Teorema de proyección

Fascículo

Leda Speziale
San Vicente

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería

División de Ciencias Básicas

Teorema de Proyección

Fascículo

Leda Speziale San Vicente

Mayo de 2002

PRESENTACIÓN

La Facultad de Ingeniería ha decidido realizar una serie de ediciones provisionales de obras recientemente elaboradas por académicos de la institución, como material de apoyo para sus clases, de manera que puedan ser aprovechadas de inmediato por alumnos y profesores. Tal es el caso del Fascículo "*Teorema de proyección*", de la Mtra. Leda Speziale San Vicente.

Se invita a los estudiantes y profesores a que comuniquen a la autora las observaciones y sugerencias que mejoren el contenido de la obra, con el fin de que se incorporen en una futura edición definitiva.

Índice

Prólogo

La finalidad de este trabajo es servir de ayuda a los estudiantes de Álgebra Lineal, sobre todo en la parte correspondiente al producto interno y sus aplicaciones inmediatas dentro de la misma asignatura, como son la obtención de bases ortonormales, la proyección de un vector sobre un subespacio, y la determinación del vector que, teniendo ciertas características (perteneciendo a un subespacio), sea el *más próximo* a un vector específico.

Este fascículo está elaborado con la intención de que el lenguaje empleado en él sea, sin perder la formalidad matemática, sencillo, coloquial y accesible a los lectores. Además, la obra contiene un gran número de ejemplos, cuya resolución se efectúa con todo detalle para poder ser seguida sin dificultad.

En la primera sección se presenta un ejemplo simple de geometría relacionado con el tema a tratar. En la segunda se dan, las definiciones de los conceptos fundamentales e indispensables para el desarrollo del tema. En la tercera se expresa lo que es *producto interno* y se presentan varios productos definidos en un mismo espacio, y esto para diferentes espacios, como son los de algunas matrices, y de algunos polinomios, además del de las ternas. En las secciones subsecuentes se plantea la generalización de conceptos geométricos, utilizando en los ejemplos los productos internos presentados en la tercera sección.

Segura de que la intención y la finalidad con las que se elaboró el trabajo no se lograron a plenitud, ni fue posible evitar la presencia de errores, agradeceré profundamente el señalamiento de éstos y las sugerencias para el mejoramiento de la obra que los lectores tengan a bien enviarme.

Por último deseo agradecer a la Facultad de Ingeniería y a sus autoridades la oportunidad que me dieron de escribir este fascículo y de manera muy especial a la ingeniera Cecilia Teresa Carmona Téllez por sus enseñanzas en materia de computación y por el enorme apoyo otorgado cuando realicé la captura del manuscrito.

Leda Speziale San Vicente

Noviembre de 2001

I. Introducción

En geometría se define la distancia de un punto A a una recta L como la magnitud del segmento limitado por el punto A y el punto B , de intersección de la recta L con una perpendicular a ella llevada desde el punto A. Suele llamarse *proyección de A sobre L,* al punto B, que pertenece a la recta L y tiene la particularidad de ser el más cercano a A de todos los puntos de la recta, esto es, cualquier punto diferente de B perteneciente a L, dista de A una magnitud mayor a la del segmento $\overline{AB}$.

Lo anterior es un caso simple del tema que , de manera más amplia y general, se trata en este fascículo.

Una forma analítica de representar un punto, es por medio de una terna de números reales que corresponden a sus coordenadas cartesianas. El punto A , así representado, puede considerarse un elemento (vector) del conjunto (espacio vectorial) de todas las ternas de números reales que se denota con R^3 .
De manera semejante, una recta es el lugar geométrico de los puntos que satisfacen las condiciones expresadas en dos ecuaciones cartesianas (representación analítica de la recta) ; dichos puntos son un subconjunto (que puede ser subespacio, si contiene al origen) del conjunto R^3.

Como ejemplo, obtendremos la proyección B de un punto A con coordenadas (2 , -2 , 4) sobre la recta representada por las dos ecuaciones $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{-3}$

Los puntos de la recta son los elementos del conjunto

$L = \{ (x , y , z) \mid x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{-3} \text{ ; } x,y,z \in R \}$, que es subconjunto (subespacio) de R^3.

L también puede expresarse como $L = \{ (x , 2x , -3x) \mid x \in R \}$.

Buscamos el elemento B de L más cercano a A, que expresado como (2 , -2 , 4), es un elemento de R^3.

Las coordenadas de B, por pertenecer éste a la recta L, son (x , 2x , -3x) ; así la representación analítica del segmento $\overline{AB}$ es (x – 2 , 2x + 2 , -3x – 4) . El segmento $\overline{AB}$ debe ser perpendicular a la recta L, de la cual, uno de sus vectores directores es $\bar{v} = (1 , 2 , -3)$. La perpendicularidad entre $\overline{AB}$ y L, la expresamos igualando a cero el producto escalar de $\overline{AB}$ por $\bar{v}$ de donde es posible obtener las coordenadas del punto B

$$(x - 2 \ , \ 2x + 2 \ , \ -3x - 4) \cdot (1 \ , \ 2 \ , \ -3) = 0 \ ;$$

$$x - 2 + 4x + 4 + 9x + 12 = 0 \ \Rightarrow \ 14x = -14 \ ; \ x = -1$$

Con lo que, las coordenadas del punto B son (-1 , -2 , 3)

Como un segundo ejemplo, obtendremos la proyección Q del punto P(3 , 1 , -2) sobre la recta J representada analíticamente por la ecuación vectorial

$$\overline{p} = (1, -1, 0) + t(2, 3, -1)$$

$$J = \{ (x, y, z) \mid x = 1 + 2t, \ y = -1 + 3t, \ z = -t \ ; \ t \in R \}$$

Las coordenadas de Q, por pertenecer él a J, son $(1 + 2t, -1 + 3t, -t)$

Con lo que $\overline{PQ} = (-2 + 2t, -2 + 3t, 2 - t)$

Un vector director de la recta J es $\overline{u} = (2, 3, -1)$. Por ser $\overline{PQ}$ perpendicular a J :

$\overline{PQ} \cdot \overline{u} = 0$,es decir $-4 + 4t - 6 + 9t - 2 + t = 0 \Rightarrow t = \dfrac{12}{14} = \dfrac{6}{7}$

$\therefore$ Q es el punto cuyas coordenadas son $\left(\dfrac{19}{7}, \dfrac{11}{7}, -\dfrac{6}{7} \right)$

La proyección de un segmento dirigido $\overline{MN}$ sobre un plano π , es el segmento dirigido $\overline{PQ}$ donde P y Q son, respectivamente, las proyecciones de M y N sobre el plano π. Dicho segmento $\overline{PQ}$ (vector) es el que, perteneciendo a π, tiene una distancia a $\overline{MN}$ (vector) que es la mínima de las distancias de los segmentos de π a $\overline{MN}$.

Los problemas geométricos expresados en los párrafos anteriores se pueden extender a la noción general de vector que se estudia en álgebra lineal, por medio del concepto de *producto interno* en un espacio vectorial.

II. Definiciones Preliminares

Espacio Vectorial sobre un Campo

Un espacio vectorial es un conjunto V acompañado de un sistema algebraico (K , + , ·) con estructura de campo. El conjunto llamado espacio vectorial sobre el campo, debe ser tal que:

- en él esté definida una operación + llamada *adición* que forme con el conjunto un sistema algebraico (V ; +) con estructura de *grupo abeliano.*

- esté definida un regla (seudo-operación) llamada *multiplicación por un escalar,* aplicable a dos elementos: el primero perteneciente al campo K y el segundo al espacio V, tal que el resultado sea un elemento del espacio V, y que además satisfaga las siguientes condiciones:

  $\forall\ \alpha , \beta \in \mathrm{K}$ y $\forall\ \bar{u}\ , \bar{v} \in \mathrm{V}$
  - $(\alpha + \beta)\ \bar{u} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{u}$
  - $\alpha\ (\bar{u} + \bar{v}) = \alpha\bar{u} + \beta\bar{v}$
  - $\alpha(\beta\bar{u}) = (\alpha\beta)\ \bar{u}$
  - si 1 es la unidad de K entonces $1\bar{v} = \bar{v}$

En otras palabras, *espacio vectorial* es un conjunto en el que se satisfacen *diez* condiciones: cinco respecto a la estructura de grupo abeliano con la adición y las otras cinco que involucran la multiplicación por un escalar.

Vector y escalar

Se llama *vector*, a todo elemento de un espacio vectorial.
Escalar es todo elemento del campo .

Ejemplo : El conjunto P_{3C} de los polinomios de grado menor o igual a tres, con coeficientes complejos es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales, y respecto a las operaciones de adición y multiplicación por un escalar usuales en los polinomios. Por lo que, $(3 - \mathrm{i})\ x^3 + 2\ x^2 - 4\ \mathrm{i}\ x + (1 + 7\mathrm{i})$ es un vector del mencionado espacio, y los números reales, por ejemplo, 5 , 6 , -1 son escalares.

El elemento idéntico respecto a la adición en todo espacio recibe el nombre de *vector nulo o vector cero.*

Subespacio

Un subconjunto de un espacio vectorial V sobre un campo, tal que, respecto al mismo campo y a las mismas adición y multiplicación por un escalar del espacio, es por sí mismo un espacio, se dice que es un subespacio del espacio V.

En otras palabras, *subespacio* de V es un subconjunto de V que cumple las diez condiciones de espacio, respecto a los *escalares, la adición y la multiplicación por escalar* del espacio V.

Ejemplo : $A = \{ ax^2 + 3bx + a+b \mid a, b \in C \}$, subconjunto de P_{3C} , satisface las diez condiciones de espacio para el campo de los reales , la adición y multiplicación por escalar usuales en los polinomios. Por lo tanto A es un subespacio de P_{3C} .

El subconjunto de un espacio que contiene sólo al vector nulo, es un subespacio que recibe el nombre de *espacio nulo*.

Combinación lineal

Una combinación lineal de n vectores es una *suma* de n sumandos, donde cada sumando está formado por uno de los vectores multiplicado por un escalar, pero ninguno de los n vectores está en más de un sumando.

Ejemplo : Una combinación lineal de los vectores
$\bar{a} = x^2 + 2$; $\bar{b} = -x + 5$; $\bar{c} = 3x^2 + 2x - 1$ es :

$$3\bar{a} - \bar{b} + 4\bar{c} = (3x^2+6)+(x-5)+(12x^2+8x-4) = 15x^2+9x-3$$

otra combinación de los mismos vectores es: $0\bar{a} + 7\bar{b} + 0\bar{c} = 7\bar{b} = -7x + 35$

otra más es : $-2\bar{a} + 5\bar{b} = -2x^2 - 5x + 21$

Dependencia lineal

Un vector depende linealmente de otros, si él puede expresarse como una combinación lineal de esos otros.

Como ejemplo, el vector $15x^2 + 9x - 3$ del ejemplo anterior, depende linealmente de los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$.

El vector nulo, siempre puede expresarse como combinación lineal de otros vectores, ya que : $\bar{0} = 0\overline{v_1} + 0\overline{v_2} + \cdots + 0\overline{v_n}$

Por lo que , el vector nulo *siempre* es linealmente dependiente de otros vectores.

Conjunto Linealmente Dependiente

Un conjunto de vectores es *linealmente dependiente* si *al menos* uno de sus elementos puede expresarse como combinación lineal de los otros.
Todo conjunto que contiene al vector nulo es linealmente dependiente.

En particular, si el conjunto *sólo* contiene al vector nulo, se considera linealmente dependiente.

Conjunto Linealmente Independiente

Un conjunto de vectores es *linealmente independiente* si *ninguno* de sus vectores puede expresarse como combinación lineal de los otros del conjunto. Es decir, es independiente si no es dependiente.

En particular, si el conjunto tiene sólo un elemento y él es un vector diferente del vector cero o nulo, dicho conjunto se considera linealmente independiente .

Un método para determinar si un conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente, consiste en plantear la llamada *ecuación de dependencia lineal* del conjunto, que para el conjunto $\{ \overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n} \}$ es: $\alpha_1 \overline{v_1} + \alpha_2 \overline{v_2} + \cdots + \alpha_n \overline{v_n} = \overline{0}$. Si dicha ecuación tiene como *única* solución la trivial, es decir $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, entonces el conjunto es linealmente independiente. En caso contrario es dependiente.

Conjunto Generador

Un conjunto G es generador de un espacio V, si G es un subconjunto de V y además, *todo* elemento de V puede expresarse como una combinación lineal de los elementos de G.

Ejemplo: El conjunto $G = \{ x^2 + 2 , -x^2 , 7 \}$ es generador del espacio $T = \{ ax^2 + b \mid a , b \in R \}$, ya que, además de que G es un subconjunto de T, $\forall\, a , b \in R$, siempre existen α_1 , α_2 y α_3 tales que:

$$\alpha_1 (x^2 + 2) + \alpha_2 (-x^2) + \alpha_3 (7) = a x^2 + b$$

Para determinar las alfas, se debe resolver el sistema:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = a \text{ --------- } (1)$$
$$2\alpha_1 + 7\alpha_3 = b \text{ --------- } (2)$$

Restando de (2) la ecuación (1) multiplicada por dos , se obtiene $7\alpha_3 + 2\alpha_2 = b - 2a$

$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{2}(b - 2a - 7\alpha_3)$; de (1) $\alpha_1 = a + \alpha_2$

El sistema es compatible, aunque indeterminado, ya que para cada valor real de α_3 se obtiene un α_2 y, por ende un α_1.

Sin embargo, G no es generador del espacio $P_2 = \{ ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in R \}$, pues si $b \neq 0$, *no* existen alfas tales que $\alpha_1(x^2 + 2) + \alpha_2(-x^2) + \alpha_3(7) = ax^2 + bx + c$.

Base de un Espacio

Se llama *base* de un espacio V, a un conjunto de vectores que sea generador de V y además, linealmente independiente.

Ejemplo: Una base del espacio $P_2 = \{ ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in R \}$, es el conjunto $\{ x^2 , x , 1 \}$. Otra base del mismo espacio es : $\{ x^2 + x + 1 , -x + 7 , -2x^2 + x - 3 \}$

En particular, el *espacio nulo* no tiene base. Pero, salvo dicho espacio, todos los demás tienen una infinidad de bases.

Todas las bases de un mismo espacio tienen el mismo número de elementos, es decir, tienen la misma cardinalidad.

Dimensión de un Espacio

La *dimensión* de un espacio V es el *número* de elementos (cardinalidad) de cualquiera de sus bases. Se expresa con el símbolo dim V.

Ejemplo: La dimensión del espacio P_2 de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales es tres, lo que se expresa con $\dim P_2 = 3$.

En particular, la dimensión del *espacio nulo* (que no tiene bases) se considera, por definición, igual al *número* cero, esto es $\dim \{ \overline{0} \} = 0$.

III. Producto Interno

Un producto interno en un espacio vectorial es una regla que se aplica a una pareja ordenada de vectores de ese espacio y con la cual se obtiene uno y sólo un escalar del campo sobre el que está definido el espacio. Es decir, si el espacio es V sobre el campo K, *un producto interno* es una *función* cuyo dominio es el conjunto $V \times V$ (conjunto de todas las parejas ordenadas de vectores de V) y cuyo codominio es el conjunto K

$$f : V \times V \rightarrow K$$

Además, dicha regla (función) debe satisfacer cuatro condiciones (axiomas) que corresponden exactamente a las que satisface el producto punto o *producto escalar* definido en el conjunto de ternas de números reales (espacio R^3 sobre el campo de los reales).

Si K es el campo de los complejos, α un escalar cualquiera de K y $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ son elementos cualesquiera de V, entonces el resultado de aplicar la regla a una pareja ordenada de elementos de V es un número complejo que debe cumplir, para ser producto interno en V, las siguientes condiciones :

$$f(\bar{u}, \bar{v}) = \overline{f(\bar{v}, \bar{u})} \qquad \text{(conjugado de } f(\bar{v}, \bar{u}) \text{)}$$

$$f(\bar{u}, \bar{v} + \bar{w}) = f(\bar{u}, \bar{v}) + f(\bar{u}, \bar{w})$$

$$f(\alpha \bar{u}, \bar{v}) = \alpha\, f(\bar{u}, \bar{v})$$

$$f(\bar{u}, \bar{u}) > 0 \quad \forall\, \bar{u} \neq \bar{0}$$

En un espacio vectorial se pueden definir más de un producto interno, por ejemplo en R^3, además del producto punto, la función

$f : R^3 \times R^3 \rightarrow R$ tal que, para $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$f(\bar{u}, \bar{v}) = u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + 2u_2 v_1 + 2u_3 v_2 + 2u_2 v_3 + u_1 v_3 + u_3 v_1 + 7u_2 v_2 + 2u_3 v_3$$

satisface las cuatro condiciones para ser producto interno. Aquí, comprobaremos sólo la cuarta de ellas

$$\begin{aligned} f(\bar{u}, \bar{u}) &= u_1^2 + 2u_1 u_2 + 2u_2 u_1 + 2u_2 u_3 + 2u_3 u_2 + u_1 u_3 + u_3 u_1 + 7u_2^2 + 2u_3^2 \\ &= u_1^2 + 4u_1 u_2 + 4u_2 u_3 + 2u_1 u_3 + 4u_2^2 + u_3^2 + 3u_2^2 + u_3^2 \\ &= (u_1 + 2u_2 + u_3)^2 + 3u_2^2 + u_3^2 > 0 , \qquad \forall\ \bar{u} \neq (0,0,0) \end{aligned}$$

Por lo tanto la función f define un producto interno en R^3, diferente del producto escalar.

Otro producto interno en R^3 puede definirse con la función $g : R^3 \times R^3 \rightarrow R$, tal que para $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $g(\bar{u}, \bar{v}) = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 6u_3v_3$

Existen varias notaciones para expresar el producto interno de los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ de un espacio, algunas de ellas son : $(\bar{u}, \bar{v})$; $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$; $\langle \bar{u} \mid \bar{v} \rangle$; $(\bar{u} \mid \bar{v})$ entre otras. En este fascículo usaremos la notación $(\bar{u} \mid \bar{v})$.

Para los vectores $\bar{u} = (1, -1, 2)$ y $\bar{v} = (3, 2, -1)$ de R^3, se obtiene :con el producto escalar $(\bar{u} \mid \bar{v}) = 3 - 2 - 2 = -1$

con la función f, $(\bar{u} \mid \bar{v}) = 3 + 2(2) + 2(-3) + 2(4) + 2(1) + (-1) + (6) + 7(-2) + 2(-2) =$
$= 3 + 4 - 6 + 8 + 2 - 1 + 6 - 14 - 4 = -2$

con la función g, $(\bar{u} \mid \bar{v}) = 2(3) + (-2) + 6(-2) = 6 - 2 - 12 = -8$

Como puede notarse, para los mismos vectores se obtienen escalares diferentes al utilizar productos internos distintos.

En el espacio de las ternas de números complejos sobre el campo complejo $C^3(C)$, un producto interno para $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ se define con :

$(\bar{u} \mid \bar{v}) = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + u_3\bar{v}_3$ -------------- (1) donde $\bar{v}_1$ expresa el conjugado de la primera componente del vector $\bar{v}$, $\bar{v}_2$ el conjugado de la segunda componente y $\bar{v}_3$ el conjugado de v_3. A este producto se le acostumbra llamar el *producto interno usual en C^3*.

Otro producto en el mismo espacio, es el definido con

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = 3u_1\bar{v}_1 + 2u_2\bar{v}_2 + 4u_3\bar{v}_3 \quad \text{----------} \quad (2)$$

Para los vectores de C^3 $\bar{u} = (i, 1+3i, -2)$ y $\bar{v} = (0, 3-i, -1+i)$

Con el producto interno usual $(\bar{u} \mid \bar{v}) = i(0) + (1+3i)(3+i) + (-2)(-1-i) =$
$= 0 + (3+3i^2 + i + 9i) + (2+2i) = 2 + 12i$

con la regla (2) $(\bar{u} \mid \bar{v}) = 3(0) + 2(10i) + 4(2+2i) = 8 + 28i$

En el espacio P_2 de los polinomios de grado menor o igual a 2 con coeficientes reales, se tienen entre otros, los productos internos definidos para

$$\overline{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad ; \quad \overline{q} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

con las siguientes reglas : $\left(\overline{p} \mid \overline{q} \right) = \sum_{k=0}^{2} p(k)\,q(k)$ ------------ (1)

$$\left(\overline{p} \mid \overline{q} \right) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k \qquad \text{------------ (2)}$$

Para los polinomios $\overline{p} = 2 - 3x + x^2$; $\overline{q} = 1 + 5x - x^2$

$p(0) = 2$; $q(0) = 1$ $\qquad p(0)q(0) = 2$
$p(1) = 0$; $q(1) = 5$ $\qquad p(1)q(1) = 0$
$p(2) = 0$; $q(2) = 7$ $\qquad p(2)q(2) = 0$

por lo que, con la regla (1) $\left(\overline{p} \mid \overline{q} \right) = 2 + 0 + 0 = 2$

$a_0 = 2$; $b_0 = 1$ $\qquad a_0 b_0 = 2$
$a_1 = -3$; $b_1 = 5$ $\qquad a_1 b_1 = -15$
$a_2 = 1$; $b_2 = -1$ $\qquad a_2 b_2 = -1$

y con la regla (2) $\left(\overline{p} \mid \overline{q} \right) = 2 - 15 - 1 = -14$

En el espacio sobre el campo complejo de las matrices de orden *m por n,* con elementos complejos, un producto interno se define con : $(A \mid B) = \text{tr}(AB^*)$, que dicho con palabras, es la traza de la matriz resultante de multiplicar (con la multiplicación común de matrices) el primer factor por la conjugada transpuesta del segundo factor. Así, para las matrices A , B y D de orden 2 x 3 , siguientes

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2i & -3 \\ 0 & -2+3i & -1-i \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2-i & -2i \\ 1+2i & -2+i & 0 \end{bmatrix} ; \quad D = \begin{bmatrix} i & 5 & -2+2i \\ -3 & 0 & 1-3i \end{bmatrix}$$

$$(A \mid B) = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} 1+i & 2i & -3 \\ 0 & -2+3i & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1-2i \\ 2+i & -2-i \\ 2i & 0 \end{bmatrix} \right) = \text{tr} \begin{bmatrix} 2+2i & \cdots \\ \cdots & 7-4i \end{bmatrix}$$

En virtud de que para calcular la traza de una matriz, sólo interesan los elementos de la diagonal principal, los elementos fuera de ella no se obtienen y se representan con ...

$$(A \mid B) = 2 + 2i + 7 - 4i = 9 - 2i$$

$$(A \mid D) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1+i & 2i & -3 \\ 0 & -2+3i & -1-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -i & -3 \\ 5 & 0 \\ -2-2i & 1+3i \end{bmatrix}\right)$$

$$= \operatorname{tr}\begin{bmatrix} -i+1+10i+6+6i & \cdots \\ \cdots & 0+0-1+3-i-3i \end{bmatrix} = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} 7+15i & \cdots \\ \cdots & 2-4i \end{bmatrix}$$

$$(A \mid D) = 9 + 11i$$

IV. Ortogonalidad

El concepto geométrico de perpendicularidad de vectores expresado con $\overline{u} \cdot \overline{v} = 0$ se generaliza con el concepto de ortogonalidad (referido a un producto interno determinado), como sigue : *dos vectores son ortogonales si su producto interno es cero.*

Los vectores $\overline{u} = (1\,,-1\,,0)$, $\overline{v} = (0\,,1\,,-5) \in \mathrm{R}^3$ geométricamente no son perpendiculares, ya que $\overline{u} \cdot \overline{v} = -1$; sin embargo, son ortogonales respecto al producto interno definido anteriormente con la función f, pues :

$$f(\overline{u}\,,\overline{v}) =$$

$$= (1)(0) + 2(1)(1) + 2(-1)(0) + 2(0)(1) + 2(-1)(-5) + (1)(-5) + (0)(0) + 7(-1)(1) + 2(0)(-5) =$$

$$= 0 + 2 + 0 + 0 + 10 - 5 + 0 - 7 + 0 = 0$$

El vector $\overline{w} = (1\,,1\,,-2) \in \mathrm{R}^3$ es tal que :

$$\overline{u} \cdot \overline{w} = 0 \text{ ; pero } \quad f(\overline{u}\,,\overline{w}) = 1 + 2 - 2 + 0 + 4 - 2 + 0 - 7 + 0 = -4 \neq 0$$

$$\text{y} \qquad g(\overline{u}\,,\overline{w}) = 2(1) + (-1) + 6(0) = 1 \neq 0$$

por lo que, los vectores $\overline{u}$ y $\overline{w}$ no son ortogonales respecto a los productos internos definidos con las funciones f y g (expresadas en la sección III), aunque sí lo son respecto al producto escalar o *producto interno usual* en R^3

En el espacio de matrices de igual orden y con elementos complejos, la matriz A es ortogonal a la matriz F, respecto al producto interno $(A \mid B) = \mathrm{tr}(AB^*)$, si

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2i & -3 \\ 0 & -2+3i & -1-i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad F = \begin{bmatrix} 4 & 2-i & -2i \\ 3-2i & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{debido a que :}$$

$$(A \mid F) = \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 1+i & 2i & -3 \\ 0 & -2+3i & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3+2i \\ 2+i & 0 \\ 2i & 2 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \mathrm{tr}\begin{bmatrix} 4+4i+4i-2-6i & \cdots \\ \cdots & 0+0-2-2i \end{bmatrix} = 2 + 2i - 2 - 2i = 0$$

V. Conjunto Ortogonal

Un conjunto se dice que es ortogonal respecto a un producto interno, si todo vector de dicho conjunto es ortogonal a cada uno de los otros vectores del conjunto.

Ejemplo : El conjunto A $\{ \overline{a}_1 , \overline{a}_2 , \overline{a}_3 \} = \{ (1,-1,2), (1,1,0), (1,-1,-1) \}$ es ortogonal respecto al producto escalar en R^3 , ya que :

$$\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_2 = (1,-1,2) \cdot (1,1,0) = 1 - 1 + 0 = 0$$
$$\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_3 = (1,-1,2) \cdot (1,-1,-1) = 1 + 1 - 2 = 0$$
$$\overline{a}_2 \cdot \overline{a}_3 = (1,1,0) \cdot (1,-1,-1) = 1 - 1 + 0 = 0$$

También el conjunto $S = \{ x^2 - x + 2 \ , \ -x^2 + 3x + 2 \ , \ -4x^2 - 2x + 1 \} = \{ \overline{s}_1 , \overline{s}_2 , \overline{s}_3 \}$ es ortogonal respecto al producto interno en el espacio de polinomios de grado menor o igual a 2 , definido por

$$(\overline{p} \mid \overline{q}) = \sum_{i=0}^{2} a_i \, b_i \qquad \text{donde} \qquad \overline{p} = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad ; \quad \overline{q} = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

en virtud de que

$$(\overline{s}_1 \mid \overline{s}_2) = 2(2) + (-1)(3) + 1(-1) = 4 - 3 - 1 = 0$$
$$(\overline{s}_1 \mid \overline{s}_3) = 2(1) + (-1)(-2) + 1(-4) = 2 + 2 - 4 = 0$$
$$(\overline{s}_2 \mid \overline{s}_3) = 2(1) + 3(-2) + (-1)(-4) = 2 - 6 + 4 = 0$$

Para formar un conjunto D de vectores de un subespacio, por ejemplo de

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \middle| \ a,b,c, \in R \right\}$$ que es subespacio del espacio M de matrices de dos por dos con elementos reales, que sea ortogonal respecto a un producto interno, por ejemplo el definido en M para $A , B \in M$ por $(A \mid B) = tr (AB^T)$, se considera como primer elemento un vector $\overline{d}_1$ que pertenezca a H , digamos $\overline{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, luego se determina un segundo vector $\overline{d}_2 \in H$ tal que $(\overline{d}_1 \mid \overline{d}_2) = 0$, esto es

$$\overline{d}_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \quad \text{tal que} \quad tr \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & -a \end{bmatrix} = tr \begin{bmatrix} a - b & \cdots \\ \cdots & 2c + a \end{bmatrix} = a - b + 2c + a$$

$2a - b + 2c = 0$ o sea $b = 2a + 2c$; para cada pareja de valores de a y c existe un valor de b, es decir, existe una infinidad de posibles vectores $\overline{d}_2$ ortogonales a $\overline{d}_1$, si hacemos $a = -2$; $c = 1$, entonces

$b = -4 + 2 = -2 \quad y \quad \overline{d}_2 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Si buscamos un tercer vector $\overline{d}_3$, él debe, además de pertenecer a H, ser tal que $(\overline{d}_1 \mid \overline{d}_3) = 0$ y $(\overline{d}_2 \mid \overline{d}_3) = 0$, por lo que, al ser $\overline{d}_3 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, por la ortogonalidad con $\overline{d}_1$, $b = 2a + 2c$ y por la ortogonalidad con $\overline{d}_2$,

$$\operatorname{tr}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & -a \end{bmatrix} = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} -2a-2b & \cdots \\ \cdots & c-2a \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -4a - 2b + c = 0$$

sustituyendo, en la igualdad inmediata anterior, la variable b por $2a + 2c$, resulta

$$-4a - 4a - 4c + c = 0 \Rightarrow a = \frac{-3}{8}c$$

si hacemos $c = 8$ resulta $a = -3$; $b = 10$ con lo que $\overline{d}_3 = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

Al buscar un cuarto vector $\overline{d}_4 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ ortogonal a $\overline{d}_3$ se tiene

$\operatorname{tr}\begin{bmatrix} -3 & 10 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & -a \end{bmatrix} = 0$ lo que nos lleva a: $-6a + 10b + 8c = 0$, ecuación que, junto con las correspondientes a la ortogonalidad con $\overline{d}_1$ y $\overline{d}_2$ forma el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2a - b + 2c = 0 \\ -4a - 2b + c = 0 \\ -6a + 10b + 8c = 0 \end{cases}$, que es homogéneo y al resolverlo se obtiene

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 1 \\ -6 & 10 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 7 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{91}{4} \end{bmatrix}$$

por lo que, al ser sistema homogéneo determinado, su única solución es la trivial, es decir, $a = b = c = 0$, y el único vector $\overline{d}_4$ posible es: $\overline{d}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Otro vector ortogonal a los cuatro anteriores es, solamente, el mismo vector nulo.
El número de vectores ortogonales, diferentes del vector cero, de un conjunto, depende de la dimensión del subespacio (en el ejemplo dim H = 3). En general el número de

vectores diferentes del vector cero, que forman un conjunto ortogonal es *menor o igual* a la dimensión del espacio (o subespacio) al que pertenecen. Si el número (cardinalidad del conjunto) de vectores ortogonales diferentes de cero, es *igual* a la dimensión del subespacio, entonces dicho conjunto ortogonal es una base del subespacio, a la que suele llamársele, *base ortogonal.*

Para el ejemplo: $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \right\}$ es una base ortogonal del

subespacio $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \middle| \ a, b, c \in R \right\}$ respecto al producto interno definido por

$(A \mid B) = tr(AB^T)$

El subespacio $A = \{ ax^2 + bx - 2a + 3b \mid a, b \in R \}$ del espacio P_2 de polinomios de grado menor o igual a dos, tiene dimensión dos, es decir, $\dim A = 2$, por lo que, toda base de A tiene dos elementos.

Podemos determinar una base ortogonal de A respecto al producto interno definido con $(\overline{p} \mid \overline{q}) = \sum_{i=0}^{2} p(i)q(i)$ definiendo un vector $\overline{r_1} \in A$, por ejemplo $\overline{r_1} = 2x^2 + x - 1$ y determinando el segundo $\overline{r_2}$ tal que $(\overline{r_1} \mid \overline{r_2}) = 0$, para ello debemos obtener los valores *a* y *b* en $\overline{r_2} = ax^2 + bx - 2a + 3b$ para que el producto de $\overline{r_1}$ por $\overline{r_2}$ se anule

$\overline{r}_1(0) = -1 \qquad\qquad \overline{r}_2(0) = -2a + 3b$

$\overline{r}_1(1) = 2 + 1 - 1 = 2 \qquad\qquad \overline{r}_2(1) = a + b - 2a + 3b = -a + 4b$

$\overline{r}_1(2) = 8 + 2 - 1 = 9 \qquad\qquad \overline{r}_2(2) = 4a + 2b - 2a + 3b = 2a + 5b$

$\therefore -1(-2a + 3b) + 2(-a + 4b) + 9(2a + 5b) = (2 - 2 + 18)a + (-3 + 8 + 45)b =$

$= 18a + 50b = 0$ con lo que $b = \dfrac{-18}{50} a = -\dfrac{9}{25} a$; un vector $\overline{r}_2$ ortogonal a $\overline{r}_1$ puede obtenerse con $a = 25$; $b = -9$ o sea: $\overline{r}_2 = 25x^2 - 9x - 77$ y una base ortogonal de A es $B_1 = \{ 2x^2 + x - 1 \ , \ 25x^2 - 9x - 77 \}$.

Respecto al producto interno definido en P_2 por $(\overline{p} \mid \overline{q}) = \sum_{k=0}^{2} \alpha_k \beta_k$ donde

$\overline{p} = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ y $\overline{q} = \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$, considerando como primer vector de la base ortogonal al mismo $\overline{r_1}$ del ejemplo anterior, el segundo vector debe ser tal que $(\overline{r_1} \mid \overline{r_2}) = 0$, o sea :

-1 (-2a + 3b) + (1) b + (2) a = 4a - 2b = 0 $\Rightarrow$ b = 2a , por lo que , si a = 1 entonces b = 2 y un vector $\overline{r_2}$ es $x^2 + 2x + 4$.

La base ortogonal correspondiente es $B_2 = \{ 2x^2 + x - 1 \ , \ x^2 + 2x + 4 \}$

En el espacio sobre el campo complejo, de matrices de orden 2 x 3 con elementos complejos, un subespacio es $J = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2a & 0 \\ b & 0 & -3b \end{bmatrix} \middle| \ a, b \in C \right\}$. Podemos obtener una base ortogonal de J, respecto al producto interno (A | B) = tr (AB*), para ello consideramos un elemento cualquiera de J diferente del vector nulo, por ejemplo:

$\overline{j_1} = \begin{bmatrix} 1+i & 2+2i & 0 \\ -i & 0 & 3i \end{bmatrix}$ y determinamos los elementos de la matriz $\overline{j_2}$ que perteneciendo a J, satisfaga que $(\overline{j_1} \mid \overline{j_2}) = 0$, es decir $\overline{j_2} = \begin{bmatrix} a & 2a & 0 \\ b & 0 & -3b \end{bmatrix}$ tal que

$$\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1+i & 2+2i & 0 \\ -i & 0 & 3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{2a} & 0 \\ 0 & \overline{-3b} \end{bmatrix} \right) = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 5\overline{a} + 5\overline{a}i & \cdots \\ \cdots & -10\overline{b}i \end{bmatrix} = 5\overline{a}(1+i) - 10\overline{b}i = 0 \ ,$$

donde $\overline{a}$ y $\overline{b}$ son, respectivamente , los conjugados de los complejos a y b (elementos de la matriz $\overline{j_2}$). Entonces se tiene : $\overline{a}(1 + i) = 2\overline{b}i \Rightarrow \overline{b} = \frac{1+i}{2i}\overline{a} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)\,\overline{a}$

por lo que, $b = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)\,a$, para $a = 2$, resulta $\overline{j_2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1+i & 0 & -3-3i \end{bmatrix}$ y una base ortogonal de J es $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1+i & 2+2i & 0 \\ -i & 0 & 3i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1+i & 0 & -3-3i \end{bmatrix} \right\}$

VI. Norma. Base ortonormal

Por medio de un producto interno definido en un espacio vectorial, se generaliza la idea geométrica de magnitud de un segmento dirigido (vector de R^3) con el concepto de norma.

Norma de un vector $\bar{v}$, que representamos con $\|\bar{v}\|$, es la raíz cuadrada positiva del producto interno de dicho vector por él mismo $\|\bar{v}\| = \sqrt{(\bar{v} \mid \bar{v})}$

Un vector tiene una norma, en general diferente, para cada producto interno considerado. Así, la norma del vector $\bar{v} = (1 , -1 , 2) \in R^3$, respecto al producto interno usual en R^3 (producto escalar o producto punto) es : $\|\bar{v}\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$.

Sin embargo, respecto al producto en R^3 definido por

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + 2u_2 v_1 + 2u_3 v_2 + 2u_2 v_3 + u_1 v_3 + u_3 v_1 + 7u_2 v_2 + 2u_3 v_3$$

es : $$\|\bar{v}\| = \sqrt{(1)(1)+4(1)(-1)+4(2)(-1)+2(1)(2)+7(-1)(-1)+2(2)(2)} =$$

$$= \sqrt{1-4-8+4+7+8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Para las matrices : $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2i & -3 \\ 0 & -2+3i & -1-i \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 2-i & -2i \\ 1+2i & -2+i & 0 \end{bmatrix}$

Respecto al producto $(A \mid B) = tr (AB^*)$, sus respectivas normas son :

$$\|A\| = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix} 1+i & 2i & -3 \\ 0 & -2+3i & -1-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ -2i & -2-3i \\ -3 & -1+i \end{bmatrix}\right)} = \sqrt{tr\begin{bmatrix} 2+4+9 & \cdots \\ \cdots & 0+13+2 \end{bmatrix}}$$

$$\|A\| = \sqrt{30}$$

$$\|B\| = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix} 4 & 2-i & -2i \\ 1+2i & -2+i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1-2i \\ 2+i & -2-i \\ 2i & 0 \end{bmatrix}\right)} = \sqrt{tr\begin{bmatrix} 16+5+4 & \cdots \\ \cdots & 5+5+0 \end{bmatrix}}$$

$\| B \| = \sqrt{35}$

Respecto al mismo producto interno, la norma de las matrices $\overline{j}_1 = \begin{bmatrix} 1+i & 2+2i & 0 \\ -i & 0 & 3i \end{bmatrix}$

y $\overline{j_2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1+i & 0 & -3-3i \end{bmatrix}$, son

$$\| \overline{j_1} \| = \sqrt{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1+i & 2+2i & 0 \\ -i & 0 & 3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-i & i \\ 2-2i & 0 \\ 0 & -3i \end{bmatrix} \right)} = \sqrt{\operatorname{tr}\begin{bmatrix} 2+8 & \cdots \\ \cdots & 1+9 \end{bmatrix}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\| \overline{\mathrm{j}_2} \| = \sqrt{\operatorname{tr}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1+i & 0 & -3-3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 4 & 0 \\ 0 & -3+3i \end{bmatrix}} = \sqrt{\operatorname{tr}\begin{bmatrix} 4+16 & \cdots \\ \cdots & 2+18 \end{bmatrix}} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Para la matriz $\overline{m} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ respecto al producto $(A \mid B) = \operatorname{tr} (AB^T)$

$$\| \overline{m} \| = \sqrt{tr\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}} = \sqrt{tr\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 13 \end{bmatrix}} = \sqrt{15}$$

respecto al producto definido por $\left(\begin{bmatrix} c & d \\ e & f \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} g & h \\ j & k \end{bmatrix} \right) = \mathrm{cg} + \mathrm{dh} + 3\mathrm{ej} + 2\mathrm{fk}$

$$\| \overline{m} \| = \sqrt{(1)(1) + (-1)(-1) + 3(3)(3) + 2(2)(2)} = \sqrt{1+1+27+8} = \sqrt{37}$$

Si la norma de un vector es *uno* , se dice que ese vector es *unitario.*

Por ejemplo, el vector $\overline{v} \in \mathrm{R}^3$; $\overline{v} = (-\frac{1}{2} , \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, tiene, respecto al producto usual en

R^3 , la norma $\|\overline{v}\| = \sqrt{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) + (\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2}) + (0)(0)} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+0} = \sqrt{1} = 1$,

por lo que es unitario respecto a dicho producto usual.

A un vector como $\overline{m} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \neq \overline{0}$ podemos multiplicarlo por el escalar recíproco

de su norma, $\dfrac{1}{\sqrt{37}}$ en este caso, y obtendremos el vector :

$\overline{m_n} = \dfrac{1}{\sqrt{37}}\,\overline{m} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{37}} & -\frac{1}{\sqrt{37}} \\ \frac{3}{\sqrt{37}} & \frac{2}{\sqrt{37}} \end{bmatrix}$ cuya norma es $\|\overline{m_n}\| = \dfrac{1}{\sqrt{37}}\sqrt{37} = 1$, es decir $\overline{m_n}$ es unitario.

Al proceso efectuado con $\overline{m}$ suele llamársele *normalización* y es aplicable a todo vector *diferente* del *vector nulo*. Así , es posible normalizar a todos los elementos diferentes de cero de un conjunto y si éste es ortogonal, al obtenido se le llama *ortonormal.*

El conjunto $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \right\} = \{ \overline{b_1} , \overline{b_2} , \overline{b_3} \}$ base

ortogonal del espacio $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \middle| \; a , b , c \in R \right\}$ puede normalizarse,

multiplicando a cada uno de los elementos $\overline{b_1}$, $\overline{b_2}$, $\overline{b_3}$ por el recíproco de su norma , como lo hacemos a continuación

$$\|\overline{b_1}\|^2 = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} 1+1 & \cdots \\ \cdots & 4+1 \end{bmatrix} = 2+5 = 7 \;\Rightarrow\; \|\overline{b_1}\| = \sqrt{7}$$

$$\|\overline{b_2}\|^2 = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} 4+4 & \cdots \\ \cdots & 1+4 \end{bmatrix} = 8+5 = 13 \;\Rightarrow\; \|\overline{b_2}\| = \sqrt{13}$$

$$\|\overline{b_3}\|^2 = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} -3 & 10 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} 9+100 & \cdots \\ \cdots & 64+9 \end{bmatrix} = 109+73 = 182$$

$$\therefore \quad \| \overline{b_3} \| = \sqrt{182}$$

El conjunto B normalizado es : $B_n = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{-1}{\sqrt{7}} \\ \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{-1}{\sqrt{7}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}} \\ \frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{182}} & \frac{10}{\sqrt{182}} \\ \frac{8}{\sqrt{182}} & \frac{3}{\sqrt{182}} \end{bmatrix} \right\}$

que es una base *ortonormal* de H.

De manera semejante es posible normalizar las bases B_1 y B_2 del subespacio

$$A = \{ ax^2 + bx - 2a + 3b \mid a, b \in R \}$$

Para $B_1 = \{ 2x^2 + x - 1 \ , \ 25x^2 - 9x - 77 \} = \{ b_1 , b_2 \}$ base ortogonal respecto a

$$(\overline{p} \mid \overline{q}) = \sum_{i=0}^{2} p(i)q(i) \qquad \| b_1 \| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 9^2} = \sqrt{86}$$

$$\| b_2 \| = \sqrt{(-77)^2 + (-61)^2 + (5)^2} = \sqrt{9675} = 15\sqrt{43}$$

por lo que , una base ortonormal es

$$B_{1n} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{86}} x^2 + \frac{1}{\sqrt{86}} x - \frac{1}{\sqrt{86}} \ , \ \frac{5}{3\sqrt{43}} x^2 - \frac{3}{5\sqrt{43}} x - \frac{77}{15\sqrt{43}} \right\}$$

Para $B_2 = \{ 2x^2 + x - 1 \ , \ x^2 + 2x + 4 \}$ base ortogonal de A respecto a

$$(\overline{p} \mid \overline{q}) = \sum_{k=0}^{2} \alpha_k \beta_k$$

$$\| 2x^2 + x - 1 \| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\| x^2 + 2x + 4 \| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

y la base ortonormal correspondiente es

$$B_{2n}=\left\{\frac{2}{\sqrt{6}}x^2+\frac{1}{\sqrt{6}}x-\frac{1}{\sqrt{6}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{21}}x^2+\frac{2}{\sqrt{21}}x+\frac{4}{\sqrt{21}}\right\}$$

La base ortogonal del subespacio J , $\{\ \overline{j_1}\,,\overline{j_2}\ \}$, también puede normalizarse y se obtiene :

$$B_n=\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{5}}+\frac{1}{2\sqrt{5}}i & \frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}i & 0\\ -\frac{1}{2\sqrt{5}}i & 0 & \frac{3}{2\sqrt{5}}i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & 0\\ \frac{1}{2\sqrt{10}}+\frac{1}{2\sqrt{10}}i & 0 & \frac{-3}{2\sqrt{10}}-\frac{3}{2\sqrt{10}}i\end{bmatrix}\right\}$$

que es una base ortonormal de J.

A partir de un conjunto generador de un espacio es posible obtener un generador ortogonal, por medio del método conocido como *proceso de Gram-Schmidt* *; eliminando del generador obtenido a los vectores nulos, si los hay, se obtiene una base ortogonal, que al normalizarla determina una base *ortonormal.*

---

* Solar – Speziale
Apuntes de Álgebra Lineal
México, D.F., Edit. Limusa, 1997
p. 666

VII. Distancia entre vectores

En geometría, si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son los vectores de posición de los puntos A y B, respectivamente, la distancia entre estos puntos es el módulo del vector diferencia $\bar{b}-\bar{a}$ que es el mismo que el del vector $\bar{a}-\bar{b}$, o sea $|\bar{b}-\bar{a}| = |\bar{a}-\bar{b}|$.

De manera semejante, *la distancia entre dos vectores* de un espacio se define como la *norma* de la diferencia de esos dos vectores. La distancia, por estar definida en términos de una norma, depende del producto interno que se utilice.

Por ejemplo, la distancia entre las matrices $\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ y $\bar{b} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ es la norma

de $\bar{a}-\bar{b} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ y dicha norma depende del producto interno considerado.

Así, para $(A \mid B) = \mathrm{tr}(AB^T)$ la distancia entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es

$$\|\bar{a}-\bar{b}\| = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}\right)} = \sqrt{tr\begin{bmatrix} 45 & \cdots \\ \cdots & 10 \end{bmatrix}} = \sqrt{55}$$

Respecto a $\left(\begin{bmatrix} c & d \\ e & f \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} g & h \\ j & k \end{bmatrix} \right) = cg + dh + 3ej + 2fk$

la distancia entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es: $\|\bar{a}-\bar{b}\| = \sqrt{9+36+3+18} = \sqrt{66}$

Para los polinomios $\bar{h} = 2x^2 - 3x + 1$ y $\bar{k} = -x^2 + x - 3$, la distancia entre ellos es

la norma de su diferencia $\bar{h} - \bar{k} = 3x^2 - 4x + 4$ Si se considera el producto interno en

P_2 definido por $(\bar{p} \mid \bar{q}) = \sum_{i=0}^{2} p(i)q(i)$ se tiene :

$(\bar{h} - \bar{k})(0) = 4$; $(\bar{h} - \bar{k})(1) = 3$; $(\bar{h} - \bar{k})(2) = 8$, con lo que la norma de $\bar{h} - \bar{k}$ es :

$$\|\bar{h}-\bar{k}\| = \sqrt{4^2+3^2+8^2} = \sqrt{16+9+64} = \sqrt{89}$$

Para el producto $(\bar{p} \mid \bar{q}) = \sum_{k=0}^{2} \alpha_k \beta_k$ se tiene: $\|\bar{h}-\bar{k}\| = \sqrt{3^2+(-4)^2+4^2} = \sqrt{41}$

VIII. Complemento Ortogonal

Con el concepto de ortogonalidad, también es posible obtener un vector ortogonal (respecto a un producto interno) a todos los vectores de un subconjunto de un espacio vectorial.

Por ejemplo, un vector ortogonal a todos los vectores del subconjunto A de R^3, donde $A = \{ (x, x-2, 4) \mid x \in R \}$, respecto al producto punto en R^3, es $(-2, 2, 1)$, ya que: $-2x + 2(x-2) + 4 = -2x + 2x - 4 + 4 = 0$ para todo valor de x. Otro vector ortogonal a A es $(3, -3, -\frac{3}{2})$ y en general, toda terna de números reales (a, b, c) tal que, para todo valor de x, $(a, b, c) \cdot (x, x-2, 4) = 0$

Esto es: $a x + b(x-2) + 4c = x(a+b) - 2b + 4c = 0$

lo que implica que: $\begin{cases} a+b = 0 \\ -2b+4c = 0 \end{cases}$ y al resolver el sistema se llega a $\begin{cases} b = 2c \\ a = -2c \end{cases}$

Así que, todos los vectores del subconjunto B de R^3, tal que $B = \{(-2c, 2c, c) \mid c \in R\}$, son ortogonales a todos los vectores de $A = \{ (x, x-2, 4) \mid x \in R \}$.

A un conjunto como B, suele llamársele *ortogonal al conjunto A*, se representa con $A^{\perp}$ y siempre es un subespacio, aunque el conjunto A no lo sea.

Para $L = \{ (x, 2x, -3x) \mid x \in R\}$, que es subespacio de R^3, un vector ortogonal a L respecto al producto punto es $(6, 3, 4)$, otro $(-1, 1, \frac{1}{3})$ y en general toda terna (a, b, c) que, para todo valor de x, satisfaga:

$ax + 2bx - 3cx = 0$, o sea, $(a + 2b - 3c)x = 0 \Rightarrow a = -2b + 3c$

Si el subconjunto del espacio es un *subespacio* (como lo es L), al conjunto ortogonal a él se le llama *complemento ortogonal* de dicho subespacio, debido a que la dimensión de este complemento, sumada a la del subespacio es igual a la dimensión del espacio.

Con lo anterior, el complemento ortogonal (respecto al producto punto) de L, subespacio de dimensión *uno* de R^3, es $L^{\perp} = \{ (-2b + 3c, b, c) \mid b, c \in R \}$, subespacio de dimensión *dos* de R^3

El complemento ortogonal de un subespacio está referido a un producto interno. Así, para el producto interno en R^3, definido por

$f(\bar{u}, \bar{v}) = u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + 2u_2 v_1 + 2u_3 v_2 + 2u_2 v_3 + u_1 v_3 + u_3 v_1 + 7u_2 v_2 + 2u_3 v_3$

el complemento ortogonal de L , es el conjunto de ternas (a , b, c) que satisfacen, para todo valor de x : $ax + 2a2x + 2bx + 2c2x + 2b(-3x) + a(-3x) + cx + 7b2x + 2c(-3x) = 0$

lo anterior puede expresarse como : $(2a + 10b - c)\,x = 0$, es decir $c = 2a + 10b$, por lo que $L_1^{\perp} = \{ (a, b, 2a + 10b) \mid a, b \in R \} = \{ (-5b + \frac{c}{2}, b, c) \mid b, c \in R \}$, que es diferente del obtenido antes, respecto al producto punto.

Si consideramos el producto definido en R^3 por $g(\bar{u}, \bar{v}) = 2u_1 v_1 + u_2 v_2 + 6u_3 v_3$ donde $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$, el complemento ortogonal de L es el conjunto de los vectores (a , b , c), tales que $2ax + b2x + 6c(-3x) = 0$, equivalente a : $x(2a + 2b - 18c) = 0$, que debe cumplirse para toda $x \in R$, por lo que

$$2a + 2b - 18c = 0 \Rightarrow c = \frac{a+b}{9} \quad \therefore \quad L_2^{\perp} = \{ (a, b, \frac{a+b}{9}) \mid a, b \in R \}$$

Para el subespacio A del espacio de P_2 de los polinomios de grado menor o igual a dos, donde $A = \{ ax^2 + bx - 2a + 3b \mid a, b \in R \}$, podemos obtener su complemento ortogonal $A^{\perp}$ respecto a cada producto interno que nos interese.

Respecto al producto $(\bar{p} \mid \bar{q}) = \sum_{i=0}^{2} p(i)q(i)$, consideremos el polinomio $p(x) = mx^2 + nx + r$ y el elemento genérico de A, $q(x) = ax^2 + bx - 2a + 3b$

de los cuales :

$$\begin{array}{ll} p(0) = r & q(0) = -2a + 3b \\ p(1) = m + n + r & q(1) = a + b - 2a + 3b = -a + 4b \\ p(2) = 4m + 2n + r & q(2) = 4a + 2b - 2a + 3b = 2a + 5b \end{array}$$

$$\begin{aligned} (\bar{p} \mid \bar{q}) &= r(-2a + 3b) + (m + n + r)(-a + 4b) + (4m + 2n + r)(2a + 5b) \\ &= a(-2r - m - n - r + 8m + 4n + 2r) + b(3r + 4m + 4n + 4r + 20m + 10n + 5r) \\ &= a(-r + 7m + 3n) + b(12r + 24m + 14n) \end{aligned}$$

El vector $\overline{p}$ perteneciente a $A_1^{\perp}$, complemento ortogonal de A, debe ser tal que $(\,\overline{p}\mid\overline{q}\,)=0$ para todo valor de a y de b, $\therefore$ $\begin{cases}-r+7m+3n &= 0\\ 12r+24m+14n &= 0\end{cases}$ sistema homogéneo que resolvemos a continuación :

$$\begin{bmatrix}-1 & 7 & 3\\ 12 & 24 & 14\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -7 & -3\\ 6 & 12 & 7\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -7 & -3\\ 0 & 54 & 25\end{bmatrix}$$, el segundo renglón de la última matriz, representa la ecuación $54m+25n = 0$, que implica $n = -\dfrac{54}{25}m$;

$r = 7m+3n = 7m - \dfrac{162}{25}m = \dfrac{175-162}{25}m = \dfrac{13}{25}m$, con lo que :

$$A_1^{\perp} = \left\{ mx^2 - \frac{54}{25}mx + \frac{13}{25}m \mid m\in R \right\}$$

Si el producto interno es $(\,\overline{s}\mid\overline{t}\,) = \sum_{i=0}^{2}\alpha_i\,\beta_i$, donde $\overline{s}(x) = \alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2$, $\overline{t} = \beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2$, para : $p(x) = mx^2+nx+r$; $q(x) = ax^2+bx-2a+3b$

$(\,\overline{p}\mid\overline{q}\,) = am+bn+(-2a+3b)\,r = a(m-2r)+b(n+3r)$ que debe ser cero para todo valor de a y de b $\therefore$ $\begin{cases} m-2r = 0 \Rightarrow r = \frac{m}{2}\\ n+3r = 0 \Rightarrow n = -3r = -\frac{3}{2}m\end{cases}$ y se tiene

$$A_2^{\perp} = \left\{ mx^2 - \frac{3}{2}mx + \frac{1}{2}m \mid m\in R \right\}$$

Otros ejemplos pueden plantearse en el espacio de matrices de orden dos .

El complemento ortogonal $D_1^{\perp}$ del subespacio $D = \left\{\begin{bmatrix} a & b\\ a+b & 2a-b\end{bmatrix} \mid a,b\in R\right\}$

respecto al producto interno $(\,A\mid B\,) = cg+dh+3ej+2fk$ donde $A = \begin{bmatrix} c & d\\ e & f\end{bmatrix}$ y

$B = \begin{bmatrix} g & h \\ j & k \end{bmatrix}$, tiene como elemento genérico a $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ tal que

$$\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a-b \end{bmatrix} \right) = 0$$ para todo valor de a y de b que pertenezcan a R

esto es : $xa + yb + 3z(a+b) + 2w(2a-b) = a(x + 3z + 4w) + b(y + 3z - 2w) = 0$

que conduce al sistema homogéneo e indeterminado $\begin{cases} x + 3z + 4w = 0 \text{ -------(1)} \\ y + 3z - 2w = 0 \text{ -------(2)} \end{cases}$

de (1) $x = -4w - 3z$; de (2) $y = 2w - 3z$

$\therefore\ D_1^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} -4w-3z & 2w-3z \\ z & w \end{bmatrix} \middle| \ z, w \in R \right\}$, este conjunto puede expresarse en

términos de x y de z despejando de (1) a $w = \dfrac{-x-3z}{4}$, ya que $y = 2w - 3z$

$$y = \frac{-x-3z}{2} - 3z = \frac{-x-9z}{2}, \qquad D_1^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} x & \dfrac{-x-9z}{2} \\ z & \dfrac{-x-3z}{4} \end{bmatrix} \middle| \ x, z \in R \right\}$$

el mismo complemento puede expresarse como :

$$D_1^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} x & x+6w \\ \dfrac{-x-4w}{3} & w \end{bmatrix} \middle| \ x, w \in R \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ \dfrac{-x-2y}{9} & \dfrac{-x+y}{6} \end{bmatrix} \middle| \ x, y \in R \right\}$$

Para el producto interno definido por : $(A \mid B) = \operatorname{tr}(AB^T)$ debe tenerse

$$\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a-b \end{bmatrix} \right) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a+b \\ b & 2a-b \end{bmatrix} \right) = 0, \quad \forall a, b \in R$$

De la matriz resultante de multiplicar $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ por $\begin{bmatrix} a & a+b \\ b & 2a-b \end{bmatrix}$ sólo nos interesan los elementos de la diagonal principal, debido a que la traza buscada es la suma de ellos, como se dijo antes, a los elementos fuera de la mencionada diagonal los representaremos con ... , $\therefore$ $\operatorname{tr}\begin{bmatrix} ax+by & \cdots \\ \cdots & z(a+b)+w(2a-b) \end{bmatrix} =$

$= ax+by+az+bz+2aw-bw = a(x+z+2w)+b(y+z-w) = 0$, que debe satisfacerse $\forall\, a, b \in \mathrm{R}$, lo que lleva al sistema $\begin{cases} x+z+2w = 0 \text{ --------- } (1) \\ y+z-w = 0 \text{ --------- } (2) \end{cases}$

del cual $x = -z-2w$; $y = w-z$ con lo que

$D_2^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} -z-2w & -z+w \\ z & w \end{bmatrix} \middle|\ z, w \in \mathrm{R} \right\}$, pero, si de (1) despejamos a z y de (2) a w

se tiene $z = -x-2w$; $w = y+z = y-x-2w$, por lo que $w = \dfrac{y-x}{3}$, con lo que resulta $z = -x - \dfrac{2y-2x}{3} = \dfrac{-3x-2y+2x}{3} = \dfrac{-x-2y}{3}$ y el complemento ortogonal $D_2^{\perp}$ puede expresarse como: $D_2^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ \dfrac{-x-2y}{3} & \dfrac{y-x}{3} \end{bmatrix} \middle|\ x, y \in \mathrm{R} \right\}$

Consideremos ahora el conjunto de puntos que satisfacen a la ecuación $2x+y-z = 0$, esto es, todos los puntos del plano cuya representación analítica es la ecuación anterior. Dicho conjunto es un subespacio de R^3 que puede expresarse como:

$P = \{ (x, y, 2x+y) \mid x, y \in \mathrm{R} \}$. Su complemento ortogonal $P_1^{\perp}$ respecto al producto escalar en R^3 es el conjunto de ternas (a, b, c) tales que,

$ax+by+c(2x+y) = 0,\ \forall\, x, y \in \mathrm{R}$, es decir, $x(a+2c)+y(b+c) = 0$, que nos conduce a: $\begin{cases} a+2c = 0 \Rightarrow c = -\dfrac{a}{2} \\ b+c = 0 \Rightarrow b = -c \end{cases}$ esto es: $\dfrac{a}{-2} = \dfrac{b}{-1} = c$; estas dos ecuaciones son la representación analítica de una recta que pasa por el origen y es paralela al vector $\overline{u} = (-2, -1, 1)$, a su vez paralelo al vector normal al plano propuesto, que es $\overline{N} = (2, 1, -1)$.

En otras palabras, el complemento ortogonal del plano, es la recta perpendicular a él que pasa por el origen. Al ser un conjunto de puntos (subconjunto de R^3), podemos expresarlo

como: $$P_1^{\perp} = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, \frac{x}{-2} = \frac{y}{-1} = z,\ x, y, z \in R \right\} = \{ (2y, y, -y) \mid y \in R \}$$

Respecto al producto interno en R^3 definido por

$$f(\overline{u}, \overline{v}) = u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 2u_3v_2 + 2u_2v_3 + u_1v_3 + u_3v_1 + 7u_2v_2 + 2u_3v_3$$

$$P_2^{\perp} = \left\{ (a, b, c) \,\middle|\, \big((a, b, c) \mid (x, y, 2x + y) \big) = 0 \ \forall x, y \in R \right\} ;$$

$$\big((a, b, c) \mid (x, y, 2x + y) \big) =$$

$$= ax + 2ay + 2bx + 2cy + 2b(2x + y) + a(2x + y) + cx + 7by + 2c(2x + y) =$$

$$= x(a + 2b + 4b + 2a + c + 4c) + y(2a + 2c + 2b + a + 7b + 2c) =$$

$$= x(3a + 6b + 5c) + y(3a + 9b + 4c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3a + 6b + 5c = 0 \\ 3a + 9b + 4c = 0 \end{cases}$$ de estas

ecuaciones se obtiene $c = 3b$; $a = -7b$, por lo que $P_2^{\perp} = \left\{ (-7b, b, 3b) \mid b \in R \right\}$

Todo vector de un espacio, por ejemplo del R^3, puede expresarse en forma única como la suma de un vector perteneciente a un subespacio, por ejemplo $L = \left\{ (x, 2x, -3x) \mid x \in R \right\}$, más otro vector del complemento ortogonal del subespacio, para el ejemplo respecto al producto usual en R^3, $L^{\perp} = \left\{ (3c - 2b, b, c) \mid b, c \in R \right\}$. El vector $(1, -3, 1) \in R^3$ puede expresarse en forma única como $\overline{w} + \overline{w}^{\perp}$, donde $\overline{w} \in \left\{ (x, 2x, -3x) \mid x \in R \right\}$ y el vector $\overline{w}^{\perp} \in \left\{ (-2b + 3c, b, c) \mid b, c \in R \right\}$, de tal manera que

$$(1,-3,1) = (x, 2x, -3x) + (-2b+3c, b, c) \Rightarrow \begin{cases} x - 2b + 3c = 1 \\ 2x + b = -3 \\ -3x + c = 1 \end{cases}, \text{ resolviendo}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -6 & -5 \\ 0 & -6 & 10 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{5} & -1 \\ 0 & -3 & 5 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{5} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} & -1 \end{array}\right]$$

se tiene $c = -\dfrac{5}{7}$; $b = -1 - \dfrac{6}{7} = -\dfrac{13}{7}$; $x = 1 - \dfrac{26}{7} + \dfrac{15}{7} = -\dfrac{4}{7}$ por lo que :

$$\overline{w} = \left(-\frac{4}{7}, -\frac{8}{7}, \frac{12}{7}\right) \ ; \ \overline{w}^{\perp} = \left(\frac{11}{7}, -\frac{13}{7}, -\frac{5}{7}\right) \quad \text{y} \quad \overline{w} + \overline{w}^{\perp} = (1, -3, 1)$$

Como otro ejemplo, tenemos que el subespacio $A = \left\{ ax^2 + bx - 2a + 3b \mid a, b \in R \right\}$, del espacio P_2 de los polinomios de grado menor o igual a dos, tiene el complemento ortogonal $A_2^{\perp} = \left\{ mx^2 - \dfrac{3}{2}mx + \dfrac{m}{2} \mid m \in R \right\}$, respecto al producto interno definido por: $(\overline{p} \mid \overline{q}) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k$ para los polinomios $\overline{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $\overline{q} = b_0 + b_1x + b_2x^2$.

Un vector cualquiera de P_2, por ejemplo $5x^2 + 3x - 8$ puede expresarse en forma única como $\overline{w} + \overline{w}^{\perp}$ donde $\overline{w} \in A$ y $\overline{w}^{\perp} \in A_2^{\perp}$, esto es

$$5x^2 + 3x - 8 = ax^2 + bx - 2a + 3b + mx^2 - \frac{3}{2}mx + \frac{m}{2} \quad \Rightarrow \begin{cases} 5 = a + m \\ 3 = b - \frac{3}{2}m \\ -8 = -2a + 3b + \frac{m}{2} \end{cases}$$

resolviendo $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 3 \\ -2 & 3 & \frac{1}{2} & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 3 & \frac{5}{2} & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right]$ con lo que $m = -1$;

$$b = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \; ; \; a = 5 + 1 = 6 \; ; \; -2a + 3b = -12 + \frac{9}{2} = -\frac{15}{2} \; ; \; \text{y resulta que}$$

$$\overline{w} = 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{15}{2} \; ; \; \overline{w}^{\perp} = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \overline{w} + \overline{w}^{\perp} = 5x^2 + 3x - 8$$

El subespacio $D = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a-b \end{bmatrix} \middle| \; a, b \in \mathrm{R} \right\}$ del espacio M_2 de las matrices de dos por dos con elementos reales, tiene, respecto al producto interno definido en M_2 por

$(A \mid B) = \operatorname{tr}(AB^T)$, el complemento ortogonal $D^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} x & x+3w \\ -x-2w & w \end{bmatrix} \middle| \; x, w \in \mathrm{R} \right\}$

Dos matrices, pertenecientes a M_2, como por ejemplo $J = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ y $K = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

pueden expresarse como una suma : $J = W + W^{\perp}$ y $K = W_1 + W_1^{\perp}$ donde W, W_1 pertenecen a D y $W^{\perp}$, $W_1^{\perp}$ pertenecen a $D^{\perp}$, esto es, como la suma de las matrices

$\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a-b \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} x & x+3w \\ -x-2w & w \end{bmatrix}$ donde cada una de las variables a, b, x, w tiene un valor respecto a la matriz J y otro, en general diferente, respecto a la matriz K.

Para la obtención de esos valores deben resolverse los sistemas de ecuaciones siguientes :

$$\begin{aligned} a + x &= 0 \\ b + x + 3w &= 4 \\ a + b - x - 2w &= -3 \\ 2a - b + w &= 5 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} a_1 + x_1 &= -1 \\ b_1 + x_1 + 3w_1 &= 8 \\ a_1 + b_1 - x_1 - 2w_1 &= -2 \\ 2a_1 - b_1 + w_1 &= 4 \end{aligned}$$

Estos dos sistemas tienen la misma matriz de coeficientes, por lo que pueden resolverse utilizando una matriz *doblemente ampliada*, como lo hacemos a continuación.

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -9 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -34 & -51 \end{array}\right]$$

De lo anterior, se tiene que :

$w = \dfrac{-34}{-17} = +2$ $\qquad$ $w_1 = \dfrac{-51}{-17} = +3$

$x = -9 + 4(2) = -1$ $\qquad$ $x_1 = -14 + 4(3) = -2$

$b = 4 - 3(2) - (-1) = -1$ $\qquad$ $b_1 = 8 - 3(3) - (-2) = +1$

$a = 0 - (-1) = +1$ $\qquad$ $a_1 = -1 - (-2) = +1$

De donde :

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ 2a - b &= 3 \\ x + 3w &= 5 \\ -x - 2w &= -3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_1 + b_1 &= 2 \\ 2a_1 - b_1 &= 1 \\ x_1 + 3w_1 &= 7 \\ -x_1 - 2w_1 &= -4 \end{aligned}$$

Con lo que :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

IX. Proyección de un vector sobre un subespacio

Siempre es posible determinar una base *ortonormal*, de un subespacio respecto a un producto interno.

Como puede comprobarse, $B_3 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \,,\, \frac{4}{\sqrt{42}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{42}}x - \frac{5}{\sqrt{42}} \right\}$ es una base ortonormal del subespacio $A = \{ax^2 + bx - 2a + 3b \mid a, b \in \mathrm{R}\}$ del espacio P_2 de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales, respecto al producto interno definido con : $(\overline{p} \mid \overline{q}) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k$, para $\overline{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $\overline{q} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$.

Si $B = \{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \cdots, \overline{b_r}\}$ es una base ortonormal de un subespacio W del espacio V , se define *la proyección de un vector* $\overline{v} \in V$ *sobre W*, como : $\overline{v_W} = \sum_{i=1}^{r} (\overline{v} \mid \overline{b_i}) \overline{b_i}$, donde r es la dimensión del subespacio W. La proyección de $\overline{v}$ sobre W, depende del producto interno respecto al cual la base B es ortonormal, que debe ser el mismo al que se refiere $(\overline{v} \mid \overline{b_i})$ de la definición. Debido a ello existe una proyección, en general diferente, por cada producto que se considere.

Como ejemplo, obtendremos la proyección del polinomio $\overline{s} \in P_2$, $\overline{s} = x^2 - x + 2$, sobre el subespacio A , $\overline{s_A} = (\overline{s} \mid \overline{b_1})\, \overline{b_1} + (\overline{s} \mid \overline{b_2})\, \overline{b_2}$, (donde $\overline{b_1}$, $\overline{b_2}$ son los elementos de la base B_3) respecto al producto interno en P_2 para el cual la base B_3 es ortonormal .

$$(\overline{s} \mid \overline{b_1}) = (x^2 - x + 2 \left| \frac{1}{\sqrt{3}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right.) = \frac{1-1+2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \frac{2}{\sqrt{3}}\, b_1 = \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$(\overline{s} \mid \overline{b_2}) = (x^2 - x + 2 \left| \frac{4}{\sqrt{42}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{42}}x - \frac{5}{\sqrt{42}} \right.) = \frac{-7}{\sqrt{42}} \quad ; \quad \frac{-7}{\sqrt{42}}\, b_2 = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{5}{6}$$

$$\therefore \qquad \overline{s_A} = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)x^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)x + \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Como otro ejemplo, obtendremos la proyección del vector $\overline{p} = 5x^2 + 3x - 8 \in P_2$ sobre el subespacio A , $\overline{p_A} = (\overline{p} \mid \overline{b_1})\, \overline{b_1} + (\overline{p} \mid \overline{b_2})\, \overline{b_2}$

$$(\overline{p} \mid \overline{b_1}) = (5x^2 + 3x - 8 \left| \frac{1}{\sqrt{3}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right.) = \frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{8}{\sqrt{3}} = 0$$

$$(\overline{p} \mid \overline{b}_2) = (5x^2+3x-8 \left| \frac{4}{\sqrt{42}}x^2+\frac{1}{\sqrt{42}}x-\frac{5}{\sqrt{42}}\right.) = \frac{20}{\sqrt{42}}+\frac{3}{\sqrt{42}}+\frac{40}{\sqrt{42}} = \frac{63}{\sqrt{42}}$$

$$\overline{p_A} = 0+\frac{63}{\sqrt{42}}\left(\frac{4}{\sqrt{42}}x^2+\frac{1}{\sqrt{42}}x-\frac{5}{\sqrt{42}}\right) = \frac{252}{42}x^2+\frac{63}{42}x-\frac{315}{42} = 6x^2+\frac{3}{2}x-\frac{15}{2}$$

Aquí, $\overline{p}_A$ es el vector $\overline{w} \in A$ que sumado con $\overline{w}^{\perp} \in A^{\perp}$ es igual a $\overline{p}$, obtenido en páginas anteriores . Este resultado es completamente general . Esto es : *la proyección de un vector $\overline{v} \in V$ sobre un subespacio W de V es el vector $\overline{w} \in W$, tal que sumado con $\overline{w}^{\perp} \in W^{\perp}$ es igual a $\overline{v}$.* Con esto tenemos dos formas diferentes de obtener la proyección de un vector sobre un subespacio.

La proyección $\overline{s_A}$ del vector $\overline{s} = x^2 - x + 2$ del ejemplo anterior, también la podemos obtener determinando el vector $\overline{w_1} \in A$ que sumado con $\overline{w_1}^{\perp} \in A^{\perp}$ sea igual a $\overline{s}$.

$$\overline{w_1} = ax^2 + bx - 2a + 3b \quad ; \quad \overline{w_1}^{\perp} = mx^2 - \frac{3}{2}mx + \frac{m}{2}$$

$$\overline{w_1} + \overline{w_1}^{\perp} = \overline{s} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a + m = 1 \\ b - \frac{3}{2}m = -1 \\ -2a+3b+\frac{m}{2} = 2 \end{cases}$$ al resolver este sistema se obtiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ -2 & 3 & \frac{1}{2} & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 3 & \frac{5}{2} & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right]$$ de donde resulta que $m = 1$;

$b = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$; $a = 1 - 1 = 0$ $\therefore$ $\overline{w_1} = \overline{s_A} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, que ya habíamos obtenido

Para obtener una base ortonormal del subespacio D, de dimensión dos, del espacio M_2 de las matrices de orden dos con elementos reales, donde $D = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a-b \end{bmatrix} \middle| \, a,b \in R \right\}$, respecto al producto interno definido en M_2 por $(A \mid B) = tr(AB^T)$, consideramos como primer elemento un vector que pertenezca a D, por ejemplo $\overline{d_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; luego determinamos el segundo elemento $\overline{d_2} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a-b \end{bmatrix}$, tal que, además de pertenecer a D, satisfaga $(\overline{d_1} \mid \overline{d_2}) = 0$, es decir, $(\overline{d_1} \mid \overline{d_2}) = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a+b \\ b & 2a-b \end{bmatrix} =$ $\operatorname{tr}\begin{bmatrix} a+b & \cdots \\ \cdots & 4a+b \end{bmatrix} = 5a + 2b = 0 \Rightarrow b = -\frac{5}{2}a$; si $a = 2$, entonces $b = -5$ con lo que queda $\overline{d_2} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$. Ahora debemos normalizar a los vectores $\overline{d_1}$ y $\overline{d_2}$, para lo cual obtenemos sus respectivas normas: $\left\| \overline{d_1} \right\|^2 = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 1+1 & \cdots \\ \cdots & 4+1 \end{bmatrix}$

así $\left\| \overline{d_1} \right\| = \sqrt{7}$; $\left\| \overline{d_2} \right\|^2 = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 9 \end{bmatrix} = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 4+25 & \cdots \\ \cdots & 9+81 \end{bmatrix} = 119$

y la norma del segundo vector es $\left\| \overline{d_2} \right\| = \sqrt{119}$. Una base ortonormal de D es :

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{119}} & -\frac{5}{\sqrt{119}} \\ -\frac{3}{\sqrt{119}} & \frac{9}{\sqrt{119}} \end{bmatrix} \right\} = \{ \overline{b_1}, \overline{b_2} \}.$$

La proyección de la matriz $J = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ sobre D es, por definición,

$J_D = (J \mid \overline{b_1})\, \overline{b_1} + (J \mid \overline{b_2})\, \overline{b_2}$

$$(J \mid \overline{b_1}) = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} \\ \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \end{bmatrix} = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{7}} & \cdots \\ \cdots & \frac{-6+5}{\sqrt{7}} \end{bmatrix} = \frac{3}{\sqrt{7}}, \quad \frac{3}{\sqrt{7}} \overline{b_1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

$$(J \mid \overline{b_2}) = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{119}} & \frac{-3}{\sqrt{119}} \\ \frac{-5}{\sqrt{119}} & \frac{9}{\sqrt{119}} \end{bmatrix} = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} \frac{-20}{\sqrt{119}} & \cdots \\ \cdots & \frac{9+45}{\sqrt{119}} \end{bmatrix} = \frac{34}{\sqrt{119}},$$

$$\frac{34}{\sqrt{119}}\,\overline{b_2} = \begin{bmatrix} \frac{68}{119} & \frac{-170}{119} \\ \frac{-102}{119} & \frac{306}{119} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{-10}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{18}{7} \end{bmatrix}, \text{ con lo que}$$

$$J_D = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{10}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{18}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Para $K = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, la proyección sobre D es : $K_D = (K \mid \overline{b_1})\,\overline{b_1} + (K \mid \overline{b_2})\,\overline{b_2}$

$$(K \mid \overline{b_1}) = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} \\ \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \end{bmatrix} = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} \frac{-1+8}{\sqrt{7}} & \cdots \\ \cdots & \frac{-4+4}{\sqrt{7}} \end{bmatrix} = \frac{7}{\sqrt{7}}\;;\quad \frac{7}{\sqrt{7}}\,\overline{b_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(K \mid \overline{b_2}) = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{119}} & -\frac{3}{\sqrt{119}} \\ -\frac{5}{\sqrt{119}} & \frac{9}{\sqrt{119}} \end{bmatrix} = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} \frac{-42}{\sqrt{119}} & \cdots \\ \cdots & \frac{42}{\sqrt{119}} \end{bmatrix} = 0\;;\quad 0\,\overline{b_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$K_D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Las proyecciones J_D y K_D, como puede comprobarse, son respectivamente iguales a W y W_1 obtenidas al final de la sección anterior.

La proyección de un vector sobre un subespacio depende del producto interno considerado, así la proyección del polinomio $\overline{s} = x^2 - x + 2$ sobre el subespacio $A = \{ax^2 + bx - 2a + 3b \mid a, b \in R\}$ respecto al producto interno definido por $(\overline{p} \mid \overline{q}) = \sum_{i=0}^{2} p(i)\,q(i)$ es diferente de la obtenida al principio de esta sección. Para determinar esta nueva proyección usaremos los dos caminos referidos :

1. Obtendremos los vectores $\overline{w} \in A$ y $\overline{w}^{\perp} \in A_1^{\perp}$ tales que $\overline{s} = \overline{w} + \overline{w}^{\perp}$ donde el complemento ortogonal, obtenido en la sección anterior, es $A_1^{\perp} = \left\{ mx^2 - \frac{54}{25}mx + \frac{13}{25}m \mid m \in R \right\}$,

$$x^2 - x + 2 = (ax^2 + bx - 2a + 3b) + (mx^2 - \frac{54}{25}mx + \frac{13}{25}m)$$

$$\begin{cases} 1 = a + m \\ -1 = b - \frac{54}{25}m \\ 2 = -2a + 3b + \frac{13}{25}m \end{cases}, \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{54}{25} & -1 \\ -2 & 3 & \frac{13}{25} & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{54}{25} & -1 \\ 0 & 3 & \frac{63}{25} & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{54}{25} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{225}{25} & 7 \end{array}\right]$$

$$\frac{225}{25} = 9 \therefore \ m = \frac{7}{9} \ ; \ b = -1 + \frac{54}{25}(\frac{7}{9}) = -1 + \frac{42}{25} = \frac{17}{25}, \quad y \quad a = \frac{2}{9}$$

resultando $\overline{w} = \frac{2}{9}x^2 + \frac{17}{25}x + (-\frac{4}{9} + \frac{51}{25}) = \frac{2}{9}x^2 + \frac{17}{25}x + \frac{359}{225} = \overline{s_A}$ que es la proyección buscada.

El vector $\overline{w}^{\perp}$, ortogonal a $\overline{w}$ es: $\overline{w}^{\perp} = \frac{7}{9}x^2 - \frac{42}{25}x + \frac{91}{225}$ m , se puede comprobar que

$$\overline{w} + \overline{w}^{\perp} = (\frac{2}{9} + \frac{7}{9})x^2 + (\frac{17}{25} - \frac{42}{25})x + \frac{359+91}{225} = x^2 - x + 2 = \overline{s}$$

2. Determinaremos una base F ortogonal de A , para ello, consideramos un elemento cualquiera de A, por ejemplo $\overline{f_1} = x^2 - 2$, luego obtenemos $\overline{f_2} \in$ A, que sea ortogonal a $\overline{f_1}$, es decir, tal que $(\overline{f_1} \mid \overline{f_2}) = 0$, $\overline{f_2} = ax^2 + bx - 2a + 3b$, dando a la variable x los valores 0 , 1 y 2 , se tiene:

$$\begin{cases} \overline{f_1}(0) = -2 \\ \overline{f_1}(1) = -1 \\ \overline{f_1}(2) = 2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \overline{f_2}(0) = -2a + 3b \\ \overline{f_2}(1) = -a + 4b \\ \overline{f_2}(2) = 2a + 5b \end{array}$$

y al hacer $(\overline{f_1} \mid \overline{f_2}) = 0$ se llega a

-2 (-2a + 3b) + (-1) (-a + 4b) + 2 (2a + 5b) = 4a - 6b + a – 4b + 4a + 10b = 9a = 0 .

Esto es, todo elemento de A, formado con $a = 0$ y cualquier valor para b, es ortogonal a $x^2 - 2$. Un vector puede ser $\overline{f_2} = x + 3$, con lo que la base $\{ x^2 - 2 \ , \ x + 3 \}$ es ortogonal.

Ahora, hace falta normalizar a los vectores $\overline{f_1}$ y $\overline{f_2}$ para obtener una base G que sea ortonormal :

$$\left\| \overline{f_1} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{g_1} = \frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}$$

$$\left\| \overline{f_2} \right\| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{g_2} = \frac{x}{5\sqrt{2}} + \frac{3}{5\sqrt{2}}$$

El conjunto $G = \{ \overline{g_1} \ , \ \overline{g_2} \}$ es la base buscada.

La proyección de $\bar{s}$ sobre el subespacio A es, por definición,

$$\overline{s_A} = \sum_{i=1}^{2} (\bar{s} \mid \overline{g_i}) \overline{g_i} \ , \ \text{ya que} \quad \begin{cases} \overline{g_1}(0) = -\dfrac{2}{3} \ , & \overline{g_2}(0) = \dfrac{3}{5\sqrt{2}} \ ; & \bar{s}(0) = 2 \\ \overline{g_1}(1) = -\dfrac{1}{3} \ , & \overline{g_2}(1) = \dfrac{4}{5\sqrt{2}} \ , & \bar{s}(1) = 2 \\ \overline{g_1}(2) = \dfrac{2}{3} \ , & \overline{g_2}(2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ , & \bar{s}(2) = 4 \end{cases}$$

$$(\bar{s} \mid \overline{g_1}) = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad (\bar{s} \mid \overline{g_1}) \overline{g_1} = \frac{2}{9} x^2 - \frac{4}{9}$$

$$(\bar{s} \mid \overline{g_2}) = \frac{6}{5\sqrt{2}} + \frac{8}{5\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{6+8+20}{5\sqrt{2}} = \frac{34}{5\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad (\bar{s} \mid \overline{g_2}) \overline{g_2} = \frac{34}{50} x + \frac{102}{50}$$

$$\overline{s_A} = \frac{2}{9} x^2 + \frac{34}{50} x + \frac{718}{450} = \frac{2}{9} x^2 + \frac{17}{25} x + \frac{359}{225}$$

que es igual a la obtenida con el método anterior.

X. Teorema de proyección

Si W es un subespacio del espacio V y $\bar{v} \in V$, *entonces el vector* $\bar{w} \in W$ *más cercano a* $\bar{v}$ *es la proyección de* $\bar{v}$ *sobre* W.

En otras palabras : Si $\forall\ \overline{w_1} \in$ W, el vector $\bar{w} \in$ W es tal que $\left\| \bar{v} - \bar{w} \right\| \leq \left\| \bar{v} - \overline{w_1} \right\|$, entonces $\bar{w}$ es la proyección $\overline{v_W}$ de $\bar{v} \in$ V, sobre el subespacio W de V.

Este teorema nos sugiere utilizar la teoría de máximos y mínimos, que se estudia en cursos de cálculo, para la obtención de la proyección como el vector $\bar{w}$ cuya diferencia con el vector $\bar{v}$ tenga la norma mínima.

Para el último ejemplo de la sección anterior, la proyección de $\bar{s}$ = $x^2 - x + 2$ sobre el subespacio A = $\{ax^2 + bx - 2a + 3b \mid a, b \in \mathrm{R}\}$, puede obtenerse también como el vector $\bar{w} \in$ A, cuya diferencia con $\bar{s}$, tenga norma mínima respecto al producto interno considerado. La diferencia $\bar{s} - \bar{w}$ = $(1 - a)x^2 + (-1 - b)x + 2 + 2a - 3b$, cuyos valores

para los de x de 0, 1 y 2 , pueden expresarse como : $\begin{cases} (\bar{s} - \bar{w})(0) = 2 + 2a - 3b \\ (\bar{s} - \bar{w})(1) = 2 + a - 4b \\ (\bar{s} - \bar{w})(2) = 4 - 2a - 5b \end{cases}$, tiene

respecto al producto definido con $(\bar{p} \mid \bar{q}) = \sum_{i=0}^{2} p(i)\, q(i)$, una norma que es función de las

variables *a* y *b* : $\left\| \bar{s} - \bar{w} \right\| = \sqrt{(2 + 2a - 3b)^2 + (2 + a - 4b)^2 + (4 - 2a - 5b)^2} = f(a, b)$

debemos , ahora , determinar los valores de *a* y de *b*, tales que f (a , b), sea mínima, para ello igualamos a cero cada una de las derivadas parciales de f respecto a las variables *a* y *b*

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{2(2 + 2a - 3b)2 + 2(2 + a - 4b)1 + 2(4 - 2a - 5b)(-2)}{2\sqrt{(2 + 2a - 3b)^2 + (2 + a - 4b)^2 + (4 - 2a - 5b)^2}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{2(2 + 2a - 3b)(-3) + 2(2 + a - 4b)(-4) + 2(4 - 2a - 5b)(-5)}{2\sqrt{(2 + 2a - 3b)^2 + (2 + a - 4b)^2 + (4 - 2a - 5b)^2}} = 0$$

con lo que llegamos al sistema : $\begin{cases} 8 + 8a - 12b + 4 + 2a - 8b - 16 + 8a + 20b = 0 \\ -12 - 12a + 18b - 16 - 8a + 32b - 40 + 20a + 50b = 0 \end{cases}$

de la primera ecuación 18a + 0b = 4 $\Rightarrow$ a = $\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$, de la segunda ecuación se tiene $0a + 100b = 68 \Rightarrow b = \dfrac{68}{100} = \dfrac{17}{25}$, y el vector $\overline{w}$ correspondiente a estos valores es $\overline{w} = \overline{s_A} = \dfrac{2}{9}x^2 + \dfrac{17}{25}x + \dfrac{359}{225}$ igual a la proyección obtenida con los otros métodos.

Respecto al producto interno en P_2, definido por $(\overline{p} \mid \overline{q}) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k$, donde las a_i y las b_i, son respectivamente los coeficientes de $\overline{p}$ y de $\overline{q}$, la norma de la diferencia $\overline{s}-\overline{w}$, que para este caso es $\overline{s}-\overline{w} = (1-a)x^2 + (-1-b)x + 2 + 2a - 3b$, resulta ser

$$\left\|\overline{s}-\overline{w}\right\| = \sqrt{(1-a)^2 + (-1-b)^2 + (2+2a-3b)^2}$$, función de las variables a y b.

$$\left\|\overline{s}-\overline{w}\right\| = g(a,b): \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial a} = \dfrac{2(1-a)(-1)+0+2(2+2a-3b)(2)}{2\sqrt{(1-a)^2+(-1-b)^2+(2+2a-3b)^2}} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial b} = \dfrac{0+2(-1-b)(-1)+2(2+2a-3b)(-3)}{2\sqrt{(1-a)^2+(-1-b)^2+(2+2a-3b)^2}} = 0 \end{cases}$$ que conduce al

sistema $\begin{cases} -2+2a+8+8a-12b=0 \\ 2+2b-12-12a+18b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a-6b=-3 \\ -6a+10b=5 \end{cases} \therefore \begin{cases} a = \dfrac{-3+6b}{5} \text{ -----(1)} \\ b = \dfrac{5+6a}{10} \text{ -----(2)} \end{cases}$

sustituyendo a de (1) en (2) y despejando a b, resulta $b = \dfrac{7}{14} = \dfrac{1}{2}$, sustituyendo este valor en (1) queda $a = \dfrac{-3+6(\frac{1}{2})}{5} = 0$, con lo que $\overline{w} = \overline{s_A} = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ igual al obtenido en la sección anterior.

Como último ejemplo obtendremos, por los *tres* métodos, la proyección del vector $\overline{v} \in C^4$, $\overline{v} = (2+i, 5i, -1-i, 2)$ respecto al producto usual en C^4, que es el definido para $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$; $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ por $(\overline{x} \mid \overline{y}) = \sum_{j=1}^{4} x_j \overline{y_j}$ donde $\overline{y_j}$ es el conjugado de la componente jotaésima del vector $\overline{y}$, sobre el subespacio de C^4 $U = \{(z, w, -2z-w, z+w) \mid z, w \in C\}$.

1.- Obtendremos el complemento ortogonal de U, determinando la relación entre a , b , c y d , tal que (a , b , c , d), elemento genérico de $U^{\perp}$, sea ortogonal a (z , w , -2z–w , z+w) para toda pareja z , w $\in$ C, esto es $((z, w, -2z-w, z+w) \mid (a, b, c, d)) = 0$ con lo

que $z\bar{a} + w\bar{b} + (-2z-w)\bar{c} + (z+w)\bar{d} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{a} - 2\bar{c} + \bar{d} = 0 \\ \bar{b} - \bar{c} + \bar{d} = 0 \end{cases}$. Considerando el conjugado de ambos miembros en cada una de las ecuaciones queda : $\begin{cases} \overline{\bar{a} - 2\bar{c} + \bar{d}} = \bar{0} \quad \text{----(1)} \\ \overline{\bar{b} - \bar{c} + \bar{d}} = \bar{0} \quad \text{----(2)} \end{cases}$. Ya que, el conjugado de una suma es la suma de los conjugados de los sumandos y el conjugado de un producto es el producto de los conjugados de los factores, se tiene $\overline{\bar{a} - 2\bar{c} + \bar{d}} = \bar{\bar{a}} - \bar{2}\bar{\bar{c}} + \bar{\bar{d}}$. Como $\bar{\bar{a}} = a$; $\bar{2} = 2$, la ecuación (1) queda como $a - 2c + d = 0$ ----(3). De manera semejante, la ecuación (2) se convierte en $b - c + d = 0$ ----(4) , de aquí $d = c - b$ ----(5) , sustituyendo en (3) , tenemos $a - 2c + c - b = 0 \Rightarrow c = a - b$, ésta, sustituida en (5) da $d = a - 2b$. Así, el complemento ortogonal de U, respecto al producto interno usual en C^4 , es el subconjunto de C^4: $U^{\perp} = \{(a, b, a-b, a-2b) \mid a, b \in C\}$. Ahora, la proyección de $\bar{v}$ sobre U es el vector $\bar{u} \in$ U, cuya suma con $\bar{u}^{\perp} \in U^{\perp}$, es igual a $\bar{v}$, esto es $\bar{u} + \bar{u}^{\perp} = \bar{v}$

o sea $(z, w, -2z-w, z+w) + (a, b, a-b, a-2b) = (2+i, 5i, -1-i, 2)$, que conduce al sistema $\begin{cases} z \quad +a \quad = 2+i \\ w \quad + \ b = 5i \\ -2z - w + a - b = -1 - i \\ z + w + a - 2b = 2 \end{cases}$ Al resolverlo por medio de matrices se obtiene

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2+i \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5i \\ -2 & -1 & 1 & -1 & -1-i \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2+i \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5i \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 3+i \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -i \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2+i \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5i \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3+6i \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

de la tercera ecuación, $3a = 3 + 6i \Rightarrow a = 1 + 2i$ y de la última, $3a - 3b = 3$, es decir $a - b = 1 \Rightarrow b = a - 1 = 1 + 2i - 1 = 2i$, de la segunda ecuación $w + b = 5i$ con lo que $w = 5i - 2i = 3i$, y de la primera, $z + a = 2 + i$, o sea $z = 2 + i - a = 1 - i$

con estos valores de z y de w, -2z-w = -2 + 2i – 3i = -2 – i ; z +w = 1 – i + 3i = 1 + 2i

el vector $\overline{u}$, que es la proyección requerida, es $\overline{u} = \overline{v_U}$ = (1 – i , 3i , -2 – i , 1 + 2i)

2.- Otra forma de obtener $\overline{v_U}$, es aplicando la definición de proyección sobre un subespacio, para lo cual es necesario conocer una base ,que llamaremos B, ortonormal de U Primero formaremos una base A = { $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$) ortogonal . El vector $\overline{a_1}$ lo obtenemos dando valores a z y w, por ejemplo, z = 1 y w = i ⇒ $\overline{a_1}$ = (1 , i , -2 – i , 1 + i). El vector $\overline{a_2}$ debe ser tal que $\overline{a_2} \in U$ y además ($\overline{a_2} \mid \overline{a_1}$) = 0, aplicando el producto

interno queda: z(1) + w(-i) + (-2z-w)(-2+i) + (z+w)(1-i) = 0 ; y efectuando operaciones resulta z – w i + 4z + 2w – 2z i – w i + z + w – z i – w i = 0 ; z(6 – 3 i) + w(3 – 3 i) = 0

$$\text{de aquí,}\quad w = \frac{-6+3i}{3-3i}z = \frac{3(-2+i)}{3(1-i)}z = \frac{(-2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}z = \frac{(-2-1)+(-2+1)i}{2}z\ ;$$

$w = (-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i)z$. Para z = 2, resulta w = -3 – i ; -2z-w = -1 + i ; z+w = -1 – i . Un

vector $\overline{a_2}$ ortogonal a $\overline{a_1}$ es $\overline{a_2}$ = (2 , -3 – i , -1 + i , -1 – i). Ahora, debemos normalizar los vectores de la base A, para tener la base B ortonormal.

$$\|\overline{a_1}\| = \sqrt{1(1)+i(-i)+(-2-i)(-2+i)+(1+i)(1-i)} = \sqrt{1+1+5+2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{el vector}\quad \overline{b_1} = \frac{1}{\|\overline{a_1}\|}\overline{a_1} = \left(\frac{1}{3}\ ,\ \frac{i}{3}\ ,\ \frac{-2-i}{3}\ ,\ \frac{1+i}{3}\right)$$

$$\|\overline{a_2}\| = \sqrt{2(2)+(-3-i)(-3+i)+(-1+i)(-1-i)+(-1-i)(-1+i)} = \sqrt{4+10+2+2} = \sqrt{18}$$

$$\|\overline{a_2}\| = 3\sqrt{2},\qquad \text{el vector}\quad \overline{b_2} = \frac{1}{\|\overline{a_2}\|}\overline{a_2} = \left(\frac{2}{3\sqrt{2}}\ ,\ \frac{-3-i}{3\sqrt{2}}\ ,\ \frac{-1+i}{3\sqrt{2}}\ ,\ \frac{-1-i}{3\sqrt{2}}\right)$$

$$(\overline{v} \mid \overline{b_1}) = (2+i)\frac{1}{3} + 5i\left(-\frac{i}{3}\right) + (-1-i)\left(-\frac{2}{3}+\frac{i}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}-\frac{i}{3}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{i}{3} + \frac{5}{3} + \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right) - \frac{i}{3} + \frac{2}{3}i + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}i = \frac{12}{3} + 0i = 4$$

$$(\overline{v} \mid \overline{b_1})\,\overline{b_1} = 4\,\overline{b_1} = \left(\frac{4}{3}\ ,\ \frac{4}{3}i\ ,\ -\frac{8}{3}-\frac{4}{3}i\ ,\ \frac{4}{3}+\frac{4}{3}i\right)$$

$$(\bar{v} | \bar{b_2}) = (2 + i)\frac{2}{3\sqrt{2}} + 5\, i\, (-\frac{3}{3\sqrt{2}} + \frac{i}{3\sqrt{2}}) + (-1 - i)(-\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{i}{3\sqrt{2}}) + 2(-\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{i}{3\sqrt{2}})$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{2}} + \frac{2i}{3\sqrt{2}} - \frac{15i}{3\sqrt{2}} - \frac{5}{3\sqrt{2}} + (\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}}) + \frac{2i}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{2i}{3\sqrt{2}} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} - \frac{9i}{3\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3i}{\sqrt{2}}$$

$$(\bar{v} | \bar{b_2})\, \bar{b_2} = (-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3i}{\sqrt{2}})\, \bar{b_2} =$$

$$= (-\frac{2}{6} - \frac{2(3i)}{6} \;,\; (\frac{1}{2} - \frac{3}{6}) + (\frac{3}{2} + \frac{1}{6})\, i \;,\; (\frac{1}{6} + \frac{3}{6}) + (-\frac{1}{6} + \frac{3}{6})\, i \;,\; (\frac{1}{6} - \frac{3}{6}) + (\frac{1}{6} + \frac{3}{6})\, i \,)$$

$$= (-\frac{1}{3} - i \;,\; \frac{5}{3}\, i \;,\; \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\, i \;,\; -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\, i)$$

$$\overline{v_U} = (\frac{4}{3} , \frac{4}{3} i , -\frac{8}{3} - \frac{4}{3} i , \frac{4}{3} + \frac{4}{3} i) + (-\frac{1}{3} - i \;,\; \frac{5}{3}\, i \;,\; \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\, i \;,\; -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\, i),$$

así que $\overline{v_U} = (1 - i \;,\; 3\, i \;,\; -2 - i \;,\; 1 + 2\, i)$

3.-Para aplicar el tercer método, debemos obtener la diferencia $\bar{v} - \bar{u}$, donde el vector $\bar{u}$ es del subespacio U, esto es : $\bar{v} - \bar{u} = (2 + i - z \;,\; 5\, i - w \;,\; -1 - i + 2z + w \;,\; 2 - z - w)$,

ya que , z , w $\in$ C , podemos expresarlos como $\begin{cases} z = m + n\, i \\ w = p + q\, i \end{cases}$ donde m, n, p, q $\in$ R

$\bar{v} - \bar{u}$ = ((2-m) + (1-n) i , -p + (5-q) i , (-1+2m+p) + (-1+2n+q) i , (2-m-p) + (-n-q) i)

cuya norma es:

$$\sqrt{(2-m)^2 + (1-n)^2 + (-p)^2 + (5-q)^2 + (-1+2m+p)^2 + (-1+2n+q)^2 + (2-m-p)^2 + (-n-q)^2}$$

Esta norma es una función (que podemos llamar f) de las variables m, n, p, q .
Al igualar a cero cada una de las cuatro derivadas parciales de f, se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones, cuya solución nos da los valores de m , n , p y q correspondientes al vector de U que es la proyección $\overline{v_U}$.

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{2(2-m)(-1)+2(-1+2m+p)(2)+2(2-m-p)(-1)}{2f(m,n,p,q)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{-2+m-2+4m+2p-2+m+p}{f(m,n,p,q)} = 0 \text{ ------(1)}$$ de manera semejante

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{-1+n-2+4n+2q+n+q}{f(m,n,p,q)} = 0 \text{ -------------(2);}$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{p-1+2m+p-2+m+p}{f(m,n,p,q)} = 0 \text{ ---------------(3)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{-5+q-1+2n+q+n+q}{f(m,n,p,q)} = 0 \text{ ---------------- (4)}$$

multiplicando por f(m,n,p,q) las cuatro ecuaciones y simplificando términos llegamos a

$$\begin{cases} 6m+3p=6 & \Rightarrow & 2\mathrm{m}+\mathrm{p}=2 \text{ -----(1')} \\ 6n+3q=3 & \Rightarrow & 2\mathrm{n}+\mathrm{q}=1 \text{ -----(2')} \\ 3m+3p=3 & \Rightarrow & \mathrm{m}+\mathrm{p}=1 \text{ -----(3')} \\ 3q+3n=6 & \Rightarrow & \mathrm{q}+\mathrm{n}=2 \text{ -----(4')} \end{cases}$$

Restando (3') de (1') m = 1 . Sustituyendo este valor en (3') se tiene p = 0 . De (2') q = 1 – 2n que sustituido en (4') da 1 – 2n + n = 2 $\Rightarrow$ n = -1 $\therefore$ q = 3 .

De lo anterior se tiene z = 1 – i ; w = 3 i ; -2z – w = -2 – i ; z + w = 1 + 2 i . El vector $\overline{u} \in$ U, más cercano a $\overline{v}$, es $\overline{u} = \overline{v_U}$ = (1 – i , 3 i , -2 – i , 1 + 2 i) : Igual a la proyección obtenida con los métodos anteriores.

Esta obra se terminó de imprimir
en junio de 2002
en el taller de imprenta del
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 500 ejemplares
más sobrantes de reposición.