



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN
INGENIERIA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**OPTIMIZACION DE UN SISTEMA DE
REFRIGERACION TERMoeLECTRICA
EMPLEANDO EL METODO DE
MINIMIZACION DE GENERACION DE
ENTROPIA**

T E S I S

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERIA
MECANICA - TERMOFLUIDOS**

P R E S E N T A:

FEDERICO GUTIERREZ CORIA

DIRECTOR DE TESIS

Dr. FEDERICO MENDEZ LAVIELLE



CD. UNIVERSITARIA

2006

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Jaime Gonzalo Cervantes de Gortari

Secretario: Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz

Vocal: Dr. Federico Méndez Lavielle

1^{er}. Suplente: Ing. Augusto Sánchez Cifuentes

2^{do}. Suplente: Dr. Oscar Eladio Bautista Godínez

FACULTAD DE INGENIERIA

Departamento de Termoenergía y Mejoramiento Ambiental

TUTOR DE TESIS:

Dr. FEDERICO MENDEZ LAVIELLE

Agradecimientos

A mis padres y a mi hermano por su apoyo, paciencia y confianza en cualquier momento...

Al Dr. Federico Méndez por su paciencia, ayuda y formación...

A la Universidad en especial a la Facultad de Ingeniería...

A mis profesores y técnicos del Departamento de Termoenergía y Mejoramiento Ambiental por su apoyo y ayuda...

A todos mis cuates de la maestría por su ayuda e inspiración...

A mis amigos del inglés y alemán por su confianza y apoyo...

A Patricia Trejo, Jazmín Ortiz y Beatriz Gómez por su inspiración, apoyo compañía y consejos...

... que al fin y al cabo es sólo una tesis...

Por último al CONACYT por su apoyo al proyecto 43010.

Índice general

1. Objetivos	5
1.1. Motivación	5
1.2. Alcances	6
1.3. Consideraciones	6
2. Introducción	7
2.1. Refrigeración termoeléctrica	7
2.1.1. Dispositivos termoeléctricos (TEC)	7
2.1.2. Ejemplos de aplicaciones de los TEC's	9
2.2. Termoelectricidad	11
2.3. Refrigeración aplicada a la electrónica	12
2.3.1. Refrigeración miniatura	13
2.3.2. Estudios sobre refrigeración termoeléctrica	14
2.4. Generación de entropía	16
3. Modelo matemático	18
3.1. Planteamiento	18
3.1.1. Análisis de primera ley	19
3.1.2. Análisis de segunda ley	23
3.2. Optimización	25
3.3. Coeficiente de funcionamiento (COP)	28
3.3.1. Flujos de energía adimensionales	28
3.4. Influencia de la temperatura adimensional θ	30

4. Resultados	33
4.1. Datos	35
4.2. Gráficas	35
4.2.1. Caso 1	35
4.2.2. Caso 2	48
4.2.3. Caso 3	59
5. Resumen	64
6. Conclusiones	70
7. Apéndices	72
7.1. A. Termoelectricidad	72
7.1.1. Flujos simultáneos: calorífico y eléctrico	76
7.2. B. Cálculo variacional	77

Capítulo 1

Objetivos

En el presente estudio se analizará el comportamiento de un dispositivo termoeléctrico (TEC) utilizado para refrigerar un microprocesador, por medio de la primera y segunda ley de la termodinámica; con ello, se puede conocer la generación de entropía, es decir, el desarrollo de las irreversibilidades. Al conocerlas, éstas pueden ser reducidas y en consecuencia se disminuyen los efectos disipativos o la energía no aprovechada. Por lo tanto, los principales objetivos a desarrollar en este estudio giran entorno a la optimización de un sistema de refrigeración termoeléctrico. Para ello se presentan los siguientes puntos.

- Aplicar un análisis de primera ley a un dispositivo termoeléctrico.
- Elaborar un análisis de generación de entropía del sistema.
- Minimizar la generación de entropía, tomando en consideración la segunda ley.
- Observar el comportamiento de las principales variables, a partir de los resultados del proceso de minimización de generación de entropía.

1.1. Motivación

La principal motivación de este estudio es llevar a cabo un análisis de generación de entropía a un sistema termoeléctrico. Debido a que optimizaciones previas como las elaboradas por Phelan et al. [1] ó Bejan [2] están basadas en la primera ley de la termodinámica, dejando de

lado el comportamiento de las irreversibilidades. Con el fin de reducir su influencia se utiliza el método de minimización de generación de entropía.

1.2. Alcances

En el futuro la refrigeración puede ser la mejor solución para mantener los microprocesadores por debajo de una temperatura límite de operación. En la actualidad la disipación del calor se hace por medio de ventiladores. Si los sistemas de refrigeración logran ser competitivos en eficiencia y costo, estos podrían ser aplicados a gran escala en el empaquetamiento electrónico.

En el presente sólo la refrigeración termoeléctrica está disponible comercialmente y cubre algunas de las características necesarias en el empaquetamiento electrónico; por ejemplo, carece de partes móviles, no produce ruido y puede ser reducido a escalas milimétricas sin perder eficiencia. Sin embargo, tiene la gran desventaja de ser muy caro y tener un bajo coeficiente de operación.

Por ello, en este trabajo se estudia el aprovechamiento adecuado de la energía consumida por un dispositivo termoeléctrico, por medio de la reducción de la generación de entropía.

1.3. Consideraciones

En la presente tesis se analiza el comportamiento de los flujos de energía, considerando que las principales variables del sistema son la diferencia de temperaturas entre la superficie fría del dispositivo termoeléctrico y la temperatura ambiente, y la corriente eléctrica, porque esta última es la variable motriz del sistema.

Capítulo 2

Introducción

2.1. Refrigeración termoeléctrica

La refrigeración termoeléctrica permite transformar de manera directa electricidad en refrigeración. Peltier observó en 1834, que al aplicar una corriente eléctrica a un circuito eléctrico constituido por dos metales distintos una de las uniones se calentaba, mientras que la otra se enfriaba.

La refrigeración termoeléctrica se lleva a cabo cuando una corriente eléctrica circula a través de uno o más pares de materiales semiconductores de tipo n y p. Los materiales n son aquellos que cuentan con un exceso de electrones libres, estos transportan la energía (eléctrica y/o térmica) de un extremo a otro del material. Por otro lado, los materiales p cuentan con un déficit de electrones libres, por ello estos materiales dificultan el transporte de energía. El calor es transferido de la unión de baja temperatura a la de alta. La energía es transportada por medio de los electrones libres que se encuentran en el material n y la energía es liberada en el depósito de alta temperatura, los electrones regresan al depósito de baja temperatura a través del material p, [3].

2.1.1. Dispositivos termoeléctricos (TEC)

Los dispositivos termoeléctricos son convertidores de energía muy confiables, no producen ruido, no tienen partes móviles, no originan vibración, son pequeños y muy ligeros. Como refrigeradores son amigables con el ambiente debido a que no emplean CFC's o cualquier otro

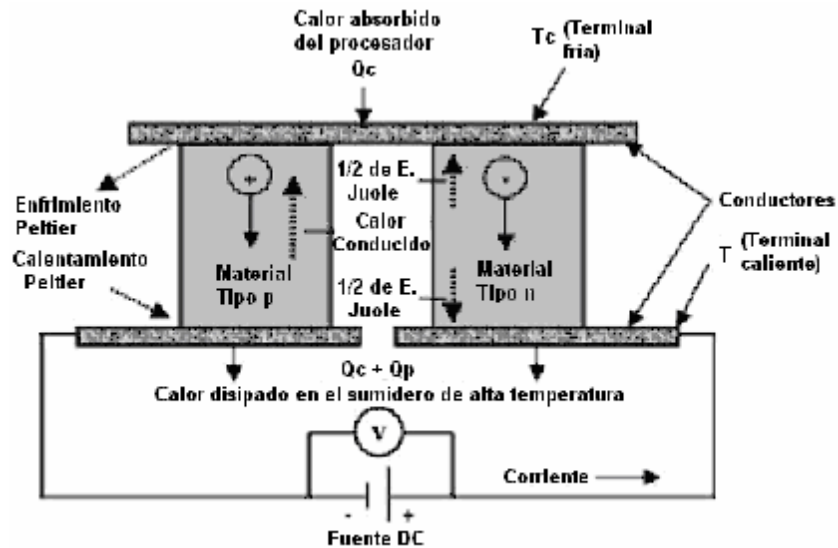


Figura 2-1: Esquema de un TEC, tomado de Riffat [3].

refrigerante. Los elementos termoeléctricos pueden convertir energía eléctrica en un gradiente de temperatura; fenómeno descubierto por Peltier en 1834, [3]. Con la llegada en la década de los años 60 de los nuevos materiales semiconductores aumentó la capacidad de refrigeración de los pares termoeléctricos y con ello aumentaron sus aplicaciones.

Son equipos de estado sólido y no contienen partes móviles y pueden ser reducidos a dimensiones muy pequeñas. Los TECs cuentan con dos o más laminillas denominadas materiales semiconductores de tipo n y tipo p que se encuentran conectados eléctricamente en serie y térmicamente en paralelo. En la fig. 2-1 se muestra el esquema básico de un dispositivo termoeléctrico, utilizado para refrigerar un procesador.

Al no tener partes móviles necesitan menos mantenimiento que otros sistemas. Pruebas de vida han mostrado que pueden operar durante más de 100 000h, en estado permanente [3]. Al no contener CFC's o un fluido de trabajo, no requieren de cargas de renovación. La dirección del bombeo térmico es totalmente reversible y sólo depende de la dirección de la corriente eléctrica. Los equipos termoeléctricos permiten mantener un sistema bajo un control preciso de la temperatura (dentro de $\pm 0,1^\circ C$) con ayuda de un soporte electrónico adecuado.

Los dispositivos termoeléctricos pueden ser empleados en ambientes muy severos, sensibles o pequeños para la refrigeración convencional. Los sistemas termoeléctricos no dependen de la posición, es decir, son independientes de la dirección de la gravedad. Ahora bien, como el lado frío tiende a contraerse mientras que el lado caliente tiende a expandirse para largos mayores a 50 mm, estos dispositivos sufren frecuentemente de fatiga mecánica que es inducida térmicamente. Este efecto puede producir un corto circuito y en dispositivos muy grandes producen pandeo. Para enfriar grandes áreas o alcanzar bajas temperaturas se hace uso de múltiples módulos, sin embargo, el COP decae en dichos arreglos, [3].

Uno de los principales parámetros que describen el funcionamiento de un dispositivo termoeléctrico es la figura de mérito Z . La cual está definida como el cociente $\frac{S^2}{rK}$, donde S representa el coeficiente Seebeck, r la resistividad eléctrica y K la conductividad térmica. Tiene unidades de $[K^{-1}]$, por ello se asocia a una temperatura de referencia; por ejemplo, la temperatura del lugar de trabajo o ambiente T_{room} .

Estos sistemas no son usados ampliamente debido a su baja eficiencia y alto costo. Actualmente el producto ZT_{room} es de orden unidad, sin embargo Phelan et al. [1], prevén que mejorará hasta 2 para el 2010 y quizás 3 pero el costo será aún muy alto. Ellos mencionan que con dichos valores los TEC's serán altamente competitivos en muchas aplicaciones electrónicas.

2.1.2. Ejemplos de aplicaciones de los TEC's

Los refrigeradores termoeléctricos son empleados en aquellos casos, cuando los criterios de diseño incluyen factores como alta confiabilidad, tamaño pequeño, bajo peso, control preciso de la temperatura y seguridad en un ambiente eléctrico peligroso.

La refrigeración termoeléctrica es concretamente la extracción de calor por medio del efecto Peltier. Riffat y Ma [3] presentan un estudio sobre las aplicaciones de los TEC's, la fig. 2-2 muestra la información de la Tabla I presentada en su artículo. En ella se muestran algunos ejemplos de productos que emplean equipos termoeléctricos; estos se presentan de acuerdo a la industria y aplicaciones más comunes.

Productos o ensambles enfriados por dispositivos termoelectrónicos disponibles comercialmente	
Industria	Productos
Militar / aeroespacial	Enfriamiento electrónico, prendas personales enfriadas, refrigeradores portátiles, enfriamiento de sensores infrarrojos, enfriamiento de diodos láser
Productos de consumo	Refrigeradores en vehículos de recreación, refrigeradores caseros móviles, refrigeradores de autos, enfriadores portátiles para picnic, enfriadores de vinos, enfriadores de barriles de cerveza, enfriadores de agua, refrigeradores de cascos de motocicletas, enfriadores de insulina (portátiles), enfriadores / purificadores de agua residencial, enfriadores de bebidas enlatadas
Equipo científico y de laboratorio	Enfriadores de tubos foto multiplicadores domésticos, enfriamiento de diodos láser, enfriadores de dispositivos de carga acoplada, enfriadores de dispositivos de cambio inducido, enfriadores de circuitos integrados, enfriadores de tubos vidicon, placas frías de laboratorio, enfriadores de agitadores, cámaras frías, enfriadores por inmersión, baños de referencia al punto de congelación, enfriadores de celdas electrophoresis
Control industrial de temperatura	Recintos NEMA, protección en ambientes severos para componentes críticos, microprocesadores de computadoras personales, microprocesadores y PC's en control numérico y robótica, estabilizando la temperatura de tintas en cartuchos de impresoras y copiadoras
Equipamiento de restaurantes	Maquinas expendedoras de crema, nata, mantequilla y porciones individuales
Misceláneos	Refrigeradores farmacéuticos portátiles y fijos, refrigeradores de cuartos de hotel, mini refrigeradores de autos, enfriadores de asientos de autos, enfriadores de agua potable en aeronaves, enfriadores en autobuses, enfriadores en botes, enfriadores y refrigeradores en camionetas y camiones, aire acondicionado en autos, equipo de diagnostico medico, almohadillas térmicas terapéuticas

Figura 2-2: Información tomada de la Tabla I del artículo de Riffat et al. [3].

2.2. Termoelectricidad

La termoelectricidad es el conjunto de fenómenos relacionados con la transformación de electricidad en calor y viceversa. Se producen efectos reversibles e irreversibles, los primeros son el Seebeck, Peltier y Thomson, mientras que los segundos son el calentamiento Joule y la conducción de calor, estos efectos y sus características se explican a continuación y en el apéndice A.

Los efectos termoeléctricos se producen cuando se forma un circuito eléctrico compuesto por conductores de materiales distintos, teniendo como característica principal que en las uniones se producen temperaturas distintas debido a la circulación de una corriente eléctrica, ver Zemansky [18]. La fig. 2-1 muestra un esquema de dicho circuito.

Efecto Seebeck

Este efecto se caracteriza por la producción de una fuerza electromotriz (FEM) de origen térmico. La FEM es creada cuando las uniones del circuito se encuentran a temperaturas distintas. Básicamente, en este principio se basa el funcionamiento de un termopar.

Efecto Peltier

Si las uniones de los materiales se encuentran a la misma temperatura y al circuito se agrega una FEM, la circulación de la corriente a través del circuito producirá una diferencia de temperaturas en las uniones. Puede entenderse lo anterior como el inverso al efecto Seebeck.

Efecto Thomson

El efecto Thomson se origina por el transporte de energía a través de los conductores. En ausencia de una corriente eléctrica, la distribución de temperaturas en un conductor es uniforme, mientras que al hacer circular la energía eléctrica, la uniformidad se perturba. La modificación en la distribución de temperaturas del conductor, descontando el efecto Joule, es debido al efecto Thomson.

Conducción de calor

Este efecto se produce por la difusión de calor por conducción de la unión caliente a la fría. El transporte de energía se debe a los portadores de carga (electrones libres). La velocidad de la conducción de calor dependerá del material, de su forma y de la diferencia de temperaturas.

Si las soldaduras del par termoeléctrico se encuentran a temperaturas distintas y no se induce una corriente (retirando la FEM y abriendo el circuito) se va a presentar una transferencia de

calor por conducción de la soldadura caliente a la fría, que se puede evaluar por medio de la ley de Fourier de la conducción de calor.

Efecto Joule

Se debe al transporte de una corriente eléctrica a través de un material conductor, como consecuencia se produce un aumento en la temperatura de éste. Dicho calentamiento se calcula por medio de la potencia eléctrica transportada; esto es, $P_e = I^2R$, donde P_e es la potencia eléctrica, I es la corriente y R es la resistencia eléctrica.

2.3. Refrigeración aplicada a la electrónica

La tecnología ha logrado muchas ventajas con el incremento de la densidad de empaquetamiento de la electrónica. Dichas ventajas comenzaron con la llegada de los transistores en 1947 hasta nuestros días con el uso de los procesadores. Desafortunadamente con el aumento de la densidad de empaquetamiento también se incrementó la rapidez de transferencia de calor que necesita ser disipada del equipo, [4].

Durante los últimos 40 años, los circuitos electrónicos en especial los aplicados en las computadoras han sido diseñados para trabajar en un rango entre 60 y 100 °C. Simons y Chu [4] han reconocido las ventajas de operar los circuitos electrónicos a bajas temperaturas, estas son: tiempos más rápidos de procesamiento, incremento en la velocidad debido a bajas resistencias eléctricas de los materiales y la reducción de fallas inducidas térmicamente.

Existen ejemplos de computadoras que emplean diversos sistemas de refrigeración para lograr bajas temperaturas, por ejemplo la ETA – 10 es una computadora científica que utiliza nitrógeno líquido para refrigerar los chips por inmersión. En 1997 IBM anunció una computadora que emplea un sistema de refrigeración convencional que mantiene el procesador a una temperatura menor a la de las computadoras convencionales enfriadas por aire.

Los principales requerimientos de la refrigeración aplicada en la electrónica son:

- a) Sistema compacto.
- b) Libre de partes móviles.
- c) Eficiente en convertir la potencia de entrada en efecto de enfriamiento.

- d) Alta densidad de enfriamiento (W/cm^2).
- e) Libre de sustancias tóxicas o nocivas al ambiente.

Las potenciales ventajas del enfriamiento por refrigeración son:

- a) Disponibilidad para disipar el calor manteniendo la unión fría a la temperatura deseada.
- b) Incremento en la velocidad del chip debido a la baja temperatura de operación.
- c) Incremento en la confiabilidad y tiempo de vida del chip debido a la temperatura baja de operación.
- d) Incremento en el tiempo de vida debido a la temperatura constante de operación.

Mientras que las potenciales desventajas del enfriamiento por refrigeración básicamente se reducen a considerar los dos factores siguientes:

- a) Posible incremento en complejidad y costo.
- b) Posible disminución en confiabilidad del sistema.

2.3.1. Refrigeración miniatura

La refrigeración miniatura es una respuesta a condiciones de trabajo donde se tiene como principal limitante el espacio. Los equipos electrónicos son un ejemplo de sistemas que requieren este tipo de tecnología. El incremento en capacidad y reducción en tamaño de estos equipos produce flujos de energía cada vez mayores, [1] ó [5]. Para evacuar dichos flujos se requiere de sistemas con una alta capacidad de transferencia de calor, como respuesta se sugieren los sistemas de refrigeración convencionales, con un enfoque adecuado que permita su incorporación en espacios reducidos.

Phelan et al. [1] elaboraron un estudio donde se comparan diversos sistemas de refrigeración como son el termoeléctrico, compresión de vapor, Stirling, tubo de pulsos, adsorción, absorción, y Brayton inverso. En su trabajo presentan una tabla con la comparación de los sistemas mencionados, que muestra la máxima capacidad de enfriamiento y la temperatura mínima

alcanzable en el año 2000 y su proyección al año 2010. En el destaca que la máxima capacidad de refrigeración y la temperatura mínima no pueden ser alcanzadas simultáneamente.

En el presente, sólo los refrigeradores termoeléctricos satisfacen los requerimientos de ser compactos, ausencia de partes móviles, insensibilidad a la ley de escala; esto es, la miniaturización no se traduce forzosamente en una disminución de la efectividad. Sin embargo, su principal desventaja es que tienen bajos COP's (entre 0.1-0.4) a las temperaturas requeridas en la microelectrónica, donde el Telurio de Bismuto (Bi_2Te_3) es el material normalmente empleado [9].

Chein y Huang [6] basados en datos proporcionados por fabricantes de sistemas de refrigeración termoeléctricos, mencionan que podrían no satisfacer los futuros requerimientos del enfriamiento electrónico debido a su baja capacidad de enfriamiento y bajo coeficiente de funcionamiento conocido como COP (por sus siglas en inglés). Sin embargo, tienen grandes ventajas como alta confiabilidad, flexibilidad a la miniaturización e integración, bajo peso y el más importante mantener un control preciso de la temperatura deseada. Además de ser la única tecnología de refrigeración disponible comercialmente actualmente.

2.3.2. Estudios sobre refrigeración termoeléctrica

Omer et al. [7] proponen un experimento sobre refrigeración termoeléctrica, empleando el cambio de fase de un material y un termosifón. El sistema logra una capacidad de refrigeración de 150 a 200W. Emplearon el cambio de fase del material debido a su alta capacidad para almacenar energía y que la temperatura de transición es constante, que lo hace apropiado para aplicaciones donde se requiere de un control preciso de la temperatura; por ejemplo, la industria farmacéutica o alimenticia. Ellos resaltan que el desempeño de los sumideros de temperatura (alta y baja) es crucial para el desempeño del TEC.

Cheng y Shih [8] llevaron a cabo un estudio de optimización por medio de algoritmos genéticos de un sistema de refrigeración termoeléctrico en cascada, donde se menciona que los TEC's conectados eléctricamente por separado tienen un mejor desempeño que cuando se hace en serie.

Gordon et al. [9], proponen un sistema que acopla dos sistemas: termoeléctrico y absorción. En su modelo consideran, el comportamiento del dispositivo termoeléctrico, los procesos de adsorción y regeneración propios del material adsorbente, las transferencias de energía del

evaporador y del condensador. Resaltan que el proceso de evaporación es clave, porque de él depende la duración del ciclo adsorción/regeneración.

Las principales variables de control con las que optimizaron el sistema fueron el número de pares termoeléctricos, el factor geométrico, el tiempo de cambio entre los depósitos adsorbentes y el tiempo del ciclo. Los autores observaron en las pruebas, que el tiempo que tarda el sistema en lograr las temperaturas de refrigeración es un poco largo; por ello proponen aumentar el voltaje o disminuir el tiempo del ciclo (aunque ello disminuiría el COP) [9].

Yang et al. [10], llevaron a cabo un estudio en el cual revisaron el desempeño de los TEC's a una corriente superior a la recomendada y variable con el tiempo. El tiempo para alcanzar la temperatura mínima y el tiempo para mantenerla en éste valor mínimo son variables muy importantes en la caracterización de este efecto, debido a que éste sólo puede efectuarse por un limitado período de tiempo (aumentan las pérdidas por efecto Joule).

Vikhor y Anatyshuk [11] mencionan que una de las maneras para mejorar el desempeño de los enfriadores basados en el efecto Peltier es usando elementos semiconductores p y n segmentados; los elementos semiconductores se muestran en la fig. 2-1, denotados como materiales tipo p y n. Los elementos segmentados consisten en emplear barras en las que discretamente varían las propiedades termoeléctricas como son: el coeficiente Seebeck, la conductividad eléctrica o la conductividad térmica. Este cambio en las propiedades puede obtenerse manufacturando cada sección del elemento semiconductor con distintas concentraciones de impurezas. Las variaciones en las propiedades puede reflejarse en un aumento en la diferencia de temperaturas alcanzada por un sólo modulo TEC.

Los cambios buscan que la conductividad eléctrica se incremente y el efecto termoeléctrico disminuya de la unión caliente a la fría. Con ello ocurre una absorción de calor adicional debido al efecto Peltier (presetándose en la interfase de las secciones con diferentes propiedades). Con esta teoría logran predecir diferencias de temperaturas de hasta 85 °K, en materiales basados en Bismuto - Telurio (Bi-Te) que se logra típicamente con arreglos en cascada.

Cheng y Lin [12], llevaron a cabo un estudio para optimizar geométricamente los TEC's en un volumen finito por medio de algoritmos genéticos. En ese trabajo se maximizó la capacidad de enfriamiento, bajo el requerimiento de un mínimo COP y la restricción de un máximo costo del material. Sus resultados muestran que cuando el TEC se encuentra confinado en un volumen, el

requerimiento de máximo enfriamiento y máximo COP no pueden satisfacerse simultáneamente.

Además, los efectos del largo del par revelan que la capacidad máxima de enfriamiento se incrementa con la disminución del largo, [12]. Por otra parte, la resistencia del contacto eléctrico y la resistencia del contacto térmico afectan fuertemente el desempeño del TEC. El operar el TEC fuera de los parámetros óptimos por lo general implica una disminución en el COP.

2.4. Generación de entropía

Los análisis termodinámicos de los sistemas están sujetos a tres pilares fundamentales: el principio de conservación de masa, la primera y segunda ley de la termodinámica, [13], [14].

El principio de conservación de masa estipula que la diferencia entre el flujo de masa de entrada y el flujo de salida es igual a la masa acumulada dentro del volumen de control.

La primera ley asocia el cambio de energía con la transferencia de energía. Estas últimas son transferencia de calor, de trabajo y la energía asociada al flujo que cruza la superficie de control.

La segunda ley asocia la transferencia de entropía, con el cambio de ésta. La transferencia de entropía hace la distinción entre transferencia de calor y trabajo, ya que sólo la primera es acompañada de una transferencia de entropía. El cambio de entropía es mayor o igual a la transferencia, este es afectado por la forma en que se da la transferencia de calor. Para describir en forma cuantitativa la intensidad de la desigualdad se define la generación de entropía, donde la generación puede ser mayor o igual a cero.

La generación de entropía es un resultado muy importante, porque está relacionada directamente con el trabajo perdido. El teorema de Gouy-Stodola establece que el trabajo perdido (\dot{W}_{perd}) es directamente proporcional a la producción de entropía (\dot{S}_{gen}):

$$\dot{W}_{perd} = T_o \dot{S}_{gen}, \quad (2.1)$$

donde T_o es la temperatura ambiente. El trabajo perdido es la diferencia entre el trabajo ideal (libre de irreversibilidades) producido por un sistema menos el real:

$$\dot{W}_{perd} = \dot{W}_{ideal} - \dot{W}_{real}. \quad (2.2)$$

El trabajo ideal es el caso limite donde el sistema opera reversiblemente. Por esta razón, es necesario que la generación de entropía de un sistema sea lo más pequeña posible.

Por lo tanto, con la finalidad de que los sistemas operen teniendo la menor cantidad de trabajo perdido, estos deben ser diseñados teniendo en cuenta el método de minimización de generación de entropía.

Capítulo 3

Modelo matemático

3.1. Planteamiento

En este capítulo como primer paso, se definirá el sistema físico que va a ser analizado. El sistema consiste principalmente de un elemento termoeléctrico (TEC) que se encarga de bombear el calor generado en el chip a un sumidero de calor. El esquema del sistema completo de acuerdo a Phelan et al. [1] ó Chein y Huang [6], se muestra en la fig. 3-1, y tiene la bondad de mostrar la configuración completa del sistema de refrigeración y la posición del TEC en él. El presente estudio se concentra principalmente en la física que ocurre en el TEC, manejando las resistencias térmicas como parámetros de operación.

Para llevar a cabo el análisis teórico del sistema, este se estudiará por medio de la primera ley (conservación de la energía) y segunda ley de la termodinámica (generación de entropía). Para facilitar y diversificar los resultados se propone adimensionalizar las expresiones. Por último, aprovechando las ventajas del cálculo variacional se minimiza la generación de entropía considerando a la primera ley de la termodinámica como una restricción.

Como resultado de la optimización se espera una expresión de la temperatura que minimice la generación de entropía. Recurriendo a estas trayectorias de la temperatura, se investiga el comportamiento de los flujos de energía de entrada y salida del TEC, el COP correspondiente y la generación de entropía.

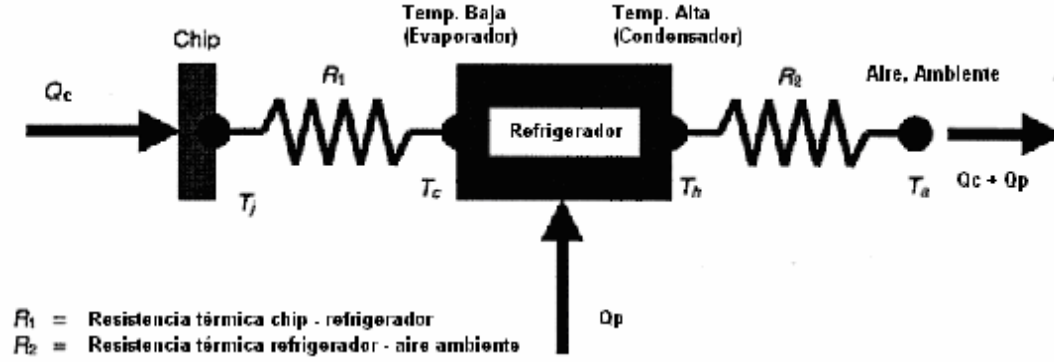


Figura 3-1: Diagrama esquemático del TEC, tomado de Phelan, [1].

3.1.1. Análisis de primera ley

El análisis de la conservación de la energía en el TEC consiste en conocer los flujos de energía de entrada, los de salida y su variación en el tiempo. Siguiendo el esquema planteado por los autores citados [1], [6] existen dos flujos de energía de entrada y uno flujo de salida. Esto es:

$$\dot{Q}_c + \dot{Q}_p - \dot{Q}_h = \frac{dE}{dt}, \quad (3.1)$$

donde \dot{Q}_c es la rapidez de transferencia de calor, proveniente del procesador para su refrigeración, \dot{Q}_p es la potencia externa requerida por el TEC para poder operar continuamente, \dot{Q}_h es la rapidez de transferencia de calor que debe ser disipada al ambiente; por último, $\frac{dE}{dt}$ representa el cambio de energía interna, cinética, potencial, etc. en el tiempo del TEC.

La energía bombeada del chip se logra por medio del efecto Peltier, sin embargo también se presentan dos efectos desfavorables que reducen el efecto de refrigeración deseado, estos son: el efecto Joule y la conducción de calor. El primero debido al transporte de energía eléctrica por el TEC, mientras que el segundo se produce por una diferencia de temperaturas en los extremos del TEC; es decir, pérdidas por conducción térmica. Por lo tanto, el flujo de energía proveniente del chip, de acuerdo a Chein y Huang [6], se evalúa de la siguiente forma:

$$\dot{Q}_c = 2N \left[SIT_c - \frac{1}{2} \frac{I^2 r}{G} - KG(T - T_c) \right]. \quad (3.2)$$

El primer término de la ec. (3.2) representa el efecto Peltier, el segundo las pérdidas por efecto Joule y el tercero las pérdidas por conducción evaluadas por medio de la ley de Fourier.

En la expresión anterior N representa el número de pares de materiales semiconductores n y p, S es el coeficiente Seebeck, I es la corriente eléctrica proporcionada al TEC, T_c es la temperatura en el lado frío del TEC, r es la resistividad eléctrica, G es el factor geométrico de los materiales, K es la conductividad térmica del elemento termoeléctrico y T es la temperatura en el lado caliente del TEC.

Por otro lado, la potencia requerida por el TEC para operar continuamente \dot{Q}_p se calcula con la siguiente expresión, [6]:

$$\dot{Q}_p = 2N \left[\frac{I^2 r}{G} + SI(T - T_c) \right]. \quad (3.3)$$

El primer término de esta relación representa el efecto Joule y el segundo el efecto Peltier entre las temperaturas T y T_c . Al factorizar la corriente eléctrica I en la expresión anterior se muestra explícitamente el voltaje de entrada $(\frac{I r}{G} + S(T - T_c))$, en dicho voltaje se observa claramente el carácter eléctrico y térmico de este sistema. Como comparación Cheng y Lin [8] definen la rapidez de transferencia de calor de salida en el depósito de alta temperatura \dot{Q}_h y la rapidez de entrada en el depósito de baja temperatura \dot{Q}_c , como:

$$\dot{Q}_h = 2N \left[SIT + \frac{I^2 r}{2G} - KG(T - T_c) \right], \quad (3.4)$$

$$\dot{Q}_c = 2N \left[SIT_c - \frac{I^2 r}{2G} - KG(T - T_c) \right]. \quad (3.5)$$

La rapidez de transferencia de calor de salida \dot{Q}_h también puede ser evaluada como:

$$\dot{Q}_h = \frac{T - T_a}{R_2}. \quad (3.6)$$

Esta expresión relaciona la velocidad de transferencia de calor con el sumidero de alta temperatura. T_a es la temperatura ambiente, R_2 es la resistencia térmica entre el lado caliente del TEC y el ambiente, su valor está asociado al desempeño del sumidero, [6].

Retomando la expresión (3.1) el término $\frac{dE}{dt}$ representa los cambios de energía interna U , cinética E_{cin} y potencial E_{pot} del TEC. Debido a que el sistema no cambia su posición o velocidad, no hay cambios en las energías cinética y potencial. Con ello, los cambios se reducen

al cambio en la energía interna U . Aproximando la energía interna como $U = \rho VC \cdot T(t)$ donde ρ es la densidad, V el volumen C el calor específico y $T(t)$ es la temperatura como función del tiempo en la unión caliente del TEC. Por lo tanto, el cambio de energía resulta:

$$\frac{dE}{dt} = \rho VC \frac{dT}{dt}. \quad (3.7)$$

Considerando que la corriente eléctrica utilizada es constante y reconociendo que los términos debidos al efecto Peltier, el efecto Joule y la conducción de calor tienen su origen en relaciones constitutivas, se pueden sustituir los flujos de energía de entrada (ecs. 3.2 y 3.3) salida (ec. 3.6) y acumulación (ec. 3.7) mencionados anteriormente en la expresión de la conservación de la energía (ec. 3.1), entonces se tiene lo siguiente:

$$2N \left[SIT_c - \frac{1}{2} \frac{I^2 r}{G} - KG(T - T_c) \right] + 2N \left[\frac{I^2 r}{G} + SI(T - T_c) \right] - \frac{T - T_a}{R_2} = \rho VC \frac{dT}{dt}. \quad (3.8)$$

Adimensionalización

Con la finalidad de mostrar de una manera más sencilla y universal la influencia de las variables en el balance de energía dado por la ec. (3.8), la temperatura y el tiempo son adimensionalizados proponiendo las variables θ y τ , además debido a la importancia de la corriente eléctrica en el sistema, está también se adimensionaliza con i . Por lo tanto, θ , τ e i se definen por medio de las siguientes relaciones:

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_a - T_c}; \quad \tau = \frac{t}{t_o}; \quad i = \frac{I}{I_o}, \quad (3.9)$$

θ compara la diferencia de temperaturas de la superficie caliente del TEC T y la fría T_c , con la diferencia de la temperatura ambiente T_a y la superficie fría T_c . Es interesante observar que θ es menor a 1 cuando $T < T_a$ y mayor a 1 cuando $T > T_a$. Por otro lado, t_o e I_o son un tiempo y corriente eléctrica de referencia, que serán definidas más adelante.

Sustituyendo dichas expresiones en la ec. (3.8) se tiene que:

$$\begin{aligned}
2NSI_oT_c \left[i - \frac{1}{2} \frac{rI_o^2i^2}{SI_oT_cG} - \frac{KG}{SI_o} \frac{T_a - T_c}{T_c} \theta \right] + 2NSI_o(T_a - T_c) \left[\frac{rI_o^2i^2}{SI_o(T_a - T_c)G} + i\theta \right] \\
+ \frac{(T_a - T_c)(1 - \theta)}{R_2} = \frac{\rho VC(T_a - T_c)}{t_o} \frac{d\theta}{d\tau}, \tag{3.10}
\end{aligned}$$

dividiendo entre $2NSI_o(T_a - T_c)$:

$$\begin{aligned}
i\theta + \frac{rI_o^2i^2}{SG(T_a - T_c)} + \frac{T_c}{T_a - T_c} \left[i - \frac{1}{2} \frac{rI_o^2i^2}{SGT_c} - \frac{KG}{SI_o} \frac{T_a - T_c}{T_c} \theta \right] \\
+ \frac{1 - \theta}{2NSI_oR_2} = \frac{\rho VC}{2NSI_o t_o} \frac{d\theta}{d\tau}. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

En la ecuación anterior los parámetros adimensionales α , β y ε se definen como:

$$\alpha = \frac{Kr}{2S^2(T_a - T_c)}; \quad \beta = \frac{T_c}{T_a - T_c}; \quad \varepsilon = \frac{1}{2NSI_oR_2}. \tag{3.12}$$

El parámetro α tiene una gran importancia debido a que agrupa las principales propiedades del TEC como son el coeficiente Seebeck, la resistividad eléctrica, la conductividad térmica y la diferencia de temperaturas ambiente – superficie fría, su definición es muy similar al inverso de la figura de mérito, salvo por la diferencia y el factor 2; por ello, puede considerarse una forma adimensional de ésta. El grupo β relaciona las temperaturas consideradas parámetros en este estudio. Por último, ε combina principalmente parámetros de forma del TEC como son el número de pares (n y p) o la corriente de referencia con el desempeño del sumidero de alta temperatura. Por otro lado, definiendo I_o y t_o a través de:

$$I_o = \frac{2GS(T_a - T_c)}{r}; \quad t_o = \frac{\rho VC}{2NSI_o}, \tag{3.13}$$

donde I_o representa el orden de magnitud de la corriente requerida por el TEC. Su valor está determinado por los principales parámetros que definen la refrigeración como son el coeficiente Seebeck S y el enfriamiento deseado $(T_a - T_c)$. Además t_o representa el tiempo necesario para que la potencia suministrada (representadas por parámetros como S ó I_o) domine la inercia tér-

mica del TEC representada por el producto ρVC . Utilizando la definición de I_o , los parámetros ε y t_o pueden ser expresados como:

$$\varepsilon = \frac{r}{4NS^2R_2(T_a - T_c)}, \quad (3.14)$$

$$t_o = \frac{r\rho VC}{4NGS^2(T_a - T_c)}. \quad (3.15)$$

Entonces, la conservación de la energía toma la siguiente forma:

$$i\theta + i^2 + \beta \left[i - \frac{\alpha}{\beta}\theta \right] + \varepsilon(1 - \theta) = \frac{d\theta}{d\tau}, \quad (3.16)$$

que también se puede escribir como:

$$(i - \alpha - \varepsilon)\theta + i^2 + \beta i + \varepsilon = \frac{d\theta}{d\tau}. \quad (3.17)$$

En la ecuación anterior i representa una constante de proporcionalidad entre la corriente eléctrica administrada al sistema I y el parámetro I_o .

3.1.2. Análisis de segunda ley

En la generación de entropía intervienen las siguientes rapidezces de transferencia de calor: la transferencia debida el enfriamiento del chip y la transferencia disipada en el sumidero de alta temperatura. El primer flujo que proviene del chip se considera que entra al TEC, cuando se encuentra a la temperatura de superficie del chip T_c . Por otra parte, la energía disipada en el sumidero se considera que deja el TEC a la temperatura de la superficie de alta temperatura, T . Para este análisis se emplearán las definiciones de los calores de entrada y salida propuestos por Cheng y Lin. [8]. La generación de entropía para dicho sistema se expresa de la siguiente forma, [13]:

$$S_g = \int_0^{t_o} \left\{ -\frac{\dot{Q}_c}{T_c} + \frac{\dot{Q}_h}{T} \right\} dt. \quad (3.18)$$

Sustituyendo las expresiones de las velocidades de transferencia de calor dadas por las ecs. (3.4) y (3.5), la expresión anterior se puede reescribir como:

$$S_g = \int_0^{t_o} \left\{ -2N \left[SI - \frac{1}{2} \frac{I^2 r}{GT_c} - \frac{KG}{T_c} (T - T_c) \right] + 2N \left[SI + \frac{1}{2} \frac{I^2 r}{GT} - \frac{KG(T - T_c)}{T} \right] \right\} dt. \quad (3.19)$$

Empleando las variables adimensionales (ec. 3.9) y definiendo la generación de entropía adimensional:

$$\Phi = \frac{S_g}{S_o}, \quad (3.20)$$

la ec. (3.19) se transforma en:

$$\begin{aligned} S_o \Phi = t_o \int_0^1 \left\{ 2N \left[\frac{1}{2} \frac{I_o^2 r}{GT_c} i^2 + \frac{KG(T_a - T_c)\theta}{T_c} \right] \right. \\ \left. + 2N \left[\frac{1}{2} \frac{I_o^2 r}{G [T_c + (T_a - T_c)\theta]} i^2 - \frac{KG(T_a - T_c)\theta}{T_c + (T_a - T_c)\theta} \right] \right\} d\tau, \end{aligned} \quad (3.21)$$

utilizando la definición de I_o se tiene que:

$$\begin{aligned} S_o \Phi = t_o \int_0^1 \left\{ 2N \left[\frac{1}{2} \frac{r}{GT_c} \left(\frac{2GS(T_a - T_c)}{r} \right)^2 i^2 + \frac{KG(T_a - T_c)\theta}{T_c} \right] \right. \\ \left. + 2N \left[\frac{1}{2} \frac{r}{G [T_c + (T_a - T_c)\theta]} \left(\frac{4GS(T_a - T_c)}{r} \right)^2 i^2 - \frac{KG(T_a - T_c)\theta}{T_c + (T_a - T_c)\theta} \right] \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Con ello la generación de entropía resulta:

$$\frac{S_o}{2NGKt_o} \Phi = \frac{2S^2 (T_a - T_c)^2}{rKT_c} \int_0^1 \left\{ i^2 \left(1 + \frac{\beta}{\beta + \theta} \right) + \frac{KrT_c}{2S^2 (T_a - T_c)^2} \left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{\theta}{\beta + \theta} \right) \right\} d\tau. \quad (3.23)$$

El factor fuera de la integral es $\frac{1}{\alpha\beta}$, por lo tanto multiplicando la expresión por $\alpha\beta$ la generación de entropía adquiere el siguiente aspecto:

$$\frac{\alpha\beta S_o}{2NGKt_o}\Phi = \int_0^1 \left\{ i^2 \left(1 + \frac{\beta}{\beta + \theta} \right) + \alpha\beta \left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{\theta}{\beta + \theta} \right) \right\} d\tau. \quad (3.24)$$

Definiendo la entropía de referencia de la siguiente manera:

$$S_o = \frac{2NGKt_o}{\alpha\beta}, \quad (3.25)$$

empleando las definiciones de t_o , α y β , la entropía de referencia S_o puede ser expresada también como:

$$S_o = \frac{\rho VC}{\beta}. \quad (3.26)$$

La expresión (3.25) combina las características más importantes del TEC, como son la conductividad térmica K , el coeficiente Seebeck S , la resistividad eléctrica r , el enfriamiento deseado ($T_a - T_c$), la inercia térmica del TEC, ρVC , el número de pares N ó la geometría del elemento G , por medio de los parámetros α , β y t_o . Esto indica que en la generación de entropía se involucran la forma, el número y las propiedades de los materiales que conforman al TEC. El efecto neto de está combinación, de acuerdo a la ec. (3.26), se produce por la inercia térmica del TEC (ρVC) y β . Cabe mencionar que el único parámetro que no aparece en la definición de S_o es ε que está relacionado con el sumidero de alta temperatura (ec. 3.14).

Finalmente, la generación de entropía adimensional se puede escribir mediante la siguiente expresión:

$$\Phi = \int_0^1 \left\{ i^2 \left(1 + \frac{\beta}{\beta + \theta} \right) + \alpha\beta \left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{\theta}{\beta + \theta} \right) \right\} d\tau. \quad (3.27)$$

3.2. Optimización

Hasta el momento se han llevado a cabo dos análisis, conservación de energía y generación de entropía. Uno de los principales objetivos en la ingeniería es reducir la generación de entropía de un proceso al mínimo, debido a que representa la energía consumida por los procesos irreversibles; es decir, si se minimiza la generación de entropía, se reduce la energía consumida

por las pérdidas del sistema.

De acuerdo al teorema de Guy-Stodola, puede relacionarse la generación de entropía con la exergía destruída, [14], la cual representa el trabajo no aprovechado.

Con el objetivo de reducir la generación de entropía adimensional en un cierto periodo de operación, la expresión final puede minimizarse por medio del calculo variacional, donde el argumento dentro de la integral constituye la funcional, es decir, la función objetivo. Dado que la Segunda ley está sujeta a lo establecido por la Primera ley, entonces el problema de minimizar la entropía conviene ser analizado como un problema de minimizar una funcional (generación de entropía) sujeta a una restricción (primera ley) [15], [16].

Siguiendo los comentarios anteriores, el problema de optimización se reduce a lo siguiente, minimizar:

$$\Phi = \int_0^1 \left\{ i^2 \left(1 + \frac{\beta}{\beta + \theta} \right) + \alpha\beta \left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{\theta}{\beta + \theta} \right) \right\} d\tau, \quad (3.28)$$

sujeta a la restricción dada por la primera ley de la termodinámica:

$$(i - \alpha - \varepsilon)\theta + i^2 + \beta i + \varepsilon = \frac{d\theta}{d\tau}. \quad (3.29)$$

Conviene observar que el factor $\alpha\theta$ aparece en el segundo término de la generación de entropía y en el primer término de la conservación de energía. Gracias a esto, se puede despejar de la primera ley dicho factor y sustituir su equivalente en la generación de entropía, evitando así el uso de multiplicadores de Lagrange. Esto es:

$$\alpha\theta = (i - \varepsilon)\theta + i^2 + \beta i + \varepsilon - \frac{d\theta}{d\tau}, \quad (3.30)$$

sustituyendo en la generación, se puede escribir que Φ es dada por la expresión:

$$\Phi = \int_0^1 \left\{ i^2 \left(1 + \frac{\beta}{\beta + \theta} \right) + (i - \varepsilon)\theta + i^2 + \beta i + \varepsilon - \frac{d\theta}{d\tau} - \frac{\alpha\beta\theta}{\beta + \theta} \right\} d\tau. \quad (3.31)$$

La integral es considerada una funcional, de acuerdo a la teoría del cálculo variacional. Al minimizarla se puede encontrar la trayectoria óptima de la temperatura que minimiza la

generación de entropía. En el apéndice B se exponen algunos puntos básicos sobre el cálculo variacional. Mostrando como ejemplo de una funcional la expuesta por Rao [15], que tiene la siguiente forma:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x, u, u', u'') dx, \quad (3.32)$$

donde A y F son funcionales. Para este trabajo $A = \Phi$, $x_2 = 1$, $x_1 = 0$, $x = \tau$, $u = \theta$, $u' = \dot{\theta}$ y $u'' = \ddot{\theta}$. En la ec. (3.31) se observa que $u' = 0$ y $u'' = 0$. En conclusión, la funcional F a minimizar es:

$$F = i^2 \left(1 + \frac{\beta}{\beta + \theta} \right) + (i - \varepsilon) \theta + i^2 + \beta i + \varepsilon - \frac{d\theta}{d\tau} - \frac{\alpha\beta\theta}{\beta + \theta}. \quad (3.33)$$

La teoría del cálculo variacional señala que es necesario encontrar la solución de la ecuación de Euler – Lagrange, [15], para encontrar la trayectoria que minimiza la funcional F :

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) = 0. \quad (3.34)$$

Sustituyendo la nomenclatura usada en este análisis, la ec. de Euler – Lagrange, es:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0, \quad (3.35)$$

aplicada en la ec. (3.33) se traduce en:

$$-\frac{\beta i^2}{(\beta + \theta)^2} + i - \varepsilon - \frac{\alpha\beta^2}{(\beta + \theta)^2} = 0, \quad (3.36)$$

expresión que permite escribir fácilmente la siguiente solución para la temperatura θ :

$$\theta = \sqrt{\frac{\beta(i^2 + \alpha\beta)}{i - \varepsilon}} - \beta. \quad (3.37)$$

Esta expresión representa la temperatura adimensional θ , que garantiza la mínima generación de entropía. θ depende de los principales parámetros del TEC. Por ejemplo, α es básicamente el coeficiente Seebeck S . β , la diferencia de temperaturas entre el ambiente y la temperatura fría del TEC. ε asocia la resistencia térmica ofrecida por el sumidero de alta

temperatura.

3.3. Coeficiente de funcionamiento (COP)

Una de las principales variables de cualquier sistema de refrigeración es el coeficiente de funcionamiento COP (por sus siglas en inglés). El COP está definido en función del flujo de energía de entrada \dot{Q}_c y el flujo de energía utilizado para provocar el bombeo de energía \dot{Q}_p . Para el presente estudio se expresa de la siguiente forma:

$$COP = \frac{\dot{Q}_c}{\dot{Q}_p}, \quad (3.38)$$

utilizando las variables adimensionales, las rapidezces de transferencia de calor \dot{Q}_c y \dot{Q}_p pueden ser reescritas en forma adimensional.

3.3.1. Flujos de energía adimensionales

El flujo de energía proveniente del chip o rapidez de transferencia de calor de refrigeración de acuerdo a la expresión (3.2) es:

$$\dot{Q}_c = 2N \left[SIT_c - \frac{1}{2} \frac{I^2 r}{G} - KG(T - T_c) \right], \quad (3.39)$$

haciendo uso de la definición de θ e i a través de las relaciones (3.9) se tiene:

$$\dot{Q}_c = 2N \left[SI_o T_c i - \frac{1}{2} \frac{I_o^2 i^2 r}{G} - KG(T_a - T_c)\theta \right]. \quad (3.40)$$

Sustituyendo el valor de I_o dado por la ec. (3.13) resulta que \dot{Q}_c se puede escribir como:

$$\dot{Q}_c = 2N \left[ST_c \left(\frac{2SG(T_a - T_c)}{r} \right) i - \frac{1}{2} \left(\frac{2SG(T_a - T_c)}{r} \right)^2 \frac{i^2 r}{G} - KG(T_a - T_c)\theta \right]. \quad (3.41)$$

Sacando como factor los parámetros que multiplican a i en el primer término se llega a la siguiente expresión:

$$\dot{Q}_c = \frac{4NGS^2(T_a - T_c)T_c}{r} \left[i - \frac{i^2}{\beta} - \frac{Kr}{2S^2T_c}\theta \right], \quad (3.42)$$

multiplicando y dividiendo por $T_a - T_c$ el tercer término, \dot{Q}_c queda definida como:

$$\dot{Q}_c = \frac{4NGS^2(T_a - T_c)T_c}{r} \left[i - \frac{i^2}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\theta \right], \quad (3.43)$$

el factor de la izquierda tiene unidades de potencia, lo que permite proponer la siguiente adimensionalización:

$$\varphi_c = \frac{\dot{Q}_c}{\dot{Q}_o}; \quad \dot{Q}_o = \frac{4NGS^2(T_a - T_c)T_c}{r}. \quad (3.44)$$

Con esto *la rapidez de transferencia de calor de refrigeración adimensional* se puede escribir como:

$$\varphi_c = i - \frac{i^2}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\theta, \quad (3.45)$$

donde θ está definida por la ec. (3.37). Es importante mencionar que \dot{Q}_o proporciona un orden de magnitud de la rapidez de transferencia de calor de refrigeración, dicha magnitud está asociada principalmente al agente que explica la refrigeración: coeficiente Seebeck S , la temperatura de refrigeración deseada T_c , así como de la forma G y tamaño N del elemento termoelectrico.

Recordando el flujo de energía útil para el funcionamiento del TEC, relación dada por la ec. (3.3):

$$\dot{Q}_p = 2N \left[\frac{I^2 r}{G} + SI(T - T_c) \right], \quad (3.46)$$

entonces, utilizando las definiciones de θ e i y factorizando la ecuación, se tiene que:

$$\dot{Q}_p = 2NSI_o \left[i\theta + \frac{I_o r}{GS(T_a - T_c)} i^2 \right]. \quad (3.47)$$

Sustituyendo la definición de I_o y simplificando, se llega a lo siguiente:

$$\dot{Q}_p = 2NSI_o [i\theta + 2i^2]. \quad (3.48)$$

Proponiendo la potencia útil adimensional como φ_p , donde la definición de \dot{Q}_o es la misma a la anterior con la finalidad de mantener una uniformidad en la adimensionalización de los flujos, resulta:

$$\varphi_p = \frac{\dot{Q}_p}{\dot{Q}_o}; \quad \dot{Q}_o = \frac{4NGS^2 (T_a - T_c) T_c}{r}. \quad (3.49)$$

Sustituyendo en \dot{Q}_p y simplificando se tiene:

$$\varphi_p = \frac{1}{\beta} [i\theta + 2i^2], \quad (3.50)$$

expresión que representa *la potencia adimensional* para llevar a cabo el bombeo térmico. De tal modo que el COP puede expresarse finalmente como:

$$COP = \frac{\varphi_c}{\varphi_p} \quad (3.51)$$

3.4. Influencia de la temperatura adimensional θ

La solución del proceso de optimización dió como resultado la ec. (3.37). Dicha expresión tiene una influencia fundamental en el comportamiento de las principales variables de interés como son la rapidez de transferencia de calor de refrigeración φ_c , la potencia útil requerida φ_p , el COP y la generación de entropía Φ .

Para comprender el comportamiento de las variables de interés es conveniente sustituir la solución óptima θ en cada una de ellas. En primer lugar, se tiene la temperatura adimensional:

$$\theta = \sqrt{\frac{\beta(i^2 + \alpha\beta)}{i - \varepsilon}} - \beta. \quad (3.52)$$

Sustituyéndola en la rapidez de transferencia de calor de refrigeración adimensional φ_c (ec. 3.45), se tiene:

$$\varphi_c = i - \frac{i^2}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \left(\sqrt{\frac{\beta(i^2 + \alpha\beta)}{i - \varepsilon}} - \beta \right), \quad (3.53)$$

en la potencia útil adimensional φ_p , resulta:

$$\varphi_p = \frac{1}{\beta} \left[i \left(\sqrt{\frac{\beta(i^2 + \alpha\beta)}{i - \varepsilon}} - \beta \right) + 2i^2 \right], \quad (3.54)$$

en el COP se tiene la relación $\frac{\varphi_c}{\varphi_p}$:

$$COP = \frac{i - \frac{i^2}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \left(\sqrt{\frac{\beta(i^2 + \alpha\beta)}{i - \varepsilon}} - \beta \right)}{\frac{1}{\beta} \left[i \left(\sqrt{\frac{\beta(i^2 + \alpha\beta)}{i - \varepsilon}} - \beta \right) + 2i^2 \right]}. \quad (3.55)$$

Por otro lado, la generación de entropía a partir de la ec. (3.28), queda determinada como:

$$\Phi = i^2 \left(1 + \frac{\beta}{\beta + \theta} \right) + \alpha\theta \left(1 - \frac{\beta}{\beta + \theta} \right), \quad (3.56)$$

solución resultante de que θ no depende del tiempo. Sustituyendo la ec. (3.37) en (3.56), se tiene:

$$\Phi = i^2 \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\frac{\beta(i^2 + \alpha\beta)}{i - \varepsilon}}} \right) + \alpha \left(\sqrt{\frac{\beta(i^2 + \alpha\beta)}{i - \varepsilon}} - \beta \right) \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\frac{\beta(i^2 + \alpha\beta)}{i - \varepsilon}}} \right). \quad (3.57)$$

Las expresiones (3.52) a (3.57) sólo dependen de los parámetros adimensionales i , α , ε y β . De ellos se puede elegir a cualquiera contra el cual graficar, en ausencia del tiempo τ . En el presente estudio se escoge a β porque representa la refrigeración deseada, caracterizada por la diferencia $T_a - T_c$, temperaturas que pueden cambiar arbitrariamente.

Como las variables serán graficadas como funciones de β , es importante recordar que la generación de entropía está definida como:

$$\Phi = \frac{S_g}{S_o}; \quad S_o = \frac{\rho VC}{\beta}. \quad (3.58)$$

Por tanto, es necesario incluir el efecto de β , dentro de la generación de entropía de referencia S_o , en la generación de entropía adimensional Φ ; es decir:

$$\Phi_\beta = \frac{S_g}{S_{oN}}; \quad S_{oN} = \rho VC, \quad (3.59)$$

por lo tanto:

$$\Phi_\beta = \frac{\Phi}{\beta}, \quad (3.60)$$

Φ_β representa la generación de entropía adimensional como función de β . S_g es la generación de entropía, S_{oN} es la nueva generación de entropía de referencia y Φ es la ec. (3.57). Entonces Φ_β resulta:

$$\Phi_\beta = \frac{i^2}{\beta} \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\frac{\beta(i^2 + \alpha\beta)}{i - \varepsilon}}} \right) + \frac{\alpha}{\beta} \left(\sqrt{\frac{\beta(i^2 + \alpha\beta)}{i - \varepsilon}} - \beta \right) \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\frac{\beta(i^2 + \alpha\beta)}{i - \varepsilon}}} \right). \quad (3.61)$$

Capítulo 4

Resultados

Esta sección presenta en forma resumida las expresiones que serán graficadas. Como se mencionó anteriormente, la principal variable a observar en un sistema de refrigeración es el COP. Para entender el comportamiento del COP, se presentan también las curvas de la temperatura, la velocidad de transferencia de calor de refrigeración, la potencia útil y la generación de entropía, en forma adimensional:

$$\theta(\beta) = \sqrt{\frac{\beta(i^2 + \alpha\beta)}{i - \varepsilon}} - \beta, \quad (4.1)$$

$$\varphi_c(\beta) = i - \frac{i^2}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\theta(\beta), \quad (4.2)$$

$$\varphi_p(\beta) = \frac{1}{\beta} [i\theta(\beta) + 2i^2], \quad (4.3)$$

$$COP = \frac{\varphi_c(\beta)}{\varphi_p(\beta)}, \quad (4.4)$$

$$\Phi_\beta = \frac{i^2}{\beta} \left(1 + \frac{\beta}{\beta + \theta(\beta)}\right) + \frac{\alpha\theta(\beta)}{\beta} \left(1 - \frac{\beta}{\beta + \theta(\beta)}\right). \quad (4.5)$$

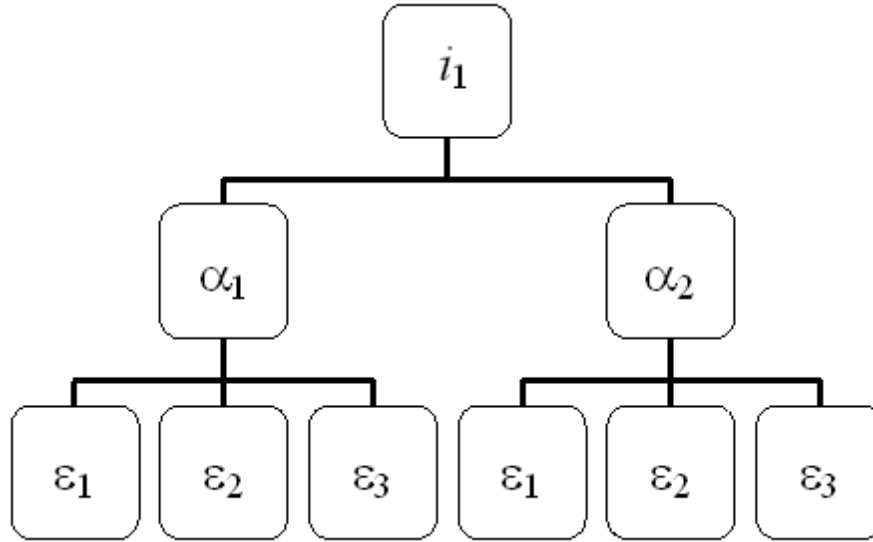


Figura 4-1: Organización de los parámetros para la elaboración de las gráficas de θ , φ_c , φ_p , COP y Φ_β .

De estas expresiones destaca que ninguna de ellas depende directamente del tiempo. Puede observarse que estas expresiones (4.1-4.5) dependen básicamente de i , α , ε y β . Las funciones serán graficadas con respecto a β , en ausencia del tiempo τ , porque representa la refrigeración deseada $T_a - T_c$ de acuerdo a la ec. (3.12). Por otra parte, resulta favorable mantener dos parámetros fijos para observar la influencia del tercero.

El orden utilizado para la variación de los parámetros en las funciones (4.1-4.5) es: i , α , y ε , como funciones de β . Esto es, se propone un valor para i , otro para α y tres valores de ε , con esta información se elaboran las respectivas figuras de θ , φ_c , φ_p , COP , y $\Phi(\beta)$, una por cada variable. En cada figura aparecen tres curvas de la variable, una por cada valor de ε .

Después, manteniendo el mismo valor de i , se utiliza un nuevo valor de α , para los tres valores de ε empleados anteriormente, con esta nueva información se elaboran las respectivas figuras. Se sigue esta secuencia continuamente hasta tener tres variaciones en α , las tres de ε son mostradas en cada figura. El esquema (fig. 4-1) muestra un organigrama de la secuencia de los parámetros utilizada para la elaboración de las figuras.

En la fig. 4-1 se observa que para un valor i , hay dos variaciones de α y para cada una de ellas tres de ε . Los siguientes dos casos están elaborados siguiendo la secuencia del organigrama,

un caso por cada variación en i . El tercer caso presenta una condición de operación particular en la que $\alpha \gg \varepsilon$.

4.1. Datos

En la elaboración de las gráficas, se emplearon datos basados en el estudio elaborado por Chein, [6] y el fabricante de TEC's Melcor, [17]. Estos datos son: $N = 301$, $S = 0,0002[V/K]$, $r = 0,00001[m]$, $K = 0,15[W/mK]$, $G = 0,1196[m]$. Cabe mencionar que el valor de la conductividad es menor por un orden de magnitud al señalado en los estudios y el valor del factor geométrico está aumentado en un orden de magnitud.

4.2. Gráficas

Cada variación en la corriente adimensional i se denomina caso. El caso 1 corresponde a $i = 1$ y el 2 a $i = 1,15$. En cada uno se especifica el valor de α utilizado junto con los valores de ε . El caso 3 está elaborado con $i = 1$, para $\alpha \gg \varepsilon$.

Las funciones (ecs. 4.1 - 4.5) son evaluadas para un rango $1 \leq \beta \leq 50$, debido a que φ_c y φ_p presentan singularidades en $\beta = 0$. Esta condición físicamente se presenta cuando $T_c = 0$ ó $T_a - T_c \rightarrow \infty$.

4.2.1. Caso 1

Como primer caso se evalúan las funciones de (4.1) a (4.5) cuando $i = 1$. Además se presentan dos secciones una por cada variación en α .

■ $\alpha = 0,9$

En esta subsección la información utilizada para graficar las funciones (4.1) a (4.5) es $i = 1$, $\alpha = 0,9$ y $\varepsilon_1 = 0,700$, $\varepsilon_2 = 0,725$ y $\varepsilon_3 = 0,750$. Con ello se presentan las figs. 4-2-4-6.

La fig. 4-2 muestra el comportamiento de la temperatura adimensional θ como función del parámetro β , para $i = 1$, $\alpha = 0,9$. En ella se observan 3 curvas cada una para el valor de ε

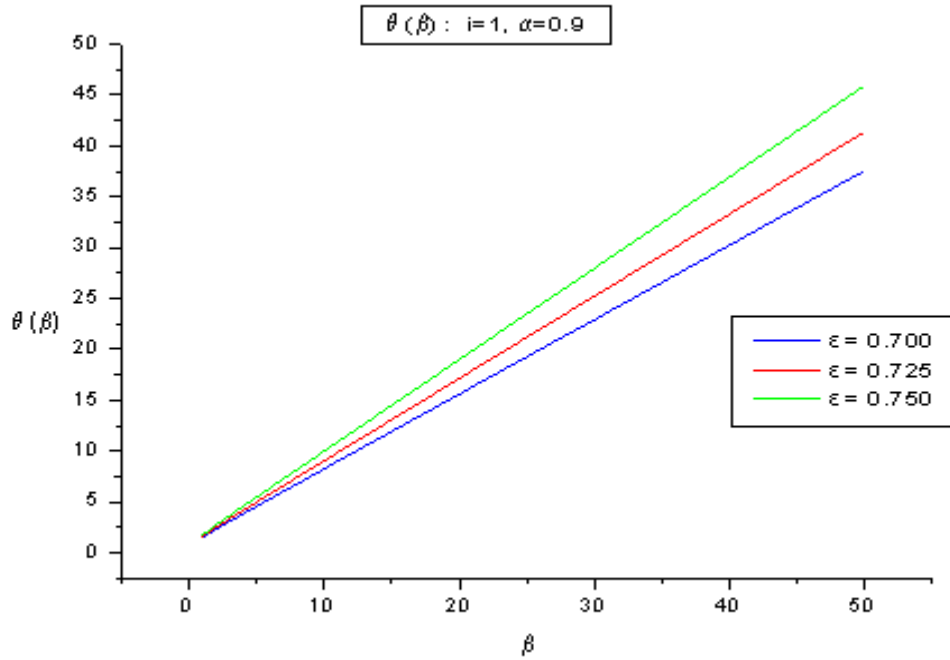


Figura 4-2: $\theta(\beta)$

señalado. El comportamiento de la temperatura θ es prácticamente lineal con β . El valor de la pendiente está modulado por ε , la pendiente se vuelve más pronunciada conforme ε aumenta.

El significado físico de que θ aumente con respecto a β implica que la temperatura del lado caliente del TEC cae conforme $T_a - T_c$ disminuye. Para explicar lo anterior se puede tomar como referencia $T_c = 300K$, la curva correspondiente a $\varepsilon = 0,725$ (curva roja en la fig. 4-2) y tres casos de $T_a - T_c$ por ejemplo 6, 10 y 20, que producen: $\beta_1 = 50$, $\beta_2 = 30$ y $\beta_3 = 15$, respectivamente. Haciendo uso de la curva para $i = 1$, $\alpha = 0,9$ y $\varepsilon = 0,725$, se tienen los siguientes valores aproximados $\theta_1 = 41$, $\theta_2 = 25$ y $\theta_3 = 13$, con ello se tienen las siguientes temperaturas del lado caliente del TEC, $T_1 = 273^\circ C$, $T_2 = 277^\circ C$ y $T_3 = 287^\circ C$. Lo que significa que entre menor sea la diferencia de temperaturas ($T_a - T_c$) menor será la temperatura en el lado caliente del TEC.

Por otra parte, en la gráfica se observa que el aumento de ε produce un incremento en $\theta(\beta)$, lo que se traduce en una temperatura más alta en el lado caliente del TEC. Por tanto, el cambio en ε tiene un efecto adverso en θ debido a que requiere de un sumidero con una mayor capacidad de dispersión de calor. Para ilustrar lo anterior se puede tomar como referencia $\beta = 50$, con ello

los valores son: $\theta(\beta)|_{\varepsilon=0,700} = 37,56$, $\theta(\beta)|_{\varepsilon=0,725} = 41,36$, y $\theta(\beta)|_{\varepsilon=0,750} = 45,91$; lo que a su vez arroja lo siguiente: $T|_{\varepsilon=0,700} = 252^\circ C$, $T|_{\varepsilon=0,725} = 275^\circ C$ y $T|_{\varepsilon=0,750} = 302^\circ C$.

Retomando el significado de ε (ec. 3.14), un incremento en este parámetro se produce físicamente por dos causas: el factor $4NGS^2(T_a - T_c)R_2$ disminuye ó r aumenta. Como S^2 y r están fuertemente ligados a α y $T_a - T_c$ con β , es preferible asociar los cambios de ε con $4NGR_2$; es decir, representa físicamente el tamaño N , la forma G y el desempeño del sumidero de alta temperatura R_2 del TEC. Entonces, un incremento en la temperatura alta del TEC, se produce cuando el factor $4NGR_2$ cae, por ello es preferible que dicho factor sea lo más grande posible.

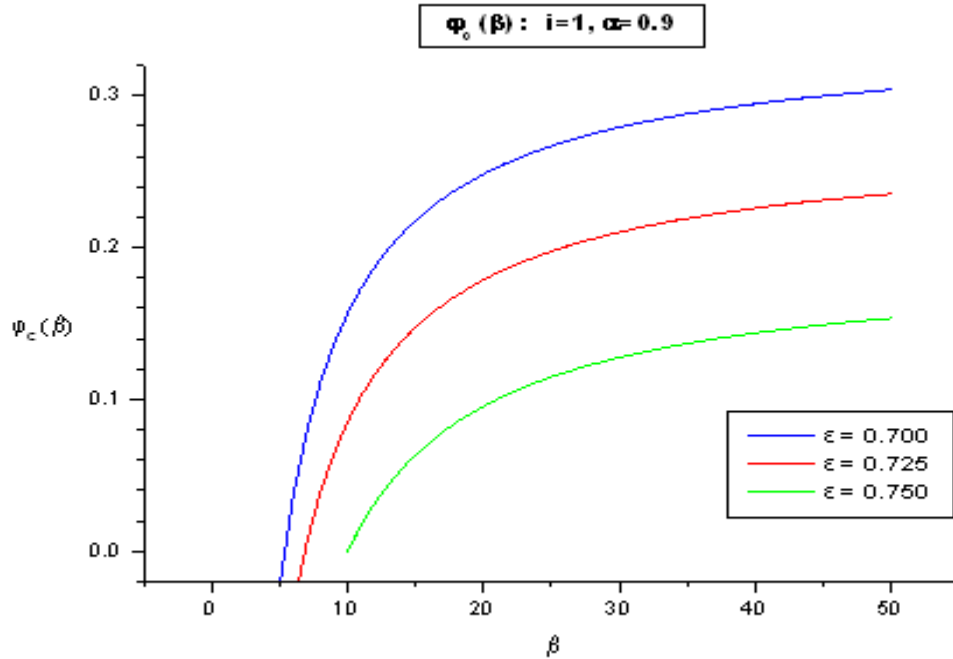


Figura 4-3: $\varphi_c(\beta)$

En la fig. 4-3, se observan 3 curvas de φ_c cada una correspondiente a un valor de ε . Para valores pequeños de β , las tres curvas cortan al eje φ_c en un valor crítico, mientras que para valores grandes tienden a un valor de φ_c modulado por ε . La curva alcanza valores más altos cuando ε disminuye.

Las soluciones mostradas están elaboradas para $1 \leq \beta \leq 50$, debido a la singularidad que presenta la función (4.2) en $\beta = 0$. Estas soluciones de φ_c crecientes de forma “asintótica” con β , representan un ligero crecimiento de la velocidad de transferencia de calor de refrigeración adimensional φ_c contra las temperaturas de operación β . Como ejemplo de este comportamiento se puede tomar $\beta_1 = 50$, $\beta_2 = 30$ y $\beta_3 = 15$ (como en el ejemplo usado en θ) y tomando como referencia la curva para $\varepsilon = 0,725$ (curva roja) se tiene $\varphi_{c1} = 0,23$, $\varphi_{c2} = 0,21$ y $\varphi_{c3} = 0,15$, respectivamente.

Haciendo uso de la definición de φ_c ec. (3.44), del factor \dot{Q}_o se conoce $T_a - T_c$ y T_c (de acuerdo al ejemplo en θ) mientras que del factor $\frac{4NGS^2}{r}$ sólo se sabe que es positivo, supóngase un valor A . Utilizando la β , φ_c , $T_a - T_c$ y T_c , pertinente en cada caso se tiene que, para $\beta_1 = 50$, $\frac{\dot{Q}_{c1}}{A} = 414$; para $\beta_2 = 30$, $\frac{\dot{Q}_{c2}}{A} = 630$ y para $\beta_3 = 15$, $\frac{\dot{Q}_{c3}}{A} = 900$. Esto significa que entre mayor es la diferencia de temperaturas ($T_a - T_c$) mayor es la rapidez de transferencia de calor de refrigeración; esto es, $T_a - T_c|_1 = 6^\circ C \rightarrow \frac{\dot{Q}_{c1}}{A} = 414$; $T_a - T_c|_2 = 10^\circ C \rightarrow \frac{\dot{Q}_{c2}}{A} = 630$ y $T_a - T_c|_3 = 20^\circ C \rightarrow \frac{\dot{Q}_{c3}}{A} = 900$, lo que implica que al aumentar la diferencia se requiere de una rapidez mayor para cumplir con los requerimientos de refrigeración pedidos.

En φ_c el efecto de ε produce una disminución en la capacidad de refrigeración, lo que se caracteriza por el hecho de que las curvas para $\varepsilon = 0,700$ son las que alcanzan los valores más altos. Como ejemplo de las magnitudes de las rapideces de transferencia de calor de refrigeración asociadas a los cambios en ε para un $\beta = 50$ de referencia, se tiene: $\varphi_c(\beta)|_{\varepsilon=0,700} = 0,3$, $\varphi_c(\beta)|_{\varepsilon=0,725} = 0,23$ y $\varphi_c(\beta)|_{\varepsilon=0,750} = 0,15$, esto conduce a lo siguiente: $\frac{\dot{Q}_c}{A}|_{\varepsilon=0,700} = 540$, $\frac{\dot{Q}_c}{A}|_{\varepsilon=0,725} = 414$ y $\frac{\dot{Q}_c}{A}|_{\varepsilon=0,750} = 270$. Por lo tanto, de acuerdo a la ec. (3.14), una disminución en el producto $4NGR_2$ se traduce en una caída del producto $\frac{\dot{Q}_c}{A}$.

En la fig. 4-4 se observan las tres curvas de φ_p para los valores de ε señalados. El comportamiento de las curvas es parecido a la función $y = \frac{1}{x}$, lo que hace suponer que el factor $\frac{1}{\beta}$ de la ec. (4.1) tiene una gran importancia en relación al termino $i\theta$ (tipo: $y = ax$) del paréntesis. El valor al que tienden las curvas es modulado por ε y ese valor crece cuando aumenta ε . Este comportamiento es similar a la tendencia observada en la fig. 4-2 donde los valores más altos se conseguían con ε grandes. Cuando la diferencia $i - \varepsilon$ disminuye produce un aumento en φ_p . Las tendencias asintóticas decrecientes de φ_p con respecto a β , indican que la potencia requerida

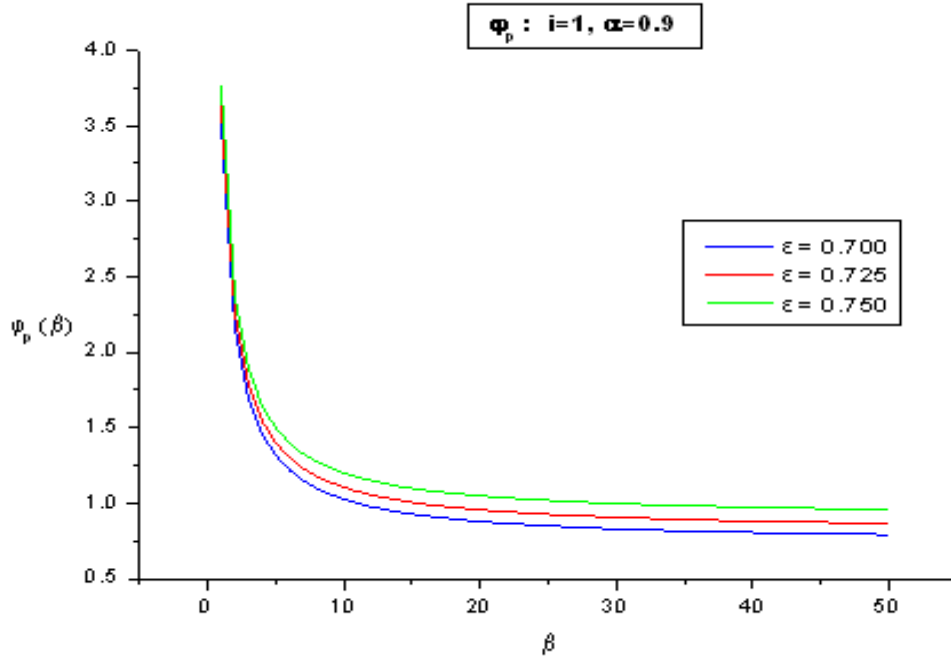


Figura 4-4: $\varphi_p(\beta)$

disminuye conforme la diferencia de temperaturas lo hace. Como ejemplo, se pueden tomar los $T_a - T_c$ y T_c manejadas anteriormente que producen $\beta_1 = 50$, $\beta_2 = 30$ y $\beta_3 = 15$. Tomando como referencia la curva $\varphi_p(\beta)$ correspondiente a $\epsilon = 0,725$ (curva roja en fig. 4-4). Se tienen los siguientes valores $\varphi_{p1} = 0,86$, $\varphi_{p2} = 0,9$ y $\varphi_{p3} = 1$. De acuerdo a la ec. (3.49) φ_p tiene una adimensionalización similar a φ_c (ec. 3.44), reconociendo nuevamente que del factor $\frac{4NGS^2}{r}$ se sabe que es positivo se le puede nombrar A , con ello se tienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Q}_{p1}}{A} &= 0,86 (6) (300) = 1548 \\ \frac{\dot{Q}_{p2}}{A} &= 0,9 (10) (300) = 2700 \\ \frac{\dot{Q}_{p3}}{A} &= 1 (20) (300) = 6000 \end{aligned}$$

Lo anterior muestra que entre menor sea la diferencia de temperaturas $T_a - T_c$ menor será la potencia requerida. Es interesante notar que estos valores son mayores a los presentados en $\frac{\dot{Q}_c}{A}$, lo que sugiere que para obtener un cierto flujo de energía de refrigeración, se requiere de

un mayor flujo de energía útil (potencia) para efectuarlo, comportamiento común en sistemas de refrigeración con un COP menor a 1.

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Q}_{p1}}{A} &= 1548 & ; & \quad \frac{\dot{Q}_{c1}}{A} = 414 \\ \frac{\dot{Q}_{p2}}{A} &= 2700 & ; & \quad \frac{\dot{Q}_{c2}}{A} = 600 \\ \frac{\dot{Q}_{p3}}{A} &= 6000 & ; & \quad \frac{\dot{Q}_{c3}}{A} = 900 \end{aligned}$$

Para $\varphi_p(\beta)$ el aumentar ε tiene como consecuencia un efecto adverso ya que aumenta la potencia requerida para funcionar. Esto se puede observar en la fig. 4-4, al notar que las curvas con los menores valores se logran con $\varepsilon = 0,700$. En forma análoga a la explicación dada en $\varphi_c(\beta)$ se tiene: $\frac{\dot{Q}_p}{A}|_{\varepsilon=0,700} = 1422$, $\frac{\dot{Q}_p}{A}|_{\varepsilon=0,725} = 1548$ y $\frac{\dot{Q}_p}{A}|_{\varepsilon=0,750} = 1728$ evaluadas para $\beta = 50$. Por lo tanto, el disminuir el producto $4NGR_2$ implica un aumento de la potencia requerida $\frac{\dot{Q}_p}{A}$.

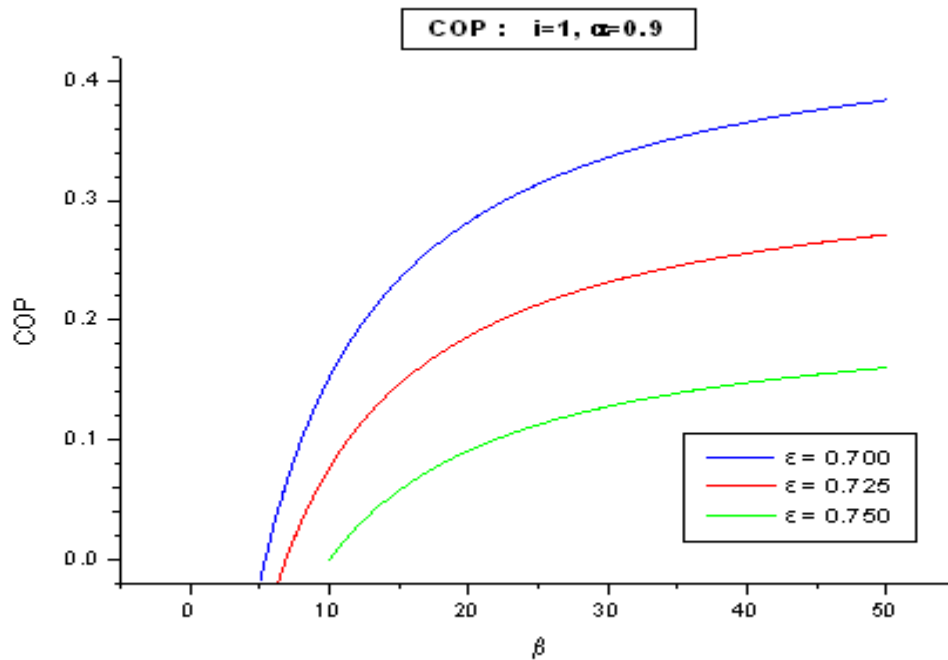


Figura 4-5: COP

La fig. 4-5 ilustra el comportamiento del COP para tres valores distintos de ε . La forma de las curvas es creciente con β para valores grandes; mientras que para valores pequeños, el COP

tiende a $-\infty$, comportamiento heredado de las singularidades presentadas por φ_c y φ_p . El valor al que tienden las curvas para β grandes está modulado por ε . El COP es beneficiado con valores pequeños de ε . La tendencia creciente del COP muestra que aumenta cuando la diferencia de temperaturas $T_a - T_c$ disminuye. Para ejemplificar lo anterior se pueden retomar los valores de $\beta_1 = 50$, $\beta_2 = 30$ y $\beta_3 = 15$, con los respectivos $T_a - T_c$ y T_c asociados. Tomando como referencia la curva elaborada para $\varepsilon = 0,725$ (línea roja) se tiene lo siguiente; para $\beta_1 = 50$, $COP_1 = 0,27$; $\beta_2 = 30$, $COP_2 = 0,23$ y $\beta_3 = 15$, $COP_3 = 0,14$ respectivamente. Recordando que β_1 está asociada a una diferencia $T_a - T_c|_1 = 6^\circ C$, β_2 con $T_a - T_c|_2 = 10^\circ C$ y β_3 con $T_a - T_c|_3 = 20^\circ C$, se justifica lo mencionado anteriormente.

Una interesante conclusión es notar que al aumentar la diferencia de temperaturas $T_a - T_c$, el COP disminuye; es decir, al exigir una mayor refrigeración el COP cae. Conclusión similar a la obtenida por Cheng y Lin [12], quienes mencionan que al aumentar la capacidad de refrigeración se reduce el COP, para un TEC de dimensiones establecidas.

Por otro lado, el incremento en ε provoca una caída del COP, esto es una consecuencia lógica de los efectos vistos en la rapidez de transferencia de calor adimensional φ_c y la potencia requerida adimensional φ_p . Por ello, los valores más altos del COP se logran con ε pequeños. Lo que significa que el TEC requiere de un gran número de pares de materiales semiconductores N , de un factor geométrico grande G , que de acuerdo a Cheng y Lin [12], representa la relación $G = \frac{Area}{Longitud}$. Esto indica que es conveniente que la forma de los elementos semiconductores tengan una área grande y una longitud pequeña, Rowe y Min [?] llegan a resultados similares, donde mencionan que en longitudes pequeñas se alcanzan valores altos del COP. Por último, la resistencia térmica ofrecida por el sumidero de alta temperatura R_2 debe ser alta. En conclusión el factor $4NGR_2$ debe ser grande.

La fig. 4-6 muestra el comportamiento de la generación de entropía adimensional (ec. 3.61) correspondiente a los tres valores de ε señalados, para $\alpha = 0,9$ e $i = 1$. El comportamiento de las curvas es asintótico y decreciente con β . Este desarrollo significa que la generación Φ_β aumenta conforme se incrementa el enfriamiento deseado, caracterizado por $T_a - T_c$. Para comprender lo anterior se pueden utilizar tres valores de β , de acuerdo a ejemplos anteriores, $\beta_1 = 50$, $\beta_2 = 30$ y $\beta_3 = 15$, para un valor de $\varepsilon = 0,725$ (curva roja) con ello las respectivas entropías

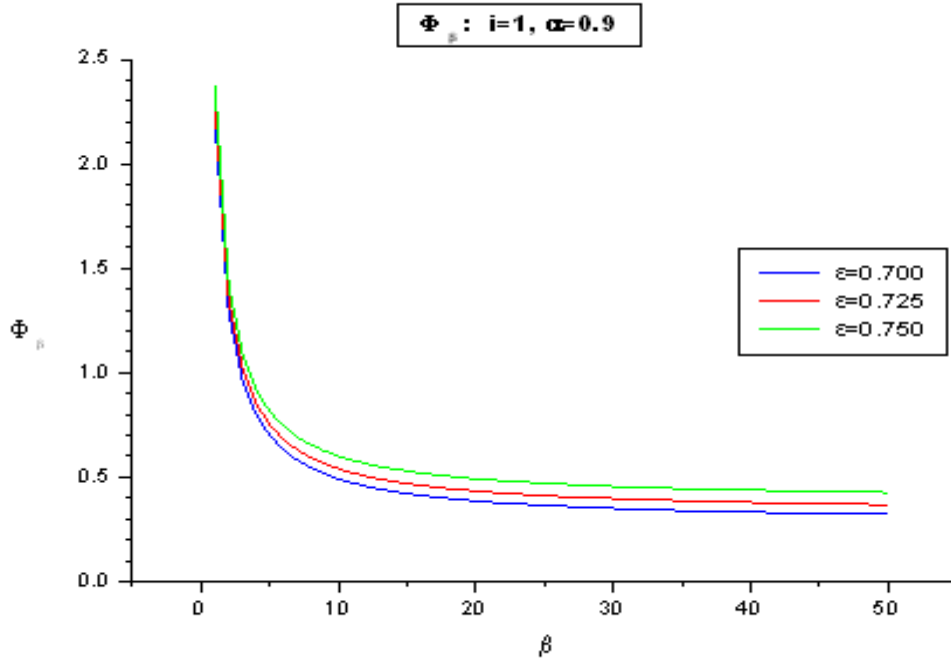


Figura 4-6: Φ_β

son $\Phi(\beta)_1 = 0,37$, $\Phi(\beta)_2 = 0,4$ y $\Phi(\beta)_3 = 0,47$, esto indica que Φ_β crece cuando disminuye β . De acuerdo a la adimensionalización de la entropía (ec. 3.59), S_{oN} es un número positivo; es decir, la generación de entropía S_g es directamente proporcional a la función adimensional Φ_β y β es inversamente proporcional a $T_a - T_c$. Por lo tanto, cuando la diferencia crece (β cae) se traduce en un incremento de S_g ($\Phi(\beta)$ sube). Esto es:

$$\begin{aligned} \text{si, } \beta \rightarrow \infty \quad , \quad \text{entonces } \Phi_\beta \rightarrow 0 \quad , \\ \text{si, } \beta \rightarrow 0 \quad , \quad \text{entonces } \Phi_\beta \rightarrow \infty \quad , \end{aligned}$$

de otra forma:

$$\begin{aligned} \text{si, } T_a - T_c \rightarrow 0 \quad , \quad \text{entonces } S_g \rightarrow 0 \quad , \\ \text{si, } T_a - T_c \rightarrow \infty \quad , \quad \text{entonces } S_g \rightarrow \infty \quad . \end{aligned}$$

El efecto producido por el crecimiento de ε , es un incremento en la generación de entropía adimensional Φ_β . Esto se puede ver claramente tomando como referencia un valor de β ; por ejemplo: $\beta = 50$, con ello se tiene:

$$\Phi_\beta|_{\varepsilon=0,700} = 0,32$$

$$\Phi_\beta|_{\varepsilon=0,725} = 0,37$$

$$\Phi_\beta|_{\varepsilon=0,750} = 0,42$$

Un incremento en ε se puede producir físicamente, de acuerdo a la ec. (3.14), por una disminución del factor $4NGS^2(T_a - T_c)R_2$ ó por un incremento en r . Como S^2 y r están fuertemente asociados al parámetro α y $T_a - T_c$ con β , es conveniente asociar los cambios de ε al factor $4NGR_2$; es decir, ε representa físicamente el tamaño N , la forma G y el desempeño del sumidero de alta temperatura R_2 del TEC. Por lo tanto:

$$\text{si, } \varepsilon \rightarrow \infty \quad , \quad \text{entonces } \Phi_\beta \rightarrow \infty \quad ,$$

$$\text{si, } \varepsilon \rightarrow 0 \quad , \quad \text{entonces } \Phi_\beta \rightarrow 0 \quad ,$$

de otro modo:

$$\text{si, } \frac{1}{4NGR_2} \rightarrow \infty \quad , \quad \text{entonces } S_g \rightarrow \infty \quad ,$$

$$\text{si, } \frac{1}{4NGR_2} \rightarrow 0 \quad , \quad \text{entonces } S_g \rightarrow 0 \quad .$$

Es importante mencionar que la forma decreciente de Φ_β se asemeja mucho al desarrollo de la generación de entropía que se produce en un dispositivo situado entre dos depósitos de temperatura (pag. 35 [13]), caracterizado por la expresión (4.6):

$$S_{genB} = \frac{\dot{Q}(T_{alta} - T_{baja})}{T_{alta}T_{baja}}. \quad (4.6)$$

Si $T_{alta} = T_a = 320K$ y por otro lado, si se considera a T_{baja} como la temperatura de refrigeración T_c ; es decir, una temperatura variable, para una transferencia de calor unitaria $Q = 1$, se tiene la fig. 4-7.

Al comparar Φ_β con S_{genB} se llega a resultados similares: al disminuir las diferencias $T_a - T_c$ en $\Phi(\beta)$ y $T_{alta} - T_{baja}$ en S_{genB} , las dos generaciones de entropía disminuyen, mientras que al aumentar las diferencias mencionadas Φ_β y S_{genB} tienden a un valor.

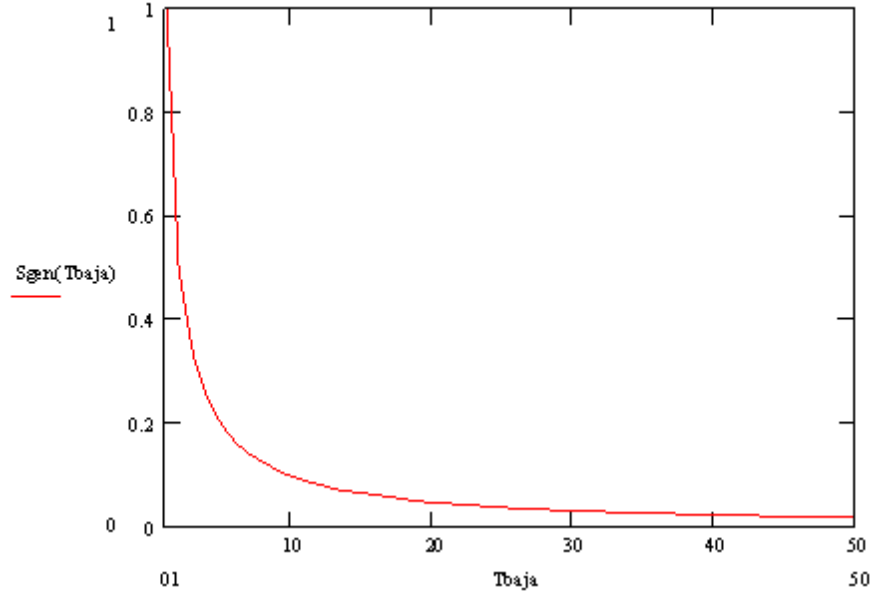


Figura 4-7: Generación de entropía S_{genB} , basada en la ec. (4.6).

■ $\alpha = 0,98$

En esta subsección la información utilizada para graficar las ecs. (4.1) a (4.5) es $i = 1$, $\alpha = 0,98$ y $\varepsilon_1 = 0,700$, $\varepsilon_2 = 0,725$ y $\varepsilon_3 = 0,750$. Entonces las figs. son: 4-8 a 4-12.

La figura de la temperatura θ (fig. 4-8), fue elaborada para $i = 1$ y $\alpha = 0,98$, para los tres valores de ε señalados. El comportamiento de las curvas es igual al visto anteriormente (fig. 4-2) por ello se puede concluir nuevamente que entre menor sea la diferencia $T_a - T_c$, menor será la temperatura en el lado caliente del TEC. El aumentar α , se traduce en un incremento de la temperatura del lado caliente del TEC. Esto significa que disminuir el coeficiente Seebeck S ó aumentar el producto Kr produce un aumento en θ y en consecuencia en T .

La fig. 4-9 muestra las curvas de rapidez de transferencia de calor de refrigeración adimensional para $i = 1$, $\alpha = 0,98$ y las ε señaladas. Su comportamiento es similar al observado anteriormente; por ello, se pueden establecer conclusiones parecidas, las tendencias de las curvas están moduladas por ε , entre mayor es la diferencia de temperaturas ($T_a - T_c$) mayor será la rapidez de transferencia de calor de refrigeración $\frac{\dot{Q}_c}{A}$. El incremento de α produce una caída de la capacidad de refrigeración. Esto es:

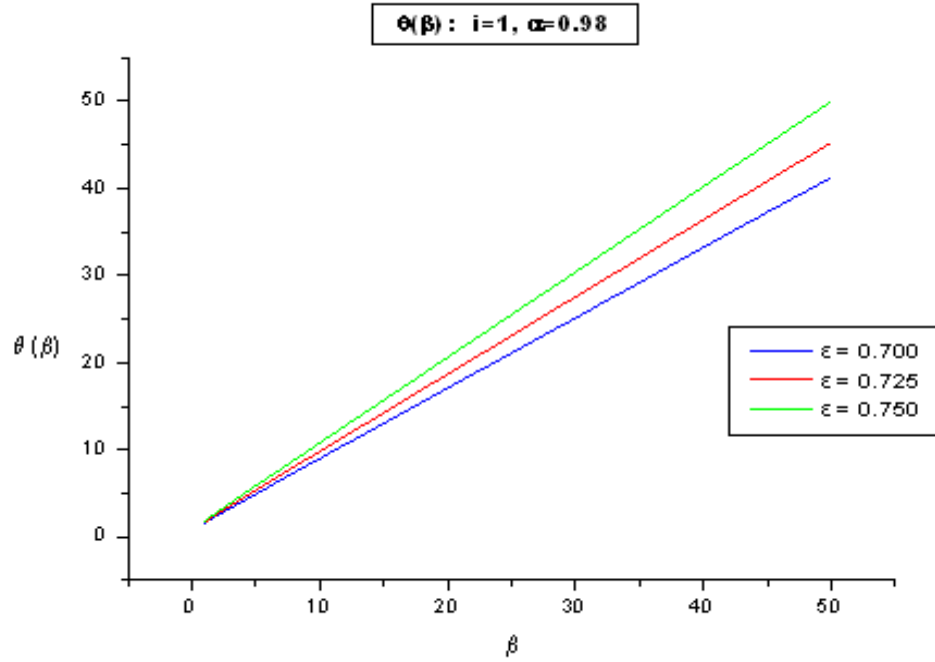


Figura 4-8: $\theta(\beta)$

Si, $S \rightarrow \infty$ ó $Kr \rightarrow 0$ entonces $\alpha \rightarrow 0$, por tanto $\frac{\dot{Q}_c}{A}, \varphi_c \rightarrow \infty$.

Si, $S \rightarrow 0$ ó $Kr \rightarrow \infty$ entonces $\alpha \rightarrow \infty$, por tanto $\frac{\dot{Q}_c}{A}, \varphi_c \rightarrow 0$.

La fig. 4-10 muestra el comportamiento de la potencia cuando $i = 1$, $\alpha = 0,98$ y los valores de ϵ señalados. Su comportamiento es parecido al mostrado antes (fig. 4-4) conduciendo con ello a conclusiones análogas, disminuye la potencia requerida cuando la diferencia $T_a - T_c$ lo hace, para obtener una cierta potencia de refrigeración se requiere de una potencia útil mayor para efectuarlo. El efecto producido por incrementar α se revela como un aumento en el valor hacia el que tiende la curva de φ_p . Esta diferencia representa físicamente un aumento de la potencia requerida $\frac{\dot{Q}_p}{A}$ al agrandar α .

La fig. 4-11 muestra el comportamiento del COP para $i = 1$ y $\alpha = 0,98$ para tres casos de ϵ . El comportamiento de las curvas es prácticamente igual al visto anteriormente (fig. 4-5) lo que permite concluir que el cruce donde $COP = 0$ y el valor al que tienden cuando β es grande está modulado por ϵ . El COP es beneficiado con valores pequeños de ϵ y aumenta cuando la diferencia de temperaturas $T_a - T_c$ disminuye. Conclusión similar a la obtenida por Cheng y

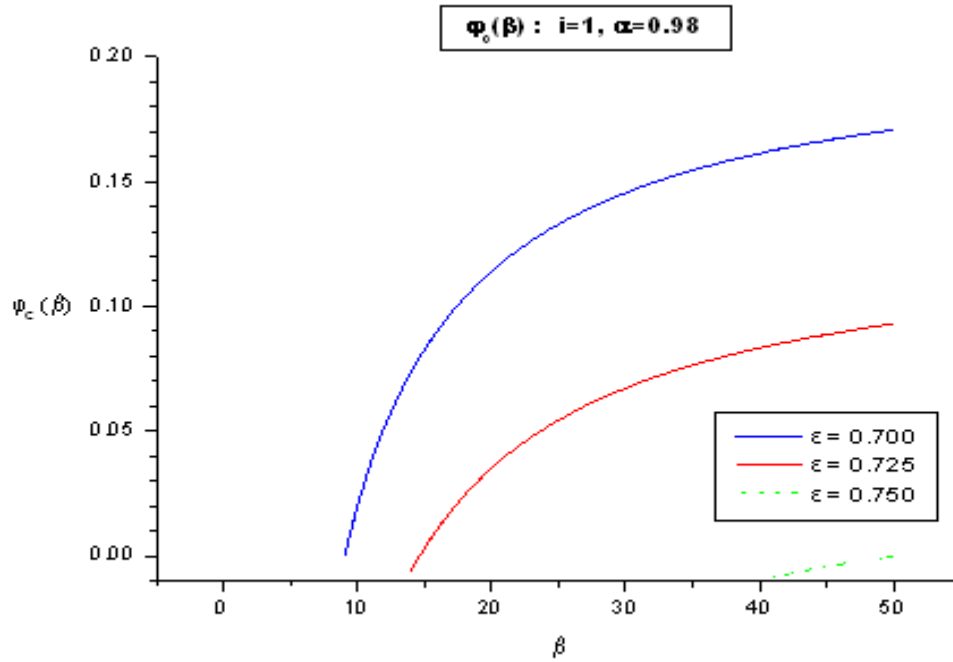


Figura 4-9: $\varphi_c(\beta)$

Lin [12]. El aumento de α produce un efecto adverso en el COP. En este caso la curva de COP para $\varepsilon = 0,750$ no alcanza una solución real en el rango de análisis.

A manera de conclusión de este primer caso y las tres secciones que lo conforman, un incremento en el parámetro α (que físicamente se traduce en una disminución del coeficiente Seebeck S ó un aumento del producto Kr) produce un efecto adverso en las principales variables del sistema θ , φ_c , φ_p y COP .

En θ se manifiesta como un incremento de la temperatura del lado caliente del TEC. En φ_c implica una disminución de la capacidad de refrigeración $\frac{\dot{Q}_c}{A}$. En φ_p provoca un aumento de la potencia requerida $\frac{\dot{Q}_p}{A}$. En el COP induce una caída de su valor, una consecuencia lógica de lo observado en φ_c y φ_p .

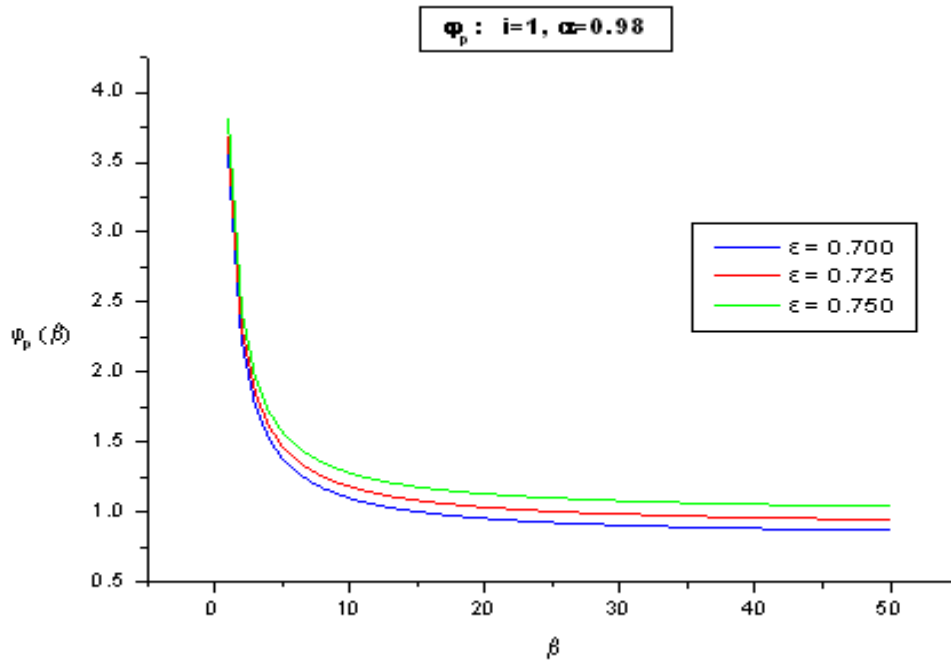


Figura 4-10: $\varphi_p(\beta)$

Si, $S \rightarrow 0$ ó $Kr \rightarrow \infty$ entonces $\alpha \rightarrow \infty$ por tanto:
 $\theta \rightarrow \infty$ $\varphi_c \rightarrow 0$ $\varphi_p \rightarrow \infty$ $COP \rightarrow 0$.

Si, $S \rightarrow \infty$ ó $Kr \rightarrow 0$ entonces $\alpha \rightarrow 0$ por tanto:
 $\theta \rightarrow 0$ $\varphi_c \rightarrow \infty$ $\varphi_p \rightarrow 0$ $COP \rightarrow \infty$.

Por otra parte, el crecimiento del parámetro ε tiene un impacto negativo en las variables θ , φ_c , φ_p , COP y Φ_β . En θ produce un aumento en la temperatura alta del TEC. En φ_c disminuye la capacidad de refrigeración. En φ_p aumenta la potencia requerida. Al COP lo disminuye.

Si, $\varepsilon \rightarrow \infty$ entonces $\theta \rightarrow \infty$ $\varphi_c \rightarrow 0$ $\varphi_p \rightarrow \infty$ $COP \rightarrow 0$.

Si, $\varepsilon \rightarrow 0$ entonces $\theta \rightarrow 0$ $\varphi_c \rightarrow \infty$ $\varphi_p \rightarrow 0$ $COP \rightarrow \infty$.

Por último, la fig. 4-12 expone el comportamiento de la generación de entropía adimensional, el cual es similar al visto anteriormente, donde la generación Φ_β disminuye con β . Al igual que

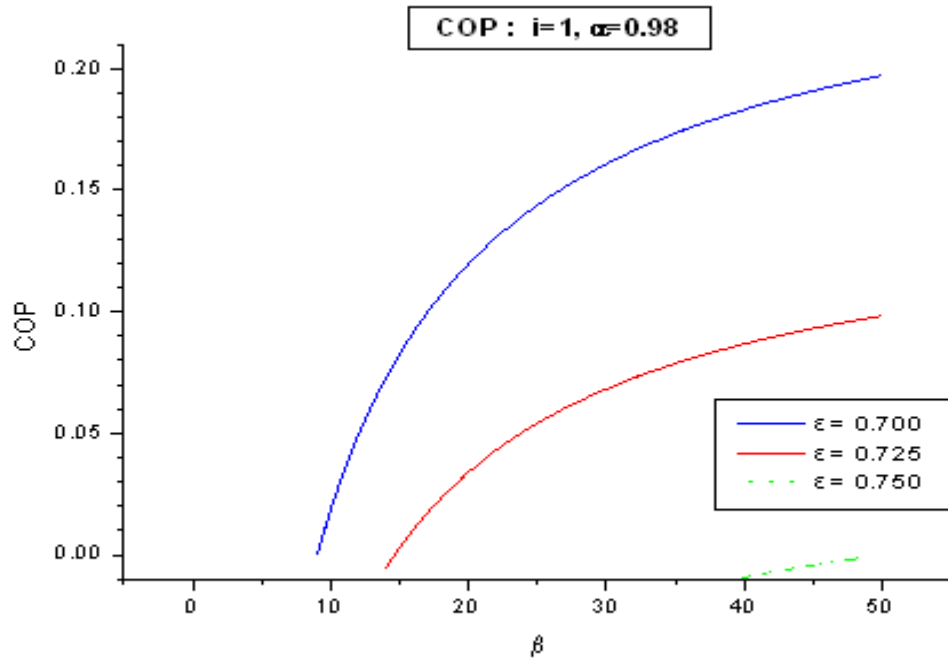


Figura 4-11: COP

en el caso anterior (fig. 4-6) el aumento en α , se traduce en un incremento en la generación Φ_β . Nuevamente, con base en la adimensionalización de α (ec. 3.12) y Φ_β (ec. 3.59) la generación de entropía S_g , disminuye cuando el producto $\frac{Kr}{S^2}$ crece. El incremento en ε dominado por el producto $\frac{1}{4NGR_2}$ provoca un aumento de la generación de entropía.

4.2.2. Caso 2

En este caso se estudia el comportamiento de las funciones cuando se aplica una corriente eléctrica adimensional mayor, por ejemplo $i = 1,15$. Nuevamente se presentan dos secciones cada una correspondiente a una variación en α , con sus respectivas variaciones en ε .

- $\alpha = 0,9$

En esta subsección la información utilizada para graficar las funciones (4.1) a (4.5) es $i = 1,15$, $\alpha = 0,9$ y $\varepsilon_1 = 0,700$, $\varepsilon_2 = 0,725$ y $\varepsilon_3 = 0,750$. Con ello las figs. son 4-13 a 4-17.

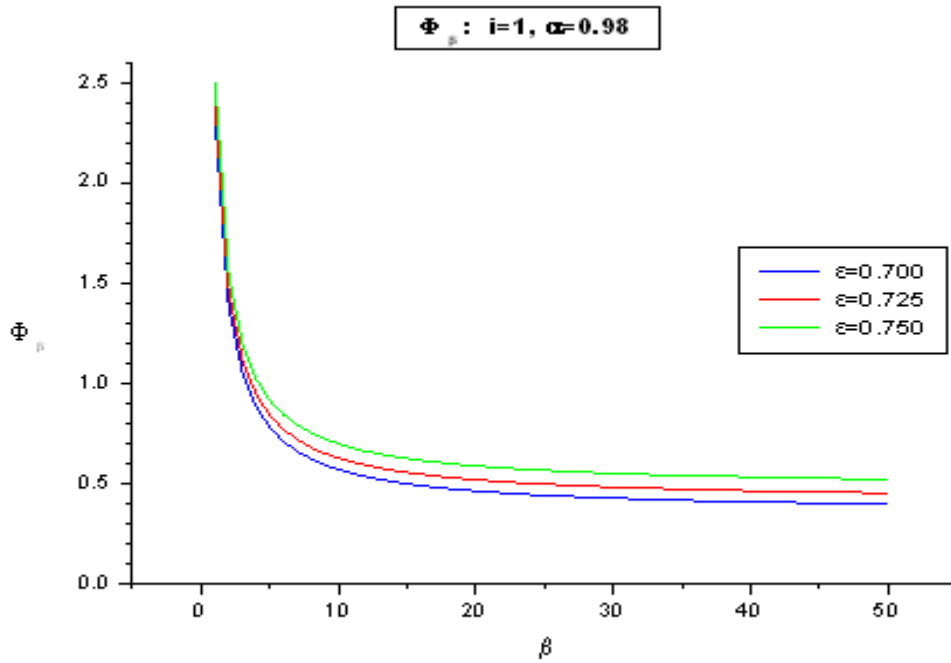


Figura 4-12: Φ_{β}

Las figuras tienen un comportamiento parecido al de sus contrapartes cuando $i = 1$, y $\alpha = 0,9$ (subcaso 1.1) lo que permite tener conclusiones similares con respecto a la forma, tendencias e influencia de ε en cada una. De esta sección resalta el efecto de aumentar la corriente eléctrica adimensional i sobre las variables analizadas. Dicho efecto puede notarse al comparar un valor de la función para una condición de referencia; por ejemplo, para $\beta = 50$, $\alpha = 0,9$ y $\varepsilon = 0,725$ se tiene la siguiente información:

Tabla 4.1

	$i = 1$	$i = 1,15$
	$\alpha = 0,9$	$\alpha = 0,9$
Secciones:	1.1	2.1
$\theta(\beta)$	41	23
$\varphi_c(\beta)$	0.23	0.37
$\varphi_p(\beta)$	0.86	0.59
COP	0.27	0.63
Φ_β	0.37	0.18

Con base a la tabla 4.1 se puede observar que el efecto de aumentar la corriente eléctrica de $i = 1$ a $i = 1,15$, tiene un efecto benéfico en las distintas variables.

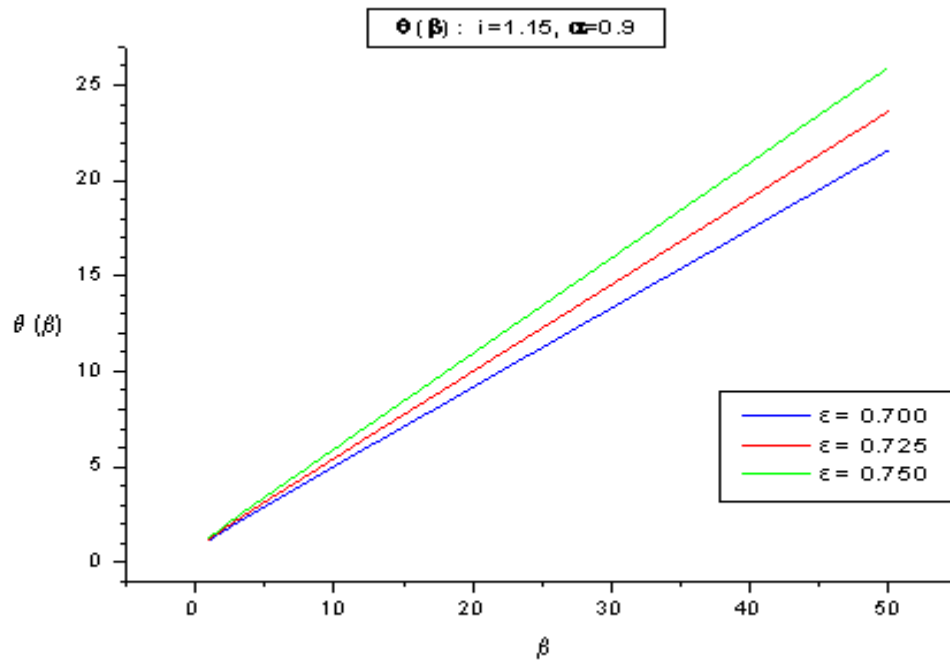


Figura 4-13: $\theta(\beta)$

En la fig. 4-13 se ilustra el comportamiento de la temperatura adimensional cuando se produce un aumento en la corriente eléctrica, de $i = 1$ a $i = 1,15$, para $\alpha = 0,9$ y los tres valores

de ε indicados. El efecto de incrementar i origina una temperatura menor en el lado caliente del TEC (ver tabla 4.1).

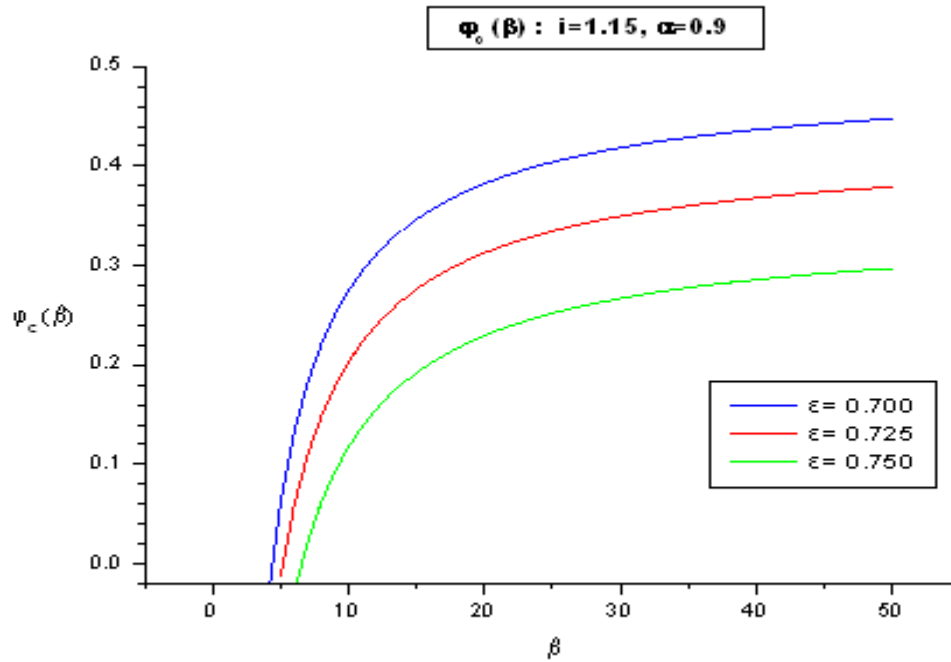


Figura 4-14: $\varphi_c(\beta)$

La fig. 4-14 está elaborada para $i = 1,15$, $\alpha = 0,9$ y los valores de ε indicados. La forma, el comportamiento y la influencia de ε son los mismos a los vistos en el caso anterior. Su principal aportación se refleja en un aumento de la capacidad de refrigeración. Lo significa que el aumentar i , repercute en un incremento de la rapidez de transferencia de calor de refrigeración, $\frac{\dot{Q}_c}{A}$.

La fig. 4-15 expone el comportamiento de φ_p para $i = 1,15$, $\alpha = 0,9$ y los ε indicados. El comportamiento, forma e influencia de ε no cambian con respecto al caso anterior. El efecto de aumentar i , se manifiesta como una reducción de la potencia útil requerida (ver tabla 4.1). Por tanto, el aumentar i tiene un efecto benéfico en la potencia requerida.

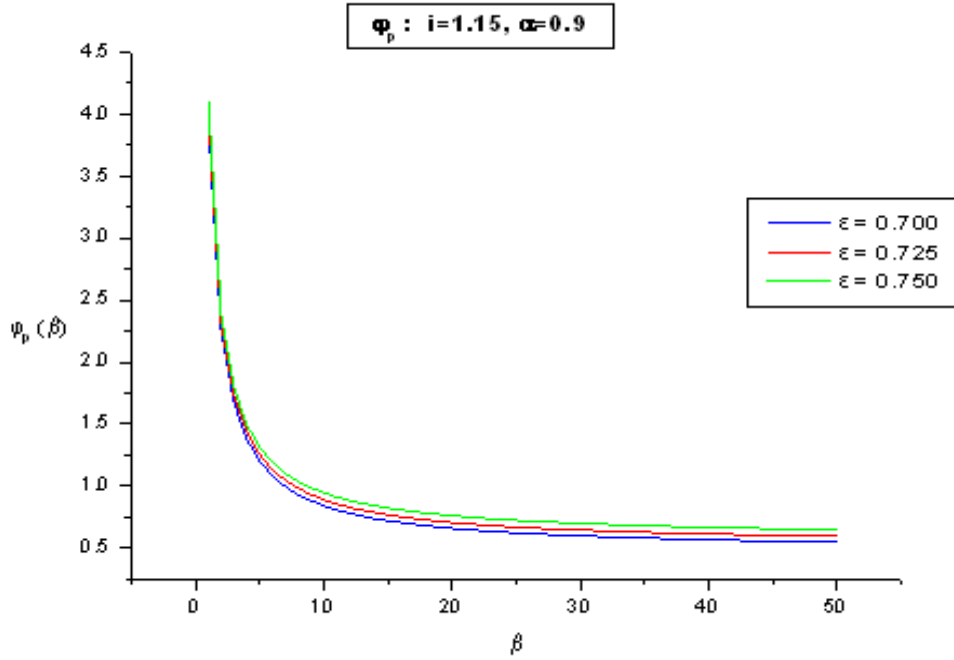


Figura 4-15: $\varphi_p(\beta)$

La fig. 4-16 ilustra el comportamiento del COP para $i = 1,15$, $\alpha = 0,9$ y tres valores de ε . El efecto de aumentar i , en base a las figs. 4-14 y 4-15, es un aumento en el COP. Tomando la información de la tabla 4.1, se tiene $COP_{11} = 0,27$ y $COP_{21} = 0,63$, confirmando lo anterior. Este aumento es una consecuencia del incremento de la capacidad de refrigeración $\frac{\dot{Q}_c}{A}$ y una reducción en la potencia útil $\frac{\dot{Q}_p}{A}$.

La fig. 4-17 muestra el comportamiento de la generación de entropía adimensional cuando se produce un aumento en la corriente adimensional (de $i = 1$ a $i = 1,15$) su desarrollo es similar al visto anteriormente; sin embargo, resalta que sus valores son más bajos que los observados en el caso 1 (ver tabla 4.1).

Otra importante observación es que al aumentar i , la variación en ε pierde importancia; como ejemplo, se puede tomar como referencia $\beta = 50$ y comparar los valores de las curvas de Φ_β , estos son:

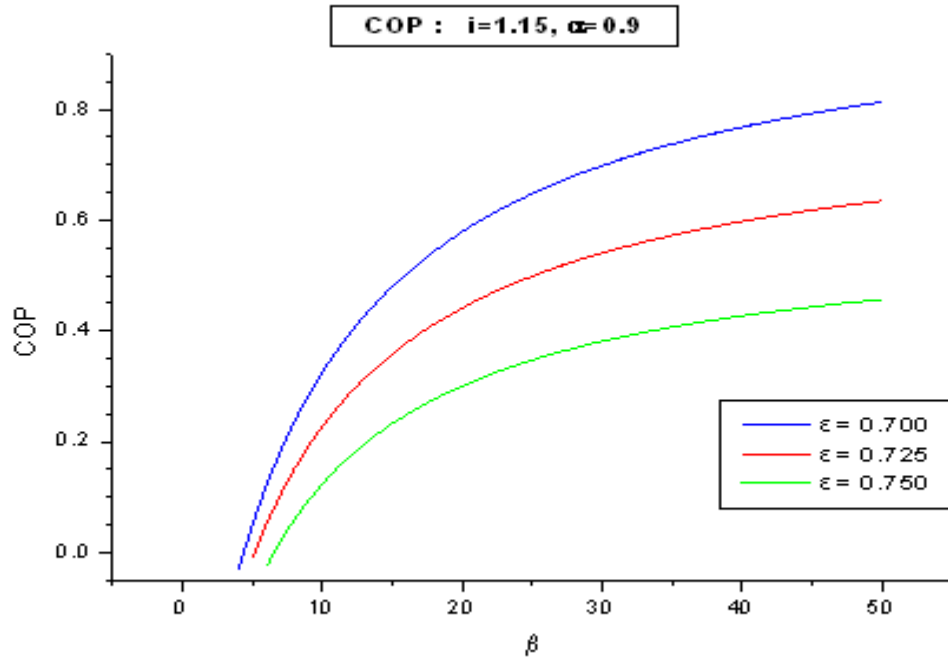


Figura 4-16: COP

Tabla 4.2

	Fig. 4-6	Fig. 4-17
$\epsilon = 0,700$	0.321	0.162
$\epsilon = 0,725$	0.368	0.181
$\epsilon = 0,750$	0.426	0.203

Las diferencias entre el mayor y menor valor de cada caso es:

Tabla 4.3

Fig. 4-6	Fig. 4-17
0.105	0.041

Lo que muestra que las diferencias entre las curvas es más estrecha al aumentar la corriente adimensional, i . De acuerdo a las ecs. (3.9) y (3.13) una forma de aumentar i se produce físicamente incrementando la corriente eléctrica I .

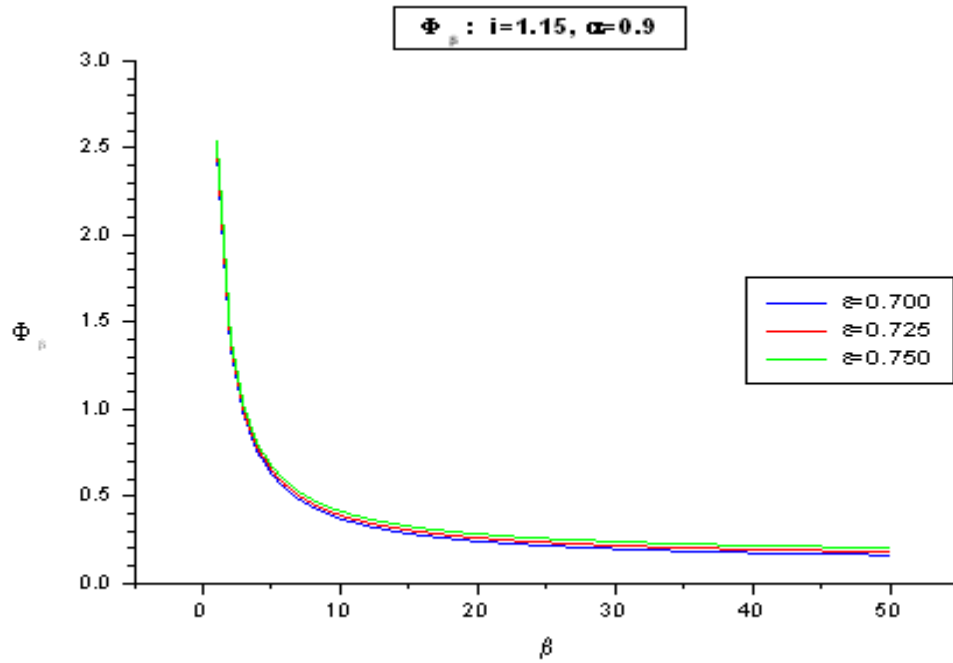


Figura 4-17: Φ_β

■ $\alpha = 0,98$

En esta sección la información utilizada para graficar las funciones (4.1) a (4.5) es $i = 1,15$, $\alpha = 0,98$ y $\varepsilon_1 = 0,700$, $\varepsilon_2 = 0,725$ y $\varepsilon_3 = 0,750$. Con ello las figs. son 4-18 a 4-22.

En esta sección 2.2 se puede observar el efecto de incrementar α , cuando $i = 1,15$, para las ε mostradas. Se tiene entonces que se vuelve a incrementar θ , baja φ_c , aumenta φ_p y en consecuencia disminuye el COP y finalmente aumenta la entropía generada Φ_β . Para ilustrar lo anterior se puede tomar como referencia $\beta = 50$, $\varepsilon = 0,725$ e $i = 1,15$, los valores de las variables son resumidas en la tabla 4.4.

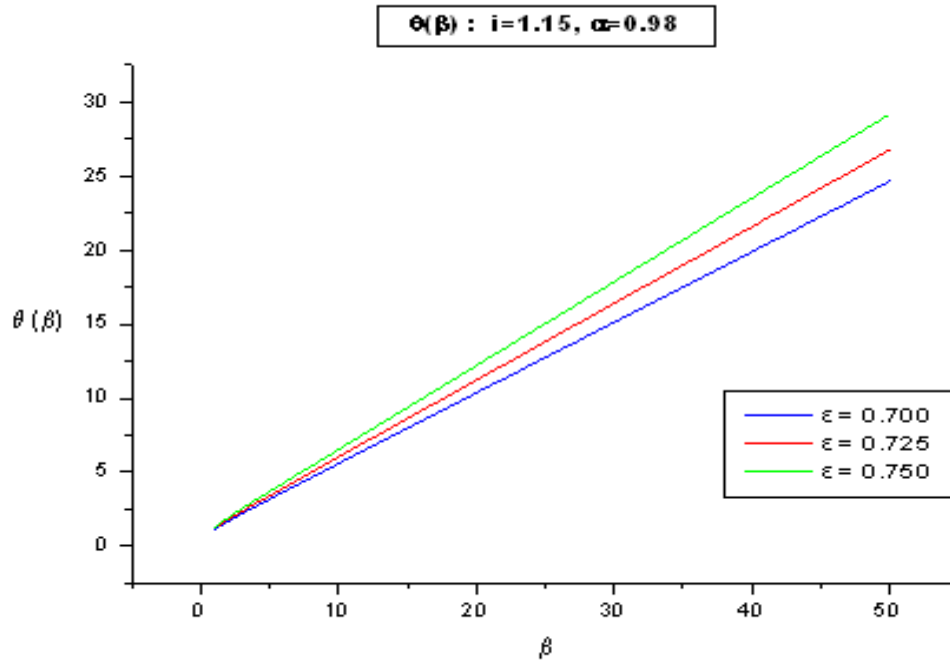


Figura 4-18: $\theta(\beta)$

Tabla 4.4

	$i = 1,15$	$i = 1,15$
	$\alpha = 0,9$	$\alpha = 0,98$
Sección:	2.1	2.2
$\theta(\beta)$	23	27
$\varphi_c(\beta)$	0.37	0.23
$\varphi_p(\beta)$	0.59	0.66
COP	0.63	0.35
Φ_β	0.18	0.22

En la tabla 4.4 es fácil observar que el aumentar α produce los efectos mencionados, coincidiendo con lo visto anteriormente. La fig. 4-22 muestra un comportamiento de Φ_β similar al visto en las dos secciones anteriores. El incremento en $\frac{Kr}{S^2}$ (ec. 3.12) nuevamente produce un ligero aumento en la generación de entropía S_g (ec. 3.59). Por otra parte, el efecto de aumentar ϵ produce un incremento de la generación.

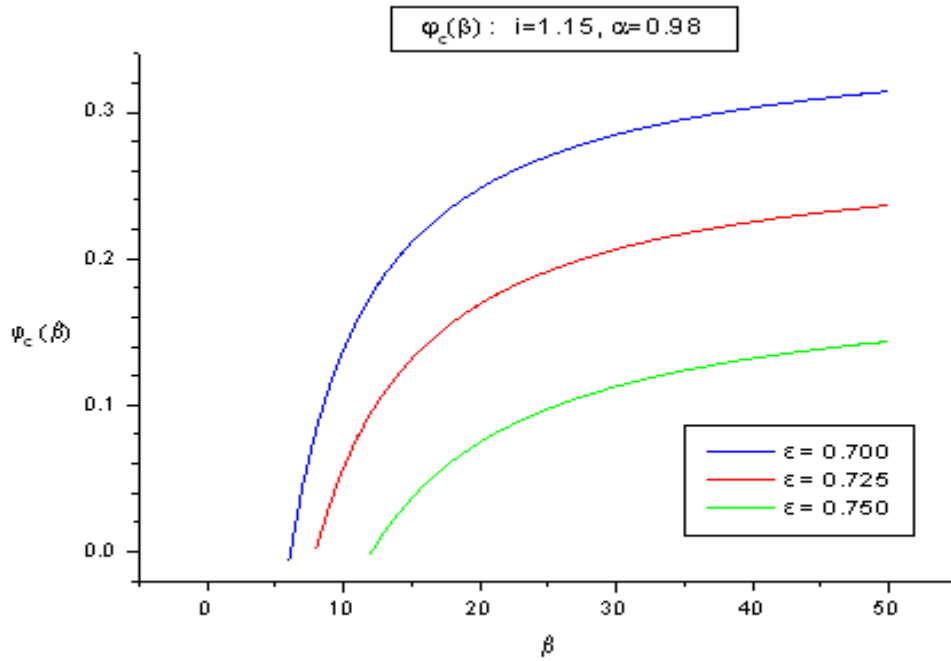


Figura 4-19: $\varphi_c(\beta)$

A manera de conclusión de estos dos casos, se logró observar la influencia de los parámetros i , α , ε y β para las variables evaluadas $\theta(\beta)$, $\varphi_c(\beta)$, $\varphi_p(\beta)$, COP y Φ_β . Para una $i = 1$ de referencia y un incremento a $i = 1,15$, que beneficia el desempeño del TEC. Disminuye θ , se incrementa φ_c , disminuye φ_p y como consecuencia sube el COP . El aumentar α tiene un efecto adverso en las variables evaluadas. El aumento en α está asociado a un decremento del coeficiente Seebeck S , ó bien un aumento del producto Kr . Por último, el incremento de ε de 0.700 a 0.750 tiene un efecto adverso en las variables adimensionales. Aumenta θ , disminuye φ_c , se eleva φ_p y en consecuencia baja el COP , además aumenta Φ_β .

Por lo tanto, las tendencias que benefician al desempeño del TEC, desde el punto de vista del COP, son: i grande (mayor a 1), con α y ε pequeñas (menores a 0.9 y 0.7 respectivamente).

La generación de entropía adimensional Φ_β depende de cuatro parámetros i , α , ε y β . Para el caso de la corriente eléctrica adimensional i , caracterizado por I (ver 3.9 y 3.13). Un aumento en la corriente i , tiene un impacto benéfico, porque disminuye la generación S_g , que se traduce en

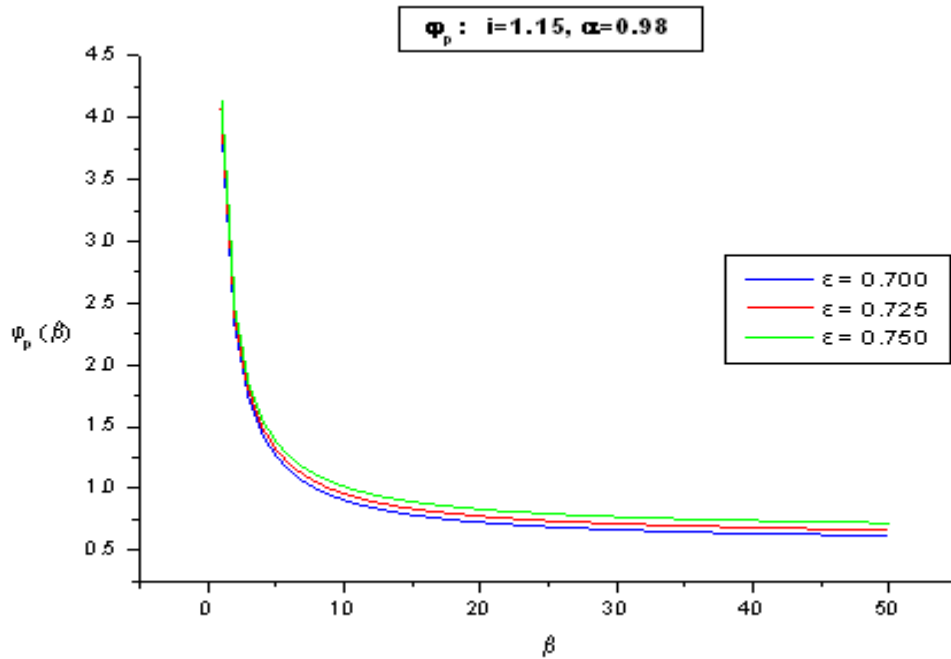


Figura 4-20: $\varphi_p(\beta)$

una mayor energía aprovechada; sin embargo, se tiene el costo de aumentar la corriente eléctrica demandada I . En los 2 casos el incremento en α produjo un aumento de Φ_β , incrementando la energía pérdida, es importante no perder de vista que α depende del producto $\frac{Kr}{S^2}$.

Por ello un alto coeficiente Seebeck S y un bajo producto Kr (conductividad térmica por resistividad eléctrica) reducen α y con ello producen un aumento en la energía aprovechada (baja S_g).

El incremento de ϵ originó un incremento de Φ_β , con perjuicio de la energía aprovechada. Por esta razón, es conveniente que el producto $\frac{1}{4NGR_2}$ del cual depende ϵ (ec. 3.14) sea pequeño; es decir, valores altos del número de pares de materiales semiconductores n y p N , el factor geométrico G y la resistencia térmica entre el lado caliente del TEC y el ambiente R_2 , producen una menor generación de entropía S_g y en consecuencia una mayor cantidad de energía aprovechada.

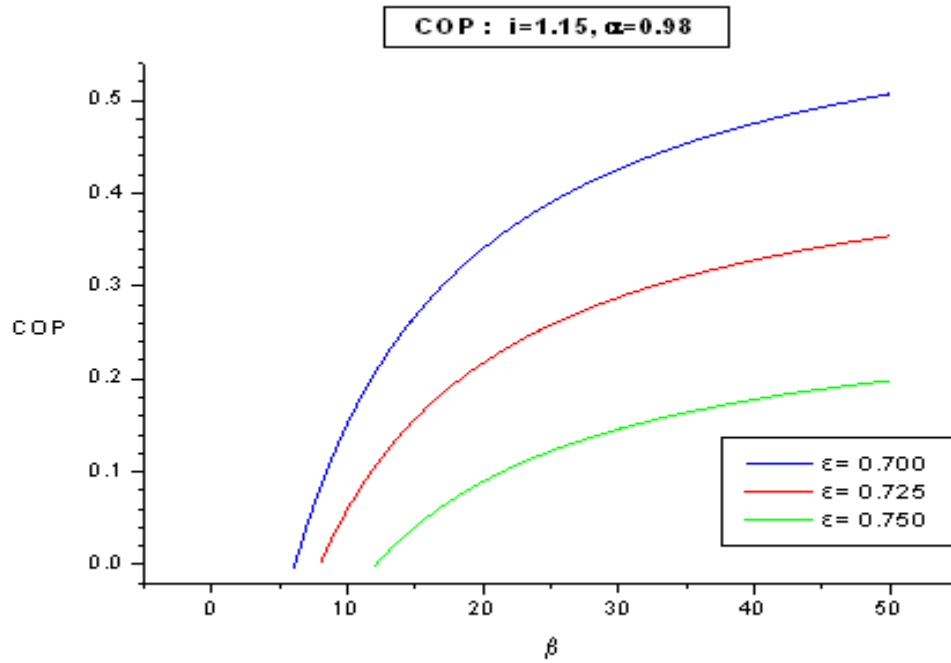


Figura 4-21: COP

Por último, el aumento de β produce una disminución en la generación de entropía adimensional Φ_β . Físicamente el aumento en β se produce cuando la diferencia $T_a - T_c$ se hace más pequeña; mientras que el comportamiento de Φ_β es directamente proporcional al de S_g (ec. 3.59). Lo anterior indica que al exigir una menor refrigeración (caracterizada por $T_a - T_c$) se tiene una menor cantidad de energía pérdida.

En conclusión, la generación de entropía S_g disminuye cuando se aumenta la corriente eléctrica I , la figura de mérito $\frac{S^2}{Kr}$, el producto $4NGR_2$ ó se exige una baja refrigeración (una pequeña $T_a - T_c$). A manera de resumen en la tabla 4.5 se presentan los valores de las variables adimensionales evaluadas para $\beta = 50$ y $\epsilon = 0,725$, para cada una de las secciones.

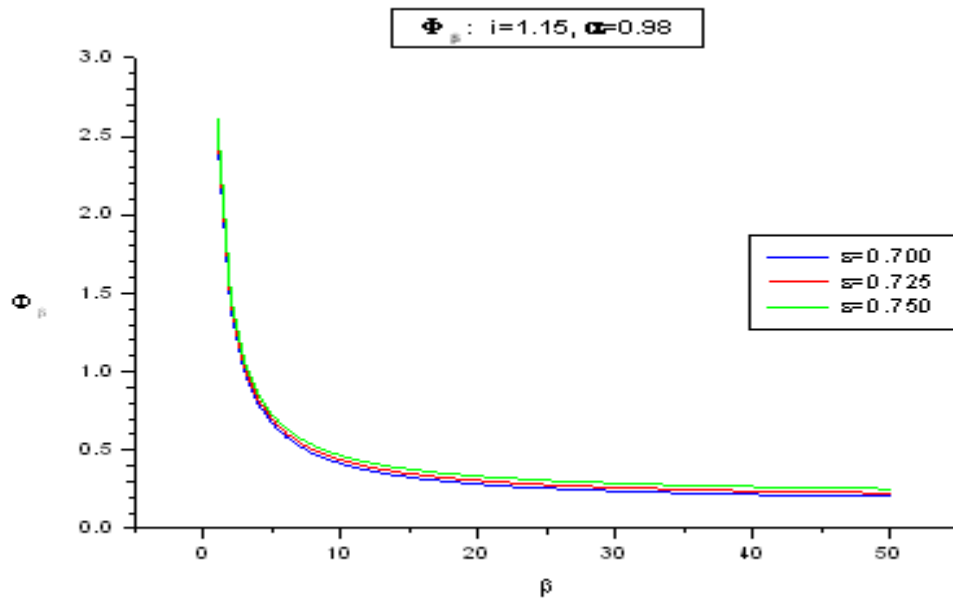


Figura 4-22: Φ_β

Tabla 4.5

Sección	$\theta(\beta)$	$\varphi_c(\beta)$	$\varphi_p(\beta)$	COP	Φ_β
1.1	41.36564	0.23542	0.86731	0.27143	0.36805
1.2	45.25527	0.093	0.94511	0.0984	0.45191
2.1	23.63902	0.37897	0.5966	0.63522	0.181
2.2	26.764	0.23655	0.66847	0.35386	0.22657

4.2.3. Caso 3

Por último, se revisa la condición de operación en la que α es mucho mayor a ε . Para ello, se proponen $\alpha = 1,85$ y $\varepsilon = 0,1$. Además, se presentan pequeñas variaciones para ε que son: $\varepsilon = 0,05$ y $\varepsilon = 0,15$. El valor utilizado para la corriente es $i = 1$. Las figs. son 4-23 a 4-27.

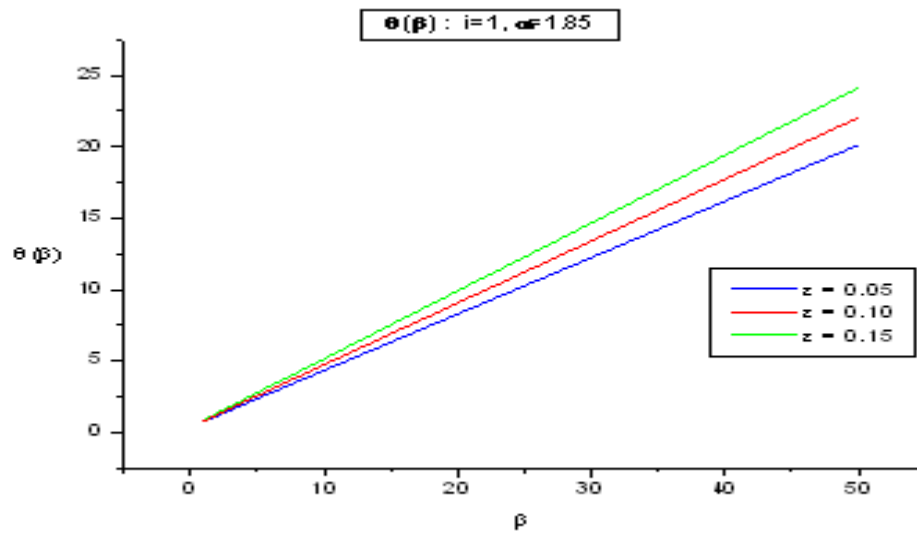


Figura 4-23: $\theta(\beta), \alpha \gg \varepsilon$

En este caso 3 se observa que las figuras tienen un comportamiento similar al mostrado en otros casos. En este caso las variables presentan condiciones muy favorables para el desempeño del TEC. Como referencia a este caso se puede utilizar la información de las variables para $i = 1, \alpha = 1,85, \varepsilon = 0,1$ y $\beta = 50$ y compararla con la del caso 2.1 (que presentó las condiciones más favorables de operación) $i = 1,15, \alpha = 0,9, \varepsilon = 0,725$ y $\beta = 50$. La tabla 4.6 presenta la información de los dos casos.

Tabla 4.6

	$i = 1,15$	$i = 1$
	$\alpha = 0,9$	$\alpha = 1,85$
	$\varepsilon = 0,725$	$\varepsilon = 0,1$
Sección:	2.1	3.1
$\theta(\beta)$	23	22
$\varphi_c(\beta)$	0.37	0.16
$\varphi_p(\beta)$	0.59	0.48
COP	0.63	0.34
Φ_β	0.18	0.28

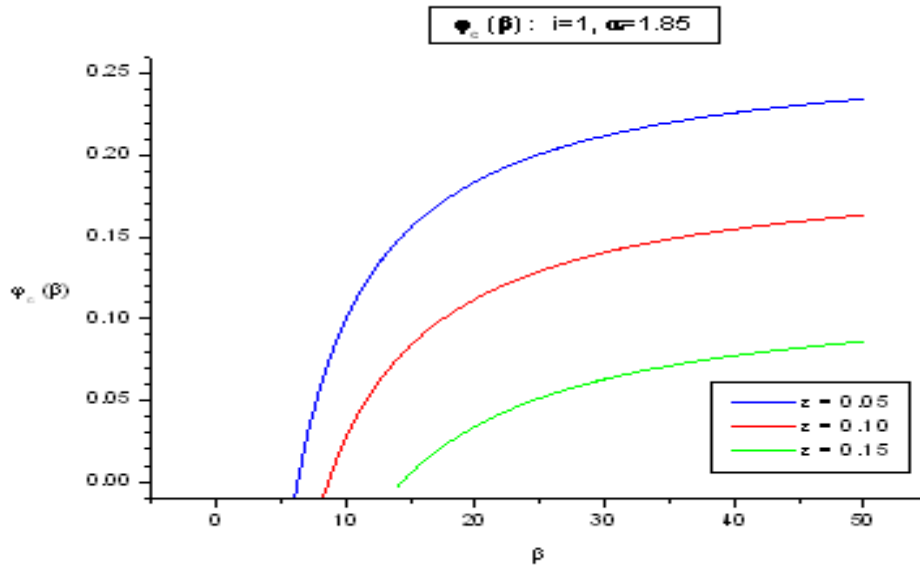


Figura 4-24: $\varphi_c(\beta)$, $\alpha \gg \varepsilon$.

En la tabla 4.6 destaca que los valores obtenidos en ambos casos son parecidos. Si bien, el valor del COP no es tan alto como lo fue en el caso 2.1, se puede considerar aceptable.

Esta variante de los parámetros permite plantear una condición de diseño del TEC, en la cual se tiene un COP relativamente competitivo. Donde su principal ventaja resalta al notar que esta condición de operación puede ser aplicada a materiales semiconductores con un bajo coeficiente Seebeck S (ver ecs. 3.12) ó bien un alto producto Kr y con ello se obtiene una respuesta adecuada del TEC. Otra ventaja es la baja temperatura del lado caliente del TEC, muy parecida a la obtenida en el caso 2.1.

Por último, la fig. 4-27 muestra el comportamiento de la generación de entropía adimensional Φ_β cuando $\alpha \gg \varepsilon$. Sus valores son comparables a los del caso 3, pero en especial a los de la sección 2.3, donde para $\beta = 50$ se tiene:

Tabla 4.7

Sección:	2.3	3.1
Φ_β	0.22	0.28

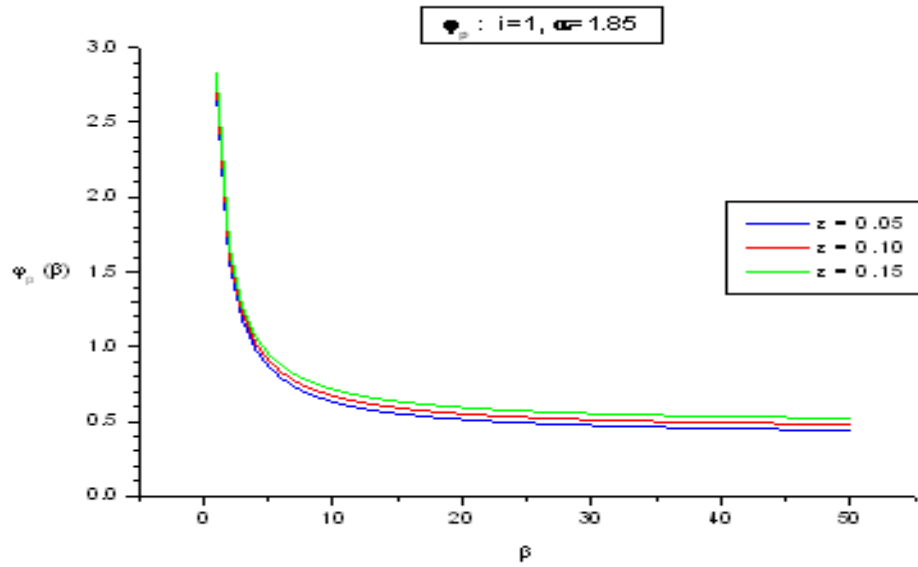


Figura 4-25: $\varphi_p(\beta)$, $\alpha \gg \varepsilon$.

Estos valores indican que el presente caso tiene un desempeño muy aceptable, dado que son muy parecidos. Este caso tiene la ventaja de que su modificación no necesita de un incremento en la corriente eléctrica I y puede ser aplicado cuando el producto $\frac{Kr}{S^2}$ (ec. 3.12) es grande, lo que puede originarse con valores pequeños del coeficiente Seebeck S o bien un valor alto del producto de la conductividad térmica K por la resistividad eléctrica r . El incremento de ε , caracterizado por el producto $\frac{1}{4NGR_2}$, (ec. 3.14) tiene un efecto negativo en la generación S_g .

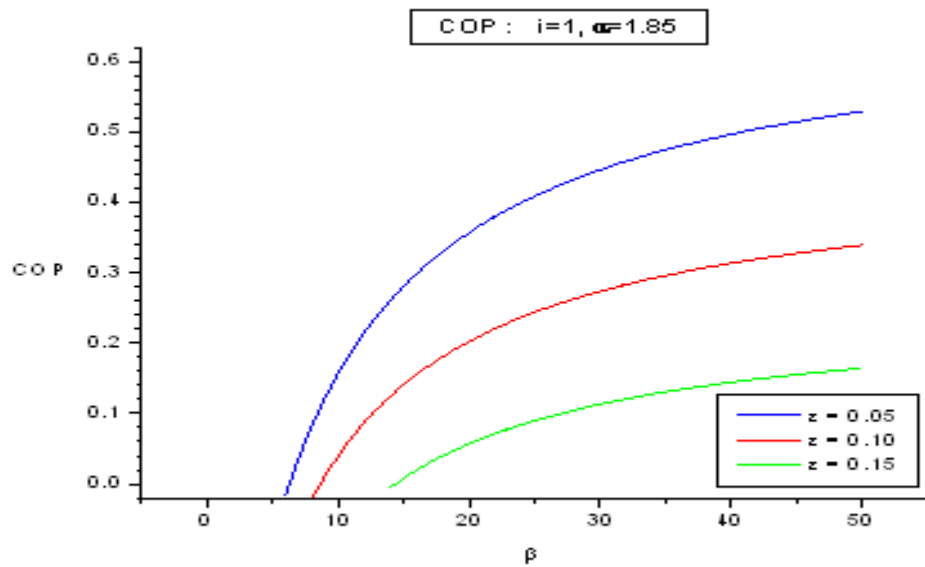


Figura 4-26: COP, $\alpha \gg \varepsilon$.

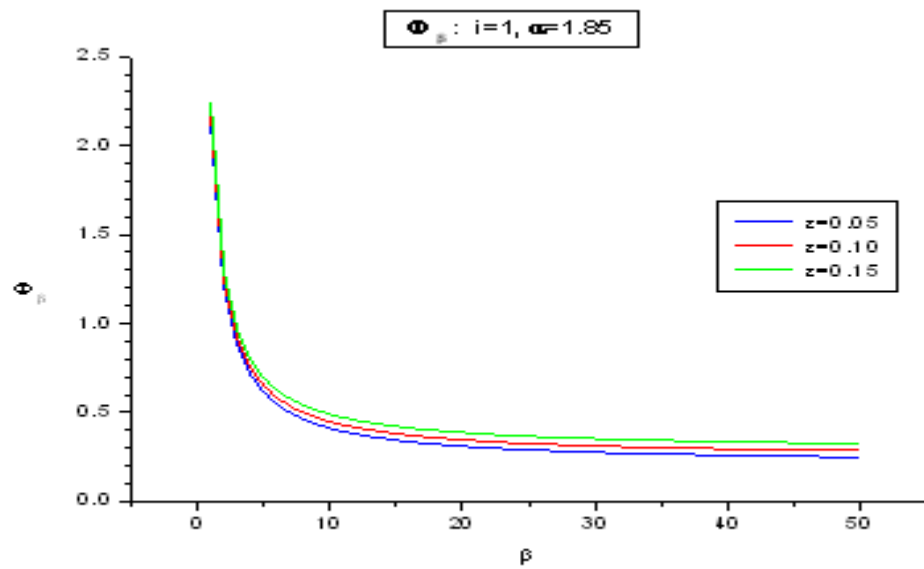


Figura 4-27: Φ_β , $\alpha \gg \varepsilon$.

Capítulo 5

Resumen

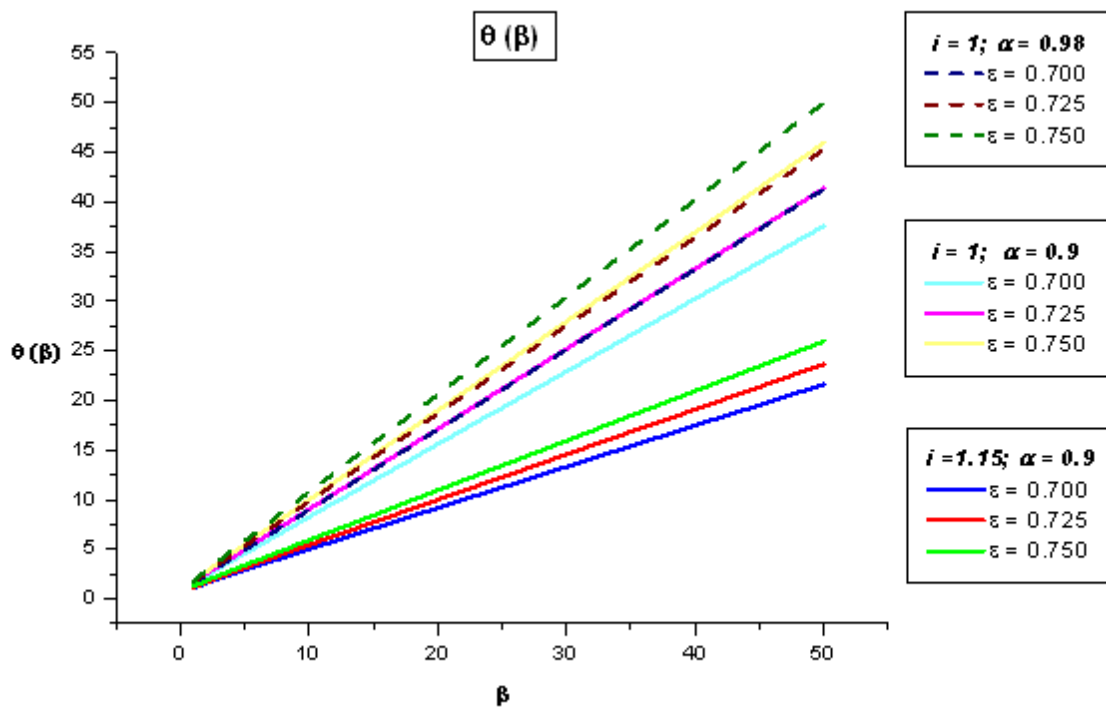


Figura 5-1: Comparación de $\theta(\beta)$ para α e i .

Comportamiento de $\theta(\beta)$

Su forma es prácticamente una línea recta con β en el dominio de los parámetros utilizados. Esto significa que al disminuir la diferencia $T_a - T_c$ la temperatura alta del TEC crece, ver fig. (5-1).

La pendiente está modulada por ε , ya que al aumentar ε se incrementa $\theta(\beta)$. De acuerdo a lo visto en el capítulo anterior, el crecimiento de ε se produce cuando el factor $\frac{1}{4NGR_2}$ disminuye. El incremento de α produce un ligero aumento en la pendiente de θ , lo que significa que es necesario que la figura de mérito $\frac{S^2}{KR}$ sea un valor grande para lograr una baja T , con ello se tiene una menor exigencia sobre el sumidero. Por otra parte, es conveniente que la corriente adimensional i sea mayor a 1, es decir, que la corriente eléctrica I sea mayor que la corriente de referencia I_o .

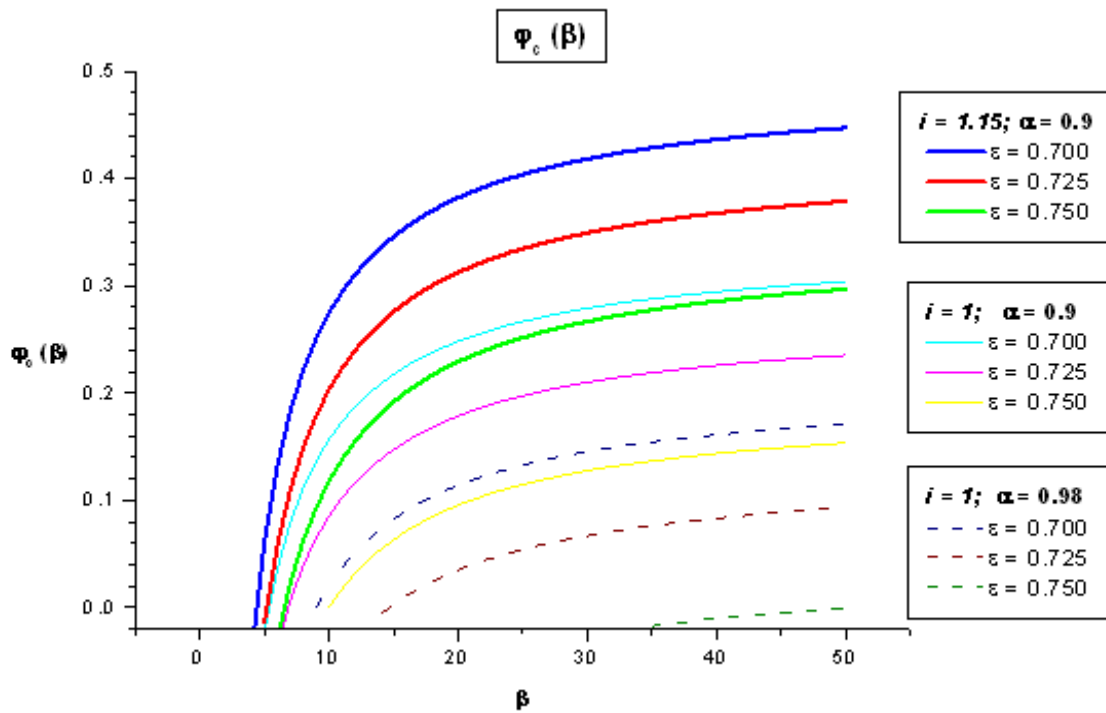


Figura 5-2: Comparación de $\varphi_c(\beta)$ para α e i .

Comportamiento de $\varphi_c(\beta)$

Su forma parece asintótica hacia un valor para β grandes. Esta forma creciente de φ_c es el resultado de la competencia entre el efecto de Peltier (refrigeración) y los efectos Joule y conducción de calor (disipativos), ver fig. (5-2).

El aumentar ε disminuye φ_c . Entonces es conveniente que el factor $\frac{1}{4NGR_2}$ sea grande para provocar una mayor potencia de refrigeración $\frac{\dot{Q}_c}{A}$. De acuerdo al Cap. 3, $G = \frac{Area}{Longitud}$, donde *Area* y *Longitud* se refieren al área y longitud de los elementos semiconductores. Entonces, el aumento de la potencia de refrigeración está ligado a un área grande y una longitud pequeña de los elementos. Esta conclusión es la misma a la expresada por autores como Simons y Chu [4] ó Cheng y Lin [12] quienes mencionan que el disminuir la longitud aumenta la capacidad de refrigeración y a su vez mejora el desempeño del TEC (aumenta el COP).

El incremento en α provoca una ligera caída en φ_c . Por lo tanto, es conveniente que el inverso de la figura de mérito $\frac{Kr}{S^2}$ sea un número pequeño para así aumentar la refrigeración $\frac{\dot{Q}_c}{A}$. Los valores más altos de refrigeración $\frac{\dot{Q}_c}{A}$ se alcanzan cuando i es mayor a 1; es decir, $I > I_o$.

Comportamiento de $\varphi_p(\beta)$

La tendencia decreciente de φ_p con β significa que al incrementar la refrigeración deseada $T_a - T_c$ aumenta la potencia requerida $\frac{\dot{Q}_p}{A}$, ver fig. (5-3).

El aumento de ε provoca una mayor demanda de φ_p . Por ello, es recomendable que el producto $\frac{1}{4NGR_2}$ sea pequeño, para así reducir el consumo de potencia útil $\frac{\dot{Q}_p}{A}$. Nuevamente es conveniente que la figura de mérito $\frac{S^2}{Kr}$ sea grande para reducir la potencia requerida. Utilizar valores de i mayores a 1 ($i = 1,15$) conduce a una disminución de la potencia útil $\frac{\dot{Q}_p}{A}$; entonces la corriente eléctrica I debe ser mayor al parámetro I_o (ec. 3.13).

Comportamiento del COP

La tendencia creciente del COP con β revela que al disminuir la refrigeración deseada $T_a - T_c$ se obtiene un mejor desempeño del TEC caracterizado por valores altos del COP. Esta conclusión es similar a la expresada por Cheng y Lin [12] quienes mencionan (en su tabla 2) que al exigir una mayor diferencia de temperaturas de refrigeración el COP cae, ver fig. (5-4).

El crecimiento de ε disminuye el COP. Entonces, es favorable que el factor $\frac{1}{4NGR_2}$ sea pequeño para provocar un COP alto.

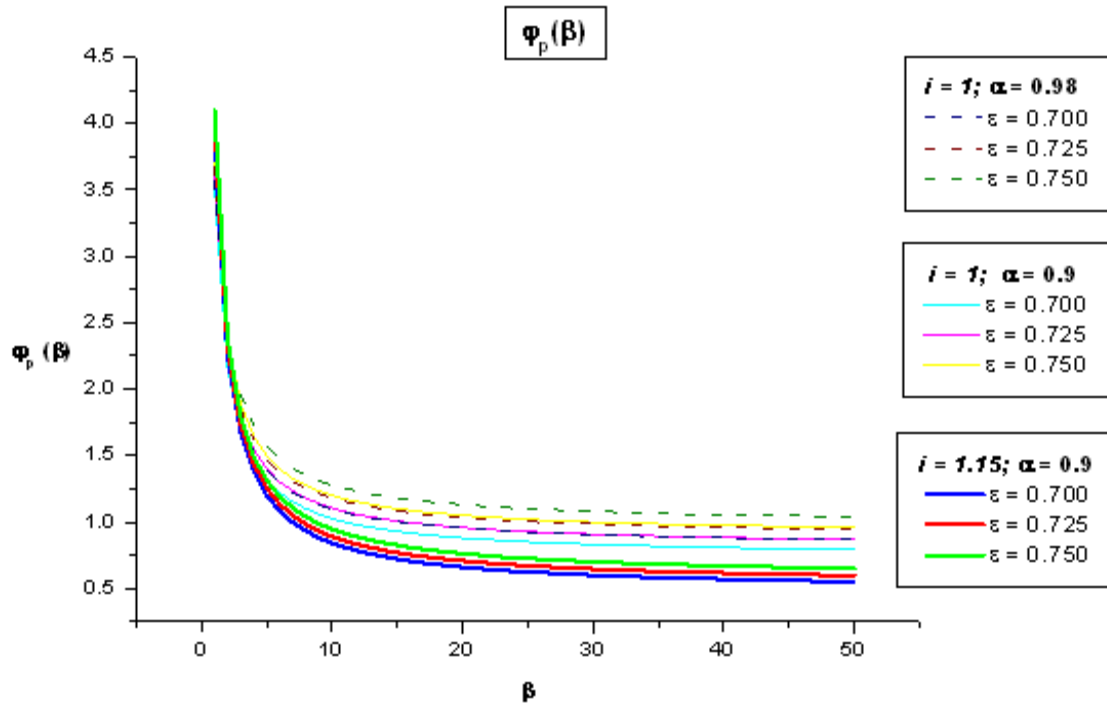


Figura 5-3: Comparación de $\varphi_p(\beta)$ para α e i .

El aumento de α se refleja en una ligera disminución del COP. Por ello, es conveniente que el cociente $\frac{K_T}{S^2}$ sea pequeño. A partir de los casos 1 y 2, la corriente eléctrica adimensional i debe tener valores mayores a 1 para incrementar la efectividad del sistema (COP) lo que se presenta cuando I es mayor a I_o .

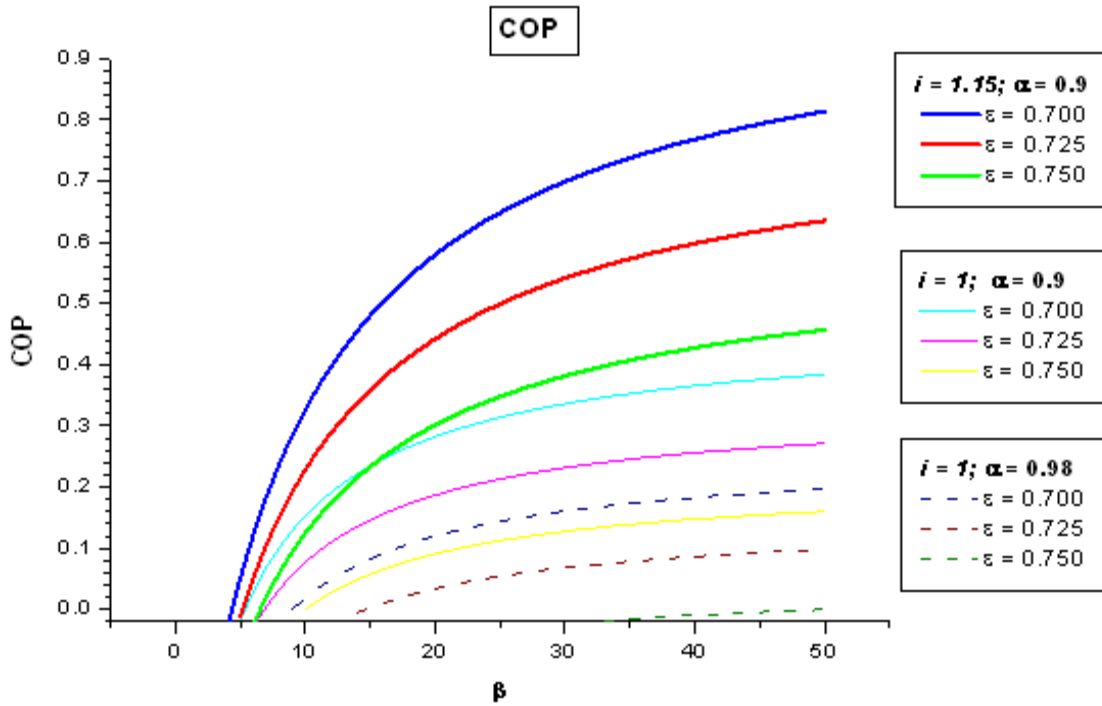


Figura 5-4: Comparación del COP para α e i .

Comportamiento de Φ_β

Φ_β es decreciente con β , físicamente significa que la generación de entropía S_g disminuye cuando la diferencia $T_a - T_c$ se hace más estrecha, ver fig. (5-5).

Cuando crece ε , aumenta la generación Φ_β . Por lo tanto, se recomienda que el factor $\frac{1}{4NGR_2}$ sea pequeño, para producir la menor generación de entropía S_g posible. Valores pequeños de α , es decir, valores altos en la figura de mérito $\frac{S^2}{Kr}$ provocan una menor generación S_g . Los valores más bajos de Φ_β se logran cuando $i = 1,15$. Lo que indica que la generación de entropía S_g baja cuando la corriente eléctrica I es mayor al parámetro I_o .

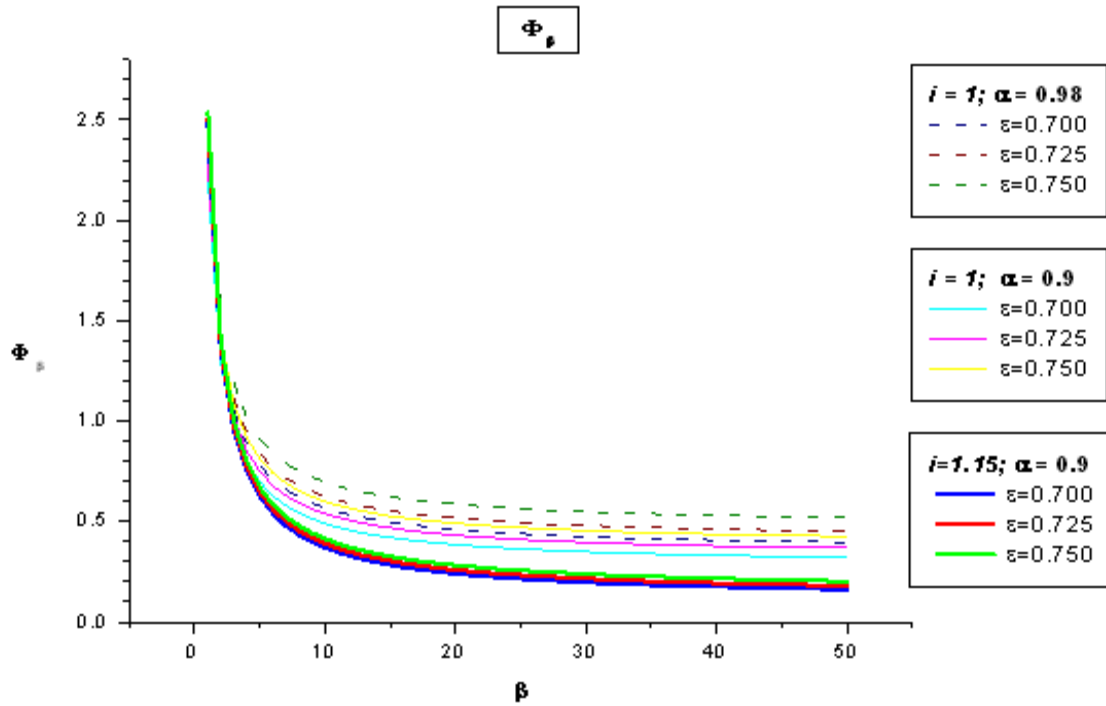


Figura 5-5: Comparación de Φ_β para α e i .

Es interesante observar que el comportamiento de Φ_β recuerda el desarrollo de la generación de entropía S_{genB} que se produce en una máquina térmica ubicada entre dos depósitos de temperatura (pag. 35, [13]), el cual está definido por la expresión (4.6), cuya gráfica se presenta en el caso 1 (fig. 4.6). Su desarrollo es particularmente similar al de Φ_β , cuando se considera $T_{alta} = T_a = 310K$, $T_{baja} = T_c$ y para una transferencia de calor unitaria Q . En ambos casos la generación de entropía disminuye cuando la diferencia de temperaturas se hace más pequeña.

Capítulo 6

Conclusiones

En el presente trabajo se elaboró un estudio sobre la primera y segunda ley de la termodinámica aplicadas a un sistema de refrigeración termoeléctrico (TEC). Con la finalidad de optimizar el desempeño del TEC se utilizó el método de minimización de generación de entropía. Para minimizar la generación de entropía se utilizó el cálculo variacional. El resultado de la minimización fue una expresión de la temperatura θ . A partir del conocimiento de la temperatura θ , se calcularon las principales variables del sistema como son: la rapidez de transferencia de calor de refrigeración φ_c , la potencia utilizada para su funcionamiento φ_p , el Coeficiente de Operación *COP* y por supuesto, la generación de entropía Φ , en sus formas adimensionales.

Además, se revisaron los efectos de los parámetros adimensionales i , α , ε y β sobre las variables adimensionales mencionadas. Donde, i representa la corriente eléctrica adimensional, α una forma adimensional de la figura de mérito, ε varios parámetros físicos (como la forma, el tamaño o el desempeño del sumidero de alta temperatura R_2) y β la refrigeración deseada $T_a - T_c$.

La aplicación de la primera ley de la termodinámica en el TEC permitió aclarar cuales son los principales flujos de energía que intervienen en dicho sistema. Se presentaron dos flujos de entrada, uno de salida y la acumulación de energía. El primero de ellos es la rapidez de transferencia de calor de refrigeración φ_c aplicada al procesador que se desea enfriar. El segundo es la potencia utilizada φ_p necesaria para el funcionamiento del sistema. El tercero es la rapidez de transferencia de calor desechada por el TEC. La acumulación es la rapidez de cambio de energías interna, cinética o potencial, del sistema.

La segunda ley de la termodinámica permitió determinar la generación de entropía. En dicho análisis se corroboró lo mencionado por otros autores como Zemansky [18] o Heikes [19] sobre que el efecto Peltier es reversible, mientras que los efectos Joule y Fourier no lo son (ecs. 3.18-3.27). Por ello, la generación está constituida básicamente por estos dos efectos.

Para obtener la mínima generación de entropía se aplicaron los principios del cálculo variacional. Porque el planteamiento del problema básico del cálculo variacional coincide con el de este estudio. Como resultado se obtuvo una expresión de la temperatura θ (ec. 3.37) que garantiza la mínima generación de entropía producida al efectuar el proceso de refrigeración por medio del TEC.

Como conclusiones generales de las comparaciones hechas a lo largo de los casos, se presentan las tendencias que benefician a las variables adimensionales $\theta(\beta)$, $\varphi_c(\beta)$, $\varphi_p(\beta)$, COP y Φ_β y sus respectivas variables físicas T , $\frac{\dot{Q}_c}{A}$, $\frac{\dot{Q}_p}{A}$, COP y S_g , provocadas por los cambios de los parámetros adimensionales i , α , ε y β que en términos de las variables físicas son:

- Diferencia de temperatura $T_a - T_c$ pequeña.
- Cociente $\frac{1}{4NGR_2}$ pequeño.
- Figura de mérito $\frac{S^2}{K_r}$ grande.
- Corriente eléctrica I mayor a la corriente de referencia I_o .

Las tendencias mencionadas tienen una gran importancia porque están asociadas a los COPs más grandes y las menores generaciones de entropía.

Capítulo 7

Apéndices

7.1. A. Termoelectricidad

La termoelectricidad comprende el conjunto de fenómenos relacionados con la conversión de calor en electricidad o viceversa. El término generalmente se restringe a sólo la conversión de energía producida por los efectos Seebeck, Peltier, Thomson, Joule y conducción de calor. Se puede encontrar información en mayor detalle sobre este fenómeno en diversas fuentes [19], [17] ó [20].

Efecto Seebeck

Seebeck en 1821 observó que cuando las uniones de un circuito eléctrico formado por dos conductores (metales, aleaciones y semiconductores) se encuentran a distintas temperaturas, se produce una fuerza electromotriz (fem). El voltaje generado es función de la temperatura y de los materiales conductores.

El efecto Seebeck consiste básicamente en la conversión de una diferencia de temperaturas en electricidad. El voltaje entregado puede ser expresado como:

$$V = \int_{T_1}^{T_2} (S_B(T) - S_A(T)) dT, \quad (7.1)$$

S_A y S_B son los coeficientes Seebeck de los materiales A y B , mientras que T_1 y T_2 son las temperaturas de las dos uniones. Los coeficientes Seebeck son no lineales y dependen de los conductores y de la diferencia de temperaturas.

Un termopar opera midiendo la diferencia de potencial causada por cables de distintos materiales. La diferencia de potencial puede ser usada para medir una diferencia de temperaturas o para medir una temperatura absoluta, seleccionando una temperatura de referencia en uno de los extremos.

El efecto Seebeck se produce debido a que la cantidad de portadores de carga (electrones) varía de un material a otro y también con la temperatura. Cuando se sueldan los dos materiales y se mantienen las temperaturas distintas, la difusión de los portadores de carga en las soldaduras se produce a ritmos distintos. Ello origina un movimiento neto de los portadores.

La magnitud de la FEM es función de la temperatura de prueba; que es la unión de mayor temperatura, la unión correspondiente a la temperatura T en la fig. 2-1. Con ello el efecto Seebeck depende de la naturaleza de los materiales y de la temperatura de prueba. La derivada de la FEM con respecto a la temperatura de prueba se denomina potencia termoeléctrica del par.

Efecto Peltier

Este efecto es inverso al Seebeck, se provoca una diferencia de temperaturas a partir de un voltaje eléctrico. Peltier en 1834 observó que al aplicar una fuerza electromotriz a un circuito eléctrico formado por dos conductores distintos, en las uniones se producía una diferencia de temperaturas. El calor Peltier absorbido en la unión fría es:

$$Q = (\Pi_{AB}) I = (\Pi_A - \Pi_B) I, \quad (7.2)$$

donde Π_{AB} es el coeficiente Peltier del termopar y Π_A y Π_B son los coeficientes Peltier correspondientes a cada material. Dichos coeficientes representan la cantidad de energía térmica que es llevada, por unidad de carga a través del material.

El calor Peltier (retirando el efecto Joule) es el calor necesario para que una soldadura recupere su temperatura inicial. El efecto Peltier se produce tanto por una fuente externa como por el propio par termoeléctrico. Distintas mediciones del calor Peltier reportadas por Zemansky [18], han mostrado que:

- a) La cantidad de calor Peltier producida por unidad de tiempo es proporcional a la intensidad de corriente; es decir, igual a πI , siendo π el llamado coeficiente Peltier, que es igual a la

cantidad de calor producida cuando una unidad de carga atraviesa una unión.

- b) El calor Peltier es reversible. Si se invierte el sentido de la corriente, permaneciendo constante su valor, el calor Peltier es el mismo, pero de sentido opuesto.
- c) El coeficiente Peltier depende de la temperatura y de los metales que forman una junta, siendo independiente de la temperatura de la otra unión.
- d) Se acepta el convenio de considerar a π_{AB} positivo cuando una corriente eléctrica que pasa de A a B ocasiona una absorción de calor en la unión.

Por último, cuando se establece una diferencia de temperaturas entre los extremos de un material semiconductor se genera un voltaje, este es el llamado voltaje Seebeck y es directamente proporcional a la diferencia de temperaturas. El efecto Peltier es controlado por el coeficiente Peltier, que es definido como el producto del coeficiente Seebeck por la temperatura absoluta del material semiconductor.

Efecto Thomson

Describe el calentamiento o enfriamiento de un conductor con un gradiente de temperatura, la emisión o absorción de calor depende del material.

Cuando la corriente eléctrica se mueve de la unión fría a la caliente los electrones absorben energía, con ello aumenta su energía potencial. Cuando la corriente se mueve de la unión caliente a la fría, los electrones ceden energía, con ello disminuye su energía potencial.

Si los pasos unión fría a caliente y caliente a fría se realizan a través de un mismo conductor, los efectos mencionados se cancelan. Si los pasos anteriores se realizan en distintos materiales, los cambios de energía potencial no necesariamente se cancelan, produciendo un cambio en las temperaturas. La producción de calor por unidad de volumen debido a este efecto se calcula como:

$$q = \sigma I \frac{dT}{dx}, \quad (7.3)$$

donde σ es el coeficiente Thomson, $\frac{dT}{dx}$ es el gradiente de temperatura a lo largo del conductor e I es la corriente eléctrica aplicada.

Relaciones de Thomson

El efecto Seebeck es una combinación de los efectos Peltier y Thomson. Lord Kelvin en 1854 encontró dos relaciones entre los correspondientes coeficientes. La temperatura absoluta T , el coeficiente Peltier Π y el coeficiente Seebeck S son asociadas en la primera relación de Thomson:

$$\Pi = ST, \quad (7.4)$$

mientras que la segunda relaciona el coeficiente Thomson con el cambio del coeficiente Seebeck:

$$\sigma = T \frac{dS}{dT}. \quad (7.5)$$

Para medir el efecto Thomson es necesario producir un gradiente conocido de temperatura en una cierta región y simultáneamente hacer el paso de una corriente eléctrica conocida que modifique el gradiente. La cantidad de calor debida al efecto Thomson por unidad de tiempo es igual a la cantidad de energía eléctrica disipada menos la cantidad de calor conducida. Gracias a las mediciones que se han llevado a cabo [18], se deducen las siguientes conclusiones:

- a) La cantidad de calor producida por el efecto Thomson, por unidad de tiempo en una pequeña región de un hilo, que transporta una corriente I y soporta una diferencia de temperaturas dT , es igual a σIdT , siendo σ el llamado *coeficiente Thomson*.
- b) El efecto Thomson es reversible.
- c) El coeficiente Thomson depende del metal de que esta hecho el hilo y de la temperatura media de la pequeña región considerada.
- d) Se considera a σ positivo cuando una corriente de sentido opuesto al del gradiente de temperatura (de baja a alta) produce una adsorción de calor por el conductor.

Conducción de calor

Se debe a la conducción de calor del extremo caliente al frío de los conductores. La rapidez de transferencia de calor es proporcional al gradiente de temperatura. La conducción se debe a las colisiones entre las moléculas durante su movimiento aleatorio. Este efecto se calcula como:

$$Q = -KA \frac{dT}{dx}, \quad (7.6)$$

Q es la rapidez de transferencia de calor por conducción.

K es la conductividad térmica del material.

A es el área perpendicular a la dirección de la transferencia de calor.

$\frac{dT}{dx}$ es el gradiente de temperatura con respecto a la dirección x .

Efecto Joule

Este efecto explica el calentamiento en un conductor debido al transporte de una corriente eléctrica. La magnitud de este efecto es proporcional al cuadrado de la corriente conducida y es independiente de la dirección, el calentamiento Joule se escribe como:

$$q = rI^2. \quad (7.7)$$

7.1.1. Flujos simultáneos: calorífico y eléctrico

El análisis de dos flujos de energía que circulan simultáneamente a través de un conductor ha sido abordado por diversos investigadores entre ellos resaltan Kelvin, Seebeck, Peltier y Onsager [18]. Lord Kelvin comprobó que los dos fenómenos irreversibles, los efectos Joule y Fourier, no podían eliminarse eligiendo simplemente hilos de dimensiones adecuadas, ya que si los hilos se hacen muy delgados para reducir la conducción de calor, la resistencia eléctrica aumenta, mientras que si se hacen gruesos para disminuir la resistencia eléctrica, la conducción de calor se hace mayor.

Kelvin igualó a cero la suma de todos los cambios de entropía, y dedujo relaciones que fueron confirmadas posteriormente por Onsager, [19]. Sin embargo, en su estudio quedó pendiente el hecho de que los efectos Seebeck, Peltier y Thomson están ligados íntimamente con los efectos irreversibles. Por ello, la solución debe buscarse en el estudio de flujos irreversibles acoplados, desarrollado por Onsager.

Los primeros intentos para explicar los cambios de entropía en un fenómeno termoeléctrico fueron elaborados por Kelvin en 1854. Pero fue hasta el desarrollo de la teoría de la termodinámica irreversible elaborada por Onsager que los planteamientos y resultados de Kelvin pudieron ser firmemente fundamentados. Heikes y Ure [19] presentan un resumen de lo expuesto por Kelvin, complementado con la teoría de Onsager sobre la generación de entropía en el efecto termoeléctrico.

7.2. B. Cálculo variacional

El calculo variacional permite encontrar los valores extremos (mínimo o máximo) de las funcionales. Una funcional es definida como una función de otras funciones dentro de un dominio. Por ello, el cálculo de variaciones puede ser usado para resolver problemas de trayectorias óptimas. Por ejemplo, puede ser utilizado para resolver problemas de dinámica, de elasticidad, vibraciones, óptica y control entre otros.

Problema fundamental del cálculo variacional

Encontrar una función $u(x)$ que minimice la funcional (integral):

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x, u, u', u'') dx, \quad (7.8)$$

donde A y F pueden ser llamadas funcionales debido a que son funciones de otras funciones. Aquí x es la variable independiente:

$$u = u(x); \quad u' = \frac{du(x)}{dx}; \quad u'' = \frac{d^2u(x)}{dx^2}. \quad (7.9)$$

Normalmente la funcional posee un claro significado físico, en este estudio representa la generación de entropía. En otros casos podría ser la energía potencial de un cuerpo, una trayectoria o la superficie de un cuerpo.

La integral (3.2) está definida en el dominio $[x_1, x_2]$ donde $u(x_1) = u_1$ y $u(x_2) = u_2$ representan las condiciones de frontera del problema. El procedimiento para encontrar una solución a la ec. (3.2) consiste en proponer una solución y compararla con la solución exacta. La diferencia resultante se minimiza de manera similar al cálculo ordinario, este procedimiento se describe

con mayor detalle en libros de autores como Rao [15], Bejan et al. [14] ó Ewing [16], como ejemplos. Para garantizar que la diferencia sea minimizada, se debe de satisfacer la ecuación de Euler – Lagrange:

$$\frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) = 0. \quad (7.10)$$

Cuando el problema está sujeto a una o varias restricciones, se puede aplicar el método de multiplicadores de Lagrange. Por ejemplo, se desean encontrar las funciones $u_1(x, y, z)$, $u_2(x, y, z), \dots, u_n(x, y, z)$, que tiene la funcional:

$$A = \int_V f(x, y, z, u_1, u_2, \dots, u_n, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \dots) dx. \quad (7.11)$$

Sujeto a las m restricciones:

$$g_1 \left(x, y, z, u_1, u_2, \dots, u_n, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \dots \right) = 0, \quad (7.12)$$

$$g_m \left(x, y, z, u_1, u_2, \dots, u_n, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \dots \right) = 0. \quad (7.13)$$

Con ello, el método de multiplicadores de Lagrange consiste en tomar variaciones en la funcional:

$$A = \int_V (f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_m g_m) dx. \quad (7.14)$$

Nomenclatura

C	Calor específico del elemento termoeléctrico [J/KgK]
COP	Coefficiente de funcionamiento
E	Energía [J]
E_{cin}	Energía cinética [J]
E_{pot}	Energía potencial [J]
F	Funcional
G	Factor geométrico del elemento termoeléctrico [m]
I	Corriente eléctrica [A]
i	Corriente eléctrica adimensional
K	Conductividad térmica del elemento termoeléctrico [W/mK]
N	Número de pares del elemento termoeléctrico
\dot{Q}_c	Rapidez de transferencia de calor del lado frío del TEC [W]
\dot{Q}_h	Rapidez de transferencia de calor del lado caliente del TEC [W]
\dot{Q}_p	Potencia proporcionada al TEC [W]
r	Resistividad eléctrica [Ωm]
R_2	Resistencia térmica del sumidero [K/W]
S	Coefficiente Seebeck [V/K]
S_g	Generación de entropía [J/K]
S_{genB}	Generación de entropía entre dos depósitos de temperatura [J/K]
T	Temperatura [K]
t	Tiempo [s]
U	Energía interna del TEC [J]
V	Volumen [m^3]

Símbolos Griegos

α	Parámetro adimensional
β	Parámetro adimensional
ε	Parámetro adimensional
θ	Temperatura adimensional
τ	Tiempo adimensional
Φ	Generación de entropía adimensional
φ	Flujo de energía adimensional

Subíndices

a	Propiedad evaluada a la temperatura ambiente
$alta$	Propiedad del depósito de alta temperatura
$baja$	Propiedad del depósito de baja temperatura
c	Propiedad evaluada a la temperatura baja del TEC
h	Propiedad evaluada a la temperatura alta del TEC
N	Nuevo
o	Propiedad de referencia
p	Propiedad evaluada a la condición del trabajo

Bibliografía

- [1] Phelan, P.E., Chiriac, V.A. Lee, T.Y.T. “*Current and future miniature refrigeration cooling technologies for high power microelectronics*” IEEE Transactions On Components And Packaging Technologies, Vol. 25, No. 3, pp. 356 -365, (2002).
- [2] Bejan, A. “Advanced engineering thermodynamics” John Wiley and Sons, 1988.
- [3] Riffat, S.B., Ma, X. “*Thermoelectrics: a review of present and potencial applications*” Applied Thermal Engineering, Vol. 23, pp. 913-935 (2003).
- [4] Simons, R.E., Chu, R.C. “*Application of thermoelectric cooling to electronic equipment: a review and analysis*” Sixteenth IEEE Semi-Therm Symposium, 2000.
- [5] Amon, C.H., Murthy, J., Yao, S.C., Narumanchi, S., Wu, C.F., Hsieh, C.C. “*MEMS enabled thermal managment of high-heat-flux devices EDIFICE: embedded droplet impingement for integrated cooling of electronics*” Experimental Thermal Fluid Science, Vol. 25, pp. 231-242, (2001).
- [6] Chein, R., y Huang, G. “*Thermoelectric cooler application in electronic cooling*”, Applied Thermal Engineering, Vol. 24, pp. 2207-2217 (2004).
- [7] Omer, S.A., Riffat, S.B., Ma X. “*Experimental investigation of a thermoelectric refrigeration system employing a phase change material integrated with thermal diode*” Applied Thermal Energy, Vol. 21, pp. 1265-1271 (2001).
- [8] Cheng, Y.H., Lin W.K. “*Geometric optimization of thermoelectric coolers in a confined volume using genetic algorithms*” Applied Thermal Engineering, Vol. 25, pp. 2983-2997, (2005).

- [9] Gordon, J.M., Ng, K.C., Chua, H.T., Chakraborty, A. “*The electro-adsorption chiller: a miniaturized cooling cycle with applications to micro-electronics*” International Journal of Refrigeration, Vol. 25, pp. 1025-1033 (2002).
- [10] Yang, R., Chen, G., Kumar, A.R., Snyder, G.J., Fleurial, J.P. “*Transient cooling of thermoelectric coolers and its applications for microdevices*”, Energy Conversion & Management, Vol. 46, pp. 1407-1421 (2005).
- [11] Vikhor, L.N., Anatyshuk, L.I. “*Theoretical evaluation of maximum temperature difference in segmented thermoelectric coolers*” Applied Thermal Engineering, Article in press, 2006.
- [12] Cheng, Y.H., Lin, W.K. “*Geometric optimization of thermoelectric coolers in a confined volume using genetic algorithms*” Applied Thermal Engineering, Vol. 25, pp. 2983-2997, (2005).
- [13] Bejan, A. “Entropy generation minimization” CRC Press, 1996.
- [14] Bejan, A., Tsatsaronis, G. Moran, M. “Thermal design and optimization”, John Wiley and Sons, 1996.
- [15] Rao, S. “Engineering Optimization: Theory and Practice” Third Edition, John Wiley & Sons, Chap. 12.4, 1996.
- [16] Ewing G. M. “Calculus of variations with applications” Dover, 1985.
- [17] <http://www.melcor.com/tec.html>
- [18] Zemansky, M.W. “*Heat and thermodynamics: an intermediate textbook*”, 5th ed., McGraw-Hill, 1968.
- [19] Heikes, R.R., Ure, R.W. “Thermoelectricity: Science and Engineering” Interscience Publishers, Chap. 2, 1961.
- [20] Pollock, D.D. “Physics of engineering materials” Prentice Hall, Chap 7, 1990.