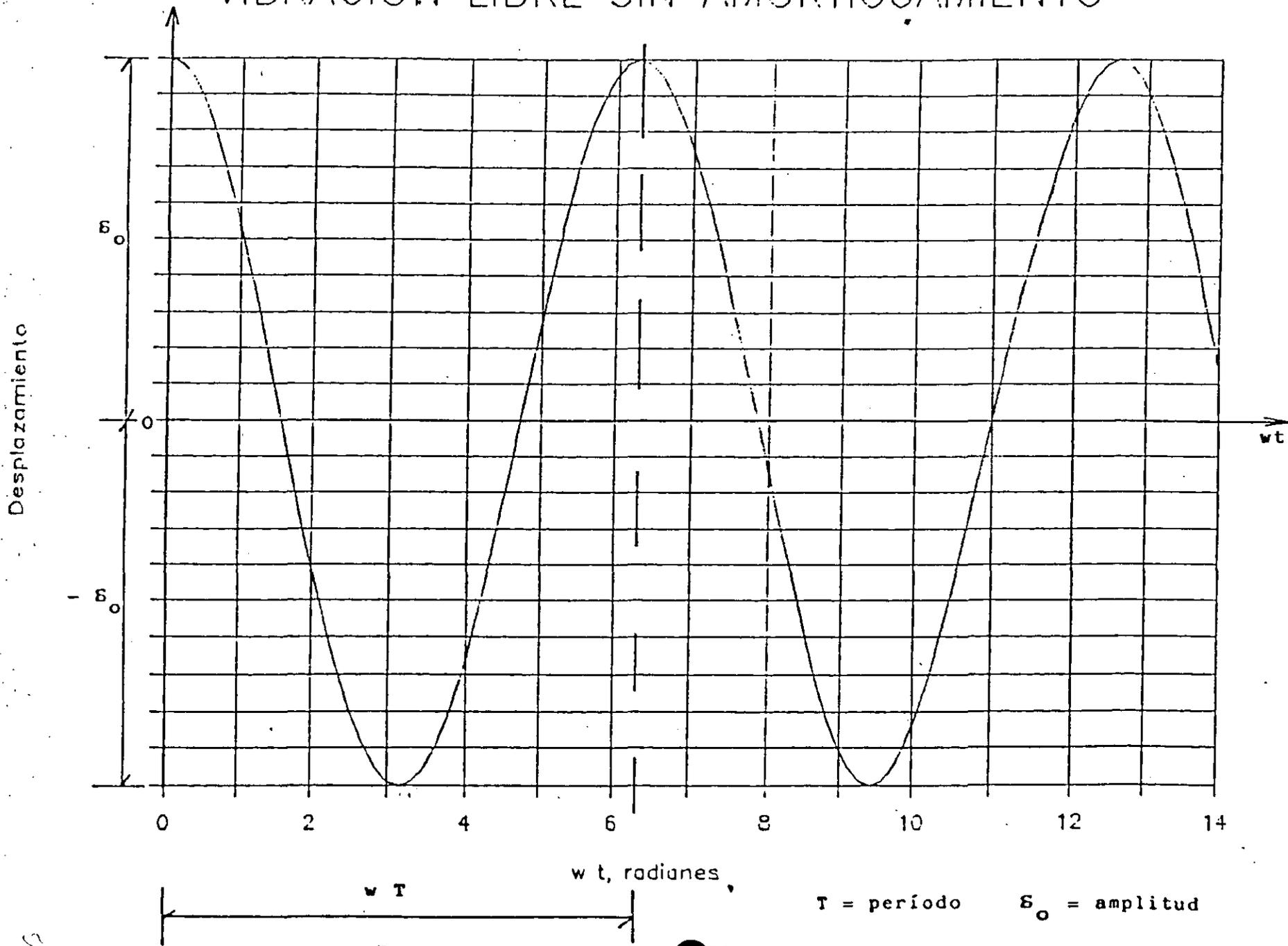


FIGURA 2

85

MOVIMIENTO PARA AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO

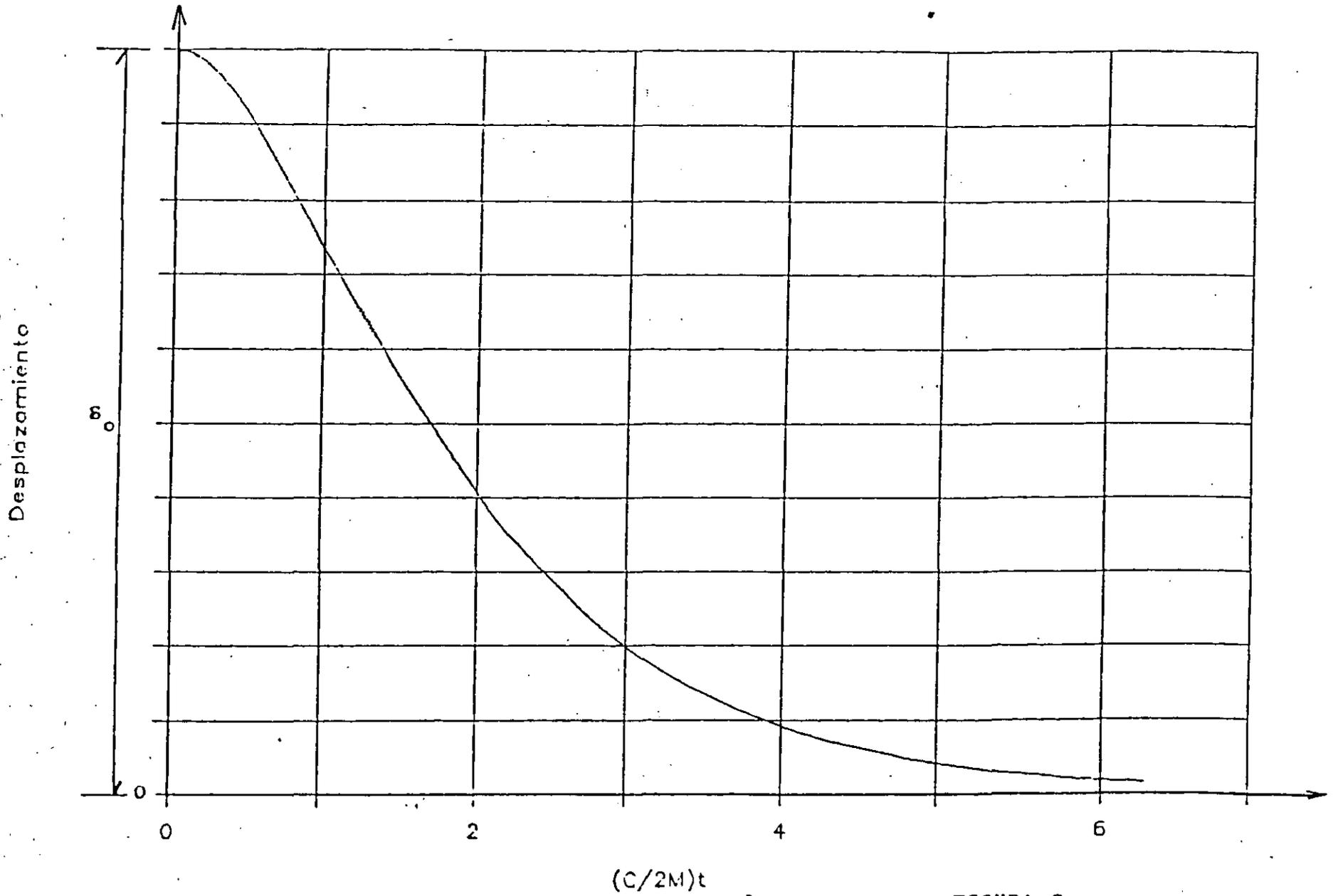


FIGURA 3

VIBRACIÓN LIBRE CON AMORTIGUAMIENTO

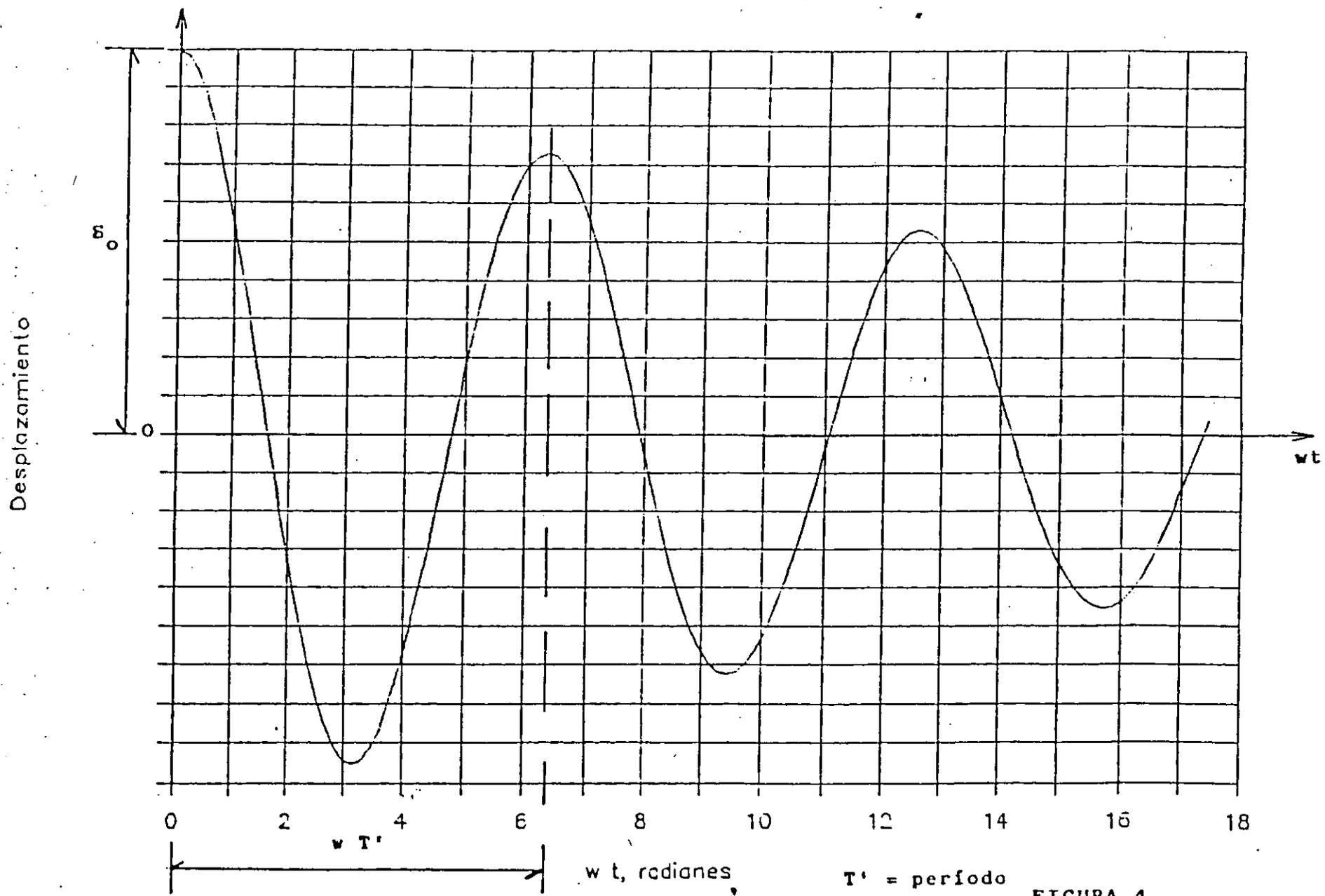
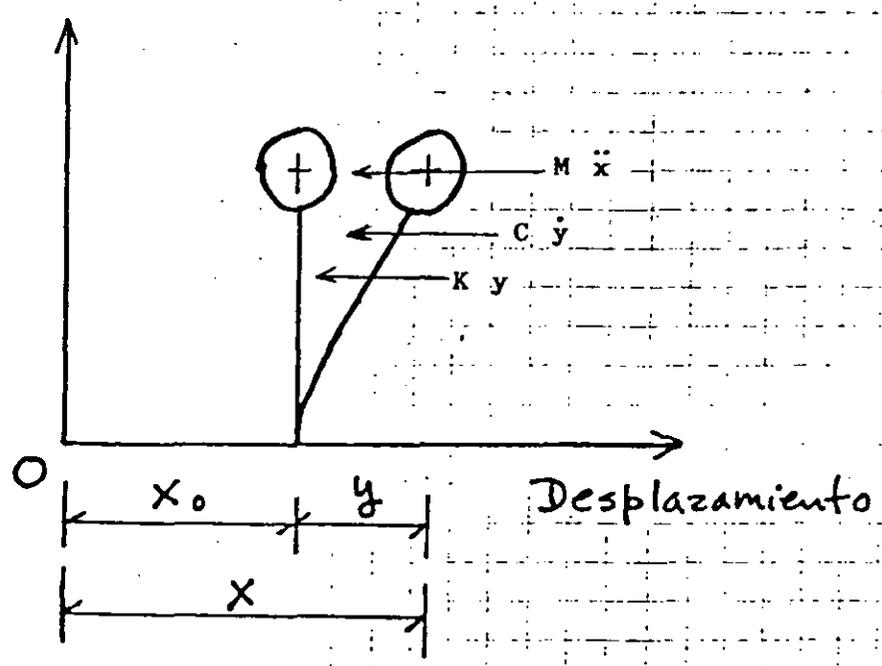
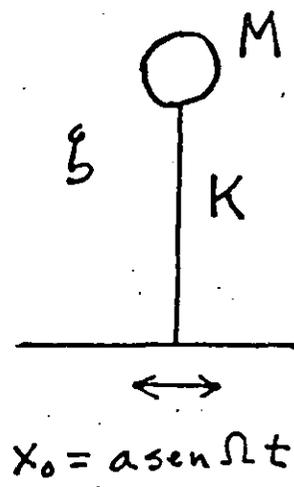


FIGURA 4



MOVIMIENTO ESTACIONARIO EN LA BASE

FIGURA 5

VARIACIÓN DEL FACTOR DE AMPLIFICACIÓN

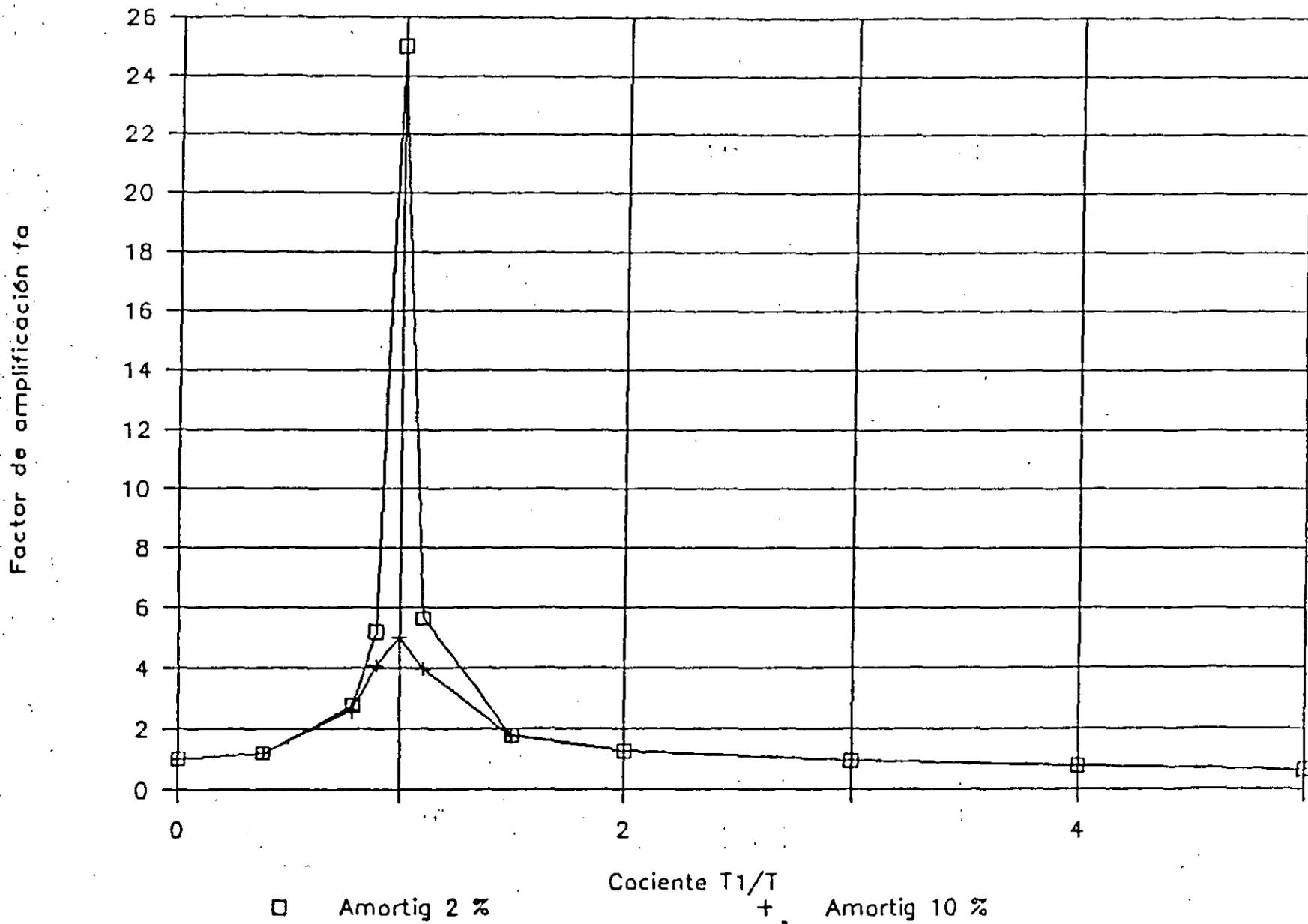
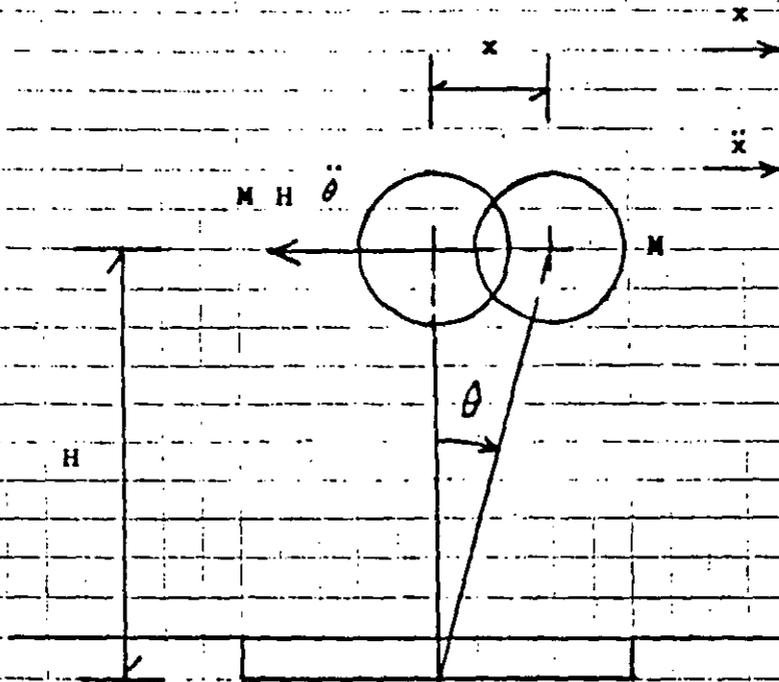


FIGURA 6



ROTACIÓN DE UNA MASA DE UN GRADO DE LIBERTAD

FIGURA 7

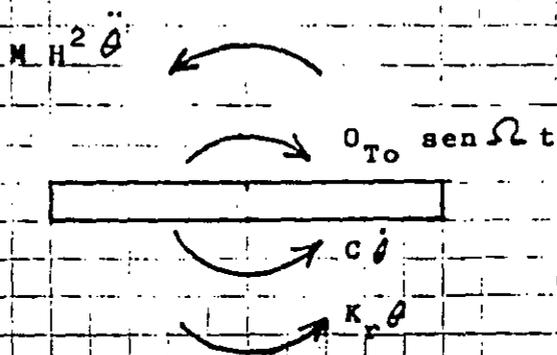
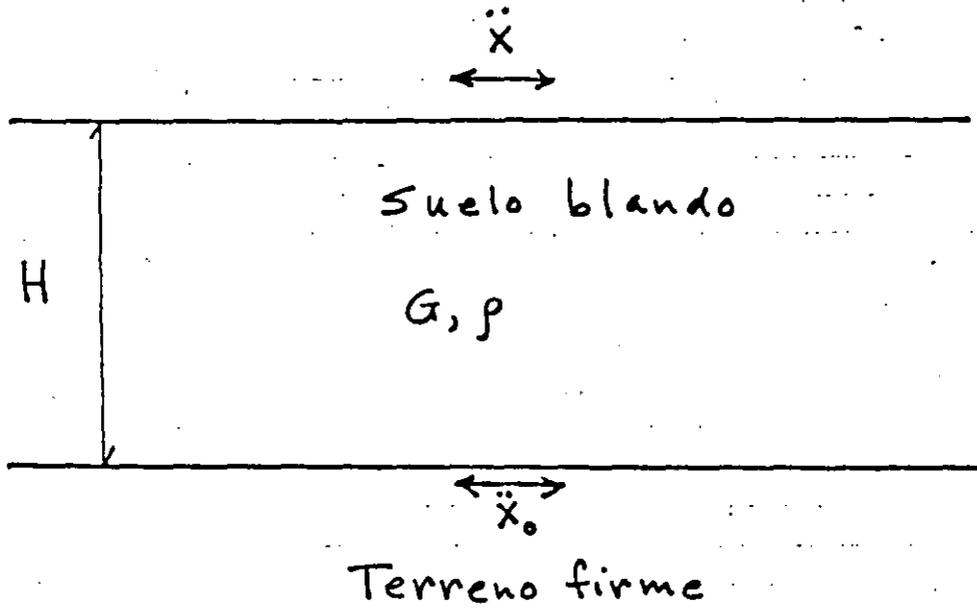


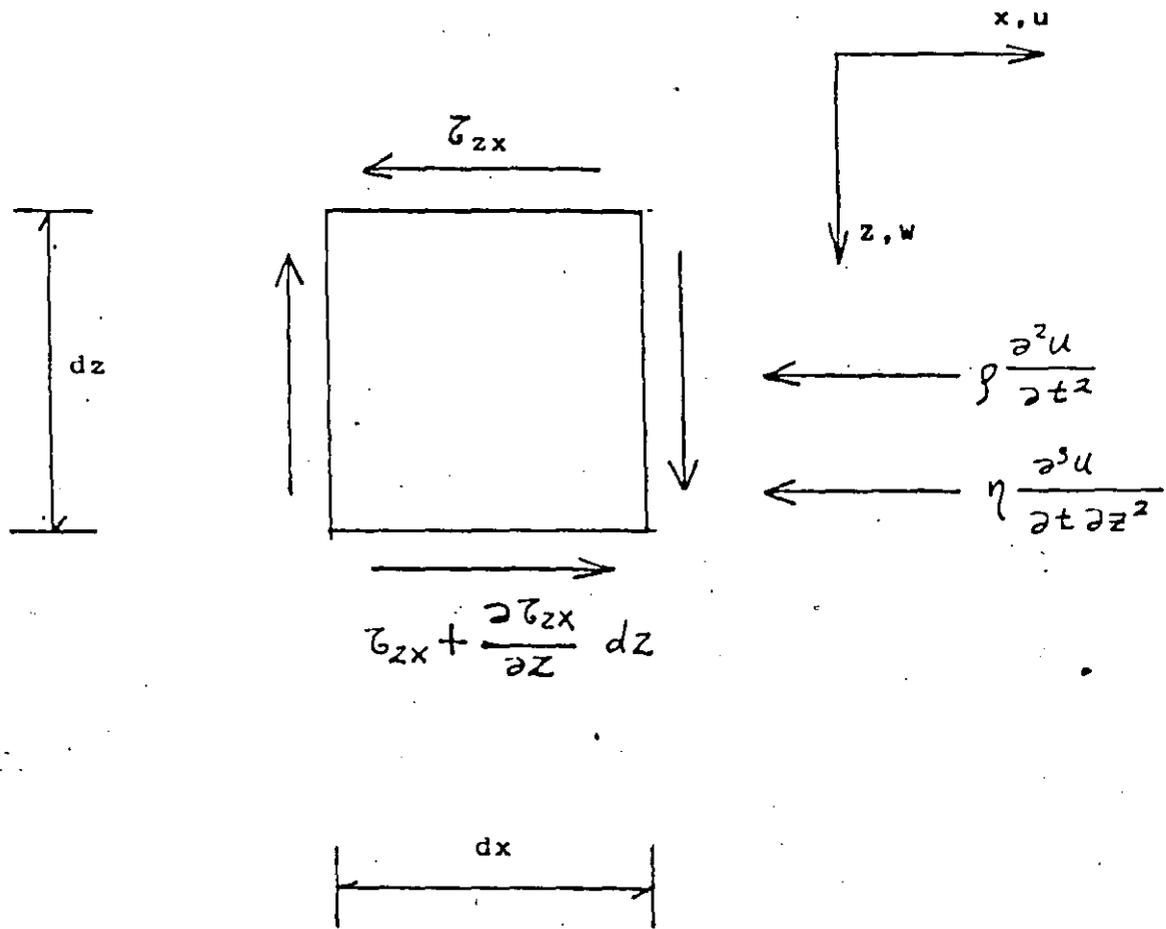
DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE LA CIMENTACIÓN

FIGURA 8



ESTRATO BLANDO DE ESPESOR H

FIGURA 9



EQUILIBRIO DINÁMICO DEL ELEMENTO

FIGURA 10

VARIACIÓN DEL FACTOR DE AMPLIFICACIÓN

AMORTIGUAMIENTO 20 % DEL CRÍTICO

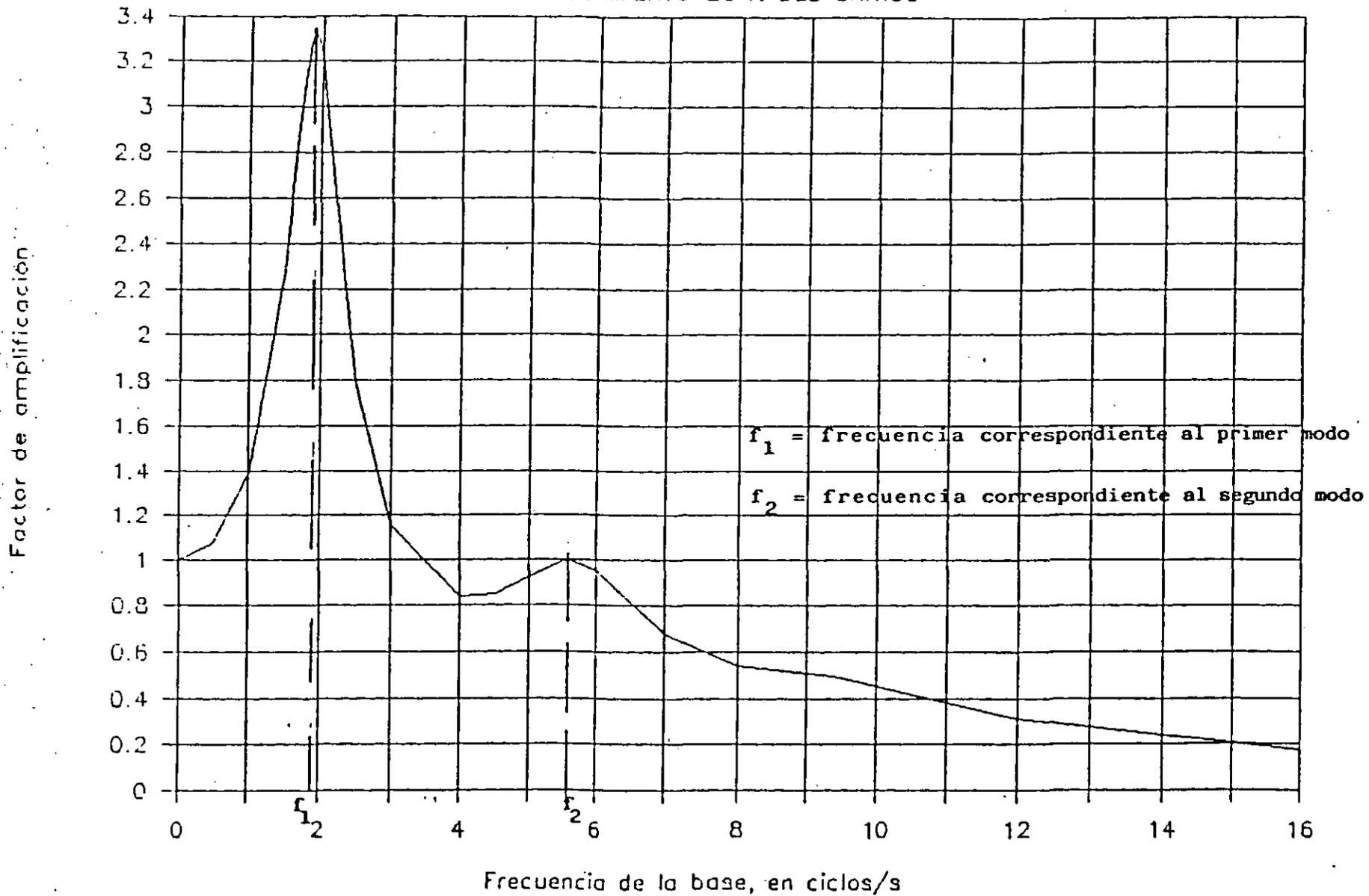
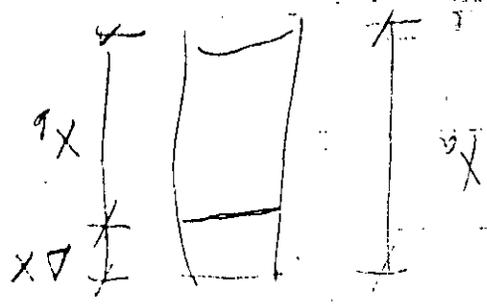


FIGURA 11

$$\frac{dx}{x} = \frac{y_0}{y_0 - y_1}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x} = \int_{y_0}^{y_1} \frac{y_0}{y_0 - y_1} dy$$



$$E = \frac{1}{2} k x x = \frac{1}{2} k x^2$$

$$P = kx$$

$$E = \frac{1}{2} P x$$

amortiguamiento específico $\Delta W/W$ es igual al doble del decremento logaritmico Δ' :

Por otra parte, en una vibración forzada, para amortiguamiento pequeño la forma de la curva desplazamiento-frecuencia es muy aguda, mientras que para amortiguamiento grande la curva es mucho más tendida. Si denominamos ΔN a la diferencia entre la frecuencia correspondiente a la mitad del "pico" del lado derecho de la curva menos la frecuencia correspondiente a la mitad del "pico" del lado izquierdo, y N a la frecuencia de resonancia, el cociente $\Delta N/N$ es una medida de la fricción interna, y se puede demostrar que

$$\Delta N/N = \sqrt{3} \Delta' / \pi$$

En efecto, en una vibración forzada, el desplazamiento está dado por

$$x = \frac{F_0}{K} \frac{\text{sen}(\Omega t - \phi)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2}} \quad (18)$$

$$\phi = \text{ang tan} \frac{2\zeta \frac{\Omega}{\omega_1}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} \quad (19)$$

ω_1 es la frecuencia circular del sistema $\omega_1 = \sqrt{K/M}$

El máximo valor de x ocurre para $\omega_1 = \Omega$, es decir

$$\max x = \frac{F_0}{K} \frac{1}{2\zeta} \quad \text{pero} \quad \zeta = C / 2 \sqrt{M K}$$

$$\max x = F_0 / C \omega_1$$

La mitad del máximo de x vale $F_0 / 2 C \omega_1$. Por lo tanto, haciendo $x = F_0 / 2 C \omega_1$ en la ec 18, obtenemos:

$$\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2 \zeta \frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} = 2 C \omega_1 / K$$

$$\left(K - K \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2 \zeta K \frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2 = 4 C^2 \omega_1^2$$

Pero $\omega_1^2 = K / M$

$$\therefore (K - M \Omega^2)^2 + (C \Omega)^2 = 4 C^2 \omega_1^2$$

Despejemos los valores de Ω^2 de esta ecuación

$$(M \Omega^2)^2 + (C^2 - 2 M K) \Omega^2 + K^2 - 4 C^2 \omega_1^2 = 0$$

$$\Omega^2 = \frac{-(C^2 - 2MK) \pm \sqrt{(C^2 - 2KM)^2 - 4M^2(K^2 - 4C^2\omega_1^2)}}{2 M^2}$$

$$\Omega^2 = \frac{K}{M} - \frac{C^2}{2M^2} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{C^2}{4M^2} - \frac{K}{M} + \frac{K}{2M}\right) (C^2 - 2KM) - K^2 + 4C^2\omega_1^2}}{M}$$

Pero $\omega_1^2 = K / M - C^2 / 4 M^2$

$$\Omega^2 = \frac{K}{M} - \frac{C^2}{2M^2} \pm \frac{\sqrt{\frac{K C^2}{2 M} + 3 C^2 \omega_1^2 - 2 K^2 + 2 K M \omega_1^2}}{M}$$

$$\Omega^2 = \frac{K}{M} - \frac{C^2}{2M^2} \pm \frac{\sqrt{\frac{K C^2}{2M} + 3 C^2 \omega_1^2 - 2 K^2 + 2 K M \left(\frac{K}{M} - \frac{C^2}{4 M^2} \right)}}{M}$$

$$\Omega^2 = \frac{K}{M} - \frac{C^2}{2M^2} \pm \frac{\sqrt{3} C \omega_1}{M}$$

Denominando Ω_2 y Ω_3 a las dos raíces de Ω

$$\Omega_2^2 - \Omega_3^2 = \frac{2 \sqrt{3} C \omega_1}{M}$$

Como se comentó antes, $\Delta N = \Omega_2 - \Omega_3$ y $N = \omega_1$, por lo tanto

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Omega_2 - \Omega_3}{\omega_1} = \frac{(\Omega_2 - \Omega_3) (\Omega_2 + \Omega_3)}{\omega_1 (\Omega_2 + \Omega_3)}$$

Para valores bajos de amortiguamiento $\omega_1 \approx \frac{\Omega_2 + \Omega_3}{2}$

$$\frac{\Delta N}{N} \approx \frac{\Omega_2^2 - \Omega_3^2}{2 \omega_1^2} = \frac{\sqrt{3} C}{M \omega_1} = \frac{\sqrt{3} \Delta'}{\pi}$$

Propagación de una onda de cortante en un sólido viscoelástico (Kolsky 1963)

Modelo de Voigt

Voigt consideró que las componentes de esfuerzo en un sólido son la suma de dos términos: el primero proporcional a la deformación

unitaria y el segundo proporcional a la velocidad de la deformación unitaria. En un material isotrópico y elástico, las ecuaciones que relacionan los esfuerzos y las deformaciones serán ahora

$$\sigma_x = \lambda \Delta + 2 G \epsilon_x + \lambda' (\partial \Delta / \partial t) + 2 \eta (\partial \epsilon_x / \partial t)$$

⋮

$$\tau_{yz} = G \gamma_{yz} + \eta (\partial \gamma_{yz} / \partial t)$$

⋮

Estas ecuaciones conducen a relaciones similares a aquellas obtenidas para un sólido elástico, pero el operador $\lambda + \lambda' (\partial / \partial t)$ toma el lugar de λ , y $G + \eta (\partial / \partial t)$ ^{toma el lugar de G.} La ecuación para los desplazamientos horizontales es la siguiente:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + G \nabla^2 u$$

Haciendo las sustituciones anteriores

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = [(\lambda + G) + (\lambda' + \eta) \frac{\partial}{\partial t}] \frac{\partial \Delta}{\partial x} + (G + \eta \frac{\partial}{\partial t}) \nabla^2 u$$

En una onda de cortante exclusivamente

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \nabla^2 u + \eta \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

Si consideramos una onda de cortante que se propaga en dirección vertical con movimiento de partículas en dirección horizontal:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \eta \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2}$$

Referencia

Kolsky, H, Stress Waves in Solids, Dover, 1963

VIBRACIÓN LIBRE CON AMORTIGUAMIENTO

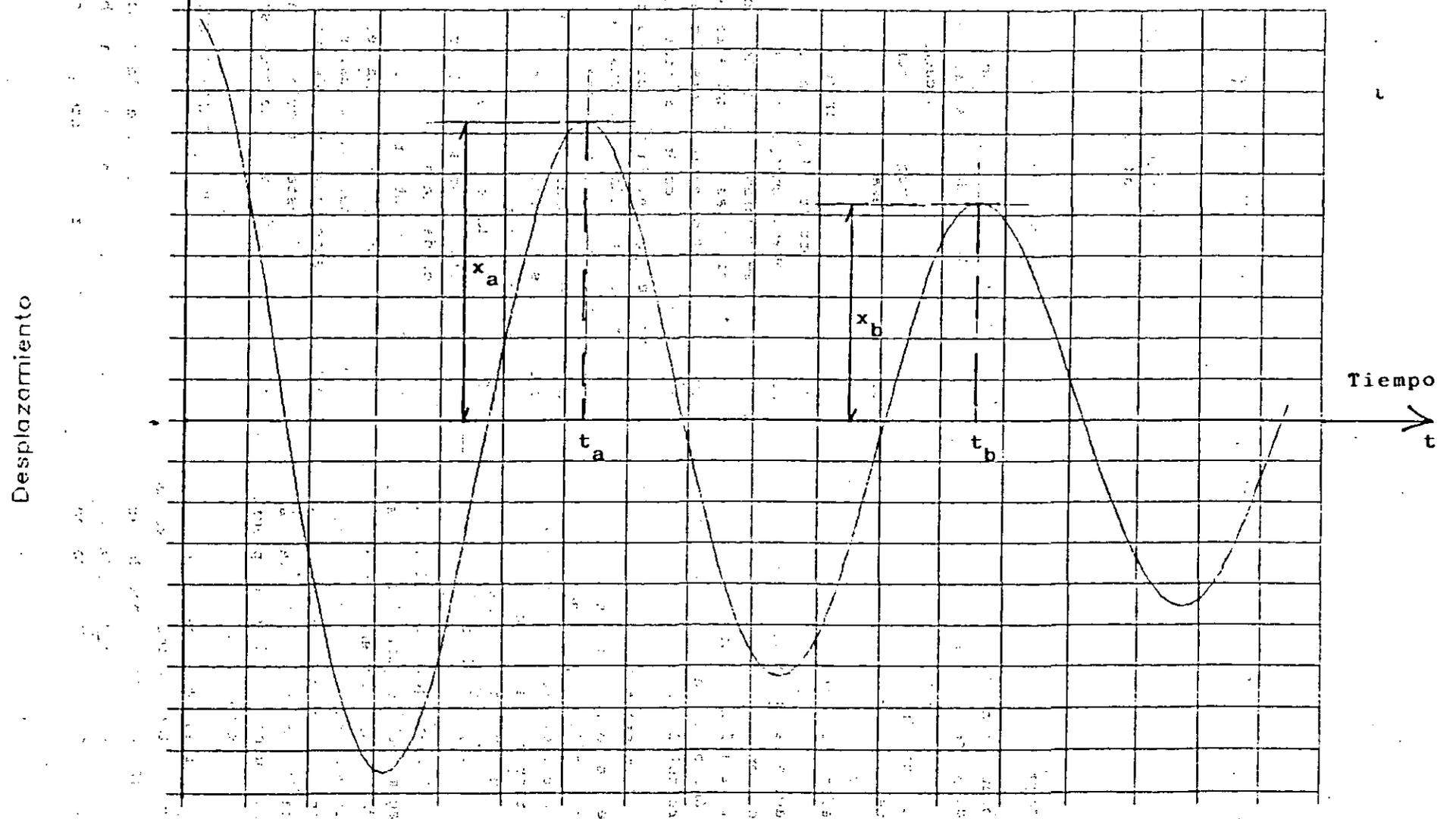


FIGURA 1

h_c

ANALISIS DE PILOTES SUJETOS A SOLICITACIONES DINAMICAS

Agustín Deménegui Colina
Facultad de Ingeniería, UNAM

1. INTRODUCCION

Durante la ocurrencia de un sismo, un edificio cimentado sobre pilotes se ve sujeto a una serie de efectos ocasionados por el movimiento telúrico. Entre las principales acciones se cuentan el momento de volteo y la fuerza horizontal sobre la estructura, ambos debidos al efecto dinámico del fenómeno, Fig. 1

La determinación del momento de volteo M_T y la fuerza horizontal V_T sísmicos se puede efectuar por el análisis estático o por el análisis dinámico, tratados con amplitud en la literatura del diseño estructural.

Zeevaert (1973) presenta un método para la obtención de las solicitaciones M_T y V_T que tiene la ventaja de que toma en cuenta en forma integral el efecto del subsuelo y el de la estructura. Este procedimiento se lleva a cabo en condiciones dinámicas, lo cual es otra ventaja adicional del mismo.

Desde luego, es claro que los análisis dinámicos son recomendables sobre los análisis estáticos, dado que representan de una manera más realista el fenómeno, aun cuando su aplicación en la práctica resulta en ocasiones laboriosa. Por otro lado, los análisis estáticos, aun cuando son de menor precisión, son de manejo más simplificado.

El momento de volteo M_T ocasiona un incremento de carga en los pilotes de un extremo de la cimentación y un decremento de carga en el otro extremo. En ocasiones, se valúa este incremento (positivo y negativo) por me

dio de la fórmula de la escuadría.

La fuerza horizontal V_T provoca un desplazamiento horizontal de la estructura con respecto al subsuelo y genera en cada pilote fuerzas cortantes y momentos flexionantes a lo largo de toda la pieza.

En este trabajo sólo estudiaremos el efecto de la fuerza cortante V_T . En los siguientes incisos comentaremos sobre los desplazamientos que se generan en el suelo y en el pilote por el sismo, así como sobre los desplazamientos relativos entre pilote y suelo, lo que ocasiona una reacción repartida a lo largo de todo el pilote. En el Inciso 3 trataremos sobre las propiedades del suelo que es necesario conocer, las cuales deben ser obviamente propiedades dinámicas. En el Inciso 4 presentaremos un método para determinar las reacciones del subsuelo provocadas por la acción de una fuerza cortante en la cabeza del pilote; conociendo estas reacciones se pueden determinar los desplazamientos relativos entre pilote y suelo, y obtener los diagramas de momento flexionante y fuerza cortante, a lo largo de todo el pilote, con lo cual se puede efectuar el diseño estructural del mismo. En la parte final de este artículo presentaremos las conclusiones derivadas de este estudio.

2. DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES DE SUELO Y PILOTE

Como indicamos anteriormente, la fuerza sísmica horizontal V_T ocasiona en la cabeza de un pilote una fuerza cortante que se puede va

luar dividiendo la fuerza total V_T entre el número total de pilotes. De esta manera, se obtiene la fuerza cortante en la cabeza de un pilote individual, que denominaremos V_n (Fig. 2).

Debido al sismo se presenta un movimiento horizontal del suelo con respecto a un plano de referencia A-A', que denominaremos δ_s (Fig. 3a); este desplazamiento se puede determinar utilizando el método propuesto por Zeevaert (1973). Por el efecto de la fuerza cortante V_n , el pilote experimenta un desplazamiento horizontal δ_p con respecto al mismo plano de referencia A-A' (Fig. 3a). En estas condiciones, se presenta entre el suelo y el pilote un desplazamiento relativo $\delta_s - \delta_p = \delta$, tal como se indica en la Fig. 3a (Zeevaert 1973), el cual ocasiona una reacción repartida de suelo sobre pilote (Fig. 3b).

El desplazamiento horizontal relativo entre suelo y pilote depende de la magnitud de la fuerza cortante en la cabeza de la pieza V_n , de la rigidez del pilote y de la rigidez del suelo.

La valuación de V_n la comentamos anteriormente. La rigidez del pilote está dada por el producto EI , siendo E el módulo de elasticidad del material que forma el pilote y que para el caso de pilotes de concreto se puede obtener como $E = 10^7 \text{Kg/cm}^2 \sqrt{f'_c}$, en Kg/cm^2 , siendo f'_c la resistencia en compresión no confinada del concreto a los 28 días de fabricado, en Kg/cm^2 . I es el momento de inercia de la sección de un pilote, supuesto de tipo prismático o cilíndrico, es decir, de sección constante en toda su longitud.

La rigidez del suelo debe valuarse en condiciones dinámica. Sabemos que la deformación de un estrato de suelo de espesor e está dada por:

$$\delta_s = \frac{M_v}{G} e \Delta p \quad (1)$$

siendo:

M_v = módulo longitudinal de deformación del suelo

Δp = esfuerzo promedio aplicado a la mitad del estrato

Desde luego, el módulo M_v debe ser el módulo longitudinal dinámico de deformación, el cual está relacionado con el módulo cortante de rigidez G de acuerdo con la siguiente expresión:

$$M_v = \frac{2(1 + \nu)}{3G} \quad (2)$$

en donde ν = módulo de Poisson

Para el caso de suelos finos saturados sujetos a una sollicitación dinámica (lo que ocurre en un sismo), se puede considerar

$\nu = 0.5$, alcanzando M_v el valor:

$$M_v = \frac{1}{3G} \quad (3)$$

En términos generales, en dinámica de suelos ha resultado de mayor facilidad la determinación en la práctica del módulo cortante G , para después emplear las Ecs. 2 ó 3 para valuar el módulo longitudinal M_v .

En el siguiente inciso veremos la forma de obtener el valor del módulo cortante G en condiciones dinámicas.

3. PROPIEDADES DINAMICAS DEL SUELO

Para fines de análisis de pilotes sujetos a cargas laterales por sismo, interesa conocer principalmente dos propiedades del suelo: el módulo cortante de rigidez G y la relación de Poisson ν .

En general, el módulo cortante G se puede determinar en el campo y en el laboratorio. Dentro de las pruebas de campo se pueden mencionar el ensaye geofísico, la prueba del vibrador de superficie y un cierto tipo de prue-

ba de placa de carga y descarga. Parece ser que la principal limitación de estas pruebas es el rango de las deformaciones que se alcanzan, ya que se hace necesario que se llegue a deformaciones unitarias en el rango de 0.1 a 0.01 % en el campo (intervalo usual de deformaciones ocasionadas por el sismo) (Wilson 1972).

Las pruebas de laboratorio empleadas son la prueba triaxial cíclica, la prueba de corte cíclico y la prueba de la columna de torsión. Aparentemente, esta última es el ensaye más realista para la determinación de G , aunque es de difícil ejecución (Wilson 1972).

La determinación del módulo G por medio del péndulo de torsión ha dado buenos resultados en la práctica de la ingeniería. Esta prueba consiste en hacer una pequeña modificación a la cámara triaxial convencional, la cual se emplea para someter una muestra de suelo a diferentes esfuerzos de confinamiento. Al espécimen de suelo se le da una pequeña torsión (en un plano horizontal), permitiendo que el sistema vibre libremente, movimiento debido a la respuesta elástica de los elementos del suelo. De esta manera se puede hallar el módulo de cortante G (Zeevaert 1973).

Los resultados de pruebas con el péndulo de torsión indican que G aumenta con el confinamiento, tanto en suelos cohesivos como en suelos no cohesivos; en estos materiales parece necesario determinar la variación causada por la amplitud usada en las pruebas y por el método de aplicación del esfuerzo de confinamiento (Zeevaert 1973).

Por lo que respecta al módulo de Poisson ν , se puede emplear un valor de 0.25 para materiales granulares parcialmente saturados y un valor de 0.42 a 0.45 como límite para suelos cohesivos no consolidados (Zeevaert 1973).

4. ANALISIS DE PILOTES SUJETOS A CARGAS LATERALES

La determinación de las propiedades dinámicas de un suelo es de gran importancia para evaluar

los efectos de un sismo sobre un pilote. De igual importancia es la posibilidad de poder manejar los datos de propiedades mecánicas para efectuar el análisis de los pilotes. De otra manera, ¿de qué sirve obtener las propiedades dinámicas de un suelo con gran precisión-suponiendo que logremos esto-si después no sabremos cómo utilizarlas y conocer el efecto que tienen sobre un pilote?.

En este inciso trataremos la manera de llevar a cabo el análisis de un pilote sujeto a una carga lateral, que puede ser debida a un sismo. Como comentamos en el Inciso 2, al ser cargado un pilote con una fuerza horizontal V_n en su cabeza, se produce una reacción del suelo por el desplazamiento relativo δ entre suelo y pilote (Fig. 3). Nos interesa conocer la distribución de esta reacción para valuar el diagrama de momento -- flexionante y el diagrama de fuerza cortante en el pilote.

El diagrama de presión de suelo sobre pilote está limitado por una línea continua -- (Fig. 3b), pero para fines de análisis lo podemos sustituir por cargas repartidas en tramos de longitud d (Fig. 4a); es obvio que a mayor precisión que se desee se tendrá que disminuir la longitud de tramo y aumentar el número n de tramos.

En la Fig. 4b se muestra la elástica del pilote, causante de la reacción del suelo. La posición original se refiere a la posición de desplazamiento relativo nulo entre pilote y terreno.

La Fig. 4c muestra las propiedades dinámicas del suelo en cada uno de los tramos, a saber el módulo cortante de rigidez G y la relación de Poisson ν .

El procedimiento que se propone para el análisis de la interacción suelo-pilote consiste en términos generales en lo siguiente: manejar las reacciones r_1 del suelo (Fig. 4a) como incógnitas y mediante el análisis estructural del pilote hallar los desplazamientos del suelo δ_1 (Fig. 4b) en función de las

Viga flotante

Desplazamiento nudo j:

$$EI \theta_{1j} - EI \delta_1 + EI \delta_j + \sum_{i=1}^{j-1} D_{ji} r_i + \frac{1}{64} A_j d_j r_j = \sum_{i=1}^{j-1} D_{ji} w_i + \frac{1}{64} A_j d_j w_j + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{m_j} l_{jk}^3 P_{jk}$$

reacciones; con esto obtenemos un sistema de ecuaciones en el que tenemos como incógnitas los desplazamientos del suelo δ_i y las reacciones r_i . A continuación determinamos los desplazamientos δ_j en función de las reacciones r_i mediante el cálculo de deformaciones en el suelo, obteniendo otro sistema de ecuaciones en el que los desplazamientos δ_i quedan en función de las reacciones r_i . Sustituyendo este último sistema en el obtenido con la aplicación del análisis estructural quedan únicamente como incógnitas las reacciones r_i ; resolvemos el sistema y hallamos las r_i . Como tenemos los δ_i en función de las r_i , también podremos obtenerlos. De esta manera, al final de la aplicación de este procedimiento se conocen los desplazamientos δ_i y las reacciones r_i (Deméneghi, 1979).

Veamos el desarrollo al detalle de lo expuesto en el párrafo anterior. Empezaremos con el análisis estructural del pilote, continuaremos con el cálculo de las deformaciones del suelo y terminaremos con el establecimiento de la compatibilidad de desplazamientos.

4.1 Análisis estructural del pilote

El análisis estructural se puede realizar utilizando el método de la viga conjugada para todo el pilote (Flores Ojeda 1980).

En nuestro caso, nos interesa determinar los desplazamientos δ_i del pilote en función de las reacciones r_i y de la rigidez de la pieza (Fig. 4). Nos conviene trabajar con una sola reacción r_i y después tomar en cuenta el efecto de todas las r_i . En la Fig. 5a se muestra el intervalo de pilote del nudo 1 al nudo j; en una posición intermedia se encuentra la reacción r_i . En la Fig. 5b está indicada la viga conjugada para esta condición de carga, en la cual:

$$A_1' = \frac{1}{3} d_1 \frac{r_i d_1^2}{2EI} = \frac{1}{EI} r_i \frac{1}{6} d_1^3$$

$$A_2' = l_{j1} \frac{r_i d_1^2}{2EI} = \frac{1}{EI} r_i \frac{1}{2} d_1^2 l_{j1}$$

$$A_3' = \frac{1}{2} l_{j1} \frac{r_i d_1}{EI} = \frac{1}{EI} r_i \frac{1}{2} d_1 l_{j1}^2$$

Designemos como:

$$A_1 = \frac{1}{6} d_1^3 \quad (4)$$

$$B_{j1} = \frac{1}{2} d_1^2 l_{j1} \quad (5)$$

$$C_{j1} = \frac{1}{2} d_1 l_{j1}^2 \quad (6)$$

por lo tanto:

$$A_1' = \frac{r_i}{EI} A_1; \quad A_2' = \frac{r_i}{EI} B_{j1}; \quad A_3' = \frac{r_i}{EI} C_{j1}$$

Tomemos momentos en la viga conjugada con respecto al nudo j:

$$-\theta_1' l_j + \delta_1' - \delta_j' - A_1' (l_{j1} + \frac{1}{4} d_1) - A_2' \frac{l_{j1}}{2} - A_3' \frac{l_{j1}}{3} = 0$$

Es decir

$$\theta_1' l_j - \delta_1' + \delta_j' + \frac{1}{EI} r_i (A_1 (l_{j1} + \frac{1}{4} d_1) + \frac{B_{j1} l_{j1}}{2} + \frac{C_{j1} l_{j1}}{3}) = 0$$

$$\text{Hagamos: } D_{j1} = A_1 (l_{j1} + \frac{1}{4} d_1) + \frac{B_{j1} l_{j1}}{2} + \frac{C_{j1} l_{j1}}{3} \quad (7)$$

Por lo tanto:

$$\theta_1' l_j - \delta_1' + \delta_j' + \frac{1}{EI} r_i D_{j1} = 0$$

De manera análoga, para una reacción colocada en el tramo j:

$$\theta_1'' l_j - \delta_1'' + \delta_j'' + \frac{1}{64EI} A_j d_j r_j = 0$$

Para todas las reacciones r_i en el intervalo 1-j:

$$\theta_1' l_j - \delta_1' + \delta_j' + \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^{j-1} D_{ji} r_i + \frac{1}{64EI} A_j d_j r_j = 0$$

en donde θ_1 es el giro en el nudo 1 debido a la totalidad de las reacciones.

Multiplicando ambos miembros de esta última ecuación por EI:

$$EI \theta_1' l_j - EI \delta_1' + EI \delta_j' + \sum_{i=1}^{j-1} D_{ji} r_i + \frac{1}{64} A_j d_j r_j = 0 \quad (8) \quad \checkmark$$

$$2 \leq j \leq n-1$$

Para la reacción r_1 , $l_1 = 0$ y $l_{j1} = l_j - d_1$ (9)

$$i = 1$$

Para el resto de las reacciones r_i :

$M_j = N_j^2$ de cargas concentradas a la izquierda del punto j

Desplaz. nudo n

$$EI(\theta_1 - \theta_n) - EI\delta_1 + EI\delta_n + \sum_{i=1}^{n-1} D_{ni} \theta_i + \frac{1}{4} A_n d_n r_n = \sum_{i=1}^{n-1} D_{ni} w_i + \frac{1}{4} A_n d_n w_n + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{M_n} l_{pk} P_k$$

$$1_{ji} = 1_j - (1_i + \frac{d_i}{2}) \quad (10)$$

$$2 \leq i \leq n$$

En forma similar obtenemos para el nudo n lo siguiente:

$$EI(\theta_n - \theta_1) - EI\delta_n + EI\delta_1 + \sum_{i=1}^{n-1} D_{ni} \theta_i + \frac{1}{4} A_n d_n r_n = 0 \quad (11)$$

$j = n$

La condición de equilibrio de fuerzas en toda la viga conjugada permite establecer la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^n (A_i + B_{ji} + C_{ji}) r_i + \theta_1 - \theta_n = 0$$

Pero $\theta_n = 0$, dado que consideramos que el pilote está empotrado en su cabeza, por lo tanto:

$$EI\theta_1 + \sum_{i=1}^n (A_i + B_{ji} + C_{ji}) r_i = 0 \quad (12)$$

En el pilote debe haber equilibrio de fuerzas

$$\sum_{i=1}^n d_i r_i = V_n \quad (13)$$

Cabe aclarar que las expresiones 8, 11, 12 y 13 son válidas para pilotes de tipo prismático o cilíndrico, es decir, para pilotes de sección constante en toda su longitud. También recordamos que se considera que el pilote está empotrado en su cabeza (nudo n).

En resumen, para el análisis estructural del pilote empleamos las Ecs. 8, 11, 12 y 13, con lo que tenemos como incógnitas el giro en el nudo 1, θ_1 , los desplazamientos δ_i y las reacciones r_i . Lo que falta ahora es obtener los δ_i en función de las r_i con un análisis de deformaciones del suelo, lo cual se efectuará en el siguiente inciso:

4.2. Deformaciones del suelo

Como se comentó en el Inciso 3, en el campo o laboratorio se obtienen el módulo cortante G y el de Poisson ν . Empleando la Ect. 2 puede

nos conocer el módulo longitudinal de deformación M_v .

Hallemos ahora las deformaciones del suelo en función de las reacciones: la deformación del "cuadro" i, j debida a una reacción aplicada en k valdrá

$$\delta_{ij}^k = M_{vij} e_j - (\Delta T)_{ijk}$$

en donde:

δ_{ij}^k = deformación del "cuadro" i, j debida a una reacción colocada en k

M_{vij} = módulo longitudinal de deformación del cuadro i, j

e_j = espesor del "estrato vertical" j

$(\Delta T)_{ijk}$ = incremento del esfuerzo normal horizontal en el cuadro i, j debido a la presión r_k/b en el contacto pilote-suelo

b = ancho (o diámetro) del pilote

Pero:

$$(\Delta T)_{ijk} = I_{ijk} \frac{r_k}{b}$$

siendo

I_{ijk} = valor de influencia en el cuadro i, j debido a una presión unitaria colocada en k.

El valor de I_{ijk} se puede determinar calculando el esfuerzo que ocasiona una presión unitaria colocada en el tramo k sobre el cuadro i, j (Zeevaert 1973).

Con lo anterior, la deformación del cuadro i, j debida a todas las reacciones r_k será:

$$\delta_{ij} = \frac{1}{b} M_{vij} e_j \sum_{k=1}^n I_{ijk} r_k$$

El desplazamiento horizontal del nudo i valdrá

$$\delta_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij}$$

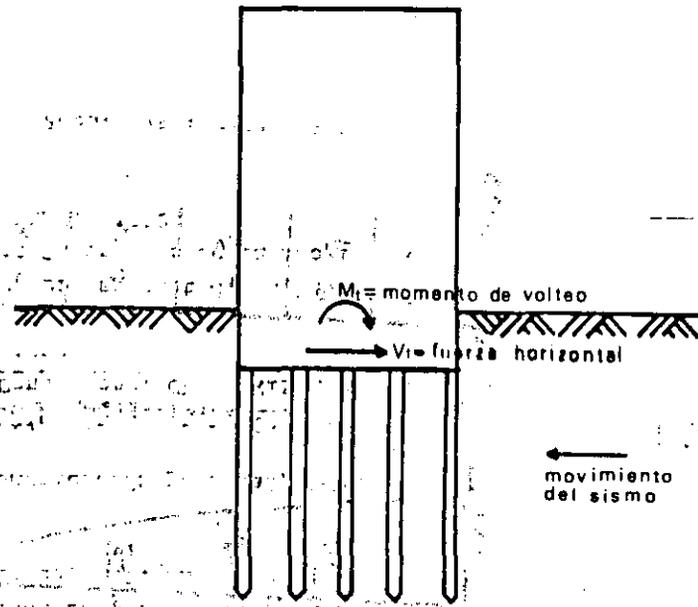
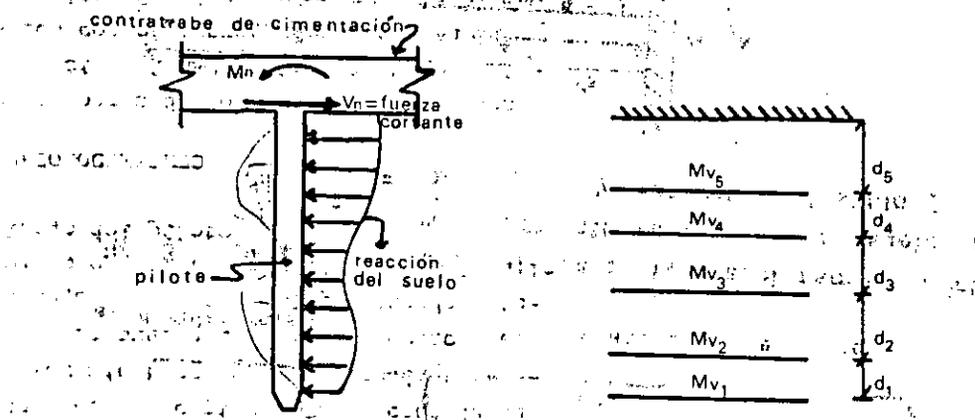


Fig. 1. Solicitaciones Sísmicas Sobre La Cimentación De Un Edificio



a) Acciones horizontales sobre un pilote b) Estratigrafía y propiedades del subsuelo

Fig. 2. Fuerza cortante sobre un pilote, Características del subsuelo

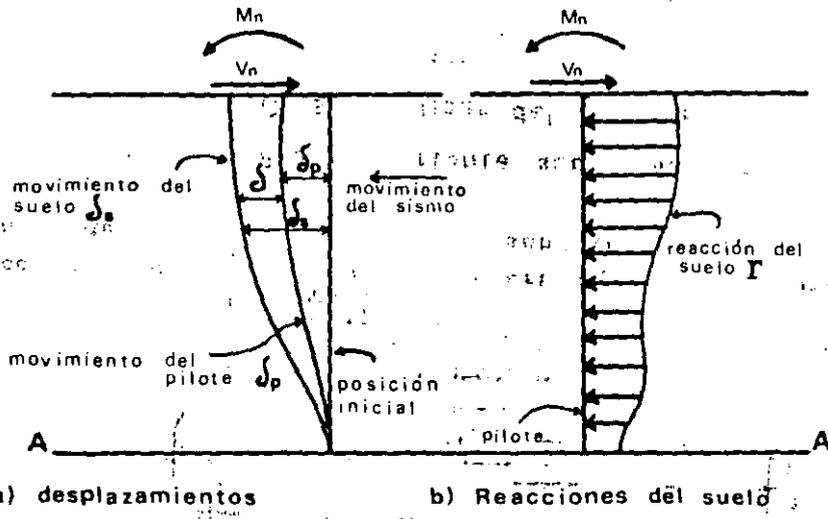
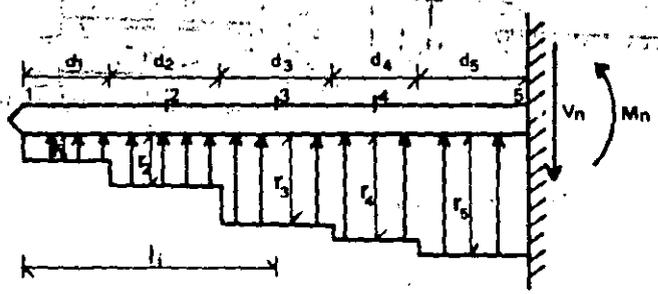
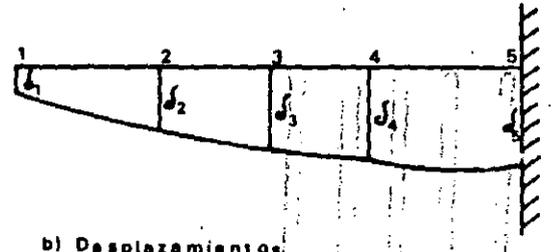


Fig. 3 Desplazamiento del suelo δ_s , desplazamiento del pilote δ_p , desplazamiento relativo entre suelo y pilote $\delta = \delta_s - \delta_p$, y reacción del suelo r



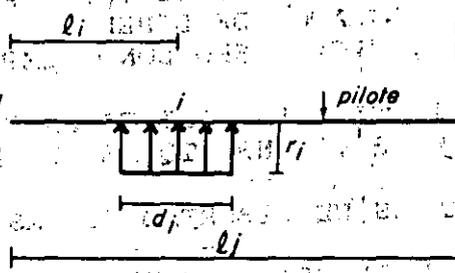
a) Geometría y cargas



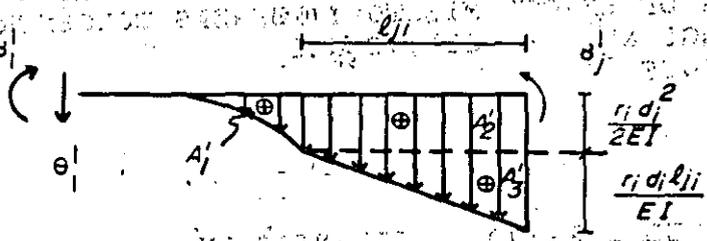
G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
V_1	V_2	V_3	V_4	V_5

c) Propiedades dinámicas del suelo

Fig. 4 Cargas y desplazamientos de un pilote.



a) Posición de la reacción r_j



b) Viga conjugada

Fig. 5 Determinación de los desplazamientos debidos a una reacción r_j

```

10 PRINT "ANALISIS ESTRUCTURAL CONSIDERANDO QUE ZAPATAS AISLADAS PUEDEN SUFRIR H
UNDIMIENTOS Y GIROS, DEBIDO A LA DEFORMABILIDAD DEL TERRENO DE CIMENTACION"
20 PRINT "PROGRAMA ELABORADO POR AGUSTIN DEMENEGHI COLINA. 30/09/94. PROGRAMA 'A
PC9'"
PRINT "EJEMPLO ILUSTRATIVO DE CLASE"
REM LECTURA DE DATOS
50 READ NGL,NG,NB,NA,NTC,NTF
60 PRINT "NGL=",NGL,"NG=",NG,"NB=",NB,"NA=",NA,"NTC=",NTC,"NTF=",NTF
70 PRINT "NGL=NUMERO AMPLIADO DE GRADOS DE LIBERTAD, PARA EL CALCULO DE LOS ELEM
ENTOS MECANICOS, NG=NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD, NB=NUMERO DE BARRAS, NA=NUMERO
DE APOYOS DE LA CIMENTACION, NTC=NUMERO DONDE EMPIEZA LA RIGIDEZ ANGULAR DE LA
CIMENTACION"
80 PRINT "NTF=NUMERO DONDE TERMINA LA RIGIDEZ ANGULAR DE LA CIMENTACION"
90 DIM E(NB),IN(NB),LO(NB),W(NB),TP(NB),TQ(NB),DR(NB),DS(NB)
100 DIM KR(NGL,NGL)
110 PRINT "PROPIEDADES Y GRADOS DE LIBERTAD DE LAS BARRAS"
120 FOR I = 1 TO NB
130 READ I,E(I),IN(I),LO(I),W(I),TP(I),TQ(I),DR(I),DS(I)
140 PRINT I,E(I),IN(I),LO(I),W(I),TP(I),TQ(I),DR(I),DS(I)
150 NEXT I
160 REM LECTURA DE FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO Y FUERZAS CONCENTRADAS
170 PRINT "FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO Y FUERZAS CONCENTRADAS"
180 DIM B(NGL),V(NGL,NB),VE(NGL),VC(NGL)
190 DIM KL(NA),KT(NTF)
200 FOR I=1 TO NG
210 READ I,VC(I)
220 PRINT I,VC(I);
230 NEXT I
240 REM RIGIDECES DEL TERRENO DE CIMENTACION
250 PRINT
PRINT "GRADO DE LIBERTAD, RIGIDEZ LINEAL"
270 FOR I=1 TO NA
280 READ I, KL(I)
290 PRINT I,KL(I)
300 NEXT I
310 PRINT "GRADO DE LIBERTAD, RIGIDEZ ANGULAR"
320 FOR I=NTC TO NTF
330 READ I,KT(I)
340 PRINT I,KT(I)
350 NEXT I
360 REM FORMACION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ
370 DIM VM(NGL,NB)
380 PRINT
390 REM PRINT "I,J,KR(I,J)"
400 FOR Q=1 TO NB: I=TP(Q): J=TQ(Q): K=DR(Q): L=DS(Q)
410 A1=4*E(Q)*IN(Q)/LO(Q): A2=6*E(Q)*IN(Q)/LO(Q)^2: A3=12*E(Q)*IN(Q)/LO(Q)^3
420 KR(I,I)=KR(I,I)+A1: KR(I,J)=KR(I,J)+A1/2: KR(I,K)=KR(I,K)-A2: KR(I,L)=KR(I,L)
)+A2: KR(J,J)=KR(J,J)+A1: KR(J,K)=KR(J,K)-A2: KR(J,L)=KR(J,L)+A2: KR(K,K)=KR(K,K)
)+A3: KR(K,L)=KR(K,L)-A3: KR(L,L)=KR(L,L)+A3
430 KR(J,I)=KR(I,J): KR(K,I)=KR(I,K): KR(L,I)=KR(I,L): KR(K,J)=KR(J,K): KR(L,J)=
KR(J,L): KR(L,K)=KR(K,L)
440 REM PRINT I,I,KR(I,I),I,J,KR(I,J),I,K,KR(I,K),I,L,KR(I,L),J,J,KR(J,J),J,K,KR
(J,K),J,L,KR(J,L),K,K,KR(K,K),K,L,KR(K,L),L,L,KR(L,L),J,I,KR(J,I),K,I,KR(K,I),L,
I,KR(L,I),K,J,KR(K,J),L,J,KR(L,J),L,K,KR(L,K)
450 VE(I)=VE(I)+W(Q)*LO(Q)^2/12: VE(J)=VE(J)-W(Q)*LO(Q)^2/12
460 VE(K)=VE(K)-W(Q)*LO(Q)/2: VE(L)=VE(L)-W(Q)*LO(Q)/2
470 VM(I,Q)=W(Q)*LO(Q)^2/12: VM(J,Q)=-W(Q)*LO(Q)^2/12
480 VM(K,Q)=-W(Q)*LO(Q)/2: VM(L,Q)=-W(Q)*LO(Q)/2
490 NEXT Q
500 PRINT "GRADO DE LIBERTAD, VECTOR DE TERMINOS INDEPENDIENTES"

```

```

510 FOR I=1 TO NG
520 B(I)=-VE(I)-VC(I)
530 PRINT I,B(I)
540 NEXT I
550 FOR I=1 TO NA
560 KR(I,I) = KR(I,I) + KL(I)
570 NEXT I
580 FOR I=NTC TO NTF
590 KR(I,I) = KR(I,I) + KT(I)
600 NEXT I
610 REM SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES
620 GOSUB 820
630 GOSUB 1330
640 PRINT
650 PRINT "GRADO DE LIBERTAD, DESPLAZAMIENTO"
660 FOR I=1 TO NG
670 PRINT I,D(I);
680 PRINT
690 NEXT I
700 REM MOMENTOS Y CORTANTES EN LOS NUDOS DE LAS BARRAS
710 PRINT "BARRA, GRADO DE LIBERTAD, MOMENTO O CORTANTE EN EL NUDO"
720 FOR Q=1 TO NB
730 I=TP(Q): J=TQ(Q): K=DR(Q): L=DS(Q)
740 A1=4*E(Q)*IN(Q)/LO(Q): A2=6*E(Q)*IN(Q)/LO(Q)^2: A3=12*E(Q)*IN(Q)/LO(Q)^3
750 V(I,Q)=VM(I,Q)+A1*D(I)+A1*D(J)/2-A2*D(K)+A2*D(L)
760 V(J,Q)=VM(J,Q)+A1*D(I)/2+A1*D(J)-A2*D(K)+A2*D(L)
770 V(K,Q)=VM(K,Q)-A2*D(I)-A2*D(J)+A3*D(K)-A3*D(L)
780 V(L,Q)=VM(L,Q)+A2*D(I)+A2*D(J)-A3*D(K)+A3*D(L)
790 PRINT Q,I,V(I,Q),J,V(J,Q),K,V(K,Q),L,V(L,Q)
800 NEXT Q
810 END
820 REM SUBROUTINA DECOMP
830 DIM SCAL(NG), IPS(NG)
840 N=NG
850 FOR I=1 TO N
860 IPS(I)=I: ROWN=0!
870 FOR J=1 TO N
880 IF ROWN>=ABS(KR(I,J)) THEN 900
890 ROWN=ABS(KR(I,J))
900 NEXT J
910 IF ROWN=0 THEN 940
920 SCAL(I)=1/ROWN
930 GOTO 970
940 M=1
950 GOSUB 1670
960 SCAL(I)=0!
970 NEXT I
980 REM ELIMINACION GAUSSIANA CON PIVOTEO PARCIAL
990 NMI=N-1
1000 FOR K=1 TO NMI
1010 BIG=0!
1020 FOR I=K TO N
1030 IP=IPS(I)
1040 SIZE=ABS(KR(IP,K))*SCAL(IP)
1050 IF SIZE<=BIG THEN 1080
1060 BIG=SIZE
1070 IDXP=I
1080 NEXT I
1090 IF BIG<>0 THEN 1130
1100 M=2

```

```

1110 GOSUB 1670
1120 GOTO 1270
1130 IF IDXP=K THEN 1170
1140 J=IPS(K)
    50 IPS(K)=IPS(IDXP)
    60 IPS(IDXP)=J
1170 KP=IPS(K)
1180 PIVO=KR(KP,K)
1190 FOR I=K+1 TO N
1200 IP=IPS(I)
1210 EM=-KR(IP,K)/PIVO
1220 KR(IP,K)=-EM
1230 FOR J=K+1 TO N
1240 KR(IP,J)=KR(IP,J)+EM*KR(KP,J)
1250 NEXT J
1260 NEXT I
1270 NEXT K
1280 KP=IPS(N)
1290 IF(KR(KP,N))<>0 THEN 1320
1300 M=2
1310 GOSUB 1670
1320 RETURN
1330 REM SUBROUTINA SOLVE
1340 DIM D(NGL)
1350 N=NG: IP=IPS(1): D(1)=B(IP)
1360 FOR I=2 TO N
1370 IP=IPS(I): SUM=0.0
1380 FOR J=1 TO I-1
1390 SUM=SUM+KR(IP,J)*D(J)
1400 NEXT J
    10 D(I)=B(IP)-SUM
    20 NEXT I
1430 IP=IPS(N)
1440 D(N)=D(N)/KR(IP,N)
1450 FOR IB=2 TO N
1460 I=N+1-IB
1470 REM I VA DESDE N-1 HASTA 1
1480 IP=IPS(I)
1490 SUM=0!
1500 FOR J=I+1 TO N
1510 SUM=SUM+KR(IP,J)*D(J)
1520 NEXT J
1530 D(I)=(D(I)-SUM)/KR(IP,I)
1540 NEXT IB
1550 RETURN
1560 REM "NGL=NUMERO AMPLIADO DE GRADOS DE LIBERTAD, PARA EL CALCULO DE LOS ELEM
ENTOS MECANICOS, NG=NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD, NB=NUMERO DE BARRAS, NA=NUMERO
DE APOYOS DE LA CIMENTACION, NTC=NUMERO DONDE EMPIEZA LA RIGIDEZ ANGULAR DE LA
CIMENTACION"
1570 REM "NTF=NUMERO DONDE TERMINA LA RIGIDEZ ANGULAR DE LA CIMENTACION"
1580 REM NGL, NG, NB, NA, NTC, NTF
1590 DATA 8,6,3,2,3,4
1600 REM I, E, IN, LO, W, TP, TQ, DR, DS
1610 DATA 1,2214000,0.000675,4.6,0,5,3,7,8
1620 DATA 2,2214000,0.000675,4.6,0,4,6,7,8
1630 DATA 3,2214000,0.0054,6.0,1.54,5,6,1,2
    ) REM I, VC (VC = FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO O FUERZAS CONCENTRADAS)
1650 DATA 1,-1.2,2,-1.2,3,0,4,0,5,0,6,0
1660 REM I, KL (KL = RIGIDEZ LINEAL VERTICAL)
1670 DATA 1,1880,2,1880

```

1680 REM I, KT (KT = RIGIDEZ ANGULAR)
1690 DATA 3,720,4,720

0000
0010
0020
0030
0040
0050
0060
0070
0080
0090
0100
0110
0120
0130
0140
0150
0160
0170
0180
0190
0200
0210
0220
0230
0240
0250
0260
0270
0280
0290
0300
0310
0320
0330
0340
0350
0360
0370
0380
0390
0400
0410
0420
0430
0440
0450
0460
0470
0480
0490
0500
0510
0520
0530
0540
0550
0560
0570
0580
0590
0600
0610
0620
0630
0640
0650
0660
0670
0680
0690
0700
0710
0720
0730
0740
0750
0760
0770
0780
0790
0800
0810
0820
0830
0840
0850
0860
0870
0880
0890
0900
0910
0920
0930
0940
0950
0960
0970
0980
0990

1000
1010
1020
1030
1040
1050
1060
1070
1080
1090
1100
1110
1120
1130
1140
1150
1160
1170
1180
1190
1200
1210
1220
1230
1240
1250
1260
1270
1280
1290
1300
1310
1320
1330
1340
1350
1360
1370
1380
1390
1400
1410
1420
1430
1440
1450
1460
1470
1480
1490
1500
1510
1520
1530
1540
1550
1560
1570
1580
1590
1600
1610
1620
1630
1640
1650
1660
1670
1680
1690
1700
1710
1720
1730
1740
1750
1760
1770
1780
1790
1800
1810
1820
1830
1840
1850
1860
1870
1880
1890
1900
1910
1920
1930
1940
1950
1960
1970
1980
1990

0000
0010
0020
0030
0040
0050
0060
0070
0080
0090
0100
0110
0120
0130
0140
0150
0160
0170
0180
0190
0200
0210
0220
0230
0240
0250
0260
0270
0280
0290
0300
0310
0320
0330
0340
0350
0360
0370
0380
0390
0400
0410
0420
0430
0440
0450
0460
0470
0480
0490
0500
0510
0520
0530
0540
0550
0560
0570
0580
0590
0600
0610
0620
0630
0640
0650
0660
0670
0680
0690
0700
0710
0720
0730
0740
0750
0760
0770
0780
0790
0800
0810
0820
0830
0840
0850
0860
0870
0880
0890
0900
0910
0920
0930
0940
0950
0960
0970
0980
0990

1000
1010
1020
1030
1040
1050
1060
1070
1080
1090
1100
1110
1120
1130
1140
1150
1160
1170
1180
1190
1200
1210
1220
1230
1240
1250
1260
1270
1280
1290
1300
1310
1320
1330
1340
1350
1360
1370
1380
1390
1400
1410
1420
1430
1440
1450
1460
1470
1480
1490
1500
1510
1520
1530
1540
1550
1560
1570
1580
1590
1600
1610
1620
1630
1640
1650
1660
1670
1680
1690
1700
1710
1720
1730
1740
1750
1760
1770
1780
1790
1800
1810
1820
1830
1840
1850
1860
1870
1880
1890
1900
1910
1920
1930
1940
1950
1960
1970
1980
1990

1000
1010
1020
1030
1040
1050
1060
1070
1080
1090
1100
1110
1120
1130
1140
1150
1160
1170
1180
1190
1200
1210
1220
1230
1240
1250
1260
1270
1280
1290
1300
1310
1320
1330
1340
1350
1360
1370
1380
1390
1400
1410
1420
1430
1440
1450
1460
1470
1480
1490
1500
1510
1520
1530
1540
1550
1560
1570
1580
1590
1600
1610
1620
1630
1640
1650
1660
1670
1680
1690
1700
1710
1720
1730
1740
1750
1760
1770
1780
1790
1800
1810
1820
1830
1840
1850
1860
1870
1880
1890
1900
1910
1920
1930
1940
1950
1960
1970
1980
1990