DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO: XI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA (DINAMICA ESTRUCTURAL)

1. M. EN I. RAMON CERVANTES BELTRAN
SECRETARIO GENERAL
FACULTAD DE INGENIERIA
U N A M
MEXICO, D.F.
548 96 65

2. M. EN C. ENRIQUE DEL VALLE CALDERON
PROFESOR
D E P F I
U N A M
MEXICO, D.F.
550 52 15 Ext. 4479

3. M. EN C. JORGE PRINCE ALFARO
INVESTIGADOR
INSTITUTO DE INGENIERIA
CUBICULO 211
U N A M
MEXICO, D.F.
548 11 35

4. DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ (COORDINADOR)
DIRECTOR
FACULTAD DE INGENIERIA
U N A M
MEXICO, D.F.
548 33 54

5. M. EN C. ROBERTO STARK FELDMAN
GERENTE TECNICO EN LA
DIRECCION DE ESTRUCTURAS
DIRAC, S.A. DE C.V.
MEXICO, D.F.
575 80 32 Ext. 31

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

DINAMICA ESTRUCTURAL

DEFINICION

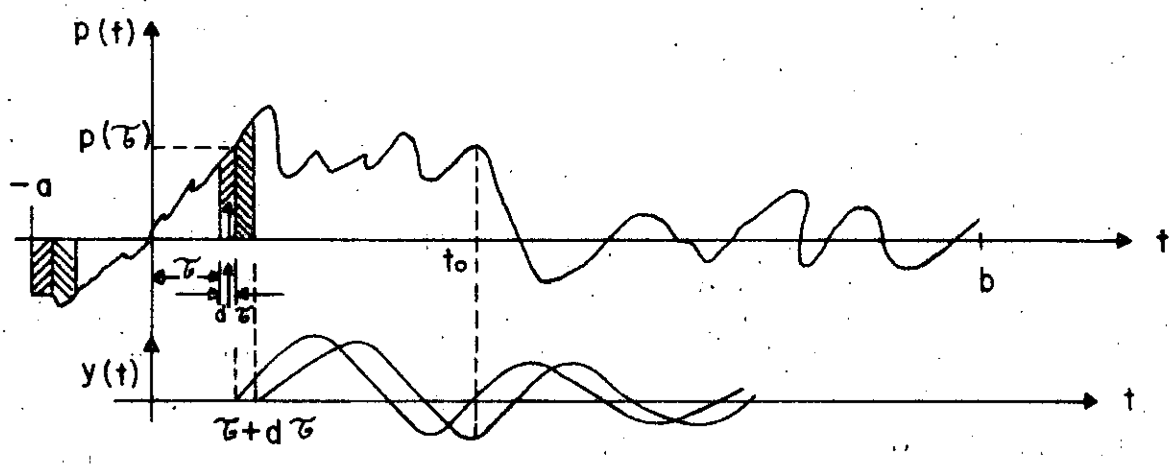
Dr. Octavio A. Rascón Chávez

JULIO, 1985

SOLUCION AL PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS

A. FUERZA EXTERNA

VEAMOS PRIMERO EL CASO EN QUE EXISTE p(t) Y QUE $\ddot{x}_o(t) = 0$, SIENDO p(t) ARBITRARIA



PUESTO QUE dτ<<T, LA FUERZA APLICADA EN t= τ PRODUCIRA UN INCREMENTO INSTANTANEO EN LA VELOCIDAD DE LA MASA IGUAL A

$$\dot{y} = \frac{p(\tau)d\tau}{M}$$

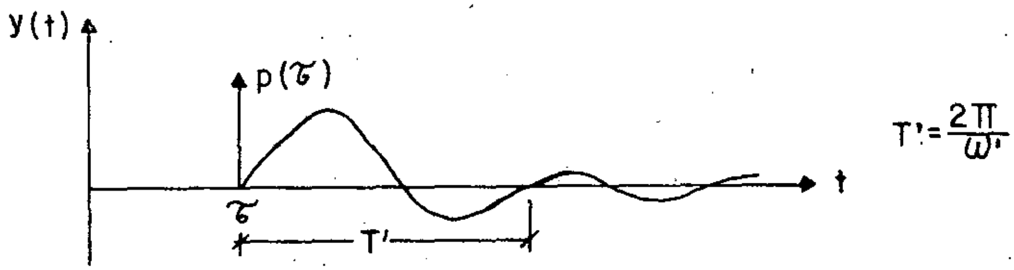
Y UN INCREMENTO INSTANTANEO NULO EN EL DESPLAZAMIENTO, ES DECIR, y=0. TOMANDO ESTOS INCREMENTOS COMO CONDICIONES INICIALES EN t=τ, LA EC. 5 DA COMO RESULTADO

$$y(t) = \frac{p(\tau)d\tau}{M\omega'} \text{ sen } \omega'(t-\tau)\ e^{-h(t-\tau)} \quad ; \quad t \geq \tau$$

PUESTO QUE EL SISTEMA ES LINEAL ES POSIBLE SUPERPONER LOS EFECTOS OCASIONADOS POR LOS IMPULSOS APLICADOS EN CADA τ QUE HAYAN OCURRIDO ANTES DEL INSTANTE t DE INTERES; ES DECIR,

$$y(t) = \frac{1}{M\omega'} \int_{-\infty}^{t} p(\tau) e^{-h(t-\tau)} \operatorname{sen}\omega'(t-\tau)\,d\tau \qquad (12)$$

LA FUNCION $\frac{1}{M\omega'} e^{-h(t-\tau)} \operatorname{sen}\omega'(t-\tau)$,QUE ES LA RESPUESTA A UN IMPULSO INSTANT NEO UNITARIO DE FUERZA, SE LE CONOCE COMO *FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL SISTEMA.*



LA SOLUCION DADA EN LA EC. (12) SE DENOMINA INTEGRAL DE DUHAMEL. ESTA CONSTITUYE LA SOLUCION PARTICULAR DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO; LA SOLUCION GENERAL ES:

$$y(t) = Ae^{-ht} \cos(\omega' t-\theta) + \frac{1}{M\omega'} \int_{-\infty}^{t} p(\tau) e^{-h(t-\tau)} \operatorname{sen}\omega'(t-\tau)\,d\tau$$

EN DONDE A y θ DEPENDEN DE LAS CONDICIONES INICIALES DE DESPLAZAMIENTO Y VELOCIDAD, $y(0)$ Y $\dot{y}(0)$, RESPECTIVAMENTE. EN GENERAL LA PARTE DE LA RESPUESTA DADA POR LA SOLUCION PARTICULAR ES LA MAS IMPORTANTE, YA QUE LA OTRA PARTE SE AMORTIGUA RAPIDAMENTE.

B. MOVIMIENTO DEL SUELO

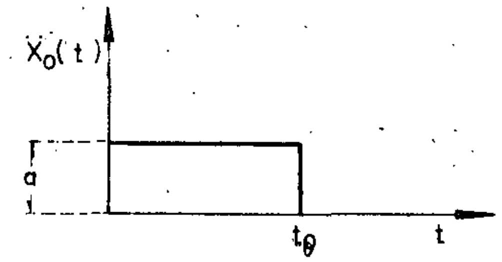
PARA ESCRIBIR LA SOLUCION PARTICULAR DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO PARA EL CASO DE VIBRACION FORZADA POR MOVIMIENTO DE LA BASE DE LA ESTRUCTURA, BASTA CAMBIAR $p(\tau)/M$ DE LA EC. (12) POR $-\ddot{x}_o$, YA QUE EN DICHA ECUACION APARECE EN EL MIEMBRO DERECHO $p(t)/M$ CUANDO LA EXCITACION ES $P(t)$ Y APARECE $-\ddot{x}_o$ CUANDO LA EXCITACION ES POR MOVIMIENTO DEL SUELO. EN ESTE CASO

LA SOLUCION PARTICULAR ES, ENTONCES

$$\boxed{y(t) = \frac{-1}{\omega'} \int_{-\infty}^{t} \ddot{x}_o(\tau) e^{-h(t-\tau)} \operatorname{sen}\omega'(t-\tau) d\tau} \qquad (14)$$

EJEMPLO

CALCULAR LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD CON AMORTIGUAMIENTO NULO, CUANDO LA EXCITACION ES LA SIGUIENTE:



$$\zeta = 0$$

$$\ddot{x}_o(t) = a, \text{ SI } 0 \leq t \leq t_o$$

$$\ddot{x}_o(t) = 0, \text{ SI } t<0 \text{ Ó } t>t_o$$

CONSIDERESE QUE $y(0)=0$ Y $\dot{y}(0)=0$. PUESTO QUE LAS CONDICIONES INICIALES SON NULAS SE TIENE QUE A=0 (UTILIZANDO LA EC. (13) Y LA SOLUCION PARTICULAR QUE SIGUE, EC. (A)):

$$y(t) = \frac{-1}{\omega} \int_{-\infty}^{t} a \operatorname{sen}\omega(t-\tau) d\tau = \frac{-a}{\omega} \int_{0}^{t} \operatorname{sen} \omega(t-\tau) d\tau$$

$$= \frac{-a}{\omega^2} (1-\cos\omega t) \qquad \text{SI} \quad 0 \leq t \leq t_o \qquad (A)$$

PARA FINES DE DISEÑO ESTRUCTURAL ES IMPORTANTE CONOCER LA RESPUESTA MAXIMA; ESTA OCURRE CUANDO $\cos\omega t = -1$, O SEA, CUANDO

$$\omega t = \pi \quad \text{O} \quad t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{2}$$

Y VALE

$$\text{MAX}\ \{[y(t)]\} = \frac{2a}{\omega^2} = \frac{a}{2\pi^2}\, T^2, \quad \text{SI} \quad 0 \leq \frac{T}{2} \leq t_o \quad \text{O} \quad 0 \leq T \leq 2t_o$$

PARA $t > t_o$, O SEA, PARA $T/2 > t_o$ ES NECESARIO OBTENER LA RESPUESTA EN VIBRACION LIBRE CON LAS CONDICIONES INICIALES DE VELOCIDAD Y DESPLAZAMIENTO CORRESPONDIENTES A $t = t_o$:

$$y(t_o) = \frac{-a}{\omega^2}\,(1 - \cos\omega t_o) \;; \quad \dot{y}(t_o) = \frac{-a}{\omega}\,\text{sen}\,\omega t_o$$

APLICANDO LAS ECS. (5) Y (6) OBTENEMOS:

$$y(t) = \frac{-a}{\omega^2}\left[\text{sen}\,\omega t_o\ \text{sen}\,\omega t' - (1 - \cos\omega t_o)\cos\omega t'\right]$$

$$= \frac{-a}{\omega^2}\sqrt{\text{sen}^2\omega t_o + (1 - \cos\omega t_o)^2}\ \text{sen}\,(\omega t' - \phi)$$

$$y(t) = \frac{-2a}{\omega^2}\,\text{sen}\frac{\omega t_o}{2}\ \text{sen}(\omega t' - \phi)$$

DONDE $t' = t - t_o$ Y $\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{1 - \cos\omega t_o}{\text{sen}\,\omega t_o}\right)$

EL VALOR MAXIMO DE LA RESPUESTA EN ESTE INTERVALO ES

$$\text{MAX}\{[y(t)]\} = \frac{2a}{\omega^2}\left|\text{sen}\frac{\omega t_o}{2}\right| , \quad \text{SI}\ t > t_o \quad \text{O} \quad T > 2t_o$$

EXCITACION ARMONICA

CONSIDEREMOS AHORA EL CASO EN QUE LA ESTRUCTURA ES EXCITADA POR LA FUERZA ARMONICA

$$p(t) = p_o \operatorname{sen}\Omega t$$

DE DURACION INDEFINIDA.

LA SOLUCION DE ESTE PROBLEMA SE PUEDE ENCONTRAR SUSTITUYENDO A $p(t) = p_o \operatorname{sen}\Omega t$ EN LA INTEGRAL DE DUHAMEL Y OBTENIENDO SU SOLUCION. SIN EMBARGO, EL RESULTADO LO OBTENDREMOS DE LA CONSIDERACION DE QUE PARA QUE EL MIEMBRO DERECHO DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO APAREZCA UN TERMINO ARMONICO ES NECESARIO QUE EN EL IZQUIERDO SE TENGAN COMBINACIONES DE TERMINOS TAMBIEN ARMONICOS. CONSIDEREMOS, POR LO TANTO, LA SOLUCION

$$y(t) = A \operatorname{sen}\Omega t + B \cos\Omega t \tag{14'}$$

Y DETERMINEMOS LOS VALORES QUE DEBEN TENER A Y B PARA SATISFACER LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO, PARA LO CUAL HAY QUE SUSTITUIR A $y(t)$, $\dot{y}(t)$ Y $\ddot{y}(t)$ EN LA ECUACION DIFERENCIAL. HACIENDO ESTO Y FACTORIZANDO:

$$(-A\Omega^2 - 2h\Omega B + \omega^2 A) \operatorname{sen}\Omega t +$$

$$(-B\Omega^2 + 2hA\Omega + \omega^2 B) \cos\Omega t = \frac{p_o}{M} \operatorname{sen}\Omega t + 0 \times \cos\Omega t$$

PARA QUE ESTA IGUALDAD SE CUMPLA SE REQUIERE QUE

$$-A\Omega^2 - 2h\Omega B + \omega^2 A = \frac{p_o}{M}$$

$$-B\Omega^2 + 2h\Omega A + \omega^2 B = 0$$

RESOLVIENDO ESTE SISTEMA DE ECUACIONES SE OBTIENE:

$$A = \frac{\frac{p_o}{M}(\Omega^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2\Omega^2}$$

$$B = \frac{-2h\Omega \frac{p_o}{M}}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2\Omega^2}$$

SUSTITUYENDO A Y B EN LA EC. (14'):

$$y(t) = \frac{\frac{p_o}{M}}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2\Omega^2}\{(\Omega^2 - \omega^2)\ \text{sen}\Omega t - 2h\Omega\ \cos\Omega t\} \qquad (15)$$

O, TAMBIEN

$$y(t) = \frac{\frac{p_o}{M}}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2\Omega^2}}\ \text{sen}(\Omega t - \emptyset) \qquad (16)$$

EN DONDE $\emptyset = \text{ANG TAN } (\frac{-B}{A}) = \text{TAN}^{-1} \frac{2h\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}$ = ANGULO DE FASE (17)

DIVIDIENDO NUMERADOR Y DENOMINADOR DE LAS ECS. (16) Y (17) ENTRE ω^2 SE OBTIENE:

$$\boxed{y(t) = \frac{\frac{p_o}{k}}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2 + (2\zeta\frac{\Omega}{\omega})^2}}\ \text{sen}(\Omega t - \emptyset)} \qquad (18)$$

$$\boxed{\emptyset = \text{TAN}^{-1} \frac{2\zeta\frac{\Omega}{\omega}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}} \qquad (19)$$

SI SE ANALIZA LA SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE MOVIMIENTO PARA EL CASO DE CONDICIONES INICIALES NULAS Y $\beta=1$ SE TIENE QUE:

$$y(t) = e^{-ht}(A \operatorname{sen} \omega' t + B \cos \omega' t) - \frac{p_o}{k} \frac{\cos \omega t}{2\zeta}$$

$$y(0) = B - p_o/(2\zeta k) = 0$$

DE DONDE, HACIENDO $y(0)=0$ Y $\dot{y}(0)=0$, SE OBTIENEN:

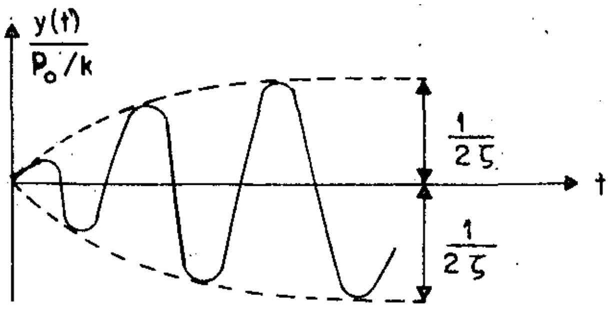
$$A = \frac{p_o}{k} \frac{\omega}{2\omega'} = \frac{p_o}{k} \frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \quad ; \quad B = \frac{p_o}{k} \cdot \frac{1}{2\zeta}$$

POR LO QUE

$$y(t) = \frac{1}{2\zeta} \frac{p_o}{k} \left[e^{-ht} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen}\omega' t + \cos\omega' t\right) - \cos\omega t\right]$$

PARA AMORTIGUAMIENTOS PEQUEÑOS:

$$\frac{y(t)}{p_o/k} \doteq \frac{1}{2\zeta} (e^{-ht}-1)\cos\omega t$$

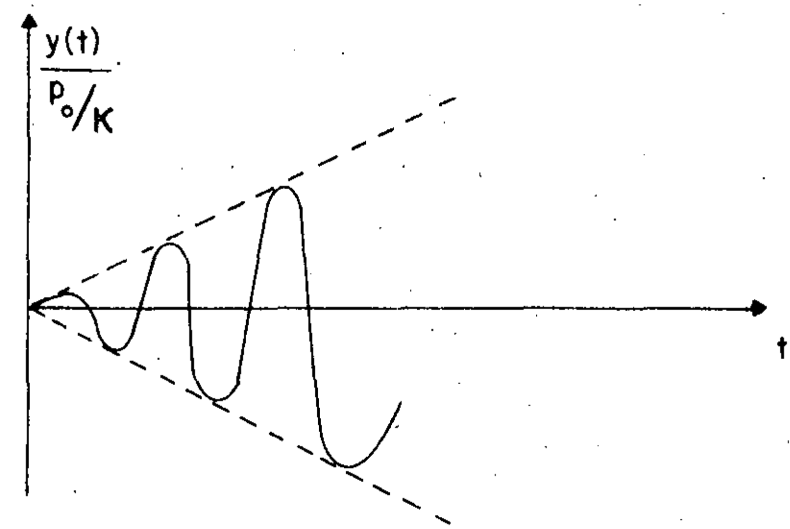


SI $\zeta > 0$ y $\beta = 1$

SI $\zeta=0$, APLICANDO LA REGLA DE L'HOSPITAL, SE OBTIENE:

$$\frac{y(t)}{p_o/k} = \frac{1}{2} (\operatorname{sen}\omega t - \omega t \cos\omega t)$$

O SEA, EL MAXIMO DE LA RESPUESTA TIENDE A INFINITO GRADUALMENTE.



CARACTERISTICAS DINAMICAS DE LOS REGISTRADORES DE SISMOS.

SI LA ACELERACION DE LA BASE DE UN INSTRUMENTO ES ARMONICA, DADA POR LA ECUACION

$$\ddot{x}_o(t) = a \operatorname{sen}\Omega t$$

EL FACTOR DE AMPLIFICACION RESULTA SER

$$\bar{B}_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \quad \frac{1}{\omega^2} = \frac{B_d}{\omega^2}$$

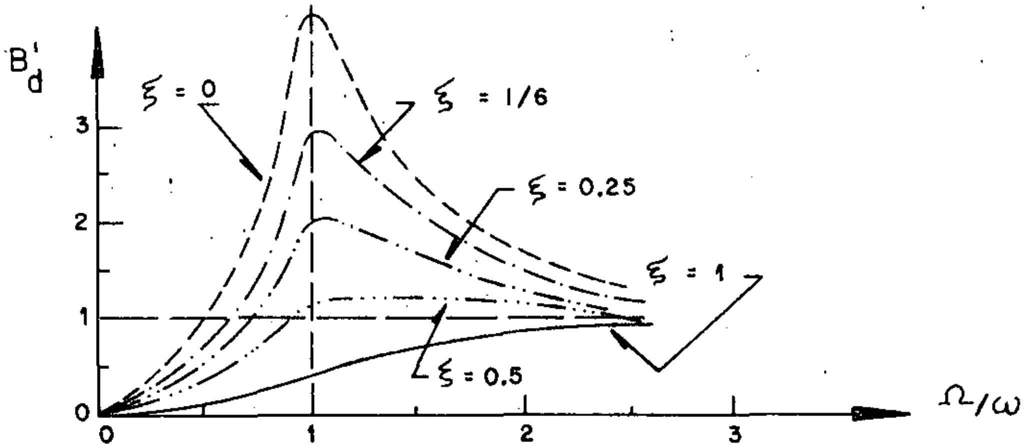
PUESTO QUE LA FIG I CORRESPONDE A B_d, Y EN ELLA SE OBSERVA QUE PARA $\zeta = 0.7$ SE TIENE $B_d \doteq 1$ PARA $0 \leq \Omega/\omega \leq 0.6$, SE CONCLUYE QUE EL DESPLAZAMIENTO DE LA MASA DE UN SISTEMA ES PROPORCIONAL A LA ACELERACION DE SU BASE, SI ESTE TIENE AMORTIGUAMIENTO DEL 70% Y SI LAS EXCITACIONES QUE SE TRATAN DE REGISTRAR TIENEN FRECUENCIAS INFERIORES AL 60% DE LA FRECUENCIA NATURAL DEL SISTEMA. SI ESTO SE CUMPLE, EL APARATO RESULTA SER UN ACELEROMETRO.

EN INGENIERIA SISMICA LA MAXIMA FRECUENCIA DE INTERES ES DEL ORDEN DE 10 CPS ($T \doteq 0.1$ SEG), POR LO QUE LOS ACELEROMETROS TIENEN FRECUENCIA NATURAL DE 16 A 20 CPS.

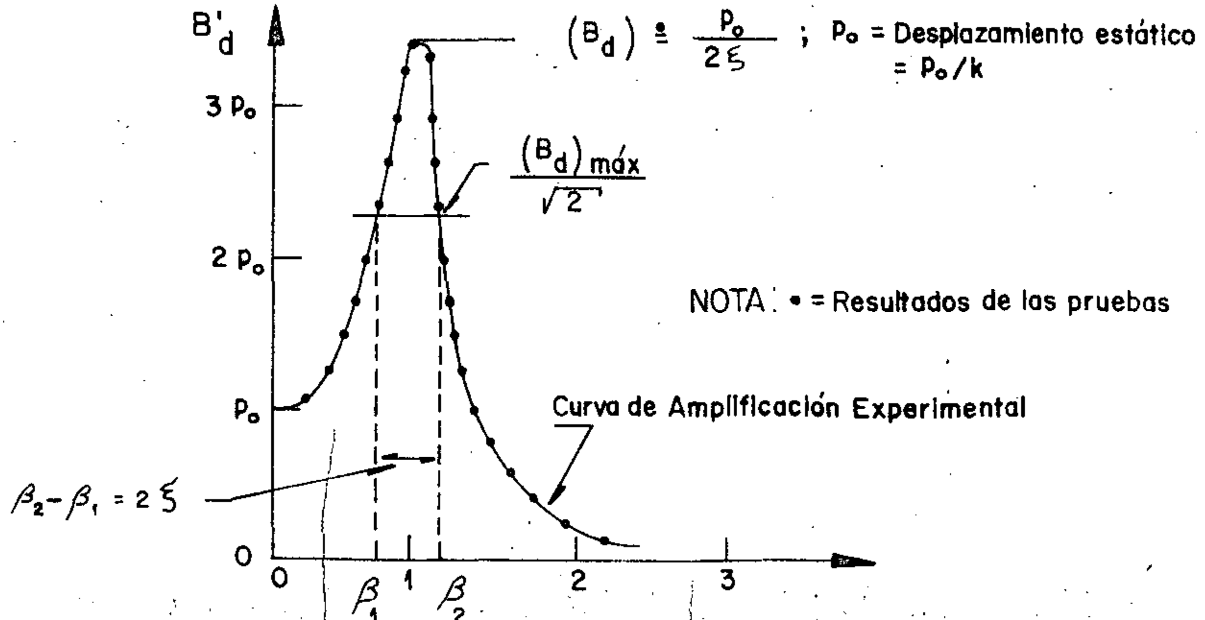
POR OTRA PARTE SI LA EXCITACION DEL SUELO ES $x_o = a \operatorname{sen}\Omega t$, O SEA, $\ddot{x} = -a\,\Omega^2 \operatorname{sen}\Omega t$, ENTONCES EL FACTOR DE AMPLIFICACION RESULTA SER EL SEÑALADO EN LA ECUACION (20), ES DECIR,

$$B'_d = \frac{(\Omega/\omega)^2}{\sqrt{(1-(\Omega/\omega)^2) + (2\zeta\Omega/\omega)^2}}$$

EN LA GRAFICA CORRESPONDIENTE SE OBSERVA QUE SI $\zeta=0.5$ Y $\Omega>\omega$ EL DESPLAZAMIENTO DE LA MASA ES PROPORCIONAL AL DEL SUELO; SI ESTO SE CUMPLE, EL APARATO, CONSTITUYE UN DESPLAZOMETRO, CONOCIDO TAMBIEN COMO SISMOMETRO.



DETERMINACION EXPERIMENTAL DEL AMORTIGUAMIENTO DE UNA ESTRUCTURA MEDIANTE VIBRACIONES FORZADAS ARMONICAS

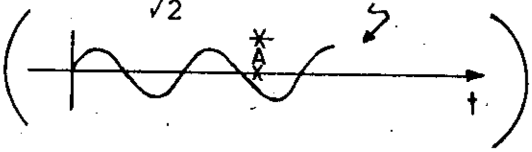


SI SE DETERMINA B_d EXPERIMENTALMENTE MEDIANTE UNA SERIE DE PRUEBAS DE VIBRACION FORZADA CON FUERZAS ARMONICAS, Y ADEMAS SE DETERMINA ρ_o, ENTONCES

$$\boxed{\zeta \doteq \frac{\rho_o}{2(B_d)_{MAX}}} \qquad (24)$$

OTRO METODO PARA DETERMINAR ζ CON BASE EN LA CURVA EXPERIMENTAL DE B_d SE CONOCE CON EL NOMBRE DE "<u>METODO DEL ANCHO DE BANDA DE LA MITAD DE POTENCIA</u>". ESTE SE BASA EN DETERMINAR LAS FRECUENCIAS QUE CORRESPONDEN AL VALOR rms DE LA AMPLITUD EN RESONANCIA, EL CUAL VALE $(B_d)_{MAX}/\sqrt{2}$; SEAN β_2 Y β_1 ESTAS FRECUENCIAS. DE LA ECUACION DE B_d SE OBTIENE:

$\text{rms} = \dfrac{A}{\sqrt{2}}$ = RAIZ CUADRADA DEL VALOR MEDIO CUADRATICO



$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\rho_o}{2\zeta} = \rho_o / \sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$$

ELEVANDO AL CUADRADO AMBOS MIEMBROS:

$$\frac{1}{8\zeta^2} = \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$$

DE DONDE $\beta^2 = 1 - 2\zeta^2 \pm 2\zeta\sqrt{1+\zeta^2}$

DE AQUI, DESPRECIANDO EL TERMINO ζ^2 DEL RADICAL, SE OBTIENE

$$\beta_1^2 \doteq 1 - 2\zeta - 2\zeta^2 \quad ; \quad \beta_1 \doteq 1 - \zeta - \zeta^2$$

$$\beta_2^2 \doteq 1 + 2\zeta - 2\zeta^2 \quad ; \quad \beta_2 \doteq 1 + \zeta - \zeta^2$$

$$\beta_2 - \beta_1 \doteq 2\zeta$$

SUPONIENDO $\ddot{y}_{i+1} = 8.000$ SE OBTIENE:

1er CICLO
$$\begin{cases} \dot{y}_{i+1} = 0.5034 + 0.1\ (5.034 + 8.000) = 1.8068 \\ y_{i+1} = 0.04027 + 0.2 \times 0.5034 + 0.012 \times 5.034 + 0.008 \times 8 = 0.26536 \\ \ddot{y}_{i+1} = -1.2 \times 1,8068 - 9 \times 0.26536 - (-12) = 7.442 \text{ IN/SEG}^2 \end{cases}$$

EN $t = 0.4^+$ SOLO CAMBIA $\ddot{y}$: $\ddot{y}_{0.4+} = \ddot{y}_{0.4-} + \ddot{x}_o = 7.533 - 12 = -4.467$

EN $t = 0.6$, $\ddot{y}_i = -4.467)$ $\dot{y}_i = 1.7601$; $y = 0.26162$

ESPECTROS DE RESPUESTA ESTRUCTURAL

RECORDEMOS QUE LA SOLUCION DEL PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS CON EXCITACION SISMICA ES

$$Y(t) = \frac{-1}{\omega'} \int_{-\infty}^{t} \ddot{x}_o(t-\tau)e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega'(t-\tau)d\tau$$

DE LA OBSERVACION DE ESTA ECUACION SE CONCLUYE QUE EL DESPLAZAMIENTO RELATIVO, $Y(t)$, ES FUNCION DEL TIEMPO, t, EL AMORTIGUAMIENTO, ζ, Y LA FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL, ω (O DEL PERIODO NATURAL):

$y(t) = f(t,\omega,\zeta)$

FIJEMOS UN VALOR DE ζ, POR EJEMPLO $\zeta=0$, Y LUEGO ASIGNEMOS VALORES A ω, POR EJEMPLO 0.1, 0.2, 0.3, ETC, HASTA CUBRIR UN INTERVALO DE INTERES, Y PARA CADA CASO CALCULEMOS LA FUNCION RESULTANTE DE APLICAR LA ECUACION ANTERIOR. CON ESTA OBTENEMOS

$$y_1(t) = f_1(t, 0.1, 0) = f_1(t)$$

$$y_2(t) = f_2(t, 0.2, 0) = f_2(t)$$

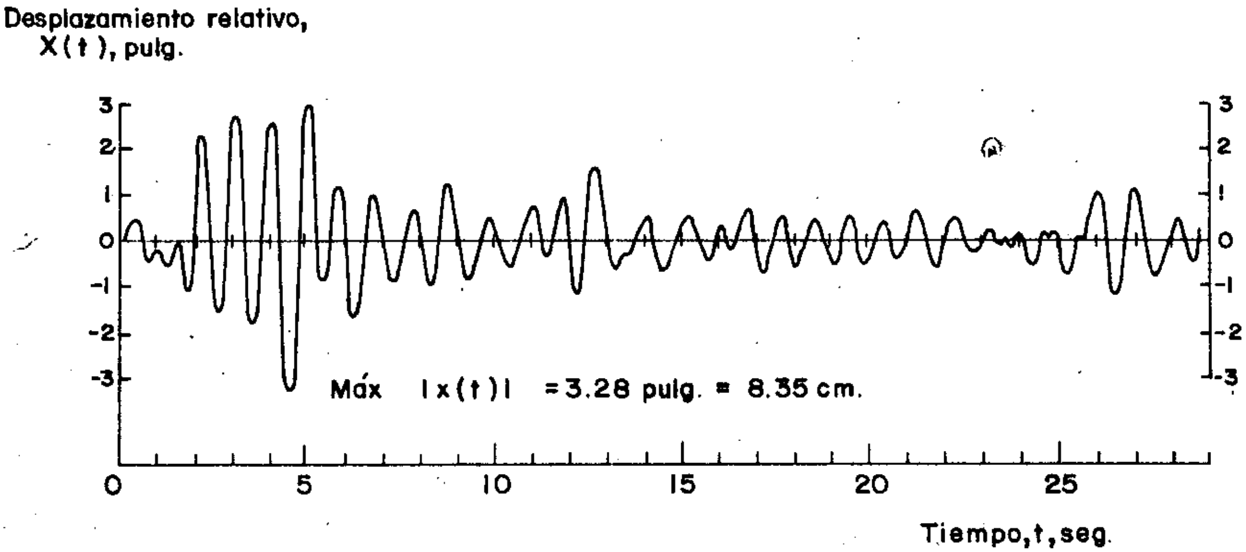
$$y_3(t) = f_3(t, 0.2, 0) = f_3(t)$$

SEAN $D_1 = \text{MAX}|y_1(t)| = D(\omega_1,\zeta)$

$D_2 = \text{MAX}|y_2(t)| = D(\omega_2,\zeta)$

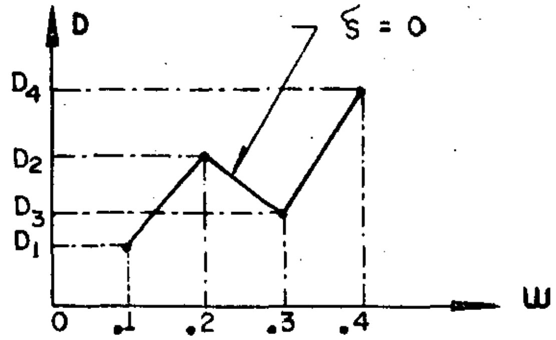
$D_3 = \text{MAX}|y_3(t)| = D(\omega_3,\zeta)$

$\vdots$



Respuesta de un sistema amortiguado simple con $T_1 = 1.0$ seg y $\zeta = 0.10$, al sismo de El Centro, Cal., 1940, componente N-S

EN TAL CASO, LA GRAFICA



ES EL *ESPECTRO DE RESPUESTA DE DESPLAZAMIENTOS* PARA $\zeta=0$. SI ESTE PROCESO DE REPITE FIJANDO OTROS VALORES DE ζ, POR EJEMPLO, $\zeta=0.02$, 0.05, 0.1, 0.2, ETC, SE OBTENDRAN LOS ESPECTROS DE DESPLAZAMIENTOS CORRESPONDIENTES.

DE MANERA ANALOGA SE PUEDEN OBTENER LOS ESPECTROS PARA OTROS TIPOS DE RESPUESTA, TALES COMO *VELOCIDAD RELATIVA, ACELERACION ABSOLUTA*, ETC, QUE SON, RESPECTIVAMENTE

$$V = MAX|\dot{y}(t)|_{\zeta,\omega} \quad ; \quad A = MAX|\ddot{X}(t)|_{\zeta,\omega} \qquad (29)$$

PSEUDO - ESPECTROS

ESTADISTICAMENTE SE HA ENCONTRADO QUE

$$S_V = \omega D \doteq V \qquad (30)$$

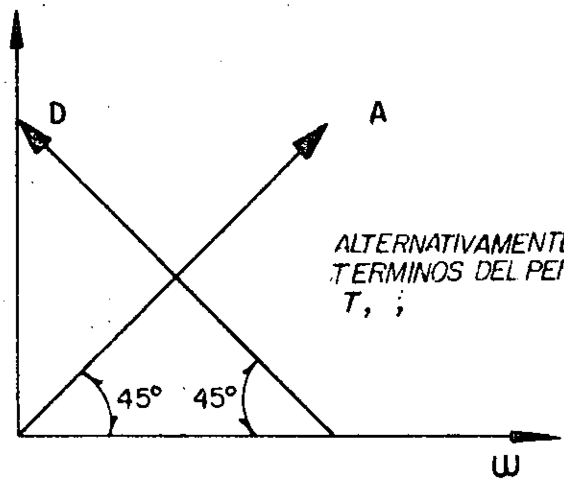
$$S_A = \omega^2 D \doteq A \doteq \omega V \qquad (31)$$

A S_V Y S_A SE LES LLAMA *PSEUDOESPECTROS*.

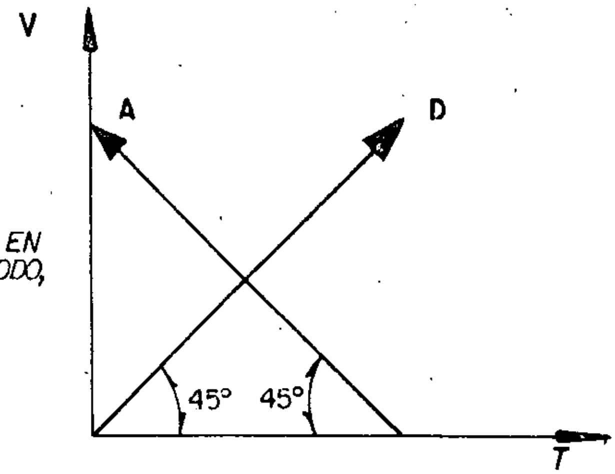
DE LA EC. (30): $\log D = \log V - \log \omega = \log V + \log T - \log 2\pi$

DE LA EC. (31): $\log A = \log V + \log \omega = \log V - \log T + \log 2\pi$

ESTAS ECUACIONES CORRESPONDEN A LINEAS RECTAS EN PAPEL LOGARITMICO; LA PRIMERA CON PENDIENTE -1 Y LA SEGUNDA CON PENDIENTE +1, SI SE USA ω COMO VARIABLE INDEPENDIENTE; SI SE USA T, LA PRIMERA TENDRA PENDIENTE + 1, Y LA SEGUNDA, -1.

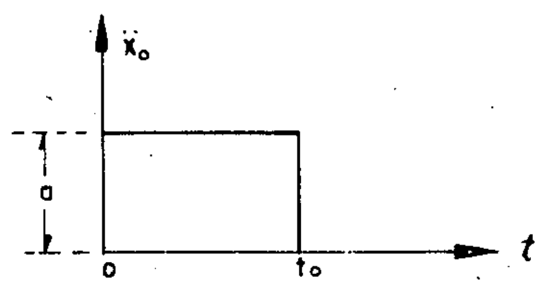


ALTERNATIVAMENTE, EN TERMINOS DEL PERIODO, T, ;



EJEMPLO

CALCULAR EL ESPECTRO CORRESPONDIENTE A LA EXCITACION (CONSIDERESE $\zeta=0$)



EN UN EJEMPLO ANTERIOR SE OBTUVO

$$y(t) = \frac{-a}{\omega 2}\,(1 - \cos\omega t),\ \text{SI } 0\leq t\leq t_o$$

$$D = \text{MAX}|Y(t)| = \frac{2a}{\omega 2}\ ;\ 0\leq\frac{T}{2}\leq t_o,\ (0\leq T\leq 2t_o)$$

$$S_V = \omega D = \frac{2a}{\omega}\ ,\ S_A = \omega V = 2a$$

Y $$D = \text{MAX}|y(t)| = \frac{2a}{\omega^2}\ \text{sen}\ \frac{\omega t_o}{2}\ ,\ \text{SI } T>2\ t_o$$

$$S_V = \omega D = \frac{2a}{\omega}\ \left|\text{sen}\ \frac{\omega t_o}{2}\right|\ ;\ S_A = \omega V = 2a\left|\text{sen}\frac{\omega t_o}{2}\right|$$

$$\lim_{\omega\to 0} S_V = \lim_{\omega\to 0}\ \{at_o\ \frac{\text{sen}\frac{\omega t_o}{2}}{\frac{\omega t_o}{2}}\} = at_o$$

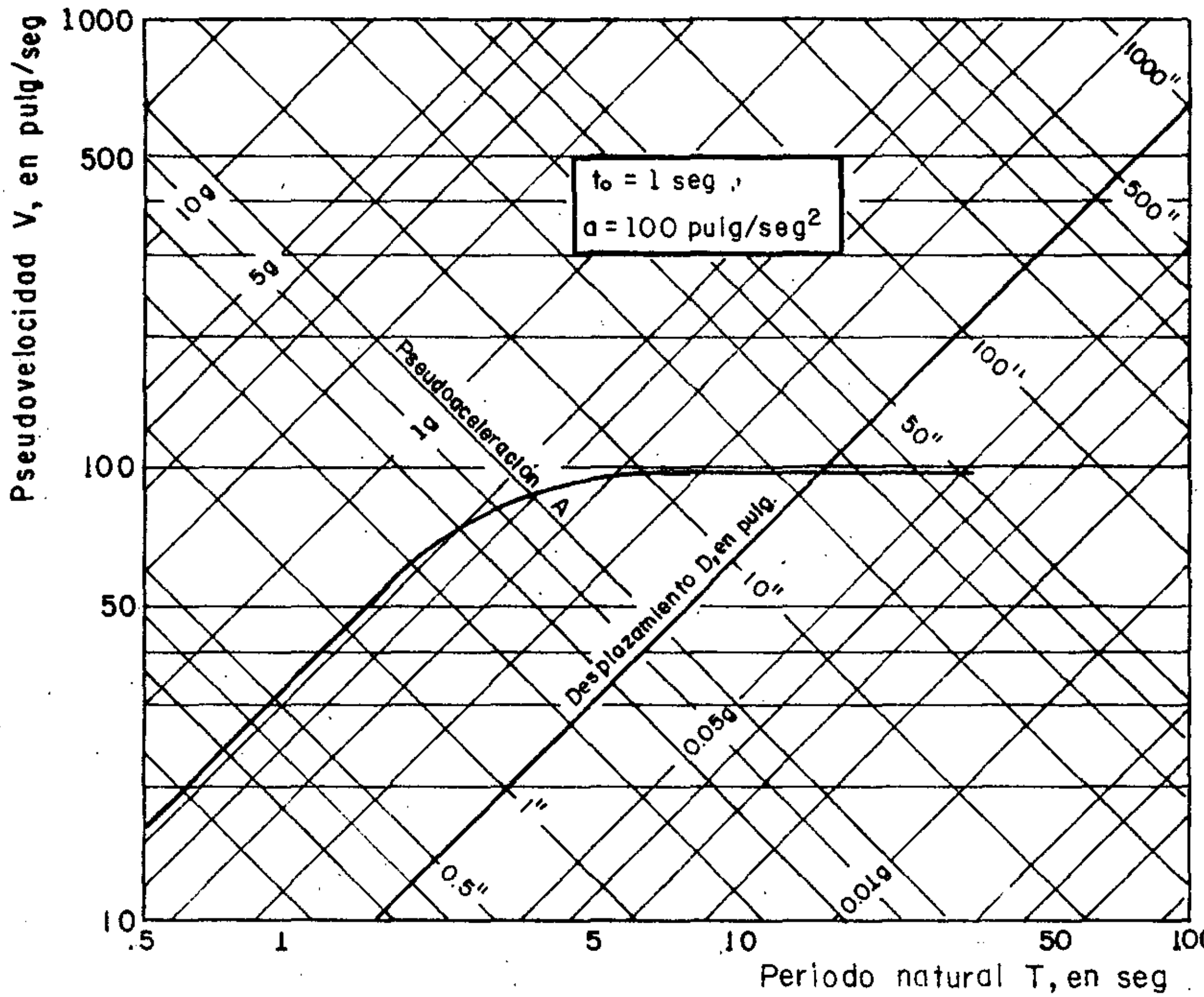
CASO PARTICULAR: SI t_o = 1 SEG y a = 100 IN/SEG^2

$$S_V = \frac{2\ \text{x}\ 100}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{100}{\pi}\ T\ ,\ \text{SI } 0\leq T\leq 2\ \text{SEG}$$

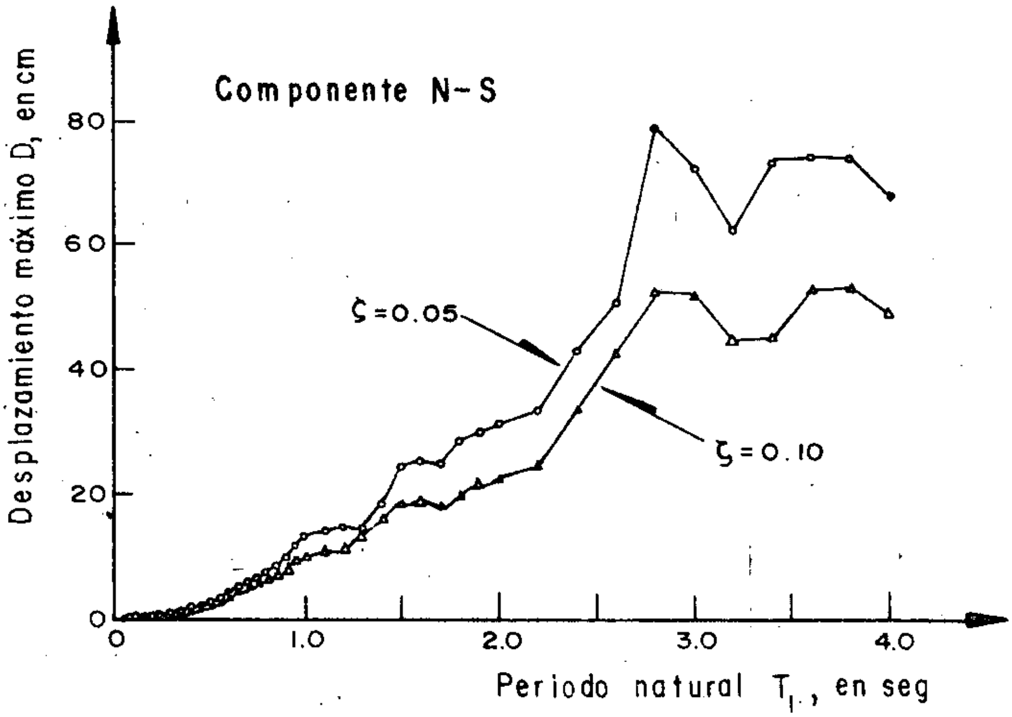
$$S_V = \frac{100T}{\pi}\left|\operatorname{sen}\frac{\frac{2\pi}{T}x1}{2}\right| =$$

$$= \frac{100T}{\pi}\left|\operatorname{sen}\frac{\pi}{T}\right| \text{ SI } T>2 \text{ SEG}$$

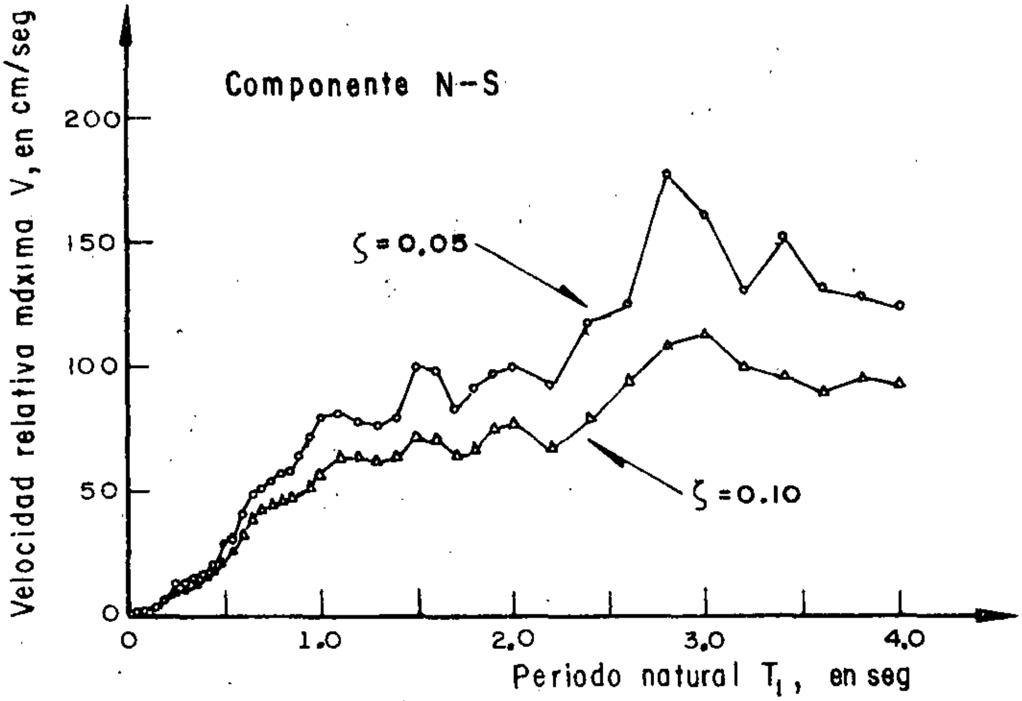
$$\lim_{T \to \infty} S_V = 100 \text{ IN/SEG}$$

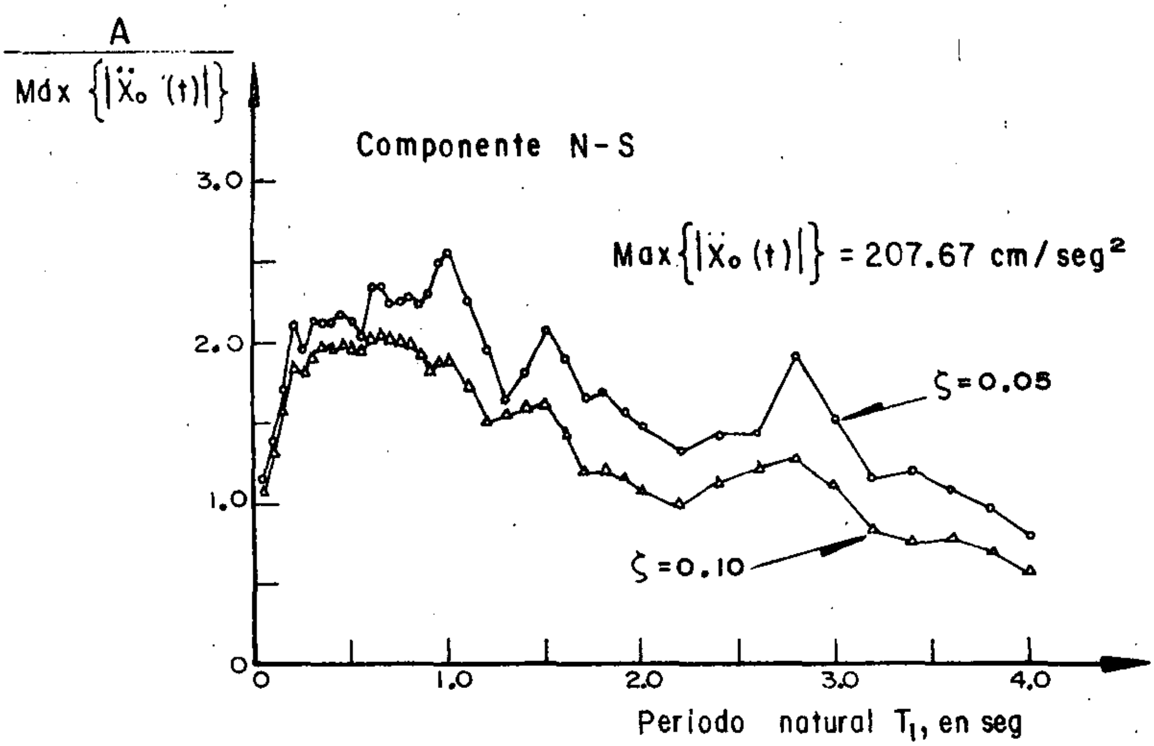


Espectro no amortiguado correspondiente a un pulso rectangular de aceleraciones. Según N. Newmark y E. Rosenblueth, ref 1

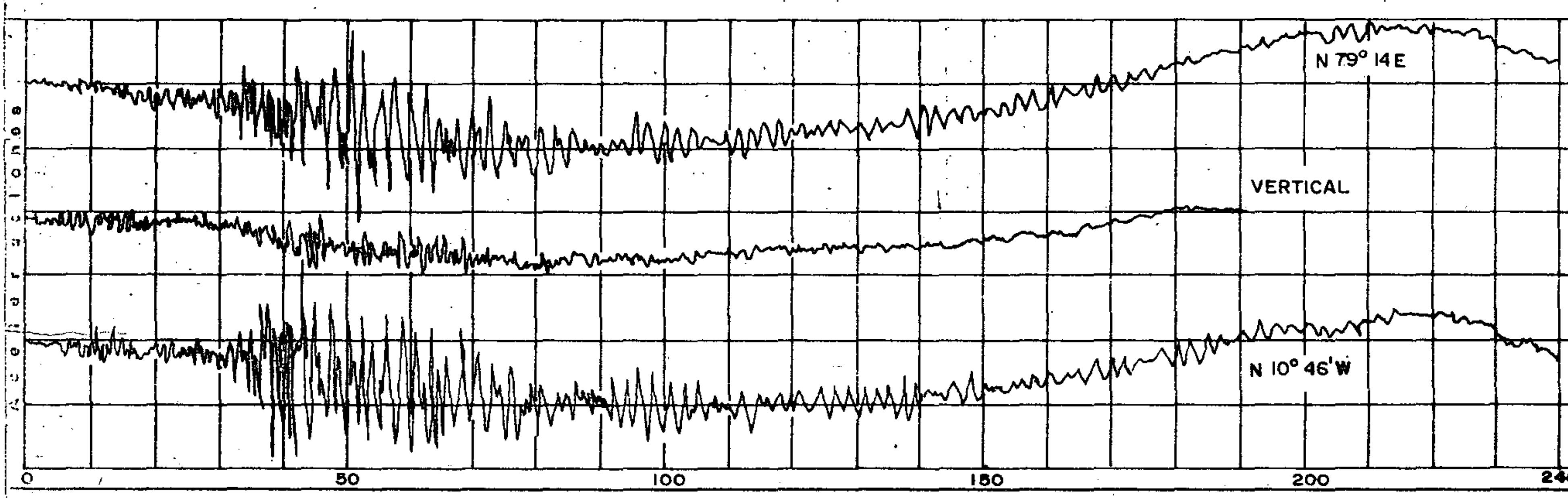


Espectro de desplazamientos. Sismo de Tokachi-Oki, Japón (1968). Según H. Tsuchida, E. Kurata y K. Sudo, ref 4





Espectros de velocidades y de aceleraciones. Sismo de Tokachi-Oki, Japón (1968). Según H. Tsuchida, E. Kurata y K. Sudo, ref.4



Acelerogramas originales del sismo registrado el II-V-1962, en la ALAMEDA CENTRAL, Mex. D.F. (Tomada de la ref 2)

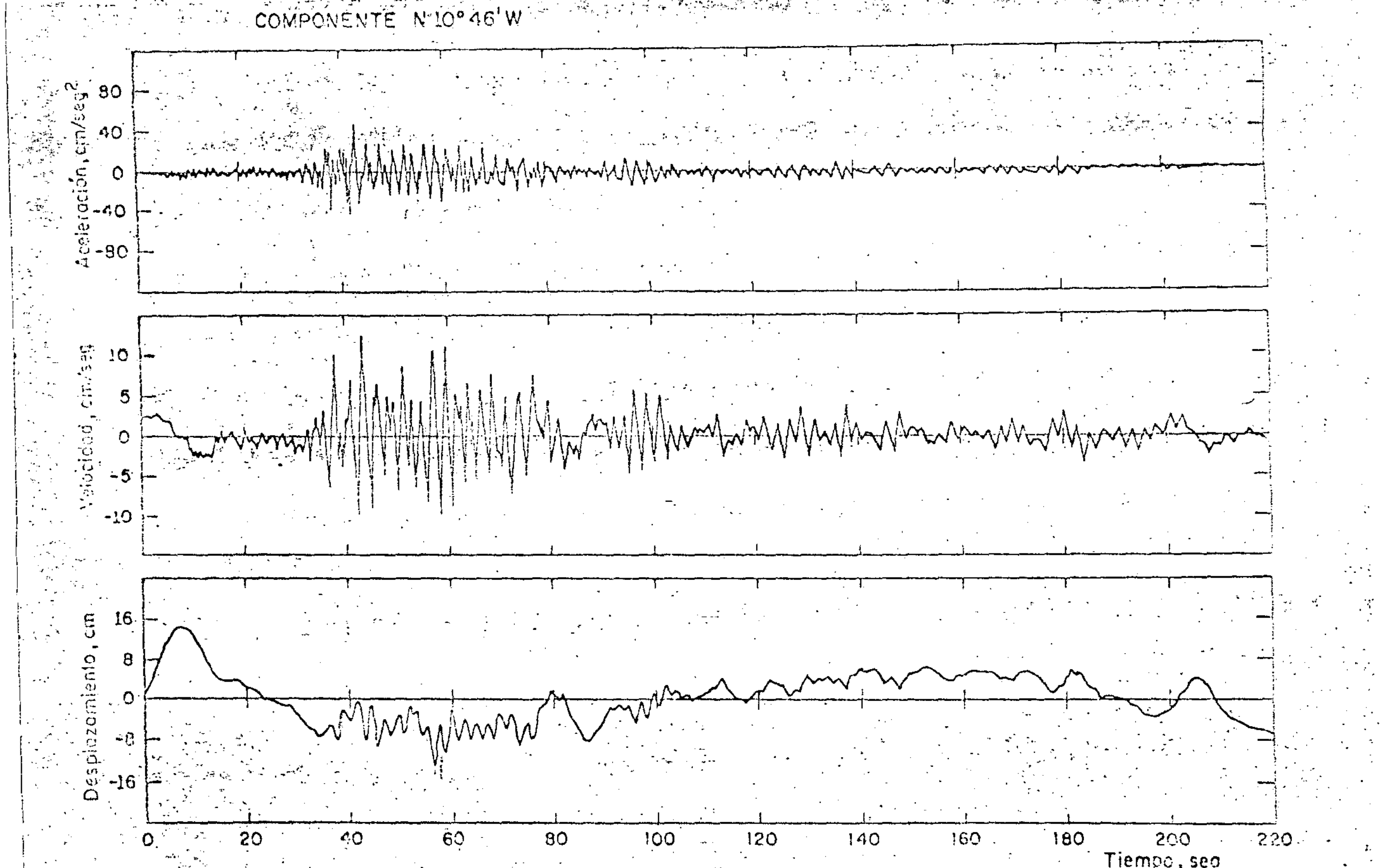


Fig 7. Movimiento del terreno. Alameda Central, 11 de mayo de 1962

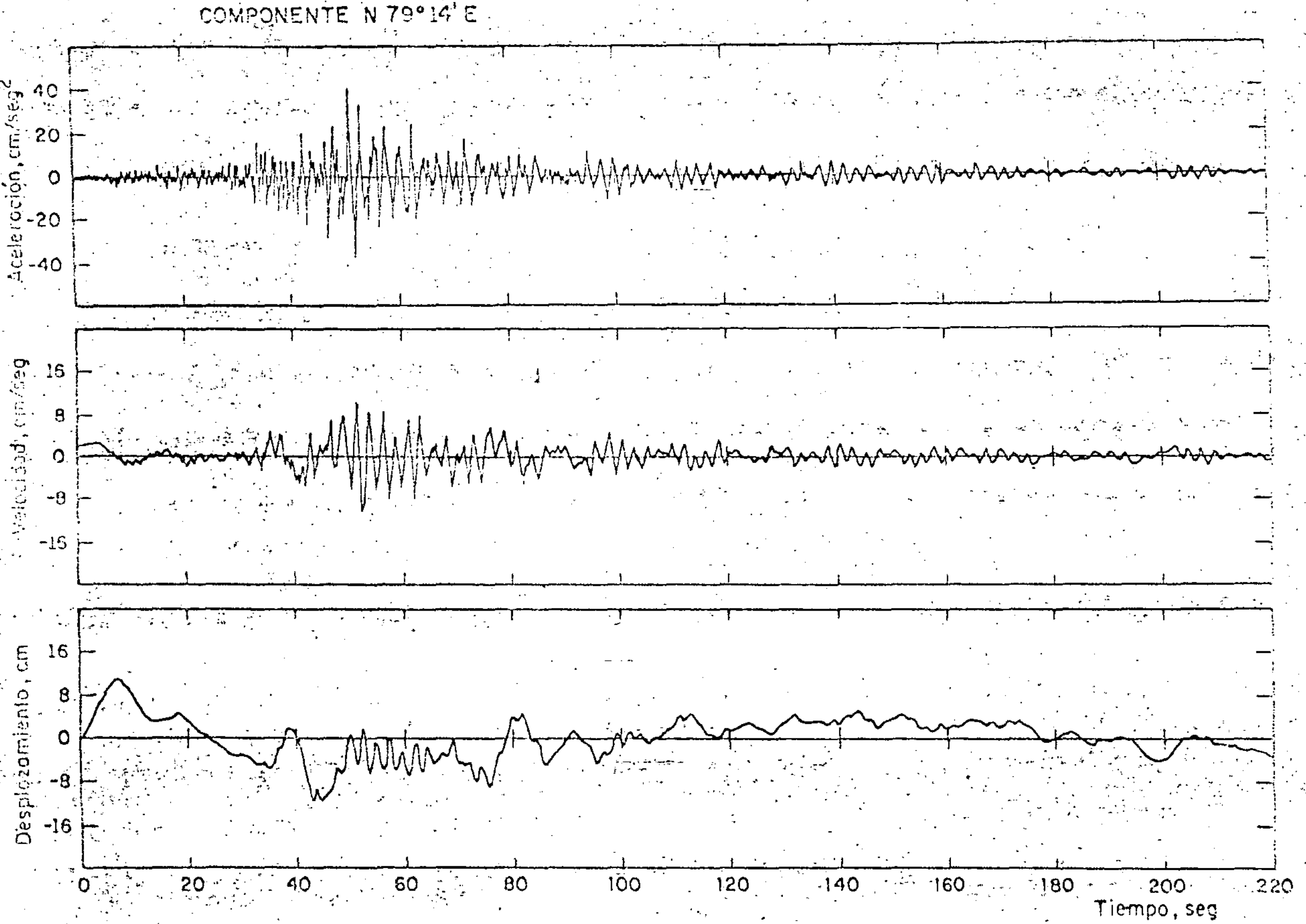


Fig 8 Movimiento del terreno. Alameda Central, 11 de mayo de 1962

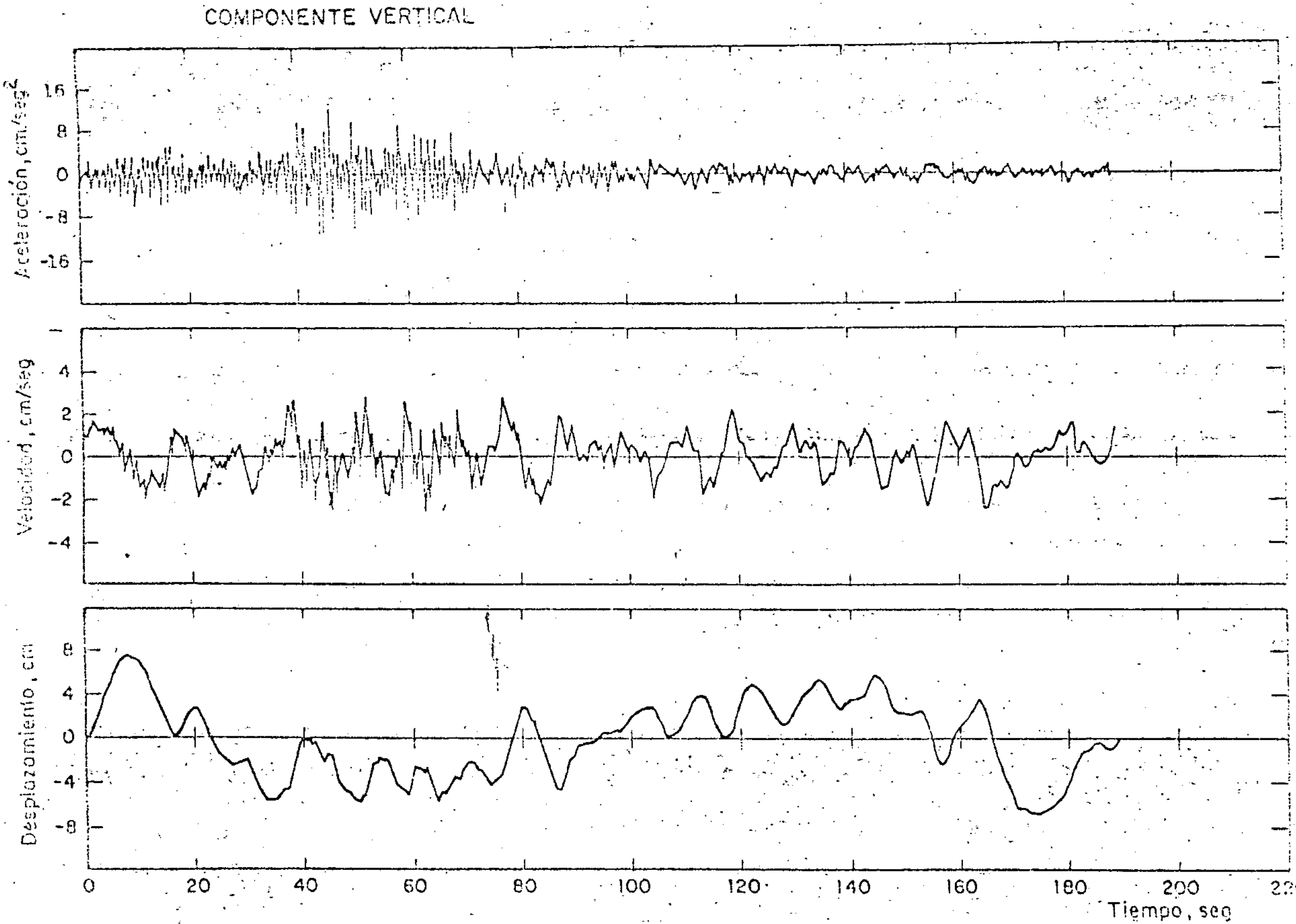


Fig 9 Movimiento del terreno. Alameda Central, 11 de mayo de 1962

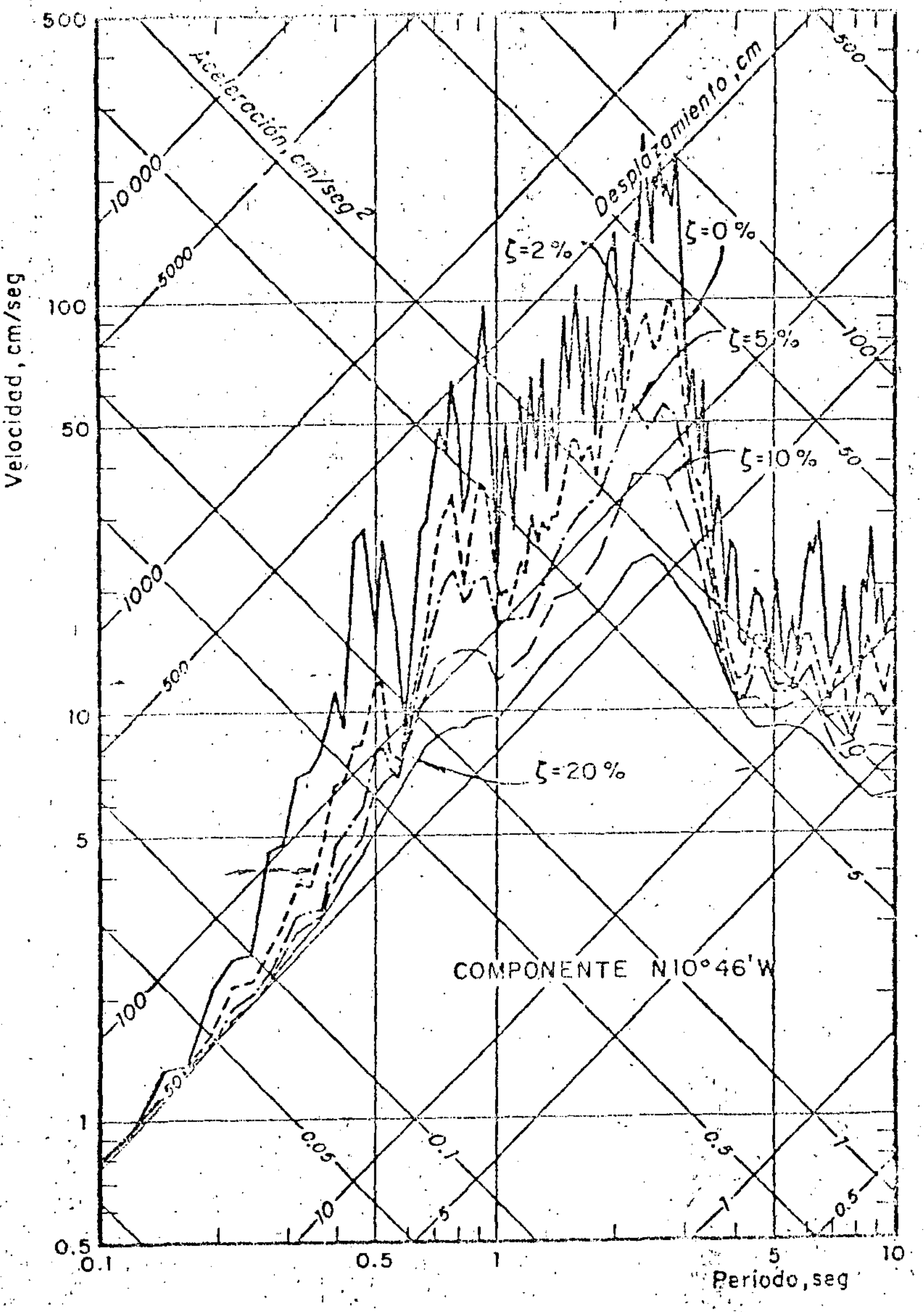


Fig 80 Espectros de respuesta. Alameda Central, 11 de mayo de 1962

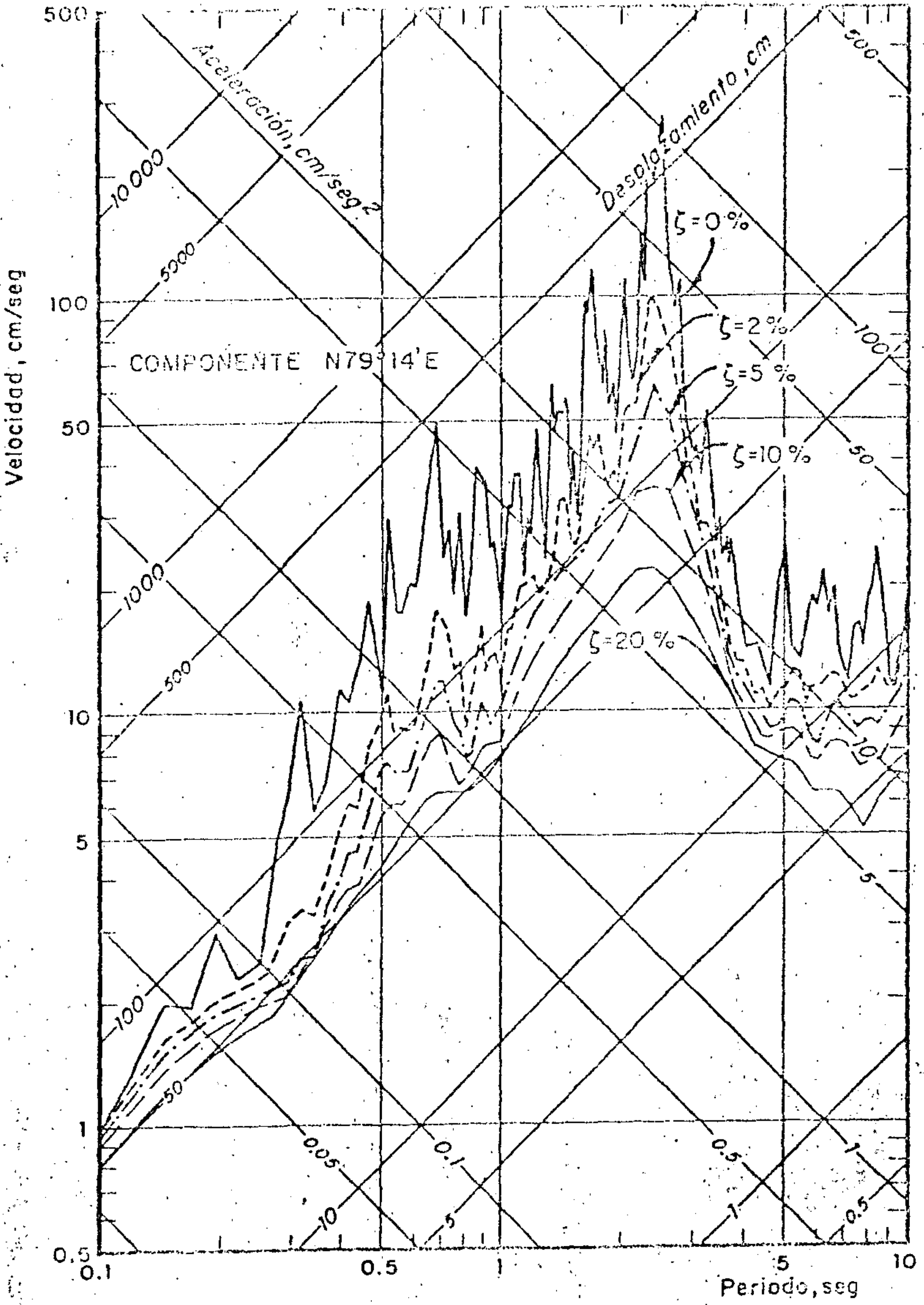


Fig 81 Espectros de respuesta. Alameda Central, 11 de mayo de 1962

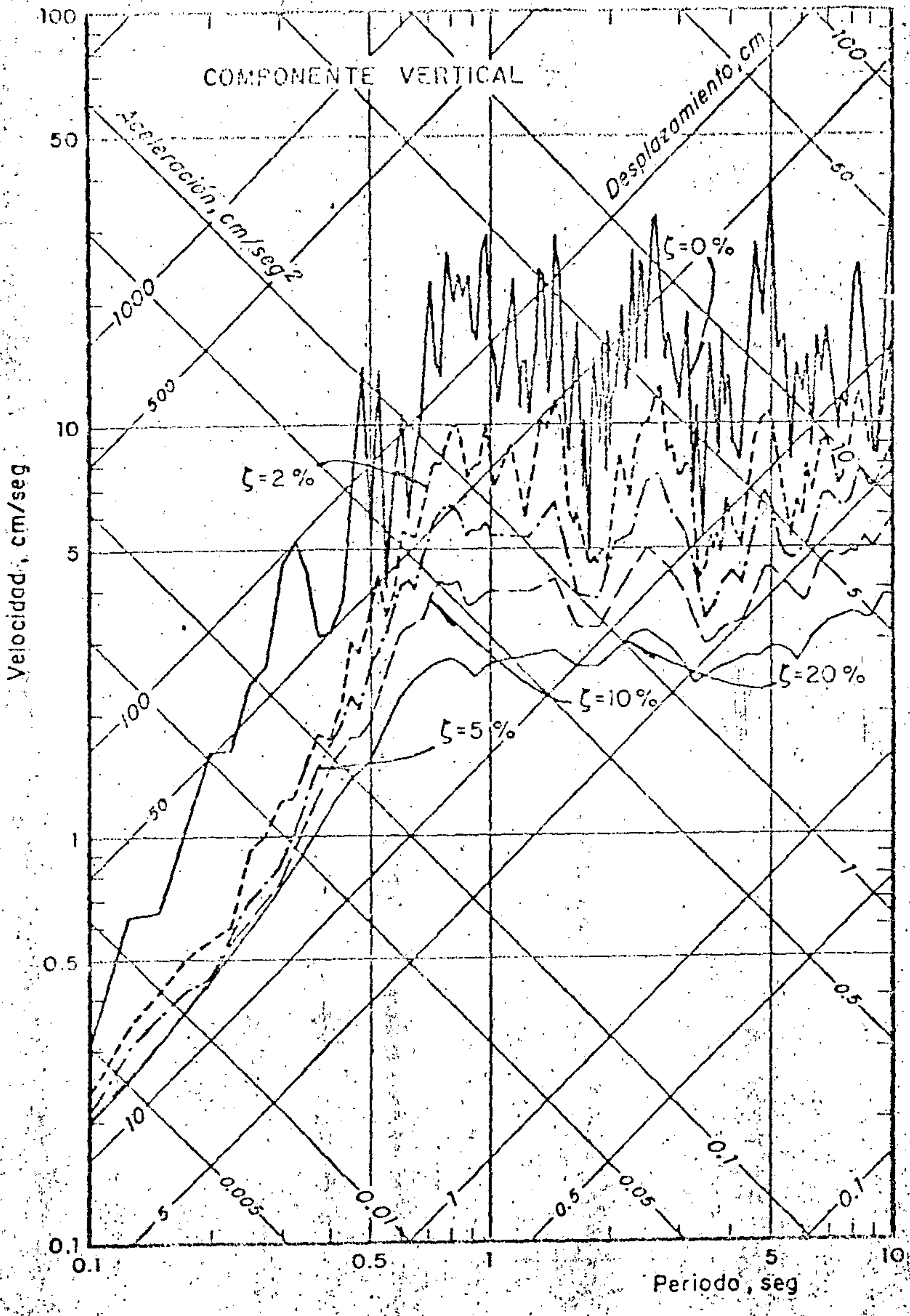


Fig 82. Espectros de respuesta. Alameda Central, 11 de mayo de 1962

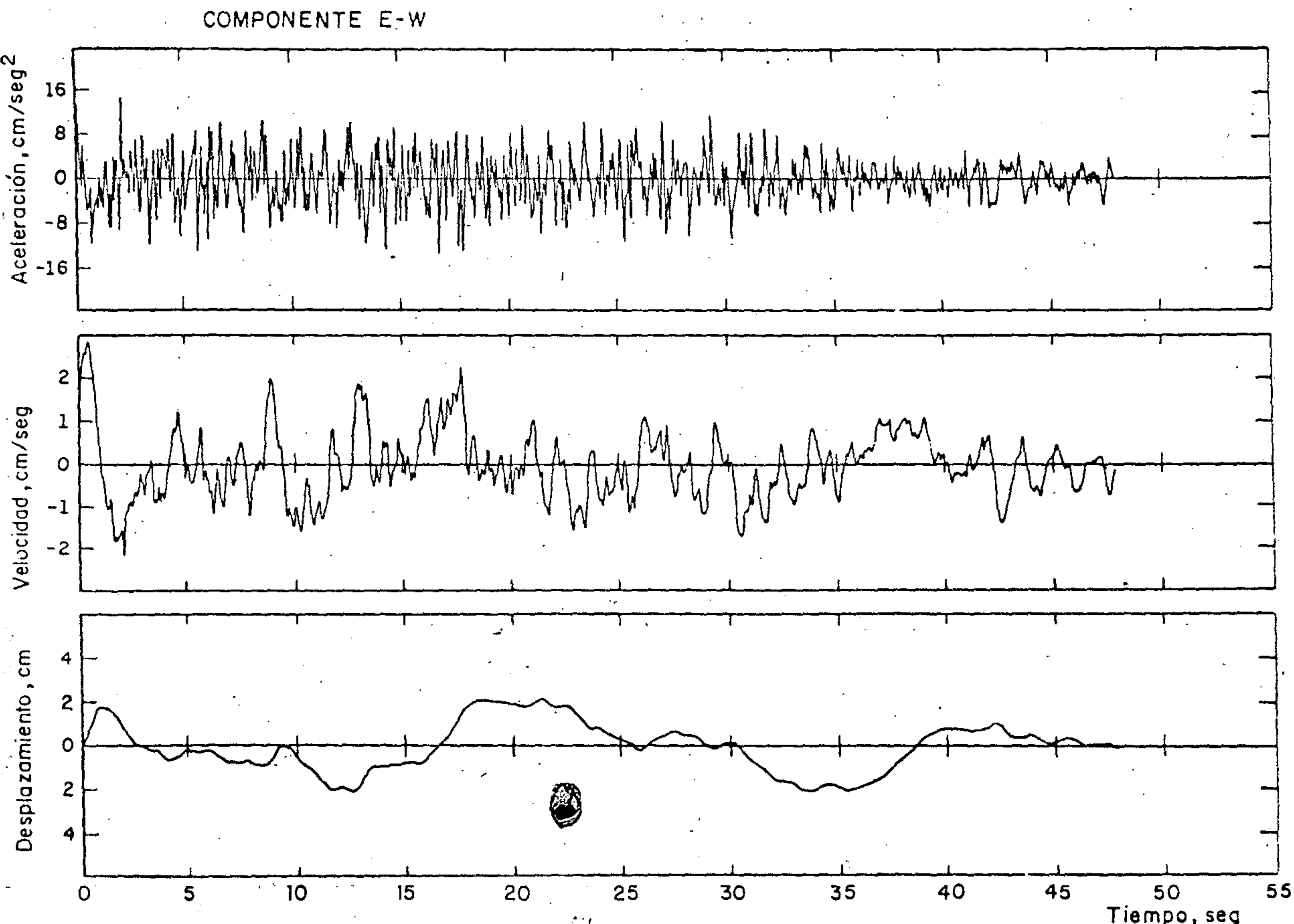


Fig 42 Movimiento del terreno. Ciudad Universitaria, 6 de julio de 1964

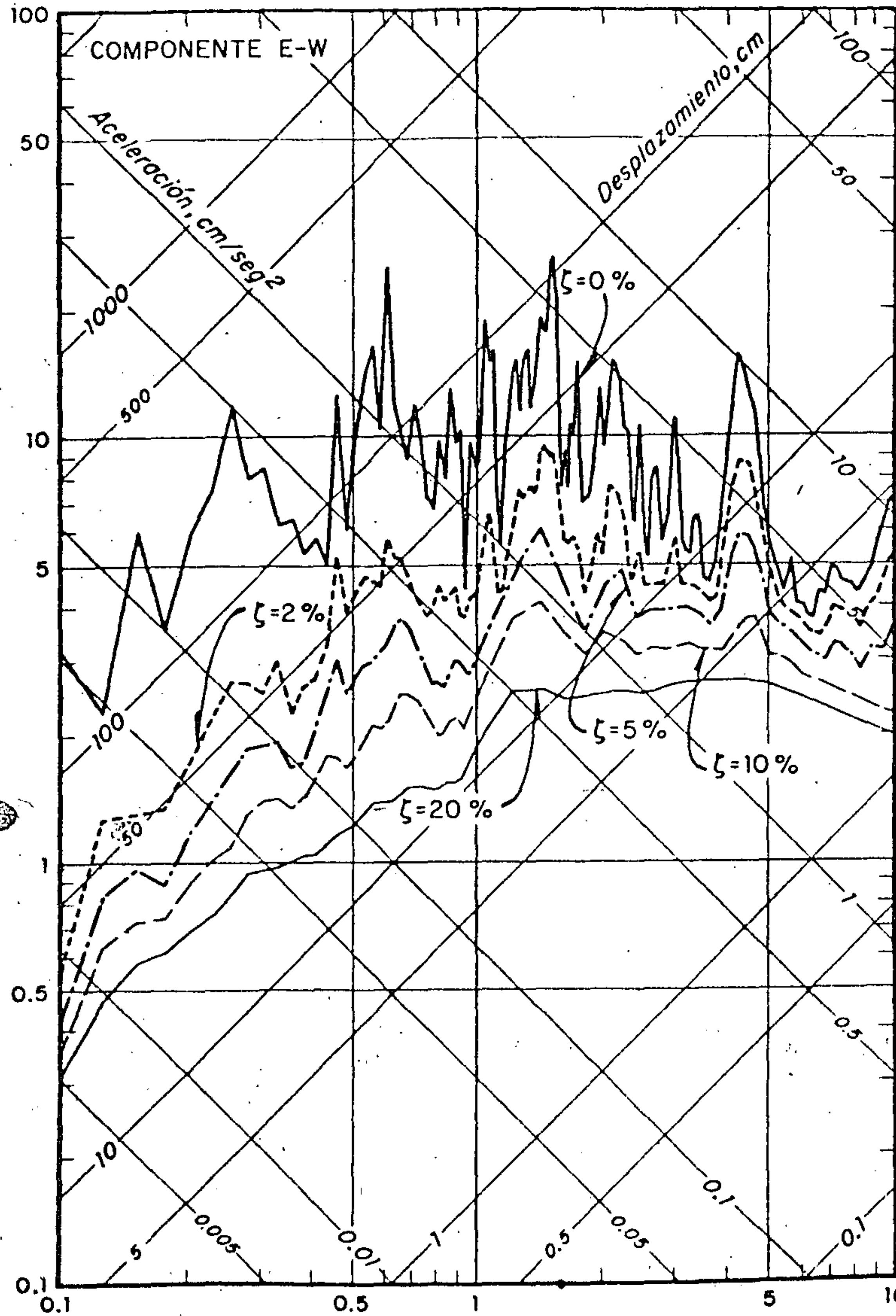
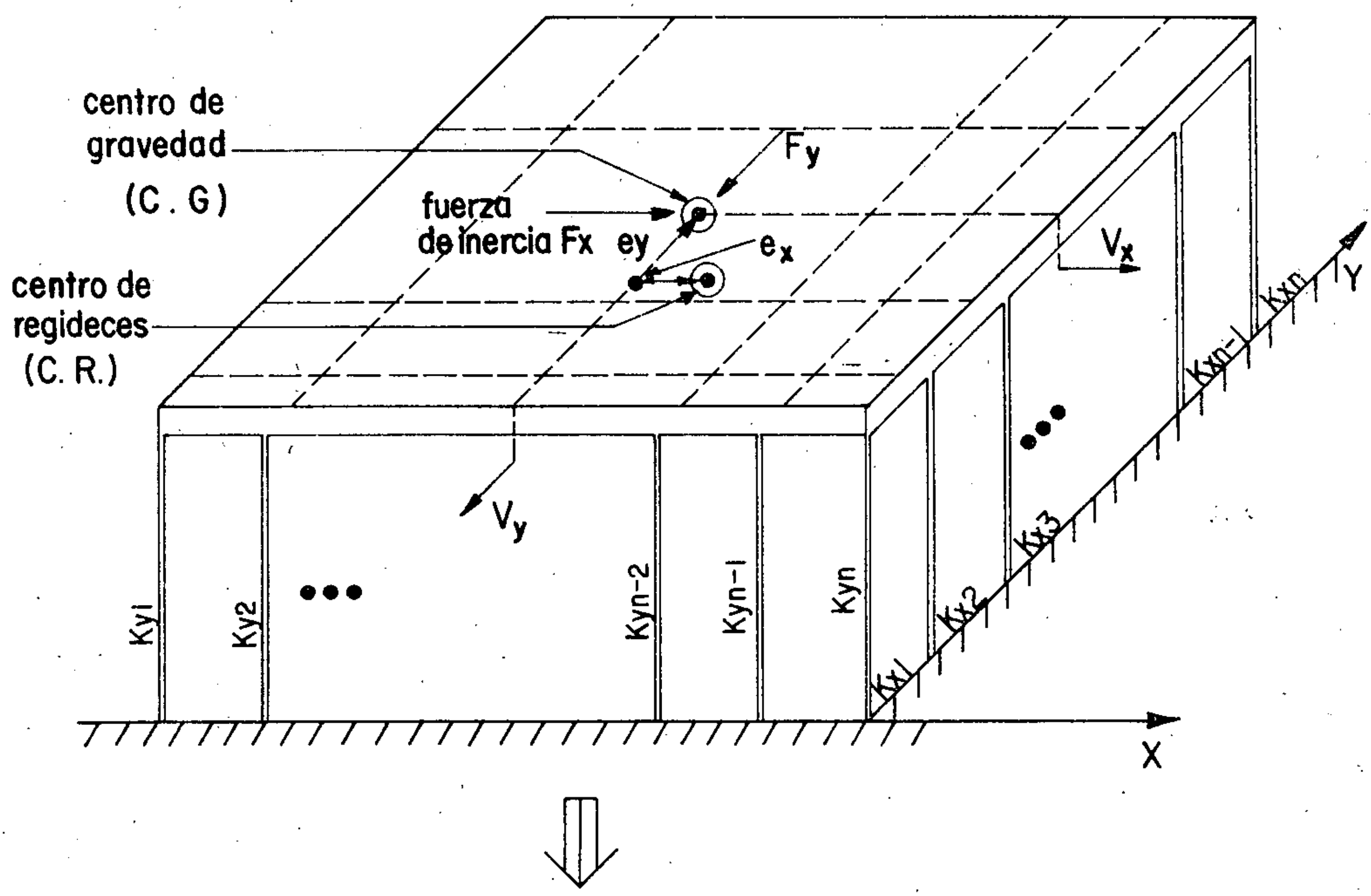
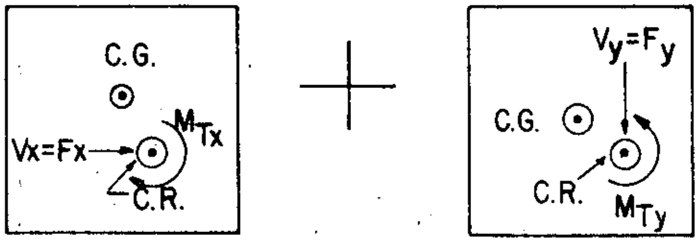


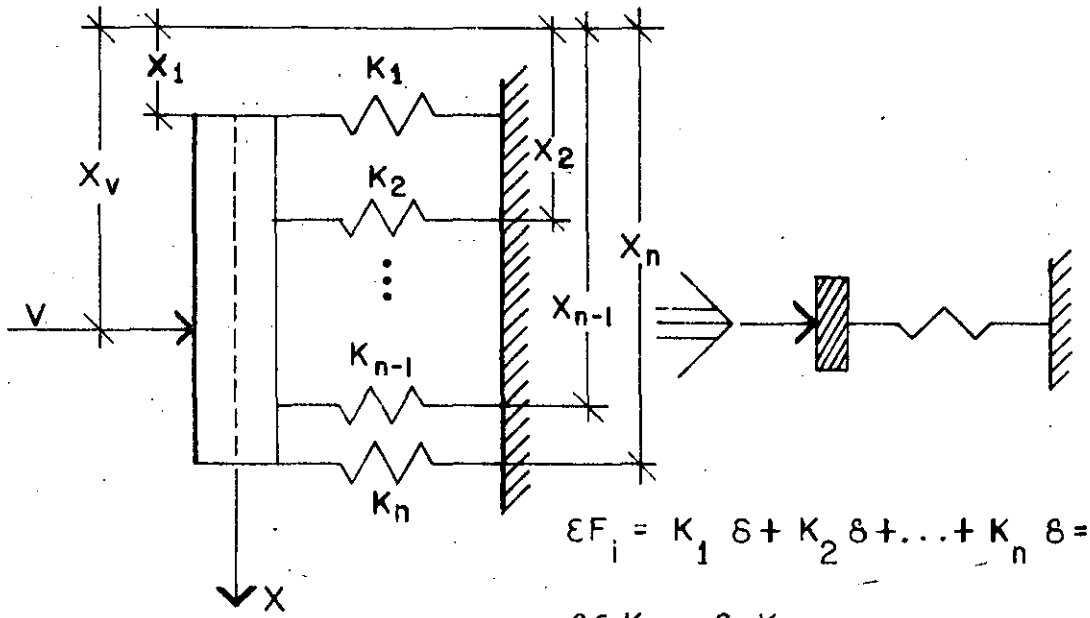
Fig 116 Espectros de respuesta. Ciudad Universitaria, 6 de julio de 1964

DISTRIBUCION DE FUERZAS CORTANTES DIRECTAS Y POR TORSION





DISTRIBUCION DE LAS FUERZAS CORTANTES EN UN ENTREPISO



$$\Sigma F_i = K_1\,\delta + K_2\,\delta + \ldots + K_n\,\delta = V = K_{eq}\,\delta$$

$$\delta \Sigma K_i = \delta\; K_{eq}$$

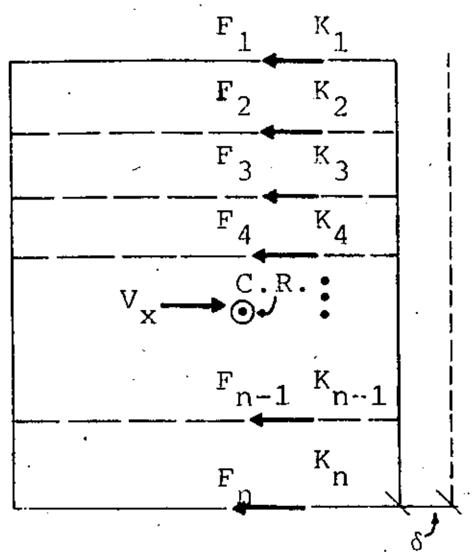
$$\boxed{K_{eq} = \sum_{i=1}^{n} K_i}$$

$$\Sigma M_i = \Sigma F_i\, X_i = \Sigma K_i\, \delta X_i = \delta K_i X_i = VX = K_{eq}\, \delta X_v$$

$$\boxed{X_v = \frac{\sum_{i=i}^{n} K_i X_i}{\sum_{i=i}^{n} K_i}}$$

⟸ **POSICION DEL CENTRO DE RIGIDECES**

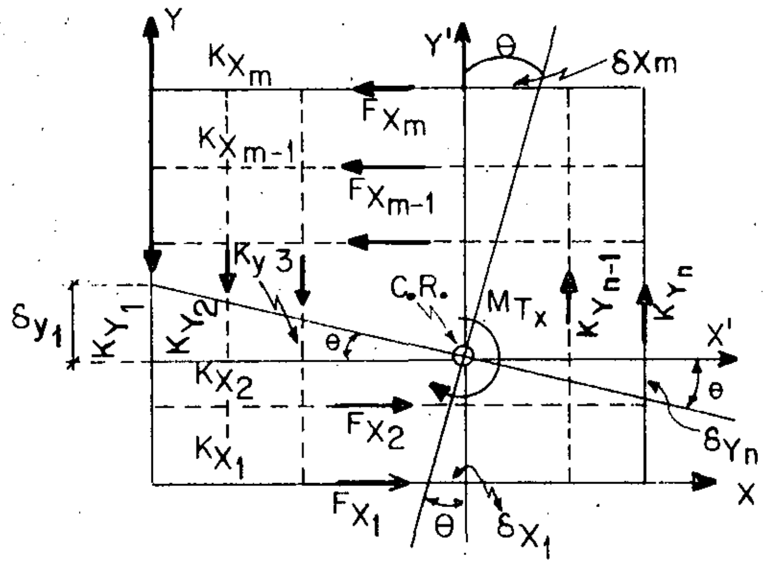
VEAMOS COMO SE DISTRIBUYEN LAS FUERZAS CORTANTES EN LOS MARCOS



$$F_i = K_i \delta$$

$$\Sigma F_i = \Sigma K_i \delta = V_x \therefore \delta = \frac{V_x}{\Sigma K_i}$$

$$\boxed{F_i = V_x \frac{K_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} K_i}}$$



$$F_{x_i} = K_{x_i} \delta_{x_i} = K_{x_i} Y_i' \theta$$

$$F_{x_i} = K_{y_i} \delta_{y_i} = K_{y_i} X_i' \theta$$

$$\Sigma M_{C.R.} = \Sigma F_{x_i} Y_i' + \Sigma F_{y_i} X_i'$$

$$= \theta(\Sigma K_{x_i} Y_i'^2 + \Sigma K_{y_i} X_i'^2)$$

$$= M_{T_x}$$

$$\text{DE DONDE } \theta = \frac{M_T}{\Sigma K_{x_i} Y_i'^2 + K_{y_i} X_i'^2}$$

POR LO QUE

$$\boxed{F_{x_i} = M_{TX} \frac{K_{x_i} Y_i'}{\Sigma K_{x_i} Y_i'^2 + K_{y_i} X_i'^2}} \quad ; \quad \boxed{F_{y_i} = M_{TX} \frac{K_{y_i} X_i'}{\Sigma K_{x_i} Y_i'^2 + \Sigma K_{y_i} X_i'^2}}$$

SISTEMAS NO LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD

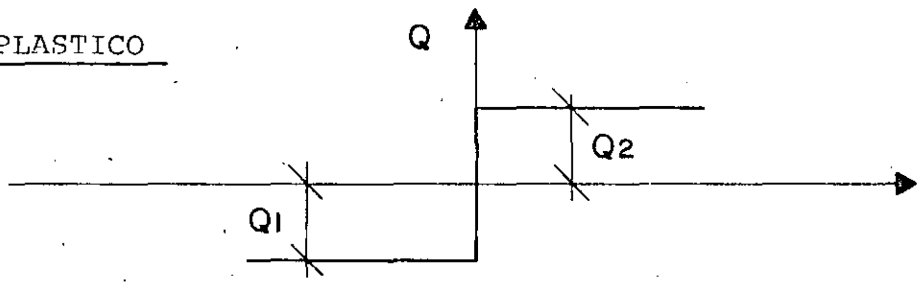
ECUACION DE MOVIMIENTO:

$$M\ddot{x} + Q(y,\dot{y}) = P(t) \quad ; \quad y = x - x_o = \text{DESPLAZAMIENTO RELATIVO}$$

SI $Q(y, \dot{y}) = KY + C\dot{Y}$ SE TIENE EL SISTEMA ELASTICO LINEAL

MODELOS PARTICULARES

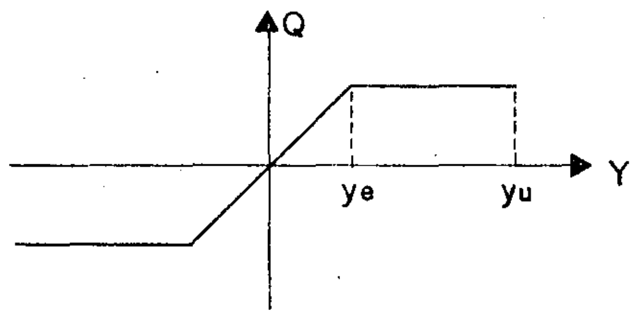
1. RIGIDO-PLASTICO



$Q = -Q_1 + C\dot{y}$, SI $\dot{y} < 0$

$Q = Q_2 + C\dot{y}$, SI $\dot{y} < 0$ EN DONDE C = CONSTANTE. SE HA EMPLEADO COMO MODELO EN EL ANALISIS DE TALUDES Y CORTINAS DE PRESAS DE TIERRA Y ENROCAMIENTO

2. ELASTO-PLASTICO



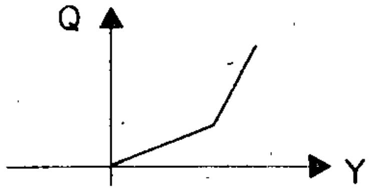
$Q = Q_1(y) + C\dot{y}$

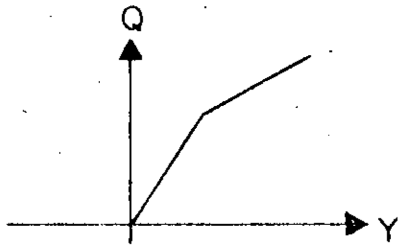
SE EMPLEA COMO MODELO EN EL ANALISIS DE ESTRUCTURAS DUCTILES.

FACTOR DE DUCTILIDAD $= \mu = y_u / y_e$

y_u = DESPLAZAMIENTO MAXIMO QUE PUEDE SOPORTAR EL SISTEMA SIN FALLAR.

3. SISTEMA BILINEAL





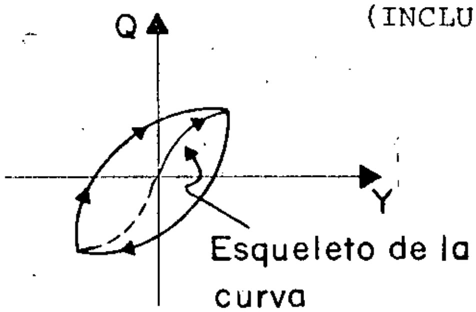
CON ENDURECIMIENTO

SE USA COMO MODELO PARA ANALISIS DE PUENTES COLGANTES

CON ABLANDAMIENTO

SE USA COMO MODELO DE SISTEMAS QUE SE DEGRADAN POR AGRIETAMIENTO (MUROS DE MAMPOSTERIA, POR EJEM).

4. TIPO MASING



(INCLUYE A LOS ANTERIORES COMO CASOS ESPECIALES)

$$\frac{Q - Q_o}{2} = Q_1\left(\frac{y - y_o}{2}\right)$$

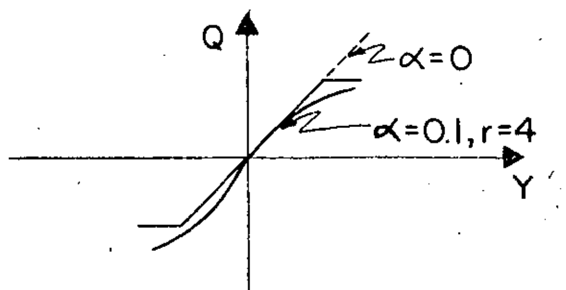
Q_o = FUERZA EN $y = y_o$

y_o = DESPLAZAMIENTO EN EL CUAL EL PROCESO SE INVIRTIO (y CAMBIO DE SIGNO) POR ULTIMA VEZ

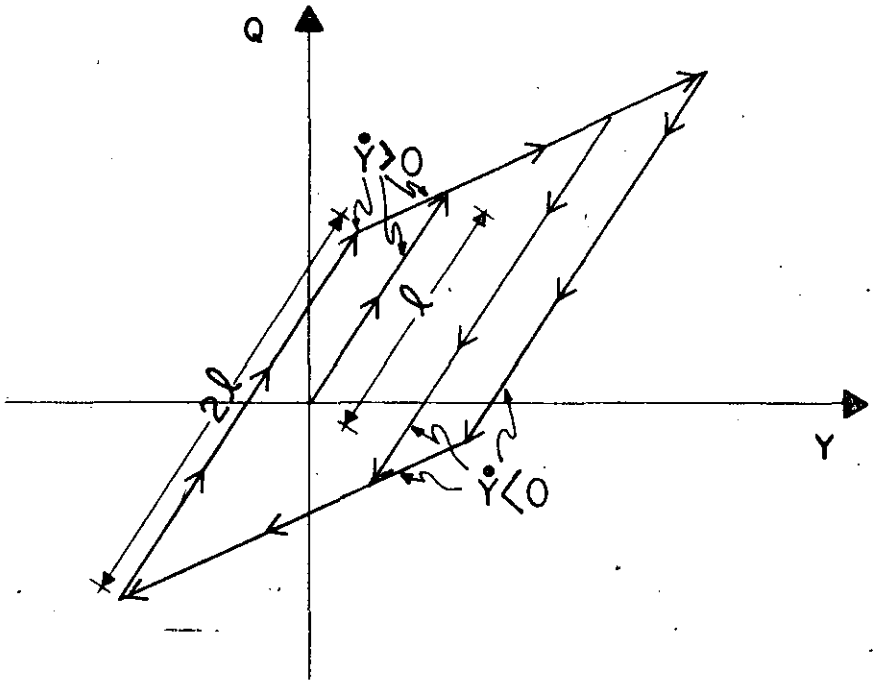
CASO PARTICULAR DEL ESQUELETO

$$\frac{y}{y_1} = \frac{Q}{Q_1} + \alpha\left(\frac{Q}{Q_1}\right)^r$$ (MODELO RAMBER - OSGOOD)

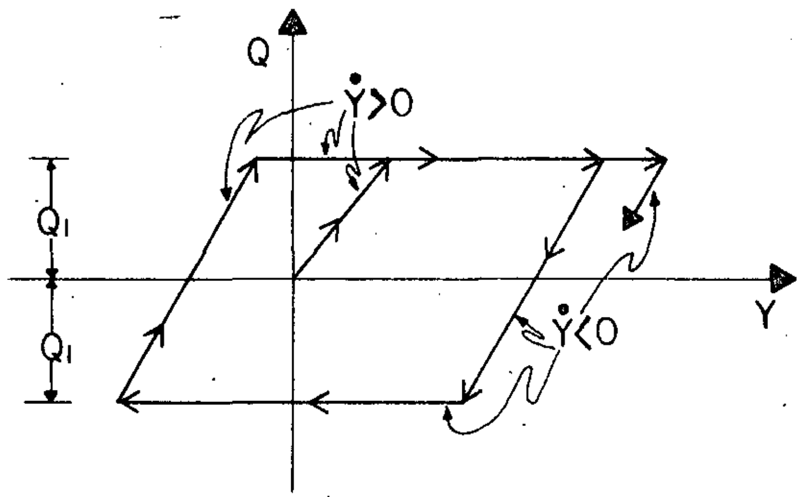
DONDE y_1, Q_1, α y r SON CONSTANTES POSITIVAS



EJEMPLO: CASO BILINEAL



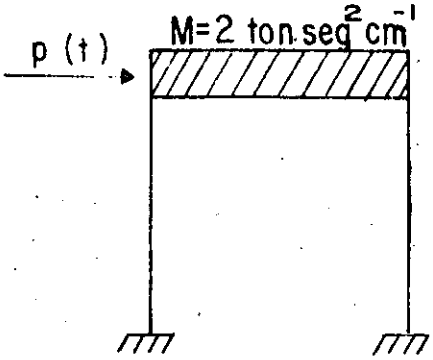
EJEMPLO CASO ELASTOPLASTICO

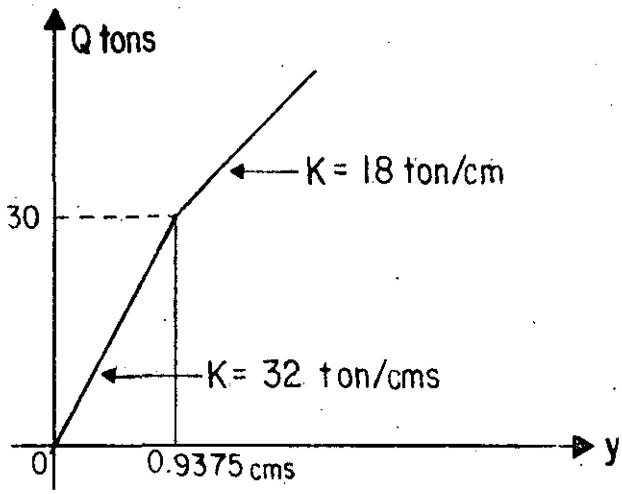


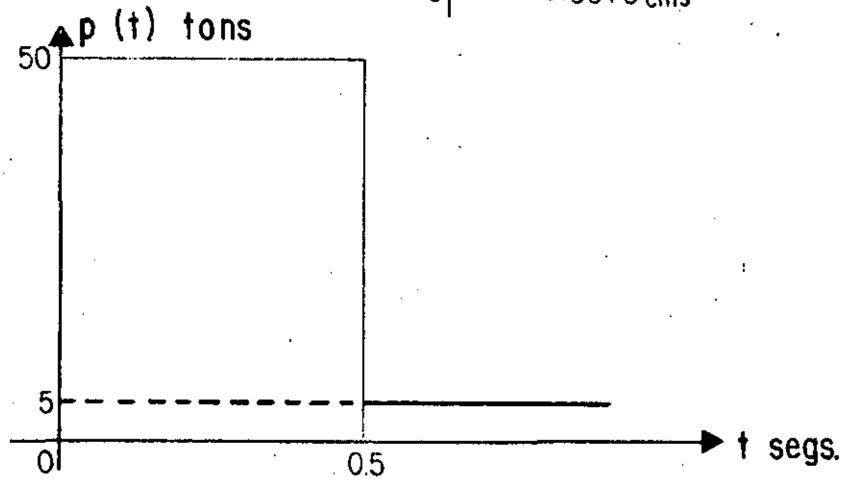
METODO β DE NEWMARK

PARA EL ANALISIS DE SISTEMAS NO LINEALES SE PUEDE USAR EL METODO β DE NEWMARK DESCRITO ANTERIORMENTE.

EJEMPLO







ECUACION DE EQUILIBRIO DINAMICO , $M\ddot{Y} + Q(Y) = P(t)$

$$\ddot{Y} = \frac{P(t) - Q(Y)}{M} = \frac{P(t) - Q(y)}{2} \qquad \text{(I)}$$

PARA LA APLICACION DEL METODO DE NEWMARK SE TIENEN LAS SIGUIENTES EXPRESIONES:

$$t_{i+1} = t_i + At$$

$$\dot{Y}_{i+1} = \dot{Y}_i + (\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1})\ \Delta t/2$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \dot{Y}_i\ At + (0.5 - \beta)\ddot{Y}_i\ (\Delta t)^2 + \beta\ \ddot{Y}_{i+1}\ (\Delta t)^2$$

CONSIDERANDO $\Delta t = 0.10$ SEG. Y $\beta = 1/6$ SE PUEDE ESCRIBIR;

$$\dot{Y}_{i+1} = \dot{Y}_i + \frac{1}{20} (\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}) \qquad \text{(II)}$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \dot{Y}_i(0.10) + \frac{1}{600} (2\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}) \qquad \text{(III)}$$

EL PROCEDIMIENTO DE CALCULO ES COMO SIGUE:

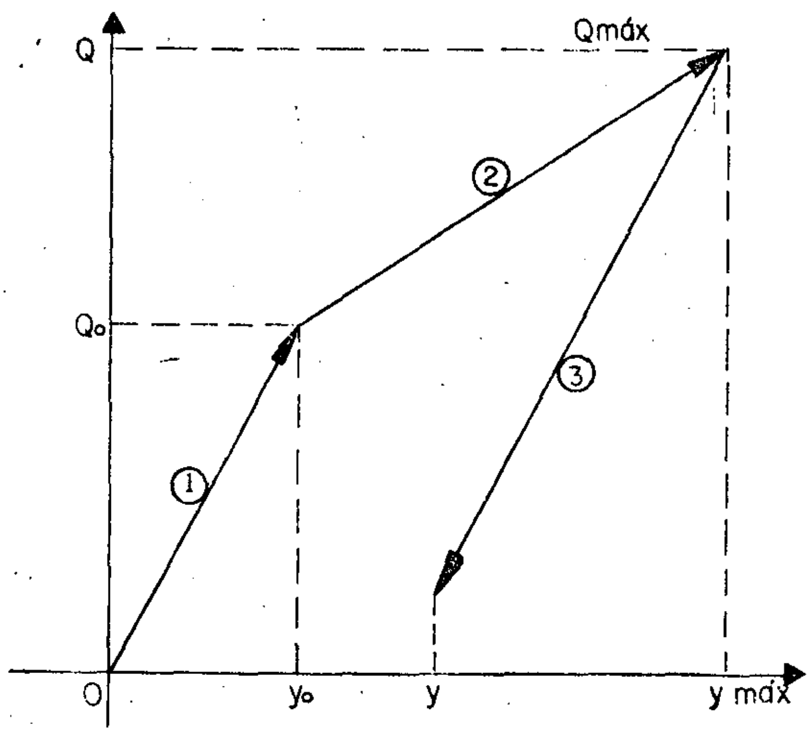
SE ASUME $\ddot{Y}_{i+1}$

SE CALCULA $\dot{Y}_{i+1}$ CON LA ECUACION (II)

SE CALCULA Y_{i+1} CON LA ECUACION (III)

SE CALCULA UN MEJOR VALOR DE $\ddot{Y}_{i+1}$ CON LA ECUACION (I), ETC.

PARA LA FUNCION DE RESISTENCIA Q SE TIENEN LOS SIGUIENTES CASOS:



1. COMPORTAMIENTO ELASTICO , $Q = 32\ Y$ TONS

2. CAMBIO DE RIGIDEZ , $Q = 30 + 18\ (Y-Y_o)$ TON

3. DESCARGA , $Q = Q_{máx} - 32(Y_{MAX}-Y)$ TONS

ESTA ULTIMA EXPRESION MANTIENE SU VALIDEZ HASTA QUE, $(Y_{MAX}-Y) \leq 2Y_o$

$Y_o = 0.9375$ CMS ; $Q_o = 30.0$ TON

PARA t = O, $\ddot{y} = \frac{P}{M} = \frac{50}{2} = 25$; $y = 0$; $\dot{y} = 0$

PARA t = 0.10, $y_i = \dot{y}_i = 0$; $\ddot{y}_i = 25$

1er. CICLO

SEA $\ddot{y}_{i+1} = 20$ COMO PRIMER TANTEO. EN TAL CASO

$$\dot{y}_{i+1} = 0 + \frac{1}{20}(0 + 25) = 2.25$$

$$y_{i+1} = 0 + 0.10 \times 0 + \frac{1}{600}(2 \times 25 + 20) = 0.1167$$

$$Q = 32 \times 0.1167 = 3.7330$$

$$\ddot{y}_{i+1} = \frac{50 - 3.733}{2} = 23.134$$

2o. CICLO

$$\dot{y}_{i+1} = 23.134/2 = 16.567$$

$$y_{i+1} = 73.134/600 = 0.1219$$

$$Q = 32 \times 0.1219 = 3.9000$$

$$\ddot{y}_{i+1} = (50 - 3.9)/2 = 23.050$$

3er. CICLO

.

.

.

4o. CICLO

$\ddot{y}_{i+1} = 23.052$

$\dot{y}_{i+1} = 23.052/2 = 2.4026$

$y_{i+1} = 73.052/600 = 0.12175$

$\Omega = 32 \times 0.12175 = 3.8960$

$\ddot{y} = (50 - 3.8960)/2 = 23.052$ ... ETC.

LOS CALCULOS BASICOS SE MUESTRAN EN LA TABLA SIGUIENTE:

t SEGS	p TONS	$\ddot{Y}$ CM SEG^{-2}	$\dot{Y}$ CM SEG^{-1}	Y CMS	Q TONS
0.0	50.00	25.000	0.00	0.00	0.00
0.10	50.00	20.000 23.134 23.050 23.052	2.2500 2.4070 2.4025 2.4026	0.1167 0.1219 0.12175 0.12175	3.7330 3.9000 3.3960 3.8960
0.20	50.00	20.000 17.445 17.513 17.511	4.5552 4.4270 4.4310 4.43075	0.4722 0.46793 0.46804 0.46204	15.110 14.970 14.977 14.977
0.30	50.00	10.000 9.560 9.569	5.8060 5.7840 5.7848	0.98610 0.98540 0.98543	30.8750 30.8620 30.8630
0.40	50.00	0.00 4.0750 4.0141 4.0150	6.2630 6.4670 6.4640 6.4640	1.5958 1.6026 1.6025 1.60250	41.849 41.972 41.970 41.970
0.50^-	50.00	0.00 -1.9230 -1.9000 -1.8944 -1.8946	6.6650 6.56975 6.5700	2.2623 2.2591 2.25912	53.846 53.789 53.789
0.50+	5.00	-24.3946	6.5700	2.25912	53.789
0.60	5.00	-30.000 -29.126 -29.136 -29.138	3.8503 3.8940 3.89347 3.89347	2.7848 2.78626 2.78624 2.78624	63.251 63.278 63.277 63.277
0.70	5.00	-32.000 -31.289 -31.320 -31.299 -31.301	0.83657 0.87057 0.87147	3.025127 3.02626 3.02641	67.577 67.598 67.600
0.7278	5.00	-31.620 -31.409 -31.420 -31.4093	-0.00313 -0.000352 -0.000205	3.03850 3.03853 3.03853	67.818 67.818 67.818

En t=0.5 + SEG, $\Delta\ddot{y}$ =-45/2 = -22.5 ∴ -22.5 - 1.8946 = -24.3946

CONTINUACION DEL CUADRO ANTERIOR

t	p	$\ddot{Y}$	$\dot{Y}$	Y	Q
0.80	5.0	-28.000 -30.146 -30.000 -30.118 -30.117	-2.1449 -2.21708 -2.22127	2.959611 2.957874 2.95777	65.293 65.237 65.234
0.90	5.0	-27.00 -24.236 -25.00 -24.290 -24.294 -24.308	-5.07712 -4.97712 -4.94182 -4.94242	2.59025 2.59358 2.59476 2.59474	53.473 53.580 53.617 53.617
1.00	5.0	-14.00 -14.7305 -14.7200 -14.7120	-6.85782 -6.89382 -6.89342	1.99614 1.99494 1.99495	34.461 34.423 34.423

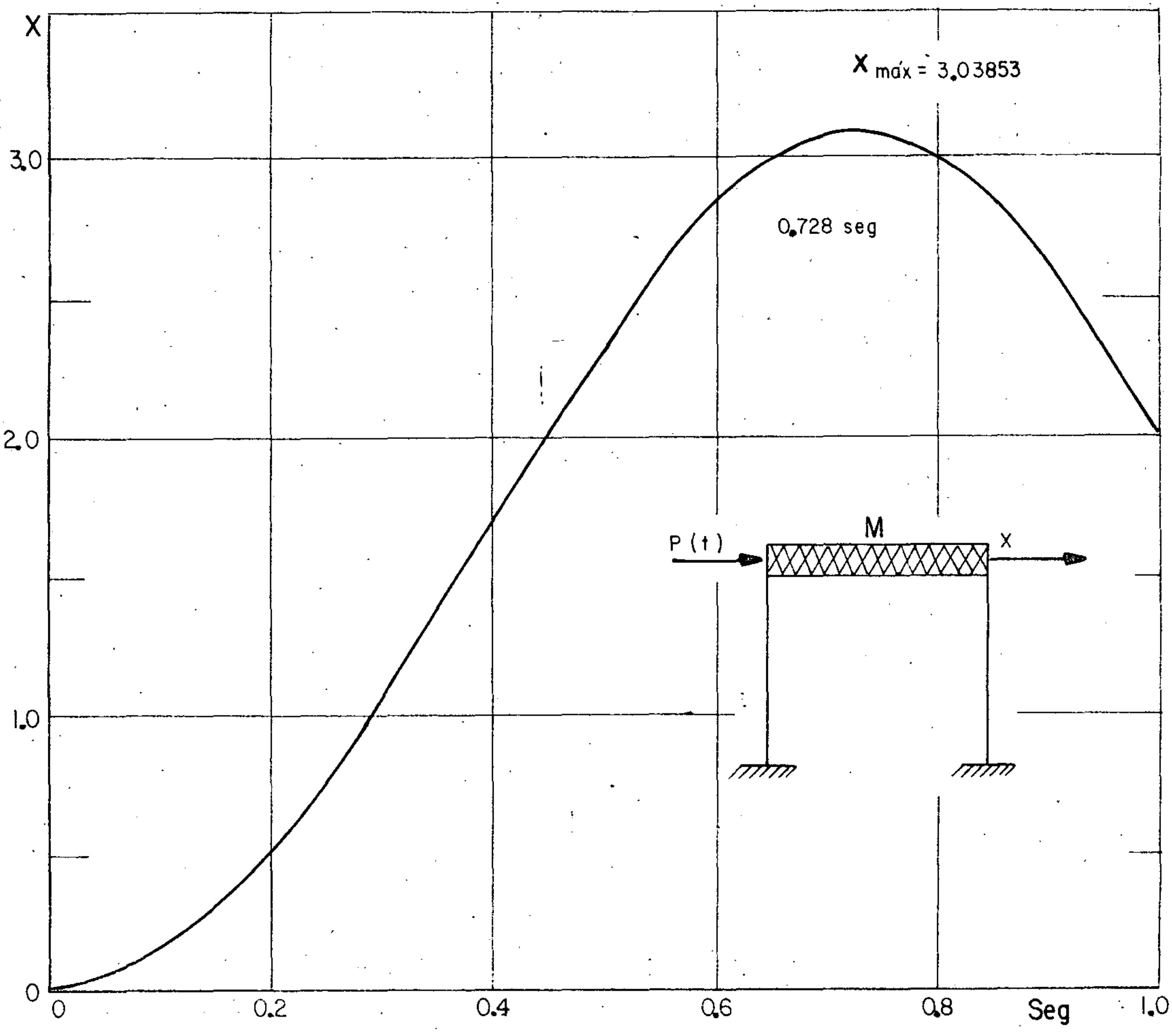
EN ESTOS CALCULOS SE INTRODUJO $t = 0.50^{-}$ Y 0.50^{+} PORQUE PARA ESTE INSTANTE SE PRODUCE UN CAMBIO BRUSCO EN LA CARGA P(t) DE 50.00 TONS A 5.00 TONS, CON LO CUAL SE PRODUCE UN CAMBIO BRUSCO EN LA ACELERACION DEL SISTEMA $\ddot{Y}$. EN ESTE INSTANTE NO SE PRODUCEN CAMBIOS EN $\dot{Y}$ Y Y. EL TIEMPO t = 0.7273 SEG. SE INTRODUJO POR LA NECESIDAD DE CALCULAR LOS VALORES DE Y Y DE Q, PUES A PARTIR DE DICHO INSTANTE SE INICIA LA DESCARGA DEL SISTEMA. ESTA CONDICION SE ENCONTRO SOBRE LA BASE DE APROXIMAR $\dot{Y}$ A CERO, OBTENIENDOSE Y_{MAX}=3.03853 CMS y Q_{MAX} = 67.818 TON.

EN EL CUADRO SIGUIENTE SE PRESENTA UN RESUMEN DE LOS RESULTADOS.

t Seg.	$\ddot{Y}$(supuesta) Cm Seg^{-2}	P Ton	Y Cm.	Q Ton	$\ddot{Y}$(calculado) Cm Seg^{-2}	$\dot{Y}$ Cm Seg^{-1}	N O T A S
0.0	- -	50.00	0.00	0.00	25.00	0.00	
0.10	23.0520	50.00	0.12175	3.896	23.0520	2.40260	
0.20	17.5110	50.00	0.46804	14.977	17.5110	4.43075	
0.30	9.5690	50.00	0.98543	30.863	9.5690	5.78480	CAMBIO DE RIGIDEZ
0.40	4.0150	50.00	1.60250	41.970	4.0150	6.4640	
0.50^{-}	-1.8946	50.00	2.25912	53.789	-1.8946	6.5700	
0.50+	- -	5.00	2.25912	53.789	-24.3945	6.5700	CAMBIO DE CARGA
0.60	-29.1380	5.00	2.78624	63.277	-29.1380	3.89347	
0.70	-31.3010	5.00	3.02641	67.600	-31.3010	0.87147	
0.7278	-31.4093	5.00	3.03853	67.818	-31.4093	-0.000205	Qmáx, Ymáx.
0.800	-30.1170	5.00	2.95777	65.234	-30.1170	-2.22127	
0.90	-24.3080	5.00	2.59474	53.617	-24.3080	-4.94242	
1.00	-14.7120	5.00	1.99495	34.423	-14.7120	-6.89342	

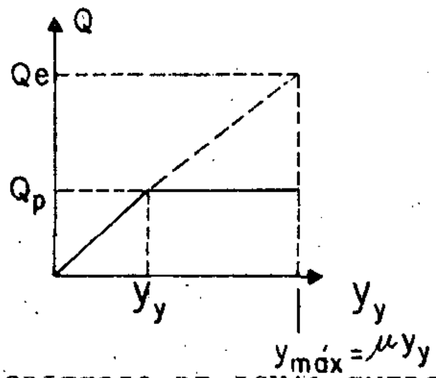
RESPUESTA MAXIMA

$$\begin{cases} Y \text{ máx} = 3.03853 \text{ cms} \\ Q \text{ máx} = 67.818 \text{ tons} \end{cases}$$


X
X máx = 3.03853
3.0
0.728 seg
2.0
M
P (t)
X
1.0
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
Seg
1.0

CRITERIOS PARA TRAZAR ESPECTROS DE DISEÑO ELASTOPLASTICOS A PARTIR DEL ELASTICO

1. CRITERIO DE IGUAL DESPLAZAMIENTO MAXIMO DEL SISTEMA ELASTICO Y EL ELASTOPLASTICO DE IGUAL PERIODO:

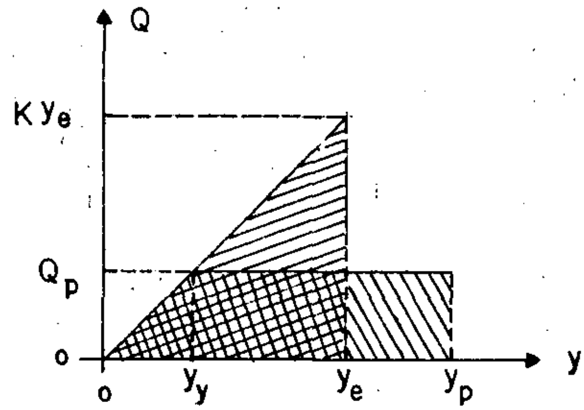


$$Q_p = Ky_y = \frac{Ky_{MAX}}{\mu} = \frac{Q_e}{\mu}$$

$$y_{MAX} = D_e = \mu y_y = \mu D_p$$

$$D_p = \frac{De}{\mu}$$

2. CRITERIO DE IGUAL ENERGIA ABSORVIDA POR LA ESTRUCTURA:



$$\frac{Ky_e y_e}{2} = \frac{Ky_y y_y}{2} + Ky_y(y_p - y_y)$$

$$\frac{1}{2} y_e^2 = \frac{1}{2} y_y^2 + y_y y_p - y_y^2 = y_y y_p - \frac{y_y^2}{2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{y_e}{y_y}\right)^2 = \frac{y_p}{y_y} - \frac{1}{2} = \mu - \frac{1}{2}$$

$$\frac{y_e}{y_y} = \sqrt{2\mu - 1}$$

$$y_y = \frac{y_e}{\sqrt{2\mu - 1}}$$

$$y_y\Big]_{MAX} = D_p = \frac{y_e\Big]_{MAX}}{\sqrt{2\mu - 1}} = \frac{D_e}{\sqrt{2 - 1}}$$

POR LO TANTO

$$D_p = D_e/\sqrt{2\mu - 1} \qquad Y \qquad Q_p = Q_e/\sqrt{2\mu - 1}$$

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

DINAMICA ESTRUCTURAL

VIBRACION DE SISTEMAS DISCRETOS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

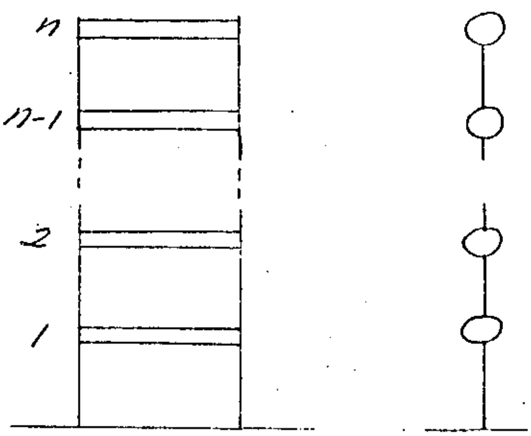
Dr. Octavio A. Rascón Chávez

JULIO, 1985

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

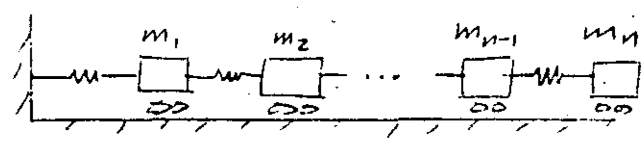
VIBRACION DE SISTEMAS DISCRETOS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

. Ejemplos de sistemas de n GL

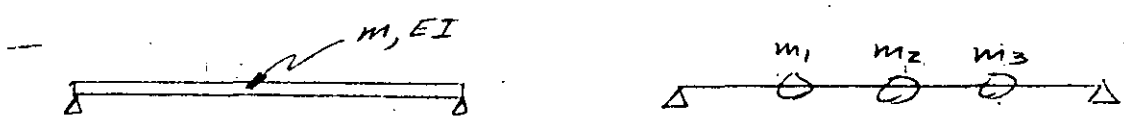


Características:

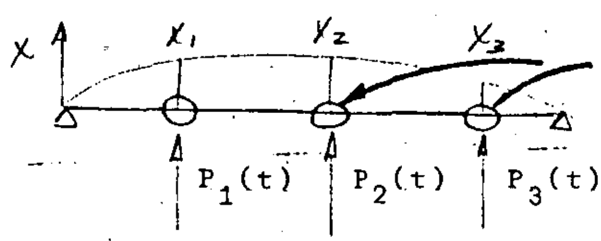
- masas { concentradas, rígidas, constantes
- columnas solo se deforman lateralmente
- con una coordenada por masa queda definida la configuración del sistema
- equivale a:



Además, la consideramos elástica, lineal



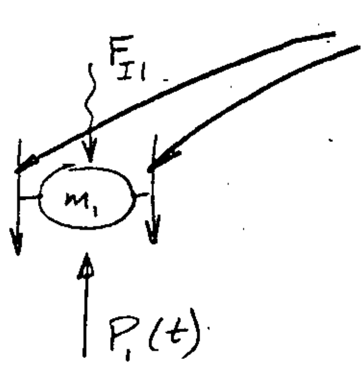
Supongamos:



masas concentradas

fuerzas concentradas exteriores

aislemos una masa:



$F_{r1} = \sum$ fuerzas resistencia elástica a la deformación

F_I = Fuerza de inercia

Las ecuaciones condensadas de movimiento serán:

$$F_{I1} + F_{r1} = P_1(t)$$

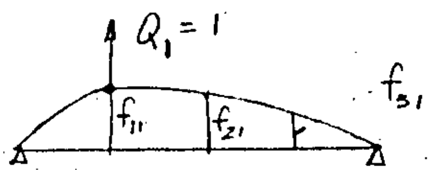
$$F_{I2} + F_{r2} = P_2(t)$$

$$F_{I3} + \underbrace{F_{r3}}_{\text{Fuerzas asociadas al desplazamiento, NO al movimiento}} = P_3(t)$$

$\therefore$ la determinación de estas fuerzas es un problema estático.

Coeficientes de influencia:

1. De flexibilidad



f_{ij} = despl. de la coord. i debido a una carga unitaria en coord. j (desplazamiento y fuerza en = dirección)

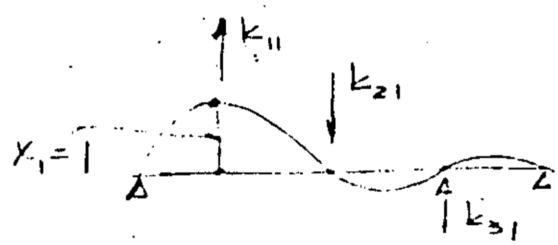
Por superposición

$$X_1 = f_{11}\,Q_1 + f_{12}\,Q_2 + f_{13}\,Q_3$$

$$X_2 = f_{21}\,Q_1 + f_{22}\,Q_2 + f_{23}\,Q_3 \qquad \text{inv. (1)}$$

$$X_3 = f_{31}\,Q_1 + f_{32}\,Q_2 + f_{33}\,Q_3$$

2. De rigidez:



K_{ij} = fuerza en coordenada i por un desplazamiento unitario en coordenada j.

Por superposición

$$Q_1 = K_{11} X_1 + K_{12} X_2 + K_{13} X_3$$

$$Q_2 = K_{21} X_1 + K_{22} X_2 + K_{23} X_3 \qquad (2)$$

$$Q_3 = K_{31} X_1 + K_{32} X_2 + K_{33} X_3$$

Desde luego $K_{ij} = K_{ji}$ (y $f_{ij} = f_{ji}$) (Maxwell-Mohr)

La ecuación 2 también puede escribirse:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{3} K_{ij} X_j$$

o bien, en notación matricial

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}}_{\text{matriz de rigideces}} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

Ponemos:

$$\{Q\} = [K] \{X\}$$

Claro que $[K]^{-1} = [F] = [f_{ij}]$

Sustituyendo (2) o (3) en ecuaciones de movimiento:

$$m_1 \ddot{X}_1 + K_{11} X_1 + K_{12} X_2 + K_{13} X_3 = P_1(t)$$
$$m_2 \ddot{X}_2 + K_{21} X_1 + K_{22} X_2 + K_{23} X_3 = P_2(t)$$
$$m_3 \ddot{X}_3 + K_{31} X_1 + K_{32} X_2 + K_{33} X_3 = P_3(t)$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \ddot{X}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$

o también:

$$[M] \{\ddot{X}\} + [K] \{X\} = \{P(t)\} \quad \text{(vibración forzada)}$$
$$= \{0\} \quad \text{(vibración libre)}$$

1. VIBRACION LIBRE

$$[M] \{\ddot{X}\} + [K] \{X\} = \{0\} \qquad (1.1)$$

Supongamos la solución

$$\{X\} = \underbrace{\{r\}}_{\substack{\text{constante} \\ \text{con } t}} \underbrace{(A \text{ sen } pt + B \text{ sen } pt)}_{\text{escalar}} = \{r\} \quad Y(t)$$

escalar → define:
- variación armónica
- amplitud

Tenemos:

$$\{X\} = \{r\} (A \text{ sen } pt + B \cos pt) = r \quad Y(t)$$
$$\{\dot{X}\} = \{r\} (Ap \cos pt - B\, p \text{ sen } pt) \qquad (1.2)$$
$$\{\ddot{X}\} = \{r\} (-Ap^2 \text{ sen } pt - B\, p^2 \cos pt) = - p^2 \{r\} \; Y(t)$$

Sustituyendo 1.2 en 1.1 y dividiendo entre Y(t) nos queda:

$$- p^2 [M] \{r\} + [K] \{r\} = \{0\}$$

o sea:

$$\underbrace{\big[[K] - p^2 [M]\big]}_{[E]} \{r\} = \{0\} \qquad (1.3)$$

$$[K]\{r\} = p^2 [M] \{r\}$$

pre x $[M]^{-1}$

$$[M]^{-1} [K]\{r\} = p^2 \{r\}$$

$$[K]\{r\} = p^2 [M] \{r\}$$

pre x $[K]^{-1} \cdot \frac{1}{p^2}$

$$\frac{1}{p^2}\{r\} = [K]^{-1}[M]\{r\}$$

En las dos formas llegamos a un problema de VAC

$$[L] \{u\} = \lambda \{u\}$$

Problema de valores característicos:

- Dada una matriz cuadrada de orden (nxn) $[L]$, que representa una transformación lineal de vectores n-dimensionales, debe encontrarse un vector $\{u\}$ que transformado por $[L]$ resulte en otro vector $\lambda \{u\}$ en la misma "dirección". O sea, $[L]$ solo cambia la magnitud de $\{u\}$ sin cambiar la dirección.

  El vector es un vector característico (o eigenvector) de $[L]$. λ(escalar) representa la relación entre las "longitudes" antes y después de la transformación y para llegar a los VEC debe tomar valores de un conjunto de valores característicos (VAC) (o eigenvalores).

  El problema de encontrar frecuencias y modos naturales puede considerarse un problema de VAC. - (STD)

Tenemos

$$\left[[K] - p^2 [M]\right] \{r\} = \{0\} \qquad (1.3)$$

Si en el sistema de ecuaciones

$$[A] \{x\} = \{0\}$$

$[A]$ es no singular, la solución única es la trivial

$\{X\} = \{0\}$, de donde nos interesa el caso en que $[A]$ es singular. En este caso la adjunta* $[\hat{A}]$ existe y puede pre X por ella, con el resultado

$$|A| \{X\} = \{0\}$$

porque $$[\hat{A}] [A] = |A| [I] \quad \forall [A] \; (nxn)$$

Puesto que $|A| = 0$, $\{x\}$ no necesariamente es nulo, pero si se asigna un valor dado a uno de sus elementos los demás quedan determinados en forma única.

También notamos que si $\{X\}$ es solución de $[A] \{X\} = \{0\}$ y α es una constante, entonces $\alpha\{X\}$ es también solución. Por lo tanto, hay un número infinito de soluciones. Todos estas se considerarán juntas y hablaremos de una "solución" como un conjunto de relaciones entre los elementos de $\{x\}$.

Volvemos a $$\underbrace{\left[[K] - p^2 [M]\right]}_{[E]} \{r\} = \{0\} \qquad (1.3)$$

Al desarrollar $|E| = 0$ llegamos a una ecuación de grado n en p^2, cuyas raîces son los VAC.

- Como $[K]$ y $[M]$ son simétricas y positivas definidas*,

---

*Transpuesta de la matriz de cofactores.

**$[A]$ es POS. DEF. si $\{\dot{q}\} [A] \{\dot{q}\} > 0$ para todo $\{\dot{q}\}$ no nulo puede demostrarse que las raíces de la ecuación característica son reales y positivas. Las llamamos p_1^2, p_2^2, ..., p_n^2.

Las n frecuencias naturales son los términos positivos de las raíces y la más baja es llamada <u>frecuencia fundamental</u>.

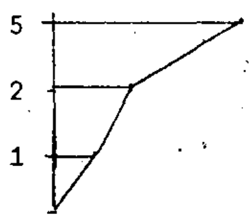
- Para la gran mayoría de los casos de interés las frecuencias son diferentes entre sí.
- Para cada frecuencia p_i existe una VEC asociado:

$$[K] \{r\}_i = p_i^2 \, [M] \{r\}_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

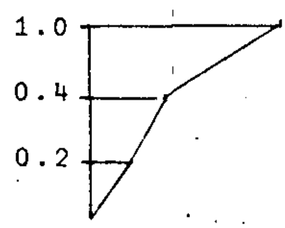
o sea para cada p_i existe una solución $\{r\}$ no trivial

- Normalización (solo conveniencia, sin significado físico)

  Varias formas:



$\{r\}_i' \, [M] \, \{r\}_i = 1$



(modos normales)

- Los modos y frecuencias naturales del sistema son propiedades características derivadas de las propiedades de inercia y rigidez expresadas por los elementos de $[M]$ y $[K]$.
- Llamaremos <u>matriz modal</u> $[R]$ a la que tiene los VEC, o vectores modales, como columnas.

ORTOGONALIDAD DE MODOS DE VIBRACION

Se dice que dos vectores $\{a\}$ y $\{b\}$ son ortogonales con respecto a la matriz simétrica $[J]$ si

$$\{a\}'\ [J]\ \{b\} = \{b\}'\ [J]\ \{a\} = 0$$

Demostremos que dos vectores modales $\{r\}_i$ y $\{r\}_j$, asociados a frecuencias diferentes ($p_i \neq p_j$) son ortogonales con respecto a las matrices de inercia y elástica.

- Cada uno de estos vectores satisface la ecuación 1.3

$$p^2\ [M]\{r\} = [K]\{r\} \qquad [M]\ \{r\} = \frac{1}{p^2}[K]\ \{r\}$$

es decir:

$$p_i^2\ [M]\ \{r\}_i = [K]\ \{r\}_i \qquad [M]\ \{r\}_i = \frac{1}{p_i{}^2}[K]\ \{r\}_i$$

$$p_j^2\ [M]\ \{r\}_j = [K]\ \{r\}_j \qquad [M]\ \{r\}_j = \frac{1}{p_j{}^2}[K]\ \{r\}_j$$

[illegible] i y j por $\{r\}'_j$ y $\{r\}'_i$ respectivamente

$$\left.\begin{aligned} p_i^2\ \{r\}'_j\ [M]\ \{r\}_i &= \{r\}'_j [K]\{r\}_i \\ p_j^2\ \{r\}'_i\ [M]\ \{r\}_j &= \{r\}'_j [K]\{r\}_j \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \{r\}_j [M]\{r\}_i &= \frac{1}{p_i{}^2}\ \{r\}'_j [K]\{r\}_i \\ \{r\}'_i [M]\{r\}_j &\quad \frac{1}{p_j{}^2}\ \{r\}'_i [K]\{r\}_j \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

pero como $[M]$ y $[K]$ son simétricas:

$$\{r\}'_j\ [K]\ \{r\}_i = \{r\}'_i\ [K]\{r\}_j$$
$$\{r\}'_j\ [M]\ \{r\}_i = \{r\}'_i\ [M]\{r\}_j$$

$\therefore$, restando miembro a miembro en ecuaciones (a):

$$(p_i^2 - p_j^2)\left(\{r\}'_i \; [M] \; \{r\}_j\right) = 0 \qquad 0 = \left(\frac{1}{p_i^2} - \frac{1}{p_j^2}\right)\{r\}'_i [K] \{r\}_j$$

y como $p_i^2 \neq p_j^2$

$$\{r\}'_i \; [M] \; \{r\}_j = 0 \qquad \{r\}'_i \; [K] \; \{r\}_j = 0$$

Tenemos ecuaciones de ortogonalidad:

$$\left.\begin{aligned} \{r\}'_i \; [M] \; \{r\}_j &= 0 \\ \{r\}'_i \; [K] \; \{r\}_j &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{si } i \neq j$$

La ec

$$[M] \; \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\} \tag{a}$$

y la matriz modal $[R]$

Hagamos:

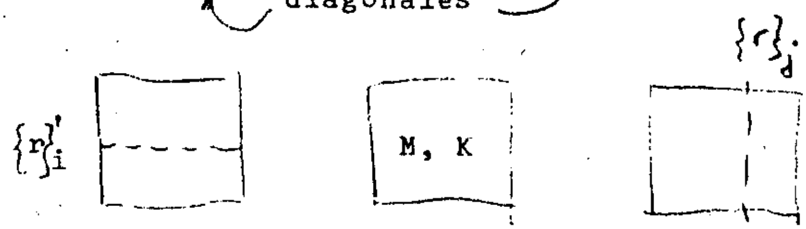
$$\{x\} = [R] \; \{y\}$$

y sustituyendo en (a):

$$[M] \; [R] \; \{\ddot{y}\} + [K] \; [R] \; \{y\} = \{0\}$$

premultiplicando por $[R]'$:

$$\underbrace{[R]' [M] \; [R]}_{\text{diagonales}} \{\ddot{y}\} + \underbrace{[R]' \; [K] \; [R]}_{\text{diagonales}} \{y\} = \{0\} \tag{b}$$



$i \neq j$

Llamemos

$$[R]'\ [M]\ [R] \quad = \quad [M^*]$$
$$[R]'\ [K]\ [R] \quad = \quad [K^*]$$

$\therefore$ la ec (b) (p. 14) puede ponerse:

$$[M^*]\ \{\ddot{y}\} \quad + \quad [K^*]\ \{y\} \quad = \quad \{0\}$$

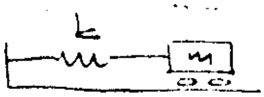
que equivale a:

$$m_{11}^{*}\ \ddot{y}_1 \quad + \quad k_{11}^{*}\ y_1 \quad = \quad 0$$
$$m_{22}^{**}\ \ddot{y}_2 \quad + \quad k_{22}^{*}\ y_2 \quad = \quad 0$$
$$- - - - - - - - - - -$$
$$m_{nn}^{*}\ \ddot{y}_n \quad + \quad k_{nn}\ y_n \quad = \quad 0$$

De las que

$$p_1^2 \quad = \quad \frac{k_{11}^{*}}{m_n^{*}}\ , \ldots\ldots, \qquad p_n^2 = \frac{k_{nn}^{*}}{m_{nn}^{*}}$$

— o — o —

Recordar que para $\longrightarrow$ 

$$m\ddot{x} + kx \quad = \quad 0$$
$$\ddot{x} + p^2 x \quad = \quad 0 \quad y \quad p^2 \quad = \quad \frac{k}{m}$$

O sea, con la transformación

$$\{x\} \quad = \quad [R]\ \{y\}$$

aplicada a la ecuación

$$[M]\ \{\ddot{x}\} \quad + \quad [K]\ \{x\} \quad = \quad \{0\}$$

hemos descompuesto un sistema de nGL en n sistemas de 1GL independientes.

Consideremos el producto

$$[M^*]^{-1}\,[K^*] = \left([R]'\,[M]\,[R]\right)^{-1}\quad [R]'\,[K]\,[R] = [K^*]\,[M^*]^{-1}$$

$$= [R]^{-1}\,[M]^{-1}\,[R']^{-1}\,[R]'\,[K]\,[R]$$

$$= [R]^{-1}\,[M]^{-1}\,[K]\,[R] = [p]$$

$[p]$ contiene las frecuencias naturales en la diagonal principal

$\therefore$ El problema de encontrar frecuencias y modos naturales equivale al de encontrar la matriz $[R]$ que diagonalice $[M]$ y $[K]$ de acuerdo con

$$[R]'\,[M]\,[R] = [M^*]$$
$$[R]'\,[K]\,[R] = [K^*]$$

Las frecuencias naturales se obtendrán de

$$[M^*]^{-1}\,[K^*] = [K^*]\,[M^*]^{-1} = [p]$$

Veámoslo en otra forma

$$[M]\,\{\ddot{x}\} + [K]\,\{x\} = \{P(t)\}$$

Sustituyendo $\{x\} = [R]\,\{y\}$

$$[M]\,[R]\,\{\ddot{y}\} + [K]\,[R]\,\{y\} = \{P(t)\}$$

premultiplicando por $\{r\}_j'$

$$\underbrace{\{r\}_j' \; [M] \; [R]}_{(a)} \; \{\ddot{y}\} + \{r\}_j' \underbrace{[K] \; [R]}_{(b)} \; \{y\} = \underbrace{\{r\}_j' \; \{P(t)\}}_{\text{escalar}}$$

En los productos (a) y (b) solo queda (por ortogonalidad):

$$\underbrace{\{r\}_j' \; [M] \; \{r\}_j}_{M_j^*} \; \ddot{y}_j + \underbrace{\{r\}_j' \; [K] \{r\}_j}_{K^*_j \, = \, p_j^2 \; M^*_j} \; y_j = \underbrace{\{r\}_j' \; \{P(t)\}}_{P^*_j \, = \, \sum_i P_i \, r_{ij}}$$

y para el modo j tenemos:

$$M_j^* \; \ddot{y}_j + p_j^2 \; M_j^* \, y_j = P_j^*(t)$$

o bien (1.5)

$$M_j^* \, \ddot{y}_j + K_j^* \; y_j = P_j^*(t)$$

... ga a la ecuación de movimiento para 1 GL:

$$m \, \ddot{x} + k \, x = P(t)$$

... (1.5) tenemos:

... ecuaciones independientes para nGL

1 ecuación independiente para cada modo

Para vibración libre (1GL)

$$\ddot{x} + p^2 \, x = 0 \qquad p^2 = \frac{k}{m}$$

la solución es:

$$x = A \cos pt + B \operatorname{sen} pt \qquad (c)$$

y para el modo j tendremos ($P_j(t) = 0$)

$$y_j = A_j \cos p_j t + B_j \operatorname{sen} P_j t \qquad (d)$$

Si en (c) hacemos

$$x\Big]_{t=0} = X_o \qquad \dot{x}\Big]_{t=0} = \dot{X}_o$$

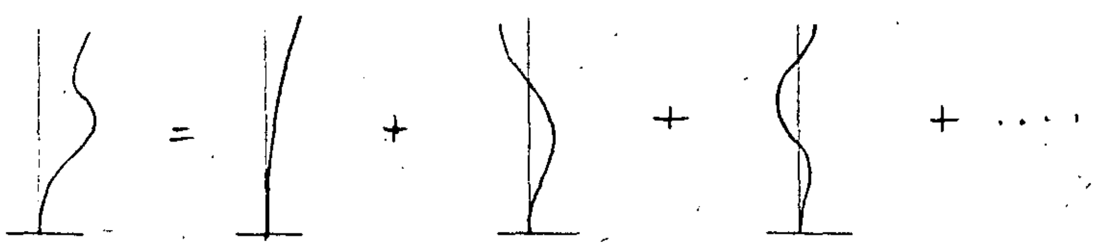
llegamos a

$$x(t) = X_o \cos pt + \frac{\dot{X}_o}{p} \operatorname{sen} pt$$

y ∴ en (d):

$$y_j = y_{oj} \cos p_j t + \frac{\dot{y}_{oj}}{p_j} \operatorname{sen} p_j t$$

Cualquier configuración del sistema puede expresarse como una suma de formas modales multiplicadas por ciertos coeficientes. Esquemáticamente:



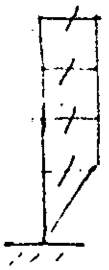
$$\underset{\substack{\text{estática}\\ \text{o}\\ \text{dinámica}}}{\{X\}} = \{r\}_1 Y_1 + \{r\}_2 Y_2 + \{r\}_3 Y_3 + \ldots \qquad (Y = Y(t))$$

$$\left(\{X\} = \{X(t)\}\right)$$

En nuestra expresión

$$\{X\} = [R] \{y\} \qquad 1.4$$

$\{x\}$ puede no ser función de t, por ejemplo:



$$\{1\} = [R] \{c\} \qquad (e)$$

donde $\{c\}$ es el vector de constantes que prex $[R]$ nos da la configuración $\{1\}$

De la ec. (e):

$$\{c\} = [R]^{-1} \{1\} \qquad ([R] \text{ NO SING})$$

En 1.4 también podríamos hacer

$$\{Y\} = [R]^{-1} \{x\}$$

pero sigamos otro camino, premultiplicando por $\{r\}_j^{'} [M]$ o por $\{r\}_j^{'} [K]$

$$\{r\}_j^{'} [M] \{x\} = \{r\}_j^{'} [M][R] \{y\} = \{r\}_j^{'} [M] \{r\}_1 \; y_1 +$$

$$+ \{r\}_j^{'} [M] \{r\}_2 \; y_2 + \cdots$$

$$\cdots + \{r\}_j^{'} [M] \{r\}_n \; Y_n$$

Por ortogonalidad todos estos productos son nulos excepto el término

$$\{r\}_j^{'} [M] \{r\}_j \; Y_j$$

de donde tenemos

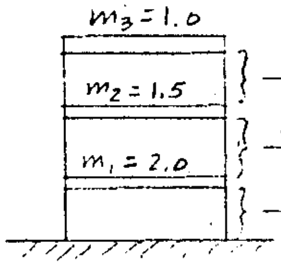
$$\{r\}_j' \cdot [M] \{x\} = \{r\}_j' [M] \{r\}_j \, y_j$$

de donde:

$$y_j = \frac{\{r\}_j' [M] \{x\}}{\{r\}_j' [M] \{r\}_j} = \frac{\{r\}_j [M] \{X\}}{M_j^*} = \frac{\{r\}_j' [K] \{x\}}{K_j^*} = \frac{\{r\}_j [K] \{x\}}{p_j^2 \, M_j^*}$$

(coeficiente de participación)

Ejemplo (vigas rígidas)



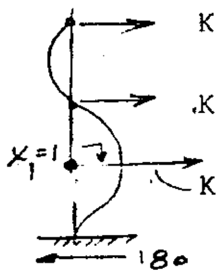
60 T/cm

120 T/cm

180 T/cm

$$[M] = \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \frac{\text{ton seg}^2}{\text{cm}}$$

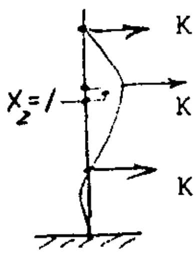
Matriz de rigideces



$K_{31} = 0$

$K_{21} = -120$

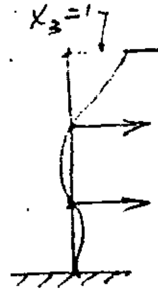
$K_{11} = 300$



$K_{32} = -60$

$K_{28} = 180$

$K_{12} = 120$



$K_{33} = 60$

$K_{23} = -60$

$K_{13} = 0$

$$\therefore [K] = \begin{bmatrix} 300 & -120 & 0 \\ -120 & 180 & -60 \\ 0 & -60 & 60 \end{bmatrix} = 60 \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{T/cm})$$

$$[E] = \left[[K] - p^2\,[M]\right] \qquad M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 60 \begin{bmatrix} (5 - \frac{2}{60}\,p^2) & -2 & 0 \\ -2 & (3-\frac{1.5}{60}\,p^2) & -1 \\ 0 & -1 & (1-\frac{1}{60}\,p^2) \end{bmatrix}$$

si $d = p^2/60$:

$$[E] = 60 \begin{bmatrix} (5-2d) & -2 & 0 \\ -2 & (3-1.5\,d) & -1 \\ 0 & -1 & (1-d) \end{bmatrix}$$

$$|E| = 0 = 60\,(d^3 - 5.5\,d^2 + 7.5\,d - 2) = 0$$

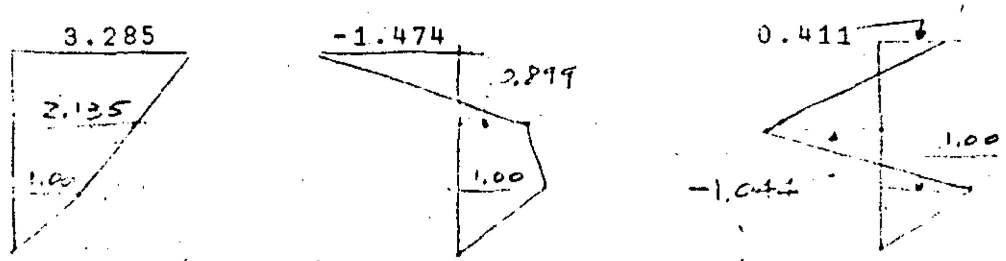
$$d_1 = 0.35$$
$$d_2 = 1.61$$
$$d_3 = 3.54$$

$p^2 = 60\,d$:

$$p_1^2 = 21.0 \qquad p_1 = 4.58$$
$$p_2^2 = 96.5 \qquad p_3 = 9.82$$
$$p_3^2 = 212.4 \qquad p_3 = 14.56$$

frecuencias naturales

Modos:



$p_1 = 4.58$ $\qquad p_2 = 9.82$ $\qquad p_3 = 14.56$

$$[R] = \begin{bmatrix} 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 2.135 & 0.899 & -1.044 \\ 3.285 & -1.474 & 0.411 \end{bmatrix}$$

$$\lceil M^* \rfloor = [R]' [M] [R] = \begin{bmatrix} 19.629 & 0.038 & 0.007 \\ 0.037 & 5.386 & -0.014 \\ 0.006 & -0.014 & 3.804 \end{bmatrix}$$

Ej:

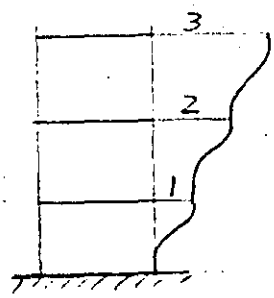
$$19.6296 = \{r\}_1' \, [M] \, \{r\}_1 = M_1^* = \sum_i r_{i1}^2 \, m_i$$

$$\lceil K^* \rfloor = [R]' [K] [R] = 60 \begin{bmatrix} 6.899 & 0.042 & 0.034 \\ 0.042 & 8.651 & -0.040 \\ 0.034 & -0.040 & 13.473 \end{bmatrix}$$

Comprobación con $\lceil K^* \rfloor = \lceil p^2 \, M^* \rfloor =$

$$= \begin{bmatrix} 412.209 & 0 & 0 \\ 0 & 519.749 & 0 \\ 0 & 0 & 807.970 \end{bmatrix} = \lceil p^2 \, M^* \rfloor$$

$$\lceil K^* \rfloor = \begin{bmatrix} 413.940 & 0\cdots & 0\cdots \\ 0\cdots & 519.060 & 0\cdots \\ 0\cdots & 0\cdots & 808.380 \end{bmatrix}$$



$X_{30} = 3$ cm

$X_{20} = 2$ cm $\qquad \{X_o\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$

$X_{10} = 1$ cm

$$Y_{01} = \frac{\{r\}_1' \, [M] \, \{x_o\}}{M_1^*} = \frac{2.0 + 6.405 + 9.855}{19.629} = 0.9303 \text{ cm}$$

$$Y_{02} = \frac{\{r\}_2 \, [M] \, \{x_o\}}{M_2^*} = \frac{2.0 + 2.697 - 4.422}{5.386} = 0.0511$$

$$Y_{03} = \frac{\{r\}_3 \, [M] \, \{x_o\}}{M_3^*} = \frac{2.0 - 3.132 + 1.233}{3.804} = 0.0266$$

Modo $Y_1(t)$

$P_1 = 4.58$

$P_2 = 9.82$

$P_3 = 14.56$

En p.

0.930 cm
0.051 cm
0.026 cm

son amplitudes de los modos

Para obtener los desplazamientos de las masas debemos multiplicar por las configuraciones modales:

$$x_{i1} = \{r\}_1 \quad Y_1(t) = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 2.135 \\ 3.285 \end{Bmatrix} \quad 0.93 \cos 4.58\, t$$

$$x_{i2} = \{r\}_2 \quad Y_2(t) = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.899 \\ -1.474 \end{Bmatrix} \quad 0.051 \cos 9.82\, t$$

$$x_{i3} = \{r\}_3 \quad Y_3(t) = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ -1.044 \\ 0.411 \end{Bmatrix} \quad 0.0266 \cos 14.56\, t$$

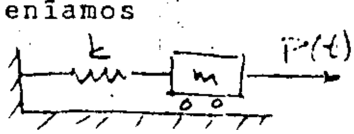
<u>y sumar</u>. O sea los desplazamientos $x_i(t)$ de las masas serán

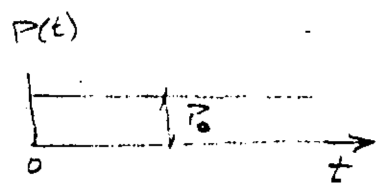
$$\{x(t)\} = [R]\ \{y(t)\}$$

$$x_1(t) = r_{11}\ Y_1(t) + r_{12}\ Y_3(t) + r_{13}\ Y_3(t)$$
$$x_2(t) = r_{21}\ Y_1(t) + r_{22}\ Y_2(t) + r_{23}\ Y_3(t)$$
$$x_3(t) = r_{31}\ Y_1(t) + r_{32}\ Y_2(t) + r_{33}\ Y_3(t)$$

<u>Otro ejemplo</u>

Para 1GL teníamos





La ec:

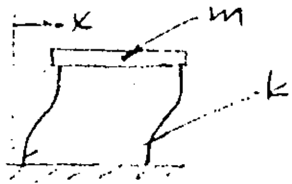
$$x + P^2 x = \frac{P(t)}{m} = \frac{P_o}{m}$$

y para CI = 0 la solución

$$x = \frac{P_o}{K}\left(1 - \cos pt\right)$$

EXCITACION SISMICA

A. Sistemas 1GL

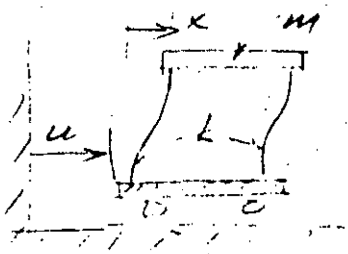


$$m\ddot{x} + kx + P(t) \qquad (a)$$

Para P(t) cualquiera y para CI $\neq$ 0 la solución de (a) es:

$$x(t) = x_o \cos pt + \frac{\dot{x}_o}{p} \operatorname{sen} pt + \frac{1}{mp}\int_0^t P(\tau) \operatorname{sen} p(t-\tau)d\tau$$

Para excitación sísmica:



$$m(\ddot{x} + \ddot{u}) + k\,x = 0$$

o sea,

$$m\ddot{x} + k\,x = -m\ddot{u} \qquad (b)$$

De la comparación de (a) y (b), la solución completa de ésta es:

$$x(t) = x_o \cos pt + \frac{\dot{x}_o}{p} \operatorname{sen} pt - \frac{1}{p}\int_0^t \ddot{u}(\tau) \operatorname{sen} p(t-\tau)\, d\tau$$

B. Sistemas de nGL:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{P(t)\} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_1\ddot{u} \\ -m_2\ddot{u} \\ \vdots \\ -m_n\ddot{u} \end{Bmatrix}$$

$$= -\begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{Bmatrix} \ddot{u} = -\{m\}\ddot{u}$$

Es decir, tenemos:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{P(t)\} = -\{m\}\ \ddot{u}$$

sust. $\{x\} = [R]\{y\}$

$$[M]\,[R]\,\{\ddot{y}\} + [K]\,[R]\,\{y\} = \{P(t)\} = -\{m\}\ \ddot{u}(t)$$

pre x $\{r\}_j'$

$$\{r\}_j'\ [M][R]\{\ddot{y}\} + \{r\}_j'\ [K][R]\{y\} = \underbrace{\{r\}_j'\ \{P\}}_{P_j^*} = \underbrace{-\underbrace{\{r\}_j'\ \{m\}}_{m_j^*}\ \ddot{u}}_{U_j^*}$$

por ortogonalidad:

$$\{r\}_j'\ [M]\{r\}\ \ddot{y}_j + \{r\}_j'\ [K]\ \{r\}_j\ y_j = P_j^* = U_j^*$$

y queda:

$$M_j^*\ \ddot{y}_j + K_j^*\ y_j = P_j^* = U_j^* = -\ m_j^*\ \ddot{u}$$

∴ la solución (CI = 0) de esta ecuación es:

Para P_j^* :

$$y_j(t) = \frac{1}{p_j M_j^*}\int_0^t P_j^*\ (\tau)\ \text{sen}\ p_j(t-\tau)d\tau$$

Para U_J^*:

$$y_j(t) = \frac{1}{p_j M_j^*}\int_0^t U_j^*\ (\tau)\ \text{sen}\ p_j(t-\tau)d\tau$$

que puede escribirse:

$$y_j(t) = -\frac{m_j^*}{p_j M_j^*} \int_0^t \ddot{u}(\tau)\ \text{sen}\ p_j(t-\tau)\ d\tau$$

$$+ y_{oj} \cos p_j t + \frac{\dot{y}_{oj}}{p_j} \ \text{sen}\ p_j t \qquad \text{términos para CI} \neq 0$$

Una vez obtenidos los elementos de $\{y\}$ solo falta premultiplicar por $[R]$ para obtener $\{x\}$:

$$\{x(t)\} = [R] \{y(t)\}$$

GENERALIZACIÓN DE LAS CONDICIONES DE ORTOGONALIDAD

Tenemos la ecuación:

$$\left[[K] - p^2 [M]\right] \{x\} = \{0\}$$

que convenimos en escribir en la forma:

$$(K - p^2 M)\ x = 0$$

como los vectores modales la satisfacen:

$$K r_j = p_j^2\ M r_j \qquad \text{(a)}$$

y premultiplicando por: $r_i' MM^{-1}$ tenemos:

$$r_i' M M^{-1} \qquad K r_j = p_j^2\ M M^{-1} \qquad M r_j = p_j^2\ M M^{-1} K r_j = 0$$

que puede escribirse

$$r_i' \; M \; (M^{-1} \; K)^2 \; r_j = 0$$

y así podría seguirse para llegar a:

$$r_i' \; M \; (M^{-1} K)^{\ell} \; r_j = 0 \quad - \begin{cases} \ell \text{ entero} \\ -\infty < \ell < \infty \end{cases}$$

$$r_i' \; M \; (M^{-1} \; K)^{\ell} \; r_j = 0 \qquad \text{(b)}$$

en forma análoga podemos obtener

$$r_i' \; (MF)^{\ell} \; M \; r_j = 0 \qquad \text{(c)}$$

o

$$r_i' \; (K \; M^{-1})^{\ell} \; K \; r_j = 0$$

En (b):

$\ell = -2$ $\quad M \; (M^{-1}K)^{-2} = M \; (M^{-1}K)^{-1} \; (M^{-1}K)^{-1}$

(en (c), con ℓ=2) $\quad = M \; K^{-1} \; M \; K^{-1} \; M = \underline{M \; F \; M \; F \; M}$

$\ell = -1$ $\quad M(M^{-1}K)^{-1} = M \; K^{-1} \; M = \underline{M \; F \; M}$

$\ell = 0$ $\quad M \; (M^{-1}K)^{0} = \underline{M}$

$\ell = 1$ $\quad M \; (M^{-1}K)^{1} = M \; M^{-1} \; K = \underline{K}$

$\ell = 2$ $\quad M \; (M^{-1}K)^2 = M \; M^{-1} \; K \; M^{-1} \; K = \underline{K \; M^{-1} \; K}$

$\ell = 3$ $\quad M \; (M^{-1}K)^3 = M \; M^{-1} \; K \; M^{-1} \; K \; M^{-1} K = \underline{K \; M^{-1} \; K \; M^{-1} \; K}$

VIBRACION LIBRE Y FORZADA DE SISTEMAS DE N GL CON AMORTIGUAMIENTO

Las ecuaciones de equilibrio dinámico son:

$$\{F_I\} + \{F_a\} + \{F_r\} = \{P(t)\}$$

Ya tenemos:

$$\{F_I\} = [M] \{\ddot{x}\}$$

$$\{F_r\} = [K] \{x\}$$

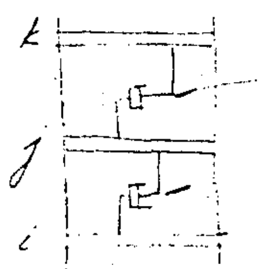
y ahora hacemos

$$\{F_a\} = [c] \{\dot{x}\}$$

donde

$$[c] = [c_{ij}]$$

y c_{ij} = fuerza de amortiguamiento en la coordenada i debido a una velocidad unitaria en la coordenada j.



$$\left.\begin{array}{l} c_{jk} = c_{kj} \\ c_{ij} = c_{ji} \end{array}\right\} \text{indica acoplamiento}$$

La ecuación de movimiento es

$$[M] \{\ddot{x}\} + [c] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{P(t)\}$$

Hagamos: $\{X\} = [R]\{y\}$ premultiplicando por $\{r\}'_j$

$$\{r\}'_j [M][R]\{\ddot{y}\} + \{r\}'_j [C][R]\{\dot{y}\} + \{r\}'_j [K][R]\{y\} = \{r\}'_j \{P(t)\}$$

Para desacoplar estas ecuaciones debemos tener

$$\left.\begin{array}{ll} \{r\}'_j [M] \{r\}_i = 0 & i \neq j \\ \{r\}'_j [K] \{r\}_i = 0 & i \neq j \end{array}\right\} \text{cierto por ortogonalidad}$$

$$\{r\}'_j [C] \{r\}_i = 0 \quad i \neq j \qquad \text{¿pero ésta?} \quad (a)$$

1° admitamos que se cumple:

Ya definimos

$$\{r\}'_j [M] \{r\}_j = M^*_j \qquad \{r\}'_j \{P(t)\} = P^*_j$$

$$\{r\}'_j [K] \{r\}_j = K^*_j$$

y ahora

$$\{r\}'_j [C] \{r\}_j == C^*_j = 2\beta_j \phi_j M^*_j$$

y nuestra ecuación para el modo j queda:

$$M^*_j \ddot{y}_j + 2\beta_j \phi_j M^*_j \dot{y}_j + \phi^2_j M^*_j y_j = P^*_j$$

o bien:

$$\ddot{y}_j + 2\beta_j \phi_j \dot{y}_j + \phi^2_j y_j = \frac{P^*_j}{M^*_j}$$

Como las soluciones para un sistema de 1GL (cuya ec. es $\ddot{x}+2\beta p\dot{x}+p^2x = \frac{P(t)}{m}$) ya las conocemos, solo nos falta saber cómo debe ser $[C]$ para que se cumpla

$$\{r\}_i' [C] \{r\}_j = 0 \qquad i \neq j \qquad \text{(a)}$$

además, claro, de

$$\text{y} \quad \left.\begin{aligned} \{r\}_i' [M] \{r\}_j = 0 \\ \{r\}_i' [K] \{r\}_j = 0 \end{aligned}\right\} i \neq j$$

La ec. (a) se satisface si

i) $[C]$ es proporcionala $[M]$ o a $[K]$

ii) $[C]$ es una combinacion lineal de $[M]$ y $[K]$, o sea:

$$[C] = a_0 [M] + a_1 [K]$$

esto es muy restringido.

iii) En forma más general:

$$[C] = [M] \sum_l a_l [M^{-1}K]^l = \sum_l [C_l] \qquad (38.1)$$

pues ya sabemos que todas las posibles formas $[M] [M^{-1}K]^l$ son satisfactorias y (38.1) es una C. L de matrices de este tipo.

La selección adecuada de a_l dará a $[C]$ las propiedades deseadas, o sea, podrémos dar valores específicos a los elementos de $[C]$. ¿Cuáles le damos?

Asignamos un cierto valor de β a cada modo.

$$C_j^* = \{r\}_j' \; [C] \; \{r\}_j = 2\beta_j p_j M_j^* = \sum_l \{r\}_j' \; [C_l] \; \{r\}_j = \sum_l C_{jl}^* \quad (38.2)$$

De 38.1 y A

$$C_{jl}^* = \{r\}_j' \; [M] \; \left[M^{-1}K\right]^{l} \{r\}_j a_l \qquad (38.3)$$

Por otra parte, para vibración libre:

$$(K - p_j^2 M) r_j = 0$$

$$K r_j = p_j^2 M r_j \leftrightarrow \frac{1}{p_j^2} r_j = F M r_j$$

premultiplicando por $r_j' M$:

$$\frac{1}{p_j^2} r_j' M r_j = r_j' M F M r_j$$

es decir

$$(p_j^2)^{-1} M_j^* = r_j' M (M^{-1}K)^{-1} r_j$$

y así podríamos llegar a que, para cualquier l:

$$(\phi_j^2)^l M_j^* = r_j' M(M^{-1}K)^l r_j = \underbrace{\frac{C_{jl}^*}{a_l}}_{\text{por } 38.3} \qquad 39.1$$

De 39.1:

$$C_{jl}^* = (\phi_j^2)^l M_j^* a_l$$

$$C_{jl}^* = (\phi_j^2)^l M_j^* a_l$$

y sumando sobre 1:

$$\sum_l C_{jl}^* = \sum_l (\phi_j^2)^l M_j^* a_l$$

pero ya teníamos que

$$\sum_l C_{jl}^* = 2\beta_j \phi_j M_j^*$$

$$\therefore \qquad 2\beta_j \phi_j \cancel{M_j^*} = \sum_l (P_j^2)^l \cancel{M_j^*} a_l$$

de donde:

$$\boxed{\beta_j = \frac{1}{2\phi_j} \sum_l (\phi_j^2)^l a_l}$$

Con los n valores de β_j para los n modos podemos resolver para los n valores de a_l y formar nuestra $[C]$ con la ecuación

$$[C] = [M] \sum_{l} a_l \left[M^{-1}K\right]^{l}$$

Por ejemplo para nuestra estructura de 3GL asignemos:

$$\beta_1 = 0.10, \qquad \beta_2 = 0.05, \qquad \beta_3 = 0.02$$

$$\beta_1 = 0.10 = \frac{1}{2p_1}\left[a_1(p_1^2)^{-1} + a_0(p_1^2)^0 + a_1(p_1^2)^1\right]$$

$$\beta_2 = 0.05 = \frac{1}{2p_2}\left[a_{-1}(p_2^2)^{-1} + a_0(p_2^2)^0 + a_1(p_2^2)^1\right]$$

$$\beta_3 = 0.02 = \frac{1}{2p_3}\left[a_{-1}(p_3^2)^{-1} + a_0(p_3^2)^0 + a_1(p_3^2)^1\right]$$

o, en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} 0.10 \\ 0.05 \\ 0.02 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1/p_1^3 & 1/p_1 & p_1 \\ 1/p_2^3 & 1/p_2 & p_2 \\ 1/p_3^3 & 1/p_3 & p_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix}$$

al resolver para a_l resulta

$$\underline{[C] = a_{-1}[MFM] + a_0[M] + a_1[K]}$$

En p. tenemos que para CI = 0 y $\beta = 0$, para excitación sísmica

$$y_j(t) = -\frac{m_j^*}{P_j M_j^*}\int_0^t \ddot{u}_u(\tau)\,\text{sen}\,P_j(t-\tau)\,d\tau$$

coeficiente de participación = $\dfrac{m_j^*}{M_j^*}$

$$C_j = \frac{m_j^*}{M_j^*} = \frac{\{r\}_j'\{m\}}{\{r\}_j'[M]\{r\}_j} = \frac{\sum_{i=1}^{m} m_i r_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} m_i r_{ij}^2}$$

y $\therefore$ podemos poner:

$$y_j(t) = C_j z_j(t)$$

en la que C_j está definida arriba y

$$z_j(t) = -\frac{1}{p_j}\int_0^t \ddot{u}(\tau)\,\mathrm{sen}\,p_j(t-\tau)\,d\tau$$

(y semejante si $\beta \neq 0$)

$$y_j(t) = C_j z_j(t)$$

Además, tenemos

$$\{X\} = [R]\{y\}$$

o sea

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1j} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2j} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nj} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{Bmatrix}$$

††

∴

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} C_j z_j(t)$$

De aquí (sin sumar para todos los modos)

$$\left.\begin{aligned}|X_{ij}|_{max} = r_{ij} C_j |z_j(t)|_{max} &= r_{ij} C_j S_d \\ &= r_{ij} C_j \frac{S_a}{p_j^2}\end{aligned}\right\} S_a = pS_v = p^2 S_d$$

De esta ec. pasamos a:

$$|X_i|_{\substack{máx\\ ABS}} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} C_j S_d = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} C_j \frac{S_a}{p_j^2}$$

$$|x_i|_{\substack{máx\\ PROB}} = \sqrt{\Sigma(|X_{ij}|_{máx})^2}$$

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

DINAMICA ESTRUCTURAL

METODOS DE STODOLA-VIANELLO-NEWMARK Y DE HOLZER PARA EL CALCULO DE FRECUENCIAS Y CONFIGURACIONES MODALES

M. en C. Enrique del Valle Calderón

JULIO, 1985

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

METODOS DE STODOLA-VIANELLO-NEWMARK Y DE HOLZER PARA EL CALCULO DE FRECUENCIAS Y CONFIGURACIONES MODALES

Enrique del Valle C *

Para calcular las frecuencias y configuraciones modales de estructuras idealizadas como una serie de masas unidas por resortes, sin amortiguamiento, en vibración libre, se puede suponer que cada masa se mueve en movimiento armónico simple definido por $X=X_0 \cos wt$ o $X=X_0 \operatorname{sen} wt$ donde X_0 define la amplitud y w la frecuencia circular del movimiento

La aceleración estará dada entonces por $\ddot{X}=-w^2X_0 \cos wt$ ó $\ddot{X}=-w^2X_0 \operatorname{sen} wt=-w^2X$ y las fuerzas de inercia a que estará sometida cada masa, de acuerdo con la segunda ley de Newton, serán $Fi = m\ddot{X} = -mw^2X$

Por otro lado, la fuerza restitutiva que aparece en cada resorte estará dada por $Fe=R\Delta X$, donde R es la rigidez de entrepiso, que podemos definir como la fuerza cortante que es necesario aplicar para producir un desplazamiento unitario entre dos niveles consecutivos: $R = V/\Delta X$, para $\Delta X = 1$

Vemos entonces, que las fuerzas a que se verá sujeta cada masa dependerán de X y de w^2 unicamente.

Por otro lado, sabemos que para conocer un modo de vibrar necesitamos conocer tanto la frecuencia w (o período T) como la configuración modal relativa, y que si la estructura está vibrando en un modo dado, la frecuencia del movimiento de cada masa será la misma.

Tomando en cuenta lo anterior, se pueden emplear dos métodos numéricos para el cálculo de las frecuencias y configuraciones modales.

* Profesor Titular, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM

El método propuesto por Stodola-Vianello-Newmark, consiste en:

1. Suponer una configuración deformada de la estructura: $X_{isupuesta}$
2. Valuar las fuerzas de inercia asociadas a esa configuración $Fi= -mw^2Xi$, dejando w^2 como factor común cuyo valor no conocemos.
3. Valuar la fuerza cortante en la estructura, como la suma acumulativa de las fuerzas de inercia de arriba abajo del edificio. $V_i = \sum_{i=n}^{i} Fi$ (función de w^2)
4. Calcular los incrementos de deformación correspondientes a las fuerzas cortantes.

$$\Delta Xi = \frac{Vi}{Ri} \qquad \text{(función de } w^2\text{)}.$$

5. Obtener la configuración calculada de la estructura como la suma acumulativa de los incrementos de deformación, de abajo hacia arriba.

$$X_{i\,calc} = \sum_{i=1}^{n} \Delta Xi = \text{coef.} \cdot w^2$$

Esto nos dará un coeficiente multiplicado por w^2 para cada masa.

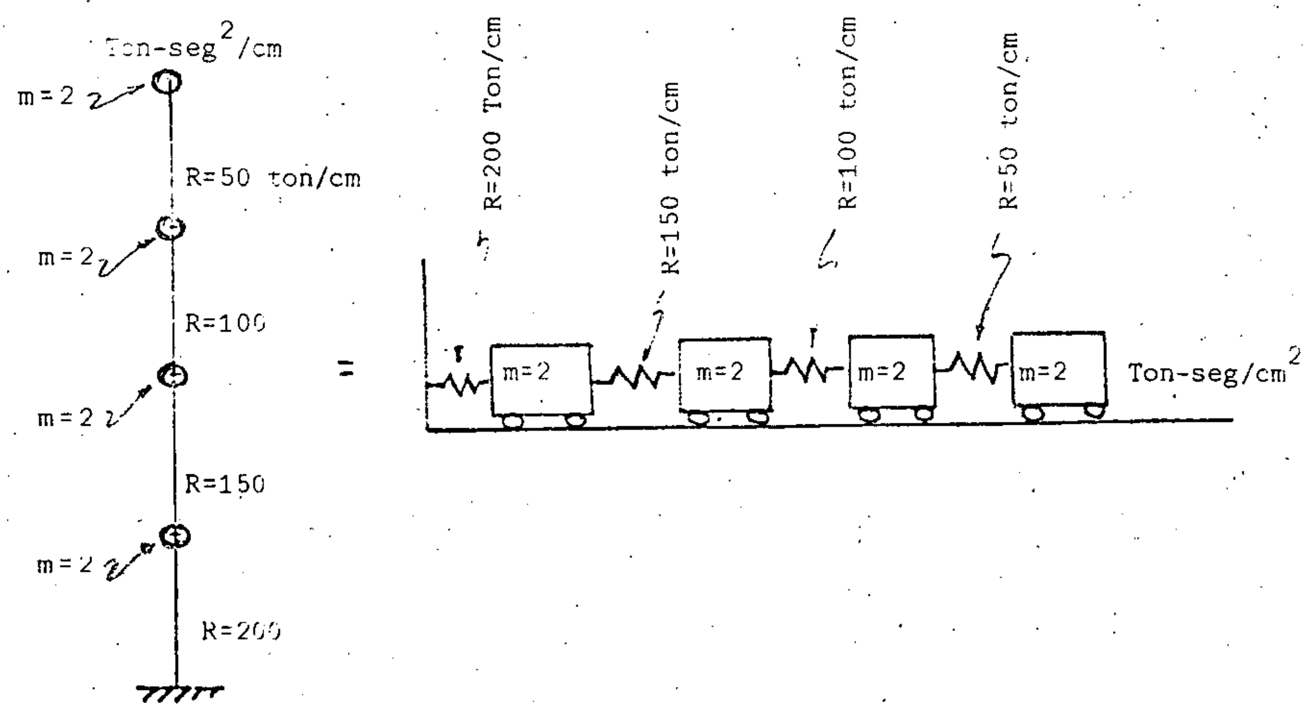
6. Si la estructura está vibrando en un modo la configuración calculada será proporcional a la supuesta, y el factor de proporcionalidad será w^2. Esto es, para cada masa podremos calcular

$$w^2 = \frac{X_{supuesta}}{\text{Coef. de } X_{calc}}$$

En general, los valores de w^2 calculados para cada masa, no serán iguales en el primer ciclo, pero el método es de rápida convergencia si se usa como nueva configuración supuesta la obtenida al final de cada ciclo, de preferencia normalizándola, esto es, haciendo que la deformación de una de las masas, por ejemplo la primera, tenga siempre el mismo valor, con objeto de observar como se modifica la configuración relativa después de cada ciclo. Los valores de w^2 obtenidos en cada ciclo nos dan también un intervalo de valores que se va cerrando hasta que se obtiene finalmente los mismos valores para todas las masas.

El método descrito anteriormente converge siempre hacia el modo más bajo que esté presente en la configuración supuesta, y dado que al suponer una configuración cualquiera ésta estará formada por una combinación lineal de todos los modos posibles, el modo más bajo será el primero o fundamental. Más adelante se indica como hacer para calcular modos superiores.

Ejemplo. Calcular la frecuencia y configuración modal del primer modo de vibrar de la estructura representada por el modelo matemático siguiente.



Para realizar los pasos antes indicados conviene usar una tabulación como la siguiente:

1er. Ciclo

Nivel	$\frac{ton\ seg^2}{cm}$ m	$\frac{ton}{cm}$ R	cm X$_{sup}$ *	$Fi = mw^2X$	V	$\Delta X = \frac{V}{R}$	X$_{calc}$	w^2 **	X$_{sup}$ ***
4	2		4	$8w^2$			$0.52w^2$	$7.692 = \frac{4}{0.52}$	5.2
		50			$8w^2$	$0.16w^2$			
3	2		3	$6w^2$			$0.36w^2$	$8.333 = \frac{3}{0.36}$	3.6
		100			$14w^2$	$0.14w^2$			
2	2		2	$4w^2$			$0.22w^2$	$9.091 = \frac{2}{0.22}$	2.2
		150			$18w^2$	$0.12w^2$			
1	2		1	$2w^2$			$0.1w^2$	$10.0 = \frac{1}{0.1}$	1
		200			$20w^2$	$0.1w^2$			
0							0		

Nótese que los valores R, V y ΔX están defasados, pues corresponden al entrepiso.

* Para iniciar el cálculo puede usarse cualquier valor de X. En general, el método convergirá más rápido entre más acertada sea la configuración supuesta, pero si se supone por ejemplo una configuración que se parezca a un segundo, tercero o cuarto modo, de cualquier manera, al término de algunos ciclos más, llegaremos al primer modo.

** Nótese que en este caso, el valor de w^2 estará comprendido entre $7.692 \frac{1}{seg^2}$ y $10 \frac{1}{seg^2}$

*** En un segundo ciclo, usaremos como nueva configuración supuesta la obtenida al final del primer ciclo normalizada de tal modo que la deformación del primer nivel, sea unitaria, esto es, dividiendo la configuración calculada entre $0.1w^2$ en cada nivel.

2o. Ciclo

Nivel	m	R	X_{sup}	Fi	V	ΔX	X	w^2	X_{sup}
4	2		5.2	$10.4w^2$			$0.651w^2$	7.988	5.425
		50			$10.4w^2$	$0.208w^2$			
3	2		3.6	$7.2w^2$			$0.443w^2$	8.126	3.692
		100			$17.6w^2$	$0.176w^2$			
2	2		2.2	$4.4w^2$			$0.267w^2$	8.240	2.225
		150			$22w^2$	$0.147w^2$			
1	2		1.0	$2.\ w^2$			$0.120w^2$	8.333	1.0
		200			$24w^2$	$0.120w^2$			
0							0		

Obsérvese que el intervalo de variación de w^2 se redujo a 7.988 y 8.333 y que las variaciones en la configuración modal fueron mucho menores que las que tuvo el primer ciclo.

Tomando como base de partida nuevamente la configuración calculada, en un tercer ciclo se tiene:

Nivel	m	R	X_{sup}	F	V	ΔX	X	w^2	X_i
4	2		5.425	$10.85w^2$			$0.6739w^2$	8.050	5.461
		50			$10.85w^2$	$0.2170w^2$			
3	2		3.692	$7.384w^2$			$0.4569w^2$	8.081	3.703
		100			$18.234w^2$	$0.1823w^2$			
2	2		2.225	$4.45w^2$			$0.2746w^2$	8.103	2.225
		150			$22.684w^2$	$0.2512w^2$			
1	2		1.0	$2.0\ w^2$			$0.1234w^2$	8.104	1.00
		200			$24.684w^2$	$0.1234w^2$			
0							0		

y finalmente, en un cuarto ciclo, la aproximación se considera suficiente:

Nivel	m	R	X_{sup}	F	V	ΔX	X	w^2	Xi
4	2		5.461	$10.922w^2$			$0.6775w^2$	8.061	5.468
		50			$10.922w^2$	$0.2184w^2$			
3	2		3.703	$7.406w^2$			$0.4591w^2$	8.066	3.705
		100			$18.328w^2$	$0.1833w^2$			
2	2		2.225	$4.45w^2$			$0.2758w^2$	8.067	2.226
		150			$22.778w^2$	$0.1519w^2$			
1	2		1.00	$2.00w^2$			$0.1239w^2$	8.071	1.00
		200			$24.778w^2$	$0.1239w^2$			
0		Σ	12.389			Σ =	$1.5363w^2$	8.064*	

* El valor final de w^2 lo obtenemos con más precisión dividiendo la suma de X_{sup} entre la suma de coeficientes de X_{calc}. Esto es más preciso que promediar los valores de w^2 de cada nivel

$$w=\sqrt{8.064}= 2.8397; \qquad T = \frac{2\pi}{w} = \frac{6.2832}{2.8397} = 2.213 \text{ seg.}$$

Cálculo de modos superiores empleando este método

Como se indicó antes, el método converge al modo más bajo presente en la configuración supuesta, y al suponer una combinación cualquiera ésta estará constituida por una combinación lineal de los distintos modos de vibrar:

$X_{sup}= C_1X_{i1}+C_2X_{i2}+C_3X_{i3}+C_4X_{i4}$, donde X_{i1} a X_{i4} son las configuraciones modales y C_i son coeficientes de participación.

Si queremos calcular el segundo modo de vibrar empleando este método, tendremos que quitar a la configuración supuesta la participación del primer modo: C_1X_{i1}, para lo cual necesitamos conocer X_{i1} y C_1. X_{i1} la calculamos como se indicó antes y C_1 lo podemos calcular recurriendo a la propiedad de ortogonalidad de los modos de vibración que indica que $\Sigma m_iX_{in}X_{im}=0$ si $n\neq m$, donde X_{in} y

X_{im} son configuraciones modales.

Si multiplicamos la expresión anterior de X_{sup} por $m_i X_{i1}$ y sumamos para todas las masas, considerando que los coeficientes de participación son constantes y pueden salir de la sumatoria, tendremos :

$$\Sigma m_i X_{i1} X_{sup} = C_1 \Sigma m_i X^2_{i1} + C_2 \Sigma m_i X_{i1} X_{i2} + C_3 \Sigma m_i X_{i1} X_{i3} + \ldots$$

donde los términos que multiplican a C_2, C_3, etc. son nulos por la propiedad de ortogonalidad de los modos, quedando entonces

$$C_1 = \frac{\Sigma m_i X_{i1} X_{sup}}{\Sigma m_i X^2_{i1}}$$

Esta expresión es válida para cualquier modo n.

Por tanto, si queremos calcular el segundo modo de vibrar, supondremos una configuración que se parezca a este modo, es decir, que tenga un punto de deflexión nula, calcularemos el valor de C_1 con la expresión anterior y restaremos a la configuración supuesta para el segundo modo la participación del primer modo $C_1 X_{i1}$, lo que da por resultado una nueva configuración supuesta para el segundo modo en la que el modo más bajo presente es el segundo y por lo tanto, al aplicar el método habrá convergencia hacia este modo. A la operación antes descrita se le llama "limpia" de modos.

Si quisiéramos calcular el tercer modo de vibrar, tendríamos que conocer de antemano las configuraciones correctas de primero y segundo modo, y suponer una configuración que se parezca al tercer modo, (que tenga dos puntos de deflexión nula); calcularíamos dos coeficientes de participación C_1 y C_2, correspondientes a los modos primero y segundo, en la configuración supuesta y la limpiaríamos para que el modo más bajo presente en ella

Esto es :

$$X_{i3sup} = C_1 X_{i1} + C_2 X_{i2} + C_3 X_{i3} + C_4\ X_{i4} + \ldots$$

$$C_1 = \frac{\Sigma m X_{i1}\ X_{i3sup}}{\Sigma m X_{i1}^2} \quad ; \; C_2 = \frac{\Sigma m X_{i2} X_{i3sup}}{\Sigma m X_{i2}^2}$$

$$\overline{X}_{i3sup} = X_{i3sup} - C_1 X_{i1} - C_2 X_{i2} = C_3 X_{i3} + C_4 X_{i4} + \ldots$$

De manera semejante se procede para calcular otros modos superiores.

En la práctica, y debido a errores numéricos o de aproximación que van acarreándose no basta con una sola limpia. Para lograr convergencia adecuada da buen resultado limpiar la configuración calculada al cabo de cada ciclo, antes de calcular los valores de w^2. Esa misma configuración limpiada, normalizada, nos sirve como nueva configuración para un nuevo ciclo. Es conveniente llevar cuando menos tres cifras significativas en los cálculos.

Para fijar ideas, calculemos tres ciclos del segundo modo de vibrar de la estructura para la cual calculamos anteriormente el primer modo.

Nivel	m	R	X_{i1}	mX_{i1}	mX^2_{i1}	X_{i2sup}*	$mX_{i1}X_{i2sup}$	$-C_1Xi1$	$\overline{X}_{i2}$	$F_{i2} = m\overline{X}_{i2}w^2$	V	ΔX	X Calc.
4	2		5.468	10.936	59.798	-1.0	-10.936	-0.054	-1.054	$-2.108w^2$			$-0.0334w^2$
		50									$-2.108w^2$	$-0.0422w^2$	
3	2		3.705	7.41	27.454	0	0	-0.036	-0.036	$-0.072w^2$			$0.0088w^2$
		100									$-2.180w^2$	$-0.0218w^2$	
2	2		2.226	4.452	9.910	2.0	9.910	-0.022	1.978	$3.956w^2$			$0.0306w^2$
		150									$1.776w^2$	$0.0118w^2$	
1	2		1.00	2.0	2.0	1.0	2.0	-0.010	0.990	$1.980w^2$			$0.0188w^2$
		200									$3.756w^2$	$0.0188w^2$	
0				Σ=	99.162		Σ= 0.974						

DATOS

$$C_i = \frac{0.974}{99.162} = 0.00982$$

* La configuración supuesta puede ser cualquiera, pero desde luego es conveniente que se parezca a un segundo modo, esto es, que tenga un cambio de signo en la configuración modal.

Nivel	$mx_{i1}X_{calc}$	$-C_1 X_{i1}$	$\bar{X}_{2calc}$	w^2	$\bar{X}_{i2sup}$ **	$m\bar{X}_{i2sup}w^2$	V	ΔX	X_{calc}
4	$-0.3653w^2$	$+0.00696w^2$	$-0.02644w^2$	39.86	-1.3042	$-2.6084w^2$	$-2.6084w^2$	$-0.05217w^2$	$-0.0314w^2$
3	$0.0652w^2$	$0.00472w^2$	$0.01352w^2$	-2.66	0.6669	$1.3338w^2$	$-1.2746w^2$	$-0.01275w^2$	$0.02077w^2$
2	$0.1362w^2$	$0.00284w^2$	$0.03344w^2$	59.15	1.6495	$3.2990w^2$	$2.0244w^2$	$0.01350w^2$	$0.03352w^2$
1	$.0376w^2$	$0.00127w^2$	$0.02007w^2$	49.33	0.990	$1.9800w^2$	$4.0044w^2$	$0.02002w^2$	$0.02002w^2$
Σ									

$$C_1 = \frac{-0.1263w^2}{99.162} = -0.0012736w^2$$

** Normalizando con respecto a 0.99 en el primer nivel, para comparar la evolución de la configuración.

Nivel	$mX_{i1}X_{calc}$	$-C_1 X_{i1}$	$\bar{X}_{2\ calc}$	w^2 ***	$\bar{X}_{i2sup}$	$m\bar{X}_{i2sup}w^2$	V	ΔX
4	$-0.34339w^2$	$+0.000012w^2$	$-0.031388w^2$	41.55	-1.5520	$-3.104w^2$	$-3.104w^2$	$-0.06208w^2$
3	$0.15391w^2$	$+0.000008w^2$	$0.020778w^2$	32.10	1.0274	$2.0548w^2$	$-1.0492w^2$	$-0.01049w^2$
2	$0.14923w^2$	$+0.000005w^2$	$0.033525w^2$	49.20	1.6577	$3.3154w^2$	$2.2662w^2$	$0.01511w^2$
1	$0.04004w^2$	$+0.000002w^2$	$0.020022w^2$	49.45	0.99	$1.98w^2$	$4.2462w^2$	$0.02123w^2$

$\Sigma = -0.00021w^2$

$\Sigma = 2.1231$

$\Sigma|\ | = 5.2271$

$$C_1 = \frac{-0.00021w^2}{99.162} = -0.0000021177w^2$$

*** Nótese que el intervalo de w^2 queda comprendido entre 32.1 y 49.49 y que el ajuste en la curva ocurre casi entre las dos últimas masas. Obsérvese que la corrección al limpiar es muy pequeña.

Nivel	X_{calc}	$m X_{i1} X_{calc}$	$-C_1 X_{i1}$	$\bar{X}_{calc}$	w^2	$\bar{X}_{isup}$
4	$-0.03623w^2$	$-0.39621w^2$	$+0.000023$	$-0.036207w^2$	42.86	-1.705
3	$0.02585w^2$	$0.19155w^2$	$+0.000015$	$0.025865w^2$	39.72	1.206
2	$0.03634w^2$	$0.16179w^2$	$+0.000009$	$0.036349w^2$	45.61	1.695
1	$0.02123w^2$	$0.04246w^2$	$+0.000004$	$0.021234w^2$	46.62	0.99
0	0	$\Sigma=-0.00041w^2$		$\Sigma=0.047241w^2$	prom. 43.70 44.93	
				$\Sigma=0.119655w^2$ (vals. abs.)	43.68	

$$C_1 = \frac{-0.00041w^2}{99.162} = -0.0000041w^2$$

**** El intervalo de variación de w^2 se ha reducido a 39.72 – 46.62 (dif = 6.9) y los ajustes en la curva son menores. En uno o dos ciclos más se llegaría al valor correcto de w^2 y X_i. Nótese que para estimar un valor de w^2 procediendo como se indicó anteriormente podemos hacer las sumas de $\bar{X}_{sup}$ y de los coeficientes de $\bar{X}_{calc}$ tomando valores absolutos o tomando en cuenta el signo correspondiente. La variación que se obtiene en este caso es de 3% aprox. Si sacamos el promedio de w^2 se obtiene un valor casi igual al obtenido con las sumas de valores absolutos, que es más correcto.

Si no hubiéramos hecho la limpia en ninguno de los ciclos, al cabo de 8 habríamos llegado a la configuración del primer modo (en vez de 4 ciclos que se necesitaron cuando la configuración supuesta se parecía a la del primer modo).

Aplicación del Método de Stodola-Vianello-Newmark Para Estructuras de Flexión

Como se verá más adelante, cuando las trabes de los marcos son muy flexibles en comparación con las columnas, o cuando las fuerzas laterales son resistidas por muros que trabajan esencialmente a flexión, la rigidez de entrepiso no es independiente de la distribución de fuerzas a que esté sometida la estructura y por tanto no puede suponerse constante para el cálculo de los distintos modos de vibrar. En general, la pseudorigidez equivalente que se obtendría para un segundo modo será mayor que la correspondiente al primer modo, pues los efectos de flexión de conjunto se reducen considerablemente al no tener todas las fuerzas actuando en el mismo sentido. Lo mismo podría decirse para modos superiores (ref. 1).

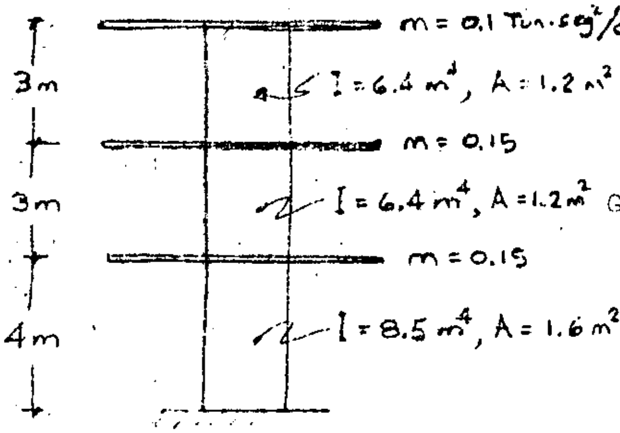
En esos casos, las propiedades elástico geométricas de la estructura no quedarán definidas por rigideces de entrepiso sino por la variación de los productos EI y GA con los cuales se podrán calcular las deformaciones debidas a flexión y a fuerza cortante respectivamente.

Para calcular las deformaciones por flexión es conveniente el empleo de los teoremas de la viga conjugada, que es, para el caso de un voladizo, otro voladizo empotrado en el extremo opuesto cargado con el diagrama de momentos entre EI, y en el cual los momentos flexionantes corresponden a las deformaciones de la viga real.

Las deformaciones por cortante, que en el caso de estructuras a base de muros pueden ser importantes en comparación con las de flexión, sobre todo en los niveles inferiores, se calculan mediante la expresión $\Delta X_{v_i} = \frac{V_i h_i}{A_i G}$, donde ΔX_{v_i} es el incremento de deformación por cortante entre dos niveles consecutivos, V_i, h_i y A_i son, respectivamente la fuerza cortante, la altura y el área efectiva de cortante entre esos mismos niveles y G es el módulo de elasticidad al cortante del material de la estructura.

Para calcular los modos de vibración, se supone una configuración modal, se calculan las fuerzas de inercia $F_i = m_i w^2 X_i$ asociadas a la configuración y las fuerzas cortantes correspondientes y a partir de ellas se valúan los incrementos de momento de cada entrepiso y los momentos de volteo acumulados de arriba hacia abajo, los cuales se dividen entre EI (habrá dos valores de M/EI en un mismo nivel en los casos en que haya cambio de sección de los muros). La integración numérica del diagrama de M/EI nos permitirá transformar ese diagrama en una serie de cargas concentradas equivalentes a él aplicadas en los distintos niveles con los cuales es muy fácil calcular los cortantes equivalentes correspondientes a cada entrepiso y los incrementos de momento flexionante en la viga conjugada que serán iguales a los incrementos de deformación por flexión entre dos niveles consecutivos (es el equivalente de $\Delta X = V/R$ del caso visto anteriormente). A estos incrementos de deformación por flexión se sumarán los correspondientes a la deformación por cortante y con esa suma se podrá calcular la nueva configuración, que será como antes función de w^2 y de donde podremos despejar este valor y en caso de que no sea igual para todas las masas volver a hacer otro ciclo tomando como configuración de partida la encontrada anteriormente normalizándola con respecto a una de las masas para poder comparar la evolución de las configuraciones de cada ciclo.

Para fijar ideas, a continuación se presenta un ejemplo de análisis de una estructura en que las fuerzas laterales son resistidas por muros, cuyos valores de I y A son los indicados en la figura siguiente:



$E = 200\,000\ kg/cm^2 = 2\,000\,000\ Ton/m^2 = 2x10^6\ Ton/m^2$

$G = 0.4\ E = 0.8x10^6\ Ton/m^2$

Nivel	$\frac{Ton\text{-}seg^2}{cm}$ m	m^4 I	Ton-m^2 EI	m^2 A	Ton GA	m h	cm X_{sup}	$mX_{sup}w^2$	Ton V	ΔM=Vh	Ton-m M	1/m $\frac{M}{EI}$
3	0.10	6.4	$12.8x10^6$	1.2	$0.96x10^6$	3	5.0	$0.50w^2$	$0.5w^2$	$1.5w^2$	0	0
2	0.15	6.4	$12.8x10^6$	1.2	$0.96x10^6$	3	2.5	$0.38w^2$	$0.88w^2$	$2.64w^2$	$1.5w^2$	$0.1172x10^{-6}w^2$
1	0.15	8.5	$17.0x10^6$	1.6	$1.28x10^6$	4	1	$0.15w^2$	$1.03w^2$	$4.12w^2$	$4.14w^2$	$0.3234x10^{-6}w^2$ $0.2435X10^{-6}w^2$
0											$8.26w^2$	$0.4859x10^{-6}w^2$

Ejemplo de cálculo de las concentraciones equivalentes al diagrama de M/EI

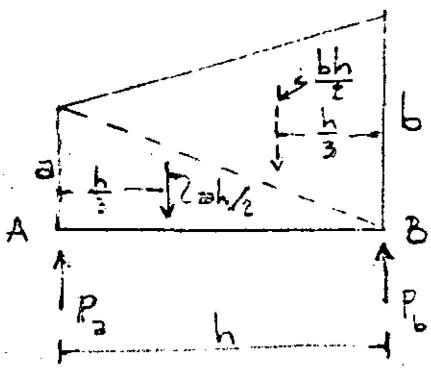
Para el nivel 3

$$P_{eq} = \frac{3}{6}\ (2x0 + 0.1172 \times 10^{-6}\ w^2) = 0.0586x10^{-6}w^2$$

(Ver aclaración al pie de la tabla de la página siguiente)

Nivel	Peq*	Veq**	m $\Delta M = Veq \cdot h = \Delta X_f$	m *** ΔXv	m ΔX_{tot}	m X_{cal}
3	$0.0586\times10^{-6}w^2$					$23.0052\times10^{-6}w^2$
		$2.2369\times10^{-6}w^2$	$6.7107\times10^{-6}w^2$	$1.5625\times10^{-6}w^2$	$8.2732\times10^{-6}w^2$	
	$0.1172\times10^{-6}w^2$					
2						$14.732\times10^{-6}w^2$
	$0.2789\times10^{-6}w^2$					
		$1.8408\times10^{-6}w^2$	$5.5224\times10^{-6}w^2$	$2.75\times10^{-6}w^2$	$8.2724\times10^{-6}w^2$	
	$0.3820\times10^{-6}w^2$					
1						$6.4596\times10^{-6}w^2$
	$0.6486\times10^{-6}w^2$					
		$0.8102\times10^{-6}w^2$	$3.2406\times10^{-6}w^2$	$3.2188\times10^{-6}w^2$	$6.4596\times10^{-6}w^2$	
0	$0.8102\times10^{-6}w^2$					0

w^2 **** $1/seg^2$	X_{sup}
2173.42	3.56
1696.99	2.28
1548.23	1.0



* Para obtener cargas concentradas equivalentes al diagrama de M/EI se puede usar la fórmula siguiente:

$P_a = \frac{h}{6}(2a+b)$; $P_b = \frac{h}{6}(2b+a)$

donde h es la distancia entre dos puntos A y B con ordenadas de M/EI iguales a a y b respectivamente. La variación de M/EI entre A y B es lineal, por lo que esta expresión se obtiene considerando dos triángulos con alturas a y b respectivamente y base h. Pa y Pb son las concentraciones correspondientes en los puntos A y B. (Ref. 2)

** Recuérdese que el empotramiento de la viga conjugada es el extremo superior, por lo que se empieza de abajo hacia arriba el cálculo

*** Obsérvese que en el primer entrepiso la deformación por cortante es prácticamente igual a la de flexión por lo que despreciarla conduciría a errores muy grandes. Al ir aumentando la altura de la estructura la deformación por cortante va reduciendo su importancia en comparación con la de flexión y puede llegar a ser despreciable. En este caso la deformación por cortante en el tercer entrepiso es 23% de la debida a flexión.

**** Debe tenerse cuidado con las unidades al valuar w^2 pues es fácil equivocarse, obsérvese que X_{sup} está en cm y X calc resulta en metros

Método de Holzer

Como se indicó anteriormente, para conocer completamente un modo de vibrar necesitamos conocer tanto la configuración modal como la frecuencia del modo. Hemos visto que en el método de Stodola-Vianello-Newmark se supone una configuración relativa y a partir de ella se calcula el valor de w^2. Holzer procede exactamente alrevés, esto es, supone la frecuencia y a partir de ella se calcula la configuración relativa de abajo hacia arriba de la estructura. Dado que la configuración es relativa se puede suponer también la deformación de la primera masa (por consiguiente el incremento de deformación entre la base y la primera masa. El método tiene las siguientes etapas :

Los datos son las masas y las rigideces de entrepiso, igual que antes.

1. Suponer un valor de w^2
2. Obtener los valores de mw^2_{sup} para cada masa
3. Suponer la deformación del primer nivel: X_1; conviene suponer un valor unitario. Esto equivale también, como ya se dijo a suponer ΔX_1.
4. Calcular la fuerza cortante en la base de la estructura, (primer entrepiso) que será por definición de rigidez de entrepiso

$$V_1 = R_1 \Delta X_1 \quad \text{si} \quad \Delta X_1 = 1,\ V_1 = R_1$$

5. Calcular la fuerza de inercia asociada a la masa del primer nivel:

$$F_1 = m_1 w^2_{sup} X_1$$

6. Por definición de fuerza cortante, como la suma acumulativa de las fuerzas arriba de un cierto nivel, podremos calcular la cortante del segundo entrepiso restando a la cortante en la base la fuerza de inercia del primer nivel, esto es

$$V_2 = V_1 - F_1$$

7. Conocida la fuerza cortante en el entrepiso 2 podemos calcular el incremento de deformación en ese entrepiso dividiendo la cortante entre la rigidez de entrepiso $\Delta X_2 = \dfrac{V_2}{R_2}$

8. Sumando ΔX_2 a la deformación del primer nivel obtendremos la deformación del segundo nivel $X_2 = X_1 + \Delta X_2$ y podemos repetir los pasos 5 a 8 para todas las masas hasta llegar al extremo superior de la estructura.

Si la frecuencia supuesta corresponde a un modo de vibrar, obtendremos que la fuerza de inercia del último nivel es igual a la fuerza cortante del entrepiso correspondiente (por equilibrio dinámico). Si la frecuencia supuesta no es la correspondiente a un modo de vibrar, se obtendrá una diferencia entre el valor de la fuerza de inercia y el de la fuerza cortante en el extremo de la estructura. En este caso el método no es convergente, pero si hacemos otro ciclo con otro valor de w^2 relativamente cercano al anterior, encontraremos otra diferencia y podremos trazar una gráfica que nos relacione las frecuencias supuestas (abscisas) con las diferencias entre fuerza de inercia y fuerza cortante en el extremo superior de la estructura (ordenadas). Una vez que tenemos dos puntos de esa gráfica podremos buscar un valor de w^2 supuesto en la intersección con el eje de las abscisas de la línea que une los puntos antes obtenidos, o su prolongación si ambas diferencias tienen el mismo signo. Con este tercer valor supuesto para w^2 seguramente obtendremos otra diferencia, menor que las anteriores, que nos definirá un tercer punto en la gráfica. Podremos entonces trazar una curva entre los tres puntos y definir así un nuevo valor de w^2 que seguramente estará muy próximo a la frecuencia correcta de uno de los modos de vibrar de la estructura.

Cuando ya se está cerca del valor correcto, se puede mejorar el valor supuesto de w^2 empleando el cociente de Crandall siguiente :

$$\bar{w}^2 = w^2 \frac{\Sigma V \cdot \Delta X}{\Sigma F X}$$

donde $\bar{w}^2$ es el valor que debemos suponer en el ciclo siguiente.

El método presentado sirve para calcular cualquier modo natural de vibración teniendo como datos las masas y las rigideces de entrepiso de la estructura. El modo de que se trate se obtendrá de la inspección de la configuración modal, tomando en cuenta que en el primero todas las deformaciones tienen el mismo signo, en el segundo hay un cambio de signo, en el tercero dos cambios de signo y así sucesivamente.

Si se conoce la frecuencia del primer modo de vibrar (por haberlo calculado empleando el método Stodola-Vianello-Newmark, por ejemplo), se puede estimar gruesamente el valor de las frecuencias de los modos superiores empleando la relación $w_2^2 \doteq 9w_1^2$; $w_3^2 \doteq 25w_1^2$, etc. (Esta aproximación puede ser demasiado burda dependiendo de los valores relativos de las masas y rigideces en cada caso particular, pero sirve como orientación).

Ejemplo:

Calculemos el segundo modo de vibrar de la estructura que se usó en el método de Stodola-Vianello-Newmark, suponiendo

$$w_2^2 \doteq 9w_1^2 = 9 \times 8 = 72 \frac{1}{seg^2}$$

Usaremos la tabulación siguiente :

Nivel	m	R	mw^2_{sup}	ΔX	X *	F	V	
4	2	50	144	-2.707	-2.751	-396.1	-135.4	Dif = 260.7
3	2	100	144	-1.417	-0.044	- 6.3	-141.7	
2	2	150	144	0.373	1.373	-197.7	56	
1	2	200	144	1.0	1.0	144	200	

$w^2_{sup} = 72$

* Obsérvese que aunque la diferencia encontrada es fuerte, la configuración se parece a un segundo modo, pues tiene un cambio de signo.

Usando un nuevo valor de w^2_{sup} de 50 $1/seg^2$, tendremos

Nivel	m	R	mw^2	ΔX	X	F	V	
4	2	50	100	-3.334	-2.334	-233.4	-166.7	Dif. 66.7
3	2	100	100	-0.667	1.00	100	- 66.7	
2	2	150	100	0.667	1.667	166.7	100	
1	2	200	100	1.0	1.0	100	200	

Trazando la gráfica w^2_{sup} - diferencias encontramos

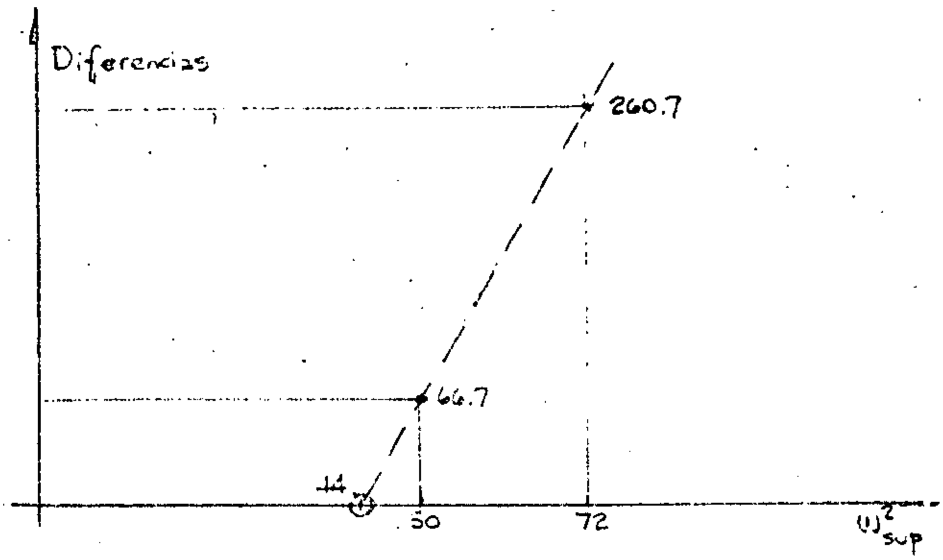


Fig 1.

que el valor de w^2 que hace cero las diferencias es aproximadamente 44 (podría obtenerse por triángulos semejantes, pero sabemos que aún cuando se hiciera así el valor no nos llevará exactamente a cero diferencia pues la variación no es lineal como estamos suponiendo, excepto en intervalos muy cerrados).

Suponiendo entonces $w^2 = 44$

Nivel	m	R	mw^2	ΔX	X	F	V	FX	VΔX
							Dif.=3.57		
4	2		88		-1.844	-162.27		299.23	
		50		-3.174			-158.7		503.71
3	2		88		1.33	117		155.61	
		100		-0.417			- 41.7		17.39
2	2		88		1.747	153.7		268.51	
		150		0.747			112		83.66
1	2		88		1.0	88		88	
		200		1.0			200		200
0								Σ811.35	804.76

$$\bar{w}^2 = 44\,\frac{804.76}{811.35} = 43.64\ 1/seg^2$$

Usando $w^2_{sup} = 43.64\ 1/seg^2$

Nivel	m	K	mw^2	ΔX	X	F	V
4	2		87.28		-1.809	-157.89	Dif.=0.05
		50		-3.159			-157.94
3	2		87.28		1.350	117.83	
		100		-0.401			- 40.11
2	2		87.28		1.751	152.83	
		150		0.751			112.72
1	2		87.28		1.0	87.28	
		200		1.0			200
0							

Como puede verse, la diferencia al final de este último ciclo es despreciable, por lo que

$$w_2^2 = 43.64\ 1/seg^2,\ w_2 = 6.606\ 1/seg\ .\ T_2 = 0.951\ seg$$

y la configuración modal es la indicada.

Suponiendo otro valor mayor de w^2 podría calcularse el tercero y cuarto modos. Puede también verificarse que la frecuencia del primer modo obtenido con el método de Stodola-Vianello-Newmark es correcta.

Comentarios adicionales

En los métodos presentados se tiene como datos las masas y las rigideces de entrepiso. Las masas son relativamente fáciles de calcular y dependen exclusivamente del peso de los materiales con que esté hecha la estructura y de la carga viva que se considere para fines de análisis sísmico. Las rigideces serán función de las propiedades elástico-geométricas de los materiales empleados, que no es sencillo definir y de la estructuración, sobre todo de la relación que guarden las rigideces relativas de las barras que forman la estructura, trabes y columnas.

Dado el modelo matemático de un edificio como una serie de masas unidas por resortes, definimos como sistema estrechamente acoplado a aquel en que la rigidez de entrepiso es independiente de la distribución de cargas laterales a que se vea sometido el modelo, esto es, la rigidez de entrepiso es invariable independientemente de la elástica que adquiera la estructura al ser sometida a cargas laterales. Aquí se entiende por rigidez de entrepiso, como se indicó anteriormente, la fuerza necesaria para producir el desplazamiento unitario de un nivel con respecto al otro, esto es

$$R = \frac{V}{\Delta X} \quad ; \quad \text{para} \quad \Delta X=1 \quad , \quad R=V$$

En la figura 2 se muestra el modelo matemático de un edificio de 4 niveles sometido a distintos sistemas de fuerzas. De acuerdo con lo antes dicho, la rigidez debe ser independiente de las fuerzas aplicadas (este tipo de estructuras se conoce también como estructura "de cortante").

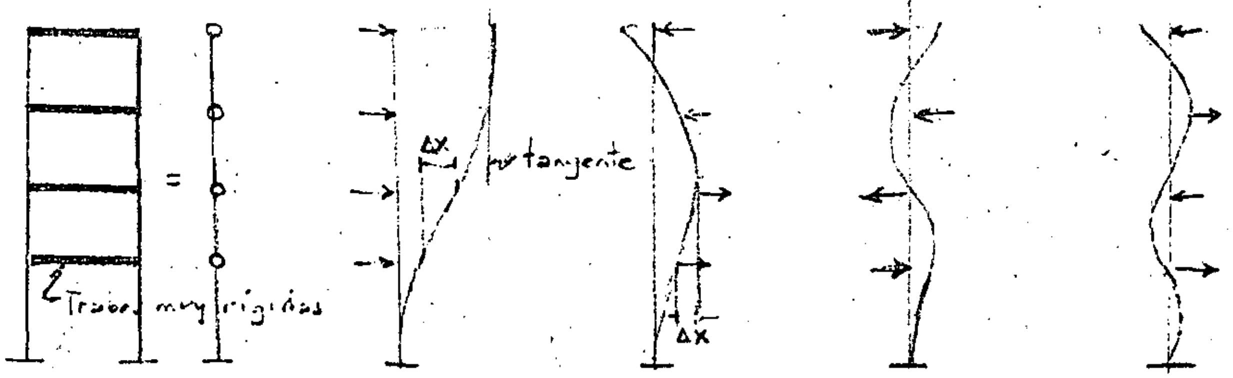
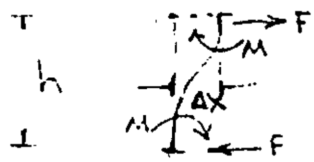


Fig 2

Para que esto se cumpla, la rigidez de entrepiso debe ser función única y exclusivamente de las columnas de cada entrepiso, para lo cual, los giros de los nudos deben ser nulos, lo que se logra si las trabes son infinitamente rígidas en comparación con las columnas, en cuyo caso la elástica de cada una de las columnas es la mostrada en la figura 3, y los elementos mecánicos que aparecen son los que ahí se muestran, para barras de sección constante.



$$F = \frac{12EI\Delta x}{h^3}$$

$$M = \frac{6EI\Delta x}{h^2}$$

Fig 3

En la práctica, es difícil que la rigidez relativa de las trabes (k=I/l) sea muy grande en comparación con la de las columnas, lo que hará que los giros de los nudos no sean cero, relajándose el sistema y reduciéndose la rigidez del marco para un mismo tamaño de columnas. Debido a esto, el caso de trabes infinitamente rígidas en comparación con las columnas recibe a veces el nombre de cota superior de rigidez.

Al ser significativos los giros de los nudos, la rigidez de entrepiso ya no será independiente del sistema de fuerzas horizontales aplicadas. En el límite inferior, llegaremos al caso del voladizo mostrado en la figura 4, para el cual no tiene sentido hablar de rigidez de entrepiso, pues será diferente para cada una de las posibles configuraciones de fuerzas aplicadas. A este caso lo definiremos como sistema remotamente acoplado.

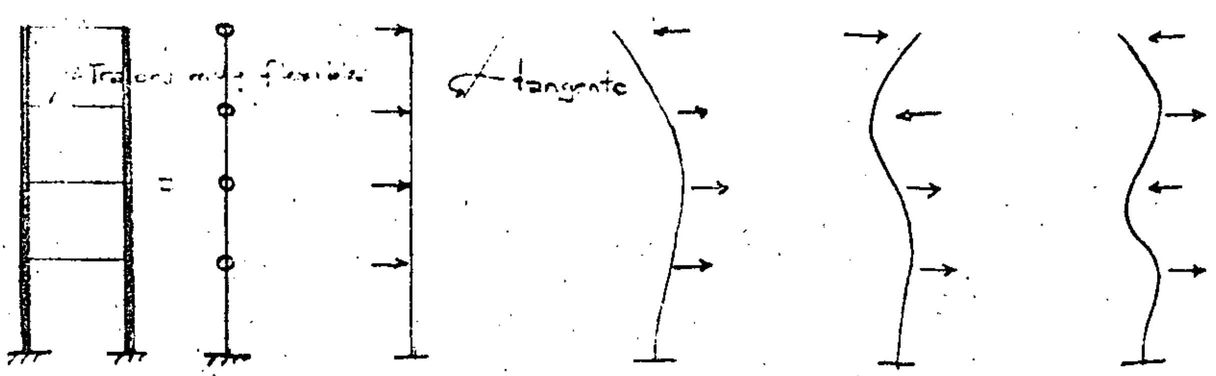
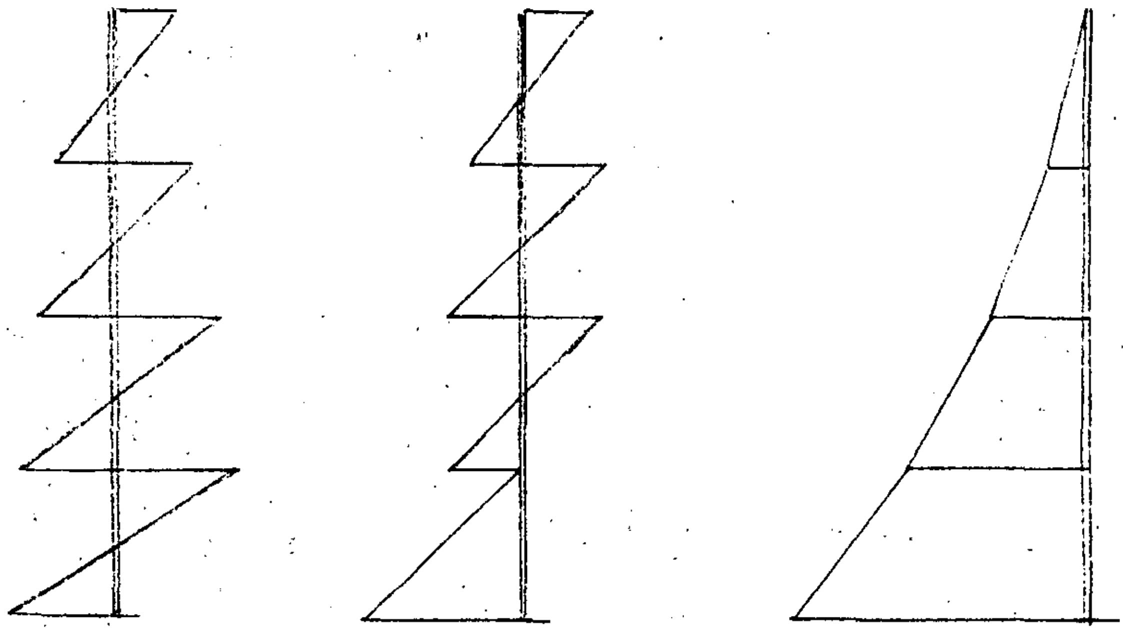


Fig 4

Nótese que en ambos casos se trata de estructuras aparentemente iguales, constituídas por marcos rígidos formados por trabes y columnas unidos en los nudos, sin embargo, como puede apreciarse en las figuras 1 y 3, las deformaciones de la estructura cuando todas las fuerzas se aplican en el mismo sentido son muy diferentes en uno y otro caso. En la figura 2, la tangente en el extremo superior es vertical, mientras que en la figura 4, la tangente en el extremo superior tiene la inclinación máxima.

La figura 5 ilustra la forma en que variarían los momentos flexionantes en las columnas del marco en los casos extremos y en uno intermedio. Nótese que la aplicación de métodos aproximados para la obtención de momentos en trabes y columnas sin verificar cual es la situación del marco, puede conducir a errores muy importantes de subestimación de momentos en las columnas y de desplazamientos horizontales de la estructura,



marco con trabes rígidas en comparación con las columnas.

marco en situación intermedia

voladizo (trabes muy flexibles comparadas con las columnas).

Momentos flexionantes en columnas.

Fig. 5

ya que los métodos aproximados en general suponen la formación de articulaciones (puntos de momento nulo) en cada entrepiso, y la situación puede ser tal que los puntos de inflexión del diagrama de momentos desaparezcan en uno, varios o todos los niveles.

Cualquier edificio de la práctica estará en una posición intermedia con respecto a los casos descritos.
Para conocer cual es la situación en cada caso particular, John A. Blume (referencia 1) sugiere el empleo de un indice de rotación nodal, que define como

$$\rho = \frac{\Sigma(I/l)_{trabes}}{\Sigma(I/l)_{cols}}$$

y se puede valuar en cualquier entrepiso. (Blume lo hace para el entrepiso medio). Aquí $\Sigma(I/l)_{trabes}$ es la suma de rigideces relativas de las trabes de un cierto nivel y $\Sigma(I/l)_{cols}$ es la suma de rigideces relativas de las columnas en que se apoyan las trabes antes mencionadas.

Blume encontró que si $\rho > 0.10$ hay puntos de momento nulo en las columnas de todos los entrepisos mientras que, para valores de ρ menores de 0.01 la estructura se asemeja más a un voladizo. Para valores de ρ entre 0.01 y 0.10 la situación es intermedia y habrá entrepisos en que no haya puntos de momento nulo, por lo que los métodos aproximados de análisis pueden conducir a fuertes errores del lado de la inseguridad por lo que respecta a los valores de los momentos flexionantes para los que debe diseñarse así como respecto a los desplazamientos laterales de la estructura; la rigidez de entrepiso pierde significado y conviene emplear métodos matriciales para analizarla.

Si la estructura tiene variaciones importantes con la altura, convendrá valuar ρ en distintos niveles.

Efectos de deformación axial de las columnas

Hasta aquí se ha considerado que las deformaciones axiales de las columnas, en el caso de marcos rígidos, son despreciables y no contribuyen a la deformación horizontal. Esto es válido sólo si la relación entre altura y ancho de la estructura es pequeña, tal vez menor que 3. Al aumentar el valor de esa relación, el efecto de momento de volteo en el edificio adquiere mayor importancia y se pueden cometer errores importantes al despreciar los acortamientos y alargamientos de las columnas debido a fuerza axial.

Cuando las trabes se vuelven muy flexibles en comparación con las columnas, cada una de las columnas trabajará como voladizo y la fuerza axial en ellas será pequeña.

En el caso de marcos contraventeados, la crujía o crujías contraventeadas tendrán comportamiento similar al de un muro y deberán por tanto considerarse como estructuras de flexión. Calculando sus períodos como se indicó en el método de Stodola-Vianello-Newmark.

Cuando se tienen marcos y muros trabajando simultáneamente la situación se complica pues la interacción entre ambos sistemas estructurales hace que varíe la fuerza que toman uno y otro en cada entrepiso; los muros suelen tomar la mayor proporción de la cortante total en los entrepisos inferiores mientras que la situación se invierte en los niveles superiores. Ver referencia 1.
Esto hace difícil la aplicación de métodos numéricos para calcular los modos de vibración de este tipo de estructuras, siendo más

conveniente el empleo de métodos matriciales para este fin.

REFERENCIA 1

Blume, John A., "Dynamic Characteristics of Multistory Buildings", Procedings ASCE, Structural División, February 1968.

(Se entregará copia de ella como parte del material del curso)

REFERENCIA 2

Godden, William G., "Numerical. Analysis of Beam and Column Structures, Prentice Hall.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

DINAMICA ESTRUCTURAL

METODO β DE NEWMARK

Dr. Octavio A. Rascón Chávez

JULIO, 1985

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

METODO β DE NEWMARK

SISTEMAS ELASTICOS LINEALES DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

PARA CALCULAR LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE N GRADOS DE LIBERTAD Y COMPORTAMIENTO ELASTICO LINEAL SE EMPLEAN LAS MISMAS ECUACIONES QUE PARA UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD.

$$\dot{x}_j(t_{i+1}) = \dot{x}_j(t_i) + [\ddot{x}_j(t_i) + \ddot{x}_j(t_{i+1})] \frac{\Delta t}{2}$$

$$x_j(t_{i+1}) = x_j(t_i) + \dot{x}_j(t_i)\Delta t + [(1/2-\beta)\ddot{x}_j(t_i) + \beta\ddot{x}_j(t_{i+1})](\Delta t)^2$$

EN DONDE $j = 1,2,\ldots,N$.

EN ESTE CASO SE RECOMIENDA TAMBIEN UN VALOR DE β COMPRENDIDO ENTRE 1/4 Y 1/6, Y QUE $\Delta t \doteq 0.1\ T_N$, EN DONDE T_N ES EL PERIODO NATURAL DE VIBRACION MAS PEQUEÑO.

EJEMPLO

SEA UN SISTEMA DE DOS GRADOS DE LIBERTAD CON AMORTIGUAMIENTO NULO, CUYAS MATRICES DE MASAS Y RIGIDECES SON:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

USANDO EL METODO β DE NEWMARK CON $\Delta t=0.2$ seg Y $\beta= 1/6$ CALCULE LA RESPUESTA DINAMICA ANTE UNA EXCITACION DADA POR LOS DESPLAZAMIENTOS DEL SUELO:

$$x_o = 1.2\ t \qquad \text{SI} \quad 0 \le t \le 2 \text{ seg} \qquad (x_o \text{ EN CENTIMETROS})$$

$$x_o = 4.8-1.2\ t \qquad \text{SI} \quad 2 \le t \le 4 \text{ seg}$$

$$x_o = 0 \qquad \text{SI} \quad t < 0 \quad o \quad t > 4 \text{ seg}$$

PUESTO QUE ESTA EXCITACION IMPLICA QUE $\ddot{x}_o(t) = 0$ PARA TODO t, SE TIENE QUE LA ECUACION MATRICIAL DE EQUILIBRIO RESULTA SER

$$\underline{M\ddot{Y}} + \underline{KY} = \underline{M\ddot{Y}} + \underline{Q} = \underline{0}$$

POR LO QUE

$$m_1 \ddot{y}_1 + Q_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{y}_1 = Q_1/m_1$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + Q_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{y}_2 = Q_2/m_2$$

EN DONDE $y_1 = x_1 - x_o$ Y $y_2 = x_2 - x_o$.

CON $\Delta t = 0.2$ seg Y $\beta= 1/6$, LAS ECUACIONES DEL METODO β DE NEWMARK QUEDAN EN LA FORMA

$$\dot{x}_j(t_{i+1}) = \dot{x}_j(t_i) + 0.1\left[\ddot{x}_j(t_i) + \ddot{x}_j(t_{i+1})\right]$$

$$x_j(t_{i+1}) = x_j(t_i) + 0.1\ \dot{x}_j(t_i) + 0.04\left[\ddot{x}_j(t_i)/3 + \ddot{x}_j(t_{i+1})/6\right]$$

EN $t = 0$, $y_i = x_i = 0$, $\dot{y}_i = \dot{x}_i = 0$, $\ddot{y}_i = \ddot{x}_i = 0$.

EN $t = 0.2$, $x_o = 1.2 \times 0.2 = 0.24$ cm; SUPONGAMOS $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 1.35$

Y $\ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = 1.50$ cm/seg:

PRIMER CICLO

PARA LA MASA 1:

$$\dot{x}_1 = 0 + 0.1\ (0 + 1.35) = 0.135 \text{ cm/seg}$$

$$x_1 = 0 + 0 + 0.04(0 + 1.35/6) = 0.009 \text{ cm}$$

$$y_1 = 0.009 - 0.24 = -\ 0.231 \text{ cm}$$

PARA LA MASA 2:

$$\dot{x}_2 = 0 + 0.1(0 + 1.50) = 0.15$$

$$x_2 = 0 + 0 + 0.04(0 + 1.50/6) = 0.01$$

$$y_2 = 0.01 - 0.24 = -\ 0.23 \text{ cm}$$

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.231 \\ -0.230 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.540 \\ -1.381 \end{bmatrix}$$

POR LO QUE $\ddot{y}_1 = \ddot{x}_1 = 2.54/2 = 1.27 \neq 1.35$

$$\ddot{y}_2 = \ddot{x}_2 = 1.381/1 = 1.381 \neq 1.50$$

SEGUNDO CICLO

$\dot{x}_1 = 0.1 \times 1.27 = 0.127$

$x_1 = 0.04 \times 1.27/6 = 0.0085$

$y_1 = 0.0085 - 0.24 = -0.2315$

$\dot{x}_2 = 0.1 \times 1.381 = 0.138$

$x_2 = 0.04 \times 1.381/6 = 0.0092$

$y_2 = 0.0092 - 0.24 = -0.2308$

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.2315 \\ -0.2308 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.546 \\ -1.386 \end{bmatrix}$$

DE DONDE $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 2.546/2 = 1.273 \doteq 1.27$

$\ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = 1.386/1 = 1.386 \doteq 1.381$

EN $t = 0.2 + 0.2 = 0.4$ seg SE TIENEN $x_o = 1.2 \times 0.4 = 0.48$,

$x_1(t_i) = 0.0085$; $x_2(t_i) = 0.0092$

$\dot{x}_1(t_i) = 0.127$; $\dot{x}_2(t_i) = 0.138$

$\ddot{x}_1(t_i) = 1.273$; $\ddot{x}_2(t_i) = 1.386$

PRIMER CICLO

SUPONIENDO $\ddot{x}_1(t_{i+1}) = 2.3$ Y $\ddot{x}_2(t_{i+1}) = 2.1$ SE OBTIENEN:

$\dot{x}_1 = 0.127 + 0.1(1.273 + 2.3) = 0.484$

$x_1 = 0.0085 + 0.2 \times 0.127 + 0.04(1.273/3 + 2.3/6) = 0.0662$

$y_1 = 0.0662 - 0.48 = -0.4138$

$\dot{x}_2 = 0.138 + 0.1(1.386 + 2.1) = 0.486$

$x_2 = 0.0092 + 0.2 \times 0.138 + 0.04(1.386/3 + 2.1/6) = 0.0693$

$y_2 = 0.0693 - 0.48 = -0.4107$

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.4138 \\ -.4107 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.548 \\ -2.468 \end{bmatrix}$$

DE DONDE $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 4.548/2 = 2.274 \neq 2.3$

$\ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = 2.468 \neq 2.1$

ETCETERA. LOS RESULTADOS DEL PROBLEMA SE PRESENTAN EN LA TABLA 1.

Tomado del libro de N. Newmark y E.Rosenblueth D.

TABLA 2.1. *Ejemplo 2.7*

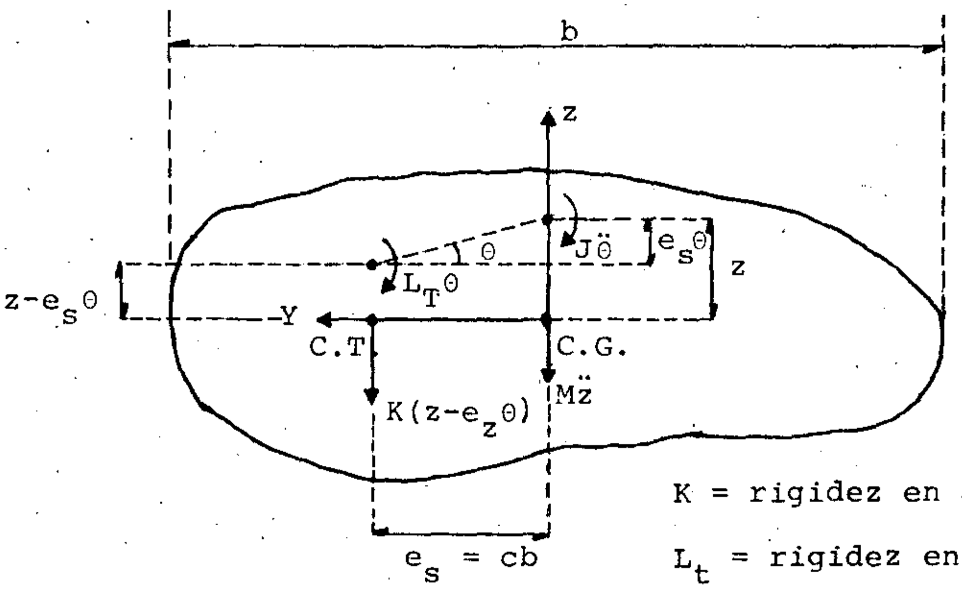
t seg	Q_1 ton	$\ddot{x}$ cm/seg²	$\dot{x}$ cm/seg	x_1 cm	$x_1 - x_0$ cm	Q_2 ton	$\ddot{x}$ cm/seg²	$\dot{x}$ cm/seg	x_2 cm	$x_2 - x_0$ cm	x_0 cm
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	2.540	1.350	0.135	0.0090	-0.2310	1.380	1.500	0.150	0.0100	-0.2300	0.24
0.2	2.546	1.270	0.127	0.0085	-0.2315	1.386	1.380	0.138	0.0092	-0.2308	0.24
0.2	2.546	1.273	0.127	0.0085	-0.2315	1.386	1.386	0.138	0.0092	-0.2308	0.24
0.4	4.548	+2.300	0.484	+0.0662	-0.4138	2.468	2.100	0.486	+0.0693	-0.4107	0.48
0.4	4.548	2.274	0.481	0.0660	-0.4140	2.455	2.468	0.523	0.0718	-0.4082	0.48
0.4	4.548	2.274	0.481	0.0660	-0.4140	2.455	2.455	0.522	0.0717	-0.4083	0.48
0.4	4.548	2.274	0.491	0.0660	-0.4140	2.455	2.455	0.522	0.0717	-0.4083	0.48
0.6	5.585	2.700	0.978	0.2105	-0.5095	2.960	3.200	1.088	0.2301	-0.4399	0.72
0.6	5.581	2.793	0.987	0.2111	-0.5089	2.967	2.960	1.064	0.2285	-0.4915	0.72
0.6	5.580	2.790	0.987	0.2111	-0.5089	2.966	2.967	1.065	0.2286	-0.4914	0.72
0.6	5.580	2.790	0.987	0.2111	-0.5089	2.966	2.966	1.065	0.2286	-0.4914	0.72
0.8	5.409	2.900	1.556	0.4650	-0.4950	2.790	2.980	1.660	0.5010	-0.4590	0.96
0.8	5.423	2.704	1.536	0.4637	-0.4963	2.798	2.790	1.641	0.4997	-0.4603	0.96
0.8	5.422	2.711	1.537	0.4638	-0.4962	2.797	2.798	1.642	0.4998	-0.4602	0.96
0.8	5.422	2.711	1.537	0.4638	-0.4962	2.797	2.797	1.642	0.4998	-0.4602	0.96
1.0	4.104	2.150	2.023	0.8216	-0.3784	1.977	2.200	2.142	0.8802	-0.3198	1.20
1.0	4.111	2.052	2.013	0.8210	-0.3790	1.985	1.977	2.120	0.8787	-0.3213	1.20
1.0	4.111	2.055	2.014	0.8210	-0.3790	1.985	1.985	2.121	0.8787	-0.3213	1.20
1.0	4.111	2.055	2.014	0.8210	-0.3790	1.985	1.985	2.121	0.8787	-0.3213	1.20
1.2	1.931	0.950	2.315	1.2575	-0.1825	0.712	0.700	2.390	1.3341	-0.1059	1.44
1.2	1.930	0.965	2.316	1.2576	-0.1824	0.712	0.712	2.391	1.3341	-0.1059	1.44
1.2	1.930	0.965	2.316	1.2576	-0.1824	0.712	0.712	2.391	1.3341	-0.1059	1.44
1.4	-0.653	-0.320	2.381	1.7316	0.0516	-0.735	-0.800	2.382	1.8165	0.1365	1.68
1.4	-0.652	-0.326	2.380	1.7315	0.0515	-0.735	-0.735	2.388	1.8169	0.1369	1.68
1.4	-0.652	-0.326	2.380	1.7315	0.0515	-0.735	-0.735	2.388	1.8169	0.1369	1.68
1.6	-3.083	-1.500	2.197	2.1932	0.2732	-2.026	-2.100	2.104	2.2707	0.3507	1.92
1.6	-3.080	-1.541	2.193	2.1929	0.2729	-2.029	-2.026	2.111	2.2712	0.3512	1.92
1.6	-3.080	-1.540	2.193	2.1929	0.2729	-2.029	-2.029	2.111	2.2712	0.3512	1.92
1.8	-4.830	-2.500	1.789	2.5943	0.4343	-2.869	-2.900	1.618	2.6471	0.4871	2.16
1.8	-4.836	-2.415	1.797	2.5949	0.4349	-2.871	-2.869	1.621	2.6473	0.4873	2.16
1.8	-4.836	-2.418	1.797	2.5949	0.4349	-2.871	-2.871	1.621	2.6473	0.4873	2.16
2.0	-5.547	-2.800	1.275	2.9034	0.5034	-3.069	-3.000	1.034	2.9132	0.5132	2.40
2.0	-5.549	-2.773	1.278	2.9036	0.5036	-3.068	-3.069	1.027	2.9127	0.5127	2.40
2.0	-5.549	-2.774	1.278	2.9036	0.5036	-3.068	-3.068	1.027	2.9127	0.5127	2.40

TABLA 2.1. *Ejemplo 2.7 (Cont.)*

t seg	Q_1 ton	$\ddot{x}_1$ cm/seg²	$\dot{x}_1$ cm/seg	x_1 cm	$x_1 - x_0$ cm	Q_2 ton	$\ddot{x}_2$ cm/seg²	$\dot{x}_2$ cm/seg	x_2 cm	$x_2 - x_0$ cm	x_0 cm
2.2	-10.156	-5.200	0.481	3.0875	0.9275	-5.332	-5.460	0.174	3.0408	0.8808	2.16
2.2	-10.165	-5.078	0.493	3.0883	0.9283	-5.337	-5.332	0.187	3.0417	0.8817	2.16
2.2	-10.165	-5.083	0.493	3.0883	0.9263	-5.337	-5.337	0.186	3.0417	0.8817	2.16
2.4	-12.578	-6.900	-0.705	3.0731	1.1531	-6.386	-6.200	-0.968	2.9665	1.0465	1.92
2.4	-12.617	-6.289	-0.644	3.0772	1.1572	-6.383	-6.386	-0.987	2.9652	1.0452	1.92
2.4	-12.615	-6.309	-0.646	3.0770	1.1570	-6.383	-6.383	-0.986	2.9652	1.0452	1.92
2.4	-12.615	-6.308	-0.646	3.0770	1.1570	-6.363	-6.383	-0.986	2.9652	1.0452	1.92
2.6	-12.388	-6.700	-1.897	2.8225	1.1425	-5.958	-6.000	-2.224	2.6429	0.9629	1.69
2.6	-12.385	-6.194	-1.896	2.8225	1.1425	-5.959	-5.958	-2.220	2.6432	0.9632	1.68
2.6	-12.398	-6.194	-1.896	2.8225	1.1425	-5.959	-5.959	-2.220	2.6432	0.9632	1.68
2.8	-9.573	-4.300	-2.945	2.3320	0.8920	-4.155	-4.100	-3.206	2.0925	0.6525	1.44
2.8	-9.540	-4.787	-2.994	2.3288	0.8888	-4.150	-4.155	-3.212	2.0921	0.6521	1.44
2.8	-9.541	-4.770	-2.992	2.3289	0.8889	-4.150	-4.150	-3.211	2.0921	0.6521	1.44
2.8	-9.541	-4.770	-2.992	2.3289	0.8889	-4.150	-4.150	-3.211	2.0921	0.6521	1.44
3.0	-4.687	-2.500	-3.719	1.6502	0.4502	-1.376	-1.400	-3.766	1.3853	0.1853	1.20
3.0	-4.698	-2.343	-3.703	1.6513	0.4513	-1.378	-1.376	-3.764	1.3854	0.1854	1.20
3.0	-4.698	-2.349	-3.704	1.6513	0.4513	-1.378	-1.378	-3.764	1.3854	0.1854	1.20
3.2	1.090	0.800	-3.859	0.6645	-0.0755	1.748	1.700	-3.732	0.6255	-0.3345	0.96
3.2	1.106	0.545	-3.884	0.8628	-0.0772	1.748	1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.96
3.2	1.105	0.553	-3.883	0.8829	-0.0771	1.748	1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.96
3.2	1.105	0.553	-3.863	0.8829	-0.0771	1.748	1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.96
3.4	6.608	3.600	-3.468	0.1377	-0.5823	4.506	4.700	-3.082	-0.0649	-0.7849	0.72
3.4	6.629	3.304	-3.438	0.1357	-0.5543	4.515	4.506	-3.101	-0.0662	-0.7862	0.72
3.4	6.628	3.314	-3.439	0.1358	-0.5842	4.515	4.515	-3.100	-0.0661	-0.7861	0.72
3.4	6.628	3.314	-3.439	0.1358	-0.5842	4.515	4.515	-3.100	-0.0661	-0.7861	0.72
3.6	10.578	5.400	-2.568	-0.4718	-0.9518	6.251	6.900	-1.958	-0.5799	-1.0599	0.48
3.6	10.589	5.289	-2.579	-0.4725	-0.9525	6.277	6.251	-2.023	-0.5842	-1.0642	0.48
3.6	10.589	5.299	-2.577	-0.4725	-0.9525	6.277	6.277	-2.020	-0.5841	-1.0641	0.48
3.6	10.589	5.299	-2.577	-0.4725	-0.9525	6.277	6.277	-2.020	-0.5841	-1.0641	0.46
3.8	12.259	6.200	-1.427	-0.8760	-1.1160	6.612	6.800	-0.712	-0.8591	-1.0991	0.24
3.8	12.264	6.130	-1.434	-0.8764	-1.1164	6.618	6.612	-0.731	-0.8603	-1.1003	0.24
3.8	12.264	6.132	-1.434	-0.8764	-1.1164	6.618	6.618	-0.730	-0.8603	-1.1003	0.24
4.0	11.323	5.600	-0.260	-1.0441	-1.0441	5.454	5.400	0.472	-0.8821	-0.8821	0
4.0	11.319	5.661	-0.255	-1.0437	-1.0437	5.453	5.454	0.477	-0.8817	-0.6817	0
4.0	11.319	5.660	-0.255	-1.0437	-1.0437	5.453	5.453	0.477	-0.8817	-0.8817	0
4.2	10.705	5.350	0.846	-0.9836	-0.9836	5.330	5.300	1.549	-0.8691	-0.8691	0
4.2	10.705	5.352	0.846	-0.9836	-0.9836	5.329	5.330	1.552	-0.8699	-0.8699	0

PROBLEMA DE VIBRACIONES DE TORSION

ACOPLADA CON TRASLACION



K = rigidez en traslación

L_t = rigidez en torsión

$$\Sigma F_z = M\ddot{z} + K(z-e_s\Theta) = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma M_{C.G.} = J\ddot{\Theta} + L_t\Theta - K(z-e_s\Theta)\ e_s = 0$$

$$J\ddot{\Theta} + L\Theta - Ke_s z = 0 \qquad (2)$$

EN DONDE $L = L_t + Ke_s^2$

PUESTO QUE LAS VIBRACIONES SON ARMONICAS:

$\ddot{\Theta} = -\omega^2\Theta$ y $\ddot{z} = -\omega^2 z$

Sustituyendo en ec (1):

$-\omega^2 Mz + Kz - Ke_s\Theta = 0$

$$(K - \omega^2 M)z - Ke_s\Theta = 0 \qquad (1')$$

Sustituyendo (3) en (2):

$$-J\omega^2\theta + L_T\theta - Ke_s z = 0$$

$$(L_T - J\omega^2)\theta - Ke_s z = 0 \qquad (2')$$

$$\text{Det} \left[\begin{array}{c|c} K - \omega^2 M & -Ke_s \\ \hline -Ke_s & L_T - J\omega^2 \end{array}\right] = 0$$

$$(K - \omega^2 M)(L_T - J\omega^2) - K^2 e_s^2 = 0$$

$$KL_T - KJ\omega^2 - \omega^2 ML_T + MJ\omega^4 - K^2 e_s^2 = 0$$

$$\omega^4 - \frac{KJ + ML_T}{MJ}\omega^2 + \frac{KL_T}{MJ} - \frac{K^2 e_s^2}{MJ} = 0$$

DIVIENDO POR $(K/M)^2$:

$$\frac{\omega^4}{(K/M)^2} - \frac{\omega^2}{K/M}\,\frac{KJ + ML_T}{(MJ)(K/M)} + \frac{KL_T}{MJ(K/M)^2} - \frac{K^2 e_s^2}{MJ(K/M)^2} = 0$$

SI $\lambda^2 = \omega^2/(K/M)$ Y CONSIDERANDO $e_s = cb$:

$$\lambda^4 - \lambda^2\left(1 + \frac{L_T/J}{K/M}\right) + \frac{L_T/J}{K/M} - \frac{c^2}{J/(Mb^2)} = 0$$

SI $(L_T/J)/(K/M) = \eta$ y $j^2 = J/(Mb^2)$

$$\lambda^4 - \lambda^2(1 + \eta) + \eta - c^2/j^2 = 0$$

$$\therefore\ \lambda_{1,2}^2 = \frac{\eta + 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\eta + 1)^2}{4} + \frac{c^2}{j^2}}$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = \lambda_1 (K/M) \text{ y } \omega_2^2 = \lambda_2 (K/M)$$

SUSTITUYENDO A ω_1^2, EN (1') O EN (2'):

$$\underline{z}_1 = \begin{bmatrix} z_1 \\ \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \dfrac{1 - \lambda_1^2}{cb} \end{bmatrix} ;$$

SUSTITUYENDO A ω_2^2:

$$\underline{z}_2 = \begin{bmatrix} z_2 \\ \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \dfrac{1 - \lambda_2^2}{cb} \end{bmatrix} \quad \text{o:} \quad \underline{z}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \dfrac{1 - \lambda_n^2}{cb} \end{bmatrix}$$

Efectos sísmicos en estructuras en forma de péndulo invertido

Octavio RASCON CH. *

INTRODUCCION

En la práctica se presentan estructuras constituidas por una sola columna la cual sostiene una cubierta que puede ser una losa o un cascarón. Su comportamiento dinámico debe estudiarse considerando el efecto que la inercia rotacional de la cubierta induce en el movimiento total de la estructura.

A principios de este año se presentó en California, EUA, un trabajo[1] en el cual se trató este problema desde un punto de vista energético. Se calculó sólo el periodo fundamental y con base en él, la respuesta de la estructura a un determinado temblor. Los periodos calculados para cuatro estructuras de este tipo ya construidas fueron menores que los medidos *in situ.* La discrepancia fue atribuida a efectos de rotación y traslación de la base.

El objeto de este trabajo es introducir un análisis modal, el cual nos proporcionará los efectos del acoplamiento que existe entre los modos de vibración. También se tomarán en cuenta en forma aproximada los efectos de rotación y traslación de la base.

CALCULO DE FRECUENCIAS Y CONFIGURACIONES MODALES DE VIBRACION

1. *Suelo rigido*

Para el caso en que el centro de gravedad de la cubierta se encuentra localizado en la prolongación del eje de la columna, el movimiento de la estructura podrá estudiarse en dos direcciones perpendiculares entre sí. En tal caso el problema podrá discretizarse como de dos modos de vibración acoplados en cada dirección.

Para el cálculo de las frecuencias de vibración se idealizará la estructura como de comportamiento lineal, constituida por una cubierta infinitamente rígida de masa simétricamente distribuida y soportada por una sola columna. Como primer caso se considerará al suelo infinitamente rigido (fig. 1).

En fig 1

$W =$ peso de la cubierta más la parte tributaria de la columna

$J =$ momento de inercia de la masa de la cubierta respecto al eje z

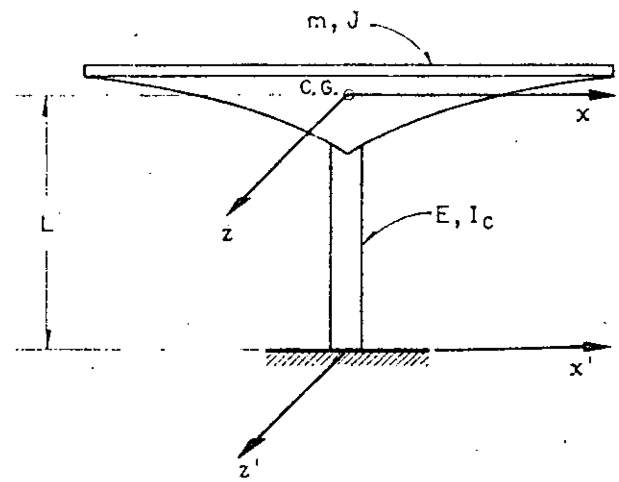


FIG. 1. *Péndulo invertido*

$E =$ módulo de elasticidad del material de la columna

$I_c =$ momento de inercia de la sección transversal de la columna con respecto al eje z

$C.G. =$ centro de gravedad de la cubierta

$L =$ distancia de $C.G.$ al suelo.

Para la columna mostrada en las figs. 2*a* y 2*b*.

$k =$ rigidez por traslación (fuerza horizontal aplicada en $C.G.$ necesaria para que este se desplace la unidad)

$k_r =$ rigidez por rotación (par aplicado en $C.G.$ necesario para producir un giro unitario a la altura de $C.G.$

$\Theta =$ rotación en $C.G.$ debida a la fuerza k

$\delta =$ desplazamiento lateral de $C.G.$ debido al momento k_r.

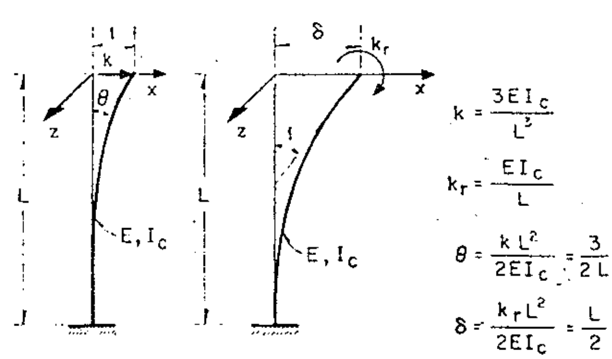


FIG. 2. *Rigideces*

* Asistente de Investigador, Instituto de Ingeniería, UNAM.

Despreciando las deformaciones por cortante, las expresiones para k, k_r, Θ y δ pueden encontrarse por estática y valen

$$k = 3EI_c/L^3; \quad (1a)$$

$$k_r = EI_c/L; \quad (2a)$$

$$\Theta = 1.5/L \quad (1b)$$

$$\delta = L/2 \quad (2b)$$

Para una fuerza de magnitud αk, el desplazamiento será α y el giro $\alpha\Theta$. Para un par de magnitud βk_r el giro será β y el desplazamiento $\beta\delta$. Al aplicarse ambos simultáneamente, el desplazamiento total de C.G. será x_1 y el giro ε_1 (fig. 3).

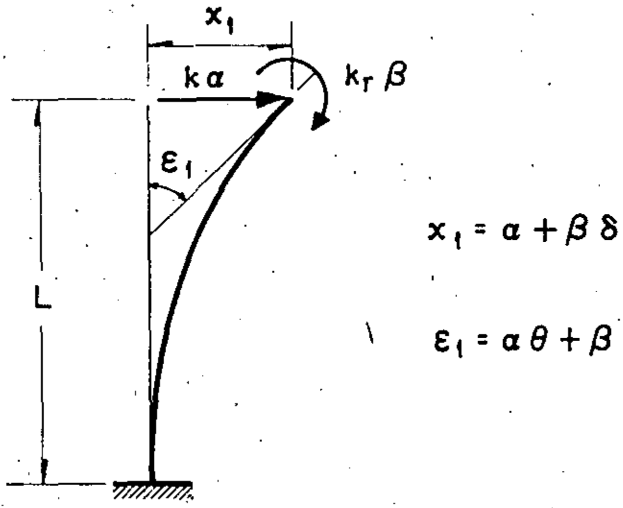


FIG. 3. *Desplazamientos y giros totales*

Por tanto los valores de x_1 y ε_1 quedan dados por

$$x_1 = \alpha + \beta\delta \quad (3)$$

$$\varepsilon_1 = \alpha\Theta + \beta \quad (4)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 3 y 4 para α y β, y utilizando las ecs 1*b* y 2*b* se obtiene

$$\alpha = (x_1 - k_r\gamma\varepsilon_1)/\kappa; \quad (5a)$$

$$\beta = (\varepsilon_1 - k\gamma x_1)/\kappa \quad (5b)$$

en las cuales

$$\gamma = L^2/2EI_c; \quad (6a)$$

$$\kappa = 1 - kL^3/4EI_c = 0.25 \quad (6b)$$

Para las oscilaciones del péndulo mostrado en la fig 1, el diagrama de cuerpo libre de la cubierta está indicado en la fig 4. Las ecuaciones de movimiento, despreciando efectos gravitacionales, serán

$$m\ddot{x}_1 + k\alpha = 0 \quad (7)$$

$$J\ddot{\varepsilon}_1 + k_r\beta = 0 \quad (8)$$

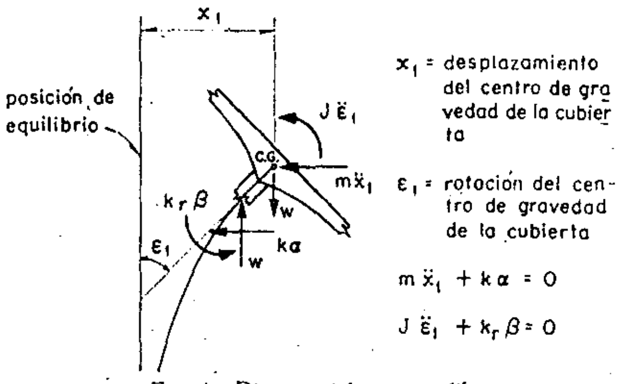


FIG. 4. *Diagrama de cuerpo libre*

Sustituyendo a (5a) y (5b) en (7) y (8) se obtiene

$$m\ddot{x}_1 + (kx_1 - kk_r\gamma\varepsilon_1)/\kappa = 0 \quad (9)$$

$$J\ddot{\varepsilon}_1 + (k_r\varepsilon_1 - kk_r\gamma x_1)/\kappa = 0 \quad (10)$$

Las ecs. 9 y 10 se pueden expresar matricialmente en la forma

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\varepsilon}_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\kappa}\begin{bmatrix} k & -\gamma kk_r \\ -\gamma kk_r & k_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

Utilizando las ecs 1a, 2a y 6a se encuentra que

$$\gamma kk_r = Lk/2 \quad (12)$$

Puesto que el movimiento es armónico se tiene que

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \quad \text{y} \quad \ddot{\varepsilon}_1 = -\omega^2\varepsilon_1 \quad (13)$$

en donde ω es la frecuencia circular natural de vibración.

Sustituyendo las ecs. 12 y 13 en (11) se obtiene

$$-\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\omega^2\begin{bmatrix} x_1 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\kappa}\begin{bmatrix} k & -\frac{Lk}{2} \\ -\frac{Lk}{2} & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

Factorizando en la ec. 14

$$\left\{\frac{1}{\kappa}\begin{bmatrix} k & -\frac{Lk}{2} \\ -\frac{Lk}{2} & k_r \end{bmatrix} - \omega^2\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} x_1 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (15)$$

La ec 15 representa un sistema de ecuaciones homogéneas, el cual, para tener solución diferente de la trivial, necesita que su determinante sea nulo. Por tanto

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{\kappa} - m\omega^2 & -\frac{Lk}{2\kappa} \\ -\frac{Lk}{2\kappa} & \frac{k_r}{\kappa} - J\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

Desarrollando el determinante se llega a

$$mJ\omega^4 - \frac{1}{\kappa}(kJ + mk_r)\omega^2 + $$
$$+ \frac{1}{4\kappa^2}(4kk_r - L^2k^2) = 0 \qquad (17)$$

Dividiendo ambos miembros entre mJ y considerando que $L^2k^2 = 3kk_r$ se obtiene

$$\omega^4 - \frac{kJ + mk_r}{mJ\kappa}\omega^2 + \frac{k\,k_r}{4mJ\kappa^2} = 0 \qquad (18)$$

que es una ecuación de segundo grado en ω^2, cuyas soluciones son

$$\omega^2_{1,2} = \frac{kJ + mk_r}{2mJ\kappa} \pm$$
$$\pm \sqrt{\frac{(kJ + mk_r)^2}{4m^2J^2\kappa^2} - \frac{k\,k_r}{4mJ\kappa^2}} \qquad (19)$$

Dividiendo numerador y denominador de (19) entre mJ

$$\omega^2_{1,2} = \frac{k/m + k_r/J}{2\kappa} \pm$$
$$\pm \frac{1}{2\kappa}\sqrt{(k/m + k_r/J)^2 - (k/m)(k_r/J)}\,, \qquad (20)$$

Llamando a

$k/m = p^2$ = cuadrado de la frecuencia circular natural por traslación

$k_r/J = \Omega^2$ = cuadrado de la frecuencia circular natural por rotación

se obtiene

$$\omega^2_{1,2} = 2\Big(p^2 + \Omega^2 \pm$$
$$\pm \sqrt{(p^2 + \Omega^2)^2 - p^2\Omega^2}\Big) \qquad (21)$$

Dividiendo ambos miembros de (21) entre p^2 y haciendo $\omega^2/p^2 = \lambda$ y $\Omega^2/p^2 = \mu$ se llega a

$$\lambda_{1,2} = 2\left(1 + \mu \pm \sqrt{(1+\mu)^2 - \mu}\right) \qquad (22)$$

Es interesante notar que si $J = 0$ (masa concentrada) de la ec 17 se obtiene $\omega^2 = k/m = p^2$.

Las configuraciones modales pueden obtenerse de cualquiera de las dos ecuaciones algebraicas contenidas en la ecuación matricial dada en ec 15. La primera de ellas es

$$\left(\frac{k}{\kappa} - m\omega_n^2\right) x_{1,n} - \frac{Lk}{2\kappa}\varepsilon_{1,n} = 0 \qquad (23)$$

donde el índice n indica el número del modo y de la cual se obtiene

$$x_{1,n}/\varepsilon_{1,n} = \frac{Lk}{2\kappa}\Big/\left(\frac{k}{\kappa} - m\omega_n^2\right) \qquad (24)$$

dividiendo numerador y denominador de (24) entre m y considerando que $\kappa = 0.25$, $k/m = p^2$ y que $\lambda_n = \omega_n^2/p^2$ se llega a

$$x_{1,n}/\varepsilon_{1,n} = 2L/(4 - \lambda_n) \qquad (25)$$

Si se desean tomar en cuenta las deformaciones por cortante basta con modificar las rigideces mediante un análisis de estática y partir de nuevo de la ec 17 sin considerar que $L^2k^2 = 3kk_r$. Si existe excentricidad en alguna dirección su efecto podrá tomarse en cuenta introduciendo un grado de libertad adicional.

En las figs 5 y 6 se encuentran representados los resultados de las ecs 22 y 25.

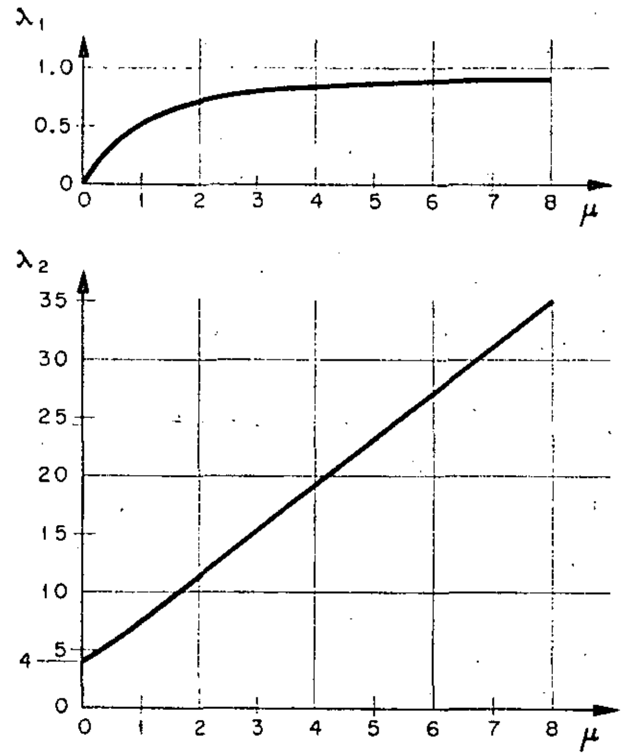


FIG. 5. *Gráfica de frecuencias*

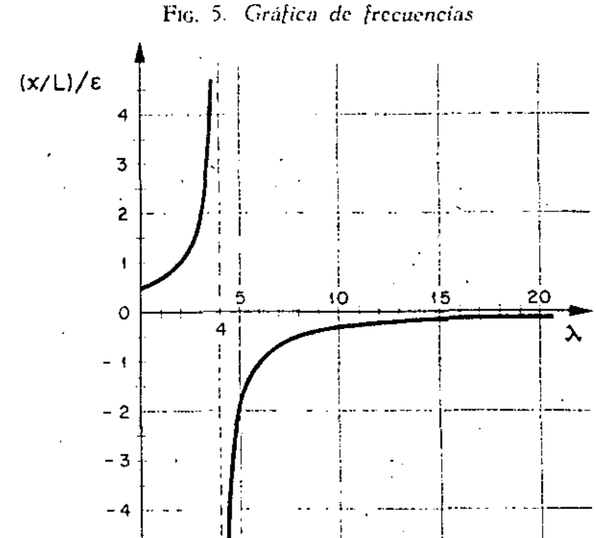


FIG. 6. *Gráfica* $(x/L)/\varepsilon$ vs λ

2. *Suelo flexible*

Al oscilar una estructura cimentada en suelo blando, existe interacción dinámica suelo-estructura que en la mayoria de los casos no debe despreciarse al calcular las frecuencias y los modos de vibración. En lo que sigue se propone la adaptación de un método numérico para tomar en cuenta dicho efecto.

Las restricciones del suelo serán idealizadas mediante resortes de comportamiento lineal; uno para desplazamientos lineales horizontales y otro para deformaciones angulares de cabeceo de la cimentación [2,3].

En la fig. 7 se hace referencia a los parámetros que a continuación se mencionan

K = rigidez del resorte correspondiente a la traslación de la base [2] $= C_\tau A$

C_τ = coeficiente de cortante elástico uniforme del suelo.

A = área de contacto de la cimentación.

R = rigidez del resorte correspondiente a rotación de la base [2] $= C_\varphi I_b - W'\bar{y}$

C_φ = coeficiente de compresión elástica no uniforme del suelo.

I_b = momento de inercia de área de la base de la cimentación con respecto al eje z'

W' = peso total de la estructura

$\bar{y}$ = altura del centro de gravedad de la estructura sobre el nivel de desplante

$F = m\omega_n^2 x$

x = desplazamiento lineal total en C.G.

$M = J\omega_n^2\varepsilon$

ε = desplazamiento angular total en C.G.

L' = altura de C.G. sobre el nivel de desplante

x_0 = traslación de la base

ε_0 = rotación de la base

$x_1 = \alpha + \beta\delta$

$\varepsilon_1 = \beta + \alpha\Theta$

$x_2 = L'\varepsilon_0$

$\alpha = F/k$

$\beta = M/k_r$

J, L, δ, Θ, k, k_r, x_1, ε_1 y W ya definidos anteriormente.

El problema será resuelto utilizando un procedimiento iterativo, y la tabulación propuesta por N. M. Newmark[4]; se despreciarán la variación de la rigidez de la columna debida a la fuerza normal W y los momentos en la misma, causados por la excentricidad del peso debida a deformaciones de la columna.

Sean

F_o = fuerza horizontal en la base de la cimentación $= F$

M_o = momento flexionante en la base de la cimentación $= M + FL'$

$x_o = F_o/K$

$\varepsilon_o = M_o/R$

A continuación se describe el procedimiento a seguir:

1. Suponer valores para x y ε
2. Calcular F y M usando las expresiones $F = m\omega_n^2 x$ y $\varepsilon = J\omega_n^2\varepsilon$. En esta etapa el valor de ω_n aún no se conoce; por tanto se llevará como factor común en el resto del cálculo.

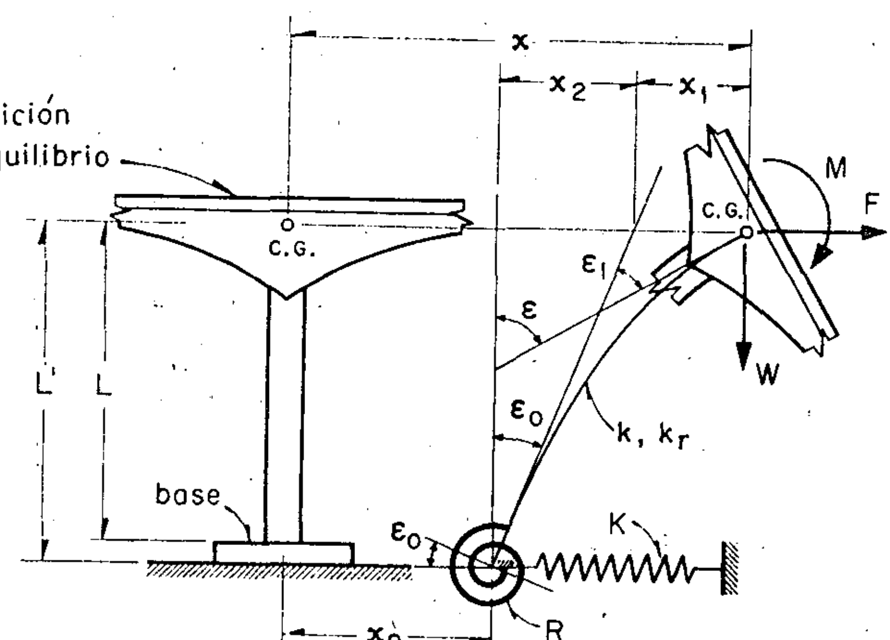


FIG. 7. *Modelo de interacción dinámica suelo-estructura*

3. Calcular la fuerza y el momento en la base mediante las fórmulas
$$F_0 = F \quad \text{y} \quad M_0 = M + FL'$$
4. Encontrar los valores de los desplazamientos $x_0 = F_0/K$ y $\varepsilon_0 = M_0/R$
5. Calcular los valores de los parámetros $\alpha = F/k$ y $\beta = M/k_r$
6. Efectuar los productos $\beta\delta$ y $\alpha\Theta$
7. Calcular $x_1 = \alpha + \beta\delta$ y $\varepsilon_1 = \beta + \alpha\Theta$
8. Efectuar el producto $x_2 = L'\varepsilon_0$
9. Calcular los desplazamientos lineales y angulares totales de C.G. mediante las expresiones
$$x' = x_0 + x_1 + x_2 \quad \text{y} \quad \varepsilon' = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$$
10. Encontrar el valor de ω_n^2 mediante los cocientes x/x' y ε/ε'
11. Si los valores de ω_n^2 calculados en el paso anterior son aproximadamente iguales, el proceso habrá concluido. En caso contrario repítase la secuela utilizando como valores de partida para x y ε los encontrados en etapa 9 o valores cuyo cociente sea igual al de x' entre ε'. El proceso deberá continuarse hasta lograr la aproximación deseada.

EJEMPLO DE APLICACION

Con motivo de ilustrar los conceptos enunciados anteriormente se calcularán las frecuencias y modos de vibración de un cascarón ya construido en California, EUA (fig 8). Los datos necesarios han sido extraídos de la ref 1. Se computarán también las respuestas sísmicas suponiendo que esa estructura fuera a construirse en la zona blanda de la ciudad de México. Se utilizarán por tanto los parámetros elásticos de las arcillas del Valle de México y los espectros de diseño propuestos en el reglamento de construcción para el Distrito Federal [5].

Los datos necesarios de la estructura son

L = 419 cm
L' = 480 cm
$\bar{y}$ = 249 cm
W = 20, 450 kg ($m = 20.81$ kg seg^2/cm)
W' = 43, 600 kg
I_b = 1.775×10^9 cm^4
I_c = 1.065×10^6 cm^4
k = 1.266×10^4 kg/cm
k_r = 7.41×10^8 kg cm/rad
J = 1.386×10^6 kg seg^2 cm
Θ = 0.00358 rad/cm
δ = 208 cm/rad

Las expresiones para C_τ y C_φ son las siguientes [2]

$$C_\tau = F_1 \frac{E'}{1-\nu^2}\frac{1}{\sqrt{A}}; \quad C_\varphi = F_2 \frac{E'}{1-\nu^2}\frac{1}{\sqrt{A}} \qquad (26)$$

En ecs 26

E' = módulo de elasticidad del suelo
ν = relación de Poisson del suelo
A = área de contacto de la cimentación
F_1, F_2 = factores de forma de la cimentación

Para el caso de la zona blanda del Valle de México un valor representativo de E' es 50 kg/cm^2 y $\nu \doteq 0.5$ [6]. Para una cimentación cuadrada los valores de F_1 y F_2 son 0.704 y 2.11 respectivamente.

Sustituyendo valores en ecs 26 se obtiene

$$C_\tau = 0.123 \text{ kg/cm}^3$$
$$C_\varphi = 0.369 \text{ kg/cm}^3$$

CASO 1. SUELO RÍGIDO

a) *Cálculo de frecuencias y modos de vibración*

Para el cálculo de las frecuencias de vibración usaremos la fórmula dada en ec 22. Los valores de los parámetros a sustituir son

$$p^2 = k/m = 608 \text{ (rad/seg)}^2$$
$$\Omega^2 = k_r/J = 535 \text{ (rad/seg)}^2$$
$$\mu = \Omega^2/p^2 = 0.882$$

con los cuales

$$\lambda_{1,2} = 2(1.882 \pm \sqrt{3.55 - 0.882}) = 0.494; 7.034$$

Por tanto

$$\omega_1 = \sqrt{0.494 \times 608} = \sqrt{300} = 17.32 \text{ rad/seg}$$
$$\omega_2 = \sqrt{7.034 \times 608} = \sqrt{4260} = 65.30 \text{ rad/seg}$$

Los periodos naturales son

$T_1 = 2\pi/\omega_1 = 0.362$ seg (T_1 obtenido de un registro de vibraciones libres de la estructura y reportado en ref 1 $= 0.483$ seg)

$T_2 = 2\pi/\omega_2 = 0.096$ seg

Comparando los valores calculado y medido de T_1 se puede ver la importancia de la interacción dinámica suelo-estructura.

Las relaciones modales se obtienen de las ecs. 25 y sus valores son

$$x_1/\varepsilon_1 = \frac{2 \times 419}{4 - 0.494} = 238 \text{ cm/rad}$$

$$x_2/\varepsilon_2 = \frac{2 \times 419}{4 - 7.034} = -275 \text{ cm/rad}$$

b) *Respuesta sísmica*

Para el cálculo de la respuesta sísmica de sistemas de varios grados de libertad es necesario calcular los coeficientes de participación de cada modo de vibración. Se puede demostrar [7] que para este caso es aplicable la siguiente ecuación

$$C_n = \frac{\bar{X}_n^T \bar{M} \bar{i}}{\bar{X}_n^T \bar{M} \bar{X}_n} \qquad (27)$$

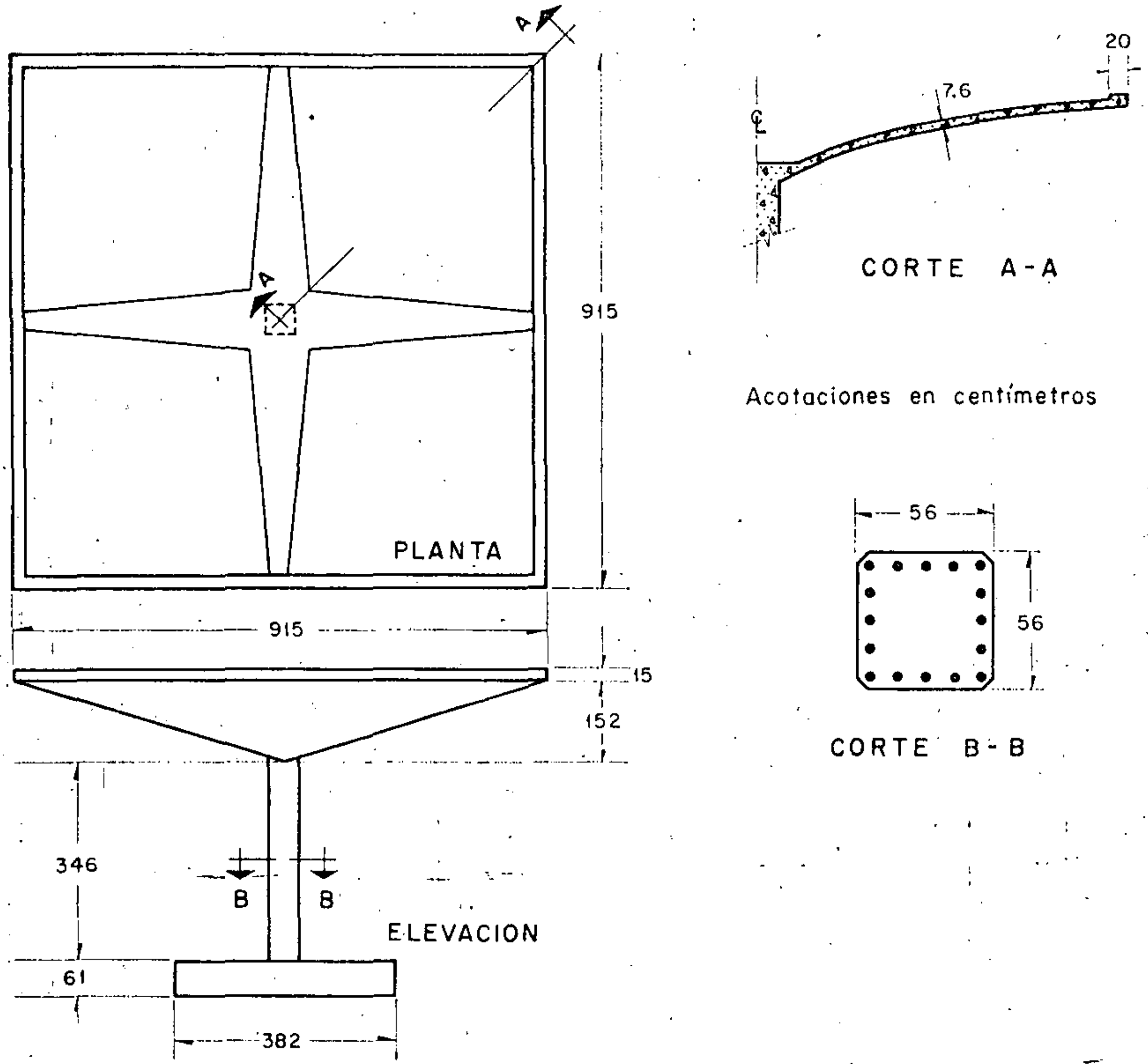


FIG. 8. *Cascarón utilizado para ejemplo.* (Después de R. McLean)

en la cual

$\bar{i}$ es un vector que representa los desplazamientos estáticos de cada grado de libertad de la estructura inducidos por un desplazamiento estático unitario de la base.

$\bar{X}_n$ es el vector modal para el enésimo modo (n)

$\bar{M}$ es la matriz de inercia y

$\bar{X}_n^T$ es el vector traspuesto de $\bar{X}_n$

Para nuestro caso se tendrá

$$\bar{i} = \begin{bmatrix} X_{est} \\ r_{est} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_1 = \begin{bmatrix} 238 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \bar{X}_2 = \begin{bmatrix} -275 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_1^T = \begin{bmatrix} 238 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \bar{X}_2^T = \begin{bmatrix} -275 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.81 & 0 \\ 0 & 1.386 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo valores en ec 27 y efectuando los productos matriciales en ella indicados se obtiene

$$C_1 = \frac{4{,}960}{2.566 \times 10^6} = 0.00193$$

$$C_2 = \frac{-5{,}720}{2.959 \times 10^6} = -0.00193$$

El valor absoluto de la respuesta máxima en cada uno de los modos será [7].

$$\begin{bmatrix} V_n = \text{fuerza cortante} \\ M_n = \text{momento flexionante} \end{bmatrix} = |C_n| \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} x_n \\ r_n \end{bmatrix} S_{an} \qquad (28)$$

donde

S_{an} = ordenada del espectro de aceleraciones afectada por el coeficiente sísmico $C = 0.15$.

El espectro que será utilizado es el propuesto en el reglamento de construcciones del Distrito Federal [5] (fig. 9). Los valores de las ordenadas espectrales correspondientes a T_1 y T_2 son 100 cm/seg² y 80.6 cm/seg² respectivamente.

Sustituyendo valores en ec 28 se llega a

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 957 \text{ kg} \\ 268{,}000 \text{ kg cm} \end{bmatrix} \qquad (29)$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 893 \text{ kg} \\ 216{,}000 \text{ kg cm} \end{bmatrix} \qquad (30)$$

El criterio propuesto en ref. 8 será utilizado para el cálculo de la respuesta total (considerando los efectos combinados de los dos modos). Por lo anterior la respuesta total de la estructura valdrá

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \quad ; \quad M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \qquad (31a,\ 31b)$$

En ecs 31a y 31b

V = fuerza cortante total en la columna

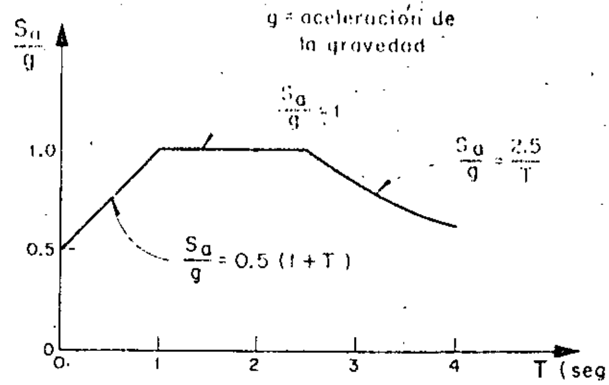


FIG. 9. *Espectro de aceleraciones* (Después de E. Rosenblueth y L. Esteva)

M = momento flexionante total en C. G.

Sustituyendo los valores dados en ecs 29 y 30 en (31) se obtiene

$$V = 1{,}310 \text{ kg} \quad ; \quad M = 344{,}000 \text{ kg cm}$$

El momento en la base de la columna valdrá

$$M_b = 344{,}000 + 1{,}310 \times 419 = 893{,}000 \text{ kg cm}$$

Los resultados de este caso se resumen en la fig. 10a.

CASO 2. SUELO FLEXIBLE

a) Cálculo de frecuencias y modos de vibración

Para considerar las restricciones del suelo emplearemos el método propuesto anteriormente procediendo en forma tabular. Sustituyendo valores en ecuaciones para K y R se obtienen 1.88×10^4 kg/cm y 6.35×10^8 kg cm/rad respectivamente.

PRIMER MODO

Parámetros	*Valores (1er. ciclo)*		*Factor común*
x, r (supuestos)	$x = 400$ cm	$r = 1$ rad	
$F = m\,\omega_1^2 x,\ M = J\,\omega_1^2 r$	$F = 8320$	$M = 1.386.000$	ω_1^2
$F_o = F,\ M_o = M + FL'$	$F_o = 8320$	$M_o = 5.376.000$	ω_1^2
$x_o = F_o/K,\ r_o = M_o/R$	$x_o = 0.4420$	$r_o = 0.00847$	ω_1^2
$\alpha = F/k,\ \beta = M/k_r$	$\alpha = 0.6570$	$\beta = 0.00187$	ω_1^2
$\beta\,\delta,\ \alpha\,\theta$	$\beta\,\delta = 0.3892$	$\alpha\,\theta = 0.00235$	ω_1^2
$x_1 = \alpha + \beta\,\delta,\ r_1 = \beta + \alpha\,\theta$	$x_1 = 1.0462$	$r_1 = 0.00422$	ω_1^2
$x_2 = r_o L'$	$x_2 = 4.0650$	———	ω_1^2
$x' = x_o + x_1 + x_2,\ r' = r_o + r_1$	$x' = 5.5532$	$r' = 0.01269$	ω_1^2
$\omega_1^2 = x/x',\ \omega_1^2 = r/r'$	72.0	78.7	

$$x'/r' = 438, \qquad \bar{X}_1^T = [438\ 1]$$

PRIMER MODO

Parámetros	Valores (2° ciclo)		Factor común
x, ε	438	1	
F, M	9130	1,386,000	ω_1^2
F_0, M_0	9130	5,766,000	ω_1^2
x_0, ε_0	0.4860	0.00910	ω_1^2
α, β	0.7210	0.00187	ω_1^2
$\beta\delta, \alpha\theta$	0.3892	0.002585	ω_1^2
x_1, ε_1	1.1102	0.004455	ω_1^2
x_2, ε_2	4.365	———	ω_1^2
x', ε'	5.961	0.013565	ω_1^2
ω_1^2	73.5	75.8	—

Suponiendo que la aproximación es suficiente resulta

$$x'/\varepsilon' = 440, \ \overline{X}_1^T = [440,1], \ \omega_1^2 \doteq 74 \ (\text{rad/seg})^2$$

$$T_1 = 0.731 \text{ seg.}$$

El procedimiento para el cómputo de los parámetros del segundo modo es el mismo, sólo que la configuración supuesta deberá "limpiarse", antes de proseguir el cálculo, de las componentes del primer modo que pudiera contener. Se demuestra [7] que si $\overline{X}'_2$ es el vector de la configuración supuesta, el vector libre de componentes del primer modo queda dado por

$$\overline{X}_2 = \overline{X}'_2 - \frac{\overline{X}_1'^T \overline{M} \, \overline{X}_2'}{\overline{X}_1^T \overline{M} \, \overline{X}_1} X_1 \qquad (32)$$

Suponiendo para el primer ciclo

$$\overline{X}'_2 = \begin{bmatrix} -150 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y sustituyendo valores en la ecuación matricial 32 se obtiene

$$\overline{X}_2 = \begin{bmatrix} -151 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que nos da los valores de partida para el primer ciclo de cálculo.

SEGUNDO MODO

Parámetros	Valores (1er. ciclo)		Factor común
x, ε	—151	1	
F, M	—3143	1,386,000	ω_2^2
F_0, M_0	—3143	—123,000	ω_2^2
x_0, ε_0	—0.1672	—0.0001940	ω_2^2
α, β	—0.2481	0.0018700	ω_2^2
$\beta\delta, \alpha\theta$	0.3892	—0.0008890	ω_2^2
x_1, ε_1	0.1411	0.0009810	ω_2^2
x_2, ε_2	—0.0930	———	ω_2^2
x', ε'	—0.1191	0.0007870	ω_2^2
ω_2^2	1267	1270	—

$x'/\varepsilon' = -151, \ \overline{X}_2^T = [-151 \ 1], \ T_2 = 0.176$ seg.

En este caso se supuso un valor cercano al real y por tanto sólo se necesitó un ciclo para que se obtuviera la aproximación deseada. Si el valor supuesto no hubiese sido ese sino otro cualquiera seguramente no hubiera sido suficiente un ciclo de cálculo. En los ciclos subsiguientes se procedería en igual forma que antes: suponer inicialmente la configuración obtenida en el ciclo anterior; limpiarla de las componentes del primer modo; etc.

b) Respuesta sísmica

Los valores de los coeficientes de participación y de las ordenadas espectrales para este caso son:

$$C_1 = 0.001689, \qquad C_2 = -0.001689$$

$$S_{a1} = 127.4 \text{ cm/seg}^2, \qquad S_{a2} = 86.6 \text{ cm/seg}^2$$

Las respuestas máximas para cada modo valen

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,970 \text{ kg} \\ 298,200 \text{ kg cm} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 461 \text{ kg} \\ 203,000 \text{ kg cm} \end{bmatrix}$$

Las respuestas máximas totales serán (fig 10b)

$$V = 2,030 \text{ kg}$$

$$M = 361,000 \text{ kg cm}$$

$$M_b = 1,209,000 \text{ kg cm}$$

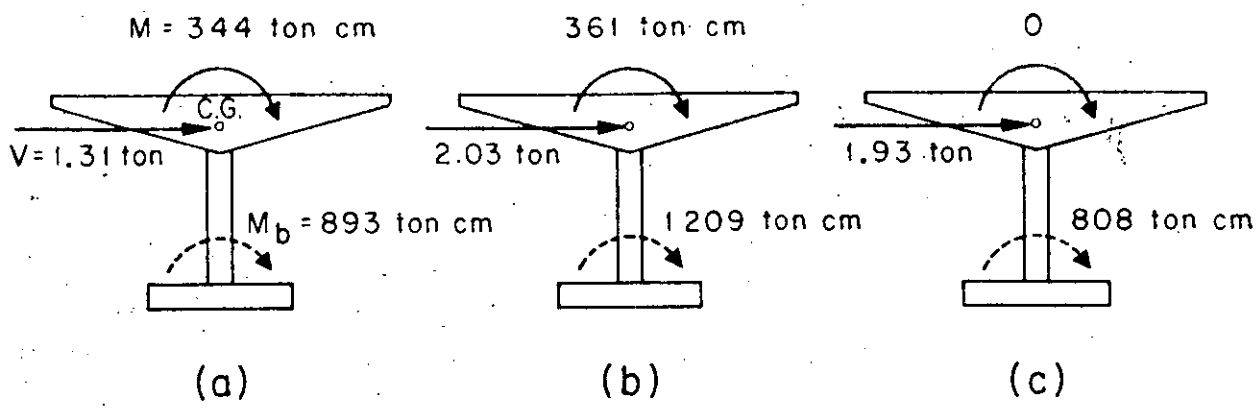


FIG. 10. *Respuestas sísmicas*

CASO 3. BASE RÍGIDA Y MASA CONCENTRADA

Para comparación de resultados se verá cuál es el valor de la respuesta máxima en el caso de despreciar la inercia rotacional y la interacción suelo-estructura.

Para este caso $p^2 = 608$ (rad/seg)^2, $T = 0.325$ seg, $0.15S_a = 92.6$ cm/seg^2, $V = mS_a = 1{,}930$ kg y $M_b = 808{,}000$ kg cm (fig 10c).

CONCLUSIONES

En la siguiente tabla se resumen los resultados de los tres casos, indicados como porcentajes del segundo caso.

Concepto	*Caso 1*	*Caso 2*	*Caso 3*
V	64.4%	100%	95.0%
M	95.2%	100%	0 %
M_b	73.8%	100%	66.7%

Los resultados de la tabla anterior dan una idea clara de la importancia que tiene el considerar la inercia rotacional de la cubierta y la interacción suelo-estructura. La importancia del primer concepto aumentará conforme mayor sea el momento de inercia de masa de la cubierta con respecto al eje z. El último concepto es tanto más importante cuanto más blando sea el suelo de cimentación. En particular puede observarse que en el tipo de solución 3 no se obtiene momento flexionante a la altura de C.G. Esto puede traer consigo serios errores en la cuantía del acero de refuerzo necesario en la unión columna-cubierta que es donde más ductilidad necesita desarrollarse.

AGRADECIMIENTO

El autor manifiesta su agradecimiento a los doctores E. Rosenblueth y J. A. Nieto, así como al Ing. E. del Valle por sus valiosos comentarios y sugerencias.

REFERENCIAS

1. McLean, R. S., "Inverted pendulum structures", technical report of *Consulting Civil and Structural Engineers*, Fullerton, Cal. (ene, 1965).
2. Barkan, D. D., "Dynamics of bases and foundations", McGraw Hill Book Co. Inc. (1962).
3. Jacobsen, L. S., y Ayre, R. S., "Engineering vibrations", McGraw Hill Book Co. Inc. (1958).
4. Newmark, N. M., "Numerical procedure for computing deflections, moments and buckling loads", *Transactions ASCE*, Vol. 108 (1943), pp. 1161-1234.
5. Rosenblueth, E. y Esteva, L., *"Proyecto de reglamento de las construcciones en el Distrito Federal. "Folleto complementario. Diseño sísmico de edificios"*, Ediciones Ingeniería, México (1962).
6. Marsal, R., y Mazari, M., *"El subsuelo de la Ciudad de México"*, Publicación del Instituto de Ingeniería, UNAM (1962).
7. Newmark, N. M., y Rosenblueth, E., *"Earthquake Engineering"*, será publicado por Prentice-Hall, Inc.
8. Rosenblueth, E., "Some applications of probability theory in aseismic design", *Proceedings, 1st World Conference on Earthquake Engineering*, Berkeley, Cal. (1956), paper 8.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

DINAMICA ESTRUCTURAL

VIGAS DE CORTANTE NO AMORTIGUADAS

Dr. Octavio A. Rascón Chávez

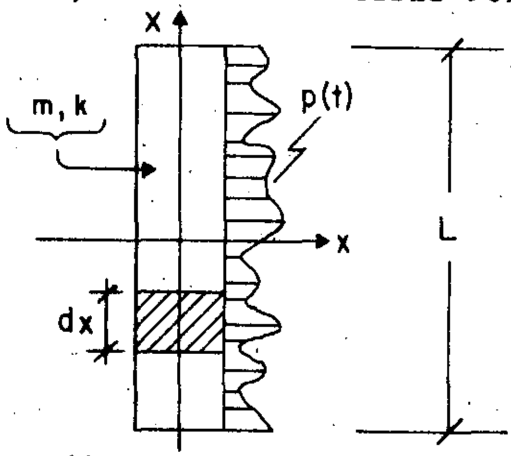
JULIO, 1985

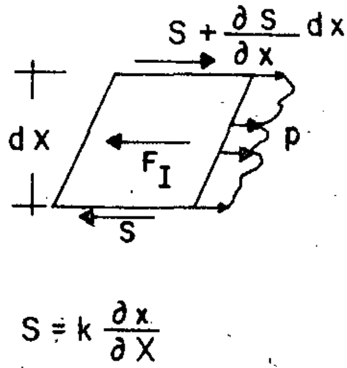
Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

VIGAS DE CORTANTE NO AMORTIGUADAS

SON SISTEMAS CONTINUOS CUYOS CAMBIOS DE PENDIENTE SON PROPORCIONALES AL CORTANTE QUE ACTUA EN LA SECCION.

SEAN m y p LA MASA Y FUERZA EXTERNA DISTRIBUIDAS POR UNIDAD DE LONGITUD, Y SEA k LA RIGIDEZ POR CORTANTE:





$k = FAG$

F = FACTOR DE FORMA

A = AREA SECCION TRANSVERSAL

G = MODULO DE ELASTICIDAD DINAMICO AL CORTANTE

$$F_I = (mdX)\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

POR EQUILIBRIO:

$$\frac{\partial S}{\partial X}\,dX + p\,dX - m\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\,dX = 0$$

$$m\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - k\,\frac{\partial^2 x}{\partial X^2} = p(t) \qquad (1)$$

LA EC HOMOGENEA QUEDA (CON $p=0$)

$$(2) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 x}{\partial X^2} = 0 \; ; \quad v^2 = \frac{k}{m}$$

ESCRIBIENDO $x(t) = Z_n(X)\theta_n(t)$, LA EC (2) QUEDA

$$Z_n \ddot{\theta}_n - v^2 Z_n'' \theta_n = 0$$

$$\frac{\ddot{\theta}_n(t)}{\theta_n(t)} - v^2 \frac{Z_n''}{Z_n} = 0 \implies \frac{\ddot{\theta}_n(t)}{\theta_n(t)} = v^2 \frac{Z_n''}{Z_n} = -\omega_n^2 = \text{CONSTANTE}$$

$$\implies \ddot{\theta}_n + \omega_n^2 \theta_n = 0 \quad ; \quad Z_n'' + \frac{\omega_n^2}{v^2} Z_n = 0$$

$$\theta_n = B_n \operatorname{sen} \omega_n (t - t_n), \quad Z_n = A_n \operatorname{sen} \frac{\omega_n}{v} (X - a_n)$$

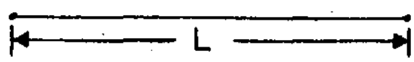
$$\therefore \; x_n = \overline{A}_n \operatorname{sen}\left[\frac{\omega_n}{v}(X - a_n)\right] \operatorname{sen}\left[\omega_n (t - t_n)\right], \quad n = 1, 2 \ldots ; \; \bar{A}_n = B_n A_n$$

LAS CONSTANTES a_n Y ω_n SE DETERMINAN EN CADA PROBLEMA EN FUNCION DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA.

CONDICION DE ORTOGONALIDAD:

$$\int_0^L x_n(X) x_j(X) = 0, \text{ SI } n \neq j$$

<u>EJEMPLO 1</u>: CUERDA VIBRANTE DE LONGITUD L Y EXTREMOS FIJOS:



EN EL EXTREMO $X=0$ SE TENDRA

$$(3) \quad x(0,t) = 0 \implies \frac{\omega_n a_n}{v} = j\pi \; ; \quad j = 0, 1, 2, \ldots \implies a_n = 0$$

EN EL EXTREMO X = L SE TENDRA

(4) $x(L,t) = 0 \Rightarrow \dfrac{\omega_n L}{v} = n\pi$; $n = 1,2,\ldots$

PUESTO QUE EN LA EC (3) SE TOMA j=0, YA QUE j=1,2,... DAN LA MISMA SOLUCION, LO CUAL CONDUCE A $a_n = 0$.

DE LA EC (4): $\omega_n = \dfrac{n\pi v}{L}$; $n = 1,2,\ldots$

FRECUENCIA FUNDAMENTAL

SI $n=1$, $\omega_1 = \dfrac{\pi v}{L}$ $\therefore$ $\omega_n = n\,\omega_1$

Y $T_1 = \dfrac{2L}{v}$ $T_n = \dfrac{T_1}{n}$

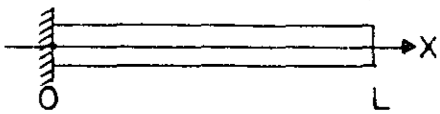
LAS CONFIGURACIONES MODALES QUEDAN:

$$Z_n = A_n \operatorname{sen}\frac{n\pi X}{L} \quad ; \quad x(t,X) = \bar{A}_n \operatorname{sen}\frac{n\pi X}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi v}{L}(t-t_n)$$

CONDICION DE ORTOGONALIDAD:

$$\int_0^L A_i \operatorname{sen}\frac{i\pi X}{L}\, A_j \operatorname{sen}\frac{j\pi X}{L}\,dx = 0, \quad \text{SI } i \neq j$$

<u>EJEMPLO 2</u>: VIGA DE CORTANTE APOYADA EN X = 0 Y LIBRE EN X = L.



DE $x(0,t) = 0 \Rightarrow a_n = 0$

DE $x'(L,t) = 0$ (PUESTO QUE EN X = L SE DEBE CUMPLIR QUE LA FUERZA CORTANTE, S, SEA NULA),

$$x'(\underline{X},t) = A_n \frac{\omega_n}{v} \cos \frac{\omega_n X}{v} \operatorname{sen}\omega_n (t-t_n)$$

$$\therefore \quad x'(L,t) = 0 = \cos\frac{\omega_n L}{v} \Rightarrow \frac{\omega_n L}{v} = \frac{\pi}{2}(2n-1)$$

O $\quad \omega_n = \frac{v}{L}\ \frac{\pi}{2}\ (2n-1) \qquad\qquad n = 1,2,\ldots$

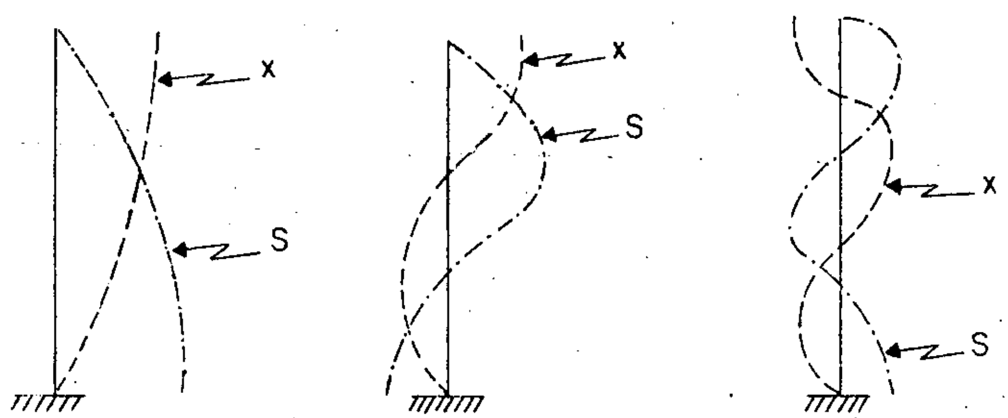
SI $\quad n=1,\ \omega_1 = \frac{\pi v}{L.2} \Rightarrow T_1 = \frac{4L}{v}$

$$\therefore \quad \omega_n = \omega_1(2n-1)\ ; \quad T_n = \frac{T_1}{2n-1}$$

ASI: $T_2 = \frac{T_1}{3}$, $T_3 = \frac{T_1}{5}$, ETC.

DISTRIBUCION DE CORTANTES:

$$S_n = k\ \frac{\partial x}{\partial X} = \overline{A}_n\ k\ \frac{\omega_n}{v}\cos\frac{\omega_n X}{v}\ \operatorname{sen}\omega_n(t-t_n)$$



1er. MODO(FUNDAMENTAL) 2o. MODO 3er. MODO

VIBRACIONES FORZADAS EN VIGAS DE CORTANTE

SEA $\ddot{x}_o(t)$ LA EXCITACION DEL TERRENO. LA RESPUESTA, $x(t)$, DEL SISTEMA ES

$$(3)\quad x(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_n} \operatorname{sen} \frac{\omega_n}{v} X \int_0^t \ddot{x}_o(\tau) \operatorname{sen}\omega_n (t-\tau)\, d\tau$$

DONDE

$$(4)\quad a_n = \frac{\int_0^L n \operatorname{sen} \frac{\omega_n v}{X}\, dx}{\int_0^L n \operatorname{sen}^2 \frac{\omega_n v}{X}\, dx} = \frac{4}{(2n-1)\pi}$$

<u>TAREA</u>: DEMOSTRAR ECS (3) Y (4) Y ESTUDIAR SECCION 3.15.

<u>EJEMPLO</u>: CALCULAR EL LIMITE SUPERIOR DEL CORTANTE EN UNA VIGA DE CORTANTE A CUYA BASE SE LE SOMETE A UNA ACELERACION CONSTANTE, a.

EL ESPECTRO DE ESTA EXCITACION ES $V = a/\omega$

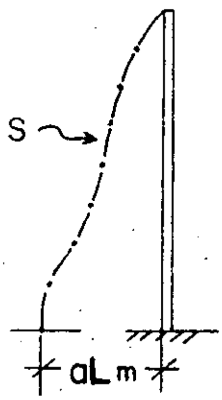
POR LO TANTO, $S \leq k \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_n} \operatorname{sen} \frac{\omega_n}{v} X \right) \right] V$

$$S \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k a_n V}{\omega_n} \frac{\omega_n}{v} \cos \frac{\omega_n}{v} X \right] = \frac{4k}{\pi} \frac{a}{v} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2L}(2n-1)X}{(2n-1)\frac{v}{L}\frac{\pi}{2}(2n-1)} \right]; \quad \text{con } v^2 = \frac{k}{m}:$$

$$S \leq \frac{8aLm}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \left[\cos \frac{(2n-1)\pi X}{2L} \right]$$

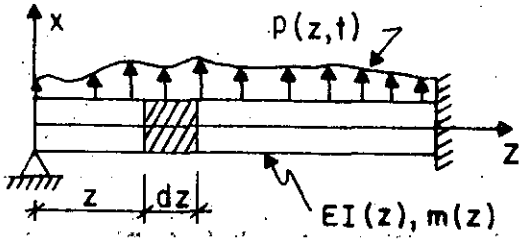
EN X = 0:

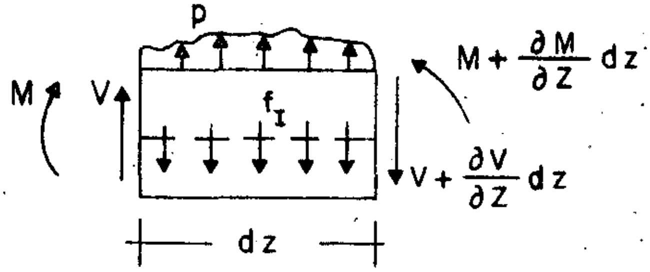
$$S \leq (8\underline{aLm})/\pi^2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}}_{\pi^2/8} = aLm$$



VIBRACION DE VIGAS EN FLEXION

a. AMORTIGUAMIENTO NULO





$$V + p dz - (V + \frac{\partial V}{\partial z} dz) - f_I dz = 0 \qquad (1)$$

EN DONDE $f_I dz = (m dz) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ (2)

SUSTITUYENDO (2) EN (1) Y SIMPLIFICANDO:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = p - m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \qquad (3)$$

$$M + V dz - (M + \frac{\partial M}{\partial z} dz) = 0 \ , \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = V \qquad (4)$$

(DESPRECIANDO LOS TERMINOS DE SEGUNDO ORDEN DE LOS MOMENTOS DE p Y f_I).

SUSTITUYENDO (4) EN (3) SE OBTIENE

$$\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} + m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = p \qquad (4')$$

TOMANDO EN CUENTA QUE $\frac{M}{EI} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$ SE OBTIENE FINALMENTE

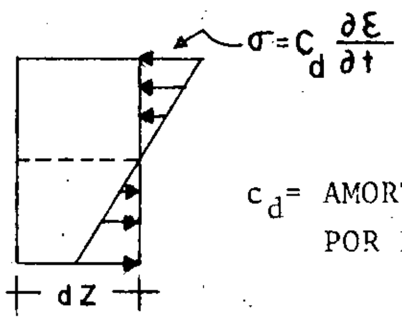
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}) + m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = p \qquad (5)$$

b. AMORTIGUAMIENTO VISCOSO

- FUERZA DE AMORTIGUAMIENTO POR
  VELOCIDAD TRANSVERSAL $= c(z)\,\frac{\partial x}{\partial t}\,dz$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = p - m\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - c\,\frac{\partial x}{\partial t} \qquad (6)$$

- FUERZA DE AMORTIGUAMIENTO POR DEFORMACION DE LA VIGA.
  ACEPTANDO LA HIPOTESIS DE NAVIER DE DEFORMACION PLANA



$$M_{amort} = \int \sigma y da = c_d I(z)\frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t}$$

c_d = AMORTIGUAMIENTO POR DEFORMACION

INCORPORANDO EL MOMENTO DEBIDO AL AMORTIGUAMIENTO EN LA EC. (5)

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(EI\,\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + C_d I\,\frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t}\right) + m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + c\frac{\partial x}{\partial t} = p \qquad (6)$$

SI LA EXCITACION ES POR MOVIMIENTO DE LOS APOYOS, SE PUEDE DEMOSTRAR (CLOUGH Y PENZIEN, PAG 303) QUE:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(EI\,\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + C_d I\,\frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t}\right) + m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + c\frac{\partial x}{\partial t} = p_{efect.}$$

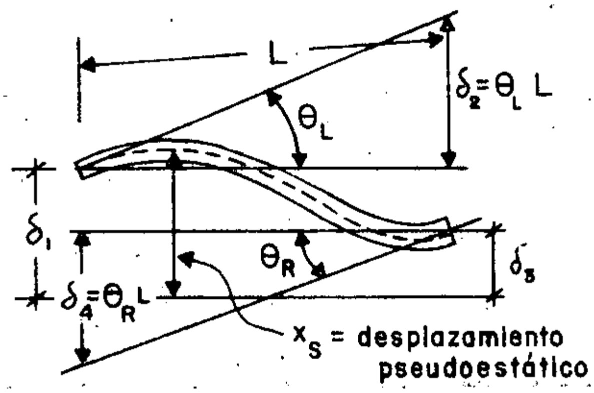
EN DONDE

$$p_{efect} = \frac{-\partial^2}{\partial z^2}\left(EI\,\frac{\partial^2 x_s}{\partial z^2} + C_d I\,\frac{\partial^3 x_s}{\partial z^2 \partial t}\right) - m\frac{\partial^2 x_s}{\partial t^2} - c\,\frac{\partial x_s}{\partial t} \qquad (7)$$

$$xt0t(z,t) = x_s(z,t) + x(z,t)$$

x_s = DESPLAZAMIENTO PSEUDOESTATICO OCASIONADO POR EL MOV. DE LOS APOYOS DE MANERA ESTATICA

x = DESPLAZAMIENTO DINAMICO



SI SE TIENE UNA ROTACION Y UNA TRASLACION POR APOYO:

$$x_s = \sum_{i=1}^{4} \phi_i \delta_i(t) \qquad (8)$$

$\phi_i(z)$ = CONFIGURACION DE LA VIGA DEBIDA A $\delta_i = 1$

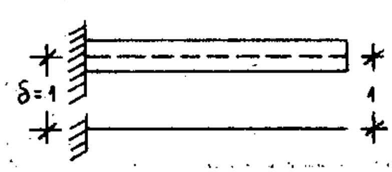
INCORPORANDO (8) EN (7):

$$p_{efect} = -\sum_{i=1}^{4} \{m\phi_i \ddot{\delta}_i(t) + c\,\phi_i \dot{\delta}_i(t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[I(z)\frac{\partial^2 \phi_i(z)}{\partial z^2}(\dot{\delta}_i(t)c_d + E)\right]\} \qquad (9)$$

EN LA MAYORIA DE LOS CASOS EL AMORTIGUAMIENTO INFLUYE POCO EN LA FUERZA EFECTIVA Y LA EC.(9) SE SIMPLIFICA A

$$p_{efect} = -\sum_{i=1}^{4} m\phi_i(z)\ddot{\delta}_i(t)$$

EN EL CASO DE UN VOLADIZO:



$$\phi_1(z) = 1$$

Y

$$p_{efect} = -\,m(z)\ \ddot{\delta}_1(t)$$

ANALISIS DE VIBRACIONES LIBRES

CONSIDEREMOS UNA VIGA DE SECCION CONSTANTE (EI= CONSTANTE ; $\bar{m}$=MASA POR UNIDAD DE LONGITUD).

DE LA EC.(5): $EI \dfrac{\partial^4 x}{\partial z^4} + \bar{m} \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$

$$\frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + \frac{\bar{m}}{EI} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \qquad (10)$$

RESOLVIENDO LA EC. (10) POR SEPARACION DE VARIABLES:

$$x(z,t) = \theta(z)\ Y(t)$$

$$\theta^{IV}(z)\ Y(t) + \frac{\bar{m}}{EI}\ \theta(z)\ \ddot{Y}(t) = 0\ ;\ \frac{\theta^{IV}(z)}{\theta(z)} + \frac{\bar{m}}{EI} \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = 0$$

POR LO QUE

$$\frac{\theta^{IV}(z)}{\theta(z)} = -\frac{\bar{m}}{EI} \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = C = a^4 \quad (\ C = \text{CONSTANTE})$$

POR LO TANTO OBTENEMOS <u>DOS</u> ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS:

$$\theta^{IV}(z) - a^4\ \theta(z) = 0$$

$$\ddot{Y}(t) + \omega^2 Y(t) = 0, \quad \text{DONDE} \quad \omega^2 = \frac{a^4 EI}{\bar{m}}$$

$$\text{O} \qquad a^4 = \frac{\omega^2 \bar{m}}{EI}$$

LA SOLUCION DE LA SEGUNDA DE ESTAS ES:

$$Y(t) = \frac{\dot{Y}(o)}{\omega}\ \text{sen}\omega t + Y(o)\ \cos\omega t \qquad (11)$$

LA SOLUCION DE LA PRIMERA ES:

$$\theta(z) = A_1 \text{ sen } az + A_2 \cos az + A_3 \text{ senh} az + A_4 \cosh az \qquad (12)$$

EN DONDE LAS A_i SE CALCULAN EN FUNCION DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA DE LA VIGA EN AMBOS EXTREMOS.

EJEMPLO

VIGA SIMPLEMENTE APOYADA

LAS CUATRO CONDICIONES DE FRONTERA SON:

en $z=0$: $\theta(o)=0$, $M(o)= EI\,\theta''(o) = 0$

en $z=L$: $\theta(L)=0$, $M(L)= EI\theta''(L) = 0$

SUSTITUYENDO $\theta(o)=0$ Y $\theta''(o)=0$ EN LA EC.(12) Y SU SEGUNDA DERIVADA:

$$\left.\begin{aligned} \theta(o) &= A_2 + A_4 \cosh 0 = 0 \\ \theta''(o) &= a^2(-A_2 + A_4 \cosh 0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_2 = A_4 = 0$$

HACIENDO LO MISMO CON $\theta(L) = 0$ y $\theta''(L) = 0$:

$$\left.\begin{aligned} \theta(L) &= A_1 \text{ sen } aL + A_3 \text{ senh } aL = 0 \\ \theta''(L) &= a^2(-A_1 \text{ sen } aL + A_3 \text{ senh } aL) = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow A_3 = 0$$

POR LO TANTO, $\theta(L) = A_1 \text{ sen } aL = 0$

PUESTO QUE $A_1=0$ ES LA SOLUCION TRIVIAL, SE DEBE TENER QUE A_1 SEA ARBITRARIA Y QUE

$$\text{sen } aL = 0 \rightarrow aL = n\pi; \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$$

POR LO TANTO, $a = n\pi/L$. RECORDANDO QUE

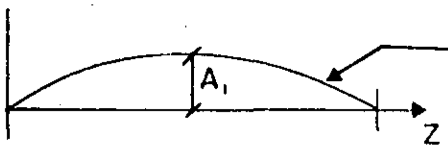
$a^4 = \omega^2\bar{m}/EI$, SE TIENE QUE

$$\omega_n^2 = (n\pi/L)^4 EI/\bar{m} \qquad \text{O} \qquad \omega_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\sqrt{EI/\bar{m}}$$

SON LAS FRECUENCIAS CIRCULARES NATURALES DE VIBRACION DE LA VIGA.

LAS CONFIGURACIONES MODALES SON

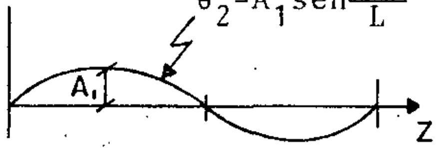
$$\theta_n(z) = A_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} z$$



$\theta_1 = A_1 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{L}$: $\omega_1 = \frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{EI/\bar{m}}$

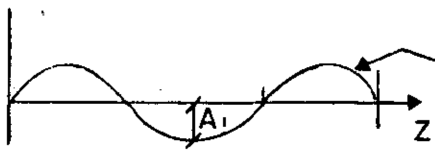
1er. MODO

$\theta_2 = A_1 \operatorname{sen} \frac{2\pi z}{L}$



$\omega_2 = \frac{4\pi^2}{L^2}\sqrt{EI/\bar{m}}$

2o. MODO



$\theta_3 = A_1 \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{L}$; $\omega_3 = \frac{9\pi^2}{L^2}\sqrt{EI/\bar{m}}$

3er. MODO

⋮

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 :: 1 : 4 : 9$$

$$\omega_i = n^2 \omega_1$$

DINAMICA ESTRUCTURAL

ESTUDIO ESTADISTICO DE LOS CRITERIOS PARA ESTIMAR LA RESPUESTA SISMICA DE SISTEMAS LINEALES CON DOS GRADOS DE LIBERTAD

Dr. Octavio A. RAscón Chávez
Ing. Augusto Villarreal Aranda

JULIO, 1985

1323

Estudio estadístico de los criterios para estimar la respuesta sísmica de sistemas lineales con dos grados de libertad

Octavio A. Rascón
Augusto G. Villarreal*

RESUMEN

El objeto de este trabajo es verificar el grado de aproximación de dos métodos que con frecuencia se utilizan para estimar la respuesta sísmica máxima de sistemas lineales con varios grados de libertad. Para ello se aplica el método de Monte Carlo en el estudio de tres tipos de estructuras con dos grados de libertad: torsión y traslación, cabeceo y traslación, y traslación en dos pisos. Como excitaciones se utilizan sismos simulados y reales; se comparan las respuestas estimadas con las exactas, se hacen recomendaciones acerca del empleo de dichos métodos, y se obtienen las distribuciones de probabilidades de los cocientes de las respuestas exactas entre las estimadas.

ABSTRACT

The purpose of this work is to verify the degree of approximation of two methods used frequently for estimating the maximum seismic response of linear systems with various degrees of freedom. To do this, the Monte Carlo method is used in the study of three types of structures with two degrees of freedom: torsion and translation, rocking and translation, and translation in a two story building. Simulated and real earthquakes are used as ground excitations; estimated responses are compared with the exact ones, recommendations for the use of such methods are given, and the probability distributions of the ratios of exact to estimated responses are obtained.

1. INTRODUCCION

En este trabajo se analiza el comportamiento dinámico de algunos tipos de estructuras de comportamiento lineal de dos grados de libertad cuando se les sujeta a solicitaciones sísmicas. El objeto es verificar el grado de aproximación de dos métodos propuestos por Rosenblueth (refs 1 y 2) para estimar la respuesta máxima total, mediante su comparación con las respuestas máximas exactas obtenidas con el método de análisis modal, al superponer en el tiempo los efectos del sismo en los dos modos naturales de vibración de la estructura.

El método 1 consiste en estimar la respuesta máxima total, Q, extrayendo la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la respuesta en cada modo natural de vibración, Q_i; es decir

$$Q = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} Q_i^2} \tag{1.1}$$

* Profesores Investigadores, Instituto de Ingeniería, UNAM

donde n es el total de grados de libertad del sistema.

El método 2 consiste en aplicar la fórmula

$$Q = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} Q_i^2 + \sum_{i \neq j} \sum \frac{Q_i \; Q_j}{1 + \epsilon^2_{ij}}} \qquad (1.2)$$

siendo

$$\epsilon_{ij} = \frac{\omega_i' - \omega_j'}{\zeta_i' \, \omega_i + \zeta_j' \, \omega_j} \qquad (1.3)$$

donde

Q_i	respuesta máxima en el i-ésimo modo de vibración, tomada con el mismo signo que el de la correspondiente función de transferencia cuando esta alcanza su valor máximo absoluto
ω_i	i-ésima frecuencia circular natural de vibracion del sistema sin amortiguamiento
$\omega_i' = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}$	i-ésima frecuencia circular natural de vibración del sistema amortiguado
ζ_i	fracción del amortiguamiento crítico en el i-ésimo modo natural
$\zeta_i' = \zeta_i + 2/(\omega_i S)$	fracción del amortiguamiento crítico equivalente
S	duración del sismo con el que se excita al sistema

El interés primordial al realizar esta verificación radica en que el método 1, actualmente en uso en varios reglamentos de construcción (refs 3 y 4), podría llegar a sustituirse por el método 2.

Se han propuesto otros procedimientos para estimar Q (ref 5) que son función no lineal de los resultados del método 1; sin embargo, no se discuten en este trabajo porque han sido estudiados con base en estructuras sin amortiguamiento, las cuales, como se verá, conducen a conclusiones diferentes de las que corresponden a estructuras amortiguadas.

Para realizar estadísticamente este estudio, se emplearon técnicas de reducción de variancia del método de Monte Carlo.

En cuanto al análisis, este se limita a tres casos, los cuales se detallan en el Apéndice:

1. Torsión en estructuras de un piso, considerando que las respuestas dinámicas son la fuerza cortante y el momento torsionante.

2. Cabeceo en estructuras de un piso, considerando como respuestas la fuerza cortante y el momento de cabeceo.

3. Traslación en estructuras de dos pisos, tomando en cuenta las fuerzas cortantes en los entrepisos uno, dos.

2. CALCULO DE LAS RESPUESTAS MAXIMAS

Las respuestas elásticas máximas de los diversos tipos de estructuras se calcularon utilizando:

a) Método 1 (ec 1.1, criterio del Reglamento de Construcciones del Departamento del Distrito Federal, ref 3)

b) Método 2 (ec 1.2 y nuevo criterio de Rosenblueth, ref 2)

c) Análisis modal (respuesta exacta).

Los resultados del análisis modal sirvieron como base de comparación del grado de aproximación de las estimaciones logradas con los otros dos criterios.

Como excitaciones sísmicas se emplearon cuatro sismos simulados de acuerdo con el método indicado en la ref 6 (figs 1 a 4), y uno real (fig 5), registrado en la zona blanda de la ciudad de México (ref 7).

El análisis de los tres casos se realizó empleando el método de Monte Carlo, que consiste en estudiar el comportamiento de un modelo matemático determinado, mediante la simulación de los datos de entrada (generalmente en computadora digital) y del estudio estadístico de los resultados. Cada vez que se introduce un conjunto de datos y se obtiene la respuesta del modelo, se dice que se efectúa un *experimento conceptual* del problema; la colección de resultados constituye la *muestra* que sirve de base para inferir cuál es el grado de aproximación con que dicho modelo matemático representa el fenómeno para el cual se formuló.

Conforme aumenta el número de parámetros que intervienen en el modelo matemático, se incrementa la cantidad de experimentos necesaria para dilucidar cuáles influyen en el problema, es decir, para verificar si en los resultados que se obtienen al variar los valores de los parámetros existen diferencias estadísticas significativas; sin embargo, eso representa un costo de computación que en ocasiones hace prohibitivo tal tipo de estudios, a menos que se emplee alguna técnica de *reducción de variancia* (refs 11 y 12), lo que permite un ahorro considerable en el número de experimentos necesario para obtener conclusiones adecuadas.

La técnica de reducción de variancia que se emplea en este trabajo es muy común y consiste en:

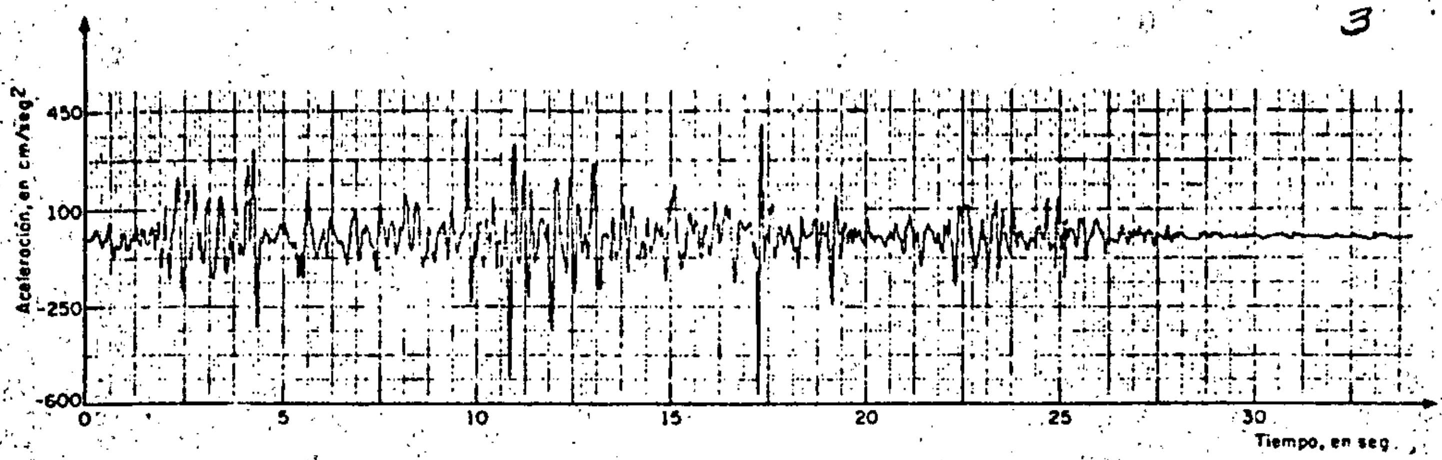


Fig 1. Sismo simulado No 1

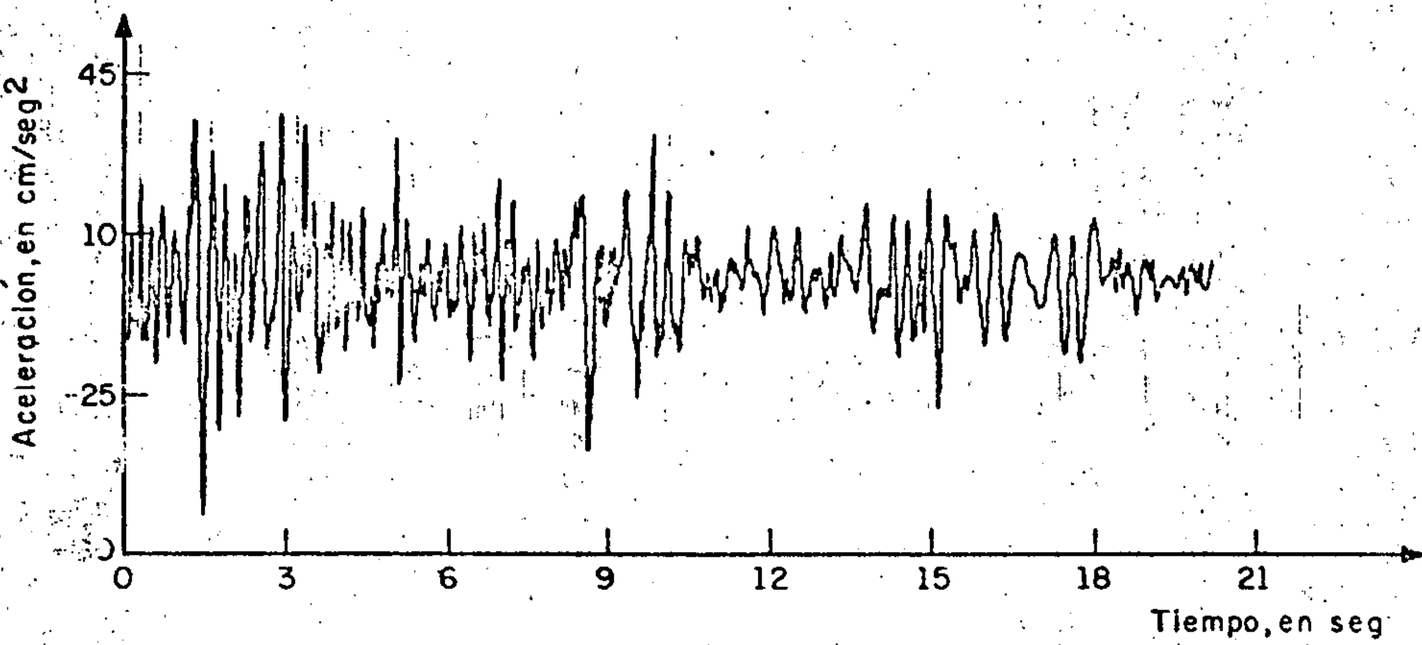


Fig 2. Sismo simulado No 2

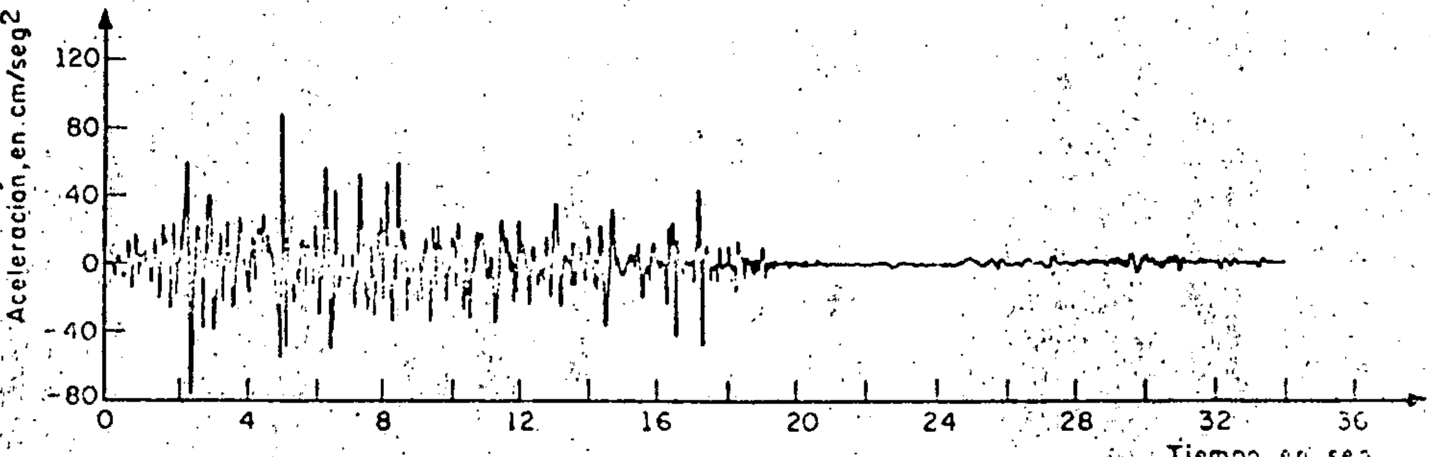


Fig 3. Sismo simulado No 3

4

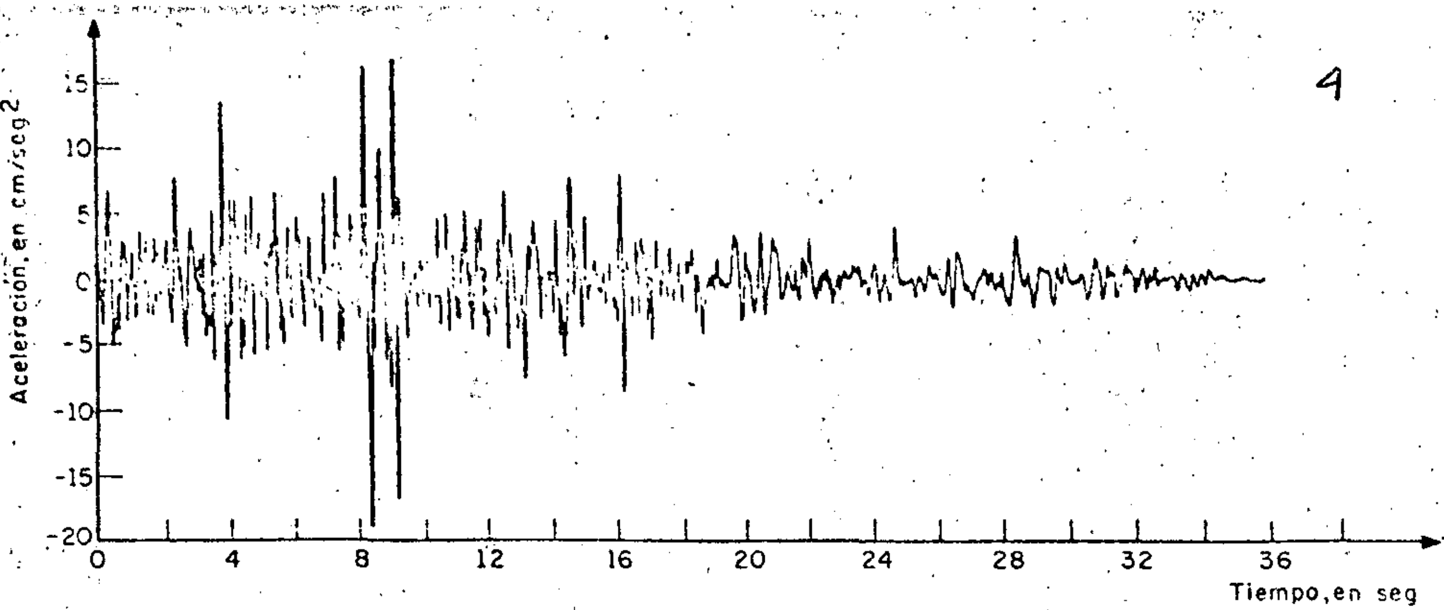


Fig 4. Sismo simulado No. 4

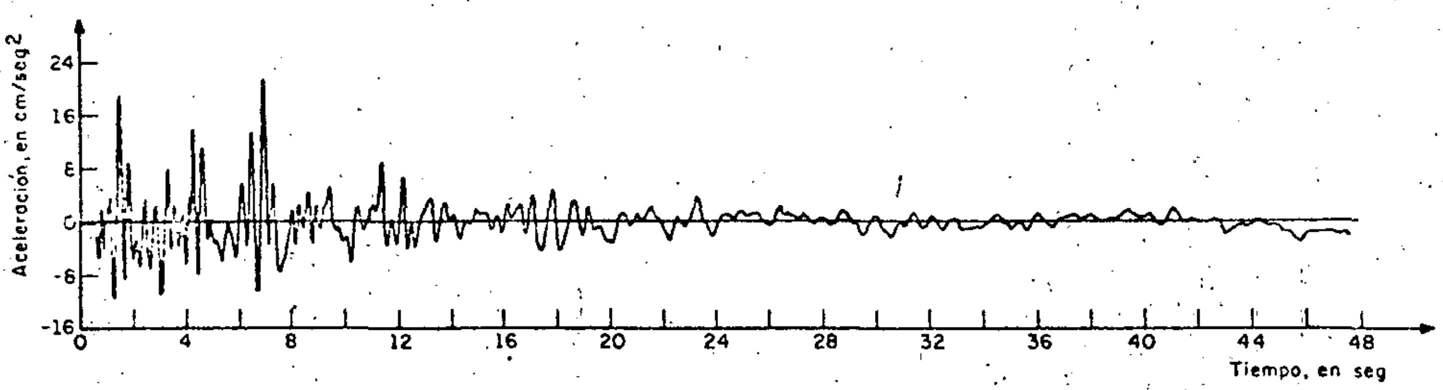


Fig 5. Sismo real registrado en la Alameda Central, México, D. F., el 10 de diciembre de 1961

a) Asignar diversos valores a cada parámetro que interviene en el problema, de manera que se cubran los intervalos de interés de cada uno.

b) Calcular la respuesta máxima exacta y las estimadas con los métodos 1 y 2 para cada combinación de valores de los diferentes parámetros.

c) Obtener las respuestas normalizadas dividiendo los valores exactos entre los estimados; esto se hace para cada combinación de valores de los parámetros, con lo cual se elimina la dispersión en los resultados ocasionada por la magnitud y variación con el tiempo de los datos de entrada (se reduce la variancia).

d) Estudiar si existen diferencias estadísticas significativas entre los resultados obtenidos al variar los valores asignados a uno de los parámetros. Si las hay, se infiere que los resultados logrados con cada valor de dicho parámetro corresponden a poblaciones estadísticas diferentes; en caso contrario, la población estadística es la misma y, por consiguiente, las muestras respectivas pueden agruparse en una sola de mayor tamaño, a partir de la cual es factible obtener conclusiones más generales y confiables acerca del modelo en estudio, ya que la variancia del promedio de la estimación se reduce en proporción a $1/n$ (ref 11). Esta etapa se repite sucesivamente para cada uno de los parámetros restantes, con lo que se realiza, de hecho, un análisis de variancia.

2.1 Resultados del problema de torsión (caso 1)

Para diseño sísmico de edificios, los elementos mecánicos que usualmente interesa conocer son las fuerzas y momentos que obran sobre cada elemento estructural. Para simplificar, con objeto de aislar los efectos de la fuerza cortante y del momento torsionante, en este problema de torsión se considerará una estructura (fig 6) con masa uniformemente distribuida, c un solo muro en dirección Z que resista la fue. cortante directa, y dos idénticos en dirección Y (per-

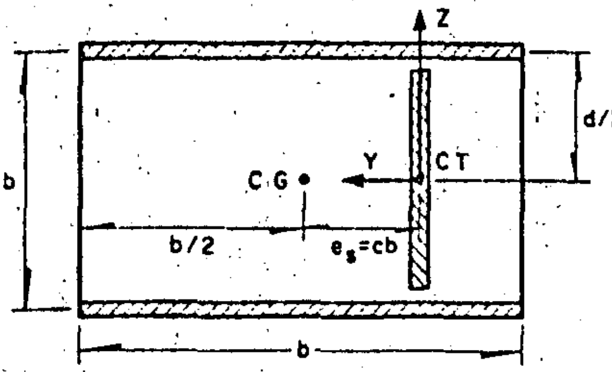


Fig 6. Estructura tipo considerada en el problema de torsión

pendicular al movimiento), de manera que cada uno de estos últimos resista una fuerza cortante igual a M/d, donde M es el momento torsionante dinámico y d es la separación de los dos muros. En este caso, la estructura presenta excentricidad solo en dirección perpendicular a la de excitación, Z.

Los parámetros que se escogieron para estudiar el problema de torsión fueron (fig 6):

$A = b/d$

b dimensión en la dirección Y

e_s/b

T_1 periodo fundamental de vibración $= \omega_1/2\pi = = \lambda_1/(2\pi K/m)$

ζ fracción de amortiguamiento respecto al crítico en ambos modos de vibración

η cociente de la frecuencia angular entre la lineal $= (L/J)/(K/m)$

Los valores que se asignaron a A, b y c son los consignados en la tabla 1; los de ζ son 0, 0.05 y 0.10; los de η, 0.5, 0.9, 1.0, 1.1, 1.5, 2.0, 2.5, 3 y 4, y los de T_1, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1.0, 1.5, 2, 3 y 4 seg. Los casos de η = 1, 0.9 y 1.1 se estudiaron con especial cuidado debido a que para valores de $\eta = 1$ y cercanos, sucede que las dos frecuencias naturales de vibración resultan más próximas entre sí (ec A.3) y, en consecuencia, el término ϵ_{12}^2 de las ecs A.8 y A.9 del Apéndice puede asumir valores pequeños (ec 1.3), en cuyo caso se pueden presentar diferencias considerables entre los resultados de ambos métodos, puesto que el término de la doble suma de la ec 1.2 asume valores tanto mayores cuanto menores son los de ϵ_{12}^2.

Para cada uno de los casos de la tabla 1 se obtuvieron las fuerzas cortantes y los momentos torsionantes máximos correspondientes a todas las combinaciones de ζ, T_1 y η.

En las figuras que aparecen más adelante no se hace distinción de los resultados obtenidos con cada sismo ni con cada combinación de A, b y c, ya que las muestras respectivas se mezclaron al no haberse encontrado diferencias estadísticas significativas con un 95 por ciento de nivel de confianza en los mismos, a pesar de la marcada diferencia entre los valores de dichos parámetros y de las características de los sismos, tales como duración y frecuencia dominante.

2.1.1 Momento torsionante

En las figs 7 a 9 se presentan los resultados correspondientes a los casos en los que $T_1 = 2.0$ seg y $\zeta = = 0$, 0.05 y 0.10, respectivamente. En el eje de las abscisas se localizan los valores de η, y en el de las ordenadas los cocientes de los momentos torsionantes exactos, M, entre los estimados, $\hat{M}$ y $\tilde{M}$, con los métodos 1 y 2, respectivamente (Apéndice).

En la fig 7, en la que el amortiguamiento es nulo, se aprecia mayor dispersión en los resultados de ambos métodos que corresponden a η = 0.9, 1.0 y 1.1 que para los demás valores de η. En cambio, en las figs 8 y 9, que corresponden a $\zeta = 0.05$ y $\zeta = 0.10$, respectivamente, se observa que la dispersión de los resultados del método 2 es prácticamente la misma para todos los valores de η (el coeficiente de variación es cercano a 0.2), cosa que no sucede con los resultados del método 1, para los cuales se tiene mayor dispersión cuando η = 0.9, 1.0 y 1.1. Estas observaciones llevan a la conclusión de que para el método 1 no se pueden mezclar las muestras correspondientes a todos los valores de η, ya que los resultados dependen de este parámetro, mientras que para el método 2 podrían mezclarse las que no se refieren a amortiguamiento nulo si se verificara que los valores medios correspondientes a cada η son estadísticamente iguales.

Para lograr dicha verificación, se investigó primero si los resultados del método 2 son independientes del periodo fundamental, T_1. Con este fin se trazó un juego de figuras del mismo tipo que las figs 10 a 12, que corresponden a η = 1.0 con ζ = 0, 0.05 y 0.10, respectivamente. En la fig 10, que corresponde a $\zeta = = 0$, se observa que los resultados sí dependen de T_1, ya que los valores medios son sensiblemente más grandes para periodos mayores de 1.0 seg que para los menores. Por lo contrario, en las figs 11 y 12 se nota que los valores medios son prácticamente independientes de T_1 en el intervalo de periodos estudiado, por lo que las muestras de cada periodo pueden agruparse en una sola (esta conclusión también es válida para los resultados del método 1).

Para verificar estadísticamente la conclusión anterior, se realizó una prueba de hipótesis acerca de si la pendiente de la recta que se ajusta a los datos puede considerarse nula, habiéndose aceptado con 95 por ciento de nivel de confianza.

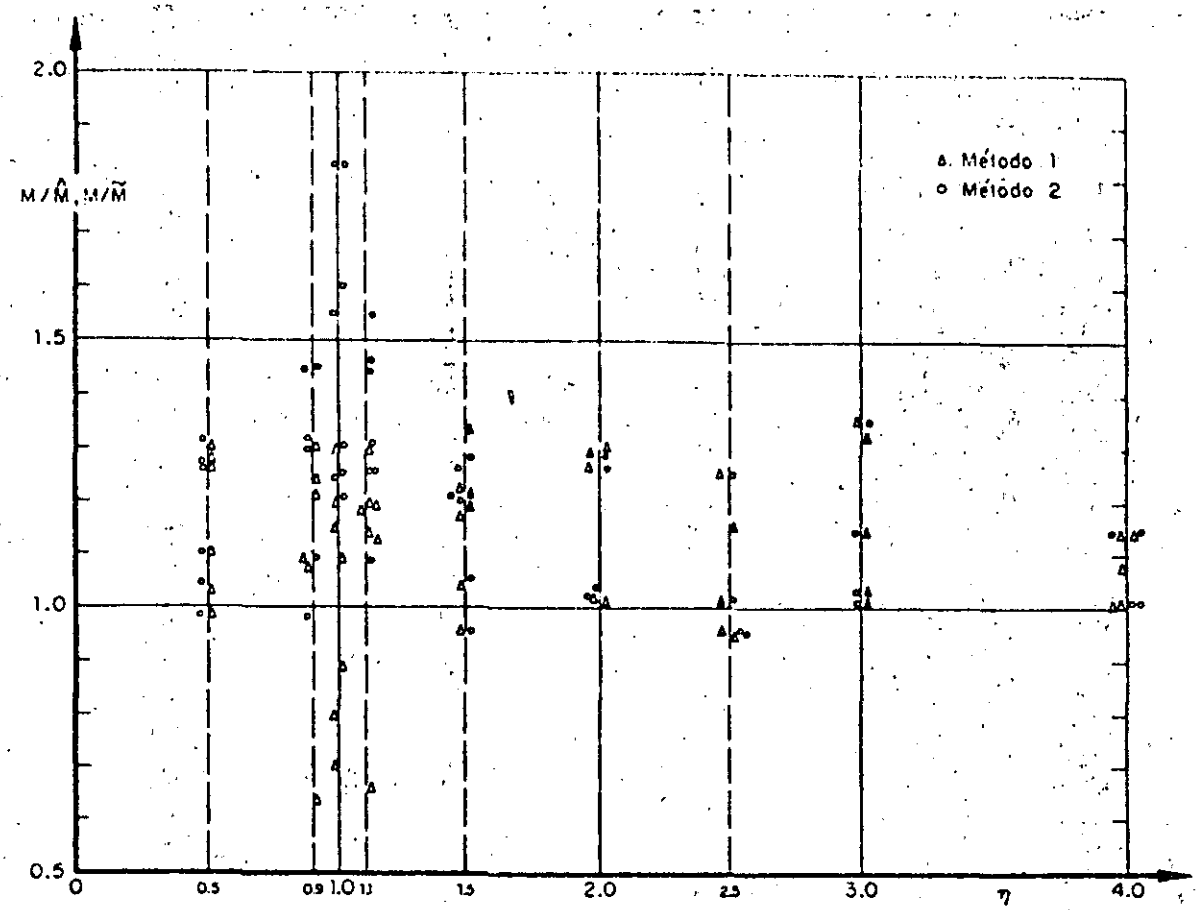


Fig 7. Resultados de los momentos torsionantes para T_1 = 2.0 seg. y $\zeta = 0$

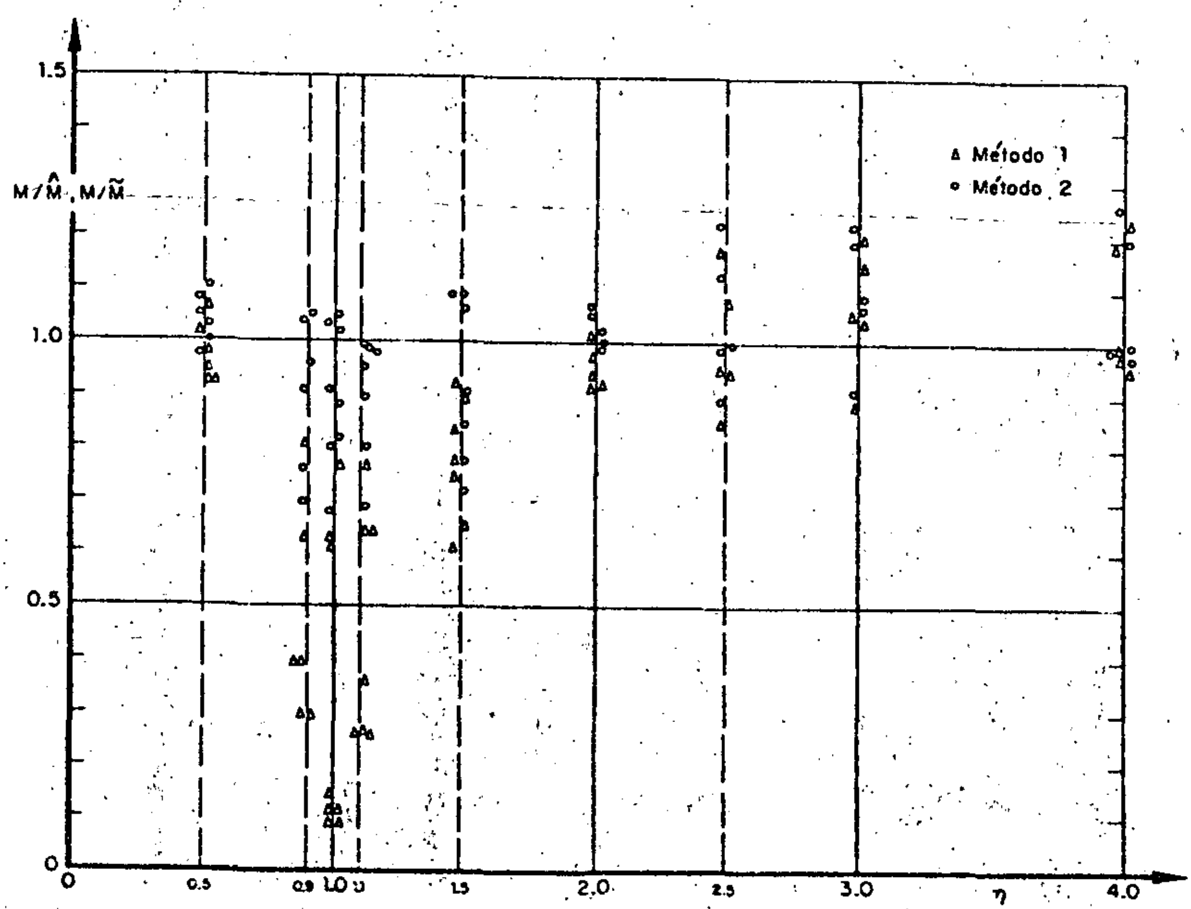


Fig 8. Resultados de los momentos torsionantes para T_1 = 2.0 seg. y $\zeta = 0.05$

7

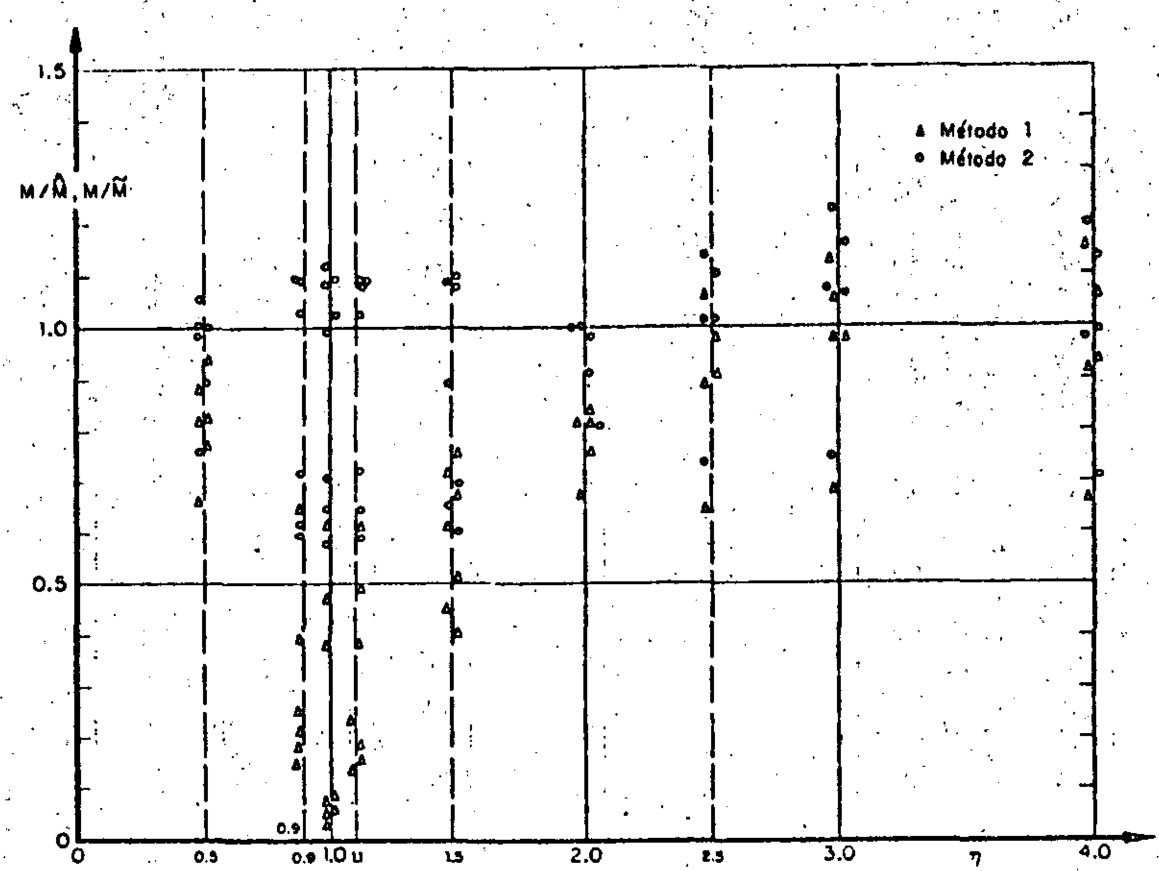


Fig 9. Resultados de los momentos torsionantes para T_1 = 2.0 seg, y ζ = 0.10

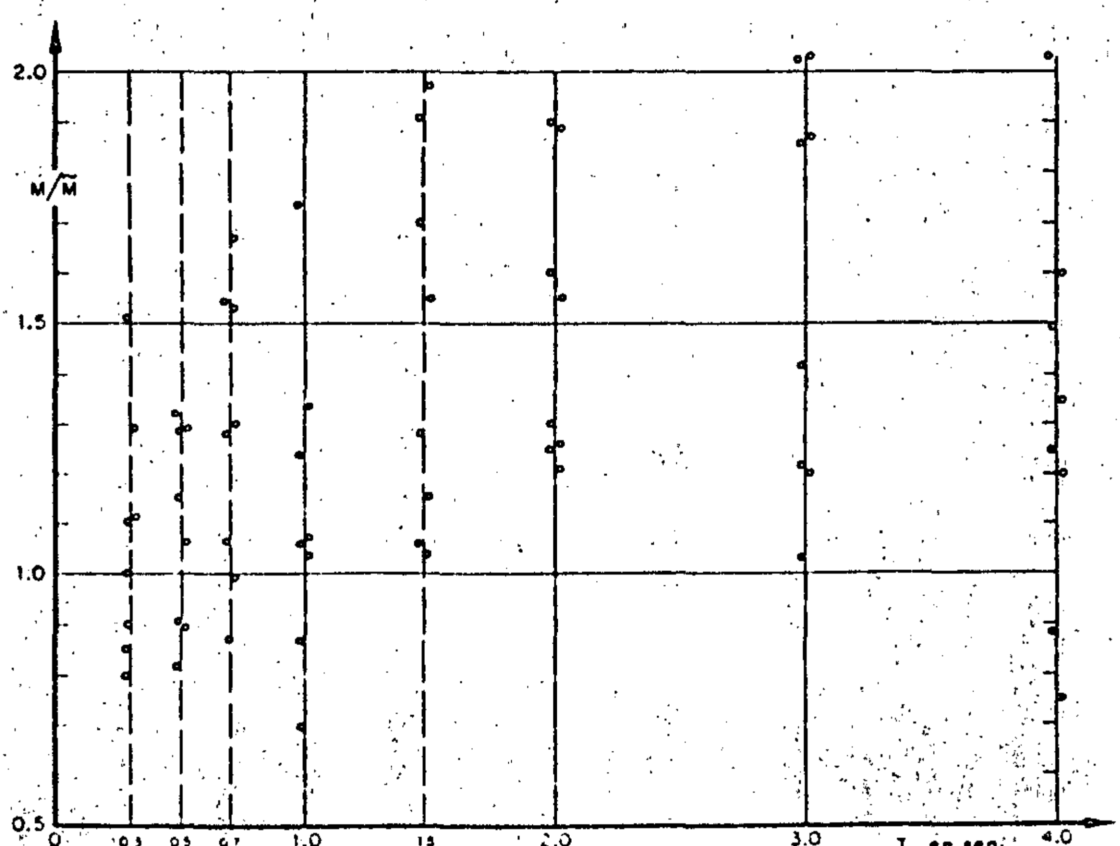


Fig 10. Resultados de los momentos torsionantes para η = 1.0, y ζ = 0, Método 2

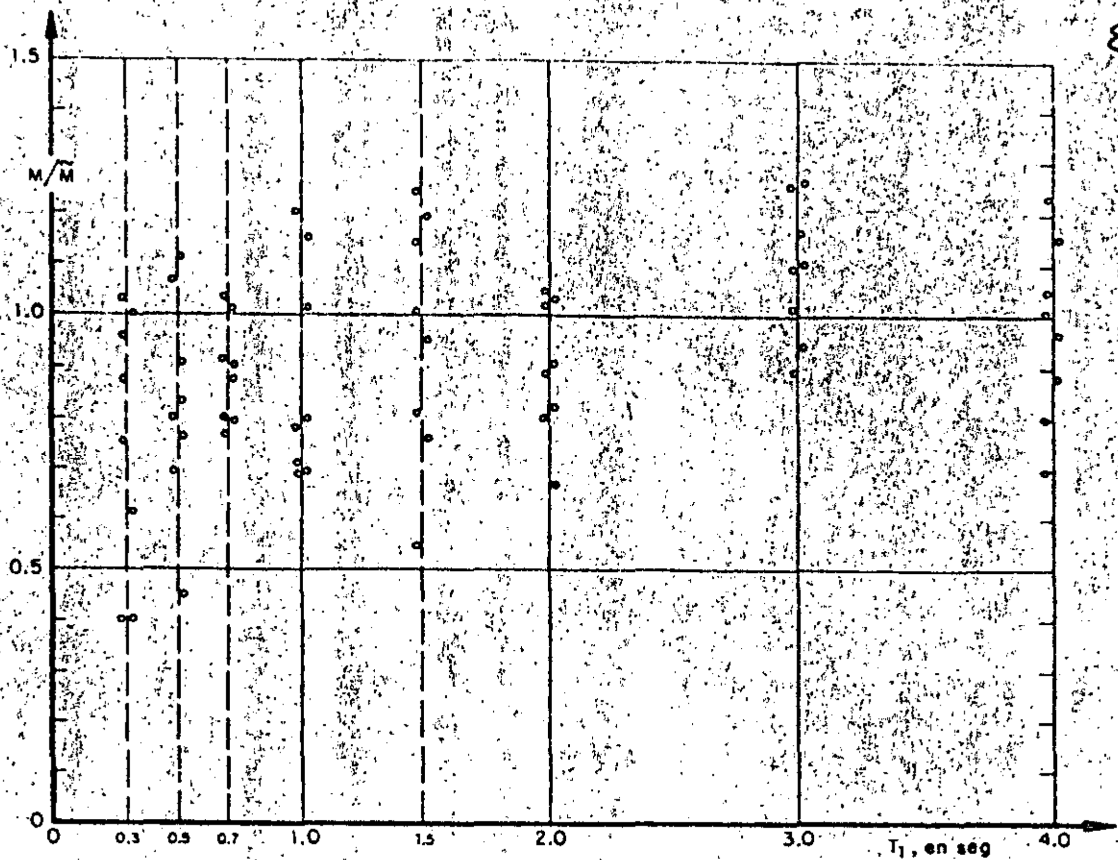


Fig 11. Resultados de los momentos torsionantes para $\eta = 1.0$, y $\zeta = 0.05$. Método 2

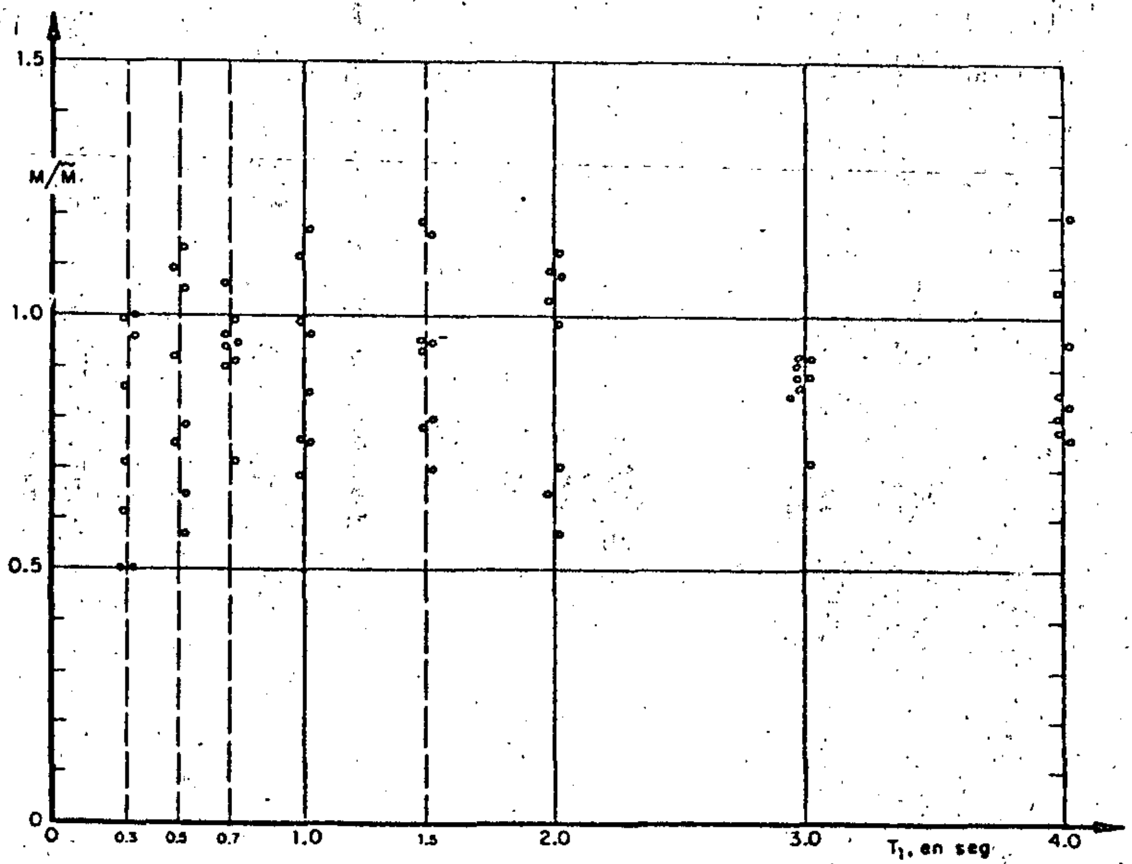


Fig 12. Resultados de los momentos torsionantes para $\eta = 1.0$, y $\zeta = 0.10$. Método 2

En la fig 13 se presentan en el eje de las ordenadas los promedios, $(M/\hat{M})$ y $(M/\tilde{M})$, de los resultados obtenidos respectivamente con los métodos 1 y 2, considerando que estos son independientes de T_1; en el eje de las abscisas se localizan los valores de η. Se observa que, para $\eta = 0.9$, 1.0 y 1.1, el método 2 sobrestima ligeramente la respuesta media (en 10 por ciento), tendiendo a subestimarla en 5 por ciento conforme los valores de η se alejan de 1.0, cuando $\zeta = 0.05$ y 0.10

Con objeto de verificar si con el método 2 los resultados son independientes de η, se realizaron pruebas de hipótesis de igualdad de medias, siendo aceptables con 95 por ciento de nivel de confianza. Por lo contrario, los resultados del método 1 no fueron independientes de η, lo cual es obvio, puesto que con $\zeta = 0.10$ se tiene que el promedio de $M/\hat{M}$ es 0.31 para $\eta = 1$ (el mínimo valor fue 0.04 y el máximo 0.68), y 0.99 para $\eta = 4$ (el mínimo fue 0.66 y el máximo 1.28).

En la fig 13 se observa también que los promedios obtenidos con el método 1 se acercan a los exactos conforme η aumenta, presentándose mayores errores para valores de η muy cercanos a 1.0, para el cual las frecuencias naturales de la estructura resultan más próximas entre sí (ec A.3), lo que trae como consecuencia que en muchas ocasiones las respuestas máximas en ambos modos de vibración ocurran simultáneamente y con signo contrario, por lo que la respuesta combinada máxima es la suma algebraica de ambas respuestas, que da resultados menores que los de la ec A.11.

Otra conclusión inmediata que se obtiene de la fig 13 es que los resultados del método 2 son prácticamente independientes de ζ cuando $\zeta \geq 0.05$ y que el método 1 pierde aproximación conforme aumenta ζ, y η se aproxima a 1

De lo anterior se concluye también que en estructuras amortiguadas, que son las de interés práctico, el método 2 proporciona, en promedio, mejores resultados que el método 1, aunque el 2 subestime más y con mayor frecuencia la respuesta máxima. En estructuras no amortiguadas, que únicamente son de interés académico, el método 1 proporciona mejores resultados.

Otro punto importante de discusión es el del cociente de la excentricidad dinámica exacta, e_d, entre la estática, e_s. En las figs 14 a 16 se tiene η en el eje de las abscisas, y e_d/e_s en el eje de las ordenadas.

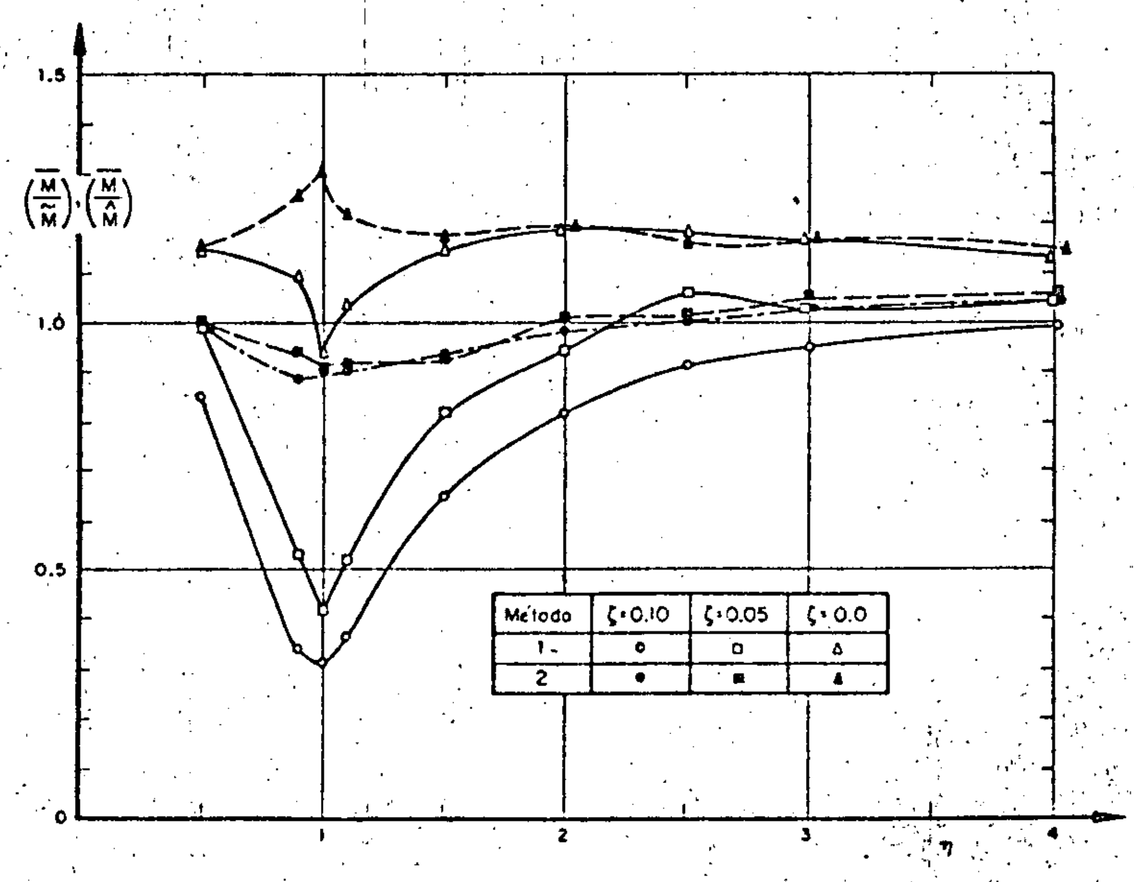


Fig 13. Variación con η de los promedios de los momentos torsionantes estimados

Se observa en la fig 14, que corresponde a amortiguamiento nulo, que para $\eta = 0.9$, 1.0 y 1.1 hay una marcada diferencia entre los resultados obtenidos para el caso I con los casos II y III (la de estos últimos entre sí no es tan importante). Así, cuando $\eta = 1.0$, en el caso I el promedio de e_d/e_s fue 38.5 y la desviación estándar 16.6; en el caso II estos parámetros estadísticos valieron 5.4 y 0.6, respectivamente. Para valores de η separados de 1.0 en 0.5 unidades o más hay diferencias menos apreciables entre los resultados de los tres casos. Además, e_d/e_s disminuye rápidamente conforme η se aleja de 1.0.

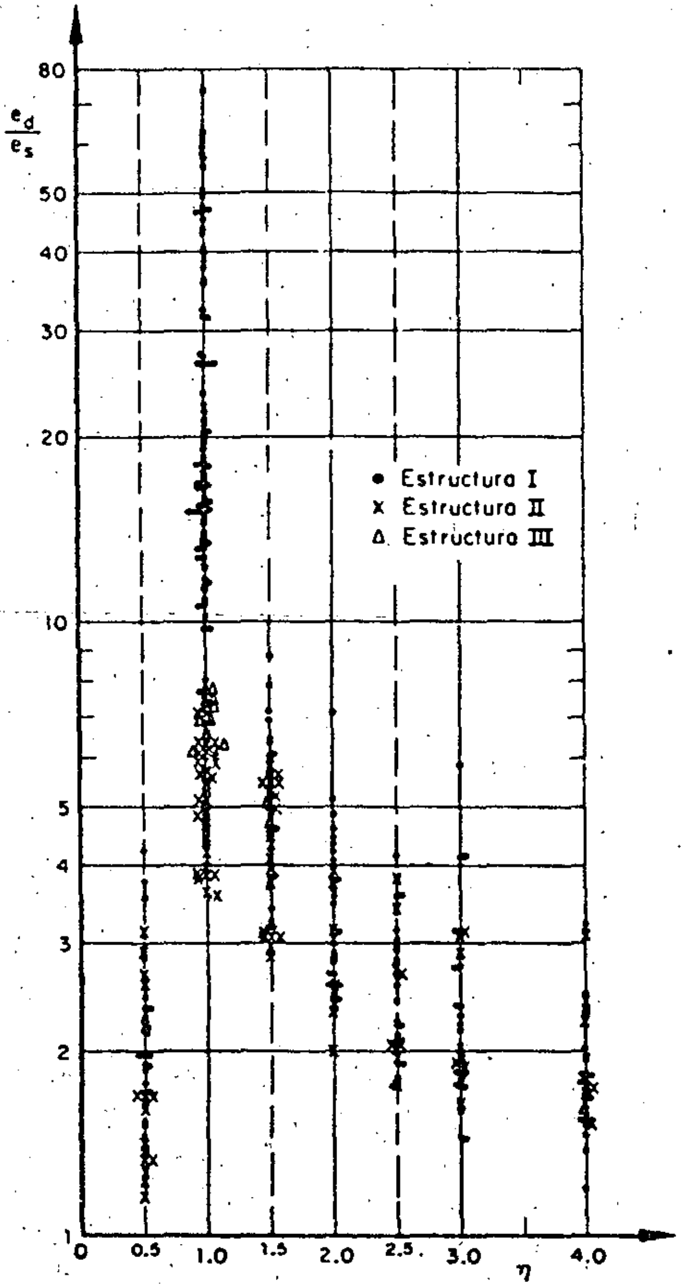


Fig 14. Cocientes de la excentricidad dinámica exacta entre la estática, para $\zeta = 0$

En las figs 15 y 16, para $\zeta = 0.05$ y 0.10, respectivamente, casi no hay diferencias entre los resultados de los dos casos, aunque persiste la dependencia respecto a η. Comparando estas tres últimas figuras se nota también que e_d/e_s disminuye conforme el amortiguamiento aumenta. Así, para $\zeta = 0.05$ el promedio fue 4.6 y la desviación estándar 1.3, mientras que para $\zeta = 0.10$, los valores correspondientes fueron 2.7 y 0.7.

De las figs 15 y 16 se concluye que la disposición del Reglamento de Construcciones del Departamento del Distrito Federal de que se tome $e_d/e_s = 1.5$ subestima el valor promedio para todos los valores de η mayores de 0.5 y menores de 4.0 (aquí se omitió el término $\pm$ 0.05b que se agrega a 1.5 en la disposición del Reglamento, porque dicho término tiene como finalidad prevenir excentricidades accidentales ocasionadas por variaciones imprevisibles de masas y rigideces y posibles excitaciones torsionales).

Con objeto de estimar probabilidades de eventos relacionados con los momentos torsionantes, se trazaron en papel de probabilidades los datos de frecuencias acumuladas correspondientes a diferentes casos. Las distribuciones de probabilidades empleadas fueron la logarítmico normal, la extrema tipo II y la normal, de las cuales, por apreciación visual, se consideró que esta última daba en general mejores resultados (figs 17 a 19).

Para verificar que las poblaciones bajo estudio tienen distribuciones normales, se realizaron pruebas de hipótesis estadísticas con un 95 por ciento de nivel de confianza.

Los resultados fueron:

Método 1

(Con resultados de $\eta = 1.5$, 2.0, 2.5, 3.0 y 4.0 mezclados; fig 17)

$\zeta = 0$: se rechaza la hipótesis nula de que la distribución es normal con media 1.16 y desviación estándar 0.12 (esta hipótesis se rechaza también con un 99 por ciento de nivel de confianza)

$\zeta = 0.05$ y $\zeta = 0.10$: se aceptan las hipótesis nulas de que las distribuciones son normales con medias 0.96 y 0.85, y desviaciones estándar 0.15 y 0.17, respectivamente.

Método 2

(Con resultados de $\eta = 1.5$, 2.0, 2.5, 3.0 y 4.0 mezclados; fig 18)

$\zeta = 0$, 0.05 y 0.10: se aceptan las hipótesis de que las distribuciones son normales con medias 1.15, 1.06 y 1.00, y desviaciones estándar 0.15, 0.15 y 0.15, respectivamente. Para $\zeta = 0.05$, la hipótesis se acepta con 99 por ciento de nivel de confianza; las otras con 95 por ciento.

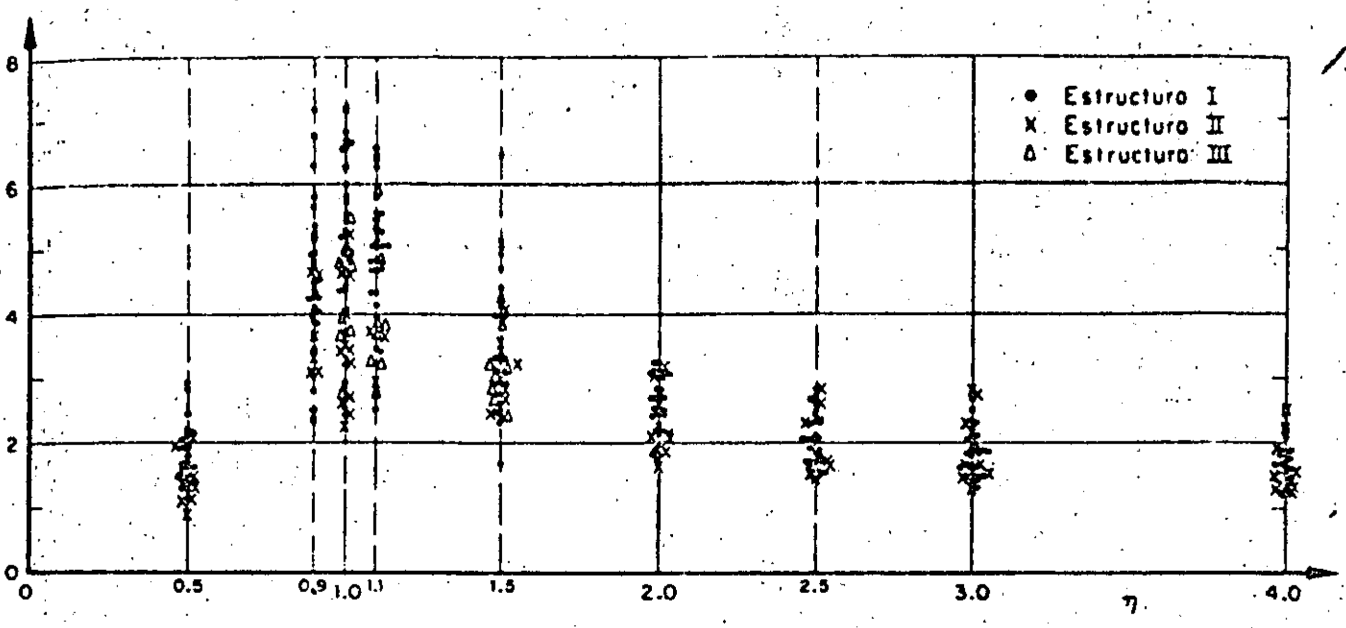


Fig 15. Cocientes de la excentricidad dinámica exacta entre la estática, para $\zeta = 0.05$

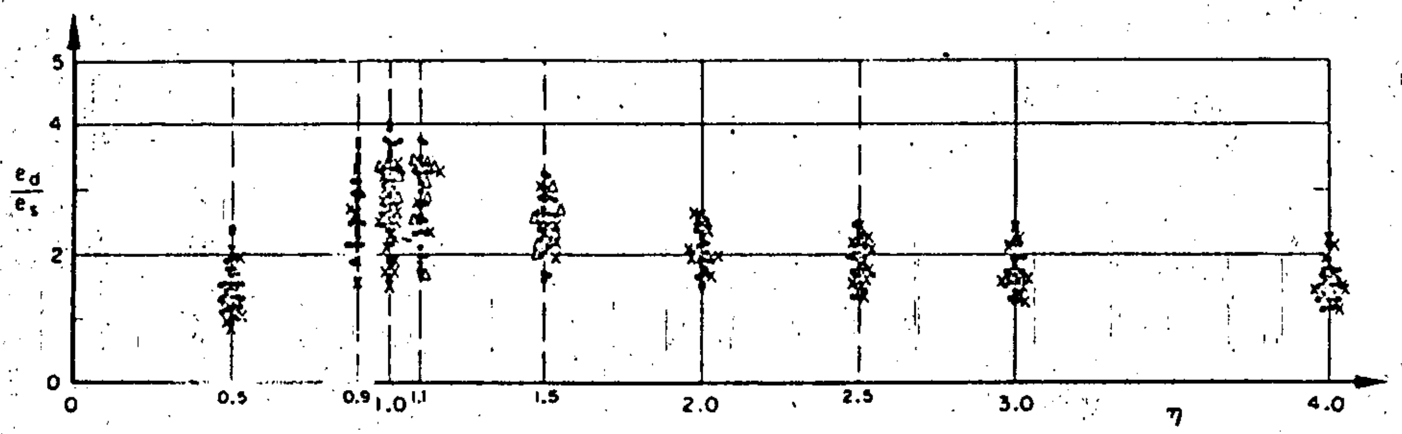


Fig 16. Cocientes de la excentricidad dinámica exacta entre la estática, para $\zeta = 0.10$

Además, para $\zeta = 0.10$ se estudió el caso en que se mezclaron los resultados de $\eta = 1$ y $\eta = 1.1$ (fig 19), obteniéndose una distribución normal con media 0.88 y desviación estándar 0.17. También se mezclaron los resultados de los valores de η de 1 a 4, para los cuales se obtuvo una distribución de igual tipo con media 0.95 y desviación estándar 0.16. Ambas hipótesis fueron aceptables, pero con 97.5 por ciento de nivel de confianza.

En todos los casos descritos en que se acepta la hipótesis nula, se observa que la desviación estándar es muy semejante, ya que varía de 0.15 a 0.17, mientras que la media va de 0.86 a 1.15.

2.1.2 Fuerza cortante

Los resultados obtenidos con los métodos 1 y 2, correspondientes a $\eta = 1.0$ y $\zeta = 0$, se muestran en la fig 20. En el eje de las abscisas se tienen los periodos fundamentales, T_1, y en el de las ordenadas las fuerzas cortantes normalizadas, $V/\hat{V}$ y $V/\tilde{V}$, obtenidas al dividir las fuerzas cortantes, V, calculadas mediante análisis modal entre las estimadas con los métodos 1 y 2, $\hat{V}$ y $\tilde{V}$, respectivamente.

De la fig 20 y otras similares se concluyó que las fuerzas cortantes normalizadas obtenidas con ambos métodos son independientes del periodo fundamental, T_1, con 95 por ciento de nivel de confianza. Además, para valores de η menores de 0.9 y mayores de 1.1, los resultados fueron independientes de los parámetros A, b y c, con errores de ± 5 por ciento. Esta independencia también se obtuvo para el método 2, inclusive cuando $\eta = 0.9$, 1.0 y 1.1, con errores máximos de 40 por ciento en defecto y 20 por ciento en exceso para $\zeta = 0$, tendiendo a reducirse conforme aumenta el amortiguamiento; así, para $\zeta = 0.05$, se obtuvieron errores máximos de ± 20 por ciento, y para $\zeta = 0.10$ de ± 10 por ciento.

12

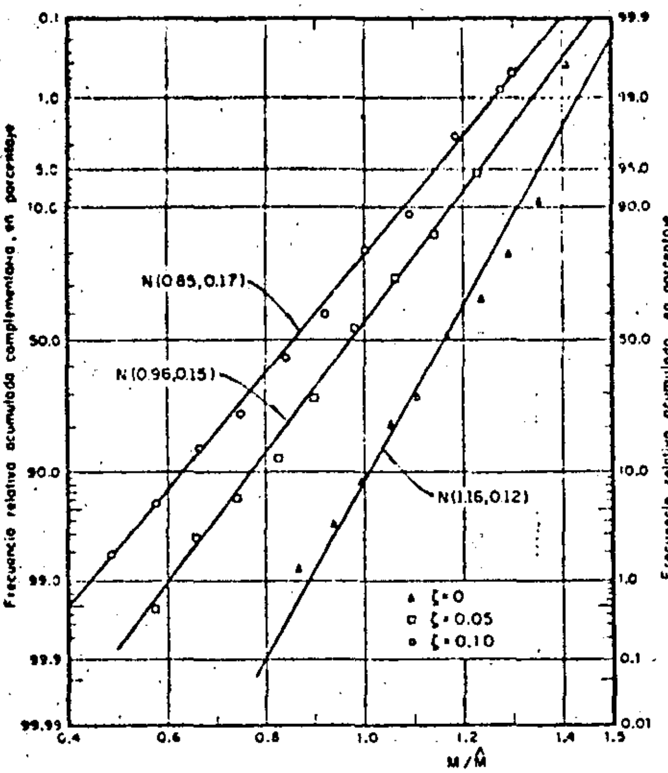


Fig 17. Resultados de los momentos torsionantes para η = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0 y 4.0 mezclados. Papel de probabilidades normal, método 1

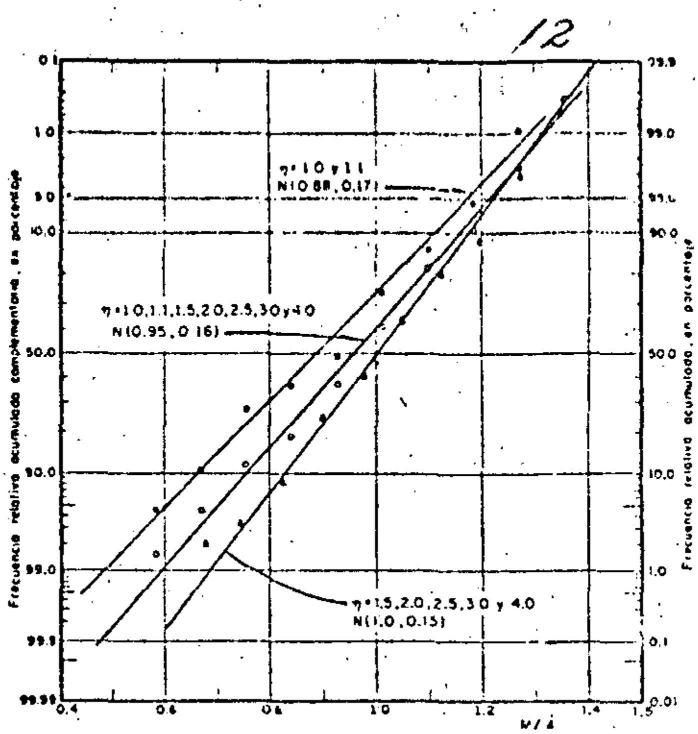


Fig 19. Resultados del método 2 para ζ = 0.10

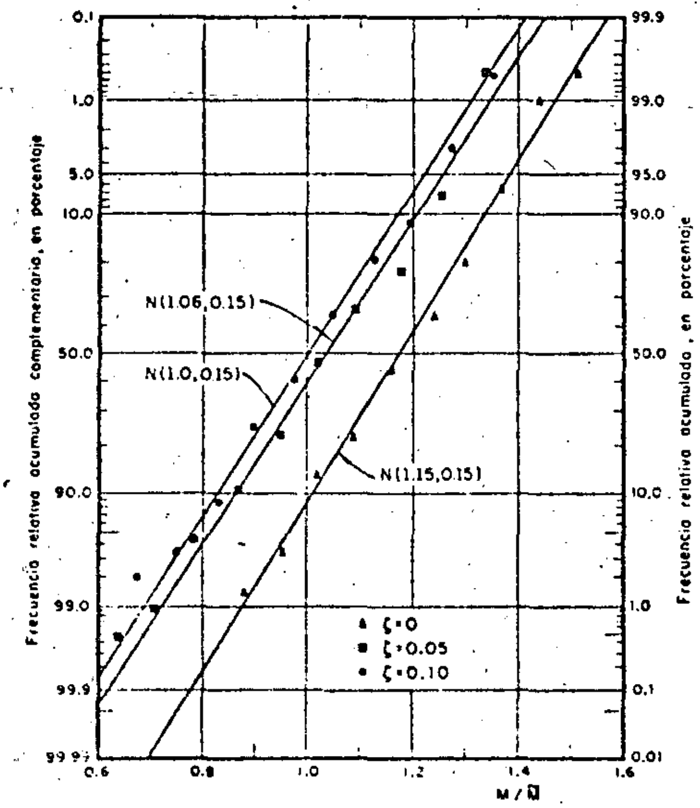


Fig 18. Resultados de los momentos torsionantes para η = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0 y 4.0 mezclados. Papel de probabilidades normal, método 2

Para el método 1, con $\eta = 1.0$, los errores máximos fueron: 41 por ciento en defecto para la estructuración del caso I y 32 por ciento en defecto en los casos II y III. Los errores medios respectivos fueron 36 y 15 por ciento, ambos en defecto. Para $\eta = 1.1$, la estructuración del caso I tuvo errores máximos de ± 5 por ciento, y las tipo II y III, 38 por ciento en defecto y 11 por ciento en exceso.

Respecto al amortiguamiento, se concluyó que las fuerzas cortantes normalizadas son prácticamente independientes de este; así, para $\eta = 1$, los promedios globales de los métodos 1 y 2 fueron 1.23 y 1.11 respectivamente, para $\zeta = 0$; para $\zeta = 0.05$ de 1.30 y 1.02, y para $\zeta = 0.10$ de 1.30 y 1.0.

Como puede apreciarse mediante los promedios citados en el párrafo anterior, los resultados que se obtienen con el método 2 son mejores que los del 1 cuando $\eta = 1.0$. Una conclusión semejante se obtuvo cuando $\eta = 0.9$ y 1.1, aunque las diferencias se redujeron en un 10 por ciento. Para valores de η fuera del intervalo $0.9 \leq \eta \leq 1.1$, los resultados de ambos métodos fueron prácticamente iguales.

13

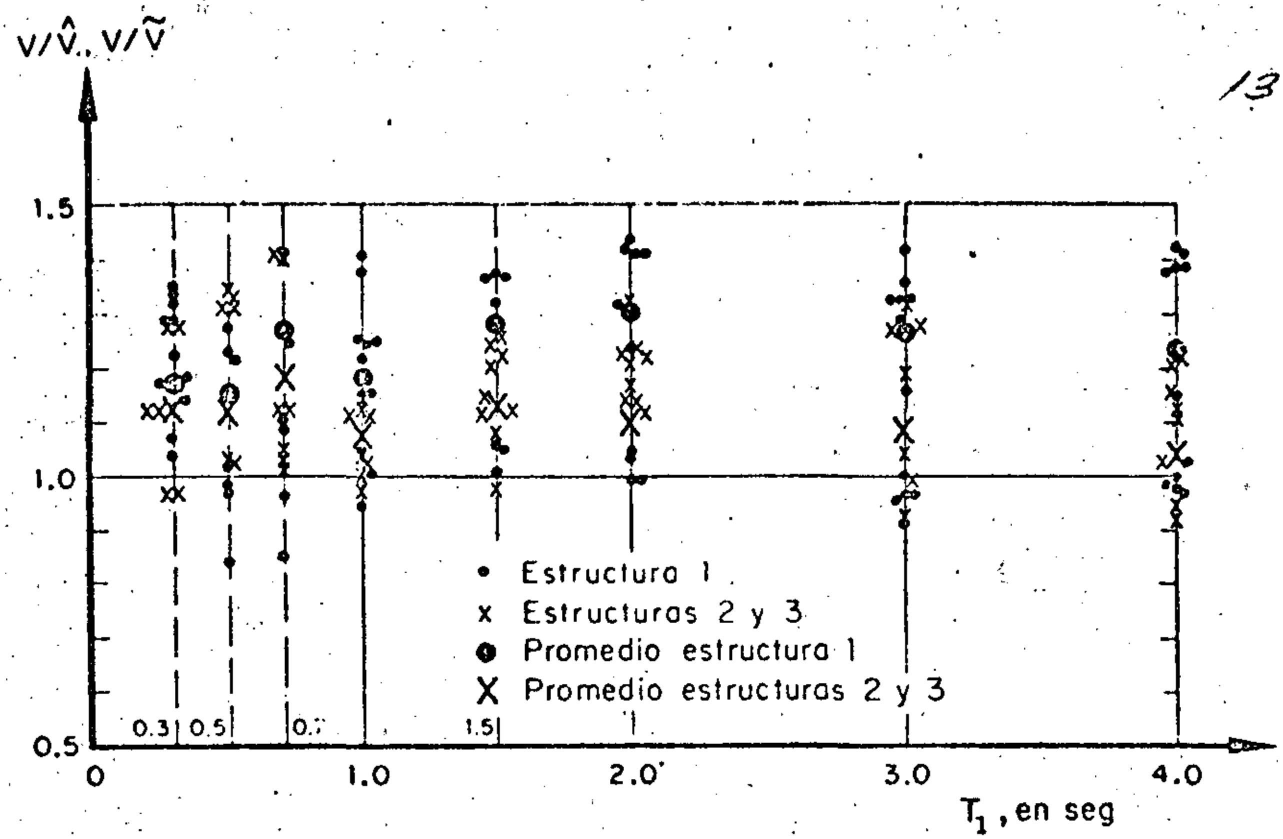


Fig 20. Fuerzas cortantes normalizadas estimadas con los métodos 1 y 2, para $\eta = 1.0$ y $\zeta = 0$

.2 Resultados del problema de cabeceo (caso 2)

Los parámetros que se escogieron para estudiar el problema de cabeceo fueron:

- m masa total
- L distancia del suelo al centro de gravedad
- T_1 periodo fundamental periodo
- ζ fracción de amortiguamiento respecto al crítico en ambos modos de vibración
- η_c cociente de la frecuencia angular entre la lineal

Los valores que se asignaron a T_1 fueron 0.3, 0.7, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0 y 4.0 seg; a ζ, 0, 0.05 y 0.10, y a η_c, 0.2, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0 y 4.0. En cuanto a m y L, únicamente se usaron 2.0 ton seg²/m y 4 m, respectivamente, ya que por los resultados (fuerzas y momentos normalizados) que se obtuvieron con estas combinaciones se juzgó innecesario el uso de otros valores; por la misma razón se emplearon únicamente tres de los sismos del problema de torsión.

En este problema, igual que en el de torsión, no hubo diferencias apreciables entre los resultados obtenidos con los tres sismos que se emplearon como excitación, por lo cual se agruparon los resultados en una sola muestra. Además, tanto las fuerzas cortantes como los momentos de cabeceo máximos normalizados fueron estadísticamente independientes del periodo fundamental, T_1, con nivel de confianza de 95 por ciento.

Otra conclusión interesante es que los resultados obtenidos con los métodos 1 y 2 (Apéndice) son prácticamente iguales, con diferencias máximas entre ellos de 5 por ciento. Esto se debe a que los valores de ϵ_{12}^2 (ec 1.3) son grandes porque las frecuencias de vibración no resultan con valores muy cercanos entre sí, aun cuando se usaron η_c muy pequeñas, de manera que el radical de la ec A.17 fuera también pequeño y, por tanto, que las diferencias entre las dos frecuencias fundamentales fueran mínimas. Esto hace que los términos que contienen a ϵ_{12}^2 en las ecs A.24 y A.25 resulten muy pequeños y que estas ecuaciones sean casi iguales a las ecs A.22 y A.23, respectivamente.

Aprovechando las conclusiones anteriores, se acumularon las muestras correspondientes a todos los periodos fundamentales, y para cada amortiguamiento se elaboraron dos gráficas: una de fuerzas cortantes y otra de momentos de cabeceo normalizados, empleando únicamente los resultados del método 2. En ellas el eje de las abscisas representó a η_c, y el de las ordenadas a los cocientes $V/\tilde{V}$ o $M/\tilde{M}$, donde V y M representan la fuerza cortante y el momento de cabeceo exactos, y $\tilde{V}$ y $\tilde{M}$ los mismos elementos mecánicos estimados con el método 2.

Debido a que las conclusiones obtenidas de esas gráficas son prácticamente las mismas, en este trabajo solo se reproduce la correspondiente a las fuerzas cortantes con $\zeta = 0.10$ (fig 21). Dichas conclusiones fueron, además de las mencionadas, las siguientes:

— Los resultados son estadísticamente independientes de η con 95 por ciento de nivel de confianza, cuando $\zeta \geq 0.05$

— La respuesta normalizada se subestima con mayor frecuencia que lo que se sobrestima, en proporción de 2 a 1

— El error máximo en defecto fue 29 por ciento, y en exceso, 22 por ciento

— El promedio global de los resultados con $\zeta \geq .05$ es 1.05, y el coeficiente de variación, 10 por ciento

— Los resultados varían ligeramente al introducir amortiguamiento a la estructura; se hace notar que para $\zeta = 0$, la respuesta normalizada promedio se subestima aproximadamente en 10 por ciento más que con $\zeta = 0.05$ y 0.10 (fig 22). En estos dos últimos casos no se aprecia diferencia significativa en los promedios de las respuestas ni en las dispersiones. Así, los errores máximos que se tuvieron para $\zeta = 0.05$ alcanzaron 31 por ciento en defecto y 19 por ciento en exceso; en cuanto a $\zeta = 0.10$ fueron, respectivamente, 27 y 21 por ciento

— Dado que existe gran incertidumbre en otros factores del diseño sísmico, tales como magnitud del sismo de diseño (o en las amplitudes del espectro de diseño), contenido de frecuencias, duración y variación temporal del mismo, se puede concluir que las estimaciones obtenidas con los dos métodos son, en promedio, satisfactorias en este tipo de estructuras.

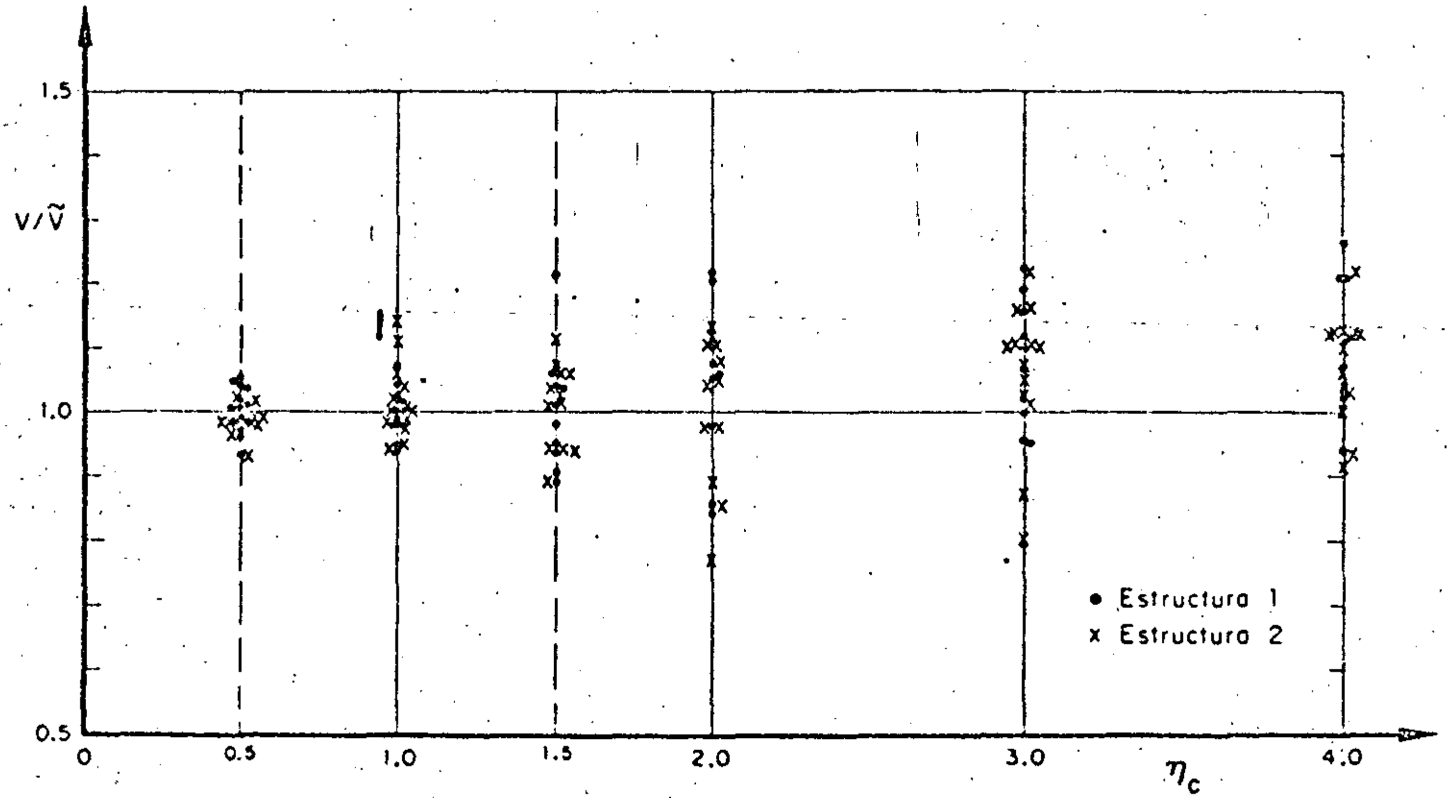


Fig 21. Fuerzas cortantes normalizadas estimadas con el método 2, para $\zeta = 0.10$. Problema de cabeceo

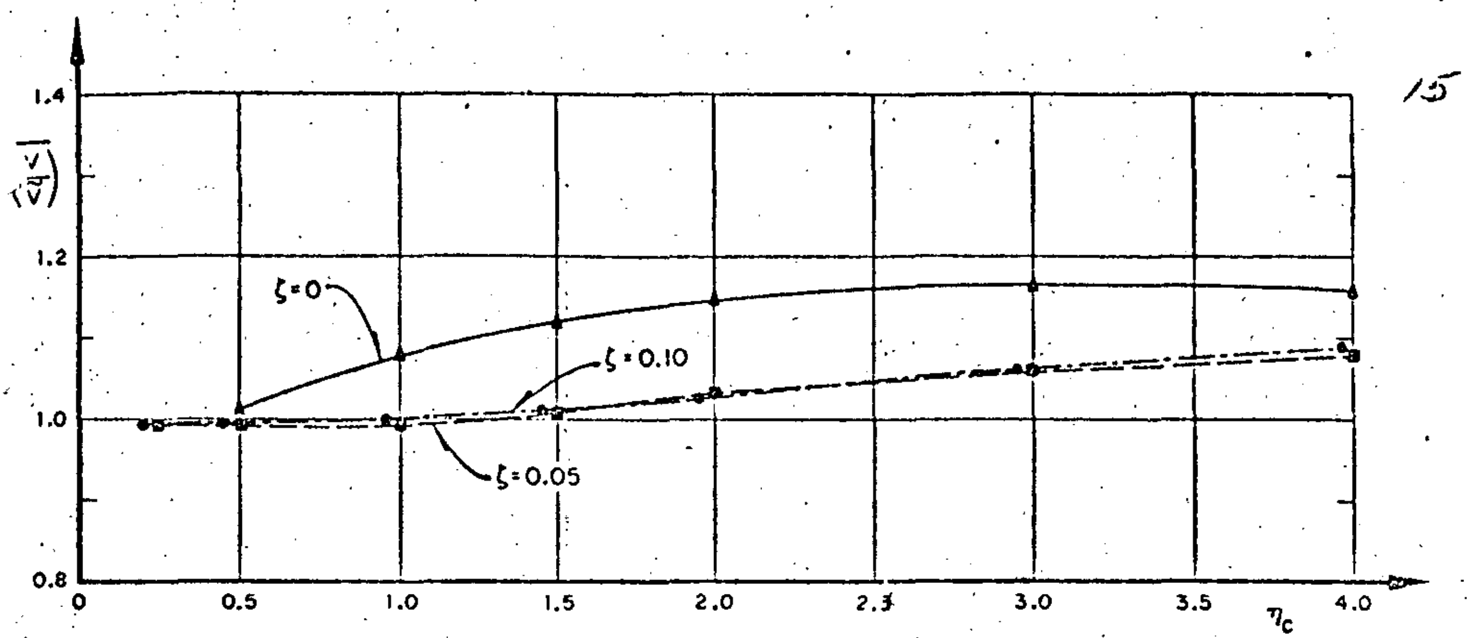


Fig 22. Variación con η_c de los promedios de las fuerzas cortantes estimadas con el método 2. Problema de cabeceo

2.3 Resultados del problema de traslación (caso 3)

Para estudiar este problema se escogieron como parámetros:

$\eta_t =$	$(k_2/m_2)/(k_1/m_1)$
T_1	periodo fundamental
ζ	fracción de amortiguamiento respecto al crítico en ambos modos de vibración
m_2/m_1	relación de masas

Los valores que se asignaron a η_t fueron 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 1.5 y 3; a T_1, 0.3, 1.0 y 4.0 seg; a ζ, 0, 0.05 y 0.10; y a m_2/m_1, 0.5 1.0 y 2.0

Los resultados se analizaron mediante gráficas con η_t o T_1 en el eje de las abscisas, y cocientes de las fuerzas cortantes exactas entre las estimadas en el eje de las ordenadas (fuerzas cortantes normalizadas). Debido a que los resultados no difirieron mucho de los de cabeceo, se empleó únicamente un sismo como excitación. Las conclusiones a que se llegó son:

— Las estimaciones que se obtienen con los métodos 1 y 2 son prácticamente iguales, debido a que los valores de las frecuencias de vibración no resultan muy cercanas entre sí en cada caso, lo cual hace que las $\epsilon_{1,2}^2$ (ec 1.3) resulten grandes y, por tanto, que el término de las ecs A.36 y A.37 que las incluye sea muy pequeño, en cuyo caso las ecs A.34 y A.35 son casi iguales a las ecs A.36 y A.37, respectivamente. Esto se observó aun cuando se estudiaron casos adicionales de m_2/m_1 y η_t, para los cuales el radical de la ec A.29 fue mínimo, con lo cual hubo las diferencias mínimas posibles entre las dos frecuencias fundamentales y, por tanto, los valores más pequeños de $\epsilon_{1,2}^2$. Esto ocurre cuando

$$\eta_t = \frac{1 + m_2/m_1}{(1 + m_2/m_1)^2}, \text{ si } m_2/m_1 < 1$$

Dichos casos adicionales fueron: $m_2/m_1 = 0.2$ con $\eta_t = 0.555$; $m_2/m_1 = 0.5$ con $\eta_t = 0.222$, y $m_2/m_1 = 0.8$ con $\eta_t = 0.062$. En estos, la diferencia máxima que se obtuvo entre los resultados de los dos métodos fue de 13 por ciento, siendo mejores los del método 2

— Las estimaciones normalizadas son estadísticamente independientes del periodo fundamental, T_1, con nivel de confianza de 95 por ciento

— En la fig 23 se observa que las estimaciones de V_1 y V_2 tienen, en promedio, errores muy parecidos, por lo que en las conclusiones no es necesario hacer distinciones entre ellas

— La respuesta se sobrestima solamente en 30 por ciento de los casos. El error máximo en exceso que se observó fue 46 por ciento, y en defecto 41 por ciento. El coeficiente de variación para $\zeta = 0.10$ alcanzó 12 por ciento

— En la fig 24 se observa que los promedios de las estimaciones con $\zeta = 0.05$ y 0.10 son mayores que las que corresponden a $\zeta = 0$, lo cual hace pensar que las conclusiones obtenidas en la ref 5 respecto a $\zeta = 0$ no pueden generalizarse para $\zeta > 0$

12

– Los promedios globales de las fuerzas cortantes normalizadas fueron, para $\zeta = 0$, 1.15; para $\zeta = 0.05$, 1.04, y en cuanto a $\zeta = 0.10$, 1.04. Además, se observa que respecto a $\zeta = 0.05$ y 0.10, los resultados son muy similares, es decir, son independientes de ζ si $\zeta \geq 0.05$

– Las medias de los resultados normalizadas son estadísticamente independientes de la relación de masas, m_2/m_1, con un nivel de confianza de 95 por ciento, pero los casos especiales de m_2/m_1 y η_1 indicados anteriormente tuvieron mayor dispersión

– Para $\zeta = 0.05$ y 0.10, las estimaciones normali zadas son estadísticamente independientes de η_1, con un nivel de confianza de 95 por ciento, como pued apreciarse en la fig 24 en la que aparecen únicamer los resultados del método 2. Para $\zeta = 0$ esta hipót no se aceptó

– Por la misma razón indicada en el último párrafo de conclusiones del problema de cabeceo, las estimaciones obtenidas con ambos métodos son en promedio satisfactorias en este tipo de estructuras

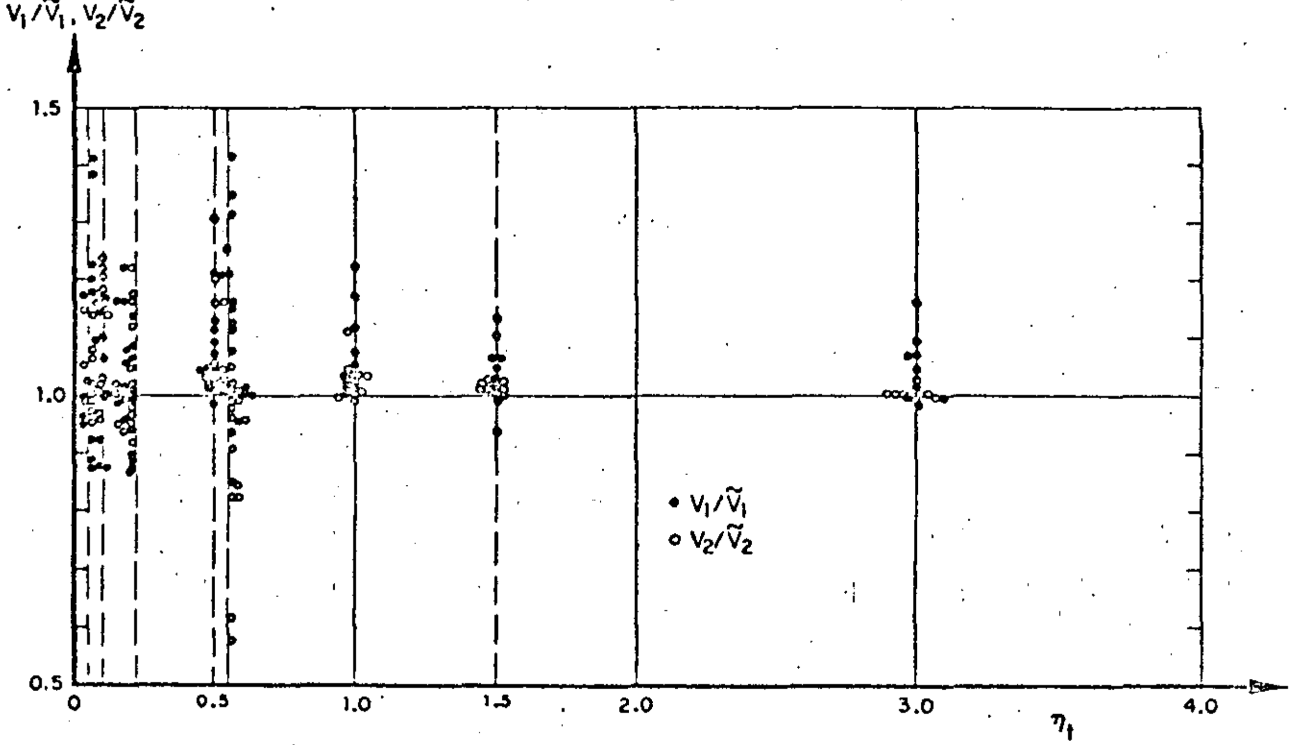


Fig 23. Fuerzas cortantes estimadas con el método 2, para $\zeta = 0.10$. Problema de traslación

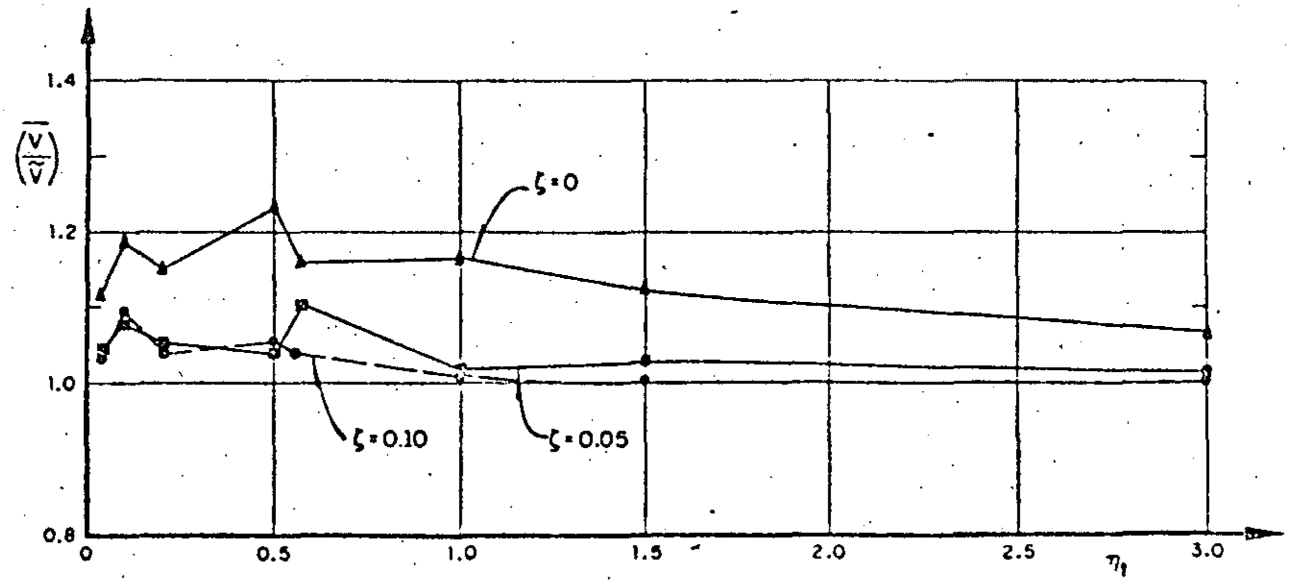


Fig 24. Variación con η_1 de los promedios de las fuerzas cortantes estimadas con el método 2. Problema de traslación

3. CONCLUSIONES

El resumen de las conclusiones obtenidas de los tres problemas estudiados es:

En cabeceo y traslación:

– En promedio las estimaciones normalizadas de las respuestas máximas logradas con los métodos 1 y 2 son satisfactorias y prácticamente iguales; esto último debido a que $\epsilon_{12}^2 >> 0$

– La respuesta se subestimó con mayor frecuencia que lo que se sobrestimó, reduciéndose el error al considerar amortiguamiento en la estructura. Además, los valores exactos divididos entre los estimados fueron estadísticamente independientes de T_1 y η_c o η_t, así como del tipo de respuesta que se trate (momento de cabeceo o fuerza cortante)

En torsión:

– Las conclusiones sí difieren al tomar en cuenta el momento torsionante o la fuerza cortante. Además, debido a que en algunos casos ϵ_{12}^2 es pequeña, los dos métodos dan resultados diferentes

– Las estimaciones del momento torsionante al considerar amortiguamiento estructural nulo dependen en gran medida de la relación de frecuencias, η. Además, los difieren al usar el método 1 o el 2, siendo más aproximados los del 1 para valores de η comprendidos en el intervalo o $0.5 \leqslant \eta \leqslant 1.5$ o muy parecidos fuera de él

– Para los tres amortiguamientos estudiados, los resultados del método 2 son estadísticamente independientes de η, no así los del 1; son mejores los del método 2 cuando $\zeta = 0.05$ y 0.10

– Cuando se tenga $0.5 \leqslant \eta \leqslant 2$, se recomienda usar el método 2; en los demás casos es indistinto el empleo de cualquiera de los dos métodos

– La relación de excentricidad dinámica a excentricidad estática se subestima en las disposiciones del Reglamento de Construcciones del Distrito Federal, siendo esto más cuando el valor de η queda comprendido entre 0.8 y 2. En particular, para $0.9 \leqslant \eta \leqslant 1.1$ esta relación vale, en promedio, 4.6 para $\zeta = 0.05$ y 2.7 para $\zeta = 0.10$. De lo anterior se concluye que es necesario realizar estudios exhaustivos sobre este aspecto, considerando vibración torsional en estructuras de varios pisos y con comportamiento inelástico

– Las distribuciones de probabilidades del cociente del valor exacto sobre el estimado son normales con desviación estándar cercana a 0.16 y media comprendida en el intervalo 1 ± 0.12 (fig 19)

APENDICE

A.1 ANALISIS DINAMICO DE UNA ESTRUCTURA SUJETA A TORSION

La fig A.1 representa un edificio de un piso, de forma arbitraria, con la línea del centro de torsión (CT) al centro de gravedad (CG) perpendicular a la dirección del sismo considerado.

En dicha figura se tiene que

m masa total del sistema

J momento polar de masa respecto al centro de gravedad

L_t rigidez torsional respecto al centro de torsión

K rigidez lineal en la dirección del movimiento

e_s excentricidad estática

b dimensión de la estructura en dirección Y

$c = e_s/b$

Considerando que la rigidez torsional respecto al centro de gravedad es

$$L = L_t + K e_s^2$$

y aplicando el principio de D'Alambert para obtener las ecuaciones de equilibrio del sistema en vibraciones libres, se llega al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden (ref 8)

$$\begin{aligned} m\ddot{z} + K(z - e_s \Phi) &= 0 \\ J\ddot{\Phi} + L\Phi - K e_s z &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(A.1)}$$

Sustituyendo en la ec A.1 a $\ddot{z} = -\omega^2 z$ y $\ddot{\Phi} = -\omega^2 \Phi$ (por ser vibraciones libres), donde ω es la frecuencia circular natural del sistema, y resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas resultante, se obtiene la ecuación característica:

$$\lambda^4 - \lambda^2 (1 + \eta) + \eta - c^2/j^2 = \qquad \text{(A.2)}$$

donde $\lambda^2 = \omega^2/(k/m)$, $j^2 = J/(mb^2)$ y $\eta = (L/J)/(K/m)$. Las raíces de la ec A.2 son

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{\eta + 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\eta - 1)^2}{4} + \frac{c^2}{j^2}} \qquad \text{(A.3)}$$

mientras que los vectores de las configuraciones modales son

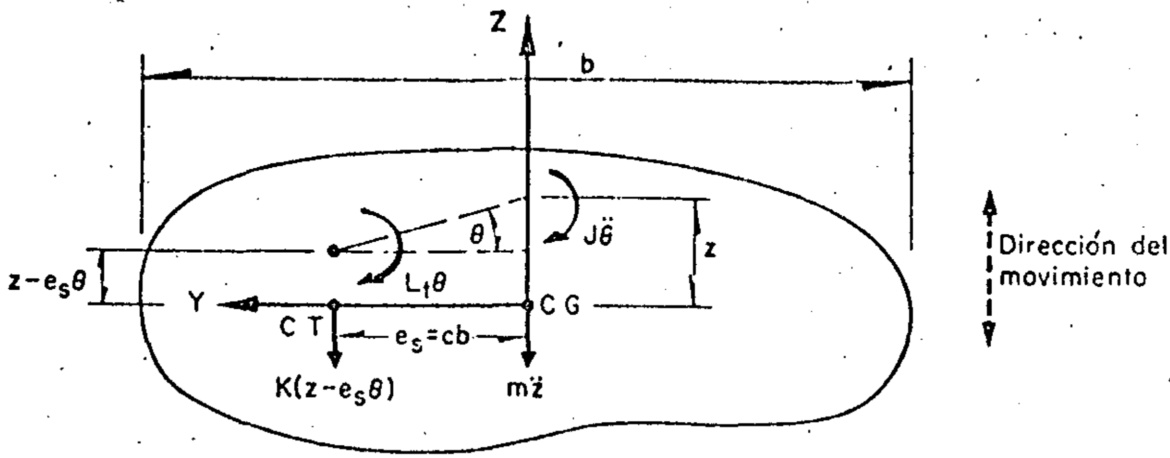


Fig A.1. Diagrama de cuerpo libre de una estructura sujeta a torsión y traslación (vista superior)

$$\begin{bmatrix} z_n \\ \\ \Phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \dfrac{1-\lambda_n^2}{cb} \end{bmatrix} ; n = 1, 2 \qquad \text{(A.4)}$$

En términos de las raíces $\lambda^2_{1,2}$ de la ec A.3, se puede demostrar (ref 8) que los coeficientes de participación de los modos 1 y 2 (las proporciones en que contribuyen los modos a la respuesta total del sistema) se encuentran dados por

$$C_n = \frac{c^2}{c^2 + (1-\lambda_n^2)^2\, j^2} ; n = 1, 2 \qquad \text{(A.5)}$$

Ahora, si se suponen conocidas las aceleraciones espectrales de cada modo, a_n, la fuerza cortante máxima vale

$$V_n = m\, a_n\, C_n \; ; n = 1, 2 \qquad \text{(A.6)}$$

y el momento torsionante máximo respecto al centro de torsión es

$$M_n \; \frac{(1-\lambda_n^2)\, J\, V_n}{cbm} ; n = 1, 2 \qquad \text{(A.7)}$$

Una vez conocidos los valores de V_1, V_2, M_1 y M_2, la aplicación de la ec 1.2 conduce a la estimación de la fuerza cortante y del momento torsionante máximos mediante el método 2; ellos son, respectivamente

$$\tilde{V} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2\,\frac{V_1\; V_2}{1+\epsilon_{12}^2}} \qquad \text{(A.8)}$$

$$\tilde{M} = \sqrt{M_1^2 + M_1^2 - 2\,\frac{M_1\; M_2}{1+\epsilon_{12}^2}} \qquad \text{(A.9)}$$

donde ϵ_{ij}^2 se obtiene aplicando la ec 1.3. El signo negativo asociado al doble producto que aparece en la ec A.9 se debe a que las funciones de transferencia de los momentos en el primero y segundo modos tienen signo contrario, ya que el factor $(1 - \lambda_n^2)$ que aparece en la ec A.7 es positivo para el primer modo (n = 1) y negativo para el segundo (n = 2), lo cual se demuestra como sigue:

De la ec A.3

$$\lambda_1^2 = \frac{\eta+1}{2} - \sqrt{\frac{(\eta-1)^2}{4} + \frac{c^2}{j^2}}$$

por lo que

$$\lambda_1^2 \leqslant \frac{\eta+1}{2} - \frac{\eta-1}{2} = 1$$

Análogamente

$$\lambda_2^2 = \frac{\eta+1}{2} + \sqrt{\frac{(\eta-1)^2}{4} + \frac{c^2}{j^2}}$$

de ahí que, si $\eta \geqslant 1$

$$\lambda_2^2 > \frac{\eta + 1}{2} + \frac{\eta - 1}{2} = \eta$$

o, si $\eta < 1$

$$\lambda_2^2 > \frac{\eta + 1}{2} + \frac{1 - \eta}{2} = 1$$

En consecuencia, $(1 - \lambda_1^2) \geq 0$ y $(1 - \lambda_2^2) \leq 0$

Además, según el Reglamento del Distrito Federal (método 1) las respuestas dinámicas máximas del mismo sistema estarían dadas por (ec 1.1)

$$\hat{V} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \qquad \text{(A.10)}$$

$$\hat{M} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \qquad \text{(A.11)}$$

Finalmente, por el método exacto, las respuestas máximas totales, V y M, se obtienen localizando los máximos en el tiempo, t, de las sumas de las respuestas (cortante o momento, según sea el caso) en los modos 1 y 2, es decir,

$$V = \text{Máx}\left| \left\{ m\, C_1\, a_1\, (t) + m\, C_2\, a_2(t) \right\} \right| =$$

$$= \text{Máx}\left| \left\{ V_1(t) + V_2(t) \right\} \right| \qquad \text{(A.12)}$$

$$M = \text{Máx}\left| \left\{ \Gamma_1\, V_1(t) + \Gamma_2\, V_2(t) \right\} \right| \qquad \text{(A.13)}$$

donde

$$\Gamma_n = \frac{(1 - \lambda_n^2)\, J}{cbm}\ ;\ n = 1, 2 \qquad \text{(A.14)}$$

A.2 ANALISIS DINAMICO DE UNA ESTRUCTURA SUJETA A CABECEO

Es frecuente que en la práctica se presenten estructuras constituidas por una hilera de columnas o una sola columna que sostiene una losa o un cascarón (péndulos invertidos), tal como la que aparece en la fig A.2. La respuesta dinámica de una estructura de este tipo se debe obtener (ref 9) considerando el efecto que la inercia rotacional de la cubierta induce en el movimiento total del sistema.

En la fig A.2 se empleó la notación:

- W peso de la cubierta más la parte tributaria de la columna
- m W/g
- g aceleración de la gravedad
- J_c momento de inercia de la masa de la cubierta respecto al eje Z
- E módulo de elasticidad del material de la columna
- I_c momento de inercia de la sección transversal de la columna respecto al eje Z
- CG centro de gravedad de la cubierta
- L distancia del suelo al centro de gravedad

El diagrama de cuerpo libre de la estructura anterior aparece en la fig A.3, en la cual se tiene que (ref 9)

- K rigidez por traslación $= 3EI_c/L^3$
- K_r rigidez por rotación $= EI_c/L$
- x desplazamiento del centro de gravedad de la cubierta
- Φ rotación del centro de gravedad de la cubierta

$\alpha = (x - k_r\, \gamma\, \phi)/k$

$\beta = (\phi - k\, \gamma\, x)/k$

$\gamma = L^2/2\, EI_c$

$k = 1 - K\, L^3/4EI_c = 0.25$

Las ecuaciones diferenciales de movimiento correspondientes al diagrama de cuerpo libre de la estructura son

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} + (Kx - K\, K_r\, \gamma\, \Phi)/k &= 0 \\ J_c\, \ddot{\Phi} + (K_r\, \Phi - K\, K_r\, \gamma x)/k &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(A.15)}$$

Considerando que se satisfacen las relaciones $\ddot{x} = -\omega^2 x$ y $\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta$, donde ω es la frecuencia circular natural de vibración de la estructura, y resolviendo el sistema de ecuaciones A.15, se obtiene la ecuación característica

$$\omega^4 - \frac{K\, J_c + m\, K_r}{m\, J_c\, k}\, \omega^2 + \frac{K\, K_r}{4m\, J_c\, k^2} = 0 \qquad \text{(A.16)}$$

que es una ecuación de segundo grado en ω^2. Si se efectúan algunas transformaciones algebraicas y se considera que

$K/m = p^2$ cuadrado de la frecuencia circular natural por traslación

$K_t/J_c = \Omega^2$ cuadrado de la frecuencia circular natural por rotación

$\lambda = \omega^2/p^2$

$\eta_c = \Omega^2/p^2$

se llega a

$$\gamma_{1,2} = 2\,(1 + \eta_c \pm \sqrt{(1+\eta_c)^2 - \eta_c}) \qquad \text{(A.17)}$$

Por otra parte, los vectores de las configuraciones modales son

$$\begin{bmatrix} x_n \\ \\ \\ \Phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \\ \dfrac{4-\lambda_n}{2L} \end{bmatrix} ; n = 1, 2 \qquad \text{(A.18)}$$

Se puede demostrar (ref 9) que los coeficientes de participación correspondientes a los modos 1 y 2 se encuentran dados por la expresión

$$C_n = \frac{x_n\, m}{x_n^2\, m + \Phi_n^2\, J_c}; n = 1, 2 \qquad \text{(A.19)}$$

Partiendo del hecho de que se conocen las aceleraciones espectrales de cada modo, a_n, la fuerza cortante máxima y el momento máximo de cabeceo correspondientes valen

$$V_n = m\, a_n\, C_n\, x_n = m\, a_n\, C_n ; n = 1, 2 \qquad \text{(A.20)}$$

$$M_n = J\, a_n\, C_n\, \Phi_n = J\, a_n\, C_n\, \frac{4-\lambda_n}{2L} =$$

$$= \frac{(4-\lambda_n)\, J_c}{2\, Lm}\, V_n \qquad \text{(A.21)}$$

Las respuestas dinámicas de la estructura de acuerdo con los criterios del Reglamento de Construcciones del D. F. (método 1) y de Rosenblueth (método 2), se obtienen haciendo uso de las ecuaciones

$$\hat{V} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \qquad \text{(A.22)}$$

$$\hat{M} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \qquad \text{(A.23)}$$

20

$$\tilde{V} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2\,\frac{V_1\ V_2}{1+\epsilon_{12}^2}} \qquad \text{(A.24)}$$

$$\tilde{M} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 - 2\,\frac{M_1\ M_2}{1+\epsilon_{12}^2}} \qquad \text{(A.25)}$$

donde ϵ_{12}^2 se calcula mediante la ec 1.3. El signo menos aparece en la ec A.25 debido a que la función de transferencia del segundo modo es de signo opuesto a la del primero, ya que se puede demostrar, a partir de la ec A.17, que $\lambda_1 \leqslant 4$ y $\lambda_2 \geqslant 4$, por lo que el factor $4 - \lambda_n$ que aparece en la ec A.21 tiene signo positivo en el modo 1, y negativo en el 2.

La respuesta dinámica exacta se obtiene utilizando las expresiones

$$V = \text{Máx}\ \left| \left\{ C_1\ m\, x_1\ a_1(t) + C_2\ m\, x_2\ a_2(t) \right\} \right| \qquad \text{(A.26)}$$

$$M = \text{Máx}\ \left| \left\{ C_1\ J_c\, \Phi_1\ a_1(t) + C_2\ J_c\, \Phi_2\, a_2(t) \right\} \right| \qquad \text{(A.27)}$$

A.3 ANALISIS DINAMICO DE UNA ESTRUCTURA SUJETA A TRASLACION

Consideremos ahora el caso de una estructura de cortante de dos pisos, en la cual no existe rotación en planos horizontales en los niveles de los pisos (fig A.4).

La ecuación matricial de equilibrio de este sistema es (ref 10)

$$\begin{bmatrix} m_1\,\omega^2 - K_1 - K_2 & K_2 \\ \\ K_2 & m_2\,\omega^2 - K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \\ z_2 \end{bmatrix} = [0] \qquad \text{(A.28)}$$

donde m_1 y m_2 son las masas concentradas en los niveles 1 y 2, y K_1 y K_2 son las rigideces de los entrepisos 1 y 2, respectivamente.

Partiendo de este sistema de ecuaciones y haciendo $\eta_t = (K_2/m_2)/(K_1/m_1)$ y $\lambda = \omega^2/(K_1/m_1)$, se obtienen las raíces

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\eta_t + (m_2/m_1)\,\eta_t + 1\right] \pm$$

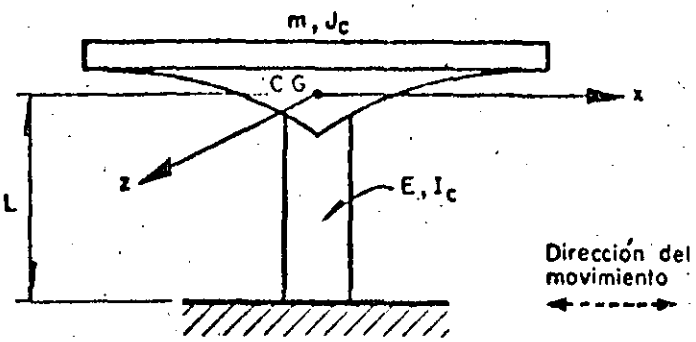


Fig A.2. Estructura en forma de péndulo invertido (vista lateral)

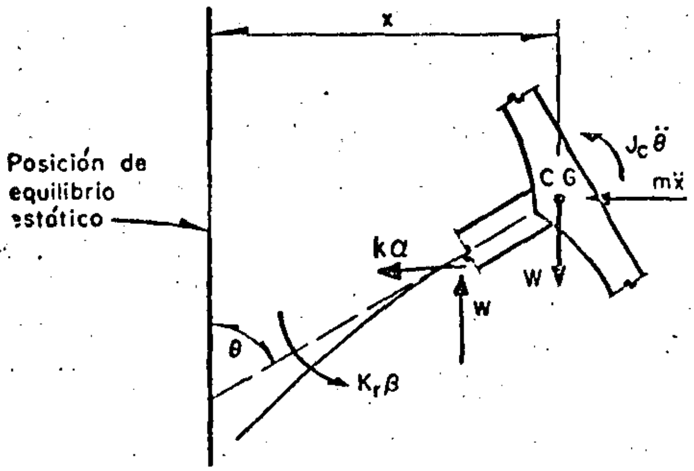


Fig A.3. Diagrama de cuerpo libre de la estructura de la fig A.2

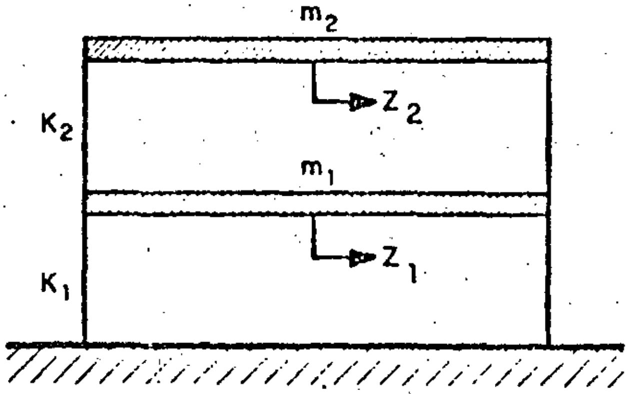


Fig A.4. Estructura de dos pisos sujeta a traslación (vista lateral)

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left[\eta_1+(m_2/m_1)\,\eta_1+1\right]^2-4\,\eta_1} \qquad (A.29)$$

Además, los vectores de configuraciones modales resultan ser

$$\begin{bmatrix} z_{1,n} \\ \\ z_{2,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 1+\dfrac{(K_1/m_1)-\omega_n^2}{\eta_1\,(K_1/m_1)(m_2/m_1)} \end{bmatrix};\ n=1,2 \qquad (A.30)$$

Además, se puede demostrar (ref 10) que los coeficientes de participación de los modos 1 y 2 se encuentran dados por

$$C_n=\frac{z_{1,n}+(m_2/m_1)\,z_{2,n}}{z_{1,n}^2+(m_2/m_1)\,z_{2,n}^2};\ n=1,2 \qquad (A.31)$$

Si se conocen las aceleraciones espectrales de cada modo, a_n, la fuerza cortante máxima correspondiente al entrepiso 1 en cada modo vale

$$V_{1,n}=C_n\,a_n\,(m_1\,z_{1,n}+m_2\,z_{2,n})\ ;\ n=1,2 \qquad (A.32)$$

en tanto que la fuerza cortante máxima correspondiente al entrepiso 2 es

$$V_{2,n}=C_n\,a_n\,m_2\,z_{2,n}\ ;\ n=1,2 \qquad (A.33)$$

Ya conocidos los valores de $V_{1,n}$ y $V_{2,n}$, las respuestas máximas dinámicas totales de la estructura estimadas con los métodos 1 y 2 se calculan haciendo uso de las fórmulas

$$\hat{V}_1=\sqrt{V_{1,1}^2+V_{1,2}^2} \qquad (A.34)$$

$$\hat{V}_2=\sqrt{V_{2,1}^2+V_{2,2}^2} \qquad (A.35)$$

$$\tilde{V}_1=\sqrt{V_{1,1}^2+V_{1,2}^2+2\,\frac{V_{1,1}\,V_{1,2}}{1+\epsilon_{12}^2}} \qquad (A.36)$$

$$\tilde{V}_2=\sqrt{V_{2,1}^2+V_{2,2}^2-2\,\frac{V_{2,1}\,V_{2,2}}{1+\epsilon_{12}^2}} \qquad (A.37)$$

donde ϵ_{12}^2 se calcula mediante la ec 1.3

22

Finalmente, las respuestas máximas dinámicas de la estructura en cuestión se pueden obtener mediante el método exacto haciendo uso de las ecuaciones

$$V_1 = \text{Máx} \left| \left\{ \sum_{n=1}^{2} C_n a_n(t) \left[m_1 z_{1,n} + m_2 z_{2,n} \right] \right\} \right| \tag{A.38}$$

$$V_2 = \text{Máx} \left| \sum_{n=1}^{2} C_n a_n(t)\, m_2 z_{2,n} \right| \tag{A.39}$$

REFERENCIAS

1. E. Rosenblueth, "A Basis for Aseismic Design", Tesis doctoral, *Universidad de Illinois,* Urbana (1951)

2. E. Rosenblueth, "Sobre la respuesta sísmica de estructuras de comportamiento lineal", *Segundo Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica,* Veracruz (1968)

3. "Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", *Diario Oficial,* México, D. F. (feb 1966)

4. "Los Angeles City Building Code", Los Angeles, Cal. (1966)

5. R. Husid, "Estimación de la respuesta máxima de tranques de tierra sometidos a la acción de terremotos", *Tercer Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica,* Acapulco (1971)

6. O. A. Rascón, "Modelo estocástico para simular registros de temblores en terreno duro", Tesis doctoral, *Facultad de Ingeniería, UNAM,* México, D. F. (1968)

7. M. Chávez, O. A. Rascón y L. Alonso, "Un nuevo método para corrección de la línea base de registros de temblores", *Tercer Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica,* Acapulco (1971)

8. J. Elorduy, y E. Rosenblueth, "Torsiones sísmicas en edificios de un piso", Informe 164, *Instituto de Ingeniería, UNAM* México, D. F. (1968)

9. O. A. Rascón, "Efectos sísmicos en estructuras en forma de péndulo invertido", *Revista de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica,* Vol 3, No 1, México, D. F. (1965), pp 8-16

10. E. Rosenblueth, y L. Esteva, "Folleto complementario: diseño sísmico de edificios, proyecto de Reglamento de Construcciones en el Distrito Federal", *Ediciones Ingeniería,* México, D. F. (1962)

11. T. Naylor et al, "Técnicas de simulación en computadoras", *Limusa-Wiley,* México, D. F. (1971)

12. J. Hammersley y D. Handscomb, "Monte-Carlo Methods", *Methuen,* Londres (1964)

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

XI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

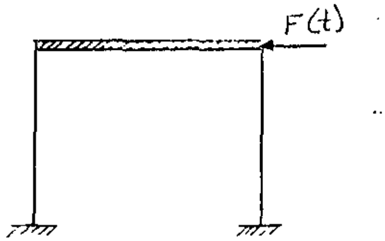
EJEMPLO DEL METODO BETA DE NEWMARK PARA UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD

M. EN C. ROBERTO STARK

JULIO, 1985.

EJEMPLO DEL METODO BETA DE NEWMARK PARA UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD
POR: Roberto Stark

El Sistema esta descrito en la figura 1, se encuentra sometido a una carga representada en la figura 2 y la regla de histeresis se obseren la figura 3. El problema se resolvera para un ciclo.



W=45.4 Ton
$\mathcal{L}$=0

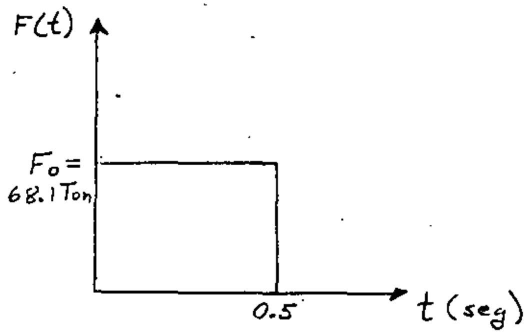


Figura 1

Figura 2

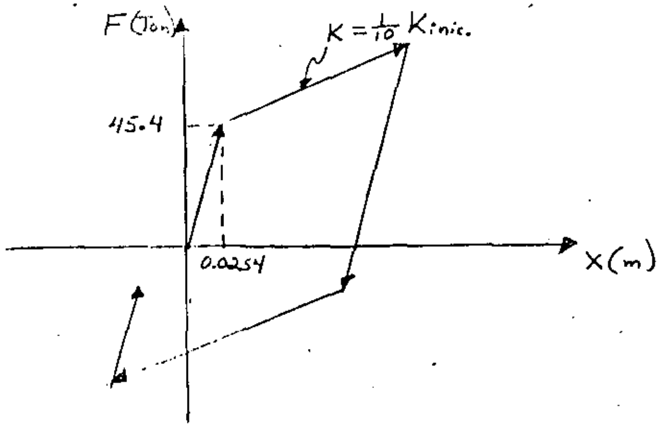


Figura 3

K=45.4/.0254=1787.4 ton/m.

Masa=45.4/9.81=4.63 Ton masa

Wn= $\sqrt{1787.4/4.63}$ =19.65 rad/seg

T=2/Wn=0.32 seg

Δt=h=.1 x T=0.03 seg

β=1/6

La ecuacion de movimiento es: $m\ddot{x}+Q(x)=F(t)$

Condiciones iniciales:

Para t=0 $x=0$, $\dot x=0$ y $\ddot x=0$

Las ecuaciones del metodo son:

$$X_{i+1}=X_i+\dot X_i h+(1/2-\beta)\ddot X_i h^2+\beta \ddot X_{i+1} h^2$$

$$\dot X_{i+1}=\dot X_i+1/2(\ddot X_i+\ddot X_{i+1})h$$

Para t=0.03 seg

$\ddot X_1=-386.4X+14.71$

X_1 (m)	$\dot X_1$ (m/seg)	$\ddot X_1$ (m/seg²)
0.0000	0.0000	14.71
0.0022	0.2207	13.86
0.0021	0.2088	13.909

Para t=0.06 seg

$X_2=0.0136$ m. $\dot X_2=0.5575$ m/seg. $\dot X_2=9.340$ m/seg

Para t=0.09 seg

$X_3=0.0337$ m. $\dot X_3=0.7229$ m/seg. $\ddot X_3=1.684$ m/seg

Vemos que $X_3=0.0337 > 0.0254$ por lo tanto es necesario cambiar la expresión de Q(x) y como consecuencia la expresión para la aceleración

Para t=0.09 seg

Q(x)=178.7 X +40.86

$X_3=-38.6X_3-8.83+14.71$

$X_3=0.0341$ m. $\dot X_3=0.7661$ m/seg. $\ddot X_3=4.570$ m/seg

t (seg)	X (m)	$\dot X$ (m/seg)	$\ddot X$ (m/seg)
0.12	0.0590	0.8888	3.607
0.15	0.0871	0.9807	2.522
0.18	0.1175	1.0388	1.347
0.21	0.1491	1.0609	0.126
0.24	0.1808	1.0463	-1.099
0.27	0.2116	0.9955	-2.286
0.30	0.2402	0.9103	-3.393
0.33	0.2658	0.7936	-4.384
0.36	0.2875	0.6496	-5.222
0.39	0.3046	0.4830	-5.881
0.42	0.3164	0.2998	-6.335
0.45	0.3225	0.1062	-6.572
0.48	0.3227	-0.0911	-6.580

Como podemos observar el signo de la velocidad cambio, esto implica la necesidad de cambiar la ecuación de $Q(x)$.

Para t=0.48 seg
$Q(x)=-478.3+1787.4\ X$
$\ddot{X}_{16}=-386.4\ X\ +103.3+14.71$

$X_{16}=0.3227$ m. $\dot{X}_{16}=-0.0922$ m/seg $\ddot{X}_{16}=-6.654$ m/seg

Para t=0.51 seg
Este tiempo es mayor que t=0.5 y por lo tanto la carga deja de actuar, por lo tanto la expresión de la aceleración es:
$\ddot{X}_{17}=-386.4\ X\ +103.3$
$X_{17}=0.3152$ m. $\dot{X}_{17}=-0.4691$ m/seg. $\ddot{X}_{17}=-18.47$ m/seg

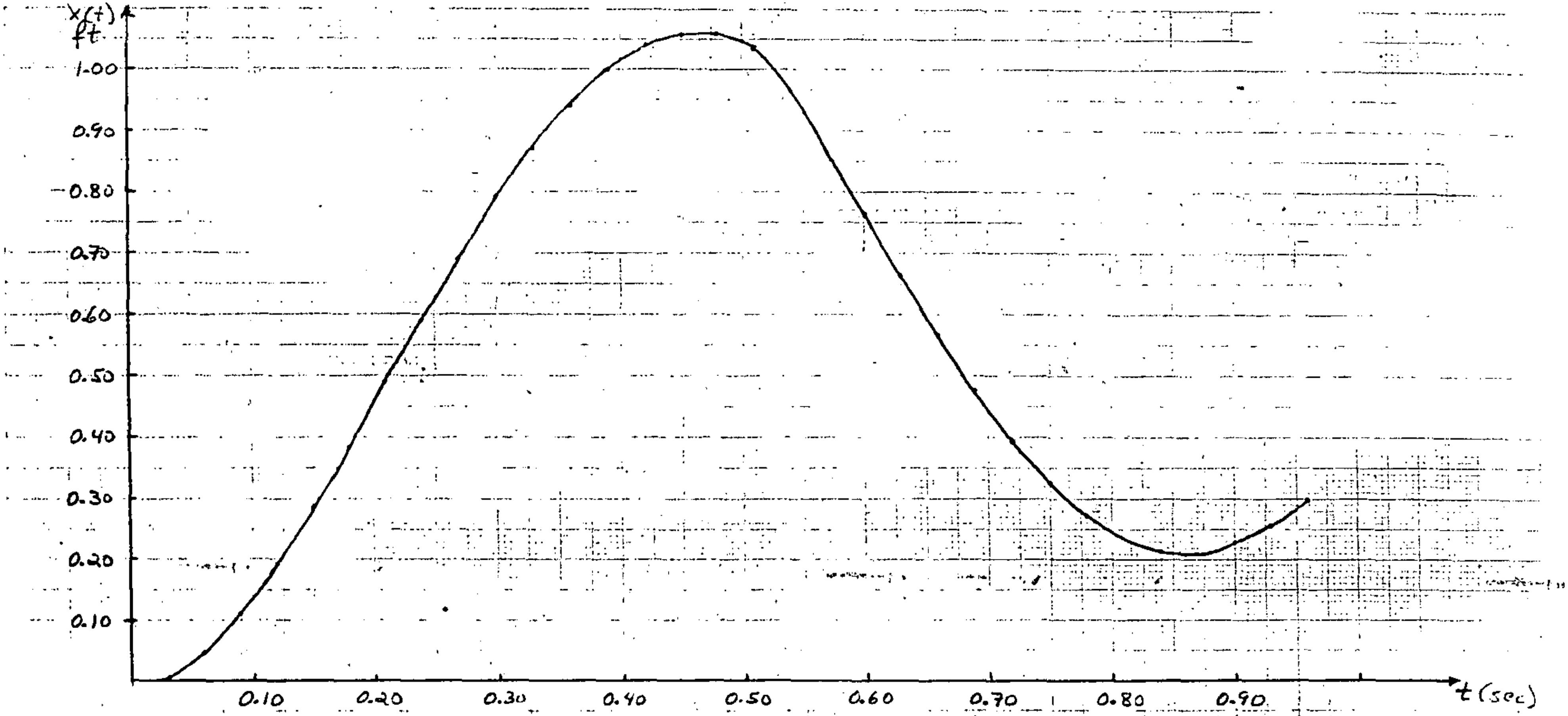
Para t=0.54 seg
$X_{18}=0.294$ m. $\dot{X}_{18}=-0.9005$ m/seg. $\ddot{X}_{18}=-10.293$ m/seg

Para t=0.57 seg
$X_{19}=0.2641$ m. $\dot{X}_{19}=-1.0358$ m/seg. $\ddot{X}_{19}=1.2719$ m/seg

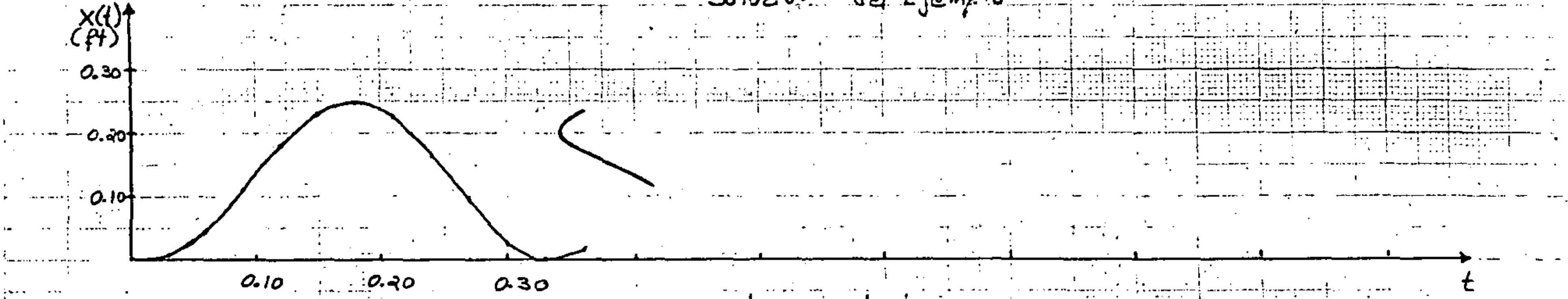
Como $X_{19} < 0.2719$ m. la regla de $Q(x)$ cambia de pendiente, por lo tanto la expresión de $Q(x)$ nos queda:
$Q(x)=178.7\ X\ -40.86$
$\ddot{X}_{20}=-38.60\ X\ +8.825$

t (seg)	X (m)	$\dot{X}$ (m/seg)	$\ddot{X}$ (m/seg)
0.60	0.2334	-1.0195	-0.1837
0.63	0.2029	-1.0073	0.994
0.66	0.1732	-0.9603	2.1388
0.69	0.1456	-0.8801	3.208
0.72	0.1208	-0.7694	4.167
0.75	0.0997	-0.6322	4.981
0.78	0.0831	-0.4731	5.623
0.81	0.0715	-0.2977	6.070
0.84	0.0653	-0.1120	6.308
0.87	0.0648	0.0775	6.328

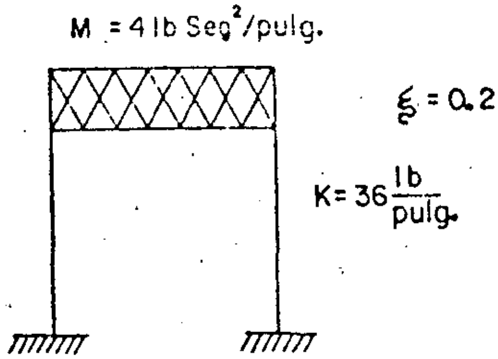
Como podemos observar el signo de la velocidad volvió a cambiar, por lo tanto debemos de cambiar la expresión de $Q(x)$ y de la aceleración.

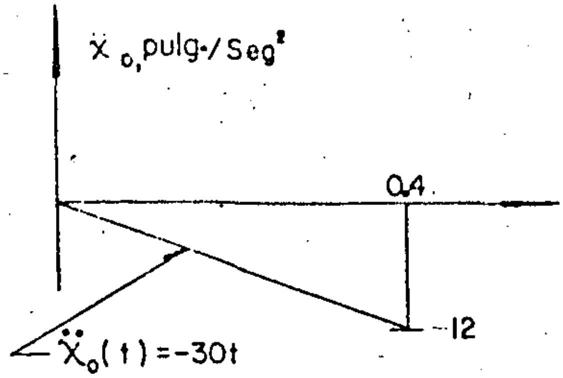


Solución del Ejemplo



Solución elástica





CALCULAR LA RESPUESTA DE LA ESTRUCTURA APLICANDO EL METODO β DE NEWMARK

$$\omega = \sqrt{K/M} = \sqrt{36/4} = 3 \ \frac{RAD}{SEG}$$

$$h = \zeta\omega = 0.2 \times 3 = 0.6 \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{3} = 2.09 \text{ SEG}$$

TOMAREMOS $\beta=0.2$ Y $\Delta t = 0.2$ ($\doteq$ o.1T) SUSTITUYENDO EN LAS ECS. (26), (27) y (28):

$$\dot{y}_{i+1} \doteq \dot{y}_i + 0.1 \ (\ddot{y}_i + \ddot{y}_{i+1})$$

$$y_{i+1} \doteq y_i + 0.2\dot{y}_i + 0.012\ddot{y}_i + 0.008\ddot{y}_{i+1}$$

$$\ddot{y}_{i+1} = -1.2\dot{y}_{i+1} - 9y_{i+1} - (\ddot{x}_o)_{i+1}$$

EN $t=0$ SABEMOS QUE SE TIENE $y=0$, $\dot{y}=0$ Y $\ddot{y}=0$

EN $t=0 + \Delta t = 0.2$ SEG; SUPONGAMOS $\ddot{y}_{i+1} = 5.0$ IN/SEG^2; $\ddot{x}_o = -6$

$y_i = 0$

$\dot{y}_i = 0$

1er CICLO

$$\dot{y}_{i+1} = 0 + 0.1\ (0 + 5) = 0.5 \quad ; \quad y_{i+1} = 0 + 0 + 0 + 0.008 \times 5 = 0.04$$

$$\ddot{y}_{i+1} = -1.2 \times 0.5 - 9 \times 0.04 - (-30 \times 0.2) = 5.04$$

2º CICLO

$$\dot{y}_{i+1} \doteq 0 + 0.1\ (0 + 5.04) = 0.504 \quad ; \quad y_{i+1} \doteq 0 + 0 + 0 + 0.008 \times 5.04 =$$

$$= 0.04032$$

$$\ddot{y}_{i+1} = -1.2 \times 0.504 - 9 \times 0.4032 - (-6) = 5.033\ \text{IN/SEG}^2$$

ESTOS CALCULOS SE PUEDEN ORGANIZAR MEDIANTE UNA TABLA COMO LA SIGUIENTE:

t SEG	$\ddot{x}_o$ IN/SEG^2	$\ddot{y}$ ING/SEG^2	$\dot{y}$ ING/SEG	y IN
0	0	0	0	0
0.2	-6	5.0000 5.040 5.033 5.034	0.5000 0.5040 0.5033 0.5034	0.04000 0.04032 0.04026 0.04027
0.4^-	-12	8.0000 7.442 7.534 7.533	1.8078 1.7510 1.7602 1.7601	0.26536 0.26079 0.26163 0.26162
0.4^+	0	-4.467	1.7601	0.26162
0.6	0	-6.000 -5.464 -5.550 . . .	0.7134 0.7670 0.7584 . . .	0.51204 0.51633 0.51564 . . .

EN $t = 0.2 + \Delta t = 0.4$ SEG: $\ddot{x}_o = -30 \times 0.4 = -12$

$$\ddot{y}_i = 5.034, \quad \dot{y}_i = 0.5034, \quad y_i = 0.04027$$

SUPONIENDO $\ddot{y}_{i+1} = 8.000$ SE OBTIENE:

1er CICLO

$$\begin{cases} \dot{y}_{i+1} = 0.5034 + 0.1\ (5.034 + 8.000) = 1.8068 \\ y_{i+1} = 0.04027 + 0.2 \times 0.5034 + 0.012 \times 5.034 + 0.008 \times 8 = 0.26536 \\ \ddot{y}_{i+1} = -1.2 \times 1{,}8068 - 9 \times 0.26536 - (-12) = 7.442 \text{ IN/SEG}^2 \end{cases}$$

EN $t = 0.4^{+}$ SOLO CAMBIA $\ddot{y}$: $\ddot{y}_{0.4+} = \ddot{y}_{0.4-} + \ddot{x}_o = 7.533 - 12 = -4.467$

EN $t = 0.6$, $\ddot{y}_i = -4.467)$ $\dot{y}_i = 1.7601$; $y = 0.26162$

METODO β DE NEWMARK

SISTEMAS ELASTICOS LINEALES DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

PARA CALCULAR LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE N GRADOS DE LIBERTAD Y COMPORTAMIENTO ELASTICO LINEAL SE EMPLEAN LAS MISMAS ECUACIONES QUE PARA UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD.

$$\dot{x}_j(t_{i+1}) = \dot{x}_j(t_i) + [\ddot{x}_j(t_i) + \ddot{x}_j(t_{i+1})]\frac{\Delta t}{2}$$

$$x_j(t_{i+1}) = x_j(t_i) + \dot{x}_j(t_i)\Delta t + [(1/2-\beta)\ddot{x}_j(t_i) + \beta\ddot{x}_j(t_{i+1})](\Delta t)^2$$

EN DONDE $j = 1,2,\ldots,N$.

EN ESTE CASO SE RECOMIENDA TAMBIEN UN VALOR DE β COMPRENDIDO ENTRE 1/4 Y 1/6, Y QUE $\Delta t \doteq 0.1\ T_N$, EN DONDE T_N ES EL PERIODO NATURAL DE VIBRACION MAS PEQUEÑO.

EJEMPLO

SEA UN SISTEMA DE DOS GRADOS DE LIBERTAD CON AMORTIGUAMIENTO NULO, CUYAS MATRICES DE MASAS Y RIGIDECES SON:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad , \qquad \underline{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

USANDO EL METODO β DE NEWMARK CON $\Delta t = 0.2$ seg Y $\beta = 1/6$ CALCULE LA RESPUESTA DINAMICA ANTE UNA EXCITACION DADA POR LOS DESPLAZAMIENTOS DEL SUELO:

$$\begin{array}{lll} x_o = 1.2\ t & \text{SI} & 0 \leq t \leq 2 \text{ seg} \quad (x_o \text{ EN CENTIMETROS}) \\ x_o = 4.8 - 1.2\ t & \text{SI} & 2 \leq t \leq 4 \text{ seg} \\ x_o = 0 & \text{SI} & t < 0 \ \text{ o } \ t > 4 \text{ seg} \end{array}$$

PUESTO QUE ESTA EXCITACION IMPLICA QUE $\ddot{x}_o(t) = 0$ PARA TODO t, SE TIENE QUE LA ECUACION MATRICIAL DE EQUILIBRIO RESULTA SER

$$\underline{M\ddot{Y}} + \underline{KY} = \underline{M\ddot{Y}} + \underline{Q} = \underline{0}$$

POR LO QUE

$$m_1 \ddot{y}_1 + Q_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{y}_1 = Q_1/m_1$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + Q_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{y}_2 = Q_2/m_2$$

EN DONDE $y_1 = x_1 - x_o$ Y $y_2 = x_2 - x_o$.

CON $\Delta t = 0.2$ seg Y $\beta = 1/6$, LAS ECUACIONES DEL METODO β DE NEWMARK QUEDAN EN LA FORMA

$$\dot{x}_j(t_{i+1}) = \dot{x}_j(t_i) + 0.1\left[\ddot{x}_j(t_i) + \ddot{x}_j(t_{i+1})\right]$$

$$x_j(t_{i+1}) = x_j(t_i) + \underset{0.2}{0.1}\ \dot{x}_j(t_i) + 0.04\left[\ddot{x}_j(t_i)/3 + \ddot{x}_j(t_{i+1})/6\right]$$

EN $t = 0$, $y_i = x_i = 0$, $\dot{y}_i = \dot{x}_i = 0$, $\ddot{y}_i = \ddot{x}_i = 0$.

EN $t = 0.2$, $x_o = 1.2 \times 0.2 = 0.24$ cm; SUPONGAMOS $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 1.35$

Y $\ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = 1.50$ cm/seg:

PRIMER CICLO

PARA LA MASA 1:

$$\dot{x}_1 = 0 + 0.1\ (0 + 1.35) = 0.135 \text{ cm/seg}$$

$$x_1 = 0 + 0 + 0.04(0 + 1.35/6) = 0.009 \text{ cm}$$

$$y_1 = 0.009 - 0.24 = -0.231 \text{ cm}$$

PARA LA MASA 2:

$$\dot{x}_2 = 0 + 0.1(0 + 1.50) = 0.15$$

$$x_2 = 0 + 0 + 0.04(0 + 1.50/6) = 0.01$$

$$y_2 = 0.01 - 0.24 = -0.23 \text{ cm}$$

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.231 \\ -0.230 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.540 \\ -1.381 \end{bmatrix}$$

POR LO QUE $\ddot{y}_1 = \ddot{x}_1 = 2.54/2 = 1.27 \neq 1.35$

$\ddot{y}_2 = \ddot{x}_2 = 1.381/1 = 1.381 \neq 1.50$

SEGUNDO CICLO

$\dot{x}_1 = 0.1 \times 1.27 = 0.127$

$x_1 = 0.04 \times 1.27/6 = 0.0085$

$y_1 = 0.0085 - 0.24 = -0.2315$

$\dot{x}_2 = 0.1 \times 1.381 = 0.138$

$x_2 = 0.04 \times 1.381/6 = 0.0092$

$y_2 = 0.0092 - 0.24 = -0.2308$

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.2315 \\ -0.2308 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.546 \\ -1.386 \end{bmatrix}$$

DE DONDE $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 2.546/2 = 1.273 \doteq 1.27$

$\ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = 1.386/1 = 1.386 \doteq 1.381$

EN $t = 0.2 + 0.2 = 0.4$ seg SE TIENEN $x_o = 1.2 \times 0.4 = 0.48$,

$x_1(t_i) = 0.0085$; $x_2(t_i) = 0.0092$

$\dot{x}_1(t_i) = 0.127$; $\dot{x}_2(t_i) = 0.138$

$\ddot{x}_1(t_i) = 1.273$; $\ddot{x}_2(t_i) = 1.386$

PRIMER CICLO

SUPONIENDO $\ddot{x}_1(t_{i+1}) = 2.3$ Y $\ddot{x}_2(t_{i+1}) = 2.1$ SE OBTIENEN:

$\dot{x}_1 = 0.127 + 0.1(1.273 + 2.3) = 0.484$

$x_1 = 0.0085 + 0.2 \times 0.127 + 0.04(1.273/3 + 2.3/6) = 0.0662$

$y_1 = 0.0662 - 0.48 = -0.4138$

$\dot{x}_2 = 0.138 + 0.1(1.386 + 2.1) = 0.486$

$x_2 = 0.0092 + 0.2 \times 0.138 + 0.04(1.386/3 + 2.1/6) = 0.0693$

$y_2 = 0.0693 - 0.48 = -0.4107$

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.4138 \\ -.4107 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.548 \\ -2.468 \end{bmatrix}$$

DE DONDE $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 4.548/2 = 2.274 \neq 2.3$

$\ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = 2.468 \neq 2.1$

ETCETERA. LOS RESULTADOS DEL PROBLEMA SE PRESENTAN EN LA TABLA 1.

Tomado del libro de N. Newmark y E.Rosenblueth D.

TABLA 2.1. *Ejemplo 2.7*

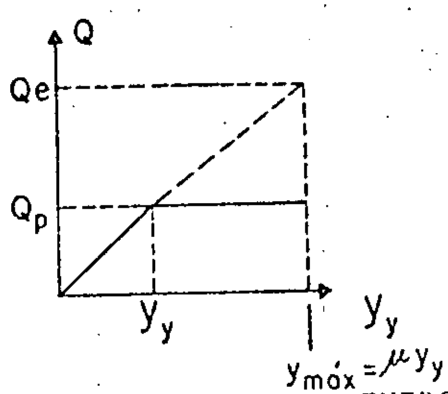
t seg	Q_1 ton	$\ddot{x}$ cm/seg²	$\dot{x}$ cm/seg	x_1 cm	$x_1 - x_r$ cm	Q_2 ton	$\ddot{x}$ cm/seg²	$\dot{x}$ cm/seg	x_2 cm	$x_2 - x_r$ cm	x_r cm
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	2.540	1.350	0.135	0.0093	-0.2310	1.340	1.500	0.150	0.0100	-0.2300	0.24
0.2	2.546	1.270	0.127	0.0085	-0.2315	1.386	1.380	0.138	0.0092	-0.2308	0.24
0.2	2.546	1.273	0.127	0.0085	-0.2315	1.386	1.386	0.138	0.0092	-0.2308	0.24
0.4	4.546	+2.300	0.484	+0.0662	-0.4138	2.468	2.100	0.486	+0.0693	-0.4107	0.48
0.4	4.548	2.274	0.481	0.0660	-0.4140	2.455	2.468	0.523	0.0718	-0.4082	0.48
0.4	4.548	2.274	0.481	0.0660	-0.4140	2.455	2.455	0.522	0.0717	-0.4083	0.48
0.4	4.546	2.274	0.481	0.0660	-0.4140	2.455	2.455	0.522	0.0717	-0.4083	0.48
0.6	5.585	2.700	0.978	0.2105	-0.5095	2.960	3.200	1.088	0.2301	-0.4899	0.72
0.6	5.581	2.793	0.987	0.2111	-0.5089	2.967	2.960	1.064	0.2285	-0.4915	0.72
0.6	5.580	2.790	0.987	0.2111	-0.5089	2.966	2.967	1.065	0.2286	-0.4914	0.72
0.6	5.580	2.790	0.987	0.2111	-0.5089	2.966	2.966	1.065	0.2286	-0.4914	0.72
0.8	5.409	2.900	1.556	0.4650	-0.4950	2.790	2.980	1.660	0.5010	-0.4590	0.96
0.8	5.423	2.704	1.536	0.4637	-0.4963	2.798	2.790	1.641	0.4997	-0.4603	0.96
0.8	5.422	2.710	1.537	0.4638	-0.4962	2.797	2.798	1.642	0.4998	-0.4602	0.96
0.8	5.422	2.711	1.537	0.4638	-0.4962	2.797	2.797	1.642	0.4998	-0.4602	0.96
1.0	4.104	2.150	2.023	0.8216	-0.3784	1.977	2.200	2.142	0.8802	-0.3198	1.20
1.0	4.111	2.052	2.013	0.8210	-0.3790	1.985	1.977	2.120	0.8787	-0.3213	1.20
1.0	4.111	2.055	2.014	0.8210	-0.3790	1.985	1.985	2.121	0.8787	-0.3213	1.20
1.0	4.111	2.055	2.014	0.8210	-0.3790	1.985	1.985	2.121	0.8787	-0.3213	1.20
1.2	1.931	0.950	2.315	1.2575	-0.1625	0.712	0.700	2.390	1.3341	-0.1059	1.44
1.2	1.930	0.965	2.316	1.2576	-0.1824	0.712	0.712	2.391	1.3341	-0.1059	1.44
1.2	1.930	0.965	2.316	1.2576	-0.1824	0.712	0.712	2.391	1.3341	-0.1059	1.44
1.4	-0.653	-0.320	2.381	1.7316	0.0516	-0.735	-0.800	2.382	1.8165	0.1365	1.68
1.4	-0.652	-0.326	2.380	1.7315	0.0515	-0.735	-0.735	2.388	1.8169	0.1379	1.68
1.4	-0.652	-0.326	2.380	1.7315	0.0515	-0.735	-0.735	2.388	1.8169	0.1369	1.68
1.6	-3.083	-1.500	2.197	2.1932	0.2732	-2.026	-2.100	2.104	2.2707	0.3507	1.92
1.6	-3.080	-1.541	2.193	2.1929	0.2729	-2.029	-2.076	2.111	2.2712	0.3512	1.92
1.6	-3.080	-1.540	2.193	2.1929	0.2729	-2.029	-2.029	2.111	2.2712	0.3512	1.92
1.8	-4.830	-2.500	1.789	2.5943	0.4343	-2.869	-2.900	1.618	2.6471	0.4871	2.16
1.8	-4.836	-2.415	1.797	2.5949	0.4349	-2.871	-2.869	1.621	2.6475	0.4875	2.16
1.8	-4.836	-2.418	1.797	2.5949	0.4349	-2.871	-2.871	1.621	2.6475	0.4875	2.16
2.0	-5.547	-2.800	1.275	2.9034	0.5034	-3.069	-3.000	1.034	2.9132	0.5132	2.40
2.0	-5.549	-2.775	1.278	2.9034	0.5036	-3.068	-3.069	1.027	2.9127	0.5127	2.40
2.0	-5.549	-2.774	1.278	2.9034	0.5036	-3.068	-3.068	1.027	2.9127	0.5127	2.40

TABLA 2.1. *Ejemplo 2.7 (Cont.)*

t seg	Q_1 ton	$\ddot{Y}_1$ cm/seg²	$\dot{x}_1$ cm/seg	x_1 cm	$x_1 - x_0$ cm	Q_2 ton	$\ddot{Y}_2$ cm/seg²	$\dot{x}_2$ cm/seg	x_2 cm	$x_2 - x_1$ cm	x_3 cm
2.2	-10.156	-5.200	0.481	3.0875	0.9275	-5.332	-5.460	0.174	3.0406	0.8808	2.16
2.2	-10.165	-5.078	0.493	3.0883	0.9263	-5.337	-5.332	0.167	3.0417	0.8817	2.16
2.2	-10.165	-5.083	0.493	3.0883	0.9263	-5.337	-5.337	0.166	3.0417	0.8817	2.16
2.4	-12.578	-6.300	-0.705	3.0731	1.1531	-6.366	-6.200	-0.968	2.9065	1.0415	1.86
2.4	-12.617	-6.289	-0.644	3.0772	1.1572	-6.363	-6.366	-0.967	2.9052	1.0452	1.86
2.4	-12.615	-6.309	-0.646	3.0770	1.1570	-6.363	-6.363	-0.965	2.9052	1.0452	1.86
2.4	-12.615	-6.306	-0.646	3.0770	1.1570	-6.363	-6.383	-0.966	2.9052	1.0452	1.86
2.6	-12.268	-6.200	-1.857	2.8225	1.1425	-5.958	-6.000	-2.224	2.6429	0.9929	1.65
2.6	-12.245	-6.154	-1.856	2.8225	1.1425	-5.959	-5.958	-2.220	2.6432	0.9632	1.68
2.6	-12.280	-6.194	-1.856	2.8225	1.1425	-5.959	-5.959	-2.220	2.6432	0.9632	1.68
2.8	-9.573	-4.200	2.945	2.3320	0.8920	-4.155	4.100	-3.206	-2.0925	0.6525	1.44
2.8	-9.540	-4.787	-2.954	2.3268	0.8868	-4.150	-4.155	-3.212	2.0521	0.6121	1.44
2.8	-9.541	-4.770	-2.952	2.3269	0.8869	-4.150	-4.150	-3.211	2.0521	0.6121	1.44
2.8	-9.541	-4.770	-2.952	2.3269	0.8869	-4.150	-4.150	-3.211	2.0521	0.6121	1.44
3.0	-4.687	-2.300	-3.719	1.6502	0.4502	-1.376	-1.400	-3.766	1.3852	0.1852	1.20
3.0	-4.658	-2.343	-3.703	1.6513	0.4513	-1.378	-1.376	-3.764	1.3854	0.1854	1.20
3.0	-4.658	-2.349	-3.704	1.6513	0.4513	-1.378	-1.378	-3.764	1.3854	0.1854	1.20
3.2	1.090	0.800	-3.889	0.8845	-0.0755	1.748	1.700	-3.732	0.6255	-0.3345	0.96
3.2	1.106	0.545	-3.884	0.8828	-0.0772	1.748	1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.96
3.2	1.105	0.553	-3.883	0.8829	-0.0771	1.748	1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.96
3.2	1.105	0.553	-3.883	0.8829	-0.0771	1.748	1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.96
3.4	6.608	3.600	-3.468	0.1377	-0.5823	4.506	4.700	-3.082	-0.0645	-0.7845	0.72
3.4	6.629	3.304	-3.438	0.1357	-0.5843	4.515	4.506	-3.101	-0.0662	-0.7862	0.72
3.4	6.628	3.314	-3.439	0.1358	-0.5842	4.515	4.515	-3.100	-0.0661	-0.7861	0.72
3.4	6.628	3.314	-3.439	0.1358	-0.5842	4.515	4.515	-3.100	-0.0661	-0.7861	0.72
3.6	10.578	5.400	-2.568	-0.4718	-0.9518	6.251	6.900	-1.958	-0.5799	-1.0599	0.48
3.6	10.589	5.269	-2.579	-0.4725	-0.9525	6.277	6.251	-2.023	-0.5842	-1.0642	0.48
3.6	10.589	5.299	-2.577	-0.4725	-0.9525	6.277	6.277	-2.020	-0.5841	-1.0641	0.48
3.6	10.589	5.299	-2.577	-0.4725	-0.9525	6.277	6.277	-2.020	-0.5841	-1.0641	0.48
3.8	12.259	6.200	-1.427	-0.6760	-1.1160	6.612	6.600	-0.712	-0.8551	-1.0991	0.24
3.8	12.264	6.130	-1.434	-0.6764	-1.1164	6.618	6.612	-0.731	-0.8603	-1.1003	0.24
3.8	12.264	6.132	-1.434	-0.6764	-1.1164	6.618	6.618	-0.730	-0.8603	-1.1003	0.24
4.0	11.323	5.600	-0.260	-1.0441	-1.0441	5.454	5.400	0.472	-0.8821	-0.8821	0
4.0	11.319	5.661	-0.255	-1.0437	-1.0437	5.453	5.424	0.477	-0.8817	-0.8817	0
4.0	11.319	5.660	-0.255	-1.0437	-1.0437	5.453	5.453	0.477	-0.8817	-0.8817	0
4.2	10.705	5.350	0.846	-0.9836	-0.9836	5.330	5.300	1.549	-0.8691	-0.8691	0
4.2	10.705	5.352	0.846	-0.9836	-0.9836	5.329	5.330	1.552	-0.8689	-0.8689	0

CRITERIOS PARA TRAZAR ESPECTROS DE DISEÑO ELASTOPLASTICOS A PARTIR DEL ELASTICO

1. CRITERIO DE IGUAL DESPLAZAMIENTO MAXIMO DEL SISTEMA ELASTICO Y EL ELASTOPLASTICO DE IGUAL PERIODO:

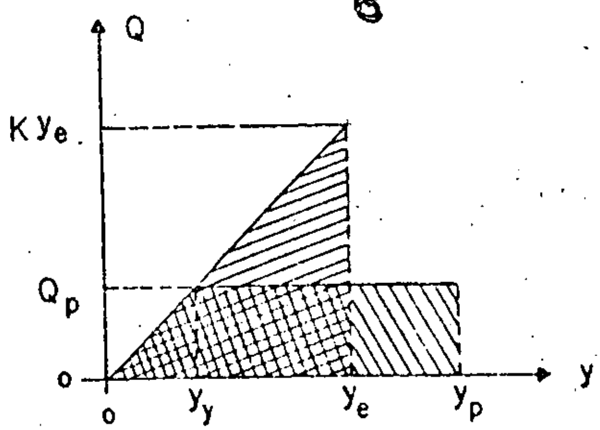


$$Q_p = Ky_y = \frac{Ky_{MAX}}{\mu} = \frac{Q_e}{\mu}$$

$$y_{MAX} = D_e = \mu y_y = \mu D_p$$

$$D_p = \frac{De}{\mu}$$

2. CRITERIO DE IGUAL ENERGIA ABSORBIDA POR LA ESTRUCTURA:



$$\frac{Ky_e y_e}{2} = \frac{Ky_y y_y}{2} + Ky_y(y_p - y_y)$$

$$\frac{1}{2} y_e^2 = \frac{1}{2} y_y^2 + y_y y_p - y_y^2 = y_y y_p - \frac{y_y^2}{2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{y_e}{y_y}\right)^2 = \frac{y_p}{y_y} - \frac{1}{2} = \mu - \frac{1}{2}$$

$$\frac{y_e}{y_y} = \sqrt{2\mu - 1}$$

$$y_y = \frac{y_e}{\sqrt{2\mu - 1}}$$

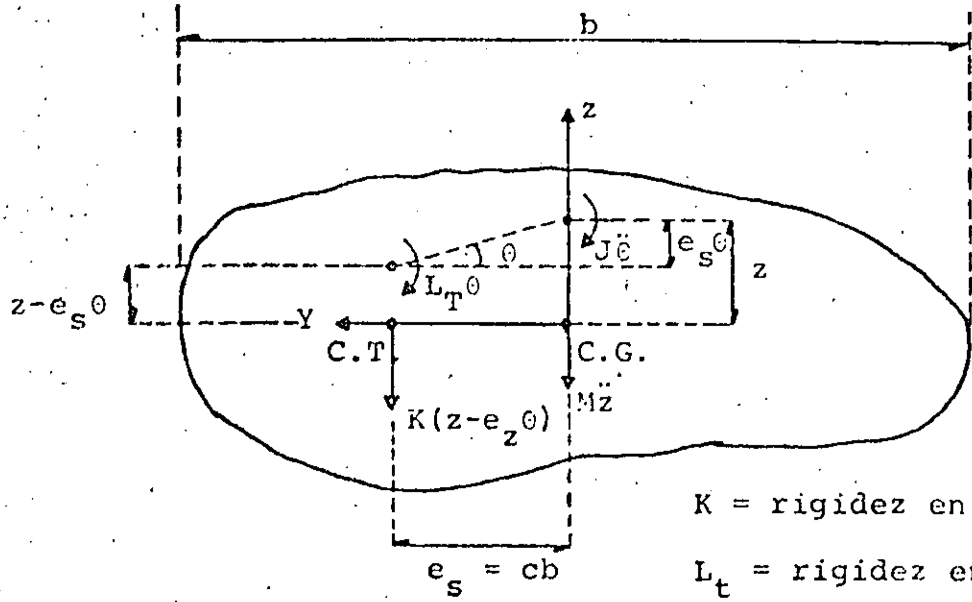
$$y_{y\_MAX} = D_p = \frac{\left. y_e \right]_{MAX}}{\sqrt{2\mu - 1}} = \frac{D_e}{\sqrt{2 - 1}}$$

POR LO TANTO

$$D_p = D_e / \sqrt{2\mu - 1} \qquad \text{Y} \qquad Q_p = Q_e / \sqrt{2\mu - 1}$$

PROBLEMA DE VIBRACIONES DE TORSION

ACOPLADA CON TRASLACION



K = rigidez en traslación

L_t = rigidez en torsión

$$\Sigma F_z = M\ddot{z} + K(z-e_s\theta) = 0 \tag{1}$$

$$\Sigma M_{C.G.} = J\ddot{\theta} + L_t\theta - K(z-e_s\theta)\ e_s = 0$$

$$J\ddot{\theta} + L\theta - Ke_s z = 0 \tag{2}$$

EN DONDE $L = L_t + Ke_s^2$

PUESTO QUE LAS VIBRACIONES SON ARMONICAS:

$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$ y $\ddot{z} = -\omega^2 z$

Sustituyendo en ec (1):

$-\omega^2 Mz + Kz - Ke_s\theta = 0$

$$(K - \omega^2 M)z - Ke_s\theta = 0 \tag{1'}$$

Sustituyendo (3) en (2):

$$- J\omega^2\theta + L_\theta \theta - Ke_s z = 0$$

$$(L_\theta - J\omega^2)\theta - Ke_s z = 0$$

$$\text{Det} \left[\begin{array}{c|c} K - \omega^2 M & - Ke_s \\ \hline - Ke_s & L_\theta - J\omega^2 \end{array}\right] = 0$$

$$(K - \omega^2 M)\ (L_\theta - J\omega^2) - K^2 e_s^2 = 0$$

$$KL_\theta - KJ\omega^2 - \omega^2 ML_\theta + MJ\omega^4 - K^2 e_s^2 = 0$$

$$\omega^4 - \frac{KJ + ML_\theta}{MJ}\omega^2 + \frac{KL_\theta}{MJ} - \frac{K^2 e_s^2}{MJ} = 0$$

DIVIENDO POR $(K/M)^2$:

$$\frac{\omega^4}{(K/M)^2} - \frac{\omega^2}{K/M}\ \frac{KJ + ML_\theta}{(MJ)(K/M)} + \frac{KL_\theta}{MJ(K/M)^2} - \frac{K^2 e_s^2}{MJ(K/M)^2} = 0$$

SI $\lambda^2 = \omega^2/(K/M)$ Y CONSIDERANDO $e_s = cb$:

$$\lambda^4 - \lambda^2\ (1 + \frac{L_\theta/J}{K/M}) + \frac{L_\theta/J}{K/M} - \frac{c^2}{J/(Mb^2)} = 0$$

SI $(L_\theta/J)/(K/M) = n$ y $j^2 = J/(Mb^2)$

$$\lambda^4 - \lambda^2\ (1 + n) + n - c^2/j^2 = 0$$

$$\therefore\ \lambda_{1,2}^2 = \frac{n+1}{2} \pm \sqrt{\frac{(n+1)^2}{4} + \frac{c^2}{j^2}}$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = \lambda_1\ (K/M) \text{ y } \omega_2^2 = \lambda_2\ (K/M)$$

SUSTITUYENDO A ω_1^2, EN (1') O EN (2'):

$$\underline{z}_1 = \begin{bmatrix} z_1 \\ \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \dfrac{1 - \lambda_1^2}{cb} \end{bmatrix} \;;$$

SUSTITUYENDO A ω_2^2:

$$\underline{z}_2 = \begin{bmatrix} z_2 \\ \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \dfrac{1 - \lambda_2^2}{cb} \end{bmatrix} \quad \text{o:} \quad \underline{z}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \dfrac{1 - \lambda_n^2}{cb} \end{bmatrix}$$

Efectos sísmicos en estructuras en forma de péndulo invertido

Octavio RASCON CH. *

INTRODUCCION

En la práctica se presentan estructuras constituidas por una sola columna la cual sostiene una cubierta que puede ser una losa o un cascarón. Su comportamiento dinámico debe estudiarse considerando el efecto que la inercia rotacional de la cubierta induce en el movimiento total de la estructura.

A principios de este año se presentó en California, EUA un trabajo[1] en el cual se trató este problema desde un punto de vista energético. Se calculó sólo el periodo fundamental y con base en él, la respuesta de la estructura a un determinado temblor. Los periodos calculados para cuatro estructuras de este tipo ya construidas fueron menores que los medidos *in situ*. La discrepancia fue atribuida a efectos de rotación y traslación de la base.

El objeto de este trabajo es introducir un análisis modal, el cual nos proporcionará los efectos del acoplamiento que existe entre los modos de vibración. También se tomarán en cuenta en forma aproximada los efectos de rotación y traslación de la base.

CALCULO DE FRECUENCIAS Y CONFIGURACIONES MODALES DE VIBRACION

1. *Suelo rígido*

Para el caso en que el centro de gravedad de la cubierta se encuentra localizado en la prolongación del eje de la columna, el movimiento de la estructura podrá estudiarse en dos direcciones perpendiculares entre sí. En tal caso el problema podrá discretizarse como de dos modos de vibración acoplados en cada dirección.

Para el cálculo de las frecuencias de vibración se idealizará la estructura como de comportamiento lineal, constituida por una cubierta infinitamente rígida de masa simétricamente distribuida y soportada por una sola columna. Como primer caso se considerará al suelo infinitamente rígido (fig. 1).

En fig 1

W = peso de la cubierta más la parte tributaria de la columna

J = momento de inercia de la masa de la cubierta respecto al eje z

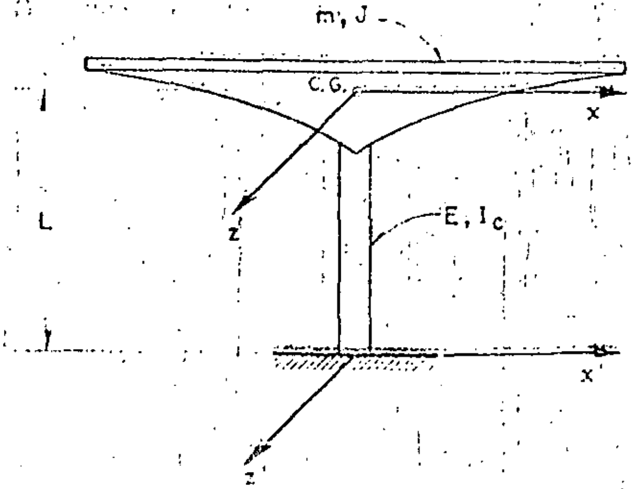


FIG. 1. *Péndulo invertido*

E = módulo de elasticidad del material de la columna

I_c = momento de inercia de la sección transversal de la columna con respecto al eje z

C.G. = centro de gravedad de la cubierta

L = distancia de C.G. al suelo.

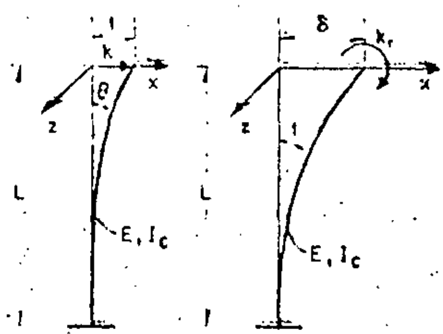
Para la columna mostrada en las figs. 2a y 2b.

k = rigidez por traslación (fuerza horizontal aplicada en C.G. necesaria para que este se desplace la unidad)

k_r = rigidez por rotación (par aplicado en C.G. necesario para producir un giro unitario a la altura de C.G.

θ = rotación en C.G. debida a la fuerza k

δ = desplazamiento lateral de C.G. debido al momento k_r.



$\theta = \frac{k L^2}{2EI_c} = \frac{3}{2L}$

$\delta = \frac{k_r L^2}{2EI_c} = \frac{L}{2}$

FIG. 2. *Rigideces*

* Asistente de Investigador. Instituto de Ingeniería. UNAM.

Despreciando las deformaciones por cortante, las expresiones para k, k_r, θ y δ pueden encontrarse por estática y valen

$$k = 3EI_c/L^3; \qquad (1a)$$

$$k_r = EI_c/L; \qquad (2a)$$

$$\theta = 1.5/L \qquad (1b)$$

$$\delta = L/2 \qquad (2b)$$

Para una fuerza de magnitud αk, el desplazamiento será α y el giro $\alpha\theta$. Para un par de magnitud βk_r el giro será β y el desplazamiento $\beta\delta$. Al aplicarse ambos simultáneamente, el desplazamiento total de C.G. será x_1 y el giro ϵ_1 (fig. 3).

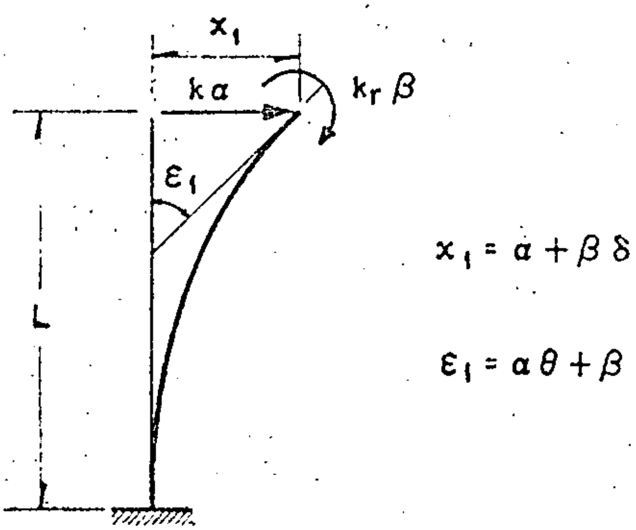


Fig. 3. *Desplazamientos y giros totales*

Por tanto los valores de x_1 y ϵ_1 quedan dados por

$$x_1 = \alpha + \beta\delta \qquad (3)$$

$$\epsilon_1 = \alpha\theta + \beta \qquad (4)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 3 y 4 para α y β, y utilizando las ecs $1b$ y $2b$ se obtiene

$$\alpha = (x_1 - k_r\gamma\epsilon_1)/\kappa; \qquad (5a)$$

$$\beta = (\epsilon_1 - k\gamma x_1)/\kappa \qquad (5b)$$

en las cuales

$$\gamma = L^2/2EI_c; \qquad (6a)$$

$$\kappa = 1 - kL^3/4EI_c = 0.25 \qquad (6b)$$

Para las oscilaciones del péndulo mostrado en la fig 1, el diagrama de cuerpo libre de la cubierta está indicado en la fig 4. Las ecuaciones de movimiento, despreciando efectos gravitacionales, serán

$$m\ddot{x}_1 + k\alpha = 0 \qquad (7)$$

$$J\ddot{\epsilon}_1 + k_r\beta = 0 \qquad (8)$$

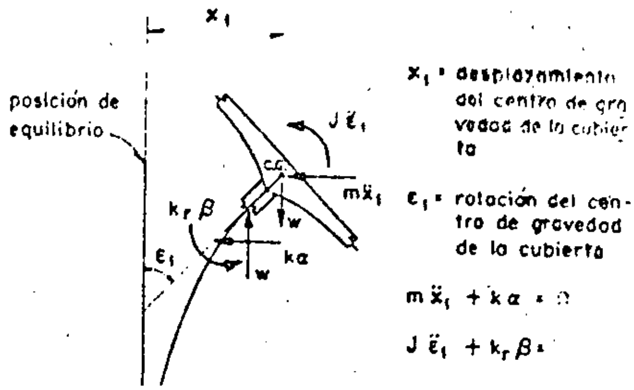


Fig. 4. *Diagrama de cuerpo libre*

Sustituyendo a (5a) y (5b) en (7) y (8) se obtiene

$$m\ddot{x}_1 + (kx_1 - kk_r\gamma\epsilon_1)/\kappa = 0 \qquad (9)$$

$$J\ddot{\epsilon}_1 + (k_r\epsilon_1 - kk_r\gamma x_1)/\kappa = 0 \qquad (10)$$

Las ecs. 9 y 10 se pueden expresar matricialmente en la forma

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\epsilon}_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\kappa}\begin{bmatrix} k & -\gamma kk_r \\ -\gamma kk_r & k_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \qquad (11)$$

Utilizando las ecs 1a, 2a y 6a se encuentra que

$$\gamma kk_r = Lk/2 \qquad (12)$$

Puesto que el movimiento es armónico se tiene que

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \quad \text{y} \quad \ddot{\epsilon}_1 = -\omega^2\epsilon_1 \qquad (13)$$

en donde ω es la frecuencia circular natural de vibración.

Sustituyendo las ecs. 12 y 13 en (11) se obtiene

$$-\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\omega^2\begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\kappa}\begin{bmatrix} k & -\frac{Lk}{2} \\ -\frac{Lk}{2} & k_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \qquad (14)$$

Factorizando en la ec. 14

$$\left[\frac{1}{\kappa}\begin{bmatrix} k & -\frac{Lk}{2} \\ -\frac{Lk}{2} & k_r \end{bmatrix} - \omega^2\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \qquad (15)$$

La ec 15 representa un sistema de ecuaciones homogéneas, el cual, para tener solución diferente de la trivial, necesita que su determinante sea nulo. Por tanto

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{\kappa} - m\omega^2 & -\frac{Lk}{2\kappa} \\ -\frac{Lk}{2\kappa} & \frac{k_r}{\kappa} - J\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (16)$$

Desarrollando el determinante se llega a

$$mJ\omega^4 - \frac{1}{\kappa}(kJ + mk_r)\omega^2 + \frac{1}{4\kappa^2}(4kk_r - L^2k^2) = 0 \qquad (17)$$

Dividiendo ambos miembros entre mJ y considerando que $L^2k^2 = 3kk_r$ se obtiene

$$\omega^4 - \frac{kJ + mk_r}{mJ\kappa}\omega^2 + \frac{k\,k_r}{4mJ\kappa^2} = 0 \qquad (18)$$

que es una ecuación de segundo grado en ω^2, cuyas soluciones son

$$\omega^2_{1,2} = \frac{kJ + mk_r}{2mJ\kappa} \pm \sqrt{\frac{(kJ + mk_r)^2}{4m^2J^2\kappa^2} - \frac{k\,k_r}{4mJ\kappa^2}} \qquad (19)$$

Dividiendo numerador y denominador de (19) entre mJ

$$\omega^2_{1,2} = \frac{k/m + k_r/J}{2\kappa} \pm \frac{1}{2\kappa}\sqrt{(k/m + k_r/J)^2 - (k/m)(k_r/J)} \qquad (20)$$

Llamando a

$k/m = p^2$ = cuadrado de la frecuencia circular natural por traslación

$k_r/J = \Omega^2$ = cuadrado de la frecuencia circular natural por rotación

se obtiene

$$\omega^2_{1,2} = 2\left(p^2 + \Omega^2 \pm \sqrt{(p^2 + \Omega^2)^2 - p^2\Omega^2}\right) \qquad (21)$$

Dividiendo ambos miembros de (21) entre p^2 y haciendo $\omega^2/p^2 = \lambda$ y $\Omega^2/p^2 = \mu$ se llega a

$$\lambda_{1,2} = 2\left(1 + \mu \pm \sqrt{(1 + \mu)^2 - \mu}\right) \qquad (22)$$

Es interesante notar que si $J = 0$ (masa concentrada) de la ec 17 se obtiene $\omega^2 = k/m = p^2$.

Las configuraciones modales pueden obtenerse de cualquiera de las dos ecuaciones algebraicas contenidas en la ecuación matricial dada en ec 15. La primera de ellas es

$$\left(\frac{k}{\kappa} - m\omega_n^2\right)x_{1,n} - \frac{Lk}{2\kappa}r_{1,n} = 0 \qquad (23)$$

donde el índice n indica el número del modo y de la cual se obtiene

$$x_{1,n}/r_{1,n} = \frac{Lk}{2\kappa} \Big/ \left(\frac{k}{\kappa} - m\omega_n^2\right) \qquad (24)$$

dividiendo numerador y denominador de (24) entre m y considerando que $\kappa = 0.25$, $k/m = p^2$ y que $\lambda_n = \omega_n^2/p^2$ se llega a

$$x_{1,n}/r_{1,n} = 2L/(4 - \lambda_n) \qquad (25)$$

Si se desean tomar en cuenta las deformaciones por cortante basta con modificar las rigideces mediante un análisis de estática y partir de nuevo de la ec 17 sin considerar que $L^2k^2 = 3kk_r$. Si existe excentricidad en alguna dirección su efecto podrá tomarse en cuenta introduciendo un grado de libertad adicional.

En las figs 5 y 6 se encuentran representados los resultados de las ecs 22 y 25.

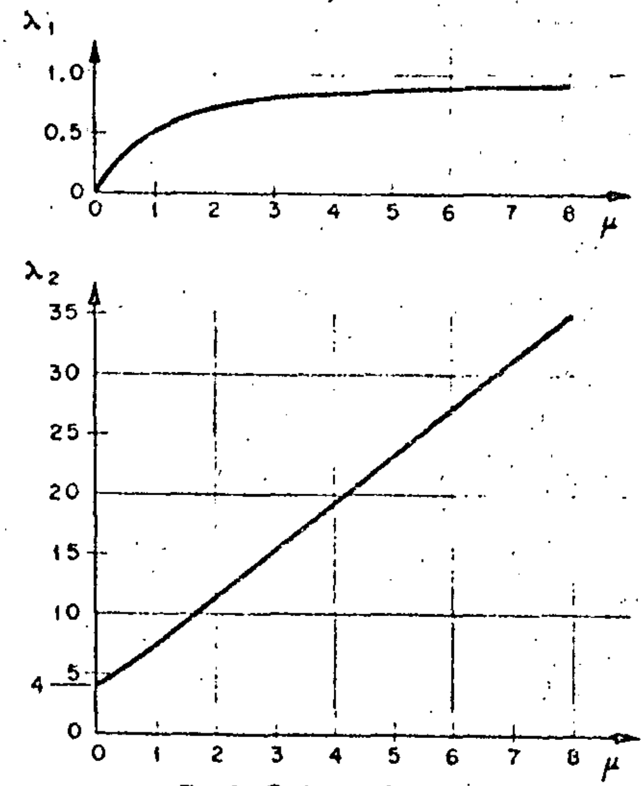


FIG. 5. *Gráfica de frecuencias*

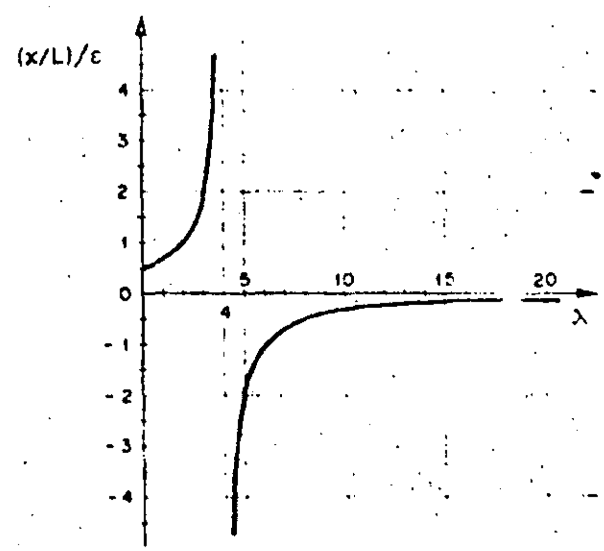


FIG. 6. *Gráfica $(x/L)/\varepsilon$ vs λ*

2. *Suelo flexible*

Al oscilar una estructura cimentada en suelo blando, existe interacción dinámica suelo-estructura que en la mayoría de los casos no debe despreciarse al calcular las frecuencias y los modos de vibración. En lo que sigue se propone la adaptación de un método numérico para tomar en cuenta dicho efecto.

Las restricciones del suelo serán idealizadas mediante resortes de comportamiento lineal: uno para desplazamientos lineales horizontales y otro para deformaciones angulares de cabeceo de la cimentación.

En la fig. 7 se hace referencia a los parámetros que a continuación se mencionan

K = rigidez del resorte correspondiente a la traslación de la base $= C_\tau A$

C_τ = coeficiente de cortante elástico uniforme del suelo.

A = área de contacto de la cimentación.

R = rigidez del resorte correspondiente a rotación de la base $= C_\varphi I_t - W'\bar{y}$

C_φ = coeficiente de compresión elástica no uniforme del suelo.

I_t = momento de inercia de área de la base de la cimentación con respecto al eje z'

W' = peso total de la estructura

$\bar{y}$ = altura del centro de gravedad de la estructura sobre el nivel de desplante

F = $m\omega_n^2 x$

x = desplazamiento lineal total en C.G.

M = $J\omega_n^2 \varepsilon$

ε = desplazamiento angular total en C.G.

L' = altura de C.G. sobre el nivel de desplante

x_0 = traslación de la base

ε_0 = rotación de la base

$x_1 = \alpha + \beta\delta$

$\varepsilon_1 = \beta + \alpha\theta$

$x_2 = L'\varepsilon_0$

$\alpha = F/k$

$\beta = M/k_r$

J, L, δ, θ, k, k_r, x_1, ε_1 y W ya definidos anteriormente.

El problema será resuelto utilizando un procedimiento iterativo y la tabulación propuesta por N. M. Newmark; se despreciarán la variación de la rigidez de la columna debida a la fuerza normal W y los momentos en la misma causados por la excentricidad del peso debida a deformaciones de la columna.

Sean

F_o = fuerza horizontal en la base de la cimentación $= F$

M_o = momento flexionante en la base de la cimentación $= M + FL'$

$x_o = F_o/K$

$\varepsilon_o = M_o/R$

A continuación se describe el procedimiento a seguir:

1. Suponer valores para x y ε
2. Calcular F y M usando las expresiones $F = m\omega_n^2 x$ y $\varepsilon = J\omega_n^2 \varepsilon$. En esta etapa el valor de ω_n aún no se conoce; por tanto se llevará como factor común en el resto del cálculo

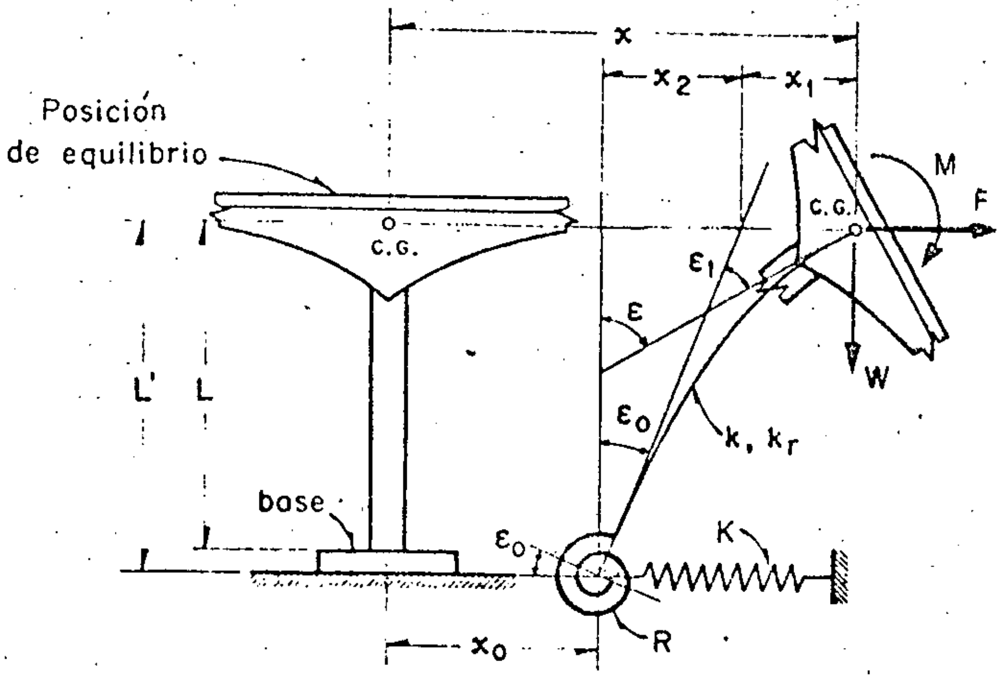


Fig. 7. *Modelo de interacción dinámica suelo-estructura*

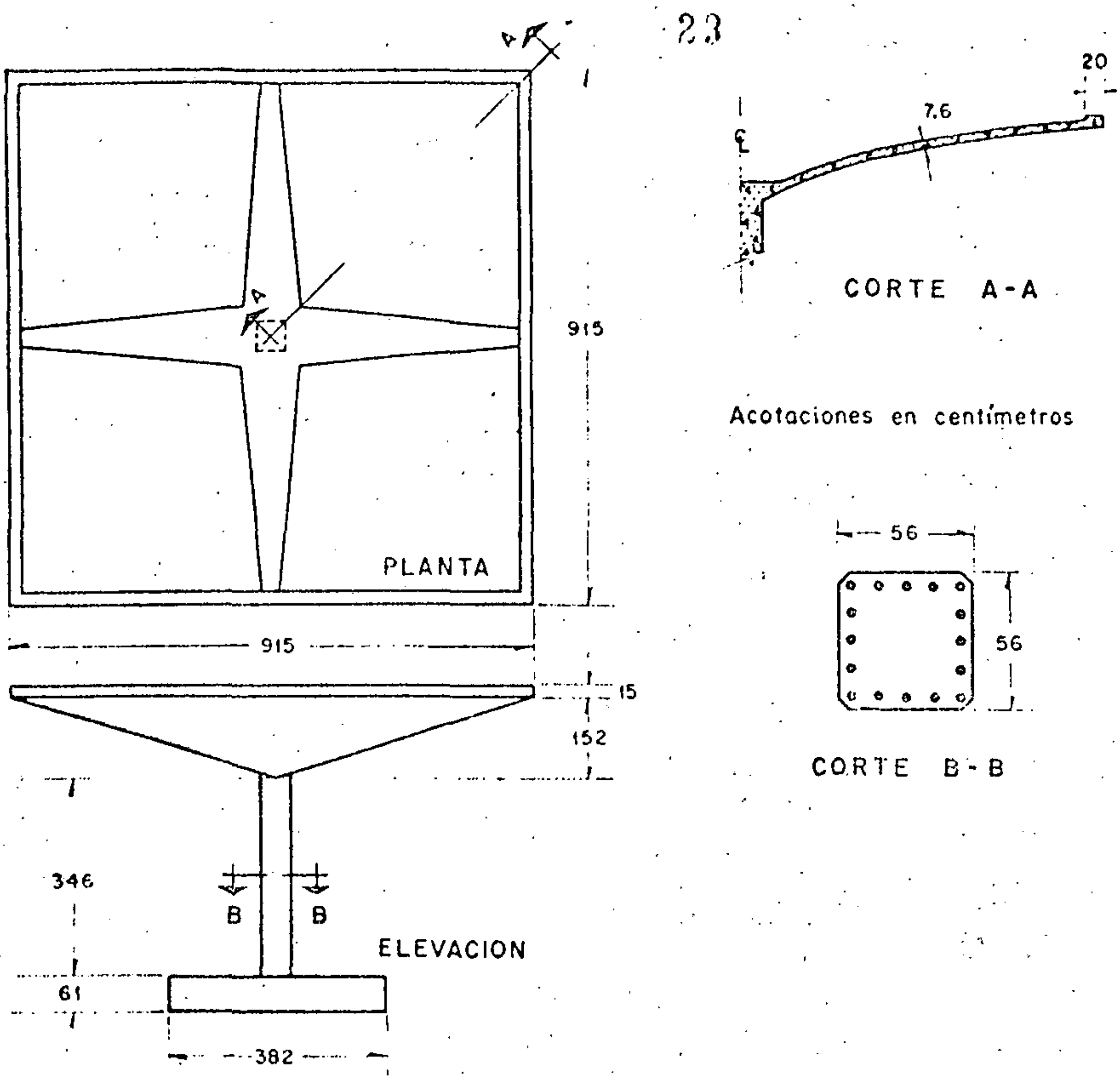


FIG. 8. *Cascarón utilizado para ejemplo.* (Después de R. McLean)

en la cual

$\bar{i}$ es un vector que representa los desplazamientos estáticos de cada grado de libertad de la estructura inducidos por un desplazamiento estático unitario de la base.

$\bar{X}_n$ es el vector modal para el enésimo modo (n).

$\bar{M}$ es la matriz de inercia y

$\bar{X}_n^T$ es el vector traspuesto de $\bar{X}_n$

Para nuestro caso se tendrá

$$i = \begin{bmatrix} X_{est} \\ t_{est} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_1 = \begin{bmatrix} 238 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \bar{X}_2 = \begin{bmatrix} -275 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_1^T = \begin{bmatrix} 238 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \bar{X}_2^T = \begin{bmatrix} -275 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.81 & 0 \\ 0 & 1.386 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo valores en ec 27 y efectuando los productos matriciales en ella indicados se obtiene

$$C_1 = \frac{4.960}{2.566 \times 10^6} = 0.00193$$

$$C_2 = \frac{-5.720}{2.959 \times 10^6} = -0.00193$$

3. Calcular la fuerza y el momento en la base mediante las fórmulas

$$F_s = F \quad \text{y} \quad M_o = M + FL'$$

4. Encontrar los valores de los desplazamientos $x_o = F_o/K$ y $\varepsilon_o = M_o/R$
5. Calcular los valores de los parámetros $\alpha = F/k$ y $\beta = M/k_r$
6. Efectuar los productos $\beta\delta$ y $\alpha\omega$
7. Calcular $x_1 = \alpha + \beta\delta$ y $\varepsilon_1 = \beta + \alpha\omega$
8. Efectuar el producto $x_2 = L'\varepsilon_o$
9. Calcular los desplazamientos lineales y angulares totales de C.G. mediante las expresiones

$$x' = x_o + x_1 + x_2 \quad \text{y} \quad \varepsilon' = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$$

10. Encontrar el valor de ω_n^2 mediante los cocientes x/x' y ε/ε'
11. Si los valores de ω_n^2 calculados en el paso anterior son aproximadamente iguales, el proceso habrá concluido. En caso contrario repítase la secuela utilizando como valores de partida para x y ε los encontrados en etapa 9 o valores cuyo cociente sea igual al de x' entre ε'. El proceso deberá continuarse hasta lograr la aproximación deseada.

EJEMPLO DE APLICACION

Con motivo de ilustrar los conceptos enunciados anteriormente se calcularán las frecuencias y modos de vibración de un cascarón ya construido en California, EUA (fig 8). Los datos necesarios han sido extraídos de la ref 1. Se computarán también las respuestas sísmicas suponiendo que esa estructura fuera a construirse en la zona blanda de la ciudad de México. Se utilizarán por tanto los parámetros elásticos de las arcillas del Valle de México y los espectros de diseño propuestos en el reglamento de construcción para el Distrito Federal [5].

Los datos necesarios de la estructura son

L = 419 cm
L' = 480 cm
$\bar{y}$ = 249 cm
W' = 20, 450 kg (m = 20.81 kg seg²/cm)
W'' = 43, 600 kg
I_x = 1.775×10^6 cm⁴
I_y = 1.065×10^6 cm⁴
k = 1.266×10^4 kg/cm
k_r = 7.41×10^8 kg cm/rad
J = 1.386×10^6 kg seg² cm
ω = 0.00358 rad/cm
δ = 208 cm/rad

Las expresiones para C_τ y C_φ son las siguientes [2]

$$C_\tau = F_1 \frac{E'}{1-\nu^2}\frac{1}{\sqrt{A}}; \quad C_\varphi = F_2 \frac{E'}{1-\nu^2}\frac{1}{\sqrt{A}} \quad (26)$$

En ecs 26

E' = módulo de elasticidad del suelo
ν = relación de Poisson del suelo
A = área de contacto de la cimentación
F_1, F_2 = factores de forma de la cimentación

Para el caso de la zona blanda del Valle de México un valor representativo de E' es 50 kg/cm² y $\nu = 0.5$ [6]. Para una cimentación cuadrada los valores de F_1 y F_2 son 0.704 y 2.11 respectivamente.

Sustituyendo valores en ecs 26 se obtiene

$$C_\tau = 0.123 \text{ kg/cm}^3$$
$$C_\varphi = 0.369 \text{ kg/cm}^3$$

Caso 1. Suelo rígido

a) *Cálculo de frecuencias y modos de vibración*

Para el cálculo de las frecuencias de vibración usaremos la fórmula dada en ec 22. Los valores de los parámetros a sustituir son

$$p^2 = k/m = 608 \text{ (rad/seg)}^2$$
$$\Omega^2 = k_r/J = 535 \text{ (rad/seg)}^2$$
$$\mu = \Omega^2/p^2 = 0.882$$

con los cuales

$$\lambda_{1,2} = 2(1.882 \pm \sqrt{3.55 - 0.882}) = 0.494;\ 7.034$$

Por tanto

$$\omega_1 = \sqrt{0.494 \times 608} = \sqrt{300} = 17.32 \text{ rad/seg}$$

$$\omega_2 = \sqrt{7.034 \times 608} = \sqrt{4260} = 65.30 \text{ rad/seg}$$

Los periodos naturales son

$T_1 = 2\pi/\omega_1 = 0.362$ seg (T_1 obtenido de un registro de vibraciones libres de la estructura y reportado en ref 1 = 0.483 seg)

$T_2 = 2\pi/\omega_2 = 0.096$ seg

Comparando los valores calculado y medido de T_1 se puede ver la importancia de la interacción dinámica suelo-estructura.

Las relaciones modales se obtienen de las ecs. 25 y sus valores son

$$x_1/\varepsilon_1 = \frac{2 \times 419}{4 - 0.494} = 238 \text{ cm/rad}$$

$$x_2/\varepsilon_2 = \frac{2 \times 419}{4 - 7.034} = -275 \text{ cm/rad}$$

b) *Respuesta sísmica*

Para el cálculo de la respuesta sísmica de sistemas de varios grados de libertad es necesario calcular los coeficientes de participación de cada modo de vibración. Se puede demostrar [7] que para este caso es aplicable la siguiente ecuación

$$C_n = \frac{X_n^t M \bar{1}}{X_n^t M X_n} \quad (27)$$

El valor absoluto de la respuesta máxima en cada uno de los modos será:

$$\begin{bmatrix} V_n = \text{fuerza cortante} \\ M_n = \text{momento flexionante} \end{bmatrix} = C_n \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} x_n \\ r_n \end{bmatrix} S_{an} \qquad (28)$$

donde

S_{an} = ordenada del espectro de aceleraciones afectada por el coeficiente sísmico $C = 0.15$.

El espectro que será utilizado es el propuesto en el reglamento de construcciones del Distrito Federal (fig. 9). Los valores de las ordenadas espectrales correspondientes a T_1 y T_2 son 100 cm/seg² y 80.6 cm/seg² respectivamente.

Sustituyendo valores en ec 28 se llega a

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 957 \text{ kg} \\ 268.000 \text{ kg cm} \end{bmatrix} \qquad (29)$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 893 \text{ kg} \\ 216.000 \text{ kg cm} \end{bmatrix} \qquad (30)$$

El criterio propuesto en ref. 8 será utilizado para el cálculo de la respuesta total (considerando los efectos combinados de los dos modos). Por lo anterior la respuesta total de la estructura valdrá

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \quad ; \quad M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \qquad (31a, 31b)$$

En ecs 31a y 31b

V = fuerza cortante total en la columna

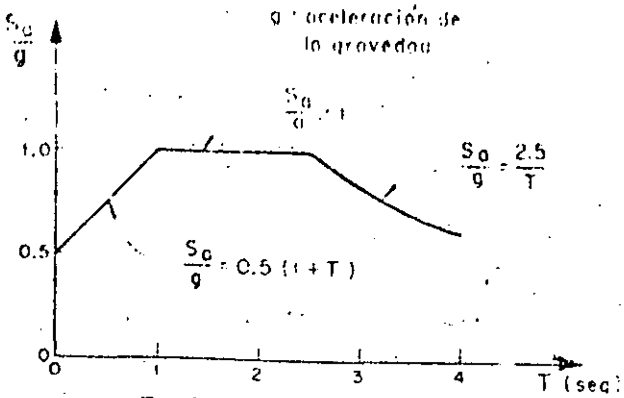


Fig. 9. *Espectro de aceleraciones* (Después de E. Rosenblueth y L. Esteva)

M = momento flexionante total en C. G.

Sustituyendo los valores dados en ecs 29 y 30 en (31) se obtiene

$$V = 1.310 \text{ kg} \quad ; \quad M = 344.000 \text{ kg cm}$$

El momento en la base de la columna valdrá

$$M_b = 344.000 + 1.310 \times 419 = 893.000 \text{ kg cm}$$

Los resultados de este caso se resumen en la fig. 10a.

Caso 2. Suelo flexible

a) *Cálculo de frecuencias y modos de vibración*

Para considerar las restricciones del suelo emplearemos el método propuesto anteriormente procediendo en forma tabular. Sustituyendo valores en ecuaciones para K y R se obtienen 1.88×10^4 kg/cm y 6.35×10^9 kg cm/rad respectivamente.

PRIMER MODO

Parámetros	*Valores (1er. ciclo)*		*Factor común*
x, r (supuestos)	$x = 400$ cm	$r = 1$ rad	
$F = m\,\omega_1^2 x,\ M = J\,\omega_1^2 r$	$F = 8320$	$M = 1.386.000$	ω_1^2
$F_a = F,\ M_a = M + FL'$	$F_a = 8320$	$M_a = 5.376.000$	ω_1^2
$x_a = F_a/K,\ r_a = M_a/R$	$x_a = 0.4420$	$r_a = 0.00847$	ω_1^2
$\alpha = F/k,\ \beta = M/k$	$\alpha = 0.6570$	$\beta = 0.00187$	ω_1^2
$\beta\delta,\ \alpha\theta$	$\beta\delta = 0.3892$	$\alpha\theta = 0.00235$	ω_1^2
$x_1 = \alpha + \beta\delta,\ r_1 = \beta + \alpha\theta$	$x_1 = 1.0462$	$r_1 = 0.00422$	ω_1^2
$x_2 = r_a L'$	$x_2 = 4.0650$	———	ω_1^2
$x' = x_a + x_1 + x_2,\ r' = r_a + r_1$	$x' = 5.5532$	$r' = 0.01269$	ω_1^2
$\omega_1^2 = x/x',\ \omega_1^2 = r/r'$	72.0	78.7	

$$x'/r' = 438, \quad X_1' = [438 \ 1]$$

PRIMER MODO

Parámetro	*Valores (2. ciclo)*		*Factor común*
x, r	438	1	
F, M	9130	1.386,000	ω_1^2
F_o, M_o	9130	5.766,000	ω_1^2
x_o, r_o	0.4860	0.00910	ω_1^2
α, β	0.7210	0.00187	ω_1^2
$\beta\delta, \alpha\theta$	0.3892	0.002585	ω_1^2
x_1, r_1	1.1102	0.004455	ω_1^2
x_2, r_2	4.365	———	ω_1^2
x', r'	5.961	0.013565	ω_1^2
ω_1^2	73.5	75.8	—

Suponiendo que la aproximación es suficiente resulta

$$x'/r' = 440, \; \bar{X}_1^T = [440\;1], \; \omega_1^2 \doteq 74 \text{ (rad/seg)}^2$$

$$T_1 = 0.731 \text{ seg.}$$

El procedimiento para el cómputo de los parámetros del segundo modo es el mismo, sólo que la configuración supuesta deberá "limpiarse", antes de proseguir el cálculo, de las componentes del primer modo que pudiera contener. Se demuestra que si $\bar{X}'_2$ es el vector de la configuración supuesta, el vector libre de componentes del primer modo queda dado por

$$X_2 = X'_2 - \frac{X_1^T M X'_2}{X_1^T M \bar{X}_1} X_1 \qquad (32)$$

Suponiendo para el primer ciclo

$$\bar{X}'_2 = \begin{bmatrix} -150 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y sustituyendo valores en la ecuación matricial 32 se obtiene

$$\bar{X}_2 = \begin{bmatrix} -151 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que nos da los valores de partida para el primer ciclo de cálculo.

SEGUNDO MODO

Parámetros	*Valores (1er. ciclo)*		*Factor común*
x, r	—151	1	
F, M	—3143	1.386,000	ω_2^2
F_o, M_o	—3143	—123,000	ω_2^2
x_o, r_o	—0.1672	—0.0001940	ω_2^2
α, β	—0.2481	0.0018700	ω_2^2
$\beta\delta, \alpha\theta$	0.3892	—0.0008890	ω_2^2
x_1, r_1	0.1411	0.0009810	ω_2^2
x_2, r_2	—0.0930	———	ω_2^2
x', r'	—0.1191	0.0007870	ω_2^2
ω_2^2	1267	1270	—

$$x'/r' = -151, \; \bar{X}_2^T = [-151\;1], \; T_2 = 0.176 \text{ seg.}$$

En este caso se supuso un valor cercano al real y por tanto sólo se necesitó un ciclo para que se obtuviera la aproximación deseada. Si el valor supuesto no hubiese sido ese sino otro cualquiera, seguramente no hubiera sido suficiente un ciclo de cálculo. En los ciclos subsiguientes se procedería en igual forma que antes: suponer inicialmente la configuración obtenida en el ciclo anterior; limpiarla de las componentes del primer modo; etc.

b) Respuesta sísmica

Los valores de los coeficientes de participación y de las ordenadas espectrales para este caso son:

$$C_1 = 0.001689, \qquad C_2 = -0.001689$$

$$S_{a1} = 127.4 \text{ cm/seg}^2, \qquad S_{a2} = 86.6 \text{ cm/seg}^2$$

Las respuestas máximas para cada modo valen

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.970 \text{ kg} \\ 298.200 \text{ kg cm} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 461 \text{ kg} \\ 203.000 \text{ kg cm} \end{bmatrix}$$

Las respuestas máximas totales serán (fig 10b)

$$V = 2.030 \text{ kg}$$

$$M = 361.000 \text{ kg cm}$$

$$M_o = 1.209.000 \text{ kg cm}$$

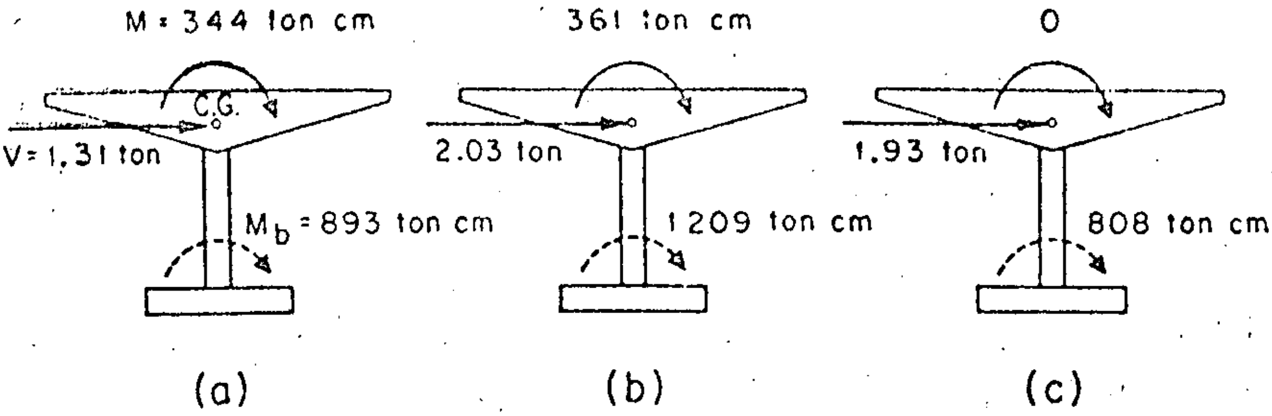


FIG. 10. *Respuestas sísmicas*

CASO 3. BASE RÍGIDA Y MASA CONCENTRADA

Para comparación de resultados se verá cuál es el valor de la respuesta máxima en el caso de despreciar la inercia rotacional y la interacción suelo-estructura.

Para este caso $p^2 = 608$ (rad/seg)^2, $T = 0.325$ seg. $0.15 S_a = 92.6$ cm/seg^2, $V = mS_a = 1{,}930$ kg y $M_b = 808{,}000$ kg cm (fig 10c).

CONCLUSIONES

En la siguiente tabla se resumen los resultados de los tres casos, indicados como porcentajes del segundo caso.

Concepto	*Caso 1*	*Caso 2*	*Caso 3*
V	64.4%	100%	95.0%
M	95.2%	100%	0 %
M_b	73.8%	100%	66.7%

Los resultados de la tabla anterior dan una idea clara de la importancia que tiene el considerar la inercia rotacional de la cubierta y la interacción suelo-estructura. La importancia del primer concepto aumentará conforme mayor sea el momento de inercia de masa de la cubierta con respecto al eje z. El último concepto es tanto más importante cuanto más blando sea el suelo de cimentación. En particular puede observarse que en el tipo de solución 3 no se obtiene momento flexionante a la altura de C.G. Esto puede traer consigo serios errores en la cuantía del acero de refuerzo necesario en la unión columna-cubierta que es donde más ductilidad necesita desarrollarse.

AGRADECIMIENTO

El autor manifiesta su agradecimiento a los doctores E. Rosenblueth y J. A. Nieto, así como al Ing. E. del Valle por sus valiosos comentarios y sugerencias.

REFERENCIAS

1. McLean, R. S., "Inverted pendulum structures", technical report of *Consulting Civil and Structural Engineers*, Fullerton, Cal. (ene. 1965).

2. Barkan, D. D., "Dynamics of bases and foundations", McGraw Hill Book Co. Inc. (1962).

3. Jacobsen, L. S., y Ayre, R. S., "Engineering vibrations", McGraw Hill Book Co. Inc. (1958).

4. Newmark, N. M., "Numerical procedure for computing deflections, moments and buckling loads", *Transactions ASCE*, Vol. 108 (1943), pp. 1161-1234.

5. Rosenblueth, E. y Esteva, L., "*Proyecto de reglamento de las construcciones en el Distrito Federal. "Folleto complementario. Diseño sísmico de edificios*", Ediciones Ingeniería, México (1962).

6. Marsal R., y Mazari, M., "*El subsuelo de la Ciudad de México*", Publicación del Instituto de Ingeniería UNAM (1962).

7. Newmark, N. M., y Rosenblueth, E., "*Earthquake Engineering*", será publicado por Prentice-Hall, Inc.

8. Rosenblueth, E., "Some applications of probability theory in aseismic design", *Proceedings, 1st World Conference on Earthquake Engineering*, Berkeley, Cal. (1956), paper 8.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

XI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

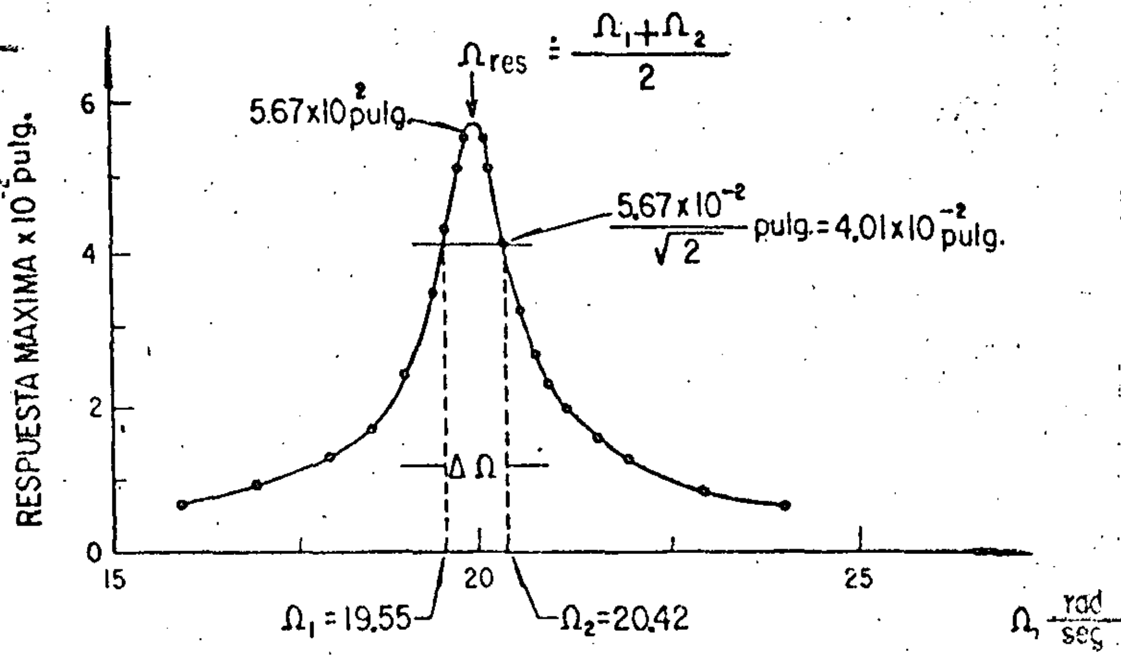
DINAMICA ESTRUCTURAL

Ing. Roberto Stark

AGOSTO, 1985

DE DONDE $$\boxed{\zeta \doteq \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}} \qquad (25)$$

EJEMPLO



DE LA EC (25) $\qquad \Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = 0.87 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$

$$\zeta \doteq \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} = \frac{\frac{\Omega_2}{\Omega_{res}} - \frac{\Omega_1}{\Omega_{res}}}{2} = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\Omega_2 + \Omega_1} = \frac{0.87}{39.97} \approx 2.18\%$$

METODO NUMERICO β DE NEWMARK PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS.

EL METODO QUE A CONTINUACION SE DESCRIBE ES ADAPTABLE A SISTEMAS NO LINEALES CON VARIOS GRADOS DE LIBERTAD.

PROCEDIMIENTO:

1. SEAN y_i, $\dot{y}_i$, y $\ddot{y}_i$, CONOCIDOS EN EL INSTANTE t_i, Y $t_{i+1}=t_i + \Delta t$. SUPONGAMOS EL VALOR DE $\ddot{y}_{i+1}$

2. CALCULEMOS $\dot{y}_{i+1} \doteq \dot{y}_i + (\ddot{y}_i + \ddot{y}_{i+1})\Delta t/2 \qquad (26)$

3. CALCULEMOS $y_{i+1} \doteq y_i + \dot{y}_i \Delta t + (\frac{1}{2} - \beta)\ddot{y}_i (\Delta t)^2 + \beta \ddot{y}_{i+1}(\Delta t)$ (27)

4. CALCULEMOS UNA NUEVA APROXIMACION PARA $\ddot{y}_{i+1}$ A PARTIR DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO:

$$\ddot{y}_{i+1} \doteq -2\zeta\omega\dot{y}_{i+1} - \omega^2(\cancel{y_{i+1} - y_{est}}\ y) - (\ddot{x}_o)_{i+1} \quad (28)$$

DONDE $\cancel{y_{est} = p(t_{i+1})/k}$ $\ddot{x}_o = F_o/m$

5. REPITAMOS LAS ETAPAS 2 A 4 EMPEZANDO CON EL NUEVO VALOR $\ddot{y}_{i+1}$ HASTA QUE EN DOS CICLOS CONSECUTIVOS SE TENGAN VALORES DE $\ddot{y}_{i+1}$ CASI IGUALES.

SE RECOMIENDAN VALORES DE <u>β DE 1/6 A 1/4 Y $\Delta t \doteq 0.1T$</u> PARA ASEGURAR CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD.

The following approximate formula may be used for a simpler definition of the relative value of the pseudo and the real period of vibration:

$$\frac{T_s}{T} = \sim 1 - \left(1 - 12\beta\right)\frac{\theta^2}{24} - \left(17 - 120\beta + 720\beta^2\right)\frac{\theta^4}{5760} \ldots \quad (22)$$

The response of the system to an initial velocity is given by the second term in Eq. 18. The relationship between this response and the true response to an initial velocity, as shown by the second term in Eq. 19, is

$$\frac{B}{\frac{v_0}{\omega}} = \left[1 + \left(\beta - \frac{1}{4}\right)\theta^2\right]^{-1/2} = \sim 1 + \frac{\frac{1}{4} - \beta}{2}\,\theta^2 + \ldots \quad \ldots (23)$$

If β is exactly equal to $\frac{1}{4}$, the maximum velocity response is correct, but if it is different from $\frac{1}{4}$, there is an incorrect maximum velocity response.

Values of the errors in the period and of the errors in maximum response to an initial velocity are given in Tables 2(a) and (b) for several values of β and for a range in values of h/T. There is also given in Table 2(c) the rate of convergence for the corresponding tabular entries. For a system with a number of degrees of freedom, the limits are expressed in terms of the shortest period of the system.

When $\alpha^2 > 4$, the solution of Eq. 15 oscillates without bounds, and the calculation does not yield results even in remote agreement with the exact solution. The solution is said to be "unstable."

The stability limit criterion, corresponding to a value of $\alpha^2 = 4$, can be expressed in terms of the time interval also. The relation between α and θ in Eq. 13 can be expressed as

$$\theta^2 = \frac{\alpha^2}{1 - \beta\alpha^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

from which the stability limit h_s can be written as

$$\frac{2\pi h_s}{T} = \frac{2}{\sqrt{1 - 4\beta}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

which can be simplified to

$$\frac{h_s}{T} = \frac{\frac{1}{\pi}}{\sqrt{1 - 4\beta}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

Values of the stability limit are shown in Table 1 as a function of β.

From Table 1, it can be seen that for values of β greater then $\frac{1}{8}$, if the time interval is chosen for convergence, the numerical procedure will always be stable. However, for values of β less than $\frac{1}{8}$, convergence does not insure stability. Lack of stability gives no warning of difficulty, but introduces a spurious increasing oscillation into a system which may be in oscillation anyway. Therefore, an inexperienced computer may not recognize the difficulty. Moreover, an instability in the higher modes only may not even be apparent to an experienced computer. Consequently, it appears that unless other steps are

taken to insure stability, one should limit the time interval by the stability criterion rather than by the convergence criterion.

Interpretation of Parameter β.—A method very much similar to that described here for $\beta = 0$ has been described elsewhere.[3] A method corresponding in many respects to that for $\beta = \frac{1}{12}$ has also been described.[4] However, the

TABLE 2.—EFFECTS OF LENGTH OF INTERVAL ON ERRORS DUE TO NUMERICAL PROCEDURE

h/T	Values of β: 0	1/12	1/8	1/6	1/4
	(a) Relative Errors in Period				
0.05	-0.004	-0.0001	0.002	0.004	0.005
0.10	-0.017	-0.0003	0.008	0.017	0.033
0.20	-0.076	-0.006	0.028	0.059	0.121
0.25	-0.130	-0.015	0.038	0.087	0.179
0.318	-0.363	-0.045	0.047	0.129	0.273
0.389	...[a]	-0.220	0.100	0.173	0.362
0.450	...[a]	...[a]	-0.100	0.195	0.450
	(b) Relative Errors in Maximum Response to an Initial Velocity				
0.05	0.012	0.008	0.006	0.004	0
0.10	0.052	0.034	0.025	0.017	0
0.20	0.209	0.168	0.168	0.073	0
0.25	0.614	0.306	0.202	0.122	0
0.318	∞	0.732	0.414	0.225	0
0.389	...[a]	∞	1.000	0.414	0
0.450	...[a]	...[a]	∞	0.732	0
	(c) Rate of Convergence				
0.05	0	0.008	0.012	0.016	0.025
0.10	0	0.033	0.049	0.066	0.099
0.20	0	0.132	0.197	0.263	0.595
0.25	0	0.206	0.308	0.412	0.617
0.318	0	0.333	0.500	0.667	1.000
0.389	...[a]	0.500	0.750	1.000	1.600
0.450	...[a]	...[a]	1.000	1.333	2.000

[a] Values are beyond limit for stability.

general treatment previously presented is different from that given here, particularly in the treatment of the starting of the motion. A method similar to that for $\beta = \frac{1}{6}$ was first presented by S. Timoshenko.[5] However, he did not carry the procedure to the point of generalizing it for other than simple one-degree-

3 "Errors Introduced by Step-by-Step Integration of Dynamic Response," by S. Levy and W. D. Kroll, Report, Natl. Bur. of Standards, Washington, D. C., February, 1951.

4 "Some New Methods for the Numerical Integration of Ordinary Differential Equations," by L. Fox and E. T. Goodwin, Proceedings, Cambridge Phil. Soc., Vol. 45, 1949, pp. 373-388.

5 "Vibration Problems in Engineering," by S. Timoshenko, D. Van Nostrand Co., New York, N. Y., 4th edition, 1954, pp. 143-145.

Now for convergence in a sequence of calculations the quantity ρ must be numerically less than 1. The critical value, for convergence, of the time interval h_c can then be computed from Eq. 9 by setting the right-hand side numerically equal to 1, with the result:

$$\frac{h}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{\beta}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (10)$$

Critical values of the convergence limit as a function of β are contained in Table 1.

For practical purposes the time interval would ordinarily be taken as smaller than that which corresponds to pure oscillation, or $\rho = -1$, in order to insure rapid enough convergence. If $\rho = -0.32$, the errors will be reduced to 1% of their original value in four steps or four cycles of iteration. It would appear that, since for small values of β the convergence is most rapid, the lower values of β would be best to use. However, other considerations affect the choice. The most important of these is the matter of stability which is discussed in the next section.

For a complex system, it can be shown that the rate of convergence is dependent upon the frequency or the period of the highest mode of the system. Consequently, the time interval used must be related to the shortest period of

TABLE 1.—CONVERGENCE AND STABILITY LIMITS

Item	Values of β				
	0	1/12	1/8	1/6	1/4
Convergence limit, h/T	∞	0.551	0.450	0.389	0.318
Stability limit, h/T	0.318	0.389	0.450	0.551	∞

vibration, or the period in the highest mode of vibration, for the lumped mass system. Since stability also depends on a similar criterion, it appears that the greater the number of masses into which a system is broken down the shorter will be the permissible time interval for numerical calculation of the dynamic response of the system.

Stability and Errors in Numerical Computation.—In order to study the stability of the numerical integration procedure, let us consider the special case of a simple system, a mass with one-degree-of-freedom without external force acting on it. For such a condition, and for some initial displacement and velocity, the motion of the system should be a pure oscillation, with a circular frequency of vibration as given by

$$\omega^2 = \frac{K}{M} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (11)$$

in which K is the spring constant and M the mass. The relationship between the acceleration and the displacement is given by

$$a = -\omega^2 x \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (12)$$

With the preceding relations, and with the use of the symbo[illegible] as defined by

$$\alpha^2 = \frac{\theta^2}{1 + \beta\,\theta^2} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (13)$$

we can derive a difference equation relating the values of three successive displacements of the system. The equation, in general terms, is

$$x_{n+1} - \left(2 - \alpha^2\right) x_n + x_{n-1} + \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\alpha^2 \left(x_n - x_{n-1}\right) = 0 \quad \dots \quad (14)$$

From the general relations between finite differences and derivatives, it can be seen that the last term on the left of this equation corresponds to a factor times the velocity of the system, and consequently can be interpreted as a viscous damping term even though the system was defined as having no damping. This spurious last term can be eliminated by the choice of $\gamma = \frac{1}{2}$. In this case the general difference equation can be rewritten as

$$x_{n+1} - \left(2 - \alpha^2\right) x_n + x_{n-1} = 0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (15)$$

The general solution of the finite difference equation, Eq. 15, can be written in the case where the quantity α^2 is less than 4. In this case, define a quantity ϕ by

$$\alpha = 2 \sin\frac{\phi}{2} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (16)$$

The solution of Eq. 15 can then be written in the form

$$x = A \cos\phi\,\frac{t}{h} + B \sin\phi\,\frac{t}{h} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (17)$$

This can also be stated in terms of a pseudo period T_s, and an initial displacement x_o and a parameter B which is of the same form as a velocity. The result is

$$x = x_o \cos\frac{2\pi t}{T_s} + B \sin\frac{2\pi t}{T_s} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (18)$$

This may be compared with the exact solution, $\bar{x}$, which is given by

$$\bar{x} = x_o \cos\frac{2\pi t}{T} + \frac{v_o}{\omega} \sin\frac{2\pi t}{T} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (19)$$

It can be seen that the approximate solution, Eq. 18, is similar to the exact solution and gives precisely the same response for an initial displacement, but gives a different period from that of the actual system. The value of the pseudo period T_s is given by

$$T_s = \frac{2\pi h}{\varphi} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (20)$$

The relation between the pseudo period T_s and the true period T is

$$\frac{T_s}{T} = \frac{\theta}{\phi} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (21)$$

SISTEMAS NO LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD

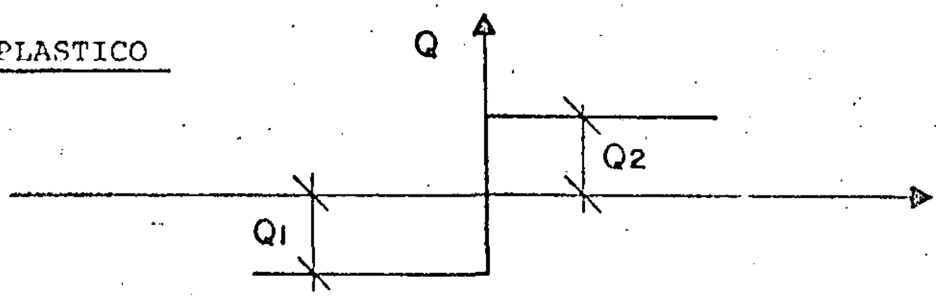
ECUACION DE MOVIMIENTO:

$$M\ddot{x} + Q(y,\dot{y}) = P(t) \quad ; \quad y = x-x_o = \text{DESPLAZAMIENTO RELATIVO}$$

SI $Q(y, \dot{y}) = Ky + C\dot{y}$ SE TIENE EL SISTEMA ELASTICO LINEAL

MODELOS PARTICULARES

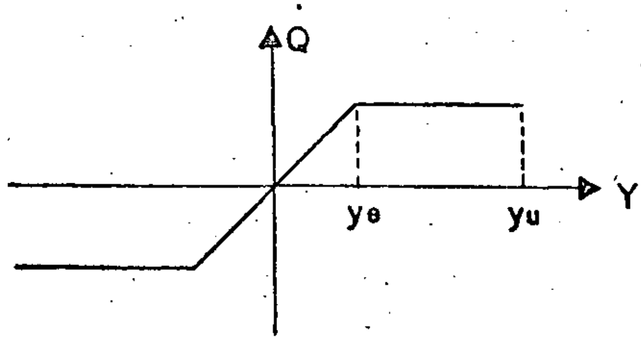
1. <u>RIGIDO-PLASTICO</u>



$Q = -Q_1 + C\dot{y}$, SI $\dot{y}<0$

$Q = Q_2 + C\dot{y}$, SI $\dot{y}<0$ EN DONDE C = CONSTANTE. SE HA EMPLEADO CO MODELO EN EL ANALISIS DE TALUDES Y CORTINAS DE PRESAS DE TIERRA Y ENROCAMIENTO

2. <u>ELASTO-PLASTICO</u>



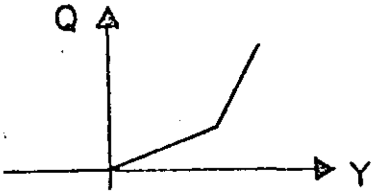
$Q = Q_1(y) + C\dot{y}$

SE EMPLEA COMO MODELO EN EL ANALISIS DE ESTRUCTURAS DUCTILES.

<u>FACTOR DE DUCTILIDAD</u> $= \mu = y_u/y_e$

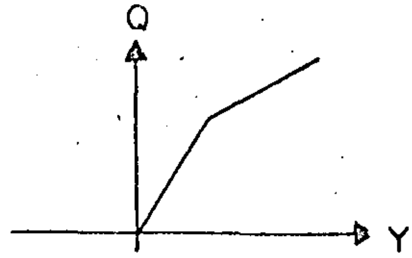
y_u = DESPLAZAMIENTO MAXIMO QUE PUEDE SOPORTAR EL SISTEMA SIN FALLAR.

3. <u>SISTEMA BILINEAL</u>



<u>CON ENDURECIMIENTO</u>

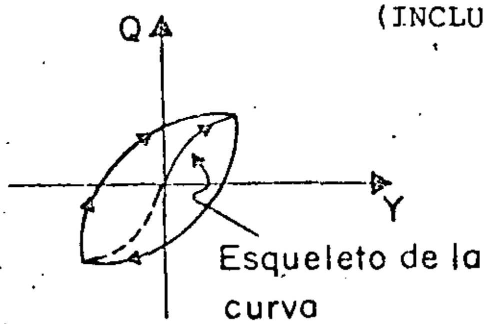
SE USA COMO MODELO PARA ANALISIS DE PUENTES COLGANTES



<u>CON ABLANDAMIENTO</u>

SE USA COMO MODELO DE SISTEMAS QUE SE DEGRADAN POR AGRIETAMIENTO (MUROS DE MAMPOSTERIA, POR EJEM).

4. <u>TIPO MASING</u>



(INCLUYE A LOS ANTERIORES COMO CASOS ESPECIALES)

$$\frac{Q - Q_o}{2} = Q_1\left(\frac{y - y_o}{2}\right)$$

Q_o = FUERZA EN $y = y_o$

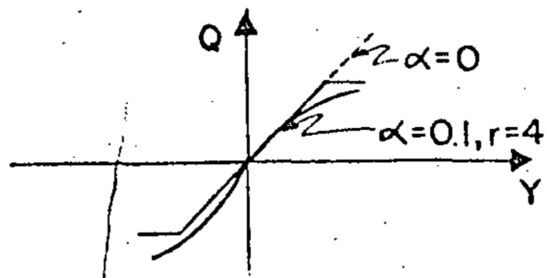
y_o = DESPLAZAMIENTO EN EL CUAL EL PROCESO SE INVIRTIO ($\dot{y}$ CAMBIO DE SIGNO) POR ULTIMA VEZ

CASO PARTICULAR DEL ESQUELETO

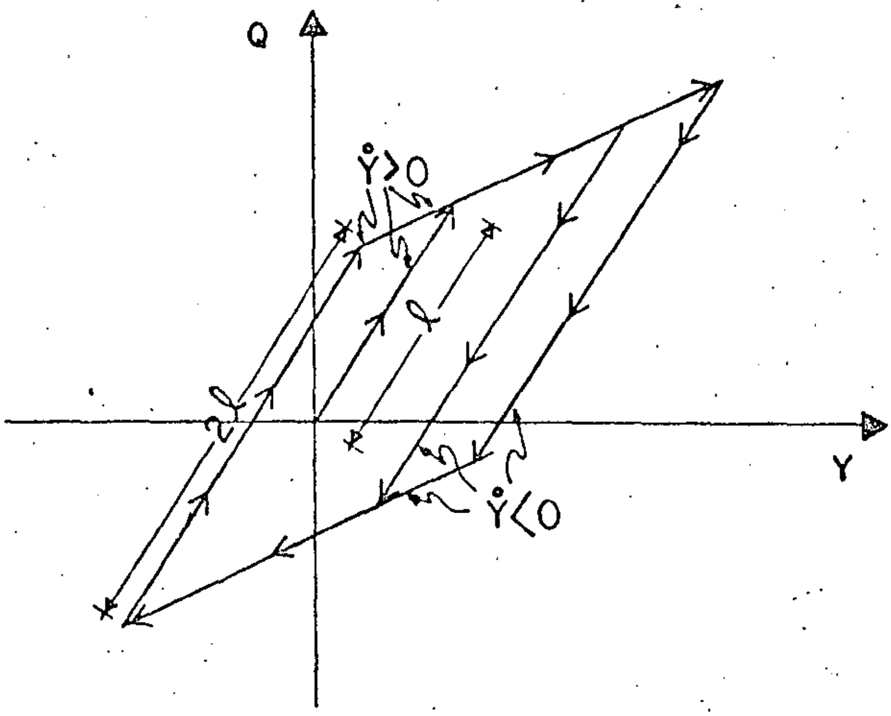
$$\frac{y}{y_1} = \frac{Q}{Q_1} + \alpha\left(\frac{Q}{Q_1}\right)^r$$

<u>(MODELO RAMBER - OSGOOD)</u>

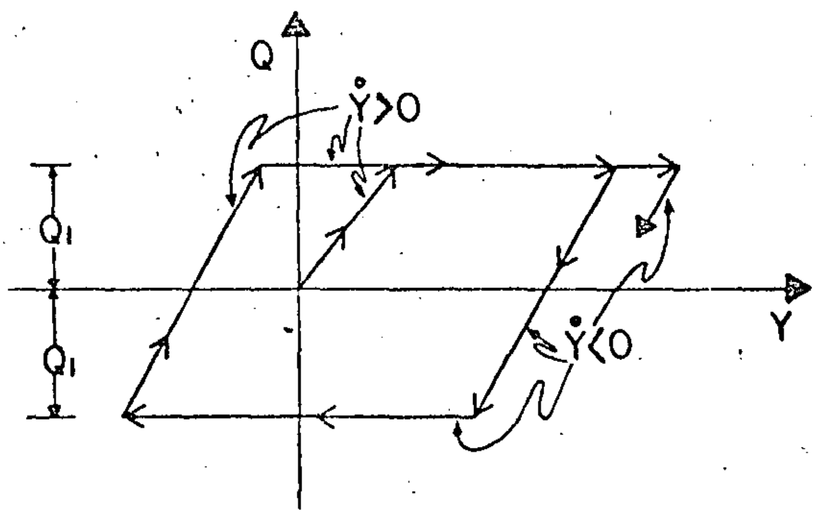
DONDE y_1, Q_1, α y r SON CONSTANTES POSITIVAS



EJEMPLO: CASO BILINEAL



EJEMPLO CASO ELASTOPLASTICO



METODO β DE NEWMARK

PARA EL ANALISIS DE SISTEMAS NO LINEALES SE PUEDE USAR EL METODO β DE NEWMARK DESCRITO ANTERIORMENTE.

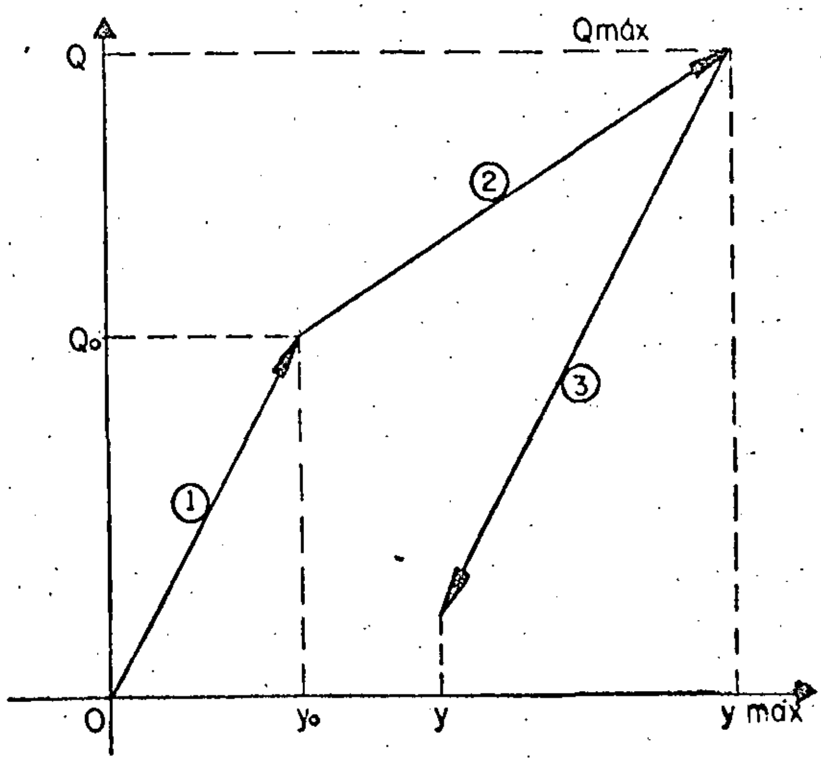
$$\dot{Y}_{i+1} = \dot{Y}_i + \frac{1}{20}\left(\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}\right) \qquad \text{(II)}$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \dot{Y}_i(0.10) + \frac{1}{600}\left(2\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}\right) \qquad \text{(III)}$$

EL PROCEDIMIENTO DE CALCULO ES COMO SIGUE:

- SE ASUME $\ddot{Y}_{i+1}$
- SE CALCULA $\dot{Y}_{i+1}$ CON LA ECUACION (II)
- SE CALCULA Y_{i+1} CON LA ECUACION (III)
- SE CALCULA UN MEJOR VALOR DE $\ddot{Y}_{i+1}$ CON LA ECUACION (I),
- ETC.

PARA LA FUNCION DE RESISTENCIA Q SE TIENEN LOS SIGUIENTES CASOS:



1. COMPORTAMIENTO ELASTICO , $Q = 32\ Y$ TONS
2. CAMBIO DE RIGIDEZ , $Q = 30 + 18\ (Y-Y_o)$ TON
3. DESCARGA , $Q = Q_{máx} - 32(Y_{MAX}-Y)$ TONS

ESTA ULTIMA EXPRESION MANTIENE SU VALIDEZ HASTA QUE, $(Y_{MAX}-Y) \leq 2Y_o$

$$Y_o = 0.9375 \text{ CMS} \quad ; \quad Q_o = 30.0 \text{ TON}$$

PARA t = 0, $\ddot{y} = \frac{P}{M} = \frac{50}{2} = 25$; $y = 0$; $\dot{y} = 0$

PARA t = 0.10, $y_i = \dot{y}_i = 0$; $\ddot{y}_i = 25$

1er. CICLO

SEA $\ddot{y}_{i+1} = 20$ COMO PRIMER TANTEO. EN TAL CASO

$$\dot{y}_{i+1} = 0 + \frac{1}{20}(0 + 25) = 2.25$$

$$y_{i+1} = \dot{0} + 0.10 \times 0 + \frac{1}{600}(2 \times 25 + 20) = 0.1167$$

$$Q = 32 \times 0.1167 = 3.7330$$

$$\ddot{y}_{i+1} = \frac{50 - 3.733}{2} = 23.134$$

2o. CICLO

$$\dot{y}_{i+1} = 23.134/2 = 16.567$$

$$y_{i+1} = 73.134/600 = 0.1219$$

$$Q = 32 \times 0.1219 = 3.9000$$

$$\ddot{y}_{i+1} = (50 - 3.9)/2 = 23.050$$

3er. CICLO

.

.

.

4o. CICLO

$$\ddot{y}_{i+1} = 23.052$$

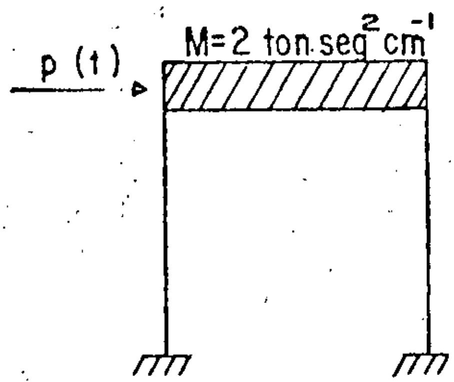
$$\dot{y}_{i+1} = 23.052/2 = 2.4026$$

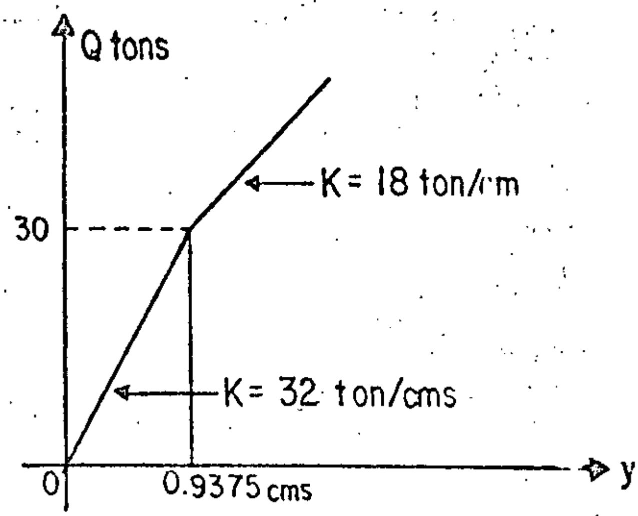
$$y_{i+1} = 73.052/600 = 0.12175$$

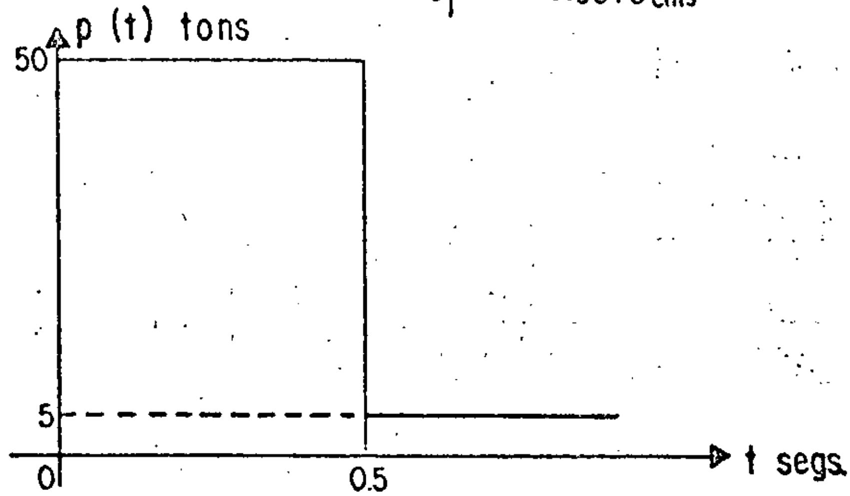
$$Q = 32 \times 0.12175 = 3.8960$$

$$\ddot{y} = (50 - 3.8960)/2 = 23.052 \quad \ldots \text{ ETC.}$$

EJEMPLO







ECUACION DE EQUILIBRIO DINAMICO , $M\ddot{Y} + Q(Y) = P(t)$

$$\ddot{Y} = \frac{P(t) \; - Q(Y)}{M} = \frac{P(t) - Q(y)}{2} \qquad (1)$$

PARA LA APLICACION DEL METODO DE NEWMARK SE TIENEN LAS SIGUIENTES EXPRESIONES:

$$t_{i+1} = t_i + At$$

$$\dot{Y}_{i+1} = \dot{Y}_i + (\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1})\ \Delta t/2$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \dot{Y}_i\ At + (0.5 - \beta)\ddot{Y}_i\ (\Delta t)^2 + \beta\ \ddot{Y}_{i+1}\ (\Delta t)^2$$

CONSIDERANDO $\Delta t = 0.10$ SEG. Y $\beta = 1/6$ SE PUEDE ESCRIBIR;

LOS CALCULOS BASICOS SE MUESTRAN EN LA TABLA SIGUIENTE:

t SEGS	P TONS	$\ddot{Y}$ CM SEG^{-2}	$\dot{Y}$ CM SEG^{-1}	Y CMS	Q TONS
0.0	50.00	25.000	0.00	0.00	0.00
0.10	50.00	20.000 23.134 23.050 23.052	2.2500 2.4070 2.4025 2.4026	0.1167 0.1219 0.12175 0.12175	3.7430 3.9000 3.3960 3.8960
0.20	50.00	20.000 17,445 17.513 17.511	4.5552 4.4270 4.4310 4.43075	0.4722 0.46793 0.46804 0.46204	15.110 14.970 14.977 14.977
0.30	50.00	10.000 9.560 9.569	5.8060 5.7840 5.7848	0.98610 0.98540 0.98543	30.8750 30.8620 30.8630
0.40	50.00	0.00 4.0750 4.0141 4.0150	6.2630 6.4670 6.4640 6.4640	1.5958 1.6026 1.6025 1.60250	41.849 41.972 41.970 41.970
0.50^-	50.00	0.00 -1.9230 -1.9000 -1.8944 -1.8946	6.6650 6.56975 6.5700	2.2623 2.2591 2.25912	53.846 53.789 53.789
0.50+	5.00	-24.3946	6.5700	2.25912	53.789
0.60	5.00	-30.000 -29.126 -29.136 -29.138	3.8503 3.8940 3.89347 3.89347	2.7848 2.78626 2.78624 2.78624	63.251 63.278 63.277 63.277
0.70	5.00	-32.000 -31.289 -31.320 -31,299 -31.301	0.83657 0.87057 0.87147	3.025127 3.02626 3.02641	67.577 67.598 67.600
0.7278	5.00	-31.620 -31.409 -31.420 -31.4093	-0.00313 -0.000352 -0.000205	3.03850 3.03853 3.03853	67.818 67.818 67.818

En t=0.5 + SEG, $\Delta\ddot{y} = -45/2 = -22.5 \therefore -22.5 - 1.8946 = -24.3946$

CONTINUACION DEL CUADRO ANTERIOR

t	p	$\ddot{Y}$	$\dot{Y}$	Y	Q
0.80	5.0	-28.000	-2.1449	2.959611	65.293
		-30.146			
		-30.000	-2.21708	2.957874	65.237
		-30.118			
		-30.117	-2.22127	2.95777	65.234
0.90	5.0	-27.00	-5.07712	2.59025	53.473
		-24.236			
		-25.00	-4.97712	2.59358	53.580
		-24.290			
		-24.294	-4.94182	2.59476	53.617
		-24.308	-4.94242	2.59474	53.617
1.00	5.0	-14.00	-6.85782	1.99614	34.461
		-14.7305			
		-14.7200	-6.89382	1.99494	34.423
		-14.7120	-6.89342	1.99495	34.423

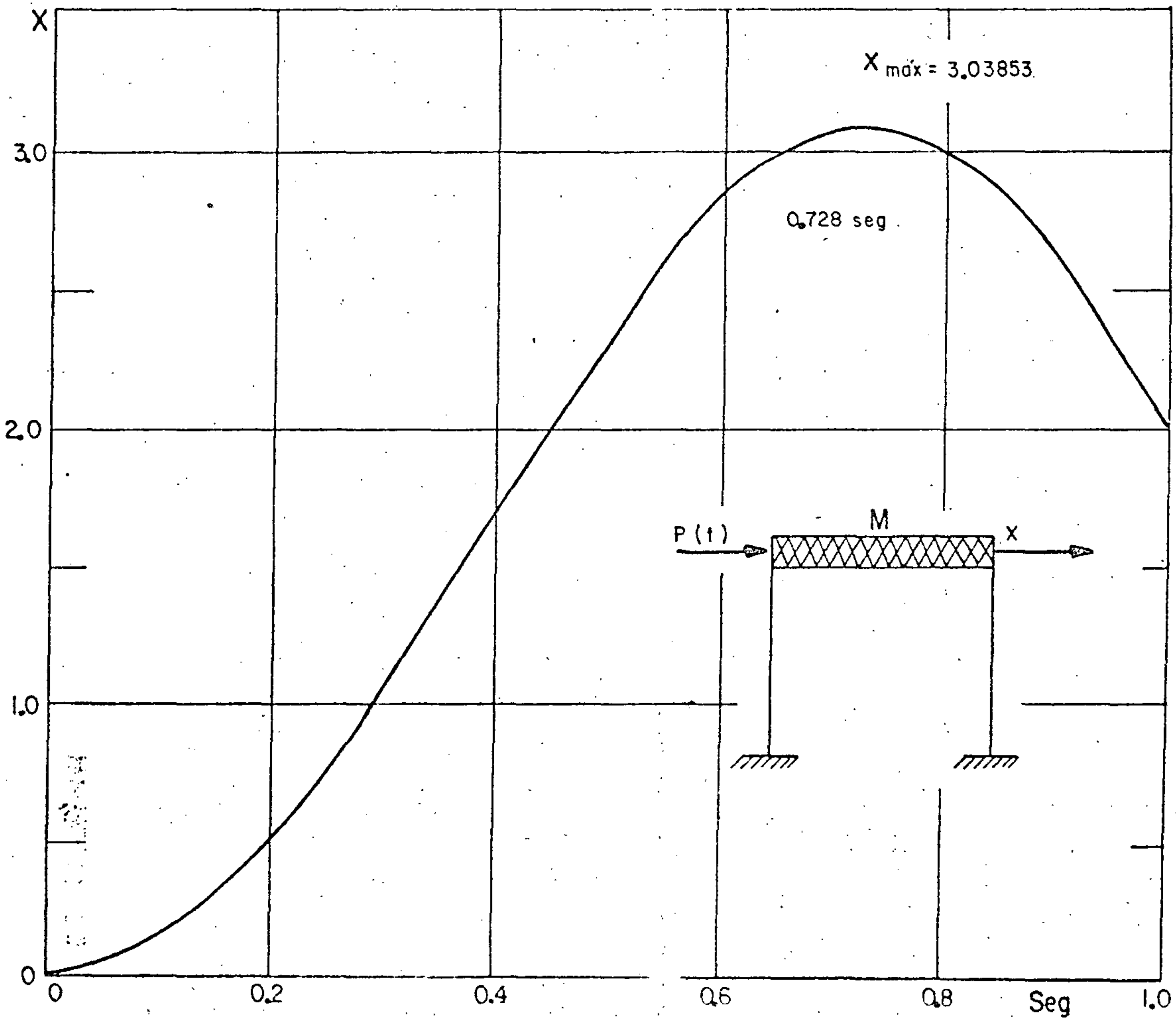
EN ESTOS CALCULOS SE INTRODUJO $t = 0.50^{-}$ Y 0.50^{+} PORQUE PARA ESTE INSTANTE SE PRODUCE UN CAMBIO BRUSCO EN LA CARGA P(t) DE 50.00 TONS A 5.00 TONS, CON LO CUAL SE PRODUCE UN CAMBIO BRUSCO EN LA ACELERACION DEL SISTEMA $\ddot{Y}$. EN ESTE INSTANTE NO SE PRODUCEN CAMBIOS EN $\dot{Y}$ Y Y. EL TIEMPO $t = 0.7273$ SEG. SE INTRODUJO POR LA NECESIDAD DE CALCULAR LOS VALORES DE Y Y DE Q, PUES A PARTIR DE DICHO INSTANTE SE INICIA LA DESCARGA DEL SISTEMA. ESTA CONDICION SE ENCONTRO SOBRE LA BASE DE APROXIMAR $\dot{Y}$ A CERO, OBTENIENDOSE $Y_{MAX} = 3.03853$ CMS y $Q_{MAX} = 67.818$ TON.

EN EL CUADRO SIGUIENTE SE PRESENTA UN RESUMEN DE LOS RESULTADOS.

t Seg.	$\ddot{Y}$(supuesta) Cm Seg^{-2}	P Ton	Y Cm.	Q Ton	$\ddot{Y}$(calculado) Cm Seg^{-2}	$\dot{Y}$ Cm Seg^{-1}	N O T A S
0.0	- -	50.00	0.00	0.00	25.00	0.00	
0.10	23.0520	50.00	0.12175	3.896	23.0520	2.40260	
0.20	17.5110	50.00	0.46804	14.977	17.5110	4.43075	
0.30	9.5690	50.00	0.98543	30.863	9.5690	5.78480	— CAMBIO DE RIGIDEZ
0.40	4.0150	50.00	1.60250	41.970	4.0150	6.4640	
0.50^{-}	-1.8946	50.00	2.25912	53.789	-1.8946	6.5700	
0.50+	- -	5.00	2.25912	53.789	-24.3945	6.5700	— CAMBIO DE CARGA
0.60	-29.1380	5.00	2.78624	63.277	-29.1380	3.89347	
0.70	-31.3010	5.00	3.02641	67.600	-31.3010	0.87147	
0.7278	-31.4093	5.00	3.03853	67.818	-31.4093	-0.000205	— Qmáx, Ymáx.
0.800	-30.1170	5.00	2.95777	65.234	-30.1170	-2.22127	
0.90	-24.3080	5.00	2.59474	53.617	-24.3080	-4.94242	
1.00	-14.7120	5.00	1.99495	34.423	-14.7120	-6.89342	

RESPUESTA MAXIMA

$$\begin{cases} Y \text{ máx} = 3.03853 \text{ cms} \\ Q \text{ máx} = 67.818 \text{ tons} \end{cases}$$


X
X máx = 3.03853
0.728 seg
3.0
2.0
1.0
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
Seg
1.0
P (t)
M
X

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

DINAMICA ESTRUCTURAL

E J E M P L O

M. EN C. JORGE PRINCE ALFARO

JULIO, 1985

E J E M P L O

Análisis sísmico dinámico de un marco plano, utilizando el Manual de Diseño por Sismo del Reglamento de Construcciones del Distrito Federal.

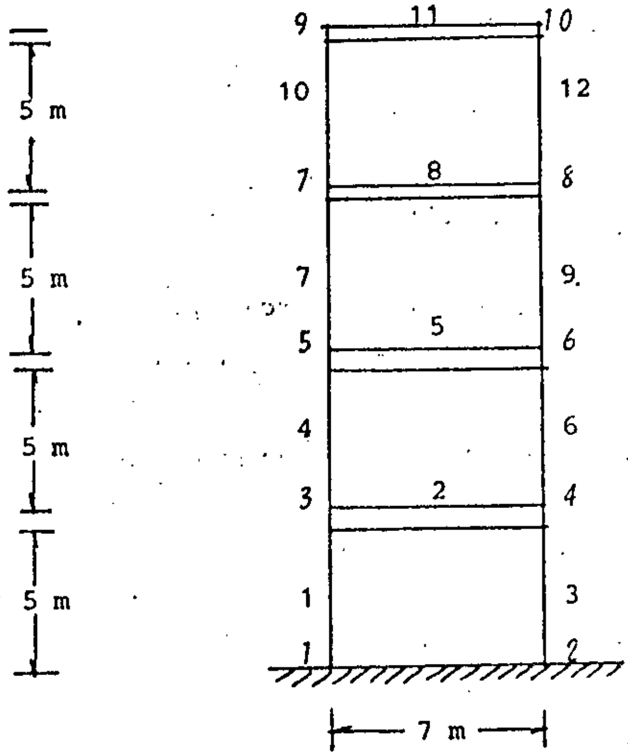
La solución fue obtenida mediante un programa del Ing. Enrique Ibarra Anaya, en una hp 71B.

EJEMPLO.

Análisis sísmico dinámico de un marco plano de 4 niveles.

Datos:

1. Geometría y pesos:



Nivel	Peso (tn)
4	25
3	25
2	50
1	50
0	

1, 2, 3, ... barras.
1, 2, 3, ... nudos.

2. Dimensiones columnas:

Niveles	0 a 1	0.60 x 0.60 m
	1 a 2	0.50 x 0.50 m
	2 a 4	0.40 x 0.40 m

3. Dimensiones vigas:

0.40 x 0.70 m

4. Módulo de elasticidad del concreto: 150 000 kg/cm^2

5. Aplicar el Reglamento del Distrito Federal:

Construcción tipo B

Zona 1 (terreno firme) $(C_s = 0.16)$

Factor de ductilidad Q = 2

ANALISIS SISMICO DINAMICO DE MARCOS PLANOS
29/JUN/85 MARCO:Ejemplo #2.

Numero de Barras ======> 12
Numero de Nudos Libres ==> 8
Numero de Apoyos ======> 2
Numero de Niveles ======> 4

LA ESTRUCTURA TIENE 20 GRADOS DE LIBERTAD: GIROS ==============> 8
DESPL. VERTICALES ===> 8
DESPL. HORIZONTALES => 4

20

CARACTERISICAS DE LOS NIVELES (MASA = PESO / g)

NIVEL	PESO [Ton]	MASA [Ton*Seg2/M]	ALTURA [M]
1	50.000	5.0968	5.000
2	50.000	5.0968	10.000
3	25.000	2.5484	15.000
4	25.000	2.5484	20.000

CARACTERISICAS DE LAS BARRAS: Modulo de Elasticidad E = 1500000 Ton/M^2

NUM. BARRA	NUDO A	NUDO B	LONGITUD	ANGULO (GRADOS)	MOMENTO DE INERCIA	AREA
1	1	3	5.00	90.00	0.0108	0.3600
2	3	4	7.00	0.00	0.0114	0.2800
3	2	4	5.00	90.00	0.0108	0.3600
4	3	5	5.00	90.00	0.0052	0.2500
5	5	6	7.00	0.00	0.0114	0.2800
6	4	6	5.00	90.00	0.0052	0.2500
7	5	7	5.00	90.00	0.0021	0.1600
8	7	8	7.00	0.00	0.0114	0.2800
9	6	8	5.00	90.00	0.0021	0.1600
10	7	9	5.00	90.00	0.0021	0.1600
11	9	10	7.00	0.00	0.0114	0.2800
12	8	10	5.00	90.00	0.0021	0.1600

CARACTERISTICAS DE LOS APOYOS:

APOYO # 1: Nudo 1, Apoyo en Cantiliver
APOYO # 2: Nudo 2, Apoyo en Cantiliver

CONTRIBUCION DE CADA NUDO A LOS DIFERENTES GRADOS DE LIBERTAD
EL CERO SIGNIFICA RESTRICCION AL MOVIMIENTO CORRESPONDIENTE

NUDO	GIRO	Despl. Y	Despl. X
1	0	0	0

INSTITUTO DE INGENIERIA, U.N.A.M.
ANALISIS SISMICO DINAMICO DE MARCOS PLANOS
29/JUN/85 MARCO Ejemplo #2.

NUDO	GIRO	Despl. Y	Despl. X
2	0	0	0
3	1	9	17
4	2	10	17
5	3	11	18
6	4	12	18
7	5	13	19
8	6	14	19
9	7	15	20
10	8	16	20

TIPO DE LA CONSTRUCCION:	B
ZONA SISMICA:	1 TERRENO FIRME
FACTOR DE DUCTILIDAD (Q)	2.00
COEFICIENTE SISMICO (C)	0.16
ORDENADA DE LOS ESPECTROS DE DISEÑO PARA T=0 (a0)	0.03
PERIODOS CARACTERISTICOS DE LOS ESPECTROS DE DISEÑO: T1	0.30
T2	0.80
EXPONENTE EN LAS EXPRESIONES DE LOS ESPECTROS DE DISEÑO (r)	0.50

Impresion de la matriz [K] de rigidez del marco armada considerando deforma - ion axial de las columnas y elementos en diagonal y sin considerar deformacion axial de las vigas.
La matriz [K] consta de 4 submatrices:

```
              **      |      **
              *  K11  | K12  *
              *       |      *
    [ K ] =   *-------+------*
              *       |      *
              *  K21  | K22  *
              **      |      **
```

SUBMATRIZ [K11]: ORDEN (16,16)
ESTA MATRIZ ESTA ARMADA EN SKYLINE Y ESTA CONTENIDA EN UN VECTOR
DE 106 ELEMENTOS.

Columnas	1	2	3	4	5
Reng 1	2.901E+004	4.900E+003	3.125E+003	0.000E+000	0.000E+000
Reng 2	4.900E+003	2.901E+004	0.000E+000	3.125E+003	0.000E+000
Reng 3	3.125E+003	0.000E+000	1.861E+004	4.900E+003	1.280E+003
Reng 4	0.000E+000	3.125E+003	4.900E+003	1.861E+004	0.000E+000
Reng 5	0.000E+000	0.000E+000	1.280E+003	0.000E+000	1.492E+004
Reng 6	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	1.280E+003	4.900E+003
Reng 7	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	1.280E+003
Reng 8	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000
Reng 9	2.100E+003	2.100E+003	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000
Reng 10	-2.100E+003	-2.100E+003	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000
Reng 11	0.000E+000	0.000E+000	2.100E+003	2.100E+003	0.000E+000
Reng 12	0.000E+000	0.000E+000	-2.100E+003	-2.100E+003	0.000E+000
Reng 13	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	2.100E+003
Reng 14	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	-2.100E+003

Reng 15	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000
Reng 16	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000

Columnas	6	7	8	9	10
Reng 1	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	2.100E+003	-2.100E+003
Reng 2	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	2.100E+003	-2.100E+003
Reng 3	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000
Reng 4	1.280E+003	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000
Reng 5	4.900E+003	1.280E+003	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000
Reng 6	1.492E+004	0.000E+000	1.280E+003	0.000E+000	0.000E+000
Reng 7	0.000E+000	1.236E+004	4.900E+003	0.000E+000	0.000E+000
Reng 8	1.280E+003	4.900E+003	1.236E+004	0.000E+000	0.000E+000
Reng 9	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	1.836E+005	-6.000E+002
Reng 10	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	-6.000E+002	1.836E+005
Reng 11	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	-7.500E+004	0.000E+000
Reng 12	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	-7.500E+004
Reng 13	2.100E+003	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000
Reng 14	-2.100E+003	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000
Reng 15	0.000E+000	2.100E+003	2.100E+003	0.000E+000	0.000E+000
Reng 16	0.000E+000	-2.100E+003	-2.100E+003	0.000E+000	0.000E+000

Columnas	11	12	13	14	15
Reng 1	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000
Reng 2	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000
Reng 3	2.100E+003	-2.100E+003	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000
Reng 4	2.100E+003	-2.100E+003	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000
Reng 5	0.000E+000	0.000E+000	2.100E+003	-2.100E+003	0.000E+000
Reng 6	0.000E+000	0.000E+000	2.100E+003	-2.100E+003	0.000E+000
Reng 7	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	2.100E+003
Reng 8	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	2.100E+003
Reng 9	-7.500E+004	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000
Reng 10	0.000E+000	-7.500E+004	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000
Reng 11	1.236E+005	-6.000E+002	-4.800E+004	0.000E+000	0.000E+000
Reng 12	-6.000E+002	1.236E+005	0.000E+000	-4.800E+004	0.000E+000
Reng 13	-4.800E+004	0.000E+000	9.660E+004	-6.000E+002	-4.800E+004
Reng 14	0.000E+000	-4.800E+004	-6.000E+002	9.660E+004	0.000E+000
Reng 15	0.000E+000	0.000E+000	-4.800E+004	0.000E+000	4.860E+004
Reng 16	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	-4.800E+004	-6.000E+002

Columnas	16
Reng 1	0.000E+000
Reng 2	0.000E+000
Reng 3	0.000E+000
Reng 4	0.000E+000
Reng 5	0.000E+000
Reng 6	0.000E+000
Reng 7	-2.100E+003
Reng 8	-2.100E+003
Reng 9	0.000E+000
Reng 10	0.000E+000
Reng 11	0.000E+000

Reng 12	0.000E+000
Reng 13	0.000E+000
Reng 14	-4.800E+004
Reng 15	-6.000E+002
Reng 16	4.860E+004

SUBMATRIZ [K21]=TRN[K12]: ORDEN (4,16)

Columnas	1	2	3	4	5
Reng 1	2.013E+003	2.013E+003	-1.875E+003	-1.875E+003	0.000E+000
Reng 2	1.875E+003	1.875E+003	1.107E+003	1.107E+003	-7.680E+002
Reng 3	0.000E+000	0.000E+000	7.680E+002	7.680E+002	0.000E+000
Reng 4	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	7.680E+002

Columnas	6	7	8	9	10
Reng 1	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000
Reng 2	-7.680E+002	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000
Reng 3	0.000E+000	-7.680E+002	-7.680E+002	0.000E+000	0.000E+000
Reng 4	7.680E+002	7.680E+002	7.680E+002	0.000E+000	0.000E+000

Columnas	11	12	13	14	15
Reng 1	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000
Reng 2	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000
Reng 3	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000
Reng 4	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	0.000E+000

Columnas	16
Reng 1	0.000E+000
Reng 2	0.000E+000
Reng 3	0.000E+000
Reng 4	0.000E+000

SUBMATRIZ [K22]: ORDEN (4,4)

Columnas	1	2	3	4
Reng 1	4.610E+003	-1.500E+003	0.000E+000	0.000E+000
Reng 2	-1.500E+003	2.114E+003	-6.144E+002	0.000E+000
Reng 3	0.000E+000	-6.144E+002	1.229E+003	-6.144E+002
Reng 4	0.000E+000	0.000E+000	-6.144E+002	6.144E+002

IMPRESION DE LA MATRIZ [Y]=INV([K11])*[K12], ORDEN (16,4)

Columnas	1	2	3	4
Reng 1	6.758E-002	5.160E-002	-3.093E-003	4.351E-004
Reng 2	6.758E-002	5.160E-002	-3.093E-003	4.351E-004
Reng 3	-8.993E-002	4.293E-002	3.290E-002	-9.335E-004
Reng 4	-8.993E-002	4.293E-002	3.290E-002	-9.335E-004
Reng 5	4.919E-003	-4.193E-002	-1.301E-004	3.872E-002

Reng 6	4.919E-003	-4.193E-002	-1.301E-004	3.872E-002
Reng 7	-1.500E-003	2.926E-003	-4.659E-002	4.579E-002
Reng 8	-1.500E-003	2.926E-003	-4.659E-002	4.579E-002
Reng 9	5.688E-004	-2.130E-003	4.915E-004	-2.819E-003
Reng 10	-5.688E-004	2.130E-003	-4.915E-004	2.819E-003
Reng 11	5.181E-003	-2.340E-003	1.034E-003	-6.898E-003
Reng 12	-5.181E-003	2.340E-003	-1.034E-003	6.898E-003
Reng 13	4.649E-003	1.028E-003	4.786E-003	-1.353E-002
Reng 14	-4.649E-003	-1.028E-003	-4.786E-003	1.353E-002
Reng 15	4.664E-003	7.528E-004	8.647E-003	-1.711E-002
Reng 16	-4.664E-003	-7.528E-004	-8.647E-003	1.711E-002

IMPRESION DEL PRODUCTO [K21]*INV([K11])*[K12], ORDEN (4,4)

Columnas	1	2	3	4
Reng 1	6.093E+002	4.676E+001	-1.358E+002	5.253E+000
Reng 2	4.676E+001	3.529E+002	6.144E+001	-5.991E+001
Reng 3	-1.358E+002	6.144E+001	1.221E+002	-7.176E+001
Reng 4	5.253E+000	-5.991E+001	-7.176E+001	1.298E+002

IMPRESION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ LATERAL [KD], ORDEN (4,4)
[KD] = [K22]-[K21]*INV([K11])*[K12]

Columnas	1	2	3	4
Reng 1	4.001E+003	-1.547E+003	1.358E+002	-5.253E+000
Reng 2	-1.547E+003	1.761E+003	-6.758E+002	5.991E+001
Reng 3	1.358E+002	-6.758E+002	1.107E+003	-5.426E+002
Reng 4	-5.253E+000	5.991E+001	-5.426E+002	4.846E+002

EL POLINOMIO CARACTERISTICO DE LA EXPRESION |[KD]-w2[M]|=0 DIVIDIDA ENTRE EL FACTOR EIo= 3200.00 ES DE GRADO 4 Y TIENE LOS SIGUIENTES COEFICIENTES CALCULADOS CON EL METODO DE KRYLOV

a 4= 1.000000E+000 a 3=-5.484490E-001 a 2= 8.648040E-002
a 1=-3.792254E-003 a 0= 2.853620E-005

LAS RAICES DEL POLINOMIO ANTERIOR, MULTIPLICADAS POR EL FACTOR EIo, CORRESPONDEN A LAS FRECUENCIAS w AL CUADRADO DE CADA MODO. LOS PERIODOS T DE CADA MODO SE OBTIENEN CON LA FORMULA T=2*PI/w

MODO	w^2 [(Seg)^-2]	T [Seg]
1	30.1948	1.1434
2	177.2041	0.4720
3	574.9082	0.2620
4	972.7297	0.2015

LOS VECTORES CARACTERISTICOS (Y) (MODOS DE VIBRACION) DE LA EXPRESION [[KD]-w2[M]](Y)=0 SON LOS SIGUIENTES:

MODO	1	2	3	4
Nivel 1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

Nivel 2	2.92638	2.01732	0.43275	-0.57948
Nivel 3	5.25510	0.08139	-2.89323	0.43961
Nivel 4	6.57807	-2.16396	1.62227	-0.13966

NORMALIZANDO LOS VECTORES MODALES ANTERIORES, QUEDAN DE LA SIGUIENTE MANERA:

MODO	1	2	3	4
Nivel 1	0.06602	0.16267	0.17127	0.36884
Nivel 2	0.19321	0.32816	0.07412	-0.21374
Nivel 3	0.34697	0.01324	-0.49553	0.16215
Nivel 4	0.43432	-0.35202	0.27785	-0.05151

Modo	Aceleracion	Ductilidad Modif. Q'	Coeficiente de Participacion	Desplazamiento Maximo [M]
1	1.3129	2.0000	3.3123	0.0720
2	1.5696	2.0000	1.6384	0.0073
3	1.4083	1.8735	0.6960	0.0009
4	1.1507	1.6715	1.0725	0.0008

DESPLAZAMIENTOS MAXIMOS DE LAS MASAS DEBIDOS A CADA MODO.

MODO	1	2	3	4
Nivel 1	0.00475	0.00118	0.00016	0.00028
Nivel 2	0.01391	0.00238	0.00007	-0.00016
Nivel 3	0.02499	0.00010	-0.00045	0.00012
Nivel 4	0.03128	-0.00255	0.00025	-0.00004

DESPLAZAMIENTO MAXIMO DE CADA MASA, SUMA DE LOS DESPLAZAMIENTOS MAXIMOS DEBIDOS A CADA MODO Y REDUCIDOS CON EL CRITERIO DE LA RAIZ CUADRADA

Masa	Zmax [M]
1	0.00491
2	0.01412
3	0.02499
4	0.03138

FUERZAS MAXIMAS EN LAS MASAS DEBIDAS A CADA MODO

MODO	1	2	3	4
Nivel 1	0.73171	1.06608	0.45668	1.38799
Nivel 2	2.14128	2.15062	0.19763	-0.80431
Nivel 3	1.92262	0.04339	-0.66064	0.30509
Nivel 4	2.40663	-1.15347	0.37043	-0.09692

FUERZAS Y CORTANTES DE DISEÑO EN CADA MASA. EL VALOR DE LA FUERZA TOTAL SOBRE CADA MASA SERA LA SUMA DE LAS FUERZAS DEBIDAS A CADA MODO Y REDUCIDAS CON EL CRITERIO DE LA RAIZ CUADRADA

Masa	Fuerza [Ton]	Cortante [Ton]
4	2.6961	2.6961
3	2.0562	4.7523
2	3.1458	7.8981
1	1.9512	9.8493

LAS ANTERIORES SOLICITACIONES LATERALES PRODUCEN LOS SIGUIENTES GIROS Y DESPLAZAMIENTOS EN LOS DIFERENTES NUDOS DEL MARCO

NUDO	Despl. X [M]	Despl. Y [M]	Giro [RAD]
1	0.00000	0.00000	0.00000
2	0.00000	0.00000	0.00000
3	0.00630	0.00012	-0.00126
4	0.00630	-0.00012	-0.00126
5	0.01755	0.00023	-0.00114
6	0.01755	-0.00023	-0.00114
7	0.02993	0.00031	-0.00072
8	0.02993	-0.00031	-0.00072
9	0.03698	0.00033	-0.00034
10	0.03698	-0.00033	-0.00034

ELEMENTOS MECANICOS EN LOS EXTREMOS DE LAS BARRAS EN SISTEMA LOCAL DE COORDENADAS Y CON SIGNOS DE ACUERDO A LA CONVENCION DE N/B. FUERZAS EN TONELADAS Y MOMENTOS EN TONELADAS-METRO.

BARRA	FUERZA AXIAL Fx'A	Fx'B	FUERZA CORTANTE Fy'A	Fy'B	MOMENTOS Mom A	Mom B	NUDOS A	B
1	-13.317	13.317	4.925	-4.925	16.378	8.245	1	3
2	0.000	0.000	-5.124	5.124	-17.933	-17.933	3	4
3	13.317	-13.317	4.925	-4.925	16.378	8.245	2	4
4	-8.194	8.194	3.949	-3.949	9.688	10.058	3	5
5	0.000	0.000	-4.495	4.495	-15.733	-15.733	5	6
6	8.194	-8.194	3.949	-3.949	9.688	10.058	4	6
7	-3.699	3.699	2.376	-2.376	5.676	6.205	5	7
8	0.000	0.000	-2.666	2.666	-9.330	-9.330	7	8
9	3.699	-3.699	2.376	-2.376	5.676	6.205	6	8
10	-1.033	1.033	1.348	-1.348	3.125	3.615	7	9
11	0.000	0.000	-1.033	1.033	-3.615	-3.615	9	10
12	1.033	-1.033	1.348	-1.348	3.125	3.615	8	10

REACCIONES EN LOS APOYOS DEL MARCO EN SISTEMA GLOBAL DE COORDENADAS:

NUDO	TIPO DE APOYO	Rx [Ton]	Ry [Ton]	MOMENTO [Ton-M]
1	Cantiliver	-4.9246	-13.3175	16.3782
2	Cantiliver	-4.9246	13.3175	16.3782

COMPROBACION DEL EQUILIBRIO, SUMA DE FUERZAS EN LOS NUDOS LIBRES:

NUDO	Sum. Fx [Ton]	Sum. Fy [Ton]	Sum. Mo [Ton-M]
3	0.9756	-0.0000	0.0000
4	0.9756	-0.0000	0.0000
5	1.5729	-0.0000	0.0000
6	1.5729	-0.0000	0.0000
7	1.0281	0.0000	0.0000
8	1.0281	-0.0000	-0.0000
9	1.3481	-0.0000	0.0000
10	1.3481	0.0000	0.0000

SUMATORIA DE LAS FUERZAS HORIZONTALES DE LOS NUDOS COMPRENDIDOS EN CADA NIVEL

Nivel 4, Nudos: 9, 10
Sum. de Fx en Niv. 4 = 2.6961 Ton

Nivel 3, Nudos: 7, 8
Sum. de Fx en Niv. 3 = 2.0562 Ton

Nivel 2, Nudos: 5, 6
Sum. de Fx en Niv. 2 = 3.1458 Ton

Nivel 1, Nudos: 3, 4
Sum. de Fx en Niv. 1 = 1.9512 Ton

*** FIN DEL ANALISIS ***

DIRECTORIO DE ALUMNOS DEL CURSO "DINAMICA ESTRUCTURAL" IMPARTIDO EN ESTA DIVISION DEL 29 DE JULIO AL 7 DE AGOSTO DEL PRESENTE AÑO.

1.- AGUIAR FALCONI ROBERTO
ESC. POLITECNICA DEL EJERCITO
PROFESOR PRINCIPAL
CENTRAL PAZMIÑO Y AV. GRAN COLOMBIA
QUITO ECUADOR
54-35-00

SAN IGNACIO No. 1010
EDIFICIO PATA DE CUAPUCO DEPTO. 5
QUITO ECUADOR
23-50-16

2.- AMADO ZOGBE JORGE ALEJANDRO
IMPRES INSTITUTO NAC.

3.- ARNOLD OJEDA CARLOS
ESC. DE ING. CIVIL UNIV. GUANAJUATO
PROFESOR DE TIEMPO COMPLETO
AV. JUAREZ No. 77
GUANAJUATO, GTO. 36000
2-07-79

AV. JUAREZ No. 226
36000 GUANAJUATO, GTO.

4.- BRINDIS SANDOVAL OTHON
INSTITUTO MEXICSNO DEL PETROLEO
EJE CENTRAL LAZARO CARDENAS No. 152
07730 MEXICO, D. F.
567-66-00

SINALOA No. 175-A
DELEGACION CUAUHTEMOC
06700 MEXICO, D.F.
553-08-31

5.- CARDENAS ORDOÑEZ HAROLD
UNIVERSIDAD DEL VALLE
CD. UNIVERSITARIA MELENDEZ
CALI COLOMBIA
APARTADO AEREO 25360
39-24-50

AV. UNIVERSIDAD No. 1923 EDIF. F
DEPTO. 1001
COL. COPILCO
DELEGACION COYOACAN
04360 MEXICO, D.F.

6.- CASTELLANOS PEDRO PABLO
PILOTES DE CONTROL, S.A.

7.- CRUZ CLEMENTE MARIO
INSTITUTO TECNOLOGICO DE OAXACA
PROFESOR INVESTIGADOR
CALZ. TECNOLOGICO Y CALZ. WILFRIDO MATIEU
OAXACA, OAX.

ANDADOR DEL VALLE MANZANA D-10
UNIDAD GUELAGUETZA INFONAVIT
OAXACA, OAX.

8.- CHAVEZ LOPEZ GABRIELA
INSTITUTO DE INGENIERIA
BECARIA DE TESIS
CD. UNIVERSITARIA
DELEGACION COYOACAN
548-11-35

AV. IV No. 14
COL. EDUCACION
DELEGACION COYOACAN
04400 MEXICO, D.F.
549-53-32

9.- DOMINGUEZ HERNANDEZ OSCAR
INSTITUTO DE INGENIERIA

10.- ESPINACE ABARZUA RAUL
U. CATOLICA DE VALPARAISO-CHILE
ACADEMICO
AV. BRASIL No. 3157
VALPARAISO, CHILE
25-73-33

CAMINO REAL No. 2080 No. 33
VIÑA DEL MAR CHILE

11.- FERNANDEZ PEREZ J. ROBERTO
COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD

12.- FIGUEROA PIEDRA JOSE ANTONIO
DIRAC, S.A.
CALCULISTA
INSURGENTES SUR No. 1188
COL. DEL VALLE
DELEGACION BENITO JUAREZ
598-49-48

NEAMEL No. 46
COL. SANTO DOMINGO
DELEGACION COYOACAN
04360 MEXICO, D.F.
554-55-18

13.- GARCIA ORTIZ GUADALUPE
INSTITUTO TEC. DE CD. MADERO
CATEDRATICO
AV. 1o. DE MAYO S/N
CD. MADERO, TAMPS.

MORELOS 219 NTE 3B
COL. UNIDAD NACIONAL
CD. MADERO, TAMPS. 89410

14.- GARCIA HERNANDEZ ANDRES BENIGNO
S. C. T.

15.- GOMEZ BARRETO JOSE
COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD

16.- GIL ZEPEDA SOTERO ALEJANDRO
INSTITUTO TEC. DE TEHUACAN
PROFESOR TIEMPO COMPLETO
KM. 3 CARR. HUAJUAPAN DE LEON
APARTADO POSTAL No. 247
TEHUACAN PUEBLA
2-24-48

AV. INDEPENDENCIA OTE. No. 413-A
TEHUACAN, PUE.
22547

17.- HINOJOSA REBOLLAR CARLOS A.
COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD

18.- ISUNZA MOHEDANO FERNANDO
FACULTAD DE INGENIERIA
AYUDANTE DE PROFESOR "B"
CD. UNIVERSITARIA
DELEGACION COYOACAN
550-52-15 ext. 3733

XANTEN MAN D-16 LOTE 2
COL. ARENAL 1a. SECCION
DELEGACION VENUSTIANO CARRANZA
15600 MEXICO, D.F.
763-88-29

19.- JARITZ OLIVARES ERNESTO
PETROLEOS MEXICANOS
CONSULTOR TECNICO ESP. "A"
EJERCITO NACIONAL No. 216-1er. PISO
COL. ANZURES
545-85-60

TORTOLAS No. 45
LAS ALAMEDAS
ATIZAPAN DE ZARAGOZA
54500 EDO. DE MEXICO
822-46-95

20.- JIMENEZ AQUINO CECILIO
INSTITUTO TECNOLOGICO DEL ISTMO
DOCENCIA
KM. 821 CARRET. PANAMERICANA
JUCHITAN OAX. 70000

FCO. I MADERO No. 21 SUR
JUCHITAN, OAX. 70000

21.- LAFUENTE SANGUINETTI MARIANELA
IMME-MCV
PROFESOR ASISTENTE
PLAZA LAS TRES ARALIAS
LOS CHAGUARAMOS, CARACAS, VEN.
662-75-38

C. CAMANA LOS ALBAMAS
EL CAFETAL
CARACAS, VENEZUELA

22.- MARTINEZ ESQUIVEL VICTOR HUGO
I. M. P.
ING.
EJE CENTRAL LAZARO CARDENAS 152

VALLE DE WESER No. 98
VALLE DE ARAGON
55280 EDO. DE MEXICO
567-66-00 ext. 20559

23.- MELGAREJO ARISTIZABAL IVAN
UNIVERSIDAD NACIONAL
INGENIERO DE LABORATORIO
BOGOTA, D. F.

24.- MIJANGOS BENITEZ ALVARO
DIRAC, S. A. DE C. V.
INGENIERO
INSURGENTES SUR No. 1188-1er. PISO
COL. TLACOQUIMECATL
DELEGACION BENITO JUAREZ
559-39-95

25.- MILLAN TOLEDO FELIX
DEPTO. DEL DISTRITO FEDERAL
DIREC. DESECHOS SOLIDOS
JEFE OFICINA INGENIERIA
SAN ANTONIO ABAD No. 122-6o. PISO
COL. TRANSITO
588-33-17 ext. 138

CALLE 15 No. 542
COL. STA. CECILIA TLAHUAC
DELEGACION TLAHUAC
03110 MEXICO, D.F.
842-09-64

26.- MORNEO GONZALEZ JORGE ARMANDO
UNIVERSIDAD MICHOACANA

27.- OCADIZ MONTALBAN FERNANDO
DIMENSIONAMIENTOS ESTRUCTURALES
GERENTE DE PROYECTOS
PASEO DEL CANTIL No. 66
BOSQUES DE TETLAMEYA
DELEGACION COYOACAN
559-14-72

STA. LUCIA No. 957-2
COLINA DEL SUR
DELEGACION ALVARO OBREGON
01430 MEXICO, D.F.
680-32-82

28.- PARRA MUNOZ HERIBERTO
INGENIERIA DE SISTEMAS DEL TRANSPORTE METROPOLITANO
JEFE DE SECCION
LEGARIA No. 352
COL. PENSIL
DELEGACION MIGUEL HIDALGO
399-69-22

AV. 6 No. 103
DELEGACION BENITO JUAREZ
03036 MEXICO, D.F.
672-18-46

29.- CARBALLO ONANA MANUEL
PETROLEOS MEXICANOS

30.- PEREZ ARIAS ARTURO
COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD

31.- PREZ CABALLERO FRANCISCO JAVIER
COMISION NAC. DE SEGURIDAD NUCLEAR Y SALVAGUARDIAS
ENCARGADO DE LA RAMA DE ESTRUCTURAS
INSURGENTES SUR No. 1806
COL. FLORIDA
534-87-68

HUANCAYO No. 714
COL. LINDAVISTA
DELEGACION GUSTAVO A. MADERO
07300 MEXICO, D.F.
586-46-64

32.- QUIROZ CERVANTES EMMA
ENEP ARAGON
PROFESOR ASIGNATURA "A"
AV. CENTRAL Y AV. RANCHO SECO S/N

2a. CERRADA DE ALBERTO SALINAS No. 26
COL. AVIACION CIVIL
DELEGACION VENUSTIANO CARRANZA
15740 MEXICO, D.F.
763-37-86

33.- RIOS Y LORENZO JOSE LUIS
UNAM
PROFESOR
KM. 3.5 CUAUTITLAN TEOLOYUCAN
872-33-11

MIRALUNA No. 60
54720 CUAUTITLAN IZCALLI
873-73-79

34.- RODIRGUEZ VEGA MIGUEL ANGEL
U. N. A. M.
PROFESOR
CD. UNIVERSITARIA
[illegible]L. FAC. DE INGENIERIA
COYOACAN
04510 MEXICO, D.F.
550-52-15 ext. 3733

CALLE 49 No. 21
COL. IGNACIO ZARAGOZA
DELEGACION VENUSTIANO CARRANZA
15000 MEXICO, D.F.
762-09-13

35.- SAAVEDRA VASQUEZ WENCESLAO
INSTITUTO TECNOLOGICO DE OAXACA
MAESTRO INVESTIGADOR
CALZ. TECNOLOGICO Y WILFRIDO MASIEU

3a. RPIVADA DE MACEDONIO ALCALA No. 102
COL. DIAZ ORDAZ OAXACA, OAX.

36.- SALINAS SANTOS ROMAN SERGIO
PETROLEOS MEXICANOS
CONSULTOR TECNICO ESPECIALIZADO
MARINA NACIONAL No. 216-1er. PISO
COL. ANZURES
541-85-64

CAMPO MASTA No. 47
COL. SAN ANTONIO
DELEGACION AZCAPOTZALCO
02760 MEXICO, D.F.
561-48-34

37.- SERVIN HERNANDEZ GONZALO
I. C. A.

38.- TORRES CAMARGO ADOLFO
DIREC. GRAL. OBRAS MARITIMAS
JEFE SECCION GOLFO CARIBE
PROVIDENCIA No. 807
COL. DEL VALLE
DELEGACION BENIOT JUAREZ
523-48-53

BALBOA No. 306
DELEGACION BENITO JUAREZ
03300 MEXICO, D.F.
539-04-05

39.- VELA TOLEDO PETRA
INSTITUTO TECNOLOGICO DEL ITSMO
DOCENTE
CARRETERA PANAMERICANA KM. 521
JUCHITAN, OAXACA

ALLENDE No. 35
JUCHITAN, OAX.