

APÉNDICE 1

Ecuación básica de propagación de un pulso óptico Gaussiano

La propagación de luz en una fibra óptica, como cualquier otro fenómeno electromagnético, se encuentra regida por las ecuaciones de Maxwell, las cuales describen la relación entre el campo eléctrico y magnético. Estas ecuaciones toman la forma general [1,2]:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{A1.1})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{A1.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (\text{A1.3})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A1.4})$$

Donde el operador laplaciano ∇ se define como $\nabla = \partial/\partial x + \partial/\partial y + \partial/\partial z$. \mathbf{E} y \mathbf{H} corresponden a los campos vectoriales eléctrico y magnético respectivamente y \mathbf{D} y \mathbf{B} corresponden a las densidades de flujo eléctrico y magnético respectivamente. Para un material dieléctrico isotrópico sin cargas libres, como la fibra óptica, el vector de densidad de corriente \mathbf{J} y la densidad de carga ρ_f son iguales a 0. Las densidades de flujo se relacionan con los campos vectoriales de la siguiente manera [1]:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (\text{A1.5})$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad (\text{A1.6})$$

Donde ϵ_0 es la permitividad del vacío y μ_0 es la permeabilidad del vacío. \mathbf{P} y \mathbf{M} son las polarizaciones eléctricas y magnéticas inducidas respectivamente. Para un material no-magnético como la fibra óptica, $\mathbf{M}=0$.

De esta manera, se puede encontrar la ecuación que describe la propagación de luz dentro de una fibra óptica aplicando el rotacional a la ecuación (A1.1) y utilizando (A1.2), (A1.5) y (A1.6), se obtiene que [1]:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (\text{A1.7})$$

Donde c es la velocidad de la luz en el vacío y $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$. En general el vector de polarización eléctrica \mathbf{P} se define para medios lineales como $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$, donde χ es la susceptibilidad eléctrica del medio. Tomando en cuenta la ecuación (A1.3) y la identidad vectorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$, la ecuación (A1.7) toma la forma:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (\text{A1.8})$$

Transformando la ecuación (A1.8) a su forma fasorial por medio de la propiedad de la transformada de Fourier de derivación en el tiempo y se sustituye \mathbf{P} en función de \mathbf{E} , obtenemos que:

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{E}} - \frac{\omega^2}{c^2} (1 - \chi) \bar{\mathbf{E}} = 0 \quad (\text{A1.9})$$

Si definimos a la permitividad eléctrica del medio como $\epsilon = 1 - \chi$ y al número de onda en el vacío como $k_0 = \omega/c$, entonces la ecuación (A1.9) se convierte finalmente en [3]:

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{E}} - k_0^2 \epsilon \bar{\mathbf{E}} = 0 \quad (\text{A1.10})$$

Dicha ecuación se le conoce como ecuación de onda o ecuación de Helmholtz. Debido a que χ es dependiente de la frecuencia y en general complejo, entonces también los es ϵ . Su parte real e imaginaria se relacionan con el coeficiente de refracción $n(\omega)$ y el de absorción $\alpha(\omega)$ de la siguiente manera [1]:

$$\epsilon = (n + i\alpha c / 2\omega)^2 \quad (\text{A1.11})$$

Debido a que el coeficiente de absorción para fibras ópticas de sílice es demasiado pequeño, la parte imaginaria de la ecuación (A1.11) es demasiado pequeña a comparación de la parte real. Por lo que dicha ecuación se puede aproximar a $\epsilon(\omega) = n^2(\omega)$ [1]. De esta manera, tomando en cuenta que $\beta = k_0 n(\omega)$ es la constante de propagación en el medio la cual se obtiene del análisis de la distribución modal en la fibra, entonces la ecuación (A1.10) se puede reescribir como:

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{E}} + \beta^2 \bar{\mathbf{E}} = 0 \quad (\text{A1.12})$$

La ecuación (3.1) del capítulo 3 es una solución particular de la ecuación (A1.12), la cual se obtiene de resolver dicha ecuación para una onda plana con polarización lineal a lo largo del eje x , misma que se obtiene en el Apéndice 2. Con el fin de aprovechar la simetría de la fibra óptica, la ecuación de onda (A1.12) puede ser expresada en coordenadas polares de la siguiente manera [1,3]:

$$\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{E}}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{E}}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{E}}}{\partial z^2} + n^2 k_0^2 \bar{\mathbf{E}} = 0 \quad (\text{A1.13})$$

Un procedimiento matemático estándar utilizado para resolver este tipo de ecuaciones es el de utilizar el método de separación de variables, el cual asume una solución del tipo [2]:

$$\bar{\mathbf{E}}(\rho, \phi, z, \omega) = \bar{B}(0, \omega) F(\rho) F(\phi) F(z) \quad (\text{A1.14})$$

Donde $F(\rho)$ es la distribución modal del campo con respecto de ρ , $F(\phi)=0$ debido a que el campo modal fundamental no presenta variaciones con respecto a ϕ , $F(z)$ presenta una solución del tipo $F(z)=\exp(j\beta z)$ para una onda periódica propagándose en la dirección z y $B(0, \omega)$ es la amplitud espectral inicial del pulso óptico. De esta manera, la ecuación (A1.14) puede ser reescrita como [1]:

$$\bar{\mathbf{E}}(\rho, \omega) = \bar{B}(0, \omega) F(\rho) \exp(j\beta z) \hat{x} \quad (\text{A1.15})$$

Donde \hat{x} representa un vector de polarización unitario a lo largo del eje x para una onda con polarización lineal. Dicha aproximación es válida ya que el modo fundamental se encuentra aproximadamente linealmente polarizado [3].

Como se puede observar de la ecuación (A1.15), la amplitud del pulso óptico es dependiente de la frecuencia, por lo que sus diferentes componentes espectrales se propagarán dentro de la fibra de acuerdo a:

$$\bar{B}(z, \omega) = \bar{B}(0, \omega) \exp(j\beta z) \quad (\text{A1.16})$$

Dicha amplitud puede ser expresada en el dominio del tiempo obteniendo su transformada de Fourier inversa, resultando:

$$B(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{B}(z, \omega) \exp(-j\omega t) d\omega \quad (\text{A1.17})$$

De esta manera, expandiendo $\beta(\omega)$ en una serie de Taylor alrededor de la frecuencia central ω_0 (ecuación 3.2), sustituyendo (A1.16) en (A1.17) y añadiendo una *amplitud de variación lenta* (SVEA) con respecto a la portadora ω_0 como la envolvente del pulso, la ecuación (A1.17) toma la forma [1]:

$$B(z, t) = A(z, t) \exp[j(\beta_0 z - \omega_0 t)] \quad (\text{A1.18})$$

Donde la amplitud de variación lenta $A(z, t)$ se encuentra dada por [3]:

$$A(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{B}(0, \omega) \exp \left[j\beta_1 z \Delta\omega + \frac{j}{2} \beta_2 z (\Delta\omega)^2 + \frac{j}{6} \beta_3 z (\Delta\omega)^3 - j(\Delta\omega)t \right] d(\Delta\omega) \quad (\text{A2.7})$$

Donde $B(0, \omega) \equiv A(0, \omega)$, última que es la transformada de Fourier de $A(0, t)$. Si se calcula $\partial A/\partial z$ y se sustituye $\Delta\omega$ por $j\partial A/\partial t$, la ecuación (A2.7) puede ser finalmente escrita como [1]:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{j\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} = 0 \quad (\text{A2.8})$$

Dicha ecuación describe la propagación de un pulso óptico en una fibra, tomando en cuenta que esta se comporta como un medio lineal.

En general, sistemas de comunicaciones ópticos utilizan pulsos de característica Gaussiana. Dichos pulsos presentan un campo inicial del tipo [1]:

$$A(0,t) = A_o \exp \left[-\frac{1+jC}{2} \left(\frac{t'}{T_0} \right)^{2m} \right] \quad (\text{A2.9})$$

Donde A_o es la amplitud pico inicial del pulso, C es el parámetro de chirp, T_0 se define de acuerdo a (3.5), m especifica el grado de la distribución y t' se define como $t'=t-\beta_1 z$. Si se aplica la transformada de Fourier a la ecuación (A2.9) y se considera $m=1$ correspondiente a una distribución Gaussiana ordinaria, se obtiene:

$$\bar{A}(0,\omega) = A_o \left(\frac{2\pi T_0^2}{1+jC} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{\omega^2 T_0^2}{2(1+jC)} \right] \quad (\text{A2.10})$$

De esta manera, al sustituir (A2.10) en (A2.7) se cuenta con la ecuación básica que describe el comportamiento temporal de un pulso óptico Gaussiano dentro de una fibra óptica.

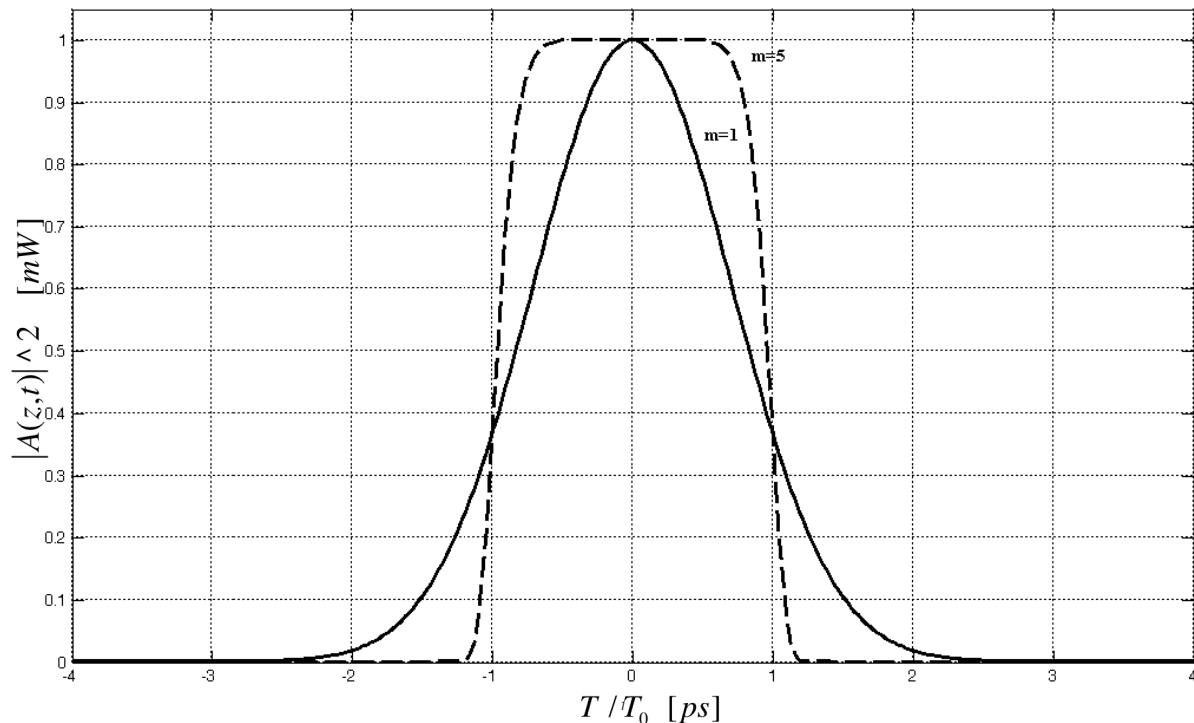


Figura A1.1. Distribuciones Gaussiana y super-Gaussiana de un pulso óptico con anchura $T_0=1$ [ps] y potencia picode 1 [mW].

Referencias

- [1] Gouvind P. Agrawal, *Fiber-Optic Communication Systems*, Ed. Wiley-Interscience, Third Edition.
- [2] Gerd Keiser, *Optical Fiber Communications*, Ed. McGraw-Hill, Second Edition.
- [3] Govind P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, U.S.A., Third Edition.

APÉNDICE 2

Efecto Kerr

En el apéndice 1, se definió al vector de polarización eléctrica inducida como $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ donde χ es la susceptibilidad eléctrica del medio, sin embargo, en medios no lineales χ deja de ser una constante y se comporta como un tensor. Debido a esto, el vector \mathbf{P} puede ser expresado como [1]:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \left(\chi^{(1)} \mathbf{E} + \chi^{(2)} \mathbf{E}^2 + \chi^{(3)} \mathbf{E}^3 + \dots \right) \quad (\text{A2.1})$$

Donde $\chi^{(1)}$ es la susceptibilidad lineal y representa la mayor contribución a \mathbf{P} , $\chi^{(2)}$ es la susceptibilidad de segundo orden y es la responsable de los efectos no-lineales como generación de segundos armónicos y generación de suma de frecuencias. Sin embargo, dicha susceptibilidad no se presenta en fibras ópticas de sílice debido a la naturaleza simétrica de la molécula de SiO_2 . Por último, la susceptibilidad de tercer orden es la responsable de la aparición de efectos no lineales como four wave mixing y refracción no lineal. De esta manera, la ecuación (A2.1) puede ser reescrita como [1]:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \left(\chi^{(1)} \mathbf{E} + \chi^{(3)} \mathbf{E}^3 \right) \quad (\text{A2.2})$$

Donde se puede observar que el vector de polarización \mathbf{P} esta compuesto de una parte lineal y otra no lineal de la siguiente manera:

$$\mathbf{P}_L = \epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E} \quad (\text{A2.3})$$

$$\mathbf{P}_{NL} = \epsilon_0 \chi^{(3)} \mathbf{E}^3 \quad (\text{A2.4})$$

Con el fin de encontrar la expresión que describe al efecto Kerr, se debe resolver la ecuación de onda (A1.13) considerando una onda plana polarizada linealmente a lo largo del eje x , donde el campo \mathbf{E} no presenta variaciones en las direcciones y y z . Dicha solución es de la siguiente forma [2]:

$$E_x = \frac{1}{2} \left(E^+ e^{j(\omega t - \beta z)} + c.c. \right) \quad (\text{A2.5})$$

Si se utiliza la aproximación de envolvente lentamente variable, es útil separar la parte de variación rápida del campo eléctrico escribiéndolo de la forma [1]:

$$E_x = \frac{1}{2} (E(r,t)e^{-j\omega t} + c.c.) \quad (\text{A2.6})$$

Donde $E(r,t)$ es la componente de variación lenta respecto a la portadora ω_0 . De esta manera, si se sustituye la ecuación (A2.6) en (A2.4) se podrá observar que existe un termino oscilando en ω_0 y otro en $3\omega_0$. Este último termino puede ser despreciado considerando que se encuentra muy alejado de la frecuencia central ω_0 del pulso [1]. De esta manera, se puede encontrar que:

$$\mathbf{P}_{xNL} = \epsilon_0 \epsilon_{NL} E_x \quad (\text{A2.7})$$

Donde

$$\epsilon_{NL} = \frac{3}{4} \chi^{(3)} |E|^2 \quad (\text{A2.8})$$

En el apéndice 1, la ecuación (A1.10) se encontró al definir la constante dieléctrica como $\epsilon = 1 - \chi^{(1)}$ tomando unicamente la parte lineal del vector \mathbf{P} , sin embargo, tomando en cuenta la parte no-lineal, el vector \mathbf{P} puede ser encontrado mediante la suma de las ecuaciones (A2.3) y (A2.7). De esta manera, si se resuelve nuevamente la ecuación (A1.8), se podrá encontrar que la constante dieléctrica para medios no lineales se encuentra dada por [1]:

$$\epsilon = 1 + \chi^{(1)} + \epsilon_{NL} \quad (\text{A2.8})$$

De forma similar a la ecuación (A1.11), la ecuación (A2.8) puede ser utilizada para definir el coeficiente de refracción $n(\omega)$, dado por:

$$n = n_0 + \eta_2 |E|^2 \quad (\text{A2.9})$$

donde

$$\eta_2 = \frac{3}{8n_0} \text{Re}\{\chi^{(3)}\} \quad (\text{A2.10})$$

es el coeficiente de refracción no lineal. La expresión (A2.9) describe la dependencia del índice de refracción con la intensidad de campo eléctrico aplicado, misma que describe el efecto Kerr.

Referencias

- [1] Govind P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, U.S.A., Third Edition.
- [2] Gouvind P. Agrawal, *Fiber-Optic Communication Systems*, Ed. Wiley-Interscience, Third Edition.

APÉNDICE 3

Características de fibras G.652, G.653 y G.655 de acuerdo a la UIT-T

El cuadro A3.1 resume las principales características de las fibras G.652, G.653 y G.655 de acuerdo a la UIT-T.

Cuadro A3.1. características de las fibras G.652, G.653 y G.655 de acuerdo a la UIT-T.

Atributo	Dato	G.652	G.653	G.655
		Valor	Valor	Valor
Diámetro de campo modal	Gama de valores nominales	8,6-9,5 μm	7,8-8,5 μm	8-11 μm
Coefficiente de dispersión cromática	Valor comunmente empleado	17 ps/nm*km	0 ps/nm*km	5 ps/nm*km
Pendiente de dispersión	$S_{0\text{máx}}$	0,093 ps/(nm ² ·km)	0,085 ps/(nm ² ·km)	0.045 ps/(nm ² ·km)
Coefficiente de atenuación	Máximo a 1550 nm	0,35 dB/km	0,35 dB/km	0.35 dB/km
Coefficiente de PMD	PMDQ máximo	0,5 ps/ $\sqrt{\text{km}}$	0,5 ps/ $\sqrt{\text{km}}$	0.20 ps/ $\sqrt{\text{km}}$

APÉNDICE 4

Patrón de Ojo

Para el análisis del comportamiento de los enlaces de transmisión, frecuentemente se utilizan diversas técnicas y mediciones de desempeño, como por ejemplo: la medición del Bit Error Rate, BER o la relación señal a ruido óptica de éste (OSNR). Sin embargo, en determinadas circunstancias y frente a distintos problemas que se presentan en la comunicación, muchas de ellas no son apropiadas para determinar el origen del problema o visualizarlos. En este sentido se hace imprescindible el análisis de las formas de onda de los pulsos que se propagan en el enlace de comunicaciones, para lograr observar sus formas, desfases (jitter), niveles de ruido, potencia de las señales, etc. El análisis de todas éstas características reunidas en un diagrama o patrón dan origen a lo que se conoce como Patrón de Ojo.

El Diagrama de Ojo se construye mediante la superposición de todas las posibles secuencias de bits existentes. Por ejemplo, si tuviéramos una secuencia de 3 bits tendríamos en total 2^3 posibles combinaciones, las cuales al superponerse formarían el diagrama de ojo.

La Figura A4.1 muestra los diferentes parámetros que pueden ser medidos mediante el análisis de las distintas características de la forma de onda del pulso, como son el rise-time, fall-time, overshoot, undershoot y el jitter, que están referidas a cuatro propiedades fundamentales del ojo: el nivel cero, nivel uno, cruce de amplitud y cruce en el tiempo.

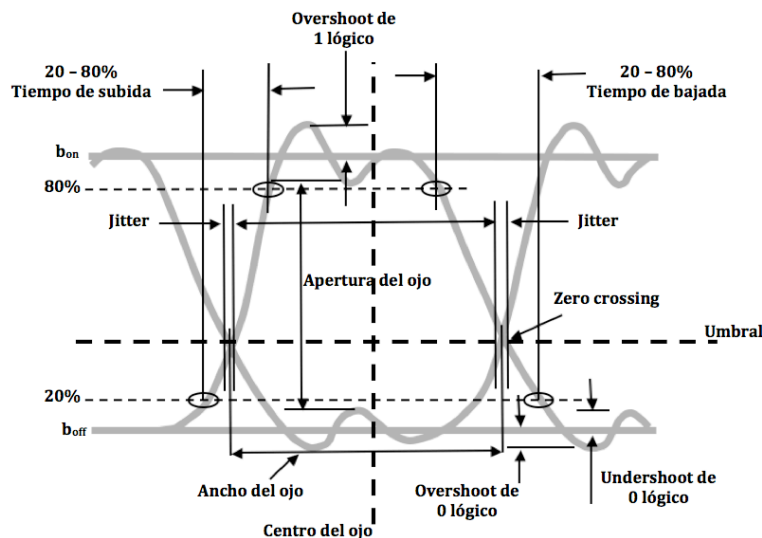


Figura A4.1. Parámetros del Diagrama de Ojo