Cuaderno de Ejercicios de

Física Experimental

Rigel Gámez Leal

FACULTAD DE INGENIERÍA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

RIGEL GÁMEZ LEAL

CUADERNO DE EJERCICIOS DE FÍSICA EXPERIMENTAL

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA GENERAL Y QUÍMICA

PRESENTACIÓN

La Facultad de Ingeniería ha decidido realizar una serie de ediciones provisionales de obras recientemente elaboradas por académicos de la institución, como material de apoyo para sus clases, de manera que puedan ser aprovechadas de inmediato por alumnos y profesores. Tal es el caso del *Cuaderno de ejercicios de física experimental*, elaborado por Rigel Gámez Leal.

Se invita a los estudiantes y profesores a que comuniquen a los autores las observaciones y sugerencias que mejoren el contenido de la obra, con el fin de que se incorporen en una futura edición definitiva.

PRÓLOGO

Se puede afirmar que el trabajo de un ingeniero es la solución de problemas que aquejan a la sociedad con base en sólidos antecedentes en física, química y matemáticas. Para que ello se pueda lograr el ingeniero debe además de poseer habilidades en la resolución de problemas.

Este Cuaderno de Ejercicios de Física Experimental pretende dotar al alumno de ingeniería ejercicios de la asignatura con resolución, con el objetivo de que pueda aplicar los conceptos vistos en clase y en el laboratorio, para que con ello, adquiera habilidad en la resolución de problemas. Se elaboró tomando como base ejercicios de exámenes colegiados de la asignatura, los cuales se conformaron a partir de propuestas de profesores entusiastas de la asignatura, propuestas que fueron revisadas, adaptadas, integradas y resueltas debidamente.

Esta obra se integra con ejercicios de los temas correspondientes al temario vigente de la asignatura, excepto del tema I ya que en él no se presenta la necesidad de la resolución de problemas. Para cada tema se presentan varios ejercicios con su resolución con el fin de que el alumno verifique la forma de resolverlo y pueda comprobar si obtuvo la respuesta correcta, en caso contrario se recomienda que revise su resolución y si no logra encontrar el error se sugiere que lo consulte con su profesor o utilice el servicio de asesoría.

Finalmente quiero expresar mi deseo de conocer la opinión de profesores y alumnos que puedan enriquecer el contenido de esta obra, así como agradecer profundamente la colaboración de María Eugenia Macías Ríos en la edición de este material que seguramente redundará en beneficio la comunidad universitaria.

M. en I. Rigel Gámez Leal.

México, D. F., enero de 2005.

ÍNDICE

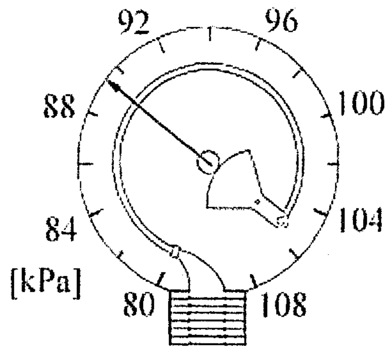
	página
Tema II. Conceptos básicos de metrología	4
Tema III. Dinámica	14
Tema IV. Fluidos	22
Tema V. Termodinámica	30
Tema VI. Electromagnetismo	37
Tema VII. Ondas	44
Tema VIII. Óptica geométrica	50
Tema IX. Sistemas de unidades	55
Apéndice	60

TEMA II

CONCEPTOS BÁSICOS DE METROLOGÍA

1. Para caracterizar el manómetro de Bourdon que se muestra, se realizaron varias mediciones de presión de un gas variando su volumen; por otra parte se calcularon los valores correspondientes de acuerdo con una ecuación que se ajusta de manera exacta al comportamiento del gas para tener los valores de referencia (valores patrones). Parte de las mediciones se muestran en la tabla, determine:

a) La ecuación de la curva de calibración.
b) El porcentaje de precisión para el valor P_P = 86 000 [Pa].
c) El porcentaje de exactitud para el valor patrón anterior.
d) La incertidumbre asociada al conjunto de mediciones correspondiente al valor patrón P_P = 88 000 [Pa].
e) Las características estáticas del instrumento y la lectura que indica.



P_P [Pa]	$\overline{P_L}$ [kPa]	P_{L1} [kPa]	P_{L2} [kPa]	P_{L3} [kPa]	P_{L4} [kPa]	P_{L5} [kPa]
84 000	84.4	84	84	86	84	84
86 000	87.2	86	86	88	88	88
88 000	89.2	88	90	88	90	90
90 000	91.2	90	92	90	92	92

Resolución:

a) La ecuación de la curva de calibración tendrá la forma $P_L = m\,P_p + b$,

cuya pendiente es $m = \dfrac{\Delta P_L}{\Delta P_p}$; calculando el valor de la pendiente tenemos

$$m = \frac{[(91.2-87.2)+(89.2-84.4)]\ \text{kPa}}{[(90-86)+(88-84)]\ \text{kPa}}, \qquad m = \frac{8.8\ \text{kPa}}{8\ \text{kPa}} = 1.1\left[\frac{\text{kPa}}{\text{kPa}}\right];$$

para calcular la ordenada al origen, primero calcularemos el centroide:

$\overline{P_P} = 87$ [kPa], $\overline{\overline{P_L}} = 88$ [kPa], por lo tanto

$b = \overline{\overline{P_L}} - m\,\overline{P_P} = (88\ [\text{kPa}]) - (1.1)(87\ [\text{kPa}]) = -7.7\ [\text{kPa}]$,

de esta manera el modelo matemático solicitado es

$$P_L\ [\text{kPa}] = 1.1\left[\frac{\text{kPa}}{\text{kPa}}\right] P_p\ [\text{kPa}] - 7.7\ [\text{kPa}].$$

b) El porcentaje de precisión se calcula como % P = 100 – % EP , por lo tanto es necesario calcular primero el porcentaje de error de precisión, el cual se puede calcular con la expresión:

$$\% \, EP = \left| \frac{\overline{P} - P_{+a}}{\overline{P}} \right| \times 100 \, \% \text{ ; entonces } \%EP = \left| \frac{(87.2 - 86)}{87.2} \right| \times 100 \, \% = 1.3761 \, \% \text{ ; con este error,}$$

podemos calcular el porcentaje de precisión solicitado % P = 100 % – 1.3761 % = 98.6239 %.

c) Para calcular el porcentaje de exactitud, tenemos que %E = 100–%EE ;

en donde el error de exactitud está dado por $\%EE = \left| \frac{P_p - \overline{P}}{P_p} \right| \times 100\%$

por lo tanto $\%EE = \left| \frac{86 - 87.2}{86} \right| \times 100 \, \% = 1.3953\%.$

Así, el porcentaje de exactitud es %E = 98.6047 %.

d) El número de lecturas que corresponden al valor patrón referido es n = 5, la incertidumbre asociada se puede calcular como $\Delta P = \pm \frac{S_P}{\sqrt{n}}$;

donde la desviación estándar de la variable P, está dada por

$$S_P = \pm \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\overline{P_L} - P_i)^2} = \pm \left\{ \frac{1}{5-1} \left[(89.2 - 88)^2 (2) + (89.2 - 90)^2 (3) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \text{ [kPa], entonces}$$

$S_P = \pm$ 1.0954 [kPa] ; por lo tanto la incertidumbre es $\Delta P = \pm \frac{1.0954 \text{ kPa}}{\sqrt{5}}$, $\Delta P = \pm$ 0.4899 [kPa].

e) De acuerdo con la figura, el rango del instrumento es de 80 a 108 [kPa], su resolución es 2 [kPa], su legibilidad puede considerarse como buena y la lectura mostrada es 90 [kPa].

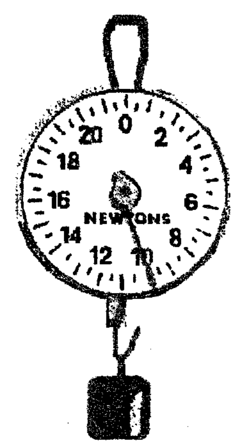
2. Para caracterizar el dinamómetro que se muestra en la figura se emplearon varias masas patrón y se midieron sus pesos, según se muestra en la tabla. Sabiendo que el experimento se hizo en la Cd. de México, g = 9.78 [m/s^2], determine en el SI y con el método de pares de puntos:

a) La sensibilidad del instrumento de medición.

b) El porcentaje de exactitud para el valor patrón m_P = 200 [g].

c) El rango, la resolución y la legibilidad del dinamómetro. Escriba también el valor de la lectura y la expresión dimensional de la misma.

m_P [g]	0	140	200	350
W_L [N]	0.5	1.5	2	3.5



Resolución:

a) Como se trata de un dinamómetro, primero se calcularan los pesos patrones, con base en los valores de las masas patrones.
Dado que $W_p = m_P \cdot g$, entonces

W_P [N]	0	1.3692	1.956	3.423
W_L [N]	0.5	1.5	2	3.5

Para calcular la sensibilidad del instrumento se calcula la pendiente de la curva de calibración $m = S = \dfrac{\Delta W_L}{\Delta W_P}$, entonces, $S = \dfrac{(3.5-1.5)+(2-0.5)\ [N]}{(3.423-1.3692)+(1.956-0)\ [N]} = \dfrac{3.5\ N}{4.0098\ N}$,

S = 0.8729 [N/N].

b) Para calcular el porcentaje de exactitud, es necesario calcular primero el porcentaje de error de exactitud, entonces

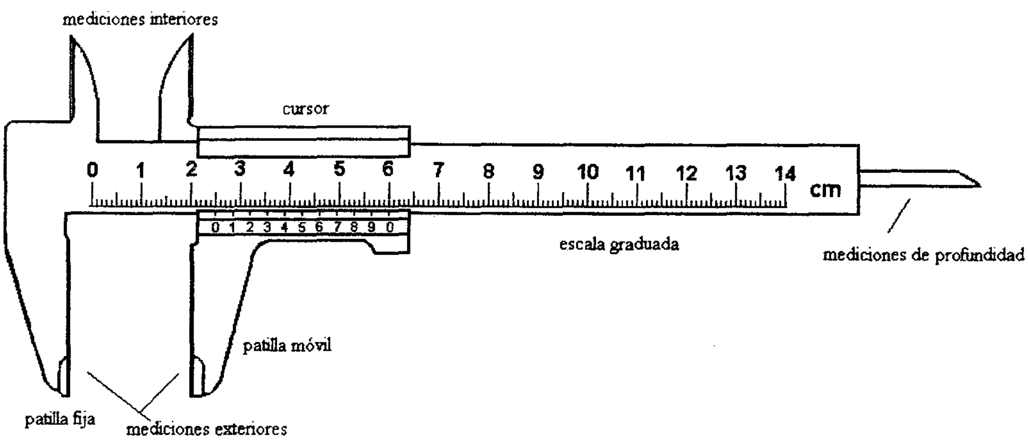
$$\%E = 100 - \%EE\ ,\ \%EE = \left|\frac{W_p - W_L}{W_p}\right| \times 100\% = \left|\frac{(1.956-2)N}{1.956\ N}\right| \times 100\% = 2.2495\%\ ,$$

así, el porcentaje de exactitud será: %E = 97.75056 %.

c) De acuerdo con la figura, el rango es de 0 a 22 [N], la resolución es 0.5 [N], su legibilidad es buena y la lectura que indica es 10 [N]. La expresión dimensional, en el SI, de la lectura es la que corresponde a la cantidad física llamada fuerza, por lo tanto [lectura] = [fuerza] = $L\ M\ T^{-2}$.

3. Con el vernier que se muestra en la figura, se tomaron mediciones para su caracterización. En la tabla se muestran parte de los datos obtenidos. Basándose en la figura y en la información, determine:

L_P [mm]	$\overline{L}_L$ [mm]	L_{L1} [mm]	L_{L2} [mm]	L_{L3} [mm]	L_{L4} [mm]	L_{L5} [mm]
10	10.30	10.5	10.2	10.3	10.4	10.1
20	20.22	20.3	20.2	20.0	20.4	20.2
30	30.30	30.4	30.4	30.2	30.2	30.3
40	40.36	40.5	40.4	40.3	40.3	40.3



a) El modelo matemático de la curva de calibración.

b) El porcentaje de error de exactitud y el de exactitud para las mediciones del valor patrón de 40 [mm].

c) El porcentaje de error de precisión y el de precisión para las mediciones del valor patrón de 20 [mm].

d) Las características estáticas del instrumento así como su sensibilidad en el rango de mediciones presentado en la tabla.

Resolución:

a) El modelo matemático de la curva de calibración tendrá la forma: $L_L = m\, L_P + b$, donde la pendiente es $m = \dfrac{\Delta L_L}{\Delta L_P}$; por lo tanto $m = \dfrac{[(40.36-20.22)+(30.3-10.38)][\text{mm}]}{[(40-20)+(30-10)][\text{mm}]} = \dfrac{40.14[\text{mm}]}{40[\text{mm}]} =$ 1.0035 [mm/mm].

Para obtener la ordenada al origen, se calcula el centroide: $\overline{L_L} = 25.295$ [mm] y $\overline{L_P} = 25$ [mm]; entonces $b = \overline{L_L} - m\,\overline{L_P}$,

b = (25.295 [mm]) − (1.0035[mm/mm])(25[mm]) = 0.2075[mm], por lo tanto el modelo matemático es: L_L[mm] = 1.0035 [mm/mm] L_P[mm] + 0.2075[mm].

b) Para calcular el porcentaje de error de exactitud tenemos que $\%EE = \left|\dfrac{L_p - \overline{L}_L}{L_p}\right| \times 100$,

entonces $\%EE = \left|\dfrac{40-40.36}{40}\right| \times 100 = 0.9\%$;

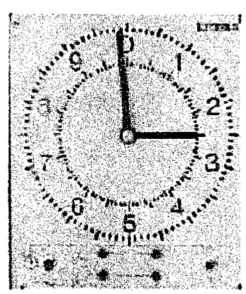
para el porcentaje de exactitud, sabemos que $\%E = 100 - \%EE$ = (100 − 0.9)%, entonces $\%E = 99.1\%$.

c) Para el cálculo del porcentaje de error de precisión sabemos que $\%EP = \left|\dfrac{\overline{L}_L - L_{ma}}{\overline{L}_L}\right| \times 100$,

es decir $\%EP = \left|\dfrac{20.22-20}{22.22}\right| \times 100 = 1.088\%$, por lo tanto para el porcentaje de precisión se tiene

$\%P = 100 - \%EP$ = (100 − 1.088)% = 98.912%.

d) El rango es de 0 a 14 [cm], su resolución 0.1 [mm], legibilidad: buena, como S = *m*, entonces la sensibilidad es: 1.0035 [mm/mm].



4. Con el cronómetro que se muestra en la figura, se tomaron las mediciones que se muestran en las tablas para determinar sus características dinámicas y su curva de calibración. En diez segundos la

aguja pequeña gira diez vueltas completas y la aguja grande se mueve hasta la posición "1". Con base en la información proporcionada, determine:

a) El porcentaje de exactitud del cronómetro para el valor patrón de 15 [s].
b) El porcentaje de precisión del instrumento para el valor patrón anterior.
c) La sensibilidad del cronómetro.

t_P [s]	t_{L1} [s]	t_{L2} [s]	t_{L3} [s]	t_{L4} [s]	t_{L5} [s]
15.00	15.05	15.05	15.04	15.03	15.04

t_P [s]	10.00	20.00	30.00	40.00
t_L[s]	10.98	20.56	30.55	40.79

Resolución:

a) Con base en la primera tabla, primero se calcula el valor más representativo del conjunto de mediciones, es decir el valor patrón $\bar{t}_L = 15.042[s]$, para calcular el porcentaje de exactitud es necesario calcular el error de exactitud, por lo tanto

$$\%E = 100 - \%EE \ , \quad \%EE = \left|\frac{t_p - \bar{t}_L}{t_p}\right| \times 100 \ , \quad \%EE = \left|\frac{15 - 15.042}{15}\right| \times 100 \ , \quad \%EE = 0.28\% ;$$

por lo tanto $\%E = 99.72\%$.

b) Para el cálculo del porcentaje de precisión obtenemos primero el error de precisión, es decir

$$\%P = 100 - \%EP \ , \quad \%EP = \left|\frac{\bar{t}_L - t_{+a}}{\bar{t}_L}\right| \times 100 \ , \quad \%EP = \left|\frac{15.042 - 15.03}{15.042}\right| \times 100 = 0.0798\% \ ,$$

por lo tanto $\%P = 99.9202\%$.

c) La sensibilidad es la pendiente del modelo matemático de la curva de calibración, entonces

$$S = m \ ; \ m = \frac{\Delta t_L}{\Delta t_p} ; \text{ por lo tanto } m = \frac{[(40.79 - 20.56) + (30.55 - 10.98)][s]}{[(40 - 20) + (30 - 10)][s]} = \frac{39.8[s]}{40[s]} = 0.995 \ [s/s],$$

entonces $S = 0.995\left[\frac{s}{s}\right]$.

5. Un alumno de Física Experimental caracterizó un óhmetro. Para ello, basándose en el código de colores que tienen los resistores, determinó los valores patrones de algunos arreglos con dichos elementos y midió con el instrumento bajo prueba la resistencia equivalente. Parte de las mediciones se muestran en la tabla, determine en el SI:

a) La sensibilidad del óhmetro.
b) El porcentaje de precisión para el valor patrón $R_P = 330$ [Ω].
c) La incertidumbre asociada al conjunto de mediciones del valor patrón del inciso anterior.

R_P [Ω]	$\overline{R}_L$ [Ω]	R_{L1} [Ω]	R_{L2} [Ω]	R_{L3} [Ω]	R_{L4} [Ω]
330	330.25	335	335	320	331
660	655.2				
990	995.75				
1320	1328.5				

Resolución:

a) El modelo matemático de la curva de calibración tiene la forma $R_L = m\, R_P + b$, donde la pendiente es la sensibilidad del instrumento, es decir $m = S$

$$m = \frac{\Delta R_L}{\Delta R_P} = \frac{(1328.5-655.2)+(995.75-330.25)}{(1320-660)+(990.330)},\quad m = \frac{1338.8[\Omega]}{1320[\Omega]} = 1.0142\left[\frac{\Omega}{\Omega}\right]$$

entonces $S = 1.0142\left[\frac{\Omega}{\Omega}\right]$.

b) El porcentaje de precisión está dado por $\%P = 100 - \%EP$, por lo tanto el error de precisión se calcula como $\%EP = \left|\frac{\overline{R}_L - R_{ma}}{\overline{R}_L}\right| \times 100$, $\quad \%EP = \left|\frac{330.25-320}{330.25}\right| \times 100 = 3.1037\%$,

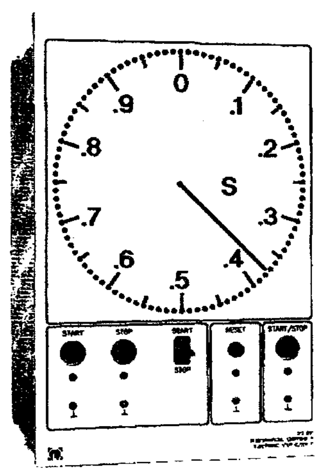
entonces el porcentaje de precisión solicitado es $\quad \%P = 96.8963\%$.

c) La incertidumbre solicitada se calcula como $\Delta R = \pm\frac{S_R}{\sqrt{n}}$, en donde la desviación estándar de la variable física es $S_R = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\left(\overline{R}_L - R_i\right)^2}$, por lo tanto

$$S_R = \sqrt{\frac{1}{4-1}\left[(330.25-335)^2\cdot(2)+(3330.25-320)^2+(330.25-331)^2\right]}\ [\Omega],$$

$$S_R = \pm 7.0887[\Omega],\quad \Delta R = \pm\frac{7.0887[\Omega]}{\sqrt{4}} = \pm 3.5444[\Omega].$$

6. En la figura se muestra un cronómetro semejante al que se utiliza en el laboratorio de Física Experimental. Se caracterizó dicho instrumento tomando mediciones con otro cronómetro y se obtuvo la tabla que se muestra. Determine para el instrumento caracterizado:



a) El modelo matemático de su curva de calibración.
b) El porcentaje de precisión y el de exactitud para el valor patrón $t_P = 0.15$ [s].
c) El valor más representativo y su incertidumbre para el conjunto de mediciones del valor patrón $t_P = 0.30$ [s].
d) Su rango, resolución, legibilidad y sensibilidad.

t_P [s]	t_{L1} [s]	t_{L2} [s]	t_{L3} [s]	t_{L4} [s]
0.15	0.18	0.19	0.18	0.18
0.20	0.23	0.23	0.23	0.24
0.25	0.26	0.26	0.27	0.27
0.30	0.31	0.32	0.32	0.33

Resolución:

a) Para obtener el modelo matemático de la curva de calibración será necesario calcular los valores más representativos del conjunto de lecturas de cada valor patrón, por lo tanto:

t_P [s]	$\bar{t}_L$ [s]
0.15	0.1825
0.20	0.2325
0.25	0.265
0.30	0.32

El modelo matemático de la curva de calibración tendrá la forma: $t_L = m\ t_P + b$, donde la pendiente es $m = \frac{\Delta t_L}{\Delta t_p}$, por lo tanto $m = \frac{[(0.32-0.2325)+(0.265-0.1825)]\,[s]}{[(0.3-0.2)+(0.25-0.15)]\,[s]} = \frac{0.17\,[s]}{0.2\,[s]}$

$m = 0.85\left[\frac{s}{s}\right]$;

para obtener la ordenada al origen, se calcula el centroide: $\bar{t}_L = 0.25$ [s] y $\bar{t}_P = 0.225$ [s], entonces $b = \bar{t}_L - m\ \bar{t}_P$

$b = (0.25[s]) - \left(0.85\left[\frac{s}{s}\right]\right)\cdot(0.225[s])$, $b = 0.0588[s]$, por lo tanto el modelo matemático es

$t_L[s] = 0.85\left[\frac{s}{s}\right]t_p[s] + 0.0588[s]$.

b) El porcentaje de precisión es $\%P = 100 - \%EP$, donde $\%EP = \left|\frac{\bar{t}_L - t_{ma}}{\bar{t}_L}\right| \times 100$,

$\%EP = \left|\frac{0.1825-0.19}{0.1825}\right| \times 100 = 4.1096\%$, entonces $\%P = 95.8904\%$;

el porcentaje de exactitud es $\%E = 100 - \%EE$, donde $\%EE = \left|\frac{t_p - \bar{t}_L}{t_p}\right| \times 100$,

$\%EE = \left|\frac{0.15-10.1825}{0.15}\right| \times 100 = 21.6667\%$, entonces $\%E = 78.3333\%$.

c) El valor más representativo corresponde al valor promedio, por lo tanto $\overline{t_L} = 0.32[s]$;

la incertidumbre asociada al conjunto de mediciones está dada por $\Delta R = \pm\frac{S_R}{\sqrt{n}}$, donde n = 4

$$y\ S_t = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\left(\overline{R}_L - R_i\right)^2}\ \text{, por lo tanto}$$

$$S_t = \sqrt{\frac{1}{4-1}\left[(0.32-0.31)^2+(0.32-0.32)^2+(0.32-0.32)^2+(0.32-0.33)^2\right]}\,[s] = \pm 0.0082[s]$$

entonces

$$\Delta R = \pm\frac{0.0082[s]}{\sqrt{4}} = \pm 0.0041[s]\ \text{y}\qquad t_L = (0.32 \pm 0.0041)[s].$$

d) De acuerdo con la figura, el rango es de 0 a 1 [s]; la resolución es: 1[cs]; la legibilidad se puede considerar como buena y la sensibilidad es la pendiente de la curva de calibración, es decir S = 0.85 [s/s].

7. En un laboratorio se desea caracterizar un instrumento para analizar un movimiento circular uniforme. Se midieron los valores de rapideces angulares (ω_L), se tomaron como referencia valores patrones (ω_P) calculados a partir de un modelo matemático y se obtuvo la tabla que se muestra. Con base en ello determine, en el SI, la sensibilidad del instrumento de medición para el rango de mediciones efectuado, así como el porcentaje de exactitud para el valor patrón ω_P = 16 [rpm].

1 [rpm] = 1 [revolución/minuto]

ω_P [rpm]	$\overline{\omega}_L$ [rad/s]	ω_{L1} [rad/s]	ω_{L2} [rad/s]	ω_{L3} [rad/s]	ω_{L4} [rad/s]
10	1.00				
12	1.25				
14	1.46				
16	1.68	1.67	1.69	1.68	1.68

Resolución:

Poniendo las dos primeras columnas de la tabla en el SI, tenemos que

ω_P [rad/s]	$\overline{\omega}_L$ [rad/s]
1.0472	1
1.2566	1.25
1.4661	1.46
1.6755	1.68

por lo tanto el modelo matemático tendrá la forma $\omega_L = m\,\omega_P + b$, cuya pendiente es la sensibilidad del instrumento, entonces

$$m = \frac{[(1.68-1.25)+(1.46-1)]\left[\text{rad}/\text{s}\right]}{[(1.6755-1.2566)+(1.4661-1.0472)]\left[\text{rad}/\text{s}\right]} = \frac{0.89\left[\text{rad}/\text{s}\right]}{0.8378\left[\text{rad}/\text{s}\right]} = 1.0623\left[\frac{\text{rad}/\text{s}}{\text{rad}/\text{s}}\right]$$

por lo tanto $S = 1.0623\left[\frac{rad/s}{rad/s}\right]$.

Para calcular el porcentaje de exactitud solicitado, primero calcularemos el porcentaje de error de exactitud, es decir

$$\%EE = \left|\frac{\omega_p - \bar{\omega}_L}{\omega_p}\right| \times 100, \qquad \%EE = \left|\frac{1.6755 - 1.68}{1.6755}\right| \times 100 = 0.2686\%,$$

como $\%E = 100 - \%EE$, entonces $\%E = 99.7314\%$.

8. Para caracterizar un medidor de frecuencias se generaron varias ondas y se midieron sus frecuencias (f_L). Se calcularon los valores de los periodos patrones (τ_P) que corresponden a dichas frecuencias y se obtuvo la tabla que se muestra. Determine, en el SI y utilizando el método de mínimos cuadrados:

τ_P [cs]	6	12	18
f_L [Hz]	16	8	5

a) La sensibilidad del instrumento de medición.
b) El modelo matemático de la curva de calibración.
c) El periodo patrón que se tendría para la frecuencia leída $f_L = 10$ [Hz].
d) El porcentaje de exactitud para la lectura de la frecuencia cuyo periodo patrón es $\tau_P = 18$ [cs].

Resolución:

a) El modelo matemático de la curva de calibración tiene la forma $f_L = m\, f_P + b$, donde la pendiente es la sensibilidad, por lo tanto se calculará la pendiente del modelo a partir del método de mínimos cuadrados; dicha pendiente es $m = \frac{\Delta f_L}{\Delta f_p}$, para calcular los valores de las frecuencias patrones se sabe que $f_p = \frac{1}{\tau_p}$, por lo tanto

τ_P [s]	0.06	0.12	0.18
f_p[Hz]	16.6667	8.3333	5.5556
f_L[Hz]	16	8	5

El número de mediciones es 3, por lo tanto n = 3, además $\sum f_P = 30.5556[Hz]$ y $\sum f_L = 29[Hz]$,

$f_p \cdot f_L\,[Hz^2]$	$f_p^{\,2}\,[Hz^2]$
266.6672	277.7789
66.6664	69.4439
27.778	30.8674
$\sum f_p \cdot f_L = 361.1116$	$\sum f_p^{\,2} = 378.0875$

con las expresiones del método de mínimos cuadrados que se encuentran en el apéndice de este Cuaderno de Ejercicios, tenemos

$$m = \frac{(3)(361.1116)-(30.5556)(29)\left[Hz^2\right]}{(3)(378.0875)-(30.5556)^2\left[Hz^2\right]} = \frac{197.2224}{200.6178}\left[\frac{Hz}{Hz}\right] = 0.9831 \text{ [Hz/Hz], por lo tanto}$$

$$S = 0.9831\left[\frac{Hz}{Hz}\right].$$

b) Para obtener el modelo matemático hace falta calcular la ordenada al origen, la cual está dada por

$$b = \frac{(29)(378.0875)-(361.116)(30.5556)[Hz]}{(3)(378.0875)-(30.5556)^2} = \frac{-69.4441[Hz]}{200.3178} = -0.3462 \text{ [Hz]},$$

de esta manera el modelo matemático será $\quad f_L[Hz] = 0.9831\left[\frac{Hz}{Hz}\right]f_p[Hz] - 0.3462[Hz].$

c) El periodo patrón se puede calcular a partir de la frecuencia patrón correspondiente, la cual, a su vez, se puede obtener del modelo matemático del inciso anterior, es decir

$$f_p[Hz] = \frac{f_L[Hz]+0.3462[Hz]}{0.9831\left[\frac{Hz}{Hz}\right]} = \frac{10+.03462}{0.9831}[Hz] = 10.5241[Hz];$$

como $\tau_p = \frac{1}{f_p}$, entonces $\qquad \tau_p = 0.09502[s].$

d) Como se conoce el periodo $\tau_p = 0.18[s]$, entonces se calculará primero la frecuencia patrón correspondiente, esto es; $f_p = \frac{1}{\tau_p} = (0.18[s])^{-1} = 5.5556[Hz]$, el porcentaje de exactitud es

$\%E = 100 - \%EE$, entonces $\%EE = \left|\frac{f_p - f_L}{f_p}\right| \times 100$, $\quad \%EE = \left|\frac{5.5556-5}{5.5556}\right| \times 100 = 10.0007\%$,

por lo tanto $\%E = 89.9993\%$.

TEMA III

DINÁMICA

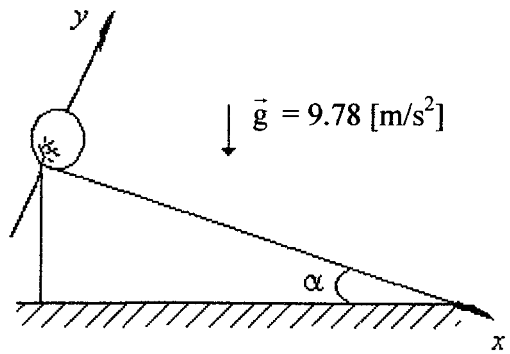
1. En un experimento se dejó rodar desde $t_0 = 0$ [s] y partiendo del reposo, sin fricción ni deslizamiento, un móvil esférico sobre un plano inclinado como se indica en la figura. El plano inclinado formaba $\alpha = \pi/12$ [rad] con la horizontal, la aceleración gravitatoria del lugar donde se realizó el experimento era 9.78 [m/s^2] y la masa del móvil 122 [g]. Con base en esta información determine:

a) La aceleración (magnitud y dirección) del móvil así como su gráfica en función del tiempo, es decir $a = f(t)$.

b) El tiempo (t_1) en el que la esfera recorrió los primeros 6.8 [cm].

c) La velocidad (magnitud y dirección) del móvil en el instante en el que había recorrido la distancia del inciso anterior, es decir v en el instante t_1.

d) La energía cinética de la esfera en el instante t_1.



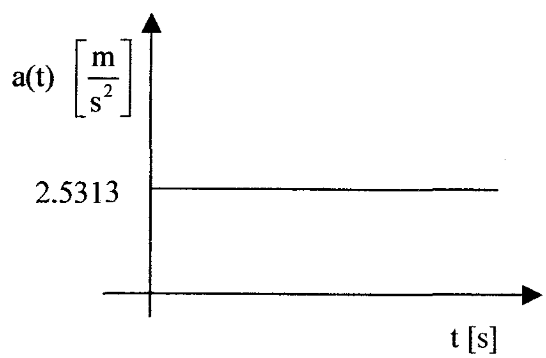
Resolución:

a) Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, como es sobre un plano inclinado, la aceleración está dada por $a = g \text{ sen } \alpha$, de acuerdo con la figura, el vector aceleración es paralelo al eje x, por lo tanto el dicho vector se puede escribir como

$\vec{a} = a(\hat{i})$, calculando el módulo de dicho vector tenemos que $a = (9.78 \text{ [m/s}^2]) \text{ sen } \frac{\pi}{12}$,

$a = 2.5313$ [m/s^2], entonces $\vec{a} = 2.5313 \ \hat{i} \left[\frac{m}{s^2}\right]$

La aceleración es constante, por lo tanto la gráfica es:



b) En un movimiento de este tipo el desplazamiento está dado por

$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$; de donde despejamos el tiempo,

es decir: $t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2(0.068[m])}{2.5313\ [m/s^2]}}$, $t_1 = 0.2318$ [s].

c) Sabemos que la rapidez está dada por $v(t) = \frac{dx}{dt}$, por lo tanto $v(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}at^2\right] = at$,

entonces, $v(t_1) = (2.5313\ [m/s^2])\ (0.2318\ [s])$,

como el vector velocidad es paralelo al eje x, entonces $\vec{v} = 0.5868\ \hat{i}\ \left[\frac{m}{s}\right]$.

d) La energía cinética está dada por $EC = \frac{1}{2}mv^2$,

por lo tanto $EC = ½\ (0.122\ [kg])\ (0.5868\ [m/s^2])^2$, $EC = 0.021$ [J].

2. Suponga que en un planeta de nuestro Sistema solar se realizó un experimento de caída libre. Con ayuda de varios instrumentos, se midieron las distancias "x" que recorría una partícula cuya masa era de 225 [g], así como los lapsos "t" (ya que $t_0 = 0$ [s]) que empleaba, en promedio, en recorrer dichas distancias y se obtuvo la tabla mostrada. Con base en ello, determine:

x [m]	$\bar{t}$ [s]
0.2	0.19
0.4	0.26
0.6	0.32
0.8	0.37

a) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento, considere que la variable independiente fue la distancia (x) recorrida por la partícula.
b) La aceleración gravitatoria del planeta y la gráfica de la aceleración del móvil en función del tiempo.
c) El modelo matemático experimental que relaciona a la rapidez de la partícula en función del tiempo así como la gráfica de este modelo.
d) La energía cinética que tendría el móvil en el instante en que ha recorrido una distancia x = ½ [m].

Resolución:

a) Como las variables "x" y "t" no tienen una relación lineal en este tipo de movimiento (rectilíneo uniformemente acelerado), es necesario realizar un cambio de variable, entonces se elevan al cuadrado los valores de tiempo más representativos; con ello, las variables del modelo matemático se tienen tabuladas en la tabla siguiente:

x [m]	z [s^2]
0.2	0.0361
0.4	0.0676
0.6	0.1024
0.8	0.1369

El modelo matemático tendrá la forma z = m x + b, donde $m = \dfrac{\Delta z}{\Delta x}$, por lo tanto

$$m = \frac{[(0.1369-0.0676)+(0.1024-0.0361)][s^2]}{[(0.8-0.4)+(0.6-0.2)][m]} = \frac{0.1356[s^2]}{0.8[m]},\ m = 0.1695\left[\frac{s^2}{m}\right];$$

calculando la ordenada al origen, tenemos que

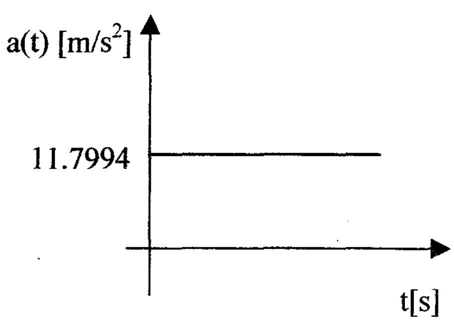
$$b = \bar{z} - m\cdot\bar{x},\quad b = \left(0.0858[s^2]\right) - \left(0.1695\left[\frac{s^2}{m}\right]\right)\cdot\left(0.5[m]\right) = 0.0001\ [s^2],$$

entonces el modelo matemático es $z[s^2] = 0.1695\left[\dfrac{s^2}{m}\right]x[m] + 0.001[s^2]$.

b) Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado y como es caída libre la aceleración del móvil es igual a la aceleración gravitatoria del lugar, es decir a = g , la expresión para calcular la distancia recorrida es $x = \dfrac{1}{2}at^2$, de donde se puede despejar la variable t^2, quedando $t^2 = \dfrac{2x}{a} = \dfrac{2}{a}x$, comparando esta última expresión con el modelo matemático obtenido en el inciso anterior se puede concluir que $m = \dfrac{2}{a}$, entonces

$$a = 2/m = \frac{2}{0.1695\left[\dfrac{s^2}{m}\right]} = 11.7994\left[\frac{m}{s^2}\right],\ \text{por lo tanto}\ g = 11.7994\left[\frac{m}{s^2}\right];$$

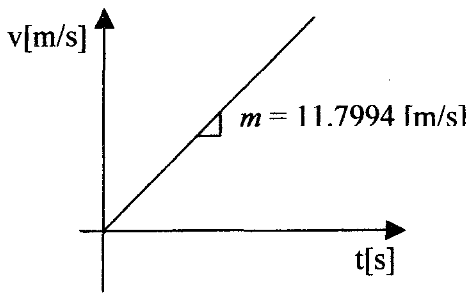
como la aceleración es constante, la gráfica solicitada es



c) Sabemos que la rapidez viene dada por $v=\dfrac{dx}{dt}$, por lo tanto del modelo matemático obtenido el primer inciso se despeja la variable "x" y posteriormente se deriva con respecto a "t", es decir

$$v(t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{z-b}{m}\right]=\frac{d}{dt}\left[\frac{t^2}{m}-\frac{b}{m}\right]=\frac{2}{m}t=\frac{2}{0.1695\left[\frac{s^2}{m}\right]}t\ ,\quad \text{de donde } v(t)\left[\frac{m}{s}\right]=11.7994\left[\frac{m}{s^2}\right]t[s]\ ;$$

con el modelo obtenido, es decir v (t) se puede obtener la gráfica de la rapidez en función del tiempo, es decir



d) La energía cinética se calcula como $EC=\dfrac{1}{2}mv^2$, por lo tanto es necesario conocer la rapidez del móvil en este instante. El instante en el que ha recorrido ½ [m] lo podemos obtener a partir del modelo matemático del primer inciso de este ejercicio, es decir $t^2=0.1695x+0.001$,

$$t^2=\left(0.1695\left[\frac{s^2}{m}\right]\right)\cdot\left(1/2[m]\right)+0.001\left[s^2\right],$$

$$t=\sqrt{0.0858\left[s^2\right]}=0.2928[s];$$

a partir del modelo matemático obtenido en el inciso c, tenemos

$$v=\left(11.7994\left[\frac{m}{s}\right]\right)\cdot\left(0.2928[s]\right)=3.4552\left[\frac{m}{s}\right]$$, entonces la energía cinética es

$$EC=\frac{1}{2}(0.225[kg])\cdot\left(3.4552\left[\frac{m}{s}\right]\right)^2=1.3431[J].$$

3. Se realizó un experimento dejando rodar varios balines esféricos de diferente masa desde el reposo, con $x_0 = 0$ [m] y $t_0 = 0$ [s], a lo largo de un plano inclinado de 1 [m] de longitud y sin fricción. Se midió la magnitud de la fuerza que impulsaba a cada uno de los móviles durante su recorrido y se obtuvo la tabla que se muestra. Determine, en el SI:

a) El modelo matemático lineal que relaciona a la fuerza (F) en función de la masa de los balines (m), es decir F = f (m).

b) La aceleración de los balines durante el movimiento.

c) La rapidez de los móviles al llegar al final del plano si se sabe que empleaban 0.64 [s] en recorrer el plano inclinado.

m [g]	F [N]
50	0.26
150	0.75

Resolución:

a) El modelo matemático tendrá la forma F = *m* m + b; cuya pendiente es $m = \dfrac{\Delta F}{\Delta m}$;

a partir de la tabla podemos calcular la pendiente, que será:

$$m = \frac{(0.75-0.26)[N]}{(150-50)10^{-3}[kg]} = \frac{0.49}{0.1}\left[\frac{N}{kg}\right]; \qquad m = 4.9\left[\frac{N}{kg}\right];$$

para determinar el valor de la ordenada al origen podemos despejar "b" del modelo matemático: b = F – *m* m; sustituyendo en esta última expresión la pendiente y un punto de la tabla, tenemos

$$b = (0.26[N]) - \left(4.9\left[\frac{N}{kg}\right]\right)\cdot(0.05[kg]) = 0.015[N],$$

por lo tanto el modelo matemático es $F[N] = 4.9\left[\dfrac{N}{kg}\right]m[kg] + 0.015[N]$.

b) La segunda ley de Newton se puede escribir como $\vec{F} = m\vec{a}$, si comparamos esta última expresión con el modelo matemático del inciso anterior, podemos concluir que la pendiente es *m* = a, entonces la aceleración de los balines es

$$a = 4.9\left[\frac{m}{s^2}\right].$$

c) Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, por lo tanto la rapidez de los móviles en función del tiempo se puede calcular con la expresión $v = a\,t + v_0$, como parten del reposo, entonces $v_0 = 0$ [m/s], por lo tanto, la rapidez de los móviles se puede determinar como

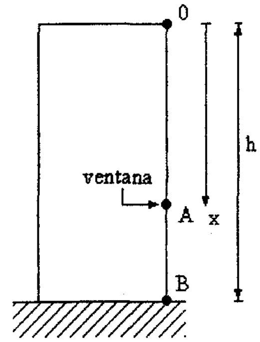
$$v = a\,t\text{, es decir, } v = \left(4.9\left[\frac{m}{s^2}\right]\right)\cdot(0.64[s]) = 3.136\left[\frac{m}{s}\right].$$

4. Una piedra que cae, partiendo del reposo, de la azotea de un edificio pasa por una ventana de dimensiones despreciables con una rapidez de 29.34 [m/s]. Un segundo después de que esto ocurrió, la piedra golpea al piso. Si la aceleración gravitatoria del lugar es 9.78 [m/s^2], determine:

a) El lapso que tarda la piedra en caer desde la azotea hasta el centro de la ventana.
b) La altura del edificio.
c) La altura, con respecto al piso, a la que está el centro de la ventana.

Resolución:

a) Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, como parte del reposo



$$v_0 = 0\left[\frac{m}{s}\right],$$

en este movimiento de caída libre, la aceleración del móvil es igual a la aceleración gravitatoria, por lo tanto a = g. De acuerdo con la información proporcionada el tiempo que le emplea del punto A al punto B es $\Delta t_{AB} = 1$ [s]; la rapidez en función del tiempo está dada por $v = a\,t + v_0$, pero $v_0 = 0$ [m/s], por lo tanto $v = a\,t$.

Entonces, en el punto A tenemos que $v_A = a\,t_A$, es decir

$$t_A = \frac{v_A}{a} = \frac{v_A}{g} = \frac{29.34\left[{}^{m}\!/\!_{s}\right]}{9.78\left[{}^{m}\!/\!_{s^2}\right]} = 3[s].$$

b) Para calcular la altura del edificio, es decir h, calcularemos primero el tiempo que emplea el móvil en recorrer la distancia h, esto es, el tiempo que tarda en recorrer la distancia de O a B:

$${}_0\Delta t_B = {}_0\Delta t_A + {}_A\Delta t_B = (3[s]) + (1[s]) = 4[s],$$

para este movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, tenemos que

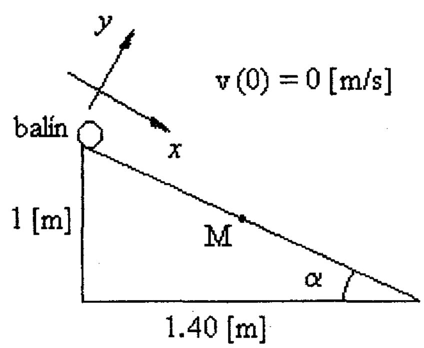
$h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$, pero $v_0 = 0$ [m/s], $h_0 = 0$ [m], por lo tanto

$h = \frac{1}{2}g\,t_B^2$; entonces $h = \frac{1}{2}\left(9.78\left[\frac{m}{s^2}\right]\right)\cdot(4[s])^2 = 78.24[m]$.

c) Como, en este movimiento el desplazamiento está dado por $x = \frac{1}{2}g\,t^2$, entonces en el punto A tenemos que $x_A = \frac{1}{2}g\,t_A^2$, por lo tanto $x_A = \frac{1}{2}\left(9.78\left[\frac{m}{s^2}\right]\right)\cdot(3[s])^2 = 44.01[m]$; de esta manera la altura del punto A, con respecto al piso será

$h_A = h - x_A = (78.24\ [m]) - (44.01\ [m]) = 31.23\ [m]$.

5. En el laboratorio de Física Experimental se soltó un balín en un plano inclinado, desde la posición mostrada en la figura. Considere que la aceleración gravitatoria del lugar es 9.78 $[m \cdot s^{-2}]$ y que la fricción entre el móvil y el plano inclinado es despreciable. Determine, cuando el balín está a la mitad del plano inclinado (punto M), en el SI:



a) El vector aceleración del balín.

b) El tiempo en el cual el móvil llega a ese punto.
c) El vector velocidad de la partícula móvil.

Resolución:

a) Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, en el que la aceleración es constante y como el móvil se desplaza a lo largo de un plano inclinado, dicha aceleración está dada por

$a = g\ \text{sen}\alpha$; entones $\alpha = \text{ang}\tan\frac{1}{1.4} = 35.5377°$, por lo tanto el módulo del vector aceleración

es $a = \left(9.78\frac{m}{s^2}\right)\cdot \text{sen}(35.5377°) = 5.6845$,

en el diagrama se observa que el vector aceleración es paralelo al eje de las abscisas

y va en dirección positiva, por lo tanto $\vec{a} = 5.6845\ \hat{i}\left[\frac{m}{s^2}\right]$.

b) Para determinar el tiempo que tarda el móvil en llegar a ese punto, determinaremos primero la longitud del plano inclinado, es decir, la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo de la figura:

$L = \sqrt{(1\,m)^2 + (1.4\,m)^2} = 1.7205[m]$; como el punto M está a la mitad de la hipotenusa, la

distancia que ha recorrido el móvil es $x = \frac{1}{2}L = 0.8602[m]$,

como el móvil parte del reposo y $x_0 = 0$ [m], la distancia recorrida por el balín está dada por

$x = \frac{1}{2}at^2$, entonces $t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{(2)(0.8602m)}{5.6845\left[m/s^2\right]}} = 0.5501[s]$.

c) Para un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, si el móvil parte del reposo, la rapidez está dada por v = a t,

por lo tanto $v = \left(5.6845\left[\frac{m}{s^2}\right]\right)(0.5501[s]) = 3.1273\left[\frac{m}{s}\right]$,

de acuerdo con la figura, el vector velocidad es paralelo al eje "x" y va en sentido positivo, por

lo tanto la velocidad del balín en este punto es $\vec{v} = 3.1273\ \hat{i}\left[\frac{m}{s}\right]$.

6. En un plano inclinado se dejó rodar desde $t_0 = 0$ [s], sin fricción ni deslizamiento, una partícula. Se midió la rapidez (v) que llevaba en varios instantes (t) y se obtuvo la tabla que se muestra. Sabiendo que el ángulo que formaba el plano inclinado con respecto a la horizontal es γ, determine la aceleración gravitatoria experimental, en términos exclusivamente de γ.

tiempo (t) [s]	0.2	0.3
rapidez (v) [m/s]	1.34	1.76

Resolución:

a) Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado: a = constante, como parte del reposo la rapidez del móvil está dada por $v = a\,t$, esta última expresión es la ecuación de una línea recta cuya pendiente es la aceleración, por lo tanto $m = a$, cuya pendiente es $m = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$;

de acuerdo con los datos de la tabla, la pendiente se puede calcular como

$$m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}, \text{ entonces } m = \frac{(1.76 - 1.34)\left[\frac{m}{s}\right]}{(0.3 - 0.2)[s]} = \frac{0.42\left[\frac{m}{s}\right]}{0.1[s]} = 4.2\left[\frac{m}{s^2}\right],$$

sabemos que en este plano inclinado, la aceleración del móvil se relaciona con la aceleración gravitatoria del lugar según la expresión $a = g \operatorname{sen} \gamma$,

por lo tanto, $g = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\gamma} = a \csc\gamma = \left(4.2\left[\dfrac{m}{s^2}\right]\right) \cdot \csc\gamma$; entonces

$$g(\gamma) = 4.2 \cdot \csc\gamma \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

TEMA IV

FLUIDOS

1. En un experimento de hidrostática se midió la masa (m) de un recipiente de vidrio que contenía un determinado volumen (V) de un líquido, con una balanza perfectamente calibrada y se obtuvo la tabla que se muestra. Sabiendo que la aceleración gravitatoria del lugar es 9.78 [m/s^2], determine, en el SI:

a) El modelo matemático lineal de la masa medida en función del volumen del líquido, es decir m = f (V).

b) La masa del recipiente y la masa que tendrían 25 [mℓ] del líquido.

c) La presión manométrica a 2 [cm] de profundidad, dentro del líquido.

V [mℓ]	m [kg]
20	0.0936
30	0.1004

1 [mℓ] = 1 [cm^3]
$\rho_{agua} = 10^3$ [kg·m^{-3}]

Resolución:

a) Como el modelo matemático debe estar en el SI, primero convertiremos los valores de volumen en [mℓ] a valores en [m^3], esto es

V [m^3]	m [kg]
0.00002	0.0936
0.00003	0.1004

El modelo matemático solicitado tiene la forma m = m V + b, cuya pendiente es $m = \dfrac{\Delta m}{\Delta V}$,

$$m = \frac{(0.1004-0.0936)[\text{kg}]}{(0.00003-0.00002)[\text{m}^3]} = 680\frac{\text{kg}}{\text{m}^3};$$

para calcular la ordenada al origen, podemos considerar una pareja ordenada, es decir

$$b = m_1 - m\,V_1 = 0.0936[\text{kg}] - \left(680\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]\right)\cdot\left(0.00002\left[\text{m}^3\right]\right) = 0.08[\text{kg}];$$

entonces el modelo matemático es $\text{m}[\text{kg}] = 680\left[\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]\text{V}\left[\text{m}^3\right] + 0.08[\text{kg}]$.

b) Si el volumen de la sustancia es cero, entonces la masa que registra la balanza es la del recipiente, por lo tanto, de acuerdo con el modelo matemático del inciso anterior podemos decir que b = $m_{recipiente}$, es decir $m_{recipiente}$ = 0.08 [kg]; por otra parte, sabemos que la densidad se puede calcular con el cociente $\rho = \dfrac{m}{V}$, de donde la masa estaría dada por m = ρ V.

Si comparamos esta última expresión con el modelo matemático del inciso anterior, tenemos que $m = \rho_{\text{líquido}}$, entonces

$$m = \rho_{\text{líquido}}\ V;\ m = \left(680\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]\right)\cdot\left(0.000025\left[\text{m}^3\right]\right) = 0.017\left[\text{kg}\right].$$

c) La presión manométrica la podemos calcular como
$P_{man} = = \rho_{\text{líquido}}\ g\ z$; entonces

$$P_{man} = \left(680\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]\right)\cdot\left(9.78\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]\right)\left(0.02\left[\text{m}\right]\right) = 133.008\left[\text{Pa}\right].$$

2. Dentro de un tanque rígido y cerrado a la atmósfera hay dos fluidos: un líquido desconocido y aire a una cierta presión. Para tratar de identificar dicho líquido se efectuaron mediciones de presión relativa (P_r) dentro del líquido, a diferentes profundidades (z). Los resultados se muestran en la tabla, si la presión relativa se midió con respecto al aire que rodea al tanque, obtenga en el SI:

P_r [Pa]	z [cm]
−146.25	4
20.00	6
186.25	8

a) El modelo matemático que relaciona a la presión relativa P_r con la profundidad z. Utilice el método de mínimos cuadrados.

b) La presión absoluta del aire contenido en el tanque si la presión atmosférica del lugar es 100 [kPa].

Resolución:

a) El modelo matemático solicitado tiene la forma $P_r = m\ z + b$, cuya pendiente es $m = \dfrac{\Delta P_r}{\Delta z}$; elaboraremos una tabla donde estén las sumas necesarias para emplear las expresiones del método de mínimos cuadrados:

P_r [Pa]	z[m]	$Pr \cdot z$ [Pa · m]	z^2 [m^2]
-146.25	0.04	5.85	0.0016
220	0.06	1.2	0.0036
186.25	0.08	14.9	0.0064
$\sum P_r = 60$	$\sum z = 0.18$	$\sum P_r\ z = 10.25$	$\sum z^2 = 0.0116$

como el número de lecturas es de tres, entonces n = 3; calculando la pendiente con las expresiones que aparecen en el apéndice de este Cuaderno de Ejercicios tenemos

$$m = \frac{(3)\cdot(10.25)-(0.18)\cdot(60)}{(3)\cdot(0.0116)-(0.08)^2} = 8312.5\left[\frac{\text{Pa}}{\text{m}}\right]$$ y la ordenada al origen es

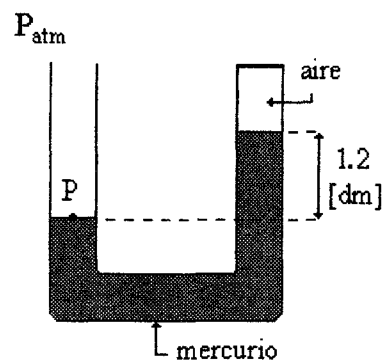
$$b = \frac{(60)\cdot(0.0116)-(10.25)\cdot(0.18)}{(3)\cdot(0.0116)-(0.08)^2} = -478.75\left[\text{Pa}\right],$$

entonces el modelo matemático es $P_r[\mathrm{Pa}] = 8312.5\left[\dfrac{\mathrm{Pa}}{\mathrm{m}}\right]\cdot z[\mathrm{m}] - 478.75[\mathrm{Pa}]$.

b) La presión relativa del aire contenido en el tanque se puede obtener con el modelo matemático anterior, es decir, es la presión del líquido en su superficie, por lo tanto la ordenada al origen representa la presión relativa del aire:

$P_r[\mathrm{Pa}] = 8312.5\left[\dfrac{\mathrm{Pa}}{\mathrm{m}}\right]\cdot(0\,[\mathrm{m}]) - 478.75[\mathrm{Pa}] = -478.75\,[\mathrm{Pa}]$, como $b < 0$ la presión del aire es una presión manométrica negativa o una presión vacuométrica, entonces $P_{abs} = P_{atm} - P_{vac}$, por lo tanto $P_{abs\,aire} = (100000[\mathrm{Pa}]) - (478.75[\mathrm{Pa}]) = 99521.25[\mathrm{Pa}]$.

3. En un tubo en forma de U, se tienen varios fluidos; el extremo de la izquierda está abierto a la atmósfera y el de la derecha está cerrado. Sabiendo que el líquido contenido en el tubo es mercurio, determine en el SI:



a) La presión absoluta y la presión manométrica en el punto P.
b) La presión manométrica del aire contenido en el extremo derecho del tubo en U.

$P_{atm} = 58$ [cm de Hg]; $g = 9.78\ [\mathrm{m\cdot s^{-2}}]$;
$\rho_{agua} = 10^3\ [\mathrm{kg/m^3}]$; $\delta_{Hg} = 13.595$ [1]

Resolución:

a) Como el punto P está sobre la superficie del líquido y ese extremo del tubo está abierto a la atmósfera, entonces $P_{man\,p} = 0[\mathrm{Pa}]$

y la presión absoluta es la presión atmosférica, es decir $P_{abs\,p} = P_{atm}$; por lo tanto

$P_{atm} = \rho_{Hg}\, g\, h_{Hg}$, en términos de la presión relativa del mercurio tenemos $P_{atm} = \delta_{Hg}\,\rho_{agua}\, g\, h_{Hg}$,

$$P_{atm} = (13.595)\cdot\left(10^3\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]\right)\cdot\left(9.78\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]\right)\cdot(0.58[\mathrm{m}]) = 77116.28[\mathrm{Pa}]\ ,\ P_{abs_p} = 77116.28[\mathrm{Pa}].$$

b) Llamaremos punto "a" al punto que está sobre la superficie del líquido en el extremo derecho del tubo, aplicando la ecuación de gradiente de presión entre los puntos "P" y "a" tenemos $P_p - P_a = -\rho_{Hg} g(z_p - z_a)$, de esta última expresión despejamos la presión en "a":

$P_a = P_p + \rho_{Hg}(z_p - z_a)$, en términos de la presión relativa del mercurio, tenemos

$P_a = P_p + \delta_{Hg}\rho_{agua} g(z_p - z_a)$, entonces la presión manométrica del punto "a" será

$$P_a = (0[Pa]) + (13.595)\cdot\left(10^3\left[\frac{kg}{m^3}\right]\right)\cdot\left(9.78\left[\frac{m}{s^2}\right]\right)\cdot(0-0.12)[m],$$

$$P_{man\,a} = -15955.09[Pa].$$

4. Se realizaron dos experimentos en un laboratorio, en el cual la aceleración gravitatoria es 9.79 [m/s^2], con cierto líquido. En el primer experimento se determinó la relación existente entre masa y volumen del líquido, y se obtuvo el modelo matemático siguiente:

m [kg] = 720 [kg/m^3] V [m^3] + 0.5 [kg].

Posteriormente se colocó 1 [kg] de dicha sustancia en un recipiente cilíndrico de 10 [cm] de diámetro y se realizó el segundo experimento, midiendo la presión manométrica (P_{man}) en función de la profundidad (z). Se obtuvo, luego de finalizar el experimento, que el centroide de la recta que mejor se ajusta a los puntos experimentales es C (8 [cm], 580 [Pa]). Considerando que la densidad del agua es 10^3 [kg/m^3] y la del mercurio es 13 600 [kg/m^3], determine:

a) La densidad relativa y la magnitud del vector peso específico del líquido utilizado en el experimento.

b) El modelo matemático experimental que relaciona a la presión manométrica en función de la profundidad.

c) El volumen total del líquido en el recipiente, en litros.

d) La presión absoluta en el fondo del recipiente, sabiendo que la presión atmosférica del lugar es 68 [cm de Hg].

Resolución:

a) El modelo matemático proporcionado tiene la forma m = *m* V + b, sabemos que la densidad del líquido está dada por $\rho_L = \dfrac{m}{V}$, de donde la masa es m = ρ_L V, entonces si comparamos esta última expresión con el modelo matemático tenemos que la pendiente de dicho modelo es la densidad del líquido, por lo tanto $\rho_L = 750\left[\dfrac{kg}{m^3}\right]$; por lo tanto la densidad relativa del líquido es $\delta_L = \dfrac{\rho_L}{\rho_A} = \dfrac{720\left[\frac{kg}{m^3}\right]}{10^3\left[\frac{kg}{m^3}\right]} = 0.72[1]$,

con la densidad podemos calcular el módulo del vector peso específico, es decir

$$\gamma = \rho g = \left(720\left[\frac{kg}{m^3}\right]\right)\cdot\left(9.79\left[\frac{m}{s^2}\right]\right) = 7048.8\left[\frac{N}{m^3}\right].$$

b) Este modelo matemático tiene la forma $P_{man} = m\ z + b$, cuya pendiente es el módulo del vector peso específico, es decir $m = \gamma$, entonces

$$P_{man} = 7078.8\left[\frac{N}{m^3}\right]\cdot z[m] + b[Pa]\ ,$$

para calcular la ordenada al origen nos apoyaremos en el centroide que nos proporcionan

$$b = \overline{P}_{man} - m\ \overline{z}\ , \quad b = (580[Pa]) - \left(7048.8\left[\frac{Pa}{m}\right]\right)\cdot(0.08[m]) = 16.096[Pa]\ ,$$

de esta manera el modelo matemático es

$$P_{man}[Pa] = \left(7048.8\left[\frac{Pa}{m}\right]\right)\cdot z[m] + (16.096[Pa])\ .$$

c) La densidad del líquido es $\rho_L = \dfrac{m_L}{V_L}$; despejando el volumen tenemos $V_L = \dfrac{m_L}{\rho_L}$,

por lo tanto $V_L = \dfrac{1[kg]}{720[kg/m^3]} = 1.3889\times10^{-3}m^3\left(\dfrac{10^3\ dm^3}{1\ m^3}\right) = 1.3889[dm^3]$,

como 1 $[dm^3]$ = 1 $[\ell]$, entonces $V_L = 1.3889[\ell]$.

d) La presión absoluta se puede calcular como $P_{abs} = P_{man} + P_{atm}$, por lo tanto será necesario calcular la presión atmosférica en [Pa] con ayuda de la altura barométrica proporcionada

$$P_{atm} = \rho_{Hg}\ g\,h_{bar} = \left(13600\left[\frac{kg}{m^3}\right]\right)\cdot\left(9.79\left[\frac{m}{s}\right]\right)(0.68[m]) = 90567.92[Pa]\ ,$$

la altura que ocupa el líquido se puede calcular con el volumen del mismo, es decir
$V_L = \pi\ r^2\ z = \frac{1}{4}\ \pi\ d^2\ z$, de esta expresión despejaremos la altura z:

$$z = \frac{4V_L}{\pi d^2} = \frac{4(1.3889\times10^{-3}[m^3])}{\pi(0.1[m])^2} = 0.1768[m],$$

sustituyendo este valor en el modelo matemático obtenido en el inciso anterior tenemos que la presión manométrica en el fondo del recipiente es

$$P_{man\ f} = \left(7048.8\left[\frac{Pa}{m}\right]\right)\cdot(0.1768[m]) + (16.096[Pa]) = 1262.3238[Pa]\ ;$$

teniendo la presión manométrica, podemos calcular la presión absoluta, es decir
$P_{abs\,f} = (1262.3238[Pa]) + 90537.92[Pa] = 91800.24[Pa]$.

5. Dentro de un tanque cilíndrico de 3.2 $[m^3]$, cerrado herméticamente se tienen dos fluidos: uno líquido y uno gaseoso. Se midió la presión absoluta (P) en función de la profundidad (z) dentro del líquido contenido en el tanque y se obtuvo la tabla que se muestra.

Sabiendo que la presión atmosférica del lugar es 77 000 [Pa], que la aceleración gravitatoria es 9.78 [m/s^2] y que la densidad del agua es 10^3[kg/m^3], determine, en el SI:

z [m]	P [kPa]
0.4	151.660
0.6	152.990

a) El modelo matemático que relaciona a la presión absoluta en función de la profundidad, es decir P = f(z).
b) La densidad relativa del líquido contenido en el tanque.
c) La presión manométrica del fluido gaseoso que está dentro del tanque.

Resolución:

a) El modelo matemático tiene la forma P = m z + b, cuya pendiente es $m = \dfrac{\Delta P}{\Delta z}$, por lo tanto la pendiente es $m = \dfrac{(152.99 - 151.66)10^3[\text{Pa}]}{(0.6-0.4)[\text{m}]} = \dfrac{1330[\text{Pa}]}{0.2[\text{m}]} = 6647\left[\dfrac{\text{Pa}}{\text{m}}\right]$, para calcular la ordenada al origen utilizaremos uno de los puntos de la tabla, es decir

$$b = P_2 - m\, z_2 = (152.990[\text{Pa}]) - \left(6647\left[\frac{\text{Pa}}{\text{m}}\right]\right)\cdot(0.6[\text{m}]) = 149\,001.8[\text{Pa}]\,,$$

entonces el modelo matemático es $P[\text{Pa}] = 6\,647\left[\dfrac{\text{Pa}}{\text{m}}\right]\cdot z[\text{m}] + 149\,001.8[\text{Pa}]$.

b) La pendiente del modelo matemático anterior es el módulo del vector peso específico, es decir

$m = |\,\vec{\gamma}\,|$, además $\gamma = \rho g$, por lo tanto $\rho = \dfrac{\gamma}{g} = \dfrac{6\,647\left[\dfrac{\text{N}}{\text{m}^3}\right]}{9.78\left[\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]} = 679.6524\left[\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$, para calcular la densidad relativa del líquido nos apoyaremos en la densidad del agua, es decir

$$\delta_L = \frac{\rho_L}{\rho_{agua}} = \frac{679.6524\left[\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]}{10^3\left[\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]};\quad \delta_L = 0.6797[1].$$

c) La ordenada al origen del modelo matemático del primer inciso representa la presión que se tiene cuando la profundidad es cero, es decir es la presión manométrica del fluido gaseoso, por lo tanto para calcular su presión absoluta tenemos que
$P_{abs} = P_{man} + P_{atm}$, entonces P_{man} = (149 001.8 [Pa]) – (77 000 [Pa]) = 72 001.8 [Pa].

6. En la figura se muestra un tanque de forma cilíndrica cuya altura es H y diámetro D, dentro de él se encuentran dos fluidos: un líquido y aire. En la parte superior tiene conectado un manómetro cuyo líquido manométrico es mercurio y su extremo derecho está abierto a la atmósfera. Se realizaron mediciones de presión absoluta (P_{abs}), en función de la profundidad (y) indicada dentro del líquido que está en el tanque y se obtuvo la tabla que se muestra. Determine en el SI:

a) El vector peso específico y la densidad relativa del líquido contenido en el tanque.

b) El modelo matemático lineal P = f (y), la presión absoluta en el punto A y en el punto B.

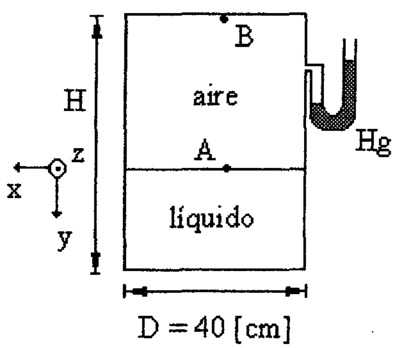
c) La altura (H) del tanque si se sabe que el volumen que ocupa el aire es 0.12 [m^3] y que la presión absoluta en el fondo del mismo es 105.304 [kPa]; emplee sus resultados experimentales.

Patm = 77 000 Pa

z [m]	P_{abs} [kPa]
0	101.3
0.15	102.29
0.3	103.31
0.45	104.29

$\rho_{agua} = 10^3$ [kg/m^3]

$g = 9.78\ \hat{j}$ [m/s^2]



Resolución:

a) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables tendrá la forma $P_{abs} = m\,y + b$; cuya pendiente es $m = \gamma$, además $m = \dfrac{\Delta P_{abs}}{\Delta y}$, por lo tanto

$$m = \frac{[(104.29-102.29)+(103.31-101.3)]10^3\,\text{Pa}}{[(0.45-0.15)+(0.3-0)]\text{m}} = \frac{4010}{0.6}[\text{Pa/m}] = 6\,683.3333[\text{Pa/m}],$$

$\vec{\gamma} = 6683.3333\ \hat{j}$ [N/m^3]; para calcular la densidad relativa se determinará la densidad del líquido, es decir

$\delta_L = \rho_L/\rho_a$, $\gamma_L = \rho_L g$, entonces $\rho_L = \delta_l/g$; $\delta_L = \delta_l/g\rho_a$, por lo tanto la densidad relativa es

$$\delta_L = \frac{6683.333[\text{N/m}^3]}{(9.78[\text{m/s}^2])(10^3)([\text{kg/m}^3])} = 0.6834\ [1]$$

b) Para determinar el modelo matemático hace falta la ordenada al origen, entonces

$b = \overline{P}_{abs} - m\,\overline{y}$, $\qquad \overline{P}_{abs} = 102797.5$ Pa , $\qquad \overline{y} = 0.225[m]$,

$b = (102\,797.5\ [Pa]) - (6683.333\ [N/m^3])(0.225\ [m]) = 101\,293.75[Pa]$, por lo tanto el modelo matemático solicitado es $\qquad P_{abs}[Pa] = 6\,683.333\ [Pa/m]\ y\ [m] + 101\,293.75\ [Pa]$;

entre el punto A y B existe un fluido gaseoso, por lo que la diferencia de presiones entre sus puntos es despreciable, es decir $P_A = P_B$, por lo tanto

$P_{absA} = P_{absB} = P_{aire} = b$; $\qquad P_{absA} = P_{absB} = 101\,293.75$ [Pa].

c) La altura del tanque está dada por $H = h_L + h_a$,

por otra parte la presión en el fondo del recipiente es $P_f = m\,h_L + b$; de donde podemos despejar la altura del líquido

$h_L = (P_f - b) / m$, $\quad h_L = \dfrac{(105304[Pa]) - (101293.75[Pa])}{6683.333[Pa/m]} = 0.6\ [m]$,

sabemos que el volumen que ocupa el aire está dado por $V_a = ¼(\pi\ D^2\ h_a)$; de donde podemos despejar la altura que ocupa este fluido $\quad h_a = \dfrac{4V_a}{\pi D^2} = \dfrac{4(0.12[m^3])}{\pi(0.4[m])^2} = 0.9549[m]$, con las alturas del líquido y del aire podemos calcular la del tanque $H = (0.6+0.9549)[m] = 1.555[m]$.

TEMA V

TERMODINÁMICA

1. En la gráfica se muestra la gráfica de la temperatura (T) alcanzada en función del calor suministrado (Q) a una sustancia cuya capacidad térmica específica es 138 [J/(kg·ΔK)] en su fase líquida. Sabiendo que las temperaturas de fusión y de ebullición corresponden a cambios de fase, determine para la sustancia:

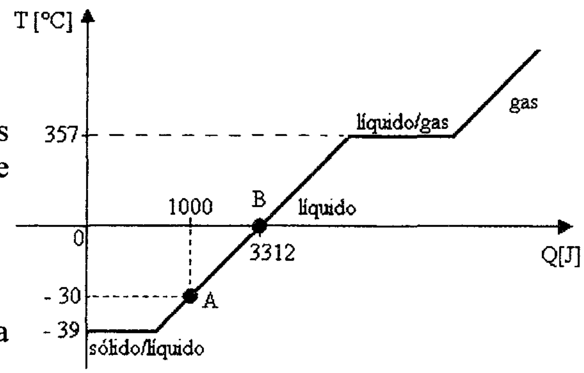
a) Su masa.

b) Su capacidad térmica.

c) Sus temperaturas de fusión y de ebullición.

d) La cantidad de calor necesaria para que la temperatura de la sustancia cambie desde su temperatura de fusión hasta la de ebullición.

e) La temperatura de equilibrio que alcanzaría al mezclarse con 120 [g] de agua a 20 [°C] si la sustancia estuviese a 0 [°C]. Considere $c_{agua} = 4\ 186$ [J/(kg·Δ°C)] y que la mezcla se realiza en un sistema aislado.



Resolución:

a) La cantidad de energía en forma de calor que es necesario proporcionar a una masa para que cambie su temperatura está dada por

$Q = mc\Delta T$; de donde $m = \dfrac{Q}{c(T_f - T_i)}$,

apoyándonos en los puntos A y B de la gráfica tenemos

$$m = \frac{(3312 - 1000)\ J}{(138\,\frac{J}{kg \cdot \Delta K})[0 - (-30)]\Delta°C} = 0.5585\ [kg].$$

b) La capacidad térmica de la sustancia está dada por

$C = mc$; por lo tanto $C = (0.5585\ kg)(138\ \dfrac{J}{kg \cdot \Delta°C})$; $C = 77.073 \left[\dfrac{J}{\Delta°C}\right]$.

c) La temperatura de fusión es aquella en la que la sustancia coexiste en fase sólida y gaseosa, por lo tanto, de acuerdo con la gráfica: $T_{fusión} = -39$ [°C] ; la temperatura de ebullición es aquella en la que coexiste en su fase líquida y gaseosa, por lo tanto consultando la gráfica podemos concluir que $T_{ebullición} = 357$ [°C].

d) La cantidad de calor necesaria está dada por $Q = mc\ (T_{eb} - T_{fus})$, por lo tanto, de acuerdo con la gráfica tenemos que $Q = (0.5585\ kg)(138\ \dfrac{J}{kg \cdot \Delta°C})[357\text{-}(\text{-}39)]°\Delta C = 30\ 520.9$ [J].

e) Aplicando la primera ley de la termodinámica para sistemas aislados tenemos que:

$Q_{agua} + Q_{sustancia} = 0$; lo que podemos abreviar como $Q_a + Q_s = 0$,

sabiendo que $Q = mc\Delta T = mc(T_f - T_i)$, podemos escribir

$m_a\, c_a\, (T_f - T_{ia}) + m_s\, c_s\, (T_f - T_{is}) = 0$, despejando la temperatura final (T_f) o de equilibrio, tenemos

$$T_f = \frac{m_a c_a T_{ia} + m_s c_s T_{is}}{m_a c_a + m_s c_s}\text{; por lo tanto}$$

$$T_f = \frac{(0.12\,\text{kg})(4186\,\frac{\text{J}}{\text{kg }\Delta°\text{C}})(20°\text{C}) + (0.5585\,\text{kg})(138\,\frac{\text{J}}{\text{kg }\Delta°\text{C}})(0°\text{C})}{(0.12\,\text{kg})(4186\,\frac{\text{J}}{\text{kg }\Delta°\text{C}}) + (0.5585\,\text{kg})(138\,\frac{\text{J}}{\text{kg }\Delta°\text{C}})} = 17.3395\ [°\text{C}].$$

2. En el laboratorio de Física Experimental se calentó agua y se obtuvo la gráfica de su temperatura (T) en función del calor (Q) suministrado. Sabiendo que la capacidad térmica específica del agua, (en su fase líquida) es 4 186 [J/(kg·ΔK)], determine:

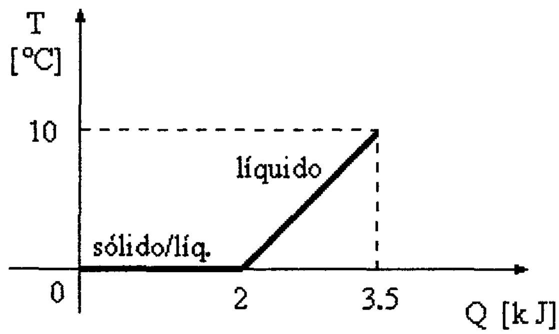
a) El modelo matemático que relaciona a la temperatura del agua líquida en función del calor suministrado, es decir T = f (Q).

b) La masa de agua empleada en el experimento. Exprese el resultado en gramos.

c) La temperatura de equilibrio si cuando el agua llegó a 10 [°C] se mezcló con 100 [g] de virutas de hierro que estaban a 23 [°C] en un calorímetro de capacidad térmica despreciable.

Considere
para el hierro:
c_{hierro} = 470 [J/(kg·Δ°C)]

para el agua:
c_{agua} = 4 186 [J/(kg·ΔK)]
$T_{fusión}$ = 0 [°C]
$T_{ebullición}$ = 92.5 [°C]



Resolución:

a) El modelo matemático tendrá la forma T = *m* Q + b, cuya pendiente es $m = \frac{\Delta T}{\Delta Q}$, entonces calculando la pendiente con los dos puntos de la gráfica tenemos que

$$m = \frac{(10-0)°\text{C}}{(3.5-2)10^3\ \text{J}} = \frac{10°\text{C}}{1500\ \text{J}} = 6.6667\times10^3\left[\frac{°\text{C}}{\text{J}}\right],$$

del modelo matemático podemos despejar la ordenada al origen b = T − *m* Q, sustituimos el valor de la pendiente y uno de los puntos que proporciona la gráfica en esta última expresión, es decir,

$$b = (0[°\text{C}]) - \left(6.6667\times10^3\left[\frac{°\text{C}}{\text{J}}\right]\right)\cdot(2000[\text{J}]) = -\,13.3333\ [°\text{C}],$$

entonces el modelo matemático solicitado es

$$T\ [°\text{C}] = 0.0066667\left[\frac{°\text{C}}{\text{J}}\right]Q[\text{J}] - 13.3333[°\text{C}].$$

b) Sabemos que la cantidad de calor proporcionada para que una masa modifique su temperatura está dada por $Q = mc(T - T_i)$, esto se puede escribir como

$Q = m\,c\,T - m\,c\,T_i$, de donde
$m\,c\,T = Q + m\,c\,T_i$, si de este modelo despejamos T, tenemos

$T = \dfrac{1}{m\,c}Q + T_i$; comparando esta última expresión con el modelo matemático obtenido en el primer inciso, tenemos que la pendiente es $m = \dfrac{1}{m\,c}$; entonces

$$m = \frac{1}{\left(0.006667\left[\frac{°C}{J}\right]\right)\left(4186\left[\frac{J}{kg \cdot \Delta °C}\right]\right)} = 0.035832[kg]\,.$$

c) Aplicando la primera ley de la termodinámica para sistemas aislados tenemos
$Q_{agua} + Q_{hierro} = 0$, lo que se puede abreviar como $Q_a + Q_h = 0$,
por otra parte $Q = m\,c\,(T_f - T_i)$ y $T_f = T_{final} = T_{equilibrio} = T_{eq}$, entonces
$m_a c_a (T_{eq} - T_{ia}) + m_h c_h (T_{eq} - T_{ih}) = 0$, despejando la temperatura de equilibrio se tiene
$T_{eq} = \dfrac{m_a c_a T_{ia} + m_h c_h T_{ih}}{m_a c_a + m_h c_h}$, es decir

$$T_{eq} = \frac{(0.0358[kg])\cdot\left(4186\left[\frac{J}{kg \cdot \Delta °C}\right]\right)\cdot(10[°C]) + (0.1[kg])\cdot\left(470\left[\frac{J}{kg \cdot \Delta °C}\right]\right)\cdot(23°C)}{(0.0358[kg])\cdot\left(4186\left[\frac{J}{kg \cdot \Delta °C}\right]\right) + (0.1[kg])\cdot\left(470\left[\frac{J}{kg \cdot \Delta °C}\right]\right)}$$

$T_{eq} = 13.1$ [°C].

3. Con el objeto de determinar de qué material está construido un calorímetro, cuya masa es de 300 [g], se vierten 504.9 [g] de agua en él, de tal manera que la temperatura del agua en el interior del recipiente es 15 [°C]. A continuación se pone en contacto con el agua una muestra de 560 [g], a 100 [°C], del mismo material con el que está construido el calorímetro. Se observa que la temperatura final del sistema es 22.5 [°C]. Considerando que el calorímetro es adiabático y que su temperatura inicial es la del agua, determine:

a) El material del calorímetro.

b) La capacidad térmica del calorímetro.

sustancia	c [cal/(g·Δ°C)]
aluminio	0.220
plomo	0.031
cobre	0.093
hierro	0.110
agua	1.0

Resolución:

a) Aplicando la primera ley de la termodinámica para sistemas aislados tenemos
$Q_{agua} + Q_{calorímetro} + Q_{muestra} = 0$, lo cual se puede escribir como $Q_a + Q_c + Q_m = 0$, dado que $Q = m\,c\,(T_f - T_i)$, entonces

$$m_a c_a (T_f - T_{ia}) + m_c c_c (T_f - T_{ic}) + m_m c_m (T_f - T_{im}) = 0,$$

como el calorímetro está construido con el mismo material de la muestra, es decir, como $c_c = c_m$, podemos escribir

$$m_a c_a (T_f - T_{ia}) + [m_c (T_f - T_{ic}) + m_m (T_f - T_{im})] \cdot c_m = 0,$$

de donde la capacidad térmica específica de la muestra está dada por

$$c_m = \frac{-m_a c_a (T_f - T_{ia})}{m_c (T_f - T_{ic}) + m_m (T_f - T_{im})}, \text{ entonces}$$

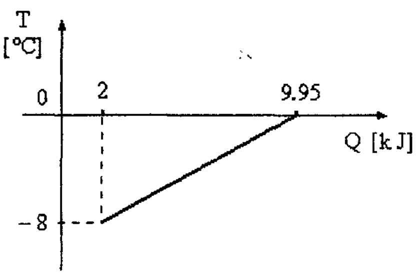
$$c_m = \frac{-(0.5049[\text{kg}]) \cdot \left(1\left[\frac{\text{cal}}{\text{g}\cdot\Delta°\text{C}}\right]\right) \cdot (22.5 - 15)[\Delta°\text{C}]}{(0.3[\text{kg}]) \cdot (22.5 - 15)[\Delta°\text{C}] + (0.56[\text{kg}]) \cdot (22.5 - 10)[\Delta°\text{C}]} = 0.092\left[\frac{\text{cal}}{\text{g}\cdot\Delta°\text{C}}\right];$$

consultado la tabla podemos concluir que el material del que está hecho el calorímetro es cobre.

b) La capacidad térmica o capacidad calorífica del calorímetro está dada por $C_{calorímetro} = C_c = c_c\, m_c$, esto es

$$C_c = \left(0.092\left[\frac{\text{cal}}{\text{g}\cdot\Delta°\text{C}}\right]\right) \cdot (300[\text{g}]) = 27.6069\left[\frac{\text{cal}}{\Delta°\text{C}}\right] \cdot \left(\frac{4.186[\text{J}]}{1\,[\text{cal}]}\right) = 115.5626\left[\frac{\text{J}}{\Delta°\text{C}}\right].$$

4. En la gráfica se presenta la temperatura (T) de una muestra en función del calor (Q) que se le suministró. Si la sustancia tenía una masa de 440 [g], determine:



a) El modelo matemático lineal de la gráfica.

b) La capacidad térmica específica de la muestra.

Resolución:

a) De acuerdo con la gráfica, el modelo matemático tendrá la forma T = *m* Q + b, cuya pendiente está dada por $\frac{\Delta T}{\Delta Q}$, entonces basándonos en los dos puntos que presenta la gráfica tenemos que

$$m = \frac{(0-(-8))\,[°\text{C}]}{(9.95-2)10^3\,[\text{J}]} = \frac{8\,[°\text{C}]}{7950\,[\text{J}]} = 0.001006\left[\frac{°\text{C}}{\text{J}}\right],$$ para calcular la ordenada al origen nos apoyaremos en uno de los puntos que nos proporciona la gráfica, es decir

$b = T_2 - m\, Q_2$,

$$b = (0[°\text{C}]) - \left(0.001006\left[\frac{°\text{C}}{\text{J}}\right]\right)(9950[\text{J}]) = -\,10.0126\,[°\text{C}],$$

por lo tanto el modelo matemático solicitado es $T\,[°\text{C}] = 0.001006\left[\frac{°\text{C}}{\text{J}}\right] Q[\text{J}] - 10.0126\,[°\text{C}]$.

b) Sabemos que la cantidad de calor, proporcionada a una masa, que modifica su temperatura, está dada por $Q = m\,c\,(T - T_i)$, lo cual se puede escribir como

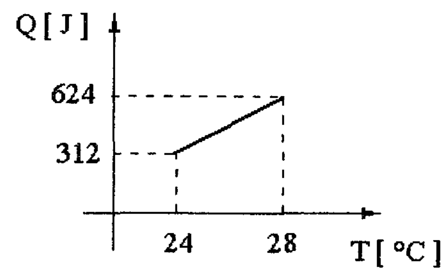
$Q = m\,c\,T - m\,c\,T_i$,

si de esta última expresión despejamos la variable T, tenemos $T\ \frac{1}{mc}Q + T_i$;

comparando este modelo con el obtenido en el primer inciso podemos concluir que la pendiente de la gráfica significa $m = \dfrac{1}{\text{m c}}$, entonces de esta última expresión podemos despejar la capacidad térmica específica de la muestra, es decir

$$\text{c} = 1 / (m\ \text{m});\ \text{c} = \frac{1}{\left(0.001006\left[\dfrac{°\text{C}}{\text{J}}\right]\right)\cdot(0.44[\text{kg}])} = 2\,259.1722\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\Delta°\text{C}}\right].$$

5. En un laboratorio se colocó una muestra de plomo de 600 [g] en un calorímetro. Se midió la energía en forma de calor (Q) que se le proporcionó al plomo y la temperatura (T) que alcanzó, obteniéndose la gráfica mostrada. Determine:



a) La capacidad térmica específica y la capacidad térmica del plomo utilizado.
b) La temperatura inicial que tenía la muestra.
c) La temperatura de equilibrio, si al llegar a 28 [°C] se mezcló el plomo con 100 [g] de agua líquida (c = 4 186 [J/(kg·ΔK)]) que estaba a 10 [°C], sin pérdidas de energía.
d) La cantidad de calor necesaria para que la mezcla del inciso anterior (agua y plomo, ambos a 28 [°C]) aumenten 5 [K], sin disipación de energía.

Resolución:

a) El modelo matemático de la gráfica tiene la forma Q = m T + b;
sabemos que el calor necesario para que una masa modifique su temperatura está dado por
Q = m c (T − T_i) = m c T − m c T_i, si comparamos esta última expresión con el modelo matemático de la gráfica podemos observar que la pendiente de la ecuación de dicha gráfica es m = m c, de donde la capacidad térmica específica es el cociente c = m / m, por lo tanto, obteniendo la pendiente podemos determinar la capacidad térmica específica del plomo; entonces

$$m = \frac{(6.24 - 312)\text{J}}{(28 - 24)°\text{C}} = \frac{312\ [\text{J}]}{4[\Delta°\text{C}]} = 78\left[\frac{\text{J}}{\Delta°\text{C}}\right].\ \text{entonces c} = \frac{78\left[\dfrac{\text{J}}{\Delta°\text{C}}\right]}{0.6\ \text{kg}} = 130\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\Delta°\text{C}}\right];$$

la capacidad térmica es el producto C = m c, por lo tanto es la pendiente de la gráfica, entonces

$$\text{C} = m;\quad \text{C} = 78\left[\frac{\text{J}}{\Delta°\text{C}}\right].$$

b) Para determinar la temperatura inicial de la muestra es necesario obtener la ecuación del modelo matemático de la gráfica, como ya tenemos el valor de la pendiente podemos apoyarnos en uno de los puntos que proporciona dicha gráfica, es decir

$$\text{b} = \text{Q} - m\ \text{T, entonces b} = (624\ [\text{J}]) - \left(78\left[\frac{\text{J}}{°\text{C}}\right]\right)(28\ [°\text{C}]) = -1\,560\ [\text{J}],$$

sabemos que Q = m c (T − T_i) = m c T − m c T_i, entonces si comparamos esta última expresión con la forma del modelo matemático de la gráfica, es decir con
Q = m T + b, podemos concluir que la ordenada al origen significa b = − m c T_i

de donde podemos despejar la temperatura inicial $T_i = b / (-m\,c)$, por lo tanto

$$T_i = \frac{-1560\,[J]}{-(0.6\,[kg])\cdot\left(130\left[\frac{J}{kg\cdot\Delta°C}\right]\right)} = 20\,[°C].$$

c) Aplicando la primera ley de la termodinámica para sistemas aislados, tenemos $Q_{plomo} + Q_{agua} = 0$, que se puede abreviar como $Q_p + Q_a = 0$,
como $Q = m\,c\,(T_f - T_i)$, podemos escribir $m_p c_p (T_{eq} - T_{ip}) + m_a c_a (T_{eq} - T_{ia}) = 0$,
de donde podemos despejar la temperatura de equilibrio:

$$T_{eq} = \frac{m_a c_a T_{ia} + m_p c_p T_{ip}}{m_a c_a + m_p c_p}$$, entonces

$$T_{eq} = \frac{(0.1\,[kg])\cdot\left(4\,186\left[\frac{J}{kg\cdot\Delta°C}\right]\right)\cdot(10\,[°C]) + (0.6\,[kg])\cdot\left(130\left[\frac{J}{kg\cdot\Delta°C}\right]\right)\cdot(28°C)}{(0.1\,[kg])\cdot\left(4\,186\left[\frac{J}{kg\cdot\Delta°C}\right]\right) + (0.6\,[kg])\cdot\left(130\left[\frac{J}{kg\cdot\Delta°C}\right]\right)}$$

$T_{eq} = 12.83$ [°C].

d) La cantidad total de calor necesaria será la suma de la cantidad que recibirá el agua más la que recibirá el plomo, es decir

$Q_n = Q_p + Q_a = (m_a c_a + m_p c_p)\Delta T$, por lo tanto

$$Q_n = \left[(0.1\,[kg])\cdot\left(4\,186\left[\frac{J}{kg\cdot\Delta°C}\right]\right) + (0.6\,[kg])\cdot\left(130\left[\frac{J}{kg\cdot\Delta°C}\right]\right)\right]\cdot(15\,\Delta K),$$

$Q_n = 2\,483$ [J].

6. Un resistor eléctrico disipa una potencia de 0.4 [kW] y aumenta la temperatura de 1.2 [ℓ] de agua líquida de 0 [°C] a 54 [°C] en el lapso de 15 minutos. Si la capacidad térmica específica del agua en su fase líquida es c = 1 [cal/(g·Δ°C)] y su densidad es $\rho = 10^3$[kg/m^3] determine, en el SI:

a) El calor que recibe el agua para aumentar su temperatura de 0 [°C] a 54 [°C].

b) La eficiencia del resistor si se sabe que ésta es el cociente del calor transmitido al agua entre la energía disipada total por el resistor.

Resolución:

a) La cantidad de calor que recibe el agua está dada por $Q_a = m\,c_{agua}\,\Delta T = m\,c_a\,\Delta T$,
pasaremos la capacidad térmica específica del agua al SI:

$$c_a = = 1\left[\frac{cal}{g\cdot\Delta°C}\right]\cdot\left(\frac{4.186\,[J]}{1\,[cal]}\right)\cdot\left(\frac{1\,000\,[g]}{1\,[kg]}\right)\cdot\left(\frac{1\,\Delta°C}{1\,\Delta K}\right) = 4\,186\left[\frac{J}{kg\cdot\Delta K}\right],$$

para calcular la masa de agua nos podemos apoyar en su volumen y en la densidad, esto es

$\rho = \frac{m}{V}$ de donde $m = \rho V = \left(10^3\left[\frac{kg}{m_3}\right]\right)\cdot\left(0.0012\,[m^3]\right) = 1.2\,[kg]$, entonces

$$Q_a = (1.2\ [\text{kg}])\cdot\left(4.186\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\Delta\text{K}}\right]\right)\cdot(\ 54-0\ )\ \Delta°\text{C} = 271\ 252.8\ [\text{J}].$$

b) De acuerdo con la información proporcionada en el ejercicio, la eficiencia está dada por $\eta = \dfrac{Q_a}{Q_{disip}}$, el numerador se obtuvo en el inciso anterior, para calcular el denominador nos apoyaremos en el cálculo de la potencia disipada, ya que $Q_{disip} = P_{disip}\,\Delta t$, entonces

$P_{disip} = 0.4[\text{kW}] = 400[\text{W}]$, por lo tanto $Q_{disip} = P_{disip}\,\Delta t = (400\ [\text{W}])\cdot(15\ [\text{min}])\cdot\left(\dfrac{60\ [\text{s}]}{1\ [\text{min}]}\right)$,

$Q_{disip} = 360\ 000$ [J], entonces la eficiencia es $\eta = \dfrac{Q_a}{Q_{disip}} = \dfrac{271\ 252.8\ [\text{J}]}{360000\ [\text{J}]} = 0.7535\ [1]$,

o expresada en términos porcentuales $\eta = 75.35$ [%].

7. En un calorímetro, cuya capacidad térmica es despreciable, se mezclaron las tres sustancias que se muestran en la tabla. Si la temperatura de equilibrio fue 291.15 [K] = 18 [°C], determine en el SI la capacidad térmica específica del cloruro de sodio.

sustancia	capacidad térmica específica [J/(kg·ΔK)]	temperatura inicial [°C]	masa [g]	temperatura de fusión [°C]	temperatura de ebullición [°C]
alcohol	1 908.82	0	250	– 117.3	78.5
agua	4 186	30	150	0	100
cloruro de sodio	c_C	22	300	801	1 450

Aplicando la primera ley de la termodinámica para sistemas aislados tenemos que
$Q_{alcohol} + Q_{agua} + Q_{cloruro\ de\ sodio} = 0$, expresión que se puede abreviar como
$Q_A + Q_B + Q_C = 0$, dado que $Q = m\,c\,(T_f - T_i)$, podemos escribir
$m_A c_A(T_f - T_{iA}) + m_B c_B(T_f - T_{iB}) + m_C c_C(T_f - T_{iC}) = 0$ de donde podemos despejar

$$c_C = \frac{-m_A c_A(T_f - T_{iA}) - m_B c_B(T_f - T_{iB})}{m_C(T_f - T_{iC})},$$ entonces

$$c_C = \frac{-(0.25\ [\text{kg}])\left(1\ 908.82\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\Delta\text{K}}\right]\right)(18-0)[°\text{C}] - (0.15\ [\text{kg}])\left(4\ 186\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\Delta\text{K}}\right]\right)(18-30)[°\text{C}]}{(0.3\ [\text{kg}])(18-22)[°\text{C}]},$$

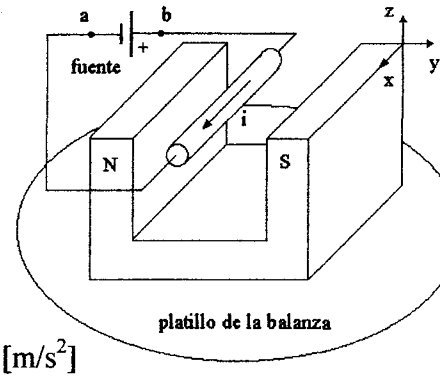
$$c_C = 879.075\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\Delta\text{K}}\right].$$

TEMA VI

ELECTROMAGNETISMO

1. Si por el conductor recto de longitud ℓ = 10 [cm], que se muestra en la figura, circula una corriente eléctrica de 5 [A] y está inmerso en un campo magnético uniforme de B = 150 [mT], determine en el SI:

a) La fuerza (magnitud y dirección) que experimenta el conductor recto.
b) La variación aparente de masa Δm que se detecta en el imán; indique si la balanza mide aumento o disminución de masa, justifique su respuesta.
c) La fuerza (magnitud y dirección) que experimentaría el conductor recto si el ángulo entre éste y el campo magnético fuese α = 30 [°] y se invirtiera la polaridad en la fuente.



$g = 9.78\ [m/s^2]$

Resolución:

a) La fuerza de origen magnético está dada por

$\vec{F} = i\vec{\ell} \times \vec{B}$; de acuerdo con la figura, el vector longitud es $\vec{\ell} = 0.1\ \hat{i}$ [m] y el vector campo magnético es $\vec{B} = 0.15\ \hat{j}$ [T] ; por lo tanto aplicando el producto cruz, tenemos que

$\vec{F} = (5\,A)[(0.1\ \hat{i}) \times (0.15\ \hat{j})]\ [T \cdot m]$; entonces $\vec{F} = 0.075\ \hat{k}$ [N].

b) De acuerdo con la segunda ley de Newton: $F = \Delta m \cdot g$; si de esta expresión despejamos la variación de masa, tenemos que $\Delta m = \frac{F}{g} = \frac{0.075\ N}{9.78\frac{m}{s^2}} = 7.6687 \times 10^3\,kg$, es decir

Δm = 0.0076687 [kg];

si la fuerza de origen magnético $\vec{F}_m$ en el conductor es $\vec{F} = 0.075\ \hat{k}$ [N], en el imán actuará una fuerza de la misma magnitud pero de sentido opuesto, es decir $\vec{F}_{imán} = -0.075\ \hat{k}$ [N], por lo que el platillo de la balanza se desplazará en dirección $(-\hat{k})$;

entonces podemos concluir que la balanza detectará un aumento aparente de masa del imán.

c) De la expresión $\vec{F} = i\vec{\ell} \times \vec{B}$ podemos escribir que la magnitud de dicha fuerza está dada por

$|\vec{F}| = i\,|\vec{\ell} \times \vec{B}|$, o bien $F = i\ \ell\ B\ \text{sen}\,\alpha = (5\ [A])(0.1\ [m])(0.15\ [T])\ \text{sen}\ 30° = 0.0375\ [N]$, como no hemos invertido los polos del imán, tenemos que $\vec{B} = B(\hat{j})$,

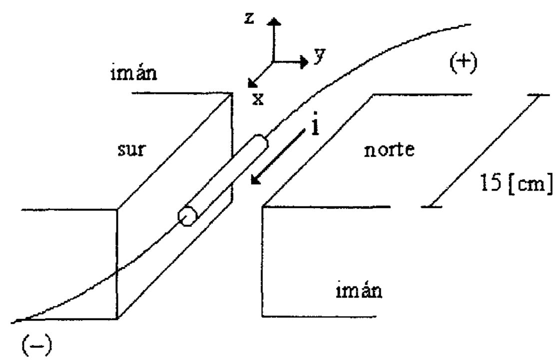
sin embargo al invertir la polaridad en la fuente la corriente eléctrica cambia de sentido por lo que el vector longitud sería $\vec{\ell} = \ell\ (-\hat{i})$; entonces al hacer el producto vectorial $\vec{F} = i\,\vec{\ell} \times \vec{B}$,

la dirección el vector fuerza de origen magnético tendrá la dirección $\vec{F} = F\ (-\hat{k})$,

por lo que $\vec{F} = -0.0375\ \hat{k}$ [N].

2. En un experimento de fuerza de origen magnético se colocó un conductor de 8 [cm] de longitud que transportaba una corriente (i) dentro de una región de campo magnético generada por un par de imanes; dicho conductor estaba colocado perpendicularmente a las líneas de campo magnético, como se muestra en la figura. Utilizando el método de mínimos cuadrados se obtuvo el modelo matemático que se muestra, con base en ello, determine en el SI:

$$F\ [\text{mN}] = 7.52 \left[\frac{\text{mN}}{\text{A}}\right] i\ [\text{A}] + 0.9\ [\text{mN}]$$



a) La corriente eléctrica que circularía en el conductor si la fuerza magnética que se tuviera en éste fuese 0.017 [N] y la expresión dimensional de cada constante del modelo matemático mostrado.

b) El vector (magnitud y dirección) campo magnético en el que estaba inmerso el conductor.

c) La energía que disipó el conductor si estuvo conectado 5 minutos y recibió una potencia de 24.2 [W].

Resolución:

a) El modelo matemático proporcionado tiene la forma F = m i + b del cual podemos despejar la corriente eléctrica, esto es i = (F – b) / m, por lo tanto

$$i = \frac{(17\ [\text{mN}]) - (0.9\ [\text{mN}])}{7.52 \left[\frac{\text{mN}}{\text{A}}\right]} = 2.141\ [\text{A}];$$

la expresión dimensional, en el SI, de la pendiente es $[m] = L\ M\ T^{-2}\ I^{-1}$, y la de la ordenada al origen es $[b] = L\ M\ T^{-2}$.

b) La magnitud de la fuerza de origen magnético está dada por $F = i\ \ell\ B\ \text{sen}\,\alpha$, si comparamos esta última expresión con el modelo matemático proporcionado en el ejercicio, tenemos que la pendiente de dicho modelo es $m = \ell\ B\ \text{sen}\ \alpha$, observando la figura podemos decir que $\alpha = 90°$, por lo que $m = \ell\ B$, si despejamos la magnitud del campo magnético, tenemos

$$B = (m/\ell) = \frac{0.00752\left[\frac{N}{A}\right]}{0.08\,[m]} = 0.097\,[T]$$, en la figura también se observa que el vector campo magnético es paralelo al eje "y" y va en el sentido negativo de dicho eje, por lo tanto el vector referido se puede escribir como $\vec{B} = -0.094\ \hat{j}\ [T]$.

c) La energía es el producto de $E = P\,(\Delta t)$, por lo tanto $E = (24.2\,[W])\cdot(300\,[s])$, entonces $E = 7260\,[J]$.

3. En un experimento de fuerza de origen magnético se varió el ángulo (φ) que formaba un conductor de 58 [mm] de longitud con las líneas de campo magnético (B) que producía un imán y se obtuvo la tabla que se muestra. Sabiendo que la corriente en el conductor era 3.2 [A] y que su resistencia era 2.4 [Ω], determine en el SI:

F [mN]	18.19	12.86
φ [rad]	π/2	π/4

a) La magnitud del campo magnético generado por el imán.
b) La diferencia de potencial aplicada al conductor y su expresión dimensional.

Resolución:

a) La relación entre las variables "F" y "φ" no es lineal, por lo tanto es necesario hacer un cambio de variable, de esta manera las variables a considerar serían "F" y "sen φ", por lo tanto

F[N]	0.01819	0.01286
senφ [1]	1	0.7071

A partir de los puntos de la tabla anterior, el modelo matemático tendrá la forma $F = m$ sen φ, cuya pendiente es $m = \frac{\Delta F}{\Delta \text{sen}\varphi}$, por lo tanto $m = \frac{(0.01819 - 0.01286)\,[N]}{(1 - 0.7071)[1]} = 0.018197\,[N]$;

si comparamos el modelo matemático experimental $F = m$ sen φ,
con el modelo teórico $F = i\,\ell\,B$ sen φ, podemos concluir que la pendiente significa
$m = i\,\ell\,B$, de donde podemos despejar la magnitud del campo magnético del imán, es decir
$B = m / (i\,\ell)$, entonces $B = \frac{0.018197\,[N]}{(3.2\,[A])\cdot(0.058\,[m])} = 0.098\,[T]$.

b) La diferencia de potencial aplicada al conductor está dada por
$V_{ab} = R\,i = (2.4\,[\Omega])\cdot(3.2\,[A]) = 7.68\,[V]$; sabiendo que la diferencia de potencial es el trabajo en cada unidad de carga eléctrica, podemos escribir que $[V_{ab}] = \left[\frac{W}{q}\right]$, como el trabajo se puede calcular como el producto del trabajo por la distancia y la carga eléctrica corriente eléctrica por tiempo, podemos establecer que

$$[V_{ab}] = \left[\frac{F \cdot d}{i \cdot t}\right] = \frac{M \cdot L^2\ T^{-2}}{I \cdot T}, \quad [V_{ab}] = \frac{M \cdot L^2}{I \cdot T^{-3}} = M\ L^2\ T^{-3}\ I^{-1}.$$

4. En un laboratorio se realizaron mediciones de fuerzas magnéticas sobre un conductor al variar su corriente eléctrica y se obtuvo la tabla que se muestra. El campo magnético que rodeaba al conductor, de 24 [cm], era de 0.2 [T] y la aceleración gravitatoria del lugar era 9.78 [m/s^2]. Determine, en el SI:

i [A]	F [mN]
1	38
2	70
3	103

a) El modelo matemático lineal que relaciona a la fuerza magnética en función de la corriente eléctrica. Utilice el método de mínimos cuadrados.

b) El ángulo que formaba el conductor con las líneas de campo magnético.

Resolución:

a) El modelo matemático lineal tendrá la forma F = m i + b, donde $m = \frac{\Delta F}{\Delta i}$, de acuerdo con la tabla, se tienen 3 puntos experimentales, n = 3, como emplearemos el método de mínimos cuadrados, será necesario elaborar la tabla siguiente:

i[A]	F[N]	i F[A·N]	$i^2[A^2]$
1	0.038	0.038	1
2	0.070	0.14	4
3	0.103	0.309	9
$\sum i = 6$	$\sum F = 0.211$	$\sum i\ F = 0.487$	$\sum i^2 = 14$

de acuerdo con las expresiones del método de mínimos cuadrados que se encuentran en el apéndice de este Cuaderno de Ejercicios, la pendiente es

$$m = \frac{(3)\cdot(0.487)-(6)\cdot(0.211)}{(3)\cdot(14)-(16)^2}\left[\frac{N}{A}\right] = \frac{0.195}{6}\left[\frac{N}{A}\right] = 0.0325\left[\frac{N}{A}\right]$$

y la ordenada al origen es

$$b = \frac{(0.211)\cdot(14)-(0.487)\cdot(6)}{(3)\cdot(14)-(16)^2}[N] = \frac{0.032}{6}[N] = 0.005333\,[N],$$

por lo tanto el modelo matemático es $F\,[N] = 0.0325\left[\frac{N}{A}\right]\cdot i\,[A] + 0.005333\,[N]$.

b) Sabemos que la fuerza de origen magnético está dada por F = i ℓ B sen ϕ, si comparamos esta última expresión con el modelo matemático obtenido en el inciso anterior, podemos concluir que la pendiente es $m = \ell$ B sen ϕ, de donde podemos despejar el ángulo ϕ, es decir

$$\phi = \text{ang sen}\left(\frac{m}{\ell B}\right), \text{entonces } \phi = \text{ang sen}\left[\frac{0.0325}{(0.24)(0.2)}\right] = 0.7438\,[\text{rad}].$$

5. En un experimento de electromagnetismo se colocó un conductor de 5 [cm] de longitud, dentro del campo magnético generado por un imán de herradura. La corriente que circuló en dicho conductor fue 10 [A], se varió el ángulo (θ) que el conductor formaba con las líneas de campo y se midió la fuerza magnética (F) en el citado conductor. Determine, en el SI:

F [cN]	10.54	15.46
θ [°]	11	17

a) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento. Considere que la variable dependiente fue la fuerza magnética y que la ordenada al origen es despreciable.

b) La magnitud del campo magnético del imán de herradura.

Resolución:

a) La relación entre las variables "F" y "θ" no es lineal, por lo tanto es necesario realizar un cambio de variable, entonces tenemos

F [N] $\cdot 10^{-2}$	10.54	15.460
sen θ [1]	0.1908	0.2924

El modelo matemático tendrá la forma F = m sen θ + b, sin embargo como la ordenada al origen es despreciable, entonces será F = m sen θ, cuya pendiente es

$$m = \frac{\Delta F}{\Delta \operatorname{sen}\theta} = \frac{(15.46-10.54)10^{-2}[\mathrm{N}]}{(0.2924-0.1908)} = \frac{0.0492\,[\mathrm{N}]}{0.1016} = 0.4843\,[\mathrm{N}],$$

el modelo solicitado es $\quad F\,[\mathrm{N}] = 0.4843\,[\mathrm{N}] \operatorname{sen}\theta\,[1]$.

b) Sabemos que la fuerza de origen magnético está dada por F = i ℓ B sen θ, si comparamos esta última expresión con el modelo matemático experimental obtenido en el inciso anterior, podemos concluir que su pendiente es m = i ℓ B, de donde podemos despejar la magnitud del campo magnético del imán de herradura, es decir

$$B = \frac{m}{i\cdot\ell} = \frac{(0.4843\,[\mathrm{N}])}{(10\,[\mathrm{A}])\cdot(0.05\,[\mathrm{m}])} = 0.9685\,[\mathrm{T}].$$

6. En un experimento de fuerza de origen magnético se emplearon varios conductores con una corriente eléctrica de 2.9 [A] inmersos dentro de un campo magnético de 98 [mT]. Se varió la longitud (ℓ) de los conductores, se midió la fuerza magnética (F) en cada uno de ellos y se obtuvo la tabla que se muestra. Con base en ello, determine el ángulo que formaba el conductor con las líneas de campo magnético, utilice el método de mínimos cuadrados.

ℓ [cm]	F [mN]
2	6.8
4	11.7
6	16.6

El modelo matemático lineal tendrá la forma F = m ℓ + b, si comparamos este modelo con el modelo matemático teórico F = i ℓ B senα , entonces la pendiente m será el producto

m = i B sen α; para obtener la pendiente utilizaremos el método de mínimos cuadrados por lo que es necesario elaborar la tabla siguiente:

ℓ [m]	F [N]	$\ell \cdot$ F [m·N]	ℓ^2 [m^2]
0.02	0.0068	0.000136	0.0004
0.04	0.0117	0.000468	0.0016
0.06	0.0166	0.000996	0.0036
$\sum \ell = 0.12$	$\sum F = 0.0351$	$\sum \ell \cdot F = 0.0016$	$\sum \ell^2 = 0.0056$

entonces, la pendiente es

$$m = \frac{(3)(0.0016\,[\mathrm{m \cdot N}]) - (0.12\,[\mathrm{m}])(0.0351\,[\mathrm{N}])}{(3)(0.0056\,[\mathrm{m^2}]) - (0.12\,[\mathrm{m}])^2} = \frac{0.000588\,[\mathrm{N}]}{0.0024\,[\mathrm{m}]} = 0.245\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$$

del significado físico de la pendiente, es decir de $m = \mathrm{i\,B}$ sen α, podemos despejar el seno del ángulo α, esto es

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{m}{\mathrm{i\,B}}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\left(0.245\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]\right)}{(2.9\,[\mathrm{A}])(0.098\,[\mathrm{T}])} = 0.8621,$$

de donde $\alpha = \operatorname{ang\,sen}(0.8621) = 59.55[°]$.

5. En un experimento de fuerza de origen magnético, realizado en el Laboratorio de Física Experimental, se hizo circular en un conductor 0.8 [A] de corriente eléctrica, dicho conductor estaba inmerso en un campo magnético dado por $\vec{B} = (45\,\hat{j} - 74\hat{k})$[mT]. Si la longitud del conductor se puede expresar como $\vec{\ell} = (-0.05\hat{i} + 0.06\hat{j})$ [m], determine, en el SI:

a) El vector fuerza de origen magnético sobre el conductor.

b) El ángulo que se formó entre el conductor y el campo magnético.

Resolución:

a) La fuerza de origen magnético en un conductor está dada por $\vec{F} = \mathrm{i}\vec{\ell} \times \vec{B}$, entonces haciendo el producto vectorial tenemos

$\vec{F}$=(0.8[A]) $[(-0.05\hat{i} + 0.06\hat{j}) \times (45\hat{j} - 74\hat{k})]10^{-3}$[m · T],

$$\vec{F} = (0.8)\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -0.05 & +0.06 & 0 \\ 0 & 45 & -74 \end{vmatrix} 10^{-3}[\mathrm{N}],$$

$\vec{F} = (0.8)(10^3)\,[(\hat{i})(0.06)(-74) - (\hat{j})(-0.05)(-74) + (\hat{k})(-0.05)(45)]$[N],

$\vec{F} = (0.8)(10^3)\,[(-4.44\,\hat{i}) - (3.7\hat{j}) + (-2.25\hat{k})]$ [N], entonces el vector fuerza es

$\vec{F} = (-0.00355\,\hat{i} - 0.00296\hat{j} - 0.0018\hat{k})$][N]

b) El módulo del vector fuerza está dado por $|\vec{F}| = \mathrm{i}\,|\vec{\ell} \times \vec{B}|$, es decir $|\vec{F}| = \mathrm{i}\,|\vec{\ell}|\,|\vec{B}|\operatorname{sen}\alpha$, donde α es el ángulo entre el conductor y las líneas de campo magnético; para encontrar el valor de este ángulo, determinaremos los módulos de los vectores involucrados

$|\vec{F}| = \sqrt{(-0.00355)^2 + (-0.00296)^2 + (-0.0018)^2}$ [N] = 4.9603×10^{-3} [N],

$\left|\vec{\ell}\right| = \sqrt{(-0.05)^2 + (0.06)^2}$ [m] = 7.8102 × 10^{-2} [m],

$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{(0.045)^2 + (-0.074)^2}$ [T] = 8.6608 × 10^{-2} [T],

entonces $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{F}{i\ell B} = \dfrac{(4.9603\text{x}10^{-3}[\text{N}])}{(0.8[\text{A}])(7.8102\text{x}10^{-2}[\text{m}])(8.6608\text{x}10^{-2}[\text{T}])} = 0.9166,$

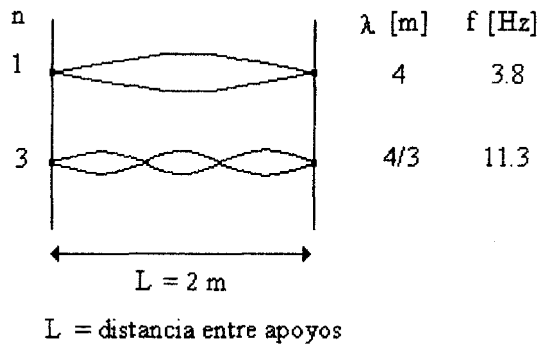
por lo tanto α = ang sen (0.9166) = 66.4394 [°].

TEMA VII

ONDAS

1. Un alumno generó varios patrones de ondas estacionarias en el laboratorio de Física Experimental. La distancia entre apoyos que utilizó era 2 [m]. Varió la longitud de onda (λ) y midió la frecuencia (f) correspondiente, parte de las mediciones se muestran en la figura. Sabiendo que la longitud de onda fue la variable independiente, determine en el SI:

a) La rapidez de propagación de la onda.
b) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento.
c) La densidad lineal de la cuerda si la tensión que se le aplicó fue 2.4 [N].
d) El porcentaje de error de exactitud si la rapidez teórica de la onda era 18 [m/s].



Resolución:

a) Las variables del experimento longitud de onda (λ) y frecuencia (f) no guardan una relación lineal, por lo tanto será necesario hacer un cambio de variable. Se propone un modelo matemático lineal que relacione al periodo (τ) en función de la longitud de onda (λ), entonces las variables involucradas serían las de la tabla que se muestra a continuación, recordando que el periodo es el recíproco de la frecuencia:

λ [m]	τ [s]
4	0.2632
4/3	0.0885

Sabemos que la rapidez de propagación de una onda se puede calcular como v = f λ, lo que se puede escribir como $v = \frac{\lambda}{\tau}$, de esta última expresión podemos despejar el periodo, es decir

$\tau = \frac{\lambda}{v}$, o bien $\tau = \left(\frac{1}{v}\right)\lambda$, si comparamos esto último con el modelo matemático propuesto al principio de este inciso, es decir con $\tau = m\,\lambda + b$, podemos concluir que la pendiente es

$m = \left(\frac{1}{v}\right)$, por lo tanto para obtener la rapidez de propagación de la onda obtendremos la pendiente:

$$m = \frac{\Delta\tau}{\Delta\lambda} = \frac{(0.0885 - 0.2632)\ [s]}{(4/3\ - 4)\ [m]} = \frac{-0.1747\ [s]}{-2.6667\ [m]} = 0.0655\left[\frac{s}{m}\right]$$

, con esta pendiente podemos determinar la rapidez, esto es:

$$v = \frac{1}{0.0655\left[\frac{s}{m}\right]},\ v = 15.2643\left[\frac{m}{s}\right].$$

b) Determinaremos la ordenada al origen con la pendiente obtenida en el inciso anterior y uno de los puntos experimentales que se tienen, es decir:
$b = \tau_1 - m\,\lambda_1 = (0.2632\ [s]) - (0.0655\ [s/m])(4\ [m]) = 0.0012\ [s]$, entonces el modelo es
$\tau\ [s] = 0.0655\left[\frac{s}{m}\right]\lambda\ [m] + 0.0012\ [s]$.

c) Sabemos que la rapidez de propagación, en una onda mecánica transversal, está dada por
$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$; de donde $\mu = \frac{T}{v^2}$, entonces $\mu = \frac{2.4\ N}{\left(15.2643\left[\frac{m}{s}\right]\right)^2} = 0.0103\left[\frac{kg}{m}\right]$.

d) El porcentaje de error de exactitud esta dado por
$\%EE = \left|\frac{v_{teórica} - v_{experimental}}{v_{teórica}}\right| \times 100\%$, entonces $\%EE = \left|\frac{(18 - 15.2643)}{18}\right| \times 100\% = 15.1983\ \%$.

2. En un experimento de ondas estacionarias y modos de vibración en una cuerda tensa, en el Laboratorio de Física Experimental, se obtuvieron las lecturas de longitud de onda (λ) y frecuencia (f) que se muestran; la aceleración gravitatoria del lugar era 9.78 [m/s^2]. Con base en ello, determine:

n [1]	λ [m]	f [mHz]
3	2.0	29 900
5	1.2	51 500

a) La rapidez de propagación de la onda, a partir del modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento.
b) La masa que se utilizó para tensar la cuerda si la densidad lineal de esta última era 0.0003 [kg/m].
c) La longitud de la cuerda si su masa era de 0.84 [g], exprese el resultado en el sistema c.g.s. gravitatorio, es decir en [cm].

Resolución:

a) Las variables longitud de onda "λ" y frecuencia "f" no guardan una relación lineal, por lo tanto es necesario realizar un cambio de variable, se propone utilizar el periodo, que es el recíproco de la frecuencia; entonces los valores a considerar para el modelo matemático serán

λ[m]	2.0	1.2
τ[s]	0.0334	0.0194

El modelo matemático tendrá la forma $\tau = m\,\lambda + b$, cuya pendiente es $m = \frac{\Delta\tau}{\Delta\lambda}$,

por lo tanto $m = \frac{(0.0194 - 0.0334)\,[s]}{(1.2 - 2)\,[m]} = 0.0175\left[\frac{s}{m}\right]$,

el significado físico de la pendiente de este modelo matemático es $m = \frac{1}{v}$, entonces

$$v = \frac{1}{0.0175\left[\frac{s}{m}\right]} = 57.1429\left[\frac{m}{s}\right].$$

b) Sabemos que la rapidez de propagación en una onda mecánica y transversal está dada por $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, de donde la tensión aplicada a la cuerda se puede calcular como $T = \mu v^2$, por otra parte la tensión es $T = m_P \cdot g$, igualando estas últimas dos expresiones tenemos $m_P \cdot g = \mu v^2$, de donde podemos despejar la masa que se utilizó para tensar a la cuerda, es decir

$$m_p = \frac{\mu v^2}{g}, \text{ entonces } m_p = \frac{\left(0.0003\left[\frac{kg}{m}\right]\right)\cdot\left(57.1429\left[\frac{m}{s}\right]\right)^2}{9.78\left[\frac{m}{s^2}\right]} = 0.1002\,[kg].$$

c) La densidad lineal de la cuerda está dada por $\mu = \frac{m_c}{\ell_c}$ de donde podemos despejar la longitud de dicha cuerda, es decir

$$\ell_c = \frac{m_c}{\mu} = \frac{(0.00084\,[kg])}{0.0003\left[\frac{kg}{m}\right]} = 2.8\,[m] = 280\,[cm].$$

3. En un experimento de ondas se tensó una cuerda y se generaron varios patrones de ondas estacionarias con ella; se midieron la longitud de onda y la frecuencia que se muestran en la tabla. Con base en ello, determine en el SI:

frecuencia [Hz]	14	28	42	56
longitud de onda [cm]	33.6	16.81	11.21	8.4

a) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento. Considere que la ordenada al origen es despreciable y que la variable independiente fue la frecuencia.
b) La rapidez de propagación de la onda y su expresión dimensional.
c) La longitud de la cuerda utilizada si su masa es 80 [g] y la tensión que se le aplicó fue 3 [N].

Resolución:

a) La relación entre las variables de la tabla no es lineal, por lo tanto es necesario realizar un cambio de variable, sacaremos el recíproco de la frecuencia, es decir el periodo, por lo tanto los valores a considerar para determinar el modelo matemático serán:

τ [s]	λ [m]
0.0714	0.336
0.0357	0.1681
0.0238	0.1121
0.0179	0.084

El modelo matemático tendrá la forma $\lambda = m\,\tau + b$, cuya pendiente es $m = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\tau}$, por lo tanto

$$m=\frac{[(0.336-0.1121)+(0.1681-0.084)]\ [\mathrm{m}]}{[(0.0714-0.0238)+(0.0357-0.0179)]\ [\mathrm{s}]}=\frac{0.308\ [\mathrm{m}]}{0.0654\ [\mathrm{s}]}=4.7095\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right],$$

entonces el modelo matemático lineal es $\lambda\ [\mathrm{m}]=4.7095\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]\tau\ [\mathrm{s}]$.

b) La pendiente de este modelo es m = v, por lo tanto la rapidez de propagación de la onda es $\mathrm{v}=4.7095\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$ y su expresión dimensional es $[\mathrm{v}]=\mathrm{L\,T}^{-1}$.

c) La rapidez de propagación está dada por $\mathrm{v}=\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\mu}}$; de donde $\mathrm{v}^2=\frac{\mathrm{T}}{\mu}=\frac{\mathrm{T}}{\left(\frac{\mathrm{m_c}}{\ell_c}\right)}=\frac{\mathrm{T}\,\ell_c}{\mathrm{m_c}}$,

de esta última expresión podemos despejar la longitud de la cuerda, es decir

$$\ell_c=\frac{\mathrm{v}^2\,\mathrm{m_c}}{\mathrm{T}}=\frac{\left(4.7095\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]\right)^2\cdot(0.08\ [\mathrm{kg}])}{3\ [\mathrm{N}]}=0.5915\ [\mathrm{m}].$$

4. En un experimento de ondas en una cuerda tensa, se varió la frecuencia (f) y se midió la longitud de onda (λ) correspondiente. Se obtuvo el modelo matemático siguiente:

$$\tau\ [\mathrm{s}]=0.004\ [\mathrm{s}]+0.0253\ [\mathrm{s/m}]\ \lambda\ [\mathrm{m}]$$

Determine:

a) La tensión aplicada a la cuerda si su densidad lineal era 1.658 [g/m]. Exprese el resultado en el sistema c.g.s. absoluto, es decir en [dinas]. Considere que 10^5 [dinas] = 1 [N].

b) La frecuencia (valor experimental) de la onda que se tendría si su distancia de cresta a cresta fuese 1 [ft] = 0.3048 [m].

Resolución:

a) El modelo matemático proporcionado tiene la forma $\tau=\mathrm{b}+m\,\lambda$, cuya pendiente es $m=\mathrm{v}^{-1}$, por lo tanto $\mathrm{v}=\left(0.0253\left[\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}\right]\right)^{-1}=39.5257\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$,

también sabemos que $\mathrm{v}=\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\mu}}$; de donde $\mathrm{v}^2=\frac{\mathrm{T}}{\mu}$, despejando de esta última expresión la tensión aplicada a la cuerda podemos escribir $\mathrm{T}=\mathrm{v}^2\,\mu$, por lo tanto

$$\mathrm{T}=\left(39.5257\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]\right)^2\cdot\left(0.001658\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\right]\right)=5.5903\ [\mathrm{N}]\cdot\left(\frac{10^5\ [\mathrm{dinas}]}{1\ [\mathrm{N}]}\right),$$

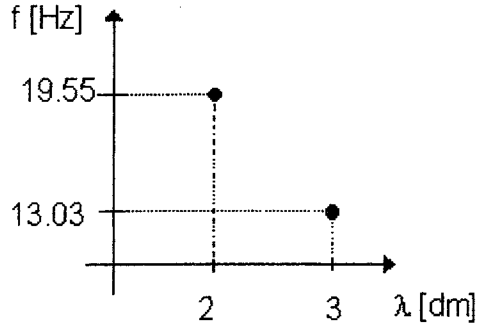
T = 259 026.07 [dinas].

b) La distancia de cresta a cresta es la longitud de onda, por lo tanto λ = 0.3048 [m], a partir del modelo matemático podemos determinar el periodo correspondiente a esa longitud de onda, esto es

$\tau[\mathrm{s}]=0.004[\mathrm{s}]+0.0253[\mathrm{s/m}]\cdot(0.3048[\mathrm{m}])=0.0117\ [\mathrm{s}]$, entonces

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0.0117\,[\text{s}]} = 85.3866\,[\text{Hz}].$$

5. En un experimento de movimiento ondulatorio se generaron varias ondas en una cuerda tensa; se midió la frecuencia (f) de dichas ondas para algunas longitudes de onda (λ) y se obtuvo la gráfica que se muestra. Sabiendo que la aceleración gravitatoria del lugar era 9.78 [m/s^2] y que 2.5 [m] de la cuerda utilizada tenían una masa de 400 [g], determine, en gramos, el valor de la masa utilizada para tensar la cuerda y observar el movimiento ondulatorio.



Resolución:

La relación entre las variables de la gráfica no es lineal, por lo tanto es necesario realizar un cambio de variable, entonces tenemos que las variables serán las que se muestran en la tabla siguiente:

$\lambda\,[\text{m}]$	$\tau\,[\text{s}]$
0.2	0.051151
0.3	0.076746

El modelo matemático lineal que relaciona a la longitud de onda en función del periodo tiene la forma $\lambda = m\,\tau + b$, cuya pendiente es $m = \dfrac{\Delta\,\tau}{\Delta\,\lambda}$, esto es

$$m = \frac{(0.0767 - 0.0512)\,[\text{s}]}{(0.3 - 0.2)\,[\text{m}]} = \frac{0.0255\,[\text{s}]}{0.1\,[\text{m}]} = 0.255\left[\frac{\text{s}}{\text{m}}\right]$$

, el significado físico de la pendiente de dicho modelo es $m = v^{-1}$, por lo tanto $v = m^{-1}$, entonces $v = \left(0.255\left[\dfrac{\text{s}}{\text{m}}\right]\right)^{-1} = 3.9216\left[\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right]$;

sabemos, también que la rapidez de propagación está dada por $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$, de donde $v^2 = \dfrac{T}{\mu}$, despejando la tensión tenemos que $T = v^2\,\mu$ y como la tensión es también el producto $T = m_P\,g$, podemos escribir $m_P\,g = v^2\,\mu$, de esta última expresión podemos despejar la masa utilizada para tensar la cuerda, es decir

$$m_P = \frac{v^2\mu}{g} = \frac{v^2\left(\dfrac{m_c}{\ell_c}\right)}{g} = \frac{v^2 m_c}{g\,\ell_c}, \text{ por lo tanto}$$

$$m_P = \frac{\left(3.9216\left[\frac{m}{s}\right]\right)^2 \cdot (0.4\,[kg])}{(2.5\,[m])\cdot\left(9.78\left[\frac{m}{s^2}\right]\right)} = 0.2516\,[kg]\left(\frac{1000\,[g]}{1\,[kg]}\right) = 251.5983\,[g].$$

6. Se generaron varios patrones de ondas en una cuerda tensa; se midieron las longitudes de onda (λ), las frecuencias (f) correspondientes y se obtuvo la tabla que se muestra. Sabiendo que los patrones de onda que se generaron son de tipo senoidal de la forma
$y(x,t) = A\,sen(\omega t - kx)$, determine en el SI:

λ [m]	0.4	0.5	0.6
f [Hz]	56	44	37

a) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento; considere que la variable independiente fue la longitud de onda y que la ordenada al origen es despreciable.

b) La rapidez de las ondas, basándose en el modelo del inciso anterior.

c) La ecuación de onda para una perturbación cuya amplitud es 0.05 [m], frecuencia 65/(2π) [Hz] y longitud de onda (2π)/28 [m].

Resolución:

a) Como la relación entre las variables frecuencia y longitud de onda no es lineal, será necesario hacer un cambio de variable; lo adecuado entonces será trabajar con las variables longitud de onda y periodo. El modelo matemático lineal tendrá la forma $\tau = m\,\lambda$, cuya pendiente es $m = \Delta\tau \,/\, \lambda\Delta$; para determinar el modelo matemático utilizando el método de pares de puntos es necesario elaborar la tabla siguiente:

λ[m]	τ[s]	$\lambda \cdot \tau$ [m·s]	λ^2[m^2]
0.4	0.0179	0.00716	0.16
0.5	0.0227	0.01135	0.25
0.6	0.0270	0.01620	0.36
$\Sigma\lambda$=1.5	$\Sigma\tau$=0.0676	$\Sigma\lambda\cdot\tau$=0.03471	$\Sigma\lambda^2$=0.77

A partir de las expresiones del método de mínimos cuadrados mostradas en el Apéndice de este Cuaderno de Ejercicios tenemos

$$m = \frac{(3)(0.0371[m\cdot s]) - (1.5[m])(0.0676[s])}{(3)(0.77[m^2]) - (1.5[m])^2} = \frac{0.00273[m\cdot s]}{0.06[m^2]} = 0.0455\text{ [s/m]}.$$

entonces el modelo matemático es τ [s] = 0.0455 [s/m] λ [m].

b) Dado que la pendiente del modelo matemático del inciso anterior es $m = 1 / v$, entonces $v = m^{-1} = (0.0455\text{ [s/m]})^{-1} = 21.978$ [m/s].

c) La ecuación de onda tiene la forma $y(x,t) = A\,sen(\omega t - kx)$,
sabemos que la frecuencia angular está dado por $\omega = 2\,\pi\,f$,
por lo tanto $\omega = 2\,\pi\,(65/2\pi)$ [rad/s] = 65[rad/s], por otra parte
el número de onda se puede calcular como $k = 2\pi \,/\, \lambda$,
entonces $k = 2\pi \,/\, (2\pi / 28)$ [rad/m] = 28[rad/m], con base en esto la ecuación de onda es
$y(x,t) = 0.05$ sen (65 [rad/s] t [s] – 28 [rad/m] x [m]) [m].

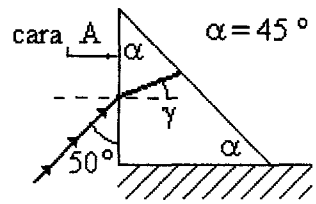
TEMA VIII

ÓPTICA GEOMÉTRICA

1. En un prisma, rodeado de aire ($n_{aire} = 1$), colocado como se muestra en la figura, se hizo incidir un rayo de luz monocromática en la cara A. Sabiendo que $c = 3\times10^8$ [m/s], determine en SI:

a) El índice de refracción del prisma si se sabe que la rapidez de propagación dentro del mismo es 187.5×10^6 [m/s]. Indique también su expresión dimensional.

b) El ángulo de transmisión que forma el rayo de luz dentro del prisma, es decir, el ángulo γ que se indica.



Resolución:

a) El índice de refracción del prisma está dado por el cociente:

$$n_p = \frac{c}{v_p} = \frac{3\times10^8 \frac{m}{s}}{187.5\times10^6 \frac{m}{s}}$$, entonces $n_p = 1.6$ [1] y su expresión dimensional es $[n_p] = [1]$.

b) Aplicando la ley de Snell en el punto donde incide el rayo en la cara izquierda del prisma, tenemos que $n_a \text{sen}\ \theta i = n_p \text{sen}\ \gamma$, de donde $\text{sen}\,\gamma = \frac{n_a}{n_p}\text{sen}\,\theta i$, como el ángulo de incidencia se mide con respecto a la normal $\theta_i = 90° - 50° = 40°$, entonces

$\text{sen}\ \gamma = \frac{1}{1.6}\text{sen}\ \ 40° = 0.4017$, despejando el ángulo γ tenemos

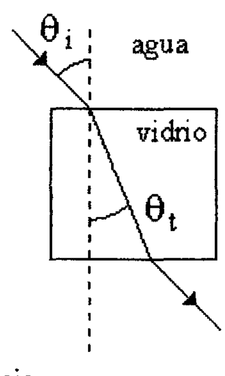
$\gamma = \text{ang sen}\ \ (0.4017) = 23.6871[°]$ y como el resultado lo piden en el SI, entonces

$\gamma = 0.4134$ [rad].

2. Un alumno hizo incidir un rayo de luz en una cara de un prisma de vidrio en forma de cubo. Este último estaba rodeado de agua ($n_a = 1.333$) y tenía 5 [cm] en cada lado, como se muestra en la figura. El alumno varió el ángulo de incidencia, midió en forma indirecta el ángulo de transmisión y obtuvo el modelo matemático siguiente:

$$\text{sen}\ \theta_t = 0.9\ \text{sen}\ \theta_i\ [1]$$

Determine, en el SI:



a) La rapidez de la luz dentro del vidrio. Recuerde que $c = 3 \times 10^8$ [m/s].

b) El ángulo de transmisión (θ_t) que se tendría para un ángulo de incidencia (θ_i) de $\pi/18$ [rad].

Resolución:

a) Sabemos que la pendiente del modelo matemático proporcionado es el cociente de los índices de refracción del aire y del vidrio, es decir:

$m = \dfrac{n_a}{n_v}$; por lo tanto $n_v = \dfrac{n_a}{m} = \dfrac{1.333[1]}{0.9[1]} = 1.4811[1]$; por otra parte el índice de refracción del vidrio se puede escribir como $n_v = \dfrac{c}{v_v}$, de donde podemos despejar la rapidez de la luz en el vidrio, es decir

$$v_v = \frac{c}{n_v} = \frac{3x10^8\,[m/s]}{1.4811} = 2.026x10^8\left[\frac{m}{s}\right].$$

b) De acuerdo con la ley de Snell, tenemos

$n_a \operatorname{sen}\theta_i = n_v \operatorname{sen}\theta_t$; por lo tanto $\operatorname{sen}\theta_t = \dfrac{n_a}{n_v}\operatorname{sen}\theta_i$, sustituyendo tenemos

$\operatorname{sen}\theta_t = \dfrac{1.333}{1.4811}\operatorname{sen}(\pi/8) = 0.1563$, de donde el ángulo de transmisión es

$\theta_t = \operatorname{ang\,sen}(0.1563)$, es decir $\theta_t = 0.1569[\text{rad}]$.

3. Al realizar una práctica de óptica geométrica, un alumno hizo incidir desde el aire ($n_{aire} \approx 1$) varios rayos de luz a una muestra de vidrio y obtuvo la tabla que se muestra. Con base en ello, determine:

ángulo de incidencia θ_i [°]	30	40
ángulo de transmisión θ_t [°]	17.1	22.22

a) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento. Considere que el ángulo de incidencia fue la variable independiente y que la ordenada al origen es despreciable.

b) El índice de refracción del vidrio.

c) El ángulo de transmisión, dentro del vidrio, para un ángulo de incidencia de 20 [°]. Para este inciso suponga que la muestra tiene un índice de refracción de 1.5 [1].

Resolución:

a) El modelo matemático solicitado tendrá la forma $\operatorname{sen}\theta_t = m \operatorname{sen}\theta_i + b$,
como b = 0, entonces quedará como $\operatorname{sen}\theta_t = m \operatorname{sen}\theta_i$, cuya pendiente es

$m = \dfrac{\Delta \operatorname{sen}\theta_t}{\Delta \operatorname{sen}\theta_i}$; a partir de la tabla proporcionada podemos generar otra realizando los cambios de variable adecuados, es decir

$\operatorname{sen}\theta_i$ [1]	$\operatorname{sen}\theta_t$ [1]
0.5	0.2940
0.6428	0.3782

calculando la pendiente tenemos

$$m = \frac{(0.3782 - 0.2924)\,[1]}{(0.6428 - 0.5)\,[1]} = \frac{0.0842\,[1]}{0.1428\,[1]} = 0.5896\,[1],$$

por lo tanto el modelo matemático solicitado es $\operatorname{sen}\theta_t[1] = 0.5896[1] \cdot \operatorname{sen}\theta_i[1]$.

b) De acuerdo con la ley de Snell, sabemos que

$n_a \operatorname{sen}\theta_i = n_v \operatorname{sen}\theta_t$; de donde podemos despejar $\operatorname{sen}\theta_t = \frac{n_a}{n_v}\operatorname{sen}\theta_i$; por lo tanto el significado físico de la pendiente del modelo matemático del inciso anterior es

$m = \frac{n_a}{n_v}$; de donde el índice de refracción del vidrio será $n_v = \frac{n_a}{m}$; es decir

$n_v = \frac{1}{0.5896} = 1.696[1]$.

c) A partir de la ley de Snell, podemos escribir $\operatorname{sen}\theta_t = \frac{n_a}{n_v}\operatorname{sen}\theta_i = \frac{1}{1.5}\operatorname{sen}(20°) = 0.228$, por lo tanto el ángulo de transmisión es $\theta_t = \text{ang sen}(0.228) = 13.18[°]$.

4. En un experimento de óptica se hizo incidir un rayo de luz en un material transparente, rodeado de aire (n_{aire} = 1.00029). Se midieron los ángulos de incidencia (θ_i) y de transmisión (θ_t), obteniéndose la tabla que se muestra.

θ_i [°]	8.3	25.4	44.4	71.7
θ_t [°]	5	15	25	35

Determine:

a) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento de refracción. Considere que el ángulo de transmisión fue la variable independiente y que la ordenada al origen fue despreciable.

b) El índice de refracción del material utilizado.

Resolución:

a) Para obtener un modelo matemático lineal se hacen dos cambios de variable de manera que el modelo tendrá la forma: $\operatorname{sen}\theta_t = m \operatorname{sen}\theta_i + b$,
como la ordenada al origen es despreciable, la expresión anterior queda como
$\operatorname{sen}\theta_t = m \operatorname{sen}\theta_i$, cuya pendiente es $m = \frac{\Delta \operatorname{sen}\theta_t}{\Delta \operatorname{sen}\theta_i}$, entonces

$$m = \frac{(0.9494 - 0.4289) + (0.6997 - 0.1444)}{(0.5736 - 0.2588) + (0.4226 - 0.0872)} = \frac{1.0758\,[1]}{0.6502\,[1]} = 1.6546[1],$$

por lo tanto el modelo matemático solicitado es $\operatorname{sen}\theta_t[1] = 1.6546[1] \cdot \operatorname{sen}\theta_i[1]$.

b) El significado físico de la pendiente del modelo matemático anterior es

$m = \frac{n_{material}}{n_{aire}}$, de donde $n_{material} = m\, n_{aire}$,

$n_{material} = (1.6546)\cdot(1.00029)$, es decir, $n_m = 1.6551[1]$.

5. En una cara de un prisma de vidrio, de forma cúbica, cuya arista era 2.5 [cm], se hizo incidir un rayo de luz con un ángulo de 18 [°] con respecto a la normal; una parte del rayo se reflejó y la otra se transmitió dentro del cubo para salir nuevamente por la cara opuesta.

Sabiendo que el prisma estaba rodeado de aire ($n_{aire} = 1.00029$ [1]), determine:

a) El ángulo de transmisión dentro del prisma si la desviación lateral del rayo, al salir por la cara opuesta, fue de 3.4 [mm].

b) El índice de refracción del cubo.

c) El ángulo de reflexión y la rapidez de propagación de la luz dentro del prisma.

Recuerde que: $\tan\theta_t = \dfrac{\operatorname{sen}\theta_i - \dfrac{d}{e}}{\cos\theta_i}$; $c = 3 \times 10^8$ [m/s].

Resolución:

a) Sabemos que $\tan\theta_t = \dfrac{\operatorname{sen}\theta_i - (d/e)}{\cos\theta_i}$; por lo tanto

$$\tan\theta_t = \frac{\operatorname{sen}18° - (3.4[\mathrm{mm}]/25[\mathrm{mm}])}{\cos 18°} = 0.1819 \text{ , entonces } \theta_t = \text{ang tan } (0.1819)\text{ ,}$$

$\theta_t = 10.3105$ [°].

b) Con base en la ley de Snell, podemos escribir $n_a \operatorname{sen}\theta_i = n_p \operatorname{sen}\theta_t$, de donde podemos despejar el índice de refracción del prisma de vidrio

$$n_p = \frac{n_a \operatorname{sen}\theta_i}{\operatorname{sen}\theta_t} \text{ , por lo tanto}$$

$$n_p = \frac{(1.0029)\operatorname{sen}18°}{\operatorname{sen}(10.3105°)}, \quad n_p = 1.727 \text{ [1].}$$

c) Sabemos que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, es decir $\theta_r = \theta_i$, por lo tanto $\theta_r = 18$ [°];
por otra parte con base en la definición del índice de refracción, podemos escribir

$$n_p = \frac{c}{v_p} \text{ , de donde podemos despejar la rapidez de la luz dentro del prisma}$$

$$v_p = \frac{c}{n_p} = \frac{3\text{x}10^8[\mathrm{m/s}]}{1.727}, \quad v_p = 1.737 \times 10^8[\mathrm{m/s}].$$

6. Un cubo de vidrio tiene 1 [cm] de cada lado y se encuentra rodeado de agua ($n_{agua} = 4/3$). Se midieron para varios ángulos de incidencia (θ_i) los correspondientes ángulos de reflexión (θ_r), según se muestra en la tabla. Si el índice de refracción del vidrio utilizado es $n_{vidrio} = 1.47$, determine, en el SI:

a) El modelo matemático lineal que relaciona las variables del experimento. Considere que la variable independiente fue el ángulo de incidencia y utilice el método de mínimos cuadrados.

b) El ángulo de transmisión para un ángulo de incidencia de $\pi/4$ [rad].

θ_i [rad]	0.1	0.2	0.3
θ_r [rad]	0.11	0.22	0.32

Resolución:

a) El modelo matemático lineal tendrá la forma $\theta_r = m\ \theta_i + b$,
El número de parejas ordenadas es tres, por lo tanto n = 3, como el modelo deberá obtenerse a partir del método de mínimos cuadrados, es conveniente elaborar la tabla siguiente:

θ_i [rad]	θ_r [rad]	$\theta_i \cdot \theta_r$ [rad^2]	θ_i^2 [rad]^2
0.1	0.11	0.011	0.01
0.2	0.22	0.044	0.04
0.3	0.32	0.096	0.09
$\Sigma\theta_i = 0.6$	$\Sigma\theta_r = 0.65$	$\Sigma\theta_i \cdot \theta_r = 0.151$	$\Sigma\theta_i^2 = 0.14$

Con base en las expresiones que aparecen en el Apéndice de este Cuaderno de Ejercicios, tenemos

$$m = \frac{(3)(0.151)-(0.6)(0.65)}{(3)(0.14)-(0.6)^2} = 1.05 \text{ [rad/rad]},$$

$$b = \frac{(0.65)(0.14)-(0.151)(0.6)}{(3)(0.14)-(0.6)^2} = 0.0067 \text{ [rad]},$$ por lo tanto el modelo matemático es

θ_r [rad] =1.05 [rad/rad] θ_i [rad] + 0.0067 [rad].

b) Con base en la ley de Snell, tenemos $n_a \operatorname{sen}\theta_i = n_v \operatorname{sen}\theta_t$, de donde $\operatorname{sen}\theta_t = \frac{n_a}{n_v} \operatorname{sen}\theta_i$,

entonces $\operatorname{sen}\theta_t = \frac{(4/3)}{1.47} \operatorname{sen}(\pi/4) = 0.6414$, por lo que $\theta_t = \text{ang sen}(0.6414) = 0.6963$ [rad].

TEMA IX

SISTEMAS DE UNIDADES

1. La magnitud del campo magnético en el centro de una bobina circular de radio a colocada en el vacío, está dada por la expresión: $B = \frac{\mu_0 i N}{2a}$,en la cual μ_0 = permeabilidad magnética del vacío, a = radio de la bobina, N = número de espiras de la bobina, e i = corriente eléctrica en la bobina. Determine en el SI:

a) La expresión dimensional del campo magnético B, de la corriente eléctrica i y del número de espiras N.

b) La expresión dimensional de la permeabilidad magnética del vacío. Considere que el número 2 que aparece en la expresión es una constante adimensional.

Resolución:

a) Sabemos del tema VI de este curso que la magnitud de la fuerza de origen magnético está dada por: $F = Bi\ell \operatorname{sen}\alpha$; de donde $B = \frac{F}{i\ell \operatorname{sen}\alpha}$; por lo tanto la expresión dimensional del campo magnético es

$$[B] = \left[\frac{F}{i\ell \operatorname{sen}\alpha}\right] = \frac{LMT^{-2}}{IL(1)} = MT^{-2}I^{-1} ;$$

por otra parte, la corriente eléctrica es una dimensión en el SI, por lo que $[i] = I$; finalmente, el número de espiras es una cantidad adimensional, por lo tanto: $[N] = 1$.

b) De la expresión proporcionada en este ejercicio: $B = \frac{\mu_0 i N}{2a}$; podemos despejar $\mu_0 = \frac{2aB}{iN}$, por lo tanto su expresión dimensional es $[\mu_0] = \left[\frac{2aB}{iN}\right] = \frac{(1)(L)(MT^{-2}I^{-1})}{(I)(1)}$, es decir $[\mu_0] = L\,M\,T^{-2}\,I^{-2}$.

2. La fuerza de fricción viscosa (F) en cierto fluido entre dos placas se obtiene con la expresión matemática: $F = 12\ \frac{A\ v}{y}$ [dina]; en la cual: A = área de cada placa en [cm^2], v = rapidez de escurrimiento en [cm/s], y = distancia entre placas en [cm]. Determine:

a) El sistema de unidades en que está la ecuación y la expresión dimensional del coeficiente $\mu = 12$ de dicha ecuación en el SI.

b) El valor del coeficiente μ en el SI.

c) La magnitud de la fuerza necesaria, en el SI, para mover una placa de 50 [cm^2] de área, con rapidez de 0.03 [m/s] si la distancia entre las placas es 5 [mm] y el fluido entre ellas es el mismo de los incisos anteriores.

Resolución:

a) Como $[F]_u$ = dina, $[y]_u$ = cm, $[A]_u$ = cm^2 y $[v]_u = \dfrac{\text{cm}}{\text{s}}$, se trata del sistema c.g.s. absoluto; la expresión dimensional del coeficiente μ es

$$[\mu] = [12] = \left[\frac{F\,y}{A\,v}\right]\text{; es decir}\quad [\mu] = \frac{LMT^{-2}L}{L^2LT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}.$$

b) Las unidades del coeficiente, en el c.g.s. son:

$$[\mu]_{\,u\,cgs} = 12\frac{g}{cm\cdot s} = 12\,\frac{g\cdot cm\cdot s}{cm\cdot s\cdot cm\cdot s} = 12\frac{g\cdot cm\cdot s}{s^2\cdot cm^2} = 12\,\frac{dina\cdot s}{cm^2}$$; por lo tanto, en el SI serían

$$[\mu]_{\,u\,SI} = 12\frac{g}{cm\cdot s}\left(\frac{1\ kg}{1000\ g}\right)\left(\frac{100\ cm}{1\ m}\right) = 1.2\left[\frac{kg}{m\cdot s}\right].$$

c) Sustituyendo las cantidades en el SI, tenemos

$$F\,[N] = 1.2\,\frac{kg}{m\cdot s}\,\frac{(50\times10^{-4}\,m^2)(0.03\,\frac{m}{s})}{5\times10^{-3}\,m} = 0.036\ [N].$$

3. La ecuación siguiente permite modelar el comportamiento termodinámico de un gas ideal:

$$P\,V = m\,R\,T$$

donde, P es la presión absoluta del gas, V su volumen, m su masa, T la temperatura absoluta del fluido y R la constante particular del gas. Si para un cierto gas de comportamiento ideal se sabe que su presión absoluta es 4 [bares], el volumen que ocupa es 5.2972 [ft^3], su masa es 2 [kg] y su temperatura empírica es 626.85 [°C], determine en el SI:

a) La expresión dimensional de la constante R.

b) El valor de la constante particular del gas en cuestión con sus unidades.

Resolución:

a) Primero despejamos la constante R de la ecuación de gas ideal:

$R = \dfrac{PV}{mT}$, sabemos que la expresión dimensional de las cantidades físicas involucradas son:

para la presión $[P] = ML^{-1}T^{-2}$; volumen $[V] = L^{-3}$; masa $[m] = M$; temperatura $[T] = \Theta$;

por lo tanto la expresión dimensional de la constante es $[R] = \dfrac{ML^{-1}T^{-2}\left(L^{-3}\right)}{M(\Theta)}$, simplificando tenemos $[R] = L^{-2}T^{-2}\Theta^{-1}$.

b) Para calcular el valor de la constante particular determinaremos primero las cantidades involucradas en el SI, es decir:

$$P = 4[bar]\cdot\left(\frac{10^5[Pa]}{1bar}\right) = 4x10^5[Pa],$$

$$V = 5.2972[ft^3]\cdot\left(\frac{0.3048^3[m^3]}{1ft^3}\right) = 0.150[m^3]\ y$$

$$T = (626.85[°C] + 273.15[°C])\left[\frac{\Delta K}{\Delta °C}\right] = 900[K],$$

sustituyendo en la expresión donde está despejada la constante tenemos

$$R = \frac{(4x10^5[Pa])\cdot(0.15[m^3])}{(2[kg])\cdot(900[K])} = 33.3333\left[\frac{m^2}{kg\cdot K}\right] = 33.3333\left[\frac{J}{kg\cdot K}\right].$$

4. La ecuación del calor transferido (Q) está dada por:

$$Q = h\,A\,(T_2 - T_1)$$

donde A = área de transferencia.
T = temperatura
h = coeficiente de transferencia de calor.

Determine, en el SI:

a) La expresión dimensional del coeficiente h.

b) El valor de h si Q = 225 [BTU], A = 5.3 [ft^2], T_1 = 250 [°C] y T_2 = 450 [°C].

Resolución:

a) De la ecuación podemos despejar el coeficiente, $h = \frac{Q}{A(T_2 - T_1)}$, entonces su expresión dimensional es

$$[h] = \frac{[Q]}{[A][(T_2 - T_1)]} = \frac{ML^2T^{-2}}{L^2\Theta}\text{ ; simplificando tenemos } [h] = MT^{-2}\Theta^{-1}.$$

b) Para determinar el valor de h, en el SI, calcularemos primero las cantidades físicas involucradas en la ecuación, en dicho sistema de unidades:

$$Q = 225\,[BTU]\cdot\left(\frac{1055\,[J]}{1\,[BTU]}\right) = 237375\,[J],$$

$$A = 5.3\,[ft^2]\cdot\left(\frac{(0.3048\,[m])^2}{1\,[ft^2]}\right) = 0.4924\,[m^2],$$

$$T_2 - T_1 = (450 - 250)[°C] = 200[°C];\text{ es decir } \Delta T = 200[°C] = 200[K],$$

$$h = \frac{237375[J]}{(0.4924[m^2])\cdot(200[K])} = 2410.3879\left[\frac{J}{m^2\cdot K}\right]\text{ o bien } h = 2410.3879\left[\frac{kg}{s^2\cdot K}\right].$$

5. En un movimiento de tiro parabólico, considerando despreciable la fricción del aire y que el punto de aterrizaje de la partícula está a la misma altura que el punto de lanzamiento, el alcance horizontal está dado por

$$R = \frac{v_0^2\,\text{sen}\,2\varphi}{g}$$

donde v_0 = rapidez inicial de la partícula
g = aceleración gravitatoria del lugar
φ = ángulo de lanzamiento.

Determine en el SI:

a) La expresión dimensional de la cantidad física R.

b) El valor de φ si g = 32.086, v_0 = 49.213 y R = 53.372, sabiendo que estas últimas tres cantidades físicas están en el sistema inglés absoluto.

Resolución:

a) Para este inciso tenemos que

$$[R]=\left[\frac{v_0^{\,2}\cdot \operatorname{sen} 2\varphi}{g}\right], \text{ es decir } [R]=\frac{\left(LT^{-1}\right)^2(1)}{\left(LT^{-2}\right)}=\frac{L^2T^{-2}}{LT^{-2}}=L.$$

b) Primero calcularemos las cantidades físicas involucradas en la expresión, en el SI:

$$g=32.086\left[\frac{ft}{s^2}\right]\cdot\left(\frac{0.3048[m]}{1[ft]}\right)=9.7798\left[\frac{m}{s^2}\right],$$

$$v_o=49.213\left[\frac{ft}{s}\right]\cdot\left(\frac{0.3048[m]}{1[ft]}\right)=15.0001\left[\frac{m}{s}\right];$$

entonces el alcance horizontal, en el SI, es

$$R=53.372[ft]\cdot\left(\frac{0.3048[m]}{1[ft]}\right)=16.2678[m],$$

para encontrar el ángulo, despejaremos primero

$$\operatorname{sen} 2\varphi=\frac{R\,g}{v_o^{\,2}}=\frac{(16.2678[m])\cdot\left(9.7798\left[\frac{m}{s^2}\right]\right)}{\left(15.0001\left[\frac{m}{s}\right]\right)^2}=0.707\ [1];$$ de donde el ángulo solicitado es

$$\varphi=\frac{1}{2}\operatorname{ang\,sen}(0.707), \text{ esto es } \varphi=0.3926[rad].$$

6. En termodinámica se utiliza con frecuencia una cantidad física denominada entalpia (o entalpía) H, la cual es una propiedad extensiva de las sustancias, que se define como:

H = U + P V, donde

$$\left.\begin{array}{l}U = \text{energía interna.}\\ P = \text{presión absoluta}\\ V = \text{volumen.}\end{array}\right\}\ \text{de la sustancia}$$

Determine en el SI:

a) La expresión dimensional de la entalpia, de la energía interna, de la presión y del volumen.

b) El valor de la entalpia si la energía interna es 23.88 [BTU], P = 0.94 [bar] y V = 28.3 [ft^3].

Resolución:

a) De acuerdo con la expresión H = U + P V, podemos escribir que la expresión dimensional de la entalpia es

[H] = [U] = [P V], entonces

$[H] = M\,L^2\,T^{-2} = [U]$; por otra parte
$[P] = M\,L^{-1}\,T^{-2}$ y
$[V] = L^3$.

b) Para determinar el valor de la entalpia en el SI, primero determinaremos la energía interna, la presión y el volumen en dicho sistema de unidades

$$U = 23.88\ [\text{BTU}]\left(\frac{1055\ [\text{J}]}{1\ [\text{BTU}]}\right) = 25\ 193.4\ [\text{J}];$$

$$P = 0.94\ [\text{bar}]\left(\frac{10^5\ [\text{Pa}]}{1\ [\text{bar}]}\right) = 94\ 000\ [\text{Pa}];$$

$$V = 28.3\ [\text{ft}^3]\left(\frac{(0.3048\ [\text{Pa}])^3}{1\ [\text{ft}^3]}\right) = 0.8014\ [\text{m}^3], \text{ entonces}$$

$$H = (25\ 193.4[\text{J}]) + (94\ 000[\text{Pa}])\ (0.8014[\text{m}^3]) = 100\ 525\ [\text{J}].$$

APÉNDICE

Factores de conversión:

1 [bar] = 10^5 [Pa]
1 [cal] = 4.186 [J]
1 [ft] = 0.3048 [m]
1 [ℓb] = 0.4536 [kg]
1 [BTU] = 1 055 [J]
1 [N] = 0.2248 [ℓb_f]
1 [in] = 2.54 [cm]
1 [N] = 10^5 [dinas]
1 [rpm] = 1 [revolución/minuto]
1 [slug] = 0.4536 [kg]
1 [kg_f] = 9.81 [N]

$$T\,[K] = \left(T\,[°C] + 273.15\,[°C]\right)\left[\frac{1\,\Delta K}{1\,\Delta °C}\right]$$

Expresiones del método de mínimos cuadrados:

$$m = \frac{n\Sigma x_i y_i - (\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}$$

$$b = \frac{(\Sigma y_i)(\Sigma x_i^2) - (\Sigma x_i y_i)(\Sigma x_i)}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}$$