Capítulo 3

SISTEMAS DE COMUNICACIONES

Un *sistema de comunicaciones* es un conjunto de dispositivos que son utilizados con la finalidad de transmitir, emitir y recibir señales de todo tipo, como voz, datos, audio, video, etc., además dichas señales pueden ser del tipo digital o analógica.

Un sistema de comunicaciones puede describirse fácilmente mediante tres elementos básicos; un transmisor, el cual se encarga de generar la señal que se desea y acoplarla de tal forma que pueda viajar a través del canal, mediante procedimientos como modulación, filtrado, codificación, etc.; un medio de transmisión, el cual será el canal mediante el cual la señal va a viajar, y puede ser desde fibras ópticas, cables coaxiales, hasta el mismo aire; y finalmente un receptor, que realiza el procedimiento inverso del transmisor con la finalidad de reconstruir la señal y que esta sea lo mas parecida a la original.

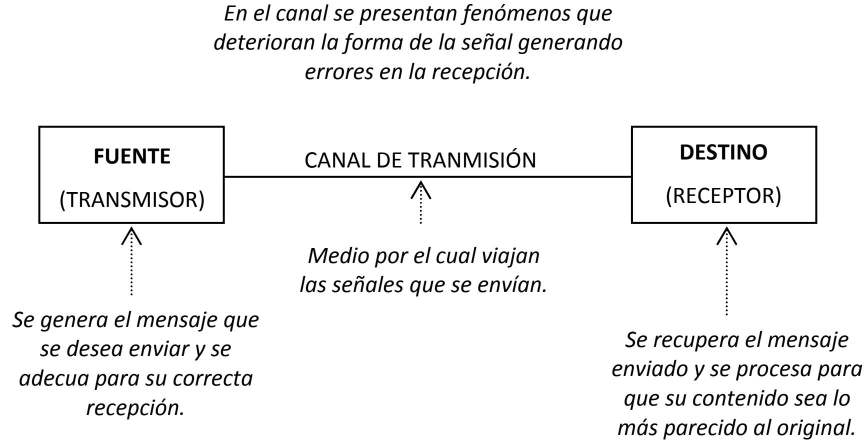

FIG. 3.1 SISTEMA DE COMUNICACIONES

Debido a que la presente tesis está enfocada a uno de los procedimientos que se llevan a cabo en el transmisor, el paso de una señal analógica a digital mediante cuantización y codificación, a continuación se trataran la teoría básica de codificación.

3.1 MEDIDAS DE INFORMACIÓN

Primeramente nos concierne saber ¿qué es información? De forma general se puede definir a la información de la siguiente manera:

'La información se define como el conjunto organizado de datos procesados, el cual crea un mensaje sobre un determinado fenómeno. Los datos se perciben, se integran y generan la información necesaria para producir el conocimiento que es el que finalmente permite tomar. La información también indica mediante códigos y conjuntos de datos, los modelos del pensamiento humano. La información por lo tanto, procesa y genera el conocimiento humano'[1].

Por lo tanto, deben existir métodos que permitan medir la 'cantidad de información' a lo largo de una transmisión. Para realizar estos procedimientos se utilizan los conceptos de entropía e información mutua. Empezaremos por describir el concepto de entropía.

3.1.1 ENTROPÍA

El concepto de entropía fue utilizado al inicio como una medida de información en un canal de transmisión común. El concepto de entropía o también llamado 'variabilidad' se da únicamente dentro de experimentos, por que siempre que se haga referencia a entropía se hace referencia al mismo tiempo a un experimento.

Para definirla, tomemos en cuenta que se tiene un experimento $\boldsymbol{E}$ y tres campos (S, F, P), donde $\boldsymbol{S}$ representa el espacio muestra, $\boldsymbol{F}$ representa el campo de eventos y $\boldsymbol{P}$ representa la asignación de probabilidades de $\boldsymbol{F}$. Estos parámetros ayudarán a medir la entropía.

[1] La importancia del concepto 'información' comenzó a tornarse importante en probabilidad cuando se desarrollo la rama matemática conocida como Teoría de la Información, la cual fue iniciada Claude E. Shannon a través de un artículo publicado en el Bell System Technical Journal en 1948, titulado 'Una teoría matemática de la comunicación'.

De una forma general (sobre todo para ciencias como la Termodinámica), la entropía puede definirse como:

'*Entropía: Medida de la distribución aleatoria de un sistema'*[2].

La ecuación que define a la entropía es la siguiente:

$$H(E) = \sum_i P_i \log\left(\frac{1}{P_i}\right) \tag{3.1}$$

En esta ecuación se utiliza la letra ***H*** para representar a la entropía. Una de las ventajas de utilizar los logaritmos en la definición radica en que al trabajar en experimentos combinados se tendrá que la entropía total es igual a la suma de las entropías individuales.

Además, generalmente se utiliza la base logarítmica 10, la base *e* y base 2. Para cada una de estas, la unidad de medida tiene nombres diferentes:

Base 10 – *hartley*

Base e – *nat* (de unidades naturales)

Base 2 – *bit* (de unidades binarias)

Además se puede pasar cómodamente de una unidad a otra mediante:

$$log_2(x) = \frac{log_e(x)}{log_e(2)} = \frac{log_{10}(x)}{log_{10}(2)} \tag{3.2}$$

- *Propiedades de la entropía*

A continuación se presentan las principales propiedades de la entropía:

1. *H(E)* es una función continua de p_i.
2. *H(E)* es máxima para resultados igualmente probables. Si se tienes *N* elementos en el espacio muestra con $p_1 = \ldots = p_N = 1/N$, ningún otro conjunto de probabilidades proporciona una gran entropía.
3. Si $p_1 = p_2 = \ldots = p_N$, entonces *H(E)* es una función creciente de *N*.
4. $H(E_1,E_2) \leq H(E_1) + H(E_2)$ con igualdad si y solo si E_1 y E_2 son independientes.

[2] *La palabra entropía procede del griego y significa evolución o transformación y dicho concepto se relaciona ampliamente con el nivel de incertidumbre que existe en cualquier experimento o señal aleatoria. También puede ser considerado como la cantidad de ruido o desorden en el sistema.*

La *propiedad 1* quiere decir que un pequeño cambio en la probabilidad de alguna de las salidas no provocará un gran cambio en la entropía del experimento. Si se comidera un experimento ***E*** con dos posible salidas con probabilidades *p* y *1-p*, la entropía esta dada por:

$$H(E) = -plogp - (1-p)\log(1-p) \tag{3.3}$$

A continuación se muestra la gráfica que representa este experimento, en donde se puede observar las propiedades uno y dos, ya que se ve que dicha curva es continua en ***p***, y el máximo ocurre cuando las dos salidas son igualmente probables, es decir, cuando *p=1-p*.

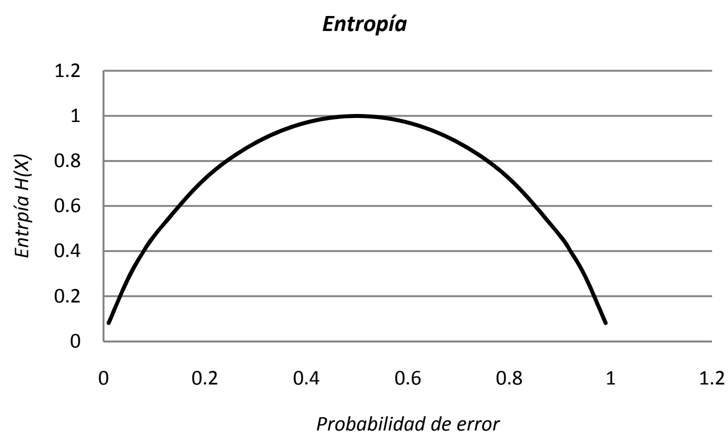

FIG. 3.2 GRÁFICA CORRESPONDIENTE A LA ENTROPÍA H(X)

En cuanto a la *propiedad 3*, debido a la definición de entropía, en donde se describió como una medida de variabilidad, y un incremento en las salidas igualmente probables hace que la entropía aumente.

Estas propiedades son muy importantes ya que pueden ser útiles para un gran número de aplicaciones. Uno muy importante es el método de la entropía máxima (MEM). Este método maximiza la entropía en un experimento sujeto a cualquier limitación. La única limitación es que la suma de las probabilidades es 1.

El problema de este método radica que escoger las probabilidades desconocidas para poder maximizar la entropía y poder satisfacer las limitaciones. Por otro lado se encuentra el inconveniente de encontrar las limitaciones que guían a obtener las probabilidades.

3.1.1 INFORMACIÓN MUTUA

La información mutua de dos experimentos E_i es una cantidad que mide la dependencia mutua de estos dos experimentos.[3]

Sin embargo, para poder definir este concepto de forma numérica primero se debe hacer referencia al concepto de 'entropía restante' la cual se conoce después de observar otro evento, es decir, la entropía restante de E_1 después de ver E_2. Esta debe relacionarse con la probabilidad condicional $P(U_i|M_i)$ de la misma forma que la entropía inicial está relacionada con $P(U_i)$. Además tenemos que $H(E_1)$ es igual al $\log[1/P(U_i)]$. Por lo que la media del $\log[1/ P(U_i|M_i)]$. Por lo que la entropía restante es la siguiente:

$$H(E_1|E_2) = -\sum_{i,j} P(U_i, M_j) \log P(U_i|M_j) \tag{3.4}$$

Esta es la entropía restante de E_1 después de observar a E_2, y esto es llamado entropía condicional de E_1 dado E_2. El cambio en la entropía es la ganancia de la información y es escribe como $I(E_1,E_2)$. Esta escritura tiene el siguiente significado:

$$I(E_1, E_2) = H(E_1) - H(E_1|E_2) \tag{3.5}$$

Cabe mencionar que se cumple la igualdad: $I(E_1,E_2)= I(E_2,E_1)$, *o*

$$I(E_1, E_2) = H(E_2) - H(E_2|E_1) \tag{3.6}$$

Este término se conoce como 'información mutua' por que es simétrica. El concepto de información mutua y la entropía restante son útiles al momento de diseñar sistemas.

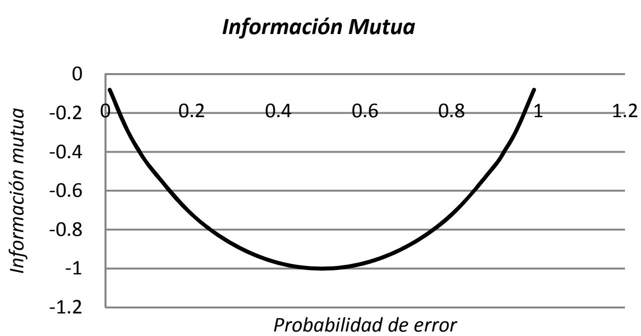

FIG. 3.3 INFORMACIÓN MUTUA $I(E_1;E_2)$

---

[3] *La información mutua es una medida de gran importancia, dentro de la teoría de la información. Define la información aportada por una variable aleatoria sobre otra.*

3.2 CONSIDERACIONES Y ESQUEMAS DE ANÁLISIS

Como se mencionó al inicio del capítulo, un sistema de comunicaciones esta formado por una fuente, que genera los datos que se desean transmitir; un destino que se encarga de recibir los datos de la fuente y reconstruirlos para que sean lo más fieles a los originales; y un canal, que es el medio por donde viajan los datos.

A continuación se presenta un diagrama de bloques explicando la ubicación de cada uno de estos componentes:

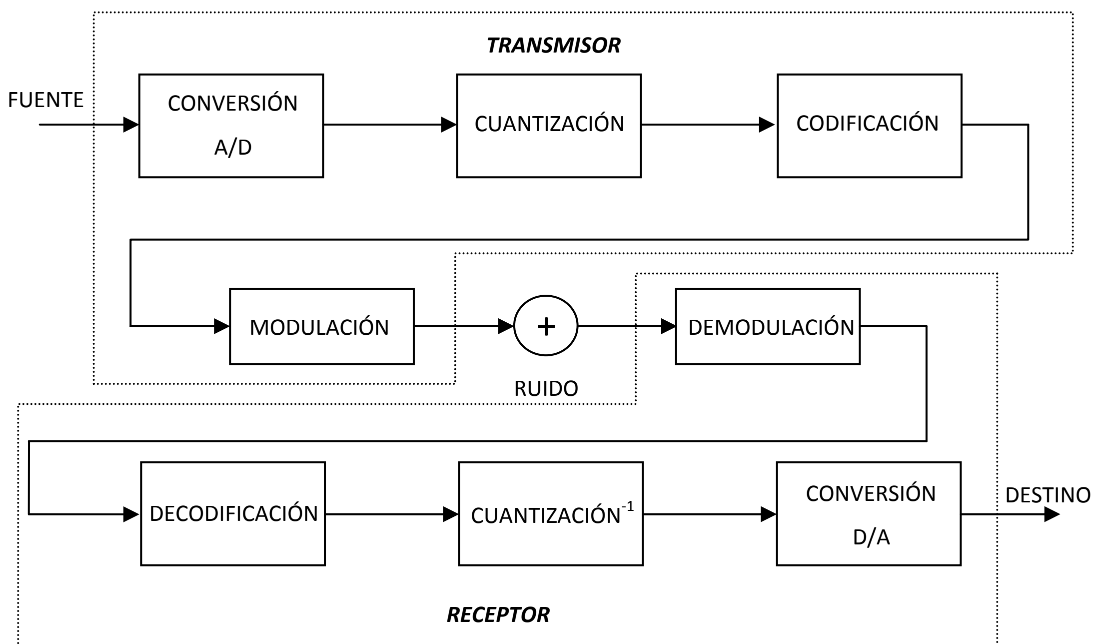

FIG. 3.4 DIAGRAMA DE BLOQUES DE UN SISTEMA DE COMUNICACIONES

Sin embargo, al momento de realizar la transmisión entre la fuente y el destino, se pueden presentar varios problemas en el canal como son:

- *Atenuación:* Es la reducción de nivel o potencia de una señal cuando pasa a través del canal Esta se mide en decibeles, y por lo general depende de la frecuencia a que se este trabajando en el sistema.
- *Ruido:* Se considera ruido a todas las perturbaciones eléctricas que interfieren sobre las señales transmitidas o procesadas.

- *Distorsión:* Es la diferencia entre señal que entra a un equipo o sistema y la señal de salida del mismo. Por tanto, puede definirse como la "deformación" que sufre una señal tras su paso por un sistema.
- *Interferencia:* La interferencia es cualquier proceso que altera, modifica o destruye una señal durante su trayecto en el canal existente entre el emisor y el receptor.
- *Diafonía:* Es una forma de interferencia causada por las señales en las cercanías de conductores.

Además, existe gran variedad de canales, cada uno con diferentes características las cuales se explicarán a continuación.

Antes de comenzar a hablar de canales se deben de describir los diferentes tipos de canales que se pueden estudiar. La definición de canal nos dice que *un canal es el medio mediante el cual las señales viajan entre el transmisor y el receptor. Es decir, es el medio mediante el cual la información viaja desde un punto A hasta un punto B*[4].

La velocidad de transferencia de un canal R_S se denota por:

$$R_S = \frac{k}{n} \qquad \frac{información\ del\ bit}{símbolos\ del\ canal} \tag{3.7}$$

El mensaje a ser transmitido es un proceso estacionario ***X*** y el proceso ***Y*** es la salida. La salida ***Y*** depende únicamente de la entrada ***X*** pero también de la naturaleza del canal. Para definir la naturaleza del canal se puede hacer la siguiente clasificación:

1. El canal es *sin memoria*, si el valor de Y depende únicamente del valor presente de X.
2. La entrada X presenta ruido blanco que se expande en todas las frecuencias.
3. El canal es *binario (BSC)*, si las entradas y salidas X, Y solo pueden tomar el valor de 0 y 1.

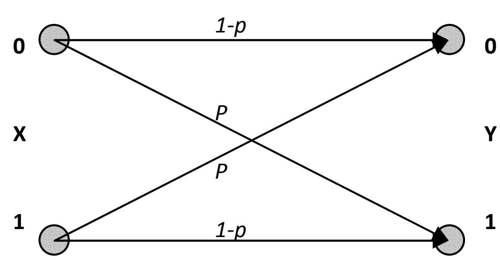

FIG. 3.5 CANAL BINARIO SIMÉTRICO

[4] *Un canal de comunicaciones es el medio físico utilizado para transportar información entre dos extremos. Este medio físico puede ser cableado, inalámbrico (es decir, por medio del espectro radioeléctrico), o una combinación de ambos.*

En la transmisión de un vector de longitud ***n*** la probabilidad condicional de la salida Y conociendo X es:

$$p(Y|X) = p^d(1-p)^{n-d} \tag{3.8}$$

donde $d = d_H(X,Y)$ es la distancia de *Hamming* entre el canal de entrada y salida.

Canal sin ruido:

El canal es sin ruido si existe una correspondencia *uno-a-uno* entre las entradas X_n y salidas Y_n, para un canal binario esto significa que $x_n=0$, entonces $y_n=0$.

Canal con ruido:

Un canal con ruido es un sistema variable que establece una relación estática entre las entradas X_n y las salidas Y_n.

Para un canal sin memoria, esta relación se da por medio de matrices cuyos elementos π_{ij} son las probabilidades condicionales entre los estados de entradas y salidas. Por ejemplo, para un canal binario:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_{00} & \pi_{01} \\ \pi_{10} & \pi_{11} \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \pi_{00} + \pi_{01} = 1 \text{ y } \pi_{10} + \pi_{11} = 1 \tag{3.9}$$

Se dice que el canal es simétrico si $\pi_{10} = \pi_{01} = \beta$, y $\pi_{00} = \pi_{11} = 1 - \beta$ por lo que en un canal simétrico:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1-\beta & \beta \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

3.3 CAPACIDAD DEL CANAL

La capacidad del canal se mide en unidades de bit por símbolo, y se define como la información mutua máxima $I(X,Y)$ obtenida al variar la probabilidad de las entradas.

Esta información debe ser lo más fiable posible, es decir, que su probabilidad de error sea la mínima para su correcta recuperación. Existen dos definiciones más particulares, cada una de las cuales está enfocada a canales discretos y continuos. A continuación se presentan ambas definiciones:

Capacidad del Canal en canales discretos: Un canal es discreto *sin memoria* si cumple con las siguientes especificaciones:

- El conjunto X=$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ en la entrada puede ser transmitido por el canal,
- El conjunto Y=$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ pueden ser recibidos en la salida del canal,
- Las probabilidades de ambos conjuntos están dados por las probabilidades condiciones del canal (p_{ij}) donde $p_{ij} = p(y_i|x_i)$.

Se define la entropía de entrada, entropía de salida y entropía de entrada condicionada por la salida como,

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) log \frac{1}{p(x_i)}; \qquad H(Y) = \sum_{j=1}^{m} p(y_i) log \frac{1}{p(y_i)} \qquad \begin{matrix}(3.11)\\(3.12)\end{matrix}$$

$$H\big((X)\big|Y\big) = \sum_{j=1}^{m} p(y_i) \sum_{i=1}^{m} p(x_i, y_i) log \frac{1}{p(x_i|y_i)} \tag{3.13}$$

Por lo que la información mutua estaría dada por:

$$I(E_1, E_2) = H(E_2) - H(E_2|E_1) \tag{3.14}$$

y la capacidad del canal es:

$$C = max_{p(x_i)} I(X, Y) \tag{3.15}$$

Capacidad del Canal en canales continuos: La capacidad de un canal continuo esta sumamente relacionado al teorema del muestreo, por lo que está definido de la siguiente forma:

$$C = Blog(1 + SNR) \tag{3.16}$$

donde ***B*** representa el ancho de banda, y SNR es la relación señal a ruido.

Este concepto es aplicable a todos los tipos de canales que se mencionaron con anterioridad, por ejemplo, la *capacidad del canal* para un *canal binario simétrico* esta dada por:

$$C = 1 - H_2(p) \tag{3.17}$$

donde H_2 es la función de entropía binaria.

Teorema

La información puede ser enviada a través de una canal con ruido a una tasa cercana a la capacidad del canal C con una pequeña probabilidad de error.

$$H(X) = I(X,Y) + H(X|Y) \geq I(X,Y) \tag{3.18}$$

Lo cual demuestra que es posible encontrar una fuente con entropía muy cercana a C, por lo tanto:[5]

$$H(X) < C \tag{3.19}$$

3.4 CODIFICACIÓN DE FUENTE

Supongamos que se tiene una fuente que genera un mensaje que debe ser transmitido de forma digital, sin embargo, el mensaje es analógico. Para poder realizar una transmisión de forma exitosa primero se debe llevar a cabo el proceso de muestreo, cuantización y codificación.

A continuación nos enfocaremos en el proceso de codificación abarcando diferentes clases de códigos que ayudan a obtener la menos cantidad posible de errores en el receptor. Para comenzar, ¿qué es un código?, ¿qué es la codificación?

Un código es la forma de encapsular cierta información para que pueda ser transmitido con cierta seguridad. La codificación es el método que permite convertir un carácter de un lenguaje natural en un símbolo de otro sistema de representación, como un número o una secuencia de pulsos eléctricos en un sistema electrónico, aplicando normas o reglas de codificación[6]*.*

[5] *Este teorema permite conocer el valor de la información mutua aún si solo se conocen los valores de entropía de las variables por separado o en su forma conjunta.*

[6] *Existen una gran cantidad de algoritmos para encontrar el código adecuado en cada caso, sin embargo por lo general se busca que este sea óptimo.*

Existen diferentes tipos de códigos dependiendo el uso y aplicaciones que se requiera, además de que para su elección deben tomarse en cuenta consideraciones como la longitud de los códigos, su funcionalidad y seguridad.

Generalmente se buscan códigos óptimos para minimizar la probabilidad de error. Pero, ¿qué es un código óptimo?

Un código óptimo es aquel código que permite codificar todas las palabras del mensaje con la menor longitud media, es decir, este tipo de códigos permite utilizar la menos cantidad de palabras de código y así disminuir la probabilidad de error en el receptor[7].

Para esto se hace uso de la distancia mínima de Hamming entre cualesquiera dos palabras de código en el canal y se denota mediante d_{min}. El numero de errores de bits que el canal es capaz de corregir ***t*** es expresado mediante la siguiente expresión:

$$d_{min} \geq 2t + 1 \tag{3.20}$$

3.4.1 CONCEPTOS DE SHANNON

A continuación se presenta uno de los códigos más conocidos. En el código se Shannon, las probabilidades p_i son números decimales, entonces la longitud del código $l_i = -logp_i$ es óptima.

A partir de esto es posible crear códigos para diversa clase de casos.

Cada p_i especifica un número entero n_i

$$\frac{1}{2^{n_i}} \leq p_i < \frac{1}{2^{n_i} - 1} \tag{3.21}$$

donde $p_i > 1/2^{n_i}$ para al menos una pi. Con n_m el mayor de los enteros n_i, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^{n_i}} \leq 1 - \frac{1}{2^{n_m}} \tag{3.22}$$

[7] *La importancia de crear un código óptimo es que con el, al disminuir su longitud de palabra y darle mayor importancia a las palabras con mayor probabilidad de ocurrencia, se logra que la velocidad de transmisión en el sistema aumente y por lo tanto su eficacia.*

Por que el lado izquierdo es un entero binario más pequeño que 1. Si después n_m es cambiado por $n_m\text{-}1$, el resultado de la suma del valor no excederá 1. Por lo que la simplificación es la siguiente:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^{n_i}} = 1 \qquad l_i \leq n_i \tag{3.23}$$

Por lo que con este conjunto de enteros es posible crear el código denotando que L^a es la longitud media. Entonces tenemos

$$L^a = \sum_{i=1}^{N} p_i l_i \leq \sum_{i=1}^{N} p_i n_i \tag{3.24}$$

Por lo que el código de Shannon debe cumplir con la siguiente condición:

$$H(X) \leq L^a \leq H(X) + 1 \tag{3.25}$$

Teorema

Una forma sencilla de encontrar el código de Shannon es mediante el siguiente método:

- Se ordenan los valores x_i de mayor a menor probabilidad.
- Se divide el resultado en dos grupos, procurando que la probabilidad de cada grupo esté lo más próxima posible.
- Un grupo se codificará como cero ("0") y el otro como uno ("1").
- Seguidamente se repite el proceso en cada grupo, de forma recursiva, mientras cada grupo tenga más de un dato x_i.

Ejemplo: Si se desea obtener el código de Shannon para el siguiente conjunto de probabilidades 0.4, 0.2, 0.2, 0.1, 0.07, 0.03, se tiene que:

0.4	0	0		
0.2	0	1		
0.2	1	0		
0.1	1	1	0	
0.07	1	1	1	0
0.03	1	1	1	1

TABLA 3.1 CÓDIGO DE SHANNON

El código Shannon para esta fuente sería: 00, 01, 10, 110, 1110, 1111.

***Código de Huffman**:* Este código es un código óptimo ya que es el código de menor longitud media.

La construcción de este código se fundamenta en asignar a cada símbolo del alfabeto fuente una secuencia de bits cuya longitud esté relacionada de forma directa con la probabilidad de aparición de ese símbolo. De esta forma, a los símbolos con mayor frecuencia de aparición se les asignarán las palabras de código de menor longitud. En el proceso de construcción de este código es:

- Ordenar el conjunto de símbolos del alfabeto fuente en orden decreciente de probabilidades de aparición.
- A continuación se juntan los dos símbolos con menor probabilidad de aparición en un único símbolo cuya probabilidad será la suma de las probabilidades de los símbolos que dieron origen a este nuevo símbolo.
- Se repite este proceso hasta que sólo tengamos dos símbolos.
- A continuación se realiza el proceso de codificación. Primeramente asignamos un 1 a uno de los dos símbolos que tenemos y un 0 al otro.
- Posteriormente recorreremos la estructura que hemos construido hacia atrás de forma que cuando dos símbolos hayan dado origen a un nuevo símbolo, estos dos símbolos "heredarán" la codificación asignada a este nuevo símbolo y a continuación se le añadirá un 1 a la codificación de uno de los símbolos y un 0 a la del otro símbolo.

3.4.2 MEDIDAS DE DISTORSIÓN

Sin embargo, después de realizar la codificación de las palabras del alfabeto que se desean transmitir, nos topamos con un problema llamado ‘distorsión’. Literalmente, la definición de distorsión es la siguiente:

Distorsión es la diferencia entre señal que entra a un equipo o sistema y la señal de salida del mismo. Por tanto, puede definirse como la "deformación" que sufre una señal tras su paso por un sistema. La distorsión puede ser lineal o no lineal[8].

[8] *La distorsión es un factor que tiene gran relevancia en las comunicaciones en general, ya que no importa que los sistemas cuenten con medidas de corrección muy efectivas, estas variaciones afectarán a la señal en cualquiera de los puntos del sistema de comunicaciones, desde la propia señal original y en cada uno de los bloques que conforman al transmisor, al receptor y al sistema de comunicaciones.*

Además, en teoría de la información la distorsión debe ser medida para saber que tanto se aleja la palabra transmitida de la original y tenerlo en cuenta al momento de recuperar la información.

Hay dos clases de medidas de distorsión: medidas subjetivas y medidas objetivas de distorsión. Las primeras están basadas generalmente en percepciones humanas analizando las señales mediante métodos de observación, mientras que las segundas permiten obtener información más detallada que da la pauta para comparar el comportamiento de diferentes señales y sistemas.

La distorsión *D* puede calcularse de la misma forma que en la codificación de fuente, tomando en consideración que la distorsión temporal se crea entre el canal y la fuente:

$$D = \frac{1}{m} E(d(U,V)) \tag{3.26}$$

donde *U* y *V* representan los vectores de la fuente y la salida respectivamente, y el término *d(U,V)* la medida de distancia entre ambos vectores. Y *m* representa el número de bits que componen el vector fuente (longitud del vector fuente).

- *Distancia de Hamming:* Usando la distancia de Hamming se tiene

$$\delta = \frac{1}{m} E[d_H(U,V)] \tag{3.27}$$

donde δ es la medida de la probabilidad de error del bit, que representa la media del numero de errores entre el vector de entrada y salida, normalizada por la longitud del vector.

- *Distancia de Euclidean:* Usando la distancia de Euclidean se tiene

$$D = \frac{1}{m} E[d_E(U,V)] \tag{3.28}$$

donde $d_E = \|U - V\|^2$. Esta medida es llamada error medio cuadrático.

3.5 FUNCIONALIDAD TEÓRICA ÓPTIMA

La funcionalidad teórica óptima, o por sus siglas en inglés OPTA (*Optimal Performance Theoretically Attainable*), hace referencia a la tasa de transferencia como una función de la menor probabilidad de error, cuando se hace una transmisión con una fuente y un canal dados. De acuerdo a la teoría de Shannon, la curva OPTA denotada por *R(D)* está dada por:

$$R(D) = \frac{R_S(D)}{C} \qquad \frac{símbolo\ del\ canal}{símbolo\ de\ la\ fuente} \tag{3.29}$$

donde *R(D)* representa la función de tasa de distorsión entre la fuente y el canal, y $R_S(D)$ es la función de distorsión de la fuente y *C* es la capacidad del canal.