

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO**

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN
INGENIERIA**

FACULTAD DE INGENIERIA

**“MODELACION COMPUTACIONAL DE LA
ESTRUCTURA DE UN AUTOBUS DE TRANSPORTE
URBANO CON EL METODO DEL ELEMENTO FINITO”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERIA

AREA: MECANICA

P R E S E N T A :

LEONEL CRUZ CRUZ

TUTOR:

DR. LUIS ALEJANDRO FERRER ARGOTE



MEXICO

2006

JURADO ASIGNADO

Presidente: M. I. Leopoldo González González

Secretario: M. I. Ociel Flores Díaz

Vocal: Dr. Luís Alejandro Ferrer Argote

1er. Suplente: M. I. Mario Acosta Flores

2do. Suplente: M. I. Eusebio Jiménez López

Lugar(es) donde se realizó la Tesis:

Este trabajo en su parte experimental fue realizado en los talleres de la empresa Camiones y Motores International de México, S.A. de C. V., y redactado, dentro las instalaciones de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, México.

Tutor de Tesis:

Dr. Luís Alejandro Ferrer Argote

AGRADECIMIENTOS Y DEDICATORIAS

A DIOS LE DEDICO ESTO, El Fuerte de Israel; por brindarme la oportunidad de vivir para conocerle y por su grande amor a la humanidad; muchas gracias.

A mi Familia, a mis Padres y Hermanos, los quiero mucho; Familia Cruz Cruz.

A todos aquéllos que me brindaron su apoyo, gracias.

INDICE

Introducción.....	1
I. Definición del problema, restricciones e hipótesis.....	1
1.1.- Definición del problema.....	1
1.2.- Modelo Físico.....	2
1.3.- Elastoestática Lineal.....	5
II. Formulaciones Variacionales para Elemento Finito.....	7
2.1.- Generalidades.....	7
2.2.- Cálculo variacional.....	7
2.3.-Formulación variacional a partir del principio de mínima acción.....	10
2.3.1.- Propiedades del principio del trabajo virtual.....	15
2.4.- Formulación variacional a partir de herramientas del Análisis.....	16
Tensorial y del Análisis Funcional	
2.4.1.- Formulación Fuerte.....	16
2.4.2.- Formulación Débil.....	16
III. Modelo de Elemento Finito.....	19
3.1.- Generalidades.....	19
3.2.- Definiciones Básicas.....	19
IV. Caso de Estudio.....	24
4.1.- Análisis del comportamiento mecánico de la estructura de un- autobús de transporte urbano.....	24
4.2.- Modelo de Elemento Finito vs. Mediciones experimentales.....	30
4.3.- Resultados del análisis.....	33
Conclusiones.....	35
Bibliografía.....	36
Apéndice A.....	37
A.1 Esfuerzos en los contornos de los marcos de las puertas	

Introducción

La solución de problemas dentro del campo de la Elasticidad Lineal, consiste en resolver un sistema de quince ecuaciones (seis relaciones esfuerzo-deformación, seis relaciones deformación-desplazamiento, y tres ecuaciones de equilibrio) con quince incógnitas (seis componentes de esfuerzo, seis componentes de deformación, y tres componentes de desplazamiento), y con la condición de que las componentes de esfuerzo y desplazamiento deben de satisfacer las condiciones de frontera. O bien, resolver un sistema de tres ecuaciones (tres ecuaciones de equilibrio en términos de desplazamientos) con tres componentes de desplazamiento como incógnitas y con la condición de que los desplazamientos deben satisfacer las condiciones de frontera [4]; entre otros. Cabe señalar que en la actualidad no existe un método directo para resolver un sistema de ecuaciones en derivadas parciales como los presentados en el campo de la Elasticidad Lineal, por lo que se recurre a métodos aproximados, como el Método de Elemento Finito, para resolver estos sistemas de ecuaciones de valores a la frontera que se presentan en Ingeniería y en la Física- matemática, [11].

En el Método del Elemento Finito se manejan aspectos como la minimización de funciones de una o más variables, el cálculo de variaciones (el cual provee la conexión entre el modelo matemático y la técnica de elemento finito) y finalmente la aproximación de Integrales, [14].

En este trabajo se presenta la fundamentación teórica del modelo de Elemento Finito para analizar el comportamiento mecánico de la estructura de un autobús de transporte urbano de pasajeros, siguiendo los pasos de la Mecánica Computacional, [9]. Éste, como muchos problemas de la ingeniería, pueden ser modelados mediante ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Cabe señalar que con las presentaciones axiomáticas de la mecánica del medio continuo, los modelos concretos para casos específicos deben deducirse por el usuario, es decir, en general no se dan los modelos sino que hay que elaborarlos y comprobarlos.

En este trabajo de Tesis se desarrolla en forma explícita las ecuaciones que modelan el comportamiento mecánico de la estructura de un autobús de transporte urbano, bajo planteamientos teóricos como la minimización de una función, el cálculo variacional, y la aproximación de una integral; descritos en la sección 2.2. Usando herramientas del Cálculo Diferencial e Integral y a partir del principio de mínima energía potencial, se comprueba que la formulación variacional del problema elástico lineal está representado por el principio del trabajo virtual, lo cual representa la contribución más interesante de este trabajo ya que es un modelo basado en la teoría general (ver sec. 2.3). Puesto que en la mayoría de la literatura dentro de los planteamientos de la formulación variacional para problemas mecánicos se da por conocida que la formulación variacional fuerte está representada por la ecuación de balance de momentum o ecuaciones de equilibrio para el caso estático, lo cual se tiene que comprobar siguiendo los planteamientos descritos en la sección 2.2, [14]. Además, se desarrolla la formulación variacional tradicional, usando herramientas del Análisis Tensorial y Análisis Funcional.

Finalmente se presenta su aplicación en un caso particular, analizar el comportamiento mecánico de la estructura de un autobús de transporte urbano, y su resolución combinando técnicas numéricas mediante un paquete comercial, Nissa/Display versión 11, y técnicas experimentales.

A través de este trabajo de tesis se satisficieran los siguientes objetivos:

- 1) Plantear el modelo del problema de la elastoestática
- 2) Solucionar el problema elastoestático de la estructura de un autobús de transporte urbano.

i.i. El motivo de la Investigación

Toda investigación iniciada tiene un motivo; esto es, la existencia de un problema. La función de toda investigación es determinar si dicho problema tiene solución, o bien no la tiene. Por lo tanto, lo que motiva a la investigación en este trabajo de tesis se sintetiza de la siguiente manera:

“En la actualidad es posible hablar de Mecánica Computacional, la cual consiste en una serie de etapas aplicadas en la resolución de problemas físicos o matemáticos, lineales o no lineales. Una de estas etapas es la técnica de interpolación conocida como Método del Elemento Finito”.

Para el análisis y modelación de problemas en el campo de la Ingeniería Mecánica, existe software ya disponible. Sin embargo, la utilización y el manejo de software no solo requiere del dominio y la destreza del usuario si no también conocimientos formales en física y matemáticas que envuelven el problema por resolver. De hecho, la experiencia ha demostrado que el uso eficiente de un programa de elemento finito requiere del conocimiento de conceptos y técnicas matemáticas empleadas por el método.

Recientemente, en un proyecto realizado por la UNAM y Sistemas de Transporte Internacional de México, fue modelada la estructura de la carrocería de un camión de transporte urbano; para el análisis se usaron técnicas experimentales y computacionales. Una de dichas técnicas fue la modelación de la estructura usando el Método del Elemento Finito. Sin embargo, no fue realizada la justificación teórica del problema, puesto que se utilizó un software comercial a partir del cual y con datos experimentales, se obtuvieron los parámetros requeridos para evaluar la estructura. Lo que motiva a la investigación en este trabajo de tesis, es desarrollar la fundamentación teórica del modelo de la estructura del camión, el cual consiste en plantear el modelo elastoestático. El objetivo es mostrar cada uno de los pasos requeridos para modelar un problema físico y resolverlo con la ayuda del Método del Elemento Finito y, con ello, dejar de manifiesto que la fundamentación teórica de un problema, es el camino correcto que debe seguir todo aquel que trabaje en el campo de la Ingeniería, pues no hay que olvidar que la sociedad actual, es la sociedad del

conocimiento y, en consecuencia, los ingenieros deben ser formados como físico-matemáticos aplicados informatizados.

i.ii. Algunas consideraciones sobre la Mecánica Computacional

En esta sección se describirá, en forma muy general, las etapas de la Mecánica Computacional, esta con el propósito de presentar un panorama más amplio entorno a la modelación y solución de problemas usando el Método del Elemento Finito.

Tal y como se mencionó en la sección anterior, la Mecánica Computacional consiste en una serie de etapas las cuales se utilizan para modelar y solucionar problemas físicos o matemáticos, problemas entre cuyas características se encuentran las siguientes:

- 1) Problemas físicos o matemáticos descritos por ecuaciones de cálculo, diferenciales, integrales, inte-grodiferenciales y variacionales.
- 2) El dominio del problema puede tener cualquier forma geométrica y cualquier número de dimensiones.
- 3) Las cargas o condiciones de carga (influencias externas) pueden ser de cualquier forma física. En general estas cargas son aplicadas en la frontera del sistema y/o al interior.
- 4) El problema puede ser lineal o no lineal.

Las etapas de la Mecánica Computacional, de acuerdo con [11] son las siguientes:

- 1) Modelación del problema físico
- 2) Modelación matemática del problema físico
- 3) Modelación matricial del problema de la etapa 2
- 4) Aplicación del Método del Método de Elemento Finito al modelo matricial
- 5) Desarrollo del modelo numérico de la etapa 4
- 6) Programación de los algoritmos del modelo de la etapa 4 y visualización de los resultados

La primera fase consiste en aplicar los principios o axiomas de la teoría asociada con el fenómeno a modelar y desarrollar un modelo en ecuaciones diferenciales. La teoría matemática básica que se utiliza en esta fase, es la Mecánica de los Medios Continuos [1].

Una vez obtenido el modelo del problema físico, esto es, la o las ecuaciones diferenciales y sus respectivas condiciones iniciales y de frontera, se procede, en la fase 2, a obtener una formulación variacional del sistema de ecuaciones. Posteriormente, en la fase 3, se desarrolla el modelo matricial; esto es, el modelo matricial del problema discreto.

La fase 4 consiste en aplicar el Método del Elemento Finito al modelo matricial discreto; esto es, se construye la base del Elemento Finito que consiste en generar las funciones de

interpolación locales, las funciones de transformación, las funciones inversas y las funciones de interpolación globales.

Posteriormente, sobre la base del Elemento Finito, se aplican métodos numéricos para solucionar las ecuaciones generadas en la fase 4. Finalmente se procede a la programación de los algoritmos del modelo numérico y se crean interfases entre el usuario y los resultados (visualización).

i.iii. Algunos ejemplos de aplicación del Método del Elemento Finito

En esta sección se describirán algunas aplicaciones del Método del Elemento Finito a problemas de la Ingeniería Mecánica.

En un trabajo desarrollado por [9], se modeló el problema de intrusión salina; esto es, la invasión de agua salada en mantos acuíferos en las zonas costeras. Se realizó el modelo físico y matemático del problema, que en este caso, fue un problema de frontera libre con aplicaciones a fenómenos de intrusión salina. Fue desarrollado el modelo de Elemento Finito y se programó en lenguaje C++. Las aplicaciones de este trabajo pueden ser en el saneamiento de acuíferos y zonas de pozos contaminados.

En otro trabajo [10], se modeló el problema de la termoelasticidad lineal. El caso particular analizado fue una placa plana y se extendió el modelo al análisis de combustible de cohetes. El software utilizado fue Modulf. En este trabajo se utilizó el Método de las Subdiferenciales para generar el modelo variacional.

En un trabajo presentado por [12], se modeló una carcasa de transmisión de velocidades. El trabajo consistió en determinar la distribución de esfuerzos con el objetivo de obtener los esfuerzos máximos a los cuales la carcasa presenta fisuras cuando se le aplica un par motriz en la flecha principal.

i.iv. El problema de la Estructura del camión

En un proyecto desarrollado en la UNAM, se analizó y modeló la estructura de una carrocería de un camión. La estructura presentaba fallas en el diseño y el objetivo del análisis era, precisamente, determinar las causas de las fallas, para posteriormente proponer soluciones específicas.

Con el objetivo de conocer el estado de esfuerzos y deformaciones se aplicaron técnicas experimentales y numéricas. Las experimentales consistieron en aplicar las técnicas de fotoelasticidad y extensometría eléctrica a la estructura de la carrocería con el objetivo, primero, de conocer en campo completo las deformaciones de zonas particulares de la estructura y, segundo, mediante la técnica de extensometría, conocer las deformaciones y esfuerzos punto a punto.

Para poder corroborar los análisis se construyó un modelo de la estructura de la carrocería con ayuda del software Nisa/Display de Elemento Finito. Posteriormente se le dieron datos significativos reales al modelo y se comprobó que los resultados de los análisis experimentales eran equivalentes a los computacionales.

Se procedió, con la ayuda del software, a localizar zonas de concentración de esfuerzos localizando dichas zonas con las regiones locales de las fallas. Con el modelo virtual de elemento finito se procedió a evaluar diversas soluciones encontrando una funcional la cual fue probada usando nuevamente técnicas experimentales.

En el desarrollo de este trabajo de tesis se proporcionará más información del proyecto del camión. Por otro lado, el objetivo de este trabajo de tesis es fundamentar teóricamente el modelo de elemento finito de la estructura relacionada con la carrocería del camión; esto es, desarrollar el problema usando la Mecánica Computacional descrita en la sección 1.3.

i.v. Resumen del capitulado

En esta sección se presenta un breve resumen del capitulado de este trabajo de tesis. Como ya se mencionó anteriormente, el objetivo principal de este trabajo, es plantear el modelo computacional de la estructura o carrocería del camión. En particular, se modelará el problema de la elastoestática. Posteriormente, se mostrará la manera en que se usó el software Nisa/Display para modelar la estructura.

Esta tesis se divide en 4 capítulos y un anexo. En el capítulo 1 se presenta la definición del problema, restricciones, el modelo físico y el modelo de la elastoestática. En el capítulo 2 se desarrolla el modelo variacional. En el capítulo 3 se desarrolla el modelo de elemento finito. En el capítulo 4 se explica el caso de estudio. Finalmente se presentan las conclusiones derivadas de este trabajo, así como un anexo donde se explican más detalles del proyecto del camión.

Resumen

En este trabajo se presenta la fundamentación teórica del modelo de Elemento Finito para analizar el comportamiento mecánico de la estructura de un autobús de transporte urbano de pasajeros, siguiendo los pasos de la Mecánica Computacional.

Se desarrolla en forma explícita las ecuaciones que modelan el comportamiento mecánico de la estructura de un autobús de transporte urbano, bajo planteamientos teóricos como la minimización de una función, el cálculo variacional, y la aproximación de una integral. Usando herramientas del Cálculo Diferencial e Integral y a partir del principio de mínima energía potencial, se comprueba que la formulación variacional del problema elástico lineal está representado por el principio del trabajo virtual. Se aborda el planteamiento para resolver el modelo estático, dentro de los planteamientos teóricos de la Elastoestática, usando un paquete comercial de Elemento Finito y la combinación entre técnicas experimentales. Se utilizaron los pasos generales del Método Científico para llegar a la solución.

A través de este trabajo de tesis se satisfacen los siguientes objetivos:

- 3) Plantear el modelo del problema de la elastoestática
- 4) Solucionar el problema elastoestático de la estructura de un autobús de transporte urbano.

Capítulo I

1.1. Definición del problema, restricciones e hipótesis.

En este capítulo se define el problema por solucionar en este trabajo de tesis, así como sus restricciones fundamentales e hipótesis.

Considérese el siguiente problema:

“Dado M_s , (1)

encuéntrese:

$k = f(M_s)$ (2)

tal que,

$s = \hat{s}$ (3)

sea satisfecha.

Aquí, M_s es el modelo virtual relacionado con el cuerpo (carrocería del autobús, k es el modelo de la Mecánica Computacional y s son los principios básicos de la Mecánica de los Medios Continuos).

Las restricciones fundamentales que se consideran para el problema definido anteriormente son las siguientes:

- 1) El modelo satisface las leyes de Newton
- 2) La solución existe y es única
- 3) El análisis es estático y no se consideran esfuerzos residuales
- 4) Las restricciones de la Teoría de la Elasticidad Lineal

Estas restricciones son importantes ya que se pueden utilizar para este caso, las ecuaciones de la Teoría de la Elasticidad Lineal.

El problema formulado anteriormente y sus restricciones se sintetizan de la siguiente forma:

Conocida la estructura, las condiciones iniciales y las condiciones de frontera encuéntrese u , E , y s de Ω sujeto a F tal que:

1) $\text{div } S + b = 0$ (4)

con las condiciones:

$$2) \quad u(t) = 0 \text{ en } \Omega \quad (5)$$

$$3) \quad u = \hat{u} \text{ en } \partial \Omega,$$

tal que las restricciones anteriores sean satisfechas.

Aquí, u es el campo de desplazamientos, E el estado de las deformaciones, s el estado de esfuerzos, Ω la carrocería del autobús, F el estado de sollicitaciones, $\text{div } S + b = 0$ es la ecuación de la elastoestática y $\partial \Omega$ es la frontera de Ω .

Considere las siguientes hipótesis:

a) Si se obtiene el modelo elastoestático de una estructura mecánica, utilizando el Método del Elemento Finito, es posible conocer el estado de esfuerzos y deformaciones de la estructura.

b) La base para la solución del modelo elastoestático utilizando Método del Elemento Finito, requiere del Principio del trabajo virtual.

1.2 Modelo Físico

El planteamiento del modelo físico de nuestro problema, se da de acuerdo al marco conceptual y teórico de la Mecánica del Medio Continuo, Gurtin[1]

Durante un movimiento la interacción entre las partes de un cuerpo o entre cuerpos y su entorno se describen por medio de fuerzas. Se describen tres tipos de fuerzas: a) fuerzas de contacto b) fuerzas de superficie sobre la frontera del cuerpo por su entorno c) fuerzas ejercidas sobre el interior de los puntos del cuerpo por su entorno.

Uno de los axiomas más importantes en la teoría del continuo, es la hipótesis de Cauchy concerniente a la forma de las fuerzas de contacto. Cauchy asume la existencia de una densidad de fuerza de superficie $s(n, x, t)$ definida para cada vector unitario n y cada (x, t) en la trayectoria τ del movimiento.

Entonces, partiendo del principio de balance la fuerza de contacto ejercida sobre una parte $P \subset B$ de un cuerpo por su entorno en el tiempo t esta definida como:

$$\int_{\partial P_t} s(n_x, x, t) dA = \int_{\partial P_t} s(n) dA \quad (6)$$

donde $s(n, x, t)$ es la densidad de la fuerza de superficie definida para cada vector unitario n y cada (x, t) en la trayectoria τ .

El entorno también puede ejercer fuerzas sobre puntos en el interior de P , ejemplos de este tipo de fuerzas son las debidas a la gravedad. Tales fuerzas están determinadas por un

campo vectorial b sobre τ ; $b(x, t)$ es la fuerza ejercida, por unidad de volumen, por el entorno sobre x , de manera que para cada cualquier parte P la integral:

$$\int_{P_t} b(x, t) dV = \int_{P_t} b dV \quad (7)$$

es la fuerza ejercida por el entorno sobre P que no son debidas al contacto.

A s se le conoce como fuerza de superficie y b como la fuerza de cuerpo. Se define la fuerza $f(P, t)$ y el momento $m(P, t)$, alrededor de O , sobre una parte P en el tiempo t , como sigue:

$$f(P, t) = \int_{\partial P_t} s(n) dA + \int_{P_t} b dV \quad (8)$$

$$m(P, t) = \int_{\partial P_t} rxs(n) dA + \int_{P_t} rxb dV \quad (9)$$

Aquí n es la norma a ∂P_t y r es un vector de posición.

Los axiomas básicos que relacionan el movimiento con la fuerza son las leyes de balance de momentum. Estas leyes aseguran que para cada parte P y tiempo t :

$$f(P, t) = \dot{l}(P, t) \quad (10)$$

$$m(P, t) = \dot{a}(P, t) \quad (11)$$

Las ecuaciones se pueden escribir como:

$$\int_{\partial P_t} s(n) dA + \int_{P_t} b dV = \int_{\partial P_t} \dot{v} \rho dV \quad (12)$$

$$\int_{\partial P_t} rxs(n) dA + \int_{P_t} rxb dV = \int_{\partial P_t} rx \dot{v} \rho dV \quad (13)$$

Si introducimos la fuerza de cuerpo total $b_* = b - \rho \dot{v}$ la cual incluye la fuerza de cuerpo inercial y retomando las ecuaciones anteriores se tiene:

$$f^*(P, t) = 0, \quad m^*(P, t) = 0 \quad (14)$$

Ahora usando el teorema de Cauchy para sustituir $s(n)$ por Tn se tiene:

$$\int_{\partial P_t} Tn \, dA + \int_{P_t} b_* \, dv = 0$$

$$\int_{\partial P_t} rxTndA + \int_{P_t} rxb_* \, dv = 0 \quad (15)$$

donde T es el tensor de Cauchy.

El tensor de esfuerzos de Cauchy mide la fuerza de contacto por unidad de área en la configuración deformada. En muchos problemas de interés, especialmente aquellos que involucran sólidos, no es conveniente trabajar con T dado que la configuración deformada no se conoce con anticipación. Por esta razón se introduce un tensor de esfuerzos que mide la fuerza por unidad de superficie en la configuración de referencia.

Utilizando la identidad:

$$\int_{\partial f(p)} T(x)m(x)dAx = \int_{\partial P} T(f(p))G(p)n(p)dAp, \text{ con } G = \det(F)F^{-T} \quad (16)$$

Entonces:

$$\int_{\partial P_t} TmdA = \int_{\partial P} \det(F)T_m F^{-T} \quad (17)$$

de donde:

$$\int_{\partial P_t} TmdA = \int_{\partial P} SndA \quad (18)$$

Al tensor S: $B \times R \rightarrow Lin$ se le conoce como tensor de Piola-Kirchoff, además **Sn** es la fuerza de superficie, medida por unidad de área en la configuración de referencia.

El vector r definido en la configuración de referencia se puede expresar como:

$$r = x + u - O \quad (19)$$

usando la siguiente identidad:

$$\int_{\partial f(p)} v(x)dAx = \int_{\partial P} v(f(p)) \det F(p) dVp \quad (20)$$

Con esto la fuerza de cuerpo se puede escribir como:

$$\int_{P_t} b_* dV = \int_P b_m (\det F) dV = \int_P b_0 dV \quad (21)$$

donde b_0 es la fuerza de cuerpo en la configuración de referencia.

Se puede escribir la ecuación anterior como:

$$\int_{\partial P} S n dA + \int_P b_0 = 0 \quad (22)$$

$$\int_{\partial P} (p + u) \times S n dA + \int_P (p + u) \times b_0 = 0, \quad p = x - O \quad (23)$$

Aplicando el teorema de la divergencia al primer término de la ecuación, se obtiene:

$$\int_{\partial P} S n dA = \int_P \operatorname{div} S dV \quad (24)$$

con lo que la ecuación se puede escribir como:

$$\int_P (\operatorname{div} S + b_0) dV = 0 \quad \text{de donde se observa que } \operatorname{div} S + b_0 = 0 \quad (25)$$

Esta última ecuación es la que representa el modelo físico para el caso estacionario, de este trabajo de Tesis.

1.3 Elastoestática Lineal

Las leyes de balance de momentum son válidas para cualquier material, sin importar su conformación. El comportamiento de un material específico bajo las leyes anteriormente descritas está definido por la relación constitutiva del material, la cual impone restricciones al tipo de procesos que el cuerpo puede sobrellevar.

Las ecuaciones que rigen el comportamiento estático de un cuerpo elástico, dentro del marco teórico de la teoría lineal, está formado por la relación deformación-desplazamiento, la relación esfuerzo-deformación y la ecuación de equilibrio estático.

Por tanto decimos que un cuerpo es linealmente elástico si para cada p en Ω existe una transformación lineal C del espacio de todos los tensores en el espacio de todos los tensores simétricos tal que:

$$S(p) = C[\nabla u(p)] \quad (26)$$

donde C es el tensor de elasticidad, y si el cuerpo es homogéneo C es independiente de p . El tensor C es de cuarto orden, si expresamos la ecuación anterior en términos del gradiente simétrico de desplazamientos tenemos:

$$S(p) = C[\bar{\nabla} u(p)] \quad (27)$$

donde,

$$\bar{\nabla} u = E = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \quad (28)$$

$$\therefore S(p) = C[E(p)] \quad (29)$$

Para encontrar la terna $[u, E, S]$, se deben cumplir las siguientes ecuaciones de campo:

$$E(p) = \frac{1}{2}(\nabla u(p) + \nabla^T u(p)) \quad (30)$$

$$S(p) = C[E(p)] \quad (31)$$

$$\operatorname{div} S(p) + b(p) = 0 \quad (32)$$

Entonces el problema consiste en encontrar u tal que satisfaga lo siguiente:

$$u \in C^2(B, \mathbb{R}^3) \quad (33)$$

$$\operatorname{div} S(p) + b_0(p) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (34)$$

con las condiciones de frontera:

$$S n = \hat{s} \text{ en } \partial\Omega_1 \quad (35)$$

$$u = \hat{u} \text{ en } \partial\Omega_2$$

Si lo anterior se cumple, el proceso elástico $[u, E, S]$, se dice que es una solución del problema.

Capítulo 2. Formulaciones Variacionales para Elemento Finito

2.1.- Generalidades

En los métodos variacionales, se busca que la solución de la ecuación $Au = f$ en Ω , proporcione un valor extremal a la funcional, $I(u)$, que es una integral de u y sus derivadas sobre el dominio del problema.

Entonces, si se conoce la funcional, $I(u)$, los métodos variacionales se pueden establecer de la siguiente forma:

$$I(u) = \text{valor extremal} \quad (1)$$

$$B(u) = g \quad (2)$$

En donde las ecuaciones (2) establecen las condiciones de frontera esenciales o principales.

En los métodos variacionales se puede utilizar, en vez de la funcional, una ecuación variacional. Se puede afirmar que si el operador (A) del sistema por resolver es lineal, simétrico, positivo definido, el valor estacionario es un mínimo absoluto[11].

2.2 Cálculo Variacional

El cálculo variacional es una herramienta fundamental para la formulación del Método del Elemento Finito [11].

Un problema en la teoría del cálculo de variaciones, es la de encontrar una función $u(x)$ que minimice la integral:

$$I = \int_{x=0}^L F(x, u(x), u'(x)) dx \quad (3)$$

Observe que F está en función de $u(x)$ y $u'(x)$. Los valores de $u(x)$ en $x = 0$ y $x = L$, son los siguientes:

$$u(0) = u_0 \text{ y } u(L) = u_L \quad (4)$$

Para encontrar $u(x)$ se considera cada posible función que satisface las condiciones (4). De todas estas posibles funciones se necesita una que minimice la expresión (3). Este conjunto de posibles funciones puede estar representado por $\tilde{u}(x, \varepsilon) = u(x) + \varepsilon \eta(x)$.

La función $u(x)$ es la función deseada que minimizará I y $\varepsilon\eta(x)$ es llamada la variación de esta función. Las funciones \tilde{u} y u se muestran en la figura 1. La función $\eta(x)$ es una función completamente arbitraria que depende de x , y que toma los siguientes valores:

$$\eta(0) = 0 \quad \text{y} \quad \eta(L) = 0 \quad (5)$$

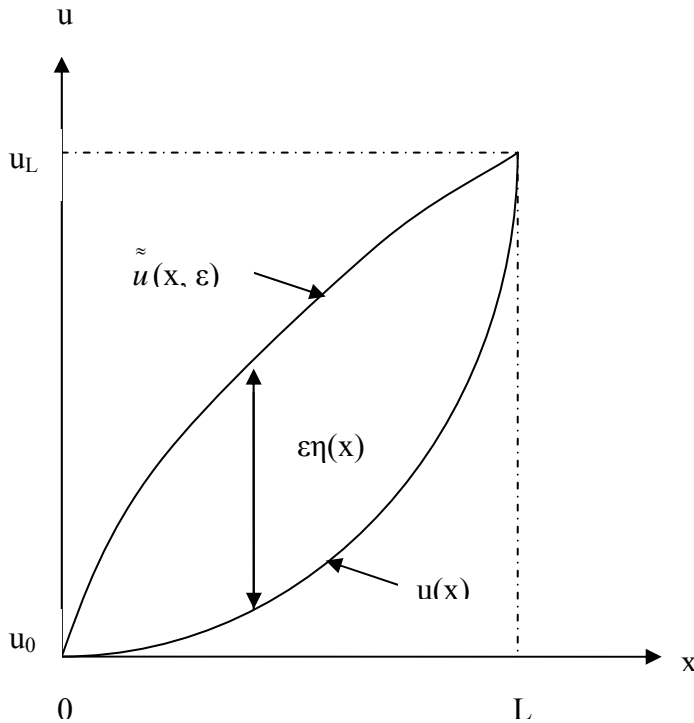


Figura 1. Solución $u(x)$ y función de prueba $\tilde{u}(x, \varepsilon)$.

Para estar seguros de que \tilde{u} tendrá los valores correctos en $x = 0$ y $x = L$, es decir, se requiere que:

$$\tilde{u}(0, \varepsilon) = u(0) \quad \text{y} \quad \tilde{u}(L, \varepsilon) = u(L) \quad (6)$$

La función deseada $u(x)$ es la única en el conjunto completo que se satisface para $\varepsilon = 0$, es decir:

$$\tilde{u}(x, 0) = u(x) \quad (7)$$

También es necesario considerar la derivada de $\tilde{u}(x, \varepsilon)$, esto es:

$$\tilde{u}'(x, \varepsilon) = u'(x) + \varepsilon\eta'(x). \quad (8)$$

Sustituyendo en la ecuación (3) los valores de $u(x)$, $u'(x)$ por $\tilde{u}(x, \varepsilon)$ y $\tilde{u}'(x, \varepsilon)$, se tiene lo siguiente:

$$I(\varepsilon) = \int_{x=0}^L F(x, \tilde{u}(x, \varepsilon), \tilde{u}'(x, \varepsilon)) dx \quad (9)$$

Esta integral está en función de ε , y se requiere que $I(\varepsilon)$ tenga un mínimo cuando $\varepsilon = 0$.

Para encontrar el mínimo de la función $I(\varepsilon)$, se necesita derivar con respecto a ε . Dado que los límites de Integración no están en función de ε , se puede usar la regla de Leibnitz, para escribir lo siguiente:

$$\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{x=0}^L \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(x, \tilde{u}(x, \varepsilon), \tilde{u}'(x, \varepsilon)) dx \quad (10)$$

La regla de la cadena puede ser utilizada para dar lo siguiente:

$$\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{x=0}^L \left[\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{u}'} \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \varepsilon} \right] dx \quad (11)$$

De la ecuación (5) y (8) se tiene que:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varepsilon} = \eta(x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \varepsilon} = \eta(x) = \frac{d\eta(x)}{dx} \quad (12)$$

Por lo tanto la ecuación (11) puede ser escrita como:

$$\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{x=0}^L \left[\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial \tilde{u}'} \frac{d\eta(x)}{dx} \right] dx \quad (13)$$

El segundo término de esta ecuación puede ser integrado por partes para dar:

$$\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{x=0}^L \frac{\partial F}{\partial \tilde{u}} \eta(x) + \left[\frac{\partial F}{\partial \tilde{u}'} \eta(x) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_{x=0}^L \eta(x) \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial \tilde{u}'} \right] dx \quad (14)$$

De las ecuaciones (5) se observa que en ambos límites el término integrado se elimina. Así que reordenando las dos integrales se tiene que la ecuación (14) se reduce a:

$$\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{x=0}^L \eta(x) \left[\frac{\partial F}{\partial \tilde{u}'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{u}'} \right) \right] dx \quad (15)$$

Se observa que esta ecuación debe ser igual a 0 cuando $\varepsilon = 0$ así que $I(0)$ tendrá un valor extremo:

$$\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{x=0}^L \eta(x) \left[\frac{\partial F}{\partial \tilde{u}'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{u}'} \right) \right] dx = 0 \quad (16)$$

En realidad esto asegura que $I(0)$ sea un valor extremo. Este podría ser un máximo, un mínimo o un punto de inflexión. Así que se debe considerar la segunda derivada de $I(\varepsilon)$ para elegir entre si es un máximo o un mínimo.

De las ecuación (4) se observa que \tilde{u} es igual a u cuando $\varepsilon = 0$. Dado que $\eta(x)$ es una función arbitraria, el término que está entre corchetes debe ser igual a 0, para que esta integral sea igual a 0. Por lo tanto para que I tenga un mínimo se debe cumplir que:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0 \quad (17)$$

Esta ecuación diferencial es llamada la ecuación de Euler-Lagrange. Sus condiciones de frontera están dadas por las ecuaciones (4). La función solución $u(x)$ de esta ecuación (17) es la función que minimiza la Integral de la ecuación (3).

2.3 Formulación Variacional a partir del Principio de Mínima Acción

A partir de los principios anteriores del Calculo Variacional(ver sec. 2.2), se puede encontrar la formulación variacional del problema, para analizar el comportamiento mecánico de la estructura del autobús.

Tomando en cuenta la misma hipótesis del Cálculo Variacional, esto es: *La función solución de la ecuación en la expresión de Euler-Lagrange, es la función solución que minimiza la Integral, y viceversa. La función solución es única y satisface las condiciones de frontera.*

Para que esta hipótesis se cumpla primero se deben obtener las expresiones que corresponden a la Integral a minimizar y la expresión correspondiente de Euler-Lagrange, para el caso de analizar el comportamiento mecánico de la estructura de un autobús, y verificar si esta hipótesis se cumple.

Entonces, partiendo del principio de mínima acción para problemas estáticos, y de las expresiones de energía requeridas para este principio se tiene que:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u) \varepsilon(u) dV - \int_{\Omega} u^T b dV - \int_{\partial\Omega_1} u^T t^* dA \quad (18)$$

donde:

U , es la energía potencial del sistema, la cual esta dada por la energía de deformación debido a fuerzas internas menos la energía debido a fuerzas de cuerpo y de superficie respectivamente, o bien dicho de otra forma se valúa el trabajo debido a fuerzas externas y el trabajo acumulado debido a fuerzas internas(energía interna de deformación).

b , denota la densidad de las fuerzas de cuerpo, t^* denota las fuerzas de superficie dadas sobre la frontera Neumann.

Por tanto la integral a ser minimizada siguiendo el procedimiento descrito anteriormente en la sección 2.2 está definida como:

$$I = \int_0^v U dV \quad (20)$$

Ahora, para encontrar $u(x)$ se considera cada posible función que satisface las condiciones $u(0) = 0$ y $u(V) = u_v$. De todas estas posibles funciones se necesita una que minimice la expresión anterior I . Este conjunto de posibles funciones puede estar representado por $u(x, v) = u(x) + \theta v$, donde θ es un parámetro real y $v = v(x)$ es una función de prueba que satisface también las condiciones de frontera en $\partial\Omega_2$, es decir se requiere que $v(0) = 0$ y $v(V) = 0$ sobre esta frontera.

Entonces se define a la integral I en términos de la variación para obtener:

$$I(\theta) = \int_0^v U(u + \theta v) dV \quad (21)$$

Para el caso estacionario se tiene que:

$$0 = \frac{d}{d\theta} I(\theta) \Big|_{\theta=0} \quad (22)$$

de donde se obtiene,

$$0 = \int_0^v \sigma(u) \bullet \varepsilon(v) dV - \int_0^v v^T b dV - \int_0^v \left[\int_{\partial\Omega_1} v^T t^* dA \right] dV \quad (23)$$

Aplicando la fórmula de Green a la variación de la energía de deformación, se obtiene:

$$\int_0^V \sigma(u) \bullet \varepsilon(v) dV = \int_0^V \sigma \bullet \nabla v dV = \int_{\partial\Omega} \sigma n dV - \int_0^V v^T \operatorname{div} \sigma dV \quad (24)$$

Notemos que el operador *div* para el tensor σ esta definido como el vector cuyas componentes son:

$$\operatorname{div} \sigma = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \text{ y además } n(x) \text{ representa la normal unitaria exterior}$$

sobre la frontera $\partial\Omega$.

Finalmente se obtiene,

$$0 = \int_0^V v^T (-\operatorname{div} \sigma - b) dV + \int_0^V \int_{\partial\Omega_1} v^T (\sigma n - t^*) dA dV \quad (25)$$

la cual se debe satisfacer para cualquier función admisible v .

La formulación variacional fuerte se satisface si en particular v se elimina, no solo en la frontera $\partial\Omega_2$ sino también en la frontera $\partial\Omega_1$. Por lo tanto, la segunda integral de la expresión anterior se elimina, y de un lema fundamental del Cálculo de variaciones se llega a que el integrando se iguala a cero también. De aquí que si v no es igual a cero sobre $\partial\Omega_1$ entonces el integrando de la integral de superficie debe ser igual a cero, lo cual resulta en la segunda condición de frontera, la llamada condición natural o condición de frontera tipo Neumann.

Finalmente se ha llegado a la expresión que corresponde a la formulación fuerte para la Teoría de la Elasticidad Lineal, y está definida como:

$$0 = \operatorname{div} \sigma(u(x)) + b(x) \text{ en } \Omega \quad (26)$$

$$u(x) = u_0(x) \quad \text{sobre } \partial\Omega_2 \quad (27)$$

$$\sigma(u(x))n(x) = t^*(x) \quad \text{sobre } \partial\Omega_1 \quad (28)$$

Para pasar a la formulación débil, o principio del trabajo virtual, se debe ir en sentido contrario de como se llego a la expresión variacional fuerte. Pero también hay que estar seguros de que se ha llegado a la ecuación correcta. Es decir, a partir de la ecuación diferencial de la formulación fuerte y sus condiciones de frontera (ec.26), llegar a la Integral original (ec. 18).

El primer paso es construir una función de prueba $v = v(x)$ que sea independiente del tiempo, también requerimos que la función de prueba satisfaga las condiciones de frontera de nuestro problema es decir $v = 0$ sobre $\partial\Omega_1$. En vez de v utilizamos los desplazamientos virtuales $\delta u = \theta v$.

La función de prueba debe satisfacer las siguientes condiciones de frontera:

- a) $\delta u = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega_2$
- b) δu satisface las condiciones de campo
- c) $\nabla^{\text{sim}} \delta u = \delta \varepsilon$
- d) δu es infinitesimal
- e) δu es arbitraria

Ahora pues, la formulación fuerte de la ecuación diferencial, y la condición de frontera estática son multiplicadas por esta función de prueba vectorial e integradas sobre todo el volumen respectivamente sobre la frontera Neumann del cuerpo en consideración:

$$0 = \text{div} \sigma + b \qquad 0 = \sigma \cdot n - t^* \qquad (29)$$

Multiplicando la función de prueba δu , integrando sobre el volumen, respectivamente sobre la frontera Neumann y sumando los términos anteriores obtenemos:

$$\int_{\Omega} \delta u \cdot \text{div} \sigma dV + \int_{\Omega} \delta u \cdot b dV + \int_{\partial\Omega_1} \delta u \cdot (\sigma \cdot n - t^*) dA = 0 \qquad (30)$$

Para simplificar esta ecuación se manipula el término $\delta u \cdot \text{div} \sigma$, el cual puede ser transformado en $\text{div} (\delta u \cdot \sigma)$ por la aplicación de la regla del producto para la divergencia, de donde se obtiene que:

$$\text{div}(\delta u \cdot \sigma) = \delta u \cdot \text{div} \sigma + \nabla \delta u \cdot \sigma = \delta u \cdot \text{div} \sigma + \delta \nabla u \cdot \sigma \qquad (31)$$

Aplicando el teorema de Gauss para la divergencia de un tensor de primer orden a la integral de volumen se obtiene:

$$\int_{\Omega} \text{div}(\delta u \cdot \sigma) dV = \int_{\partial\Omega} \delta u \cdot \sigma \cdot n dA = \int_{\partial\Omega_1} \delta u \cdot \sigma \cdot n dA \qquad (32)$$

Cabe resaltar que fué posible sustituir la frontera $\partial\Omega$ en la ecuación por la frontera $\partial\Omega_1$ dado que la función de prueba δu es cero en la frontera tipo Dirichlet. Usando las ecuaciones anteriores, la formulación débil se representa como:

$$\int_{\Omega} \delta u \cdot b dV + \int_{\Omega} \delta \nabla u \cdot \sigma dV - \int_{\partial\Omega_1} \delta u \cdot \sigma \cdot n dA + \int_{\partial\Omega_1} \delta u \cdot (\sigma \cdot n - t^*) dA = 0 \qquad (33)$$

Finalmente el término $\delta \nabla u \cdot \sigma$ puede ser sustituido usando la definición:

$$\delta \nabla u \cdot \sigma = \delta \varepsilon \cdot \sigma \quad (34)$$

Esto se puede comprobar por medio de la representación de sus componentes:

$$\frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j}\sigma_{ij} + \delta u_{j,i}\sigma_{ji}) = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j}\sigma_{ij}) = \delta u_{i,j}\sigma_{ij} \quad (35)$$

Así que la ecuación anterior queda de la siguiente forma, la cual corresponde a la expresión para el Principio del Trabajo Virtual:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon \cdot \sigma dV = \int_{\Omega} \delta u \cdot b \rho dV + \int_{\partial \Omega_1} \delta u \cdot t^* dA \quad (36)$$

donde:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\Omega} \delta \varepsilon \cdot \sigma dV, \text{ Trabajo virtual de las fuerzas internas} \quad (37)$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \delta u \cdot b \rho dV + \int_{\partial \Omega_N} \delta u \cdot t^* dA, \text{ trabajo virtual de las fuerzas externas} \quad (38)$$

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}} \quad (39)$$

De donde se observa que se ha llegado a la misma expresión de la ecuación (19). Por lo tanto se concluye que la expresión variacional es equivalente a la ecuación diferencial y sus condiciones de frontera. Consecuentemente se ha satisfecho la hipótesis planteada anteriormente, y finalmente se ha llegado a la formulación débil del problema.

En forma de componentes, el principio del trabajo virtual se expresa como:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV = \int_{\Omega} \delta u_i \cdot b_i \rho dV + \int_{\partial \Omega_N} \delta u_i t_i^* dA \quad (40)$$

Por tanto se puede afirmar que en las ecuaciones de la elasticidad lineal, la ecuación variacional está dada por el principio del trabajo virtual; de donde se deja el camino preparado para aplicar la técnica del Elemento Finito.

2.3.1 Propiedades del principio del trabajo virtual

Dado que los esfuerzos $\sigma(\varepsilon)$ son funciones de las deformaciones y viceversa, y a su vez, dependen de los desplazamientos a través de las relaciones geométricas $\varepsilon = \varepsilon(u)$, las ecuaciones anteriores representan una ecuación condicional para los desplazamientos desconocidos u . Si se conoce la solución de estas ecuaciones, entonces esta también es la solución de la correspondiente formulación fuerte, llamada la condición de equilibrio. Dado que las ecuaciones se deben satisfacer para funciones de prueba δu , estas también deben satisfacer la ecuación diferencial y las condiciones de frontera.

Si, por otro lado, el principio del trabajo virtual no es resuelto exactamente por medio de funciones de aproximación (como es el caso del Método del Elemento Finito), las soluciones de la formulación débil y la formulación fuerte por tanto no son idénticas. La solución aproximada para los desplazamientos, cuando se introduce esto en la formulación fuerte, da como resultado un error, el llamado residuo. Esto significa que la formulación fuerte y la formulación débil son idénticas en el caso continuo pero no el caso discreto. Dado que la forma integral de la ecuación de equilibrio y la condición de frontera tipo Neumann no permite errores locales, esto forma la base para el desarrollo del Método del Elemento Finito.

Como consecuencia de haber escogido los desplazamientos virtuales δu como un tipo especial de función de prueba, la cual satisface las condiciones de frontera geométricas, las condiciones de frontera geométricas se satisfacen fuertemente en el principio del trabajo virtual. Por otro lado, la condición de equilibrio y las condiciones de frontera estáticas se satisfacen débilmente, i.e. en el sentido integral, debido a la multiplicación por una función de prueba y la integración sobre todo el volumen.

En base a esto, se puede resumir lo siguiente:

- a) Las condiciones de frontera tipo Dirichlet son fuertemente satisfechas en el principio del trabajo virtual.
- b) Las condiciones de frontera Neumann y la ecuación de equilibrio se deben satisfacer débilmente, únicamente, en el principio del trabajo virtual.
- c) La ventaja de la forma integral sobre la forma diferencial reside en el hecho de que la formulación débil no permite errores locales los cuales pueden surgir durante las aproximaciones, así como también la ecuación diferencial se satisface totalmente en el sentido integral.
- d) Debido a esta razón, la formulación débil forma las bases para el desarrollo del Método del Elemento Finito.

2.4 Formulación Variacional a partir de herramientas del Análisis Tensorial y Análisis Funcional

El problema de encontrar el estado elástico $[u, E, S]$ correspondiente a un cuerpo elástico que ocupa una región Ω del espacio, sujeto a un sistema de fuerzas estacionarias (\hat{s}, b_0) , esto es, independiente del tiempo, está definido por el problema asociado de elastoestática por medio del modelo físico en ecuaciones diferenciales parciales conocido como formulación fuerte del problema.

2.4.1 Formulación fuerte

Sea el operador $\text{div}: L(V, V) \rightarrow V$, entonces de la ecuación de equilibrio,

$$\text{div } S + b = 0 \text{ en } \Omega, \text{ con las condiciones de frontera} \quad (41)$$

$$S n = \hat{s} \text{ en } \partial\Omega_1 \quad (42)$$

$$u = \hat{u} \text{ en } \partial\Omega_2 \quad (43)$$

2.4.2 Formulación débil

El conjunto de desplazamientos cinemáticamente admisibles es el siguiente:

$$V = \{v \in H^1(\Omega)^3 : \hat{u} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\} \quad (44)$$

Sea $v-u: \varepsilon \rightarrow \mathcal{R}$ una función de prueba, multiplicando el lado izquierdo por $v-u$ de la ecuación anterior e integrando sobre todo el dominio Ω se tiene:

$$\int_{\Omega} (\text{div } S + b_0) \cdot (v - u) d\Omega = 0 \quad (45)$$

$$\int_{\Omega} \text{div } S \cdot (v - u) d\Omega + \int_{\Omega} b \cdot (v - u) d\Omega = 0, \{v-u\} \in V \quad (46)$$

Aplicamos la fórmula de Green siguiente, para obtener la formulación variacional que incluye las condiciones de frontera tipo Neumann:

$$\int_{\Omega} \text{div } S \cdot (v - u) d\Omega + \int_{\Omega} S \cdot (\hat{\nabla} v - \hat{\nabla} u) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \hat{g} \cdot (v - u) d\partial\Omega, \{v-u\} \in V \quad (47)$$

entonces,

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} S + b_0) \bullet (v - u) d\Omega = \int_{\Omega} ((v - u) \bullet \operatorname{div} S) d\Omega + \int_{\Omega} ((v - u) \bullet b_0) d\Omega, \{v - u\} \in V \quad (48)$$

$$\int_{\Omega} ((\operatorname{div} S \bullet (v - u) - S \bullet (\nabla v - \nabla u) + (v - u) b) d\Omega = \int_{\Omega} (\operatorname{div} S \bullet (v - u)) d\Omega - \int_{\Omega} (S \bullet (\nabla v - \nabla u) \bullet b_0) d\Omega = 0 \quad (49)$$

de donde el problema puede plantearse como:

Encuentre $u \in V$:

$$\int_{\Omega} S \bullet (\hat{\nabla} v - \hat{\nabla} u) d\Omega = \int_{\Omega} b \bullet (v - u) d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} \hat{g} \bullet (v - u) d\partial\Omega, \{v - u\} \in V, \text{ la cual}$$

corresponde a la expresión para el trabajo virtual. (50)

De donde la forma bilineal está dada por:

$$a(\bullet, \bullet) : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (51)$$

y la forma lineal como :

$$g(\bullet) : V \rightarrow \mathbb{R} \quad (52)$$

quedando,

$$a(u, v - u) = \int_{\Omega} S \bullet (\hat{\nabla} v - \hat{\nabla} u) d\Omega \quad (53)$$

$$g(v - u) = \int_{\Omega} b \bullet (v - u) d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} \hat{g} \bullet (v - u) d\partial\Omega \quad (54)$$

por lo tanto el problema variacional asociado puede escribirse como:

Encuentre $u \in V$:

$$a(u, v - u) = g(v - u) \quad (55)$$

o sustituyendo $w = v - u$ queda,

$$a(u, w) = g(w) \quad \forall w \in V \quad (56)$$

discretizando el problema:

$$u_h = \alpha_j w_j$$

$w_j, j = 1, \dots, m$ es una base de γ

$$a(u_h, w_h) = (g_h, w_h), \quad \forall w_h \in V_h = \{v_h \in \gamma_h = 0 \text{ en } \partial\Omega_1\}, \quad \gamma_h \text{ es una base de } \gamma$$

de donde el problema se puede ver de la siguiente forma:

encuentre $\alpha \in \mathbb{R}^j$,

$$k\alpha = g \tag{57}$$

$$k_{ij} = a(w_j, w_i)$$

$$g_{ij} = (g, w_j) \tag{58}$$

A k se le conoce como matriz de rigideces, a g se le conoce como vector de cargas y a α se le conoce como vector solución.

Capítulo 3. Modelo de Elemento Finito

3.1 Generalidades

El método de Elemento Finito es un método aproximado para resolver ecuaciones diferenciales de problemas de valores en la frontera o de valores en la frontera e iniciales, que se presentan en ingeniería y en la física-matemática.

Este método posee dos características principales que lo hacen superior a otros métodos. Primero, un dominio geoméricamente complejo puede representarse como una colección de subdominios geoméricamente simples, llamados elementos finitos. Segundo, sobre cada elemento finito las funciones de aproximación se construyen a partir de la idea básica de que una función continua puede ser representada por una combinación lineal de polinomios algebraicos. Las funciones de aproximación se construyen usando conceptos básicos de interpolación. Los coeficientes involucrados en la combinación lineal vienen a ser los valores de la solución en un número finito de puntos, llamados nodos, sobre la frontera y el interior del dominio.

En resumen, el Método del Elemento Finito emplea una discretización completa de las variables espaciales en el medio, convirtiendo la solución de un problema de valores a la frontera, de una o más ecuaciones diferenciales parciales, en otra más simple: la solución de un conjunto de ecuaciones algebraicas.

3.2 Definiciones Básicas

En esta sección se presentan los aspectos generales del Método de Elemento Finito como una técnica de interpolación para calcular numéricamente el campo de desplazamientos.

Consideremos el problema variacional lineal: encuentre $u \in V$ tal que $a(u, v) = f(v)$, $\forall v \in V$. Donde suponemos que el espacio V y la forma bilineal a , satisfacen las condiciones del lema de Lax-Millgram. Entonces el método para aproximar la solución de este problema, consiste en definir espacios de dimensión finita del espacio V . Específicamente subespacios $V_h \in V$, entonces asociamos el problema discreto:

$$\text{Encuentre } u_h \in V_h \text{ tal que } \forall v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad (1)$$

El problema variacional abstracto corresponde a uno elíptico de segundo orden con valores a la frontera, planteado sobre un conjunto Ω de ε con frontera suficientemente suave $\partial\Omega$. Por tanto podemos concebir al Método de Elemento Finito en su forma más simple como el proceso de construcción de subespacios V_h a los cuales llamaremos espacios de elemento finito. Esta construcción se caracteriza por los siguientes aspectos:

- 1) Una triangulación τ del dominio Ω , es decir se divide en un número finito de subconjuntos $E \in \tau$, llamados elementos finitos.

Definición 4.2.1: Dado un problema en Ecuaciones Diferenciales Parciales, el dominio es una región regular $\Omega \subset \mathcal{E}$ en la cual está definida su solución.

Definición 4.2.2: Sea Ω el dominio de un problema en Ecuaciones Diferenciales Parciales y sea $k \in \mathbb{N}$ la dimensión del espacio euclidiano \mathcal{E} . La discretización o malla de la región R es una región regular $R' \subset \mathcal{E}$ constituida por un conjunto finito de subregiones regulares llamadas elementos finitos, cuyas fronteras tienen una representación analítica a trozos. Cada trozo es un subconjunto suave llamado lado del elemento finito y los puntos donde los trozos se encuentran se llaman nodos. Las características generales de una discretización son las siguientes:

$$a) R' = \sum_{j=1}^n E_j \quad (2)$$

b) existe un escalar $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeño tal que:

$$\text{máx } \|(R/R'') \cup (R''/R)\| < \varepsilon. \quad (3)$$

- c) Cada elemento finito es una subregión regular de medida no cero y convexa.
d) Dos elementos finitos no se interceptan, excepto posiblemente en su frontera:

$$E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j \quad (4)$$

El conjunto de intersección es de dimensión $k-1$ y se conoce como intersección de primer orden.

Definición 4.2.3: Sean R' y R'' discretizaciones de una misma región R con el mismo tipo de elementos finitos. Si todo elemento de R'' es un subconjunto de uno y sólo un elemento finito de R' con la posible excepción de puntos en la frontera de los elementos finitos, y existe al menos un elemento finito de R'' que es un subconjunto propio de un elemento de R , entonces se dice que R'' es una discretización más fina que R' , de la región R .

Definición 4.2.4: La construcción de una malla más fina con base en una discretización dada, se llama refinamiento de malla. La alteración de un subconjunto propio de la malla original se llama refinamiento local.

Definición 4.2.5: El elemento finito de referencia es una técnica de generación de mallas de elementos finitos. Consiste en elegir una figura geométrica que se usará en la discretización, está se ubica en relación a un sistema de coordenadas de manere que la representación analítica de sus fronteras sea lo más sencillo posible. Mediante funciones de deformación convenientes de esta figura geométrica, llamada elemento finito de referencia, se cubre la función a discretizar. Dependiendo del tipo de función de deformación usada (traslaciones, rotaciones, elongaciones, etc.), así como de las diferentes geometrías de referencia usadas, será la naturaleza de la malla.

2) Las funciones base del Elemento Finito son de tipo polinomial en cada $E \in \mathcal{T}$. Este punto es importante, ya que es la base para los resultados de convergencia vía análisis de error de interpolación.

Definición 4.2.6. Dado un problema en Ecuaciones Diferenciales Parciales y un conjunto $\{\phi_i\}$ de funciones de interpolación de la función solución $u: \Omega \subseteq \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{R}$ de la función solución de la forma:

$$u_k(x) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x) \quad (5)$$

tales que $u_k(x) = a_i$

definen un conjunto $G = \{a_i\}$ de coeficientes llamados grados de libertad de primer orden (son los valores de la función u en puntos específicos de su dominio) que se vuelven las incógnitas del problema.

Definición 4.2.7: Dada una discretización R' de una región regular R y $E_k \subset R'$ un elemento finito, una función local de interpolación Φ_{ki} es una función que vale uno en el i -ésimo nodo de E_k y cero en el resto.

Definición 4.2.8: Dada una discretización R' de una región regular R y $E_k \subset R'$, una función global de interpolación Φ_i es una función que vale uno en el i -ésimo nodo de R' y cero en el resto. Sobre cada uno de los elementos finitos E_k que comparten el i -ésimo nodo, es idéntica a la función local de interpolación Φ_{ki} , que vale uno en ese nodo y cero en el resto.

Para cada uno de los nodos en la discretización, derivar funciones de interpolación que generen el espacio de elementos finitos. Estas funciones se proponen como polinomios cuyos coeficientes se calculan en términos de valores, desconocidos, en los nodos del elemento. Estos valores se pueden calcular a partir de la formulación variacional del problema planteado.

- a) En la elección de la base se utiliza el hecho de que los soportes de la función base son pequeños, dando lugar a una matriz de tipo bandeda. Con lo anterior y con una numeración adecuada se obtienen los coeficientes del sistema lineal resultante.
- b) Cálculo de las demás cantidades (esfuerzos, deformaciones, etc.).

3) Construcción de espacios de Elemento Finito

Se construyen los elementos finitos de referencia (E, P_E, \sum_E) relacionados con este trabajo.

De donde E representa el espacio geométrico del Elemento Finito y está definido como:

$$\hat{E} = \text{Shell}$$

Las Funciones locales de Interpolación se dan de la siguiente manera:

El polinomio base es,

$$\hat{P}_K(\hat{E}) = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_3z + \alpha_4xy + \alpha_5xz + \alpha_6yz + \alpha_7xyz \quad (6)$$

$$\sum_{\hat{E}} = \left\{ \phi \left(\hat{P}_{\hat{E}}, R \right) : \phi(p) = \hat{p}(a_i), 1 \leq i \leq 8 \right\} \quad (7)$$

Siendo w_i las funciones base del elemento finito:

$$\{w_i\}_{i=1} \subset p_E \quad (8)$$

para ello se utiliza el siguiente algoritmo:

* se seleccionan las funciones de grado 1: $\{w_i\}_{i=1} \subset p_E$

$$* \Phi_j(w_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad 1 \leq i \leq 8 \quad (9)$$

El segundo punto muestra la ortogonalidad de las funciones base o funciones de interpolación locales.

Dado \hat{E} con las siguientes coordenadas:

Nodo	Coordenadas	Nodo	Coordenadas
a ₁	(1,0,0)	a ₅	(0,0,0)
a ₂	(1,1,1)	a ₆	(0,1,0)
a ₃	(1,1,1)	a ₇	(0,1,1)
a ₄	(1,0,1)	a ₈	(0,0,1)

se obtienen los sistemas siguientes:

$$\begin{aligned}
\Phi_1(w_1) = w_1(a_1) &= \alpha_0 + \alpha_1 = 1 \\
\Phi_2(w_1) = w_1(a_2) &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\
\Phi_3(w_1) = w_1(a_3) &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 = 0 \\
\Phi_4(w_1) = w_1(a_4) &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 = 0 \\
\Phi_5(w_1) = w_1(a_5) &= \alpha_0 = 0 \\
\Phi_6(w_1) = w_1(a_6) &= \alpha_0 + \alpha_2 = 0 \\
\Phi_7(w_1) = w_1(a_7) &= \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_6 = 0 \\
\Phi_8(w_1) = w_1(a_8) &= \alpha_0 + \alpha_3 = 0
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1(w_2) = w_1(a_1) &= \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \\
\Phi_2(w_2) = w_1(a_2) &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 1 \\
\Phi_3(w_2) = w_1(a_3) &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 = 0 \\
\Phi_4(w_2) = w_1(a_4) &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 = 0 \\
\Phi_5(w_2) = w_1(a_5) &= \alpha_0 = 0 \\
\Phi_6(w_2) = w_1(a_6) &= \alpha_0 + \alpha_2 = 0 \\
\Phi_7(w_2) = w_1(a_7) &= \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_6 = 0 \\
\Phi_8(w_2) = w_1(a_8) &= \alpha_0 + \alpha_3 = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

los cual conduce a un sistema matricial a resolver de la forma $k\alpha = b$.

La resolución de cada uno de los ocho sistemas se realizó mediante el paquete Nisa/Display, en donde “alfa” representa el vector de soluciones y w_i representa el vector del lado derecho para cada uno de los ocho sistemas.

Capítulo 4. Caso de Estudio

4.1 Análisis del comportamiento mecánico de la estructura de un autobús de transporte urbano

En este capítulo se da una explicación del proyecto desarrollado en la UNAM donde se analizó y modeló la estructura de la carrocería del camión. Como se mencionó en secciones anteriores, la estructura presentaba fallas en el diseño y el objetivo del análisis era determinar las causas que provocaban las fallas, para posteriormente proponer soluciones específicas.

Se utilizó el método Inverso para la solución del problema de fallas en la estructura de un autobús, el método inverso consiste en proponer una solución a nuestro problema. Esta solución se basa en la experiencia, en experimentos o en soluciones existentes a problemas similares. Si esta solución satisface las ecuaciones de campo y las condiciones de frontera entonces esta es la solución exacta, y, por el teorema de unicidad, la solución es única.

Se determinó que las causas que ocasionan las fallas en la estructura del autobús se debían a efectos de torsión, por lo que se consideró que la torsión del autobús es la única solicitación importante que afectaba a la estructura del autobús, así que se procedió a dar valores significativos en el Modelo virtual de Elemento Finito y corroborar que los resultados que arrojará el paquete fueran equivalentes con los obtenidos mediante técnicas experimentales, y así finalmente conocer cuales eran las condiciones de frontera que producían estos resultados.

La Metodología para la solución del problema fue la siguiente:

Se aplicaron técnicas experimentales y numéricas para la resolución de este problema. Las experimentales consistieron en aplicar las técnicas de fotoelasticidad y extensometría eléctrica a la estructura de la carrocería con el objetivo, primero, de conocer en campo completo las deformaciones de zonas particulares de la estructura y, segundo, mediante la técnica de extensometría, conocer las deformaciones y esfuerzos punto a punto.

Para poder corroborar los análisis se construyó un modelo de la estructura de la carrocería con ayuda del software Nisa/Display de elemento finito. Posteriormente se le dieron datos significativos reales al modelo y se comprobó que los resultados de los análisis experimentales eran equivalentes a los computacionales.

Se procedió, con la ayuda del software, a localizar zonas de concentración de esfuerzos localizando que dichas zonas coincidían con las regiones locales de las fallas. Con el modelo virtual de elemento finito se procedió a evaluar diversas soluciones encontrando una funcional la cual fue probada usando nuevamente técnicas experimentales.

A continuación se dan las condiciones y limitaciones consideradas para el análisis de la estructura mediante el software de Elemento Finito Nisa-Display. Dichas características para el análisis son las siguientes:

El modelo de elemento finito consiste principalmente de elementos placa (shells) cuadrangulares de 25X25 mm de tamaño en promedio. En total el modelo tiene 129,123 elementos y 131,418 nodos.

El modelo de elemento finito (figura 2) incluye la carrocería y bastidor con la excepción de los paneles laterales, las conchas exteriores trasera y delantera, los asientos y la estructura de los pasamanos.

El modelo esta orientado con el eje x a lo largo del autobús con la dirección positiva apuntando hacia atrás, el eje y positivo apuntando hacia el lado derecho del autobús y el eje z positivo apuntando hacia arriba.

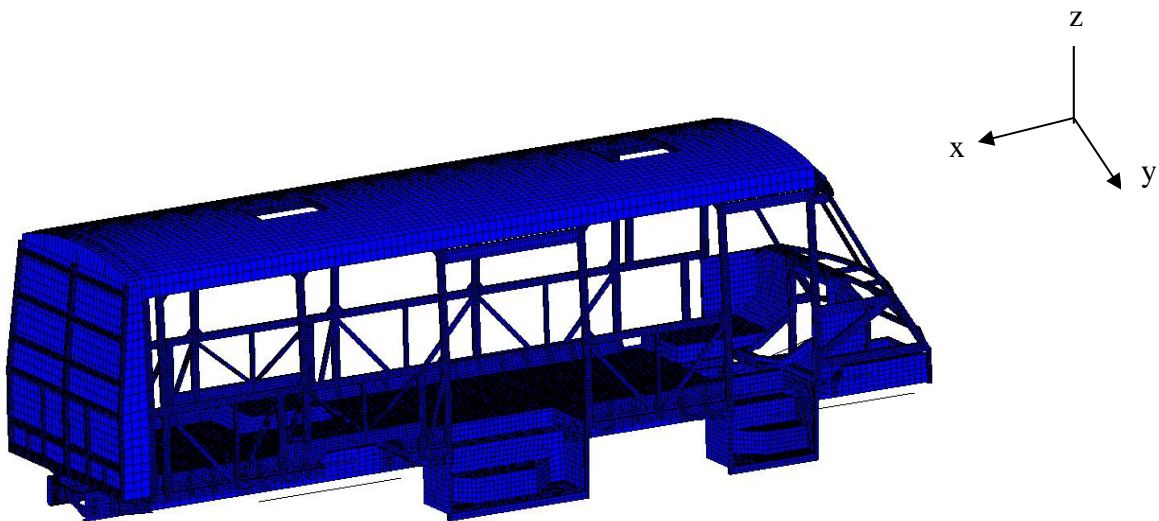


Figura 2. Modelo de elemento finito.

a) Limitaciones del Análisis:

Las limitaciones consideradas para el análisis fueron las siguientes:

1. Debido a la falta de planos detallados de la estructura, muchas de las partes fueron medidas en el vehículo físico que se encuentra en las instalaciones de la UNAM, por lo que el modelo de elemento finito fue construido con dicha información.
2. Los puntos de soldadura se tomaron del vehículo físico y se representaron con elementos rígidos.
3. Los remaches del techo están representados con elementos rígidos.

4. El parabrisas y las ventanillas no se incluyeron en el modelo, su contribución a la rigidez estructural depende de la manera como se monta a la estructura y de las propiedades de la goma.
5. No se modelaron los paneles laterales debido a que no se tiene información del adhesivo con el que se pegan a la estructura lateral.
6. El soporte delantero se modelo con una sola goma y sus propiedades se consideraron de uso automotriz (No se contó con las propiedades de la goma y del resorte).
7. No se consideraron los esfuerzos residuales en la estructura debidos a efectos de manufactura, soldadura, etc.

b) Cargas y condiciones de sujeción:

La selección del caso de carga para realizar el análisis por elementos finitos fue determinado de acuerdo los resultados obtenidos en una serie de pruebas vehiculares realizadas previamente en el autobús peso bruto (PV). El caso de carga más crítico resulto ser cuando el autobús se tuerce debido al levantamiento de la rueda trasera derecha a una altura de 30 cm. En el modelo de elemento finito, el desplazamiento vertical aplicado a la estructura se dedujo a partir de las mediciones de deformación unitaria en el poste derecho 1(ver figura2). El desplazamiento vertical aplicado fue de 15 mm.

Las condiciones de sujeción para el caso del levantamiento de la rueda trasera derecha fueron las que se muestran en la tabla 1.

LEVANTAMIENTO RUEDA TRASERA DERECHA						
RUEDA	TRANSLACIONES			ROTACIONES		
	X	Y	Z	X	Y	z
Trasera derecha	0.0	0.0	15.0	NO	NO	NO
Trasera izquierda	0.0	NO	0.0	NO	NO	NO
Delantera derecha	NO	0.0	0.0	NO	NO	NO
Delantera izquierda	NO	NO	0.0	NO	NO	NO
LEVANTAMIENTO RUEDA TRASERA IZQUIERDA						
RUEDA	TRANSLACIONES			ROTACIONES		
	X	Y	Z	X	y	z
Trasera derecha	0.0	0.0	0.0	NO	NO	NO
Trasera izquierda	0.0	NO	15.0	NO	NO	NO
Delantera derecha	NO	0.0	0.0	NO	NO	NO
Delantera izquierda	NO	NO	0.0	NO	NO	NO

Tabla 1. Condiciones de sujeción para el levantamiento de la rueda trasera derecha e izquierda.

c) Corridas realizadas

A continuación se describen las corridas que se ejecutaron para realizar el análisis por elementos finitos. Las corridas 1, 2, 3 y 4 tenían el objetivo de ver la redistribución de esfuerzos en los marcos de las puertas cuando ciertos elementos fallan:

Corrida 1: Torsión de la estructura del autobús cuando se levanta la rueda trasera derecha.

Corrida 2: Torsión de la estructura del autobús o cuando se levanta la rueda trasera derecha y soporte delantero derecho suelto.

Corrida 3: Torsión de la estructura del autobús cuando se levanta la rueda trasera derecha, soporte delantero derecho suelto y piso fracturado (pero no completamente roto) en la zona de la puerta de ascenso.

Corrida 4: Torsión de la estructura del autobús cuando se levanta la rueda trasera derecha, soporte derecho suelto, piso fracturado (pero no completamente roto) en la zona de la puerta de ascenso, poste 1 derecho completamente roto.

Corrida 5. Torsión de la estructura del autobús cuando se levanta la rueda trasera izquierda.

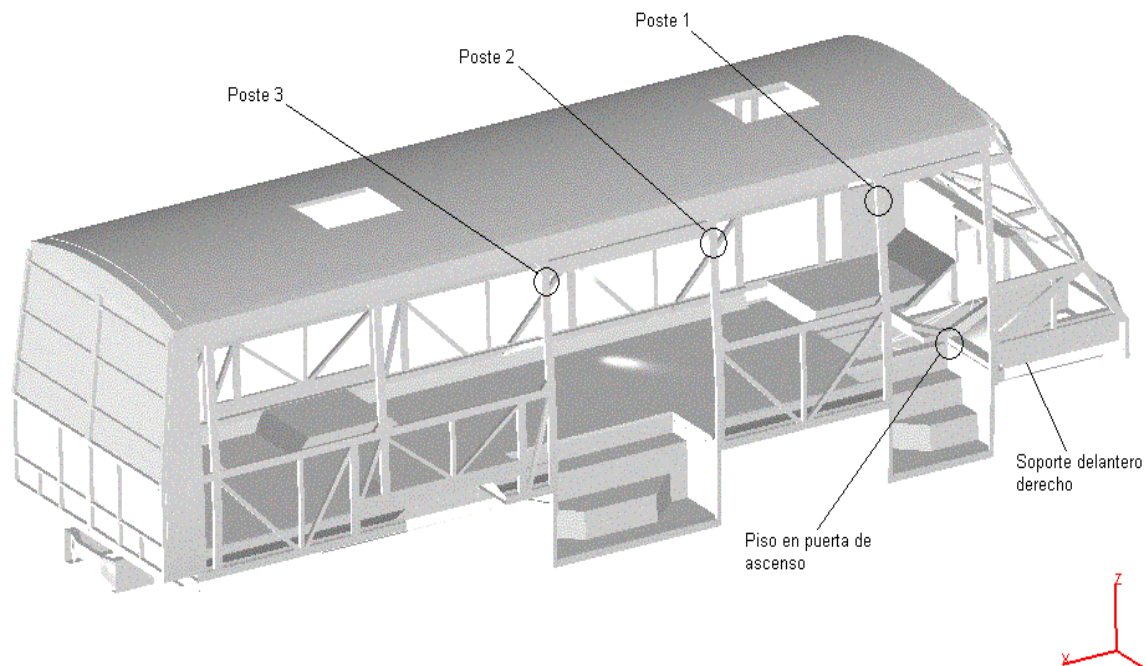


Figura 3. Localización de los puntos de interés.

En la tabla 2 se muestran los resultados de esfuerzos Von Mises encontrados en los postes 1, 2, 3 (ver figura 3) que forman los marcos de las puertas para cada uno de las corridas.

Corrida	Esfuerzo Poste 1 [Mpa]	Esfuerzo Poste 2 [Mpa]	Esfuerzo Poste 3 [Mpa]
1	150	139	118
2	76	97	83
3	63	94	81
4	0	117	84
5	155	133	105

Tabla 2. Resultados de esfuerzos Von Mises.

En la tabla 3 se muestran los desplazamientos que sufre la estructura en las zonas de los costados derecho e izquierdo. Para ver más detalles referirse a las figuras del anexo A.

Desplazamientos	Desplazamientos en la corrida con soportes delanteros, (mm)	Desplazamientos en la corrida sin soportes delanteros, (mm)
Desplazamientos totales	32.006	36.10
Costado derecho		
Desplazamiento en X	2.12	3.22
Desplazamiento en Y	22.58	25.44
Desplazamiento en Z	23.32	26.09
Costado izquierdo		
Desplazamiento en X	2.61	3.71
Desplazamiento en Y	22.52	25.45
Desplazamiento en Z	6.9	13.32

Tabla 3. Desplazamientos.

En la tabla 4 se muestran los resultados de esfuerzos de Von Mises encontrados en las siguientes zonas de interés: cargadores del bastidor (patas de gallo), soportes delanteros, piso delantero, marco compartimento motor, postes 1, 2, 3 derechos e izquierdos, plataforma piso y estructura trasera. Para ver más detalles referirse a las figuras del anexo A.

Zonas de interés	Esfuerzos en las corridas con soportes delanteros, (Mpa)	Esfuerzos en la corrida sin soportes delanteros, (Mpa)
Cargador 3 poste derecho	388	369
Soporte delantero	172	----
Piso delantero	73	133
Marco compart. Motor	160	47
Poste 1 derecho	150	83
Poste 2 derecho	140	97
Poste 3 derecho	118	83
Poste 1 izquierdo	64	35
Poste 2 izquierdo	64	41
Poste 3 izquierdo	54	41
Plataforma piso	162	139
Estructura trasera	68	46

Tabla 4. Esfuerzos de Von Mises.

Como puede observarse en las figuras de contornos de esfuerzos presentadas en el apéndice A, los puntos de máximo esfuerzo se presentan en todos los casos en las esquinas exteriores de los postes (estas esquinas son las esquinas exteriores del poste sí se ven en corte transversal).

Para la corrida 1, los valores de esfuerzos en los postes de los marcos de las puertas decrecen en el siguiente orden 1, 2 y 3.

Para la corrida 2, los valores de esfuerzos en los postes de los marcos de las puertas decrecen de la siguiente manera 2, 3 y al último, el poste 1.

Para la corrida 3 se presenta la misma secuencia que la corrida 2.

Para la corrida 4 se presenta la misma secuencia que la corrida 2, con la salvedad que el esfuerzo en el poste 1 es 0.0.

Para la corrida 5 los valores de esfuerzos tiene el mismo orden que la corrida 1, es más, los niveles de esfuerzos son muy parecidos.

4.2 Modelo de Elemento Finito vs Mediciones Experimentales

En este punto se corroboraron los análisis hechos a la estructura mediante el software de Elemento Finito y las mediciones experimentales. Las condiciones para ambos análisis arrojaron resultados equivalentes.

A continuación se da una explicación de esto:

El desplazamiento vertical que se aplicó a la estructura del autobús en el modelo de elemento finito, se correlacionó con las mediciones de deformación unitaria que se obtuvieron al levantar la rueda trasera derecha 30 cm. El desplazamiento vertical aplicado a la estructura fue de 15 mm. Con ello, los valores de esfuerzo de Von Mises obtenidos del modelo de elemento finito son similares a los obtenidos experimentalmente:

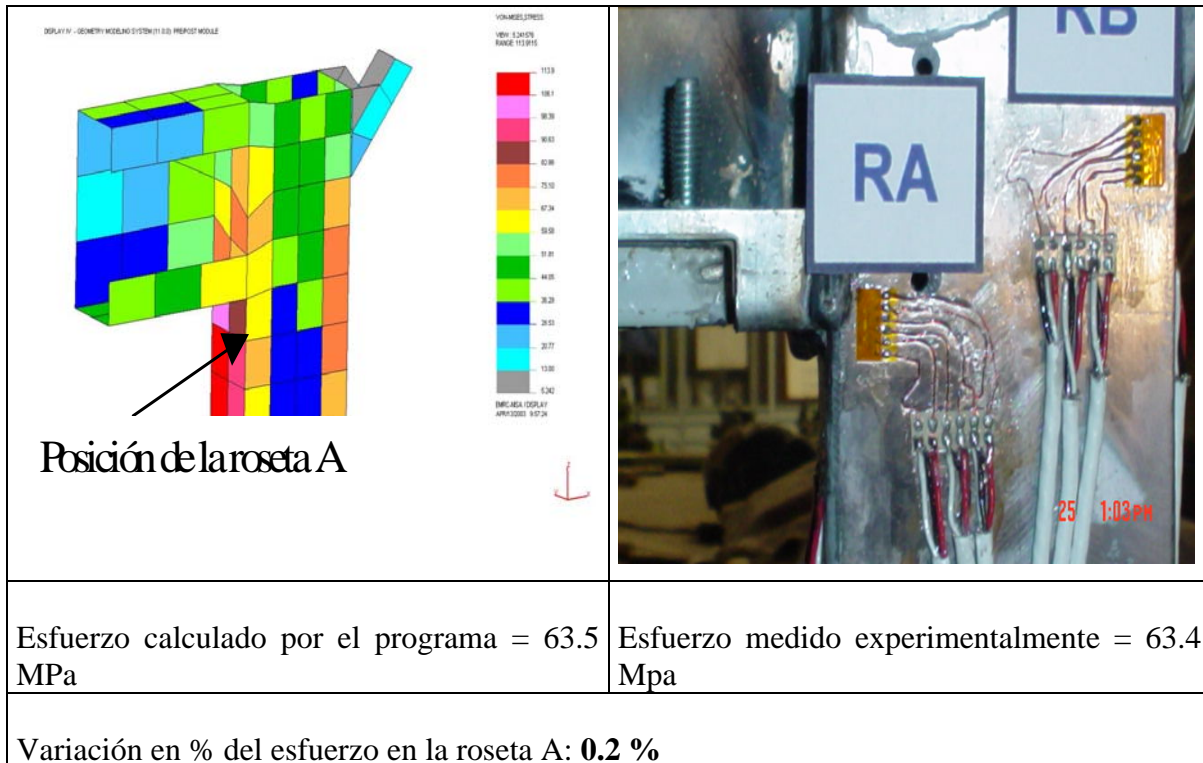


Figura 4. Variación de esfuerzos obtenidos con elemento finito y experimentalmente.

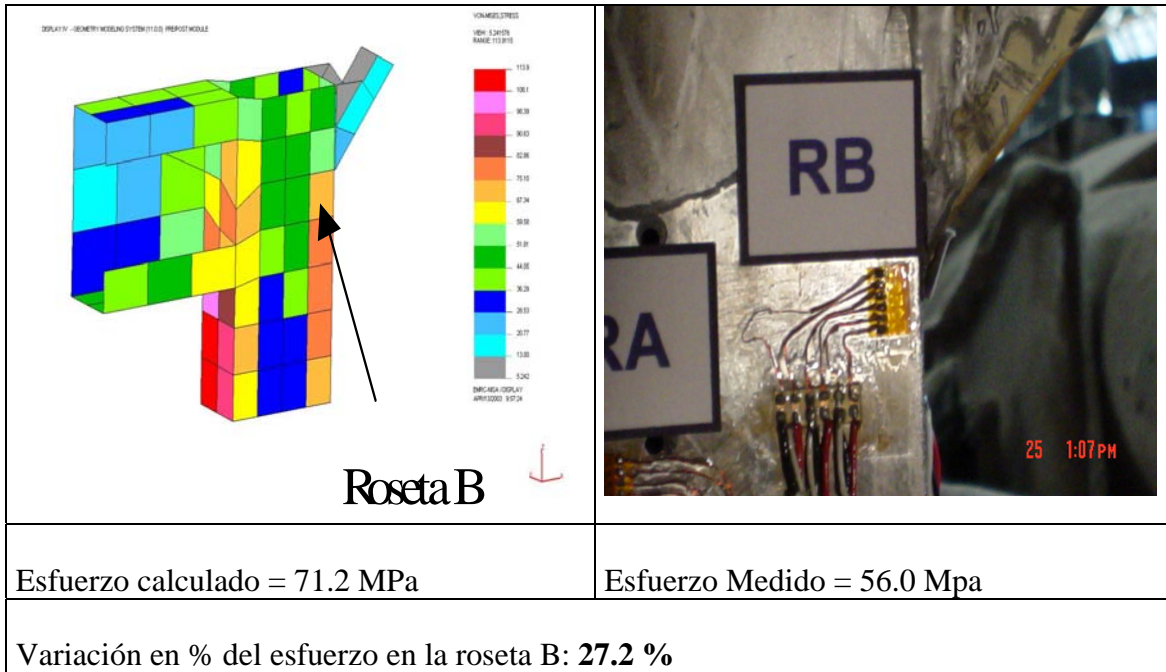


Figura 5. Variación de esfuerzos obtenidos con elemento finito y experimentalmente.

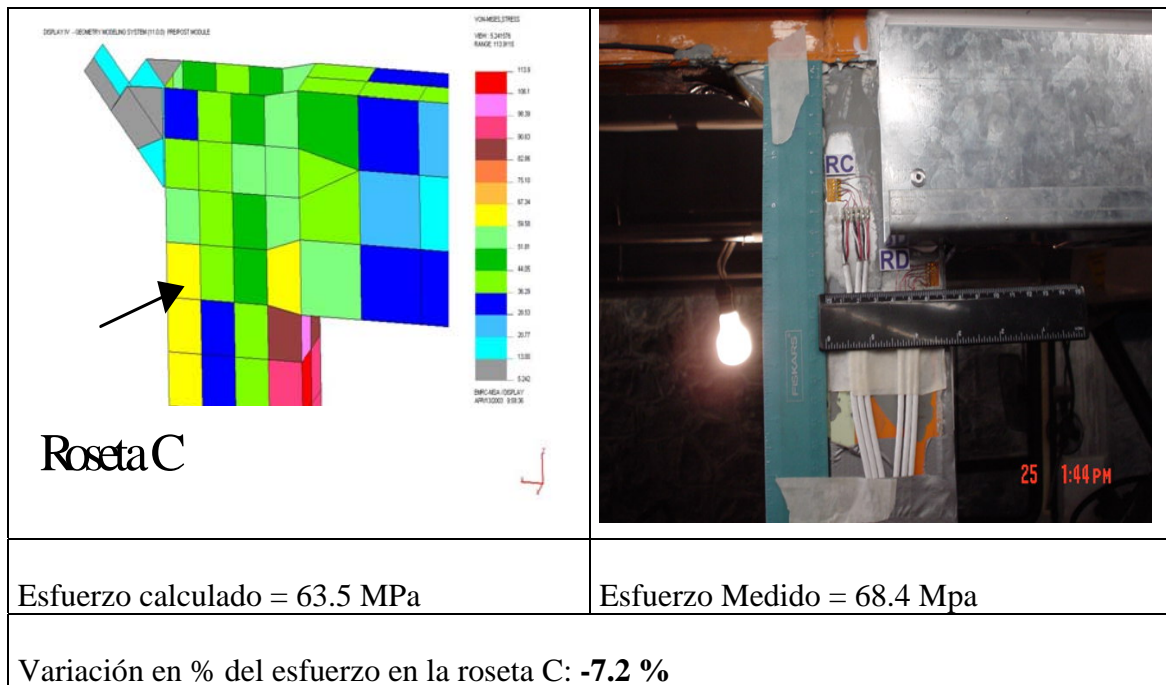


Figura 6. Variación de esfuerzos obtenidos con elemento finito y experimentalmente.

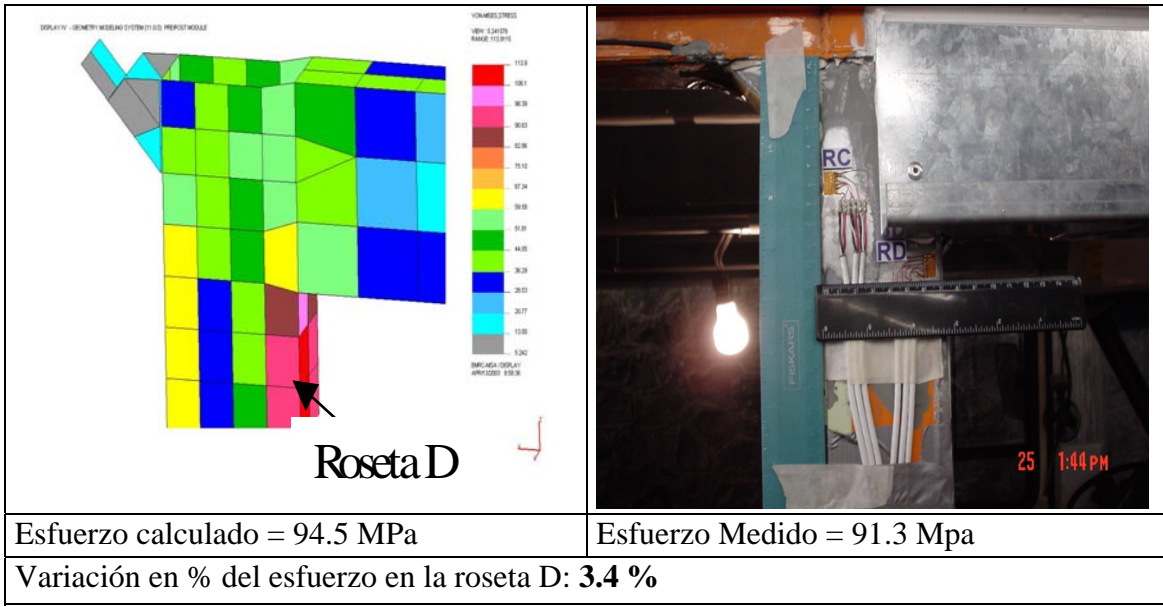


Figura 7. Variación de esfuerzos obtenidos con elemento finito y experimentalmente.

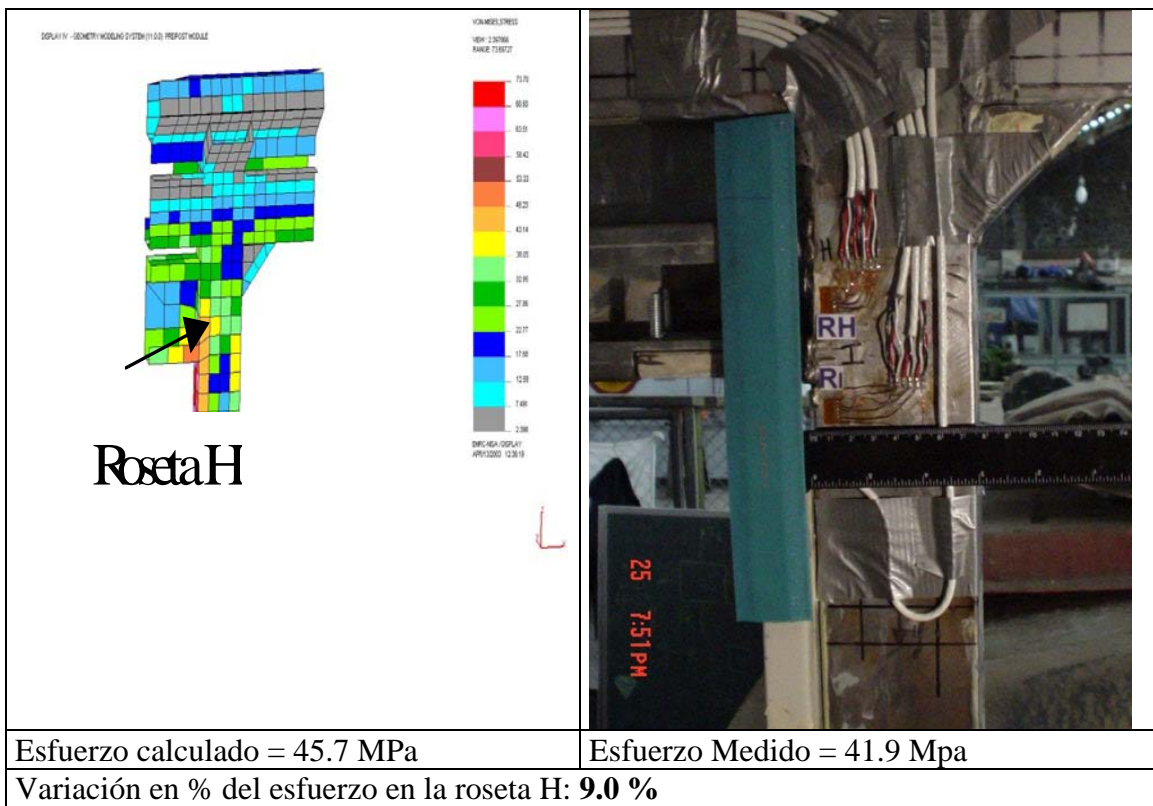


Figura 8. Variación de esfuerzos obtenidos con elemento finito y experimentalmente.

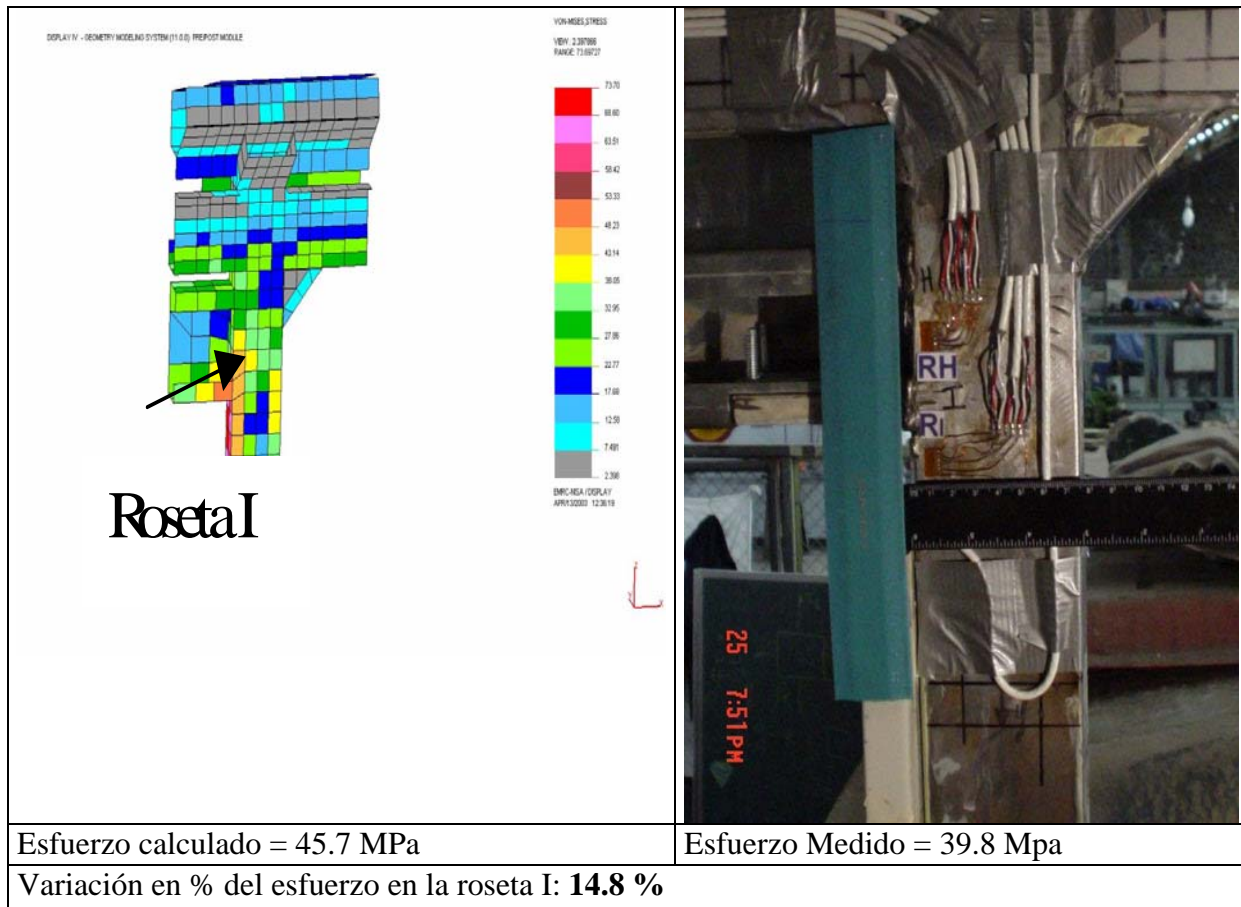


Figura 9. Variación de esfuerzos obtenidos con elemento finito y experimentalmente.

En cada uno de los casos se considera que la variación en porcentaje entre el esfuerzo calculado mediante el paquete de Elemento Finito y el esfuerzo medido mediante técnicas experimentales es aceptable para considerarlo como una solución.

4.3 Resultados del análisis

Los resultados de las pruebas bajo diferentes condiciones de frontera son las siguientes:

1. Al someter al autobús a una torsión debida al levantamiento de la llanta trasera, (izquierda o derecha), los puntos de máxima concentración de esfuerzos en los marcos de las puertas aparecen en la esquina exterior del poste 1, ligeramente por debajo de la canal por donde se desliza la puerta delantera, el nivel de esfuerzo Von Mises es del orden de los 150 Mpa.
2. Al liberar el soporte frontal derecho (ver Fig. 3), la máxima concentración de esfuerzos aparece en el poste 2, también en la esquina exterior justo por debajo de la canal por donde desliza la puerta trasera, aunque en este caso el nivel de esfuerzos es menor que en la corrida 1.

3. Los resultados de ambas corridas muestran que los puntos con concentraciones de esfuerzos altos coinciden con los puntos de falla que se tienen registrados. Parece ser que las condiciones de las corridas 1 y 2 representan las condiciones extremas donde se mueve la condición real, es decir, la forma de modelar el soporte delantero en la corrida 1 (sólo se modela la parte de la goma con propiedades supuestas y no se modela la parte del resorte) representa una condición muy rígida, por otro lado, la corrida 2 modelada sin el soporte delantero derecho representa una condición muy flexible.
4. Las corridas 3 y 4 solo confirman que en cualquier caso de carga los puntos de concentración de esfuerzos en los marcos de las puertas son los mismos.
5. Al correlacionar los resultados obtenidos entre el modelo del elemento finito y valores obtenidos experimentalmente en puntos de los postes 1 y 2 del autobús, se observa que la diferencia se encuentra entre un 10%, y un máximo de 27% para el punto con la roseta D.

Conclusiones

Con el desarrollo de este trabajo de Tesis, se puede concluir lo siguiente:

1. Los objetivos de esta tesis se satisficieron de manera eficiente al encontrar la fundamentación teórica del problema planteado en este trabajo, aplicando los pasos generales del método científico como herramienta principal.
2. La comprobación de que la formulación variacional es correcta quedó demostrada utilizando un método basado en la teoría general de variaciones y la aproximación de una integral, el cual se considera correcto para los fines de este trabajo.
3. La solución a problemas complejos como el presentado en este trabajo requiere de la combinación de técnicas experimentales, numéricas, y de la aplicación eficiente del método científico, ya que de no hacerlo, incluso, se corre el riesgo de no llegar a la solución.

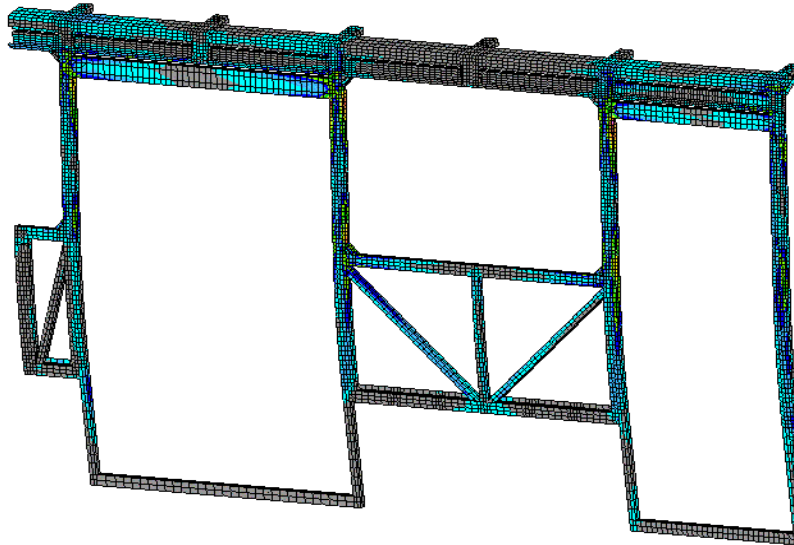
Bibliografía

- [1] Gurtin M., *An Introduction to Continuum Mechanics*. (1981). Academic Press. New York.
- [2] Ciarlet, P. G., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. (1978). North-Holland, Amsterdam.
- [3] RNDr. Karel Rektorys, *Variational Methods in Mathematics, Science and-- Engineering*. (1975). Reidel Publishing Company. Printed in Czechoslovakia.
- [4] A. J. Durelli, *Introduction to the Theoretical and Experimental Analysis of Stress-- and Strain*. (1958). McGraw-Hill Book Company. USA.
- [5] Jan Van Tiel, *Convex Analysis*. (1978). John Wiley & Sons. Printed in Northern Ireland(Belfast).
- [6] W. Michael Lai et al; *Introduction to Continuum Mechanics*. (1974). Pergamon-Press Inc. U. S. A.
- [7] Arch W. Naylor et al; *Linear Operator Theory in Engineering and Science*. – (1971). Springer-Verlag. New York Heidelberg Berlin.
- [8] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*. (1976). McGraw-Hill. Printed in the United States of America.
- [9] María Esther Arroyo Castelazo, *Modelo Computacional del problema de frontera libre con aplicación a fenómenos de intrusión salina*. (1996). Tesis DEPMI, UNAM.
- [10] Manuel Adame, *Modelación de problemas termoelásticos*. (1996). Tesis DEPMI, UNAM.
- [11] Ramón Cervantes Beltrán y Víctor Porras Silva, *Introducción al Método del Elemento Finito*. (1982). Publicación DEPMI, UNAM.
- [12] Abraham Rojano Aguilar, *Modelación de una carcasa de transmisión con Elemento Finito*. (1992). Tesis DEPMI, UNAM.
- [13] Zienkiewicks, O. C., et al; *El Método de los Elementos Finitos. Formulación básica y problemas lineales*, (1982).vol. 1; 4ª. ed.; McGraw-Hill/Interamericana de España;Barcelona.
- [14] Glens E. Myers, *Analytical Methods in heat conduction problems*, (1978).vol. 1; 4ª. ed.; McGraw-Hill, USA.

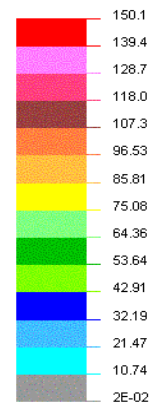
Apéndice A

A.1 Esfuerzos en los contornos de los marcos de las puertas

CORRIDA 1 Torsión levantando la rueda trasera derecha



VON-MISES,STRESS
MPa
VIEW : 0.0188378
RANGE: 150.1489

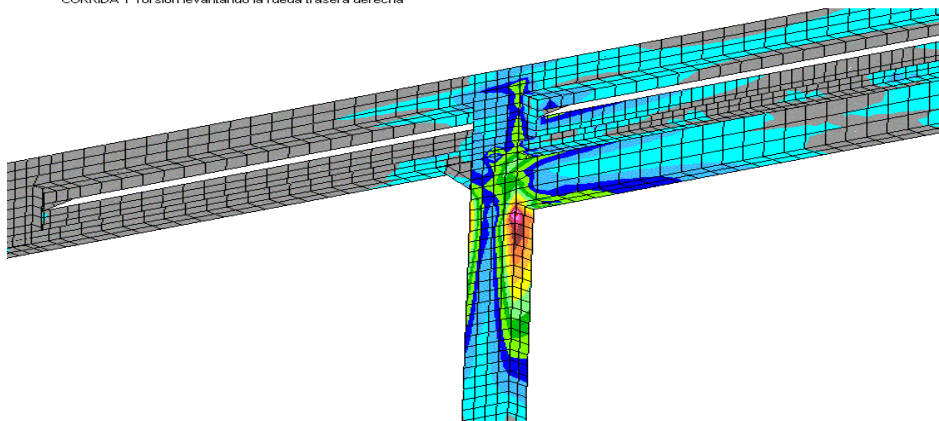


EMRC-NISA / DISPLAY
MAY/8/2003 18:15:13

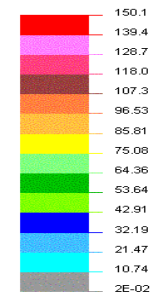


Figura A1. Marcos de puertas (Corrida 1)

CORRIDA 1 Torsión levantando la rueda trasera derecha



VON-MISES,STRESS
MPa
VIEW : 0.0188378
RANGE: 150.1489



EMRC-NISA / DISPLAY
MAY/8/2003 18:17:28



Figura A2. Poste 1 (vista exterior)

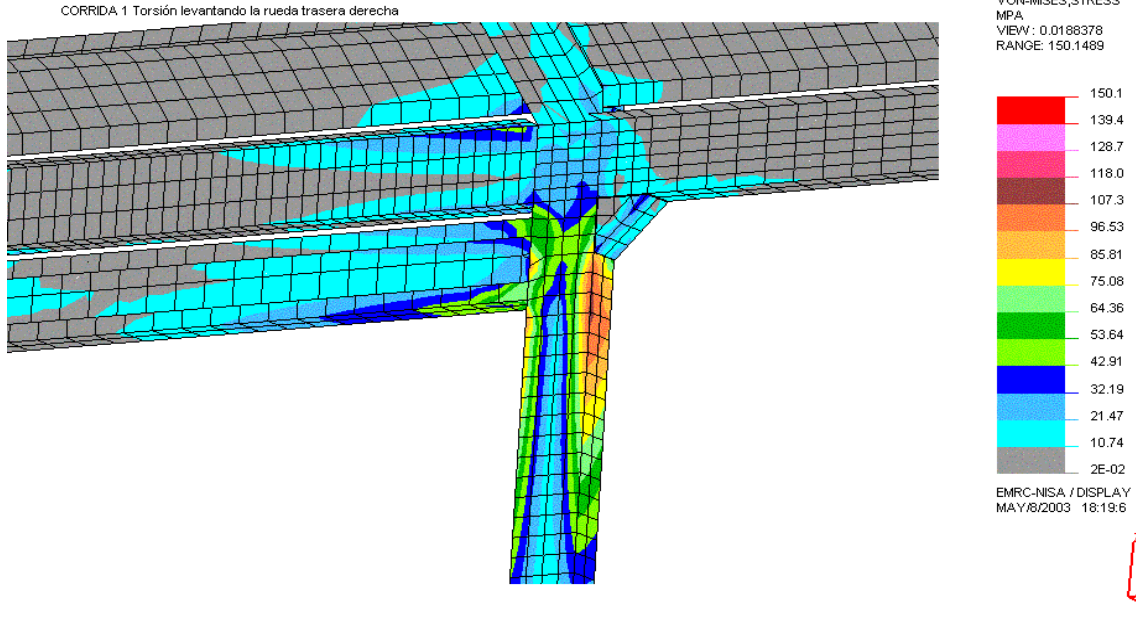


Figura A3. Poste 1 (vista interior)

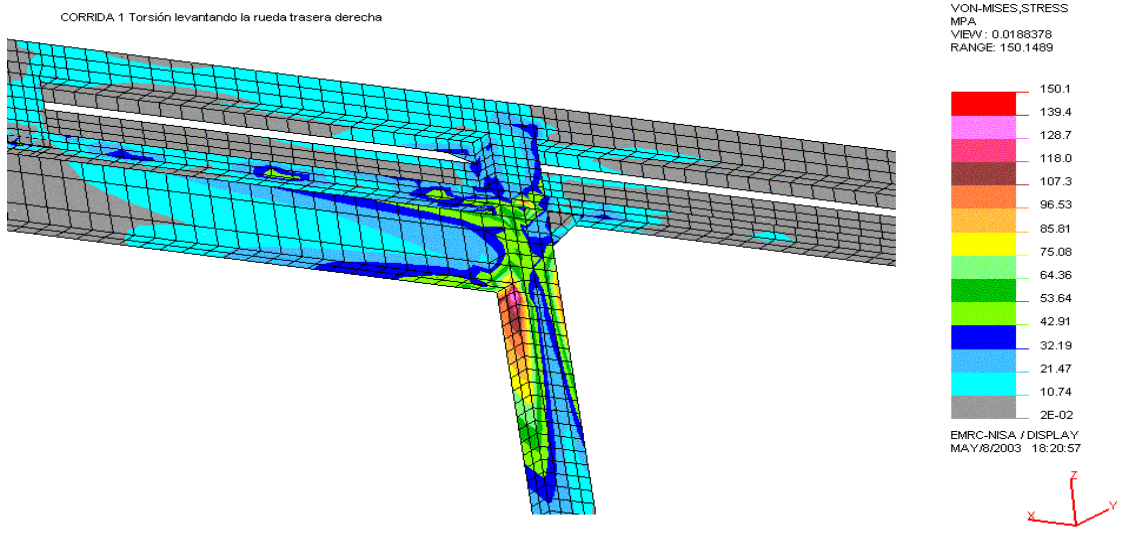


Figura A4. Poste 2 (vista exterior)

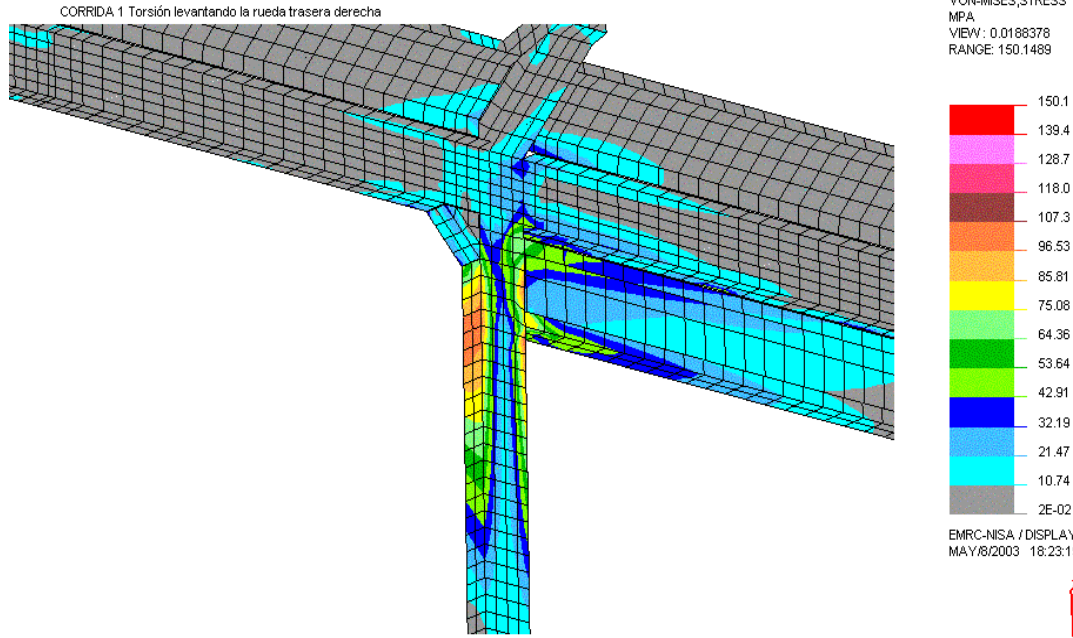


Figura A5. Poste 2 (vista interior)

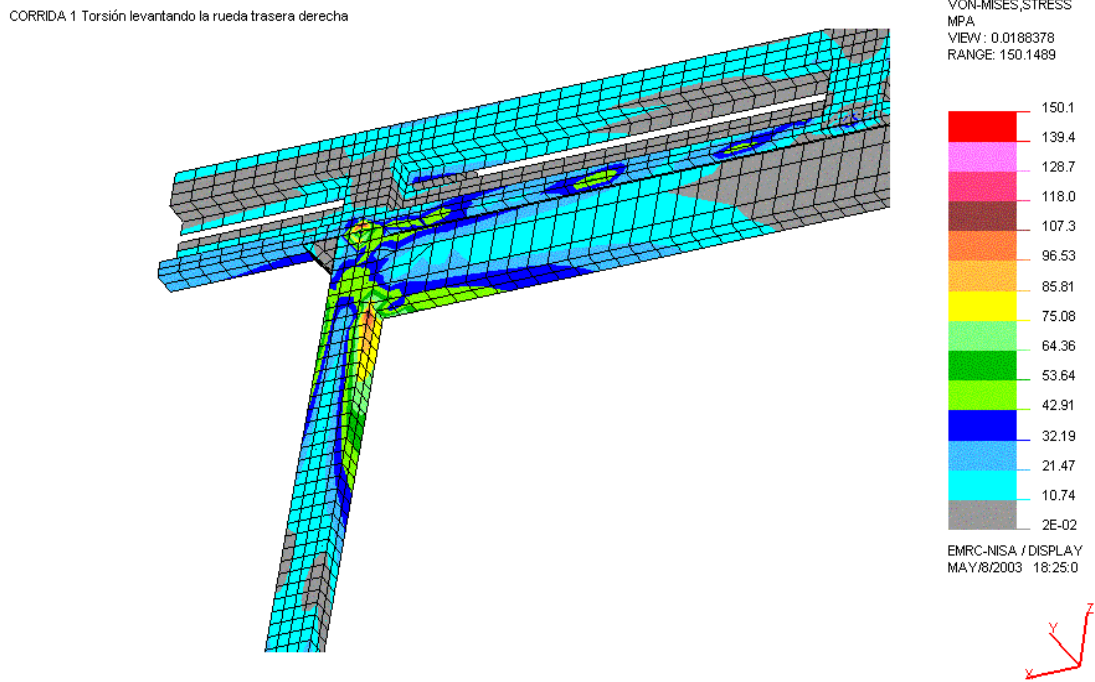
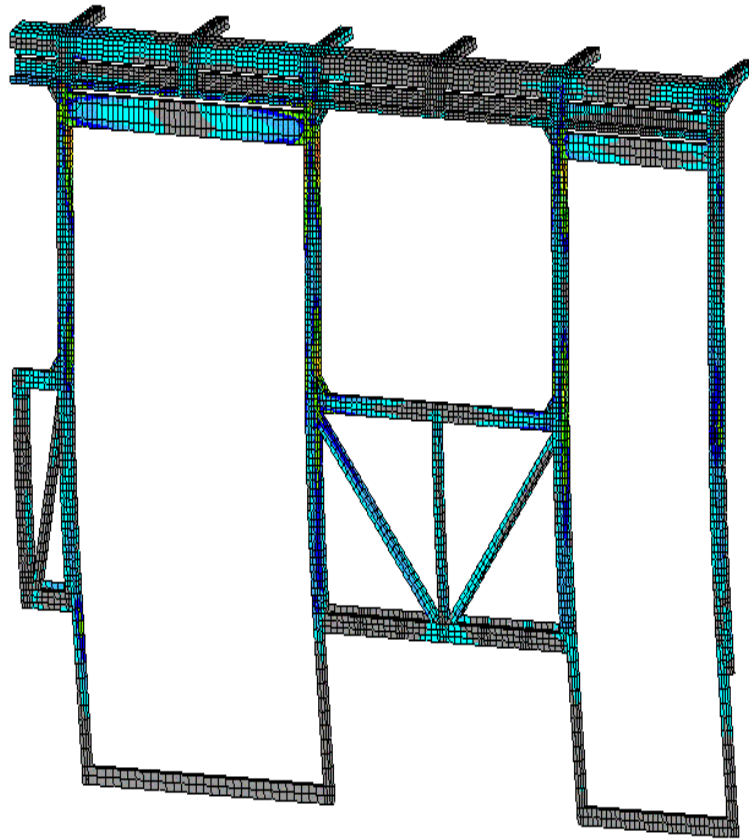
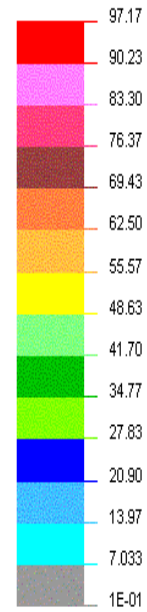


Figura A6. Poste 3 (vista exterior)

CORRIDA 2 Torsión levantando la rueda trasera derecha



VON-MISES STRESS
MPa
VIEW: 0.0990931
RANGE: 97.16842

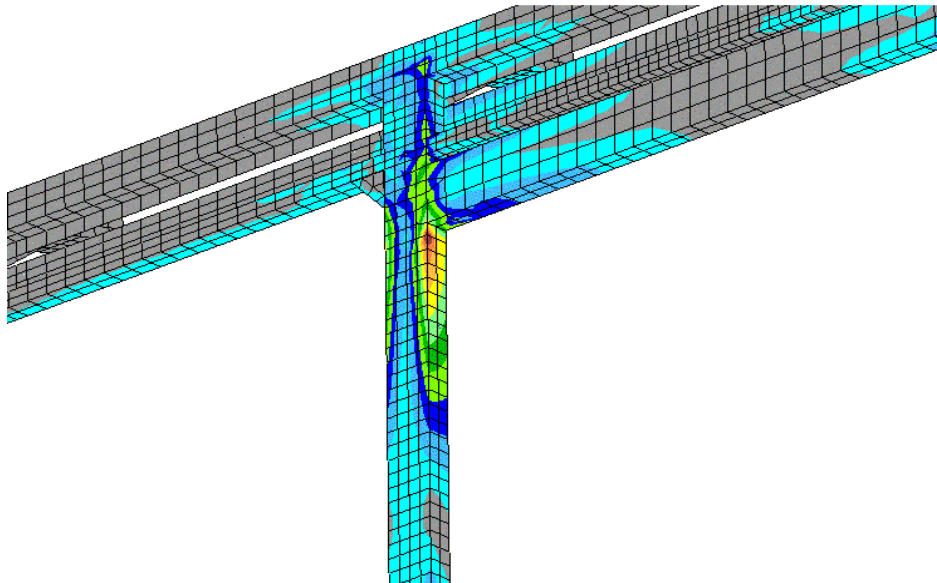


EMRC-NISA / DISPLAY
MAY/8/2003 18:55:30

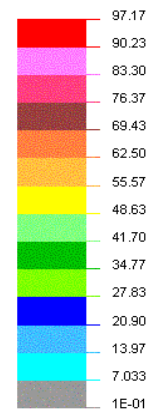


Figura A7. Marcos de puertas (Corrida 2)

CORRIDA 2 Torsión levantando la rueda trasera derecha



VON-MISES STRESS
MPa
VIEW: 0.0990931
RANGE: 97.16842



EMRC-NISA / DISPLAY
MAY/8/2003 18:57:32



Figura A8. poste 1 (vista exterior)

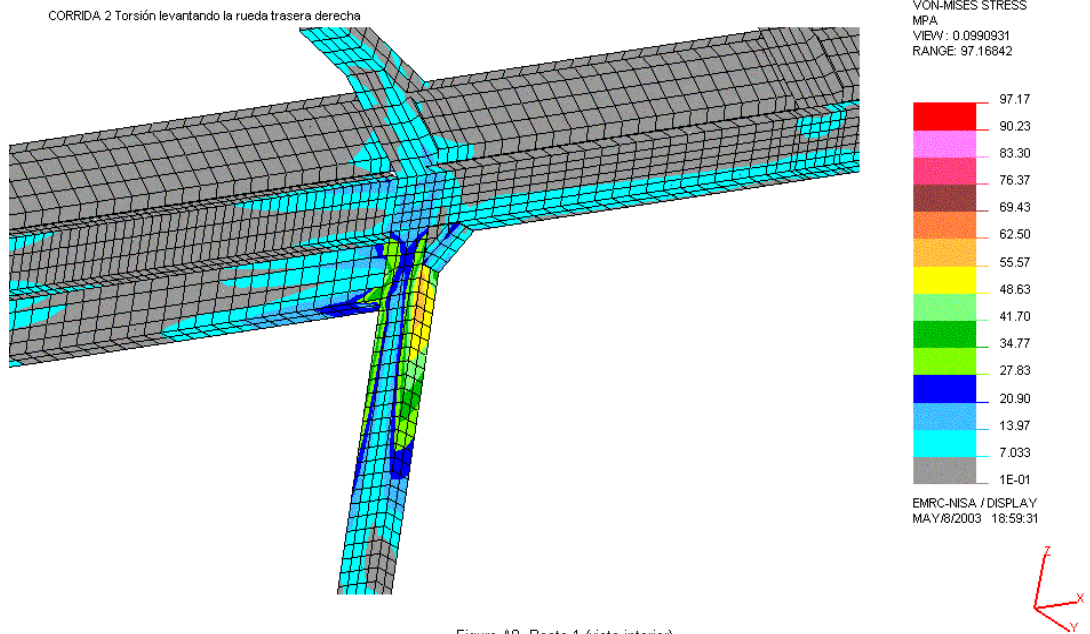


Figura A9. Poste 1 (vista interior)

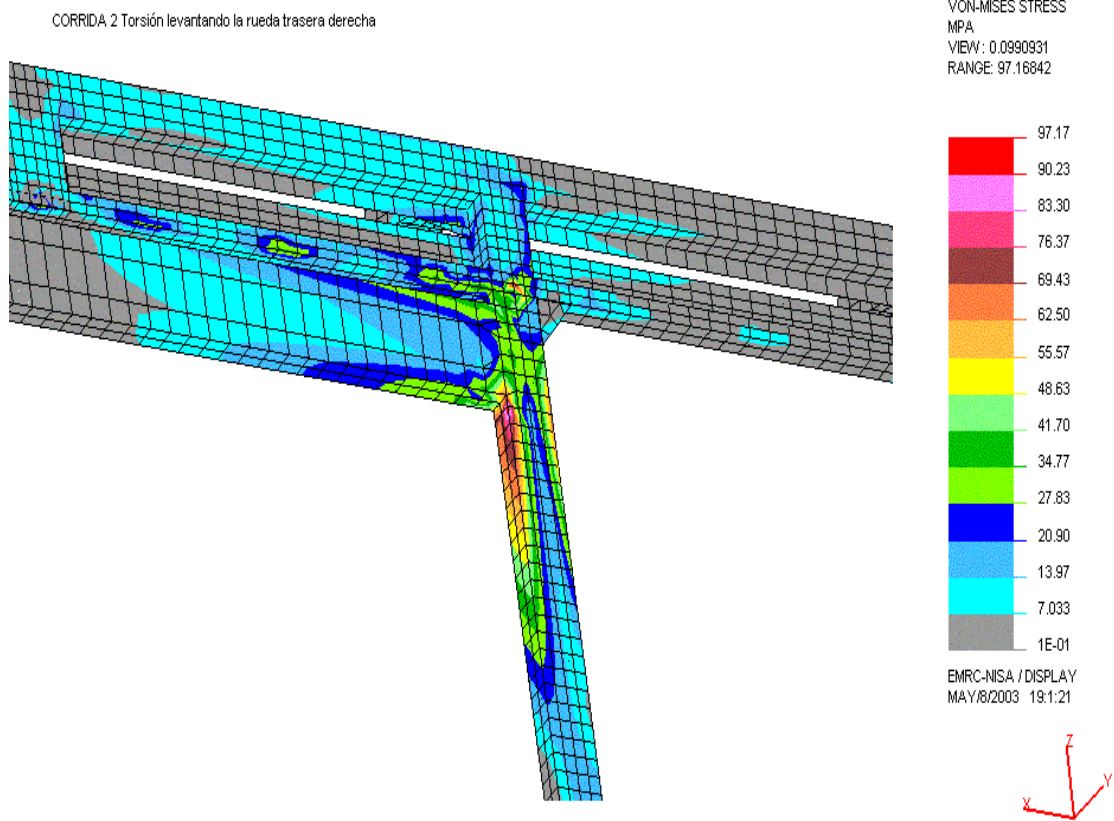


Figura A10. Poste 2 (vista exterior)

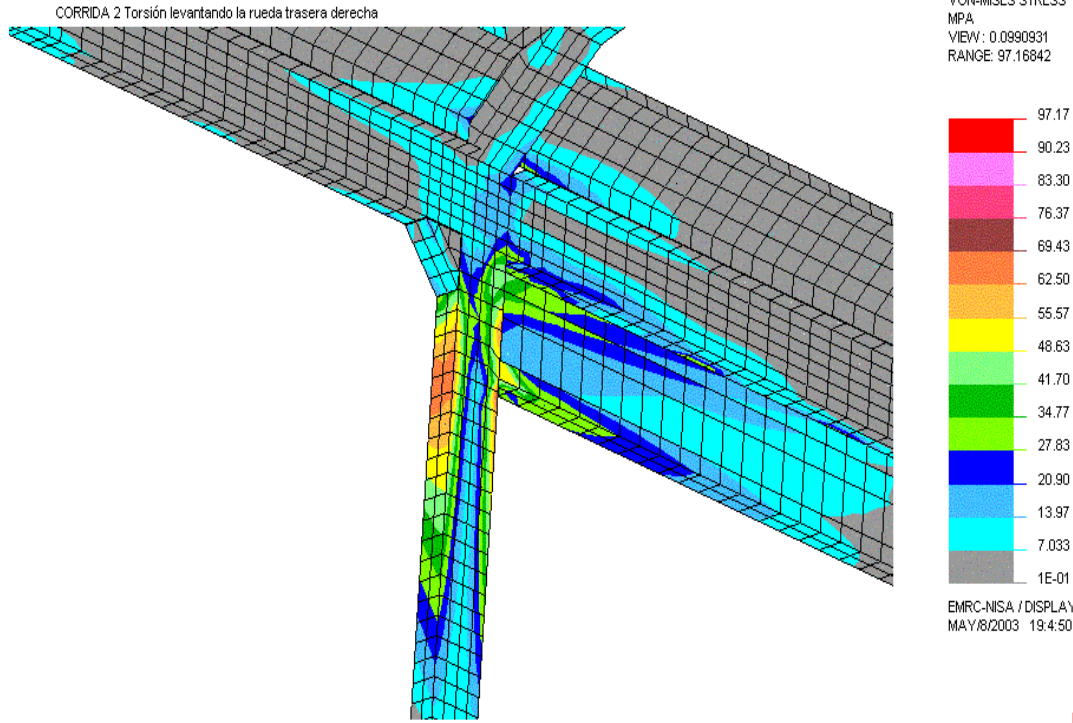


Figura A11. Poste 2 (vista interior)