

Capítulo 2

PROCESOS ALEATORIOS

Los '*procesos aleatorios*' son importantes porque en casi todos los aspectos de la vida se presentan este tipo de situaciones en donde el comportamiento de un fenómeno o evento no puede ser predicho, por tal motivo, solo puede especularse acerca de los posibles efectos que tendrá. A continuación se describirán las principales características de estos procesos.

Además, la importancia de la probabilidad dentro de los procesos aleatorios radica en que estos son una extensión de la probabilidad misma.

La mayoría de los procesos son dependientes al tiempo, por tal motivo, una señal aleatoria es una función del tiempo, y debido a esto, aquellas funciones que presentan esta dependencia son llamados '*procesos aleatorios*'.

En el presente capítulo se hablará de los principales conceptos que describen el comportamiento de los procesos aleatorios, así como sus principales características.

2.1 AXIOMAS DE PROBABILIDAD

Los axiomas dentro de la teoría de probabilidad tienen gran importancia, debido a que con estas leyes, puede explicarse toda la teoría de probabilidad. Por tal motivo es importante inicial este capítulo enunciándolos, ya que serán utilizados a lo largo del presente tema.

Para poder entender los axiomas, se debe tener en cuenta la siguiente situación: si se tienen los conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n se dice que para que estos sean disjuntos o exclusivos se debe cumplir que:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \quad (2.1)$$

Los axiomas de probabilidad se enumeran a continuación:

- *Axioma 1 (No negatividad)*: La probabilidad de cualquier evento A siempre se encontrará contenida entre 0 y 1, por lo que no existen las probabilidades negativas:

$$0 \leq P\{A\} \leq 1 \quad (2.2)$$

- *Axioma 2 (Unidad)*: La probabilidad total de un evento tiene una probabilidad unitaria:

$$P\{S\} = 1 \quad (2.3)$$

- *Axioma 3 (Adición finita)*: Si se cumple que A_1, A_2, \dots, A_n son eventos disjuntos o que no presentan intersección alguna, entonces

$$P\{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n\} \triangleq P\left\{\bigcup_{i=1}^n A_i\right\} = \sum_{i=1}^n P\{A_i\} \quad (2.4)$$

- *Axioma 3' (Adición contable)*: Si se cumple que A_1, A_2, \dots son eventos disjuntos, entonces

$$P\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{A_i\} \quad (2.5)$$

2.2 VARIABLE ALEATORIA

El concepto de variable aleatoria puede definirse de diferentes maneras, es decir, se dice que una variable aleatoria es una *descripción numérica* de los resultados de un experimento, cuyo valor es incierto hasta el momento antes de realizar el experimento. Es una *función* de los elementos de cierto espacio, representado de forma general por una letra mayúscula, (dicho espacio está formado por un conjunto de muestras, descrito por letras minúsculas).

Además, una variable aleatoria es una función que *asigna un número a cada resultado* $s \in \mathcal{S}$ del experimento. Dicha función *mapea* todos los elementos del espacio de muestreo en puntos de la recta numérica. Donde \mathcal{S} está formado por todos los posibles valores de la variable aleatoria X .

$$S = \{x: x = 0,1,2, \dots \dots \dots, n\} \quad (2.6)$$

2.2.1 DEFINICIÓN

De acuerdo a la teoría de probabilidad, si una variable dependiente $u=f(v)$, donde f representa una cierta función de la variable independiente v , donde a cada valor de v corresponde uno de la variable u , por lo tanto $f()$ se obtiene asignando valores de v .

Una variable aleatoria es una variable dependiente como una función de una variable independiente, es decir, corresponde a las salidas que se producen al realizar un experimento. Por lo que es una descripción numérica de dichas salidas.

Mas específicamente, para cada salida w de una experimento aleatorio, se le asigna un único valor $X(w)$. La función $X()$ está definida como una *función aleatoria*. El valor $x=X(w')$ para una salida w' se denomina realización o el valor que la variable aleatoria X toma. A continuación se presenta una definición más general del concepto de variable aleatoria:

Una variable aleatoria X es una función con dominio S (el mismo espacio) y el co-dominio \mathbf{R} (conjunto de los números reales), escrito $X : S \rightarrow \mathbf{R}$. Además se deben cumplir dos propiedades:

- $P\{X = \infty\} = 0, P\{X = -\infty\} = 0$
- El conjunto $\{X \leq \alpha\}$ es un evento para cada número real α .¹

Además, para que cualquier función \mathcal{S} sea considerada como una variable aleatoria, debe cumplir con ciertas condiciones:

1. Dicha función no debe estar multivalorada, es decir, a cada punto en \mathcal{S} deberá corresponder un solo valor de $X(s)$.

¹ Las variables aleatorias se consideran función ya que asocian un número definido a cada punto muestra. Además, éstas permiten definir la probabilidad como una función numérica en lugar de conjuntos, logrando con esto, muestrear a la variable con una expresión específica.

2. El conjunto $\{X \leq x\}$ debe ser un evento para todo número real x . Tal conjunto corresponde a aquellos elementos del espacio \mathcal{S} para los cuales la variable aleatoria $X(s)$ no excede el valor de x .
3. $P\{X \leq x\}$ denota la suma de las probabilidades de los eventos individuales correspondientes a $\{X \leq x\}$.

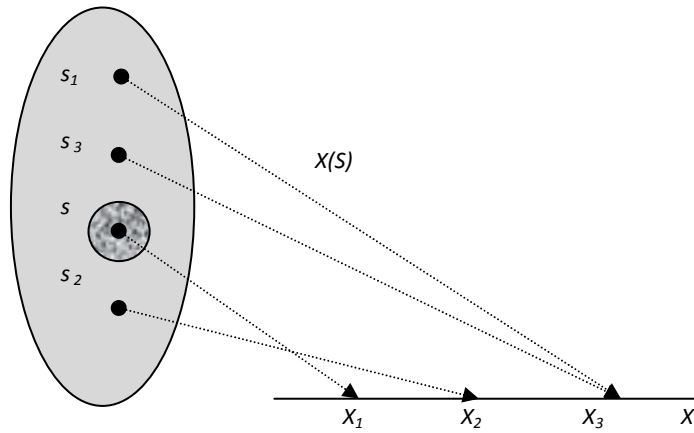


FIG. 2.1 MUESTREO DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Existen diferentes tipos de variables aleatorias, dependiendo de su rango. Esta clasificación es la siguiente:

- Variables aleatorias *discretas*: Es aquella en donde se toman solo valores discretos.
- Variables aleatorias *continuas*: Es la que posee un rango continuo de valores.
- Variable aleatoria *mixta*: Este tipo de variable puede combinar un rango discreto con uno continuo.

A continuación se presentan algunos ejemplos de este tipo de variables:

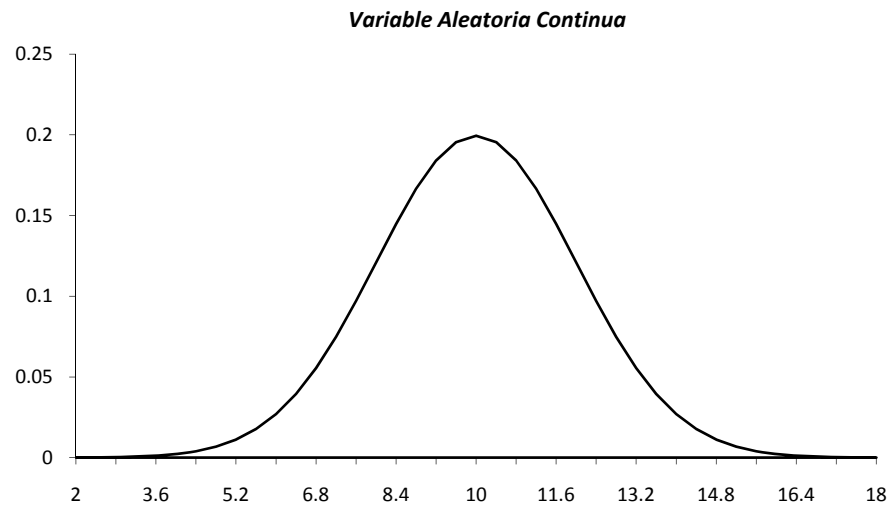


FIG. 2.2 VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

En general suelen utilizarse las letras X , Y o Z para denotar a una variable aleatoria, mientras que la forma para denotar los elementos del rango de cada una de estas se realiza con letras minúsculas (x , y , z).

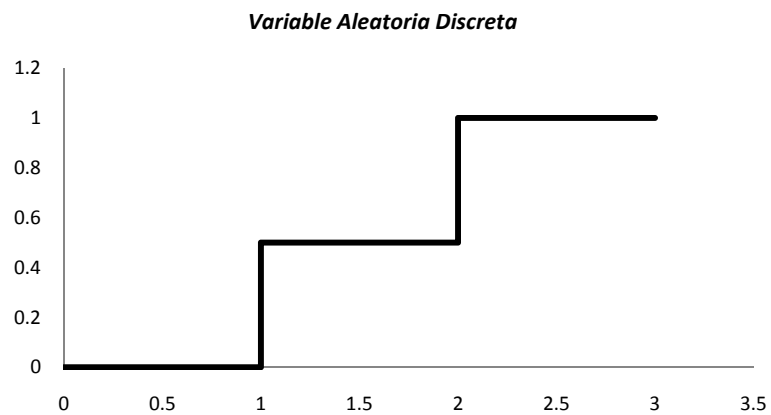


FIG. 2.3 VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

2.2.2 FUNCIONES DE DENSIDAD Y DE DISTRIBUCIÓN

FUNCIÓN ACUMULATIVA DE DISTRIBUCIÓN (por sus siglas en inglés CDF)

Si $\{X \leq x\}$ es un evento que corresponde a un conjunto de salida w_i para cada $X(w_i) \leq x$. Entonces la función de distribución de una variable aleatoria se define como:

$$F(x) = F_X(x) = P\{X \leq x\} \quad \text{con } -\infty \leq x \leq \infty \quad (2.7)$$

Por lo tanto $F_X(x)$ es la probabilidad que la variable aleatoria X toma en un valor no mayor a x . Esto se puede ver a continuación:

- Una variable aleatoria discreta puede tener una forma de tipo escalera cuya función de distribución será discreta.
- Una variable aleatoria continua tendrá una función de distribución completamente continua.

El símbolo $\{X \leq x\}$ representa “el valor de la variable aleatoria X es menos o igual a x ”, y x es un número cualquiera.

El dominio de F_X es el rango de la variable aleatoria X . La variable aleatoria es un mapeo del espacio de muestras S del rango de R_X . La función F_X es un mapeo de R_X del rango de F_X . La función F_X es una probabilidad, por lo que su dominio debe ser un conjunto de eventos.

En otras palabras, la función de distribución es una función convencional de valor real. Si todos los valores de esta función pueden ser contados se tiene una función discreta, pero si no, es una continua.

Esta función de distribución es una función que distribuye todos los valores posibles de la variable X . Para describir por completo la variable aleatoria no es suficiente con especificar el posible conjunto de valores que puede tomar, ya que también es necesario describir la probabilidad de cada uno de los valores. Por lo tanto es de suma importancia tener el valor correspondiente de probabilidad que la variable puede tomar en un intervalo arbitrario $(a, b]$.

Una variable aleatoria compleja $z = x + jy$ no tiene función de distribución por que la desigualdad $x + jy \leq x + jy$ no tiene sentido. Por lo que las propiedades estadísticas de una variable Z se definen mediante una función de distribución conjunta.

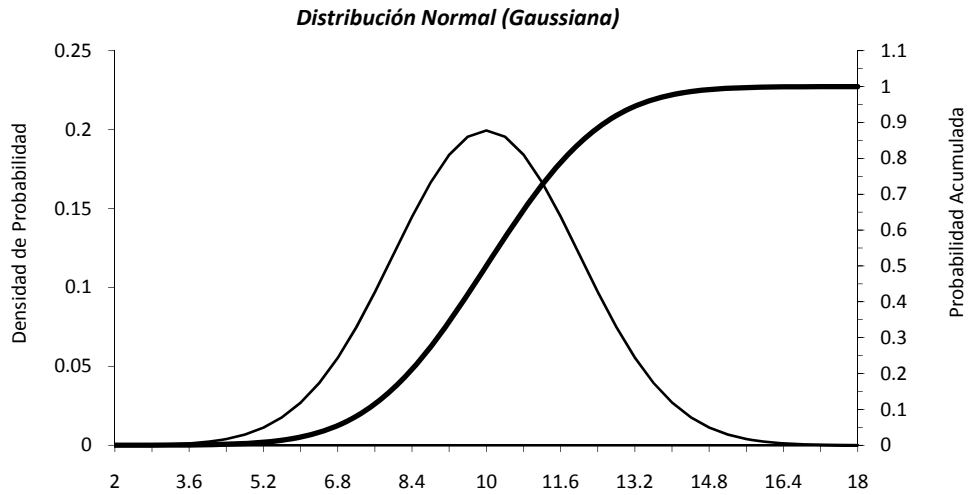


FIG. 2.4 FUNCIÓN ACUMULATIVA DE PROBABILIDAD, CDF

➤ *Propiedades de la Función Acumulativa de Distribución:*

Las siguientes propiedades pueden utilizar para saber si la función de distribución corresponde a una variable aleatoria.

1. $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x$, desde $F(x)$ es probabilidad.
2. $F(-\infty) = P\{X \leq -\infty\} = P\{X = -\infty\} = 0$
3. $F(\infty) = P\{X \leq \infty\} = 1$, ya que desde $\{X \leq \infty\}$, se tiene un evento seguro.
4. $F(x)$ es no decreciente y x creciente:

$$F(x_2) \leq F(x_1) \quad \forall x_1 < x_2 \quad (2.8)$$

5. $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

Un caso especial puede darse cuando:

$$P\{X > x\} = P\{x < X \leq \infty\} = F(\infty) - F(x) = 1 - F(x) \quad (2.9)$$

6. La función de distribución siempre es definida por la derecha:

$$F(x^+) \triangleq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(x + \varepsilon) = F(x) \quad (2.10)$$

FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD (por sus siglas en inglés PDF)

El siguiente concepto que se tratará es la función de densidad, en donde el término densidad hace referencia a la suma o integración de dicha función, esto dentro de matemáticas o ingenierías, mientras que en aplicaciones como la mecánica, se integra con la finalidad de encontrar la masa de vigas.

En el procesamiento de señales, ayuda a conocer cual es la potencia de las señales. A continuación se presenta la definición:

La función de densidad para una variable aleatoria X continua esta dada por

$$f(x) = f_X(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{2.11}$$

Esta función es de densidad por que indica en que valores la variable aleatoria está más o menos concentrada.

Si la variable aleatoria X es discreta, los valores x_i con probabilidades p_i estarán dados por:

$$f(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i) \quad p_i = P\{X = x_i\} \tag{2.12}$$

donde $\delta(x - x_i)$ es un impulso.

En general, la función de densidad es más conveniente que la de distribución para describir a una variable aleatoria, ya que estas indican la concentración de la masa. Sin embargo, a pesar de que cada variable aleatoria cuenta con una función de distribución, no es así con las de densidad, ya que no están bien definidas en toda región debido a la derivada que contiene, lo cual provocará que en ciertos puntos no exista valor alguno, por ejemplo, en esquinas, o curvas no suaves.

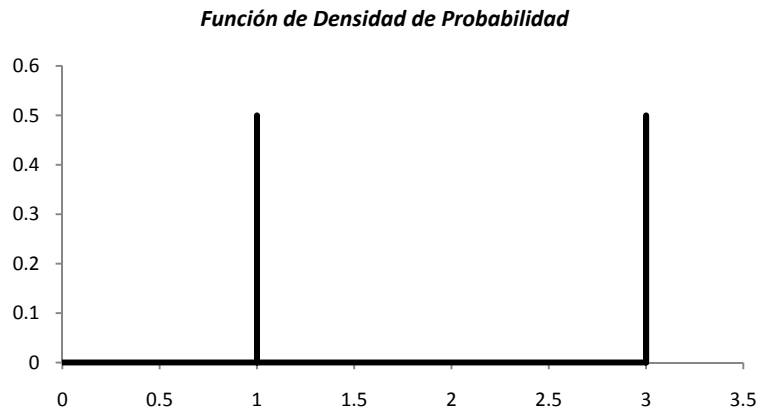


FIG. 2.5 FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD, PDF

➤ *Propiedades de la Función de Densidad:*

1. No negatividad: $f(x) \geq 0, \forall x$ desde $F(x)$ es no decreciente) $\left(\frac{dF(x)}{dx}\right) \geq 0, \forall x$.
2. Relación con la función de Distribución: Integrando la función de densidad sobre el campo $(-\infty, x]$ de la función de distribución;

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(v)dv = \text{área bajo } f(x) \text{ en el intervalo } (-\infty, x] \quad (2.13)$$

3. Propiedad de normalización:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(\infty) = 1 \quad (2.14)$$

4. El área bajo $f(x)$ en el intervalo $(x_1, x_2]$ es igual a $P\{x_1 < X \leq x_2\}$:

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \quad (2.15)$$

El tipo de una variable aleatoria puede ser determinado fácilmente mediante la función de distribución y la de densidad:

- La función de densidad de una variable discreta debe ser una suma de funciones delta.
- La función de densidad de una variable continua no puede incluir ninguna función delta.
- La función de densidad de una variable mixta consiste en dos funciones delta y otras funciones.

Para el caso de la función de distribución también hay equivalentes:

- La función de distribución de una variable discreta debe consistir en puntos discontinuos y porciones constantes.
- La función de distribución de una variable continua no puede incluir ninguna discontinuidad.
- La función de distribución de una variable mixta consiste en dos puntos discontinuos y porciones suaves.

Además existe una relación entre las funciones de distribución y de densidad, ya que la función de densidad (PDF) f_X es la derivación de la función de distribución (CDF) F_X , la CDF deberá ser la integral de la PDF. A continuación se presenta esta relación en forma numérica:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\lambda)d\lambda \quad (2.16)$$

2.2.3 FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

En probabilidad, la distribución de probabilidad de una variable aleatoria está representada por una función la cual asigna a cada muestra del evento realizado la probabilidad correspondiente de éxito. Existen diferentes distribuciones de probabilidad tanto para funciones discretas como continuas:

DISTRIBUCIONES PARA VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Algunas de las distribuciones para variables aleatorias discretas son las siguientes:

- *Distribución binomial*: Es una distribución de probabilidad discreta que mide el número de éxitos en una secuencia de n ensayos independientes de 'Bernoulli ²' con una probabilidad fija p de ocurrencia del éxito entre los ensayos. En esta distribución, el anterior experimento se repite n veces, de forma independiente, y se trata de calcular la probabilidad de un determinado número de éxitos. La representación matemática de esta distribución es la siguiente:

$$X \sim B(n, p) \tag{2.17}$$

- *Distribución binomial negativa*: Esta distribución incluye la distribución de Pascal. El número de experimentos de Bernoulli de parámetro θ independientes realizados *hasta la consecución del k -ésimo éxito* es una variable aleatoria que tiene una distribución binomial negativa con parámetros k y θ .
- *Distribución Poisson*: Expresa la probabilidad de un número k de eventos ocurriendo en un tiempo fijo si estos eventos ocurren con una frecuencia media conocida y son independientes del tiempo discurrido desde el último evento. Se expresa matemáticamente mediante:

$$f(k; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \tag{2.18}$$

- *Distribución geométrica*: Esta distribución puede definirse de dos formas distintas:

² Un experimento de Bernoulli se caracteriza tener únicamente dos posibles resultados. A uno de estos se denomina éxito y tiene una probabilidad de ocurrencia p y al otro, fracaso, con una probabilidad $q = 1 - p$.

1. La distribución de probabilidad del número X de experimentos de Bernoulli necesaria para obtener un éxito, contenido en el conjunto $\{1, 2, 3, \dots\}$ o,
 2. La distribución de probabilidad del número $Y = X - 1$ de fallos antes del primer éxito, contenido en el conjunto $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- *Distribución hipergeométrica:* Para definir esta distribución es necesario suponer que se tiene una población de N elementos, de los cuales d pertenecen a A y $N-d$ a B . La distribución hipergeométrica mide la probabilidad de obtener x ($0 \leq x \leq d$) elementos de la categoría A en una muestra de n elementos de la población original.
 - *Distribución de Bernoulli:* Es una distribución de probabilidad discreta, que toma valor 1 para la probabilidad de éxito (p) y valor 0 para la probabilidad de fracaso ($q = 1 - p$).
 - *Distribución uniforme discreta:* En ella, todos los elementos de un conjunto finito son equiprobables, es decir, es una distribución que asume un número finito de valores con la misma probabilidad.

DISTRIBUCIONES PARA VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Algunas de las distribuciones para variables aleatorias discretas son las siguientes:

- *Distribución exponencial:* Es una distribución con un parámetro $\lambda > 0$ cuya expresión matemática es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (2.19)$$

- *Distribución normal:* O también conocida como distribución Gaussiana. La gráfica de su función de densidad tiene una forma acampanada y es simétrica respecto de un determinado parámetro. Esta curva se conoce como campana de Gauss.

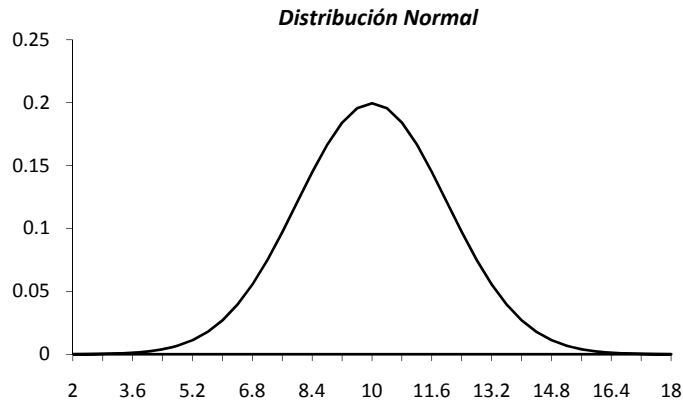


FIG. 2.6 DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA (NORMAL)

Se llama distribución normal "estándar" a aquella en la que sus parámetros toman los valores $\mu=0$ y $\sigma=1$.

- *Distribución Gamma:* La distribución gamma es una distribución con dos parámetros k y λ cuya función de densidad para valores $x > 0$ es:

$$f(x) = \lambda^k e^{-\lambda x} \frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)} \quad (2.20)$$

- *Distribución Beta:* La distribución beta es una distribución con dos parámetros a y b cuya función de densidad para valores $0 < x < 1$ es:

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \quad (2.21)$$

2.3 LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

La ley de los grandes números es un teorema en probabilidades que describe el comportamiento del promedio de una sucesión de variables aleatorias según el número total de variables aumenta. El teorema describe hipótesis suficientes para afirmar que dicho promedio converge al promedio de las esperanzas de las variables aleatorias involucradas.

En particular, si todas las variables son idénticamente distribuidas e independientes, el promedio tiende al valor de la esperanza individual.

Las leyes de los grandes números implican que el promedio de una muestra al azar de una población de gran tamaño tenderá a estar cerca de la media de la población completa. Varias formulaciones de la ley de los grandes números (y sus condiciones asociadas) especifican la convergencia de formas distintas.

Cuando las variables aleatorias tienen una varianza finita, el teorema del límite central extiende nuestro entendimiento de la convergencia de su promedio describiendo la distribución de diferencias estandarizadas entre la suma de variables aleatorias y el valor esperado de esta suma. Sin importar la distribución subyacente de las variables aleatorias, esta diferencia estandarizada converge a una variable aleatoria normal estándar.

La frase '*ley de los grandes números*' es también usada ocasionalmente para referirse al principio de que la probabilidad de cualquier evento posible (incluso uno improbable) ocurra *al menos una vez* en una serie incrementa con el número de eventos en la serie. Por ejemplo, la probabilidad de que un individuo gane la lotería es bastante baja; sin embargo, la probabilidad de que *alguien* gane la lotería es bastante alta, suponiendo que suficientes personas comprasen boletos de lotería.

Ley débil de los grandes números:

La *ley débil de los grandes números* establece si se tiene una secuencia infinita de variables aleatorias X_i , donde todas las variables aleatorias tienen el mismo valor esperado μ y varianza σ^2 , además de que son independientes unas con otras. Las probabilidades de éxito o fallo son:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{éxito} \\ 0 & \text{error} \end{cases} \quad (2.22)$$

entonces el promedio de una muestra:

$$\bar{X}_n = (X_1 + \dots + X_n)/n \quad (2.23)$$

converge en probabilidad a μ . En otras palabras: para cualquier número positivo ϵ , sin importar cuan pequeño, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| < \epsilon) = 1 \quad \text{para } \epsilon > 0 \quad (2.24)$$

La *ley débil de los grandes números* es una afirmación acerca de los probables valores de una suma de N variables aleatorias distribuidas de la misma forma. Específicamente, si esta suma está dividida entre N .

Esta ley ayudar a tener una justificación si un experimento está representado por grandes números de tiempos, la frecuencia relativa de una salida en particular debería ser cercana a la

probabilidad de esa salida. La ley débil se utiliza para establecer un valor probable de una gran secuencia de variables aleatorias.

Ley fuerte de los grandes números:

La *ley fuerte de los grandes números* es contraria a la descrita anteriormente, establece que si un conjunto de variables aleatorias X_1, X_2, X_3, \dots es una secuencia infinita de variables aleatorias que son independientes e idénticamente distribuidas con $E(|X_i|) < \infty$ (y donde el valor esperado es μ), entonces

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu) = 1 \tag{2.25}$$

es decir, el promedio de las variables aleatorias converge a μ casi seguramente (en un conjunto de probabilidad 1). Esta ley es una simplificación y fuerte afirmación de la ley débil.

2.4 PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Como se mencionó al inicio del capítulo, cuando una señal aleatoria es una función dependiente del tiempo, se dice que se trata de un proceso *aleatorio* o un proceso *estocástico*. A continuación se presenta una definición más específica de proceso aleatorio o estocástico:

Un proceso estocástico $X(t, \tau)$ es una función de dos variables, t y τ , donde τ es un elemento del espacio de muestras. Además, para cualquier tiempo fijo t , la función $X(t, \tau)$ debe satisfacer la definición de variable aleatoria que se describió anteriormente³.

³ Un proceso estocástico es un concepto matemático que sirve para caracterizar una sucesión de variables aleatorias que evolucionan en función de otra variable, generalmente, el tiempo. Cada una de las variables aleatorias del proceso tiene su propia función de distribución de probabilidad y, entre ellas, pueden estar correlacionadas o no.

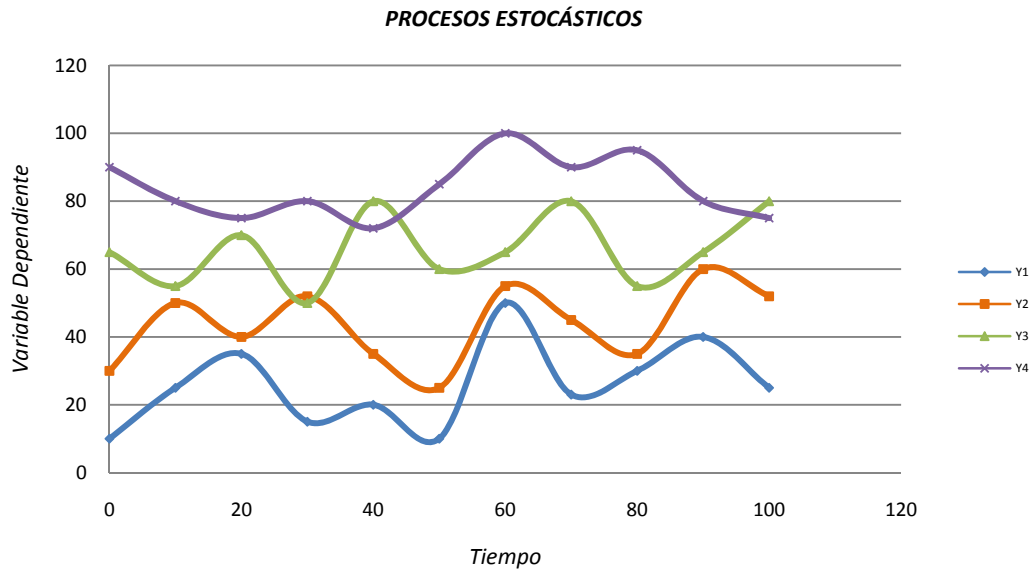


FIG. 2.7 PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Ahora se tiene una función que depende de dos variables, en donde t es arbitraria, y generalmente se relaciona con el tiempo, sin embargo, se puede hablar de tiempo continuo o tiempo discreto. La diferencia ahora radica en que estas dos variables van a determinar la forma de onda de la salida. La palabra ‘estocástico’ se deriva del griego ‘stochastikos’ que hace referencia a la variabilidad.

Existen cuatro posibles interpretaciones de $X(t, \tau)$ dependiendo de la naturaleza de las variables:

1. Si t y τ son fijas, entonces $X(t, \tau)$ es un número.
2. Si t es fijo y τ es variable, entonces $X(t, \tau)$ es una variable aleatoria.
3. Si t es variable y τ es fija, entonces $X(t, \tau)$ es una función del tiempo (llamada función muestra).
4. Si ambas t y τ son variables, $X(t, \tau)$ entonces es un proceso estocástico.

Un proceso $X(t)$ estocástico puede ser definido en general por:

- Una variable aleatoria variando en el tiempo en el sentido de que el valor que toma la variable aleatoria es variable con el tiempo, o

- Una función variable en el tiempo en el sentido de que la función entera, además de un número, es asignada a cada salida.

Sin embargo, se debe denotar que:

- $X(t)$ en un tiempo específico t_1 es una variable aleatoria $X(t_1)$,
- Una realización de $X(t)$ es una función del tiempo, llamada capa muestra (*simple path*), función muestra (*function path*), o función miembro (*member function*), pero no número.
- Un espacio muestra es un conjunto de funciones del tiempo,
- $X(t)$ en diferentes instantes puede tener una infinita cantidad de distribuciones diferentes.

Existe una gran cantidad de procesos aleatorios, cada uno con diferentes características. Se dice que un proceso aleatorio puede ser:

- Continuo si $X(t_1)$ para muchos tiempos fijos t_1 es una variable aleatoria continua.
- Discreto si $X(t_1)$ para muchos t_1 es una variable aleatoria discreta.
- Mixto si no es necesariamente continuo o discreto.
- Estrictamente estacionario (este concepto de abarcará de una forma más detallada al final del presente capítulo).
- Estacionario si tampoco su auto correlación depende de la elección del tiempo de inicio, esto es, si:

$$E[X(t)] \text{ no depende de } t, y$$

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1 - t_2) = R_x(\tau), \quad \tau = t_1 - t_2 \quad (2.26)$$

para cada t_1, t_2 , esto es, que la auto correlación depende solo del la diferencia de los tiempos.

- No estacionario si no es estacionario.
- Blanco si los valores en diferentes tiempos no están correlacionados, esto es, si la auto varianza es siempre cero (o igualmente, su auto correlación es el producto de los valores esperados) para diferentes instantes de tiempo:

$$C_x(t_1, t_2) = 0 \quad [o \quad R_x(t_1, t_2) = \bar{x}(t_1)\bar{x}(t_2)] \quad \forall t_1 \neq t_2 \quad (2.27)$$

- Ergódico si el valor promedio conjunto \bar{x} es igual al tiempo promedio para cada una de las muestras de la función $x(t)$, definida por

$$\bar{x}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt, \quad \text{dada } \omega \quad (2.28)$$

El concepto de estacionaridad en los procesos aleatorios es similar al estado fijo de los procesos determinísticos; las características de los procesos son tiempo invariante incluso pensando que el proceso en si mismo es variable en el tiempo.

Un proceso estacionario $X(t)$ es blanco si su auto covarianza es siempre cero para cualquier valor no nulo de τ :

$$C_x(\tau) \triangleq E\{[X(t + \tau) - \bar{x}][X(t) - \bar{x}]\} = 0 \quad \forall \tau \neq 0 \quad (2.29)$$

Su auto correlación claramente siempre es cero para cualquier valor positivo de τ :

$$R_x(\tau) \triangleq E[X(t + \tau)X(t)] = 0 \quad \forall \tau \neq 0 \quad (2.30)$$

2.4.1 CONCEPTOS

Antes de comenzar a describir las principales características de los procesos aleatorios, es importante conocer algunos conceptos que serán mencionados a lo largo de los siguientes tópicos.

Momentos:

Para un proceso estocástico, los momentos que se definen para una sola variable aleatoria son muy similares, la diferencia radica en que ahora son funciones dependientes del tiempo. Por lo que el k-ésimo momento de $X(t, \tau)$ esta dado por:

$$m_k(t) = E[X^k(t, \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^k f_X(\alpha; t) d\alpha \quad (2.31)$$

así mismo, el k-ésimo momento central está dado por:

$$\mu_k = E\{[X^k(t, \tau) - m_k(t)]^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha - m_k(t)]^k f_X(\alpha; t) d\alpha \quad (2.32)$$

La principal diferencia entre un proceso estocástico y las variables aleatorias es que ahora se tiene una forma de onda completamente diferente. La salida experimental τ determina una completa forma de onda $X(t, \tau)$, no solo un número.

Media:

La media de un proceso estocástico X en el tiempo t , se define como la media de la variable aleatoria $X(t)$ y se denota como:

$$E\{X(t)\} \triangleq m_x(t) \quad (2.33)$$

Autocorrelación:

La autocorrelación probabilística de un proceso aleatorio X , en dos tiempos t_1 y t_2 se refiere a la correlación de dos señales aleatorias $X(t_1)$ y $X(t_2)$ y se denota por:

$$E\{X(t_1)X(t_2)\} \triangleq R_{X(t_1)X(t_2)} \quad (2.34)$$

Autocovarianza:

Análogamente a la autocorrelación, la autocovarianza de un proceso aleatorio X en dos tiempos t_1 y t_2 está dado por:

$$E\{[X(t_1) - m_x(t_1)][X(t_2) - m_x(t_2)]\} \triangleq K_{X(t_1,t_2)} \quad (2.35)$$

Funciones de Distribución y de Densidad para procesos estocásticos:

Para los procesos estocásticos, las funciones de distribución y de densidad están definidas de una forma distinta a las de las variables aleatorias

$$F_{XX}(\alpha_1, \alpha_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq \alpha_1, X(t_2) \leq \alpha_2\} \quad (2.36)$$

$$f_{XX}(\alpha_1, \alpha_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} F_{XX}(\alpha_1, \alpha_2; t_1, t_2) \quad (2.37)$$

Estas fórmulas conectan los valores de dos procesos estocásticos en dos tiempos distintos. Cuando se trate de tiempo discretos, se maneja la nomenclatura de n_1 y n_2 en lugar de t_i .

Funciones de correlación:

Las funciones de correlación ayudan a saber y cuantificar la similitud entre dos diferentes señales, además de que permite estimar el valor de una forma de onda en cualquier tiempo basándose en un tiempo dado.

Dentro de los procesos aleatorios, existen dos clases de correlación:

1. La función de correlación cruzada (*crosscorrelation function CCF*) de dos procesos aleatorios $X(t)$ y $Y(t)$ está definida como la correlación promedio de dos procesos:

$$R_{xy}(t + \tau, t) \triangleq E[X(t + \tau)Y(t)] = \text{la media conjunta de } X(t + \tau)Y(t) \quad (2.38)$$

2. La función de auto correlación (*autocorrelation function ACF*) de un proceso aleatorio $X(t)$ está definido por la autor relación promedio del proceso:

$$R_x(t + \tau, t) \triangleq E[X(t + \tau)X(t)] = \text{la media conjunta de } X(t + \tau)X(t) \quad (2.39)$$

Estas funciones de correlación no son variables, son un conjunto equivalente de las definidas para las que se aplican a los procesos determinísticos.

2.4.2 ESTACIONARIDAD Y ERGODICIDAD

PROCESO ESTACIONARIO

Un proceso estocástico es llamado estrictamente estacionario si sus propiedades estadísticas no cambian con el tiempo de origen, lo cual implica que la media, la varianza y la PDF de primer orden para $X(t_1, \tau)$ son las mismas para $X(t_2, \tau)$ para todo t_1 y t_2 . Esto quiere decir que la estadística determinada para $X(t, \tau)$ es igual para $X(t + \varepsilon, \tau)$ para todo valor de ε , pero solo corresponde al primer orden de estacionaridad, por lo que es necesario mencionar otras definiciones.

Un proceso estocástico es estacionario de orden k si

$$f_X(\alpha_1, \dots, \alpha_k; t_1, \dots, t_k) = f_X(\alpha_1, \dots, \alpha_k; t_1 + \varepsilon, \dots, t_k + \varepsilon) \quad \text{para todo } \varepsilon \quad (2.40)$$

De esta igualdad es posible darse cuenta que la función correspondiente al orden uno debe ser independiente de t y se define por:

$$f_X(\alpha; t) = f_X(\alpha) \quad (2.41)$$

De forma similar $f_X(\alpha_1, \alpha_2; t_1, t_2) = f_X(\alpha_1, \alpha_2; t_1 + \varepsilon, t_2 + \varepsilon)$ es independiente de ε para todo ε . Por eso se puede llegar a la conclusión de que:

$$f_X(\alpha_1, \alpha_2; t_1, t_2) = f_X(\alpha_1, \alpha_2; \tau) \quad \tau = t_1 - t_2 \quad (2.42)$$

PROCESO ERGÓDICO

La idea de ergodicidad surge si se tiene una sola función muestra de un proceso estocástico en lugar del conjunto entero. Esta función muestra nos puede dar poca información de la estadística del proceso. Pero si el proceso es ergódico, toda la información estadística puede ser derivada de esta sola función muestra.

Por lo tanto, ‘un proceso ergódico es aquel donde los promedios estadísticos son iguales a los temporales’⁴.

Cuando un proceso es ergódico, una sola función muestra representa el proceso entero. Por lo tanto, la ergodicidad implica al mismo tiempo estacionaridad, y así como hay grados de estacionaridad, también los hay de ergodicidad. A continuación solo se presentan los niveles de media y correlación.

Nivel 1: *Un proceso es ergódico si la media si*

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt = E[X(t, \tau)] \quad (2.43)$$

donde $m_X = E[X(t, \alpha)]$.

La ergodicidad de la media implica estacionaridad de la misma. Pero la estacionaridad de la media no implica su ergodicidad.

Nivel 2: *Un proceso es ergódico en autocorrelación si*

$$r(\tau) = \langle x(t)x(t - \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t - \tau) dt = E[X(t)X(t - \tau)] = R_{XX}(\tau) \quad (2.44)$$

La variable r representa la función de tiempo de autocorrelación mientras que R indica la función estadística de autocorrelación.

⁴ *Un proceso aleatorio se considera ergódico si el promedio calculado sobre una función muestras es igual al promedio calculado sobre el ensamble.*

