UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA
CURSOS ABIERTOS

INSTRUMENTACION ELECTRONICA DE LABORATORIO

Del 31 de agosto al 11 de septiembre de 1992

FECHA	HORARIO	TEMA	PROFESOR
LUNES 31 AGOSTO	17:00 a 21:00	1. INTRODUCCION A LA INSTRUMENTACION Y AL MANEJO ESTADISTICO DE DATOS 1.1 ¿Qué es la Instrumentación? 1.2 El problema de la medición 1.3 Análisis estadístico de datos	M. EN C. CAUPOLICAN MUÑOZ GAMBOA
MARTES 1o. SEPTIEMBRE	17:00 a 21:00	2. PROCESAMIENTO ANALOGICO DE SEÑALES 2.1. Generalidades 2.2. Transductores	ING. HUMBERTO RODRIGUEZ Y CAYEROS
MIERCOLES 2	17:00 a 21:00	2.3 Acondicionadores de señal 2.4 Dispositivos de salida	ING. RODOLFO PETERS LAMMEL
JUEVES 3	17:00 a 21:00	2.5 Otros aspectos importantes	M. EN I. VICTOR M. TORRES GODINEZ
VIERNES 4	17:00 a 21:00	3. PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES 3.1 Generalidades 3.2 Muestreo y codificación 3.3 Conversión A/D y D/A 3.4 Arquitectura y programación de microprocesadores	M. EN I. LAURO SANTIAGO CRUZ

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA
CURSOS ABIERTOS

INSTRUMENTACION ELECTRONICA DE LABORATORIO

Del 31 de agosto al 11 de septiembre de 1992

FECHA	HORARIO	TEMA	PROFESOR
LUNES 7 SEPTIEMBRE	17:00 a 19:00	3.5 Comunicación de datos 3.6 Principios de control automático	M. EN I. LAURO SANTIAGO CRUZ M. EN I. ROLANDO CARRERA MENDEZ
MARTES 8	17:00 a 21:00	3.7 Controladores automáticos 4. SISTEMAS DE INSTRUMENTACION ESPECIALIZADA 4.1 Instrumentación y procesamiento de señales médicas	M. EN I. ESAU VICENTE VIVAS
MIERCOLES 9	17:00 a 21:00	4.2 Instrumentación y procesamiento de señales sísmicas	M. EN I. PABLO PEREZ ALCAZAR
JUEVES 10	17:00 a 19:00	4.3 Sistemas de adquisición y procesamiento de señales biológicas	M. EN C. CAUPOLICAN MUÑOZ GAMBOA
	19:00 a 21:00	4.4 Sistemas de control para procesos industriales	ING. ALBERTO ELIZONDO HUERTA
VIERNES 11	17:00 a 21:00	4.5 Sistemas de adquisición y procesamiento de señales utilizando la interfaz IEEE-488	ING. ARMANDO LOZANO RAMIREZ ING. EDUARDO CASTILLO FUENTES

EVALUACION DEL PERSONAL DOCENTE

CURSO: "INSTRUMENTACION ELECTRONICA DE LABORATORIO"

FECHA: 31 DE AGOSTO AL 11 DE SEPTIEMBRE

	CONFERENCISTA	DOMINIO DEL TEMA	EFICIENCIA EN EL USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES	MANTENIMIENTO DEL INTERES (COMUNICACION CON LOS ASISTENTES, AMENIDAD, FACILIDAD DE EXPRESION)	PUNTUALIDAD	
1	M. en C. Caupolican Muñoz Gamboa					
2	Ing. Humberto Rodríguez y Cayeros					
3	Ing. Rodolfo Peters Lammel					
4	M. en I. Víctor M. Torres Godínez					
5	M. en I. Lauro Santiago Cruz					
6	M. en I. Rolando Carrera Méndez					
7	M. en I. Esaú Vicente Vivas					
8	M. en I. Pablo Pérez Alcázar					
9	Ing. Alberto Elizondo Huerta					
	ESCALA DE EVALUACION: 1 a 10					

EVALUACION DEL PERSONAL DOCENTE

CURSO: "INSTRUMENTACION ELECTRONICA DE LABORATORIO"

FECHA: 31 DE AGOSTO AL 11 DE SEPTIEMBRE

	CONFERENCISTA	DOMINIO DEL TEMA	EFICIENCIA EN EL USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES	MANTENIMIENTO DEL INTERES (COMUNICACION CON LOS ASISTENTES, AMENIDAD, FACILIDAD DE EXPRESION)	PUNTUALIDAD	
10	Ing. Armando Lozano Ramírez					
11	Ing. Eduardo Castillo Fuentes					
ESCALA DE EVALUACION: 1 a 10						

EVALUACION DE LA ENSEÑANZA

SU EVALUACION SINCERA NOS AYUDARA A MEJORAR LOS PROGRAMAS POSTERIORES QUE DISEÑAREMOS PARA USTED.

	TEMA	ORGANIZACION Y DESARROLLO DEL TEMA	GRADO DE PROFUNDIDAD LOGRADO EN EL TEMA	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO EN EL TEMA	UTILIDAD PRACTICA DEL TEMA	
1	*Introducción a la Instrumentación y al Manejo Estadístico de Datos*					
2	*Procesamiento Analógico de Señales*					
3	*Procesamiento Digital de Señales*					
4	*Sistemas de Instrumentación Especializada*					
	ESCALA DE EVALUACION: 1 a 10					

EVALUACION DEL CURSO

	CONCEPTO	
1.	APLICACION INMEDIATA DE LOS CONCEPTOS EXPUESTOS	
2.	CLARIDAD CON QUE SE EXPUSIERON LOS TEMAS	
3.	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO EN EL CURSO	
4.	CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO	
5.	CONTINUIDAD EN LOS TEMAS DEL CURSO	
6.	CALIDAD DE LAS NOTAS DEL CURSO	
7.	GRADO DE MOTIVACION LOGRADO EN EL CURSO	
	EVALUACION TOTAL	

ESCALA DE EVALUACION: 1 A 10

1.- ¿Qué le pareció el ambiente en la División de Educación Continua?

MUY AGRADABLE [ ] AGRADABLE [ ] DESAGRADABLE [ ]

2.- Medio de comunicación por el que se enteró del curso:

PERIODICO EXCELSIOR ANUNCIO TITULADO DIVISION DE EDUCACION CONTINUA [ ]

PERIODICO NOVEDADES ANUNCIO TITULADO DIVISION DE EDUCACION CONTINUA [ ]

FOLLETO DEL CURSO [ ]

CARTEL MENSUAL [ ]

RADIO UNIVERSIDAD [ ]

COMUNICACION CARTA, TELEFONO, VERBAL, ETC. [ ]

REVISTAS TECNICAS [ ]

FOLLETO ANUAL [ ]

CARTELERA UNAM "LOS UNIVERSITARIOS HOY" [ ]

GACETA UNAM [ ]

3.- Medio de transporte utilizado para venir al Palacio de Minería:

AUTOMOVIL PARTICULAR [ ] METRO [ ] OTRO MEDIO [ ]

4.- ¿Qué cambios haría en el programa para tratar de perfeccionar el curso?

____

____

____

5.- ¿Recomendaría el curso a otras personas? [ ] SI [ ] NO

5.a. ¿Qué periódico lee con mayor frecuencia?

____

____

6.- ¿Qué cursos le gustaría que ofreciera la División de Educación Continua?

____

____

____

7.- La coordinación académica fué:

EXCELENTE [ ]   BUENA [ ]   REGULAR [ ]   MALA [ ]

8.- Si está interesado en tomar algún curso INTENSIVO ¿Cuál es el horario más conveniente para usted?

LUNES A VIERNES DE 9 a 13 H. Y DE 14 A 18 H. (CON COMIDAD)	LUNES A VIERNES DE 17 a 21 H.	LUNES A MIERCOLES Y VIERNES DE 18 A 21 H.	MARTES Y JUEVES DE 18 A 21 H.
[ ]	[ ]	[ ]	[ ]

VIERNES DE 17 A 21 H. SABADOS DE 9 A 14 H.	VIERNES DE 17 A 21 H. SABADOS DE 9 A 13 H. DE 14 A 18 H.	OTRO
[ ]	[ ]	[ ]

9.- ¿Qué servicios adicionales desearía que tuviese la División de Educación Continua, para los asistentes?

____

____

____

10.- Otras sugerencias:

____

____

____

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

INSTRUMENTACION ELECTRONICA DE LABORATORIO
Del 31 de agosto al 11 de septiembre de 1992

1.- INTRODUCCION A LA INSTRUMENTACION Y AL MANEJO ESTADISTICO DE DATOS

M. EN C. CAUPOLICAN MUÑOZ GAMBOA

AGOSTO - SEPTIEMBRE - 1992

C O N T E N I D O

INTRODUCCION A LA INSTRUMENTACION Y AL MANEJO ESTADISTICO DE DATOS

M en C Caupolicán Muñoz Gamboa

1. INTRODUCCION

Una de las actividades más importantes del ingeniero se refiere a la evaluación, medición o análisis de las variables de su medio ambiente de trabajo. En particular en electrónica, el uso de instrumentos para medir y analizar diferentes variables eléctricas (e inclusive no eléctricas a través de adecuadas transducciones) es una práctica común, rutinaria y constante. Se miden voltajes, se analizan formas de onda y a través de estos resultados se evaluan circuitos o sistemas. Por otra parte, en los ambientes industriales son necesarias las mediciones automáticas o las pruebas automáticas de grandes cantidades de componentes, partes o subsistemas de equipos mayores.

Estas actividades pueden considerarse enmarcadas en dos tipos básicos de necesidades dependiendo de la naturaleza de ellas. Estos tipos son los ambientes industriales y de laboratorio. Aunque en principio no existe ninguna diferencia de fondo entre ambos, hay ciertas características que hacen diferente una medición en un ambiente industrial a la realizada en el laboratorio. En el primer caso se tiene una gran cantidad de variables que pueden alterar o incluso invalidar la medición. El ruido, las variaciones de temperatura, humedad o el polvo presente en algunos ambientes industriales son factores que no están bajo el control del experimentador. Al mismo tiempo, la medición industrial tiene características masivas y no tan estrictas como en los demás casos. Por otra parte, pudiera exigir el empleo de técnicas de análisis estadísticos o tal vez se emplee para modificar algunos pasos previos de la producción, al realimentarse los resultados obtenidos.

En el laboratorio se supone, en cambio, que se tiene control sobre todas o la mayor parte de las variables extrañas, o al menos se trata de alcanzar ese control. Además, la medición en el laboratorio no es por lo regular masiva, muchas veces tiene el objetivo de descubrir o definir leyes o ecuaciones a través de algunas cuantas mediciones que pudieran ser en extermo complejas. Por lo regular, sin embargo, existe suficiente control sobre las mediciones que con frecuencia se llega a perder de vista la idea de que la medición sólo puede constituir una buena aproximación al fenómeno físico que se está considerando.

Los dos extremos analizados son, a pesar de todo, muy similares puesto que en ambos se emplean idénticos instrumentos de medición (aunque en la práctica puedan parecer muy diferentes), las ténicas de medición son las mismas, el error que se encuentra en ambos casos se debe a las mismas causas (aunque el comportamiento pueda diferir) etc. Por ello, en este trabajo no se hará una distinción entre la instrumentación industrial y la de laboratorio, excepto hasta el momento en que tengan que analizarse sistemas especialmente desarrollados para la medición automática que es propia de la industria.

Hablar de instrumentación electrónica exige el empleo de cierta nomenclatura que será necesario especificar para evitar confusiones. La tabla 1.1 constituye una definición intuitiva de los términos que se emplearán más adelante, a reserva de que algunos se definan después en forma más rigurosa.

1.1 ¿Qué es la instrumentación?

Con frecuencia se encuentra que la experimentación puede clasificarse en industrial, de la producción, de desarrollo, de investigación, pura o aplicada; sin embargo, en el contexto del análisis de la experimentación esta división pierde interés. Cuando se trata de estudiar el experimento como una actividad susceptible de modificarse, mejorar u optimizar, esta clasificación deja de tener validez. En todos los casos el experimentador deberá realizar operaciones similares tales como planear el experimento, llevar a cabo una cierta secuencia de acciones, efectuar el análisis de los resultados e interpretarlos. Aunque las acciones a realizar sean muy diferentes en cuanto a su naturaleza, muy probablemente algunos aspectos de la planeación del experimento sean idénticos. Los resultados, por otra parte, serán por lo común de la misma forma: imágenes fotográficas, impulsos eléctricos, curvas o figuras, lecturas en una escala analógica o en un contador digital, series de números, simples decisiones del tipo sí-no etc. Estos resultados aceptarán el mismo tratamiento de comprobación o de prueba de su significancia para que puedan considerarse como datos procesados. También tendrán que ser sometidos a técnicas similares de análisis e interpretación para obtener el producto final de la experimentación: una ley física, una conclusión sobre la utilidad de un proceso, la comprobación de que este determinado proceso se comporta dentro de los limites que se esperaba, la evaluación de un método productivo o industrial etc.

Ahora queda claro el objeto de la experimentación: llegar a una conclusión útil que tal vez se esperaba. Llegar a ella implica necesariamente pasar por las etapas anteriores que contendrán el aspecto de realidad de la acción completa. Desde este punto de vista, entonces, la instrumentación es simplemente la observación de la realidad a través del análisis de las variables cuantificables de ella o, en síntesis, un mapeo de una variable o de un conjunto de ellas que se encuentra inmersa en un proceso físico o real a un dominio en el que puedan ser observadas, detectadas, cuantificadas o analizadas. Desde un punto de vista muy general será el proceso o mecanismo que permita extraer conclusiones sólidas y verificables de la realidad.

1.2 Problemática de la instrumentación

Llevar a cabo un experimento en las condiciones que se han comentado exige la satisfacción de algunos requisitos mínimos. En primer lugar será necesario tener un sistema de unidades y estándares con los cuales poder universalizar los resultados del experimento. El sistema que se emplea en la actualidad con mayor amplitud es el sistema internacional (SI) de unidades (véase el apéndice I), o más específicamente el sistema m k s a (metro Kilógramo segundo ampere). La existencia de estandares absolutos implica la necesidad de disponer de una jerarquía de patrones por medio de los cuales pueda llegarse a través de una cadena de mediciones desde el estandar principal a la medición real que se haga en la práctica. Esta cadena de mediciones, así como otros aspectos relativos a las variables que tienen influencia en la medición misma, traen como consecuencia que se presenten errores en la obten ción de los datos. Como es deseable que el error se mantenga en niveles tan bajos como sea posible, se requerirá el empleo de ciertas técnicas de análisis estadístico para minimizarlo, será preciso evaluar la significancia de los datos, compnobarlos y eventualmente rechazarlos.

Todos estos conceptos giran fundamentalmente alrededor de la idea de universalidad de la medida (estándares) y del error involucrado en ella (incertidumbre de los valores). Al contrastar un patrón con otro de nivel superior se agrega necesariamente un error que una vez incorporado no se distingue del valor calibrado. El mismo acto de medir (usualmente por comparación) incorpora una incertidumbre a los datos, sin contar en esto los errores que se agregan por imprecisión en el control de las variables, error en la determinación de otras, ruido, fallas humanas etc. El objetivo del procesamiento de los datos será, entonces, tratar de eliminar hasta donde sea posible todas estas variables ajenas para que los resultados sean fidedignos y universales.

Habiendo llegado a la conclusión de que la instrumentación es una disciplina rigurosa que requiere ser considerada como tal para que produzca buenos resultados, a continuación se mencionarán los aspectos más importantes de ella como pasos del desarrollo de un experimento.

1. Estándares de referencia, incorporados a los instrumentos o dispositivos de medición o análisis.

2. Determinación y reducción del número de variables.

3. Planeación del experimento, para determinar básicamente la secuencia de acciones o realizar durante la prueba, considerando especialmente:

   a. Reducir los efectos de las variables extrañas.
   b. Obtener el máximo de datos útiles en el mínimo de tiempo.
   c. Reducir al máximo el error debido a la metodología empleada.

4. Prueba y comprobación de los datos obtenidos.

5. Análisis de los resultados.

6. Interpretación o utilización de ellos.

Aunque normalmente se considere instrumentación sólo a los puntos 1 y 3 ya mencionados, los demás constituyen aspectos de muchísima importancia porque, aunque no se realicen en el lugar mismo de la medición o prueba, contribuyen a darle confiabilidad a los resultados.

En el apéndice II se encontrarán las definiciones de las seis unidades básicas del sistema internacional que son: metro (m), kilogramo (kg), segundo (s), ampere (A), kelvin (k) y candela (cd) correspondientes a longitud, masa, tiempo, corriente, temperatura e intensidad luminosa. A estas unidades básicas se agregan el radián y el estereo-radián para mediciones angulares planas y sólidas, según se observará en el apéndice I. A partir de las unidades básicas se derivan todas las que se indican en el mismo apéndice y que totalizan alrededor de treinta. La relación entre las unidades derivadas y las básicas se observa en el apéndice III. También, en el apéndice IV se presenta la jerarquía de los estándares de un sistema de medición desde el National Bureau of Standards (NBS) de Estados Unidos hasta los equipos de mantenimiento de una organización. Se destacan tres níveles (Echelons): el primero correspondiente a los estándares y prototipos base, a los estándares de referencia y a los de trabajo. El segundo nivel comprende también básicamente los estándares de referencia y de trabajo en varios subniveles que incluyen además estándares de transferencia. El último nivel considera los instrumentos de calibración y los equipos de operación, mantenimiento y prueba.

1.3 Exactitud y precisión

En instrumentación se acostumbra distinguir en forma precisa entre lo exacto y lo preciso cuando se trata de calificar la calidad de un instrumento o de un grupo de valores observados. Exactitud se refiere a la capacidad de acercarse al valor conocido o calibrado por parte del instrumento o del grupo de datos. Esto no quiere decir que al repetir las mediciones se obtengan los mismos valores, sino que el conjunto de mediciones del instrumento o el conjunto de datos se distribuyen estadisticamente próximos a los valores conocidos o calibrados, aunque estén muy dispersos alrededor de ellos.

La precisión, por el contrario, se refiere a la propiedad del instrumento de dar valores muy próximos al repetir las mediciones, independientemente de su exactitud, y a los grupos de datos que presentan poca dispersión.

En resumen, exactitud es proximidad estadística al valor conocido y precisión es repetitividad de los valores. Los errores de exactitud se manifiestan entonces cuando el promedio de los valores observados no se acerca al valor conocido, aunque se tome un número muy grande de mediciones. Por el contrario, los errores de precisión se presentan cuando bajo las mismas circunstancias se obtienen valores diferentes.

Un instrumento puede ser muy impreciso, pero muy exacto, cuando entrega valores muy diferentes entre sí (impreciso), pero cuyo promedio se acerca al valor calibrado (exacto). También un instrumento puede ser muy inexacto, pero preciso, cuando proporciona valores muy alejados del valor conocido (inexacto), pero muy próximos entre sí (preciso). De forma similar, los grupos de datos que presentan las distribuciones de la figura 1.1 caen en las siguientes clasificaciones:

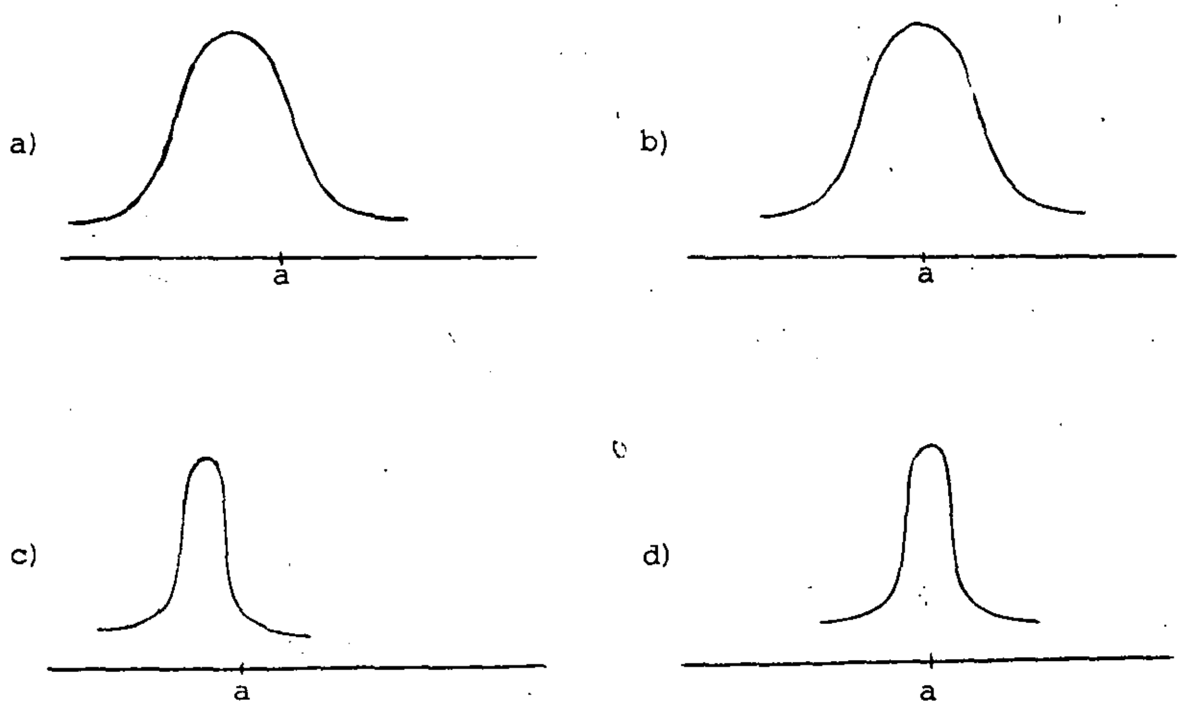


Figura 1.1 Distribuciones extremas de un grupo de datos

1. Figura 1.1a Imprecisos e inexactos.

2. Figura 1.1b Imprecisos, pero exactos.

3. Figura 1.1c Precisos, pero inexactos.

4. Figura 1.1d Precisos y exactos.

Nótese que el valor conocido se denota con a, que la dispersión determina precisión y que el promedio determina exactitud.

Finalmente, cabe hacer notar que el caso de la figura 1.1a es totalmente inútil, aún cuando podía mejorarse con un adecuado ajuste o calibración de los instrumentos. El caso de la figura 1.1b es perfectamente útil si se realizan suficientes mediciones para asegurarse que el promedio es exacto. El de la figura 1.1c es también inútil, aunque podía corregirse ventajosamente con una adecuada calibración del instrumento. Por último, el grupo de datos de la figura 1.1d corresponde a la situación ideal.

1.4 Fuentes y naturaleza del error.

En un sistema de medición, el error puede presentarse por las más diversas razones y proceder de distintas fuentes. En general, puede decirse que el error proviene básicamente de:

1. Falla o mal funcionamiento del elemento sensor principal, por falta de calibración o de ajuste del mismo, por envejecimiento, o por diversos efectos de inestabilidad.

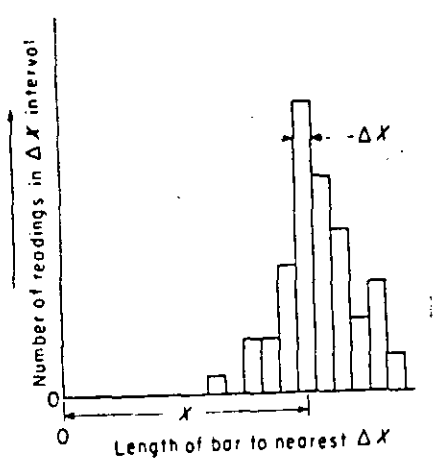
2. Falla o mal funcionamiento del resto del instrumento, por causas similares al caso anterior, aunque por la interacción de diversos factores o componentes.

3. Falla humana al emplear, conectar, medir o leer el resultado que presenta el instrumento, o por descuido o falta de precaución al realizar las mediciones.

En realidad, las fuentes pueden producir errores de exactitud y precisión, aunque en general se presentan ambos en forma simultánea. Por supuesto, los erro- debidos a los instrumentos pueden disminuirse considerablemente por medio de buenos diseños, ajustes y calibraciones; en tanto que los errores humanos pueden minimizarse con el debido cuidado, precaución y meticulosidad.

Como habrá podido suponerse, el error de exactitud no amerita un tratamiento muy profundo, ya que se elimina con una calibración. Más complejo es en cambio el error de precisión, puesto que se refiere a la dispersión de los resultados. Por ello, el tratamiento del error de precisión exige el empleo de probabilidad y estadística.

Al realizar una serie de mediciones por medio de diferentes instrumentos y métodos, los resultados obtenidos se desviarán del valor conocido o calibrado dependiendo del error que contengan, por lo que si estos valores se registran podrá comprobarse que se distribuyen alrededor del valor conocido en forma similar a lo que indica la figura 1.2a). Al tomarse más mediciones y disminuirse el intervalo Δx, se tendrá que el diagrama tiende a suavizarse, tendiendo en el límite a la curva de distribución como en la figura 1.2b). Suponiendo que se ha eliminado el error de exactitud, algún punto elevado de la curva corresponde al valor



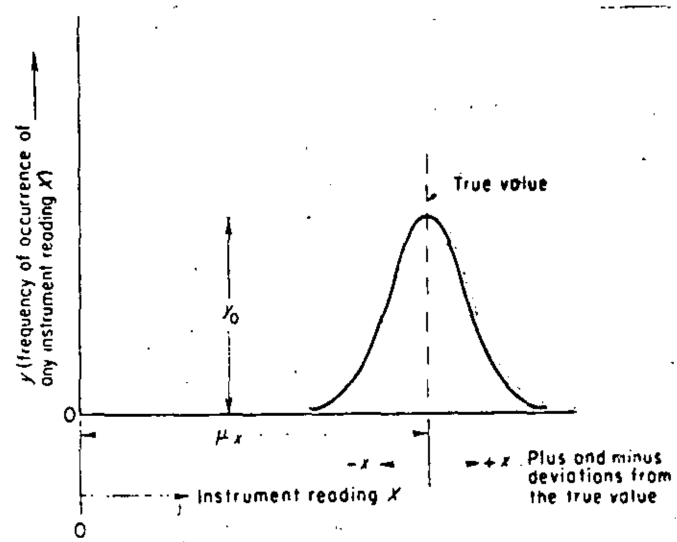


Figura 1.2a) Distribución de un grupo de mediciones con error b) Distribución normal.

conocido, siendo entonces las desviaciones hacia la derecha valores superiores al conocido y hacia la izquierda, valores inferiores al conocido.

La forma de la curva (dispersión) deberá además corresponder con el error de precisión, en tanto que el valor real deberá ser algún promedio de la curva.

2. VARIABLES ALEATORIAS Y SUS CARACTERISTICAS

Al realizarse múltiples mediciones de una magnitud conocida o calibrada, puede encontrarse que los resultados forman una serie aleatoria discreta o que llenan por completo un intervalo. Esto quiere decir que se tendrán variables aleatorias discretas (discontinuas) y continuas.

Como las variables discretas no pueden tomar un valor cualquiera, su distribución se parecerá a la figura 1.2a), en tanto que la distribución de una variable continua se parecerá en el límite a la de la figura 1.2b). En el primer caso (variables discretas), se tendrá que si cada valor posible tiene una cierta probabilidad de ocurrencia, esta relación se llama ley de distribución de la variable y constituye la caracterización más completa de ella.

La ley o función de distribución de las variables discretas se formula simplemente señalando la probabilidad de ocurrencia de cada valor posible en una lista o un diagrama. Es el caso de las variables continuas, sin embargo, esto no es posible ya que en virtud de que hay infinitos valores posibles la probabilidad de ocurrencia de cada uno de ellos es cero. Esta aparente contradicción se analizará más adelante.

2.1 Caracterización de las variables aleatorias

Para las variables continuas es mejor observar la probabilidad de ocurrencia de todos los valores inferiores a un cierto número x, lo que se denota $F(x)$ y se conoce como función integral de distribución .

Las propiedades fundamentales de $F(x)$ son

1. $F(-\infty) = 0$ Esta es la mínima probabilidad.

2. $F(+\infty) = 1$ Máxima probabilidad.

3. $F(x) \geq 0$ Por ser probabilidad no puede ser menor que cero.

4. Si $x_2 > x_1$, entonces $F(x) > F(x_1)$, o sea, $F(x)$ es una función monótonamente creciente.

Algunas otras propiedades interesantes se señalan a continuación, donde $P(X < x) = F(x)$ y $P(X > x)$ es la probabilidad de ocurrencia de los valores superiores a x de la variable X.

5. $P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - F(x)$

6. $P(x_1 \leq X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1)$

7. $P(X = x) = 0$

la práctica, sin embargo, se emplea la función diferencial de probabilidad o .unción de densidad de probabilidad $\phi(x)$, que se define

$$\phi(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} \right] \tag{1.1}$$

o bien

$$\phi(x) = \frac{d}{dx} F(x) \tag{1.2}$$

Al analizar las ecuaciones anteriores, así como las definiciones, se tiene que $F(x)$ es de la forma que indica la figura 1.3a), que $\phi(x)$ es de la forma que aparece en la figura 1.3b), donde se señala además que $F(x)$ es el área bajo la .rva de $\phi(x)$, mientras que $\phi(x)$ es a su vez la pendiente de la curva de $F(x)$.

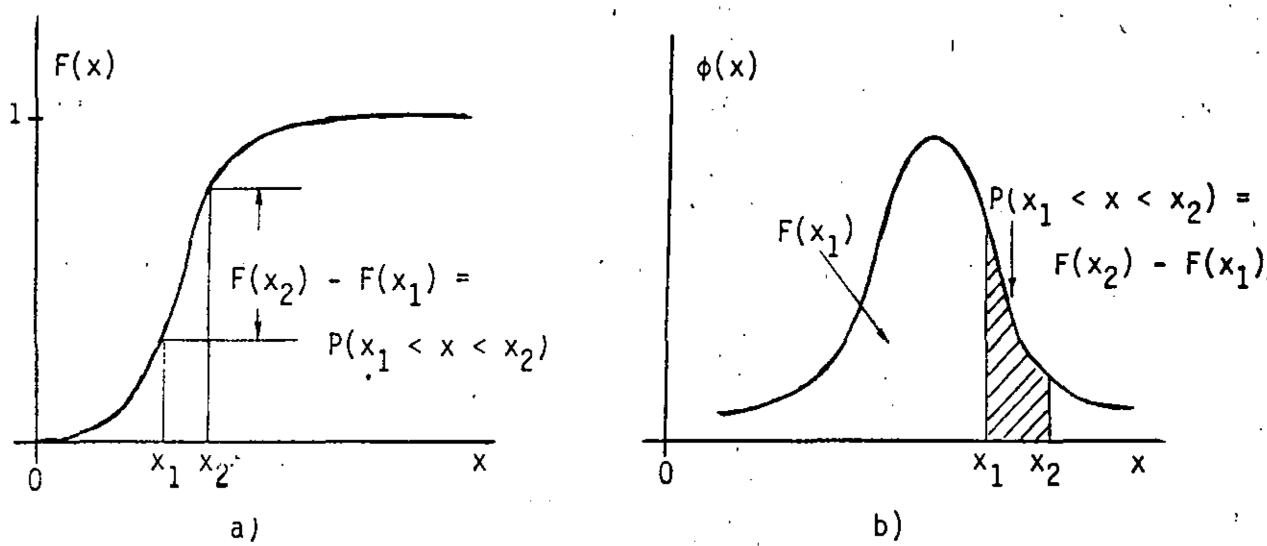


Figura 1.3 a) Función integral de distribución. b) Función diferencial de distribución.

Esto quiere decir que se cumplen las siguientes ecuaciones

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi(x)\, dx = F(x_2) - F(x_1) \tag{1.3}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \phi(z)\, dz = F(x) \tag{1.4}$$

$$\phi(x) \geq 0 \tag{1.5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) = 1 \tag{1.6}$$

Puesto que $\phi(x)$ [y por tanto, también $F(x)$] constituyen la caracterización más completa de una variable aleatoria, estas funciones deben ser capaces de proporcionar alguna información respecto a la forma en que se distribuyen las variables. · parámetros que realizan esta función son el valor medio y la dispersión que, ..o ya se ha dicho, caracterizan el valor exacto y el error de precisión (respectivamente) del grupo de mediciones, valores o datos que se ha tomado como base al inicio de este análisis.

En una situación real, por supuesto, no es posible contar con colecciones infinitas de valores, ni con infinitas observaciones de una variable física, por lo que el experimentador habrá de conformarse con tener una colección finita o muestra de un universo mayor. Por ello, se distinguirá entre el conjunto general y la muestra, definiendose los conceptos de madia general, media muestral, desviación general y desviación muestral.

Media general. El valor medio μ de una variable aleatoria x para el conjunto general se define como el valor esperado o esperanza matemática de la variable, o sea,

$$\mu = M\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, \phi(x)\, dx \tag{1.7}$$

Algunas propiedades de la esperanza matemática se indican a continuación

$$M\{c\} = c \tag{1.8a}$$

$$M\{cx\} = cM\{x\} \tag{1.8b}$$

$$\text{Si } x = x_1 + \dots + x_n, \quad M\{x\} = M\{x_1\} + \dots + M\{x_n\} \tag{1.8c}$$

$$\text{Si } y = f(x_1, \dots, x_n), \quad M\{x\} = f(M\{x_1\}, \dots, + M\{x_n\}) \tag{1.8d}$$

donde c es una constante e y es una función no lineal de las x_n que varía suavemente en pequeños intervalos de variación de los argumentos.

Media muestral. El valor medio de la muestra se define como el promedio de los valores observados x_i, o media aritmética

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1.9}$$

Nótese que para $\bar{x}$ también son válidas las propiedades de la esperanza matemática que se indican en la ecuación (1.8).

Dispersión general. Para el conjunto general se define la dispersión $\sigma^2(x)$ como la media general de los cuadrados de las desviaciones respecto de la media general μ, o sea, como la esperanza matemática de la función $y = (x - \mu)^2$

$$\sigma^2(x) = M\{(x - \mu)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \, \phi(x) \, dx \tag{1.10}$$

La raíz positiva de la dispersión, o sea, $\sigma(x)$, se conoce como desviación cuadrá tica media general o desviación normal. Algunas propiedades de la dispersión son

$$\sigma^2(c) = 0 \tag{1.11a}$$

$$\sigma^2(cx) = c^2 \, \sigma(x) \tag{1.11b}$$

$$\text{Si} \quad x = x_1 + \ldots + x_n, \quad \sigma^2(x) = \sigma^2(x_1) + \ldots + \sigma^2(x_n) \tag{1.11c}$$

$$\text{Si} \quad y = f(x_1, \ldots, x_n), \quad \sigma^2(y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma^2(x_1) + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma^2(x_n) \tag{1.11d}$$

donde c es una constante e y es una función con las mismas características de la ecuación (1.8d).

Dispersión muestral. La dispersión de una muestra de n valores observados de la variable aleatoria x se define con la expresión

$$s^2(x) = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{1.12}$$

donde se observa que el denominador disminuye el valor de n en 1, lo que se debe a que la dispersión de la muestra se determina con respecto a la medida aritmética y no con respecto a la esperanza matemática. El valor positivo de la raíz de la dispersión se llama, como antes, desviación cuadrática media de la muestra o desviación normal. También, las propiedades de las ecuaciones (1.11) se aplican a la desviación normal de la muestra.

2.2 Algunas distribuciones estadísticas.

Siendo el error una magnitud aleatoria que se encuentra sometida a determinadas restricciones que dependen de cada caso particular, se tienen varias distribuciones estadísticas que pueden aplicarse para describir su comportamiento. Las principales se detallan a continuación.

Distribución normal. Conocida ampliamente como ley de distribución de Gauss, resulta ser la distribución más importante puesto que se deduce de suponer que el error total es el resultado de un gran número de pequeños errores que se distribuyen aleatoriamente y de que los errores positivos y negativos alrededor del valor correcto son igualmente probables. La función de densidad de probabilidad de la distribución normal se define

$$\phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{1.13}$$

donde μ y σ ya han sido definidos como la media general y la desviación cuadrática media general, respectivamente.

En la figura 1.4 se muestra la función de densidad de probabilidad de la distribución normal, donde μ indica el eje de simetría (media) y σ la forma de la curva, o sea, el ancho y el alto (dispersión). Nótese que el área bajo la curva se mantiene constante y es igual a la unidad.

Finalmente se mencionará que si se toma como media el valor cero (origen del sitema de coordenadas) y como dispersión la unidad, se encuentra que la ecuación (1.13) toma la forma en que normalmente se encuentra en tablas:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\ \pi}} \ \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \tag{1.14}$$

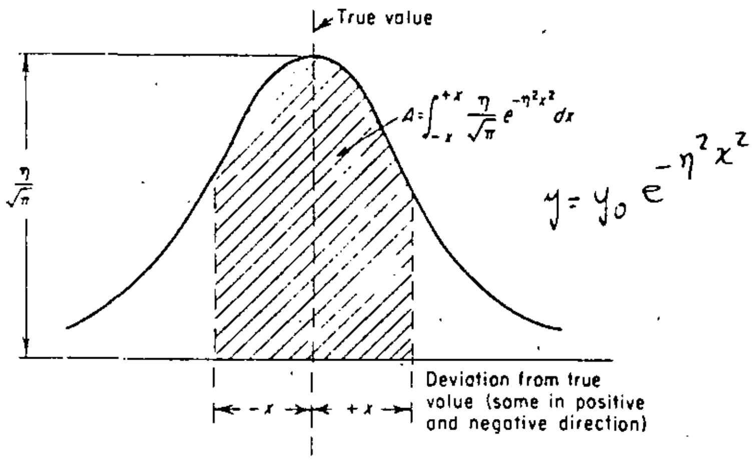


Figura 1.4 Función de densidad de probabilidad de la distribución normal.

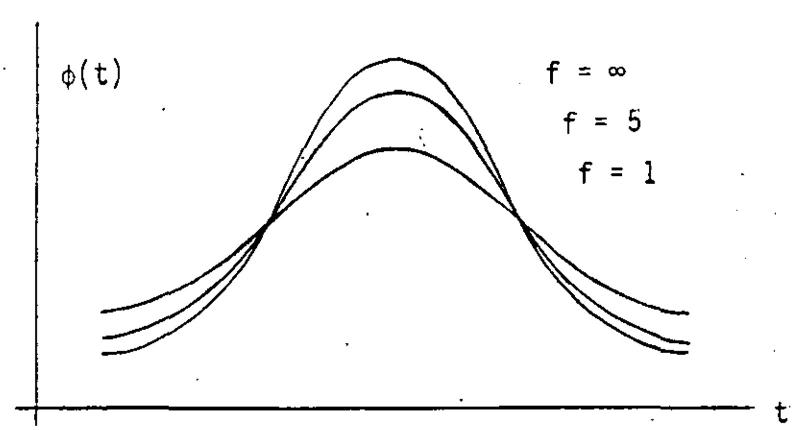


Figura 1.5 Función de densidad de probabilidad de la distribución de Student.

Distribución de Student. Como la distribución normal está referida al conjunto general de valores, observaciones o datos, no tiene una aplicación real sino cuando se cuenta con muchísimos elementos independientes. En los casos prácticos, entonces, puede aplicarse la distribución de Student donde

$$t = \frac{x - \mu}{s(x)} = \tag{1.15a}$$

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi f}} \frac{\Gamma(\frac{f+1}{2})}{\Gamma(\frac{f}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{f} \right)^{-\frac{f+1}{2}} \tag{1.15b}$$

En las ecuaciones anteriores f son los grados de libertad de la dispersión de la muestra $s^2(x)$ y $\Gamma(z)$ la función gamma de Euler, definida por la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-y}\, y^{z-1}\, dy \tag{1.16}$$

Para un número grande de grados de libertad, la distribución de Student tiende a la distribución normal, como se observa en la figura 1.5.

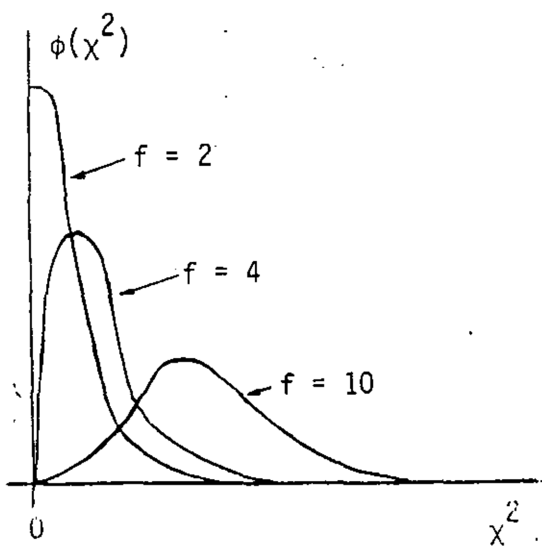


Figura 1.5 Función de densidad de probabilidad de distribución χ^2

Distribución χ^2 (chi-cuadrado). La función de distribución chi-cuadrado se define (véase la figura 1.6)

$$\phi(\chi^2) = \frac{}{2^{f/2}\,\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} (\chi^2)^{\frac{f}{2}-1} \; e^{-\chi^2/2} \qquad \chi^2 \geq 0 \tag{1.17}$$

Esta función corresponde a la distribución a la cual obedece la variable

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right]^2 \tag{1.18}$$

donde las x_i son n variables aleatorias independientes que se distribuyen según la ley de distribución normal con los parámetros μ y σ. f es el número de grados de libertad de la distribución chi-cuadrado y es igual a n. El símbolo Γ es nuevamente la función gamma de Euler.

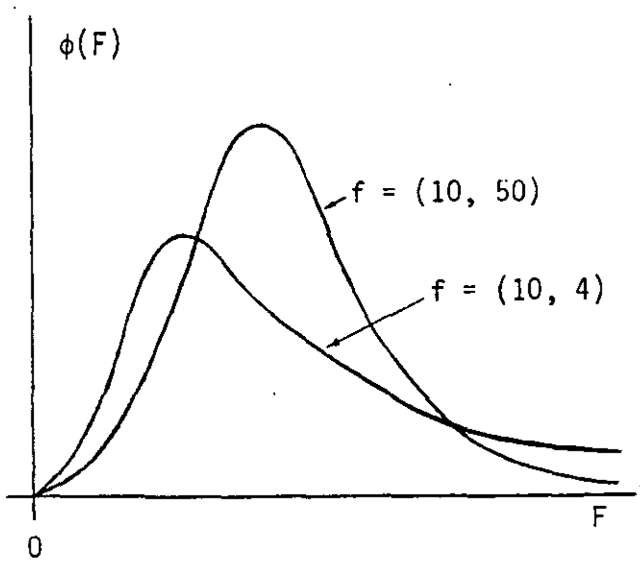


Figura 1.7 Función de densidad de probabilidad de la distribución de Fisher.

Distribución de Fisher. Cuando se tienen dos grupos independientes de observaciones de una misma variable aleatoria x, denominados x_i' y x_j'', de los cuales se dispone de n_1 y n_2 elementos y cuyas dispersiones son s_1^2 y s_2^2, respectivamente, las dispersiones generales pueden satisfacer la relación

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 \tag{1.19}$$

En este caso, la relación de las dispersiones de las muestras

$$F = s_1^2 / s_2^2 \tag{1.20}$$

obedece a una distribución cuya función de densidad de probabilidad se determina por

$$\phi(F) = \frac{\Gamma(f_1 + \frac{f_2}{2})}{\Gamma(\frac{f_1}{2})\,\Gamma(\frac{f_2}{2})} \; \frac{f_1^{\frac{f_1}{2}} \; f_2^{\frac{f_2}{2}} \; F^{\frac{f_1}{2} - 1}}{(f_2 + f_1 F)^{f_1 + f_2/2}} \,, \quad F \geq 0 \tag{1.21}$$

En la ecuación (1.21) el símbolo Γ representa la función gamma de Euler, en tanto que f_1 y f_2 representan, respectivamente los grados de libertad de las dispersiones s_1^2 y s_2^2.

La función de distribución de Fisher, que se muestra en la figura 1.7 tiene la característica de que al intercambiar los grados de libertad de las dispersiones s_1^2 y s_2^2 no se obtiene igualdad.

2.3 Verificación de hipótesis estadísticas.

Cuando se trabaja con datos experimentales de una variable, el mismo hecho de que estos datos sean limitados impide conocer con certeza si una determinada variable obedece a una lye de distribución supuesta. Como es deseable tener alguna seguridad o poder evaluar hasta que punto la suposición es verdadera, será necesario tomar como hipótesis estadística el hecho de que la variable obedece a la distribución supuesta.

Una vez realizada la hipótesis se aplicarán criterios estadísticos para estimar si la hipótesis corresponde con los datos experimentales de que se dispone y, dado el caso de que se justifique su aceptación, evaluar con qué propiedad se acepta. Esto quiere decir que, con los datos que se dispone, puede suponerse con un nivel de significación determinado que la hipótesis es correcta y que los datos no la contradicen. Sin embargo, la recopilación de una mayor cantidad de datos pudiera poner en duda esta misma hipótesis, ya que los criterios que se emplean de ninguna manera demuestran la validez absoluta de lo que se supone, sino que sólo se limitan a evaluar la significación de su aceptación.

2.3.1 Metodología de la verificación.

Supóngase que se dispone de un sólo valor (x_0) de la variable aleatoria que se analiza. Se supondrá a continuación que la variable aleatoria satisfase una determinada función de densidad de probabilidad $\phi_0(x)$, lo que constituye la hipótesis nula H_0. Se tratará entonces de considerar una segunda hipótesis alternativa H_1 que consiste en que la variable obedece a otra ley de distribución $\phi_1(x)$. El propósito de la verificación de las hipótesis estadísticas se traduce entonces en suponer que la hipótesis H_1 es correcta en tanto que H_0 es falsa, tomando como base únicamente el valor x_0 de que se dispone.

El procedimiento que se sigue a continuación consiste simplemente en dividir el intervalo de variación de x en dos partes por medio de la determinación del punto $x(R_0 / R_1)$ que separa la región R_0 (donde se cumple la hipótesis H_0) y la región R_1 (donde se cumple H_1), como se muestra en la figura 1.8

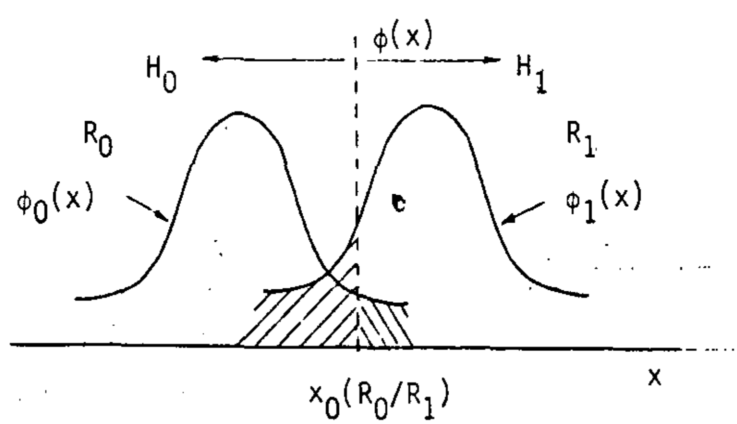


Figura 1.8 Determinación del punto $x(R_0/R_1)$, que separa las regiones R_0 y R_1

Habiéndose encontrado el punto $x(R_0/R_1)$, el problema se resuelve puesto que si

$$x_0 < x(R_0/R_1) \tag{1.22}$$

la hipótesis H_0 es correcta. En cambio, si

$$x_0 > x(R_0/R_1) \tag{1.23}$$

la hipótesis nula H_0 debe despreciarse.

Desafortunadamente la elección del punto $x(R_0/R_1)$ no es tarea sencilla y aún así es posible llegar a una conclusión incorrecta. Puede no tomarse la hipótesis nula (H_0) cuando en realidad es correcta o tomarse como verdadera esta misma hipótesis cuando es falsa. La probabilidad del primer suceso (error de primer género) es

$$P_0 = \int_{x(R_0/R_1)}^{\infty} \phi_0(x)\, dx \tag{1.24}$$

es decir corresponde al área bajo la cola de $\phi_0(x)$ que se encuentra a la derecha de $x(R_0/R_1)$. La probabilidad del segundo suceso (error de segundo género) es

$$P_1 = \int_{-\omega}^{x(R_0/R_1)} \phi_1(x)\, dx \tag{1.25}$$

que a su vez corresponde al área baho la cola de $\phi_1(x)$ hacia la izquierda de $x(R_0/R_1)$. En la figura 1.8 podrá notarse que disminuir la probabilidad P_0 implica aumentar P_1 y viceversa. Por otra parte, el procedimiento descrito presenta algunas deficiencias básicamente porque no siempre es posible conocer la función $\phi_1(x)$, ni determinar óptimamente $x(R_0/R_1)$.

Otro criterio, de aplicación más general y sencilla consiste en la evaluación de la proximidad que presenta x_0 con respecto a la media o a los extremos de la distribución $\phi(x)$, como se indica en la figura 1.9, que se denomina región crítica y cuyo valor total es β. El criterio se fundamenta en que la probabilidad de ocurrencia de la variable en la zona marcada por el área β es muy baja, lo que lleva a concluir que el valor x_0 es un suceso de difícil ocurrencia o que la hipótesis es definitivamente inadmisible. La probabilidad de que la variable aleatoria se manifieste en la región crítica se llama nivel de significación del criterio.

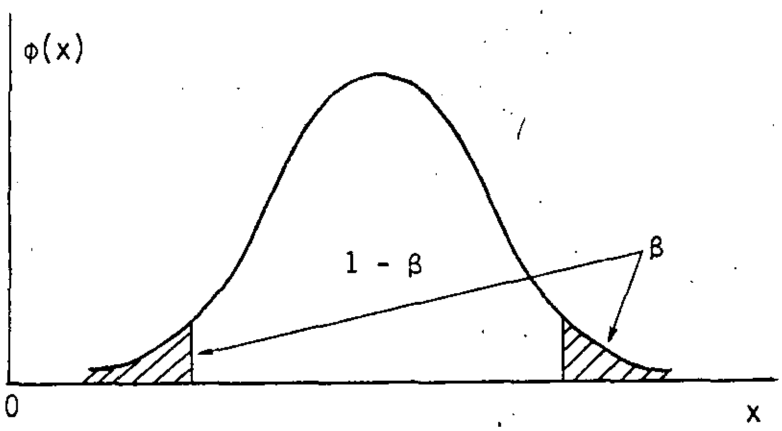


Figura 1.9 Región crítica β de la función de densidad de probabilidad.

Podrá notarse que cuando se ha definido sólo una área en la figura 1.9, el nivel de significación es la probabilidad de despreciar la hipótesis cuando es correcta. Esto podría llevar a suponer que cuanto menor sea el nivel, es mejor, pero la disminución de éste hace que el criterio pierda sensibilidad y no resuelve nada. Por el contrario, un nivel de significación elevado aumenta la probabilidad de despreciar la hipótesis cuando en realidad es cierta. Por ello se recomienda lo siguiente:

1. Admitir la hipótesis con un nivel de significación superior al 5%
2. Admitir, rechazar, o sólo poner en duda hipótesis con un nivel de significación comprendido entre el 1% y el 5%, dependiendo si el criterio es aceptar o rechazar la hipótesis, aunque es mejor acumular más anteceden

tes.

3. Despreciar la hipótesis si su nivel de significación es inferior al 1%.

Como podrá notarse, en este segundo caso la elección del nivel de significación es el punto vulnerable del criterio, aunque su aplicación se ve facilitada por la posibilidad de cuantificar la elección.

2.4 Aproximación de números

En las condiciones reales de la experimentación se trabaja normalmente con números aproximados, ya sea porque no es posible determinarlos con exactitud, por las limitaciones del sistema numérico o porque simplemente se toman como tales. Algunos ejemplos son

1. Constantes físicas universales.
2. Números y constantes trascendentes.
3. Fracciones que en decimal resultan series infinitas.
4. La mayor parte de los resultados de operaciones matemáticas.
5. Los números resultado de una observación o medición.
6. Todos los números cuando se manejan en computadoras.

En tales condiciones, el uso del redondeo es una práctica muy normal para aproximar números que, debido a esta razón, pasan a ser números aproximados o, mejor, números que contienen una incertidumbre o error.

Puesto que por lo general el valor exacto de un número no se conoce, se acostumbra definir el valor absoluto como la magnitud de la diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado, el cual se denomina ε. Un número aproximado a se esfuerza entonces en función del número exacto A, de la siguiente forma

$$A = a \pm \varepsilon \tag{1.26}$$

El error absoluto límite ε_ℓ se define con la desigualdad

$$a - \varepsilon_\ell \le A \le a + \varepsilon_\ell \qquad (1.27)$$

donde se observa que ε_ℓ es el máximo error a considerar, siendo en extremo arbitrario, aunque es deseable que su valor se minimice tanto como sea posible. El error relativo δ, se define

$$\delta = \frac{\varepsilon}{|A|} \qquad (1.28)$$

Análogamente el error relativo límite se define

$$\delta_\ell \ge \frac{\varepsilon}{|A|} \qquad (1.29)$$

Algunas propiedades de las definiciones anteriores (para aproximaciones suficientemente razonables) son

$$\delta = \frac{\varepsilon}{|a|} \qquad (1.30a)$$

$$\delta_\ell = \frac{\varepsilon_\ell}{|a|} \qquad (1.30b)$$

$$\frac{\varepsilon}{A} = \frac{\varepsilon}{a}\left(1 \pm \frac{\varepsilon}{a}\right) \qquad (1.30c)$$

$$A = a\left(1 \pm \frac{\varepsilon}{a}\right) \qquad (1.30d)$$

$$A = a.(1 + \delta) \qquad (1.30e)$$

Las igualdades (1.30) son en realidad fórmulas aproximadas y válidas sólo sí $\varepsilon << |A|$, $\varepsilon << |a|$ y $A \approx a$.

Una conclusión inmediata de las definiciones (que se demuestra fácilmente) se refiere a que en los instrumentos que tienen escalas analógicas lineales, el error absoluto se mantiene constante en toda la escala, aunque la exactitud no sea la misma. En cambio, las escalas analógicas logarítmicas tienen la propiedad que el error relativo se mantiene constante en toda la escala.

Al trabajar con números aproximados cuyos errores relativos y absolutos difieren, se produce la necesidad de definir algún criterio para el redondeo de los números, puesto que es deseable que los resultados obtenidos no contengan errores mayores que el mayor error de las cifras originales. Al mismo tiempo, se querrá evitar la carga que significan una serie de cifras decimales de los resultados que no representan nada porque no son correctas, sino producto de los errores acumulados.

Los errores que se producen al realizar operaciones se encuentran fácilmente y se puede demostrar que se cumplen las siguientes relaciones en las operaciones aritméticas básicas.

Suma. El error absoluto limite de la suma de números aproximados es igual a la suma de los errores límites de los sumandos

$$\varepsilon_{\text{lím}} = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_{\text{lím}})_i \tag{1.31}$$

Esto significa que el menor error posible de la suma será mayor que el mayor de los errores de los sumandos. Aunque la influencia en el error por parte de las demás cifras también cuenta, por lo regular los demás sumandos no se toman con demasiada exactitud, es decir, no se toman con muchas cifras decimales.

Resta. Para este caso también se aplica la ecuación (1.31) ya que se trata en realidad de suma algebraica. Sin embargo, cabe hacer notar que el error relativo límite de la diferencia de dos números, a_1 y a_2, resulta ser

$$\delta_{\text{lím}} = \frac{\varepsilon_{\text{lím}}}{a_1 - a_2} \tag{1.32}$$

Entonces, cuando los números son próximos, el resultado pierde exactitud ya que el error relativo límite del resultado tiende a aumentar ilimitadamente. Este resultado, por supuesto, también es aplicable a sumas algebraicas de muchos factores cuando existen sustracciones entre ellos.

Multiplicación. Ahora se cumple una expresión similar a la de la suma, excepto que válida para los errores relativos

$$\delta_{lím} = \sum_{i=1}^{n} (\delta_{lím})_i \tag{1.33}$$

o sea, el error relativo límite del producto de n factores es igual a la suma de los errores relativos límites de estos factores.

Nótese, sin embargo, que al multiplicar un número exacto con otro aproximado, el error relativo límite del resultado será el mismo que el del número aproximado; en cambio, el error absoluto límite del producto se verá multiplicado por el número exacto, como puede comprobarse fácilmente.

División. Como podría suponerse, la ecuación (1.33) también se aplica para la división, ya que a/b podía escribirse como producto: a(1/b). Entonces, el error absoluto máximo del cociente de dos números aproximados es igual a la suma de los errores absolutos máximos del divisor y del dividendo.

Funciones. Cuando se trata de encontrar el error en la determinación del valor de una función cuyo argumento es aproximado, se tiene lo siguiente:

1. El error absoluto de una función de una variable aproximada es igual al valor absoluto del argumento multiplicado por la derivada de esta función, o sea,

$$\varepsilon_{f(x)} = \varepsilon_x \, |f'(x)| \tag{1.34}$$

2. El error relativo de una función de una variable aproximada es igual al

error absoluto del argumento multiplicado por la derivada de un logaritmo natural, o sea,

$$\delta_{f(x)} = \varepsilon_x \left| \frac{d}{dx} \ln f(x) \right| \tag{1.35}$$

3. El error absoluto límite de una función de varias variables independientes aproximadas es igual a la sumatoria de los errores absolutos de cada argumento multiplicado cada uno de ellos por las respectivas derivadas parciales con respecto a dichos argumentos, o sea,

$$(\varepsilon_{lím})_f = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \tag{1.36}$$

donde la función es $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

4. El error relativo límite de una función de varias variables independientes aproximadas es igual a la suma de los errores absolutos de cada argumento, multiplicado cada uno de ellos por las respectivas derivadas parciales de su logaritmo natural, o sea,

$$(\delta_{lím})_f = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln f \right| \tag{1.37}$$

Redondeo de números. Como quiera que sea, los números con que se trabaja en la práctica serán aproximados, por lo que en su representación decimal tendrán un determinado número de cifras exactas y un determinado error absoluto límite. Los dos métodos que se plantean a continuación definen más exactamente estos conceptos.

Método 1. Las n primeras cifras de un número aproximado se llaman exactas, si el error absoluto máximo de dicho número es menor o igual a 0.5 del orden de la última cifra que se conserva.

Es decir,

$$\varepsilon \leq 0.5 \times 10^{m-n-1} \tag{1.38}$$

donde m es el exponente que caracteriza el orden decimal superior del número.

Método 2. Las primeras n cifras decimales de un número aproximado se llaman exactas, si el error absoluto de este número es menor o igual a la unidad del orden de la última cifra que se conserva, es decir,

$$\varepsilon \leq 10^{m-n-1} \tag{1.39}$$

Este último método corresponde a la truncación de los números, en tanto que el primero, más estricto, se satisface simplemente siguiendo la siguiente regla. Al redondear un número en el que deben permanecer n cifras,

1. Si la primera cifra eliminada (n+1) es menor que 5, la última cifra conservada no varía (truncación).
2. Si la primera cifra eliminada (n+1) es mayor que 5, la última cifra conservada se aumenta en uno.
3. Cuando se produce la igualdad (la primera cifra eliminada es igual a 5) y además hay otras cifras eliminadas diferentes de cero, la última cifra conservada se aumenta en uno.
4. Cuando se produce la igualdad y todas las cifras eliminadas restantes son ceros, la última cifra conservada se aumenta en uno si es impar y no se varía si es par.

ηx	$P_{\eta x}$	ηx	$P_{\eta x}$	ηx	$P_{\eta x}$
0.00	0.000	0.477	0.500 (ϕ)	0.90	0.797
0.05	0.056	0.50	0.521	0.95	0.821
0.10	0.113	0.55	0.563	1.00	0.843
0.15	0.168	0.60	0.604	1.1	0.880
0.20	0.223	0.65	0.642	1.2	0.910
0.25	0.276	0.70	0.678	1.3	0.934
0.30	0.329	0.707	0.682 (σ)	1.4	0.952
0.35	0.379	0.75	0.711	1.5	0.966
0.40	0.428	0.80	0.742	2.0	0.995
0.45	0.476	0.85	0.771	∞	1.000

Tabla 1.1 A

3. EL EXPERIMENTO EN INGENIERIA

omo se ha mencionado anteriormente, el experimento en ingeniería no difiere incipio de los que se realizan en otras ramas de la ciencia o de la técnica; sin embargo, tiene algunas peculiaridades que justifican un análisis más profundo de ciertos detalles especiales.

En particular, se encuentra que algunos aspectos de los instrumentos, ciertas ---- fuentes de error, la secuencia y la planificación del experimento merecen especial atención.

3.1 Análisis del experimento

En términos generales, no sólo para ingeniería, el experimento es una secuencia de acciones u operaciones que se realizan sobre un fenómeno físico (normalmente) con el próposito de cuantificarlo.

El acceso que se tiene a este fenómeno son algunas variables que deben medirse o - probarse a través de uno o más instrumentos.

Hay involucrados en esta tarea una serie de efectos que se traducen en una cierta rtidumbre sobre dichas variables, por lo que se hace necesario siempre consi- r:

1. Las fuentes de error y los errores producidos en cada aparato.
2. Las fuentes de error y los errores producidos por un grupo de aparatos.
3. La reducción de las variables en consideración.
4. Algunos aspectos especiales de los intrumentos empleados.
5. La secuencia, espaciamiento y plan del experimento y sus variables.
6. La comprobación y prueba de los resultados experimentales.
7. El análisis y la interpretación de los datos.

Los dos primeros puntos se han analizado en el capítulo 1. Para reducir las variables en consideración, el método más común en el análisis dimensional, que permite su reducción en un experimento o prueba al distinguir entre las variables fundamentales (o independientes) y las controladas (o dependientes). En esta forma se logra aislar las fuentes de incertidumbre al hacer más compactos e independientes -- los resultados. Este método no se tratará aquí.

En el resto de este capítulo se analizarán a detalle los tres puntos siguientes - (4, 5 y 6), en tanto que el último punto (7) se desarrollaráen el capítulo próximo.

3.2 La influencia de los instrumentos

Siempre que se realice una medición o prueba existirá un instrumento encargado de transformar la variable (o grupo de ellas) a un dominio observable. Este instrumento tendrá entonces la responsabilidad de efectuar con fidelidad esta transformación; sin embargo, siempre se tendrán que considerar algunas fuentes de incertidumbre o de falla inherentes al mismo. Aunque todo parezca estar bien, es posible que algunos aspectos no evidentes del proceso de lectura, toma de datos o medición tengan serias anomalías. Entre estos aspectos se mencionan los siguientes: las interfaces del instrumento, las cuestiones de la impedancia, la carga, el tratamiento o procesamiento ínterno y los dispositivos de salida o lectura.

En instrumentación electrónica las interfaces se presentan normalmente en dos puntos: al detectar la variable de interés y transformarla a variable eléctrica y en los dispositivos de salida. Para el ingeniero eléctrico o electrónico que conoce perfectamente el funcionamiento de los instrumentos, la trasducción de variable - no eléctricas a eléctricas se presenta como el aspecto negativo del sistema y, en ocasiones, no adquiere suficiente confianza en él. Esta situación puede, al menos en parte, justificarse ya que los transductores como cualquier componente están - sometidos a limitaciones por temperatura, choque, vibraciones, envejecimiento, -- frecuencia etc. También, existen otras limitaciones, que se refieren al propio -- mecanismo de transducción, como son las inercias (de velocidad o temperatura), - fricciones, fuerzas magnéticas o gravitacionales, envejecimiento de los componentes mecánicos, resolución, aproximaciones realizadas, etc. Sin embargo, debe tenerse cuidado de distinguir entre las limitaciones reales y las ficticias, es decir, aquellas que, sin dejar de ser limitaciones, no impiden el funcionamiento -- del instrumento puesto que su efecto puede compensarse o despreciarse.

El segundo punto a interfaz (los dispositivos de salida) presenta también algunas otras características que inducen a errores, ya que en algunos dispositivos de salida la intervención humana puede influir en exceso. Esto es típico de los dispositivos de salida analógicos, aunque los digitales presentan otra clase de incertidumbre: el error de la última cifra, la no linealidad, el procesamiento de cifras aproximadas, etc.

Hasta ahora se ha considerado como interfaz únicamente a los puntos en donde se produce el cambio de las variables eléctricas o no eléctricas, o viceversa, sin embargo, podría considerarse que al pasar de un circuito a otro se tiene también una interfaz. Esto aclara la magnitud del problema porque el número de interfaces tiene influencia sobre la calidad de la medición, ya que es allí donde se encuentran las fuentes de errores y los efectos extremos que alteran el funcionamiento del aparato.

Otro aspecto importante es el de la impedancia o resistencia que presentan los aparatos reales. Al tratarse de detectar o medir una variable, usualmente se inserta el dispositivo sensor alterando las características propias del fenómeno o dispositivo en prueba. Esto es típico de la medición de corriente y voltaje en circuitos eléctricos, ya que al medir corriente se aumenta la inpedancia del circuito y al medir voltaje se extrae una corriente de éste.

En términos generales puede decirse que, siempre que se realiza una medición, debe extraerse una pequeña cantidad de energía para cuantificar proporcionalmente la medición o prueba. Por supuesto, esta interacción resulta ser casi siempre despreciable, especialmente en el mundo macroscópico, pero puede concluirse con seguridad que el acto de medir, probar o detectar el mundo físico produce algún tipo de alteración del mismo. En cuanto a la impedancia, ésta influye directamente en la transferencia de energía a través de la interfaz entre la variable que se desea medir y el instrumento de medición, por lo cual constituye de alguna manera una carga.

Por lo general es conveniente que el instrumento provoque una carga mínima y que ésta sea constante en todo el intervalo de variación de la variable a medir o en el intervalo de utilización del instrumento. Esto significa que también es deseable que la inpedancia no interfiera en el intervalo de variación de la variable, por efectos capacitivos o inductivos.

En cuanto al procesamiento interno, debe considerarse que muchos instrumentos analógicos requieren ajustes o sintonías que se pierden con el tiempo, la temperatura y otros agentes externos. También, ciertos procesos pueden acarrear de por sí alguna incertidumbre, introducir ruido o alterar ciertas características de la variable que se analiza. Los instrumentos que emplean el procesamiento digital, por su parte, introducen una incertidumbre en la última cifra, por la no linealidad de las conversiones A/D y D/A y por trabajar con números aproximados. Si además se incluye algún tipo de procesamiento por software, entonces habrá que agregar algún retraso adicional a la salida de resultados o a la operación que se realice a partir de la medición efectuada. Otra limitación que presenta el procesamiento digital se refiere a la velocidad de operación. Puesto que al digitalizar se consume un tiempo, toda la operación se realiza con muestras de la señal que deben espaciarse en el tiempo lo menos posible para tomar suficientes de ellas (según el teorema del muestreo, deben tomarse con más de dos veces la frecuencia máxima de la variable en consideración), pero mientras más muestras se tomen por unidad de tiempo, mayor velocidad de operación será necesaria para el procesamiento. Este compromiso se resuelve con el teorema del muestreo ya mencionado.

Por último, el contacto final entre el instrumento y el usuario: los dispositivos de salida. Tradicionalmente habían sido una fuente de incertidumbre a causa de que exigían la intervención humana pero, el advenimiento de los instrumentos con salida digital ha disminuido notablemente este problema. Sin embargo, aún quedan y permanecerán muchos instrumentos que por su carácter requieren la intervención humana y el riesgo de aumentar de incertidumbre. Afortunadamente, este problema se resuelve con la práctica y teniendo cuidado en el momento de tomar los datos.

3.3 Secuencia del experimento

Antes de iniciar propiamente la toma de datos de una variable o fenómeno en consideración, se habrá realizado el análisis previo del experimento para comprobar la exactitud de los instrumentos, la eficacia del método de prueba y, si es el caso, la reducción de las variables. Ya que se han efectuado estas operaciones previas, todavía será conveniente considerar, antes de empezar, algunas cuestiones de importancia, como son el esparcimiento de los puntos de prueba, la secuencia en que se realizarán las mediciones y el plan general del experimento.

El espaciamiento de los puntos de prueba pareciese ser una cuestión obvia, sin embargo tomar pocos puntos de prueba puede significar que no se obtenga con seguri ad la relación o ley que se busca, a causa del espaciamiento. Por otro lado, muchos puntos de prueba pueden significar un gasto inncesario de tiempo y también -- que se oculte entre el total de incertidumbres alguna información importante.

En términos generales existen dos críterios para la selección del número y esparcimiento de los puntos de prueba: la exactitud relativa de los datos y la forma de la curva experimental. El primero de ellos se basa en que las diferentes zonas de variación de las variables no tienen la misma exactitud relativa. Los instrumentos normalmente presentan mayor información para los valores bajos de las variables, por ejemplo, por lo cual se hace necesario tomar mayor número de puntos (menor espaciamiento) en estas regiones. Esto no tiene una regla fija, aunque ya se sabe que la precisión se incrementa con la raíz cuadrada del número de mediciones, por ello, cuatro puntos son el doble de efectivos que uno y nueve son sólo tres -- veces más efectivos. Como el mejoramiento de la precisión es entonces muy limitado debe emplearse en cada caso un críterio más amplio.

El segundo críterio se refiere principalmente a que, como las curvas no son lineales, la elección de puntos equidistantes en una coordenada provoca puntos desigualmente espaciados en la otra. Por ejemplo, si se quiere tratar la curva de un diodo con incrementos constantes de voltaje, los incrementos de la corriente serán pequeños para corrientes bajas, pero elevados para corrientes altas. Por el contrario, si se eligen puntos a incrementos constantes de corriente se produce una "acumulación" de los puntos de voltaje más altos. Una alternativa sería tomar puntos equidistantes a lo largo de la curva del diodo, con lo cual se obtendrían espaciamientos desiguales de voltaje y corriente, pero mejor repartidos que en los dos casos anteriores. Por desgracia, no siempre se conoce con precisión la forma de la curva pero, si se tiene una idea aproximada de ella, podría resolverse el -- problema tratando con diversas modificaciones(coordenadas semilogarítmicas para el diodo, por ejemplo) para transformar la curva en una linea aproximadamente recta como se hace en el método de los mínimos cuadrados que se verá en el siguiente capítulo.

De cualquier forma, el objetivo a alcanzar es la definición de una curva contínua y desconocida a partir de unos cuantos puntos, por lo que se deberá tratar de cumplir el requisito de que la definición final que se obtenga de esta curva tenga --

la misma precisión en todos sus puntos.

3.4 Plan del experimento

Independientemente del criterío empleado para determinar el espaciamiento (y cantidad) de los puntos para obtener un mínimo de confiabilidad en los resultados obtenidos, sólo se ha resuelto uno de los problemas para definir con precisión la curva o resultado experimental. Hace falta evitar que la secuencia en que se realicen las mediciones implique una alteración de los resultados. Ya se ha mencionado que el acto de medir tiene alguna influencia en la variable o fenómeno en observación, por lo que en algunos casos se tendrá que la observación misma (o algún otro factor) producirá cambios irreversibles que no se detectarán si se efectúan mediciones "orientadas" o que no permiten distinguir la variable del cambio inducido

La mayor parte de los casos en los cuales se producen cambios irreversibles al medir comprenden a los valores extremos de las variables (puntos de ruptura, límites de elasticidad, fatiga, sobrecalentamiento etc.) aunque otros factores externos también pudieran influir (temperatura, presión, humedad, etc.).

Cuando se presentan situaciones como ésta, lo más conveniente es evitar seguir secuencias obvias para la modificación de las variables, como lo son los cambios monotónicamente crecientes o decrecientes. En oposición al plan secuencial, que consiste entonces en modificar cada variable desde un valor extremo al otro, se tiene el plan aleatorio, que consistirá en realizar las observaciones siguiendo una secuencia aleatoría entre los puntos de medición.

El plan secuencial se aplica mejor en los casos donde no se producen cambios irreversibles o si éstos tienen lugar en ciertas zonas extremas de la variación de las variables. El plan aleatorío, en cambio, tiene en términos generales una validez más amplia debido fundamentalmente a que:

1. Las variables extremas pueden tener alguna tendencia definida a lo largo de la medición o prueba.
2. Los efectos del cansancio y del aburrimiento que se producen al tomar una larga serie de datos, se hacen más notorios al final de la prueba.
3. Algunos efectos mecánicos adquieren importancia con las variaciones regulares y monótonas de las variables (Histéresis).
4. La secuencia de la toma de datos deja de ser una variable externa al proceso con el plan aleatorio.

Puesto que lo que se desea es tener el máximo de control de las variables externas, el plan secuencial sólo tiene justificación si parte de la prueba es irreversible, la secuencia aleatoria no es práctica o si el experimento exige que los datos se tomen en forma regular y con determinada secuencia.

Tomando los puntos de prueba en forma aleatoria se eliminan las variables extremas de tipo contínuo como la temperatura, pero cuando se tienen variables de tipo discreto, este método pudiera no ser suficiente. Supóngase que se tiene una variable independiente y otra dependiente (lo que se llama experimento de un solo factor), que se desean aislar de la influencia que significan, por ejemplo, diferentes personas, distintos dias de la semana o del mes, diversas máquinas o aparatos, varios lotes de material o condiciones específicas.

El siguiente ejemplo puede aclarar esta situación.

Supóngase que se desea probar una nueva máquina en condiciones de operación siendo variable independiente la velocidad de trabajo y variable dependiente la tasa de producción (cociente entre el número de piezas aceptadas y el número total producido). Aparentemente se trata de un experimento sencillo, pero se presenta una variable extraña porque cada uno de los operadores presentará diferentes habilidades y capacidades que influirán en el resultado. En otros casos se eliminaría la influencia de la variable extraña por medio de la elección de los elementos promedio; sin embargo, en este caso esto no tendría sentido. De modo que habría que seleccionar un grupo de operadores que opere las máquinas a una velocidad constante durante un día completo de trabajo. Pase que se tenga una distribución apropiada de los operadores y de las velocidades se tomará un período de cuatro días durante los cuales cada persona seleccionada (por algún procedimiento dado) trabajará con una máquina determinada durante cada día a una velocidad diferente. Si los operadores se designan con letras A, B, C y D, y las velocidades con los números 1, 2, 3 y 4, se tendría como posible plan

Operador	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves
A	1	2	3	4
B	1	2	3	4
C	1	2	3	4
D	1	2	3	4

Con esta estrategía se tendrá que los resultados serían más independientes de ca-- da operador, en virtud de que se ha tratado de eliminar su influencia en el desarrollo de la prueba. A pesar de todo se presentan aquí efectos que no están contro lados, porque en la secuencia presentada la influencia humana no está totalmente - eliminada. Es lógico que en el primer día haya mayor interés por el nuevo trabajo, que se presente algún tipo de aprendizaje o de aburrimiento con el paso de los --- días, o, como se sabe, que los niveles de trabajo varíen durante la semana. Una -- forma de evitar esta situación es sorteando las velocidades asignadas entre los -- días, de manera que se tenga una distribución aleatoria de las velocidades en la - semana para cada sujeto, pudiendo resultar como se muestra a continuación.

Operador	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves
A	4	2	1	3
B	2	3	1	4
C	3	2	1	4
D	1	3	4	2

Este nuevo plan es evidentemente mejor que el anterior, pero todavía presenta algunas deficiencias destacables como que las velocidades no se distribuyen uniformement durante todo el desarrollo de la prueba. Una mejor forma de asignar velocidades a cada día y a cada sujeto sería distribuir cada velocidad para que se trabaje una sola vez por cada operador durante un día de trabajo, pero que no trabajen en un mismo día dos velocidades iguales. Esto queda:

Operador	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves
A	1	2	3	4
B	3	4	1	2
C	2	1	4	3
D	4	3	2	1

Este plan se conoce con el nombre de cuadrado latino y es un caso particular de -- plan experimental general conocido como experimentos factoriales. Otro ejemplo se obtiene al considerar que no se ha tomado en cuenta la variación que puede presentarse entre diferentes máquinas, entre varios lotes distintos de material, etc. En el primer caso, si se desea evitar que cada operador trabaje más de una vez con cada máquina se tendría el siguiente plan, donde W, X, Y y Z denotan las cuatro má quinas.

Operador	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves
A	1W	2X	3Z	4Y
B	3X	4W	1Y	2Z
C	2Y	1Z	4X	3W
D	4Z	3Y	2W	1X

Este plan se conoce como cuadrado grecolatino y en él se tiene la característica - que cada operador trabaja sólo una vez en cada máquina, con una velocidad diferente cada día, toda las máquinas trabajan diariamente y con distintas velocidades entre sí, distribuyendose máquinas, velocidades y hombres en forma equilibrada durante la semana.

Al agregarse otras variables se tendrían cuadrados de orden superior pero la necesidad de tales estrategias es muy rara, al mismo tiempo que las variables extrañas podían evaluarse más estrictamente por procedimientos estadísticos. En el --- ejemplo, los días de la semana, los diversos operadores, las distintas máquinas y os diferentes lotes de material son variables normales y probablemente conocidas en cuanto a su influencia y su comportamiento estadístico (media y dispersión) en el ambiente de trabajo.

Hasta el momento sólo se ha analizado la influencia de las variables extrañas en - experimentos de un par de variables (de un factor); cuando se presentan varias variables en diferentes niveles de variación, hay dos clases de plan que podían emplearse: clásico y factorial. El plan clásico consiste simplemente en tomar todos los puntos que resultan al fijar todas las variables independientes (menos una) en sus valores medios y modificarla última en todo su intervalo de variación. Este plan es apropiado para relaciones matemáticas simples entre las variables consideradas, por lo que si la relación que se analiza o se trata de determinar es compleja, podía considerarse un plan en que todas las variables (menos una) se fijan no en un nivel promedio, sino en varios niveles, cuando la última variable se mueve - en todo su intervalo. Los diagramas siguientes muestran los puntos seleccionados - para experimentos de dos factores, donde A y B son las variables independientes que se modifican en los niveles 1, 2, 3, 4 y 5. Las cruces indican las combinaciones elegidas que configuran puntos de medición.

Primer caso

(A) \ (B)	1	2	3	4	5
1			+		
2			+		
3	+	+	+	+	+
4			+		
5			+		

Segundo caso

(A) \ (B)	1	2	3	4	5
1	+	+	+	+	+
2	+		+		+
3	+	+	+	+	+
4	+		+		+
5	+	+	+	+	+

El plan factorial de dos o más factores se aplica también con ventaja en ingeniería, aunque presenta una fuerte limitación en el sentido que solo pueden tratarse los casos en que la variable dependiente es una suma (o producto) de funciones de cada variable independiente.

Desafortunadamente, este tipo de relación es muy poco común en ingeniería, por lo que se recomendará al lector interesado recurrir a la literatura correspondiente.

3.5 Comprobación de datos.

Aún cuando hasta el momento todas las acciones se han encaminado a que los instrumentos estén bien calibrados, ajustados y que den valores exactos, aún cuando se ha tratado de elegir la secuencia y el plan del experimento para que los errores no se produzcan o sean mínimos, los datos capturados pueden contener errores por diversas razones de mal funcionamiento, fallas humanas, deficiencia en el control de las variables extrañas o diversas otras causas no previstas. Al concluir el proceso de toma de datos se hace entonces necesario proceder a comprobarlos o someterlos a alguna prueba que permita descartar los que presentan mayores indicios de ser incorrectos.

Los procedimientos que se siguen para comprobar los datos, y los criterios que se aplican para asegurarse de que son adecuados, son los siguientes:

1. Aplicación de ecuaciones de balance o conservación
2. Aplicación de criterios al extrapolar
3. Rechazo de los puntos muy apartados del promedio
4. Repetición de las mediciones

El primer procedimiento consiste en tratar de comprobar que una o varias ecuaciones de balance o conservación se cumplen a través de los resultados obtenidos. Esta situación se encuentra con frecuencia en todas las ramas de la ciencia y la técnica. En ingeniería eléctrica las ecuaciones más comunes corresponden a las leyes de Kirchhoff de corriente y voltaje, la conservación de la carga etc. Por supuesto debe tenerse cuidado al aplicar las ecuaciones de balance en los casos en que las pérdidas, la dificultad de estima r los errores o las eficiencias de transformación de un tipo de energía a otro, oculten los resultados reales obtenidos o interpongan algún tipo de incertidumbre no fácilmente evaluable.

El segundo críterio consiste en la extrapolación de las curvas (usualmente hasta cero), para proyectar el conjunto de puntos obténidos hasta una condición previamente conocido u obvia. En esta forma se comprueba realmente la consistencia total del grupo de datos y no sólo de uno o algunos en particular. No es, sin embargo, una prueba absoluta porque un conjunto de datos deficientes puede extrapolarse bien pero, si la extrapolación no es la que se espera, entonces los datos definitivamente presentan deficiencias. Este método se aplica mejor cuando los ejes coordenados de la curva (o curvas) han sido transformados para que la gráfica sea una línea recta, lo que permite extrapolar con mayor seguridad. Debe tenerse cuidado sin embargo, con ignorar efectos que podían presentarse fuera del intervalo en el que se ha tomado los datos y que hicieran curvarse a la línea recta, porque lógicamente harían fallar al método. También hay que considerar que otro factor que puede comprobarse en esta misma forma es la pendiente de la curva que se traza, lo que puede ser muy útil al dibujar familiar de curvas.

El rechazo de los puntos muy alejados del promedio es un críterio que debe aplicarse con cuidado, ya que en algunos casos podían no ser puntos defectuosos sino, al contrario muy significativos. En este sentido habría que distinguir entre los puntos del centro del conjunto, para las cuales el críterio de rechazarlos por meras consideraciones estadísticas es el más adecuado, y los puntos de los extremos del grupo de datos. Estos últimos pueden ser muy significativos cuando se apartan del promedio, puesto que podíanseñalar una tendencia efectiva de la curva en lugar de un error evidente. En estos casos, por supuesto, lo mejor es tomar más datos para confirmar si se trata de un punto "extraño" o de una tendencia real. Posiblemente, ha sucedido que en esta región no se ha elegido un espaciamiento adecuado, lo que impediría observar la verdadera trayectoria de la curva.

El rechazo de cualquier punto debe tener, entonces, el objetivo de mejorar el ajuste de las curvas y evitar la degradación del promedio y de los análisis estadisticos. Un excesivo celo por rechazar lo que se aleja del promedio podía llevar a perder información importante del fenómeno o de la variable en consideración. Algunos criterios para rechazar los datos que parecen estar fuera de un valor nominal son:

1. Aplicación de una regla estadística de rechazo
2. Falla obvia de un instrumento
3. Detección clara de control defectuoso de una variable extraña
4. Diferencia notable al aplicar un criterio de balance o conservación.

Cada vez que existan dudas sobre la calidad de los datos obtenidos, lo mejor es comprobar repitiendo las mediciones u observaciones. Aún así, la falla en la comprobación podía implicar que el proceso o los instrumentos presentan envejecimiento, lo cual puede medirse o evaluarse con una prueba o medición especialmente preparada para ello.

4. ANALISIS DE LOS DATOS

Habiendo reunido una cantidad adecuada de datos, consistentes y conteniendo incertidumbres suficientemente pequeñas, puede iniciarse el trabajo de análisis e interpretación de estos resultados experimentales. En ingeniería los análisis que se realizan comprenden normalmente algún tipo de gráfica o diagrama, tratamiento numérico, estadístico o algebraico. Para la realización de este tipo de análisis existen una gran cantidad de técnicas y metodologías de la más diversa capacidad, por lo que aquí se analizarán unicamente las técnicas más elementales.

4.1 Análisis estadístico

Una de las cuestiones básicas que pueden responderse por medios estadísticos es la referente a si dos grupos de datos corresponden a una misma población o no. Otra consiste en resolver el problema de si una serie de sucesos son el resultado de muchos eventos independientes o si, por el contrario, su distribución sigue o parece seguir una tendencia o patrón.

El primer problema puede cuantificarse con la prueba de significancia de chi cuadrado (χ^2), que consiste en evaluar χ^2 de la ecuación

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(O-E)^2}{E} \qquad (1.40)$$

donde O representa el número de sucesos observados en la realidad y E, el número de sucesos esperados o que se supone deberían haber ocurrido. Esto supone la existencia de una hipótesis (E) o que se realiza una comparación con un segundo grupo de observaciones. Una vez que se ha encontrado el valor de χ^2, se determina mediante tablas o una gráfica como la de la figura 1.10. El concepto grados de libertad que aparace en las tablas o diagramas corresponde al número de grupos independientes de datos de que se dispone. La aplicación de la prueba de chi cuadrado se aclarará con el siguiente ejemplo.

Supóngase que se tienen los datos de la tabla 1.2 correspondientes a sucesos con

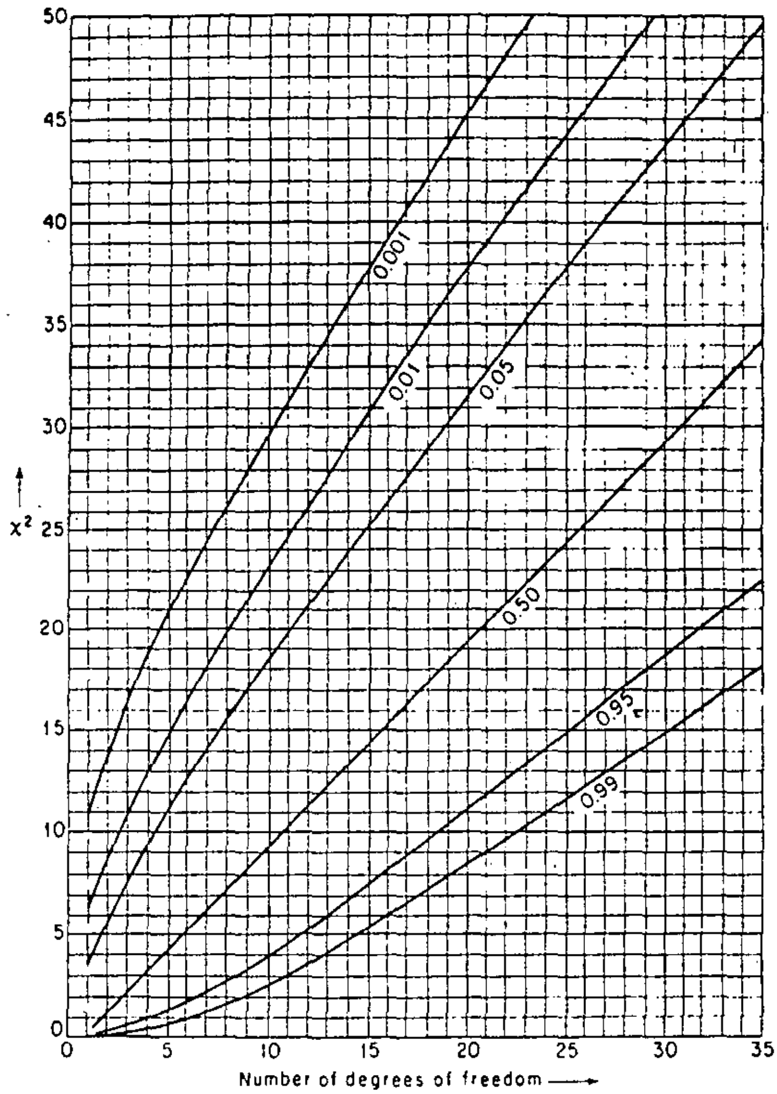


Fig. 1.10 Diagrama de χ^2 para la probabilidad de ocurrencia

Número de elementos por juntura	Fallas del Sahara	Ferrocarriles de Ohio	Canales de Marte
1	37	2	13
3	82	17	31
4	31	75	68
5	6	22	27
6	1	14	13
7	0	9	5
8 o más	1	19	1
Total	158	158	158

Tabla 1.2 Comparación de tres conjuntos de datos fotográficos.

tabilizados de fotografías de grietas, vías de ferrocarril o canales de Marte que se contabilizan en función de las junturas que se observan en cada fotografía. Nótese que la población ha sido estandarizada a 158 sucesos y que no se han tomado las junturas donde coinciden dos elementos, por no ser posible distinguirlas fácilmente de curvas cerradas.

Al suponer que los tres grupos de datos podrían corresponder a poblaciones similares, se trata de evaluar la hipótesis de que los canales de Marte se distribuyen de manera similar a las grietas del Sahara (que es una distribución natural típica) o de manera similar a los Ferrocarriles de Ohio (que es una distribución típica de las construcciones humanas). En ambos casos debe satisfacerse una condición adicional de la prueba, la cual consiste en que el número mínimo de sucesos debe ser entero y al menos de cinco para cada término.

La hipótesis de que la distribución de las grietas del Sahara es similar a la de los canales de Marte lleva al siguiente resultado.

$$\chi^2 = \frac{(13-37)^2}{37} + \frac{(31-82)^2}{82} + \frac{(68-31)^2}{31} + \frac{(46-8)^2}{8} = 309.3 \qquad (1.41)$$

donde el número de grados de libertad es tres y donde las últimas tres filas de la tabla (6, 7 y 8 junturas) se han reunido en un sólo término para evitar la limitación de cinco o más sucesos por término. Al buscar en la figura 1.10 (o en una tabla) se encuentra que la probabilidad de que ambas poblaciones sean similares es muchisimo menor del uno por mil, por lo que se puede asegurar que no son similares en absoluto. (Se rechaza la hipótesis).

La segunda suposición consistente en imaginar que los canales de Marte se distribuyen en forma similar a los ferrocarriles de Ohio, da los siguientes resultados para cinco grados de libertad

$$\chi^2 = \frac{(44-19)^2}{19} + \frac{(68-75)^2}{75} + \frac{(27-22)^2}{22} + \frac{(13-14)^2}{14} + \frac{(5-9)^2}{9} + \frac{(1-19)^2}{19} = 55.2 \qquad (1.42)$$

Como según la figura 1.10 la probabilidad de que ambos grupos de datos provengan de la misma población es también mucho menor del uno por mil, puede decirse que los tres grupos de datos pertenecen a tres poblaciones diferentes.

Utilizando técnicas similares puede determinarse (al menos en forma estadística) otras cuestiones, como son si los promedios de diferentes grupos de datos provienen de la misma población, para lo que se utiliza la prueba t de Student, o si las dispersiones de dos grupos de datos pertenecen a la misma población, para lo cual se emplea la prueba F de Fisher. Estos temas no se abordarán aquí, por lo que el lector interesado podrá consultar la bibliografía.

4.2 Análisis algebraico

Los principales métodos de análisis algebraico de datos se refieren al ajuste de curvas con polinomios, la interpolación o extrapolación de valores y al manejo de los polinomios resultantes del ajuste. También conviene aclarar que en cualquier procesamiento que se haga con los datos recabados debe tenerse en consideración que el número de cifras significativas con que se trabaje debe ser apropiado a la exactitud que se busca. Como usualmente la última cifra de un número puede contener una incertidumbre, si se desea una exactitud del 1% deberán emplearse al menos tres cifras significativas. Por ello con dos cifras sólo se logra un 10% de exactitud, con cuatro un 0.1% etc. Por otra parte, debe tenerse en cuenta que algunas operaciones pueden degradar la exactitud que se tiene. Concretamente la suma de números muy próximos o el cociente entre ellos es un caso ya analizado. En general, es conveniente que todos los números con los que se trabaje sean de similar exactitud, de lo contrario, el resultado no ofrecerá ninguna garantía en sus cifras.

El ajuste de polinomios a los datos es una forma de ajuste que permite en general resolver el problema, sin importar la distribución de los puntos, aunque si estos son muchos se encontrarán también muchas constantes que calcular. El método consiste en hacer pasar un polinomio de orden n por los (n+1) puntos de que se dispone.

El polinomio tiene la forma

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^m$$

y el método obviamente consiste en evaluar las variables x e y en cada uno de los puntos observados. Al resolver las (n+1) ecuaciones simultáneas resultantes se encontrarán los valores de las constantes a_i. Algunos trucos que facilitan el ajuste de polinomios de orden superior (cuando no se tienen facilidades automáticas de cómputo) son: forzar a que la curva pase por (0,0), ya que entonces $a_0 = 0$; tomar los puntos más representativos del total (empleando algún criterio), y comprobar el ajuste con el resto de los puntos. En este último caso conviene tomar puntos más próximos en los lugares en que la curva presenta las máximas variaciones de pendiente.

La interpolación puede hacerse, por supuesto, una vez que se ha calculado un polinomio que se ajuste al grupo de datos; sin embargo, cuando no se ha realizado tal ajuste, la interpolación puede realizarse con el método de Lagrange. Supóngase que se tiene un grupo de n datos (x_i, y_i) para el cual se desea conocer el valor de y para una cierta x conocida y comprendida dentro del intervalo de variación de las x_i. Entonces

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{1.43}$$

En cuanto a la extrapolación de puntos, se trata de un asunto que requiere mucho cuidado puesto que en general no existe ninguna razón para suponer que los puntos exteriores a los obtenidos experimentalmente tienen que seguir la misma tendencia, ser consistentes con los demás o mantener algún tipo estrecho de relación. Sin embargo, cuando se emplea con cuidado y sin exageraciones puede rendir buenos frutos. Por supuesto, también aquí puede emplearse la ecuación (1.43).

4.3 Análisis gráfico

En ingeniería la gráfica juega un papel muy importante, tanto para analizar los datos como para presentarlos. Casi todos los métodos de análisis consisten en la reducción de los datos, en entregar apreciaciones probabilísticas, señalar una sola cifra global etc. En cambio, la gráfica permite, al mismo tiempo que proporciona una idea global del conjunto, comprimir los datos sin que por ello se pierda información, sino al contrario, se muestre enriquecida.

Los métodos gráficos que se analizarán aquí son el ajuste de un grupo de puntos por medio del método de los mínimos cuadrados y la presentación de las curvas en forma de líneas rectas. Puesto que para el método de los mínimos cuadrados es imprescindible que resulte una línea recta, se tratarán primero las formas en que esto puede lograrse.

Ya es sabido que una ecuación exponencial (el diodo, por ejemplo) se observa mejor como línea recta en coordenadas semilogarítmicas. Este resultado sugiere que cuando se dispone ciertos datos que se sospecha obedecen a cierta ecuación, una forma de comprobación es intentar graficarlos mediante alguna transformación apropiada. Algunas de ellas se indican en la tabla 1.3. Nótese que se incluyen algunas funciones que podrían graficarse también en otra clase de papel y que

FUNCION	TRANSFORMACION A LINEA RECTA
$y = ax + b$	Coordenadas lineales (papel lineal)
$y = kx^a$	Coordenadas logarítmicas (papel log-log)
$y = k(10)^{ax}$ $y = k\,e^{ax}$	Coordenadas semilog. (papel semilog)
$y = x/(a + bx)$ $1/y = a/x + b$	Coordenadas lineales. Para x/y, x o bien $1/x$, $1/y$
$y = a + bx + cx^2$ $y = x/(a + bx) + c$	Coordenadas lineales. Para $(y - y_1)/(x - x_1)$, x donde x_1, y_1 es un punto
$y = k(10)^{bx + cx^2}$ $y = k\,e^{bx + cx^2}$	Coordenadas lineales. Para $(\log y - \log y_1)$, x donde x_1, y_1 es un punto

Tabla 1.3 Transformaciones que producen líneas rectas en ciertas funciones

mediante algunas manipulaciones se obtienen resultados satisfactorios para los sos difíciles.

4.3.1 El método de los mínimos cuadrados

Tal como ya se ha comentado, la gráfica que es el objetivo de este método se obtiene a partir de los datos procesados finales que en términos generales tienen las siguientes características:

1. Presentan una incertidumbre estadística tanto para la variable dependiente, como para la independiente.
2. El error no es el mismo para todos los puntos.
3. No siempre es una línea recta la gráfica que se desea obtener.

El problema se reduce entonces a obtener una curva que se aproxime a los puntos de manera que el error total (el que hay entre la curva trazada y los puntos obtenidos) sea mínimo de alguna forma. En aproximación de funciones el error que se minimiza es normalmente la integral del cuadrado de la diferencia entre ambas nciones. En el caso que se analiza aquí conviene tomar los cuadrados de las sviaciones entre la curva trazada y los puntos obtenidos, en razón de que hay un número finito de éstos.

El método clásico de aproximación de curvas por medio de los mínimos cuadrados se especifica en términos exactos como aquél método que permite ajustar una línea recta a un grupo de puntos distribuidos en el plano xy, de manera que sea mínima la suma total de las diferencias al cuadrado entre los puntos y la línea recta. Hacer que la suma total sea mínima es equivalente a obtener cuadrados mínimos, de donde proviene el nombre del método.

Este método tiene algunas limitaciones que se resumen en lo siguiente:

1. La curva real, de la que sólo se disponen algunos puntos, debe ser exactamente una línea recta.
2. La variable independiente (x) está determinada con exactitud, por lo que todos los errores deben concentrarse únicamente en la variable dependiente (y)

3. El error de precisión aceptado para la variable y presenta las mismas características para todos los valores de y.

Las tres restricciones del método se cumplen por lo general (o pueden llegar a cumplirse de acuerdo a ciertas transformaciones) con relativa facilidad. Si la curva con la cual se va a trabajar no es exactamente una línea recta, las transformaciones mencionadas al inicio de esta sección permitirán satisfacer la primera restricción. Por otra parte, usualmente se elige como variable independiente la que puede controlarse con mayor seguridad, por lo que los errores en x son casi siempre pequeños, lo que implica que todo el error de precisión (o al menos casi todo) se concentra en la variable y.

Por último, la restricción referente a que el error se distribuya exactamente igual en todo el intervalo de variación de y, puede ser más difícil de satisfacer, aún cuando en muchos casos esto se produzca en forma automática. En caso de que los datos con que se cuenta presenten serias anomalías, en el sentido de que se aparten excesivamente de las exigencias del método, se dispone de mecanismos para transformarlos de manera que se aproximen al ideal.

Suponiendo entonces que la línea recta a encontrar es de la forma

$$y = mx + b \tag{1.44}$$

se deben encontrar los valores de m y b, tales que la suma de los cuadrados de las desviaciones de esta recta con respecto a los puntos experimentales sea mínima. Considerando que se dispone de n puntos, los valores de m y b están dados por

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} x_j y_j}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{1.45a}$$

$$m = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{1.45b}$$

Cuando la recta pasa por el origen (lo que puede forzarse con una transformación adicional), se tiene que $b = 0$, y

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad (1.45c)$$

Como ya habrá podido notarse, el método implica una gran cantidad de cálculos que pueden hacerlo muy ineficiente. Por fortuna, existen en la actualidad una gran cantidad de facilidades de cómputo que se traducen en el ajuste rápido y eficiente de cualquier cantidad de puntos, lo que hará que el trabajo sea más rápido y agradable.

Por esta razón sólo se comentará un método gráfico de encontrar la recta para un pequeño número de puntos. El método se conoce con el nombre de su autor (Askovitz) y es eficiente para una colección pequeña de puntos. Además de las limitaciones propias del método general de ajuste de curvas con mínimos cuadrados, que ya se han mencionado, el método de Askovitz exige que la variable independiente (x) se haga variar en intervalos regulares e iguales. Si esto no se cumple la solución encontrada será sólo una aproximación.

El método consiste simplemente en

1. Comenzando por un extremo, conéctense los dos primeros puntos con una línea recta y encuéntrese el punto a 2/3 de la distancia entre ellos a partir del primero (Véase la figura 1.11).

2. Unase este último punto encontrado con el tercero y procédase en idéntica forma, hasta que se haya llegado al último punto experimental. El último punto encontrado pertenece a la línea de mínimos cuadrados buscada.

3. Repítase toda la operación desde el otro extremo y se encontrará un segundo punto de la línea.

4. Aunque ya puede trazarse la recta de los mínimos cuadrados, a modo de comprobación pueden localizarse un par de puntos adicionales si se usa 1/2 en

lugar de 1/3.

Aunque el método parece complicado, es de fácil aplicacion porque la distancia 2/3 (y también 1/2) puede tomarse con respecto a la mínima separación de la variable independiente, la que no contiene incertidumbre, por lo cual es fácil y rápido encontrar la recta para en conjunto de puntos relativamente grande.

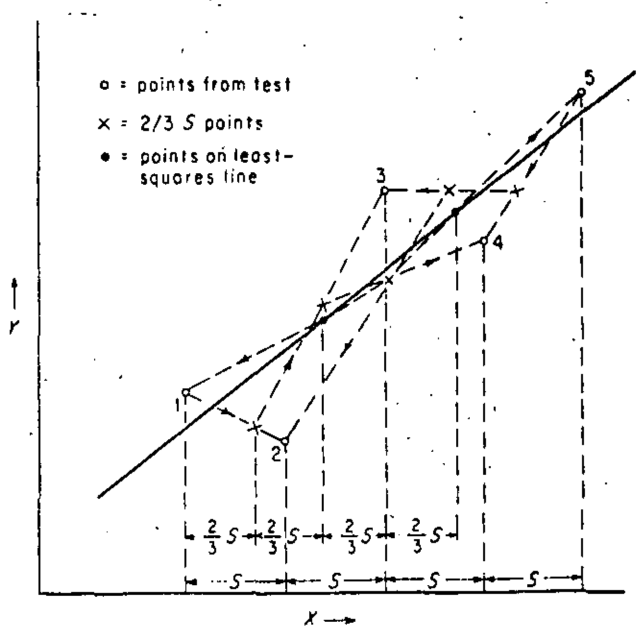


Figura 1.11 Ejemplo del método de Askovitz para encontrar la recta de los mínimos cuadrados.

ANALISIS DE LOS RESULTADOS

Esta parte del experimento o de la prueba constituye el paso más importante del mismo, sin el cual todo el trabajo no tendría sentido. Aún cuando en una condición de prueba industrial el análisis pudiera ser la aceptación o el rechazo del dispositivo en prueba, en esta parte del experimento por lo regular se consideran métodos estadísticos o matemáticos de otro tipo para extraer conclusiones del trabajo realizado. (Véase Interpretación de los Resultados).

APARATO DE PRUEBA

Lo constituyen normalmente el instrumento que se emplea para analizar o medir y el dispositivo en prueba. Puede considerarse, además, todo lo que se requiera para realizar físicamente la prueba.

`ALIBRACION

Es la operación que debe realizarse con cierta frecuencia para asegurarse de que el instrumento cumple con las condiciones mínimas para efectuar la prueba dentro de ciertos márgenes de confiabilidad. Si el instrumento no cumple tales condiciones debe ajustarse por contraste con un patrón adecuado. El objetivo es la reducción del error de las mediciones.

COMPROBACION DE DATOS

Consiste en aplicar uno o una serie de criterios a los valores obtenidos para determinar la validez relativa de ellos. Esto se realiza normalmente por comparación con los demás valores o por ciertas suposiciones que se aplican al experimento.

DATOS PROCESADOS

Son los valores obtenidos del experimento que han sido previamente comprobados mediante la aplicación de ciertos criterios matemáticos o por comparación con los demás. Los datos procesados se ajustan más exactamente a los valores reales del experimento porque se ha reducido el error del conjunto.

DATOS SIN PROCESAR

Estos son los resultados obtenidos directamente del experimento o prueba a través de los instrumentos o aparatos de prueba, sin que se haya hecho con ellos ninguna operación salvo almacenarlos.

DISPOSITIVO EN PRUEBA

Lo constituye la máquina, el aparato, componente, pieza, circuito, sistema u objeto que se desea medir o probar. Normalmente es reemplazable, aunque no siempre tiene una forma física, por ejemplo, cuando se trata de métodos o sistemas humanos.

ERROR

Se define como la diferencia que hay entre el valor calibrado o conocido de la variable medida y el valor obtenido por el instrumento de medición.

ESTANDAR

Es una magnitud cualquiera que se ha definido de antemano para ser tomada como referencia particular o universal. En instrumentación se aplica en forma especial a las definiciones de las unidades básicas del sistema internacional (SI)

EXACTITUD

Se refiere a la capacidad de un instrumento de acercarse en promedio al valor calibrado o conocido de una variable después de que el experimento se ha repetido muchas veces. Se aplica generalmente a un conjunto de datos que se aproximan en promedio al valor conocido o calibrado de una variable, independientemente de la dispersión que presenten alrededor de dicho valor.

EXPERIMENTO CONTROLADO

Es el experimento en el cual los efectos de las variables extrañas ha sido minimizado o eliminado por completo y en el que, además, las variables independientes pueden variarse exactamente en la forma que desea el experimentador. Este es un concepto básico de la experimentación.

INCERTIDUMBRE

Se define normalmente como el error que se supone que existe en un determinado caso. La incertidumbre, como error supuesto, no debería diferir demasiado del que se determine por calibración en un momento dado.

INSTRUMENTACION

Es la operación de trasladar (o mapear) una variable o un conjunto de ellas que se encuentran inmensas en un proceso físico o real a un dominio en el que pueda ser observada o determinada.

INSTRUMENTO

Es el dispositivo, aparato o sistema que lleva a cabo la operación de traslado de la variable o conjunto de ellas al dominio observable. Es el medio o mecanismo para realizar esta operación.

INTERPRETACION DE LOS RESULTADOS

Junto con el análisis de los resultados, es la operación que permite extraer conclusiones del trabajo realizado y sintetizarlas en leyes físicas o en resultados fácilmente manejables que representen el fenómeno estudiado o la prueba realizada.

MEDICION

Lo constituye el acto puro y simple de obtener, por medio de un instrumento, el valor de una variable de un proceso. Finalmente, es el contraste del valor de esta variable con un estandar o con un patrón previamente definido e instalado en el instrumento.

MUESTRA DE LECTURAS O RESULTADOS

Es el conjunto de datos observados y almacenados que se ha obtenido del universo de datos que podrían obtenerse de las variables medidas. Como los uni versos de datos son normalmente infinitos, el conjunto observado es en realidad una muestra finita de ellos que se supone estará más próxima a la distribución del universo mientras más grande sea dicha muestra.

PATRON

Instrumento o medida que sirve de referencia especial o general para mediciones posteriores. Al proceder a calibrar un instrumento de trabajo, se emplea un patrón como referencia de contraste.

PLAN DEL EXPERIMENTO

Es cualquier conjunto específico de instrucciones de operación para realizar la prueba, de manera que se otorgue una secuencia determinada al trabajo, a las modificaciones de las variables y a la repetición o toma de datos.

POBLACION DE DATOS

Es cualquier conjunto total de datos, errores, valores etc, con los cuales se trabajará como un grupo.

PRECISION

Se refiere a la capacidad de un instrumento de dar valores muy próximos entre sí al proporcionársele el mismo valor conocido o calibrado de una variable, aún cuando estos resultados no se acerquen a dicho valor. Se aplica a conjuntos de datos que presentan por dispersión, independientemente de la exactitud de ellos.

PRUEBA DE SIGNIFICANCIA DE LOS RESULTADOS

Una vez que se ha obtenido un conjunto de datos, una prueba que se realiza con ellos es la de verificar si son razonables. La prueba consiste en aplicar criterios para aceptar los datos con errores tolerables o para rechazar los que manifiesten no cumplir los criterios aplicados.

PUNTO DE PRUEBA

Es una condición específica para la cual se realiza una medición o prueba.

Es el conjunto de valores de las variables controladas que define un estado del proceso en prueba.

REPETICION

Constituye la realización por segunda o más veces de una prueba o medición, aunque en general se considera repetición (o réplica) sólo cuando se regresa a una condición o estado ya modificado del proceso.

SECUENCIA DE PRUEBA

En un determinado plan experimental, secuencia es el orden en que se llevan a cabo los cambios operativos del aparato de prueba o la toma de lecturas.

SISTEMA DE MEDICION

Para distinguir lo que es una unidad indivisible (equipo o instrumento) de un grupo o conjunto de ellos que interaccionan entre sí para realizar la medición, se emplea esta expresión. Usualmente se refiere al conjunto de componentes físicos (hardware) y de programación (software) incluidos en un dispositivo complejo de prueba o de medición.

VARIABLES

Son todas las cantidades físicas que se relacionan al proceso o dispositivo en prueba y que pueden cambiar durante el desarrollo de un experimento. Si la variable puede modificarse a voluntad en forma independiente de las demás, se llama variable independiente. Si sus cambios son producto de las modificaciones realizadas en las variables independientes, se trata de una variable dependiente. Por último, si los cambios se producen en forma incontrolada, aleatoria y alteran el desarrollo de la prueba, se tiene una variable extraña.

INSTRUMENTACION ELECTRONICA INDUSTRIAL

BIBLIOGRAFIA

1. H.V. MALMSTADT, C.G. ENKE y S.R. Crouch,
"Electronic Analog Measurements and Transducers"
W.A. BENJAMIN INC., 1973.

2. H.V. MALMSTADT, C.G. ENKE y S.R. Crouch,
"Control of Electrical Quantities in Instrumentation",
W.A. BENJAMIN INC., 1973

3. H.V. MALMSTADT, C.G. ENKE y S.R. Crouch,
"Digital and Analog Data Conversions".
W.A. BENJAMIN INC., 1974

5. E.O. Doebelin,
"Measurement Systems. Application and Design"
Edición revisada Mc Graw Hill, 1975.

6. P. Polak
"Sistematic Errors in Engineering Experiments"
The Mac Millan Press, 1978.

7. H. Schenck Jr.
"Theories of Engineering Experimentation"
3a. Edifición, Mc Graw-Hill, 1974.

8. K.S. Lion,
"Elements of Electrical and Electronic Instrumentation"
Mc Graw Hill, 1975.

9. J.P. Holman
"Experimental Methods for Engineers"
3a. Edición, Mc Graw Hill, 1978.

10. P.H. Sydenham (Ed.)
"Handbook of Fundamentals of Measurement Systems"
Vol. I, John Wiley, 1982.

11. V.P. Spiridonov y A.A. Lopatkin,
"Tratamiento matemático de datos físico químicos"
MIR, 1973.

12. M. Schwartz,
"Information Transmision, Modulation, and Noise"
2a. Edición, Mc Graw Hill, 1980.

13. Ch. A. Harper (Ed.)
"Handbook of Electronic System Design"
Mc Graw-Hill, 1980.

14. C.F. Coombs (Ed.)
"Basic Electronic Instrument Handbook"
Mc Graw-Hill, 1972.

15. D.M. Considine (Ed.)
"Basic Electronic Instrument Handbook"
Mc Graw-Hill, 1972.

16. H.P. Kallen (Ed.)
"Handbook of Instrumentation and Controls"
Mc Graw-Hill, 1961.

17. V.P. Preobrazhenski,
"Mediciones termotécnicas y aparatos para efectuarlas"
(2 tomos), MIR, 1978.

18. W.D. Cooper,
"Electronic Instrumentation and Measurement Techniques"
Prentice Hall, 3a. Edición, 1978.

19. C.D. Johnson,
"Process Control Instrumentation Technology"
J. Wiley, 2a. Edición, 1982.

20. P. Kontrowitz, G. Kousourou y C. Zucker,
"Electronic Measurements"
Prentice Hall, 1979.

21. A. Creus
"Instrumentación Industrial"
Marcombo, 1979.

22. A. de Sa
"Principles of Electronic Instrumentation"
Edward Arnold, 1981.

APENDICE V Fórmulas Dimensionales

Mechanics

Quantity	Dimensional formula
Length L	L
Volume V	L^3
Curvature	L^{-1}
Velocity V	$L\theta^{-1}$
Acceleration A or g	$L\theta^{-2}$
Angular velocity ω	θ^{-1}
Density ρ	ML^{-3}
Momentum	$ML\theta^{-1}$
Angular momentum	$ML^2\theta^{-1}$
Force F	$ML\theta^{-2}$
Work and energy	$ML^2\theta^{-2}$
Power	$ML^2\theta^{-3}$
Viscosity μ	$ML^{-1}\theta^{-1}$
Kinematic viscosity	$L^2\theta^{-1}$
Surface tension	$M\theta^{-2}$
Pressure P	$ML^{-1}\theta^{-2}$

Thermal Quantities

	Thermal formula	Dynamical formula
Quantity of heat H	H	$ML^2\theta^{-2}$
Specific heat C_p	$HM^{-1}T^{-1}$	$L^2\theta^{-2}T^{-1}$
Thermal conductivity k	$HL^{-1}\theta^{-1}T^{-1}$	$LM\theta^{-3}T^{-1}$
Heat-transfer coefficient h	$HL^{-2}\theta^{-1}T^{-1}$	$M\theta^{-3}T^{-1}$
Entropy s	HT^{-1}	$ML^2\theta^{-2}T^{-1}$
Coefficient of thermal expansion β	T^{-1}	T^{-1}

Magnetic and Electrical Quantities

	Electromagnetic	Electrostatic
Magnetic field strength	$M^{1/2}L^{-1/2}\theta^{-1}\mu^{-1/2}$	$M^{1/2}L^{1/2}\theta^{-2}K^{1/2}$
Magnetic pole strength	$M^{1/2}L^{3/2}\theta^{-1}\mu^{1/2}$	$M^{1/2}L^{1/2}K^{-1/2}$
Electric current	$M^{1/2}L^{1/2}\theta^{-1}\mu^{-1/2}$	$M^{1/2}L^{3/2}\theta^{-2}K^{1/2}$
Quantity of electricity	$M^{1/2}L^{1/2}\mu^{-1/2}$	$M^{1/2}L^{3/2}\theta^{-1}K^{1/2}$
Potential difference	$M^{1/2}L^{3/2}\theta^{-2}\mu^{1/2}$	$L^{1/2}M^{1/2}\theta^{-1}K^{-1/2}$
Resistance	$L\theta^{-1}\mu$	$L^{-1}\theta K^{-1}$
Capacitance	$L^{-1}\theta^{+2}\mu^{-1}$	LK
Inductance	$L\mu$	$L^{-1}\theta^2K^{-1}$
Permeability	μ	$L^{-2}\theta^2K^{-1}$
Permittivity	$L^{-2}\theta^2\mu^{-1}$	K

M = masa
L = longitud
Θ = tiempo
T = temperatura
H = calor
K = constante dieléctrica
μ = constante del campo magnético

APENDICE VI Cuadrados Grecolatinos

3 × 3

$A1$	$B3$	$C2$
$B2$	$C1$	$A3$
$C3$	$A2$	$B1$

4 × 4

$A1$	$B3$	$C4$	$D2$
$D4$	$C2$	$B1$	$A3$
$B2$	$A4$	$D3$	$C1$
$C3$	$D1$	$A2$	$B4$

5 × 5

$A5$	$B3$	$C2$	$D1$	$E4$
$B1$	$C4$	$D5$	$E3$	$A2$
$C3$	$D2$	$E1$	$A4$	$B5$
$D4$	$E5$	$A3$	$B2$	$C1$
$E2$	$A1$	$B4$	$C5$	$D3$

6 × 6 (only the Latin square possible)

A	B	C	D	E	F
B	F	D	C	A	E
C	D	E	F	B	A
D	A	F	E	C	B
E	C	A	B	F	D
F	E	B	A	D	C