GEOMETRÍA ANALÍTICA

Cuaderno de trabajo

Leda
Speziale San Vicente
Luis Humberto
Soriano Sánchez

30.-

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Cuaderno de trabajo

LEDA SPEZIALE SAN VICENTE
LUIS HUMBERTO SORIANO SÁNCHEZ

1999

Geometría analítica. Cuaderno de trabajo

Ciudad Universitaria, 04510, México, D.F.

Primera edición, abril de 2000.

ISBN 968-36-7772-X

Impreso y hecho en México.

PRESENTACIÓN

La Facultad de Ingeniería ha decidido realizar una serie de ediciones provisionales de obras recientemente elaboradas por académicos de la institución, como material de apoyo para sus clases, de manera que puedan ser aprovechadas de inmediato por alumnos y profesores. Tal es el caso de la presente obra: *Geometría analítica, cuaderno de trabajo*, elaborada por Leda Speziale San Vicente y Luis Humberto Soriano Sánchez.

Se invita a los estudiantes y profesores a que comuniquen a los autores las observaciones y sugerencias que mejoren el contenido de la obra, con el fin de que se incorporen en una futura edición definitiva

Í N D I C E

T E M A **H O J A**

INTRODUCCIÓN

Este cuaderno pretende ser un auxiliar en el estudio de la geometría analítica en el espacio utilizando vectores, adaptado al aprendizaje y avance personal de <u>cada estudiante</u>, sin presión de tiempo. <u>No</u> se trata de una colección de series de ejercicios para ser resueltas en un plazo fijo, ni para ser tareas obligatorias en un curso; por el contrario, son ejercicios cuyo objetivo es la comprensión y asimilación integral de los conceptos, tanto elementales como de aplicación, contenidos en el programa vigente de la asignatura en la Facultad de Ingeniería de la UNAM, lo que requiere tiempo diferente para personas diferentes.

El material está clasificado en temas, coincidentes con los del programa antes mencionado. Al inicio de cada tema se plantean afirmaciones incompletas o semiestructuradas para ser completadas y, con ello, comprender y precisar los conceptos involucrados; se presentan después, problemas semiresueltos que inducen a una resolución razonada; a continuación hay problemas resueltos y comentados paso a paso, en algunos, la solución se obtiene de diferentes maneras y se analizan las ventajas o desventajas de ellas; al final se proponen problemas cuya resolución requiere del conocimiento, comprensión y buen manejo de los contenidos más importantes del tema, de la mayoría de estos problemas se da la solución a la que debe llegarse.

Seguros de que este trabajo puede mejorarse, los autores recibiremos con gusto y agradecimiento los comentarios y sugerencias que, para tal fin, nos sean enviados.

Por último queremos agradecer a la Facultad de Ingeniería y a sus autoridades el apoyo brindado, que hizo posible la realización de este trabajo.

Leda Speziale San Vicente ***L. Humberto Soriano Sánchez***

AL ESTUDIANTE

Para que el uso de este cuaderno coadyuve al logro de un cabal aprendizaje de la geometría analítica en el espacio empleando vectores, es conveniente, antes de iniciar la resolución de los ejercicios de cada tema, estudiar los primeros conceptos con apoyo en, cuando menos , dos fuentes: lo impartido por el profesor del curso y uno o dos libros de consulta; o bien, dos o más textos; luego, tratar de completar las afirmaciones semiestructuradas sin consultar libros ni apuntes, poniendo especial atención en el llenado de los espacios. Si esta labor se dificulta, es recomendable regresar al estudio de la teoría antes de seguir insistiendo; el avance fluido, sin tropiezos y de manera <u>individual</u>, indica que se han comprendido y asimilado los conceptos fundamentales.

Después de resolver los primeros diez o quince ejercicios (dependiendo de cada persona), es oportuno dejar temporalmente este material, para seguir con el estudio de la teoría; ya incorporada ésta a los conocimientos anteriores, continuar, <u>sin ayuda ni consultas</u>, con la resolución de los siguientes diez o quince ejercicios; de esta manera, seguir, según las necesidades y el aprendizaje personal, hasta resolver los ejercicios propuestos al final del tema.

SISTEMAS DE REFERENCIA

1. Los elementos geométricos que forman el marco o sistema de referencia cartesiano en un plano son ______________________________________ .

2. El marco o sistema de referencia polar es ___________________________ .

3. ¿Cuántas coordenadas cartesianas son necesarias para determinar la posición de un punto en el plano? _________ ¿y en el espacio en el que vivimos? ________ ¿son únicas? _________ .

4. ¿Cuántas coordenadas polares son necesarias para determinar la posición de un punto en el plano? _______ ¿son únicas? _______ .

5. En los sistemas de coordenadas polares y de coordenadas cilíndricas, si $r = 0$, entonces θ ___________________________________ .

6. Si el punto A tiene por coordenadas polares a $\left(4, -\frac{\pi}{3}\right)$ entonces también puede ser representado por las coordenadas $(\quad, 120°)$, o por $(\quad, 300°)$.

7. Si para las coordenadas cartesianas (x, y) de un punto el cociente $\frac{y}{x}$ es negativo, entonces en las coordenadas polares de dicho punto el valor del ángulo θ está entre ________ y _______ , o entre _______ y _______ .

8. Si la abscisa de un punto es nula, es decir si el cociente $\frac{y}{x}$ no exite, entonces para ese punto el ángulo θ vale ______ o _______ ; y si dicho cociente vale cero, entonces θ vale ______ o _______ .

9. La expresión general de las coordenadas polares de un punto con radio vector positivo es: __________ y para el mismo punto con radio vector negativo es: _____________ .

10. El punto cuyas coordenadas cartesianas son (0, 0, 0) tiene las coordenadas esféricas (,   ,   ) , donde θ ______________ y ϕ ______________ .

11. Completar el siguiente cuadro escribiendo en cada espacio: es una distancia, es un ángulo o, no existe.

Si las coordenadas de un punto son:	**La primera coordenada del punto**	**La segundo coordenada del punto**	**La tercera coordenada del punto**
Cilíndricas			
Cartesianas en el espacio			
Polares			
Esféricas			

12. Si los puntos **A** y **B** son simétricos respecto al eje **Y**, entonces la dirección de la recta **AB** es _______________ al eje **Y** y __________________ al plano **XZ**.

13. Dos puntos que tienen respectivamente iguales sus primera y tercera coordenadas esféricas, ¿pueden ser simétricos

a) respecto al eje **Z**? _____ en caso negativo ¿por qué? _______________ ; en caso afirmativo ¿cómo es la segunda coordenada de uno de ellos respecto a la del otro? ______________________________ ;

b) respecto al origen?_____ ; en caso negativo ¿por qué? _______________ ; en caso afirmativo ¿Cómo es la segunda coordenada de uno de ellos respecto a la del otro? ______________________________ ;

c) respecto al plano **XZ**?______ ; en caso negativo ¿por qué? _________________ , en caso afirmativo ¿cómo es la segunda coordenada de uno de ellos respecto a la del otro? ______________________________ .

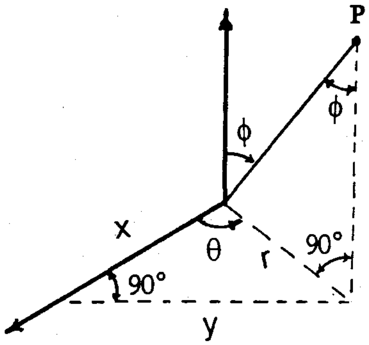
14. Determinar las coordenadas esféricas del punto **Q**, simétrico respecto al plano **YZ**, del punto **P** cuyas coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) son $(2\sqrt{2}, 240°, 135°)$.

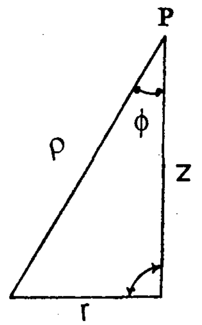
Solución:

Q se encuentra en la recta que pasa por **P** y es perpendicular al plano **YZ**; esto es, debe ser paralela al eje **X** (eje polar) por lo que ρ y ϕ de **Q** son respectivamente iguales a ρ y ϕ de **P**, la única que cambia es θ que puede obtenerse como la de un punto, cuya proyección en el plano **XY** sea simétrica respecto al eje copolar, de la proyección P_1 del punto **P** sobre el mismo plano.

P_1 y Q_1 son respectivamente las proyecciones de **P** y **Q** sobre el plano **XY**, luego las coordenadas esféricas de **Q** son: $(2\sqrt{2}, 300^0, 135^0)$

Otra manera de determinar las coordenadas esféricas de **Q** es obtener las coordenadas cartesianas de **P**. Con auxilio de la figura:

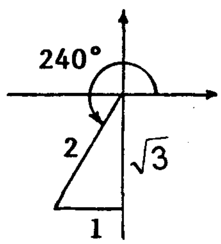




$$x = r\cos\theta = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$z = \rho\cos\phi$$

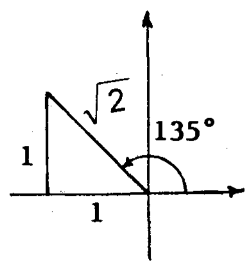
$$cos\theta = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$sen\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$sen\ \phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$cos\ \phi = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$



por lo tanto:

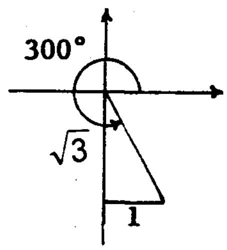
$$x = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$$

$$z = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2 \qquad \therefore\ P(-1,\ -\sqrt{3},\ -2)$$

luego, como **Q** es simétrico de **P** respecto a **YZ**, sus coordenadas **y** y **z** son idénticas a las de **P** y su abscisa es igual a la abscisa de **P** cambiada de signo, esto es, $Q(+1,-\sqrt{3},-2)$; por último determinamos las coordenadas esféricas de **Q**:

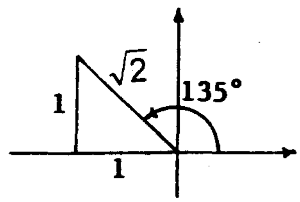
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{1+3+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$



$$\theta = ang\ tan\ \frac{y}{x} = ang\ tan\ \frac{-\sqrt{3}}{1} = 300^0$$

$$\phi = ang\ cos\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = ang\ cos\ \frac{-2}{2\sqrt{2}}$$

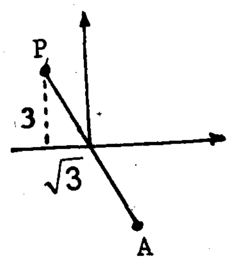
$$= ang\ cos\ \frac{-1}{\sqrt{2}} = 135^0$$



con lo que: $Q(2\sqrt{2},\ 300^0, 135^0)$.

15. Determinar unas coordenadas polares de **M**, punto medio del segmento de recta $\overline{\mathbf{AB}}$ donde **A** es el simétrico de **P** respecto al polo, y **B** es el simétrico de **Q** respecto al eje copolar, considerando que las coordenadas cartesianas de **P** y **Q** son respectivamente $\left(-\sqrt{3},\ 3\right)$ y $(3,\ -3)$.

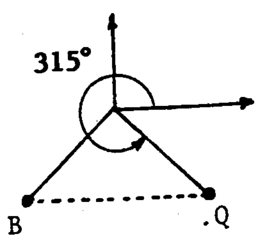
Solución:



Unas coordenadas polares de **P** son: $r_p = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$\theta_P = ang\ tan\ \frac{3}{-\sqrt{3}} = ang\ tan\ \frac{\sqrt{3}}{-1} = 120°$$

así que $r_A = 2\sqrt{3}$ y $\theta_A = 120° + 180° = 300°$ $\therefore$ $A\left(2\sqrt{3},\ 300°\right)$



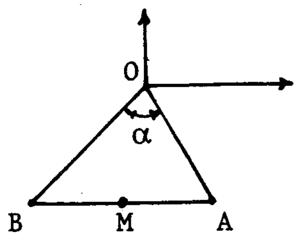
por otra parte:

$$r_Q = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\theta_Q = ang\ tan\ \frac{-3}{3} = 315°$$

entonces $r_B = 3\sqrt{2}$ y $\theta_B = 180° - 315° = -135°$

o bien $\theta_B = -135° + 360° = 225°$ $\therefore$ $B\left(3\sqrt{2},\ 225°\right)$



En el triángulo AB0

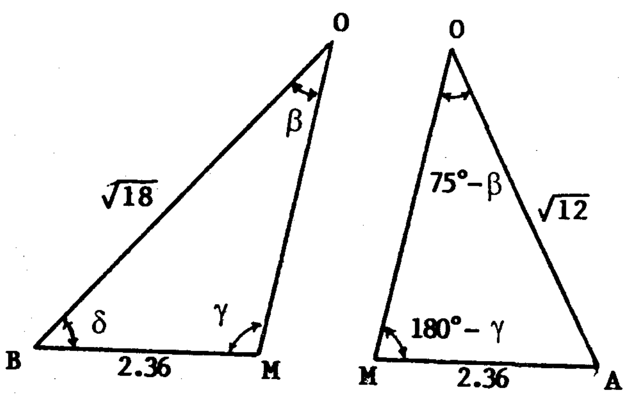
$\alpha = \theta_A - \theta_B = 300° - 225° = 75°$

por la ley de cosenos:

$$\overline{AB} = \sqrt{18 + 12 - 12\sqrt{6}\cos 75°} \approx \sqrt{30 - 7.61} \approx 4.732$$

$$\overline{BM} = \overline{MA} \approx 2.366$$

para obtener r_M y θ_M consideramos los triángulos 0BM y 0MA .



en $0BM$: $\dfrac{sen\,\beta}{2.36} = \dfrac{sen\,\gamma}{\sqrt{18}}$ ....(1)

en $0MA$: $\dfrac{sen(75° - \beta)}{2.36} = \dfrac{sen(180° - \gamma)}{\sqrt{12}}$

ya que $sen\,\gamma = sen\,(180° - \gamma)$, al sustituir $sen\,(180° - \gamma)$ por $sen\,\gamma$ despejado de (1), se obtiene

$$\frac{\sqrt{18}\,sen\beta}{2.366} = \frac{\sqrt{12}\,sen(75° - \beta)}{2.366} \quad \text{...........} \ (2)$$

además:

$$sen\,(75° - \beta) = sen75°\cos\beta - sen\beta\,\cos 75° = sen75°\sqrt{1 - sen^2\beta} - \cos 75°\,sen\beta \approx$$

$$\approx 0.9659\sqrt{1 - sen^2\beta} - 0.2588\,sen\beta$$

sustituyendo en (2): $\sqrt{18}\ sen\beta = \sqrt{12}\left(0.9659\sqrt{1 - sen^2\beta} - 0.2588\,sen\beta\right)$

$$\left(\sqrt{18} + (\sqrt{12})\ 0.2588\right) sen\beta = (\sqrt{12})\ 0.9659\sqrt{1 - sen^2\beta}$$

elevando al cuadrado queda: $26.41\ sen^2\beta \approx 11.195 - 11.195\ sen^2\beta$

$37.605\ sen^2\beta \approx 11.195\ ;\quad sen\beta \approx 0.5456\quad \therefore\quad \beta \approx 33°$

$$sen\gamma = \frac{\sqrt{18}\ sen\beta}{2.366} \approx 0.978\ \therefore\quad \gamma = 102° \qquad \delta = 180° - (\beta + \gamma) = 45°$$

$$\frac{\overline{0M}}{sen\delta} = \frac{\sqrt{18}}{sen\gamma}\ ; \qquad \overline{0M} = \frac{\sqrt{18}\ sen\,45°}{sen\,102°} \approx \frac{\sqrt{18}\ x\ 0.7071}{0.978} \approx 3.067$$

$\overline{0M} = r_M\ ;\qquad \theta_M = \theta_B + \beta = 225° + 33° = 258°$ y las coordenadas polares de M son: $M(\ 3.067,\ 258°\ )$.

Otra manera de resolver este ejercicio es obteniendo las coordenadas cartesianas de A y de B; $A(\sqrt{3},\ -3)$ y $B(-3,\ -3)$ con lo que, las coordenadas cartesianas de M son:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\sqrt{3} - 3}{2}\ ; \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3 - 3}{2} = -3$$

$M\left(\dfrac{\sqrt{3} - 3}{2},\ -3\right)$; las coordenadas polares de M son:

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3} - 3}{2}\right)^2 + (-3)^2} \approx \sqrt{9.4019} \approx 3.066$$

$$\theta = ang\ tan\ \frac{-3}{-0.634} = ang\ tan\ 4.732 = 180° + 78° = 258° \quad \text{y} \quad M(\ 3.066,\ 258°\ ).$$

Como puede verse, esta segunda forma es más rápida.

16. Determinar:

a) las coordenadas cartesianas y las cilíndricas del punto **A** cuyas coordenadas esféricas son $\left(4,\ \dfrac{5}{6}\pi,\ 135^0\right)$,

b) Las coordenadas cilíndricas del punto **B** que es simétrico del punto **A** respecto al plano **XZ.**

Solución:

a) Identificamos primero las coordenadas esféricas de **A** que son:

ρ =_______ , θ =_________ y ϕ =_________ .

para determinar las coordenadas cartesianas usamos las siguientes ecuaciones de transformación:

x = _______________ ; **y** = _______________ ; **z** = _______________ .

con las que, al sustituir ρ, θ y ϕ obtenemos:

x = _______________ ; **y** = _______________ ; **z** = _______________ .

y las coordenadas cartesianas de **A** son: (, ,).

Para obtener las coordenadas cilíndricas de **A**, sustituimos las cartesianas en las ecuaciones de transformación: **r** = ________________ , θ =______________ .

con lo que, al sustituir valores obtenemos:

r = ________________ ; θ =_________________ ; **z** = ________________ .

y queda: **A** (, ,) en coordenadas cilíndricas.

Otra forma de obtener estas coordenadas es pasar directamente de esféricas a cilíndricas utilizando las fórmulas que, obtenidas de la figura son:

r =

θ =

z =

y al sustituir los valores de ρ, θ y ϕ se obtiene:

r =________________ ; θ =___________________ ; **z** =________________ .

b) Si **B** es simétrico de **A** respecto al plano **XZ**, las coordenadas cilíndricas primera y tercera de **B** son r =___________ y z =____________ ya que en los puntos **A** y **B** la única coordenada diferente es la segunda; obtenemos θ_B como la suma $\pi +$ ________ , con lo que las coordenadas cilíndricas de **B** son: (,   ,   ).

17. Si unas coordenadas polares del punto **A** son $\left(-4,\ -\frac{5}{6}\pi\right)$, determinar las coordenadas cartesianas de **A** y unas coordenadas polares del punto:

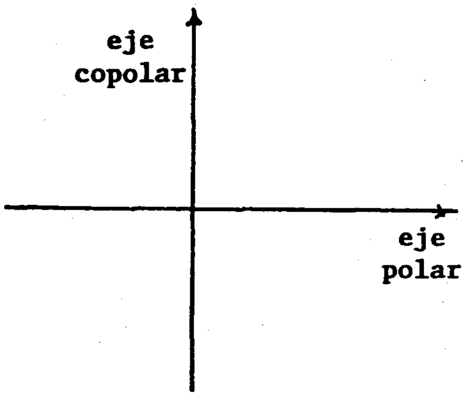
B, simétrico de **A** respecto al eje polar;

C, simétrico de **A** respecto al eje copolar, y

D, simétrico de **A** respecto al polo.

Solución:

Es más cómodo tener coordenadas polares de **A** con $r > 0$ y θ entre 0 y 2π radianes, por lo que a $-\frac{5}{6}\pi$ le sumamos _________ para obtener θ =________ , al que debemos sumarle ___________ para que **r** sea positivo, con lo que las coordenadas buscadas de **A** son: (,   ) y su localización en el plano polar es



Para las coordenadas cartesianas de **A**

usamos las fórmulas x = _________ ; y = _________ ;

al sustituir en ellas r_A y θ_A obtenemos:

x_A = _________ ; y_A = _________ ;

Por lo que: **A** (,).

Para determinar unas coordenadas polares de **B**, podemos considerar $r = 4$ y restar _______a 2π (como vemos en el plano polar) con lo que **B** (,).

Considerando $r_C = 4$ para el punto **C** (del plano polar) debemos restar _________ a _________ para obtener $\theta_C > 0$ y **C** (,).

Para el punto **D** unas coordenadas polares son $r_D = -4$ y θ_D = _________ , o bien $r_D = 4$ y θ_D = _________ + _________ = _________ con lo que **D** (,).

18. Para el punto $A\left(\sqrt{6},\ \sqrt{2}\right)$, en el plano **XY** , determinar unas coordenadas polares del punto

a) **A**, tales que:
- i) $r > 0$ y $0^0 \leq \theta < 360^0$
- ii) $r < 0$ y $0^0 \leq \theta < 360^0$
- iii) $-360^0 \leq \theta < 0^0$ y $r < 0$
- iv) $-360^0 \leq \theta < 0^0$ y $r > 0$
- v) $360^0 \leq \theta < 720^0$ y $r > 0$

b) **B**, simétrico de **A** respecto al eje **Y**.

c) **C**, simétrico de **A** respecto al origen.

¿Cómo son entre sí los puntos **B** y **C** en cuanto a simetría?

19. Conocidas las coordenadas cartesianas de los puntos $A\left(0, \sqrt{2}\right)$ y $B\left(\sqrt{6}, 0\right)$, determinar unas coordenadas polares del punto:

a) **A**;

b) **P**, simétrico de **A** respecto al origen;

c) **Q**, simétrico de **B** respecto al eje **Y**, y

d) **M**, respecto al cual, **A** es simétrico de **B**.

20. Si las coordenadas cilíndricas de un punto **P** son $\left(4\sqrt{3}, \theta, -4\right)$ donde $\theta \approx 5.236$ radianes, determinar las coordenadas:

a) cilíndricas del punto **A**, contenido en el plano **YZ** y tal que el segmento de recta $\overline{PA}$ sea paralelo al eje **X**;

b) esféricas del punto **P**;

c) esféricas de **C**, punto medio del segmento de recta que une a **P** con el origen de coordenadas;

d) cartesianas del punto **P**;

e) cilíndricas y esféricas del punto **E**, simétrico de **P** respecto al eje **Z**, y

f) cilíndricas y esféricas del punto **F**, simétrico de **P** respecto al origen.

ÁLGEBRA VECTORIAL

1. El significado etimológico de la palabra vector es ______________________ ¿qué relación tiene este significado con la representación gráfica de un vector? ____________________________ .

2.- La diferencia entre un escalar y un vector es que el escalar queda completamente definido con un ___________________ y el vector requiere de _________________ , ______________ y _______________ ; sin embargo, existe un vector llamado ___________________ que carece de ___________ y ________________ .

3.- Si el origen o punto inicial de un vector es el punto $A(x_A, y_A, z_A)$ y el extremo o punto final de ese vector es el punto $B(x_B, y_B, z_B)$, entonces la primera componente escalar de ese vector es ________ y la terna (, ,) es la representación analítica del vector $\overline{AB}$.

4. El segmento dirigido $\overline{CD}$ que une los puntos $C(x_C, y_C, z_C)$ y $D(x_D, y_D, z_D)$ es la representación geométrica del vector que analíticamente se expresa con la terna (, ,) .

5. Para sumar gráficamente el vector $\bar{u}$ más el vector $\bar{v}$, colocamos el origen de ______ coincidiendo con el extremo de ______ , así el origen del vector suma coincide con el origen del vector ______ y el extremo del vector suma coincide con el extremo del vector ______ .

6. Si los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son las diagonales de un paralelogramo, con base en la adición y sustracción de vectores en forma gráfica, los lados no paralelos $\bar{u}$ y $\bar{v}$ del paralelogramo se obtienen como la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \qquad\qquad = \bar{a} \\ \\ \qquad\qquad = \bar{b} \end{cases}$$

7. Al multiplicar un vector por un escalar diferente de cero, puede cambiar su ___________ y su ___________ , pero su _________________ se conservа. Por lo tanto los vectores $(3,\ 2,\ -5)$ y $(6,\quad ,\quad)$ tienen la misma __________________ .

8. Analíticamente el vector i se expresa como $(\quad ,\quad ,\quad)$, el j como $(\quad ,\quad ,\quad)$ y el k como $(\quad ,\quad ,\quad)$. El módulo de cada uno de los vectores i , j y k vale __________ ; por esto, son casos particulares de los llamados vectores ______________ .

9. Si $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, entonces las componentes escalares de un vector unitario de igual dirección y sentido que $\bar{a}$ son _______ , _______ y _______ , es decir $\bar{a}_u = (\quad ,\quad ,\quad)$.

10. Si la componente vectorial del vector $\bar{s}$ sobre el vector $\bar{r}$ tiene el mismo sentido que el vector $\bar{r}$, entonces la componente escalar de $\bar{s}$ sobre $\bar{r}$ es de signo __________________ y si la componente vectorial de $\bar{s}$ sobre $\bar{r}$ tiene sentido contrario al del vector $\bar{r}$, entonces la componente escalar de $\bar{s}$ sobre $\bar{r}$ es de signo ______________ .

11. La diferencia esencial entre el producto punto y el producto cruz de dos vectores es ______________________________ ; por esa razón al producto punto se le llama también ______________________ y al producto cruz ______________________________ .

12. La condición de perpendicularidad entre dos vectores $\overline{m}$ y $\overline{n}$ es __________ y eso se debe a que: $|\overline{m}|$ por $|\overline{n}|$ por ___________ es igual a ___________ .

13. La condición de paralelismo entre dos vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$ es _____________ , debido a que el ángulo entre dos vectores paralelos es ________ o ________ y el producto de $|\overline{a}|$ por $|\overline{b}|$ por ___________ es igual a ___________ .

14. El ángulo θ entre dos vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ interviene en las fórmulas:

$\overline{u} \cdot \overline{v} =$ y $|\overline{u} \times \overline{v}| =$; sin embargo, para calcular el valor de θ tal que $0° \leq \theta \leq 180°$ se utiliza la fórmula $\cos\theta =$, debido a que el ___________ de un ángulo es igual al de su suplemento, lo que implica que si calculamos el valor de __________ de θ, es el mismo para θ y para $180° - \theta$, lo que no sucede con ___________ .

15. Ya que $\overline{v}$ y $\lambda\,\overline{v}$ tienen la misma _____________ si $\lambda \neq 0$, otra manera de expresar el ____________________ entre dos vectores es que sus componentes escalares sean respectivamente _________________ .

16. Se llaman ángulos directores de un vector $\overline{m}$ a los ángulos que forma con cada uno de los ______________________ ; esos ángulos se llaman directores debido a que ____________________________________ .

17. Para todo vector $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$, su módulo $|\bar{v}| =$, además sus cosenos directores son: $\cos\alpha =$, $\cos\beta =$, $\cos\gamma =$ y dichos cosenos directores satisfacen la relación ____________________ .

18. El área de un paralelogramo es igual a base por altura, pero vectorialmente dicha área, cuando dos de los lados no paralelos del paralelogramo son los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$, puede calcularse como ____________ ; debido a que ____ .

19. El producto mixto de tres vectores implica que primero se efectúa un producto _______________ entre dos de ellos y luego entre el resultado de dicho producto, que siempre es un ______________ , y el otro de los tres vectores se efectúa un producto _________________ por lo que el resultado final del producto mixto es un _________________ .

20. El ángulo que forma un vector $\bar{u}$ con el resultado de $\bar{u} \times \bar{v}$, para todo vector $\bar{v}$, es ________ , debido a ello y a la condición de perpendicularidad entre dos vectores, el producto mixto de tres vectores $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$, si son los tres lados de un triángulo, es igual a ____________ .

21. Ya que la componente escalar del vector $\bar{a} = (2, -1, 0)$, sobre el vector $\bar{c} = (1, \quad , 5)$ es cero, la componente vectorial de $\bar{a}$ sobre $\bar{c}$ es $(\quad , \quad , \quad)$.

22. La componente escalar del vector $\bar{m}$ de módulo 3 y paralelo al eje Z, sobre el vector $\bar{n} = (1, \quad , \quad)$ que es paralelo al vector $(4, 7, -1)$ es __________, o __________ .

23. El producto mixto de los vectores $\bar{u} = (u_1 ,\ u_2 ,\ u_3)$, $\bar{v} = (1,\ 2,\ 0)$ y $\bar{w} = (0,\ -1,\ 1)$ es $\sqrt{60}$; la segunda componente de $\bar{u}$ es el doble de la primera y además $\bar{u}$ forma un ángulo de $60°$ con $\bar{v}$. Para determinar el o los vectores $\bar{u}$, se despeja u_3 del desarrollo del producto mixto igualado a $\sqrt{60}$ y, considerando la particularidad del vector $\bar{u}$, se obtiene $u_3 =$, que al sustituirlo en la igualdad que expresa que $\bar{u}$ y $\bar{v}$ forman un ángulo de 60^0 se llega a la ecuación $\qquad = \qquad$ de la que se obtiene $u_1 =$, con lo que $\bar{u} = (\quad , \quad , \quad)$ o $\bar{u} = (\quad , \quad , \quad)$.

24. El producto punto de $\bar{u} = \left(-\sqrt{3} ,\ \frac{1}{\sqrt{3}} ,\ \sqrt{6} \right)$ y el resultado de $\bar{v} \text{ x } \bar{w} = \left(3,\ -1,\ -3\sqrt{2} \right) \text{ x } \left(1,\ 2,\ -1 \right)$ es _____________ , debido a que $\bar{u}$ y $\bar{v} \text{ x } \bar{w}$ son ____________________ , pues ya que $\lambda \bar{u} = (\quad , \quad , \quad)$, con $\lambda =$, resulta que $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son ____________________ .

25. Para determinar la condición que deben satisfacer las coordenadas cartesianas de un punto P que, contenido en el plano YZ , equidista de los puntos $A (3,\ -2,\ 1)$ y $B (-5,\ 10,\ 9)$, un camino es obtener las coordenadas del punto medio M de $\overline{AB} : x_m = \frac{3-5}{2} = -1$; $y_m = \frac{-2+10}{2} = 4$; $z_m = \frac{1+9}{2} = 5$, con ellas y considerando que las coordenadas de P son $(0,\ y,\ z)$, expresar que el vector $\overline{PM} = (-1,\ 4-y,\ 5-z)$ debe ser perpendicular al $\overline{AB}$ para que P equidiste de A y de B , por ende, $\overline{AB} \cdot \overline{PM} = 0$, esto es, $(-8,\ 12,\ 8) \cdot (-1,\ 4-y,\ 5-z) = 8 + 48 - 12y + 40 - 8z = 0$ es decir $12y + 8z - 96 = 0$, o bien $3y + 2z - 24 = 0$ que es la condición buscada. Otro camino, es igualar los módulos de los vectores $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$; al considerar las

coordenadas de $P(0,\ y,\ z)$ se tiene $\overline{AP} = (-3,\ y+2,\ z-1)$ y $\overline{BP} = (5,\ y-10,\ z-9)$, y al hacer $|\overline{AP}| = |\overline{BP}|$ se obtiene:

$\sqrt{9 + (y+2)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{25 + (y-10)^2 + (z-9)^2}$; después de elevar al cuadrado y desarrollar, se llega a:

$9 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 2z + 1 = 25 + y^2 - 20y + 100 + z^2 - 18z + 81$, al pasar todos los términos al primer miembro y simplificar queda $24y + 16z - 192 = 0$, y al dividir todo entre ocho se obtiene: $3y + 2z - 24 = 0$. Los puntos P están en la recta de intersección del plano YZ (puntos con abscisa nula, es decir $x = 0$) con el plano cuya ecuación es $3y + 2z - 24 = 0$, que es perpendicular a $\overline{AB}$ y pasa por su punto medio M.

26. Obtener las coordenadas del extremo B del vector $\overline{AB}$ que forma $60°$ y $45°$ con los ejes X y Z, respectivamente, si el módulo de $\overline{AB}$ es 8 y las coordenadas de A son $(-1,\ 4,\ \sqrt{2})$.

SOLUCIÓN:

$B_1(3,\ 8,\ 5\sqrt{2})$ $\qquad$ $B_2(3,\ 0,\ 5\sqrt{2})$

27. Los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$, ambos paralelos al plano XY y de módulos 13 y 10, respectivamente, son tales que la componente escalar de $\bar{u}$ sobre $\bar{v}$ es -6.5; además, el vector $\bar{u}$ forma $112.62°$ con el eje X. Determinar la forma trinómica de cada uno de los posibles vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

SOLUCIÓN:

$\bar{u}_1 \approx -5i - 12j$

$\bar{v}_1 \approx$

$\bar{v}_2 \approx$

$\bar{u}_2 \approx -5i + 12j$

$\bar{v}_3 \approx$

$\bar{v}_4 \approx$

28. Dos de los lados de un paralelogramo son los vectores $\bar{u} = (12,\ 0,\ 5)$ y $\bar{v} = (4,\ y,\ z)$ que forman entre sí un ángulo de $14.25°$ cuyo vértice es el punto $A(4,\ 1,\ 3)$. Si el área del paralelogramo es 16 unidades de superficie, determinar el vector $\bar{v}$ y las coordenadas de los puntos B y M, extremo y punto medio, respectivamente, de la diagonal AB del paralelogramo.

LA RECTA

1. El vector cuyo origen es el punto $O(0,0,0)$ y cuyo extremo es el punto $A(x_A, y_A, z_A)$ se llama vector ____________________ del punto A y generalmente se simboliza con ________ .

2. El vector de posición $\bar{a}$ de un punto A más el vector $\overline{AB}$ es igual al vector ____________ del punto B por lo que, la distancia entre los puntos A y B es, vectorialmente, el módulo de la diferencia del vector _________________ del punto B menos __________________________ .

3. Vectorialmente, una recta es el lugar geométrico de los puntos cuyo __________________ es la suma del vector de posición de un punto ________ más el vector cuya dirección es ________________ a la de un ______________ conocido, llamado vector director de la recta. Debido a que todo vector paralelo a un vector $\bar{v}$ puede expresarse como _________ con $\lambda \neq 0$, la ecuación vectorial de una recta que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) y es paralela al vector (a,b,c) es: $(x,y,z)=$ $\qquad$ + $\qquad$.

4. Las tres ecuaciones paramétricas de una recta cuya ecuación vectorial es $(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda(a,b,c)$ son:
   $x =$ $\qquad\qquad$, $y =$ $\qquad\qquad$, $z =$

5. Toda recta tiene una ______________ de ecuaciones vectoriales, por lo que tiene un número _____________ de conjuntos de tres ecuaciones paramétricas, cada uno correspondiente a cada una de sus ecuaciones ________________ .

6. La ecuación vectorial $(x, y, z) = (5, 3, 1) + t(2, 0, 0)$ corresponde a una recta _________________ al eje _______ .

7. Las ecuaciones paramétricas $x = 8$, $y = -2$, $z = 3t$ corresponden a una recta que contiene al punto $P(\quad, \qquad, 6)$ y que es _____________ al eje _______ .

8. Analíticamente, una recta puede expresarse por medio de _______ ecuación vectorial, tres ecuaciones ______________ o _______ ecuaciones cartesianas.

9. El vector j es perpendicular al vector $(2, \qquad, -3)$ por lo que las ecuaciones cartesianas en forma simétrica $\frac{x-5}{2} = \frac{z}{-3}$; $y = 7$ corresponden a una recta que contiene al punto $P(\quad, \qquad, 6)$ y es _______________ al eje Y .

10. Las ecuaciones cartesianas $x = 5$; $z = 8$ representan una recta que contiene al punto $A(\quad, 5, \quad)$ y es _______________ al eje _______ .

11. El seno del ángulo que forma una recta L con el vector que va de un punto P de la recta a otro Q ajeno a ella es $\operatorname{sen}\theta = \frac{\qquad}{|\overline{PQ}|}$ donde ________ es la distancia del punto Q a la recta L. Ya que, para dos vectores $\bar{a}$ y $\bar{c}$, $|\bar{a} \times \bar{c}| = \qquad \operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores ______ y ______ ; la distancia de Q a L es $d = \frac{\qquad \operatorname{sen}\theta}{|\bar{u}|} =$ __________ , donde ______ es un vector director de L .

12. El ángulo entre dos rectas es el formado por un ______________________ de una de ellas y un ________________________ de la otra.

13. Las ecuaciones cartesianas en forma simétrica $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-5}=z+2$, y $x+3=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{8}$ corresponden, respectivamente, a dos rectas L_1 y L_2 que son __________________ entre sí, ya que $(2,-5,\quad)\cdot(\quad,\quad,\quad)=0$.

14. Todos los vectores directores de una recta paralela al plano YZ son _____________ respecto al eje _______ , por lo tanto tienen su ____________ componente escalar igual a _______ .

15. Un vector director de una recta que forma $30°$ con el eje Y tiene su ________________ componente escalar proporcional a __________ y la constante de proporcionalidad es igual _________________ de dicho vector.

16. Una ecuación vectorial de una recta que pasa por el origen, forma 45° con el eje X y $60°$ con el Z, es $(x,y,z)=(\quad,-3r,\quad)$, o $\bar{p}=(\quad,-3r,\quad)$.

17. El vector $\bar{u}=(a,\quad,7)$ con $a\neq 0$, es director de una recta L_1 paralela al ___________ coordenado _______ y que forma $60°$ con la recta L_2: $\frac{x-5}{2}=\frac{-y}{2}=4-z$; para determinar el o los valores de a se plantea la ecuación $\frac{1}{2}=\frac{\qquad}{\qquad}$ y con ella se obtienen para a los valores _______ y -1.95, así el vector $\bar{u}$ puede ser $(\quad,\quad,\quad)$ o $(\quad,\quad,\quad)$.

18. Las ecuaciones vectoriales:

$\overline{p}=(1,5,2)+m(-3,2,1)$ y $(x,y,z)=(6n,-2-4n,1-2n)$ corresponden, respectivamente, a dos rectas ____________________ entre sí, pues al ser $=(6,-4,-2)$ se tiene que el vector $(-3,2,1)$ es __________________ al vector ___________ .

19. Un punto cuyas coordenadas cartesianas satisfacen simultáneamente a las ecuaciones cartesianas de dos rectas, es ______________________________ rectas.

20. Cuando el sistema de cuatro ecuaciones cartesianas, dos de una recta y dos de otra recta es:

- compatible determinado, las dos rectas ________________________ ;
- compatible indeterminado, las dos rectas ____________________ , o
- incompatible, las rectas ______________________ .

21. Si al sustituir en las tres ecuaciones paramétricas de L_1: $x=-2+2r$; $y=1-r$; $z=2+3r$; un mismo valor de ________ , se obtienen para x, y, z valores respectivamente iguales a los obtenidos al sustituir un mismo valor de _______ en las tres ecuaciones paramétricas de L_2: $x=3-t$; $y=2+2t$; $z=3-4t$; entonces los valores x, y, z son ________________________________ punto de __________________ de L_1 y L_2.

22. La distancia entre dos rectas sin punto común alguno es la magnitud de un vector cuya dirección es ______________ a la de cada una de ___________ ,

además su origen y extremo están, respectivamente, en ________ de las rectas y ________________ .

23. La componente escalar de un vector $\overline{AB}$ (donde A es un punto de la recta L_1 y B está contenido en L_2) en la dirección de un vector ______________ tanto a L_1 como a L_2, es igual a la ______________ entre L_1 y L_2.

24. Las ecuaciones vectoriales: $\bar{p} = (1, 4, -1) + t(2, 2, -1)$ y $\bar{p} = (-2, 1, 1) + s(0, 1, -1)$ corresponden a dos rectas de las cuales su ________________ es la ________________ escalar del vector $(\quad , \quad , \quad) - (-2, 1, 1)$ en la dirección del vector $(2,2,-1) \times (\quad , \quad , \quad)$ y, ya que la componente escalar de un vector $\bar{a}$ sobre un vector $\bar{c}$ es , se tiene que la ________________ entre esas rectas puede expresarse como $d =$, cuyo valor numérico es __________ .

25. Para tratar de obtener las coordenadas del punto de intersección de las rectas $L_1: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 3t \end{cases}$ y $L_2: \begin{cases} x = 1-r \\ y = -1+2r \\ z = 1+r \end{cases}$ se puede considerar el sistema de seis ecuaciones con ______ incógnitas; una forma de resolverlo es igualar, respectivamente, las equis, las yes y las zetas con lo que se llega al siguiente sistema de ________ ecuaciones con _____ incógnitas: $\begin{cases} 1+t = 1-r \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 1-t = -1+2r \ldots\ldots\ldots(2) \\ 3t = 1+r \ldots\ldots\ldots\ldots(3) \end{cases}$

al sumar (1) con (2) se obtiene $r =$ y al sustituirlo en (1), t=−2; pero la ecuación (3) no se satisface para estos valores de r y t lo que indica que el punto buscado ___________ , es decir L_1 y L_2 _____________ . Si en lugar de L_1 se tiene $L_3: \begin{cases} x = 1+q \\ y = 1-q \\ z = -3-3q \end{cases}$ que sólo difiere de L_1 en $z=-3-3q$; al igualar las zetas la ecuación (3) se convierte en $-3-3q = 1 + r$ .... (3') que sí se satisface para $r=2$ y $q=-2$, así que las coordenadas del punto de intersección de L_3 y L_2 pueden obtenerse sustituyendo _______ en las tres ecuaciones paramétricas de L_3, o bien el valor $r =$ en las tres __________________________ de ______ , así el punto es $\mathrm{I}\,(-1, 3, 3)$.

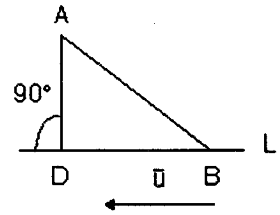
26. Los vectores de posición de los puntos: A perteneciente a L_2: $\bar{p}=(2,-3,-1)+t(1,-2,0)$ y B perteneciente a L_2: $\bar{p}=(1,0,-2)+r(3,-2,-1)$ con la condición de que el módulo de $\overline{AB}$ sea mínimo se pueden determinar calculando los valores de los parámetros ______ y ______ . Debido a la condición, $\overline{\mathrm{AB}}$ debe ser ________________ a $\bar{\mathrm{u}}_1 \times \bar{\mathrm{u}}_2$ que es (, ,); esto es, $(-1+3r-t, 3-2r+2t, -1-r) = \lambda\,(\quad , \quad , \quad)$ y por igualdad de vectores se llega al sistema de ______ incógnitas $\begin{cases} -1+3\quad -t \;= 2\lambda \\ 3-2r+2t= \\ \qquad\qquad\; = 4\lambda \end{cases}$ con lo que, al eliminar λ y resolver para r y t se llega a r = , t=−2; y los vectores de posición son $\bar{a}=(\quad , \quad , -1)$ y $\bar{b}=(\quad , \frac{6}{7} , \quad)$.

27. Las rectas $L_1 : \bar{p} =(1+t,\ 3-t, -1+4t)$ y $L_2 : x-1 = -y+3=z-2$ se cortan en un punto P cuyas coordenadas son parte de la solución del sistema de cinco

ecuaciones con ________ incógnitas $\begin{cases} x = 1+t & \text{............(1)} \\ \quad = & \text{............(2)} \\ \quad = & \text{............(3)} \\ x-1 = z-2 & \text{............(4)} \\ y-3 = & \text{............(5)} \end{cases}$ al despejar x de

(4) y sustituirla en (1) se obtiene $\quad = \quad$ .... (6) con la que al sustituir (3) se llega a $-1+4t-1=1+t$, lo que implica $t =$; al sustituir t en (1), (2) y (3) se obtiene $x = 1 + \quad = \quad$, $y = \quad$, $z = \quad$, valores que también satisfacen a (4) y (5) y así el punto de intersección es $P(\quad , 2, \quad)$.

28. La distancia del punto $A(2,\ 3,\ -1)$ a la recta $L: x=3,\ y=1-t,\ z=-2$; se puede obtener como el valor absoluto de la componente escalar de $\overline{AB}$, donde $B(3,\ 1,-2)$ es un punto de L , sobre $\overline{AD}$ (perpendicular a $\bar{u}=(0,-1,0)$ que es un vector director de L y $D(3,\ 1-t,\ -2)$ es un punto de la recta) ; $\overline{AD} = (1, -2-t, -1)$; $\bar{u}\cdot\overline{AD} = 2+t = 0 \Rightarrow t = -2$, entonces $\overline{AD} = (1,\ 0,\ -1)$ y como $\overline{AB} = (1,\ -2,\ -1)$ queda



$$d = \frac{|(1,\ -2,\ -1)\cdot(1,\ 0,\ -1)|}{|(1,\ 0,\ -1)|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$. Esta distancia puede también calcularse como $d = \dfrac{|\overline{AB} \times \bar{u}|}{|\bar{u}|} = \dfrac{|(-1,\ 0,\ 1)|}{1} = \sqrt{2}$

29. Determinar la ordenada de cada uno de los dos puntos $A(1,\ y,\ 2)$ y las tres coordenadas de cada uno de los dos puntos D tales que, el vector $\overline{AD}$ sea perpendicular a la recta $L: \bar{p}=(1,3,2)+r(-1,\ 2,1)$ y tenga módulo igual a $\sqrt{3}$, además D pertenezca a L .

SOLUCIÓN:

$y_1 = 6 \qquad D_1(0, 5, 3)$

$y_2 = 0 \qquad D_2(2, 1, 1)$

30. Determinar las coordenadas de los puntos A y B más cercanos entre sí y tales que A pertenezca a la recta $L_1: \bar{p} = (-4, 0, -2) + m(0, 1, 3)$ y B pertenezca a la recta $L_2: \bar{p} = (0, 6, 1) + r(1, -2, -1)$

SOLUCIÓN:

$A(-4, 1, 1) \quad ; \qquad B(1, 4, 0)$

31. Obtener unas ecuaciones paramétricas de una recta con vector director $\bar{u} = (x, 1, z)$, que pase por $P(2, -8, 5)$, sea paralela a la recta $L_1: \dfrac{x+7}{a} = \dfrac{y-1}{3}, z = 4$ y forme un ángulo de $30°$ con la recta $L_2: \bar{p} = t\,(-2, 1, -1)$

SOLUCIÓN:

$$\begin{cases} x = 2 - r \\ y = -8 + r \\ z = 5 \end{cases} \qquad \text{o} \qquad \begin{cases} x = 2 - 7q \\ y = -8 + q \\ z = 5 \end{cases}$$

EL PLANO

1. Los elementos geométricos que definen un plano pueden ser tres _________ no colineales; un _________ y una __________ ; dos __________ paralelas o dos __________ que se cortan.

2. La representación analítica de un plano puede ser una ______________ vectorial; tres ________________________________ o una ecuación _______________ .

3. A diferencia de una ecuación vectorial de una recta que contiene un solo ________________ , toda ecuación __________ de un _________ tiene _______ parámetros.

4. Existe una ______________ de ecuaciones vectoriales de un ________ y a cada una de ellas le corresponden __________ecuaciones paramétricas, éstas (al igual que la ecuación vectorial correspondiente) tienen dos __________________ .

5. Para obtener una ecuación cartesiana de un plano representado por tres ______________ paramétricas, se ___________ los dos parámetros de ellas y se llega a una relación entre _____ , _____ , _____ , que son las coordenadas cartesianas de cualquier ________ del ____________ .

6. Para obtener una ecuación cartesiana del plano representado por las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 1 - t + 2r \text{ ------}(1) \\ y = 2 + 3t + 6r \text{ -----}(2) \\ z = t + 4r \text{ ---------}(3) \end{cases}$ se pueden eliminar los parámetros t y r ; una forma de hacerlo es despejar t de (3) obteniendo $t =$, luego sustituir en (1) y (2) con lo que se llega a $x =$ y $y =$,

después despejar r de la primera de estas dos ecuaciones, obteniendo $r =$; al sustituirla en la segunda se llega a $y = 3 - x + 2z$, que es la ecuación cartesiana cuya forma general es $x + \quad - \quad - \quad = 0$.

7. Un vector ________________ a todos los vectores del plano, recibe el nombre de ______________ normal al plano.

8. Un plano puede definirse por un _________ fijo contenido en él y la dirección de un vector ___________ a dicho plano al que se llama _______ normal al plano.

9. Un vector normal al plano definido por los puntos A, B y C, no colineales, puede obtenerse como el ______________________ de los vectores $\overline{AB}$ y _____ .

10. Un vector normal al plano definido por dos rectas paralelas L_1 y L_2 donde A es un punto de L_1 y $B \in L_2$, puede obtenerse como el ____________ vectorial de un vector director de L_1 por el ______________ .

11. La ecuación cartesiana de un plano puede obtenerse igualando a cero el _____________________ de un vector normal al plano por un vector cuyos extremos sean un punto fijo del plano y un punto ______________ del mismo plano; por lo tanto en la ecuación cartesiana en forma general, los coeficientes de _____, _____ y _____ son respectivamente iguales a las ________________ del vector ________ al plano empleado en el producto escalar.

12. Para determinar un vector normal del plano representado por la ecuación vectorial $\overline{p} = (1, 2, 1) + t(-1, 2, 1) + r(2, 1, -1)$, se multiplican ________________ los vectores $(-1, 2, 1)$ y $(2, \quad, \quad)$ que son un par de los llamados __________ directores del plano, con lo que se obtiene $\overline{N} = (\quad, 1, \quad)$; un

punto de dicho plano es $A(\ \ ,2,1)$ y la ecuación cartesiana es $\quad + y - \quad + D = 0$; el valor del término independiente D se obtiene al sustituir las coordenadas de _____ en la ecuación cartesiana y resulta $D = \qquad$.

13. Una ecuación cartesiana del plano que contiene al punto $A(-1, 0, 2)$ y es perpendicular al vector $\overline{N} = (-4, -1, 5)$ es $2x + \qquad\qquad = 0$; debido a que todo vector paralelo a $\overline{N}$ puede expresarse como __________ , con , $\lambda \neq 0$

14. Una ecuación vectorial del plano que contiene al punto $A(3, -2, 1)$ y a la recta representada por la ecuación vectorial $\overline{p} = (1, -5, 2) + r(2, -1, -3)$, es $\overline{p} = (-1, -4, \ \ ) + t(\ \ , 1, \ \ ) + s(2, 3, \ \ )$. Al multiplicar __________________ los vectores $(\ \ , 1, \ \ )$ y $(2, 3, \ \ )$, las componentes escalares del producto son respectivamente iguales a ____________________ de x , _____ y _____ en la ecuación _______________ en la forma general, de la cual el valor de su término independiente es _____ y la ecuación cartesiana queda: $\qquad\qquad = 0$.

15. La distancia de un punto P a un plano π que no lo contiene, se mide sobre una dirección _______________ a π , es decir sobre una dirección _______________ a la de un ____________ normal al plano, por lo que puede obtenerse como el valor absoluto de la _______________ escalar del vector $\overline{AP}$, donde A es un punto de _______ , sobre un vector _______________ a π .

16. Para calcular la distancia del punto $P(-1, 1, 2)$ al ___________ representado por la ecuación vectorial $(x, y, z) = (1, 0, 1) + r(1, 1, 0) + s(1, 2, 2)$, primero se obtiene el producto $(\ \ ,\ \ ,\ \ ) \times (\ \ ,\ \ ,\ \ )$, con lo que $\overline{N} = (\ \ ,\ \ ,\ \ )$; después el vector $\overline{PQ}$, donde Q pertenece _________ , se multiplica

____________ por $\overline{N}$ y dicho producto se divide entre ______________ que vale 3; el valor absoluto del cociente es la __________________ de P al _________ y vale _______ .

17. La distancia entre dos planos es __________ si los planos se cortan o si ________________ ; si son ______________ sin tener un punto común, la _______________ entre ellos es igual a la distancia de un __________ de uno de los planos ________ plano.

18. Para determinar la distancia entre el __________ π representado por la ecuación vectorial $\overline{p} = (1, 0, 1) + r(1, 1, 0) + s(1, 2, 2)$ y el ___________ π_1, representado por la ecuación cartesiana $-4x + 4y - 2z + 3 = 0$, conviene obtener un vector ___________ a π, para lo cual se efectúa el producto $(\quad , \quad , \quad) \times (\quad , \quad , \quad)$ que es igual a $(\quad , -2, \quad)$; ya que $\overline{N}_1$, ________ a π_1, es $(\quad , \quad , -2)$ y se puede expresar como ________ , se concluye que π y π_1 son ________________ , pero como las coordenadas del punto $(1, \quad , \quad)$ que pertenece a ______ , no satisfacen la ecuación _____________ de π_1, los planos no _______________ y la distancia puede obtenerse como el valor absoluto de la componente escalar del vector $\overline{AB}$ (donde $A \in \pi_1$ y tiene por coordenadas a $(0, 0, \quad)$, y $B(1, 0, \quad) \in \pi$) sobre el vector $(2, \quad , \quad)$ que es normal tanto a ________ como a ________ . Como $\overline{AB} \cdot \overline{N} = \left(\quad , \quad , -\frac{1}{2} \right) \cdot (2, \quad , \quad) = \frac{3}{2}$ y $| \overline{N} | =$, la distancia es _________ .

19. La distancia entre el plano π representado por la ecuación vectorial $\overline{p} = (1, 0, 1) + r(1, 1, 0) + s(1, 2, 2)$ y el ________ π_2 representado por la ecuación ______________ $2x - y + 3z - 1 = 0$ se considera, por definición, igual

a ________ , ya que π y π_2 se ______________ y su intersección es la _________ que pasa por el punto $(\ ,\ \ , 1)$, que pertenece tanto a π como a π_2, y cuya dirección es paralela a la del vector obtenido como $(\ ,\ \ , 1) \times (\ , -1, 3) = (\ ,\ \ , 2)$.

20. Un vector normal al plano representado por la __________ cartesiana $2x - 3y + 6z - 1 = 0$ es $\overline{N} = (1,\ \ ,\ \ )$ y uno normal al plano representado por la ecuación _______________ $\overline{p} = m(0, 2, 1) + n(3, -2, 0)$ es $\overline{N}_1 = (\ \ , 3,\ \ )$; en consecuencia el ángulo entre los dos planos tiene por coseno a ___________ y el ángulo es _______ o ______ , aproximadamente.

21. El ángulo entre una recta y un plano es el _____________ del ángulo entre un vector ___________ de la ________ y un _____________ normal al _________ .

22. El seno del ángulo que forma un plano π con el eje X es igual al primer coseno director de un vector ___________ al plano; el ángulo que forma π con el eje Y es complementario del segundo _______________ director de un vector ____________ al plano π y el tercer coseno director de __________________ al plano π es igual al __________ del ángulo que forma π con el eje ______ .

23. Un plano que forma $30°$ con el eje X y $45°$ con el Z tiene un vector ________ igual a $(\ \ , 1,\ \ )$ y además el plano forma un ángulo de _____ con el eje Y . Si dicho plano pasa por el origen, tiene por ecuación cartesiana a :

$$+ y + \qquad = 0 .$$

24. Si $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es vector normal al plano π, entonces dicho plano forma un ángulo de ____ con el eje X, uno de $45°$ con el eje ____ y con la recta

representada por la ecuación ________________ $\bar{p} = t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ forma

el ángulo cuyo _______ vale: $\left(\frac{1}{2}, \quad , \quad\right) \cdot (\quad , 0, \quad) = \qquad$, ya que

$\left|\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| = \qquad$ y $\left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| = \qquad$; en consecuencia el

ángulo es aproximadamente $59°$.

25. El plano π contiene al punto $A(1, 3, 2)$, es paralelo a la recta L: $\bar{p} = (0, 1, 3) + t(2, 0, 1)$ y A es el punto del plano π más cercano a L. Un vector normal a π es $\bar{N} = (\quad , 2, \quad)$ y una ecuación vectorial de π es $\bar{p} = (1, 3, \quad) + r(2, \quad , \quad) + s(1, \quad , 3)$.

26. Para determinar la ecuación cartesiana de un plano π que contiene al punto $A(7, 5, -3)$, forma $60°$ con el plano π_1 representado por la ecuación $x - 4y + z - 1 = 0$, y es perpendicular al plano XY; es conveniente, primero obtener un vector $\bar{N}$ normal a π, tal que, su producto escalar con el vector k (normal a XY) sea cero y el ángulo entre él y $\bar{N}_1 = (1, -4, 1)$ (normal a π_1) sea $60°$; es decir, si $\bar{N} = (a, b, c)$ entonces $(a, b, c) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Rightarrow c = 0$; haciendo $b = 1$, se tiene

$$\cos 60° = \frac{1}{2} = \frac{(1, -4, 1) \cdot (a, 1, 0)}{|(1, -4, 1)|\,|(a, 1, 0)|} = \frac{a - 4}{\sqrt{18}\sqrt{a^2 + 1}} \Rightarrow 18(a^2 + 1) = 4(a - 4)^2$$

$$9a^2 + 9 = 2(a^2 - 8a + 16) \Rightarrow 7a^2 + 16a - 23 = 0 \;; \qquad a = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 644}}{14}$$

$$a = \frac{-16 \pm 30}{14} = \begin{cases} 1 \\ -\dfrac{23}{7} \end{cases} \quad \text{así que} \quad \bar{N} = \begin{cases} (1, 1, 0) \\ \left(-\dfrac{23}{7}, 1, 0\right) \end{cases}$$ es decir, existen dos

direcciones diferentes, o sea existen dos planos que cumplen las condiciones y sus respectivas ecuaciones cartesianas son: $x + y + D_1 = 0$; $-\frac{23}{7}x + y + D_2 = 0$.

Para obtener los valores de D_1 y D_2 se sustituyen las coordenadas de A con lo que $7 + 5 + D_1 = 0$ y $D_1 = -12$, además $-23 + 5 + D_2 = 0$ y $D_2 = 18$; por lo tanto, los planos que satisfacen las condiciones planteadas pueden representarse, respectivamente, por las ecuaciones cartesianas $x + y - 12 = 0$ y $-23x + 7y + 126 = 0$

27. Determinar la ecuación cartesiana de cada uno de dos planos π_1 y π_2, tal que sea paralelo a las dos rectas L y R representadas, la L por la ecuación vectorial $\bar{p} = (3-3t,\ 1+t,\ -2-t)$, y la R por las cartesianas $x - 2y + 5 = 0$; $-x + 3z = 0$; además, dicho plano dista de R el doble de lo que dista de L .

RESOLUCIÓN:

Los planos π_1 y π_2 son paralelos entre sí, un vector normal a ambos es el producto vectorial de un vector director de L por un vector director de R . El de R puede obtenerse como el producto cruz de $(1, -2, 0)$ por $(-1,\ 0,\ 3)$, esto es,

$\bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-6,\ -3,\ -2)$. Un vector director de L es

$\bar{u} = (-3, 1, -1)$, por lo que, $\bar{N} = \bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & -1 \\ -6 & -3 & -2 \end{vmatrix} = (-5,\ 0,\ 15)$,

paralelo a $(1,\ 0,\ -3)$. Un punto de L es $A(3,\ 1, -2)$; para obtener las coordenadas de un punto B de R se asigna a una de ellas un valor, por ejemplo $x = 3$, que se sustituye en las dos ecuaciones cartesianas para obtener los correspondientes de y y z ; así un punto de R es $B(3,\ 4,\ 1)$.

Un punto C del plano π_1 debe

ser tal que $\overline{BC} = 2\,\overline{CA}$, con lo

que $x_c - 3 = 2\,(3 - x_c) \Rightarrow x_c = 3$;

$y_c - 4 = 2\,(1 - y_c)$; $y_c = 2$;

$z_c - 1 = 2(-2 - z_c) \Rightarrow z_c = -1$; esto es, $C(3, 2, -1)$ y la ecuación cartesiana de π_1 se obtiene de $\overline{N} \cdot \overline{CP} = 0$ donde P es un punto cualquiera del plano; por lo tanto la ecuación es $x - 3z - 6 = 0$. Un punto D del plano π_2 debe ser tal que $\overline{BD} = 2\,\overline{AD}$, así que, $D(3, -2, -5)$ y la ecuación cartesiana de π_2 es $x - 3z - 18 = 0$.

28. Las rectas M y L contienen al origen, forman con la recta R_1 : $\overline{p} = (1 + 2t,\ 1 + t,\ -1 + 2t)$ un ángulo cuyo coseno es $\frac{2}{15}$ y con la recta R_2 : $\overline{p} = (2 + m, 3 - m, -2)$ un ángulo cuyo coseno es $\frac{4}{5\sqrt{2}}$. Determinar la ecuación cartesiana de cada uno de los cuatro planos que contiene a M o a L y forma $45°$ con el plano cuya ecuación cartesiana es $x + z - 3 = 0$.

SOLUCIÓN:

$$3x + 2\sqrt{6}\,y + 4z = 0$$
$$3x - 2\sqrt{6}\,y + 4z = 0$$
$$9x + 24y + 32z = 0$$
$$x = 0$$

29. Los puntos $A(1, 2, 5)$ y $B(3, -1, -3)$ y $C(2, 0, 0)$ definen un plano que se corta con $\pi : -2x + 4y + z - 8 = 0$. Del plano que contiene a la intersección de π con el ABC y es perpendicular a éste, determinar:

a) la ecuación cartesiana

b) una ecuación vectorial, y

c) el ángulo que forma con el plano π .

SOLUCIÓN:

a) $x - 2y - 5z + 22 = 0$

30. Obtener la ecuación cartesiana de cada uno de los cuatro planos que dista tres unidades del origen y que es perpendicular a una de las dos rectas que forman un ángulo de $60°$ con el eje X y uno de $45°$ con el Z .

SOLUCIÓN:

$x + y + \sqrt{2}\, z + 6 = 0$ $\qquad$ $x - y + \sqrt{2}\, z + 3 = 0$

$x + y + \sqrt{2}\, z - 6 = 0$ $\qquad$ $x - y + \sqrt{2}\, z - 3 = 0$

31. Obtener la ecuación cartesiana del plano que dista cinco unidades del origen y es el más cercano al punto:

a) $A\,(-3,\ 6,\ 2)$

b) $B\,(2,\ -2,\ 1)$

SOLUCIÓN:

a) $-3x + 6y + 2z - 35 = 0$

32. Determinar la ecuación cartesiana del plano que dista seis unidades del punto $Q\,(5,\ -1,\ 2)$ y es el más cercano al punto $A\,(3,\ 0,\ 4)$.

SOLUCIÓN:

$2x - y - 2z + 11 = 0$

33. La recta R es paralela al vector $\overline{u} = (4, 2, -3)$, contiene al punto $A(0, y, -6)$ y dista de la recta $L: \overline{p} = (3-t, 1+2t, -2+2t)$ cuatro unidades. El plano π forma con los ejes X y Y ángulos de $30°$ y $45°$ respectivamente. Determinar la ecuación cartesiana de cada uno de los dos planos que contiene a R y forma un ángulo de $90°$ con uno de los planos π.

SOLUCIÓN:

$$(4 + 3\sqrt{2})x - 14y + (4\sqrt{2} - 4)z - 38 + 24\sqrt{2} = 0$$

$$(-4 + 3\sqrt{2})x - 14y + (4\sqrt{2} - 4)z - 38 + 24\sqrt{2} = 0$$

34. La recta R es paralela al vector $\overline{u} = (0, 2, 1)$, contiene al punto $A(0, y, -6)$ y dista de la recta $L: \overline{p} = (3-t, 1+2t, -2+2t)$ cuatro unidades. El plano π forma con los ejes X y Y ángulos de $30°$ y $60°$ respectivamente. Determinar la ecuación cartesiana de cada uno de los dos planos que contiene a R y forma un ángulo de $60°$ con el plano π.

SOLUCIÓN:

$$4x + \left(\sqrt{3} + \sqrt{11}\right)y - \left(2\sqrt{3} + 2\sqrt{11}\right)z - 11\left(\sqrt{3} - \sqrt{11}\right) = 0$$

$$4x + \left(\sqrt{3} - \sqrt{11}\right)y - \left(2\sqrt{3} - 2\sqrt{11}\right)z - 11\left(\sqrt{3} + \sqrt{11}\right) = 0$$

C U R V A S

1. Una curva tiene una ____________ de ecuaciones vectoriales, cada una de ellas es una igualdad entre vectores que describe el "movimiento" del vector _______________ de un punto que recorre toda la curva.

2. A cada ecuación vectorial de una curva, corresponden ___________ ecuaciones paramétricas.

3. Ya que la recta es un caso particular de curva, al igual que en el caso de una recta, cada ecuación vectorial de una curva contiene uno y sólo un __________________ .

4. Si todos los puntos de una curva están en un plano, la curva es __________ , en caso contrario se trata de una curva _______________ .

5. Como en el caso de la recta, toda curva puede representarse por __________ ecuaciones cartesianas. Así la curva cuyas ecuaciones cartesianas son $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; $z = 5$ es una ______________ en un plano _____________ al plano coordenado XY , con centro en el eje _____ .

6. Las ecuaciones cartesianas $x = 5$; $z = 3\, sen\, y$ corresponden a una senoide contenida en un plano paralelo al plano cartesiano ______ , y para obtener una de la infinidad de sus ecuaciones _________________ podemos igualar y a ____________________ , que lo podemos llamar α, con lo que, z resulta _____________ , la ecuación vectorial queda $\bar{p} =$ y sus

correspondientes ecuaciones _______________ son: $x=$; $y=\alpha$;

$z=$.

7. Una parábola en un plano paralelo al cartesiano XZ, a cuatro unidades de él hacia el sentido negativo del eje Y, con vértice en $V(3,-4,4)$ y foco en $F(3,-4,2)$ tiene por ecuaciones cartesianas a: $(x-3)^2=-8(\quad)$; $y=$; para obtener unas ecuaciones paramétricas de dicha parábola podemos hacer $x-3=\alpha$, así obtenemos $x=$; $y=$; $z=$ y la ecuación vectorial correspondiente a estas paramétricas es: $\bar{p}=$.

8. Para introducir un parámetro y obtener ________ ecuaciones paramétricas de una curva, con frecuencia, es conveniente considerar una _________________ trigonométrica, así, para obtener unas ecuaciones paramétricas de la elipse con ecuaciones cartesianas $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,\; z=5$ conviene considerar la identidad $sen^2\alpha+\quad=\quad$; hacer $\frac{x^2}{9}=\quad$ y $\frac{y^2}{4}=\quad$, con lo que, se obtienen las ecuaciones $x=$; $y=$; $z=$; la ecuación vectorial correspondiente resulta $\bar{p}=$

9. Para determinar unas ecuaciones paramétricas de la hipérbola representada por $x=8$; $\frac{(y-2)^2}{25}-\frac{(z+3)^2}{16}=1$ con vértices en los puntos $V_1(\quad,\ 7,\quad)$ y $V_2(\quad,-3,\quad)$ y centro en $C(8,\quad,\quad)$, se puede utilizar la identidad: $tan^2\alpha+1=\quad$, es decir, $sec^2\alpha-\quad=\quad$; entonces, al hacer $\frac{(y-2)^2}{25}=\quad$; $\frac{(z+3)^2}{16}=\quad$; se obtienen las ecuaciones

paramétricas: $x =$; $y = 2 +$; $z =$ y la ecuación vectorial correspondiente es $\bar{p} = (8,\quad ,\quad)$.

10. Las dos ecuaciones cartesianas de una curva son relaciones entre las variables _____ , _____ , _____ , por lo que, si se conocen tres ecuaciones paramétricas de una curva, al eliminar de ellas ________________ se obtienen dos ______________ cartesianas de dicha curva.

11. Para eliminar el parámetro α de las ecuaciones paramétricas $x = \alpha^2 + 4$; $y = 1 - \alpha^3$; $z = 3 - \alpha$, conviene despejarlo de , obteniendo $\alpha =$, que al sustituirlo en $x =$ y en $y =$, tenemos dos ecuaciones ___________________ de la curva.

12. Para obtener ecuaciones cartesianas de la curva representada por la ecuación vectorial $\bar{p} = (\tan\alpha\ ) i + (2\ sen\ \alpha\ ) j + (3 - 2 \cos\alpha\ ) k$, se plantean las ecuaciones $x =$, $y =$, $z =$; de ellas se obtiene $sen\ \alpha =$; $\cos\alpha =$; al sustituirlos en las identidades: $+ \quad = 1$ y $\tan\alpha = \text{―――――――}$, se llega a las correspondientes dos ecuaciones cartesianas de la curva, que son: $y = x (\quad)$; $y^2 + \quad =$.

13. Se llama intervalo paramétrico al conjunto de valores del ______________ para los cuales existen tanto ______ como ______ y ______ , simultáneamente.

14. La curva representada por la ecuación vectorial $\bar{p} = (\tan\alpha,\ 2 sen\alpha,\ \cos\alpha + 1)$, tiene por intervalo paramétrico un conjunto de valores de _________ que es la diferencia de ____________ menos el conjunto ______________ , debido a

que para $\alpha = (2n-1)\,\frac{\pi}{2}$ con n entero ________ no existe y $\forall \alpha \in R$

____________ y ___________ existen.

15. Las ecuaciones paramétricas $x = \frac{1}{6-\alpha}$; $y = +\sqrt{\alpha - 4}$; $z = \frac{1}{+\sqrt{49-\alpha^2}}$

corresponden a una curva que sólo tiene puntos para valores de α tales que

$\neq 0$; ≥ 0 ; > 0 ; es decir, α pertenece a la unión de los

intervalos [,) y (,) ; con lo que, los valores de

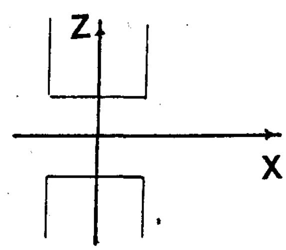
$x \in [\,(-\infty, \quad) \cup [\quad , \infty)$, los de $y \in [\quad , \sqrt{2}\,) \cup (\quad , \quad)$ y los de

$z \in \left[\frac{1}{\sqrt{33}}, \quad \right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{13}}, \quad \right)$.

16. La ecuación vectorial $\bar{p} = (sen\,\alpha,\ 0,\ csc\,\alpha)$ corresponde a una curva cuyo intervalo paramétrico es ________________ pero sólo tiene puntos con

$x \in [\quad , \quad]$; $y = 0$ y $z \in (-\infty, \quad] \cup [\quad , \quad)$

que gráficamente se representa como



Las ecuaciones cartesianas de la curva son $x =$;

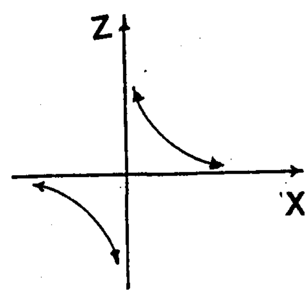
$y =$; se trata de una ________________ equilátera

en el plano coordenado ____________ ; pero con la

restricción $x \in [\quad , \quad]$, la ecuación vectorial sólo

representa a una parte de ____________________ que

gráficamente es:



17. Una curva contenida en un plano ________________ a uno de los coordenados puede representarse analíticamente por una sola ecuación en coordenadas ________________ .

18. La ecuación polar o ecuación en coordenadas polares de la recta representada por las ecuaciones cartesianas $x=-2;\ 2y-z+1=0$ puede obtenerse considerando las ecuaciones de transformación $y =$; $z = r\ cos\theta$, con lo que, en el plano ____________al plano coordenado _______ la ecuación es

$$= 0 \quad \text{o bien} \quad r = \frac{1}{\quad}\ .$$

19. Una ecuación polar de la circunferencia en el plano paralelo al XZ con centro en $C(-1,\ 2, 5)$ y radio igual a 4, puede obtenerse haciendo $x =$; $z =$, que al sustituirse en la ecuación cartesiana $(\qquad)^2 + (\qquad)^2 = 16$ se llega a: $r^2 + r\ (\qquad) = -10$.

20. La ecuación polar $r = 2\ cos\theta + 4 .....\ (1)$, corresponde a una curva simétrica respecto al eje _______ ya que la ecuación (1)es _____________ a la que se obtiene al sustituir θ por _________ en (1) ; debido a que al sustituir θ por $\theta + \pi$ en (1) dejando sin cambio a r , o bien sustituir r por $-r$ dejando sin cambio a θ , la ecuación que se obtiene no es ______________ a(1), podemos concluir que la curva no es ___________________________ ; tampoco es simétrica respecto al eje copolar, pues al sustituir θ por _________ , dejando a r sin cambio la ecuación obtenida no es equivalente a la(1).

21. Unas coordenadas polares de los puntos de intersección de una curva con el eje polar son $(r_1, \quad)$ y $(r_2, \quad)$ donde r_1 y r_2 se obtienen sustituyendo, respectivamente, $\theta_1 =$ y $\theta_2 =$ en la ecuación polar de la curva.

22. Si una curva pasa por el polo, entonces una intersección de ella con el eje ____________ es el punto de coordenadas (,   ) que también es punto de intersección con ______________ , y en el que, el valor de su ________________ puede ser cualquiera.

23. Una curva es cerrada si _____ o r^2 son reales para todo valor de _______ , por ello, la curva representada por la ecuación polar $r = tan\theta + 5$ es _____________ , en cambio la representada por $r^2 = 4\, cos\, 2\theta$ es _____________.

24. La ecuación $r^2 = 4\, cos 2\theta$, que puede escribirse como $r^2 = 4\left(cos^2\theta - sen^2\theta\right)$, corresponde a una curva simétrica tanto al _______________ , como al ____________ y al _____________ ; entonces para trazar su gráfica basta con calcular las coordenadas de algunos puntos donde θ tome valores entre _____ y ______ . Sin embargo para la gráfica de la curva representada por la ecuación polar $r = 2 - 2\ cos\theta$ que sólo es simétrica respecto al ______________ , es necesario conocer, al menos, las coordenadas de algunos puntos en los que θ tome valores entre _____ y _____ .

25. Las ecuaciones paramétricas $x = \cos\frac{t}{2}$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = \csc t$ corresponden a una curva de la cual, unas ecuaciones cartesianas se obtienen eliminando al parámetro t ; al usar la identidad $\operatorname{sen} t = 2\ \operatorname{sen}\frac{t}{2}\ \cos\frac{t}{2}$ se obtiene

$$y = 2\left(\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)x \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\frac{t}{2} = \frac{y}{2x}$$

; así, al aplicar la identidad $sen^2\frac{t}{2} + cos^2\frac{t}{2} = 1$ se llega a una de las ecuaciones cartesianas que es

$x^2 + \dfrac{y^2}{4x^2} = 1$; la otra se obtiene al utilizar la identidad $\operatorname{sen} t = \dfrac{1}{\csc t}$, con lo que $y = \dfrac{1}{z}$.

26. Para obtener unas ecuaciones paramétricas de la curva representada por las ecuaciones cartesianas $9x^2 - 18x + z^2 - 6z = -9$, $x + y - 2z = 0$; pueden seguirse varias caminos; uno, aparentemente el más sencillo, pero que conduce a expresiones con radicales, consiste en hacer una variable igual a un parámetro, por ejemplo $x = t$, que sustituida en la primera ecuación conduce a: $z^2 - 6z + 9t^2 - 18t + 9 = 0$, de donde al despejar z se tiene $z = 3 \pm \sqrt{9 - 9t^2 + 18t - 9} = 3 \pm 3\sqrt{2t - t^2}$; al sustituir x y z en la segunda ecuación resulta $t + y - 2\left(3 \pm 3\sqrt{2t - t^2}\right) = 0$, por lo que, $y = -t + 6 \pm 6\sqrt{2t - t^2}$ donde $2t - t^2 \geq 0$, es decir $0 \leq t \leq 2$ y las ecuaciones paramétricas, en este caso, son

$x = t$; $y = -t + 6 \pm 6\sqrt{2t - t^2}$; $z = 3 \pm 3\sqrt{2t - t^2}$ con $0 \leq t \leq 2$

Otro camino es completar trinomios cuadrados perfectos en la primera ecuación, con lo que se llega a $9(x-1)^2 - 9 + (z-3)^2 - 9 = -9$ y las ecuaciones cartesianas pueden expresarse como $(x-1)^2 + \dfrac{(z-3)^2}{9} = 1$, $x + y - 2z = 0$; ya que $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, en la primera ecuación puede hacerse $(x-1)^2 = \operatorname{sen}^2\alpha$, $\dfrac{(z-3)^2}{9} = \cos^2\alpha$ o sea $x = 1 + \operatorname{sen}\alpha$; $z = 3 + 3\cos\alpha$; que al sustituirlas en la segunda ecuación cartesiana se obtiene $y = 6 + 6\cos\alpha - 1 - \operatorname{sen}\alpha$ y las ecuaciones paramétricas, en este caso, son

$x = 1 + \operatorname{sen}\alpha$; $y = 5 - \operatorname{sen}\alpha + 6\cos\alpha$; $z = 3 \pm 3\cos\alpha$ $\forall\, \alpha \in R$

El intervalo paramétrico correspondiente a cada caso, permite obtener el conjunto de valores al que pertenece cada una de las coordenadas x , y , z de los puntos de la curva; estos conjuntos, como comprobaremos, no dependen de las ecuaciones paramétricas ni del intervalo paramétrico correspondiente, sino de la curva.

En el primer caso las ecuaciones son $x = t$, $y = -t + 6 \pm 6\sqrt{2t-t^2}$, $z = 3 \pm 3\sqrt{2t-t^2}$ y el intervalo paramétrico es $0 \le t \le 2$ por lo que, $x \in [\ 0,\ 2\ ]$; para el conjunto al que pertenece z se observa que el radical $\sqrt{2t-t^2}$ tiene el valor máximo de uno para $t = 1$, con lo que $z \in [\ 0,\ 6\ ]$; el conjunto de valores al que pertenece y , aproximadamente, es $[\ -1{,}08,\ 11.08\ ]$, pero a estos valores se llega con métodos de cálculo (para obtener máximos y mínimos con derivadas) que no es oportuno detallar.

Para el caso en el que las ecuaciones paramétricas son $x = 1 + \operatorname{sen}\alpha$, $y = 5 - \operatorname{sen}\alpha + 6\cos\alpha$, $z = 3 + 3\cos\alpha$ y el intervalo paramétrico es $\alpha \in R$; ya que $sen\,\alpha \in [\ -1,\ 1\ ]$, resulta $x \in [\ 0,\ 2\ ]$; de manera semejante, en virtud de que $cos\,\alpha \in [\ -1,\ 1\ ]$ se llega a $z \in [\ 0,\ 6\ ]$; para y , al aplicar a la ecuación $y = 5 - \operatorname{sen}\alpha + 6\cos\alpha$ los métodos de cálculo que no se detallan, se obtiene también que $y \in [\ -1.\ 08,\ 11.08\ ]$.

27. Determinar unas ecuaciones cartesianas de la curva representada por la ecuación vectorial $\bar{p} = (\ \operatorname{sen}\alpha, 3\cos 2\alpha, tan\alpha\ )$.

SOLUCIÓN: $y = 3 - 6x^2$, $x^2 = \dfrac{z^2 y}{3 - 3z^2}$

28. Determinar, de la curva representada por la ecuación polar $r = 6\, sen^2 \dfrac{\theta}{2}$,

a) intersecciones con el eje polar y el eje copolar;

b) si es simétrica repecto al eje polar, al eje copolar y al polo, y

c) si es cerrada o abierta.

SOLUCIÓN:

c) Es cerrada y se le conoce con el nombre de cardioide.

29. De la curva en el plano YZ, representada por la ecuación polar $\dfrac{8}{r} = \dfrac{r\ tan\, 2\theta}{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}$,

determinar:

a) intersecciones con eje polar y con eje copolar ;

b) simetrias respecto al eje polar, eje copolar y polo ;

c) coordenadas polares de un mínimo de doce puntos de la curva que no sean intersecciones con los ejes, y

d) unas ecuaciones cartesianas.

SOLUCIÓN:

d) $x = 0$; $\left(z^2 + y^2\right)^2 = 4\left(z^2 - y^2\right)$

A esta curva se le conoce como lemniscata de Bernoulli.

30. De la curva representada por la ecuación vectorial

$\bar{p} = 5i + \left(3 - 2cos^2 \dfrac{t}{2}\right) j + (1 + sent)k$, obtener :

a) el intervalo paramétrico correspondiente a la ecuación y, para cada una de x , y , z , intervalo de R al que pertenece ;

b) unas ecuaciones cartesianas, y

c) una ecuación polar.

SOLUCIÓN:

b) $x = 5$; $(y-4)^2 + (z-1)^2 = 1$

31. Obtener unas ecuaciones paramétricas de la curva representada por las ecuaciones cartesianas

$$4x^2 - 16x - 25y^2 - 50y = 109$$
$$x + 3y - z + 2 = 0$$

Determinar el intervalo paramétrico correspondiente a las ecuaciones obtenidas, y los conjuntos de valores en los que x , y , z son coordenadas de los puntos de la curva.

SOLUCIÓN:

$x = 2 + 5 sec\alpha$; $y =$; $z =$

intervalo paramétrico $\alpha \in \left\{R - \{(2n-1)\frac{\pi}{2} \mid n \ entero\}\right\}$

SUPERFICIES

1. Una superficie es un ente geométrico que, analíticamente, se representa por una ecuación ______________ o por una ____________________ o por tres ______________________.

2. El plano es un caso particular de __________________.

3. Una ecuación cartesiana de segundo grado corresponde a una superficie _________________ o ________________ .

4. Una superficie que puede generarse con rectas se llama ________________.

5. Una superficie generada por una recta que se "mueve" paralela a una dirección fija recibe el nombre de ____________ .

6. Una superficie generada por una recta que se "mueve" pasando por _________ fijo es una superficie _______________ .

7. Superficie de revolución es la que se genera al "girar" una __________ alrededor de ____________ fija llamada eje de revolución.

8. Las superficies cónicas y cilíndricas son también superficies ______________ y, debido a que su ecuación cartesiana es de segundo grado, también son ____________.

9. Las ecuaciones paramétricas de una superficie tienen _________ parámetros.

10. Una forma de obtener la ecuación cartesiana de la superficie representada por unas ecuaciones paramétricas es eliminar de éstas a los ________________.

11. El método de las generatrices se emplea para determinar la ecuación ________________ de una superficie que se forma con "el movimiento" de una curva llamada ___________ apoyada en una o más curvas fijas llamadas _________________ .

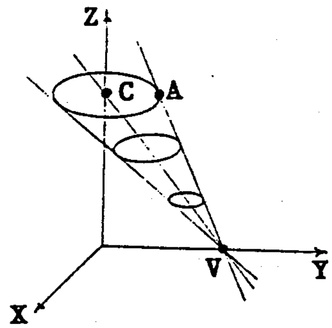
12. Las ecuaciones cartesianas de la generatriz en el método de las generatrices, en realidad representan a una ________________ de curvas y no a una sola curva, debido a que contienen dos o más _______________ .

13. Para que sea posible aplicar el método de las generatrices, las dos ____________ cartesianas de la familia de curvas llamada ________________ deben tener un número de___________ que sea uno más que el número de curvas "fijas" llamadas _________________ .

14. Las ecuaciones de condición en el método de las generatrices no contienen a x, a _____, ni a ____ ; son relaciones entre los ________________ de la familia de ___________ llamada _____________ ; el número de estos ________________ debe ser uno ________ que el número de ecuaciones de ________________ que se plantean.

15. La ecuación _______________ de una superficie es la relación entre las coordenadas ____, ____, ____; a la que se llega al eliminar los _____________ del conjunto de ecuaciones formado por los dos de la _____________ y todas las _______________ de condición.

16. Para determinar la ecuación cartesiana de un cono circular oblicuo con vértice en $V(0,\ 5,\ 0)$ y cuya intersección con el plano $z=6$ es la circunferencia de ecuaciones $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z=6 \end{cases}$, una posible generatriz es la familia de circunferencias contenidas en planos paralelos al XY, de radio variable, y con centro en la recta que pasa por $C(0,\ 0,\ 6)$ y por; $V(0,\ 5,\ 0)$ la directriz puede ser la recta que pasa por $A(0,\ 3,\ 6)$ y por $V(0,\ 5,\ 0)$.

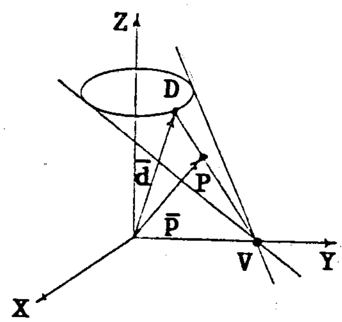


Un vector director de la recta CV es $\bar{u} = (\quad ,\ 5,\quad)$ y, debido a que C está contenido en ella, puede representarse por las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = \\ y = \\ z=6-6t \end{cases}$; ya que una de las ecuaciones cartesianas de la generatriz es $z=\beta$, se llega a $t = \quad -\frac{\beta}{6}$, con lo que $y = \qquad$ y la otra ecuación cartesiana de la generatriz resulta $x^2 + (\qquad\qquad)^2 = \alpha$. La recta AV tiene como vector director a $\bar{v}=(\quad ,\ 2,\quad)$ que es paralelo a $\bar{w}=(\quad ,\quad ,-3)$ por lo que la recta AV (directriz) puede representarse por las dos ecuaciones $\begin{cases} x = \\ y-5 = \end{cases}$. La ecuación de condición resulta $\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = \alpha$ y la ecuación del cono es

$x^2 + \qquad\qquad = \qquad .$

Otra forma de llegar a la ecuación cartesiana con el método de las generatrices es considerar como directriz a la circunferencia $D \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z=6 \end{cases}$ y como generatriz a la familia de rectas que pasan por V, que puede representarse por las ecuaciones cartesianas $G\begin{cases} x = \alpha(\qquad -5) \\ z = \end{cases}$; así, la ecuación de condición es: $(6\alpha)^2 + (6+5\beta)^2 = 9\beta^2$ y la ecuación del cono resulta : $36x^2 + (\qquad +5z)^2 =$ que es equivalente a la obtenida con la manera anterior.

17. La ecuación vectorial de una superficie es la igualdad del vector de posición de un punto ________________ de la superficie con, generalmente, la suma de vectores que nos permitan "recorrer" toda la superficie.



Para el cono, del ejercicio anterior una ecuación vectorial es $\bar{p} = \bar{d} + \overline{DP}$ donde $\bar{d}$ es el vector de ____________ de un punto ____________ de la circunferencia representada por las ecuaciones __________________ $z=6$;
$\qquad + \qquad = \qquad$; dicha circunferencia puede representarse por las ______________ paramétricas $x = 3\,\text{sen}\,\alpha$; $y =$; $z =$;
así, las coordenadas cartesianas del punto D son $(\,\text{sen}\,\alpha, \qquad , \qquad)$ y $\overline{DV} = (-\text{sen}\,\alpha, \qquad , \qquad)$. Además el vector $\overline{DP}$ es el producto de un ______________ por $\overline{DV}$ con lo que, una ecuación _____________ del cono es $\bar{p} =$ que tiene dos __________________ ; las ecuaciones paramétricas correspondientes son : $x =$; $y =$; $z =$, que también tienen _______ parámetros.

Otra ecuación vectorial de la misma superficie se puede obtener igualando el _________ de posición de un ________ cualquiera P de la superficie con la suma del vector de ___________ del vértice V con $\overline{VP}$ que es el __________ de un parámetro por el vector $\overline{VD}$ donde D es un _________________ de la _______________ que se puede representar por las ecuaciones paramétricas $x =$; $y = \operatorname{sen}\lambda$; $z =$ y la ecuación es $\bar{p} =$

18. La ecuación cartesiana de un elipsoide de revolución que genera la elipse representada por: $x=0\,;\,4(y-4)^2+9(z-3)^2=36$ y cuyo eje de rotación se representa por las ecuaciones $x = 0;\quad z = 3$, puede obtenerse considerando como generatriz a la familia de ___________________ con centro en $(\quad,\alpha,\quad)$ y ___________ variable, como directriz a la __________ , con lo que la ecuación de condición es $\dfrac{(\alpha-\quad)^2}{\quad}+\dfrac{\quad}{4}=1$ y al sustituir en ella los _____________ se obtiene la ecuación _______________ del elipsoide que es

$$\frac{\quad}{\quad}+\frac{\quad}{\quad}+\frac{\quad}{\quad}=1$$

19. Para identificar la superficie representada por una ecuación cartesiana conviene obtener las ________ de intersección de la superficie con cada uno de los ____________ coordenados, llamadas ___________ ; también es conveniente conocer las ________________ con planos paralelos a los __________________ , y el conjunto de valores al que pertenece cada una de las _________________ cartesianas $x,\ y,\ z$ de cualquier ___________ de la superficie.

20. La ecuación cartesiana de un cilindro con eje paralelo al X, puede obtenerse considerando como __________________ a la familia de ____________ paralelas al vector $(\quad,\quad,\quad)$ y que puede representarse por las ecuaciones __________________ $\begin{cases} y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$; la directriz puede ser la traza del cilindro en

el plano YZ por lo que, una de sus dos ecuaciones ______________ es $x =$

y la otra sólo contiene a las variables ____ y ____ ; al aplicar el método de las generatrices se obtiene que la ecuación del cilindro es _______ a una de las dos _______________ cartesianas (la que no es $x = 0$) de la_______________.

En general, toda ecuación con sólo dos variables representa a un cilindro con eje _____________ al correspondiente a la _____________ que no aparece en la ecuación; la traza del cilindro en el plano coordenado ____________ al eje, tiene una de sus dos ______________ cartesianas idéntica a la de _______________ .

21. La superficie representada por la ecuación _________ $8(x-2)^2+18(z+1)^2=72$ es un _____________ con eje ____________ al ______ y cuya _________ en XZ es la __________ con centro en $C(\quad,0,\quad)$, semieje menor __________ al _________ , y semieje _________ paralelo al ________ .

22. Para identificar la superficie representada analíticamente por la ecuación cartesiana $(y-2x)^2+z^2=9$, conviene determinar su _______ en el plano coordenado _____ haciendo $z=0$ con lo que se obtiene $y-2x=\pm$ que corresponde a un par de _________ de ___________ pendiente; si sustituimos $z=\alpha$ obtenemos las intersecciones con planos ____________ al XY que resultan también ___________________ si $|\alpha|\leq$ y no existen si $|\alpha|>$. Si hacemos $x=0$, obtenemos la traza de la superficie en el plano ______ que es una ______________ de radio igual a ______ y centro en $C(\quad,\quad,\quad)$. Si sustituimos a x por β, en la ecuación de la superficie, obtenemos las intersecciones con _________ paralelos al YZ y todas son _____________ de ________ igual a 3 y centro en $(\beta,\quad,\quad)$, además, estas circunferencias existen para todo valor de _____ y sus centros están en la

___________ de ecuaciones $\begin{cases} y = \\ z = \end{cases}$ que es _____________ a las intersecciones con los _____________ paralelos al plano ________ . Podemos concluir que la ecuación $(y-2x)^2+z^2=9$ representa a un ___________ circular __________, con eje paralelo al vector $\bar{u}=(\quad,1,\quad)$. La traza de este cilindro en el plano ____ es una _________ con centro en $(\quad,\quad,\quad)$, semieje menor paralelo al eje __________ de valor _________ y semieje _________ paralelo al eje Z y de valor ________ .

23. La llamada "discusión de la ecuación de una superficie" tiene por objeto ________________ la superficie; consta de varios pasos que en ocasiones no es necesario seguirlos todos, algunos de ellos son la determinación de ________________ con los ejes ________________ ; con los _____________ coordenados llamadas "trazas"; con _________ paralelos a los _______________ , llamadas "secciones planas"; simetrías respecto, tanto a los ______ coordenados, como a los _______ coordenados y al ______ ; y del conjunto de __________ posibles de cada una de ___, ___, z (coordenadas de cualquier punto de la _______________).

24. La sección plana en $z=3$ de la ____________ representada por la ecuación $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{4}-\frac{(z-3)^2}{16}=1$ es una _____________ con centro en $(\quad,\quad,3)$, semieje mayor __________ al eje _____ y semieje ___________ paralelo al ________ ; en $y=1$ la sección __________ es una _______________ con centro en $(\quad,1,\quad)$ y en $x=2$ la ___________ plana es también una _____________ por lo que la superficie recibe el nombre de ___________ elíptico de un ___________ ; su centro está en $(\quad,\quad,\quad)$ y su eje es paralelo al eje ______ .

25. La ecuación $-9x^2+36y^2-4z^2+72x-72y+16z=160$ que puede expresarse como

$-9(\qquad)^2 + 36(\qquad)^2 - 4(\qquad)^2 =$

o como $-\dfrac{(\qquad)^2}{4}+\qquad -\dfrac{(\qquad)^2}{9}=$; corresponde a una superficie cuyas secciones planas en $x=$ y en $z=$ son ____________ y si $y=$ la sección __________ es una elipse; pero, si $y=0$ o $y=2$ es ____________________ y si $0<y<2$, la intersección ___________ ; esta superficie se llama hiperboloide de __________________ , con centro en $(\quad , 1, \quad)$ y eje paralelo al _______ .

26. La ecuación de segundo grado con coeficiente nulo para x^2, corresponde a un _________________ debido a que las secciones planas en ___________ paralelos al XY y al _______ son ________________ . Este paraboloide puede ser ______________ si en un plano _____________ al YZ la ______________ plana es una _______________, o bien ______________ si dicha ______________ plana es una _________________ ; en ambos casos el eje de la superficie es ________________ al eje X .

27. La superficie representada por las ecuaciones paramétricas $x=2+\dfrac{5}{\sqrt{t}}\operatorname{sen}\alpha$; $y=1+\dfrac{1}{t}$; $z=3+\dfrac{3}{\sqrt{t}}\cos\alpha$ tiene una ecuación _________________ que se obtiene al eliminar a ____ y ____ de las _____________________ , de la primera se tiene $\operatorname{sen}\alpha = \text{———}\ \sqrt{t}$; de la tercera $\cos\alpha=$ con lo que $\text{———}\ t+\text{———}\ t=1$ y se llega a la ecuación cartesiana

$\overline{\quad 25 \quad} + \dfrac{(z- \quad)^2}{\quad} = \quad$, que corresponde a un ________ elíptico con centro en (, ,) y eje paralelo al eje _______ .

28. La superficie representada por la ecuación $(y+3)^2 + (z-2)^2 = 4$ es un ___________ circular con eje _____________ al ______ y cuyas secciones en planos paralelos al ________ son _____________ de radio igual a _____ y centro en $C(\alpha, \quad , \quad)$. La intersección de este cilindro con el ____________ de ecuación $x - y + 2z = 0$ es una ______________ con centro en $(\quad , -3, \quad)$. Para obtener una ecuación vectorial del cono que contiene a la elipse anterior, y tiene por vértice a $V(0, 0, 2)$ se determinan unas ecuaciones paramétricas de la elipse, que pueden ser $x = \qquad$; $y = -3 + 2\,\text{sen}t$; $z = 2 + \qquad$; con lo que, las coordenadas de un punto A cualquiera de la ______________ se pueden expresar como $A(\qquad , -3 + 2\,\text{sen}t , \qquad)$ y el vector $\overline{VA}$ es $(\qquad , \qquad , 2\cos t)$; la ecuación vectorial entonces, puede ser $\bar{p} = (\quad , 0, \quad) + r(\quad , \quad , 2\cos t)$ y las ecuaciones paramétricas correspondientes son $x = \qquad$; $y = \qquad$; $z = \quad + 2\cos t$.

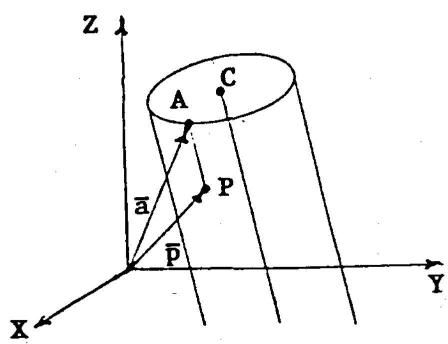
29. La ecuación cartesiana de una superficie de revolución generada por la recta representada por la ecuación vectorial $\bar{p} = (2+t, 1+2t, 4+2t)$ que "gira" alrededor de un eje paralelo al Z conteniendo al punto $(-3, 1, 0)$ se puede obtener con el método de las _______________ considerando como directriz a la ___________ representada por las ecuaciones _______________ $x = 2+t$, $y = \qquad$, $z = \quad + 2t$, dicha recta puede también representarse por las ________ cartesianas $x - 2 = \dfrac{\quad}{2}$; $y - 1 = \quad -4$; la generatriz puede ser la familia de _____________ con centro en $(\quad , \quad , \beta)$ y __________

variable, es decir, sus ecuaciones son $(x+3)^2 + (\quad)^2 = \quad$; $z = \beta$, con lo que la ecuación de condición es: $\left(\frac{\beta+6}{2}\right)^2 + (\beta-4)^2 = \alpha$ y la ecuación ______________ de la superficie resulta $\left(\frac{\quad}{\quad}\right)^2 + (\quad -4)^2 = (x+3)^2 + (\quad)^2$ equivalente a la ecuación $5(z^2 - \quad + \quad) = 4(\quad)^2 + 4(\quad)^2$ que puede escribirse $\frac{(x+3)^2}{20} + \frac{(y-1)^2}{20} - \frac{(z-2)^2}{16} = 1$ por lo que, la superficie es un ______________ de un manto con centro en (, ,) y eje paralelo al ______ .

30. Obtener una ecuación vectorial, las correspondientes ecuaciones paramétricas y la ecuación cartesiana de un cilindro elíptico recto tal que una elipse perpendicular al eje del cilindro esté representada por las ecuaciones cartesianas $(x-1)^2 + (z-5)^2 = 16, \; x+2y-z-2=0$

RESOLUCIÓN:

La elipse está contenida en el plano de ecuación $x+2y-z-2=0$, del cual un vector normal es $\overline{N}=(1,2,-1)$, así que, el eje del cilindro es paralelo a dicho vector. La elipse tiene su centro en $(1, y, 5)$, que pertenece al plano por lo que, el valor de y se obtiene de $1+2y-5-2=0 \Rightarrow y=3$



El vector de posición $\overline{p}$ de un punto P cualquiera de la superficie es igual a la suma del vector de posición $\overline{a}$ de un punto A cualquiera de la elipse más el vector $\overline{AP}$, paralelo al eje del cilindro, es decir, $\overline{AP} = \lambda \overline{N} = (\lambda, 2\lambda, -\lambda)\ \forall\ \lambda \in R$. Unas ecuaciones paramétricas de la elipse pueden ser

$$x = 1 + 4\operatorname{sen}\alpha\ ,\quad y = \frac{2 - x + z}{2},\quad z = 5 + 4\cos\alpha\ ;$$

sustituyendo x y z en y resulta

$$y = \frac{6 - 4\operatorname{sen}\alpha + 4\cos\alpha}{2} = 3 - 2\operatorname{sen}\alpha + 2\cos\alpha\ ,$$

así que, $\bar{a} = (1+4\operatorname{sen}\alpha,\ 3-2\operatorname{sen}\alpha+2\cos\alpha,\ 5+4\cos\alpha)$. Las correspondientes ecuaciones paramétricas del cilindro son

$$x = 1+4\operatorname{sen}\alpha+\lambda \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$y = 3-2\operatorname{sen}\alpha+2\cos\alpha+2\lambda \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$z = 5+4\cos\alpha-\lambda \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Para obtener la ecuación cartesiana puede aplicarse el método de las generatrices o eliminar α y λ de las paramétricas.

De (3) $\lambda = 5 + 4\cos\alpha - z$ sustituyendo en (1) y (2) se tiene

$$x = 1+4\operatorname{sen}\alpha+5+4\cos\alpha-z \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$y = 3 - 2\operatorname{sen}\alpha + 2\cos\alpha + 10 + 8\cos\alpha - 2z \ldots\ldots(5)$ sumando (4) más el doble de (5) se obtiene $x+2y = 32+24\cos\alpha-5z \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{2y+x+5z-32}{24}$

sustituyendo en (4) $x = 6 + 4\operatorname{sen}\alpha + \dfrac{2y + x + 5z - 32}{6} - \dfrac{6z}{6}$ de donde

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{5x - 2y + z - 4}{24}$, con lo que, la ecuación cartesiana es

$$(2y + x + 5z - 32)^2 + (5x - 2y + z - 4)^2 = 24^2\ .$$

Aplicando el método de las generatrices

$$G\begin{cases} 2x = y+\alpha \dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ y = -2z+\beta \dots\dots\dots\dots (2) \end{cases} \qquad D\begin{cases} (x-1)^2 + (z-5)^2 = 16 \dots\dots\dots (3) \\ x+2y-z-2=0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4) \end{cases}$$

De (4) $y = \dfrac{-x+z+2}{2}$ sustituyendo en (1) $2x = \dfrac{-x+z+2}{2} + \alpha \dots\dots\dots (5)$

sustituyendo en (2) $\dfrac{-x+z+2}{2} = -2z+\beta \Rightarrow -x+z+2 = -4z+2\beta \dots\dots (6)$

De (5) $\dfrac{5}{2}x = \dfrac{z+2}{2} + \alpha$; $x = \dfrac{z+2+2\alpha}{5}$; sustituyendo en (6)

$-\dfrac{z+2+2\alpha}{5} = -5z+2\beta-2 \Rightarrow -z-2-2\alpha = -25z+10\beta-10 \quad \therefore \quad z = \dfrac{\alpha+5\beta-4}{12}$;

$x = \dfrac{\alpha+5\beta-4+24+24\alpha}{60} = \dfrac{5\alpha+\beta+4}{12}$ sustituyendo en (3) se llega a la

ecuación de condición: $\left(\dfrac{5\alpha+\beta-8}{12}\right)^2 + \left(\dfrac{\alpha+5\beta-64}{12}\right)^2 = 16$

De (1) $\alpha = 2x-y$; de (2) $\beta = y+2z$; con lo que ,

$$\left(\frac{10x-5y+y+2z-8}{12}\right)^2 + \left(\frac{2x-y+5y+10z-64}{12}\right)^2 = 16 = 4^2$$

y simplificando $\left(\dfrac{5x-2y+z-4}{6}\right)^2 + \left(\dfrac{x+2y+5z-32}{6}\right)^2 = 4^2$

con lo que: $(5x-2y+z-4)^2 + (x+2y+5z-32)^2 = 4^2 \times 6^2 = 24^2$

31. Una superficie reglada se genera con la familia de rectas paralelas al plano YZ que se apoyan en la parábola representada por las ecuaciones $z-3 = (x-5)^2$, $y=0$; y en la recta representada por las ecuaciones

$y = 8$, $z = 0$. De dicha superficie, obtener una ecuación vectorial y la ecuación cartesiana.

RESOLUCIÓN:

Las rectas que generan la superficie son paralelas al plano YZ , por lo tanto, x es constante. El vector $\bar{p}$ de posición de un punto P cualquiera de la superficie, es igual a la suma del vector de posición $\bar{a}$ de un punto A cualquiera de la parábola más el producto de un escalar (parámetro) por el vector $\overline{AR}$ donde R es un punto de la recta de abscisa igual a la del punto A por ser $\overline{AR}$ paralelo al plano YZ .

Unas ecuaciones paramétricas de la parábola pueden ser $x=t$; $y=0$ $z=3+(t-5)^2$, entonces $A(t, 0, 3+(t-5)^2)$, $R(t, 8, 0)$, así que, una ecuación vectorial es $\bar{p} = (t, 0, 3+(t-5)^2) + r(0, 8, -3-(t-5)^2)$, o sea $(x, y, z) = (t, 8r, (3+(t-5)^2)(1-r))$ con lo que, $x = t$; $y = 8r$; $z = (1-r)\,[3+(t-5)^2]$; para la obtención de la ecuación cartesiana se eliminan t y r resultando $z=\left(1-\dfrac{y}{8}\right)(3+(x-5)^2) = \dfrac{8-y}{8}(x^2-10x+28)$, o bien: $(y-8)(x^2-10x+28)+8z=0$

Si se aplica el método de las generatrices, conviene que la generatriz sea la familia de rectas tales que $x=\alpha$, $\dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$; esto es:

$$G\begin{cases} x=\alpha \text{ .... } (1) \\ y=\beta z+\gamma \text{ .... } (2) \end{cases} \qquad D_1\begin{cases} z-3=(x-5)^2 \text{ .... } (3) \\ y=0 \text{ .... } (4) \end{cases} \qquad D_2\begin{cases} y=8 \text{ .... } (5) \\ z=0 \text{ .... } (6) \end{cases}$$

de G y D_1 : sustituyendo (4) en (2) y despejando z se tiene $z=-\frac{\gamma}{\beta}$.... (7) ;

sustituyendo (1) y (7) en (3) se llega a $-\frac{\gamma}{\beta}-3=(\alpha-5)^2$...... (C_1) ; de G y D_2 sustituyendo (5) y (6) en (2): $8=\gamma$ ..... (C_2) ; de G, C_1 y C_2, al sustituir C_2 en (2): $y=\beta z+8 \quad \Rightarrow \quad \beta=\frac{y-8}{z}$ .... (8) ; al sustituir (1), C_2 y (8) en C_1 se llega a $\quad -\frac{8z}{y-8}-3=(x-5)^2=x^2-10x+25$

o sea: $\qquad (y-8)(x^2-10x+28)+8z=0$.

32. Obtener una ecuación vectorial, las correspondientes paramétricas y la ecuación cartesiana del hiperboloide generado por la recta AB, donde $A(3,2,1)$ y $B(5,1,2)$, que *"gira"* alrededor de la recta representada por las ecuaciones $x=-2$, $z=1$.

RESOLUCIÓN:

Un vector director de la recta que *"gira"* es $\overline{AB}=(2,-1,1)$; unas ecuaciones paramétricas de ella son $x=3+2t$, $y=2-t$, $z=1+t$, por lo que, un punto cualquiera de dicha recta es $D(3+2t,2-t,1+t)$; este punto *"describe, al girar"*, una circunferencia con centro en $C(-2,2-t,1)$ y con ecuaciones cartesianas $(x+2)^2+(z-1)^2=r^2$, $y=2-t$; el radio varía al variar el punto, depende del parámetro t y se obtiene al sustituir x por $3+2t$ y z por $1+t$ en $(x+2)^2+(z-1)^2=r^2$, esto es, $r^2=(5+2t)^2+t^2=5t^2+20t+25$. Un punto cualquiera de la familia de circunferencias es un punto cualquiera de la superficie. Si hacemos $\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{(x+2)^2}{r^2}$ y $\cos^2\alpha = \dfrac{(z-1)^2}{r^2}$ obtenemos

$x = -2 + \sqrt{5t^2 + 20t + 25}\ \operatorname{sen}\alpha$; $z = 1 + \sqrt{5t^2 + 20t + 25}\ \cos\alpha$ que junto con $y = 2 - t$ son unas ecuaciones paramétricas (con dos parámetros) de la superficie; la ecuación vectorial correspondiente a ellas es $\bar{p} = (-2 + \sqrt{5t^2 + 20t + 25}\ \operatorname{sen}\alpha,\ \ 2-t,\ \ 1 + \sqrt{5t^2 + 20t + 25}\ \cos\alpha)$.

La determinación de la ecuación cartesiana puede hacerse eliminando los parámetros α y t de las ecuaciones paramétricas o por el método de las generatrices.

Para eliminar los parámetros se despejan $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$, se elevan al cuadrado y su suma se iguala a uno, esto es: $\dfrac{(x+2)^2}{5t^2+20t+25} + \dfrac{(z-1)^2}{5t^2+20t+25} = 1 \ldots\ldots (1)$;

de $y = 2-t$ se obtiene $t = 2-y$, se sustituye en (1) , con lo que,

$(x+2)^2 + (z-1)^2 = 5[(2-y)^2 + 4(2-y) + 5] = 5[\ y^2 - 8y + 17\ ]$

es decir: $(x+2)^2 + (z-1)^2 = 5[(y-4)^2 + 1] = 5(y-4)^2 + 5$

y se llega a $\dfrac{(x+2)^2}{5} - \dfrac{(y-4)^2}{1} + \dfrac{(z-1)^2}{5} = 1$.

Para el método de las generatrices, se considera como generatriz a la familia de circunferencias representadas por $(x+2)^2 + (z-1)^2 = \alpha \ldots (a)$, $y = \beta \ldots (b)$ y como directriz a la recta AB que puede representarse por las ecuaciones $\dfrac{x-3}{2} = -(y-2) \ldots (c)$, $-(y-2) = z-1 \ldots (d)$; de (b) y (c) se obtiene $x = -2\beta + 7$; de (b) y (d): $z = -\beta + 3$; sustituyendo en (a) se tiene la ecuación de condición $(-2\beta+9)^2+(-\beta+2)^2=\alpha$; de (a), (b) y la ecuación de condición se llega a $(-2y+9)^2+(-y+2)^2=(x+2)^2+(z-1)^2$;

desarrollando y agrupando se obtiene $(y-4)^2+1=\dfrac{(x+2)^2}{5}+\dfrac{(z-1)^2}{5}$;

o bien $\quad \dfrac{(x+2)^2}{5}-(y-4)^2+\dfrac{(z-1)^2}{5}=1$

33. Determinar la ecuación cartesiana de la superficie representada por la ecuación vectorial $\bar{p}=(\ 2+5t,\ 3+2\ \sqrt{t}\ \sec\alpha,\ -1+3\ \sqrt{t}\ tan\alpha\ )$; identificar la superficie, dando el centro y un vector paralelo al eje.

SOLUCIÓN:

Paraboloide hiperbólico, centro $(\ 2,\ 3,\ -1\ )$, vector $(\ 1,\ 0,\ 0\ )$.

34. Determinar la ecuación cartesiana, una vectorial y las correspondientes paramétricas de un cilindro elíptico con eje paralelo al vector $\bar{u}=(\ 2,1,-1\ )$, y que contiene a la elipse con centro en $C=(\ 5,\ 0,\ 2\ )$, de semieje menor igual a 2 y paralelo al Y, de semieje mayor igual a 3 y paralelo al Z.

SOLUCIÓN:

$$\frac{(5-x+2y)^2}{16}+\frac{(x+2z-9)^2}{36}=1$$

35. Obtener la ecuación cartesiana de la superficie representada por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 1+3\ tan\alpha\ \cos\beta \\ y &= -2+4\ \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta \\ z &= 3+2\ \cos\alpha \end{aligned}$$

Recordar: si $\operatorname{sen}\gamma = \frac{a}{b}$ entonces $\cos\gamma = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$

SOLUCIÓN:

$9(y+2)^2 + 4(x-1)^2(z-3)^2 + 36(z-3)^2 = 144$

36. Un paraboloide de revolución con eje paralelo al Z, contiene a los puntos $A(3,2,8)$, $B(3,5,3)$, $C(3,8,8)$, $D(6,5,8)$ y $E(0,5,8)$; determinar su ecuación cartesiana por el método de las generatrices.

SOLUCIÓN:

$5(x-3)^2 + 5(y-5)^2 = 9(z-3)$

Esta obra se terminó de imprimir
en mayo de 2000
en el taller de imprenta del
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 400 ejemplares
más sobrantes de reposición.