DIRECTORIO DE ALUMNOS DEL CURSO
ANALISIS ESTRUCTURAL
DEL 28 DE SEPTIEMBRE AL 9 DE OCTUBRE DE 1992.

1.- CORTES REYNA ENRIQUE
DIRECTOR TECNICO
TECNICA ESTRUCTURAL S.A. DE C.V.
GUTY CARDENAS 49, COL. GUADALUPE INN, DELEG. ALVARO OBREGON, C.P. 01020, TEL. 680 26 38 OFNA.

2.- ESPINOSA OLMEDO AGUSTIN
CALCULISTA ESTRUCTURAL
JOSE MA. IBARRARAN 42, COL. SAN JOSE INSURGENTES, DELEG. B. JUAREZ, C.P. 03900, TEL. 593 60 28 DOM.

3.- ESTRADA LUNA JOSE LUIS
JEFE DE SECCION
DIRECCION GENERAL DE AERONAUTICA CIVIL
PROVIDENCIA 807, 3er. PISO, COL. DEL VALLE, DELEG. B. JUAREZ, TEL. 523 46 51 OFNA.

4.- LOPEZ MARTINEZ ESTEBAN
PROPIETARIO
PROYECTOS DIRECCION Y AVALUOS
LAURELES 273, COL. BENITO JUAREZ, CD. NEZAHUALCOYOTL, C.P. 57000, TEL. 765 63 44 OFNA.

5.- MENDEZ DIAZ RAUL
DIRECTOR GENERAL
KOHUNLICH CONSTRUCTORES S.A. DE C.V.
PATRICIO SANZ 1747-302 "B", COL. DEL VALLE, DELEG. B. JUAREZ, C.P. 03100, TEL. 534 40 39 OFNA.

6.- REYES DAVALOS JUAN CARLOS
INGENIERO RESIDENTE
TECHOS FLOTANTES S.A. DE C.V.
CAPULIN 46-302, COL. DEL VALLE, DELEG. B. JUAREZ, C.P. 03100, TEL. 575 22 02 / 13-33 OFNA.

7.- VALENCIA JOSE ALFREDO
COORDINACION INGENIERIA CIVIL
CEMENTOS APASCO S.A. DE C.V.
CAMPOS ELISEOS 345-16, COL. POLANCO, DELEG. M. HIDALGO C.P. 11550, TEL. 596 79 88 OFNA.

8.- VILLANUEVA RAMIREZ PEDRO J.
PROFESOR ASOCIADO
UAM - XOCHIMILCO
CALZADA DEL HUESO 1100, COL. VILLAQUIETUD, DEL. COYOACAN

9.- VITR MARTINEZ DOMINGO
PROFESOR ASIGNATURA "A" DEFINITIVO
ENEP ACATLAN UNAM
AV.ALCANFORES S/N,SAN JUAN TOTOLTEPEC,NAUCALPAN,EDO.MEX.

DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO
ANALISIS ESTRUCTURAL
DEL 28 DE SEPTIEMBRE AL 9 DE OCTUBRE DE 1992.

M. EN I. JOSE LUIS TRIGOS SUAREZ (COORDINADOR)
DIRECTOR GENERAL
TRIGOS INGENIEROS CONSULTORES, S.A.
TAXQUEÑA No. 1818 LOCAL A
COL. RESIDENCIAL TAXQUEÑA, DELEGACION COYOACAN, C.P. 04280,
TEL. 689 68 88 y 689 66 39

ING. AGUSTIN DEMENEGHI COLINA
PROFESOR DE MECANICA DE SUELOS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA CIVIL, TOPOGRAFICA Y GEODESICA,
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM
TEL. 548 96 69

DR. JOSE LUIS CAMBA CASTAÑEDA
GERENTE
INGENIEROS CONSULTORES
CAMPECHE 305, COL. CONDESA, DELEGACION CUAUHTEMOC, C.P. 06100
MEXICO, D.F., TEL. 564 30 02 564 33 28

DR. GUSTAVO AYALA

ING. FERNANDO MONROY M.

CURSOS / RTOS

ANALISIS ESTRUCTURAL
(INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA
INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO)

28 DE SEPTIEMBRE AL 09 DE OCTUBRE 1992

FECHA	HORARIO	TEMA	PROFESORES
Lunes 28-SEP	17:00 a 21:00 hrs.	Introducción	M. en I. José Luis Trigos S.
Martes 29-SEP	17:00 a 21:00 hrs.	Métodos de las Flexibilidades	Ing. José Francisco Tena
Miércoles 30-SEP	17:00 a 21:00 hrs.	Métodos de Rigides	Ing. Fernando Monroy
Jueves 01-OCT	17:00 a 21:00 hrs.	Métodos de Rigides	Ing. Fernando Monroy
Viernes 02-OCT	17:00 a 21:00 hrs.	Análisis Dinámico	M. en I. José Luis Trigos
Lunes 05-OCT	17:00 a 21:00 hrs.	Análisis Dinámico	M. en I. José Luis Trigos
Martes 06-OCT	17:00 a 21:00 hrs.	Interacción suelo-Estructura	Ing. Agustín Demeneghi C.
Miércoles 07-OCT	17:00 a 21:00 hrs.	Interacción suelo-Estructura	Ing. Agustín Demeneghi C.
Jueves 08-OCT	17:00 a 21:00 hrs.	Introducción del Elemento Finito	Dr. Gustavo Ayala
Viernes 09-OCT	17:00 a 21:00 hrs.	Introducción del Elemento Finito	Dr. Gustavo Ayala

EVALUACION DEL CURSO

CONCEPTO		
1.	APLICACION INMEDIATA DE LOS CONCEPTOS EXPUESTOS	
2.	CLARIDAD CON QUE SE EXPUSIERON LOS TEMAS	
3.	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO EN EL CURSO	
4.	CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO	
5.	CONTINUIDAD EN LOS TEMAS DEL CURSO	
6.	CALIDAD DE LAS NOTAS DEL CURSO	
7.	GRADO DE MOTIVACION LOGRADO EN EL CURSO	
	EVALUACION TOTAL	

ESCALA DE EVALUACION: 1 A 10

6.- ¿Qué cursos le gustaría que ofreciera la División de Educación Continua?

____

____

____

7.- La coordinación académica fué:

EXCELENTE	BUENA	REGULAR	MALA
☐	☐	☐	☐

8.- Si está interesado en tomar algún curso INTENSIVO ¿Cuál es el horario más conveniente para usted?

LUNES A VIERNES DE 9 a 13 H. Y DE 14 A 18 H. (CON COMIDAD)	LUNES A VIERNES DE 17 a 21 H.	LUNES A MIERCOLES Y VIERNES DE 18 A 21 H.	MARTES Y JUEVES DE 18 A 21 H.
☐	☐	☐	☐

VIERNES DE 17 A 21 H. SABADOS DE 9 A 14 H.	VIERNES DE 17 A 21 H. SABADOS DE 9 A 13 H. DE 14 A 18 H.	OTRO
☐	☐	☐

9.- ¿Qué servicios adicionales desearía que tuviese la División de Educación Continua, para los asistentes?

____

____

____

10.- Otras sugerencias:

____

____

____

METODOS ENERGETICOS Y
METODO DE LAS FLEXIBILIDADES
Planteamineto Matricial

José Luis Camba Castañeda*

1.- INTRODUCCION

2.- ENERGIA DE DEFORMACION.

- Trabajo Real
- Trabajo Virtual
- Matriz de Flexibilidades no ensamblada
- Matriz de Flexibilidades ensamblada
- Teorema recíproco de Maxwell-Betti

3.- METODOS GENERALES DE ANALISIS

- Método de las flexibilidades
- Método de las Rigideces

4.- PROPIEDADES DE LAS MATRICES DE FLEXIBILIDADES Y RIGIDECES.

5.- SOLUCION MATRICIAL GENERALIZADA DEL METODO DE LAS FLEXIBILIDADES.

* Profesor Facultad de Ingeniería, UNAM.

Cuando se trata de una sola fuerza virtual aplicada para calcular el desplazamiento Dj en la coordenada j, la ecuación anterior se escribe :

$$1 \cdot D_j = \int \}\sigma_{uj}\{^T \}\varepsilon\{ \, dV \qquad (2.11)$$

$$D_j = \int_v \}\sigma_{uj}\{^T \}\varepsilon\{ \, dV \qquad (2.12)$$

siendo $\}\sigma_{uj}\{$ los esfuerzos vrtuales correspondientes a la fuerza virtual unitaria en j y $\}\varepsilon\{$ la deformación real debida a la carga real.

Las expresiones del trabajo virtual en axial, flexión, cortante y torsión se indican a continuación.

Tipo de deformación	Componente de la fuerza virtual	Componente del desplaz. real	Trabajo virtual interno	
Axial	p	$dL = \frac{P}{AE} dx$	$\int p \frac{P}{AE} dx$	(2.13)
Flexión	m	$d\theta = \frac{M}{EI} dx$	$\int m \frac{M}{EI} dx$	(2.14)
Cortante	v	$dy = c \frac{V}{AG} dx$	$\int cv \frac{V}{AG} dx$	(2.15)
Torsión	t	$d\beta = \frac{T}{GJ} dx$	$\int t \frac{T}{GJ} dx$	(2.16)

De la tabla anterior, para valuar la integral de flexión $m \frac{M}{EI} dx$, para elementos de sección transversal constante se utiliza para los casos mas comunes de cargas, la multiplicación directa de diagramas de momentos flexionantes.

Cálculo de deflexiones por el método de los trabajos virtuales.

1) Armaduras

En armaduras, la expresión para el cálculo de deflexiones es:

$$Dj = \sum_{i=1}^{m} \int p \frac{Pi}{AE} dx \qquad (2.17)$$

Un resultado igual se logrará si multiplicamos matrices tales que:

$$Dj = \left\} p \right\{^{T}_{mx1} \left[fM \right]_{mxm} \left\} P \right\{_{mx1} \qquad (2.18)$$

en la cual:

$\left\} p \right\{^{T}$ es la transpuesta de la matriz $\left\} p \right\{$, siendo esta última las fuerzas en los elementos debidas a una <u>carga virtual</u> unitaria actuando en la coordenada correspondiente.

$\left\} P \right\{$ son las fuerzas en los elementos debidas a las <u>cargas reales</u>

$$Y \quad [f_M] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{AE_1} & & \\ & \frac{L_2}{AE_2} \ddots & 0 \\ 0 & & \frac{L_n}{A_nE_n} \end{bmatrix}$$

siendo los elementos de la diagonal principal la flexibilidad por deformación axial de los elementos aislados. A esta matriz se le conoce como la <u>matriz de flexibilidades de la estructura no ensamblada</u>. (Ref. 2)

Cuando se desea calcular las deflexiones en diferentes puntos de la estructura, la carga virtaul deberá aplicarse por separado en cada una de las coordenadas deseadas y que corresponde al conjunto de fuerzas determinadas, la ecuación tendrá la forma:

$$[D]_{nxp} = [P]^{T}_{mxn} [f_M]_{mxm} [P]_{mxp} \qquad (2.20)$$

p = fuerza en un elemento debido a una carga virtual actuando en la coordenadas. Los elementos de la matriz $[p]$ son las fuerzas debidas a cargas unitarias aplicadas en la coordenada correspondiente

f_M = La flexibilidad del elemento $= \frac{L}{AE}$

P = fuerza en un elemento debido a la carga real. Cada columna de la matriz $[P]$ son las fuerzas correspondientes a un caso de carga.

m = número de elementos

n = número de coordenadas en las cuales se desea conocer el desplazamiento.

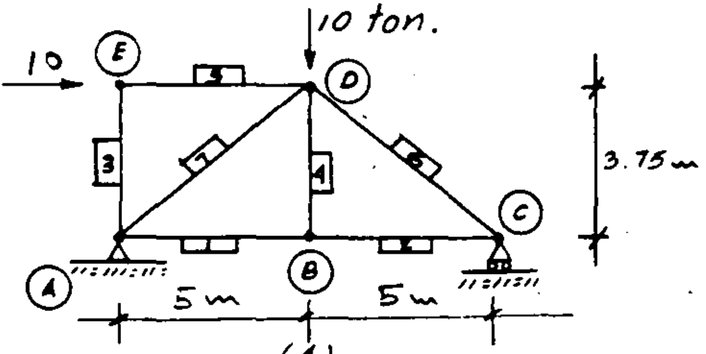
p = número de casos de carga.

El ejemplo No. 1 muestra la aplicación del cálculo de deformaciones en armaduras por trabajos virtuales.

2.22.- Cálculo de deflexiones por trabajos virtuales en vigas y marcos.

En una estructura formada por varios miembros y sujeta a una carga cualesquiera en un miembro, de tal forma que los momentos extremos internos sean M1, M2. Si se quieren calcular los desplazamientos en un extremo, se aplicaran momentos virtuales unita

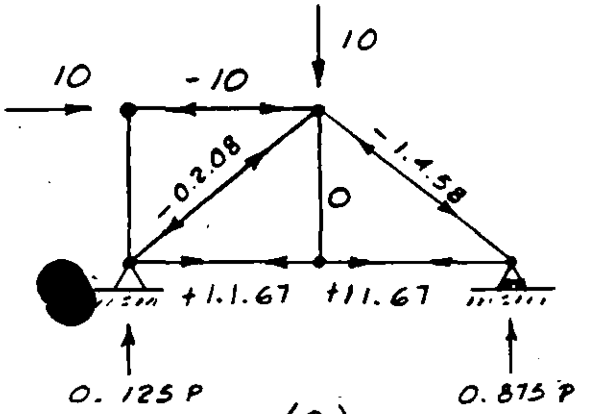
Ejemplo No. 1. Calcular el desplazamiento horizontal en el punto C y el movimiento relativo entre los nudos B y E. de la armadura siguiente:



barras 1, 2, 3, 4 y 5 = AE

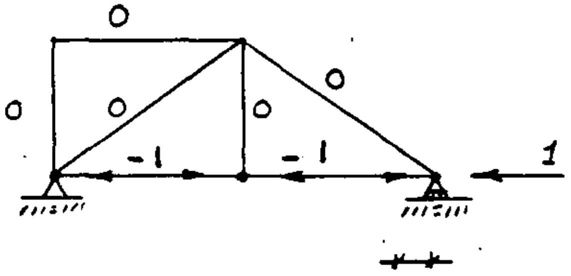
barras 6 y 7 = 1.25 AE

(1)



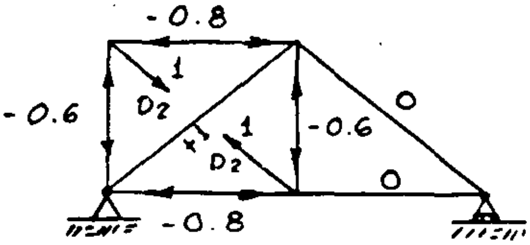
$$[P]_{7\times1} = \begin{Bmatrix} 11.67 \\ 11.67 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ -14.58 \\ -2.08 \end{Bmatrix}$$

(2)



$$[P]_{7\times2} = \begin{bmatrix} -1 & -0.8 \\ -1 & 0 \\ 0 & -0.6 \\ 0 & -0.6 \\ 0 & -0.8 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3)

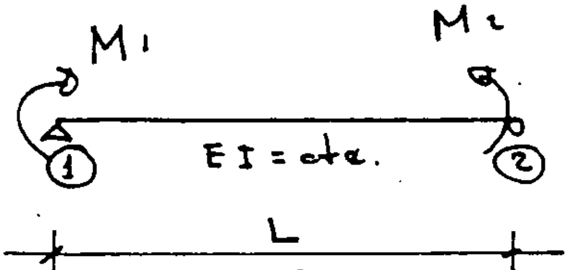


$$[f_M]_{7\times7} = \frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 5 & & & & & & \\ & 5 & & & & & \\ & & 3.75 & & & & \\ & & & 3.75 & & & \\ & & & & 5 & & \\ & & & & & 5 & \\ & & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

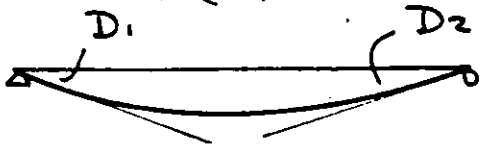
(4)

$[D]_{2\times1} = [P]^T \cdot [f_M][P] = \frac{1}{\;}\{-116.5$

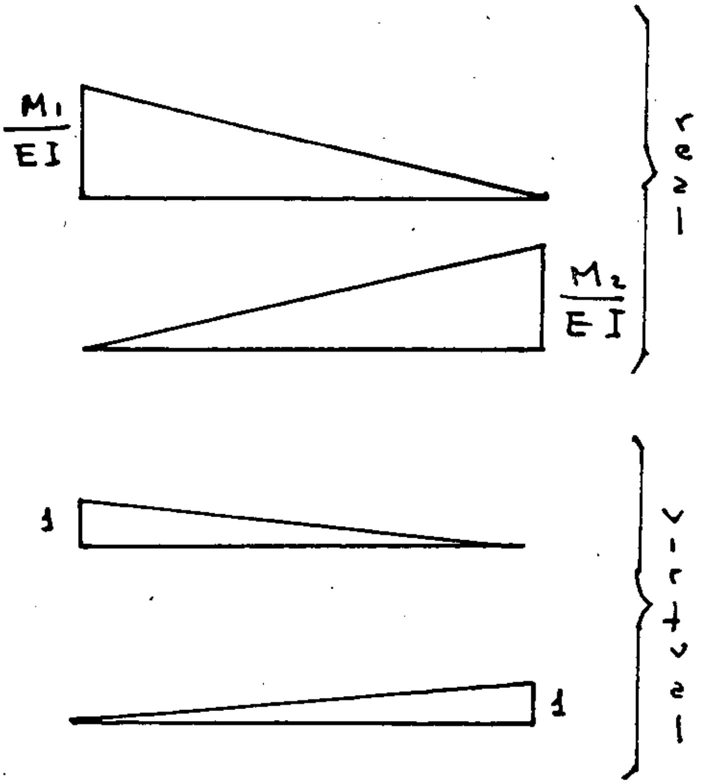
rios en los extremos para calcular los giros debidos a flexión.

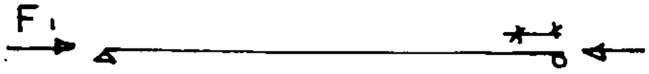


(a)



(b)





(c)

Por trabajos virtuales la contribución de desplazamientos por flexión en j será:

$$D_j = \int m \frac{M}{EI} dx = \frac{L}{6EI}\left(2M1\ m1 + M1m2 + M2m1 + 2\ M2m2\right)$$

y expresándolo matricialmente:

$$\Delta D_j = \left\} mu \right\{^{T} \left[f_M \right] \left\} M \right\{ \text{, en la cual:} \qquad 2.21$$

$$\left\} mu \right\{ j = \left\} \begin{matrix} m1 \\ m2 \end{matrix} \right\{$$

$$\left\} M \right\{ = \left\} \begin{matrix} M1 \\ M2 \end{matrix} \right\{$$

$$\left[f_M \right] = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad 2.21..$$

NOTA.- SI SE CONSIDERA EFECTOS DE AXIAL: (C)

$$\left[f_M \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3EI} & \frac{1}{6EI} & 0 \\ \frac{1}{6EI} & \frac{1}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{AE} \end{bmatrix} L$$

en la cual:

Los elementos de $\left[f_M \right]$ son los giros izquierda y derecha debidos a momentos unitarios en un extremo de la viga. En forma semejante a la mencionada en armaduras, $\left[f_M \right]$ es la matriz de flexibilidad en flexión del elemento.

El desplazamiento en J sera la sumatoria de todos los elementos:

$$D_j = \sum_{i=1}^{m} \left\{ m_u \right\}^{T}_{2m\times 1} \left[f_M \right]_{2m\times 2m} \left\{ M \right\}_{2m\times 1} \qquad (2.22)$$

en al cual:

$$\left\{ m_u \right\}_j = \begin{Bmatrix} m_{1j} \\ m_{2j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{Bmatrix} ; \quad M = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{Bmatrix} ; \quad \left[f_M \right] = \begin{bmatrix} \left[f_{M_1} \right] & & \\ & \left[f_{M_2} \right] & \\ & & \left[f_M \right]_n \end{bmatrix} \qquad 2.23$$

A la matriz $\left[f_M \right]$ que contiene las matrices de flexibilidades separadas de todos los miembros se le llama matriz de flexibilidades no ensamblada.

Cuando se requiere conocer los desplazamientos de n coordenadas, la carga virtual unitaria debe aplicarse en cada una de las coordenadas separadamente para determinar los momentos en los extremos, arreglándolos en tal forma que

$$\left[m \right]_{2m\times n} = \begin{bmatrix} -\left\{ m \right\}_{11} & \left\{ m \right\}_{12} & \left\{ m \right\}_{1n} \\ \left\{ m \right\}_{21} & \left\{ m \right\}_{22} & \left\{ m \right\}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \left\{ m \right\}_{m1} & \left\{ M \right\}_{n2} & \left\{ m \right\}_{nn} \end{bmatrix}$$

en la cual los elementos de cada submatriz son los momentos extremos en el elementos.

El primer subíndice indica el momento y el segundo la coordenada en la cual se aplica el momento unitario.

Cuando se trata de varios casos de carga, los desplazamiento se calcularán:

$$\left[D\right]_{nxp} = \left[mu\right]^{T}_{2mxn} \left[f_{M}\right]_{2mx2m} \left[M\right]_{2mxp} \qquad (2.24)$$

Matriz de flexibilidades ensamblada de la estructura.

Esta matriz puede determinarse a partir de las flexibilidades de cada uno de los elementos usando la ecuación 2.24. Los elementos de la matriz de flexibilidades puesto que son los desplazamientos en las coordenadas correspondientes debidos a una fuerza (o mom.) unitaria actuando separadamente en cada una de esas coordenadas, la carga real y la carga virtual son las mismas, por lo que la ecuación 2.24 quedará:

$$\left[f\right] = \sum_{s=1}^{4} \left[mu\right]^{T}_{s} \left[f_{M}\right]_{s} \left[mu\right]_{s} \qquad (2.25)$$

en la cual $\left[f\right]$ es la matriz de flexibilidades ensamblada de la estructura y el subíndice s se refiere a las cuatro causas que pueden provocar deformación: flexión, axial, cortante y torsión.

Cuando solo se considera flexión la ec. 2.25, quedaría:

$$\left[f\right]_{nxn} = \left[mu\right]^{T}_{2mxn} \left[f_{M}\right]_{2mx2m} \left[mu\right]_{2mxn} \qquad 2.26$$

en la cual:

m = número de elementos

n = de coordenadas

El ejemplo 2 muestra la aplicación de los conceptos anteriores.

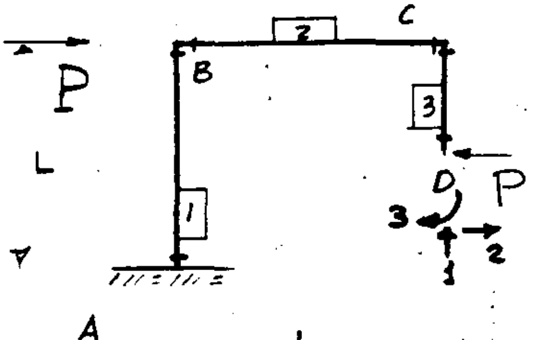
Ejemplo No. 2 En el marco indicado se pide :

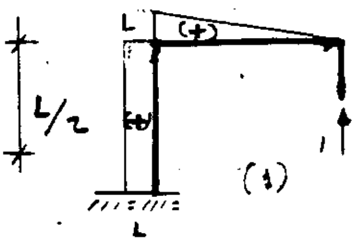
A) Calcular los desplazamientos en D, debidos a flexión

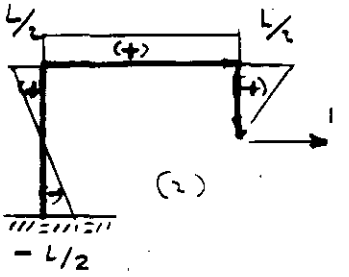
B) Calcular la matriz de flexibilidad.

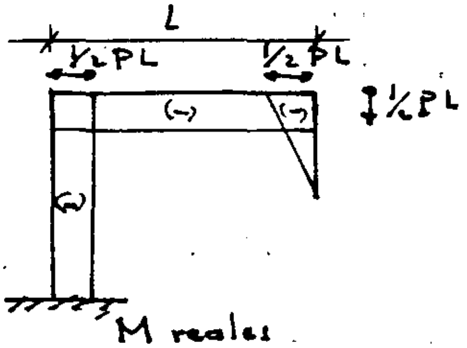
(A)

EI= cte.

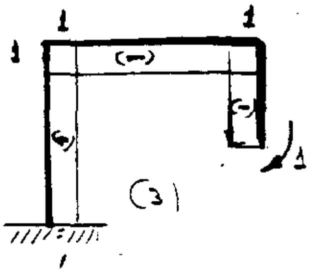








M reales



m virtuales

$$[mv]_{6\times3} = \begin{bmatrix} L & -L/2 & -1 \\ -L & -L/2 & 1 \\ L & L/2 & -1 \\ 0 & -L/2 & 1 \\ 0 & L/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [M]_{6\times1} = PL \begin{Bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[f_M]_{6\times6} = \frac{L}{6EI} \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 0 & & 0 & \\ \hline 0 & & 2 & 1 & & \\ & & 1 & 2 & 0 & \\ \hline 0 & & 0 & & 1 & 0.5 \\ & & & & 0.5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\{D\}_{3\times1} = [mv]^T_{6\times1} \, [f_M]_{6\times6} \, [M]_{6\times1} = \frac{PL^3}{EI} \begin{Bmatrix} -0.75 \\ -0.29 \\ +1.12/L \end{Bmatrix}$$

B) Calculo de la matriz de flexibilidad

$$[F]_{3\times3} = [mv]^{T}_{6\times3}\,[fm]_{6\times6}\,[mv]_{6\times3}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} L & -L/2 & -1 \\ L & L/2 & -1 \\ L & \frac{L}{2} & -1 \\ 0 & -L/2 & -1 \\ 0 & -L/2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 1 & & 0 & & 0 \\ 1 & 2 & & & & \\ \hline 0 & & 2 & 1 & & 0 \\ & & 1 & 2 & & \\ \hline 0 & & 0 & & 1 & 05 \\ & & & & 05 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} L & -L/2 & -1 \\ -L & -L/2 & 1 \\ L & L/2 & -1 \\ 0 & -L/2 & 1 \\ 0 & +L/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 8L^2 & 1.5L^2 & -9L \\ 1.5L^2 & 2.25L^2 & -3.75L \\ -9L & -3.75L & 15 \end{bmatrix}$$

2.3 Teorema recíproco de Maxwell-Betti.

Si un sistema de fuerzas F_1, F_2, Fn se aplica a una estructura en las coordenadas 1, 2 .... n provocan desplazamientos D_1F,D_2F..., DnF . Manteniendo el sistema de fuerzas F_1 F_2,....,Fn, se aplica otro sistema de fuerzas Q1,Q2,... Qn, provocarán desplazamientos D1Q, D2Q...., DnQ y además desplazamientos D1F, D2F... DnF en los puntos donde actúa el sistema F1,F2,... Fn.

El trabajo externo total será:

$$W\ F+Q = \frac{1}{2_1} F1DF + \frac{1}{2} F1DiQ + \frac{1}{2} QiDiQ \qquad 2.27$$

invirtiendo: $$W\ Q+F = \frac{1}{2} \Sigma Q1DiQ + \frac{1}{2} \Sigma QiDiF + \frac{1}{2} \Sigma FiDiF \qquad 2.28$$

como $W_{F+Q} = W_{Q+F}$: $$\frac{1}{2} \Sigma FiDiQ = \frac{1}{2} \Sigma QiDiF \qquad 2.29$$

Esta ecuación es el teorema recíproco de Betti cuyo enunciado sería que el trabajo externo hecho por un sistema de fuerzas Fi a través de desplazamientos debidos al sistema Qi es igual al trabajo externo hecho por el sistema de fuerzas Qi a través de desplazamientos provocados por el sistema Fi.

El teorema de Maxwell, consiste en aplicar el principio anterior a las deflexiones y haciendo que Fi = 1 en la coordenada i en el sistema de fuerzas F y Qj = 1 en la coordenada j :

$$DiQ = DjF$$

que se puede escribir como fij = fji 2.30

Estos desplazamientos se les llama coeficientes de flexibilidad como se vió en los ejemplos 1 y 2 y para una estructura de n coordenadas, estos coeficientes se arreglarán para formar una matriz de flexibilidades. Esta matriz deberá ser simétrica debido al teorema recíproco de Maxwell - Betti.

3.- METODOS GENERALES DE ANALISIS.

Existen básicamente dos métodos generales, para la resolución de estructuras hiperestáticas principalmente y que son el método de las flexibilidades (o de las fuerzas) y el método de las rigideces (o de los desplazamientos) que se describen en los parrafos siguientes.

Mas adelante se analizan con detalle cada uno de estos métodos.

3.1.- Método de las flexibilidades.

En el inciso 2.2 al hablar de cálculo de deflexiones, se introdujo el concepto de matriz de flexibilidades de una estructura.

A continuación se definirá el método de las flexibilidades.

En este método las incógnitas son las fuerzas redundantes que se calculan superponiendo desplazamientos de estructuras isostáticas y planteando las ecuaciones para resolver las incógnitas con base en la compatibilidad de deformaciones de la estructura.

Las ecuaciones de compatibilidad son del tipo:

$$\left\}D\right\{ + \left[f\right] \left\}F\right\{ = \left\}0\right\{ ; \qquad 3.1$$

en la cual :

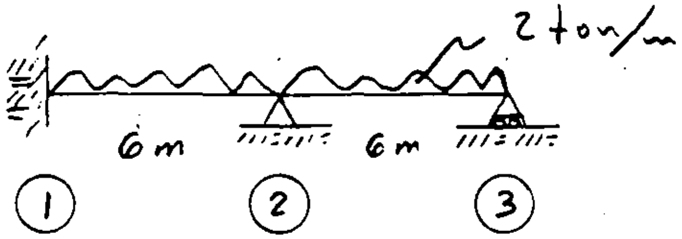
D = vector columna de los desplazamientos debidos a cargas externas.

F = vector de las fuerzas redundantes

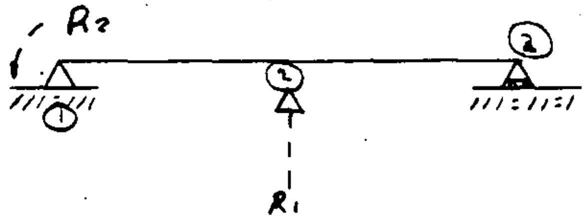
f = matriz de flexibilidades. Sus elementos representan desplazamientos debidos a fuerzas unitarias.

Ejemplo No. 3 Calcular las reacciones resolviendo por el metodo de las flexibilidades

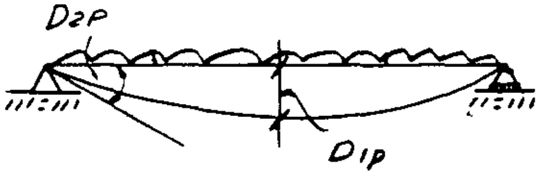
EI = cte.



a) Estructura primaria

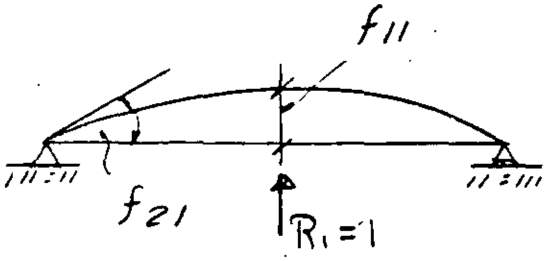


b) Desplazamientos debidos a las cargas



$$D = \begin{Bmatrix} \frac{-540}{EI} \\ -\frac{144}{EI} \end{Bmatrix}$$

c) Desplazamientos debidos a $R_1 = 1$

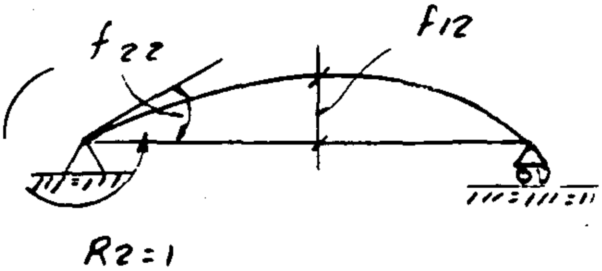


$$\begin{bmatrix} F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{36}{EI} & \frac{9}{EI} \\ \frac{9}{EI} & \frac{4}{EI} \end{bmatrix}$$

Ecuaciones de compatibilidad de deformaciones:

$$\begin{Bmatrix} D \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix}$$

d) Desplazamiento debidos a $R_2 = 1$



$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -D \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13.71 \\ 5.14 \end{Bmatrix} \text{ton}$$

La secuela de cálculo seá entonces:

1) Determinar el grado de hiperestáticidad
2) Plantear la estructura primaria isostática
3) Determinar los desplazamientos debidos a las cargas en los puntos liberados.
4) Determinar los desplazamientos debidos a cada una de las redundantes supuestas con valores unitarios, que son los coeficientes de flexibidad
5) Sumar los desplazamientos debidos a las cargas y a cada reduntante con base en condiciones de compatibilidad de deformaciones.

A continuación se indica el ejemplo 3 de aplicación.

3.2.- Método de las rigideces.

En este método, las incógnitas son los desplazamientos nodales y los elementos mecáncios se calculan superponiendo una estructura a la cual se restringen los desplazamientos nodales calculando las fuerzas que provocan estas restricciones.

Posteriormente se van permitiendo uno a uno los desplazamientos en los nudos, calculando los coeficientes de rigidez correspondientes.

Finalmente con base en ecuaciones de equilibrio se calculan los desplazamientos y con éstos se determinas los elementos mecánicos por superposición.

Las ecuaciones de equilibrio son de la forma:

$$\{F\} + [K]\{D\} = \{0\} \qquad (3.2)$$

en la cual:

$\{F\}$ = vector columna que depende de las cargas externas

$[K]$ = matriz de rigideces cuyos elementos representan fuerzas (o mom.) debidas a desplazamientos unitarios.

No depende de las cargas

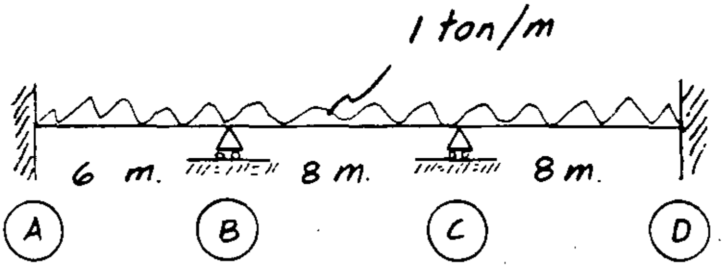
$\{D\}$ = vector que representa las incógnitas que son los desplazamientos

La secuela de cálculo será:

1) Encontrar el número de desplazamientos nodales posibles
2) Fijar los desplazamientos posibles calculando las fuerzas nodales de fijación correspondientes
3) Ir permitiendo desplazarse uno a uno los desplazamientos unitarios inicialmente impedidos, calculando las fuerzas correspondientes (coeficientes de rigidez)
4) Con base en las ecuaciones de equilibrio, calcular los desplazamientos
5) Los elementos mecánicos se obtendrán de superponer la estructura impedida de desplazarse en (2) con las correspondientes liberadas una a una

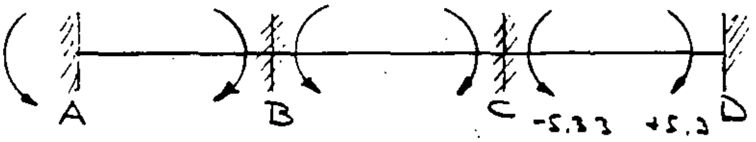
A continuación el ejemplo 4 muestra la aplicación de este método.

Ejemplo No. 4.- Calcular reacciones por el método de las rigideces.



1) Incógnitas Θ_B y Θ_C

2) F zas. nodales de fijación.

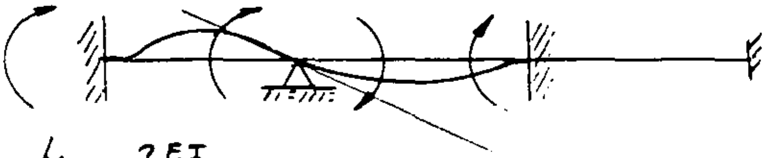


$\mathcal{M}_{AB} = -3\ \mathcal{M}_{BA},\ \mathcal{M}_{BC} = -\mathcal{M}_{CB} = +\mathcal{M}_{CD} = -\mathcal{M}_{DC} = -5.33\,t\,m$

$= +3\,t\,m$

3.1) $\Theta B = +1$

$K_{BB_c} = \frac{4 \cdot EI}{6}$ $K_{BB_d} = \frac{4EI}{8}$ $K_{CB} = \frac{2EI}{8}$

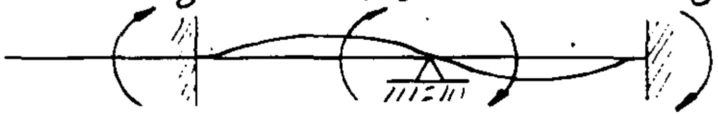


$$[K] = \begin{bmatrix} K_{BB} & K_{BC} \\ K_{CB} & K_{CC} \end{bmatrix}$$

$K_{AB} = \frac{2EI}{6}$

3.2) $\Theta_C = +1$

$K_{BC} = \frac{2EI}{8}$ $K_{BC} = \frac{4EI}{8}$ $K_{BC} = \frac{2EI}{8}$



$K_{BB_d} = \frac{4EI}{8}$

4) Ec. de equilibrio : $\Sigma M_B = 0$

$$\{F\} = [K]\ \{D\}$$

$$\begin{Bmatrix} -2.33 \\ 0 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{4}{6} + \frac{4}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{2}{8} & \frac{4}{8} + \frac{4}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ \end{Bmatrix} = [K]^{-1}\{-F\} = \begin{Bmatrix} \frac{2.11}{EI} \\ -0\ \underline{53} \end{Bmatrix}$$

4.- PROPIEDADES DE LAS MATRICES DE FLEXIBILIDADES Y DE RIGIDECES.

La relación entre la matriz de flexibilidad y la de rigidez se establecera a través del siguiente ejemplo (Fig. 1a).

Los desplazamientos $\}D\{$ se pueden expresar en términos de desplazamientos de cada una de las fuerzas actuando y superponiendo: (figura 1b).

$$D1 = f11F1 + f_{12}\ F2 + \ldots + f_{1n}\ Fn$$

$$D2 = f21F1 + f_{22}\ F2 + \ldots + f2n\ Fn$$

$$\vdots$$

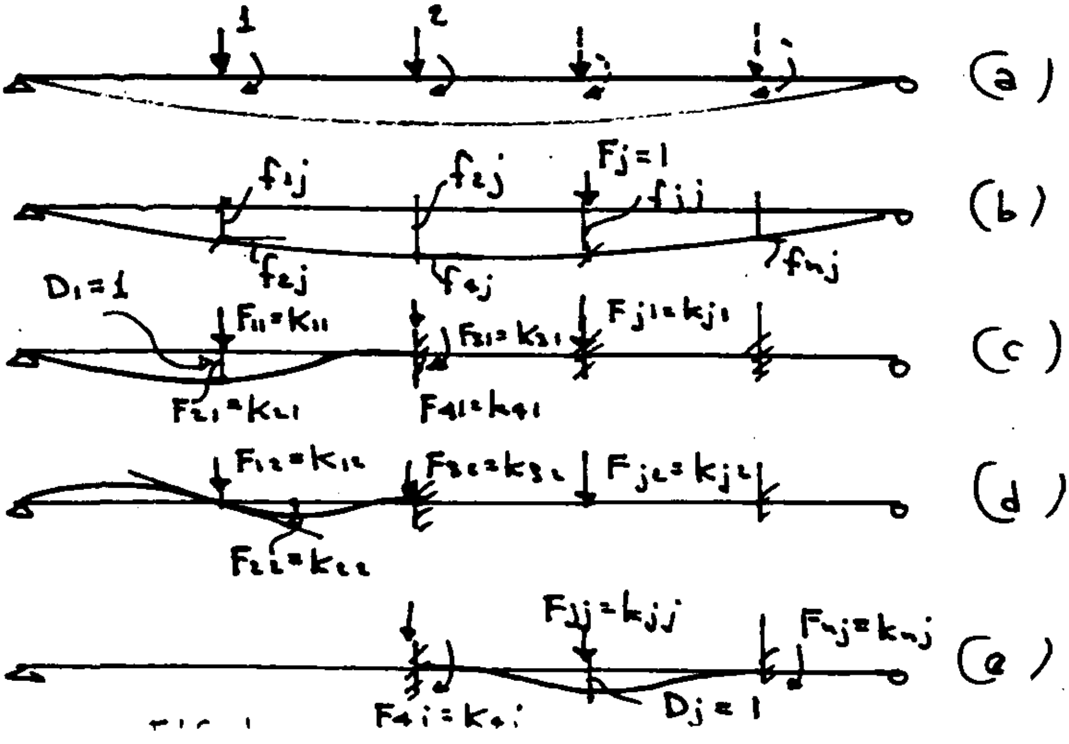
$$Dn = f_{n1}F1 + f_{n2}\ F2 + \ldots + f_{nn}\ F_n$$

$$\left[f \right]_{nxn} \}F\{_{nx1} = \{D\}_{nx1} \qquad 4.1$$

resolviendo 4.1

$$\}F\{_{nx1} = \left[f \right]^{-1}_{nxn} \}D\{_{nx1} \qquad 4.2$$

La ecuación 4.2 puede usarse para determinar las fuerzas formando los elementos de la matriz de rigidez de la misma estructuras



Si la estructura es deformada por fuerzas F_{11}, F_{21}, F_{n1}, a través de coordenadas tales que el desplazamiento $D_1 = 1$, mientras que $D_2 = D_3 = \ldots Dn = 0$, Fig.1(c)

$$\left\{\begin{matrix} F_{11} \\ F_{21} \\ F_{31} \\ F_{n1} \end{matrix}\right\} = \left[\, f \,\right]^{-1} \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\}$$

En forma similar, las fuerzas requeridas para conservar la estructura deformada tal que $D_2 = 1$, mientras que $D_1 = D_3 = \vdots \ldots = D_n = 0$ (fig.1d)

$$\left\{\begin{matrix} F_{12} \\ F_{22} \\ F_{32} \\ \vdots \\ F_{n2} \end{matrix}\right\} = \left[\, f \,\right]^{-1} \left\{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\}$$

En caso general, si $D_j = 1$, mientras todos los otros desplazamientos son cero, las ecuaciones serán:

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \ldots & F_{2_n} \\ F3 \; . \; . & \vdots \; . \; . & . \; . & . \\ F_{n1} & F_{n2} & & F_{nn} \end{bmatrix} = \left[\, f \,\right]^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

siendo las fuerzas Fij de la izquierda en esta ecuación los elementos de la matriz de rigideces, por lo tanto:

$$\left[\, K \,\right] = \left[\, f \,\right]^{-1} \quad \text{ó} \quad \left[\, K \,\right]^{-1} = \left[\, f \,\right] \qquad 4.3$$

La matriz de rigideces es la inversa de la de flexibilidades y viceversa, teniendo el mismo sistema de coordenadas para fuerzas y desplazamientos.

Sin embargo en el análisis por flexibilidad se transforma la estructura en isostática; y el sistema de coordenadas representan la localización y dirección de las restricciones y en cambio en rigideces, se agregan fuerzas para restringir desplazamientos de nudos, siendo su sistema de coordenada la localización y dirección de los desplamientos incógnitas; por lo tando la inversa de la matriz de flexibilidad utilizada en el método de las fuerzas en una matriz, en la cual los elementos son coeficientes de rigidez, pero no los que se utilizan en el análisis del método de rigidez y viceversa.

Propiedades de simetría.

Como se demostró en el teorema recíproco de Maxwell-Betti y con relación a la matriz de flexibilidades, hace que ésta matriz sea simétrica. Como la ecuación 4.3 indica que la matriz de rigedeces es la inversa de la matriz de flexibilidades, será también simétrica, es decir que los coeficientes de la matriz de rigideces serán entonces:

$$Kij = Kji \qquad 4.4$$

Otra propiedad importante es que los coeficientes de la diagonal principal f_{ii} ó K_{ii} deben ser positivos ya que para el cálculo de f_{ii} el desplazamiento ocurrirá en la coordenada i debida a una fuerza unitaria en i, teniendo ambos la misma dirección y en forma semejante para Kii, la fuerza necesaria enla coordenada i que provoca un desplazamiento unitario en i, tendrán la misma dirección.

Si en la ecuación (2.3) se substituyen los desplazamientos expresados en la ecuación 4.1, se tiene:

$$\left[W \right]_{1x1} = \frac{1}{2} \left\{ F \right\}^{T}_{nx1} \left[f \right]_{nxn} \left\{ F \right\} \quad (4.5)$$

y por otro lado, substituyendo la ecuación (3.2) de nuevo en la 4.1

$$\left[W \right]_{1x1} = \frac{1}{2} \left\{ D \right\}^{T} \left[K \right] \left\{ D \right\} \quad (4.6)$$

De las ecuaciones 4.5 y 4.6, los miembros de la derecha tienen forma cuadrática de las variables F o D y ésta es positivamente definida si tiene valores positivos para cualquier valor no nulo de la variable y será cero si F ó D son cero.

Por lo anterior, las ecuaciones 4.5 y 4.6 representan el trabajo externo de fuerzas a través de desplazamientos y esta cantidad debe ser positiva en una estructura estable, deduciendo que en esa forma cuadrática, las matrices $[f]$ y $[K]$ son matrices positivamente [illegible]finidas, siendo los determinantes de $[f]$ y $[K]$ mayores que cero.

Selección del método de las flexibilidades o de las rigideces.

Para seleccionar cualquiera de los dos métodos generales, es necesario haberse familiarizado con ellos, para poder decidir en cada caso cual sería de aplicación mas sencilla.

Sin embargo se pueden adelantar algunos comentarios:

1.- El número de incógnitas es en general mayor en el método de las rigideces que en flexibilidades, pero la formulación de las ecuaciones es mas sencilla y de mas fácil aplicación para programas de computadora, debido principalmente a la dificultad de programar la estructura primaria.

2.- Cuando el trabajo se hace con calculadoras y para sistemas relativamente pequeños, la selección dependerá de comparar el grado de hiperestaticidad en flexibilidades con el número de grados de libertad en rigideces.

5.- METODO DE LAS FLEXIBILIDADES.

En el inciso 3 se describió este método. A continuación se analizan en detalle la aplicación de matrices para su resolución.

5.1.- Matriz de transformación de fuerzas.

En una estructura estáticamente determinada cada una de las fuerzas internas de sus elementos puede expresarse en función de las fuerzas externas nodales, por medio de la ecuación de equilibrio:

$$p1 = b11\ F1 + b12 + \ldots + b1nFn$$

$$p2 = b21\ F1 + b22\ F2 + \ldots + banFn$$

$$\vdots$$

$$pm = bm1F1 + Bm2\ F2 + \ldots + bmnFn$$

en la cual p son las fuerzas internas y F el conjunto del sistema de cargas aplicada a la estructura.

No existe relación entre los subíndices de F y p

En forma matricial:

$$\}p\{ = [b]\}F\{ \qquad (5.1)$$

en la cual

$$b = \begin{bmatrix} b11 & b12\ldots & b1n \\ b21 & b22\ldots & ban \\ \vdots & & \\ bm1 & bm2\ldots & bmn \end{bmatrix}_{mxn} \qquad (5,2)$$

$[b]$ <u>es la matriz de transformación de fuerzas</u> que relaciona las fuerzas internas con las externas.

La matriz $[b]$ es una matriz rectangular y el elemento bij representa el valor de la componente de pi de la fuerza interna, producida por la fuerza externa Fj de valor unitario.

Cuando la estructura es hiperestática, las fuerzas internas no pueden determinarse en función de las cargas externas aplicando solamente ecuaciones de equilibrio. Sin embargo, haciendo la estructura isostática, que llamaremos primaria, suprimiendo las redundantes, como se hace en el método de las flexibilidades, se considera la estructura primaria sujeta primeramente a las cargas reales aplicadas y posteriormente a las redundantes. En esta forma, se pueden expresar las fuerzas internas de los elementos en función de las cargas externas F y de las redundantes o hiperestáticas R, como sigue:

$$\{p\} = \left[b_F \right] F + \left[b_R \right] R \qquad (5.3)$$

o utilizando la propiedad de subdivisión de matrices:

$$\{p\} = \left[b_F \; \vdots \; b_R \right] \left\{ \begin{array}{c} F \\ \hdashline R \end{array} \right\} \qquad (5.4)$$

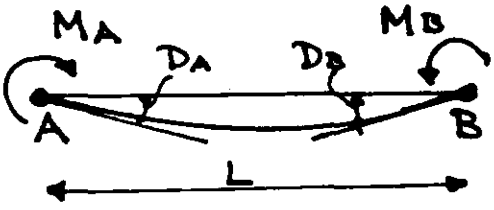
En la cual:

$\left[b_F \right]$ = matriz de transformación de fuerzas externas en la que cada columna representa los valores de p producidos por las fuerzas externas unitarias aplicadas a la estructura primaria con redundantes nulas.

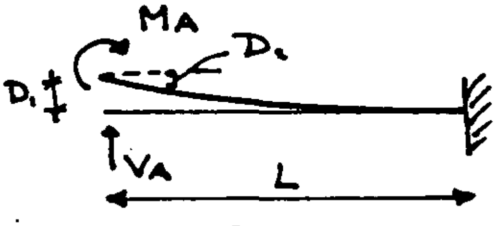
$\left[b_R \right]$ = Matriz de transformación de fuerzas redundantes en la que cada columna representa los valores de p producidos por redundantes unitarias aplicadas a la estructura primaria con fuerzas externas nulas.

5.2.- Solución matricial generalizada por el método de las flexibilidades.

Considerando un elemento aislado, despreciando los efectos de fuerza axial



(a)



(b)

$$[f_M] = \frac{1}{6EI}\begin{bmatrix} 2L^2 & 3L \\ 3L & 6 \end{bmatrix}$$

Los vectores de fuerzas internas y deformaciones se pueden expresar: $\{p\} = \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix}$; $\{D\} = \begin{Bmatrix} D_A \\ D_B \end{Bmatrix}$

quedando cada componente del vector desplazamiento con la misma componente del vector carga.

La matriz de flexibilidades de la barra será como se indicó anteriormente:

$$[f_M] = \frac{1}{6EI}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

y la relación con las deformaciones es:

$$\{Q\} = [f_M]\{P\} \qquad (5.5)$$

Los vectores de fuerzas internas y deformaciones quedarán como sigue:

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p1 \\ --- \\ p2 \\ -\cdot \\ -- \\ -- \\ pn \end{Bmatrix} \qquad D = \begin{Bmatrix} D\,1 \\ ---- \\ D\,2 \\ -.- \\ -- \\ --- \\ D\,n \end{Bmatrix}$$

Los subíndices se refieren a la designación de cada elemento en que se ha descompuesto la estructura.

En la ecuación 5.4 se puede ver por el principio de contragradiencia, tal y como se verá para el cálculo de los desplazamientos; que:

$$\begin{Bmatrix} D_F \\ ---- \\ D_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [b_F]^T \\ ----- \\ [b_R]^T \end{bmatrix} \{e\} \qquad (5.6)$$

Siendo D_F los desplazamientos debidos a $\{F\}$ y D_R los deplazamientos debidos a las redundantes $\{R\}$, obteniéndose:

$$\{D_F\} = [b_F]^T \{e\} \qquad (5.7)$$

$$\{D_R\} = [b_R]^T \{e\} \qquad (5.8)$$

Para calcular las redundantes, se substituye el valor $\{p\}$ de la ecuación de equilibrio 5.3 en la ecuación que relaciona deformaciones y fuerzas, expresada en ecuación (5.5):

$$\{e\} = [f_M]\{p\} = [f_M][b_F]\{F\} + [f_M][b_R]\{R\} \qquad (5.9)$$

Por último, si substituimos el valor de las deformaciones obtenidas en 5.9, en la ecuación de continuidad 5.8, se tendrá:

$$\{D_R\} = [b_R]^T \{e\}$$

$$= [b_R]^T [f_M] [b_F] \{F\} + [b_R]^T [f_M] [b_R] \{R\} \qquad 5.10$$

y debido al principio de compatibilidad de deformaciones, las discontinuidades impuestas para obtener la estructura primaria isostática no existen realmente, los valores de $\{D_R\}$ deben ser nulos:

$$[b_R]^T [f_M] [b_F] \{F\} + [b_R]^T [f_M] [b_R] \{R\} = 0 \qquad 5.11$$

Ecuación que permite calcular los valores de las redundantes.

El producto de las tres primeras matrices del primer miembro de la ecuación 5.11 y que están premultiplicando al vector F, representan la aplicación del principio de trabajos virtuales tal y como se expuso anteriormente en la ecuación 2.18. Este primer término da como resultado un vector de nRx1 y representa los desplazamientos debidos a las fuerzas aplicadas a la estructura.

En forma semejante, las tres primeras matrices del segundo término 5.11 y que están premultiplicando a las redundantes, representan la matriz de flexibilidades ensamblada de la estructura, tal y como se expreso en la ecuación 2.25. Esta matriz será siempre cuadrada, simétrica, no singular y de orden n R x n R.

Este segundo término del primer miembro de la ecuación 5.11 representa físicamente los desplazamientos debidos a las redundantes.

La forma mas general de la ecuación 5.11 se escribe de la manera siguiente:

$$\left[b_R \right]^T \left[f_M \right] \left[b_F \right] \left\{ F \right\} + \left[b_R \right]^T \left[f_M \right] \left[b_R \right] \left\{ R \right\} = \left\{ D_a \right\} \qquad 5.12$$

El vector D_a indica los desplazamientos reales que ocurren en los coordenadas seleccionadas en la estructura primaria, siendo iguales a cero generalmente en la práctica o iguales a los desplazamientos reales impuestos D_a, como serían asentamientos de apoyos, giros, efectos de temperatura, resortes elásticos, etc.

De la ecuación 5.11:

$$R = -\left[f \right]^{-1} \left[b_R \right]^T \left[f_M \right] \left[b_F \right] \left\{ F \right\} \qquad 5.18$$

Con las redundantes R obtenidas, aplicando el principio de superposición se obtienen los elementos mecánicos:

$$\left\{ p \right\} = \left[b_F \right] \left\{ F \right\} + \left[b_R \right] \left\{ R \right\} \qquad 5.3$$

Las ecuaciones anteriores son válidas para cualquier tipo de estructuras: armaduras, vigas, marcos, etc.., tomando las flexibilidades correspondientes de axial, flexión, etc.

Para el caso de armaduras, es conveniente aplicar la ecuación equilibrio:

$$\} p \{ \; = [b_F] \; \} F \{ \; = \} po \{$$

siendo $\} po \{$ el vector de fuerzas internas en las barras debidas a fuerzas externas $\} F \{$ aplicada en la estructura primaria, quedando la ecuación 5.11

$$[b_R]^T \; [f_M] \; \} po \{ + [b_R]^T \; [f_M] \; \} b_R \{ \; \} R \{ \; = \; 0 \qquad 5.20$$

ecuaciones en las cuales no será necesario calcular $[b_F]$

Para calcular los desplazamientos, la ecuación 5.3 puede escribirse:

$$\} p \{ = \left[b_F \; \vdots \; b_R \right] \} \begin{array}{c} F \\ \hdashline R \end{array} \{ \qquad (5.4)$$

$$\} \begin{array}{c} D_F \\ \hdashline D_R \end{array} \{ = \begin{bmatrix} b_F^T \\ \hdashline b_R^T \end{bmatrix} \} Q \{ \qquad (5.21)$$

En la cual: $\} D_F \{$ = desplazamientos debidos a $\} F \{$

$\} D_R \{$ = desplazamientos debidos a las redundantes

Por el principio de contragradiencia:

$$\}D_F\{ = [b_F]^T \}e\{ \qquad (5.22)$$

$$\}D_R\{ = [b_R]^T \}e\{ \qquad (5.23)$$

Pero por continuidad o compatibilidad, dado que los elementos de la estructura no están realmente "cortados", los valores de D_R deben ser nulos.

Por otro lado como:

$$\}e\{ = [f_M] \}p\{ \qquad (5.24)$$

que es la ley de Hooke al revés, substituyendo en 5.22

$$\}D\{ = [b_F]^T \}e\{ = [b_F]^T [f_M] \}p\{ \qquad (5.25)$$

Esta ecuación permite calcular los desplazamientos aplicando una fuerza unitaria en la estructura primaria isostática.

5.21.- Caso de fuerzas aplicadas en los elementos

La solución matricial generalizada requiere que las fuerzas estén aplicadas en los nudos, lo cual supone que en el caso de vigas y marcos que el momento flexionante entre nudos varía linealmente y que los desplazamientos entre nudos son nulos.

Sin embargo como en la práctica las cargas se aplican en cualquier punto, habrá que transladarlas a los nudos previamente seleccionados, calculando además los desplazamientos locales debidos a estas cargas en los nudos externos del elemento considerado.

Las deformaciones locales deben tomar en cuenta las condiciones de frontera, establecidas para cada barra, cuando se subdivide la estructura en elementos. La expresión para obtener los desplazamientos según el sistema de redundantes basada en el teorema de trabajos virtuales, será:

$$\{D_I\} = [b_R]^T \{D''\}$$

en la cual $\{D''\}$ es el vector de desplazamientos impuesto a cada elemento debido a las cargas aplicadas sobre él.

5.3- Resumen de aplicación del método de las flexibilidades

5.31- Estructuras isostáticas.

a) Las fuerzas internas se obtienen con la aplicación de la ecuación de equilibrio:

$$\{P\} = [b_F]\{F\}$$

b) Los desplazamientos nodales se calcularán:

$$\{D\} = [b_M]^T [f_M][b_F]\{F\} = [f]\{F\}$$

(Nota.- En el caso de vigas o marcos cargados en los elementos deberán trasladarse las cargas a los nudos).

El ejemplo No. 5 muestra la aplicación del método a una armadura isostática.

5.32.- Estructuras hiperestáticas.

a) Definir la estructura primaria y por lo tanto especificar cuales son las redundantes

b) Calcular vector de fuerzas y la matriz de transformación de redundantes $[b_R]$ y la asociada a las cargas $[b_F]$

c) Calcular la matriz de flexibilidad no ensamblada de los elementos $[f_M]$

d) Calcular el producto $[b_R]^T [f_M][b_F]$ que es la matriz de flexib. asociada a las cargas

e) Calcular la matriz de flexibilidades ensamblada de la estructura

$$[f]_{RxR} = [b_R]^T [f_M][b_R]$$

f) Plantear y resolver las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones:

$$D_A = [D_{xF}] \}F\{ + [D_{RR}] R = Dx \overset{\acute{o}}{=} 0$$

g) Si se desea calcular los desplazamientos.

$$D_A = [b_F]^T [f_M] \}P\{$$

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de la secuela mencionada.

5.4-Variante propuesta para el cálculo de la matriz de flexibilidades en el caso de flexión. (ref. 3)

En vigas y marcos, la matriz de flexibilidades de cada elemento está formada por cuatro términos, como se vió en la ecuación **2.21A**

$$\left[f_M \right] = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para lograr que la matriz de flexibilidades sea diagonal, como sucede en el caso de las armaduras, debido a la forma de multiplicación del producto:

$$\int m \quad \frac{M}{EI} \quad dx$$

si en una estructura de n elementos, se llama $\left\{ p \right\}$ a las fuerzas internas, y definimos tres ordenadas por elemento, en tal forma:

que $pi = \left\{ \begin{matrix} Ma \\ Mb \\ Mc \end{matrix} \right\}$, sean los momentos flexionantes de acuerdo con la Fig. [illegible]

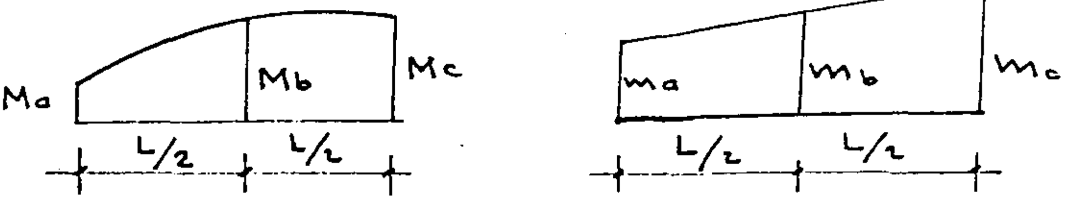


Fig. 2

Integrando un polinomio de grado 2, de la forma $Y = Ax^2 + Bx + C$, la integral será una función lineal de las ordenadas Ya, Yb y Yc.

En el caso de carga uniformemente repartida la variación de M será parabólica y como la variación de m siempre es lineal, la integración del producto m M será:

$$\left[f_M \right]_i = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(2.21B)}$$

que es semejante a la fórmula de Simpson. (Ref. 5), esta matriz será de la misma forma si se integra el producto M lineal multiplicado por m.

Se puede también diagonalizar la matriz de flexibilidad para el caso de variación de M en tercer o cuatro grado, integrando la ecuación de una cónica de 3° ó 4°grado, debido a la variación lineal d .

Por tratarse de matrices diagonales, la ecuación 3.10 se puede almacenar en un vector de la forma:

$$\left\{ f_M \right\}_i = \frac{L}{6EI} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{matrix} \right\} \qquad (2.21C)$$

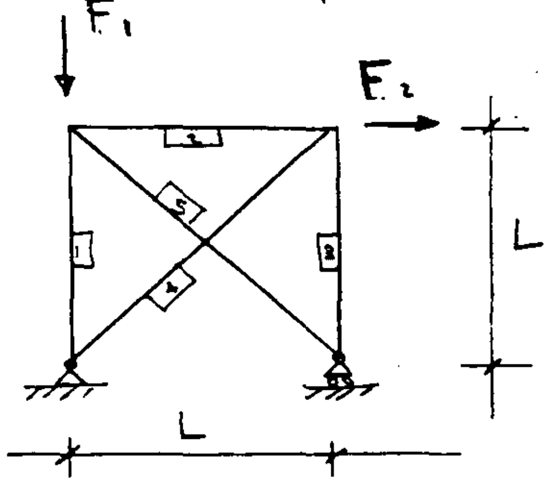
La ecuación **2.21C**, presenta ventajas importantes con relación a la matriz de flexibilidades en flexión de la forma (2.**20A**) :

a) La matriz es diagonal, por lo tanto de mas fácil manejo operativo, a pesar de tener un renglón mas.

b) En el caso de cargas uniformemente repartidas, utilizando la matriz diagonal,no es necesario pasar las cargas a los nudos y luego trasponerlas como se indicó en la pág. 35, simplificándose en forma considerable el trabajo.

El ejemplo No. 12 muestra la forma de aplicar la secuela de cálculo así como la variante mencionada, para resolver un marco rígido mediante el método de las flexibilidades.

EJEMPLO No.5- Calcular las fuerzas en las barras resolviendo por flexibilidad y los desplaz. corresp. en la dirección de F1 y F2



$$\frac{L}{AE} = \text{constante.}$$

1.- La armadura es isostática

2.- La ecuación de equilibrio es

$$\{P\} = [b_F]\{F\}$$

Cálculo de b_F: $\qquad$ Cálculo de $\{F\}$

$$[b_F]_{5\times2} = \begin{array}{cc} F_1=1 & F_2=1 \\ \left[\begin{matrix} +1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{matrix}\right] \end{array} \; ; \qquad \{F\} = \begin{Bmatrix} -F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_1 \\ 0 \\ -F_2 \\ \sqrt{2}F_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3.- Cálculo de desplazamientos

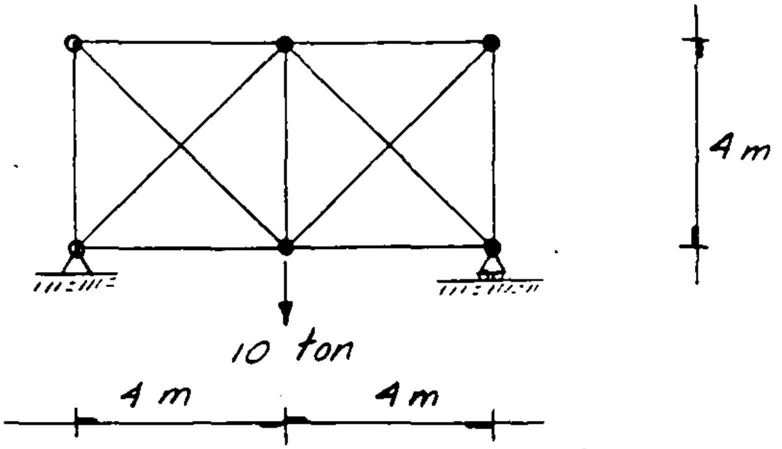
$$\{D\} = \underbrace{[b_F]^T [f_M] [b_F]}_{[f]} \{F\} \; ; \qquad [f_M] = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$[f] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1/E \\ 3/F_1 \end{Bmatrix}$$

Ejemplo No. 6

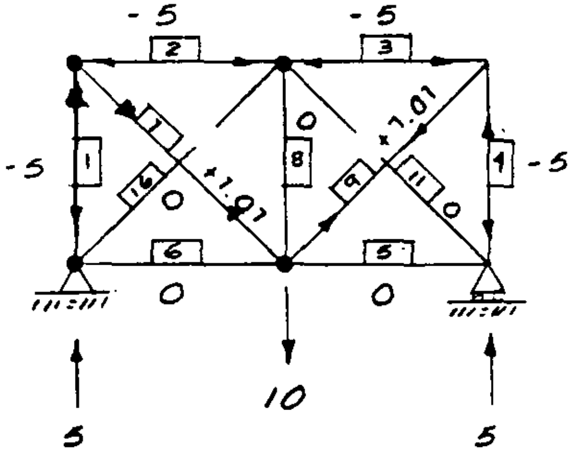
Resolver la armadura por flexibilidades.



AE = cte.

Solución :

1. – La estructura es hiperestática en 2° grado y la estructura primaria seleccionado será la siguiente :



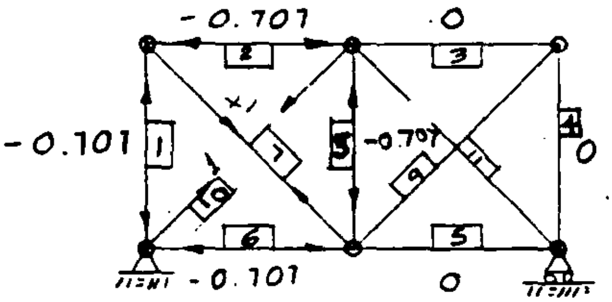
El vector de fuerzas interna:

$p_0 = [b_F]\}F\{$

$$\text{El vector} \left\{ \begin{matrix} p_0 \\ 11 \times 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -5 \\ -5 \\ -5 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ +7.07 \\ 0 \\ +7.07 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

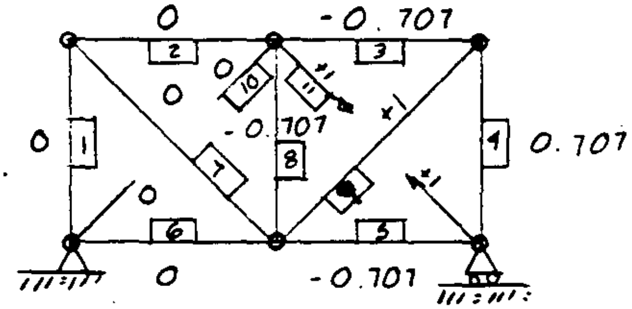
2) Obtención de $[b_R]_{9\times 2}$

1ª columna de $[b_R]$ $\qquad R_1 = 1$



$$\begin{matrix} -0.707 \\ -0.707 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.709 \\ +1 \\ -0.707 \\ 0 \\ +1 \\ 0 \end{matrix}$$

2ª columna de $[b_R]$ $\qquad R_2 = 1$



$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -0.707 \\ -0.707 \\ -0.707 \\ 0 \\ 0 \\ -0.707 \\ +1 \\ 0 \\ +1 \end{matrix}$$

$$[b_R] = \left[\begin{array}{cc} -0.707 & 0 \\ -0.707 & 0 \\ 0 & -0.707 \\ 0 & -0.707 \\ 0 & -0.707 \\ -0.707 & 0 \\ +1 & 0 \\ -0.707 & -0.707 \\ 0 & +1 \\ \hdashline +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{array}\right]$$

Cálculo de $\left[f\right]$

$$\left[f\right]_{11\times 11} = \begin{bmatrix} 4 &&&&&&&&&& \\ & 4 &&&&&&&&& \\ && 4 &&&&&&&& \\ &&& 4 &&&&&&& \\ &&&& 4 &&&&&& \\ &&&&& 4 &&&&& \\ &&&&&& 5.65 &&&& \\ &&&&&&& 4 &&& \\ &&&&&&&& 5.65 && \\ &&&&&&&&& 5.65 & \\ &&&&&&&&&& 5.65 \end{bmatrix} \times \frac{1}{AE} \equiv \frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 5.65 \\ 4 \\ 5.65 \\ 4 \\ 5.65 \\ 5.65 \\ 5.65 \end{bmatrix}$$

Calculando el producto $\left[b_R\right]^T\left[f\right]\left[p_o\right]$

$$\left[f\right]\left[p_\circ\right] = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 5.65 \\ 4 \\ 5.65 \\ 5.65 \\ 5.65 \end{bmatrix} \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ +1.01 \\ 0 \\ +1.01 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -20 \\ -20 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ +40 \\ 0 \\ +40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[b_R\right]^T\left[f\right]\left[p_o\right] = \begin{bmatrix} -0.701 & -0.101 & 0 & 0 & 0 & -0.701 & +1 & -0.101 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.701 & -0.107 & -0701 & 0 & 0 & -0.701 & +1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -20 \\ -20 \\ -20 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ +40 \\ 0 \\ +40 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underbrace{\left[f_F\right]\left\{p_\circ\right\}}_{D_{\times F}} = \begin{Bmatrix} 68.28 \\ 68.28 \end{Bmatrix} \times \frac{1}{AE}$$

Ahora calculando el producto $[b_R]^T [f_M] [b_R]$

$$\underset{11\times 11}{[f_M]}\,\underset{11\times 2}{[b_R]} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 5.65 \\ 4 \\ 5.65 \\ 5.65 \\ 5.65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.70.7 & 0 \\ -0.10.7 & 0 \\ 0 & -0.701 \\ 0 & -0.701 \\ 0 & -0\ 701 \\ -1 & \\ -0.10.7 & 0 \\ +1 & 0 \\ -0.707 & -0.701 \\ 0 & 1 \\ +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.83 & \iota \\ -2.83 & 0 \\ 0 & -2.83 \\ 0 & -2.83 \\ 0 & -2.83 \\ -2.83 & 0 \\ +5.65 & 0 \\ -2.83 & -2.83 \\ 0 & +5.65 \\ 5.65 & 0 \\ 0 & +5.65 \end{bmatrix}$$

$$[f] = [b_R]^T [f_M]\,[b_R] = \begin{bmatrix} -0.707 & -0.701 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & +1 & -0.707 & 0 & +10 \\ 0 & 0 & 0.707 & -0.701 & -0.701 & 0 & 0 & -0.707 & 1\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.83 & 0 \\ -2.83 & 0 \\ 0 & -2.83 \\ 0 & -2.83 \\ 0 & -2.83 \\ -2.83 & [illegible] \\ +5.65 & 0 \\ -2.83 & -2.83 \\ 0 & +5.65 \\ +5.65 & 0 \\ 0 & +5.65 \end{bmatrix}$$

$$[f] = \begin{bmatrix} 19.32 & 2 \\ 2 & 19.32 \end{bmatrix} \frac{1}{AE}$$

La ecuación de compatibilidad de deformación será:

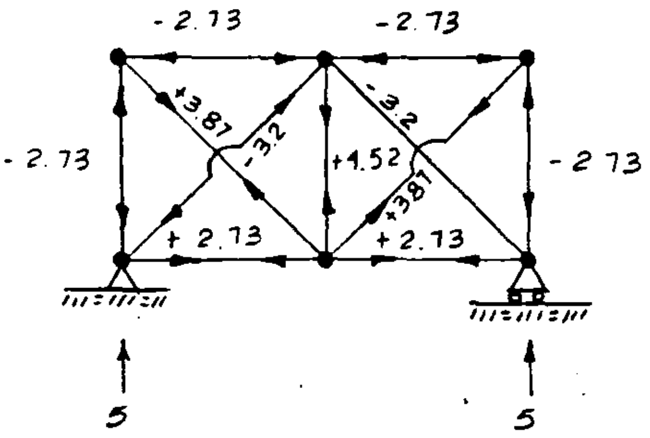
$$\{D_{xF}\} + \{f\}\{R\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} 68.28 \\ 68.28 \end{Bmatrix} \times \frac{1}{A\ E} + \begin{bmatrix} 19.32 & 2 \\ 2 & 19.32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \{0\} ; \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.2 \\ 3.2 \end{Bmatrix}$$

Las fuerzas en las barras serán :

$$\left\{ p \right\} = \left\{ po \right\} + \left[b_R \right] \left\{ R \right\} = \left\{ 0 \right\}$$

$$\left\{ \begin{matrix} -5 \\ -5 \\ -5 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ +7.07 \\ 0 \\ +7.07 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} + \begin{bmatrix} -0.107 & 0 \\ -0.707 & 0 \\ 0 & -0.707 \\ 0 & -0.707 \\ 0 & -0.707 \\ -0.707 & 0 \\ +1 & 0 \\ -0.707 & -0.707 \\ 0 & +1 \\ +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} -3.2 \\ -3.2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -2.73 \\ -2.73 \\ -2.73 \\ -2.73 \\ +2.73 \\ +2.73 \\ +3.81 \\ +4.52 \\ +3.81 \\ -3.2 \\ -3.2 \end{matrix} \right\}$$

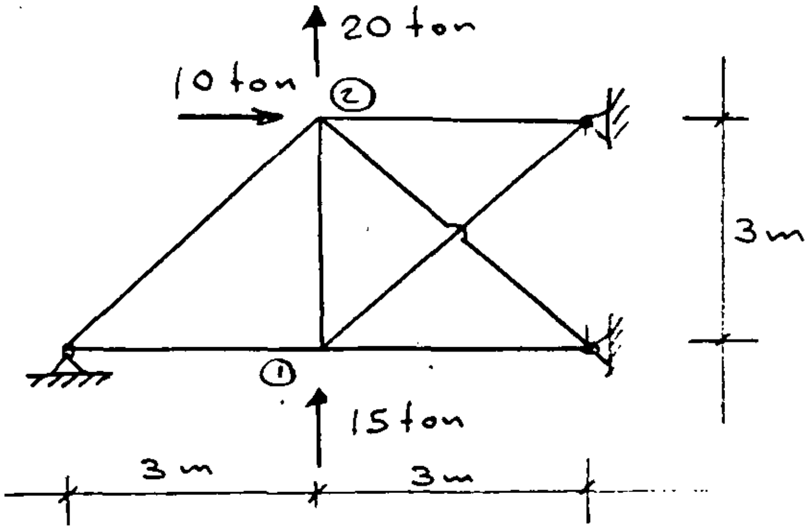


+ = tensión

− = compresión

Fuerzas finales en las barras (ton)

Ejemplo No. 7 — Resolver la armadura por flexibilidades y calcular $\{P\}$, $\begin{Bmatrix} D_{1x} \\ D_{2r} \end{Bmatrix}$

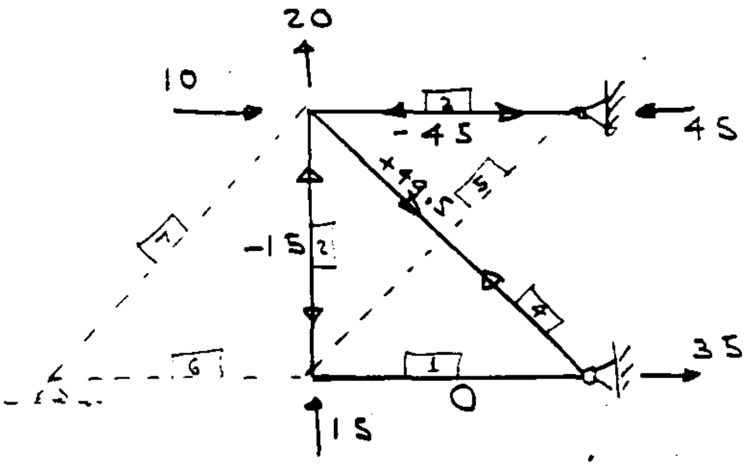


$A = 30\ cm^2$

$E = 2.1 \times 10^6\ Kg/cm^2$

Solución 1) CALCULO DE FUERZAS

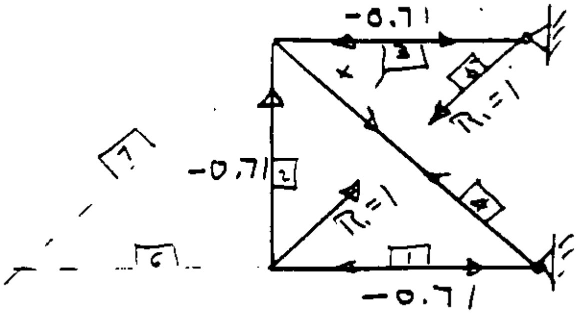
La estructura es hiperestática en tercer grado y se seleccionará la siguiente estructura primaria



Cálculo de $P_0 =$ $\begin{Bmatrix} 0 \\ -15 \\ -45 \\ +49.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

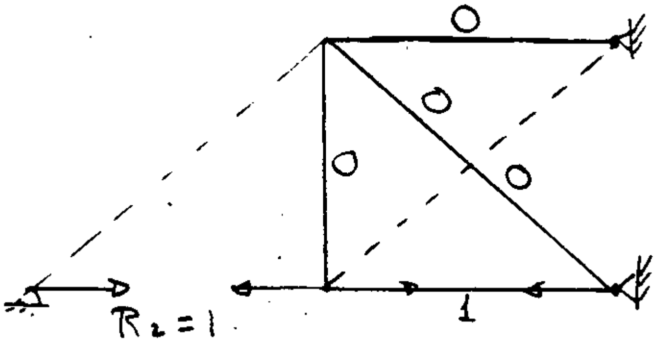
Obtención de $[b_R]$

1) 1ª columna de $[b_R]$; $R_1 = 1$



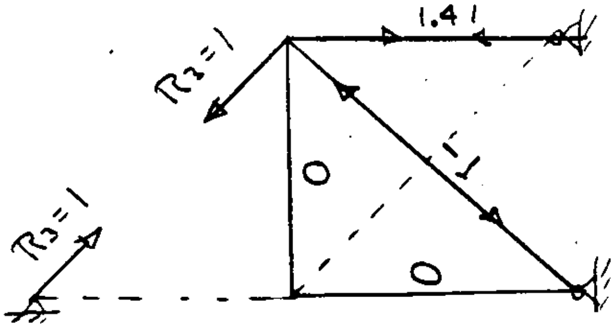
- 0.71
- 0.71
- 0.71
+ 1
+ 1
0
0

2ª columna de $[b_R]$; $R_2 = 1$



1
0
0
0
0
1
0

3ª columna de $[b_R]$; $R_3 = 1$



0
0
+1.41
-1
0
0
1

$$[b_R] = \begin{bmatrix} -0.71 & 1 & 0 \\ -0.71 & 0 & 0 \\ -0.71 & 0 & +1.41 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculo de $[f]$

$$[f_M] = \frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 3 & & & & & & \\ & 3 & & & & 0 & \\ & & 3 & & & & \\ & & & 4.24 & & & \\ & 0 & & & 4.24 & & \\ & & & & & 3 & \\ & & & & & & 4.24 \end{bmatrix}$$

$$[f] = [b_R]^T [f][b_R] = \frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 13.01 & -2.13 & -7.24 \\ -2.13 & 6 & 0 \\ -7.24 & 0 & 14.44 \end{bmatrix}$$

Calculando ahora

$$[b_R]^T [f] \{p_0\} = \frac{1}{AE}\begin{Bmatrix} 342.18 \\ 0 \\ +400 \end{Bmatrix}$$

La ecuación de compatibilidad de deformaciones será:

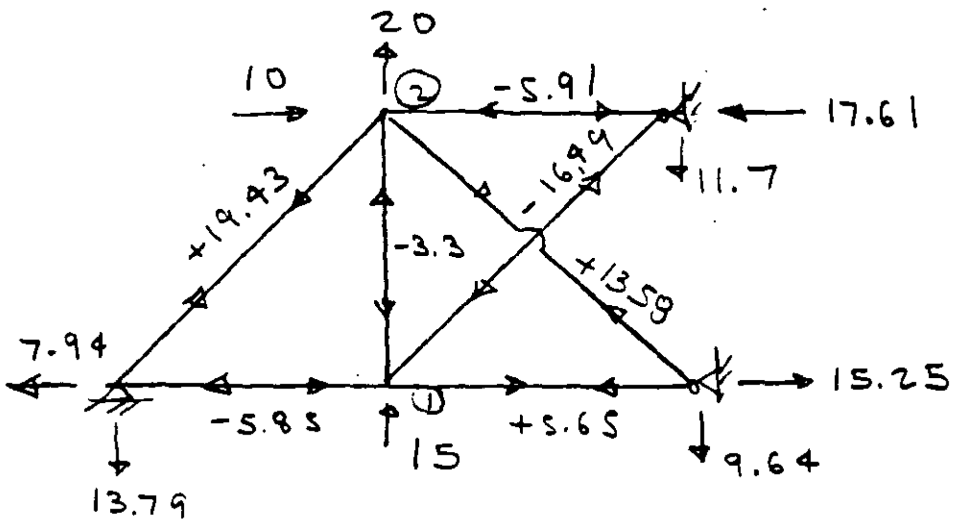
$$\{D_{xF}\} + [f]\{R\} = \{0\}$$

$$\frac{1}{AE}\begin{Bmatrix} 342.18 \\ 0 \\ +400 \end{Bmatrix} + \frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 13.01 & -2.13 & -7.24 \\ -2.13 & 6 & 0 \\ -7.24 & 0 & 14.44 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$\therefore \quad \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16.49 \\ -5.85 \\ +19.43 \end{Bmatrix} \text{ ton}$$

Los valores de las fuerzas en las barras será

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -15 \\ -45 \\ +49.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} +5.65 \\ 11.70 \\ 39.09 \\ -35.92 \\ -16.49 \\ -5.85 \\ +19.43 \end{Bmatrix}}_{[b_R]\{R\}} = \begin{Bmatrix} +5.65 \\ -3.30 \\ -5.91 \\ +13.58 \\ -16.49 \\ -5.85 \\ +19.43 \end{Bmatrix}$$



2) CALCULO DE DESPLAZAMIENTO:

Como se obtuvo directamente {po} del equilibrio de la armadura bajo las cargas, se tendrá que calcular $[b_F]$

$$[b_F] = \begin{array}{cccc} F_{x_1}=1 & F_{y_1}=1 & F_{x_2}=1 & F_{y_2}=1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & +1.41 & 0 & +1.41 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\text{Como } \{D\} = [b_F]^T [f] \{P\}$$

$$D_{1x} = \{-1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\} \begin{Bmatrix} +16.95 \\ -9.90 \\ -17.73 \\ +57.57 \\ -69.91 \\ -17.55 \\ +82.39 \end{Bmatrix} \frac{1}{AE} = \frac{16.95}{AE}$$

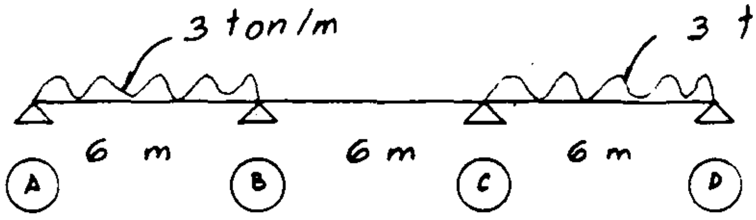
$$= 0.00027\ m$$

$$D_{2y} = \{0\ 0\ -1\ +1.41\ 0\ 0\ 0\} \begin{Bmatrix} -17.73 \\ +57.57 \end{Bmatrix} \times \frac{1}{AE} = \frac{98.90}{AE}$$

$$= 0.00157\ m$$

Ejemplo No.- 8

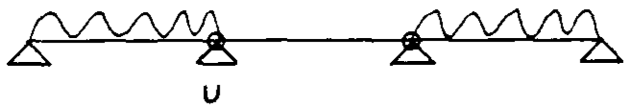
Resolver la viga siguiente por el método de la flexibilidad:

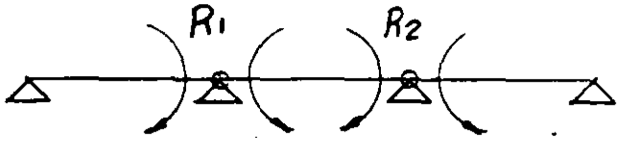


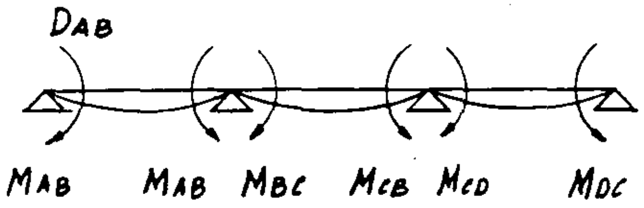
$EI = cte.$

Solución.-

El grado de hiperestaticidad es dos y se seleccionará la siguiente estructura primaria:





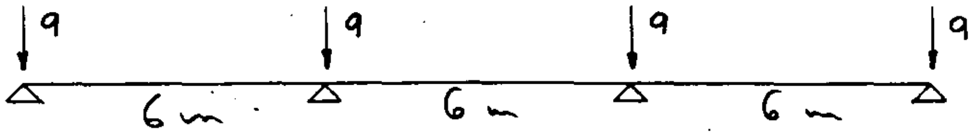


Los vectores de fuerzas y desplazamientos será:

$$F = \begin{Bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \\ M_{BC} \\ M_{CB} \\ M_{CD} \\ M_{DC} \end{Bmatrix} \qquad D = \begin{Bmatrix} D_{AB} \\ D_{BA} \\ D_{BC} \\ D_{CB} \\ D_{CD} \\ D_{DC} \end{Bmatrix}$$

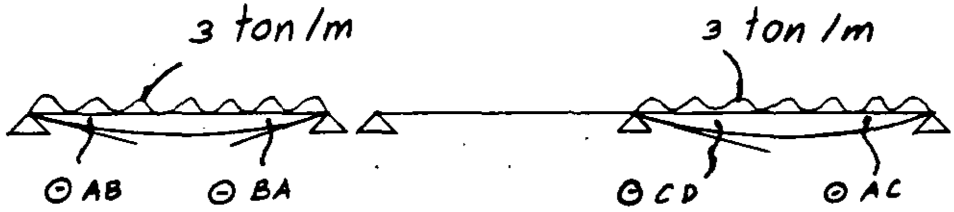
Como el sistema de fuerzas externas no está aplicado a los nudos, habra que trasladarlo a los apoyos y calcular los giros en los extremos de las barras

$$\Theta_E = \int m \frac{M}{EI} dx$$



El vector de carga será:

$$F = \begin{Bmatrix} -9 \\ -9 \\ -9 \\ -9 \end{Bmatrix}$$



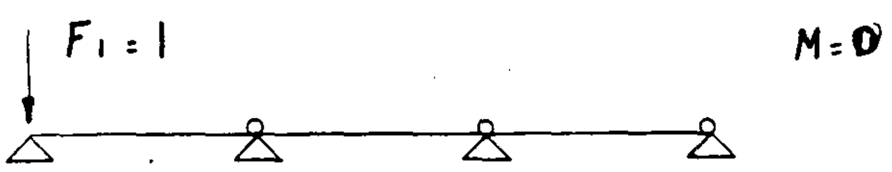
$$\Theta_{BA} = \Theta_{BC} = \Theta_{CD} = \Theta_{DC} = \frac{1}{3} Lik = \frac{27}{EI}$$

El vector de desplazamiento será:

$$\left\{ D_1 \right\} = \begin{Bmatrix} 27 \\ 27 \\ 0 \\ 0 \\ 27 \\ 27 \end{Bmatrix} \frac{1}{EI}$$

Cálculo de matrices de transformación de fuerzas.

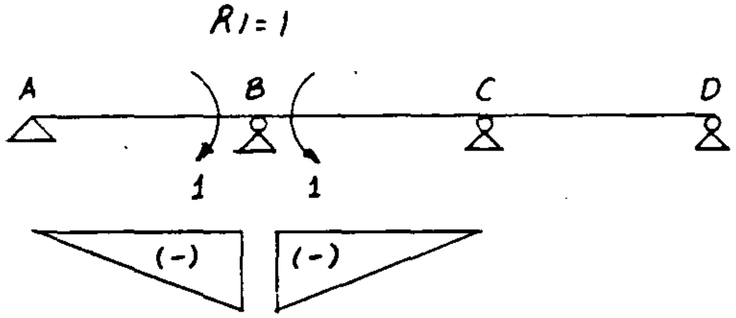
Trazando los diagramas de momentos debidos a fuerzas unitarias y redundantes unitarias:

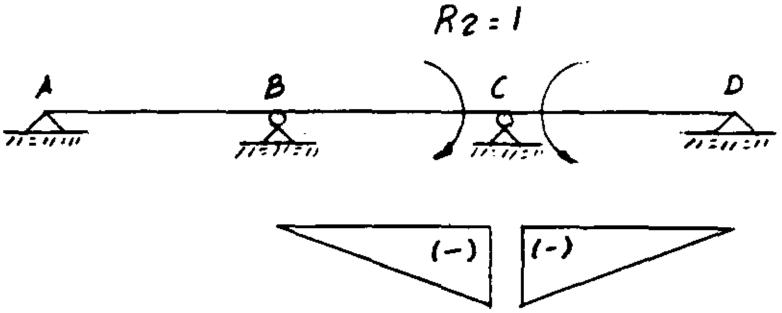


Para las condiciones $F_2 = 1$, $F_3 = 1$ y $F_4 = 1$ tampoco producen momentos flexionales, por lo tanto la matriz $[b_F]$ será:

$$[b_F] = 0$$

Cálculo de $[b_R]$





La matriz de transformación de redundantes será:

$$\underset{6 \times 2}{[b_R]} = \begin{array}{c|cc} & R_1 & R_2 \\ \hline M_{AB} & 0 & 0 \\ M_{BA} & -1 & 0 \\ M_{BC} & -1 & 0 \\ M_{CB} & 0 & -1 \\ M_{CD} & 0 & -1 \\ M_{DC} & 0 & 0 \end{array} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculo de $[f_M]$

La matriz de flexibilidades no ensamblada será:

$$[f_M] = \begin{bmatrix} [f_{AB}] & & \\ & [f_{BC}] & \\ & & [f_{CD}] \end{bmatrix} = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

El producto $\left[b_R\right]^T\left[f_M\right]\left[b_F\right] = 0$

Cálculo del producto $\left[b_R\right]^T\left[f_M\right]\left[b_R\right]$, que es la matriz de flexibilidades ensamblada

$$\left[f\right] = \left[b_R\right]^T\left[f_M\right]\left[b_R\right] = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Los desplazamientos debidos a las cargas en las barras, referidas al sistema general serán:

$$\left\{D_1\right\} = \left[b_R\right]\left\{D\right\} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{27}{EI}\begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Por lo cual los desplazamientos totales debidos a las cargas serán:

$$\left\{D_{xF}\right\} = \left[f_F\right]\left\{F\right\} + \left[D_1\right] = 0 + \frac{27}{EI}\begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \frac{27}{EI}\begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

y la ecuación de compatibilidad de deformaciones será:

$$\left\{D_{xF}\right\} + \left[f\right]\left\{R\right\} = \left\{0\right\}$$

$$\frac{27}{EI}\begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \left\{0\right\}$$

de donde: $\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.4 \\ 5.4 \end{Bmatrix}$ ton-m

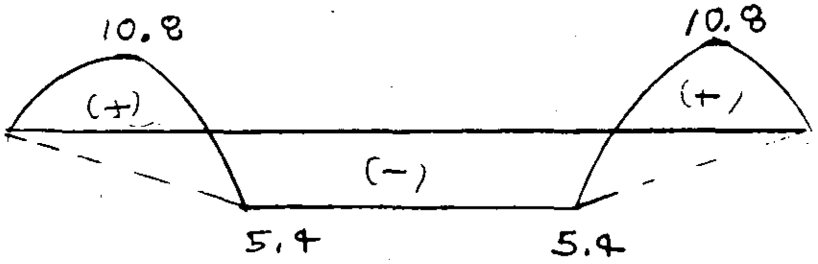
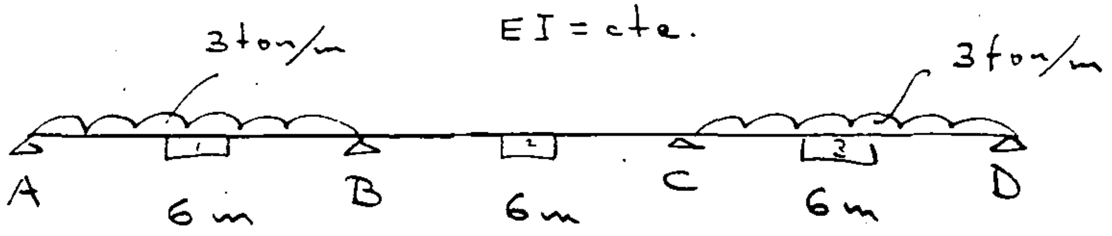


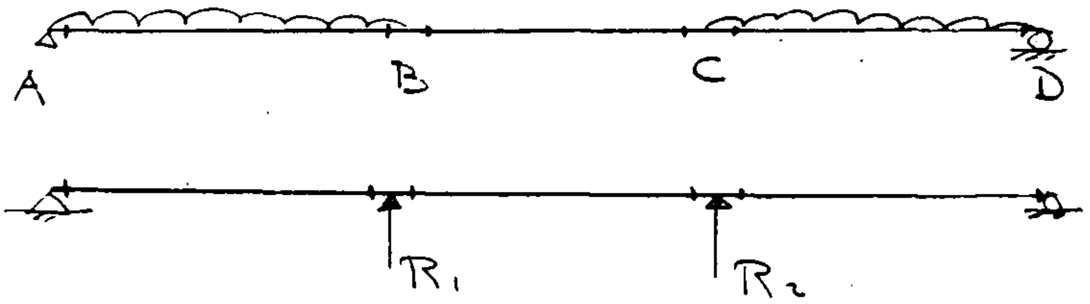
Diagrama de momentos flexionantes (ton-m)

EJEMPLO No 9 - Resolver la misma viga del ejemplo anterior por flexibilidades, utilizando otra estructura primaria.



Solución

1) Grado de hiperestaticidad = 2 y se selecciona la siguiente estructura primaria

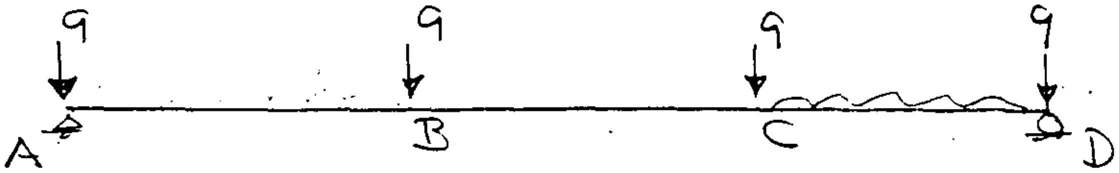


Los vectores de fuerzas y desplazamiento serán

$$F = \begin{Bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \\ M_{BC} \\ M_{CB} \\ M_{CD} \\ M_{DC} \end{Bmatrix} , \quad D = \begin{Bmatrix} D_{AB} \\ D_{BA} \\ D_{BC} \\ D_{CB} \\ D_{CD} \\ D_{DC} \end{Bmatrix}$$

Como el sistema de fuerzas externas no está aplicado en los nudos, habrá que trasladarlo a los apoyos y calcular los giros en los extremos de cada barra

Igual que en el ejemplo anterior

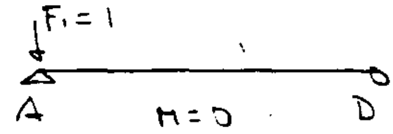


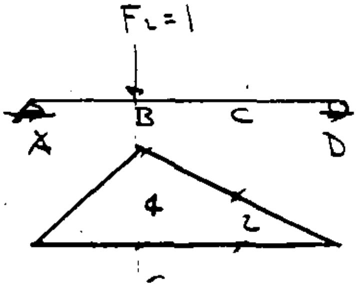
El vector de carga será:

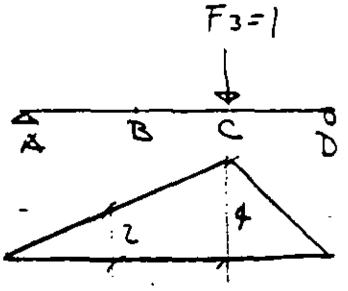
$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \end{Bmatrix} \quad y \quad \Theta_{AB} = \Theta_{BA} = \Theta_{CD} = \Theta_{DC} = \frac{27}{EI}$$

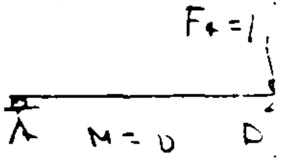
(valores ya calculados) $D = \begin{Bmatrix} 27 \\ 27 \\ 0 \\ 0 \\ 27 \\ 27 \end{Bmatrix}$

Cálculo de las matrices de transformación de fuerzas.



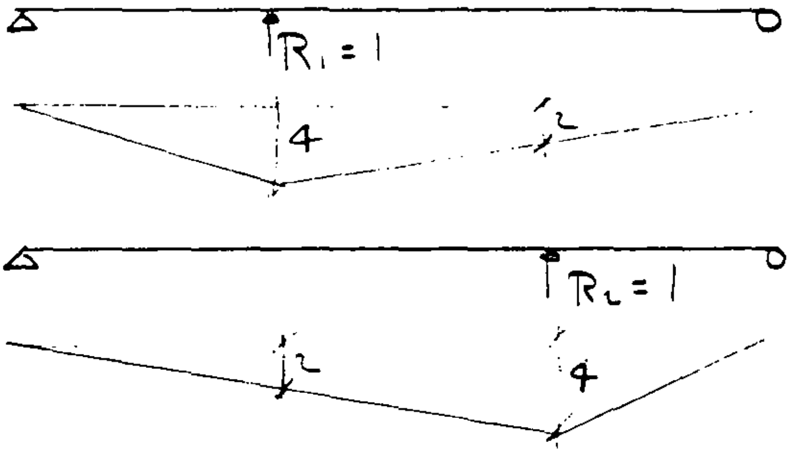






$$[b_F] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad [f_M] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & 1 & 2 & & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $[b_R]$



$$[b_R] = \begin{array}{cc} R_1=1 & R_2=1 \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -4 & -2 \\ -4 & -2 \\ -2 & -4 \\ -2 & -4 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Cálculo de $[f_F] = [b_R]^T [f_M] [b_F]$

$$[f_F] = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 0 & 96 & 84 & 0 \\ 0 & 84 & 96 & 0 \end{bmatrix}$$

∴ Los desplazamientos debidos a las cargas serán: los nodales + debidos cargas repartidas

$$[f_F]\{F\} + [b_R]^T\{D_!\} = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 0 & 96 & 84 & 0 \\ 0 & 84 & 96 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -9 \\ -9 \\ -9 \\ -9 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -4 & -4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -1620 \\ -1620 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -162 \\ -162 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -1782 \\ -1782 \end{Bmatrix}$$

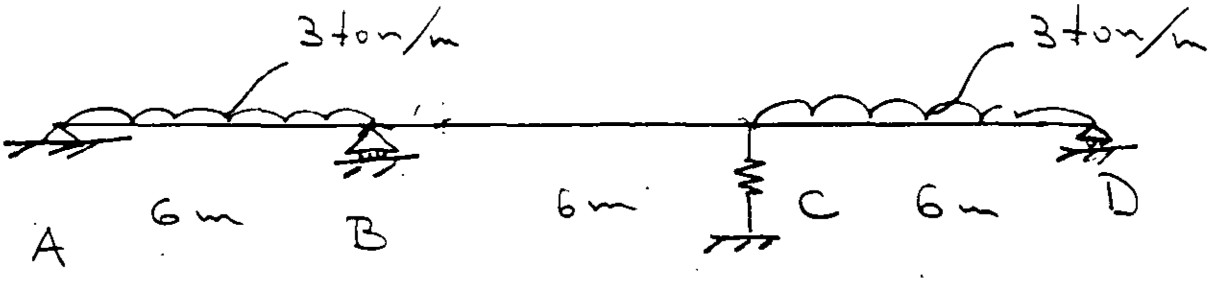
$$[f] = [b_R]^T [f_M] [b_R] = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 96 & 84 \\ 84 & 96 \end{bmatrix}$$

La ecuación de compatibilidad de deformaciones será: $\{D_{xF}\} + \{D_{xR}\} = \{0\}$

$$\frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -1782 \\ -1782 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 96 & 84 \\ 84 & 96 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.90 \\ 9.90 \end{Bmatrix} \text{ ton}$$

EJEMPLO No 10 - Resolver la viga de los dos ejemplos anteriores, sabiendo que en C hay un apoyo elastico



$$k_{resorte} = \frac{EI}{20}$$

Solución.-

1) Los cálculos serán idénticos al los del ejemplo , salvo las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones que serán

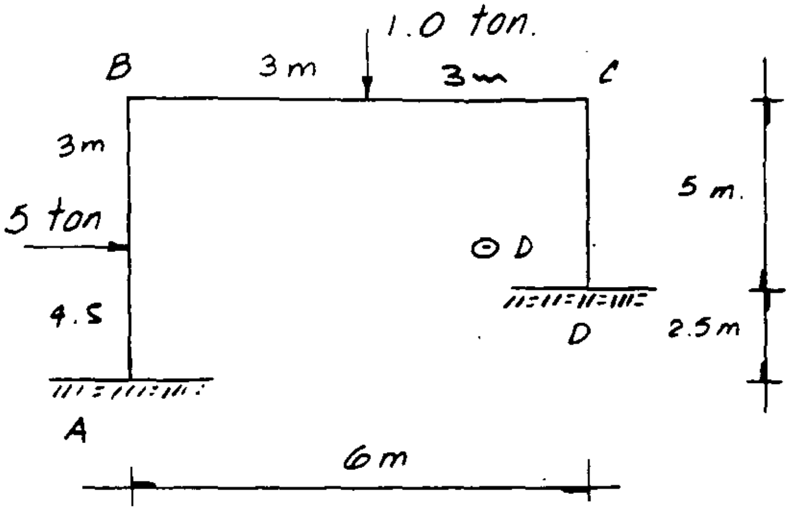
$$\{D_{xF}\} + \{D_{xR}\} = \begin{Bmatrix}\Delta_B \\ \Delta_C\end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{EI}\begin{Bmatrix}-1782 \\ -1782\end{Bmatrix} + \frac{1}{EI}\begin{bmatrix}96 & 84 \\ 84 & 96\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}R_1 \\ R_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0 \\ -\frac{R_2}{k_{res}}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}R_1 \\ R_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}13.98 \\ 5.24\end{Bmatrix} \text{ton}$$

Ejemplo No. 11

Resolver por flexibilidades considerando efectos de flexión y calcular los desplazamientos de los nudos.

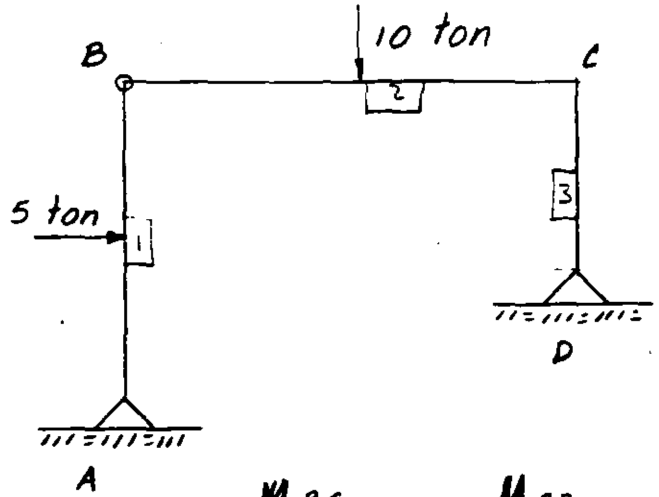


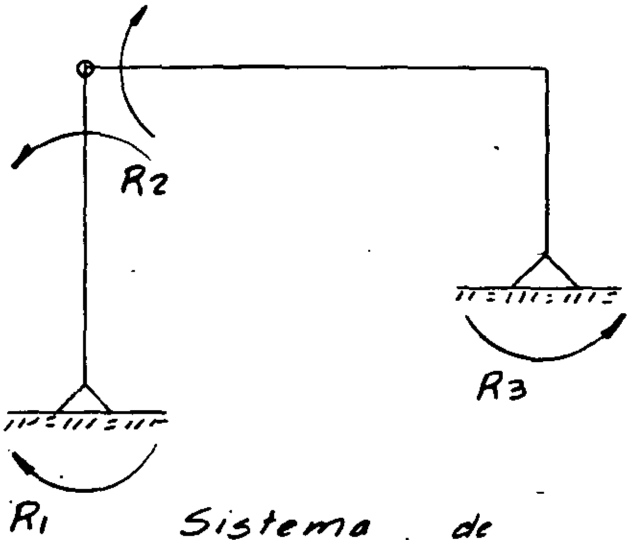
$E \cdot I = 6600 \ ton-m^2$

$\Theta_D = +0.002 \ rad.$

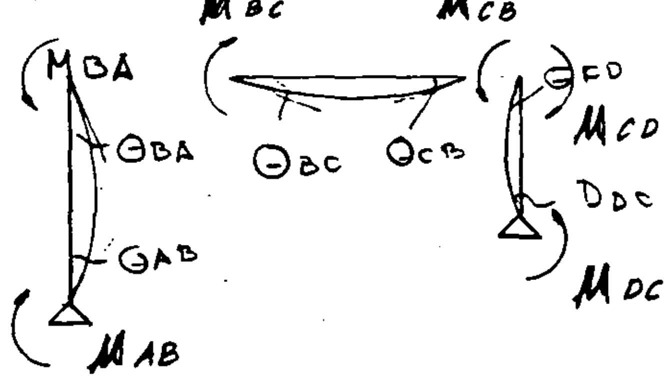
Solución.

La estructura es hiperestática en tercer grado y se seleccionará la siguiente estructura primaria:





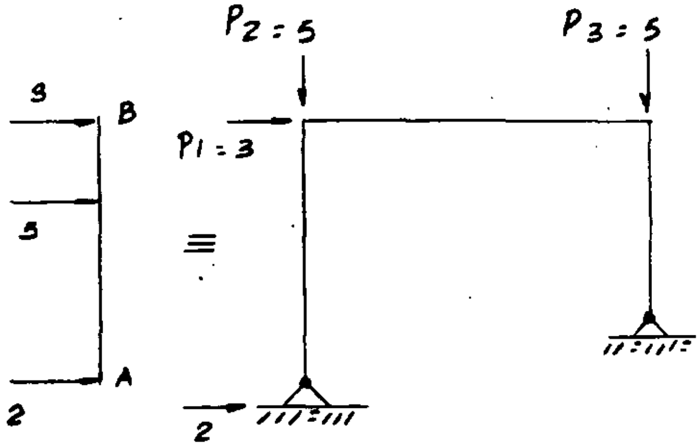
Sistema de redundantes



Los vectores de fuerzas internas y desplazamientos serán:

$$\left\{ P^{\circ} \right\} = \left\{ \begin{matrix} M_{AB} \\ M_{BA} \\ M_{BC} \\ M_{CB} \\ M_{CD} \\ M_{DC} \end{matrix} \right\} \qquad \left\{ D \right\} = \left\{ \begin{matrix} D_{AB} \\ D_{BA} \\ D_{BC} \\ D_{CB} \\ D_{CD} \\ D_{DC} \end{matrix} \right\}$$

Como el sistema de fuerzas externas no está aplicado en los nudos, habrá que trasladarlos a los apoyos; para hacerlo se aplicarán las ecuaciones de estática.

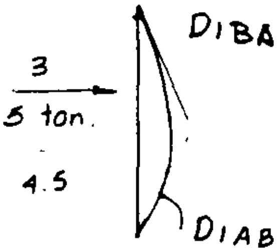


El vector de carga será:

$$\left\{ F \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{matrix} \right\}$$

Además el sistema externo de cargas por estar aplicado en las barras impone deformaciones que se calculan con la expresión de trabajo virtuales.

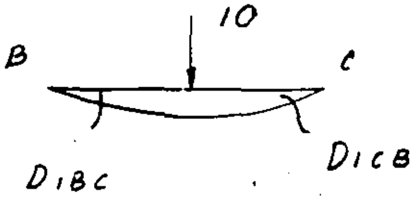
$$\Theta_F = \int m \frac{M}{EI} \, dx$$



Haciendo uso de las tablas para multiplicar diagramas:

$$D_{1AB} = \frac{15.75}{E \cdot I}$$

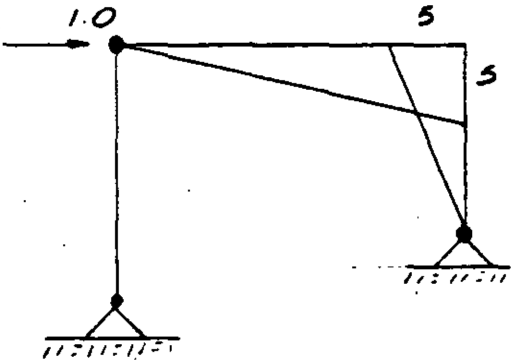
$$D_{1AB} = \frac{18}{E \cdot I} -$$



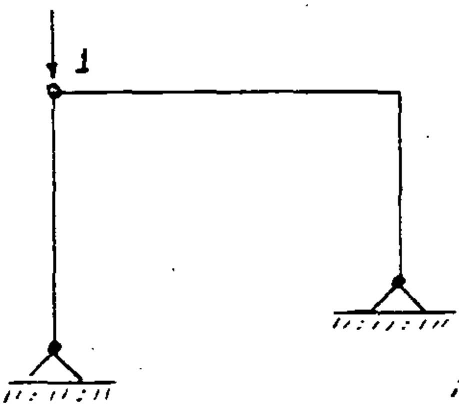
$$D_{1BC} = D_{1CB} = \frac{22.5}{E\,I} \quad \therefore \quad D_1 = \begin{Bmatrix} 15.75 \\ 18 \\ 22.5 \\ 22.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{1}{EI}$$

Para poder calcular las matrices de transformación de fuerzas, se calcularán los diagramas debidos a fuerzas externas unitarias y los de redundancia unitarias.

$F_1 = 1$

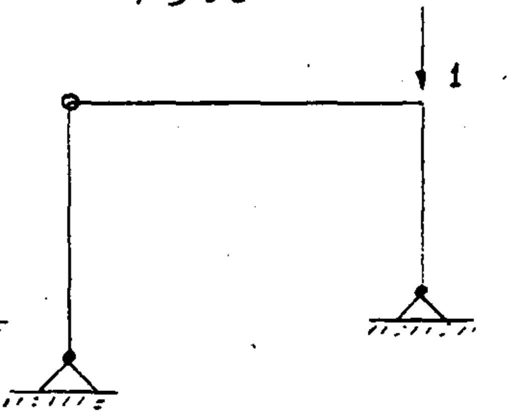


$F_1 = 1$

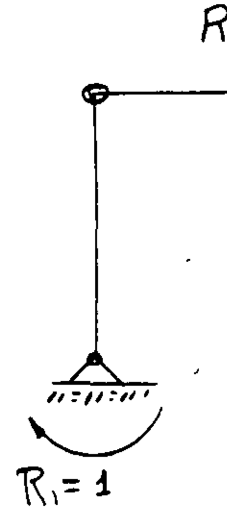


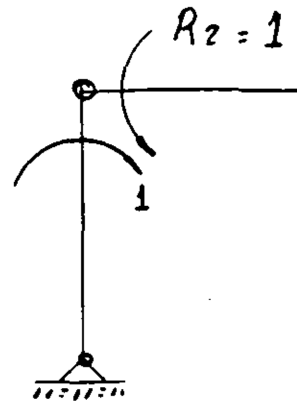
M = 0

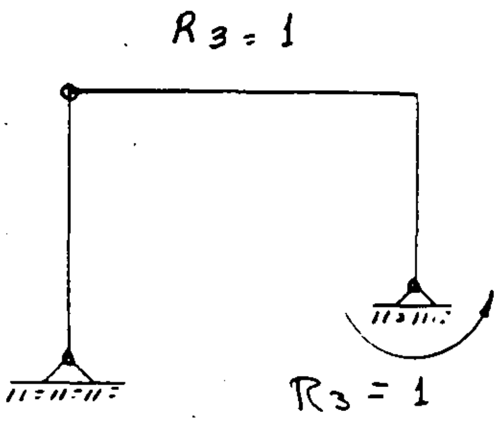
$F_3 = 1$

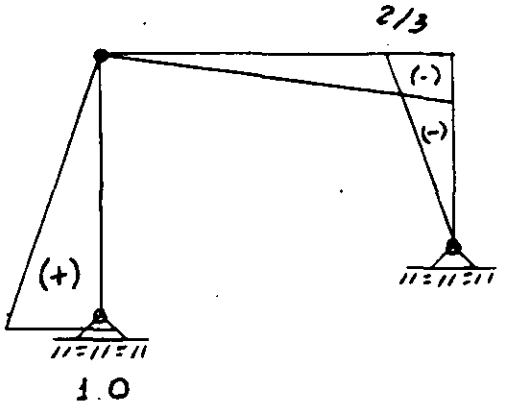


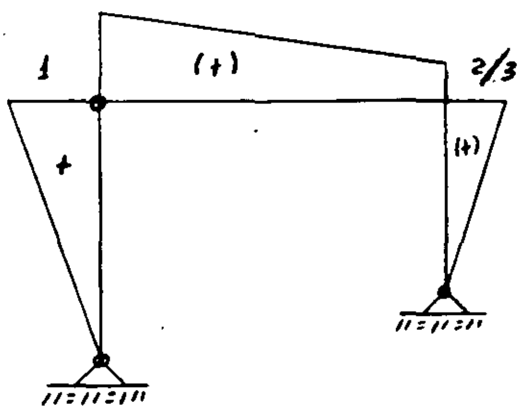
M = 0

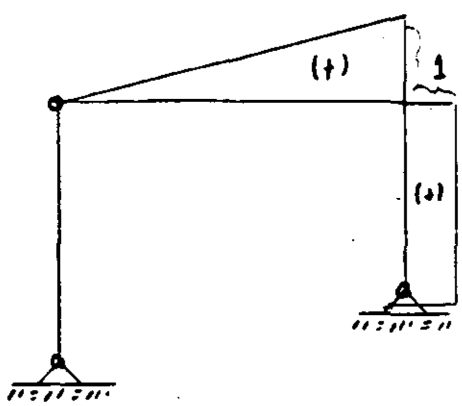












La matriz de transformación de carga será:

$$p_o = \left[b_F \right] \left\{ F \right\}$$

	$F_1 = 1$	$F_2 = 1$	$F_3 = 1$
M_{AB}	0	0	0
M_{BA}	0	0	0
M_{BC}	0	0	0
M_{CB}	-5	0	0
M_{CD}	-5	0	0
M_{DC}	0	0	0
			0

$$\therefore \left[b_o \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de trasformación de redundante:

	R_1	R_2	R_3
M_{AB}	1	0	0
M_{BA}	0	1	0
M_{BC}	0	1	0
M_{CB}	-2/3	2/3	1
M_{CD}	-2/3	2/3	1
M_{DC}	0	0	1

$$\therefore \left[b_R \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & 1 \\ -2/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculo de $[f_M]$

La matriz no ensamblada de la estructura será:

$$[f_M] = \begin{bmatrix} [f_{AB}] & & \\ & [f_{BC}] & \\ & & [f_{CD}] \end{bmatrix} = \frac{1}{6EI}\begin{bmatrix} 15 & 7.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7.5 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

Cálculo del producto $[b_R]^T [f_M] [b_o] = [f_F]$

$$[b_R]^T [f] [b_o] = \begin{bmatrix} 73.33 & 0 & 0 \\ -103.33 & 0 & 0 \\ 135 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{6EI}$$

Cálculo del producto $[b_R]^T [f_M] [b_R]$, que es la matriz de flexibilidad ensamblada

$$[f] = \begin{bmatrix} 24.78 & -62.78 & -18 \\ -62.78 & 44.78 & 24 \\ -18 & 24 & 42 \end{bmatrix} \times \frac{1}{6EI}$$

A los desplazamientos producidos por el sistema de carga en los nudos, deberá sumarse el de las cargas aplicadas en las barras y que referido al sistema general, mediante la ecuación:

$$\{D_1\} = [b_R] \{D\} = \begin{Bmatrix} 0.75 \\ 55.50 \\ 22.50 \end{Bmatrix} \frac{1}{EI}$$

Por lo tanto los desplazamientos totales debidos al sistema de carga externa será:

$$\{D_{XP}\} = [f_P] \{F\} + \{D_1\}$$

$$= \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 73.33 & 0 & 0 \\ -103.33 & 0 & 0 \\ -135 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0.75 \\ 55.50 \\ 22.50 \end{Bmatrix}$$

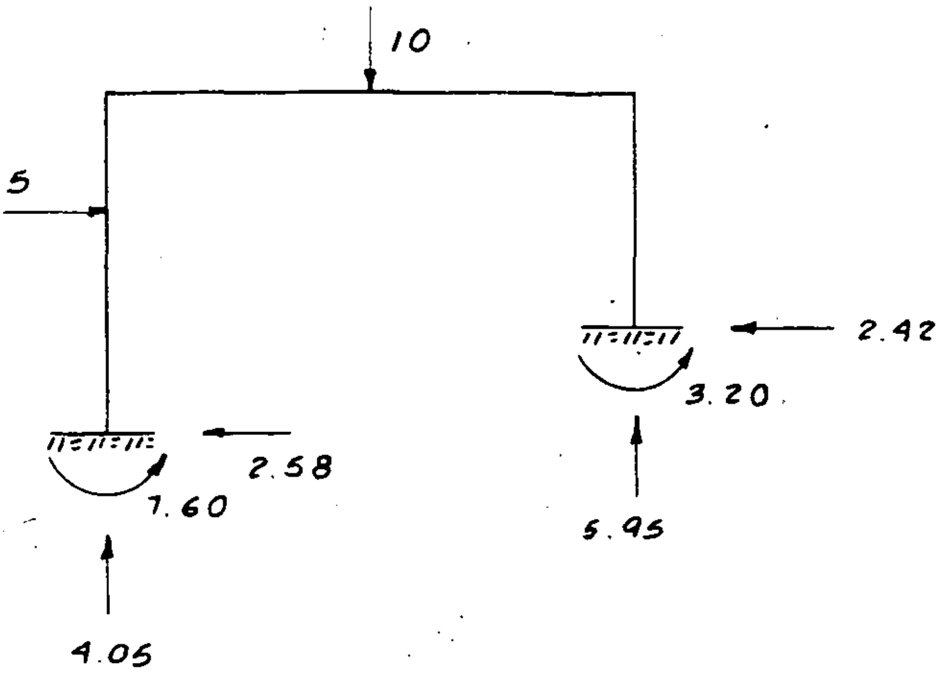
$$= \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 36.67 \\ -51.67 \\ -67.50 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0.75 \\ 55.50 \\ 22.50 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 37.42 \\ 3.91 \\ -45.00 \end{Bmatrix}$$

Las ecuaciónes de compatibilidad de deformación serán:

$$\left\{ D_{xp} \right\} + \left\{ f \right\} \left\{ R \right\} = \left\{ 0 \right\}$$

$$\frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 37.42 \\ 3.97 \\ -45.00 \end{Bmatrix} + \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 24.78 & -6.28 & -18 \\ -6.28 & 44.78 & +24 \\ -18 & +24 & 42 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.002 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.60 \\ -3.21 \\ +3.20 \end{Bmatrix}$$



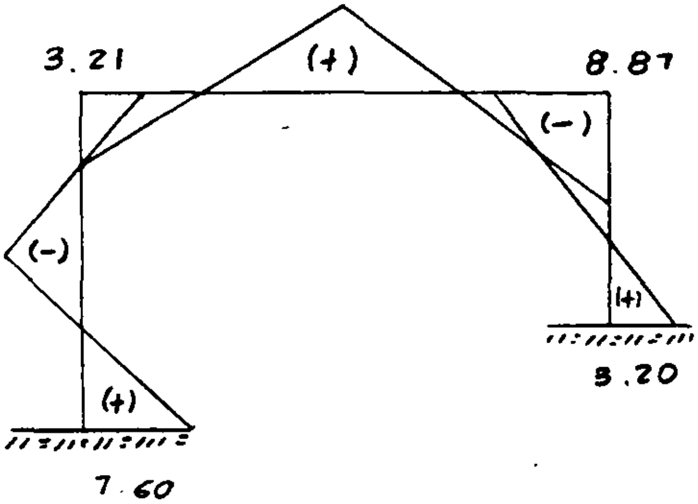


Diagrama de momentos finales las fuerzas internas se obtienen calculando por su superposición los efectos debidos a carga externas y por redundantes:

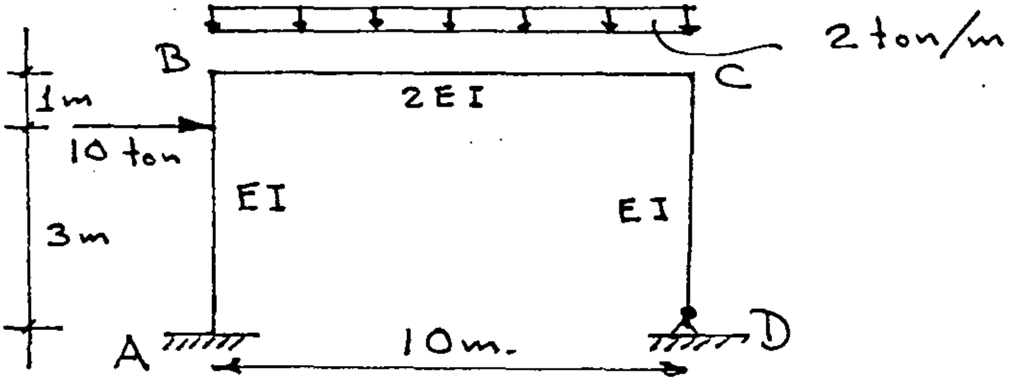
$$\left\{ P \right\} = \left[b_F \right] \left\{ F \right\} + \left[b_R \right] \left\{ R \right\}$$

EJEMPLO No. 12

Analizar el marco siguiente utilizando el método de las flexibilidades.

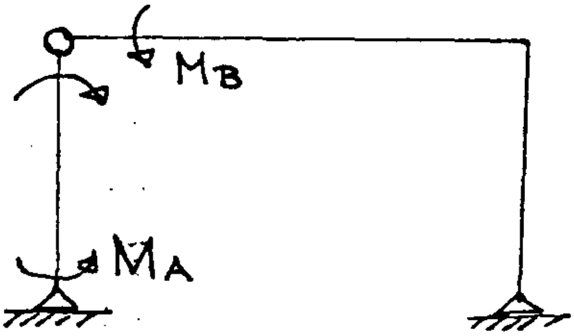
1) Sin diagonalizar la matriz de flexibilidades.

2) Diagonalizándola (variante propuesta).



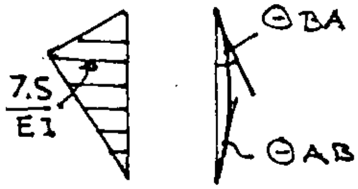
ALTERNATIVA 1

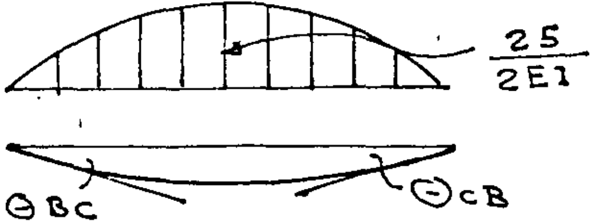
La estructura es hiperestática en segundo grado y se elegirá la siguiente estructura primaria, isostática.



Estructura isostática y sistema de Redundantes.

Como el sistema de cargas no se encuentra aplicado en los nudos, habrá que calcular las deformaciones angulares en los extremos y se trasladarán las cargas a los nudos.



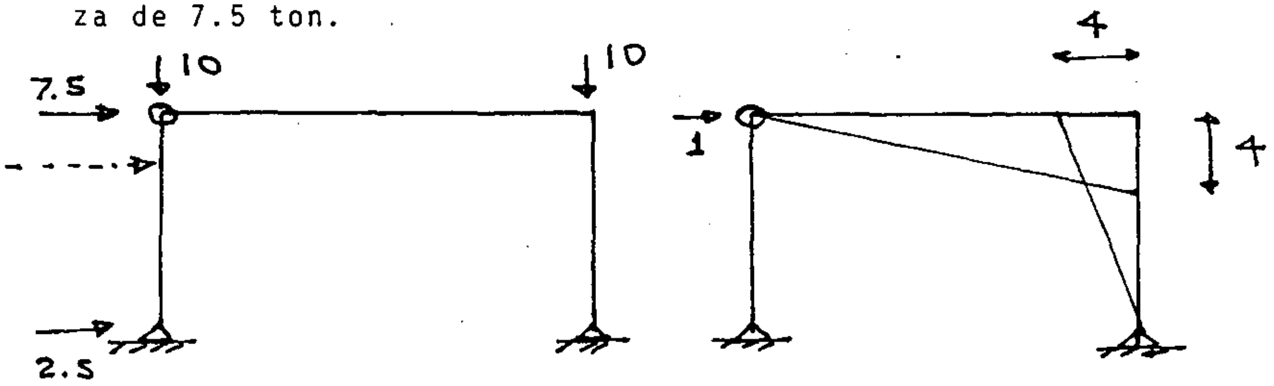


por el método de trabajos virtuales:

$$D = \begin{Bmatrix} \theta_{AB} \\ \theta_{BA} \\ \theta_{BC} \\ \theta_{CB} \\ \theta_{CD} \\ \theta_{DC} \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 6.25 \\ 8.75 \\ 41.66 \\ 41.66 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Los signos positivos indican que el sentido supuesto a los momentos virtuales aplicados fueron del mismo sentido que los desplazamientos.

El sistema de fuerza equivalente aplicado en los nudos se presenta en la figura, provocando efectos de flexión solo la fuerza de 7.5 ton.



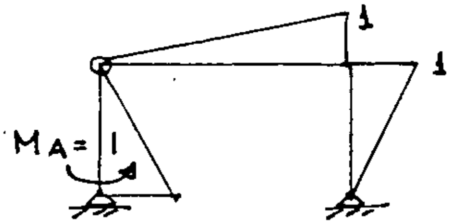
Sistema de cargas equivalente y diagrama de momentos.

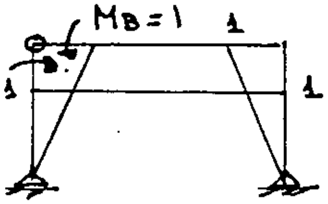
La matriz de transformación de fuerzas será;

$$\left[b_F \right] = \left[\begin{array}{ccc} F1 = 1 & F2 = 1 & F3 = 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] ; \quad F = \left\{ \begin{array}{c} 7.5 \\ -5 \\ -5 \end{array} \right\}$$

$$\left[b_F \right] \left\} F \right\{ = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -30 \\ -30 \\ 0 \end{array} \right\}$$

Calculando ahora la matriz de redundantes b_R





$$\left[b_R \right] = \left[\begin{array}{cc} R_A = 1 & R_B = 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{array} \right]$$

La matriz de flexibilidades no ensamblada de la estructura será:

$$f_M = \frac{1}{6EI} \left[\begin{array}{cccccc} 8 & 4 & & & & \\ 4 & 8 & & & & \\ & & 10 & 5 & & \\ & & 5 & 10 & & \\ & & & & 8 & 4 \\ & & & & 4 & 8 \end{array} \right]$$

La matriz de flexibilidades ensamblada será:

$$\left[f \right] = \left[b_R \right]^T \left[f_M \right] \left[b_R \right] = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 26 & -19 \\ -19 & 46 \end{bmatrix}$$

Refiriendo los desplazamientos angulares debidos a las cargas intermedias, al sistema general de cordenadas mediante la ecuación:

$$D_1 = \left[b_R \right]^T \left\} D \right\{ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} \left| \begin{matrix} 6.25 \\ 8.75 \\ 41.66 \\ 41.66 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right| = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 35.41 \\ -92.07 \end{bmatrix}$$

Finalmente, calculando el primer término de la ecuación de compatibilidad de deformaciones (3.8) y sumándole los desplazamientos debidos a las cargas intermedias se tendrá:

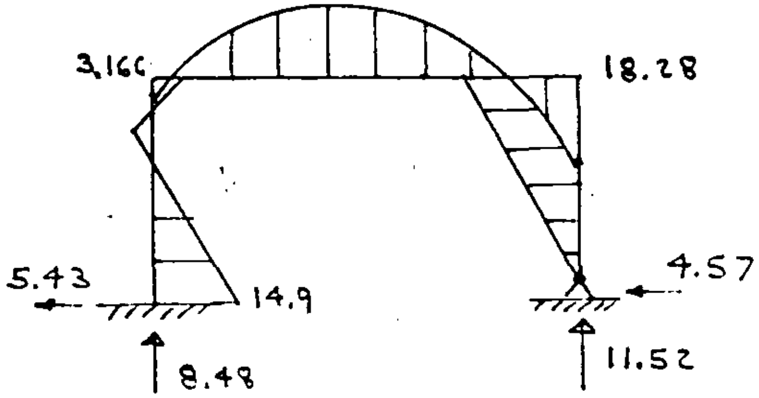
$$\left[b_R \right]^T \left[f_M \right] \left[b_F \right] \left\} F \right\{ + \left[b_R \right]^T \left\} D \right\{ = \frac{1}{EI} \left\} \begin{matrix} -90 \\ +115 \end{matrix} \right\{ + \frac{1}{EI} \left\} \begin{matrix} 35.41 \\ -92.09 \end{matrix} \right\{$$

El segundo miembro de la ecuación (3.8) será:

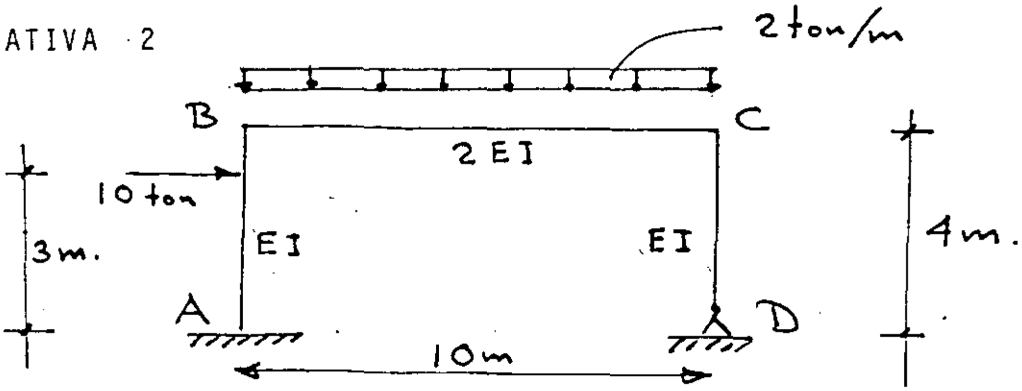
$$\left[b_R \right]^T \left[f_M \right] \left[b_R \right] \left\} \begin{matrix} MA \\ MB \end{matrix} \right\{ = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 26 & -19 \\ -19 & 46 \end{bmatrix} \begin{matrix} MA \\ MB \end{matrix}$$

Por lo tanto:

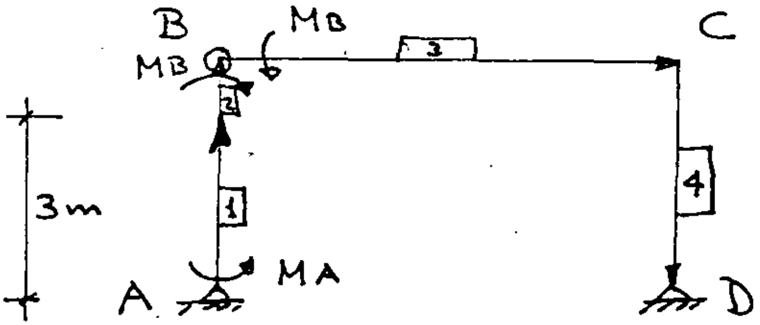
$$\frac{1}{EI} \left\} \begin{matrix} -54.59 \\ +22.91 \end{matrix} \right\{ + \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 26 & -19 \\ -19 & 46 \end{bmatrix} \left\} \begin{matrix} MA \\ MB \end{matrix} \right\{ = \left\} 0 \right\{ ; \quad \begin{matrix} MA = 3.166 \text{ ton-m} \\ MB = 14.9 \text{ ton-m} \end{matrix}$$



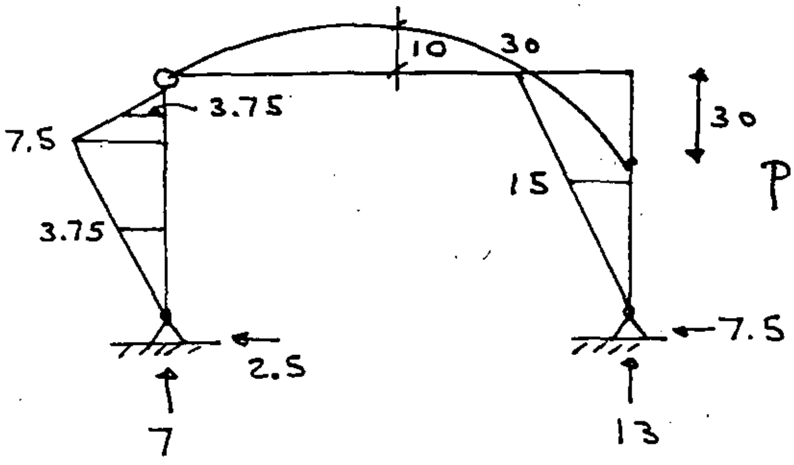
ALTERNATIVA 2



Seleccionando la misma estructura isostática que en el caso 1. y debido a la presencia de la carga concentrada, se tendrán 4 elementos:

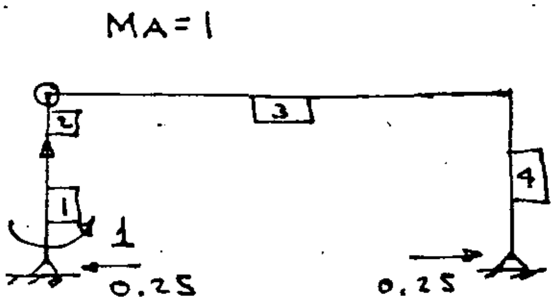


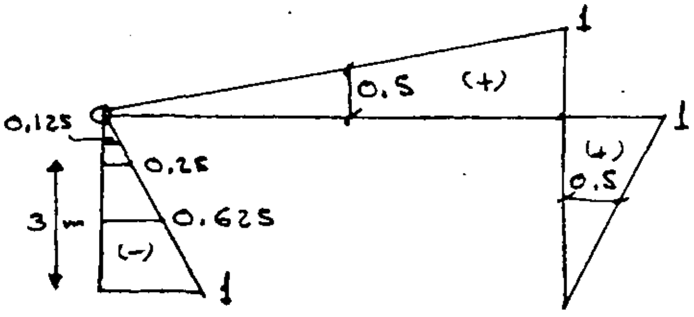
Resolviendo la estructura isostática y calculando los momentos en los extremos y al centro de cada elemento, se obtiene el vector de cargas.

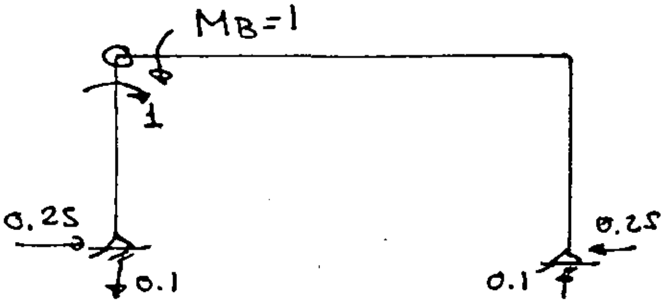


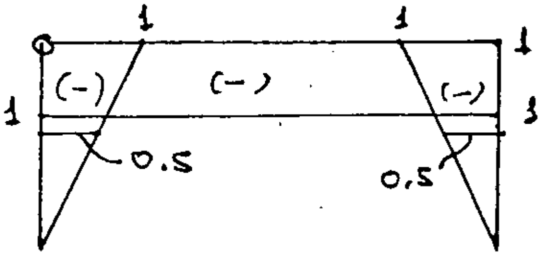
$$P_o = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \\ 3.75 & \boxed{1} \\ 7.5 & \\ \hline 7.5 & \\ 3.75 & \boxed{2} \\ 0 & \\ \hline 0 & \\ +10 & \boxed{3} \\ -30 & \\ \hline -30 & \\ -15 & \boxed{4} \\ 0 & \end{array} \right\}$$

Obtención de la matriz de redundantes $\left[b_R \right]$









$$\left[b_R \right] = \left[\begin{array}{cc} R1 = 1 & R2 = 1 \\ -1 & 0 \\ -0.625 & -0.375 \\ -0.25 & -0.75 \\ \hline -0.25 & -0.75 \\ -0.125 & -0.875 \\ 0 & -1 \\ \hline 0 & -1 \\ 0.5 & -1 \\ 1.0 & -1 \\ \hline 1 & -1 \\ 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

Es evidente que para calcular P° y b_R, se puede prescindir del trazo de diagramas de momentos.

La matriz de flexibilidades no ensamblada, de acuerdo con la ecuación 3.11, es una matriz diagonal:

$$\left[f_M \right] = \frac{1}{6EI} \left[\begin{array}{c} 3 \\ 12 \\ 3 \\ \hline 1 \\ 4 \\ 1 \\ \hline 5 \\ 20 \\ 5 \\ \hline 4 \\ 16 \\ 4 \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \boxed{1} \\ \\ \\ \boxed{2} \\ \\ \\ \boxed{3} \\ \\ \\ \boxed{4} \\ \\ \end{array}$$

Nota.- El elemento 3 aparece dividido entre 2 porque la inercia de la viga es 2I

La matriz de flexibilidades ensamblada será:

$$\left[f \right] = \left[b_R \right]^T \left[f_M \right] \left[b_R \right] = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 26 & -19 \\ -19 & 46 \end{bmatrix}$$

Calculando ahora el producto:

$$\left[b_R \right]^T \left[f_M \right] \left\{ Po \right\} = \frac{1}{6EI} \left\{ \begin{array}{c} -325.54 \\ 137.5 \end{array} \right\}$$

Las ecuaciones de compatibilidad serán:

$$\frac{1}{6EI} \left\{ \begin{array}{c} -325.54 \\ 137.50 \end{array} \right\} + \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 26 & -19 \\ -19 & +26 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} MA \\ MB \end{array} \right\} = 0$$

De donde MA = 14.91 tm y MB = 3.16 tm

Comentarios:

1) Las operaciones matriciales son mas rápidas en esta segunda alternativa, debido a la diagonalización de la matriz de flexibilidades no ensamblada, como sucede en el caso de armaduras .

2) El resultado es directo sin necesidad de usar matrices de transformación de coordenadas locales a generales como en la alternativa 1.

REFERENCIAS

1.- Ghali A, Neville M, "Structural Analysis", Intext Educational Publisher, Scranton 1972

2.- Yuan-Yu Hsieh "Teoría de Estructuras" Prentice Hall Internacional, Madrid 1982

3.- Damy R. Julio, "Curso Análisis Estructural" DEPFI, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, D.F.

4.- H.H. West "Análisis de Estructuras" Compañía Editorial Continental, S.A. México. 1984

5.- W.A. Granville "Cálculo Diferencial e Integral" Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana 1952

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

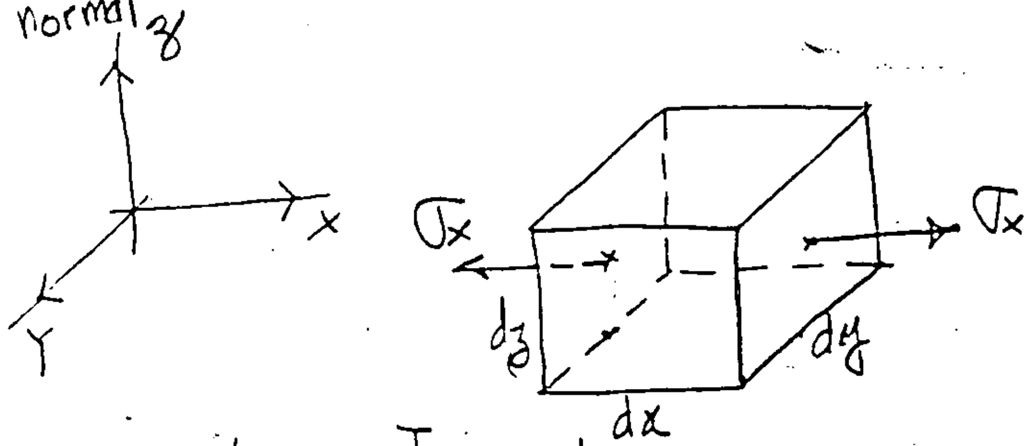
ANALISIS ESTRUCTURAL

METODO DE FLEXIBILIDADES

EXPOSITOR:
ING. JOSE FRANCISCO TENA

SEP-OCT. 92

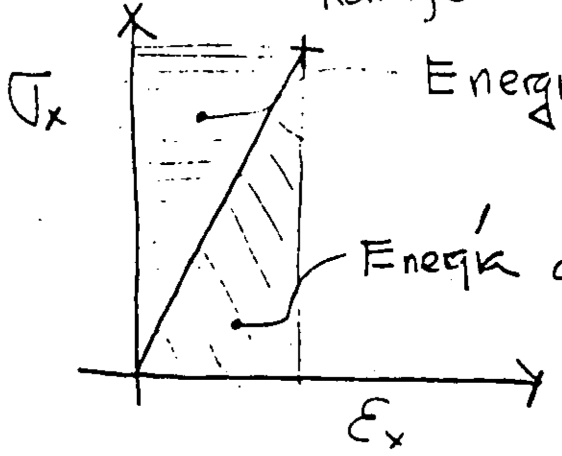
Energía Elástica de Deformación por esf. normal



U energía elástica interna

$$dU = \underbrace{\frac{1}{2}\sigma_x\,dy\,dz}_{\text{Fuerza promedio}} \times \underbrace{e_x\,dx}_{\text{distancia}} = \frac{1}{2}\sigma_x e_x\,dx\,dy\,dz \quad ($$

Trabajo

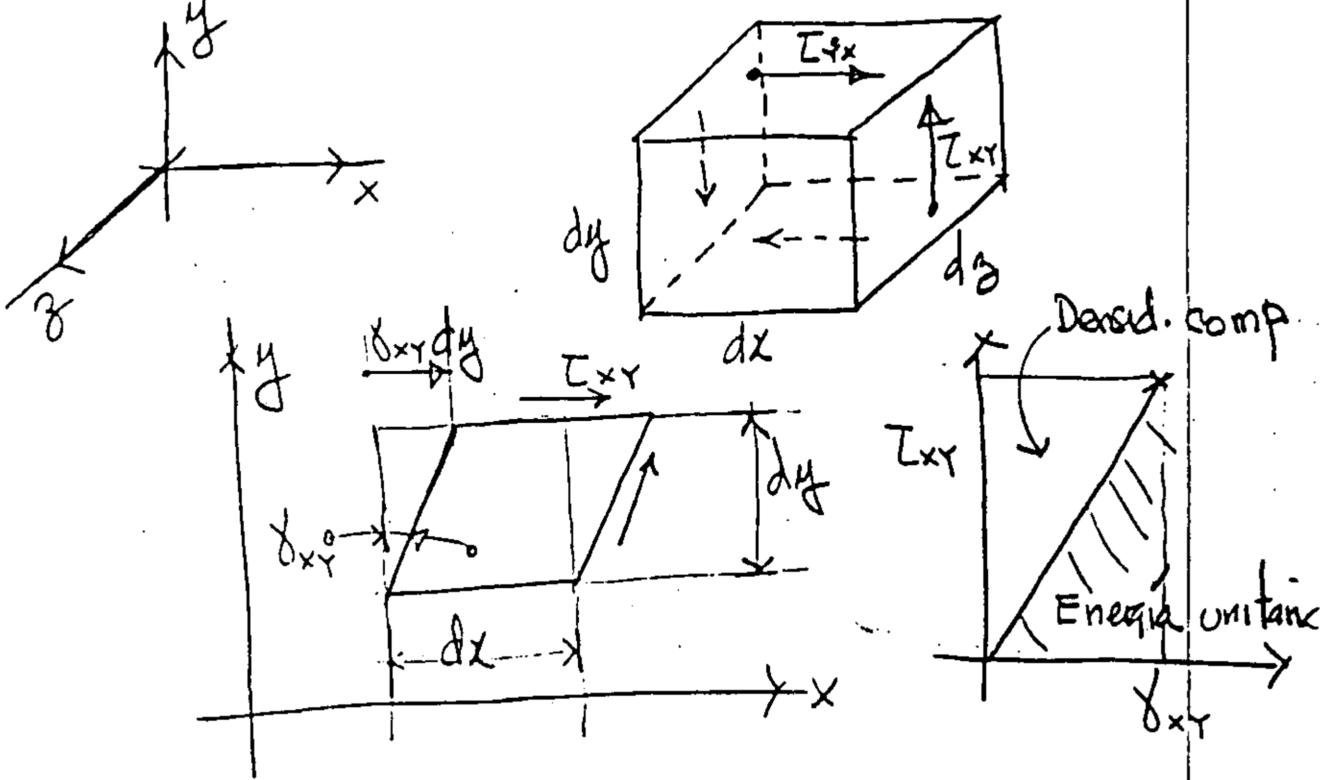


Para un cuerpo elástico perfecto no hay disipación de energía, y el trabajo hecho por un elemento es almacenado como energía de deformación interna recuperable

De (1) la densidad de energía

$$\frac{dU}{dV} = U_0 = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} \qquad (2)$$

Energía elástica de deformación por esfuerzo cortante



$$dU_{corte} = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\tau_{xy}\,dx\,dz}_{\text{Fuerza promedio}} \times \underbrace{\gamma_{xy}dy}_{\text{distancia}}}_{\text{Trabajo}} = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}\,dx\,dy\,dz \; ($$

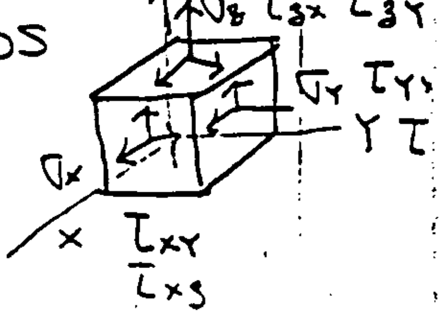
la densidad de energía por esfuerzo de corte es

$$\left(\frac{dU}{dV}\right)_{corte} = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} \qquad (4)$$

Aceptando el principio de superposición para un estado multiaxial de esfuerzos

la densidad de energía de deformación es

$[\sigma_{ij}]$



$$\frac{dU}{dV} = U_0 = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y \varepsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z \varepsilon_z + \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz} + \frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx} \quad (5)$$

Expresando (5) matricialmente se obtiene

$$U_0 = \frac{1}{2}\left[\sigma_x \; \sigma_y \; \sigma_z \; \tau_{xy} \; \tau_{yz} \; \tau_{zx}\right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\lfloor \sigma \rfloor \{\varepsilon\} \quad (6)$$

Substituyendo en (5) la ley generalizada de Hooke(

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \quad (7)$$

se obtiene

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right) \quad (8$$

Para materiales elásticos lineales homogeneos e isotrópic se puede obtener una expresión similar a 8) en términos de las deformaciones en lugar de los esfuerzos, la energía total se obtiene de

$$U = \iiint_V U_0 \, dx \, dy \, dz \quad (9)$$

la ecuación (5) es importante al establecer las leyes de Plasticidad y (8) es importante en análisis de esfuerzos por métodos energéticos Substituyendo (6) en (9) se obtiene

$$U=\frac{1}{2}\iiint_V(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx})dV \quad ($$

$$=\frac{1}{2}\iiint_V\lfloor\sigma\rfloor\{\varepsilon\}\,dx\,dy\,dz$$

Para barras axialmente cargadas, con flexión y cortante (10) queda

$$U=\frac{1}{2}\iiint_V(\sigma_x\varepsilon_x+\tau_{xy}\gamma_{xy})\,dx\,dy\,dz \qquad (11)$$

Para materiales elásticos lineales

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E} \quad y \quad \gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G} \qquad (12)$$

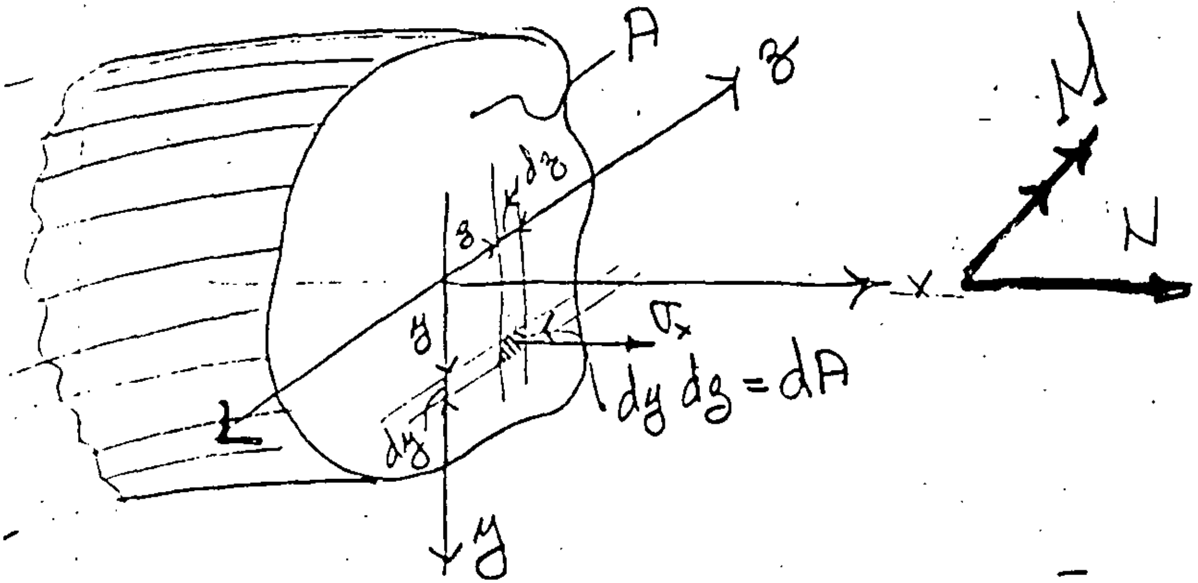
De (12) y (11) se obtiene

$$\boxed{U=\underbrace{\iiint_V\frac{\sigma_x^2}{2E}\,dx\,dy\,dz}_{\text{Para carga axial y Flexión de vigas}}+\underbrace{\iiint_V\frac{\tau_{xy}^2}{2G}\,dx\,dy\,dz}_{\text{Para Corte en Vigas}}} \qquad (13)$$

Energía de deformación para barras cargadas axialmente

$$\underline{\sigma_x} = \frac{N}{A} = \frac{\text{carga axial}}{\text{sección transversal}}, \quad A = \iint_A dy\,dz \qquad 14$$

N y A son funciones de x solamente



Por lo tanto (13) se reduce a [de (14) y (13)]

$$U_N = \iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\,dV = \iiint \frac{N^2}{2A^2E}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_L \frac{N^2}{2A^2E}\underbrace{\left[\iint_A dy\,dz\right]}_{A} dx = \int_L \frac{N^2}{2EA}\,dx$$

$$\boxed{U_N = \int_L \frac{N^2}{2EA}\,dx} \qquad (15)$$

Energía de deformación en Flexión, en este caso

$$\sigma_x = \frac{M}{I_z} y \qquad (16)$$

De (16) y (13) se obtiene

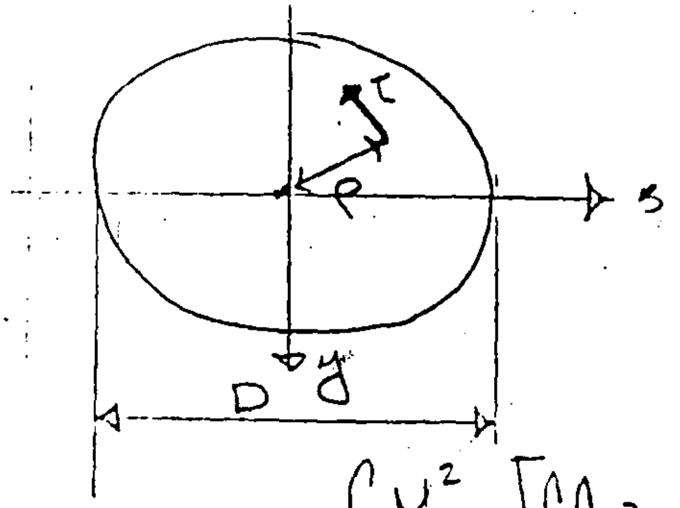
$$U_M = \iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \iiint \frac{1}{2E}\left(-\frac{My}{I}\right)^2 dx\,dy\,dz$$

$$= \int_L \frac{M^2}{2EI_z^2}\left[\iint_A y^2 dy\,dz\right] dx = \int_L \frac{M^2}{2EI_z} dx$$

$$\boxed{U_M = \int_L \frac{M^2}{2EI} dx} \qquad (17)$$

Energía de Deformación para secciones circulares en Torsión

en este caso $\tau = \frac{M_T}{J}\rho$ (18)



Subst. (18) en (13)

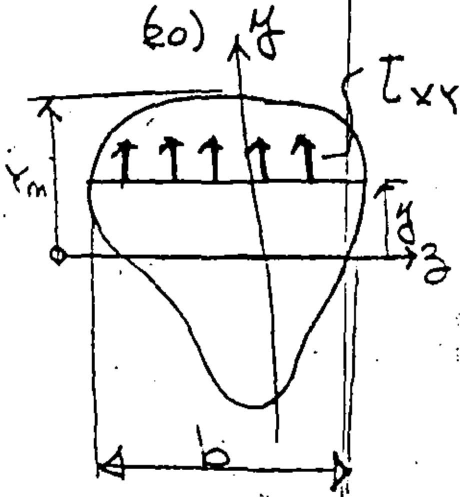
$$U_T = \iiint_V \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint \frac{1}{2G}\left(\frac{M_T}{J}\rho\right)^2 dx\,dy\,dz$$

$$U_T = \int_L \frac{M_T^2}{2GJ^2}\left[\iint \rho^2 dy\,dz\right] dx = \underbrace{\int_L \frac{M_T^2}{2GJ} dx} \qquad (19$$

Energía de Deformación por Cortante

En este caso $\tau_{xy} = \dfrac{V Q_Y^{Y_m}}{b\, I}$ (20)



V = Cortante en la sección

$Q_Y^{Y_m} = \int_y^{Y_m} y\, dA$ = momento estático de y a y_m.

b = ancho a la altura y de los ejes centroidales $x\, y$

I_z = Momento de Inercia de la sección

Subst (20) en (13)

$$U_v = \iiint \frac{1}{2G}\left(\frac{V Q_Y^{Y_m}}{b\, I}\right)^2 dx\, dy\, dz = \int_L \frac{V^2}{2GI^2}\left[\iint \left(\frac{Q_Y^{Y_m}}{b}\right)^2 dy\, d\right.$$

$$\boxed{U_v = \int_L \frac{V^2}{2GI^2}\left[\iint \left(\frac{Q_Y^{Y_m}}{b}\right)^2 dy\, dz\right] dx} \qquad (21)$$

La expresión total de la energía de deformación sea: $U = U_N + U_M + U_T + U_V$ o sea

$$\boxed{U = \int_L \left\{\frac{N^2}{2EA} + \frac{M^2}{2EI} + \frac{M_T^2}{2GJ} + \frac{V^2}{2GI^2}\left[\iint \left(\frac{Q_Y^{Y_m}}{b}\right)^2 dy\, dz\right]\right\} dx} \qquad (22$$

Desplazamientos

El principio de conservación de energía (La energía no puede ser creada o destruida), puede adoptarse para calcular deformaciones en sistemas elásticos debidos a las cargas aplicadas. La primera Ley de la Termodinámica expresa este principio como

TRABAJO REALIZADO = Cambio en Energía

Para un proceso adiabático (No se agrega o substrae calor al sistema) y cuando no se genera calor en el sistema, y cuando las fuerzas aplicadas se aplican en forma estática (Las fuerzas se aplican tan lentamente que se desprecia la energía cinética $\frac{1}{2} m v^2$), el caso especial de esta ley para sistemas conservativos se reduce a

$$W_e = U \qquad (23)$$

Donde W_e = Trabajo hecho por las fuerzas externas durante el proceso de carga.

U = Energía total de deformación almacenada en el Sistema.

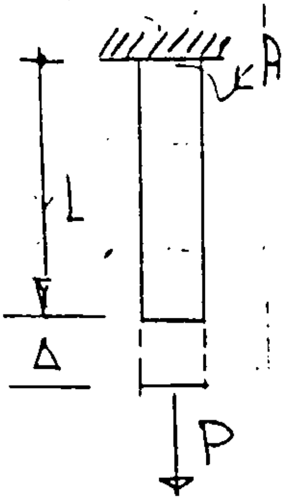
Similar a decir que la suma del Trabajo externo W_e y el interno W_i deben ser cero

$$W_e + W_i = 0$$

$U = -W_i$ las deformaciones siempre se oponen a las fuerzas internas. Es importante considerar la aplicación gradual de las cargas de cero a su valor total por lo tanto We será 1/2 Fuerza Total por el desplazamiento

Ejemplos

a) Determine la deflexión de la viga mostrada



$W_e = \frac{1}{2} P \Delta$ y de (22)

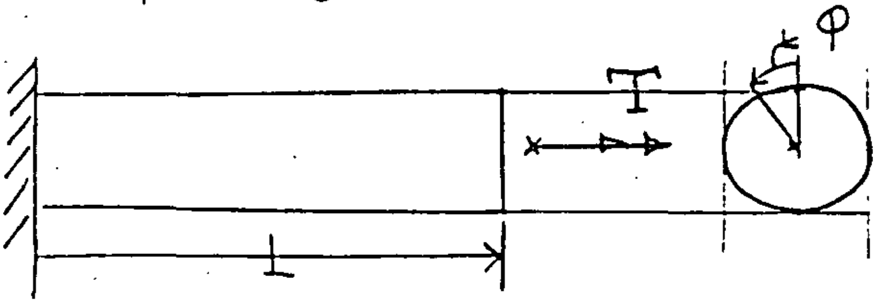
$$U = \frac{1}{2EA}\int_0^L N^2\,dx$$

$$= \frac{P^2}{2EA}\int_0^L dx = \frac{P^2 L}{2EA}$$

De (23) $\frac{1}{2} P \Delta = \frac{P^2 L}{2EA}$

$$\Delta = \frac{PL}{AE}$$ Ley de Hooke

b) Determine la rotación en el extremo de una flecha de sección circular

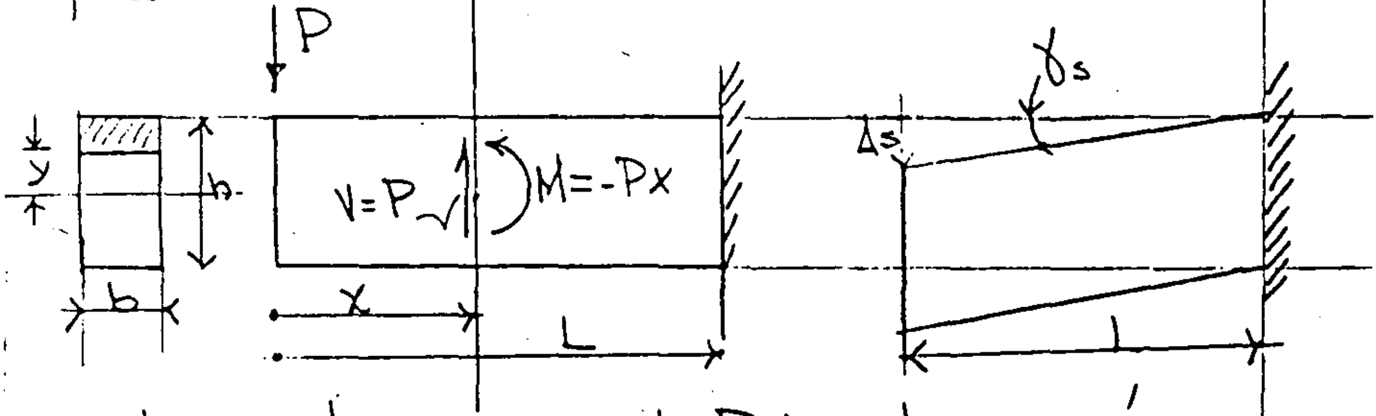


El Trabajo externo $W_e = \frac{1}{2} T\phi$ y el interno de (22)

$$U = \frac{T^2}{2GJ}\int_0^L dx = \frac{T^2 L}{2GJ}$$ de (23)

$$\frac{1}{2}T\phi = \frac{T^2 L}{2GJ}$$ de donde $\phi = \frac{TL}{GJ}$ que coincide con los valores de los texto de Mecánica de Materiales.

c) Determinar la deflexión máxima en la viga mostada considerando el efecto del cortante y de Flexión



Trabajo externo $W_e = \frac{1}{2} P\Delta$, la energía interna consta de dos partes una debida a los esfuerzos de flexión y otra a los esfuerzos de corte de (17) y (13)

$$U_{Flexion} = \frac{1}{2EI}\int_0^L M^2 dx = \frac{1}{2EI}\int_0^L (-Px)^2 dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

El esfuerzo de corte: $\tau = \frac{V Q_Y^{Y_m}}{bI} = \frac{P}{2I}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]$

que substituido en la segunda parte de (13) se obtiene

$$U_{corte} = \iiint_V \frac{\tau^2}{2G}\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2G}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{\frac{P}{2I}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]\right\}^2 L\,b\,dy$$

$$= \frac{P^2 L b}{8GI^2} \times \frac{h^5}{30} = \frac{P^2 L b h^5}{240G}\left(\frac{12}{bh^3}\right)^2 = \frac{3P^2 L}{5AG}$$

donde $A = bh$ sección transversal. Entonces

$$W_e = U = U_{FLEXION} + U_{CORTE}$$

$$\frac{P\Delta}{2} = \frac{P^2L^3}{6EI} + \frac{3P^2L}{5AG} \quad \text{de dondo}$$

$$\Delta = \underbrace{\frac{PL^3}{3EI}}_{\text{Flexión}} + \underbrace{\frac{6PL}{5AG}}_{\text{Corte}} \qquad (24)$$

El termino debido al cortante se puede interpretar

$$\tau_{av} = \frac{P}{A} = \frac{V}{A} \quad \text{corte promodio}$$

puesto que τ varía parabólicamente $\frac{6}{5}$ representa un factor de corrección numérico por lo tanto

$$\Delta_{corte} = \gamma_s L = \alpha \frac{\tau_{av}}{G} L = \alpha \frac{VL}{AG} = \frac{6}{5}\frac{PL}{AG}$$

el valor α depende de la forma de la sección en general V puede variar con x. De (24)

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}\left(1 + \frac{3E}{10G}\frac{h^2}{L^2}\right) \qquad (25)$$

suponiendo acero estructural

$$\frac{E}{G} = 2(1+\nu) \doteq 2.5 \quad \text{y (25) queda}$$

$$\Delta = \left(1 + 0.75\frac{h^2}{L^2}\right)\Delta_{FLEXIÓN} \quad (26)$$

De (26) se observa que para una viga corta sea $h = L$ La deflexión total es $\Delta = 1.75\,\Delta_{FLEXION}$ por lo cual la deformación de corte es muy importante, para una viga Flexible sé $L = 10\,h$

$$\Delta = \left(1 + 0.75\frac{h^2}{(10h)^2}\right)\Delta_{FLEXION}$$

$$\Delta = 1.0075\,\Delta_{FLEXIÓN}$$

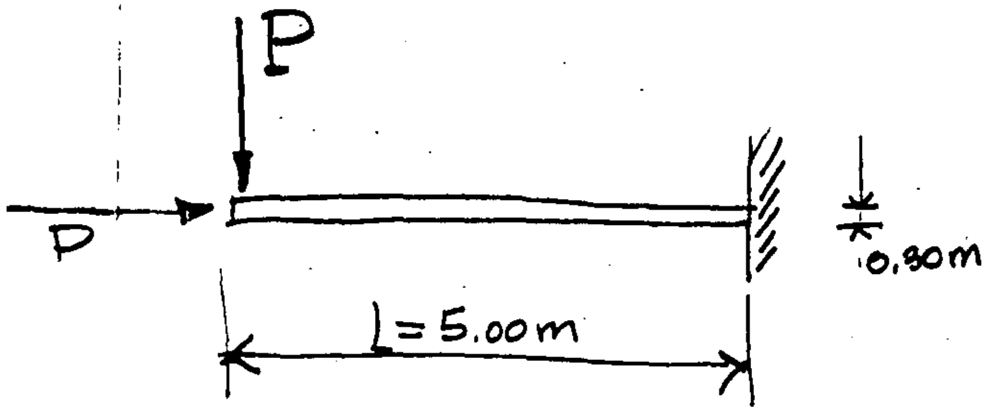
La deflexión debida al corte se puede despreciar no siempre es posible considerar lo anterior

Comparando las expesiones (1.1.6.1c) (1.1.6.2 c) y (1.1.6.2c) para un claro $l = 5.00$ m y un peralte $h = 30$ cm se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned} U_V &= 0.00286\, U_M \\ U_N &= 0.0009\, U_M \end{aligned}} \qquad (a)$$

En la mayoría de los problemas estructurales elásticos lineales la energía de deformación debida a la carga normal N y cortante V es despreciable respecto a la energía de deformación debida al momento flexionante M.

Cuando existe momento torsionante M_T (vigas en balcon, etc.), su energía de deformación es considerable y debe tomarse en cuenta su valor.



1.2 Principio de Superposición.

1.2.1.- Introducción

En los sistemas de cargas en los que las deflexiones son funciones lineales de las cargas, se puede obtener la deflexión en un punto cualquiera, mediante la suma de las deflexiones producidas individualmente en dicho punto por cada una de las cargas.

1.2.2.- Casos en que no rige el principio.

Considerando el ejemplo mostrado en la figura 1.2.2a, la viga AB esta sujeta a la

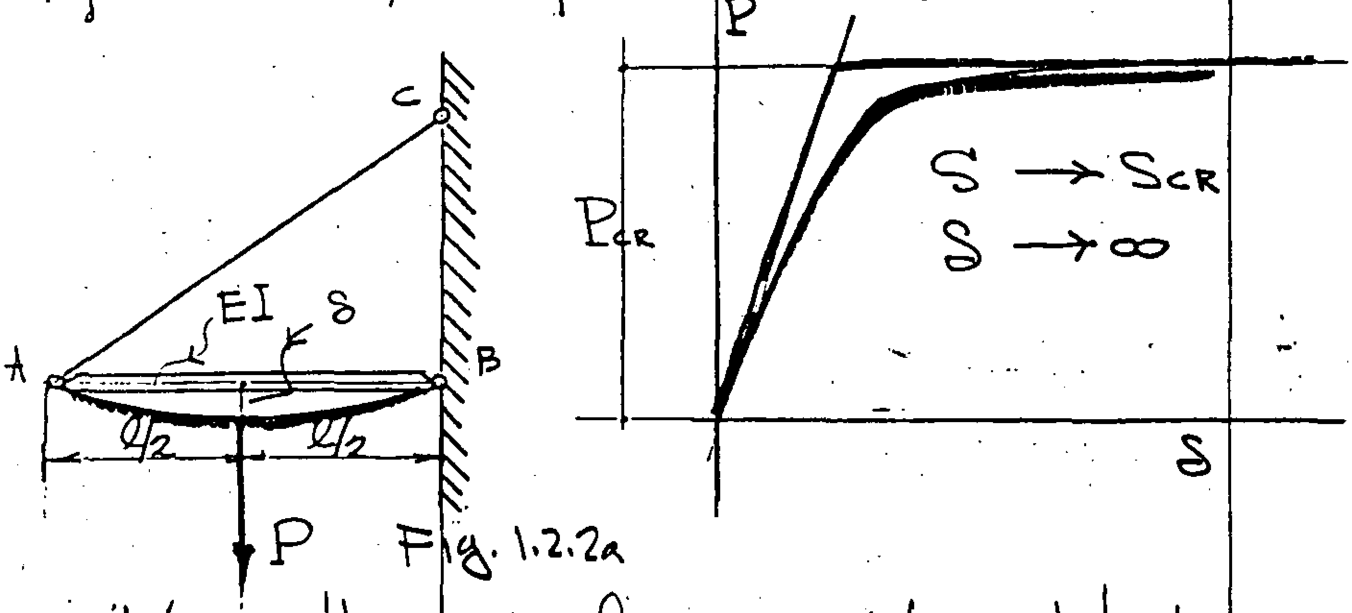


Fig. 1.2.2a

acción simultanea de fuerzas axiales y laterales, se concluye que δ no es función lineal de P y puede ser representada por la fórmula

$$\delta \doteq \frac{Pl^3}{48EI}\,\frac{1}{1-S/S_{CR}} \qquad (1.22.a)$$

donde, $S_{CR}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}$, S carga axial en AB debida a P.

Otro ejemplo en el cual el principio de superposisión no rige, será el sistema mostrado en la figura 1.2.2.b, formado por dos barras articuladas, bajo la acción de pequeñas deformaciones ($\tan \alpha \doteq \alpha$).

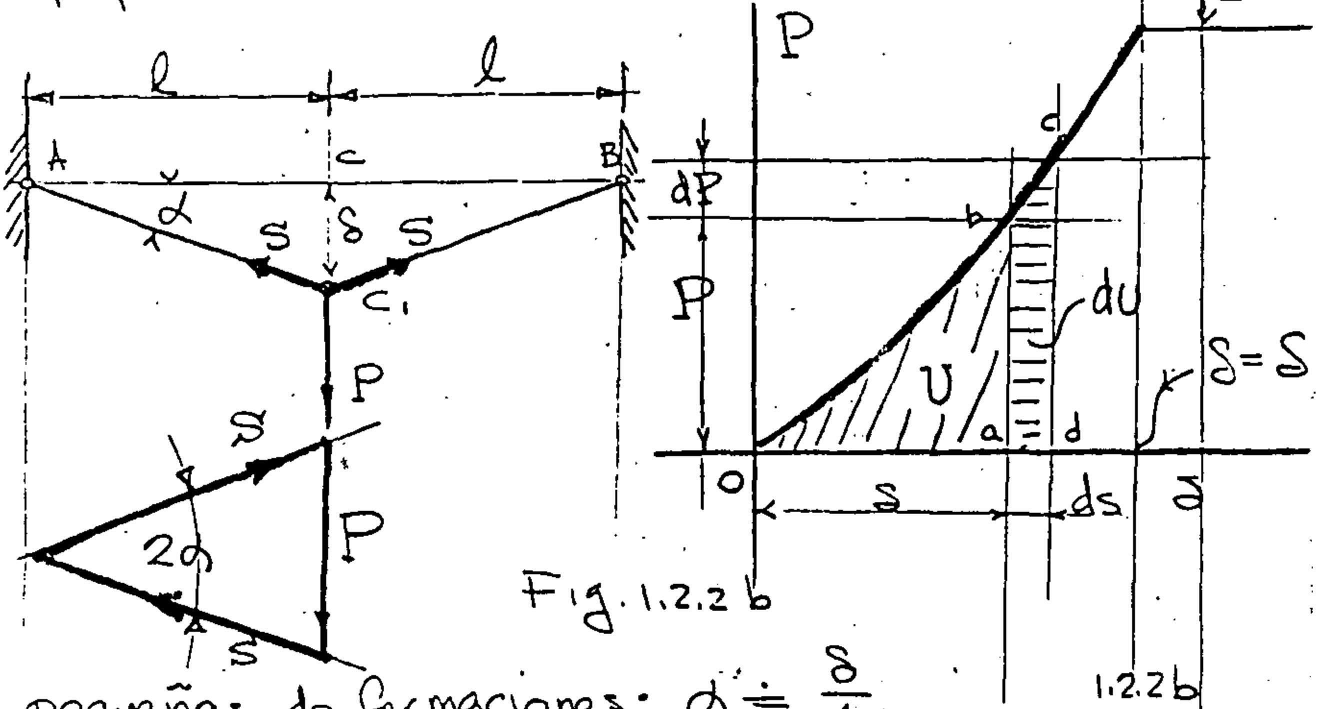


Fig. 1.2.2 b

pequeñas deformaciones: $\alpha \doteq \frac{\delta}{l}$ 1.2.2b

Equilibrio: $$S = \frac{P}{2\alpha}$$ 1.2.2c

Compatibilidad geométrica: la deformación axial unitaria es

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{l^2+\delta^2}-l}{l} \doteq \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{l^2}$$ 1.2.2 d

Ley de Hooke: $$\varepsilon = \frac{S}{AE}$$ 1.2.2e

de 1.2.2 c, d y e se obtiene

$$\boxed{\delta = l\sqrt[3]{\frac{P}{AE}}\ ,\ P = \frac{\delta^3 AE}{l^3}}$$ 1.2.2 f

De nuevo se observa que la deflexión δ no es función lineal de P, aunque el material cumple internamente con la ley de Hooke y la relación entre δ y P es representada por la curva de la figura 1.2.2 b. El area Oab representa el trabajo efectuado por P durante la deflexión δ y es igual a la energía de deformación almacenada en las barras AC y CB., la cual es igual a

$$U=\int_0^\delta P\,d\delta=\frac{AE}{\ell^3}\int_0^\delta \delta^3 d\delta=\frac{AE\delta^4}{4\ell^3} \qquad 1.2.2\ g$$

ó

$$U=\frac{\ell P^{4/3}}{4\sqrt[3]{AE}} \qquad 1.2.2\ h$$

Es muy importante observar que en los ejemplos anteriores U no es función de segundo grado de δ ó P, como se obtiene en los casos que el principio de superposición rige.

En los ejemplos anteriores, se observa que la acción de las fuerzas externas es considerablemente afectada por las pequeñas deformaciones del sistema, en el primer ejemplo hay una flexion adicional $S\delta$ a la compresión S y la barra trabaja en flexocompresión.

23 Ecuaciones generales de superposisión *

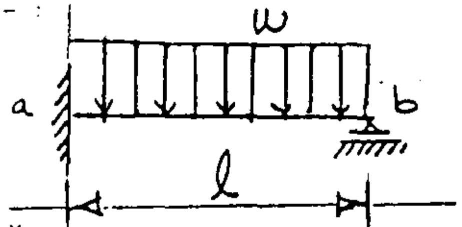
1.2.3.1. Introducción

En el analisis de esfuerzos en estructuras estáticamente indeterminadas no solamente hay que considerar la geometría y estática, si no también las propiedades elásticas tales como modulo de elasticidad momento de inercia, etc., Generalmente para llegar al dimensionamiento final de la estructura, se suponen dimensiones preliminares de los miembros y se efectua su analisis correspondiente, ciclo que puede repetirse en algunos casos hasta llegar al diseño final. En general los esfuerzos desarrollados en estructuras hiperestáticas son debidos no solo a las cargas, si no también a cambios de temperatura, asentamiento de apoyos, errores de fabricación, etc.- Es importante observar que la estructura este en condiciones de equilibrio estable. Con el propósito de ilustar el uso de las ecuaciones generales de superposisión de causas y efectos, consideraremos el siguiente ejemplo, viga con carga uniforme w

---

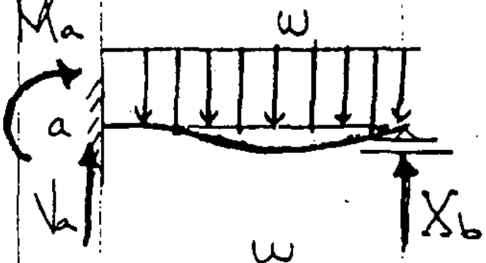
* Ambos métodos de rigidez y flexibilidad debe regir el principio de superposición

empotrada en a y libremente apoyada en b.



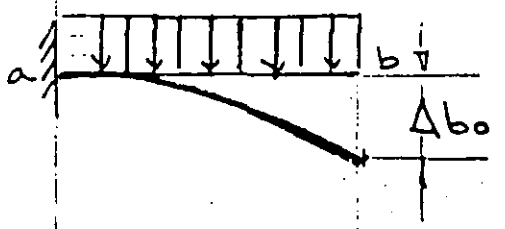
Estructura actual.

Δb = Deflexión de el punto b en la estructura debida a todas las causas.



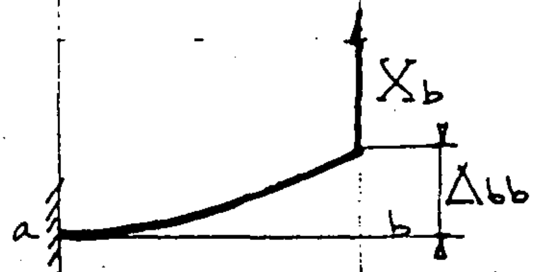
Estructura primaria.

Selección de redundante, X_b

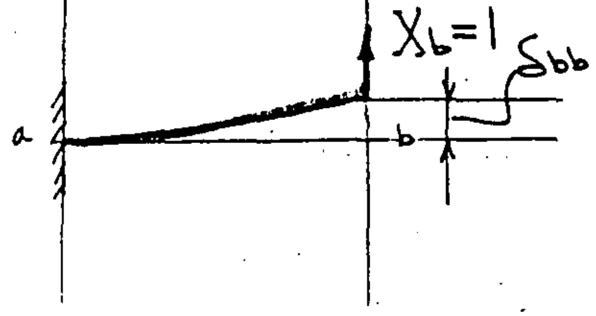


Condición de equilibrio $\bar{X}_b = 0$

Δbo = Deflexión en dirección de la redundante con $X_b = 0$



Δbb = Deflexión en dirección de la redundante debida a X_b con $w=0$



δbb = Deflexión en dirección de la redundante debido a una fuerza unitaria $X_b=$

La ecuación de superposisión si el principio es válid

$$\Delta_b = \Delta_{bo} + \Delta_{bb} = \Delta_{bo} + \bar{X}_b \delta_{bb} = 0 \quad (a)$$

de donde: $$X_b = -\frac{\Delta_{bo}}{\delta_{bb}} \quad (b)$$

(δ_{bb} o d_{bb} es llamado coeficiente de flexibilidad)

1.2.3.2 Ecuaciones generales de superposición en analisis de estructuras estáticamente indeterminadas de grado n.

Suponiendo que la estructura es hiperestática de grado n, se seleccionan las redundantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$, en una forma tal que la estructura primaria en condición de equilibrio $X_i = 0$ sea estable e isostática, aceptando la siguiente notación:

Δ_i = Deflexión total del punto i debida a todas las cargas y efectos.

Δ_{io} = Deflexión del punto i en dirección de la redondante X_i en condiciones de equilibrio estable isostático $X_i = 0$.

Δ_{iT} = Deflexión del punto i debida a un cambio de temperatura ΔT.

Δ_{iA} = Deflexión del punto i debida a asentamientos de apoyo.

Δ_{iE} = Deflexion en el punto i debida a errores de fabricación.

δ_{i1} = Deflexión en el punto i debida a la redundancia X_1

δ_{i2} = " " " " " " " " " X_2

$\vdots$

δ_{in} " " " " " " " " " X_n

Cualquier redundante puede suponerse que actua arbitrariamente en cierto sentido. Cualquier deflexión del punto de aplicación de la redundante deberá ser medida a lo largo de su linea de acción y será positiva cuando el sentido es el mismo que el supuesto para la redundante.

Por lo tanto usando la notación y convención de signos mencionada, las ecuaciones generales de superposisión en sistemas estructurales coplanares y espaciales son:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{10} + \Delta_{1T} + \Delta_{1A} + \Delta_{1E} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \cdots + X_n\delta_{1n} \\ \Delta_2 &= \Delta_{20} + \Delta_{2T} + \Delta_{2A} + \Delta_{2E} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \cdots + X_n\delta_{2n} \\ &\;\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \Delta_n &= \Delta_{n0} + \Delta_{nT} + \Delta_{nA} + \Delta_{nE} + X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + \cdots + X_n\delta_{nn} \end{aligned}\right\} \; (\,$$

Expresando (a) matricialmente se tiene

$$\underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \ldots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \ldots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} \ldots & \delta_{nn} \end{bmatrix}}^{[\delta_{ij}]}}_{} \overset{\{X\}}{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}} = \overset{\{g\}}{\begin{bmatrix} (\Delta_1 - \Delta_{10} - \Delta_{1T} - \Delta_{1A} - \Delta_{1E}) \\ (\Delta_2 - \Delta_{20} - \Delta_{2T} - \Delta_{2A} - \Delta_{2E}) \\ \vdots \\ (\Delta_n - \Delta_{n0} - \Delta_{nT} - \Delta_{nA} - \Delta_{nE}) \end{bmatrix}} \qquad (b$$

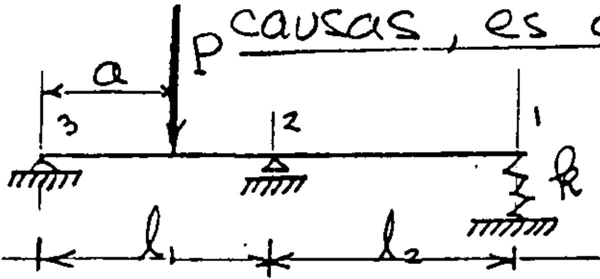
1.2.3.3.- Ejemplos que ilustran el uso de las ecuaciones de superposisión.

Antes de estudiar los ejemplos es conveniente observar lo siguiente:

1- Nunca seleccionar como redundante una reacción estáticamente determinada, ello conducirá a una estructura primaria en equilibrio inestable en condición $X_i = 0$.

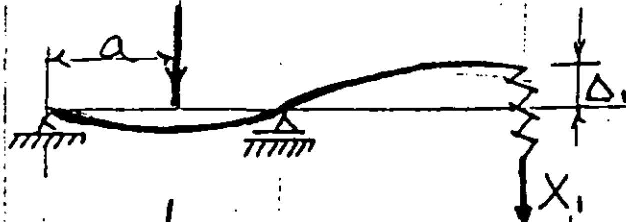
2- El sentido positivo de la redundante se puede seleccionar arbitrariamente, y su deflexión será positiva si tiene el mismo sentido.

3- Debe observarse que Δ_i, deflexión Total del punto de aplicación de la redundante X_i debida a todas las causas, es casi siempre cero.



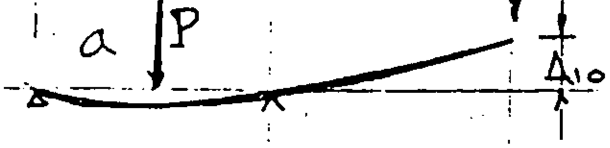
Estructura actual

k^{-1} constante elástica resorte $[\frac{L}{F}$



Estructura primaria

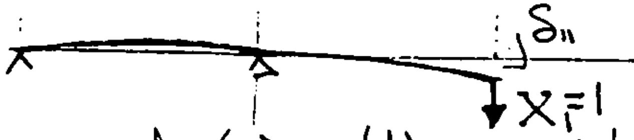
$$\Delta_1 = X_1 k^{-1} \qquad (c)$$



Condición $X_1 = 0$

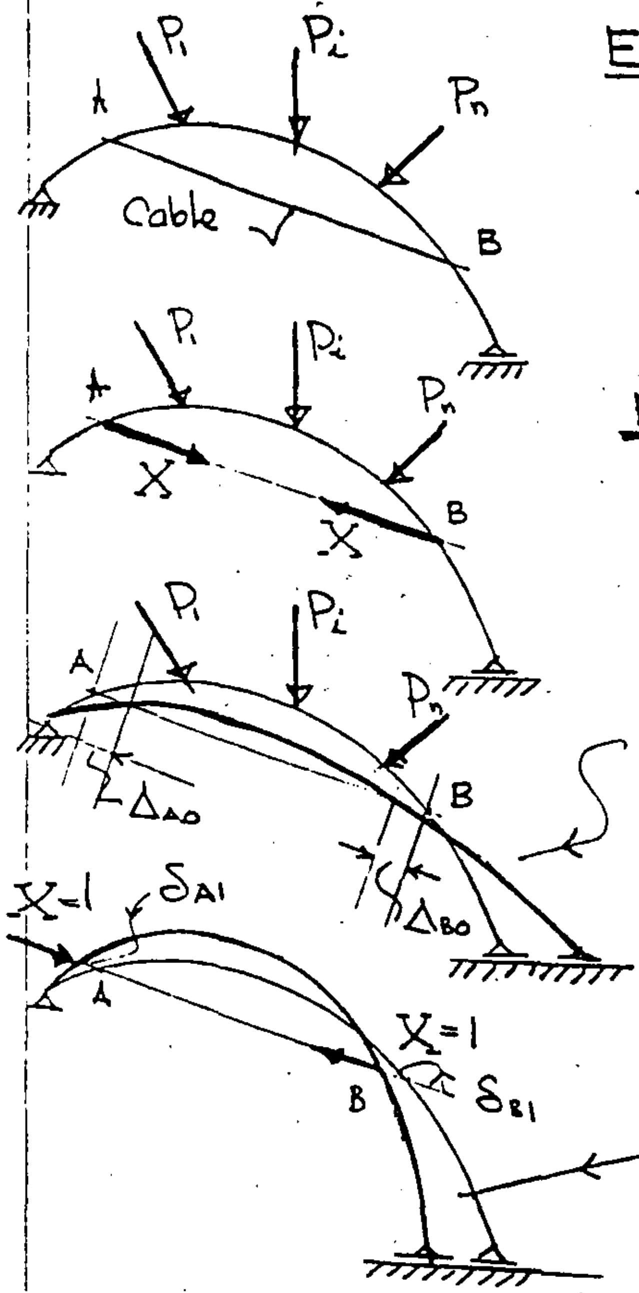
Condición $X_1 = 1$

De Ec. (a) se tiene



$$\Delta_1 = \Delta_{10} - X_1 \delta_{11} \qquad (d)$$

de (c) y (d) se obtiene $\boxed{X_1 = \frac{\Delta_{10}}{\delta_{11} + k^{-1}}}$ (e)



Estructura actual:

Arco coplanar con un tirante AB bajo un sistema de cargas P_n

Estructura primaria

Selección como redundante la tensión en el cable, X.

Condición X=0

Condición X=1

$$\Delta_{AB} = \Delta_{A0} + \Delta_{B0} \quad (f)$$

$$\Delta_{A} = \Delta_{A0} + X\delta_{A1} \quad (g)$$

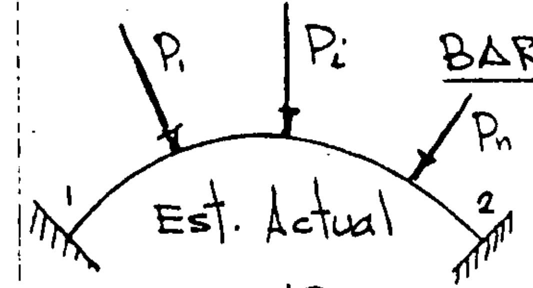
$$\Delta_{B} = \Delta_{B0} + X\delta_{B1} \quad (h)$$

Sumando (g) y (h)

$$\Delta_A + \Delta_B = \Delta_{A0} + \Delta_{B0} + X(\delta_{A1} + \delta_{A2}) = 0$$

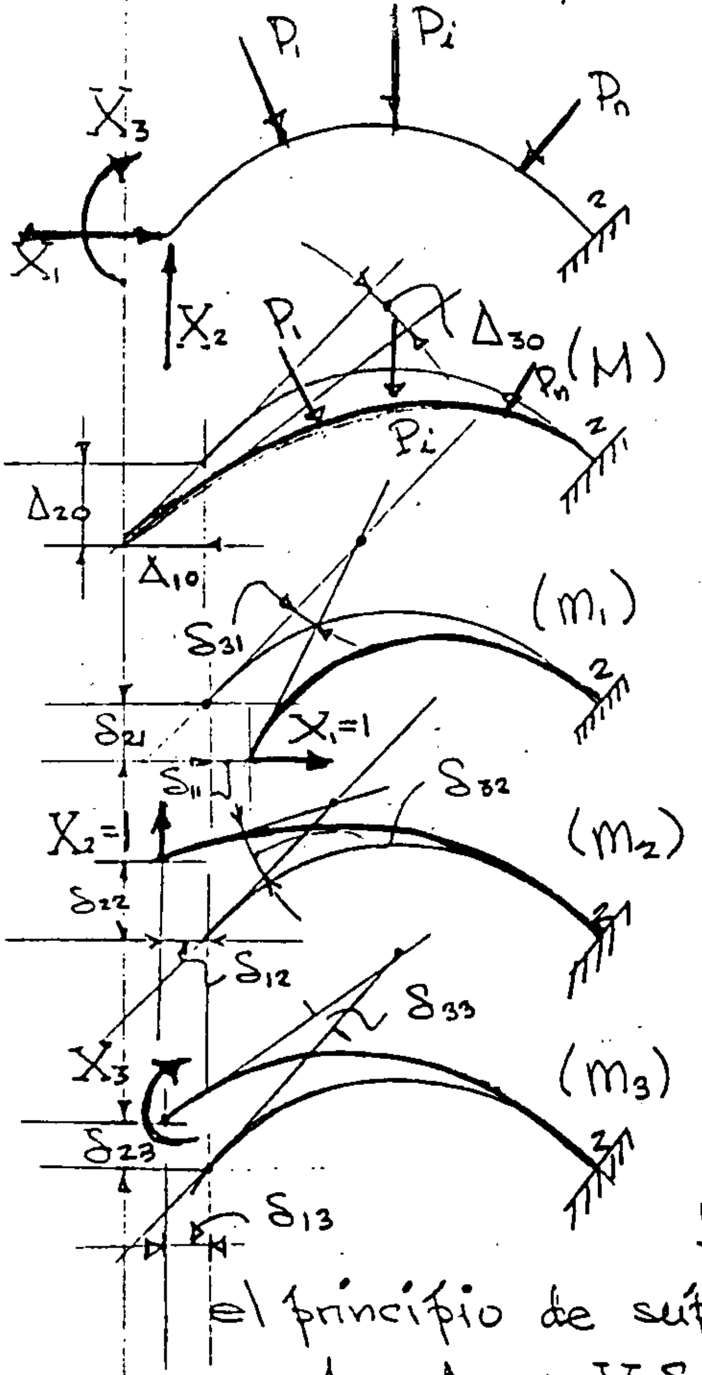
de donde despejando la redundante X se tiene

$$\boxed{X = -\frac{\Delta_{A0} + \Delta_{B0}}{\delta_{A1} + \delta_{B1}}} \quad (i)$$



BARRA PLANA EMPOTRADA

Problema hiperestático de orden 3



Estructura Primaria

Selección de redundantes X_1, X_2, X_3 y condición de empotramiento $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$

Condición $X=0$

Condición $X_1=1$

Condición $X_2=1$

Condición $X_3=1$

Las ecuaciones aplicando el principio de superposisión son

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \Delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13}\\ \Delta_2 &= \Delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23}\\ \Delta_3 &= \Delta_{30} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33}\end{aligned} \qquad (g)$$

expresando (j) en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \\ \Delta_{30} \end{Bmatrix} \qquad (k)$$

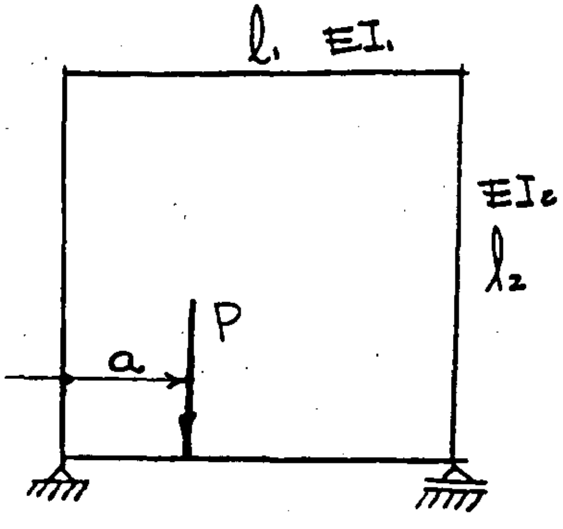
Aplicando el Teorema de Castigliano y la expresión de la energía de deformación por flexión, los coeficientes de flexibilidad δ_{ij} son igual a

$$\Delta_{10} = \int \frac{M m_1}{EI} ds \, , \quad \Delta_{20} = \int \frac{M m_2}{EI} ds , \quad \Delta_{30} = \int \frac{M m_3}{EI} ds$$

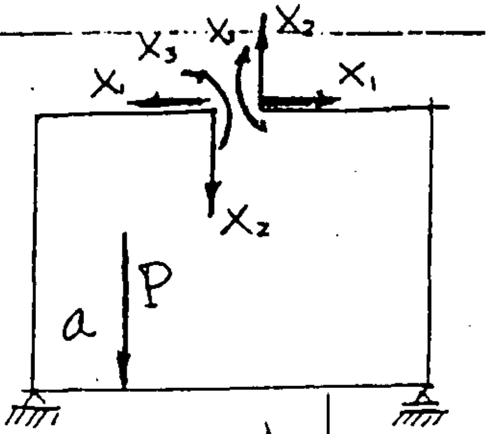
$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2 ds}{EI} , \quad \delta_{22} = \int \frac{m_2^2 ds}{EI} , \quad \delta_{33} = \int \frac{m_3^2 ds}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} ds , \quad \delta_{13} = \delta_{31} = \int \frac{m_1 m_3}{EI} ds , \quad \delta_{23} = \delta_{32} = \int \frac{m_2 m_3}{EI} d$$

MARCO CONTINUO RECTANGULAR BAJO LA ACCION DE UNA CARGA P



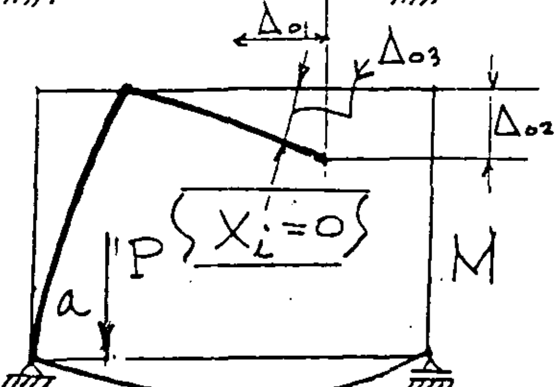
Estructura actual



Estructura primaria:

Selección de redundantes

En este caso las ecuaciones de superposisión son:



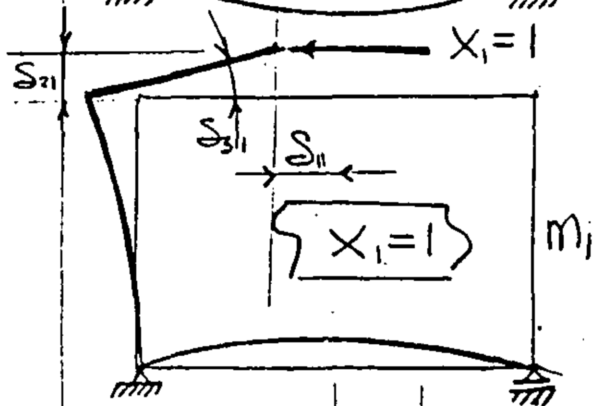
$$\Delta_1=\Delta_{10}+X_1\delta_{11}+X_2\delta_{12}+X_3\delta_{13}=0$$

$$\Delta_2=\Delta_{20}+X_1\delta_{21}+X_2\delta_{22}+X_3\delta_{23}=0$$

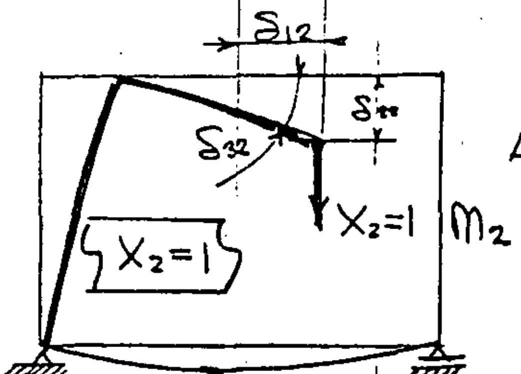
$$\Delta_3=\Delta_{30}+X_1\delta_{31}+X_2\delta_{32}+X_3\delta_{33}=0$$

ó

$$\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}\Delta_{10}\\ \Delta_{20}\\ \Delta_{30}\end{Bmatrix}$$



Del Teorema de Castigliano y la energía elástica de deformació se obtienen los coeficientes de flexibilidad δ_{ij} y Δ_{0i}.

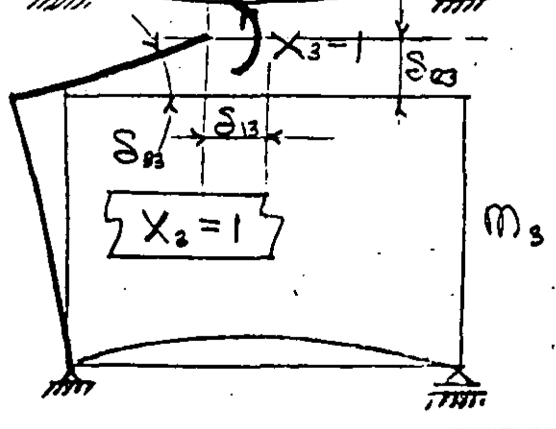


$$\Delta_{01}=\int\frac{Mm_1}{EI}ds,\quad \Delta_{02}=\int\frac{Mm_2}{EI}ds,\quad \Delta_{03}=\int\frac{M}{E}$$

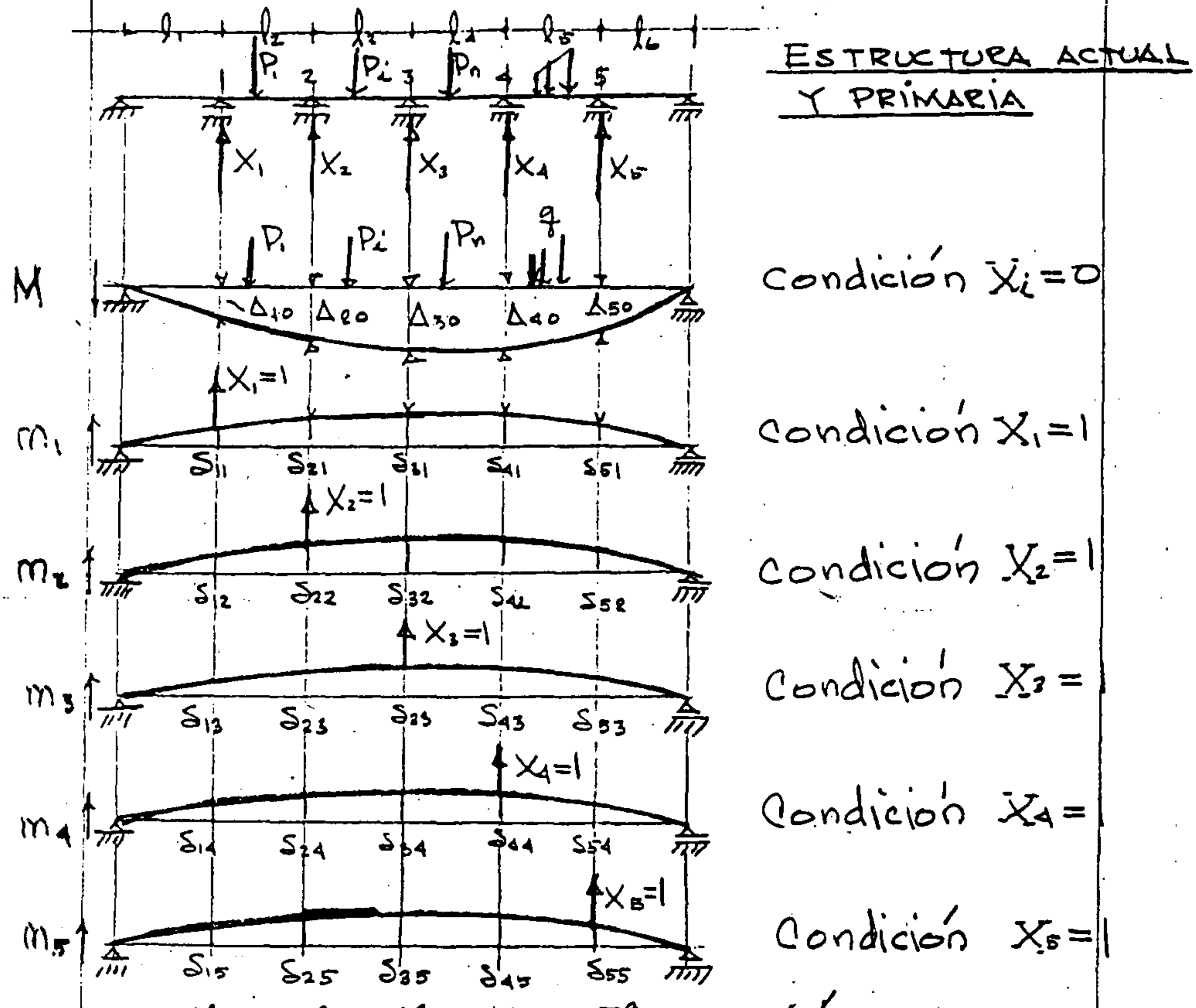
$$\delta_{1}=\int\frac{m_1^2ds}{EI},\quad \delta_{22}=\int\frac{m_2^2ds}{EI},\quad \delta_{33}=\int\frac{m_3^2}{E}$$

$$\delta_{12}=\int\frac{m_1m_2}{EI}ds,\quad \delta_{13}=\int\frac{m_1m_3}{EI}ds,\quad \delta_{23}=\int\frac{m_1}{E}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21},\quad \delta_{13}=\delta_{31},\quad \delta_{23}=\delta_{32}$$



Viga continua de 7 apoyos



1ª 2ª 3ª 4ª 5ª Ecuación

$\Delta_1 = \Delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + X_4\delta_{14} + X_5\delta_{15} = 0$ 1ª Ec

$\Delta_2 = \Delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_4\delta_{24} + X_5\delta_{25} = 0$ 2ª 〃

$\Delta_3 = \Delta_{30} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_4\delta_{34} + X_5\delta_{35} = 0$ 3ª 〃

$\Delta_4 = \Delta_{40} + X_1\delta_{41} + X_2\delta_{42} + X_2\delta_{43} + X_4\delta_{44} + X_5\delta_{45} = 0$ 4ª 〃

$\Delta_5 = \Delta_{50} + X_1\delta_{51} + X_2\delta_{52} + X_3\delta_{53} + X_4\delta_{54} + X_5\delta_{55} = 0$ 5ª 〃

$$[\delta_{ij}]\{X_j\} + \{A_{j0}\} = 0$$

1.3 Generaligación de la energía de deformacion

La energía de deformación de una barra elástica puede representarse como una función de segundo grado de la carga o la deformación. La misma conclusión es valida para cualquier estructura dentro del régimen elástico, siempre y cuando el principio de superposisión pueda aplicarse, en la Fig. 1.3.1 suponiendo que las fuerzas se aplican simultaneamente e incrementan gradualmente hasta su valor final. Si

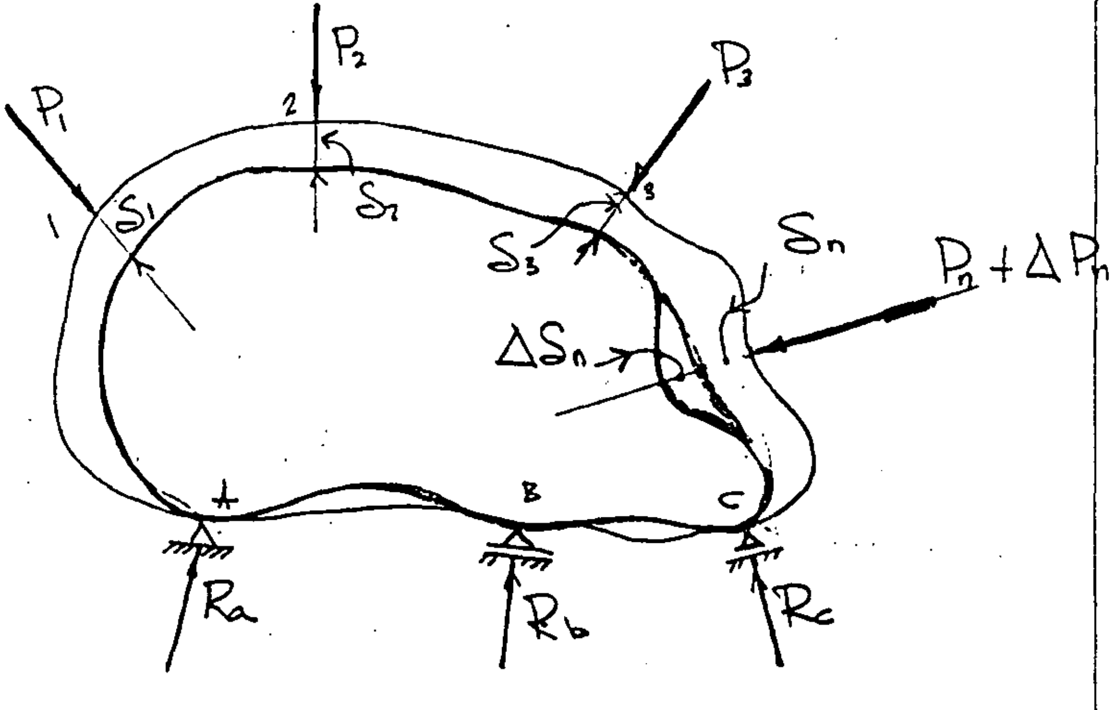


Fig. 1.3.1.

el principio de superposisión rige, los desplazamientos seran funciones lineales de las cargas. El trabajo elástico de todas las fuerzas externas es igual a la energía interna de deformación almacenada en el cuerpo elástico de la figura 1.3.1 y será

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P_i \delta_i = \frac{1}{2}(P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + \cdots + P_n\delta_n) \qquad (1.3.1)$$

1.3.1.- <u>Ejemplo, viga libremente apoyada</u> cargada como se indica en la Fig. 1.3.1a

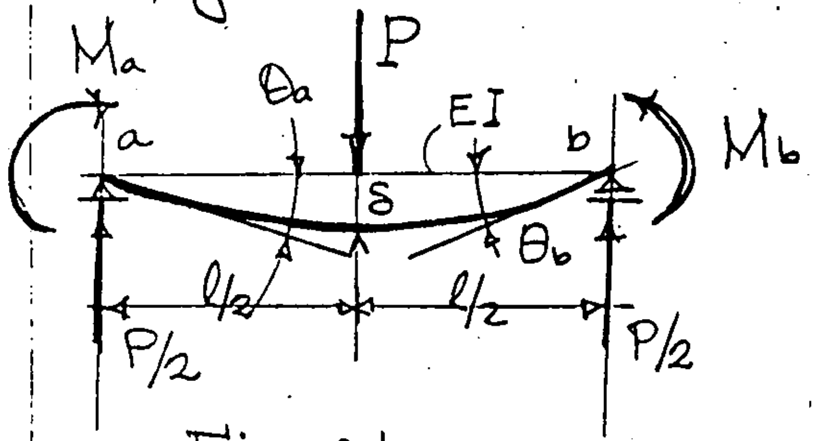


Fig. 1.3.1a

La energía de deformación es

$$U = \frac{1}{2}(P\delta + M_a\theta_a + M_b\theta_b) \qquad (a)$$

De la curva elástica de la viga se demuestra que:

$$\left.\begin{aligned} \delta &= \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{M_a l^2}{16EI} + \frac{M_b l^2}{16EI} \\ \theta_a &= \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{M_a l}{3EI} + \frac{M_b l}{6EI} \\ \theta_b &= \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{M_a l}{6EI} + \frac{M_b l}{3EI} \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Substituyendo (b) en (a) se obtiene

$$U=\frac{l^3}{96EI}\left(P^2+\frac{6}{l}PM_a+\frac{6}{l}PM_b+\frac{16}{l^2}M_a^2+\frac{16}{l^2}M_b^2+\frac{16}{l^2}M_aM_b\right. \qquad (c$$

en (c) se observa que U es una función de segundo grado de las fuerzas y momentos P, Ma y Mb.

Tarea

En el ejemplo de la viga de la Fig 1.3.1a Demostrar:

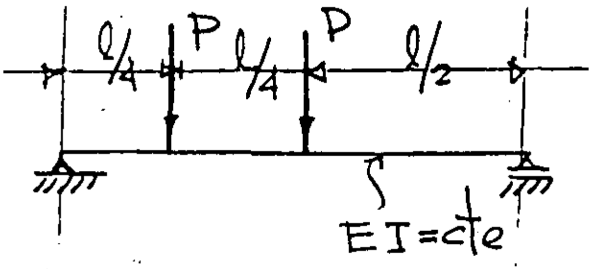
a) $\frac{\partial U}{\partial P}=\delta$, $\frac{\partial U}{\partial M_a}=\theta_a$, $\frac{\partial U}{\partial M_b}=\theta_b$

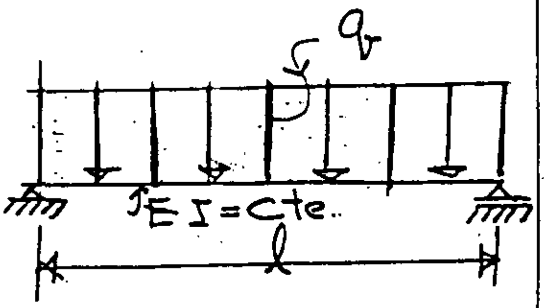
b) De (a) y (b) obtener U en función de los desplazamientos δ, θ_a, θ_b.

c) Demostrar que:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta}=P,\quad \frac{\partial U}{\partial \theta_a}=M_a,\quad \frac{\partial U}{\partial \theta_b}=M_b$$

Calcular la energía de deformación de las siguientes vigas de sección transversal b h





1.4 Teorema de Castigliano.

Suponiendo que el principio de superposición rige, y que U se expresa en función de las fuerzas externas se tiene que: LA DERIVADA DE LA ENERGIA DE DEFORMACION CON RESPECTO A UNA DE LAS FUERZAS O MOMENTOS EXTERNOS NOS DA EL DESPLAZAMIENTO O EL GIRO DE LA FUERZA O MOMENTO CORRESPONDIENTE.

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial P_n} = \delta_n} \qquad (1.4.1)$$

Considerando el cuerpo elástico bajo la aplicación de $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Durante la aplicación de P_i se producen deformaciones δ_i y se almacena cierta energía de deformación dentro del cuerpo (Fig. 1.3.1). Si subsecuentemente a P_n se aplica un incremento ΔP_n, la energía U incrementará

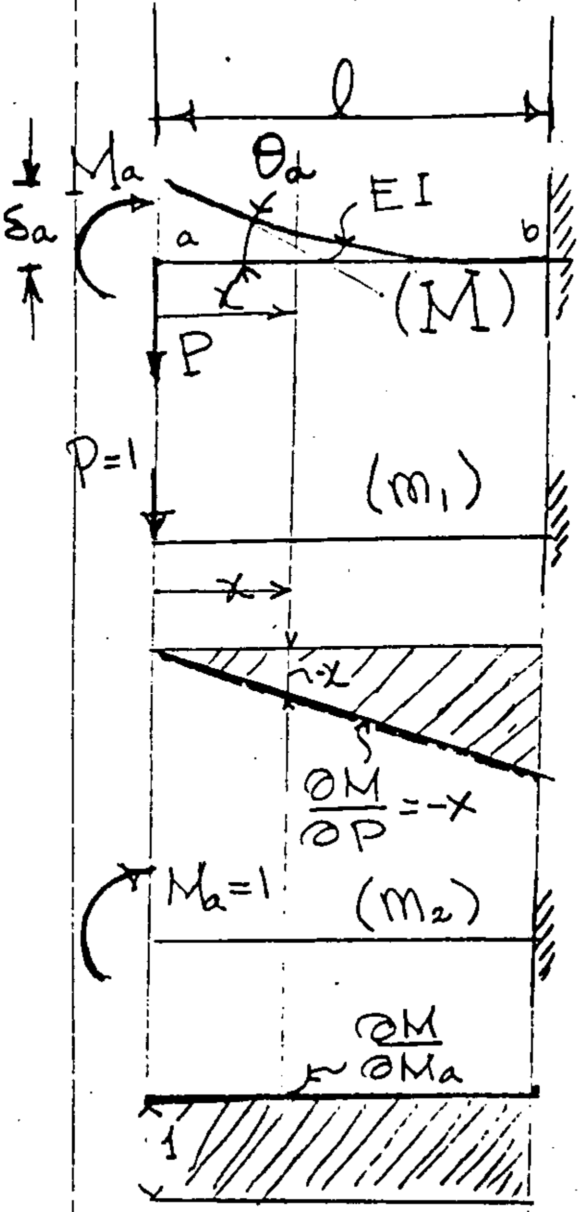
$$U + \Delta U = U + \frac{\partial U}{\partial P_n} \Delta P_n \qquad (1.4.2)$$

Si en vez de aplicar ΔP_n después de las cargas se aplica antes se tiene

$$U + \Delta U = U + \Delta P_n (\delta_n + \Delta \delta_n) = U + \Delta P_n \delta_n \qquad (1.$$

igualando (1.4.2) con (1.4.3) se demuestra (1.4.1)

1.4.1 Ejemplos de aplicación



La variación de M(x) es

$$M = M_a - Px \qquad (a)$$

La energía de deformación por flexión.

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} \qquad (b)$$

Del Teorema de Castigliano

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \delta_a = \int \frac{M \frac{\partial M}{\partial P}}{EI} ds$$

$$\delta_a = \int_0^l \frac{M m_1}{EI} ds \qquad (c)$$

Substituyendo (a) en (c)

$$\delta_a = \frac{1}{EI} \int_0^l (M_a - Px)(-x) dx$$

$$\delta_a = \frac{Pl^3}{EI} - \frac{M_a l^2}{2EI} \qquad (d)$$

De nuevo del Teorema de Castigliano

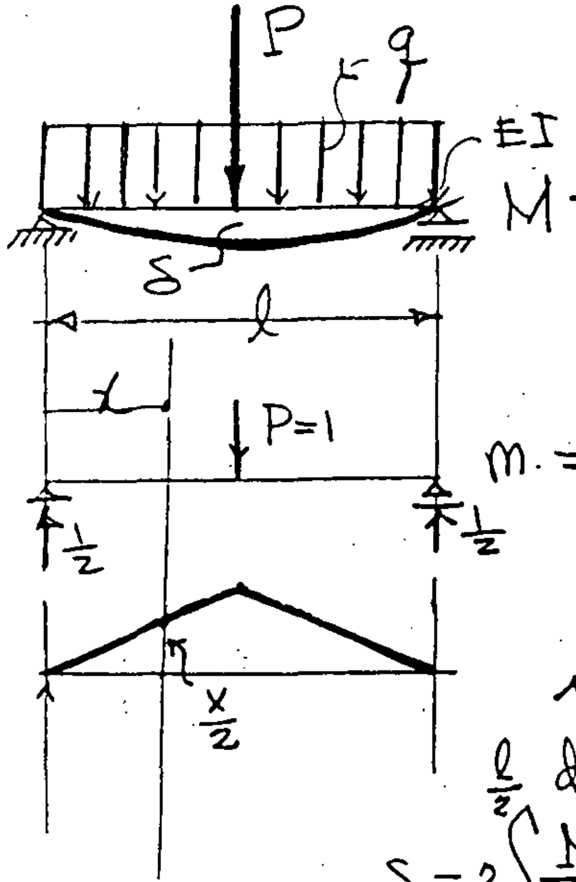
$$\frac{\partial U}{\partial M_a} = \theta_a = \int_0^l \frac{M \frac{\partial M}{\partial M_a}}{EI} dx = \int_0^l \frac{M m_2}{EI} dx \qquad (e)$$

Substituyendo (a) en (e) se obtiene

$$\theta_a = \frac{1}{EI} \int_0^l (M_a - Px)(1) dx = \frac{M_a l}{EI} - \frac{Pl^2}{2EI}$$

En el ejemplo anterior no se calculó U en función de las fuerzas externas, sino se utilizó la energía de deformación por flexión y se derivó bajo el signo integral.

Es importante observar que las derivadas corresponden a la variación de momento flector debido a causas unitarias P y M.



$$M = \frac{P}{2}x + \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \qquad (f)$$

$$m = \frac{x}{2} \qquad (g)$$

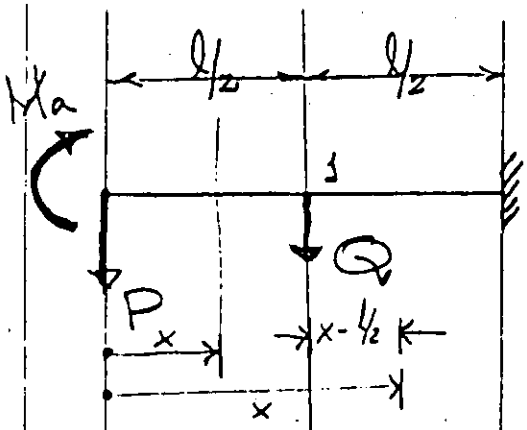
De la energía de deformaci por flexión y el Teorema de Gastigliano.

$$\delta = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M\,m}{EI}\,dx \qquad (h)$$

Substituyendo (f) y (g) en (h) se obtiene

$$\delta = 2/EI\int_0^{l/2}\left(\frac{P}{2}x + \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)dx = \underline{\frac{Pl^3}{48EI}} + \underline{\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}}$$

En los casos en los cuales es necesario determinar los desplazamientos en un lugar donde no hay fuerzas o momentos, se agrega al sistema actual de fuerzas una fuerza ficticia de magnitud infinitesimal, tal que no afecta al sistema actual de fuerzas y se obtiene el desplazamiento derivando con respecto a ella.



$$M = \underline{M_a - P}x \qquad 0 \le x \le \frac{l}{2} \qquad (i)$$

$$M = \underline{M_a - Px} - \underline{Q\left(x - \frac{l}{2}\right)} \qquad (j)$$

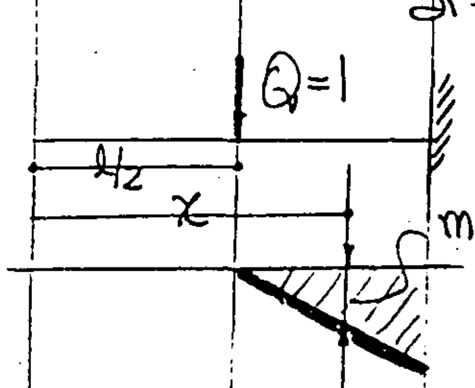
para $\frac{l}{2} \le x \le l$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = m = -\left(x - \frac{l}{2}\right) \qquad (k)$$

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI}$$ = (energía de def. por flexión)

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \delta_1 = \int \frac{M \frac{\partial M}{\partial Q}}{EI} dx = -\int_{l/2}^{l} \frac{1}{EI}(M_a - Px)\left(x - \frac{l}{2}\right) dx$$

$$\delta_1 = \frac{5Pl^3}{48EI} - \frac{M_a l^2}{8EI} \qquad (l)$$



m

$m = \underline{-1(x - l/2)}$

$$\delta = \int_0^l \frac{Mm}{EI} dx \qquad (m$$

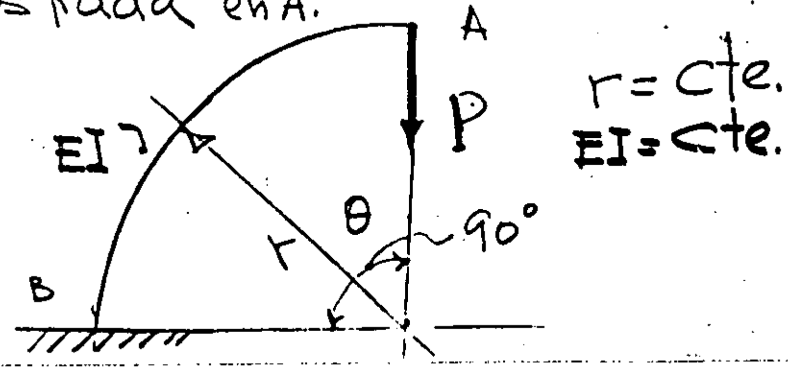
{en este caso $\frac{\partial U}{\partial Q} = 0 \quad 0 \le x \le l/$

En conclusión se observa que la derivación del Teorema de Castigliano, fué basada en el principio de superposisión. De allí que la energía de deformación U debe ser una función de segundo grado de las fuerzas actuantes. Sí el principio de superposisión no rige y U no es función de segundo grado de las fuerzas, el Teorema de Castigliano no es aplicable, lo anterior se ilustró mediante ejemplos.

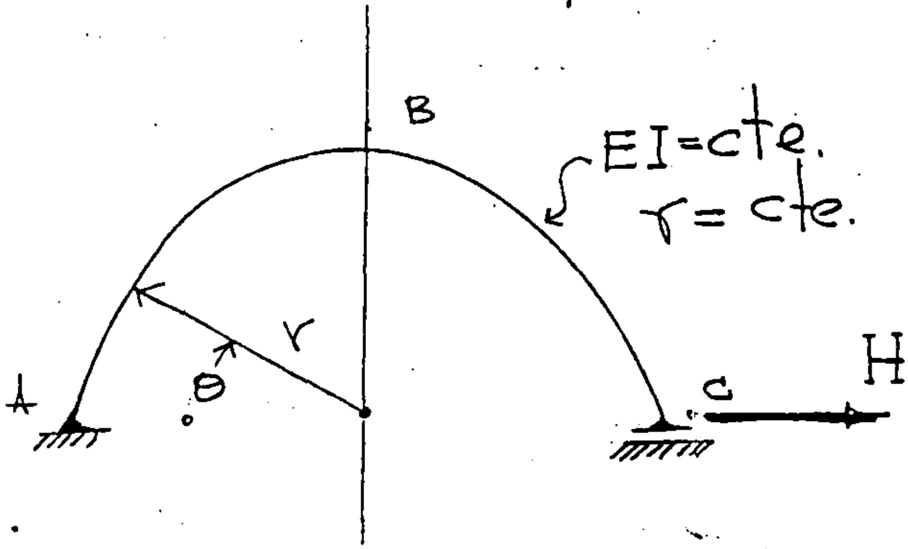
Ejemplos de Tarea

a) Utilizando el teorema de Castigliano determinar los ángulos en los extremos de una viga libremente apoyada con carga uniforme q, claro l, y rigidez flexionante EI= constante.

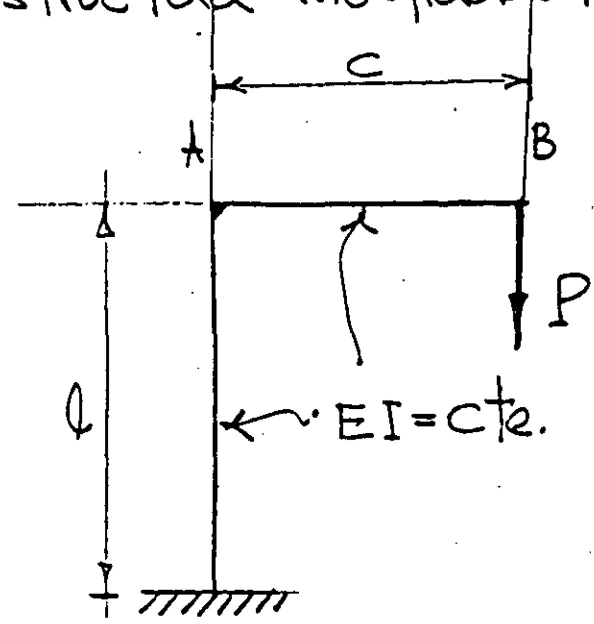
b) Determinar los desplazamientos horizontal y vertical de la viga curva mostrada en A.



c) Determinar el desplazamiento horizontal en c y el vertical en B en la estructura mostrada.



d) Determinar los desplazamientos horizontal y vertical de A y B en la estructura mostrada.



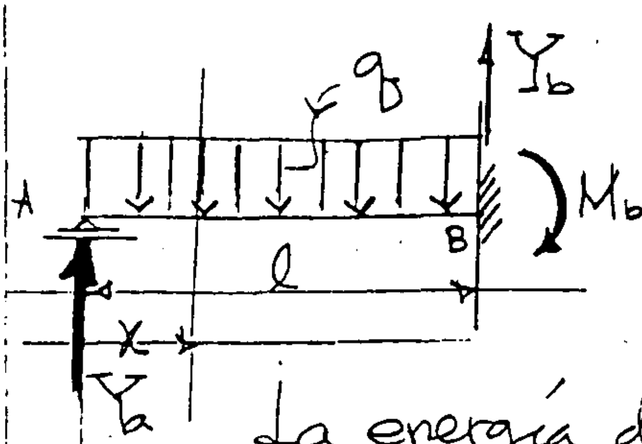
1.5 Teorema del Trabajo mínimo

Se han considerado aplicaciones del teorema de Castigliano a sistemas de fuerzas estáticamente determinados. Aplicándolo a sistemas estáticamente indeterminados se concluye que la derivada de la energía de deformación con respecto a cual quier redundante deberá ser cero si su acción es la de prevenir desplazamientos en su punto de aplicación, de allí que las magnitudes de las reacciones redundantes en sistemas hiperestáticos serán tal que la energía de deformación del sistema en dicho punto sea máxima o mínima, lo anterior es el método del Trabajo mínimo para calcular redundantes. En una estructura hiperestática de grado "n" se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial X_1}=0,\ \frac{\partial U}{\partial X_2}=0,\ \dots,\ \frac{\partial U}{\partial X_n}=0 \qquad (1.5.1)$$

1.5.1 Ejemplos

a) Viga empotrada en un extremo con carga uniforme. (grado n=1).



La energía de deformación del sistema por flexión es

$$U=\int^{l}\frac{M^2dx}{2EI} \qquad (a)$$

Del teorema del trabajo mínimo

$$\frac{\partial U}{\partial Y_a}=0=\frac{\partial}{\partial Y_a}\left[\int\frac{M^2dx}{2EI}\right]=\frac{1}{EI}\int_0^l M\frac{\partial M}{\partial Y_a}dx \qquad ($$

$$M=Y_a x-\frac{qx^2}{2} \qquad (c)$$

$$\frac{\partial M}{\partial Y_a}=x \qquad (d)$$

Substituyendo (c) y (d) en (b) se obtiene

$$\int_0^l\left(Y_a x-\frac{qx^2}{2}\right)x\,dx=\frac{l^3}{3}Y_a-\frac{ql^4}{8}=0$$

de donde $\boxed{Y_a=3/8\,ql}$ (c)

En el sistema se tienen 3 reacciones Y_a, Y_b, M y 3 ecuaciones dos de estática y una del teorema de Castigliano.

en el ejemplo anterior,

si se considera como redundante M_b se tiene.

$$\frac{\partial U}{\partial M_b}=\frac{\partial}{\partial M_b}\left[\int_0^l \frac{M^2dx}{2EI}\right]=\frac{1}{EI}\int_0^l M\frac{\partial M}{\partial M_b}dx= \qquad ($$

el momento flector es

$$M=\left(\frac{ql}{2}-\frac{M_b}{l}\right)x-\frac{qx^2}{2} \qquad (g)$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_b}=-\frac{x}{l} \qquad (h)$$

substituyendo (g) y (h) en (f) se obtiene

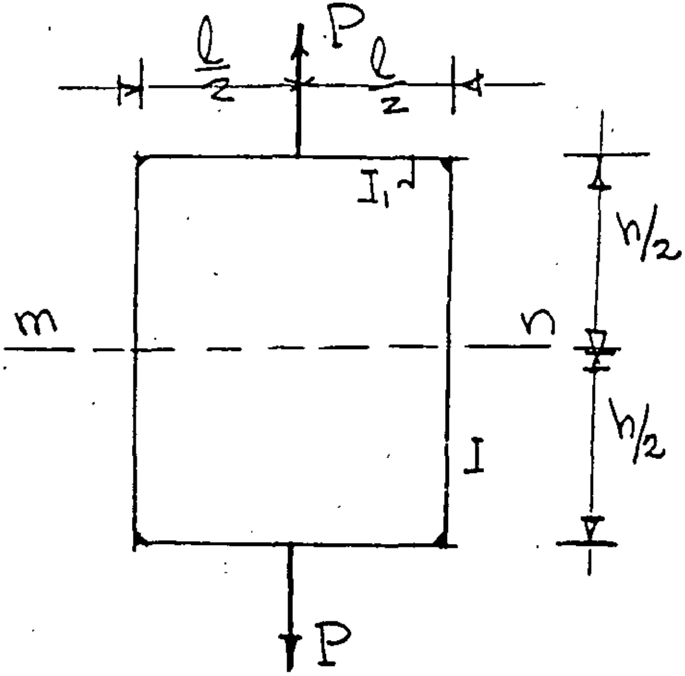
$$\int_0^l\left[\left(\frac{ql}{2}-\frac{M_b}{l}\right)x-\frac{qx^2}{2}\right]\frac{x}{l}dx=0 \qquad (i)$$

integrando (i) y despejando M_b se obtiene

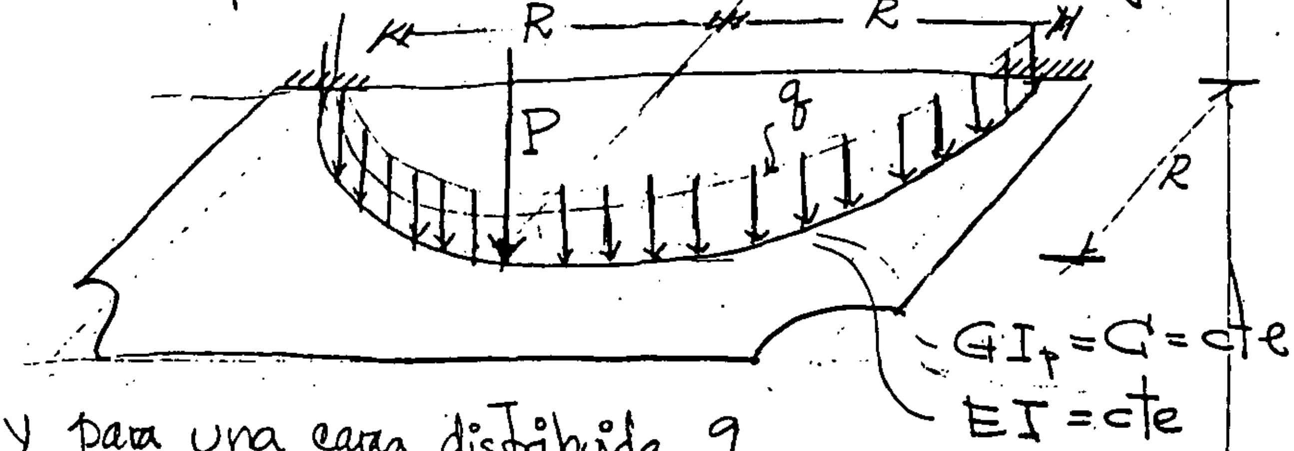
$$M_b=\frac{ql^2}{8} \qquad (j)$$

Ejemplos de tarea

1- Determinar los momentos en la sección m-n en la estructura mostrada



2- En la viga en balcón mostrada, determinar las reacciones en los apoyos, considere el trabajo elástico por flexión y torsión, para una carga P



y para una carga distribuida q

2.- METODOS MATRICIALES DE ANALISIS ESTRUCTURAL

(Flexibilidad) (desplazamientos)

2.1 Métodos de Fuerzas y Deformación

En los métodos de analisis de sistemas estáticamente indeterminados, primero se seleccionaban las redundantes, y sus magnitudes se determinan mediante el teorema del Trabajo mínimo, considerando la energía de deformación del sistema. Este procedimiento general es llamado el método de las fuerzas.

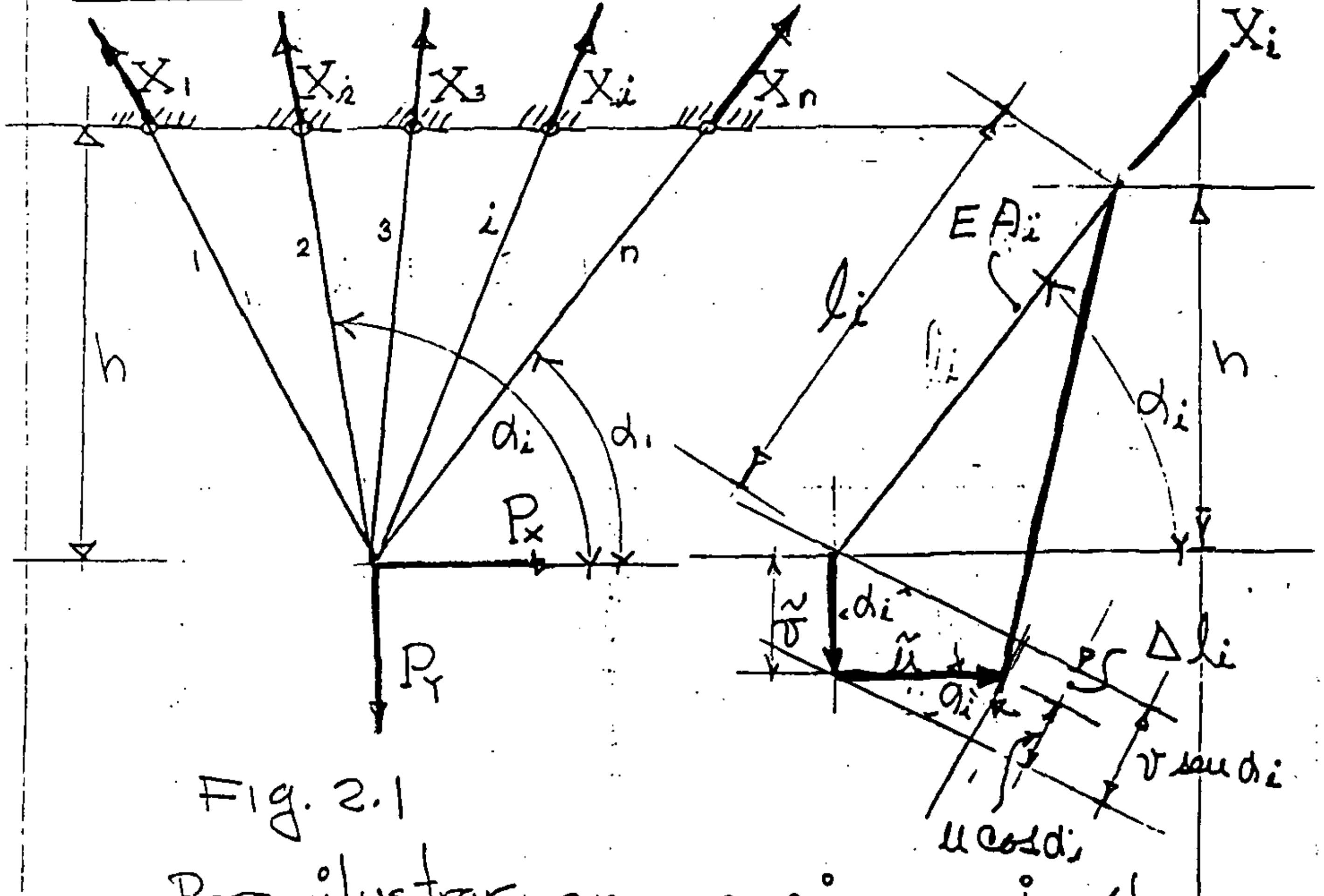


Fig. 2.1

Para ilustrar en un mismo ejemplo

la distinción entre los dos métodos 11
consideremos la estructura estáticamente indeterminada coplanar mostrada en la figura 2.1 bajo la acción de dos fuerzas aplicadas P_x y P_y con n barras, el número de redundantes sea $n-2$. Entonces para determinar las redundantes $X_1, X_2, \dots X_{n-2}$, se determina la energía de deformación del sistema en función de las fuerzas y usando el Teorema del trabajo mínimo se obtienen las ecuaciones necesarias

$$\frac{\partial U}{\partial X_1}=0, \frac{\partial U}{\partial X_2}=0, \dots, \frac{\partial U}{\partial X_{n-2}}=0 \qquad (a)$$

<u>lo anterior es el método de las fuerzas.</u> Para resolver el mismo problema, <u>Navier</u>[1] <u>sugirió el método de desplazamientos</u>. La deformación del sistema de la figura 2.1 estará completamente determinado si conocemos las componentes horizontal y vertical u y v respectivamente. Suponiendo que los desplazamientos son pequeños

---

[1] <u>Navier</u>, "Résumé des leçons", 2 ed., p. 345, Paris, 1833.

la deformación axial de cualquier barra i será

$$\Delta l_i = v \operatorname{sen} \alpha_i - u \cos \alpha_i \qquad (b)$$

y de la ley de Hooke su fuerza axial correspondiente será

$$X_i = \frac{EA_i}{l_i}(v \operatorname{sen} \alpha_i - u \cos \alpha_i) \qquad (c)$$

de la figura 2.1

$$l_i = \frac{h}{\operatorname{sen} \alpha_i} \qquad (d)$$

substituyendo (d) en (c) se obtiene

$$X_i = \frac{EA_i}{h}(\underline{v} \operatorname{sen} \alpha_i - \underline{u} \cos \alpha_i) \operatorname{sen} \alpha_i \qquad (e)$$

De las condiciones de equilibrio se obtiene

$$-\sum_{i=1}^{n} X_i \cos \alpha_i = P_x \qquad (f)$$

$$\sum_{1}^{n} X_i \operatorname{sen} \alpha_i = P_Y \qquad (g)$$

substituyendo (e) en (f) y (g) se obtiene

$$\underline{v} \sum_{i=1}^{n} A_i \operatorname{sen}^2 \alpha_i \cos \alpha_i - \underline{u} \sum_{i=1}^{n} A_i \cos^2 \alpha_i \operatorname{sen} \alpha_i = \frac{P_x h}{E} \qquad (i$$

$$\underline{v} \sum_{i=1}^{n} A_i \operatorname{sen}^3 \alpha_i - \underline{u} \sum_{i=1}^{n} A_i \operatorname{sen}^2 \alpha_i \cos \alpha_i = \frac{P_Y h}{E} \qquad ($$

de (i) y (j) se determinan $\underline{u}$ y $\underline{v}$ las cuales substituidas en (e) obtenemos la fuerza X_i en cualquier barra del sistema. Se observa en este caso que la consideración de las deformaciones directas del sistema resulta en una simplificación substancial, especialmente si el número de barras n es grande, puesto que solo tenemos que resolver dos ecuaciones con dos incógnitas que son las deformaciones u y v. En el caso del método de las fuerzas tendremos que resolver n-2 ecuaciones con n-2 incógnitas. Es conveniente observar que el método de las deformaciones involucró 3 etapas básicas que son

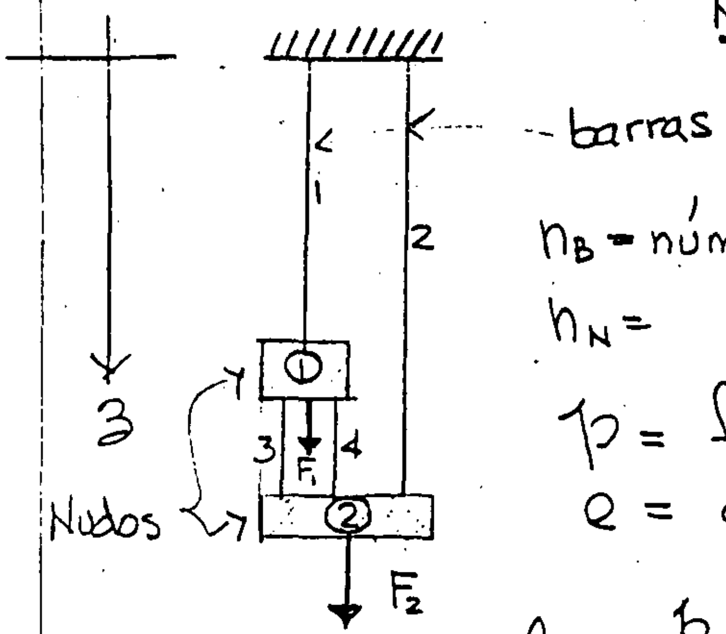
ecuación (b): Compatibilidad geométrica de deformaciones, u, v y Δl.

ecuación (e): Ley de Hooke.

ecuaciones (f) y (g): Equilibrio

Notacion: Livsley

S.J. Fenves 1965



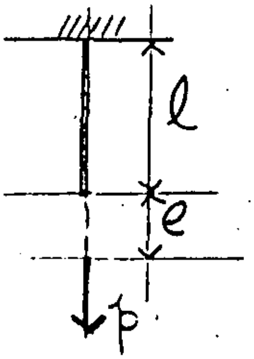
n_B = número de barras = 4

n_N = " " nudos = 2

p = fuerzas axiales (P)

e = alargamiento (δ)

Rigidez de barra $k_i = \frac{p}{e} = \frac{\text{fuerza axial}}{\text{alargamiento}} \equiv \frac{EA_i}{l_i}$



A) Continuidad:

$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} \equiv$ Def. o alarg. de las cuato barras $\begin{Bmatrix} + \text{ Alarg.} \\ - \text{ Acort.} \end{Bmatrix}$

$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \equiv$ desplazamientos nodales $\begin{Bmatrix} + \downarrow \\ - \uparrow \end{Bmatrix}$

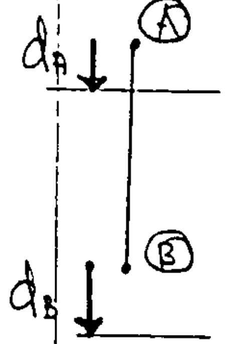
De la figura

$$e_1 = d_1$$
$$e_2 = \quad + d_2$$
$$e_3 = -d_1 + d_2$$
$$e_4 = -d_1 + d_2$$

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \; ; \text{ ó } \boxed{\{e\} = [a]\{d\}} \quad (1)$$

donde $[a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; matriz de continuidad (compatibilidad)

observar que para una barra i cualquiera



$e_i = d_B - d_A$

d_A = desplazamiento del nudo superior

d_B = " " " inferior

B) Ley de Hooke

Sea $\{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}$ fuerzas axiales en las barras
+ Tensión, − compresión

$$p_1 = k_1 e_1$$
$$p_2 = k_2 e_2$$
$$p_3 = k_3 e_3$$
$$p_4 = k_4 e_4$$

$k_i = \frac{EA_i}{l_i}$ rigidez de barra i

ó

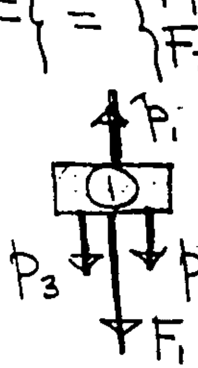
$$\underbrace{\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}}_{\{p\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}}_{[k]} \underbrace{\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix}}_{\{e\}} ; \text{ ó } \boxed{\{p\} = [k]\{e\}} \quad (2$$

$[k]$ matriz de rigidez de las barras

c) Equilibrio: $\sum F_y = 0$ en cada nudo

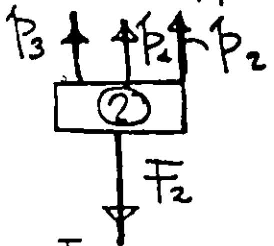
Sea: $\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$

Nudo ①



$F_1 = p_1 + 0 - p_3 - p_4$

Nudo ②



$F_2 = 0 + p_2 + p_3 + p_4$

ó $\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}$ ó $\boxed{\{F\} = [a]^T \{p\}}$ (3)

donde: $[a]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ <u>matriz de equilibrio</u>

observar: <u>matriz de equilibrio es la transpuesta de la matriz de continuidad</u>

Solución del problema anterior por el método de desplazamientos (rigideces).

Incógnitas: $\{e\}$, $\{d\}$, $\{p\}$

Datos: $[a]$, $[a]^T$, $[k]$, $\{F\}$

Subst. (1) en (2)

$$\{p\} = [k][a]\{d\} \qquad (4)$$

Subst. (4) en (3)

$$\{F\} = [a]^T[k][a]\{d\} \qquad (5)$$

ó $\{F\} = [K]\{d\}$ (5a)

la matriz $[a]^T[k][a]$ es cuadrada 17

Ejemplo; Suponiendo

$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1 \ Ton/cm$, $F_1 = 10 \ Ton$
$F_2 = 5 \ Ton.$

$$[K] = [a]^T[k][a]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

efectuando operaciones:

$$[K] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

observar que $[K]$ es simétrica

de (5a)

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

despejando $\{d\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \ cm \\ 7 \ cm \end{Bmatrix}$ subst. en (1)

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \ cm \\ 7 \ '' \\ -1 \ '' \\ -1 \ '' \end{Bmatrix}$$ Subst. en (2)

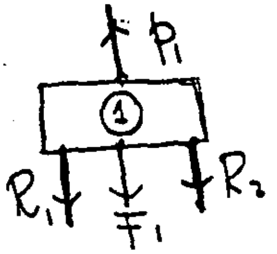
$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \ Ton \\ 7 \ '' \\ -1 \ '' \\ -1 \ '' \end{Bmatrix}$$

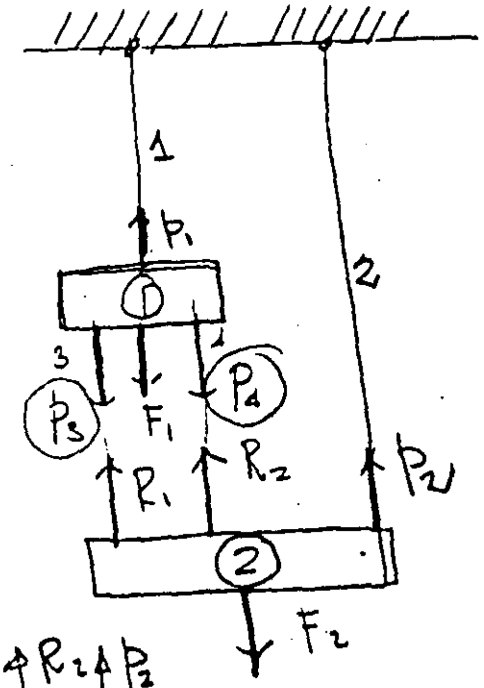
comprobación de equilibrio: de (3)

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \ ton \\ 5 \ '' \end{Bmatrix} \ ///$$

Metodo de las fuerzas (Flexibilidad)

Usando los tres principios fundamentales en el orden inverso **Equilibrio**, **Ley de Hooke**, **Continuidad**

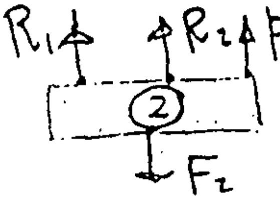




a) Equilibrio

$$\begin{array}{l|l} F_1 = P_1 - & R_1 - R_2 \\ F_2 \quad\;\; P_2 & + R_1 + R_2 \end{array}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \Big[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{a_0^T} \; \underbrace{\begin{matrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}}_{a_R^T}\Big] \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} [\tilde{P}_0] \\ \\ [R] \end{matrix}$$



$$\{F\} = [a_0^T \; a_R^T] \begin{Bmatrix} P_0 \\ R \end{Bmatrix}$$

$$= a_0^T P_0 + a_R^T R$$

despejando a P_0

$$\{P_0\} = [a_0^T]^{-1}\{F\} - [a_0^T]^{-1}[a_R^T][R]$$

en nuestro ejemplo

$$[a_0^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad [a_0^T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{P_0\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}[F] - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}[R]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}[F] - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} R$$

o bien

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}$$

ademas se tiene

$$p_3 = R_1$$
$$p_4 = R_2$$

Por consiguiente

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{b_0} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{b_R} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \qquad ⓐ$$

$$\left\{ \begin{array}{llll} p_1 = F_1 & & +R_1 & +R_2 \\ p_2 = & F_2 & -R_1 & -R_2 \\ p_3 = & & R_1 & \\ p_4 = & & & R_2 \end{array} \right\}$$

ⓐ se puede escribir ⓑ

$$\{p\} = [b_0]\{F\} + [b_R]\{R\}$$

$$b_0 = \begin{bmatrix} (a_0^T)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad b_R = \begin{bmatrix} (-a_0^T)^{-1} a_R^T \\ I \end{bmatrix}$$

Ley de Hooke

$$\{p\} = [k]\{e\}$$

$$\boxed{\{e\} = [k]^{-1}\{p\}} \quad ⓒ \qquad [f] = [k]^{-1} \text{ Flex.}$$

subst ⓑ en ⓐ

$$\{e\} = [f][b_0]\{F\} + [f][b_R]\{R\} \quad ⓓ$$

CONTINUIDAD.- Considerando los desplazamientos relativos de R1 y R2 llamados u_1, u_2 $\quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$

$$d_1 = e_1$$
$$d_2 = e_2$$
$$u_1 = e_1 - e_2 + e_3$$
$$u_2 = e_1 - e_2 + e_4$$

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix}$$

pero $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [b_0]^T$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [b_R]^T$$

Por lo tanto

$$\{d\} = [b_0^T]\{e\} \quad ⓔ \qquad ⓔ$$

$$\{u\} = [b_R^T]\{e\} \quad ⓕ$$

{los valores de {u) deben anularse}

subst ⓓ en ⓔ

$$\{u\} = [b_R^T][f][b_0]\{F\} + [b_R^T][f][b_R]\{R\} \quad ⓖ$$

como $\{u\}=0$ se despeja $\{R\}$ (h)

$$\{R\} = -[b_R^T f b_R]^{-1}[b_R^T f b_0]\{F\}$$

ⓗ nos da las redundante $\{R\}$

subst ⓗ en ⓑ se obtiene $\{p\}$

$$\{p\} = b_0 F - b_R(b^T f b_R)^{-1}(b_R^{+} f b_0) F$$

$$= \underbrace{[b_0 - b_R(b_R^T f b_R)^{-1} b_R^T f b_0]}\{F\} \quad (i)$$

$$= [b]\{F\}$$

subst (i) en ⓒ se obtiene $\{e\}$

$$\{e\} = [f][b]\{F\} \quad (j)$$

subst (j) en ⓔ se obtiene

subst

$$\boxed{\{d\} = [b_0^T][f][b]\{F\}} \qquad ⓚ$$

Demostrar que

$$[b_0^T f b] = [K]^{-1} = [f]$$

$$b_0^+ f b = b^T f b$$

En nuestro ejemplo calc. valores numer.

para $k_1 = k_2 = k_2 = k_3 = 1^{ton/cm}$ f_i

$A_1 = \cdots = 1 cm^2$

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

ANALISIS ESTRUCTURAL

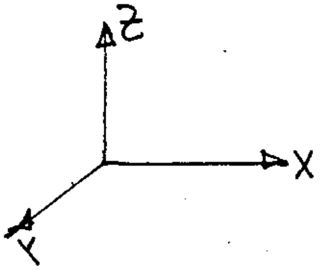
INTRODUCCION

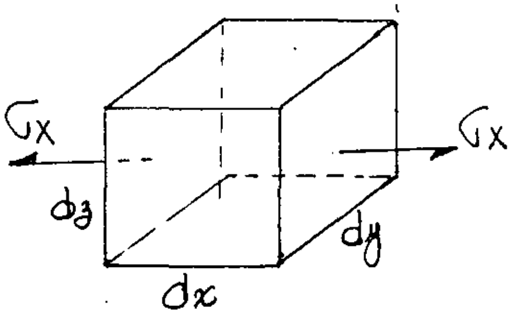
ENERGIA DE DEFORMACION

ING. JUAN LUIS COTTIER CAVIEDES

SEP-OCT. 92

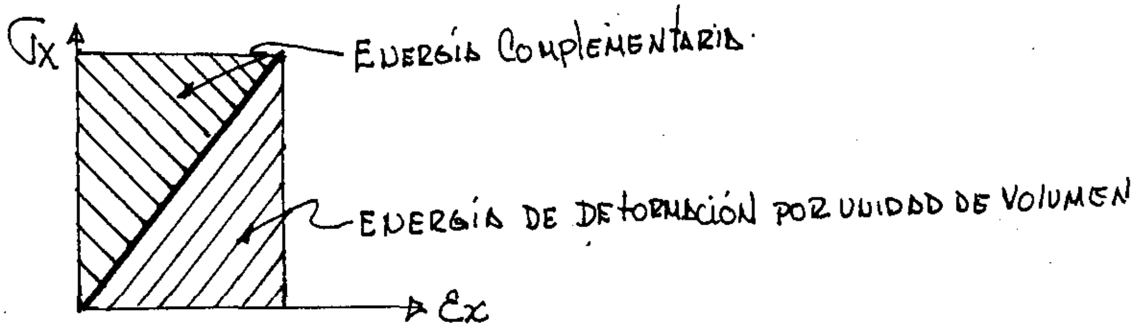
Energía Elástica de Deformación por Esfuerzo Normal





U = energia elástica Interna

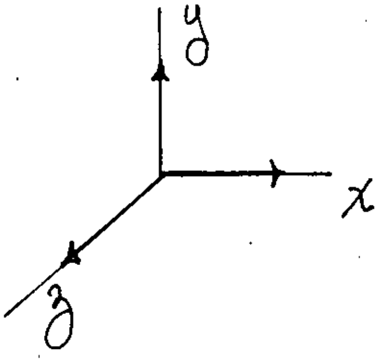
$$dU = \underbrace{\underbrace{\tfrac{1}{2}\sigma_x\, dy\, dz}_{\text{Fza. promedio}} \times \underbrace{\varepsilon_x dx}_{\text{distancia}}}_{\text{TRABAJO}} = \tfrac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x\, dx\, dy\, dz \qquad (1)$$

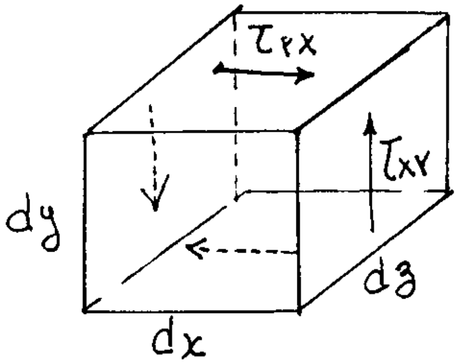


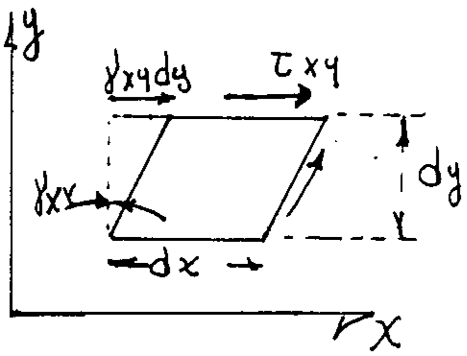
Para un cuerpo elástico perfecto no hay disipación de energía y el trabajo hecho por un elemento es almacenado como energía de deformación interna recuperable de (1) la densidad de energía.

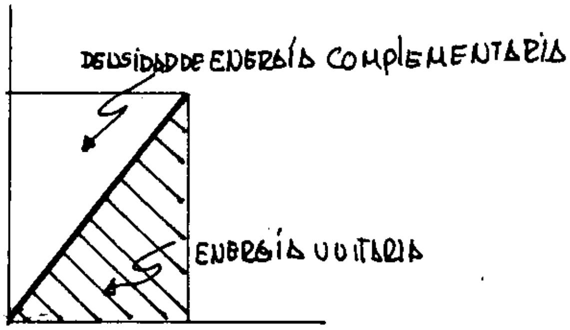
$$\frac{dU}{dV} = U_0 = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} \qquad (2)$$

Energía elástica de deformación por esfuerzo cortante









$$dU_{CORTE} = \frac{1}{2}\tau_{xy}\,dx\,dz \times \gamma_{xy}\,dy = \frac{1}{2}\tau_{xy}\,\gamma_{xy}\,dx\,dy\,dz$$

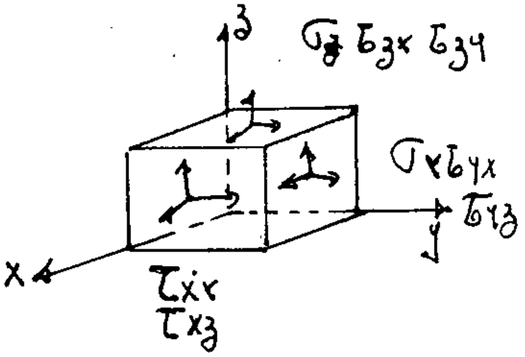
la densidad de energía por esfuerzo contante es

$$\left(\frac{dU}{dV}\right)_{corte} = \frac{1}{2}\tau_{xy}\,\gamma_{xy} \qquad (4)$$

Aceptando el principio de superposición para un estado multiaxial de esfuerzos.

La densidad de energía de deformación es

$$[\sigma_{ij}]$$



$$\frac{dU}{dV} = U_0 = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y\varepsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z\varepsilon_z$$
$$+ \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz} + \frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx} \qquad (5)$$

Expresando (5) matricialmente se obtiene

$$U_0 = \frac{1}{2}\left[\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_{xy}\ \tau_{yz}\ \tau_{zx}\right]\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}[\sigma]\{\varepsilon\} \qquad (6)$$

Substituyendo en (5) la ley generalizada de Hoope (7)

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} \qquad\qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} \qquad\qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \qquad (7)$$

$$\varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \qquad\qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

se obtiene.

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right) \qquad (8)$$

Para materiales elásticos lineales homogéneos e isotrópicos se puede obtener una expresión similar a (8) en términos de las deformaciones en lugar de los esfuerzos, la energía total se obtiene de

$$U = \iiint_V U_0\, dx\, dy\, dz \qquad (9)$$

la ecuación (5), es importante al establecer las leyes de plasticidad y (8) es importante en análisis de esfuerzos por métodos energéticos.

Substituyendo (6) en (9) se obtiene

$$U = \tfrac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \, dV$$

$$= \tfrac{1}{2} \iiint_V [\sigma]\{\varepsilon\} \, dx\,dy\,dz \qquad (10)$$

Para barras axialmente cargadas, con flexión y cortante (10) queda.

$$U = \tfrac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \, dx\,dy\,dz \qquad (11)$$

Para materiales elásticos lineales

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad y \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad (12)$$

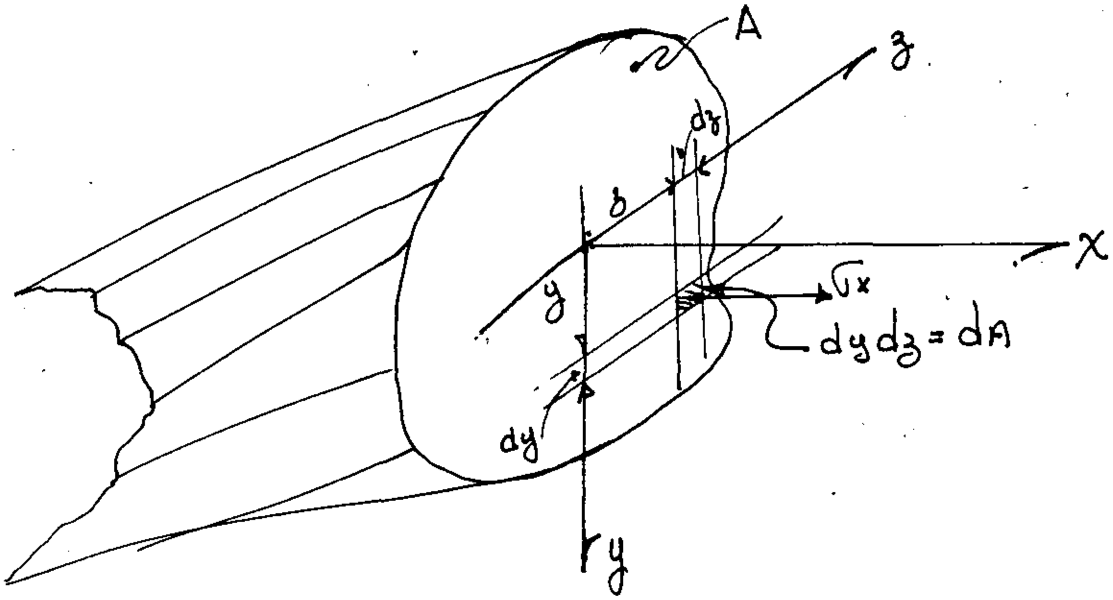
de (12) y (11) se obtiene que:

$$U = \underbrace{\iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E} \, dx\,dy\,dz}_{\text{Para Carga axial, y Flexión en Vigas}} + \underbrace{\iiint_V \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \, dx\,dy\,dz}_{\text{Para cortante en VIGAS.}} \qquad (13)$$

Energía de deformación para barras cargadas axialmente

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{\text{Carga axial}}{\text{Sección Transversal}}, \quad A = \iint_A dy\,dz \qquad (14)$$

N y A son funciones de x unicamente.



Por lo tanto (12) se reduce a

$$U_N = \iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\,dv = \iiint \frac{N^2}{2A^2E}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int \frac{N^2}{2A^2E}\left[\iint_A dy\,dz\right]dx \Rightarrow \int \frac{N^2}{2EA}\,dx$$

$$\boxed{U_N = \int_L \frac{N^2}{2EA}\,dx} \qquad (15)$$

Energía de deformación en flexión en este caso

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y \qquad (16)$$

De (16) y (13) se obtiene

$$U_M = \iiint \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \iiint \frac{1}{2E}\left(-\frac{My}{I}\right)^2 dx\,dy\,dz$$

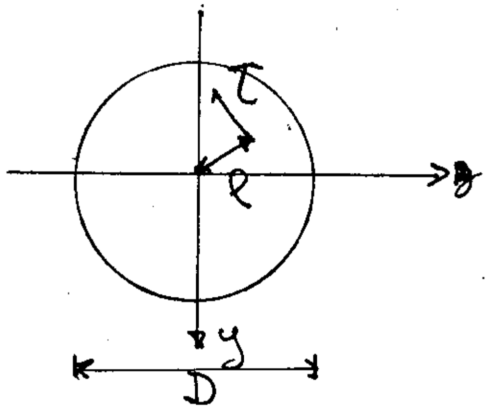
$$= \int \frac{M^2}{2EI^2}\left[\iint y^2 dy\,dz\right] dx = \int_L \frac{M^2}{2EI}\,dx$$

$$\boxed{U_M = \int_L \frac{M^2}{2EI}\,dx} \qquad (17)$$

Energía de deformación para secciones circulares en torsión

Para este caso

$$\tau = \frac{M_T}{J}\rho \qquad (18)$$



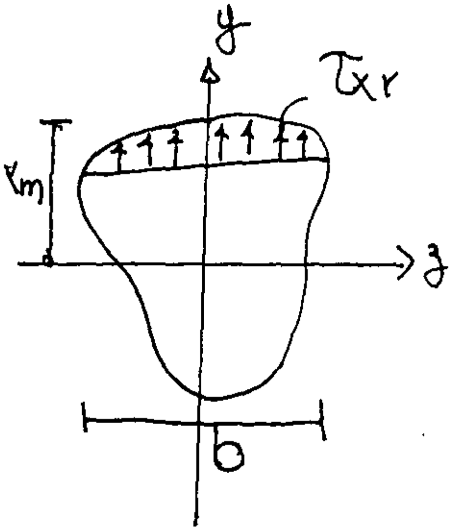
Subst (18) en (13)

$$U_\tau = \iiint_V \frac{\tau_{xx}^2}{2G}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint \frac{1}{2G}\left(\frac{M_T}{J}\rho\right)^2 dx\,dy\,dz$$

$$U_T = \int \frac{M_T^2}{2GJ^2}\left[\iiint \rho^2 dy\,dz\right] dx = \boxed{\int \frac{M_t^2}{2GJ}\,dx}$$

Energía de deformación por cortante



En este caso $\tau_{xy} = \frac{V Q_y^{y_m}}{b I}$

V= Cortante en la seccion

$Q_y^{y_m} = \int^{y_m} y\, da$ = momento estático de y a ym.

b=ancho a la altura y de los ejes centroidales x y.

I= Momento de Inercia de la sección.

Substituyendo (20) en (13)

$$U_V = \iiint \frac{1}{2G}\left(\frac{V Q_y^{y_m}}{b I}\right) dx\, dy\, dz = \int \frac{V^2}{2GI^2}\left[\iint_A \left(\frac{Q_y^{y_m}}{b}\right)^2 dy\, dz\right] dx$$

$$\boxed{U_V = \int_L \frac{V^2}{2GI^2}\left[\iint_A \left(\frac{Q_y^{y_m}}{b}\right)^2 dy\, dz\right] dx} \qquad (21)$$

La expresión Total de la energía de deformación será: $U = U_N + U_M + U_T + U_V$ o sea

$$\boxed{U = \int \left\{ \frac{N^2}{2EA} + \frac{M^2}{2EI} + \frac{M_T^2}{2GJ} + \frac{V^2}{2GI^2}\left[\iint \left(\frac{Q_y^{y_m}}{b}\right)^2 dy\, dz\right]\right\} dx} \qquad (22)$$

Desplazamientos

El principio de conservación de energía (la energía no puede ser creada o destruida), puede adoptarse para calcular deformaciones en sistemas elásticos debidos a las cargas aplicadas. La primera Ley de la Termodinâmica expresa este principio como

Trabajo Realizado = Cambio de Energía

Para un proceso adiabático (no se agrega o substrae calor al sistema) y cuando no se genera calor en el sistema, y cuando las fuerzas aplicadas se aplican en forma estâtica (las fuerzas se aplican tan lentamente que se desprecia la energía -- cinética $\frac{1}{2}\ mv^2$), el caso especial de este ley para sistemas conservativos se reduce a

$$We = U$$

Donde: We = trabajo hecho por las fuerzas externas durante el proceso de carga.

U = Energía total de deformación almacenada en el Sistema.

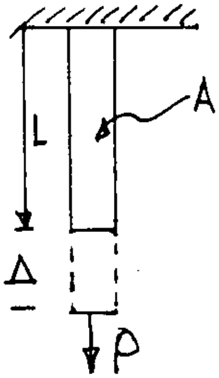
Similar a decir que la suma del trabajo externo We y el interno Wi deben ser cero.

$$We + Wi = 0$$

$U = -Wi$ las deformaciones siempre se oponen a las fuerzas internas. Es importante considerar la aplicación gradual de las cargas de cero a su valor total por lo tanto We será ½ Fuerza total por el desplazamiento.

Ejemplos ,

a) Determine la deflexión de la viga mostrada



$$We = \frac{1}{2} P\Delta \quad \text{y de (22)}$$

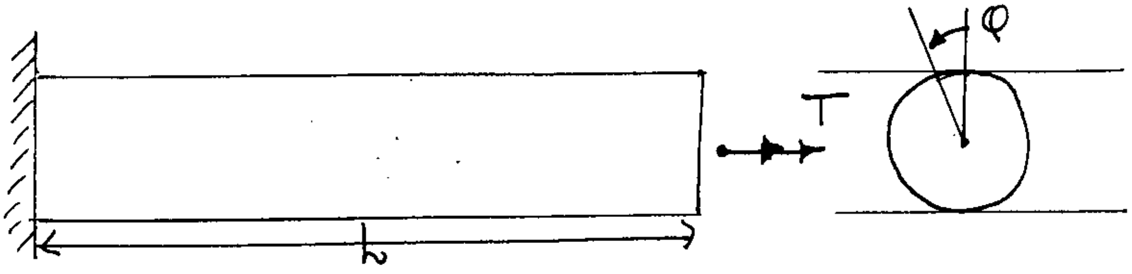
$$U = \frac{1}{2EA} \int N^2 dx$$

$$= \frac{P^2}{2EA} \int_0^L dx = \frac{P^2 L}{2EA}$$

$$\text{de}(23) \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot P\Delta = \frac{P^2 L}{2EA}$$

$$\Delta = \frac{PL}{AE} \quad \text{Ley de Hooke}$$

b) Determine la rotación en el extremo de una flecha de sección circular.



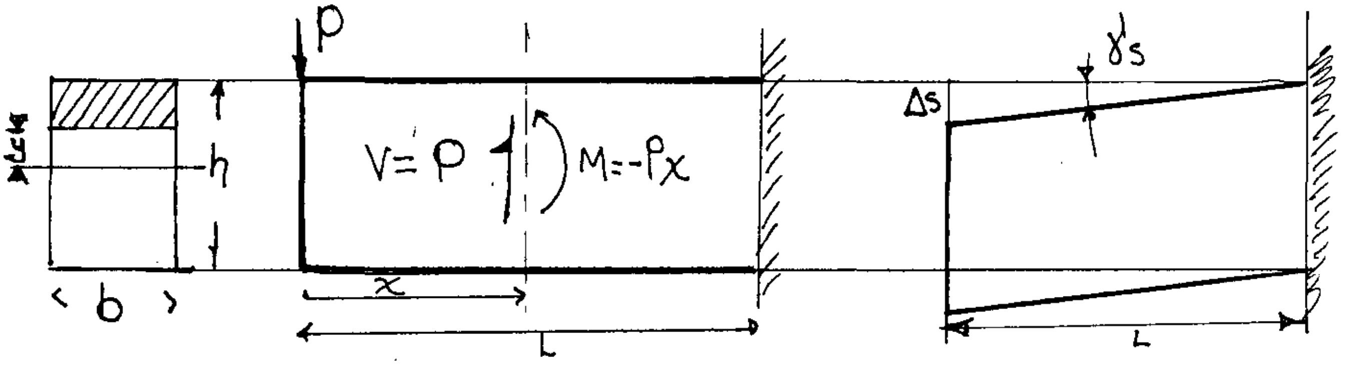
El trabajo externo We = $\frac{1}{2}$ T Q y el interno de (22)

$$U = \frac{T^2}{2GJ}\int_0^L dx = \frac{T^2 L}{2GJ}$$ de (23)

$$\frac{1}{2}T\varphi = \frac{T^2 L}{2GJ} \Rightarrow \varphi = \frac{TL}{GJ}$$ que.

coincide con los valores de los textos de Mecánica de Materiales.

c) Determinar la deflexión máxima en la viga mostrada considerando el efecto del cortante y de flexión.



Trabajo externo We = $\frac{1}{2}$ P , la energía interna consta de dos partes, una debida a los esfuerzos de flexión y otra a los esfuerzos de corte de (17) y (13).

$$U_{Flexion} = \frac{1}{2EI}\int_0^L M^2 dx = \frac{1}{2EI}\int_0^L (-Px)^2 dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

El esfuerzo de corte: $\tau = \frac{VQ_y^{y_m}}{bI} = \frac{P}{2I}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]$

que sustituido en la segunda parte de (13) se obtiene

obtiene

$$U_{corte} = \iiint_V \frac{\tau^2}{2G}\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2G}\int_{-h/2}^{h/2} \left\{\frac{P}{2I}\left[\frac{h^2}{2} - y^2\right]\right\}^2 L\,b\,dy$$

$$= \frac{P^2 L b}{8 G I^2} \times \frac{h^5}{30} = \frac{P^2 L b h^5}{240 G}\left(\frac{12}{bh^3}\right)^2 = \frac{3P^2 L}{5AG}$$

donde $A = bh$ sección transversal. Entonces

$$W_e = U = U_{FLEXIÓN} + U_{CORTE}$$

$$\frac{P\Delta}{2} = \frac{P^2 L^3}{6EI} + \frac{3P^2 L}{5AG}$$ de donde

$$\Delta = \underbrace{\frac{PL^3}{3EI}}_{FLEXIÓN} + \underbrace{\frac{6PL}{5AG}}_{CORTE} \qquad (24)$$

El término debido al cortante se puede interpretar

$$\tau_{av} = \frac{P}{A} = \frac{V}{A}$$ cortante Promedio.

puesto que τ varía parabólicamente $\frac{6}{5}$ representa un factor de corrección numérico por lo tanto

$$\Delta_{corte} = \gamma_s L = \alpha \frac{\tau_{av}}{G} L = \alpha \frac{VL}{AG} = \frac{6}{5}\,\frac{PL}{AG}$$

el valor α depende de la forma de la sección en general puede variar con X de (24)

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}\left(1 + \frac{3E}{10G}\,\frac{h^2}{L^2}\right) \qquad (25)$$

suponiendo acero estructural

$$\frac{E}{G} = 2(1+\nu) \doteq 2.5$$ y la ec. (25) queda

$$\Delta = \left(1 + 0.75 \frac{h^2}{L^2}\right) \Delta \text{flexión} \qquad (26)$$

De (26) se observa que para una viga corta sea h = L la deflexión total es Δ = 1.75 Δ flexión por lo cual la deformación de corte es muy importante para una viga flexible se L = 10 h.

$$\Delta = (1 + 0.75 \frac{h^2}{(10h)^2}) \quad \text{flexión}$$

$$\Delta = 1.0075 \quad \Delta \text{ flexión}$$

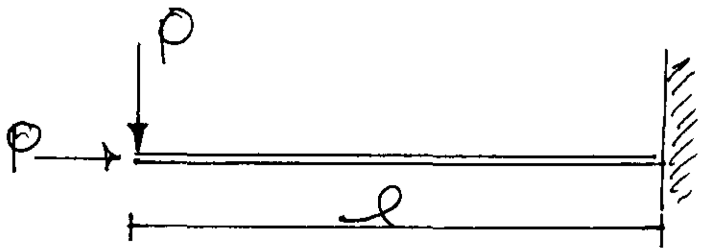
La deflexión debida al corte se puede despreciar no siempre es posible considerar lo anterior.

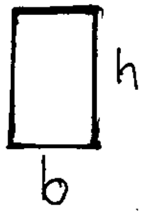
Comparando las expresiones (1.1.6.1C) (1.1.6.2C) y (1.1.6.2C) para un claro = 5.00 m y un peralte h = 30 cm se obtiene:

$$\boxed{\begin{array}{l} U_V = 0.00286\ U_M \\ \\ U_N = 0.0009\ \ U_M \end{array}} \qquad (a)$$

En la mayoría de los problemas estructurales elásticos lineales, la energía de deformación debida a la carga normal N y cortante V es despreciable respecto a la energía de deformación debida al momento flexionante M.

Cuando existe momento torsionante M_T (vigas en balcón, etc.), su energía de deformación es considerable y debe tomarse en cuenta su valor





1.2 Principio de Superposición

1.2.1.- Introducción

En los sistemas de cargas en los que las deflexiones son funciones lineales de las cargas, se puede obtener la deflexión en un punto cualquiera, mediante la suma de las deflexiones producidas individualmente en dicho punto por cada una de las cargas.

1.2.2.- Casos en que no rige el principio.

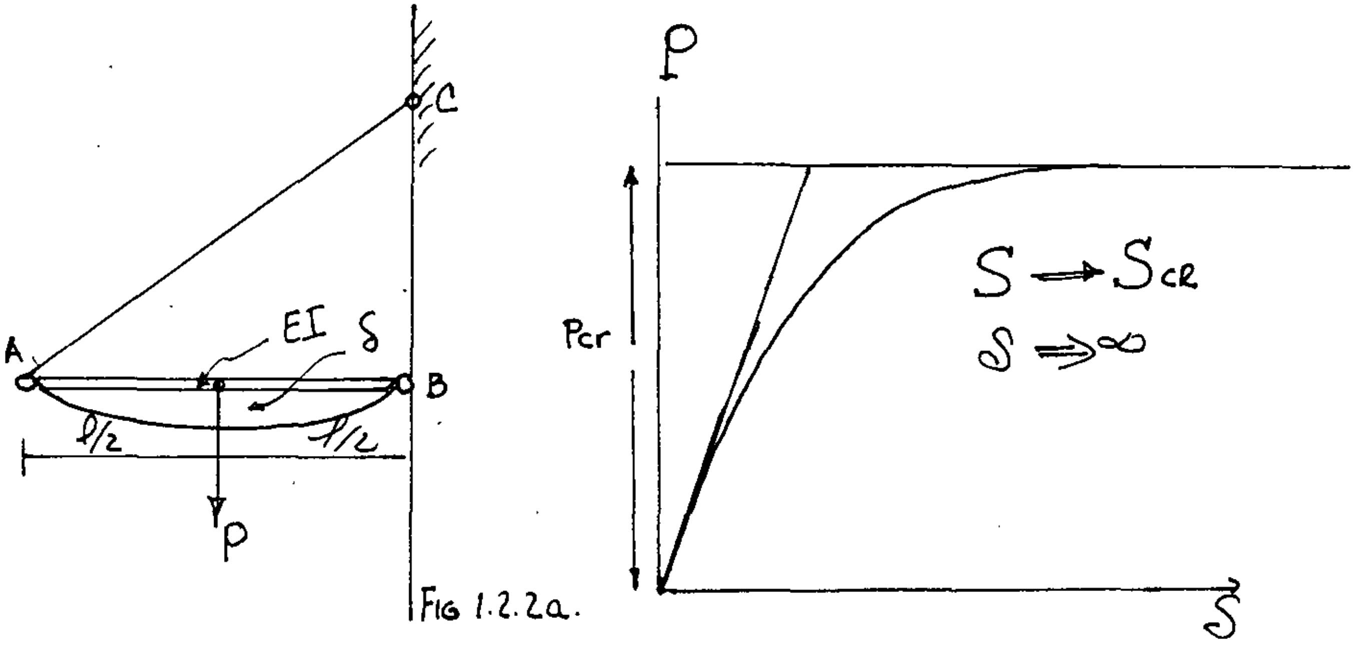
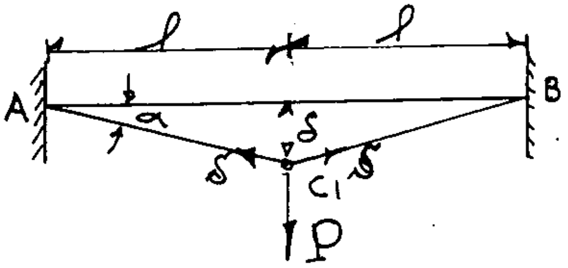
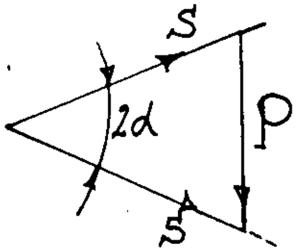
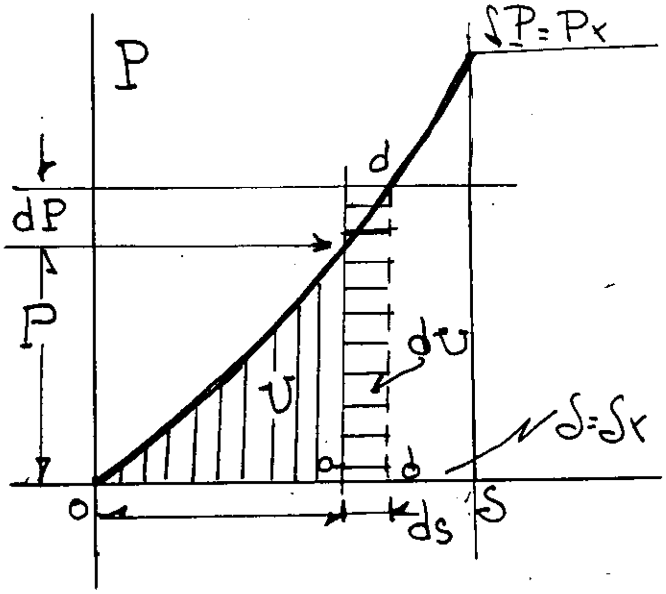


Fig 1.2.2a.

Otro ejemplo en el cual el principio de super posicion no rige, seria el sistema mostrado en la fig. 1.2.2.b, formado por dos barras articuladas, bajo la accion de pequeñas deformaciones ($\tan\alpha \doteq \alpha$).







pequeñas deformaciones: $\alpha \doteq \delta/\ell$ 1.22b

Equilibrio: $S = \frac{P}{2\alpha}$ 1.2.2C.

Compatibilidad geometrica: la deformacion axial unitaria es:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\ell^2+\delta^2}-\ell}{\ell} \doteq \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\ell^2} \qquad 1.2.2d$$

Ley de Hokke:

$$\varepsilon = \frac{S}{AE} \qquad 1.2.2e$$

de 1.2.2 c,d y e se obtiene:

$$\boxed{\delta = \ell\sqrt[3]{\frac{P}{AE}} \;,\quad P = \frac{\delta^3 AE}{\ell^3}} \qquad 1.2.2f$$

De nuevo se observa que la deflexion no es funcion lineal de P aunque el material cumple enteramente con la ley de Hokke y la relacion entre y es representada por la curva de la figura 1.2.2.b. El area o a b representa el trabajo efectuado por durante la deflexion y es igual a la energia de deformacion almacenada en la barras AC y CB., la cual es igual a :

$$U=\int_{0}^{\delta} P d\delta = \frac{AE}{\ell^{3}} \int^{\ell} \delta^{3} d\delta = \frac{AE\,\delta^{4}}{4\,\ell^{3}} \qquad 1.2.2.g$$

ó

$$U= \frac{\ell\, P^{4/3}}{4\sqrt[3]{AE}} \qquad 1.2.2\,h.$$

Es muy importante observar que en los ejemplos anteriores no es funcion de segundo grado de δ o P , como se obtiene en los casos que el principio de super posicion rige.

En los ejemplos anteriores, se observa que la accion de las fuerzas exteriores es considerablemente afectada por las pequeñas deformaciones del sistema, en el primer ejemplo hay una flexion adicional $\delta\delta$ a la compresion δ y la barra trabaja en flexo compresion.

1.2.3 Ecuaciones generales de superposicion

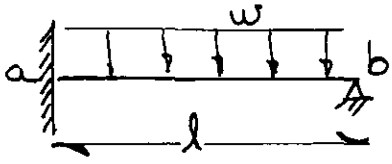
1.2.3.1 Introduccion *

En el analisis de esfuerzos en estructuras estaticamente indeterminadas no solamente hay que considerar la geometria y estatica, si no tambien las propiedades elasticas tales como modulo de elasticidad momento de inercia, etc. Generalmente para llegar al dimensionamiento final de la estructura, se suponen dimensiones preliminares de los miembos y se efectua su analisis correspondiente, ciclo que puede repetirse en algunos casos hasta llegar al diseño final. En general los esfuerzos desarrollados en estructuras hiperestaticas son debidos no solo a las cargas, si no tambien a cambios de temperatura, asentamiento de apoyos, errores de fabricacion. etc.

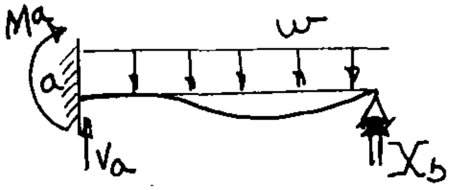
Es importante observar que la estructura este en condiciones de equilibrio estable. Con el proposito de ilustrar el uso de las ecuaciones generales de superposicion de causas y efectos, consideramos el siguiente ejemplo, viga con carga uniforme ω .

* En ambos metodos de rigidez y flexibilidad debe regir el principio de super posicion.

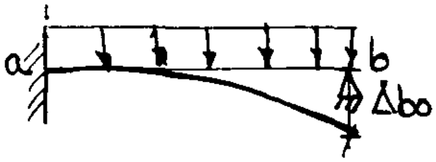
empotrada en a y libremente apoyada en b.



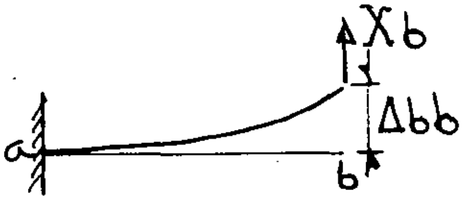
Estructura actual.
Δb = Deflexion de el punto b en la estructura debida a todas las causas.



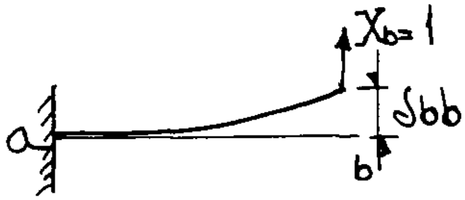
Estructura primaria.
Seleccion de redundante, Xb



Condicion de equilibrio Xb=o
Δbo = Deflexion en direccion de la redundante con Xb=o



Δbb= Deflexion en direccion de la redundante debida a con



δbb = Deflexion en direccion de la redundante debido a una fuerza unitaria

La ecuacion de superposicion, si el principio es valido

$$\Delta b = \Delta bo + \Delta bb = \Delta bo + X_b \delta bb = 0 \qquad (a)$$

de donde:
$$X_b = -\frac{\Delta bo}{\delta bb}$$

(δbb ó dbb es llamado coeficiente de flexibilidad)

1.2.3.2. Ecuaciones generales de super posisión en análisis de estructuras estáticamente indeterminadas de grado n.

Suponiendo que la estructura es hiperestática de grado n, se seleccionan las redundantes X1,X2,...,Xn, en una forma tal que la estructura primaria en condición de equilibrio.

Xi=o sea estable e isostatica, aceptando la siguiente notacion:

Δ i= Deflexion total del punto i debida a todas las cargas y efectos.

Δ io= Deflexion del punto i en direccion de la redundante Xi en condiciones de equilibrio estable isostatico Xi=o .

Δ it= Deflexion del punto i debida a un cambio de temperatura T.

Δ ia= Deflexion del punto i debida a asentamientos de apoyo.

Δ ie= Deflexiones en el punto i debido a errores de fabricacion.

δ i1= Deflexion en el punto i debida a la condicion X1=1

δ i2= Deflexion en el punto i debida a la condicion X2=1

. . . .

. . . .

. . . .

δ in= Deflexion en el punto i debido a la condicion Xn=1 Xn=1

Cualquier redundante puede suponerse que actua arbitrariamente en cierto sentido. Cualquier deflexion del punto de aplicacion de la redundante debera ser medida a lo largo de su linea de accion y sera positiva cuando el sentido es el mismo que el supuesto para la redundante.

Por lo tanto usando la notacion y convencion de signos mencionada, las ecuaciones generales de super posision en sistemas estructurales coplanares y espaciales son:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_1 = \Delta_{10} + \Delta_{1T} + \Delta_{1A} + \Delta_{1E} + X_1 S_{11} + X_2 S_{12} + \cdots X_n S_{1n} \\ \Delta_2 = \Delta_{20} + \Delta_{2T} + \Delta_{2A} + \Delta_{2E} + X_1 S_{21} + X_2 S_{22} + \cdots X_n S_{2n} \\ \vdots \\ \Delta_n = \Delta_{n0} + \Delta_{nt} + \Delta_{nA} + \Delta_{nE} + X_1 S_{n1} + X_2 S_{n2} + \cdots X_n S_{nn}\end{array}\right\} (a)$$

Expresando (a) matricialmente se tiene

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Delta_1 - \Delta_{10} - \Delta_{1T} - \Delta_{1A} - \Delta_{1E}) \\ (\Delta_2 - \Delta_{20} - \Delta_{2T} - \Delta_{2A} - \Delta_{2E}) \\ \vdots \\ (\Delta_n - \Delta_{n0} - \Delta_{nt} - \Delta_{nA} - \Delta_{nE}) \end{bmatrix} (b)$$

1.2.3.3. Ejemplos que ilustran el uso de las ecuaciones de super posision.

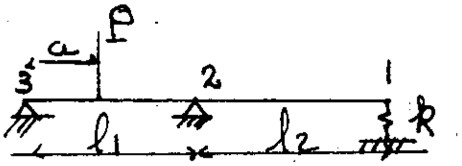
Antes de estudiar los ejemplos es conveniente observar lo siguiente:

1. Nunca seleccionar como redundante una reaccion estaticamente determinada, ello conduciria a una estructura primaria en equilibrio inestable en condiccion Xi=o

2. El sentido positivo de la redundante se puede seleccionar arbitrariamente, y su deflexion sera positiva si tiene el mismo sentido

3. Debe observarse que Ai, deflexion total del punto de -- aplicacion de la redundante Xi debida a todas las causas es casi siempre cero

Estructura actual

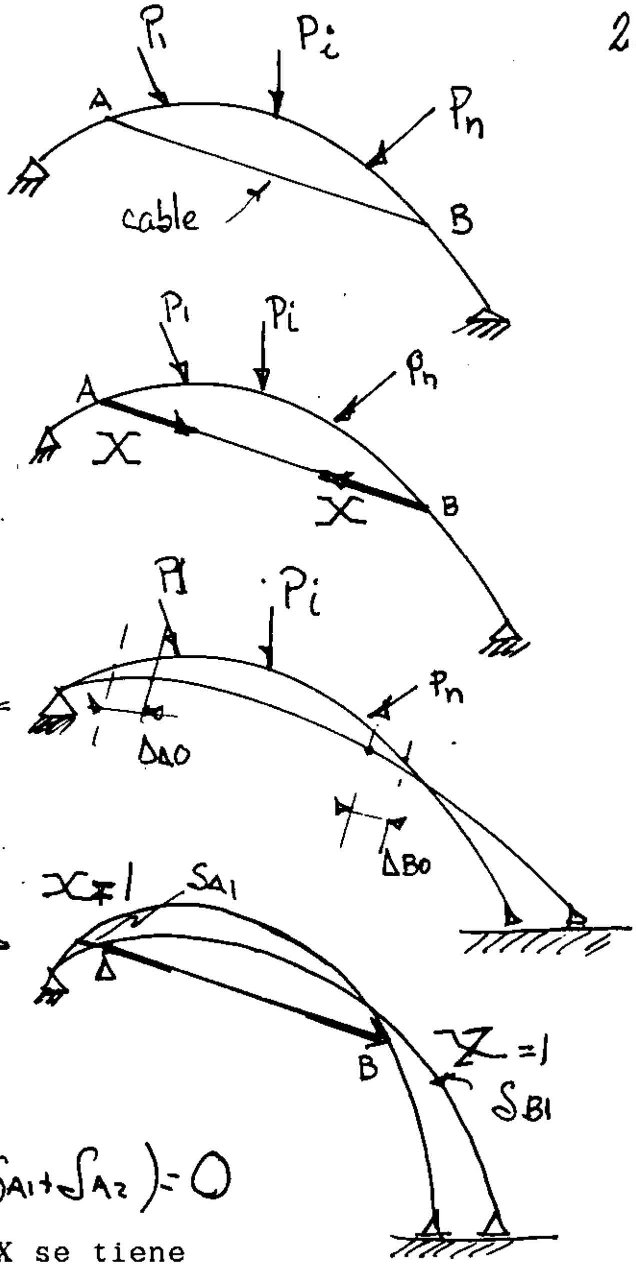


k' Constante elastica resorte (L/F)

Estructura primaria
A1=Xik1   (c)

Condicion X1=o

Condicion X1=1
De Ec.(a) se tiene
A1=A10-X1S11   (d)
de (c) y (d) se obtiene
X1=A10/S11+k-1   (e)



Estructura actual:
Arco coplanar con un tirane AB bajo un sistema de cargas Pn

Estructura primaria:
Seleccion como redundante la tension en el cable, X

Condicion X=o

Condicion X=1

$\Delta_{AB} = \Delta_{AO} + \Delta_{BO}$ (f)

$\Delta_A = \Delta_{AO} + X \delta_{A1}$ (g)

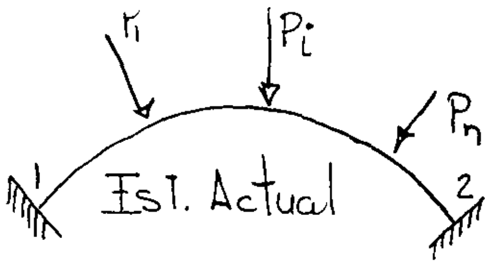
$\Delta_B = \Delta_{BO} + X \delta_{B1}$ (h)

Su mando (g) y (h)

$$\Delta_A + \Delta_B = \Delta_{AO} + \Delta_{BO} + X(\delta_{A1} + \delta_{A2}) = 0$$

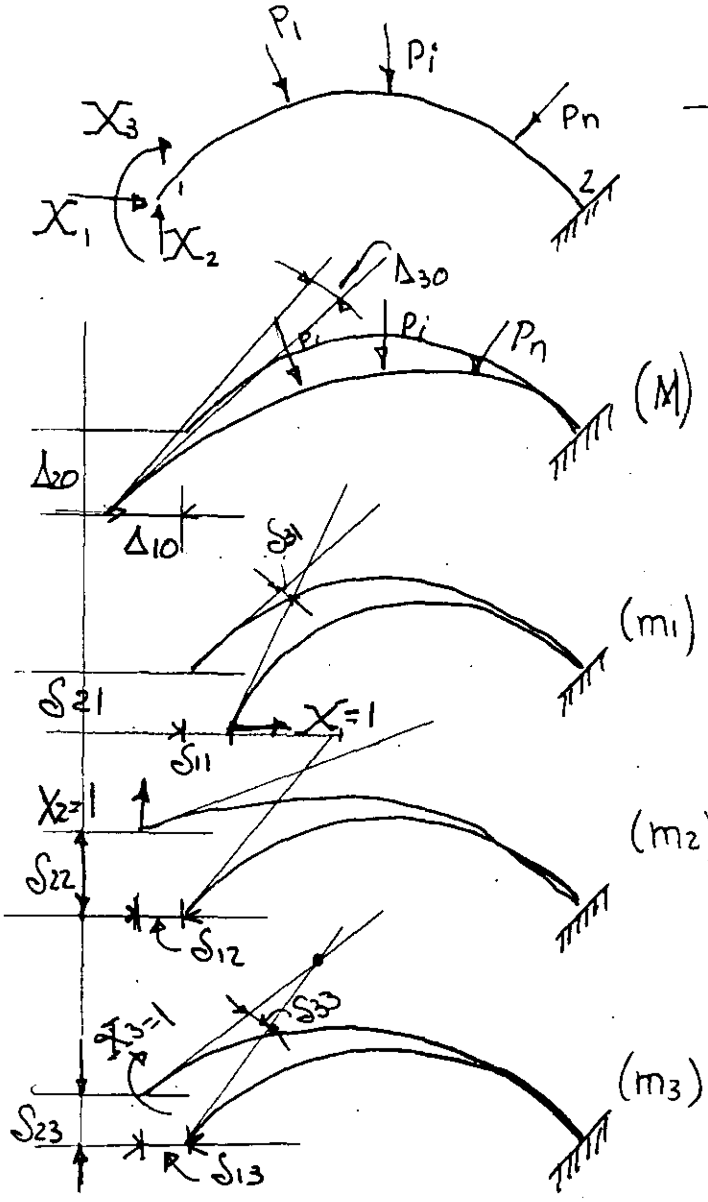
de donde despejando la redundante X se tiene

$$X = -\frac{\Delta_{AO} + \Delta_{BO}}{\delta_{A1} + \delta_{B1}} \qquad (i)$$



BARRA PLANA EMPOTRADA.

Problema hiperestático de orden 3



ESTRUCTURA PRIMARIA

Selección de redundantes X_1, X_2, X_3 y condición de empotramiento $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$

Condición $X = 0$

condición $X_1 = 1$

condición $X_2 = 1$

condición $X_3 = 1$

Las ecuaciones aplicando el principio de superposición son:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} \\ \Delta_2 &= \Delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} \\ \Delta_3 &= \Delta_{30} + X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} \end{aligned} \qquad (j)$$

Expresando (j) en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Delta_{16} \\ \Delta_{20} \\ \Delta_{30} \end{Bmatrix} \qquad (k)$$

Aplicando el teorema de Castigliano y la expresion de la energia de deformacion por flexion, los coeficientes de flexibilidad son igual a

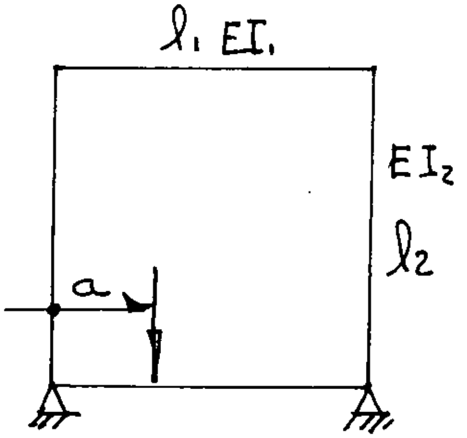
$$\Delta_{10} \int \frac{M m_1}{EI} ds \,, \quad \Delta_{20} = \int \frac{M m^2}{EI} ds \,, \quad \Delta_{30} = \int \frac{M m^3}{EI} ds$$

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2 ds}{EI} \,, \quad \delta_{22} = \int \frac{m_2^2 ds}{EI} \,; \quad \delta_{33} = \int \frac{m_3^2 ds}{EI}$$

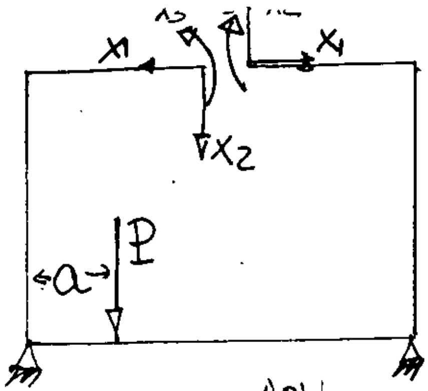
$$\delta_{12} = \delta_{21} = \left[\int \frac{m_1 m_2}{EI} ds. \right] \,, \delta_{13} = \delta_{31} = \int \frac{m_1 m_3}{EI} ds \,, \delta_{23} = \delta_{32} = \int \frac{m_2 m_3}{EI} a.$$

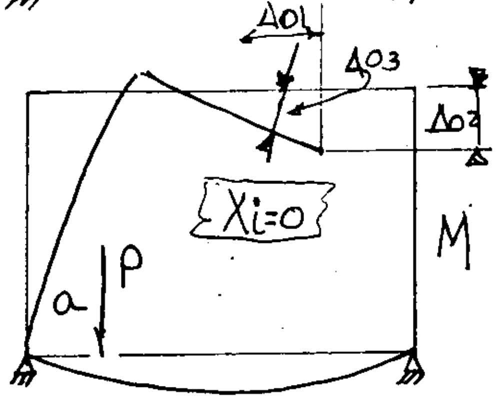
Marco continuo rectangular bajo la accion de una carga p

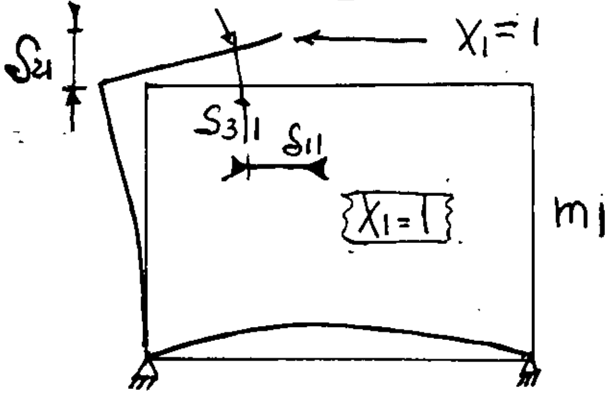
Estructura actual

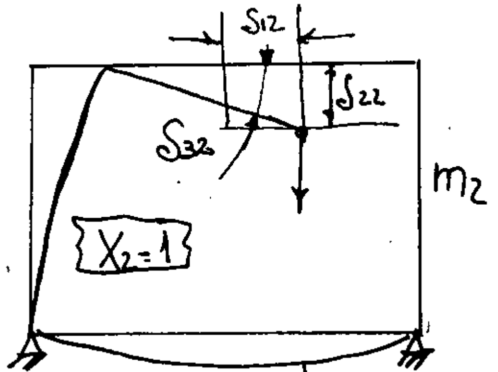


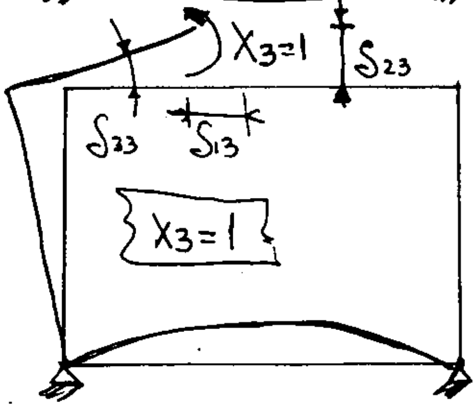
ESTRUCTURA PRIMARIA.











selección de redundantes

En este caso las ecuaciones de superposición son:

$$\Delta_1 = \Delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} = 0$$
$$\Delta_2 = \Delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} = 0 \quad (m)$$
$$\Delta_3 = \Delta_{30} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} = 0$$

o

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \\ \Delta_{30} \end{Bmatrix} \quad (h)$$

Del Teorema de Castigliano y la energía elástica de deformación se obtienen los coeficientes de flexibilidades δ_{ij} y Δ_{oi}

$$\Delta_{01} = \int \frac{M m_1}{EI} ds, \quad \Delta_{02} = \int \frac{M m_2}{EI} ds, \quad \Delta_{03} = \int \frac{M m_3}{EI} ds$$

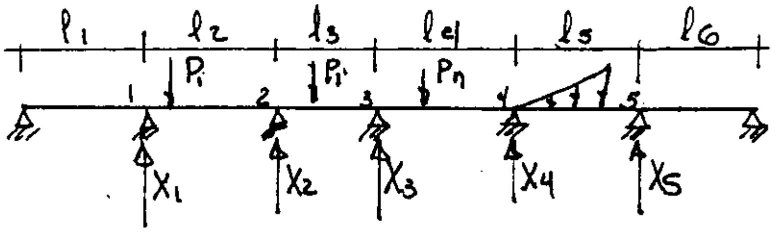
$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2 \, ds}{EI}, \quad \delta_{22} = \int \frac{m_2^2 \, ds}{EI}, \quad \delta_{33} = \int \frac{m_3^2 \, ds}{EI}$$

$$\delta_{12} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} ds, \quad \delta_{13} = \int \frac{m_1 m_3}{EI} ds, \quad \delta_{23} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} ds$$

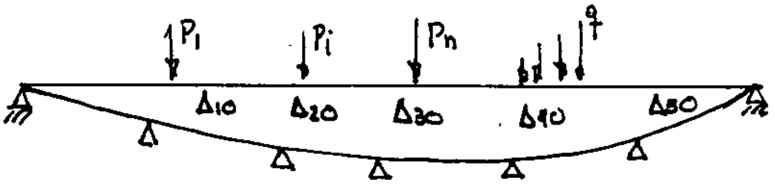
$$\delta_{12} = \delta_{21}, \quad \delta_{13} = \delta_{31}, \quad \delta_{23} = \delta_{32}$$

Viga continua de 7 apoyos

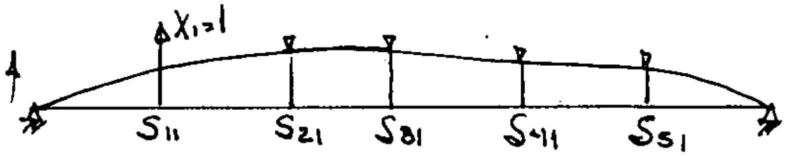
ESTRUCTURA ACTUAL Y PRIMARIA



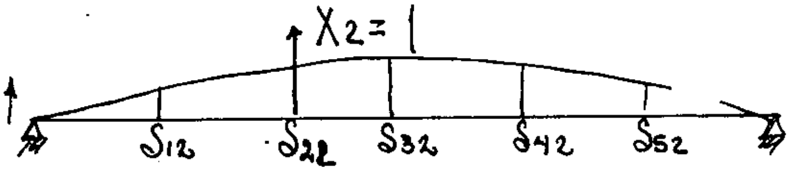
Condición $X_1 = 0$



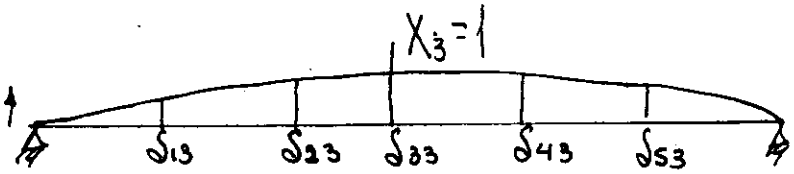
Condición $X_1 = 1$



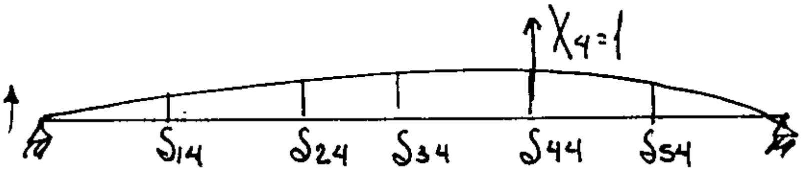
Condición $X_2 = 1$



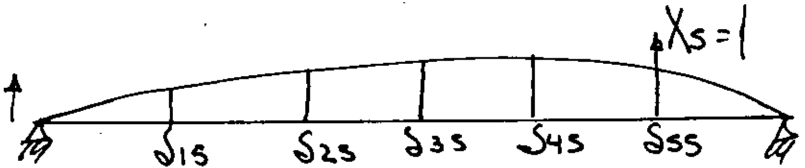
Condición $X_3 = 1$



Condición $X_4 = 1$



Condición $X_5 = 1$



ECUACIÓN 1ª 2ª 3ª 4ª 5ª

$\Delta_1 = \Delta_{10} + X_1 S_{11} + X_2 S_{12} + X_3 S_{13} + X_4 S_{14} + X_5 S_{15} = 0$

$\Delta_2 = \Delta_{20} + X_1 S_{21} + X_2 S_{22} + X_3 S_{23} + X_4 S_{24} + X_5 S_{25} = 0$

$\Delta_3 = \Delta_{30} + X_1 S_{31} + X_2 S_{32} + X_3 S_{33} + X_4 S_{34} + X_5 S_{35} = 0$

$\Delta_4 = \Delta_{40} + X_1 S_{41} + X_2 S_{42} + X_3 S_{43} + X_4 S_{44} + X_5 S_{45} = 0$

$\Delta_5 = \Delta_{50} + X_1 S_{51} + X_2 S_{52} + X_3 S_{53} + X_4 S_{54} + X_5 S_{55} = 0$

$$\left[S_{ij}\right]\left\{X_j\right\} + \left\{\Delta_{j0}\right\} =$$

1.3 Generalizacion de la energia de deformacion

La energia de deformacion de una barra elastica puede representarse como una funcion de segundo grado de la carga o la deformacion.

La misma conclusion es valida para cualquier estructura dentro del regimen elastico, siempre y cuando el principio de superposision pueda aplicarse, en la Fig. 1.3.1 suponiendo que la fuerzas se aplican simultaneamente e incrementan gradualmente hasta su valor final.

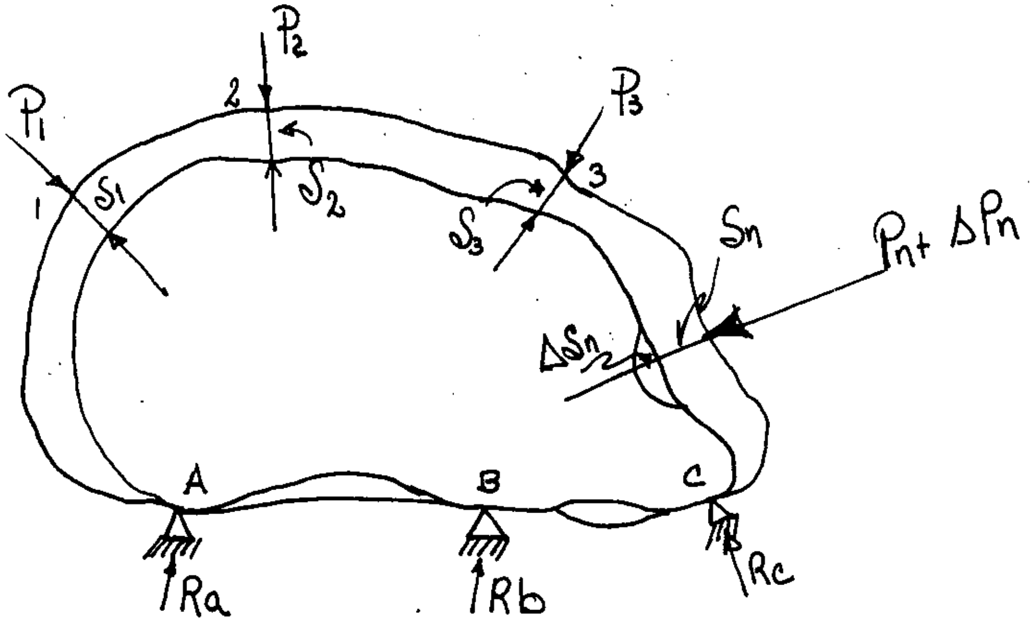


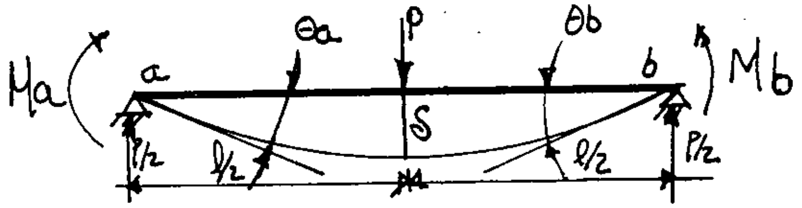
fig. 1.3.1

El principio de superposision rige, los desplazamientos seran funciones lineales de las cargas. El trabajo elastico de todas.

Las fuerzas externas es igual a la energia interna de deformacion almacenada en el cuerpo elastico de la figura 1.3.1 y sera

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} P_i \delta_i = \frac{1}{2} \left(P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + \cdots\cdots P_n \delta_n \right) \quad (1.3.1)$$

1.3.1. Ejemplo, viga libremente apoyada cargada como se indica en la fig. 1.3.1a



La energia de deformacion es:

$$U = \frac{1}{2}\left(P\delta + M_a \theta_a + M_b \theta_b \right) \qquad (a)$$

De la curva elastica de la viga se demuestra que:

$$\left.\begin{aligned} \delta &= \frac{P\ell}{48EI} + \frac{M_a \ell^2}{16EI} + \frac{M_b \ell^2}{16EI} \\ \theta_a &= \frac{P\ell^2}{16EI} + \frac{M_a \ell}{3EI} + \frac{M_b \ell}{6EI} \\ \theta_b &= \frac{P\ell^2}{16EI} + \frac{M_a \ell}{6EI} + \frac{M_b \ell}{3EI} \end{aligned}\right\} (b)$$

Substituye (b) en (a) se obtiene

$$U=\frac{l^3}{96EI}\left(P^2+6/l\,PMa+\frac{6}{l}PMb+\frac{16}{l^2}Ma^2+\frac{16}{l^2}Mb^2+16/l^2\,MaMb\right)\;(c)$$

en (c) se observa que U es una funcion de segundo grado de las fuerzas y momentos P,Ma y Mb

Tarea
En el ejemplo de la viga de la fig. 1.3.1. a demostrar:

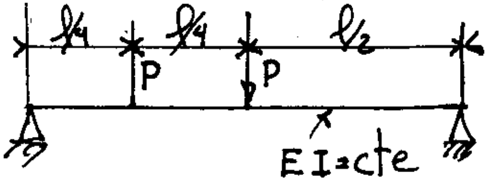
a) $\frac{\partial U}{\partial P}=\delta$, $\frac{\partial U}{\partial Ma}=\theta a$, $\frac{\partial U}{\partial Mb}=\theta b$

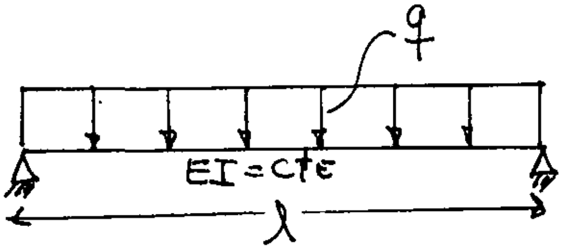
b) De (a) y (b) obtener U en función de los desplazamientos δ, θa, θb

a) Demostrar que:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta}=P\;,\quad \frac{\partial U}{\partial \theta a}=Ma\;,\quad \frac{\partial U}{\partial \theta_b}=Mb$$

Calcular la energia de deformacion de las siguientes vigas de seccion transversal





1.4 Teorema de Castigliano

Suponiendo que el principio de superposision rige y que U se expresa en funcion de las fuerzas externas se tiene que: LA DERIVADA DE LA ENERGIA DE DEFORMACION CON RESPECTO A UNA DE LAS FUERZAS O MOMENTOS EXTERNOS DA EL DESPLAZAMIENTO O EL GIRO DE LA FUERZA O MOMENTO CORRESPONDIENTE

$$\frac{\partial U}{\partial P_n} = \delta_n \qquad (1.4.1)$$

Considerando el cuerpo elástico bajo la aplicación de P1,P2,...,Pn. Durante la aplicación de Pi se producen deformaciones y se almacena cierta energía de deformación dentro del cuerpo (Fig. 1.3.1.) Si subsecuentemente a Pn se aplica un incremento ΔP_n, la energia U incrementará

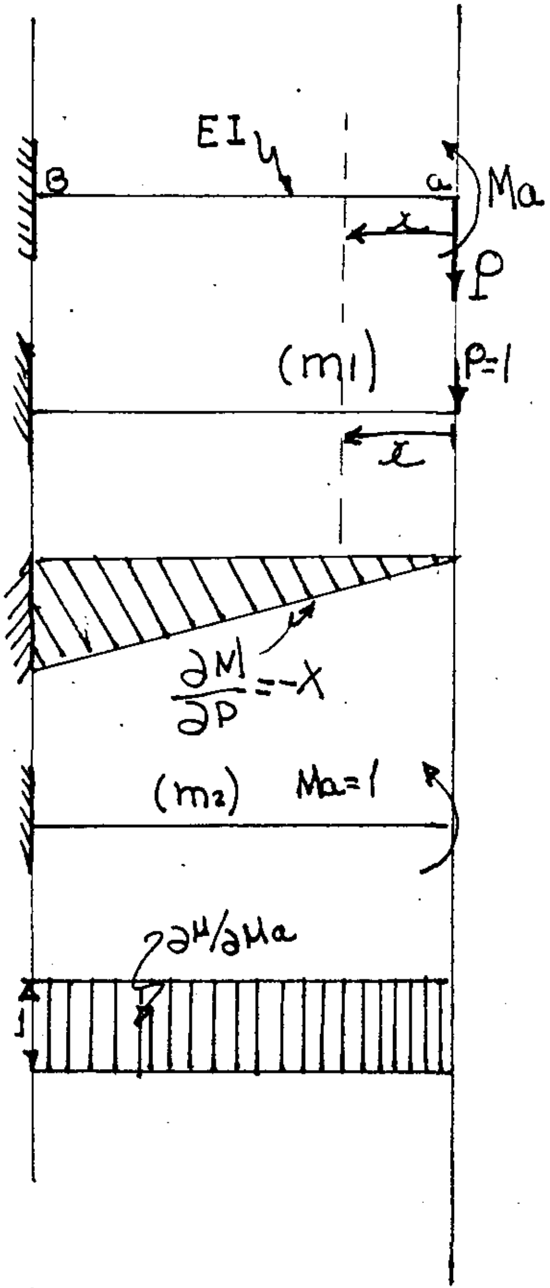
$$U + \Delta U = U + \frac{\partial U}{\partial P_n} \Delta P_n \qquad (1.4.2)$$

Si en vez de aplicar ΔP_n después de las cargas se aplica antes se tiene

$$U + \Delta U = U + \Delta P_n \left(\delta_n + \Delta \delta_n \right) = U + \Delta P_n \delta_n . \quad (1.4.3).$$

igualando (1.4.2.) con (1.4.3.) se demuestra (1.4.1.).

1.4.1. Ejemplos de aplicacion



La variacion de M(x) es

$$M = Ma - Px \qquad (a)$$

La energia de deformacion por flexion

$$U = \int_0^{l} \frac{M^2 \, dX}{2EI} \qquad (b)$$

Del teorema de Castigliano

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \delta a = \int \frac{M \frac{\partial M}{\partial P}}{EI} ds$$

$$\delta a = \int_0^{l} \frac{M m_1}{EI} ds \qquad (c)$$

Sustituyendo (a) en (c)

$$\delta a = \frac{1}{EI} \int_0^{l} (Ma - Px)(-x) dX$$

$$\delta a = \frac{Pl^3}{EI} - \frac{Ma \, l^2}{2EI} \qquad (d)$$

De nuevo del teorema de Castigliano

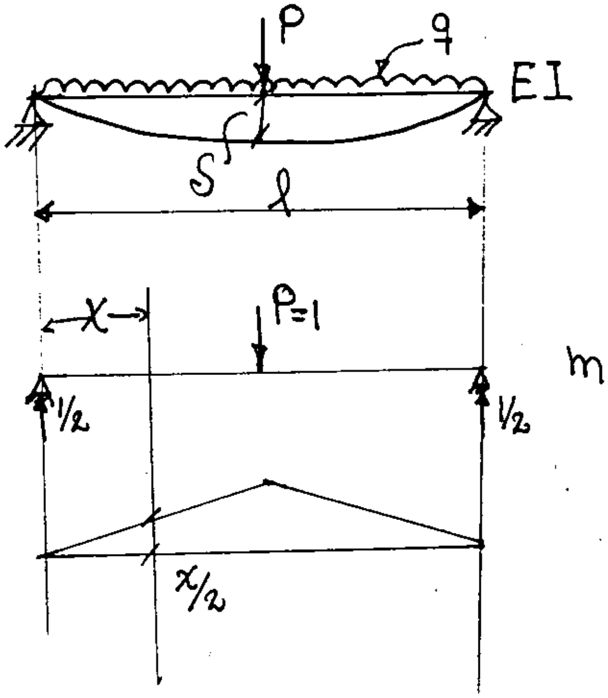
$$\frac{\partial U}{\partial Ma} = \Theta a = \int_0^{l} \frac{M \frac{\partial M}{\partial Ma}}{EI} dx = \int_0^{l} \frac{M m_2}{EI} dX \qquad (e)$$

Substituyendo (a) en (e) se obtiene

$$\Theta a = \frac{1}{EI} \int_0^{l} (Ma - Px)(1) \, dx = \frac{Ma \, l}{EI} - \frac{Pl^2}{2EI}$$

En el ejemplo anterior no se calculo en funcion de las fuerzas externas, sino se utilizo la energia de deformacion por flexion y se derivo bajo el signo integral.

Es importante observar que las derivadas corresponden a la variacion de momento flexionante debido a causas unitarias P y Ma.



$$M = \frac{P}{2}x + \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \qquad (f)$$

$$m = x/2 \qquad (g)$$

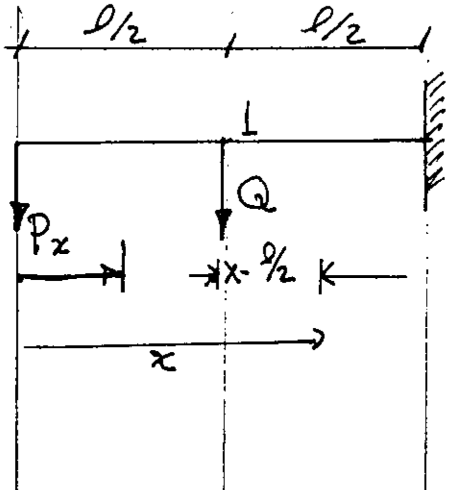
De la energia de deformacion por flexion y el teorema de Castigliano.

$$\delta = 2\int \frac{Mm}{EI}\,dx \qquad (h)$$

Subtituyendo (f) y (g) en (h) se obtiene

$$\delta = \frac{2}{EI}\int_0^{l/2}\left(\frac{P}{2}x + \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI} \qquad (h)$$

En los casos en los cuales es necesario determinar los desplazamientos en un lugar donde no hay fuerzas o momentos, se agrega al sistema actual de fuerzas, una fuerza ficticia de magnitud infinitesimal, tal que no afecta al sistema actual de fuerzas y se obtiene el desplazamiento derivado con



$$M = Ma - Px \qquad 0 \leq x \leq l/2$$

$$M = Ma - Px - Q\,(x - l/2)$$

Para $l/2 \leq x \leq l$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = m = -\left(x - l/2\right)$$

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} \equiv \text{(energía de deformación por flexión)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \delta_1 = \int \frac{M \frac{\partial M}{\partial Q}}{EI} dx = -\int_{l/2}^{l} 1/EI\,(Ma - Px)(x - l/2)\, dx$$

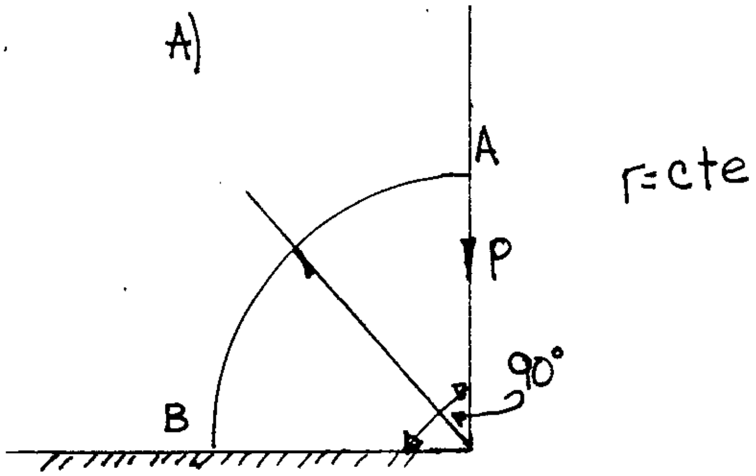
En conclusion se observa que la derivacion del teorema de Castigliano, fue basada en el principio de superposision.

De alli que la energia de deformacion U debe ser una funcion de segundo grado de las fuerzas actuales. Si el principio de superposicion no rige y U no es funcion de segundo grado de las fuerzas, el Teorema de Castigliano no es aplicable, lo anterior se ilustro mediante ejemplos.

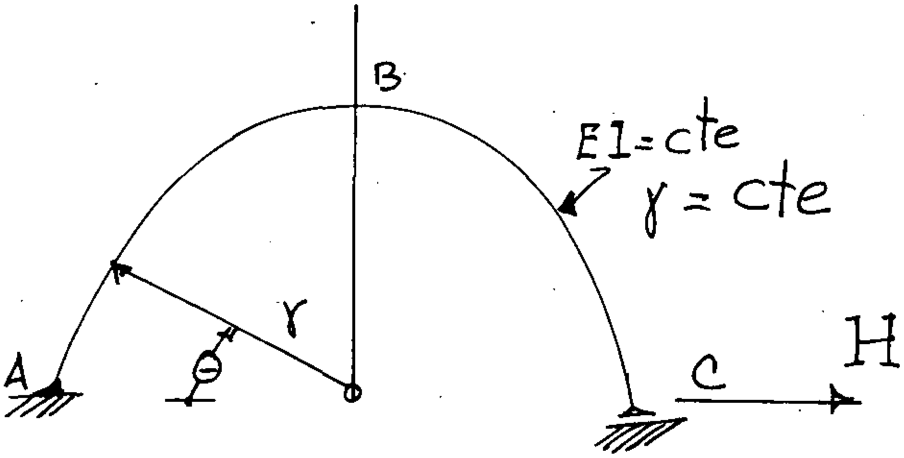
Ejemplos de tarea

a) Utilizando el teorema de Castigliano determinar los angulos en los extremos de una viga libremente apoyada con carga uniforme q, claro l, y rigidez flexionante EI= constante.

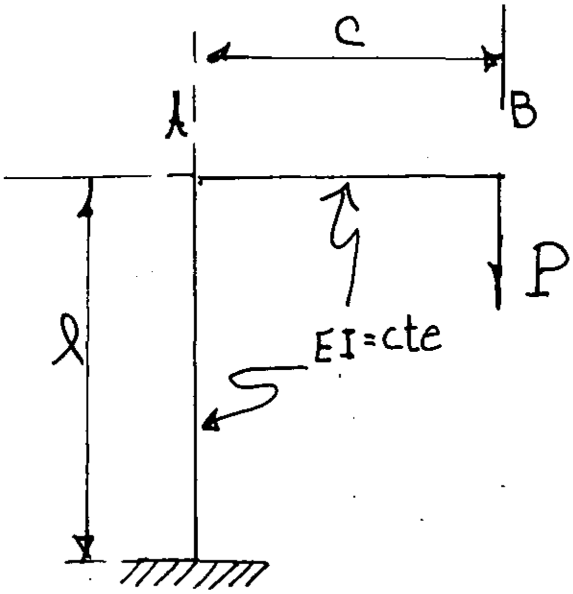
b) Determinar los deplazamientos horizontales y vertical de la viga curva mostrada en A.



c) Determinar el desplazamiento horizontal en c y el vertical en B en la estructura mostrada.



d) Determinar los desplazamientos horizontal y vertical de A y B en la estructura mostrada.



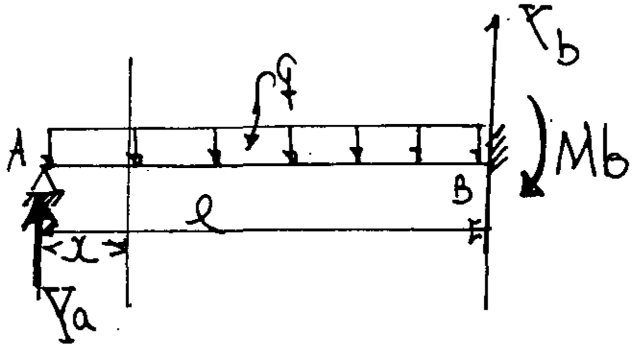
1.5 Teorema del trabajo minimo

Se han considerado aplicaciones del teorema de Castigliano a sistemas de fuerzas estaticamente determinados. Aplicandolo a sistemas estaticamente indeterminados se concluye que la derivada de la energia de deformacion con respecto a cualquier redundante debera ser cero si su accion es la de prevenir desplazamientos en su punto de aplicacion, de alli que las magnitudes de las acciones redundantes en sistemas hiperestaticos seran tal sistema en dicho punto sera maxima o minima, lo anterior es el metodo del trabajo minimo para calcular redundantes. En una estructura hiperestatico de grado "n" se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0 \; \ldots\ldots \; \frac{\partial U}{\partial X_n} = 0 \qquad (1.5.1)$$

1.5.1 Ejemplos

a) Viga empotrada en un extremo con carga uniforme (grado n=1).



La energia de deformacion del sistema es

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI}$$

Del teorema del trabajo minimo

$$\frac{\partial U}{\partial Y_a} = 0 = \frac{\partial}{\partial Y_a}\left[\int \frac{M^2 dx}{2EI}\right] = \frac{1}{EI}\int_0^l M \frac{\partial M}{\partial Y_a} dx \quad (b)$$

$$M = Y_a x - \frac{qx^2}{2} \quad (c)$$

$$\frac{\partial M}{\partial Y_a} = x \quad (d)$$

Sustituyendo (c) y (d) en (b) se obtiene

$$\int_0^l \left(Y_a x - \frac{qx^2}{2}\right) dx\, x = \frac{l^3}{3} Y_a - \frac{ql^2}{8} = 0$$

de donde $Y_a = 3/8\, ql$

En el sistema se tienen 3 reacciones $Y_a\, Y_b\, Y_c$ y 3 ecuaciones dos de estatica y una del teorema de Castigliano.

en el ejemplo anterior, se considera como redundante Mb se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial M_b}=\frac{\partial}{\partial M_b}\left[\int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI}\right]=\frac{1}{EI}\int_0^l M\frac{\partial M}{\partial M_b}\,dx=0 \qquad (f)$$

el momento flector es

$$M=\left(\frac{ql}{2}-\frac{M_b}{l}\right)x-\frac{qx^2}{2} \qquad (g)$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_b}=-\frac{x}{l} \qquad (h)$$

sustituyendo (g) y (h) en (f) se obtiene

$$\int_0^l \left[\left(\frac{ql}{2}-\frac{M_b}{l}\right)x-\frac{qx^2}{2}\right]\frac{x}{l}\,dx=0 \qquad (i)$$

integrando (i) y despejando M_b se obtiene

$$\boxed{M_b=\frac{ql^2}{8}} \qquad (j)$$

2.1. Metodos de fuerzas y deformacion

En los metodos de analisis de sistemas estaticamente indeterminados, primero se seleccionaban las redundantes, y sus magnitudes se determinan mediante el teorema del trabajo minimo, considerando la energia de deformacion del sistema. Este procedimiento general es llamado el Metodo de fuerzas.

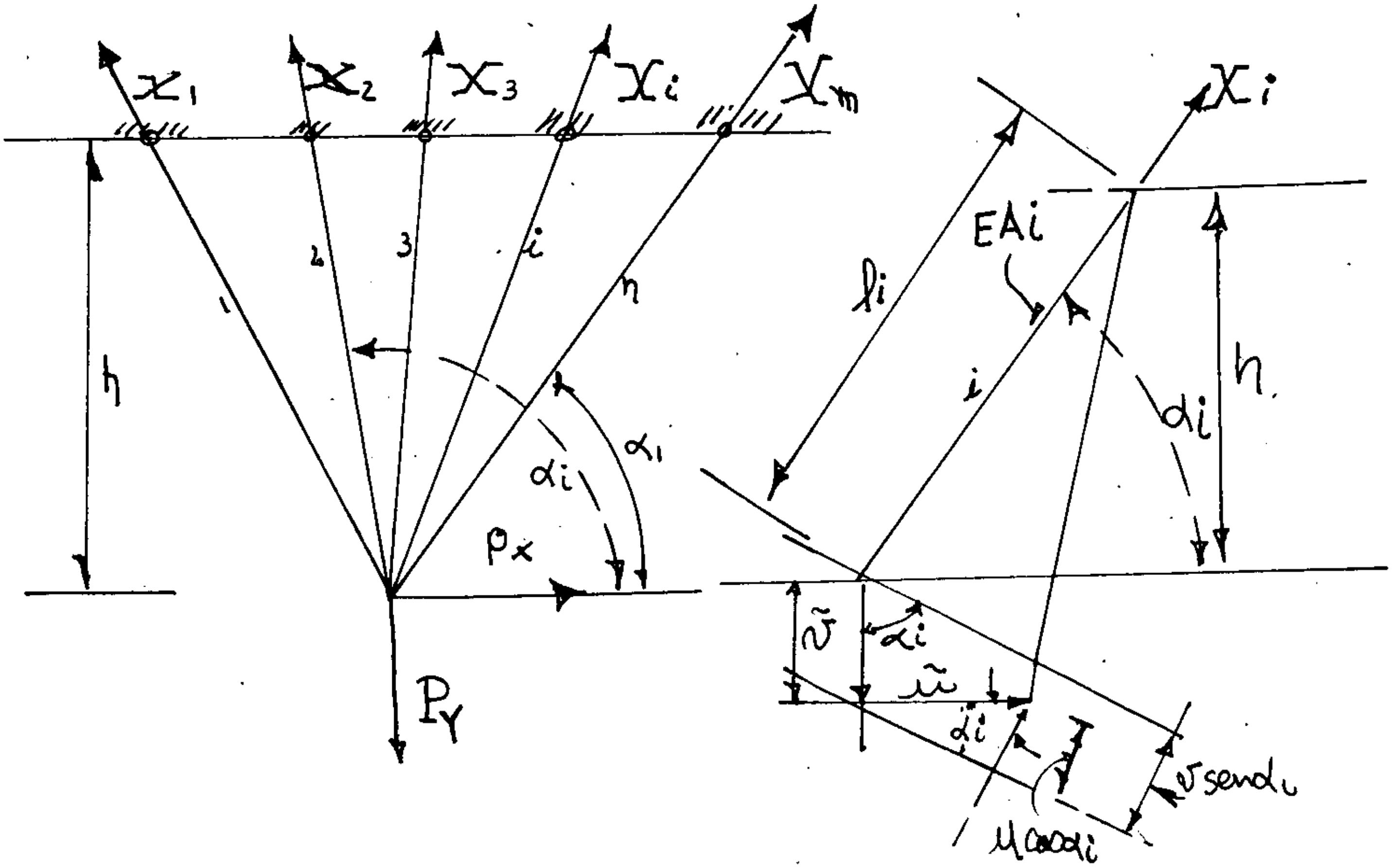


Fig. 2.1.
Para ilustrar en un mismo ejemplo

La distincion entre los dos metodos, consideremos la estructura estaticamente indeterminada coplanar mostrada en la figura 2.1 bajo la accion de dos fuerzas aplicadas con n barras, el numero de redundantes sera n-2. Entonces para determinar las redundantes X1,X2,...Xn-2, se determina la energia de deformacion del sistema en funcion de las fuerzas y usando el teorema del trabajo minimo se obtienen las ecuaciones necesarias.

$$\frac{\partial u}{\partial X_1}=0, \quad \frac{\partial U}{\partial X_2}=0, \quad \ldots \quad \frac{\partial U}{\partial X_{n-2}}=0 \quad (a)$$

Lo anterior es el metodo de las fuerzas. Para resolver el mismo problema, Navier sugirio el metodo de desplazamientos. La deformacion del sistema de la figura 2.1. estara completamente determinado si conocemos las componentes horizontales y vertical u y v respectivamente. Suponiendo que los desplazamientos son pequeños.

" Navier," Resume des lecons", 2ed., p.345, Paris,1833.

La deformacion axial de cualquier barra i sera

$$\Delta l_i = v\,\text{sen}\,\alpha_i - u\cos\alpha_i \qquad (b)$$

y de la ley de Hooke su fuerza axial correspondiente será

$$X_i = \frac{EA_i}{l_i}\left(v\,\text{sen}\,\alpha_i - u\cos\alpha_i\right) \qquad (c)$$

de la fig. 2.1.

$$l_i = h/\text{sen}\,\alpha_i \qquad (d)$$

sustituyendo (d) en (c) se obtiene

$$X_i = \frac{EA_i}{h}\left(v\,\text{sen}\,\alpha_i - u\cos\alpha_i\right)\text{sen}\,\alpha_i \qquad (e)$$

De las condiciones de equilibrio se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\cos\alpha_i = P_x$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\,\text{sen}\,\alpha_i = P_y$$

sustituyendo (e) en (f) y (g) se obtiene

$$v\sum_{i=1}^{n} A_i\,\text{sen}^2\alpha_i\cos\alpha_i - u\sum_{i=1}^{n} \Delta_i\cos^2\alpha_i\,\text{sen}\,\alpha_i = \frac{P_x h}{E} \qquad (i)$$

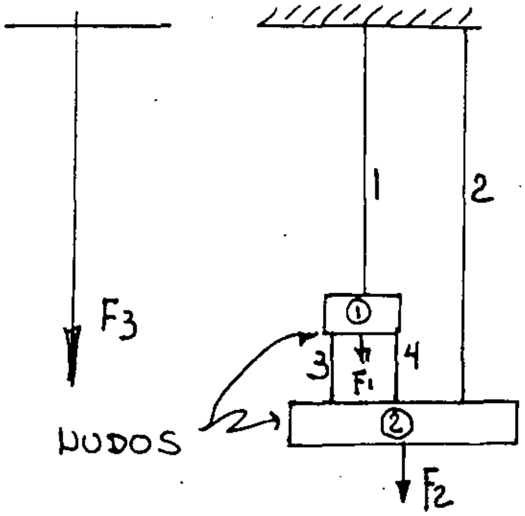
$$v\sum_{i=1}^{n} A_i\,\text{sen}^3\alpha_i - u\sum_{i=1}^{n} A_i\,\text{sen}^2\alpha_i\cos\alpha_i = \frac{P_y h}{E} \qquad (j)$$

de (i) y (j) se determinan u y v las de (i) y (j) se determinan u y v las cuales substituidas en (e) obtenemos la fuerza Xi en cualquier barra del sistema. Se observa en este caso que la consideracion de las deformaciones directas del sistema resulta en una simplificacion substancial, especialmente si el numero de barras n es grande, puesto que solo tenemos que resolver dos ecuaciones con dos incognitas que son las deformaciones u y v. En el caso del metodo de las fuerzas tendremos que resolver n-2 ecuaciones con n-2 incognitas. Es conveniente observar que el metodo de las deformaciones involucro 3 etapas basicas que son:

Ecuación (b): Compatibilidad geometrica de deformaciones, u, v y Δl
l.

Ecuación (e): Ley de Hooke

Ecuación (f) y (g): Equilibrio



barras

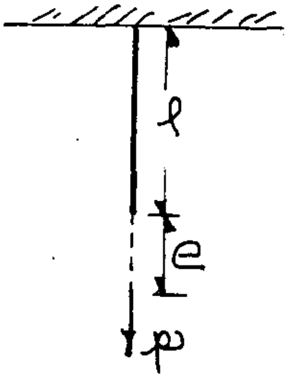
n_b = numero de barras = 4

n_N = numero de nudos = 2

p = fuerzas axiales (P)

e = alargamiento (δ)

Rigidez de barra $k_i = \frac{p}{e} = \frac{\text{fuerza axial}}{\text{alargamiento}} \equiv \frac{EA_i}{l_i}$



A) continuidad

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} = \left\{ \text{Def ó alarg. de las cuatro barras} \right. \begin{Bmatrix} + \text{Alarg} \\ - \text{Acort} \end{Bmatrix}$$

$$\{d\} \equiv \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \equiv \{\text{desplazamientos nodales}\} \begin{Bmatrix} + \downarrow \\ - \uparrow \end{Bmatrix}$$

de las figura.

$$\begin{aligned} e_1 &= d_1 \\ e_2 &= +d_2 \\ e_3 &= -d_1 + d_2 \\ e_4 &= -d_1 + d_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{e\} = [a] \{d\}$$

$$\boxed{\{e\} = [a]\{d\}} \qquad (1)$$

donde $[a]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; matriz de continuidad.

Observar que para una barra i cualquiera

$e_i = d_B - d_A$

d_A = desplazamiento del nudo superior

d_B = " " " inferior.

B) Ley de Hooke.

sea $\{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}$ fuerzas axiales en las barras

+ tensión, − compresión

$p_1 = k_1 e_1$

$p_2 = k_2 e_2$

$p_3 = k_3 e_3$

$p_4 = k_4 e_4$

$k_i = \frac{EA_i}{l_i}$ rigidez barra i.

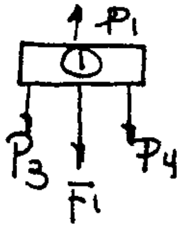
$$\underbrace{\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}}_{\{p\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}}_{[k]} \underbrace{\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix}}_{\{e\}} ; \text{ ó } \{p\} = [k]\{e\} \quad (2)$$

$[K]$ matriz de rigidez de las barras.

c) Equilibrio; $\sum F_y = 0$ en cada nudo

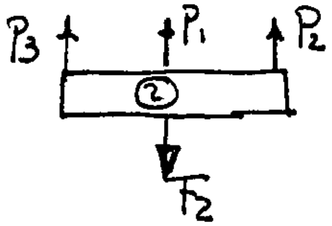
Sea: $\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$

Nudo 1



$$\bar{F}_1 = P_1 + 0 - P_3 - P_4$$

Nudo 2



$$\bar{F}_2 = 0 + P_2 + P_3 + P_4$$

$$\text{ó} \quad \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} \quad \text{ó} \quad \{F\} = [a]^T \{p\}$$

donde: $[a]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matriz de equilibrio

observar: matriz de equilibrio es la transpuesta de la matriz de continuidad.

Solucion del problema anterior por el metodo de desplazamientos (rigideces).

Incognitas: $\{e\}, \{d\}, \{p\}$

Datos: $[a], [a]^T, [k], \{F\}$

Subst. (1) en (2)

$$\{p\} = [k][a]\{d\} \quad (4)$$

Subst. (4) en (3)

$$\{F\} = [a]^T [k][a]\{d\} \quad (5)$$

$$\text{ó} \quad \{F\} = [K]\{d\} \quad (5a)$$

La matriz $[a]^T [k] [a]$ es cuadrada
Ejemplo; Suponiendo

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1 \text{ TON/cm.}$$

$F_1 = 10$ TON
$F_2 = 5$ TON

$$[K] = [a]^T [k] [a]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando operaciones

$$[K] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Observar que $[K]$ es simétrica
de (5a)

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

despejando $\{d\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \text{ cm} \\ 7 \text{ cm} \end{Bmatrix}$ substen (1)

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ subten(2)}$$

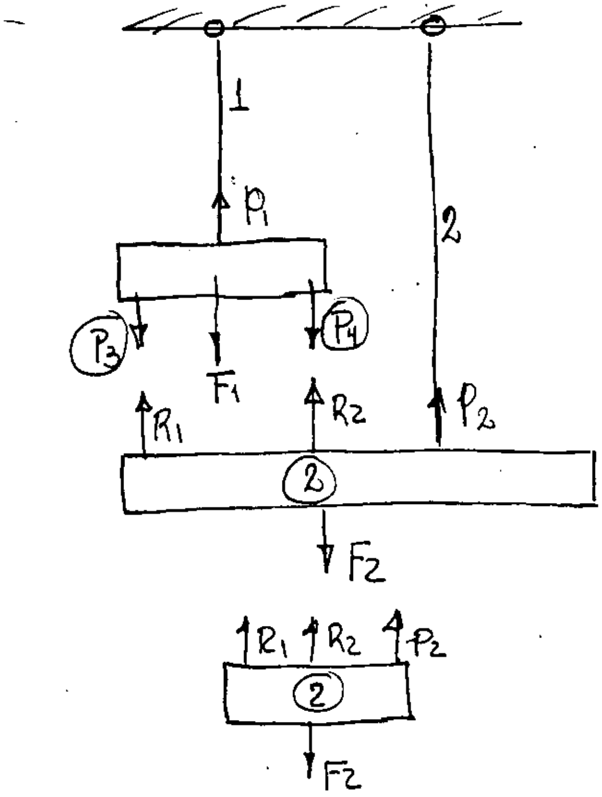
$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Comprobacion de equilibrio: de (3)

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \text{ ton} \\ 5 \text{ ton} \end{Bmatrix} \checkmark$$

Metodo de las fuerzas (flexibilidad)

Usando los tres principios fundamentales en el orden inverso Equilibrio, Ley de Hooke, Continuidad.



a) Equilibrio

$$F_1 = P_1 - R_1 - R_2$$
$$F_2 = P_2 + R_1 + R_2$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} [P_0] \\ \\ [R] \end{matrix}$$

$$\{F\} = [a_0^T \; a_R^T] \begin{Bmatrix} P_0 \\ R \end{Bmatrix}$$

$$= a_0^T P_0 + a_R^T R.$$

despejando a P_0

$$\{P_0\} = [a_0^T]^{-1}\{F\} - [a_0^T]^{-1}[a_R^T][R]$$

en nuestro ejemplo

$$[a_0^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \therefore \; [a_0^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{P_0\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}[F] - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}[F] - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} R$$

o bien

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}$$

ademas se tiene $p_3 = R_1$

$p_4 = R_2$

Por lo tanto

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}}_{b_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}}_{b_R}$$ ⓐ

$$\begin{Bmatrix} p_1 = F_1 & & + R_1 & + R_2 \\ p_2 = & F_2 & - R_1 & - R_2 \\ p_3 = & & R_1 & \\ p_4 = & & & R_2 \end{Bmatrix}$$

(a) se puede escribir

$$\{p\} = [b_0]\{F\} + [b_e]\{R\}$$ ⓑ

$$b_0 = \begin{bmatrix} (a_0^T)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad b_R = \begin{bmatrix} (-a_0^T)^{-1} a_R^T \\ I \end{bmatrix}$$

Ley de Hooke

$$\{p\} = [k]\{e\}$$

$$\{e\} = [k]^{-1}\{p\} \quad ⓒ \qquad [f] = [k]^{-1}_{Flex.}$$

subst ⓑ en ⓒ

$$\{e\} = [f][b_o]\{F\} + [f][b_R]\{R\} \quad ⓓ$$

CONTINUIDAD.- Considerando los desplazamientos relativos de
llamados

$$\mu_1, \mu_2 \qquad \{\mu\} = \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{Bmatrix}$$

$$d_1 = e_1$$

$$d_2 = e_2$$

$$\mu_1 = e_1 - e_2 + e_3$$

$$\mu_2 = e_1 - e_2 \quad + e_4$$

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} \quad \text{pero} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [b_o]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [b_R]^T$$

Por lo tanto

$$\{d\} = [b_o^T]\{e\} \qquad (e)$$

$$\{\mu\} = [b_R^T]\{e\} \qquad (f)$$

(Los valores de (   ) deberan anularse)

subst ⓓ en ⓕ

$$\{\mu\} = [b_R^T][f][b_o]\{F\} + [b_R^T][f][b_R]\{R\}$$

como $\{\mu\} = 0$ se despeja $\{R\}$

$$\{R\} = -[b_R^T f b_R]^{-1}[b_R^T f b_o]\{F\}$$

ⓗ nos da los redundante $\{R\}$
subst ⓗ en ⓑ se obtiene $\{P\}$

$$\{P\} = b_o F - b_R(b^T f b_R)^{-1}(b_R^T f b_o)F$$

$$= [\underbrace{b_o - b_R(b_R^T f b_R)^{-1} b_R^T f b_o}]\{F\}$$

$$[b]\{F\} \qquad (i)$$

subst (i) c se obtiene $\{e\}$

(j) $\{e\} = [f][b]\{F\}$

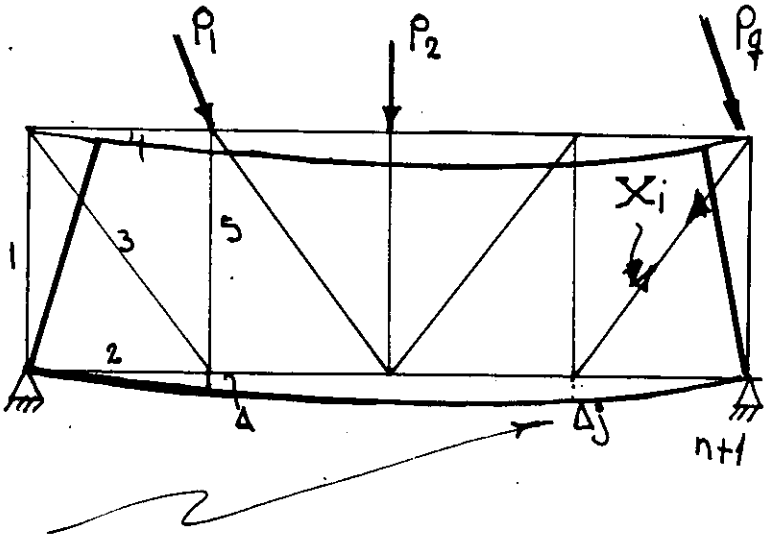
subst (1) en ⓔ se obtiene

$$\{d\} = [b_o^T][f][b]\{F\}$$

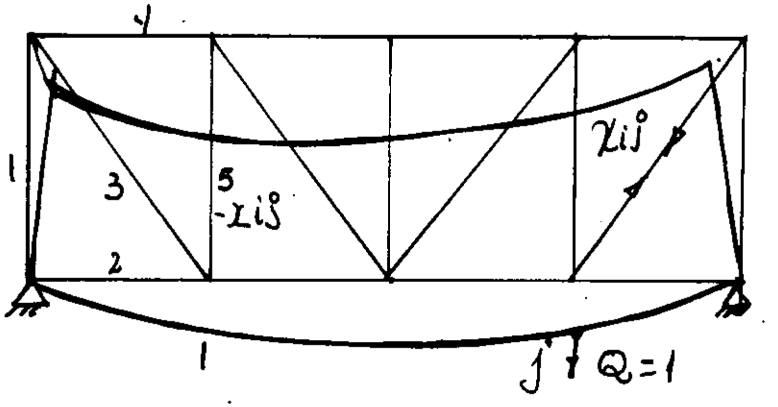
2.5 Aplicaciones de metodos matriciales a armaduras planas.

Para ilustrar el uso de metodos matriciales en el analisis de armaduras articuladas en los nudos, comensaremos considerando un problema de deflexiones. En la fig. 2.3.1. se tiene una armadura con miembros sujeta a sistema externo de cargas , y se requiere determinar la deflexion vertical del nudo j debida al sistema de cargas Si Xi representa las fuerzas axiales en la estructura real las fuerzas axiales en la estructura bajo la condicion de carga unitaria en j.

Estructura real o actual



Carga infinitesimal Q



condición Q=1

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = 1$$

fig. 2.3.1

Del teorema de Castigliano y la energia de deformacion por carga normal se tiene

$$U = \sum_{i=1}^{m} \frac{X_i^2 l_i}{2AE} \qquad (a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \Delta i = \sum_{i=1}^{m} \frac{X_i x_{ij} l_i}{EAi} = \sum_{i=1}^{m} X_i x_{ij} \rho_i \qquad (b)$$

donde $\rho_i = \frac{l_i}{EA_i}$ es el factor de flexibilidad de la barra i.

Si se desean calcular las n deflexiones verticales de nudos seleccionados debemos calcular los valores Xij para una fuerza vertical unitaria aplicada en cada uno de los nudos. Supongamos que han sido calculados y que acomodamos los numeros de influencia en la forma de una matris de orden mxn como sigue:

$$[x_{ij}] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

c) se denomina matris de geometria de la armada acomodando los factores de flexibilidad en forma de una matris diagonal de orden mxm.

$$(d) \qquad [\rho_i] = \begin{bmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \rho_m \end{bmatrix}$$

la cual es llamada matris de flexibilidad de la armadura. Finalmente, suponiendo que las fuerzas axiales Xi producidas por el sistema de cargas han sido calculadas, y son arregladas en la forma de una matris vector columna.

$$(e) \qquad [X_i] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}$$

la cual es llamada matris de carga. Ahora de acuerdo con las reglas de multiplicacion de matrices las m ecuaciones (b) pueden expresarse matricialmente.

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \rho_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \qquad (f)$$

o sea con notacion indicial

$$[\Delta_j] = [X_{ij}][\rho_i][X_i] \qquad (g)$$

Como un ejemplo numerico, se considera la armadura mostrada en la fig. 2.3.2 la cual tiene m=9 miembros. Supongase que se requiere determinar la deflexion vertical de los nudos superiores a y b, bajo la accion de dos condiciones separadas de carga como se indica. La numeracion de los miembros se muestra en la figura, asi como sus dimensiones. Cada barra tiene una seccion transversal Ai=1pul2 y un modulo de elasticidad E=30x103

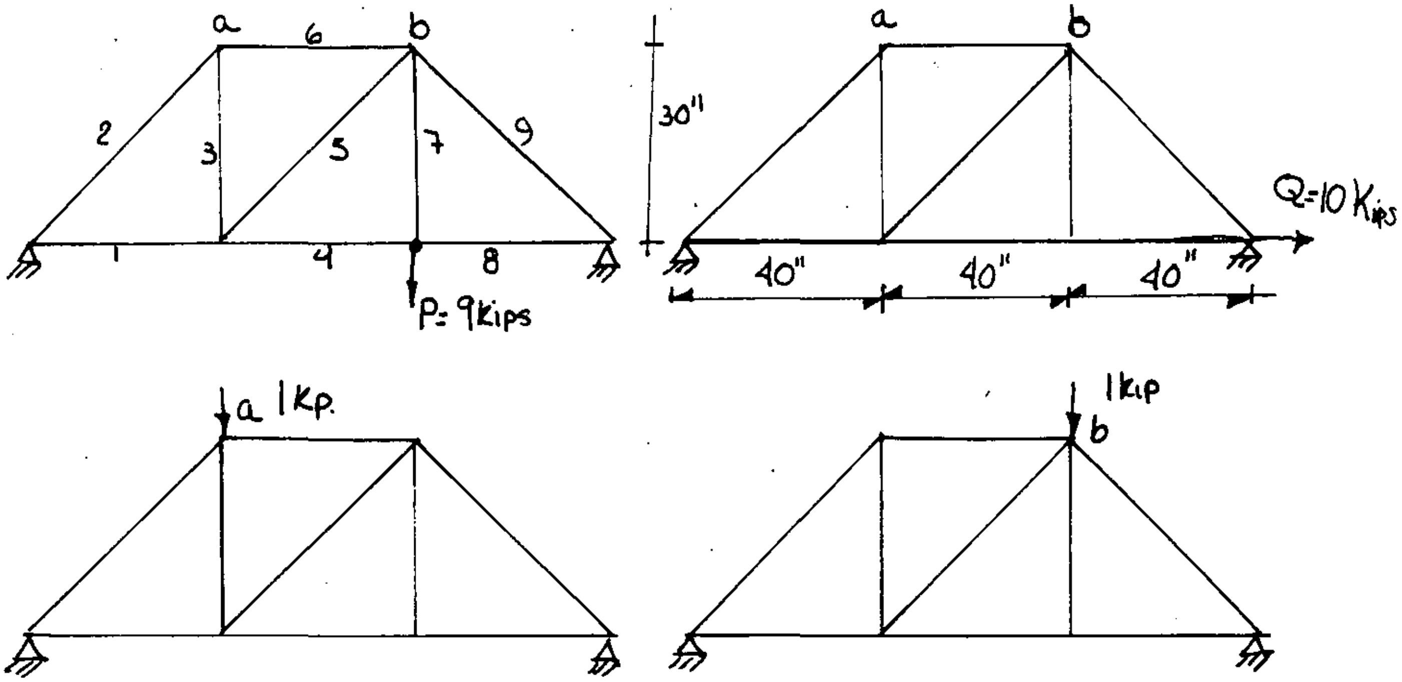


fig. 23.2

El procedimiento a seguir es el siguiente:

Sustituyendo (h), (i) y (j) en (g) se obtiene

$$[\Delta i] = [X_{ij}][\rho_i][X_i] \qquad (g)$$

$$[\Delta i] = \frac{10}{9E}\begin{bmatrix} 8 & -10 & -3 & 4 & 5 & -8 & 0 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 3 & 8 & -5 & -4 & 0 & 8 & -10 \end{bmatrix} X$$

$$X \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad (k)$$

$$= \frac{10}{9E}\begin{bmatrix} 32 & -50 & -9 & 16 & 25 & -32 & 0 & 16 & -25 \\ 16 & -25 & 9 & 32 & -25 & -16 & 0 & 32 & -50 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 8 & 10 \\ 5 & 0 \\ 4 & 0 \\ 9 & 0 \\ 8 & 10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \qquad (l)$$

$$= \frac{10}{9E}\begin{bmatrix} 860 & 640 \\ 147 & 800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0318 & 0.0525 \\ 0.0237 & 0.0296 \end{bmatrix} \qquad (m)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta ap & \Delta bp \\ \Delta ag & \Delta bg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0318 & 0.0525 \\ 0.0237 & 0.0296 \end{bmatrix}$$

a) Se calculan las fuerzas axiales en los nueve miembros bajo las dos condiciones de carga obteniendo la matris de fuerzas

$$[X_i] = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 8 & 10 \\ -5 & 0 \\ -4 & 0 \\ 9 & 0 \\ 8 & 10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \qquad (k)$$

b) Similarmente se calculan las fuerzas axiales debido a las condiciones de fuerzas unitarias verticales en los puntos a y b respectivamente obteniendo la matris

$$[X_{ij}] = 1/9 \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -10 & -5 \\ -3 & 3 \\ 4 & 8 \\ 5 & -5 \\ -8 & -4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 8 \\ -5 & -10 \end{bmatrix} \qquad (i)$$

c) Se calculan los coeficientes de flexibilidad obteniendo la matris de flexibilidad escrita diagonalmente.

$$[P_i^{\circ}] = \frac{10}{E} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad (j)$$

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

ANALISIS ESTRUCTURAL

METODOS DE RIGIDECES

ING. FERNANDO MONROY MIRANDA

SEP-OCT. 92

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

ANALISIS ESTRUCTURAL

METODO DE LAS RIGIDECES

ING. FERNANDO MONROY MIRANDA *

CONTENIDO:

* PROFESOR DE ANALISIS ESTRUCTURAL
EN LA FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.

INTRODUCCION

En 1880 Heinrich Manderla realizó los primeros estudios considerando los desplazamientos de los nudos como incógnitas en el análisis de una armadura, tomando en cuenta las deformaciones producidas en los elementos de la estructura por la acción de momentos flexionantes y fuerzas axiales, para lo cual consideró que la armadura tenía nudos rígidos. Este procedimiento resultó inadecuado por la complejidad que resultaba el resolver un sistema de ecuaciones, ya que estaba en función de los desplazamientos angulares y lineales de cada nudo.

En 1892, Otto Mohr, desarrolló un método aproximado para el cálculo de los esfuerzos producidos por la flexión en una armadura con nudos rígidos, para lo cual también se necesitó resolver un sistema de ecuaciones, que estaba en términos de la rotación de los nudos.

En 1914, Alex Bendixen desarrolló el método pendiente-deflexión para el análisis de estructuras que requiere la solución de un sistema de ecuaciones en términos de los desplazamientos de los nudos. En 1915, G.A. Maney dió a conocer el desarrollo de éste método, el cual era muy semejante al presentado por Mohr.

En 1930, Hardy Cross, dió a conocer el método de la distribución de momentos, que consistía en lograr el equilibrio de los momentos en los nudos mediante aproximaciones sucesivas. Este método tuvo gran aceptación debido a que se evitó la necesidad de resolver el sistema de ecuaciones que se requería en el método de pendiente-deflexión. En 1935, R.C. Southwell propuso el método de relajación de aproximaciones sucesivas.

Con el advenimiento de las computadoras se eliminó la solución del sistema de ecuaciones simultáneas como un obstáculo para el análisis estructural, lo que permitió la utilización de un método muy generalizado, basandose en el método de pendiente-deflexión, donde las incógnitas son los desplazamientos de los nudos, a este método de análisis se le llamó método de las rigideces.

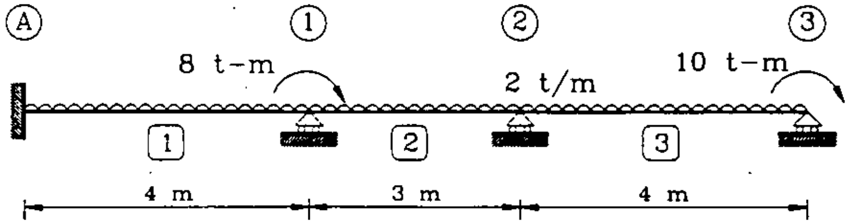
INDETERMINACION CINEMATICA.

En el método de las rigideces, al número total de los desplazamientos de los nudos no restringidos (y de los apoyos) se le llama número de grados de libertad o grado de indeterminación cinemática. En una estructura plana, se pueden tener desplazamientos lineales (en dos direcciones ortogonales), y desplazamientos angulares (giros) en cada nudo.

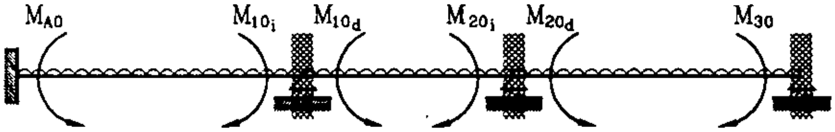
Para determinar el grado de indeterminación cinemática en una estructura, es importante decidir si se tomará en cuenta o no el alargamiento o acortamiento de los miembros estructurales (deformación axial de barras). Por ejemplo, en la figura 1, caso (a), si se toma en cuenta la deformación axial de barras, se tendrían 7 grados de indeterminacióm cinemática, sin embargo si no se toma en cuenta la deformación axial de las barras solo se tendrían 4 grados de libertad, como se ilustra en el caso (b) de la misma figura. En el caso de armaduras no se toman en cuenta las rotaciones de los nudos, únicamente los desplazamientos lineales de los nudos, como se observa en el caso (c) de la figura 1.

En el método de las rigideces, también llamado de los desplazamientos, se tendrá que definir una estructura restringida o primaria (también llamada cinemáticamente restringida) en la que se

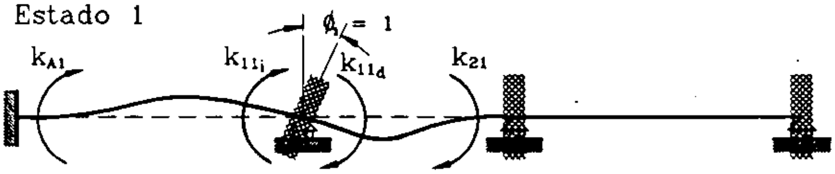
EJEMPLO 1



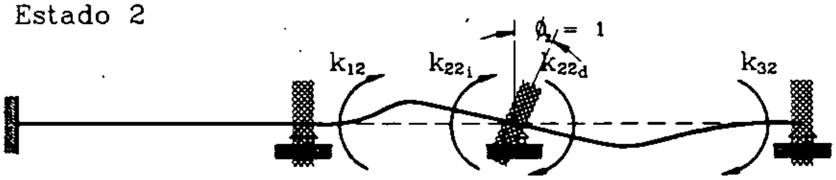
Estado 0



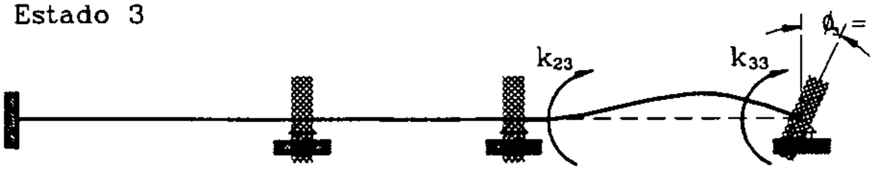
Estado 1



Estado 2



Estado 3



considera a todos los nudos empotrados y a partir de esto, se calculan los momentos de empotramiento que son los que habrá de equilibrar posteriormente. A este primer paso del método se le conoce como el estado I.

COEFICIENTES DE RIGIDEZ

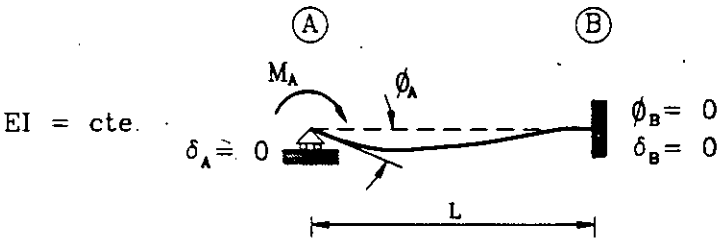
Por rigidez debemos de entender que es la capacidad que tiene un cuerpo para no deformarse cuando está sujeto a cargas externas, dicha deformación puede ser un giro o un desplazamiento. Al referirnos a cargas estamos considerando tanto fuerzas como momentos concentrados.

Las rigideces se expresan como sigue:

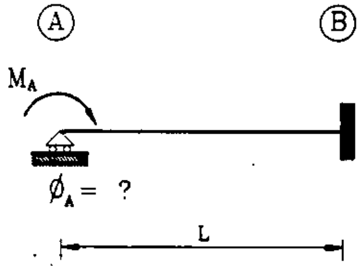
$$r_A = \frac{M}{\phi} \qquad r_E = \frac{V}{\delta}$$

r_A = rigidez angular.
M = momento en el extremo considerado.
ϕ = giro en el extremo en donde se aplicó.
r_E = rigidez de entrepiso.
V = cortante de entrepiso.
δ = desplazamiento relativo de entrepiso.

La rigidez angular de barras de sección constante, considerando únicamente deformaciones por momento flexionante, se calculará para el caso de la viga siguiente, donde el extremo A es un apoyo fijo y el extremo B es un empotramiento:



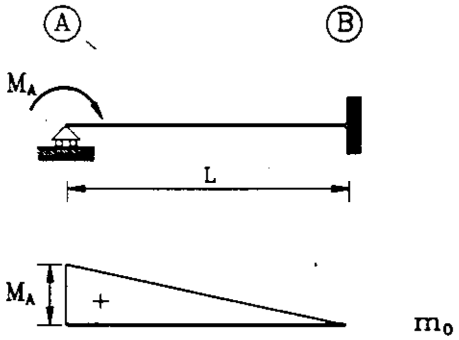
Como se vio anteriormente, la rigidez angular se calcula con la expresión: $r_A = M_A / \phi_A$, como nuestra incógnita es el giro en el punto A de la viga en estudio, tendremos que valuar el giro debido a un momento aplicado en A como se indica en la siguiente figura:



Aplicando el método de las flexibilidades para resolver la viga hiperestática, tendremos la siguiente estructura primaria :

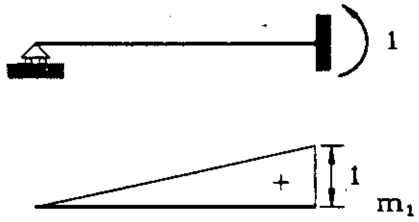
ESTRUCTURA PRIMARIA

ESTADO 0



EI = cte.

ESTADO I



resolviendo la ecuación de compatibilidad: $\delta_{10} + R_1 f_{11} = 0$

donde:

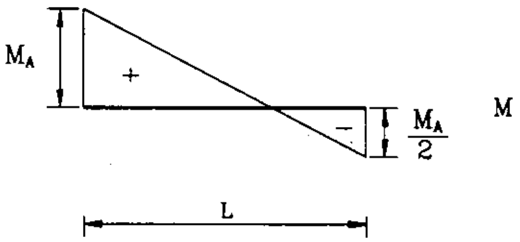
$$\delta_{10} = \frac{1}{6EI}(L)(M_A)(1) = \frac{M_A L}{6EI}$$

$$f_{11} = \frac{1}{3EI}.(L)(1)(1) = \frac{L}{3EI}$$

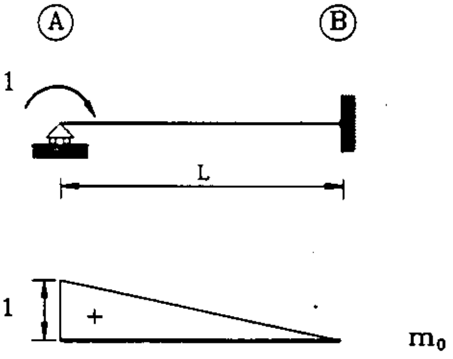
sustituyendo: $\frac{M_A L}{6EI} + R_1 \frac{L}{3EI} = 0$

resolviendo: $R_1 = -\frac{M_A}{2}$

Por lo tanto, el diagrama de momento flexionante final será:



Para poder determinar el valor de ϕ_A volveremos a emplear el método de las flexibilidades, aplicando un momento unitario en el punto A (en la dirección donde se quiere encontrar el giro), por lo que tendremos:



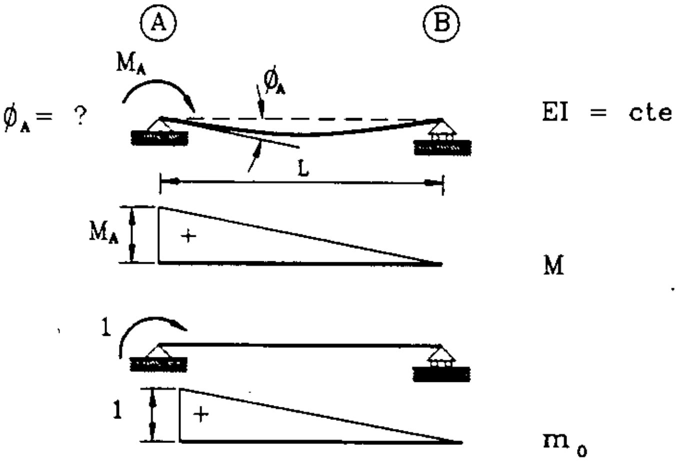
donde: $\phi = \int \frac{M\ m_0}{EI} ds$

sustituyendo: $\phi_A = \frac{1}{6EI} (L)(1)(2M_A - \frac{M_A}{2}) = \frac{M_A L}{4EI}$

conociendo: $r_A = \frac{M_A}{\phi_A}$

sustituyendo: $r_A = \frac{4EI}{L}$

En el caso de una viga, donde su extremo B es un apoyo fijo, el valor de su rigidez angular cambia, calculandose de la manera siguiente:



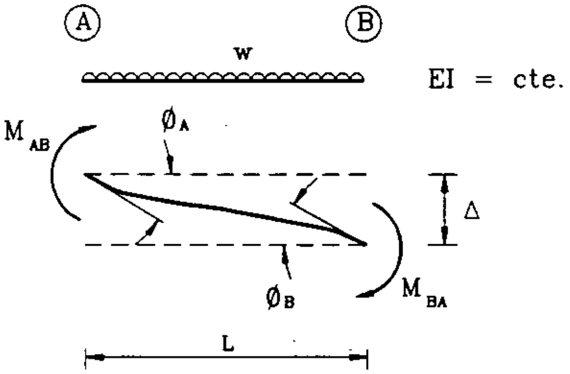
Su giro será: $\phi_A = \frac{1}{3EI} (L)(M_A)(1) = \frac{L\ M_A}{3EI}$

Su rigidez será: $r_A = \frac{3EI}{L}$

ECUACIONES DEL EQUILIBRIO

La base del método pendiente-desviación está en las ecuaciones de equilibrio, que nos definen los momentos en los extremos de cada barra en función de los desplazamientos angulares de sus extremos y de los desplazamientos lineales relativos entre sus extremos.

Si consideramos la siguiente barra, que se aisló de un sistema estructural estáticamente determinado y que está deformado debido a las rotaciones en los extremos ϕ_A , ϕ_B y un desplazamiento lineal relativo entre A y B, Δ. Los momento en sus extremos los llamaremos M_{AB} y M_{BA} que están en función de sus deformaciones elásticas y de las cargas que actúan sobre la barra.



Para obtener los momentos M_{AB} y M_{BA} aplicaremos el método de superposición, sumando algebraicamente los efectos debido a:

1. El momento debido al giro ϕ_A del extremo A, manteniendo empotrado el extremo B.

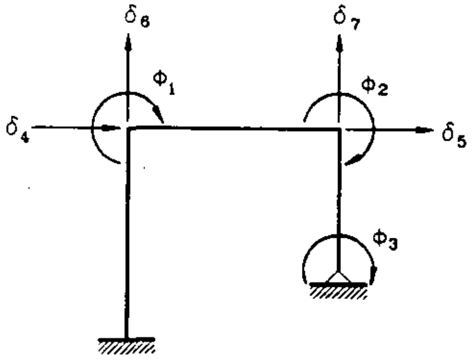
2. El momento debido al giro ϕ_B del extremo B, manteniendo empotrado el extremo A.

3. El momento debido a la traslación relativo Δ entre los extremos A y B.

4. El momento debido a las cargas que actúan sobre la barra, sin alterar las deformaciones existentes en los extremos A y B.

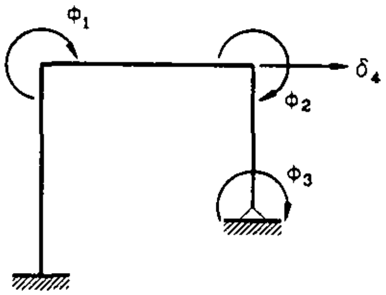
Grados de indeterminación cinemática

G.I.C. = 7
Se considera la
deformación axial
de barras.



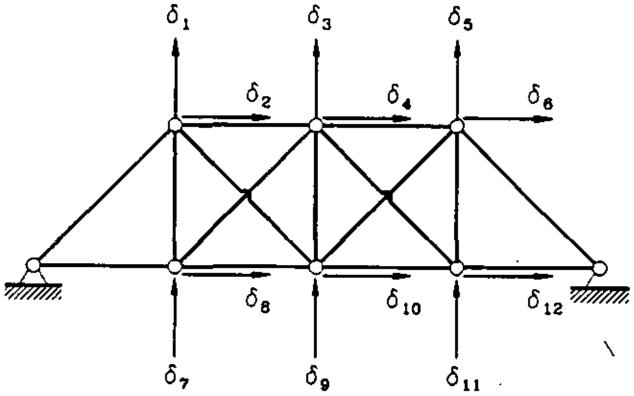
(A)

G.I.C. = 4
Se desprecia la
deformación axial
de barras.



(B)

G.I.C. = 12



(C)

FIGURA 1

Para determinar estos efectos se realizará lo siguiente:

1. Considerando la barra A-B, con las condiciones de soporte que se indican en la figura 2(A), donde el extremo A gira un ángulo ϕ_A, mientras que el extremo B esta fijo, $\phi_B = 0$, y no hay desplazamiento relativo entre los extremos A y B, $\Delta = 0$.

Utilizando el método de la viga conjugada, figura 2(B), con el diagrama de momentos dividido entre EI como carga elástica, donde ϕ_A es la reacción en sentido positivo, de tal manera que sea la pendiente positiva que se busca de la viga real, por lo que tenemos la solución:

haciendo: $\sum M_A = 0$ $\left(\frac{M^1_{AB} L}{2EI}\right)\left(\frac{L}{3}\right) - \left(\frac{M^1_{BA} L}{2EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = 0$

donde: $M^1_{BA} = \frac{1}{2} M^1_{AB}$ ... (a)

haciendo: $\sum M_B = 0$ $(\phi_A L) - \left(\frac{M^1_{AB} L}{2EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) + \left(\frac{M^1_{BA} L}{2EI}\right)\left(\frac{L}{3}\right) = 0$

sustituyendo (a) en la expresión anterior:

$$M^1_{AB} = \frac{4EI}{L} \phi_A$$

por lo tanto:

$$M^1_{BA} = \frac{2EI}{L} \phi_A$$

2. Si consideramos la estructura de la figura 2(C), en donde ahora el extremo B se ha rotado un ángulo ϕ_B y el extremo A está empotrado, procediendo de manera similar al caso anterior llegamos a las siguientes expresiones:

$$M^2_{AB} = \frac{1}{2} M^2_{BA}$$

$$M^2_{AB} = \frac{2EI}{L} \phi_B$$

$$M^2_{BA} = \frac{4EI}{L} \phi_B$$

3. Considerando la figura 2(D), donde ahora se tiene un desplazamiento relativo Δ entre los extremos de la barra (sin rotaciones por estar empotrados). Observando a la estructura y debido a simetría de la deformación con respecto al punto central de la barra, los dos momentos que actúan en los extremos deben ser iguales, es decir:

$$M^3_{AB} = M^3_{BA} = M^3$$

Deben ser de signo negativo, pues tienen sentido antihorario. Por el método de la viga conjugada, y considerando su respectivo diagrama de momentos como cargas elásticas sobre la viga conjugada, figura 2(E) se observa que debe actuar un momento igual a Δ en el extremo B, debido al desplazamiento obligado Δ en la viga real.

haciendo: $\sum M_B = 0 \quad \left(\frac{M^3L}{2EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) - \left(\frac{M^3L}{2EI}\right)\left(\frac{L}{3}\right) - \Delta = 0$

donde: $M^3 = \frac{6EI}{L^2} \Delta$

por lo tanto: $M^3_{AB} = M^3_{BA} = -\frac{6EI}{L^2} \Delta$

4. Si consideramos a la barra A-B que no sufre deformaciones debido a las cargas que tenga sobre su claro, entonces podremos calcular los momentos de empotramiento perfecto (ANEXO A), y que se definen respectivamente en sus extremos por: M^4_{AB} y M^4_{BA}.

Sumando los cuatro efectos tendremos:

$$M_{AB} = M^1_{AB} + M^2_{AB} + M^3_{AB} \pm M^4_{AB}$$

$$M_{BA} = M^1_{BA} + M^2_{BA} + M^3_{BA} \pm M^4_{BA}$$

sustituyendo:

$$M_{AB} = \frac{4EI}{L}\phi_A + \frac{2EI}{L}\phi_B - \frac{6EI}{L^2}\Delta \pm M^4_{AB}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}\phi_A + \frac{4EI}{L}\phi_B - \frac{6EI}{L^2}\Delta \pm M^4_{BA}$$

Las ecuaciones anteriores fueron para una barra sujeta a giros en sus extremos A y B, con desplazamientos en uno de sus extremos, que son el caso general de las ecuaciones pendiente-deflexión. Para nuestro caso del método de las rigideces, y de forma matricial, las ecuaciones de equilibrio son:

$$(F) + (K) (D) = (0)$$

PROCEDIMIENTO PARA OBTENER ELEMENTOS MECANICOS EN VIGAS Y MARCOS HIPERESTATICOS

El procedimiento general para la solución de vigas y marcos hiperestáticos se describirá a continuación:

1.- Se determina el número de grados de libertad de la estructura.

2.- Se empotran todas las barras en sus extremos, menos en los apoyos de empotramiento, Estado I, logrando con ello una estructura cinemáticamente determinada.

3.- Se calculan las momentos de empotramiento en los extremos de las barras debidos a las cargas sobre ellas.

4.- Se liberan los nudos, Estados II, III, IV, etc. liberando los desplazamientos unitarios uno a uno que fueron impedidos en el paso 2, calculando las fuerzas necesarias para lograr estos desplazamientos (coeficientes de rigidez).

5.- Se platean las ecuaciones del equilibrio, que será un sistema de *n* incógnitas, siendo *n* el número de grados de libertad cinemática de la estructura.

6.- Se resuelve el sistema de ecuaciones, obteniendo los desplazamientos de la estructura, tanto giros como desplazamientos lineales.

7.- Con los giros y desplazamientos lineales se obtienen los momentos en los extremos de las barras correspondientes, aplicando las ecuaciones del equilibrio para cada caso, superponiendo cada Estado.

8.- Se obtienen los diagramas de momentos de la estructura real, sumando los momentos obtenidos en paso 7 con los debidos a las cargas que actúan sobre las barras (superposición).

9.- Por último, se obtiene el diagrama de fuerzas cortantes aplicando la estática y el de fuerzas normales (si es el caso) por equilibrio interno de la estructura, así como sus reacciones.

PROPIEDADES DE LA MATRIZ DE RIGIDECES

- La matriz de rigideces debe ser cuadrada, de orden *n* por *n*, donde *n* sería igual al grado de indeterminación cinemática.

- Tiene propiedades de simetría: $k_{ij} = k_{ji}$

- Los coeficientes de la diagonal principal deben ser positivos.

- Debe ser una matriz positivamente definida, es decir, su determinante debe ser mayor que cero.

- La matriz de rigideces es la inversa de la de flexibilidades, sin embargo se debe tener en cuenta que por flexibilidades se basa en una estructura isostática, y el sistema de coordenadas representan la localización y dirección de las restricciones, y en cambio en rigideces, se restringen desplazamientos en nudos, siendo su sistema de coordenada la localización y dirección de los desplazamientos incógnitas, por lo tanto tanto la inversa de la matriz de flexibilidades utilizada en el método de las fuerzas es una matriz, en la cual los elementos son coeficientes de rigidez, pero no los que se utilizan en el análisis del método de rigidez y viceversa.

NOTA: Estos apuntes fueron elaborados por el Ing. Miguel Angel Rodríguez Vega. Profesor Facultad de Ingeniería. UNAM.

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

ANALISIS ESTRUCTURAL

METODO DE FLEXIBILIDADES Y REGIDECES SIMPLIFICADAS

ING. JULIO DAMY RIOS

SEP-OCT. 92

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

UNA SISTEMATIZACION DEL ANALISIS DE MARCOS PLANOS SIN CONSIDERAR DEFORMACIONES AXIALES DE SUS BARRAS

Julio Damy Ríos (I)

I - RESUMEN

Se presenta un método para analizar marcos planos de cualquier forma, sin considerar deformaciones axiales en sus barras. En una forma sencilla se obtienen los grados de libertad, la matriz que relaciona éstos con los desplazamientos transversales de las barras, así como la matriz de rigidez de la estructura. En muchos casos se justifica no considerar deformaciones axiales de las barras, ya que este efecto es despreciable.

La ventaja del método radica en que se disminuye el número de incógnitas, lo que permite el uso ventajoso de mini y microcomputadoras, así como su aplicación manual.

II - INTRODUCCION

Antes del advenimiento de las computadoras, los marcos planos de cualquier forma se analizaban sin considerar deformaciones axiales de sus barras; la razón era evidente, las incógnitas eran los giros y los desplazamientos de los llamados grados de libertad, en vez de tres incógnitas por nudo, como es el caso al considerar deformaciones axiales. De hecho no se utilizaba el método de los desplazamientos en su forma explícita, sino que se usaba el método de Cross modificado combinado con los llamados diagramas de Williot-Mohr (Ref. 1) que relacionaban los desplazamientos transversales de cada barra; el procedimiento era bastante engorroso y difícil de sistematizar.

En la década de los sesenta apareció el programa STRESS desarrollado por el Dr. S. Fenves; es el primer programa que utiliza el método general de los desplazamientos, en la forma que hoy nos es tan conocida; considera deformaciones axiales, deformaciones por flexión y por cortante de todas las barras, lo cual implica que por cada nudo hay tres incógnitas: los desplazamientos d_x d_y y el giro φ de los nudos; este planteamiento es sólo posible gracias a la nueva herramienta, la computadora, que en aquella época no era una palabra de uso común como lo es ahora. El rápido desarrollo de las computadoras lanzó al olvido a Cross y a Williot-Mohr; sin embargo hay que hacer notar que en gran número de problemas estructurales, el considerar únicamente deformaciones por flexión de las barras, como lo hacían estos métodos, no introduce grandes errores en los resultados del análisis.

En el presente trabajo se introduce una forma de sistematizar un método de los desplazamientos, en donde el análisis de los marcos considera sólo flexión, lo cual, en muchos casos, disminuye el número de incógnitas a menos de la mitad de las del método general de los desplazamientos. La ventaja es evidente cuando se usan mini o microcomputadoras con poca capacidad de almacenamiento o cuando se tiene que efectuar al análisis manualmente. Otra modalidad de la presentación consiste en no utilizar un planteamiento matricial directo, que en muchos casos

---

(I) Profesor de la Facultad de Ingeniería, UNAM.

es muy deficiente, sino que se obtendrán expresiones sencillas que serán fáciles de programar

III - PLANTEAMIENTO GENERAL

Si no se consideran deformaciones axiales de las barras (d.a.b.) los marcos tienen un número limitado de desplazamientos independientes a los que se les llama los grados de libertad; ilustremos lo anterior con el ejemplo mostrado en la figura 1. Se trata de un marco de dos aguas con n_B (4) barras orientadas y n_N (3) nudos, al no considerar d.a.b. tendremos las siguientes restricciones que relacionan entre sí a los desplazamientos de sus nudos:

barra 1 $\quad d_{y1} = 0$
barra 2 $\quad (d_{x2} - d_{x1}) \cos\theta + (d_{y2} - d_{y1}) \operatorname{sen}\theta = 0$
barra 3 $\quad (d_{x3} - d_{x2}) \cos\theta - (d_{y3} - d_{y2}) \operatorname{sen}\theta = 0$
barra 4 $\quad d_{y3} = 0$

estas cuatro ecuaciones son linealmente independientes, por lo que se puede elegir a dos desplazamientos independientes que llamaremos los grados de libertad (g.l.), se llamará n_D al número de esos g.l.; los otros cuatros desplazamientos dependen de los dos g.l. Arbitrariamente elegiremos como g.l. a d_{x1} y d_{x3}, a los que llamaremos D_1 y D_2 respectivamente, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
d_{x1} &= D_1 \\
d_{y1} &= 0 \\
d_{x2} &= 1/2\ (D_1 + D_2) \\
d_{y2} &= 1/2\ (D_1 - D_2)\ \cot\theta \\
d_{x3} &= D_2 \\
d_{y3} &= 0
\end{aligned}$$

estas relaciones se obtienen gráficamente usando el método de Williot-Mohr (Ref. 1)

Al aplicar el método de los desplazamientos, las incógnitas serán los dos g.l. y los tres giros de los nudos

$$\begin{Bmatrix} d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix}$$

El problema se reduce a obtener la matriz de rigidez $\begin{bmatrix} K \end{bmatrix}$ que relaciona estos desplazamientos con los momentos aplicados en los nudos (M_i) y con las fuerzas aplicadas paralelamente a los g.l. (F_i), véase figura 2.

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} K_{11} & K_{12} \\ \hdashline K_{21} & K_{22} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix}$$

Como se observa la matriz $\begin{bmatrix} K \end{bmatrix}$ se ha subdividido en cuatro matrices que se obtendrán por separado, éstas son la matriz $\begin{bmatrix} K_{11} \end{bmatrix}$ de orden (n_N X n_N), la matriz $\begin{bmatrix} K_{22} \end{bmatrix}$ de orden (n_D x n_D) y la matriz $\begin{bmatrix} K_{12} \end{bmatrix}$ de orden (n_N x n_D), la matriz $\begin{bmatrix} K_{21} \end{bmatrix}$ es la transpuesta de $\begin{bmatrix} K_{12} \end{bmatrix}$.

IV - ARMADURA ANALOGA

La relación que guardan entre sí los desplazamientos de un marco donde no se consideran d.a.b. es la misma que tienen los de un mecanismo de igual forma que el marco pero compuesto de barras indeformables doblemente articuladas (figura 3), al que se le llamará mecanismo análogo; para que esta analogía sea válida será necesario que los desplazamientos del mecanismo sean pequeños.

Por facilidad en la figura 3 se ha dibujado la configuración deformada del marco considerando nulos a los giros, lo cual no afecta a las relaciones entre los desplazamientos ya que éstas se fundan exclusivamente en no considerar d.a.b.

El problema de encontrar las relaciones entre los desplazamientos transversales de las barras (Δ_i) con los g.l. (D_i), se reduce a encontrar esas relaciones en el mecanismo análogo para lo cual estableceremos dos teoremas válidos sólo para desplazamientos pequeños.

Teorema 1

Los g.l. de un mecanismo están asociados a las barras que unidas a tierra se necesitan añadir para que el mecanismo se convierta en una armadura estáticamente estable (mecanismo indeformable) (ver figura 4). A esta armadura le llamaremos la armadura análoga (a.a.).

En la figura 4 (a) las barras asociadas a D_1 y D_2 son la 5 y 6, en la figura 4 (b) las asociadas a D_1, D_2 y D_3 son las 6, 7 y 8 en la figura 4 (c) las asociadas a D_1 y D_2 son las 7 y 8

La demostración de este teorema es evidente ya que en las dos estructuras no hay d.a.b., obsérvese que hay varias alternativas de a. a. para un marco dado.

Teorema 2

El desplazamiento (d) de cualquier nudo en cualquier dirección es una función lineal de los g.l. (ésto es evidente por ser pequeños los desplazamientos)

$$(d) = \sum_{i=1}^{n_D} a_i D_i$$

los coeficientes a_i son las fuerzas axiales en las barras asociadas a los g.l. (b.a.g.l.), producidas por una fuerza unitaria paralela al desplazamiento (d) aplicada en la a.a. La demostración del teorema se funda en la aplicación del principio del trabajo virtual considerando que las únicas barras deformadas son las b.a.g.l. cuyas deformaciones son los valores de los g.l. (D_i).

A continuación aplicaremos estos dos teoremas al ejemplo ilustrado en la figura 5; se desea obtener el valor de d_{x2} en función de D_1 y D_2; resolviendo la armadura análoga se obtienen los resultados mostrados en la figura 5 (c), por lo tanto:

$$d_{x2} = 0.5\ D_1 + 0.5\ D_2$$

que es el mismo resultado que obtuvimos con anterioridad.

Usando también estos dos teoremas obtendremos las matrices $[H]$ de orden ($n_B \times n_D$) y $[C]$ de orden ($2n_N \times n_D$) que respectivamente relacionan a los g.l. (D_i) con los desplazamientos transversales de las barras (Δ_j) y con los desplazamientos de los nudos (d_{xi}, d_{yi})

$$\{\Delta\} = [H] \quad \{D\}$$
$$\{d_N\} = [C] \quad \{D\}$$

V - OBTENCION DE LAS MATRICES $[H]$ y $[C]$

Para obtener la matriz $[H]$ se aplicarán los dos teoremas de la a.a. que ya hemos demostrado. El renglón j de $[H]$, asociado a la barra j, se obtiene aplicando un par de fuerzas unitarias aplicadas normalmente y en los extremos de la barra j y calculando las fuerzas axiales en las b.a.g.l.; en la figura 6 se ilustra el procedimiento para obtener el renglón 2 de la matriz $[H]$ del marco del ejemplo; el renglón 2 será $[- 1.0 \quad + \quad 1.0]$.

A continuación obtendremos la matriz $[H]$ para nuestro ejemplo:

$$[H] = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ -1.0 & 1.0 \\ 1.0 & -1.0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Para obtener la matriz $[C]$ aplicaremos los teoremas de la a.a. El renglón j de $[C]$ asociado a un desplazamiento de un nudo, se obtiene aplicando una fuerza unitaria en el nudo en la dirección del desplazamiento y calculando las fuerzas en las b.a.g.l. Obtengamos $[C]$ para nuestro ejemplo:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.8660 & -0.8660 \\ 0 & 1.0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

VI - OBTENCION DE LA MATRIZ $[K]$

1.- Obtención de $[K_{11}]$

Esta matriz es la más simple de obtener ya que relaciona $\{M\}$ con $\{\psi\}$ cuando $\{D\}$ es nulo, es muy fácil demostrar que el elemento i,j de la matriz $[K_{11}]$ es igual a:

$$K_{11}\,(ij) = A_{ik}\,A_{jk}\,r_k\,(1 + \delta_{ij})$$

r_k = Valor de 2 EI/L de la barra k

A_{jk}, A_{jk} = Elementos de la matriz $[A]$

δ_{ij} = Delta de Kronecker (= 1 si i=j, = 0 si i/j)

La matriz $[A]$ está definida de la siguiente forma:

$A_{ij} = 1$, si el nudo i es cualquier extremo de la barra j

$A_{ij} = 0$, en caso contrario

A continuación presentamos el valor de $[A]$ para nuestro ejemplo:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como la matriz $[A]$ está formada por ceros y unos y es función de las incidencias de las barras, se podrá omitir su cálculo cuando se programe la obtención de $[K_{11}]$, ya que ésta se obtendrá directamente con la llamada "regla de la suma" (o del ensamble) que utiliza las incidencias de las barras. Obtengamos $[K_{11}]$ para nuestro ejemplo, por facilidad supondremos EI constante:

$$r_1 = r_4 = 0.5 \text{ EI}; \quad r_2 = r_3 = 0.3464 \text{ EI}$$

$$[K_{11}] = \begin{bmatrix} 1.6928 & 0.3464 & 0.0000 \\ 0.3464 & 1.3856 & 0.3464 \\ 0.0000 & 0.3464 & 1.6928 \end{bmatrix} \text{ EI}$$

2.- Obtención de $[K_{22}]$

La matriz $[K_{22}]$ que relaciona $\{F\}$ con $\{D\}$ cuando los giros $\{\psi\}$ son nulos se obtiene combinando los tres principios fundamentales del análisis estructural: continuidad, ley de Hooke y equilibrio.

Continuidad: $\{\Delta\} = [H] \{D\}$

Ley de Hooke: $\{V\} = [r'] \{\Delta\}$

Equilibrio: $\{F\} = [H^T] \{V\}$

La ecuación de equilibrio se obtiene a partir del principio de contragradiencia, que nos dice que el trabajo efectuado por las fuerzas externas ($\{F^T\} \{D\}$) es igual al de las fuerzas internas ($\{V^T\}\{\Delta\}$); las variables usadas en estas ecuaciones son:

$\{\Delta\}$ = Vector de los desplazamientos transversales de las barras

$\{D\}$ = Vector de los valores de los g.l.

$\{V\}$ = Vector de las fuerzas cortantes de cada barra

$\{F\}$ = Vector de las fuerzas aplicadas paralelamente a los g.l.

$[r']$ = Matriz diagonal con los valores de 12 EI/L^3 de cada barra

Combinando las tres ecuaciones se obtiene:

$$\{F\} = [H^T] [r'] [H] \{D\}$$

o sea que:

$$[K_{22}] = [H^T] [r'] [H]$$

o bien el elemento ij de la matriz $[K_{22}]$ será:

$$\underline{K_{22}\ (ij) = \sum_{k=1}^{n_B} H_{ki}\ H_{kj}\ r'_k}$$

Obtengamos $\left[K_{22}\right]$ para nuestro ejemplo:

$$r'_1 = r'_4 = 0.1875\ EI \ ; \quad r'_2 = r'_3 = 0.0624\ Ei$$

$$\left[K_{22}\right] = \begin{bmatrix} 0.3123 & -0.1248 \\ -0.\cancel{0}1248 & 0.3123 \end{bmatrix} EI$$

3.- Obtención de $\left[K_{12}\right]$

La matriz $\left[K_{12}\right]$ que relaciona $\{M\}$ con $\{D\}$ cuando los giros $\{\psi\}$ son nulos, se obtendrá aplicando la relación que muestra la figura 7; por lo tanto,

$$\left[K_{12}\right] = \left[A\right] \left[r''\right] \left[H\right]$$

donde: $\left[r''\right]$ = Matriz diagonal con los valores de $6EI/L^2$ de cada barra

o bien simplificando:

$$\underline{K_{12\ (ij)} = \sum_{k=1}^{n_B} A_{ik}\ H_{kj}\ r''_k}$$

obtengamos $\left[K_{12}\right]$ para nuestro ejemplo:

$$r''_1 = r''_4 = 0.3750\ EI; \quad r''_2 = r''_3 = 0.1800\ EI$$

$$\left[K_{12}\right] = \begin{bmatrix} 0.1950 & 0.1800 \\ 0 & 0 \\ 0.1800 & 0.1950 \end{bmatrix}$$

VII - APLICACION DEL METODO

Apliquemos el método al ejemplo mostrado en la figura 8, cuya matriz $\left[K\right]$ ya se ha calculado; las fuerzas de fijación de cada barra se muestran en la misma figura. Obtengamos el vector $\{F_N\}$ fuerzas en los nudos:

$F_{x1} = o$; $F_{y1} = -5.78$; $F_{x2} = 10. - 3.52 \times \text{sen } 30$
$F_{y2} = -5.78 - 3.52 \times \cos 30$; $F_{x3} = -6.48 \times \text{sen } 30$
$F_{y3} = -6.48 \times \cos 30$

Obtengamos $\{F_D\}$ vector de fuerzas paralelas a los g.l., utilizando el principio de contragradiencia:

$$\{F_D\} = \left[C^T\right] \{F_N\}$$

obteniéndose los siguientes resultados:

$$\{F_N\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -5.78 \\ 8.24 \\ -8.83 \\ -3.24 \\ -5.61 \end{Bmatrix} ; \qquad \{F_D\} = \begin{Bmatrix} -3.53 \\ 8.53 \end{Bmatrix}$$

por lo tanto el vector $\{F\}$ será:

$$\left\{F\right\} = \left\{\begin{array}{r} -4.81 \\ -0.73 \\ 8.31 \\ \hdashline -3.53 \\ 8.53 \end{array}\right\}$$

La ecuación $\{F\} = [K]\{d\}$ se puede resolver utilizando el método de Gauss-Seidel (Ref.2), el cual es muy simple de programar o de ejecutar manualmente; se obtienen los siguientes resultados:

$$\left\{\begin{array}{c} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ D_1 \\ D_2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} -7.7325 \\ 1.4620 \\ -0.2253 \\ \hdashline 7.6117 \\ 34.9494 \end{array}\right\} \quad x\ 1/EI$$

Por medio de las matrices $[B]$ y $[C]$ obtengamos los valores de $\{\Delta\}$ y $\{d_N\}$

$$\left\{\Delta\right\} = \left\{\begin{array}{r} 7.6117 \\ 27.3377 \\ -27.3377 \\ 34.9494 \end{array}\right\} \quad x\ 1/EI \quad \left\{d_N\right\} \quad \left\{\begin{array}{r} 7.6117 \\ \hdashline 0 \\ 21.2806 \\ -23.6751 \\ 34.9494 \\ 0 \end{array}\right\} \quad x\ 1/EI$$

Los momentos en los extremos de una barra j, producidos por los desplazamientos, se obtienen con las siguientes fórmulas:

$$M_{Aj} = r_j\ (2\,\varphi_A + \varphi_B) + r_j''\ \Delta_j$$
$$M_{Bj} = r_j\ (2\,\varphi_B + \varphi_A) + r_j''\ \Delta_j$$

estos momentos sumados a los de empotramiento nos dan los momentos finales; en la figura 9 se muestra el diagrama final de momentos flexionantes.

Para comprobar la solución se utiliza el principio del equilibrio: la suma de los momentos sobre los nudos debe ser nula y el valor final de $\{F_D\}$ debe ser nulo, condiciones que cumple la solución de nuestro ejemplo.

VIII - NOTACION

d.a.b. = deformaciones axiales de las barras
d_{xi}, d_{yi} = desplazamientos del nudo i
g.l. = grado de libertad
D_i = valor del g.l.i
φ_i = giro en el nudo i
$\{d\}$ = vector formado por los giros en los nudos y los valores de los g.l.
M_i = momento aplicado en el nudo i
F_i = fuerza aplicada paralelamente al g.l.i
$[K]$ = matriz de rigidez de la estructura de orden $(n_N + n_D)$ x $(n_N + n_D)$
n_N = número de nudos
n_B = número de barras
n_D = número de g.l.
b.a.g.l. = barras asociadas a los grados de libertad

Δ_j = desplazamiento transversal relativo de la barra j (ver figura 7)

IX - REFERENCIAS

(1) "Análisis Estructural", Jack C. McCormack, Editorial Harla, págs. 357, 362, 483 y 519.
(2) "Numerical Methods in Finite Element Analysis", K.J. Bathe; E.L. Wilson

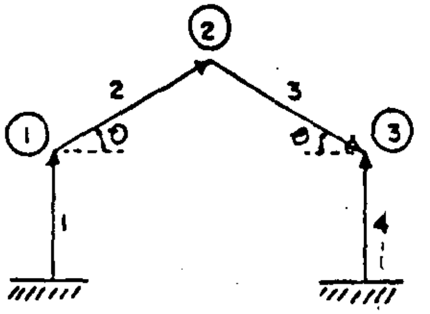


FIGURA 1

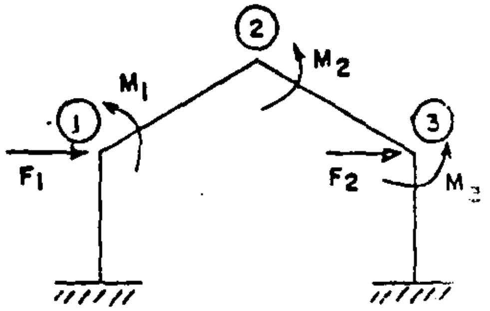
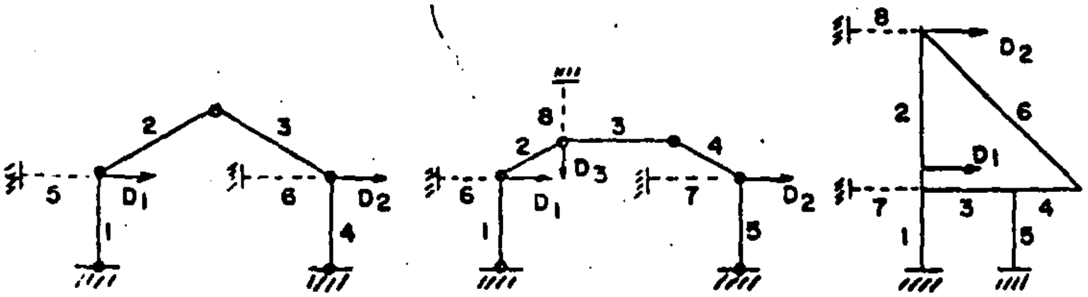


FIGURA 2

Marco

Mecanismo análogo

FIGURA 3

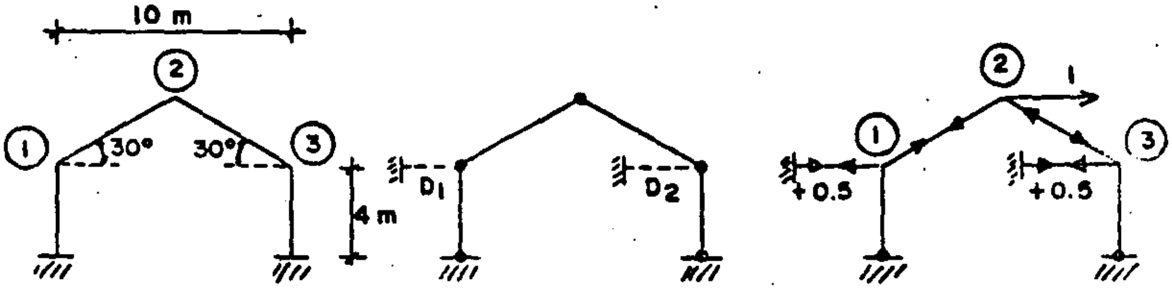


(a)

(b)

(c)

FIGURA 4



(a) Marco

(b) Armadura análoga

(c) Solución armadura

FIGURA 5

NOTA: Para el sentido de las fuerzas unitarias se usará la siguiente regla.

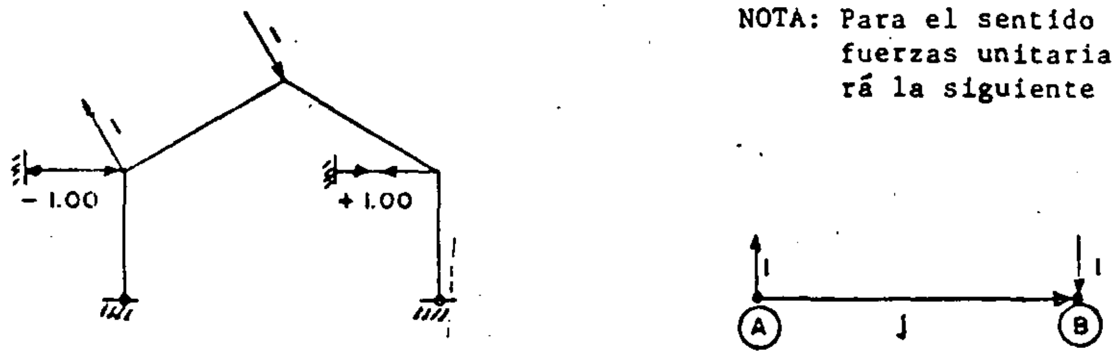
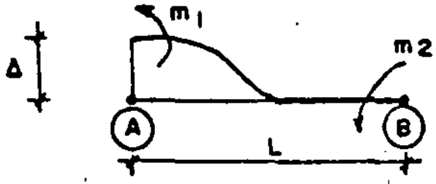
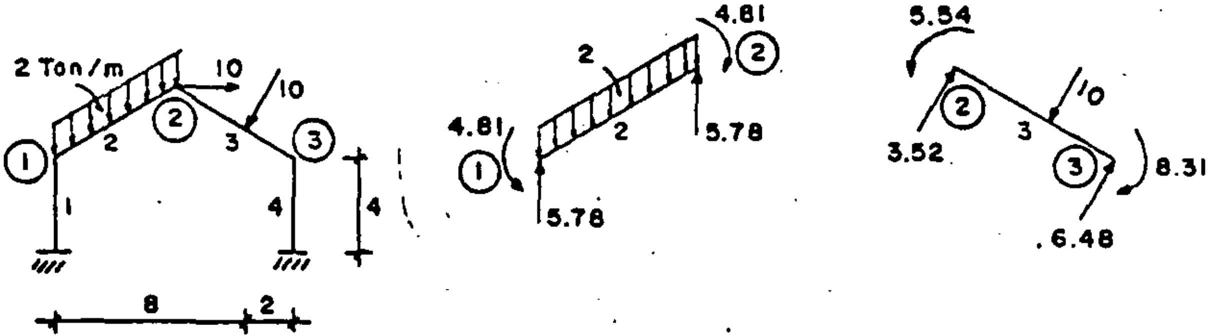


FIGURA 6



$$m_1 = m_2 = \frac{6EI}{L^2}\Delta$$

FIGURA 7



(a) Cargas

(b) Fuerzas de fijación

FIGURA 8

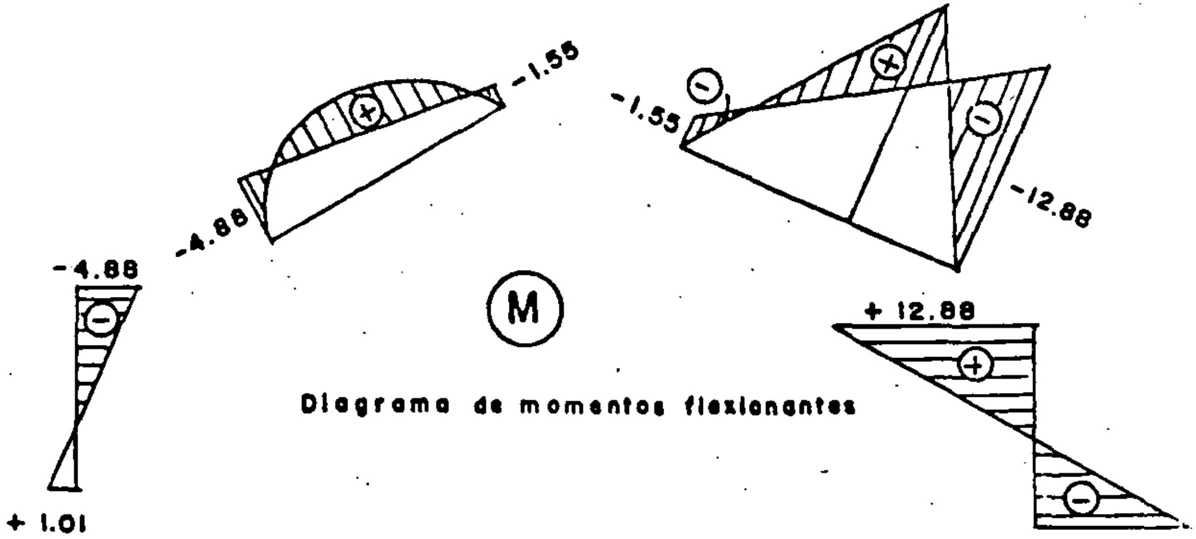
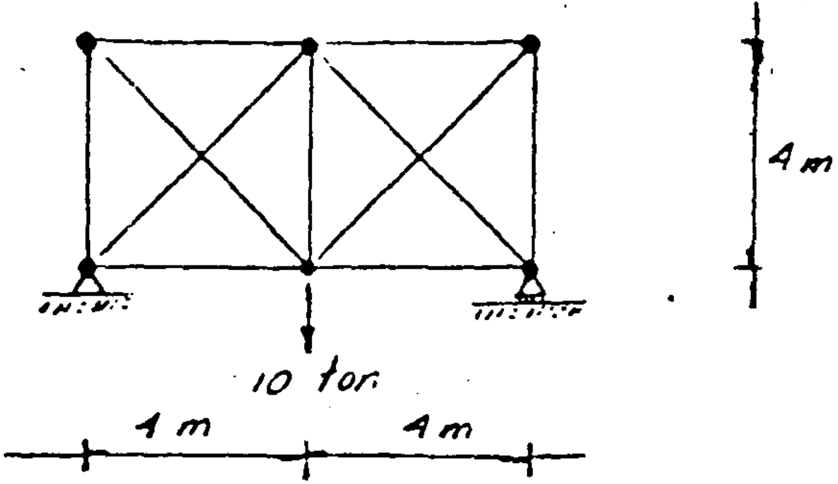


FIGURA 9

Ejemplo No 6

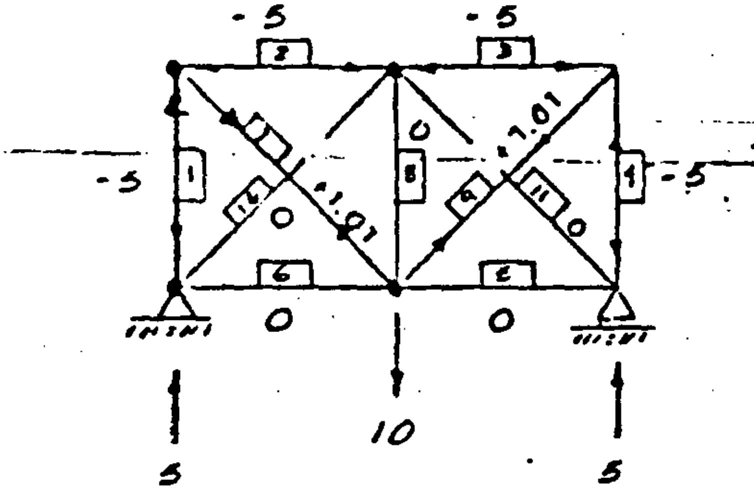
Resolver la armadura por flexibilidades.



AE = cte.

Solución :

1.- La estructura es hiperestática en 2° grado y la estructura primaria seleccionado será la siguiente :



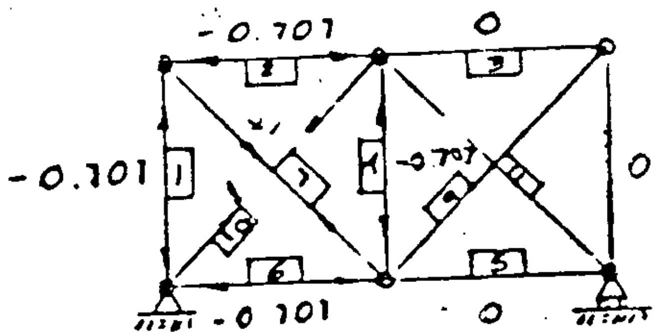
El vector de fuerzas interna:

$$p^{\circ} = [b_F]\{F\}$$

$$\text{El vector}\left\{\begin{matrix} p^{\circ} \\ 11\times 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} -5 \\ -5 \\ -5 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ +7\,07 \\ 0 \\ +7\,07 \\ 0 \end{matrix}\right.$$

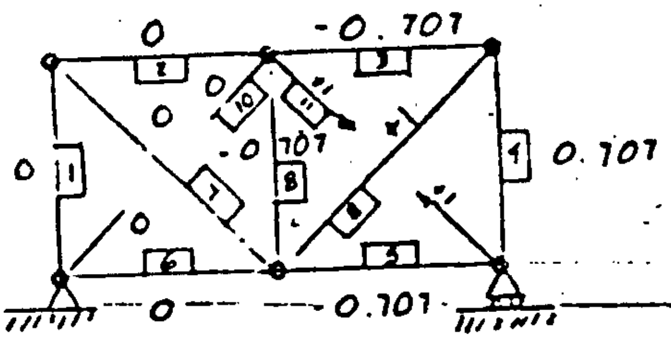
2) Obtención de $[b_R]_{9\times2}$

1ª columna de $[b_R]$ $\quad R_1 = 1$



-0.707
-0.707
0
0
0
-0.709
+1
-0.707
0
+1
0

2ª columna de $[b_R]$ $\quad R_2 = 1$



0
0
-0.707
-0.707
-0.707
0
0
-0.707
+1
0
+1

$$[b_R] = \left[\begin{array}{cc} -0.707 & 0 \\ -0.707 & 0 \\ 0 & -0.707 \\ 0 & -0.707 \\ 0 & -0.707 \\ -0.707 & 0 \\ +1 & 0 \\ -0.707 & -0.707 \\ 0 & +1 \\ \hline +1 & 0 \end{array}\right.$$

Cálculo de $[f]$

$$[f]_{11\times 11} = \begin{bmatrix} 4 &&&&&&&&&& \\ & 4 &&&&&&&&& \\ && 4 &&&&&&&& \\ &&& 4 &&&&&&& \\ &&&& 4 &&&&&& \\ &&&&& 4 &&&&& \\ &&&&&& 5.65 &&&& \\ &&&&&&& 4 &&& \\ &&&&&&&& 5.65 && \\ &&&&&&&&& 5.65 & \\ &&&&&&&&&& 5.65 \end{bmatrix} \times \frac{1}{AE} \equiv \frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 5\ 65 \\ 4 \\ 5\ 65 \\ 4 \\ 5\ 65 \\ 5\ 65 \\ 5\ 65 \end{bmatrix}$$

Calculando el producto $[b_R]^T[f][p_0]$

$$T\ - \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 5.65 \\ 4 \\ 5.65 \\ 5.65 \\ 5\ 65 \end{bmatrix} \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ +7.07 \\ 0 \\ +7.07 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -20 \\ -20 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ +40 \\ 0 \\ +40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[b_R]^T[f][p_0] = \begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & +1 & -0.707 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.707 & -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & -0.707 & +1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ C \\ C \\ +4 \\ (\\ +4 \\ C \\ C \end{Bmatrix}$$

$$\underbrace{[f_T]\,\{p_0\}}_{D\times F} = \begin{Bmatrix} 68.28 \\ 68.28 \end{Bmatrix} \times \frac{1}{AE}$$

Ahoro calculondo el producto $[b_R] \, [f_M] \, [b_K]$

$$\underset{N\times 4}{[f_r]} \; \underset{4\times 2}{[b_R]} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 5.65 \\ 4 \\ 5.65 \\ 5.65 \\ 5.65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.70.7 & 0 \\ -0.70.7 & 0 \\ 0 & -0.701 \\ 0 & -0.701 \\ 0 & -0.701 \\ -1 & \\ -0.70.7 & 0 \\ +1 & 0 \\ -0.701 & -0.701 \\ 0 & 1 \\ +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.83 & 0 \\ -2.83 & 0 \\ 0 & -2.83 \\ 0 & -2.83 \\ 0 & -2.83 \\ -2.83 & 0 \\ +5.65 & 0 \\ -2.83 & -2.83 \\ 0 & +5.65 \\ 5.65 & 0 \\ 0 & +5.65 \end{bmatrix}$$

$$]^T [f_M] \, [b_R] = \begin{bmatrix} -0.707 & -0.701 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & +1 & -0.707 & 0 & +10 \\ 0 & 0 & 0.707 & -0.707 & -0.701 & 0 & 0 & -0.707 & 1 & 0 \quad 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.83 & 0 \\ -2.83 & 0 \\ 0 & -2.83 \\ 0 & -2.83 \\ 0 & -2 \\ -2.83 & \\ +5.65 & 0 \\ -2.83 & -2.83 \\ 0 & +5.65 \\ +5.65 & 0 \\ 0 & +5.65 \end{bmatrix}$$

$$[f] = \begin{bmatrix} 19.32 & 2 \\ 2 & 19.32 \end{bmatrix} \frac{1}{AE}$$

La ecuasión de compatibilidad de deformación será:

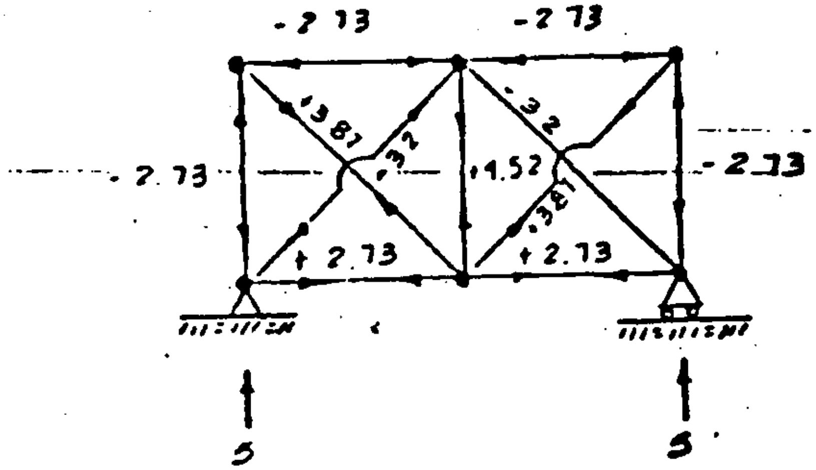
$$\{D \times F\} + \{f\}\{R\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} 68.28 \\ \end{Bmatrix} \times \frac{1}{\;} + \begin{bmatrix} 19.32 & 2 \\ 2 & 19.32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.2 \\ 3.2 \end{Bmatrix}$$

Las fuerzas en las barras seran :

$$\left\{ P \right\} = \left\{ Po \right\} + \left[b_R \right] \left\{ R \right\} = \left\{ 0 \right\}$$

$$\begin{Bmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ +7.07 \\ 0 \\ +7.07 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.707 & 0 \\ -0.707 & 0 \\ 0 & -0.707 \\ 0 & -0.707 \\ 0 & -0.707 \\ -0.707 & 0 \\ +1 & 0 \\ -0.707 & -0.707 \\ 0 & +1 \\ +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -3.2 \\ -3.2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.73 \\ -2.73 \\ -2.73 \\ -2.73 \\ +2.73 \\ +2.73 \\ +3.81 \\ +4.52 \\ +3.81 \\ -3.2 \\ -3.2 \end{Bmatrix}$$



+ = tensión

− = compresión

Fuerzas finales en las barras (ton)

ANALISIS ESTRUCTURAL

álisis de marcos planos por el método las flexibilidades

Por Julio Damy Ríos (*)

finición: Le llamaremos barra a todo elemento recto de sección constante que tenga momentos flexionantes y fuerzas cortantes sin discontinuidades

Vectores y matrices estructurales.

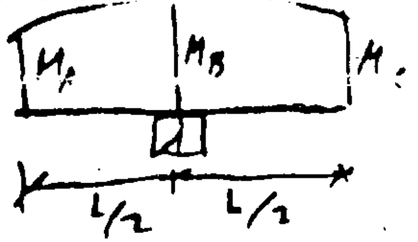
$$\{p\} = \begin{Bmatrix} \{p\}_{\boxed{1}} \\ \{p\}_{\boxed{2}} \\ \vdots \\ \{p\}_{\boxed{n_B}} \end{Bmatrix}$$

n_B = número de barras (Momentos flexionantes de las barras)

a) Si las cargas sobre la barra $\boxed{i}$ son concentradas ó uniformemente repartidas

$$\{p\}_{\boxed{i}} = \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \end{Bmatrix}$$ (Momentos flexionantes)

(M)



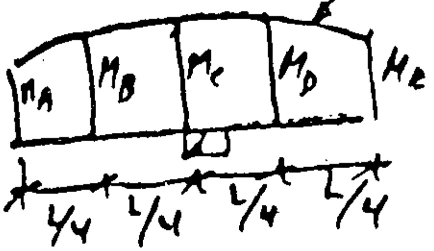
L - longitud de la ba

b) Si la carga es lineal ó parabol

$$\{p\}_{\boxed{i}} = \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \\ M_D \\ M_E \end{Bmatrix}$$

3° ó 4° grado

(M)



2.- $\{P\}$ = vector $\{p\}$ en la estructura isostática.

3.- $\{R\}$ = Vector de redundantes

4.- $[f] = \begin{bmatrix} [f]_{\boxed{1}} & & \\ & [f]_{\boxed{2}} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$ (Matriz de flexibilidades de las barra

a) Si ~~[illegible]~~ el diagrama de (M) es lineal o parabólico

$[f]_{\boxed{i}} =$ [illegible] $\frac{L}{6EI}$

(*) Profesor Fac. de Ingeniería (UNAM)

b) Si el diagrama de $\textcircled{F}$ es un polinomio de 3° ó 4° grado (carga lineal ó parabólica)

$$[f]_{\boxed{i}} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \frac{L}{90EI}$$

<u>NOTA</u>: Por tratarse de matrices diagonales se pueden almacenar la diagonal en un vector.

a)
$$[f]_{\boxed{i}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{L}{6EI}$$

---

b)
$$[f]_{\boxed{1}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 32 \\ 12 \\ 32 \\ 7 \end{bmatrix} \frac{L}{90EI}$$

5.- $[b_R] = \left[\{\beta_0\}_1 \;\vdots\; \{\beta_0\}_2 \;\vdots\; \cdots \right]$

donde: $\{\beta_0\}_i$ son los valores de $\{\beta\}$ en la estructura isostática, producidos por la redundante R_i unitaria

6.- $\{H\}$ = Vector de las reacciones del marco

$\{H_0\}$ = Reacciones en la estructura isostática, producidas por la carga

7.- $[h] = \left[\{H_0\}_1 \,\middle|\, \{H_0\}_2 \,\middle|\, \cdots \right]$

donde: $\{H_0\}_i$ vector de las reacciones en la estructura isostática producidas por la redundante R_i unitaria.

8.- $\{d\}$ = vector de desplazamientos, de <u>cualquier</u> número de puntos.

9.- $[m_0] = \left[\{\beta_0\}_1 \,\middle|\, \{\beta_0\}_2 \,\middle|\, \cdots \right]$

donde $\{\beta_0\}_i$ son los valores de $\{\beta\}$ en la <u>estructura isostática</u> producidos por fuerzas unitarias aplicadas en los puntos y en la dirección en la que se desea el desplazamiento.

III.- Formulas fundamentales

$$\boxed{\left[[b_R]^T[f][b_R]\right]\{R\} = -[b_R]^T[f]\{\beta_0\}} \quad \text{---} (1)$$

En este sistema de ecuaciones se resuelve el valor de los redundantes $\{R\}$

$$\boxed{\{\beta\} = \{\beta_0\} + [b_R]\{R\}} \quad \text{--} \quad (2)$$

Con la ec. (2) se obtienen los momentos flexionantes finales

$$\boxed{[b_R]^T[f]\{\beta\} = 0} \quad \text{---} \quad (3)$$

Esta ecuación se usa para comprobar la solución del problema

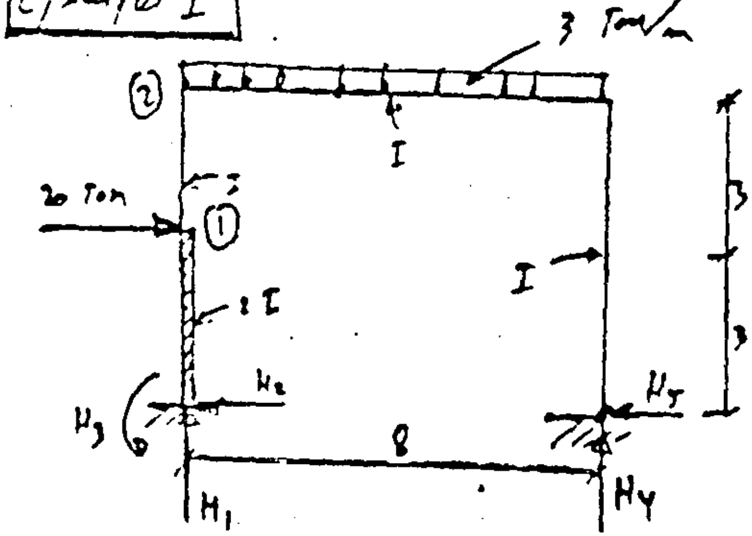
$$\boxed{\{H\} = \{H_0\} + [h]\{R\}} \quad \text{---} \quad (4)$$

Con la ec. (4) se obtienen las reacciones finales

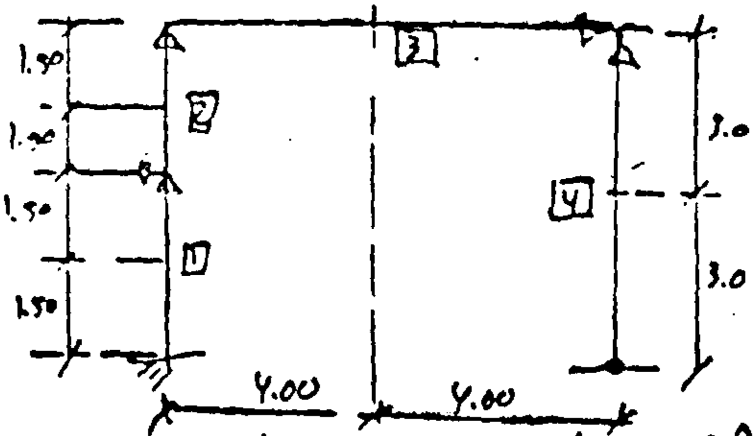
$$\boxed{\{d\} = [m_0]^T[f]\{\beta\}} \quad \text{—} \quad (5)$$

Con la ec. (5) se obtienen los desplaza

Ejemplo 1

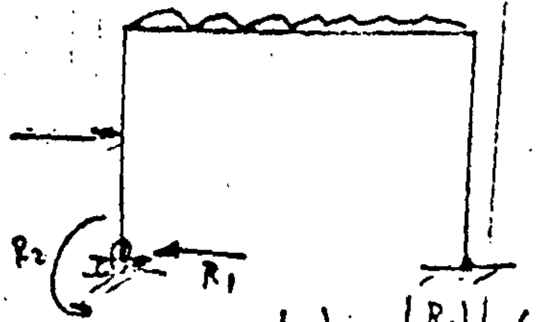


De acuerdo con la definición de barras tenemos $M_B = 4$.



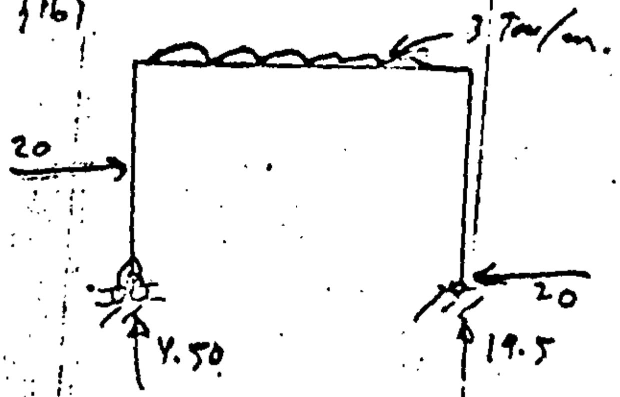
Todas las barras caen en el caso (a) (diagrama de Ⓜ lineal ó parabólico)

Elegimos la siguiente isostática



$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \text{ (Redundantes)}$$

Resolvemos la isostática para obtener $\{b_0\}$ y $\{H_0\}$

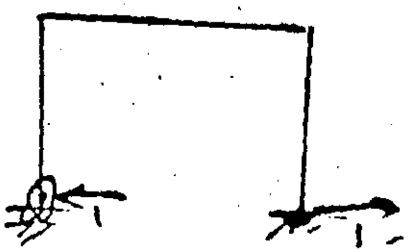


$$\{H_0\} = \begin{Bmatrix} 4.50 \\ 0 \\ 0 \\ 19.5 \\ 20.0 \end{Bmatrix}$$

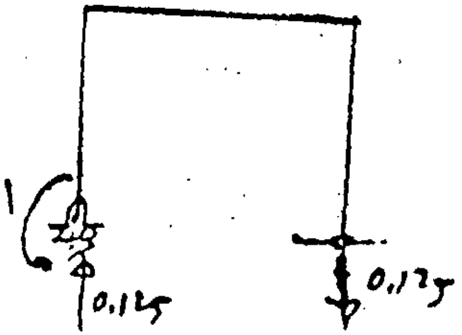
$$\{b_0\} = \left\{\begin{array}{cc} 0 & \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & \\ \hdashline 0 & \\ -30 & \boxed{2} \\ -60 & \\ \hdashline -60 & \\ -66 & \boxed{3} \\ -120. & \\ \hline 0 & \\ +60 & \boxed{4} \\ +120 & \end{array}\right\} \quad \text{Ton-m}$$

Obtengamos $[b_R]$

$\underline{R_1 = 1}$



$\underline{R_2 = 1}$



Por lo tanto:

$$[b_R] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1.50 & -1 \\ 3.00 & -1 \\ \hline 3.00 & -1 \\ 4.50 & -1 \\ 6.00 & -1 \\ \hline 6.00 & -1 \\ 6.00 & -0.5 \\ 6.00 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ -3.0 & 0 \\ -6.0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_1 = 1$ $\quad$ $R_2 = 1$

La diagonal de la matriz $[f]$ será:

$$[f] = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 6 \\ 1.5 \\ \hline 3 \\ 12 \\ 3 \\ \hline 8 \\ 32 \\ 8 \\ \hline 6 \\ 24 \\ 6 \end{bmatrix} \frac{1}{6EI}$$

Obtengamos $\{R\}$, con la ec. (1)

$$[b_R]^T [f] [b_R] = \begin{bmatrix} 2563.0 & -2335 \\ \hline -233.5 & 43.0 \end{bmatrix} \frac{1}{6EI}$$

$$-[b_R]^T [f] \{\bar{P}\} = \begin{Bmatrix} 32652.0 \\ \hline 2076.0 \end{Bmatrix} \frac{1}{6EI}$$

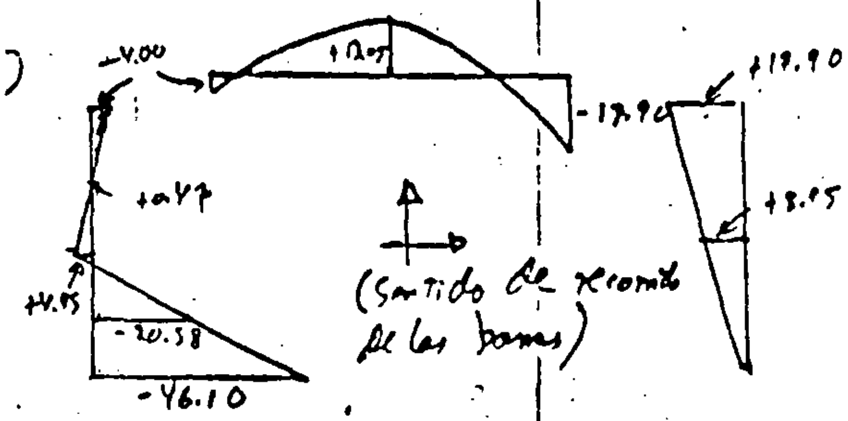
Resolviendo el sistema de dos ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} R_1 &= 17.02 \text{ ton} \\ R_2 &= 46.10 \text{ ton-m} \end{aligned}}$$

Obtengamos $\{p\}$ con la ec. (2)

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} -46.10 \\ -20.53 \\ +4.95 \\ \hline +4.95 \\ +0.47 \\ -4.00 \\ \hline -4.00 \\ +13.07 \\ -17.90 \\ \hline 0 \\ +8.95 \\ +17.90 \end{Bmatrix} \text{ton-m}$$

Diagrama (H) de momentos flexionantes:



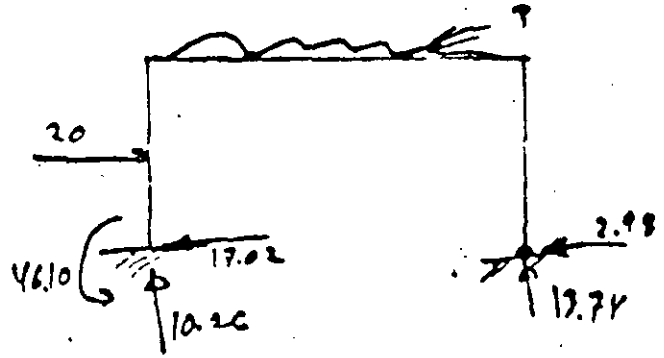
Reacciones:

Obtengamos $[h]$ (ver hoja 4)

$$[h] = \begin{bmatrix} 0 & 0.125 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -0.125 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtengamos las reacciones $\{H\}$ con la ecuacion (4)

$$\{H\} = \begin{Bmatrix} 10.26 \\ 17.02 \\ 46.10 \\ 13.74 \\ 2.98 \end{Bmatrix}$$



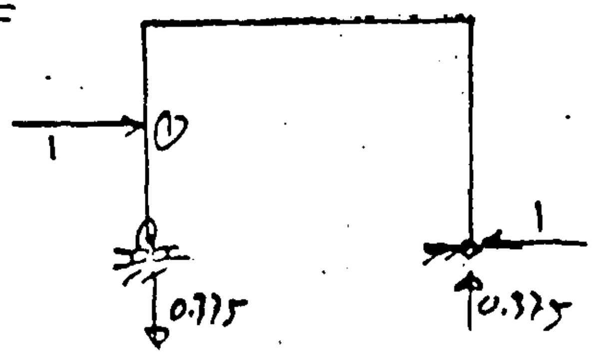
Comprobamos con la ec. (3)

$$[b_R]^T[f]\{P\} = \begin{Bmatrix} 0.59 \\ -0.09 \end{Bmatrix} \frac{1}{6EI} \quad (OK)$$

Obtengamos los desplazamientos horizontales de los puntos ① y ② (d_{1x}, d_{2x})

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \end{Bmatrix}$$

$\underline{d_{1x}}$



Simplificación de algunas expresiones:

La ecuación (1)

$$\boxed{[F]\{R\} = -\{d_0\} \quad --- \quad (1)}$$

donde:

$$\boxed{\begin{aligned} F_{ij} &= \sum_{k=1}^{m_p} b_{R_{ki}} \, b_{R_{kj}} \, f_k \\ d_{0_i} &= \sum_{k=1}^{m_p} b_{R_{ki}} \, \hat{v}_{0_k} \, f_k \end{aligned}}$$

La ecuación (3)

$$\{C\} = [b_R]^T [f] \{\hat{v}\} = 0 \quad --- \quad (2)$$

donde:

$$\boxed{c_i = \sum_{i=1}^{m_p} b_{R_{ki}} \, \hat{v}_k \, f_k \; (=0)} \quad --- \quad (2)$$

La ecuación (5)

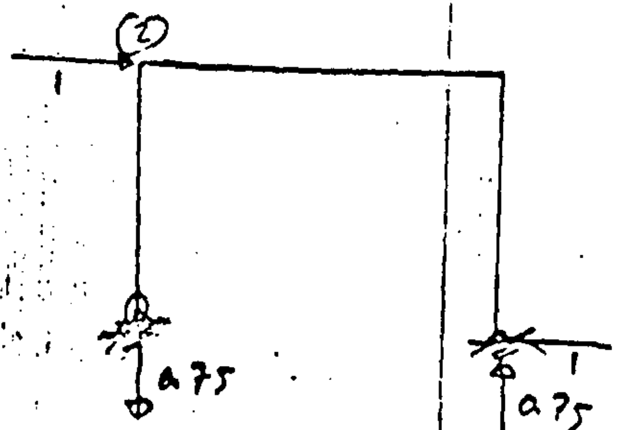
$$\boxed{\{d\} = [m_0]^T [f] \{p\} \quad -- \quad (5)}$$

donde:

$$\boxed{d_i = \sum_{k=1}^{m_p} m_{0_{ki}} \, \hat{v}_k \, f_k}$$

Donde: m_p = no. de renglones de $\{p\}$

1_{2x}



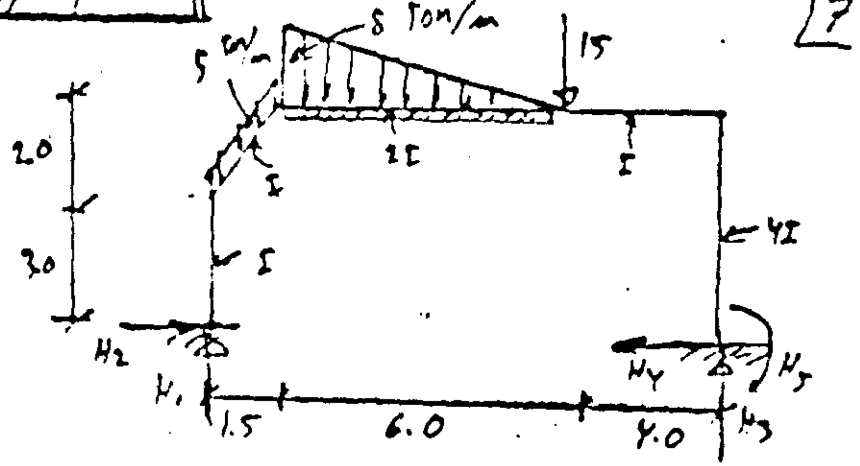
por lo tanto la matriz $[m_0]$ será:

$$[m_0] = \begin{array}{cc} d_{1x} & d_{2y} \\ \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ -1.5 & 0 \\ -3.0 & 0 \\ \hline -3.0 & 0 \\ -4.5 & -3.0 \\ -6.0 & -6.0 \\ \hline 0 & 0 \\ +3.0 & +3.0 \\ +6.0 & +6.0 \end{array}\right] & \end{array}$$

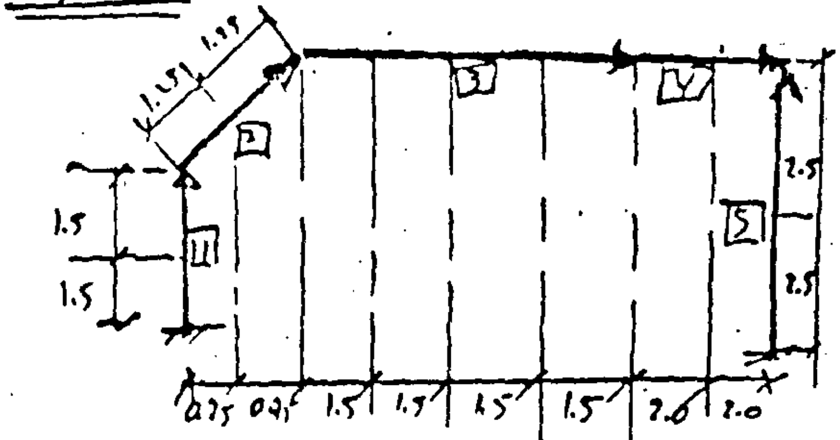
Obtengamos $\{d\}$ usando la ec. (5)

$$\{d\} = \left\{\begin{array}{c} 49.39 \\ \hline 149.20 \end{array}\right\} \frac{1}{EI}$$

Ejemplo 2

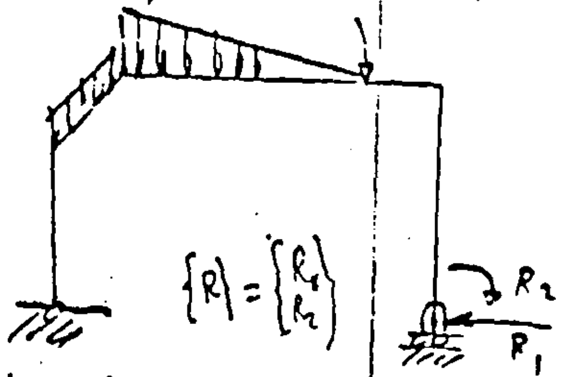


$n_j = 5$



Las barras $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$ y $\boxed{5}$ corresponden al caso (a) (diagrama de Ⓜ lineal o parabólico), la barra $\boxed{3}$ corresponde al caso (b) (diagrama de Ⓜ de grado 3)

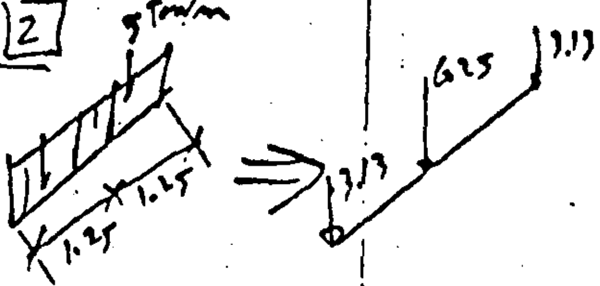
Escogemos la siguiente isostática:



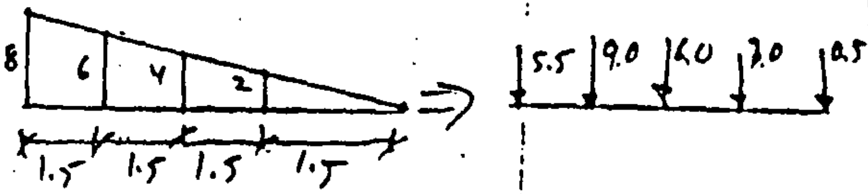
$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}$$

Para resolver la isostática sustituyamos las cargas repartidas por cargas concentradas equivalentes, (fórmulas de Newmark)

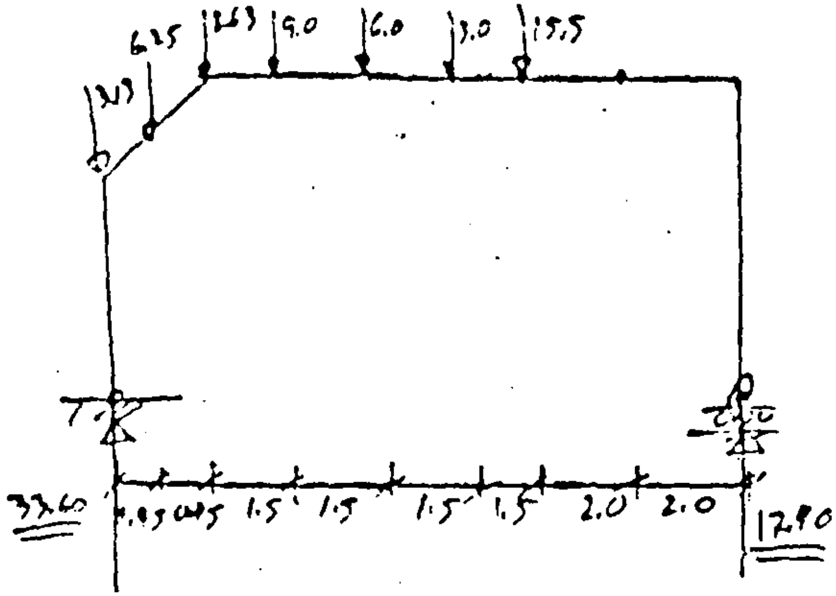
Barra [2]



Barra [3]



Solución de la isostática



$$\{H_0\} = \begin{Bmatrix} 33.60 \\ 0 \\ 17.90 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Obtengamos $\{\mu_0\}$:

$$\{P_0\} = \left\{\begin{array}{c|c} 0 & \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & \\ \hline 0 & \\ +2285 & \boxed{2} \\ +41.02 & \\ \hline +41.02 & \\ +64.40 & \\ +74.79 & \boxed{3} \\ +75.17 & \\ +71.56 & \\ \hline +71.56 & \\ +35.83 & \boxed{4} \\ 0 & \\ \hline 0 & \\ 0 & \boxed{5} \\ 0 & \end{array}\right\}$$

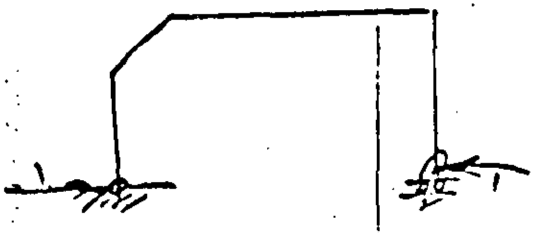
Ton-m.

Obtención (F)

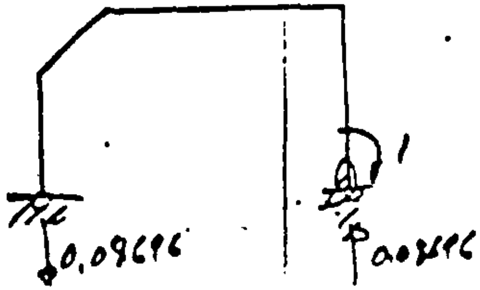
$$[F] = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 12 \\ 3 \\ \hline 2.5 \\ 10.0 \\ 2.5 \\ \hline 1.4 \\ 6.4 \\ 2.4 \\ 6.4 \\ 1.4 \\ \hline 4.0 \\ 16.0 \\ 4.0 \\ \hline 1.25 \\ 5.0 \\ 1.25 \end{array}\right] \times \frac{1}{6EI}$$

Obtengamos $[h]$ y $[b_R]$

$R_1 = 1$



$R_2 = 1$



$$[h] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -0,09696 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0,07696 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$[b_R] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -1.5 & 0 \\ -3.0 & 0 \\ \hline -3.0 & 0 \\ -4.0 & -0.07 \\ -5.0 & -0.13 \\ \hline -5.0 & -0.13 \\ -5.0 & -0.26 \\ -5.0 & -0.39 \\ -5.0 & -0.52 \\ -5.0 & -0.65 \\ \hline -5.0 & -0.65 \\ -5.0 & -0.83 \\ -5.0 & -1.00 \\ \hline 0 & +1.00 \\ +2.5 & +1.00 \\ +5.0 & +1.00 \end{array}\right]$$

Obtengamos $\{R\}$ con la ec. (1)

$$[b_R]^T [f] [b_R] = \left[\begin{array}{c|c} 1411.50 & 159.64 \\ \hline 157.68 & 21.45 \end{array}\right] \frac{1}{6EI}$$

$$-[b_R]^T [f] \{b\} = \left\{\begin{array}{c} 11\,870.13 \\ \hline 1190.65 \end{array}\right\} \frac{1}{6EI}$$

Resolviendo las dos ecuaciones simultáneas

$$\boxed{\begin{aligned} R_1 &= +9.95 \\ R_2 &= -13.76 \end{aligned}}$$

Obtengamos $\{p\}$ con la ec. (2)

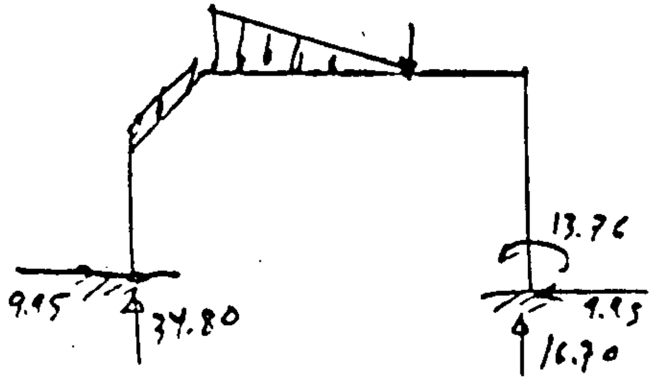
$$\{p\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -14.92 \\ -29.84 \\ \hline -29.84 \\ -15.98 \\ -6.93 \\ \hline -6.93 \\ +18.24 \\ +29.92 \\ +32.59 \\ +30.77 \\ \hline +30.77 \\ -2.48 \\ -35.97 \\ \hline -13.76 \\ +11.10 \\ +35.97 \end{Bmatrix} \text{Ton-m.}$$

Comprobamos con la ec. (3) 11

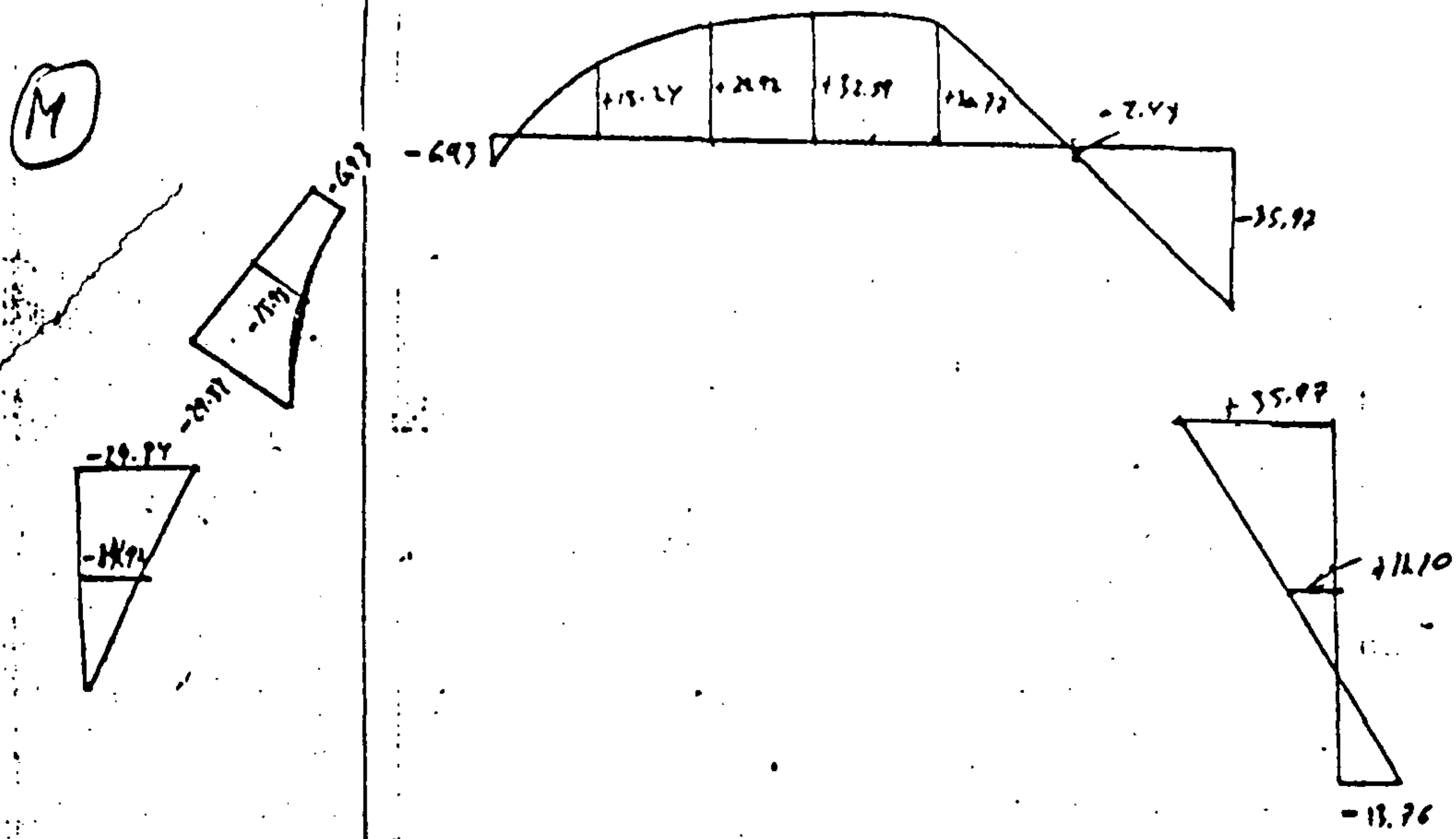
$$[b_R]^T [f] \{p\} = \begin{Bmatrix} 0.23 \\ 0.02 \end{Bmatrix} \frac{1}{6EI} \quad \text{(OK)}$$

Obtengamos las reacciones $\{H\}$ con la ec. (4)

$$\{H\} = \begin{Bmatrix} 34.80 \\ 9.95 \\ 16.70 \\ 9.95 \\ -13.76 \end{Bmatrix}$$



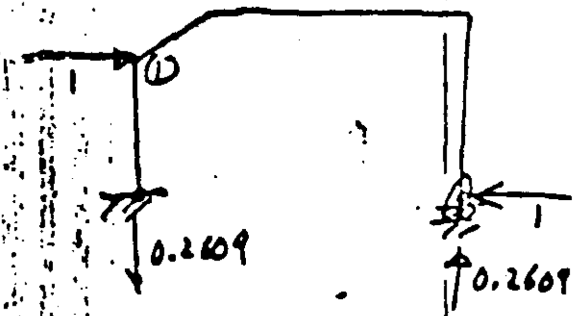
Obtengamos el diagrama de (M)


M
-6.93
-17.93
-29.97
-29.94
-14.94
-6.93
+15.24
+26.92
+32.59
+26.72
-2.44
-35.92
+35.97
+11.10
-13.76

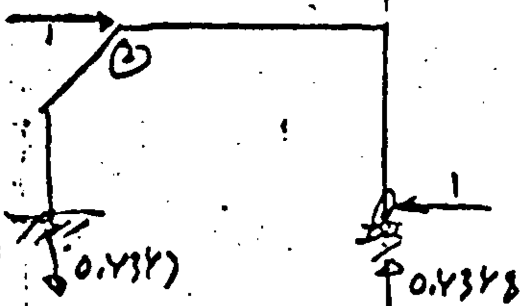
Obtengamos d_{1x}, d_{2x}, d_{2y}

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{Bmatrix}$$

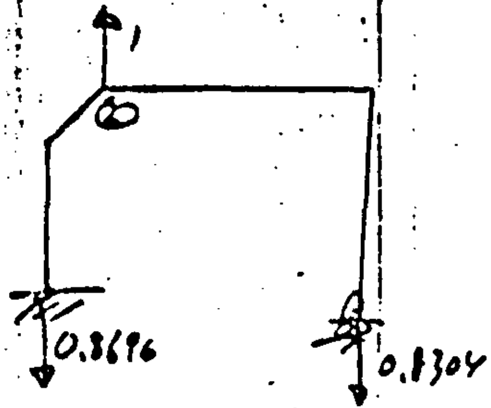
d_{1x}



d_{2x}



d_{2y}



Obtengamos $[m_0]$

$$[m_0] = \begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ -1.20 & -0.33 & -0.65 \\ -2.39 & -0.65 & -1.30 \\ \hline -2.39 & -0.65 & -1.30 \\ -2.79 & -1.30 & -1.10 \\ -3.17 & -1.95 & -0.91 \\ -3.57 & -2.61 & -0.72 \\ -3.96 & -3.26 & -0.52 \\ \hline -3.96 & -3.26 & -0.52 \\ -4.48 & -4.13 & -0.26 \\ -5.00 & -5.0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ +2.5 & +2.5 & 0 \\ +5.0 & +5.0 & 0 \end{array}\right] \\ d_{1x} \quad\quad d_{2x} \quad\quad d_{2y} \end{array}$$

Obtengamos $\{d\}$ con la ec. (5)

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} -72.95 \\ \hline -1012 \\ \hline -46.83 \end{Bmatrix} \frac{1}{EI}$$

b) Si el diagrama de (M) es un polinomio de 3º ó 4º grado (carga lineal ó parabólica)

$$[f]_{\boxed{i}} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \frac{L}{90EI}$$

NOTA: Por tratarse de matrices diagonales se pueden almacenar la diagonal en un vector.

a)
$$[f]_{\boxed{i}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{L}{6EI}$$

b)
$$[f]_{\boxed{i}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 32 \\ 12 \\ 32 \\ 7 \end{bmatrix} \frac{L}{90EI}$$

5.- $[b_R] = \left[\{\beta_0\}_1 \,\middle|\, \{\beta_0\}_2 \,\middle|\, \cdots \right]$

donde: $\{\beta_0\}_i$ son los valores de $\{\beta\}$ en la estructura isostática, producidos por la redundante R_i unitaria

6.- $\{H\}$ = Vector de las reacciones del marco

$\{H_0\}$ = Reacciones en la estructura isostática producidas por la carga

7.- $[h] = \left[\{H_0\}_1 \,\middle|\, \{H_0\}_2 \,\middle|\, \cdots \right]$

donde: $\{H_0\}_i$ vector de las reacciones en la estructura isostática producidas por la redundante R_i unitaria.

8.- $\{d\}$ = vector de desplazamientos de cualquier número de puntos.

9.- $[m_0] = \left[\{\beta_0\}_1 \,\middle|\, \{\beta_0\}_2 \,\middle|\, \cdots \right]$

donde $\{\beta_0\}_i$ son los valores de $\{\beta\}$ en la estructura isostática producidos por fuerzas unitarias aplicadas en los puntos y en la dirección en la que se desea el desplazamiento.

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

ANALISIS ESTRUCTURAL

METODO MIXTO
FLEXIBILIDAD-RIGIDES

ING. JULIO DAMY RIOS

SEP-OCT. 92

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

ANALISIS ESTRUCTURAL

CURSO EN LA DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FAC. DE INGENIERIA

(21 a 26 de mayo 1984)

METODO MIXTO DE FLEXIBILIDADES Y RIGIDECES

APLICACION A ANALISIS DE TUBERIAS

PROFESOR:
ING. JULIO DAMY RIOS

CONTENIDO

INTRODUCCION

I

El análisis estructural, a través del método de rigideces, resuelve el problema del análisis de sistemas estructurales, mediante la solución de la ecuación general $\{F\}=[K]\{d\}$, en donde el tamaño de la matriz de rigideces de la estructura $[K]$, mantiene una relación directa con el número de grados de libertad angular y lineal del sistema estructural.

En un planteamiento tradicional, el análisis estructural concibe como nudos de una estructura a todos aquellos puntos en que concurren dos o más elementos de la misma.

Es posible, a través de un planteamiento más elaborado reducir el número de nudos de una estructura si sólo se consideran como tales a los puntos en que concurren tres o más elementos de esta, lo cual reduce considerablemente el tamaño de la matriz de rigideces de la estructura $[K]$, siendo esto ventajoso desde el punto de vista de la solución matemática y sobre todo de la aplicación de computadores al análisis estructural.

Este planteamiento es de interés particular cuando se aplica al análisis estructural de sistemas de tuberías en dos o tres dimensiones, debido a que en estos sistemas estructurales existe por lo general un número suficientemente grande de puntos en que concurren solamente dos tramos de tubería (quiebres), como para pensar en un tratamiento especial para ellos, sin considerarlos como nudos.

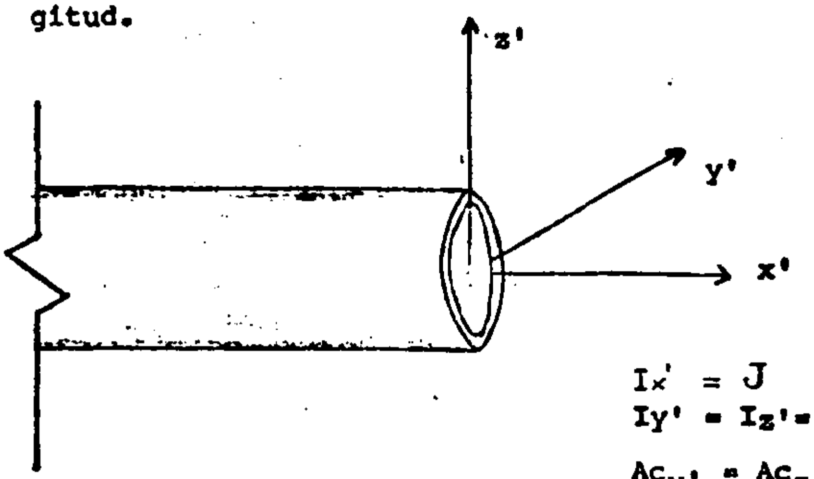
CARACTERISTICAS II

1.- NUDO.- Se considerarán como nudos sólo aquellos puntos de la estructura en que concurran tres o más tramos de barra y a los apoyos incompletos.

2.- TRAMO DE BARRA.- Se llamará así al tramo recto comprendido entre dos quiebres adyacentes de una barra.

3.- BARRA.- Se entenderá por barra, a la parte de tubería comprendida entre dos nudos.

4.- SECCION TRANSVERSAL.- La sección transversal de cada barra, será un anillo circular constante en toda su longitud.



$I_{x'} = J$

$I_{y'} = I_{z'} = I$

$Ac_{y'} = Ac_{z'} = Ac$

FIG 1 .- Propiedades de la sección transversal y ejes locales de referencia. (S.L.)

DEFINICIONES

III

A).- Para análisis en dos dimensiones.

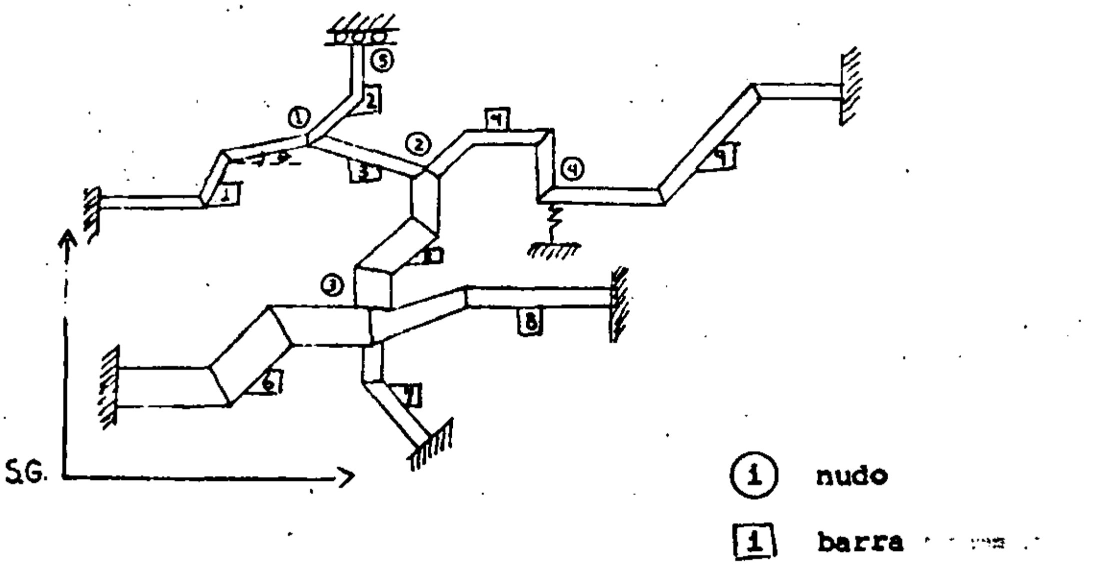


FIG. 2.- Tubería en el plano. Nótese que en un nudo pueden concurrir barras con diferente sección transversal.

S.G.≡Sistema global de referencia.

A. 1.).- Matriz de transformación de coordenadas T para un tramo de barra.

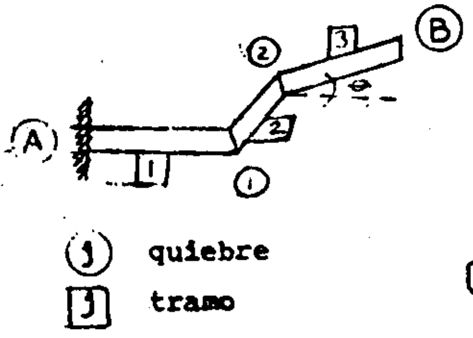


FIG 3.- Tramos de barra y ángulo θ para la barra 1 de la figura 2.

$$
(T)_{\boxed{j}} = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \hline \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

donde θ = inclinación del tramo de barra j referido al eje x positivo en el S.G. medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

A. 2.) Matriz de transporte entre los puntos Ⓑ y ⓙ referidos al S.G.

$$\left[H_{Bj}\right]=\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline -(Y_B-Y_j) & (X_B-X_j) & 1 \end{array}\right]$$

Referido al tramo $\boxed{3}$ de la barra $\boxed{1}$ (fig. 3), B es el nudo ① y j es el quiebre ②

Nótese que para el tramo adyacente a un nudo, la matriz de transporte $\left[H_{Bj}\right]$ toma la forma de la matriz identidad $\left[I\right]$.

A. 3.) Matriz de flexibilidad del tramo $\boxed{j}$ en su extremo ⓙ referido al S. L. de referencia. (ver fig. 1)

$$\left[f'_{BB}\right]_{\boxed{j}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{L^3(1+C)}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ \hline 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{array}\right]$$

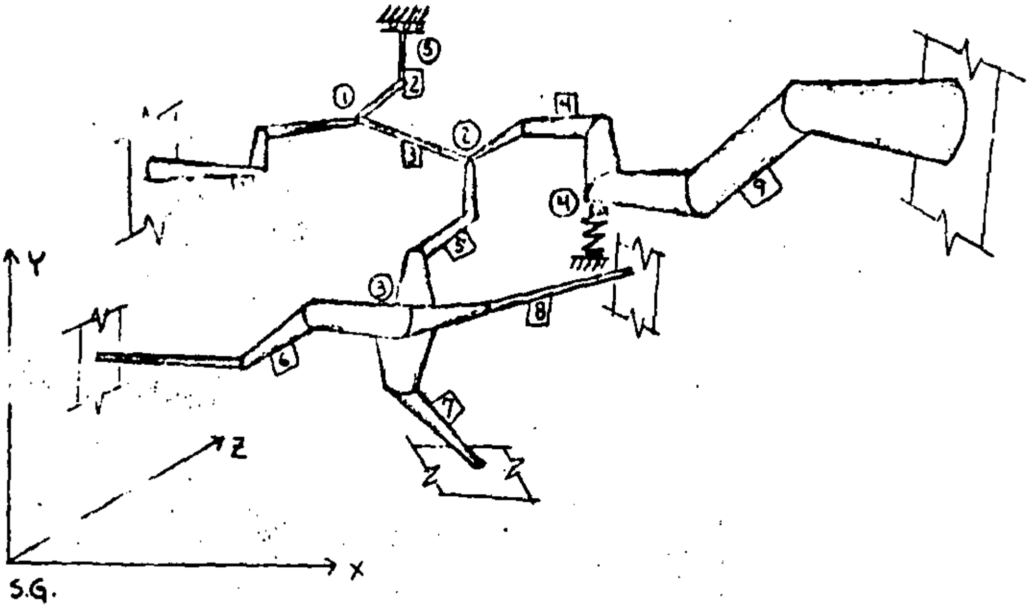
(en S.L.)

donde: $C = G\ (1+\nu)\dfrac{I}{AcL}$

ν = Módulo de Poisson del material

Ac = Area de cortante de la sección transversal

B).- Para análisis en tres dimensiones.



ⓘ	nudo
$\boxed{i}$	barra
S.G.	Sistema global de referencia

FIG. 4.- Tubería en el espacio. Nótese que en el nudo pueden concurrir barras con diferente sección transversal.

B. 1.) .- Matriz de transformación de coordenadas (T) para un tramo de barra.

$$(T)_{\boxed{j}} = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda_3 & 0 \\ \hline 0 & \Lambda_3 \end{array}\right]$$

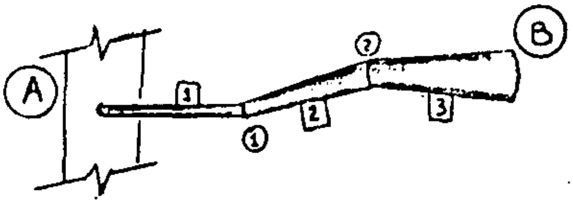
$$\text{donde:}\ [\Lambda_3] = \left|\begin{array}{c|c|c} Cx'x & Cy'x & Cz'x \\ \hline Cx'y & Cy'y & Cz'y \\ \hline Cx'z & Cy'z & Cz'z \end{array}\right|$$

En la matriz $[\Lambda_3]$ los elementos de las columnas 1,2 y 3 son los cosenos directores de x', Y' y z' respectivamente, del tramo $\boxed{j}$ en la barra $\boxed{i}$ en S.L., con respecto al S.G. (ver fig 1 y fig 4)

B. 2.) .- Matriz de transporte entre los puntos B y j referidos al S.G.

$$\left[H_{Bj}\right] = \left(\begin{array}{c|c} [I] & 0 \\ \hline [h] & [I] \end{array}\right)$$

$$\text{donde:} \left[h\right] = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & -(Z_B-Z_j) & (Y_B-Y_j) \\ \hline (Z_B-Z_j) & 0 & -(X_B-X_j) \\ \hline -(Y_B-Y_j) & (X_B-X_j) & 0 \end{array}\right)$$



ⓙ quiebre

$\boxed{j}$ tramo

FIG.5.- Tramos de barra y quiebres para la barra $\boxed{i}$ de la figura 4 (para el tramo $\boxed{1}$,B es el nudo ③ y j es el quiebre ①)

Nótese que para el tramo adyacente a un nudo, la matriz de transporte $\left[H_{Bj}\right]$ toma la forma de la matriz identidad $\left[I\right]$.

B. 3.) .- Matriz de flexibilidad del tramo $\boxed{j}$ en su extremo ⓙ referido al S. L. de referencia. (ver fig. 1)

donde: $C = G(1+\nu)\,\dfrac{I}{AcL^2}$

$\nu \equiv$ Módulo de Poisson del material

Ac = Area de cortante de la sección transversal

$G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

$$\left[f'_{88}\right]_{[j]} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \frac{L}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{L^3(1+C)}{3EI} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{2EI} \\ \hline 0 & 0 & \frac{L^3(1+C)}{3EI} & 0 & -\frac{L^2}{2EI} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{L}{GJ} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{L^2}{2EI} & 0 & \frac{L}{EI} & 0 \\ \hline 0 & \frac{L^2}{2EI} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{EI} \end{array}\right]$$

(en S. L.)

PLANTEAMIENTO GENERAL IV

La solución de la ecuación general planteada en el análisis estructural a través del método de rigideces

$$\{F\} = [K]\{d\} \qquad \ldots (1)$$

comprende las siguientes etapas:

- A.- Formación de la matriz de rigideces $[K]$
- B.- Cálculo del vector de fuerzas $\{F\}$
- C.- Obtención del vector de desplazamientos d mediante la solución de la ecuación general (1).
- D.- Obtención de los elementos mecánicos en los extremos de cada barra, calculados a partir del vector de desplazamiento $\{d\}$

Se tratarán aquí solamente los puntos A y B. Los puntos C y D corresponden a un planteamiento tradicional del análisis estructural.

A.- Formación de la matriz de rigideces $[K]$

1).- Formación de la matriz $[K]$ en forma topológica

Se entiende por forma topológica de la matriz K a la representación matricial de la relación que guardan los extremos de las barras con los nudos de la estructura

La matriz topológica $[K]$ para las estructuras de las figuras 2 y 4 es idéntica y tiene la siguiente forma, si el extremo B de las barras coincide con el nudo ①, ④ o ③

$$
(K) = \begin{pmatrix}
(k_{BB})_{\boxed{1}}+(k_{BB})_{\boxed{2}}+(k_{BB})_{\boxed{3}} & (k_{BA})_{\boxed{3}} & 0 & 0 & (k_{BA})_{\boxed{2}} \\
(k_{AB})_{\boxed{3}} & (k_{AA})_{\boxed{3}}+(k_{AA})_{\boxed{4}}+(k_{AA})_{\boxed{5}} & (k_{AB})_{\boxed{5}} & (k_{AB})_{\boxed{4}} & 0 \\
0 & (k_{BA})_{\boxed{5}} & (k_{BB})_{\boxed{5}}+(k_{BB})_{\boxed{6}}+(k_{BB})_{\boxed{7}}+(k_{BB})_{\boxed{8}} & 0 & 0 \\
0 & (k_{BA})_{\boxed{4}} & 0 & (k_{BB})_{\boxed{9}}+(k_{BB})_{\boxed{4}} & 0 \\
(k_{AB})_{\boxed{2}} & 0 & 0 & 0 & (k_{AA})_{\boxed{2}}
\end{pmatrix}
$$

(en S. G.)

Nótese que puede pensarse en una reordenación de la nomenclatura de los nudos a fin de obtener un menor ancho de banda de la matriz (K), lo cual es conveniente desde el punto de vista de la aplicación de computadores.

4.- Obtención de las matrices (k_{AA}), (k_{AB}), (k_{BA}) y (k_{BB}) para cada barra en S. G.

Estas matrices están relacionadas entre si através de las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
(k_{AA}) &= (H_{BA})(k_{BB})(H_{BA})^T \\
(k_{AB}) &= -(H_{BA})(k_{BB}) \\
(k_{BA}) &= -(k_{BB})(H_{BA})^T
\end{aligned}
$$

donde A y B son los extremos de la barra (ver figuras 3 y 5)

Por lo que sólo será necesario calcular (k_{BB}) de cada barra, y aplicar las expresiones anteriores para calcular (k_{AA}), (k_{AB}) y (k_{BA}).

Para calcular (k_{BB}) se procede de la manera siguiente:

Recuérdese que $(k_{BB}) = (f_{BB})^{-1}$, por lo que el problema se reduce a calcular (f_{BB}) en S. G., la cual se obtiene a partir de la siguiente expresión : (Ver figuras 3 y 5).

$$\left(f_{BB}\right)_{\boxed{i}} = \sum_{j=1}^{N^{\circ}\ tramos} \left(H_{Bj}\right)^{T} \left(f_{BB}\right)_{\boxed{j}} \left(H_{Bj}\right) \quad \text{(en S.G)}$$

donde $\left(H_{Bj}\right)$ y $\left(f_{BB}\right)_{\boxed{j}}$ se encuentran referidas al S.G. de referencia.

La matriz de flexibilidades del tramo $\boxed{j}$ en el extremo B, referida al S.G. puede calcularse con la siguiente expresión.

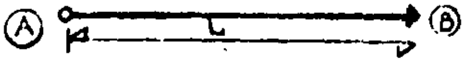
$$\left(f_{BB}\right)_{\boxed{j}} = \left(T\right)_{\boxed{j}} \left(f'_{BB}\right)_{\boxed{j}} \left(T\right)^{T}_{\boxed{j}}$$

(en S.G.)

3).- Tratamiento de apoyos incompletos

Un apoyo incompleto puede no ser considerado como nudo, si se emplean las rigideces modificadas del tramo de barra que concurre en él.

A continuacion se listan las matrices de rigideces modificadas para dos casos de interés práctico:

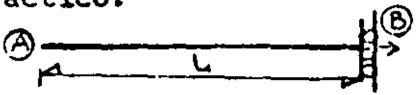


$$\left(k'_{AB}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(en S.L.)

$$\left(k'_{BB}\right) = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{pmatrix}$$

(en S.L.)



$$\left(k'_{BB}\right) = \left(k'_{AA}\right) = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{L} \end{pmatrix}$$

(en S.L.)

$$\left(k'_{AB}\right) = \left(k'_{BA}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EI}{L} \end{pmatrix}$$

(en S.L)

Para obtener (k) en S.G. se emplea la siguiente expresion:

$$(k) = (T)(k')(T)^T$$

Con (T) tal como fue definido en III

B.- Cálculo del vector de fuerzas $\{F\}$

Las cargas que pueden presentarse en un sistema de tuberías como el de las figuras 2 y 4, son las siguientes:

1.- Fuerzas externas aplicadas en:
- los nudos de la estructura
- los quiebres de las barras
- los tramos de cada barra

Considérese la barra $\boxed{1}$ de la fig. 2, cargada como se muestra en la figura 6

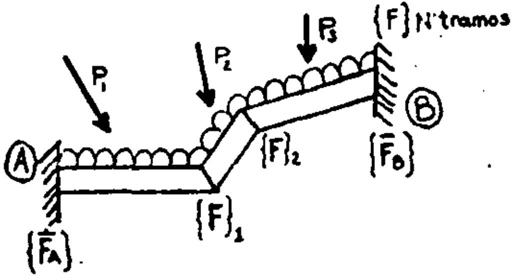


FIG. 6.- Barra $\boxed{1}$ cargada y fuerzas de fijación $\{\bar{F}_A\}$ y $\{F_B\}$

$\{F_j\}$ = Fuerzas quiebre
- Fuerzas fijación.

FIG. 7.- Barra $\boxed{1}$ en cantiliver.

Las fuerzas de fijación en el extremo B de la barra $\boxed{1}$ se obtienen a partir de la siguiente expresión:

$$\{\bar{F}_B\} = -(k_{BB})\{d_B^*\}$$

donde $\{d_B^*\}$es la matriz de desplazamientos del extremo B considerando a la barra en cantiliver (ver fig. 7) y se calcula con la siguiente expresión

$$\left\{d_B^*\right\} = \sum_{j=1}^{N^{\circ}tramos} \left[H_{Bj}\right]^T \left[\tilde{f}_j\right] \left\{F_j\right\}$$

En la expresión anterior,$\{F_j\}$es el vector resultante de restar las fuerzas externas aplicadas en el quiebre ⓙ ($\{F\}_1$, ...,$\{F\}_{N^{\circ}tramos}$ en la figura 6) menos las fuerzas de fijación producidas por las cargas externas aplicadas en los tramos adyacentes al quiebre ⓙ ambas referidas al S.G.

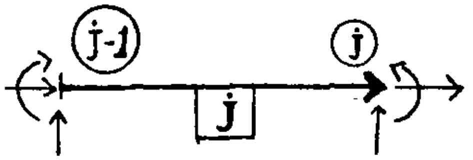
El vector$\{F_j\}$, tiene la forma siguiente para el caso de sistemas de tuberías en dos y tres dimensiones.

$$\{F_j\} = \begin{Bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix}$$

(S.P. 2D)

$$\{F_j\} = \begin{Bmatrix} F_{jx} \\ F_{jY} \\ F_{jz} \\ M_{jx} \\ M_{jY} \\ M_{jz} \end{Bmatrix}$$

(S.G. 3D)



Convención positiva del vector$\{F_j\}$

La matriz$[H_{Bj}]$se aplica tal como fue definida en III.

La matriz$[\tilde{f}_j]$es la matriz de flexibilidades del segmento de barra comprendido entre el extremo origen Ⓐ y el quiebre ⓙ respecto al extremo destino ⓙ y está definida mediante la siguiente fórmula de recurrencia.

$$\left[\tilde{f}_{j+1}\right] = \left[f_{\boxed{j+1}}\right] + \left[H_{\textcircled{\scriptsize j+1}\textcircled{\scriptsize j}}\right]^T \left[\tilde{f}_j\right] \left[H_{\textcircled{\scriptsize j+1}\textcircled{\scriptsize j}}\right]$$

$$1 \leq j \leq (N^{\circ}tramos-1)$$

en donde $[H_{\textcircled{j+1}\textcircled{j}}]$ se aplica tal como fue definida en III y $\{f_{\boxed{j+1}}\}$ se obtiene por un procedimiento similar al descrito en A.2.

Nótese que en la ecuación anterior se tiene que:

$$\{\tilde{f}_1\} = \{f_{BB}\}_{\boxed{1}}$$

$$y \quad \{\tilde{f}\,N\text{tramos}\} = \{f_{BB}\}_{\boxed{i}}$$

Mediante el procedimiento descrito, se obtiene $\{d_B^*\}$ se calcula $\{\bar{F}_B\}$ y se le suman las fuerzas de fijación en el extremo Ⓑ de la barra $\boxed{1}$ producidas por las cargas aplicadas en el tramo adyacente a él, obteniendose así el vector $\{\bar{F}_B\}$ definitivo.

Una vez conocido el vector de fuerzas $\{\bar{F}_B\}$ de la barra $\boxed{1}$ se calcula el vector de fuerzas $\{\bar{F}_A\}$ de la misma barra con la siguiente expresión:

$$\{\bar{F}_A\} = \{\bar{F}_A\}^* - [H_{BA}]\{\bar{F}_B\}$$

donde: $\{\bar{F}_A\}^*$ es el vector de fuerzas en el extremo Ⓐ de la barra $\boxed{1}$, producido por las cargas actuantes en ella considerándola en cantiliver, (ver fig. 7) y $[H_{BA}]$ se aplica tal como fue definida en III.

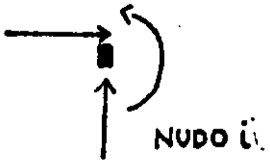
Los vectores de fuerzas $\{\bar{F}_A\}$ y $\{\bar{F}_B\}$ así obtenidos constituyen el estado I de cargas (fuerzas de fijación).

Al aplicar vectores de carga en sentido contrario a los del estado I, y sumar los que concurren en un nudo mas el vector de cargas aplicado en el mismo, se constituye el estado II de cargas.

La forma topológica del vector de cargas $\{F\}$ en la ecuación (1) para las estructuras de las figuras 2 y 4, siendo nudos destino el ①, ③ o ④, es la siguiente:

$$\{F\} = \left\{ \begin{array}{l} \{\bar{F}_B\}_{\boxed{1}} + \{\bar{F}_B\}_{\boxed{2}} + \{\bar{F}_B\}_{\boxed{3}} + \{F\}_{①} \\ \hline \{\bar{F}_A\}_{\boxed{3}} + \{\bar{F}_A\}_{\boxed{4}} + \{\bar{F}_A\}_{\boxed{6}} + \{F\}_{②} \\ \hline \{\bar{F}_B\}_{\boxed{5}} + \{\bar{F}_B\}_{\boxed{6}} + \{\bar{F}_B\}_{\boxed{7}} + \{\bar{F}_B\}_{\boxed{8}} + \{F\}_{③} \\ \hline \{\bar{F}_B\}_{\boxed{9}} + \{\bar{F}_B\}_{\boxed{9}} + \{F\}_{④} \end{array} \right\}$$

Convención positiva para los componentes del vector $\{F\}$



Estamos ahora en posibilidad de resolver la ecuación general $\{F\} = [K]\{d\}$ y obtener los desplazamientos de los nudos de la estructura y calcular a partir de ellos los elementos mecánicos que se generan en los extremos de las barras (inciso IV.C), lo cual puede hacerse a través de un planteamiento tradicional de análisis estructural.

A los elementos mecánicos así obtenidos, se les suman los vectores de fuerzas de fijación que constituyen el estado I de cargas para obtener los elementos mecánicos definitivos en los extremos de cada barra de la estructura.

2.- Fuerzas Producidas por Cambios de Temperatura

Es aplicable todo lo estipulado en B.1, pero ahora el problema es más sencillo, ya que la única diferencia con lo visto allá, es que la matriz d ahora se calcula de la manera siguiente:

α = Coeficiente de dilatación lineal del material

Δt = Cambio de temperatura

Para α = cte

Δt = cte

$$\left\{d_B^{*}\right\} = \left\{\begin{array}{l} dx_B^{*} = \alpha\Delta t(\,X_B - X_A) \\ dy_B^{*} = \alpha\Delta t(\,Y_B - Y_A) \\ \phi_{zB}^{*} = 0 \end{array}\right\}$$

(S.G. 2D)

$$d = \left\{\begin{array}{l} dx_B^{*} = \alpha\Delta t(X_B - X_A) \\ dy_B^{*} = \alpha\Delta t(Y_B - Y_A) \\ dz_B^{*} = \alpha\Delta t(Z_B - Z_A) \\ \phi x_B^{*} = 0 \\ \phi y_B^{*} = 0 \\ \phi z_B^{*} = 0 \end{array}\right\}$$

(S.G. 3D)

Para α = cte

$(\Delta t)_{\boxed{j}}$ = variable para cada tramo $\boxed{j}$

$$\left\{d_B^{*}\right\} = \left\{\begin{array}{l} dx_B^{*} = \sum_{j=1}^{N^{\circ}\text{tramos}} \Delta t_{\boxed{j}}\,(\Delta x)_{\boxed{j}} \\ dy_B^{*} = \sum_{j=1}^{N^{\circ}\text{tramos}} \Delta t_{\boxed{j}}\,(\Delta y)_{\boxed{j}} \\ \phi_{zB}^{*} = 0 \end{array}\right\}$$

(S.G. 2D)

$$\left\{d_B^{*}\right\} = \left\{\begin{array}{lr} dx_B^{*} = \sum_{j=1}^{N^{\circ}\text{tramos}} \alpha\Delta t_{\boxed{j}}\,(\Delta x)_{\boxed{j}} & \phi x_B^{*} = 0 \\ dy_B^{*} = \sum_{j=1}^{N^{\circ}\text{tramos}} \alpha\Delta t_{\boxed{j}}\,(\Delta y)_{\boxed{j}} & \phi y_B^{*} = 0 \\ dz_B^{*} = \sum_{j=1}^{N^{\circ}\text{tramos}} \alpha\Delta t_{\boxed{j}}\,(\Delta z)_{\boxed{j}} & \phi z_B^{*} = 0 \end{array}\right\}$$

(S.G. 3D)

3.- Fuerzas producidas por desplazamientos impuestos a los apoyos.

Es aplicable también ahora todo lo estipulado en B.1 y el problema resulta ser mas sencillo que los planteados en B.1 y B.2 puesto que ahora $\left\{\bar{F}_B\right\}$ se calcula directamente a partir de la siguiente espresión:

$$\left\{\bar{F}_B\right\} = \left[k_{BA}\right]\left\{\bar{d}_A\right\}$$

donde $\left\{\bar{d}_A\right\}$ es el vector de desplazamientos impuestos a la estructura en el apoyo A.

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

ANALISIS ESTRUCTURAL

ANALISIS DINAMICO

PROF. ING. JULIO DAMY RIOS

SEP-OCT. 92

cuya solución ya conocemos (ecuación 2.9a)

$$x = x_o \cos pt + \frac{\dot{x}_o}{p} \text{sen } pt$$

donde $x_o = b$ y $p = \sqrt{\frac{2gu}{L - 2a}}$

y el período será:

$$T = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2gu}{L - 2a}}}$$

Veamos un ejemplo de vibraciones de torsión.

PROBLEMA 2.2 Si tenemos una barra circular con un disco en la parte inferior como se muestra en la figura 2.7

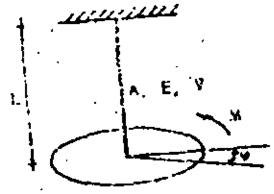


FIGURA 2.7

donde:

L = longitud de la barra
A = sección transversal de la barra
E = módulo de elasticidad de la barra
V = coeficiente de Poisson
M = momento torsionante que produce una deformación angular φ, y se retira bruscamente.

Ⓓ

La ecuación de la segunda ley de Newton no se puede utilizar porque sólo es aplicable para partículas. Para encontrar la expresión de la segunda ley de Newton, aplicable a cuerpos rígidos, supongamos que el disco gira alrededor del punto cero debido a la aplicación de un momento Mt, la trayectoria no rectilínea de las partículas del disco, da origen a la aparición de la aceleración normal y la existencia del momento torsionante a la aceleración tangencial. Para una partícula situada a una distancia del origen, por la segunda ley tenemos:

$$dF = dm\ a_T \qquad \ldots(2.10a)$$

donde:

a_T = aceleración tangencial de la partícula.

Si observamos el disco en planta tendremos (figura 2.8).

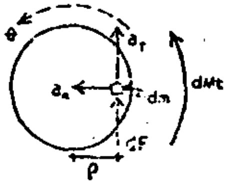


FIGURA 2.8

$\dot{\theta}$ = velocidad angular
a_T = aceleración tangencial
a_n = aceleración normal

Se tiene entonces para la partícula:

$$dMt = \rho\, dF$$

Integrando aparece el momento M aplicado al disco

$$Mt = \int \rho\, dF = \int \rho\, dm\, a_T$$

Además por cinemática:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\theta}\rho) = \ddot{\theta}\rho$$

la expresión quedará:

$$Mt = \int \rho \, dm \, \ddot{\theta}\rho = \left(\int \rho^2 dm\right) \ddot{\theta}$$

Observamos que:

$$Izz = \int \rho^2 \, dm$$

y así tenemos:

$$Mt = Izz \, \ddot{\theta}$$

Expresión de la segunda ley de Newton para cuerpos rígidos en rotación donde Izz mide la resistencia que opone el cuerpo a ser acelerado angularmente, depende de cómo esté distribuida su masa, y se le conoce como momento de inercia de masa. Apliquemos ahora este resultado al problema inicial.

Se gira el disco un ángulo φ por un momento Mt, y luego se quita el momento súbitamente.

El disco ha girado un ángulo θ con sentido antihorario. Observando en planta se tiene (ver fig. 2.9):

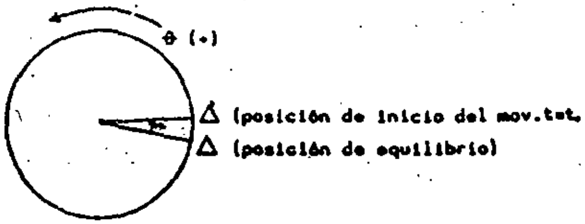


FIGURA 2.9

②

Por la segunda ley:

$$Mt = Izz \, \ddot{\theta}$$

El momento Mtr que actúa sobre el disco en $t = t_o$, tiende a llevar al disco a la posición de equilibrio, su sentido es horario. Su magnitud depende del ángulo y de las propiedades geométricas-elásticas de la barra

$$Mtr = \frac{G \, Jm}{L} \, \theta$$

Mtr = rigidez a desplazamiento angular
G = módulo a cortante
Jm = momento modificado de inercia

Para barra de sección circular

$$Jm = Ix + iy$$

se tiene entonces:

$$-Mtr = Izz \, \ddot{\theta}$$

$$Izz \, \ddot{\theta} + \frac{G \, Jm}{L} \, \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{G \, Jm}{Izz \, L} \, \theta = 0$$

ecuación de la misma forma que: $\ddot{x} + p^2 x = 0$. Se trata entonces de un movimiento periódico. El periodo será pues:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{G \, Jm}{Izz \, L}}} = 2\pi \sqrt{\frac{Izz \, L}{G \, Jm}}$$

PROBLEMA 2.3 Consideremos ahora el sistema de un grado de libertad en el plano vertical (figura 2.10).

ción actúa tratando de detener el movimiento de la masa. Su sentido es inverso al de la velocidad. Es debida a la rugosidad entre las superficies en contacto. La magnitud de esta fuerza es una fracción del peso de la masa, o sea,

$$F_A = \mu W \qquad \text{donde} \quad \mu < 1$$

μ es el llamado coeficiente de Coulomb. Y su valor contrariamente a lo que se cree depende de las superficies en contacto. Entre mayor sea el área de contacto mayor es el valor para μ . Esto se ilustra en la figura 2.16.

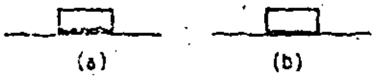


FIGURA 2.16

En la figura 2.16a, el área de contacto es mayor debido a las rugosidades de las superficies y el coeficiente μ tiene un valor mayor que el correspondiente para las superficies de la figura 2.16b.

La idea usual es que μ es independiente de la superficie en contacto, que sólo depende de las características de los materiales. Pero como aquí se observa, estas características determinan el área de contacto. Así, para materiales como el concreto cuya superficie es muy rugosa (figura 2.16a) y por lo tanto el área de contacto es mayor, se tienen valores para μ superiores a los que hay para materiales como el acero cuyas superficies lisas disminuyen el área de contacto.

Experimentalmente se determinan los valores de μ para dos casos: cuando la masa está en movimiento y cuando la masa está en reposo. En este último caso como no hay velocidad,la fuerza debida a la fricción actúa en el sentido de contrarrestar la tendencia al movimiento. Hay entonces, coeficientes estáticos μ_s y dinámicos μ_d . El primero siempre es mayor que el segundo. Aquí emplearemos μ_d .

3

El diagrama de cuerpo libre de la masa para el primer tramo o primer cuarto de ciclo (desde el inicio del movimiento hasta el paso de la masa por la posición de equilibrio) se muestra en la figura 2.17.

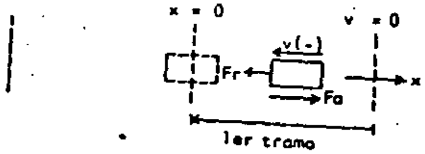


FIGURA 2.17

La segunda ley para cualquier posición de la masa es:

$$\sum F = ma$$
$$F_r + F_a = ma$$

donde F_r es de signo negativo cuando la x. y por lo tanto $\dot{x}, \ddot{x}$ (aceleración) $\ddot{x}$, etc., tiene signo positivo y viceversa. y F_a tiene signo contrario a la velocidad, o sea

$$F_r = -kx \qquad F_a = -F_A \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \qquad F_A = \mu W$$

o sea:

$$-kx - F_A \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} - m\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + p^2 x = \frac{-F_A}{m} \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \qquad \ldots(2.11)$$

El cociente $\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$ es sólo un signo

ecuación diferencial lineal *no homogénea*, cuya solución se obtiene sumando a la solución homogénea una solución particular.

El valor de F_a siempre es contrario a la velocidad,como se ha dicho y se aprecia en la figura 2.18.

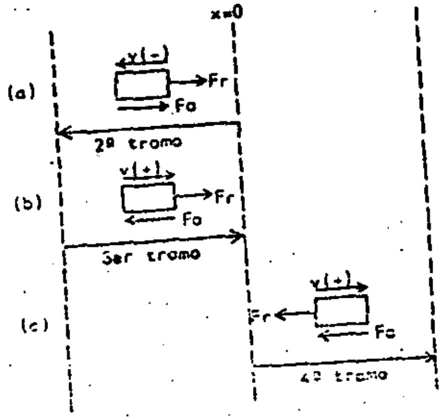


FIGURA 2.18

pero, como es constante, la ecuación diferencial debe resolverse por partes. Pues no hay manera de que al cambiar la velocidad de signo (sentido) haga lo propio el término $F_r = F_A \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$. Nosotros se lo debemos cambiar cada vez que cambie de sentido la velocidad. Se debe resolver la ecuación por intervalos.

Intervalo de velocidad negativa (1º y 2º tramos)

$$\ddot{x} + p^2 x = \frac{F_A}{m}$$

solución de la homogénea: $x_h = C_1 \cos pt + C_2 \operatorname{sen} pt$, ya conocida anteriormente. Se propone la solución particular: $x_p = A \frac{F_A}{m}$, donde A es una constante que se determina al sustituir x_p en la ecuación:

$$0 + p^2 A \frac{F_A}{m} = \frac{F_A}{m} \quad \therefore \quad A = \frac{1}{p^2}$$

la particular es:
$$x_p = \frac{1}{p^2} \frac{F_A}{m} = \frac{F_A}{k}$$

4

y la solución general:

$$x = C_1 \cos pt + C_2 \operatorname{sen} pt + \frac{F_A}{k}$$

las constantes C_1 y C_2 dependen de las condiciones iniciales; consideremos las siguientes:

$$\text{en } t = 0 \quad \begin{matrix} x = x_0 \\ \dot{x} = 0 \end{matrix}$$

entonces la solución queda:

$$x = (x_0 - \frac{F_A}{k}) \cos pt + \frac{F_A}{k} \qquad \ldots(2.12)$$

Se hace notar el hecho de que el periodo no varía con respecto al caso en que no se considera amortiguamiento; sigue siendo $T = \frac{2\pi}{p}$.

Grafiquemos esta solución, tomando como puntos de referencia $t = \frac{T}{4}$: final del primer tramo y $t = \frac{T}{2}$ final del segundo tramo.

$$x_{t=\frac{T}{4}} = (x_0 - \frac{F_A}{k}) \cos p \frac{2\pi}{4p} + \frac{F_A}{k} = \frac{F_A}{k}$$

se tiene que en el primer cuarto del ciclo (final del 1º tramo) la masa no pasa por la posición de equilibrio.

$$x_{t=\frac{T}{2}} = (x_0 - \frac{F_A}{k}) \cos p \frac{2\pi}{2p} + \frac{F_A}{k} = -x_0 + \frac{2F_A}{k} = -(x_0 - \frac{2F_A}{k})$$

se tiene que en el segundo cuarto del ciclo (final del 2º tramo) la masa no se detiene a una distancia x_0, que fue la amplitud del inicio del movimiento. Sino que esa amplitud ha disminuido en $\frac{2F_A}{k}$ (ver la figura 2.19).

Para el intervalo de velocidad positiva (3º y 4º tramos) se tiene la ecuación

$$\ddot{x} + p^2 x = -\frac{F_A}{m}$$

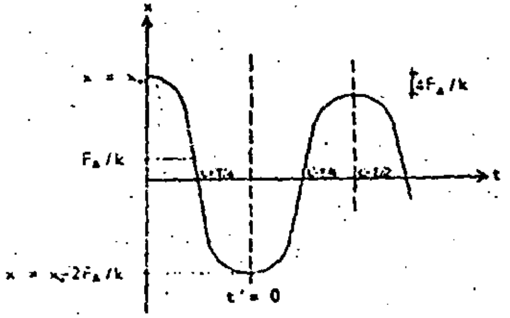


FIGURA 2.19

no será necesario resolverla para conocer el movimiento de la masa en ese intervalo. Según los resultados del primer intervalo podemos decir: si consideramos que el tiempo inicia al final de T/2 entonces, después de haber transcurrido t' = T/2 (medio ciclo) la amplitud habrá disminuido en $\frac{2F_A}{k}$. Como la amplitud con la que se inició el movimiento es: $\left|x_o - \frac{2F_A}{k}\right|$ en t' = 0 se tiene: $x = \left|x_o \frac{4F_A}{k}\right|$ en t' = T/2. Con una translación de ejes, se resuelve pues, el problema.

Ahora si contamos el tiempo transcurrido desde que la masa empezó a moverse por primera vez, ha transcurrido un tiempo igual a T. Cada ciclo la masa disminuye su amplitud en $\frac{4F_A}{k}$ (ver la figura 2.19). Haciendo la misma translacion de ejes se sabe el comportamiento del sistema en los demás intervalos. Al cabo de un tiempo la masa terminará por pararse. Ello sucederá cuando al final de un "cierto cuarto de período" $(\frac{nT}{4})$ la amplitud sea incapaz de vencer la fricción o cuando la amplitud sea cero y no haya velocidad. Este último caso se presenta cuando $x_o = n\,\frac{F_A}{k}$ con "n" múltiplo de 4.

Así, por ejemplo si $x_o = \frac{20F_A}{k}$ cinco ciclos tardará el amortiguamiento en "comerse" a X_o. Pues cada ciclo le "come" $\frac{4F_A}{k}$

PROBLEMA 2.5 Si $\frac{F_A}{k} = \frac{x_o}{23}$ ¿Cuántos ciclos durará la vibración y en qué posición termina la masa?.

Cuando se llega a la terminación del 5º ciclo $x_o = \frac{3F_A}{k}$ y entonces en la primera mitad del 6º ciclo la ecuación del movimiento queda:

$$x = (x_o - \frac{F_A}{k})\cos pt + \frac{F_A}{k} = (\frac{3F_A}{k} - \frac{F_A}{k})\cos pt + \frac{F_A}{k} = \frac{2F_A}{k}\cos pt +$$

para

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\frac{2\pi}{p}}{4} = \frac{2\pi}{4p} \quad \therefore \quad x = \frac{F_A}{k}$$

para

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{p} \qquad \therefore \qquad x = \frac{-2F_A}{k} + \frac{F_A}{k} = -\frac{F_A}{k}$$

por esto en la segunda mitad del 6º ciclo la ecuación del movimiento queda:

$$x = (\frac{3F_A}{k} - x_o)\cos pt - \frac{F_A}{k} = (\frac{3F_A}{k} - \frac{3F_A}{k})\cos pt - \frac{F_A}{k} = -\frac{F_A}{k}$$

y como se puede ver el movimiento ya no varía en función del tiempo. Para cualquier tiempo la posición de la partícula es la misma: $x = -\frac{F_A}{k}$

Ahora, si: $\frac{F_A}{k} = \frac{x_o}{22}$; al llegar al quinto ciclo $x_o = \frac{2F_A}{k}$. La ecuación de movimiento es:

$$x = (x_o - \frac{F_A}{k})\cos pt + \frac{F_A}{k}$$

Para

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{p}$$

$$x = (\frac{2F_A}{k} - \frac{F_A}{k})(-1) + \frac{F_A}{k} = 0$$

y el movimiento termina en la posición de equilibrio de la masa.

derivando con respecto a "w" e igualando a cero

$$\frac{d\beta}{dw} = - \frac{\dfrac{2\left[1-\left(\frac{w}{p}\right)^2\right]\left(-\frac{2w}{p^2}\right)+4\left(\frac{n}{n_c}\right)^2\frac{2w}{p^2}}{2\sqrt{\left[1-\left(\frac{w}{p}\right)^2\right]^2+4\left(\frac{n}{n_c}\right)^2\left(\frac{w}{p}\right)^2}}}{\left[1-\left(\frac{w}{p}\right)^2\right]^2+4\left(\frac{n}{n_c}\right)^2\left(\frac{w}{p}\right)^2} = 0$$

Reduciendo términos se tiene:

$$1-\left(\frac{w}{p}\right)^2 = 2\left(\frac{n}{n_c}\right)^2$$

El valor máximo de β se alcanza para:

$$\frac{w}{p} = \sqrt{1-2\left(\frac{n}{n_c}\right)^2}$$

cuando $\frac{n}{n_c} \to 0$ se verifica que $\frac{w}{p} \to 1$

El valor de $\frac{w}{p} = \sqrt{1-2\left(\frac{n}{n_c}\right)^2}$ será siempre menor o a lo mucho igual a uno. Y entonces βmax es:

$$\beta max = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{w}{p}\right)^2\right]^2+4\left(\frac{1-\left(\frac{w}{p}\right)^2}{2}\right)\left(\frac{w}{p}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{w^4}{p^4}}}$$

2.3.1.3 FUERZA EXCITADORA PERIODICA (CON SERIES DE FOURIER)

Se sabe que cualquier función periódica puede expresarse en términos de funciones periódicas sencillas tales como el seno y el coseno. La teoría que posibilita dicha transformación es conocida como "series de Fourier". Tal teoría,como también se sabe, es más general que la de las series de Taylor por el hecho de que estas no pueden representar funciones p riódicas discontinuas, mientras que las series de Fourier si lo pueden hac

6

Así, la función que se muestra en la figura 2.35 por medio de las series de Fourier se puede expresar en términos del seno y coseno.

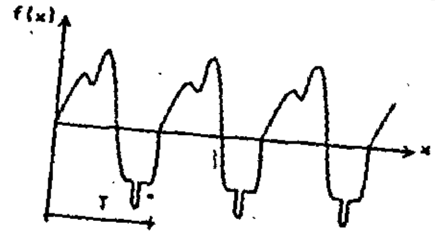


FIGURA 2.35

La función f(x) en series trigonométricas es de la forma:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos wx + a_2 \cos 2wx + \ldots + b_1 \text{ sen } wx + b_2 \text{ sen } 2wx + \ldots$$

o bien

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i \cos iwx + b_i \text{ sen } iwx)$$

donde: a_i y b_i son constantes y w es la frecuencia de la función periódica.

Para el caso de movimientos vibratorios, si la fuerza excitadora es periódica, utilizando las series de Fourier se encuentra su expresión en forma de series trigonométricas; y después se resuelve la ecuación diferencial (sin amortiguamiento).

$$\ddot{x} + p^2 x = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{n}(a_i \cos iwt + b_i \text{ sen } iwt)$$

PROBLEMA 2.6 Considérese la fuerza excitadora representada por la figura 2.36.

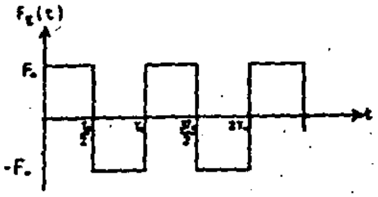


FIGURA 2.36

F_o = constante

T_o = período de la excitación $\qquad T_o = \frac{2\pi}{w}$

Se busca entonces, representar a la función a través de:

$$F_\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos iwt + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \text{ sen } iwt \qquad \text{...(2.15)}$$

Para calcular el valor de las "a_i" multiplicamos por cos iwt e integramos:

$$\int_0^{T_o} \cos iwt\,[F_\varepsilon(t)]dt = \int_0^{T_o} a_i \cos^2 iwt\, dt + \int_0^{T_o} (b_i \text{ sen } iwt \cos iwt)dt$$

Como se sabe:

$$\int_0^{T_o} b_i (\text{sen } iwt \cos iwt)dt = 0$$

despejando a_i :

$$a_i = \frac{\int_0^{T_o} \cos iwt\,[F_\varepsilon(t)]dt}{\int_0^{T_o} \cos^2 iwt\, dt}$$

Se integra el denominador

$\int_0^{T_o} (\cos^2 iwt)dt \qquad$ usando la identidad $\qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 - \text{sen } 2x)$

queda:

$$\int_0^{T_o} (\cos^2 iwt)dt = [\tfrac{1}{2} t + \tfrac{1}{2\,iw} \cos 2\,iwt]_0^{T_o}$$

$$= \frac{2\pi}{2w} + \frac{1}{2w} \cos 2iw\ \frac{2\pi}{w} - \frac{1}{2w} \cos 2iw\,(0) = \frac{\pi}{w}$$

entonces:

$$a_i = \frac{\int_0^{T_o} F_\varepsilon(t) \cos iwt\, dt}{\frac{\pi}{w}}$$

$$a_i = \frac{w}{\pi} \int_0^{T_o} F_\varepsilon(t) \cos iwt\, dt$$

El período es $T_o = \frac{2\pi}{w}$ en donde $w = \frac{2\pi}{T_o}$ $\qquad$ entonces

$$a_i = \frac{2}{T_o} \int_0^{T_o} F_\varepsilon(t) \cos iwt\, dt$$

Demostraremos ahora que $a_i = 0 \ \forall \ i = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots$

cuando $i = 0$

$$a_o = \frac{2}{T_o} \int_0^{T_o} F_\varepsilon(t)dt = \frac{2}{T_o} [\int_0^{T_o/2} F_o\, dt + \int_{T_o/2}^{T_o} - F_o\, dt] = \frac{2}{T_o} [F_o [t]_0^{T_o/2} - F_o [t]_{T_o/2}^{T_o}]$$

$$= \frac{2}{T_o} [F_o \frac{T_o}{2} - F_o(T_o - \frac{T_o}{2})] = 0$$

cuando $i = n$

$$a_n = \frac{2}{T_o} \int_0^{T_o} F_\varepsilon(t) \cos nwt\, dt = \frac{2}{T_o} [\int_0^{T_o/2} F_o \cos nwt\, dt + \int_{T_o/2}^{T_o} -F_o \cos nwt\, dt]$$

$$= \frac{2}{T_o} [\frac{F_o}{nw} \text{ sen } n\pi - \frac{F_o}{nw} (\text{sen } 2n\pi - \text{sen } n\pi)]$$

siendo n un número entero se tiene:

$$a_n = \frac{2}{T_o} [\frac{F_o}{nw} (0) - \frac{F_o}{nw} (0)] = 0$$

deberá cumplirse para $i = n + 1$ sea $n + 1 = k$, k, entero

$$a_{n+1} = a_n = \frac{2}{T_o}\left[\frac{F_o}{nw} \text{ sen } k \quad - \frac{F_o}{nw} (\text{sen } 2k\pi - \text{sen } k\pi)\right] = o$$

$$a_n = \frac{2}{T_o}\left[\frac{F_o}{(n+1)w} \text{ sen } (n+1)\pi - \frac{F_o}{(n+1)w}[\text{sen } 2(n+1)\pi - \text{sen } (n+1)\pi]\right]$$

$$= \frac{2}{T_o}\left[\frac{F_o}{(n+1)w} (\text{sen } n\pi \cos\pi + \cos n\pi \text{ sen } \pi \quad) - \frac{F_o}{(n+1)w} (\text{sen } 2n\pi \cos 2\pi\right.$$

$$\left. + \cos 2n\pi \text{ sen } 2\pi - \text{sen } n\pi \cos\pi + \cos n\pi \text{ sen } \pi)\right] = 0$$

Otra forma de ver esto:

para $\int F_e (t) \cos 1wt$ o sea $1 = 1$ (figura 2.37).

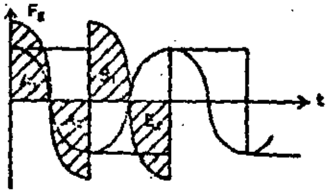


FIGURA 2.37

La integral representa el área comprendida entre la curva $F_o \cos wt$ y la abscisa x. Sumando áreas para el primer medio período (T/2) se observa que es cero (porque $A_1 = -A_2$). Sumando las áreas para el segundo medio período (T/2 a T) se observa que da cero (porque $B_1 = -B_2$). Como las funciones son periódicas, para los demás intervalos de tiempo se sigue cumpliendo que el área bajo la curva es nula. Por lo tanto $a_1 = 0$. Con un razonamiento similar se demuestra que los demás valores de a son cero. Ya que se han calculado los valores de a_i, se calcularán ahora los de b_i. Para ello, se multiplica la ecuación 2.15 por sen iwt y se integra.

$$\int_0^{T_o} F_e (t) \text{ sen } iwt \, dt = \int_0^{T_o} a_i \text{ sen } iwt \cos iwt \, dt + \int_0^{T_o} b_i \text{ sen}^2 iwt \, dt$$

como ya se dijo: $\int_0^{T_o} a_i \text{ sen } iwt \cos iwt \, dt = 0$

además $\int_0^{T} \text{sen}^2 iwt \, dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\text{sen } 2iwt}{4 iw}\right]_0^{T_o} = \frac{T_o}{2} - \frac{\text{sen } 2iwT_o}{4 iw} = \frac{T_o}{2}$

queda entonces:

$$b_i = \frac{2}{T_o}\int_0^{T_o} F_e (t) \text{ sen } iwt \, dt$$

para nuestro caso $F_e(t)$ es la gráfica de la figura 2.36.

A través del artificio visto para obtener a_i se obtendrá en seguida el valor de b_1 (fig. 2.38).

FIGURA 2,38

Se observa que el área bajo la curva en el intervalo $(0; T_o)$ es:

$$b_1 = \left[\frac{2}{T_o}\int_0^{T_o/2} F_o \text{ sen } 1wt \, dt\right] 2 = \frac{4}{T_o}\left[-\frac{1}{w} \cos wt\right]_0^{T/2}$$

$$= \frac{4F_o}{T_o}\left(-\frac{1}{w} - \frac{1}{w}\right) = \frac{8F_o}{Tw} = 1.273 \, F_o$$

Para $i = 2$: $b_2 = ?$ (ver fig.2.39)

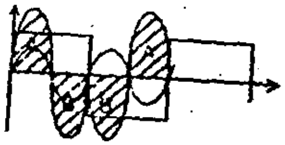


FIGURA 2.39

Se visualiza que $A_1 = -B_1$, entonces el área bajo la curva $F_e (t) \text{ sen } 2wt = 0$ y por lo tanto $b_2 = 0$.

Analiticamente sería:

$$b_2 = \int_0^{T_o/2} F_o \text{ sen } 2wt \; dt + \int_{T_o/2}^{T_o} -F_o \text{ sen } 2wt \; dt = F_o\left[-\frac{1}{2w}\cos 2wt\right]_0^{T_o/2} - \left[F_o \frac{-1}{2w}\cos 2wt\right]_{T_o/2}^{T_o}$$

$$= -\frac{F_o}{2w}\left[\cos 2w\frac{T_o}{2}\right] + \frac{F_o}{2w}\left[\cos 2w T_o - \cos 2w\frac{T_o}{2}\right] - \frac{F_o}{2w}(-\cos(0)) = 0$$

para $i = 3$: $b_3 = ?$: (ver fig. 2.40)

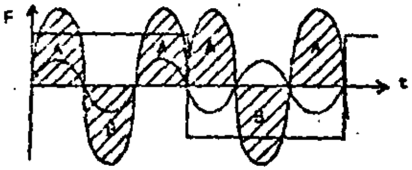


FIGURA 2.40

$$b_3 = \frac{2}{T_o}\int_0^{T_o} F_E(t) \text{ sen } 3wt = \left[\frac{2}{T_o}\int_0^{T_o} F_o \text{ sen } 3wt \; dt\right] 2 = \frac{4F_o}{3\pi} = .424 \; F_o$$

de la misma manera concluimos que:

$b_4 = 0$
$b_5 = .255 \; F_o$
$b_6 = 0$
$b_7 = .182 \; F_o$

Considerando los siete primeros valores de b_i, la función de la fuerza excitadora queda:

$$F_E = 1.273 \; F_o \text{ sen } wt + 0.424 \; F_o \text{ sen } 3wt + 0.255 \; F_o \text{ sen } 5wt + 0.182 \; F_o \text{ sen } 7wt$$

La gráfica de esta función es (figura 2.41):

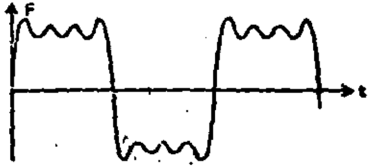


FIGURA 2.41

gráfica muy aproximada a la de la figura 2.36. Tomando mayor número de valores para b_i se tendrá una aproximación mayor.

Con esto estamos en posibilidad de resolver la ecuación del equilibrio dinámico

$$\ddot{x} + p^2 x = \frac{F_E(t)}{m} = \frac{\sum b_i \text{ sen } iwt}{m}$$

Intervalo $0 \leq t \leq t_1$

La vibración para el estado permanente resulta:

$$x = \frac{1}{mp}\int_0^t F(\eth) \text{ sen } p\,(t - \eth)\,d\eth$$

$$= \frac{1}{mp}\int_0^t F_1 \text{ sen } p\,(t - \eth)\,d\eth = \frac{F_1}{mp}\int_0^t \text{sen } p\,(t - \eth)\,d\eth$$

para integrar se cambia de variable

$t - \eth = u$; $-d\eth = du$

$\eth = t - u$

Entonces los límites de integración serán:

límite superior $\eth = t$; $t = t - u$; $u = t - t = 0$

límite inferior $\eth = 0$; $0 = t - u$; $u = t$

$$x = \frac{F_1}{mp}\int_t^0 \text{sen } u\,du = \frac{F_1}{mp}[\frac{1}{p}\cos pu]$$

$$= \frac{F_1}{mp^2}[1 - \cos pt] = \underline{\frac{F_1}{K}[1 - \cos pt]}$$

Intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$ (ver fig. 2.46)

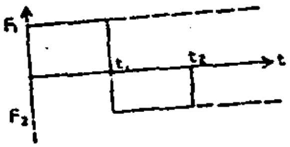


FIGURA 2.46

Considerando la superposición de las 2 fases de la fuerza:

$$x = x_{F_1} + x_{F_2 - F_1}$$

10

$$x_{F_2-F_1} = \frac{1}{mp}\int_0^{t-t_1} F(\eth) \text{ sen } p\,[(t - t_1) - \eth]\,d\eth = \frac{-F_2 - F_1}{mp}\int_0^{t-t_1} \text{sen } p\,[(t - t_1) - \eth]\,d\eth$$

cambio de variable

$(t - t_1) - \eth = u$; $-d\eth = du$

$\eth = (t - t_1) - u$

fijando límites

Límite superior $\eth = t - t_1$; $u = 0$
Límite inferior $\eth = 0$; $u = t - t_1$

resolviendo la integral

$$x_{F_2-F_1} = \frac{-F_2 - F_1}{mp}\int_{t-t_1}^{0} \text{sen } pu\,du = \frac{-F_2 - F_1}{mp}[\frac{1}{p}\cos pu]_{t-t_1}^{0}$$

$$= \frac{-F_2 - F_1}{mp^2}[1 - \cos pt] = \underline{\frac{-F_2 - F_1}{k}[1 - \cos p\,(t - t_1)]}$$

resueltas las integrales para los dos impulsos se hace la suma

$$x = x_{F_1} + x_{F_2-F_1} = \frac{F_1}{K}[1 - \cos pt] + \frac{-F_2 - F_1}{k}[1 - \cos p\,(t - t_1)]$$

$$= \underline{\frac{F_1}{K}[\cos p\,(t - t_1) - \cos pt] - \frac{F_2}{K}[1 - \cos pt(t - t_1)]}$$

Intervalo $t_2 \leq t$ (figura 2.47)

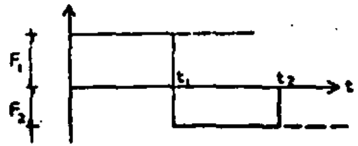


FIGURA 2.47

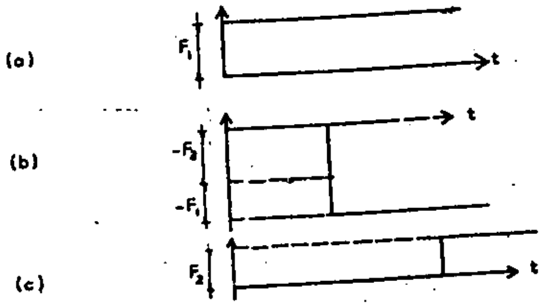


FIGURA 2.48

Considerando la superposición de los tres tipos de fuerzas (figuras 2.48a, 2.48b,2.48c)

$$x = x_{F_1} + x_{-F_1} + x_{F_2}$$

$$x_{F_2} = \frac{1}{mp}\int_0^{t-t_2} F_2(\tau)\ \text{sen}\ p\,[(t - t_2) - \tau]\,d\tau = \frac{F_2}{mp}\int_0^{t-t_2}\text{sen}\ p\,[(t - t_2) - \tau]\,d\tau$$

cambiando la variable $[(t - t_2) - \tau]$ por u, e integrando se tiene:

$$x_{F_2} = \frac{F_2}{K}[1 - \cos p\,(t - t_2)]$$

Superponiendo las tres gráficas se obtiene la respuesta del sistema a la fuerza excitadora del caso que nos ocupa.

$$x = \frac{F_1}{K}[\cos p\,(t - t_1) - \cos pt] - \frac{F_2}{K}[1 - \cos p\,(t - t_1)] + \frac{F_2}{K}[1 - \cos p\,(t - t_2)]$$

$$= \frac{F_1}{K}[\cos p\,(t - t_1) - \cos pt] - \frac{F_2}{K}[\cos p\,(t - t_2) - \cos p(t - t_1)]$$

2.3.1.5 RESPUESTA POR EL PLANO DE FASE EN SISTEMAS NO AMORTIGUADOS

Es posible encontrar la respuesta de un sistema de un grado de libertad sin resolver explícitamente la ecuación diferencial del movimiento.

En lo que sigue se tratará de formular y fundamentar el algoritmo para conseguirlo, sin considerar la existencia de amortiguamiento.

Según lo visto anteriormente (pag. 67) la respuesta ante una fuerza constante F_0 es:

$$x = (x_0 - \frac{F_0}{K})\cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p}\,\text{sen}\ pt + \frac{F_0}{K} \qquad ...(2.18)$$

que representa una coseniode defasada. La representación de esta coseniode en el plano de fase se obtendrá haciendo las siguientes tranformaciones a la ecuación(2.18):

Derivar y dividir entre p

$$\frac{\dot{x}}{p} = -(x_0 - \frac{F_0}{K})\,\text{sen}\ pt + \frac{\dot{x}_0}{p}\cos pt \qquad ...(2.19)$$

De la ecuación 2.18 se tiene:

$$x - \frac{F_0}{K} = (x_0 - \frac{F_0}{K})\cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p}\,\text{sen}\ pt \qquad ...(2.20)$$

Elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro (2.19) y (2.20)

$$(\frac{\dot{x}}{p} - 0)^2 + (x - \frac{F_0}{K})^2 = (x_0 - \frac{F_0}{K})^2 + (\frac{\dot{x}_0}{p})^2 \qquad ...(2.21)$$

El segundo miembro de esta ecuación es constante. Por lo que (2.21) guarda la forma de la ecuación de una circunferencia.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

entonces x y $\dot{x}$ satisfacen la ecuación de una circunferencia referida a los ejes x y $\dot{x}/p$; de centro $(0;F_0/k)$, y de radio: $\sqrt{(x_0 - \frac{F_0}{K})^2 + (\frac{\dot{x}_0}{p})^2}$. Tal circunferencia está ubicada en el plano de fase. Para trazarla se localiza el centro en el eje x (vertical) a una distancia F_0/k. No es necesario calcular el radio; puesto que habitualmente conocemos las condiciones iniciales x_0 y $\dot{x}_0$; se localiza con ellas el punto de la circunferencia correspondiente al inicio del movimiento t = 0, o sea, el punto (x_0; $\dot{x}_0/p$). Con esto queda automáticamente determinado el radio. El ángulo que subtienden dos radios es "pt". Claro, si uno de los radios es el correspondiente a t = 0 y el otro es al que está a un ángulo pt = pT = p(2n/p) = 2n , la masa ha recorrido la trayectoria correspondiente a un periodo y está de nuevo en el punto en que inició el movimiento. Con la proyección de los puntos del plano de fase sobre el sistema coordenado x-t (figura 2.49) se obtiene la respuesta.

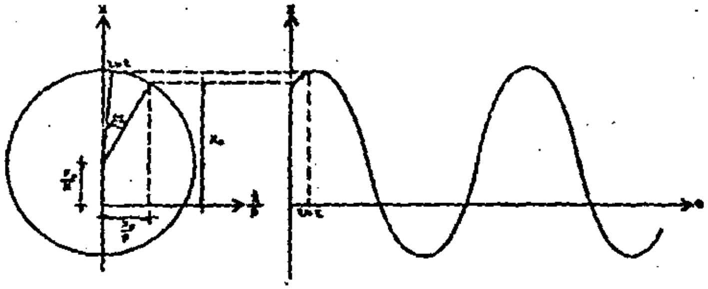


FIGURA 2.49

No tanto en la respuesta -por lo demás, ya conocida- sino en la construcción del plano de fase, adquiere importancia lo anterior. Puesto que si la excitación es una serie de impulsos como en la gráfica de la figura 2.50,

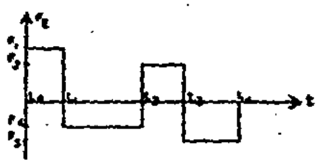


FIGURA 2.50

la construcción del plano de fase, que nos posibilitará encontrar la respuesta, se puede hacer de la siguiente forma: a la primera fuerza F_{01} , le corresponderá en el plano de fase un arco de círculo -de centro F/k- que empieza en t = 0 y termina cuando el radio ha girado pt_1 . Las condiciones finales de este movimiento son las iniciales cuando empieza a actuar la fuerza F_{02} . A la que, por ser constante se le puede aplicar el "procedimiento" de la anterior. Le corresponde en el plano de fase un arco de círculo -de centro F_{02}/k- que empieza en t = t_1 y termina cuando el radio ha girado pt_2. Procediendo de la misma manera para el resto de las fuerzas, incluso cuando F_0 = 0 , se construye el plano de fase. Y de aquí se obtiene la respuesta con la proyección sobre el plano x-t (figura 2.51).

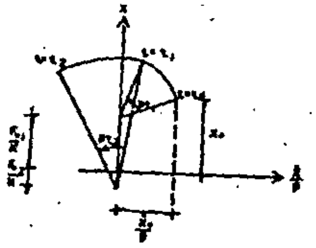
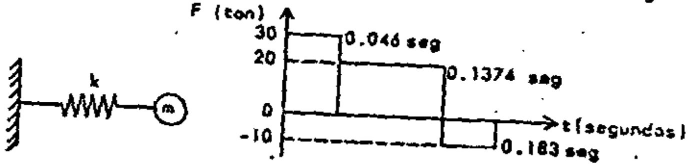


FIGURA 2.51

PROBLEMA 2.8 Determinar la respuesta del sistema de un grado de libertad, cuando se somete a la fuerza de excitación señalada en la figura 2.52b.



k=30 Ton/cm W =25 Ton

FIGURA 2.52

Las condiciones iniciales de movimiento son:

x_0 = 2 cm.

en t = 0

$\dot{x}_0$ = 60 cm/seg.

Obtención de la frecuencia y del período natural del sistema.

$$m = \frac{W}{g} = \frac{25}{980} = 0.02551 \quad ton \quad \frac{seg}{cm}$$

$$p = \frac{k}{m} = \frac{30 X 980}{25} = 34.3103 \quad 1/seg$$

$$T = \frac{2\pi}{p} = 0.1831 \quad seg.$$

Para nuestro caso el centro (de la primera circunferencia) es:

$$\frac{F_o}{k} = \frac{30}{30} = 1 \ cm \qquad ; \qquad h = 0$$

El punto contenido en el primer arco de círculo es el de las condiciones iniciales

$$x_o = 2 \ cm. \qquad ; \qquad \frac{\dot{x}_o}{p} = \frac{60}{34.3103} = 1.7487 \ cm.$$

El ángulo que abre el primer arco de círculo es:

$$pt_1 = 34.3103 \ (.046) = 1.5785 \ rad = 90.4284°$$

Centro del segundo arco de círculo

$$\frac{F_o}{k} = \frac{20}{30} = 0.6667 \ cm. \qquad ; \qquad h = 0$$

Las condiciones iniciales en este segmento de curva es el último punto que ocupó la recta anterior; el ángulo que librará esta fuerza es:

$$p\ (t_2 - t_1) = 34.3103 \ (0.1374 - 0.046) = 3.1359 \ rad = 179.6774°$$

Centro del tercer arco de círculo

$$\frac{F_o}{k} = \frac{-10}{30} = - 0.3334 \ cm \qquad ; \qquad h = 0$$

El punto inicial de este arco de círculo es el punto final del arco anterior, la abertura del siguiente ángulo es:

$$p\ (t_3 - t_2) = 34.3103 \ (0.183 - 0.1374) = 1.5645 \ rad = 89.6421°$$

Como ya no hay fuerza excitadora, el centro será:

$$\frac{F_o}{k} = \frac{0}{30} = 0 \qquad ; \qquad h = 0$$

Y el sistema permanecerá en vibración libre.

14

2.3.1.6 RESPUESTA POR EL PLANO DE FASE EN SISTEMAS AMORTIGUADOS

Para llegar a la construcción del plano de fase, partiremos de la solución general para sistemas amortiguados.

$$x(t) = e^{-\xi_c pt}[C_1 \cos p't + C_2 \operatorname{sen} p't] + \frac{F_o}{K} \qquad \ldots(2.23)$$

derivando:

$$\dot{x}(t) = -ne^{-nt}[C_1 \cos p't + C_2 \operatorname{sen} p't] + e^{-nt}\ [-C_1 p' \operatorname{sen} p't + C_2 p' \cos p't]$$

dividiendo todo entre p' y observando en (2.23) que:

$$x(t) - \frac{F_o}{K} = e^{-nt}[C_1 \cos p't + C_2 \operatorname{sen} p't] \qquad \ldots(2.24)$$

se tiene:

$$\frac{\dot{x}(t)}{p'} = -\frac{n}{p'}[x(t) - \frac{F_o}{K}] + e^{-nt}[-C_1 \operatorname{sen} p't + C_2 \cos p't]$$

$$\frac{\dot{x}(t)}{p'} + \frac{n}{p'}[x(t) - \frac{F_o}{K}] = e^{-nt}[+ C_1 \operatorname{sen} p't + C_2 \cos p't] \qquad \ldots(2.25)$$

Antes de elevar al cuadrado y sumar determinaremos las constantes C_1 y C_2.

En $t = 0$ $\quad x = x_o$

$\dot{x} = \dot{x}_o$

$$C_1 = x_o - \frac{F_o}{K}$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_o}{p'} - \frac{n}{p'}(x_o - \frac{F_o}{K})$$

Sustitu'mos C_1 y C_2 en las ecuaciones(2.25) y (2.24)

$$\frac{\dot{x}(t)}{p'} + \frac{n}{p'}[x(t) - \frac{F_0}{K}] = e^{-nt}[-(x_0 - \frac{F_0}{K})\,\text{sen}\,p't + [\frac{\dot{x}_0}{p'} + \frac{n}{p'}(x_0 - \frac{F_0}{K})]\cos p't]\ldots(2.2$$

$$[x(t) - \frac{F_0}{K}] = e^{-nt}[(x_0 - \frac{F_0}{K})\cos p't + [\frac{\dot{x}_0}{p'} + \frac{n}{p'}(x_0 - \frac{F_0}{K})]\,\text{sen}\,p't]\ldots(2.27)$$

Elevamos al cuadrado y sumamos a (2.26) y (2.27).

$$[x(t) - \frac{F_0}{K}]^2 + [\frac{\dot{x}(t)}{p'} + \frac{n}{p'}(x(t) - \frac{F_0}{K})]^2 = e^{-2nt}[(x_0 - \frac{F_0}{K})^2 + [\frac{\dot{x}_0}{p'} + \frac{n}{p'}(x_0 - \frac{F_0}{K})]^2]\ldots(2.28)$$

Considerando como una constante (R_0) casi todo el segundo miembro porque no exista "t" y sacando raíz cuadrada a ambos miembros de (2.28) se tiene:

$$\sqrt{[x(t) - \frac{F_0}{K}]^2 + [\frac{\dot{x}(t)}{p'} + \frac{n}{p'}(x(t) - \frac{F_0}{K})]^2} = R_0 e^{-nt}$$

Esta es la ecuación de una espiral logarítmica (figura 2.53) en coordenadas polares, salvo un pequeño detalle. Según la geometría analítica la ecuación de la espiral logarítmica es:

$$r = R\,e^{-\alpha\theta}$$

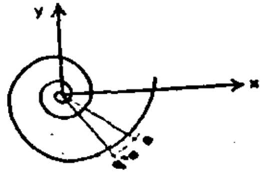


FIGURA 2.53

Donde θ es la variación del ángulo

Pero en nuestro caso, no podemos considerar que α sea "n" y que "t" sea la variación del ángulo; la variación del ángulo debe ser la frecuencia multiplicada por el tiempo, como se vió en el caso anterior, mediante transformaciones algebráicas podemos llegar a la forma exacta de la espiral logarítmica. Se tiene:

$$r = R_0 e^{-nt} = R_0 e^{-\frac{n}{n_c}pt} \quad ; \quad R_0 e^{-\frac{n}{n_c}\frac{p}{p'}p't}$$

de las vibraciones amortiguadas tenemos $p' = p\sqrt{1 - (\frac{n}{n_c})^2}$.entonces

$$r = R_0 e^{-\frac{n}{n_c}\frac{p}{p\sqrt{1-(\frac{n}{n_c})^2}}p't} = R_0 e^{-\frac{n/n_c}{\sqrt{1-(\frac{n}{n_c})^2}}p't} \qquad \ldots(2.29)$$

Ahora sí podemos decir que:

$$\alpha = \frac{\frac{n}{n_c}}{\sqrt{1 - (\frac{n}{n_c})^2}} \qquad y \qquad \theta = p't$$

donde p't sí es la variación del ángulo; y por esto ya tenemos la ecuación idéntica a la espiral logarítmica. Entonces "x" y "$\dot{x}$" satisfacen la ecuación de una espiral logarítmica referida a los ejes "x" y "$[\frac{\dot{x}}{p'} + \frac{n}{p'}(x(t) - \frac{F_0}{K})]$", con coordenadas de centro (0; $\frac{F_0}{K}$) y de radio variable según la expresión (2.29). Tal espiral logarítmica está ubicada en el plano de fase. Para trazarla se localiza el centro en el eje x (vertical) a una distancia F_0/k. Con las condiciones iniciales se determina el punto de inicio del movimiento. Una manera de hacerlo es localizar el punto (figura 2.54):

$$[x_0; \frac{\dot{x}_0}{p'} + \frac{n}{p'}(x_0 - \frac{F_0}{k})]$$

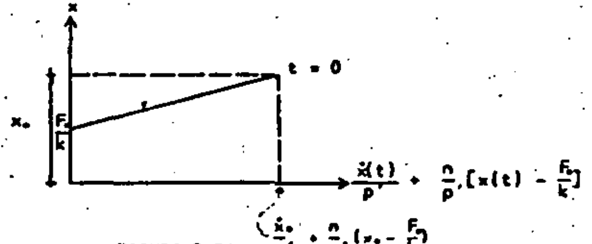


FIGURA 2.54

otra forma es la siguiente: localizamos el punto de coordenadas M $(\frac{\dot{x}_0}{p'}; \frac{F_0}{k})$ -ver fig. 2.55-. El punto de inicio del movimiento estará ubicado sobre la ta horizontal x_0 unidades arriba del eje de las abscisas. La intersección otra recta con la que pasa por el punto M, inclinada un ángulo α con respecto a la vertical, determina el punto correspondiente a t = 0. Como es sencillo obtener las coordenadas de M, si encontrásemos la manera de saber α, el punto t = 0 quedaría automáticamente determinado.

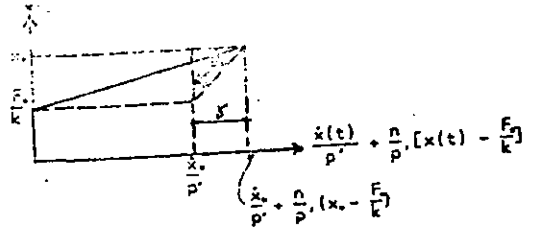


FIGURA 2.55

Determinación del ángulo α (ver fig. 2.55)

$$\gamma' = \frac{\dot{x}_0}{p'} + \frac{n}{p'}\left(x_0 - \frac{F_0}{k}\right) - \frac{\dot{x}_0}{p'} = \frac{n}{p'}\left(x_0 - \frac{F_0}{k}\right) \qquad \ldots(2.30)$$

Si se tiene: $$tg\alpha = \frac{\gamma}{x_0 - \frac{F_0}{k}}$$

Otro valor de γ' será: $\gamma = tg\alpha.(x_0 - \frac{F_0}{k})$ ...(2.31)

De las expresiones (2.30) y (2.31) se ve que $tg\alpha = \frac{n}{p'}$, de aquí:

$$\alpha = tg^{-1}\frac{n}{p'}$$

Tomando en cuenta que $p' = p\sqrt{1 - (n/n_c)^2}$ queda:

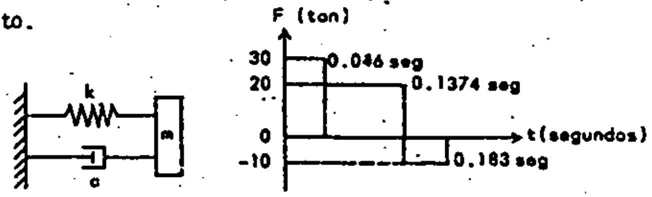
$$\alpha = tg^{-1}\frac{\frac{n}{n_c}}{1 - (\frac{n}{n_c})^2}$$

α ; resultó ser lo que "acompaña" a p't en la ecuación de la espiral logarítmica, en coordenadas polares. Por otra parte, de las propiedades de la espiral logarítmica se sabe que el complemento de α es el mismo ángulo que forma el radio y la tangente a la espiral y que además es el mismo para todos los puntos. En estas condiciones, bastan pocos puntos para hacer el trazo de la espiral. Claro está que desde el punto de vista numérico esta forma de determinar el punto t = 0, no tiene ventaja alguna sobre el anterior. Sin embargo, desde el punto de vista de cultura ingenieril -según la expresión del insigne maestro Julio E. Damy- se justifica plenamente su exposición.

Ante la presencia de una fuerza excitadora constituida por una serie de impulsos, se deberán considerar diversos arcos de espiral trazados desde su respectivo centro, tal como se hizo en el caso sin amortiguamiento.

El ejemplo que sigue deberá aclarar la eventual oscuridad que en la exposición anterior, amable lector, puedas tener.

PROBLEMA 2.9 Resolver el problema 2.8 pero considerando que tiene amortiguamiento.



k = 30 ton/cm
W = 25 ton
$\frac{n}{n_c} = 0.1$
condiciones iniciales
en t = 0 $x_0 = 2$ cm
$\dot{x}_0 = 60$ cm/seg

Calculamos p'

$p' = p\sqrt{1-(\frac{n}{n_c})^2} = 34.3103\sqrt{1-(0.1)^2} = 34.1383$

$p = 34.3103 = n_c$; $\frac{n}{n_c} = 0.1$; $n = 0.1\ p = 3.43103$

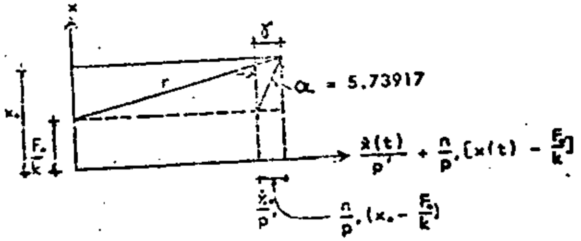
determinación del punto conocido (condiciones iniciales)

$\frac{\dot{x}_0}{p'} = 1.75738$ cm

$\frac{n}{p'}(x_0 - \frac{F_0}{k}) = 0.1005$ cm

$x_0 = 2$ cm

$tg\alpha = \frac{n}{p'} = 0.1005$; $\alpha = 5.73917$



Calculo del valcr de R₀ :

$$R_0 = \sqrt{(x_0 - \frac{F_0}{k})^2 + [\frac{\dot{x}_0}{p'} + \frac{n}{p'}(x_0 - \frac{F_0}{k})]^2} = 2.11 \text{ cm}$$

$R_0 e^{-nt}$, se ve que este radio, es el de una espiral logarítmica, pero después de un tiempo igual al de un período, comprobará la ecuación del radio

$t = \frac{2\pi}{p'} = T$; $R_0 e^{-\frac{n2\pi}{p'}}$

obsérvese que p' altera el ángulo después de un período. Por esto se debe obligar a que después de un período el ángulo sea el mismo

$e^{-nt} = e^{-n\frac{p'}{p'}t} = e^{-\alpha p' t}$

Se sustituye $t = \frac{2\pi}{p'}$

$e^{-\alpha p'\frac{2\pi}{p'}} = e^{-\alpha 2\pi}$

Ahora. si nada altera al ángulo: usaremos intervalos de tiempo de

$t = 0.00765$ seg.

$e^{-\alpha p' t} = e^{-0.1(34.1421)(0.00765)} = 1.026$

$k_2 = \frac{R_0}{e^{-\alpha p' t}} = \frac{2.11}{1.026} = 2.055$ cm.

$R_1 = 2.1100$ cm
$R_2 = 2.0550$ cm
$R_3 = 2.0026$ cm
$R_4 = 1.9510$ cm
$R_5 = 1.9006$ cm
$R_6 = 1.8517$ cm
$R_7 = 1.8039$ cm

El ángulo p't del arco de la espiral logarítmica será afectado solamente por la variación de la frecuencia p'.

$p'\ t = 34.1417\ (0.046) = 1.57$ rad $= 89.99°$

La segunda parte de la espiral logarítmica comienza con el punto final del arco anterior. el centro del nuevo arco variará con la magnitud de la fuerza y el radio se obtendrá gráficamente.

$\frac{F_0}{k} = \frac{20 \text{ ton.}}{30 \text{ ton/cm}} = 0.6667$ cm ; $h = 0$

$R_0 = 2.147$ cm (gráficamente)

El ángulo será: $p't = 34.1477\ (t_2 - t_1)$
$p't = 34.1417\ (0.0914) = 3.120$ rad. $= 178.8076°$

Los radios variarán a intervalos de tiempo de t = 0.0153 seg.

R_1 = 2.1474 cm
R_2 = 2.0351 cm
R_3 = 1.9343 cm
R_4 = 1.8355 cm
R_5 = 1.7421 cm
R_6 = 1.6535 cm
R_7 = 1.5714 cm

De la misma manera que para el arco anterior:

$$\frac{F_o}{K} = -\frac{10}{30} = -0.3334 \text{ cm} \quad : h = 0$$

R_o = 0.756 cm (gráficamente)

El ángulo total de la fuerza 3:

$p't = 34.1417\,(0.183 - 0.1374) = 1.5568 \text{ rad} = 89.208^\circ$

en el tramo 3 de la espiral logarítmica se dibuja para intervalos de t = 0.00765 seg.

R_1 = 0.7560 cm
R_2 = 0.7365 cm
R_3 = 0.7125 cm
R_4 = 0.7002 cm
R_5 = 0.6821 cm
R_6 = 0.6646 cm
R_7 = 0.6470 cm

Cuando se sigue trazando para esta gráfica se tiene como centro de arco el origen de las coordenadas.

$$\frac{F_o}{K} = \frac{0}{30} \quad ; \quad h = 0$$

Y como punto inicial; el punto final del arco anterior.

Se trazará para intervalos de tiempo t = 0.00765 seg.

/8

R_1 = 0.4972 cm
R_2 = 0.4245 cm
R_3 = 0.4028 cm
R_4 = 0.3823 cm
R_5 = 0.3629 cm
R_6 = 0.3445 cm
R_7 = 0.3270 cm
R_8 = 0.3104 cm
R_9 = 0.2947 cm
R_{10} = 0.2797 cm
R_{11} = 0.2655 cm
R_{12} = 0.2521 cm
R_{13} = 0.2393 cm

Nos interesa la matriz de rigidez lineal $[K]$

$$[K] = [K_{22}] - [K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}]$$

Calculándola queda:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{3\ EI}{L_1^3} + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & \frac{3\ EI}{L_4^3} + k_3 \end{bmatrix}$$

Calculamos pues la rigidez de las barras.

$$k_1 = \frac{3\ EI}{L_1^3} = \frac{3(0.000675)\ (2.1X10\ )}{64} = 66.445 \text{ ton/m}$$

$$k_4 = \frac{3\ EI}{L_4^3} = \frac{3(0.000675)\ (2.1X10\ )}{27} = 157.5 \text{ ton/m}$$

Sustituyendo valores en $[K]$

$$[K] = \begin{bmatrix} 116.445 & -50 & 0 \\ -50 & 100 & -50 \\ 0 & -50 & 207.5 \end{bmatrix}$$

La matriz de las masas es:

$$[M] = \begin{bmatrix} 1.529 & 0 & 0 \\ 0 & 1.529 & 0 \\ 0 & 0 & 1.019 \end{bmatrix} \qquad [M]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.664 & 0 & 0 \\ 0 & 0.664 & 0 \\ 0 & 0 & 0.981 \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto $[M]^{-1}\ [K]$:

$$[M]^{-1}\ [K] = \begin{bmatrix} 76.155 & -32.7 & 0 \\ -32.7 & 65.4 & -32.7 \\ 0 & -49.05 & 203.558 \end{bmatrix}$$

19

Dado que importa la proporcionalidad de las componentes de $\{X\}$ para simplificar las operaciones numéricas del proceso iterativo. dividimos los coeficientes de $[M]^{-1}\ [K]$ entre 32.7.

$$[M]^{-1}\ [K] = \begin{bmatrix} 2.3289 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1.5 & 6.225 \end{bmatrix}$$

Empezamos a iterar. De antemano sabemos que vamos a obtener el último modo. propongamos pues un vector $\{{}^{o}X\}$ que pensemos se asemeje a este.

$$\{{}^{o}X\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\{{}^{1}X\} = [M]^{-1}\ [K]\ \{{}^{o}X\}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3289 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1.5 & 6.225 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.328 \\ -6 \\ 9.225 \end{Bmatrix}$$

Más que los valores resultantes de la iteración nos interesa la proporcionalidad entre x_1. x_2 y x_3. dividamos pues cada miembro del vector entre x_1.

$$\{{}^{1}X\} = \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -1.38603 \\ 2.13103 \end{Bmatrix}$$

Con este vector entramos a la segunda iteración. siguiendo así hasta encontrar uno que $\{{}^{n}X\} = \{{}^{n-1}X\}$.

NOTA: el símbolo $\approx$ denota proporcionalidad.

$$\{{}^{2}X\} = [M]^{-1}\ [K]\{{}^{1}X\} = \begin{Bmatrix} 3.71493 \\ -5.90309 \\ 15.34470 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -1.58902 \\ 4.13054 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{{}^{3}X\right\} = [M]^{-1}[K]\left\{{}^{2}X\right\} = \begin{Bmatrix} 3.91792 \\ -8.30858 \\ 15.34470 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -2.12066 \\ 4.13054 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{{}^{4}X\right\} = [M]^{-1}[K]\left\{{}^{3}X\right\} = \begin{Bmatrix} 4.44956 \\ -12.41250 \\ 47.82170 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -2.78961 \\ 10.74750 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{{}^{5}X\right\} = [M]^{-1}[K]\left\{{}^{4}X\right\} = \begin{Bmatrix} 5.11851 \\ -17.32670 \\ 71.08760 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -3.38511 \\ 13.88840 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{{}^{6}X\right\} = [M]^{-1}[K]\left\{{}^{5}X\right\} = \begin{Bmatrix} 5.71401 \\ -21.65860 \\ 91.53270 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -4.02000 \\ 17.22470 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{{}^{7}X\right\} = [M]^{-1}[K]\left\{{}^{6}X\right\} = \begin{Bmatrix} 6.11900 \\ -24.59990 \\ 105.40400 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -4.02000 \\ 17.22470 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{{}^{8}X\right\} = [M]^{-1}[K]\left\{{}^{7}X\right\} = \begin{Bmatrix} 6.13480 \\ -26.26480 \\ 113.25400 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -4.13600 \\ 17.83830 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{{}^{9}X\right\} = [M]^{-1}[K]\left\{{}^{8}X\right\} = \begin{Bmatrix} 6.46500 \\ -27.11210 \\ 117.24900 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -4.19316 \\ 18.13370 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{{}^{10}X\right\} = [M]^{-1}[K]\left\{{}^{9}X\right\} = \begin{Bmatrix} 6.55206 \\ -27.52000 \\ 119.17200 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -4.21953 \\ 18.27220 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{{}^{11}X\right\} = [M]^{-1}[K]\left\{{}^{10}X\right\} = \begin{Bmatrix} 6.54843 \\ -27.71120 \\ 120.07400 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -4.23173 \\ 18.33600 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{{}^{12}X\right\} = [M]^{-1}[K]\left\{{}^{11}X\right\} = \begin{Bmatrix} 6.56064 \\ -27.79970 \\ 120.49100 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -4.23735 \\ 18.36500 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{{}^{13}X\right\} = [M]^{-1}[K]\left\{{}^{12}X\right\} = \begin{Bmatrix} 6.56625 \\ -27.84040 \\ 120.68400 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -4.23992 \\ 18.37900 \end{Bmatrix}$$

$\left\{{}^{13}X\right\}$ es muy parecido a $\left\{{}^{12}X\right\}$. Tomemos pues a $\left\{{}^{13}X\right\}$ como el tercer modo

$$\left\{{}^{3}X\right\} = \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -4.23992 \\ 18.37900 \end{Bmatrix}$$

20

Con el coeficiente de Rayleigh determinamos la frecuencia cuadrada

$$p_3^2 = \frac{\left\{{}^{3}X\right\}^T [K] \left\{{}^{3}X\right\}}{\left\{{}^{3}X\right\}^T [M] \left\{{}^{3}X\right\}} = \frac{\begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -4.23992 \\ 18.3790 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 116.445 & -50 & 0 \\ -50 & 100 & -50 \\ 0 & -50 & 207.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -4.23992 \\ 18.37900 \end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -4.23992 \\ 18.37900 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1.529 & 0 & 0 \\ 0 & 1.529 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0194 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -4.23992 \\ 18.37900 \end{Bmatrix}}$$

$$= \frac{80221.6}{373.357} = 214.8656$$

El período de vibración será:

$$T_3 = \frac{2\pi}{\sqrt{p_3^2}} = 0.428 \text{ seg}$$

El tercer modo normalizado quedará:

$$\left\{{}^{3}Y\right\} = \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -4.23992 \\ 18.37900 \end{Bmatrix} \text{ y } \sqrt{373.357} = \begin{Bmatrix} 0.0517528 \\ -0.2194280 \\ 0.9511750 \end{Bmatrix}$$

Estamos en condiciones de obtener el segundo modo. Propongamos el siguiente vector.

$$\left\{{}^{o}X\right\} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{Bmatrix}$$

Dado que el proceso iterativo nos llevará al tercer modo. para que esto no suceda se lo quitamos.

$$\left\{{}^{o}_{s}X\right\} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{Bmatrix}' - C_3 \begin{Bmatrix} 0.0517528 \\ -0.2194280 \\ 0.9511750 \end{Bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{Bmatrix} 0.0517528 \\ -0.2194280 \\ 0.951175 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1.529 & 0 & 0 \\ 0 & 1.529 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0194 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{Bmatrix}$$

$$C_3 = -0.237931$$

Entonces el vector $\{{}^{0}X\}$ propuesto sin el modo 3 quedará:

$$\{{}^{0}_{3}X\} = \begin{Bmatrix} 1.012310 \\ -0.552209 \\ -0.273656 \end{Bmatrix}$$

Con este vector entramos a la primera iteración para obtener el segundo modo. Dado que en el proceso iterativo el tercer modo tratará de aparecer, tendramos que estarlo quitando constantemente. Para una convergencia más rápida lo haremos en cada iteración.

$$\{{}^{1}X\} = [M]^{-1}\ [K]\ \{{}^{0}_{3}X\} = \begin{Bmatrix} 2.90979 \\ -1.84305 \\ -0.87538 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -0.63339 \\ -0.30084 \end{Bmatrix}$$

Quitamos el tercer modo

$$\{{}^{1}_{3}X\} = \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -0.63339 \\ -0.30084 \end{Bmatrix} - (-6.5207X10^{-5}) \begin{Bmatrix} 0.0517528 \\ -0.219428 \\ 0.951175 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -0.63341 \\ -0.30078 \end{Bmatrix}$$

$$\{{}^{2}X\} = [M]^{-1}\ [K]\ \{{}^{1}_{3}X\} = \begin{Bmatrix} 2.96232 \\ -1.96605 \\ -1.92223 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -0.66368 \\ -0.31132 \end{Bmatrix}$$

Quitamos el tercer modo

$$\{{}^{2}_{3}X\} = \{{}^{2}X\} - (-6.4164X10^{-5})\ \{{}^{3}Y\} = \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -0.66369 \\ -0.31126 \end{Bmatrix}$$

$$\{{}^{3}X\} = [M]^{-1}\ [K]\ \{{}^{2}_{3}X\} = \begin{Bmatrix} 2.99261 \\ -2.03272 \\ -0.94859 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -0.67371 \\ -0.31479 \end{Bmatrix}$$

21

Quitamos el tercer modo

$$\{{}^{3}_{3}X\} = \{{}^{3}X\} - (-6.383X10^{-5})\ \{{}^{3}Y\} = \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -0.67372 \\ -0.31473 \end{Bmatrix}$$

$$\{{}^{4}X\} = [M]^{-1}\ [K]\ \{{}^{3}_{3}X\} = \begin{Bmatrix} 3.00590 \\ -2.03813 \\ -0.95073 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -0.67804 \\ -0.31629 \end{Bmatrix}$$

El vector $\{{}^{4}X\}$ es muy parecido al $\{{}^{3}X\}$. considerémoslo pues como el segundo modo.

$$\{{}^{2}X\} = \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ -0.67804 \\ -0.31629 \end{Bmatrix}$$

Obtenemos la frecuencia cuadrada

$$p_2^2 = \frac{\{{}^{2}X\}^T\ [K]\ \{{}^{2}X\}}{\{{}^{2}X\}^T\ [M]\ \{{}^{2}X\}} = \frac{229.536}{2.33393} = 98.3474$$

Y el periodo será: $T_2 = \dfrac{2\pi}{p_2} = 0.633$ seg

El segundo modo normalizado es:

$$\{{}^{2}Y\} = \{{}^{2}X\} / \sqrt{\{{}^{2}X\}^T\ [M]\ \{{}^{2}X\}} = \begin{Bmatrix} 0.654571 \\ -0.443828 \\ -0.207032 \end{Bmatrix}$$

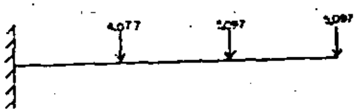
Estamos en condiciones de obtener el primer modo. Proponemos el siguiente vector

$$\{{}^{0}X\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

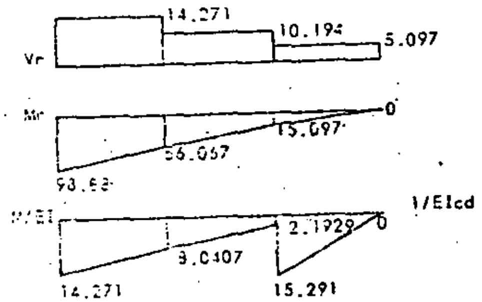
Para que no converja hacia el segundo o tercer modo se los quitamos. lo cual hacemos con la expresión:

$$\{{}^{0}_{2,3}X\} = \left[[I] - \{{}^{3}Y \vdots {}^{2}Y\}\ \{{}^{3}Y \vdots {}^{2}Y\}^T [M]\right]\ \{{}^{0}X\}$$

Rayleigh nos dice que si cargamos la viga con la fuerza estática. la configuración se parecerá al primer modo, por lo tanto este vector $\{F\}$ nos llevará rápidamente hacia allá.

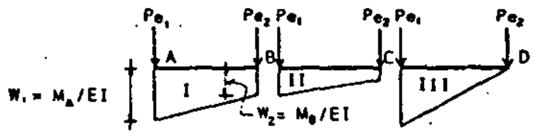


Los desplazamientos que encontremos en B. C. y D serán $\{^1X\}$. o sea el vector mejorado. Ahora bien. si vamos a tener que medir constantemente esos desplazamientos nos conviene usar un método que nos permita hacerlo rápidamente. Usemos pues el método de la viga conjugada. Este método nos dice que el desplazamiento en un punto de la viga es igual al momento que produce en ese punto el diagrama de momentos dividido entre EI. Entonces



Si empotramos y hacemos suma de momentos. por ejemplo. en el punto B el diagrama de momentos dividido entre EI. M_B serán los desplazamientos en dicho punto. Bueno. dado que esto resulta laborioso tambien (debido a la irregularidad del diagrama). por el método de Newmark. la carga distribuida que representa el diagrama de momentos. la vamos a transformar en carga concentrada (p_e) en los lugares donde vamos a medir los desplazamientos. Esto se hará dividiendo el diagrama en las áreas I. II y III considerándolas como se muestra en la figura.

22

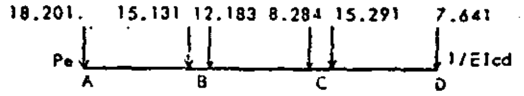


Cuando el diagrama proviene de fuerzas concentradas. las fórmulas que da Newmark (fácilmente de deducir) para encontrar las fuerzas equivalentes son:

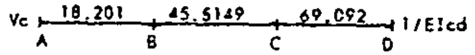
$$P_{e_1} = \frac{L}{6}(2W_1 + W_2)$$

$$P_{e_2} = \frac{L}{6}(2W_2 + W_1)$$

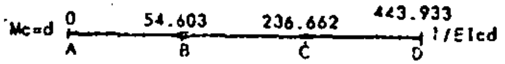
Entonces el diagrama M/EI convertido a cargas concentradas quedará:



Encontrando los cortantes que producen estas cargas.



Con esto encontramos los momentos en los puntos B. C y D que por viga conjugada serán los desplazamientos.

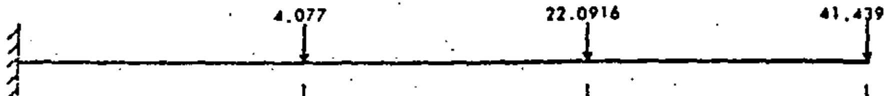


Luego pues. y dado que importa la proporcionalidad entre x_1. x_2 y x_3:

$$\{^1X\} = \begin{Bmatrix} 54.603 \\ 236.662 \\ 443.933 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ 4.33425 \\ 8.13021 \end{Bmatrix}$$

Como se ve. $\{^1X\}$ es diferente de $\{^0X\}$. Sigamos iterando. Ahora cargamos la estructura con:

$$\{F\} = [M]\{^1X\} = \begin{Bmatrix} 4.0770 \\ 22.0916 \\ 41.4397 \end{Bmatrix}$$



Vr		67.60803			63.53130			41.43970		
Mr	551.26900		378.44400			124.31900			0	
/EI	83.36100		54.27360			17.82890	124.31900		0	1/EIcd
Pe	110.49800		95.95400	84.25070		59.95400	124.31900		62.15900	1/EIcd
Vc		110.49800			290.70300			474.97600		1/EIcd
Mc			331.49400			1494.31000			2919.23000	1/EIcd

$$\{^2X\} = \begin{Bmatrix} 331.49400 \\ 1494.31000 \\ 2919.23000 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ 4.50780 \\ 8.80630 \end{Bmatrix} \qquad \{F\} = \begin{Bmatrix} 4.07700 \\ 22.97620 \\ 44.88570 \end{Bmatrix}$$

Vr		71.93890			67.86190			44.88590		
Mr	621.92100		406.10500			134.65700			0	
1/EI	69.19120		58.24020			19.31150	134.65700		0	1/EIcd
Pe	119.31100		102.83600	90.52830		64.57560	134.65700		67.32830	1/EIcd
Vc		118.31100			311.67600			510.90800		1/EIcd
Mc			354.93400			1601.64000			3134.3600	1/EIcd

$$\{^3X\} = \begin{Bmatrix} 354.93400 \\ 1601.64000 \\ 3134.36000 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00003 \\ 4.51249 \\ 8.83083 \end{Bmatrix} \qquad \{F\} = \begin{Bmatrix} 4.07700 \\ 23.00200 \\ 45.01070 \end{Bmatrix}$$

Vr		72.08790			68.01090			45.01070		
Mr	623.33900		407.07600			135.03200			0	
M/EI	98.39460		58.37970			19.36530	135.03200		0	1/EId
Pe	112.55400		103.07700	90.74980		64.74020	135.03200		67.51600	1/EId
Vc		118.58400			312.41080			512.18300		1/EId
Mc			355.75300			1605.40000			3141.950	1/EId

$$\{^4X\} = \begin{Bmatrix} 355.75300 \\ 1605.40000 \\ 3141.95000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ 4.51227 \\ 8.83182 \end{Bmatrix}$$

Como vemos $\{^4X\}$ es muy parecido a $\{^3X\}$. consideremos pues a $\{^4X\}$ como el primer modo. Con el coeficiente de Rayleigh determinamos p_1^2. Pero no conocemos $[K]$. ¿Pero qué es $[K]\{X\}$? Pues las fuerzas $\{F\}$ que produjeron los desplazamientos $\{^1X\}$. Entonces

23

$$[K]\{^1X\} = \begin{Bmatrix} 4.07700 \\ 23.00200 \\ 45.01070 \end{Bmatrix} \quad EI_{co}/355.753$$

$[K]\{^1X\}$ se tiene que dividir entre $x_1 = 355.753$. dado que hemos dividido los desplazamientos $\{^1X\}$ entre ese componente del vector.

$$p_1^2 = \frac{\{^1X\}^T\,[K]\,\{^1X\}}{\{^1X\}^T\,[M]\,\{^1X\}} = \frac{40388.8}{505.426} = 79.910$$

Y el período es: $T_1 = \frac{2\pi}{p_1} = 0.7028$ seg

El primer modo normalizado es:

$$\{^1Y\} = \begin{Bmatrix} 0.044479 \\ 0.200724 \\ 0.392837 \end{Bmatrix}$$

Estamos en condiciones de obtener el segundo módo. Propongamos el siguiente vector

$$\{^0X\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

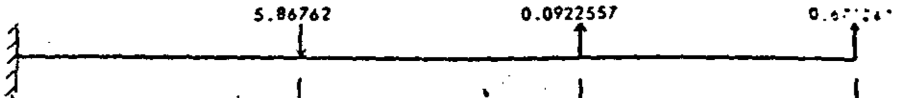
Dado que el método converge el primer modo. para que esto no suceda se lo quitamos.

$$\{^0_1X\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{Bmatrix} - C_1 \begin{Bmatrix} 0.04448 \\ 0.20072 \\ 0.39284 \end{Bmatrix}$$

$$C_1 = \{^1Y\}^T[M]\{^0X\} = -9.87402$$

Por lo tanto el vector $\{^0_1X\}$ sin el primer modo será:

$$\{^0_1X\} = \begin{Bmatrix} 1.43920 \\ -0.01810 \\ -0.12110 \end{Bmatrix} \qquad \{F\} = [M]\{^0_1X\} = \begin{Bmatrix} 5.86762 \\ -0.09225 \\ -0.61725 \end{Bmatrix}$$



		5.15812		-0.709502		-0.61725		
	10.73460		-4.68975		-1.85174		0	
	1.54665		-0.67257		-0.26556 -1.85174		0	1/EIcd
	1.21036		0.10075 -1.07380		-0.80246 -1.85174		-0.92590	1/EIcd
		1.21036		0.27332		-2.41689		1/EIcd
			3.63108		4.58035		-2.67030	1/EIcd

$$\{{}^1X\} = \begin{Bmatrix} 3.63108 \\ 4.58035 \\ -2.67030 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ 1.26143 \\ -0.73540 \end{Bmatrix} \qquad \{F\} = \begin{Bmatrix} 4.07700 \\ 6.24950 \\ -3.74835 \end{Bmatrix}$$

		6.75815		2.68114		-3.74835		
	19.75400		-0.52047		-11.24510		0	
	2.63296		-0.07464		-1.61268 -11.24510		0	1/EIcd
	2.79564		1.34184 -1.17464		-2.20000 -11.24510		-5.62250	1/EIcd
		2.79564		2.69284		-10.48220		1/EIcd
			8.38692		20.23830		-11.2084	1/EIcd

$$\{{}^2X\} = \begin{Bmatrix} 8.38692 \\ 20.23830 \\ -11.20840 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ 2.41307 \\ -1.33641 \end{Bmatrix}$$

Quitamos el primer modo

$$\{{}^2_1X\} = \{{}^2X\} - (-0.025817)\{{}^1Y\} = \begin{Bmatrix} 1.001148 \\ 2.418252 \\ -1.326268 \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto:
$$\{F\} = [M]\{{}^2_1X\} = \begin{Bmatrix} 4.081680 \\ 12.325800 \\ -6.759990 \end{Bmatrix}$$

		9.64752		5.56584		-6.75999		
	30.92600		1.98341		-20.28000		0	
	4.42517		0.28444		-2.90840 -20.28000		0	1/EIcd
	4.57739		2.20503 -1.55967		-3.68823 -20.28000		-10.4000	1/EIcd
		4.57739		5.51979		-18.44850		1/EIcd
			13.73220		35.81120		-19.5340	1/EIcd

$$\{{}^3X\} = \begin{Bmatrix} 13.73220 \\ 35.81120 \\ -19.53400 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ 2.60783 \\ -1.42251 \end{Bmatrix} \qquad \{F\} = \begin{Bmatrix} 4.07700 \\ 13.29210 \\ -7.25055 \end{Bmatrix}$$

Vr		10.11860		6.04156		-7.25055		
Mr	32.77020		2.41456		-21.75170		0	
M/EI	4.69966		0.34628		-3.11946 -21.75170		0	1/EIcd
Pe	4.87280		2.69611 -1.61793		-3.92840 -21.75170		-10.8760	1/EIcd
Vc		4.87280		5.95097		-19.72910		1/EIcd
Mc			14.61840		38.42230		-20.7650	1/EIcd

$$\{{}^4X\} = \begin{Bmatrix} 14.61840 \\ 38.42230 \\ -20.76500 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ 2.62835 \\ -1.42048 \end{Bmatrix}$$

Quitamos el primer modo

$$\{{}^4_1X\} = \{{}^4X\} - (0.0260959)\{{}^1Y\} = \begin{Bmatrix} 0.998839 \\ 2.623112 \\ -1.430720 \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto:
$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 4.072270 \\ 13.370000 \\ -7.292380 \end{Bmatrix}$$

Vr		10.14990		6.07762		-7.29238		
Mr	32.88300		2.43335		-21.87710		0	
M/EI	4.71583		0.34897		-3.13745 -21.87710		0	1/EIcd
Pe	4.89032		2.70689 -1.62634		-3.95062 -21.87710		-10.9385	1/EIcd
Vc		4.89032		5.97087		-19.85690		1/EIcd
Mc			14.67100		38.54440		-21.0163	1/EIcd

$$\{{}^5X\} = \begin{Bmatrix} 14.67100 \\ 38.54440 \\ -21.01630 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ 2.62794 \\ -1.43251 \end{Bmatrix}$$

Se ve que $\{{}^5X\}$ es muy parecido a $\{{}^4X\}$. tomémoslo pues como el segundo modo. Calculamos la frecuencia cuadrada.

$$[K]\{{}^2X\}\, EI_{co}/14.671 = \begin{Bmatrix} 7891.437 \\ 25909.017 \\ -14131.518 \end{Bmatrix}$$

$$P_2^2 = \frac{\{{}^2X\}^T\,[K]\,\{{}^2X\}}{\{{}^2X\}^T\,[M]\,\{{}^2X\}} = \frac{96222.3}{49.7367} = 1934.634$$

El período será:

$$T_2 = \frac{2\pi}{P_2} = 0.142 \text{ seg}$$

El segundo modo normalizado quedará:

$$\{{}^2Y\} = \begin{Bmatrix} 1.00000 \\ 2.62794 \\ -1.43251 \end{Bmatrix} \sqrt{\{{}^2X\}^T [M] \{{}^2X\}} = \begin{Bmatrix} 0.141795 \\ 0.372529 \\ -0.203123 \end{Bmatrix}$$

Podemos conocer ahora el tercer modo. Propongamos el siguiente vector:

$$\{{}^0X\} = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ -0.50 \\ 0.25 \end{Bmatrix}$$

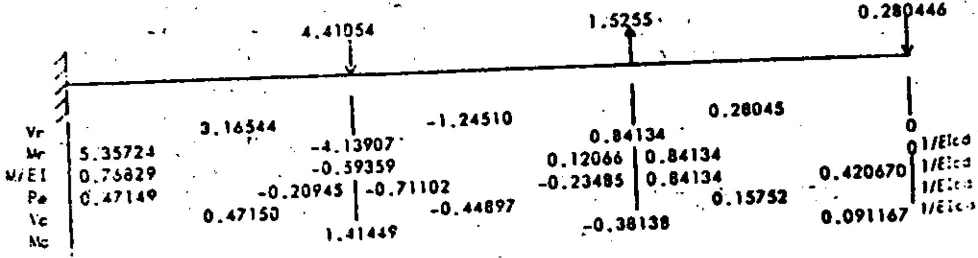
Para que no converja al primero, ni al segundo modo se los quitamos. Lo cual haremos con la siguiente expresión:

$$\{{}^0_{12}X\} = ([I] - \{{}^1Y \mid {}^2Y\} \{{}^1Y \mid {}^2Y\}^T [M]) \{{}^0X\}$$

$$\{{}^0_{12}X\} = \begin{bmatrix} 0.909962 & -0.314816 & 0.0577404 \\ -0.251816 & 0.086918 & -0.0161133 \\ 0.046185 & -0.016113 & 0,0031180 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.00 \\ -0.50 \\ 0.25 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.08181 \\ -0.29930 \\ 0.05502 \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\{F\} = [M]\{{}^0_{12}X\} = \begin{Bmatrix} 4.410540 \\ -1.525550 \\ 0.280446 \end{Bmatrix}$$



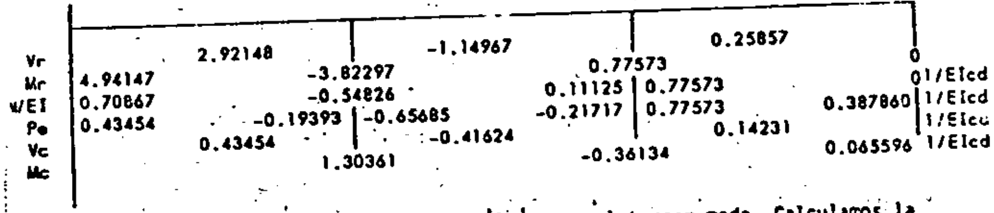
$$\{{}^1X\} = \begin{Bmatrix} 1.41449 \\ -0.38138 \\ 0.09117 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1.000000 \\ -0.269624 \\ 0.064452 \end{Bmatrix}$$

2≤

Quitamos nuevamente el primero y segundo modo

$$\{{}^1_{12}X\} = ([I] - \{{}^1Y \mid {}^2Y\}\{{}^1Y \mid {}^2Y\}^T [M]) \{{}^1X\} = \begin{Bmatrix} 0.998566 \\ -0.276290 \\ 0.050731 \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto: $\{F\} = [M]\{{}^1_{12}X\} = \begin{Bmatrix} 4.071150 \\ -1.408250 \\ 0.258576 \end{Bmatrix}$



Podemos considerar pues a $\{{}^3X\}$ como el tercer modo. Calculamos la frecuencia cuadrada.

$$[K]\{{}^3X\} EI_{cd}/1.30361 = \begin{Bmatrix} 88766.856 \\ -30712.229 \\ 5639.229 \end{Bmatrix}$$

$$p_3^2 = \frac{\{{}^3X\}^T [K] \{{}^3X\}}{\{{}^3X\}^T [M] \{{}^3X\}} = \frac{97583.7}{4.48152} = 21774.688$$

El periodo es: $T_3 = \frac{2\pi}{p_3} = 0.0426$ seg

El tercer modo normalizado es:

$$\{{}^3Y\} = \{{}^3X\} \sqrt{\{{}^3X\} [M] \{{}^3X\}} = \begin{Bmatrix} 0.472375 \\ -0.130936 \\ 0.023769 \end{Bmatrix}$$

PRIMER MODO

$$\{{}^1Y\} = \begin{Bmatrix} 0.258 \\ 0.402 \end{Bmatrix}$$

$p_1^2 = 230.722$

$T_1 = 2\pi/p_1 = 0.413$ seg

SEGUNDO MODO

$$\{{}^2Y\} = \begin{Bmatrix} 0.360 \\ -0.289 \end{Bmatrix}$$

$p_2^2 = 1449.067$

$T_2 = 2\pi/p_2 = 0.165$ seg

Matricialmente:

$$[Y] = \begin{bmatrix} 0.258 & 0.360 \\ 0.402 & -0.289 \end{bmatrix}$$

Sabemos que:

$$\{X\} = [Y]\{U(t)\}$$

Por lo tanto

$$\{\dot{X}\} = [Y]\{\dot{U}(t)\}$$
$$\{\ddot{X}\} = [Y]\{\ddot{U}(t)\}$$

Sustituyendo en la ecuación de movimiento

$$[K]\{X\} + [M]\{\ddot{X}\} = \{F\}$$
$$[K][Y]\{U(t)\} + [M][Y]\{\ddot{U}(t)\} = \{F\}$$

Para desacoplar los modos premultiplicamos por $[Y]^T$

$$[Y]^T[K][Y]\{U(t)\} + [Y]^T[M][Y]\{\ddot{U}(t)\} = [Y]^T\{F\}$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} p_1^2 & 0 \\ 0 & p_2^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.258 & 0.402 \\ 0.360 & -0.289 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 10 \text{ sen } 20t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

o bien:

$$p_1^2\, u_1(t) + \ddot{u}_1(t) = 2.58 \text{ sen } 20t \qquad \ldots(1)$$
$$p_2^2\, u_2(t) + \ddot{u}_2(t) = 3.6 \text{ sen } 20t \qquad \ldots(2)$$

Que son dos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden no homogéneas, que se pueden solucionar independientemente. Se sabe que la solución homogénea para estas ecuaciones es: $u_H = C_1 \cos pt + C_2 \text{ sen } pt$

la solución particular a la 1 es:

$$u_{p_1} = 2.58 \text{ A sen } 20t$$

entonces:

$$\dot{u}_{p_1} = 2.58\ (20) \text{ A cos } 20t$$
$$\ddot{u}_{p_1} = -2.58\ (400) \text{ A sen } 20t$$

llevando u_{p_1} y $\ddot{u}_{p_1}$ a 1 encontramos el valor de la constante A

$$230.722\, u_1(t) + \ddot{u}_1(t) = 2.58 \text{ sen } 20t$$
$$230.722(2.58) \text{ A sen } 20t - 2.58\ (400) \text{ A sen } 20t = 2.58 \text{ sen } 20t$$
$$A = \frac{1}{230.722 - 400} = -0.0059$$

La solución particular será pues:

$$u_{p_1} = 2.58 \text{ A sen } 20t = -0.01522 \text{ sen } 20t$$

La solución a la no homogénea, es la homogénea más la particular. Entonces la solución a la 1 será:

$$\underline{u_1 = C_1 \cos p_1 t + C_2 \text{ sen } p_1 t - 0.01522 \text{ sen } 20t} \qquad \ldots(3)$$

Procediendo de la misma forma con la 2 encontramos su solución

$$\underline{u_2 = C_1 \cos p_2 t + C_2 \text{ sen } p_2 t + 0.00343 \text{ sen } 20t} \qquad \ldots(4)$$

sustituyendo 3 y 4 en $\{X\} = [Y]\{U(t)\}$ encontramos la respuesta de las masas y en consecuencia de la estructura a la fuerza excitadora.

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.258 & 0.360 \\ 0.402 & -0.289 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

o sea:

$$x_1 = 0.258\, u_1 + 0.360\, u_2$$
$$x_2 = 0.402\, u_1 - 0.289\, u_2$$

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

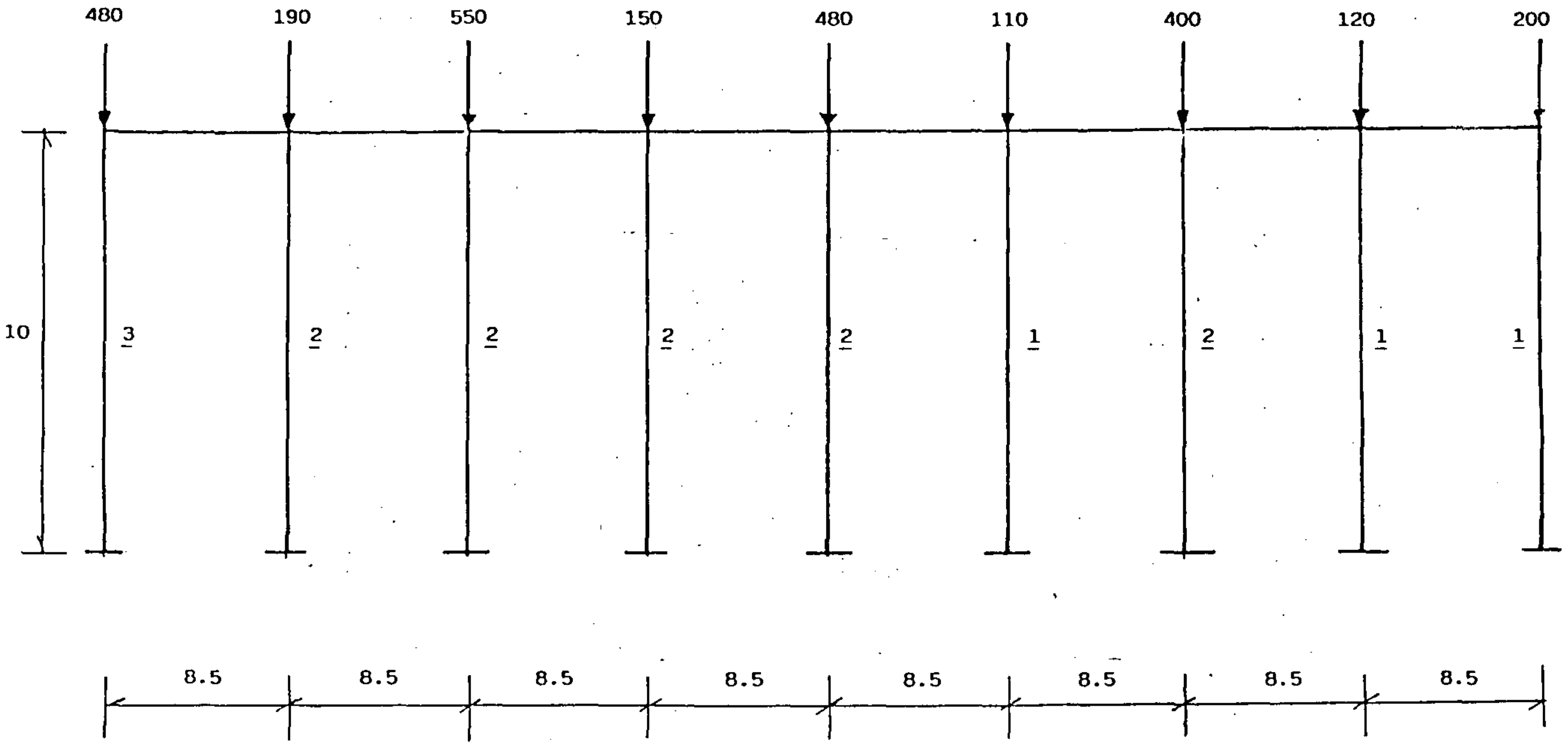
ANALISIS ESTRUCTURAL

INTERACCION SUELOS-ESTRUCTURAL

AUTOR:
M. EN I. AGUSTIN DEMENEGHI COLINA

SEP-OCT. 92

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

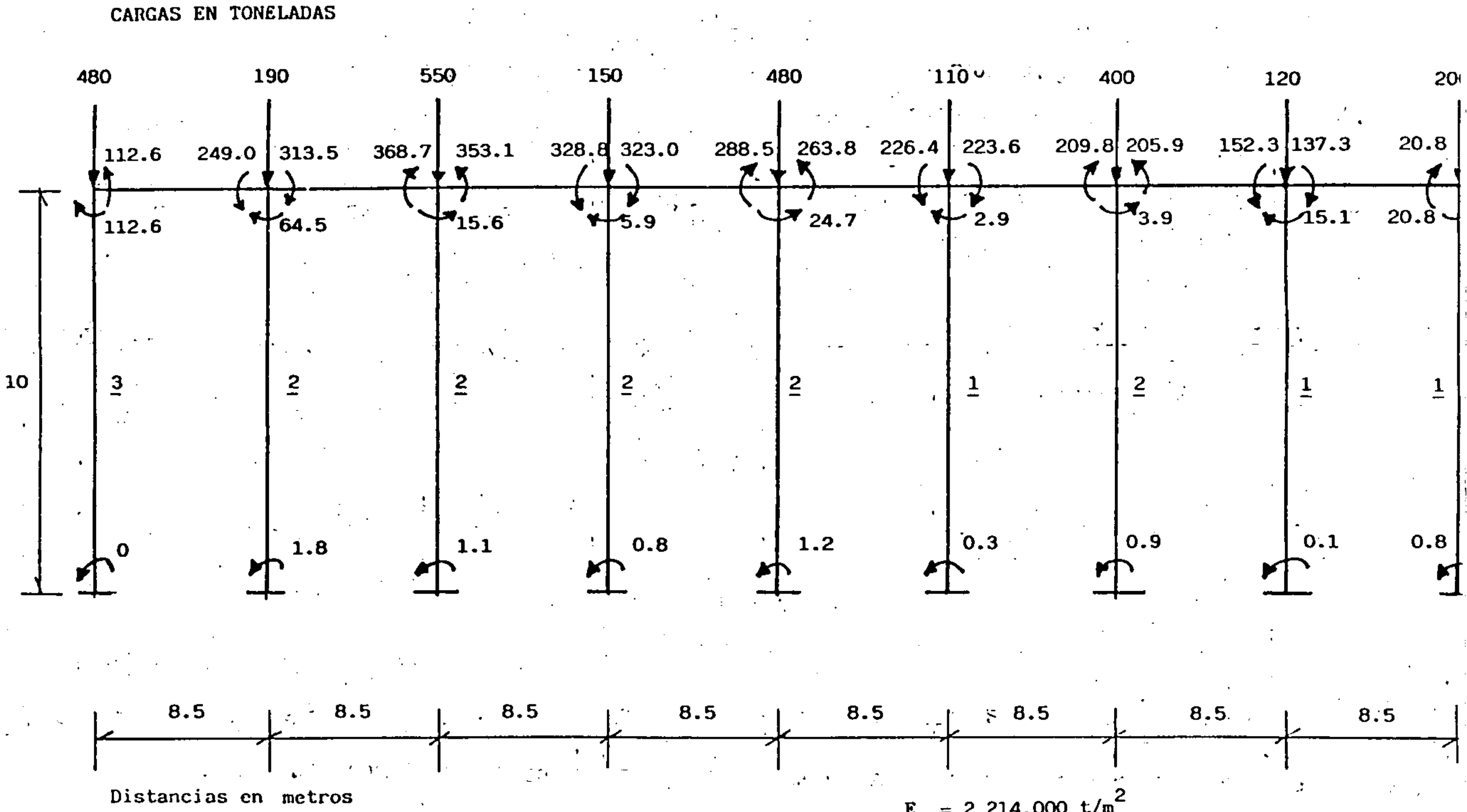


CARGAS EN TONELADAS

Distancias en metros

FIG 2 GEOMETRIA Y CARGAS DE LA ESTRUCTURA

Pila	Diámetro, m
1	1.12
2	1.48
3	1.74



$E_c = 2,214,000 \text{ t/m}^2$

$E_s = 8,000 \text{ t/m}^2$

FIG 3 MOMENTO FLEXIONANTE EN t.m

INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA

Agustín Deméneghi Colina
Profesor de Mecánica de Suelos
Facultad de Ingeniería, UNAM.

1. Introducción

La cimentación de estructuras sobre suelos de mediana a alta compresibilidad plantea el problema de determinar los hundimientos totales y diferenciales, así como los elementos mecánicos (momento flexionante, fuerza cortante y fuerza normal), tanto en la subestructura como en la superestructura, ocasionados por los hundimientos de la cimentación. Estos valores dependen por un lado de la compresibilidad del subsuelo y por otro de la rigidez de la estructura. Tomando en cuenta que en los análisis estructurales convencionales se considera en general que la estructura está empotrada o articulada en su cimentación, o se supone una presión de contacto uniforme, y que, también en general, el cálculo de hundimientos del terreno se realiza considerando la cimentación cien por ciento flexible o totalmente rígida, lo cual en ambos casos (estructural y de mecánica de suelos) dista bastante de la realidad, se ve clara la necesidad de desarrollar métodos de análisis estructural que tomen en cuenta los efectos de los hundimientos y que, al mismo tiempo, permitan calcular los valores de estos últimos.

Para ilustrar lo anterior, hagamos algunas consideraciones sobre la distribución de asentamientos y de esfuerzos en algunos casos sencillos (Juárez Badillo y Rico 1976, Pozas 1980):

Veamos en primer lugar el caso de un área uniformemente cargada y totalmente flexible. Debido a su flexibilidad, las presiones que el área cargada transmite al suelo serán idénticas a la presión sobre el área. Por otra parte, el asentamiento no será uniforme, uniforme sino que tendrá un valor máximo al centro del área cargada y menor en la periferia, adoptando una ley similar a la que se muestra en la fig. 1.1 (si es que el medio cargado se supone linealmente elástico).

En la práctica, el asentamiento inmediato debido exclusivamente a cambio de forma (es decir, excluyendo el asentamiento por consolidación) de áreas flexibles con carga uniforme, apoyadas en arcillas saturadas, adopta un perfil similar al mostrado en la parte <u>a</u> de la fig. 1.1.

En cambio, cuando el área flexible se apoya en arenas o gravas, el perfil se parece a los mostrados en la parte <u>b</u> de la fig. 1.1, ya que los materiales gruesos poseen la propiedad de que su rigidez aumenta con el confinamiento, el cual obviamente será máximo en la zona que está bajo el centro del área cargada.

xión de los diferentes puntos y dividir la presión unitaria entre la deflexión media de los mismos puntos y así poder tomar un promedio de los valores obtenidos; o bien, transmitir una presión total conocida sobre el suelo por medio de un cuerpo rígido (tal como un bloque de concreto), medir el desplazamiento y calcular la relación entre la presión y el desplazamiento (fig. 2.2).

En ambos casos, los procedimientos involucran un factor arbitrario, ya que se reemplaza un módulo variable por un valor promedio, el módulo de reacción del suelo K_s. Las dimensiones de K_s son

$$K_s = \frac{P}{\delta} \left(\frac{Kg}{cm3} \right) \qquad (2.1)$$

El valor del módulo de reacción K_s depende no solamente de la naturaleza del suelo, sino también del tamaño y la forma del área que soporta la carga. De aquí que cuando el valor de K_s es seleccionado deberán ser considerados todos los factores mencionados en el párrafo anterior, ya que influyen en su determinación. Además, el valor de K_s no es una constante para un suelo dado y la relación expresada por la ec. 2.1 representa únicamente un modelo que se asemeja al comportamiento real del suelo.

Veamos un caso particular de la aplicación de las ideas de Terzaghi (1943) a una viga de ancho unitario, de longitud L, de peralte H y sujeta a una carga q por unidad de ancho (fig. 2.3), la cual descansa sobre una superficie horizontal de un medio elástico. La viga soporta una carga q' por unidad de ancho, a la mitad de la misma.

El asentamiento estará determinado por la ecuación:

$$\frac{r}{\delta} = K_s = cte$$

Bajo la influencia de la carga, la cimentación se flexionará y adoptará la posición indicada en la fig. 2.3. Sean:

E = módulo de elasticidad de la viga

$I = \frac{BH^3}{12}$ = momento de inercia de la sección a través de la viga.

V = fuerza cortante vertical a una distancia x del punto medio de la viga.

r = reacción del terreno a una distancia x del punto medio de la viga (presión)

δ = asentamiento de la base de la viga a una distancia x del punto medio de la viga

e = base de los logaritmos naturales.

La variación de la fuerza cortante con la distancia x es:

$$- \frac{dv}{dx} = r = \delta K_s \qquad (2.2)$$

De acuerdo con la teoría de momentos en vigas, los desplazamientos verticales de la viga, con referencia a su posición original, se determinan por medio de la ecuación:

$$- \frac{dv}{dx} = \delta K_s = - EI \frac{d^4 \delta}{dx^4} \qquad (2.3)$$

cuya solución es:

$$\delta = C1 \cosh \Omega \cos \Omega + C_2 \operatorname{senh} \Omega \operatorname{sen} \Omega + C_3 \cosh \Omega \operatorname{sen} \Omega + C_4 \operatorname{senh} \Omega \cos \Omega \qquad (2.4\ a)$$

donde:

$$\Omega = X \sqrt[4]{\frac{K_s\ B}{4\ EI}} \qquad (2.4.b)$$

el cual es un número adimensional y C_1 a C_4 son constantes de integración.

El momento flexionante correspondiente por unidad de ancho es:

$$M = \frac{EI}{B} \frac{d^2 \delta}{dx^2}$$

Las constantes de integración C_1 a C_4 deben ser determinadas de modo tal que la continuidad y las condiciones de frontera se satisfagan. Estas condiciones son las siguientes: a la mitad de la longitud de la viga, x=0, la tangente a la línea elástica es horizontal y la fuerza cortante por unidad de ancho es q'/2. En los dos ex tremos de la viga se observa que el momento flexionante y la fuerza cortante son iguales a cero, x=L/2.

Al combinar la ec. 2.4a con estas condiciones, se obtiene la expresión para calcular la reacción del terreno a una distancia x del punto medio de la longitud de la viga.

$$r = \delta K_s = \frac{q'\Omega_1}{2L} \; \frac{1}{\text{senh}\,\Omega_1 + \text{sen}\,\Omega_1} \Big\{ \text{sen}\,\Omega \;\; \text{senh}(\Omega_1 - \Omega) - \text{senh}\,\Omega \;\; \text{sen}(\Omega_1 - \Omega) + 2\Big[\cosh\Omega \;\cos\frac{\Omega_1}{2}\;\cos\Big(\frac{\Omega_1}{2} - \Omega\Big) + \cos\Omega \;\; \cosh\Big(\frac{\Omega_1}{2} - \Omega\Big)\Big]\Big\}$$

y el momento flexionante M a la misma distancia por unidad de ancho:

$$M = \frac{q'L}{4\,\Omega_1}\,(\cosh\Omega \;\cos\Omega + \text{senh}\,\Omega \;\; \text{sen}\,\Omega - \text{senh}\,\Omega \;\cos\Omega - \cosh\Omega \;\; \text{sen}\,\Omega - D\cosh\Omega \;\cos\Omega + A\,\text{senh}\,\Omega \;\; \text{sen}\,\Omega \;) \qquad (2.5)$$

donde: $\Omega = x\sqrt[4]{\frac{K_s B}{4EI}}$; $\Omega = L\sqrt[4]{\frac{K_s B}{4EI}}$

$$A = \frac{2 + \cos\Omega_1 - \text{sen}\,\Omega_1 + e^{-\Omega_1}}{\text{senh}\,\Omega_1 + \text{sen}\,\Omega_1};$$

$$D = \frac{\cos\Omega_1 + \text{sen}\,\Omega_1 - e^{-\Omega_1}}{\text{senh}\,\Omega_1 + \text{sen}\,\Omega_1}$$

Como la reacción del terreno r y el momento flexionante M son más grandes bajo la carga a x = 0 y $\Omega = 0$:

Vemos entonces que para resolver el problema se requiere -- atacarlo en tres etapas: efectuar un análisis estructural, realizar un análisis de asentamientos del suelo y finalmente establecer la compatibilidad de desplazamientos entre estructura y suelo. En los siguientes incisos tratamos por separado cada una de estas etapas.

3.1 Análisis estructural

La determinación de la matriz de rigideces de la estructura se puede llevar a cabo empleando alguno de los varios métodos que se conocen actualmente en ingeniería estructural. En términos generales, conviene que sea un método susceptible de ser programado posteriormente en una computadora electrónica. En este trabajo utilizaremos el procedimiento tratado por Beaufait et al (1970).

Consideremos una estructura sometida a un sistema de cargas como la indicada en la fig. 3.1 . Como se observa, hemos colocado una reacción r, bajo cada columna y otra bajo la mitad de cada entre-eje, resultando tres reacciones bajo cada barra de la cimentación. La razón por la cual hacemos esto, para la geometría mostrada en la fig. 3.1 , obedece a motivos exclusivamente de sencillez de cálculo. Si se desea obtener un mayor número de reacciones r_i, se puede considerar cada barra de la cimentación como dos o más barras, para fines de análisis.

Utilicemos el método de rigideces para el análisis estructural de la estructura de la fig. 3.1 , el cual consiste en términos generales en lo siguiente:

a) Primeramente se empotra toda la estructura, con lo que se generan momentos y cortantes de empotramiento, que llamaremos M_i^e y V_i^e.

b) Se permiten giros en los nudos y desplazamientos lineales (fig. 3.2), a los cuales denominaremos simplemente desplazamientos. Con esto se producen momentos y cortantes en los nudos y en los ejes de barras.

c) En vista de que se desconocen los desplazamientos, se calculan los elementos mecánicos (cortantes y momentos) debidos a desplazamientos unitarios . Los valores de los elementos mecánicos debidos a los desplazamientos unitarios forman la llamada matriz de rigideces de la estructura, la cual denominaremos $\left[K \right]$.

d) Los nudos de la estructura, debido a los momentos de empotramiento y a los momentos debidos a los desplazamientos, deben de estar en equilibrio. Además, los ejes de barras (trabes y columnas) deben estar en equilibrio por el efecto de los cortantes de empotramiento y de los cortantes ocasionados por los desplazamientos. Estas condiciones de equilibrio se pueden poner en forma matricial de la siguiente forma:

$$\left[K \right] \left\{ \begin{matrix} \delta_i \\ \theta_i \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} V_i^e \\ M_i^e \end{matrix} \right\} = \left\{ 0 \right\}$$

es decir:

$$\left[K \right] \left\{ \begin{matrix} \delta_i \\ \theta_i \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -V_i^e \\ -M_i^e \end{matrix} \right\} \qquad (3.1)$$

En el sistema de ecuaciones 3.1 tenemos tres tipos de incógnitas: los desplazamientos δ_i , los giros θ_i y las reacciones r_i (estas últimas pueden aparecer en V_i^e o en M_i^e).

La formación de la matriz de rigideces $\left[K \right]$ y la obtención de los cortantes V_i^e y momentos M_i^e de empotramiento, que aparecen en la ec. 3.1, se puede hacer de varias formas. En este trabajo utilizaremos el método propuesto por Beaufait et al (1970).

El planteamiento general consiste en hallar la matriz de rigideces y los cortantes y momentos de empotramiento de cada barra de la estructura, para posteriormente determinar la matriz de rigideces de toda la estructura mediante la suma de las matrices de cada una de las barras. Para fines de simplicidad de exposición consideremos únicamente cargas uniformemente repartidas w_i en la estructura (fig. 3.1).

Desde el punto de vista práctico, se pueden presentar en el análisis estructural dos casos de interés: (a) barra con apoyos continuos y (b) barra con un apoyo continuo y otro apoyo articulado, los cuales se tratan en los incisos 3.1.1 y 3.1.2.

Como se puede apreciar en la fig. 3.2 , hemos incluido desplazamientos lineales a la mitad de los entre-ejes en la cimentación (δ_2, δ_4 y δ_6). En estas condiciones, faltará determinar ecuaciones para relacionar estos desplazamientos con el resto de los desplazamientos de la estructura y con el sistema de cargas general. Estas ecuaciones auxiliares se pueden hallar utilizando los teoremas de la viga conjugada. En el inciso 3.1.3 se presentan las ecuaciones auxiliares de los desplazamientos a la mitad de los entreejes, en la cimentación, para los dos siguientes casos de interés práctico: barra con apoyos continuos y barra con un apoyo continuo y otro articulado.

Finalmente, la obtención de todas las ecuaciones que relacionan los desplazamientos lineales δ_i y los giros θ_i con las cargas w_i y r_i se obtienen utilizando la ecuación matricial 3.1 (equilibrio de momentos en nudos y de cortantes en ejes de barras) y las ecuaciones auxiliares 3.18 ó 3.19 (desplazamientos a la mitad de los entreejes).

3.1.1 Barra con apoyos continuos

La matriz de rigideces de una barra j con apoyos continuos (fig. 3. 3) está dada por:

$$K_j = \begin{array}{ccccc} \theta_p & \theta_q & \delta_r & \delta_s & \\ \frac{4\,EI}{L} & \frac{2\,EI}{L} & -\frac{6\,EI}{L^2} & \frac{6\,EI}{L^2} & \theta_p \\ \frac{2\,EI}{L} & \frac{4\,EI}{L} & -\frac{6\,EI}{L^2} & \frac{6\,EI}{L^2} & \theta_q \\ -\frac{6\,EI}{L^2} & -\frac{6\,EI}{L^2} & \frac{12\,EI}{L^3} & -\frac{12\,EI}{L^3} & \delta_r \\ \frac{6\,EI}{L^2} & \frac{6\,EI}{L^2} & -\frac{12\,EI}{L^3} & \frac{12\,EI}{L^3} & \delta_s \end{array} \qquad (3.2)$$

siendo: L = longitud de la barra j

E = módulo de elasticidad del material que forma la barra j

I = momento de inercia de la barra j

θ_p = giro en el nudo p θ_q = giro en el nudo q

δ_r = desplazamiento en el nudo r δ_s = desplazamiento en el nudo s

Los giros se consideran positivos si van en sentido contrario a las manecillas del reloj y los desplazamientos son positivos si son hacia abajo. El sentido de los momentos flexionantes de barra sobre nudo es positivo si va en sentido de las manecillas del reloj y el sentido de las fuerzas cortantes de barra sobre nudo es positivo si el cortante va hacia arriba.

Los momentos y cortantes de empotramiento, de barra sobre nudo, para diferentes condiciones de carga son los siguientes:

Para una carga uniforme w_j (fig. 3.3):

$$M_p^e = \frac{w_j \; L_j^2}{12} \quad (3.3) \qquad M_q^e = - \frac{w_j \; L_j^2}{12} \quad (3.4)$$

$$V_r^e = - \frac{w_j \; L_j}{2} \quad (3.5) \qquad V_s^e = \frac{-w_j \; L_j}{2} \quad (3.6)$$

Para las cargas repartidas de la cimentación (fig.3.4):

$$M_p^e = - \frac{67}{3072} L_j^2 \, r_r - \frac{11}{192} L_j^2 \, r_{r+1} - \frac{13}{3072} L_j^2 \, r_s \quad (3.7)$$

$$M_q^e = \frac{13}{3072} L_j^2 \, r_r + \frac{11}{192} L_j^2 \, r_{r+1} + \frac{67}{3072} L_j^2 \, r_s \quad (3.8)$$

$$V_r^e = + \frac{121}{512} L_j r_r + \frac{1}{4} L_j r_{r+1} + \frac{7}{512} L_j r_s \quad (3.9)$$

$$V_s^e = + \frac{7}{512} L_j r_r + \frac{1}{4} L_j r_{r+1} + \frac{121}{512} L_j r_s \quad (3.10)$$

3.1.2 Barra con un apoyo continuo y otro articulado

La matriz de rigideces de una barra j con un apoyo continuo a la izquierda y otro articulado a la derecha (fig. 3.5) vale:

../

3.1.4 Matriz de rigideces de toda la estructura

La matriz de rigideces de toda la estructura, es la suma de las matrices de cada una de las barras.

Como ya lo dijimos antes, empleando el método de rigideces, primeramente se restringe la estructura de giros y desplazamientos lineales (desplazamientos). Esto ocasiona momentos flexionantes y fuerzas cortantes de empotramiento. Luego se permiten los giros y desplazamientos de los nudos, lo que provoca momentos y cortantes adicionales. La suma de los momentos de empotramiento y los momentos debidos a giros en los nudos debe ser cero en cada uno de los nudos, para que cada uno de éstos esté en equilibrio. Además, la suma de cortantes de empotramiento y de cortantes debidos a desplazamientos lineales de los nudos deben ser nula en cada uno de los ejes de barras (columnas y trabes), para que cada uno de los ejes de barras esté en equilibrio. Estableciendo las condiciones anteriores y utilizando las ecs. 3.18 ó 3.19 se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$K_{11}\delta_1 + K_{12}\delta_2 + \dots + K_{1j}\theta_j + K_{1k}\theta_k + \dots + A_{11} r_1 + A_{12} r_2 + \dots = B_{11} W_1 + B_{12} W_2 + \dots$$

$$K_{21}\delta_1 + K_{22}\delta_2 + \dots + K_{2j}\theta_j + K_{2k}\theta_k + \dots + A_{21} r_1 + A_{22} r_2 + \dots = B_{21} W_1 + B_{22} W_2 + \dots$$

$$K_{i1}\delta_1 + K_{i2}\delta_2 + \dots + K_{ij}\theta_j + K_{ik}\theta_k + \dots + A_{i1} r_1 + A_{i2} r_2 + \dots = B_{i1} W_1 + B_{i2} W_2 + \dots .$$

(3.20)

en donde: K_{ij} = coeficiente de la matriz de rigideces de toda la estructura

A_{ij} = coeficiente que corresponde a la reación r_j en la ec. i

B_{ij} = coeficiente que corresponde a la carga w_j en la ec. i

En el sistema de ecuaciones 3.20 tenemos tres tipos de incógnitas:
los desplazamientos δ_i, los giros θ_i y las reacciones r_i .
Lo que procede a continuación es obtener los desplazamientos del suelo δ_i en función de las reacciones r_i , mediante un análisis de hundimientos del terreno, lo cual se realiza en el inciso siguiente.

3.3 Compatibilidad de desplazamientos.

Una vez realizado el análisis de la estructura y el de hundimientos del terreno, se establece la condición de compatibilidad de desplazamientos entre ellos, de la siguiente manera: los asentamientos del suelo determinados por medio de la ec. 3.21 se sustituyen en el sistema de ecuaciones 3.20 de la estructura. De esta manera, desaparecen como incógnitas los desplazamientos y quedan únicamente como incógnitas los giros en los nudos θ_i y las reacciones r_i del terreno. Es fácil ver que el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, con lo que se puede resolver este sistema de ecuaciones y despejar los giros y las reacciones. Utilizando la ec. 3.21, ya conocidas las r_i, se pueden determinar también los hundimientos del terreno.

3.4 Ejemplo

Con el objeto de ilustrar el procedimiento descrito en los incisos 3.1 a 3.3, se presenta un ejemplo sencillo de aplicación.

Se pide determinar los diagramas de reacción y hundimientos del terreno, para la estructura, estratigrafía y propiedades que se indican en la fig. 3.8.

Estructura tipo anille. Ancho de la cimentación 8 m

$E = 1.5811 \times 10^6$ ton/m^2

Se llevará a cabo el análisis de interacción suelo-estructura en tres etapas: (a) análisis estructural, (b) análisis de asentamientos del suelo y (c) compatibilidad de desplazamientos.

a) Análisis estructural

El análisis estructural se inicia numerando las barras y los desplazamientos lineales δ_i y angulares θ_i, graficando también las reacciones (fig. 3.9).

Los giros y desplazamientos que corresponden a cada barra son los siguientes:

Barra No.	θ_p	θ_q	δ_r	δ_s
1	θ_5	θ_6	δ_1	δ_3
2	θ_7	θ_8	δ_1	δ_3
3	θ_7	θ_5	δ_4	-
4	θ_8	θ_6	δ_4	-

Determinación de la matriz de rigideces de cada barra:

Barra 1 $E = 1.5811 \times 10^6$ ton/m^2 ; $I = 1.305 \times 10^{-2}$ m^4

Utilizando la ec. 3.2: $L = 8$ m

La matriz de rigideces de toda la estructura es igual a la suma de las matrices de rigidez de cada una de las barras:

$$K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$$

Es decir:

$$K = \begin{array}{ccccccc|c} \delta_1 & \delta_3 & \delta_4 & \theta_5 & \theta_6 & \theta_7 & \theta_8 & \\ \left[\begin{matrix} 967.18 \\ -967.18 \\ 0 \\ -1934.38 \\ -1934.38 \\ -1934.38 \\ -1934.38 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} -967.18 \\ 967.18 \\ 0 \\ 1934.38 \\ 1934.38 \\ 1934.38 \\ 1934.38 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 526.30 \\ -605.24 \\ -605.24 \\ -605.24 \\ -605.24 \end{matrix} & \begin{matrix} -1934.38 \\ 1934.38 \\ -605.24 \\ 12\,172.74 \\ 5\,158.34 \\ 928.04 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -1934.38 \\ 1934.38 \\ -605.24 \\ 5\,158.34 \\ 12\,172.74 \\ 0 \\ 928.04 \end{matrix} & \begin{matrix} -1934.38 \\ 1934.38 \\ -605.24 \\ 928.04 \\ 0 \\ 12\,172.74 \\ 5\,158.34 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} -1934.38 \\ 1934.38 \\ -605.24 \\ 0 \\ 928.04 \\ 5158.34 \\ 12\,172.74 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \end{matrix} \end{array}$$

Sabemos que por simetría de la estructura:

$$\delta_3 = \delta_1 \qquad \theta_6 = -\theta_5 \qquad \theta_8 = -\theta_7$$

Tomando en cuenta estas igualdades y estableciendo el equilibrio de nudos y ejes de barras, se obtienen las siguientes expresiones:

Desplazamiento δ_4 (renglón 3 de la matriz de rigideces):

$$526.30 \ \delta_4 = 0 ; \qquad \delta_4 = 0$$

Giro θ_5 (renglón 4 de la matriz de rigideces):

$$12\,172.74 \ \theta_5 + 5\,158.34 \ (-\theta_5) + 928.04 \ \theta_7 - 1.6666 \ r_1 - 3.6667 \ r_2 = -34.133$$

$$7\,014.40 \ \theta_5 + 928.04 \ \theta_7 - 1.6666 \ r_1 - 3.6667 \ r_2 = -34.1333 \qquad (1)$$

Desplazamiento δ_1 (renglón 1 de la matriz de rigideces):

$$-25.6 + 1.8906 \ r_1 + 2 \ r_2 + 0.1094 \ r_1 - 16 = 0$$

$$2 \ r_1 + 2 \ r_2 = 41.6 ; \qquad r_1 + r_2 = 20.8 \qquad (2)$$

Giro θ_7 (renglón 6 de la matriz de rigideces):

$$928.04 \ \theta_5 + 7\,014.40 \ \theta_7 = -21.333 \qquad (3)$$

Utilizande la ecuación auxiliar 3.18 para la barra 1:

$$2\,579.2 \ \theta_5 - 2\,579.2 \ \theta_6 - 2\,579.2 \ \delta_1 - 2\,579.2 \ \delta_3 + 5\,158.3 \ \delta_2 + 0.25 \ r_1 + 0.25 \ r_3 + 2.1667 \ r_2 = 17.06667$$

$$[illegible]158.4 \ \theta_5 - 5\,158.4 \ \delta_1 + 5158.3 \ \delta_2 + 0.5 \ r_1 + 2.1667 r_2 = 17.06667 \qquad (4)$$

c) Dada la gran cantidad de operaciones a realizar, el análisis conjunto de la estructura y el suelo tiene que llevarse a cabo en la práctica por medio del empleo de computadoras electrónicas.

d) Por lo anterior, es muy importante que el ingeniero de cimentaciones al dedicarse a la interacción suelo-estructura maneje en la forma más clara posible sus conceptos de análisis estructural, de mecánica de suelos y de análisis numérico por computadoras.

e) La comparación de resultados entre considerar una reacción uniforme o tomar en cuenta la interacción suelo-estructura indica diferencias notables en hundimientos diferenciales, reacción del terreno y elementos mecánicos, bajo ciertas condiciones. Se puede presentar inclusive en algunos casos cambio de sentido en los momentos flexionantes de la cimentación o de la superestructura.

f) En cambio, la comparación entre observaciones de campo en estructuras reales con los métodos que toman en cuenta la rigidez de la cimentación ha dado resultados promisorios, a pesar de que las mediciones son en pequeño número, pues los valores teóricos y los medidos son bastante similares.

g) La solución de un problema de ingeniería comprende, entre otros aspectos importantes, las siguientes tres etapas: un sano desarrollo teórico del método a seguir, una calibración en la práctica del análisis propuesto y, como complemento fundamental, un procedimiento de análisis numérico que permita llegar a la solución de un caso particular en forma expedita.

Podemos considerar por lo que respecta a las dos primeras etapas, en interacción suelo-estructura, en términos generales se han obtenido resultados satisfactorios que han permitido avanzar en cada uno de ellas. Sin embargo, en lo que no se ha logrado un avance todavía satisfactorio es en el desarrollo de métodos numéricos; accesibles para el ingeniero de la práctica. En este sentido, los programas de computadora para la solución de la interacción suelo-estructura son relativamente escasos y su disponibilidad en la práctica está muy limitada. Por lo tanto, es muy deseable que la investigación se encauce a la elaboración de programas de computadora a los cuales el ingeniero tenga fácil acceso.

h) En estas condiciones, la práctica usual de considerar una reacción uniforme y con ella determinar los elementos mecánicos, para luego diseñar las piezas estructurales con un amplio factor de seguridad tiene que continuarse hasta que se disponga de programas de computadora. Por ejemplo, la receta práctica - de aplicar un amplio factor de seguridad al máximo momento con reacción uniforme y diseñar estructuralmente los miembros de la cimentación con este valor, colocando el mismo máximo porcentaje de acero longitudinal en ambos lechos para - prever posibles cambios de signo en los momentos, puede dar resultados del lado de la seguridad. Cabe aclarar que se ha observado que la discrepancia entre este criterio y la realidad depende en buena medida de la longitud de la estructura continua. Por lo tanto, es muy recomendable que cuando sea posible se em--- pleenjuntas constructivas de tal manera que no se utilicen estructuras conti-- nuas de gran longitud.

i) Desde luego, es necesario continuar con las mediciones de campo para calibrar los métodos de análisis descritos en este trabajo.

Referencias

Beaufait F W, Rowan W H, Hoadley P G y Hackett R M, Computer Methods of Structural Analysis, Prentice-Hall, 1970

Deméneghi A, "Un método para el análisis conjunto de la estructura y el suelo", Rev. Ingeniería, Nueva Epoca, Vol. XLIX, No. 3, pp. 56-64, 1979

Deméneghi A, "Analysis of Soil-Structure Interaction", Memorias del X Congreso Internacional de Mecánica de Suelos, Estocolmo, 1981

Juárez Badillo E y Rico A, Mecánica de Suelos, Tomo II, Cap. VIII, Limusa, 1976

Lladó A, "Programa de computadora para el análisis de interacción suelo-estructura en una viga flotante de rigidez variable", Tesis profesional, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, 1981

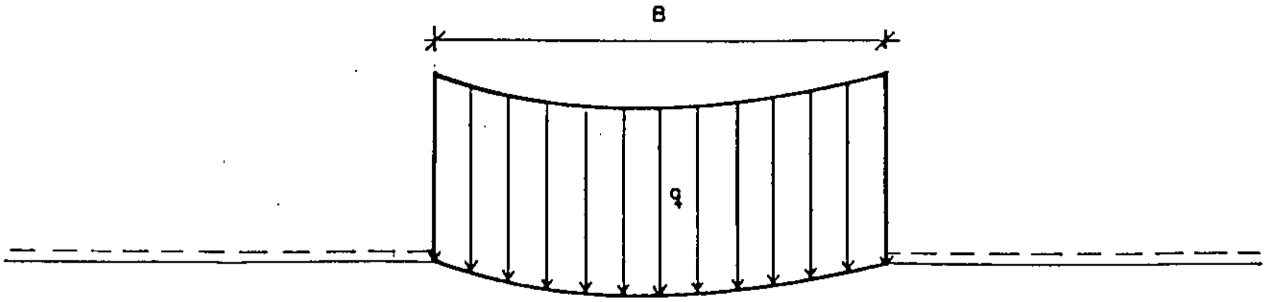
Meyerhof G G, "Soil-structure interaction and foundations", Memorias del VI Congr. Panamericano de Mec. de Suelos e Ing. de Cimentaciones, Vol. I, pp. 109-140, Lima, 1979

Pozas M, "Un ejemlo del análisis de la interacción suelo-estructura", Tesis profesional, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, 1980

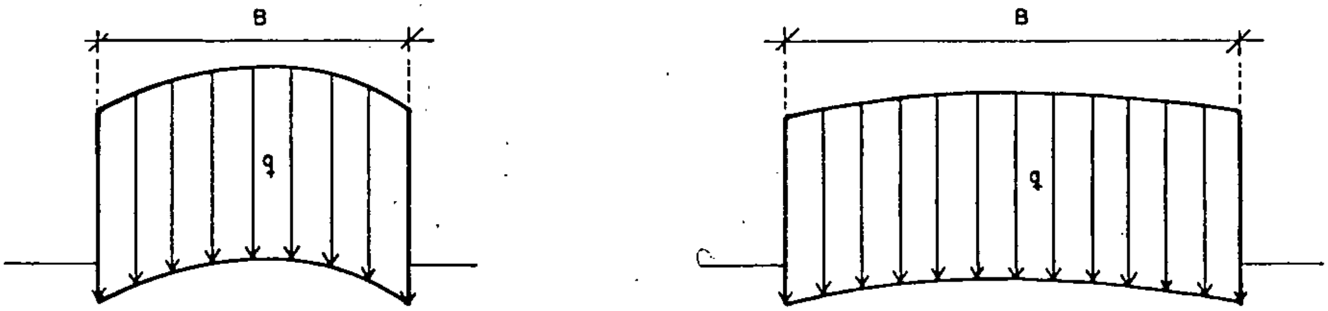
Terzaghi K, Theoretical Soil Mechanics, Chap. XVI, Wiley, 1943

Zeevaert L, Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions, Chaps. II and IV, Van Nostrand Reinhold, New York, 1973

Zeevaert L, Interacción suelo-estructura de cimentaciones superficiales y profundas, sujetas a cargas estáticas y sísmicas, Limusa, 1980



a) Sobre arcilla saturada

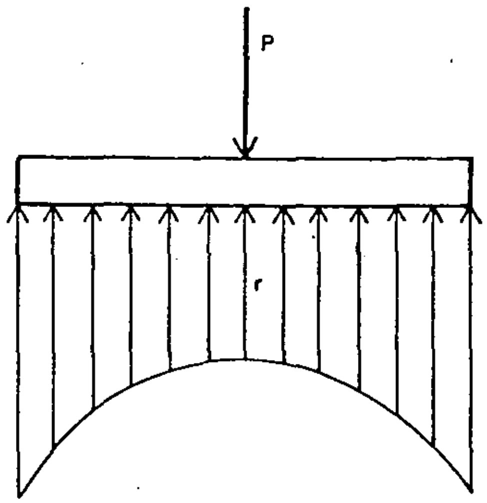


Ancho pequeño

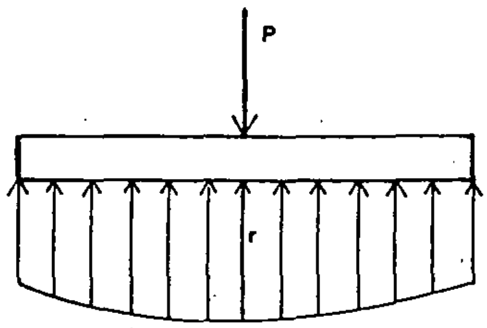
Ancho grande

b) Sobre suelos friccionantes

FIG. I.I PERFIL DEL ASENTAMIENTO BAJO UN AREA CARGADA SOBRE LA SUPERFICIE DE UN MEDIO SEMI— INFINITO.

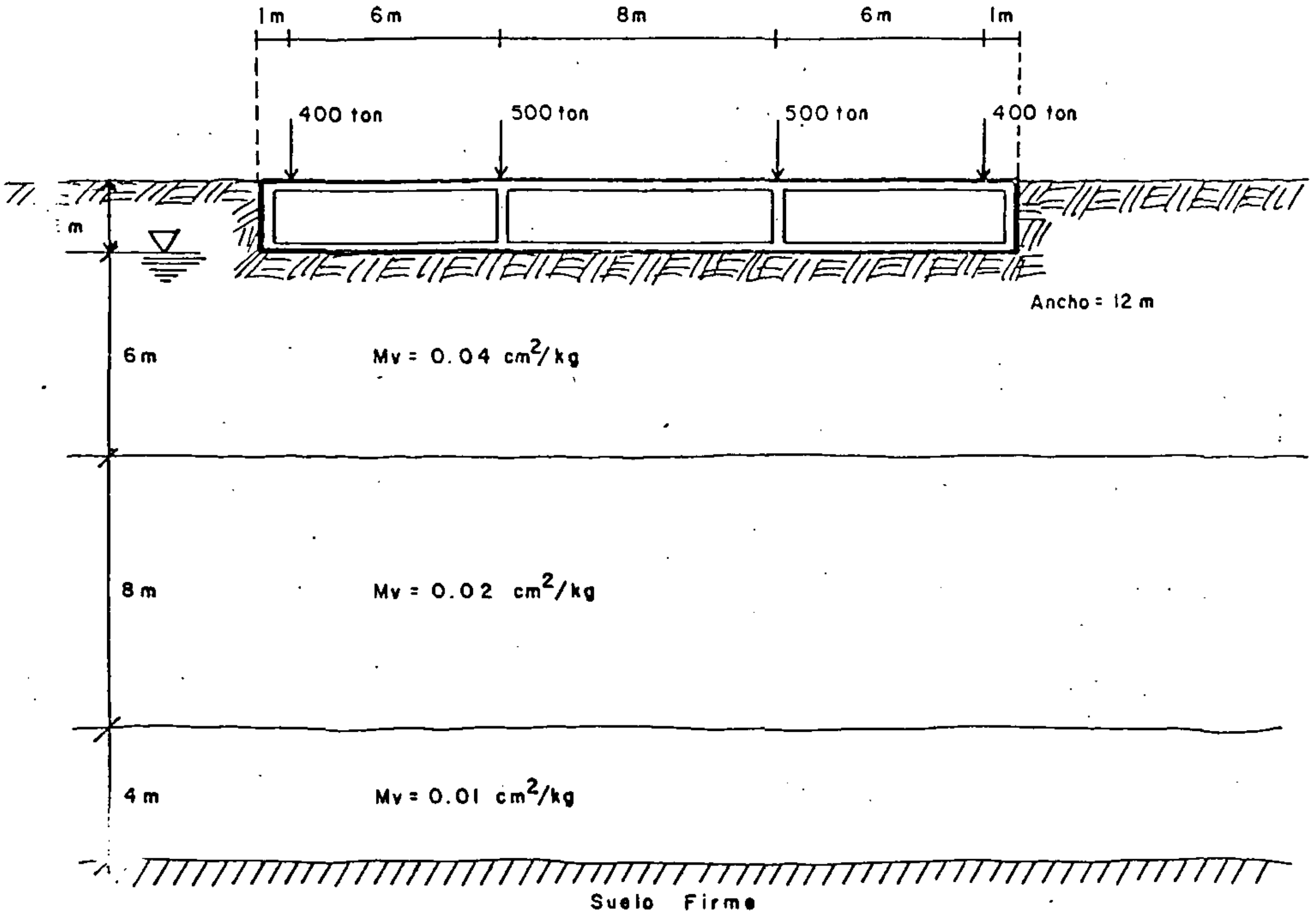


a) Medio homogéneo y elástico

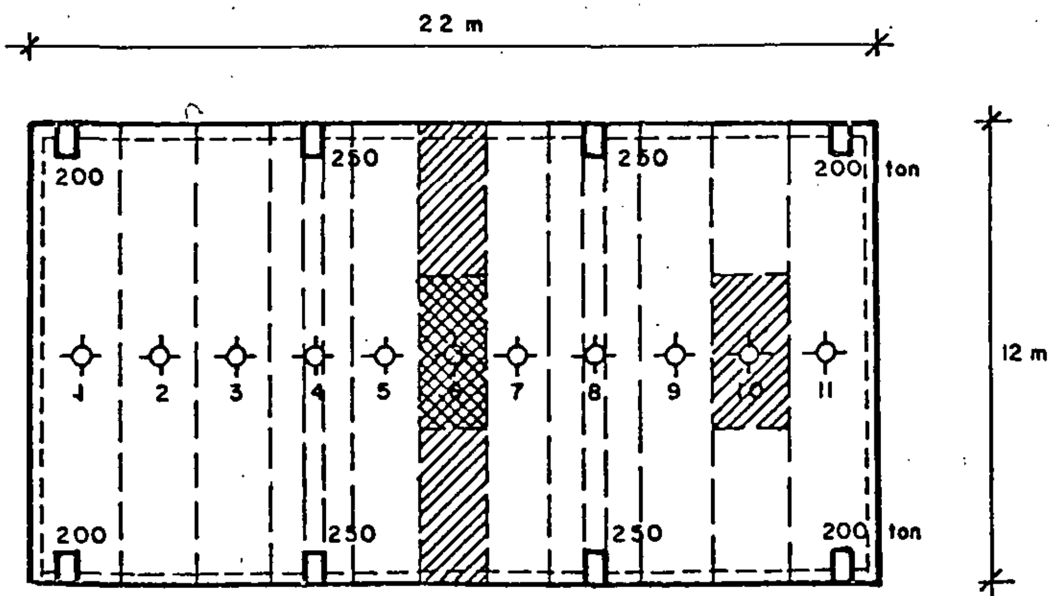


b) Medio cuya rigidez aumenta con el confinamiento.

FIG. I.2 DISTRIBUCIONES DE PRESIONES BAJO UNA PLACA INFINITAMENTE RIGIDA.

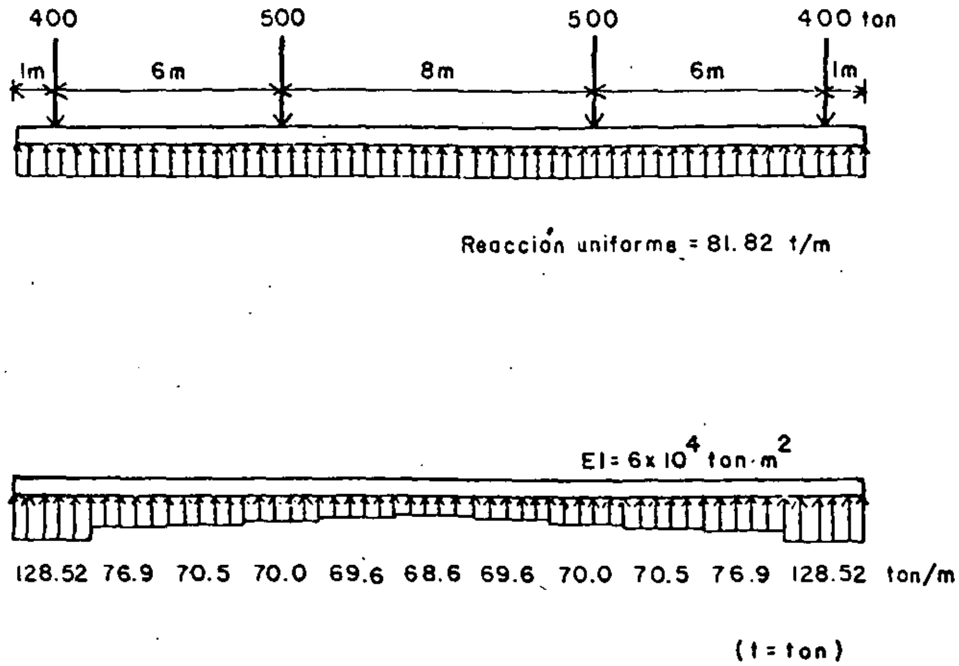


a.- Corte longitudinal de la cimentación

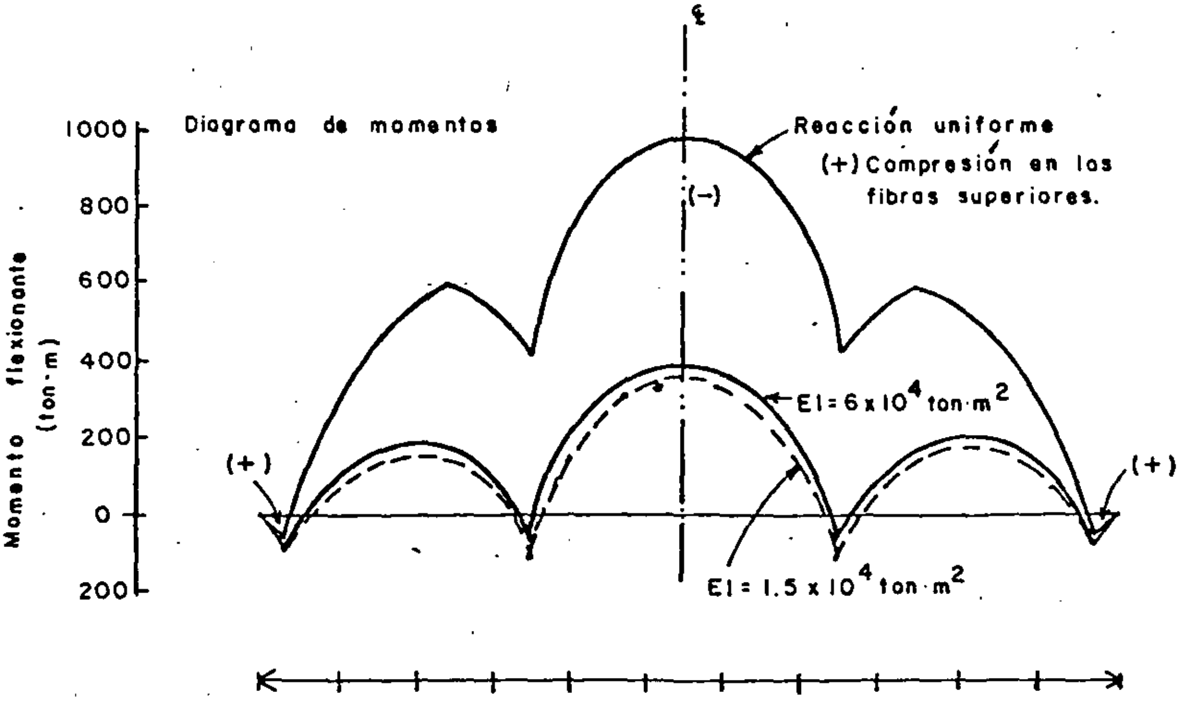


b.- Planta de la cimentación

FIG. 1.3. CIMENTACION SEMIFLEXIBLE TIPO CAJON
(ZEEVAERT 1973)



a) Reacción del terreno



b) Diagramas de momento flexionante

FIG. 1.4 COMPARACION DE RESULTADOS ENTRE CONSIDERAR REACCION UNIFORME Y TOMAR EN CUENTA LA INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA (ZEEVAERT 1973)

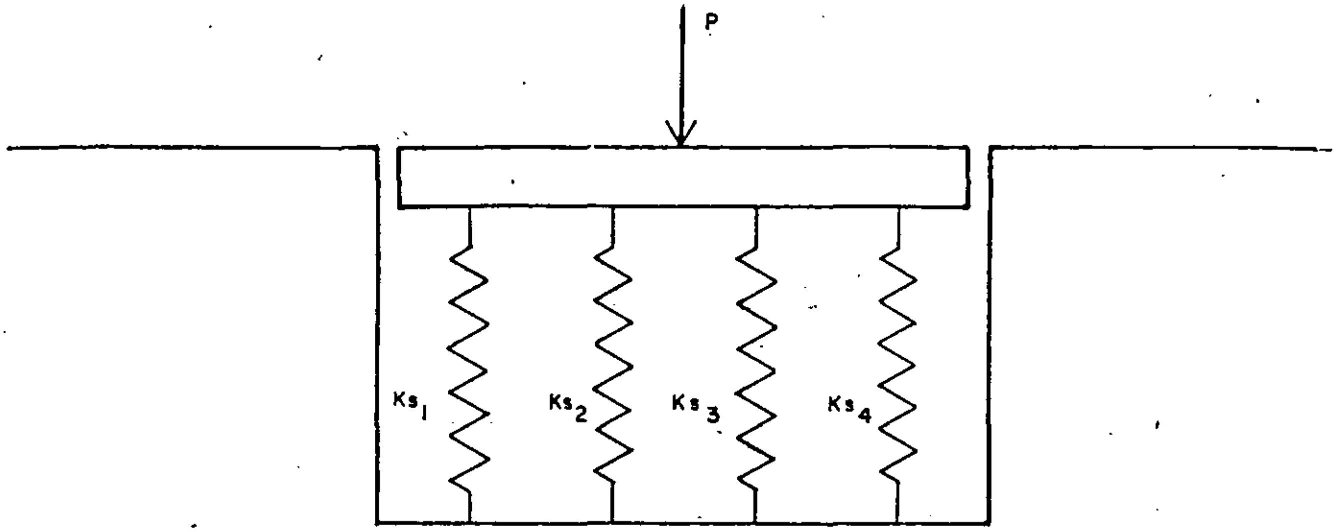
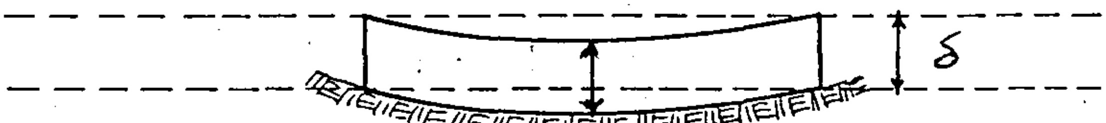
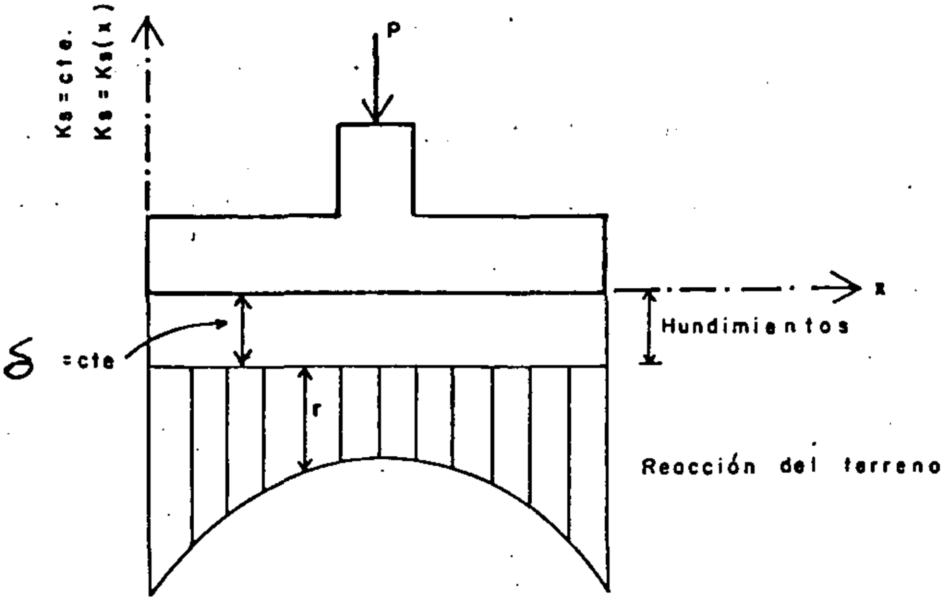


FIG. 2.1 CIMENTACION SOBRE RESORTES



a) PLACA FLEXIBLE



b) PLACA RIGIDA

FIG. 2.2 DETERMINACION DEL MODULO DE REACCION DEL SUBSUELO Ks

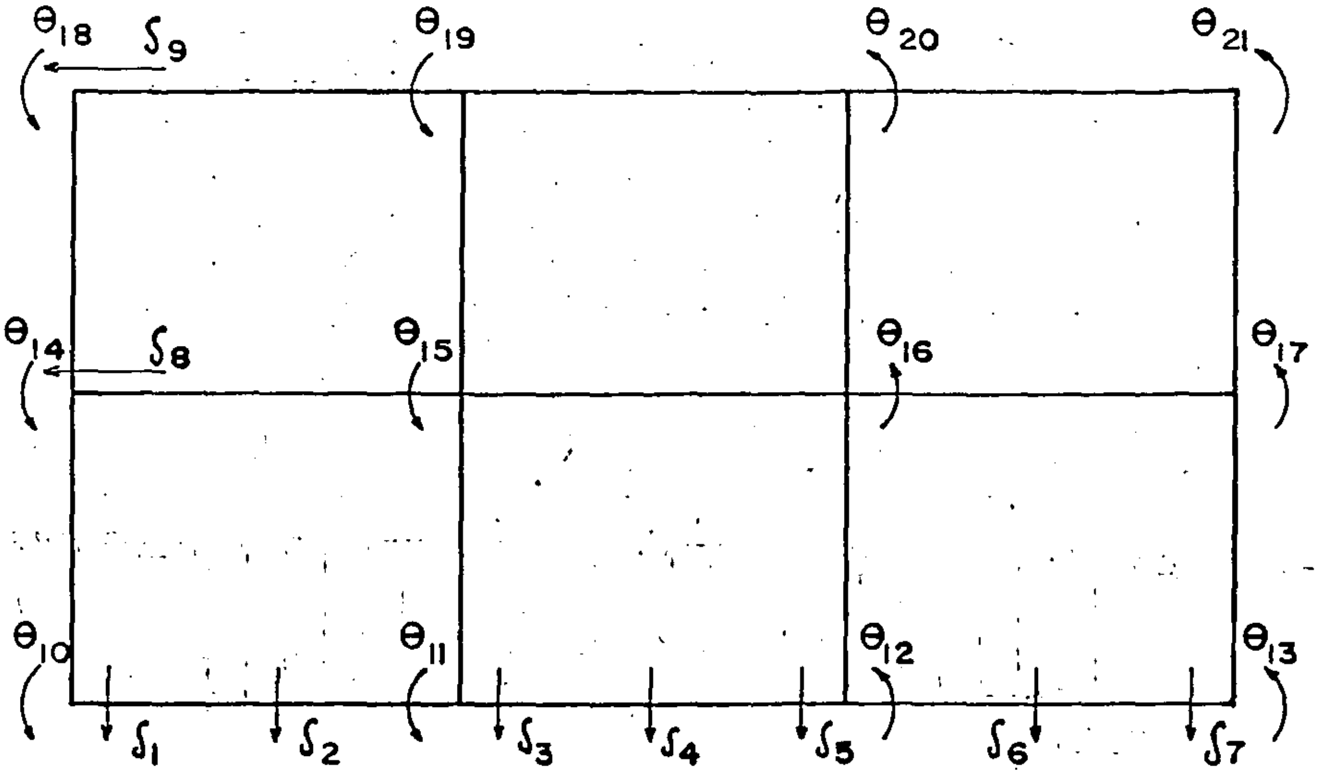
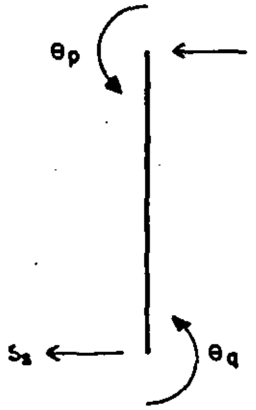
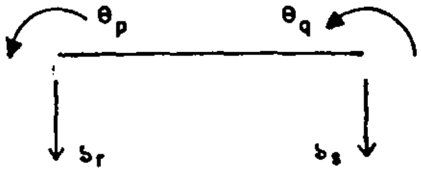


FIG. 3.2 DESPLAZAMIENTOS LINEALES δ_i Y GIROS θ_i



BARRA VERTICAL



BARRA HORIZONTAL

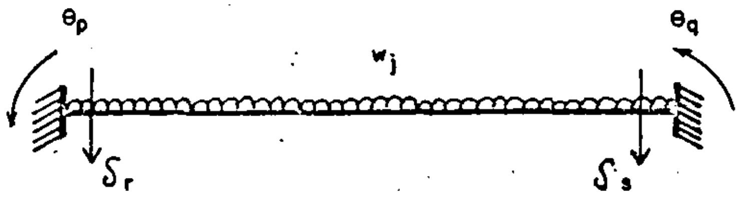


FIG. 3.3 BARRA CON APOYOS CONTINUOS

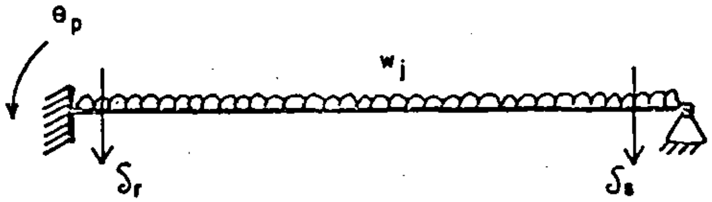


FIG. 3.5 BARRA CON UN APOYO CONTINUO A LA IZQUIERDA Y OTRO ARTICULADO A LA DERECHA

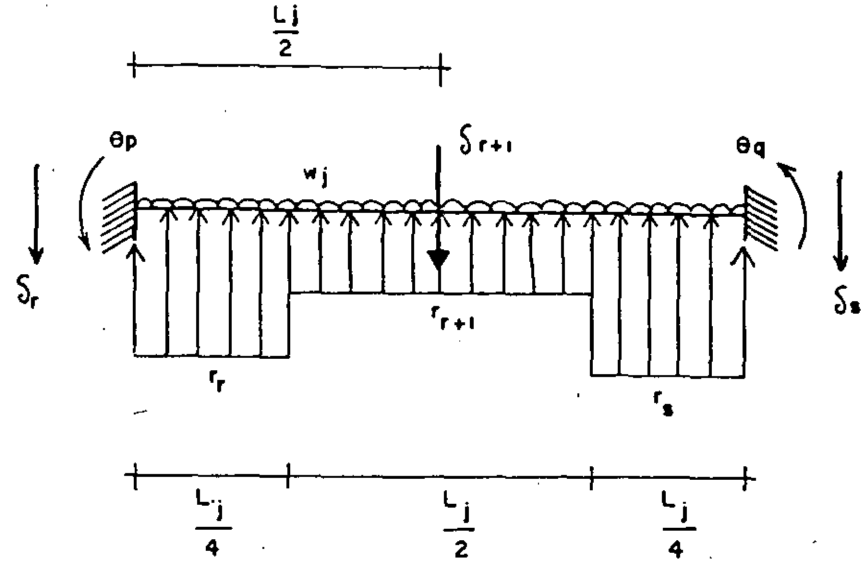


FIG. 3.4 Barra con cargas repartidas en la cimentación. Apoyos continuos.

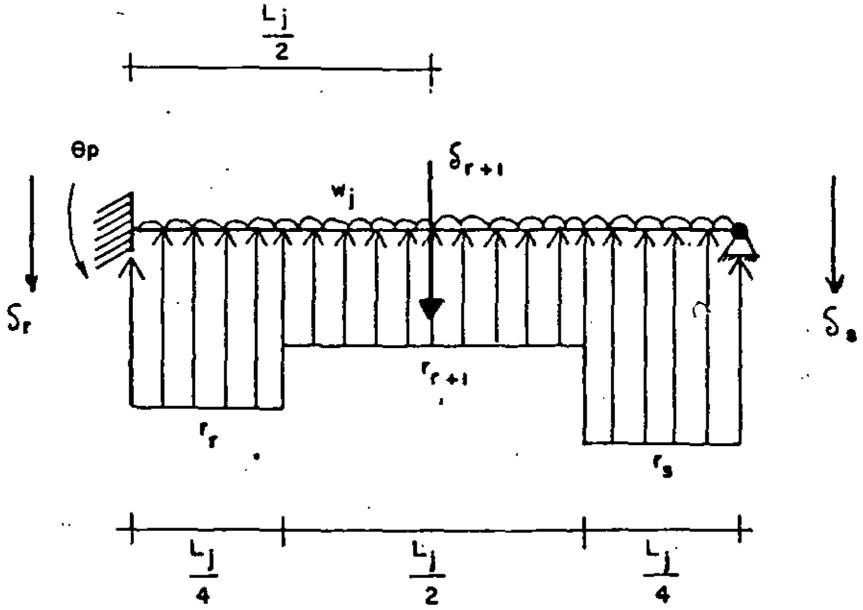


FIG. 3.6 Barra con cargas repartidas en la cimentación. Apoyo continuo a la izquierda y apoyo articulado a la derecha.

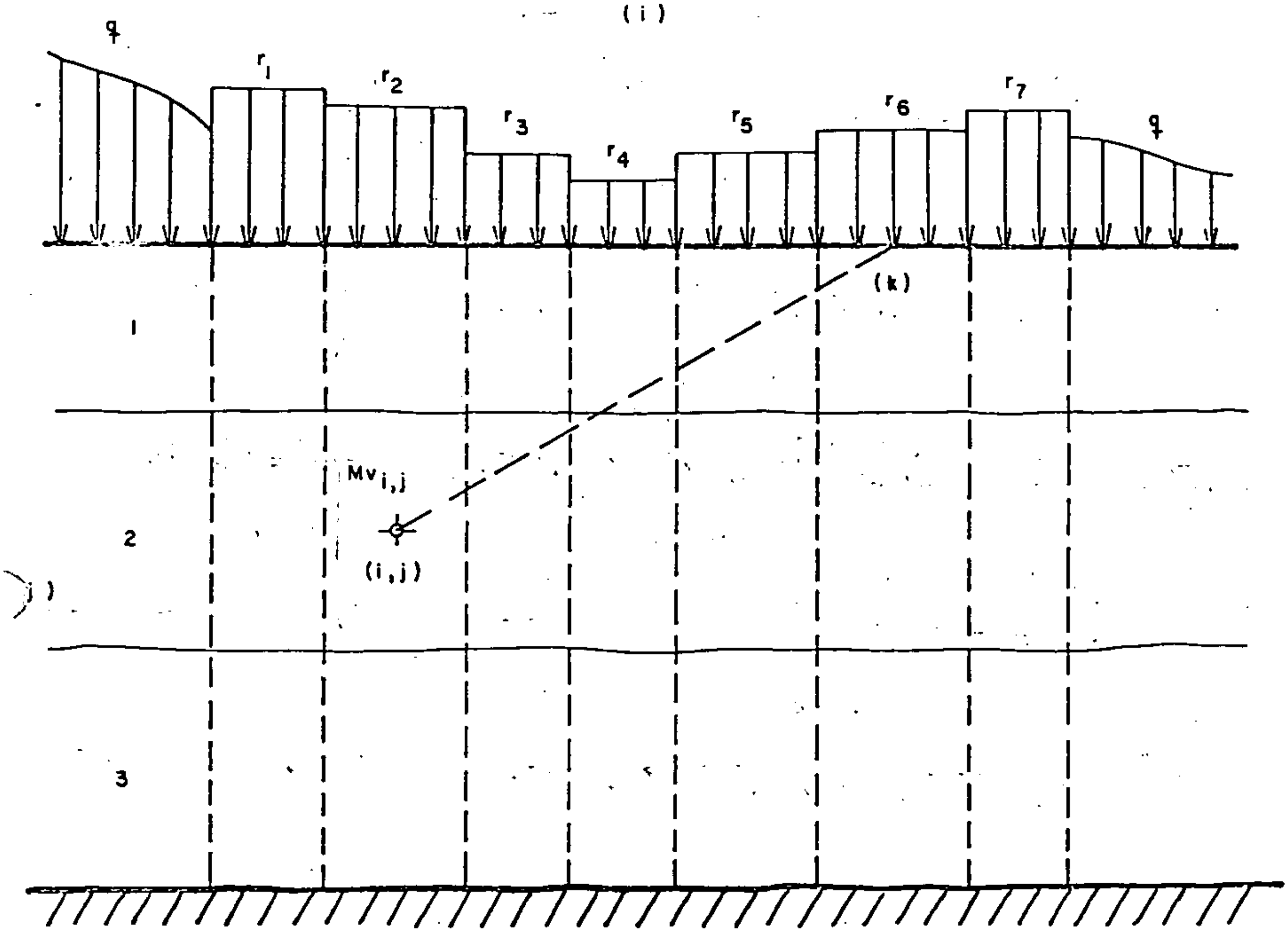
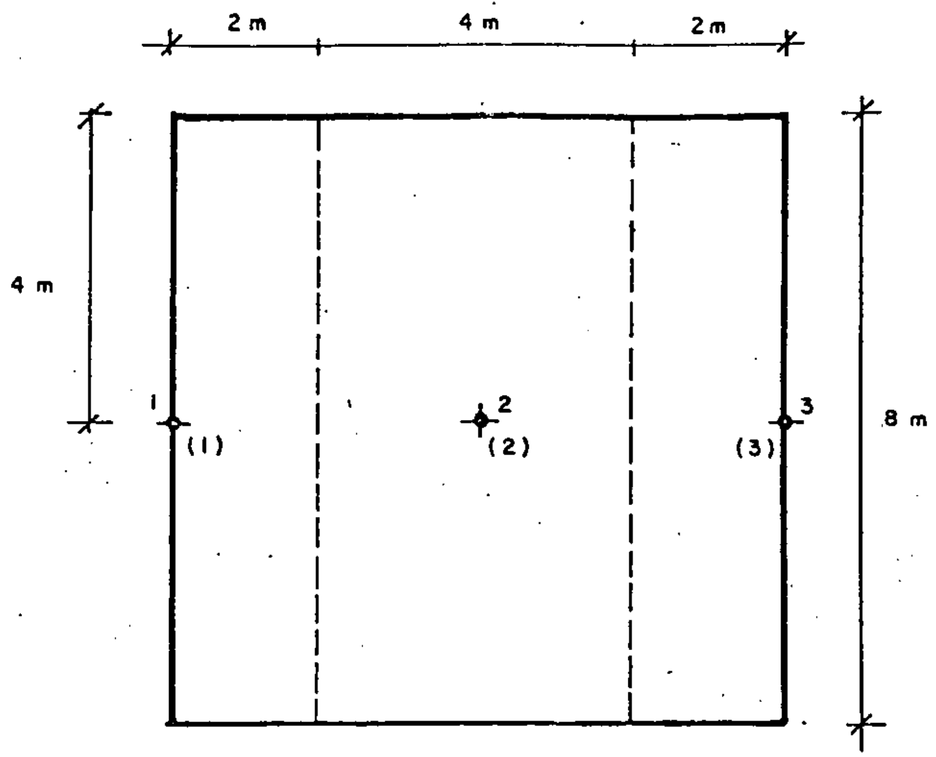
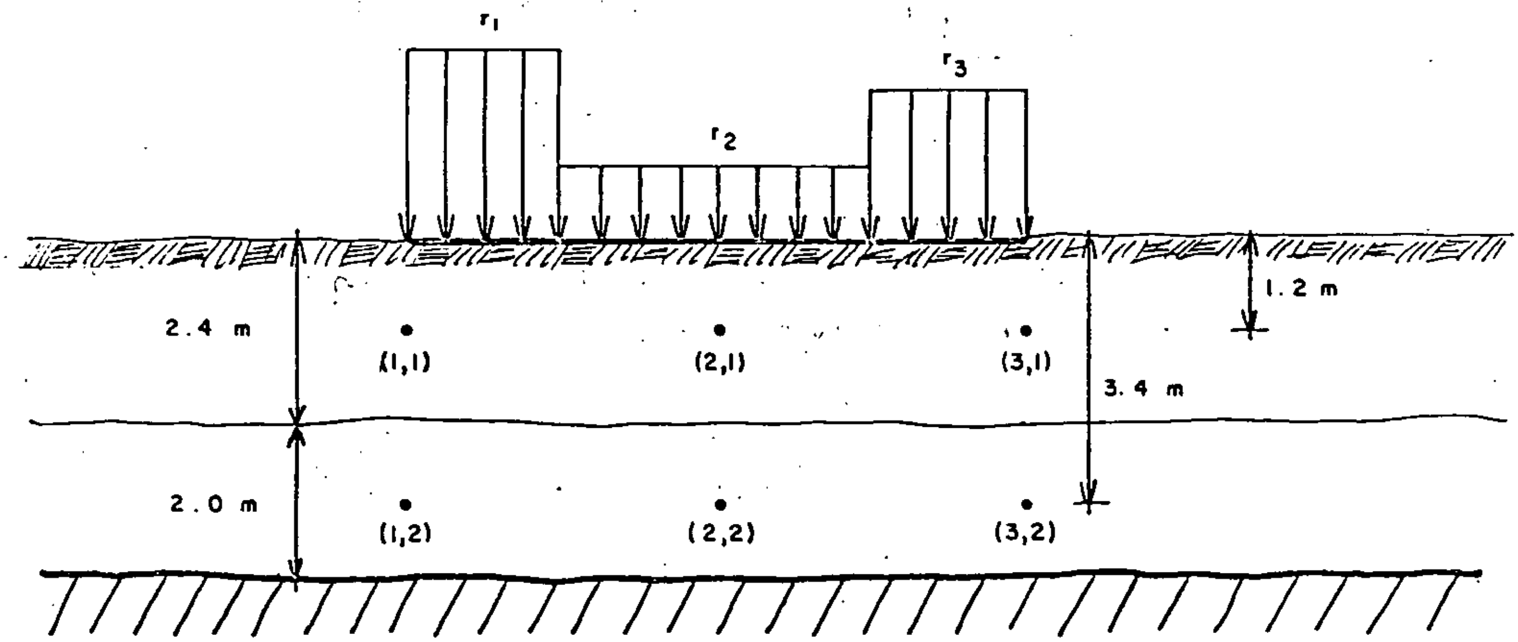


FIG. 3.7 DETERMINACION DE LOS ASENTAMIENTOS DEL SUELO

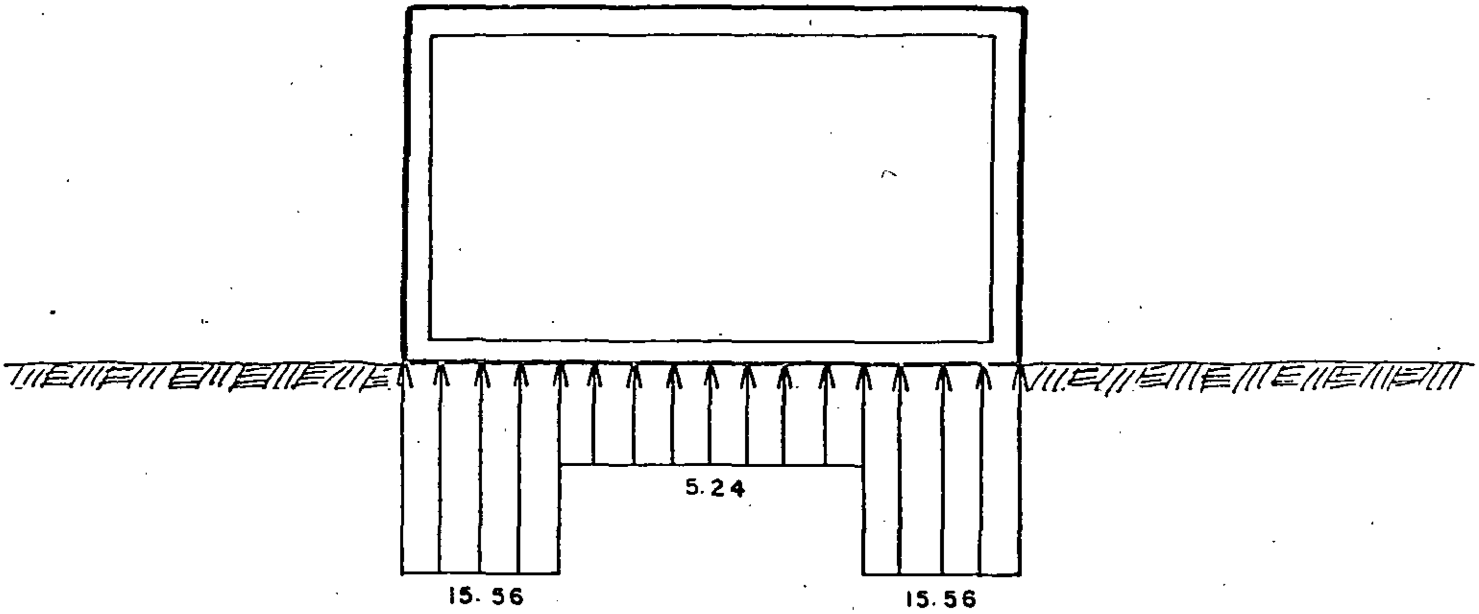


a) PLANTA

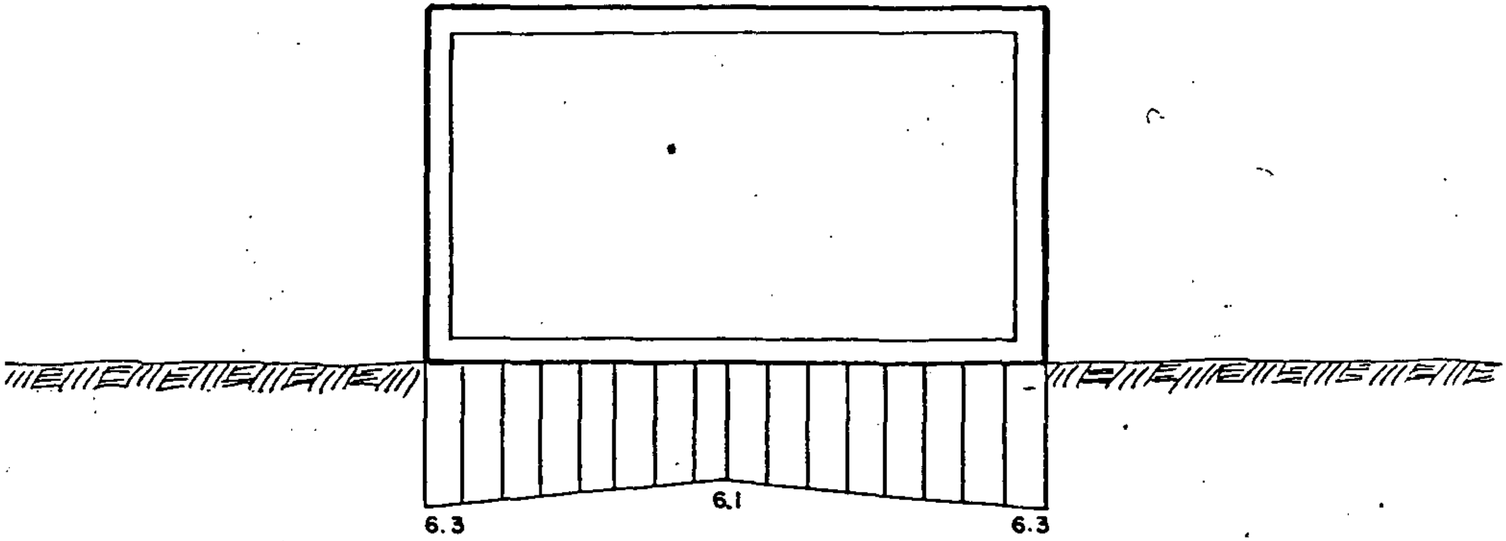


b) ELEVACION

FIG. 3.10 DETERMINACION DE LOS VALORES DE INFLUENCIA



a) REACCIONES DEL TERRENO (ton/m)



b) HUNDIMIENTOS (cm)

FIG. 3.11 RESULTADOS FINALES (ejemplo)

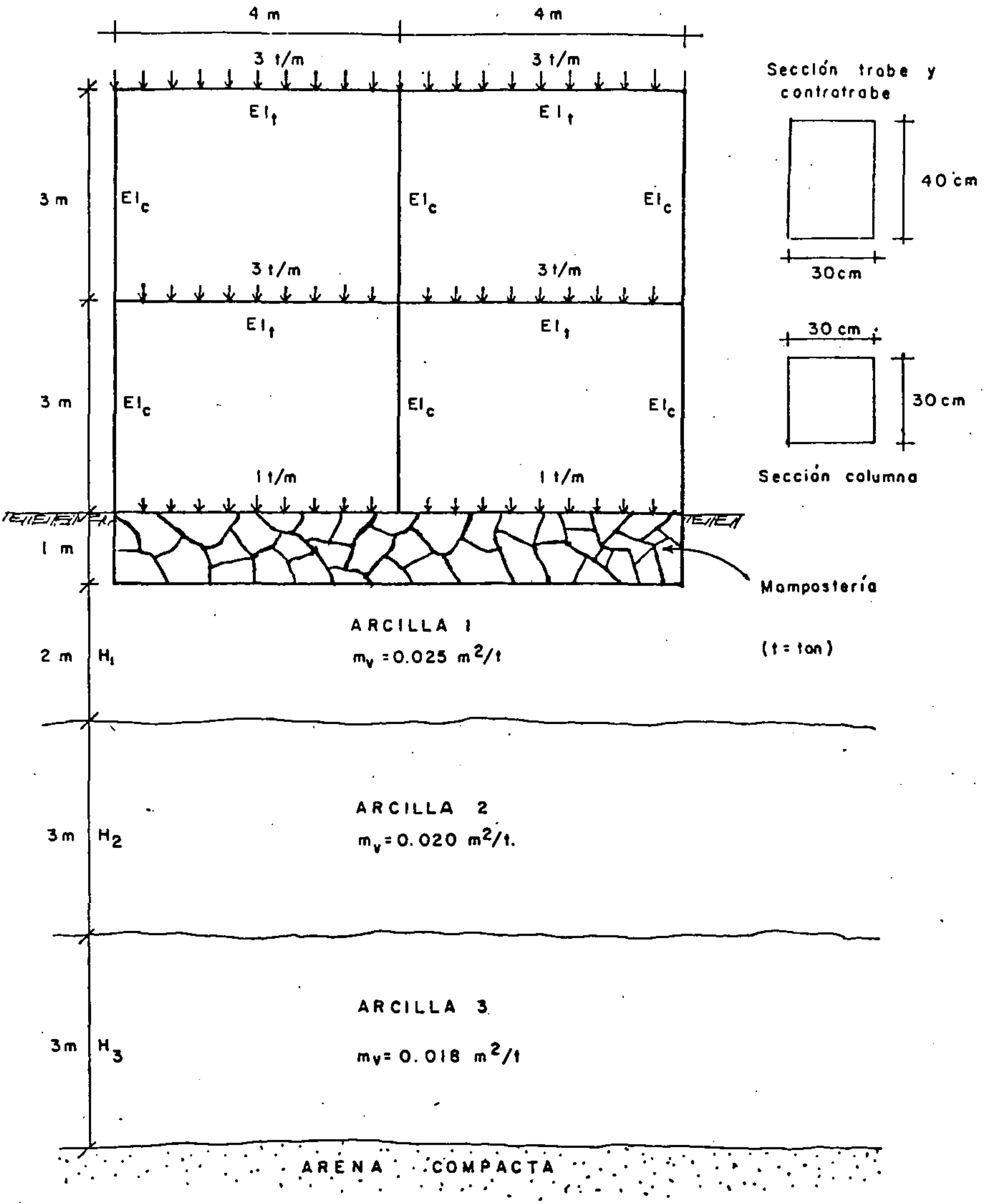
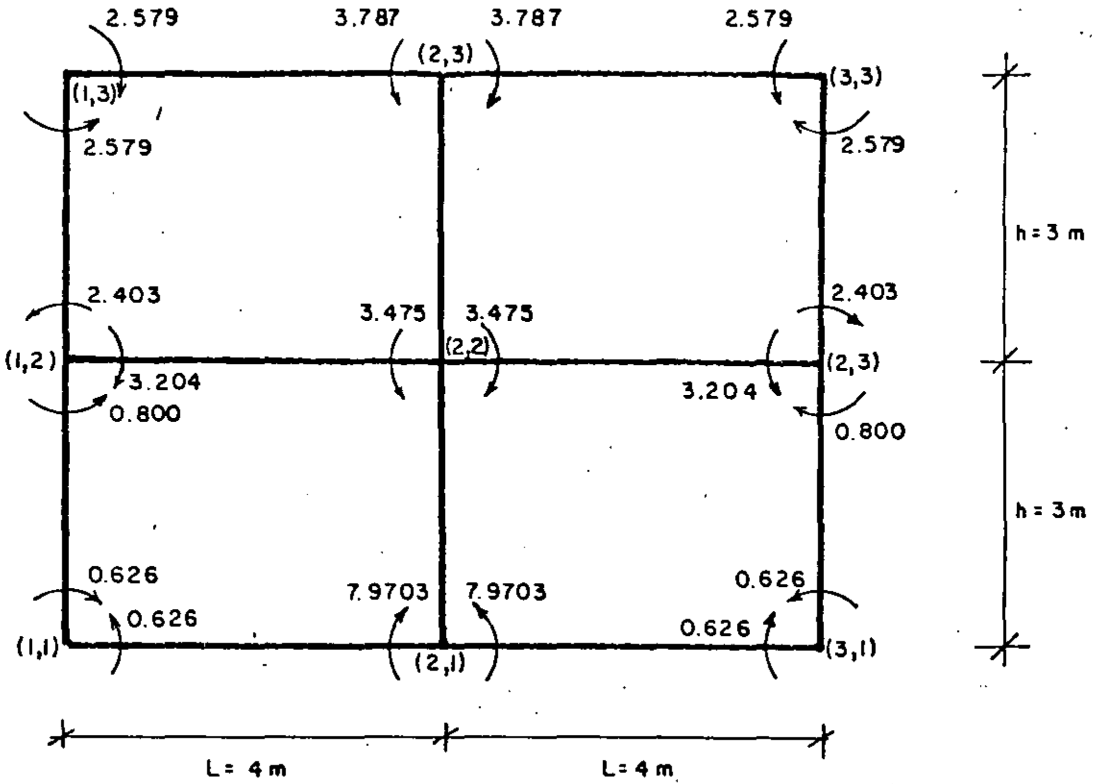
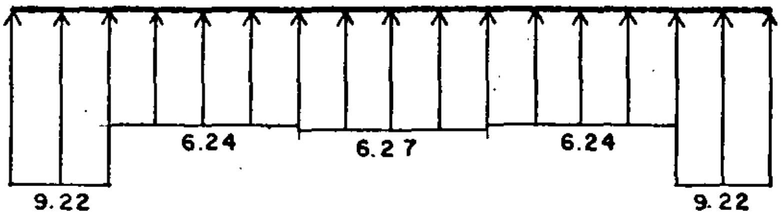


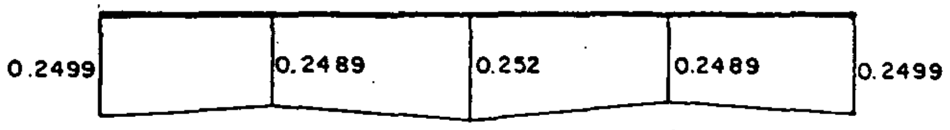
FIG. 4.1 ESTRUCTURA RETICULAR (EJEMPLO)



Momentos de barra sobre nudo, ton·m.

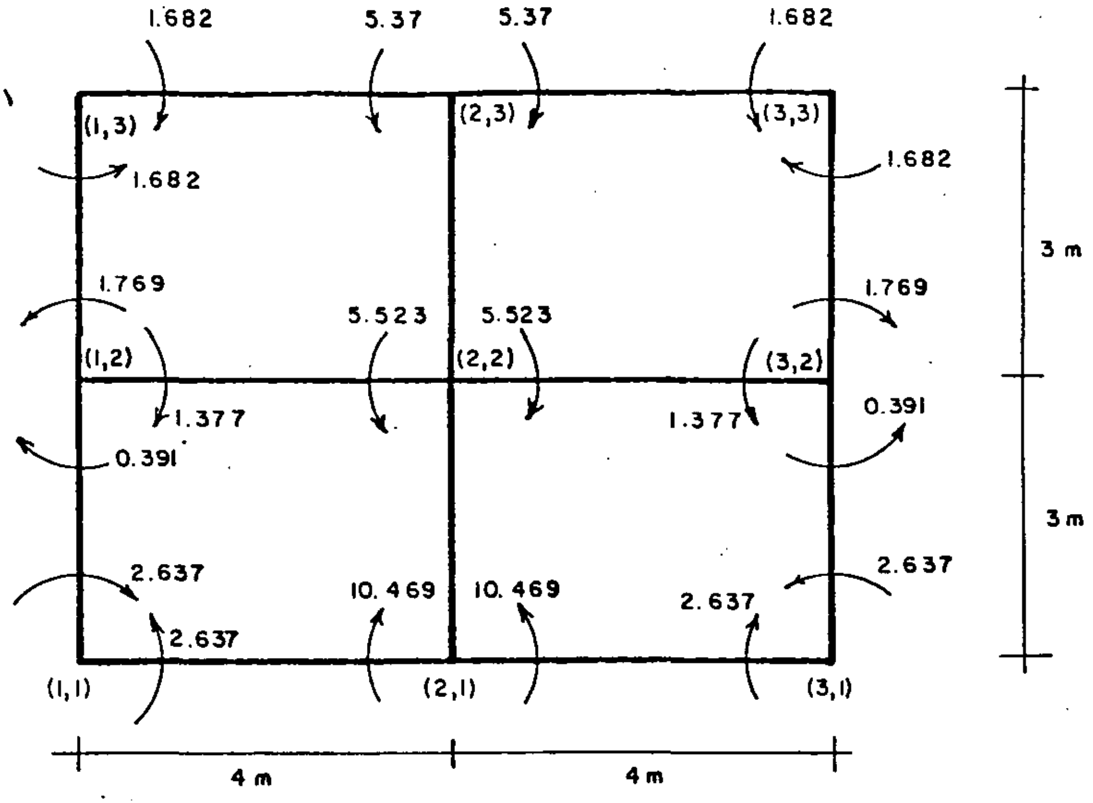


Reacciones del terreno, ton/m

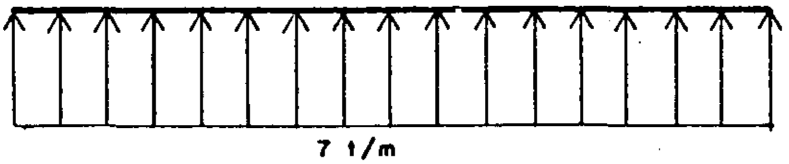


Hundimientos del terreno, m

FIG. 4.2 RESULTADOS OBTENIDOS CON INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA



Momentos de barra sobre nudo, ton·m



Reacción uniforme del terreno.

FIG. 4.3 RESULTADOS OBTENIDOS CON OTRO METODO DE ANALISIS SUPONIENDO REACCION UNIFORME.

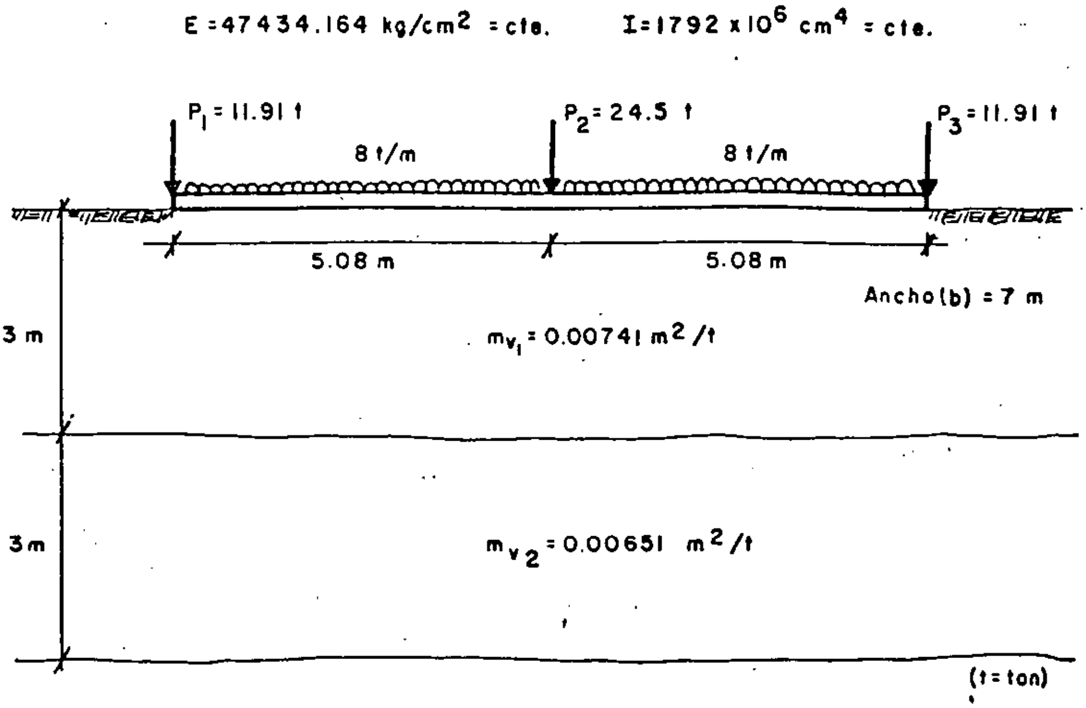
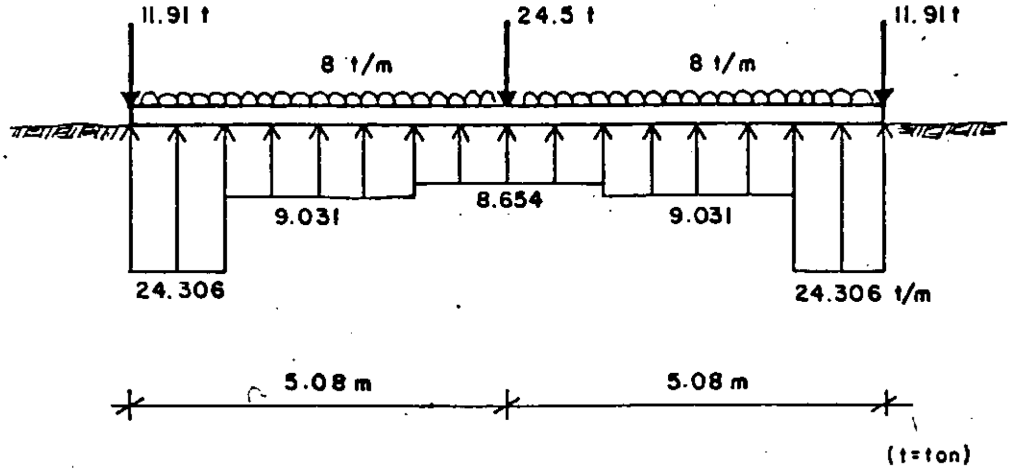
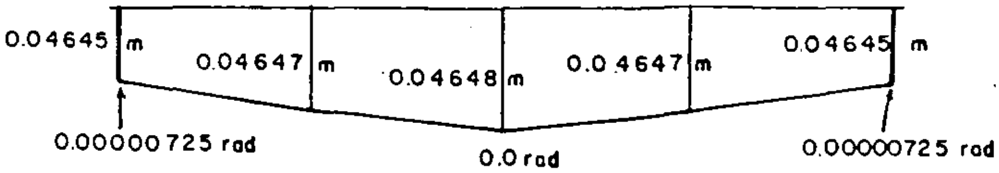


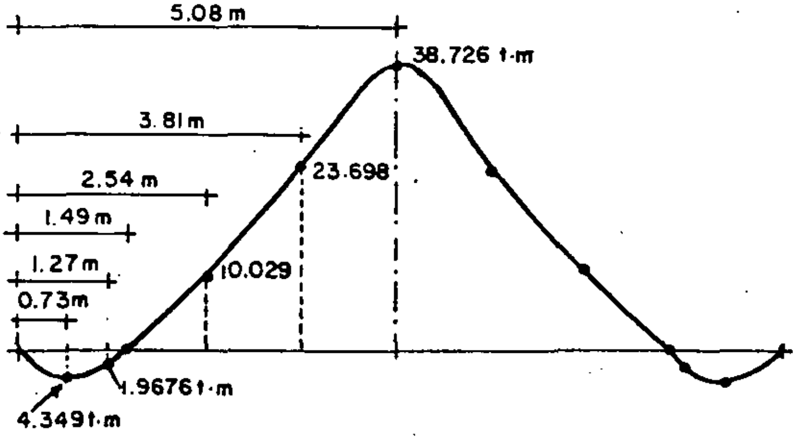
FIG. 4.4 VIGA FLOTANTE (EJEMPLO)



a) REACCIONES DEL SUELO.

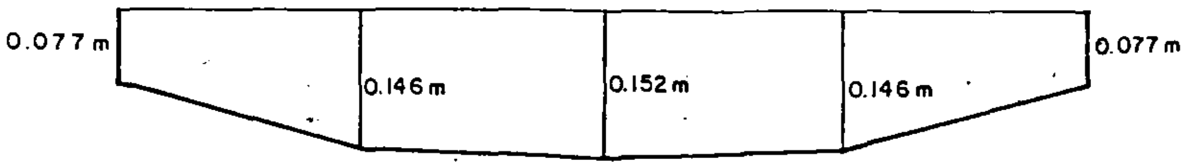


b) Hundimientos del terreno y giros en la viga.

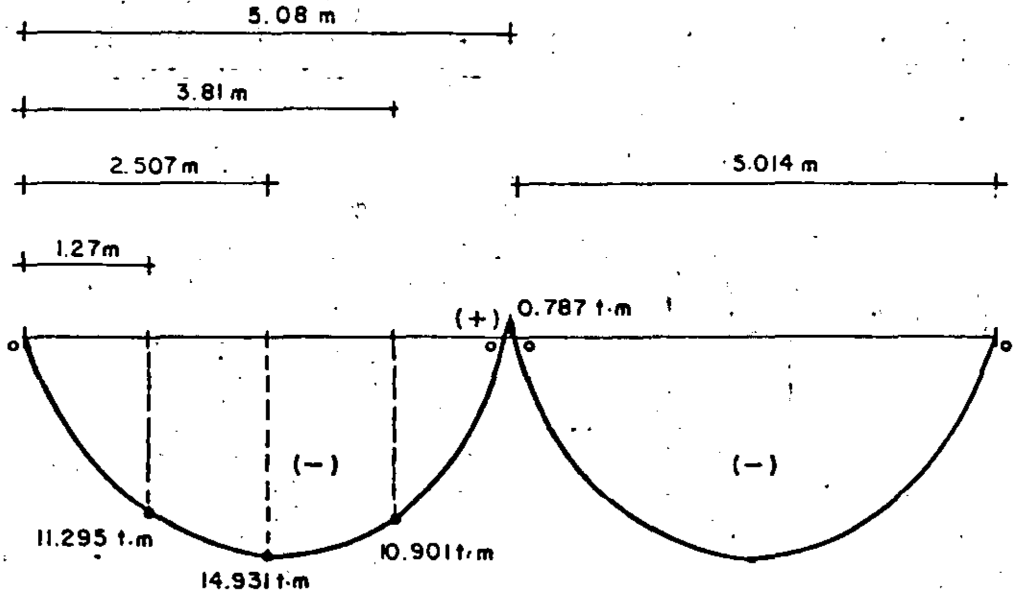


c) Diagrama de momentos flexionantes.

FIG. 4.5 RESULTADOS DEL PROBLEMA CONSIDERANDO LA INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA



a) Hundimientos del suelo.



b) Diagrama de momentos flexionantes.

FIG. 4.6 RESULTADOS DEL PROBLEMA EMPLEANDO METODOS CONVENCIONALES.

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

ANALISIS ESTRUCTURAL

INTERACCION SUELOS-ESTRUCTURA
ANALISIS TRIDIMENSIONAL

M. EN I. AGUSTIN DEMENEGHI COLINA

SEP-OCT. 92

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

realizó el análisis estructural, es posible determinar además los giros en los nudos de la estructura. Con estos resultados se pueden calcular los elementos mecánicos en toda la estructura, incluyendo desde luego a la estructura de cimentación.

En los siguientes incisos se presentan los pasos a seguir para cumplir con el procedimiento descrito en el párrafo anterior.

2. Análisis estructural

Para fines de interacción es conveniente utilizar el método de rigideces del análisis estructural, en el que la ecuación general de equilibrio de una estructura está dada por

$$\underline{K}\,\underline{\delta} + \underline{P}_e + \underline{P}_c = 0 \qquad (1)$$

donde

$\underline{K}$ = matriz de rigideces de la estructura
$\underline{\delta}$ = vector de desplazamientos
$\underline{P}_e$ = vector de cargas de empotramiento
$\underline{P}_c$ = vector de cargas concentradas

La matriz de rigideces de la estructura se puede obtener mediante la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras que forman la estructura. A continuación presentamos las matrices de rigidez y los vectores de empotramiento para las siguientes condiciones de apoyo:

a) Barra con una articulación a la izquierda y un apoyo continuo a la derecha

b) Barra con una articulación a la derecha y un apoyo continuo a la iquierda

c) Barra con dos apoyos continuos

Para la determinación de los vectores de empotramiento en las vigas de la estructura de cimentación consideramos una carga repartida de un extremo hasta la mitad de una barra y otra carga repartida de la mitad hasta el otro extremo de la barra.

La convención de signos utilizada es la siguiente: los giros se consideran positivos en sentido antihorario y los desplazamientos lineales son positivos si van hacia abajo. Los momentos flexionantes son positivos en sentido horario, y las fuerzas cortantes son positivas si van hacia arriba.

a) Barra con una articulación a la izquierda y un apoyo continuo a la derecha (fig 1)

La matriz de rigidez está dada por (Beaufait *et al* 1970):

$$\underline{K}_m = \begin{array}{ccc} \theta_q & \delta_r & \delta_s \\ \left[\begin{array}{c} 3EI/L \\ -3EI/L^2 \\ 3EI/L^2 \end{array}\right. & \begin{array}{c} -3EI/L^2 \\ 3EI/L^3 \\ -3EI/L^3 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 3EI/L^2 \\ -3EI/L^3 \\ 3EI/L^3 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \end{array} \qquad (2)$$

El vector de cargas de empotramiento vale

$$\underline{P}_{em} = \left\{ \begin{array}{l} -wL^2/8 + (7/128)L^2\, r_r + (9/128)L^2\, r_s \\ -3wL/8 + (41/128)L\, r_r + (7/128)L\, r_s \\ -5wL/8 + (23/128)L\, r_r + (57/128)L\, r_s \end{array} \right\} \qquad (3)$$

b) Barra con una articulación a la derecha y un apoyo continuo a la izquierda (fig 2)

La matriz de rigidez está dada por

$$\underline{K}_m = \begin{array}{ccc} \theta_p & \delta_r & \delta_s \\ \left[\begin{array}{c} 3EI/L \\ -3EI/L^2 \\ 3EI/L^2 \end{array}\right. & \begin{array}{c} -3EI/L^2 \\ 3EI/L^3 \\ -3EI/L^3 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 3EI/L^2 \\ -3EI/L^3 \\ 3EI/L^3 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \theta_p \\ \delta_r \\ \delta_s \end{array} \qquad (4)$$

El vector de cargas de empotramiento vale

$$\underline{P}_{em} = \left\{ \begin{array}{c} wL^2/8 - (9/128)L^2\, r_r - (7/128)L^2\, r_s \\ - 5wL/8 + (57/128)L\, r_r + (23/128)L\, r_s \\ - 3wL/8 + (7/128)L\, r_r + (41/128)L\, r_s \end{array} \right\} \qquad (5)$$

c) Barra con dos apoyos continuos (fig 3)

La matriz de rigidez está dada por

$$\underline{K}_m = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \theta_p & \theta_q & \delta_r & \delta_s \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 4EI/L & 2EI/L & - 6EI/L^2 & 6EI/L^2 \\ 2EI/L & 4EI/L & - 6EI/L^2 & 6EI/L^2 \\ - 6EI/L^2 & - 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & - 12EI/L^3 \\ 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & - 12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \end{array} \qquad (6)$$

El vector de cargas de empotramiento vale

$$\underline{P}_{em} = \left\{ \begin{array}{c} wL^2/12 - (11/192)L^2\, r_r - (5/192)L^2\, r_s \\ - wL^2/12 + (5/192)L^2\, r_r + (11/192)L^2\, r_s \\ - wL/2 + (13/32)L\, r_r + (3/32)L\, r_s \\ - wL/2 + (3/32)L\, r_r + (13/32)L\, r_s \end{array} \right\} \qquad (7)$$

Como indicamos antes, la matriz de rigideces de toda la estructura es la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras de la estructura. El vector de cargas de empotramiento de toda la estructura se obtiene sumando los vectores de cargas de empotramiento de todas y cada una de las barras. El vector de cargas concentradas se determina asignando a cada grado de libertad la carga concentrada que actúa sobre él. Con esto se realiza el análisis estructural de toda la estructura.

3. Hundimientos del terreno de cimentación

En este inciso consideramos las cargas que transmite la estructura sobre el terreno de apoyo, las que son iguales en magnitud y de sentido contrario a las reacciones del suelo sobre la estructura, por la tercera ley de Newton. Calculemos los asentamientos del terreno en función de estas cargas; consideremos una reacción r_k actuando en la superficie (fig 4); la presión vertical vale $r_k \, l_k \, / \, a_k$, donde l_k y a_k son la longitud y el área en las que actúa la carga, respectivamente.

La deformación del estrato de espesor H_{ij}, debida a la carga r_k vale

$$\delta_{ijk} = M_{z_{ij}} \, H_{ij} \, \sigma_{z_{ijk}}$$

Pero $$\sigma_{z_{ijk}} = I_{ijk} \, r_k \, l_k \, / \, a_k$$

donde I_{ijk} es el valor de influencia, el cual está dado por el esfuerzo normal vertical en el punto ij , producido por una presión unitaria actuando en el área a_k (Zeevaert 1973).

$M_{z_{ij}}$ es el módulo lineal de deformación, el cual se define como el cociente de la deformación vertical del estrato, entre el esfuerzo normal vertical que la ocasiona.

En consecuencia $$\delta_{ijk} = M_{z_{ij}} \, H_{ij} \, I_{ijk} \, r_k \, l_k \, / \, a_k$$

La deformación del estrato, debida a todas las cargas vale

$$\delta_{ij} = M_{z_{ij}} \, H_{ij} \sum_{i=1}^{n_r} I_{ijk} \, r_k \, l_k \, / \, a_k$$

donde n_r = número total de cargas r_k

El asentamiento bajo el punto i vale

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{n_e} M_{z_{ij}} H_{ij} \sum_{k=1}^{n_r} I_{ijk} r_k l_k / a_k \qquad (8)$$

donde n_e = número total de estratos

En la ec 8 los hundimientos del terreno quedan en función de las cargas r_k .

4. Compatibilidad de deformaciones

En esta etapa se establece la compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo de cimentación, lo que equivale a considerar que tanto los desplazamientos de la estructura como los del terreno son iguales, es decir, que el suelo no se despega de la estructura. Analíticamente esto se alcanza sustituyendo los valores dados por la ec 8 en la ec 1. De esta manera desaparecen como incógnitas los desplazamientos lineales y quedan únicamente como incógnitas los giros en los nudos y las reacciones del terreno. Es fácil ver que el número de ecuaciones es el mismo que el de incógnitas, con lo que se puede resolver el sistema de ecuaciones y despejar los giros y las reacciones. Empleando la ec 8, ya conocidas las reacciones, se pueden determinar también los hundimientos del terreno de apoyo.

5. Elementos mecánicos

Los elementos mecánicos sobre los diferentes grados de libertad de la estructura se pueden hallar en función de los resultados de la interacción suelo-estructura. Para ello, empleamos las siguientes expresiones, que proporcionan los elementos mecánicos de barra sobre nudo, que transmite la barra "m" al grado de libertad correspondiente.

a) Barra con una articulación a la izquierda y un apoyo continuo a la derecha (fig 1)

$$M_q = - wL^2/8 + (7/128)\ L^2\ r_r + (9/128)\ L^2\ r_s + (3EI/L)\ \theta_q$$

$$- (3EI/L^2)\ \delta_r + (3EI/L^2)\ \delta_s \qquad (9)$$

$$V_r = - 3wL/8 + (41/128)\ L\ r_r + (7/128)\ L\ r_s - (3EI/L^2)\ \theta_q$$

$$+ (3EI/L^3)\ \delta_r - (3EI/L^3)\ \delta_s \qquad (10)$$

$$V_s = - 5wL/8 + (23/128)\ L\ r_r + (57/128)\ L\ r_s + (3EI/L^2)\ \theta_q$$

$$- (3EI/L^3)\ \delta_r + (3EI/L^3)\ \delta_s \qquad (11)$$

b) Barra con una articulación a la derecha y un apoyo continuo a la izquierda (fig 2)

$$M_p = wL^2/8 - (9/128)\ L^2\ r_r - (7/128)\ L^2\ r_s + (3EI/L)\ \theta_p$$

$$- (3EI/L^2)\ \delta_r + (3EI/L^2)\ \delta_s \qquad (12)$$

$$V_r = - 5wL/8 + (57/128)\ L\ r_r + (23/128)\ L\ r_s - (3EI/L^2)\ \theta_p$$

$$+ (3EI/L^3)\ \delta_r - (3EI/L^3)\ \delta_s \qquad (13)$$

$$V_s = - 3wL/8 + (7/128)\ L\ r_r + (41/128)\ L\ r_s + (3EI/L^2)\ \theta_p$$

$$- (3EI/L^3)\ \delta_r + (3EI/L^3)\ \delta_s \qquad (14)$$

c) Barra con dos apoyos continuos (fig 3)

$$M_p = wL^2/12 - (11/192)\ L^2\ r_r - (5/192)\ L^2\ r_s + (4EI/L)\ \theta_p$$

$$+ (2EI/L)\ \theta_q - (6EI/L^2)\ \delta_r + (6EI/L^2)\ \delta_s \qquad (15)$$

$$M_q = - wL^2/12 + (5/192)\ L_r^2\ r + (11/192)\ L_s^2\ r + (2EI/L)\ \theta_p$$

$$+ (4EI/L)\ \theta_q - (6EI/L^2)\ \delta_r + (6EI/L^2)\ \delta_s \qquad (16)$$

$$V_r = - wL/2 + (13/32)\ L\ r_r + (3/32)\ L\ r_s - (6EI/L^2)\ \theta_p$$

$$- (6EI/L^2)\ \theta_q + (12EI/L^3)\ \delta_r - (12EI/L^3)\ \delta_s \qquad (17)$$

$$V_s = - wL/2 + (3/32)\ L\ r_r + (13/32)\ L\ r_s + (6EI/L^2)\ \theta_p$$

$$+ (6EI/L^2)\ \theta_q - (12EI/L^3)\ \delta_r + (12EI/L^3)\ \delta_s \qquad (18)$$

d) Barra en la superestructura

En este caso no existen las reacciones del terreno r_i , por lo que las ecuaciones quedan

$$M_p = wL^2/12 + (4EI/L)\ \theta_p + (2EI/L)\ \theta_q - (6EI/L^2)\ \delta_r + (6EI/L^2)\ \delta_s \qquad (19)$$

$$M_q = - wL^2/12 + (2EI/L)\ \theta_p + (4EI/L)\ \theta_q - (6EI/L^2)\ \delta_r + (6EI/L^2)\ \delta_s \qquad (20)$$

$$V_r = - wL/2 - (6EI/L^2)\ \theta_p - (6EI/L^2)\ \theta_q + (12EI/L^3)\ \delta_r - (12EI/L^3)\ \delta_s \qquad (21)$$

$$V_s = - wL/2 + (6EI/L^2)\ \theta_p + (6EI/L^2)\ \theta_q - (12EI/L^3)\ \delta_r + (12EI/L^3)\ \delta_s \qquad (22)$$

6. Ejemplo ilustrativo

Presentamos en este inciso un ejemplo muy sencillo resuelto paso a paso, con el propósito de que el lector visualice las etapas requeridas para el análisis de interacción.

Se pide determinar las reacciones y los hundimientos del terreno, para la estructura mostrada en la fig 5. Se piden también los elementos mecánicos, tanto en estructura de cimentación como en la superestructura. La estratigrafía y propiedades del subsuelo se muestran en la fig 6.

A continuación presentamos las diferentes etapas para la resolución de la interacción suelo-estructura.

a) Análisis estructural

Primeramente numeramos las barras y los grados de libertad de la estructura, como se indica en la fig 7. Dada la simetría de la estructura, presentamos a continuación los de algunas barras:

Barra	θ_p	θ_q	δ_r	δ_s
1	---	θ_{16}	δ_4	δ_5
3	θ_{16}	---	δ_5	δ_6
5	θ_{10}	θ_{12}	δ_1	δ_2
13	θ_{24}	θ_{10}	δ_{35}	δ_{34}
21	θ_{24}	θ_{26}	δ_1	δ_3

Véase que a las columnas les corresponden dos números, pues cada columna trabaja en dos direcciones como miembro estructural independiente.

A continuación hallamos las matrices de rigidez y los vectores de empotramiento de las barras de la estructura.

Aplicando la ec 2

$$\underline{K}_1 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc|c} \theta_{16} & \delta_4 & \delta_5 & \\ 400.067 & -93.039 & 93.039 & \theta_{16} \\ -93.039 & 21.637 & -21.637 & \delta_4 \\ 93.039 & -21.637 & 21.637 & \delta_5 \end{array}$$

Aplicando la ec 4

$$\underline{K}_3 = \begin{array}{ccc|c} \theta_{16} & \delta_5 & \delta_6 & \\ 400.067 & -93.039 & 93.039 & \theta_{16} \\ -93.039 & 21.637 & -21.637 & \delta_5 \\ 93.039 & -21.637 & 21.637 & \delta_6 \end{array}$$

Aplicando la ec 6

$$\underline{K}_5 = \begin{array}{cccc|c} \theta_{10} & \theta_{12} & \delta_4 & \delta_5 & \\ 2382.53 & 1191.27 & -831.115 & 831.115 & \theta_{10} \\ 1191.27 & 2382.53 & -831.115 & 831.115 & \theta_{12} \\ -831.115 & -831.115 & 386.565 & -386.565 & \delta_1 \\ 831.115 & 831.115 & -386.565 & 386.565 & \delta_2 \end{array}$$

$$\underline{K}_{13} = \begin{array}{cc|c} \theta_{24} & \theta_{10} & \\ 278.393 & 139.197 & \theta_{24} \\ 139.197 & 278.393 & \theta_{10} \end{array}$$

$$\underline{K}_{21} = \begin{array}{cc|c} \theta_{24} & \theta_{26} & \\ 1191.265 & 595.633 & \theta_{24} \\ 595.633 & 1191.265 & \theta_{26} \end{array}$$

La matriz de rigideces de toda la estructura es la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras de la estructura. Debido a la simetría en geometría y cargas, presentamos a continuación la matriz de rigideces de la estructura solo para algunos grados de libertad.

$$\underline{K} = \begin{array}{cccccccccccc|c}
\delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 & \delta_8 & \theta_{10} & \theta_{11} & \theta_{13} & \theta_{24} & \theta_{25} & \\
773.13 & -386.565 & 0 & -386.565 & 0 & 0 & 0 & -831.115 & 831.115 & 0 & 0 & 0 & \delta_1 \\
-386.565 & 794.767 & -386.565 & 0 & -21.637 & 0 & 0 & 831.115 & 0 & -831.115 & 0 & 0 & \delta_2 \\
 & & & & & & & & & & & & \delta_3 \\
 & & & & & & & & & & & & \delta_4 \\
0 & -21.637 & 0 & -21.637 & 86.548 & -21.637 & -21.637 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_5 \\
 & & & & & & & & & & & & \delta_6 \\
 & & & & & & & & & & & & \delta_8 \\
-831.115 & 831.115 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2660.923 & 0 & 0 & 139.197 & 0 & \theta_{10} \\
 & & & & & & & & & & & & \theta_{11} \\
 & & & & & & & & & & & & \theta_{13} \\
0 & 0 & 0 & \overset{0}{\cancel{139.197}} & 0 & 0 & 0 & 139.197 & 0 & 0 & 1469.658 & 595.633 & \theta_{24} \\
 & & & & & & & & & & & & \theta_{25}
\end{array}$$

=

Como se indicó en el inciso 3, el valor de influencia I_{ijk} representa el esfuerzo en el punto ij debido a una presión unitaria colocada en el área k . Calculemos como ejemplo un valor de influencia, digamos el I_{115} . En la fig 8 se muestra la planta del área 5 y del punto 1 . Colocamos una presión unitaria en el área 5 y calculamos el esfuerzo bajo el punto 1, a la mitad del estrato 1, es decir, a una profundidad de 1.2 m . Aplicando la ecuación de Boussinesq, se obtiene un esfuerzo vertical de 0.002988 . Los demás valores de infuencia se obtienen en forma similar.

Sustituyendo valores en la ec (f)

$$\begin{aligned}
\delta_1 = {} & 0.0154(2.4)[0.2271(4.3r_1)/4.6225+0.009375(6.45r_2)/9.245 \\
& +0.0001528(4.3r_3)/4.6225+0.009375(6.45r_4)/9.245+0.002988(8.6r_5)/18.49 \\
& +0.0001625(6.45r_6)/9.245+0.0001528(4.3r_7)/4.6225 \\
& +0.0001625(6.45r_8)/9.245+0.00002824(4.3r_9)/4.6225] \\
& + 0.0222(2.0)[0.1139(4.3r_1)/4.6225+0.04407(6.45r_2)/9.245 \\
& +0.002284(4.3r_3)/4.6225+0.04407(6.45r_4)/9.245+0.028026(8.6r_5)/18.49 \\
& +0.002638(6.45r_6)/9.245+0.0022836(4.3r_7)/4.6225 \\
& +0.002638(6.45r_8)/9.245+0.0005157(4.3r_9)/4.6225]
\end{aligned}$$

Sabemos que por simetría

$$r_1 = r_3 = r_7 = r_9 \qquad r_2 = r_4 = r_6 = r_8$$

Sustituyendo valores y haciendo operaciones

$$\delta_1 = 0.012733\ r_1 + 0.0033854\ r_2 + 0.00063012\ r_5 \tag{g}$$

En forma análoga se obtienen δ_2 y δ_5

$$\delta_2 = 0.0036877\ r_1 + 0.020326\ r_2 + 0.0021424\ r_5 \tag{h}$$

$$\delta_5 = 0.0028714\ r_1 + 0.010629\ r_2 + 0.025023\ r_5 \tag{i}$$

c) Compatibilidad de deformaciones

La compatibilidad de deformaciones entre la estructura y el terreno de cimentación se logra sustituyendo las ecs (f), (g) y (h) en las ecs (a) a (e); así, se obtiene lo siguiente:

Grado de libertad 1

$$10.4870\ r_1 - 12.2911\ r_2 - 1.1692\ r_5 - 1662.23\ \theta_{10} - 13.04 = 0 \qquad (a')$$

Grado de libertad 2

$$-\ 6.1693\ r_1 + 18.1781\ r_2 + 0.9093\ r_5 + 1662.23\ \theta_{10} - 6.02 = 0 \qquad (b')$$

Grado de libertad 5

$$-\ 0.07065\ r_1 + 2.25155\ r_2 + 9.6394\ r_5 - 17.2 = 0 \qquad (c')$$

Grado de libertad 10

$$-\ 8.5770\ r_1 + 13.5980\ r_2 + 1.2569\ r_5 + 2660.923\ \theta_{10} + 139.197\ \theta_{24} + 1.2327 = 0 \qquad (d')$$

Grado de libertad 24

$$139.197\ \theta_{10} + 874.025\ \theta_{24} + 6.1633 = 0 \qquad (e')$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$r_1 = 3.3022$ t/m $\quad r_2 = 0.8864$ t/m $\quad r_5 = 1.6015$ t/m

$\theta_{10} = 0.005308 \quad \theta_{24} = -\ 0.007897$

Sustituyendo en las ecs (g), (h) e (i)

$\delta_1 = 0.04606$ m

$\delta_2 = 0.03363$ m

$\delta_5 = 0.05898$ m

e) Elementos mecánicos

Con al auxilio de las ecs 9 a 22 se obtienen los elementos mecánicos sobre las barras de la estructura. A continuación presentamos los resultados de la aplicación de estas expresiones para las barras 1, 5, 13 y 21.

Barra 1. Sustituyendo en las ecs 9 a 11:

$M_{16} = 1.639$ t.m $\quad V_4 = -\ 1.531$ t $\quad V_5 = 0$

Barra 5. Utilizando las ecs 15 a 18:

$M_{10} = - 0.378$ t.m $\quad M_{12} = - 2.712$ t.m

$V_1 = - 4.8$ t $\quad V_2 = 0.766$ t

Barra 13. Aplicando las ecs 19 a 22:

$M_{24} = - 1.460$ t.m $\quad M_{10} = 0.378$ t.m

$V_{35} = 0.235$ t $\quad V_{34} = 0.235$ t

Barra 21. Sustituyendo en las ecs 19 a 22:

$M_{24} = 1.460$ t.m $\quad M_{26} = - 1.460$ t.m

$V_1 = - 4.3$ t $\quad V_3 = - 4.3$ t

7. Conclusiones

Como se puede apreciar en los incisos anteriores, es posible en forma relativamente sencilla llevar a cabo el análisis de interacción suelo-estructura en tres dimensiones, tomando en cuenta toda la estructura y todos los estratos del subsuelo.

Uno de los aspectos importantes es que para aplicar esta técnica en la práctica profesional, es necesario elaborar programas de computadora, los cuales utilizan grandes cantidades de memoria, ya que en el espacio el número de grados de libertad es mucho mayor que el que se utiliza en análisis bidimensionales.

Referencias

Beaufait, F W, Rowan, W H, Hoadley, P G y Hackett, R M, Computer Methods of Structural Analysis, Prentice-Hall, 1970

Deméneghi, A, "Interacción suelo-estructura", Revista <u>Ingeniería</u>, Nueva Época, 1983

Zeevaert, L, <u>Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions</u>, Van Nostrand Reinhold, 1973

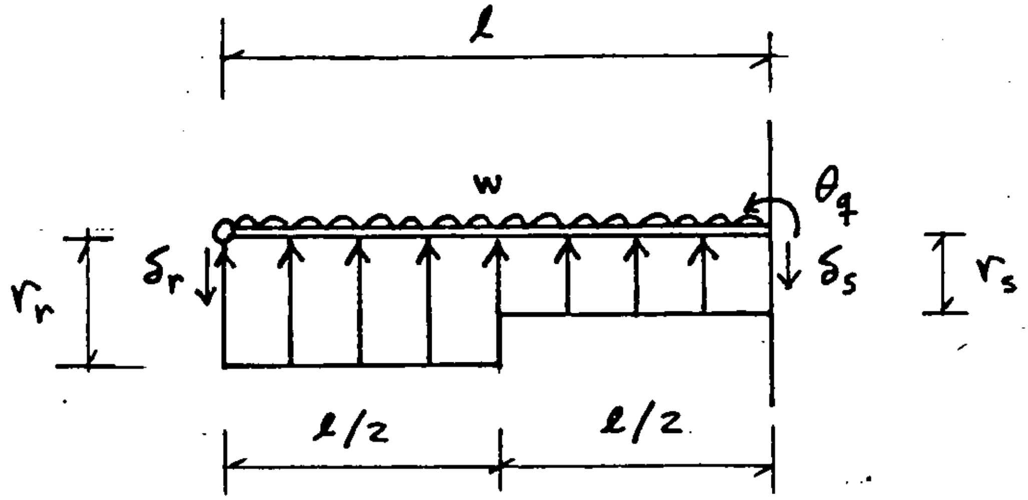

ℓ
w
θ_q
r_r
δ_r
δ_s
r_s
ℓ/2
ℓ/2

FIG 1

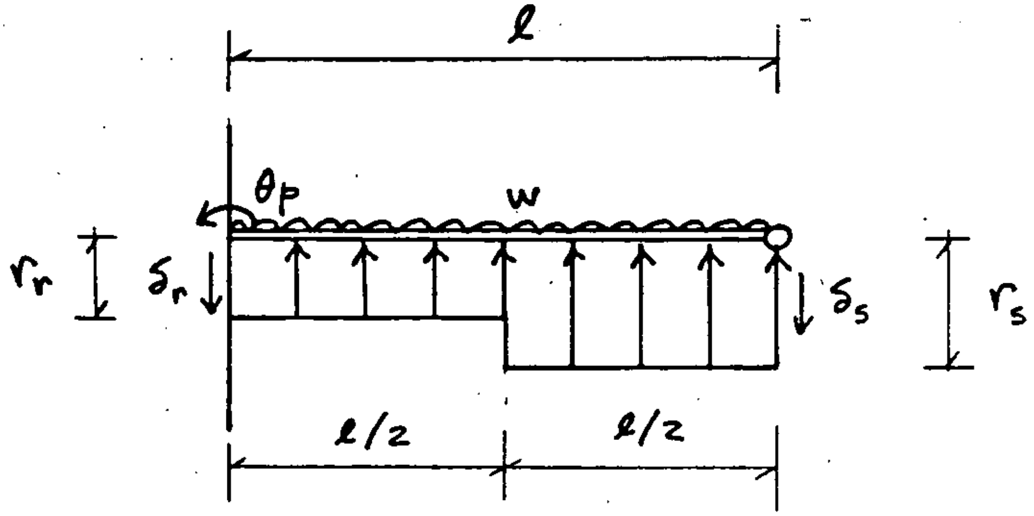

ℓ
θ_p
w
r_r
δ_r
δ_s
r_s
ℓ/2
ℓ/2

FIG 2

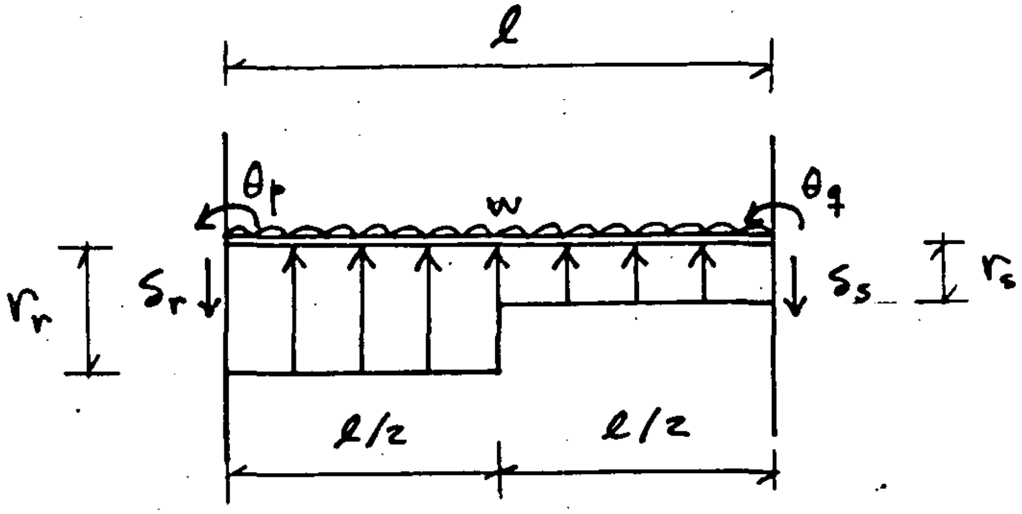


FIG 3

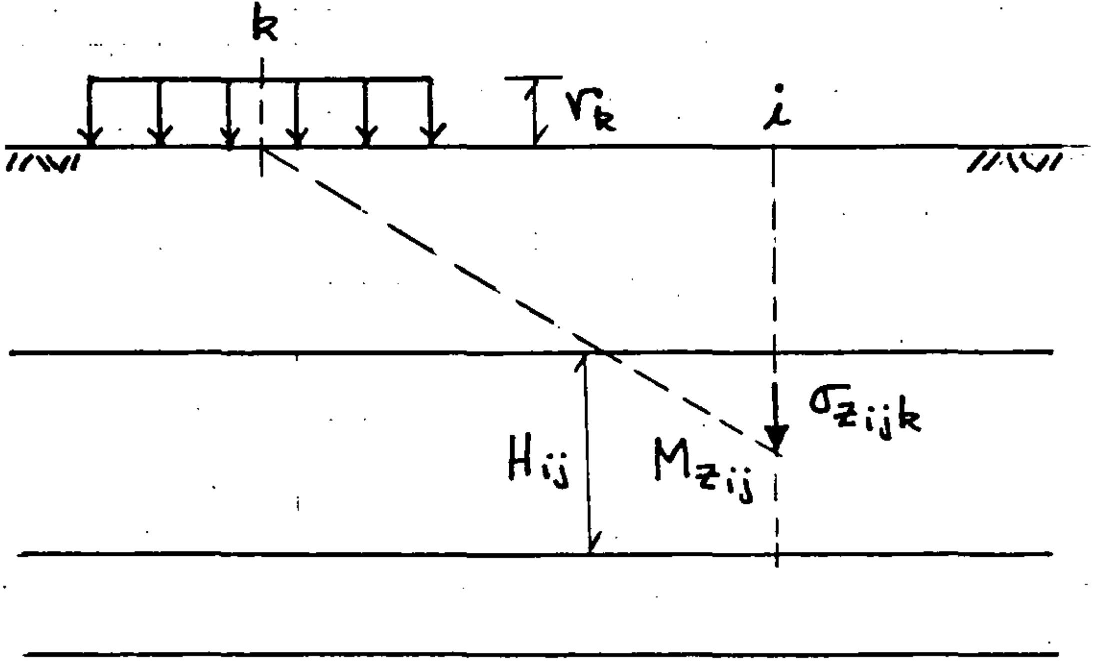


FIG 4

$E = 474300\ t/m^2$

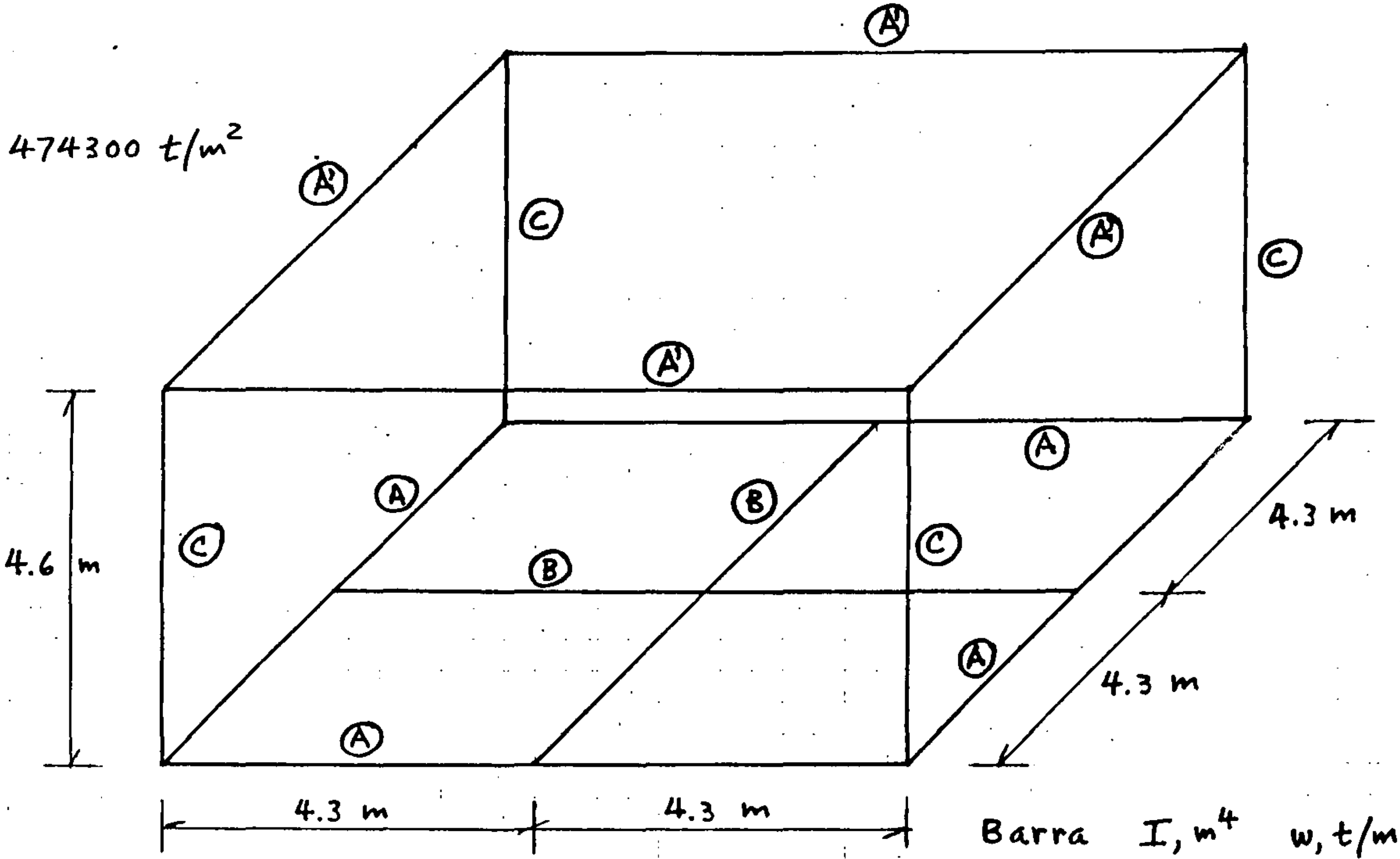


FIG 5

Barra	I, m^4	$w, t/m$
A	0.0054	0.8
B	0.001209	1.6
C	0.000675	0
A'	0.0054	1.0

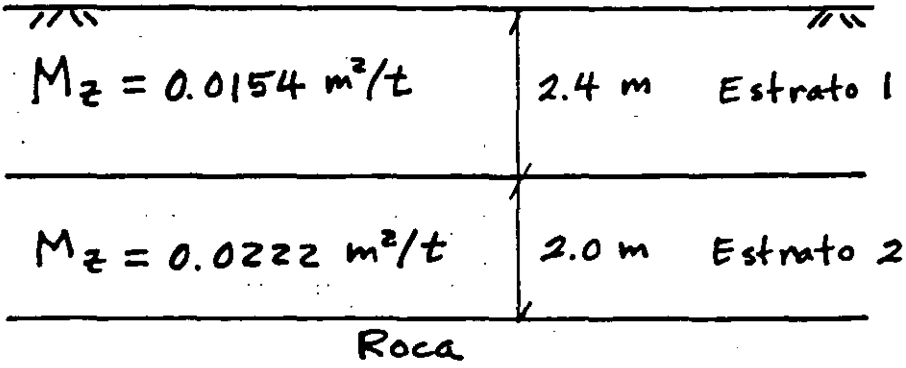


FIG 6

ESTRATIGRAFÍA Y PROPIEDADES

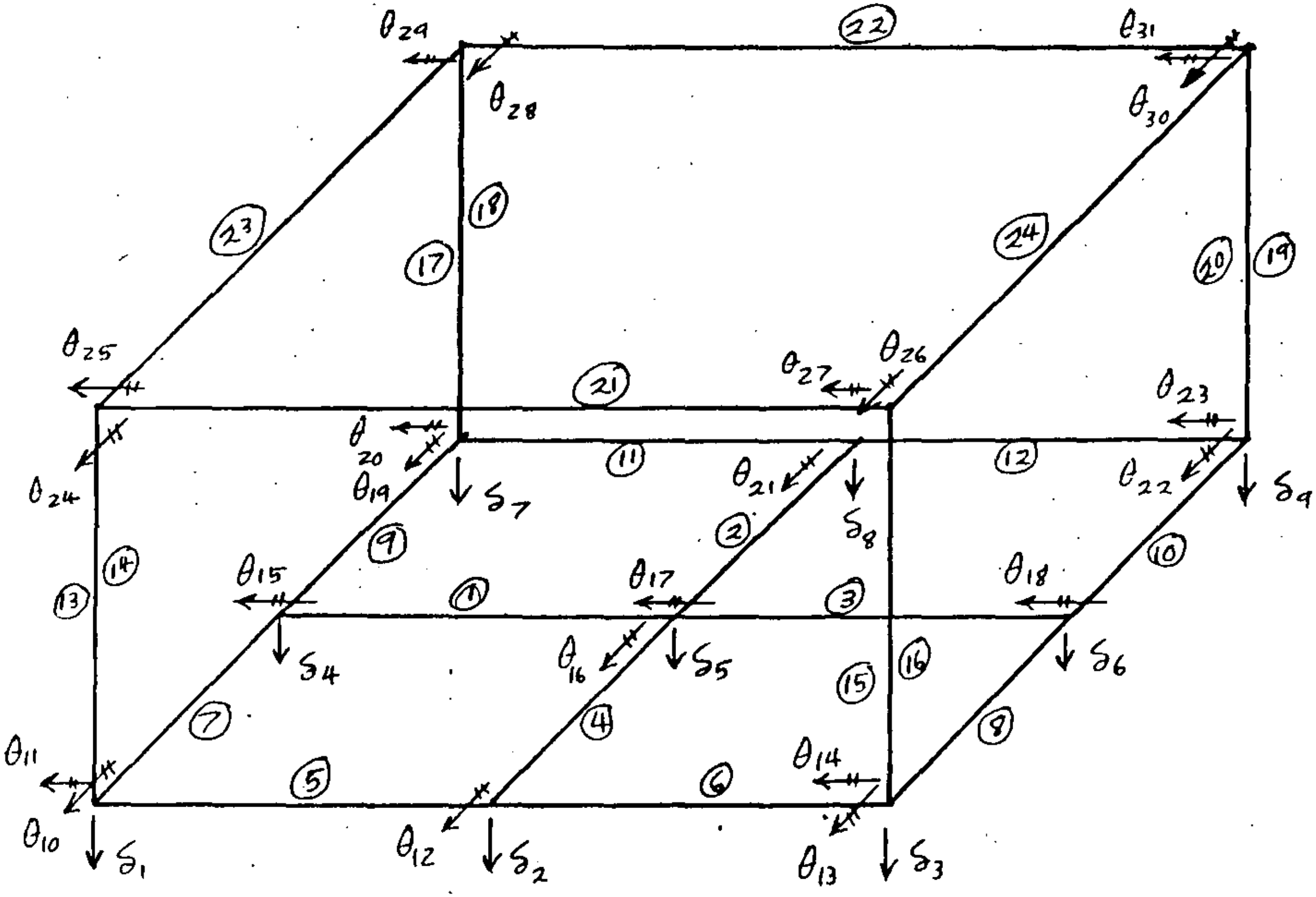

θ29
θ28
22
θ31
θ30
23
18
17
24
20
19
θ25
21
θ27
θ26
θ23
θ20
11
12
θ24
θ19
S7
θ21
S8
θ22
S9
14
13
9
2
10
θ15
1
θ17
3
θ18
S4
θ16
S5
15
16
S6
7
4
8
θ11
θ14
5
6
θ10
S1
θ12
S2
θ13
S3

FIG 7

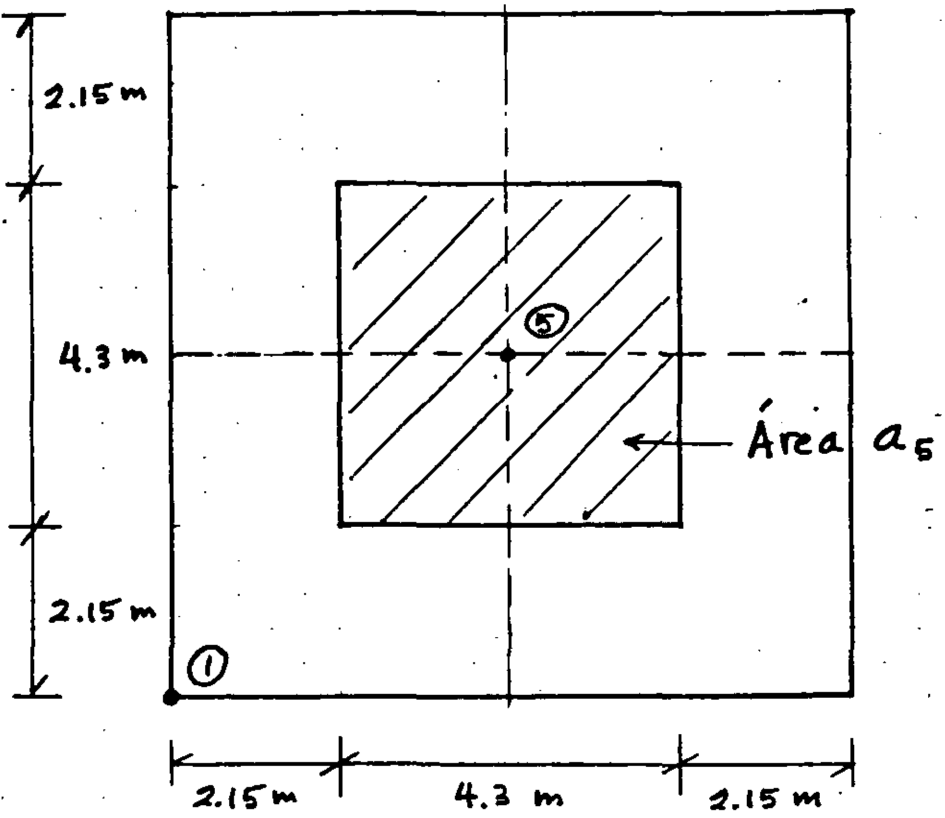


FIG 8

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

ANALISIS ESTRUCTURAL

FUNDAMENTOS DE VIBRACIONES

DR. PORFIRIO BALLESTEROS

SEP-OCT. 92

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

<u>Tiempo</u>.- El patrón de tiempo es la rotación de la tierra, y su unidad fundamental es el día solar medio

$$\text{segundo} = \frac{1}{86400}\ (\text{día solar medio})$$

Fuerza.- La fuerza con que la tierra atrae al Kilogramo masa al nivel del mar y a una latitud de 45° se denomina Kilogramo Fuerza.

Los dinamómetro se calibran con el Kilogramo masa

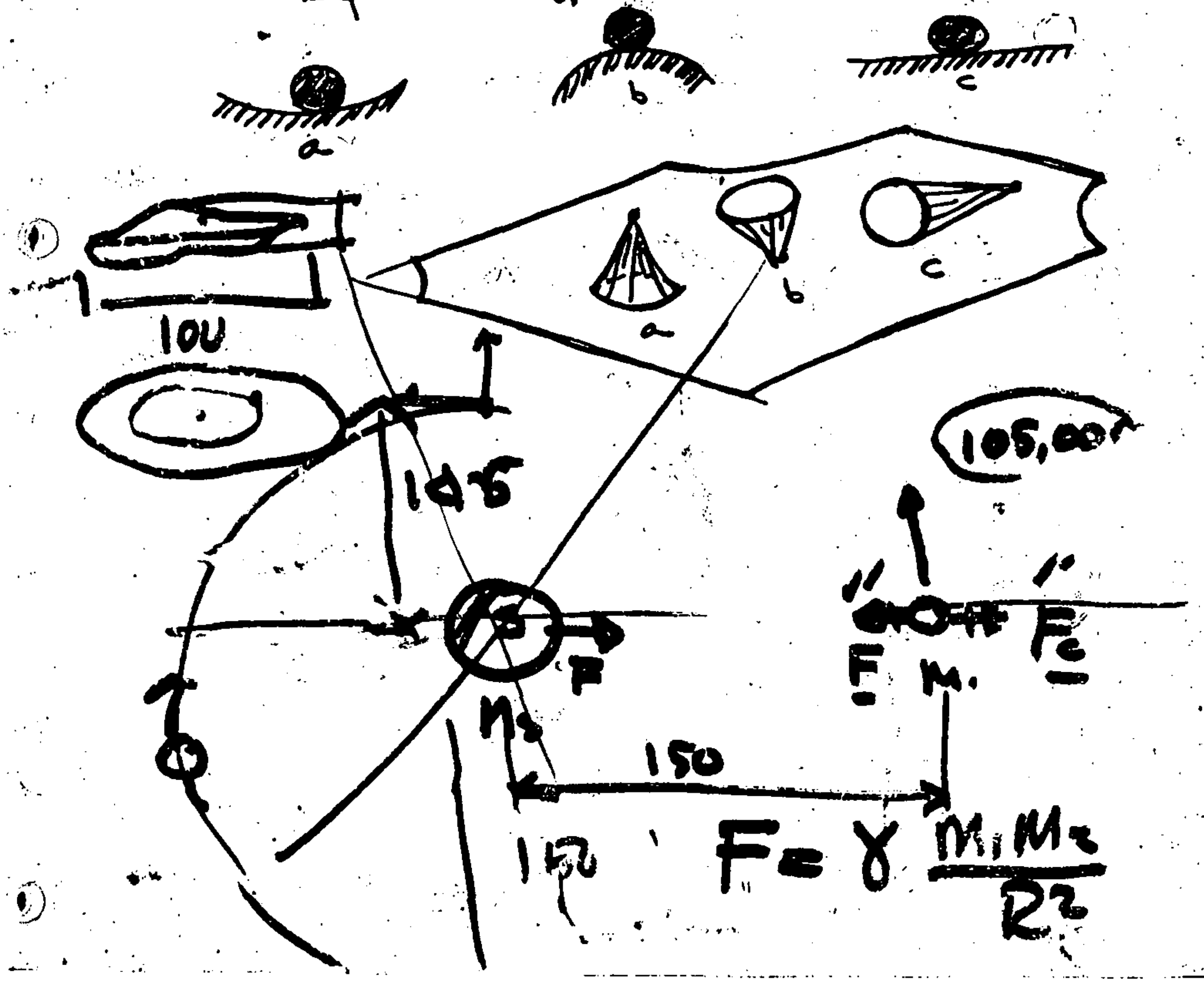
LA MECANICA ES LA RAMA DE LA FISICA QUE ESTUDIA EL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS MATERIALES Y DE LAS FUERZAS QUE PROVOCAN EL MOVIMIENTO

LEYES DE NEWTON

PRIMERA EQUILIBRIO

1– Todo cuerpo continua en su estado de reposo, o de movimiento uniforme y rectilíneo, a menos que sea impedido a cambiar dicho estado por fuerzas ejercidas sobre él

Equilibrios: a) estable, b) inestable, c) indiferente



$$F = \gamma \frac{M_1 M_2}{R^2}$$

SISTEMA TECNICO INGLES (f.p.s.)

La fuerga se expresa en libras y la aceleración en pies/seg², y la masa en libras/(pies/seg²). esta unidad recibe el nombre de SLUG.

$$\sum F(\text{libras}) = m(\text{slugs}) \times a\left(\text{pies}/\text{seg}^2\right)$$

Ejemplo: si la acelración de un cuerpo es de 5 pies/seg² cuando actua en el una fuerza resultante de 20 lbs, su masa es

$$m = \frac{\sum F}{a} = \frac{20 \text{ lbs}}{5 \text{ pies}/\text{seg}^2} = 4 \frac{\text{lbs}}{\text{pies}/\text{seg}^2} = 4 \text{ SLUGS}$$

SISTEMAS DE UNIDADES

SISTEMA	Fuerza	Masa	Aceleración
Técnico	Kilogramo (Kg.)	Unidad Tecnica de masa	m/seg²
mks	Newton	Kilogramo Patrón	m/seg²
cgs	dina	gramo	cm/seg²
INGLES	LIBRA	SLUG	pie/seg²

No es necesario la interpretación FISICA de la unidad Técnica de masa ni el slug, ni tampoco la unidad de longitud del sistema inglés, el pie. Todos quedan definidos a partir de los patrones kilogramo y metro.

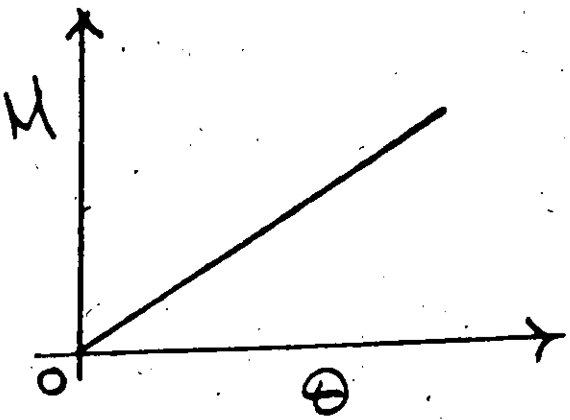
KILOGRAMO FUERZA ES LA FUERZA QUE COMUNICA AL KILOGRAMO PATRON (MASA) UNA ACELERACION IGUAL A LA ACELERACION NORMAL DE LA GRAVEDAD, O SEA 9.80665 m/seg².
(La unidad Técnica de masa es la masa de un cuerpo cuya aceleración es 1 m/seg² cuando la fuerza que actua sobre el es un Kilogramo fuerza)

$$1 \text{ pie} = \frac{1200}{3937} \text{ m}$$

$$1 \text{ libra (patrón)} = 0.4535\ldots \text{ Kg (patrón)}$$

$$g = 32.174 \text{ pies/seg}^2$$

(El slug es la masa de un cuerpo cuya aceleración es 1 pie/seg² cuando está sometido a una fuerza de una libra).



gráfica de calibración del hilo de cuarzo

$$F = \frac{M}{b} \quad y \quad G = \frac{F r^2}{\underline{m_1}\,\underline{m_2}} \qquad \left[\frac{F L^2}{Kg^2}\right] = \left[\frac{L^4}{F T^4}\right]$$

y se obtiene:

$$\boxed{G = 6.67 \times 10^{-8} \ \frac{dina \cdot cm^2}{g^2}}$$

ó

$$\boxed{G = 6.67 \times 10^{-11} \ \frac{Newton \cdot m^2}{Kg^2}}$$

Ejemplo: En una balanza de Cavendish si $m_1 = 1g$ $m_2 = 500$ g. y $r = 5cm$

$$F = 6.67 \times 10^{-8} \left(\frac{dina \cdot cm^2}{g^2}\right) \cdot \frac{(\overset{m_1}{1g}) \times (\overset{m_2}{500g})}{(5\,cm)^2} =$$

$$F = 1{,}33 \times 10^{-6} \ \text{Dinas}$$

(una millonesima de Dina)

(1 Newton = $\frac{1}{9.81}$ Kg. fuerza   1 Newton = 10^5 Dinas)

MASA DE LA TIERRA

Puesto que la constante G se determina de mediciones efectuadas en el laboratorio, es posible calcular la masa de la tierra sabiendo que la tierra atrae a un gramo masa en su superficie con una fuerza de 980 dinas. La distancia entre los centros de masa es el radio de la tierra 6380 Km $= 6.38\times10^{8}$ cm. Por consiguiente,

$$980 \text{ dinas} = \left(6.67\times10^{-8}\,\frac{\text{dina}\cdot\text{cm}^2}{\text{gr}^2}\right)\frac{(1\text{ gr})(M)}{(6.38\times10^{8}\text{ cm})^2} \quad (3)$$

donde M es la masa de la tierra. Despejando a M de (3)

$$\boxed{M = 5.98\times10^{27}\text{ gr.}}$$

su volumen es: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(6.38\times10^{8}\text{ cm})^3$

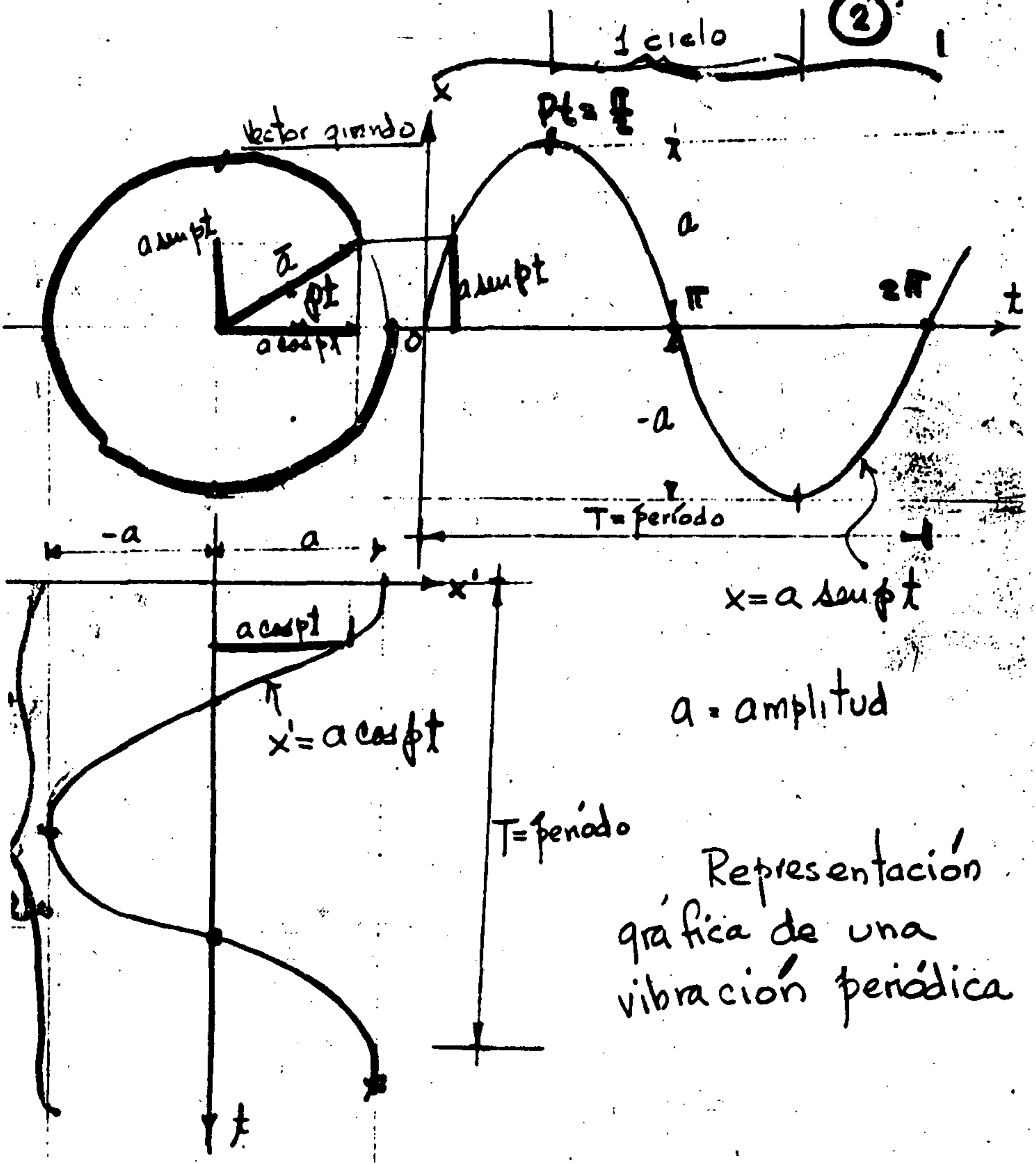
$$\underline{V = 1.09\times10^{27}\text{ cm}^3}$$

Su masa específica (masa por unidad de volume

$$\rho_T = \frac{M}{V} = \frac{5.98\times10^{27}\text{ gr}}{1.09\times10^{27}\text{ cm}^3} = 5.5 \text{ g/cm}^3$$

densidad del agua $= 1$ gr/cm^3

②



a = amplitud

Representación gráfica de una vibración periódica ángulo descrito durante una revolución:

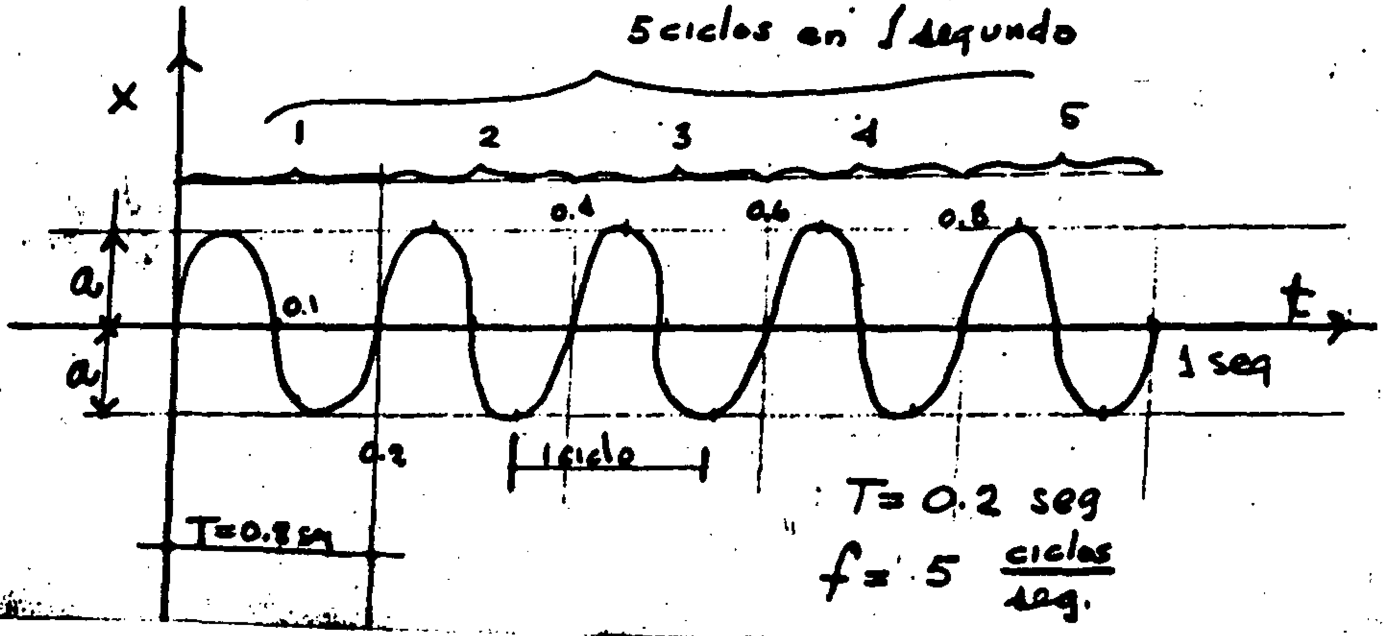
$$2\pi \text{ radianes} = pT$$

$$p = \frac{2\pi}{T} \left[\frac{\text{radianes}}{\text{segundo}}\right]$$ (velocidad angular / frecuencia circular

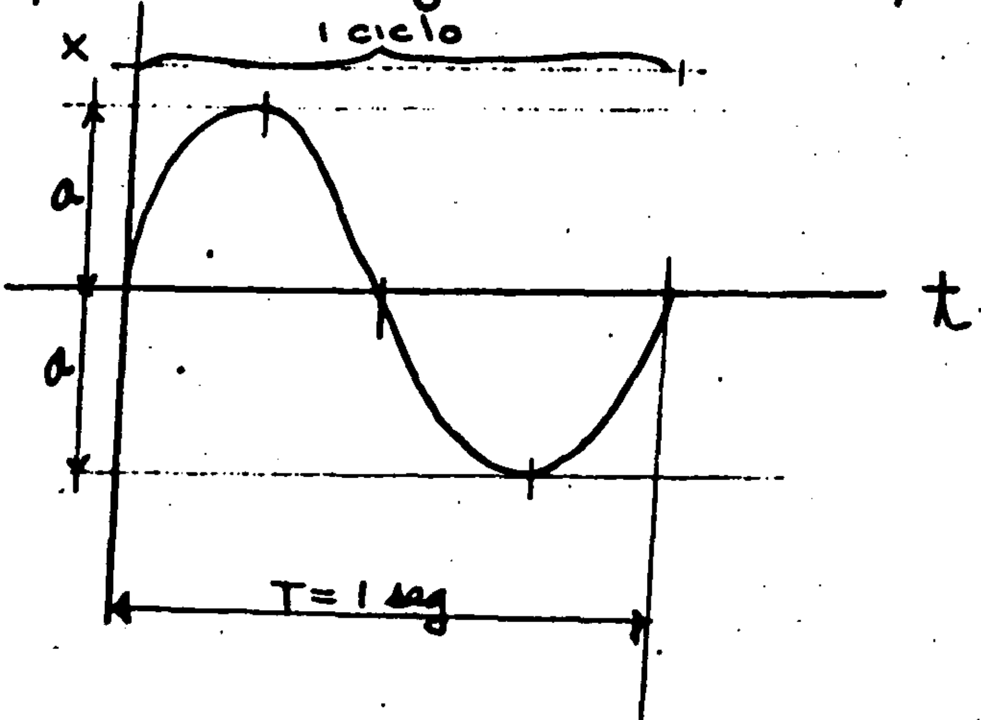
$$\frac{p}{2\pi} = \frac{1}{T} = f \text{ (frecuencia)} \qquad \frac{\text{ciclos}}{\text{Segundo}} \equiv \text{cps}$$

Ejemplos: Una vibración con un período $T = 0.20$ seg tiene una frecuencia de

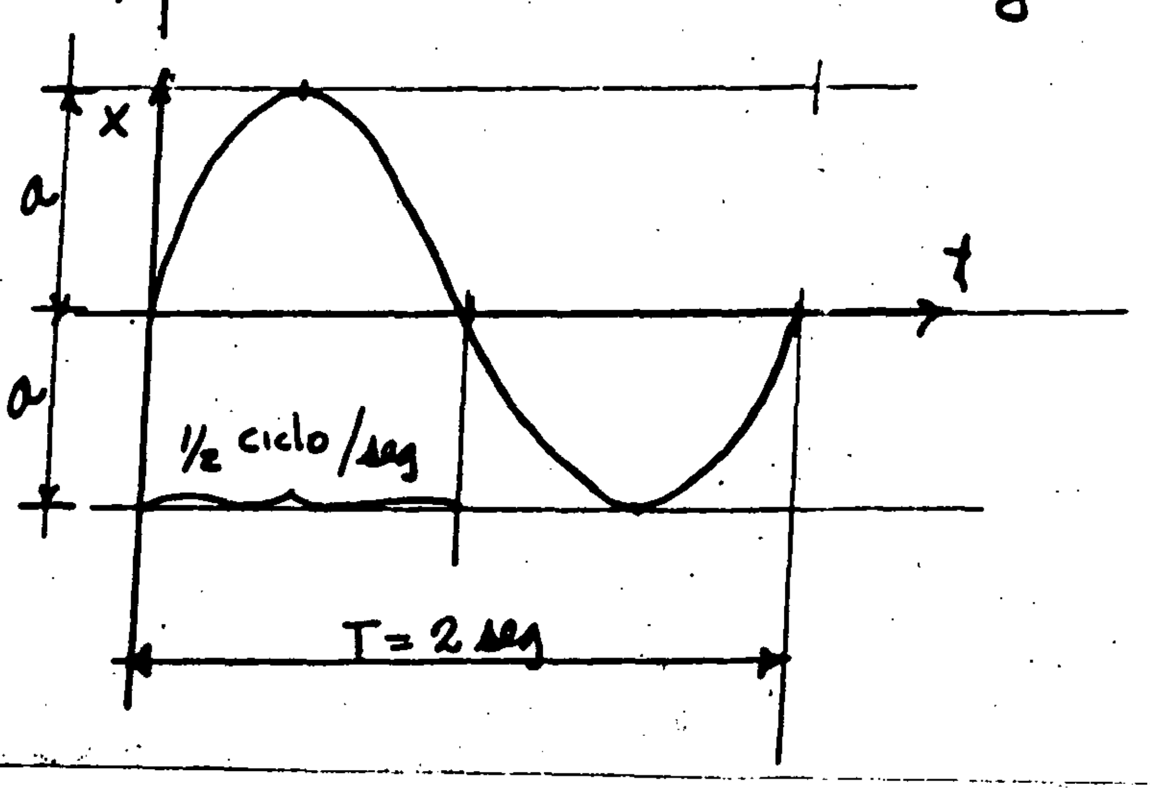
$$f = \frac{1}{0.20} = 5 \text{ ciclos/segundo}$$



para T = 1 seg. $f = 1$ ciclo/seg

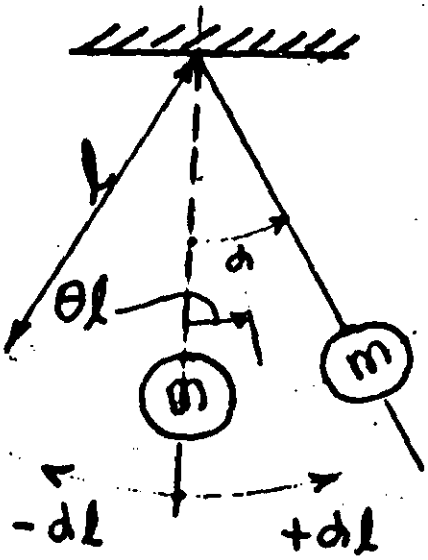


para T = 2 seg $f = \frac{1}{2} \frac{\text{ciclo}}{\text{seg}}$

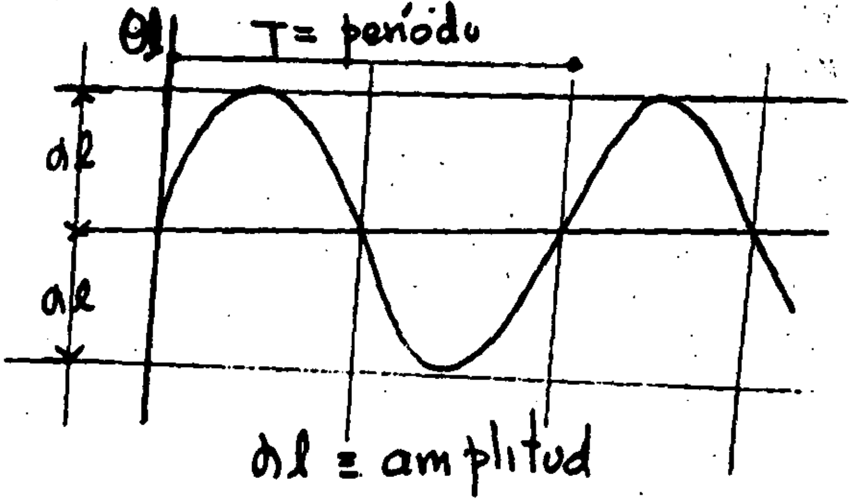


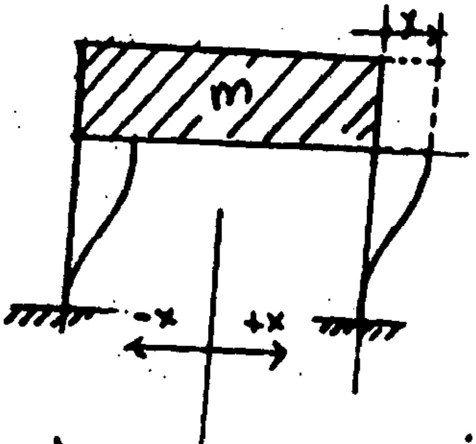
(Frecuencia : ciclos por unidad de tiemp

Ejemplos de cuerpos vibrando

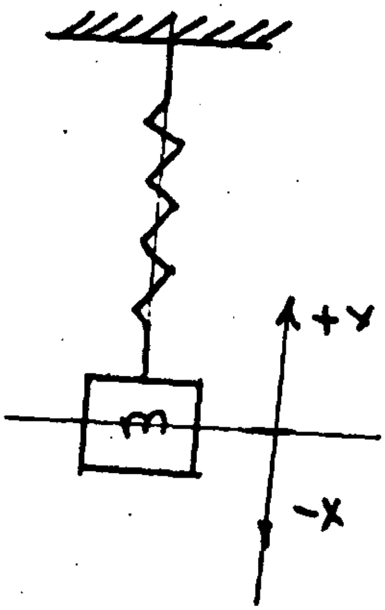


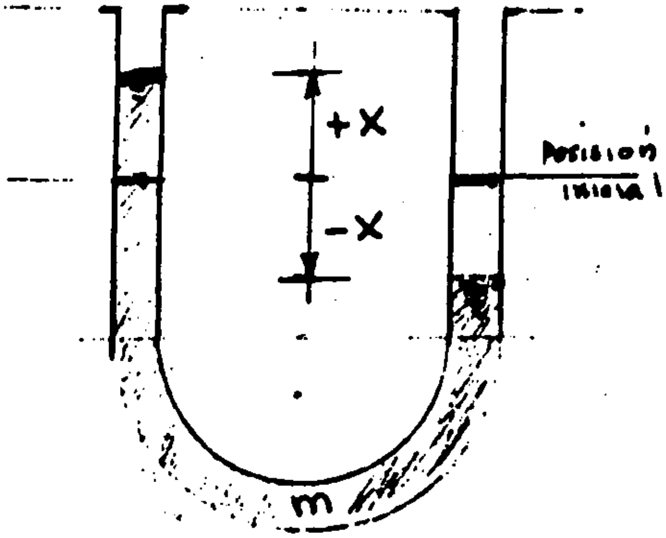
Péndulo oscilando



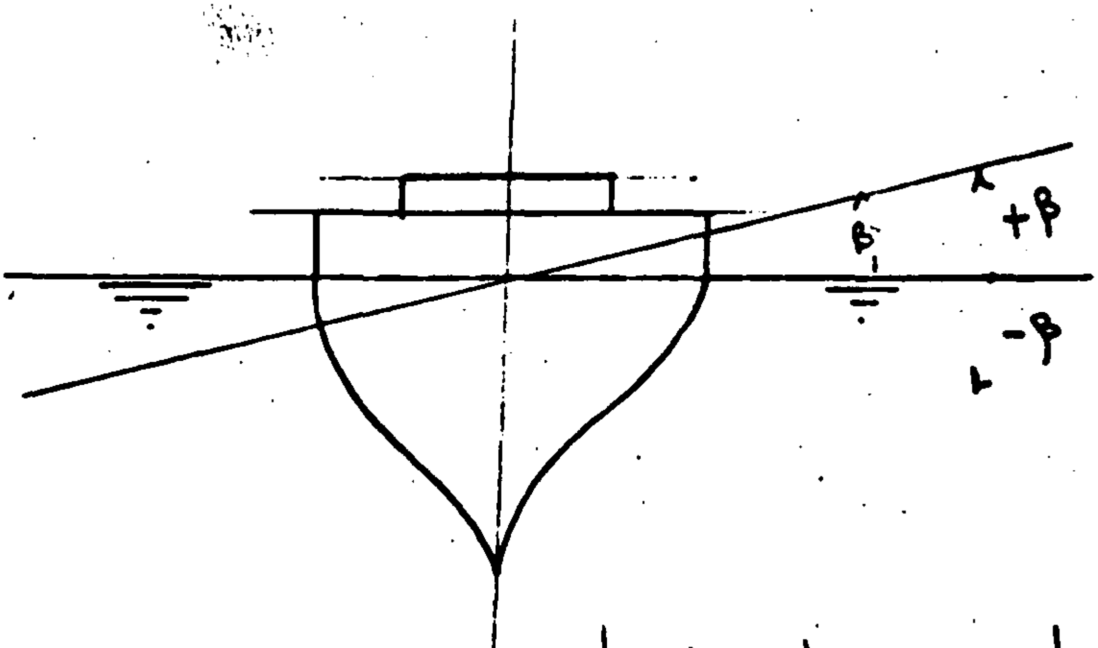


Marco con una viga infinitamente rigida sobre columnas flexibles



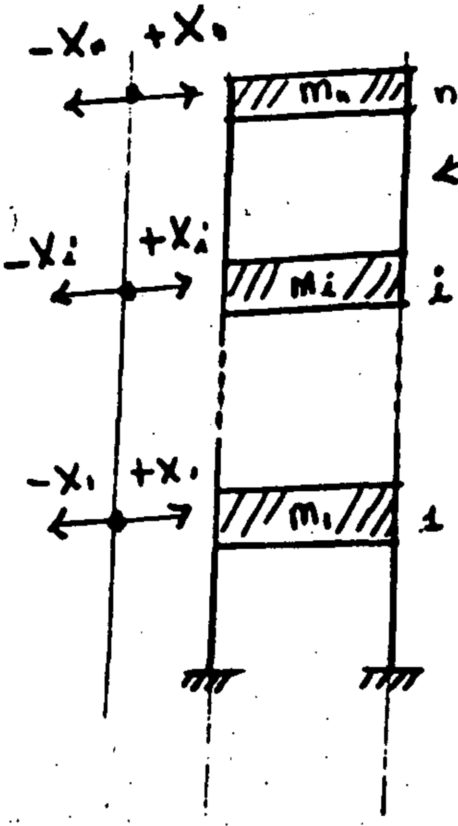


Liquido de masa m en vasos comunicantes



Barco oscilando transversalmente

El número de coordenadas independientes necesitadas para especificar completamente un sistema en cualquier instante es conocido como el número de grados de libertad del sistema. Los ejemplos anteriores son de un grado de libertad.



Sistema de n grados de libertad. Puede tener diverso modos de vibración en un período T. Se necesitan n sistemas coordenados $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para especificarlo.

Se supone que la amplitud máxima a estará siempre dentro del régimen elástico del resorte

Gráfica de calibración del resorte:

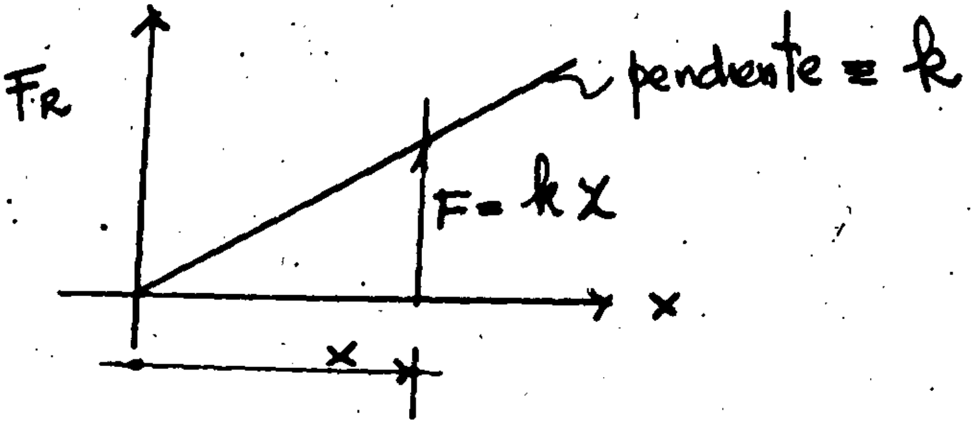
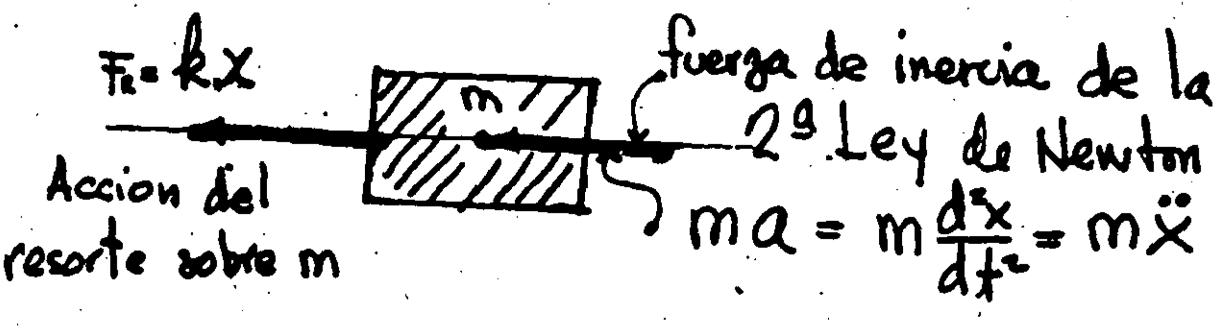


Diagrama de cuerpo libre: en el cuerpo de masa m.



Convención de signos

$\vdash\!\xrightarrow{(+)}$

$\bar{x}$ desplazamento
$\bar{a}$ aceleracion
$\bar{v}$ velocidad
$\bar{F}$ fuerza

Del diagrama de cuerpo libre se tiene

$$m\ddot{x} + kx = 0\ ;\ \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (1)$$

(1) Ecuación diferencial lineal homogenea con coeficientes constantes

haciendo $p^2 = \frac{k}{m}$ en (1) se tiene

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \qquad (2)$$

La solución general de (2) es

$$x = A\cos pt + B\,\mathrm{sen}\, pt \qquad (3)$$

La evaluación de las constantes

A y B depende de la forma como se inicia el movimiento

Observar que:

$A\cos pt$ = movimiento armónicu simple

$\underline{B\operatorname{sen} pt}$ = $\underline{\quad " \qquad " \qquad " \quad}$

Suma = movimiento armónico simple

Suponiendo:

para $t=0$, $x = x_0 = a$ = amplitud

" $t=0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ velocidad inicial aplicada.

De (3) se tiene:

$$x_0 = A(1) + B(0) \therefore \boxed{x_0 = A} \quad (4)$$

$$\dot{x} = -Ap\operatorname{sen} pt + Bp\cos pt$$

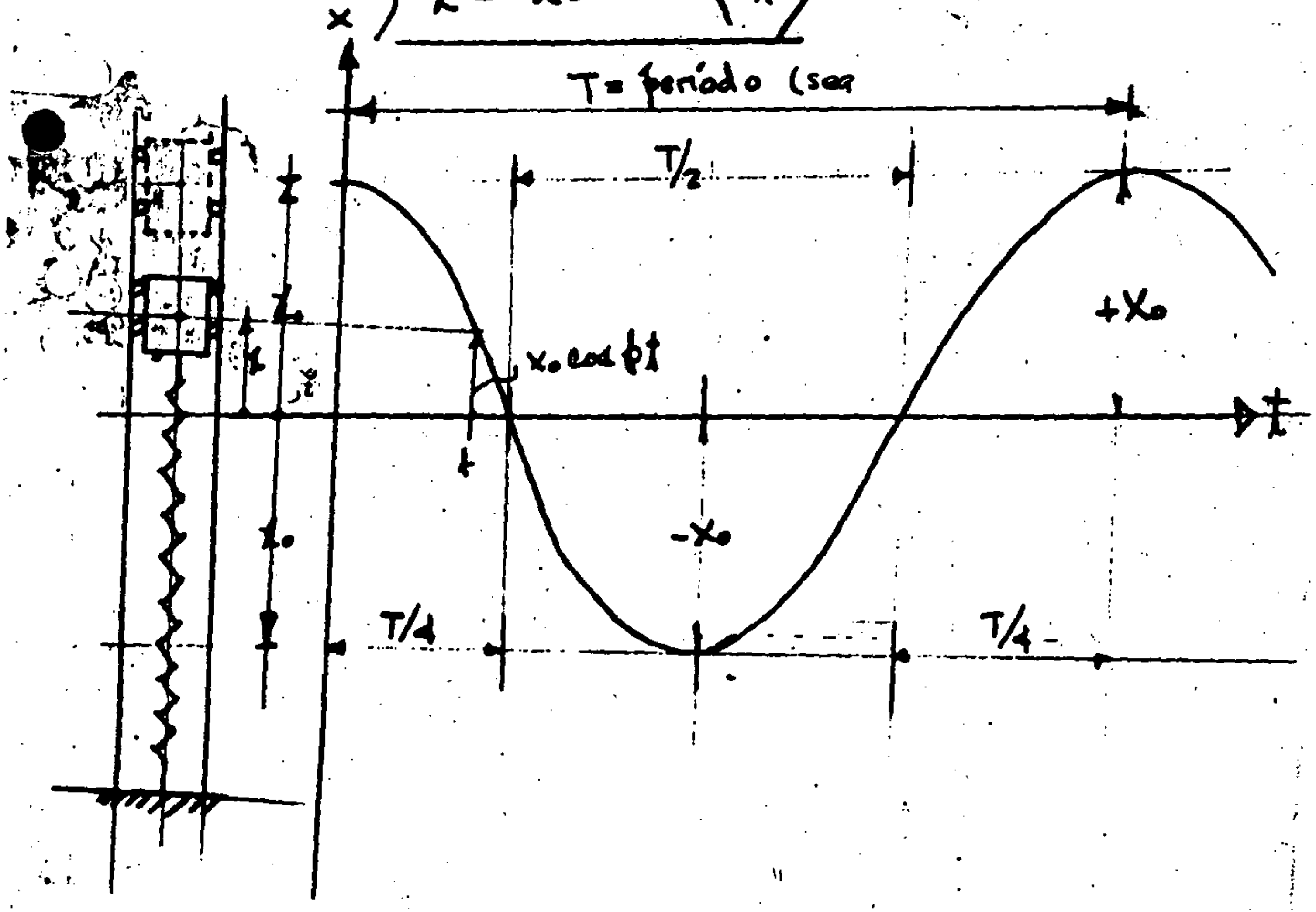
para $t=0$ $\dot{x}_0 = 0 + Bp \therefore \boxed{B = \frac{\dot{x}_0}{p}}$ (5)

Substituyendo (4) y ⑤ en (3) se tiene

$$x = x_0 \cos pt + \frac{x_0'}{p} \operatorname{sen} pt \qquad (7)$$

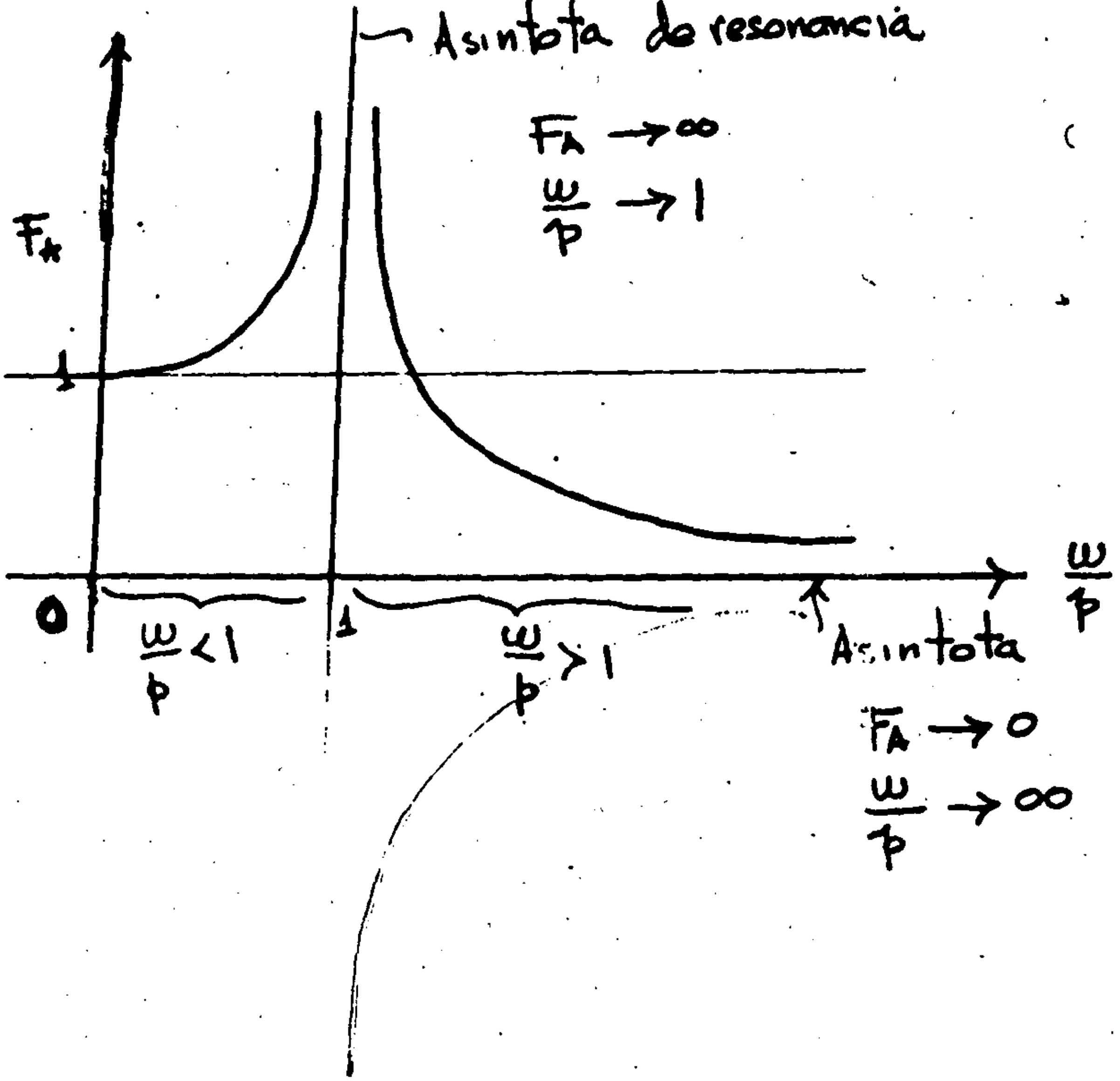
Suponiendo que se suelta solo el resorte de la amplitud X_0, la velocidad inicial $x_0' = 0$. y (7) queda

$$x = x_0 \cos pt \qquad (8)$$

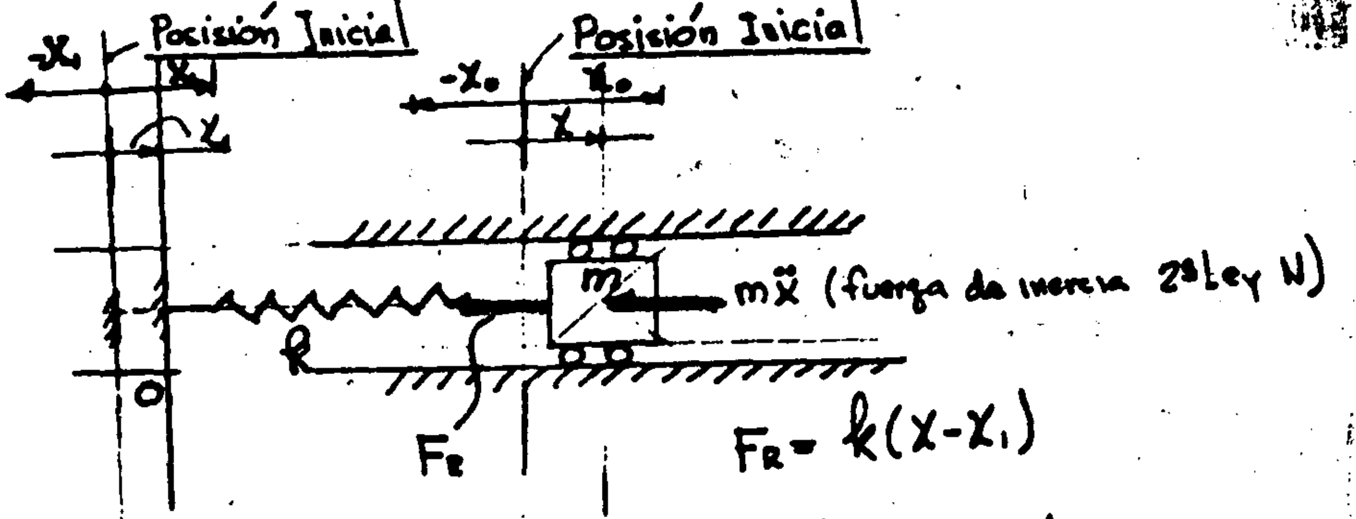


Se define como factor de amplificación

$$\boxed{F_A = \frac{|X|_{max}}{P_0/k} = \left| \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{p^2}} \right|} \quad (12)$$



DESPLAZAMIENTO ARMONICO DEL APOYO



$$\text{De } \Sigma F_x = 0 \qquad m\ddot{x} + k(x - x_1) = 0 \qquad (13)$$

Si el movimiento del Apoyo es

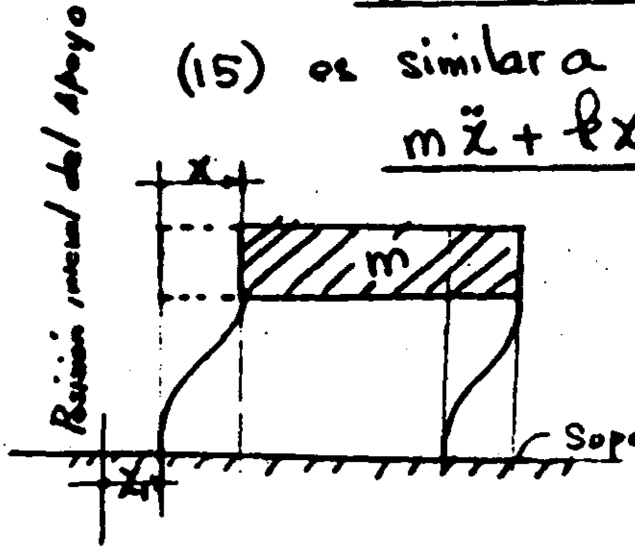
$$x_1 = X_1 \operatorname{sen} \omega t \qquad (14)$$

Substituyendo (14) en (13) se obtiene

$$\underline{m\ddot{x} + kx = kX_1 \operatorname{sen} \omega t} \qquad (15)$$

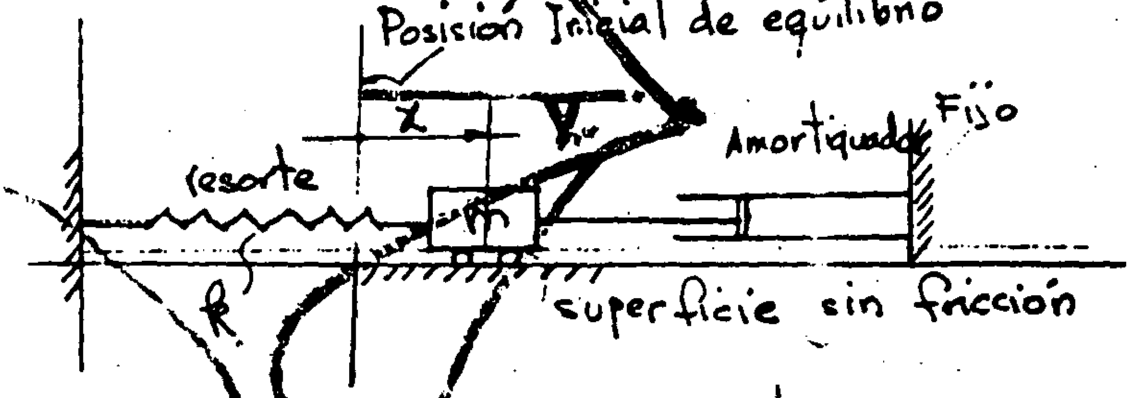
(15) es similar a la ecuación (8)

$$\underline{m\ddot{x} + kx = P_0 \operatorname{sen} \omega t} \qquad (8)$$

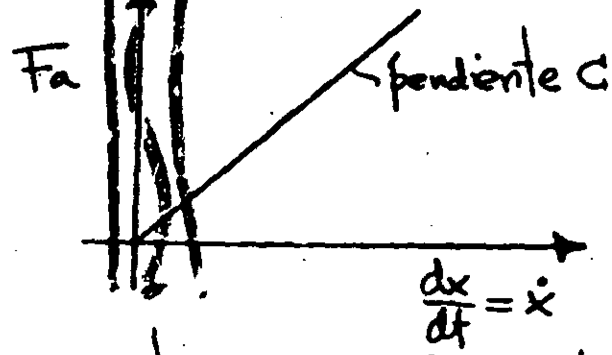


Sistema de un grado de libertad con movimiento armónico del apoyo.

VIBRACION DE UN SISTEMA AMORTIGUADO



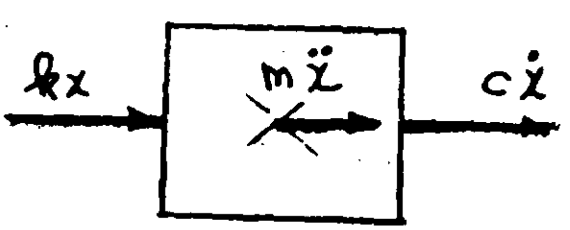
De mediciones en el laboratorio se demuesta que la fuerza de amortiguamiento Fa es proporcional a la velocidad del cuerpo de masa m



Amortiguamiento viscoso.

$$F_a = C\dot{x}$$

(Fa fuerza entre superficies lubricadas)



kx = acción de m sobre el resort

$m\ddot{x}$ = fuerza de inercia

$c\dot{x}$ = acción de m sobre el amortiguador.

Diagrama de cuerpo libre

De $\sum F_x = 0$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (16)$$

$\underline{p^2 = \frac{k}{m}}$ y haciendo $\underline{\frac{c}{m} = 2n}$ (16)

se transforma a

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2 x = 0 \qquad (17)$$

(17) Ecuación diferencial lineal de 2° orden con coeficientes constantes homogenea, cuya solución general es

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \qquad (18)$$

donde r son las raices de

$$r^2 + 2nr + p^2 = 0 \qquad (19)$$

[Lo anterior resulta de suponer una solución de la forma $x = C_n e^{r_n t}$ y substituirla en (18)]

$n < p$

c) Si $n < p$ las raices son imaginarias conjugadas y haciendo

$$p_a^2 = p^2 - n^2 = -(n^2 - p^2)$$

$$r_1 = -n + \sqrt{-p_a^2} = -n + i\,p_a$$
$$r_2 = -n - \sqrt{-p_a^2} = -n - i\,p_a \qquad (24)$$

Substituyendo (24) en (18) se obtiene

$$x = C_1 e^{(-n+ip_a)t} + C_2 e^{(-n-ip_a)t}$$
$$= e^{-nt}\left(C_1 e^{ip_at} + C_2 e^{-ip_at}\right)$$

efectuando operaciones y simplificando

y $\cos p_a t = \dfrac{e^{ip_at}+e^{-ip_at}}{2}$, $\operatorname{sen} p_a t = \dfrac{e^{ip_at}-e^{-ip_at}}{2}$

se obtiene

$$\boxed{x = e^{-nt}\left(C_1 \cos p_a t + C_2 \operatorname{sen} p_a t\right)} \quad (25)$$

Donde: $n = \dfrac{c}{2m}$; $p_a^2 = p^2 - n^2$; $p = 2\pi f = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

y $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = \dfrac{1}{T}$

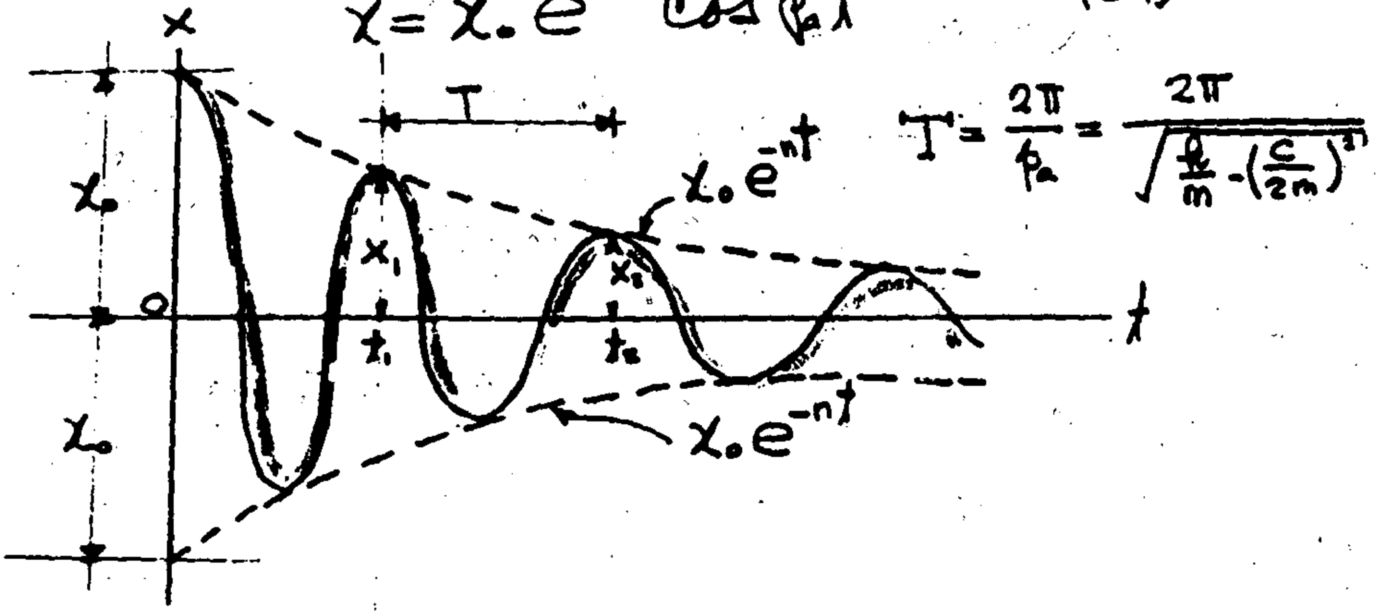
(25) se puede escribir como

$$x = A e^{-nt} \cos(p_a t - \phi) \qquad (26)$$

Por substitución directa se puede verificar que (26) satisface (17), o desarrollando (26) se observa que (26) y (25) son soluciones equivalentes

Si la masa m, es soltada del reposo a una distancia X_0 de su posisión inicial de equilibrio, el angulo fase $\phi = 0$ y $A = x_0$. Y la solución es:

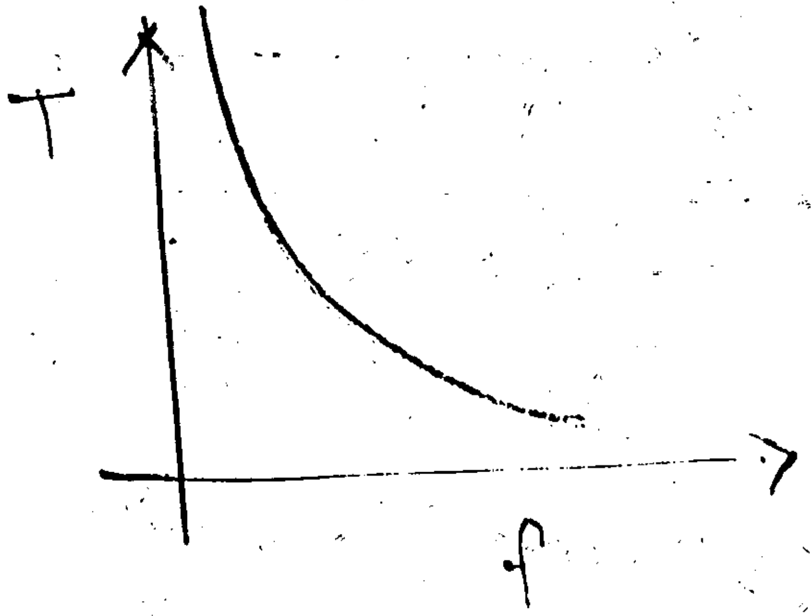
$$x = x_0 e^{-nt} \cos p_a t \qquad (27)$$



$$T = \frac{2\pi}{p_a} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}}$$

$f = \frac{1}{T}$

$(f)(T) = 1$



FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

ANALISIS ESTRUCTURAL

ANTECEDENTES DEL METODO DEL ELEMENTO FINITO

DR. PORFIRIO BALLESTEROS BAROCIO

SEP-OCT. 92

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

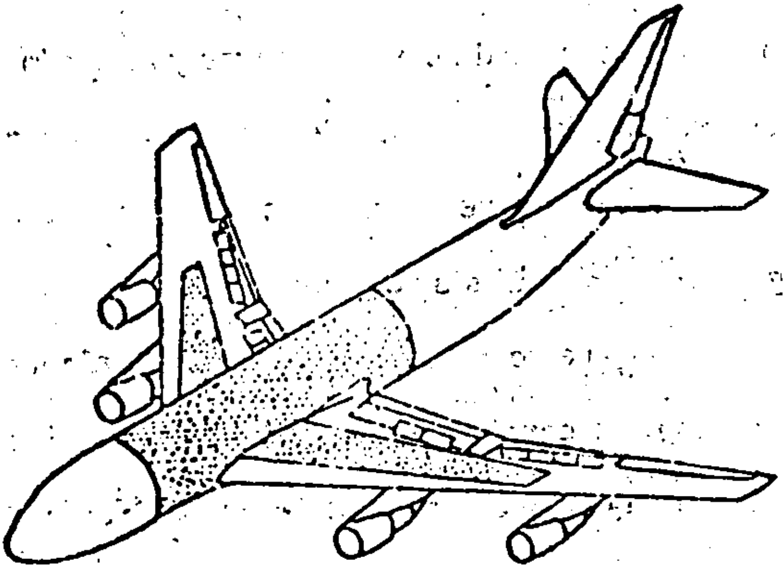
METODO DE ANALISIS POR ELEMENTOS FINITOS.

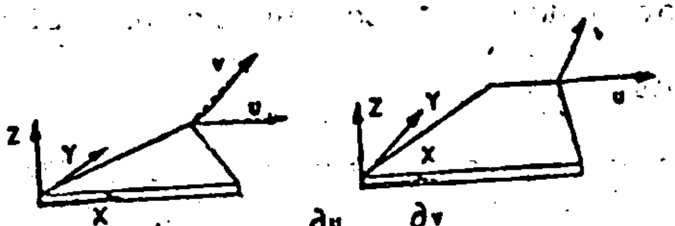
INTRODUCCION.

El ingeniero en la busca de los valores numéricos adecuados para describir su proceso de diseño, se encontraba generalmente con formulaciones matemáticas difíciles. Por ejemplo, considerando el simple caso de teoría de flexión de placas, bajo las hipótesis de pequeñas deformaciones y que las secciones planas permanecen planas después de la deformación, la ecuación diferencial que gobierna el análisis para un material elástico lineal homogeneo e isotrópico es

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \qquad (1)$$

donde W es la deflexión en el punto (x, y), q es la intensidad de la carga en el punto (x, y), y $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ es la rigidez flexionante de la placa la cual depende del modulo de elasticidad E, el espesor de la placa h y la relación de Poisson ν . En la Fig. 1 se presenta un elemento diferencial de la placa y las acciones y reacciones sobre él. Combinando la flexión simple en dos direcciones se obtiene para los momentos y cortantes por unidad de longitud de placa lo siguiente:





$$\gamma_{XY} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Esfuerzos planos

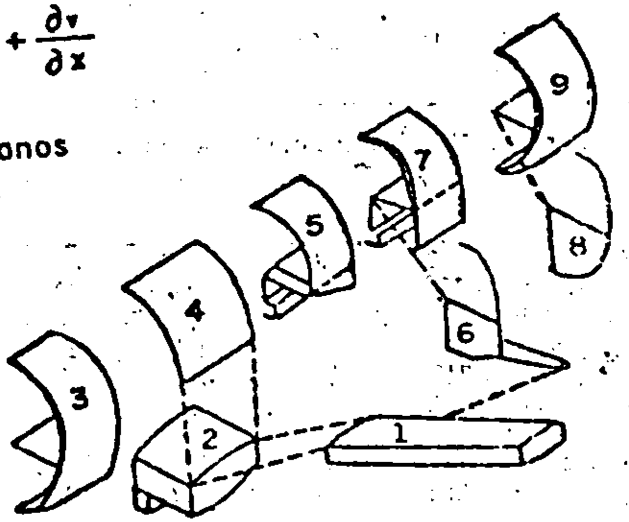


Fig 6 Boeing 747

Como es usual en el diseño de aviones, se hicieron pruebas en el prototipo y los resultados se compararon con la solución por elementos finitos, coincidiendo como se muestra en la Fig. 7

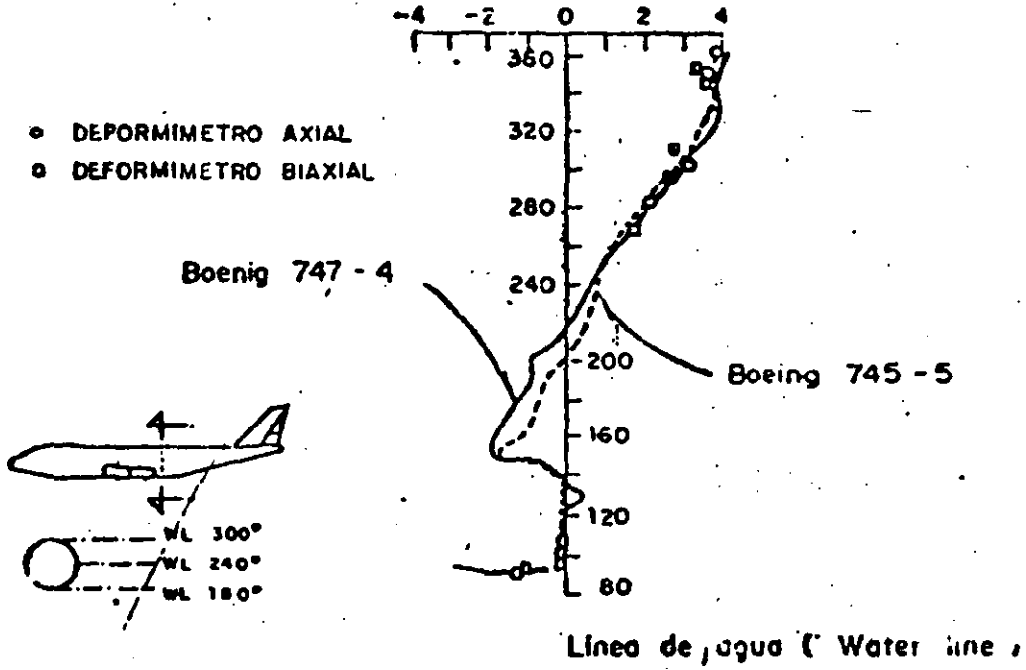


Fig. 7 Comparación entre análisis y experimentación del Boing 747

Es importante agregar que la respuesta dinámica de un avión es muy importante, así como su inestabilidad elástica es una forma importante de falla. Ninguno de estos fenómenos puede tratarse por los métodos simplificados, pero su análisis usando el método de elementos finitos ha probado ser muy aceptable.

Problemas similares se encuentran en Arquitectura Naval. Figura 8 una porción de una estructura de un transbordador. La parte plana es representada por elementos en estado plano de esfuerzos, Fig. 5 (b). Elementos estructurales, Fig. 5 (a), son empleados en la representación de la estructura interna.

El número total de incógnitas para definir las partes importantes de un barco es del orden de 50,000, y de nuevo se subdivide el problema en subestructuras obteniendo menos incógnitas.

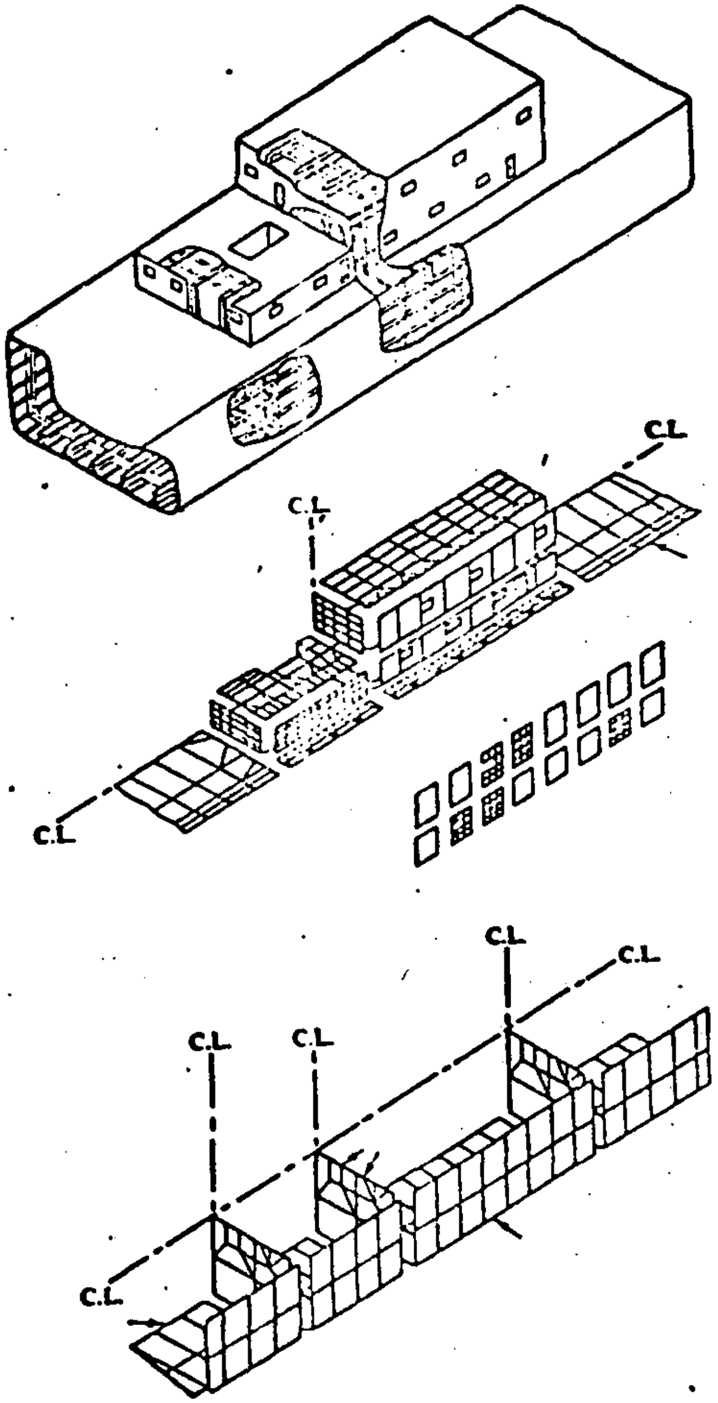


Fig. 8 Análisis por elemento finito de estructura de barco.

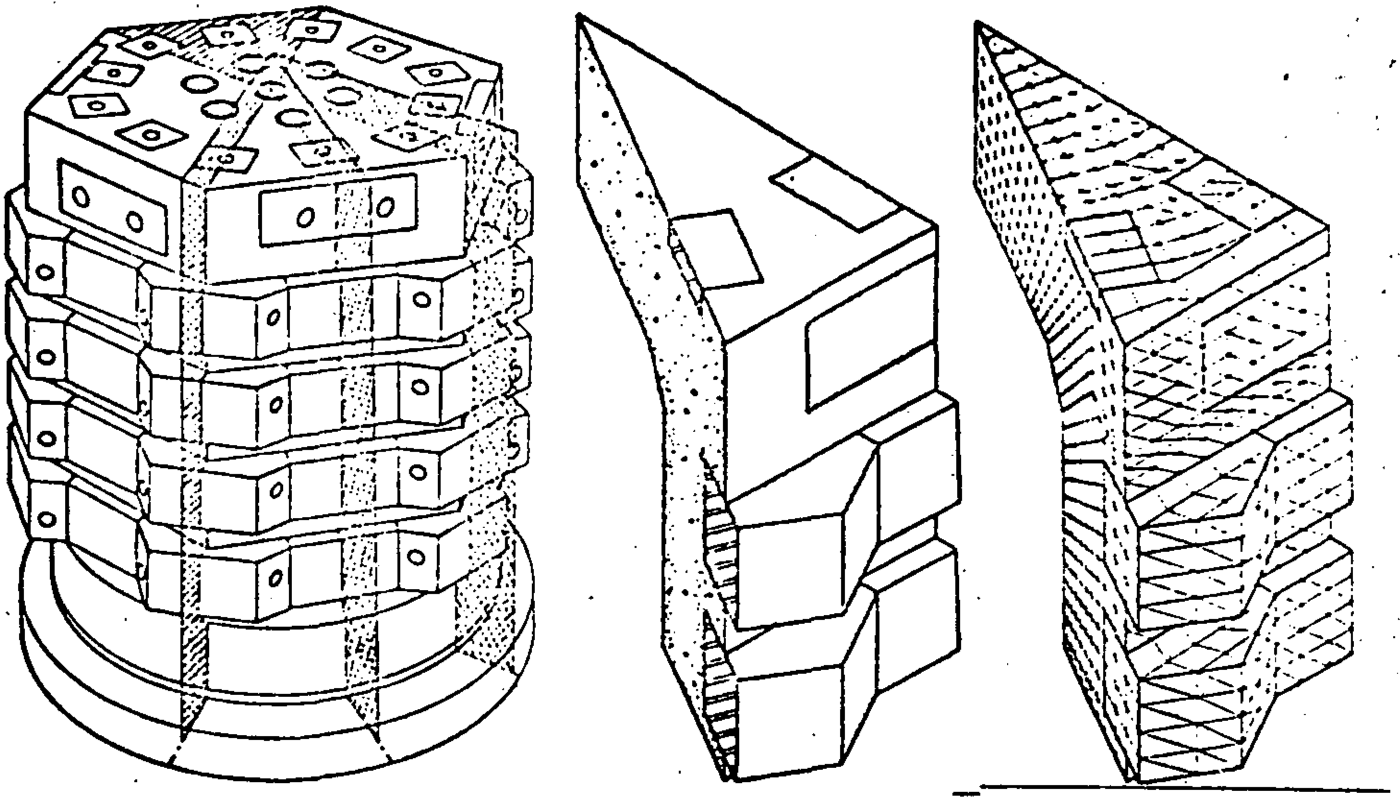


Fig. 9 Analísis por elementos finitos de un recipiente reactor de concreto presforzado.

Requerimientos de seguridad en el diseño estructural de los reactores nucleares han causado que la industria use ampliamente el análisis por elementos finitos. Figura 9 (a) un recipiente reactor de concreto presforzado. Debido a la simetría es posible analizar solamente un doceavo de la estructura total, - - Fig. 9 (b). Su volumen se modela analíticamente en un ensamble de elementos tetaedrales y hexaedrales, Fig. 5 (c). En problemas de este tipo, el número de incógnitas es del orden de 20,000, y muy común hacer el análisis en condiciones no lineales en material y geometría.

No todos los problemas de aplicación del método de elementos finitos son de proporciones monumentales. Las figuras 10 y 11 muestran aplicaciones - básicas a ciertos problemas de ingeniería civil. Una forma de incrementar la eficiencia de diseño en secciones roladas de acero estructural es cortando el alma en la forma dentada mostrada en la Fig. 10 (a), colocando una sección sobre la otra y soldándolas, Fig. 10 (b). Y se obtiene una viga más aperaltada reduciendo el acero en el alma, y por supuesto que en este problema rutinario de diseño, no es necesario el uso del método de elementos finitos.

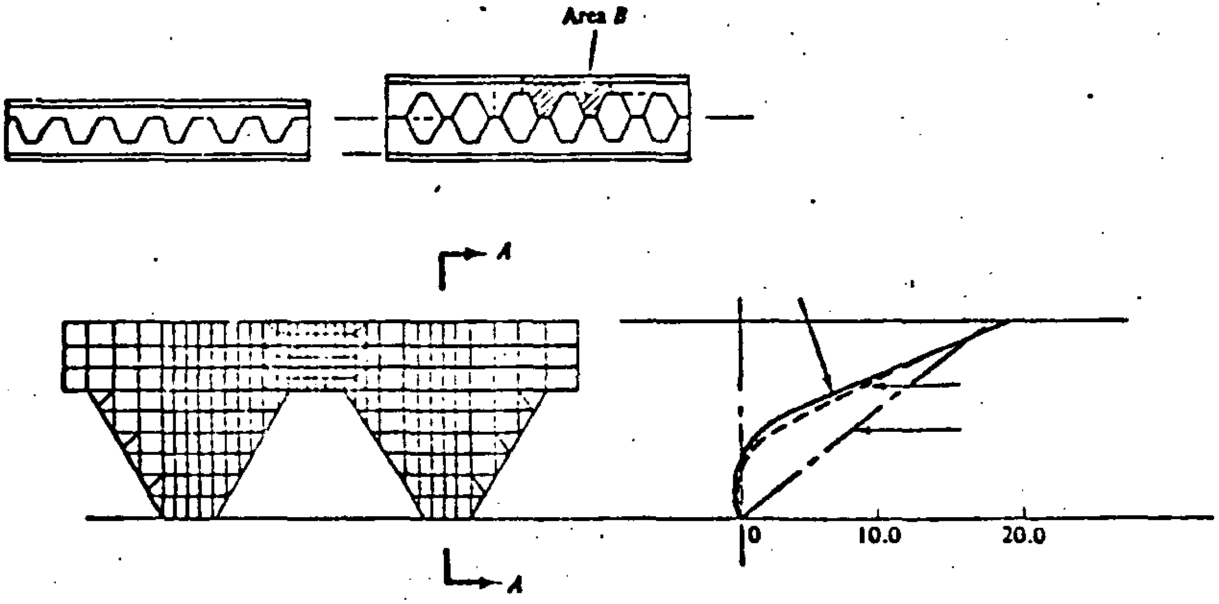


Fig. 10 Análisis de elementos finitos de una viga aperaltada en celosía.

Un problema todavía más común es el de una viga de concreto reforzado, Fig. 11, para el cual se conoce muy poco respecto a la adherencia entre el acero de refuerzo y el concreto, y la formación y crecimiento de las grietas al aumentar la carga. La Figura 11 (a) muestra el modelo analítico de elementos finitos y la descripción de las trayectorias de grietas y las gráficas de esfuerzos se muestran en la Fig. 11 (b).

Los pocos ejemplos mostrados muestran que el método de elementos finitos puede ser usado ventajosamente en cualquier situación que se requiera la predicción de esfuerzos y deformaciones internas, desplazamientos, vibraciones, inestabilidad elástica, mecánica de fluídos, transferencia de calor. Situaciones que se levantan de diversos campos que tradicionalmente han sido considerados como disciplinas ingenieriles separadas. Ejem., Ingeniería Civil, Mecánica, Aeroespacial, Arquitectura Naval. El método del elemento finito proporciona una tecnología unificada de análisis en casi todos los campos.

Es nuestro intento en este curso desarrollar los conceptos teóricos básicos y estudiar problemas específicos de carácter práctico. Un compendio de tales problemas llenaría muchos volumenes, por lo tanto es recomendable consultar las memorias de congresos y publicaciones periódicas correspondientes.

PROGRAMAS DE PROPOSITOS GENERALES.

Se ha indicado que las ecuaciones del método de elementos finitos son de una forma tal que su carácter general permite teóricamente escribir un solo programa de computadora que resuelva la mayoría de los problemas que se presentan en la Mecánica de Medio Continuos. Programas de computadora con este objetivo, aún en escala restringida, son llamados programas "de propósitos generales". La ventaja de programas de propósitos generales no es sólo su capacidad, sino también en la instrucción de los probables usuarios respecto a la interpretación de la documentación, los datos y procedimientos de entrada y salida de resultados.

El costo de desarrollo de un programa de propósitos generales es usualmente muy alto por lo que la amortización de la inversión es esencial. Ciertos programas de propósitos generales son codificados en un lenguaje computacional que permite operar el programa a muchas organizaciones diferentes localizadas en grandes separaciones geográficas. Otros programas de propósitos especiales de limitada capacidad se usan en organizaciones industriales y gubernamentales con un costo menor en su desarrollo y operación.

Las cuatro componentes mostradas en el diagrama de flujo de la Fig. 12, son comunes en el desarrollo de programas de propósitos generales, fase de datos de entrada, requiere del usuario información del medio o materal, descripción geométrica de la representación por elementos finitos y las condiciones de carga y de frontera. Los programas de propósitos generales más sofisticados facilitan el proceso de entrada como propiedades constitutivas del material, almacenados previamente, esquemas de modelar analíticamente el medio, trazar esterográficamente la idealización por elementos finitos en forma tal que los errores pueden detectarse antes de efectuar los cálculos.

La fase de biblioteca de elementos finitos es de interés primordial en el curso. En ella se tienen los procesos de codificación formulativos para los elementos individualmente. La mayoría de los programas de propósitos generales contienen todos los elementos de la Fig. 5, así como ciertas otras alternativas de formulación para un tipo dado de elemento, por ejemplo el trián-

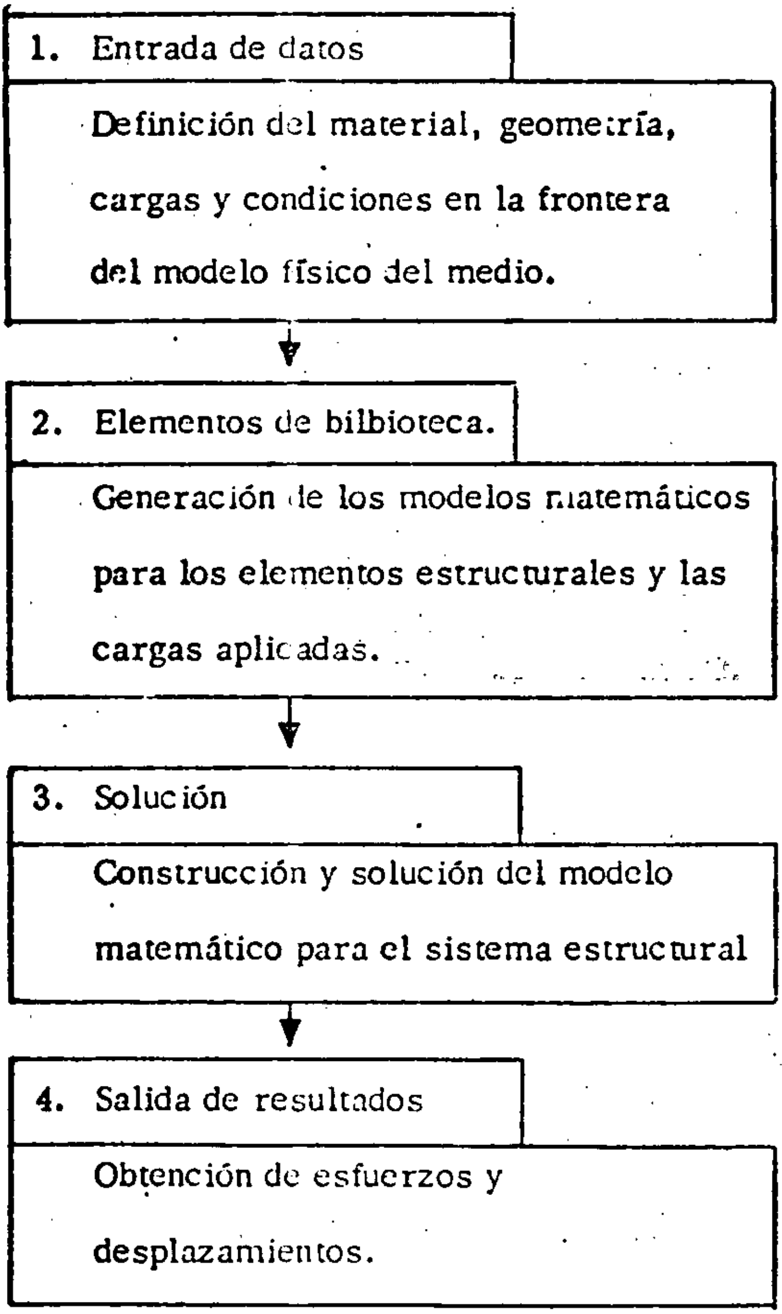


Fig. 12 Diagrama de flujo computacional en Análisis Estructural.

(20)

gulo en flexión. Teóricamente el elemento biblioteca es de extremos abiertos y capaz de acomodar cualquier nuevo elemento de cualquier grado de complejidad.

La fase elemento de blibioteca recibe los datos almacenados y establece las relaciones algebráicas del elemento por medio de la aplicación de los procesos formulativos relevantes de codificación. Esta fase del programa de propósitos generales también incluye todas las relaciones algebráicas para interconectar los elementos vecinos y la conección del proceso en sí. Las operaciones posteriores producen un conjunto de ecuaciones algebráicas lineales simultáneas para representar la estructura completa por elementos finitos.

La fase solución del programa de propósitos generales opera sobre las ecuaciones del problema formadas en la fase anterior. En el caso de un problema de análisis estructural solo significa la solución de un conjunto de ecuaciones lineales algebráicas. Soluciones para respuesta dinámica requerirán computaciones más extensas sobre la historia-tiempo de las cargas aplicadas. En algunos casos hay que operar en regiones subdivididas como en el caso del análisis del Boeing 747, o efectuar operaciones especiales en las ecuaciones construídas originalmente. Incluídas en esta fase están las operaciones necesarias de substitución para obtener todos los aspectos deseados de la solución.

La fase salida de resultados presenta el análisis con un registro de la solución sobre la cual se pueden tomar decisiones respecto al dimensionamiento estructural o diseño. El registro comunmente es presentado mediante una lista impresa de esfuerzos y desplazamientos de los respectivos elementos. Así como en la fase de entrada existe una fuerte tendencia a la representación gráfica de datos, tales como gráficas de trayectorias principales de esfuerzos o modos de pandeo y vibración.

ALGUNOS PROGRAMAS DE PROPOSITOS GENERALES.

ICES-STRUDL II, Integrated Civil Engineering System, (ICES), MIT, Maneja problemas de deformación y esfuerzos planos, cascarones rebajados, sólidos tridimensionales, flexión de placas con y sin deformación axial. Su uso en problemas muy especializados resulta caro. ASKA, Automatic System for Kinematic Analysis. Desarrollado por J. H. Argyris, H. A. Kamel y otros en la Universidad de Stuttgar. Sistema general muy potente el cual incluye una biblioteca de 42 elementos diferentes. Puede ser costoso para un usuario especializado. SAP, A General Structural Analysis Program, elaborado por E. L. Wilson de la Universidad de California. Incluye análisis lineal estático y dinámico de estructuras elásticas, estructuras tridimensionales, sólidos axisimétricos, sólidos tridimensionales, esfuerzos y deformación plana, placas y cascarones.

Zienkiewcz, O.C., programa desarrollando en la Universidad de Wales, - Swansea. Incluye lo de los programas anteriores y problemas de Mecánica de Fluídos y transferencia de calor.

NASTRAN, NAsa STRuctural ANalysis. Desarrollado por U. S. National - Aeronautical and Space Administration para análisis elástico de varias estructuras incluye, análisis de expansión térmica, respuesta dinámica a cargas transitorias - y exitaciones random, cálculo de valores característicos reales y complejos, estabilidad dinámica. Ofrece capacidad limitada para análisis no lineal.

(22)

SAMIS, Structural Analysis and Matrix Interpretarive System. Desarrollado por Jet Propulsion Laboratory, y Manned Spacecraft Center. Contiene un elemento unidimensional general y elementos triangulares para deformaciones por flexión y membrana.

ELAS y ELAS 8, Equilibrium Problems of Linear Structures. Desarrollado por el Jet Propulsion Laboratory. Incluye una biblioteca de elementos unidimensionales, triangulares, cuadriláteros, tetaedros, hexaedros, cónicos, sólidos - axisimétricos de secciones cuadriláteros y triangulares.

MARC, elaborado por P. V. Marcal, incluye análisis lineal y no lineal de problemas de Mecánica de Medios Continuos.

LISTA DE REFERENCIAS EN ORDEN CRONOLOGICO DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

(1) Hrenikoff, A., "Solution of problems in elasticity by the framework method," J. Appl. Mech. 8, A 169-175, 1941.

(2) McHenry, D., " A lattice analogy for the solution of plane stress problems," J. Inst. Civ. Eng 21, 59-82, 1943.

(3) Newmark, N. M., "Numerical methods of analysis in bars plates and elastic bodies," "Numerical Methods of Analysis in Engineering," edited by L. E. Grinter, MacMillan (1949).

(4) Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C.., and Topp, L. J. ., Stiffness and deflection analysis of complex structures," J. Aero Sci. 23, 805-823, 1956; AMR 10 (1957), Rev. 1776.

(5) Clough, R. W., "The finite element in plane stress analysis," Proc. 2nd. ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., Sept. 1960.

(6) Argyris, J. H., "Energy Theorems and structural analysis," Butterworth, London (1960). (Reprinted from Aircraft Eng. 1954-55); AMR 15 (1962), Rev. 2705.

(7) Clough, R. W., "The finite element method in structural mechanics," (Ch. 7 "Stress Analysis", O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, edited by, J. Wiley & Son (1965); chapter in AMR 20 (1967), Rev. 3942.

(8) Courant, R., "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration," Bull. Am. Math. Soc. 49, 1-23, 1943.

(9) Prager, W., and Synge, J. L., "Approximation in elasticity based on the concept of function space," Quart. Appl. Math. 5, 241-69, 1947.

(10) Synge, J. L., "The hypercircle in mathematical physics, Cambridge Univ. Press (1957); AMR 11 (1958), Rev. 733.

(11) Schmelter, J., "The energy method of networks of arbitrary shape in problems of theory of elasticity," Proc. IUTAM Symp. on Non-homogeneity in Elasticity and Plasticity, W. Olszak, edited by, Pergamon Press (1959).

(12) Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., "Finite elements in the solution of field problems," Engineer, 200, 507-510, Sept. 1965.

(13) Wilson, E. L., and Nickell, R. E., "Application of finite element method to heat conduction analysis," Nuclear Eng. and Design 3, 1-11, 1966.

(14) Herrman, L., "Elastic and torsional analysis of irregular shapes," J. of Engnr. Mech. Div., Proc. ASCE 91, EM6, 11-19, 1965; AMR 19 (1966), Rev. 3444.

(15) Zienkiewicz, O. C., Arlett, P. L., and Bahram, A. K., "Solution of three-dimensional field problems by the finite element method," Engineer, 224, 547-550, Oct. 1967; AMR 21 (1968), Rev. 7898.

(16) Winslow, A. M., "Numerical solution of the quasi-linear Poisson equation in a non-uniform triangle mesh," J. Comp. Physics 1, 149-172, 1967.

(17) Pian, T. H. H., "Derivation of element stiffness matrices," J. AIAA 2, 576-577, 1964; AMR 17 (1964), Rev. 5128.

(18) Fraeijs de Veubeke, B., "Displacement and equilibrium models in the finite element method, " (Ch. 9 "Stress analysis"), O. C. Zienkiewicz and G. Holister, edited by, J. Wiley & Son (1965); Chapter in AMR 20 (1967), Rev. 3942.

(19) Fraeijs de Veubeke, B., "Bending and stretching of plates," Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech. Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

(20) Fraeijs de Veubeke, B., and Zienkiewicz, O. C., "Strain energy bounds in finite element analysis by slab analogy," J. Strain Analysis 2, 265-271, 1967.

(21) Herrmann, L. R., "A bending analysis of plates," Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech. Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

(22) Pian, T.H. H. and Tong, P., "Basis of finite element methods for solid continua," Int. J. Num. Meth. in Eng. 1, 3-28, 1969.

(23) Pian, T. H. H., "Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution," J. AIAA 2, 1232-1336, 1964.

(24) Severn, R. T., and Taylor, D. R., "The finite element method for flexure of slabs when stress distributions are assumed," Proc. Inst. Civ. Eng. 34, 153, 170, 1966; AMR 20 (1967), Rev. 3213.

(25) Zienkiewicz, O. C., " The finite element method," McGraw-Hill (1967).

(26) Bazeley, G. P., Cheung, Y. K., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Triangular elements in bending-conforming and non-comforming solutions," Proc. Conf. Matrix Meth. Struct. Mech. Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

(27) Mikhlin, S. G., "The problem of the minimum of a quadratic functional," Holden Day, San Francisco (1966).

25

(28) Pian, T. H. H., and Tong, Ping. "The convergence of finite element method in solving linear elastic problems," Int. J. Solids Struct. 3,865-880, 1967.

(29) Key, S. W., "A convergence investigation of the direct stiffness method," Ph. D. thesis, Univ. of Washington, Seattle, 1966.

(30) de Arrantes e Oliveira, E. R., "Theoretical foundation of the finite element method," Int. J. Solids Struct. 4,929-952, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 7609.

(31) Adini, A., and Clough, R. W., "Analysis of plate bending by the finite element method," Nat. Sci, Found Rep. G. 7337, Univ. of Calif., Berkeley, 1961.

(32) Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., "The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs," Proc. Inst. Civ. Eng. 28, 471-488, 1964.

(33) Walz, J. E., Fulton, R. E., and Cyrus, N. J., Accuracy and convergence of finite element approximation," Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.

(34) Melosh, R. J., "Astiffness matrix for the analysis of thin plates in bending," J. Aero Sci. 28, 34-42, 1961; AMR 14 (1961), Rev. 3489.

(35) Crandall, S. H., "Engineering analysis," McGraw-Hill, NY (1956); AMR 12 (1959), Rev. 1122.

(36) Szabo, B. A., and Lee, G. C., "Derivation of stiffness matrices for problems on plane elasticity by Galerkin method," Int. J. Num. Meth. Eng. 1,301-310, 1969.

(37) Zienkiewicz, O. C., and Parekh C. J., "Transient field problems--two-and three-dimensional analysis by iso-parametric finite elements," Int. J. Num. Meth. in Engr. 2-61-71, 1970.

(38) Oden, J. T., "A general theory of finite elements: I-Topological considerations II-Application," Int. J. Num. Meth. Eng. 1,205-221; 247-260, 1969.

(39) Gallagher, R. H., "A correlation study of methods of matrix structural analysis," AGARDograph 69, pergamon Press (1962).

(40) Argyris, J. H., "Matrix methods of structural analysis," Proc. 14th meeting of AGARD, AGARDograph 72, 1962.

(41) Martin, H. C., "Introduction to matrix methods of structural analysis," McGraw-Hill, NY (1966).

(42) Southwell, R. V., "Relaxation methods in theoretical physics," Clarendon Press, Oxford (1946).

(43) Varga, R. S., "Matrix iterative analysis" Prentice-Hall, (1962).

(44) Griffin, D. S., and Kellog, R. B., "A numerical solution of axially symmetrical and plane elasticity problems," In. J. Solids and structures 3, 781-794, 1967; AMR 21, (1968), Rev. 3185.

(45) Gallagher, R. H., Padlog, J., and Bijlard, P. P., "Stress analysis in heated, complex shapes." J. Aero-Space Science 29, 700-707, 1962.

(46) Argyris, J. H., "Matrix analysis of three-dimensional elastic media. Small and large displacements, " J. AIAA 3, 45-51, 1965; AMR 18 (1965), Rev. 3951.

(47) Zienkiewicz, O. C., Irons, B. M., Ergatoudis, J., Ahmad, S. and Scott, F. C. , "Iso-parametric and associated element families for two- and three-dimensional analysis, " (Ch. 13 of "Finite element method in stress analysis"), I. Holand and K. Bell, edited by, Tapir, Trondheim, Norway (1969).

(48) Irons, B. M., "Engineering application of numerical integration in stiffness method," J. AIAA 4, 2035-2037, 1966.

(49) Ergatoudis, J., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Curved, isoparametric quadrilateral elements in finite element analysis," Int. J. Solids & Struct. 4, 31-42, 1968; AMR 21 (1968), Rev. 6347.

(50) Ergatoudis, J., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Three-dimensional analysis of arch dams and their foundations, "Proc. Sym. on Arch Dams, Inst. Civ. Eng. London, 1968.

(51) Atkinson, B., Brocklebank, M. P., Card, C. C. M., and Smith, J. M., "Low Reynolds number developing flows," A. I. Chem. Eng. Journ. 15-548-553, 1969.

(52) Clough, R. W., and Tocher, J. L., "Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending, " Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

(53) Clough R. W., and Felilpa, C. A., "A refined quadrilateral element for analysis of plate bending," Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.

(54) Bogner, F. K., Fox, R. L., and Schmit, A. L., "The generation of interelement compatible stiffness and mass matrices by use of interpolation formulas," Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

(55) Bell, K., "A refined triangular plate bending element," Int. J. Num. Method. in Eng. 1, 101-122, 1969.

(56) Irons, B. M., "A conforming quartic triangular element for plate bending," Int. J. Num. Meth. in Eng. 1, 29-46, 1969.

(57) Argyris, J. H., Fried, I., and Schapf, D. W., "The TUBA family of plate elements for matrix displacement method," Aeronautical Journal R. Ae. Soc. 72,701-709, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 5921.

(58) Bosshard, W., "Ein neues volltraglicher endliches Element for Plattenbiegung," Int. Ass. Bridge Struct. Eng. Bull, 28, 27-40, 1963.

(59) Cowper, G. R., Kosko, E., Lindberg, C. M., and Olson, M. D., "Formulation of a new triangular place bending element," Trans. Canadian Aero Space Inst. 1,86-90, 1968; AMR 22 (1969) Rev. 4068.

(60) Grafton, P. E., and Strome, D. R., "Analysis of axisymmetric shells by the direct stiffness method," J. AIAA 1, 2342-2347, 1963.

(61) Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., "Finite element method of analysis for arch dam shells and comparison with finite difference procedures," Proc. Symp. on Theory of Arch Dams Pergamon Press (1965).

(62) Connor, J. I., and Brebbia, C., "Stiffness matrix for shallow rectangular shell element," J. of Engnr. Mech. Div. Proc. ASCE 93, 23-63, 1967; AMR 21 (1968), Rev. 7391.

(63) Stricklin, J. A., Navaratna, D. R., and Pian, T. H. H., "Improvements in the analysis of shells of revolution by matrix displacement method (curved elements)." J. AIAA 4, 2069-2072, 1966; AMR 20 (1967), Rev. 9219.

(64) Ahmad, S., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axisymmetric problems," Proc. 2nd Conf. on Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright -Patterson AFB, Ohio, 1968.

(65) Ahmad, S., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Analysis of thick and thin shell structures by general curved elements," to be published in Int. J. Num. Meth. in Engr.

(66) Argyris, J. H., "Elasto-plastic matrix displacement analysis of three-dimensional continua," J. Roy Aero Soc. 69, 633-635, 1965; AMR 19 (1966), Rev. 3470.

(67) Marcal, P. V., and King, I. P., "Elastic-plastic analysis of two-dimensional stress systems by the finite element method," Int. J. Mech. Sci. 9,143-155, 1967; AMR 20 (1967), Rev. 7686.

(68) Popov, E. P., Khojastch-Bakht, M., and Yaghmai, S., "Bending of circular plates of hardening material," Int. J. Solids and Struct. 3,975-988, 1967; AMR 21 (1968), Rev. 3240.

(69) Zienkiewicz, O. C., Valliappan, S., and King, I. P., "Elasto-plastic solutions of engineering problems, initial stress, finite element approach," Int. J. Num. Meth. in Eng. 1,75-100, 1969.

(70) Zienkiewicz, O. C., Valliappan, S., and King, I. P., "Stress analysis of rock as a no-tension material," Geotechnique 18,56-66, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 3296.

(71) Yamada, Y., Yashimura, N., and Sakurai, T., "Stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method," In. J. Mech. Sci, 10, 343,354, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 2330.

(72) Reyes, S. F., and Deere, D. U., "Elasto-plastic analysis of underground openings by the finite element method," Proc. 1st Int. Congr. Rock Mech II, 477-486, 1966.

(73) Zienkiewicz O. C., Watson, M., and King. I. P., "A numerical method of visco-elastic stress analysis," Int. Journ. Mech. Sci. 10,807-827, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 8419.

(74) Greenbaum, G. A., and Rubinstein, M. F., "Creep analysis of axisymmetric bodies using finite elements," Nucl. Eng. and Design 7,379-397, 1968,

(75) Goodman, R. E., Taylor, R. L., and Brekke, T., "A model for the mechanics of jointed rock," J. of Soil Mech. and Found. Div., Proc. ASCE 94,637-659, 1968; AMR 21 (1968), Rev. 8177.

(76) Zienkiewicz, O. C., and Valliappan, S., "Analysis of real structures for creep, plasticity and other complex constitutive laws," Conf. on Materials in Civ. Eng. Univ. of Southampton, 1969, J. Wiley (1970).

(77) Martin, H. C., "On the derivation of stiffness matrices for the analysis of large deflection and stability problems," Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

(78) Gallagher, R. H., and Padlog, J., "Discrete element approach to structural instability analysis" J. AIAA 1,1437 1439, 1963.

(79) Kapur, K. K., and Hartz, B. J., "Stability of thin plates using the finite element method," J. of Engnr. Mech. Div., Proc. ASCE 92,177-195,1966; AMR 20 (1967), Rev. 4676.

(80) Anderson, R. G., Irons, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Vibration and stability of plates using finite elements," Int. J. Solids and Struct. 4,1031-1055, 1968; AMR 22 (1969), Rev. 6815

(29)

(81) Gallagher, R. H., and Yang, H. T. Y., "Elastic instability predictions for doubly curved shells," Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struc. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.

(82) Carson, W. G., and Newton, R. E., "Plate bucking analysis using a fully compatible finite element," J. AIAA 8, 527-529k 1969.

(83) Turner, M. J., Dill, E. H., Martin, H. C., and Melosh, R. J., " Large deflection of structures subject to heating and external loads, " J. Aero. Sci. 27,97-106, 1960.

(84) Marcal, P. V., "Finite element analysis of combined problems of material and geometric behavior," Techn. Rep. l ONY, Brown University, March 1969.

(85) Brebbia, C., and Connor, J., "Geometrically non-linear finite element analysis," J. of Engnr. Mech. Div., Proc. ASCE 95, 463-483, 1969.

(86) Marcal, P. V., "Effect of initial displacement on problem of large deflection and stability," Techn. Report ARPA E54, Brown University, Nov. 1967.

(87) Oden, J. T., "Finite element large deflection analysis of plates," J. Engr. Mech. Div., Proc. ASCE 95, 143, 1969.

(88) Murray, D. W., and Wilson, E. L., "Finite element postbuckling analysis of thin elastic plates," J. AIAA 7, 1915, 1969.

(89) Schmit, L. A., Boyner, F. K., and Fox, R. L., "Finite deflection structural analysis, using place and cylindrical shell discrete elements," J. AIAA 5, 1525-7, 1968.

(90) Oden, J. T., and Sato, T., "Finite strains and deformations of elastic membranes by the finite element method," Int. J. Solids and Struct. 3, 471-478, 1967; AMR 22 (1969), Rev. 7672.

(91) Oden, J. T., "Finite plane strain of incompressible elastic solids by the finite element method," The Aeronautical Quarterly, 18, 254-264, 1967.

(92) Zienkiewicz, O. C., Mayer, P., and Cheung, Y. K., "Solution of anisotropic seepage problems by finite elements," J. of Engr. Mech. Div., Proc. ASCE 92, 111-120, 1966.

(93) Taylor, R. L, and Brown, C. B., "Darcy flow solution with a free surface," J. of the Hydr. Div., Proc. ASCE 92,25-33, 1967; AMR 32 (1969), Rev. 702.

(94) Martin, H. g., "Finite element analysis of fluid flows," Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968.

(95) Arlett, P. L., Bahrani, A. K., and Zienkiewicz, O. C., "Application of finite elements to the solution of Helmholtz's equation (wave guides)," Proc. Inst. El. Eng. 115, 1762-1964, 1968.

(96) Zienkiewicz, O. C., and Newton, R. E., "Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid," Int. Symp. on finite element techniques in shipbuilding, Stuttgart, 1969.

(97) Taylor, C., Patil, B. S., and Zienkiewicz, O. C., "Harbour oscillation in a numerical treatment for undampted modes," Proc. Inst. Giv. Eng. 43, 1941-153, 1969.

(98) Archer, J. S., and Rubin, C. P., "Improved linear axisymmetric-shell - fluid model for launch vehicle longitudinal response analysis," Proc. Conf. Mat. Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

(99) Zienkiewicz, O. C., Irons, B., and Nath P., "Natural frequencies of complex free or submerged structures by the finite element method," Symp. on Vibration in Civ. Eng., Inst. Civ. Eng., (Butterworth), London, 1965.

(100) Sandhu, R. S., and Wilson, E. L., "Finite element analysis of seepage in elastic media," J. of Engnr. Mech. Div., Proc. ASCE 95, 641-651, 1969.

(101) Rashid, Y. R., "Three-dimensional analysis of elastic solids," Int. J. Solids Struct., " Part I: Analysis procedure," 5, 1311-33, 1969; Part II: " The computational problem," 6, 195-207, 1970.

(102) Irons, B. M., "A frontal solution program for finite element analysis," Int. J. Num. Meth. in Eng. 2, 5-32, 1970.

(103) Johnson, W. M., and Mclay, R. W., "Convergence of the finite element method in the theory of elasticity," J. Appl. Mech. Trans. ASME, 274-278, June 1968.

(104) Przemieniecki, J. S., "Theory of matrix structural analysis," McCraw-Hill, 1968.

(105) Jenkins, W. M., "Matrix and digital computer methods in structural analysis," McGraw-Hill, 1969.

(106) Pope, G. G., " The application of the matrix displacement method in plane elastoplastic stress problems," Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

(107) Miller, R. E. and S. D. Hansen, "Large Scale Analysis of Current Aircraft," On General Purpose Finite Element Computer Programs, P. V. Marcal (ed), ASME Special Publication, New York, N. Y., 1970.

(108) Smith, C. S. and G. Mitchell, "Practical Considerations in the Application of Finite Element Techniques to Ship Structures," Proc. of Symposium on Finite Element Techniques, U. of Stuttgart, Stuttgart, Germany, june, 1969.

(109) Corum, J. M. and J. E. Smith, "Use of Small Models in Design and Analysis of Prestressed-Concrete Reactor Vessels," Report ORNL-4346, Oak Ridge Nat. Lab., Oak Ridge, Tenn., May, 1970.

(110) Cheng, W. K., M. U. Hosain, and V. V. Neis, "Analysis of Castellated Beams by the Finite Element Method," Proc. of Conf. on Finite Element Method in Civil Eng., McGill U., Montreal, Canada, 1972, pp. 1105-1140.

(111) Gallagher, R. H., "Large -Scale Computer Programs for Structural Analysis" in On General Purpose Finite Element Computer Programs, P. V. Marcal (ed.), ASME Special Publication, 1970, pp. 3-34.

(112) Marcal, P. V., "Survey of General Purpose Programs for Finite Element Analysis," in Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, J. T. Oden, et al. (ed.), U. of Alabama Press, University, Ala., 1972.

(113) Callagher, R. H. and O. C. Zienkiewicz, Optimum Structural Design, John Wiley & Sons, Inc., New York, N. Y., 1973.

FINITE ELEMENT METHOD
THEORY AND APPLICATION

1. INTRODUCTION

1.1 HISTORICAL BACKGROUND

The finite element method (FEM) has become a powerful numerical technique for solving complex problems in science and engineering, mainly due to the advances made eariler in the numerical methods particularly in matrix methods as well as due to the rapid introduction of high speed computers in the market. However, the introduction of concepts and applications of FEM dates back to the era of mathematicians who tried to calculate the perimeter and [illegible] of a circle by idealizing it as a regular polygon. It is also interesting to note that the bound solutions which are often discussed in FEM can be traced back to the solution of the area of a circle. If the circle is modelled with an inscribed polygon, a lower bound solution is obtained whereas an upper bound solution is obtained by replacing the circle by a circumscribed polygon. Even though the basic concepts of FEM existed for over two thousand years, for all practical purposes, one can only say that these concepts were actually used for solving physical problems in 1950s by the aeronautical engineers.

In 1956, Turner et al (Ref 1) presented the stiffness analysis for the complex structures, which is the starting point in the rediscovery of FEM. Nevertheless, Clough (Ref 2) was the one who actually used the term FEM in 1960. Since then, a tremendous amount of research has been done in this field and quite a large number of papers have been published in almost all the journals related to all fields of engineering as well as some in the fields of mathematics and science. In addition, several conferences have been held all over the world and hundreds of papers have been presented in each. The theory and application of FEM have also been presented in numerous text books (Ref 3-22). In order to help the research workers in tracing the references required for their particular work several bibliographics have either been published or under preparation, among them notably Ref (23) is a good source of information.

1.2 APPLICATIONS OF FEM

The FEM is applicable to a variety of boundary value and initial value problems in engineering as well as applied science. Some of these applications are:

1. Stress Analysis of Structures, Stability of Structures, Dynamic response of structures, Thermal Stress Analysis, Torsion of prismatic members
2. Stress Analysis of Geomechanics problems, Soil-Structure Interaction, Slope Stability problems, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Seepage in soils and rocks, Consolidation settlement
3. Solutions in Fluid Mechanics, Harbour oscillations, Pollution Studies, Sedimentation
4. Analysis of Nuclear Reactor Structures
5. Stress Analysis and Flow Problems in Biomechanics
6. Characteristic Study of Composites in Fibre Technology
7. Wave Propagation in Geophysics
8. Field Problems in Electrical Engineering

Apart from the above mentioned areas, the FEM is also applicable to any other problem as long as the analyst makes certain that the problem is amenable to solution based on the assumptions introduced in the formulation of FEM and appropriate material properties can be provided in a realistic manner.

1.3 METHODS OF ANALYSIS

In general, there are four basic methods of analysis in FEM-displacement method, equilibrium method, mixed method and hybrid method. The field variables or unknown quantities in each of these methods are as follows.

Displacement method - displacements and their derivatives
Equilibrium method - stress components
Mixed method - some displacements and some stress components
Hybrid method - displacements or boundary forces

In the displacement method, smooth displacement distribution is assumed within an element, interelement compatibility of displacement is generally assured and minimum potential energy criterion is used in the formulation.

In the equilibrium method, the interior stress distribution is assumed to be smooth, the equilibrium of boundary tractions is maintained and the minimum complimentary energy is the basis for the formulation.

In the mixed method which is generally used for plate and shell problems, both displacements and stresses are assumed smooth in the interior, the displacement components and the equivalent stress components are considered to be continuous at the interelement boundaries and the formulation is based on Reissner's principle.

In the hybrid method, depending on whether the model is displacement type or equilibrium type, the distribution of displacements or stresses within the element is considered to be smooth and along the interelement boundary either assumed compatible displacements or assumed equilibrating boundary tractions are ensured and either modified complementary energy or modified potential energy principle is adopted for the formulation.

Among these four methods, the displacement method is the most widely used approach. However, for plate bending problems either the equilibrium or mixed method is preferred and for some field problems hybrid method is more suitable.

1.4 DESCRIPTION OF FEM

A structure, continuum or a domain is divided into a number of arbitrary shaped parts or regions known as *elements*. These elements are interconnected at joints known as *nodes*. The principal unknown is termed as the *field variable*. This field variable can be displacement, temperature, pore-pressure or stress. The distribution of the field variable within an element is approximated by the use of certain polynomial functions. Variational methods or residual methods are employed to develop the finite element equations which relate the field variables at the nodes to the corresponding action vector at the nodes of the element. This relationship is provided by the so called property matrix which is based on the material and the geometric properties of the element. Finally these finite element equations are assembled to form a system of algebraic equations for the entire domain. The unknown field variable is obtained by solving this system of algebraic equations.

1.5 BASIC STEPS IN FE ANALYSIS

The basic steps in the finite element analysis of general problems are as follows.

1. The continuum is divided into finite elements of any arbitrary shape.
2. A suitable polynomial is chosen to represent the distribution of the field variable within an element in terms of its nodal values. Thus, the field variables at the nodes become the primary unknowns.
3. Using variational methods or residual methods, the finite element equations are formulated.
4. The individual finite element equations obtained in step 3 are assembled to form a set of algebraic equations for the overall continuum.
5. The solution of the algebraic equations obtained in step 4 yields the values of the field variables at the nodes.
6. From the field variables at the nodes, the secondary variables such as stress, strain for an element can be obtained.

REFERENCES

1. TURNER, M. J., CLOUGH, R. W., MARTIN, H. C., and TOPP, L. J., "Stiffness and deflection analysis of complex structures", J. Aero, Sci., Vol. 23, No. 9, 1956, pp 805-823

2. CLOUGH, R. W., "The finite element method in plane stress analysis", Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, 1960, pp 345-378

3. ZIENKIEWICZ, O. C. and CHEUNG, Y. K., The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, London, 1967

4. ZIENKIEWICZ, O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971

5. SMITH, G. N., An Introduction to Matrix and Finite Element Methods in Civil Engineering, Applied Science, London, 1971

6. DESAI, C. S. and ABEL, J. F., Introduction to the Finite Element Method, Van Nostrand and Reinhold, New York, 1972

7. ODEN, J. T., Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, New York,1972

8. URAL OKTAY, Finite Element Method, Intext Educational Publishers, New York, 1973

9. MARTIN, H. C. and CAREY, G. F., Introduction to Finite Element Analysis, McGraw-Hill, New York, 1973

10. STRANG, G. and FIX, G. J., An Analysis of the Finite Element Method, Prentice Hall, N. J., 1973

11. BREBBIA, C. A. and CONNOR, J. J., Fundamentals of Finite Element Technique, Butterworths, London, 1973

12. NORRIS, D. H. and de VRIES, G., The Finite Element Method-Fundamentals and Applications, Academic Press, New York, 1973

13. COOK, R. D., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley, New York, 1974

14. WACHPRESS, E. L., A Rational Finite Element Basis, Academic Press, New York, 1975

15. FENNER, R. T., Finite Element Method for Engineers, MacMillan Press, London, 1975

16. GALLAGHER, R. H., Finite Element Analysis-Fundamentals, Prentice-Hall, N. J., 1975

17. HUEBNER, K. H., The Finite Element Method For Engineers, John Wiley, New York, 1975

18. ROCKEY, K. C., et al, The Finite Element Method, Crosby, Lockwood, Staples, London, 1975

19. CONNOR, J. J. and BREBBIA, C. A., Finite Element Techniques for Fluid Flow, Butterworths, London, 1976

20. ODEN, J. J. and REDDY, J. N., An Introduction to Mathematical Theory of Finite Elements, John Wiley, New York, 1976

21. SEGERLIND, L. J., Applied Finite Element Analysis, John Wiley, New York, 1976

22. BATHE, K. J. and WILSON, E. L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, N. J., 1976

23. NORRIE, D. H. and de VRIES, G., "A Finite Element Bibliography (3 Parts), Report No. 57, Mechanical Engineering Department, The University of Calgary, Canada, 1974

39 ② p1 of 10

VI·2 Programas de Proposito General y Opciones de Análisis

ELEMENTS AND SOME POPULAR (?) COMPUTER CODES

PROGRAM	AUTHORS
SUPERB	STRUCTURAL DYNAMICS RESEARCH CORPORATION (SDRC)
EASE2	ENGINEERING ANALYSIS CORPORATION (EAC)
STARDYNE	MECHANICS RESEARCH INC. (MRI)
NASTRAN	MCNEAL-SCHWENDLER CORP. (MSC)
ANSYS	SWANSON ANALYSIS SYSTEMS (SAS)
MARC-CDC	MARC ANALYSIS CORP.

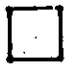
(40) p. 2 of 10

TYPES OF ANALYSIS

ANALYTICAL CAPABILITY		PROGRAM					
		EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	SUPERB
LINEAR STATICS	MECHANICAL LOADS	●	●	●	●	●	●
	TEMPERATURE LOADS	●	●	●	●	●	●
	EULER BUCKLING			●		●	
	INERTIA RELIEF			●			
DYNAMICS	MODE/FREQUENCY	●	●	●	●	●	
	FREQUENCY RESPONSE		●	●	●		
	TRANSIENT RESPONSE	●	●	●	●	●	
	SHOCK SPECTRA	●	●		●		
	RANDOM RESPONSE		●	●			
	NONLINEAR TRANSIENT			●	●	●	
NONLINEAR STATICS	NONLINEAR BUCKLING					●	
	LARGE DISPLACEMENT				●	●	
	PLASTICITY			●	●	●	
	CREEP				●	●	
	VISCOELASTICITY			●		●	
	LARGE STRAINS					●	
HEAT TRANSFER	STEADY STATE			●	●	●	●
	TRANSIENT			●	●	●	
SUBSTRUCTURES (SUPER-ELEMENTS)	STATIC		●	●	●		
	DYNAMIC		●	●	●		
	CYCLIC SYMMETRY			●			
MISCELLANEOUS	FRACTURE MECHANICS			●	●	●	
	FLUIDS			●	●	●	
	ELECTRIC CIRCUITS				●		
	OPTIMIZATION			●			
	ACOUSTIC CAVITIES			●			
	FATIGUE DAMAGE				●		

㊶ p. 3 of 10

STRUCTURAL ANALYSIS
ELEMENT/MATRIX LIBRARY

ELEMENT			PROGRAM					
			EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	SUPERB
LINE ELEMENTS	ROD				•	•	•	
	BEAM		•	•	•	•	•	•
	TAPERED BEAM					•	•	
	OFFSET BEAM			•	•	CSM SINGLE BEAM OFFSET		•
	PINNED END BEAM		•	•	•			•
	CURVED BEAM						•	
FLAT MEMBRANES AND PLATES	3 NODE TRIANGLE		•	•	•	•	M	
	6 NODE TRIANGLE				M		M	C
	SHEAR PANEL				•			
	4 NODE QUAD		•	•	•	•	M	•
	8 NODE QUAD					S	M	S,
CURVED SHELLS	3 NODE TRIANGLE						•	
	6 NODE TRIANGLE							C
	4 NODE QUAD						•	•
	8 NODE QUAD						•	S,
	REDUCED THICK SHELL						•	

NOTES:

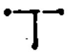
M Membrane and/or plane strain only (no plate bending)

S Includes sub parametric forms with fewer nodes

C Also includes cubic isoparametric element with two midside nodes

(42) p. 4 of 10

STRUCTURAL ANALYSIS ELEMENT/MATRIX LIBRARY (continued)

ELEMENT				PROGRAM					
				EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	SUPERB
AXI-SYMMETRIC ELEMENTS	SHELLS	CONICAL				•	•	D	
		CURVED				•		•	
	TRIANGULAR RINGS	3 NODE				•	•	•	C
		6 NODE				•		D	C
	QUAD RINGS	4 NODE				•	•	•	•
		8 NODE					S	•	S
SOLID ELEMENTS	TETRA-HEDRON	4 NODE			•	•	•	D	
	WEDGES	6 NODE		•	•	•	•	D	D
		15 NODE						•	C
	HEXA-HEDRONS	8 NODE		•	•	•	•	•	•
		20 NODE				S		•	S
PIPE ELEMENTS		STRAIGHT		•	•	•	•	•	
		ELBOW		•	•		•	•	
		TEE			•				

NOTES:

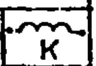
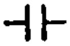
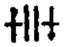
S Includes subparametric forms with fewer nodes

C Also includes cubic isoparametric element with two midside nodes

D Degenerate case

㊸ p. 5 of 10

STRUCTURAL ANALYSIS
ELEMENT/MATRIX LIBRARY (continued)

ELEMENT				PROGRAM					
				EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	SUPERB
GENERAL STIFFNESS ELEMENTS		SPRING		1	•		•	•	•
		SCALAR SPRING				•			
		6 x 6 or 12 x 12 MATRIX			•	•	•		•
		GENERAL MATRIX				•			
MASSES	ELEMENT	LUMPED (DIAGONAL)		2	2	2	2		
		CONSISTENT				2	2	2	
	NON-STRUCTURAL	SCALAR (DOF)	•			•		•	
		NODAL		•	•	•	•		
		DISTRIBUTED				•			
		GUYAN REDUCTION			•	•	•		
		GENERAL MATRIX				•	•		
DAMPING		SCALAR				•			
		DASHPOT				•	•		
		DISCRETE VISCOUS $[C] = \alpha[K] + \beta[M]$		•		•	•	•	
		STRUCTURAL $(1 + ig)[K]$				•			
		MODAL VISCOUS		•	•	•		•	
		GENERAL MATRIX				•	•		
OTHER ELEMENTS		GAP					•	•	
		FRICTION					•	•	
		RIGID		3	•	•			
		REBAR SOLID						•	
		ELASTIC FOUNDATION						•	
		CRACK TIP					•	•	
		LAMINATED SHELL					•	•	
		PLOT ONLY				•			

NOTES:

1 See restraints
2 Generated from density
3 See constraints

㊹ p. 6 of 10

HEAT TRANSFER—CONDUCTING ELEMENTS

ELEMENT			PROGRAM				
			EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC
LINEAR					•	•	•
PLANAR	3 NODE TRIANGLE				•	•	•
	4 NODE QUAD				•	•	•
	8 NODE QUAD					S	•
	TRANSVERSE CONDUCTING SHELL					•	
AXISYMMETRIC	TRIANGULAR RING				•	•	•
	4 NODE QUAD RING				•	•	•
	8 NODE QUAD RING					S	•
SOLID	TETRAHEDRON				•	•	
	WEDGE				•	•	D
	8 NODE BRICK				•	•	•
	15 NODE WEDGE						D
	20 NODE BRICK						•
GENERAL MATRIX INPUT					•		

NOTES:

- S Contains subparametric forms with fewer number of nodes
- P Also contains parabolic isoparametric element with one midside node
- C Also contains cubic isoparametric element with two midside nodes
- D Degenerate case

(45) p.7 of 10

COORDINATE SYSTEMS AND MATERIAL PROPERTIES

FEATURE			PROGRAM				
			EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC
COORDINATE SYSTEMS	BASIC (GLOBAL)	CARTESIAN	●	●	●	●	●
		CYLINDRICAL	●	●	●	●	
		SPHERICAL			●	●	
		GENERAL					1
	SKEWED (LOCAL)	CARTESIAN	●	●	●	●	●
		CYLINDRICAL	●	●	●	●	
		SPHERICAL			●	●	
		GENERAL					1
		MIXED	●	●	●	●	●
MATERIAL PROPERTIES		ISOTROPIC	●	●	●	●	●
		2-D ORTHOTROPIC		●	●	●	1
		3-D ORTHOTROPIC				●	1
		TEMPERATURE DEPENDENT	●		●	●	●
		STRESS DEPENDENT			●	●	●
		TIME DEPENDENT				●	●
		NONLINEAR ELASTIC					●
	WORK HARDENING	ISOTROPIC				●	●
		KINEMATIC				●	●
		COMBINED					●
		ORNL 10 CYCLE					●
		GENERAL					1

NOTES:

1 Performed by user subroutine

(46) p. 8 of 10

BOUNDARY CONDITIONS

				PROGRAM				
FEATURE				EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC
LOADING	STATIC	CONCENTRATED		•	•	•	•	•
		DISTRIBUTED (BEAM)		•	•	•	•	•
		PRESSURE	PLATES/SHELLS	•	•	•	•	•
			AXISYMMETRIC ELEMENTS			•	•	•
			SOLIDS	•	•	•	•	•
		TEMPERATURE		•	•	•	•	•
		ACCELERATION		•	•	•	•	•
		ROTATIONAL VELOCITY		•	•	•	•	1
		COMBINATION		•	•	•	•	
		AXI-SYMMETRIC	AXISYMMETRIC SHELLS			•	•	
			AXISYMMETRIC RINGS				•	–
	DYNAMIC 1	TIME DEPENDENT		•	•	•	•	•
		FREQUENCY DEPENDENT			•	•		
		PSD RANDOM			•	•		
		SHOCK SPECTRUM		•	•		•	
DISPLACEMENT CONSTRAINTS		SINGLE POINT*		•	•	•	•	•
		MULTI POINT*		2		•	•	•
		SPECIFIED NONZERO DISPLACEMENT		•	•	•	•	•
HEAT TRANSFER		HEAT SOURCE/SINK				•	•	•
		CONVENTION				•	•	•
		RADIATION				•	•	•
		SPECIFIED TEMPERATURE				•	•	•

TES: *Single point constraint = enforced zero translation(s) and/or rotation(s) in coordinate(s) associated with a node point
Multi-point constraint = enforced linear constraint relationships between translation(s) and/or rotation(s) which may b
associated with different node points

1 Applies to some elements
2 Specialized forms of rigid and interface coupling
3 Displacement components set equal on different nodes
+ Stand alone program

(47)

p. 9 6, 10

PRE- AND POST-PROCESSING

			PROGRAM					
		FEATURE	EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	[illegible]
PLOTTING	INPUT	UNDEFORMED GEOMETRY	+	•	•	•	•	•
		NODE LABELS	+	+	•	•	•	•
		ELEMENT LABELS	+		•	•	•	•
		PROPERTY LABELS			•	•		•
		2-D SECTIONS				•	•	
		BOUNDARY CONDITION LABELS	+		•			
		HIDDEN LINES REMOVED					+	
	OUTPUT	DEFORMED GEOMETRY	+	•	•	•	•	•
		CONTOURS 2D STRUCTURE		+	•	•	•	•
		CONTOURS SOLID STRUCTURE				•	•	•
		TIME HISTORY	4	•	•	•	+	
		FREQUENCY RESPONSE		•	• ,4			
		POWER SPECTRAL DENSITY		•	• ,4			
		ARBITRARY X VS. Y				•	+	
DATA GENERATION		NODES	1	1,2	1,2,3	1,2	2,3	[illegible]
		ELEMENTS	1	1	1,2,3	1,2	2,3	[illegible]
		RESTRAINTS	1	1	1,2	1	2,3	[illegible]
		LOADS	1	1	2	1	2,3	[illegible]
OUTPUT SORTING		BY LOAD CASES		•	•	•	•	•
		BY ELEMENT	•		•			
		MAX/MIN SUMMARY	•	•	•			•
		SELECTED NODES AND/OR ELEMENTS		•	•	•	•	
BANDWIDTH MINIMIZATION			•	•	•	W	• ,W	[illegible]

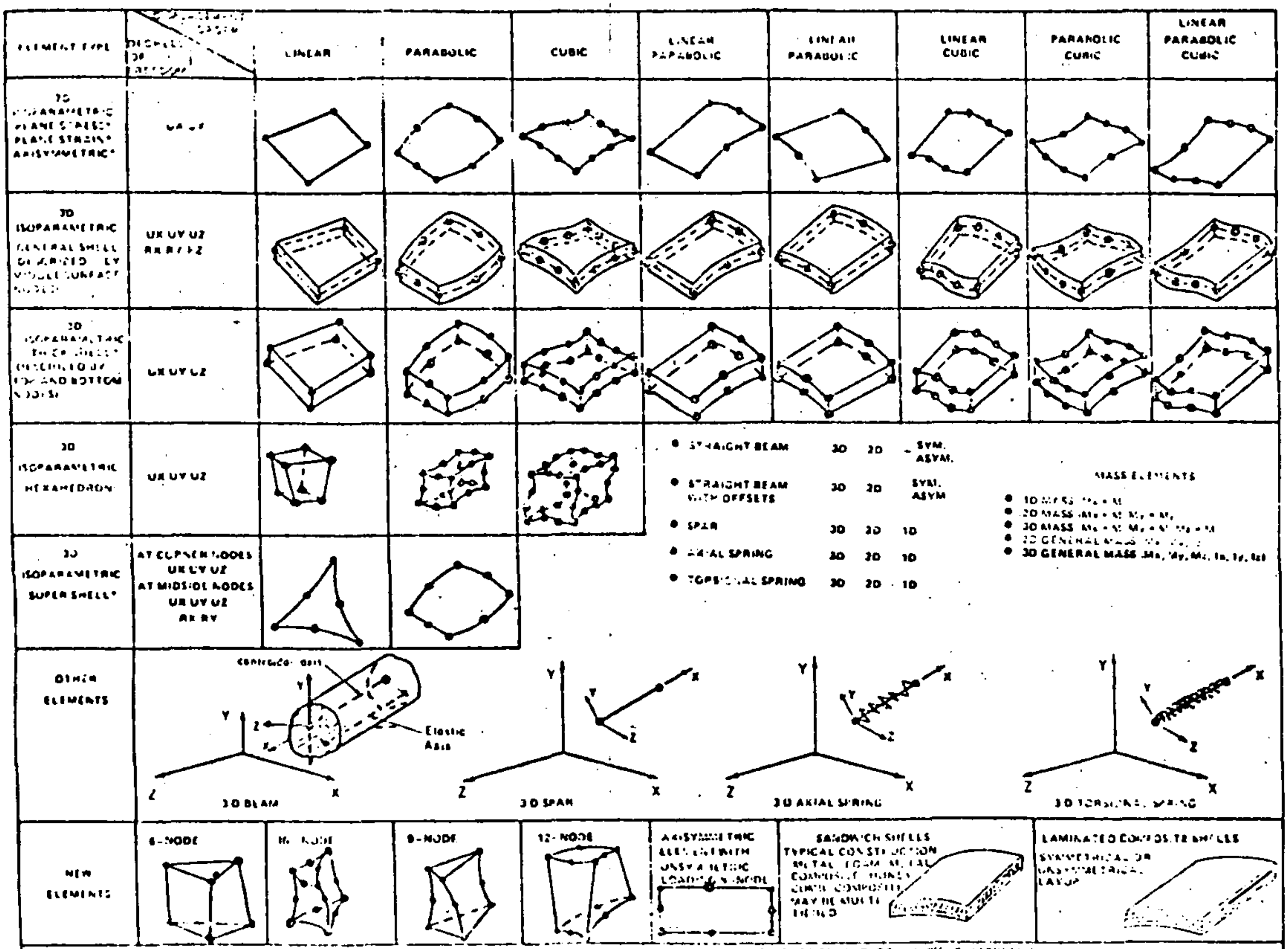
NOTES

1 Generates data in 1 "dimension"
2 Generates data in 2 "dimensions"
3 Generates data in 3 "dimensions"
4 Printer plots
+ Stand alone program
W Wavefront solution

p. 10 of 10

(2)

NISA ELEMENT LIBRARY



* THESE ELEMENTS ARE ALSO AVAILABLE FOR STEADY STATE AND TRANSIENT HEAT TRANSFER, SEEPAGE, TORSION AND OTHER FIELD PROBLEMS

48

INTERACTIVE SYSTEMS

(49)

p. 196

Applications Software

The user (designer, draftsman, engineer or technician) interacts with a CAD system through applications software. The programs "talk" the user's language as opposed to the computer implementation language which is, hopefully, isolated from the user in lower levels of utilities and system software. The usefulness of applications software is related to the human engineering of its interface with the user (command language, user I/O hardware devices, software design, etc.) as much as the technical content and features of the program.

Applications software can be divided into two categories: standalone and turnkey. The standalone software is available from a software vendor and frequently runs on several different manufacturer's computers. The turnkey software is available as part of a packaged hardware/software system from a turnkey vendor. The turnkey vendor typically buys computer equipment from a computer manufacturer and combines this with his own software, hardware packaging, and workstation design. A few turnkey vendors offer modified software from another software vendor. A few also produce their own hardware components, particularly microprocessors for speeding up interactive graphics response.

Standalone applications software has the primary advantage of flexibility. It often can be implemented on computers over a broad size/speed range in organizations having diverse computing machinery. Standalone software dominates engineering analysis, where turnkey systems either don't offer capabilities or are very weak. Turnkey systems, on the other hand, have the primary advantage of being available from one source, avoiding the potential problems of multi-vendor scenarios. They have achieved a dominance in the area of geometric modeling and drafting (particularly 2D).

This section reviews the standalone applications software used in CAD. Turnkey systems are discussed in Section VII. The big news in standalone CAD software is the migration to smaller computers.

52

p 5 of 6

42. Structural Software
Development
1930 Shattuck Avenue
Berkeley, CA 94704

43. MCAUTO
Dept. K246
P.O. Box 516
St. Louis, MO 63166

44. AAA Technology and
Specialities Co., Inc.
P.O. Box 37189
Houston, TX 77036

45. Titech, Ltd.
Mississippi State Univ.
Drawer KJ
Mississippi State, MS 39762

46. Mr. Ronald T. Bradshaw
85 Central Street
Waltham, MA 02154

47. Gulley Computer Associates
2300 E. 14th
Tulsa, OK 74104

[illegible] Structural Members Users
Group, Ltd.
P.O. Box 3958
Univ. of Virginia Station
Charlottesville, VA 22903

4[illegible] Genesys Limited
Lisle Street
Loughborough, LE11OAY
England

50. ECOM Associates
5678 W. Brown Deer
Milwaukee, WI 53223

51. Synercom Technology
P.O. Box 27
Sugerland, TX 77478

52. CONCAP Computing Systems
7700 Edgewater Drive
Suite 730
Oakland, CA 94621

53. Structural Programming, In
83 Boston Post Road
Subury, MA 01776

54. Shanler Associates
1959 Chalice Way
Toledo, OH 43613

55. SysComp Corporation
2042 Broadway
Santa Monica, CA 90404

56. Holguin and Associates, Inc.
5822 Cromo Drive
P.O. Box 12990
El Paso, TX 79912

57. Zeiler-Pennock, Inc.
2727 Bryant Street
Denver, CO 80211

58. Stress Analysis Associates
4529 Angeles Crest Highway
Suite 104
La Canada, CA 91011

59. Computer Mart
560 West 14 Mile Road
Clawson, MI 48017

60. Northern Research and
Engineering Corp.
39 Olympia Avenue
Woburn, MA 01801

53

p. 6 of 6 ⑥

Software Referral Catalogs

1. HP 1000 Guide to OEMs and Software Suppliers
   OEM Market Development
   Hewlett-Packard Data Systems Division
   11000 Wolfe Road
   Cupertino, CA 95014

2. Engineering System Software Referral Catalog
   Digital Equipment Corp.
   Engineering Systems Group
   200 Forest Street
   Marlboro, MA 01752

Distribution Agencies for Software

1. ASIAC (Aerospace Structures Information and Analysis Center)
   AFFDL/FBR
   Wright Patterson Air Force Base
   Dayton, OH 45433

2. CEPA (Society for Computer Applications in Engineering, Planning and Architecture, Inc.)
   358 Hungerford Drive
   Rockville, MD 20850

3. COSMIC
   Suite 112, Barrow Hall
   The University of Georgia
   Athens, GA 30602

4. National Information Service-Earthquake Engineering Computer Applications
   519 Davis Hall
   The University of California, Berkeley
   Berkeley, CA 94720

5. National Technical Information Center
   5285 Port Royal Road
   Springfield, VA 22161

6. NESC (National Energy Software Center)
   9700 South Cass Avenue
   Argonne, IL 60439

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

ANALISIS ESTRUCTURAL

INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

M. EN I. ERNESTO MARTIN DEL CAMPO
DR. PORFIRIO BALLETEROS

SEP-OCT. 92

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

4. MODELACION MATEMATICA DE SISTEMAS

4.1. Introducción al Cálculo de Variaciones

Existe una gran variedad de sistemas físicos que pueden ser descritos desde un punto de vista variacional y en este contexto, el manejo de cálculo de variaciones se considera como una herramienta matemática que permite la formulación de un sistema mediante conceptos matemáticos que pueden relacionarse directamente con aspectos físicos del mismo.

El problema clásico de cálculo de variaciones consiste en encontrar los valores estacionarios de un funcional el cual se define como una integral definida cuyo valor numérico depende de la función integrada y para encontrar los valores estacionarios de dicha integral es necesario encontrar la función que sustituida en el integrando correspondiente ceda un valor extremo, es decir mínimo o máximo.

Sea el funcional I definido por:

$$I = \int_a^b F(x)\,dx \qquad (4.1.1)$$

Cada función F(x) que sea sustituida en esta ecuación resulta en un valor numérico de I diferente y aquella función F*(x) que resulte en un valor mínimo o máximo, hace el funcional I estacionario.

Es conveniente pensar en el paralelismo que existe entre el concepto de encontrar los valores estacionarios de un funcional y de una función algebráica. Cuando se busca el mínimo o máximo de una función definida como

$$y = f(x) \qquad (4.1.2)$$

Ciertas condiciones deben ser satisfechas, como lo son que la función sea continua en el rango de interés, que sea deribable dos veces en dicho rango y que además la primera derivada de la función con respecto a la variable sea cero es decir

$$y' = \frac{dy}{dx} = 0 \qquad (4.1.3)$$

El resultado es un valor de la variable independiente para el cual la función f(x) es estacionario.

Entonces, cuando se extremiza una función se encuentra un valor de la variable independeinte, más cuando se extremiza un funcional se encuentra uan función. La condición suficiente y necesaria para extremizar dicho funcional consiste en que su primera variación sea cero; es decir:

$$\delta I = \delta \int_a^b F(x)\, dx \qquad (4.1.4)$$

Esta condición es análoga a la condición de la ecuación (4.1.3). Un ejemplo de aplicación del concepto variacional es el problema de encontrar la trayectoria que debe seguir una partícula de masa m para moverse desde el punto A al punto B en un plano, bajo la acción de la gravedad de tal forma que el tiempo de recorrido sea mínimo. Figura (4.1.1).

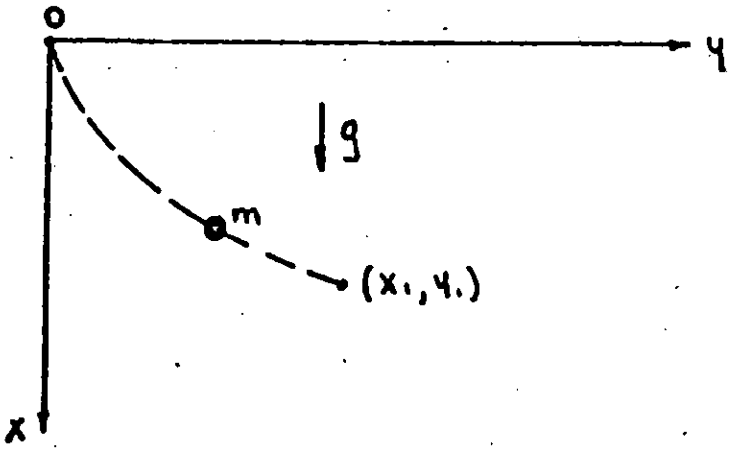


Figura 4.1.1 Problema de brachistochrone

El funcional que se puede proponer para este problema es:

$$t = \int_0^{s_1} \frac{ds}{v} \tag{4.1.5}$$

en donde:

$$ds = \pm\sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{4.1.6}$$

y de consideraciones energéticas

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgx \tag{4.1.7}$$

entonces combinando las tres últimas ecuaciones se tiene que

$$t = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}\,dx \tag{4.1.8}$$

El problema consiste en encontrar una función y=f(x) tal que el funcional t sea mínimo.

Antes de procedir a formular la solución es necesario describir la forma general del problema clásico de cálculo de variaciones.

Sea el funcional π definido por

$$\Pi = \int_a^b F(x, y, y')\,dx \tag{4.1.9}$$

en donde $y' \equiv \frac{dy}{dx}$. El problema consiste en encontrar funciones y=y(x) para las cuales pequeñas variaciones arbitrarias $\delta y(x)$, no cambien el valor de π.

La condición suficiente y necesaria para encontrar un valor estacionario de π es de acuerdo con la ecuación (4.1.4)

$$\delta\Pi = \int_a^b \delta F(x, y, y')\,dx = 0 \tag{4.1.10}$$

7 8

$$Q + K_{xx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \qquad (4.1.35)$$

y como conclusión tenemos que el funcional π de la ecuación (4.1.32) es estacionario cuando la ecuación diferencial (4.1.35) se satisface.

4.2 Formulación Variacional del Elemento Finito

4.2.1 Introducción

El concepto fundamental del método del elemento finito (MEF) consiste en que cualquier función continua en un dominio dado, puede aproximarse mediante una sucesión de funciones que se definen en una serie de subdominios dentro de los cuales estas funciones son continuas y las cuales se interconectan para aproximar así la función dada (Fig.4.2.1)

Desde un punto de vista físico, el concepto fundamental del método del elemento finito consiste en que para resolver un sistema que representa una estructura física sujeta a ciertas condiciones físicas, se puede utilizar un modelo aproximado compuesto de una serie de elementos que se interconectan en una serie de puntos llamados nodos (Fig.4.2.2)y cuyo comportamiento es conocido a través de ciertas ecuaciones preestablecidas y que corresponden a los tipos de elementos usados y al número de nodos en cada uno de ellos.

La solución de las ecuaciones del modelo pueden ser exactas, pero el modelo en si es una aproximación discreta al sistema físico y la solución de dicho modelo se aproxima a la solución del sistema real. Los antecedentes del método del elemento finito datan de los años 50's cuando surgió del análisis de estructuras aereonáuticas, y ha evolucionado rápidamente hasta expander sus aplicaciones a varios campos de la ingeniería como son la transmisión de calor, la elasticidad, mecánica de fluidos, estructuras, lubricación y otros muchos.

4.2.2 Formulación de un Problema de Ingeniería

La formulación matemática en problemas de ingeniería generalmente se puede efectuar en dos formas diferentes,

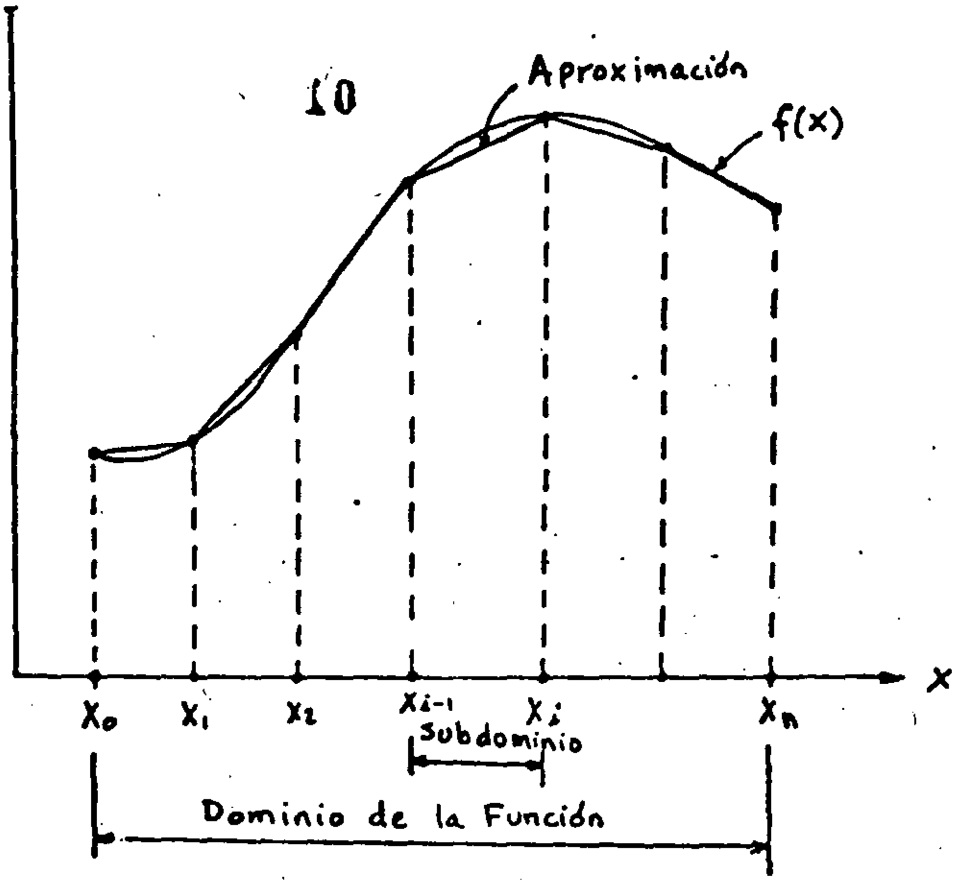


Fig 4.2.1 Aproximación de una función continua a traves de una serie de funciones lineales conectadas

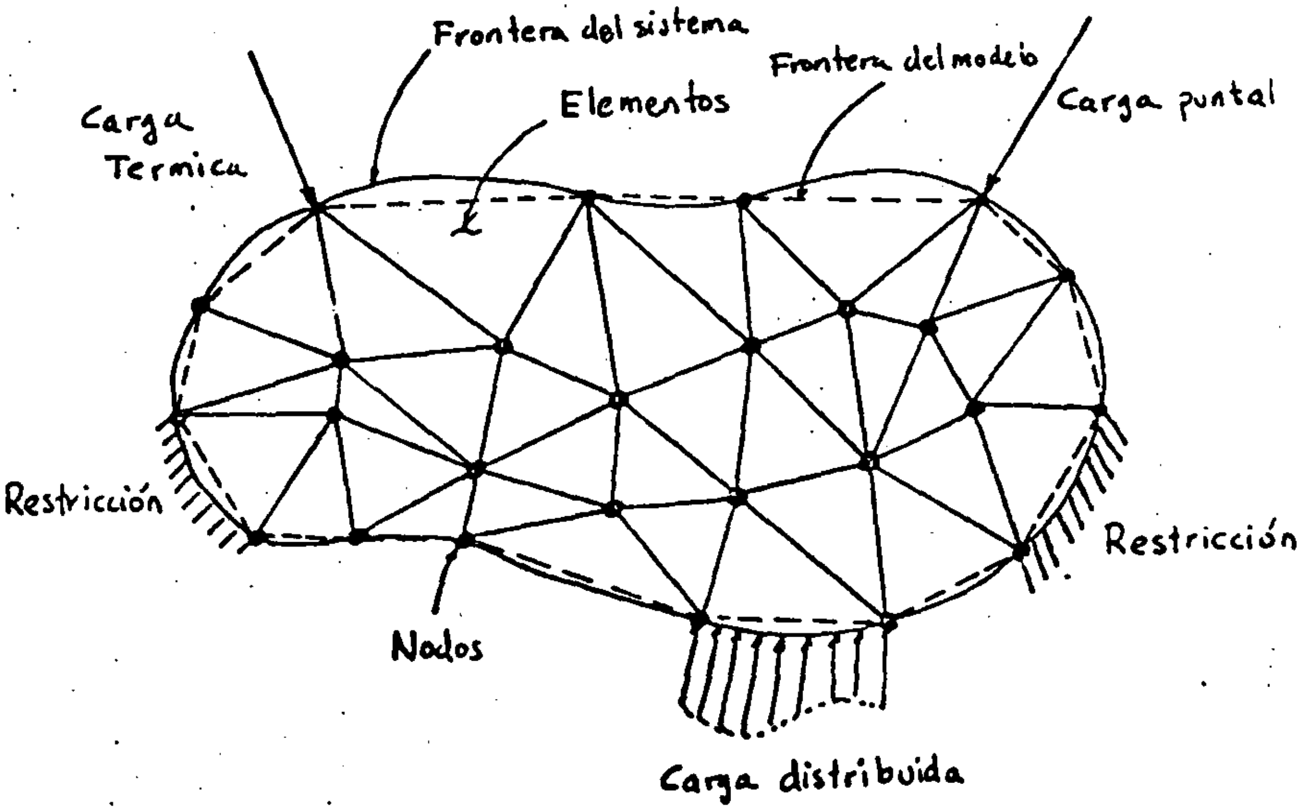


Fig. 4.2.2 Sistema de un cuerpo deformable sujeto a cargas y restricciones y discretizado con elementos finitos

la primera considera el comportamiento de una área o volumen infinitecimal del sistema y las ecuaciones correspondientes se formulan en forma <u>diferenical</u>, y como el área o volumen considerado es representativo de toda la región, las mismas ecuaciones son válidas para todo el dominio de esa región. Como ejemplo tenemos la ecuación de Reynolds en la lubricación hidrodinámica de cojinetes Fig 4.2.3 la cual es una ecuación diferenical en dos dimensiones que se deriva a partir de un elemento infinetesimal y es de la forma:

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[h^3\frac{\partial P}{\partial\theta}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[h^3\frac{\partial P}{\partial z}\right]=6\mu\omega\frac{\partial h}{\partial\theta} \qquad (4.2.1)$$

en donde h es el espesor de la capa lubricante, e es la coordenada polar angular, z es la perpendicular al plano (x,y), μ es la viscocidad del lubricante, ω es la velocidad angular de rotación de la flecha y P es la distribución de la presión al rededor y a lo largo del eje z.

En la segunda alternativa se postula un principio que englobe la región entera o dominio dado y consecuentemente es una formulación en forma <u>Integral</u> y la solución es generalmente dada por valores extremos de dicha integral. Este método es conocido como el Método Variacional y como ejemplo se tiene el caso de la energía potencial de cuerpos elasticos, en el cual se establece que la configuración del equilibrio estático de una estructura deformable requiere de una energía potencial mínima. Esta energía se refiere al total de la energía de toda la estructura y se obtiene mediante la suma de energías de las partes de la estructura.

De todas las posibles configuraciones que la estructura pueda adoptar, aquella que ceda un valor mínimo a la energía potencial nos da la configuración de equilibrio. Esto se conce como el Principio de la Energía Potencial Mínima.

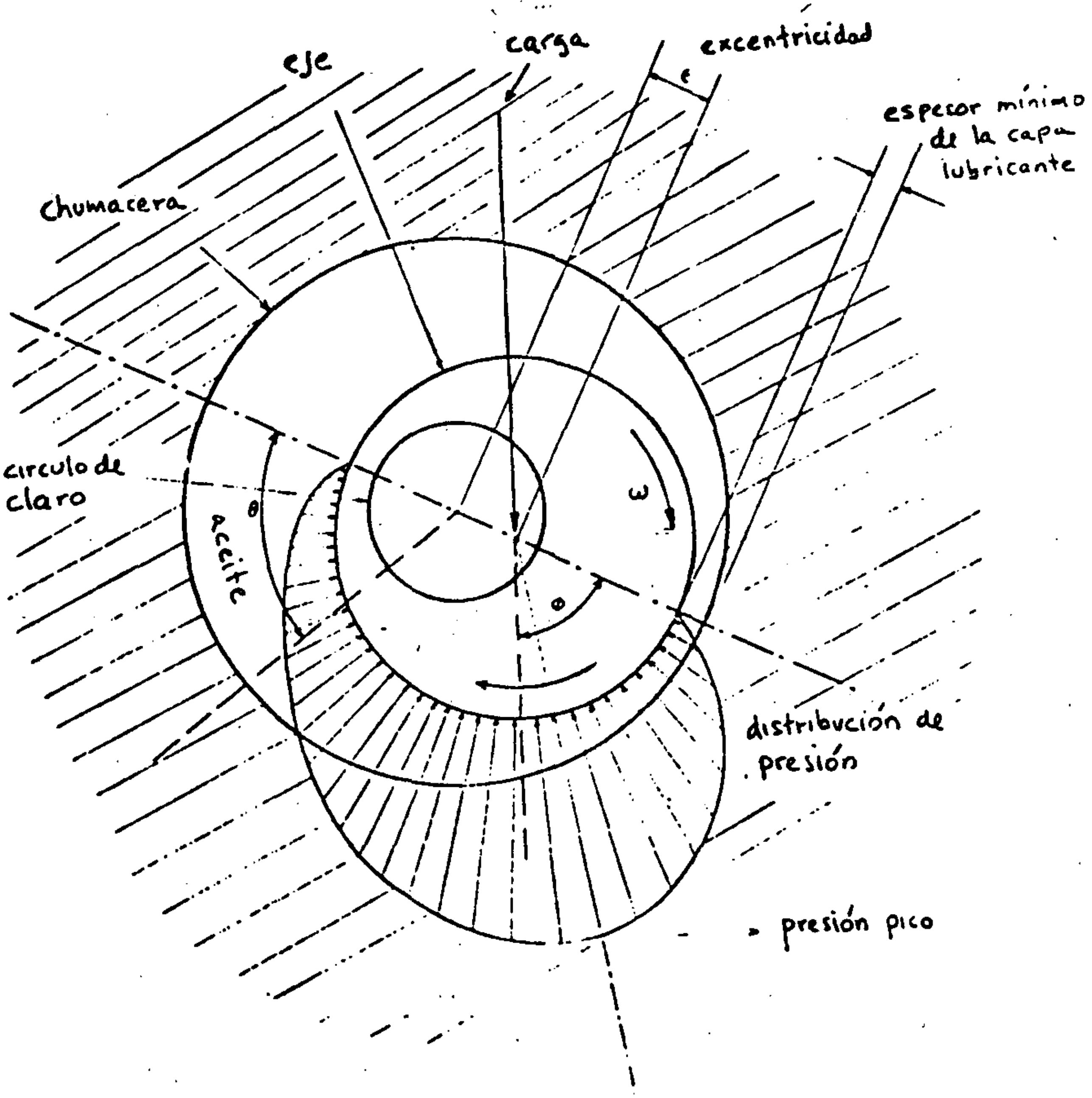


Fig. 4.2.3 Sistema Chumacera- Eje lubricado hidrodinámicamente

Resumiendo lo anterior, el procedimiento para desarrollar el análisis de una estructura deformable consiste en establecer un funcional, el cual es el valor de una integral y que tiene la forma

$$\Pi = \int_{x_a}^{x_b} F(x, y, y')\, dx \tag{4.2.2}$$

en donde

$$y = y(x) \quad , \quad y' = \frac{dy(x)}{dx} \tag{4.2.3}$$

Una vez establecido este funcional se procede a encontrar sus valores extremos, lo cual requiere que su primera variación sea igual a cero, es decir que cumpla con la condición de estacionaridad de una integral mediante:

$$\delta \Pi = 0 \tag{4.2.4}$$

Cabe mencionar que encontrar el valor estacionario de una integral es similar a encontrar los valores mínimos o máximos de una función en cálculo diferenical, excepto que al minimizar una función se obtiene un valor de la variable independiente que nos da un mínimo en la función, mientras que al minimizar un funcional se obtiene una función que al integrarse hace el valor de dicha integral mínimo.

Para llevar a cabo lo anterior se puede proceder a discretizar la integral mediante la siguiente ecuación

$$\Pi = \int_{x_a}^{x_b} F(x,y,y')dx = \int_{x_a}^{x_1} F(x,y,y')dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx + \cdots + \int_{x_n}^{x_b} F(x,y,y')dx \tag{4.2.5}$$

realizado por las cargas que actuan en el a lo largo de los desplazamientos de los puntos de aplicación de dichas cargas. Esto se puede expresar como sigue

$$V = U - W \tag{4.2.9}$$

en donde V=Energía potencial

U=Energía de deformación o interna

W=Trabajo de las cargas aplicadas

Como ejemplo podemos considerar el caso simple de un resorte lineal mostrado en la Fig.4.2.4 .El desplazamiento D del extremo libre del resorte es ocasionado por la carga P aplicada en ese extremo en tonces la energía potencial se puede expresar como:

$$V = \int_0^D Kx\,dx - \int_0^D P\,dx \tag{4.2.10}$$

En esta expresión, la primera integral representa la energía de deformación y la segunda el trabajo realizado por la carga sobre el resorte de constante K. Al integrar se obtiene:

$$V = \frac{1}{2}(Kx^2)\Big|_0^D - Px\Big|_0^D = \frac{1}{2}KD^2 - PD \tag{4.2.11}$$

Es decir la expresión de la energía potencial es el valor de una integral y por lo tanto V es un funcional el cual puede ser minimizado, de acuerdo al principio de la energía potencial mínima. Entonces de la ecuación(4.2.4) se tiene que:

$$\delta V = (KD - P)\,\delta D \tag{4.2.12}$$

La cual es consistente con el principio de trabajo virtual y dado que δD es diferente de cero entonces

$$KD - P = 0 \tag{4.2.12a}$$

Es decir que el desplazamiento D que resulte en el equilibrio del sistema es tal que:

$$D_e = \frac{P}{K} \tag{4.2.12b}$$

Gráficamente la ecuación(4.2.11) se puede representar por medio de la suma de dos funciones tal como se muestra en la Fig(4.2.5) de tal forma para un potencial mínimo se tiene que el desplazamiento D es aquel que produce el equilibrio.

4.2.4. Sistemas con Varios Grados de Libertad

Por definición los grados de libertad son aquellas variables que definen completamente y en forma única el estado o configuración de un sistema dado, por ejemplo, el sistema de resorte lineal que se acaba de ver es un sistema con un solo grado de libertad ya que una sola cantidad define el estado del sistema, esa variable es el desplazamiento lineal del extremo del resorte. Si en ese extremo se anexa otro resorte, entonces existen dos grados de libertad y así sucesivamente. Sin embargo la naturaleza de los grados de libertad no es necesariamente la misma, ya que éstos se pueden referir a desplazamientos, rotaciones, temperaturas o también coeficientes de un polinomio que aproximan una función.

Si consideramos un sistema elástico con n grados de libertad el cual está sujeto a ciertas perturbaciones. Entonces la energía potencial total se puede expresar como un función de estos n grados de libertad o sea

$$\Pi_T = \Pi_T(D_1, D_2, D_3 \dots D_n) \tag{4.2.13}$$

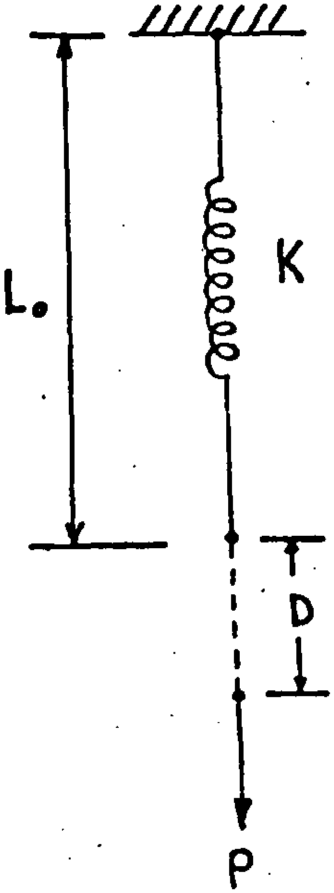


Fig 4·2·4
Sistema de resorte lineal con un extremo fijo y otro extremo libre y cargado (1 grado de libertad)

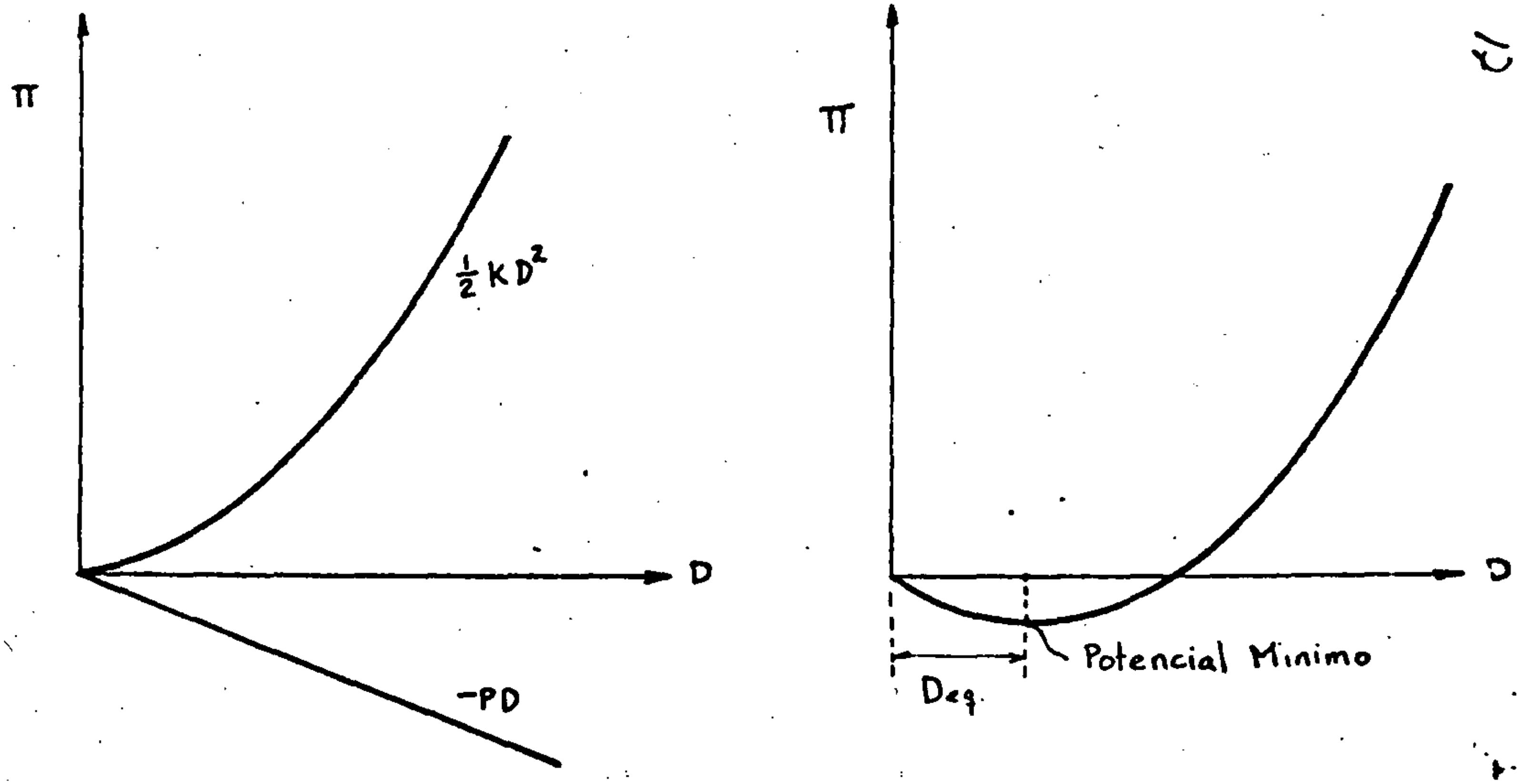


Fig. 4.2.5 Energía potencial como función del desplazamiento en el extremo libre de un resorte con constante k y carga P dadas

entonces la primera variación del potencial con respecto a los grados de libertad se expresa como

$$\delta\Pi_T = \frac{\partial \Pi_T}{\partial D_1}\delta D_1 + \frac{\partial \Pi_T}{\partial D_2}\delta D_1 + \frac{\partial \Pi_T}{\partial D_3}\delta D_3 \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial D_n}\delta D_n \qquad (4.2.14)$$

la cual debe cumplir con la condición de estacionaridad de la ecuación (4.2.4), es decir $\delta\pi=0$ y por lo tanto:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial D_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial D_2} = \dots\dots = \frac{\partial \Pi}{\partial D_n} = 0 \qquad (4.2.15)$$

De acuerdo con el principio de energía potencial mínima. la ecuación (4.2.15) define la configuración de equilibrio del sistema.

Un ejmplo de un sistema con dos grado de libertad es el que se muestra en la Fig. 4.2.6 el cual consta de dos resortes lineales empotrados, y una barra rígida ligada los dos resortes con una carga puntal como se muestra. La expresión para la energía, potencial se puede escribir ya integrada como:

$$V = \frac{1}{2} K_1 D^2 + \frac{1}{2} K_2 (D + \theta L)^2 - P(D + \theta a) \qquad (4.2.16)$$

Al substituir v por π en la ecuación (4.2.5) el resultado es:

$$\frac{\partial V}{\partial D} = K_1 D + K_2 D + K_2 \theta L - P = 0 \qquad (4.2.17)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = K_2 L D + K_2 L^2 \theta - a P = 0 \qquad (4.2.18)$$

que en forma matricial adquiere la siguiente fomra

$$\begin{bmatrix} (k_1+k_2) & k_2 L \\ k_2 L & k_2 L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D \\ \theta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P \\ aP \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (4.2.19)$$

que se puede reducir a la forma común de las ecuaciones de equilibrio

$$\left[K \right] \left\{ X \right\} = \left\{ F \right\} \qquad (4.2.20)$$

En la ecuación 4.2.19, (P) y (aP) son llamadas las fuerzas generalizadas correspondientes a las coordenadas generalizadas (D) y (θ).

De este ejemplo se puede concluir entonces que la matriz de rigidez $[k]$ es una matriz simétrica es decir $k_{ij}=k_{ji}$ y también que el producto de una fuerza generalizada por su correspondiente coordenada siempre tiene unidades de trabajo.

Si un tercer resorte es anexado al sistema digamos en el punto intermedio de la barra, el sistema se convierte en un sistema estaticamente indeterminado. Sin embargo las coordenadas D y 0 son aun suficientes para determinar la configuración del sistema y dos ecuaciones de equlibrio son generadas, es decir la indeterminación estática no afecta el procedimiento general basado en la minimización del potencial.

4.2.5 Formulación General Usando Campos de Desplazamiento

Antes de desarrollar una expresión general para la energía potencial de cuerpos elásticos es conveniente describir el concepto de campo de desplazamiento y aproximaciones.

En muchos sistemas mecánicos la configuración del mismo en un instante dado puede ser expresada en términos de los desplazamientos de ciertos puntos de referencia, los cuales represen-

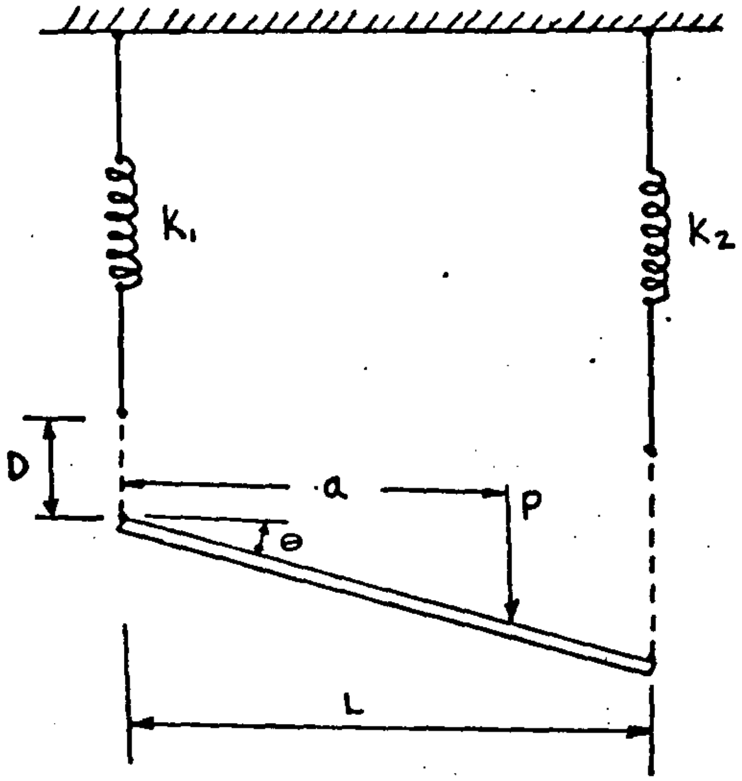


Fig 4.2.6 Sistema de dos resortes y una barra rigida con carga intermedia (dos grados de libertad)

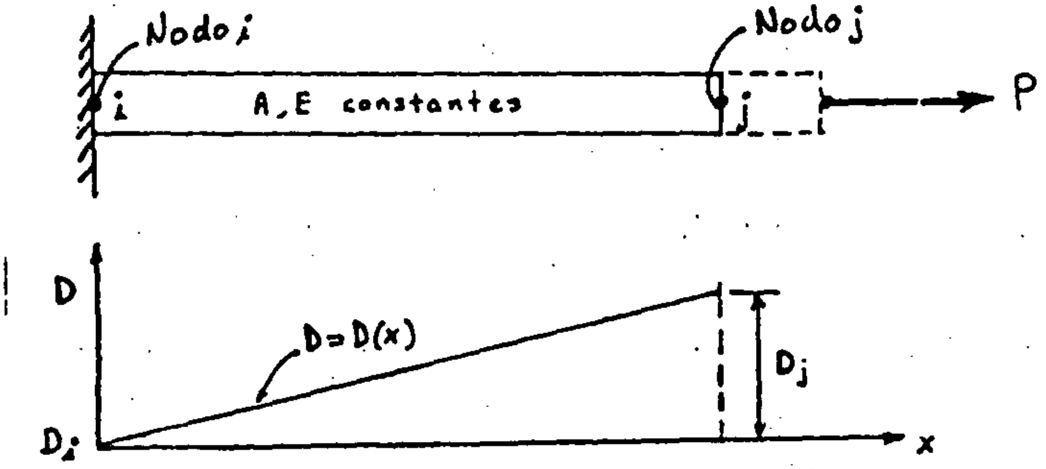


Fig. 4.2.7 Campo de desplazamientos en una barra de sección uniforme en terminos de los desplazamientos nodales.

tan un campo de desplazamientos con respecto a un marco de referencia. Por ejemplo el campo de desplazamiento de una barra elastica de sección uniforme con una carga axial Fig.4.2.7 se puede describir en términos de los desplazamientos en los extremos de la misma en una forma lineal. Es decir el desplazamiento en cualquier punto intermedio de una barra se puede expresar como una función del desplazamiento de los puntos extremos de la misma con una relación de la forma

$$D_x = D_i + \frac{x}{L}\left(D_j - D_i\right) \qquad (4.2.21)$$

Donde Dx es el desplazamienot de un punto en la coordenada x de la barra, L es la longitud original de la barra y D(i,j) es el desplazamiento del extremo (i,j) de la barra.

La ecuación (4.2.21) puede escribirse en forma matricial como sigue:

$$D_x = \left[\left(1-\frac{x}{L}\right) \quad \left(\frac{x}{L}\right)\right]\begin{Bmatrix} D_i \\ D_j \end{Bmatrix} \qquad (4.2.22)$$

Si consideramos que la barra representa un elemento con el nodo i en el extremo i y el nodo j en el extremo j y que f es el desplazamiento de un punto cualquiera del elemento entonces la ecuación (4.2.22) se puede expresar en forma matricial como sigue:

$$\{f\} = [N]\{d\} \qquad (4.2.23)$$

En el caso de un elemento en dos dimensiones como el mostrado en la Fig. 4.2.8 el vector {d} los desplazamientos en dos dimensiones de los nodos del elemento, entonces la ecuación (4.2.23) tendría la forma:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{4.2.24}$$

en donde:

$$N_1 = \frac{(b-x)(c-y)}{4bc} \quad , \quad N_2 = \frac{(b+x)(c+y)}{4bc}$$

$$N_2 = \frac{(b+x)(c-y)}{4bc} \quad , \quad N_4 = \frac{(b-x)(c+y)}{4bc} \tag{4.2.25}$$

$N_{1,2,3,4}$ son llamadas las funciones de"forma" o de interpolación. La descripción del campo de desplazamiento para otros elementos también es posible en base de los desplazamientos nodales, es decir que es posible conocer el desplazamiento obsoluto de cualquier punto en un elemento o estructura conociendo el vector de desplazamientos nodales. Por lo tanto la formulación general usando elementos finitos está orientada a obtener la solución de un sistema con un número finito de grados de libertad, en donde los grados de libertad son los desplazamientos independientes de cada nodo y donde dichos desplazamientos pueden ser de traslación o de rotación.

La aproximación a un campo de desplazamiento también se puede hacer en base a un polinomio cuyo grado de libertad sea el mismo que el correspondiente al elemento en cuestión, por ejmplo en el caso de la barra uniforme se puede utilizar un polinomio del tipo:

$$\{f\} = \{u\} = \{a_1 + a_2 x\} \tag{4.2.26}$$

o

$$\{f\} = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \tag{4.2.27}$$

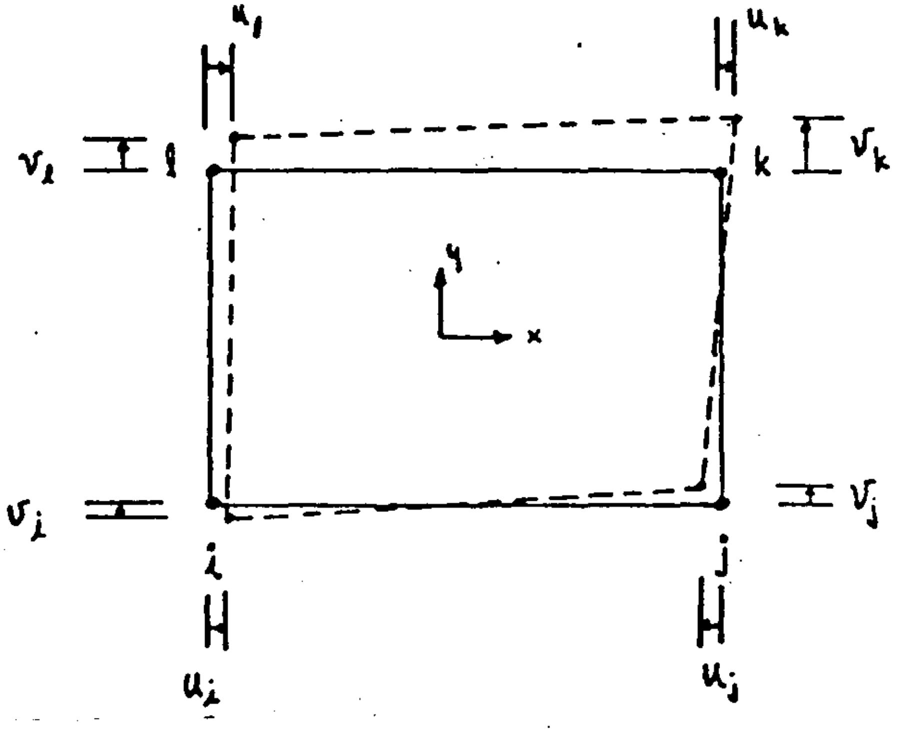


Fig. 4.2.8 Elemento cuadrilatero bidimensional, 2 grados de libertad por nodo, 4 nodos osea 8 g.d.l.

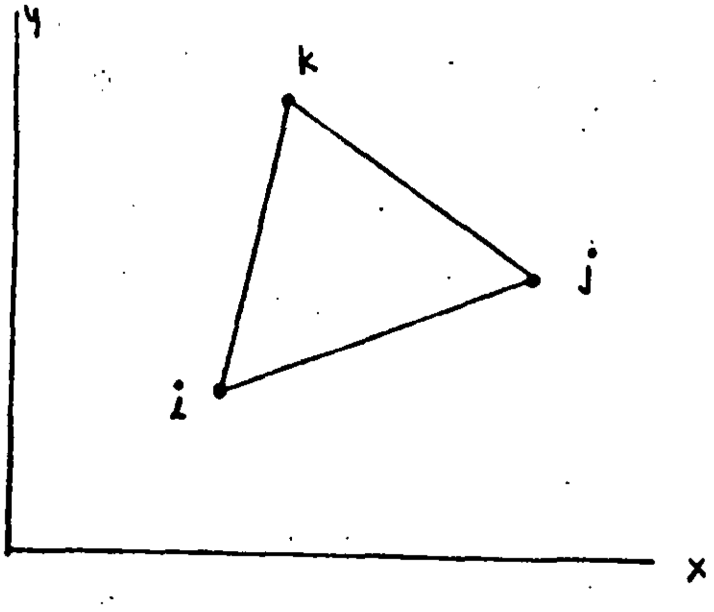


Fig 4.2.9 Elemento triangular plano, 2 grados de libertad por nodo 3 nodos 6 g.d.l

en donde a_1 y a_2 son los coeficientes del polinomio de grado 1, entonces hay dos coeficientes para un elemento que tiene dos grados de libertad.

Los desplazamientos nodales $\{d\}$se pueden expresar en función de estos coeficientes substituyendo las condiciones de frontera

$$u_{x=0} = u_i \qquad u_{x=L} = u_j \tag{4.2.28}$$

Entonces substituyendo en (4.2.26) resulta el siguiente sistema:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = [\Lambda]\{a\} \tag{4.2.29}$$

Despejando $\{a\}$ de (4.2.29) y substituyendo en (4.2.27) se tiene

$$\{f\} = [1 \quad x]\,[\Lambda]^{-1}\{d\} \tag{4.2.30}$$

Invirtiendo la matriz $[\Lambda]$ y desarrollando el producto en la ecuación 4.2.30 se obtiene la ecuación 4.2.22 o sea:

$$\{f\} = \left[\left(1-\frac{x}{L}\right) \quad \left(\frac{x}{L}\right)\right]\{d\} = [N]\{d\} \tag{4.2.31}$$

En el caso de un elemento plano triangular como el mostrado en la fig.4.2.9, la aproximación se puede hacer en base a las siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v &= a_4 + a_5 x + a_6 y \end{aligned} \tag{4.2.32}$$

Quen en forma matricial quedan expresados como

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \tag{4.2.33}$$

Tomando las condiciones de frontera se obtiene que para la dirección x

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \tag{4.2.34}$$

y para la dirección y

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \tag{4.2.35}$$

de donde

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [\Lambda]^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{4.2.36}$$

y

$$\begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = [\Lambda]^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{4.2.37}$$

Substituyendo (4.2.36) y (4.2.37) en la ecuación (4.2.33) se obtiene

$$u = [1 \ \ x \ \ y]\,[\Lambda]^{-1} \{u_1 \ u_2 \ u_3\}^T \tag{4.2.38}$$

$$v = [1 \ \ x \ \ y]\,[\Lambda]^{-1} \{v_1 \ v_2 \ v_3\}^T \tag{4.2.39}$$

y donde

$$[\Lambda]^{-1} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \tag{4.2.40}$$

Substituyendo (4.2.40) en (4.2.38) y(4.2.39) y reduciendo el sistema resultante es

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_{Triangulo} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (4.2.41)$$

en donde

$$N_1 = \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y\right] \quad (4.2.42)$$

$$N_2 = \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y\right] \quad (4.2.43)$$

$$N_3 = \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\right] \quad (4.2.44)$$

De la misma manera se puede aproximar el campo de desplazamiento para un elemento cuadrilatero plano de la Fig.4.2.8 usando polinomios del tipo:

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \quad (4.2.45)$$

$$v = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy \quad (4.2.46)$$

Los cuales conducen a un sistema equivalente al dado en las ecuaciónes(4.2.24) y (4.2.25).

4.2.6 Exprsión General de la Energía Potencial

Podemos considerar ahora el caso general de un cuerpo elástico en el espacio el cual está sujeto a cargas que producen un campo de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos tal que en un punto dado de dicho cuerpo y con respecto a un marco de referencia, los vectores de esfuerzos y de deformaciones son:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \; \sigma_y \; \sigma_z \; \tau_{xy} \; \tau_{yz} \; \tau_{zx}\}^T \quad (4.2.47)$$

Substituyendo las ecuaciones (4.2.23) y (4.2.54) en (4.2.53) la energía potencial puede expresarse como:

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\{d\}^T\left(\int_{Vol}[B]^T[E][B]\,dv\right)\{d\} + \{d\}^T\int_{Vol}[B]^T\{\sigma_0\}\,dv$$

$$-\{d\}^T\int_{Vol}[N]^T\{F\}\,dV - \{d\}^T\int_{Sup}[N]^T\{\Phi\}\,dS \qquad (4.2.56)$$

En esta ecuación el subíndice en πe indica que la energía potencial es de un elemento y por lo tanto el vector $\{d\}$ es el vector de desplazamientos nodales de un elemento solamente, y para una estructura compuesta de varios elementos se tiene que la energía potencial total se expresa como la sumatoria de las energías potenciales de cada uno de los elementos y la energía potencial total queda expresada como:

$$\Pi_T = \frac{1}{2}\{D\}^T\left(\sum_{1}^{m}\int_{Vol}[B]^T[E][B]\,dV\right)\{D\} + \{D\}^T\sum_{1}^{m}\left(\int_{Vol}[B]^T\{\sigma_0\}\,dV\right.$$

$$\left.-\int_{Vol}[N]^T\{F\}\,dV - \int_{Sup}[N]^T\{\Phi\}\,dS\right) - \{D\}^T\{P\} \qquad (4.2.57)$$

Una vez encontrada la expresión general de la energía potencial se procede a encontrar el valor extremo del funcional π_T substituyendo en la ecuación (4.2.4) lo cual resulta en el sistema de ecuaciones dado por la ecuación (4.2.7) o

$$\left\{\frac{\partial \Pi_T}{\partial D}\right\} = 0 \qquad (4.2.58)$$

Entonces al substituir π_P dada por la ecuación (4.2.57) en la ecuación (4.2.58) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de equilibrio.

$$\left(\sum_{1}^{m}\int_{Vol}[B]^T[E][B]\,dV\right)\{D\} = \sum_{1}^{m}\left(-\int_{Vol}[B]^T\{\sigma_0\}\,dV + \int_{Vol}[N]^T\{F\}\,dV + \int_{Sup}[N]^T\{\Phi\}\,ds\right) + \{P\} \qquad (4.2.59)$$

La ecuación (4.2.59) se puede abreviar en tal forma que la sumatoria de las integrales del lado izquierdo de la misma sea identificada como la "Matriz de Rigidez" y la sumatoria de integrales del lado derecho de la ecuación como vector de cargas generalizadas, entonces la ecuación (4.2.59) queda

$$[K]\{D\} = \{R\} \qquad (4.2.60)$$

<u>Ejemplo.</u> Podemos considerar un caso simple en forma general mediante el cual podremos establecer la siguiente secuencia de operaciones

$$\{f\} = \{u\} = [1 \quad x]\{a\} \qquad (4.2.61)$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = [\Lambda]\{a\} \qquad (4.2.62)$$

$$\{f\} = [1 \quad x][\Lambda]^{-1}\{d\} = \left[\left(1-\frac{x}{L}\right) \quad \left(\frac{x}{L}\right)\right]\{d\} = [N]\{d\} \qquad (4.2.63)$$

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} E \varepsilon_x^2 A\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L \varepsilon_x^T E\, \varepsilon_x A\,dx \qquad (4.2.64)$$

$$U = \frac{1}{2}\{d\}^T\int_0^L [B]^T E\,[B]\,A\,dx\,\{d\} \qquad (4.2.65)$$

$$k_e = \int_0^L [B]^T E [B]\, A\,dx = \int_0^L \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} E \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] A\,dx \qquad (4.2.66)$$

$$k_e = \frac{\Delta E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \equiv \text{ Matriz elemental de rigidez} \qquad (4.2.67)$$

4.2.8 El Método Rayleigh-Ritz

Podemos considerar un ejemplo unidimensional para describir el método Rayleigh-Rith como el mostrado en la Fig.4.2.10 en donde el área (S) y el módulo elástico (E) son constantes y la carga distribuida (q) son tales que

$$A = E = L = 1 \quad y \quad q = x \qquad (4.2.68)$$

Las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad @ \ x = 0 \\ u_{,x} &= 0 \quad @ \ x = L \end{aligned} \qquad (4.2.69)$$

La energía potencial se puede expresar como:

$$\Pi = \int_0^L \frac{AE}{2} u_{,x}^2 \, dx - \int_0^L u (q\, dx) \qquad (4.2.70)$$

Substituyendo los valores dados en(4.2.68) y asumiendo que los desplazamientos u son de la forma $u = a_1 x$ entonces

$$\Pi = \frac{1}{2} a_1^2 - \frac{a_1}{3} \qquad (4.2.71)$$

y

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 = a_1 - \frac{1}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3} \qquad (4.2.72)$$

Si se asume ahora que $u=a_1x+a_2x^2$, entonces la energía potencial queda como sigue:

$$\Pi = \int_0^1 \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 x)^2 dx - \int_0^1 (a_1 x + a_2 x^2)\, x\, dx \tag{4.2.73}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/3 \\ 1/4 \end{Bmatrix} \tag{4.2.74}$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7/12 \\ -1/4 \end{Bmatrix} \tag{4.2.75}$$

Sumarizando Resultados:

	$u(x=1/4)$	$u(x=1/2)$	$u(x=3/4)$	$u(x=1)$	$\sigma(x=0)$	$\sigma(x=1)$
1 Termino	.0833	.1667	.2500	.333	.333	.333
2 Terminos	.1302	.2292	.2969	.333	.5833	.0833
Exacto	.1224	.2292	.3047	.333	.5000	.0

Si asumimos un polinomio de 3er grado para u(tres términos) obtendríamos la solución exacta porque la solución exacta es cúbica de la forma $u=(3x-x^3)/6$ o sea que el método Rayleigh-Ritz basada en

$$u = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \tag{4.2.76}$$

daría como resultado

$$\begin{aligned} a_1 &= 1/2 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= -1/6 \end{aligned} \tag{4.2.77}$$

y donde que εx es escalar entonces;

$$\varepsilon_x^2 = \varepsilon_x^T \varepsilon_x = \{d\}^T [B]^T [B] \{d\} \tag{4.2.85}$$

Substituyendo la ecuación (4.2.85) en la expresión para la energía de un elemento se obtiene que

$$U_i = \int_0^l \frac{AE}{2} \varepsilon_x^2 \, dx = \frac{1}{2} \{d\}_i^T \int_0^l AE \begin{bmatrix} -1/l \\ 1/l \end{bmatrix} [-1/l \quad 1/l] \, ds \, \{d\} \tag{4.2.86}$$

lo cual se puede expresar en forma compacta como:

$$U_i = \frac{1}{2} \{d\}_i^T [K]_i \{d\}_i \tag{4.2.87}$$

en donde

$$[K]_i = \int_0^l AE \begin{bmatrix} -1/l \\ 1/l \end{bmatrix} [-1/l \quad 1/l] \, ds = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.2.88}$$

Por otra parte el trabajo realizado por la carga es

$$W = \int_0^l q \, u \, ds = \{d\}_i^T \int_0^L [N]^T q \, ds \tag{4.2.89}$$

y el potencial total de la estructura es

$$\Pi_T = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 \tag{4.2.90}$$

Suponiendo que para cada elemento las propiedades cumplen con las propiedades de las ecuaciones (4.2.68) y además

$$\begin{aligned} l &= 1/3 \\ q &= x \quad \text{para el elemento 1} \\ q &= \tfrac{1}{3} + s \quad \text{para el elemento 2} \\ q &= \tfrac{2}{3} + s \quad \text{para el elemento 3} \end{aligned} \tag{4.2.91}$$

Expandiendo los vectores al rango de la estructura se tiene que el vector global es

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \qquad (4.2.92)$$

Substituyendo las condiciones (4.2.91) en (4.2.90) y expandiendo al rango de la estructura, la energía potencial es:

$$\Pi_T = \frac{1}{2}\{D\}^T\left(\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}\right)\{D\}$$

$$-\{D\}^T\left(\frac{1}{54}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{54}\begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{54}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix}\right) \qquad (4.2.93)$$

Minimizando la energía potencial se obtiene que

$$\left\{\frac{\partial \Pi_T}{\partial D}\right\} = 0 \qquad (4.2.94)$$

la cual resulta en el siguiente sistema de ecuaciones de equilibrio

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/54 \\ 6/54 \\ 12/54 \\ 8/54 \end{Bmatrix} \qquad (4.2.95)$$

La Matriz cuadrada del lado izquierdo de esta ecuación es singular debido a que no se han impuesto las condiciones de frontera de la estructura, ésta condición es

$$u_1 = 0 \qquad (4.2.96)$$

Al imponer la condición (3.96) en la ecuación (4.2.95) se obtiene

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 6 \\ 12 \\ 8 \end{Bmatrix} \qquad (4.2.97)$$

de donde se obtiene que $u_2 = .1605$, $u_3 = .2840$ y $u_4 = .333$ los cuales son exactos sin embargo son aproximados en cualquier otro punto, por ejemplo en $x = L/2$ se tiene

$$u = [N]\{d\}_2 = \left[\frac{l - l/2}{l} \quad \frac{l/2}{l} \right] \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \qquad (4.2.98)$$

$$u = [\,1/2 \quad 1/2\,] \begin{Bmatrix} .1605 \\ .2840 \end{Bmatrix} = .222 \qquad (4.2.99)$$

El valor exacto de u en $x = L/2$ es de 0.2292. El esfuerzo en el elemento i es $\sigma_i = (E\,u_{,x})_i$ o también

$$\sigma_i = E\,[B] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} \qquad (4.2.100)$$

Substituyendo las condiciones (4.2.91) en (4.2.100) se obtienen los siguientes resultados:

$\sigma_1 = .4815$ exacto en $x = \frac{L}{6}$

$\sigma_2 = .3704$ exacto en $x = \frac{L}{2}$

$\sigma_3 = .1481$ exacto en $x = \frac{5L}{6}$

Es decir los esfuerzos no son continuos en el modelo y los desplazamientos son más exactos que los esfuerzos como se puede apreciar en la Fig. 4.2.12

De estos dos ejemplos se puede concluir que el método clásico de Rayleigh-Ritz (R-R) es aproximado pero más exacto si se utilizan más términos en el polinomio. En el caso de cargas destribuidas el método de R-R puede ser exacto si se usan suficientes términos en el polinomio y la inclusión de más términos no cambia la solución.

Por otra lado usando elementos finitos se llega a resultados exactos si las cargas se localizan en los nodos y es aproximado para el caso de cargas distribuidas pero puede ser bastante cercano al exacto si se usan más elementos.

El método clásico de R-R utiliza un polinomio que se aplica a todo el dominio de la estructura, mientras que el método del elemento finito utiliza un polinomio apra cada elemento.

4.2.10 Modelación de Sistemas con Elementos Finitos

Existe una variedad muy grande de sistemas mecánicos y estructurales los cuales requieren de una solución la cual no es siempre trivial ni simple de obtener, en tales casos es práctica común hacer una clasificación de efectos significantes y otros que por su naturaleza pueden considerarse insignificantes o ignorables, de tal manera que en general siempre se habla en términos de una solución aproximada a la solución real del sistema o de una solución exacta o aproximada de un modelo aproxi-

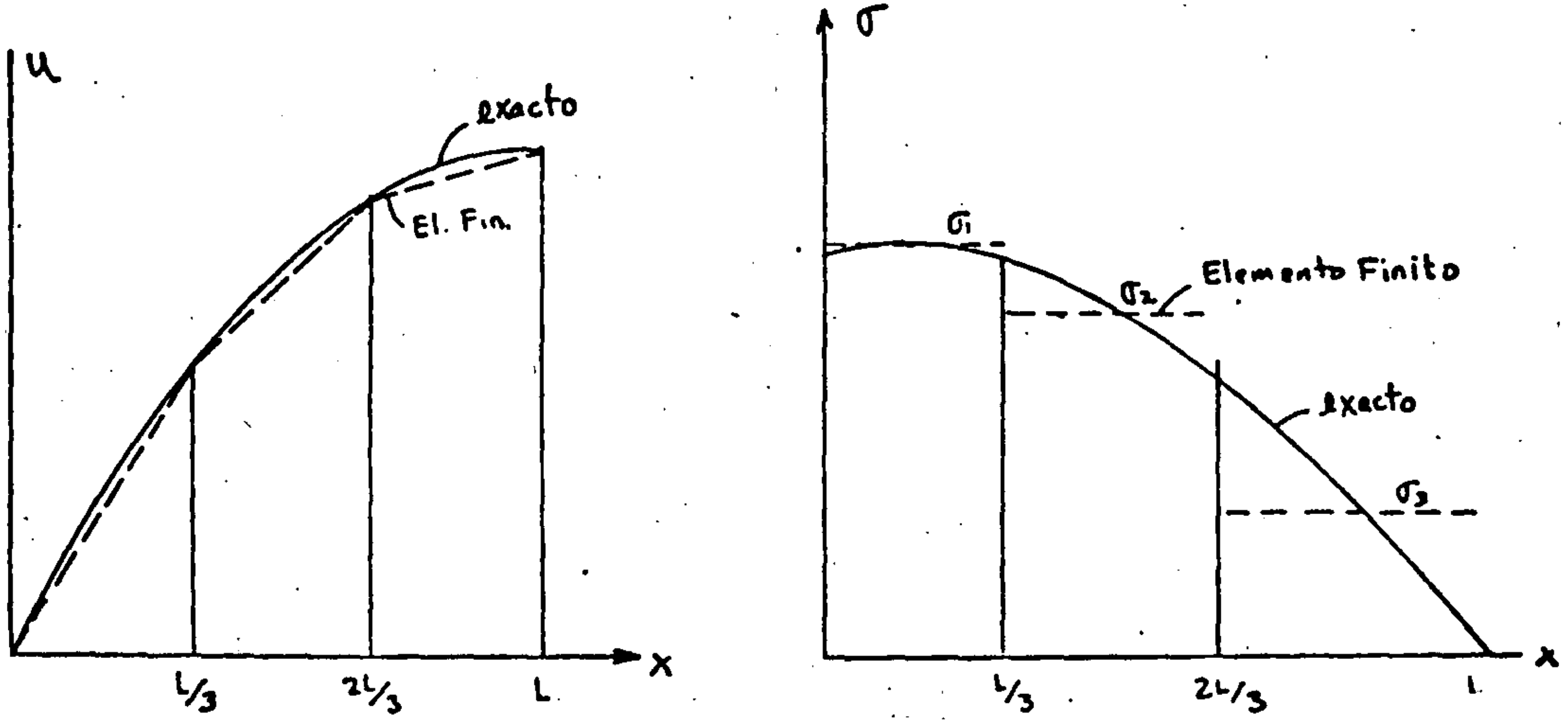


Fig 4.2.12 Comparación del metodo del elemento finito y la solución exacta para el problema de la barra con carga distribuide

mado al sistema real.

En la formulación analítica de un sistema, las suposiciones de que algunos efectos son ignorables tienen como objetivo simplificar los procedimientos de cálculo, sin embargo a través del desarrollo de técnicas digitales se han podido mejorar dichos procedimientos, aunque en general siempre es necesario hacer algunas suposiciones respecto a aquellos efectos que pueden ser ignorables o simplemente no dominantes.

La formulación con elementos finitos también requiere de suposiciones lógicas en base a la naturaleza del sistema en cuestión y para tal efecto se han desarrollado una variedad de elemntos cuyas propiedades son represntativas de algunos casos específicos de sistemas y así se tienen por ejemplo elementos planos para la simulación de problemas bidimensionales de esfuerzo plano o deformación plana, elementos viga en dos y tres dimensiones, elementos sólidos o de volumen, elementos cascaron y otros varios que tienen propósitos específicos.

En general, el análisis y modelación de un sistema es un proceso que se desarrolla en varias etapas que son:

1. Definición del sistema físico
2. Definición de condiciones de frontera
3. Definición de agentes de perturbación
4. Definición de variables de respuesta
5. Definición de efectos despreciables
6. Desarrollo del modelo analítico o modelo matemático
7. Aplicación sistemática de procedimientos de Cálculo
8. Interpretación de Resultados

Cabe mencionar que un entendimiento general del sistema en cuestión es siempre básico e importante pues la definición

4.3. Formulación de Residuos Pesados (Método de Galerkin)

Una formulación alternativa a la variacional es la denominada de residuos pesados. Esta formulación no requiere de un postulado variacional que aplique al sistema de interés y parte de una manipulación directa sobre la ecuación diferencial que gobierna la física del mismo.

Una formulación diferencial resulta en una ecuación del tipo

$$L(\varphi) = 0 \tag{4.3.1}$$

en donde L es un operador diferencial, con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ \varphi'(0) &= b \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Una función de campo que puede satisfacer las condiciones anteriores se puede definir como:

$$\{\varphi\}_a = [N]\{\varphi_i\} \tag{4.3.3}$$

en donde $[N]$ es una función de las coordenadas

$\{\varphi_i\}$ es el vector de valores nodales de

$\{\varphi\}_a$ es una función a "preuba"

entonces, si $\{\varphi\}_a$ es la verdadera función, al sustituirla en la ecuación (4.3.1) el resultado es:

$$L(\{\varphi\}_a) = 0 \tag{4.3.4}$$

la verdadera función pero es una buena aproximación de la misam, entonces al sustituir en 4.3.1. el resultado es:

$$L(\{\varphi\}_a) = R \approx 0 \tag{4.3.5}$$

en donde R es un residuo de error dado por a es solamente una buena aproximación de la verdadera función . Por lo tanto R se puede evaluar en puntos discretos (nodos) e igualar la suma a cero para minimizar el error, o sea

$$\int_V R \, dV = 0 \qquad (4.3.6)$$

Pero una mejor solución sería la de distribuir R sobre una región de acuerdo a alguna función de peso w de las coordenadas (nodales) antes de la integración, es decir

$$\int_V W R \, dV = 0 \qquad (4.3.7)$$

o sustituyendo la ecuación (4.3.3.) en (4.3.5) y esta en (4.3.7) se tiene:

$$\int_V W L([N]\{\varphi_i\}) \, dV = 0 \qquad (4.3.8)$$

La función de peso w puede ser de cualquier forma en general pero cuando se selecciona igual a las funciones de forma o de interpolación se tiene que w es igual a N y por lo tanto

$$\int_V [N] L([N]\{\varphi_i\}) \, dV = 0 \qquad (4.3.9)$$

La ecuación (4.3.9) es la formulación de "Galerkin" de elemento finito y si se aplica a cada elemento en la región, se obtienen n ecuaciones simultáneas para n parámetros nodales en .

La solución del sistema de ecuaciones que resulta se desarrolla de igual manera que para otros casos, aunque una desvetaja es que la ecuación (4.3.9) contiene derivadas de orden más alto que las de formulación variacional.

La primera integral nos da la matriz elemental de coeficientes $[k^{(e)}]$ en la ecuación

$$[K^{(e)}]\{Y\} = \{f^{(e)}\} \tag{4.3.26}$$

A través de la suma sobre todos los elementos, la segunda integral produce el vector $\{F\}$.

El primer término de la ecuación (4.3.25) contribuye al vector $\{F\}$ si dy/dx se define en cualquier extremo del elemento, si no se desprecia.

Las integrales de la ecuación (4.3.25) se evaluan como sigue:

$$\frac{d}{dx}[N]^T = \frac{d}{dx}\begin{Bmatrix} (1-\frac{x}{\ell}) \\ \frac{x}{\ell} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\ell}\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{4.3.27}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[N]\{Y\} = \frac{1}{\ell}[-1 \quad 1]\begin{Bmatrix} y_i \\ y_i \end{Bmatrix} \tag{4.3.28}$$

Entonces:

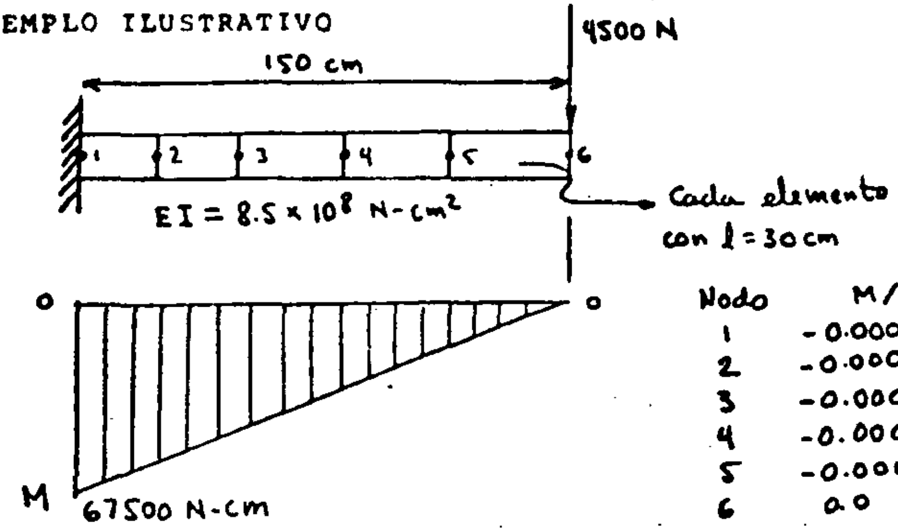
$$\int_0^\ell \frac{d}{dx}[N]^T \frac{dy}{dx}\,dx = \int_0^\ell \frac{1}{\ell^2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}[-1 \quad 1]\begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \end{Bmatrix} dx = \frac{1}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \end{Bmatrix} \tag{4.3.29}$$

y para la segunda integral:

$$\int_0^\ell [N]^T \frac{M}{EI}\,dx = \int_0^\ell [N]^T[N]\begin{Bmatrix} M_i/EI \\ M_j/EI \end{Bmatrix} dx = \tag{4.3.30}$$

$$\frac{\ell}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} M_i/EI \\ M_i/EI \end{Bmatrix}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO



Nodo	M/EI
1	-0.000794
2	-0.000635
3	-0.000476
4	-0.000318
5	-0.000159
6	0.0

Las ecuaciones para el primer elemento son:

$$-\frac{1}{30}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_i\\y_j\end{Bmatrix}-\frac{30}{6}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}M_i/EI\\M_j/EI\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}1-\frac{x}{L}\\\frac{x}{L}\end{Bmatrix}\frac{dy}{dx}\Bigg|_{x=0}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \qquad (4.3.31)$$

$\therefore \frac{dy}{dx}=0\Big|_{x=0}$, el último término desaparece. Entonces, una vez ensamblado el sistema queda:

$$\begin{bmatrix}1&-1&&&&\\-1&2&-1&&0&\\&-1&2&-1&&\\&&-1&2&-1&\\&0&&-1&2&-1\\&&&&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\\y_6\end{bmatrix}+150\begin{bmatrix}2&1&&&&\\1&4&1&&0&\\&1&4&1&&\\&&1&4&1&\\&0&&1&4&1\\&&&&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.000794\\-0.000655\\-0.000476\\-0.000318\\-0.000159\\-0.0\end{bmatrix}=\{0\} \qquad (4.3.32)$$

que se puede reducir a:

$$\begin{bmatrix}1&-1&&&&\\-1&2&-1&&&\\&-1&2&-1&&\\&&-1&2&-1&\\&&&-1&2&-1\\&&&&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\\y_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}.333\\.571\\.428\\.286\\.143\\.023\end{bmatrix} \quad \therefore y_1=0 \qquad (4.3.33)$$

Resultados

Nodo	E.F.	Teoría
1	0	0
2	-.3334	-.3335
3	-1.2385	-1.2388
4	-1.5719	-2.5729
5	-4.1929	-4.1929
6	-5.9559	-5.9559

Conclusión: Sin comentarios.

Ecuación de campo en dos dimensiones:

$$L(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + Q = 0 \qquad (4.3.34)$$

Aplicable a problemas de:

- -Torsión
- -Transmisión de Calor
- -Mecánica de Fluidos

La integral de Galerkin para el caso de la ecuación (4.3.34) es:

$$\int_V [N]^T \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + Q \right) dV = 0 \qquad (4.3.35)$$

5. BIBLIOTECA DE ELEMENTOS Y APLICACIONES

5.1 Desarrollo de Matrices Elementales

Cada elemento está asociado a un número determinado de nodos y estos a su vez a un número especifico de grados de libertad (g d l). En general, dependiendo de la variable de campo (desplazamiento, temperatura, etc) se puede definir el tipo de grados de libertad que se requieren para la representación física del comportamiento del sistema; por ejemplo, si se trata del desplazamiento de una partícula en una linea, se tiene entonces un (gdl), si se trata de desplazamientos en un plano de la misma entonces se tienen dos (g d l) y se tienen tres (g d l) para el caso de desplazamientos en el espacio.

Los elementos comunmente usados en la práctica de elementos finitos pueden clasificarse de varias formas y en varias categorías, algunas de estas pueden ser las que se indican en la tabla 5.1.1. Algunas de las características indicadas en esta tabla pueden ser fisicamente interpretadas, por ejemplo el número de nodos necesarios para describir la topología del elemento, forma relativa (rectangular, trapezoidal etc), pero otras no son tan obvias como por ejemplo el orden de la integración explicita, el tipo de las fun-

Característica Categórica	Tipos de Elementos	Ejemplos
Espacial Geometrica	Lineales (unidimensionales)	barra, viga
	Planos (bidimensionales) < Triangulares cuadriláteros	esfuerzo plano, deformación plana, axisimetricos
	Espaciales (Tridimensionales)	solidos, placas gruesas
Forma Relativa	Naturales (regulares)	Triangulares, rectangulares
	Isoparametricas (irregulares) 1, 2 y 3 puntos de integración	de geometría irregular
Orden de los polinómios de interpolación	Lineales (nodos esquinales)	lados rectos
	Cuadraticos (nodos esq. y 1 intermedio)	lados parabolicos
	Cubicos (nodos esq. y 2 intermedios)	lados cubicos
Tipo de grados de libertad	Traslacionales	barra, planos, solidos
	Rotacionales	vigas, cascarones, placas.

TABLA 5·1·1 Algunas clasificaciones de Elementos Finitos ciones de interpolación de la variable de campo etc. En un programa general de elementos finitos, cada elemento está debidamente formulado a través de ciertas ecuaciones que toman en cuenta las siguientes caracteristicas:

- Número de nodos
- Numero de grados de libertad por nodo
- coordenadas nodales
- conectividad del elemento
- Numero de puntos de integración (isoparamétricas)
- propiedades del material

y para cada elemento en un sistema, se formulan las matrices elementales que caracterizan sus propiedades y que se ensamblan en matrices globales que caracterizan la estructura total del sistema. Por ejemplo la estructura mostrada en la figura 5.1.1 tiene 8 elementos cuyos nodos tienen un solo grado de libertad (temperatura por ejemplo). El resoltado de ensamblar las matrices elementales en la matriz global es una matriz cuyos terminos diferentes de cero se indican con una "x" como se muestra en las siguientes ecuaciones Indicadas.

Sea $[K_i]$ la matriz del elemento i cuyo orden $\underline{n}$ es igual al numero de nodos (dado que cada nodo tiene un solo gdl) entonces se obtienen las siguientes matrices elementales

$$[K_1]_{3\times3},\ [K_2]_{4\times4},\ [K_3]_{3\times3},\ [K_4]_{4\times4},\ [K_5]_{3\times3}$$

$$[K_6]_{2\times2},\ [K_7]_{2\times2},\ [K_8]_{2\times2} \qquad (5\cdot1\cdot1)$$

El vector global de grados de libertad se ordena de acuerdo al esquema de numeración nodal tal que

$$\{D\}^T = \{d_1, d_2 \ldots\ldots d_4\} \qquad (5\cdot1\cdot2)$$

y los vectores elementales se ordenan de acuerdo a los nodos que definen el elemento, entonces se tienen los siguientes vectores elementales:

$$\{D_1\}^T = \{d_1\ d_4\ d_5\}$$

$$\{D_2\}^T = \{d_1\ d_2\ d_5\ d_6\}$$

$$\{D_3\}^T = \{d_4\ d_5\ d_8\}$$

$$\{D_4\}^T = \{d_5\ d_6\ d_8\ d_9\} \qquad (5\cdot1\cdot3)$$

$$\{D_5\}^T = \{d_2\ d_3\ d_6\}$$

$$\{D_6\}^T = \{d_3\ d_7\}$$

$$\{D_7\}^T = \{d_6\ d_7\}$$

$$\{D_8\}^T = \{d_7\ d_9\}$$

Al expander las matrices (5.1.1) al tamaño de la matriz global se pueden sumar término a termino y el resultado será una matriz [K] cuyos términos diferentes de cero se indican en la siguiente ecuación:

$$[K] = \begin{array}{c|ccccccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & X & X & O & X & X & X & O & O & O \\ 2 & X & X & X & O & X & X & O & O & O \\ 3 & O & X & X & O & O & X & X & O & O \\ 4 & X & O & O & X & X & O & O & X & O \\ 5 & X & X & O & X & X & X & O & X & X \\ 6 & X & X & X & O & X & X & X & X & X \\ 7 & O & O & X & O & O & X & X & O & X \\ 8 & O & O & O & X & X & X & O & X & X \\ 9 & O & O & O & O & X & X & X & X & X \end{array} \qquad (5{\cdot}1{\cdot}4)$$

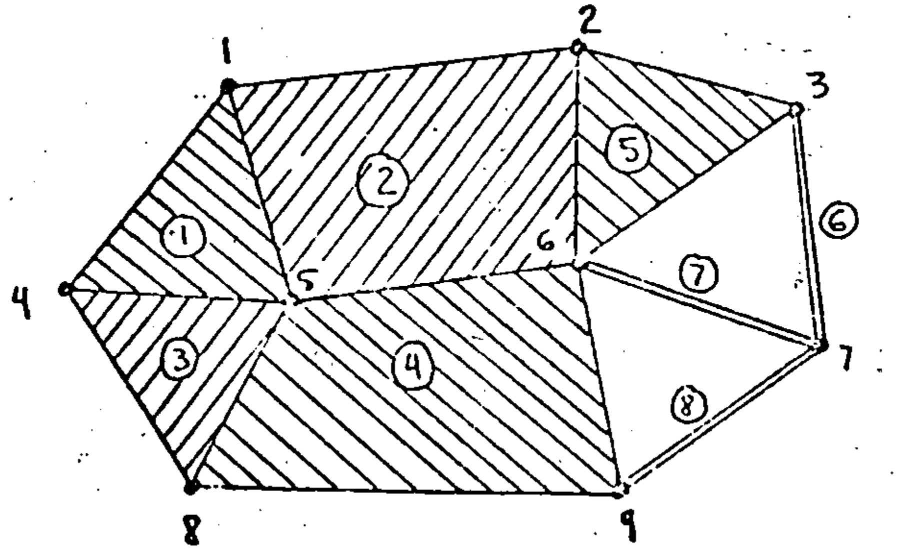
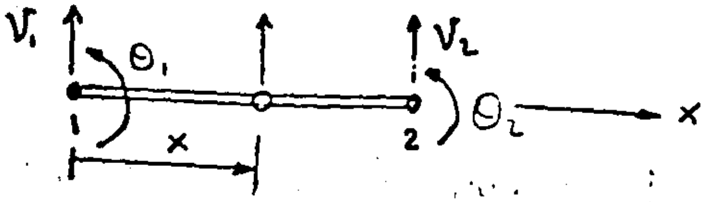


Figura 5·1·1 sistema con 5 elementos planos (tres triangulares y dos cuadriláteros) y tres elementos barra, con un grado de libertad por nodo

Caso 2 Elemento Viga



Un desplazamiento cortante v en cualquier punto del elemento localizado en una coordenada x del mismo se puede aproximar mediante:

$$v_x = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad (5 \cdot 1 \cdot 17)$$

Segun la teoría de vigas, el desplazamiento angular θ de un punto en la viga es igual a la derivada del desplazamiento cortante con respecto a la coordenada longitudinal, entonces:

$$\theta_x = \frac{dv_x}{dx} = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad (5 \cdot 1 \cdot 18)$$

$$\theta_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad (5 \cdot 1 \cdot 19)$$

tomando las condiciones de frontera para el elemento se tiene que:

$$\begin{aligned} v_x &= v_1 \quad @ \ x = 0 \\ v_x &= v_2 \quad @ \ x = L \\ \theta_x &= \theta_1 \quad @ \ x = 0 \\ \theta &= \theta \quad @ \ x = L \end{aligned} \qquad (5 \cdot 1 \cdot 20)$$

entonces

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = [\Lambda]\{a\} \qquad (5.1.21)$$

esta ecuación tiene la forma dela ecuación (5.1.7), de (5.1.17) y (5.1.18) se tiene lo siguiente

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.22)$$

entonces despejando el vector $\{a\}$ de (5.1.21) y sustituyendolo en la última ecuación se obtiene

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} [\Lambda]^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.23)$$

en donde el producto de las matrices en (5.1.23) se define como:

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} [\Lambda]^{-1} \qquad (5.1.23)$$

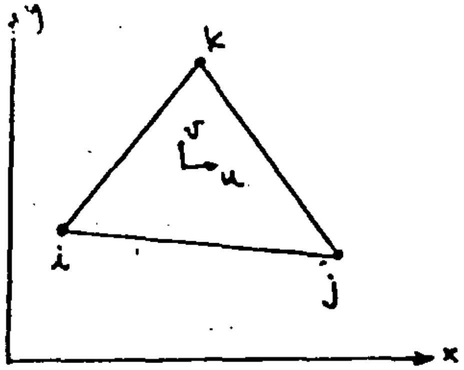
tomando de la ecuación (5.1.23) la derivada con respecto a x se obtiene la matriz [B]

$$[B] = \frac{d}{dx}[N] \qquad (5.1.24)$$

sustituyendo la matriz [B] en la ecuación (5.1.5) con la matriz $[E]=[EI]=EI$, el resultado es el siguiente despues de desarollar la integración:

$$[k_e] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \qquad (5.1.25)$$

Caso 3 Elemento Triangular Plano



$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y$$
$$v = a_4 + a_5 x + a_6 y \qquad (5.1.26)$$

expresando la aproximación de campo (5.1.26) en forma matricial se tiene:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.27)$$

Tomando las condiciones de frontera para $i=1$, $j=2$ y $k=3$ se tiene que:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \; ; \; \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.28)$$

despejando los vectores $\{a_1\ a_2\ a_3\}^T$ y $\{a_4\ a_5\ a_6\}^T$ se tiene

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = [\Lambda]^{-1}\{u\} \qquad (5.1.29)$$

y

$$\begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [\Lambda]^{-1}\{v\} \qquad (5.1.30)$$

sustituyendo estas expresiones en la ecuación (5.1.27) debidamente ordenadas se obtiene

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.31)$$

en donde:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_2-y_3)x + (x_3-x_2)y\right] \\ N_2 &= \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_3-y_1)x + (x_1-x_3)y\right] \\ N_3 &= \frac{1}{2A}\left[\frac{2A}{3} + (y_1-y_2)x + (x_2-x_1)y\right] \end{aligned} \qquad (5.1.32)$$

La matriz [B] se obtiene tomando las parciales de [N] es decir

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \qquad (5.1.33)$$

Para obtener la matriz de rigidez del elemento, solamente es necesario sustituir la expresión de [B] dela ecuación (5.1.33) en la ecuación (5.1.5), pero la matriz de propiedades de material depende del caso que se trate, en el caso de esfuerzo plano se tiene:

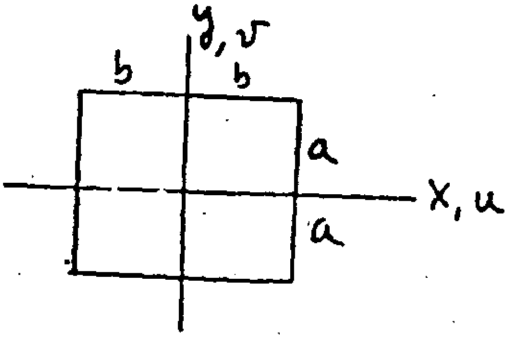
$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \qquad (5.1.34)$$

en el caso de deformación plana se tiene:

$$[E] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \qquad (5.1.35)$$

La matriz final se puede obtener de las ecuaciones (5.1.5), (5.1.33) y segun sea el caso de ecuaciones (5.1.34) y/o (5.1.35)

Caso 4 Elemento cuadrilátero plano



$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy$$
$$v = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy \qquad (5.1.36)$$

las ecuaciones (5.1.36) representan la aproximación de desplazamiento a traves de un polinomio. Desarrollando los mismos pasos que en el caso anterior se obtienen las siguientes matrices:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \qquad (5.1.37)$$

en donde

$$N_1 = \frac{(b-x)(a-y)}{4ba}$$

$$N_2 = \frac{(b+x)(a-y)}{4 \cdot ba}$$

$$N_3 = \frac{(b+x)(a+y)}{4ba} \qquad (5.1.38)$$

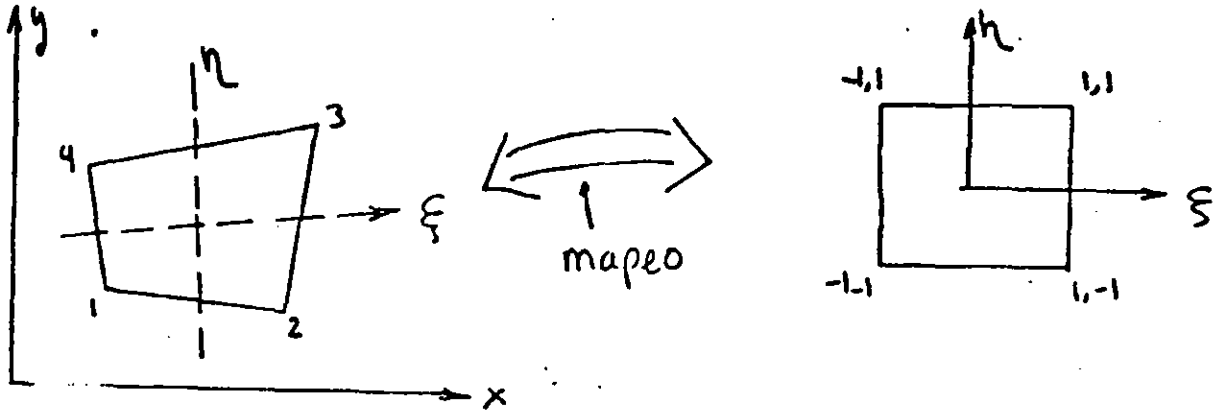
$$N_4 = \frac{(b-x)(a+y)}{4ba}$$

La matriz [B] se obtiene mediante:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \qquad (5.1.39)$$

la matriz elemental de rigidez se obtiene sustituyendo la matriz [B] dela ecuación (5.1.39) en la ecuación (5.1.5) y donde la matriz [E] tiene la misma forma que para el caso del elemento triangular.

caso 5 Elemento rectangular isoparamétrico



Para este caso, podemos considerar la función de mapeo

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.40)$$

en donde

$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}$$

$$N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}$$

$$N_3 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \qquad (5.1.41)$$

$$N_4 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$$

Este "mapeo" relaciona un punto de coordenadas (x,y) en el elemento irregular con un punto de coordenadas (ξ,η) del elemento regular. El polinomio correspondiente es:

$$x = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta$$

$$y = a_5 + a_6\xi + a_7\eta + a_8\xi\eta \qquad (5.1.42)$$

las condiciones de frontera nodales son:

$$y = y_1 \quad , \quad x = x_1 \quad @ \quad \xi = \eta = -1$$
$$y = y_2 \quad , \quad x = x_2 \quad @ \quad \xi = 1 , \eta = -1$$
$$y = y_3 \quad , \quad x = x_3 \quad @ \quad \xi = \eta = 1 \qquad (5\cdot1\cdot43)$$
$$y = y_4 \quad , \quad x = x_4 \quad @ \quad \xi = -1 , \eta = 1$$

El campo de desplazamientos queda:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N]\{d\} \qquad (5\cdot1\cdot44)$$

y las funciones de interpolación son tales que:

$$x = \sum_{1}^{4} N_i x_i \qquad y = \sum_{1}^{4} N_i y_i \qquad (5\cdot1\cdot45)$$

y por lo tanto los desplazamientos son:

$$u = \sum_{1}^{4} N_i u_i \qquad v_i = \sum_{1}^{4} N_i v_i \qquad (5\cdot1\cdot46)$$

Usando la regla de la cadena para la derivación en dos sistemas de coordenadas se tiene que:

$$\begin{Bmatrix} (\ )_{,\xi} \\ (\ )_{,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\ )_{,x} \\ (\ )_{,y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} (\ )_{,x} \\ (\ )_{,y} \end{Bmatrix} \qquad (5\cdot1\cdot47)$$

entonces para este caso se tiene que el jacobiano queda

$$[J] = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \qquad (5\cdot1\cdot48)$$

defininimos $[J^{*}]=[J]^{1}$ entonces usando la ecuación (5.1.47)

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^{*} & J_{12}^{*} & 0 & 0 \\ J_{21}^{*} & J_{22}^{*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{11}^{*} & J_{12}^{*} \\ 0 & 0 & J_{21}^{*} & J_{22}^{*} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} \qquad (5.1.49)$$

de la definición de deformaciones en el plano se tiene que

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} \qquad (5.1.50)$$

de las expresiones (5.1.45) y (5.1.46)

$$\begin{Bmatrix} u_{\xi} \\ u_{\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} = \left[\underbrace{\begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 \\ N_{i,\eta} & 0 \\ C & N_{i,\xi} \\ 0 & N_{i,\eta} \end{bmatrix}}_{i=1} \underbrace{\begin{bmatrix} \; \\ \; \\ \; \\ \; \end{bmatrix}}_{i=2} \underbrace{\begin{bmatrix} \; \\ \; \\ \; \\ \; \end{bmatrix}}_{i=3} \underbrace{\begin{bmatrix} \; \\ \; \\ \; \\ \; \end{bmatrix}}_{i=4} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_4 \end{Bmatrix} \qquad (5.1.51)$$

combinando las ultimas tres ecuaciones y de la ecuación

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \qquad (5.1.52)$$

se obtiene que

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{11}^{+} & J_{12}^{+} & 0 & 0 \\ J_{21}^{+} & J_{22}^{+} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{11}^{+} & J_{12}^{+} \\ 0 & 0 & J_{21}^{+} & J_{22}^{+} \end{bmatrix} \left[\underbrace{\begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 \\ N_{i,\eta} & 0 \\ 0 & N_{i,\xi} \\ 0 & N_{i,\eta} \end{bmatrix}}_{i=1} \underbrace{\begin{bmatrix} \; \\ \; \\ \; \\ \; \end{bmatrix}}_{i=2} \underbrace{\begin{bmatrix} \; \\ \; \\ \; \\ \; \end{bmatrix}}_{i=3} \underbrace{\begin{bmatrix} \; \\ \; \\ \; \\ \; \end{bmatrix}}_{i=4} \right] \qquad (5.1.52)$$

El siguiente paso es integrar el producto $[B]^T[E][B]$ en donde $[E]$ tiene la misma forma que en casos anteriores al integrar se tiene que.

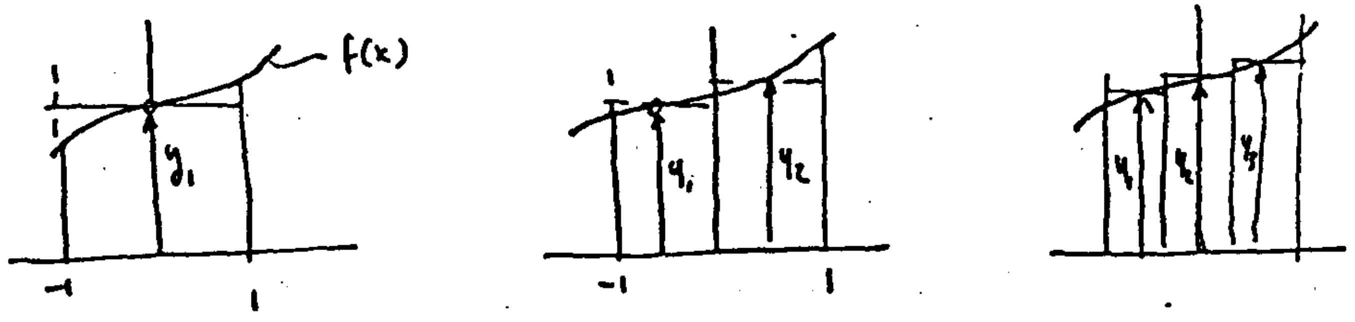
$$I = \int_x \int_y (\quad)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (\quad)\, \det[J]\, d\xi\, d\eta \qquad (5.1.53)$$

pero debido a la complejidad del integrando se requiere de una aaproximación mediante una integración numérica la cual se describe brevemente a continuación

sea la integral

$$I = \int_{-1}^{1} y\, dx \qquad (5.1\ 54)$$

se puede aproximar deacuerdo a las siguientes aproximaciones



$I = 2y_1$ (a)

$I = W_1 y_1 + W_2 y_2$ (b)

$I = W_1 y_1 + W_2 y_2 + W_3 y_3$ (c)

Entonces la integral se puede expresar como

$$I = \int_{-1}^{1} y\, dx \approx \sum_i W_i\, y_i \qquad (5.1.54)$$

La integral de la ecuación (5.1.53) se puedo aproximar mediante:

$$I = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \approx \int_{-1}^{+1} \left[\sum_i W_i\, f(\xi_i,\eta) \right] d\eta \qquad (5.1.55)$$

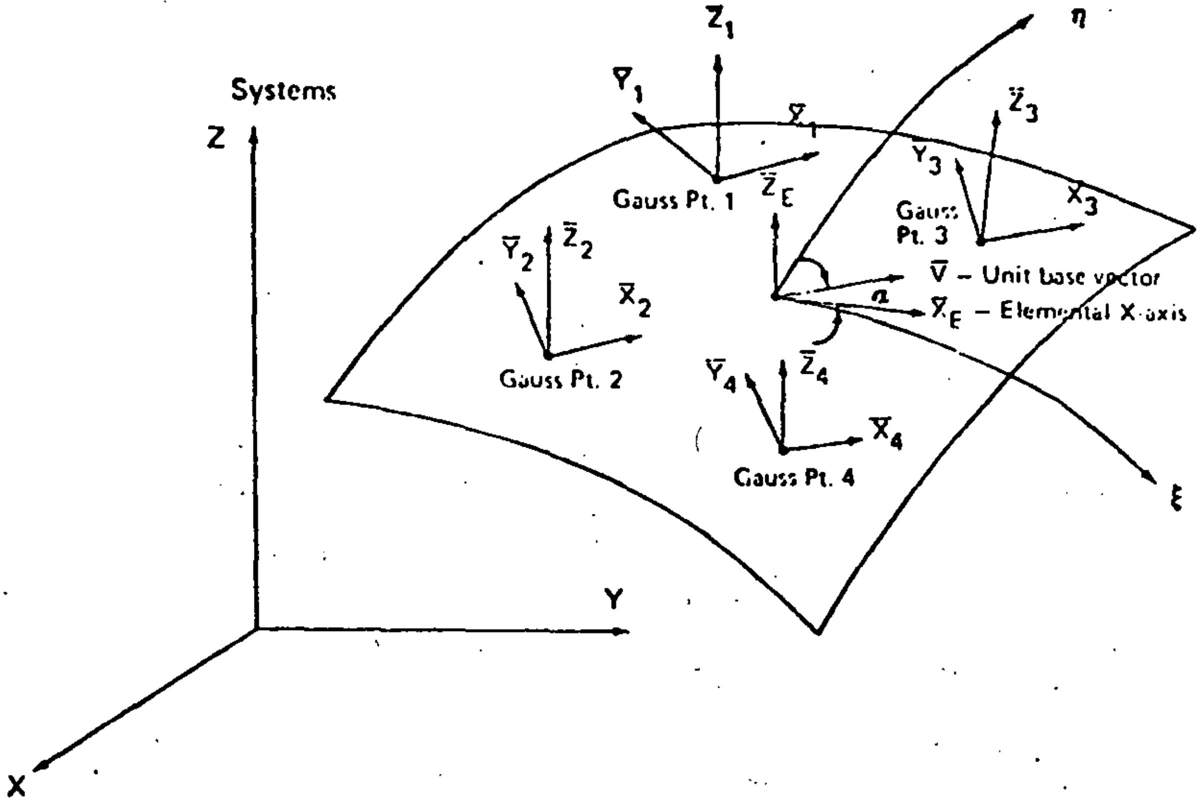
y finalmente

$$\therefore I = \sum_i W_i \left[\sum_j W_j\, f(\xi_i,\eta_j) \right] = \sum_i \sum_j W_i W_j\, f(\xi_i,\eta_j) \quad (5.1.56)$$

la localización de los puntos i, j de integración y sus pesos asociados se dan a través de la cuadratura de Gauss dada en la siguiente tabla para 1, 2 y 3 puntos.

Nº de Puntos	Localización	Peso asociado
1	$x = 0.0$	2
2	$x_1, x_2 = \pm 0.57735$	1
3	$x_1, x_3 = \pm 0.77459$ $x_2 = 0.0$	5/9 8/9

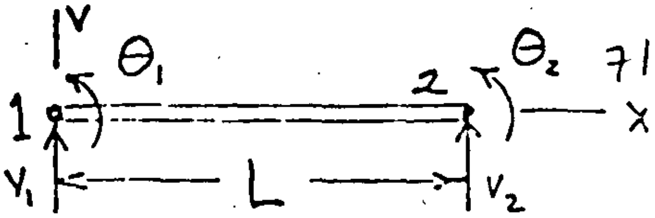
Tabla 5.1.3 Cuadratura de Gauss para integración con 1, 2 y 3 puntos.



1. $\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i$ = unit vectors defining directions of local coordinate axes at Gauss point (i).
2. $\bar{X}_E$ = elemental X-axis tangent to middle surface at $\xi = \eta = \zeta = 0.0$ and parallel to local ξ direction.
3. $\bar{V}$ = unit base vector defined by rotation angle α with respect to vector $\bar{X}_E$.
4. $\bar{Z}_i$ is normal to middle surface at Gauss point (i)
5. $\bar{Y}_i = \bar{V} \times \bar{Z}_i$
6. $\bar{X}_i = \bar{Y}_i \times \bar{Z}_i$

Figure III.5.3
Definition of Elemental Gauss Point Coordinate Axes for Shell Elements

Elemento Viga



$$v = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad , \quad \text{donde}$$

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \qquad N_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

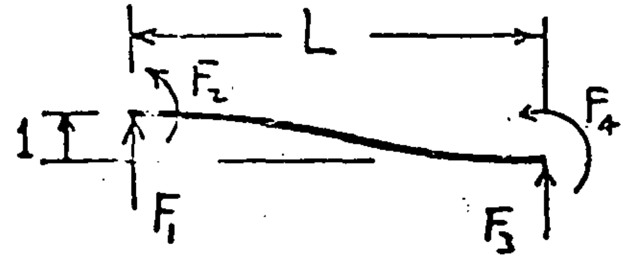
$$N_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \qquad N_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

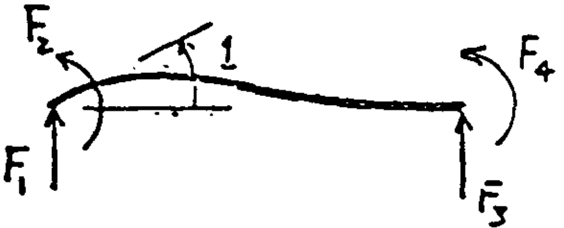
$$v_{,xx} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad , \quad \text{donde}$$

$$B_1 = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \qquad B_2 = -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}$$

$$B_3 = \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \qquad B_4 = -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}$$

$$[k] = \int_0^L [B]^T EI [B] \, dx = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$





$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12EI/L^3 \\ 6EI/L^2 \\ -12EI/L^3 \\ 6EI/L^2 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6EI/L^2 \\ 4EI/L \\ -6EI/L^2 \\ 2EI/L \end{Bmatrix}$$

Matriz de Rigidez de un elemento cuadrilatero

Ref. Fig. 8

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N]$$

$$\underset{3\times 8}{[B]} = \frac{1}{4bc}\begin{bmatrix} -(c-y) & 0 & (c-y) & 0 & -\;-\;-\;- \\ 0 & -(b-x) & 0 & -(b+x) & -\;—\;- \\ -(b-x) & -(c-y) & -(b+x) & (c-y) & -\;—\;- \end{bmatrix}$$

$$\underset{8\times 8}{[k]} = \int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b} \underset{8\times 3}{[B]^T}\,\underset{3\times 3}{[E]}\,\underset{3\times 8}{[B]}\; t\; dx\, dy \qquad (a)$$

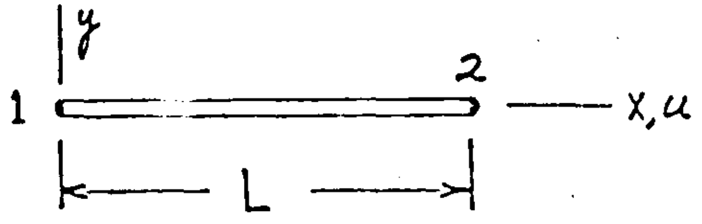
En donde:

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

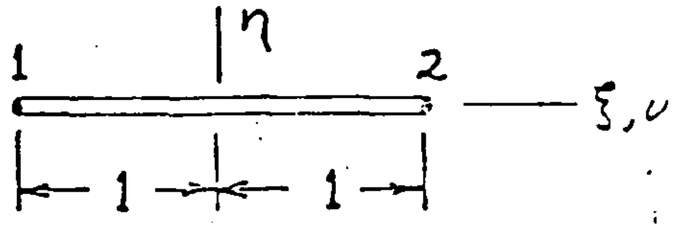
5.2 FAMILIAS DE ELEMENTOS

ELEMENTOS ISOPARAMETRICOS

Barra en coordenadas rectangulares



Barra en coordenadas Isoparam.



Relaciones: $x = \frac{L}{2}(1+\xi)$ $\quad dx = \frac{L}{2}d\xi = J\,d\xi$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L}$$

$$u = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_x = u_{,x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$= [B] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$[k] = \int_0^L AE\,[B]^T[B]\,dx$$

$$[k] = AE \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} L$$

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_x = u_{,\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ u \end{Bmatrix}$$

$$= [B] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$[k] = \int_{-1}^{1} AE\,[B]^T[B]\,J\,d\xi$$

$$[k] = AE \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \frac{L}{2}\,2$$

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos continuar con este ejemplo un paso mas, este es aumentar un nodo en la barra a la mitad del segmento, entonces:

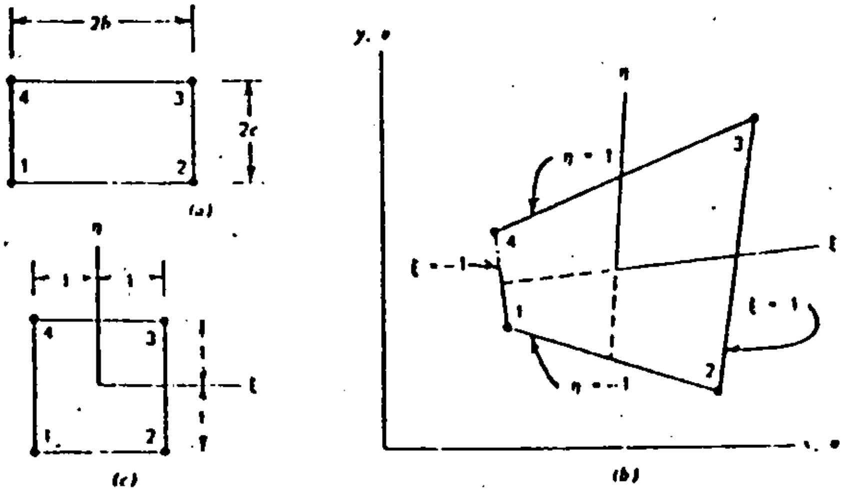
$$u = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{3x}{L} + 1 \ , \ \frac{2x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \ , \ -\frac{4x^2}{L^2} + \frac{4x}{L} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \qquad \text{(Rectangular)}$$

$$u = \left[\frac{-\xi + \xi^2}{2} \quad \frac{\xi + \xi^2}{2} \quad 1 - \xi^2 \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_x = \underbrace{\frac{2}{L} \left[\frac{-1 + 2\xi}{2} \quad \frac{1 + 2\xi}{2} \quad -2\xi \right]}_{[B]} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Entonces en general [B] es una función de las coordenadas naturales, De la misma manera J dependería de ξ si el nodo 3 no estuviera colocado en el centro.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_4 \end{Bmatrix}$$



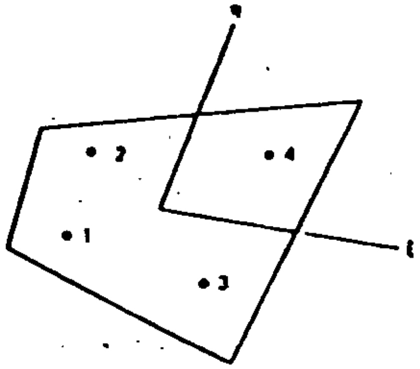
$$x = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta$$

$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}, \quad N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}$$

$$N_3 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}, \quad N_4 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$$

$$x = \sum_1^4 N_i x_i \quad y = \sum_1^4 N_i y_i$$

$$u = \sum_1^4 N_i u_i \quad v = \sum_1^4 N_i v_i$$

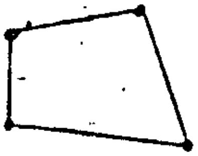


$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \sum_i \sum_j \sum_k W_i W_j W_k f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k) \quad (5.3.5)$$

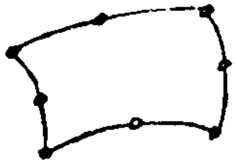
Gauss Quadrature Coefficients

No. of Points	Locations	Associated Weights W_i
1	$x_1 = 0.000000000000000000000000$	2.
2	$x_1, x_2 = \pm 0.5773502691896257645091488$	1.
3	$x_1, x_3 = \pm 0.7745966692414833770358531$	$\frac{5}{9}$ (= 0.555 . . .)
	$x_2 = 0.000000000000000000000000$	$\frac{8}{9}$ (= 0.888 . . .)

SOME ELEMENT TYPES

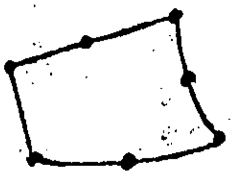


linear

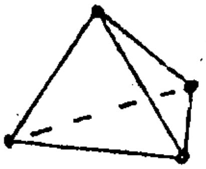


quadratic

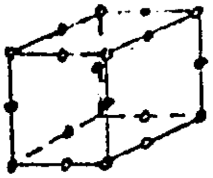
quadratic



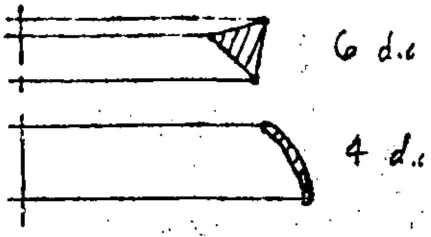
linear-quadrati



linear



quadratic



elements for axisymmetr
solids & thin shells

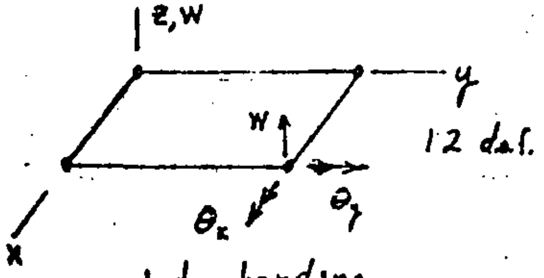
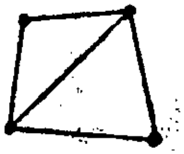
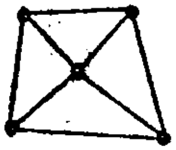


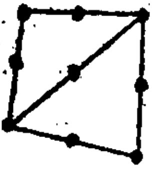
plate bending

shell

SOME ASSEMBLAGES



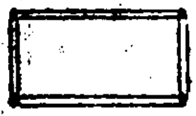




5 tetrahedra
combine into
a hexahedro

edge beam on
a plate

solid propellant
in rocket case



four stringers
on shear pan

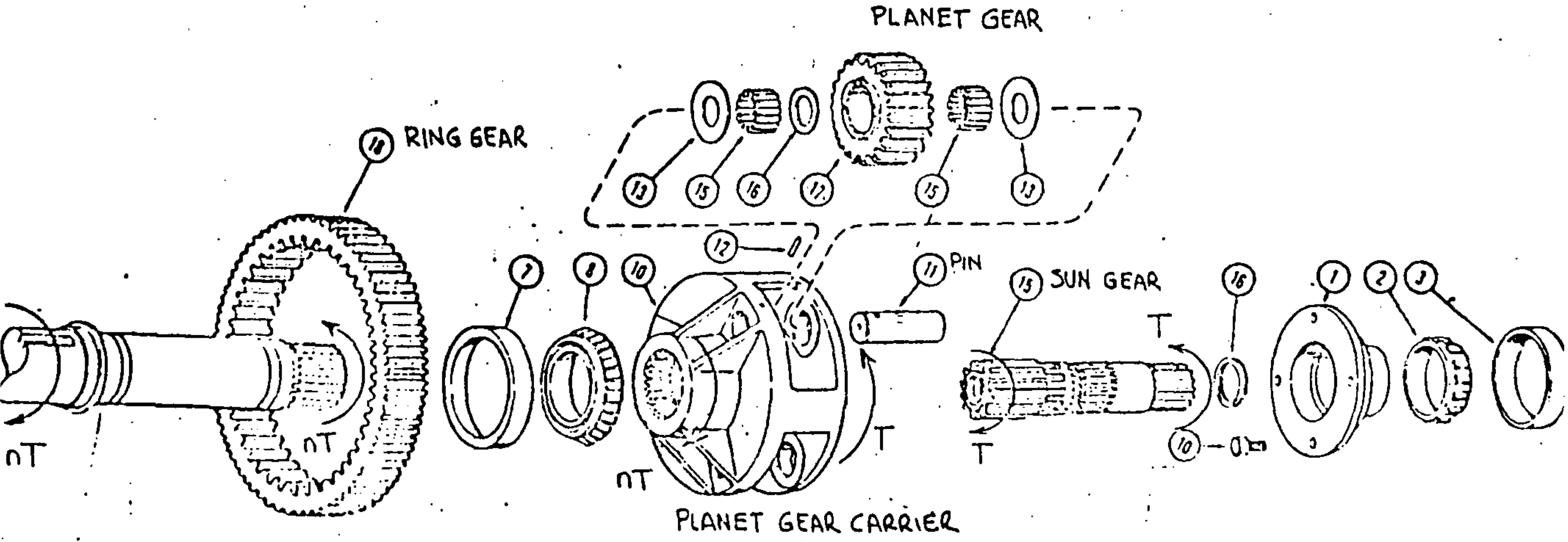
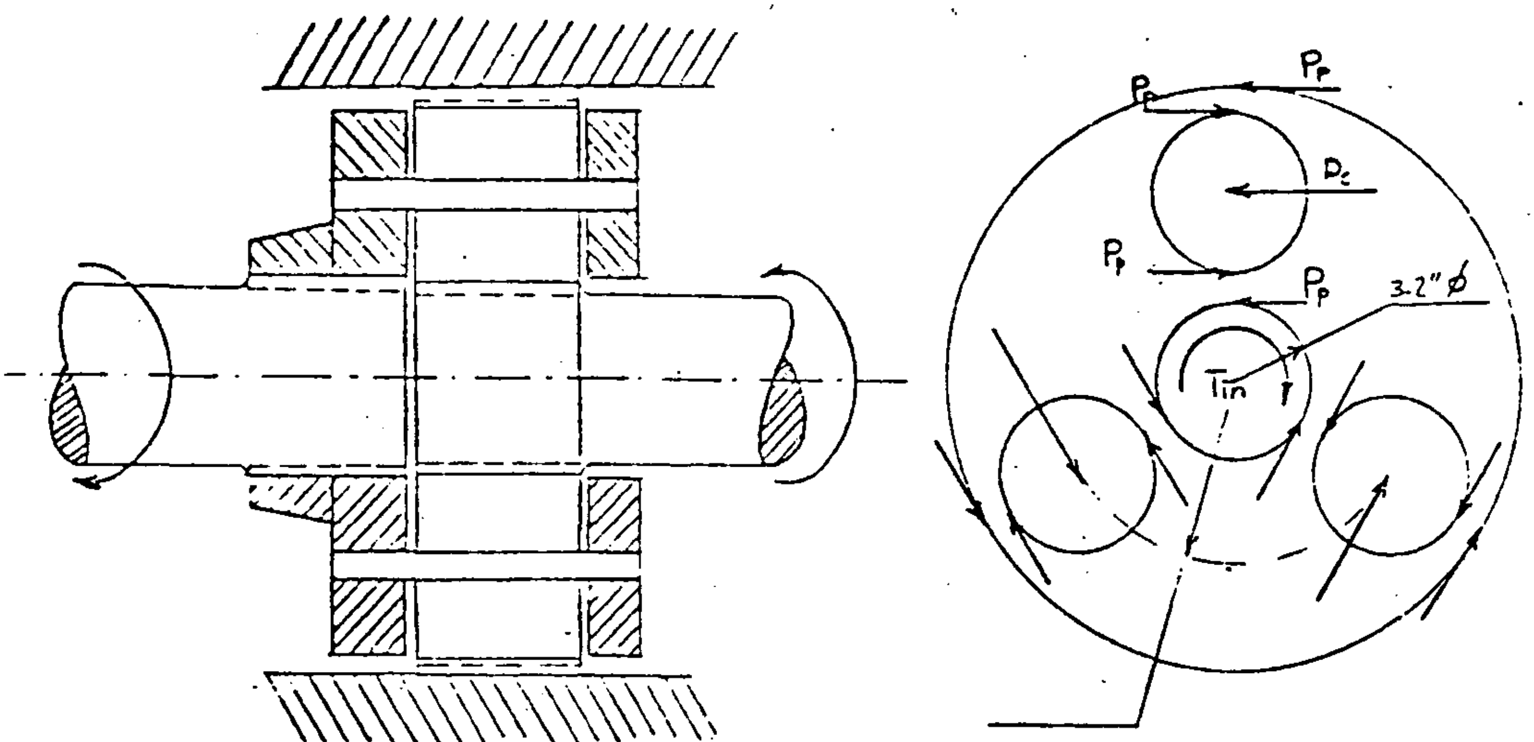


FIG 2

PLANETARY GEAR TRAIN SYSTEM



T_{in} = 41 022 lb-in

F_p = 41022/3×1.6 = 8546.25 lb

P_p – Reaction @ planet
P_c – Load @ Carrier

$F_c = 2F_p$ = 17 092.5 lb

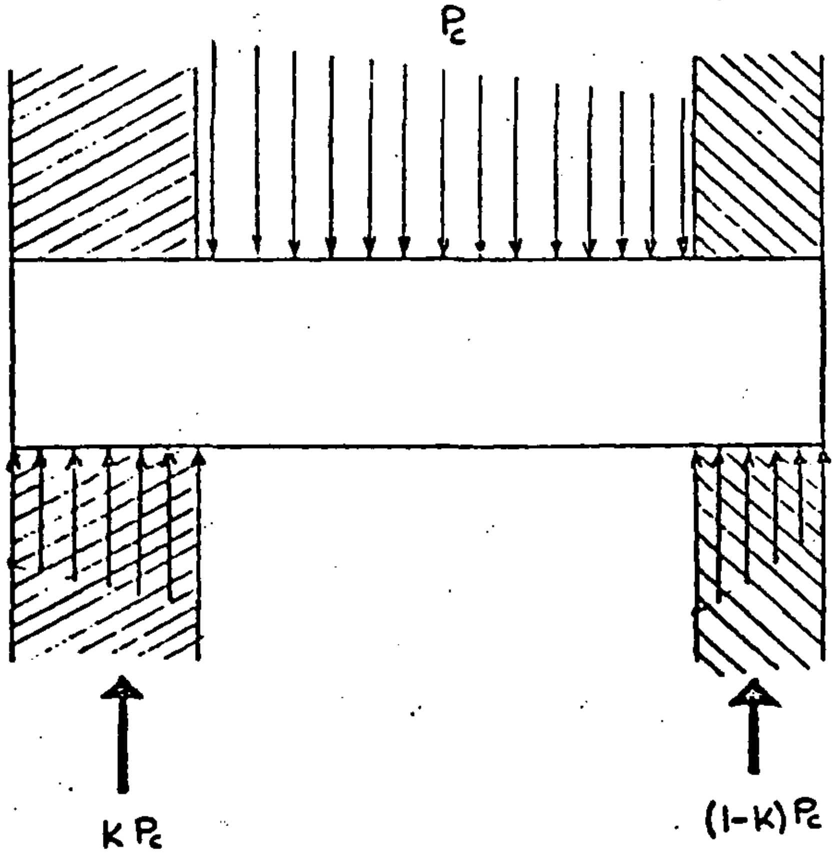


FIG 3

FREE BODY DIAGRAM AND REACTIONS

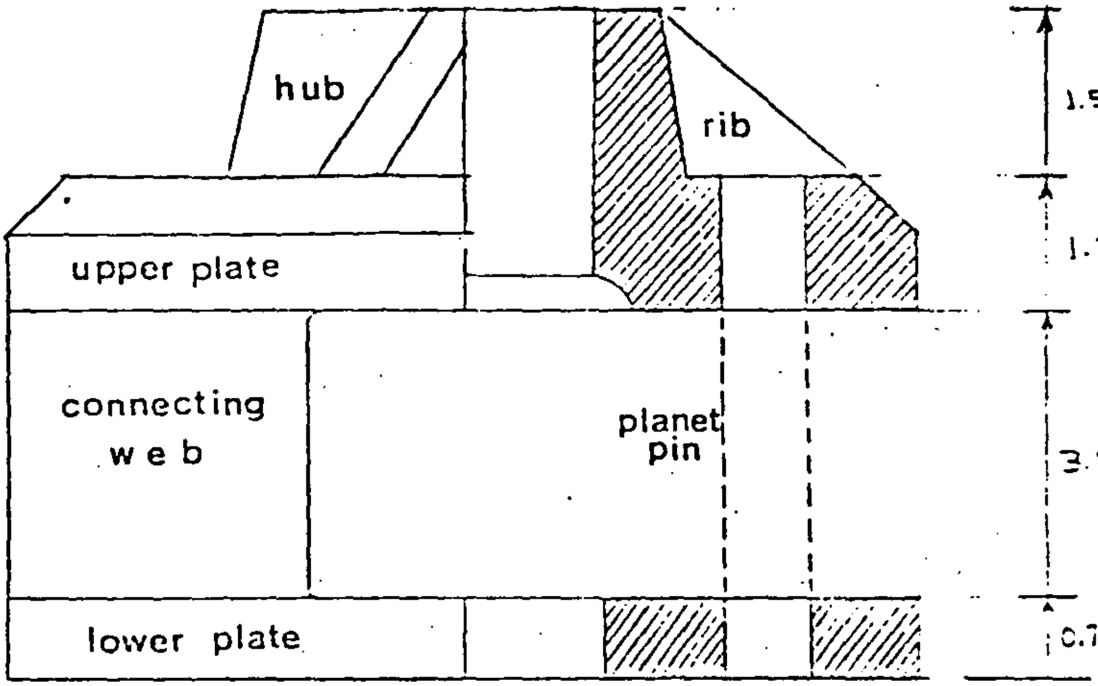

hub
rib
upper plate
connecting
web
planet
pin
lower plate
1.56"
1.25"
3.82"
0.75"

FIG 4

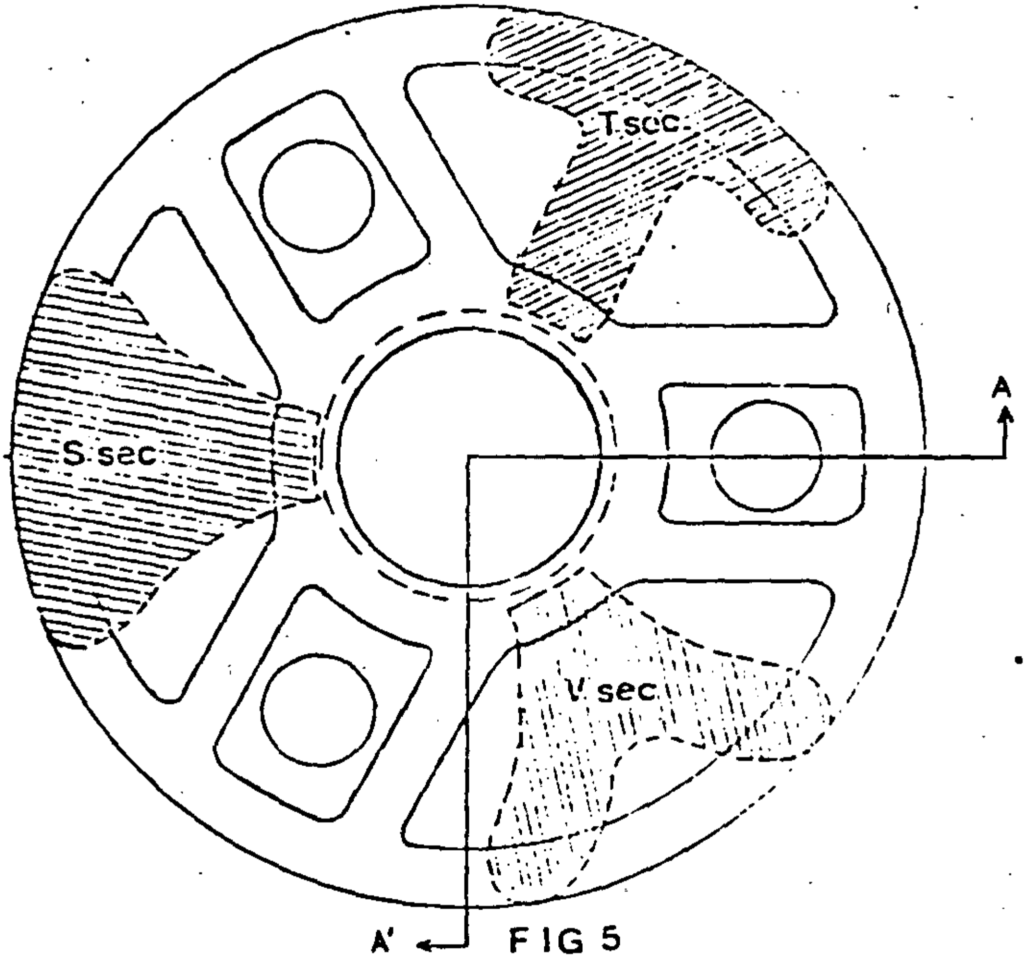
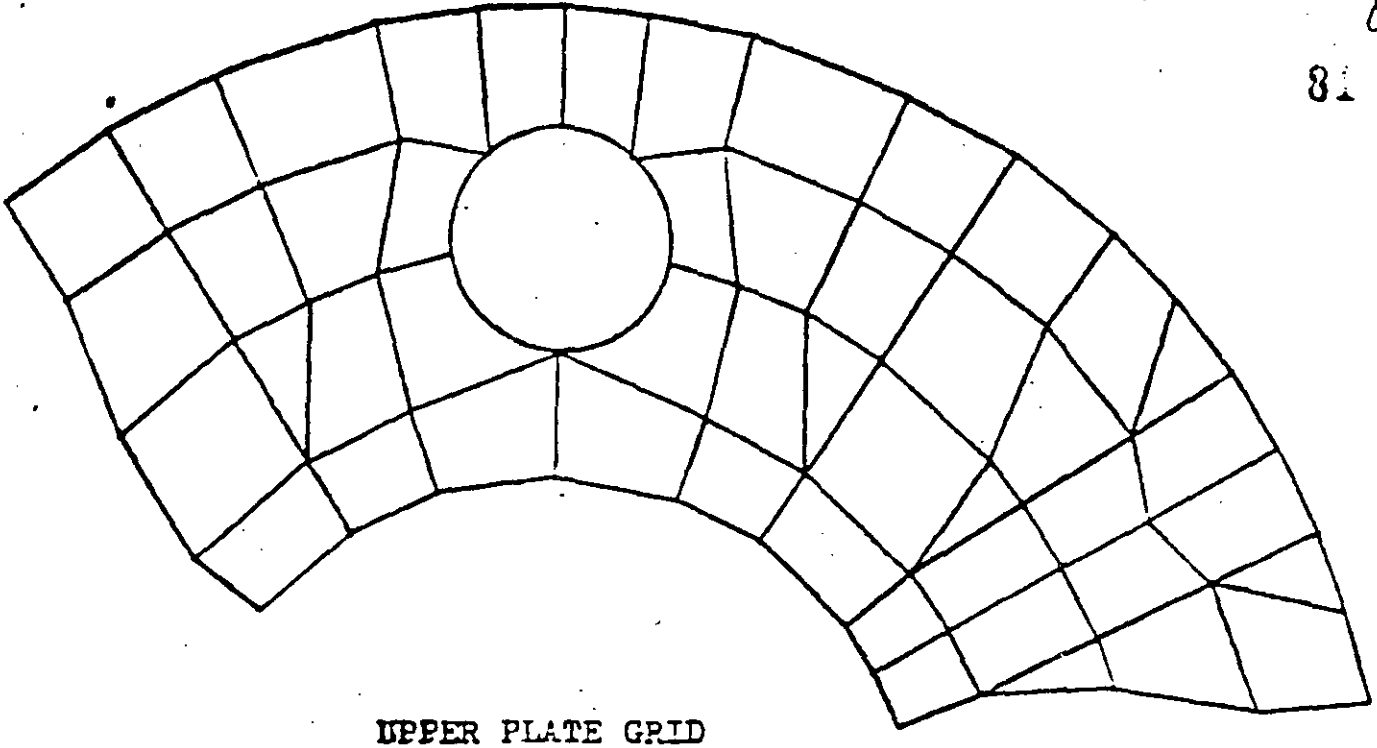
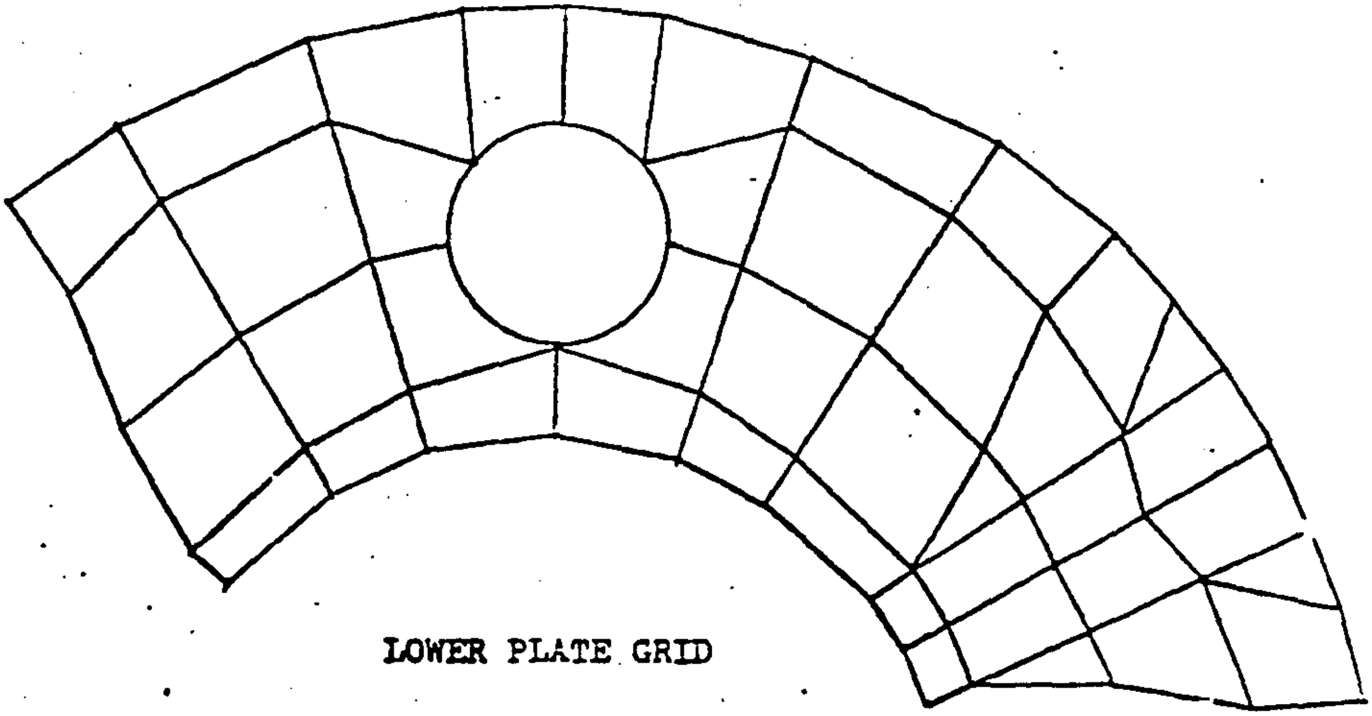

T sec
S sec
V sec
A
A'

FIG 5

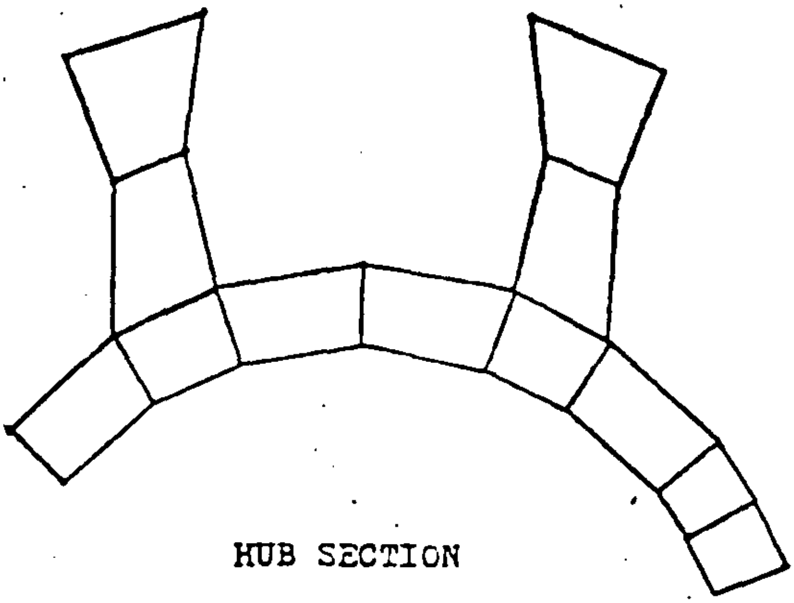


UPPER PLATE GRID

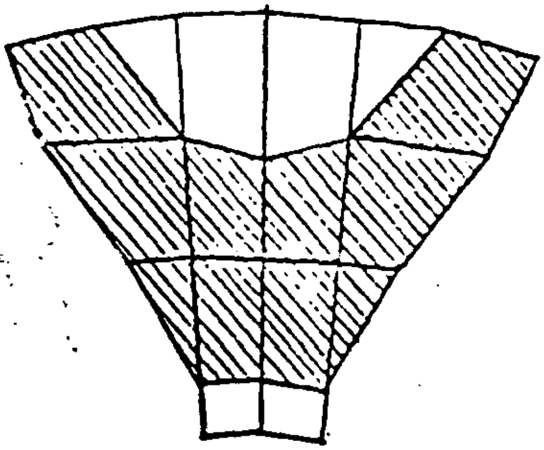


LOWER PLATE GRID

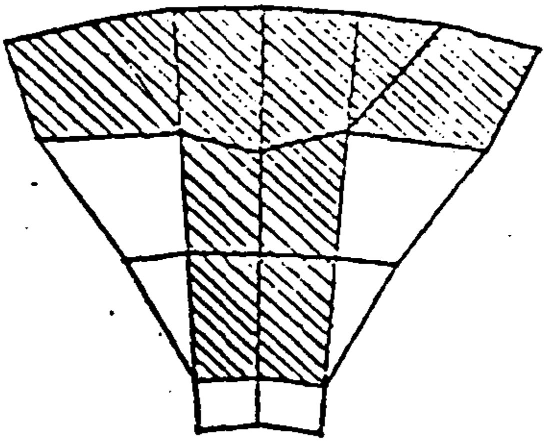
FIG 7 .- GEAR CARRIER FEM MODEL



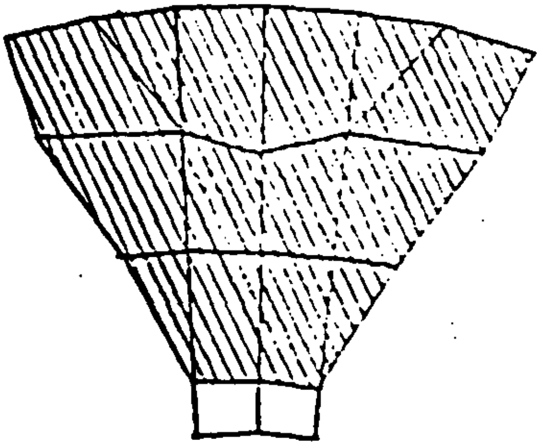
HUB SECTION



"V"-SECTION
CONNECTING WEB



"T"- SECTION
CONNECTING WEB



"S"-SOLID SECTION
CONNECTING WEB

FIG. 8

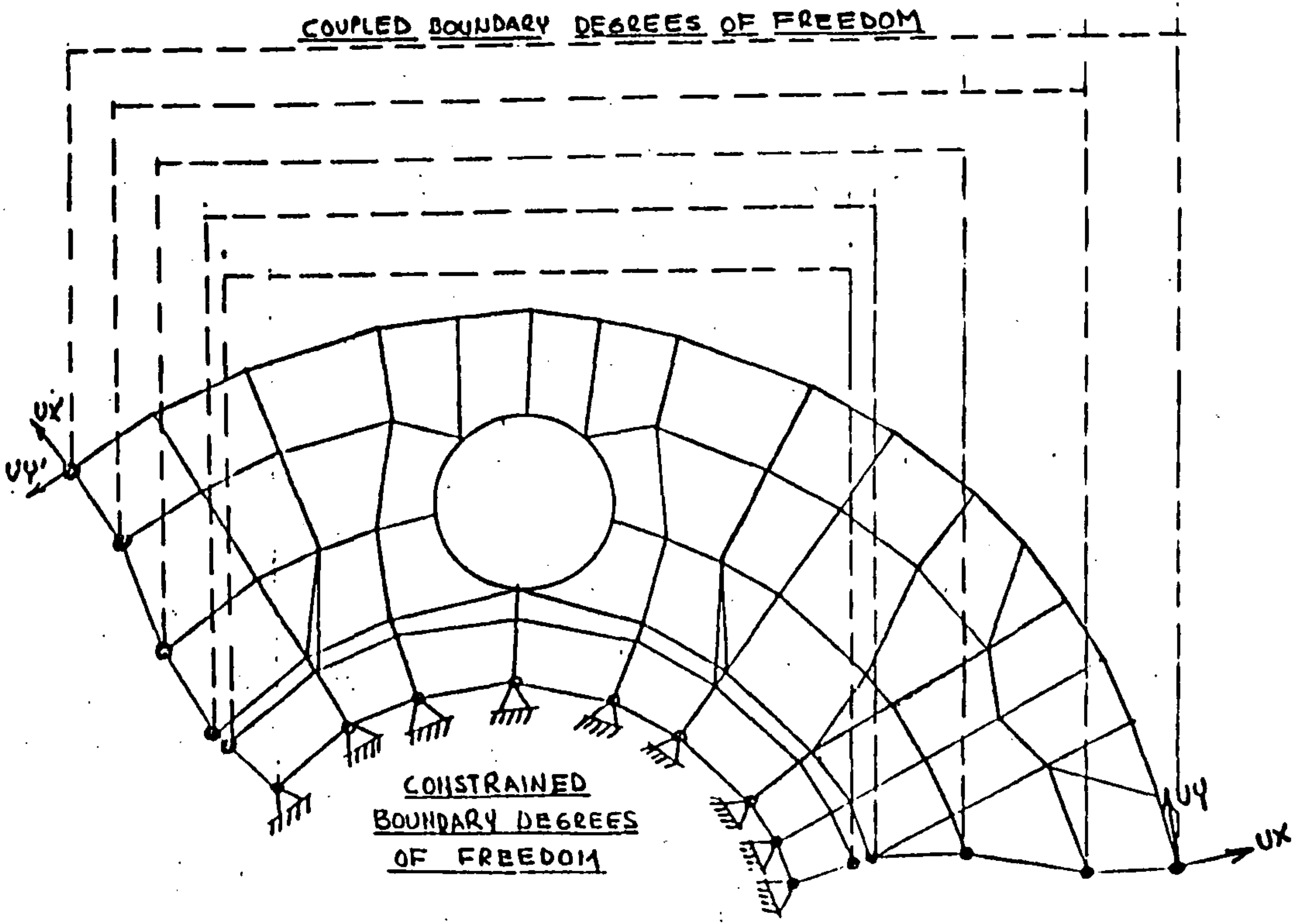
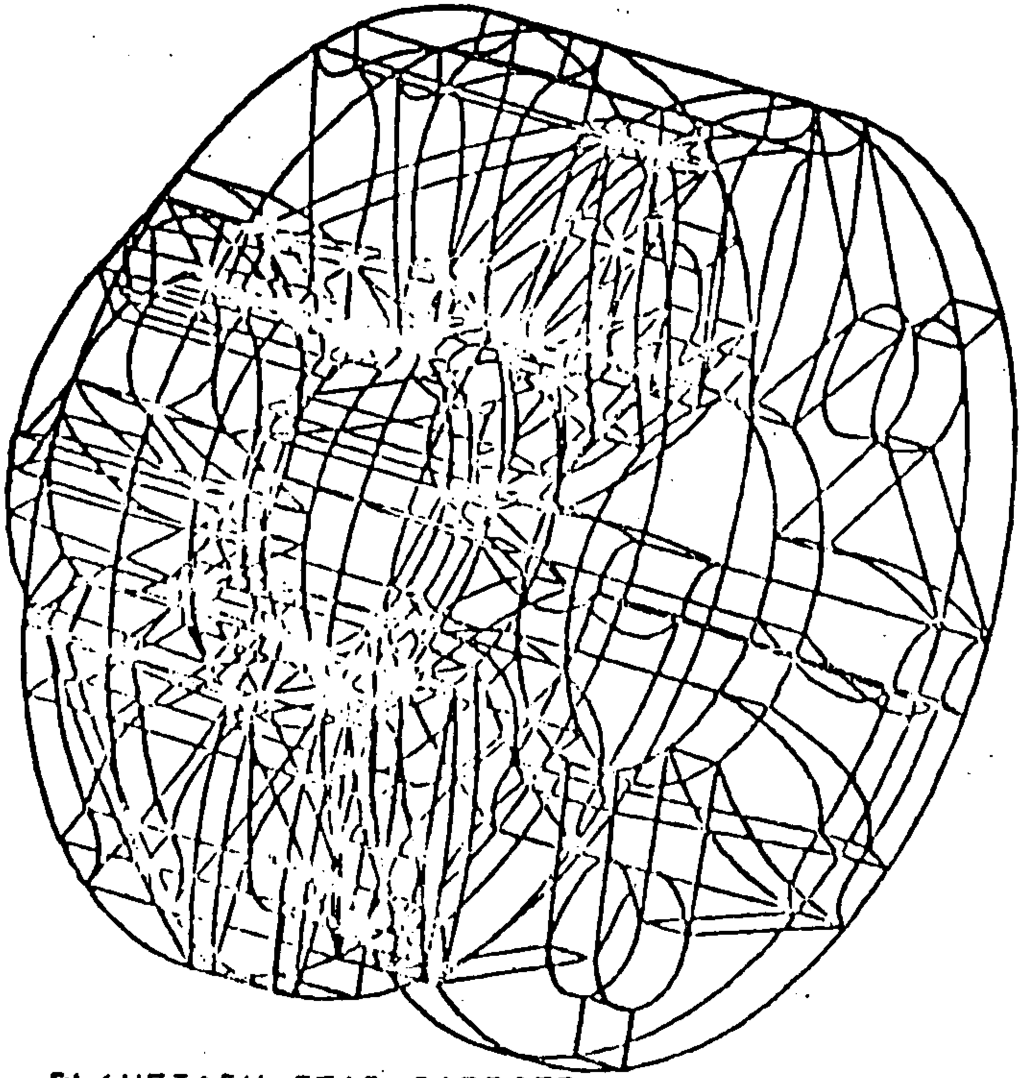

COUPLED BOUNDARY DEGREES OF FREEDOM
UX'
UY'
UY
UX
CONSTRAINED BOUNDARY DEGREES OF FREEDOM

FIG 9

Table 1 - Coupled Node Displacements

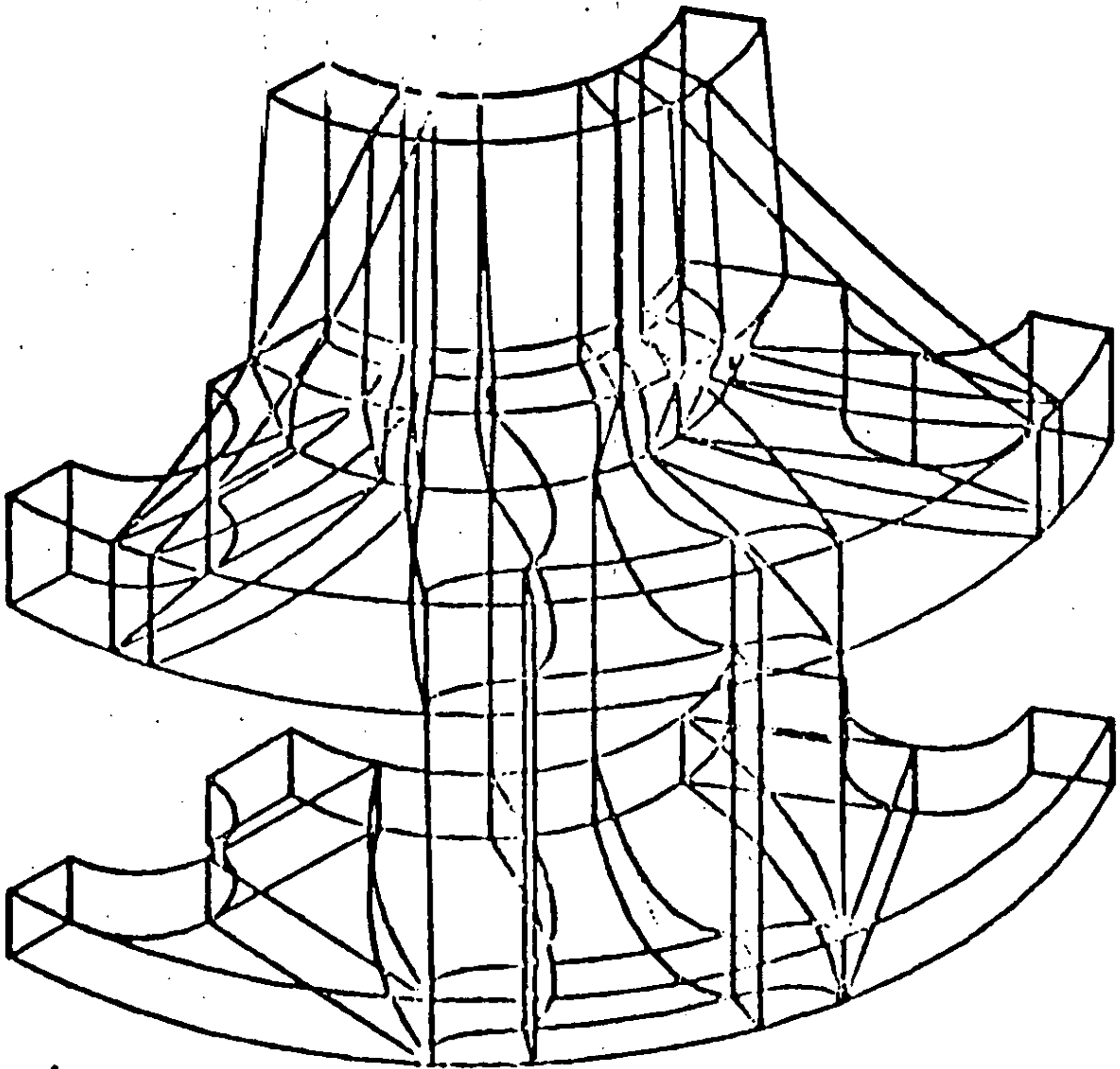
Node 1	Node 2	Directions
1	1001	UX, UY, UZ
27	1027	UX, UY, UZ
40	1040	UX, UY, UZ
55	1055	UX, UY, UZ
70	1070	UX, UY, UZ
85	1085	UX, UY, UZ
102	1002	UX, UY, UZ
119	1119	UX, UY, UZ
215	1215	UX, UY, UZ
651	1651	UX, UY, UZ
664	1664	UX, UY, UZ
667	1667	UX, UY, UZ
709	1709	UX, UY, UZ
728	1728	UX, UY, UZ
747	1747	UX, UY, UZ
764	1764	UX, UY, UZ
781	1781	UX, UY, UZ



PLANETARY GEAR CARRIER

PLOT NO. 1

FIG 10



PLANETARY GEAR CARRIER

PLOT NO. :

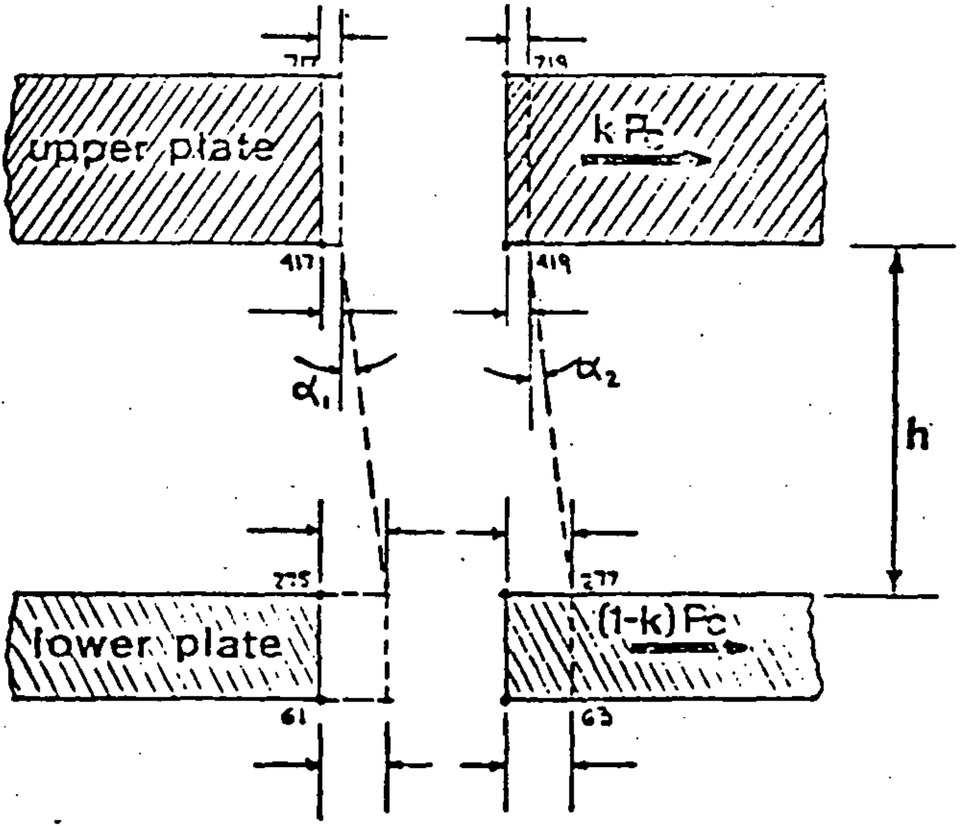
FIG 11

	V section	Tsection	Ssection	Ssec/pin
U_{61} *	0.005308	0.004900	0.004031	0.00372
U_{63}	0.005324	0.004914	0.004049	0.00375
U_{275}	0.005630	0.005221	0.004260	0.004175
U_{277}	0.006351	0.005945	0.004967	0.004149
U_{417}	0.001577	0.001614	0.001645	0.002155
U_{419}	0.002169	0.002208	0.002235	0.002148
U_{717}	0.001788	0.001817	0.001798	0.001773
U_{719}	0.002117	0.002145	0.002127	0.001766
α_1 **	0.001044	0.000929	0.000674	0.000520
α_2	0.001077	0.000963	0.000704	0.000515

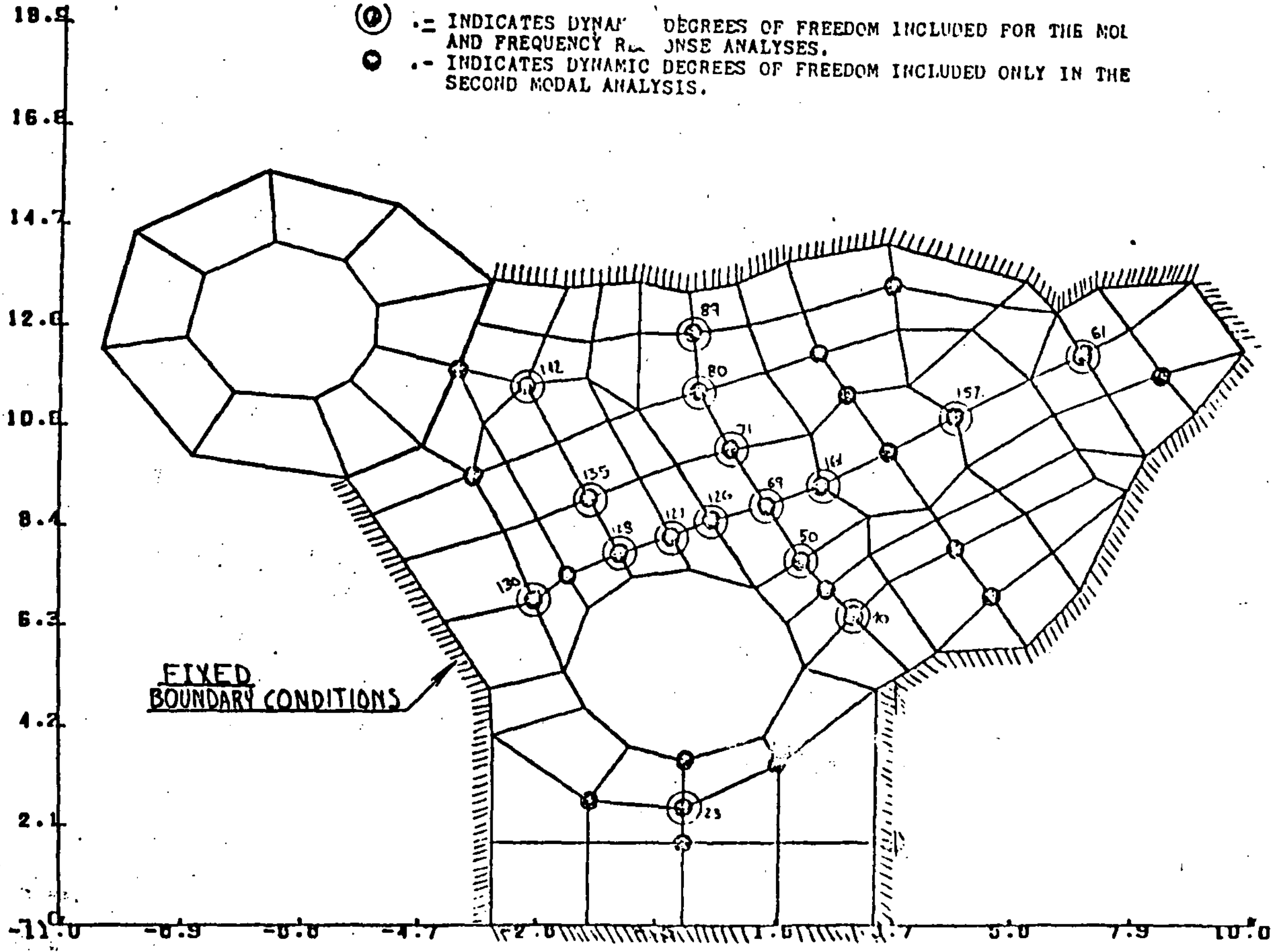
TABLE 3

$U^{*}_{(i)}$ - Tangential displacement node i

$\alpha^{**}_{(j)}$ - Slope of pin side j

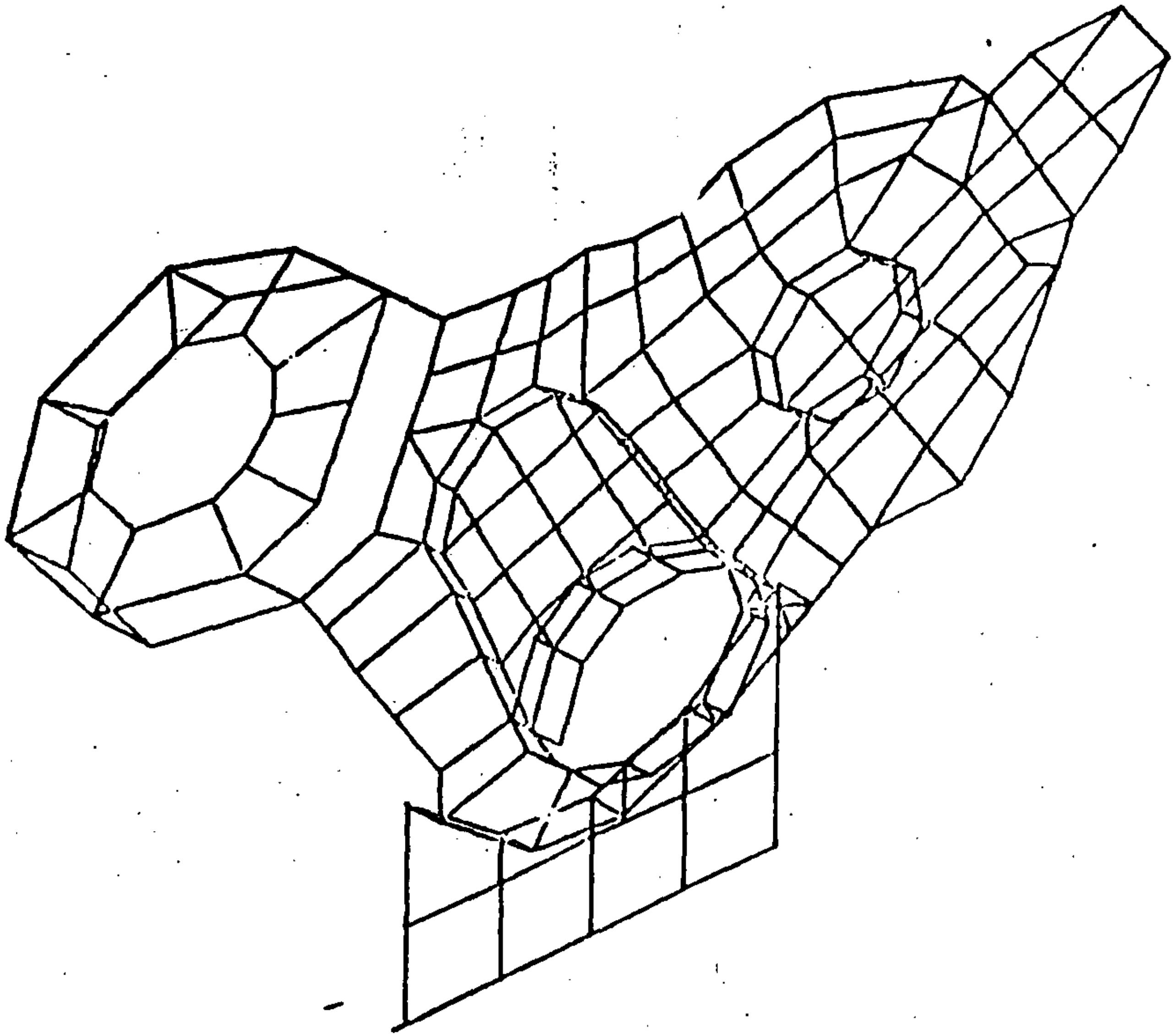

717
719
upper plate
k Pc
417
419
α_1
α_2
h
275
277
lower plate
(1-k) Pc
61
63

F I G 14

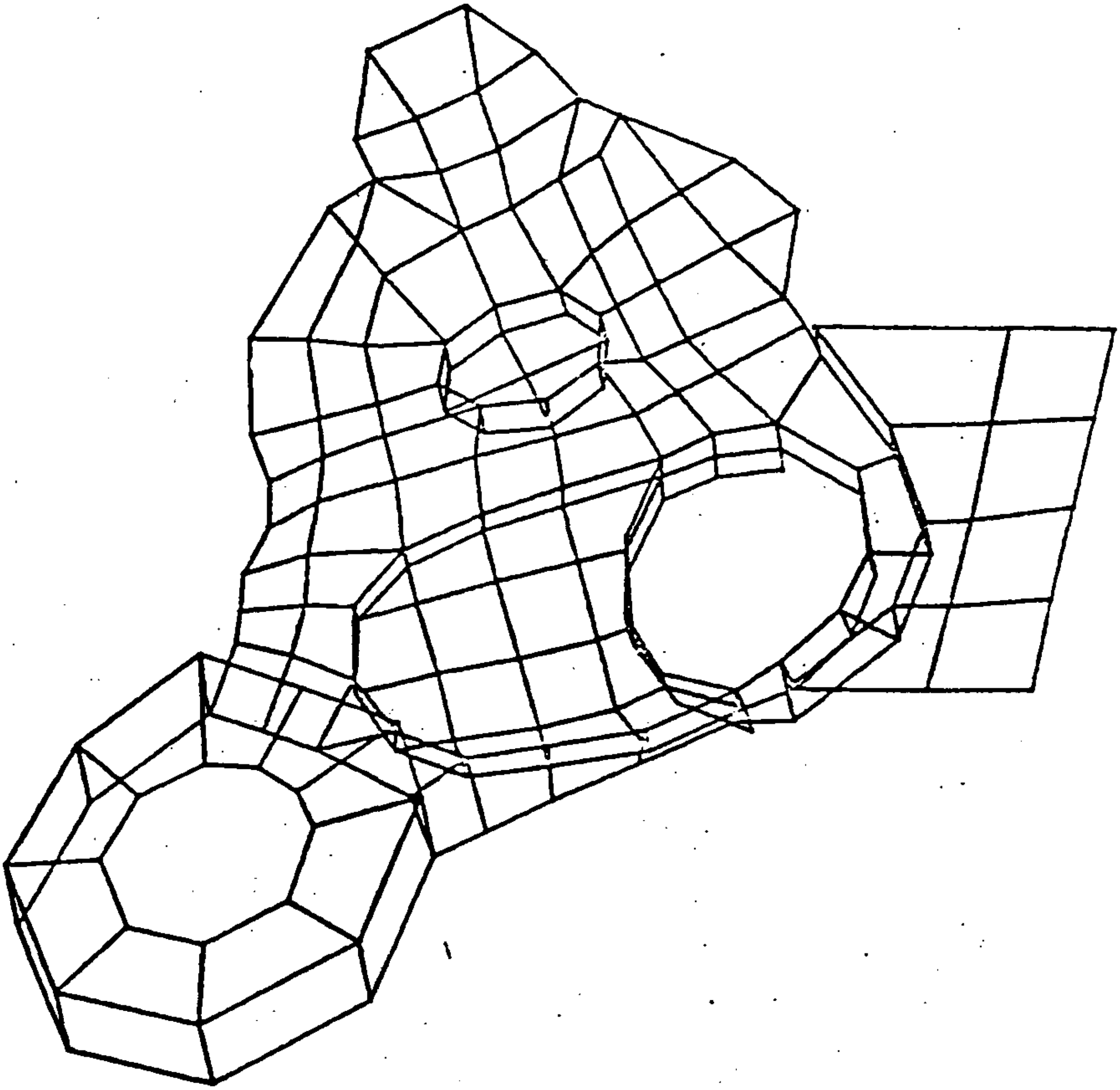


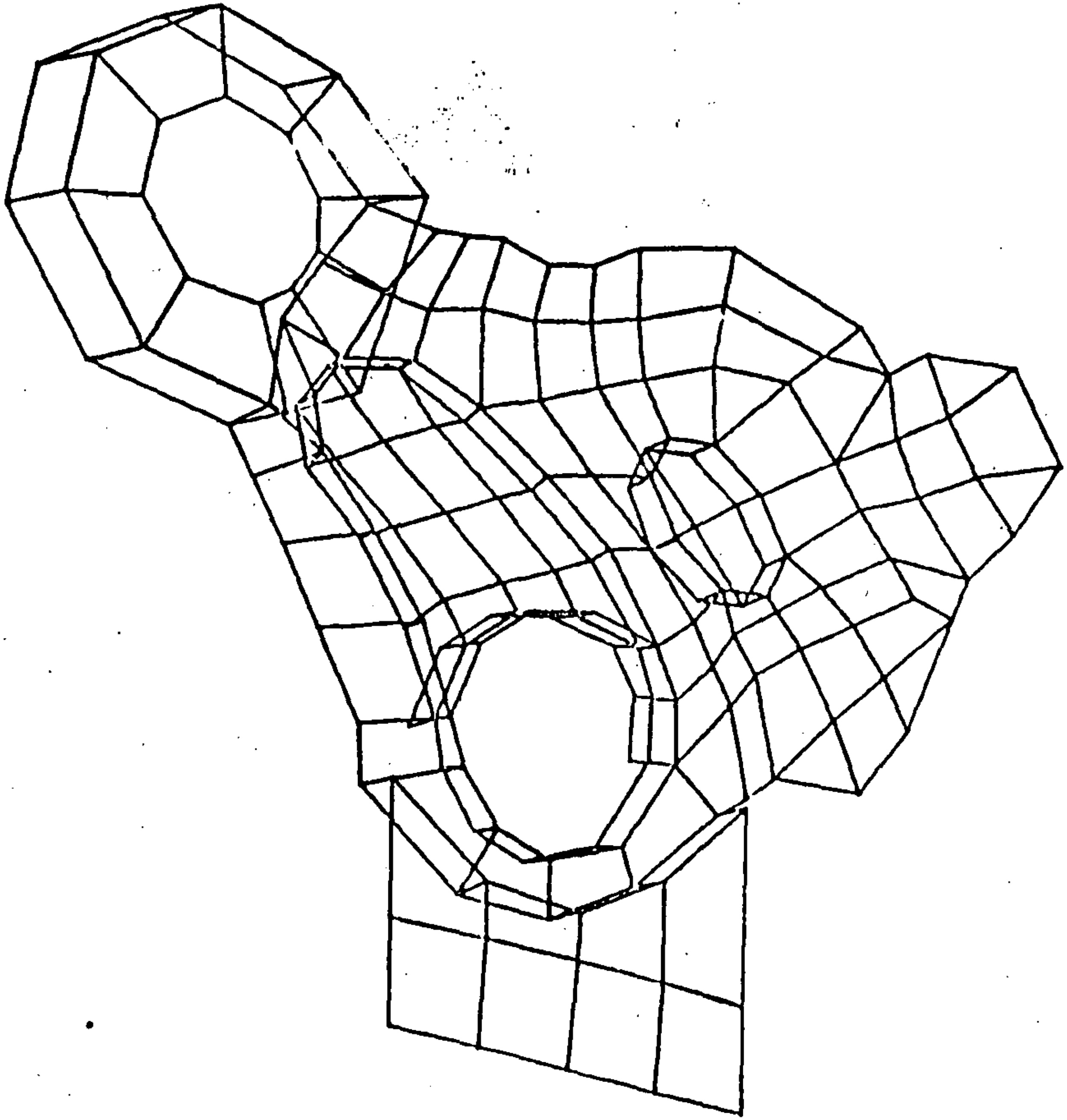
:NO BEAR COVER"

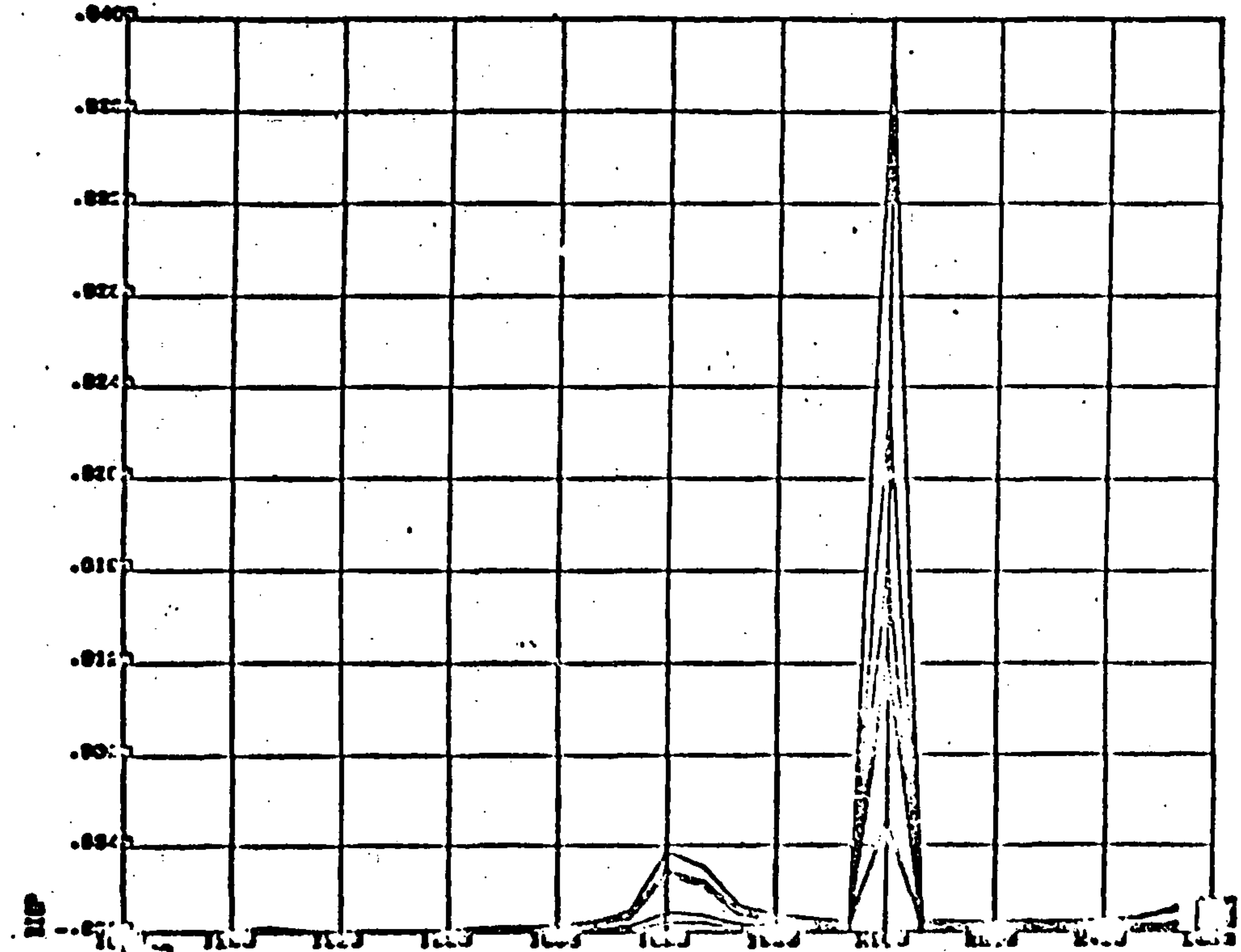
88



"TIMING GEAR COVER"

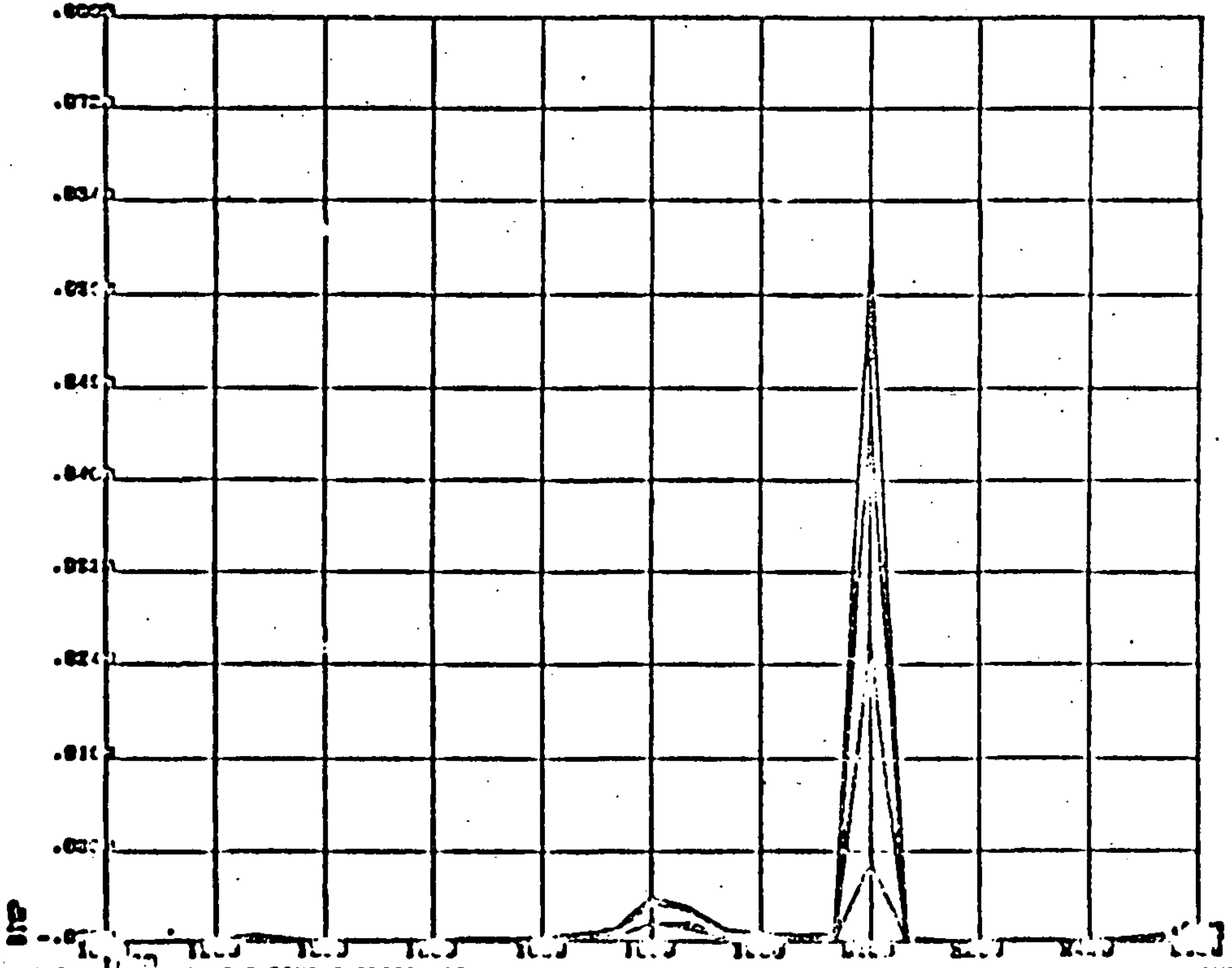






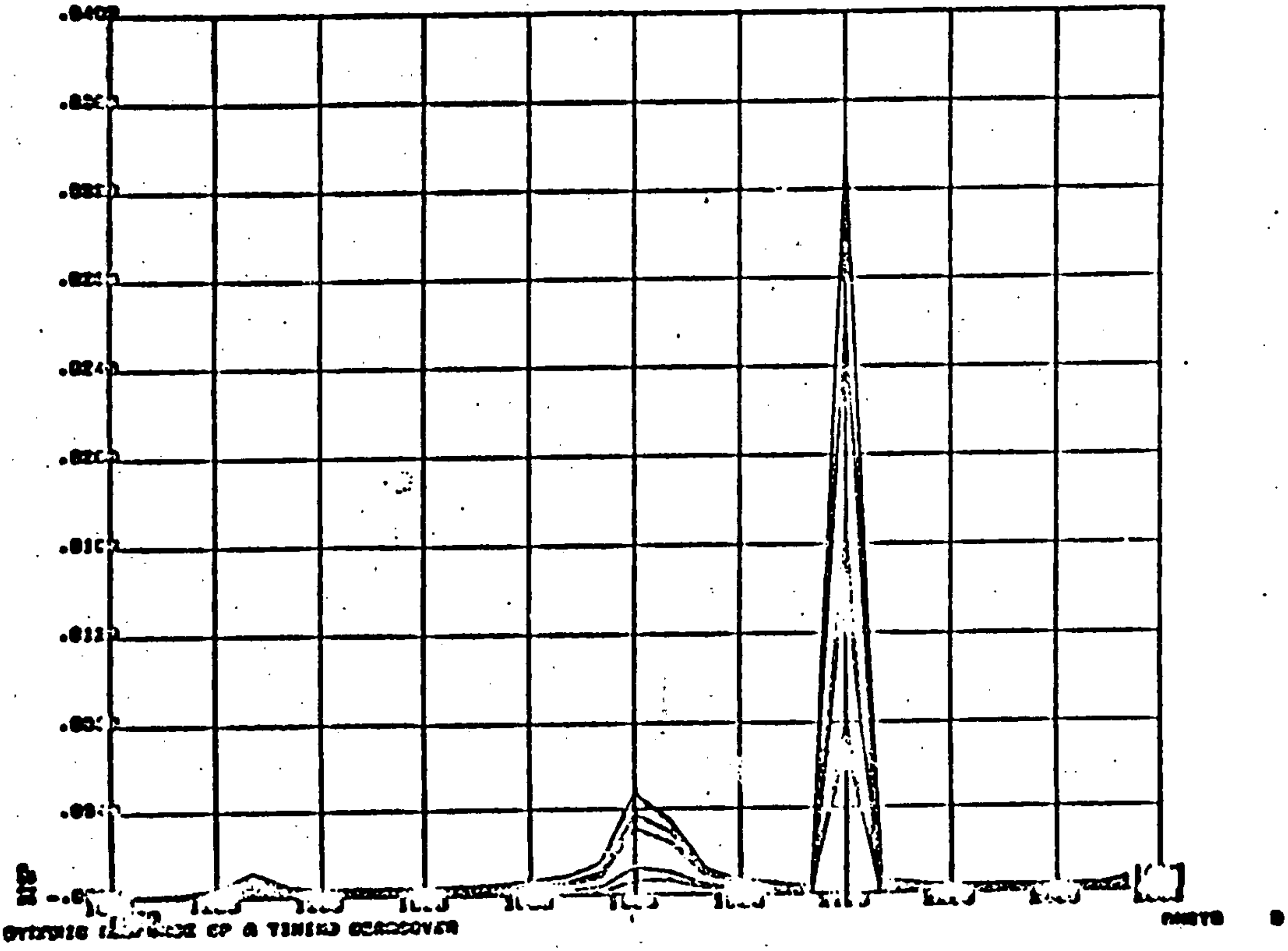
[illegible] OF A [illegible]

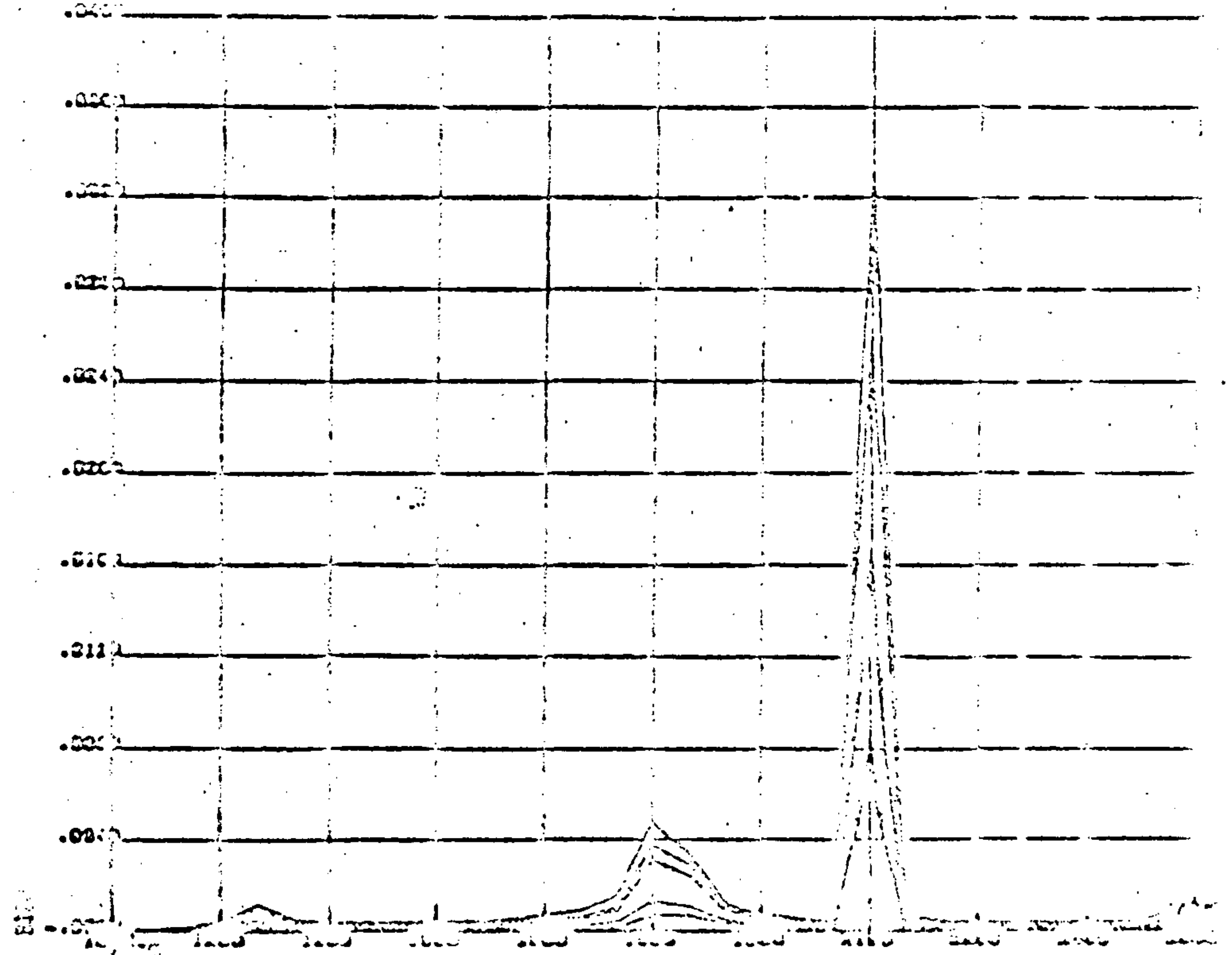
?



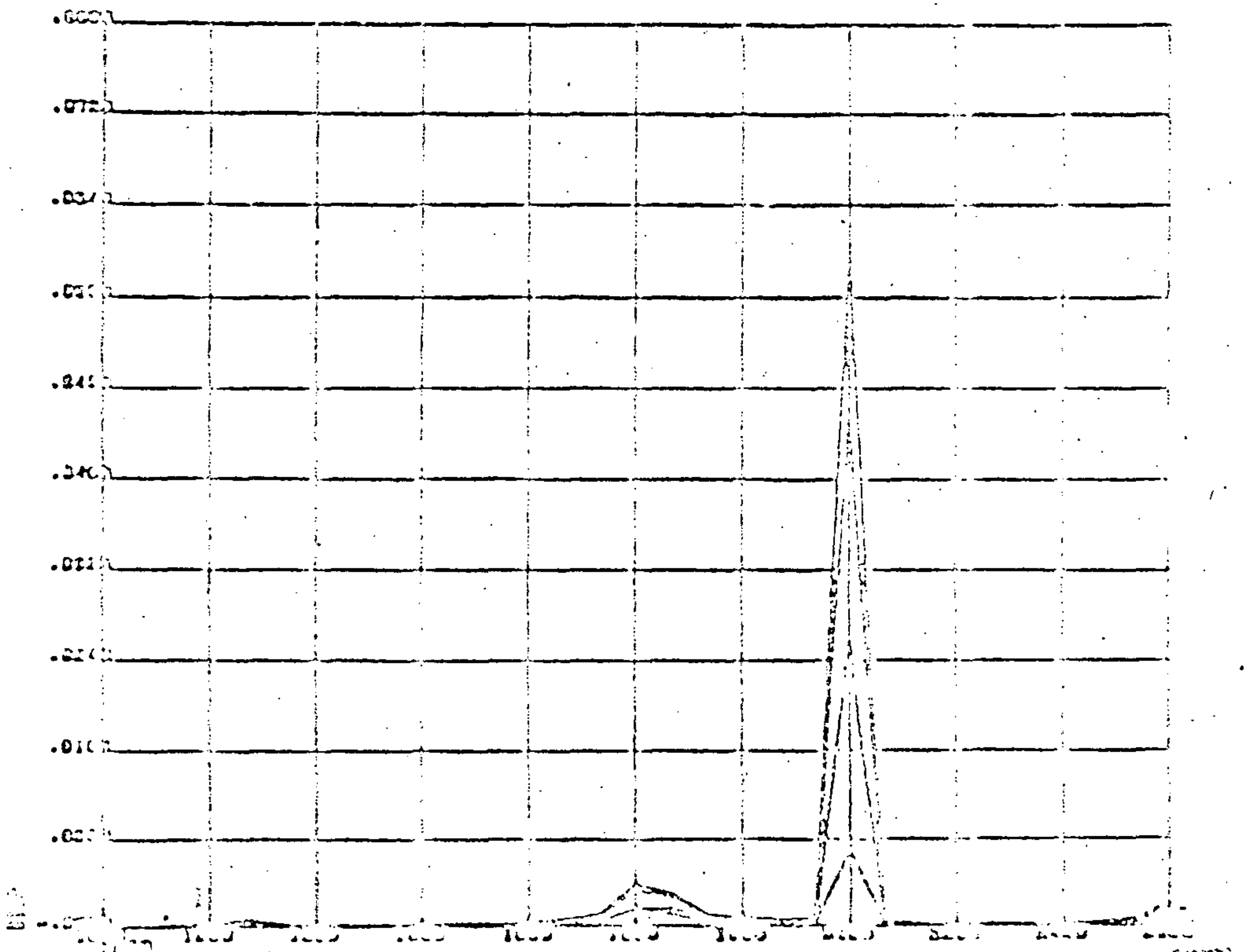
DYNAMIC [illegible] OF A [illegible]

?


.0400
.024
OF A TIMING CROSSOVER
PHOTO 9



[illegible]



DYNAMIC [illegible] OF A [illegible]

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

ANALISIS ESTRUCTURAL

INTERACCION SUELO - ESTRUCTURA

ING. AGUSTIN DEMENEGHI

OCTUBRE 1992

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

barra. A manera de ejemplo, en una barra con apoyos continuos (fig 1), la matriz de rigidez vale

$$K_l = \begin{array}{c c} \begin{matrix} \theta_p & \theta_q & \delta_r & \delta_s \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 4EI/L & 2EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 \\ 2EI/L & 4EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \end{matrix} \end{array} \quad (7)$$

$\underline{\delta}$ es el vector de desplazamientos de la estructura, y está formado por los desplazamientos angulares (giros) de los nudos de la estructura y los desplazamientos lineales de los ejes de la estructura.

$\underline{P}_e$ es el vector de cargas de empotramiento, formado por los momentos y cortantes de empotramiento que transmiten las barras sobre los nudos de la estructura.

$\underline{P}_c$ es el vector de cargas externas concentradas, formado por los momentos concentrados sobre los nudos de la estructura y

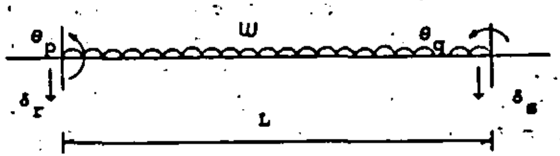


FIG 1 GRADOS DE LIBERTAD DE UNA BARRA

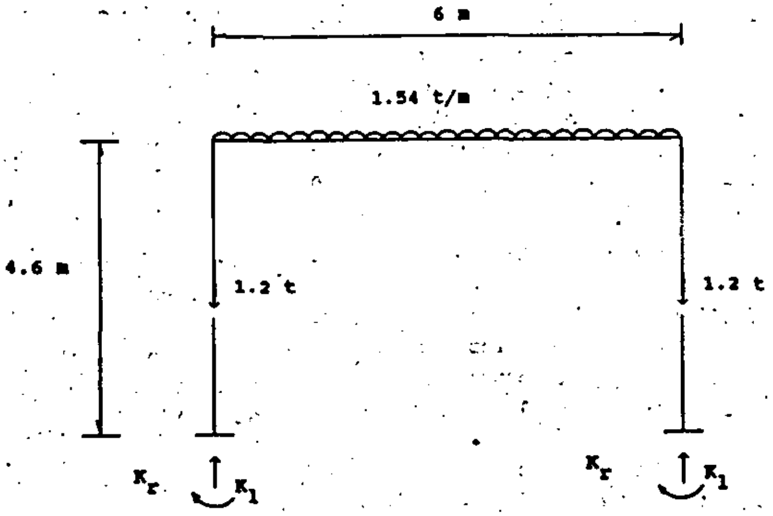


FIG 2 CARACTERÍSTICAS DE LA ESTRUCTURA

las fuerzas concentradas que actúan sobre los ejes de la estructura.

Cuando una estructura a base de zapatas aisladas sufre desplazamientos debidos a la deformabilidad del terreno de cimentación, se generan en la cimentación acciones que se pueden determinar usando los conceptos de rigidez angular K_r y rigidez lineal K_l del terreno de cimentación. Se define la rigidez angular como el cociente del momento M que actúa sobre una zapata y el giro en radianes θ que sufre esta zapata:

$$K_r = M / \theta \qquad (8)$$

La rigidez lineal se define como el cociente entre la carga vertical Q que actúa sobre una zapata y el desplamiento vertical δ que sufre la zapata:

$$K_l = Q / \delta \qquad (9)$$

Los valores de K_r y K_l dependen de las propiedades de deformación del suelo.

De las ecs 8 y 9 se obtienen el momento y la carga vertical debidas a la reacción del suelo sobre la estructura:

$$M = K_r \, \theta \qquad (10)$$

$$Q = K_l \, \delta \qquad (11)$$

Conociendo los valores de K_r y K_l de un suelo, se pueden calcular los giros y los desplazamientos verticales que sufre una estructura cimentada sobre zapatas aisladas, ya que las acciones debidas a la deformabilidad del terreno se pueden incorporar, con relativa facilidad, en el vector de cargas concentradas sobre la estructuras $\underline{P}_e$. Este procedimiento lo vamos a ilustrar mediante un ejemplo muy sencillo, como el mostrado en la fig 2, en el que vemos que las cargas sobre la estructura son la repartida de 1.54 t/m, las concentradas sobre las columnas de 1.2 t y las debidas a la rigidez angular y lineal de las zapatas de cimentación. En la estructura:

Módulo de elasticidad del concreto 2 214 000 t/m²

Momento de inercia de las columnas 0.000675 m⁴

Momento de inercia de las trabes 0.0054 m⁴

En el terreno de cimentación

K_l = 1880 t/m $\quad$ K_r = 720 t.m / rad

A continuación presentamos el análisis detallado de la estructura.

Iniciamos numerando las barras y los grados de libertad de la estructura, los cuales se muestran en la fig 3. Las cargas sobre la estructura, correspondientes a los grados de libertad definidos, se aprecian en la fig 4. Con estos datos podemos formar las cantidades que aparecen en la ecuación matricial 5.

a) Vector de desplazamientos

El vector de desplazamiento vale (fig 3)

$$\underline{\delta} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{Bmatrix}$$

b) Matriz de rigideces

Para formar la matriz de rigideces de la estructura usamos la ec 6. Empezamos por visualizar los grados de libertad de cada barra

Barra	θ_p	θ_q	δ_r	δ_s
1	θ_5	θ_3	-	-
2	θ_6	θ_4	-	-
3	θ_5	θ_6	δ_1	δ_2

A continuación, aplicando la ec 6 formamos la matriz de rigidez de cada barra:

$$K_1 = \begin{array}{cc} \theta_5 & \theta_3 \\ \left[\begin{array}{cc} 1299.52 & 649.76 \\ 649.76 & 1299.52 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \theta_5 \\ \theta_3 \end{array} \end{array}$$

$$K_2 = \begin{array}{cc} \theta_6 & \theta_4 \\ \left[\begin{array}{cc} 1299.52 & 649.76 \\ 649.76 & 1299.52 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \theta_6 \\ \theta_4 \end{array} \end{array}$$

$$K_3 = \left[\begin{array}{cccc|c} \theta_5 & \theta_6 & \delta_1 & \delta_2 & \\ 7970.4 & 3985.2 & -1992.6 & 1992.6 & \theta_5 \\ 3985.2 & 7970.4 & -1992.6 & 1992.6 & \theta_6 \\ -1992.6 & -1992.6 & 664.2 & -664.2 & \delta_1 \\ 1992.6 & 1992.6 & -664.2 & 664.2 & \delta_2 \end{array}\right]$$

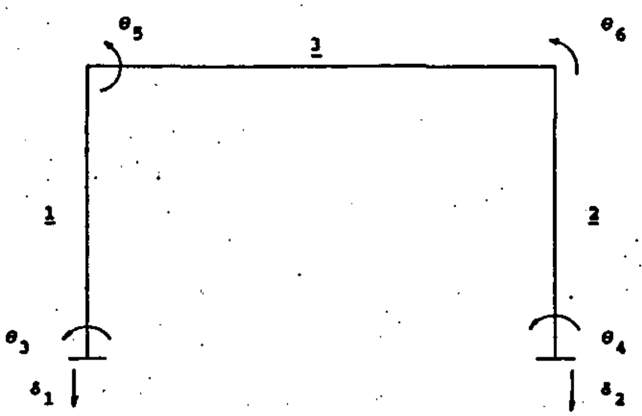


FIG 3 NUMERACIÓN Y GRADOS DE LIBERTAD DE LA ESTRUCTURA

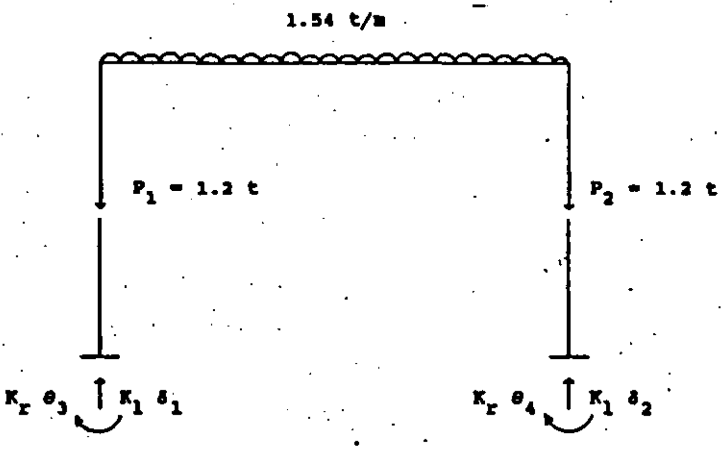


FIG 4 SISTEMA DE CARGAS SOBRE LA ESTRUCTURA

Demeneghi

Sustituyendo en la ec 6

$$\underline{K} = \Sigma\, \underline{K}_i = \underline{K}_1 + \underline{K}_2 + \underline{K}_3$$

$$\underline{K} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccccc} \delta_1 & \delta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \\ 664.2 & -664.2 & 0 & 0 & -1992.6 & -1992.6 \\ -664.2 & 664.2 & 0 & 0 & 1992.6 & 1992.6 \\ 0 & 0 & 1299.52 & 0 & 649.76 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1299.52 & 0 & 649.76 \\ -1992.6 & 1992.6 & 649.76 & 0 & 9269.92 & 3985.2 \\ -1992.6 & 1992.6 & 0 & 649.76 & 3985.2 & 9269.92 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{array}$$

c) Vector de cargas de empotramiento

$$\underline{P}_e = \left\{\begin{array}{c} -\,w\,L\,/\,2 \\ -\,w\,L\,/\,2 \\ 0 \\ 0 \\ w\,L^2\,/\,12 \\ -\,w\,L^2\,/\,12 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} -\,4.62 \\ -\,4.62 \\ 0 \\ 0 \\ 4.62 \\ -\,4.62 \end{array}\right\}$$

d) Vector de cargas concentradas

$$\underline{P}_c = \left\{\begin{array}{c} -\,1.2 + 1880\,\delta_1 \\ -\,1.2 + 1880\,\delta_2 \\ 720\,\theta_3 \\ 720\,\theta_4 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

Sustituyendo valores en la ec 5

$$664.2\,\delta_1 - 664.26\,\delta_2 - 1992.6\,\theta_5 - 1992.6\,\theta_6 - 4.62 - 1.2 + 1880\,\delta_1 = 0$$

$$-664.2\,\delta_1 + 664.2\,\delta_2 + 1992.6\,\theta_5 - 1992.6\,\theta_6 - 4.62 - 1.2 + 1880\,\delta_2 = 0$$

$$1299.52\,\theta_3 + 649.76\,\theta_5 + 0 + 720\,\theta_3 = 0$$

$$1299.52\,\theta_4 + 649.76\,\theta_6 + 0 + 720\,\theta_4 = 0$$

$$-1992.6\,\delta_1 + 1992.6\,\delta_2 + 649.76\,\theta_3 + 9269.92\,\theta_5 + 3985.2\,\theta_6 + 4.62 + 0 = 0$$

$$-1992.6\,\delta_1 + 1992.6\,\delta_2 + 649.76\,\theta_4 + 3985.2\,\theta_5 + 9269.92\,\theta_6 - 4.62 + 0 = 0$$

Por simetría

$$\delta_1 = \delta_2\,,\quad \theta_3 = -\,\theta_4\,,\quad \theta_5 = -\,\theta_6$$

Por lo tanto

$$-\,5.82 + 1880\,\delta_1 = 0$$

$$2019.52\,\theta_3 + 649.76\,\theta_5 = 0$$

$$649.76\,\theta_3 + 5284.72\,\theta_5 + 4.62 = 0$$

Resolviendo el sistema

$$\delta_1 = 0.003096\ \text{m}$$

$$\theta_3 = 0.0002929$$

$$\theta_5 = -\,0.0009102$$

El momento que llega a la cimentación se puede obtener multiplicando el giro respectivo por su rigidez angular

$$M_3 = K_r\,\theta_3 = 720\,(0.0002929) = 0.211\ \text{t.m}$$

La carga vertical sobre la zapata es igual al desplazamiento vertical por la rigidez lineal

$$P_1 = K_l\,\delta_1 = 1880(0.003096) = 5.82\ \text{t}$$

También se pueden hallar las acciones que transmite la estructura a la zapata, empleando las siguientes expresiones, que proporcionan los elementos mecánicos que transmite una barra sobre el nudo

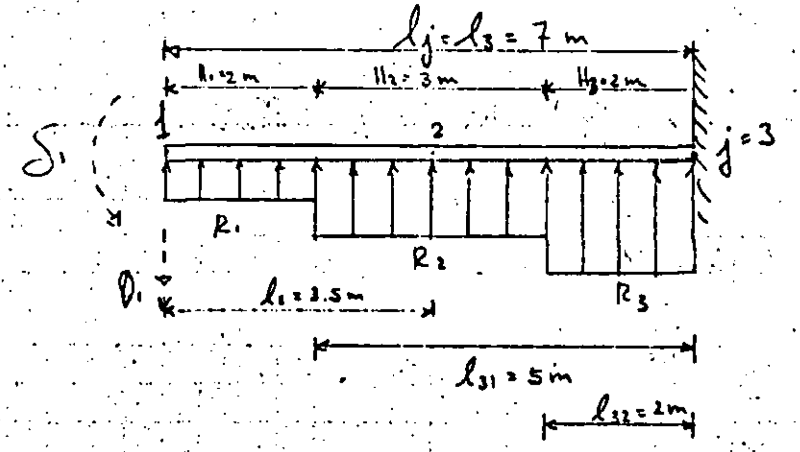
$$M_p = M_{ep} + 4\,EI\,\theta_p\,/\,L + 2\,EI\,\theta_q\,/\,L - 6\,EI\,\delta_r\,/\,L^2 + 6\,EI\,\delta_s\,/\,L^2 \qquad (12)$$

$$1163.855767 \times 3.5\,\theta_1 - 1163.85577\,\delta_1 + 1163.85577\,\delta_2 + R_1(6.0416667) + \frac{4.5}{64}\times 3\,R_2 = 0$$

$$\boxed{1163.855767(3.5\,\theta_1 - \delta_1 + \delta_2) + 6.0416667\,R_1 + 0.2109375\,R_2 = 0} \;---- (1)$$

Ahora aplicando la ecuación Ⓑ :

para $j = n = 3$



$l_1 = 0$
$l_2 = 3.5$ m
$l_3 = 7$ m

$l_{31} = l_3 - l_1 - H_1 = 5$ m

$l_{32} = l_3 - H_1 - \frac{H_2}{2} = 2$ m

$j = n = 3$.

$$EI\,l_3\,\theta_1 - EI\,\delta_i + EI\,\delta_3 + R_1 D_{31} + R_2 D_{32} + \frac{A_3}{4} H_3 R_3 = 0$$

$$\longrightarrow \quad D_{31} = A_1\left(l_{31} + \frac{H_1}{4}\right) + \frac{B_{31}\,l_{31}}{2} + \frac{C_{31}\,l_{31}}{3}$$

<u>DONDE</u>

$$\begin{cases} A_1 = \frac{H_1^3}{6} = \frac{(2)^3}{6} = 1.3333333 \text{ m}^3 \\ B_{31} = \frac{H_1^2}{2} l_{31} = (2)^2 \frac{5}{2} = 10 \text{ m}^3 \\ C_{31} = \frac{H_1}{2} l_{31}^2 = \frac{2 \times (5)^2}{2} = 25 \text{ m}^3 \end{cases}$$

$$\therefore \quad D_{31} = 1.3333333\left(5 + \frac{2}{4}\right) + \frac{10 \times 5}{2} + \frac{25 \times 5}{3} = 74 \text{ m}^4$$

$$D_{32} = A_2\left(l_{32} + \frac{H_2}{4}\right) + \frac{B_{32}\,l_{32}}{2} + \frac{C_{32}\,l_{32}}{3}$$

DONDE :

$$\begin{cases} A_2 = \frac{H_2^3}{6} = \frac{(3)^3}{6} = 4.5 \ m^3 \\ B_{32} = \frac{H_2^2 l_{32}}{2} = \frac{(3)^2(2)}{2} = 9 \ m^3 \\ C_{22} = \frac{H_2 \, l_{22}^2}{2} = \frac{3\,(2)^2}{2} = 6 \ m^3 \end{cases}$$

$$\therefore \ D_{32} = 4.5\left(2 + \frac{3}{4}\right) + \frac{9 \times 2}{2} + \frac{6 \times 2}{3} = 25.375 \ m^4$$

$$A_3 = \frac{H_3^3}{6} = \frac{(2)^3}{6} = 1.3333333 \ m^3$$

$$1163.855767 \times 7\theta_1 - 1163.855767\delta_1 + 1163.855767\delta_3 + 74R_1 + 25.375R_2 +$$

$$+ \frac{1.3333333}{4}(2)R_3 = 0$$

$$\boxed{1163.855767(7\theta_1 - \delta_1 + \delta_3) + 74R_1 + 25.375R_2 + 0.6666667R_3 = 0}$$

(2)

Ahora aplicaremos la ecuación ©

$$-EI\,\theta_1 + (A_1 + B_{21} + C_{21})R_1 + (A_2 + B_{32} + C_{22})R_2 + A_3R_3 = 0$$

$$-1163.855767\,\theta_1 + (1.3333333 + 3 + 2.25)R_1 + (4.5 + 9 + 4)R_2 + 1.3333333R_3 = 0$$

$$\boxed{-1163.855767\,\theta_1 + 6.5833333R_1 + 17.5R_2 + 1.3333333R_3 = 0} \ ----(3)$$

b) Obtención de δ_1, δ_2 y δ_3 :

Ahora aplicando la ecuación Ⓔ a los puntos 1, 2 y 3 obtendremos otras 3 ecuaciones que serían los movimientos de dichos puntos :

$$\delta_1 = \sum_{j=1}^{3} m_{v_{1j}}\, e_j \sum_{k=1}^{3} I_{1jk} \frac{R_k}{b_k}$$

$$\delta_1 = m_{v_{11}}\, e_1 \left(I_{111}\frac{R_1}{b_1} + I_{112}\frac{R_2}{b_2} + I_{113}\frac{R_3}{b_2} \right) +$$

$$+ m_{v_{12}}\, e_2 \left(I_{211}\frac{R_1}{b_1} + I_{212}\frac{R_2}{b_2} + I_{213}\frac{R_3}{b_3} \right) +$$

$$+ m_{v_{13}}\, e_3 \left(I_{311}\frac{R_1}{b_1} + I_{312}\frac{R_2}{b_2} + I_{313}\frac{R_3}{b_3} \right)$$

donde :

$$m_{v_{11}} = m_{v_{12}} = m_{v_{13}} = \frac{1}{3 \times 236} = 0.0014124 \ m^2/ton$$

$$e_1 = e_2 = e_3 = 0.30 \ m.$$ (espesores imaginarios de los estratos)

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0.35 \ m.$$ (ancho del pilote)

$$\therefore \delta_1 = 0.0014124 \times 0.30 \left(0.4317111 \frac{R_1}{0.35} + 0.0000085 \frac{R_2}{0.35} + 0.0000002 \frac{R_1}{0.35} \right) +$$

$$+ 0.0014124 \times 0.30 \left(0.2253657 \frac{R_1}{0.35} + 0.0002122 \frac{R_2}{0.35} + 0.0000044 \frac{R_3}{0.35} \right) +$$

$$+ 0.0014124 \times 0.30 \left(0.1425233 \frac{R_1}{0.35} + 0.0008537 \frac{R_2}{0.35} + 0.0000200 \frac{R_3}{0.35} \right)$$

$$\delta_1 = 0.0004237 \left(2.2845717 R_1 + 0.0030697 R_2 + 0.0000492 R_3 \right)$$

$$\boxed{\delta_1 = 0.0009680 R_1 + 0.0000013 R_2 + 0.00000002 R_3} \quad --- (5)$$

ISTME	FECHA	PROYECTO Nº.	HOJA Nº. 8
	DESCRIPCION		CALCULO C G B

$$\delta_2 = m_{v21}\, C_1 \left(I_{121} \frac{R_1}{b_1} + I_{122} \frac{R_2}{b_2} + I_{123} \frac{R_3}{b_3} \right) +$$

$$+ m_{v22}\, C_2 \left(I_{221} \frac{R_1}{b_1} + I_{222} \frac{R_2}{b_2} + I_{223} \frac{R_3}{b_3} \right) +$$

$$+ m_{v23}\, C_3 \left(I_{321} \frac{R_1}{b_1} + I_{322} \frac{R_2}{b_2} + I_{323} \frac{R_3}{b_3} \right)$$

donde :

$$m_{v21} = m_{v22} = m_{v23} = \frac{1}{3 \times 330} = 0.0010101 \ m^2/ton$$

$$\delta_2 = 0.0010101 \times 0.3 \left(0.0000263 \frac{R_1}{0.35} + 0.8633852 \frac{R_2}{0.35} + 0.0000263 \frac{R_3}{0.35} \right) +$$

$$+ 0.0010101 \times 0.3 \left(0.0006221 \frac{R_1}{0.35} + 0.4498744 \frac{R_2}{0.35} + 0.0006221 \frac{R_3}{0.35} \right) +$$

$$+ 0.0010101 \times 0.3 \left(0.0022727 \frac{R_1}{0.25} + 0.2820453 \frac{R_2}{0.35} + 0.0022727 \frac{R_3}{0.35} \right)$$

$$\delta_2 = 0.0003030 \left(0.0083460\, R_1 + 4.5580140\, R_2 + 0.0083460\, R_3 \right)$$

$$\boxed{\delta_2 = 0.0000025\, R_1 + 0.0013812\, R_2 + 0.0000025\, R_3} \text{ - - - - } (6)$$

$$\delta_3 = m_{v_{31}}\, C_1 \left(I_{131} \frac{R_1}{b_1} + I_{132} \frac{R_2}{b_2} + I_{133} \frac{R_3}{b_3} \right) +$$

$$+ m_{v_{32}}\, C_2 \left(I_{231} \frac{R_1}{b_1} + I_{232} \frac{R_2}{b_2} + I_{233} \frac{R_3}{b_3} \right) +$$

$$+ m_{v_{33}}\, C_3 \left(I_{331} \frac{R_1}{b_1} + I_{332} \frac{R_2}{b_2} + I_{333} \frac{R_3}{b_3} \right)$$

donde :

$$m_{v_{31}} = m_{v_{32}} = m_{v_{33}} = \frac{1}{3 \times 360} = 0.0009259 \text{ m}^2/\text{ton}$$

$$\delta_3 = 0.0009259 \times 0.30 \left(0.0000002 \frac{R_1}{0.35} + 0.0000085 \frac{R_2}{0.35} + 0.4317111 \frac{R_3}{0.35} \right) +$$

$$+ 0.0009259 \times 0.30 \left(0.0000044 \frac{R_1}{0.35} + 0.0002122 \frac{R_2}{0.35} + 0.2253657 \frac{R_3}{0.35} \right) +$$

$$+ 0.0009259 \times 0.30 \left(0.0000200 \frac{R_1}{0.35} + 0.0008537 \frac{R_2}{0.35} + 0.1425233 \frac{R_3}{0.35} \right)$$

$$\delta_3 = 0.0002778 \left(0.0000703 R_1 + 0.0030697 R_2 + 2.2845717 R_3 \right)$$

$$\boxed{\delta_3 = 0.00000002 R_1 + 0.0000009 R_2 + 0.0006347 R_3} \text{ ---- } (7)$$

c) Compatibilidad de Deformaciones

Substituyendo las ec. ⑤ y ⑥ en la ① :

$$1163.855767\,(3.5\,\theta_1 - 0.0009680\,R_1 - 0.0000013\,R_2 - 0.00000002\,R_3 + 0.0000025\,R_1 +$$

$$+ 0.0013812\,R_2 + 0.0000025\,R_3) + 6.0416667\,R_1 + 0.2109375\,R_2 = 0$$

$$\boxed{4073.495185\,\theta_1 + 4.9179640\,R + 1.8169421\,R_2 + 0.0028864\,R_3 = 0} \cdots (8)$$

Ahora substituyendo las ecuac. ⑤ y ⑦ en la ② :

$$1163.855767\,(7\,\theta_1 - 0.0009680\,R_1 - 0.0000013\,R_2 - 0.00000002\,R_3 + 0.00000302\,R_1 +$$

$$+ 0.0000009\,R_2 + 0.0006347\,R_3) + 74\,R_1 + 25.37500\,R_2 + 0.6666667\,R_3$$

$$\boxed{8146.990369\,\theta_1 + 72.8734109\,R_1 + 25.3745345\,R_2 + 1.4053427\,R_3 = 0} \cdots (9)$$

Por lo que nuestro sistema de ecuaciones por resolver serán las ecuaciones (3), (4), (8), (9) :

VISTO MATRICIALMENTE, EL SISTEMA DE ECUACIONES QUEDA :

$$\begin{bmatrix} \overset{1163.856}{-1163.855767} & 6.5833333 & 17.5000000 & 1.3333333 \\ 0.0000000 & 2.0000000 & 3.0000000 & 2.0000000 \\ 4,073.495185 & 4.9179640 & 1.8169421 & 0.0020864 \\ 8,146.990369 & 72.8734109 & 25.3745345 & 1.4053427 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} \theta_1 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Delta = 6907835.563$

$\theta = 0.0000551169$

$r_1 = 0.0103286192$

y su solución es :

programa de la Texas Instrument 59

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_1 &= 0.0000545561 \\ R_1 &= 0.0074472958 \text{ ton/m} \\ R_2 &= -0.1446625494 \text{ ton/m} \\ R_3 &= 1.909546528 \text{ ton/m} \end{aligned}}$$

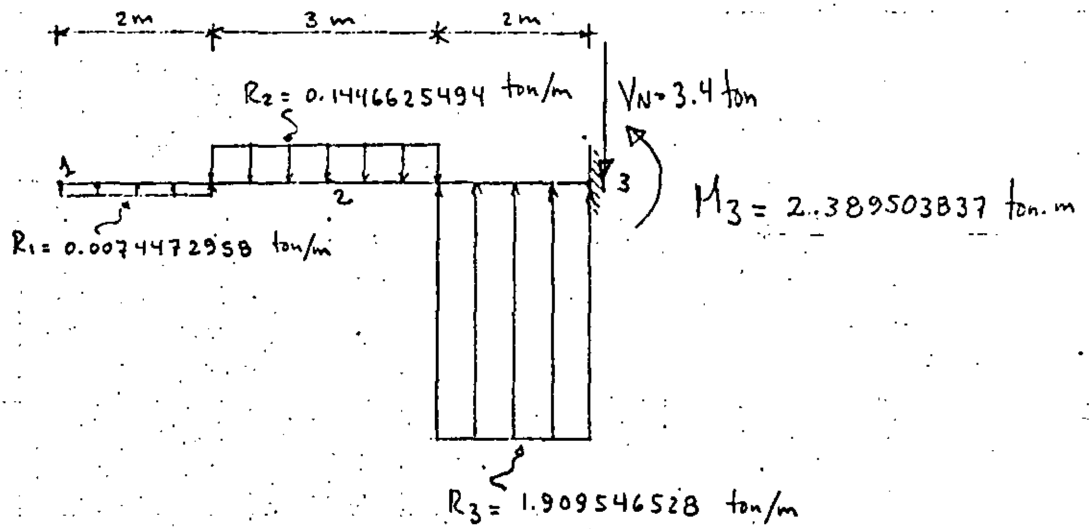
$r_2 = -0.1538938726$

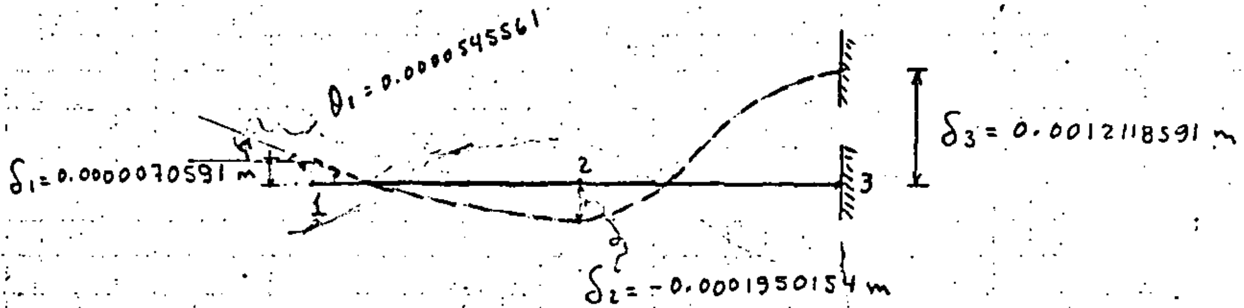
$r_3 = 1.92045219$

Substituyendo estos valores en ⑤, ⑥ y ⑦ da :

$$\boxed{\begin{aligned} \delta_1 &= 0.0000070591 \text{ m} \\ \delta_2 &= -0.0001950154 \text{ m} \\ \delta_3 &= 0.0012118591 \text{ m} \end{aligned}}$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS DATOS :





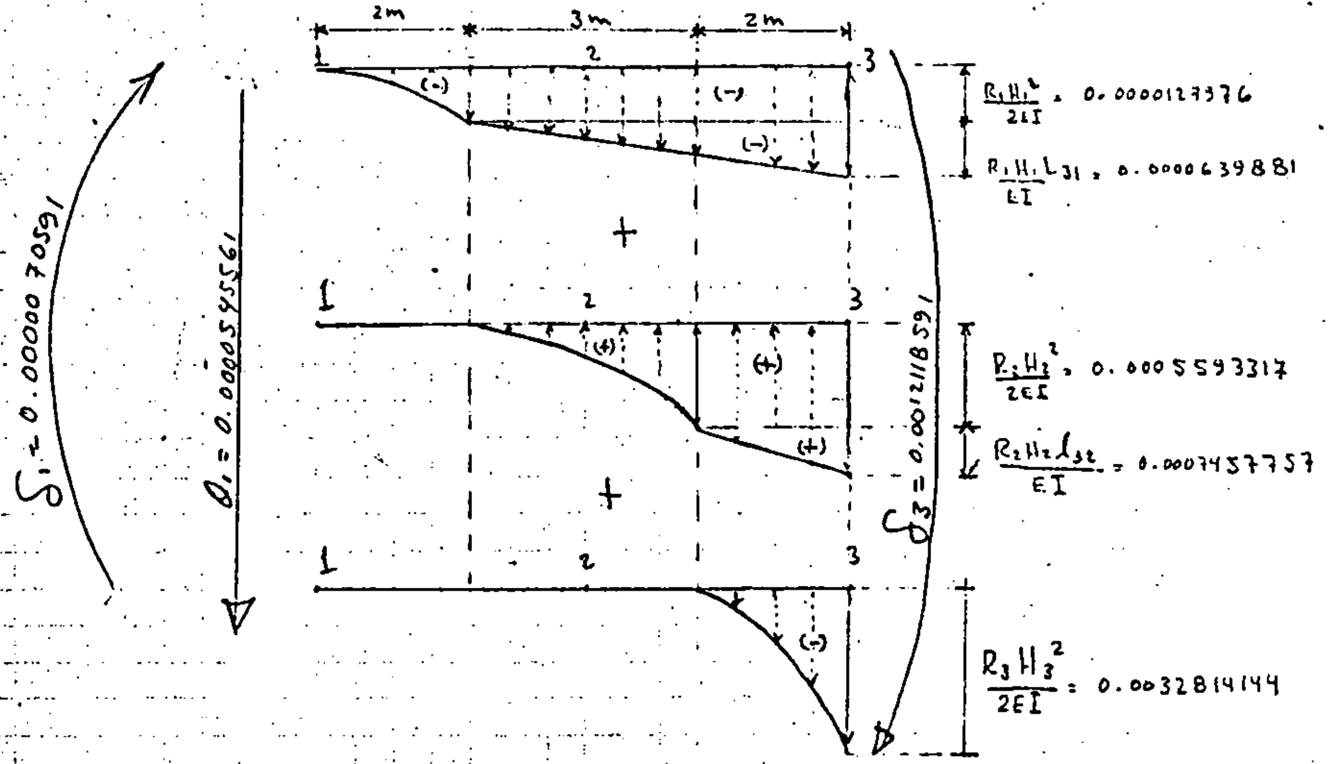
$$M_3 = [0.0074472958 \times 2]\,6 - [0.1446625494 \times 3]\,3.5 + [1.909546528 \times 2]\,1$$

$$\boxed{M_3 = 2.389503837 \text{ ton.m}}$$

FECHA	PROYECTO Nº.	HOJA Nº. /3
DESCRIPCION		CALCULO CGB

COMPROBACIÓN :

Por Superposición de causas y efectos :



Haciendo Σ momentos en el punto "3" de la viga conjugada :

$$\underbrace{-0.0000070591}_{\delta_1} - 0.0000545561 \times 7 - 0.0000127976 \times \frac{2}{3}[5.5] -$$

$$- 0.0000127976 \times 5 [2.5] - 0.0000639881 \times \frac{5}{2} [5/3] + 0.0005593317 \times \frac{3}{3} [2.75] +$$

$$+ 0.0005593317 \times 2 [1] + 0.0007457757 \times \frac{2}{2} [2/3] - 0.0032814144 \times \frac{2}{3} [0.5] =$$

$$= \underbrace{-0.0012118591}_{\delta_3}$$

$$\boxed{-0.0012118594 \doteq 0.0012118591}$$

ANÁLISIS SÍSMICO DE CIMENTACIONES

Agustín Deméneghi Colina*

Cuando se realiza el análisis sísmico de una cimentación, es usual que se cuente con un coeficiente sísmico para la región en cuestión, dado por el código del Estado donde se construirá la estructura correspondiente. Con este coeficiente sísmico se procede al análisis y diseño de la estructura, incluyendo desde luego en éste al de la estructura de cimentación.

Sin embargo, cuando el subsuelo del sitio está formado por sedimentos de consistencia blanda, se presenta un fenómeno de amplificación de las ondas sísmicas que llegan al lugar, el cual consiste en que, en la base constituida por terreno firme, se presenta una cierta aceleración, mientras que en la superficie del suelo blando la aceleración puede ser varias veces mayor que la del terreno firme (fig 1).

El comportamiento anterior se debe a que ocurre, por lo menos en forma parcial, la resonancia del suelo blando. Para ilustrar este fenómeno consideremos un sistema de un grado de libertad como el mostrado en la fig 2, en el que la base se somete a un movimiento dado por

$$x_o = a \text{ sen } \omega t$$

La velocidad de la base vale $\dot{x}_o = a \, \omega \cos \omega t$

y la aceleración $\ddot{x}_o = - a w^2 \text{ sen } \omega t$

La respuesta de la masa está dada por (Newmark y Rosenblueth 1976)

Desplazamiento relativo $y = a B_d \text{ sen } (\omega t - \phi)$

---

* Profesor del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM

Velocidad relativa $\dot{y} = a\ \omega\ B_d \cos\ (\omega\ t - \phi)$

Aceleración relativa $\ddot{y} = -\ a\ \omega^2\ B_d\ \text{sen}\ (\omega\ t - \phi)$

En las expresiones anteriores

$$B_d = \frac{1}{\sqrt{[\ 1 - \frac{1}{(\frac{\omega}{\omega_1})^2}\ ]^2 + [\ 2\ \zeta\ \frac{1}{(\frac{\omega}{\omega_1})}\ ]^2}}$$

$$\phi = \text{ang tan} \frac{2\ \zeta\ \frac{\omega}{\omega_1}}{1 - (\ \frac{\omega}{\omega_1}\ )^2}$$

ω_1 es la frecuencia circular del sistema $\omega_1 = \sqrt{\ } K\ /\ M$

Los desplazamientos absolutos están dados por

Desplazamiento $x = x_o + y$
Velocidad $\dot{x} = \dot{x}_o + \dot{y}$
Aceleración $\ddot{x} = \ddot{x}_o + \ddot{y}$

Definamos el factor de amplificación de la aceleración como el cociente entre la máxima aceleración absoluta de la masa y la máxima aceleración de la base:

$$f_a = \max\ \ddot{x}\ /\ \max\ \ddot{x}_o$$

En la fig 3 se muestra la variación de f_a con el cociente $T_1\ /\ T$, para amortiguamientos de 2 y 10 % del amortiguamiento crítico.

Recordemos que los períodos están dados por

$T_1 = 2\ \pi\ /\ \omega_1$ y $T = 2\ \pi\ /\ \omega$

·34

Se observa en la fig 3 que la amplificación de la aceleración depende del cociente T_1 / T y del amortiguamiento. La máxima amplificación se presenta cuando T_1 / T = 1 ; al aumentar el amortiguamiento decrece el factor f_a. Para T_1 / T → ∞ la amplificación de la aceleración es nula.

Un fenómeno similar sucede en el suelo blando, en el que éste hace las veces de la masa del ejemplo anterior. Por lo tanto, si el terreno firme vibra con un período similar al del estrato de suelo blando, se presenta una amplificación de la aceleración del terreno firme. Vemos entonces que la aceleración en la superficie del suelo blando depende fundamentalmente del cociente T_{s1}/ T , donde T_{s1} es el período natural de vibración del estrato blando, y T es el período dominante de vibración de las ondas sísmicas.

Existen diversos métodos para estimar el período natural de vibración de un suelo blando; uno de estos métodos es debido a Zeevaert (1973). Para un estrato de suelo homogéneo (fig 1), los períodos de vibración están dados por

$$T_{sn} = 4 H \sqrt{\rho / G} / 2n - 1 \qquad \text{para} \quad n = 1, 2, ...$$

donde ρ = masa específica del suelo
G = módulo de rigidez al cortante dinámico del suelo

El primer modo de vibrar, o modo fundamental, se obtiene para n = 1:

$$T_{s1} = 4 H \sqrt{\rho / G}$$

El perído de vibración de la estructura se halla con los métodos usuales del análisis estructural. Sin embargo, cuando el terreno de cimentación está formado por un suelo blando, es importante considerar además el efecto de balanceo y de traslación horizontal de la cimentación. Así, el período de vibración acoplado de una estructura vale (Normas de Sismo):

35

$$T_1 = \sqrt{T_o^2 + T_x^2 + T_r^2}$$

donde T_o = período fundamental que tendría la estructura si se apoyara sobre una base rígida (este período se debe a la flexibilidad propia de la estructura)

T_x = período natural que tendría la estructura si fuera infinitamente rígida y su base solo pudiera trsladarse en la dirección que se analiza

T_r = período natural que tendría la estructura si fuera infinitamente rígida y su base solo pudiera girar con respecto a un eje horizontal que pasara por el centroide de la superfiece de desplante de la estructura y fuera perpendicualr a la dirección que se analiza

Para el cálculo de los períodos de vibración anteriores, véase el Apéndice de las Normas de Sismo (inciso A7, interacción suelo-estructura).

Una vez que se conocen los períodos de vibración del suelo T_{s1} y de la estructura T_1 , se puede emplear el espectro de respuesta sísmica de Zeevaert (1980) para la determinación del factor de amplificación f_a (fig 4), el cual, en este caso es el cociente de la máxima aceleración en el centro de gravedad de la estructura entre la máxima aceleración en la superficie del terreno blando.

La aceleración en la superficie del terreno la proporciona en la ciudad de México el Reglamento de Construcciones en las Normas de Sismo. Así, en el inciso 3 de éstas, se señala que "la ordenada del esepctro de aceleracones para diseño sísmico "a", expresada como fracción de la aceleración de la gravedad, está dada por la siguiente expresión:

$$a = (1 + 3\ T\ /\ T_a)\ c\ /\ 4\ ,\ \text{si } T \text{ es menor que } T_a\text{"}$$

36

La aceleración en la superficie del suelo se obtiene haciendo T = 0 en esta expresión (pues para T = 0 la estructura vibra igual que la superficie del terreno), por lo tanto $a = c_s = c / 4$ en la superficie. Las aceleraciones para las diferentes zonas estratigráficas del Distrito Federal se presentan a continuación (artículo 206 del Reglamento):

Zona	Coeficiente sísmico c	Coeficiente c_s (superficie)	Aceleración (superficie) cm/s^2
I	0.16	0.04	39
II	0.32	0.08	78
III	0.40	0.10	98

Vemos entonces que, por ejemplo en la zona III, la aceleración de diseño de la superficie del terreno es de 98 cm/s^2.

También se puede utilizar el siguiente criterio para hallar "c" (Normas de Sismo, Apéndice): "en sitios en que se conozca el período dominante del terreno T_{s1} , y que se hallen en las parte sombreadas de la fig 3.1 (de estas Normas), también se adoptará c = 0.4 para estructuras del grupo B, y 0.6 para las del A; fuera de las partes sombreadas se adoptará

$$c = 1.6\ T_{s1} / (4 + T_s^2)$$

Vemos que el coeficiente sísmico depende del período de vibración dominante del suelo T_{s1} . Considerando que el coeficiente sísmico en la superficie $c_s = c / 4$ y que la aceleración en la superficie, en cm/s^2, es igual a c_s por 980, en la fig 5 se presenta la variación de esta aceleración en función del período T_{s1} .

Ejemplo ilustrativo

Determinar la respuesta de aceleración de un edificio sobre un estrato de suelo blando, con las siguientes características:

Masa = 217.5 $t.s^2/m$

Peso = 2133 t

Período de la estructura $T_o = 0.3$ s

Amortiguamiento en la estructura $\zeta_o = 5$ %

Período por rotación $T_r = 0.76$ s

Amortiguamiento en el terreno de cimentación $\zeta_r = 15$ %

Período por traslación $T_x = 0.22$ s

Período del terreno de cimentación $T_{s1} = 2.4$ s

El período acoplado de la estructura vale

$$T_1 = \sqrt{T_o^2 + T_x^2 + T_r^2} = 0.85 \text{ s}$$

Obtenemos el cociente $T_1 / T_{s1} = 0.35$

Para entrar en el espectro de la fig 4 necesitamos el amortiguamiento acoplado del sistema, el cual está dado por (Zeevaert 1980):

$$\zeta_1 = \sqrt{1 - g_1}$$

$$g_1 = g_o\, g_r\, (T_1')^2 / (g_o^2\, T_r^2 + g_r\, T_o^2)$$

donde $T_1' = \sqrt{T_o^2 + T_r^2} = 0.817$ s

$$g_o = 1 - \zeta_o^2 = 0.9975$$

$$g_r = 1 - \zeta_r^2 = 0.9775$$

Sustituyendo $g_1 = 0.98$ $\zeta_o = 0.141$

Es decir, el sistema acoplado tiene un amortiguamiento de 14.1 % .

Entrando al espectro para diseño sísmico (fig 4, Zeevaert 1980), se obtiene un factor de amplificación $f_a = 1.9$.

Considerando una aceleración en la superficie de 98 cm/s^2, la aceleración en el centro de gravedad de la estructura está dada por

$(98)(1.9) = 186 \text{ cm/s}^2$.

Referencias

Newmark, N M y Rosenblueth, E, Fundamentos de Ingeniería Sísmica, Diana, 1976

Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo (RCDF), 1977

Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, 1976

Zeevaert, L, Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions, Van Nostrand Reinhold, 1973

Zeevaert, L, Interacción Suelo-Estructura de Cimentación, Limusa, 1980

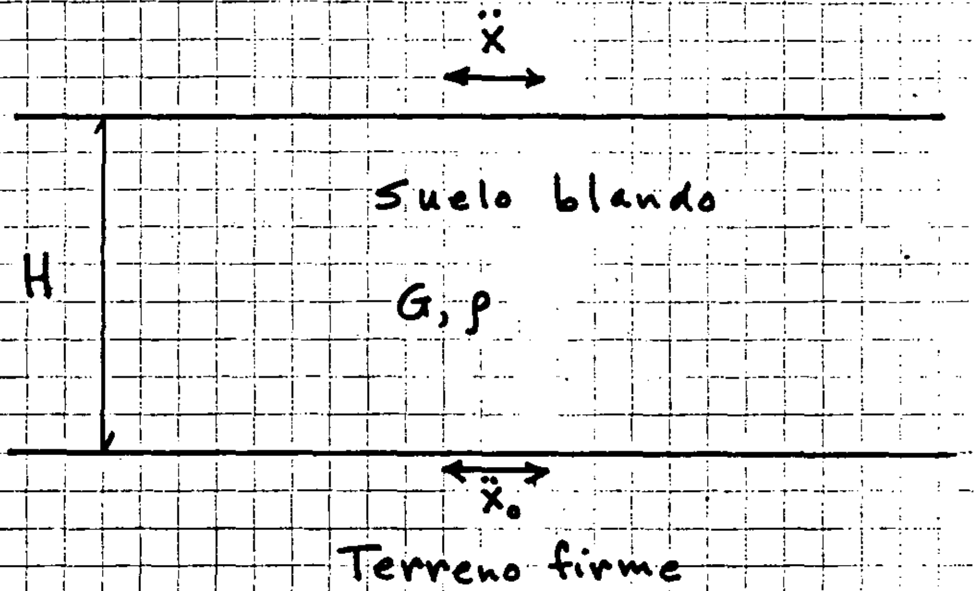


FIG 1

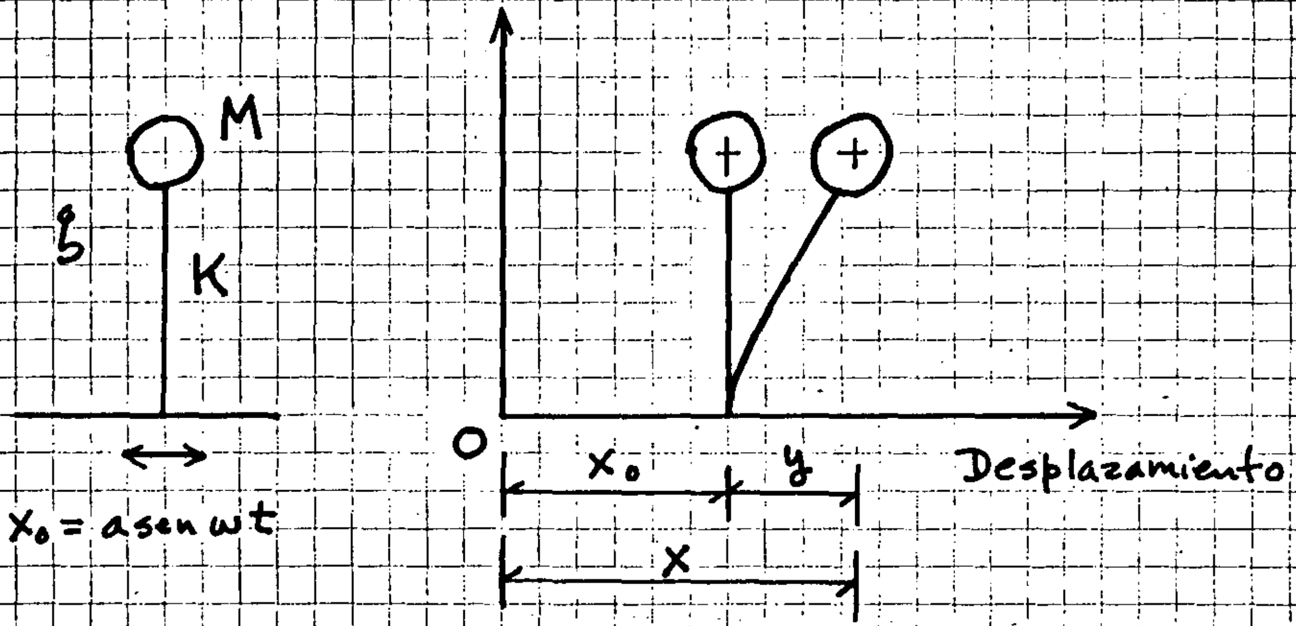


FIG 2

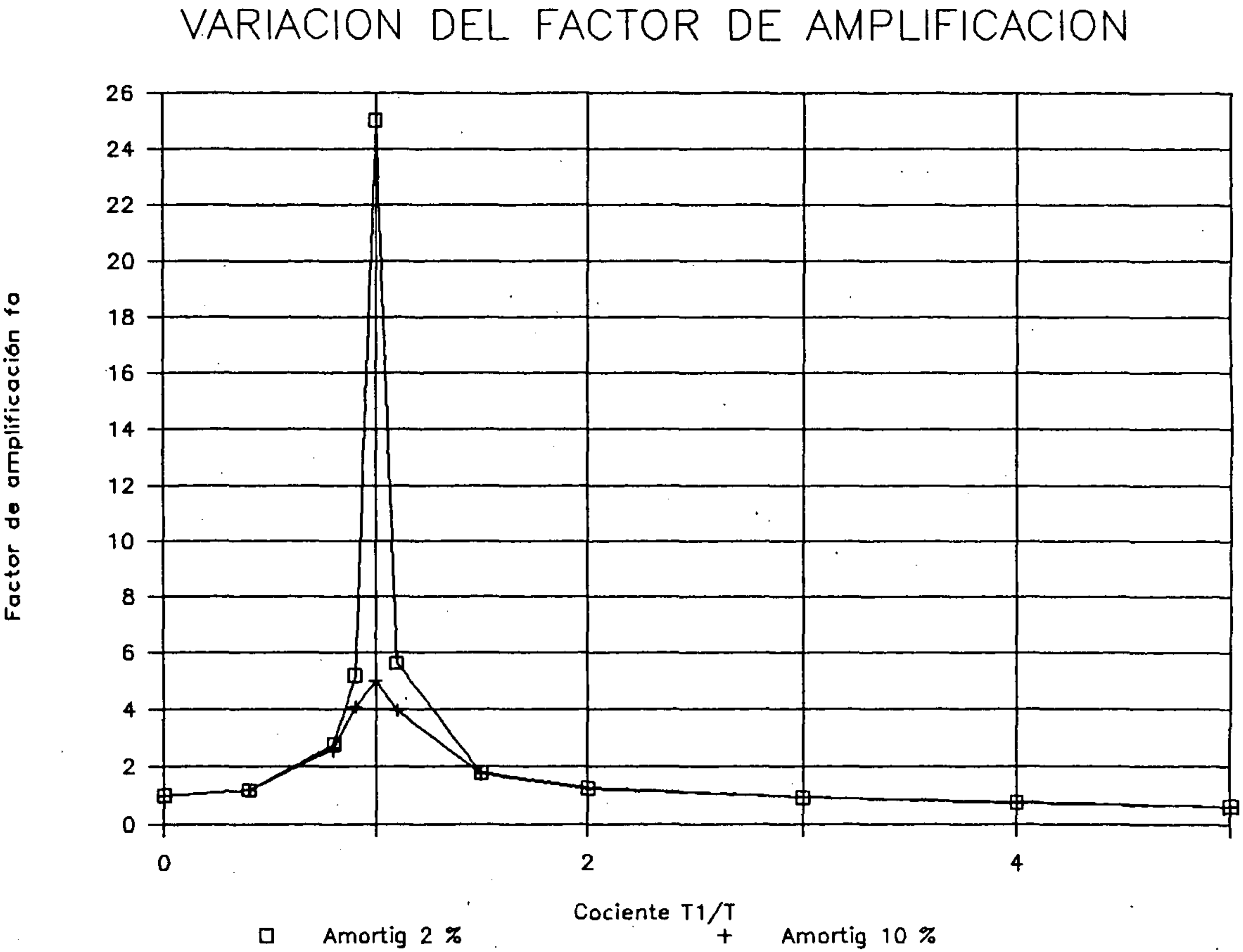
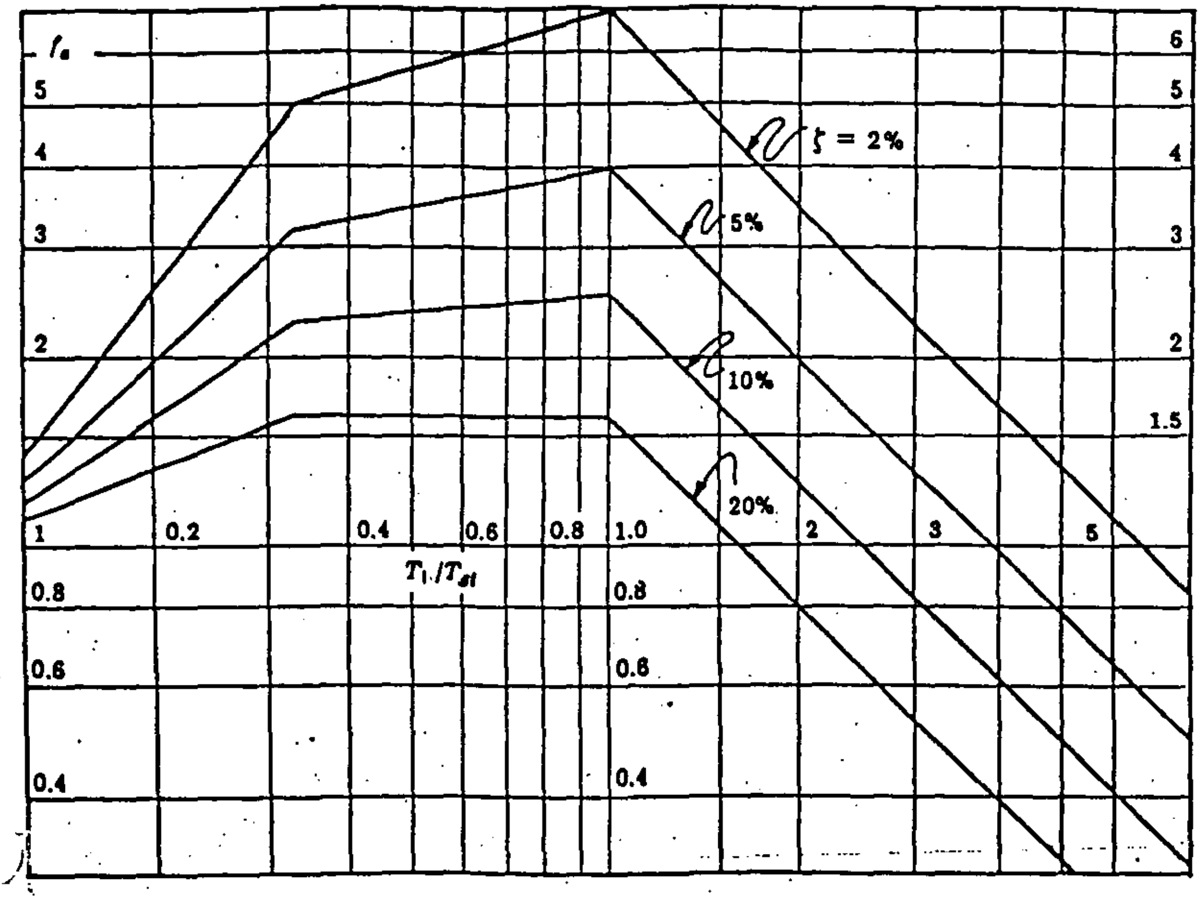

VARIACION DEL FACTOR DE AMPLIFICACION
Factor de amplificación fa
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
2
4
Cociente T1/T
☐ Amortig 2 %
+ Amortig 10 %

FIG 3



Espectro envolvente para diseño sísmico.

FIG 4

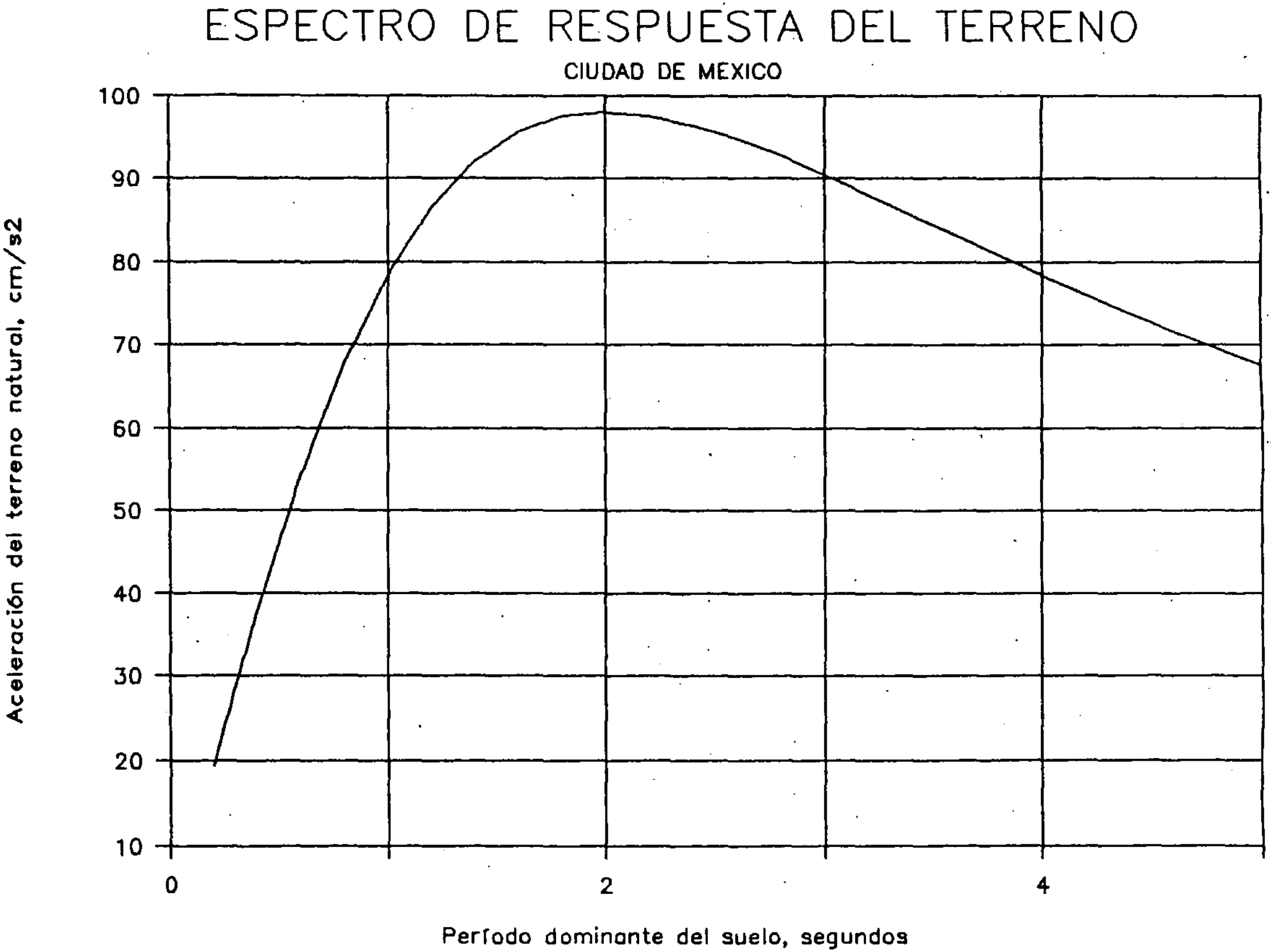

ESPECTRO DE RESPUESTA DEL TERRENO
CIUDAD DE MEXICO
Aceleración del terreno natural, cm/s2
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
2
4
Periodo dominante del suelo, segundos

FIG 5

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

ANALISIS ESTRUCTURAL

INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

DR GUSTAVO AYALA MILLAN

OCTUBRE 1992

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

INDICE

PARTE A. FORMULACION GENERAL.

PARTE B. EL ELEMENTO FINITO

PARTE A - FORMULACION GENERAL

1.- INTRODUCCION. QUE SON LOS ELEMENTOS FINITOS

El método de los elementos finitos (F.E.M.) nació en el campo de las estructuras en los comienzos de la década de los 60, como una extensión de los principios, ya firmemente establecidos, del análisis matricial de estructuras. Aunque este nacimiento ha influido poderosamente en el desarrollo posterior y aplicaciones del método, en la actualidad el F.E.M. puede considerarse como un método numérico general, ciertamente complejo y potente, para resolver una gran mayoría de problemas de la física matemática especialmente aquellos que se formulan como problemas de valores de contorno. Problemas planteados en el área de la mecánica del continuo están, en la mayoría de los casos, particularmente bien adaptados para su solución por este procedimiento.

El F.E.M. ha recibido una atención especial en Ingeniería. La razón puede buscarse en la complejidad de los problemas reales. En efecto, incluso en la hipótesis restrictiva de materiales con leyes constitutivas simples, las condiciones de contorno son complicadas en el sentido de que es prácticamente imposible encontrar un sistema natural de coordenadas en el cual los bordes admitan una cómoda representación. Así, un problema aparentemente simple como es un cilindro elástico (E_p, ν_p) embebido en un semiespacio elástico (E_s, ν_s) (Fig. 1) (que puede representar en

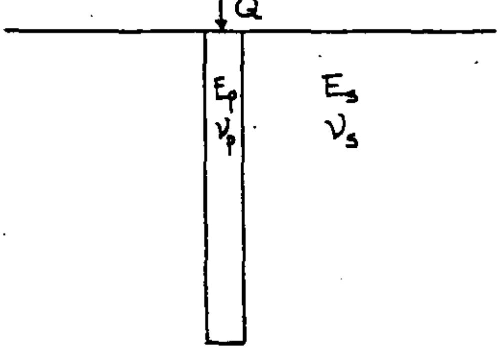


Fig. 1. Ejemplo simple de problema no resoluble analíticamente actualmente.

primera aproximación un modelo que explique el comportamiento de una cimentación por pilotes) se escapa ya a las posibilidades de solución analítica que ofrece la teoría de la Elasticidad. Puede imaginarse la complejidad adicional que introducirían leyes de comportamiento más elaboradas (y reales) de los materiales (comportamiento anelástico y anisótropo por ejemplo) y una geometría interna y variación de los materiales y sus propiedades, es decir su caracter heterogéneo. Pues bien, el F.E.M. se adapta bien a la resolución de estos problemas complejos sin que ello introduzca modificaciones importantes en su formulación básica (ésta puede ser una ventaja sobre el método de las diferencias finitas, que se adapta mal a geometrías complicadas).

Las soluciones analíticas conservan sin embargo su superioridad en tanto en cuanto permiten con facilidad un análisis paramétrico de la solución y gozan de una disponibilidad amplia (¡y gratuita!) para todo aquel interesado en su uso. Por su parte el F.E.M. exige la existencia de programas de cálculo (no es concebible una utilización "manual" del método) que en general tienden a ser de gran magnitud y adaptados a máquinas potentes. Por otra parte los estudios paramétricos son en general muy costosos y por ello cada problema específico debe recibir un tratamiento adaptado a él, que requerirá un cierto grado de "juicio ingenieril" en el usuario, sobre todo a la hora de subdividir el espacio en elementos, como se comentará más adelante.

La Tabla 1 (Desai y Abel, 1972) proporciona una idea de la variedad de problemas que admiten solución via F.E.M. Los problemas a tratar se han dividido en tres amplios grupos: Problemas de equilibrio (o estacionarios: la solución no depende del tiempo); problemas de valores propios, especialmente útiles en dinámica y problemas de propagación (o de valor inicial, no estacionarios o transitorios: el tiempo interviene como variable independiente del análisis).

TABLA 1- APLICACIONES EN INGENIERIA DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (Desai y Abel, 1972).

Areas de Estudio	Problemas de Equilibrio (Estacionarios)	Problemas de Valores propios	Problemas de Propagación (NO estacionarios)
1. Ingeniería de Estructuras. Mecánica Estructural e Ingeniería Aeroespacial.	Análisis de vigas, placas y láminas. Estructuras híbridas complejas. Análisis bidimensional y tridimensional de tensiones Torsión de barras prismáticas.	Estabilidad de Estructuras. Frecuencias naturales y modos de vibración de estructuras. Amortiguamiento viscoelástico lineal.	Propagación de ondas. Respuesta dinámica de estructuras bajo cargas no periódicas. Problemas viscoelásticos y termoviscoelásticos acoplados. Problemas viscoelásticos.
2. Mecánica de suelos, Ingeniería de cimentaciones y mecánica de rocas.	Análisis bi y tridimensional de tensiones. Problemas de construcción y excavación. Problemas de estabilidad de taludes. Interacción suelo-estructura. Análisis de presas, túneles, sondeos, diques, etc. Filtración estacionaria de fluidos en suelo y roca.	Frecuencias naturales y modos de vibración de combinaciones estructura-suelo.	Filtración no estacionaria en suelos y rocas. Flujo con consolidación en medio poroso deformable. Propagación de ondas en suelos y rocas. Interacción dinámica suelo-estructura.
3. Conducción de calor.	Distribución estacionaria de temperatura en sólidos y líquidos.		Flujo no estacionario de calor en sólidos y líquidos.
4. Hidrodinámica, Ingeniería hidráulica y recursos hidráulicos.	Soluciones de flujo potencial de fluidos.Soluciones de flujo viscoso de fluidos. Filtración estacionaria en acuíferos y medios porosos. Análisis de estructuras hidráulicas y presas.	Mareas de lagos y puertos (períodos naturales y modos de oscilación). Salpicadura de líquidos en contenedores flexibles y rígidos.	Estudios de salinización y contaminación de estuarios (difusión) Transporte de sedimentos. Flujo no estacionario. Propagación de ondas. Filtración no estacionaria en medio poroso y acuíferos.
5. Ingeniería nuclear	Análisis de estructuras de contención del reactor. Distribución estacionaria de temperatura en reactor y estructuras del reactor.		Análisis dinámico de estructuras de contención del reactor. Análisis termo viscoelástico.

En el F.E.M. el continuo queda representado por un conjunto de subdivisiones que llamaremos elementos, unidos mediante una serie de nodos o puntos nodales en los que se buscará la solución, que de este modo se obtiene únicamente en un número finito de puntos, lo que no impide que ésta se pueda encontrar en cualquier otro punto (basta relacionar el comportamiento en el interior de cada elemento con el comportamiento de los nodos que integren el elemento). En realidad esta operación es previa a la formulación y básica para el desarrollo del método. Relaciones de este tipo unidas a principios básicos que fundamentalmente expresan el <u>equilibrio</u> de una forma integral permiten obtener la "respuesta" de un elemento de la misma manera que se caracteriza el comportamiento de un elemento de una malla en sistemas discretos convencionales (estructuras de barras, redes de tuberías, circuitos eléctricos, etc.). Así, el conocimiento de la relación caudal-gradiente en una tubería caracteriza este elemento y es el punto de partida para la obtención de caudales y alturas piezométricas en una red de distribución.

Conocido el comportamiento del elemento el establecimiento de relaciones (de tipo matricial) valederas para un conjunto de elementos interconectados es una operación de "ensamblaje" común a todos los sistemas discretos, y en ella no se diferencia el F.E.M. de otros procedimientos de análisis de sistemas discretos como puede ser el cálculo matricial de estructuras, el cálculo de redes de tuberías, etc. Con el fin de ilustrar estos conceptos en el análisis de un sistema discreto, se formula a continuación el sistema de ecuaciones que gobierna el flujo en una red de tuberías, y se destacan los conceptos que comparte con un método como el de los elementos finitos.

1.1.- SISTEMAS DISCRETOS

La Fig. 2 representa una red de distribución compuesta por

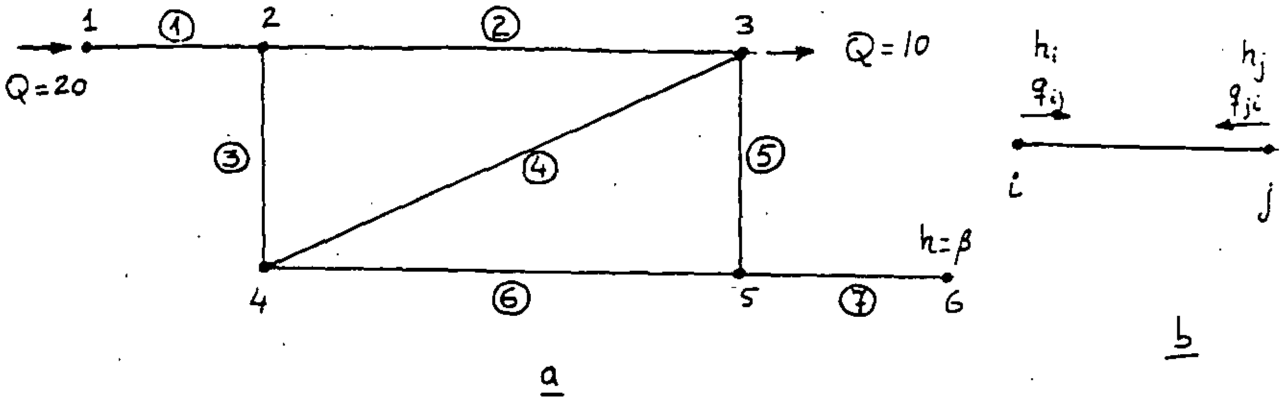


Fig. 2- Red de distribución como ejemplo de sistema discreto.

tuberías (elementos) (caracterizadas por una numeración, ⓘ) interconectadas en los nodos, i. Las variables que caracterizan el problema están localizados en los nudos y se refieren al caudal q y a la altura piezométrica, h. El análisis del flujo en tuberías proporciona la siguiente relación entre ambas magnitudes:

$$\Delta h = c\,q^2 \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1.1)$$

donde c es una constante que depende de la geometría de la conducción y de sus propiedades de fricción. A partir de la Ec. (1.1)

$$q = \pm\left(\Delta h / c\right)^{1/2} \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1.2)$$

Si le damos al caudal un sentido direccional, la Ec (1.2) puede escribirse,

$$q = \alpha\,\Delta h\,|\Delta h|^{-1/2} \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1.3)$$

donde $\alpha = c^{-1/2}$.

Consideremos entonces, en la Fig. 2b un "elemento" de esta red. Es posible asignar los caudales siguientes a cada uno de los nudos:

$$q_{ij} = \alpha |h_i - h_j|^{-1/2} (h_i - h_j) \qquad . \quad . \quad . \qquad (1.4a)$$

$$q_{ji} = \alpha |h_i - h_j|^{-1/2} (h_j - h_i) \qquad . \quad . \quad . \qquad (1.4b)$$

que puede expresarse en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} q_{ij} \\ q_{ji} \end{Bmatrix} = \alpha |h_i - h_j|^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_i \\ h_j \end{Bmatrix} \qquad . \quad . \quad . \qquad (1.5a)$$

o bien $$\{q\}^e = [k]^e \{h\}^e , \qquad . \quad . \quad . \qquad (1.5b)$$

donde los elementos k_{ij} de $[k]^e$ pueden identificarse en la ecuación (1.5a), y el superíndice e representa que esta ecuación está referida exclusivamente a un elemento.

Para proseguir, dos condiciones (que definen el concepto de "red" en este caso) deben añadirse: a) igualdad de alturas piezométricas en cada nudo, es decir, los valores nodales de h correspondientes a un elemento son comunes a todos los elementos que confluyen en el nudo (en términos estructurales hablaríamos de compatibilidad de desplazamientos) y b) continuidad de caudales en los nudos (equivalente al concepto estructural de equilibrio).

El primer requisito es satisfecho si efectivamente las alturas piezométricas las hacemos únicas en cada nodo. En cuanto a la segunda condición, se ha de exigir que la suma de caudales que confluyen en un nudo sea igual al suministro a gasto que se induzca en ese punto. Como ejemplo si particularizamos la Ecuación (1.5) para los "elementos" ①, ② y ③, se obtiene

$$\begin{Bmatrix} q_{12} \\ q_{21} \end{Bmatrix} = \alpha_1 \left| h_1 - h_2 \right|^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{Bmatrix} \qquad (1.6a)$$

$$\begin{Bmatrix} q_{23} \\ q_{32} \end{Bmatrix} = \alpha_2 \left| h_2 - h_3 \right|^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_2 \\ h_3 \end{Bmatrix} \qquad (1.6b)$$

$$\begin{Bmatrix} q_{24} \\ q_{42} \end{Bmatrix} = \alpha_3 \left| h_2 - h_4 \right|^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_2 \\ h_4 \end{Bmatrix} \qquad (1.6c)$$

La continuidad en los nudos 1 y 2, por ejemplo, exige que

$$q_{12} = Q_1 = 20 \qquad (1.7a)$$

$$q_{21} + q_{23} + q_{24} = Q_2 = 0 \qquad (1.7b)$$

donde Q_1 y Q_2 son los caudales suministrados o introducidos en la red. Es fácil entonces identificar las contribuciones que cada altura piezométrica h_i aporta al caudal Q_i correspondiente a cada nudo. En particular es inmediato construir los términos del sistema de ecuaciones

$$[K]\{h\} = \{Q\} \qquad (1.8)$$

que representa el comportamiento global del sistema.

Así, por ejemplo /

$$K_{11} = \alpha_1 |h_1 - h_2|^{-1/2} \qquad (1.9a)$$

$$K_{12} = -\alpha_1 |h_1 - h_2|^{-1/2} = K_{21} \qquad (1.9b)$$

$$K_{22} = \alpha_1 |h_1 - h_2|^{-1/2} + \alpha_2 |h_2 - h_3|^{-1/2} + \alpha_3 |h_2 - h_4|^{-1/2} \qquad (1.9c)$$

etc.

El resto de los coeficientes se ha indicado en la Fig. 3. Puede observarse que la matriz de coeficientes $[K]$ es:

- Simétrica: $K_{ij} = K_{ji}$
- En banda: los elementos no nulos están situados en una zona o banda centrada en la diagonal principal. En cada caso el semiancho de banda es 2. Esta propiedad es importante a la hora de almacenar estas matrices de coeficientes en el ordenador.
- Diagonalmente dominante: $|K_{ii}| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |K_{ij}|$

  El hecho de ser la matriz diagonalmente dominante permite la resolución numérica del sistema mediante métodos iterativos rápidamente convergentes, siempre que el sistema de ecuaciones a resolver sea lineal.

El proceso de obtención de esta matriz $[K]$, cuyos miembros vienen a representar coeficientes de influencia en el sentido de que K_{ij} es el caudal resultante en el nudo i cuando la altura piezométrica en j experimenta un incremento unidad, y al mismo tiempo se mantienen nulas las alturas piezométricas restantes (*), es una operación fundamental en cualquier problema resuelto mediante F.E.M. La matriz $[K]$ recibe el nombre de matriz de rigidez en mecánica estructural por razones obvias si $\{h\}$ y $\{Q\}$ representaran corrimientos y esfuerzos respectivamente. De forma simbólica puede escribirse

$$[K] = \sum_e [k]^e \qquad (1.10)$$

y análogamente

$$\{Q\} = \sum_e \{q\}^e \qquad (1.11)$$

(*) Este concepto puede utilizarse para una formulación directa de la matriz $[K]$.

$$\left[\begin{array}{cccccc}
h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 \\
\alpha_1|h_1-h_2|^{-1/2} & -\alpha_1|h_1-h_2|^{-1/2} & & & & \\
 & \begin{array}{l}\alpha_1|h_1-h_2|^{-1/2}\\+\alpha_2|h_2-h_3|^{-1/2}\\+\alpha_3|h_2-h_4|^{-1/2}\end{array} & -\alpha_2|h_2-h_3|^{-1/2} & -\alpha_3|h_2-h_4|^{-1/2} & & \\
 & & \begin{array}{l}\alpha_2|h_2-h_3|^{-1/2}\\+\alpha_4|h_3-h_4|^{-1/2}\\+\alpha_5|h_3-h_5|^{-1/2}\end{array} & -\alpha_4|h_3-h_4|^{-1/2} & -\alpha_5|h_3-h_5|^{-1/2} & \\
 & & & \begin{array}{l}\alpha_3|h_2-h_4|^{-1/2}\\+\alpha_4|h_3-h_4|^{-1/2}\\+\alpha_6|h_4-h_5|^{-1/2}\end{array} & -\alpha_6|h_4-h_6|^{-1/2} & \\
 & \text{SIMETRICO} & & & \begin{array}{l}\alpha_5|h_3-h_5|^{-1/2}\\+\alpha_6|h_4-h_5|^{-1/2}\\+\alpha_7|h_5-h_6|^{-1/2}\end{array} & -\alpha_7|h_5-h_6|^{-1/2} \\
 & & & & & \alpha_7|h_5-h_6|^{-1/2}
\end{array}\right]
\left\{\begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{array}\right\}
=
\left\{\begin{array}{c} Q_1=20 \\ Q_2=0 \\ Q_3=-10 \\ Q_4=0 \\ Q_5=0 \\ Q_6 \end{array}\right\}$$

Fig. 3. Organización y construcción del sistema global de ecuaciones correspondientes al ejemplo representado en la Fig 2a.

bien entendido que la suma se efectúa, para cada casilla de K, (que representa una combinación caudal en un nudo i- altura piezométrica en un nudo j) a partir de los elementos de $[k]^e$ que supongan una contribución a ese caudal en el nudo i por efecto de la existencia de una altura piezométrica en j. Con el fin de que ecuaciones como la(1.10) sean más correctas puede imaginarse que cada matriz $[k]^e$ adquiere la dimensión total de $[K]$ mediante la adecuada adición de términos nulos en las casillas no directamente implicadas.

Sistemas de ecuaciones como el representado en la Fig. 3 pueden resolverse si se introducen en él las condiciones de contorno que en nuestro caso están representadas por la condición $h_6=\beta$ (el nodo 6 pertenece a un depósito cuya altura piezométrica se ha fijado arbitrariamente en β). Ello puede hacerse de dos maneras: 1) Alterando la columna $\{Q\}$ de tal manera que sus nuevos elementos sean $Q_i^* = Q_i - K_{i6}\,\beta$; $i=1,\dots,5$ y $Q_6^* = \beta$ y hacer nulos los elementos de la fila y columna 6 excepto el término diagonal (6,6) que se hace unidad; 2) Multiplicar el término diagonal (6,6) (o el correspondiente en su caso) por un número alto, N, y al mismo tiempo modificar el término Q:

$$K_{66}^* = K_{66}\cdot N \qquad ; \qquad Q^* = K_{66}\,N\,\beta \; .$$

Con ello, la solución para h_6 será muy aproximadamente β .Con ambos procedimientos se evita una alteración del tamaño de las matrices lo que es indeseable desde el punto de vista de la eficacia del cálculo automático.

Debe advertirse que en nuestro ejemplo la "respuesta" de un elemento del sistema (Ec. (1.3)) es no lineal y ello se traduce en un sistema no lineal de ecuaciones que deberá ser resulto por alguno de los métodos numéricos de que se dispone, por ejemplo, Newton-Raphson. (Hildebrand, 1974).

En cualquier caso el vector solución $\{h\}$ puede utilizarse en las ecuaciones individuales de cada elemento. (Ecs. (1.4)) para el cálculo de caudales en cualquier tubería de la red.

Volviendo al tema central de discusión, el F.E.M. permite la adopción de técnicas semejantes a los expuestos para la resolución de problemas en el continuo. Para ello deben darse los siguientes pasos:

1) Discretización del continuo en un número finito de elementos interconectados mediante puntos nodales o nodos. Esta división, en principio puramente geométrica ha de hacerla el analista con un cierto juicio "ingenieril" sobre la solución que espera obtener. Así por ejemplo en regiones donde los gradientes de las magnitudes a calcular sean altos será preciso disponer de un número de elementos suficientemente elevado como para permitir la caracterización correcta de esta variación.
2) Obtención de la ley de comportamiento de cada elemento. En problemas estructurales se trataría de determinar las relaciones solicitación-corrimientos de cada elemento. En un problema de flujo se buscarían relaciones caudales-alturas piezométricas etc. Quizá sea este el problema crucial en la formulación del F.E.M. A su desarrollo se ha debido probablemente el amplio uso que el método disfruta en la actualidad. La obtención de estas leyes de comportamiento, y en particular la denominada "matriz de rigidez" del elemento (Ec. (1.5)) suele hacerse en la actualidad a partir de formulaciones integrales (*) de los problemas del continuo, que fundamentalmente pueden dividirse en: principios variacionales, principio de los trabajos virtuales o equivalente y métodos de residuos ponderados, a partir de las ecuaciones diferenciales que gobiernen el fenómeno en cuestión. Junto a ellos, es necesario disponer de funciones aproximadas, que representen la variación dentro de cada elemento, de las variables independientes del

---

(*) La conveniencia de utilizar formulaciones integrales radica en la posibilidad de descomponer estas integrales sobre un dominio en suma de integrales extendidas sobre subdominios (elementos finitos) que en conjunto constituyan el dominio total. Con ello nos aproximamos a la posibilidad de formular de manera simple (equivalente a la Ec. (1.10))las ecuaciones de comportamiento global de un cuerpo a partir de la adición de las contribuciones individuales de cada elemento.

fenómeno o asociadas, en función de los valores (auténticas incógnitas del problema) que éstas adopten en un número discreto de puntos (nodos) generalmente en el contorno de estos elementos. (+)

3) Obtención de las ecuaciones de comportamiento del sistema global en función de las ecuaciones parciales desarrolladas para cada elemento. Se trata de realizar el "ensamblaje" de ecuaciones expuesto anteriormente y representado simbólicamente por la Ec. (1.10) Este proceso seguirá los mismos criterios mencionados sin alteración sustancial de los mismos.

4) Solución del sistema simultáneo de ecuaciones con las correspondientes condiciones de contorno. En general, los sistemas que se obtienen constan de un número elevado de ecuaciones que, sin embargo, suelen dar origen a matrices de rigidez simétricas dispersas y en banda, que admiten una reducción del almacenamiento necesario y la adopción de métodos eficaces de solución, actualmente bien desarrollados.

5) Cálculo de variables asociadas a la solución obtenida en cualquier punto del medio. Las funciones de variación desarrollados para cada elemento permiten extender la solución a cualquier punto en su interior. Por otra parte, son necesarias en ocasiones ciertas magnitudes derivadas de la solución fundamental. Así por ejemplo, en la mecánica del sólido suele ser común utilizar los desplazamientos como incógnitas primarias. A partir de ellos es inmediato derivar deformaciones y eventualmente tensiones a partir de las relaciones que ofrece la cinemática de la deformación y las ecuaciones constitutivas del medio.

(+) En ocasiones, son también, posibles formulaciones directas de las ecuaciones correspondientes a un elemento. Este tipo de formulaciones se han utilizado con éxito en problemas de tipo estructural fundamentalmente, donde la intuición física de los fenómenos, está generalmente ~~en~~ general, más desarrollada por analogía con los métodos de cálculo matricial de estructuras.

2.- PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

Consideremos un campo tensional, σ_{ij} , en equilibrio, correspondiente a un cuerpo sólido solicitado por fuerzos de masa X_i por unidad de volumen y tensiones en el contorno $\bar{T}_i$. Las ecuaciones de equilibrio se escriben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} + X_1 &= 0 \\ \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3} + X_2 &= 0 \\ \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2.1)$$

y en el contorno las tensiones internas T seran iguales a las $\bar{T}_i$

$$T_i - \bar{T}_i = 0 \qquad (2.2)$$

Introduzcamos en este cuerpo un sistema arbitrario de pequeños desplazamientos δu_i (desplazamientos virtuales) compatibles con las condiciones de borde, es decir, y refiriéndonos al problema representado en la Fig. 4, $\delta u_i = 0$ en la porción S_1 del borde donde se especifiquen los desplazamientos.

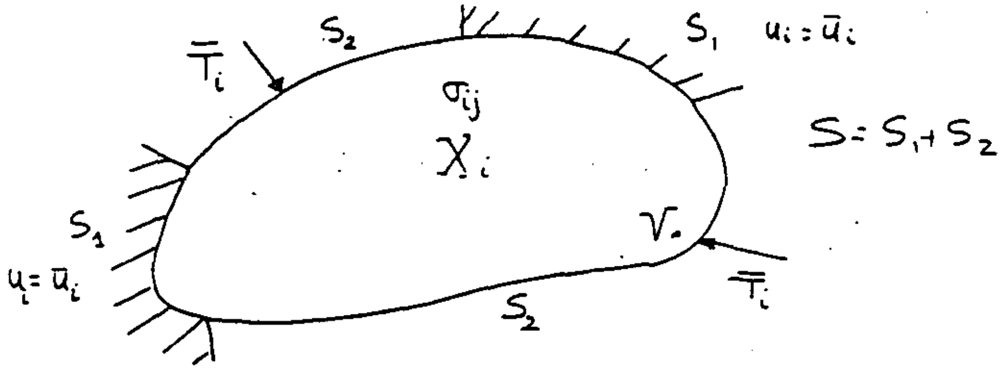


Fig. 4. Cuerpo sólido en equilibrio bajo la acción de fuerzas exteriores y condiciones de sustentación en bordes.

Multipliquemos el conjunto de ecuaciones (2.1) y (2.2) por los desplazamientos virtuales δu_i . Si integramos en el volumen V puede escribirse,

$$\underset{(a)}{\int_V \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\,\delta u_i\, dV} + \underset{(b)}{\int_V X_i\,\delta u_i\, dV} - \underset{(c)}{\int_{S_2} (T_i - \bar{T}_i)\,\delta u_i\, dS} = 0 \quad \ldots \quad (2.3)$$

donde la repetición de índices tiene el sentido habitual de sumatorio. Un término arbitrario del sumando (a) en la Ec. (2.3) puede escribirse

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta u_i = \frac{\partial(\sigma_{ij}\,\delta u_i)}{\partial x_j} - \sigma_{ij}\,\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \qquad (2.4)$$

donde se ha utilizado la intercambialidad del operador derivada parcial $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ y variación (δ). Introduciendo (2.4) en (2.3) y haciendo uso del teorema de la divergencia (*)

$$\int_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i \, dS - \int_V \sigma_{ij}\,\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) dV + \int_V X_i\,\delta u_i\, dV - \int_{S_2} (T_i - \bar{T}_i)\,\delta u_i\, dS = 0 \qquad (2.5)$$

La integral sobre S del primer término de la Ec. (2.5) puede suponerse actuando sobre S_2 pues el sistema de desplazamientos virtuales elegido satisfacía $\delta u_i = 0$ en S_1. Por otra parte, en el contorno,

$$\sigma_{ij} n_j = T_i \qquad (2.6)$$

y por tanto la Ec (2.5) queda reducida, después de las simplificaciones que esto introduce, a

$$-\int_V \sigma_{ij}\,\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) dV + \int_V X_i\,\delta u_i\, dV + \int_{S_2} \bar{T}_i\,\delta u_i\, dS = 0 \qquad (2.7)$$

Es conveniente para los desarrollos posteriores utilizar una notación vectorial para tensiones y deformaciones con el convenio siguiente (+):

$$\{\sigma\}^T = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}) \qquad (2.8)$$

$$\{\epsilon\}^T = (\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{12}, 2\epsilon_{13}, 2\epsilon_{23}) = (\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23})^{(o)} \qquad (2.9)$$

(*) $\int_V \operatorname{div} \bar{A}\, dV = \int_S \bar{A}\cdot\bar{n}\, dS$ o bien $\int_V \frac{\partial A_i}{\partial x_i} dV = \int_S A_i n_i\, dS$

(+) Se considerarán simétricos ambos tensores. Así son únicamente 6 las componentes independientes.

(o) Ver nota al pie de la página siguiente

Utilizando así mismo una notación vectorial obvia para el resto de magnitudes que aparecen en la Ec. (2.7), puede escribirse

$$\int_V \{\delta\epsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{X\} dV + \int_{S_2} \{\delta u\}^T \{\bar{T}\} dS \quad \cdots (2.10)$$

que es la expresión del principio de los trabajos virtuales y que puede enunciarse de la manera siguiente: Si un campo de tensiones $\{\sigma\}$ se encuentra en equilibrio bajo la acción de fuerzas de masa $\{X\}$ y tensiones en el contorno $\{\bar{T}\}$, el trabajo producido por las fuerzas <u>internas</u> (tensiones) como resultado de la aplicación de un campo virtual y compatible de desplazamientos $\{\delta u\}$ (y por consiguiente de deformaciones asociadas $\{\delta\epsilon\}$) es igual al trabajo efectuado por las fuerzas <u>externas</u> (fuerzas de masa y de borde) bajo este mismo campo virtual de desplazamientos. Es interesante comprobar que aparte de las condiciones cinemáticas impuestos a los desplazamientos virtuales, no se ha hecho uso más que de la condición de <u>equilibrio</u>. Ninguna ecuación constitutiva ha intervenido en el desarrollo. Ello hace muy general este principio en el campo de la mecánica del sólido.

El principio se puede formular de una manera alternativa a la indicada en la Ec. (2.10) En efecto, si $\{\epsilon\}$ y $\{u\}$ son campos compatibles de deformaciones y corrimientos, el trabajo interno realizado por la aplicación de cualquier sistema virtual y en equilibrio de fuerzas y tensiones $(\{\delta X\}, \{\delta\bar{T}\}, \{\delta\sigma\})$ es igual al trabajo externo desarrollado. Es decir

$$\int_V \{\delta\sigma\}^T \{\epsilon\} dV = \int_V \{\delta X\}^T \{u\} dV + \int_S \{\delta T\}^T \{u\} dS \quad \cdots (2.11)$$

(o) Es necesario definir el "vector" de deformaciones de esta manera con el fin de hacerlo conjugado con respecto al "vector" $\{\sigma\}$, en el sentido de que su producto represente <u>trabajo</u>. Para comprobarlo basta desarrollar el primer término de la Ec. (2.7)

Con el fin de obtener una solución aproximada, podemos expresar los corrimientos u_k en función de unos parámetros $a_i^{(k)}$, de la manera siguiente:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= N_1^{(1)}(x_1,x_2,x_3)\,a_1^{(1)} + \dots + N_n^{(1)}(x_1,x_2,x_3)\,a_n^{(1)} \\ u_2 &= N_1^{(2)}(x_1,x_2,x_3)\,a_1^{(2)} + \dots + N_n^{(2)}(x_1,x_2,x_3)\,a_n^{(2)} \\ u_3 &= N_1^{(3)}(x_1,x_2,x_3)\,a_1^{(3)} + \dots + N_n^{(3)}(x_1,x_2,x_3)\,a_n^{(2)} \end{aligned}\right\} \quad (2.12a,b,c$$

y en forma matricial

$$\}u\{ = [N]\,\}a\{ \qquad (2.13)$$

donde (*)

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1^{(1)} & \dots & N_n^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N_1^{(2)} & \dots & N_n^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & N_1^{(3)} & \dots & N_n^{(3)} \end{bmatrix} \qquad (2.14)$$

y

$$\}a\{^T = (a_1^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}, a_1^{(2)}, \dots, a_n^{(2)}, a_1^{(3)}, \dots, a_n^{(3)}) \qquad (2.15)$$

Es decir, la solución se desarrolla como combinación lineal de unas ciertas funciones $N_i^{(k)}$ conocidas y elegidas con cierta libertad. Deben satisfacer sin embargo las condiciones cinemáticas de compatibilidad incluyendo el borde S_1. Nos proponemos utilizar el principio de los trabajos virtuales, representado por la Ec (2.10) con elfin de obtener una solución para los valores de $\}a\{$. Para ello hemos de expresar $\}\epsilon\{$ y $\}\sigma\{$ en función de $\}u\{$. En la hipótesis de pequeñas deformaciones, se verifica

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \;; \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \;; \quad \epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ 2\epsilon_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \;; \quad 2\epsilon_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \;; \quad 2\epsilon_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{aligned}\right\} \qquad (2.16)$$

(*) Por simplicidad las funciones N suelen ser las mismas para cada componente de los corrimientos

En forma matricial simbólica

$$\{\epsilon\} = [L]\{u\} \qquad (2.17)$$

donde

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad (2.18)$$

Las variaciones de $\{u\}$ y $\{\epsilon\}$ pueden pues escribirse

$$\{\delta u\} = [N]\{\delta a\} \qquad (2.19)$$

y

$$\{\delta\epsilon\} = [L][N]\{\delta a\} \qquad (2.20)$$

Con objeto de expresar las tensiones $\{\sigma\}$ en función de deformaciones o corrimientos, hemos de introducir una ley constitutiva del material. En mecánica del sólido el caso más simple es proponer una relación lineal entre tensiones y deformaciones (elasticidad lineal)(*):

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \qquad (2.21)$$

donde $[D]$ es una matriz simétrica (6x6) de coeficientes constantes (21 constantes independientes). En el caso bien conocido de isotropía, esta matriz se escribe (+)

(*) Se supone que tensiones y deformaciones se miden con relación a un estado inicial no deformado y sin tensiones internas.

(+) Puede advertirse la falta de "acoplamiento" entre las componentes esféricas y desviadoras de ambos tensores, característica de la elasticidad lineal isótropa.

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \qquad (2.22)$$

Resumiendo los resultados anteriores:

$$\{\sigma\} = [D][L][N]\{a\} = [D][B]\{a\} \qquad (2.23)$$

donde

$$[B] = [L][N] \qquad (2.24)$$

Por último, sustituyendo (2.19), (2.20) y (2.23) en (2.10), se obtiene,

$$\int_V \underset{(1\times 3n)}{\{\delta a\}^T} \underset{(3n\times 3)}{[N]^T} \underset{(3\times 6)}{[L]^T} \underset{(6\times 6)}{[D]} \underset{(6\times 3n)}{[B]} \underset{(3n\times 1)}{\{a\}}\, dV = \int_V \underset{(1\times 3n)}{\{\delta a\}^T} \underset{(3n\times 3)}{[N]^T} \underset{(3\times 1)}{\{X\}}\, dV + \int_{S_2} \underset{(1\times 3n)}{\{\delta a\}^T} \underset{(3n\times 3)}{[N]^T} \underset{(3\times 1)}{\{\bar{T}\}}\, dS \qquad (2.25)$$

donde se ha indicado la dimensión de cada matriz. Dado que el conjunto de desplazamientos virtuales es arbitrario, también lo será $\{\delta a\}$ y por ello la Ec (2.25) se traduce en un sistema de ecuaciones:

$$\int_V [B]^T[D][B]\{a\}\, dV = \int_V [N]^T\{X\}\, dV + \int_{S_2} [N]^T\{\bar{T}\}\, dS \qquad (2.26)$$

que también puede escribirse:

$$[K]\{a\} - \{f\} = 0 \qquad (2.27)$$

con

$$[K] = \int_V [B]^T[D][B]\, dV \qquad (2.28)$$

$$\{f\} = \int_V [N]^T\{X\}\, dV + \int_{S_2} [N]^T\{\bar{T}\}\, dS \qquad (2.29)$$

La solución de este sistema de ecuaciones permite obtener el vector $\{a\}$ y con él, a través de (2.13), (2.17) y (2.23), el estado de corrimientos, deformaciones y tensiones dentro del sólido.

Si las funciones N se eligen de manera que constituyan una familia completa (por ejemplo de polinomios) que adquieran valores en todo el dominio, la matriz $[K]$ será una matriz 3n x 3n donde todos los términos serán en general no nulos. La esencia de los elementos finitos radica en la elección de estas funciones de aproximación, que se van a definir elemento por elemento. Ambas alternativas se indican en la Fig. 5 para un caso simplificado donde el dominio $V\,(\equiv a,b)$ se ha supuesto unidimensional. En este segundo caso la matriz $[K]$ será en banda con el consiguiente ahorro de almacenamiento, y la flexibilidad adicional que permite la elección y tamaños de elementos adecuados a las características de cada problema en particular.

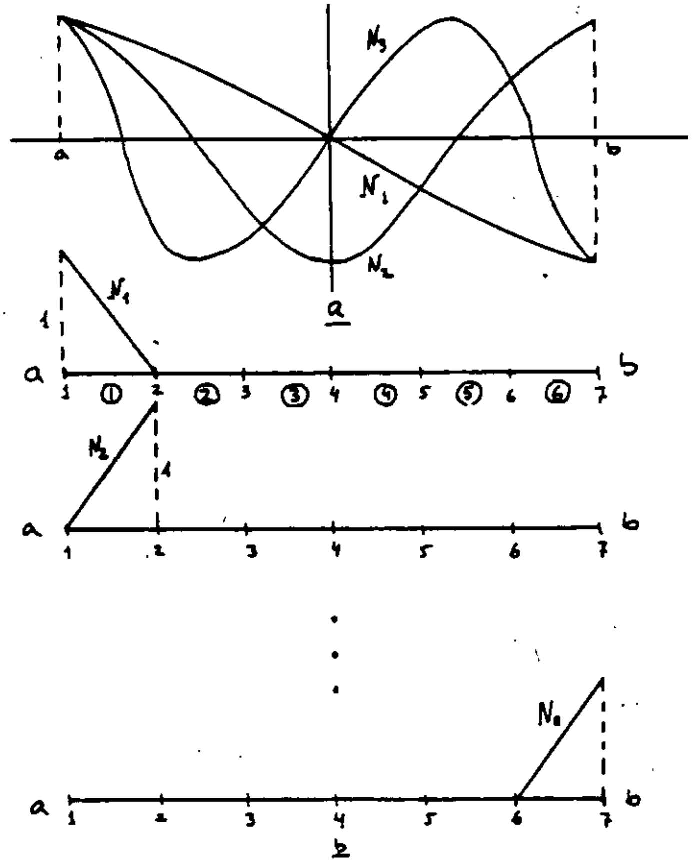


Fig. 5 Alternativas en la elección de las funciones $N_i(x)$. a: Familia completa en el intervalo a-b. b: Intervalo dividido en 6 elementos finitos y funciones lineales (N_i) adoptadas

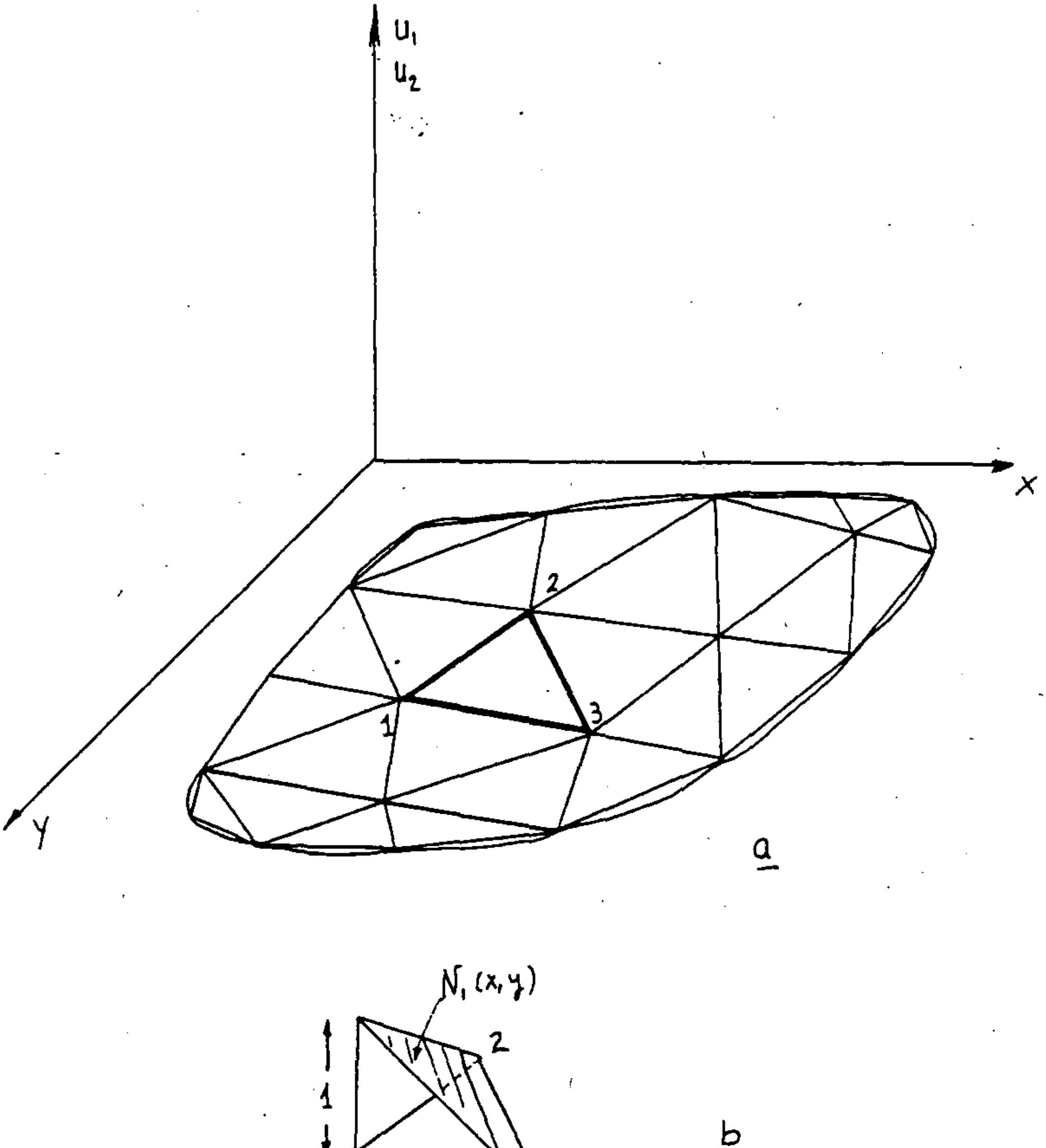


Fig. 6 a: Aproximación por elementos finitos de un dominio bidimensional en el plano (x, y). b: Función de aproximación lineal para un elemento típico.

Con el fin de facilitar el desarrollo del método de elementos finitos, conviene especializar las ecuaciones anteriores para un subdominio (elemento finito) del cuerpo. Consideremos en la Fig. 6a un dominio bidimensional aproximado por un conjunto de elementos triangulares. Expresiones integrales como las desarrolladas anteriormente admiten ser calculadas elemento por elemento para sumar a continuación los resultados parciales. En efecto, podemos escribir la Ec.(2.10) de la siguiente forma

$$\sum_{\substack{\text{todos}\\ \text{el.}}} \int_{V_e} \{\delta\epsilon\}_e^T \{\sigma\}_e \, dV = \sum_{\substack{\text{todos}\\ \text{el.}}} \int_{V_e} \{\delta u\}_e^T \{\bar{X}\}_e \, dV + \sum_{\substack{\text{todos}\\ \text{el.}}} \int_{S_{2e}} \{\delta u\}_e^T \{\bar{T}\}_e \, dS \qquad (2.30)$$

donde el subíndice e se refiere a un elemento genérico. Consideremos entonces el desarrollo realizado anteriormente referido a un elemento. La Ecuación(2.26) se escribiría ahora

$$\int_{V_e} [B]_e^T [D] [B]_e \{a\}_e \, dV = \int_{V_e} [N]_e^T \{\bar{X}\}_e \, dV + \int_{S_{2e}} [N]_e^T \{\bar{T}\}_e \, dS \qquad (2.31)$$

Analicemos esta expresión en un caso particular. El primer paso sería aproximar los desplazamientos u_i de acuerdo con las expresiones (2.12a,b,c) es decir, elegir las funciones N_i Supongamos que el desplazamiento u_1 se expresa mediante una combinación de tres funciones N_i :

$$u_1 = N_1^{(1)}(x,y)\, a_1^{(1)} + N_2^{(1)}(x,y)\, a_2^{(1)} + N_3^{(1)}(x,y)\, a_3^{(1)} \qquad (2.32)$$

de tal manera que cada función N_i sea lineal, tome el valor unidad en el vértice i y cero en los restantes (Fig. 6b) . Con este tipo de funciones de aproximación es claro que cada coeficiente $a_i^{(1)}$ representa el corrimiento u_i que sufra cada vértice del triángulo. Esta interpretación, permitida por el tipo de funciones N, enlaza directamente con el análisis de sistemas discretos que se hizo anteriormente. En efecto, los vértices de los triángulos pueden ser considerados ahora como nodos y los coeficientes a_i de expansión de las magnitudes independientes del problema pueden interpretarse como los valores puntuales, en los nodos, de estas magnitudes. Con ello una vez planteado el sistema de ecuaciones (2.31) correspondiente a un elemento, la organización del sistema global de ecuaciones representado por (2.30) sigue los mismos criterios establecidos anteriormente para el "ensamblaje" de ecuaciones correspondientes a sistemas discretos.

La forma explícita de funciones como la $N_1^{(1)}$ puede obtenerse con facilidad. Basta forzar a que una función lineal en x e y adopte los valores especificados en los nodos 1,2,3. Así, si $N_1^{(1)}(x,y) = ax + by + c$, se cumplirá:

$$\left.\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &= 1 \\ ax_2 + by_2 + c &= 0 \\ ax_3 + by_3 + c &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.33)$$

donde (x_i, y_i) son las coordenadas del vértice i. Este sistema lineal permite obtener a,b,c y con ellos $N_1^{(1)}(x,y)$:

$$N_1^{(1)}(x,y) = \frac{y_2 - y_3}{2\Delta} x + \frac{x_3 - x_2}{2\Delta} y + \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{2\Delta} \qquad (2.34)$$

donde

$$2\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} = 2\,(\text{Area del triángulo}) \qquad (2.35)$$

De forma análoga se obtiene $N_2^{(1)}$ y $N_3^{(1)}$ (+). Es conveniente como ya se dijo elegir las mismas funciones para el desplazamiento $u_2 = v$, $(N_1^{(1)} = N_1^{(2)} = N_1, etc)$. Si el sistema (2.31) se escribe

$$[K]_e \{a\}_e - \{f\}_e = 0 \qquad (2.36)$$

es inmediato buscar los términos de $[K]_e$. En efecto, si se trata de un caso de tensión plana

$$[B]_e = [L][N]_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad (2.37)$$

Dado que las funciones N_i son lineales (*) los términos de $[B]$ son constantes y las integraciones necesarias para el cálculo de $[K]_e$ son en este caso inmediatas. En elasticidad plana $[D]$ se escribe

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \qquad (2.38)$$

(+) En forma compacta, podemos escribir:

$$N_i^{(1)} = a_i x + b_i y + c_i$$

con $a_i = (y_j - y_k)/2\Delta$; $b_i = (x_k - x_j)/2\Delta$; $c_i = (x_j y_k - x_k y_j)/2\Delta$ entendiendo que $\rightarrow i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow$ permutan en combinación cíclica.

(*) Como en B aparecen derivadas de primer orden, las funciones N_i deben permanecer al menos a la clase C^1 (funciones con primera derivada continua). Es interesante comprobar que la solución numérica puede obtenerse con requisitos de derivabilidad impuestos a las funciones de aproximación N menos restrictivos que los derivados de la ecuación diferencial que gobierna los desplazamientos en elasticidad plana. Desde este punto de vista las expresiones integrales de equilibrio son más generales que las diferenciales.

Al vector $\{f\}_e$ (ecuación(2.36)) contribuyen las fuerzas de masa en el elemento y eventualmente las tracciones en el borde cuando el elemento en cuestión forma parte de él. En el caso de las fuerzas de masa debe procederse a una integración de las funciones N_i en el elemento.

En apartados posteriores se examinará con más detalle la formulación de las funciones de aproximación en el elemento así como los procedimientos de integración necesarios para formular las matrices de rigidez y vectores $\{f\}$.

El principio de los trabajos virtuales ha sido utilizado frecuentemente en mecánica del sólido para la formulación del F.E.M. Expresiones similares a él pueden encontrarse sin embargo en otras áreas. Así en problemas de filtración o conducción de calor es posible formular expresiones análogas. Por ejemplo, la siguiente expresión:

$$\int_V \left\{\delta \frac{\partial h}{\partial x_i}\right\}^T [H] \left\{\frac{\partial h}{\partial x_i}\right\} dV = \int_V \{\delta h\}^T \{\dot{\bar{Q}}\} dV + \int_{S_n} \{\delta h\}^T \{\bar{q}\} dS \qquad (2.38)$$

donde

h: altura piezométrica.

$H = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$ (matriz de permeabilidades)

$\bar{Q}$: velocidad de producción o almacenamiento de fluido

$\bar{q}$: flujo especificado en el contorno S_n

describe el flujo en medio poroso (*) y puede ser utilizada de manera análoga a la expuesta anteriormente para la formulación del F.E.M.

En los apartados siguientes se exponen otros principios integrales que también conducen a la formulación del F.E.M. y que pue-

---

(*) Este principio generalizado de "trabajos virtuales" incluye ya en su formulación la ecuación constitutiva del fenómeno, es decir la ley de Darcy.

den ser más adecuados para determinados problemas.

3.- LOS METODOS DE RESIDUOS PONDERADOS

3.1.- INTRODUCCION

Con gran frecuencia los problemas que se presentan en la ciencia de la Ingeniería están formulados como ecuaciones diferenciales, cuyo planteamiento así como el de las condiciones de contorno necesarias sigue mecanismos bien conocidos, que en general consisten en la expresión de condiciones de equilibrio o continuidad unidas en relaciones constitutivas. En estas formulaciones la intuición y comprensión física del fenómeno juega un papel importante que no debe minimizarse. Pues bien, los métodos de residuos ponderados ofrecen la posibilidad de encontrar una solución aproximada del problema a partir de la(s) ecuación (es) diferencial (es) del fenómeno. Este hecho les diferencia del método estudiado de los trabajos virtuales y el basado en principios varicionales, que se examinará en un apartado próximo, y en cierto modo les confiere una mayor generalidad y superioridad. Entre los métodos que se examinarán brevemente destaca por su amplia aceptación el de Galerkin, desarrollado por este ingeniero ruso en 1915. Su adaptación al método de los elementos finitos es sin embargo reciente y ha permitido la generalización del F.E.M. y su posible adaptación a una amplia gama de situaciones. Más adelante se examinará la relación entre los principios variacionales y el método de Galerkin.

Esta generalización que han permitido fundamentalmente los métodos de residuos ponderados puede ayudar a explicar la gran expansión del F.E.M. y su virtual preponderancia sobre otros métodos conocidos de análisis numérico.

3.2.- EXPOSICION DEL METODO

Sea una ecuación diferencial

$$L\phi = 0 \qquad (3.1)$$

que la función desconocida ϕ ha de satisfacer en un dominio V. En el contorno S de V se satisfacen las condiciones

$$C\phi = 0 \qquad (3.2)$$

En estas expresiones L y C son operadores diferenciales que incorporan las propiedades físicas del medio.

Toda solución $\hat{\phi}$ aproximada no satisfará exactamente las condiciones (3.1) y (3.2). Es decir

[redacted] (3.3)

[redacted] (3.4)

son residuos, en general no nulos, que representan una medida de la aproximación conseguida por $\hat{\phi}$. Los diferentes métodos de residuos ponderados utilizan técnicas diferentes para minimizar el valor de estos residuos en el dominio V. Normalmente las funciones $\hat{\phi}$ se eligen de tal forma que satisfacen las condiciones de contorno en todo él o bien en parte del mismo.

Supongamos que la solución aproximada $\hat{\phi}$ se busca de la forma siguiente

[redacted] (3.5)

donde N_i son funciones de las coordenadas espaciales y eventualmente el tiempo si ϕ depende también de él (*). Las funciones N_i se eligen de modo que satisfagan parte o la totalidad de las condiciones de contorno. El objetivo es obtener N

(*) Más adelante se examinará con más detalle la solución de problemas no estacionarios.

ecuaciones algebraicas para la obtención de los parámetros a_i

1. Métodos de Colocación Puntual. Se trata de anular el residuo $r = r_v + r_s$ en N puntos $\bar{x}_i$, $i=1,\dots,N$ dentro del dominio V :

$$r(\bar{x}_i) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, N \qquad (3.6)$$

lo que proporciona N ecuaciones para la obtención de los a_i. En forma general, útil para los casos siguientes, la condición anterior se puede expresar

[redacted] (3.7)

con tal de que las funciones W_i y W_i^* se definan

[redacted] (3.8)

donde $\delta(\cdot)$ es la función delta de Dirac.

2. [illegible]dos de colocación por subdominios. En este caso se fuerza a que el residuo r sea nulo en la media, en una colección de N subdominios, V_e, de V, es decir

$$\int_{V_e} r(\bar{x})\, dV = 0 \ . \qquad (3.9)$$

Utilizando la expresión generalizada (3.7) basta con que las funciones W_i se definan como de valor unidad en cada subdominio V_e y nulo en el resto.

3. Método de Galerkin. Partiendo de la expresión(3.7), en el método de Galerkin se eligen como funciones W_i las mismas funciones de aproximación N_i. Más exactamente $W_i = N_i$ y $W_i^* = \alpha N_i$.

En consecuencia

[redacted] (3.10)

4. Método de los Mínimos Cuadrados.

Se trata de minimizar, con relación a los constantes a_i, la siguiente medida del error cometido:

$$I = \int_V r_v^2 \, dV + \int_S r_s^2 \, dS \qquad (3.11)$$

La condición de mínimo proporciona las siguientes N ecuaciones:

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, \ldots, N \qquad (3.12)$$

y desarrollando esta ecuación

$$\int_V 2 r_v \frac{\partial r_v}{\partial a_i} dV + \int_S 2 r_s \frac{\partial r_s}{\partial a_i} dS = 0 \qquad (3.13)$$

o bien

$$\int_V 2 L\hat{\phi} \, \frac{\partial (L\hat{\phi})}{\partial a_i} dV + \int_S 2 C\hat{\phi} \, \frac{\partial (C\hat{\phi})}{\partial a_i} dS = 0 \qquad (3.14)$$

Identificando esta ecuación con la (3.7) observamos que los "pesos" W_i y W_i^* son en este caso

$$W_i = 2 \frac{\partial (L\hat{\phi})}{\partial a_i} \qquad (3.15)$$

$$W_i^* = 2 \frac{\partial (C\hat{\phi})}{\partial a_i} \qquad (3.16)$$

Ilustramos estos conceptos en un caso particular resuelto por el método de Galerkin.

3.3.- APLICACION DEL METODO DE GALERKIN

Se trata de resolver la ecuación de distribución de temperaturas en un dominio V de superficie $S = S_1 + S_2$ (Fig. 7). La ecuación diferencial del fenómeno se escribe:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_3}\right) + Q = 0 \quad \text{en } V \qquad (3.17)$$

$$T = T_1 \quad \text{en } S_1 \qquad (3.18)$$

$$k\frac{\partial T}{\partial n} = q \quad \text{en } S_2 \qquad (3.19)$$

donde $T = T(x_1, x_2, x_3)$ es la temperatura, k es el coeficiente de transmisibilidad calorífica (en general función de **x** e incluso de T lo que daría origen a un problema no lineal), S_1 es una porción de borde donde se especifica la temperaturay S_2 la porción restante donde se especifica un flujo de calor q por unidad de area. Q representa la generación de calor por unidad de volumen. Supongamos que la función de aproximación elegida $\hat{T}$ satisface la condición $\hat{T} = T_1$ en S_1. La ecuación(3.7) seescribe en nuestro caso:

$$\int_V \left[W_i \left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(k \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_k} \right) + Q \right) \right] dV + \int_{S_2} W_i^* \left(k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} - q \right) dS = 0 \qquad (3.20)$$

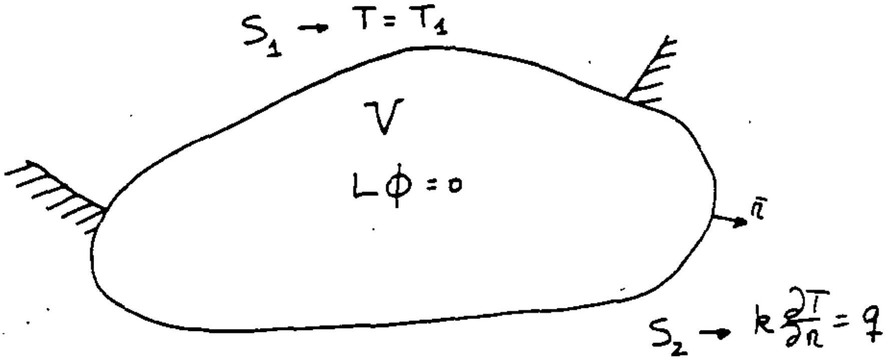


Fig. 7. Dominio y condiciones de contorno para problema ilustrativo de transmisión de calor.

Si utilizamos un vector $\bar{F}$ cuyas componentes se definan

$$F_k = k \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_k} \qquad (3.21)$$

la ecuación(3.20) se escribe de forma más compacta

$$\int_V W_i \operatorname{div} \bar{F} \, dV + \int_V W_i Q \, dV + \int_{S_2} W_i^* \left(k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} - q \right) dS = 0 . \qquad (3.22)$$

Sabiendo que si φ y $\bar{V}$ son dos campos, escalar y vectorial respectivamente, se cumple

$$\operatorname{div}(\varphi \bar{v}) = \varphi \operatorname{div} \bar{v} + \bar{v} \cdot \overline{\operatorname{grad}}\, \varphi , \qquad (3.23)$$

el primer sumando en(3.22) puede descomponerse en los dos primeros términos de la ecuación siguiente:

$$\underset{(a)}{\int_V \operatorname{div}(\bar{W}_i \bar{F})\, dV} - \underset{(b)}{\int_V \bar{F} \cdot \overline{\operatorname{grad}}\, W_i \, dV} + \underset{(c)}{\int_V \bar{W}_i Q \, dV} + \underset{(d)}{\int_{S_2} \bar{W}_i^{*} k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} dS} - \underset{(e)}{\int_{S_2} W_i^{*} q \, dS} = 0 \qquad (3.24)$$

Utilizando el teorema de la divergencia, el primer término de(3.24) se transforma en (*

$$\int_V \operatorname{div}(\bar{W}_i \bar{F})\, dV = \int_S \bar{W}_i \bar{F} \cdot \bar{n} \, dS = \int_S \bar{W}_i \left(k \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_1} n_1 + k \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_2} n_2 + k \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_3} n_3 \right) dS =$$

$$= \int_{S_2} W_i \, k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} \, dS_2 \qquad (3.25)$$

pues en la porción S_1 del borde aceptamos que las funciones W_i se anulan. Adoptando $\bar{W}_i = -\bar{W}_i^{*}$, los términos (a) y (d) se anulan mutuamente y (3.24)queda reducido a

$$-\int_V \left(k \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_1} \frac{\partial W_i}{\partial x_1} + k \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_2} \frac{\partial W_i}{\partial x_2} + k \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_3} \frac{\partial W_i}{\partial x_3} \right) dV + \int_V W_i Q \, dV + \int_{S_2} W_i q \, dS = 0 \qquad (3.26)$$

que es una expresión más conveniente (+) para utilizar el método de Galerkin. En efecto, supongamos la descomposición habitual

$$\hat{T} = \sum_{j=1}^{N} a_j N_j \qquad (3.27)$$

(*) La misma expresión se obtendría si los tres primeros sumandos de la primera integral de la Ec.(3.20) se integran por partes en x_1, x_2, x_3 respectivamente.

(+) Puede observarse cómo en (3.26)se ha reducido en un grado el orden de diferenciación de T. Ello permite reducir el grado de continuidad de las funciones de aproximación en $\hat{T}$. Así por ejemplo en (3.26) son posibles funciones lineales mientras que en (3.20)esto no sería posible.

y por tanto $W_j = N_j$. Sustituyendo en (3.26), se obtiene un sistema de ecuaciones en la forma

$$[K]\{a\} + \{f\} = 0 \qquad (3.28)$$

donde los elementos de $[K]$ y $\{f\}$ son respectivamente

$$K_{ij} = -\int_V \left(k \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + k \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} + k \frac{\partial N_j}{\partial x_3} \frac{\partial N_i}{\partial x_3} \right) dV \qquad (3.29)$$

$$f_i = \int_V N_i Q \, dV + \int_{S_2} N_i q \, dS \qquad (3.30)$$

Si el coeficiente k depende de T, el sistema de ecuaciones (3.28) será no lineal y los coeficientes K_{ij} dados por (3.29) dependerán en general de las constantes a_i.

El método, tal y como se ha planteado hasta aquí es general y en principio, no puede denominarse método de "elementos finitos". De nuevo la caracterización esencial de este método consiste en la elección apropiada de las funciones N_i, que se escogen de forma que adquieran valores en un subdominio de V y sean nulas en el resto del dominio. Este proceso es más fácilmente identificable si las relaciones integrales anteriores se especializan en un elemento como se hizo anteriormente. La suma global de contribuciones de estos elementos ha de hacerse de nuevo teniendo bien en cuenta los principios de ensamblaje que se establecieron con anterioridad. En particular y en un problema bidimensional, utilizando el tipo de elemento triangular y las aproximaciones lineales para las funciones N_i, indicadas anteriormente, es inmediato llegar a expresiones explícitas para los coeficientes K_{ij} y f_i de cada elemento.

En efecto, recordando que $N_i = a_i x + b_i y + c_i$, si sustituimos esta relación en expresiones como (3.29) y (3.30), se obtiene, para un elemento que no forme parte del borde S_2 ,

$$K_{ij}^{e} = -\int_A \left(k\, a_i a_j + k\, b_i b_j\right) dx\, dy \qquad (3.31)$$

$$f_i^{e} = \int_A (a_i x + b_i y + c_i)\, Q\, dx\, dy \qquad (3.32)$$

donde el superíndice e indica que estos coeficientes se refieren exclusivamente a un elemento. Los valores de a_i, b_i y c_i se han indicado anteriormente.

Si el coeficiente k es constante,

$$K_{ij}^{e} = -\Delta\, k\, (a_i a_j + b_i b_j) \qquad (3.33)$$

y

$$f_i^{e} = Q\, \frac{\Delta}{3} \qquad (3.34)$$

siendo Δ el área del elemento triangular. En los elementos que formen parte del borde S_2 habrá que añadir la contribución de q a f_i tal y como indica la Ec. (3.30).

3.4.- PROBLEMAS NO ESTACIONARIOS. DISCRETIZACION PARCIAL

Los problemas formulados a partir de ecuaciones diferenciales donde intervenga el tiempo son igualmente atacables mediante el método de los residuos ponderados. En principio puede pensarse en funciones de aproximación N_i en las que intervenga el tiempo como una dimensión adicional $\left(N_i(\bar{x}, t)\right)$. Otra posibilidad interesante que transforma el problema inicial en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, para los que existen métodos estandar de solución, es la denominada discretización parcial. Consideremos como ejemplo la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right) + c\, \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \qquad (3.35)$$

que encontramos en problemas bidimensionales no estacionarios de transmisión de calor, flujo en medio poroso compresible (consolidación) etc. Las condiciones de contorno pueden ser por ejemplo, de los tipos indicados en las ecuaciones (3.18) y (3.19). Junto a ellas es preciso especificar unas condiciones iniciales que generalmente se refieren al valor adoptado por ϕ en el dominio V. El método de Galerkin conduce a la siguiente expresión, equivalente a la Ec. (3.26)

$$-\int_V \left(k_1 \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{W}_i}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x_2} \right) dV + \int_V \bar{W}_i \, c \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + \int_{S_2} W_i \, q \, dS = 0 \qquad (3.36)$$

Supongamos una discretización en la forma siguiente:

$$\hat{\phi}(x_1, x_2, t) = \sum_{j=1}^{N} N_j (x_1, x_2) \, a_j (t) \qquad (3.37)$$

y por tanto $\bar{W}_j = N_j$. Sustituyendo (3.37) en (3.36) se obtiene

$$-\int_V \left(k_1 \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} a_j(t) \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + k_2 \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial N_j}{\partial x_2} a_j(t) \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \right) dV +$$

$$+ \int_V c N_i \sum_{j=1}^{N} N_j \frac{da_j}{dt} \, dV + \int_{S_2} N_i \, q \, dS = 0 \qquad (3.38)$$

que en forma matricial,

$$[K]\{a\} + [C]\frac{d}{dt}\{a\} + \{f\} = 0 \qquad (3.39)$$

donde

$$K_{ij} = -\int_V \left(k_1 \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \right) dV \qquad (3.40)$$

$$C_{ij} = \int_V c \, N_i N_j \, dV \qquad (3.41)$$

$$f_i = \int_{S_2} N_i \, q \, dS \qquad (3.42)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (3.39) puede ser ahora resuelto con ayuda de las condiciones iniciales (p. ej. valores de ϕ -es decir de $\{a\}$ - especificados para t=o).

Las posibilidades de los métodos, de discretización parcial no se agotan con este planteamiento. Es evidente que siempre que las funciones incógnita dependan de varias variables es posible utilizar el método, haciendo objeto de discretización parcial a cualquiera de ellas.

Su utilización más frecuente es, sin embargo, en problemas no estacionarios y es la variable tiempo la que generalmente recibe este tratamiento.

4.- PRINCIPIOS VARIACIONALES

4.1.- INTRODUCCION

La tercera vía que aquí estudiamos para la formulación del F.E.M. lo constituyen los principios variacionales. Para un buen número de problemas de la mecánica del continuo y otras áreas de la físico-matemática es posible encontrar funcionales que alcanzan un valor estacionario para la función solución del problema. Estos funcionales están generalmente definidos como integrales de la función incógnita y sus derivadas sobre el dominio de definición del problema. Conocido este funcional el primer paso a dar es semejante al proceso descrito anteriormente: basta proponer una versión discretizada, de la función incógnita como combinación de unas funciones de aproximación N_i y unos parámetros a_i. Las condiciones de estacionariedad del funcional conduce a un conjunto de tantas relaciones como parámetros a_i. Si el funcional resulta tener una variación cuadrática en las a_i (como es un caso frecuente en problemas lineales) se obtiene un sistema de ecuaciones lineales algebraicas para las incógnitas a_i.

El estudio de los principios variacionales ha permitido profundizar en la naturaleza de las condiciones de contorno como se verá más adelante. Por otra parte el funcional en sí, puede representar una magnitud con significación física propia que puede ser de cierto interés en algunos casos. También es posible establecer cotas superior e inferior de la solución aproximada que pueden ser útiles en ocasiones. Frente a estas ventajas a las que debe unirse quizá la elegancia matemática de la formulación, se alza la dificultad importante de encontrar estos principios variacionales, problema matemático complejo y sin solución en determinados casos. Los principios de mínima energía potencial y mínima energía potencial complementaria son principios variacionales válidos en mecánica del sólido bajo algunas condiciones restrictivas y han sido utilizados con cierta frecuencia para la formulación del F.E.M.

Como introducción a estas notas se examina brevemente el concepto de funcional y ecuación de Euler asociada . La obtención de esta ecuación, conocido el funcional, es tarea simple. La operación inversa es mucho más difícil y no siempre posible, dándose la circunstancia de que los problemas están generalmente planteados como ecuaciónes diferenciales.

4.2.ESTACIONARIEDAD DE FUNCIONES. ECUACION ASOCIADA DE EULER.

Considérese, como ejemplo, el funcional definido de la forma siguiente

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x,y,u,u'_x,u'_y)\,dx\,dy \qquad (4.1)$$

donde Ω es un dominio cerrado, de contorno S definido en dos dimensiones. Se supone que F es dos veces diferenciable con relación a todos sus argumentos. Se busca una función $v(x,y)$ que cumpla las condiciones de contorno impuestas al problema y minimice o maximice el funcional J . Puede demostrarse que v ha de satisfacer la siguiente ecuación diferencial, llamada de Euler

$$F'_v - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial v'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial v'_y}\right) = 0 \qquad (4.2)$$

que desarrollada se escribe

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial^2 F}{\partial v'_x\,\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial v'_y\,\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial v'_x\,\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial v'_y\,\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} -$$

$$- \frac{\partial^2 F}{\partial v'^2_x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial v'_x\,\partial v'_y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial v'^2_y}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad (4.3)$$

Por ejemplo, el siguiente funcional

$$J = \int_{\Omega} \left(\tfrac{1}{2} K_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \tfrac{1}{2} K_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 - Q\phi \right) dx\, dy \qquad (4.4)$$

constituye un principio variacional para la ecuación de transmisión de calor (ϕ =Temperatura)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + Q = 0 \qquad (4.5)$$

como puede comprobarse si aplicamos la ecuación (4.3)

4.2.1.- Condiciones de Contorno Naturales y Forzadas

Supongamos que no se fuerza a las funciones admisibles U a satisfacer las condiciones de borde. ¿A qué condición(es) conduce la estaciónariedad del funcional?. Consideremos en primer lugar un funcional más simple, construido a partir de la función u(x) :

$$J(u) = \int_a^b F(x, u, u')\, dx \qquad (4.6)$$

Las variaciones δJ son debidas a variaciones en la función u y sus derivadas

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'_x} \delta u'_x \right) dx = \int_a \left(\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'_x} \frac{\partial}{\partial x}(\delta u) \right) dx \qquad (4.7)$$

Integrando por partes el segundo sumando de (4.7)

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} \delta u - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x}\right) \delta u \right) + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u \Big|_a^b \qquad (4.8)$$

Como esta variación debe ser cero para cualquier variación δu, debe cumplirse sucesivamente:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) = 0 \,, \qquad (4.9)$$

que es la ecuación de Euler, y

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u'}, \delta u\right)_{x=b} - \left(\frac{\partial F}{\partial u'}, \delta u\right)_{x=a} = 0 \,. \qquad (4.10)$$

Una posible elección es $(\delta u)_{x=b} = 1$ y $(\delta u)_{x=a} = 0$, lo que conduce a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)_{x=b} = 0 \qquad (4.11)$$

y análogamente, para $(\delta u)_{x=b} = 0$ y $(\delta u)_{x=a} = 1$,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)_{x=a} = 0 \qquad (4.12)$$

Las condiciones (4.11) y (4.12) se denominan naturales y en general afectan a derivadas de la función u. Por el contrario las condiciones $(u)_{x=a}$ y $(u)_{x=b}$ se denominan forzadas o esenciales. Para nuestros efectos la distinción que conviene hacer entre ellas radica en que las funciones de aproximación que se elijan deben satisfacer las condiciones forzadas (es esencial que se satisfagan) porque la estacionariedad del funcional no exige que se cumplan. Sin embargo las funciones de aproximación no tiene porqué satisfacer las condiciones naturales porque las condiciones de estacionariedad del funcional que se van a exigir ya garantizan que estas condiciones se cumplan (Ec. (4.10))

Examinemos ahora el problema en dos dimensiones con el funcional definido en (4.1) quese adapta a la ecuación de transmisión de calor en 2-dim. que elegimos como ejemplo. A partir de (4.1)

$$\delta J = \int_\Omega \left(\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'_x}(\delta u'_x) + \frac{\partial F}{\partial u'_y}\delta u'_y\right) dx\,dy =$$

$$= \int_\Omega \left(\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'_x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta u) + \frac{\partial F}{\partial u'_y}\frac{\partial}{\partial y}(\delta u)\right) dx\,dy \qquad (4.13)$$

Integrando por partes (*) en x e y respectivamente, el segundo y tercer sumando de (4.13)(Fig. 8), resulta para el primero

$$\int_{\Omega}\frac{\partial F}{\partial u'_x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta u)\,dx\,dy = \int_{y_i}^{y_s}\left|\frac{\partial F}{\partial u'_x}\delta u\,dy\right|_{x_i}^{x_d} - \int_{\Omega}\delta u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x}\right)dx\,dy = \int_{S}\frac{\partial F}{\partial u'_x}n_x\,\delta u\,dS - \int_{\Omega}\delta u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x}\right)dx\,dy \tag{4.14}$$

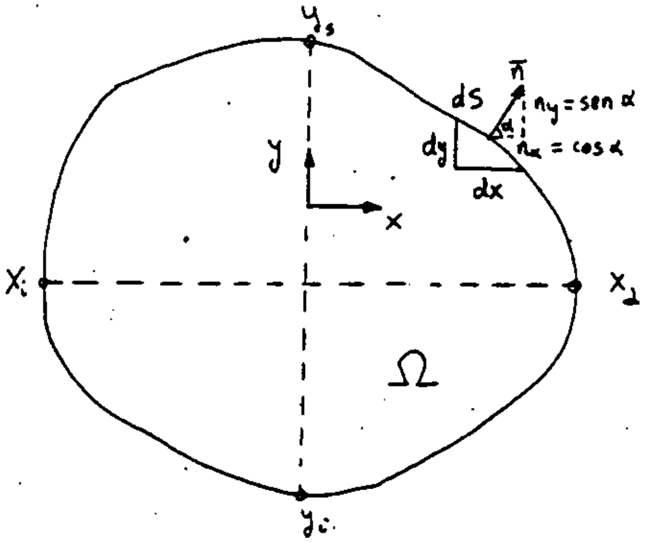


Fig. 8. Condiciones para la integración por partes en un dominio bidimensional.

Análogamente

$$\int_{\Omega}\frac{\partial F}{\partial u'_y}\frac{\partial}{\partial y}(\delta u)\,dx\,dy = \int_{S}\frac{\partial F}{\partial u'_y}n_y\,\delta u\,dS - \int_{\Omega}\delta u\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_y}\right)dx\,dy \tag{4.15}$$

(*)A los mismos resultados llegaríamos transformando los términos en (4.13) de la manera siguiente

$$\frac{\partial F}{\partial u'_x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta u) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x}\delta u\right)}_{(a)} - \delta u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x}\right)$$

A la suma de términos como (a), integrados en Ω puede aplicárseles el teorema de la divergencia e inmediatamente se obtiene el resultado final (Ec. (4.16)

Reuniendo términos:

$$\delta J = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u'_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u'_y} \right) \delta u \, dx dy + \int_{S} \left(\frac{\partial F}{\partial u'_x} n_x + \frac{\partial F}{\partial u'_y} n_y \right) \delta u \, dS = 0 \quad (4.16)$$

Por consiguiente, como δu es arbitrario, debe cumplirse

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u'_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u'_y} = 0 \qquad \text{en } \Omega \quad \cdot \quad \cdot \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u'_x} n_x + \frac{\partial F}{\partial u'_y} n_y = 0 \qquad \text{en } S \quad \cdot \quad \cdot \quad (4.18)$$

Particularizando estos resultados para la Ecuación (4.4) las condiciones naturales de contorno son, para la ecuación de transmisión de calor (4.5)(*)

$$K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (4.19)$$

4.3.- ALGUNOS EJEMPLOS DE PRINCIPIOS VARIACIONALES

El principio de <u>energía potencial mínima</u> se ha utilizado con frecuencia en mecánica del sólido. Anteriormente hemos establecido el principio de trabajos virtuales en la forma siguiente

$$\int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{X\} dV + \int_{S_2} \{\delta u\}^T \{\bar{T}\} \, dS \quad \cdot \quad \cdot \quad (4.20)$$

Recordemos que $\{\sigma\}$ era un campo tensional en equilibrio bajo la acción de las fuerzas de masa $\{X\}$ y tensiones $\bar{T}$ en el contorno S_2. En el resto del contorno se especificaban los despla-

---

(*) Si las condiciones de contorno reales son tales que en una zona S_2 del borde existe un flujo de calor q por unidad de area y tiempo, debe añadirse al funcional un término en la forma $-\int_{S_2} q \, \phi \, dS$ que conduciría inmediatamente a una condición natural (similar a(4.19)) en la forma $K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y = q$

mientos. Por parte $\{\delta u\},\{\delta \epsilon\}$ eran un conjunto de pequeños desplazamientos arbitrarios y deformaciones asociadas, consistente con los desplazamientos impuestos al cuerpo.

Si existe una función "densidad de energía", $W(\epsilon_{ij})$ de forma que las tensiones puedan obtenerse como

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \qquad (4.21)$$

el primer término de (4.20) puede escribirse

$$\delta \int_V \bar{W}\, dV \qquad (4.22)$$

Si, además, las fuerzas de masa, X, y tracciones $\bar{T}$ derivan de un potencial, (G y H respectivamente),

$$X_i = -\frac{\partial G}{\partial u_i} \quad ; \quad \bar{T}_i = -\frac{\partial H}{\partial u_i} \qquad (4.23a,b)$$

puede escribirse

$$\delta \chi = 0 \qquad (4.24)$$

donde

$$\chi = \int_V (W + G)\, dV + \int_S H\, dS \qquad (4.25)$$

En general el funcional χ, denominado energía potencial del sistema alcanza un mínimo en la situación de equilibrio. De forma más precisa, entre todos los desplazamientos que satisfacen las condiciones de contorno son los que satisfacen las condiciones de equilibrio los que conducen a un valor estacionario, generalmente mínimo, de la energía potencial. La existencia de la función densidad de energía queda asegurada si el sólido es elástico. En otros casos (deformaciones anelásticas) esto no es así. Es patente, pues, la mayor generalidad del teorema de los trabajos virtuales.

Es también posible formular el teorema de la energía complementaria mínima, útil cuando son las tensiones las variables de nuestros problemas. Su enunciado y desarrollo puede encontrarse en la mayoría de los textos sobre mecánica del sólido.

La búsqueda de funcionales a partir de las ecuaciones diferenciales del fenómeno no es tarea fácil, e incluso puede demostrarse en algunos casos la inexistencia de principios variacionales. Esto es especialmente cierto en problema no lineales. La obtención de estos funcionales es también complicada en problemas no estacionarios, incluso de tipo lineal, aunque se han desarrollado procedimientos que utilizan las técnicas de convolución.

En el caso de ecuaciones diferenciales lineales de la forma

$$Au + g = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (4.26)$$

y siempre que el operador A sea simétrico (o autoadjunto) es decir si se cumple para otra función v la igualdad,

$$\int_V v\,A\,u\ dV = \int_V u\,A\,v\ dV , \quad . \quad . \quad . \qquad (4.27)$$

puede encontrarse un principio variacional origen de (4.26) a partir del funcional

$$J = \int_V \left(1/2\ uAu + u\,g \right) dV . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (4.28)$$

En efecto

$$\delta J = \int_V \left(1/2\,\delta u\,Au + 1/2\,u\,A(\delta u) + \delta u\,g \right) dV \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (4.29)$$

Si L es simétrico

$$\int_V 1/2\ u\ A\ (\delta u)\,dV = \int_V 1/2\,\delta u\ A\,u\ dV \quad . \quad . \qquad (4.30)$$

y (4.29) se transforma en

$$\delta J = \int_V \delta u\ (Au + g)\ dV \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (4.31)$$

cuya ecuación diferencial de Euler es precisamente (4.26). En general los órdenes impares de derivación no son simétricos. Más detalles sobre la obtención de principios variacionales a partir de funcionales simétricos y no simétricos pueden encontrarse en Stakgold, (1971). Washizu (1968) ofrece una amplia discusión de principios variacionales en Elasticidad y Plasticidad.

4.4.- APLICACION A LA FORMULACION DEL F.E.M.

Considérese un problema de flujo bidimensional estacionario en medio poroso. La ecuación diferencial del fenómeno,

$$K_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (\text{en } V) \qquad (4.32)$$

donde K_x, K_y son las permeabilidades, en dirección x e y, y ϕ es la altura piezométrica, se ha de complementar con las condiciones de contorno. Supongamos que estas son de dos tipos

$$\phi = \phi_1 \quad \text{en} \quad S_1 \qquad (4.33)$$

y

$$K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y - q - \alpha \phi = 0 \quad \text{en } S_2 \qquad (4.34)$$

con $S = S_1 + S_2$ (contorno de V).

Es inmediato comprobar que el funcional

$$J = \int_V 1/2 \left\{ K_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + K_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \right\} dV - \int_S \left(q\phi + \alpha \frac{\phi^2}{2}\right) ds \qquad (4.35)$$

alcanza un valor extremo en la solución de este problema. La Ecuación (4.32) es la ecuación de Euler asociada y la segunda condición de contorno (Ec. (4.34)) es una condición de contorno natural.

Dividimos la región V en elementos, V_e, para los que sigue siendo válido el funcional J sin más que referir las integraciones al dominio y contorno del elemento. Aproximamos la función ϕ en cada elemento mediante

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^{n} N_i(x,y)\, a_i \qquad (4.36)$$

El funcional J_e (referido al elemento e) ha de alcanzar un valor estacionario si queremos que $\hat{\phi}$ se aproxime a la solución. Ello conduce al conjunto de n ecuaciones siguiente:

$$\frac{\partial J_e}{\partial a_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, n \qquad (4.37)$$

Si (4.36) es sustituido en (4.35) y ejecutamos (4.37), obtenemos

$$\frac{\partial J_e}{\partial a_i} = \int_{V_e} \left[K_x \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x}\right) + K_y \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y}\right) \right] dV$$

$$- \int_{S_2} \left(q \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial a_i} + \alpha \hat{\phi} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial a_i} \right) dS =$$

$$= \int_{V_e} \left[K_x \left(\sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} a_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial x} + K_y \left(\sum_j \frac{\partial N_j}{\partial y} a_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] dV$$

$$- \int_{S_2} \left[q N_i + \alpha \left(\sum_j N_j a_j \right) N_i \right] dS = 0 \qquad (4.38)$$

La ecuación anterior representa de nuevo un sistema de ecuaciones algebráico:

$$[K] \}a\{ + \}f\{ = 0 \qquad (4.39)$$

donde

$$K_{ij} = \int_{V_e} \left(K_x \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + K_y \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dV + \int_{S_2} \alpha N_i N_j \, dS \qquad (4.40)$$

y

$$f_i = - \int_{S_2} q N_i \, dS \qquad (4.41)$$

Sólo resta elegir las funciones de aproximación $N_i(x,y)$. Conocidos los términos de las ecuaciones anteriores los procedimientos de "ensamblaje" para todo el dominio siguen caminos conocidos.

Es interesante comprobar que las matrices $[K]$ y $\{f\}$ obtenidas aquí son idénticas a las que se obtuvieron por el método de Galerkin (Ecs.(3.29) y (3.30) del apartado de Residuos Ponderados). Este hecho no es una coincidencia. Por el contrario, puede demostrarse que el método de Galerkin es equivalente al método variacional. En efecto si $J(u)$ es un funcional cuya estacionariedad conduce a la ecuación de Euler $L(u)=0$, es evidente en función de lo expuesto, que

$$\delta J = \int_V \delta u \; L u \; dV = 0 \qquad (4.42)$$

Si elegimos una aproximación $\hat{u} = \sum_i N_i a_i$, $\delta\hat{u} = \sum_i N_i \, \delta a_i$ se cumplirá

$$\delta a_i \int_V N_i \; L(\hat{u}) \; dV = 0 \qquad (4.43)$$

y, como δa_i es arbitrario,

$$\int_V N_i \; L(\hat{u}) \; dV = 0 \qquad (4.44)$$

que es exactamente el método de Galerkin.

Es más, el método de Galerkin puede relacionarse con los métodos de diferencias finitas si las funciones de aproximación N_i se eligen convenientemente (Finlayson, 1972).

5.- GENERACION: TIPOS Y CARACTERISTICAS. FUNCIONES DE INTERPOLACION

En los apartados anteriores se ha expuesto brevemente la justificación del método de Elementos Finitos, así como las diversas técnicas que pueden emplearse para su desarrollo matemático. En esta sección vamos a ocuparnos del elemento en sí, es decir de cada una de las partes discretas en que subdividimos el dominio continuo. Un estudio exhaustivo de los distintos tipos de elementos finitos, así como de su correspondiente manejo y ensamblaje matemático, cae fuera del contexto de este curso. Para profundizar en el tema se remite al lector a la bibliografía de esta sección.

Hasta el momento hemos aprendido a definir matemáticamente de forma conveniente el fenómeno físico que tiene lugar en el dominio continuo D, así como las diversas expresiones de las condiciones de contorno.-

La base del F.E.M. consiste en discretizar dicho dominio continuo D dividiéndolo en una serie de elementos, llamados finitos. La suma o ensamblaje de todos estos elementos e reproduce el dominio D es decir

$$\sum e \equiv D$$

Entonces la expresión matemática que se considere definitaria del fenómeno puede aproximarse individualmente en cada elemento, siendo la aproximación total la suma o ensamblaje de todas las aproximaciones individuales. En particular, y usando la notación de los apartados anteriores, si la aproximación obtenida es la solución del sistema

$$[K]\{a\}=\{f\}, \tag{5.1}$$

dicho sistema se calculará como

$$\sum [K]_e\{a\}_e = \sum \{f\}_e \tag{5.2}$$

donde el subíndice e representa a un determinado elemento.

A continuación se estudiarán los tipos de elementos más usuales así como sus principales características, y finalmente se explicará el proceso de ensamblaje.

El primer problema que se debe enfrentar al tratar de discretizar un dominio continuo es el de la elección de la geometría de los elementos que van a emplearse para dicha discretización. Para dicha elección deben de tenerse en cuenta las tres directrices básicas siguientes:

a).- Los elementos elegidos han de ser tales que se adapten a la geometría del dominio.

b).- Cuanto más pequeño sea el elemento mayor será en general la aproximación obtenida, por lo que la malla habrá de hacerse más fina en las zonas donde se esperen mayores gradientes o mayor concentración de tensiones.

c).- La complejidad de la formulación matemática y la exactitud de la aproximación, que son función, como se verá más adelante, del tipo de elemento elegido.

El sentido ingenieril ha de estar bien presente al tratar de seguir las dos primeras directrices. En la Figura 9-a se representan dos discretizaciones distintas, ambas válidas, para el estudio del flujo de un fluído a través de un estrechamiento en la tubería de conducción, utilizando elementos triangulares y rectangulares. En la Figura 9-b se representan dos posibles discretizaciones de una placa en forma de corona circular para un estudio elástico de la misma, usando en este caso elementos triangulares y curvos respectivamente. Es muy importante señalar que la reducción del tamaño de los elementos significa, evidentemente, un aumento en el coste del cálculo, tanto por el mayor tiempo de ordenador requerido, como por la ampliación de memoria necesaria para almacenar la geometría y propiedades del dominio discretizado.

En realidad no existe razón matemática alguna que impida la utilización de varios tipos geométricos distintos, pero en la práctica, y para evitar el tener que realizar varias formulaciones paralelas, suele emplearse el mismo tipo de elemento en todo el dominio.

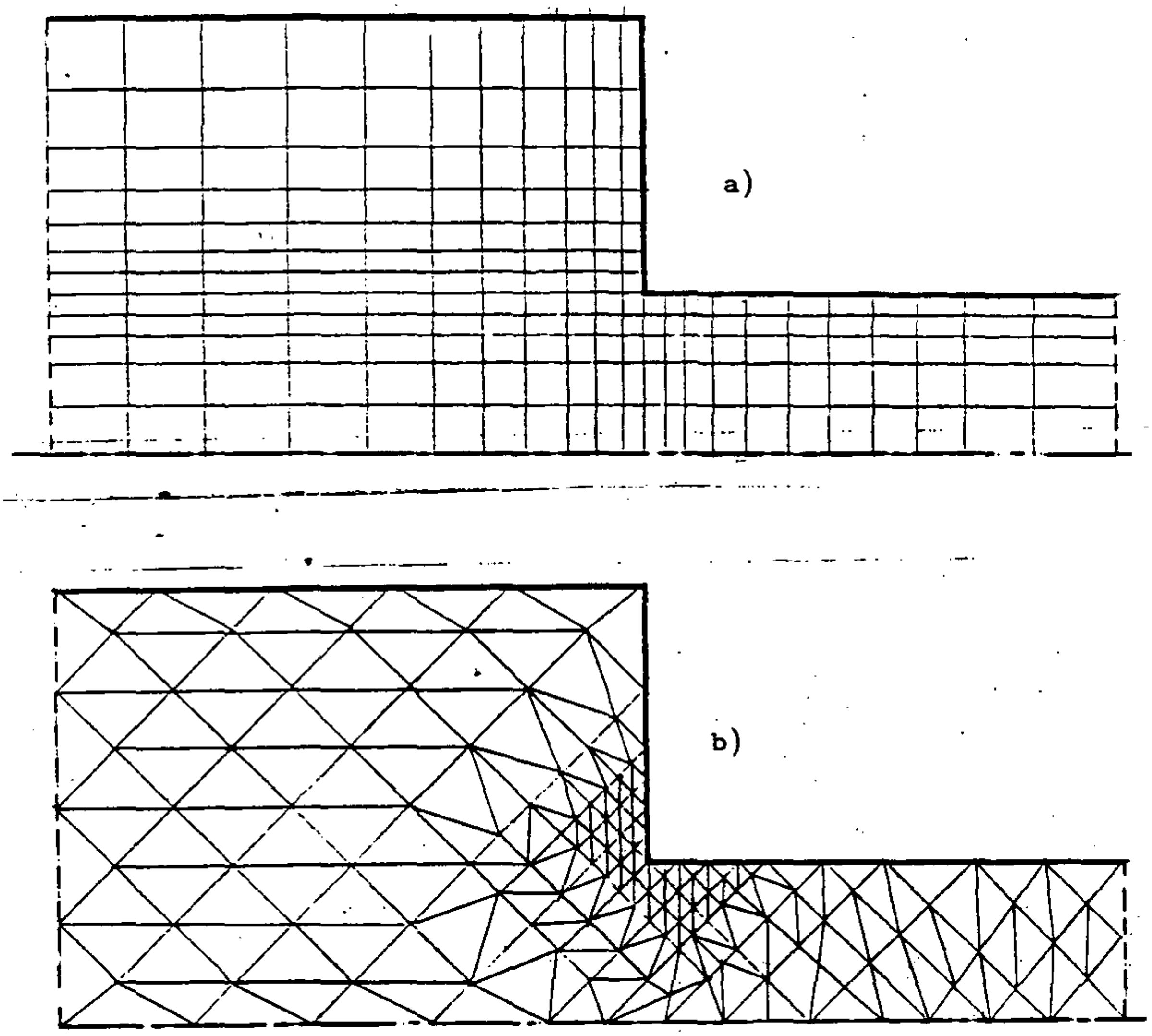


Figura 9a .- Discretizaciones de una zona de estrechamiento en una tubería: a) mediante elementos rectangulares y b) mediante elementos triangulares

Una vez discretizado el espacio mediante un cierto tipo de elemento, es necesario, a su vez, discretizar el elemento en sí, es decir, determinar un número limitado de puntos en los que se calculará la aproximación a la función que se desea determinar. Estos puntos, denominados nodos, se clasifican en exteriores primarios, exteriores secundarios e interiores, tal como muestra la figura 10.

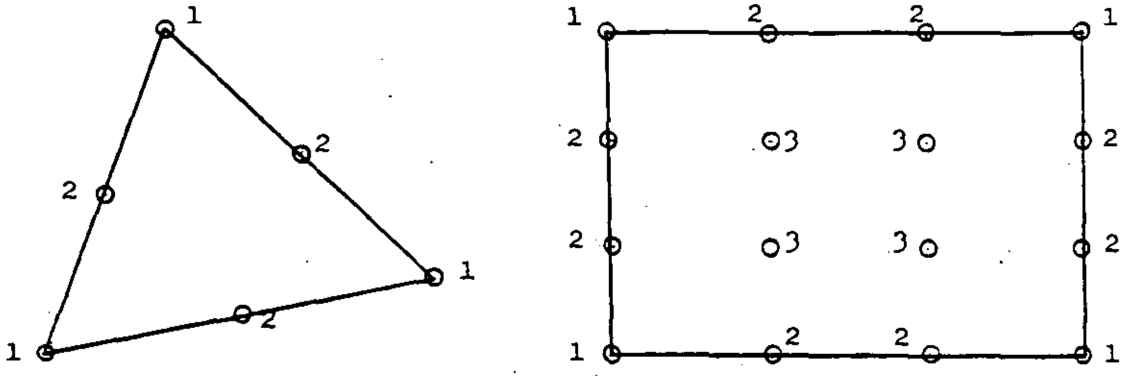


Figura 10.- Nodos exteriores primarios (1), exteriores secundarios (2) e interiores (3)

Los únicos nodos estrictamente necesarios son los exteriores primarios, aunque puede ser que el tipo de formulación que se busque imponga la definición de otros nodos secundarios o interiores.

El concepto de grados de libertad de un elemento está relacionado, por una parte, con el número de nodos, y por otra, con las condiciones de continuidad que se establezcan entre dos elementos consecutivos.

Supongamos que la función a calcular $\{\phi\}$ es un vector de dos componentes. Si no establecemos condiciones de continuidad en las derivadas de $\{\phi\}$, el número de grados de libertad del elemento de la Figura 10-a será 12, mientras que el elmento de la Figura 10-b tiene 32 grados de libertad. El número de grados de libertad de un elemento puede aumentarse incrementando el número de nodos, o exigiendo condiciones de continuidad adicionales. (por ejemplo, continuidad de ciertas derivadas de $\{\phi\}$).

El concepto de continuidad, así como el de convergencia, se exponen a continuación.

Por continuidad se entiende que en la frontera entre dos elementos, las funciones a determinar $\{\emptyset\}$ tomen valores únicos. (Pueden también, si el problema lo requiere, establecerse criterios de continuidad para ciertas derivadas de $\{\emptyset\}$, aumentando por tanto el número de grados de libertad del elemento, aunque en esta exposición nos limitaremos a la simple continuidad de $\{\emptyset\}$.

Por convergencia se entiende que al disminuir el tamaño de los elementos, la solución aproximada tienda a la solución exacta.

Los elementos que cumplen la condición de continuidad se denominan continuos (o conformes) y los que cumplen la condición de convergencia se denominan completos. Obviamente para que la solución de un problema por elementos finitos tenga algún sentido, la discretización ha de ser completa. Sin embargo, [illegible] condición de conformidad no es estrictamente necesaria. Para algunos problemas en los que la obtención de elementos continuos es muy difícil, si no imposible, se han empleado con éxito elementos no conformes completos. Actualmente para ciertas aplicaciones, son preferidos elementos no conformes, aunque el problema permita el empleo de elementos que satisfagan las condiciones de continuidad (R.H. Gallagher et al, 1.975). En gran número de casos la convergencia de la solución obtenida con elementos no conformes ha sido demostrada "a posteriori".

Antes de seguir hablando de convergencia, es necesario establecer las bases matemáticas de la aproximación elemental.

Sean $\{\emptyset\}$ las funciones desconocidas definidas por un principio variacional, una ecuación diferencial o integral, etc. Dichas funciones pueden ser aproximadas mediante

$$\{\emptyset\} = [N]\{a\} \tag{5.3}$$

donde $[N]$ es una matriz de funciones de aproximación conocidas y $\{a\}$ unos parámetros desconocidos que serán las nuevas incógnitas en la formulación final. Si las funciones N se definen individualmente en cada elemento, es decir si

$$N'_e \begin{cases} = N_e & (x,y,z) \in e \\ = 0 & (x,y,z) \in D\text{-}e \end{cases} \tag{5.4}$$

la aproximación (5.3) es equivalente a

$$\{\emptyset\} = \sum [N]_e \; \{a\}_e \tag{5.5}$$

Es por lo tanto suficiente el estudio de la aproximación

$$\{\emptyset\}_e = [N]_e \{a\}_e \tag{5.6}$$

en cada elemento, para la resolución del problema completo.

A la vista de la ecuación (5.6) es obvio que la condición de convergencia se verificará si las funciones de aproximación N_i son tales que para unos ciertos valores de los parámetros a_i. las funciones $\{\emptyset\}_e$ toman un valor constante en el elemento ya que en el límite el elemento se transforma en un punto único del dominio continuo. Puede demostrarse que si las funciones de aproximación N_i son polinomios, es suficiente que incluyan todos los términos del polinomio de grado K, donde K es el mayor orden de derivadas de $[N]$ que contenga el integrando de la integral de aproximaciones (O.C. Zienkiewicz, 1.971).

Por ejemplo, se ha visto anteriormente que la aplicación del método de trabajos virtuales a un caso de tensión plana produce el siguiente sistema de ecuaciones lineales aproximado:

$$\int_{V_e} [B]^T_e [D] [B]_e \{a\}_e \, dV = \int_{V_e} [N]_e \{X\}_e \, dV + \int_{S_e} [N]_e \{T\}_e \, dS \tag{5.7}$$

donde

$$[B]_e = [L][N]^T_e \tag{5.8}$$

siendo

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

Es decir, en este caso es únicamente necesario, si N_i son polinomios, que contengan términos en x_1, x_2, x_3 y una constante para que quede inmediatamente garantizada la convergencia del método.

Una vez definidos estos conceptos fundamentales, se estudiarán los diversos tipos de elementos y sus correspondientes funciones de aproximación. Dado que los elementos unidimensionales no necesitan más comentario que citar su posible existencia, se comenzará la exposición por los elementos bidimensionales. Los elementos curvos se expondrán en una sección posterior.

6.- ELEMENTOS BIDIMENSIONALES

Desde el punto de vista geométrico, los dos elementos empleados con más frecuencia son los triangulares y los rectangulares. Esto no implica que otros elementos puedan emplearse para problemas específicos. En particular la literatura de la última década es pródiga en la introducción de elementos pentagonales, hexagonales, rómbicos, etc. Este breve estudio se limitará a los dos tipos primeramente mencionados.

6.1.- ELEMENTOS TRIANGULARES

El elemento triangular es con mucho el más empleado en problemas bidimensionales, fundamentalmente por la ventaja que representan sobre los elementos rectangulares para aproximar el contorno del dominio.- La Figura 11 representa tres elementos triangulares sencillos.

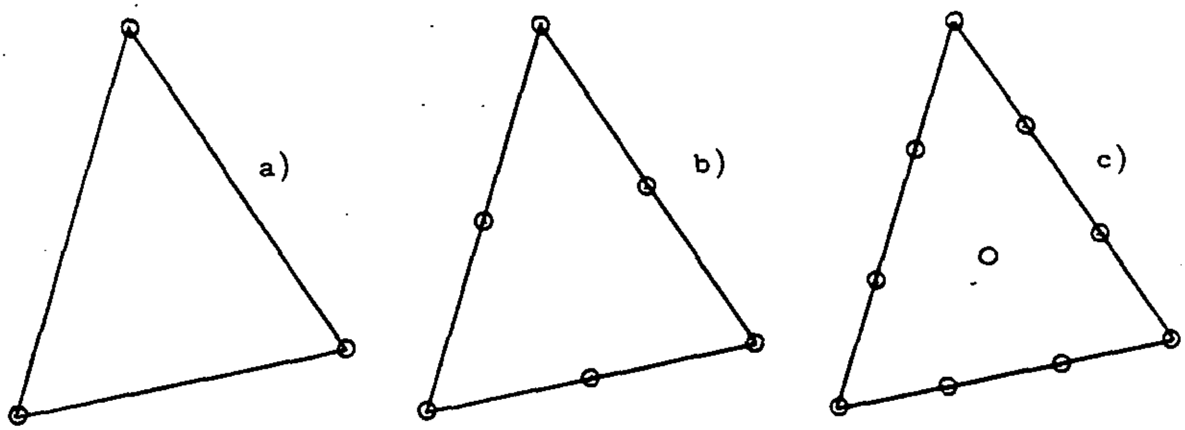


Figura 11.- Elementos triangulares: a) lineal, b) cuadrático y c) cúbico

Para estudiar el desarrollo matemático general se elegirá uno de ellos, por ejemplo el cuadrático (Figura 12)

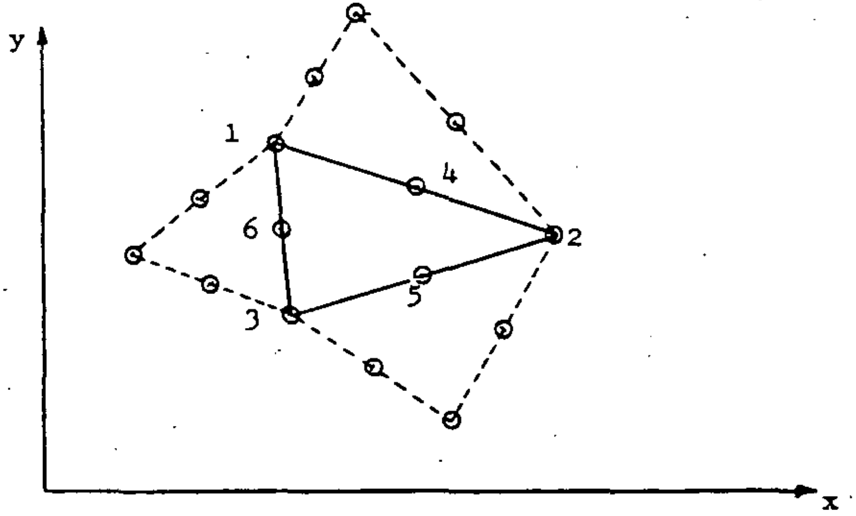


Figura 12.- Elementos triangulares cuadráticos

Los ejes x-y representan unos ejes Cartesianos generales para el sistema total. Las coordenadas por ellos representadas se denominan coordinadas globales.

Supóngase que para cumplir el criterio de convergencia, y suponiendo que las funciones de aproximación N_i sean polinomios, es suficiente que estén representados únicamente todos los términos del polinomio de primer grado (de ahora en adelante se mantendrá esta hipótesis para todos los elementos estudiados).

Dado que en cada lado del triángulo hay tres nodos, la condición de continuidad quedará satisfecha si la función de aproximación para cada nodo es un polinomio de segundo grado, ya que dicho polinomio queda definido por tres puntos. Por último, dado que hay seis nodos en el triángulo, serán necesarios seis parámetros a_i, i=1,...6 para aproximar los valores de la función $\emptyset$ (supuesta un escalar en este caso) en el elemento. Es decir

$$\emptyset_e = a_1+a_2x+a_3y+a_4x^2+a_5xy+a_6y^2 \qquad (6.1)$$

y en los nodos,

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ - & - & - & - & - & - \\ 1 & x & y & x^2 & x y & y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_6 \end{Bmatrix} \tag{6.2}$$

$$\{\phi\}_n = [C]_e \{a\}_e \tag{6.3}$$

donde (x_i, y_i) son las coordenadas globales del nodo i

Dado que

$$\phi_e = [P]\{a\}_e = [1, x, y, x^2, xy, y^2]\{a\}_e \tag{6.4}$$

y que

$$\{a\}_e = [C]_e^{-1}\{\phi_e\}_n \tag{6.5}$$

se deduce que el valor de la función en el elemento puede escribirse en función de su valor en los nodos como

$$\phi_e = [N]\{\phi\}_n = [P][C]_e^{-1}\{\phi\}_n \tag{6.6}$$

con lo que la ecuación integral en el elemento quedará reducida al sistema

$$[K]_e\{\phi\}_n = \{f\}_e \tag{6.7}$$

cuyas incógnitas son precisamente los valores de la función incógnita en los nodos.

Esta forma de obtención de las funciones de aproximación $[N]$ tiene un serio inconveniente: la necesidad de invertir la matriz de coordenadas globales $[C]_e$.

Un método directo de obtener las funciones $[N]$ es utilizar las llamadas funciones de interpolación. Supóngase que se puede encontrar para cada nodo i una función C_i tal que

$$C_i = \begin{cases} 1 & \text{en } (x_i, y_i) \\ 0 & \text{en } (x_j, y_j) \quad \forall j \neq i \end{cases} \tag{6.8}$$

Entonces, si

$$\{\phi\}_e = [C]_e\{a\}_e \tag{6.9}$$

los parámetros $\{a\}_e$ serán directamente los valores de $\{\phi\}$ en los nodos, es decir

$$\{a\}_e = \{\phi\}_n \qquad (6.10)$$

y las funciones de aproximación $[N]_e$ serán las mismas funciones de interpolación $[C]_e$, es decir, podremos escribir directamente

$$\{\phi\} = [N]_e \{a\}_e = [C]_e \{a\}_e \qquad (6.11)$$

la Figura 13 representa dos de estas funciones de interpolación para el elemento triangular cuadrático de la Figura 12.

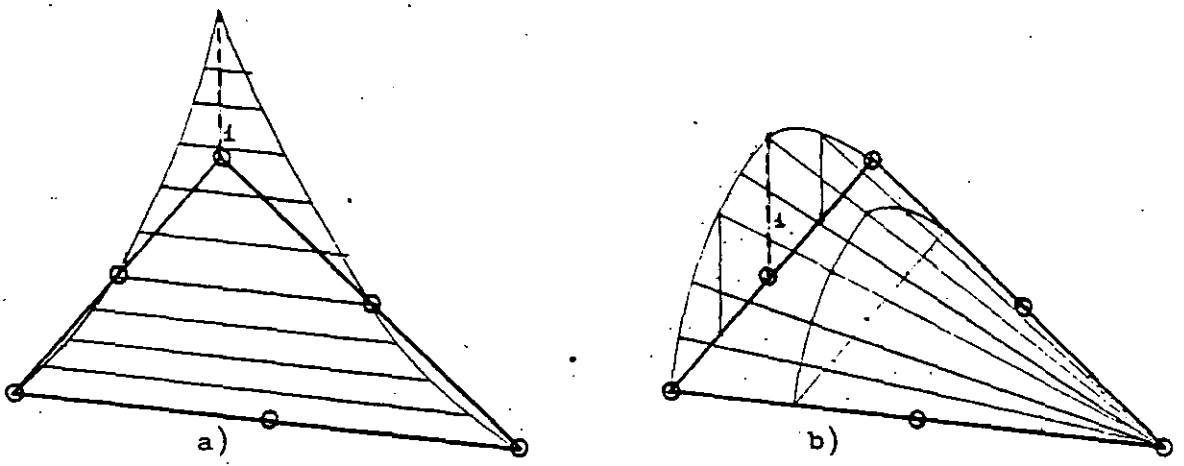


Figura 13.- Funciones de interpolación cuadráticas: a) en un nodo primario y b) en un nodo secundario

Para definir estas funciones de interpolación es conveniente crear un nuevo sistema de coordenadas, particulares para cada elemento, que llamaremos coordenadas locales. En el caso de elementos triangulares, las coordenadas locales más convenientes son las llamadas naturales o de superficie. En dicho sistema, a cada vértice del triángulo le corresponde una coordenada, que toma el valor 1 en el correspondiente vértice, y el valor 0 en el lado opuesto como muestra la Figura 14.

El empleo de dichas coordenadas permite, ademas de la obtención directa de las funciones de interpolación, la generación recurrente de elementos triangulares de orden superior, mediante la colocación conveniente de los nodos secundarios e interiores como se muestra en la Figura 15.

La relación de las coordenadas de superficie con las coordenadas globales rectangulares, que puede obtenerse fácilmente mediante simples consideraciones geométricas, es

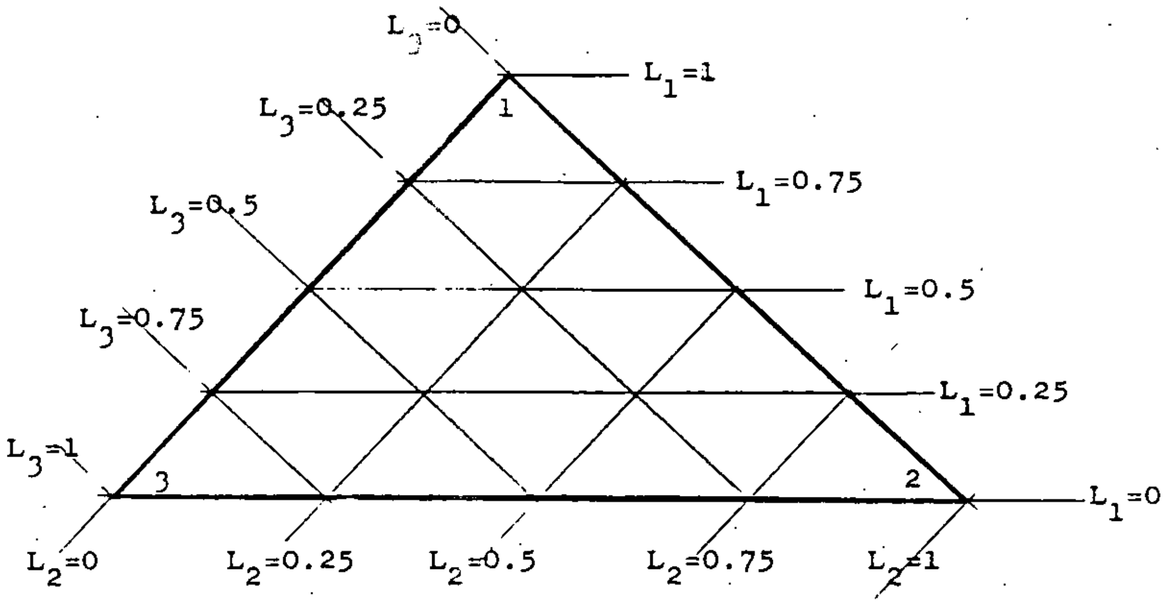


Figura 14.- Coordenadas naturales o de superficie para un elemento triangular

$$
\begin{aligned}
x &= L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 \\
y &= L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3 \\
1 &= L_1 + L_2 + L_3
\end{aligned}
\qquad (6.12)
$$

donde (x_i, y_i) son las coordenadas de los vértices en el sistema global. Igualmente

$$L_i = (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y)/2\Delta \quad , \quad i = 1,2,3 \qquad (6.13)$$

donde

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2(\text{Area del triángulo}) \qquad (6.14)$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 = x_2y_3 - x_3y_2 \;, && \alpha_2 = x_3y_1 - x_1y_3 \;, && \alpha_3 = x_1y_2 - x_2y_1 \\
&\beta_1 = y_2 - y_3 \;, && \beta_2 = y_3 - y_1 && \beta_3 = y_1 - y_2 \\
&\gamma_1 = x_3 - x_2 && \gamma_2 = x_1 - x_3 && \gamma_3 = x_2 - x_1
\end{aligned}
\qquad (6.15)
$$

Una vez definidas las coordenadas naturales, es fácil deducir las funciones de interpolación para el elemento triangular que se desee utilizar.

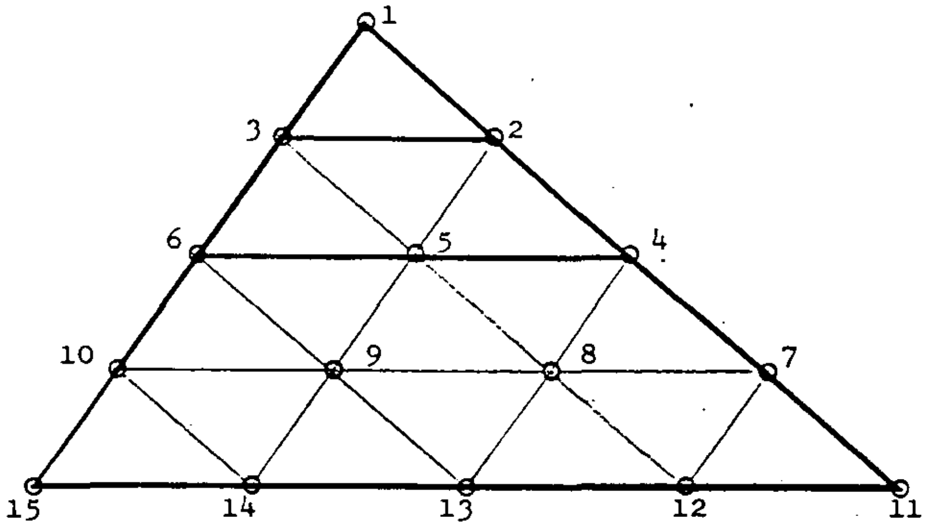


Figura 15.- Generación de elementos triangulares: lineal, nodos del 1 al 3. Cuadrático, nodos 1 al 6. Cúbico, nodos 1 al 10. Cuártico, nodos 1 al 15.

Evidentemente, para el elemento ~~triangular lineal (Figura~~ 16a)

$$\boxed{N_1 = L_1, \quad N_2 = L_2, \quad N_3 = L_3} \quad (6.16)$$

Shape functions.

Es igualmente posible deducir las funciones de interpolación para los demas elementos. Por ejemplo;

Elemento cuadrático

Nodos primarios: $N_i = (2L_i-1)L_i$

Nodos secundarios: $N_4 = 4L_1L_2$

$N_5 = 4L_2L_3$

$N_6 = 4L_1L_3$

Elemento cúbico

Nodos primarios: $N_i = \frac{1}{2}(3L_i-1)(3L_i-2)L_i$

Nodos secundarios: $N_4 = \frac{9}{2} L_1L_2(3L_1-1)$

$N_5 = \frac{9}{2} L_1L_2(3L_2-1)$

$N_6 = \frac{9}{2} L_2L_3(3L_2-1)$

$\vdots \qquad \vdots$

$N_9 = \frac{9}{2} L_1L_3(3L_1-1)$

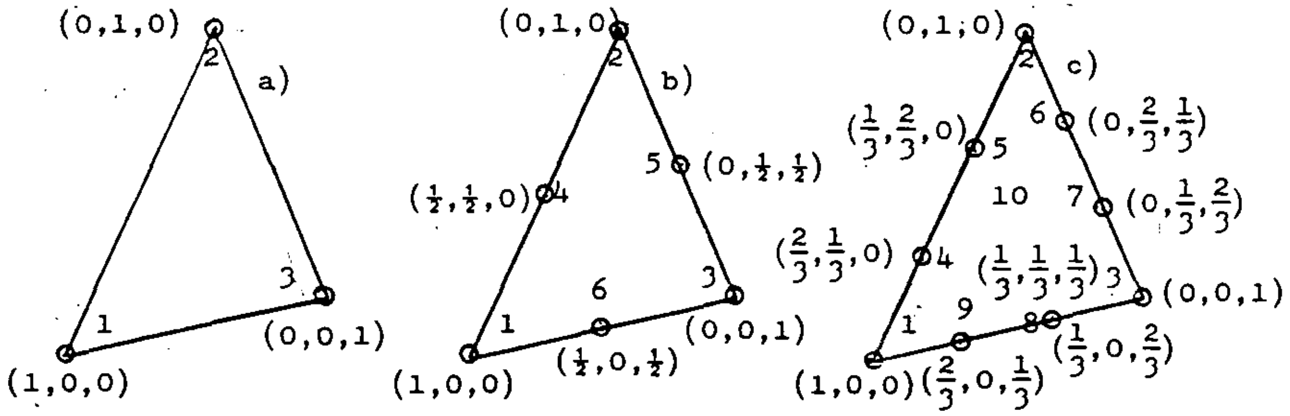


Figura 16.- Coordenadas nodales en el sistema natural para elementos triangulares: a) lineal, b) cuadrático y c) cúbico

Nodo interior: $N_{10} = 27L_1L_2L_3$

Elemento cuártico (Figura 17)

Nodos primarios: $N_i = \frac{1}{6}(4L_i-1)(4L_i-2)(4L_i-3)L_i$

Nodos secundarios:

$$N_4 = \frac{16}{3} L_1L_2(2L_1-1)(4L_1-1)$$

$$N_5 = 4L_1L_2(4L_1-1)(4L_2-1)$$

$$N_6 = \frac{16}{3} L_1L_2(2L_2-1)(4L_2-1)$$

$$N_7 = \frac{16}{3} L_2L_3(2L_2-1)(4L_2-1)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$N_{11} = 4L_1L_3(4L_1-1)(4L_3-1)$$

$$N_{12} = \frac{16}{3} L_1L_3(2L_1-1)(4L_1-1)$$

Nodos interiores:

$$N_{13} = 32L_1L_2L_3(4L_1-1)$$

$$N_{14} = 32L_1L_2L_3(4L_2-1)$$

$$N_{15} = 32L_1L_2L_3(4L_3-1)$$

Una vez obtenidas las funciones de interpolación, si n es el número de nodos del triángulo y Ø es un escalar

$$\emptyset = \sum_{i=1}^{n} N_i a_i \tag{6.17}$$

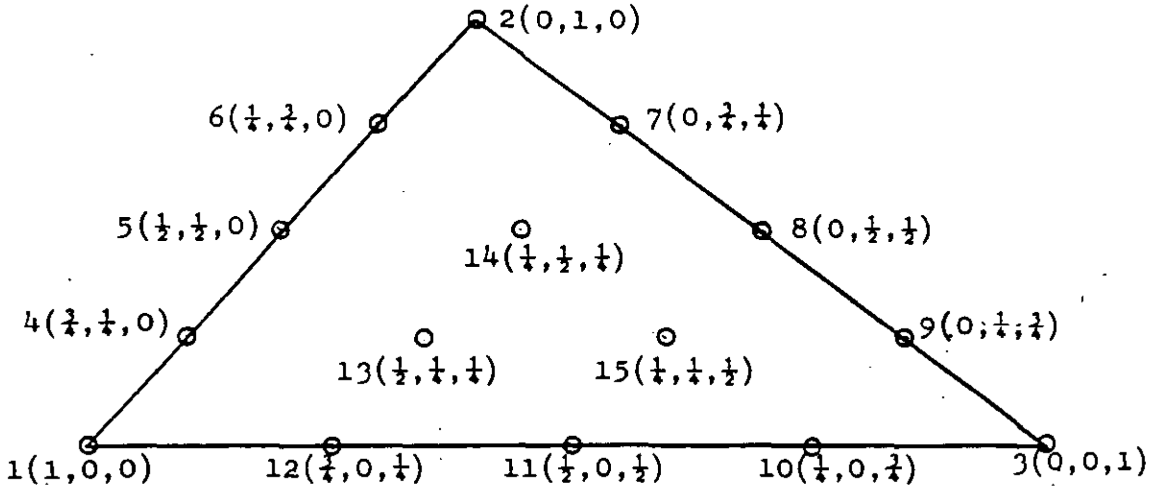


Figura 17.- Coordenadas nodales en el sistema natural para un elemento triangular cuártico

que podemos sustituir directamente en la ecuación integral para obtener la matriz $[K]_e$ y el vector $\{f\}_e$. En el caso de que $\emptyset$ sea un vector, por ejemplo

$$\{\emptyset\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \tag{6.18}$$

la aproximación sería

$$\{\emptyset\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & N_1 & N_2 & \cdots & N_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & N_1 & N_2 & \cdots & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{Bmatrix} \tag{6,19}$$

donde a_i representa la aproximación a u en el nodo i, b_i la aproximación a v en el nodo i, y c_i la aproximación a w en el nodo i. Para el cálculo de las derivadas de N_i, observemos que

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta}\left(\beta_1\frac{\partial N_i}{\partial L_1} + \beta_2\frac{\partial N_i}{\partial L_2} + \beta_3\frac{\partial N_i}{\partial L_3}\right) \tag{6.20}$$

e igualmente

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta}\left(\gamma_1 \frac{\partial N_i}{\partial L_1} + \gamma_2 \frac{\partial N_i}{\partial L_2} + \gamma_3 \frac{\partial N_i}{\partial L_3}\right) \qquad (6.21)$$

donde Δ y α_i, β_i, γ_i, vienen definidos por las expresiones (6.14) y (6.15) respectivamente. Al sustituir estas derivadas en la ecuación integral nos encontramos con integrales de funciones del tipo $L_1^n L_2^m L_3^q$ extendidas al área del elemento. En vez de deshacer el cambio de coordenadas e integrar, es preferible tener en cuenta la expresión

$$\iint_{S_e} L_1^n L_2^m L_3^q \, dx\,dy = \frac{n!\,m!\,q!}{(n+m+q+2)!}\,2\Delta \qquad (6.22)$$

La simplicidad de su formulación, asi como la facilidad de discretizar con ellos dominios relativamente irregulares, ha hecho que los elementos triangulares sean los más populares hoy en dia para casi todas las aplicaciones simples del F:E.M.

6.2.- ELEMENTOS RECTANGULARES

Los elementos rectangulares, tambien muy empleados en la práctica, pueden formularse de un modo totalmente paralelo al utilizado anteriormente para el elemento triangular.

Considérese, por ejemplo, el elemento rectangular de la Figura 18.

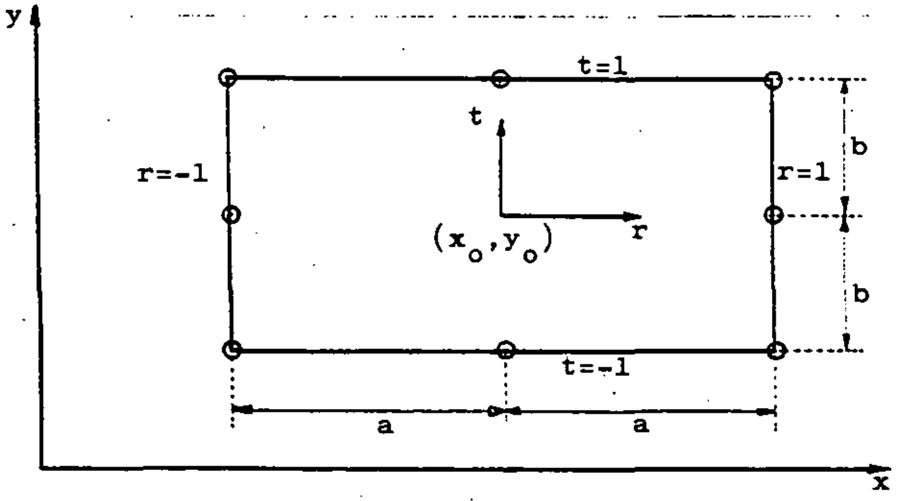


Figura 18.- Coordenadas naturales en un elemento rectangular

Al igual que en los elementos triangulares definiremos unas coordenadas locales naturales (r,t) cuya relación con las coordenadas globales (x,y) es la siguiente

$$r = \frac{x - x_o}{a} \quad , \quad t = \frac{y - y_o}{b} \tag{6.23}$$

donde (x_o, y_o) son las coordenadas del centro del rectángulo.
Según la forma que se emplee para deducir las funciones de interpolación, N_i, los elementos rectangulares pueden dividirse en dos grandes familias:

.- Familia de nodos frontera

En este tipo de elementos, representados en la Figura 19, las funciones de interpolación se obtienen directamente por inspección en coordenadas locales

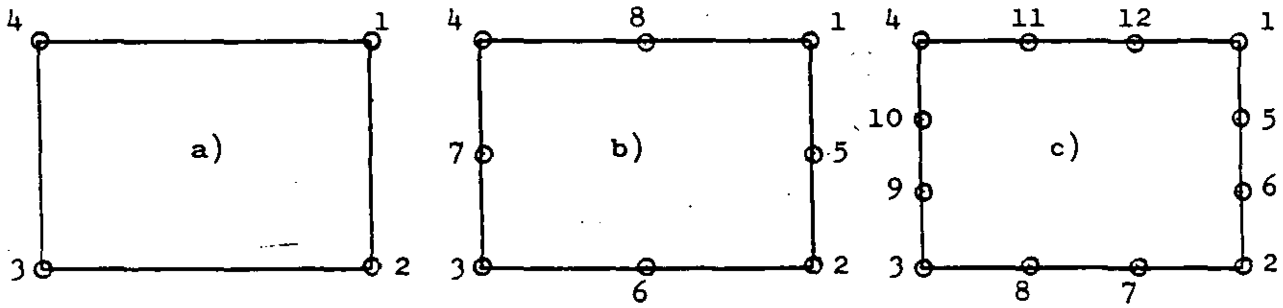


Figura 19.- Elementos rectangulares de la familia de nodos frontera: a) lineal, b) cuadrático y c) cúbico

Por ejemplo, para el elemento lineal, las funciones de interpolación son

$$N_1 = \tfrac{1}{4}(1+r)(1+t) \qquad N_3 = \tfrac{1}{4}(1-r)(1-t)$$

$$N_2 = \tfrac{1}{4}(1+r)(1-t) \qquad N_4 = \tfrac{1}{4}(1-r)(1+t)$$

Para el elemento cuadrático:

Nodos primarios: $N_1 = \tfrac{1}{4}(1+r)(1+t)(r+t-1)$

$$N_2 = \tfrac{1}{4}(1+r)(1-t)(r-t-1)$$

$$N_3 = \tfrac{1}{4}(1-r)(1-t)(-r-t-1)$$

$$N_4 = \tfrac{1}{4}(1-r)(1+t)(-r+t+1)$$

Nodos secundarios: $N_5 = \tfrac{1}{2}(1+r)(1-t^2)$

$$N_6 = \tfrac{1}{2}(1-r^2)(1-t)$$

$$N_7 = \tfrac{1}{2}(1-r)(1-t^2)$$

$$N_8 = \tfrac{1}{2}(1-r^2)(1+t)$$

Para el elemento cúbico:

Nodos principales:

$$N_1 = \frac{1}{32}(1+r)(1+t)\left[-10+9(r^2+t^2)\right]$$

$$N_2 = \frac{1}{32}(1+r)(1-t)\left[-10+9(r^2+t^2)\right]$$

$$N_3 = \frac{1}{32}(1-r)(1-t)\left[-10+9(r^2+t^2)\right]$$

$$N_4 = \frac{1}{32}(1-r)(1+t)\left[-10+9(r^2+t^2)\right]$$

Nodos secundarios:

$$N_5 = \frac{9}{32}(1+r)(1-t^2)(1+3t)$$

$$N_6 = \frac{9}{32}(1+r)(1-t^2)(1-3t)$$

$$N_7 = \frac{9}{32}(1-r^2)(1-t)(1+3r)$$

$$N_8 = \frac{9}{32}(1-r^2)(1-t)(1-3r)$$

$$N_9 = \frac{9}{32}(1-r)(1-t^2)(1-3t)$$

$$N_{10} = \frac{9}{32}(1-r)(1-t^2)(1+3t)$$

$$N_{11} = \frac{9}{32}(1-r^2)(1+t)(1-3r)$$

$$N_{12} = \frac{9}{32}(1-r^2)(1+t)(1+3r)$$

Puede observarse que las funciones de interpolación se complican al aumentar el orden de los elementos. Por otro lado, elementos de orden superior al terceronecesitan nodos internos para cumplir el principio de isotropía geométrica. Dicho principio, muy relacionado con la condición de continuidad, exige que el desarrollo polinómico de las funciones de interpolación no se genere preferencia de una coordenada sobre otra. - Por ejemplo, supongamos el elemento cuártico de la Figura 20.

Dicho elemento tiene 16 nodos. Dado que para expresar las funciones de interpolación de forma que incluyan un polinomio completo de cuarto grado (necesario para continuidad) es imprescindible incluir 15 términos- $(1,x,y,x^2,xy,y^2,x^3,x^2y,xy^2,y^3,x^4,x^3y,x^2y^2,xy^3,y^4)$, sólo podemos introducir un término de quinto grado.Como ninguno de los términos de quinto grado es simétrico, la elección de cualquiera de ellos genera automáticamente una anisotropía geométrica, en general indeseable.

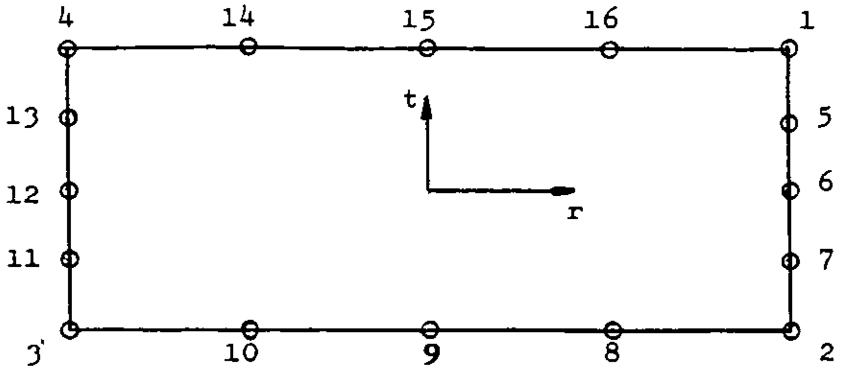


Figura 20.- Elemento cuártico generador de anisotropía geométrica

Sin embargo, la introducción de un nodo central (r=0,t=0) elimina el problema, manteniendo a la vez la simetría del elemento. El lector puede comprobar, basándose en el triángulo polinómico de Pascal de la Figura 21 que un elemento de quinto grado de esta familia necesita al menos 4 nodos interiores para ser geométricamente isótropo y simétrico, mientras que un elemento de grado 6 necesita al menos 8 nodos. En estos dos últimos casos la solución, evidentemente, no es única.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & x & & y & & & & & \\
 & & & & x^2 & & xy & & y^2 & & & & \\
 & & & x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 & & & \\
 & & x^4 & & x^3y & & x^2y^2 & & xy^3 & & y^4 & & \\
 & x^5 & & x^4y & & x^3y^2 & & x^2y^3 & & xy^4 & & y^5 & \\
x^6 & & x^5y & & x^4y^2 & & x^3y^3 & & x^2y^4 & & xy^5 & & y^6
\end{array}
$$

eje de simetria

Figura 21.- Triángulo polinómico de Pascal

La dificultad de esta formulación para elementos con un número superior de grados de libertad ha llevado al desarrollo de la segunda familia de elementos rectangulares, denominada familia de Lagrange y que estudiaremos más adelante.

Ha de hacerse notar que en elementos rectangulares el número de grados de libertad no tiene porqué ser el mismo en ambas direcciones (r,t,).- Por ejemplo, el elemento de la Figura 22 es lineal en la dirección r y cuadrático en la dirección t. La formulación de sus correspondientes funciones de interpolación es inmediata.

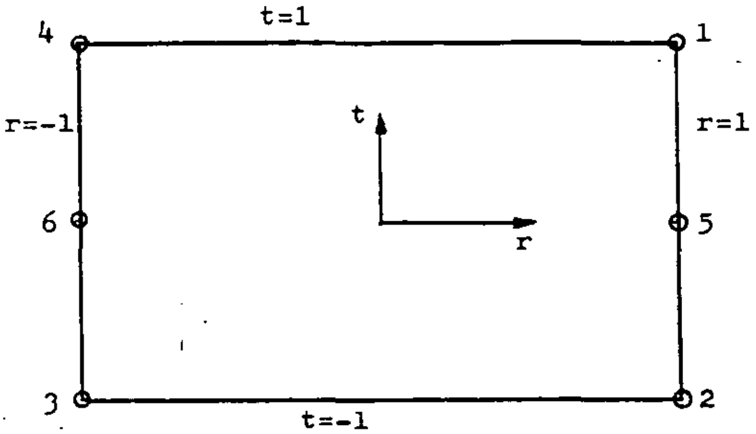


Figura 22.- Elemento rectangular con distintos grados de libertad en las dos direcciones de las coordenadas naturales

Nodos Primarios:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+r)t(1+t)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+r)t(1-t)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1-r)t(1-t)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-r)t(1+t)$$

Nodos Secundarios:

$$N_5 = \frac{1}{2}(1+r)(1-t)(1+t)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1-r)(1+t)(1-t)$$

Como puede observarse, las funciones de interpolación son el producto de un polinomio lineal en r por un cuadrático en t.

.- Familia de Lagrange

Para evitar el inconveniente de la difícil formulación de los elementos rectangulares de la familia de nodos frontera puede aumentarse el número de nodos del elemento de forma que las correspondientes funciones de interpolación se generen directamente como el producto de dos polinomios, uno en r y otro en t.

Considérese por ejemplo el elemento de la figura 23, que es cuadrático en la dirección r y cúbico en la difección t.

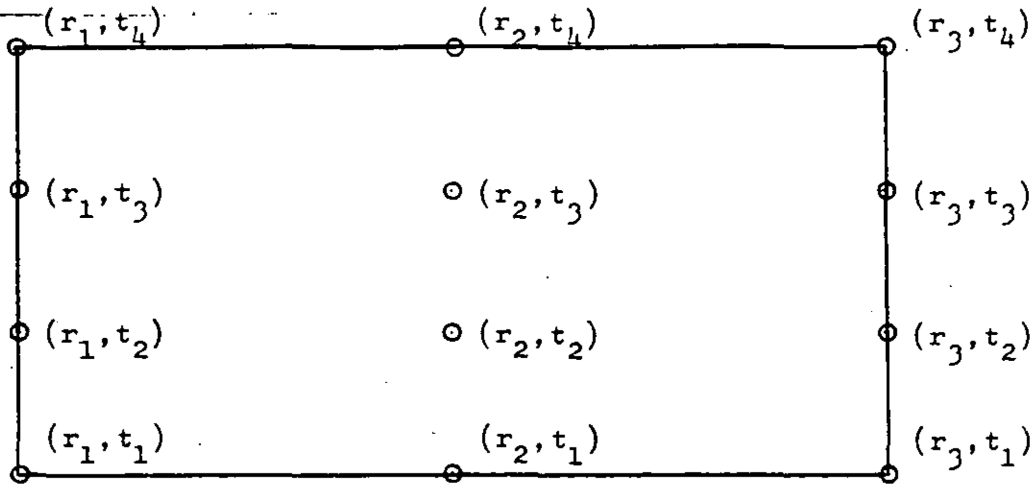


Figura 23.- Elemento rectangular de la familia de Lagrange

Consideremos el nodo (r_i,t_j). Si en dicho nodo definimos la función de interpolación como el producto de dos polinomios de Lagrange que se anulen en los demás nodos y tengan en éste un valor unitario, habremos resuelto el problema. Por tanto, si llamamos,

$$\boxed{\begin{aligned} L_i &= \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{3} \frac{r-r_k}{r_i-r_k} \\ L_j &= \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{4} \frac{t-t_k}{t_j-t_k} \end{aligned}} \tag{6.24}$$

la función de interpolación de ese nodo será

$$\boxed{N_{ij} = L_i L_j} \text{ shape function} \tag{6.25}$$

Este tipo de elementos, de muy fácil formulación, tiene sin embargo dos inconvenientes: la imposibilidad de obtener isotropía geométrica excepto en elementos lineales (veánse por ejemplo, los elementos cúbico y cuártico de la Figura 24), y la generación, al aumentar el orden del elemento, de polinomios de muy alto grado, que no son convenientes como funciones de aproximación.

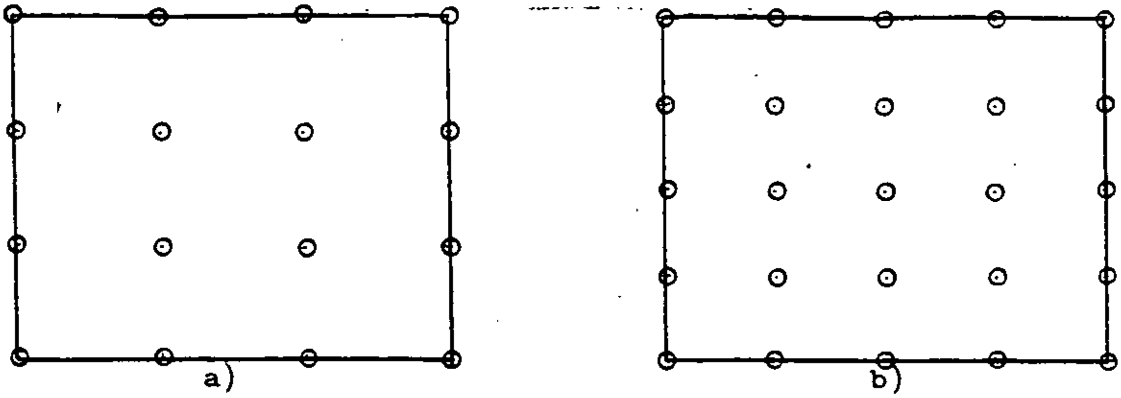


Figura 24.- Elementos a) cúbico y b) cuártico de la familia de Lagrange

En la Figura 25 puede observarse la diferencia entre las funciones de aproximación en un nodo secundario para dos elementos cuadráticos de distinta familia.

Se ha visto, pues, que el aumento del número de grados de libertad de un elemento mediante el aumento del número de nodos, conduce a planteamientos muy difíciles o poco correctos matemáticamente. Sin embargo, numerosas veces necesitamos elementos de alto orden en problemas resueltos mediante el F.E.M. La solución del problema radica, más que aumentar el número de nodos, en aumentar el número de grados de libertad en cada nodo. Esta técnica se estudiará más adelante.

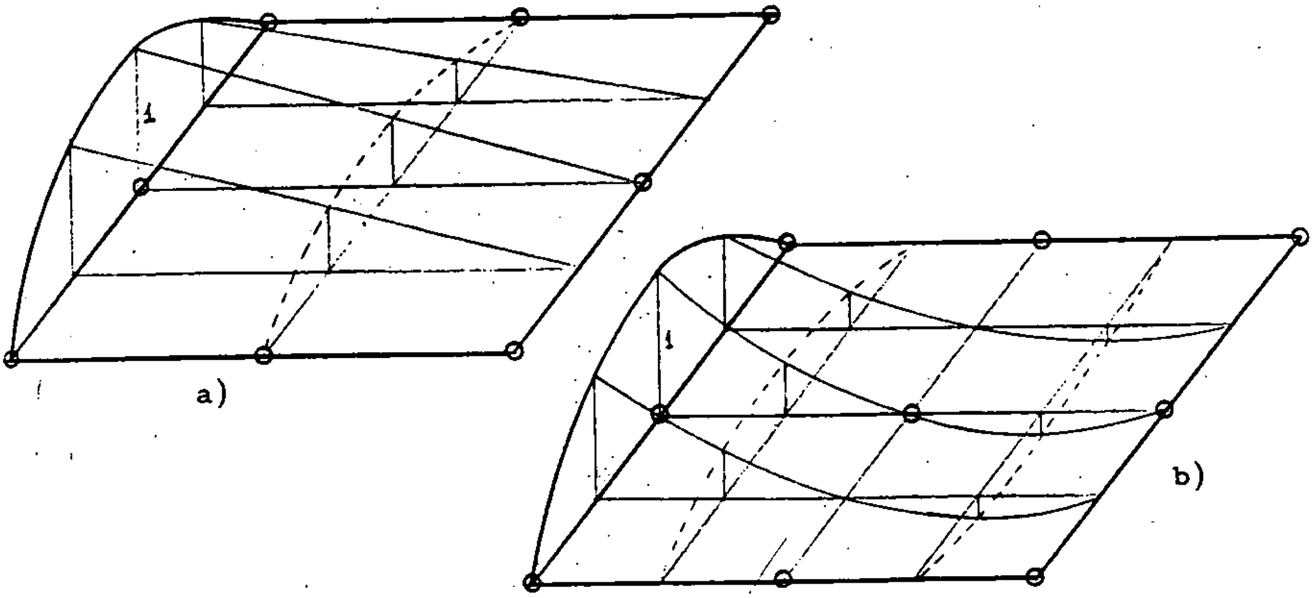


Figura 25.- Funciones de interpolación en un nodo secundario para dos elementos cuadráticos; a) familia de nodos frontera y b) familia de Lagrange

6.3.- ELEMENTOS AXISIMETRICOS

Un estudio tridimensional totalmente paralelo al hasta ahora realizado puede hacerse para la discretización de dominios que tengan un eje de simetría. Los elementos empleados para este tipo de problemas son los engendrados por los elementos anteriormente expuestos al rotar alrededor del eje de simetría. (Figura 26). La formulación del problema se simplifica notablemente si se emplean coordenadas cilíndricas como coordenadas globales. (H.C. Martin y G.F. Carey, 1.973)

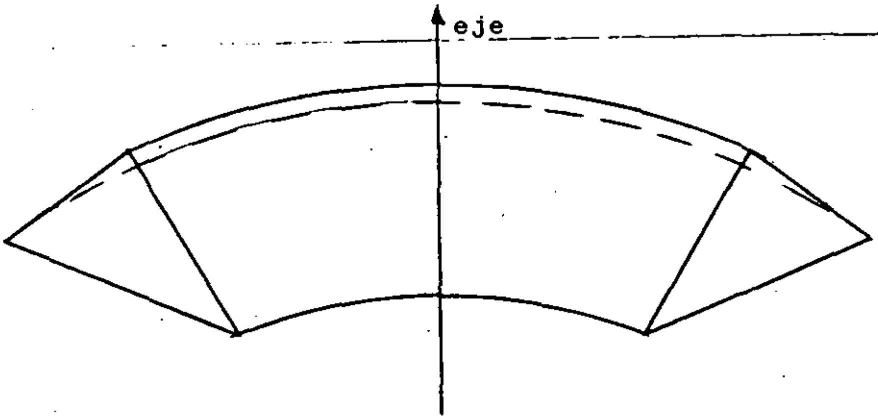


Figura 26.- Elemento axisimétrico (o de revolución)

7.- ELEMENTOS TRIDIMENSIONALES

La formulación de los elementos para análisis tridimensional es muy similar al anteriormente expuesto. Los elementos tridimensionales admiten, sin embargo, más variedad de formas que los bidimensionales. Analizaremos brevemente, a continuación, los tres tipos de elementos rectos más empleados en la práctica.

7.1.- TETRAEDROS

Al igual que en el estudio del elemento triangular, definiremos unas coordenadas naturales locales, que en este caso serán de volumen, según muestra la Figura 27

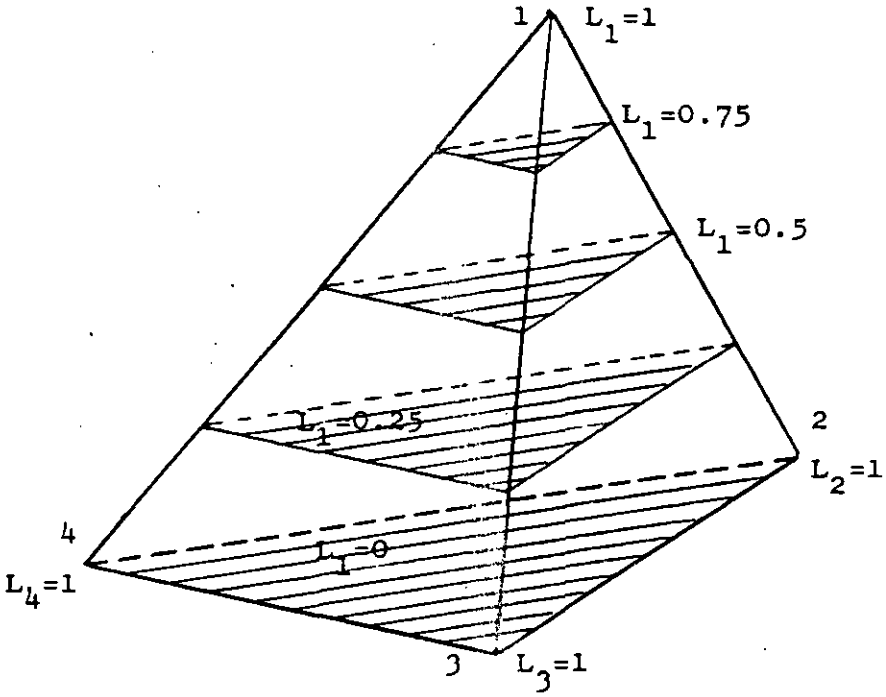


Figura 27.- Coordenadas naturales en un elemento tetraédrico

De nuevo las coordenadas naturales pueden relacionarse fácilmente por consideraciones puramente geométricas con un sistema cualquiera de coordenadas globales cartesianas mediante las relaciones.

$$\begin{aligned} x&=L_1x_1+L_2x_2+L_3x_3+L_4x_4\\ y&=L_1y_1+L_2y_2+L_3y_3+L_4y_4\\ z&=L_1z_1+L_2z_2+L_3z_3+L_4z_4\\ 1&=L_1+L_2+L_3+L_4 \end{aligned} \qquad (7.1)$$

donde (x_i, y_i, z_i) son las coordenadas de cada vértice en el sistema global, o bien, mediante la relación inversa.

$$L_i=(\alpha_i+\beta_i x+\gamma_i y+\delta_i z)/6V \qquad (7.2)$$

donde

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 6(\text{Volumen del elemento}) \qquad (7.3)$$

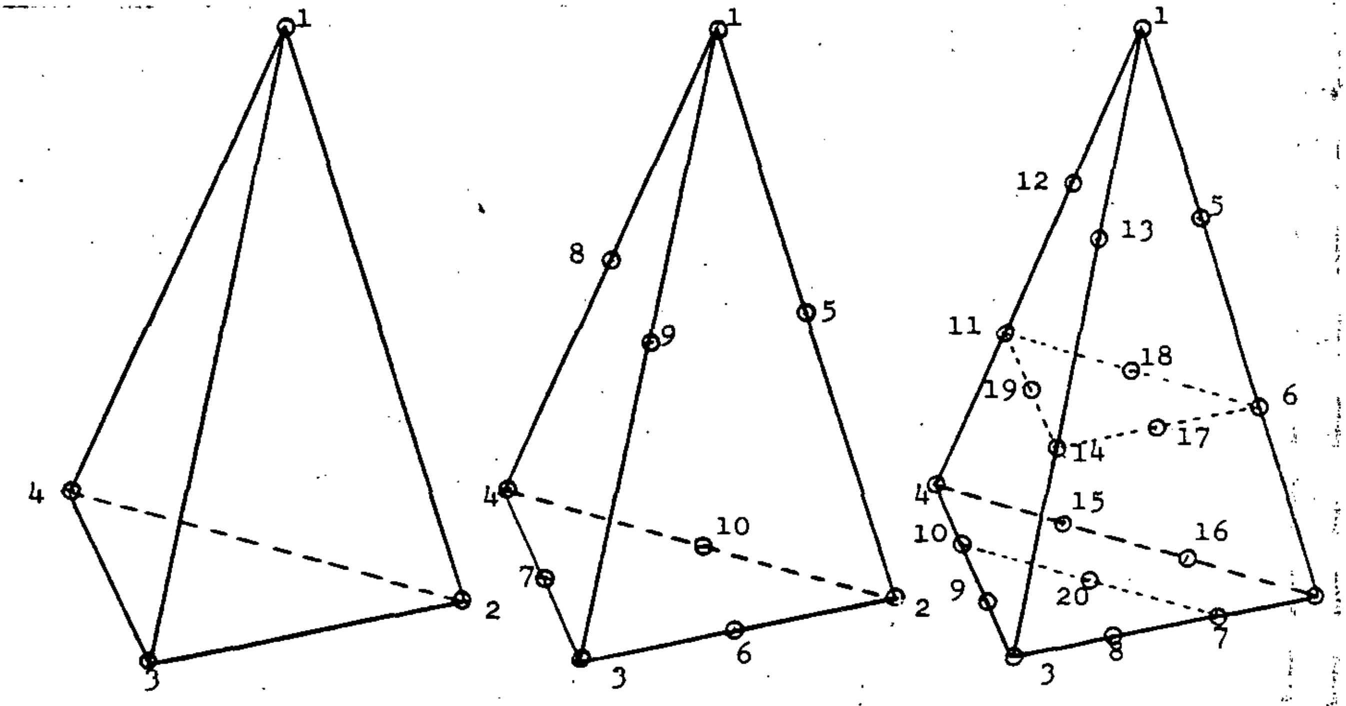
y

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad \beta_1 = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \quad \gamma_1 = \begin{vmatrix} x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \quad \delta_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \qquad (7.4)$$

e igualmente los demás coeficientes.

En la Figura 28 se representan los tres primeros elementos de esta familia.

Las funciones de interpolación para dichos elementos pueden obtenerse directamente. Por ejemplo, para el tetraedro lineal: $N_i = L_i$



a) lineal   b) cuadrático   c) cúbico

Figura 28.- Elementos tetraédricos

Tetraedro cuadrático:

Nodos primarios: $N_i=L_i(2L_i-1)$ $i=1,2,3,4.$

Nodos secundarios: $N_5=4L_1L_2$

$N_6=4L_3L_2$

$N_7=4L_4L_3$

$N_8=4L_1L_4$

$N_9=4L_1L_3$

$N_{10}=4L_2L_4$

Tetraedro cúbico:

Nodos primarios: $N_i=\frac{1}{2}L_i(3L_i-1)(3L_i-2)$ $i= 1,2,3,4.$

Nodos secundarios: $N_5=\frac{9}{2}L_1L_2(3L_1-1)$

$N_6=\frac{9}{2}L_1L_2(3L_2-1)$

$\vdots \qquad \vdots$

$N_{15}=\frac{9}{2}L_2L_4(3L_4-1)$

$N_{16}=\frac{9}{2}L_2L_4(3L_2-1)$

Nodos interiores: $N_{17}=27L_1L_2L_3$

$N_{18}=27L_1L_2L_4$

$N_{19}=27L_1L_3L_4$

$N_{20}=27L_2L_3L_4$

En el empleo de estas funciones de interpolación es necesario tener en cuenta que, por ejemplo

$$\frac{\partial N_i}{\partial x}=\frac{\partial N_i}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial L_4}\frac{\partial L_4}{\partial x}= \tag{7.5}$$

$$=\frac{1}{6V}\left[\sum_j \beta_j \frac{\partial N_i}{\partial L_j}\right]$$

donde V y β_j vienen dados por las expresiones (7.4) y (7.5) respectivamente.

Es igualmente conveniente recordar que

$$\int_{V_e} L_1^n L_2^m L_3^q L_4^p \, dv = \frac{n!\,m!\,q!\,p!}{(n+m+q+p+3)!} \, 6V \qquad (7.6)$$

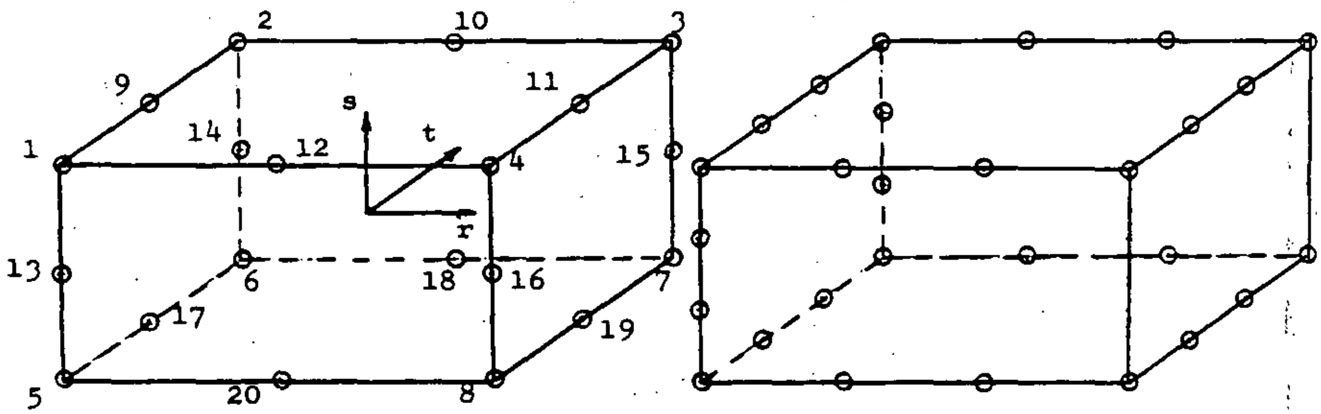
7.2.- PRISMAS RECTANGULARES

La ampliación del concepto de elemento rectangular a tres dimensiones es obviamente un prisma rectangular.

Las coordenadas locales naturales serán en este caso (r,t,s) y de nuevo puede hablarse de dos familias distintas. En este caso

$$r = \frac{x - x_o}{a} \qquad t = \frac{y - y_o}{b} \qquad s = \frac{z - z_o}{c}$$

donde (x_o, y_o, z_o) son las coordenadas del centro del prisma, y a, b y c son las semilongitudes de los lados en las direcciones r,t y s respectivamente (Figura 29)



a) b)

Figura 29.- Elementos a) cuadrático y b) cúbico de la familia de nodos frontera

.- Familia de nodos frontera.

Dos elementos típicos pueden verse en la Figura 29 . La generación de las funciones de interpolación vuelve a realizarse por inspección. Por ejemplo, para el elemento cuadrático de la Figura 29 las funciones de interpolación son:

Nodos primarios :

$$N_1 = \frac{1}{8}(1-r)(1-t)(1+S)(-r-t+s-2)$$

$$N_2 = \frac{1}{8}(1-r)(1+t)(1+s)(s+t-r-2)$$

$$N_3 = \frac{1}{8}(1+r)(1+t)(1+s)(s+t+r-2)$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$N_8 = \frac{1}{8}(1+r)(1-t)(1-s)(r-s-t-2)$$

Nodos secundarios:

$$N_9 = \frac{1}{4}(1-t^2)(1-r)(1+s)$$

$$N_{10} = \frac{1}{4}(1-r^2)(1+t)(1+s)$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$N_{20} = \frac{1}{4}(1-r^2)(1-t)(1-s)$$

El estudio de la isotropía geométrica puede realizarse igual que con el elemento rectangular plano, aunque su complicación matemática es naturalmente mayor.

.-Familia de Lagrange

En el estudio tridimensional, los elementos de Lagrange se definen mediante el producto de tres polinomios unidimensionales. Por ejemplo, para el polinomio de la Figura 30, la función de interpolación en el nodo A es

$$N_A = L_2(r)L_1(t)L_3(s) \tag{7.7}$$

donde

$$\begin{aligned} L_2(r) &= \frac{(r-r_2)(r-r_3)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)} \\ L_1(t) &= \frac{(t-t_2)}{(t_1-t_2)} \\ L_3(s) &= \frac{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_4)}{(s_3-s_1)(s_3-s_2)(s_3-s_4)} \end{aligned} \tag{7.8}$$

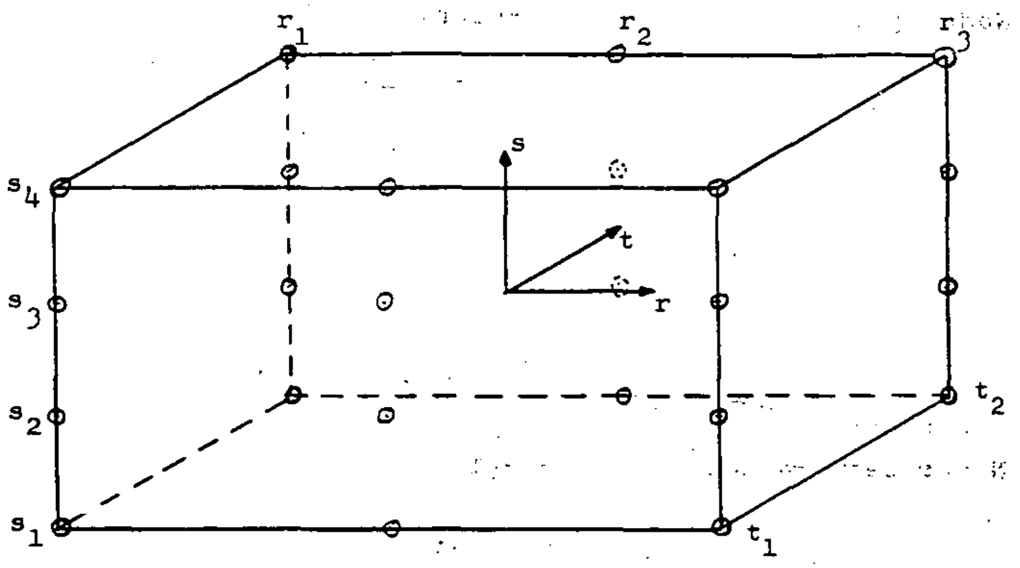


Figura 30.- Elemento de Lagrange lineal en t, cuadrático en r, y cúbico en s

Todo lo que se dijo anteriormente para los elementos rectangulares de Lagrange es aplicable a estos elementos tridimensionales.

7.3.- PRISMAS TRIANGULARES RECTOS

Para rellenar huecos al discretizar un dominio mediante elementos prismáticos rectangulares es bastante frecuente utilizar prismas triangulares como el de la Figura 31 (donde las caras rectangulares se han elegido de la familia de nodos frontera). Para estos elementos se definen las coordenadas locales naturales L_1,L_2 y L_3 en las secciones triangulares y una coordenada adicional r perpendicular a dichas secciones.

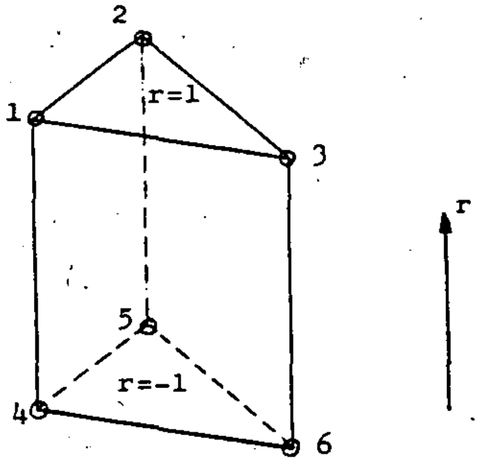


Figura 31.- Prisma triangular lineal

Las funciones de interpolación se deducen de la misma forma que para los elementos anteriores ejemplo, para el elemento triangular de la Figura 31

Nodos 1,2,3 : $\frac{1}{2} L_i(1+r)$ $i=1,2,3$

Nodos 4,5,6 : $\frac{1}{2} L_{i-3}(1-r)$ $i=4,5,6$

8.- ELEMENTOS DE ORDEN SUPERIOR

Como en cualquier método de aproximación, a medida que aumentamos el orden del método disminuimos el error de truncamiento, es decir, mejoramos la aproximación lograda. En el F.E.M., el aumentar el orden del método se traduce en incrementar el número de grados de libertad de cada elemento. Hasta ahora se ha estudiado como hacer esto definiendo un solo grado de libertad por nodo, y aumentando el número de nodos. Otro método para aumentar el orden del elemento es, dejando fijo el número de nodos, aumentar el número de grados de libertaden cada nodo. Para ejecutar este último método la técnica normalmente utilizada conssite en aumentar las exigencias de continuidad interelemental. Para explicar esta técnica vamos a emplear un ejemplo sencillo. Supóngase un dominio discretizado mediante elementos triangulares lineales similares a los de la Figura 16a y sea $\emptyset$, supuesta un escalar, la función buscada. Si deseamos aumentar el orden del elemento a 3 podemos: 1) utilizar elementos cúbicos como el de la Figura 16b y 2) aumentar el número de grados de libertad a tres por nodo. Esto último puede hacerse, por ejemplo, fijando en cada nodo no solo $\emptyset$, sino también sus derivadas

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial x}, \frac{\partial \emptyset}{\partial y}$$

La ventaja de esta última formulación es que aumenta no solo el número de grados de libertad del elemento, sino el grado de continuidad interelemental. Por otra parte, al no aumentar el número de nodos, la formulación final será lógicamente más compacta. Sin embargo, el planteamiento matemático es considerablemente más complejo, y las correspondientes funciones de interpolación han de deducirse para cada elemento particular.-

Al emplear esta técnica para aumentar el orden del elemento usado es necesario tener cuidado para no obtener en la formulación final un número superior de incógnitas que de ecuaciones. Por este motivo este método suele utilizarse únicamente cuando el concepto físico de los nuevos grados de libertad (en el ejemplo anterior $\partial\emptyset/\partial x$ y $\partial\emptyset/\partial y$) está perfectamente determinado.

9.- ELEMENTOS CURVOS

Se ha repetido numerosas veces que una de las ventajas del F.E.M. es la facilidad con que puede discretizarse cualquier continuo independientemente de su geometría. Es evidente que los elementos hasta ahora expuestos solo pueden realizar esta discretización de un modo muy aproximado (véase Figura 9b), sobre todo los rectangulares.

Este problema puede obviarse mediante técnicas de representación. Al definir en el apartado anterior las coordenadas locales (r,t,s) o (L_1,L_2,L_3,L_4), con respecto a las coordenadas Cartesianas globales, se obtuvieron relaciones del tipo

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [P] \begin{Bmatrix} r \\ t \\ s \end{Bmatrix} \quad , \quad \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [P] \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix} \qquad (9.1)$$

donde los elementos de las matrices [P] son constantes. Si sustituimos estas relaciones por otras del tipo

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [F] \begin{Bmatrix} r \\ s \\ t \end{Bmatrix} \quad , \quad \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [F] \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix} \qquad (9.2)$$

donde ahora los elementos de las matrices [F] son funciones, la representación de un elemento cualquiera en el sistema de coordenadas globales puede, en principio, tomar la forma que se desee. (Figura 32).- El sistema de coordenadas locales se transformará en un sistema curvo cuando se represente en coordenadas globales. Sin embargo, como la representación de los elementos en su respectivo sistema local no cambia con respecto a los elementos rectos simples anteriormente estudiados, la definición de las funciones de interpolación no reviste ninguna dificultad adicional.

La forma más simple de definir la transformación de coordenadas (9.2) es el empleo de funciones de interpolación M similares a las anteriormente estudiadas, de forma que, por ejemplo

$$x = \sum_{i=1}^{n} M_i x_i \qquad y = \sum_{i=1}^{n} M_i y_i \qquad z = \sum_{i=1}^{n} M_i z_i \qquad (9.3)$$

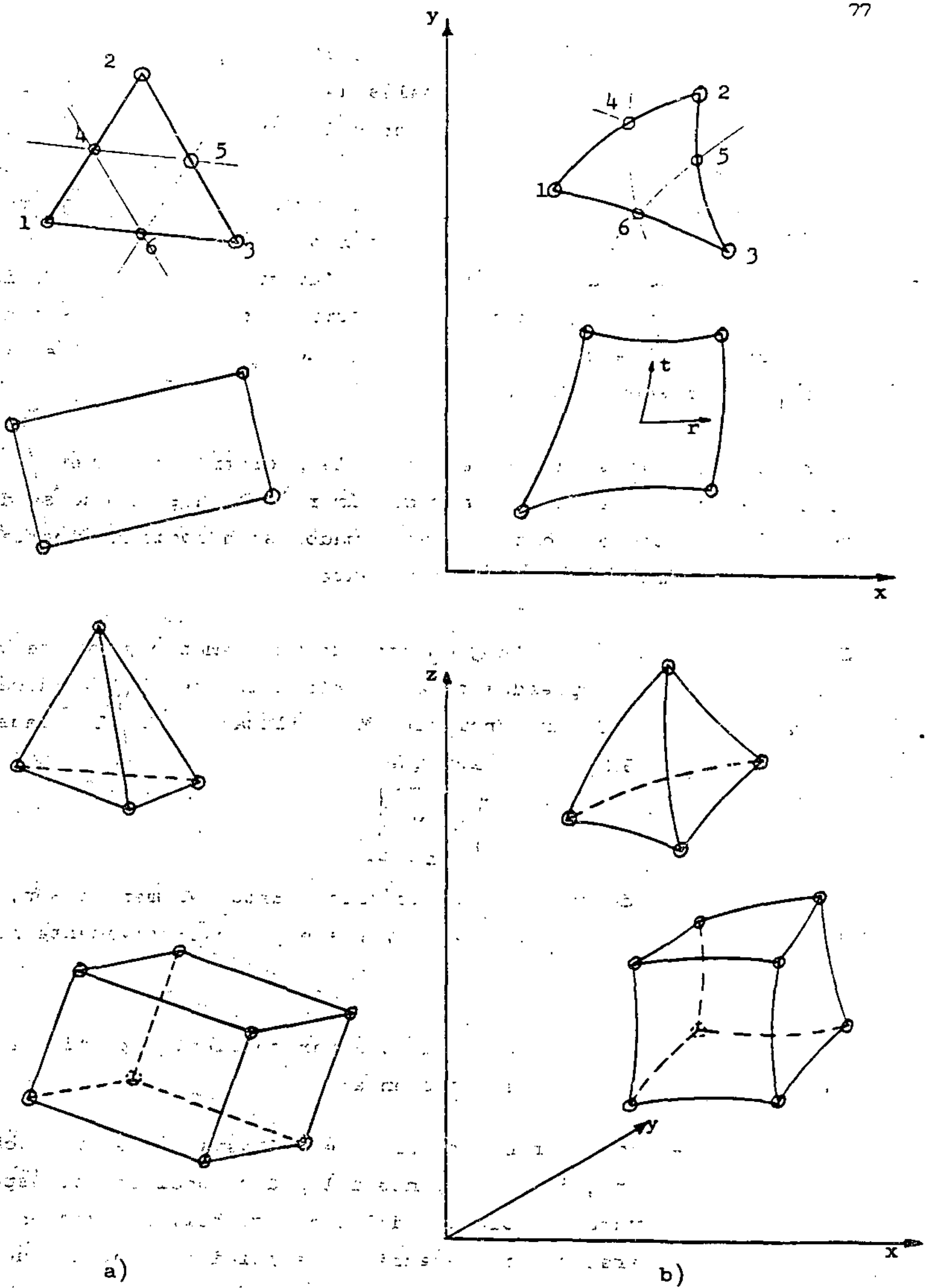


Figura 32.- Representación curva de elementos isoparamétricos simples: a) en coordenadas locales; b) en coordenadas globales

donde n es el número de nodos que se utilice para fijar la geometría, (x_i, y_i, z_i) las coordenadas globales de estos nodos, y M_i unas funciones (normalmente polinómicas) expresadas en las coordenadas locales - que toman el valor 1 en el nodo i y el valor 0 en todos los demás nodos. Es evidente que con este tipo de transformación no podremos fijar exactamente el contorno del dominio a discretizar, pero si aproximarlo tanto como queramos sin más que aumentar el número de nodos que utilicemos para determinar la geometría (obsérvese que esto no aumenta el orden del elemento, ya que el número de nodos en que se define la función desconocida $\{\emptyset\}$ no varía).-

El número de nodos en que se define la geometría del nuevo elemento - puede ser mayor, igual o menor al número de nodos en que se define la función $\{\emptyset\}$. Los elementos transformados se denominan superparamétricos y subparamétricos, respectivamente.

Si en la definición de la geometría de un elemento curvo se utilizan los mismos nodos empleados para la definición de $\{\emptyset\}$, y además las - nuevas funciones de interpolación M_i utilizadas para la transformación de coordenadas (9.3) son tales que

$$\boxed{M_i = N_i} \qquad (9.4)$$

el elemento se denomina isoparamétrico. Estos elementos son, con mucho, los más empleados en la práctica, y a ellos exclusivamente nos referiremos de aquí en adelante.

Al representar los nuevos elementos paramétricos a partir de elementos rectos, hay que tener en cuenta:

.- Que la transformación de coordenadas sea unívoca, es decir que a cada punto del plano local le corresponde un - punto, y solo uno del plano global. No existen reglas generales para asegurar esta unicidad, por lo que habría - de estudiarse en cada caso. En la práctica, transformaciones no unívocas no suelen presentarse si se emplean - elementos isoparamétricos.

De la misma forma, para el elemento rectangular 3, la correspondiente transformación vendrá dada por

$$\begin{aligned} x &= \{N\}\{0,0.5,1,1.05,1.29,0.64,0,0\}^T \\ y &= \{N\}\{0,0,0,-0.5,-1,-1,-1,-0.5\}^T \end{aligned} \tag{9.9}$$

donde, en este caso (estamos empleando elementos rectangulares de la familia de nodos frontera

$$\begin{aligned} \{N\} = \Big\{ & \tfrac{1}{4}(1-r)(1+t)(-r+t+1),\ \tfrac{1}{2}(1-r^2)(1+t),\ \tfrac{1}{4}(1+r)(1+t)(r+t-1), \\ & \tfrac{1}{2}(1+r)(1-t^2),\ \tfrac{1}{4}(1+r)(1-t)(r-t-1),\ \tfrac{1}{2}((1-r^2)(1-t), \\ & \tfrac{1}{4}(1-r)(1-t)(-r-t-1),\ \tfrac{1}{2}(1-r)(1-t^2)\Big\} \end{aligned} \tag{9.10}$$

Mediante esta técnica pueden aproximarse dominios con prácticamente cualquier contorno, con lo que el F.E.M. adquiere una gran potencia adicional.

10.- DEFINICION DE PROPIEDADES ELEMENTALES

Una vez discretizado el dominio, hemos de formar para cada elemento la ecuación elemental

$$[K]_e\{\emptyset\}_e = \{f\}_e \tag{10.1}$$

donde la matriz $[K]_e$ está relacionada con ciertas propiedades del elemento y el vector $\{f\}_e$ representa las condiciones de contorno elementales. En la definición tanto de $[K]_e$ como de $\{f\}_e$ intervienen las funciones de interpolación, N_i, y generalmente sus derivadas. Por ejemplo, en el problema de tensión plana que se ha venido analizando (véase Ecuación (5.7))

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]_e^T [D] [B]_e \, dV \tag{10.2}$$

$$\{f\}_e = \int_{V_e} [N]_e \{X\}_e \, dV + \int_{S_e} [N]_e \{\bar{T}\}_e \, dS \tag{10.3}$$

donde $[B]_e$ viene definido por las Ecuaciones (5.8) y (5.9) y $[D]$ es la matriz de coeficientes elásticos. El cálculo de las integrales (9.13) no presenta dificultad al expresarse las funciones N_i en coordenadas locales. Sin embargo, las integrales (9.12) incluyen derivadas de las funciones de aproximación con respecto a las coordenadas globales, lo que para elementos curvos requiere alguna elaboración.

10.1.- ELEMENTOS RECTANGULARES O PRISMAS RECTANGULARES

Si los elementos isoparamétricos han sido generados a partir de elementos rectangulares o primas rectangulares, la formulación de las integrales (10.1) presenta poca dificultad. En efecto,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \qquad (10.4)$$

donde $[J]$ es la matriz jacobiana de la correspondiente transformación de coordenadas (9.3) Dado que podemos calcular $[J]$,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \end{Bmatrix} \qquad (10.5)$$

con lo que las integrales (10.2) pueden ya expresarse en función de las coordenadas locales. Por otra parte

$$dxdydz=//J//drdtds \qquad (10.6)$$

donde //J// representa el determinante de $[J]$. Entonces, si las propiedades elementales pueden expresarse como

$$[K]_e = \int_{V_e} [F(x,y,z)]\, dv_e \quad , \qquad (10.7)$$

las transformaciones anteriormente expuestas han transformado las integrales (10.7) en

$$[K]_e = \int_{V_e} [G(r,t,s)] //J// dv_e = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [G(r,s,t)] //J// dr dt ds \qquad (10.8)$$

El problema del cálculo de las propiedades elementales está pues teóricamente resuelto. En la práctica las integrales (10.8) no podrán, en general, integrarse analíticamente, por lo que habremos de recurrir a los métodos de integración numérica que se exponen más adelante.

10.2.- ELEMENTOS TRIANGULARES O TETRAEDROS

En el caso de elementos isoparamétricos triangulares la obtención de las propiedades elementales (10.2) es ligeramente más complicada, ya que las coordenadas locales definidas en este tipo de elementos no son independientes. En efecto, habíamos visto que en el caso general tridimensional

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1. \qquad (10.9)$$

Si suponemos que L_4 es la coordenada dependiente podemos escribir.

$$L_1' = L_1,\ L_2' = L_2,\ L_3' = L_3,\ L_4' = L_1 - L_2 - L_3 \qquad (10.10)$$

Entonces, y dada esta dependencia de las coordenadas obtenemos, por ejemplo

$$\frac{\partial N_i}{\partial L_1'} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial L_1'} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial L_1'} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial L_1'} + \frac{\partial N_i}{\partial L_4}\frac{\partial L_4}{\partial L_1'} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} - \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \qquad (10.11)$$

y en general

$$\frac{\partial N_i}{\partial L_j'} = \frac{\partial N_i}{\partial L_j} - \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \quad , \quad j = 1,2,3 \qquad (10.12)$$

Entonces, suponiendo que el cambio de coordenadas (9.3) se verifica entre las globales (x,y,z) y unas coordenadas independientes (L_1', L_2', L_3'), obtenemos

$$\frac{\partial N_i}{\partial L_1'} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial L_1'} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial L_1'} + \frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial L_1'} \qquad (10.13)$$

y en general

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial L_1'} \\ \frac{\partial N_i}{\partial L_2'} \\ \frac{\partial N_i}{\partial L_3'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1}-\frac{\partial x}{\partial L_4} & \frac{\partial y}{\partial L_1}-\frac{\partial y}{\partial L_4} & \frac{\partial z}{\partial L_1}-\frac{\partial z}{\partial L_4} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2}-\frac{\partial x}{\partial L_4} & \frac{\partial y}{\partial L_2}-\frac{\partial y}{\partial L_4} & \frac{\partial z}{\partial L_2}-\frac{\partial z}{\partial L_4} \\ \frac{\partial x}{\partial L_3}-\frac{\partial x}{\partial L_4} & \frac{\partial y}{\partial L_3}-\frac{\partial y}{\partial L_4} & \frac{\partial z}{\partial L_3}-\frac{\partial z}{\partial L_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [H] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \qquad (10.14)$$

E igual que antes

$$\int_{V_e} [F(x,y,z)] dv = \int_{V_e} [G_L(L_1',L_2',L_3')] //H// dv \qquad (10.15)$$

En este caso los límites de integración son variables ya que nos estamos refiriendo a un tetraedro (o triángulo). Es decir

$$\int_{V_e} G(L_1',L_2',L_3') //H// dv = \int_0^1 \int_0^{1-L_2'} \int_0^{1-L_2'-L_3'} [G(L_1',L_2',L_3')] //H// dL_1' dL_2' dL_3' \qquad (10.16)$$

El cálculo de esta integral se realizará, en general, mediante uno de los métodos de integración numérica que se exponen a continuación.

11.- INTEGRACION NUMERICA

Se ha mencionado que las integrales resultantes al calcular las propiedades de elementos isoparamétricos no son, en general, resolubles analíticamente. En estos casos es necesario utilizar un método numérico de integración.

A fin de explicar brevemente en lo que consisten dichos métodos, supongamos la integral

$$\int_a^b f(x) dx \qquad (11.1)$$

donde f(x) no es integrable analíticamente. Todos los métodos de integración numérica normalmente usados se basan fundamentalmente en lo siguiente: calculemos n valores de la función integrando para n abcisas-

En el segundo método, denominado generalmente de Gauss-Legendre, cada integral parcial sobre n puntos se calcula como

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f\left[\frac{z_i(b-a)+(a+b)}{2}\right], \quad E=0(h^{2n-1}) \tag{11.12}$$

donde las z_i son las n raíces del polinomio de Legendre de grado n, y los pesos W_i vienen dados por

$$W_i = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{j=n} \frac{z-z_j}{z_i-z_j}\,dz \tag{11.13}$$

Normalmente no es necesario calcular estos pesos, ni tampoco las raíces z_i, ya que suelen estar tabulados en las bibliotecas de programas del ordenador. En la Tabla 2 se presentan raíces y pesos para integraciones de Gauss-Legendre de distintos órdenes.

11.1.- INTEGRACION NUMERICA BI Y TRIDIMENSIONAL

.- Elementos rectangulares y prismas rectangulares.

En estos elementos, las integrales a calcular son del tipo (véase Ecuación (10.8))

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} G(r,t,s)\ drdtds \tag{11.14}$$

Estas integrales pueden calcularse directamente ya sea aplicando una fórmula de Newton-Cotes ó una cuadratura de Gauss-Legendre. En efecto, al ser los límites de integración independientes de las variables, podemos integrar en cada dirección manteniendo constantes las otras dos. Por ejemplo, si aplicamos el método de Gauss-Legendre representado por (11.12) y dado que cada integral parcial varía entre -1 y 1, obtenemos, definiendo n puntos en la dirección r, m puntos en la dirección t y q puntos en la dirección s,

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} G(r,t,s)drdt\,ds = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{q} W_i W_j W_k G(r_i,t_j,s_k) \tag{11.15}$$

.- Elementos triangulares y tetraedros

$$\int_{-1}^{1} F(z)\,dz \doteq \sum_{i=0}^{n} w_i F(z_i)$$

Roots (z_i)	Weight Factors (w_i)
Two-Point Formula $n = 1$	
±0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
Three-Point Formula $n = 2$	
0.00000 00000 00000	0.88888 88888 88889
±0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55556
Four-Point Formula $n = 3$	
±0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546
±0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454
Five-point Formula $n = 4$	
0.00000 00000 00000	0.56888 88888 88889
±0.53846 93101 05683	0.47862 86704 99366
±0.90617 98459 38664	0.23692 68850 56189
Six-Point Formula $n = 5$	
±0.23861 91860 83197	0.46791 39345 72691
±0.66120 93864 66265	0.36076 15730 48139
±0.93246 95142 03152	0.17132 44923 79170
Ten-Point Formula $n = 9$	
±0.14887 43389 81631	0.29552 42247 14753
±0.43339 53941 29247	0.26926 67193 09996
±0.67940 95682 99024	0.21908 63625 15982
±0.86506 33666 88985	0.14945 13491 50581
±0.97390 65285 17172	0.06667 13443 08688
Fifteen-Point Formula $n = 14$	
0.00000 00000 00000	0.20257 82419 25561
±0.20119 40939 97435	0.19843 14853 27111
±0.39415 13470 77563	0.18616 10001 15562
±0.57097 21726 08539	0.16626 92058 16994
±0.72441 77313 60170	0.13957 06779 26154
±0.84820 65834 10427	0.10715 92204 67172
±0.93727 33924 00706	0.07036 60474 88108
±0.98799 25180 20485	0.03075 32419 96117

Raices(z_i) Pesos(w_i)

Tabla 2.- Valores de las raices del polinomio de Legendre $L_n(z)$ y de los pesos relativos w_i de la cuadratura de Gauss-Legendre. (Nota: en la presente tabla n representa el grado del polinomio de interpolación). Tomado de Carnahan, Luther y Wilkes (1969)

En este caso las integrales para el cálculo de la matriz K_e son del tipo (10.16) es decir

$$I=\int_o^1\int_o^{1-L_1}\int_o^{1-L_1-L_2} G(L_1L_2L_3L_4)dL_1dL_2dL_3 \qquad (11.16)$$

Los límites de integración de esta integral dependen de las variables L_2 y L_3, por lo que la integración numérica no es tan inmediata como en el caso anterior. Existen numerosos métodos para calcular numéricamente integrales de este tipo, que pueden consultarse en P.C. Hammer y A.H. Stroud (1.958) o en P.J. Davis y P. Rabinowitz (1.975).

Uno de los métodos más simples, que expondremos para un elemento bidimensional es el siguiente. Transformamos ligeramente la integral.

$$I=\int_o^1\int_o^{1-L_1}G(L_1L_2L_3)dL_1dL_2 \qquad (11.17)$$

teniendo en cuenta que $L_3=1-L_1-L_2$. Entonces

$$I=\int_o^1\int_o^{1-L_1}G(L_1L_2)dL_1dL_2=\int_o^1 dL_1\int_o^{1-L_1}G(L_1L_2)dL_2=\int_o^1 F(L_1)dL_1. \qquad (11.18)$$

donde

$$F(L_1)=\int_o^{1-L_1}G(L_1L_2)dL_2 \qquad (11.19)$$

Para calcular la integral (11.18) podemos utilizar una cuadratura de Gauss-Legendre sobre n puntos en la dirección L_1, es decir

$$I=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_iF(\frac{\alpha_i+1}{2}) = \qquad (11.20)$$

donde α_i son las raíces del polinomio de Legendre de grado n en L_1. Es decir.

$$I=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i\int_o^{1-\frac{\alpha_i+1}{2}} G(\frac{\alpha_1+1}{2}, L_2)dL_2 \qquad (11.21)$$

Para cada una de las n integrales en la dirección L_2 podemos usar una cuadratura de m puntos, resultando

$$I=\frac{1}{2}\sum_{i-1}^{n} w_i \frac{1-\alpha_i}{4} \sum_{j=1}^{m} w_j G\left[\frac{\alpha_i+1}{2}, \frac{(1-\alpha_i)(1+\beta_j)}{4}\right] \quad (11.22)$$

donde β_j son las m raíces del polinomio de Legendre de grado m en la dirección L_2.

La fórmula (11.23) cuya principal ventaja es la facilidad de aplicación, puede extenderse fácilmente a tres o más dimensiones.

12.- ENSAMBLAJE DE LAS ECUACIONES ELEMENTALES

En los apartados anteriores hemos obtenido, a través de la discretización del dominio de integración y de la aplicación de la formulación matemática del problema físico a cada elemento, las relaciones elementales.

$$\left[K\right]_e \left\{\emptyset\right\}_e = \left\{f\right\}_e \quad (12.1)$$

Estas ecuaciones se han calculado considerando aisladamente cada elemento. Para representar el problema general, han de sumarse todas las ecuaciones (12.1). Esta suma, que es un proceso sencillo, puede presentar problemas a la hora de automatizar el ensamblaje, por lo que es necesario definir minuciosamente todos los elementos que contribuyen a cada nodo.

El proceso general de ensamblaje se comprenderá mejor con el siguiente ejemplo.

Supónganse dos elementos triangulares adyacentes, como muestra la Figura 34.

Mediante las técnicas expuestas en los apartados anteriores, obtendremos las siguientes relaciones elementales (suponemos $\emptyset$ un escalar).

Elemento 1

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \emptyset_1 \\ \emptyset_2 \\ \emptyset_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (12.2)$$

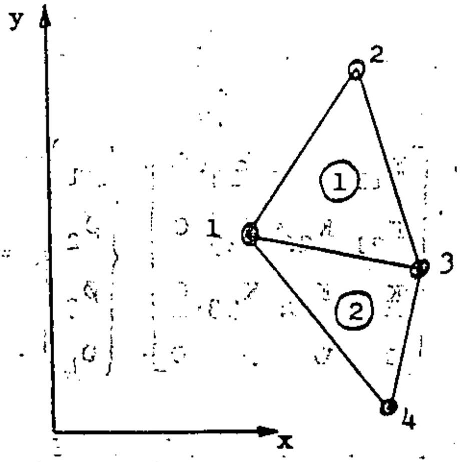


Figura 34.- Elementos triangulares adyacentes

Elemento 2

$$\begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{13} & K'_{14} \\ K'_{31} & K'_{33} & K'_{34} \\ K'_{41} & K'_{43} & K'_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \emptyset_1 \\ \emptyset_3 \\ \emptyset_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_3 \\ f'_4 \end{Bmatrix} \qquad (12.3)$$

El sistema de ecuaciones definitivo será

$$\begin{bmatrix} K_{11}+K'_{11} & K_{12} & K_{13}+K'_{13} & K'_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 \\ K_{31}+K'_{31} & K_{32} & K_{33}+K'_{33} & K'_{34} \\ K'_{41} & 0 & K'_{43} & K'_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \emptyset_1 \\ \emptyset_2 \\ \emptyset_3 \\ \emptyset_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1+f'_1 \\ f_2 \\ f_3+f'_3 \\ f'_4 \end{Bmatrix} \qquad (12.4)$$

que resuelto nos dará los valores de la función Ø en los nodos.

Una manera sencilla (aunque cara) de no equivocarse, es escribir cada matríz elemental $[K]_e$ como una matríz nxn, donde n es el número de nodos del dominio. En el ejemplo de la Figura 34 ésto representaría escribir las relaciones(12.2) y (12.3)de la siguiente forma:

Elemento 1

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (12.5)$$

Elemento 2

$$\begin{bmatrix} K'_{11} & 0 & K'_{13} & K'_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K'_{31} & 0 & K'_{33} & K'_{34} \\ K'_{41} & 0 & K'_{43} & K'_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f'_1 \\ 0 \\ f'_3 \\ f'_4 \end{Bmatrix} \qquad (12.6)$$

Utilizando esta técnica, el sistema final de ecuaciones

$$\left[K\right]\left\{\phi\right\}=\left\{f\right\} \qquad (12.7)$$

podrá calcularse directamente como

$$\left(\sum\left[K\right]_e\right)\left\{\phi\right\}=\left\{f\right\} \qquad (12.8)$$

donde las $\sum$ representan en este caso un sumatorio matricial elemento a elemento.

El problema del ensamblaje se complica ligeramente cuando las ecuaciones integrales no han sido planteadas en el sistema global de coordenadas. Esta técnica, que debe evitarse siempre que se pueda, implica que para sumar las ecuaciones elementales, éstas deben antes transformarse al sistema de coordenadas global. De lo contrario, la definición de $\{\phi\}$ en un nodo dependería de que dicho nodo se considerase perteneciente a uno u otro elemento, impidiendo por tanto su suma directa. La definición del problema matemático en coordenadas locales ha sido empleada con frecuencia en cálculo estructural, ya que de esta forma se facilita notablemente la formulación de las relaciones fuerzas-desplazamientos y tensión-deformación. La tendencia actual, sin embargo, es la de plantear cualquier problema que se pretenda resolver mediante el F.E.M. en coordenadas globales, limitando la utilización de coordenadas naturales al cálculo de propiedades elementales.

13.- MINIMIZACION DEL ANCHO DE BANDA DE LA MATRIZ [K]

La matriz final $[K]$ del sistema de ecuaciones resultante del ensamblaje

$$[K]\{\emptyset\}=\{f\}$$

es, en general, una matriz en banda. La anchura de banda es función únicamente de la numeración de los nodos y del número de grados de libertad especificados en cada nodo. Dado que esta última variable está definida por el problema a analizar la única forma de reducir el ancho de banda (y con ello la necesidad de memoria para almacenamiento de $[K]$ y el tiempo de cálculo en ordenador) es numerar adecuadamente los nodos. Puede demostrarse fácilmente que el semiancho de banda correspondiente a un cierto dominio discretizado es

$$SAB=N(1+d) \tag{13.1}$$

donde N es el número de grados de libertad definido en cada nodo y d es la diferencia máxima de numeración entre dos nodos exteriores de un elemento.

Por ejemplo, la matriz $[K]$ correspondiente a los dos elementos de la Figura 34, si se ha definido un solo grado de libertad por elemento, tiene un semiancho de banda.

$$SAB= 1\left[1+(4-1)\right]=4$$

como efectivamente podemos comprobar en su expresión (12.4). Sin embargo, si en el mismo dominio hubiéramos numerado los nodos como indica la Figura 35, el semiancho de banda sería

$$SAB= 1\left[1+(4-2)\right]=3$$

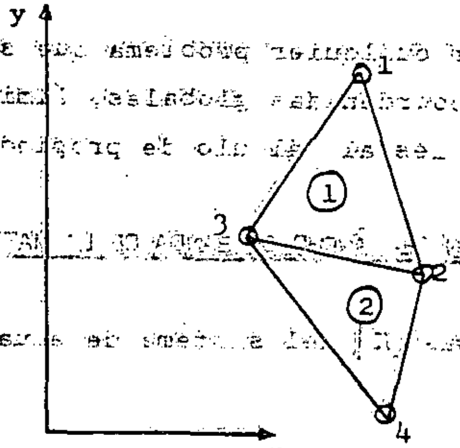


Figura 35.- Numeración óptima de nodos

En efecto, las matrices ampliadas de cada uno de los elementos sería en este caso

$$[K]_1 = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [K]_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K'_{22} & K'_{23} & K'_{24} \\ 0 & K'_{32} & K'_{33} & K'_{34} \\ 0 & K'_{42} & K'_{43} & K'_{44} \end{bmatrix} \qquad (13.2)$$

con lo que los elementos K'_{14} y K'_{41} de la matriz final $[K]$ serían nulos.

Esta numeración óptima de nodos, que puede parecer simple en un problema sencillo, no lo es en absoluto en una discretización en la que el número de elementos sea elevado. Existen en el mercado programas de proceso previo que optimizan dicha enumeración a bajo costo. El ahorro de memoria y tiempo que esta numeración óptima produce en la solución del problema general obliga, para prácticamente cualquier programa de F.E.M., a la utilización de los mencionados programas de proceso.