

## TEORIA Y DISEÑO DE FILTROS ANALOGICOS Y DIGITALES

12 AL 24 DE AGOSTO DE 1985.

FECHA	HORARIO	TEMA.	PROFESOR.
LUNES 12	17:00-19:00	1.- INTRODUCCION.	
		1.1 Clasificación e Historia del filtro.	Ing. Javier Valencia Figueroa
	19:00-21:00	1.2 Transformadas y análisis en frecuencia.	Ing. Caupolican Muñoz Gamboa.
		1.3 Análisis Básico de Sistemas 1.4 Filtros Ideales y Filtros - realizables.	
MARTES 13	17:00-21:00	1.5 Aproximaciones	Ing. Javier Valencia Figueroa
		1.6 Metodología de diseño	
		1.7 Transformaciones de Frecuencia	
		1.8 Método de síntesis de Redes.	
		1.9 Realizaciones.	
MIÉRCOLES 14	17:00-21:00	2.- FILTROS ACTIVOS.	Ing. Caupolican Muñoz Gamboa
		2.1 Filtros Reales de primero y segundo orden.	
		2.2 Funciones de transferencia de orden mayor que dos	
		2.3 Amplificador Operacional	
JUEVES 15	17:00-21:00	2.4 Realización Activa de los Filtros básicos de segundo orden.	Ing. Javier Valencia Figueroa

FECHA	HORARIO	TEMA	PROFESOR.
		4.4 en el tiempo	
		4.5 Tipos Básicoo de Filtros. .	
		4.6 Estructuras empleadas en la rea- lización de Filtros Digitales.	
VIERNES 23	17:00-21:00	4.7 Errores Introducidos por sistemas físicamente realizables.	Ing. Miguel Linding Boss
		4.8 Características de algunos Métodos de cálculo de Coeficientes.	
		4.9 Diseño de filtros FIR por técnicas de ventana.	
SABADO 24	9:00-13:00	5.- LABORATORIO (2 PARTE):  5.3 Filtros Digitales.	Ing. Miguel Linding Boss

EVALUACION DEL PERSONAL

DOCENTE

CURSO: Teoría y Diseño de Filtros Ana-  
lógicos y Digitales

FECHA: Del 12 al 24 de agosto de 1985.

	DOMINIO DEL TEMA	EFICIENCIA EN EL USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES	MANTENIMIENTO DEL INTERES. (COMUNICACION CON LOS ASISTEN- TES, AMENIDAD, FACILIDAD DE EXPRESION)	PUNTUALIDAD	
C O N F E R E N C I S T A					
Ing. Javier Valencia Figueroa					
Ing. Caupolican Muñoz Gamboa					
Ing. Boris Escalante Ramírez					
Ing. Mario A. Ibarra Pereyra					
Ing. Francisco Hernández Rangel					
Ing. Lizbeth Ortega Lara					
Ing. Miguel Linding Boss					

CURSO:

FECHA:

T E M A	ORGANIZACION Y DESARROLLO DEL TEMA	GRADO DE PROFUNDIDAD LOGRADO EN EL TEMA	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO EN EL TEMA	UTILIDAD PRACTICA DEL TEMA	
Introducción					
Filtros Activos					
Laboratorio (I Parte)					
Filtros de Alta Frecuencia					
Filtros Digitales					
Laboratorio (2da. Parte)					

## EVALUACION DEL CURSO

C O N C E P T O		
1.	APLICACION INMEDIATA DE LOS CONCEPTOS EXPUESTOS	
2.	CLARIDAD CON QUE SE EXPUSIERON LOS TEMAS	
3.	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO EN EL CURSO	
4.	CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO	
5.	CONTINUIDAD EN LOS TEMAS DEL CURSO	
6.	CALIDAD DE LAS NOTAS DEL CURSO	
7.	GRADO DE MOTIVACION LOGRADO EN EL CURSO	

ESCALA DE EVALUACION: 1 A 10



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**TEORIA Y DISEÑO DE FILTROS ANALOGICOS Y DIGITALES**

**CAPITULO I**

**I N T R O D U C C I O N**

**CAUPOLICAN MUÑOZ GAMBOA  
JAVIER VALENCIA FIGUEROA**

**AGOSTO, 1985**

# CONTENIDO

## I. INTRODUCCION

### 1.1 Historia del Filtro

1.1.1 Cronología Histórica del Filtro

1.1.2 Breve Historia del Filtro Digital

### 1.2 Transformadas y Análisis en Frecuencia

1.2.1 Señales

1.2.2 Serie Trigonométrica de Fourier

1.2.3 Serie Exponencial de Fourier

1.2.4 Transformada de Fourier

1.2.5 Propiedades de la Transformada de Fourier

1.2.6 Transformada  $z$

1.2.7 Transformada Discreta de Fourier

1.2.8 Transformada Rápida de Fourier

1.2.9 Transformada de Laplace

### 1.3 Análisis Básico de Sistemas

1.3.1 Definiciones

1.3.2 Propiedades y Aplicaciones

1.3.3 El Sistema de Segundo Orden

### 1.4 Filtros Ideales y Filtros Realizables

1.4.1 Definiciones

1.4.2 Realizabilidad de los Filtros

### 1.5 Aproximaciones

1.5.1 Planteamiento del Problema

1.5.2 Las Aproximaciones

### 1.6 Apéndices

1.6.1 Artículos Varios

1.6.2 Tablas de Aproximación

### 1.7 Bibliografía

## 1. INTRODUCCION

El estudio de los filtros requiere, más que muchos otros temas de la electrónica, de una serie de conceptos previos que permiten conocerlos mejor. Para los filtros es indispensable, por ejemplo, el análisis en frecuencia y el uso de transformaciones para modelar su especial comportamiento.

En el presente capítulo se tratan diversos elementos básicos que sirven de base para el análisis y estudio de los filtros. En primer lugar, se presenta una resumida historia y una relación de hechos importantes con relación al estado actual de esta disciplina. En seguida, se presentan diversas transformadas y métodos de modelado en la frecuencia de las señales y sistemas relacionados con los filtros, lo que da un panorama amplio de las formas en que se representan diversos fenómenos en la frecuencia, y se plantea el concepto de ancho de banda. A continuación, se revisan los conceptos básicos de la teoría de sistemas que tienen aplicación en este campo, de donde surge la función de transferencia y la respuesta a impulso. Posteriormente, se definen los filtros ideales, sus características y se demuestra su irrealizabilidad en conexión con el concepto de causalidad. Por último, en virtud de que los filtros ideales no son físicamente realizables, se presentan las aproximaciones más comunes que pueden realizarse y las características de éstas.

A modo de apéndices se agregan al texto algunos artículos relevantes que tienen conexión con este capítulo introductorio y una bibliografía sobre el tema.

### 1.1 HISTORIA DEL FILTRO

La finalidad de esta primera parte del trabajo es la de enfocar y ubicar al lector que está interesado en este tema, en el cual se presenta un bosquejo histórico del desarrollo sobre la teoría de filtros eléctricos.

El análisis de redes eléctricas en realidad es viejo. El primer concepto de un circuito eléctrico en el sentido matemático es acreditado a G. Simón Ohm en 1827 y las bases fundamentales de red fueron las leyes de Kirchoff publicadas en 1845; a este último también se deben las nociones geométricas que se aplican a las redes, conduciendo al concepto de dualidad y equivalencia geomé



trica con aplicaciones de topología.

Durante los cuarenta años que siguieron a la publicación de Kirchoff sobre las ecuaciones de una red, la mayoría de los problemas de circuitos eléctricos fueron formulados en términos de sistemas mecánicos; esto, desafortunadamente no contribuyó en forma alguna al desarrollo progresivo de la teoría básica de redes.

En la última parte del siglo XIX, la fuerte personalidad de Oliver Heaviside apareció para ayudar a fortalecer la teoría de redes eléctricas; inventa matemáticamente el concepto de línea de transmisión sin distorsión, con lo cual, tuvo que enfrentarse al pensamiento de esa época cuando la inductancia era tomada como el equivalente exacto de la inercia en sistemas mecánicos. Con el objeto de establecer la teoría de redes eléctricas como una disciplina aparte de los sistemas mecánicos, creó mucha de la terminología empleada hoy en día, como impedancia, admitancia y todas las otras "ancias" empleadas para parámetros ideales de circuitos. Heaviside en 1886, introdujo un cálculo operacional, que debido a su naturaleza empírica angustió a muchos matemáticos aplicados del tiempo; pese a todo, la utilización de su operador complejo "p" y expansiones en fracciones parciales condujeron a una solución sistemática de muchos problemas concernientes al comportamiento continuo y transitorio de sistemas con parámetros concentrados.

En el año de 1915 nació la tecnología del filtro, basada en los resultados obtenidos de trabajos anteriores sobre líneas de transmisión cargadas y la teoría clásica de vibración. En los días anteriores a esta tecnología, la selectividad era obtenida mediante el uso de reactancias sencillas ó resonancias sencillas conectadas en serie o en paralelo; los primeros filtros diseñados científicamente, consistieron de una cascada de secciones simples idénticas formando una red de escalera. La selectividad de esta forma se incrementaba con el número de secciones. La escalera podía ser tratada simplemente por medio de la llamada teoría de parámetros imagen, análoga a la teoría de línea de transmisión, en la cual, los parámetros de la red son expresados en términos de la impedancia imagen y el factor de transmisión imagen.

Si bien este método fué un gran paso hacia adelante, la selectividad resultante estaba lejos de ser óptima ya que las redes no tenían ceros de trans

ferencia cerca de la banda de paso, y atenuaciones abruptas en las regiones de corte eran no realizables.

En 1923 se publicó un método práctico de diseñar filtros selectivos con un número ilimitado de reactancias, y fué el único método conocido hasta 1940.

Esta teoría, es algo artificial en principio ya que esta basada en parámetros imagen que únicamente aproximan los parámetros efectivos de operación y asumen elementos no físicos (las terminales de impedancia imagen). No obstante estos resultados, no solo permitían el diseño para bandas de paso arbitrariamente preestablecidas, sino también mejoraban el acomplamiento de la carga terminal. Esta técnica podía reducir el error en la banda de paso debido a los requisitos no físicos en las terminales (un mejor acomplamiento fué mas tarde obtenido por Bode).

En 1924 R. M. Foster, publicó un "Teorema de Reactancias", el cual hizo posible realizar por primera vez una red que exhibiera en sus terminales una función real positiva como una impedancia o admitancia. Foster dividió la función racional dada en una suma de fracciones parciales que podían ser fácilmente identificadas como una conexión en serie de impedancia o como una conexión en paralelo de admitancias.

En 1926 Wilhem Cauer, expandió la función racional en fracciones continuas representando una red de escalera.

Cada método dió dos redes sustitutas, y fueron llamadas formas canónicas, ya que siempre podían ser obtenidas a partir de una función inmitancia realizable y porque ellas empleaban un número mínimo de elementos. Pronto se reconoció que los métodos de "Foster y Cauer", podían ser adaptados rápidamente para dar una teoría mas general de síntesis de redes con elementos de dos clases, esto es la síntesis de redes R-L, R-C y L-C.

Sin embargo fué también reconocido que la simple adaptación de la síntesis L-C de Foster no podía resolver el problema de sintetizar redes R-L-C, a partir de sus funciones de inmitancia dadas. Este problema mucho más difícil demandó una correspondiente solución mas complicada.

A finales de los años treinta Wilhem Cauer y Sidney Darlington, estaban preocupados por las nuevas teorías de la síntesis exacta de ese tiempo ya que la nueva teoría del diseño de filtros que ellos podían generar al principio podía tener poca ventaja práctica sobre la vieja teoría. Aunque si bien, una pequeña cantidad de problemas especializados que resistieron el tratamiento de parámetros imagen, podían resolverse fácilmente con el método exacto, la principal razón para su uso se basó en el hecho de que la teoría de redes de mandó nuevas formas que pudieran llevar un problema dado a través de las siguientes etapas:

Síntesis de aproximación. Dada una característica de respuesta deseada (por ejemplo: amplitud-frecuencia, fase-frecuencia o cualquier otra combinación), sobre un rango de frecuencias establecido hay que obtener una función de transferencia realizable que pueda aproximar las especificaciones dentro de una tolerancia permitida.

Síntesis de la Función de Transferencia. Consiste en manipular la función de transferencia a manera de obtener una función de inmitancia realizable.

Síntesis de la Realización. Finalmente se construye la red real que corresponde a una función racional.

La importancia de este nuevo método, no fué reconocida inmediatamente pero podía ser usado para diseñar mejores filtros paso bajas, pero faltaba proporcionar los diseños en la práctica, debido a la pesada carga de los cálculos requeridos.

No fué sino hasta la llegada de los métodos sencillos de computación (en los años cincuenta), donde los filtros Cauer y Darlington entraron en amplio uso.

Bode, quien junto con Cauer demolió en esencia el problema del diseño de filtros con parámetros imagen, en 1934 desarrollo relaciones prácticas que expresan la interdependencia entre la parte real e imaginaria de funciones de redes realizables, además hizo muchas aportaciones significativas a la teoría de la realimentación en 1945.

Durante la segunda guerra mundial, el arte creciente de la comunicación, en particular el radar, demandaba filtros que satisficieran un panorama completamente diferente de restricciones en la selectividad, además anchos de banda mas amplios, frecuencias centrales mas grandes, respuestas a pulsos no resonantes y severas tolerancias a los componentes.

Los valores de los elementos de filtros paso bajas clásicos Butter Worth y Tschebycheff, fueron tabulados a mediados de los años cincuenta; los coeficientes de acoplamiento correspondientes a estos valores de parámetros paso bajas fueron también difundidos en esa época. A partir de estos, los filtros paso banda angostos podían ser fácilmente diseñados a una respuesta dada, al mismo tiempo el diseñador tuvo una mas amplia selección de posibles características de respuesta en frecuencia a la vez que aparecieron nuevas y especializadas aproximaciones de fase.

Con la aparición de la computadora digital, se hizo posible la simulación del comportamiento de un filtro elemental; los efectos de resistencia y capacidad parásitas podían entonces ser anticipados y el comportamiento del filtro mas cercanamente predecido.

Recientemente el computador ha tenido un impacto mas grande sobre la teoría de filtros; por ejemplo, usando reglas topológicas han sido desarrollados algoritmos a partir de los cuales se pueden obtener respuestas completas en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia de filtros de complejidad arbitraria.

Por otro lado durante los años treinta surgieron los filtros activos (sin inductores) los cuales fueron construidos usando bulbos, resistencias y capacidades; debido a su enorme tamaño y al alto consumo de potencia junto con su elevado precio, los filtros activos originalmente no recibieron mucha atención. El desarrollo de los transistores al final de los años cuarenta, revitalizó el interés en esta área dedicándose en el transcurso de los años cincuenta la atención sobre las técnicas de diseñar filtros activos usando un simple elemento activo.

Los esfuerzos de investigación y desarrollo en filtros activos en recientes años han sido influenciados principalmente por el progreso en la tecnología

gía de circuitos integrados; las principales atracciones para producir filtros son la reducción de su tamaño, la reducción de su peso y de su consumo mínimo de potencia así como un incremento en la confiabilidad del sistema.

Los filtros activos R-C son ahora comercialmente disponibles en forma de circuito integrado y están siendo ampliamente utilizados en áreas con Telefonía y Sistemas de Comunicación de Datos.

El primer método de diseño de un filtro activo R-C fué sugerido en 1938 por H. Scott, quien mostró el uso de una red R-C gemela T en un amplificador realimentado para producir una respuesta paso banda. A partir de este momento muy poco trabajo fué reportado en esta área durante una década y media, y no fué sino hasta 1953 cuando J. G. Linvill propuso un método de diseño haciendo uso de un elemento activo completamente nuevo para ese entonces el "convertidor negativo de impedancia".

El trabajo de Linvill fué seguido por el Sallen-Key en 1955, quienes publicaron un catálogo de secciones de segundo orden activas R-C empleando amplificadores de voltaje como elementos activos.

A partir de entonces han existido muchas publicaciones sobre este tema las cuales nos sería imposible enumerar.

### 1.1.1 CRONOLOGIA HISTORICA DEL FILTRO

1822....FOURIER, B.J., escribe el artículo "THE ANALYTICAL THEORY OF HEAT", donde demuestra que toda función puede representarse como una sumatoria de funciones que formen una base completa y establece la primera transformada integral, orientada a los fenómenos térmicos.

1827....OHM, G.S., da el primer paso para el análisis de circuitos eléctricos al establecer la Ley de Ohm.

1829....JACOBI, C. G. J., escribe un artículo sobre funciones elípticas, "FUNDAMENTA NOVA THEORIAE FUNCTIONUM ELLIPTICARUM", Königsberg publicada posteriormente en Gesammelte Werke, Vol 1; pp 44-239 Berun, Reimer.

- 1845....KIRCHHOFF, R. G., publica las leyes que llevan su nombre para el análisis de circuitos eléctricos, "UBER DEN DURCHGANG EINES ELEKTRISCHEN STROMES DURCH EINE EBENE, INSBESONDERE DURCH EINE KREISFÖRMIGE", Progg. Ann., Vol. 64.
- 1880....HEAVISIDE, O., establece el cálculo operacional, define impedancia, admitancia, etc., y define las líneas de transmisión sin distorsión (base de la primera teoría de filtros).
- 1883....THEVENIN, L., escribe el artículo "SUR UN NOUVEAU THEOREME D'ELECTRICITE DYNAMIQUE", Compt. Rend. (París), 97; pp. 159-161.
- 1890....LAPLACE, S., escribe un artículo sobre la llamada función generatriz, que posteriormente será la transformada Z.
- 1892....PADE, H. E., escribe el artículo "SUR LA REPRESENTATION APPROCHEE D'UNE FONCTION PAR DES FRACTIONS RATIONELLES", Ann, SCI, EC. Norm. Sup. París (3), 9; pp 1-93.
- 1899....CHEBYSHEV, P. L., escribe el artículo "SUR LES QUESTIONS DE MINIMA QUI SE RATTACHENI A LA REPRESENTATION APROXIMATIVE DES FONCTIONS", en Oeuvres, Vol I, San Peterburgo.
- 1904....FLEMMING., inventa el diodo de vacío.
- 1906....DEFOREST., inventa el triodo de ~~40~~ ~~50~~, que por su capacidad para amplificar señales ~~se~~ se denomina audión.
- 1915....CAMPBELL, G. A., y WAGNER, K. W., inventan independiente el filtro de ondas eléctricas (basándose en los resultados de líneas de transmisión).
- 1917....CARSON, BROW WICH, DOETSCH y VAN DER PUL, establecen las bases teóricas del cálculo operacional de Heaviside, con base en una transformada integral, Carson lo demuestra. Desarrollos posteriores crean el análisis de circuitos eléctricos actuales (técnicas en el dominio del tiempo y técnicas en el dominio de las transformadas integrales y de sistemas lineales).

- 1923....ZOBEL, O. J., propone un método para sintetizar filtros de ondas eléctricas (conocido actualmente como método de filtros pasivos m derivados).
- 1924....FOSTER, R. M., publica los artículos, "A REACTANCE THEOREM", Bell System Technical Journal, 3, pp 259-267, abril, y "THEOREM'S REGARDING THE DRIVING-POINT IMPEDANCE OF TWO MESH CIRCUIT", Bell System Thechnical Journal, 3, pp 651-685, octubre.
- 1926....CAUER, W., publica su trabajo sobre funciones reales positivas, "DIE VERWIRKLICHUNG VON WECHSELSTROMWIDERSTANDEN VORGESCHRIBENER FREQUENZABHANGIGKEIT", Arch. Electrotech.17, pp 355-388 donde demuestra que las funciones reales positivas pueden representarse por funciones continuas.
- 1927....se crea el método FOSTER-CAUER, para sintetizar redes R-L, R-C y L-C.
- 1930....BRUNE, O., escribe su tesis doctoral, "SYNTHESIS OF A FINITE TWO TERMINAL NETWORK WHOSE DRIVING-POINT IMPEDANCE IS A PRESCRIBED FUNCTION OF FREQUENCY", Scd. MIT, (Elec. Engg.).
- 1930....BUTTERWORTH, S., publica, "ON THE THEORY OF FILTER AMPLIFIERS", exp. Wireless, 7, pp 556-591, oct.
- 1937....MARK I, la primera calculadora práctica electromecánica, construida por los ingenieros de IBM, bajo la dirección del profesor Aiken de Harward.
- 1938....se crea el método CAUER-DARLINGTON para sintetizar filtros, el cual requiere de muchos cálculos, basado en tres pasos:
- a) Síntesis de aproximación
  - b) Síntesis de la función de transferencia
  - c) Síntesis de relación
- 1941....KOLMOGOROV, A. N., publica, "INTERPOLATION AND EXTRAPOLATION VON STATIONAREN ZUFALLIGEN FOLGEN", Bull. acad. SCI. URSS, SER. MATH, 5, pp 3-14.

- 1941....WIENER, N., escribe su trabajo con publicaciones limitadas, EXTRAPO  
LATION, INTERPOLATION, AND SMOOTHING OF STATIONARY TIME SERIES WITH  
ENGINEERING APPLICATIONS, publicado posteriormente por Wiley, New  
York, 1949, base del filtrado no determinístico.
- 1946....LINVILL, J. G., realiza su tesis en el MIT "AN EXPERIMENTAL APPROACH  
OF THE APROXIMATION PROBLEM FOR DRIVING-POINT AND TRANSFER FUNCTIONS".
- 1946....ENIAC, la primera calculadora electrónica (computadora e integradora  
numérica electrónica), es diseñada por J. P. ECKERT y J. W. MAUCHLY,  
en la Universidad de Pennsylvania.
- 1947....SHOCKLEY, BARDEN Y BRATTAIN, inventan el transistor bipolar de juntura,  
en los laboratorios Bell.
- 1948....TELLEGEN, B.O.H., inventa el girador (que sustituye a los inductores  
de los filtros).
- 1948....SHANNON, BODE y otros científicos de los laboratorios Bell, conversan  
sobre la posibilidad de un filtro digital.
- 1951....SHOCKLEY, inventa el transistor de efecto de campo (FET).
- 1953....LINVILL, J. G., propone el método de diseño que usa convertidores nega  
tivos de impedancia.
- 1954....se construye el calculador IBM 650 (del cual se venden alrededor de  
mil máquinas).
- 1955....R. P. SALLEN, y E. L. KEY, publicaron el artículo, "A PRACTICAL METHOD  
OF DESIGNING RC ACTIVE FILTERS", I.R.E. Transactions on circuit theory,  
marzo, 1955, que es un catálogo de filtros RC de segundo orden.
- 1959....aparece la configuración BIQUAD.
- 1960....se crea el primer circuito integrado para uso militar, Texas Instruments.



- 1960....KALMAN, R. E., publica el trabajo, "A NEW APPROACH TO LINEAR FILTERING AND PREDICTION PROBLEM", J. Basic Eng., ASME, 82 pp 35-45, trabajo fundamental para aplicaciones en el campo de missiles guiados y navegaci3n espacial, en las misiones Ranger, Mariner y Apolo.
- 1961....BUCY, R. S., y KALMAN, R. E., publica el trabajo, "NEW RESULT'S IN LINEAR FILTERING AND PREDICTION THEORY", J. Basic Eng, ASME, 83, pp 95-108, trabajo fundamental para ingenieria de control.
- 1962....BUCY, R. S. y FOLLIN J. W., publica el trabajo "ADAPTIVE FINITE TIME FILTERING", Ire Trans. Automatic Control, Vol. 4, pp 10-19.
- 1963....KAISER F. J., publica el trabajo, "DESING METHODS FOR SAMPLED DATA FILTERS", que es el diseo de filtros utilizando la transformada bi lineal, proceedings of the 1st Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory, 1963, noviembre, pp 221-236.
- 1965....BUCY, R. S., publica el trabajo, "NON LINEAR FILTERING", IEEE Trans. Automatic Control, pp 198.
- 1967....RADER, M. C. y GOLD., publican el articulo "DIGITAL FILTER DESING TECHNIQUES IN THE FREQUENCY DOMAIN", Proc. IEEE No. 55, pp 149-171.
- 1968....V.C. HUGHES, O. R. MULKEY, y M. H. WILLIAMSON, publican "THIN-FILM FABRICATION PROCEDURES FOR COMPLEX R-C ACTIVE FILTERS", Proceedings 1968 electronic components conference.
- 1969....S. S. HAYKIN, S. KRAMER, J. S. SCHEWCHUM y D. H. TRELEAVEN, publican "INTEGRATED-CIRCUIT IMPLEMENTATION OF DIREC-COUPLED GYRATOR", IEEE Journal of Solid-State circuits, June, 1969.
- 1970....STEIGLITZ, K., publica el articulo, "COMPUTER AIDED DESING OF RECURSIVE DIGITAL FILTERS", IEEE, Trans. on audio and electroacoustics, No. 18, pp 123-129.
- 1971....RABINER, L. R., publica el articulo, "TECHNIQUES FOR DESIGNIG FINITE-DURATION IMPULSE RESPONSE DIGITAL FILTERS, IEEE Trans. on communication technology, 19, No. 2 pp. 188-195.

- 1971....INTERL fabrica el primer microprocesador, el 4004.
- 1972....J. V. HU, y L. R. RABINER, publican "DESIGN TECHNIQUES FOR TWO DIMENSIONAL DIGITAL FILTERS", IEEE Transactions on audio and electroacoustic, octubre, 1972.
- 1972....PARKER, S. R. y HESS, S. publican el artículo "CANONIC REALIZATION OF SECOND ORDER DIGITAL FILTER DUE TO FINITE PRECISION ARITHMETICS", IEEE Trans. circuit theory CT-19, pp 410-413.
- 1973....McCLELLAN, J. H., PARKS, T. W. y RABINER, R. L., publican el artículo "A COMPUTER PROGRAM FOR DESIGNING OPTIMUM FIR LINEAR PHASE DIGITAL FILTERS, IEEE, Trans. audio electroacoustic, Vol. AU-21, pp 506-526, Dic.
- 1974....L. R. RABINER, J. F. KEISER, C. HERRMANN y M. T. DOLAN, publican "SOME COMPARISONS BETWEEN FIR AND IIR DIGITAL FILTERS", Bell system technical journal, Febrero, 1974.
- 1974....RABINER, L. R., GRAHAM, N. J., AND HELMS, D. H., publican el artículo "LINEAR PROGRAMMING DESIGN OF IIR DIGITAL FILTERS WITH ARBITRARY MAGNITUDE FUNCTION", IEEE Trans. audioelectroacoustic, Vol. AU-21, pp. 506-526, Dic.
- 1975....U. HEUTE, publica "HARDWARE CONSIDERATIONS FOR DIGITAL FILTER SECTION WITH STABLE OVERFLOW BEHAVIOUR", Archiv. Elektronik ubertragungstechnik marzo, 1975.
- 1976....TRW, INTERL CORPORATION, lanza al mercado los primeros multiplicadores de 8 bits integrados en una sola pastilla (actualmente se ofrecen multiplicadores de 16 bits, con velocidades de 45 nanosegundos en adelante y costos de \$25 hasta \$300 dolares).
- 1976....aparecen los filtros activos integrados.
- 1979....aparecen los primeros artículos sobre filtros basados en capacitores conmutados.

1981....al finalizar el año, aparecen microprocesadores especiales para el procesamiento numerico (number crunching) y las unidades aritméticas integradas en una sola pastilla.

### 1.1.2 BREVE HISTORIA DEL FILTRO DIGITAL

La historia de los filtros digitales parece comenzar en una conversación informal entre Shannon, Bode y otros investigadores de los Laboratorios Bell en el año 1948. Aunque este inicio no produjo ningún resultado, los filtros digitales, o mejor las ideas de utilizar técnicas digitales para el desarrollo de filtros se fueron introduciendo en seminarios y trabajos de graduados en algunas universidades.

Las bases de los filtros digitales se encuentran en la teoría del muestreo, los efectos espectrales de éste y en la transformada  $z$ . Estos principios dieron sus frutos poco a poco en el espectro de baja frecuencia de algunos problemas de control y de procesamiento de señales. A mediados de los 60 aparecen los trabajos de Kaiser, con la transformada bilineal para convertir los filtros analógicos en digitales, y de Cooley-Tukey, con la transformada rápida de Fourier. En esta forma, se empieza a configurar la teoría formal del procesamiento digital de señales. La transformada rápida de Fourier demostró que las técnicas digitales, podían competir favorablemente con las analógicas en muchos campos, especialmente en el análisis espectral.

A finales de los 60 queda en claro que las técnicas FIR (respuesta finita al impulso) e IIR (respuesta infinita al impulso) son dos vías posibles para el desarrollo de los filtros digitales, sin que ninguna predomine sobre la otra.

En la actualidad, el diseño de filtros digitales ha llegado al punto en que se dispone de una teoría bien organizada, en unión de una amplia colección de algoritmos, por lo que es posible aplicarlos cada vez con mayor facilidad a la solución de problemas que van desde el espectro de baja frecuencia de sismología, hasta el espectro de video de los sistemas de radar.

## 1.2 Transformadas y Análisis en Frecuencia.

Dondequiera que se empleen los filtros, la función principal de ellos es seleccionar una señal que interesa, lo cual se encuentra inserta en un contexto más complejo. Este procedimiento, que facilita el procesamiento de la información, permite recuperar datos o señales (o que en última instancia sólo separa lo principal de lo accesorio), no puede comprenderse fácilmente sin un modelo que permita representar las señales, los sistemas y los procesos.

Una señal física se analiza fácilmente al observarla en un osciloscopio, lo que constituye una imagen temporal (en el tiempo) de ella. También se le reconoce en un analizador de espectro, a través de sus componentes en frecuencia. Esto constituye una imagen muy diferente que, de alguna manera, es equivalente a la anterior, por lo cual es lo mismo observar o estudiar una señal en el tiempo que en la frecuencia.

Lo importante de la equivalencia mencionada es el hecho de que, por regla general, es más fácil comprender muchos fenómenos en el dominio de la frecuencia. Uno de los casos más significativos lo constituye, sin lugar a dudas, el estudio de los filtros.

A continuación se revisarán las herramientas y elementos de modelado de las señales y su representación en el tiempo y en la frecuencia.

### 1.2.1 Señales

Una señal es una variación de un parámetro físico (por ejemplo voltaje) que de alguna manera contiene una información. Normalmente se define señal como una función que va desde un cierto dominio  $IA$  a los números reales  $IR$ , es decir

$$f : IA \rightarrow IR$$

Con respecto al dominio  $IA$ , las señales pueden ser:

Señales Discretas: si el dominio  $IA$  es el de los números enteros. Entonces  $f$  existe en el tiempo sólo para ciertos instantes. Las señales dis

cretas se denotan  $f[n]$ .

Señales Analógicas (o continuas): si el dominio  $\mathbb{A}$  también es el de los números reales. Por lo tanto,  $f$  tiene valores en el tiempo para cada instante. Estas señales se denotan  $f(t)$ .

Desde el punto de vista de la forma en que varían, las señales se clasifican en:

Señales Periódicas: si cumplen con la propiedad de que existe un  $T$  mínimo, llamado período, tal que

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t+kT) & k \text{ entero} \\ f[n] &= f(n-kT) & k \text{ entero} \end{aligned}$$

Toda señal periódica se repite infinitamente, por lo que es suficiente conocerla en un período completo, o sea, entre  $f(t_0)$  y  $f(t_0+T)$  por ejemplo.

Señales Aleatorias: son aquéllas que no son factibles de predecir, en virtud de que sus variaciones no siguen una ley algebraica predeterminada y por tanto no es posible describirlas más que por procedimientos estadísticos.

Señales Aperiódicas: son aquéllas que presentan variaciones transitorias, por lo que no son periódicas ni aleatorias. La única caracterización válida para este caso es considerar que cuando el tiempo tiende a infinito, la función debe estabilizarse en una constante, normalmente cero, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{f(t)\} = C$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{f[n]\} = C$$

### Ejemplo 1

Señales discretas: ( $n$  entero,  $a$  constante)

$$f[n] = a^n; \quad f[n] = n; \quad f[n] = n!; \quad f[n] = n^2 - 1.$$

Señales Analógicas:

$$f(t) = \text{sen } t; \quad f(t) = a^{t+1}; \quad f(t) = \delta(t); \quad f(t) = e^{-t^2}$$

Señales periódicas:

$$f(t) = \cos t; \quad f(t) = t \quad 0 \leq t < T, \text{ periódica}; \quad f(t) = \text{tren de pulsos}$$

Señales aleatorias:

$$f(t) = \text{ruido}; \quad f(t) = \text{información (comunicaciones)}$$

Señales aperiódicas:

$$f(t) = \delta(t); \quad f(t) = e^{-|t|}, \quad f(t) = u(t), \quad f(t) = P(t)$$

En la tabla 1 se encontrará la definición de algunas señales especiales.

Cabe destacar aquí que identificar señales con funciones implica emplear un modelo muy definido y que muchas veces, es un ideal inalcanzable para las señales reales, sin embargo, estos modelos simplifican el estudio.

### 1.2.2 Serie Trigonométrica de Fourier.

En la misma forma en que una serie infinita de números puede ser convergente y la suma de todos los términos tenderá a un cierto número, una serie infinita de funciones puede llegar a aproximarse tanto como se quiera a una función dada.

Como las señales periódicas se repiten exactamente igual cada  $T$  segundos, al tomar un período completo de la señal  $f$ , entre  $t_0$  y  $t_0+T$ , puede definirse la Serie Trigonométrica de Fourier, de la siguiente forma:

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(n \omega_0 t + \phi_n)$$

donde

$$F_n = + \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad n \geq 1$$
$$A_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n \omega_0 t \, dt$$

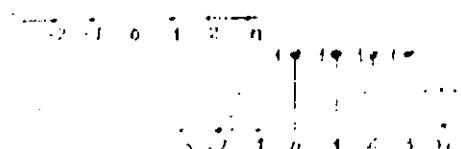
TABLA 1

SEÑALES ESPECIALES

1.1 Señales Discretas

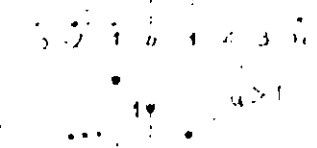
1.1.1 Secuencia delta

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



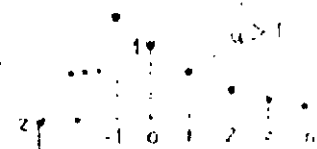
1.1.2 Escalón

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



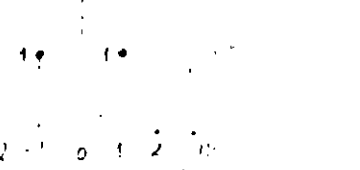
1.1.3 Exponencial a

$$f[n] = a^{-n}$$



1.1.4 Señal cualquiera

$$f[n] = \begin{cases} 0 & n < -1 \\ 1 & n = -1 \\ 2 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$



1.1.5 Convolución con la secuencia delta.

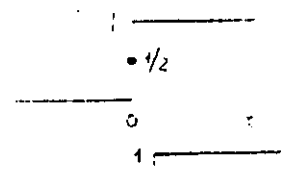
Nótese que para toda  $f[n]$  puede escribirse

$$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] \delta[n-k]$$

1.2 Señales analógicas

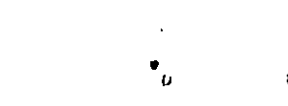
1.2.1 Escalón

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



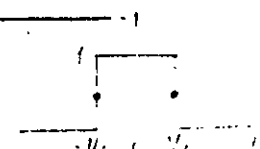
1.2.2 Signo

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



1.2.3 Pulso rectangular

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 1/2 & |t| = 1/2 \\ 0 & |t| > 1/2 \end{cases}$$



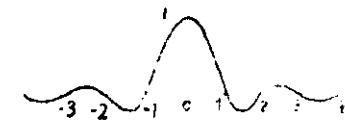
1.2.4 Pulso triangular

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1-|t| & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$



1.2.5 Pulso sinc

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$



1.2.6 Impulso o delta

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



Nota: La anterior no es una definición estricta de  $\delta(t)$ , la cual sólo puede ser correctamente definida a través de integrales.

Si  $f(t)$  es una señal continua en  $t=0$  (o en  $t=t_0$ ) entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

Algunas propiedades adicionales de la función  $\delta(t)$  son las siguientes:

1. Escalamiento

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

2. Muestreo. Si  $f(t)$  es una función continua en  $t=a$

$$f(t) \delta(t-a) = f(a) \delta(t-a)$$

3. Derivada n-ésima

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta^{(n)}(t-t_0) dt = (-1)^n f^{(n)}(t_0)$$

4. Derivada de  $\mu(t)$

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \delta(t)$$



$$B_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n \omega_0 t \, dt$$

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \, dt$$

$$\underline{F}_n = \tan^{-1} \frac{B_n}{A_n}$$

$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

A partir de las definiciones, puede encontrarse también la siguiente forma equivalente de la Serie Trigonométrica de Fourier, tomando  $F_0 = A_0$ ,

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n \omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n \omega_0 t$$

Los coeficientes A y B de las series pueden tomar valores cero bajo ciertas condiciones, las cuales se detallan a continuación.

Funciones Pares: la función  $f(t)$  es par si cumple con que  $f(t) = f(-t)$ .

En este caso se tiene

$$B_n = 0 \quad \text{para todo } n$$

$$A_n = \frac{4}{T} \int_{t_0}^{t_0+T/2} f(t) \cos n \omega_0 t \, dt$$

Funciones Impares: la función  $f(t)$  es impar si cumple con que  $f(t) = -f(-t)$ .

Ahora se cumple que

$$A_n = 0 \quad \text{para todo } n$$

$$B_n = \frac{4}{T} \int_{t_0}^{t_0+T/2} f(t) \sin n \omega_0 t \, dt$$

Funciones Simétricas: se dice que  $f(t)$  tiene simetría de medio período si  $f(t) = -f(t \pm T/2)$ . Entonces, se cumple que

$$A_n = B_n \quad \text{para todo } n \text{ par}$$

$$A_n = \frac{4}{T} \int_{t_0}^{t_0+T/2} f(t) \cos n \omega_0 t \, dt \quad n \text{ impar}$$

$$B_n = \frac{4}{T} \int_{t_0}^{t_0+T/2} f(t) \sin n \omega_0 t \, dt \quad n \text{ impar}$$

Si además de la simetría de medio período la señal es par, se aplican ambos resultados con lo que se tiene:

$$B_n = 0 \quad \text{para todo } n$$

$$A_n = 0 \quad \text{para todo } n \text{ par}$$

$$A_n = \frac{8}{T} \int_{t_0}^{t_0+T/4} f(t) \cos n \omega_0 t \, dt \quad n \text{ impar}$$

Si además de la simetría de medio período la señal es impar, se obtiene lo siguiente:

$$A_n = 0 \quad \text{para todo } n$$

$$B_n = 0 \quad \text{para todo } n \text{ par}$$

$$B_n = \frac{8}{T} \int_{t_0}^{t_0+T/4} f(t) \sin n \omega_0 t \, dt \quad n \text{ impar}$$

### Espectros de Amplitud y Fase

Los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$  que se han obtenido para la serie trigonométrica son dos conjuntos de valores que representan la señal  $f(t)$  en forma completa y detallada. La mejor manera de entender su significado es a través de  $F_n$

y  $\{F_n\}$  que se denominan respectivamente espectros de amplitud, fase, ya que son los coeficientes de amplitud y fase de la sumatoria de señales cosenoidales que son los componentes (armónicas) de  $f(t)$ .

Ejemplo 2. Considerando la señal periódica que entre 0 y T vale

$$f(t) = 3 t/T \quad 0 \leq t < T \quad (\text{periódica})$$

se obtiene de las ecuaciones para  $A_n$  y  $B_n$  que

$$A_n = 0; \quad A_0 = 3/2; \quad B_n = -\frac{3}{n\pi}$$

Por tanto  $f(t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n\pi} \cos(n \omega_0 t + \frac{\pi}{2})$

Entonces  $F_n = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{n\pi}; n=1,2,\dots \right\}$ ;  $\{F_n = \left\{ \frac{\pi}{2}, \text{ para todo } n \right\}$  son los espectros de amplitud y fase de la Serie Trigonométrica de Fourier.

### 1.2.3 Serie Exponencial de Fourier.

Al utilizar en las ecuaciones de la Serie Trigonométrica de Fourier la relación de Euler

$$e^{\pm j n \omega_0 t} = \cos n \omega_0 t \pm j \operatorname{sen} n \omega_0 t$$

se obtiene una representación alternativa de la Serie Trigonométrica, que se expresa en función de funciones exponenciales complejas, y que está dada por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) e^{jn \omega_0 t}$$

Además

$$F(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn \omega_0 t} dt$$

donde  $F(n\omega_0) = \frac{1}{2} (A_n - jB_n) \quad n > 0$

$$F(-n\omega_0) = \frac{1}{2} (A_n + jB_n) \quad n > 0$$

$$F(0) = A_0$$

Por definición la Serie exponencial es matemáticamente equivalente a la serie trigonométrica pero, como las funciones utilizadas en la aproximación son complejas, se obtiene una representación diferente ya que ahora se tienen frecuencias positivas y negativas.

Esto trae como consecuencia que la representación de los espectros de amplitud y fase contenga ahora componentes tanto positivos como negativos y se definan de la siguiente forma

$|F(n\omega_0)|$       espectros de amplitud

$\angle F(n\omega_0)$       espectro de fase

Puesto que  $F(n\omega_0)$  es ahora una función compleja, representa el mismo papel que los coeficientes originales  $F_n$  y  $\underline{F}_n$ , haciendo más compacto el resultado. Por otra parte, esta representación tiene de ventaja de facilitar el modelado de las señales periódicas cuando se le compara con el de las señales aperiódicas, como se verá en seguida.

#### 1.2.4 Transformada de Fourier.

Como una señal aperiódica no tiene periodo, no puede modelarse más que en un cierto intervalo de tiempo con las series de Fourier. Y el intervalo que se escoja hará que la señal aproximada sea también periódica con un período igual a dicho intervalo. Esto quiere decir que la señal aperiódica y la serie coinciden únicamente en el intervalo escogido, fuera de él la serie se repite infinitamente y sin cambiar en ambos sentidos.

Si se considera que una señal aperiódica tiene un período que tiende a infinito, se obtiene en el límite (a partir de la serie exponencial) la Trans

formada de Fourier, que se expresa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

donde la variable discreta  $n\omega_0$  se ha transformado en variable continua y la sumatoria en una integral.

En este caso,  $F(\omega)$  es también una función compleja, por lo que sus partes real  $|F(\omega)|$  y angular  $\angle F(\omega)$  constituyen los espectros de amplitud y de fase, respectivamente, de la función aperiódica  $f(t)$ . Sin embargo, ahora los espectros son continuos, como puede observarse en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 3. Considérense las funciones periódicas de la figura 1, cuyos espectros de amplitud y fase de la serie exponencial están dados por:

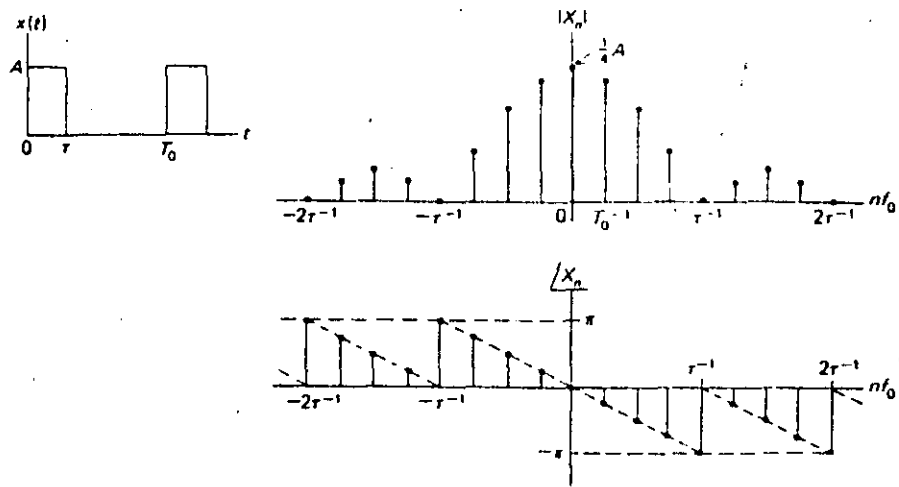
$$F_n = \frac{A\tau}{T} \operatorname{sinc} \left( \frac{n\omega_0 \tau}{2} \right) e^{-jn\omega_0 \tau/2}$$

$$|F_n| = \frac{A\tau}{T} \left| \operatorname{sinc} \left( \frac{n\omega_0 \tau}{2} \right) \right|$$

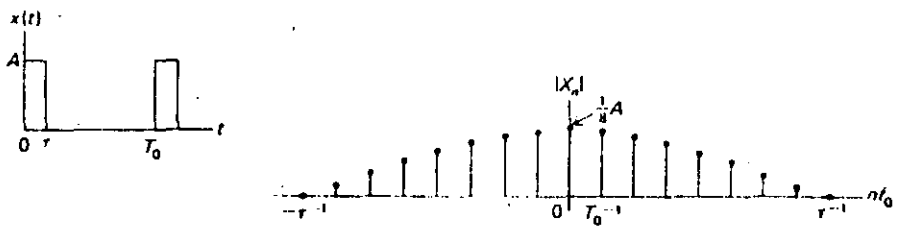
$$\angle F_n = \begin{cases} -n\omega_0 \tau/2 + \pi & n > 0 \\ -n\omega_0 \tau/2 + \pi & n < 0 \end{cases}$$

En la figura 1 se observan dos casos, para  $T/t = 4$  y  $T/t = 8$ , notándose que  $T$  determina la proximidad de las armónicas, en tanto que  $t$  la amplitud de la variación de la función sinc que como envolvente determina los valores de cada armónica.

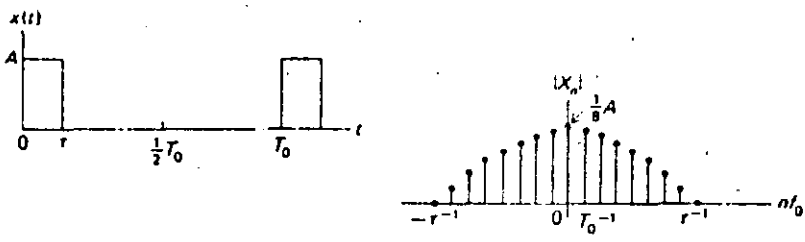
Ejemplo 4. Si la función fuera la misma del ejemplo anterior, pero periódica, tal como se muestra en la figura 2, se tendría que



(a)

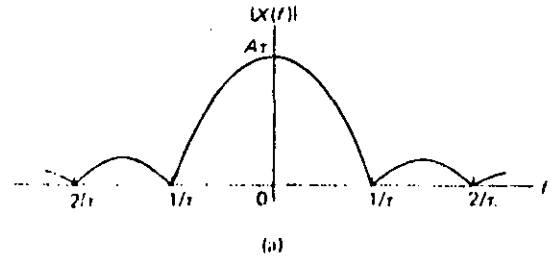


(b)

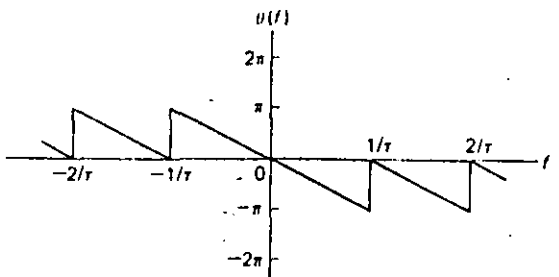


(c)

Fig 1 Espectros de amplitud y fase de una señal periódica pulsante.



(a)



(b)

Fig 2 Espectros de amplitud y fase para una señal aperiódica, similar a la de la figura 1, excepto por su carácter no repetitivo.

$$F(\omega) = At \operatorname{sinc} \left( \frac{\omega T}{2} \right) e^{-j\omega_0 T/2}$$

$$|F(\omega)| = At \operatorname{sinc} \left( \frac{\omega T}{2} \right)$$

$$|F(\omega)| = \begin{cases} -\omega T/2 & \omega > 0 \\ -\omega T/2 \pm \pi & \omega < 0 \end{cases}$$

Es evidente de las mismas figuras que los espectros para las señales periódicas y aperiódicas son similares, exceptuando el hecho de que uno es continuo y el otro discreto.

Las envolventes son exactamente iguales y la influencia de  $\tau$  se refleja tanto en la amplitud, como en la variación de la función sinc.

### 1.2.5 Propiedades de la Transformada de Fourier

A continuación se analizarán las propiedades más importantes de la Transformada de Fourier, las que pueden extenderse a las series con cierta facilidad.

Simetría. Conociendo un par de la transformada, es decir  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ , puede determinarse el siguiente nuevo par por simetría

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

Superposición. Si se conocen los  $n$  pares  $f_i(t) \leftrightarrow F_i(\omega)$ , entonces

$$\sum_{i=1}^n f_i(t) \leftrightarrow \sum_{i=1}^n F_i(\omega)$$

Escalamiento. Si  $a$  es una constante, entonces

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Desplazamiento en el Tiempo. Si la señal  $f(t)$  se retrasa  $t_0$  segundos, entonces

$$f(t-t_0) \leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

Desplazamiento de la Frecuencia. Un desplazamiento de  $F(\omega)$  en la frecuencia equivale a lo siguiente en el tiempo

$$f(t) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$$

Modulación. Al multiplicar  $f(t)$  por  $\cos \omega_0 t$  se tiene en frecuencia un desplazamiento que equivale a la modulación lineal

$$f(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$$

Derivada en el Tiempo. Al tomar derivadas en el tiempo, se producen los siguientes efectos en frecuencia

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$$

Derivada en la Frecuencia. Cuando la derivada se toma en la frecuencia, resulta

$$(-jt)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

Convolución. Al efectuar la convolución de dos funciones  $f(t)$  y  $g(t)$  en el tiempo la Transformada de Fourier resultante es el producto de las transformadas de Fourier de las señales, es decir

$$f(t) * g(t) \leftrightarrow F(\omega) G(\omega)$$

Multiplicación. Análogamente a lo anterior, al multiplicar las señales en el tiempo, en la frecuencia resulta

$$f(t) g(t) \leftrightarrow F(\omega) * G(\omega)$$

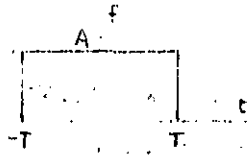
Teorema de Parseval. Otra propiedad interesante es la siguiente, conocido como Teorema de Parseval



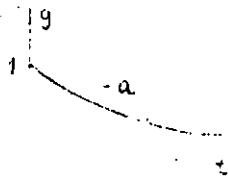
## CONVOLUCION DE 2 SEÑALES

El siguiente es un ejemplo de la convolución de las señales

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < -T \\ A & -T < t < T \\ 0 & t > T \end{cases}$$



$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-at} & t > 0 \end{cases}$$

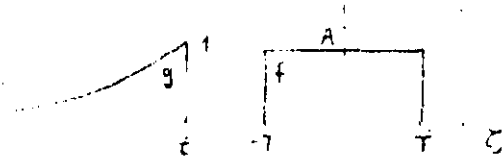


I. Considerando el caso  $t < -T$

$$f(t)*g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta)g(t-\zeta)d\zeta$$

se tiene que

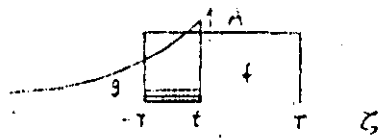
$$f(t)*g(t) = 0 \quad t < -T$$



II. Ahora para  $-T \leq t \leq T$

$$f(t)*g(t) = \int_{-T}^t A e^{-a(t-\zeta)} d\zeta$$

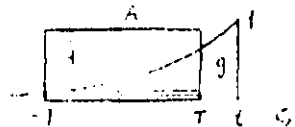
$$= \frac{A}{a} [1 - e^{-a(t+T)}] \quad -T \leq t \leq T$$



III. Para  $t > T$

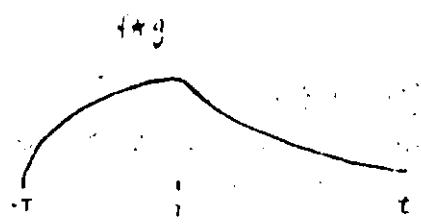
$$f(t)*g(t) = \int_{-T}^T A e^{-a(t-\zeta)} d\zeta$$

$$= \frac{A}{a} [e^{aT} - e^{-aT}] e^{-at}$$



En resumen

$$f(t)*g(t) = \begin{cases} 0 & t < -T \\ \frac{A}{a} [1 - e^{-a(t+T)}] & -T \leq t \leq T \\ \frac{A}{a} [e^{aT} - e^{-aT}] e^{-at} & t > T \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(\omega) d\omega$$

Teorema de la Energía. Así como en el caso anterior hay una equivalencia en las áreas bajo los productos, en este caso se tiene una equivalencia en las áreas bajo los cuadrados, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\omega) d\omega$$

### 1.2.6 Transformada z

Supóngase que se tiene una función discreta (o una secuencia)  $f[n]$ , entonces existe una correspondencia entre esta función y  $F(z)$ , donde

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] z^{-n}$$

Inversamente, si se conoce  $F(z)$ , la función  $f[n]$  puede determinarse mediante la expresión

$$f[n] = \frac{1}{2\sigma} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(e^{j\omega T}) e^{jn\omega T} d\omega \quad \sigma = \frac{\pi}{T}$$

La transformada z resulta tener propiedades similares a la Transformada de Fourier, entre las que destacan las siguientes.

Desplazamiento en el Tiempo. Si  $f[n]$  y  $F(z)$  son un par de la transformada z, entonces para todo un entero,

$$f[n-m] \leftrightarrow F(z) z^{-m}$$

Convolución. Considerando que  $f_1[n] \leftrightarrow F_1(z)$  y  $f_2[n] \leftrightarrow F_2(z)$  son pares de la transformada z, entonces se cumple que

TABLA II

## TRANSFORMADAS DE FOURIER

$f(t)$	$F(\omega)$
$\Pi(t)$	$\text{sinc}(f) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{\text{sen}(\pi f)}{\pi f}$
$\text{sinc}(t)$	$\Pi(f) = \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\text{sinc}^2(t)$	$\Lambda(f) = \Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$\Lambda(t)$	$\text{sinc}^2(f) = \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$e^{at} \mu(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$e^{-t^2/2}$	$\sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$
$\mu(t)$	$\frac{1}{2} \delta\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) + \frac{1}{j\omega}$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f} = \frac{2}{j\omega}$
$1/t$	$-j \text{sgn}(\omega)$
$\cos \omega_0 t$	$\Pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$
$\text{sen} \omega_0 t$	$j\Pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$

$$f_1[n] * f_2[n] \leftrightarrow F_1(z) F_2(z)$$

Ejemplo 5. Aplicando la definición se encuentran los siguientes pares de la transformada z

$$f[n] = \delta[n-k] \leftrightarrow F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-k] z^{-n} = z^{-k}$$

$$f[n] = 3\delta[n-2] + 2\delta[n-5] \leftrightarrow F(z) = 3z^{-2} + 2z^{-5}$$

$$f[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad F(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1}$$

### 1.2.7 Transformada Discreta de Fourier

Cuando una señal analógica se dispone en la forma de una serie de muestras, el cálculo de  $F(\omega)$  puede hacerse por integración numérica, lo que conduce al siguiente resultado

$$\bar{f}(mT_1) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{F}(n\omega_0) W_N^{mn}$$

donde

$$W_N = e^{j2\pi/N}$$

$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT) \quad \bar{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega+n\omega_1)$$

$$T_1 = T/N; \quad \omega_0 = 2\pi/T \quad \omega_1 = 2\pi/T_1 = N\omega_0$$

Siendo  $T$  y  $N$  constantes arbitrarias [aunque puede considerarse  $T$  como el período de  $f(t)$  y  $T_1$  el período de  $F(\omega)$ ], la evaluación de la Transformada de Fourier se reduce a la solución de un sistema de  $N$  ecuaciones de la forma

ma

El valor de la constante es  $\frac{1}{N}$

La transformada de Fourier discreta de una función  $a_n$  es una función  $A_m$  simétrica y entera positiva. La transformada de Fourier discreta de una función  $A_m$  es una función  $a_n$  simétrica y entera positiva. La transformada de Fourier discreta de una función  $a_n$  es una función  $A_m$  simétrica y entera positiva. La transformada de Fourier discreta de una función  $A_m$  es una función  $a_n$  simétrica y entera positiva.

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_m W_N^{-mn}$$

La correspondencia que se establece entre  $a_n$  y  $A_m$ , para un número de muestras igual a  $N$  se denota

$$a_n \xleftrightarrow{N} A_m$$

y se dice que son un par de la Serie Discreta de Fourier de orden  $N$ .

En realidad la serie discreta establece una relación entre dos series de números, las cuales cumplen con ciertas propiedades que son similares a las ya analizadas.

Propiedades básicas. Se supone que siempre se tiene

$$a_{-n} = a_{N-n}; \quad A_{-m} = A_{N-m}; \quad a_{-n} \xleftrightarrow{N} A_{-m}$$

Convolución. Si  $a_n \xleftrightarrow{N} A_m$  y  $b_n \xleftrightarrow{N} B_m$  son pares de la serie discreta, entonces

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k b_{n-k} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_m B_m W_N^{-mn}$$

Desplazamiento. Si  $a_n \xleftrightarrow{N} A_m$  es un par de la serie discreta, entonces

$$a_{n-k} \xleftrightarrow{N} A_m W_N^{mk}$$

Teorema de la Energía. Los valores absolutos al cuadrado de los términos de ambas series están relacionados por

$$\sum_{k=0}^{N-1} |a_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |A_m|^2$$

### 1.2.8 Transformada Rápida de Fourier

Una de las principales propiedades de la Transformada Discreta de Fourier es la que permite disminuir apreciablemente el cálculo de los  $N$  números de  $A_m$  y que define la Transformada Rápida de Fourier a través del siguiente teorema

Si  $b_m = a_{2n}$  y  $c_n = a_{2n+1}$  son los términos pares e impares de la se cuencia  $a_n$ , entonces se cumple que

$$A_m = B_m + C_m W_{2N}^m$$

con esta relación se tiene que, al descomponer sucesivamente cada serie de términos los cálculos se aceleran notablemente. Por supuesto, como cada descomposición divide la serie en mitades, el máximo de simplificación se obtiene para series con un número de términos igual a una potencia de dos.

Ejemplo 6. Considérese la Serie

$$a_n = \{0,1,0,0,0,0,0,1\}$$

$$G_0 = a_3 + a_7 = 1$$

$$G_1 = a_3 - a_7 = -1$$

$$F_0 = a_1 + a_5 = 1$$

$$F_1 = a_1 - a_5 = 1$$

$$E_0 = a_2 + a_6 = 0$$

$$E_1 = a_2 - a_6 = 0$$

$$D_0 = a_0 + a_4 = 0$$

$$D_1 = a_0 - a_4 = 0$$

$$C_m = F_m + G_m W_4^m$$

$$C_0 = 1 + 1 = 2$$

$$C_1 = 1 + (-1) W_4^1 = 1 - j$$

$$C_2 = 1 - 1 = 0$$

$$C_3 = 1 + j$$

$$B_0 = B_1 = B_2 = B_3 = 0$$

$$B_m = D_m + E_m W_4^m$$

Finalmente  $A_m = B_m + C_m W_8^m$

$$A_0 = 0 + 2 = 2$$

$$A_1 = 0 + (1-j) W_8 = \sqrt{2}$$

$$A_4 = -2$$

$$A_5 = -\sqrt{2}$$

$$A_2 = 0$$

$$A_6 = 0$$

$$A_3 = 0 + (1+j) W_8^3 = -\sqrt{2}$$

$$A_7 = \sqrt{2}$$

Por la definición de  $W_N^m$ , se tiene que los valores que toma corresponden a las  $N$  raíces de 1 (el círculo unitario). En el ejemplo anterior se tenía que

$$W_8^0 = 1; \quad W_8^1 = \frac{1+j}{\sqrt{2}}; \quad W_8^2 = j; \quad W_8^3 = \frac{-1+j}{\sqrt{2}}$$

$$W_8^4 = -1; \quad W_8^5 = -\frac{1+j}{\sqrt{2}}; \quad W_8^6 = -j; \quad W_8^7 = \frac{1-j}{\sqrt{2}}$$

Nótese también que  $W_N^m$  tiene las siguientes propiedades

$$W_N^0 = 1; \quad W_{2m}^m = -1; \quad W_{4m}^m = j; \quad W_{4m}^{3m} = -j;$$

$$W_N^{n+kN} = W_N^n; \quad W_N^m = \left( W_N^{N-m} \right)^* ;$$

Por lo que

$$A_{m+N} = B_m - C_m W_{2N}^m$$

### 1.2.9. Transformada de Laplace

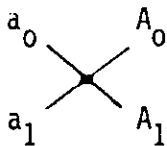
La Transformada de Fourier tiene una aplicación limitada, ya que exige que la función a transformar sea absolutamente integrable, lo cual se extiende también a la función de transferencia, que es el cociente entre las Transformadas de Fourier de la entrada y la salida. Esta situación puede resolverse utilizando la Transformada de Laplace que al incorporar tácitamente un término de convergencia extiende la aplicabilidad de la transformación.

La Transformada de Laplace se define

## CALCULO DE LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER

Al efectuar el cálculo de la Transformada Rápida de Fourier conviene emplear los diagramas que se señalan a continuación:

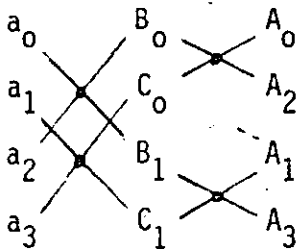
Para  $n = 2$   $a_n = \{a_0, a_1\}$



$$A_0 = a_0 + a_1 W_2^0 = a_0 + a_1$$

$$A_1 = a_0 + a_1 W_2^1 = a_0 - a_1$$

Para  $u = 4$



$$A_m = B_m + C_m W_4^m$$

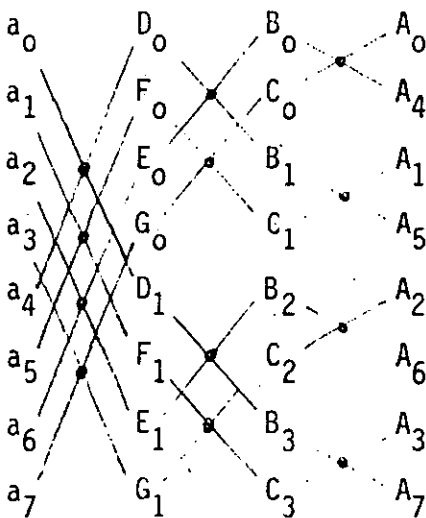
$$B_0 = a_0 + a_2 W_2^0$$

$$B_1 = a_0 + a_2 W_2^1$$

$$C_0 = a_1 + a_3 W_2^0$$

$$C_1 = a_1 + a_3 W_2^1$$

Para  $n = 8$



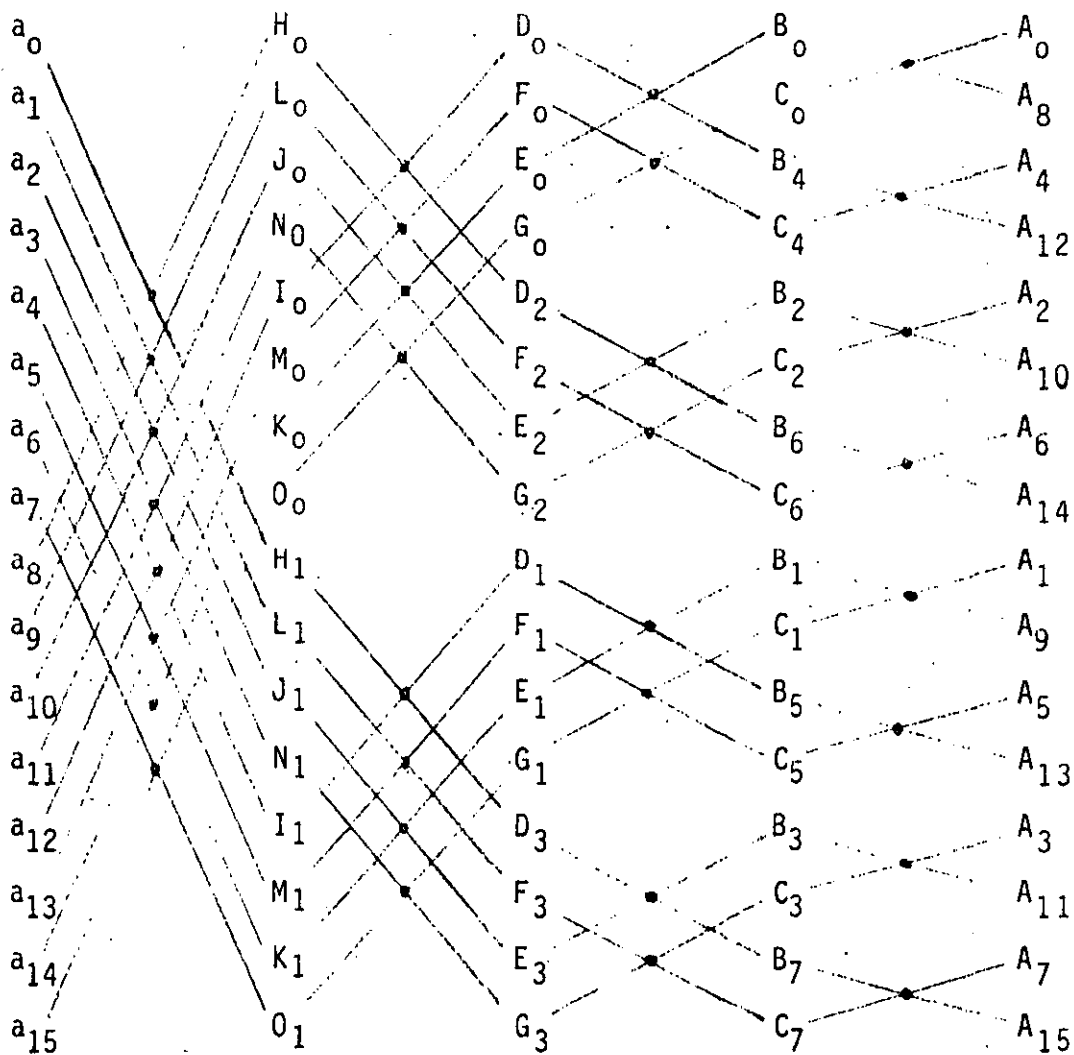
$$A_m = B_m + C_m W_8^m$$

$$B_m = D_m + E_m W_4^m$$

$$C_m = F_m + G_m W_4^m$$



ALGORITMO PARA TRF DE 16 ELEMENTOS



$$A_m = B_m + C_m W_{16}^m$$

$$D_m = H_m + I_m W_4^m$$

$$E_m = J_m + K_m W_4^m$$

$$B_m = D_m + E_m W_8^m$$

$$F_m = L_m + M_m W_4^m$$

$$C_m = F_m + G_m W_8^m$$

$$G_m = N_m + O_m W_4^m$$

$$F(S) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

donde  $s$  es la variable compleja  $\sigma + j\omega$  que ha sustituido la variable  $\omega$  de la Transformada de Fourier. Nótese que en el exponente  $\sigma$  es el término que permite la convergencia. La Transformada de Laplace tiene propiedades similares a la de Fourier, aunque la variable  $s$  (frecuencia compleja) presenta algunas particularidades en cuanto a la convergencia de la integral y de la transformada inversa.

La relación existente entre ambas transformadas permite establecer la siguiente relación de equivalencia

$$F(\omega) = F(s=j\omega) \quad \sigma = 0$$

Sin embargo, la ecuación anterior sólo es válida si la región de convergencia incluye el eje imaginario, es decir, si  $F(s)$  es acotada para todos los valores de  $j\omega$ . Si existe algún valor de  $j\omega$  que haga tender a  $F(s)$  a infinito (polo), entonces deben agregarse términos adicionales que correspondan a estos polos situados en el eje imaginario.

### 1.3. Análisis Básico de Sistemas

Al considerar que las señales son procesadas y transformadas en otras, surge el concepto de sistema como elemento que de alguna manera asigna a cada señal de un conjunto dado, otra del mismo conjunto o de otro muy diferente.

#### 1.3.1 Definiciones

Considerando que  $E$  y  $S$  son dos clases de funciones determinadas, sistema es la regla  $R$  tal que asigna a cada  $f \in E$  una función  $f \in S$ .

$$R : E \rightarrow S$$

Los sistemas pueden clasificarse, como las señales, en discretos y analógicos (continuos), de la siguiente forma:

Sistemas Discretos: son aquellos en que  $E$  y  $S$  son clases de funciones discretas. Ejemplo: filtros digitales.

Sistemas Analógicos: son aquellos en que  $E$  y  $S$  son clases de funciones analógicas. Ejemplo: filtros activos.

Sistemas A/D: son los sistemas que realizan la transición entre señales analógicas y digitales, o sea,  $E$  es una clase de funciones analógicas y  $S$  es una clase de funciones discretas. Ejemplo: convertidor A/D.

Sistemas D/A: son los que realizan la función inversa de los anteriores, es decir,  $E$  es una clase de funciones discretas y  $S$  es una clase de funciones analógicas. Ejemplo: convertidor D/A.

Un sistema cualquiera  $R$ , que asigna a cada  $f \in E$  una  $g \in S$ , se denota mediante el diagrama y la ecuación siguiente:

$$f \rightarrow \boxed{R} \xrightarrow{g} \quad g = R \{f\}$$

con lo cual se indica que la función  $g$  (de salida) depende de la función

$f$  (de entrada), a través de la regla  $R$  (del sistema).

Con estos modelos, pueden establecerse las siguientes definiciones:

Sistemas Lineales: El sistema  $R$  es lineal si su respuesta (salida) a una entrada (o excitación) consistente en una suma ponderada y lineal de señales es igual a la misma suma ponderada de las respuestas del sistema a cada una de las mismas señales. Esto es,

$$R \left\{ \sum_i a_i f_i \right\} = \sum_i a_i R\{f_i\}$$

donde  $a_i$  = coeficiente  $i$ -ésimo

$f_i$  = función  $i$ -ésima

Sistemas Invariantes en el Tiempo: El sistema  $R$  es invariante en el tiempo cuando su respuesta es independiente del instante en que se aplique la entrada, es decir, si la salida del sistema  $g(t)$  es

$$g(t) = R\{f(t)\}$$

entonces  $g(t-t_0) = R\{f(t-t_0)\}$

Para sistemas discretos, si

$$g[n] = R\{f[n]\}$$

entonces  $g[n-n_0] = R\{f[n-n_0]\}$

Sistemas Causales: El sistema  $R$  es causal si la respuesta a una función tal que  $f(t) = 0$ , para todo  $t < 0$ , cumple con que  $R\{f\} = 0$ , para todo  $t < 0$ .

Una forma simple de definir la causalidad es exigiendo que la respuesta a impulso  $[\delta(t)]$  sea cero para todo  $t$  menor que cero. También se define exigiendo que las respuestas hasta  $t = t_1$  a dos señales de entrada idénticas hasta  $t = t_1$ , sean también iguales, o sea:

Si  $f_1(t) = f_2(t)$  para todo  $t \leq t_1$

entonces  $R\{f_1\} = R\{f_2\}$  para todo  $t \leq t_1$

para sistemas discretos, si

$$f_1[n] = f_2[n] \quad \text{para todo } n \leq n_1$$

entonces  $R\{f_1\} = R\{f_2\}$  para todo  $n \leq n_1$

La causalidad es una condición útil para distinguir los sistemas físicos, ya que significa que la respuesta no puede depender de estímulos o entradas que ocurran o se presenten con posterioridad.

Sistemas en Cascada: se dice que los sistemas  $R_1$  y  $R_2$  están en cascada si la salida de uno de ellos (por ejemplo, la de  $R_1$ ) se utiliza como entrada del otro (en este caso  $R_2$ ).

Entonces

$$R_2\{f_2\} = R_2\{R_1\{f_1\}\}$$

Sistemas Estables: un sistema  $R$  es estable si la respuesta a una entrada acotada es también acotada.

Sistemas Reales: Un sistema  $R$  es real si la respuesta a una entrada real es también una función real.

Respuesta a Impulso: La salida del sistema  $R$  cuando la entrada es la función impulso es de particular interés y se denota

$$h(t) = R\{\delta(t)\}$$

Para sistemas discretos

$$h[n] = R\{\delta[n]\}$$

Convolución: La respuesta del sistema  $R$  a una función  $f(t)$  cualquiera puede calcularse como la convolución entre esta misma función y la respuesta a impulso. La convolución entre  $f(t)$  y  $h(t)$  se denota  $f(t) * h(t)$  y se define de la siguiente manera:

$$g(t) = f(t) * h(t) = h(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) h(t-x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(t-x) dx$$

Para sistemas discretos

$$g[n] = f[n] * h[n] = h[n] * f[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] h[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] f[n-k]$$

También se demuestra que una función  $f$  cualquiera puede escribirse

$$f(t) = f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(t-x) dx$$

$$f[n] = f[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] \delta[n-k]$$

Función Sistema: Este concepto aparece al considerar que la entrada a un sistema analógico lineal  $R$  es

$$f(t) = e^{j\omega_0 t}$$

Entonces

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0(t-x)} h(x) dx = e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_0 x} h(x) dx$$

$$= H(\omega=\omega_0) e^{j\omega_0 t}$$

donde

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-j\omega x} dx$$

se conoce como la función sistema (o función de transferencia) y es la transformada de Fourier de  $h(t)$ .

Algunas propiedades de la función sistema son las siguientes:

$$\mathcal{R} \left\{ e^{j\omega t} \right\} = H(\omega) e^{j\omega t}$$

$$G(\omega) = F(\omega) H(\omega)$$

donde  $G(\omega)$  y  $H(\omega)$  son las transformadas de Fourier de  $g(t)$  y  $h(t)$ , respectivamente.

Para sistemas discretos, se cumple en forma similar que

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

$$\mathcal{R}\{z^n\} = H(z) z^n$$

donde  $H(z)$  es la transformada  $z$  de  $h[n]$ .

La definición de la función sistema o función de transferencia se aplica también y en forma mucho más general a la Transformada de Laplace  $H(s)$ , para sistemas analógicos, por lo que en ocasiones se hará referencia a ella.

### 1.3.2 Propiedades y Aplicaciones

Como ya se ha visto, la función sistema de un sistema analógico tiene las siguientes propiedades:

1. Es la Transformada de Fourier de la Respuesta a Impulso:

En un sistema lineal e invariable en el tiempo cualquiera  $h(t)$

$$f(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow g(t)$$

se cumple que  $g(t) = h(t) * f(t) = f(t) * h(t)$

y también que  $H(\omega) \leftrightarrow h(t)$

## DISTORSION Y TRANSMISION SIN DISTORSION

Una señal, al pasar por un sistema cualquiera, es por lo general afectada en sus características, de manera que la señal de salida presenta diferencia con respecto a la entrada. Estas diferencias se conocen como distorsión, la cual se clasifica de la siguiente forma:

Distorsión Lineal en Amplitud. Es la que se produce en un sistema lineal en el cual las distintas frecuencias son transmitidas con diferentes niveles de atenuación o amplificación, o sea, la característica de transferencia de amplitud del sistema  $|H(\omega)|$  no es constante en frecuencia.

Distorsión Lineal de Fase. En forma similar a la anterior, se produce en los sistemas lineales cuando la característica de transferencia de fase  $\angle H(\omega)$  es no lineal. Entonces, los retrasos que experimentan las distintas frecuencias son tales que no se reconstruye la señal a la salida. Nótese que se aceptan retrasos distintos, pero proporcionales a la frecuencia.

Distorsión No Lineal. Propia de características no lineales, la distorsión no lineal se caracteriza porque a la salida del sistema aparecen frecuencias que no estaban presentes a la entrada.

Transmisión sin Distorsión. De acuerdo a las definiciones, un sistema que transmite sin distorsión debe presentar una característica constante en amplitud y lineal en fase, es decir

$$H(\omega) = K e^{-j\omega t_0}$$

Se espera entonces de un sistema que transmita sin distorsión que atenúe o amplifique, y que presente un retraso constante  $t_0$  a la señal de entrada. Entonces, se tiene que si  $f(t)$  es la entrada  $K f(t-t_0)$  será la salida.

$$\begin{array}{ccc} f(t) & & k f(t-t_0) \\ & \searrow & \swarrow \\ & H(\omega) & \end{array}$$



2. Es el cociente de las Transformadas de Fourier de la salida y la entrada, es decir

$$H(\omega) = G(\omega)/F(\omega)$$

donde  $F(\omega) \leftrightarrow f(t)$

$$G(\omega) \leftrightarrow g(t)$$

3. Es el coeficiente de la respuesta del sistema a una entrada igual a

$$f(t) = e^{j\omega t}$$

Es decir

$$g(t) = H(\omega) e^{j\omega t}$$

En los sistemas discretos, las tres propiedades mencionadas se cumplen de manera similar, o sea,

1.  $H(z)$  es la Transformada de la respuesta a impulso

$$H(z) \leftrightarrow h[n]$$

2. Es el cociente de las Transformadas  $z$  de la salida y la entrada

$$H(z) = G(z)/F(z)$$

3. Es el coeficiente de la respuesta del sistema a una entrada igual a

$$f[n] = z^n$$

es decir

$$g[n] = H(z) z^n$$

La función de transferencia  $H(\omega)$  es una función compleja, por lo que se tiene que

$$H(\omega) = |H(\omega)| \underline{H(\omega)}$$

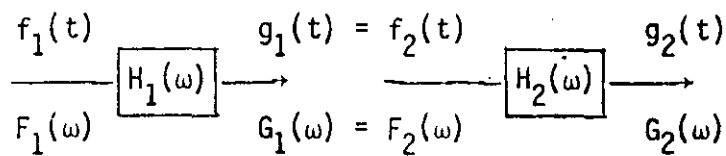
donde  $|H(\omega)|$  se denomina la respuesta de amplitud del sistema y  $\underline{H(\omega)}$  el

desplazamiento de fase o respuesta de Fase del sistema. También como  $h(t)$  es una función real, se tiene que

$$|H(\omega)| = |H(-\omega)|$$

$$\angle H(\omega) = -\angle H(-\omega)$$

Sistemas Interconectados: Ya se vió que al aplicar la salida de un sistema  $H_1(\omega)$  como entrada de otro sistema  $H_2(\omega)$  se tiene la conexión en cascada que resulta

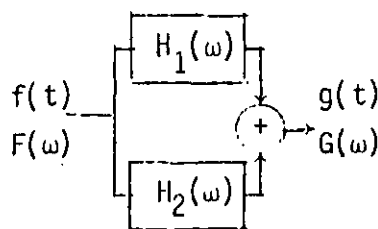


donde se cumple que

$$G_2(\omega) = H_1(\omega) H_2(\omega) F_1(\omega)$$

$$g_2(t) = h_1(t) * h_2(t) * f_1(t)$$

La conexión en paralelo consiste en sumar la salida de dos sistemas a los que se les aplica la misma entrada, o sea



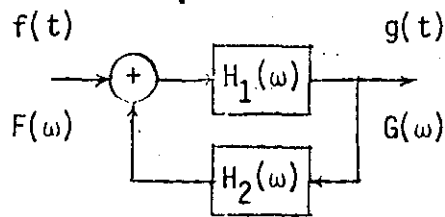
Aquí se cumple que

$$G(\omega) = [H_1(\omega) + H_2(\omega)] F(\omega)$$

$$g(t) = [h_1(t) + h_2(t)] * f(t)$$

Por último la conexión realimentada consiste en tomar la salida y debi

damente procesada volver a aplicarla a la entrada, es decir



De donde resulta que

$$G(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{1 + H_1(\omega) H_2(\omega)} F(\omega)$$

La función sistema y la respuesta a impulso son entonces dos representaciones válidas de un sistema cualquiera, digital o analógico, en la frecuencia y en el tiempo, respectivamente. La función sistema, sin embargo, presenta una serie de características que la hacen mas apropiada para modelar los sistemas en general. Algunas de estas ventajas quedan de manifiesto en la representación gráfica de la función sistema y en el diagrama de polos y ceros, que verán a continuación.

Diagrama de Polos y Ceros. La función de transferencia  $H(s)$  puede expresarse en general como el cociente de dos polinomios, o sea

$$H(s) = \frac{G(s)}{F(s)} = \frac{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

pero como los polinomios pueden factorizarse por sus raíces, se tiene

$$H(s) = \frac{(s-z_0)(s-z_1)\dots(s-z_m)}{(s-p_0)(s-p_1)\dots(s-p_m)}$$

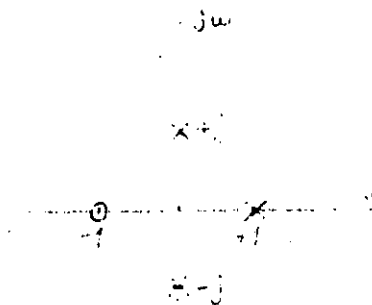
donde  $z_0, z_1, \dots, z_m$  son los valores que hacen cero la función de transferencia  $H(s)$  por lo que se les denomina ceros. También, como los valores  $p_0, p_1, \dots, p_m$  hacen que  $H(s)$  tienda a infinito, se les llama polos de  $H(s)$ .

La importancia de estos valores proviene de las condiciones de convergen

cia de las integrales en que están incluidas las funciones, al mismo tiempo que permiten la representación gráfica de  $H(s)$  en el plano  $s$  mediante únicamente los polos y los ceros.

Ejemplo 7. El diagrama de polos y ceros de la función

$$H(s) = \frac{(s+1)}{(s-1)(s^2+1)}$$



se representa señalando los ceros con un circulito y los polos con una  $x$ , tal como se indica en la figura.

Diagrama de Bode. La función de transferencia  $H(j\omega)$  puede escribirse en general de la siguiente forma:

$$H(j\omega) = \frac{K (1 + j\omega T_1) (1 + j\omega T_2)^m \dots}{(j\omega)^n (1 + j\omega T_0) [1 + (2 \tau/\omega_n) j\omega + (1/\omega_n^2) (j\omega)^2] \dots}$$

Al expresar la magnitud de  $H(j\omega)$  en decibeles (considerando que  $x$  expresado en decibeles es  $20 \log x$ , se tiene que

$$20 \log |H(j\omega)| = 20 \log K + 20 \log (1+j\omega T_1) + m 20 \log (1+j\omega T_2) + \dots - n 20 \log (j\omega) - 20 \log (1+j\omega T_0) - \dots$$

También, la parte angular de  $H(j\omega)$  se expresa

$$\begin{aligned} |H(j\omega)| = & K + \tan^{-1} \omega T_1 + m \tan^{-1} \omega T_2 + \dots \\ & - n 90^\circ - \tan^{-1} \omega T_0 - \tan^{-1} \frac{2\zeta/\omega_n}{1 - \omega^2/\omega_n^2} - \dots \end{aligned}$$

Los factores contenidos en  $H(j\omega)$  presentan las siguientes características.

Constantes K. Puesto que  $K$  no depende de la frecuencia y su valor es real (generalmente positiva) y se tiene que

$$20 \log K = \text{constante}$$

$$K = 0, \quad \text{siempre que} \quad K > 0$$

Factores  $j\omega$ . Un factor del tipo  $j\omega$  que aparece en el denominador representa lo siguiente

$$20 \log (1/j\omega)^n = -n 20 \log \omega$$

$$\angle (1/j\omega)^n = -n 90^\circ$$

Nótese que si el factor está en el numerador los resultados son los mismos, pero con signo positivo. También se tiene que en el diagrama de magnitud logarítmica versus frecuencia los factores  $j\omega$  se dibujan como líneas rectas de pendiente igual a 6 decibeles por década o 20 decibeles por octava (positiva si es factor del numerador y negativa, si es del denominador). La curva debe cortar el eje 0dB en  $\omega=1$ . Véase figura 3.

Factores  $1 + j\omega T$ . Para este caso se tiene (denominador) que

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

Donde se cumple que

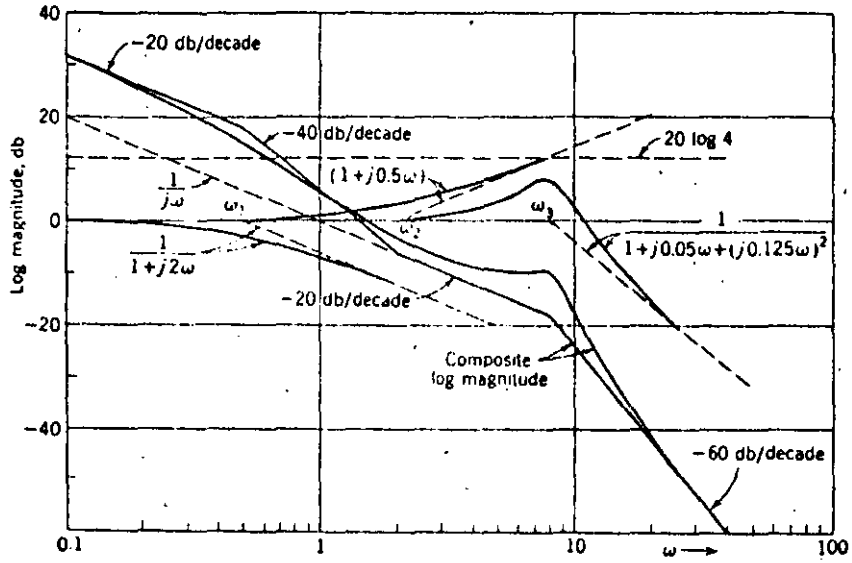


Fig. 6 a) Trazado de los factores del ejemplo, factor por factor.

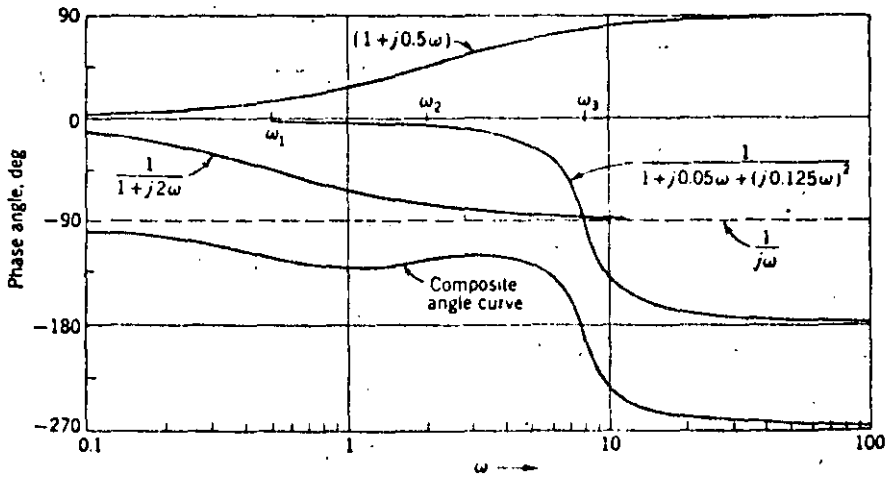


Fig. 6 b) Trazado del resultado compuesto de los factores del ejemplo.

tor (con asintotas) y posteriormente se ha encontrado el resultado compuesto.

### 1.3.3 El sistema de segundo orden

El sistema cuya función de transferencia es

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

presenta algunas características interesantes y se presenta con mucha frecuencia, por lo que se considerarán algunas de sus principales propiedades.

#### Respuesta a Impulso

Como la respuesta a impulso es la transformada inversa de  $H(s)$  se tiene (véase la figura 7)

$$h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen } \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t \quad \zeta < 1$$

$$h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \quad \zeta = 1$$

Cuando  $\zeta > 1$  entonces el denominador de  $F(s)$  puede factorizarse en dos raíces reales diferentes, situación que no tiene mayor interés porque  $F(s)$  presentará dos frecuencias de corte independientes.

#### Respuesta a Escalón

La respuesta a  $\mu(t)$  del sistema de segundo orden es la siguiente

$$g(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen} \left[ \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \cos^{-1} \zeta \right]$$

Nótese que la respuesta depende del factor  $\zeta$  (factor de amortiguamiento) y que en el diagrama de la figura 8 se observan algunos casos interesantes. Para  $\zeta \geq 1$  no se presentan oscilaciones, casos que se denominan subamortiguado y

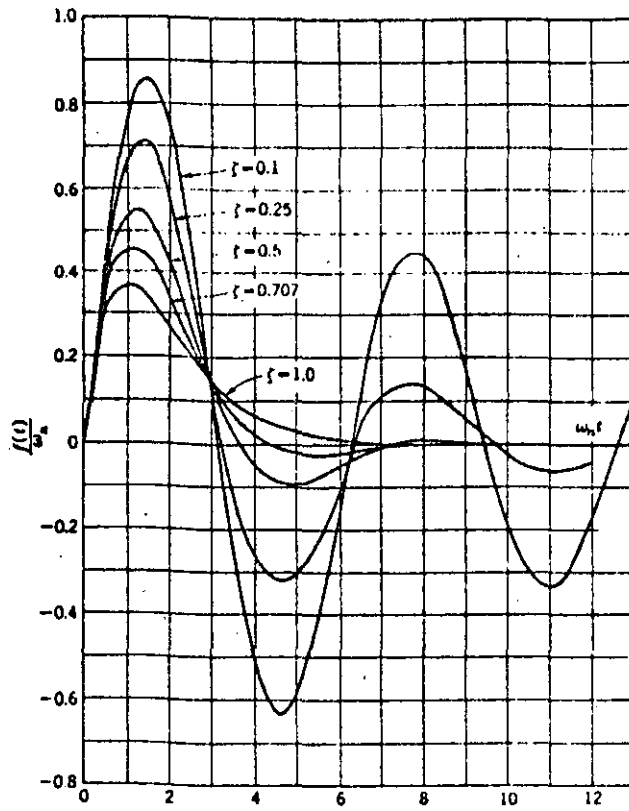


Fig. 7 Respuesta del sistema de segundo orden a un impulso unitario.

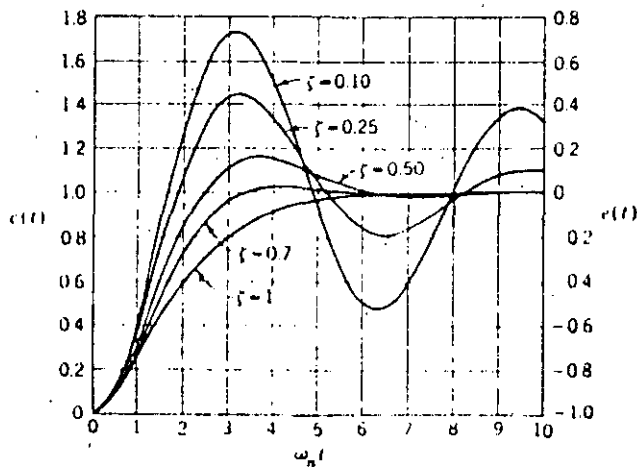


Fig. 8 Respuesta del sistema de segundo orden a un escalón.



amortiguado críticamente ( $\zeta=1$ ), en tanto que para  $\zeta < 1$  se produce un sobretiro que es mayor cuanto menor es  $\zeta$ .

El sobretiro se produce para

$$t_{st} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

y alcanza un valor máximo dado por

$$g(t_{st}) = 1 + e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

## 1.4 Filtros Ideales y Filtros Realizables

Puesto que los filtros son dispositivos o sistemas que realizan la función de seleccionar frecuencias, en el sentido que permiten la transmisión de un intervalo llamado banda de paso y lo impiden en el resto, que por esta razón se denomina banda de rechazo, se clasifican idealmente en la siguiente forma:

- Filtros pasabajas
- Filtro pasabanda
- Filtro pasa altas
- Filtro de rechazo de banda

En cuanto a los componentes que los integran, los filtros reales se clasifican en

- Filtros de parámetros concentrados
  - Filtros pasivos
  - Filtros activos
  - Filtros digitales
  - Filtros de cristal
  - Filtros mecánicos
- Filtros de parámetros distribuidos
  - Filtros en strip-line
  - Filtros de guía de onda

Las definiciones que siguen permiten establecer claramente la diferencia entre ellos.

### 1.4.1 Definiciones

Según su respuesta en frecuencia, los filtros ideales pueden ser:

Filtro Pasabajas Ideal: Este filtro se caracteriza porque la banda de paso incluye el intervalo de corriente continua hasta una frecuencia máxima, llamada frecuencia de corte, arriba de la cual se encuentra la banda de rechazo. Entonces, la función de transferencia de este tipo de filtros es:

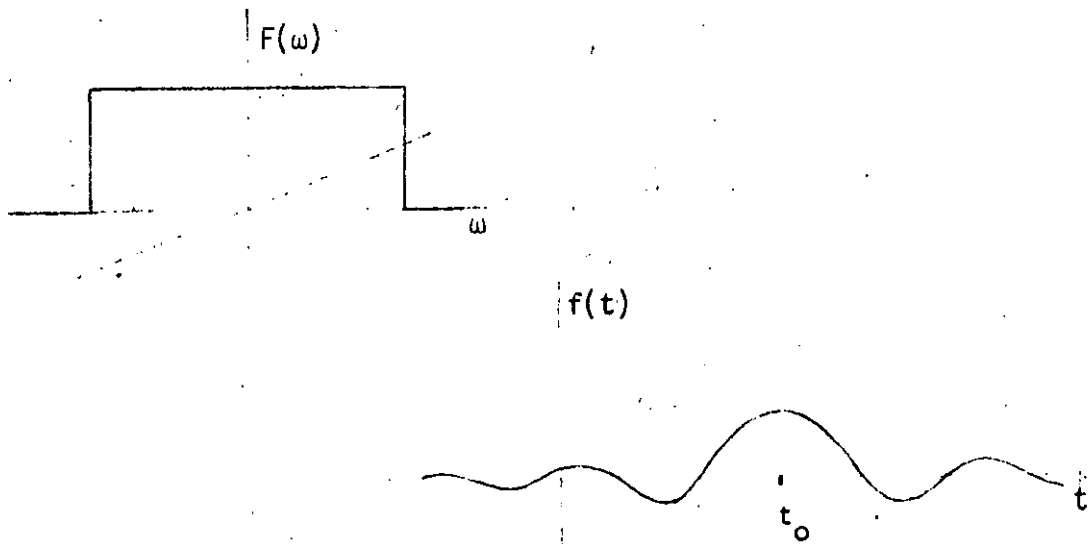


Fig. 9 a) Característica del filtro pasabajas ideal y b) Respuesta a impulso del mismo filtro.

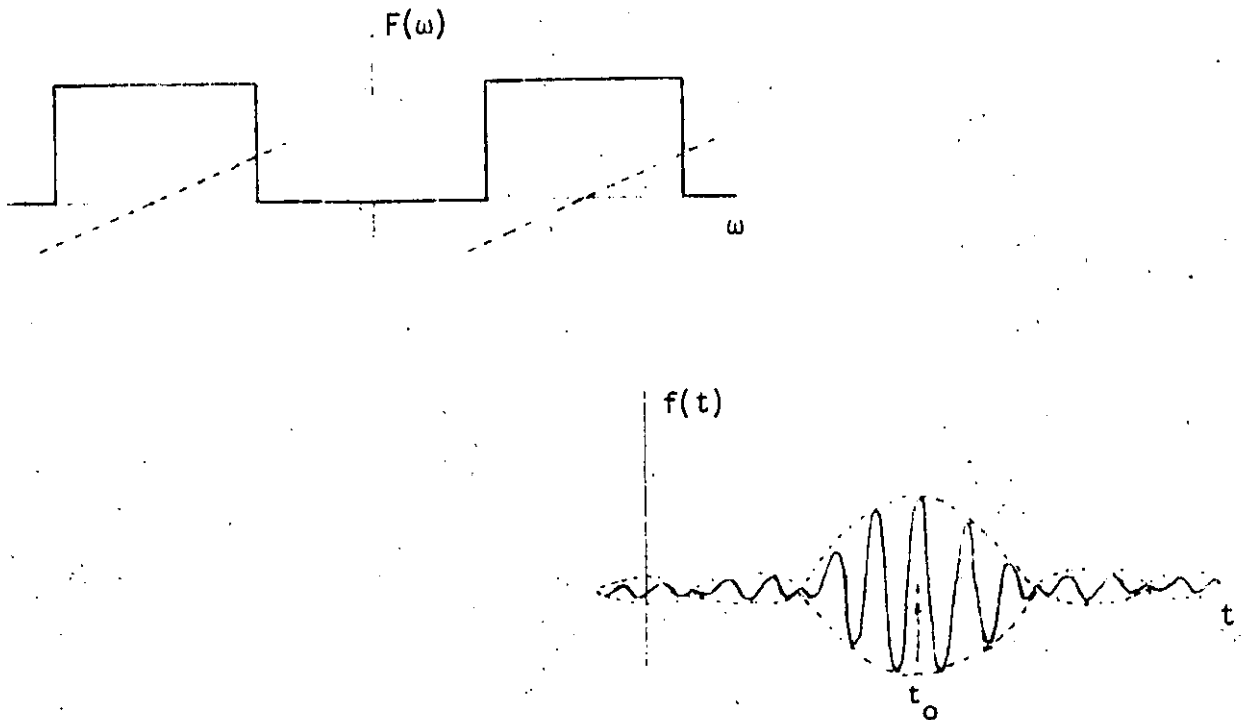


Fig. 10 a) Característica del filtro pasabanda ideal y b) Respuesta a impulso del mismo filtro.

$$F(\omega) = K \prod \left( \frac{\omega}{2\omega_c} \right) e^{-j\omega t_0}$$

Donde  $\omega_c$  = frecuencia de corte

$t_0$  = constante de fase lineal

K = constante de proporcionalidad

Nótese que, salvo la discriminación de frecuencias que se produce y el retraso de fase lineal, el filtro pasabajos no introduce distorsión. De hecho, la transmisión de la banda de paso es sin distorsión.

En la figura 9 se observa la característica del filtro pasabajos y su respuesta a impulso.

Filtro Pasabandas Ideal. En este tipo de filtros, la banda de paso se extiende desde una frecuencia de corte inferior  $\omega_0 - \omega_c$ , hasta una frecuencia de corte superior  $\omega_0 + \omega_c$ . El ancho de banda según esta definición es entonces  $2\omega_c$  y se encuentra centrado en  $\omega_0$ . La función de transferencia es, por lo tanto, la siguiente

$$F(\omega) = K \left[ \prod \left( \frac{\omega + \omega_0}{2\omega_c} \right) e^{-j(\omega + \omega_0)t_0} + \prod \left( \frac{\omega - \omega_0}{\omega} \right) e^{-j(\omega - \omega_0)t_0} \right]$$

Nótese que se tiene también un desfaseamiento lineal para cada región del filtro. Esta condición es indispensable para asegurar que la transmisión del filtro sea selectiva, pero que no distorsione.

En la figura 10 se muestra la característica del filtro pasabanda ideal y su respuesta a impulso.

Filtro Pasa altas Ideal: Este tipo de filtro actúa en forma contraria al pasabajos, ya que permite la transmisión de las señales superiores a una frecuencia de corte  $\omega_c$  y rechaza todas las demás inferiores a ella. La función de transferencia de este tipo de filtros es:

$$F(\omega) = K \left[ 1 - \prod \left( \frac{\omega}{2\omega_c} \right) \right] e^{-j\omega t_0}$$

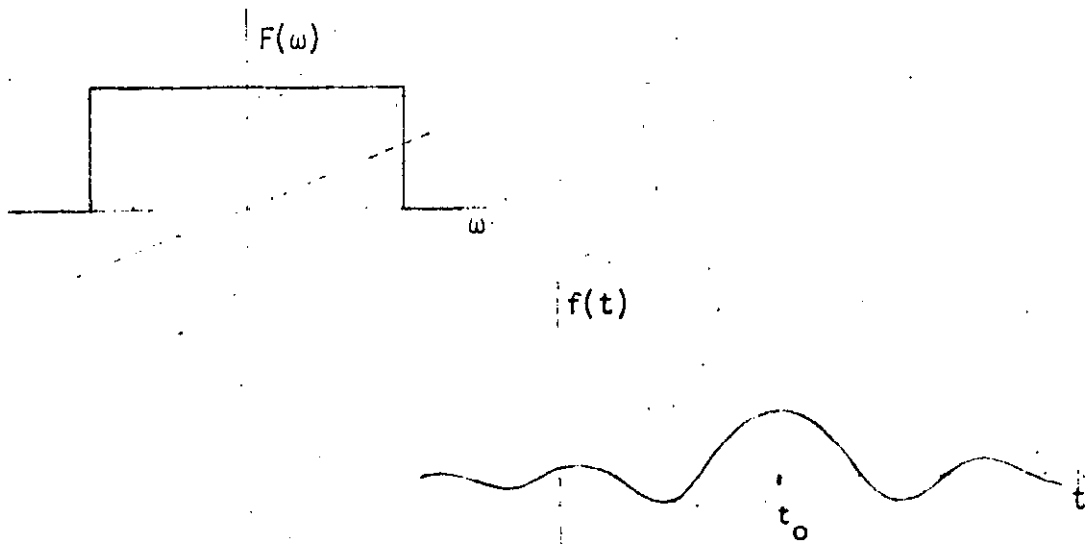


Fig. 9 a) Característica del filtro pasabajas ideal y b) Respuesta a impulso del mismo filtro.

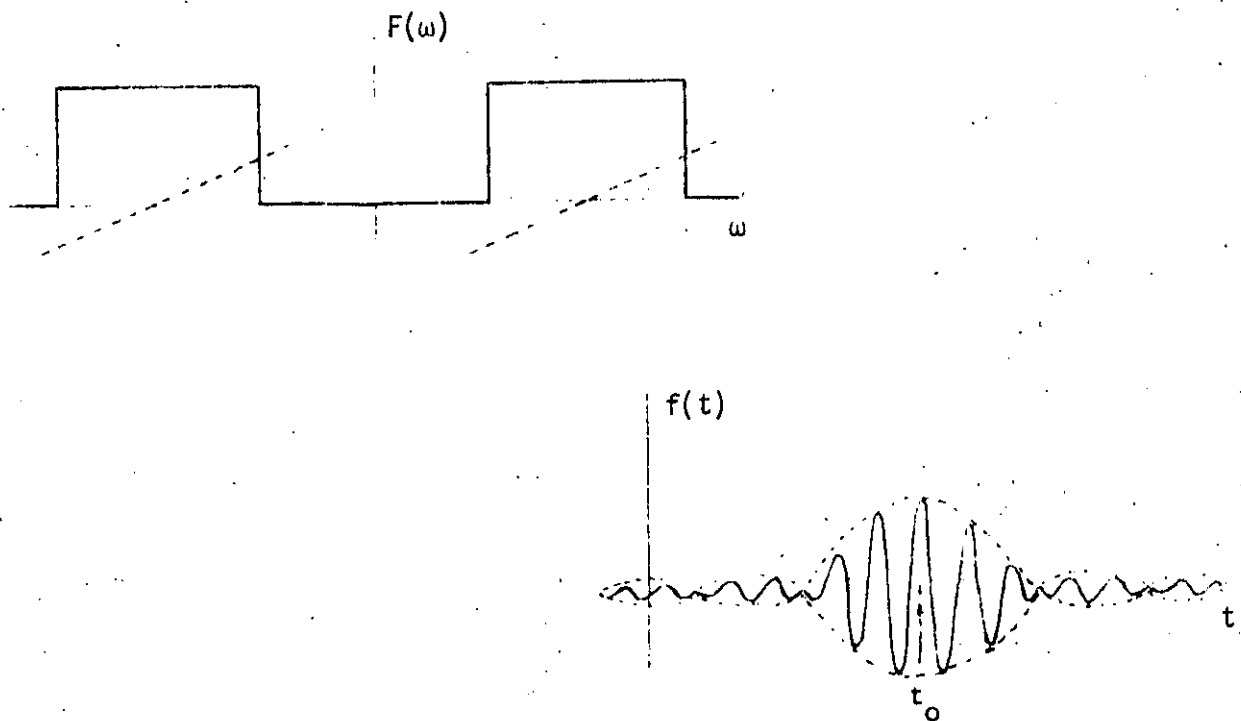


Fig. 10 a) Característica del filtro pasabanda ideal y b) Respuesta a impulso del mismo filtro.

$$F(\omega) = K \prod \left( \frac{\omega}{2\omega_c} \right) e^{-j\omega t_0}$$

Donde  $\omega_c$  = frecuencia de corte

$t_0$  = constante de fase lineal

K = constante de proporcionalidad

Nótese que, salvo la discriminación de frecuencias que se produce y el retraso de fase lineal, el filtro pasabajas no introduce distorsión. De hecho, la transmisión de la banda de paso es sin distorsión.

En la figura 9 se observa la característica del filtro pasabajas y su respuesta a impulso.

Filtro Pasabandas Ideal. En este tipo de filtros, la banda de paso se extiende desde una frecuencia de corte inferior  $\omega_0 - \omega_c$ , hasta una frecuencia de corte superior  $\omega_0 + \omega_c$ . El ancho de banda según esta definición es entonces  $2\omega_c$  y se encuentra centrado en  $\omega_0$ . La función de transferencia es, por lo tanto, la siguiente

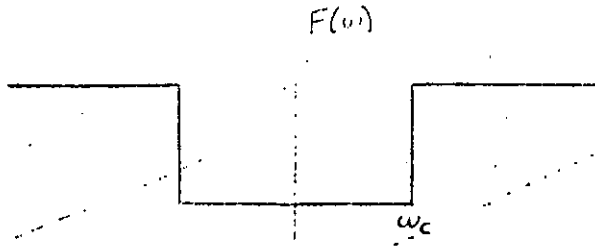
$$F(\omega) = K \left[ \prod \left( \frac{\omega + \omega_0}{2\omega_c} \right) e^{-j(\omega + \omega_0)t_0} + \prod \left( \frac{\omega - \omega_0}{\omega} \right) e^{-j(\omega - \omega_0)t_0} \right]$$

Nótese que se tiene también un desfaseamiento lineal para cada región del filtro. Esta condición es indispensable para asegurar que la transmisión del filtro sea selectiva, pero que no distorsione.

En la figura 10 se muestra la característica del filtro pasabanda ideal y su respuesta a impulso.

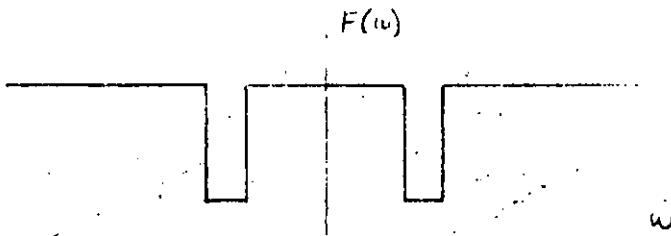
Filtro Pasa altas Ideal: Este tipo de filtro actúa en forma contraria al pasabajas, ya que permite la transmisión de las señales superiores a una frecuencia de corte  $\omega_c$  y rechaza todas las demás inferiores a ella. La función de transferencia de este tipo de filtros es:

$$F(\omega) = K \left[ 1 - \prod \left( \frac{\omega}{2\omega_c} \right) \right] e^{-j\omega t_0}$$



$$F(\omega) = K \left[ 1 - \Pi \left( \frac{\omega}{2\omega_c} \right) \right] e^{-j\omega t_0}$$

Fig. 11 Característica del filtro pasaaltas ideal.



$$F(\omega) = K \left[ 1 - \Pi \left( \frac{\omega - \omega_0}{2\omega_c} \right) - \Pi \left( \frac{\omega + \omega_0}{2\omega_c} \right) \right] e^{j\omega t_0}$$

Fig. 12 Característica del filtro de rechazo de banda ideal.

En la figura 11 se muestra la característica de transferencia del filtro y su respuesta a impulso.

Filtro de Rechazo de Banda. En forma similar al anterior, este tipo de filtro permite la transmisión de todas las frecuencias, excepto porque rechaza una banda (normalmente estrecha) de frecuencias no deseadas. La característica de transferencia es

$$F(\omega) = K \left[ 1 - \prod \left( \frac{\omega - \omega_0}{2\omega_c} \right) - \prod \left( \frac{\omega + \omega_0}{2\omega_c} \right) \right] e^{-j\omega t_0}$$

En la figura 12 se muestra la característica de transferencia y la respuesta a impulso de este tipo de filtros. En cuanto a los filtros reales, son válidas las siguientes definiciones:

Parámetros Concentrados. Son aquellos elementos, circuitos o sistemas en los cuales los elementos electrónicos son fácilmente identificables por ser unidades separadas que se modelan en forma muy simple con un solo parámetro. Por ejemplo: resistencias, capacitores, inductores, etc. En este caso, las longitudes de onda de las frecuencias de trabajo son muy superiores a los elementos aislados y el comportamiento de los circuitos se describe con ecuaciones diferenciales ordinarias.

Parámetros Distribuidos. Contrariamente al caso anterior, se habla de parámetros distribuidos en los casos en que no puedan identificarse claramente los componentes físicos de un circuito. Por ello, los elementos se encuentran interrelacionados y su modelado no puede realizarse en forma de parámetros individualizados. En este caso, las longitudes de onda de las frecuencias de trabajo son comparables o menores a las dimensiones físicas de los elementos que integran el circuito o sistema. También, el comportamiento de los circuitos se describe con ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Filtros Pasivos. Se denomina así a los filtros cuyos elementos no realizan funciones de amplificación, es decir, son elementos pasivos como resistencias, capacitores, inductores, etc.

Filtros Activos. Son los filtros que emplean elementos activos en su construc



ción, por lo general amplificadores operacionales, aunque pueden usar cualquier otro tipo de amplificación.

Filtros Digitales. Se llama así a los filtros que procesan las señales digitalizadas por medio de dispositivos también digitales, como los microprocesadores.

Filtros de Cristal. Son aquellos filtros que utilizan como principio activo la característica de transferencia de uno o más cristales en su realización.

Filtros Mecánicos. Estos filtros son los constituidos principalmente por pequeños sistemas mecánicos resonantes que utilizan las propiedades resonantes de ciertos sólidos para seleccionar frecuencias.

Filtros en Strip-Line. Son los filtros de alta frecuencia que se construyen sobre una cinta metálica situada entre dos planos de tierra y separada de ellos por dieléctricos.

Filtros de Guía de Onda. Se denomina así a los filtros que se obtienen al modificar o introducir elementos en una guía de ondas.

#### 1.4.2 Realizabilidad de los Filtros

Como habrá podido verse, los filtros ideales cumplen la función de rechazar totalmente algunas bandas de frecuencia (ganancia igual a cero), en tanto que transmiten el resto sin alteraciones. Esta situación ideal, desafortunadamente, no es alcanzable en la práctica, ya que tales sistemas resultan ser no causales, como se demostrará:

En el filtro pasabajos, por ejemplo, se tiene que la función de transferencia es

$$H(\omega) = K \prod \left( \frac{\omega}{2\omega_c} \right) e^{-j\omega t_0}$$

por lo tanto, la respuesta a impulso es

$$h(t) = 2Kf_c \operatorname{sinc} 2f_c (t-t_0)$$

Como esta respuesta (véase la figura 9) se inicia antes de  $t=0$ , el sistema es no causal. Puesto que la respuesta a impulso de todos los demás filtros ideales también presenta la característica de ser no causal, como se muestra en las figuras 10 a 12, resulta que los filtros ideales no son realizables.

Esta situación implica que, como los filtros ideales no son alcanzables en la práctica, se requerirá el empleo de aproximaciones realizables que, por supuesto, nunca alcanzarán las características de los filtros ideales.

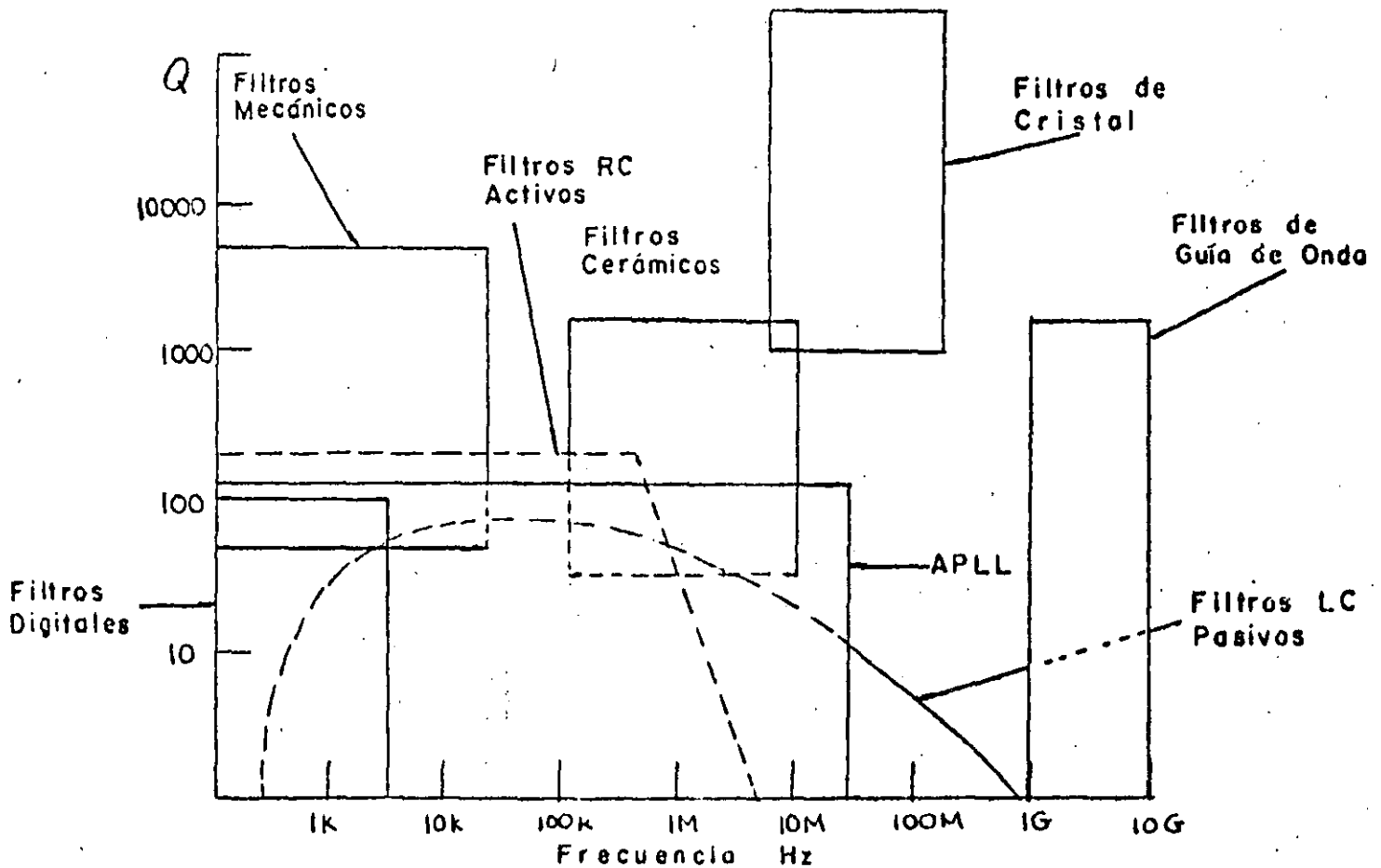


Figura 12.A. Frecuencias de trabajo de los filtros versus el factor  $Q$ .

Puesto que los filtros ideales no son realizables, en la práctica es necesario trabajar con aproximaciones de éstos, lo que lleva a considerar diferentes formas de aproximación. En primer lugar, si se considera que la característica del filtro ideal que se desea aproximar es una función  $H(s)$ , se tiene un antiguo problema matemático de aproximación de funciones que puede establecerse simplemente como la aproximación de una función discontinua (la característica del filtro) por una función continua (la aproximación), problema que tiene varias soluciones.

1.5.1 Planteamiento del Problema.

Tal como se ha mencionado, para aproximar una función con otra se tiene varias alternativas, entre las que destacan la aproximación con polinomios y la aproximación con funciones racionales. Con el empleo de polinomios, se tiene las siguientes aproximaciones:

- a) Butterworth
- b) Tschebyshev
- c) Tschebyshev inversa
- d) Elíptica o de Cauer
- e) Bessel

Por supuesto, se han desarrollado diversas otras formas de atacar el problema de aproximar funciones, con lo que se tendrán distintas características en los filtros resultantes. Algunas de las que se obtienen con las aproximaciones de polinomios son:

- a) Planicidad de la respuesta en la banda pasante
- b) Respuesta de fase lineal
- c) Atenuación de la banda de rechazo
- d) Máximas variaciones tolerables en la banda pasante
- e) Máximas variaciones tolerables en la banda de rechazo

Conviene destacar que normalmente se trabaja con filtros pasabajas para diseñar, los que además se encuentran normalizados en amplitud y frecuencia.

cia a 1. Esto se debe a que existen transformaciones simples para obtener cualquier tipo de filtro a partir de un filtro pasabajas y a que, al normalizarse la amplitud y la frecuencia, se logra un algoritmo simple de diseño que permite obtener un filtro a cualquier frecuencia. (Véanse los recuadros).

El procedimiento de diseño se basa en las llamadas plantillas de diseño, las cuales fijan las condiciones máximas aceptables del filtro que se desea obtener, a través de la fijación de las atenuaciones máximas de las bandas pasante y de rechazo. En la figura 13 se observa la plantilla de diseño de un filtro pasabajas, el que se describe con 4 parámetros.

Nótese que las plantillas se especifican con atenuaciones a ciertas frecuencias, lo que significa que son los puntos máximos (o mínimos) por donde debe pasar la función que aproxima la característica del filtro. El empleo de atenuaciones en lugar de ganancias se debe a que en esta forma se simplifican algunos cálculos, ya que se trabaja con el denominador de la función de transferencia (véase el recuadro).

### 1.5.2 Las aproximaciones.

A continuación se presentarán las aproximaciones más empleadas para el diseño de los filtros y se darán algunos de las características que se obtienen, en la práctica. Pero, previamente, se recordará que si  $H(s)$  es la función de transferencia,  $A(\omega)$  se define como la atenuación en decibeles, de la siguiente forma:

$$A(\omega) = 20 \log |H(j\omega)| = 10 \log |H(j\omega)|^2 = 10 \log (1 + |K(j\omega)|^2)$$

donde  $K(j\omega)$  es la función característica de  $H(s)$ , la que se define

$$H(s) H(-s) = 1 + K(s) K(-s)$$

$$|H(j\omega)|^2 = 1 + |K(j\omega)|^2$$

recuérdese que en estos apuntes se usará la característica de atenuación de los filtros.

$A_{mín}$  = Atenuación mínima de la banda de rechazo

$A_{máx}$  = Atenuación máxima de la banda de paso

$\omega_B$  = frecuencia de corte

$\omega_H$  = frecuencia de inicio de la banda de rechazo

A = banda de paso

B = banda de rechazo

C = banda de transición

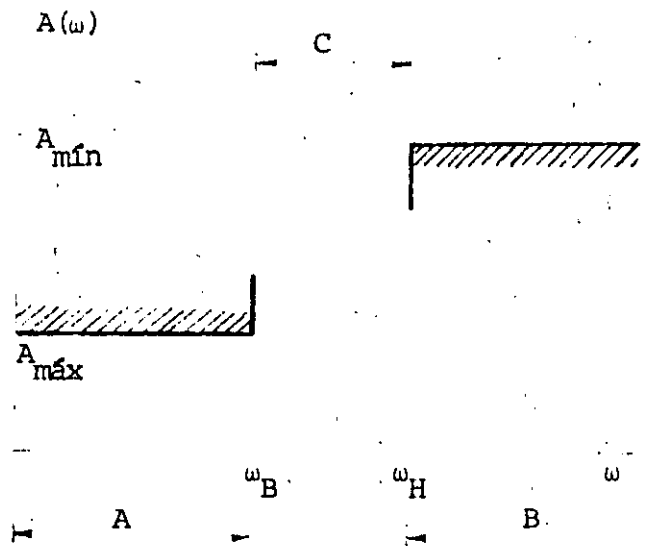


Fig. 13 Plantilla de diseño de un filtro pasabajas

### CARACTERISTICAS DE GANANCIA Y ATENUACION

Para el diseño de un filtro existen dos enfoques posibles: tratar la característica de amplitud (ganancia) o la característica de atenuación. Ambos enfoques son equivalentes aunque es actualmente más común el uso de atenuación, como se hace en estos apuntes.

Debe mencionarse también que en ambos casos se usa la notación  $H(s)$  para indicar las funciones de transferencia salida/entrada (para ganancia) y entrada/salida (para atenuaciones), por lo cual se recomienda tener cuidado con el uso de esta notación.

$$H_{e/s} = \frac{N(s)}{D(s)}; \quad H_{s/e} = \frac{D(s)}{N(s)}$$

## PLANTILLAS DE DISEÑO

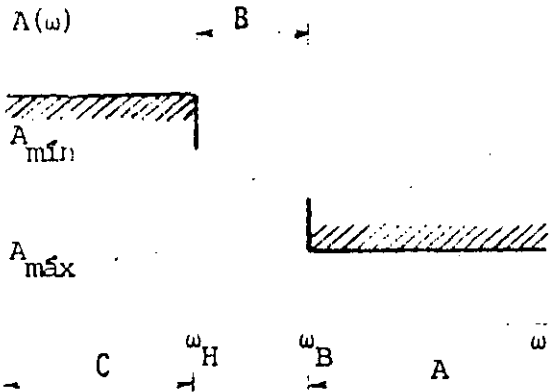
### 1. Filtro Pasa altas

$A_{\text{mín}}$  = Atenuación mínima de la banda de rechazo

$A_{\text{máx}}$  = Atenuación máxima de la banda de paso

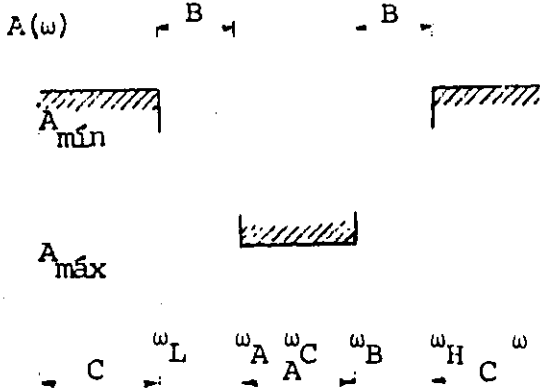
$\omega_B$  = Frecuencia de corte del filtro (normalizada a uno)

$\omega_H$  = Frecuencia de inicio de la banda de rechazo



A = Banda de paso  
B = Banda de transición  
C = Banda de rechazo

### 2. Filtro Pasabanda



$\omega_L$  = Frecuencia inferior de la banda de rechazo

$\omega_H$  = Frecuencia superior de la banda de rechazo

$\omega_A$  = Frecuencia inferior de la banda de paso

$\omega_B$  = Frecuencia superior de la banda de paso

$\omega_C$  = Frecuencia central

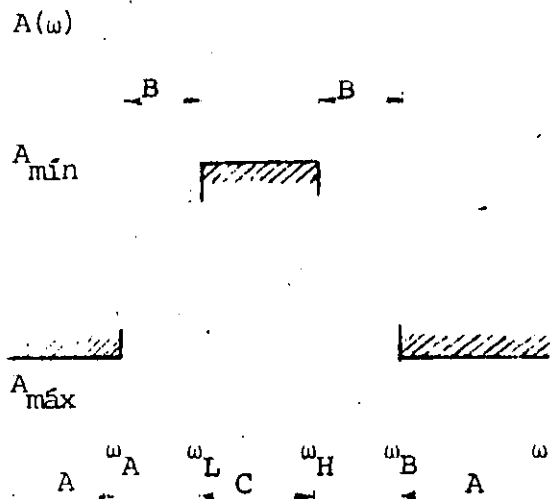
### 3. Filtro de Rechazo de Banda

$\omega_A$  = Frecuencia inferior de la banda de paso

$\omega_B$  = Frecuencia superior de la banda de paso

$\omega_L$  = Frecuencia inferior de la banda de rechazo

$\omega_H$  = Frecuencia superior de la banda de rechazo



## Aproximación Butterworth

La característica de la figura 13, correspondiente a un filtro pasabajas, puede aproximarse con un polinomio  $B_n(\omega)$  que cumple con las siguientes condiciones.

1.  $B_n(\omega)$  es un polinomio de orden  $n$
2.  $B_n(0) = 0$  (máxima atenuación)
3.  $B_n(\omega)$  es máximamente plano al origen
4.  $B_n(1) = 1$  (para normalizarlo)

Tal polinomio es simplemente  $B_n(\omega) = \omega^n$ , el que cumple además con

$$|K(j\omega)|^2 = \omega^{2n}$$

$$|H(j\omega)|^2 = 1 + \omega^{2n}$$

$$A(\omega) = 10 \log (1 + \omega^{2n})$$

También se tiene que el orden del filtro está dado por

$$N \geq \frac{\log [(10^{A_{\min}/10} - 1) / (10^{A_{\max}/10} - 1)]}{2 \log (\omega_H / \omega_B)}$$

Nótese que a partir de la plantilla de diseño, es decir, con los parámetros  $A_{\min}$ ,  $A_{\max}$ ,  $\omega_B$  y  $\omega_H$  se determina el orden del filtro y el polinomio característico. En la figura 14 se observan las respuestas de amplitud y de fase de un filtro pasabajas Butterworth para diferentes valores de  $n$ .

Finalmente, la función de transferencia entrada/salida  $H(s)$  de un filtro pasabajas Butterworth normalizado de orden  $n$  está dada por

$$H(s) = \sum_{k=0}^n H_k s^k$$

donde

$$H_0 = 1$$

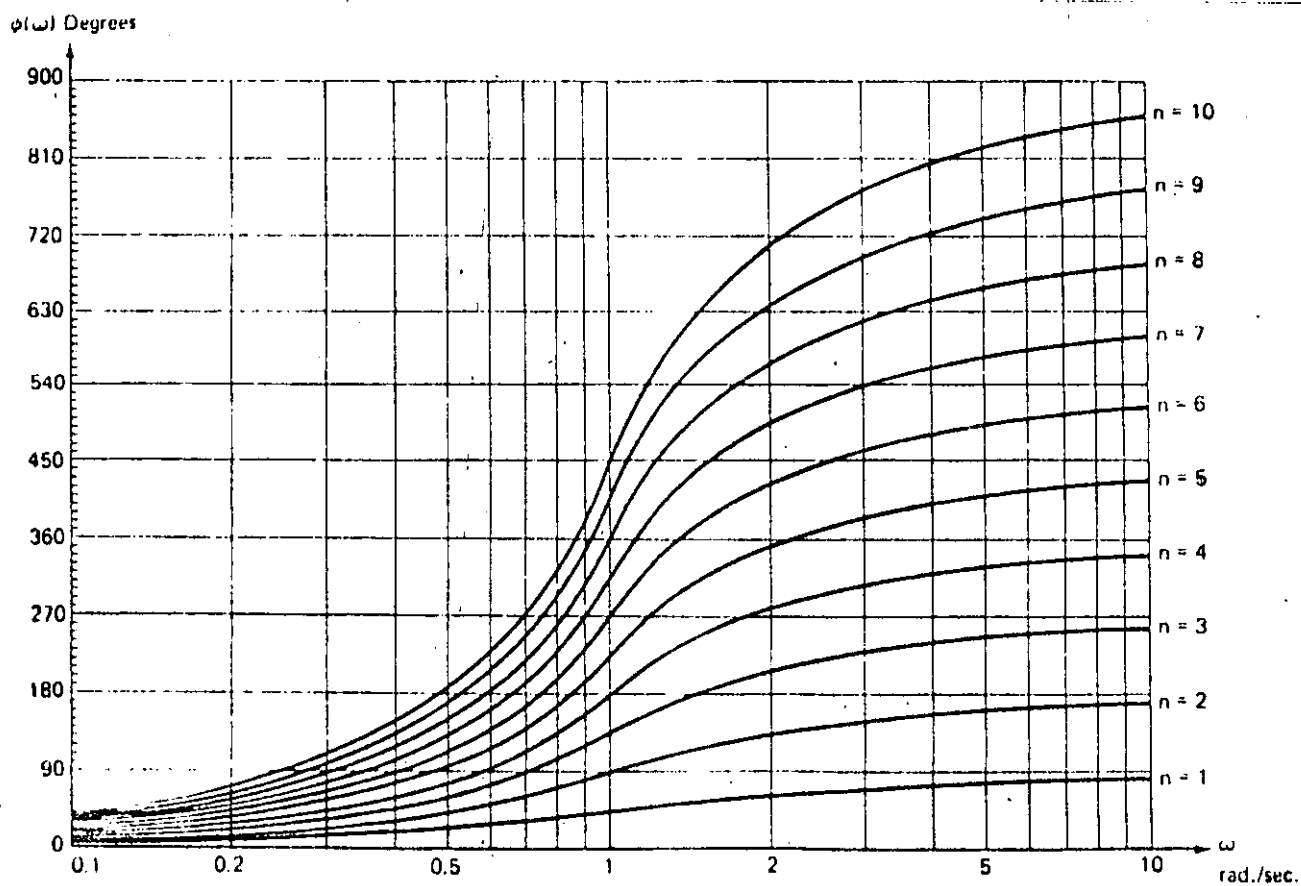
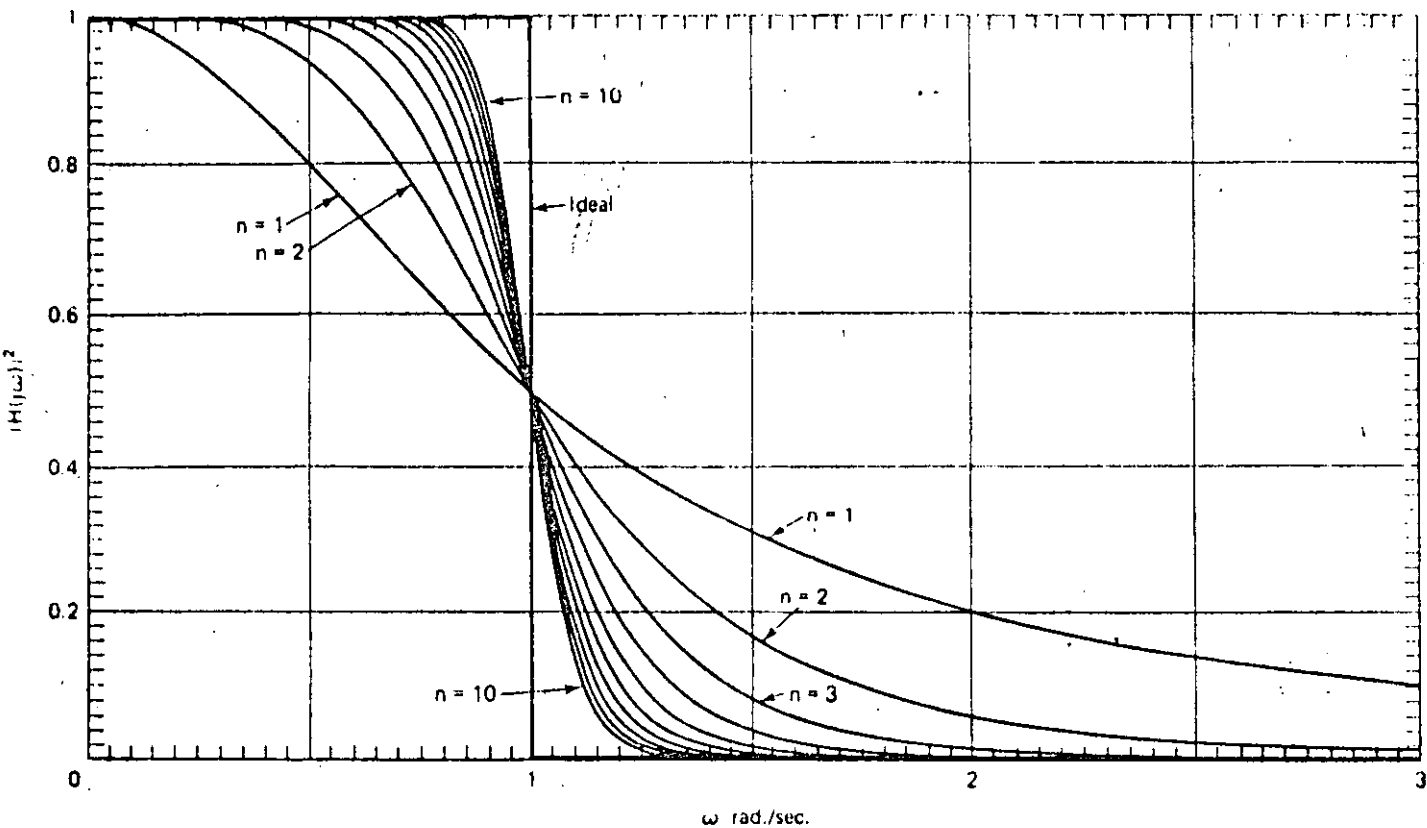


Fig 14. Características de amplitud y de fase de un filtro Butterworth pasobajas para diferentes valores de  $n$ .



$$H_k = \frac{\cos [(k-1) \pi/2n]}{\sin (k\pi/2n)} H_{k-1}$$

### Aproximación Chebyshev

En forma similar al caso anterior, el polinomio  $T_n(x)$  que satisface las siguientes condiciones, se llama polinomio de Chebyshev.

1.  $T_n(x)$  es par (o impar), si  $n$  es par (o impar)
2.  $T_n(x)$  tiene todos sus ceros en el intervalo  $-1 < x < 1$
3.  $T_n(x)$  presenta oscilaciones entre  $\pm 1$  en el intervalo  $-1 \leq x \leq 1$
4.  $T_n(1) = 1$ . (Por razones de normalización).

El polinomio  $T_n(x)$  que cumple con estas condiciones es

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos (n \cos^{-1} x) & x \leq 1 \\ \cosh (n \cosh^{-1} x) & x > 1 \end{cases}$$

Aunque no se presenta como tal,  $T_n(x)$  es un polinomio en  $x$ . Nótese, además, que se cumplen las siguientes expresiones:

$$|K(j\omega)|^2 = \epsilon^2 T_n^2(\omega)$$

$$A(\omega) = 10 \log [1 + \epsilon^2 T_n^2(\omega)]$$

con  $\epsilon^2 = 10^{A_{\max}/10} - 1$  y el orden del filtro está dado por

$$n = \frac{\cosh^{-1} [(10^{A_{\min}/10} - 1) / (10^{A_{\max}/10} - 1)]^{1/2}}{\cosh^{-1} (\omega_H/\omega_B)}$$

Los polinomios para todos los valores de  $n$  pueden encontrarse más fácilmente con la relación de recurrencia

$$T_{n+1}(\omega) = 2\omega T_n(\omega) - T_{n-1}(\omega) \quad n \geq 1, \text{ entero}$$

y con  $T_0(\omega) = 1$

$$T_1(\omega) = \omega$$

$$\text{con } \epsilon^2 = 10^{A_{\text{máx}}/10} - 1$$

Y el orden del filtro queda dado por la misma expresión que para la aproximación Chebyshev

$$n = \frac{\cosh^{-1} \left[ \left( 10^{A_{\text{mín}}/10} - 1 \right) / \left( 10^{A_{\text{máx}}/10} - 1 \right) \right]^{1/2}}{\cosh^{-1} (\omega_H/\omega_B)}$$

En la figura 17 se muestra como se obtiene la característica de un filtro Chebyshev inverso pasabajas de orden 5, a partir de un Chebyshev normal.

### Aproximación Elíptica

Observando las características de los filtros Chebyshev y Chebyshev inverso se llega a la conclusión de que las oscilaciones que presentan logran una respuesta más abrupta en la banda de rechazo. Siguiendo esta misma idea, es posible imaginar el caso general en que estas oscilaciones se presentan en toda la gama de frecuencias, en lugar de que se sitúe únicamente en una banda. Esto obliga a generalizar las funciones  $T_n(x)$  (que son polinomios) en las funciones racionales  $R_n(x,L)$  (que son cocientes de polinomios).

$R_n(x,L)$  es entonces una función racional de  $x$  que cumple con las siguientes características:

1.  $R_n$  es par (impar) si  $n$  es par (impar)
2.  $R_n$  presenta su  $n$  ceros en el intervalo  $-1 < x < 1$ , en tanto que sus  $n$  polos quedan fuera de él.
3.  $R_n$  oscila entre los valores de  $\pm 1$  en el intervalo  $-1 \leq x \leq 1$
4.  $R_n(1,L) = 1$
5.  $1/R_n$  oscila entre los valores de  $\pm 1/L$  en el intervalo  $|x| < x_L$

Las funciones  $R_n(x,L)$  se expresan

$$R_n(x,L) = C_1 \times \frac{\prod_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{x^2 - \text{sn}^2(2i K/n)}{x^2 - [x_L/\text{sn}(2i K/n)]^2}}$$

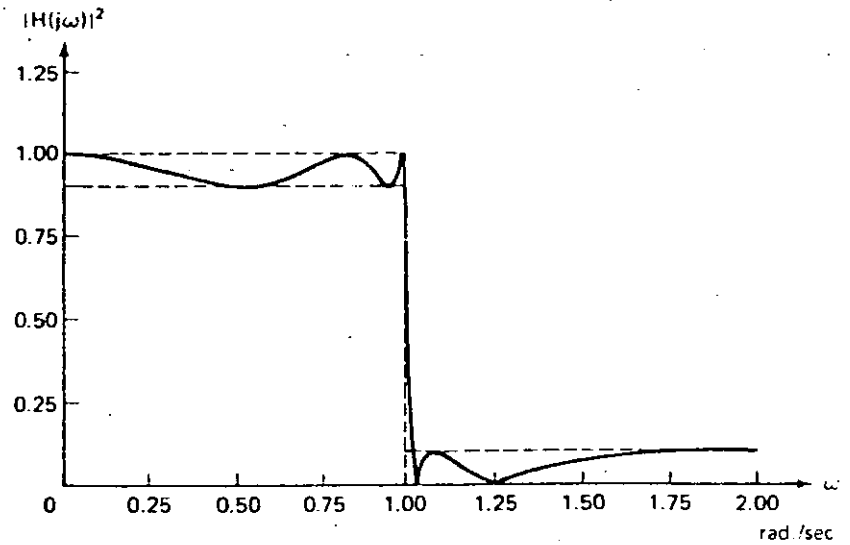
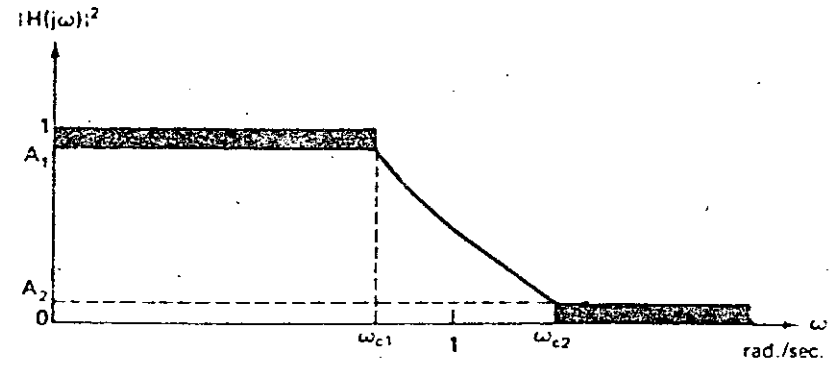
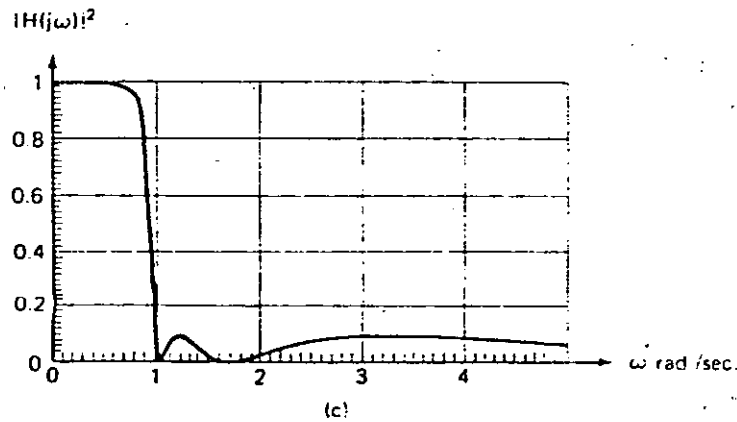
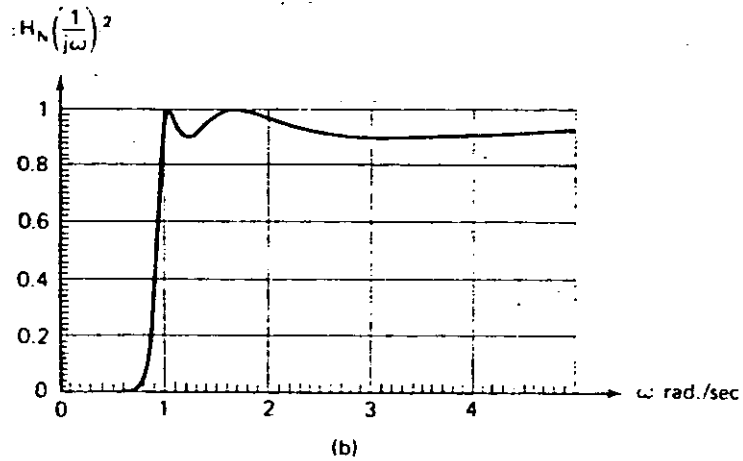
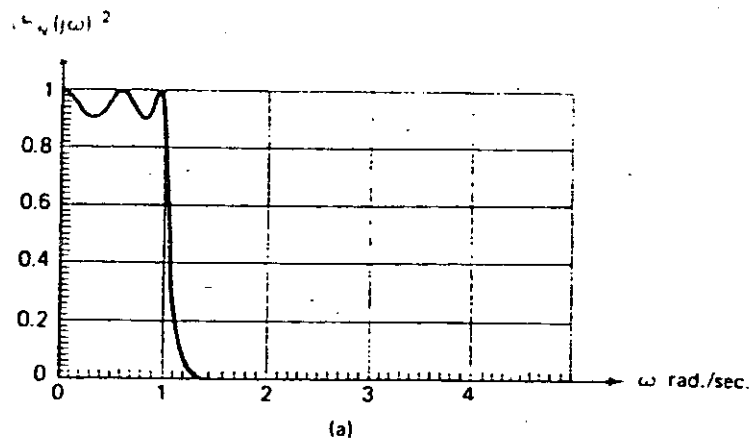


Fig 18. Respuesta de amplitud de un filtro elíptico de 5º orden.

Fig 17. Obtención de la aproximación inversa, a partir de un filtro Chebyshev normal.

si  $n$  es impar, en tanto que si  $n$  es par,

$$R_n(x,L) = C_2 \times \prod_{i=1}^{n/2} \frac{x^2 - \operatorname{sn}^2 [(2i-1)K/n]}{x^2 - \{x_L / \operatorname{sn} [(2i-1)K/n]\}^2}$$

donde

$$C_2 = \left(\frac{L}{x_L}\right)^{1/2} \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \left(\frac{x_i}{x_L}\right)^2 \quad [x_i, \text{ polos de } R(x,L)]$$

$$C_2 = L^{1/2} \prod_{i=1}^{n/2} \frac{x_i^2}{x_L}$$

Nótese que al definir  $R_n(x,L)$  se usa la función  $\operatorname{sn}(\alpha)$ , que es el seno elíptico definido a partir de la integral elíptica de primera clase de módulo  $k$

$$u(\phi, k) = \int_0^\phi (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x)^{-1/2} dx$$

con la expresión

$$\operatorname{sn}(\mu, k) = \operatorname{sen} \phi$$

en la que  $k = 1/x_L$

También, se tiene que el parámetro  $K$  es la integral elíptica completa y  $K'$  la integral elíptica complementaria, las que se definen

$$K = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x)^{-1/2} dx$$

$$K' = \int_0^{\pi/2} [1 - (1-k^2) \operatorname{sen}^2 x]^{-1/2} dx$$

Todas estas funciones se encuentran tabuladas y existen programas para obtenerlas, ya que es fácil calcularlas numéricamente.

El orden del filtro está dado por

$$n = \frac{K(x_L^{-1}) K'(L^{-1})}{K'(x_L^{-1}) K(L^{-1})}$$

donde  $x_L = \omega_H / \omega_B$

$$L^2 = \frac{10^{A_{\text{mín}}/10} - 1}{10^{A_{\text{máx}}/10} - 1}$$

En la figura 18, se muestra la característica de un filtro elíptico de orden 5.

### Aproximación Bessel

Una característica que es importante en algunas aplicaciones es que el filtro presente transmisión sin distorsión, es decir, que la salida sea una réplica exacta de la entrada excepto por un factor de proporcionalidad y un retraso. Esta característica se logra con los polinomios de Bessel, que se definen de la siguiente forma

$$B_n(s) = \sum_{i=0}^n b_i s^i$$

donde

$$b_i = \frac{(2n-i)!}{2^{n-i} i!(n-i)!}$$

En este caso, la característica de amplitud  $A(\omega)$  no es relevante, cumpliéndose que

$$H(s) = \frac{B_n(s)}{B_n(0)}$$

También se tiene que el polinomio  $B_n$  puede obtenerse mediante la siguiente relación de recurrencia

$$B_n = (2n-1) B_{n-1} + s^2 B_{n-2}$$

con  $B_0 = 1$  y  $B_1 = S+1$

En la figura 19 se observa la característica de fase del filtro Bessel, observándose que entre 0 y 1 presenta una respuesta lineal para  $n > 2$ .

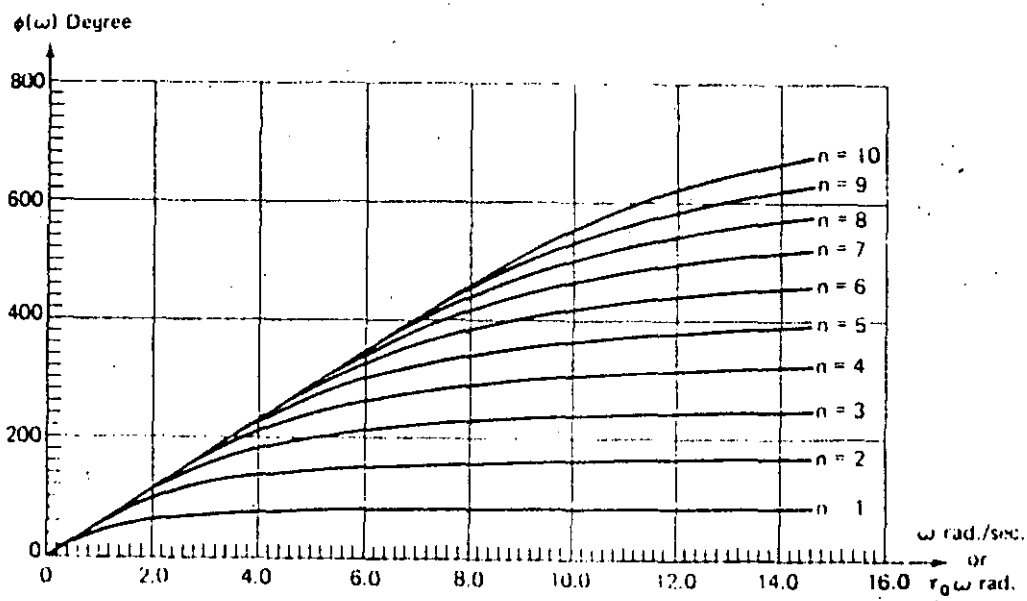
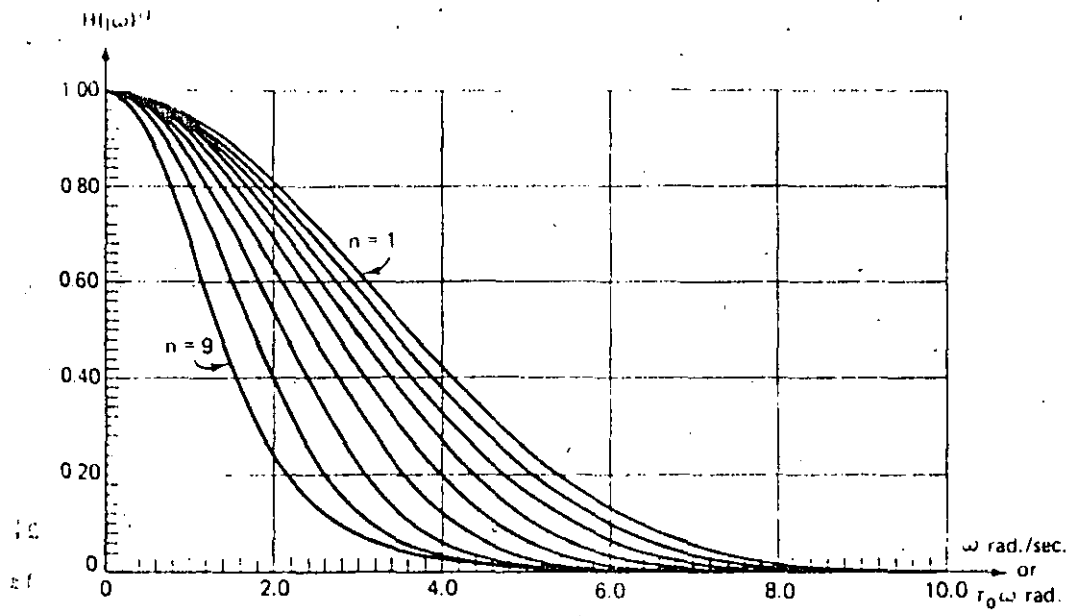


Figura 19. Características de respuesta del filtro Bessel. a) Amplitud, b) Fase.

## 1.6 APENDICES

### 1.6.1 Artículos varios

On Bandwidth

The Bandwidth of Digital Data Signals

The Golden Anniversary of Electric  
Wave Filters

Historial Notes on the Fast Fourier Transform

What is the Fast Fourier Transform?

A Practical Method of Designing RC  
Active Filters

### 1.6.2 Tablas de Aproximación

Butterworth

Chebyshev

Bessel

Elípticos

# On Bandwidth

DAVID SLEPIAN, FELLOW, IEEE

*Abstract*—It is easy to argue that real signals must be bandlimited. It is also easy to argue that they cannot be so. This paper presents one possible resolution of this seeming paradox. A philosophical discussion of the role of mathematical models in the exact sciences is given and a new formulation of the 2 WT theorem is presented.

The paper is a written version of the second Shannon Lecture given at the 1974 International Symposium on Information Theory. An appendix giving proof of the 2 WT theorem has been added.

## THE DILEMMA

**A**RE SIGNALS really bandlimited? They seem to be, and yet they seem not to be.

On the one hand, a pair of solid copper wires will not propagate electromagnetic waves at optical frequencies, and so the signals I receive over such a pair must be bandlimited. In fact, it makes little physical sense to talk of energy received over wires at frequencies higher than some finite cutoff  $W$ , say  $10^{20}$  Hz. It would seem, then, that signals must be bandlimited.

On the other hand, however, signals of limited bandwidth  $W$  are finite Fourier transforms,

$$s(t) = \int_{-W}^W e^{2\pi i f t} S(f) df$$

and irrefutable mathematical arguments show them to be extremely smooth. They possess derivatives of all orders. Indeed, such integrals are entire functions of  $t$ , completely predictable from any little piece, and they cannot vanish on any  $t$  interval unless they vanish everywhere. Such signals cannot start or stop, but must go on forever. Surely *real signals* start and stop, and so they cannot be bandlimited!

Thus we have a dilemma: to assume that real signals must go on forever in time (a consequence of bandlimitedness) seems just as unreasonable as to assume that real signals have energy at arbitrarily high frequencies (no bandlimitation). Yet one of these alternatives must hold if we are to avoid mathematical contradiction, for either signals are bandlimited or they are not: there is no other choice. Which do you think they are?

I have my own pet resolution of this seeming paradox, and that is what I plan to talk about this morning. The preliminary discussion is long and will take us rather far afield from Information Theory, but I will come back to touch on it later in a fundamental way if you will but bear with me. My solution to this dilemma will certainly not please all of you: it rests on matters I do not fully understand myself. But, then, perhaps this is the best function these Shannon Lectures can serve—to shake us all up a bit, to stir the waters with controversy. From such a jostling new ideas are often born.

Manuscript received August 15, 1975; revised October 4, 1975. The body of this paper was presented as the second Shannon Lecture at the International Symposium on Information Theory held at Notre Dame University, Notre Dame, IN, October 31, 1974.

The author is with Bell Laboratories, Murray Hill, NJ 07974, and the University of Hawaii, Honolulu, HI 96822.

## ON MODELS AND REALITY

My starting point is to recall to you that each of the quantitative physical sciences—such as physics, chemistry, and most branches of engineering—is comprised of an amalgam of two *distinctly different* components. That these two facets of each science are indeed distinct from one another, that they are made of totally different stuff, is rarely mentioned and certainly not emphasized in the traditional college training of the engineer or scientist. Separate concepts from the two components are continually confused. In fact, we even lack a convenient language for keeping them straight in our thinking. I shall call the two parts Facet A and Facet B.

Facet A consists of observations on, and manipulations of, the "real world." Do not ask me what this real world is: my thoughts become hopelessly muddled here. Let us assume that we all understand the term and agree on what it means. For the electrical engineer, this real world contains oscilloscopes and wires and voltmeters and coils and transistors and thousands of other tangible devices. These are fabricated, interconnected, energized, and studied with other real instruments. Numbers describing the state of this real world are derived from reading meters, thermometers, counters, and dial settings. They are recorded in notebooks as *rational real numbers*. (No other kind of number seems to be *directly* obtained in this real world.)

Facet B is something else again. It is a mathematical model and the means for operating with the model. It consists of papers and pencils and symbols and rules for manipulating the symbols. It also consists of the minds of the men and women who invent and interpret the rules and manipulate the symbols, for without the seeming consistency of their thinking processes there would be no single model to consider. When numerical values are given to some of the symbols, the rules prescribe numerical values for other symbols of the model.

Now, as you all know, we like to think that there is an intimate relationship between Facet A and Facet B of a given science. The numerical value associated with the symbol  $V_3$  in the model should, in the right circumstances, agree with the reading of the voltmeter we have labeled #3 on the workbench over there, the meter we touch in Facet A. Indeed, so confident are we of this agreement that we use the very same name "the voltage across  $R_3$ " for these two very different quantities, thus confounding hopelessly the distinction between these constructs. I have carefully said that we "like to think" that there is an intimate relationship between the facets because, in fact, under closer scrutiny one sees the correspondence as tenuous, most incomplete, and imprecise. There is a myriad of detail in the laboratory ignored in the model. Worse yet, many key parts of the model—many of its concepts and operations—have no counterpart in Facet A. To the extent that there is some correspondence between Facets A and B, we have the miracle of modern science—the deepening understanding of our universe, and the bounty and ease of the technological society in which we live. A second-order miracle,



little recognized or appreciated, is that this first miracle could arise from such a really ragged fit between the facets.

This gross mismatch goes in two directions. Details from Facet A do not appear in Facet B; details of Facet B may have no counterpart or meaning in Facet A. The first type of mismatch usually causes little trouble. The angle of the caster wheels on the little portable table supporting the oscilloscope with which we observe the waveform of a signal does not enter our circuit equations. We say that this angle has no effect on the circuit and we like to think that, if we wanted to, we could describe a completely comprehensive model that would include the angle of the caster wheels as a parameter and that this model would indeed show the voltage here or there to depend hardly at all on the inclination of the caster wheels.

Mismatches the other way are much more troublesome. Our mathematical models are full of concepts, operations, and symbols that have no counterpart in Facet A. Take the very fundamental notion of real number, for instance. In Facet B, certain symbols take numerical values that are supposed to correspond to the readings of instruments in Facet A. Almost always in Facet B these numerical values are elements of the real-number continuum, the rationals and irrationals. This latter sort of number seems to have no counterpart in Facet A. In Facet B, irrational numbers are defined by limiting operations or Dedekind cuts—mental exercises that with some effort and practice we can be trained to “understand” and agree upon. After years of experience with them, we theoreticians find them very “real,” but they do not seem to belong to the real world of Facet A. *The direct result of every instrument reading in the laboratory is a finite string of decimal digits—usually fewer than 6—and a small integer indicating the exponent of some power of 10 to be used as a factor.* Irrationals just cannot result directly from real measurements, as I understand them.<sup>1</sup>

Now there are several ways in which we can handle this fundamental lack of correspondence between symbol values in Facet B and measurements in Facet A. We could build a mathematical model in which only a finite number of numbers can occur, say those with 10 significant digits and one of a few hundred exponents. Differential equations would be replaced by difference equations, and complicated boundary conditions and rules would have to be added to treat the roundoff problem at every stage. The model would be exceedingly complex. Much simpler is the scheme usually adopted and known to you all. We admit the real-line continuum into Facet B and we impose yet another abstraction—continuity. In the end, if the model says the voltage is  $\pi$ , we are pleased if the meter in Facet A reads 3.1417. We work with the abstract continuum in Facet B, and we round off to make the correspondence with Facet A.

Mathematical continuity deserves a few words. It is another concept with no counterpart in the real world. It makes no sense at all to ask whether in Facet A the position of the voltmeter needle is a continuous function of time. Observing the position of the needle at millisecond or microsecond or even picosecond intervals comes no closer to answering the question than does measurement daily or annually. Yet con-

<sup>1</sup>An idiosyncratic scientist can, of course, use the symbols  $\pi$  or  $e$  or  $\sqrt{2}$  in place of digits, but this does not alter the situation. The point is that what is recorded in the notebook is a “word” drawn from a finite (but possibly very large) list of words.

tinuity is a vital concept for Facet B. By invoking it, by demanding continuous solutions of the equations of our models, we make the parts of the model that correspond to measurements in Facet A insensitive to small changes in the parts of the model that do not correspond to anything in Facet A. Specifically, continuity means that the first five significant digits of our computed answers, those to which we do ultimately attribute real significance, will be dependent only weakly on the sixth to tenth significant digits of the numbers we assign to the parameters of the model. They will be essentially independent of the 100th or 1000th significant digit—constructs of importance to the working of Facet B but with no meaningful counterpart in Facet A.

The situation just exemplified by this discussion of numbers and continuity occurs in many different guises in the sciences. There are certain constructs in our models (such as the first few significant digits of some numerical variable) to which we attach physical significance. That is to say, we wish them to agree quantitatively with certain measurable quantities in a real-world experiment. Let us call these the *principal quantities* of Facet B. Other parts of our models have no direct meaningful counterparts in Facet A but are mathematical abstractions introduced into Facet B to make a tractable model. We call these *secondary constructs* or *secondary quantities*. One can, of course, consider and study any model that one chooses to. It is my contention, however, that a necessary and important condition for a model to be *useful* in science is that the *principal quantities of the model be insensitive to small changes in the secondary quantities*. Most of us would treat with great suspicion a model that predicts stable flight for an airplane if some parameter is irrational but predicts disaster if that parameter is a nearby rational number. Few of us would board a plane designed from such a model.

#### THE DILEMMA RESOLVED

What has this long digression to do with bandwidth? (You have been most patient.) I assert that, as *usually* used by members of this sophisticated audience, the words “bandlimited,” “start,” “stop,” and even “frequency” describe secondary constructs from Facet B of our field. They are abstractions we have introduced into our paper and pencil game for our convenience in working with the model. They require precise specification of the signals in the model at times in the infinitely remote past and in the infinitely distant future. These notions have no meaningful counterpart in Facet A. We are no more able to determine by measurements whether a “real signal” was *always* “zero” before noon today than we are able to determine its continuity with time.

I shall soon discuss Facet B of communication theory in more detail and tell you how we can proceed to keep the principal quantities insensitive to small changes in the secondary ones. But first, we have come far enough to lay to rest the question with which I opened this discussion. Are signals really bandlimited? If you mean real signals, those of Facet A, and if by *bandlimited* you mean the usual definition of our trade in terms of the Fourier integral—a notion from Facet B—then I assert this is a nonsense question, one completely without meaning. If you are asking a question about the signals of Facet B, why, use whatever kind that suits your purposes in the model—bandlimited or not as you choose. In *useful* models, the principal quantities will be insensitive to this choice.

And so, you see, by purposely mixing concepts from Facets A and B, I set up a strawman to begin my lecture: after much talk, I have succeeded in tearing him down.

### MODELS IN COMMUNICATION THEORY

Let us turn now to look in more detail at the models of communication theory. Signals frequently are represented as functions of time that are defined on the whole real line. Many real-world devices are then represented in Facet B by linear time-invariant operators that transform one signal of the model into another. The notion of time invariance entails shifts of arbitrary duration. This introduction into Facet B of the infinitely remote past and the infinitely distant future is certainly worrisome from a philosophical point of view. Indeed, as was the case with the irrationals, it could be avoided. But, by introducing these abstractions, we obtain an enormous simplification, one so great as to override objections on mere philosophical grounds. On the infinite domain, all time-invariant linear operators have the same simple eigenfunctions—the complex exponentials. A sinusoid in gives a sinusoid of like frequency out. This simplification makes possible the elementary description of devices by transfer functions: it is the true genesis of the widespread applicability of Fourier analysis to electrical engineering.

But what about these infinities affecting the principal quantities of the model? For the common garden-variety principal quantities—the power dissipated in resistor  $R$ , the measured voltage at time  $t$  at the output terminals, etc.—it is clear that small changes made in the model in the signal behavior at very large times or, dually, at very high frequencies, cause correspondingly small changes in these principal quantities. If  $\epsilon$  is small enough, the numerical values of

$$s_1(t) \equiv \int_{-W}^W e^{2\pi i f t} S(f) df$$

a bandlimited signal, and those of

$$s_2(t) \equiv s_1(t) + \epsilon \left[ \int_{-\infty}^{-W} \frac{e^{2\pi i f t}}{1+f^2} df + \int_W^{\infty} \frac{e^{2\pi i f t}}{1+f^2} df \right]$$

which is not bandlimited, are very nearly the same for all values of  $t$ . Fortunately, most principal quantities depend just on such numerical values, for there are other ways in which  $s_1$  and  $s_2$  differ drastically. For example,  $s_1$  is infinitely differentiable at  $t=0$ , while  $s_2$  is not differentiable there at all. Yet  $s_2$  differs from  $s_1$  only by arbitrarily small changes in its high-frequency tail. We should thus be wary of making the order of differentiability a principal quantity in any physical theory.

Now while most classical principal quantities we deal with do not seem to be sensitive to small changes in signal behavior at infinity, Information Theory has come along with some questions whose answers at first blush do seem to depend on these secondary quantities. Anyone who thinks deeply about data transmission asks sooner or later for the number of numbers we can transmit per second with "real" signals. The question is fuzzy,<sup>2</sup> and a fully satisfying answer to even a well-posed form of the question is elusive.

<sup>2</sup>If we can transmit one real number per second, say  $s = .a_1 a_2 a_3 \dots$ , where the  $a$ 's are decimal digits, then we can also transmit two real numbers  $.b_1 b_2 \dots$  and  $.c_1 c_2 \dots$  per second by the trick of transmitting  $s = .b_1 c_1 b_2 c_2 \dots$ , etc.

As all of you in this audience know, most of Shannon's great 1948 paper founding Information Theory, and the bulk of his succeeding work, dealt with time-discrete communication systems. His channel models accepted inputs and delivered outputs at discrete instants in time: the inputs and outputs were either real numbers or symbols drawn from a countable list. By means of coding theorems, he rigorously established the limits of communication possible over such channels. The results can all be expressed in terms of bits transmitted per channel use. Time, the infinitely remote past and infinitely distant future, need never be considered. Later papers set tight bounds on how many bits could be transmitted and with what accuracy with  $N$  uses of the channel. These could equally well be  $N$  independent identical channels used at the same time, or they could refer to uses of a single channel at different times.

The extension of these ideas to create a model that describes accurately the limits of electrical communication systems in the real world is fraught with difficulties. I cannot possibly go into the details of these difficulties here. Two different approaches to overcoming them are to be found in Chapter 8 of Gallager's book on Information Theory [3] and in Wyner's paper entitled "Capacity of the band-limited Gaussian channel" [4]. Shannon, by an adroit hand-waving argument, extended his discrete channel work to the time-continuous case and, of course, came up with the correct answer. He invoked the sampling theorem and argued in an imprecise way that "using signals of bandwidth  $W$  one can transmit only  $2WT$  independent numbers in time  $T$ ." Shannon himself was unhappy with his method of bridging the gap from the time-discrete to the time-continuous case. Indeed, it was as a result of questions he raised in trying to make rigorous this notion of  $2WT$  degrees of freedom for signals of duration  $T$  and bandwidth  $W$  that the research leading to the Landau-Pollak theorem got under way. I want to close my talk with a short discussion of this important result. I put a slightly different emphasis on the theorem which makes it fit particularly well into the framework I have constructed for models and their correspondence with the real world.

### A NEW VERSION OF THE $2WT$ THEOREM

As a first step, I shall give a special significance to energy. In Facet B, let us define the energy of a signal  $s(t)$  by

$$E[s] = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$$

and let us restrict our attention to signals for which this integral exists, i.e., to signals of finite energy. We take this energy to be a principal quantity of the model and so assume that a direct reading of a laboratory instrument will provide us with a "corresponding energy of the corresponding real signal." We have the usual fuzziness in this correspondence: Facet B in general gives us an irrational for  $E$ ; in the laboratory our instrument measures energy only to a few decimal places. We suppose that the units are fixed in which we measure various quantities and that in these units there is a minimum energy  $\epsilon > 0$  that we can just detect with our meters in Facet A.

I have already commented on the lack of precise correspondence between signals in Facet B and Facet A. Since small enough changes in the signals of the model are not to affect quantities with meaning in Facet A, it seems natural to attempt to make the correspondence many-to-one. We wish to say that

two Facet B signals correspond to the same Facet A signal if they are enough alike in form. If they do correspond to the same Facet A signal, we shall also say they are "really indistinguishable." But what should we take for this criterion of distinguishability? The energy of the difference,  $E[s_1 - s_2]$ , of course. Thus we adopt the Facet B definition:

Two signals,  $s_1(t)$  and  $s_2(t)$ , are *really indistinguishable at level  $\epsilon$*  if

$$E[s_1(t) - s_2(t)] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt \leq \epsilon.$$

Thus if, in the real world, we cannot measure the energy of the difference of the corresponding signals, the signals must be considered "the same." Notice that, at level  $\epsilon$ ,  $s_1(t)$  may be really indistinguishable from  $s_2(t)$ , and  $s_2(t)$  may be really indistinguishable from  $s_3(t)$ , while  $s_1(t)$  and  $s_3(t)$  are not really indistinguishable from one another.

Having adopted this definition, we now say that a signal  $g(t)$  in Facet B is *timelimited to the interval  $(-T/2, T/2)$  at level  $\epsilon$*  if  $g(t)$  is really indistinguishable from its time truncation to this interval. That is, we make the definition

$g(t)$  is *timelimited to  $(-T/2, T/2)$  at level  $\epsilon$*  if

$$s_1(t) \equiv g(t), \quad -\infty \leq t \leq \infty$$

and

$$s_2(t) \equiv \begin{cases} g(t), & |t| \leq T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$$

are really indistinguishable at level  $\epsilon$ .

If  $T_0$  is the smallest value of  $T$  for which  $s_1$  and  $s_2$  are really indistinguishable at level  $\epsilon$ , we say that  $g(t)$  is of *duration  $T_0$  at level  $\epsilon$* . Similarly, we make the definition

$g(t)$  is *bandlimited to  $(-W, W)$  at level  $\epsilon$*  if  $u_1(t)$  and  $u_2(t)$  are really indistinguishable at level  $\epsilon$ , where

$$U_1(f) = G(f), \quad -\infty \leq f \leq \infty$$

and

$$U_2(f) = \begin{cases} G(f), & |f| \leq W \\ 0, & |f| > W \end{cases}$$

Here, of course,  $U_1$ ,  $U_2$ , and  $G$  are the Fourier transforms of  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , and  $g(t)$ , respectively. If  $W_0$  is the smallest value of  $W$  for which  $u_1$  and  $u_2$  are really indistinguishable at level  $\epsilon$ , we say that  $g(t)$  is a signal of *bandwidth  $W_0$  at level  $\epsilon$* .

Thus a Facet B signal is *bandlimited to  $(-W, W)$  at level  $\epsilon$*  if it is really indistinguishable at level  $\epsilon$  from the signal obtained by cutting off the high-frequency tails beyond  $W$ . We do not require there to be no energy at frequencies higher than  $W$ ; we require only that the energy there be smaller than the quantity we can just measure in Facet A. Note that with these definitions, doubling the strength of a signal may well increase its bandwidth. Similar remarks hold for the time duration of a signal. A consequence of these definitions is that *all* signals of finite energy are both bandlimited to some finite bandwidth  $W$  and timelimited to some finite duration  $T$ . This is in distinct contrast to the situation that obtains with the usual definitions, where only the always-zero signal can be both bandlimited and timelimited.

One more definition is now needed to complete the picture. We shall say that a set  $\mathcal{F}$  of signals has *approximate dimension*

$N$  at level  $\epsilon$  during the interval  $(-T/2, T/2)$  if there is a fixed collection of  $N = N(T, \epsilon)$  signals, say  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N$ , such that every signal in  $\mathcal{F}$  is really indistinguishable at level  $\epsilon$  during the interval from some signal of form  $\sum_1^N a_i \Psi_i(t)$ . That is, we require for each  $f \in \mathcal{F}$  that there exist  $a$ 's such that

$$\int_{-T/2}^{T/2} \left[ f(t) - \sum_1^N a_i \Psi_i(t) \right]^2 dt \leq \epsilon.$$

We further require that there be no set of  $N-1$  functions whose linear combinations can furnish signals really indistinguishable in this sense from every member of  $\mathcal{F}$ .

We can now state a version of the Landau-Pollak theorem [5, theorem 12] suited to our point of view. Let  $\mathcal{G}_\epsilon$  be the set of all signals bandlimited to  $(-W, W)$  and timelimited to  $(-T/2, T/2)$  at level  $\epsilon$ . Let  $N(W, T, \epsilon, \epsilon')$  be the approximate dimension of  $\mathcal{G}_\epsilon$  at level  $\epsilon'$  during the interval  $(-T/2, T/2)$ . Then, for every  $\epsilon' > \epsilon$ ,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N(W, T, \epsilon, \epsilon')}{T} = 2W \dots$$

$$\lim_{W \rightarrow \infty} \frac{N(W, T, \epsilon, \epsilon')}{W} = 2T.$$

A proof is given in the Appendix.

It would be satisfying, of course, if in the theorem we could take  $\epsilon' = \epsilon$  and still draw the same conclusions, but this is not the case. The situation is delicate. We must be a little more stringent in bandlimiting and timelimiting than in fitting the signals of  $\mathcal{G}_\epsilon$  with those of a finite-dimensional function space, but only infinitesimally more stringent. The nuance is a mathematical one, of no significance in the Facet A interpretation of results.

Note that the theorem holds for every  $\epsilon$  and  $\epsilon'$  provided only that  $\epsilon' > \epsilon$ . Thus the result is not really dependent on the precision with which we can measure energy. If in future years we refine our instruments and so decrease  $\epsilon$ , it will still be true that the approximate dimension of the set of bandlimited and timelimited functions is asymptotically  $2WT$  as  $W$  or  $T$  becomes large. A completely dual form of the theorem exists, of course, in which the signals of  $\mathcal{G}_\epsilon$  are approximated in the frequency domain throughout the interval  $(-W, W)$ .

The foregoing theorem differs in many ways from the Landau-Pollak theorem as stated by those authors, but it is readily established by minor modifications of their techniques and results. The version presented here is particularly well suited to the point of view I have adopted regarding models and their correspondence to the real world. I have made bandwidth and duration of signals principal quantities of the model and independent of such secondary quantities as signal behavior at infinite times or infinite frequencies. The definitions correspond to measurements that can be made in Facet A. The approximate dimension  $N$  of the set of bandlimited and timelimited signals is also a principal quantity. We find the robust result that  $N = 2WT + o(WT)$ , independently of how well we can measure energy.

There are many other areas where these ideas can be used to clarify apparent paradoxes. Singular detection of signals and hyperresolution of optical images are two of the most important of these. Time limitation (in a different sense) keeps me from discussing these subjects now. Let me just say that proper application of the principle of making princi-

pal quantities insensitive to secondary ones precludes perfect detection and prevents resolution far beyond the Rayleigh limit.

## APPENDIX PROOF OF DIMENSION THEOREM

### A. Review

We first recall some properties of a set of special functions discussed in detail in [5] and [6].

Let  $W > 0$  and  $T > 0$  be given. Let  $\Psi_0(t), \Psi_1(t), \dots$  be a complete set of solution of the integral equation

$$\int_{-T/2}^{T/2} \frac{\sin 2\pi W(t-t')}{\pi(t-t')} \Psi(t') dt' = \lambda \Psi(t), \quad -\infty < t < \infty \quad (1)$$

and let  $\lambda_j$  be the eigenvalue corresponding to  $\Psi_j(t)$ ,  $j = 0, 1, \dots$ . We suppose the solutions ordered so that  $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ . The  $\Psi_j(t)$  can be chosen real and can be normalized so that the following statements hold:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_j(t) \Psi_k(t) dt = \delta_{jk} \quad (2)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \Psi_j(t) \Psi_k(t) dt = \delta_{jk} \lambda_j \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f t} \Psi_j(t) dt = \frac{1}{\gamma_j} \Psi_j\left(\frac{T}{2} \frac{f}{W}\right) \chi\left(\frac{f}{W}\right) \quad (4)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{2\pi i f t} \Psi_j(t) dt = \frac{T}{2W} \gamma_j^* \Psi_j\left(\frac{T}{2} \frac{f}{W}\right) \quad (5)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \frac{\sin 2\pi W(t'-t)}{\pi(t'-t)} \Psi_j(t) dt = \lambda_j \Psi_j(t'), \quad j, k = 0, 1, 2, \dots; \quad -\infty < t', f < \infty. \quad (6)$$

Here

$$\chi(t) \equiv \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases} \quad (7)$$

and

$$\gamma_j = i^j \sqrt{\frac{2W}{T} \lambda_j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

where  $i = \sqrt{-1}$  and the \* denotes complex conjugate.

The quantities  $\lambda_j$  satisfy the inequalities

$$1 > \lambda_j > \lambda_{j+1} > 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = 0. \quad (8)$$

Furthermore, for every fixed  $\eta > 0$ , we have the limits

$$\lim_{WT \rightarrow \infty} \lambda_n = \begin{cases} 0, & n = [(1 + \eta)2WT] \\ [1 + e^{-\eta}]^{-1}, & n = [2WT + \frac{b}{\pi} \log WT] \\ 1, & n = [(1 - \eta)2WT] \end{cases} \quad (9)$$

$\eta > 0.$

Here  $b$  and  $\eta$  are numbers independent of  $W$  and  $T$  and the square brackets denote "largest integer not exceeding."

The functions  $\Psi_0(t), \Psi_1(t), \dots$  are complete in  $(-T/2, T/2)$  among all functions square-integrable on that interval. They are also complete in  $(-\infty, \infty)$  among all functions in  $\mathcal{B}$ , defined as the set of all functions  $b(t)$  whose Fourier transform

$$B(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f t} b(t) dt$$

vanishes for  $|f| > W$ . We call members of  $\mathcal{B}$  strictly band-limited. From (4) and (7), it follows that the  $\Psi_j(t)$  are strictly bandlimited and hence unaltered by low-pass filtering so that

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi W(t-t')}{\pi(t-t')} \Psi_j(t') dt' = \Psi_j(t), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

### B. The Functions $g_j(t)$

We denote by  $\mathcal{G}_\epsilon$  the set of all real functions that are of duration  $T$  and bandwidth  $W$  at level  $\epsilon$ . That is,  $\mathcal{G}_\epsilon$  is the set of all real functions  $g(t)$  square-integrable in  $(-\infty, \infty)$  for which

$$E_T[g] \equiv \int_{|t| > T/2} g^2(t) dt \leq \epsilon \quad (11)$$

and

$$E_W[g] \equiv \int_{|f| > W} |G(f)|^2 df \leq \epsilon \quad (12)$$

where

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f t} g(t) dt$$

is the Fourier transform of  $g(t)$ . We note that (12) can also be written as

$$\begin{aligned} E_W[g] &= \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df - \int_{-W}^W |G(f)|^2 df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt - \int_{-W}^W df \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{2\pi i f t} g(t) \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-2\pi i f t'} g(t') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\sin 2\pi W(t-t')}{\pi(t-t')} g(t)g(t') \end{aligned} \quad (13)$$

Functions in  $\mathcal{G}_\epsilon$  cannot be arbitrarily energetic. What member of  $\mathcal{G}_\epsilon$  has the largest energy? We seek to maximize

$$E[g] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^2 dt \quad (14)$$

subject to the inequality constraints (11) and (12).

To solve this problem, let us first replace (11) and (12) by the exact constraints

$$E_T[g] = \alpha, \quad E_W[g] = \beta \quad (15)$$

where  $\alpha > 0$  and  $\beta > 0$  are given numbers. We now seek to maximize (14) subject to (15) by choice of a square-integrable  $g(t)$ . Introducing Lagrange multipliers  $\mu$  and  $\nu$  and using (13), we see that

$$J \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 - \chi\left(\frac{2t}{T}\right) \right] g^2(t) dt + \nu \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\sin 2\pi W(t-t')}{\pi(t-t')} g(t)g(t') \right]$$

must be stationary with respect to small changes in  $g(t)$  for the most energetic function. Taking the first variation of  $J$ , we find that  $g(t)$  must satisfy

$$Ag(t) + B\chi\left(\frac{2t}{T}\right)g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi W(t-t')}{\pi(t-t')} g(t') dt' \quad (16)$$

where  $A$  and  $B$  are independent of  $t$ .

Now the right side of (16) is a strictly bandlimited function of  $t$  since its Fourier transform is  $\chi(f/W)G(f)$ . The left side of (16) must also be a smooth function of this sort, so that we must have

$$g(t) = \begin{cases} b(t), & |t| \leq T/2 \\ \frac{A+B}{A}b(t), & |t| > T/2 \end{cases} \quad (17)$$

with  $b(t) \in \mathfrak{B}$ . Substituting (17) for  $g$  in (16) yields

$$\begin{aligned} (A+B)b(t) &= \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\sin 2\pi W(t-t')}{\pi(t-t')} b(t') dt' \\ &+ \frac{A+B}{A} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dt' - \int_{-T/2}^{T/2} dt' \right] \frac{\sin 2\pi W(t-t')}{\pi(t-t')} b(t') \\ &= \frac{A+B}{A} b(t) + \left[ 1 - \frac{A+B}{A} \right] \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\sin \pi W(t-t')}{\pi(t-t')} b(t') dt' \end{aligned}$$

or

$$\int_{-T/2}^{T/2} \frac{\sin \pi W(t-t')}{\pi(t-t')} b(t') dt' = \frac{(A+B)(1-A)}{B} b(t).$$

Comparison with (1) shows that we must have  $b(t) = k\Psi_j(t)$  for some  $j$ , so that, from (17),  $g(t)$  is of the form  $k_1\Psi_j(t) + k_2\chi(2t/T)\Psi_j(t)$ .

By using the results of Subsection A, it is now a simple matter to determine  $k_1$  and  $k_2$  to meet the constraints (15). In this way, we find that the functions

$$\bar{g}_j(t) \equiv \sqrt{\frac{\alpha}{1-\lambda_j}} \Psi_j(t) + \sqrt{\frac{\beta}{\lambda_j(1-\lambda_j)}} \chi\left(\frac{2t}{T}\right) \Psi_j(t), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

are the only solutions of (15) and (16). A further calculation shows that

$$E[\bar{g}_j] = \frac{\alpha + 2\sqrt{\lambda_j\alpha\beta} + \beta}{1-\lambda_j} \quad (19)$$

Since the right member here is monotone increasing in  $\lambda_j$  for  $0 \leq \lambda_j < 1$ , we have now shown that  $\bar{g}_0$  has the greatest energy among all functions satisfying (15). Note also that under the constraints  $0 \leq \alpha < \epsilon$ ,  $0 \leq \beta < \epsilon$ , this greatest energy

$$E[\bar{g}_0] = \frac{\alpha + 2\sqrt{\lambda_0\alpha\beta} + \beta}{1-\lambda_0}$$

is maximized when  $\alpha = \beta = \epsilon$ .

It is now convenient to define the functions

$$g_j(t) = \sqrt{\frac{\epsilon}{1-\lambda_j}} \Psi_j(t) + \sqrt{\frac{\epsilon}{\lambda_j(1-\lambda_j)}} \chi\left(\frac{2t}{T}\right) \Psi_j(t), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

obtained from the  $\bar{g}_j$  by setting  $\alpha = \beta = \epsilon$ . They have the following important properties:

$$E\bar{r}[g_j] = E\bar{w}[g_j] = \epsilon \quad (21)$$

$$E[g_j] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g_j^2(t) dt = \frac{2\epsilon}{1-\sqrt{\lambda_j}} \quad (22)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_j(t)g_k(t) dt = \delta_{jk} \frac{2\epsilon}{1-\sqrt{\lambda_j}} \quad (23)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} g_j(t)g_k(t) dt = \delta_{jk} \frac{1+\sqrt{\lambda_j}}{1-\sqrt{\lambda_j}} \epsilon, \quad j, k = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

The  $g_j(t)$  belong to  $\mathfrak{G}_\epsilon$  and we have shown that among all members of  $\mathfrak{G}_\epsilon$ ,  $g_0(t)$  has the greatest energy.

We now seek that member of  $\mathfrak{G}_\epsilon$  orthogonal to  $g_0(t)$  on  $(-\infty, \infty)$  that has the greatest energy. To proceed, we again replace the constraints (11) and (12) by (15), i.e., we first find the function  $\bar{g}$  of the largest energy orthogonal to  $g_0(t)$  and satisfying (15). As before, we find the function must be a  $\bar{g}_j$  given by (18). Equation (19) and the properties of the  $\Psi_j$  and  $\lambda_j$  show that  $\bar{g}_1(t)$  is the desired  $\bar{g}$ . Maximizing on  $\alpha$  and  $\beta$  subject to  $0 \leq \alpha, \beta < \epsilon$  shows  $g_1(t)$  to be the member of  $\mathfrak{G}_\epsilon$  of largest energy orthogonal to  $g_0(t)$ . In the same manner, we see that for  $k = 1, 2, \dots$ ,  $g_k(t)$  is that member of  $\mathfrak{G}_\epsilon$  orthogonal to  $g_0(t), g_1(t), \dots, g_{k-1}(t)$  that has the greatest energy.

In exactly the same way, it can be shown that, among all functions of  $\mathfrak{G}_\epsilon$ ,  $g_0(t)$  has the largest energy in  $(-T/2, T/2)$ . For  $k = 1, 2, \dots$ ,  $g_k(t)$  is the member of  $\mathfrak{G}_\epsilon$  orthogonal on  $(-T/2, T/2)$  to  $g_0(t), g_1(t), \dots, g_{k-1}(t)$  that has the greatest energy in  $(-T/2, T/2)$ .

The  $g_j(t)$  are not complete in  $\mathfrak{G}_\epsilon$  but, as we shall see, they are the best functions to use in economically approximating functions in  $\mathfrak{G}_\epsilon$ . We note from (21), (22), and (8) that, as  $j \rightarrow \infty$ ,  $g_j$  tends to have as much energy in band as out of band and as much energy inside  $(-T/2, T/2)$  as outside of this interval.

### C. The Dimension Theorem

In this section we wish to show that, for every  $\eta > 0$  and every  $\epsilon' > \epsilon > 0$ , there exists a number  $c(\eta, \epsilon, \epsilon')$  such that

$$1 - \eta < \frac{N(W, T, \epsilon, \epsilon')}{2WT} < 1 + \eta \quad (25)$$

whenever

$$WT > c(\eta, \epsilon, \epsilon').$$

Here, as in the main text,  $N(W, T, \epsilon, \epsilon')$  is the approximate dimension of  $\mathcal{G}_\epsilon$  at level  $\epsilon'$ .

1) *The Right Inequality of (25)*: Consider approximating in the interval  $(-T/2, T/2)$  any  $g \in \mathcal{G}_\epsilon$  by its projection

$$\hat{g}(t) = \sum_0^m a_j \Psi_j(t) \quad (26)$$

$$a_j = \frac{1}{\lambda_j} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \Psi_j(t) dt, \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (27)$$

on the space spanned by the first  $(m+1)$   $\Psi$ 's. The energy measure of the error of this approximation is

$$\begin{aligned} \sigma_m^2 &= \int_{-T/2}^{T/2} [g - \hat{g}]^2 dt = \int_{-T/2}^{T/2} g^2 dt \\ &\quad - \sum_0^m \frac{1}{\lambda_j} \left[ \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \Psi_j(t) dt \right]^2 \end{aligned} \quad (28)$$

We shall show below that if  $\epsilon' > \epsilon$ , then for all  $g \in \mathcal{G}_\epsilon$

$$\sigma_m^2 < \epsilon', \quad \text{when } m = [2WT + k_1(\epsilon') \log WT] \quad (29)$$

provided  $WT > k_2(\epsilon')$ . Here  $k_1$  and  $k_2$  are independent of  $W$  and  $T$ . For  $WT > k_2$ , therefore, we have

$$N(W, T, \epsilon, \epsilon') \leq m + 1 \leq 2WT + 1 + k_1(\epsilon') \log WT$$

and so

$$N/2WT \leq 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{WT} + k_1 \frac{\log WT}{WT} \right)$$

Now let  $x_0(\eta)$  be the smallest value of  $x$  for which  $(1/x) + k_1 \cdot (\log x)/x = 2\eta$ . Define  $c = \max(k_2, x_0)$ . Then, whenever  $WT > c$ , we have  $N/2WT \leq 1 + \eta$  and the right side of (25) is established.

To show that  $\sigma_m^2 < \epsilon'$  when (29) holds, we consider maximizing (28) over all  $g \in \mathcal{G}_\epsilon$  that satisfy (15) where we assume  $0 < \alpha, \beta \leq \epsilon$ . Introducing Lagrange multipliers  $A$  and  $B$ , we see from (28) and (13) that

$$\begin{aligned} J &\equiv \int_{-T/2}^{T/2} \chi \left( \frac{2t}{T} \right) g^2(t) dt - \sum_0^m \frac{1}{\lambda_j} \left[ \int_{-T/2}^{T/2} \chi \left( \frac{2t}{T} \right) g(t) \Psi_j(t) dt \right]^2 \\ &\quad + A \int_{-T/2}^{T/2} \left[ 1 - \chi \left( \frac{2t}{T} \right) \right] g^2(t) dt + B \left[ \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt \right. \\ &\quad \left. - \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' \frac{\sin 2\pi W(t-t')}{\pi(t-t')} g(t)g(t') \right] \end{aligned} \quad (30)$$

must be stationary for the maximizing  $g$ . On setting the first variation of  $J$  equal to zero, we find that

$$\begin{aligned} (A+B)g(t) + (1-A)\chi \left( \frac{2t}{T} \right) g(t) - \sum_0^m a_j \chi \left( \frac{2t}{T} \right) \Psi_j(t) \\ = B \int_{-T/2}^{T/2} dt' \frac{\sin 2\pi W(t-t')}{\pi(t-t')} g(t') \end{aligned} \quad (31)$$

Now assume for the moment that

$$A \neq 0, \quad B \neq 0, \quad B \neq -1. \quad (32)$$

Since the right of (31) is a strictly bandlimited function of  $t$ , we must have

$$g(t) = \begin{cases} b(t), & |t| > T/2 \\ \frac{A+B}{B+1} b(t) + \frac{1}{B+1} \sum_0^m a_j \Psi_j(t), & |t| \leq T/2 \end{cases} \quad (33)$$

for some strictly bandlimited function  $b(t)$ . But now we can write

$$b(t) = \sum_0^\infty b_i \Psi_i(t) \quad (34)$$

since the  $\Psi_i$  are complete in  $\mathcal{B}$ . Inserting (33) and (34) into (31) and using the independence of the  $\Psi$ 's, we find that

$$[A(1+B) - \lambda_j B(A-1)] b_j = a_j \lambda_j B, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (35)$$

and that

$$[A(1+B) - \lambda_j B(A-1)] b_j = 0, \quad j \geq m. \quad (36)$$

Now in (27), for  $g(t)$ , insert the value given by (33) and (34). There results

$$a_j \lambda_j B = (A+B) \lambda_j b_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \quad (37)$$

We now use (37) to eliminate  $a_j$  from (35), and so find that

$$A(1+B)(1-\lambda_j) b_j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

By virtue of (32) and (8), we conclude that  $b_j = 0, j = 0, 1, \dots, m-1$ , and hence from (37) that also  $a_j = 0, j = 0, 1, \dots, m-1$ . From (27), we now see that  $g$  is orthogonal to  $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{m-1}$  in  $(-T/2, T/2)$  and hence from (20) is also orthogonal to  $g_0, g_1, \dots, g_{m-1}$  in  $(-T/2, T/2)$ . Note that when the  $a$ 's are zero,

$$\sigma_m^2 = \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt.$$

We have now shown that when (32) holds, the maximum of  $\sigma_m^2$  for all  $g$  satisfying (15) is the largest energy in  $(-T/2, T/2)$  of any  $g$  satisfying (15) that is also orthogonal on  $(-T/2, T/2)$  to  $g_0, g_1, \dots, g_{m-1}$ . We saw in Subsection B that this largest energy is attained by  $\bar{g}_m$  and has the value  $(\alpha + 2\sqrt{\lambda_m \alpha \beta + \beta})/(1 - \lambda_m)$ . Further maximization over  $\alpha$  and  $\beta$  then gives

$$\sigma_m^2 \leq \frac{1 + \sqrt{\lambda_m}}{1 - \sqrt{\lambda_m}} \epsilon \quad (38)$$

for all  $g \in \mathcal{G}_\epsilon$ , with equality when  $g = \bar{g}_m$ . It is not hard to show that, if any of the conditions in (32) is violated, every solution of (31) contained in  $\mathcal{G}_\epsilon$  also satisfies (38).

Equation (29) now follows easily from (38) and (9). The limit in (9) implies the existence of a function  $n_0(\delta)$  such that,

for  $WT > n_0(\delta)$ .

$$\lambda_m \leq \frac{1}{1 + e^{\pi b}} + \delta, \quad \text{when } m = \left\lceil 2WT + \frac{b}{\pi} \log WT \right\rceil.$$

Let  $\delta = \frac{1}{2} [(\epsilon' - \epsilon)/(\epsilon' + \epsilon)]^2$  and set  $b = (\pi/\log) [(1 - \delta)/\delta]$ . We then have  $\lambda_m \leq 2\delta = [(\epsilon' - \epsilon)/(\epsilon' + \epsilon)]^2$ , which implies  $[(1 + \sqrt{\lambda_m})/(1 - \sqrt{\lambda_m})] \epsilon \leq \epsilon'$ . Thus, for the two constants  $k_1$  and  $k_2$  introduced at (29), we have

$$k_1 = \frac{1}{\pi^2} \log \left[ 2 \left( \frac{\epsilon' + \epsilon}{\epsilon' - \epsilon} \right)^2 - 1 \right]$$

and

$$k_2 = n_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon' - \epsilon}{\epsilon' + \epsilon} \right)^2 \right].$$

2) *The Left Inequality of (25)*: To establish the left inequality of (25), we must show that for any  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ , and every  $\epsilon' > \epsilon > 0$ , and for every  $\eta > 0$ , for sufficiently large  $WT$  there exists a  $\hat{g} \in \mathcal{G}_\epsilon$  such that

$$\min_{a_i} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \hat{g} - \sum_0^m a_i \varphi_i(t) \right]^2 dt > \epsilon' \quad (39)$$

where

$$m = [(1 - \eta)2WT]. \quad (40)$$

For then, from the definition of  $N(W, T, \epsilon, \epsilon')$ , we have

$$N(W, T, \epsilon, \epsilon') > m + 1 \geq (1 - \eta)2WT$$

which is the left inequality of (25).

Let  $\mathcal{G}_\epsilon$  be the set of strictly bandlimited functions  $\hat{g}$  for which

$$E_{\hat{T}} \equiv \int_{|t| > T/2} \hat{g}^2(t) dt = \epsilon. \quad (41)$$

$\mathcal{G}_\epsilon$  is a subset of  $\mathcal{G}_\epsilon$ . We shall find a  $\hat{g}$  in  $\mathcal{G}_\epsilon$  for which (39) and (40) hold.

We shall show below that the quantity

$$K = \sup_{\hat{g} \in \mathcal{G}_\epsilon} \min_{a_i} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \hat{g} - \sum_0^m a_i \varphi_i(t) \right]^2 dt \quad (42)$$

is smallest when the  $\varphi_i$  are the functions  $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_m$ . Thus

$$\begin{aligned} K &> \sup_{\hat{g} \in \mathcal{G}_\epsilon} \min_{a_i} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \hat{g} - \sum_0^m a_i \Psi_i(t) \right]^2 dt \\ &> \min_{a_i} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ f - \sum_0^m a_i \Psi_i(t) \right]^2 dt \equiv L \end{aligned}$$

where  $f$  is a particular member of  $\mathcal{G}_\epsilon$ . We now choose

$$f(t) = \frac{1}{1 - \lambda_p} \Psi_p(t) \quad \text{with } p = [(1 - \frac{1}{2}\eta)2WT] > n.$$

This  $f \in \mathcal{G}_\epsilon$  since

$$\int_{|t| > T/2} f^2(t) dt = \frac{\epsilon}{1 - \lambda_p} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_p^2 dt - \int_{-T/2}^{T/2} \Psi_p^2 dt \right] = \epsilon$$

by (2) and (3). Furthermore, since  $p > m$ , then  $f$  is orthogonal to  $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_m$ , so that

$$L = \int_{-T/2}^{T/2} f^2 dt = \epsilon \frac{\lambda_p}{1 - \lambda_p}.$$

But by (9), for large enough  $WT$ ,  $\lambda_p$  is arbitrarily close to 1 so that  $L$  becomes arbitrarily large. Thus we have shown that for every  $\epsilon' > 0$  for large enough  $WT$  we have  $\epsilon' < L \leq K$ . There then exists a  $\hat{g} \in \mathcal{G}_\epsilon$  for which (39) is true and the left of (25) is established.

There remains now only the task of showing that  $K$  attains its smallest value, say  $K_0$ , when the  $\varphi$ 's in (42) are the  $m$  functions  $\Psi_i/\sqrt{\lambda_i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m - 1$ . We note first that the functions  $\Psi_i/\sqrt{\lambda_i}$  are orthonormal in  $(-T/2, T/2)$  and complete in  $\mathcal{B}$ , the class of strictly bandlimited functions. Thus for any  $\hat{g} \in \mathcal{G}_\epsilon$ , we write

$$\hat{g} = \sum_0^m \hat{g}_i \frac{\Psi_i(t)}{\sqrt{\lambda_i}}, \quad \hat{g}_i = \int_{-T/2}^{T/2} \hat{g}(t) \frac{\Psi_i(t)}{\sqrt{\lambda_i}} dt \quad (43)$$

and the condition (41) is

$$\sum_0^m \hat{g}_i^2 \gamma_i = \epsilon$$

$$\gamma_i \equiv \frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (44)$$

From (8) we see that

$$0 < \gamma_0 < \gamma_1 < \dots \quad (45)$$

Suppose now that the linear span of  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$  in (42) does not coincide with the linear span  $\mathcal{S}$  of  $\Psi_0/\sqrt{\lambda_0}, \Psi_1/\sqrt{\lambda_1}, \dots, \Psi_m/\sqrt{\lambda_m}$ . We can then find a function in  $\mathcal{S}$ , say  $h(t) = \sum_0^m h_i \Psi_i(t)/\sqrt{\lambda_i}$  that is orthogonal on  $(-T/2, T/2)$  to each of  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ . Assume  $h(t)$  scaled so that

$$\sum_0^m h_i^2 \gamma_i = \epsilon \quad (46)$$

so that  $h \in \mathcal{G}_\epsilon$ . For this function we have

$$\begin{aligned} M &\equiv \min_{a_i} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ h - \sum_0^m a_i \varphi_i(t) \right]^2 dt = \int_{-T/2}^{T/2} h^2(t) dt \\ &= \sum_0^m h_i^2. \end{aligned} \quad (47)$$

From (46) and (47), however,

$$\epsilon = \sum_0^m h_i^2 \gamma_i \leq \gamma_{m+1} \sum_0^m h_i^2 = \gamma_{m+1} M. \quad (48)$$

Therefore,

$$K \geq M \geq \frac{\epsilon}{\gamma_{m+1}}$$

from (42) and (43) when the  $\varphi$ 's do not span  $S$ . When the  $\varphi$ 's are the functions  $\Psi_i/\sqrt{\lambda_i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ , we compute that

$$\begin{aligned} \min_{a_i} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \sqrt{\frac{\epsilon}{1-\lambda_{m+1}}} \Psi_{m+1}(t) - \sum_0^m a_i \varphi_i(t) \right]^2 dt \\ = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\epsilon}{1-\lambda_{m+1}} \Psi_{m+1}^2(t) dt = \frac{\epsilon}{\gamma_{m+1}} \end{aligned}$$

Since

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{1-\lambda_{m+1}}} \Psi_{m+1}(t) \in \hat{\mathcal{G}}_\epsilon$$

we find  $K \geq \epsilon/\gamma_{m+1}$  also in this case where the  $\varphi$ 's are the  $\Psi$ 's. We now have

$$K_0 \equiv \min_{\varphi^s} K \geq \frac{\epsilon}{\gamma_{m+1}} \quad (49)$$

Now it is easy to see from (43) and (44) that

$$\sup_{\hat{g} \in \hat{\mathcal{G}}_\epsilon} \min_{a_i} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \hat{g} - \sum_0^m a_i \frac{\Psi_i(t)}{\sqrt{\lambda_i}} \right]^2 dt = \frac{\epsilon}{\gamma_{m+1}}$$

and is attained when

$$\hat{g} = \sqrt{\frac{\epsilon}{1-\lambda_{m+1}}} \Psi_{m+1}$$

Since  $K_0$  is the minimum of (42) over all  $\varphi$ 's, we now see that  $K_0 \leq \epsilon/\gamma_{m+1}$ . Combined with (49), this yields  $K_0 = \epsilon/\gamma_{m+1}$ , a value achieved when  $\varphi_i = \Psi_i/\sqrt{\lambda_i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ .

The proof of (25) is thus completed.

#### ACKNOWLEDGMENT

It is a pleasure to give thanks here to my friend and colleague H. Landau for many fruitful discussions on the ideas contained in this paper and for his contributions to them.

#### REFERENCES

- [1] C. E. Shannon, "Communication in the presence of noise," *Proc. IRE*, vol. 37, pp. 10-21, June 1949.
- [2] H. J. Landau, "Sampling, data transmission, and the Nyquist rate," *Proc. IEEE*, vol. 55, pp. 1701-1706, Oct. 1967.
- [3] R. G. Gallager, *Information Theory and Reliable Communication*. New York: Wiley, 1968, ch. 8.
- [4] A. D. Wyner, "Capacity of the band-limited Gaussian channel," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 45, pp. 359-395, Mar. 1965.
- [5] D. Slepian and H. O. Pollak, "Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis, and uncertainty-I," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 40, pp. 43-64, 1961.  
H. J. Landau and H. O. Pollak, "Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis, and uncertainty-II and III," *ibid.*, vol. 40, pp. 65-84, 1961; vol. 41, pp. 1295-1336, 1962.
- [6] D. Slepian, "Some asymptotic expansions for prolate spheroidal wave functions," *J. Math. Phys.*, vol. 44, pp. 99-143, June 1965.



# THE BANDWIDTH OF DIGITAL DATA SIGNALS

FRANK AMOROSO

**The spectrum is finite, yet as technology manipulates it, a dazzling increase in bandwidth capability emerges.**

**T**HE engineering of data communications systems invites involvement with a number of rather refined parametric concepts, such as bit error rate, antenna gain, radiated power, communication efficiency, and bandwidth. Of these, none has been the subject of more lively discussion and revision than bandwidth. The implications of bandwidth can vary considerably from context to context, as the profusion of definitions of bandwidth will attest. The purpose of the present article is to explore the subject of data transmission bandwidth through an examination of its various definitions.

## WHY DISCUSS DATA BANDWIDTH?

Most of the current attention given to data bandwidth centers on the problem of spectrum allocation in an increasingly crowded radio frequency spectrum. But the perennial interest in band occupancy springs from a much broader base of concerns, many outside the domain of radio transmission. Not only may it be important to know how much bandwidth a signal occupies, but also the extent to which a given "band-limited" medium may be exploited for data transmission.

The early experience with open wire telephone lines soon led to the physical realization of sharply band-limited channels. Reactance inherent in the lines combined with the cascading of many equalizers and repeater amplifiers quickly produced very pronounced frequency cutoff characteristics. Nyquist's telegraph transmission theory [1] in 1928 dealt very rigorously with the theory of data signals over such circuits, which were modeled as strictly band-limited channels. More recently [2] it has been shown that the CATV transportation trunk, a cascade of properly terminated coaxial cable sections and repeater amplifiers, each with gradual cutoff characteristics, presents a sharply band-limited end-to-end response characteristic.

Even the record-playback characteristic of a digital magnetic tape station [3] has been modeled as a data commu-

nication channel with limited bandwidth capability. To this fact should be added the common knowledge that many microwave system components, antennas, output power devices, and voltage tunable oscillators impose bandwidth constraints of their own.

In HF radio transmission the bandwidth may not be limited so much by allocation as by a multipath interference effect, which can constrain the usable bandwidth to as little as 100 Hz. Satellite downlink communication is best performed in the rather restricted band from 2 to 4 GHz. Below 2 GHz, galactic noise becomes a significant degradation, while above 4 GHz, the noise due to oxygen absorption is combined with possible fading from precipitation to make the link less attractive.

The needs of the spread-spectrum communication system place a rather contrasting premium on maximum bandwidth occupancy. To decrease the power spectral density of the signal without reducing the transmitter power, to reduce the effectiveness of enemy jammers, to multiplex many signals occupying the very same band, and to increase the precision of timing information derived from a signal all imply greater system bandwidth per data rate.

## NO SINGLE DEFINITION SUFFICES

The availability of a single universal definition of bandwidth would decidedly simplify the specification and structuring of a great variety of systems. However, some reflection on the subject will lead to the conclusion that no universally satisfying definition of bandwidth can exist.

The most relevant and widely cited theory for data transmission systems bandwidth is contained in the sampling theorem of Nyquist and in Shannon's theorem on channel capacity [4]. Nyquist says that any signal of bandwidth  $W$  hertz can be completely characterized by analog samples taken once every  $1/2W$  seconds. Shannon says that a noisy channel of bandwidth  $W$  will theoretically support errorless data transmission at a channel capacity given by

$$C = W \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$$

bits per second, where  $S/N$  is the ratio of signal power to noise power.

The theorems of Nyquist and Shannon, however concise

and fundamental, suffer the practical disadvantage of being based on the assumption of strict band limitation. This means that no signal power whatever is allowed outside the defined band. Unfortunately, a strictly band-limited signal would imply infinite time delay in the channel and either infinitely complex signal synthesis or infinitely complex channel filters. On the other hand, the possible generalization of the fundamental theorems to cover nonstrictly band-limited signals continues to pose perplexing questions [5] even for the pre-eminent investigator.

The practical interest in strict, or nearly strict, band limitation is most often an indirect expression of concern for adjacent channel interference in a frequency division multiplexed (FDM) system. Here almost any definition of occupied bandwidth only imprecisely measures the interference. In fact, a recent investigation showed [6] that total inter-channel crosstalk can be minimized by optimization of the data modulation, and without any direct reference to bandwidth. Definitions of bandwidth, when used, serve the needs of the regulatory agency or the solicitor of a technical proposal who must seek to control interference while allowing the designer freedom to choose his own modulation scheme. Definitions of bandwidth arising in these circumstances are bound to be somewhat arbitrary.

In the case of spread-spectrum communication, the measure of bandwidth is more likely to ask "is the signal spread out enough" rather than "within what bounds is it confined." This is like saying that a gallon of paint should be applied in a layer not to exceed a certain thickness rather than insisting that the paint never splatter beyond certain boundaries. The definitions of bandwidth for spread-spectrum systems can be very precise and practical in their own right, as further discussion will show.

## THE SIGNIFICANCE OF POWER SPECTRAL DENSITY

Before proceeding to discuss various types of bandwidth, it will be good to discuss the underlying frequency function on which they all depend. This is called the power spectral density and is familiar as the typical display on a swept spectrum analyzer [7]. The general feeling is that for every data modulation scheme there exists a precisely known power spectral density from which the bandwidth can be deduced or computed according to any given definition of bandwidth.

The power spectral densities generally given for data signals are based on critical assumptions of random data sequences and long averaging times. There may be circumstances under which one or both of those assumptions will fail to apply. For instance, the power spectral density usually given for 180° binary phase shift keying takes the form

$$S_n(f) = \left[ \frac{\sin \pi (f - f_c) T}{\pi (f - f_c) T} \right]^2 \quad (1)$$

where  $f_c$  is the carrier frequency and  $T$  is the bit duration. During the transmission of simple idling patterns, such as all 1's or alternating 1's and 0's, the spectrum will not remotely resemble that given in (1), but rather will consist of discrete spectral lines, i.e., infinitely tall spikes of spectral density. In a

more complex example, random data, when convolutionally encoded for error correction, lose some of their randomness. Interdependency between bits is introduced, and the spectrum [8] will depart from (1).

Even if the criterion of randomness has been satisfied, the spectrum will not conform to (1) if the observation time is short. Fig. 1 shows the power spectral density of a 32-bit burst of random data, with the spectrum (jagged curve) expressed in decibels. The smooth curve represents (1), and the bit pattern is inset. Notice that the burst spectrum conforms very broadly to the smooth curve, but for the most part departs markedly from it. The theoretically satisfying spectra often observed on swept analyzers will be seen to conform with (1) for sweep rates set very slow with respect to the bit rate and with very long random sequences.

It is worth mentioning that a number of recent developments tend to favor the use of random data streams. A U.S. Commerce Department requirement [9] for the protection of "unclassified information transmitted by and between government agencies and contractors that would be useful to an adversary" has spurred inquiry into bulk encryption. This will have the effect of converting nonrandom data into random data. Police radio nets are being forced to convert to encrypted digitized speech [10] to prevent eavesdropping curiosity-seekers from congregating at the scenes of hostage situations and other sensitive operations. Of course, such data sources as digitized speech and digitized video are notably nonrandom in their unscrambled form. Scrambling is often added to facilitate bit timing extraction even if security and privacy are not necessarily desired.

A second factor that encourages the use of precise mathematical formulas such as (1) for digital data spectra is that the formulas are often rather simply derived. For many of the common modulation techniques, such as binary phase shift keying (BPSK), quaternary phase shift keying (QPSK), and minimum shift keying (MSK), the spectrum of the (random) data stream is just the spectrum of the individual data pulse, and that expression is mathematically simple. The spectra of higher order phase and amplitude shift keyed modulation, such as 8 PSK, 16 PSK, and quadrature amplitude modulation used in digital radios, will take the same form as BPSK and QPSK but with the frequency variable rescaled to reflect higher bandwidth efficiency.

Such other modulation types as sinusoidal frequency shift keying (SFSK) [11], phase continuous FSK with arbitrary modulation index [12], or the quasi-band-limited variant [13] on MSK required more complex computation to arrive at the power spectral density. The computational results are, however, precise enough to enable the bandwidth computation for any definition of bandwidth in current use.

Recently the level of interest in constant carrier envelope modulation has grown, owing largely to the desire for hard limiter operation in satellite relays. All of the phase and frequency modulation types mentioned thus far provide constant carrier envelope. However, the use of spectrum shaping filters following the power output stage or the use of amplitude modulation, as in QAM, will generally destroy the constant envelope property of a wave.

The following discussion of bandwidth will focus on several

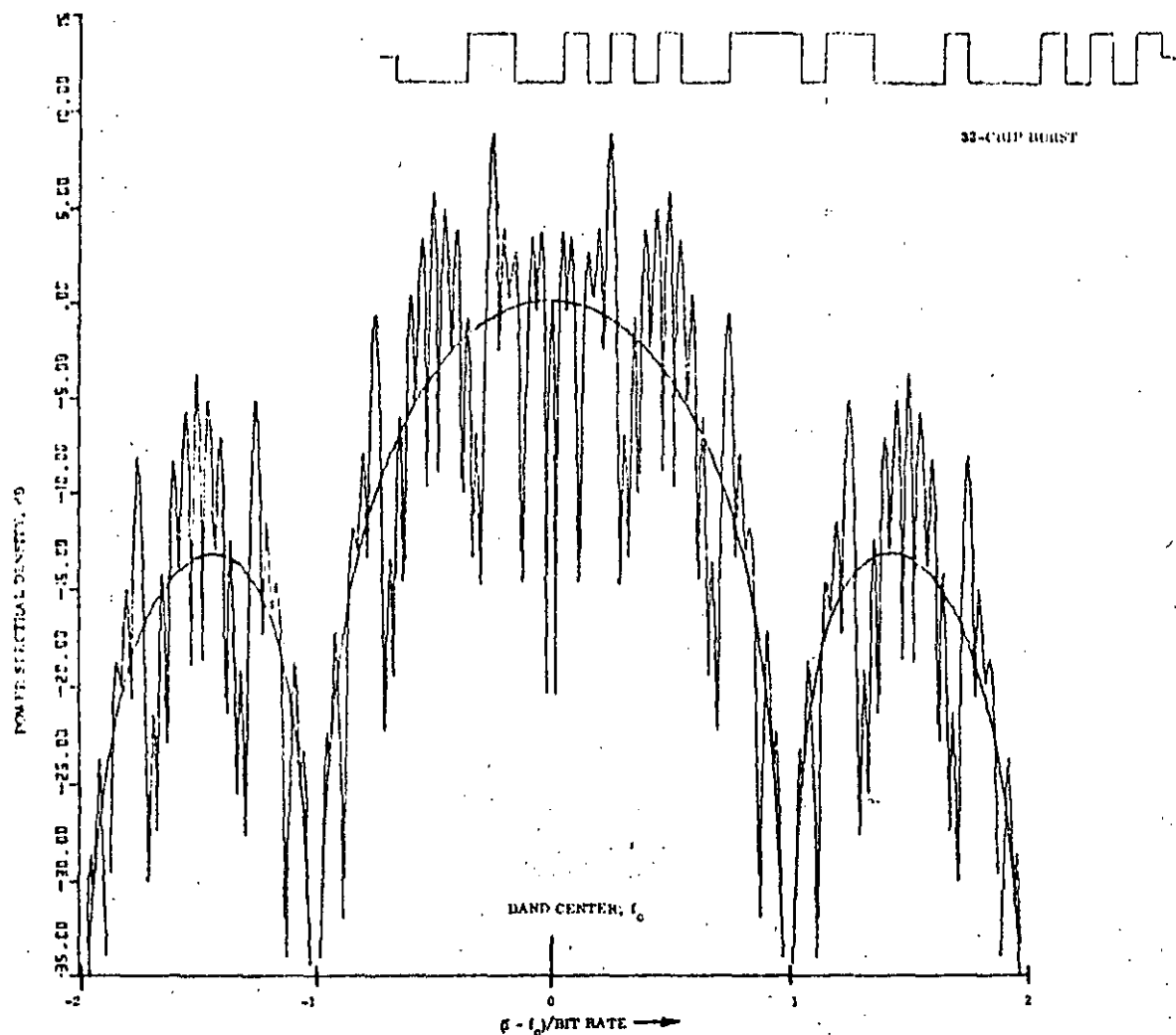


Fig. 1.  
Spectrum of  
32-chip bursts.

constant carrier envelope modulation schemes. These by no means exhaust the available possibilities, but their power spectra are varied enough to reveal the implications of the various definitions of bandwidth. The modulation types are BPSK, QPSK, MSK, SFSK, and the quasi-band-limited keying mentioned previously. The latter type contains hard limiting to achieve constant carrier envelope.

### DEFINITIONS OF BANDWIDTH

The power spectral densities of the five modulation types under consideration are shown in Fig. 2(a) and (b). None is strictly band limited. In fact, no constant envelope wave can be strictly band limited, save for the case of an unmodulated carrier. This is readily established through the squared envelope theorem [14] of analytic signal theory. The definitions of bandwidth to be considered are all amenable to constant envelope signaling and represent a fairly complete catalog.

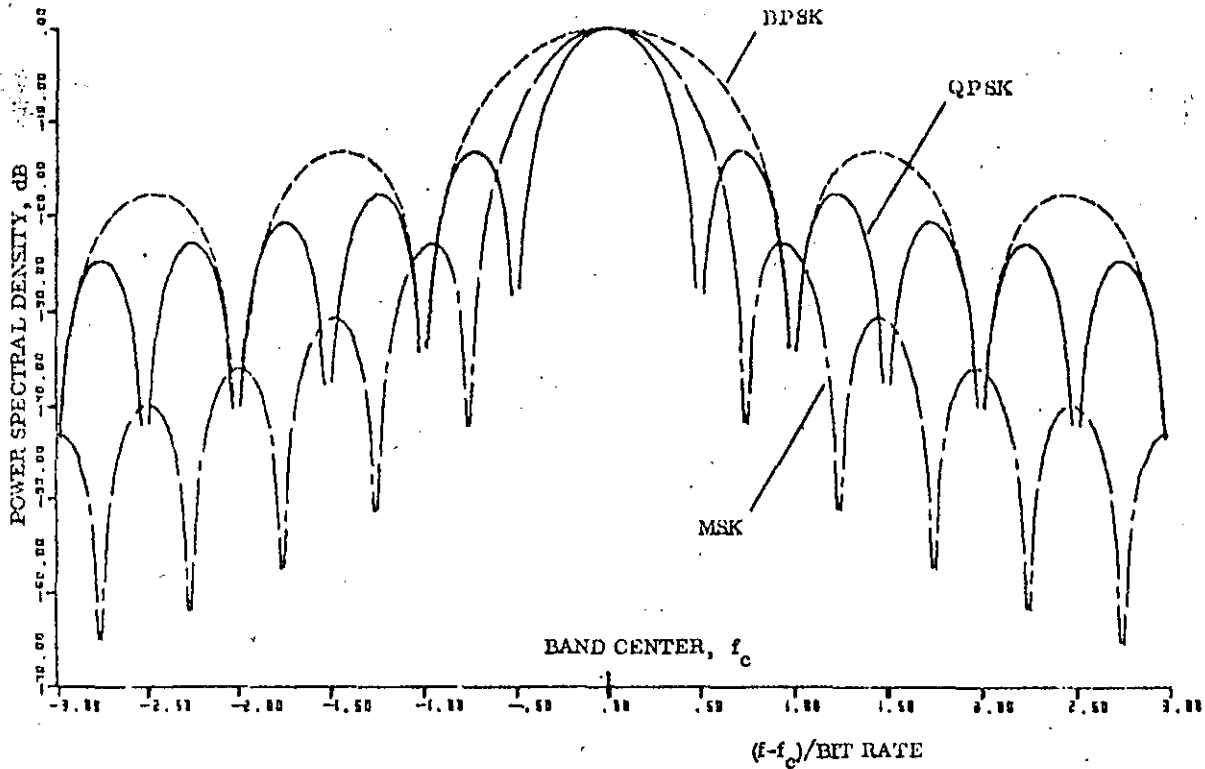
#### Fractional Power Containment Bandwidth

The first type of bandwidth to be discussed has been adopted by the Federal Communications Commission (FCC Rules and Regulations Section 2.202) and states that the occupied bandwidth is the band which leaves exactly 0.5

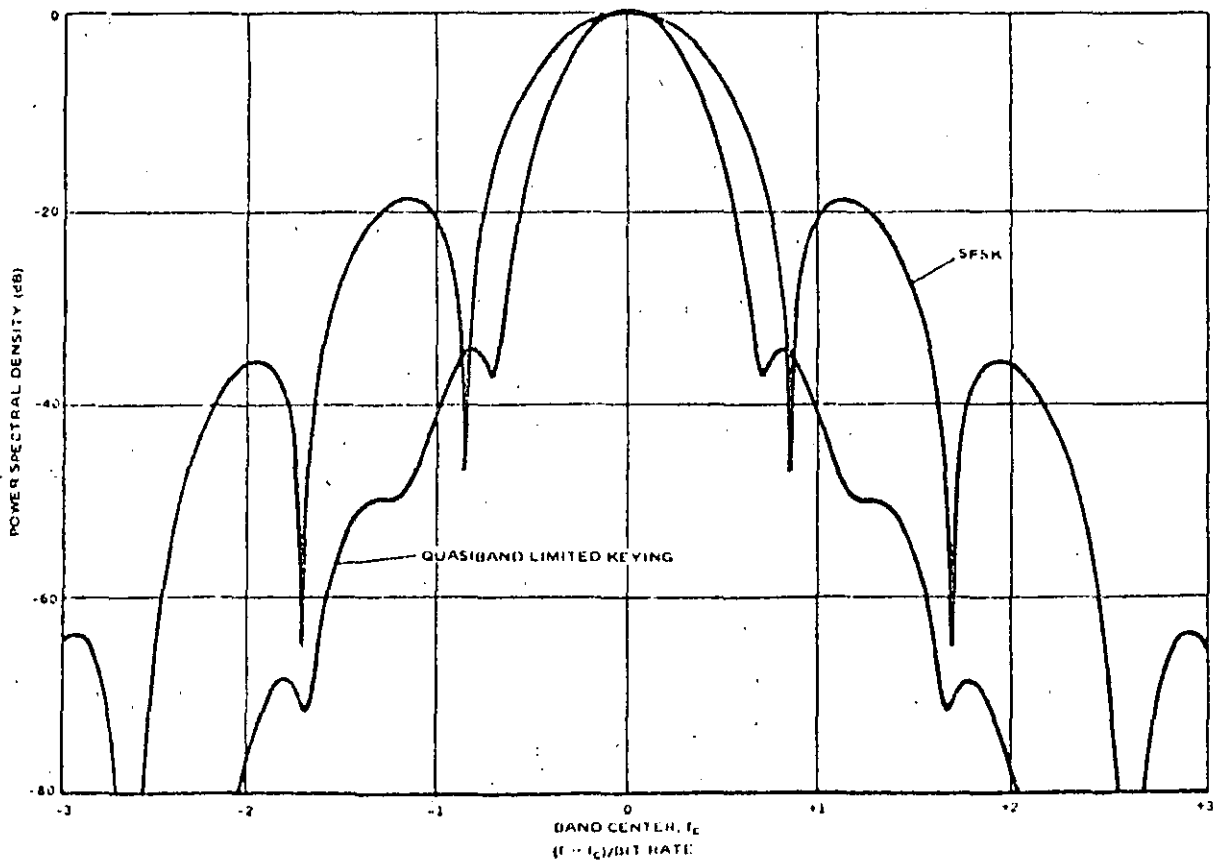
percent of the signal power above the upper band limit and exactly 0.5 percent of the signal power below the lower band limit. Thus 99 percent of the signal power is inside the occupied band.

An aid to applying the given definition to the modulation types at hand is provided in Fig. 3. This is a plot of fractional power outside a band centered on the carrier, plotted versus bandwidth in units of bit rate. When fractional power is  $-20$  dB, then 1 percent of the power is outside the band. Since the data spectra are symmetrical, the FCC definition is satisfied at the  $-20$  dB level. For instance, the 99 percent bandwidth of MSK is 1.18 Hz/bits/s. The plots of the type in Fig. 3 are generally simpler to use than those of Fig. 2, as they do not exhibit the complex lobed behavior found in the power spectral density.

A lower bound (solid curve) is also given in Fig. 3, as it represents the minimum achievable bandwidth over a continuum of power containment percentages [15]. The lower bound applies to all modulation schemes whose basic data pulses last for 2 bit durations or less. With the exception of quasi-band-limited keying, this category includes all modulation schemes under consideration. Of these, MSK comes very close to having the minimum achievable bandwidth at the  $-20$  dB level. For this and other reasons to be stated



A



B

Fig. 2. (a) Power spectral densities for BPSK, QPSK, and MSK. (b) Power spectral densities for SFSK, quasi-band-limited keying.

shortly the MSK technique has been termed a bandwidth efficient modulation method. Note that the communication efficiency<sup>1</sup> of BPSK, QPSK, MSK, and SFSK are all identical.

The quasi-band-limited modulation scheme differs from the others in two important respects. First, its basic pulse lasts 4 bit durations, and second its communication efficiency is about 0.64 dB worse than the other methods when the simplest demodulation and detection is employed.

Inspection of Fig. 3 will show that if the above bandwidth criterion were adjusted to be either much less stringent or much more stringent, then MSK would no longer be as attractive. For instance, if only 70 percent of the power were required to be within the band, then QPSK would occupy less bandwidth than MSK and would nearly attain the lower bound bandwidth. If 99.99 percent of the energy were required, then SFSK would be more bandwidth efficient than MSK. The numerical value of bandwidth in units of bit rate would, of course increase as the criterion were made more stringent.

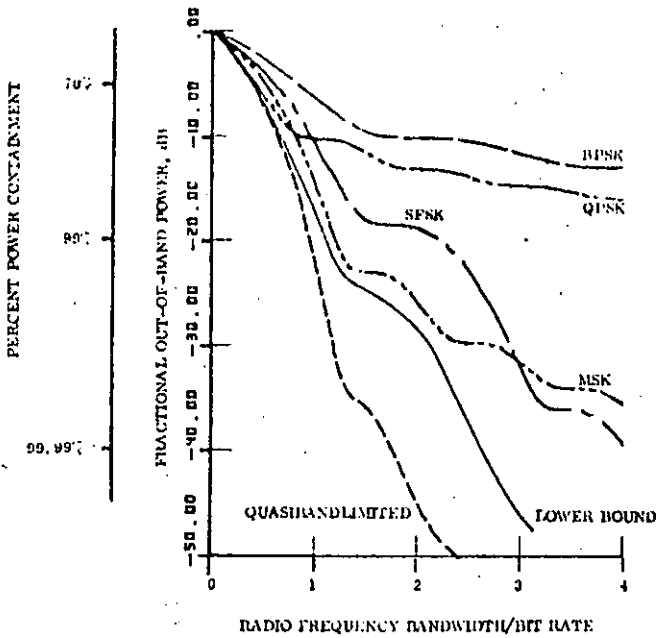


Fig. 3. Fractional out-of-band power for various modulation schemes.

The relevant bandwidths<sup>2</sup> per bit rate for the 99 percent FCC criterion are

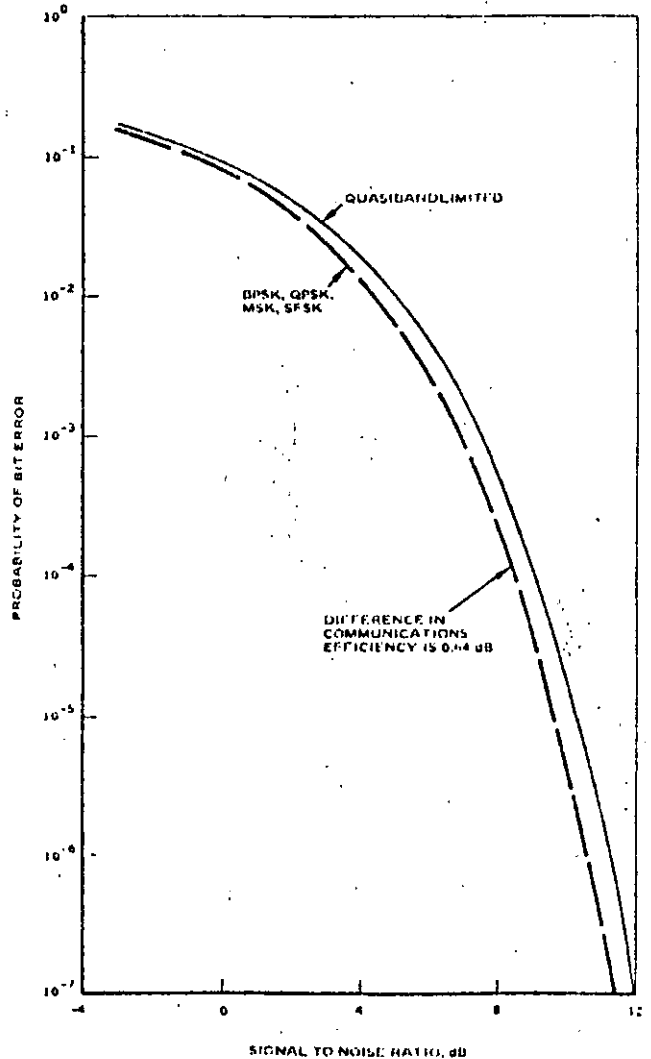
Modulation Type	99 Percent Energy Containment Bandwidth
BPSK	20.56
QPSK	10.28
MSK	1.18
SFSK	2.20
Quasi-band-limited	0.95.

<sup>1</sup> Communication efficiency is measured by bit error rate versus signal to noise ratio, as explained in the inset at right.

<sup>2</sup> Bandwidth here is always in units of bit rate.

### COMMUNICATIONS EFFICIENCY COMPARISON

Communications efficiency measures the effectiveness with which signal to noise ratio is used to achieve low bit error rates. The figure below shows the bit error rate performance of the modulation schemes under consideration. Coherent detection is assumed, which means that a perfect reference carrier is available at the receiver for demodulation. The performance of BPSK, QPSK, MSK, and SFSK are identical. The performance curve of quasi-band-limited keying lies about 0.64 dB to the right of the others, so that the quasi-band-limited scheme requires about 0.64 dB more signal to noise ratio to achieve the same error rates. In this sense it may be said that the communications efficiency of quasi-band-limited keying is 0.64 dB worse than the other modulation methods.



Relative communications efficiency of quasi-band-limited keying and other modulation methods.

The exceptionally high values for BPSK and QPSK owe to the very slow rate of their spectral rolloff, hence high levels of power far from the carrier.

*Null-to-Null Bandwidth*

A simpler and more popular measure of bandwidth, honored by time and wide acceptance [16] if not by profound theoretical implications, is called null-to-null bandwidth. This is a reference to the lobed behavior of the power spectral density observed in Fig. 1. The null-to-null bandwidth is just the width of the main spectral lobe. The assumption, clearly, is that the power spectral density possesses a main lobe bounded by well-defined spectral nulls, i.e., frequencies where the power spectral density is nil. Such is not the case for quasi-band-limited keying, nor is it the case for a number of other modulation schemes recently developed. Therefore null-to-null bandwidth lacks complete generality. For the modulation types considered here the null-to-null bandwidths are

Modulation Type	Null-to-Null Bandwidth
BPSK	2.00
QPSK	1.00
MSK	1.50
SFSK	1.72
Quasi-band-limited	no well defined nulls.

The null-to-null bandwidth also contains most of the signal power, if rough criteria can be accepted. Fig. 3 gives the relevant quantitative information. The degree to which the spectrum is generally spread is also roughly measured by the null-to-null bandwidth. Therefore this mode of specifying bandwidth is often found in spread spectrum system descriptions.

*Bounded Power Spectral Density*

Another widely used method of specifying bandwidth is to state that everywhere outside the specified band the power spectral density must have fallen at least to a certain stated level below that found at the band center. Typical attenuation levels might be 35 or 50 dB, although greater levels of attenuation have been used in system specifications.

The 35 and 50 dB bandwidths for the modulation types under consideration can, in part, be found in Fig. 2, and are completely tabulated below.

Modulation Type	35 dB Bandwidth	50 dB Bandwidth
BPSK	35.12	201.04
QPSK	17.56	100.52
MSK	3.24	8.18
SFSK	3.20	4.71
Quasi-band-limited	1.68	2.38

Here again, the enormous bandwidths registered for BPSK and QPSK are evidence of their very slow rate of spectral rolloff. Also, the comparative bandwidths of MSK

and SFSK are seen to be sensitive to the particular setting of the spectrum bound. Their 35 dB bandwidths are nearly equal, but the SFSK 50 dB bandwidth is only half that of MSK. The reason is clear in Fig. 2, as the spectral density of SFSK quickly drops below -50 dB at frequencies much beyond twice the bit rate, while the MSK spectrum continues to roll off slowly.

It must be noted that a bound on power spectral density does not necessarily imply a bound on total power outside the band; it only has the effect of bounding the total power in some finite interval of frequency outside the band. Vice versa, a limit on the total power outside the band does not necessarily imply a bound on the power spectral density in some highly localized region of frequency outside the band. For instance, a periodic signal component, at whatever infinitesimal power level, will always present infinite power spectral density at one or more frequencies.

The idea of defining bandwidth purely by bounding the spectral level outside the authorized band is found in Electronics Industries Association Standard RS-152-B, on Land Mobile Communication in the 25-470 MHz band. The bounded power spectral density method of specifying bandwidth also appears frequently in specifications concerned with adjacent channel interference.

*Noise Bandwidth*

Now attention is shifted to measures of bandwidth that focus on the general dispersion of the spectrum rather than on the details of spectral sidelobe structure. The first of these measures is called noise bandwidth. Conceived initially to permit rapid computation of the noise power out of an amplifier with a wide-band noise input, the noise bandwidth concept can now profitably be applied to the evaluation of data link performance in the face of intentional interference, or jamming.

Noise bandwidth of a signal is defined as the value of bandwidth which satisfies the relation

$$W_N S(f_c) = P$$

where

$W_N$  = noise bandwidth

$S(f_c)$  = power spectral density at the band center, assumed to be the maximum value of spectral density over all frequencies.

$P$  = total signal power over all frequencies.

Fig. 4 illustrates the noise bandwidth concept for BPSK. The power spectral density is plotted on a linear rather than logarithmic amplitude scale; hence, its appearance differs from the representation in Figs. 1 and 2.

The area under the power spectral density curve over all frequencies is, by definition, the total signal power. This is the shaded area. The area of the rectangle is, by the proper setting of  $W_N$ , also equal to the total power. The noise bandwidth  $W_N$  is the width of the rectangle, or 1 Hz/bit/s.

The significance of noise bandwidth in combatting jam-

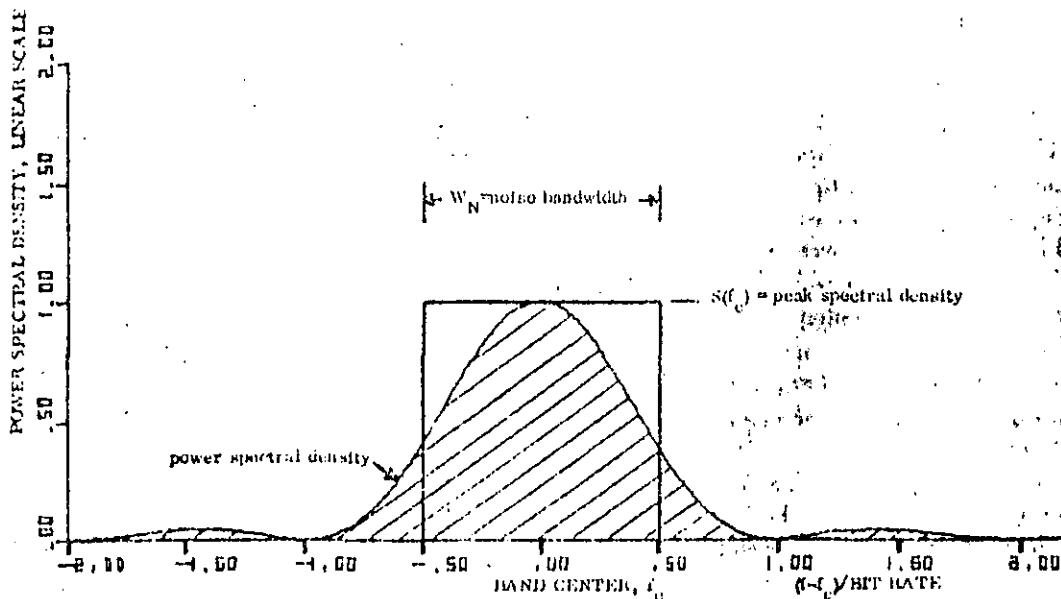


Fig. 4.  
Definition of  
noise bandwidth  
applied to BPSK.

mers relates to a potential strategy used by jammers to degrade system performance. It is well known that optimum link performance in white Gaussian noise is attained by the use of a receiver matched filter. The frequency response of the matched filter matches the power spectral density of the data and therefore has peak response at the band center. This being the case, the jammer will want to concentrate his power toward the band center, where he will produce the strongest spurious response at the detector which follows the matched filter.

One way to counter the jammer is to pick a modulation format which leads to a minimum of peak matched filter frequency response, hence a minimum value of  $S(f_c)$  per radiated signal power  $P$ . But  $S(f_c)/P$  is just the inverse of the noise bandwidth, from (2). The signal design strategy is then simply a maximization of noise bandwidth. The noise bandwidths for the modulation types under consideration are tabulated below.

Modulated Type	Noise Bandwidth
BPSK	1.00
QPSK	0.50
MSK	0.62
SFSK	0.73
Quasi-band-limited	0.48

The most jam resistant modulation type is BPSK, according to the jamming strategy outlined. The signal design strategy just discussed applies equally well to the direct sequence pseudonoise (DSPN) spread-spectrum systems [17]; only the nomenclature need be changed. "Chip rate" replaces "bit rate" and "chip matched filter" replaces "bit matched filter." Curiously, the concept of noise bandwidth has not yet gained great popularity in the specification of DSPN spread spectrum systems. Many alert engineers, however, recognize its value.

#### Half-Power Bandwidth

A very popular measure of bandwidth which, like noise bandwidth, gauges the degree of dispersion of the spectrum is the half-power bandwidth. This is just the interval between frequencies at which the power spectral density has dropped to half power, or 3 dB below the peak value. Hence half-power bandwidth is also known as 3 dB bandwidth. The values are tabulated below.

Modulated Type	Half-Power Bandwidth
BPSK	0.88
QPSK	0.44
MSK	0.59
SFSK	0.70
Quasi-band-limited	0.47

The half-power bandwidth is especially interesting to designers of frequency hopped (FH) spread-spectrum systems. The spectra at individual hop frequencies are overlapped at the half-power points to produce a long-term average spectrum that is very nearly flat.

Half-power bandwidth is usually slightly smaller than the noise bandwidth, depending on the details of the spectral rolloff characteristic. The steeper the spectral rolloff the more closely the half-power bandwidth will approximate the noise bandwidth.

#### Gabor Bandwidth

The final measure of bandwidth is again a general indicator of spectral dispersion, its rather curious definition now bearing the name of its originator [18]. Gabor bandwidth has a dual definition, one in the frequency domain and one in the time domain [19]. Either definition is sufficient by itself, and both definitions give the same numerical result. The two definitions are linked by the powerful Parseval relation of analytic

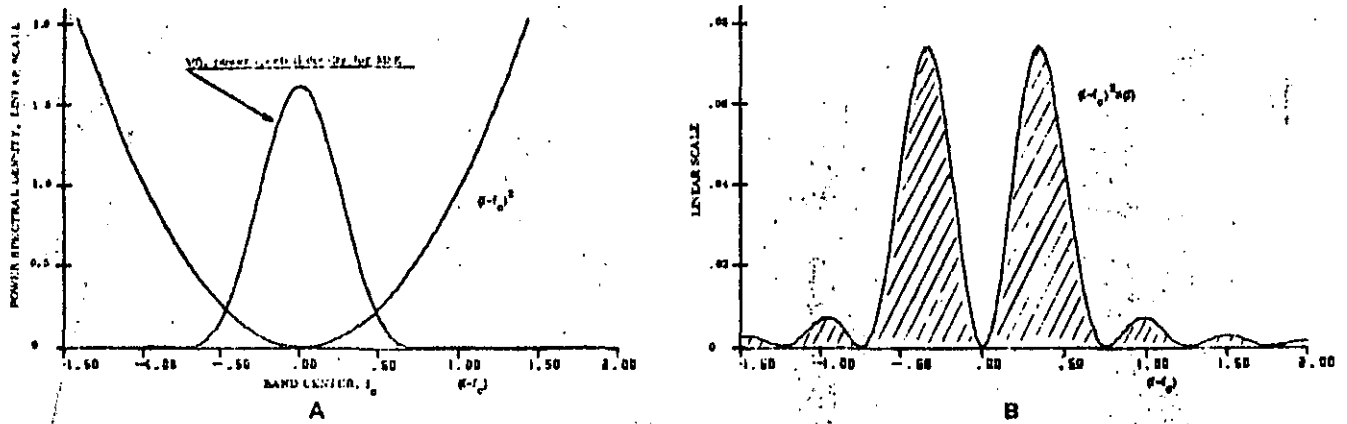


Fig. 5. Frequency domain definition of Gabor bandwidth for MSK, unit bit rate.

signal theory. In both definitions the signal power is assumed, for simplicity, to be unity.

First, the frequency domain definition is illustrated in Fig. 5, for MSK signaling at unit bit rate. In Fig. 5(a), power spectral density  $S(f)$  is shown on a linear scale together with a plot of  $(f - f_c)^2$ . In Fig. 5(b), the product  $(f - f_c)^2 S(f)$  is shown. The area under that product curve over all frequency is called A. Now the Gabor bandwidth is just  $\sqrt{A}$ . This method of computing bandwidth is akin to the computation of the standard deviation of a probability density function, which is a legitimate measure of the width of the function. We prefer to tabulate twice the Gabor bandwidth as it compares more directly with the passband bandwidths discussed previously. The "passband Gabor bandwidth" of MSK is exactly 0.5 Hz/bit/s.

Next the Gabor bandwidth calculation is attempted for BPSK. The  $(f - f_c)^2 S(f)$  product is plotted in Fig. 6. As is evident, the plotted function fails to decay with increasing distance from the band center. Therefore the area under the curve over all frequencies is . . . infinite! Both BPSK and QPSK possess infinite Gabor bandwidth.

A further insight into the meaning of this situation is gained by considering the time domain definition. Fig. 7(a) shows the typical bit pulse for MSK. Fig. 7(b) shows the slope of that pulse, and Fig. 7(c) shows the square of the slope. The shaded area in Fig. 7(c), over the duration of the pulse is called B. Now the passband Gabor bandwidth is

$2\sqrt{B/4\pi^2} = 0.5$  Hz as before. To give a further interpretation, notice that the pulse in Fig. 7(a) is one-half cycle of a sine wave at 0.25 Hz. When such a sine wave modulates a carrier, two spectral lines 0.5 Hz apart are produced. Hence the passband Gabor bandwidth of 0.5 Hz is correct. In fact, if the pulse in Fig. 7(a) had been any number of cycles of a sine wave then the passband Gabor bandwidth would have been correctly computed according to the present definition.

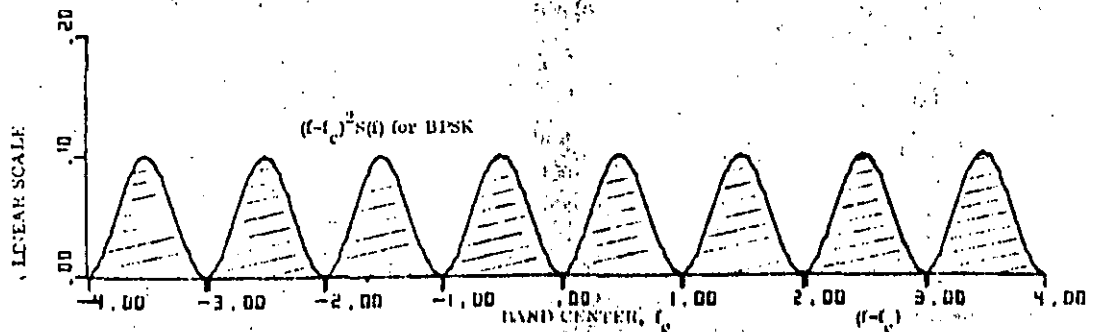
Generally the Gabor bandwidth, being based on the squared slope of the bit pulse, is a measure of "wiggleness" of the bit pulse. This is perhaps an intuitively satisfying way to think of bandwidth. Because the basic bit pulses of BPSK and QPSK are both perfectly rectangular, they have infinite slope at their edges; hence, they are infinitely wiggly. This accounts for their infinite Gabor bandwidth.

The passband Gabor bandwidths for modulation types under consideration are:

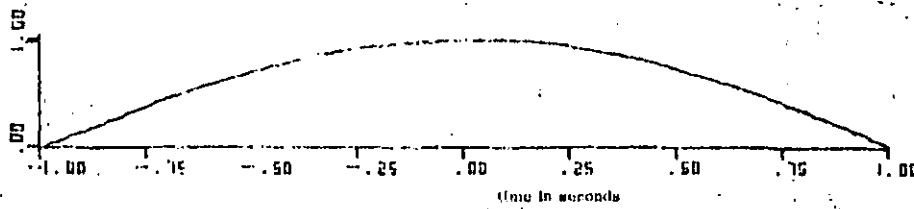
Modulation Type	Passband Gabor Bandwidth
BPSK	infinite
QPSK	infinite
MSK	0.50
SFSK	0.61
Quasi-band-limited	0.37

The results in [19] lead directly to the conclusion that MSK gives the minimum possible Gabor bandwidth of all modu-

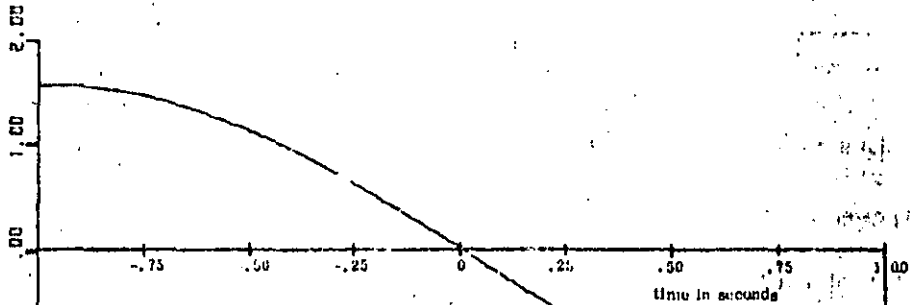
Fig. 6. Gabor bandwidth calculation for BPSK.



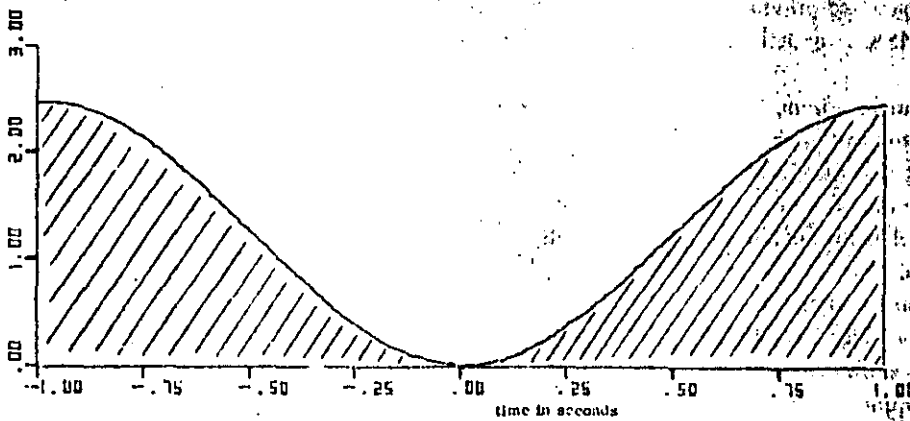




A



B



C

Fig. 7.  
Time domain  
definition of  
Gabor bandwidth  
for MSK,  
unit bit rate.  
(a) Basic pulse  
for MSK, unit  
bit rate.  
(b) Slope of  
basic pulse.  
(c) (Slope of  
basic pulse)<sup>2</sup>.

lation types whose basic pulses are limited to 2 bit duration. This adds more substance to the claim that MSK is a bandwidth efficient modulation scheme.

**FCC Spectrum Envelope**

While the FCC spectrum envelope (FCC Rules and Regulations Section 21.106) does not strictly qualify as a definition of bandwidth, it ought to be mentioned, as it serves to set the upper limit on data rate in certain frequency bands.

The rule states that "the mean power of emissions shall be attenuated below the mean output power of the transmitter in accordance with the following schedule."

"For operating frequencies below 15 GHz, in any 4 kHz band, the center frequency of which is removed from the assigned frequency by more than 50 percent up to and including 250 percent of the authorized bandwidth, as specified by the following equation but in no event less than 50 dB:  $A = 35 + 0.8 (P - 50) + 10 \log_{10} B$  (attenuation greater than 80 dB is not required) where

A = attenuation (in decibels) below the mean output power level;

P = percent removed from the carrier frequency

B = authorized bandwidth in megahertz.

The equation for attenuation  $A$  involves authorized bandwidth  $B$  as a parameter, and  $B$  takes on different values in different frequency bands. For instance  $B = 30$  MHz at 6 GHz, 40 MHz at 11 GHz, etc.

In digital microwave radio, the data rates will be many megabits per second, so power spectral density will be practically unchanged over any particular 4 kHz band. Therefore, the power in any 4 kHz band will simply be given by the power spectral density multiplied by 4 kHz.

Fig. 8 depicts the expression for  $A$  in two cases, with 30 MHz authorized bandwidth and with 40 MHz authorized bandwidth. It is interesting to ask whether this pair of spectrum envelopes can constitute a single consistent definition of bandwidth. In other words, if a given data spectrum just satisfies the 40 MHz envelope, then does it also just satisfy the 30 MHz envelope when the data rate is decreased by the factor  $\frac{3}{4}$ ? The answer is no. In explaining why, it is legitimate to assume that the data signal power is fixed, since  $A$  is a ratio with signal power in the denominator.

First observe that the 40 MHz envelope first reaches  $-80$  dB at  $f_c \pm 34.49$  MHz. The 30 MHz envelope first reaches  $-80$  dB at  $f_c \pm 26.34$  MHz. Say that the data spectrum, multiplied by 4 kHz, experiences a sidelobe peak of exactly  $-80$  dB amplitude at exactly  $f_c \pm 35.12$  MHz. The 40 MHz envelope is just satisfied there. Now decrease the data rate by the factor  $\frac{3}{4}$ . This causes two things to happen. First, the sidelobe peak moves to  $f_c \pm \frac{3}{4} \times 35.12$  MHz =  $f_c \pm 26.34$  MHz. Second, the entire power spectral density rises by the

ratio  $10 \log_{10} 4/3$  or 1.25 dB, in order to keep the total power constant. Now the sidelobe peak has value  $-78.75$  dB and therefore violates the  $-80$  dB bound at  $f_c \pm 26.34$  MHz for 30 MHz bandwidth. It is clear, that the two envelopes shown in Fig. 8 do not imply a single consistent definition of bandwidth, hence the FCC Rule does not constitute a definition of bandwidth.

For any given authorized bandwidth it should be possible to calculate the maximum permissible data rate for any given modulation scheme as long as the power spectral density is known. The inset, which examines the FCC spectrum envelope, gives an example.

### SUMMARY

Table I summarizes the bandwidths of the modulation schemes considered. A very wide range of values is represented. Perhaps this will give a hint of the implications of the strict application of bandwidth definitions to some of the classical modulation types.

If in certain instances, BPSK and QPSK seem to be giving rise to unreasonably large bandwidths, it must be remembered that the ideal waveform assumptions have been rigidly adhered to. In practice, the inherent bandwidth limitations of system components will likely modify the spectrum at large multiples of the data rate. This will change the spectrum and reduce the bandwidth to an extent dependent heavily on the specific application at hand.

Recent work [20] has shown that offset QPSK can be  
(Continued on p. 24)

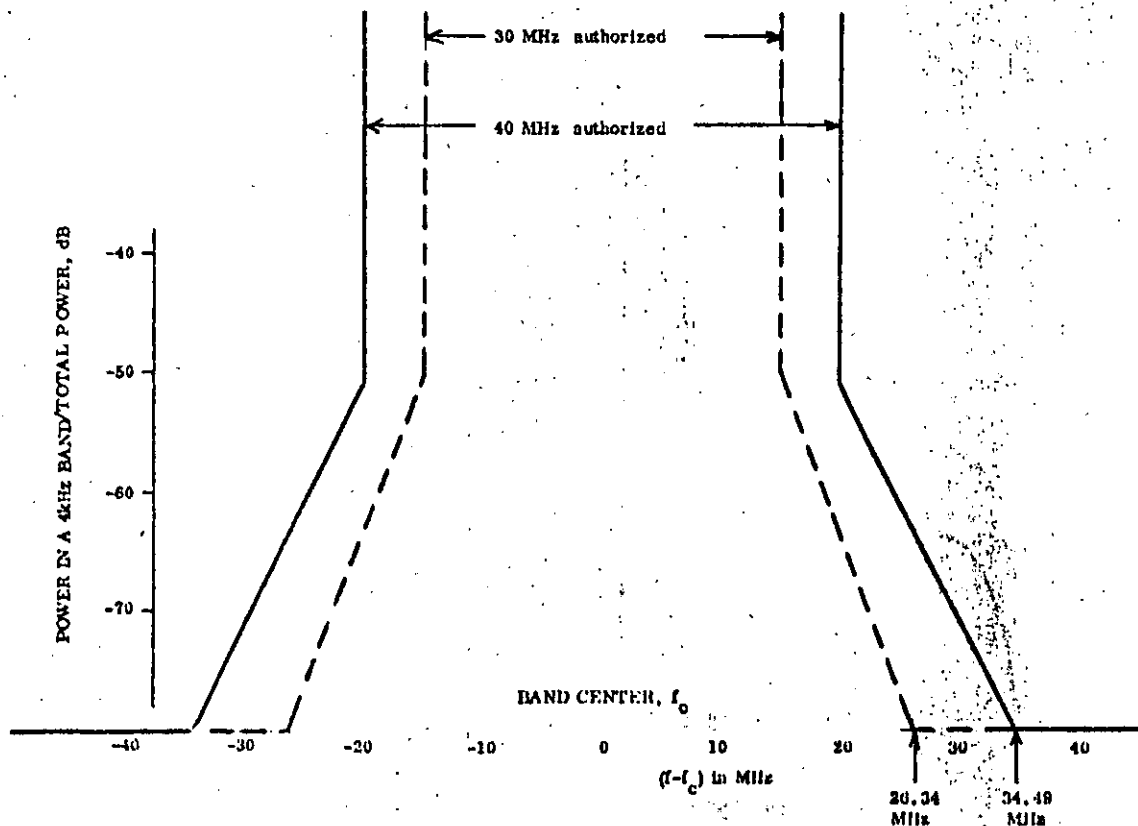


Fig. 8. FCC envelopes for 30 and 40 MHz bandwidths.

**APPLICATION OF THE FCC SPECTRUM ENVELOPE—AN EXAMPLE**

The problem in this example is to find the maximum data rate permitted under the FCC spectrum envelope when the authorized bandwidth is 30 MHz and the modulation method is quasi-band-limited keying.

The power spectral density of quasi-band-limited keying as given in Fig. 2(b) is expressed in decibels and is normalized to 0 dB at  $f = f_c$ . To calculate the power contained in a 4 kHz band, as referred to in the FCC specification, it is necessary to account for the bit rate and the noise bandwidth of the modulation. From Table I, the noise bandwidth is 0.48 times the bit rate, or

$$W_N = 0.48R = \frac{P}{S(f_c)}$$

where  $R$  is the bit rate,  $P$  is total power, and  $S(f_c)$  is the true (unnormalized) value of power spectral density at the band center. So

$$S(f) = \frac{P}{0.48R}$$

Now if  $S_n(f)$  is the normalized power spectral density,

$$S(f) = \frac{P}{0.48R} S_n(f)$$

where Fig. 2(b) shows  $10 \log_{10} S_n(f)$ .

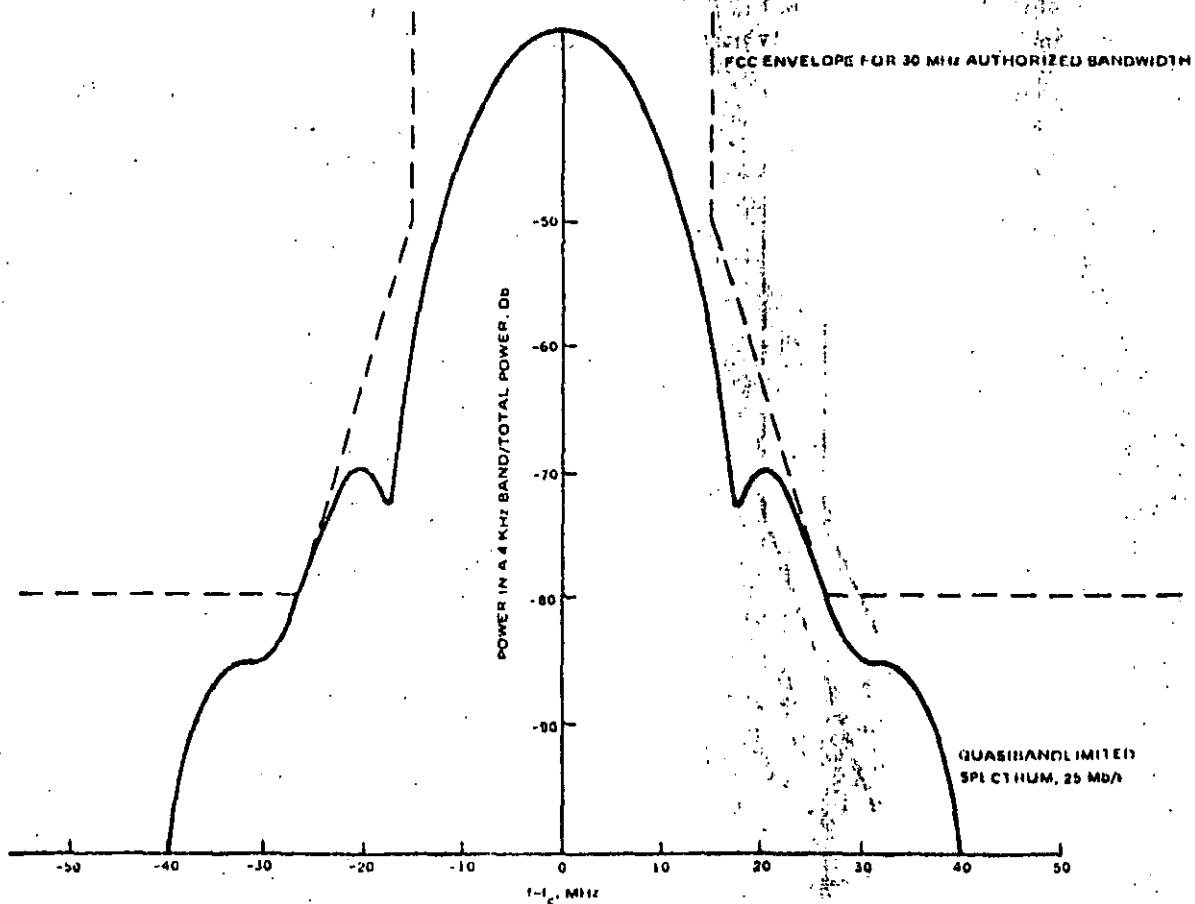
Now the power in a 4 kHz band, at the data rates of interest, is closely approximated by the following expression in dBW:

$$\text{power in 4 kHz} = 10 \log_{10} 4000 + 10 \log_{10} \frac{P}{0.48R} + 10 \log_{10} S_n(f)$$

and the power in a 4 kHz band per total power  $P$ , expressed in decibels, becomes

$$A(f) = 39.21 - 10 \log_{10} R + 10 \log_{10} S_n(f).$$

This is plotted in the figure below for  $R = 25$  Mbits/s, together with the FCC envelope for 30 MHz authorized bandwidth. The quasi-band-limited spectrum is just tangent to the FCC envelope at the -80 dB level. Any increase in bit rate would cause the envelope to be violated. Therefore 25 Mbits/s is the maximum allowable data rate with 30 MHz authorized bandwidth and quasi-band-limited keying.



FCC envelope applied to quasi-band-limited keying.

TABLE I  
Bandwidths for Digital Data Modulation, Units of Bit Rate

Modulation type:	BW Type	99%	Null-to-Null BW	35 dB BW	50 dB BW	Noise BW	Half-Power BW	Passband Gabor BW
		Energy Containment BW						
BPSK		29.56	2.00	35.12	201.04	1.00	0.88	infinite
QPSK		10.28	1.00	17.56	100.52	0.50	0.44	infinite
MSK		1.18	1.50	3.24	8.18	0.62	0.59	0.50
SFSK		2.20	1.72	3.20	4.71	0.73	0.70	0.61
Quasi-band-limited		0.95	No well-defined nulls	1.68	2.38	0.48	0.47	0.37

filtered and then hard limited to produce a spectrum comparable with the quasi-band-limited keying discussed here. The resulting spectrum is known only through Monte Carlo simulation and has much of the raggedness characteristic of Fig. 1 of the present article. From such simulation results it is difficult to compute bandwidth under the many definitions given here.

Although a great deal of effort has been bent toward the maximization of bandwidth efficiency in various contexts, very little attention has been given to the optimization of spread-spectrum DSPN modulation. With the substantially different criteria, this field presents an interesting challenge of its own.

## REFERENCES

- [1] H. Nyquist, "Certain topics in telegraph transmission theory," *Trans. AIEE*, vol. 47, pp. 617-644, Apr. 1928.
- [2] A. S. Taylor and L. H. Janes, "Field testing the performance of a cable TV system," *Proc. IEEE*, vol. 58, pp. 1086-1102, July 1970.
- [3] H. M. Sierra, "Design of a pulse narrowing network," *ElectroTechnol.*, vol. 72, pp. 38-42, Sept. 1963.
- [4] W. R. Bennett and J. R. Davey, *Data Transmission*. New York: McGraw-Hill, 1965, pp. 305-306.
- [5] D. Slepian, "On bandwidth," *Proc. IEEE*, vol. 64, pp. 292-300, Mar. 1976.
- [6] R. E. Eaves and S. M. Wheatley, "Optimization of quadrature-carrier modulation for low crosstalk and close packing of users," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-27, pp. 176-185, Jan. 1979.
- [7] M. Engleson and L. Garret, "Digital radio measurements using the spectrum analyzer," *Microwave J.*, vol. 23, pp. 35-48, Apr. 1980.
- [8] D. Divsalar and M. Simon, "Spectral characteristics of convolutionally encoded digital signals," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-28, pp. 173-186, Feb. 1980.
- [9] D. Kahn, "Cryptology goes public," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 18, pp. 19-28, Mar. 1980.
- [10] D. Williams, "OK Police, Fire Department use of digitized voice systems," *Electron News*, p. 22, Jan. 30, 1978.
- [11] F. Amoroso, "Pulse and spectrum manipulation in the minimum (frequency) shift keying (MSK) format," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-24, pp. 381-384, Mar. 1976.
- [12] M. G. Pelech, "The autocorrelation function and power spectrum of PCM/FM with random binary modulating waveforms," *IEEE Trans. Space Electron. Telem.*, vol. SET-10, pp. 39-44, Mar. 1964.
- [13] F. Amoroso, "The use of quasi-bandlimited pulses in MSK transmission," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-27, pp. 1616-1624, Oct. 1979.
- [14] G. B. Lockhart, "A spectral theory for hybrid modulation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-21, pp. 790-800, July 1973.
- [15] P. H. Witte and G. S. Deshpande, "Investigation of bandwidth effi-

- cient modulation schemes," Queen's University at Kingston, Ont., Canada, Dep. Elec. Eng., Res. Rep. 79-2, Mar. 1979.
- [16] C. L. Cuccia, J. L. Spilken, and D. T. Magill, "Digital communications at gigahertz data rates," *Microwave J.*, vol. 13, pp. 89 ff, Jan. 1970.
- [17] R. C. Dixon, *Spread Spectrum Systems*. New York: Wiley, 1976, Section 2.1
- [18] D. Gabor, "Theory of communication," *J. Inst. Elec. Eng.*, Pt. 3, vol. 93, pp. 429-457, 1946.
- [19] A. H. Nuttall and F. Amoroso, "Minimum Gabor bandwidth of  $M$  orthogonal signals," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-11, pp. 443-444, July 1965.
- [20] S. A. Rhodes, "Effects of hardlimiting on bandlimited transmissions with conventional and offset QPSK modulation," in *Conf. Rec., 1972 Nat. Telecommun. Conf.*, Dec. 4-6, 1972, IEEE Publ. 72 CHO 601-5-NTC, pp. 20F-1-20F-7.



Frank Amoroso was born in Providence, RI, on July 31, 1935. He received the B.S. and M.S. degrees in electrical engineering from the Massachusetts Institute of Technology in 1958. From 1958 to 1960 he pursued further graduate studies in electrical engineering at Purdue University. From 1964 through 1966 he studied mathematical analysis under F. G. Tricomi at the University of Turin, Italy, as a guest of the Italian government. He has served on the technical staffs of Edgerton, Germeshausen, and Grier, Inc., M.I.T. Instrumentation Laboratory, Melpar Applied Science Division, Litton Systems Advanced Development Laboratory, RCA Laboratories (David Sarnoff Research Center), Mitre Corporation, Collins Radio Company, Rockwell International Autometrics and Space Divisions, and the Northrop Corporation Electronics Division. Since 1972 he has been with the Hughes Aircraft Company in Fullerton, CA.

He served to the rank of First Lieutenant at the Institute for Exploratory Research, U.S. Army Electronics Command, Ft. Monmouth, NJ, from 1961 to 1962, and held an instructorship in electrical engineering at Purdue University from 1958 to 1960.

He received the RCA Laboratories Award in 1964 for "research leading to improved digital magnetic recording," and is now a Registered Professional Engineer in California. He currently appears in *Who's Who in Technology Today*, *Who's Who in the West*, and *Who's Who in California*.

# The golden anniversary of electric wave filters

*The filter art has grown from relatively simple lumped-circuit ladder networks to synthesized active and passive networks that may make up 50 percent of the electronics of a satellite repeater*

Anatol I. Zverev *Westinghouse Electric Corporation*

In filter technology, the synthesis techniques of Cauer and Darlington, among others, have come into widespread use. With the swing to higher and higher frequencies, these techniques have enabled circuit designers to obtain high performance with coils of moderate  $Q$  in L-C circuits, with quartz resonators of high  $Q$ , and with mechanical and ceramic resonators with desirable qualities somewhere between those of L-C components and of quartz.

In the evolution of the electronics industry, the first two major developments—radio and the electronic tube—were followed closely by a third, the filter. Filter technology was born in the year 1915 when K. W. Wagner, on January 7, and G. A. Campbell, on July 5, working independently on different sides of the Atlantic, both proposed the basic concept of the filter.\* Their results evolved from earlier work on loaded transmission lines and the classical theory of vibrating systems. The year 1965, therefore, marked the golden anniversary of the electric filter.

During the past 50 years filters have so permeated electronic technology that the modern world is hardly conceivable without them. They direct, channel, integrate, separate, delay, differentiate, and transform all kinds of electric energy and information.

The generalization of the filter concept began when it was found that filter theory could be used to illuminate problems in mechanical and acoustical systems. By use of an electromechanical analogy, filter theory can be applied to many seemingly unrelated systems for which natural modes of vibration are of interest, e.g., loudspeaker design, crystallography, architectural acoustics, airframe behavior, and mechanical systems design. Filter theory first shows how to coordinate the action of several resonant elements in order to obtain uniform transmission over a prescribed frequency range. Then the concept of an ideal filter with lossless elements that delivers all of the input energy to its output over the widest possible frequency range establishes the requirements for broad-banding under prescribed constraints.

Application of filter theory has now gone far beyond these first generalizations. The concepts of exact synthesis techniques for prescribed transfer and immittance functions, of approximating arbitrary functions with realiz-

able rational functions, of time domain synthesis, matched filters, parametric elements, and various other active devices, have added new vitality to an already flourishing technology.

Today, a systems engineer can specify almost any type of stable, single-valued analytic function as a block in a block diagram with a reasonable assurance that it can be approximated, realized, and built into an operating unit. This exact mathematical technique is so successful that the newer electronic systems are literally packed with synthesized passive and active networks. Satellite repeaters are a good example. More than half the blocks in a typical block diagram for such repeaters are called filters even though their function, in many cases, is radically different from what the term would have led us to expect 20 years ago.

## Early filter development

In prefilter days, selectivity was obtained by the use of single reactances or single resonances connected in series or shunt. Much use was made of such terms as "ac blocking," "dc blocking," and "wave traps."

In contrast to these crude devices, the first scientifically designed filters consisted of a cascade of simple identical sections forming a ladder network. They were marvelously effective because the selectivity increased with the number of sections. The ladder could be simply and elegantly treated by the so-called image parameter theory, analogous to transmission-line theory, in which the parameters of the network are expressed in terms of the image impedance and the image transmission factor. Although this method was a great step forward, the resultant selectivity was far from optimum because the networks had no transfer zeros near the pass band and steep attenuation skirts were unobtainable.

The discovery by Zobel, published in 1923, of a practical method of designing selective filters with an unlimited number of reactances was undoubtedly a work of genius. It was the only known method until about 1940 and the only practical method until the mid-1950s. Zobel's theory is somewhat artificial in nature since it is based on image parameters that only approximate the effective operating parameters and assume nonphysical elements—the terminal image impedances. But Zobel's results not only enabled designs for arbitrarily prescribed stop bands, but also improved the end-load matching. This technique could reduce the pass-band error due to nonphysical constraints on the terminations. A further improvement in match was later obtained by Bode.

\* The term filter is used here in its restricted sense. That is, a filter is a network of reactances that pass electric signals within one or more frequency bands and strongly attenuates all others except those in the immediate vicinity of the band edges.

Passive networks were also under investigation by a number of other researchers. In 1924 R. M. Foster published *A Reactance Theorem*. This theorem made it possible, for the first time, to realize a network that exhibited at its terminals a positive-real rational function as an impedance or admittance.

Foster partitioned the given rational function into a sum of partial fractions that could be identified easily as a series connection of impedances or as a parallel connection of admittances. Wilhelm Cauer then expanded the rational function into a continued fraction representing a ladder network. Each method gave two alternate networks, which were called canonical forms because they could always be obtained from a realizable immittance function and because they employed a minimum number of elements.

The theory of *L-C* one-port synthesis has since been ornamented with a great variety of elegant results but the basic theory was essentially complete when the Cauer forms were published. It was soon recognized that the Foster-Cauer methods could be adapted readily to give a more general theory of two-element-kind synthesis, i.e., the synthesis of *R-L* and *R-C* networks as well as of *L-C* networks.

It was realized, however, that mere adaptation of Foster's *L-C* synthesis was not going to solve the problem of synthesizing *R-L-C* networks from their given immittance functions. This much more difficult problem demanded a correspondingly more complicated solution. The first such solution was obtained, in brilliant fashion, by Otto Brune, and was published in 1931. The stage was now set for a breakthrough of such fundamental importance that it would overshadow even the great school of image-parameter design.

#### The modern era

In the late 1930s, both Wilhelm Cauer and Sidney Darlington were preoccupied with the nascent and, at that time, academic theories of exact synthesis. The new theory of filter design which they would generate would, at first, have little practical advantage, if any, over the old. Even though a small family of specialized problems that resisted image-parameter treatment would yield readily to the exact method, the principal motivation for its use lay in the fact that network theory demanded fresh insights that would carry a given problem successfully through the following stages:

*Approximation synthesis*—to obtain a realizable transfer function that would approximate the requirements within a prescribed tolerance

*Transfer-function synthesis*—to manipulate the transfer function so as to give a realizable driving-point function

*Realization or driving-point synthesis*—to realize the driving-point function in an actual network

Darlington, in 1939, and Cauer, in 1940, both published the same theory to solve the set of problems just outlined and both displayed the same dazzling virtuosity in mastering a long sequence of thorny mathematical complications.

The importance of the new method was not recognized immediately. It could be used to design better low-pass filters but it failed to provide such designs in practice because of the extremely heavy burden of computation required. It was not until the advent of cheap computa-

tion methods, in the 1950s, that Cauer-Darlington filter came into widespread use. So many computer-prepared designs have now been published that designing an elliptic-function filter involves little more work than copying numbers out of a book, and this technique is actually easier than the image-parameter method. The older method is falling out of fashion because it can be generalized only at the cost of rapidly increasing artificiality and complication. Its principal virtue—simplicity—is then lost and no incentive remains to use it. Within its special field of application, however, it is still usable, and is used, despite the dictates of fashion.

The Cauer-Darlington theory is respected and admired because it is the first tall peak of a mountain chain whose limits we cannot yet survey. Consider, for example, the design of a system that consists of an operational amplifier embedded in a large *R-C* network. The *R-C* network has natural modes that must lie on the negative-real axis in the complex-frequency plane. The zeros may, theoretically, lie anywhere. By using either the *R-C* synthesis of Guillemin, or that of Dasher, one can systematically realize a network with zeros in any locations, except on the positive-real axis—a very light restriction. Cauer-Darlington synthesis will probably be used in solving the approximation problem. Image-parameter theory has no relevancy to such a problem.

We now synthesize networks and systems by employing a fusion of many theories produced by many authors. In this considerable body of literature there are many references to Cauer and Darlington, but this bibliographical distinction is currently being superseded by an even greater one. The use of these references is now disappearing gradually. It has been assumed that there is little point in listing the names that everyone now takes for granted.

#### Filter applications

Let us examine a block diagram of a typical receiver such as might be employed in radio, radar, ultrasonics, sonar, acoustics, or in mechanical or geophysical studies (see Fig. 1). The relevance of the theory of filters, reactance networks, and network synthesis is crucial in each of the blocks shown.

**Receptor.** The receptor is a transducer that converts the incoming signal energy into an electrical form suitable for processing by the receiver. The receptor may be an antenna, a piezoelectric transducer, a tape recorder head, or some other device. No matter what it is, the theory of reactance networks must be used in its design and optimization.

**Impedance matching network.** This network is not always a physical transformer with primary and secondary windings on a ferromagnetic core. It may be a low-pass ladder giving a prescribed Chebyshev pass band with controlled equal ripples and moderate to high attenuation outside the band of impedance matching. It may also be a bandpass filter that combines with the preselector.

**Multicoupler.** This device is designed to feed several receivers from the same receptor. It must maintain impedance matching with a high signal-to-noise ratio. Filters and hybrid networks are critical.

**Preselector.** The preselector is a bandpass filter that has low insertion loss for a high signal-to-noise ratio. It is usually tunable over the frequency range of the desired signals. While the most critical selectivity problems are

dealt with in the IF block, the preselector must have high image rejection. It may be required to attenuate strong signals that otherwise would result in cross-modulation with the desired signal in the carrier amplifier.

**Carrier amplifier.** This device may be a reactance network, as in the case of a parametric amplifier. In other instances, the synthesis of interstage coupling networks is often paramount.

**Frequency converter.** The variable-frequency oscillator, frequency multiplier, and first converter contain important filter networks. The multiplier consists of linear and nonlinear reactances that give it many points of resemblance to a parametric amplifier.

**IF filters.** The entire character of the receiver is governed by the type of IF performance, as follows:

1. Conventional IF—Utilized here is a cascade of coupled resonators with 60-dB bandwidth that is twice the 6-dB bandwidth (i.e., shape factor is 2).

2. High adjacent-channel selectivity—This is obtained by symmetrical Cauer-Darlington elliptic-function filters. The shape factor may be as low as 1.01.

3. Single sideband—High selectivity is needed on the carrier side of the pass band but not on the other side. For economic reasons unsymmetrical stop bands are usually provided.

4. Gaussian—To obtain linear-phase filtering with low transient distortion for pulse transmission, antijamming, FM, and video applications, the Gaussian shape is optimum.

5. Matched filters—If a filter is excited by a nonsinusoidal voltage, certain time functions lead to much greater output than do others. By designing both the signal shape and the network to obtain a matched pair, a large output can be obtained that will cause the signal to stand out when used with conventional frequency-domain filters. A dominant feature here is that the improved signal-to-noise ratio at the receiver is obtained without increasing the peak power output at the transmitter. This technique extends the range limit of radar and sonar systems and it increases the information rate of communication links.

6. Coherent integrator—This is a sophisticated form of comb filter that extracts Doppler information from a radar return signal. When a succession of pulses having a coherent frequency content excites the comb, one comb-filter output adds the resulting damped sinusoids to produce a substantial pulse. The position of this pulse in the comb gives the target speed indication.

#### The art of practical technology

From the beginning, the principal objective of scientific filter design has been to find theoretical methods that would accommodate actual physical components and fit them exactly into optimized networks. The desire of the creative engineer has been to produce hardware with performance that agrees exactly with the theoretical predictions.

This search for useful theories has led to some of the most elegant mathematics to be found in the practical arts. In  $L$ - $C$  filters, for example, the inductors are often expensive toroids whereas the capacitors are relatively inexpensive. The constant search for optima has produced an ingenious method for designing "minimum-inductance" filters that use fewer expensive components and more inexpensive ones. Since high- $Q$  coils are bulkier

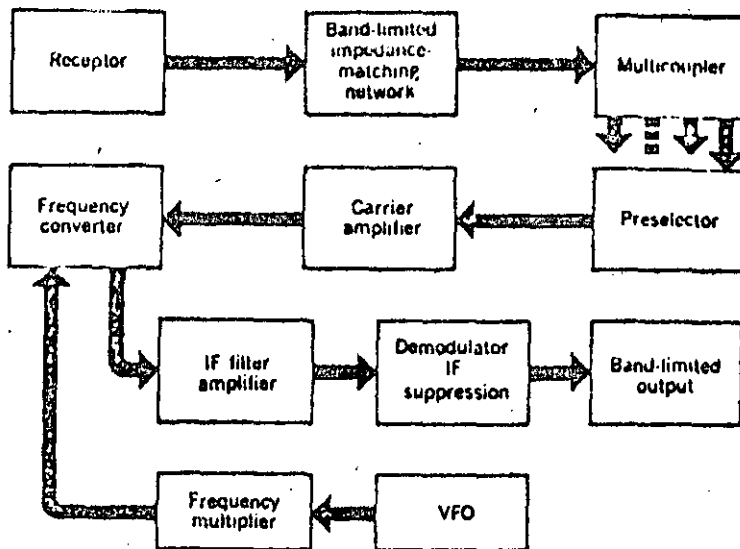


Fig. 1. Block diagram of a "generalized" receiver such as might be used in a variety of electronic systems.

and more expensive than those of moderate  $Q$ , various theories have enabled "predistorted" and "equalized" networks to maintain high performance with coils of lower  $Q$ .

As electronic systems began to use more and more of the available electromagnetic spectrum, the need for very narrow bands became urgent. Filter design was developed to accommodate quartz resonators that offer practical  $Q$ 's up to a quarter of a million and stabilities to match.

The quartz crystal, to a first approximation, is represented by a network of an inductance and two capacitors that are inseparably given as a single unit. Consequently, a considerable amount of fresh theory was needed to treat quartz networks as components so as to reap the advantages of their enormous  $Q$  figures. But quartz crystals are expensive, so additional resourcefulness was needed to make use of the cheaper mechanical and ceramic resonators that have quality factors somewhere between those of  $L$ - $C$  components and of quartz.

As the electronic art progresses, ever-higher frequencies are used. At first, the problem of separating frequency bands in the VHF and UHF regions was met by using essentially the same theory as was used at lower frequencies. Individual resonances or reactances were realized by open- or short-circuited transmission lines. These hybrid filters used distributed elements to approximate lumped elements. As the upward frequency trend continued, it was found that helical resonators with electromagnetic coupling would serve.

The lumped-element concept ultimately was abandoned in favor of continuously distributed networks. With the new approach it became more sensible to start with the wave equation if one were to understand selectivity problems at microwave frequencies and above. This was in opposition to the old approach whereby lumped-circuit synthesis began with the energy equations that define storage and dissipation in  $R$ ,  $L$ , and  $C$ .

The author acknowledges the assistance of P. R. Goffe in the preparation of this paper.

# Historical Notes on the Fast Fourier Transform

JAMES W. COOLEY, PETER A. W. LEWIS, AND PETER D. WELCH

*Abstract*—The fast Fourier transform algorithm has a long and interesting history that has only recently been appreciated. In this paper, the contributions of many investigators are described and placed in historical perspective.

## HISTORICAL REMARKS

THE FAST FOURIER transform (FFT) algorithm is a method for computing the finite Fourier transform of a series of  $N$  (complex) data points in approximately  $N \log_2 N$  operations. The algorithm has a fascinating history. When it was described by Cooley and Tukey [1] in 1965 it was regarded as new by many knowledgeable people who believed Fourier analysis to be a process requiring something proportional to  $N^2$  operations with a proportionality factor which could be reduced by using the symmetries of the trigonometric functions. Computer programs using the  $N^2$ -operation methods were, in fact, using up hundreds of hours of machine time. However, in response to the Cooley-Tukey paper, Rudnick [5], of Scripps Institution of Oceanography, La Jolla, Calif., described his computer program which also takes a number of operations proportional to  $N \log_2 N$  and is based on a method published by Danielson and Lanczos [2]. It is interesting that the Danielson-Lanczos paper described the use of the method in X-ray scattering problems, an area where, for many years after 1942, the calculations of Fourier transforms presented a formidable bottleneck to researchers who were unaware of this efficient method. Danielson and Lanczos refer to Runge [6], [7] for the source of their method. These papers and the lecture notes of Runge and König [8] describe the procedure in terms of sine-cosine series. The greatest emphasis, however, was on the computational economy that could be derived from the *symmetries* of the sine and cosine functions. In a relatively short section of Runge and König [8] it was shown how one could use the *periodicity* of the sine-cosine functions to obtain a  $2N$ -point Fourier analysis from two  $N$ -point analyses with only slightly more than  $N$  operations. Going the other way, if the series to be transformed is of length  $N$  and  $N$  is a power of 2, the series can be split into  $\log_2 N$  subseries and this doubling algorithm can be applied to compute the finite Fourier transform in  $\log_2 N$

doublings. The number of computations in the resulting successive doubling algorithm is therefore proportional to  $N \log_2 N$  rather than  $N^2$ . The use of symmetries only reduces the proportionality factor while the successive doubling algorithm replaces  $N^2$  by  $N \log N$ . This distinction was not important for the values of  $N$  used in the days of Runge and König. However, when the advent of computing machinery made calculations with large  $N$  possible, and the  $N \log N$  methods should have been thoroughly exploited, they were apparently overlooked, even though they had been published by well-read and well-referenced authors.

The fast Fourier transform algorithm of Cooley and Tukey [1] is more general in that it is applicable when  $N$  is composite and not necessarily a power of 2. Thus, if two factors of  $N$  are used, so that  $N = r \times s$ , the data is, in effect, put in an  $r$ -column,  $s$ -row rectangular array, and a two-dimensional transform is performed with a phase-shifting operation intervening between the transformations in the two dimensions. This results in  $N(r+s)$  operations instead of  $N^2$ . By selecting  $N$  to be highly composite, substantial savings result. For the very favorable situation when  $N$  is equal to a power of 2, the Cooley-Tukey method is essentially the successive doubling algorithm mentioned above and takes  $N \log_2 N$  operations.

The 23-year hiatus in the use of the algorithm seemed quite remarkable, and prompted us to inquire of Prof. L. H. Thomas at the IBM Watson Scientific Computing Laboratory, New York City, N. Y., as to whether he was familiar with the successive doubling algorithm for computing Fourier series, and knew of any occasions when it had been used. It turned out that Prof. Thomas had spent three months in 1948 doing calculations of Fourier series on a tabulating machine, using what he referred to as the "Stumpff method of subseries." The algorithm described by Thomas [10] was thought at first to be essentially the same as the fast Fourier transform algorithm of Cooley and Tukey since it also achieved its economy by performing one-dimensional Fourier analysis by doing multidimensional Fourier analysis. However, the algorithms are different for the following reasons: 1) in the Thomas algorithm the factors of  $N$  must be mutually prime; 2) in the Thomas algorithm the calculation is precisely multidimensional Fourier analysis with no intervening phase shifts or "twiddle factors" as they have been called; and 3) the

Manuscript received January 26, 1967; revised March 6, 1967.  
The authors are with the IBM Research Center, Yorktown Heights, N. Y.



correspondences between the one-dimensional index and the multidimensional indexes in the two algorithms are quite different. The Thomas or "prime factor" algorithm is described in detail and compared with the fast Fourier transform algorithm in the next section.<sup>1</sup> It can be extremely useful when used in combination with the fast Fourier transform algorithm.

Several other calculations have been reported in the literature and in private communications which use one or the other of the two algorithms.

Another line of development has since led to the Thomas algorithm in its full generality. This comes from work in the analysis and design of experiments. Let  $A(k_0, k_1, \dots, k_{m-1})$  be, for example, a crop yield when a level  $k_i$  of treatment  $i$ , which may be an amount of fertilizer, is used. Yates [11] considered the case where  $k_i = 0$  or 1, meaning treatment  $i$  is or is not used. This yields  $N = 2^m$  values of crop yields and, to get all possible differences between all possible averages, one would, in principle, have to compute  $N$  linear combinations of all of the  $A$ 's. This would require  $N^2$  operations. Yates devised a scheme whereby one computed a new array of  $N$  sums and differences of pairs of the  $A$ 's. The process was repeated on the new array with pairs selected in a different order. This was done  $m = \log_2 N$  times, meaning he did the calculation in  $N \log_2 N$  operations instead of  $N^2$ .

Good [4] noted that the Yates method could be regarded as  $m$ -dimensional Fourier analysis with only two points in each direction and that the procedure could be generalized to one for an arbitrary number of points in each direction. Then Good showed that if  $N$  is composite, with mutually prime factors, i.e.,  $N = r_1 r_2 \dots r_m$ , one could do a one-dimensional Fourier analysis of  $N$  points by doing  $m$ -dimensional Fourier analysis on an  $m$ -dimensional,  $r_1 \times r_2 \times \dots \times r_m$ , array of points. With these ideas put together and developed, Good's paper contains the full generalization of the Thomas prime factor algorithm.

THE PRIME FACTOR ALGORITHM

As mentioned in the previous section, the algorithm used by Thomas and described later by Good has been mistakenly said to be equivalent to the fast Fourier transform algorithm of Cooley and Tukey. It is important to distinguish between these two algorithms since each has its particular advantages which can be exploited in appropriate circumstances.

The differences will be illustrated by considering the calculation of a Fourier series using two factors of  $N$ .

<sup>1</sup> Actually, Stumpff [9] gave only a doubling and a tripling algorithm and suggested (see Stumpff [9] p. 442, line 11) that the reader generalize to obtain the method for factors of  $N$  other than 2 or 3. Thomas made a further assumption (assuming that the index called  $r$  by Stumpff was equal to  $N/s$  where  $s = 2$  or 3) which led to his algorithm. Without this assumption, Stumpff's description leads to the Cooley-Tukey algorithm.

TABLE I  
CORRESPONDENCE BETWEEN ONE- AND TWO-DIMENSIONAL INDEXING IN THE ARBITRARY FACTOR ALGORITHM FOR THE CASE  $r=8, s=3$ , AND  $N=24$

		$n = n_1 + n_0 = 3n_1 + n_0$							
		$n_1$							
		0	1	2	3	4	5	6	7
$n_0$	0	0	3	6	9	12	15	18	21
	1	1	4	7	10	13	16	19	22
	2	2	5	8	11	14	17	20	23

		$j = rj_1 + j_0 = 8j_1 + j_0$							
		$j_0$							
		0	1	2	3	4	5	6	7
$j_1$	0	0	1	2	3	4	5	6	7
	1	8	9	10	11	12	13	14	15
	2	16	17	18	19	20	21	22	23

The Fourier series is

$$X(j) = \sum_{n=0}^{N-1} A(n) W_N^{jn} \tag{1}$$

where  $W_N = e^{2\pi i/N}$ . Consider first the fast Fourier transform algorithm. We assume  $N = r \cdot s$ , and define a one-to-one mapping between the integers  $j, 0 \leq j < N$ , and the pairs of integers  $(j_1, j_0), 0 \leq j_0 < r, 0 \leq j_1 < s$ , by the relation

$$j = jr + j_0 \tag{2}$$

Similarly, we let

$$n = n_1 s + n_0 \tag{3}$$

where

$$0 \leq n < N, \quad 0 \leq n_0 < s, \quad 0 \leq n_1 < r.$$

This enables us to refer to  $A(n)$  and  $X(j)$  as though they were two-dimensional arrays and permits us to do the Fourier analysis in two steps

$$A_1(j_0, n_0) = \sum_{n_1=0}^{s-1} A(n_1, n_0) W_N^{n_1 j_0} \tag{4}$$

$$X(j_1, j_0) = \sum_{n_0=0}^{r-1} A_1(j_0, n_0) W_N^{n_0 j_1} W_N^{n_0 j_0} \tag{5}$$

Table I shows where  $A(n)$  and  $X(j)$  are placed in the two-dimensional arrays indexed by  $(n_1, n_0)$  and  $(j_1, j_0)$ , respectively, for  $r=8$  and  $s=3$ . For this case, (4) consists of three eight-term Fourier series, one for each row of the  $n$  table. Then, if  $j_0$  is taken to be the column index of the results,  $A_1(j_0, n_0)$ , (5) describes eight Fourier series of three terms each on the columns of the array of  $A_1(j_0, n_0) W_N^{n_0 j_0}$ . The factor  $W_N^{n_0 j_0}$ , referred to as the "twiddle factor" by Gentleman and Sande [3], is usually combined with either the  $W_N^{n_1 j_0}$  factor in (4) or the  $W_N^{n_0 j_1}$  factor in (5).

For the Thomas prime factor algorithm, one must require that  $r$  and  $s$  be mutually prime. In this case, different mappings of the one-dimensional arrays into two-dimensional arrays are used. These are also one-to-one mappings and are defined as follows. Let

$$n \equiv rn_0 + sn_1 \pmod{N} \quad (0 \leq n < N) \quad (6)$$

and

$$\begin{aligned} j_0 &\equiv j \pmod{r} & (0 \leq j_0 < r) \\ j_1 &\equiv j \pmod{s} & (0 \leq j_1 < s). \end{aligned} \quad (7)$$

Then the expression of  $j$ , in terms of  $j_0$  and  $j_1$ , is a solution of the "Chinese remainder problem" and is given by

$$j \equiv s \cdot s_j \cdot j_0 + r \cdot r_j \cdot j_1 \pmod{N} \quad (0 \leq j < N) \quad (8)$$

where  $s_j$  and  $r_j$  are solutions of

$$\begin{aligned} s \cdot s_j &\equiv 1 \pmod{r} & s_j < r \\ r \cdot r_j &\equiv 1 \pmod{s} & r_j < s, \end{aligned}$$

respectively. Substituting (6) and (8) and using (7) gives

$$W'_{N^j} = W'_{N^{j_0}} W'_{N^{j_1}} = W'_{r^{j_0}} W'_{s^{j_1}} = W'_{r^{j_0}} W'_{s^{j_1}}$$

which enables one to write the Fourier series (1) in the form

$$A_1(j_0, n_0) = \sum_{n_1=0}^{r-1} A(n_1, n_0) W'_{r^{j_0}} \quad (9)$$

$$X(j_1, j_0) = \sum_{n_1=0}^{s-1} A_1(j_0, n_0) W'_{s^{j_1}} \quad (10)$$

As in the fast Fourier transform algorithm, this is a two-dimensional Fourier transform. The essential difference is that the "twiddle factor"  $W'_{N^{j_0}}$  does not appear in (10) and the correspondence between one- and two-dimensional indexing is different. The presence of the "twiddle factor" does not introduce any more computation, but it does increase programming complexity slightly. To illustrate better how the indexing in the two algorithms differs, the mappings of  $n$  and  $j$  for the Thomas prime factor algorithm are given in Table II for comparison with the indexing described in Table I.

The prime factor algorithm can be programmed very easily in a source language like FORTRAN and, therefore, can be used efficiently with a subroutine designed for a

TABLE II

CORRESPONDENCE BETWEEN ONE- AND TWO-DIMENSIONAL INDEXING IN THE PRIME FACTOR ALGORITHM FOR THE CASE  $r=8, s=3$ , AND  $N=24$

		$n \equiv rn_0 + sn_1 \equiv 8n_0 + 3n_1 \pmod{24}, 0 \leq n < N$							
		$n_1$							
		0	1	2	3	4	5	6	7
$n_0$	0	0	3	6	9	12	15	18	21
	1	8	11	14	17	20	23	2	5
	2	16	19	22	1	4	7	10	13
		$j \equiv s \cdot s_j \cdot j_0 + r \cdot r_j \cdot j_1 \equiv 9j_0 + 16j_1 \pmod{24}, 0 \leq j < N$							
		$j_0$							
		0	1	2	3	4	5	6	7
$j_1$	0	0	9	18	3	12	21	6	15
	1	16	1	10	19	4	13	22	7
	2	8	17	2	11	20	5	14	23

number of terms equal to a power of two. For example, if  $r$  is a power of 2 and  $s$  is any odd number, the sub-series (9) can be computed by the power of 2 subroutine.

REFERENCES

- [1] J. W. Cooley and J. W. Tukey, "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series," *Math. of Comput.*, vol. 19, pp. 297-301, April 1965.
- [2] G. C. Danielson and C. Lanczos, "Some improvements in practical Fourier analysis and their application to X-ray scattering from liquids," *J. Franklin Inst.*, vol. 233, pp. 365-380 and 435-452, April 1942.
- [3] W. M. Gentleman and G. Sande, "Fast Fourier transforms for fun and profit," *1966 Fall Joint Computer Conf., AFIPS Proc.*, vol. 29, Washington, D. C.: Spartan, 1966, pp. 563-578.
- [4] I. J. Good, "The interaction algorithm and practical Fourier analysis," *J. Roy. Statist. Soc., ser. B*, vol. 20, pp. 361-372, 1958; Addendum, vol. 22, 1960, pp. 372-375. (MR 21 1674; MR 23 A4231.)
- [5] P. Rudnick, "Note on the calculation of Fourier series," *Math. of Comput.*, vol. 20, pp. 429-430, July 1966.
- [6] C. Runge, *Zeit. für Math. und Physik*, vol. 48, p. 443, 1903.
- [7] C. Runge, *Zeit. für Math. und Physik*, vol. 53, p. 117, 1905.
- [8] C. Runge and H. König, "Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften," *Vorlesungen über Numerisches Rechnen*, vol. 11. Berlin: Julius Springer, 1924.
- [9] K. Stumpff, *Tafeln und Aufgaben zur Harmonischen Analyse und Periodogramrechnung*. Berlin: Julius Springer, 1939.
- [10] L. H. Thomas, "Using a computer to solve problems in physics," *Application of Digital Computers*. Boston, Mass.: Ginn, 1963.
- [11] F. Yates, *The Design and Analysis of Factorial Experiments*. Harpenden: Imperial Bureau of Soil Science.

# What is the Fast Fourier Transform?

G-AE Subcommittee on Measurement Concepts

WILLIAM T. COCHRAN  
JAMES W. COOLEY  
DAVID L. FAVIN, MEMBER, IEEE  
HOWARD D. HELMS, MEMBER, IEEE  
REGINALD A. KAENEL, SENIOR MEMBER, IEEE  
WILLIAM W. LANG, SENIOR MEMBER, IEEE  
GEORGE C. MALING, JR., ASSOCIATE MEMBER, IEEE  
DAVID E. NELSON, MEMBER, IEEE,  
CHARLES M. RADER, MEMBER, IEEE  
PETER D. WELCH

**Abstract**—The fast Fourier transform is a computational tool which facilitates signal analysis such as power spectrum analysis and filter simulation by means of digital computers. It is a method for efficiently computing the discrete Fourier transform of a series of data samples (referred to as a time series). In this paper, the discrete Fourier transform of a time series is defined, some of its properties are discussed, the associated fast method (fast Fourier transform) for computing this transform is derived, and some of the computational aspects of the method are presented. Examples are included to demonstrate the concepts involved.

## INTRODUCTION

**A**N ALGORITHM for the computation of Fourier coefficients which requires much less computational effort than was required in the past was reported by Cooley and Tukey [1] in 1965. This method is now widely known as the "fast Fourier transform," and has produced major changes in computational techniques used in digital spectral analysis, filter simulation, and related fields. The technique has a long and interesting history that has been summarized by Cooley, Lewis, and Welch in this issue [2].

The fast Fourier transform (FFT) is a method for efficiently computing the discrete Fourier transform (DFT) of a time series (discrete data samples). The efficiency of this method is such that solutions to many problems can now be obtained substantially more economically than in the past. This is the reason for the very great current interest in this technique.

The discrete Fourier transform (DFT) is a transform in its own right such as the Fourier integral transform or the Fourier series transform. It is a powerful revers-

ible mapping operation for time series. As the name implies, it has mathematical properties that are entirely analogous to those of the Fourier integral transform. In particular, it defines a spectrum of a time series; multiplication of the transform of two time series corresponds to convolving the time series.

If digital analysis techniques are to be used for analyzing a continuous waveform then it is necessary that the data be sampled (usually at equally spaced intervals of time) in order to produce a time series of discrete samples which can be fed into a digital computer. As is well known [6], such a time series completely represents the continuous waveform, provided this waveform is frequency band-limited and the samples are taken at a rate that is at least twice the highest frequency present in the waveform. When these samples are equally spaced they are known as Nyquist samples. It will be shown that the DFT of such a time series is closely related to the Fourier transform of the continuous waveform from which samples have been taken to form the time series. This makes the DFT particularly useful for power spectrum analysis and filter simulation on digital computers.

The fast Fourier transform (FFT), then, is a highly efficient procedure for computing the DFT of a time series. It takes advantage of the fact that the calculation of the coefficients of the DFT can be carried out iteratively, which results in a considerable savings of computation time. This manipulation is not intuitively obvious, perhaps explaining why this approach was overlooked for such a long time. Specifically, if the time series consists of  $N=2^n$  samples, then about  $2nN = 2N \cdot \log_2 N$  arithmetic operations will be shown to be required to evaluate all  $N$  associated DFT coefficients. In comparison with the number of operations required for the calculation of the DFT coefficients with straightforward procedures ( $N^2$ ), this number is so small when  $N$  is large as to completely change the computationally economical approach to various problems. For example, it has been reported that for  $N=8192$  samples, the computations require about five seconds

Manuscript received March 10, 1967.

W. T. Cochran, D. L. Favin, and R. A. Kaenel are with Bell Telephone Laboratories, Inc., Murray Hill, N. J.

H. D. Helms is with Bell Telephone Laboratories, Inc., Whippany, N. J.

J. W. Cooley and P. D. Welch are with the IBM Research Center, Yorktown Heights, N. Y.

W. W. Lang and G. C. Maling are with the IBM Corporation, Poughkeepsie, N. Y.

C. M. Rader is with Lincoln Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Lexington, Mass. (Operated with support from the U. S. Air Force.)

D. E. Nelson is with the Electronics Division of the General Dynamics Corporation, Rochester, N. Y.

for the evaluation of all 8192 DFT coefficients on an IBM 7094 computer. Conventional procedures take on the order of half an hour.

The known applications where a substantial reduction in computation time has been achieved include: 1) computation of the power spectra and autocorrelation functions of sampled data [4]; 2) simulation of filters [5]; 3) pattern recognition by using a two-dimensional form of the DFT; 4) computation of bispectra, cross-covariance functions, cepstra and related functions; and 5) decomposing of convolved functions.

### THE DISCRETE FOURIER TRANSFORM (DFT)

#### Definition of the DFT and its Inverse

Since the FFT is an efficient method for computing the DFT it is appropriate to begin by discussing the DFT and some of the properties that make it so useful a transformation. The DFT is defined by<sup>1</sup>

$$A_r = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp(-2\pi jrk/N) \quad r = 0, \dots, N-1 \quad (1)$$

where  $A_r$  is the  $r$ th coefficient of the DFT and  $X_k$  denotes the  $k$ th sample of the time series which consists of  $N$  samples and  $j = \sqrt{-1}$ . The  $X_k$ 's can be complex numbers and the  $A_r$ 's are almost always complex. For notational convenience (1) is often written as

$$A_r = \sum_{k=0}^{N-1} (X_k) W^{rk} \quad r = 0, \dots, N-1 \quad (2)$$

where

$$W = \exp(-2\pi j/N). \quad (3)$$

Since the  $X_k$ 's are often values of a function at discrete time points, the index  $r$  is sometimes called the "frequency" of the DFT. The DFT has also been called the "discrete Fourier transform" or the "discrete time, finite range Fourier transform."

There exists the usual inverse of the DFT and, because the form is very similar to that of the DFT, the FFT may be used to compute it.

The inverse of (2) is

$$X_l = (1/N) \sum_{r=0}^{N-1} A_r W^{-rl} \quad l = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4)$$

This relationship is called the inverse discrete Fourier transform (IDFT). It is easy to show that this inversion is valid by inserting (2) into (4)

$$X_l = \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (X_k/N) W^{r(k-l)}. \quad (5)$$

Interchanging in (5) the order of summing over the indices  $r$  and  $k$ , and using the orthogonality relation

$$\sum_{r=0}^{N-1} \exp(2\pi j(n-m)r/N) = N, \text{ if } n \equiv m \pmod{N} \\ = 0, \text{ otherwise} \quad (6)$$

establishes that the right side of (5) is in fact equal to  $X_l$ .

It is useful to extend the range of definition of  $A_r$  to all integers (positive and negative). Within this definition it follows that

$$A_r = A_{N+r} = A_{2N+r} = \dots \quad (7)$$

Similarly,

$$X_l = X_{N+l} = X_{2N+l} = \dots \quad (8)$$

#### Relationships between the DFT and the Fourier Transform of a Continuous Waveform

An important property that makes the DFT so eminently useful is the relationship between the DFT of a sequence of Nyquist samples and the Fourier transform of a continuous waveform, that is represented by the Nyquist samples. To recognize this relationship, consider a frequency band-limited waveform  $g(t)$  whose Nyquist samples,  $X_k$ , vanish outside the time interval  $0 \leq t \leq NT$

$$g(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\sin(\pi(t-kT)/T)}{(\pi(t-kT)/T)} X_k \quad (9)$$

where  $T$  is the time spacing between the samples. A periodic repetition of  $g(t)$  can be constructed that has identically the same Nyquist samples in the time interval  $0 \leq t \leq NT$

$$g_p(t) = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \frac{\sin(\pi(t-kT-lNT)/T)}{(\pi(t-kT-lNT)/T)} \quad (10)$$

Let the Fourier transform of  $g(t)$  be  $G(f)$ . As is well known [6], this transform is exactly specified at discrete frequencies by the complex Fourier series coefficients of  $g_p(t)$ . From this it follows:

$$\frac{G(n/NT)}{NT} = D_n \\ = (1/NT) \int_0^{NT} g_p(t) \cdot \exp(-2\pi jnt/NT) \cdot dt \\ = (1/NT) \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \exp(-2\pi jnkT/NT) \quad (11)$$

where  $|n| \leq N/2$  due to the spectral bandwidth limitation implicitly assumed by the sampling theorem underlying the validity of Nyquist samples.

Comparing (11) and (1) it is seen that they are exactly the same except for a factor of  $NT$  and  $(r, n)$  are both unbounded. That is,

$$N \cdot A_r = D_n \text{ for } r=n \text{ and } T=1 \text{ second.} \quad (12)$$

The bounds specified for  $r$  and  $n$  require a correspondence which depends on (7)

<sup>1</sup> The definition of the DFT is not uniform in the literature. Some authors use  $A_r/N$  as the DFT coefficients, others use  $A_r/\sqrt{N}$ , still others use a positive exponent.

$$\frac{G(n/NT)}{NT} = D_n = N \cdot A_r$$

where

$$n = r \quad \text{for } n = 0, 1, \dots, q < N/2,$$

and

$$n = N - r \quad \text{for } n = -1, -2, \dots, -q > -N/2 \quad (13)$$

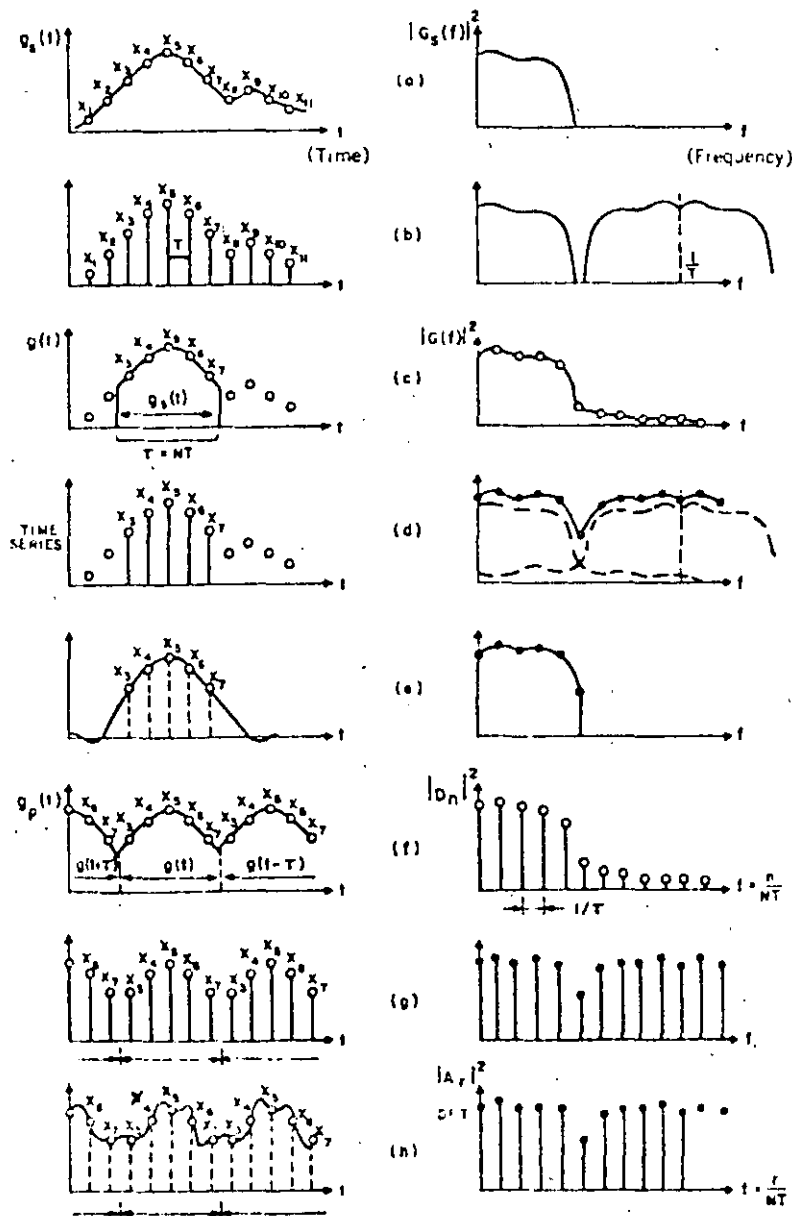
and

$$\frac{G(n/NT)}{NT} = D_n = N \cdot A_r/2 \quad \text{for } n = N/2. \quad (14)$$

Equations (13) and (14) give a direct relationship between the DFT coefficients and the Fourier transform at discrete frequencies for the waveform stipulated by (9). A one-to-one correspondence could have been obtained if the running variable  $r$  had been bounded by  $\pm N/2$ . This, however, would have required distinguish-

ing between even and odd values of  $N$ ; a distinction avoided by keeping  $r$  positive.

A waveform of the type considered by (9) is shown in Fig. 1(e). It is usually obtained as an approximation of a frequency band-limited source waveform [such as the one sketched in Fig. 1(a)] by truncating the Nyquist sample series of this waveform, and reconstructing the continuous waveform corresponding to the truncated Nyquist sample series [Fig. 1(b), (d), and (e)]. Notwithstanding the identity of the Nyquist samples of this reconstructed waveform and the frequency band-limited source waveform, these waveforms differ in the truncation interval [Fig. 1(c) and (e)]. The difference is usually referred to as aliasing distortion; the mechanics of this distortion is most apparent in the frequency domain [Fig. 1(c)-(e)]. It can be made negligibly small by choosing a sufficiently large product of the frequency bandwidth of the source waveform and the duration of the truncation interval [6] (e.g.,  $N$  is greater than ten).



- (a) Frequency-band-limited source waveform.
- (b) Nyquist samples of the frequency band-limited source waveform.
- (c) Truncated source waveform.
- (d) Truncated series of Nyquist samples of the source waveform.
- (e) Frequency-band-limited waveform whose Nyquist samples are identical to the truncated series of Nyquist samples of the source waveform.
- (f) Periodic continuation of the truncated source waveform.
- (g) Periodic continuation of the truncated series of Nyquist samples of the source waveform.
- (h) DFT coefficients interpreted as Fourier series coefficients producing complex waveform.

Fig. 1. Related waveforms and their corresponding spectra as defined by the Fourier transforms (integral transforms for energy-limited waveforms; series transform for periodic waveforms).

These aliasing distortions are carried over directly to the discrete spectra of the periodically repeated waveforms [Fig. 1(f) and (g)], and appear correspondingly in the DFT of the truncated series of Nyquist samples [Fig. 1(h)]. It may be of interest to observe that the waveform corresponding to the DFT coefficients interpreted as Fourier series coefficients is complex [Fig. 1(h)].

### Some Useful Properties of the DFT

Another property that makes the DFT eminently useful is the convolution relationship. That is, the IDFT of the product of two DFTs is the periodic mean convolution of the two time series of the DFTs. This relationship proves very useful when computing the filter output as a result of an input waveform; it becomes especially effective when computed by the FFT. A derivation of this property is given in Appendix A.

Other properties of the DFT are in agreement with the corresponding properties of the Fourier integral transform, perhaps with slight modifications. For example, the DFT of a time series circularly shifted by  $h$  is the DFT of the time series multiplied by  $W^{-rA}$ . Furthermore, the DFT of the sum of two functions is the sum of the DFT of the two functions. These properties are readily derived using the definition of the DFT. These and other properties have been compiled by Gentleman and Sande [7].

## THE FAST FOURIER TRANSFORM

### General Description of the FFT

As mentioned in the Introduction, the FFT is an algorithm that makes possible the computation of the

DFT of a time series more rapidly than do other algorithms available. The possibility of computing the DFT by such a fast algorithm makes the DFT technique important. A comparison of the computational savings that may be achieved through use of the FFT is summarized in Table I for various computations that are frequently performed. It is important to add that the computational efforts listed represent comparable upper bounds; the actual efforts depend on the number  $N$  and the programming ingenuity applied [7].

It may be useful to point out that the FFT not only reduces the computation time; it also substantially reduces round-off errors associated with these computations. In fact, both computation time and round-off error essentially are reduced by a factor of  $(\log_2 N)/N$  where  $N$  is the number of data samples in the time series. For example, if  $N=1024=2^{10}$ , then  $N \log_2 N = 10\,240$  [7], [9]. Conventional methods for computing (1) for  $N=1024$  would require an effort proportional to  $N^2=1\,048\,576$ , more than 50 times that required with the FFT.

The FFT is a clever computational technique of sequentially combining progressively larger weighted sums of data samples so as to produce the DFT coefficients as defined by (2). The technique can be interpreted in terms of combining the DFTs of the individual data samples such that the occurrence times of these samples are taken into account sequentially and applied to the DFTs of progressively larger mutually exclusive subgroups of data samples, which are combined to ultimately produce the DFT of the complete series of data samples. The explanation of the FFT algorithm adopted in this paper is believed to be particularly descriptive for programming purposes.

TABLE I  
COMPARISON OF THE NUMBER OF MULTIPLICATIONS REQUIRED USING "DIRECT" AND FFT METHODS

Operation	Formula	Approximate Number of Multiplications (upper comparable bounds)	
		Direct	FFT
Discrete Fourier Transform (DFT)	$\sum_{r=0}^{N-1} X_r e^{-2\pi i r k / N} \quad r = 1, 2, \dots, N-1$	$N^2$	$2N \log_2 N$
Filtering (Convolution)	$\sum_{r=0}^{N-1} X_r Y_{r-k} \quad r = 0, 1, \dots, N-1$	$N^2$	$3N \log_2 N$
Autocorrelation Functions	$\sum_{r=0}^{N-1} X_r X_{r-k} \quad r = 0, 1, \dots, N-1$	$\frac{N}{4} \left( \frac{N}{2} + 3 \right)$	$3N \log_2 N$
Two-Dimensional Fourier Transform (Pattern Analysis)	$\sum_{r=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} X_{r,q} e^{-2\pi i (r\alpha + q\beta) / N} \quad r, q = 0, 1, \dots, N-1$	$N^4$	$4N^2 \log_2 N$
Two-Dimensional Filtering	$\sum_{r=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} X_{r,q} Y_{r-k, q-l} \quad r, q = 1, 2, \dots, N-1$	$N^4$	$3N^2 \log_2 N$

In most cases it is desirable to limit the application of the general circuit of Fig. 2 to transfer ratios with only two conjugate poles. Any given transfer ratio can be achieved by a cascade of simpler circuits of this kind and one or more passive RC networks.

The second-order transfer function,

$$G(s) = \frac{a_2s^2 + a_1s + a_0}{b_2s^2 + b_1s + b_0} \quad (4)$$

can be realized by means of the circuits of Fig. 3, which are special cases of that of Fig. 2. The arrangement of Fig. 3(b) includes two active elements that may be separate amplifiers or one amplifier with two input points. The RC passive networks generally have two capacitors and two resistors each, and a circuit-design procedure is available that affords one considerable control over the orders of magnitude of the components.

are the zeros of the denominator polynomial which, for convenience, can be normalized in the following manner. We have

$$\begin{aligned} D_0(s) &= [D(s) - K_0N(s)] = b_2s^2 + b_1s + b_0 \quad (\text{Figs. 3 and 4}) \\ &= b_0 \left[ \left( \frac{s}{\sqrt{\frac{b_0}{b_2}}} \right)^2 + \frac{s}{\sqrt{\frac{b_0}{b_2}}} \frac{b_1}{\sqrt{b_0 b_2}} + 1 \right] \\ &= b_0 \left[ \left( \frac{s}{\omega_0} \right)^2 + \left( \frac{s}{\omega_0} \right) d + 1 \right], \end{aligned} \quad (5)$$

where

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{b_0}{b_2}} \quad \text{and} \quad d = \frac{b_1}{\sqrt{b_0 b_2}}$$

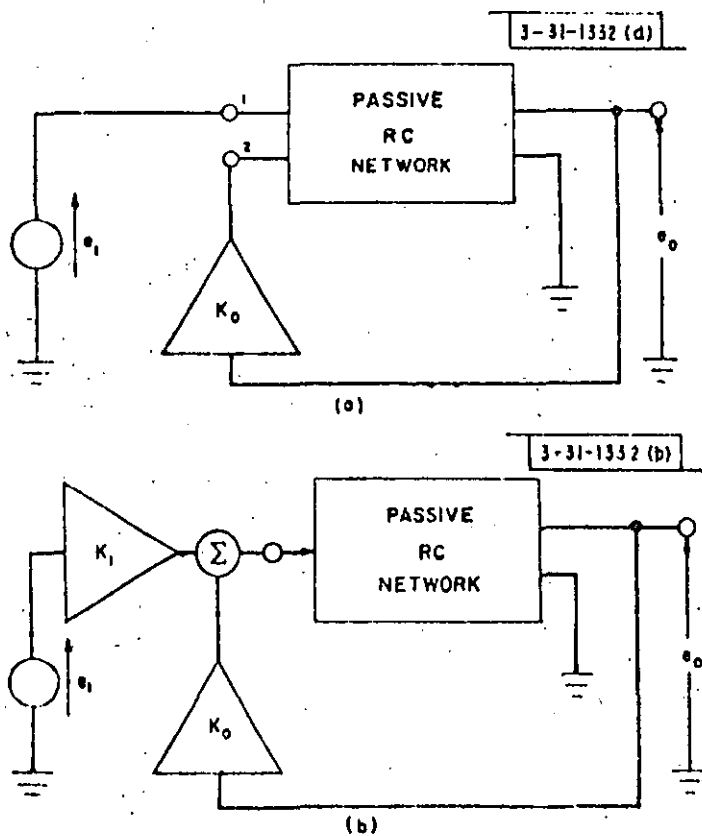


Fig. 3--Second-order active networks.

The design of circuits of the form illustrated in Fig. 3 can be facilitated by means of the catalog of possible circuit arrangements that has been compiled and is given in a later section. There are probably other useful circuits of this form that could be added to the catalog, but for most applications the present list of eighteen networks will be found adequate.

GENERAL APPROACH TO NETWORK DESIGN

The basic objective of a design procedure based on the network catalog is the control over the locations of the poles of the transfer voltage ratio (4). These poles

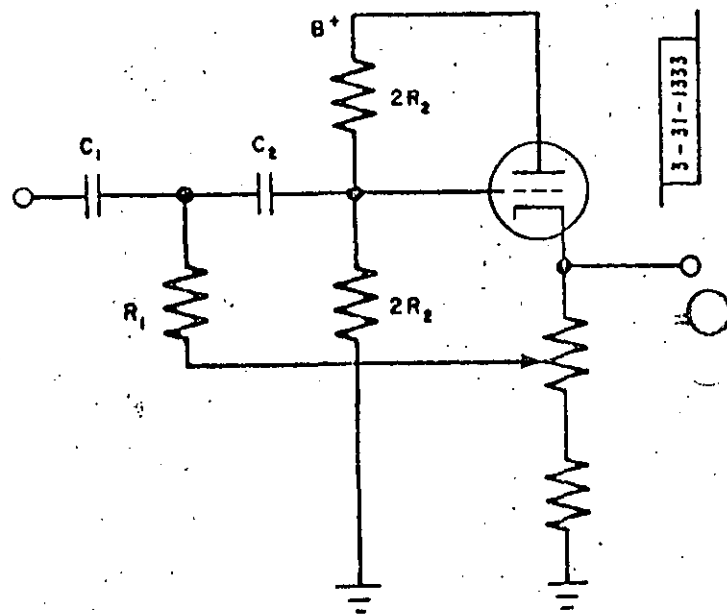


Fig. 4--High-pass filter circuit.

In the *s*-plane, the zeros of  $D_0(s)$  lie on a circle of radius  $\omega_0$  and have a real part equal to  $-d\omega_0/2$ .<sup>1</sup> The shape of the frequency characteristics of  $D_0(s)$  are dependent only on the value of the parameter  $d$ ; the constant  $\omega_0$  determines their positions in the frequency domain, and  $b_0$  determines the relative amplitude. The parameter  $\omega_0$  can be given the physical interpretations "resonant frequency," "cut-off frequency," etc., depending upon the nature of the numerator of  $G(s)$ .

It is convenient, in designing a circuit for a given  $D_0(s)$ , for one to set  $\omega_0 = 1$  radian per second temporarily, and to establish the required value of  $d$ . The network response can then be shifted in frequency to  $\omega_0$  by dividing the resistive elements or the capacitive elements of the circuit by the desired value of  $\omega_0$ .

In most of the networks in the catalog, there are five basic design variables: two resistances, two capacitors,

<sup>1</sup> This is true only for  $d \leq 2$  when  $d > 2$ , the zeros lie on the negative real axis, a case that is not of present interest.

the gain  $K$ . The relationships between the variables that are independent of  $d$  are given with each network. Several additional parameters that have been found useful for designing a network for a given  $d$  include two products of a resistance and capacitance (designated  $T_1$  and  $T_2$ ), the ratio of the resistances ( $\rho$ ), and the ratio of the capacitors ( $\gamma$ ). The establishment of a specified value of  $d$  is accomplished by means of two of these parameters and the gain  $K$ . With each network in the catalog is a short table that specifies, for a given choice of parameters, the appropriate group of design relations for  $d$  given at the end of the catalog.

The form of the numerator of  $G(s)$  is determined by the particular network chosen for the function. In some cases the numerator constants can easily be established at the desired values; in others an attempt to do this

may severely limit the parameters affecting the value of  $d$  in the denominator and lead to an unsatisfactory circuit design. In this case, the numerator polynomial can be realized by means of additional passive or active networks. A method of network design is discussed later.

CATALOG OF SECOND-ORDER ACTIVE NETWORKS

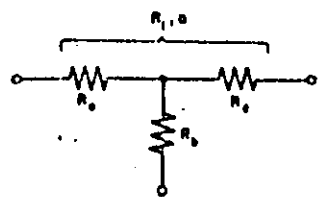
Definitions of Parameters:

$$T_1 = R_1 C_1$$

$$T_2 = R_2 C_2$$

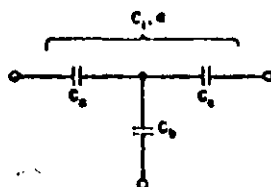
$$\rho = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\gamma = \frac{C_2}{C_1}$$



$$R_1 = R_2 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$\alpha = \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

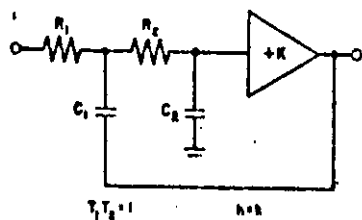


$$C_1 = \frac{C_2(C_3 + C_4)}{C_2 + C_3 + C_4}$$

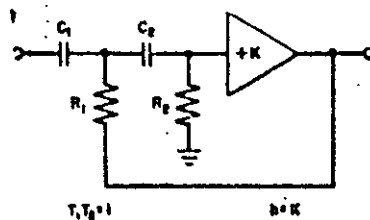
$$\alpha = \frac{C_3}{C_2 + C_3}$$

FUNCTIONS OF FORM  $\frac{h}{s^2 + ds + 1}$

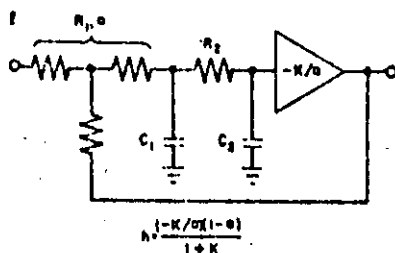
FUNCTIONS OF FORM  $\frac{As^2}{s^2 + ds + 1}$



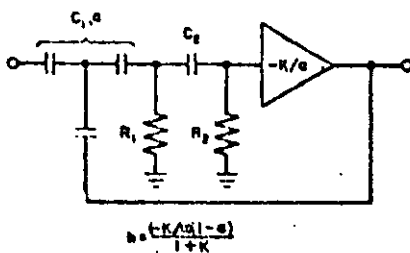
Parameters	d Formulas Group
$\rho, T_1$	III
$\rho, T_2$	I
$\gamma, T_1$	IV
$\gamma, T_2$	II



Parameters	d Formulas Group
$\rho, T_1$	II
$\rho, T_2$	IV
$\gamma, T_1$	I
$\gamma, T_2$	III



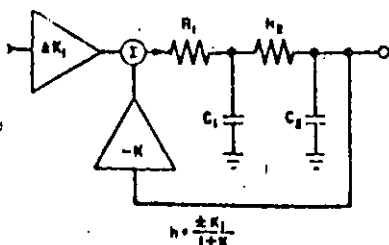
$$\frac{T_1 T_2}{1 + K} = 1$$



$$T_1 T_2 (1 + K) = 1$$

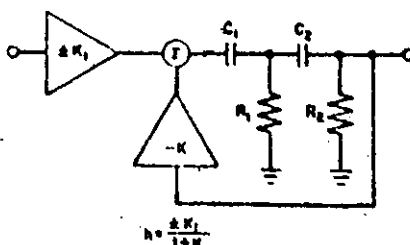
Alternative with 2 active inputs:

Parameters	d Formulas Group
$\rho, T_1$	VIII
$\rho, T_2$	VII
$\gamma, T_1$	VII
$\gamma, T_2$	VIII



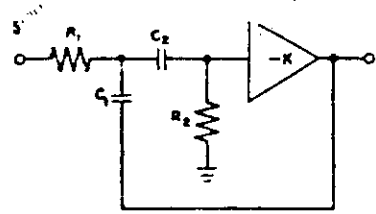
Alternative with 2 active inputs:

Parameters	d Formulas Group
$\rho, T_1$	X
$\rho, T_2$	IX
$\gamma, T_1$	IX
$\gamma, T_2$	X





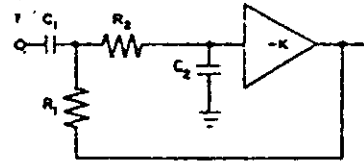
FUNCTIONS OF FORM  $\frac{ks}{s^2 + ds + 1}$



$$T_1 T_2 (1+K) = 1 \quad h = -K T_2$$

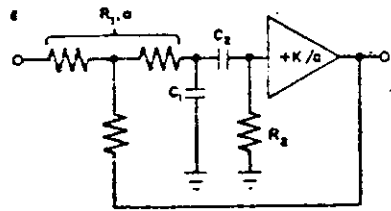
Parameters	d Formulas Group
$\rho, T_1$	X
$\rho, T_2$	IX
$\gamma, T_1$	IX
$\gamma, T_2$	X

FUNCTIONS OF FORM  $\frac{ks}{s^2 + ds + 1}$



$$\frac{T_1 T_2}{1+K} = 1 \quad h = -K/T_2$$

Parameters	d Formulas Group
$\rho, T_1$	VIII
$\rho, T_2$	VII
$\gamma, T_1$	VII
$\gamma, T_2$	VIII

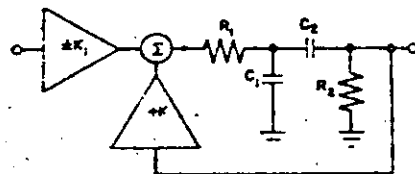


$$h = (K/a)(1-a)T_2$$

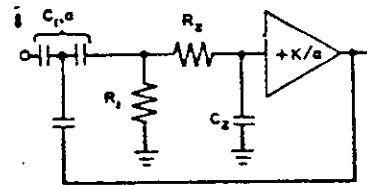
$$T_1 T_2 = 1$$

Parameters	d Formulas Group
$\rho, T_1$	II
$\rho, T_2$	IV
$\gamma, T_1$	I
$\gamma, T_2$	III

Alternative with 2 active inputs:



$$h = \pm K T_2$$

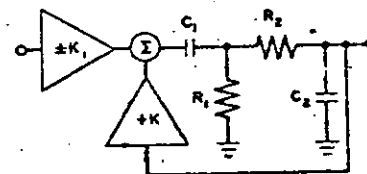


$$h = (K/a)(1-a)T_1$$

$$T_1 T_2 = 1$$

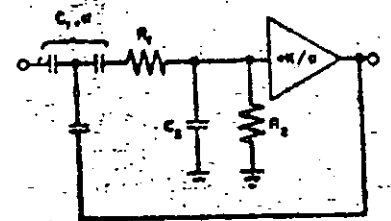
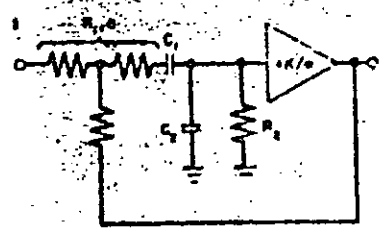
Parameters	d Formulas Group
$\rho, T_1$	III
$\rho, T_2$	I
$\gamma, T_1$	IV
$\gamma, T_2$	II

Alternative with 2 active inputs:



$$h = \pm K T_1$$

FUNCTIONS OF FORM  $\frac{ks}{s^2 + ds + 1}$



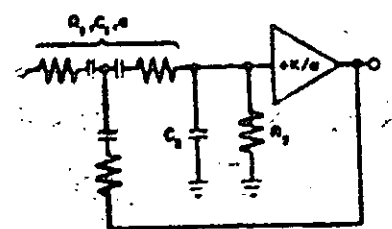
$$k = (K/a)(1 - a)\rho T_1$$

$$= (K/a)(1 - a)\gamma T_1$$

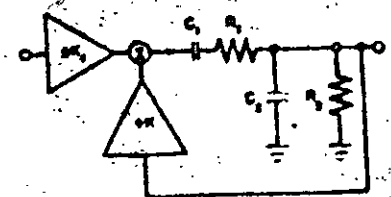
$$K > 1$$

$$T_1 T_2 = 1$$

Parameters	d Formulas Group
$\rho, T_1$	VI
$\rho, T_2$	V
$\gamma, T_1$	V
$\gamma, T_2$	VI

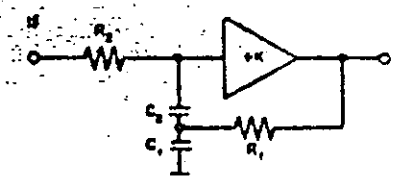


Alternative with 2 active inputs:



$$k = K_1 K_2 \rho T_2 = K_1 \gamma T_1$$

FUNCTIONS OF FORM  $\frac{ks}{s^2 + ds + 1}$

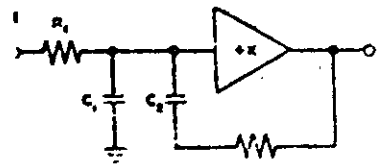


$$T_1 T_2 = 1$$

$$k = (1/\rho T_2) \rho T_2 = \gamma T_1 (1 + \gamma)$$

$$= K \rho (1/\rho T_2) \rho T_2 = K \gamma T_1 (1 + \gamma)$$

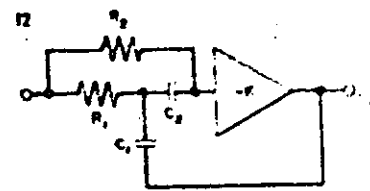
Parameters	d Formulas Group
$\rho, T_1$	II
$\rho, T_2$	IV
$\gamma, T_1$	I
$\gamma, T_2$	III



$$T_1 T_2 = 1$$

$$k = \rho T_2 = \gamma T_2$$

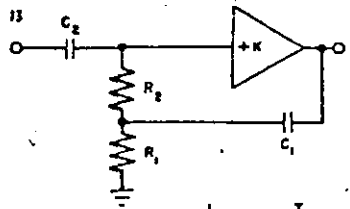
Parameters	d Formulas Group
$\rho, T_1$	VI
$\rho, T_2$	V
$\gamma, T_1$	V
$\gamma, T_2$	VI



$$T_1 T_2 = (1 + K) \rho T_2 = 1 + K$$

Parameters	d Formulas Group
$\rho, T_1$	X
$\rho, T_2$	IX
$\gamma, T_1$	IX
$\gamma, T_2$	X

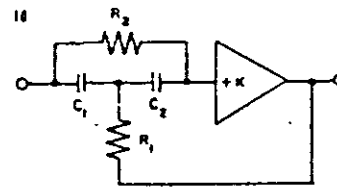
FUNCTIONS OF FORM  $\frac{h[s + (1/\tau)]}{s^2 + ds + 1}$



$T_1 T_2 = 1$     $h = K$     $\tau = \frac{1}{T_2(1+\rho)} = \frac{T_1}{1+\gamma T_1^2}$

Parameters	d Formulas Group
$\rho, T_1$	III
$\rho, T_2$	I
$\gamma, T_1$	IV
$\gamma, T_2$	II

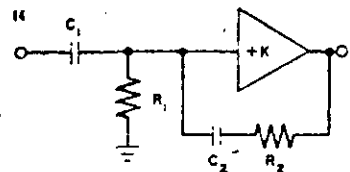
FUNCTIONS OF FORM  $h \frac{s^2 + bs + 1}{s^2 + ds + 1}$



$T_1 T_2 = 1$     $h = K$     $b = 4/(T_2 + \rho T_2 + T_1(1+\gamma))$

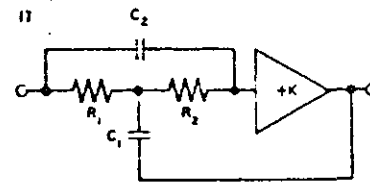
Parameters	d Formulas Group
$\rho, T_1$	II
$\rho, T_2$	IV
$\gamma, T_1$	I
$\gamma, T_2$	III

56 1-120



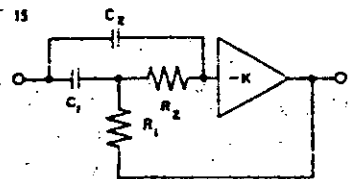
$T_1 T_2 = 1$     $h = K$     $\tau = T_2$

Parameters	d Formulas Group
$\rho, T_1$	II
$\rho, T_2$	IV
$\gamma, T_1$	I
$\gamma, T_2$	III



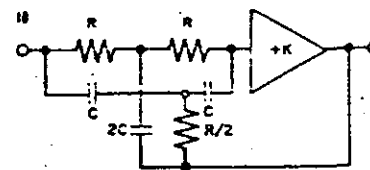
$T_1 T_2 = 1$     $h = K$     $b = (1/T_1) + \gamma T_1 + T_2(1+\rho)$

Parameters	d Formulas Group
$\rho, T_1$	III
$\rho, T_2$	I
$\gamma, T_1$	IV
$\gamma, T_2$	II



$\frac{T_1 T_2}{1+K} = 1$     $h = -K$     $\tau = 1/d$

Parameters	d Formulas Group
$\rho, T_1$	VIII
$\rho, T_2$	VII
$\gamma, T_1$	VII
$\gamma, T_2$	VIII



$RC = 1$   
 $h = K$   
 $b = 0$   
 $d = 4(1-K)$

DESIGN FORMULAS\* FOR DISSIPATION FACTOR  $d$ 

Group	(a) $d(x, K, T)$	(b) $T(x, K, d)$	(c) $K(x, d, T)$	(d) $K_{\min}$	(e) $x_{\min}$	(f) $T_{x_{\min}}$	(g) $K_{\max}$
I	$\frac{(1-K)}{T} + T(1+x)$	$\frac{d}{2(1+x)} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(1+x)(1-K)}{d^2}} \right]$	$T^2(1+x) + 1 - dT$	$\frac{4(1+x) - d^2}{4(1+x)} (<1)$	$\frac{d^2 - 4(1-K)}{4(1-K)}$	$\frac{d}{2(1+x)}$	$T^2(1+x) + 1$
II	$\frac{(1+x-K)}{T} + T$	$\frac{d}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(1+x-K)}{d^2}} \right]$	$T^2 + (1+x) - dT$	$\frac{4(1+x) - d^2}{4}$	$\frac{d^2 - 4(1-K)}{4}$	$\frac{d}{2}$	$T^2 + (1+x)$
III	$\frac{(1+x)}{T} + T(1-K)$	$\frac{d}{2(1-K)} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(1+x)(1-K)}{d^2}} \right]$	$\frac{T^2 + (1+x) - dT}{T^2}$	$\frac{4(1+x) - d^2}{4(1+x)} (<1)$	$\frac{d^2 - 4(1-K)}{4(1-K)}$	$\frac{2(1+x)}{d}$	$\frac{T^2 + (1+x)}{T^2}$
IV	$\frac{1}{T} + T(1+x-K)$	$\frac{d}{2(1+x-K)} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(1+x-K)}{d^2}} \right]$	$\frac{T^2(1+x) + 1 - dT}{T^2}$	$\frac{4(1+x) - d^2}{4}$	$\frac{d^2 - 4(1-K)}{4}$	$\frac{2}{d}$	$\frac{T^2(1+x) + 1}{T^2}$
V	$\frac{1}{T} + T[1+x(1-K)]$	$\frac{d}{2[1+x(1-K)]} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4[1+x(1-K)]}{d^2}} \right\}$	$\frac{T^2(1+x) + 1 - dT}{xT^2}$	$\frac{4(1+x) - d^2}{4x} (>1)$	$\frac{4 - d^2}{4(K-1)}$	$\frac{2}{d}$	$\frac{T^2(1+x) + 1}{xT^2}$
VI	$\frac{[1+x(1-K)]}{T} + T$	$\frac{d}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(1+x)}{d^2(1+K)}} \right]$	$\frac{T^2 + (1+x) - dT}{x}$	$\frac{4(1+x) - d^2}{4x} (>1)$	$\frac{4 - d^2}{4(K-1)}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{T^2 + (1+x)}{x}$
VII	$\frac{1}{T} + \frac{T(1+x)}{(1+K)}$	$\frac{d(1+K)}{2(1+x)} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(1+x)}{d^2(1+K)}} \right]$	$\frac{T^2(1+x) + 1 - dT}{(dT-1)}$	$\frac{4(1+x) - d^2}{d^2}$	$\frac{(1+K)d^2 - 4}{4}$	$\frac{2}{d}$	$\infty$
VIII	$\frac{(1+x)}{T} + \frac{T}{(1+K)}$	$\frac{d(1+K)}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(1+x)}{d^2(1+K)}} \right]$	$\frac{T^2 + (1+x) - dT}{dT - (1+x)}$	$\frac{4(1+x) - d^2}{d^2}$	$\frac{(1+K)d^2 - 4}{4}$	$\frac{2(1+x)}{d}$	$\infty$
IX	$\frac{1}{T(1+K)} + T(1+x)$	$\frac{d}{2(1+x)} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(1+x)}{d^2(1+K)}} \right]$	$\frac{T^2(1+x) + 1 - dT}{dT - T^2(1+x)}$	$\frac{4(1+x) - d^2}{d^2}$	$\frac{(1+K)d^2 - 4}{4}$	$\frac{d}{2(1+x)}$	$\infty$
X	$\frac{(1+x)}{T(1+K)} + T$	$\frac{d}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(1+x)}{d^2(1+K)}} \right]$	$\frac{T^2 + (1+x) - dT}{dT - T^2}$	$\frac{4(1+x) - d^2}{d^2}$	$\frac{(1+K)d^2 - 4}{4}$	$\frac{d}{2}$	$\infty$

 \*  $T = T_1$  or  $T_2$ , as appropriate;  $x = \rho$  or  $\gamma$ , as appropriate.

DESIGN OF ACTIVE NETWORKS BY MEANS  
OF THE CATALOG

While anyone may start with a given transfer function with the networks in the catalog and work out his own method for selecting parameters, one approach has been found useful and is described here for those wishing to design such circuits most directly. In any event, it is strongly recommended that one work through at least one group of relations in the foregoing section to gain insight into their meaning.

The basis of the general procedure suggested below is the necessity that the practical design of an active filter must be carried out within the limitations imposed by the available components. Restrictions on the size of capacitors, number and complexity of amplifier stages, and requirements for variability are typical factors that impose practical circuit limitations and must be controlled.

*Realizing a Specified Value of  $d$* 

When a particular network has been selected, one chooses a set of two parameters— $(\rho, T_1)$ ,  $(\rho, T_2)$ ,  $(\gamma, T_1)$  or  $(\gamma, T_2)$ —and locates the appropriate group of design formulas in the foregoing section. If the problem involves restrictions on the size of capacitors, then  $\gamma$  is a useful parameter. On the other hand, if control of the resistance values is more important, one may use  $\rho$ . In general,  $T_1$  and  $T_2$  are equally convenient parameters except where one of them determines a factor in the numerator of  $G(s)$ .

In the same section, each formula group includes:

(a) The expression for  $d$  in terms of  $K$  and the two parameters  $(x, T)$ , selected above ( $x$  stands for  $\rho$  or  $\gamma$ ,  $T$  for  $T_1$  or  $T_2$ );

(b) The solution of the equation in (a) for  $T$ ;

(c) The solution of the equation in (a) for  $K$ ;

(d) The minimum value of  $K$  satisfying the equation in (a) with arbitrary  $x$ , positive  $T$  [ $K_{\min}$  is obtained by solving the equation  $\partial K(d, x, T)/\partial T = 0$  for  $T$  and substituting the solution,  $T_{K_{\min}}$  into the expression for  $K(d, x, T)$ ];

(e) The minimum value of  $x$  satisfying the equation in (a) with arbitrary  $K$ , positive  $T$  ( $x$  has a minimum in the same sense as  $K$ , above);

(f) The value of expression (b) when  $K = K_{\min}$  ( $x = x_{\min}$  is the same condition and both values of  $T$  are the same in this case);

(g) The value of expression (c) when  $d = 0$  (the significance of  $K_{\max}$  is discussed below).

In establishing the values of  $x$ ,  $T$  and  $K$ , one selects any two of them arbitrarily (in an algebraic sense—with more purpose in the practical sense), subject to the algebraic limitations  $K \geq K_{\min}$ ,  $x \geq x_{\min}$ . The value of the remaining parameter is then determined from formula

\*One might also employ  $(\rho, \gamma)$  as design parameters, but this pair appears to be less useful than the others since it provides less control over the actual magnitudes of the components.

(b) or (c). For most purposes, a recommended procedure is the assumption of  $x$ ,  $K$ , and the solution for  $T$ .

As an example, suppose that a required

$$G(s) = \frac{s^2}{s^2 + 1.414s + 1}$$

is to be realized by means of network No. 3 in the catalog, using one cathode follower as the active element. (The circuit to be used is shown in Fig. 4.) Suppose further that  $R_2$  (parallel combination of the two biasing resistors) shall be 1 megohm and that both capacitors shall have the same value.

First of all, we shall choose  $(\gamma, T_2)$  as our design parameters, so that we may easily control the ratio of the capacitors and the value of  $R_2$ . According to the catalog, Formula Group III for  $d$  is indicated:

Setting  $\gamma = 1$ , we have

$$\begin{aligned} K_{\min} &= \frac{4(1 + \gamma) - d^2}{4(1 + \gamma)} \\ &= \frac{4 \cdot 2 - (1.414)^2}{4 \cdot 2} \\ &= 0.75. \end{aligned}$$

If we set  $K = 0.9$ , a reasonable value for the amplifier of Fig. 4, then

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{d}{2(1 - K)} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(1 + x)(1 - K)}{d^2}} \right] \\ &= \frac{1.414}{2(1 - 0.9)} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 \cdot 2 \cdot (1 - 0.9)}{(1.414)^2}} \right] \\ &= 1.59, 12.5. \end{aligned}$$

The expression for  $d$  in Formula Group III,  $d = (1 + \gamma)/(T_2 + T_2(1 - K))$ , suggests that a choice of the smaller value of  $T_2$  above would result in a more stable circuit, in that variations in the active element will have less effect on the value of  $d$ .

Up to this point, we have  $R_2 = 10^6$ ,  $T_1 = 1.59$ , and  $C_1 = C_2$ . Then, making use of the relation  $T_1 T_2 = 1$ , we find  $C_1 = C_2 = 1.59 \mu\text{f}$  and  $R_1 = 3.93 \times 10^5$ .

It can be stated as a general rule of thumb that values of  $d$  greater than 0.5 can be realized most easily and with the simplest circuits; as  $d$  approaches 0.2, more care becomes necessary in the circuit design. Finally, values of  $d$  of the order of 0.1 or less demand active elements that are more complicated and highly stabilized, and passive elements that have been carefully adjusted within close tolerances. The latter values of  $d$  are not generally encountered in low-frequency filters.

As stated it has been found most convenient to design second-order networks on the basis of 1 radian per second, and to make a subsequent shift of their characteristics to the appropriate frequency by altering the passive elements. The basic invariants under a frequency transformation of this kind are the parameters

$\rho$  and  $\gamma$ ; as long as the ratio of resistors and the ratio of capacitors remain constant, the frequency characteristics of the networks will have the same shape. The necessary invariance of  $\rho$  and  $\gamma$  indicates the technique for making filters with variable cut-off frequencies.

#### Imperfections in the Active Elements

It has been assumed, heretofore, that the active elements of the networks in Figs. 2 and 3 and in the catalog possessed the ideal attributes: infinite input impedance, zero output impedance and stable gain. It is therefore important, in the design of an active network of this kind, for one to insure that the imperfections in the amplifiers used do not appreciably deteriorate the desired performance of the circuit.

With regard to finite output impedance, it can be seen that in many cases the active elements drive a portion of the passive network through a resistive element. In this case, the design can be made to incorporate the output impedance in the resistive element and effectively neutralize its effects.

On the other hand, where an amplifier drives a capacitive branch of a network, it is imperative that the output impedance be considerably smaller than any of the resistive elements of the network. This condition is most serious when the value of  $d$  is very small and the gain of the active element is close to  $+1$ . The limitation of the amplifier output impedance to a reasonably small value will generally prevent any significant alteration of the network characteristics in the vicinity of the cut-off frequency(ies). On the other hand, the attenuation achieved in certain networks in regions well beyond cut-off will fall short of the expected value because the output impedance, though small, is still finite. This situation has been observed in low-pass networks at high frequencies and in "notch" circuits at the null frequency. Behavior of this kind can best be investigated by a direct analysis of the particular circuit involved. Since only "very high frequencies" or "null frequencies" are of interest in this case, the analysis can be simplified by the assumption of these extreme frequency conditions. Under these circumstances, the output impedance should be negligibly small in comparison with  $(1 - K)$  times the value of resistive elements of the networks. Fortunately, strict requirements of this sort do not occur often in low-frequency filters.

Another interesting departure of the active elements from the ideal is the drift in their gain. With most of the networks in the catalog (those with  $T_1 T_2 = 1$ ), the position of the transfer characteristics in the frequency domain is independent of the active element; with a few others this is not so. In both cases, however, a drift in gain will result in a change in the actual value of  $d$  and in the shape of the frequency characteristics. It is often possible, as in the previous example, to reduce this dependence by an appropriate choice of parameters: but

in any event the active gain should generally be at least  $1/d$  times as stable as the expected value of  $d$ .

There is another kind of instability often characteristic of active RC networks of the kind discussed here, namely, their tendency to become oscillators. This tendency is most prevalent when the value of  $d$  is small. Even in some circuits where the active gain is ostensibly free from drift, oscillations may be sustained by an amplifier that drives itself into a region of its characteristics where the gain is far greater than expected.

A basic cure for a situation of this kind is the use of a feedback amplifier for the active element, such that the gain  $K$  is given by

$$K = \frac{A}{1 + \beta A} \quad (6)$$

where  $A$  is the gain of the amplifier without feedback,  $\beta$  is the feedback ratio derived from passive elements. It is easily seen that the value of  $K$  is absolutely limited to  $1/\beta$ , regardless of the value of  $A$ . The simple cathode-follower circuit illustrated in Fig. 4 is an example of this kind of active element. The critical value of  $K$  for a given network,  $K_{max}$ , is given at the end of the network catalog. A practical circuit design must include means for insuring that the active gain does not approach this value.

#### Adjustment of Physical Networks

When an active network has been constructed with physical components, minor adjustments in the latter are frequently required to achieve the performance indicated by the design. If the departure from the expected characteristics is not large, the trimming of a single capacitor or resistor may suffice to properly position the network characteristics in the frequency domain. The shapes of the characteristics are most easily altered by adjustment of the gain  $K$ .

In the event that the departure from expected characteristics is large and is not accountable to the usual tolerances in components, one may look to the following as possible sources of error: miscalculation of design parameters, excessive amplifier output impedance, poor capacitor "Q". It is unreasonable to ignore the "Q" of large paper capacitors in networks where the resistive elements are of the order of 1 megohm or more.

When the network design includes an active element whose gain is slightly less than  $+1$  (e.g., the circuit of Fig. 4), it is usually difficult to measure or adjust the quantity  $(1 - K)$  directly with necessary accuracy. If a potentiometer is available for trimming the gain (as in Fig. 4), one may effect the adjustment in a simple manner by observing the over-all network amplitude-frequency response. The expected frequency-response characteristic for three transfer functions is illustrated in Fig. 5. Note that, although the latter are written on the basis of 1 radian per second, the frequency response is indicated at the true "resonant" frequency  $\omega$ .

# CONTENIDO

Página

3.1	FILTROS REALES DE PRIMERO Y SEGUNDO - ORDEN .....	1
3.1.1	Función de transferencia del filtro pasa-bajas de primer orden .....	1
3.1.2	Función de transferencia del filtro pasa-altas de primer orden .....	3
3.1.3	Función de transferencia del filtro pasa-bajas de segundo orden .....	5
3.1.4	Función de transferencia del filtro pasa-altas de segundo orden .....	7
3.1.5	Función de transferencia de un fil- tro pasa-banda de segundo orden .....	8
3.1.6	Función de transferencia de un fil- tro supresor de banda de segundo orden .....	10
3.1.7	Función de transferencia de un fil- tro pasa-todo .....	12
3.1.8	Función de transferencia de un fil- tro con un cero de transmisión .....	15
3.2	FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE ORDEN MAYOR QUE DOS .....	21
3.2.1	Síntesis .....	22
3.2.2	Ejemplo de diseño .....	27
3.3	AMPLIFICADOR OPERACIONAL .....	30
	Modelo de los amplificadores de ganancia finita .....	33
	Par Diferencial .....	35
	Modelo para corriente de polarización .....	38
	Compensación de OFFSET .....	40
	Rapidez de excursión (SLEW RATE) .....	44

Filtros de ganancia infinita y realimentación .....	46
Filtros con fuente de voltaje controlada por voltaje .....	47
3.4 REALIZACION ACTIVA DE LOS FILTROS BASICOS DE SEGUNDO ORDEN .....	49
3.4.1 Filtro pasa-bajas "Realimentación Múltiple" .....	50
3.4.2 Filtro pasa-bajas "Fuente de voltaje controlada por voltaje" .....	51
3.4.3 Filtro pasa-altas "Realimentación Múltiple" .....	52
3.4.4 Filtro pasa-altas "Fuente de voltaje controlada por voltaje" .....	54
3.4.5 Filtro pasa-banda "Realimentación Múltiple" .....	55
3.4.6 Filtro pasa-banda (Realizado con dos amplificadores operacionales) .....	57
3.4.7 Filtro pasa-banda Tipo "A" (fuente de voltaje controlada por voltaje) .....	58
3.4.8 Filtro pasa-banda Tipo "B" (Fuente de voltaje controlada por voltaje) .....	60
3.4.9 Filtro supresor de banda (Fuente de voltaje controlada por voltaje) .....	61
3.4.10 Filtro supresor de banda (Realimentación Múltiple) .....	63
3.4.11 Filtro pasa-todo .....	64
3.4.12 Filtros con ceros de transmisión .....	65
3.4.13 Filtro con un cero de transmisión (Fuente de voltaje controlada por voltaje) .....	69
3.4.14 Filtros de amplificadores múltiples .....	70



	Página
3.5 EJEMPLO DE DISEÑO ..... (Filtro resonador)	76
3.6 SENSITIVIDAD Y SINTONIZACION .....	79
3.6.1 Sensitividad .....	79
3.6.2 Sintonización .....	86
3.7 FILTROS ACTIVOS ESPECIALES .....	96
3.7.1 Filtros activos de alta frecuen- cia (Filtros R) .....	96
3.7.2 Filtros activos de capacitancia conmutada .....	102
3.7.3 Hojas de datos del MFIO filtro dual de capacitancia conmutada .....	108
3.8 CASOS PRACTICOS .....	121
3.8.1 Graficador de la Traza Polar de Nyquist .....	122
3.8.2 Sintetizador Armónico .....	126

## APENDICES

A.1 TABLA 1.1 Coeficientes de la función de transferen- cia de filtros paso-bajas Butterworth y Chebyshev normalizados .....	131
A.2 TABLA 1.2 Coeficientes de la función de transferen- cia factorizada de filtros paso-bajas nor- malizados elípticos .....	137

A.3	TABLA 1.3	
	Coeficientes de la función de transferencia factorizada de filtros paso-bajas normalizados BESSEL .....	154
A.4	ESCALAMIENTO DE FRECUENCIA E IMPEDANCIA .....	156
	A.4.1 Escalamiento de impedancia .....	156
	A.4.2 Escalamiento de frecuencia .....	159
A.5	DESNORMALIZACION DE FUNCIONES DE TRANSFERENCIA .....	160
A.6	TRANSFORMACION DE FRECUENCIA .....	162
	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS .....	172

### 3.1 FILTROS REALES DE PRIMERO Y SEGUNDO ORDEN.

A continuación se presentan funciones de transferencia de primero y segundo orden que aproximan los casos ideales mencionados anteriormente en este curso. Más adelante en estas notas, se verá como realizar filtros activos de orden "n" conectando en cascada etapas de primero y segundo orden realizadas en forma activa.

#### 3.1.1. FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL FILTRO PASA-BAJAS DE PRIMER ORDEN.

La función de transferencia del filtro pasa-bajas de primer orden está dada por la siguiente expresión.

$$H(s) = \frac{H_o W_o}{s + W_o} \quad \dots \quad 3.1.1$$

De donde se obtiene:

$$H(jw) = H(s) \Big|_{s=jw} = \frac{H_o}{\sqrt{1 + \left(\frac{w}{w_o}\right)^2}} e^{j(-t_g^{-1} \frac{w}{w_o})} \quad \dots \quad 3.1.2$$

Las gráficas correspondientes a esta última ecuación son mostradas a continuación:

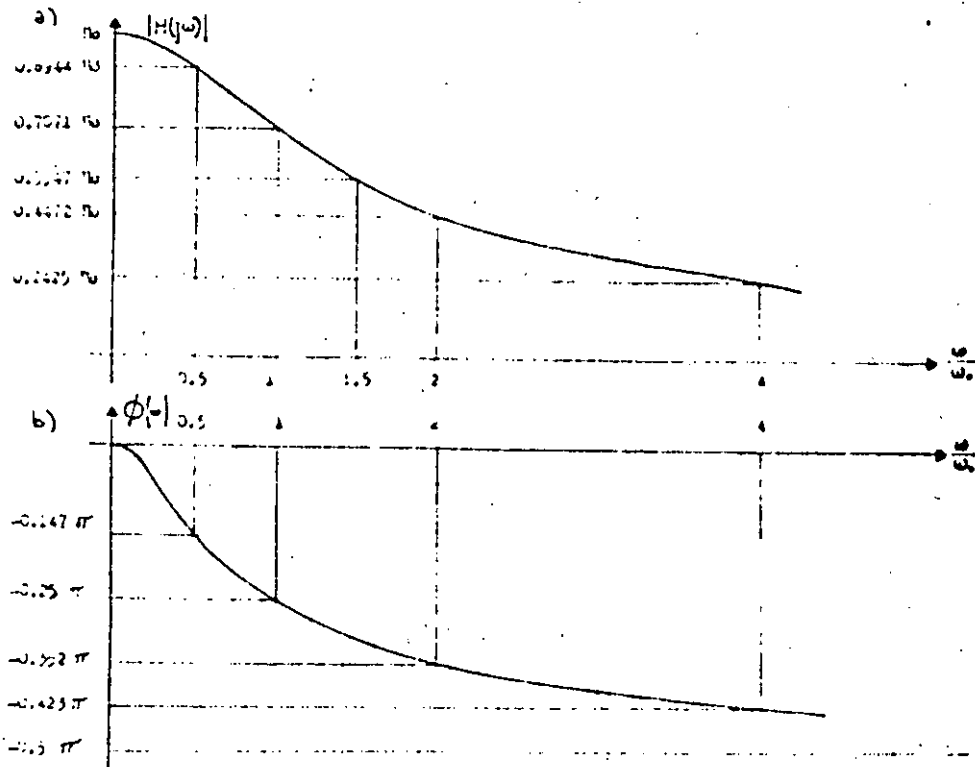


Figura 3.1.1 Respuesta en frecuencia de  $H(s) = \frac{H_0 W_0}{s + W_0}$   
 a) en magnitud; b) en fase.

Puede observarse de la figura 3.1.1. que la respuesta permanente debida a una excitación senoidal de frecuencia angular  $W_0$  es

$$Y_p(t) = 0.707 H_0 \text{ sen } (w_0 t - \frac{\pi}{4}) \quad \dots \quad 3.1.3$$

lo que indica que las señales de excitación de frecuencia -

$w > w_0$  son atenuadas más del 70% de su valor original, lo cual quiere decir que la potencia de la señal que se transmite a la salida del filtro será menos de la mitad de la potencia que se tiene a la entrada de dicho filtro. Donde  $w_0$  recibe el nombre de frecuencia de corte.

En base a estas consideraciones se define el ancho de banda (AB) de un filtro, al conjunto de frecuencias tales que

$$|H(jw)| \geq 0.707 |H(jw)|_{\max}$$

Que también puede expresarse como el conjunto de frecuencias tales que  $|H(jw)|$  es atenuada  $20 \log 0.707 = -3\text{db}$  de su valor máximo. (1)

### 3.1.2 FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL FILTRO PASA-ALTAS DE PRIMER ORDEN.

La función de transferencia del filtro pasa-altas de primer orden está dada por la siguiente expresión

$$H(s) = \frac{H_0 s}{s + w_0} \quad \dots 3.1.4$$

$$\therefore H(jw) = H(s) \Big|_{s=jw} = \frac{H_0 \frac{w}{w_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{w}{w_0}\right)^2}} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{w}{w_0}\right)} \quad \dots 3.1.5$$

cuyas gráficas de respuesta en frecuencia son:

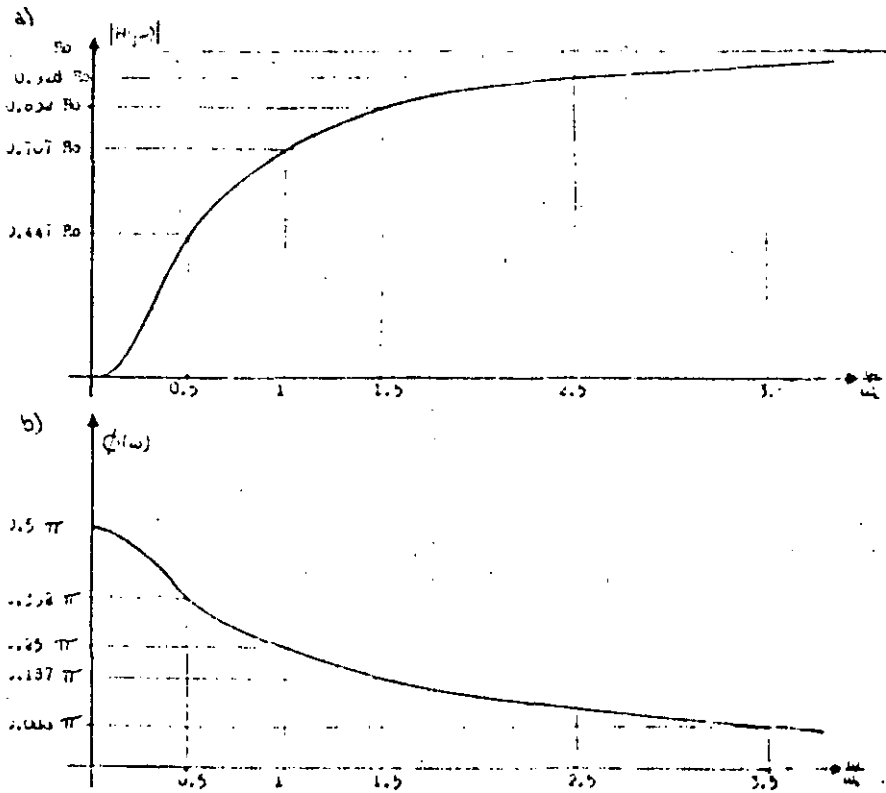


Figura 3.1.2 Respuesta en frecuencia de  $H(s) = \frac{H_0 S}{S + \omega_0}$   
 a) en magnitud; b) en fase.

(1) Una magnitud ( $|H(j\omega)|$ ) puede expresarse en decibeles (db) mediante la siguiente expresión  $|H(j\omega)|_{db} = 20 \log |H(j\omega)|$

De la gráfica anterior se concluye que el ancho de banda del filtro es el conjunto de frecuencias tales que  $\omega < \omega_c$ . Denominándose  $\omega_c$ , frecuencia de corte.

### 3.1.3 FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL FILTRO PASA-BAJAS DE SEGUNDO ORDEN.

La función de transferencia y la respuesta en frecuencia en magnitud y fase de un filtro pasa-bajas de segundo orden están dadas por las ecuaciones (3.1.6) y (3.1.7) respectivamente.

$$H(s) = \frac{H_0 \omega_c^2}{s^2 + \alpha \omega_c s + \omega_c^2} \quad \dots \quad 3.1.6$$

donde  $\alpha \leq 2$ .

$$\therefore H(j\omega) = \frac{H_0}{\left[ \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\alpha\omega}{\omega_c}\right)^2 \right]^{1/2}} e^{j\left(-t_g^{-1} \frac{\alpha\omega}{\omega_c} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}\right)} \quad \dots \quad 3.1.7$$

y sus gráficas de respuesta en frecuencia son:

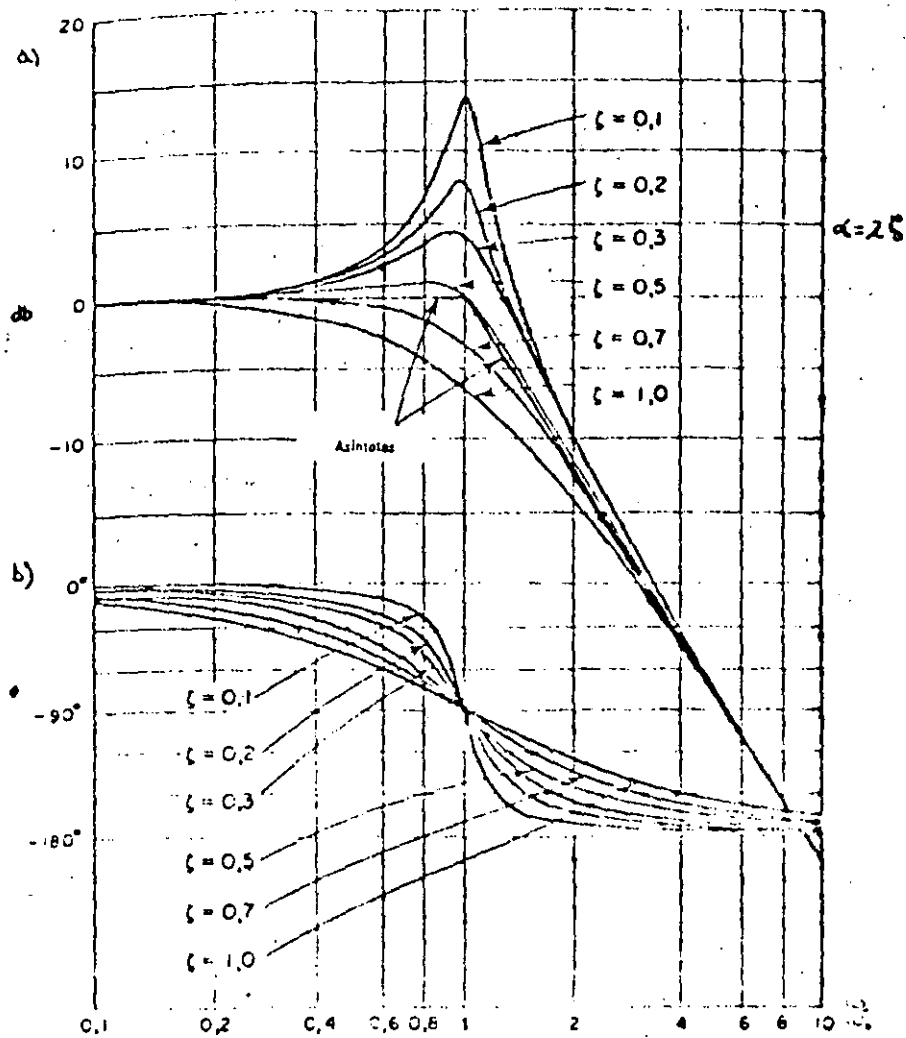


Figura 3.1.3. Respuesta de frecuencia de  $H(s) = \frac{H_o \omega_o^2}{s^2 + \alpha \omega_o s + \omega_o^2}$

a) en magnitud; b) en fase.

Es de interés notar que el máximo valor de  $|H(j\omega)|$  ocurre para:

$$\omega = \omega_r = \omega_o \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}} \quad \dots \quad 3.1.8$$

de donde

$$\left| H(j\omega) \right|_{\omega=\omega_r} = \frac{H_o}{\alpha \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}}} \quad \dots \quad 3.1.9$$



3.1.4. FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL FILTRO PASA-ALTAS DE SE-  
GUNDO ORDEN.

La función de transferencia y la respuesta en frecuencia en magnitud y fase de un filtro pasa-altas de segundo orden es-  
tán dadas por las ecuaciones (3.1.10) y (3.1.11) respectiva-  
mente.

$$H(s) = \frac{H_0 s^2}{s^2 + \alpha \omega_0 s + \omega_0^2} \dots 3.1.10$$

$$\dots H(j\omega) = \frac{H_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left[ \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\alpha\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]^{1/2}} e^{j(\pi - \tan^{-1} \frac{\alpha\omega}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2})} \dots 3.1.11$$

cuyas gráficas de respuesta en frecuencia son:

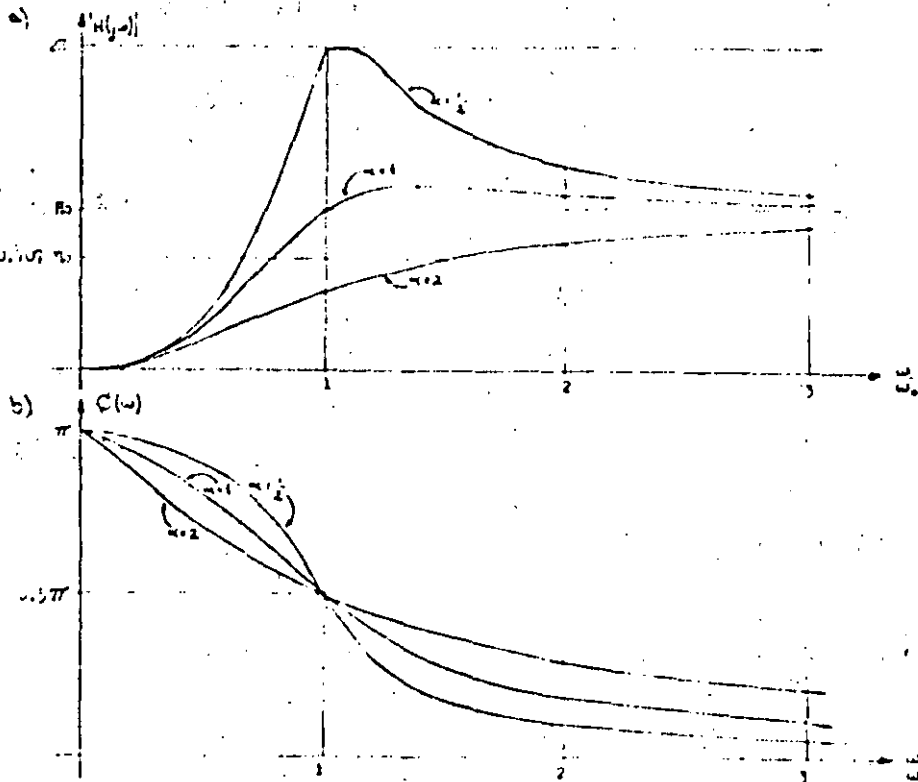


Figura 3.1.4 Respuesta en frecuencia de  $H(S) = \frac{H_0 S^2}{S^2 + \alpha \omega_0 S + \omega_0^2}$

El máximo valor de  $|H(j\omega)|$  es:

$$|H(j\omega)|_{\max} = \frac{H_0}{\alpha \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}}} \quad \dots (3.1.12)$$

y ocurre para el valor de  $\omega$ :

$$\omega = \omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{2}}} \quad \dots (3.1.13)$$

### 3.1.5 FUNCION DE TRANSFERENCIA DE UN FILTRO PASA-BANDA DE SEGUNDO ORDEN.

La función de transferencia de un filtro pasa-banda de segundo orden es:

$$H(s) = \frac{H_0 \alpha \omega_0 s}{s^2 + \alpha \omega_0 s + \omega_0^2} \quad \dots (3.1.14)$$

$$\therefore H(j\omega) = \frac{H_0 \alpha \omega_0 j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \alpha \omega_0 \omega} \quad \dots (3.1.15a)$$

que puede escribirse.

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} e^{-j \tan^{-1} Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad \dots (3.1.15b)$$

si  $\alpha = \frac{1}{Q}$  . . . (3.1.16)

y  $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$  . . . (3.1.17a)

siendo  $\omega_1$  y  $\omega_2$  los valores de  $\omega$  para los cuales

$$\left| H(j\omega) \right|_{\omega=\omega_1} = \left| H(j\omega) \right|_{\omega=\omega_2} = 0.707 \left| H(j\omega) \right|_{\max} = 0.707 \left| H(j\omega) \right|_{\omega=\omega_0} = 0.707 H_0 \quad \dots (3.1.18)$$

o sea que  $Q = \frac{\omega_0}{AB}$  . . . (3.1.17b)

Las curvas de respuesta en frecuencia en magnitud y fase - se muestran en la figura 3.1.5

### 3.1.8.2 FILTRO PASA BAJAS CON UN CERO DE TRANSMISION.

Si la ecuación (1.3.27);  $w_1 < w_2$  la función de transferencia será la de un filtro pasa-bajas.

Para este caso el signo del radical de la ecuación (3.1.30) que debe tomarse es el positivo.

A continuación se presenta un ejemplo:

Ejemplo: 3.1.8.2

Sea  $w_1 = 5$                        $w_2 = 6$                        $\alpha = 0.1$

$\therefore w_m = 4.930984359$

$$H(jw) \Big|_{w = w_m} = 4.566413290 \quad \boxed{-74.46436203^\circ}$$

Cuyas gráficas de respuesta en frecuencia son:

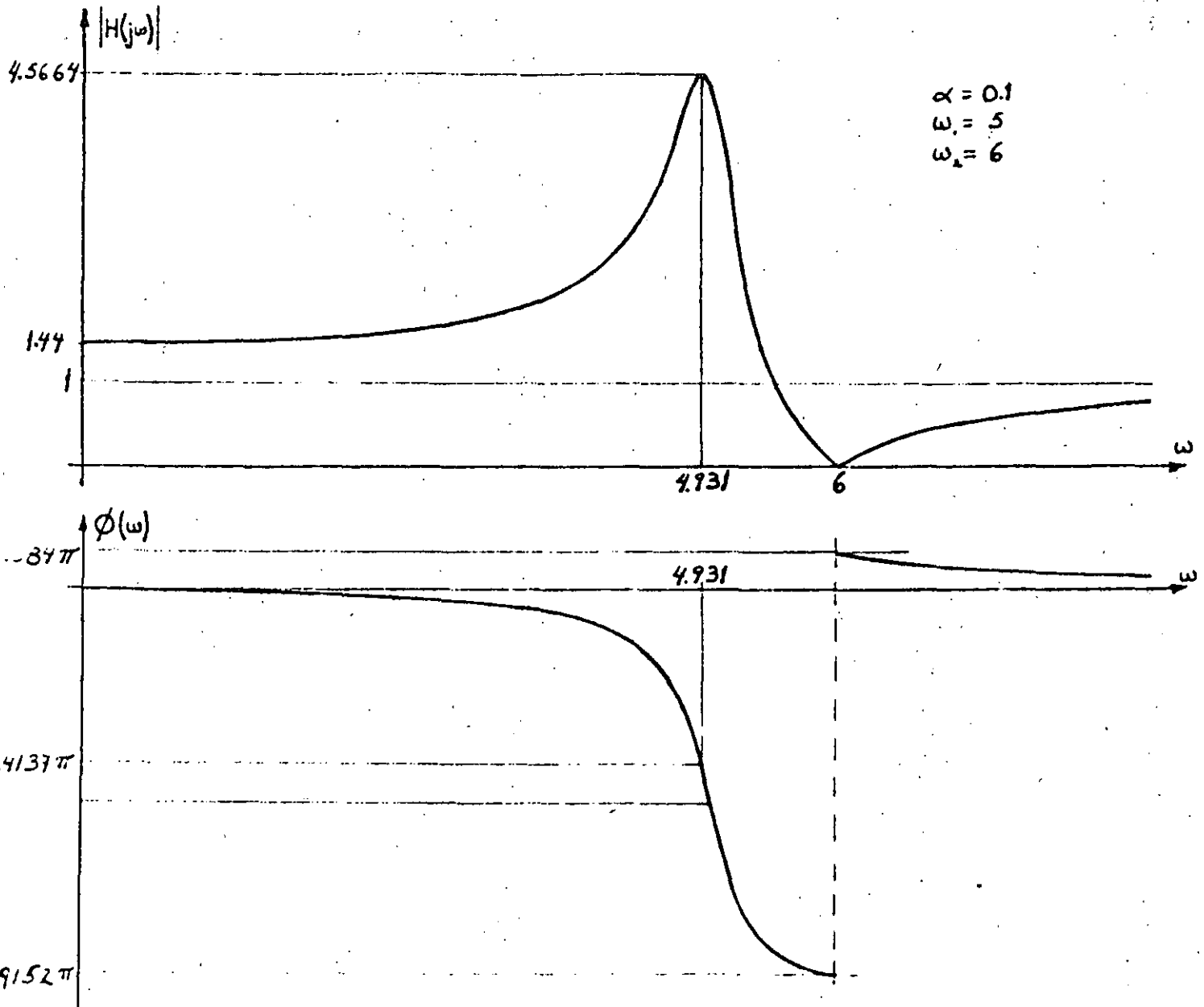


Figura 3.1.10 Curvas de respuesta en frecuencia de un filtro pasa-bajas con un cero de transmisión.

De las figuras 3.1.9 y 3.1.10, puede verse que la división entre la banda de atenuación y la banda pasante es abrupta para este tipo de filtros.

Figura 3.1.10 Curvas de respuesta en frecuencia de un filtro pasabajas con un coeficiente de transmisión

### 3.2 FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE ORDEN MAYOR QUE DOS

Para diseñar y construir filtros activos, pueden seguirse los siguientes pasos:

1.- Determinación mediante una aproximación dada, de la función de transferencia  $H(s)$ , que llene las especificaciones de la respuesta en frecuencia deseada. A este paso se le denomina frecuentemente "Síntesis".

2.- Realización de la función de transferencia determinada en el paso uno, mediante la construcción de circuitos electrónicos en los cuales intervienen, resistencias, capacitores y amplificadores operacionales.

Para efectuar la realización existen diversas formas (2).

Una forma de llevarla a cabo, es la conexión en cascada de etapas de segundo y primer orden, esto es:

$$H(s) = \prod_{i=1}^{N_1} H_{1i}(s) \cdot \prod_{i=1}^{N_2} H_{2i}(s) \quad 3.2.1$$

donde  $N_1$  y  $N_2$  son respectivamente el número de etapas de primero y segundo orden que intervienen,  $H_{1i}(s)$  y  $H_{2i}(s)$  representan funciones de transferencia de primero y segundo orden.

Si el filtro diseñado es de tipo Butterworth, Chebyshev ó Elíptico  $N_1$  y  $N_2$  siempre estarán dados por las siguientes expresiones.

$$N_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ 1 & \text{si } n \text{ es } \text{n\o{n}} \end{cases}$$

$$N_2 = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ es } \text{n\o{n}} \end{cases}$$

donde "n" representa el orden del filtro en cuestión.

En la figura 3.2.1 se muestra la realización en cascada de un filtro cuyo tipo puede ser Butterworth, Chebyshev ó Elíptico.

### 3.3 AMPLIFICADOR OPERACIONAL

El amplificador operacional es basicamente un dispositivo electrónico con un amplificador diferencial en la entrada y una salida con una ganancia de voltaje diferencial muy grande. La fig. 3.3.1 muestra el simbolo del amplificador operacional.

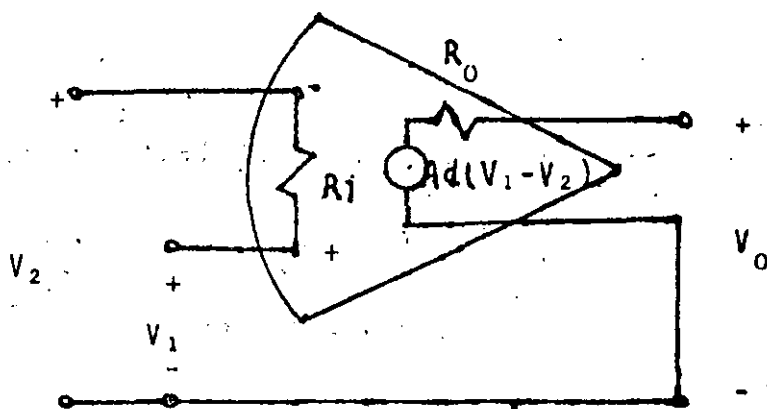


Fig. 3.3.1 Simbolo del amplificador operacional

En un amplificador operacional ideal la resistencia de entrada  $R_i$  se considera infinita, la resistencia de salida  $R_o$  nula y la ganancia  $A_d$  infinita. Esto último permite analizar circuitos con amplificadores operacionales de una manera mas sencilla al emplear el concepto de tierra virtual. La figura 3.3.2a muestra un amplificador de voltaje de ganancia finita no inversor; cuya relación  $V_o(s)/V_s(s)$  considerando características ideales es



$$\frac{V_o(s)}{V_s(s)} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad 3.3.1$$

La Fig. 3.3.2b muestra un amplificador de voltaje de ganancia finita inversor; cuya relación  $V_o(s)/V_s(s)$  al considerarse características ideales es:

$$\frac{V_o(s)}{V_s(s)} = - \frac{R_2}{R_1} \quad 3.3.2$$

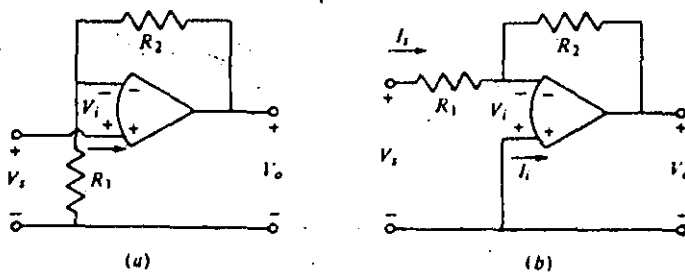


Fig. 3.3.2 Amplificadores de ganancia finita.  
(a) No inversor. (b) Inversor

Cuando la ganancia  $A_d$  no es infinita, la relación entrada-salida de los circuitos de la Fig. 3.3.2 se modifica. En la Fig. 3.3.3 se muestra los modelos de los circuitos de los amplificadores de ganancia finita no inversor e inversor. Considerando que  $V_d(s) = A_d V_i(s)$ ; la relación entrada-salida para el amplificador no inversor es

$$\frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{A_d}{1 + A_d Z_1 / (Z_1 + Z_2)}$$

3.3.3

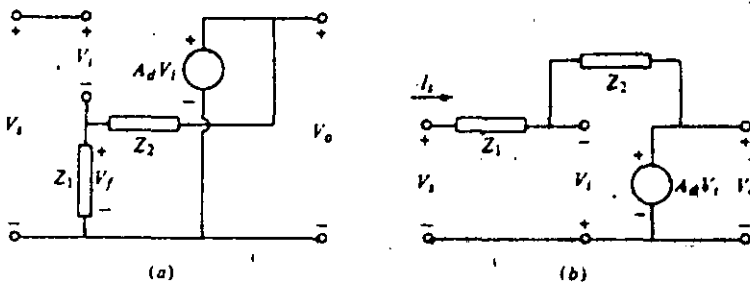


Fig. 3.3.3. Modelos de amplificadores de ganancia finita  
(a) No inversor. (b) Inversor

Notese que en este modelo la impedancia de entrada y salida se consideran infinita y cero respectivamente.

La relación entrada-salida para el amplificador inversor es

$$\frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{-A_d Z_2 / (Z_1 + Z_2)}{1 + A_d Z_1 / (Z_1 + Z_2)} \quad 3.3.4$$

Para este circuito la impedancia de salida es también nula y la impedancia de entrada  $V_s(s)/I_s(s)$  que está dada por la siguiente expresión

$$Z_{in}(s) = \frac{V_s(s)}{I_s(s)} = Z_1 + \frac{Z_2}{1+A_d} \quad 3.3.5$$

ya no es infinita; debido a esto, dicha configuración no es muy empleada en la realización de filtros RC.

Cuando las resistencias de entrada y salida, no se consideran infinita y nula respectivamente, las ecuaciones que modelan a los circuitos se modifican. Así, empleando el circuito de la figura 3.3.4a para modelar el amplificador de ganancia finita no inversor puede demostrarse que la relación entrada-salida esta dada por

$$\frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{R_o Z_1 + A_d R_i (Z_1 + Z_2)}{A_d R_i Z_1 + R_i (R_o + Z_1 + Z_2) + Z_1 (R_o + Z_2)} \quad 3.3.6$$

y la impedancia de entrada y salida estan dadas respectivamente por

$$Z_{in}(s) = \frac{V_s(s)}{I_s(s)} = \frac{A_d R_i Z_1 + R_i (R_o + Z_1 + Z_2) + Z_1 (R_o + Z_2)}{R_o + Z_1 + Z_2} \quad 3.3.7$$

$$Z_{ou}(s) = \frac{V_o(s)}{I_o(s)} = \frac{R_o [R_i (Z_1 + Z_2) + Z_1 Z_2]}{A_d R_i Z_1 + R_i (R_o + Z_1 + Z_2) + Z_1 (R_o + Z_2)} \quad 3.3.8$$

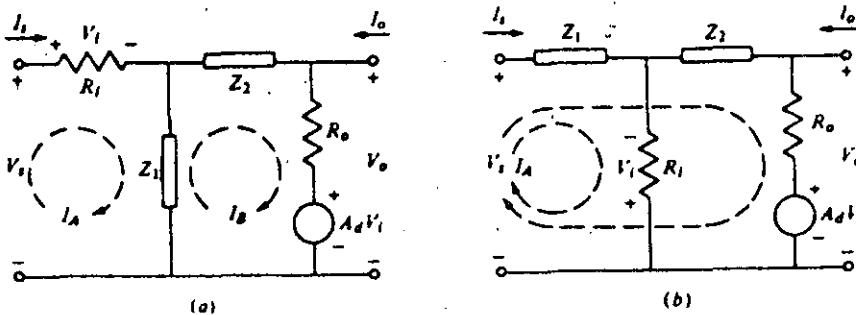


Fig. 3.3.4 Modelos de amplificadores de ganancia finita (a) No inversor. (b) Inversor.

Para el circuito de la Fig. 3.3.4b se tiene

$$\frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{R_i R_o - A_d R_i Z_2}{A_d R_i Z_1 + R_i (R_o + Z_1 + Z_2) + Z_1 (R_o + Z_2)} \quad 3.3.9$$

$$Z_{in}(s) = Z_1 + \frac{R_i R_o + R_i Z_2}{A_d R_i + R_i + R_o + Z_2} \quad 3.3.10$$

$$Z_{ou}(s) = R_o \frac{R_i (Z_1 + Z_2) + Z_1 Z_2}{A_d R_i Z_1 + R_i (R_o + Z_1 + Z_2) + Z_1 (R_o + Z_2)} \quad 3.3.11$$

Es importante recalcar que los valores de impedancia de entrada en la práctica quedan limitadas por la impedancia de modo-común; cuyos valores típicos están comprendidos en un rango de 10 a 100 MΩ dependiendo del grado de polarización inversa y de la corriente de colector.

Características del amplificador operacional.

Varias de las buenas y malas características de un amplificador operacional tienen su origen en el amplificador diferencial de su entrada. Un amplificador diferencial básico se muestra en la figura 3.3.5.

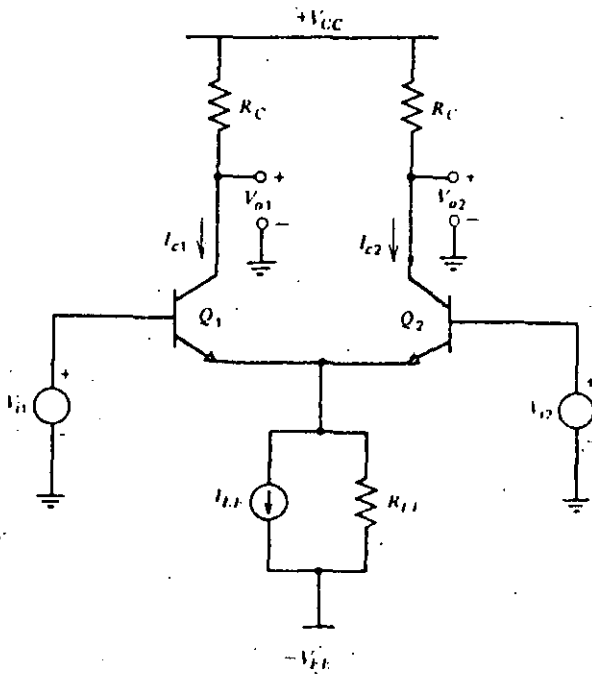


Fig. 3.3-5 Circuito de un par diferencial.

Para simplificar el análisis del mismo se define lo siguiente:  
 voltaje de entrada de modo diferencial

$$V_{id} = V_{i1} - V_{i2} \quad 3.3.12$$

voltaje de entrada de modo común

$$V_{ic} = \frac{V_{i1} + V_{i2}}{2} \quad 3.3.13$$

resolviendo para  $V_{i1}$  y  $V_{i2}$  se tiene

$$V_{i1} = \frac{V_{id}}{2} + V_{ic} \quad 3.3.14$$

$$V_{i2} = -\frac{V_{id}}{2} + V_{ic} \quad 3.3.15$$

el significado físico de estas puede entenderse redibujando el circuito de la Fig. 3.3.5 como muestra el circuito de la Fig. 3.3.6

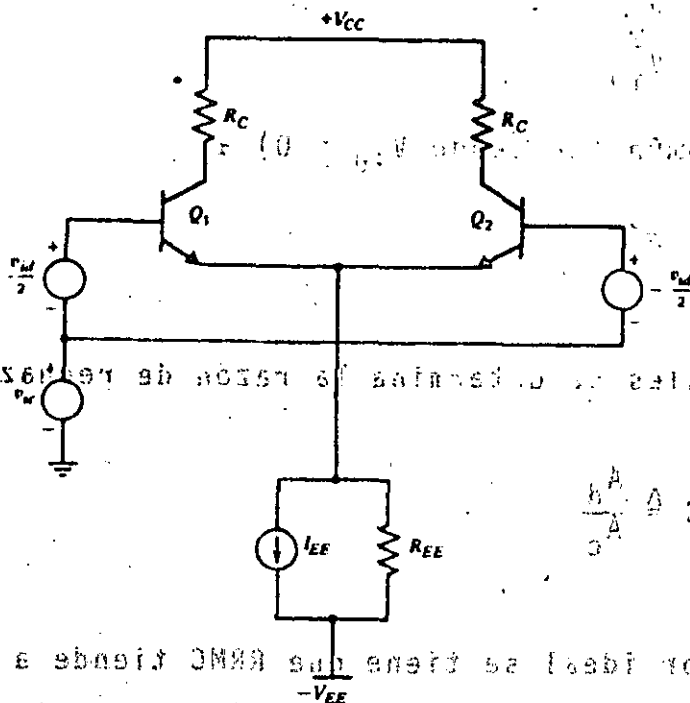


Fig. 3.3.6 Par diferencial con fuente descompuesta, en componentes de modo diferencial y modo común.

de la misma manera para los voltajes de salida se define

$$V_{od} = V_{o1} - V_{o2} \quad 3.3.16$$

como voltaje de modo diferencial de salida y

$$V_{oc} = \frac{V_{o1} + V_{o2}}{2} \quad 3.3.17$$

como voltaje de modo común de salida

de donde

$$V_{o1} = \frac{V_{od}}{2} + V_{oc} \quad 3.3.18$$

$$V_{o2} = -\frac{V_{od}}{2} + V_{oc} \quad 3.3.19$$

Haciendo en el circuito de la Fig. 3.3.6,  $V_{ic} = 0$  se define -  
como ganancia de modo diferencial a

3.3.20

$$A_d = \frac{V_{od}}{V_{id}}$$

Ganancia de modo común (haciendo  $V_{id} = 0$ ) a

$$A_c = \frac{V_{oc}}{V_{ic}} \quad 3.3.21$$

a partir de las cuales se determina la razón de rechazo de -  
modo común

$$RRMC \triangleq \frac{A_d}{A_c} \quad 3.3.22$$

para un amplificador ideal se tiene que RRMC tiende a infini  
to.

El circuito para determinar la impedancia de entrada de modo común se obtiene de la Fig. 3.3.6 haciendo  $V_{id} = 0$  se muestra en la Fig. 3.3.7.

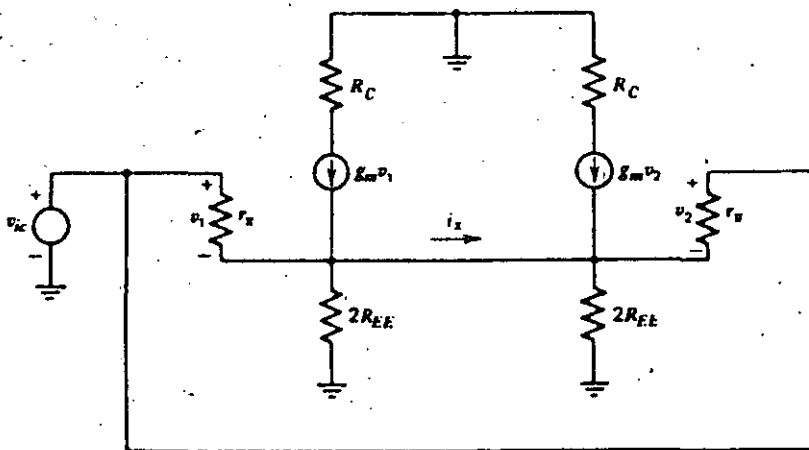


Fig. 3.3.7 Circuito equivalente de señal pequeña, con voltaje de entrada de modo común.

La impedancia de entrada de modo común esta dada por

$$\frac{V_{ic}}{I_b} = R_{ic} = r_{\pi} + 2R_{EE}(1+\beta) \quad 3.3.23$$

para el caso ideal  $R_{EE}$  tiende a infinito; esta es la causa por la que RRMC para el caso ideal tambien tienda a infinito.

El acoplamiento entre las etapas que forman un amplificador operacional introducen errores de dc en sus características; y estos pueden ser comunmente; corrientes de polarización y voltaje y corriente de offset.

Las corrientes de polarización pueden modelarse, por el circui

to de la Fig. 3.3.8 para la configuración inversora

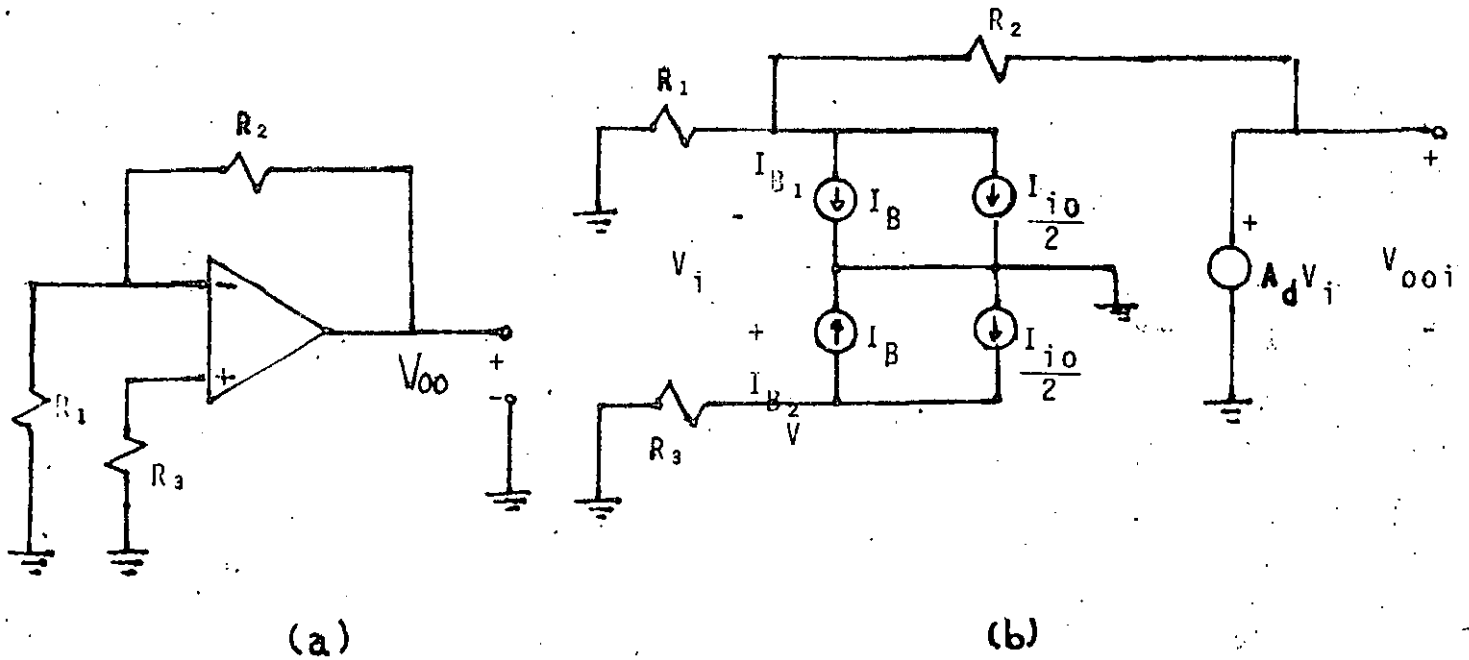


Fig. 3.3.8 (a) Amplificador de ganancia finita inversor.  
 (b) Modelo para la corriente de polarización.

A partir del cual; si se define

$$I_B = \frac{I_{B1} + I_{B2}}{2} \quad 3.3.24$$

$$I_{io} = I_{B1} - I_{B2} \quad 3.3.25$$

de donde

$$I_{B1} = I_B + \frac{I_{io}}{2} \quad 3.3.26$$



$$I_{B2} = I_B - \frac{I_{i0}}{2} \quad 3.3.27$$

$$V_x = V_y \quad 3.3.28$$

se tiene

$$V_y = - I_{B2} R_3 \quad 3.3.29$$

$$V_x = - I_{B1} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + V_{ooi} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad 3.3.30$$

igualando 3.3.29 y 3.3.30 y considerando 3.3.26 y 3.3.27

$$V_{ooi} = \left( R_2 - \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1} \right) I_B + \left( R_2 + \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1} \right) \frac{I_{i0}}{2} \quad 3.3.31$$

El voltaje de offset puede modelarse mediante el circuito de la Fig. 3.3.9 para la configuración inversora

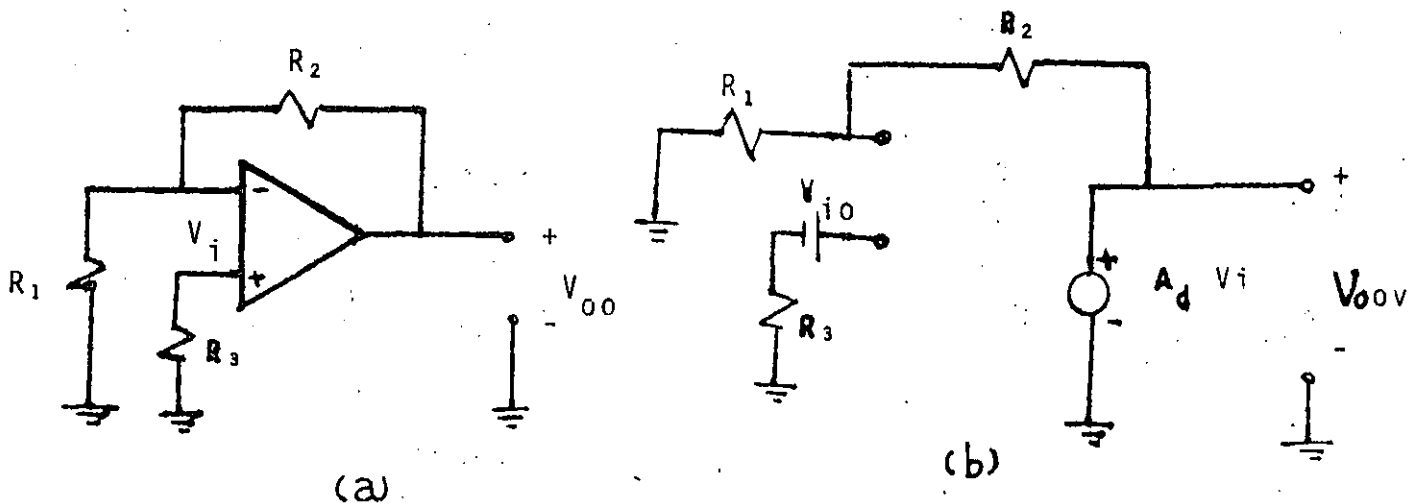


Fig. 3.3.9 (a) Amplificador de ganancia finita inversor (b) Modelo para el voltaje de offset.

$$V_{oov} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_{io}$$

3.3.32

De las ecuaciones 3.3.31 y 3.3.32 es claro que los errores en la salida debido a las corrientes de polarización y voltaje de offset no pueden anularse; por lo que es necesario emplear otra forma de compensación. La Fig. 3.3.10, ilustra una manera práctica de hacerlo.

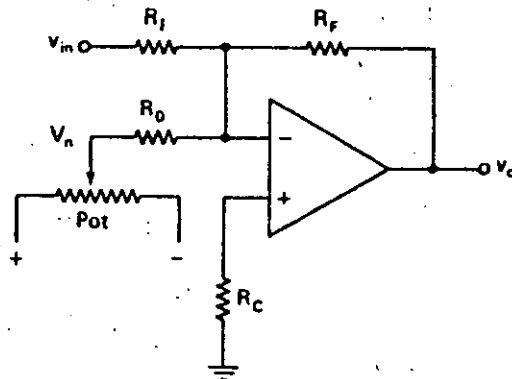


Fig. 3.3.10 Compensación de offset mediante la suma de voltaje.

Una de las características de mayor importancia del amplificador operacional en la realización de filtros activos es su res puesta en frecuencia; ya que cuando la frecuencia se incremen ta, la ganancia del amplificador operacional se decrementa de bido a las limitaciones del ancho de banda de sus elementos. La expresión de la respuesta en frecuencia de un amplificador operacional es compleja por lo que generalmente se utiliza - una aproximación que consiste de tres polos reales negativos. Esto es porque un amplificador operacional está compuesto - esencialmente de tres etapas: un amplificador diferencial; un cambiador de nivel con una ganancia de voltaje adicional; y -

la etapa de salida con una ganancia de corriente. Cada una de esas etapas puede modelarse como un amplificador ideal con un filtro RC nasa bajas como muestra la Fig. 3.3.11

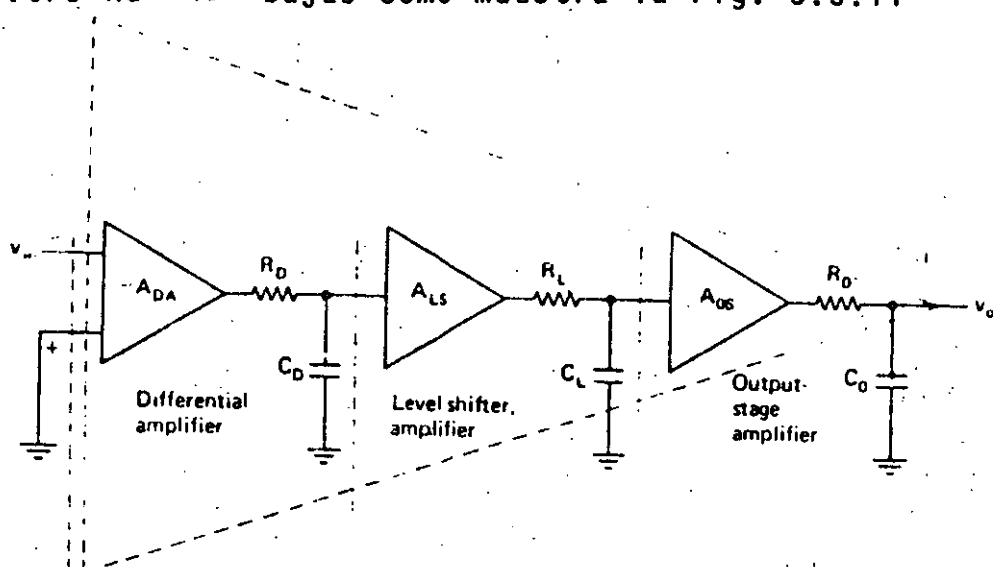


Fig. 3.3.11 Equivalente de un amplificador operacional.

Por lo anterior cuando un amplificador operacional se realimenta pueden tenerse problemas de inestabilidad y entonces es necesario compensar en frecuencia a la mayoría de los amplificadores operacionales antes de usarlos en filtros activos o en cualquier otra aplicación. El objetivo de la mayoría de las esquemas de compensación (que pueden ser: interna, externa y mixta) es lograr que la relación entrada-salida del amplificador operacional tenga la forma

$$A_d(s) = \frac{A_o w_a}{s + w_a} = \frac{GB}{s + w_a} \quad 3.3.33$$

donde  $A_o$  es la ganancia de dc,  $w_a$  es el ancho de banda y  $GB$  es el producto de  $A_o w_a$ , La Fig. 3.3.12 muestra la magnitud en decibels de la ecuación 3.3.30

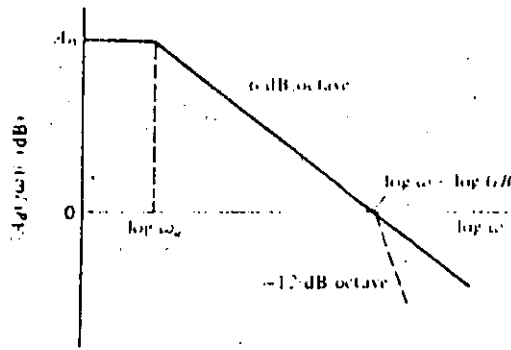


Fig. 3.3.12 Magnitud de la ganancia de un amplificador operacional.

Ejemplo.

Considérese un amplificador operacional cuya respuesta en frecuencia es la mostrada en la Fig. 3.3.13a y cuya relación entrada-salida es

$$A_d(s) = \frac{A_0 f_0}{s + f_0} \quad 3.3.34$$

si el amplificador se realimenta negativamente como muestra la figura 3.3.13b; determinar su respuesta en frecuencia resultante

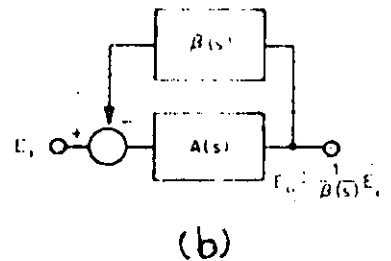
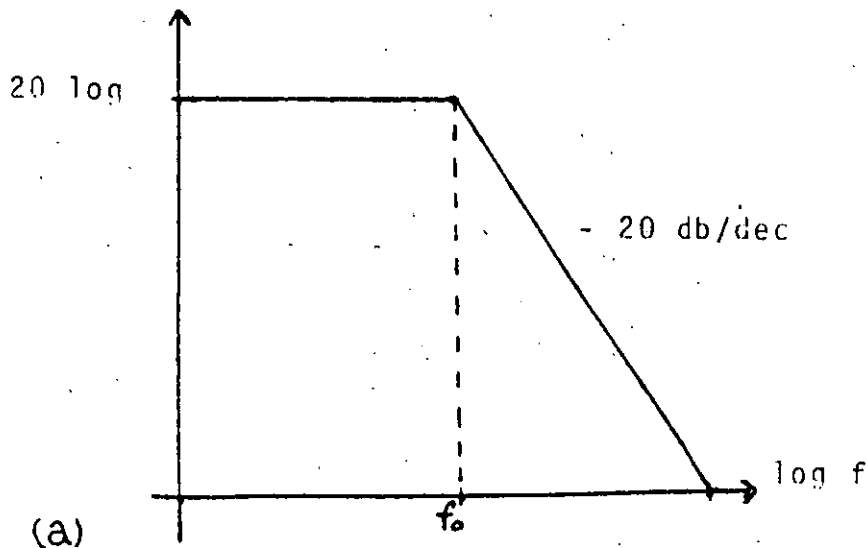


Fig.3.3.13 (a) Magnitud de la ganancia de un amplificador operacional.(b) Amplificador operacional con realimentación negativa en forma de diagrama de bloques.

La relación entrada salida del amplificador operacional realimentado es

$$\frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{A_d(s)}{1+A_d(s)\beta} = \frac{a_o fo}{s+fo(1+a_o\beta)} \quad 3.3.35$$

Cuya diagrama de magnitud es la de la Fig. 3.3.14

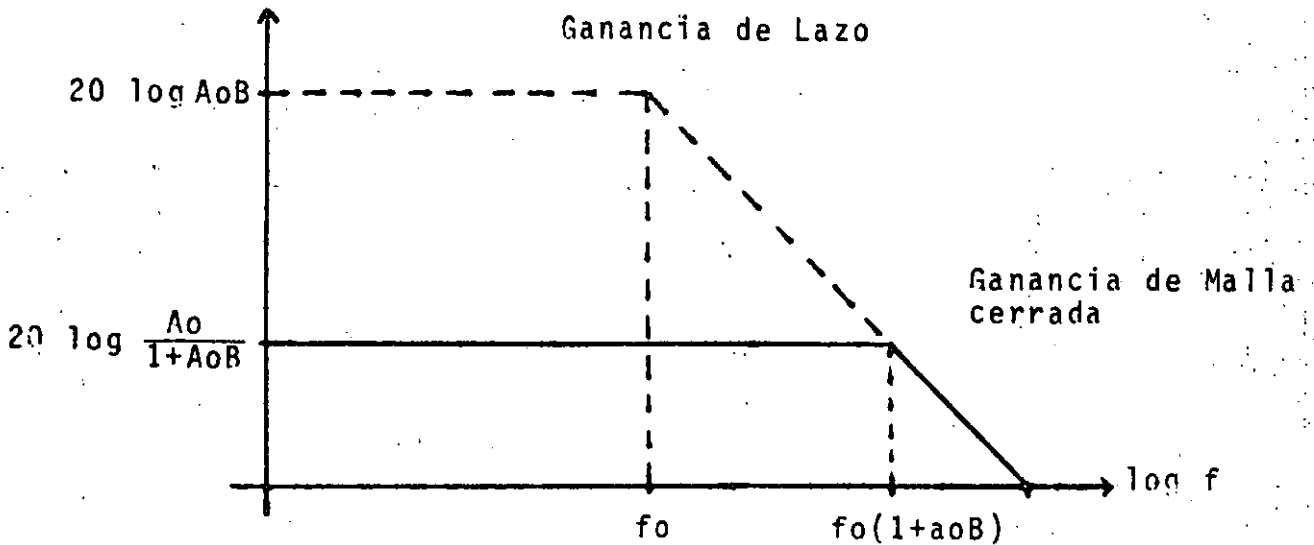


Fig. 3.3.14 Magnitud de la ganancia de amplificador realimentado negativamente

Una forma práctica de determinar la ganancia de malla cerrada es restando de la ganancia original la ganancia de malla; esto se puede justificar por medio de la ec. 3.3.35

$$20 \log \frac{|A_d|}{|1+A_d\beta|} = 20 \log |A_d| - 20 \log [(1+A_d\beta)] \quad 3.3.36$$

Otra característica de un amplificador operacional que afecta el comportamiento de los filtros activos es la rapidez de excursión de desplazamiento (slew rate) que puede definirse como la habilidad para seguir un cambio rápido de la señal de entrada. Es decir el "slew rate" es un término aplicado a un am

plificador operacional para especificar que tan rápido en volts por micro segundo la salida puede cambiar de un nivel de voltaje a otro cuando la entrada experimenta un cambio instantáneo.

En la Fig. 3.3.15a se ilustra la señal de entrada a un amplificador operacional con un "slew rate" de  $10 \text{ V}/\mu\text{seg}$  conectado en configuración inversora con una ganancia de  $-4$ . En la Fig. 3.3.15b se muestra la forma de onda del voltaje de salida.

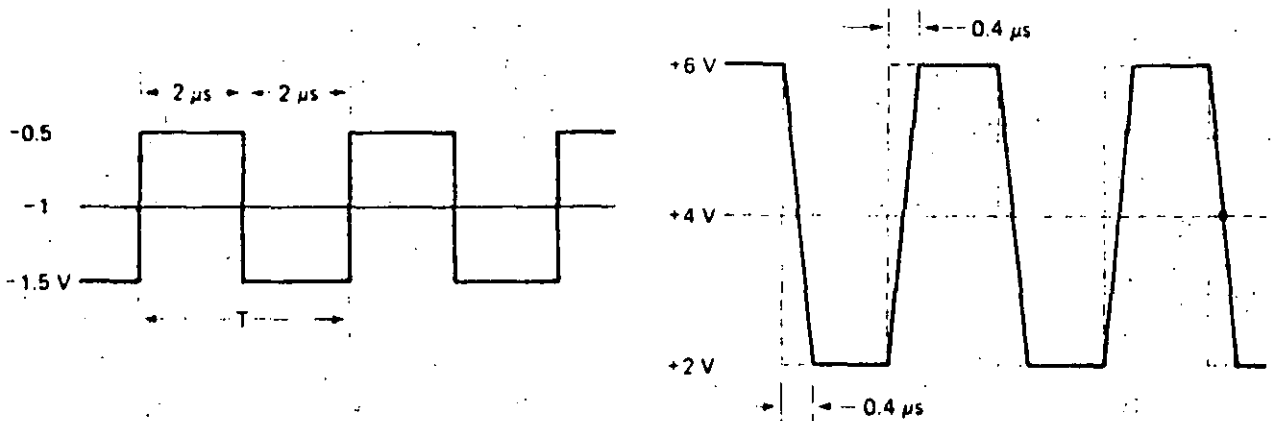


Fig. 3.3.15 (a) Forma de entrada de un amplificador operacional con ganancia  $-4$  y un  $S_r = 10\text{V}/\mu\text{seg}$ . (b) salida.

Puesto que la máxima pendiente del voltaje de salida del amplificador está limitada por el 'slew rate'; esto puede definirse como :

$$S_r = \text{slew rate} = \left. \frac{dV_o}{dt} \right|_{\text{max}} \quad 3.3.37$$

Ejemplo.

Determinar que factor afecta la frecuencia de operación de un amplificador operacional conectado en configuración inversa con ganancia de  $-10$ ; si el  $S_r = 0.5\text{V}/\mu\text{seg}$  y  $V_o(t) = 10 \text{ sen} 2\pi \times 10^5 t$ . La Fig. 3.3.16 muestra la magnitud de la respuesta en frecuen

cia de malla abierta y malla cerrada del amplificador.

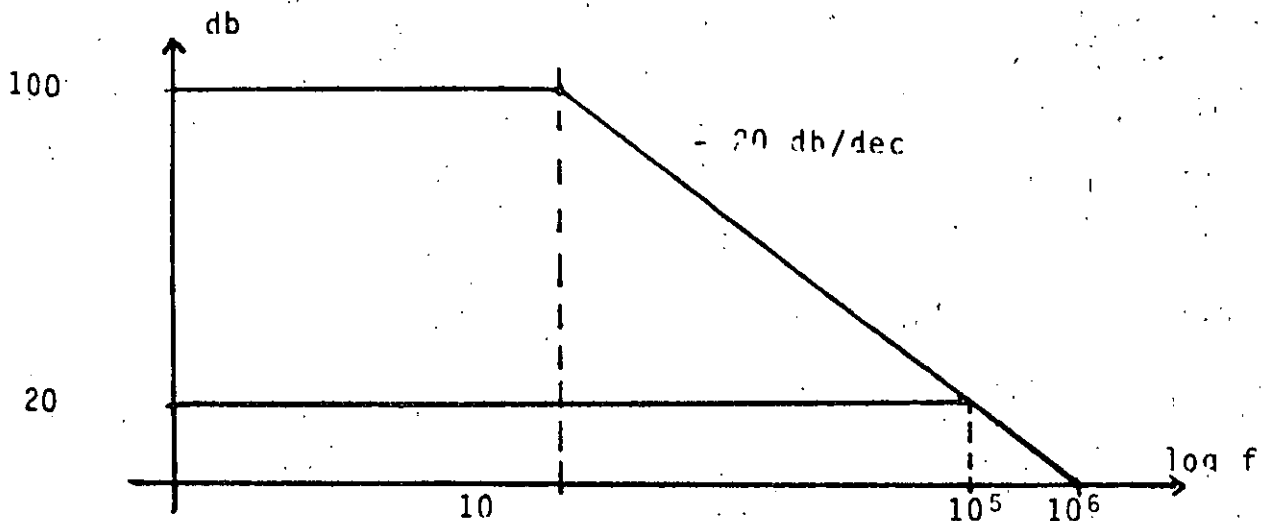


Fig. 3.3.16 Magnitud de la respuesta de un amplificador.

Del diagrama de respuesta en frecuencia se tiene que la máxima frecuencia de operación sin atenuación es de 100K Hz.

Por otro lado

$$\left. \frac{dV_o}{dt} \right|_{\max} = \left. \frac{d}{dt} (V_o \text{ sen } \omega t) \right|_{\max} = V_{o\max} \omega \quad 3.3.38$$

$$\therefore f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{S_r}{2\pi V_o} = \frac{0.5 \times 10^6}{20\pi} = 7.9577 \text{ K Hz}$$

Por lo que el factor limitante es el 'slew rate'!

Para el ejemplo anterior determine el voltaje de entrada máximo tal que el slew rate limite a 100 KHz.

$$V_{o\max} = \frac{S_r}{\omega} = \frac{0.5 \times 10^6}{2\pi \times 10^5} = 795.77 \times 10^{-3}$$

Como la ganancia es de -10, el voltaje máximo de entrada debe ser:  $V_{s\max} = 79.577 \times 10^3$  por lo que

$$V_s(t) = 79.577 \times 10^{-3} \text{ sen } 2\pi \times 10^5 t.$$

Una última característica de un amplificador operacional a considerar es el ruido, característica que afecta el nivel mínimo de señal. Ya que para obtener valores grandes de atenuación en la banda de supresión de un filtro, se requiere bajos niveles de ruido.

### FILTROS DE GANANCIA INFINITA Y REALIMENTACION MULTIPLE

En esta sección se considerará un circuito general de resistencias, capacitores y un amplificador operacional a partir del cual pueden construirse filtros pasa-bajas, pasa-altas y pasa-banda al seleccionarse valores adecuados de los parámetros  $Y$ . El circuito se muestra en la Fig. 3.3.17.

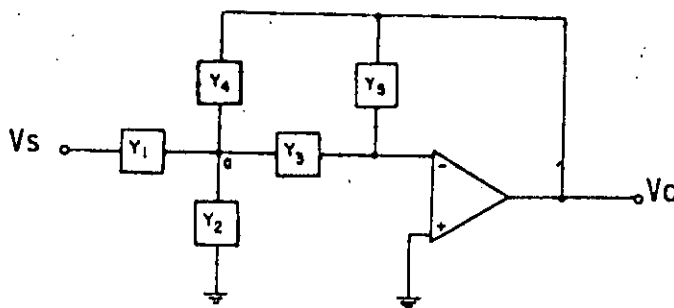


Fig. 3.3.17 Filtro general de segundo orden de ganancia infinita y realimentación múltiple.

La relación entrada-salida para dicho circuito puede determinarse a partir de la ecuación de nodos.

Para el nodo  $a$  se tiene:

$$(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) V_a - Y_1 V_s - Y_4 V_o = 0$$



Para el nodob

$$- Y_3 V_a - Y_5 V_o = 0$$

de donde

$$\frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{- Y_1 Y_3}{Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4} \quad 3.3.39$$

### FILTROS CON FUENTE DE VOLTAJE CONTROLADA POR VOLTAJE.

Otra configuración general para la construcción de filtros - pasa-baja y filtros pasa-alta se muestra en la Fig. 3.3.18. El filtro pasa-banda puede construirse a partir del mismo conectando una admitancia  $Y$  del nodo "a" a tierra.

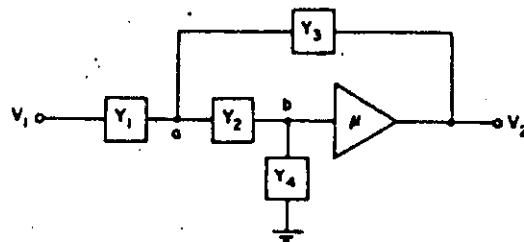


Fig. 3.3.18 Filtro general de segundo orden con fuente de - voltaje controlada por voltaje.

Las ecuaciones de nodo para los nodos a y b son respectivamen- te.

$$(Y_1 + Y_2 + Y_3)V_a - Y_2 \frac{V_o}{K} - Y_3 V_o - Y_1 V_s = 0$$

$$(Y_2 + Y_4) \frac{V_o}{K} - Y_2 V_a = 0$$

de donde

$$\frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{K Y_1 Y_2}{(Y_2 + Y_4)(Y_1 + Y_2 + Y_3) - Y_2^2 - K Y_2 Y_3}$$

3.3.40

### 3.4. REALIZACION ACTIVA DE LOS FILTROS BASICOS DE SEGUNDO ORDEN.

Como se ha visto en temas anteriores, una manera de realizar en forma activa un filtro eléctrico, consiste en conectar en cascada filtros de primero y segundo orden, por lo tanto es importante estudiar cómo se realizan en forma activa las funciones de transferencia de los filtros básicos de primero y segundo orden. El elemento activo usado en todas las realizaciones tratadas en estas notas es el amplificador operacional, que combinado en un circuito con únicamente resistencias y capacitores puede realizar funciones de transferencia de segundo orden con polos complejos, siendo esto importante ya que como se vio en el tema 3.2, la función de transferencia de un filtro basado en alguna de las aproximaciones clásicas, (Butterworth, Chebyshev y Elíptica, entre otras), presentará siempre los polos complejos con a lo más un polo real cuando el orden del filtro en cuestión sea impar, cabe señalar que combinando únicamente resistencias y capacitores, es imposible realizar funciones de transferencia con polos complejos.

Es importante hacer notar que los rangos de frecuencia de operación de las realizaciones activas, dependen de la respuesta en frecuencia de los amplificadores operacionales que se utilicen. Dichos rangos pueden extenderse a una frecuencia que se encuentre entre 0 y 10 KHz ó entre 0 y 20 KHz cuando más, aproximadamente. Sin embargo usando ciertas técnicas especiales que se basan en el conocimiento de la respuesta en frecuencia del amplificador operacional a emplearse en las realizaciones, el rango anterior puede ampliarse hasta alcanzar frecuencias cercanas a los 100 KHz. (filtro R) Para mayor detalle sobre los filtros R puede consultarse la referencia [2].

A continuación se describen algunas maneras de implementar las funciones de transferencia básicas de segundo orden. Las topologías empleadas, así como también los procedimientos recomendados están tomados de las referencias del curso.

Entonamiento:

$\omega_0$  es sintonizada ajustando  $R_1$  y  $R_2$  con porcentajes iguales ( $\alpha$  no es afectada).  $C_1$  y  $C_2$  pueden ajustarse de la misma forma.  $\alpha$  es ajustada por medio de  $K$

Procedimiento del diseño:

Dado:  $H_0, \alpha, \omega_0$

Elegir:  $C_1 = C_2 = C$  (un valor conveniente)

Calcular:  $K = H_0 > 2$

$$R_2 = \frac{\alpha}{2\omega_0 C} \left\{ \left[ 1 + \frac{4(H_0 - 2)}{\alpha^2} \right]^{1/2} + 1 \right\}$$

$$R_1 = \frac{1}{\omega_0^2 C^2 R^2}$$

Para  $H_0 > 10$  los valores de los elementos del circuito no son comparables en magnitud.

### 3.4.3 FILTRO PASA-ALTAS. "Realimentación Múltiple"

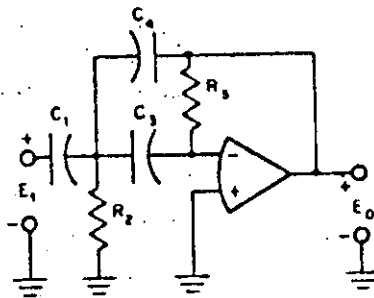


Figura 3.4.3 Filtro pasa-altas.

La función de transferencia del circuito de la figura 3.4.3 es:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = h(s) = \frac{-\left(\frac{c_1}{c_4}\right) s^2}{s^2 + s \frac{1}{R_5} \left( \frac{c_1}{c_3 c_4} + \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_3} \right) + \frac{1}{R_2 R_5 c_3 c_4}}$$

donde:

$$H_o = \frac{c_1}{c_4}$$

$$w_o = \left( \frac{1}{R_2 R_5 c_3 c_4} \right)^{1/2}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{R_2}{R_5}} \left[ \frac{c_1}{\sqrt{c_3 c_4}} + \sqrt{\frac{c_3}{c_4}} + \sqrt{\frac{c_4}{c_3}} \right]$$

**Entonamiento:**

Se ajusta  $\alpha$  con  $R_2$  ó  $R_5$  a la frecuencia donde  $|h(jw)|$  max ocurre. El ajuste de  $w_o$  se hace mediante  $R_2$  y  $R_5$  variándolos en el mismo porcentaje ( $\alpha$  permanece constante).

**Procedimiento de diseño:**

Dado:  $H_o, \alpha, w_o$

Elegir:  $C_1 = C_3 = C$  (un valor conveniente)

Calcular:  $R_5 = \frac{1}{\alpha w_o c} (2H_o + 1)$

$$R_2 = \frac{\alpha}{w_o c (2H_o + 1)}$$

$$C_4 = \frac{C_1}{H_o}$$

## 3.4.4 FILTRO PASA-ALTAS. "Fuente de voltaje controlada por voltaje"

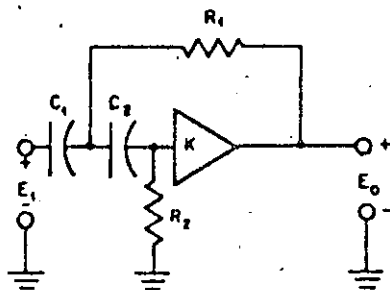


Figura 3.4.4 Filtro pasa-altas.

La función de transferencia del circuito de la figura 3.4.4 es:

$$h(s) = \frac{ks^2}{s^2 + s \left[ \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{(1-k)}{R_1 C_1} \right] + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

donde:

$$H_o = k$$

$$\omega_o = \left( \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right)^{1/2}$$

$$\alpha = \left( \frac{R_1 C_1}{R_2 C_2} \right)^{1/2} + \left( \frac{R_1 C_2}{R_2 C_1} \right)^{1/2} + \left( \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1} \right)^{1/2} - k \left( \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1} \right)^{1/2}$$

Entonamiento:

Se hace un procedimiento semejante al filtro mencionado en 3.4.3

Procedimiento del diseño:

Dado:  $H_o$ ,  $\alpha$ ,  $\omega_o$

Elegir:  $c_1 = c_2 = c$  (un valor conveniente)

Calcular:

$$R_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 8(H_o - 1)}}{4\omega_o C}$$

$$R_2 = \frac{4}{\omega_o C \sqrt{\alpha^2 + 8(H_o - 1)}}$$

$H_o = K$  debe ser tal que  $R_1$  y  $R_2$  sean positivos. Circuitos con  $H_o$  grandes hacen que los valores de los elementos no sean comparables en magnitud.

### 3.4.5 FILTRO PASA-BANDA. "Realimentación Múltiple"

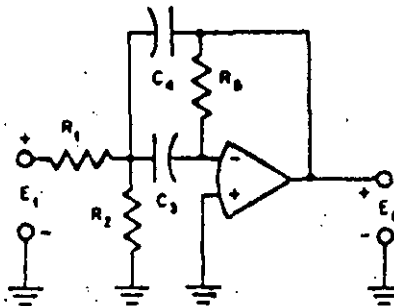


Figura 3.4.5 Filtro pasa-banda.

La función de transferencia del circuito de la figura 3.4.5 es:

$$h(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{-s \frac{1}{R_1 C_4}}{s^2 + \frac{s}{R_5} \left( \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \right) + \frac{1}{R_5 C_3 C_4} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$

donde:

$$H_o = \frac{1}{\frac{R_1}{R_5} \left(1 + \frac{c_4}{c_3}\right)}$$

$$w_o = \left[ \frac{1}{R_5 c_3 c_4} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right]^{1/2}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{R_5 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}} \left[ \sqrt{\frac{c_3}{c_4}} + \sqrt{\frac{c_4}{c_3}} \right]$$

Entonamiento:

Si en la práctica  $R_1 \gg R_2$ , entonces  $R_2$  puede usarse para ajustar  $\alpha$

Para ajustar la frecuencia central  $R_2$  y  $R_5$  se ajustan simultáneamente en el mismo porcentaje.

Procedimiento de diseño:

Dado:  $H_o, \alpha, w_o$

Elegir:  $C_3 = C_4 = C$  (un valor conveniente)

Calcular:  $Q = \frac{1}{\alpha}$

$$R_1 = \frac{Q}{H_o w_o C}$$

$$R_2 = \frac{Q}{(2Q^2 - H_o) w_o C}$$

$$R_5 = \frac{2Q}{w_o C}$$



3.4.6 FILTRO PASA-BANDA. (Realizado con dos amplificadores operacionales).

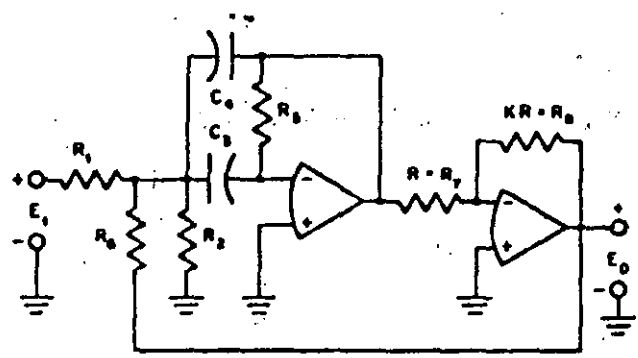


Figura 3.4.6 Filtro pasa-banda.

La función de transferencia del circuito de la figura 3.4.6 es

$$h(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{s \frac{k}{R_1 C_4}}{s^2 + \frac{s}{R_5 C_4} \left(1 + \frac{C_4}{C_3} - \frac{kR_5}{R_6}\right) + \frac{1}{C_3 C_4 R_5} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6}\right)}$$

donde:  $H_o = \frac{1}{R_1} \frac{1}{\frac{1}{kR_5} \left(1 + \frac{C_4}{C_3}\right) - \frac{1}{R_6}}$

$$\omega_o = \left[ \frac{1}{R_5 C_3 C_4} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6}\right) \right]^{1/2}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{R_5 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6}\right)}} \sqrt{\frac{C_3}{C_4} \left(1 + \frac{C_4}{C_3} - \frac{kR_5}{R_6}\right)}$$

Entonamiento:

Si  $R_1$  y  $R_6$  son mucho mayores que  $R_2$ ,  $R_2$  se usa para compensar la frecuencia central;  $\alpha$  puede ajustarse mediante  $K$  sin afectar  $\omega_o$ .

Procedimiento del diseño:

Dado:  $Q = \frac{1}{\alpha}$ ,  $\omega_0$

Ho debe ser un parámetro libre.

Elegir:  $c_3 = c_4 = c$ ,  $R = R_1 = R_5$

K se elige de tal manera que las magnitudes de los valores de los elementos sean comparables. Se recomienda

$$1 < k < 10$$

Calcular:

$$R = \frac{Q}{\omega_0 c}$$

$$R_6 = \frac{RkQ}{2Q-1}$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} \left( Q - 1 - \frac{2}{k} + \frac{1}{kQ} \right)$$

Para este procedimiento,  $H_0 = k \sqrt{Q}$

### 3.4.7 FILTRO PASA-BANDA. Tipo "A" (Fuente de voltaje controlada por voltaje)

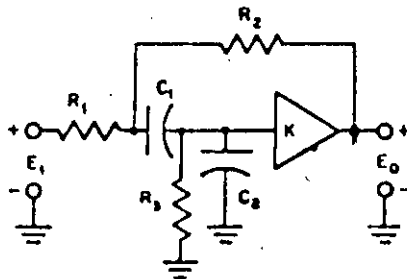


Figura 3.4.7 Filtro pasa-banda.

La función de transferencia del circuito de la figura 3.4.7 es:

$$h(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{ks}{R_1 c_2}}{s^2 + s \left[ \frac{1}{R_3 c_2} + \frac{1}{R_1 c_2} + \frac{1}{R_1 c_1} + \frac{1}{R_2 c_1} + \frac{1-k}{R_2 c_2} \right] + \frac{1}{R_3} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{c_1 c_2}}$$

donde:

$$H_o = \frac{k}{1 + \frac{R_1}{R_3} + \frac{c_2}{c_1} \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + (1-k) \left( \frac{R_1}{R_2} \right)}$$

$$\omega_o = \left[ \frac{1}{R_3} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{c_1 c_2} \right]^{1/2}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{R_3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}} \left[ \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1-k}{R_2} \right) + \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right]$$

Procedimiento del diseño.

Dado:  $Q, \omega_o$

$H_o$  será un parámetro libre.

Elegir:  $c_1 = c_2 = c$  (un valor conveniente)

Calcular:

$$k = 5 - \frac{\sqrt{2}}{Q}$$

$$R = \frac{\sqrt{2}}{\omega_o c}$$

entonces

$$H_o = \frac{5}{\sqrt{2}} Q - 1$$

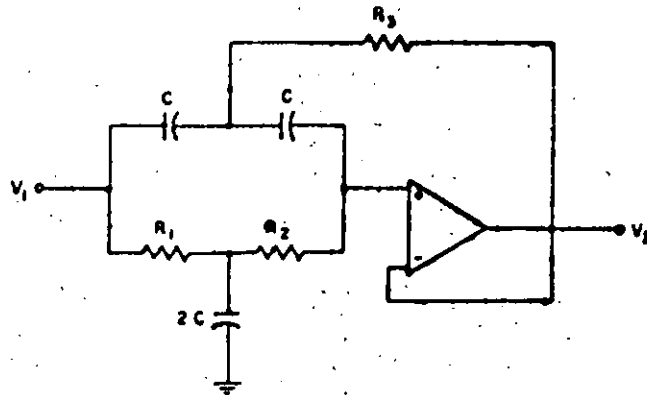


Figura 3.4.9 Filtro supresor de banda.

Si  $\omega_0 = 1$  rad/seg,  $\omega_0 \alpha = \frac{\omega_0}{Q}$  rad/seg y  $C = 1$ , la función de transferencia del circuito mostrado en la figura 3.4.9 es:

$$h(s) = \frac{Eo(s)}{Ei(s)} = \frac{s^2 + \frac{1}{R_1 R_2}}{s^2 + \frac{2s}{R_2} + \frac{1}{R_1 R_2}}$$

donde:

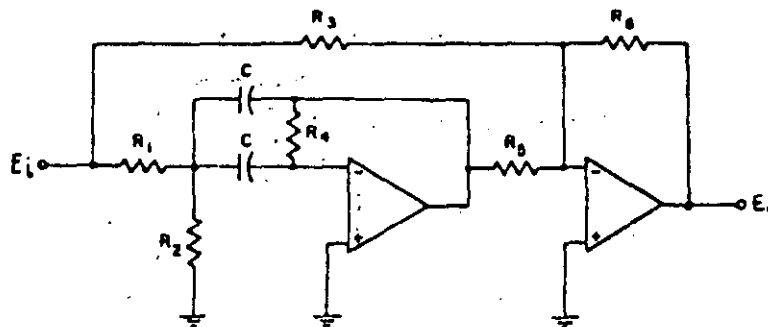
$$H_0 = 1 \text{ y } \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\therefore R_1 R_2 = 1, \quad Q = \frac{R_2}{2} \text{ y } \frac{1}{R_3} = 2Q + \frac{1}{2Q}$$

Se recomienda  $Q < 10$  para que las magnitudes de los valores de los elementos sean comparables. De las ecuaciones anteriores  $Q$  puede ajustarse mediante  $R_2$  y la frecuencia central mediante  $R_1$ . Una desventaja de este circuito es que la ganancia es unitaria.

3.4.10 FILTRO SUPRESOR DE BANDA ( Realimentación múltiple)

Otro circuito supresor de banda que no presenta la desventaja anterior (ganancia unitaria y  $Q < 10$ ) es el que se muestra a continuación:



3.4.10 Filtro supresor de banda.

La función de transferencia del circuito de la figura 3.4.10 es:

$$h(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{-\frac{R_6}{R_3} \left[ s^2 + \frac{1}{R_4 C^2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right]}{s^2 + \frac{2}{R_4 C} s + \frac{1}{R_4 C^2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$

donde:  $R_3 R_4 = 2 R_1 R_2$

Para el caso normalizado  $\omega_0 = 1$  rad/seg,  $\alpha \omega_0 = \frac{\omega_0}{Q}$  rad/seg y  $C = 1$ fd

$$R_1 = \frac{Q}{2}$$

$$R_2 = \frac{1}{2(Q - \frac{1}{Q})}$$

$$R_3 = 1$$

$$R_4 = 2Q$$

$$R_5 = 2$$

$$R_6 = H_0$$

3.4.11 FILTRO PASA-TODO

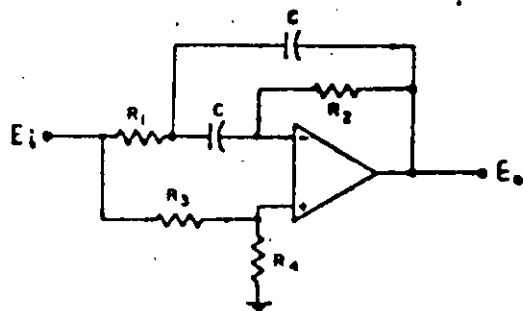


Figura 3.4.11 Filtro pasa-todo

La función de transferencia del circuito de la figura anterior es:

$$h(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = H_0 \frac{S^2 - as + b}{S^2 + as + b}$$

donde

$$a = \frac{2}{CR_2}$$

$$b = \frac{1}{R_1 R_2 C^2}$$

$$H_0 = \frac{1}{R_3 \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right)}$$

si  $4R_1 R_4 = R_2 R_3$

Se recomienda  $R_2 = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$

$\therefore R_1 = \frac{a}{2bc}$  ;  $R_2 = \frac{2}{\alpha C}$  ;  $R_3 = \frac{2(a^2 + b)}{abc}$

$R_4 = \frac{2(a^2 + b)}{a^2 C}$  y  $G = \frac{b}{(a^2 + b)} < 1$

### 3.4.12 FILTROS CON CEROS DE TRANSMISION

#### 3.4.12.1 Realimentación Múltiple.

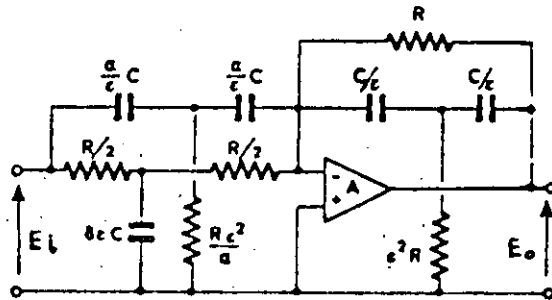


Figura 3.4.12.1 Filtro de segundo orden que presenta un cero de transmisión.

La función de transferencia del circuito de la figura 3.4.12.1 es:

$$h(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{-(C^2 R^2 \alpha S^2 + 1)}{R^2 C^2 S^2 + 2\epsilon R C S + 1}$$

$$\therefore \omega_2 = \frac{1}{RC\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\omega_1\sqrt{\alpha}}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{RC} \quad Q = \frac{1}{2\epsilon}$$

#### 3.4.12.2 CIRCUITO CONVERTIDOR DE IMPEDANCIA NEGATIVA CON INVERSION DE CORRIENTE (I.N.I.C.)

Este tipo de circuitos tienen la propiedad de presentar una impedancia de entrada de signo contrario al de la impedancia

de salida, es decir:

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = -KZ_2 \quad (K > 0)$$

Dichos circuitos son útiles en la implementación de filtros y su realización práctica se presenta a continuación:

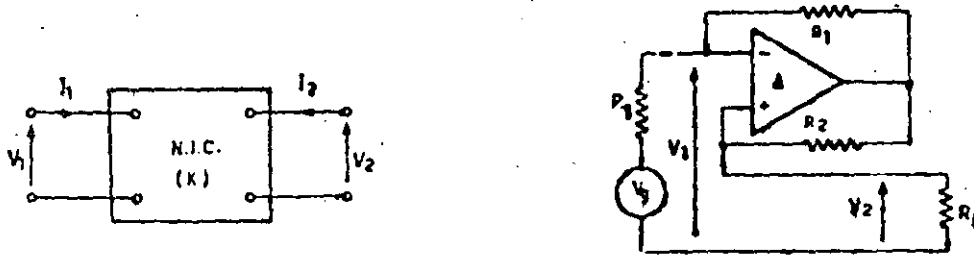


Figura 3.4.12.2 Convertidor de impedancia negativa.  
a) Símbolo.  
b) Realización práctica.

La relación entre  $I_1$  e  $I_2$  es:

$$I_2 = KI_1$$

donde

$$K = \frac{R_1}{R_2}$$

Es necesario para garantizar que el circuito anterior sea estable (hay una realimentación positiva y otra negativa) que

$$R_g R_2 > R_L R_1$$

### 3.4.12.3 FILTRO CON UN CERO DE TRANSMISION. (INIC)



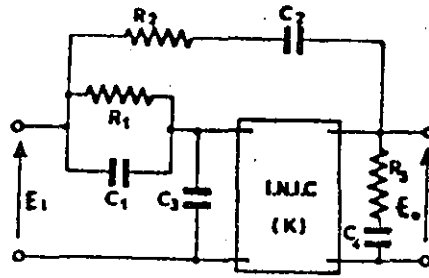


Figura 3.4.12.3 Filtro pasa-bajas de segundo orden con un cero de transmisión que utiliza un I.N.I.C.

La función de transferencia del circuito anterior si:

$$R_2 C_2 = R_4 C_4 \text{ y } k=1$$

$$h(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 S^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 - R_1 C_2) S + 1}{R_1 R_2 C_2 (C_1 + C_3) S^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 - R_1 C_2 - R_1 C_4 + R_1 C_3) S + 1}$$

$$\text{si } R_1 C_1 + R_2 C_2 = R_1 C_2: h(s) = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 S^2 + 1}{R_1 R_2 C_2 (C_1 + C_3) S^2 + R_1 (C_3 - C_4) S + 1}$$

donde

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_2 (C_1 + C_3)}} < \omega_2$$

$$Q = \frac{\sqrt{R_2 C_2 (C_1 + C_3)}}{(C_3 - C_4) \sqrt{R_1}}$$

$$h(s) = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 S^2 + 1}{R_1 R_2 C_2 (C_1 + C_3) S^2 + R_1 (C_3 - C_4) S + 1}$$

donde

$$\omega_2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1 R_2 C_2 (C_1 + C_3)} < \omega_2$$

$$Q = \frac{\sqrt{R_2 C_2 (C_1 + C_3)}}{(C_3 - C_4) \sqrt{R_1}}$$

Para el circuito anterior no es posible  $\omega_1 > \omega_2$ . Pero si en el circuito anterior (Fig. 3.4.12.3) se cambia  $C_3$  por una resistencia  $R_3$ . Ver figura 3.4.12.4

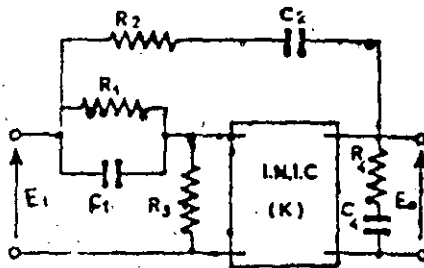


Figura 3.4.12.4 Filtro pasa-altas de segundo orden con un cero de transmisión.

La función de transferencia de la figura 3.4.12.4 (si  $R_2 C_2 = R_4 C_4$ ) es:

$$h(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 S^2 + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 S^2 + R_1 \left( \frac{R_2 C_2}{R_3} - C_4 \right) S + \frac{R_1}{R_3} + 1}$$

donde

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}} > \omega_2$$

$$Q = \frac{\sqrt{R_2 R_3 C_1 C_2 (R_1 + R_3)}}{R_1 (R_2 C_2 - R_3 C_4)^2}$$

Es de notar ya que se requiere  $R_2C_2 = R_4C_4$  y  $R_1C_2 = R_1C_1 + R_2C_2$  que estos dos últimos circuitos son de una realización difícil.

### 3.4.13 FILTRO CON UN CERO DE TRANSMISION.

(Fuente de voltaje controlada por voltaje)

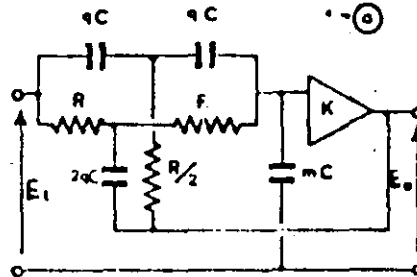


Figura 3.4.13.1 Filtro pasa-bajas de segundo orden con un cero de transmisión.

La función de transferencia de la figura 3.4.13.1 es:

$$h(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{k(q^2 R^2 C^2 S^2 + 1)}{R^2 C^2 (q^2 + 2mq) S^2 + 2RC [m + 2q(1-k)] S + 1} \quad \dots (3.4.13.1)$$

donde

$$\omega_2 = \frac{1}{qRC}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{RC\sqrt{q^2 + 2mq}} < \omega_2$$

$$Q = \frac{\sqrt{q^2 + 2mq}}{2[m + 2q(1-k)]}$$

Como  $\omega_1 < \omega_2$  el circuito de la figura 3.4.13.1, es un filtro pasa-bajas.

Si hacemos  $S = \frac{1}{s}$  en 3.4.13.1

$$h(s) = \frac{K(S^2 + q^2 R^2 C^2)}{S^2 + 2RC [m + 2q(1-K)] S + R^2 C^2 (q^2 + 2mq)} \quad \dots (3.4.13.2)$$

donde

$$\omega_2 = qRC$$

$$\omega_1 = RC \sqrt{q^2 + 2mq} > \omega_2$$

$$Q = \frac{\sqrt{q^2 + 2mq}}{2[m + 2q(1-k)]}$$

El circuito correspondiente a la ecuación 3.4.13.2 es el de la figura 3.4.13.2

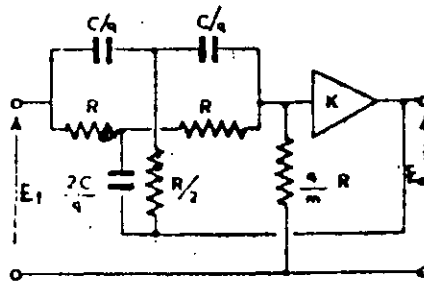


Figura 3.4.13.2 Filtro pasa-altas de segundo orden con un cero de transmisión.

#### 3.4.14 FILTROS DE AMPLIFICADORES MÚLTIPLES.

El propósito de esta sección es introducir a dos realizaciones de amplificadores múltiples, que son llamadas: variables de estado y resonador.

##### 3.4.14.1 FILTRO DE VARIABLES DE ESTADO.

Este filtro también es llamado filtro KHN; tiene gran flexibilidad y funcionamiento además de bajas sensibilidades. El nombre de variables de estado

se deriva del hecho de que el método de variables de estado es usado para el desarrollo de la realización.

Considérese la función de transferencia.

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{-|H|S}{S^2+a_1S+a_0} \quad \dots(3.4.14.1)$$

si se introduce la variable  $X(s)$  en la ecuación anterior

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{-|H|X(s)}{X(s) + \frac{a_1X(s)}{S} + \frac{a_0X(s)}{S^2}} \quad \dots(3.4.14.2)$$

$$\therefore X(t) = E_i(t) - a_1 \int X(t) dt - a_0 \iint X(t) dt \quad \dots(3.4.14.3a)$$

$$E_o(t) = -|H| \int X(t) dt \quad \dots(3.4.14.3b)$$

La ecuación 3.4.14.4 puede resolverse mediante el diagrama de computadora analógica mostrado en la figura 3.4.14.1

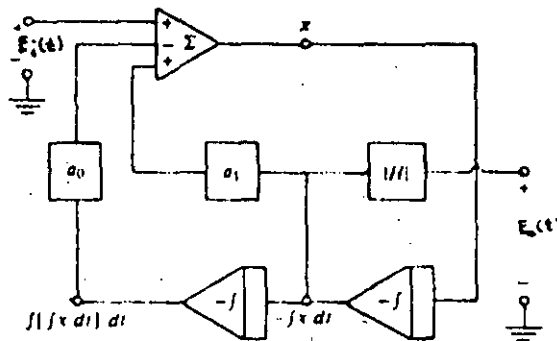


Figura 3.4.14.1 Configuración general del filtro de variables de estado.

Mediante el empleo de amplificadores operacionales, la configuración de la figura 3.4.14.1 es mostrada en la figura 3.4.14.2.

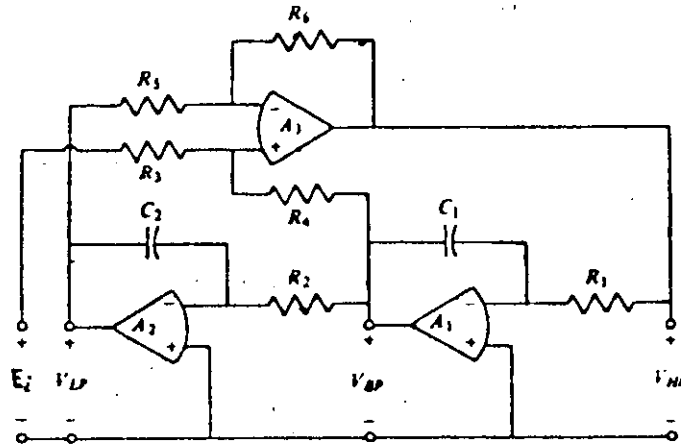


Figura 3,4.14.2 Filtro de variables de estado

$$\therefore V_{LP}(s) = \frac{-V_{BP}(s)}{sR_2C_2} ; V_{BP}(s) = \frac{-V_{HP}(s)}{sR_1C_1} \quad \dots(3.4.14.4)$$

Donde  $V_{LP}(s)$ ,  $V_{BP}(s)$  y  $V_{HP}(s)$  son las salidas pasa-bajas, pasa-banda y pasa-altas respectivamente.

$$V_{HP}(s) = -\frac{R_6}{R_5} V_{LP}(s) + \frac{R_4}{R_3+R_4} \frac{R_5+R_6}{R_5} E_i(s) + \frac{R_3}{R_3+R_4} \frac{R_5+R_6}{R_5} V_{BP}(s) \quad 3.4.14.5$$

$$V_{BP}(s) = \frac{-1}{sR_1C_1} \left[ \frac{R_6}{R_5} \frac{V_{BP}(s)}{sR_2C_2} + \frac{1+R_6/R_5}{1+R_3/R_4} E_i(s) + \frac{1+R_6/R_5}{1+R_4/R_3} V_{BP}(s) \right] \quad \dots 3.4.14.6$$

Finalmente:

$$\frac{V_{BP}(s)}{E_i(s)} = \frac{- \begin{bmatrix} 1 + \frac{R_6}{R_5} & s \\ \frac{1 + \frac{R_6}{R_5}}{1 + \frac{R_3}{R_4}} & R_1 C_1 \end{bmatrix}}{D(s)} \quad \dots(3.4.14.7a)$$

$$\frac{V_{LP}(s)}{E_i(s)} = \frac{1 + \frac{R_6}{R_5} \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{1 + \frac{R_3}{R_4} \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad \dots (3.4.14.7b)$$

$$\frac{V_{HP}(s)}{E_i(s)} = \frac{1 + \frac{R_6}{R_5} s^2}{1 + \frac{R_3}{R_4} \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad \dots (3.4.14.7c)$$

donde  $D(s) = s^2 + \frac{s}{R_1 C_1} \frac{1 + \frac{R_6}{R_5}}{1 + \frac{R_4}{R_3}} + \frac{\frac{R_6}{R_5}}{R_1 R_2 C_1 C_2}$  ... (3.4.14.7d)

Las expresiones para  $\omega_0$  y  $Q$  son:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_6/R_5}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad \dots (3.4.14.8a)$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{1 + \frac{R_6}{R_5}}{1 + \frac{R_4}{R_3}} \sqrt{\frac{R_5 R_2 C_2}{R_6 R_1 C_1}} \quad \dots (3.4.14.8b)$$

Ho es diferente para cada una de las realizaciones que a continuación se muestran:

Pasa-bajas  $H_0 = \frac{1 + \frac{R_5}{R_6}}{1 + \frac{R_3}{R_4}}$  ... (3.4.14.9a)

Pasa-banda  $H_0 = -\frac{R_4}{R_3}$  ... (3.4.14.9b)

Pasa-altas  $H_0 = \frac{1 + \frac{R_6}{R_5}}{1 + \frac{R_3}{R_4}}$  ... (3.4.14.9c)

Si se elige  $R_5 = R_6$ ,  $R_1 = R_2 = R$  y  $C_1 = C_2 = C$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{2}{1 + \frac{R_4}{R_3}}$$

Procedimiento del diseño:

Dado:  $\omega_0$  y  $Q$

Elegir: Valores convenientes de  $C_1 = C_2 = C$  y  $R_3 = R_5 = R_6$

Calcular:  $R_1 = R_2 = \frac{1}{\omega_0 C}$

$R_4 = (2Q-1)R_3$

Y  $H_0$  para las configuraciones es:

Pasa-bajas y pasa-altas:  $H_0 = \frac{2Q-1}{Q}$

Pasa-banda:  $H_0 = 1-2Q$

3.4.14.2 FILTRO RESONADOR.

La figura 3.4.14.3 muestra el filtro resonador.

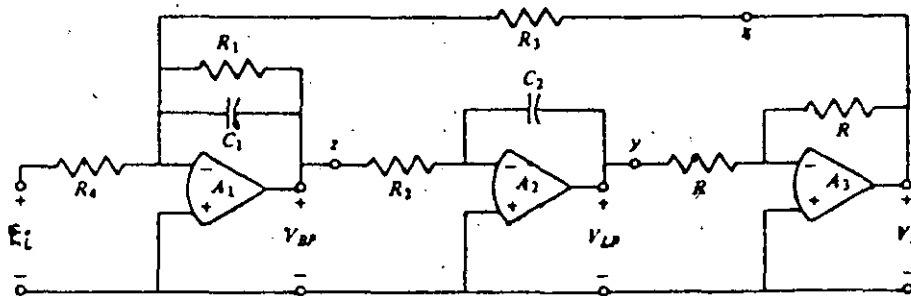


Figura 3.4.14.3 Filtro resonador.

$$V_{BP}(s) = \frac{-1}{R_4 C_1} E_i(s) - \frac{1}{R_3 C_1} V_x(s) \quad \dots (3.4.14.10)$$

pero  $V_x(s) = -V_{LP}(s) = \frac{V_{BP}(s)}{SR_2 C_2}$  ... (3.4.14.11)

$$\therefore \frac{V_{BP}(s)}{E_i(s)} = \frac{-\frac{S}{R_4 C_1}}{S^2 + \frac{1}{R_1 C_1} S + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}} \quad \dots (3.4.14.12)$$



$$\frac{V_{LP}(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \frac{1}{s^2 + \frac{1}{R_1 C_1} s + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}} \quad \dots (3.4.14.13)$$

donde:  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_2 R_3 C_1 C_2}}$

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R_1} \sqrt{\frac{R_2 R_3 C_2}{C_1}}$$

Las expresiones para  $H_0$  son:

Pasa-bajas:  $H_0 = \frac{R_3}{R_4}$

Pasa-banda:  $|H_0| = \frac{R_1}{R_4}$

Un procedimiento de diseño puede ser asumiendo  $R_2 = R_3 = R$  y  $C_1 = C_2 = C$ . Entonces:

Dado:  $\omega_0$ ,  $Q$  y  $H_0$

Entonces:  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

Calcular:  $R_1 = QR$

Pasa-bajas:  $R_4 = \frac{R}{H_0}$

Pasa-banda:  $R_4 = \frac{R_1}{|H_0|}$

### 3.5 EJEMPLO DE DISEÑO

Al final de el capítulo 3.2 de estas notas se describió como obtener la función de transferencia de un filtro paso-banda bajo la aproximación de Butterworth (ejemplo 3.2.2). A continuación se describe una manera de realizar el filtro empleando filtros resonadores como el mostrado en la figura 3.5.1

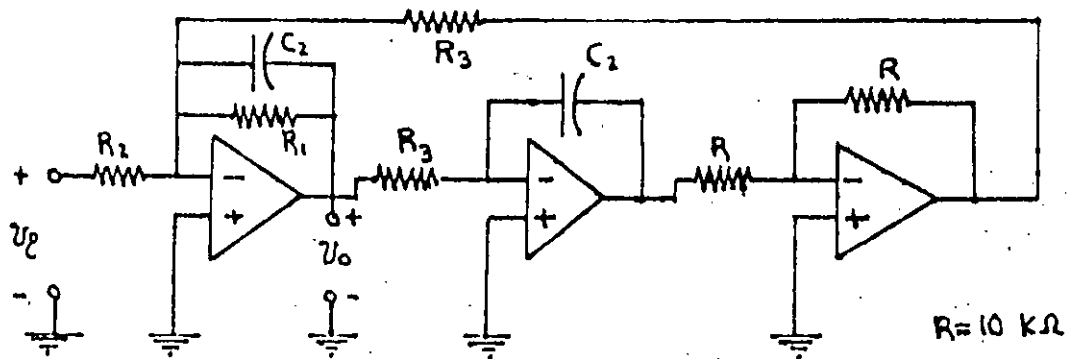


Fig. 3.5.1 Filtro resonador.

Empleando las ecuaciones de diseño que aparecen al final de la sección 3.4.14.2, (considerando que  $R_2$  y  $R_4$  en la figura 3.4.14.3 son  $R_3$  y  $R_2$  en la figura 3.5.1) y asignando  $0.22 \mu\text{f}$  a los capacitores de las primeras tres etapas, y  $0.33 \mu\text{f}$  al capacitor de la cuarta etapa, se obtienen los siguientes valores para las resistencias y capacitores de cada etapa.

ETAPA 1

$$\begin{aligned}C_2 &= 0.22\mu\text{f} \\R_1 &= 36138\Omega \\R_2 &= 18069\Omega \\R_3 &= 1383\Omega \\f_r &= 523\text{Hz} \\Q &= 26.1264 \\H_o &= 2\end{aligned}$$

ETAPA 2

$$\begin{aligned}C_2 &= 0.22\mu\text{f} \\R_1 &= 15366\Omega \\R_2 &= 7683\Omega \\R_3 &= 1421\Omega \\H_o &= 2 \\f_r &= 509\text{Hz} \\Q &= 10.81\end{aligned}$$

ETAPA 3

$$\begin{aligned}C_2 &= 0.22\mu\text{f} \\R_1 &= 15966\Omega \\R_2 &= 7983\Omega \\R_3 &= 1476\Omega \\H_o &= 2 \\f_r &= 490\text{ Hz} \\Q &= 10.81\end{aligned}$$

#### ETAPA 4

$$C_2 = 0.33 \mu\text{f}$$

$$R_1 = 26427 \Omega$$

$$R_2 = 13213 \Omega$$

$$R_3 = 1011 \Omega$$

$$Q = 26.126$$

$$f_r = 477 \text{ Hz}$$

$$H_0 = 2$$

En el capítulo 6.2 de estas notas, correspondiente al laboratorio aparecen otros cinco ejemplos de diseño completos.

### 3.6 SENSITIVIDAD Y SINTONIZACION

#### 3.6.1 SENSITIVIDAD.

Al realizar un filtro analógico ya sea en forma pasiva ó - activa, los elementos empleados en su construcción tendrán siempre una cierta tolerancia hacia arriba ó hacia abajo - de su valor nominal, dicha tolerancia se expresa frecuente - mente en forma de porcentaje. En la práctica las variacio - nes mencionadas originan desviaciones en los parámetros ca - racterísticos y curvas de respuesta en frecuencia de un - cierto filtro diseñado teóricamente, por lo tanto es impor - tante conocer, en qué porcentaje cambiará un cierto paráme - tro característico "y" al cambiar el valor de un elemento - "x<sub>i</sub>" en un porcentaje conocido, definiéndose la sensitivi - dad de "y" con respecto a x<sub>i</sub> mediante la siguiente ecuación

$$S_{x_i}^y = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x_i}{x_i}} \dots \dots (3.6.1)$$

siendo "y" un parámetro característico, (v.g. frecuencia - de corte, frecuencia central, factor de calidad, etc.) - que en general dependerá de todos los elementos "x<sub>i</sub>" em - pleados en la construcción del filtro (v.g. resistencia, inductancia, capacitancia, ganancia de amplificadores, - etc.).

Ejemplo 3.6.1.

Sabiendo que  $S_{x_i}^y = -2$ , determinar en qué porcentaje cambiará "y" al cambiar  $x_i$  en un diez por ciento hacia arriba.

Solución:

De la ecuación (3.6.1)

$$\frac{\Delta y}{y} = S_{x_i}^y \frac{\Delta x_i}{x_i}$$

O sea:

$$\frac{\Delta y}{y} = -2(0.1) = -0.2$$

por lo tanto el parámetro "y" cambiará en un 20% hacia abajo.

En la práctica si los cambios porcentuales en los elementos son pequeños, (no mayores del 10%), la sensibilidad puede expresarse con una buena aproximación mediante la ecuación:

$$S_{x_i}^y = \frac{x_i}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i} \quad \dots (3.6.2)$$

que será la definición a emplearse de aquí en adelante.

Sabiendo que si los cambios en los elementos son pequeños  $\Delta y$  puede expresarse mediante la ecuación:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \quad \dots (3.6.3)$$

o bien

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\Delta x_i}{x_i} \quad (3.6.4)$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^n S_{x_i}^y \frac{\Delta x_i}{x_i}$$

ecuación que expresará el cambio porcentual en el valor de un cierto parámetro "y" en función de las sensitividades,  $S_{x_i}^y$  y los cambios porcentuales de los elementos "x<sub>i</sub>".

### Ejemplo 3.6.2

La frecuencia de corte de un filtro paso bajas de primer orden, se expresa mediante la ecuación.

$$w_c = \frac{1}{RC}$$

Determinar en qué porcentaje cambiará la frecuencia  $w_c$  si la resistencia es en un momento dado un 100% más grande, y el capacitor es un 5% más chico.

Solución,

$$S_R^{w_c} = \frac{R}{w_c} \frac{\partial w_c}{\partial R} = \frac{R}{w_c} \left( \frac{-1}{R^2 C} \right) = -1$$

Análogamente:

$$S_C^{w_c} = -1$$

por lo tanto de acuerdo con la ecuación (3.6.4) el cambio porcentual en el valor de  $w_c$  será aproximadamente dado por la expresión:

$$\frac{\Delta w_c}{w_c} = (-1)(0.10) + (-1)(-0.05) = -0.05$$

o sea que la frecuencia de corte será aproximadamente un 5% más chica que su valor nominal.

Efectuando el cálculo en forma exacta (lo cual es sencillo en este caso), se puede ver que el cambio real en el valor de  $w_c$  será de 4.3% hacia abajo.

En varias de las referencias 5, 2 y 1 se tienen expresiones para las sensitividades de los principales parámetros de las realizaciones básicas de segundo orden tratadas en este curso.

En la práctica para una realización activa, cada parámetro "y<sub>i</sub>" de interés será una función de la forma:

$$Y_i = Y_i(R_1, R_2, \dots, R_n, C_1, C_2, \dots, C_m, X_1, X_2, \dots, X_l) \dots (3.6.5)$$

donde:

- "n" representa el número total de resistencia
- "m" representa el número total de capacitores
- "l" representa el número total de parámetros relacionados con elementos activos (v.g. ganancias de fuentes controladas por ejemplo).

por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (3.6.4) el cambio porcentual en el parámetro  $y_i$  estará dado aproximadamente por:

$$\frac{\Delta y_i}{y_i} = \sum_{j=1}^n S_{R_j}^{y_i} \frac{\Delta R_j}{R_j} + \sum_{j=1}^m S_{C_j}^{y_i} \frac{\Delta C_j}{C_j} + \sum_{j=1}^l S_{X_j}^{y_i} \frac{\Delta X_j}{X_j} \dots (3.6.6.)$$



Si se verifican las siguientes ecuaciones:

$$Y_i(\lambda R_1, \lambda R_2, \dots, \lambda R_n, C_1, C_2, \dots, C_m, X_1, X_2, \dots, X_\ell) = \lambda^a Y_i$$

$$Y_i(R_1, R_2, \dots, R_n, \lambda C_1, \lambda C_2, \dots, \lambda C_m, X_1, X_2, \dots, X_\ell) = \lambda^b Y_i$$

siendo a y b dos números reales, puede probarse (referencia 1) lo siguiente:

$$\sum_{j=1}^n S_{R_j} y_i = a \quad \dots \quad (3.6.7)$$

$$\sum_{j=1}^m S_{C_j} y_i = b \quad \dots \quad (3.6.8)$$

Al construir un filtro, es aconsejable que todas las resistencias tengan una misma tolerancia y que los capacitores tengan también una tolerancia uniforme, esto es:

$$\left| \frac{\Delta R_j}{R_j} \right| \leq K_R \quad \dots \quad (3.6.9)$$

$j=1, 2, \dots, n$

$$\left| \frac{\Delta C_j}{C_j} \right| \leq K_C \quad \dots \quad (3.6.10)$$

$j=1, 2, \dots, m$

siendo  $K_R$  y  $K_C$  dos números positivos por ejemplo, si un filtro se construye con resistencias de  $\pm 10\%$  de tolerancia y capacitores de  $\pm 5\%$  de tolerancia  $K_R$  y  $K_C$  serán 0.1 y 0.05 respectivamente.

Considerando la ecuación (3.6.6) y las desigualdades (3.6.9) y (3.6.10) así como también las ecuaciones (3.6.8) y (3.6.7) y sabiendo que el peor caso se presentará cuando:

$$\left| \frac{\Delta R_j}{R_j} \right| = K_R \quad V_j$$

y

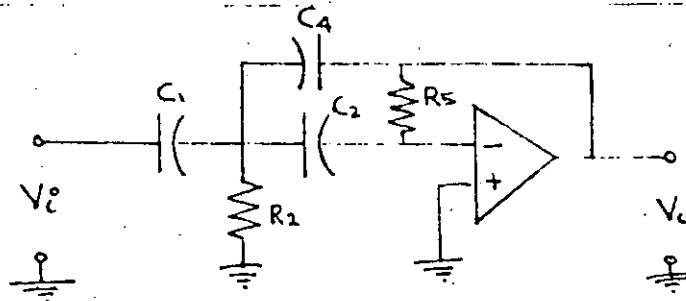
$$\frac{\Delta C_j}{C_j} = K_C \quad V_j$$

se puede concluir:

$$\frac{\Delta y_i}{y_i} = a_i K_R + b K_C + \sum_{j=1}^{\ell} S_{x_j}^{y_i} \frac{\Delta x_j}{x_j} \quad \dots (3.6.11)$$

### Ejemplo 3.6.3

Para el filtro paso altas que se muestra en la figura:



determinar el cambio porcentual extremo en  $\omega_0$  y en  $Q$ , si los cambios porcentuales extremos en las resistencias y en los capacitores son  $K_R$  y  $K_C$  respectivamente.

Solución.

Para este filtro  $w_0 = \frac{1}{\sqrt{R_2 R_5 C_3 C_4}}$

por lo tanto

$$w_0(\lambda R_2, \lambda R_5, C_3, C_4, C_1) = \lambda^{-1} w_0$$

$$w_0(R_2, R_5, \lambda C_3, \lambda C_4, \lambda C_1) = \lambda^{-1} w_0$$

o sea  $a = -1$ ,  $b = -1$

por lo tanto según la ecuación (3.6.11)

$$\frac{\Delta w_0}{w_0} = -K_R - K_C$$

En lo que toca a Q

$$Q = \sqrt{\frac{R_5}{R_2}} \left[ \frac{C_1}{C_3 C_4} + \frac{C_3}{C_4} + \frac{C_4}{C_3} \right]^{-1}$$

apreciándose fácilmente en este caso que  $a = b = 0$  por

lo tanto  $\frac{\Delta Q}{Q} = 0$

### 3.6.2 SINIONIZACION.

Al realizar un filtro interesa tratar simultáneamente los cambios porcentuales en varios parámetros de interés "Yi" (v.g. Q, Wo, Wc, H(jwi), Ø (wi), etc) debidos a cambios en los valores de los elementos "xj" con los que está construido el filtro.

El vector de cambios porcentuales puede expresarse mediante la ecuación

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta y_1}{y_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\Delta y_q}{y_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{x_1}^{y_1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{x_1}^{y_q} & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\Delta x_1}{x_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\Delta x_p}{x_p} \end{bmatrix} \dots (3.6.12)$$

donde q es el número total de parámetros de interés y p es el número total de elementos que intervienen en la construcción del filtro, esto es: p = n+m+1.

La ecuación (3.6.12) puede escribirse en forma concentrada de la forma:

$$\bar{y} = A \bar{x} \dots (3.6.13)$$

donde

$$a_{ij} = S_{x_j}^{y_i} \Big|_{x_j = x_j^*}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta y_1}{y_1} \\ \vdots \\ \frac{\Delta y_q}{y_q} \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x_1}{x_1} \\ \vdots \\ \frac{\Delta x_p}{x_p} \end{bmatrix}$$

( $x_j^*$  es el valor nominal para el parámetro  $x_j$ )

En la práctica, existirán un cierto número de elementos - que pueden ser ajustados, siendo los elementos restantes - no susceptibles de ser ajustados. Bajo esta consideración la ecuación (3.6.13) puede escribirse:

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} A_s & A_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_s \\ \bar{x}_f \end{bmatrix} \dots (3.6.14)$$

donde:  $A_s$  es una matriz de  $q \times n_s$ , siendo  $n_s$  el número de elementos que pueden ser reajustados.

$A_f$  es una matriz de  $q \times n_f$ , siendo  $n_f$  el número de elementos que no pueden ser reajustados.

$$\bar{x}_s = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x_1}{x_1} \\ \vdots \\ \frac{\Delta x_{n_s}}{x_{n_s}} \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_f = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x_{n_s+1}}{x_{n_s+1}} \\ \vdots \\ \frac{\Delta x_p}{x_p} \end{bmatrix} \text{ } n_f \text{ elementos}$$

La ecuación (3.6.14) puede escribirse:

$$\bar{y} = A_s \bar{X}_s + A_f \bar{X}_f \quad (3.6.15)$$

o bien

$$\bar{y} = A_s \bar{X}_s + \bar{e} \quad (3.6.16)$$

siendo

$$\bar{e} = A_f \bar{X}_f$$

Nótese que  $\bar{e}$  es el vector de cambios porcentuales en los parámetros cuando  $\bar{X}_s = 0$ , esto es cuando los elementos que pueden reajustarse tienen su valor nominal y los elementos que no pueden reajustarse tienen un valor dentro de su rango de tolerancia. Es claro que el vector  $\bar{e}$  podría determinarse en la práctica, midiendo las desviaciones respecto a los valores nominales, de los parámetros  $Y_i$ , cuando los elementos que pueden reajustarse tienen su valor nominal; pudiéndose entonces determinar el valor porcentual en que es necesario reajustar los parámetros  $X_1, X_2, \dots, X_{n_s}$ , para que el cambio correspondiente en los parámetros de interés sea nulo ó bien presente un mínimo (v.g. la norma euclidiana del vector  $\bar{y}$  es mínima). Por lo tanto, para determinar el vector de ajustes  $\bar{X}_s$  habrá que minimizar la norma euclidiana de  $\bar{y}$ , destacándose los dos casos siguientes:

Caso 1. El número de elementos que pueden ajustarse es igual al número de parámetros de interés.

Caso 2. El número de elementos que pueden ajustarse es menor al número de parámetros de interés.

A continuación se discuten cada uno de estos dos casos.

### Estudio del Caso 1.

Para este caso la matriz  $A_S$  es cuadrada siendo el vector  $\bar{x}_S$  que minimiza la norma de  $\bar{y}$  dado por la ecuación

$$\bar{x}_S = -A_S^{-1} \bar{e} \quad \dots (3.6.17)$$

Siempre y cuando  $A_S$  sea una matriz no singular. Es fácil ver que el valor mínimo de la norma de  $y$ , para este caso es cero.

### Estudio del caso 2.

En este caso puede probarse [9] que el vector  $\bar{x}_S$  que minimiza la norma de  $\bar{y}$ , está dado por:

$$\bar{x}_S = -A_S^+ \bar{e} \quad \dots (3.6.18)$$

donde  $A_S^+$  es la matriz pseudoinversa de  $A_S$  dada por la ecuación:

$$A_S^+ = (A_S^T A_S)^{-1} A_S^T \quad \dots (3.6.19)$$

$$|A_S^T A_S| \neq 0$$

Siendo la norma mínima dada por la ecuación

$$\| \bar{y} \|_{\min} = \left\| \left[ -A_S A_S^+ + I \right] \bar{e} \right\| \quad \dots (3.6.20)$$

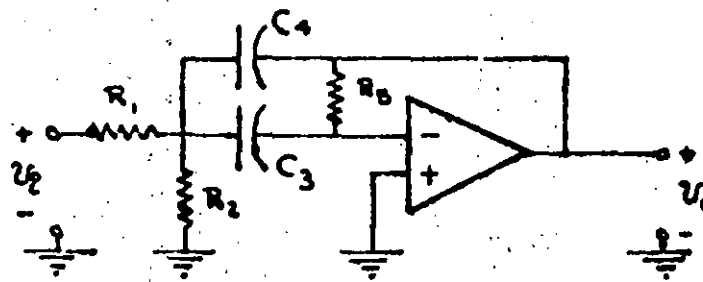
Ejemplo 3.6.4 Se requiere construir un filtro paso banda de segundo orden sujeto a las siguientes especificaciones.

$$\omega_0 = 10^3 \text{ rad/seg}$$

$$Q = 10$$

$$H_0 = 1$$

Siendo el circuito correspondiente el siguiente:



Un juego de valores que satisfacen las condiciones de diseño sería:

$$R_1 = 10^5 \Omega$$

$$R_2 = 502.51 \Omega$$

$$R_5 = 2 \times 10^5 \text{ f}$$

$$C_3 = C_4 = 0.1 \mu\text{f}$$

Al tener  $R_5$  y  $R_2$  los valores nominales se observó que  $Q = 9.5$ ,  $\omega_0 = 980 \text{ rad/seg}$ . (Estos cambios seguramente se deben a que los valores de  $C_4$ ,  $C_3$  y  $R_1$  no son los nominales).



Determinar en qué porcentajes se debe reajustar  $R_5$  y  $R_2$  para que los parámetros  $Q$  y  $W_0$  sean los nominales.

Solución:

En este caso las sensitividades de interés están dadas por las expresiones:

$$S_{R_5}^{W_0} = S_{C_3}^{W_0} = S_{C_4}^{W_0} = -1/2$$

$$S_{R_1}^{W_0} = -\frac{1}{2 W_0^2 R_1 R_5 C_3 C_4}$$

$$S_{R_2}^{W_0} = -\frac{1}{2 W_0^2 R_2 R_5 C_3 C_4}$$

$$S_{R_1}^Q = \frac{R_1}{2(R_1 + R_2)} - 1/2$$

$$S_{R_2}^Q = \frac{R_2}{2(R_1 + R_2)} - 1/2$$

$$S_{R_5}^Q = 1/2$$

$$S_{C_3}^Q = \frac{Q}{W_0 R_5 C_3} - 1/2$$

$$S_{C_4}^Q = \frac{Q}{W_0 R_5 C_4} - 1/2$$

En este caso únicamente nos interesarán las sensitividades relacionadas con los elementos que se van a reajustar que son en este caso  $R_5$  y  $R_2$ , sin embargo como ilustración se escribirá la matriz  $A$  completa, considerando que el vector  $\bar{y}$  es:

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta w_o}{w_o} \\ \frac{\Delta Q}{Q} \end{bmatrix}$$

los vectores  $\bar{x}_s$  y  $\bar{x}_f$  podrían ser:

$$\bar{x}_s = \begin{bmatrix} \frac{\Delta R_5}{R_5} \\ \frac{\Delta R_2}{R_2} \end{bmatrix} \quad \bar{x}_f = \begin{bmatrix} \frac{\Delta R_1}{R_1} \\ \frac{\Delta C_3}{C_3} \\ \frac{\Delta C_4}{C_4} \end{bmatrix}$$

siendo la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} S_{R5}^{w_o} & S_{R2}^{w_o} & S_{R1}^{w_o} & S_{C3}^{w_o} & S_{C4}^{w_o} \\ S_{R5}^Q & S_{R2}^Q & S_{R1}^Q & S_{C3}^Q & S_{C4}^Q \end{bmatrix}$$

Considerando las expresiones para la sensibilidad y los valores nominales de los elementos, A sería:

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.4975 & -2.5 \times 10^{-3} & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.4975 & -2.5 \times 10^{-3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$A_s = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.4975 \\ 0.5 & -0.4975 \end{bmatrix}$$

$$\text{siendo } \bar{e} = \begin{bmatrix} \frac{980-1000}{1000} \\ \frac{9.5-10}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.02 \\ -0.05 \end{bmatrix}$$

Considerando la ecuación (3.6.17)

$$\bar{x}_s = \begin{bmatrix} \frac{\Delta R_5}{R_5} \\ \frac{\Delta R_2}{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1.005 & -1.005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

O sea:

$$\frac{\Delta R_5}{R_5} = .03, \quad \frac{\Delta R_2}{R_2} = -0.07035$$

por lo tanto los valores que deberán ahora tener  $R_5$  y  $R_2$  son:

$$R_5 = 2 \times 10^5 (1 + .03) = 2.06 \times 10^5 \Omega$$

$$R_2 = 502.51 (1 - 0.07035) = 467.1584 \Omega$$

### Ejemplo 3.6.5

Para el ejemplo anterior suponer ahora que la única resistencia que se puede reajustar es  $R_5$ . Si el vector  $\bar{e}$  es el mismo, determinar el valor de  $R_5$  que mejor ajusta los valores de  $Q$  y  $W_0$ .

Solución:

Para este ejemplo:

$$A_s = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, de acuerdo con las ecuaciones (3.6.18) y (3.6.19)

$$\frac{\Delta R_5}{R_5} = \bar{x}_s = - \left( \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.02 \\ -0.05 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\Delta R_5}{R_5} = -2 \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.02 \\ -0.05 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\Delta R_5}{R_5} = 0.03$$

O sea que el nuevo valor de  $R_5$  debe ser:

$$R_5 = 2 \times 10^5 (1+0.03) = 2.06 \times 10^5 \Omega$$

El vector  $\bar{y}$  correspondiente sería:

$$\bar{y} = \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} -0.5 \\ 0.5 \end{array} \right] \\ \left[ 1 \quad -1 \right] + \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \right) \bar{e}$$

o sea:

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} -0.5 & +0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.02 \\ -0.05 \end{bmatrix}$$

Lo cual quiere decir que después del ajuste, los cambios porcentuales en  $w_0$  y  $Q$  serían

$$\frac{\Delta W_0}{W_0} = -0.015$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = 0.015$$

o sea:  $Q = (1.015) \times 10 = 10.15$

$$W_0 = 0.985 \times 10^3 = 985 \text{ rad/seg}$$

### 3.7 FILTROS ACTIVOS ESPECIALES.

Actualmente dentro del campo de los filtros activos, existen dos aspectos sobre los cuales se hace investigación y desarrollo, dichos aspectos son:

- 1.- Filtros Activos de alta frecuencia (Filtros R)
- 2.- Filtros Activos de Capacitancia Conmutada

#### 3.7.1 FILTROS ACTIVOS DE ALTA FRECUENCIA (Filtros R)

Como se ha mencionado anteriormente en estas notas, el extremo superior de frecuencia en la que pueden operar los filtros activos tradicionales, típicamente es algún valor entre 10 y 20 KHz, esto se debe principalmente a que para un amplificador operacional típico, el producto Ganancia X ancho de banda (GB) es finito, esto hace que los polos del filtro se muevan respecto de su localización teórica; para algunas realizaciones este movimiento de polos puede eventualmente conducir a la inestabilidad. A medida que el factor de Calidad Q aumenta para una realización dada, el tope de frecuencia originado (debido a que el producto GB del amplificador operacional empleado es finito), se forma más crítico. Una técnica para lograr filtros activos con rangos de frecuencia que tengan topes superiores mayores de 20 KHz, consiste en aprovechar el hecho de que el comportamiento en alta frecuencia de un amplificador operacional compensado puede modelarse mediante la función de transferencia .

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = K \frac{GB}{S} \quad \dots(3.7.1)$$

(K=1 ó -1 dependiendo del signo del voltaje diferencial de entrada al amplificador).

En términos de el modelo para el comportamiento del amplificador operacional descrito por la ecuación (3.7.1.), es posible para llevar a cabo una realización utilizar una configuración de variables de estado, colocando para cada integrador un amplificador operacional compensado. Una configuración de segundo orden a la que se puede llegar es la que se muestra en la figura 3.7.1.

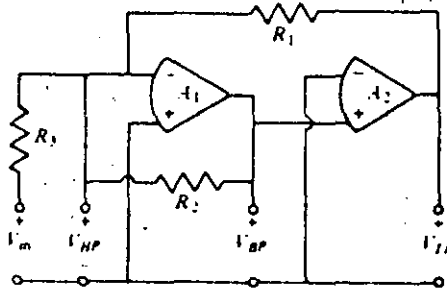


Figura 3.7.1. Filtro R de variables de estado.

Considerando el modelo para los amplificadores operacionales descrito por la ecuación 3.7.1., la función de transferencia

$$\frac{V_1(s)}{V_e(s)}, \text{ es}$$

$$\frac{V_1(s)}{V_e(s)} = \frac{-\frac{GB_1}{R_3} s}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) s^2 + \frac{GB_1}{R_2} s + \frac{GB_1 GB_2}{R_1}} \quad \dots (3.7.2)$$

realizándose un filtro paso banda de segundo orden, las ecuaciones de diseño serían:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = 1 \quad \dots(3.7.3a)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{GB_1 GB_2}{R_1}} \quad \dots(3.7.3b)$$

$$\frac{W_0}{Q} = \frac{GB_1}{R_2} \quad \dots(3.7.3c)$$

resolviendo para  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  resulta:

$$R_1 = \frac{GB_1 GB_2}{W_0^2} \quad \dots(3.7.4a)$$

$$R_2 = \frac{GB_1 Q}{W_0} \quad \dots(3.7.4b)$$

$$R_3 = \frac{GB_1 GB_2}{GB_1 GB_2 - W_0^2 - (W_0/Q) GB_2} \quad \dots(3.7.4c)$$

para tener valores positivos de  $R_3$  se requiere satisfacer la siguiente desigualdad.

$$W_0^2 + \frac{W_0}{Q} GB_2 < GB_1 GB_2 \quad \dots(3.7.5.)$$

Para valores moderados de  $Q$  se tiene la restricción:

$$W_0 < GB_2$$



En este caso, si  $W_0$  es pequeña, los valores de las resistencias se hacen muy grandes, de modo que, para tener valores razonables en las resistencias, el rango típico para  $W_0$  es:

$$\frac{GB}{1000} < W_0 < \frac{GB}{10}$$

de la ecuación 3.7.2 se ve que  $H_0 = R_2/R_3$ , el cual, bajo la restricción de la desigualdad 3.7.5 es aproximadamente  $\frac{GB_1 Q}{W_0}$ . Por lo tanto  $H_0$  no es un parámetro que pueda ser ajustado libremente.

Si se desea ajustar  $H_0$  a un valor diferente al que se tendría debido a las restricciones mencionadas, se debe colocar otra etapa que regule el valor de  $H_0$ .

De la figura 3.7.1., tomando en cuenta la ecuación 3.7.2. se pueden obtener las funciones de transferencia  $\frac{V_3(s)}{V_e(s)}$  y  $\frac{V_2(s)}{V_e(s)}$

a saber:

$$\frac{V_3(s)}{V_e(s)} = - \frac{\frac{GB_1 GB_2}{R_3}}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) s^2 + \frac{GB_1}{R_2} s + \frac{GB_1 GB_2}{R_1}} \dots (3.7.6.)$$

que es la realización de un filtro paso bajas de segundo orden

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{1}{R_3} s^2}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) s^2 + \frac{GB_1}{R_2} s + \frac{GB_1 GB_2}{R_1}} \dots (3.7.7.)$$

que es la realización de un filtro paso altas de segundo orden.

Sumando las salidas  $V_2$  y  $V_3$  pueden lograrse funciones de transferencia de segundo orden con ceros de transmisión, que como se sabe son los bloques básicos para realizar filtros elípticos.

Es importante hacer notar que los parámetros  $Q$  y  $W_0$  de un determinado filtro, construido mediante las técnicas descritas en esta sección, cambian al variar las constantes  $GB$  de los amplificadores operacionales que intervengan en su construcción, de modo que cualquier situación que modifica las constantes  $GB$ , (v.g., cambios en el voltaje de polarización, variaciones de temperatura), hará que los parámetros  $W_0$  y  $Q$  sufran variaciones. Las sensibilidades de  $Q$  y  $W_0$  respecto de  $GB_1$  y  $GB_2$  de la configuración mostrada en la figura 3.7.1. son:

$$S_{GB_1}^Q = -\frac{1}{2} \quad - \quad 3.7.8.a$$

$$S_{GB_2}^Q = \frac{Q}{2} \quad - \quad 3.7.8.b$$

$$S_{GB_1}^{W_n} = S_{GB_2}^{W_n} = \frac{1}{2} \quad - \quad 3.7.8.c$$

Ejemplo 3.7.1. Se desea construir un filtro paso bajas de segundo orden, empleando la configuración mostrada en la figura 3.7.1; los amplificadores operacionales empleados tienen una característica de ganancia compensada con una pendiente de  $-6\text{dB/oct}$  y sus constantes  $GB$  valen  $1\text{MHz}$ . De las ecuaciones de diseño se obtienen después de escalar la impedancia los valores de las tres resistencias requeridas siendo sus valores los siguientes:

$$R_1 = 100 \text{ K}\Omega$$

$$R_2 = 13.33 \text{ K}\Omega$$

$$R_3 = 1.0929 \text{ K}\Omega$$

Para detalles sobre escalamiento de impedancia vease el apéndice A.4 de estas notas.

En la figura 3.7.2 se muestra la respuesta en frecuencia del filtro calculado

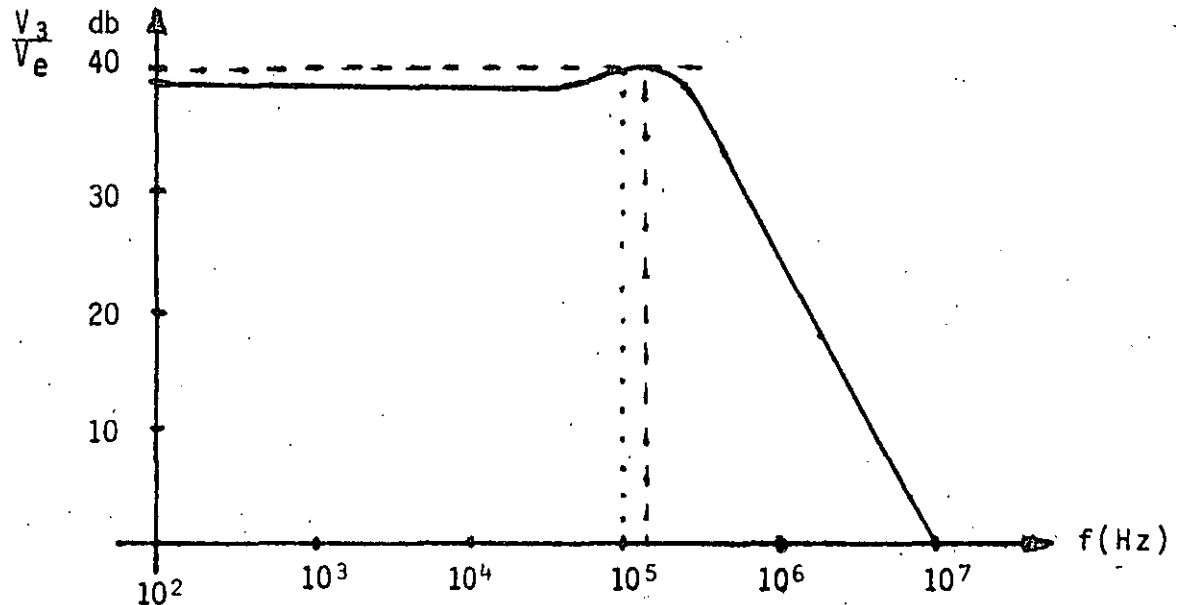


Fig. 3.7.2 Respuesta en frecuencia del filtro de el ejemplo 3.7.1

Una segunda forma de lograr filtros activos de alta frecuencia, es utilizar amplificadores operacionales controlados por corrientes (AOCC).

Mediante esta técnica se logran obtener frecuencias de hasta 500 KHz.

Este método queda fuera del objetivo de estas notas. Sin embargo puede consultarse la referencia [2] dadas al final de este tema.

### 3.7.2. FILTROS ACTIVOS DE CAPACITANCIA CONMUTADA.

Una de las ventajas de los filtros RC activos con respecto a los filtros RLC pasivos, consiste en la facilidad que existe por parte de los primeros para ser construídos en forma de circuitos integrados, desgraciadamente esta ventaja no ha podido ser explotada en forma comercial debido principalmente a que en los filtros activos los productos RC deben ser precisados de una manera muy exacta. Esto implica que los valores de las resistencias y capacitores sean estrechamente controlados, una situación no existente en la tecnología de fabricación de circuitos integrados comunes. Además las resistencias y capacitores integrados presentan características de temperatura y linealidad no muy buenas.

Una alternativa que hace a los filtros activos adecuados para su fabricación en forma de circuito integrado es el empleo de la técnica descrita en la sección anterior (Filtros R), cabe señalar sin embargo, respecto de dichos métodos, presenta entre otras las desventajas siguientes:

- Existe dependencia entre los parámetros del filtro y las constantes GB de los amplificadores empleados.
- Las resistencias dentro de un circuito integrado ocupan por lo regular mayor área que los capacitores.

Por lo tanto la técnica de filtros activos construídos sólo a base de resistencias y amplificadores operacionales no se presta fácilmente para fabricar filtros activos completamente integrados dentro de un "chip".

Una técnica de construcción de filtros activos que se presta a la fabricación de los mismos en forma de circuito integrado, es el empleo, (dentro del circuito que realiza a el fil-

tro), de capacitores conmutados mediante conmutadores analógicos de tipo MOS, a estos filtros se les denomina filtros analógicos de capacitancia conmutada (FACC)

En la figura 3.7.3 se describe la idea fundamental que interviene en la construcción de un filtro FACC

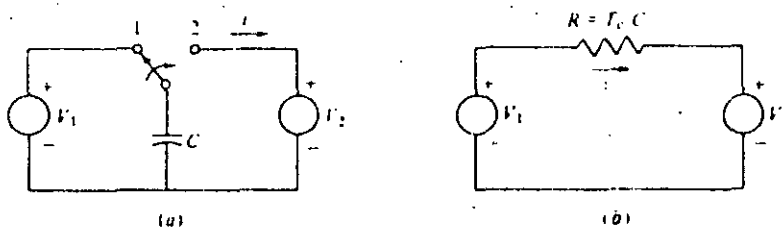


Fig. 3.7.3 Modo de conmutar una capacitancia (a) para obtener un resistor equivalente (b)

Puede verse de la figura 3.7.3 que el conmutador analógico que aparece, hace las veces de un resistor. Para entender esto supóngase que inicialmente el conmutador se encuentra en la posición 1 de modo que el capacitor se carga con  $V_1$  volts. Asíumase ahora que el conmutador pasa a la posición 2, de modo que el capacitor se carga (ó descarga) al voltaje  $V_2$ . La cantidad de carga que fluye hacia (o de) la fuente de voltaje  $V_2$  es  $C(V_2 - V_1)$ , si el período de conmutación es  $T_2$  segundos, el flujo de corriente a la fuente  $V_2$  es:

$$i = C \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{C(V_1 - V_2)}{T_2}$$

Por lo tanto el circuito de la figura 3.7.3, desempeñaría la misma función que una resistencia de  $\frac{T}{C}$  ohms. Si el régimen de conmutación  $f=1/T$  es mucho mayor que las frecuencias de interés que se estén manejando, la capacitancia conmutada, puede verse como una resistencia. Por otro lado, si el régimen de conmutación y las frecuencias de interés son comparables se requerirá el empleo de técnicas de análisis empleadas para estudiar sistemas que manejan señales muestreadas [7].

Una gran ventaja de los filtros FACC es que las constantes RC que aparecerían presentarían la forma:

$$R_1 C_2 = \frac{T}{C_1} C_2$$

(esto es suponiendo una resistencia  $R_1$  y un capacitor  $C_2$ ) siendo por lo tanto dichas constantes ajustadas mediante la razón de los valores de dos capacitores.

En la figura 3.7.4 se muestra, como se construiría un integrador inversor, empleando un capacitor conmutado.

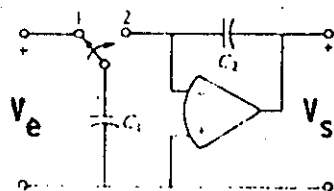


Fig. 3.7.4 Integrador inversor, construido en base a un capacitor conmutado.

La función de transferencia  $\frac{V_s(s)}{V_e(s)}$  del circuito de la figura 3.7.4 sería; (si las frecuencias a la que opera son mucho menores que la frecuencia de conmutación  $f=1/T$ ) la siguiente:

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = - \frac{1}{sT \left( \frac{C_2}{C_1} \right)}$$

En la figura 3.7.5 se muestra un filtro resonador construido en base a capacitancias conmutadas.

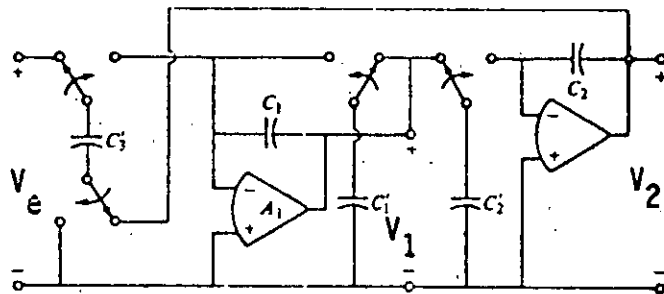


Figura 3.7.5 Filtro activo resonador, construido en base a capacitancias conmutadas.

Las funciones de transferencia  $\frac{V_2(s)}{V_e(s)}$  y  $\frac{V_1(s)}{V_e(s)}$  del circuito de la figura 3.7.5 son:

$$\frac{V_1(s)}{V_e(s)} = \frac{-s \frac{C_3}{T} \frac{1}{C_1}}{s^2 + s \frac{C_3}{T} \frac{1}{C_1} + \frac{C_2^{-1} C_3^{-1}}{T^2} \frac{1}{C_1 C_2}} \quad \dots(3.7.8)$$

$$\frac{V_2(s)}{V_e(s)} = \frac{(C_2^{-1}/T) (C_3^{-1}/T) (1/C_1 C_2)}{s^2 + s \frac{C_3}{T} \frac{1}{C_1} + \frac{C_2^{-1} C_3^{-1}}{T^2} \frac{1}{C_1 C_2}} \quad \dots(3.7.9)$$



Para detalles sobre la obtención de las funciones de transferencia anteriores puede consultarse la referencia [2] .

Al final de esta sección se anexan las hojas de datos de un circuito integrado comercial que realiza filtros activos empleando capacitancias conmutadas.

**3.7.3 Hojas de datos técnicos del "MF10" Filtro Dual  
de Capacitancia Conmutada.**

## MF10 Universal Monolithic Dual Switched Capacitor Filter

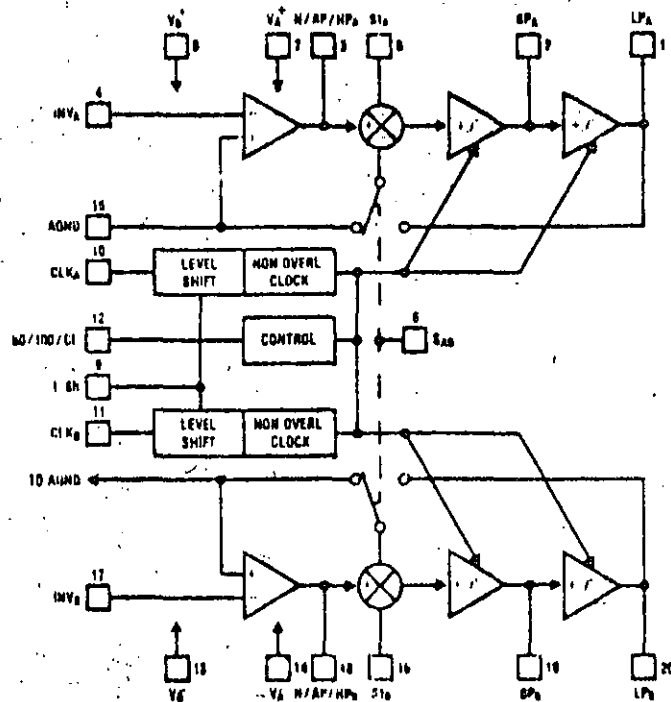
### General Description

The MF10 consists of 2 independent and extremely easy to use, general purpose CMOS active filter building blocks. Each block, together with an external clock and 3 to 4 resistors, can produce various 2nd order functions. Each building block has 3 output pins. One of the outputs can be configured to perform either an allpass, highpass or a notch function; the remaining 2 output pins perform lowpass and bandpass functions. The center frequency of the lowpass and bandpass 2nd order functions can be either directly dependent on the clock frequency, or they can depend on both clock frequency and external resistor ratios. The center frequency of the notch and allpass functions is directly dependent on the clock frequency, while the highpass center frequency depends on both resistor ratio and clock. Up to 4th order functions can be performed by cascading the two 2nd order building blocks of the MF10; higher than 4th order functions can be obtained by cascading MF10 packages. Any of the classical filter configurations (such as Butterworth, Bessel, Chever and Chebyshev) can be formed.

### Features

- Low cost
- 20-pin 0.3" wide package
- Easy to use
- Clock to center frequency ratio accuracy = 0.6%
- Filter cutoff frequency stability directly dependent on external clock quality
- Low sensitivity to external component variation
- Separate highpass (or notch or allpass), bandpass, lowpass outputs
- $f_c \times Q$  range up to 200 kHz
- Operation up to 30 kHz

### System Block Diagram



### Absolute Maximum Ratings

Supply Voltage	7V
Power Dissipation	500 mW
Operating Temperature	0°C to 70°C
Storage Temperature	150°C
Lead Temperature (Soldering, 10 seconds)	300°C

### Electrical Characteristics (Complete Filter) $V_S = \pm 5V, T_A = 25^\circ C$

Parameter	Conditions	Min	Typ	Max	Units
Frequency Range	$f_o \times Q < 200 \text{ kHz}$	20	30		kHz
Clock to Center Frequency Ratio, $f_{CLK}/f_o$					
MF10BN	Pin 12 High, $Q = 10$		$49.84 \pm 0.2\%$	$\pm 0.6\%$	
MF10CN	$f_o \times Q < 50 \text{ kHz}$ , Mode 1		$49.84 \pm 0.2\%$	$\pm 1.5\%$	
MF10BN	Pin 12 at Mid Supplies		$99.35 \pm 0.2\%$	$\pm 0.6\%$	
MF10CN	$Q = 10, f_o \times Q < 50 \text{ kHz}$ , Mode 1		$99.35 \pm 0.2\%$	$\pm 1.5\%$	
Q Accuracy (Q Deviation from an Ideal Continuous Filter)					
MF10BN	Pin 12 High, Mode 1		$\pm 2\%$	$\pm 4\%$	
MF10CN	$f_o \times Q < 100 \text{ kHz}, f_o < 5 \text{ kHz}$		$\pm 2\%$	$\pm 6\%$	
MF10BN	Pin 12 at Mid Supplies		$\pm 2\%$	$\pm 3\%$	
MF10CN	$f_o \times Q < 100 \text{ kHz}, f_o < 5 \text{ kHz}$ , Mode 1		$\pm 2\%$	$\pm 6\%$	
$f_o$ Temperature Coefficient	Pin 12 High (~ 50:1) Pin 12 Mid Supplies (~ 100:1) $f_o \times Q < 100 \text{ kHz}$ , Mode 1 External Clock Temperature Independent		$\pm 10$ $\pm 100$		ppm/°C ppm/°C
Q Temperature Coefficient	$f_o \times Q < 100 \text{ kHz}$ , Q Setting Resistors Temperature Independent		$\pm 500$		ppm/°C
DC Low Pass Gain Accuracy	Mode 1, $R_1 = R_2 = 10k$			$\pm 2$	%
Crosstalk			50		dB
Clock Feedthrough			10		mV
Maximum Clock Frequency		1	1.5		MHz
Power Supply Current			8	$> 10$	mA

### Electrical Characteristics (Internal Op Amps) $T_A = 25^\circ C$

Parameter	Conditions	Min	Typ	Max	Units
Supply Voltage		$\pm 4$	$\pm 5$		V
Voltage Swing (Pins 1, 2, 9, 20)	$V_S = \pm 5V, R_L = 5k$				
MF10BN		$\pm 3.8$	$\pm 4$		V
MF10CN		$\pm 3.2$	$\pm 3.7$		V
Voltage Swing (Pins 3 and 18)	$V_S = \pm 5V, R_L = 3.5k$				
MF10BN		$\pm 3.8$	$\pm 4$		V
MF10CN		$\pm 3.2$	$\pm 3.7$		V
Output Short Circuit Current	$V_S = \pm 5V$				
Source			3		mA
Sink			1.5		mA
Op Amp Gain BW Product			2.5		MHz
Op Amp Slew Rate			7		V/μs

### Definition of Terms

$f_{CLK}$ : the switched capacitor filter external clock frequency.

$f_0$ : center of frequency of the second order function complex pole pair.  $f_0$  is measured at the bandpass output of each 1/2 MF10, and it is the frequency of the bandpass peak occurrence (Figure 1).

$Q$ : quality factor of the 2nd order function complex pole pair.  $Q$  is also measured at the bandpass output of each 1/2 MF10 and it is the ratio of  $f_0$  over the -3 dB bandwidth of the 2nd order bandpass filter, Figure 1. The value of  $Q$  is not measured at the lowpass or highpass outputs of the filter, but its value relates to the possible amplitude peaking at the above outputs.

$H_{0BP}$ : the gain in (V/V) of the bandpass output at  $f = f_0$ .

$H_{0LP}$ : the gain in (V/V) of the lowpass output of each 1/2 MF10 at  $f=0$  Hz, Figure 2.

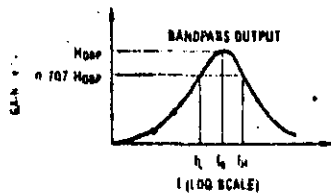
$H_{0HP}$ : the gain in (V/V) of the highpass output of each 1/2 MF10 as  $f \rightarrow f_{CLK}/2$ , Figure 3.

$Q_z$ : the quality factor of the 2nd order function complex zero pair, if any. ( $Q_z$  is a parameter used when an allpass output is sought and unlike  $Q$  it cannot be directly measured).

$f_{notch}$ : the center frequency of the 2nd order function complex zero pair, if any. If  $f_{notch}$  is different from  $f_0$ , and if the  $Q_z$  is quite high it can be observed as a notch frequency at the allpass output.

$H_{0N1}$ : the notch output gain as  $f=0$  Hz.

$H_{0N2}$ : the notch output gain as  $f=f_{CLK}/2$ .

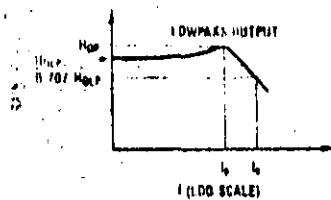


$$Q = \frac{f_0}{f_H - f_L} = \frac{f_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{f_0}{\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1}}$$

$$f_L = f_0 \left( \frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right)$$

$$f_H = f_0 \left( \frac{1}{2Q} - \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right)$$

FIGURE 1

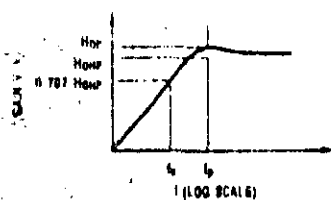


$$f_c = f_0 \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^2 + 1}}$$

$$f_p = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$$H_{0LP} = H_{0LP} \times \frac{1}{\frac{1}{Q} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

FIGURE 2



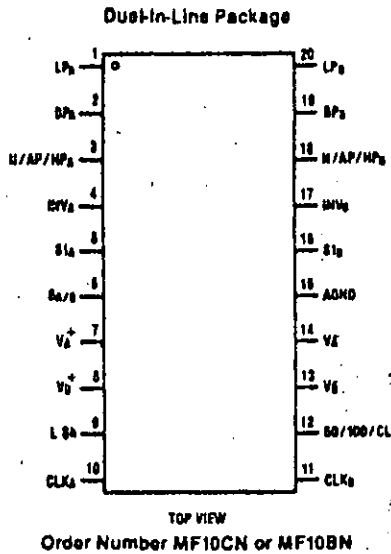
$$f_c = f_0 \times \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^2 + 1}}$$

$$f_p = f_0 \times \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$$H_{0HP} = H_{0HP} \times \frac{1}{\frac{1}{Q} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

FIGURE 3

## Connection Diagram



### Pin Description

**LP, BP, NI/AP/HP** These are the lowpass, bandpass, notch or allpass or highpass outputs of each 2nd order section. The LP and BP outputs can sink typically 1 mA and source 3 mA. The NI/AP/HP output can typically sink and source 1.5 mA and 3 mA, respectively.

**INV** This is the inverting input of the summing op amp of each filter. The pin has static discharge protection.

**S1** S1 is a signal input pin used in the allpass filter configurations (see modes of operation 4 and 5). The pin should be driven with a source impedance of less than 1 k $\Omega$ .

**SA/AB** It activates a switch connecting one of the inputs of the filter's 2nd summer either to analog ground ( $S_{A/AB}$  low to  $V_A^-$ ) or to the lowpass output of the circuit ( $S_{A/AB}$  high to  $V_A^+$ ). This allows flexibility in the various modes of operation of the IC.  $S_{A/AB}$  is protected against static discharge.

**$V_A^+$ ,  $V_D^+$**  Analog positive supply and digital positive supply. These pins are internally connected through the IC substrate and therefore  $V_A^+$  and  $V_D^+$  should be derived from the same power supply source. They have been brought out separately so they can be bypassed by separate capacitors, if desired. They can be externally tied together and bypassed by a single capacitor.

**$V_A^-$ ,  $V_D^-$**

Analog and digital negative supply respectively. The same comments as for  $V_A^+$  and  $V_D^+$  apply here.

**L Sh**

Level shift pin; it accommodates various clock levels with dual or single supply operation. With dual  $\pm 5V$  supplies, the MF10 can be driven with CMOS clock levels ( $\pm 5V$ ) and the L Sh pin should be tied either to the system ground or to the negative supply pin. If the same supplies as above are used but T<sup>2</sup>L clock levels, derived from 0V to 5V supply, are only available, the L Sh pin should be tied to the system ground. For single supply operation (0V and 10V) the  $V_D^-$ ,  $V_A^-$  pins should be connected to the system ground, the AGND pin should be biased at 5V and the L Sh pin should also be tied to the system ground. This will accommodate both CMOS and T<sup>2</sup>L clock levels.

**CLK (A or B)**

Clock inputs for each switched capacitor filter building block. They should both be of the same level (T<sup>2</sup>L or CMOS). The level shift (L Sh) pin description discusses how to accommodate their levels. The duty cycle of the clock should preferably be close to 50% especially when clock frequencies above 200 kHz are used. This allows the maximum time for the op amps to settle which yields optimum filter operation.

**50/100/CL**

By tying the pin high a 50:1 clock to filter center frequency operation is obtained. Tying the pin at mid supplies (i.e., analog ground with dual supplies) allows the filter to operate at a 100:1 clock to center frequency ratio. When the pin is tied low, a simple current limiting circuitry is triggered to limit the overall supply current down to about 2.5 mA. The filtering action is then aborted.

**AGND**

Analog ground pin; it should be connected to the system ground for dual supply operation or biased at mid supply for single supply operation. The positive inputs of the filter op amps are connected to the AGND pin so "clean" ground is mandatory. The AGND pin is protected against static discharge.

### Modes of Operation

The MF10 is a switched capacitor (sampled data) filter. To fully describe its transfer functions, a time domain approach will be appropriate. Since this may appear cumbersome and, since the MF10 closely approximates continuous filters, the following discussion is based on the well known frequency domain. The following illustrations refer to 1/2 of the MF10; the other 1/2 is identical. Each MF10 can produce a full 2nd order function, so up to 4th order functions can be performed by using cascading techniques.

**MODE 1: Notch f, Bandpass, Lowpass Outputs:  $f_{notch} = f_0$**   
(See Figure 4)

$$f_0 = \text{center frequency of the complex pole pair} \\ = \frac{f_{CLK}}{100} \text{ or } \frac{f_{CLK}}{50}$$

$f_{notch}$  = center frequency of the imaginary zero pair =  $f_0$

$$H_{OLP} = \text{Lowpass gain (at } f \rightarrow 0) = -\frac{R2}{R1}$$

$$H_{OBP} = \text{Bandpass gain (at } f = f_0) = -\frac{R3}{R1}$$

$$H_{ON} = \text{Notch output gain as } \left. \begin{array}{l} f \rightarrow 0 - \frac{R2}{R1} \\ f = f_{CLK}/2 \end{array} \right\}$$

$$Q = \frac{f_0}{BW} = \frac{R3}{R2}$$

= quality factor of the complex pole pair.

BW = the -3 dB bandwidth of the bandpass output.

Circuit dynamics:

$$H_{OLP} = \frac{H_{OBP}}{Q} \text{ or } H_{OBP} = H_{OLP} \times Q = H_{ON} \times Q.$$

$$H_{OLP}(\text{peak}) = Q \times H_{OLP} \text{ (for high } Q\text{'s)}$$

The above expressions are important. They determine the swing at each output as a function of the desired Q of the 2nd order function.

**MODE 1a: Non-Inverting BP, LP (See Figure 5)**

$$f_0 = \frac{f_{CLK}}{100} \text{ or } \frac{f_{CLK}}{50}$$

$$Q = \frac{R3}{R2}$$

$H_{OLP} = 1$ ;  $H_{OLP}(\text{peak}) = Q \times H_{OLP}$  (for high Q's)

$$H_{OPB1} = -\frac{R3}{R2}$$

$H_{OBP2} = 1$  (non-inverting)

Circuit dynamics:  $H_{OBP1} = Q$

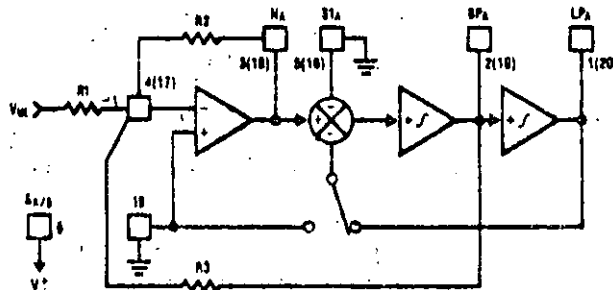


FIGURE 4. MODE 1

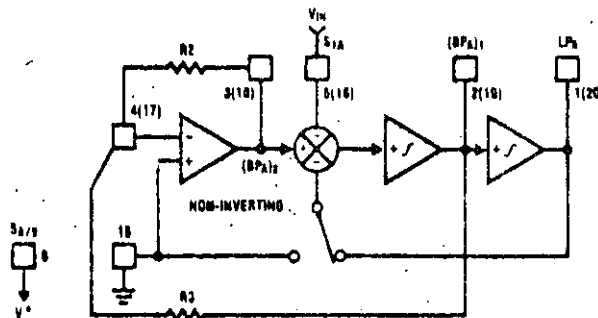


FIGURE 5. MODE 1a

**Modes of Operation (Continued)**

**MODE 2: Notch 2, Bandpass, Lowpass:**  $f_{\text{notch}} < f_0$   
(See Figure 8)

$f_0$  = center frequency

$$= \frac{f_{\text{CLK}}}{100} \sqrt{\frac{R2}{R4} + 1} \text{ or } \frac{f_{\text{CLK}}}{50} \sqrt{\frac{R2}{R4} + 1}$$

$$f_{\text{notch}} = \frac{f_{\text{CLK}}}{100} \text{ or } \frac{f_{\text{CLK}}}{50}$$

Q = quality factor of the complex pole pair

$$= \frac{\sqrt{R2/R4 + 1}}{R2/R3}$$

$H_{\text{OLP}}$  = Lowpass output gain (as  $f \rightarrow 0$ )

$$= -\frac{R2/R1}{R2/R4 + 1}$$

$H_{\text{OBP}}$  = Bandpass output gain (at  $f = f_0$ ) =  $-R3/R1$

$H_{\text{ON}_1}$  = Notch output gain (as  $f \rightarrow 0$ )

$$= -\frac{R2/R1}{R2/R4 + 1}$$

$H_{\text{ON}_2}$  = Notch output gain (as  $f \rightarrow \frac{f_{\text{CLK}}}{2}$ ) =  $-R2/R1$

Filter dynamics:  $H_{\text{OBP}} = Q \sqrt{H_{\text{OLP}}}$   $H_{\text{ON}_2} = Q \sqrt{H_{\text{ON}_1} H_{\text{ON}_2}}$

**MODE 3: Highpass, Bandpass, Lowpass Outputs**  
(See Figure 7)

$$f_0 = \frac{f_{\text{CLK}}}{100} \times \sqrt{\frac{R2}{R4}} \text{ or } \frac{f_{\text{CLK}}}{50} \times \sqrt{\frac{R2}{R4}}$$

Q = quality factor of the complex pole pair

$$= \sqrt{\frac{R2}{R4} \times \frac{R3}{R2}}$$

$H_{\text{OHP}}$  = Highpass gain (as  $f \rightarrow \frac{f_{\text{CLK}}}{2}$ ) =  $-\frac{R3}{R1}$

$H_{\text{OBP}}$  = Bandpass gain (at  $f = f_0$ ) =  $-\frac{R3}{R1}$

$H_{\text{OLP}}$  = Lowpass gain (as  $f \rightarrow 0$ ) =  $-\frac{R4}{R1}$

Circuit dynamics:  $\frac{R2}{R4} = \frac{H_{\text{OHP}}}{H_{\text{OLP}}}$ ;  $H_{\text{OBP}} = \sqrt{H_{\text{OHP}} \times H_{\text{OLP}} \times Q}$

$H_{\text{OLP (peak)}} = Q \times H_{\text{OLP}}$  (for high Q's)

$H_{\text{OHP (peak)}} = Q \times H_{\text{OHP}}$  (for high Q's)

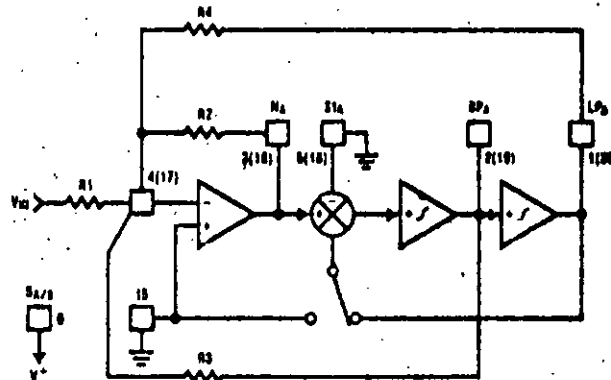


FIGURE 6. MODE 2

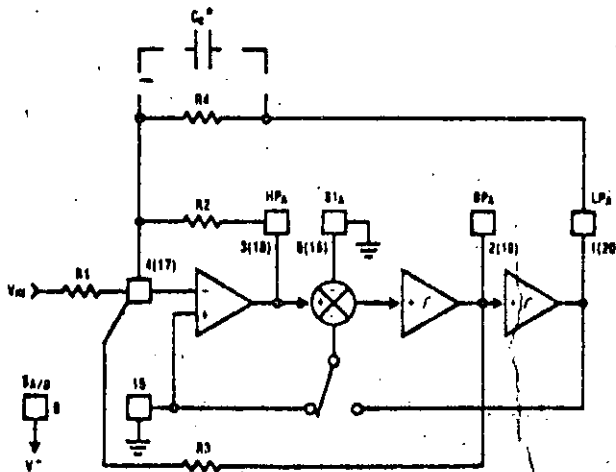


FIGURE 7. MODE 3

In Mode 3, the feedback loop is closed around the input summing amplifier, the finite GBW product of this op amp causes a slight Q enhancement. If this is a problem, connect a small capacitor (10 pF - 100 pF) across R4 to provide some phase lead.



**Modes of Operation (Continued)**

**MODE 3a: HP, BP, LP and Notch with External Op Amp**  
(See Figure 8)

$$f_0 = \frac{f_{CLK}}{100} \times \sqrt{\frac{R2}{R4}} \text{ or } \frac{f_{CLK}}{50} \times \sqrt{\frac{R2}{R4}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{R2}{R4}} \times \frac{R3}{R2}$$

$$H_{OHP} = -\frac{R2}{R1}$$

$$H_{OBP} = -\frac{R3}{R1}$$

$$H_{OLP} = -\frac{R4}{R1}$$

$$f_n = \text{notch frequency} = \frac{f_{CLK}}{100} \sqrt{\frac{R_n}{R_1}} \text{ or } \frac{f_{CLK}}{50} \sqrt{\frac{R_n}{R_1}}$$

$$H_{n1} = \text{gain of notch at } f = f_0 = \left\| Q \left( \frac{R_0}{R_1} H_{OLP} - \frac{R_0}{R_1} H_{OHP} \right) \right\|$$

$$H_{n1} = \text{gain of notch (as } f \rightarrow 0) = \frac{R_0}{R_1} \times H_{OLP}$$

$$H_{n2} = \text{gain of notch (as } f \rightarrow \frac{f_{CLK}}{2}) = -\frac{R_0}{R_n} \times H_{OHP}$$

**MODE 4: Allpass, Bandpass, Lowpass Outputs**  
(See Figure 9)

$f_0$  = center frequency

$$= \frac{f_{CLK}}{100} \text{ or } \frac{f_{CLK}}{50}$$

$f'_0$  = center frequency of the complex zero pair =  $f_0$

$$Q = \frac{f_0}{BW} = \frac{R3}{R2}$$

$Q_1$  = quality factor of complex zero pair =  $\frac{R3}{R1}$

For AP output make  $R1 = R2$

$$H_{OAP} = \text{Allpass gain (at } 0 < f < \frac{f_{CLK}}{2}) = -\frac{R2}{R1} = -1$$

$H_{OLP}$  = Lowpass gain (as  $f \rightarrow 0$ )

$$= -\left(\frac{R2}{R1} + 1\right) = -2$$

$H_{OBP}$  = Bandpass gain (at  $f = f_0$ )

$$= -\frac{R3}{R2} \left(1 + \frac{R2}{R1}\right) = -2 \left(\frac{R3}{R2}\right)$$

Circuit dynamics:  $H_{OBP} = (H_{OLP}) \times Q = (H_{OAP} + 1) Q$

Due to the sampled data nature of the filter, a slight mismatch of  $f_0$  and  $f'_0$  occurs causing a 0.4 dB peaking around  $f_0$  of the allpass filter amplitude response (which theoretically should be a straight line). If this is unacceptable, Mode 5 is recommended.

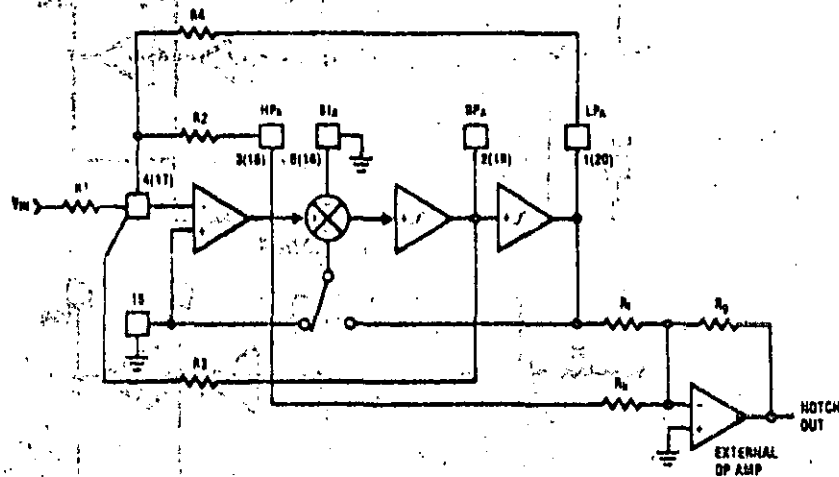


FIGURE 8. MODE 3a

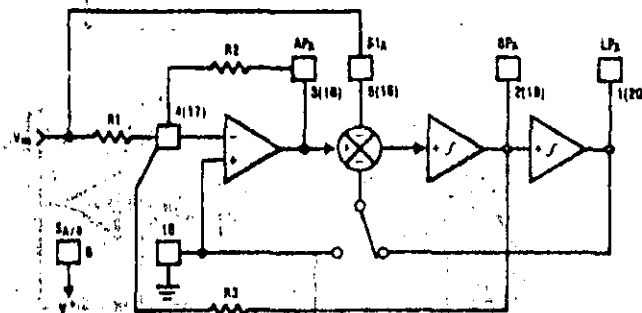


FIGURE 9. MODE 4

**Modes of Operation (Continued)**

**MODE 5: Numerator Complex Zeros, BP, LP**  
(See Figure 10)

$$f_c = \sqrt{1 + \frac{R2}{R4} \times \frac{f_{CLK}}{100}} \text{ or } \sqrt{1 + \frac{R2}{R4} \times \frac{f_{CLK}}{50}}$$

$$f_z = \sqrt{1 - \frac{R1}{R4} \times \frac{f_{CLK}}{100}} \text{ or } \sqrt{1 - \frac{R1}{R4} \times \frac{f_{CLK}}{50}}$$

$$Q = \sqrt{1 + R2/R4} \times \frac{R3}{R2}$$

$$Q_z = \sqrt{1 - R1/R4} \times \frac{R3}{R1}$$

$$H_{0z1} = \text{gain at C.z output (as } f \rightarrow 0 \text{ Hz)} = \frac{R2(R4 - R1)}{R1(R2 + R4)}$$

$$H_{0z2} = \text{gain at C.z output (as } f = \frac{f_{CLK}}{2}) = \frac{R2}{R1}$$

$$H_{OBP} = \left( \frac{R2}{R1} + 1 \right) \times \frac{R3}{R2}$$

$$H_{OLP} = \left( \frac{R2 + R1}{R2 + R4} \right) \times \frac{R4}{R1}$$

**MODE 6a: Single Pole, HP, LP Filter** (See Figure 11)

$f_c$  = cutoff frequency of LP or HP output

$$= \frac{R2}{R3} \frac{f_{CLK}}{100} \text{ or } \frac{R2}{R3} \frac{f_{CLK}}{50}$$

$$H_{OLP} = -\frac{R3}{R1}$$

$$H_{OHP} = -\frac{R2}{R1}$$

**MODE 6b: Single Pole LP Filter (Inverting and Non-Inverting)** (See Figure 12)

$f_c$  = cutoff frequency of LP outputs

$$= \frac{R2}{R3} \frac{f_{CLK}}{100} \text{ or } \frac{R2}{R3} \frac{f_{CLK}}{50}$$

$$H_{OLP1} = 1 \text{ (non-inverting)}$$

$$H_{OLP2} = -\frac{R3}{R2}$$

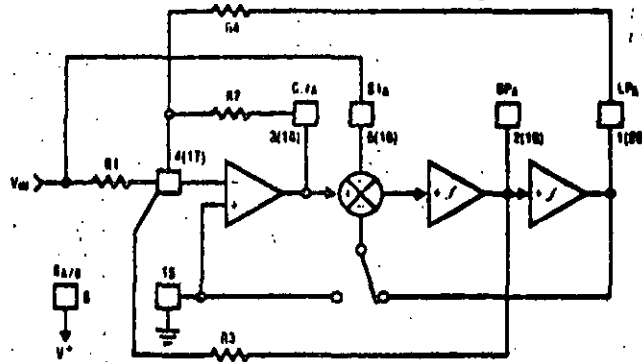


FIGURE 10. MODE 5

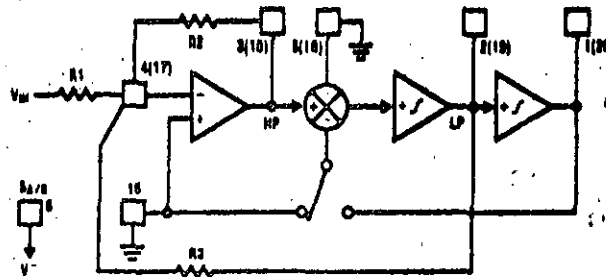


FIGURE 11. MODE 6a

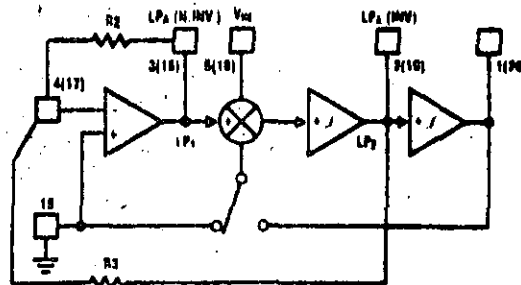


FIGURE 12. MODE 6b

## Applications Information

### HOW TO USE THE $f_{CLK}/f_0$ RATIO SPECIFICATION

The MF10 is a switched capacitor filter designed to approximate the response of a 2nd order state variable filter. When the sampling frequency is much larger than the frequency band of interest, the sampled data filter is a good approximation to its continuous time equivalent. In the case of the MF10, this ratio is about 50:1 or 100:1. Nevertheless the filter's response must be examined in the z-domain in order to obtain the actual response. It can be shown that the clock frequency to center frequency ratio,  $f_{CLK}/f_0$ , and the quality factor, Q, deviate from their ideal values determined in the continuous time domain. These deviations are shown graphically in Figures 13 and 14. The ratio,  $f_{CLK}/f_0$ , is a function of the ideal Q and the largest errors occur for the lowest values of Q.

The curve for the  $f_{CLK}/f_0$  ratio versus the ideal Q has been normalized for a Q of 10 which is the Q value used for the  $f_{CLK}/f_0$  ratio testing of the MF10. At this point the  $f_{CLK}/f_0$  ratio is 49.94 in the 50:1 mode and 99.35 in the 100:1 mode. These values are within a maximum tolerance of  $\pm 0.6\%$  (MF10B) and  $\pm 1.5\%$  (MF10C). The above tolerances hold for the entire range of Q's; in other words, at 50:1, an MF10H has a ratio of  $49.94 \pm 0.6\%$  at  $Q = 10$  and this ratio becomes  $(49.94 \pm 0.6\%)$  at  $Q = 2.1$ . If these small errors cannot be tolerated, the clock frequency or the resistor's ratio, in Mode 3 and Mode 2, can be adjusted accordingly.

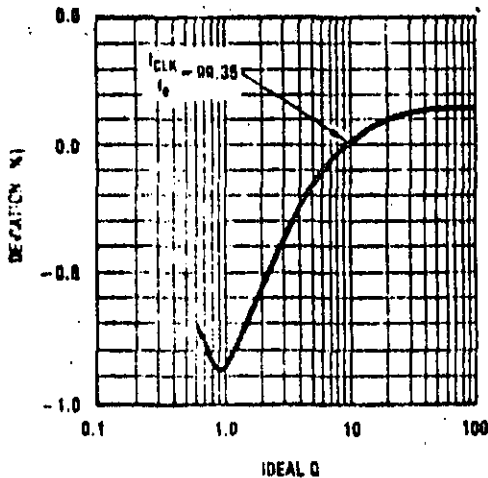


FIGURE 13

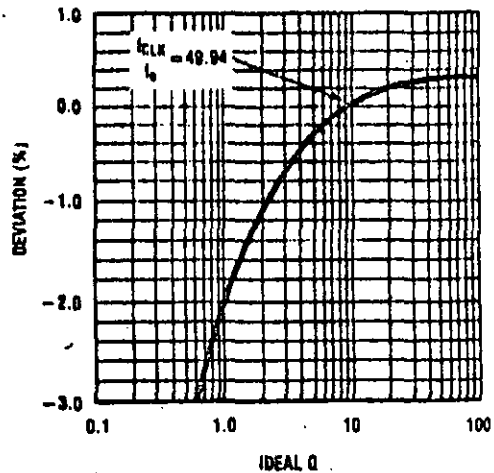


FIGURE 14

### A SIMPLE AND INFORMATIVE FILTER DESIGN USING THE MF10

**Example 1:** Design a 4th order 2 kHz lowpass maximally flat (Butterworth filter). The overall gain of the filter is desired to be equal to 1V/V.

The 4th order filter can be built by cascading two 2nd order sections of  $(f_0, Q)$  equal to:  $Q = 0.541, f_0 = 2 \text{ kHz}, Q = 1.306, f_0 = 2 \text{ kHz}$ .

Due to the low Q values of the filter, the dynamics of the circuit are very good. Any of the modes of operation can be used but Mode 1a is the most simple:

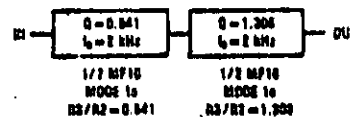


FIGURE 15

Since for the first section the smallest resistor is  $R_3$ , choose  $R_3 > 5k$ . Assume  $R_3 = 10k$  then  $R_2 = 18.48k$ . For the second section choose  $R_2 = 10k$  and then  $R_3 = 13.06k$ . Both clock input pins (10, 11) can be tied together and then driven with a single external clock. If the approximate ratio  $f_{CLK}/100$  is chosen (pin 12 is grounded), then with a 200 kHz clock, the cutoff frequency,  $f_c$ , will be at 2 kHz with a 1.5% maximum error.

The filter schematic is shown in Figure 16.

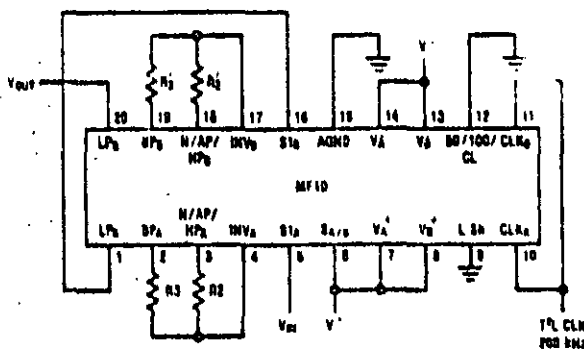


FIGURE 16. 4th Order, 2 kHz Lowpass Butterworth Filter

**Applications Information (Continued)**

With a  $\pm 5V$  supply, each output node of the IC (pins 1, 2, 3, 18, 19, 20) will swing to  $\pm 3.8V$  (MF10B) or  $\pm 3.2V$  (MF10C). The maximum gain of 1.306 occurs at pin 19 at  $f_c = 2$  kHz. The input voltage amplitude should be limited to less than  $7.8 V_{p-p}/1.306 = 5.8 V_{p-p}$ . If the Q of 1.306 section of the MF10 precedes the Q of 0.541 section, the maximum gain is at pin 1. This gain can be calculated from the expression for  $H_{OLP}$  given in Definition of Terms, and equals 1.41.

**Getting Optimum Cutoff Frequency,  $f_c$ , Accuracy (if needed):**

In the previous example, an approximate 100:1 ratio was assumed. The true  $f_{CLK}/f_c$  ratio should be read from the curves, Figures 13 and 14. At 100:1 the normalized ratio to Q = 10 is:  $f_{CLK}/f_c = 99.35$ . For Q's of 0.541 and 1.306 this ratio becomes  $99.35 - 0.75\% = 98.6$ . For a 2 kHz  $f_c$  the clock frequency should be  $2 \text{ kHz} \times 98.6 = 197.2 \text{ kHz}$ .

With an MF10B and a 197.2 kHz clock, the maximum error on the 2 kHz cutoff frequency is  $\pm 0.6\%$  as indicated in the specs.

If only a 200 kHz is available in Mode 1a, the true value of  $f_c$  and its maximum error is:  $200 \text{ kHz}/(98.6 \pm 0.6\%) = 2028 \pm 0.6\%$ .

If only a 200 kHz is available and there is need for a tight tolerance cutoff frequency, then Mode 3 should be used instead of Mode 1a. The resistor ratios are:

- |                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| 1st Section, Q = 0.541 | 2nd Section, Q = 1.306 |
| R2/R4 = 0.972          | R2/R4 = 0.972          |
| R3/R2 = 0.548          | R3/R2 = 1.324          |
| R4/R1 = 1              | R4/R1 = 1              |

**MF10 OFFSETS**

The switched capacitor integrators of the MF10 have higher equivalent input offset than the typical R,C integrator of a discrete active filter. These offsets are created by a parasitic charge injection from the switches into the integrating capacitors; they are temperature and clock frequency independent and their sign is shown to be consistent from part to part. The input offsets of the CMOS op amps also add to the overall offset, but their contribution is very small. Figure 17 shows an equivalent circuit from where output DC offsets can be calculated.

$V_{OS1} = 0 \text{ mV to } \pm 10 \text{ mV}$

$V_{OS2} = \text{charge injected offset plus op amp offset}$   
 $= -120 \text{ mV to } -170 \text{ mV (at 50:1)}$

$V_{OS3} = \text{charge injected offset plus op amp offset}$   
 $= 100 \text{ mV to } 150 \text{ mV (at 50:1)}$

The  $V_{OS2}$  and  $V_{OS3}$  numbers approximately double at 100:1.

**Output Offsets**

The DC offset at the BP output(s) of the MF10 is equal to the input offset of the lowpass switched capacitor integrator,  $V_{OS3}$ .

The DC offsets at the remaining outputs are roughly dependent upon the mode of operation and resistor ratios.

**Mode 1 and Mode 4**

$V_{OS(M)} = V_{OS1} \left( \frac{1}{Q} + 1 + \left| \left| H_{OLP} \right| \right| \right) - \frac{V_{OS3}}{Q}$

$V_{OS(BP)} = V_{OS3}$

$V_{OS(LP)} = V_{OS(M)} - V_{OS3}$

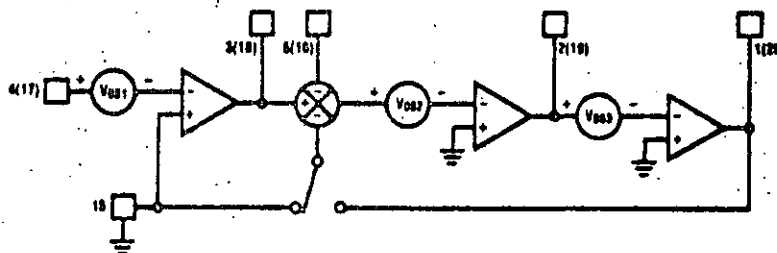


FIGURE 17

### Applications Information (Continued)

#### Mode 2 and Mode 6

$$V_{OS(NI)} = \left( \frac{R_2}{R_p} + 1 \right) V_{OS1} \times \frac{1}{1 + R_2/R_4} + V_{OS2} \times \frac{1}{1 + R_4/R_2} - \frac{V_{OS3}}{Q\sqrt{1 + R_2/R_4}}$$

$$R_p = R_1 // R_2 // R_4$$

$$V_{OS(HP)} = V_{OS3}$$

$$V_{OS(LP)} = V_{OS(NI)} - V_{OS2}$$

#### Mode 3

$$V_{OS(HP)} = V_{OS2}$$

$$V_{OS(LP)} = V_{OS3}$$

$$V_{OS(LP)} = -\frac{R_4}{R_2} \left( \frac{R_2}{R_3} V_{OS3} + V_{OS2} \right) + \frac{R_4}{R_2} \left( 1 + \frac{R_2}{R_p} \right) V_{OS1}; R_p = R_1 // R_3 // R_4$$

#### Mode 1a

$$V_{OS(N.IV.BP)} = \left( 1 + \frac{1}{Q} \right) V_{OS1} - \frac{V_{OS3}}{Q}$$

$$V_{OS(IV.BP)} = V_{OS3}$$

$$V_{OS(LP)} = V_{OS(N.IV.BP)} - V_{OS2}$$

Comments on output DC offsets: For most applications, the outputs are AC coupled and the DC offsets are not bothersome unless large input voltage signals are applied to the filter. For instance, if the BP output is used and it is AC coupled, the remaining two outputs should not be allowed to saturate. If so, gain nonlinearities and  $I_{o,Q}$  errors will occur. For Mode 3 of operation a word of caution is necessary: by allowing small  $R_2/R_4$  ratios and high  $Q$ , the LP output will exhibit a couple of volts of DC offset and an offset adjustment should be made.

An extreme example: Design a 1.76 kHz BP filter with a  $Q$  of 21 and a gain equal to unity. The MF10 will be driven with a 250 kHz clock, and it will be switched 50:1.

$$\text{Resistor values: } \sqrt{\frac{R_2}{R_4}} = \frac{f_o}{f_{CLK}} \times 50 = 0.352; \frac{R_2}{R_4} = 0.124$$

$$\frac{R_3}{R_2} = 21 \times \frac{1}{0.352} = 59.63; \frac{R_3}{R_1} = 1$$

Since  $R_3/R_2$  is the highest resistor ratio, start with  $R_2 = 10k$ , then  $R_3 = 600k$ ,  $R_1 = 600k$ ,  $R_4 = 80k$ . Assuming  $V_{OS1} = 2mV$ ,  $V_{OS2} = -150mV$ ,  $V_{OS3} = 150mV$ , the DC offset at the LP output is  $V_{OS(LP)} = +1.2V$ . The offset adjustment will be done by injecting a small amount of current into the inverting input of the first op amp, Figure 18. This will change the effective  $V_{OS1}$ , but the output DC offset of the HP and BP will remain unchanged.

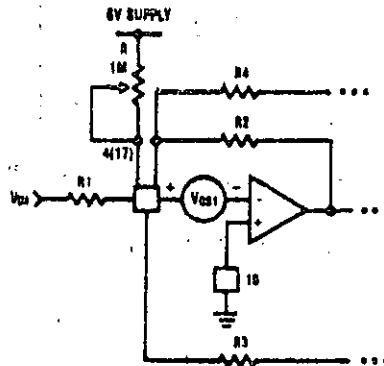


FIGURE 18.  $V_{O3}$  Adjust Scheme



## TP5116A, TP5117A, TP5156A Monolithic CODECs

### General Description

The TP5116A, TP5117A and TP5156A are monolithic PCM CODECs implemented with double-poly CMOS technology. The TP5116A and TP5117A are intended for  $\mu$ -law applications and the TP5156A is for A-law applications. The TP5117A has a D3 compatible format for line card compatibility with the TP5156A.

Each device contains separate D/A and A/D circuitry, all necessary sample and hold capacitors, and internal auto-zero circuits. Each device also contains a precision internal voltage reference, eliminating the need for an external reference. There are no internal connections to pins 15 or 18, making them directly interchangeable with CODECs using external reference components.

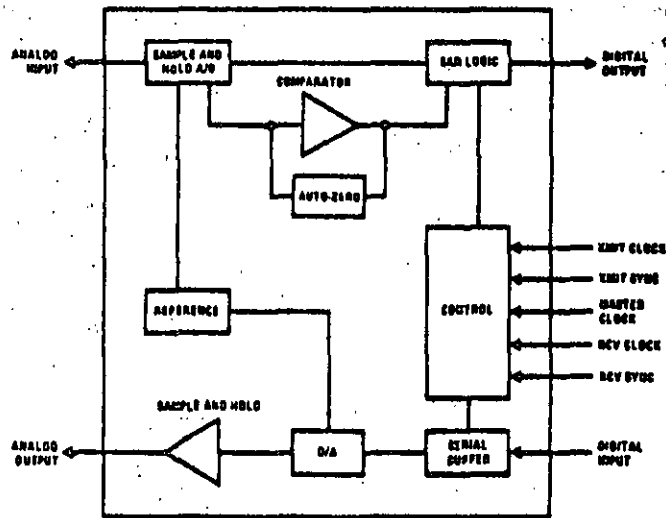
All devices are intended to be used with the TP3040 monolithic PCM filter which provides the input anti-aliasing function for the encoder and smooths the output

of the decoder and corrects for the  $\sin x/x$  distortion introduced by the decoder sample and hold output.

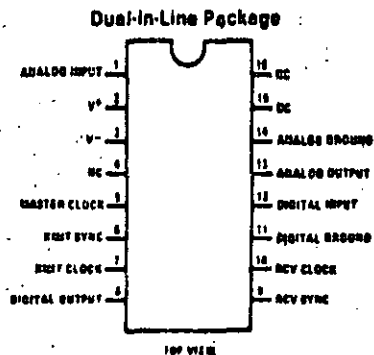
### Features

- ▣ Low operation power — 50 mW typical
- ▣  $\pm 5V$  operation
- ▣ TTL compatible digital interface
- ▣ Internal precision reference on TP5116A, TP5117A and TP5156A
- ▣ Internal sample and hold capacitors
- ▣ Internal auto-zero circuit
- ▣ TP5116A— $\mu$ -law coding (sign plus magnitude format)
- ▣ TP5117A— $\mu$ -law, D3 compatible format
- ▣ TP5156A—A-law coding
- ▣ Synchronous or asynchronous operation

### Simplified Block Diagram

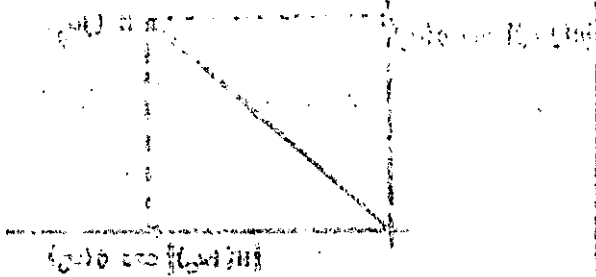


### Connection Diagram



### 3.8 CASOS PRACTICOS

Existe una gran diversidad de sistemas en donde se utilizan filtros activos como partes integrantes de los mismos. Como ejemplo, a continuación se presentan dos ponencias que describen el desarrollo y funcionamiento de un Trazador de Nyquist y un Sintetizador Armónico; diseñados y construidos en el Departamento de Ingeniería de Control de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Para el primer caso, hubo la necesidad de diseñar dos filtros paso-bajas, para el segundo, seis filtros paso-banda.



(1)  $H(s) = \frac{1}{s+1}$

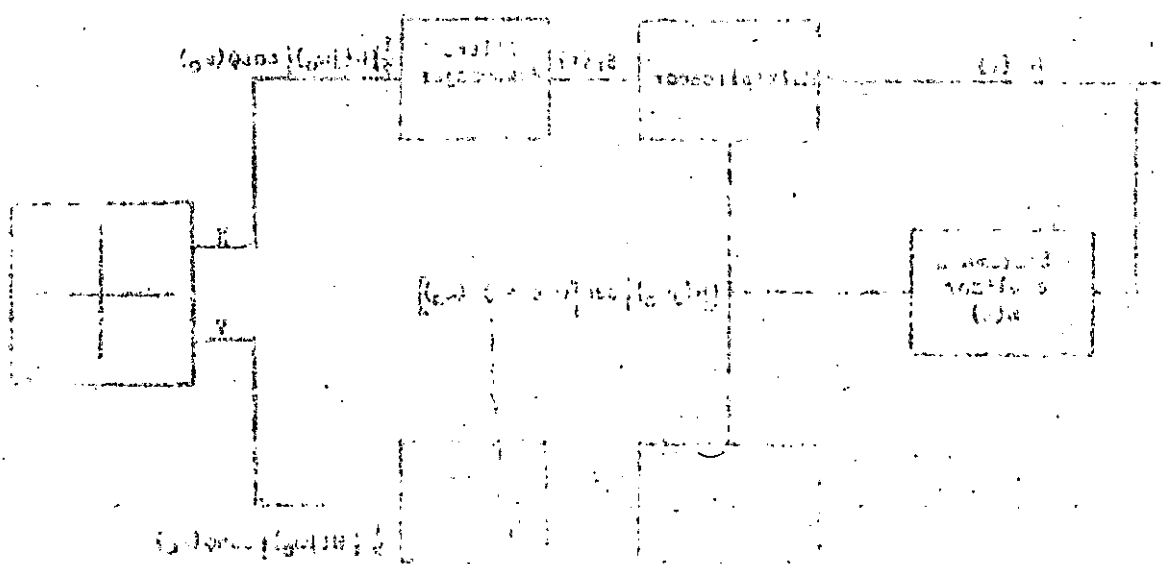
(2)  $H(s) = \frac{1}{s^2+2s+2}$

(3)  $H(s) = \frac{1}{s^2+1}$

(4)  $H(s) = \frac{1}{s^2+2s+1}$

(5)  $H(s) = \frac{1}{s^2+1}$

(6)  $H(s) = \frac{1}{s^2+1}$



**GRAFICADOR DE LA TRAZA POLAR DE NYQUIST Y VECTOROSCOPIO PARA AUXILIO DIDACTICO**

Antonio Salvá Calleja  
 Víctor M. Sánchez Esquivel  
 Boris Escalante Ramírez

División de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
 Facultad de Ingeniería, UNAM.  
 Ciudad Universitaria  
 04510 México, D.F.

Resumen - En el análisis de los sistemas estables lineales e invariables con el tiempo juega un papel muy importante la respuesta senoidal permanente. Este análisis puede realizarse por distintos métodos; entre otros, la traza polar de Nyquist y el análisis fasorial (1).

En este trabajo se presenta el diseño de un dispositivo capaz de representar en un graficador u osciloscopio la traza polar o los fasores de interés de un sistema eléctrico.

Cabe aclarar que aunque la finalidad del dispositivo es de apoyo didáctico, puede utilizarse también para el análisis de las características de amplificadores, filtros, etc. (V.g., ancho de banda, frecuencia central, margen de ganancia y de fase, etc.)

**1. PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO DEL DISPOSITIVO**

Es conocido (2) que la respuesta permanente de un sistema estable, lineal o invariable con el tiempo a una excitación senoidal de frecuencia  $\omega_0$  es

$$y(t) = |H(j\omega_0)| \text{sen}(\omega_0 t + \phi(\omega_0)) \quad (1)$$

que también puede escribirse como

$$y(t) = I_m (H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t}) \quad (2)$$

donde

$$H(j\omega_0) = |H(j\omega_0)| \angle \phi(\omega_0) = H(\omega_0) \phi(\omega_0) \quad (3)$$

es el fasor asociado a la respuesta (2).

Si se desea representar en el plano complejo dicho fasor, como se muestra en la figura (1), es necesario conocer:  $|H(j\omega_0)| \cos \phi(\omega_0)$  y  $|H(j\omega_0)| \text{sen} \phi(\omega_0)$

Para obtener físicamente los componentes de  $H(j\omega_0)$  es necesario multiplicar a la ecuación (1) por  $\text{sen} \omega_0 t$  y  $\text{cos} \omega_0 t$  y posteriormente filtrar los productos resultantes.

$$\text{sen } \omega_0 t \left[ |H(j\omega_0)| \text{sen} (\omega_0 t + \phi(\omega_0)) \right] = \frac{1}{2} |H(j\omega_0)| \left[ \cos \phi(\omega_0) - \cos (2\omega_0 t + \phi(\omega_0)) \right] \quad (4)$$

$$\text{cos } \omega_0 t \left[ |H(j\omega_0)| \text{sen} (\omega_0 t + \phi(\omega_0)) \right] = \frac{1}{2} |H(j\omega_0)| \left[ \text{sen} \phi(\omega_0) + \text{sen} (2\omega_0 t + \phi(\omega_0)) \right] \quad (5)$$

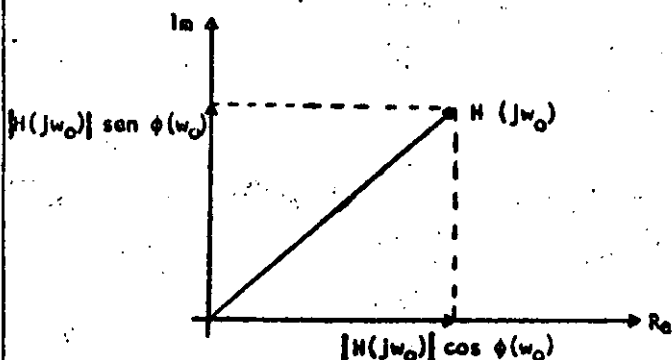


Fig. 1. Representación del fasor de  $H(j\omega_0)$ .

Las ecuaciones (4) y (5) constan de dos componentes; una de valor promedio y otra de alta frecuencia. Las componentes que interesan son las que representan el valor promedio de cada producto, por lo que es necesario utilizar un filtro pasa-bajas para eliminar las componentes no deseadas.

Si se conectan las salidas de los filtros pasa-bajas a los canales X, Y de un graficador, en la pantalla aparecerá el extremo del fasor de interés. En la figura (2) se muestra el diagrama de bloques para realizar lo anterior.

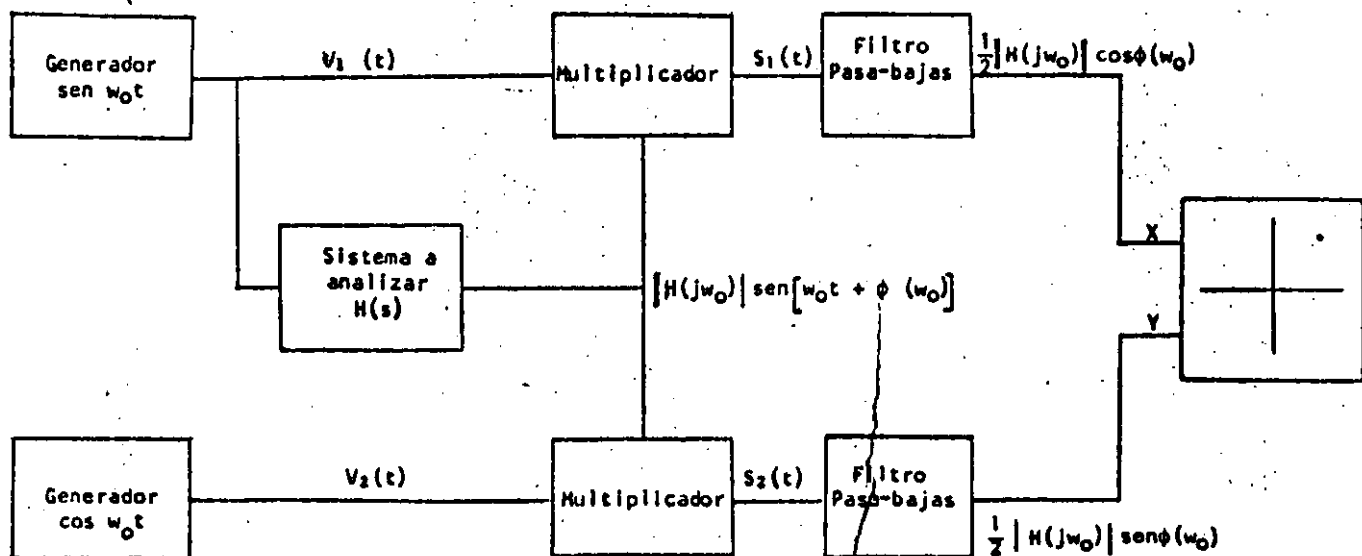


Fig. 2. Diagrama de bloques básico del dispositivo.



II. DISEÑO Y REALIZACIÓN DEL DISPOSITIVO

Para llevar a cabo la multiplicación de la ecuación (1) por  $\text{sen } \omega_0 t$  y  $\text{cos } \omega_0 t$  es necesario generar dos señales senoidales de la misma amplitud desfasadas  $0.5\pi$  radianes para toda frecuencia  $\omega_0$ . Nótese que si las señales  $V_1$  y  $V_2$  que aparecen en la figura (2) no fueran senoidales sino cuadradas, desfasadas  $0.5\pi$  radianes, las señales que aparecerían a la salida de los filtros no sufrirían cambio alguno (3). Más adelante se explicará esto con más detalle.

En el desarrollo del prototipo se optó por trabajar con señales cuadradas para las funciones  $V_1$  y  $V_2$  debido a que los circuitos necesarios para generar un desfase de  $0.5\pi$  radianes en la gama de frecuencias en las que el aparato trabaja, resultaron ser más económicos y sencillos que los necesarios para generar dos señales senoidales desfasadas el mismo ángulo (4), (5), (6), (7).

Con el fin de generar las dos señales cuadradas con el desfase deseado, se utilizó el generador de funciones 8038(6), que produce tres señales de la misma frecuencia pero de forma diferente, a saber: señal triangular, señal senoidal y señal cuadrada, como se muestra en la figura (3).

La segunda señal cuadrada se obtiene a la salida de un comparador (7) de 0 volts de umbral cuya entrada es la señal triangular. Ver figura (4).

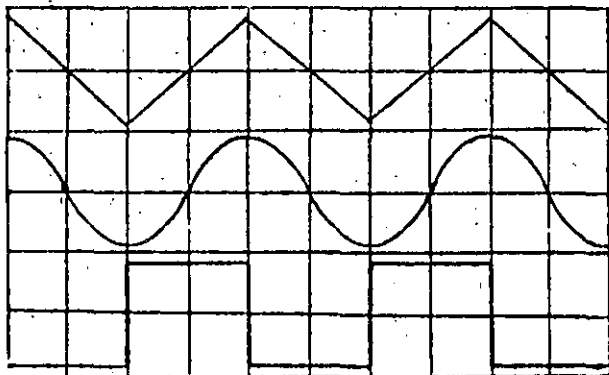


Fig. 3. Relación de fase de las formas de onda del generador 8038.

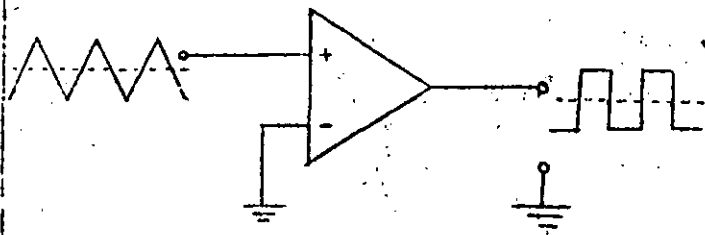


Fig. 4. Circuito para generar la señal cuadrada desfasada.

Para multiplicar las señales cuadradas por la salida del sistema a analizar, se empleó la configuración mostrada en la figura (5), que consiste en utilizar conmutadores analógicos (switches) (4), (8) controlados por las mismas señales cuadradas, los cuales muestrean a la señal de salida del sistema a analizar.

$H(j\omega_0) \text{sen}(\omega_0 t + \phi(\omega_0))$ , producida por la señal  $\text{sen } \omega_0 t$  que proviene del generador de funciones y que se encuentra en fase con una de las dos señales cuadradas. El resultado de las multiplicaciones se muestra a continuación.

$$S_1(t) = [ |H(j\omega_0)| \text{sen}(\omega_0 t + \phi) ] \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} (\text{sen } \omega_0 t + \frac{1}{3} \text{sen } 3 \omega_0 t + \frac{1}{5} \text{sen } 5 \omega_0 t + \frac{1}{7} \text{sen } 7 \omega_0 t + \dots) \right] =$$

$$= |H(j\omega_0)| \left[ \frac{1}{2} \text{sen}(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{\pi} [\cos \phi - \cos(2\omega_0 t + \phi)] + \frac{1}{3\pi} [\cos(2\omega_0 t - \phi) - \cos(4\omega_0 t + \phi)] + \frac{1}{5\pi} [\cos(4\omega_0 t - \phi) - \cos(6\omega_0 t + \phi)] + \frac{1}{7\pi} [\cos(6\omega_0 t - \phi) - \cos(8\omega_0 t + \phi)] + \dots \right] \quad (6)$$

$$S_2(t) = [ |H(j\omega_0)| \text{sen}(\omega_0 t + \phi) ] \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} (\cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3 \omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5 \omega_0 t - \frac{1}{7} \cos 7 \omega_0 t + \dots) \right] =$$

$$= |H(j\omega_0)| \left[ \frac{1}{2} \text{sen}(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{\pi} [\text{sen } \phi + \text{sen}(2\omega_0 t + \phi)] + \frac{1}{3\pi} [\text{sen}(2\omega_0 t - \phi) - \text{sen}(4\omega_0 t + \phi)] - \frac{1}{5\pi} [\text{sen}(4\omega_0 t - \phi) - \text{sen}(6\omega_0 t + \phi)] + \frac{1}{7\pi} [\text{sen}(6\omega_0 t - \phi) - \text{sen}(8\omega_0 t + \phi)] - \dots \right] \quad (7)$$

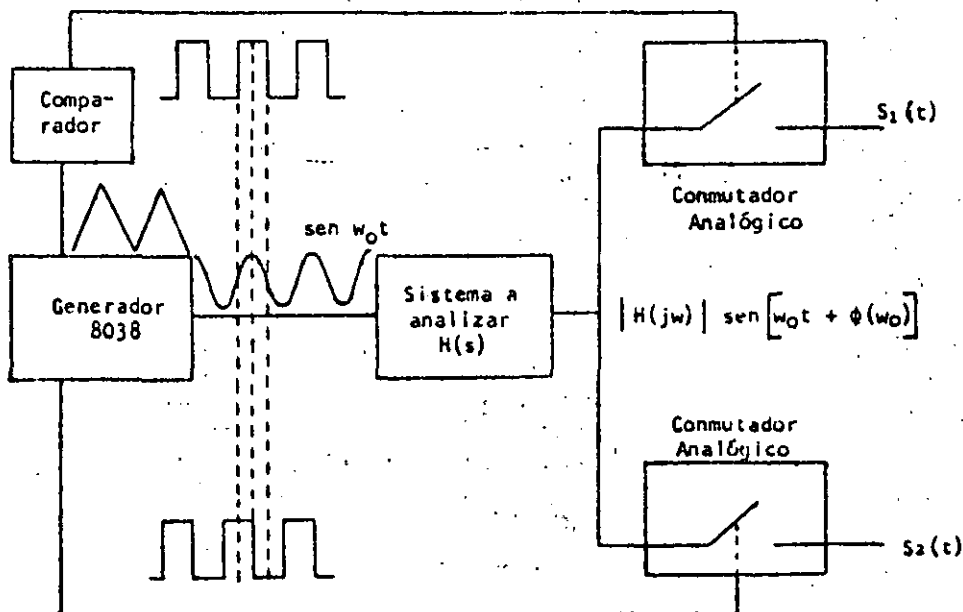


Fig. 5. Diagrama de bloques para realizar la multiplicación de  $H(j\omega_0) \text{sen}(\omega_0 t + \phi(\omega_0))$  por dos señales cuadradas desfasadas  $0.5\pi$  radianes.

De las ecuaciones anteriores, los términos que interesan son  $\frac{1}{\pi} |H(j\omega_0)| \cos\phi(\omega_0)$  y  $\frac{1}{\pi} |H(j\omega_0)| \sin\phi(\omega_0)$ , por lo que es necesario eliminar los términos restantes mediante filtros pasa-bajas. Las salidas de dichos filtros serán proporcionales a  $M(\omega_0) \cos\phi(\omega_0)$  y  $M(\omega_0) \sin\phi(\omega_0)$ , que al aplicarse respectivamente a los canales X e Y de un graficador, originarán un punto cuyas coordenadas son proporcionales a las que tiene el extremo del fasor correspondiente a  $|H(j\omega_0)| \angle \phi(\omega_0)$ .

Existen varias aproximaciones y técnicas (9) para llevar a cabo el diseño de los filtros pasa-bajas anteriormente mencionados, habiéndose escogido una aproximación Butterworth con la plantilla de diseño mostrada en la figura (6). Tomando en consideración que sólo deben pasar señales de corriente directa a través de los filtros y que la mínima frecuencia de operación del dispositivo es de 20Hz, se escogió una pérdida de 60db entre la frecuencia de corte de 5Hz y la frecuencia de supresión de 20Hz. El diseño de los filtros se realizó auxiliado por un paquete de computadora digital (10).

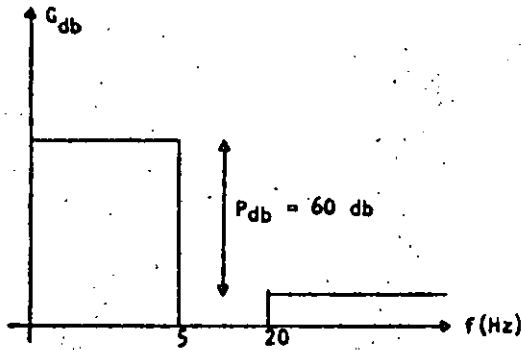


Fig. 6. Plantilla de diseño de los filtros pasa-bajas

Si se desea que el graficador u osciloscopio dibuje la traza polar, se requiere llevar a cabo un barrido de frecuencia partiendo de un valor  $\omega_i$  a otro valor  $\omega_f$ . El rango de frecuencias en las que trabaja el dispositivo que se construyó, va de 20Hz (frecuencia de supresión de los filtros) a 200 KHz (frecuencia máxima sin distorsión del generador 8038) distribuido en períodos de 3 décadas (6).

El aparato puede funcionar también como vectoroscopio, siendo necesario para este fin, que en la pantalla del osciloscopio se dibuje una línea recta entre el origen y el extremo del fasor. Esto se obtiene generando dos señales cuadradas de amplitud  $M(\omega_0) \cos\phi(\omega_0)$  y  $M(\omega_0) \sin\phi(\omega_0)$ , las que se aplican a sendos circuitos RC para obtener dos señales exponenciales periódicas (2) que aplicadas a los canales X e Y de un osciloscopio dibujan el fasor. Las limitaciones en cuanto a frecuencia, son las mismas que en el caso anterior.

Una alternativa que ofrece el dispositivo en esta modalidad, es la de poder representar en un osciloscopio los fasores correspondientes a varias variables de interés de un sistema al mismo tiempo. Para esto, se requiere multiplexar las variables cuyos fasores se desea graficar a la entrada del dispositivo.

Es importante mencionar que las variables susceptibles de ser analizadas son voltajes con respecto a tierra, voltajes diferenciales y corrientes, asociados todos ellos a los elementos del sistema a analizar. Para realizar lo anterior se cuenta con amplificadores diferenciales para los voltajes diferenciales, y amplificadores de instrumentación con alta razón de rechazo de modo común (8) para sensar las corrientes.

En la figura (7) se presenta el diagrama de bloque del dispositivo en general.

En la figura (8) se muestra la traza polar de Nyquist correspondiente a la salida de un filtro pasa-todo de 1er. orden (9) cuya función de transferencia es

$$H(s) = \frac{RCS-1}{RCS+1} \quad R=1.8K\Omega \quad C=0.1\mu F$$

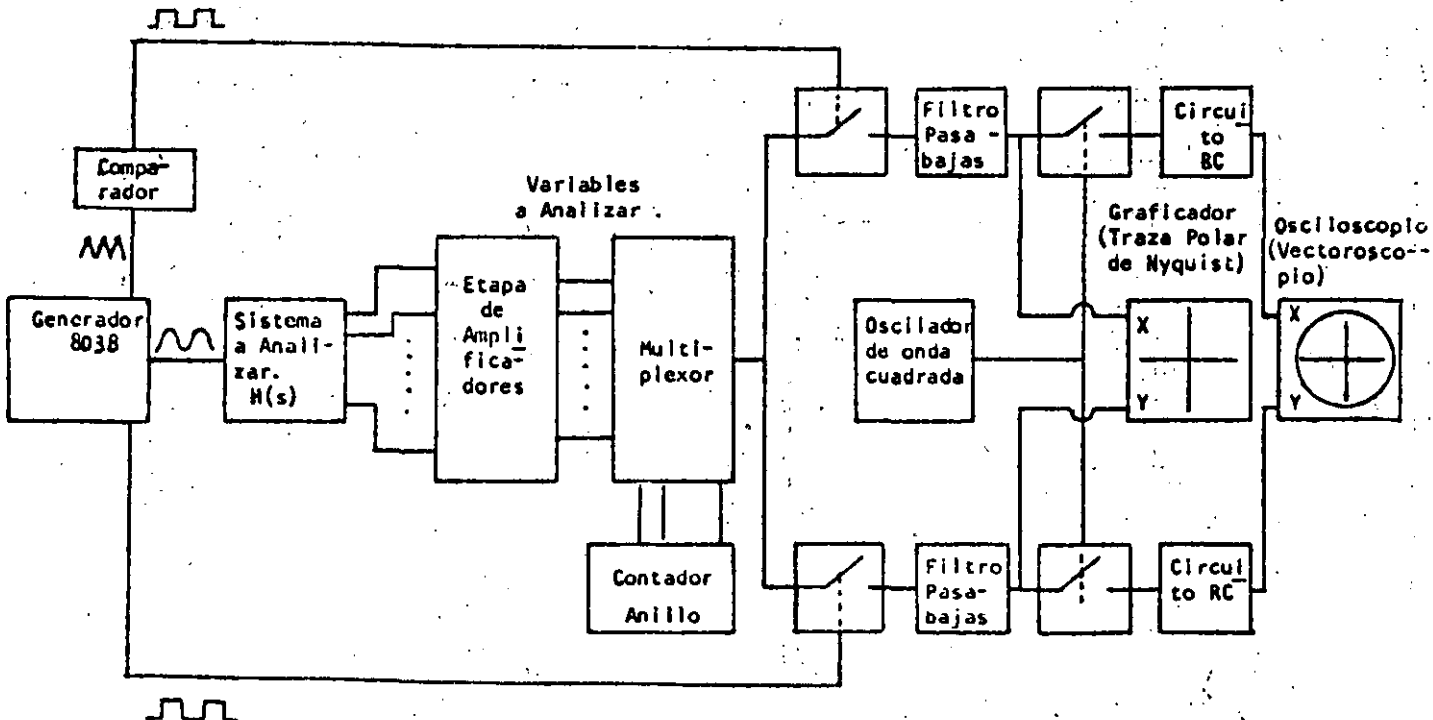


Fig. 7. Diagrama de bloques del dispositivo.

En la figura (9) aparecen algunos fasores asociados a un circuito serie RLC cuya función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{\frac{R}{L} s}{s^2 \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}}$$

$R=100 \Omega$   
 $L= 50\text{mH}$   
 $C=0.1\mu\text{f}$

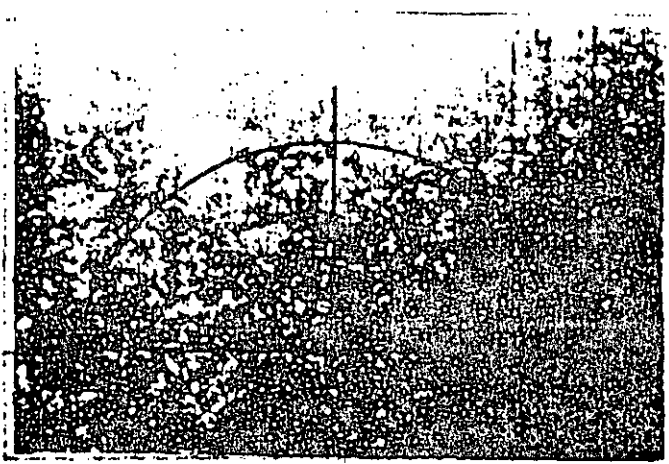


Fig. 8. Traza Polar de Nyquist de un filtro Pasa-Todo

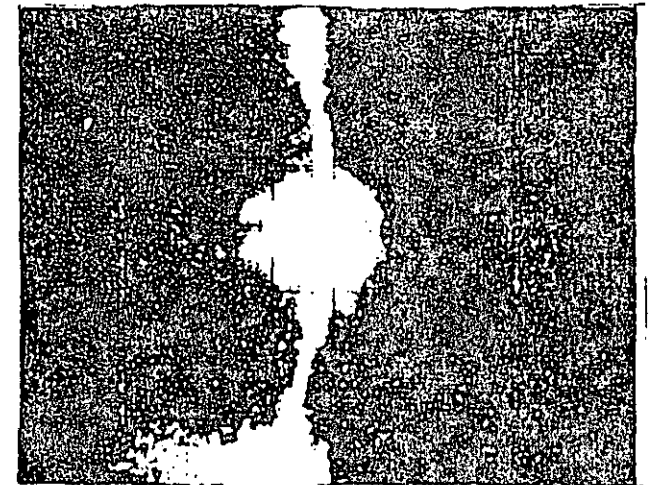


Fig. 9. Fasores asociados a los voltajes en la resistencia, inductancia y capacitancia de un circuito RLC serie.

**CONCLUSIONES**

El propósito de este proyecto ha sido el de diseñar un dispositivo pequeño, versátil, de bajo costo y fácil de operar capaz de mostrar mediante un graficador la respuesta senoidal permanente de un sistema lineal e invariable con el tiempo utilizando la traza polar o el concepto de fasor.

Debido a limitaciones en cuanto a la variedad de componentes disponibles en el mercado nacional el dispositivo trabaja en un rango de frecuencias de 20Hz a 200K Hz. Por otro lado para la primera versión del prototipo el número máximo de fasores que pueden graficarse en un osciloscopio es de cuatro pudiendo aumentar este número utilizando un multiplexor adecuado.

En la actualidad el dispositivo sirve de apoyo didáctico para los temas relacionados con la respuesta en frecuencia de algunos cursos impartidos por el Departamento de Ingeniería de Control de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

**REFERENCIAS**

{1} Ogata, Katsuhiko. Ingeniería de Control Moderno. Prentice/hall International, 1980, p.p. 406-515.  
 {2} Desoer, Charles A. y Kuh, Ernest S. Basic Circuit Theory. McGraw-Hill, p.p.269-340,110-176 .

{3} Hsu, Mwei P. Análisis de Fourier. Fondo Educativo Interamericano, S.A., 1970, p.p.1-2  
 {4} The Linear Control Circuits Data Book for Engineers Texas Instruments, second edition, p.p.145,387-391  
 {5} Function Generator Data Book EXAR Integrated Systems. May,1980.  
 {6} Data Book. INTERSIL p.p. 5-232-5-240  
 {7} Tobey, Gene E.; Gracme, Jerald G.; Huelsman, Lawrence P. Amplificadores Operativos, Diseño y Aplicación. Diana 1979 p.p. 445-453, 418-427, 245-283 .  
 {8} Schilling, Donald L. y Belove, Charles. Electronic Circuits, Discrete and Integrated. McGraw Hill. second edition, p.p. 155-161  
 {9} Huelsman J.P. and Allen P.E. Introduction to the Theory and Design of Active Filters. McGraw Hill, 1980 .  
 {10} Salvá, Antonio. "Programas Interactivos para el Diseño de Filtros Activos" ; Memoria de la IX Conferencia Internacional de Investigación y Desarrollo en Ingeniería Eléctrica y Electrónica, (MEXICON 83), Cuernavaca, Morelos, México,1983 .

3.8.2

SINTETIZADOR ARMÓNICO  
PARA AUXILIO DIDACTICO

Antonio Salva Calleja  
Marco Adrián Maguay

División de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
Facultad de Ingeniería, UNAM.  
Cd. Universitaria  
04510 México, D.F.

Resumen - Se presenta en este trabajo, el desarrollo de un dispositivo que, mediante el empleo de circuitos electrónicos analógicos, sintetiza una onda periódica con un contenido de cinco armónicas y componente de valor promedio, pudiéndose variar la magnitud de cada armónica y la componente de valor promedio. Mediante el empleo de un osciloscopio de doble trazo puede observarse simultáneamente el espectro en magnitud de la señal que el dispositivo este sintetizando, así como también la propia señal sintetizada. El dispositivo trabaja a una frecuencia fija de 100 Hertz.

INTRODUCCION

La idea central al desarrollar el dispositivo fué el partir de una onda periódica rica en armónicas para posteriormente mediante el empleo de cinco filtros paso-banda sintonizados adecuadamente, obtener cada una de las primeras cinco armónicas y sumarlas con pesos variables.

Para el despliegado de el espectro se emplearon circuitos detectores de valor pico cuyas salidas se multiplexaron analógicamente con un período de repetición igual a el que corresponde a la componente fundamental, de esta manera a la salida del multiplexor analógico se tiene el espectro de la señal que se está sintetizando; pudiéndose observar sincronizadamente en un osciloscopio de doble trazo la señal y su espectro.

La onda periódica utilizada fué un tren de pulsos con un ciclo de trabajo del 10% y una frecuencia de 100 Hertz.

En la figura 1 se muestra un diagrama de bloques del sintetizador armónico.

A continuación se detallan cada una de las etapas que aparecen en el diagrama de bloques de la figura 1.

GENERADOR DEL TREN DE PULSOS

Esta etapa se construyó mediante el empleo de un circuito integrado (LM555) empleando la configuración mostrada en la figura 2, pudiéndose ajustar el ciclo de trabajo independientemente de la frecuencia de la señal.

En la figura 3 se ilustra la forma de onda que genera el circuito de la figura 2.

Las ecuaciones que definen los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  son las siguientes:

$$t_1 = (R_3 + R_0)C \ln \left( \frac{2V_{cc} - 1.8}{V_{cc} - 1.8} \right) \quad (1)$$

$$t_2 = (R_2 + R_1)C \ln \left( \frac{2V_{cc} - 1.8}{V_{cc} - 1.8} \right) \quad (2)$$

Como la frecuencia que se requiere generar es de 100 Hertz y el ciclo de trabajo del 10% los valores de  $t_1$  y  $t_2$  son:

$$t_1 = 1 \text{ ms}$$

$$t_2 = 9 \text{ ms}$$

Considerando esto en las ecuaciones (1) y (2) y haciendo de antemano  $C=0.22\mu\text{f}$ ,  $R_2=33\text{K}\Omega$  y  $R_3=3.3\text{K}\Omega$  los valores de las resistencias  $R_0$  y  $R_1$  resultan ser los siguientes:

$$R_0 = 1.5\text{K}\Omega$$

$$R_1 = 10\text{K}\Omega$$

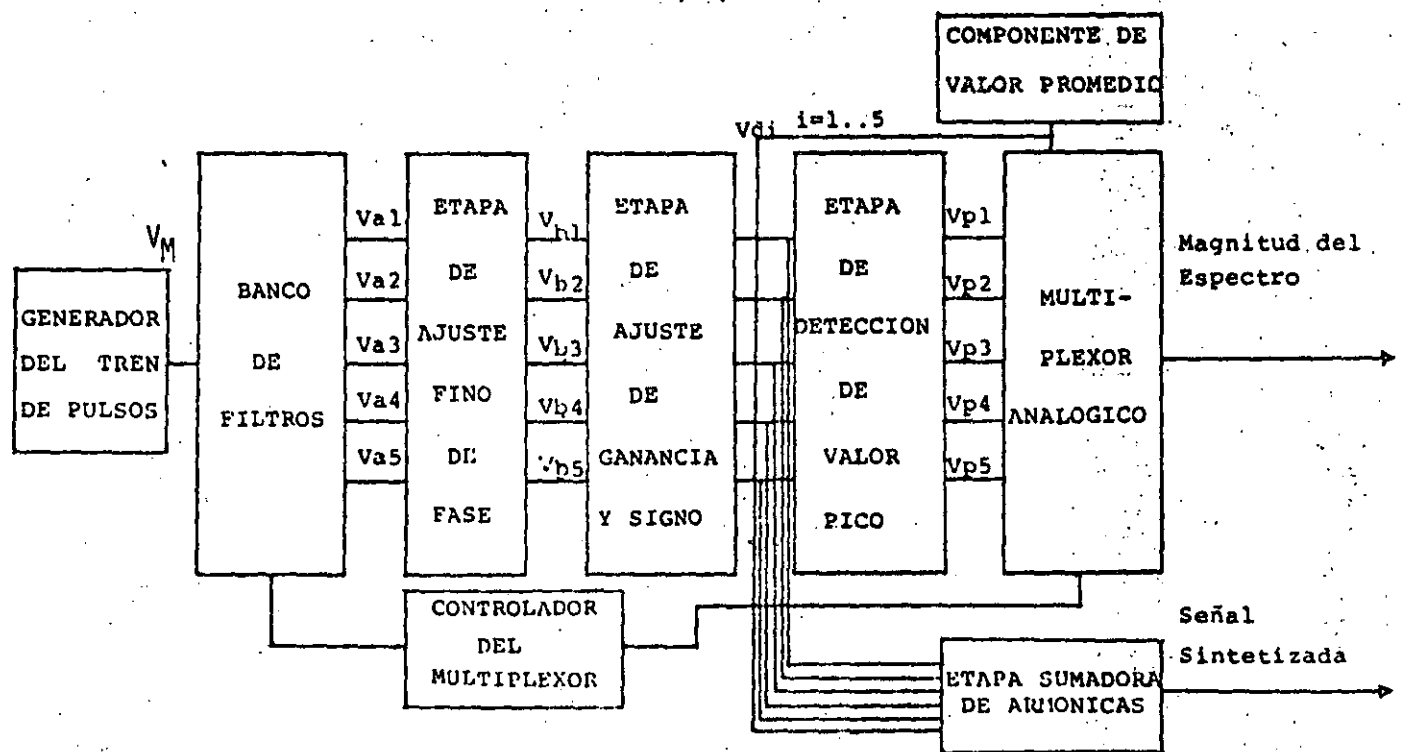


Fig. 1. Diagrama de bloques del sintetizador armónico.

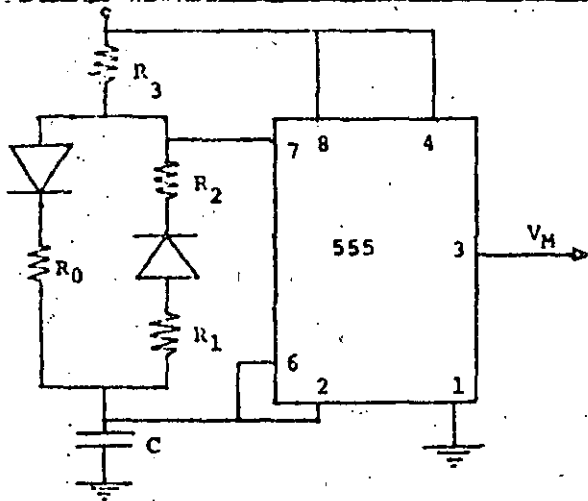


Fig. 2. Configuración empleada para la generación del tren de pulsos.

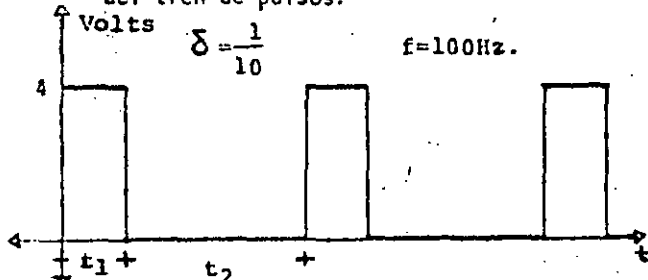


Fig. 3. Tren de pulsos generado por el circuito de la figura 2.

**BANCO DE FILTROS**

Esta etapa está formada por cinco filtros paso-banda cuya especificación de diseño se muestra en la figura 4.

Los filtros se realizaron en forma activa, existiendo técnicas muy conocidas para llevar a cabo el diseño (1), (2).

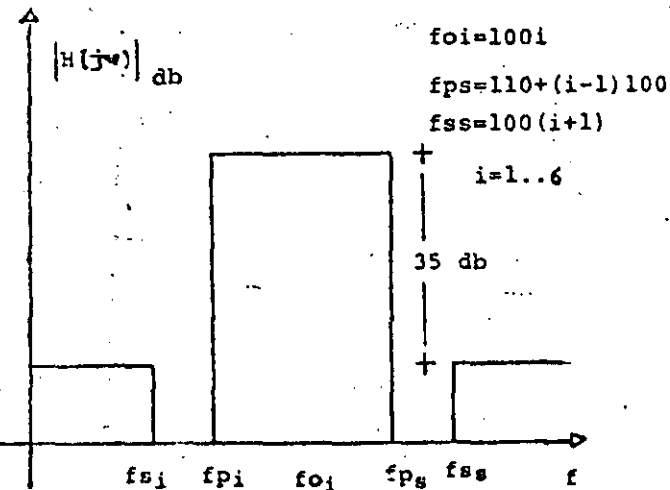


Fig. 4. Especificación de diseño de los filtros paso-banda empleados.

El tipo de aproximación escogida para los filtros fué la de Butterworth debido a su facilidad de ajuste, llevándose a cabo el diseño y sintonización de los filtros mediante un programa de computadora (3), se encontró que el orden adecuado para los filtros es 4.

En la figura 5 se muestra la representación esquemática del filtro para obtener la componente fundamental siendo los demás filtros de la misma forma solo que de valores distintos en sus componentes.

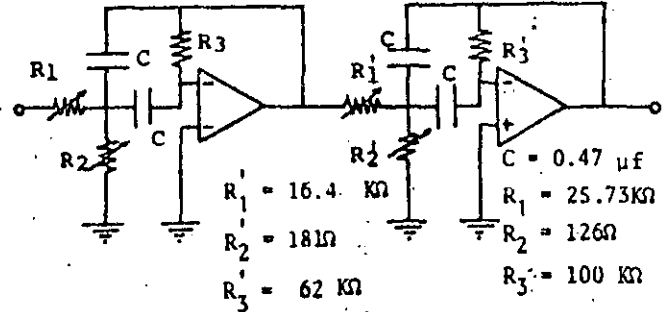


Fig. 5. Filtro paso-banda Butterworth con frecuencia central de 100 Hz.

**ETAPA DE AJUSTE FINO DE FASE**

Debido a que es muy difícil que los filtros paso-banda queden ajustados de una forma perfecta, (ya que entre otras cosas, las componentes con las que son contruidos siempre tendrán una cierta tolerancia alrededor de sus valores nominales), se hizo necesario diseñar una etapa que hiciera correcciones en el ángulo de fase de cada armónica de modo que la relación de fase entre cada una de las armónicas fuese la correcta (ver figura 6).

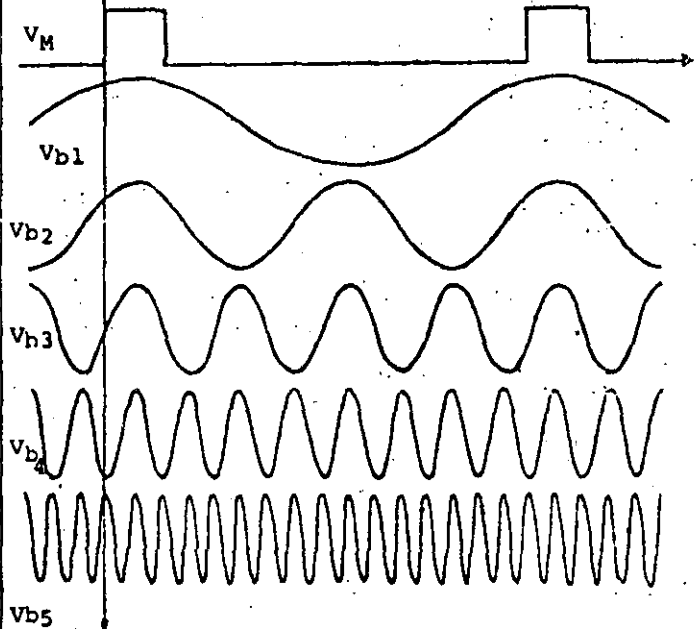


Fig. 6. Tren de pulsos y armónicas cuando el ángulo de fase de cada armónica está correctamente ajustado.

Para llevar a cabo el ajuste fino de fase se escogió un circuito paso-banda RC de modo que se pudieran hacer correcciones de fase tanto de adelanto como de atraso, la razón para escoger un circuito RC, se debió a que para este tipo de circuitos los polos de la función de transferencia son reales, garantizándose de esta manera que el factor de calidad Q del filtro paso-banda utilizado es pequeño, (puede probarse fácilmente que será siempre menor ó igual a 0.5), siendo esto recomendable en este caso ya que la magnitud de la pendiente de la curva de fase de un filtro paso banda es una función creciente de el factor de calidad "Q" del filtro, al ser bajo el factor Q se garantiza que la pendiente mencionada anteriormente es pequeña, lo cual es adecuado, ya que los ajustes de ángulo que se requiere hacer a cada armónica no son muy grandes, además al ser la "Q" pequeña se asegura que el circuito corrector de fase no originará cambios grandes en la amplitud de cada armónica al efectuar el ajuste de fase correspondiente. El circuito utilizado se muestra

en la figura 7.

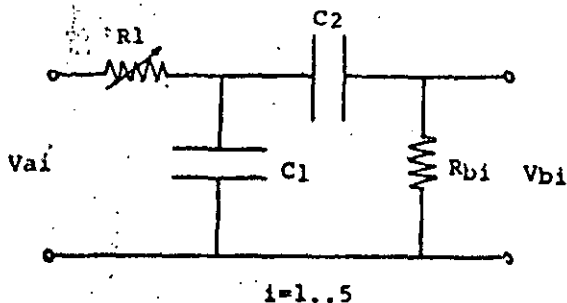


Fig. 7. Circuito básico utilizado para efectuar la corrección de fase.

La función de transferencia del circuito es:

$$\frac{V_{b_i}}{V_{a_i}} = \frac{\frac{1}{R_1 C_1} s}{s^2 + \left( \frac{1}{R_b C_2} + \frac{1}{R_b C_1} + \frac{1}{R_1 C_1} \right) s + \frac{1}{R_b R_1 C_1 C_2}} \quad (3)$$

al variar  $R_1$  se produce el ajuste de fase, escogiéndose  $R_1$  de un valor tal que haga que al estar el cursor a la mitad de su recorrido, la frecuencia de resonancia del filtro sea la de la armónica cuyo ángulo se esté ajustando; de esta manera si por ejemplo, la señal  $V_a(t)$  presenta un adelanto de fase indeseable,  $R_1$  deberá reajustarse de modo que la frecuencia de resonancia del filtro paso-banda corrector de fase sea menor que la que tiene la armónica correspondiente, se ajusta  $R_1$  hasta lograr que el ángulo de la señal  $V_b(t)$  sea el correcto; si lo que se tiene originalmente es un atraso indeseable el ajuste es el opuesto al mencionado anteriormente. La corrección se hace visualmente con el auxilio de un osciloscopio.

**ETAPA DE AJUSTE DE GANANCIA Y SIGNO**

Mediante esta etapa se ajusta la magnitud de cada armónica pudiéndose lograr además, que la fase correspondiente sea  $0^\circ$  ó  $180^\circ$ .

El circuito escogido para llevar a cabo esto es el que se muestra en la figura 8.

La función de transferencia  $\frac{V_{d_i}}{V_{b_i}}$  es

$$\frac{V_{d_i}}{V_{b_i}} = 10(2\alpha - 1) \quad (4)$$

$0 < \alpha < 1$

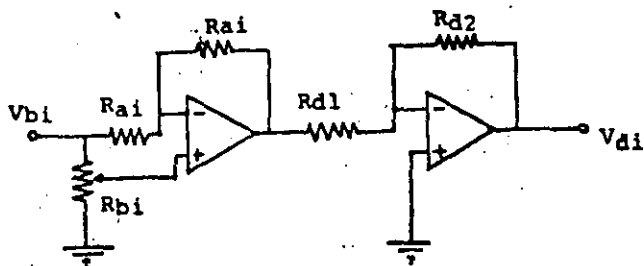


Fig. 8. Circuito escogido para el ajuste de magnitud y signo de cada armónica.

puede apreciarse que la ganancia  $\frac{V_{d_i}}{V_{b_i}}$  podrá variarse entre -10 y 10, dependiendo de la variable  $\alpha$  que a su vez está relacionada con la posición de el cursor de las resistencias variables  $R_{b_i}$ .

Si se escoge  $R_{a_i}$  de modo que  $R_{a_i} \gg R_{b_i}$  la impedancia de entrada del circuito será sensiblemente igual a  $R_{b_i}$ , lo cual es importante para poder ligar los circuitos de las figuras 7 y 8 sin que, al estar los circuitos acoplados un reajuste de la resistencia variable  $R_{b_i}$  origine un desajuste de la fase de la armónica correspondiente.

**ETAPA DE DETECCION DE VALOR PICO**

Una forma de detectar el valor pico de cada armónica es emplear un diodo seguido por un circuito RC paralelo, no se hizo de esta manera debido a que para magnitudes pequeñas en las armónicas, (comparables con el voltaje de encendido del diodo empleado), la magnitud determinada presentaría un error apreciable, por lo tanto para efectuar la detección del valor pico se empleó un circuito que no presente el inconveniente mencionado (figura 9). Una explicación detallada del funcionamiento del detector de valor pico empleado puede verse en la referencia (4).

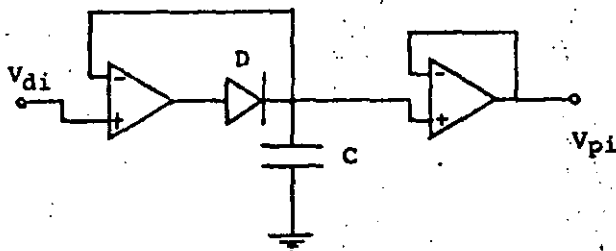


Fig. 9. Circuito que detecta el valor pico de cada armónica.

**MULTIPLEXOR ANALÓGICO**

Para construir esta etapa se emplearon seis conmutadores analógicos (switches) operados secuencialmente por señales de control generadas a partir de la sexta armónica. En la figura 10 se muestra una representación esquemática del multiplexor analógico.

Las señales  $S_0$  a  $S_5$  provienen de la etapa que genera las señales de control del multiplexor.

Físicamente los conmutadores analógicos se implementaron usando el circuito integrado CD4016.

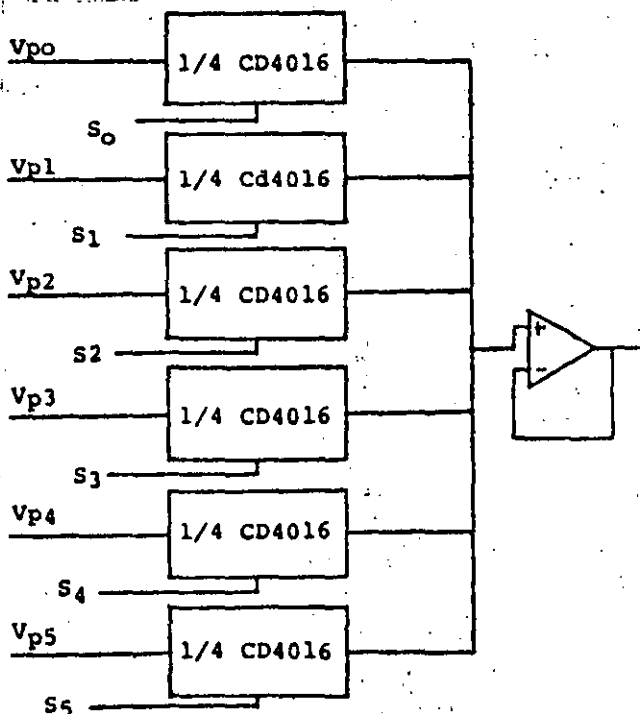


Fig. 10. Circuito empleado en la construcción del multiplexor analógico.

### CONTROLADOR DEL MULTIPLEXOR

Esta etapa genera las seis señales de control que requiere el multiplexor analógico para su funcionamiento. Como se requiere que por cada período de la onda sintetizada se despliegue un espectro, la frecuencia de reloj que controle a esta etapa debe ser la misma que la que tiene la sexta armónica; por lo tanto se construyó un sexto filtro paso-banda sintonizado a la frecuencia de la sexta armónica, como la señal de salida del filtro es senoidal se hizo necesario, construir un circuito que genere una onda cuadrada a partir de una onda senoidal de entrada.

En la figura 11 se muestra el circuito que se empleó para generar la onda cuadrada cuya frecuencia es 600 Hertz.

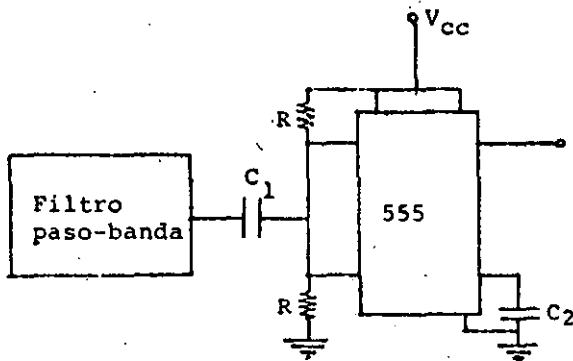


Fig. 11. Circuito empleado para generar la onda cuadrada de 600 Hz.

Para generar las seis señales  $S_0, \dots, S_5$  se implementó un contador de anillo, usando un contador base seis y un decodificador de 3 a 8. En la figura 12 se muestra el circuito empleado.

El ciclo de trabajo de cada señal de control puede ajustarse mediante la resistencia  $R_t$ .

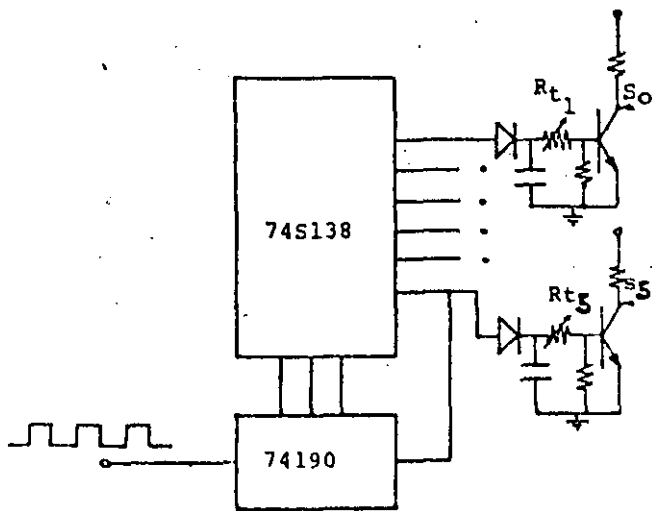


Fig. 12. Circuito empleado en la construcción del contador de anillo.

### ETAPA QUE GENERA LA COMPONENTE DE VALOR PROMEDIO

El circuito empleado para realizar esta etapa se muestra en la figura 13.

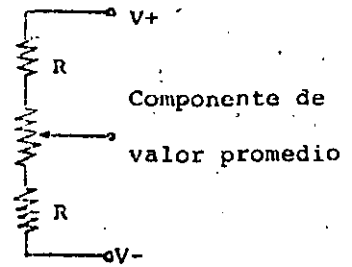


Fig. 13. Circuito empleado para generar la componente de valor promedio.

### ETAPA SUMADORA DE ARMONICAS

Para construir esta etapa se usa un sumador analógico convencional, en configuración no inversora. En la figura 14 se muestra el circuito empleado.

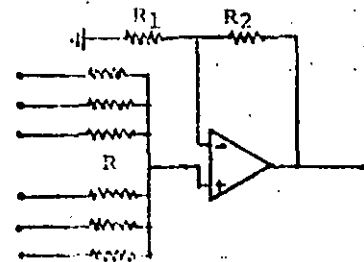


Fig. 14. Sumador de armónicas.

En la figura 15 se muestra la síntesis de una onda cuadrada y su espectro; debido a que se trata de una señal cuadrada, cuyo desarrollo en serie de Fourier (suponiendo que A y VP representan el valor pico-pico de la señal y la componente de valor promedio respectivamente) es:

$$f(t) = VP + \frac{A}{\pi} (\cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t + \dots)$$

solo se aprecian cuatro componentes en el espectro

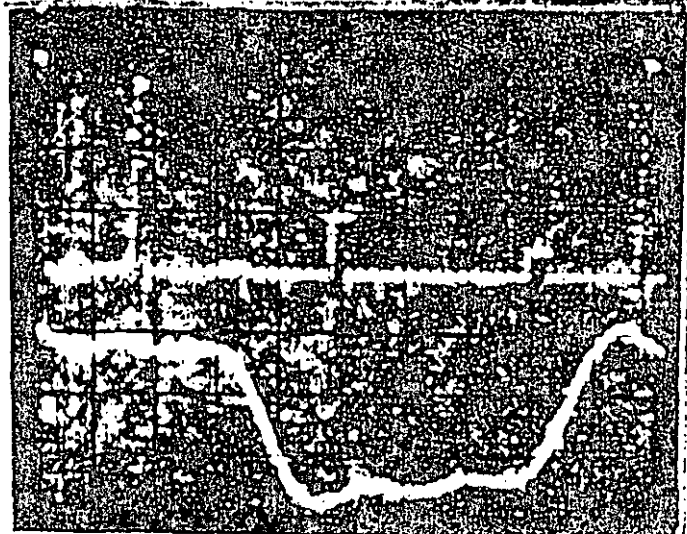


Fig. 15. Síntesis de una onda cuadrada y su espectro.

En la figura 16 se muestra un diagrama completo del sistema.

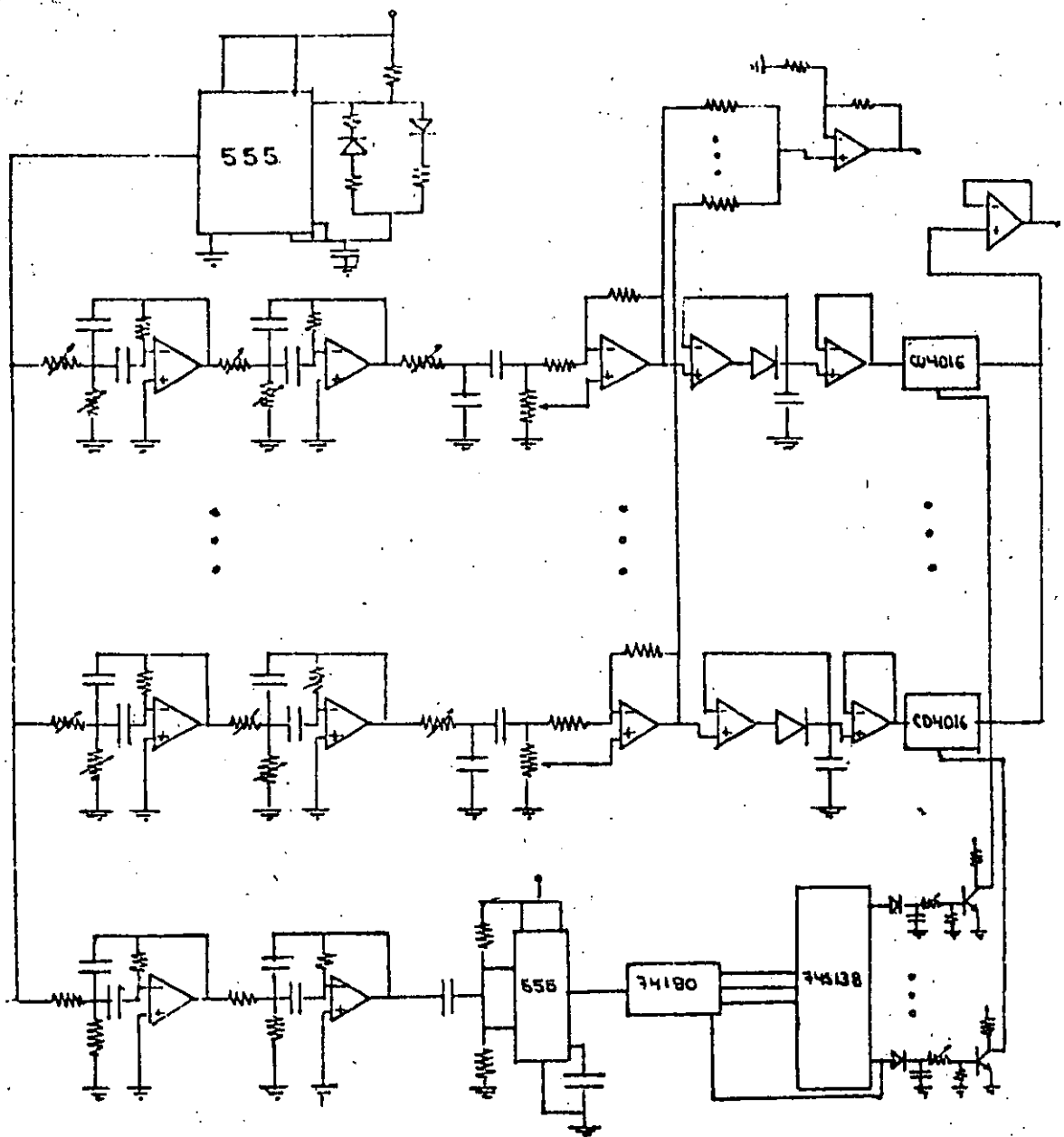


Fig. 16. Diagrama completo del sistema.

**CONCLUSIONES**

Agregando más filtros paso-banda pueden generarse más armónicas, solo que, el problema que se presentaría sería que la "Q" de los filtros que se requerirían aumenta progresivamente, llegando a niveles que harían difícil la sintonización de los mismos, además la magnitud que presentarían las señales a la salida de los filtros mencionados podría ser de un valor pequeño, siendo muy difícil separar dichas señales del ruido inherente. Por lo tanto si se requiere un sintetizador con un número mayor de armónicas (v.g. 10, 15,) es más recomendable sintetizar las armónicas empleando Mallas de Fase encadenada (PLL) (5). De cualquier forma se requerirán filtros paso-banda, (ya que las mallas de fase encadenada al multiplicar frecuencia trabajan con ondas cuadradas), solo que dichos filtros seguramente podrían ser de segundo orden.

**REFERENCIAS**

(1) Huelsman L.P. and Allen P.E.; Introduction to the theory and design of active filters; McGraw Hill, 1980.  
 (2) Bildstein P.; Filtros Activos; Marcombo Boixareu Editores; 1977.

(3) Salvá A. "Programas Interactivos Para el Diseño de Filtros Activos"; Memoria de la IX Conferencia Internacional de Investigación y Desarrollo en Ingeniería Eléctrica y Electrónica, (MEXICON 83); Cuernavaca Morelos, México, 1983.  
 (4) Irvin Robert G.; Operational Amplifiers Characteristics and Applications; Prentice Hall; 1981.  
 (5) Gorki K; Frequency Synthesis: Techniques and Applications; IEEE Press; 1975.



Apéndice A.1 Tabla 1.1

Coeficientes de la función de transferencia de filtros paso-bajas Butterworth y ----- Chebyshev Normalizados.

132

8.7 Filter Design and Tuning Tables

TABLE 8.2 Butterworth Network Parameters

Number of poles	Stage	Design		Tuning	
		$\alpha$	$\omega_c$	$\omega_c$ or -3 dB* frequency	$20 \log G(\omega_c)/G(0)$
2	1	1.414214	1.000000	1.000*	
3	1	a real pole	1.000000	1.000	
	2	1.000000	1.000000	0.707	1.25
4	1	1.847759	1.000000	0.719*	
	2	0.765367	1.000000	0.841	3.01
5	1	a real pole	1.000000	1.000*	
	2	1.618034	1.000000	0.859*	
	3	0.618034	1.000000	0.899	4.62
6	1	1.931852	1.000000	0.676*	
	2	1.414214	1.000000	1.000*	
	3	0.517638	1.000000	0.931	6.02
7	1	a real pole	1.000000	1.000*	
	2	1.801938	1.000000	0.745*	
	3	1.246980	1.000000	0.472	0.22
	4	0.445042	1.000000	0.949	7.25
8	1	1.961571	1.000000	0.661*	
	2	1.662939	1.000000	0.829	
	3	1.111140	1.000000	0.617	0.69
	4	0.390181	1.000000	0.961	8.34
9	1	a real pole	1.000000	1.000*	
	2	1.879385	1.000000	0.703*	
	3	1.532089	1.000000	0.917*	
	4	1.000000	1.000000	0.707	1.25
	5	0.347296	1.000000	0.969	9.32
10	1	1.985377	1.000000	0.655*	
	2	1.782013	1.000000	0.756*	
	3	1.414214	1.000000	1.000*	
	4	0.907981	1.000000	0.767	1.84
	5	0.312869	1.000000	0.975	10.20

\* Butterworth filters are frequency-normalized to give -3-dB response at  $\omega = 1.0$ .

TABLE E4 Chebyshev Network Parameters, Ripple = 0.5 dB, p-p

Number of poles	Stage	Design		Tuning	
		$\alpha$	$\omega_c$	$\omega_c$ or -3 dB frequency	$20 \log G(\omega_c)/G(\omega)$
2	1	1.157781	1.231342	0.707	0.50
3	1	a real pole	0.626456	0.626*	
	2	0.586101	1.068853	0.973	5.03
4	1	1.418218	0.597002	0.595*	
	2	0.340072	1.031270	1.001	9.50
5	1	a real pole	0.362320	0.362*	
	2	0.849037	0.690493	0.552	2.28
	3	0.226024	1.017735	1.005	13.20
6	1	1.482760	0.396229	0.383*	
	2	0.552371	0.768121	0.707	5.50
	3	0.153543	1.011446	1.005	16.30
7	1	a real pole	0.256170	0.256*	
	2	0.916126	0.503863	0.384	1.78
	3	0.388267	0.822729	0.791	8.38
	4	0.113099	1.008022	1.005	18.94
8	1	1.478033	0.296736	0.283*	
	2	0.620857	0.598874	0.538	4.58
	3	0.288544	0.861007	0.843	10.89
	4	0.096724	1.005948	1.004	21.25
9	1	a real pole	0.198405	0.198*	
	2	0.943041	0.395402	0.295	1.60
	3	0.451865	0.672711	0.637	7.13
	4	0.223313	0.888162	0.823	13.08
	5	0.068590	1.004595	1.003	23.28
10	1	1.478033	0.257232	0.225*	
	2	0.651573	0.487765	0.433	4.21
	3	0.345860	0.729251	0.707	9.35
	4	0.178208	0.908680	0.901	15.02
	5	0.055595	1.003661	1.003	25.10

\* These filters are frequency-normalized so that the magnitude response at the pass-band edge passes through the lower boundary of the ripple band at  $\omega = 1$ .

TABLE E5 Chebyshev Network Parameters, Ripple = 1 dB, p-p

Number of poles	Stage	Design		Tuning	
		$\alpha$	$\omega_c$	$\omega_c$ or -3 dB frequency	$20 \log G(\omega_c)/G(\omega)$
2	1	1.045456	1.050005	0.707	1.00
3	1	a real pole	0.404171	0.494*	
	2	0.495609	0.997098	0.934	6.37
4	1	1.274618	0.528581	0.229	0.16
	2	0.280974	0.993230	0.973	11.1
5	1	a real pole	0.289493	0.289*	
	2	0.714903	0.655208	0.565	3.51
	3	0.179971	0.994140	0.986	14.93
6	1	1.314287	0.353139	0.130	0.68
	2	0.454955	0.746806	0.707	7.07
	3	0.124942	0.995355	0.991	18.08
7	1	a real pole	0.205414	0.205*	
	2	0.771049	0.480052	0.402	2.96
	3	0.316871	0.808366	0.789	10.09
	4	0.091754	0.996333	0.994	20.76
8	1	1.327947	0.265068	0.091	0.06
	2	0.511120	0.583832	0.544	6.12
	3	0.234407	0.850613	0.839	12.66
	4	0.070222	0.997066	0.312	2.75
9	1	a real pole	0.159330	0.159*	
	2	0.793624	0.377312	0.312	2.75
	3	0.368610	0.602240	0.639	8.82
	4	0.180942	0.880560	0.873	14.88
	5	0.055467	0.997613	0.987	25.12
10	1	1.334229	0.212136	0.070	0.05
	2	0.536341	0.476065	0.440	5.74
	3	0.280859	0.721478	0.707	11.12
	4	0.144161	0.902454	0.898	16.85
	5	0.044918	0.998027	0.998	26.95

\* These filters are frequency-normalized so that the magnitude response at the pass-band edge passes through the lower boundary of the ripple band at  $\omega = 1$ .

TABLE 8.6 Chebyshev Network Parameters, Ripple = 2 dB, p-p

Number of poles	Stage	Design		Tuning	
		$\alpha$	$\omega_c$	$\omega_c$ or -3 dB* frequency	20 log G( $\omega_c$ )/G(0)
2	1	0.886015	0.907227	0.707	2.00
3	1	a real pole	0.369911	0.369*	
	2	0.391905	0.941326	0.904	8.31
4	1	1.075906	0.470711	0.305	0.85
	2	0.217681	0.963678	0.952	13.30
5	1	a real pole	0.218308	0.218*	
	2	0.563351	0.627017	0.575	5.34
	3	0.138269	0.975790	0.971	17.21
6	1	1.109145	0.316111	0.196	0.70
	2	0.351585	0.730027	0.707	9.22
	3	0.095588	0.982828	0.981	20.40
7	1	a real pole	0.155340	0.155*	
	2	0.607379	0.460853	0.416	4.75
	3	0.243009	0.797114	0.785	12.35
	4	0.070027	0.987226	0.986	23.10
8	1	1.120631	0.237699	0.145	0.65
	2	0.394841	0.571925	0.549	8.24
	3	0.179098	0.842486	0.836	14.97
	4	0.053512	0.990141	0.989	25.43
9	1	a real pole	0.120630	0.120*	
	2	0.625114	0.362670	0.325	4.53
	3	0.282589	0.654009	0.641	11.06
	4	0.137959	0.874386	0.870	17.23
	5	0.042225	0.992168	0.992	27.49
10	1	1.125921	0.190388	0.115	0.63
	2	0.414283	0.466780	0.446	7.84
	3	0.214523	0.715385	0.707	13.42
	4	0.109773	0.897590	0.895	19.20
	5	0.034169	0.993632	0.993	29.33

\* These filters are frequency-normalized so that the magnitude response at the pass-band edge passes through the lower boundary of the ripple band at  $\omega = 1$ .

TABLE B.7 Chebyshev Network Parameters, Ripple = 3 dB, p-p

Number of poles	Stage	Design		Tuning	
		$\alpha$	$\omega_c$	$\omega_c$ or -3 dB* frequency	$20 \log G(\omega_c)/G(0)$
2	1	0.760464	0.841398	0.707	3.00
3	1	a real pole	0.298620	0.298*	
	2	0.325982	0.916064	0.891	9.85
4	1	0.928942	0.442696	0.334	1.70
	2	0.179248	0.950309	0.943	14.97
5	1	a real pole	0.177530	0.178*	
	2	0.467826	0.614010	0.579	6.84
	3	0.113407	0.967484	0.964	18.92
6	1	0.957543	0.298001	0.219	1.51
	2	0.289173	0.722369	0.707	10.87
	3	0.078247	0.977154	0.976	22.14
7	1	a real pole	0.126485	0.126*	
	2	0.504307	0.451944	0.422	6.23
	3	0.199148	0.791997	0.784	14.06
	4	0.057269	0.983099	0.982	24.85
8	1	0.967442	0.224263	0.164	1.45
	2	0.324695	0.566473	0.551	9.89
	3	0.146518	0.838794	0.834	16.71
	4	0.043726	0.987002	0.987	27.19
9	1	a real pole	0.098275	0.098*	
	2	0.519014	0.355859	0.331	6.00
	3	0.231548	0.650257	0.641	12.77
	4	0.112754	0.871584	0.869	18.97
	5	0.034486	0.989699	0.898	29.25
10	1	0.972004	0.179694	0.131	1.42
	2	0.340668	0.462521	0.449	9.48
	3	0.175474	0.712614	0.707	15.15
	4	0.089664	0.895383	0.894	20.96
	5	0.027897	0.991638	0.991	31.09

\* These filters are frequency-normalized so that the magnitude response at the pass-band edge passes through the lower boundary of the ripple band at  $\omega = 1$ .

Apéndice A.2 Tabla 1.2

Coeficientes de la función de transferencia factorizada de filtros paso-bajas normalizados. ELIPTICOS.

Table 2.3-1 Elliptic functions with poles at  $p_i$  and having the form\*

$$N(s) = H \prod \frac{s^2 + c_i}{s^2 + a_i s + b_i}$$

(a) Odd and case A even: 0.1-dB passband ripple:

n	$\omega_c$	$K_p$ (dB)	$c_i$	$p_i$	$a_i$	$b_i$
2	1.05	.343	1.439664	-.075407 + j1.180400	.150614	1.399730
	1.10	.559	1.714383	-.129483 + j1.269597	.259666	1.625677
	1.20	1.075	2.235993	-.236268 + j1.393844	.472597	1.998674
	1.50	3.210	3.927051	-.534107 + j1.569367	1.069213	2.745746
	2.00	7.418	7.466102	-.843443 + j1.581991	1.686667	3.214099
3	1.05	1.748	1.225410	-.044853 + j1.079332 -2.812964	.069707	1.166969
	1.10	3.374	1.370314	-.084421 + j1.121848 -2.246832	.170643	1.265940
	1.20	6.691	1.699617	-.156766 + j1.170259 -1.744102	.313537	1.394682
	1.50	14.848	2.806014	-.289644 + j1.217428 -1.206182	.579792	1.553876
	2.00	24.616	5.153209	-.391858 + j1.217905 -1.114765	.763717	1.620108
4	1.05	6.397	1.153434 3.312518	-.618974 + j1.143244 -.037598 + j1.045948	1.237152 .075196	1.689644 8.095422
	1.10	10.721	1.290925 4.349933	-.703916 + j1.076495 -.066734 + j1.066126	1.407133 .133467	1.448899 1.141079
	1.20	17.051	1.572430 6.274402	-.108448 + j1.086869 -.728953 + j1.798154	.216897 1.453706	1.193044 1.162365
	1.50	29.044	2.535553 12.099313	-.498734 + j1.061949 -.175627 + j1.108114	1.397469 .347253	.868855 1.238062
	2.00	41.447	4.592261 24.227261	-.870443 + j1.053630 -.216254 + j1.116820	1.340884 .432509	.734403 1.294051

Table 2.3-1—Continued

(u) Odd and case A even: 0.1-dB passband ripple:

$n$	$\omega_c$	$K_p$ (dB)	$c_i$	$p_i$	$a_i$	$b_i$
5	1.35	13.54	1.133427	-.264902 + J1.615987	.533906	1.103763
			1.773719	-.036114 + J1.624040	.672290	1.077777
				-1.129959		
	1.10	20.350	1.250323	-.329097 + J1.591270	.659343	1.017475
			2.191001	-.049533 + J1.639364	.694647	1.047604
			-.917117			
1.20	26.303	1.521127	-.374157 + J1.573328	.754311	.916091	
		2.945367	-.075430 + J1.601645	.710950	1.111447	
			-.742450			
1.50	43.415	2.495515	-.417037 + J1.575764	.834675	.775733	
		5.437645	-.114125 + J1.606151	.728250	1.149703	
			-.649753			
2.00	58.901	4.364951	-.429097 + J1.572120	.858193	.704436	
		10.567737	-.139913 + J1.673567	.777625	1.171844	
			-.590931			
6	1.35	22.088	1.123325	-.447076 + J1.628506	1.294652	.813662
			1.438654	-.151511 + J1.695417	.303023	.994002
			6.529769	-.023386 + J1.618390	.646771	1.037444
	1.10	29.686	1.243362	-.599771 + J1.517591	1.190542	.827615
			1.714083	-.194450 + J1.651674	.388900	.943361
			-.036964 + J1.625840	.073927	1.053716	
1.20	39.630	1.495035	-.547428 + J1.429696	1.095297	.684527	
		2.235999	-.235479 + J1.607696	.470859	.879319	
			12.952671	-.054395 + J1.634294	.109199	1.072744
1.50	57.772	2.369299	-.467832 + J1.349737	.675663	.360297	
		3.927051	-.277388 + J1.646778	.854775	.793078	
			25.427242	-.050385 + J1.644897	.160770	1.099771
2.00	76.355	4.248155	-.457235 + J1.314305	.914470	.307851	
		7.464102	-.296650 + J1.610643	.591299	.745467	
			52.354841	-.096676 + J1.050734	.193252	1.113907
7	1.35	30.470	1.117521	-.362326 + J1.791210	.724773	.757351
			1.308341	-.097930 + J1.679496	.195860	.969003
			2.714372	-.018274 + J1.012906	.036349	1.026313
				-.697913		
	1.10	39.157	1.234123	-.372606 + J1.706869	.745217	.638500
1.523943			-.129118 + J1.657477	.254234	.933130	
			3.514769	-.022279 + J1.618274	.054556	1.037683
				-.599630		
1.20	50.963	1.479872	-.371195 + J1.627101	.742289	.531144	
		1.961341	-.161444 + J1.628552	.322894	.888274	
			4.946697	-.041080 + J1.024498	.008161	1.051284
				-.519773		

(continued)

Table 2.3-1—Continued

(a) Odd and case A even: 0.1-dB passband ripple:

n	$\omega_p$	$K_p$ (dB)	$c_i$	$p_i$	$a_i$	$b_i$		
1	1.00	72.135	1.331272	-.310474 + J .749179	.714647	.424210		
			1.311069	-.169305 + J .447364	.704411	.424704		
			1.430774	-.060640 + J1.032559	.119119	1.066713		
				-.463710				
2	1.10	93.411	4.110563	-.377160 + J .401993	.707334	.374616		
			4.731774	-.217125 + J .842267	.434251	.700649		
			15.041095	-.271124 + J1.037140	.142249	1.069071		
				-.407477				
8	1.05	39.477	1.113844	-.218477 + J .408720	1.032574	.495410		
			1.243118	-.227430 + J .254747	.447259	.704060		
			1.904139	-.044627 + J .970053	.137254	.965037		
			11.044406	-.014531 + J1.009550	.025647	1.010471		
	1.10	49.332	1.229284	1.427103	-.466743 + J .364917	.033374	.336767	
				2.390411	-.244416 + J .795997	.407237	.494260	
				15.104274	-.097340 + J .964023	.184440	.917864	
					-.022205 + J1.013628	.044410	1.027634	
	1.20	62.296	1.470251	1.789209	-.419007 + J .293877	.089014	.261911	
				3.252831	-.261711 + J .732751	.523423	.605416	
				22.383799	-.117065 + J .943757	.736131	.903664	
					-.031937 + J1.018411	.063844	1.031180	
1.50	86.485	2.315497	2.995660	-.349042 + J .246297	.738043	.196734		
			4.021824	-.270992 + J .459775	.541983	.508739		
			45.059978	-.149084 + J .913365	.798167	.856467		
				-.041840 + J1.026717	.091409	1.052148		
2.00	111.263	4.135734	5.545643	-.344561 + J .224693	.609123	.169205		
			11.746674	-.272775 + J .671656	.545549	.466060		
			91.761533	-.165771 + J .894043	.331543	.824407		
				-.054503 + J1.028377	.109007	1.060579		
9	1.05	47.276	1.111404	-.355257 + J .616991	.710713	.506884		
			1.205410	-.149551 + J .893074	.299102	.819946		
			1.594771	-.050863 + J .982010	.101725	.966931		
			3.993674	-.011772 + J1.007371	.023544	1.014935		
				-.514179				
	1.10	58.707	1.224347	1.370314	-.341731 + J .544018	.083461	.413401	
				1.937719	-.173149 + J .847267	.346297	.747461	
				5.299246	-.069513 + J .969793	.139026	.945331	
					-.017844 + J1.010567	.033688	1.021564	
					-.448775			
	1.20	73.679	1.463726	1.699617	-.323598 + J .490748	.647107	.335827	
				2.579104	-.197408 + J .797069	.389016	.672494	
				7.652393	-.040331 + J .953984	.120261	.918245	
					-.025490 + J1.014360	.050980	1.029577	
					-.392977			

Table 2.3-1—Continued

(a) Odd and case *A* even: 0.1-dB passband ripple:

<i>n</i>	$\omega_c$	$K_p$ (dB)	$c_i$	$p_i$	$u_i$	$b_i$
1.50	100.842		2.301615	-.299692 + J .415879	.490243	.262770
			2.806014	-.210182 + J .735845	.420364	.585703
			4.635336	-.114307 + J .931223	.732604	.880703
			15.014341	-.036362 + J1.019421	.072724	1.040547
2.00	128.717		4.107442	-.244334 + J .394821	.572676	.230077
			5.143209	-.217131 + J .702551	.434263	.540739
			8.927191	-.130710 + J .917130	.761471	.858217
			30.201057	-.043097 + J1.022332	.086143	1.047142
10	1.05	55.681	1.139672	-.427709 + J .302644	.844417	.789855
			1.191462	-.246341 + J .730422	.492682	.594200
			1.438664	-.104317 + J .916451	.712634	.851184
			2.533644	-.019276 + J .984756	.078143	.976305
			16.859613	-.000704 + J1.005663	.019407	1.011454
1.10	68.392		1.221564	-.377369 + J .259853	.754739	.206936
			1.333834	-.251257 + J .665044	.502500	.505463
			1.714043	-.127784 + J .880488	.255569	.791589
			3.251947	-.044334 + J .974525	.104664	.952652
			23.143003	-.014526 + J1.006447	.029247	1.017169
1.20	84.942		1.459159	-.337237 + J .224734	.676475	.164734
			1.441431	-.250236 + J .602554	.503472	.425702
			2.235900	-.147514 + J .839832	.295037	.727079
			4.585492	-.071471 + J .947020	.142543	.930591
			34.917247	-.020797 + J1.011524	.041594	1.023413
1.50	115.199		2.291441	-.294075 + J .161103	.502150	.174715
			2.682641	-.243660 + J .535029	.487320	.345671
			3.927051	-.147130 + J .788570	.334960	.640847
			9.750764	-.073337 + J .944057	.186475	.800045
			69.791409	-.020532 + J1.015670	.059064	1.032457
2.00	145.171		4.304655	-.274117 + J .175628	.559234	.107110
			4.937971	-.234417 + J .501579	.476433	.300659
			7.464407	-.174414 + J .749877	.302037	.608437
			17.353454	-.104713 + J .932991	.211476	.801517
			142.433967	-.034977 + J1.014131	.069846	1.037731

(continued)



Table 2.3-1-- Continued

(b) Odd and case A even; 1.0-dB passband ripple:

n	$\omega_c$	$K_1$ (dB)	$\epsilon_1$	$p_1$	$a_1$	$b_1$
2	1.05	2.916	1.438664	$-.157083 + j1.068090$	.31416A	1.187727
	1.10	4.075	1.714083	$-.279179 + j1.075841$	.458258	1.209634
	1.20	6.150	2.235990	$-.320565 + j1.064452$	.641131	1.235870
	1.50	11.194	3.927051	$-.439709 + j1.010498$	.879418	1.214431
	2.00	17.095	7.454102	$-.499471 + j .959482$	.908047	1.170077
3	1.05	8.134	1.205410	$-.065504 + j1.017136$ $-.947805$	.131007	1.038796
	1.10	11.440	1.370314	$-.097651 + j1.016303$ $-.816161$	.195302	1.047407
	1.20	16.209	1.699617	$-.134461 + j1.010059$ $-.701999$	.272973	1.038841
	1.50	25.176	2.806014	$-.187698 + j .994225$ $-.591015$	.375394	1.023714
	2.00	34.474	5.153209	$-.217034 + j .981775$ $-.530958$	.434047	1.010594
4	1.05	15.440	1.153634 3.312519	$-.400924 + j .723958$ $-.034963 + j1.004642$	.201852 .073425	.884857 1.010671
	1.10	20.932	1.290925 4.340930	$-.390229 + j .638491$ $-.054484 + j1.003351$	.299458 .109960	.547047 1.009681
	1.20	27.432	1.572430 6.224402	$-.386971 + j .540447$ $-.075673 + j1.009256$	.410248 .773947 .131246	.443847 1.008230

(b) Odd and case A even: 1.0-dB passband ripple:

$n$	$\omega_c$	$K_p$ (dB)	$c_i$	$p_i$	$a_i$	$b_i$
1.50	39.518	2.535553	2.535553	$-.364980 + j .480692$	.720677	.364281
			17.029310	$-.104400 + j .993937$	.208819	.998811
2.00	51.926	4.593261	4.593261	$-.351273 + j .442498$	.702546	.319197
			24.227201	$-.121479 + j .989176$	.242957	.993226
5	24.135	1.133427	1.133427	$-.181185 + j .858432$	.362571	.769870
			1.773739	$-.023559 + j 1.001154$	.047110	1.002888
				$-.511794$		
1.10	30.471	1.259320	1.259320	$-.232145 + j .864785$	.404289	.688541
			2.193093	$-.034621 + j 1.000721$	.069241	1.001640
				$-.446567$		
1.20	38.757	1.521127	1.521127	$-.217564 + j .748167$	.435136	.607000
			2.968367	$-.045084 + j .998478$	.096167	.999271
				$-.391579$		
1.50	53.875	2.425515	2.425515	$-.228975 + j .681678$	.457749	.517659
			4.417645	$-.066541 + j .995254$	.133081	.994957
				$-.317846$		
2.00	64.360	4.364951	4.364951	$-.232338 + j .646440$	.464474	.471844
			10.557732	$-.077625 + j .992914$	.152740	.991403
				$-.312599$		
6	32.523	1.123326	1.123326	$-.340554 + j .466551$	.681109	.332656
			1.439664	$-.099253 + j .910440$	.198505	.838752
			6.528769	$-.016283 + j 1.000095$	.032587	1.000456
1.10	40.142	1.243362	1.243362	$-.315089 + j .469244$	.630179	.266742
			1.714081	$-.118730 + j .874514$	.237461	.778473
			8.826455	$-.023927 + j .999416$	.067854	.999404
1.20	50.089	1.495035	1.495035	$-.289467 + j .379828$	.578933	.213267
			2.215999	$-.176580 + j .834256$	.273161	.714617
			12.952671	$-.033261 + j .998304$	.066522	.997718
1.50	68.231	2.369289	2.369289	$-.260004 + j .310775$	.521609	.144400
			3.927051	$-.154450 + j .783831$	.308960	.638255
			25.827242	$-.046114 + j .996374$	.092233	.994887
2.00	96.816	4.248155	4.248155	$-.247134 + j .287533$	.492772	.143258
			7.464102	$-.162691 + j .759714$	.225183	.597474
			52.356841	$-.053871 + j .995014$	.107742	.992057

(continued)

Table 2.3-1--Continued

(b) Odd and case A even: 1.0-dB passband ripple:

$n$	$\omega_c$	$K_p$ (dB)	$c_1$	$p_1$	$a_1$	$b_1$
2	1.57	65.476	1.117721	-.737263 + j .711153	.417167	.070721
			1.336741	-.661853 + j .427640	.123005	.443670
			2.714372	-.511070 + j .909752	.027140	.809667
			-.757248			
1.10	60.416	1.236129	1.236129	-.206707 + j .621764	.413504	.679736
			1.723963	-.077464 + j .611762	.155207	.837330
			3.514769	-.017724 + j .900244	.025648	.908705
			-.310175			
1.22	61.622	1.479872	1.479872	-.203316 + j .546153	.406637	.359676
			1.941341	-.093971 + j .881888	.192747	.786440
			4.956697	-.024360 + j .908471	.047650	.907410
			-.374060			
1.50	62.988	2.371227	2.371227	-.166790 + j .602754	.391780	.291005
			3.313990	-.110878 + j .843208	.221757	.723291
			9.530078	-.037844 + j .907190	.067648	.945111
			-.237188			
2.00	106.268	4.190043	4.190043	-.190684 + j .472047	.781369	.59189
			6.201774	-.119725 + j .821044	.239450	.888447
			18.061095	-.039546 + j .906309	.039137	.994194
			-.221131			
8	69.331	1.113864	1.113864	-.274074 + j .761147	.544157	.191497
			1.243115	-.130371 + j .789537	.260743	.447347
			1.906139	-.042262 + j .913923	.084524	.811735
			11.046606	-.009102 + j .999632	.018295	.999389
1.10	59.691	1.228286	1.228286	-.248666 + j .300352	.408328	.142645
			1.427103	-.130688 + j .737745	.279377	.627790
			2.380411	-.054736 + j .934315	.109477	.875940
			13.104224	-.013308 + j .999759	.026777	.998198
1.20	72.755	1.470253	1.470253	-.225040 + j .265193	.453098	.20974
			1.789909	-.145710 + j .684429	.291410	.491044
			3.252831	-.067891 + j .911293	.135782	.835085
			22.393599	-.018638 + j .998669	.037276	.997777
1.50	96.945	2.315697	2.315697	-.200053 + j .230148	.400186	.21008
			2.995660	-.149085 + j .625789	.298170	.413718
			6.071824	-.083400 + j .880916	.168800	.787966
			65.059074	-.025894 + j .907774	.051789	.997274
2.00	121.722	4.136734	4.136734	-.147677 + j .213541	.375344	.080821
			9.549063	-.149363 + j .294686	.299085	.176015
			11.764674	-.091635 + j .863229	.183270	.753761
			91.761531	-.030287 + j .997159	.060574	.997244

(b) Odd and case A even: 1.0-dB passband ripple:

$n$	$\omega_c$	$K_p$ (dB)	$c_i$	$p_i$	$a_i$	$h_i$	
9	1.05	57.736	1.111406	- .195247 + J .551838	.390495	.342647	
			1.205410	- .087514 + J .850482	.175022	.730978	
			1.594271	- .030697 + J .964496	.061394	.931195	
			3.993674	- .007178 + J .999640	.014357	.999331	
				- .269978			
	1.10	69.167	1.274347	1.370314	- .186735 + J .497328	.373473	.287706
				1.370314	- .098792 + J .807559	.197544	.651910
				1.937719	- .040723 + J .949094	.081447	.902438
				5.299749	- .010543 + J .999327	.021126	.999766
				- .239541			
	1.20	84.099	1.463756	1.699617	- .176578 + J .447596	.353156	.271522
				1.699617	- .108069 + J .762246	.216138	.597759
				2.579104	- .051655 + J .930919	.103311	.849092
				7.652393	- .014711 + J .998998	.029422	.997993
				- .211419			
	1.50	111.302	2.301615	2.808014	- .163781 + J .395695	.327543	.183399
				2.808014	- .116231 + J .708498	.232461	.518479
				4.638336	- .065021 + J .906413	.130043	.825813
				14.014341	- .020451 + J .999271	.040001	.999624
				- .184275			
2.00	139.176	4.107447	5.153209	- .156746 + J .370222	.313491	.145135	
			5.153209	- .119505 + J .679573	.239009	.476101	
			8.922191	- .072341 + J .892098	.144481	.801001	
			30.201059	- .023924 + J .997747	.047656	.999072	
			- .171309				
10	1.35	66.141	1.109672	- .225977 + J .269047	.441444	.123452	
			1.141467	- .138223 + J .680726	.276445	.482493	
			1.438644	- .062031 + J .888118	.124067	.792431	
			2.533448	- .023347 + J .971768	.046694	.944478	
				15.959610	- .005806 + J .999650	.011612	.999352
	1.10	74.942	1.221564	1.333874	- .203387 + J .237539	.465775	.097791
				1.333874	- .139374 + J .625733	.278752	.410647
				1.714083	- .077952 + J .872542	.145905	.732149
				3.251042	- .031537 + J .949337	.073074	.921321
				23.183803	- .008547 + J .999404	.017093	.999841
	1.20	85.422	1.459154	1.641431	- .189921 + J .210270	.365841	.077877
				1.641431	- .137049 + J .572094	.275470	.347334
				2.234009	- .082871 + J .813874	.145743	.649259
				4.855402	- .046874 + J .944491	.081352	.893899
				34.512243	- .011907 + J .999054	.023817	.999753
	1.50	125.459	2.271441	2.542641	- .161664 + J .183031	.323113	.059636
				2.542641	- .133903 + J .518493	.267836	.291452
				3.927051	- .092777 + J .768550	.185856	.598207
				8.752764	- .057134 + J .924481	.104268	.873343
				69.731499	- .014580 + J .9994320	.033120	.9997316
2.00	156.430	4.036495	4.827971	- .151264 + J .179031	.302528	.051291	
			4.827971	- .110975 + J .486199	.261951	.253739	
			7.444102	- .077323 + J .740570	.194447	.457842	
			17.353454	- .048541 + J .912636	.117042	.834331	
			142.430967	- .019380 + J .999171	.038780	.9994720	

(continued)

Table 2.3-1. Continued

(c) Case B even: 0.1-dB passband ripple:

$n$	$\omega_c$	$K_p$ (dB)	$c_i$	$p_i$	$a_i$	$b_i$
6	1.05	6.655	1.166586	-0.522705 + j 0.014024	1.706611	1.000000
				-0.60877 + j 0.007313	0.01205	1.011705
	1.10	7.32e	1.369737	-0.673101 + j 0.078029	1.345701	1.000000
				-0.796684 + j 0.000000	0.000000	1.000000
	1.20	14.187	1.801405	-0.118529 + j 0.000000	0.237050	1.000000
-0.746625 + j 0.000000				1.400000	1.000000	
1.50	25.320	2.595517	-0.100980 + j 0.117642	0.367470	1.000000	
			-0.693645 + j 0.000000	1.000000	1.000000	
2.00	38.647	4.76540	-0.227115 + j 0.110000	0.446730	1.000000	
			-0.655767 + j 0.000000	1.000000	1.000000	
6	1.05	20.307	1.125244	-0.530807 + j 0.000000	1.276796	0.721000
			1.570649	-0.166747 + j 0.000000	0.332406	0.000000
				-0.024644 + j 0.000000	0.000000	1.000000
	1.10	27.399	1.246715	-0.206675 + j 0.000000	0.413949	0.000000
				1.400145	-0.038741 + j 0.000000	0.000000
1.20	37.827	1.499001	-0.243449 + j 0.000000	0.672234	0.000000	
			2.364951	-0.058665 + j 0.000000	0.113330	1.000000
1.50	55.966	2.378628	-0.240860 + j 0.000000	0.000000	0.000000	
			4.149607	-0.042171 + j 0.000000	0.174267	1.000000
2.00	74.548	4.267406	-0.298091 + j 0.000000	0.000000	0.000000	
			4.001484	-0.097774 + j 0.000000	0.195440	1.000000
8	1.05	37.529	1.114414	-0.506414 + j 0.000000	1.000000	0.000000
			1.257004	-0.237472 + j 0.000000	0.000000	0.000000
			2.014525	-0.015010 + j 0.000000	0.000000	1.000000
	1.10	47.085	1.229114	-0.251503 + j 0.000000	0.000000	0.000000
				1.441163	-0.022514 + j 0.000000	0.000000
2.00	74.548	4.267406	-0.095240 + j 0.000000	0.000000	0.000000	
			2.557144	-0.648973 + j 0.000000	0.000000	1.000000

Table 2.3-1 Continued

(c) Case B even: 0.1-dB passband ripple:

$n$	$\omega_p$	$K_p$ (dB)	$c_i$	$p_i$	$a_i$	$b_i$
10	1.13	11.144	1.411111	-.446891 * J .788845	.114066	.977725
			1.411111	-.032591 * J1.018790	.641183	.034994
			1.411111	-.170407 * J .941853	.740819	.001609
	1.53	10.114	1.314433	-.271104 * J .814467	.144617	.960021
			1.314433	-.046174 * J1.024440	.642748	.022713
			1.314433	-.140302 * J .912223	.702774	.034748
	2.03	100.415	1.142343	-.272074 * J .712140	.144740	.950045
			1.142343	-.044225 * J1.028517	.640672	.020653
			1.142343	-.164427 * J .804773	.732854	.027387
10	1.05	10.408	1.110884	-.414733 * J .707107	.079442	.758104
			1.110884	-.240660 * J .721756	.640337	.062270
			1.110884	-.100201 * J .911005	.718583	.047333
	1.13	17.337	1.221809	-.252592 * J .8058710	.055104	.997701
			1.221809	-.130002 * J .877990	.260004	.787698
			1.221809	-.014883 * J1.008490	.629747	.1017493
	1.20	13.447	1.440673	-.250914 * J .804450	.050103	.970001
			1.440673	-.144414 * J .877436	.207430	.723820
			1.440673	-.072177 * J .9081490	.144758	.924701
1.53	114.123	1.222725	-.263224 * J .8533147	.047060	.943573	
		1.222725	-.117901 * J .787240	.314603	.647037	
		1.222725	-.001007 * J .943474	.147401	.909267	
2.03	100.000	1.141781	-.076747 * J1.015773	.059453	.1037670	
		1.141781	-.204031 * J .8165246	.509867	.123174	
		1.141781	-.271020 * J .840354	.674501	.307130	
2.03	100.000	1.141781	-.170057 * J .789173	.753711	.607251	
		1.141781	-.100011 * J .8932657	.712031	.881080	
		1.141781	-.030074 * J1.018110	.070004	1.037020	
2.03	100.000	1.141781	-.270017 * J .817330	.881770	.106600	

(continued)

Table 2.3-1—Continued

(d) Case B even: 1.0-dB passband ripple:

$n$	$\omega_p$	$K_p$ (dB)	$c_1$	$P_1$	$a_1$	$b_1$
4	1.0	13.761	1.154255	$-.432751 + j .177410$ $-.463154 + j .11607137$	$.163172$ $.216350$	$.672201$ $1.016517$
			1.110747	$-.433030 + j .176470$ $-.461888 + j .11674223$	$.164637$ $.215334$	$.643131$ $1.017266$
	1.20	24.750	1.601405	$-.363454 + j .523216$ $-.407227 + j .1700117$	$.707100$ $.115455$	$.627672$ $1.079078$
			2.595517	$-.361043 + j .465447$ $-.129354 + j .693062$	$.722126$ $.714717$	$.347045$ $.998131$
	2.30	49.155	4.714547	$-.364975 + j .435853$ $-.124304 + j .498447$	$.697049$ $.744111$	$.311751$ $.992470$
6	1.05	30.730	1.125244	$-.372474 + j .431556$ $-.107214 + j .902879$ $-.017302 + j 1.600143$	$.684948$ $.714420$ $.134760$	$.201121$ $.824101$ $1.000849$
			1.570649	$-.308336 + j .391142$ $-.124567 + j .866975$ $-.071805 + j .999425$	$.616473$ $.749126$ $.070371$	$.249071$ $.767162$ $.999446$
	1.10	38.342	1.246215	$-.308336 + j .391142$ $-.124567 + j .866975$ $-.071805 + j .999425$	$.616473$ $.749126$ $.070371$	$.249071$ $.767162$ $.999446$
			1.800145	$-.308336 + j .391142$ $-.124567 + j .866975$ $-.071805 + j .999425$	$.616473$ $.749126$ $.070371$	$.249071$ $.767162$ $.999446$
	1.20	46.285	1.409401	$-.284782 + j .349826$ $-.140214 + j .827910$ $-.034509 + j .998231$	$.569965$ $.702431$ $.064010$	$.203480$ $.707096$ $.997350$
2.764951			$-.284782 + j .349826$ $-.140214 + j .827910$ $-.034509 + j .998231$	$.569965$ $.702431$ $.064010$	$.203480$ $.707096$ $.997350$	
1.50	66.429	2.378628	$-.284782 + j .349826$ $-.140214 + j .827910$ $-.034509 + j .998231$	$.569965$ $.702431$ $.064010$	$.203480$ $.707096$ $.997350$	
		4.189497	$-.284782 + j .349826$ $-.140214 + j .827910$ $-.034509 + j .998231$	$.569965$ $.702431$ $.064010$	$.203480$ $.707096$ $.997350$	
2.00	85.008	4.257406	$-.245081 + j .285837$ $-.163303 + j .753736$ $-.054402 + j .994027$	$.490181$ $.375605$ $.108805$	$.141767$ $.596786$ $.992810$	
8	1.05	47.987	1.114416	$-.268114 + j .329175$ $-.134219 + j .780310$ $-.044114 + j .957060$ $-.009435 + j .999653$	$.136229$ $.268437$ $.028278$ $.014870$	$.180241$ $.626612$ $.998365$ $.999396$
			1.252994	$-.268114 + j .329175$ $-.134219 + j .780310$ $-.044114 + j .957060$ $-.009435 + j .999653$	$.136229$ $.268437$ $.028278$ $.014870$	$.180241$ $.626612$ $.998365$ $.999396$
1.10	54.146	1.229114	$-.244580 + j .293222$ $-.141913 + j .730432$ $-.054360 + j .937320$ $-.013771 + j .999245$	$.489178$ $.287426$ $.117720$ $.027449$	$.145103$ $.553642$ $.872413$ $.998670$	
		1.441163	$-.244580 + j .293222$ $-.141913 + j .730432$ $-.054360 + j .937320$ $-.013771 + j .999245$	$.489178$ $.287426$ $.117720$ $.027449$	$.145103$ $.553642$ $.872413$ $.998670$	
2.557144	$-.244580 + j .293222$ $-.141913 + j .730432$ $-.054360 + j .937320$ $-.013771 + j .999245$	$.489178$ $.287426$ $.117720$ $.027449$	$.145103$ $.553642$ $.872413$ $.998670$			

Table 2.3-1—Continued

(d) Case B even: 1.0-dB passband ripple:

$n$	$\omega_s$	$K_s$ (dB)	$c_i$	$p_i$	$a_i$	$b_i$
10	1.25	71.400	1.47157	-.77255 + j .26175	.447077	.117750
			1.01091	-.16667 + j .67012	.297208	.484310
			1.51010	-.659175 + j .000468	.130107	.891611
				-.010020 + j .000640	.730040	.007684
	1.50	65.597	2.21663	-.170005 + j .270464	.307931	.091068
			1.01366	-.149779 + j .673251	.298750	.410726
			4.05677	-.646005 + j .879726	.149112	.780940
				-.026174 + j .007747	.077340	.996174
	2.00	120.374	4.14730	-.167178 + j .212872	.274257	.060350
			5.53734	-.149573 + j .593460	.299147	.374567
			12.04173	-.991950 + j .862743	.143610	.752494
				-.630453 + j .007137	.060905	.997900
10	1.05	65.347	1.13988	-.222315 + j .263196	.444733	.118007
			1.19447	-.130553 + j .673297	.279106	.477904
			1.45917	-.647624 + j .884077	.177240	.787410
			2.74705	-.023970 + j .971078	.047640	.943567
		-.000940 + j .000659	.011880	.999346		
	1.10	77.767	1.22100	-.201018 + j .274064	.402036	.001107
			1.33820	-.130872 + j .670398	.279743	.404458
			1.74258	-.074098 + j .869790	.140196	.727633
			3.55288	-.032133 + j .958580	.064268	.910009
		-.008701 + j .007395	.017402	.998844		
	1.20	94.146	1.45967	-.181527 + j .208352	.273045	.076361
			1.66816	-.130003 + j .569550	.276008	.343437
2.77803			-.603577 + j .811697	.147100	.665829	
5.01946			-.041174 + j .943782	.087348	.892782	
	-.012067 + j .009047	.024123	.998231			
1.50	124.583	2.29272	-.141070 + j .182269	.322155	.059148	
		2.67657	-.133013 + j .513911	.267627	.282010	
		4.01431	-.093062 + j .769311	.186124	.594382	
		9.63178	-.052431 + j .923983	.104882	.856494	
	-.016673 + j .008508	.033347	.997296			
2.00	155.554	4.08922	-.151000 + j .169700	.302000	.051499	
		4.92661	-.130007 + j .485647	.261814	.273000	
		7.64284	-.097442 + j .739879	.194883	.556916	
		19.16645	-.058699 + j .912751	.117396	.835830	
	-.019447 + j .008163	.030895	.996707			

(continued)



Table 2.3-1--Continued

(e) Case C even: 0.1-dB passband ripple:

$n$	$\omega_s$	$K_s$ (dB)	$c_i$	$P_i$	$a_i$	$b_i$
4	1.05	3.284	1.176045	-0.041450 + J1.067080	.087900	1.129732
				-1.142792 + J1.056936	2.285203	2.472931
	1.10	6.478	1.321589	-0.076408 + J1.089646	.152818	1.193168
				-1.041971 + J .905418	2.087966	1.905490
	1.20	12.095	1.615455	-0.123382 + J1.115527	.256764	1.260887
-0.934605 + J .756606				1.906811	1.441434	
1.50	23.736	2.611679	-0.206796 + J1.138431	.412792	1.334033	
			-0.863022 + J .597833	1.726064	1.102212	
2.00	36.073	4.733595	-0.617435 + J .920713	1.634871	.939343	
			-0.253437 + J1.142940	.506873	1.370547	
6	1.05	19.727	1.126696	-0.789645 + J .970579	1.579289	.949099
			1.535284	-0.184974 + J .999057	.371755	1.020713
				-0.025910 + J1.071402	.051810	1.044362
	1.10	26.230	1.248053	-0.713339 + J .476877	1.432677	.730121
			1.837658	-0.230107 + J .952096	.440214	.904932
			-0.040931 + J1.029755	.081861	1.067077	
1.20	36.113	1.531690	-0.646187 + J .308581	1.299374	.576625	
		2.424505	-0.249710 + J .902237	.539420	.886775	
			-0.060077 + J1.038657	.170156	1.087417	
1.50	54.202	2.741154	-0.572096 + J .324048	1.144191	.432313	
		4.270449	-0.304434 + J .834973	.216888	.795156	
			-0.087368 + J1.049425	.174736	1.108025	
2.00	72.761	4.270072	-0.534098 + J .290134	1.009995	.370401	
		8.042805	-0.258731 + J .799832	.051740	.745607	
			-0.104187 + J1.055209	.209376	1.124320	
8	1.05	35.288	1.114819	-0.634925 + J .371387	1.208139	.602870
			1.759509	-0.257536 + J .843660	.515072	.778084
			2.045094	-0.070089 + J .970491	.152178	.985388
				-0.015649 + J1.031441	.031137	1.071274
	1.10	44.399	1.224651	-0.545763 + J .314616	1.063725	.492490
1.448643			-0.276093 + J .780152	.552196	.756884	
2.421482			-0.023459 + J1.014773	.047319	1.030151	
			-0.100433 + J .902426	.201267	.936290	

Table 2.3-1 - Continued

(e) Case C even: 0.1-dB passband ripple:

n	$\omega_c$	$K_p$ (dB)	$c_i$	$p_i$	$a_i$	$b_i$	
1.25	59.539		1.472199	-.485227 + j .267931	.070443	.307216	
			1.819178	-.287400 + j .715925	.574901	.595147	
			3.568874	-.128736 + j .940478	.753471	.900562	
			-.033798 + j 1.196317	.067507	1.046901		
1.50	83.407		2.319176	-.426488 + j .223590	.052977	.231885	
			3.048578	-.292845 + j .643036	.585691	.499254	
			6.078465	-.157488 + j .809549	.315377	.852142	
			-.048107 + j 1.026042	.096214	1.094676		
2.00	108.575		4.143165	-.397764 + j .203316	.795529	.199554	
			5.644575	-.297952 + j .605259	.585464	.452160	
			12.912424	-.174140 + j .890785	.348360	.823836	
			-.046495 + j 1.029716	.113790	1.063553		
10	53.576		1.110055	-.486272 + j .273776	.072543	.311413	
			1.186597	-.272544 + j .710698	.549089	.579358	
			1.470226	-.115389 + j .911637	.230777	.844342	
			2.824853	-.041773 + j .983714	.083544	.969436	
				-.010149 + j 1.006194	.029339	1.017529	
1.10	66.262		1.222102	-.434146 + j .234898	.088792	.243660	
			1.340720	-.273555 + j .645746	.547110	.491847	
			1.754581	-.135496 + j .874912	.277992	.783403	
			3.617477	-.057223 + j .973594	.114440	.991150	
				-.012256 + j 1.068851	.037511	1.019013	
1.25	82.430		1.456927	-.387617 + j .202893	.779235	.191320	
			1.651014	-.259401 + j .584234	.538801	.413911	
			2.291423	-.155407 + j .833124	.311213	.719316	
			5.074093	-.074420 + j .960707	.149239	.928526	
				-.021784 + j 1.011938	.043189	1.024660	
1.50	113.784		2.293014	-.370922 + j .171783	.670845	.145047	
			2.436727	-.250973 + j .510096	.519640	.336037	
			4.027354	-.174490 + j .781514	.349106	.641744	
			9.444705	-.094812 + j .947348	.198225	.897479	
				-.030445 + j 1.010193	.073630	1.033377	
2.00	144.523		4.049232	-.316707 + j .157620	.633540	.125167	
			4.026882	-.253464 + j .485034	.506974	.290505	
			7.657494	-.123250 + j .752812	.346506	.500310	
			10.222417	-.104980 + j .691131	.247640	.670881	
				-.017027 + j 1.018454	.071874	1.038046	

(continued)

Table 2.3-1—Continued

(f) Case C even: 1.0-dB passband ripple:

n	$\omega_c$	$K_p$ (dB)	$c_i$	$P_i$	$a_i$	$b_i$
4	1.05	11.322	1.176045	-0.090129 + j1.009723	1.102297	1.027033
				-0.464397 + j.601548	1.328793	.803283
	1.10	15.942	1.321589	-0.617627 + j.435260	1.235255	.667946
				-0.072024 + j1.007836	1.44645	1.020920
	1.20	22.793	1.615455	-0.573215 + j.472196	1.146429	.551534
-0.096950 + j1.003197				.193901	1.015804	
1.50	34.179	2.611679	-0.524307 + j.404475	1.048614	.438498	
			-0.128377 + j.994626	.256654	1.005748	
2.00	46.481	4.733595	-0.499020 + j.370743	.998040	.386471	
			-0.146844 + j.988871	.291689	.899136	
6	1.05	29.133	1.126696	-0.479520 + j.376448	.659040	.371660
			1.535284	-0.124739 + j.994415	.249477	.815537
				-0.019753 + j1.000393	.637507	1.001138
	1.10	36.640	1.248053	-0.437212 + j.330308	.874424	.300258
			1.837654	-0.142909 + j.985557	.295619	.752292
			-0.027110 + j.996998	.054220	.999932	
1.20	46.571	1.591690	-0.397576 + j.280708	.795151	.241997	
		2.404505	-0.154828 + j.913541	.317656	.687107	
			-0.037077 + j.998324	.074154	.998026	
1.50	64.541	2.391114	-0.174302 + j.282528	.349404	.811225	
		4.730449	-0.050450 + j.994191	.100600	.994047	
			-0.354021 + j.248806	.717041	.187043	
2.00	83.221	4.773072	-0.333676 + j.220258	.667352	.163904	
		4.042804	-0.181299 + j.734501	.262598	.572497	
			-0.059342 + j.994768	.114684	.992971	
8	1.05	44.737	1.114430	-0.371405 + j.270508	.743401	.211493
			1.250507	-0.151844 + j.777110	.207408	.605407
			2.045094	-0.047264 + j.969846	.094537	.994097
			-0.059850 + j.990470	.010717	.999437	
	1.10	54.438	1.229641	-0.331490 + j.237876	.670698	.169050
1.445843			-0.154441 + j.711537	.214034	.531390	
2.822843			-0.040987 + j.929137	.119444	.988837	
		-0.016363 + j.995764	.021710	.999733		

Table 2.3-1—Continued

(f) Case C even: 1.0-dB passband ripple:

$n$	$\omega_c$	$K_p$ (dB)	$c_i$	$P_i$	$a_i$	$b_i$
10	1.50	70.099	1.477199	-.307767 + j .703772	.604934	.132132
			1.171174	-.167071 + j .662152	.374190	.667079
			3.544676	-.071157 + j .005676	.146317	.829112
				-.010403 + j .991747	.039107	.697679
	1.50	94.266	2.319174	-.267484 + j .146775	.364975	.104220
			3.048578	-.153159 + j .667103	.375319	.389149
			6.608405	-.048678 + j .874158	.175996	.772679
				-.027224 + j .997687	.074449	.996120
	2.00	119.934	4.143165	-.250369 + j .147747	.500739	.090858
8.644525			-.162577 + j .571959	.325154	.353568	
12.912424			-.096552 + j .854791	.193104	.743414	
			-.031665 + j .997054	.063330	.995120	
10	1.05	64.036	1.110055	-.302778 + j .211052	.604457	.135895
			1.186597	-.154774 + j .657742	.309547	.450027
			1.470226	-.047537 + j .880131	.135673	.779193
			2.904853	-.024923 + j .970175	.049846	.941860
				-.006111 + j .999657	.017721	.999343
	1.10	76.722	1.222102	-.271181 + j .189475	.542366	.108108
			1.340720	-.143648 + j .599498	.307296	.383006
			1.754581	-.078131 + j .843990	.156263	.718423
			3.612427	-.033289 + j .957369	.066578	.917664
				-.008938 + j .999388	.017875	.998895
	1.20	93.299	1.459927	-.243254 + j .164164	.484508	.086122
			1.651014	-.140336 + j .548673	.300673	.323643
2.291473			-.087630 + j .805089	.179260	.655848	
5.078099			-.042537 + j .942701	.085063	.889552	
			-.012377 + j .999027	.024754	.998208	
1.50	123.515	2.293018	-.214394 + j .147421	.428788	.066248	
		2.699727	-.144539 + j .443399	.289078	.264334	
		4.027356	-.097026 + j .757857	.194052	.583753	
		9.548795	-.054019 + j .921965	.104037	.852937	
			-.017097 + j .998479	.034194	.997252	
2.00	154.682	4.089232	-.200312 + j .132059	.400624	.057564	
		4.929889	-.140813 + j .465461	.281625	.236482	
		7.655998	-.101314 + j .731995	.202633	.546082	
		19.272417	-.060405 + j .910063	.120810	.831863	
			-.019939 + j .998124	.039876	.998650	

Coeficientes de la función de transferencia  
factorizada de filtros paso-bajas normaliza

- 155 -

TABLE 1.3 Bessel Network Parameters

Number of poles	Stage	Design		Tuning	
		$\alpha$	$\omega_n$	$\omega_n$ or -3 dB* frequency	$20 \log G(\omega_n)/G(0)$
2	1	1.732051	1.732051	1.362*	
3	1	a real pole	2.322185	2.322*	
	2	1.447080	2.541541	2.483*	
4	1	1.915949	3.023265	2.067*	
	2	1.241406	3.389366	1.624	0.23
5	1	a real pole	3.646738	3.647*	
	2	1.774511	3.777893	2.874*	
	3	1.091134	4.261023	2.711	0.78
6	1	1.959563	4.336026	2.872*	
	2	1.636140	4.566490	3.867*	
	3	0.977217	5.149177	3.722	1.38
7	1	a real pole	4.971785	4.972*	
	2	1.878444	5.066204	3.562*	
	3	1.513268	5.379273	5.004*	
	4	0.887896	6.049527	4.709	1.99
8	1	1.976320	5.654832	3.701*	
	2	1.786903	5.825360	4.389*	
	3	1.406781	6.210417	0.637	0.00
	4	0.815881	6.959311	5.680	2.56
9	1	a real pole	6.297005	6.297*	
	2	1.924161	6.370902	4.330*	
	3	1.696625	6.606651	5.339*	
	4	1.314727	7.056082	2.600	0.08
	5	0.756481	7.876636	6.655	3.09
10	1	1.984470	6.976066	4.540*	
	2	1.860312	7.112217	5.069*	
	3	1.611657	7.405447	6.392*	
	4	1.234887	7.913585	3.857	0.25
	5	0.700560	8.800155	7.623	3.60

\* Bessel filters are frequency-normalized to unity delay  $\tau(\omega) = 1$  sec at  $\omega = 0$ .

A.4 ESCALAMIENTO DE FRECUENCIA E IMPEDANCIA.

A.4.1 ESCALAMIENTO DE IMPEDANCIA.

Suponga una red plana lineal e invariable con una excitación  $V_i$  y un voltaje correspondiente a una rama cualesquiera de la misma; ver figura A.4.1

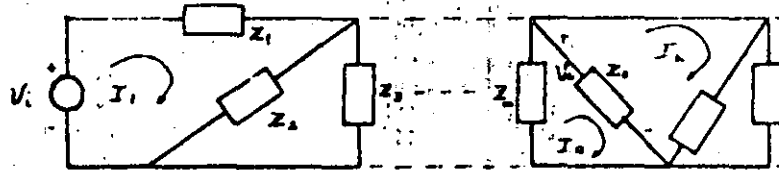


Figura A.4.1 Red de N mallas con  $V_i$  igual al voltaje de una de sus ramas.

Las ecuaciones de malla de la red presentan la forma:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo para  $I_k$  e  $I_L$

$$I_k = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \dots & Z_{1(k-1)} & V_i & \dots & Z_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{n1} & \dots & Z_{n(k-1)} & 0 & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & \dots & Z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix}} \dots (A.4.1)$$

$$I_L = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \dots & Z_{r(L-1)} & V_i & \dots & Z_{1n} \\ \cdot & & & 0 & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ Z_{n1} & \dots & \dots & 0 & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & \dots & \dots & \dots & \dots & Z_{1n} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ Z_{n1} & \dots & \dots & \dots & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix}} \dots (A.4.2)$$

el voltaje  $V_o$  está dado por:

$$V_o = Z_o (I_L - I_k) \dots (A.4.3)$$

si se define:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & \dots & Z_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ Z_{n1} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix} \dots (A.4.4)$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} Z_{21} & \dots & Z_{2(k-1)} & \dots & Z_{2n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ Z_{n1} & \dots & Z_{n(k-1)} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix} \dots (A.4.5)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} Z_{21} & \dots & Z_{2(L-1)} & \dots & Z_{2n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ Z_{n1} & \dots & Z_{n(L-1)} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix} \dots (A.4.6)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones (A.4.1), (A.4.2), (A.4.4), (A.4.5) y (A.4.6) en la ecuación (A.4.3), se tiene

Si se comparan las localizaciones de los polos del filtro supresor de banda con las localizaciones de los polos del filtro pasa-banda del ejemplo A.6.3.1 es claro que coinciden.

Esto es obvio ya que los polinomios característicos de dichos filtros (ecs. (A.6.10) y (A.6.13)) son los mismos; esto no es de extrañar pues dichos filtros (pasa-banda y supresor de banda) se obtuvieron de un mismo filtro (pasa-bajas Butterworth, ecuación (A.6.9)) y como los polos de un filtro pasa-bajas Butterworth normalizado se encuentran sobre un círculo de radio unitario, lo que implica que su módulo sea 1 (lo que varía es su argumento) y tomando en cuenta las ecuaciones (A.6.8) y (A.6.12) se tiene el resultado mencionado. (Vgr. el recíproco de un número complejo cuyo módulo es uno es igual a su conjugado):

Es importante puntualizar que lo anterior ocurre únicamente para el filtro pasa-bajas Butterworth normalizado.



$$W_1 L_k = W_2 L'_k \quad \dots(A.4.15)$$

$$W_1 C_k = W_2 C'_k \quad \dots(A.4.16)$$

donde, los nuevos valores de los elementos inductivos y capacitivos para que se cumpla lo dicho en el párrafo anterior son:

$$L'_k = \frac{W_1}{W_2} L_k \quad \dots(A.4.17)$$

$$C'_k = \frac{W_1}{W_2} C_k \quad \dots(A.4.18)$$

De lo anterior se concluye:

Si se desea que la respuesta senoidal permanente de una red a una cierta frecuencia " $w_2$ " presente la misma magnitud y defasaje que se tienen para una frecuencia " $w_1$ "; los capacitores e inductores que forman la red deben escalarse de acuerdo a las ecuaciones (A.4.17) y (A.4.18)

## REFERENCIAS

- 1) Johnson "Introduction to Filter Theory"  
Prentice Hall
- 2) Huelsman "Introduction to the Theory and Design  
of Active Filters"  
McGraw Hill
- 3) Bildstein "Filtros Activos"  
Marcombo
- 4) Antoniov "Digital Filters: Analysis and Design"  
McGraw Hill
- 5) Tobey "Operational Amplifiers: Design and Applications"  
McGraw Hill
- 6) Rabiner and Gold "Theory and Application of Digital  
Signal Processing"  
Prentice Hall
- 7) Oppenheim "Digital Signal Processing"  
Prentice Hall
- 8) Trick and Hocevan "Automatic Tuning Algorithms for  
Active Filters"  
IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-29,  
No 7, July 1982.
- 9) Strurg "Linear Algebra with Applications"



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

TEORIA Y DISEÑO DE FILTROS ANALOGICOS Y DIGITALES

CONTINUACION CAPITULO INTRODUCCION

Ing. Javier Valencia Figueroa

AGOSTO, 1985

### 1.5.3. FORMAS DE ESPECIFICAR LAS CARACTERISTICAS DE UN FILTRO.

Al enfrentarse con el diseño de un filtro, el primer paso que se debe dar, es especificar las características del mismo, existen varias formas de realizarlo, las cuales a continuación se enuncian:

#### PRIMERA FORMA.

Dando las características de ganancia y fase del mismo, como se muestra en la fig. 20. Esta forma es empleada para especificar un filtro ideal normalizado, el cual quedo demostrado su imposible realización física, siendo esta forma la más usada en los libros de texto no especializados.

A partir de esta forma la especificación no es posible calcular el orden del filtro, siendo esta una de sus limitantes.

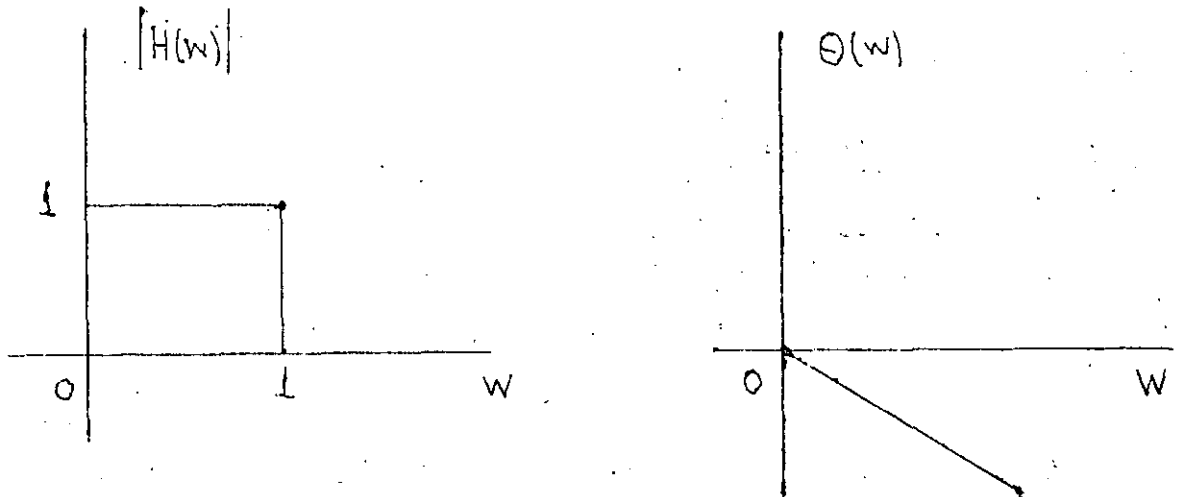


Fig. 20 FILTRO IDEAL NORMALIZADO.

#### SEGUNDA FORMA.

De acuerdo a la atenuación (dB) que se desea en la banda

INTEGRAL ELIPTICA.

ELLIPTIC INTEGRALS

7-2

Table 17.1 COMPLETE ELLIPTIC INTEGRALS OF THE FIRST AND SECOND KINDS AND THE NOME  $q$  WITH ARGUMENT THE PARAMETER  $m$

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} (1 - m \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta \quad K'(m) = K(m_1)$$

$$E(m) = \int_0^{\pi/2} (1 - m \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta \quad E'(m) = E(m_1)$$

$$q(m) = \exp \{-\pi K'(m) / K(m)\} \quad q_1(m) = q(m_1)$$

$m$	$K(m)$	$K'(m)$	$q(m)$	$m_1$
0.00	1.57079 63267 94897		0.00000 00000 00000	1.00
0.01	1.57474 55615 17356	3.69563 73629 89875	0.00062 81456 60383	0.99
0.02	1.57873 99120 07773	3.35414 14456 99160	0.00126 26665 23204	0.98
0.03	1.58278 03424 06373	3.15587 49478 91841	0.00190 36912 69025	0.97
0.04	1.58686 78474 54166	3.01611 24924 77648	0.00255 13525 13689	0.96
0.05	1.59100 34537 90792	2.90833 72484 44552	0.00320 57869 70686	0.95
0.06	1.59518 82213 21610	2.82075 24967 55872	0.00386 71356 22010	0.94
0.07	1.59942 32446 58510	2.74707 30040 24667	0.00453 55438 98018	0.93
0.08	1.60370 96546 39253	2.68355 14063 15229	0.00521 11618 66985	0.92
0.09	1.60804 86199 30513	2.62777 35320 84344	0.00589 41444 34269	0.91
0.10	1.61244 13487 20219	2.57809 21133 48173	0.00658 46515 53858	0.90
0.11	1.61688 90905 05203	2.53333 45460 02200	0.00728 28484 49518	0.89
0.12	1.62139 31379 80658	2.49263 53232 39716	0.00798 89058 49815	0.88
0.13	1.62595 48290 38433	2.45533 80283 21380	0.00870 30002 35762	0.87
0.14	1.63057 55488 81754	2.42093 29603 44303	0.00942 53141 02678	0.86
0.15	1.63525 67322 64580	2.38901 64863 25580	0.01015 60362 37153	0.85
0.16	1.63999 98658 64511	2.35926 35547 45007	0.01089 53620 10173	0.84
0.17	1.64480 64907 98881	2.33140 85677 50251	0.01164 34936 87540	0.82
0.18	1.64967 82052 94514	2.30523 17368 77189	0.01240 06407 58856	0.82
0.19	1.65461 66675 22527	2.28054 91384 22770	0.01316 70202 86392	0.81
0.20	1.65962 35986 10528	2.25720 53268 20854	0.01394 28572 75318	0.80
0.21	1.66470 07858 45692	2.23506 77552 60349	0.01472 83850 66891	0.79
0.22	1.66985 00860 83368	2.21402 24978 46332	0.01552 38457 56320	0.78
0.23	1.67507 34293 77219	2.19397 09253 19189	0.01632 94906 37206	0.77
0.24	1.68037 28228 48361	2.17482 70902 46414	0.01714 55806 74605	0.76
0.25	1.68575 03548 12596	2.15651 56474 99643	0.01797 23870 08967	0.75
0.26	1.69120 81991 86631	2.13897 01837 52114	0.01881 01914 93399	0.74
0.27	1.69674 86201 96168	2.12213 18631 57396	0.01965 92872 66940	0.73
0.28	1.70237 39774 10990	2.10594 83200 52758	0.02051 99793 66788	0.72
0.29	1.70808 67311 34606	2.09037 27465 52360	0.02139 25853 82708	0.71
0.30	1.71388 94481 78791	2.07536 31352 92469	0.02227 74361 57154	0.70
0.31	1.71978 48080 56405	2.06088 16467 30131	0.02317 48765 35013	0.69
0.32	1.72577 56096 29320	2.04689 40772 10577	0.02408 52661 67250	0.68
0.33	1.73186 47782 52098	2.03336 94091 52233	0.02500 89803 73177	0.67
0.34	1.73805 53734 56358	2.02027 94286 03592	0.02594 64110 66576	0.66
0.35	1.74435 05972 25613	2.00759 83984 24376	0.02689 79677 51443	0.65
0.36	1.75075 38029 15753	1.99530 27776 64729	0.02786 40785 93729	0.64
0.37	1.75726 85048 82456	1.98337 09795 27821	0.02884 51915 76181	0.63
0.38	1.76389 83888 83731	1.97178 31617 25656	0.02984 17757 44138	0.62
0.39	1.77064 73233 33534	1.96052 10441 65830	0.03085 43225 51033	0.61
0.40	1.77751 93714 91253	1.94956 77498 06026	0.03188 33473 13363	0.60
0.41	1.78451 88046 81873	1.93890 76652 34220	0.03292 93907 86003	0.59
0.42	1.79165 01166 52966	1.92852 63181 14418	0.03399 30208 70043	0.58
0.43	1.79891 80399 87685	1.91841 02691 09912	0.03507 48344 66773	0.57
0.44	1.80632 75591 07699	1.90854 70162 81211	0.03617 54594 93133	0.56
0.45	1.81388 39368 16983	1.89892 49102 71554	0.03729 55570 75822	0.55
0.46	1.82159 27265 56821	1.88953 30788 53096	0.03843 58239 43468	0.54
0.47	1.82945 97985 64730	1.88036 13596 22178	0.03959 69950 38753	0.53
0.48	1.83749 13633 55796	1.87140 02398 11034	0.04077 98463 75263	0.52
0.49	1.84569 39983 74724	1.86264 08023 32739	0.04198 51981 67183	0.51
0.50	1.85407 46773 01372	1.85407 46773 01372	0.04321 39182 63772	0.50

$\begin{bmatrix} (-5)2 \\ 11 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} (-6)3 \\ 9 \end{bmatrix}$

See Examples 3-4.

$E(m)$  and  $E'(m)$  from L. M. Milne-Thomson, Ten-figure table of the complete elliptic integrals

$K, K', E, E'$  and a table of  $\frac{1}{\mathcal{E}_1^2(0; r)} \frac{1}{\mathcal{E}_2^2(0; r)}$ . Proc. London Math. Soc.(2)33, 1931(with permission).

Utilizando la relación ( Ver pag. 1-74)

$$N = \frac{K(X_L^{-1}) K^1 (L^{-1})}{K^1 (X_L^{-1}) K (L^{-1})}$$

Donde  $X_L = \frac{WH}{WB}$

Se tiene  $X_L^{-1} = \frac{1}{1.3}$

de la tabla II. 5 (INTEGRAL ELIPTICA) entrando a la columna m , con el valor de 0.76 se tiene:

$$K \left( \frac{1}{1.3} \right) = 2.174 \quad K^1 \left( \frac{1}{1.3} \right) = 1.68$$

(Observar la integral de la pag. 1.73 y la de tabla)

Como  $L^2 = \frac{(10^{AMIN/10} - 1)}{(10^{AMAX/10} - 1)}$

Se tiene  $L = 207.1 \quad K \left( \frac{1}{L} \right) = 1.57 \quad ; \quad K^1 \left( \frac{1}{L} \right) = 5.434$

$$N = \frac{(2.174) (5.439)}{(1.68) (1.57)} = 4.44$$

N=5

de los ejemplos anteriores, se concluye que la aproximación elíptica, es la que satisface los requisitos con un orden menor

APROXAMACION	ORDEN
BUTTERWORTH	21
TCHEBYSHEV	8
TCHEBYSHEV INVERSO	8
ELIPTICA	5

EJEMPLO # 5.

Con el resultado el problema # 1, determine  $A_{MIN}$  ya que varío, al aproximarse al orden a-un número entero.

De la pag. 1-66 se tiene

$$A_{MIN} = A(W_H) = 10 \text{ Log. } 1 + (W_H/W_B)^{2N}$$

Sustituyendo datos, se tiene

$$A_{MIN} = 47.8 \text{ dB}$$

Se observa que se mejoró la característica de  $A_{MIN}$ .

Ejemplo # 6.

Determine la función de transferencia  $H(s)$  para un filtro BUTTERWORTH normalizado de segundo y tercer orden

de la relación

$$H(s) = \sum_{k=0}^N H_k s^k$$

se tiene para segundo orden

$$D(s) = s^2 + 2s + 1$$

Para tercer orden:

$$D(s) = (s+1)(s^2 + 5s + 1)$$

los coeficientes se obtienen de una tabla de la aproximación BUTTERWORTH.

## 1.6 METODOLOGIA DE DISEÑO.

Una vez que se cálculo el orden, es adecuado que se de una metodología que ilustre; la forma de diseño de un filtro. Es pertinente mencionar que de acuerdo al método de síntesis a escoger; es la forma de diseño del filtro.

### 1.6.1 FILTRO ACTIVO.

En forma general se tiene:

- A. Aproximación
- B. Normalización
- C. Método de síntesis
- D. Implementación

#### A. APROXIMACION

Se entiende por aproximación el calcular el orden del filtro, de acuerdo a las especificaciones dadas.

#### B. NORMALIZACION

Se entiende por normalizar, el pasar las especificaciones técnicas, a un filtro paso bajas con frecuencia de corte unitaria.

En algunas ocasiones es necesario aplicar las transformaciones en frecuencia que permiten pasar de un filtro paso banda a un filtro paso bajas y viceversa ( ver apéndice del capítulo II).



C. METODO DE SINTESIS.

El método escogido para esta metodología es el de aproximación de coeficientes, el cual consiste en seleccionar a priori la red activa ( ver capítulo II, pag. 49 a 70) y su función de transferencia se determina analíticamente (ver problema # 6). Posteriormente se desnormaliza a la frecuencia de corte especificada.

La función de transferencia de la Red ( realimentación - - multiple de ganancia infinita, Biquqd, etc) Se compara con la función de transferencia desnormalizada.

El valor de los elementos se determina igualandolos los coeficientes de ambas funciones termino a termino.

En este método, es usual que el número de ecuaciones que se obtiene por comparación sea mayor, que el número de incógnitas, dando esto un mayor grado de libertad al diseñador para seleccionar adecuadamente el valor de los elementos.

El uso del método de limita a funciones de segundo grado, ya que la realización de funciones de transferencia de grado superior, se hace conectando funciones de segundo grado en cascada, acopladas con amplificadores de aislamiento.

D. IMPLEMENTACION.

Consiste en suponer el valor (comercial) de los capacitores y calcular los valores de la resistencias (comercial), en caso de no encontrar estos valores, no es recomendable tomar el valor más próximo, ya que varían las especificaciones técnicas, es necesario en este caso poner presets. y ajustarlos al valor requerido.

Una de las recomendaciones básicas es ajustar y compensar el amplificador operacional, así como medir las resistencias y capacitores a montar en el circuito (estos elementos tienen tolerancias).

1

A continuación se presenta un procedimiento más desglosado del diseño de estos filtros, a partir de un ejemplo.

Primer Paso.

Dar las especificaciones técnicas.

Un filtro paso bajas con tapa plana en la banda de paso tiene las siguientes características.

AMIN= 30 dB

AMAX= 0.5 dB

fh= 3 500 Hz

fb= 2 500 Hz

Segundo Paso.

Calcular el orden del filtro

Ejemplo:

Por ser de tapa plana, se tiene una aproximación BUTTERWORTH y de la pag. 1-66 se tiene:

$$N = \frac{\text{Log} (10^{0.1 \text{ AMIN} - 1}) / (10^{0.1 \text{ AMAX} - 1})}{2 \text{ log. (WH/WB)}}$$

Sustituyendo datos

N= 13.389

N=14

Tercer paso:

Se normaliza el filtro.

Ejemplo:

Normalizar un filtro, cuyas características son las siguientes:

AMIN = 30 dB                                  fh = 3500 Hz  
 AMAX = 0.1 dB                                fb = 2500 Hz

Solución

$$W_h = 2 (3.1416) (3500) = 21991.148$$

$$W_b = 2 (3.1416) (2500) = 15707.963$$

$$W_{Bnor} = \frac{15707.963}{15707.963} = 1$$

$$W_{Hnor} = \frac{21991.148}{15707.963} = 1.399$$

CUARTO PASO:

Armar la función de transferencia que caracteriza al filtro encontrando los valores de los coeficientes del polinomio del denominador D (s) de acuerdo a la aproximación escogida (ver tablas).

EJEMPLO.

Se requiere la función de transferencia de un filtro paso bajas BUTTERWORTH de 5 orden.

Solución.

Del capítulo II, apéndice A.1 Tabla 1.1 página 132 se busca el orden, es decir N= 5 y los valores de los coeficientes del polinomio, están dados para las secciones de segundo orden y una de primer orden

$$H(s) = \left( \frac{H01}{s^2 + 0.61804s + 1} \right) \left( \frac{H02}{s^2 + 1.61804s + 1} \right) \left( \frac{H03}{s + 1} \right)$$

Donde el producto de las Ho, es la ganancia del filtro.

Quinto paso.

Desnormalizar a la frecuencia de corte escogida.

Ejemplo:

Se desea desnormalizar, un filtro paso bajas BUTTERWORTH de 2 orden, cya frecuencia de corte es de 2500 Hz.

Solución:

$$H(s) = \frac{Ho}{s^2 + 1.41425s + 1} \quad (\text{ver cuarto paso})$$

$$= \frac{HoB}{s^2 + As + B} \quad (\text{ver cap. II, pag. 5})$$

$$A = 1.41421 \quad B = 1$$

$$A^1 = 1.41421 (2\pi) (2500) = 22214.8299$$

$$B^1 = (1 (2\pi) (2500))^2 = (15707.9632)^2 \quad (\text{VER CAP. II PAG. 5})$$

Entonces, la función de transferencia desnormalizado es

$$H(s) = \frac{(15707.9632)^2 Ho}{s^2 + 22214.8299s + (15707.9632)^2}$$

SEXTO PASO

Aplicar el método de síntesis de aproximación de coeficientes entonces, escoger a priori la función de transferencia de la red (HARDWARE) y compararla con la función de transferencia desnormalizada.

EJEMPLO.

La función de transferencia de una red de realimentación múltiple de ganancia infinita, de un filtro pasa bajas de segundo orden es ( Ver cap. II, pag. 50).

$$H(s) = \frac{-1}{s^2 + \left(\frac{s}{C2}\right) \left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R4}\right) + \frac{1}{R3 R4 C2 C5}}$$

Comprobando término a término, con la función de transferencia desnormalizada del paso quinto, se tiene

$$(15707.9632)^2 H_0 = \frac{1}{R1 R3 C2 C5}$$

$$22214.8299 = \frac{1}{C2} \left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R4}\right)$$

$$(15707.9632)^2 = \frac{1}{R3 R4 C2 C5}$$

ó bien

pero

$$H_0 \omega_0^2 = \frac{1}{R1 R3 C2 C5}$$

$$\omega_0^2 = B^1 = \frac{1}{R3 R4 C2 C5}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior.

$$\frac{H_0}{R3 R4 C2 C5} = \frac{1}{R1 R3 C2 C5}$$

donde

$$H_0 = \frac{R_4}{R_1}$$

es decir la ganancia del filtro esta dada por  $\frac{R_4}{R_1}$

SEPTIMO PASO.

Suponer los valores de los capacitores y encontrar los de la resistencia.

Ajustar y compesar el amplificador operacional

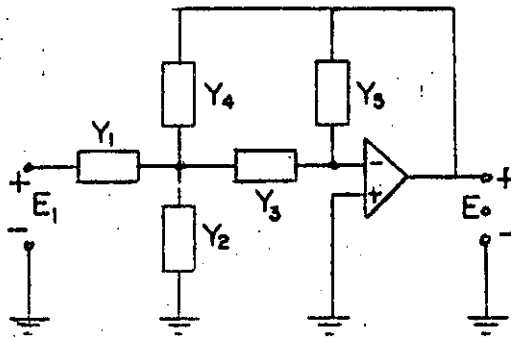


Fig. 21 Red de Realimentación Multiple de ganancia infinita.

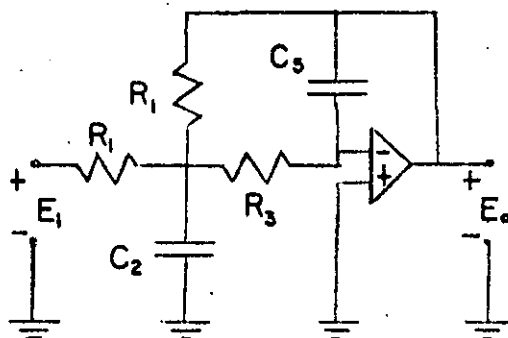


Fig. 22 Filtro paso bajas de realimentación múltiple

### 1.6.2 FILTROS DIGITALES.

- A. APROXIMACION
- B. REALIZACION
- C. ESTUDIO DE ERRORES
- D. IMPLEMENTACION

#### A. APROXIMACION

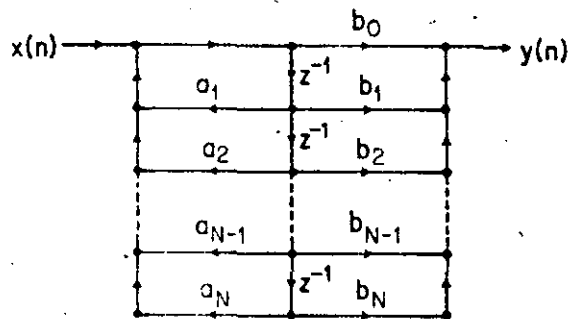
Es obtener la función de transferencia, que satisfase el conjunto de especificaciones de diseño.

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

$$H(z) = \left[ \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right] \left[ \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right] \quad 17$$

$$y_1(n) = x(n) + \sum_{k=1}^N a_k y_1(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k y_1(n-k)$$



$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

$$H(z) = \left[ \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right] \left[ \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right]$$

Fig. 23 Ecuación de un sistema general IIR.

## B. REALIZACION

Es el proceso de convertir la función de transferencia en la red del filtro, las principales redes que existen son:



- 1.- DIRECTA.
- 2.- DIRECTA CANONICA
- 3.- EN CASCADA ( VER FIG. 24)
- 4.- EN PARALELO ( VER FIG. 25)
- 5.- EN ESCALERA.

#### C. ESTUDIO DE ERRORES.

Es el determinar que tanto error existe en el filtro por la cuantización de los coeficientes, productos y señal de entrada.

#### D. IMPLEMENTACION .

Es construir el filtro, lo cual se puede realizarse de dos formas, con SOFTWARE ( tiempo no real) y HARDWARE (tiempo real). En el primer caso la implementación consiste en simular la red del filtro, el segundo caso se implementa con circuitos integrados. (procesadores de arreglos, unidades aritméticas rapidas etc.)

Cascade Structure

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

$$= A \prod \frac{1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}}$$

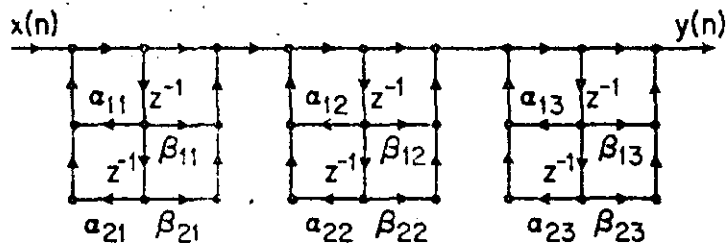


Fig. 24 Estructura en cascada  
 a) función            b) Subsistema de 2 orden.

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

20

$$= \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k(1 - e_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})} + \sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{N+1} \frac{(\gamma_{0k} + \gamma_{1k} z^{-1})}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}} + \sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k}$$

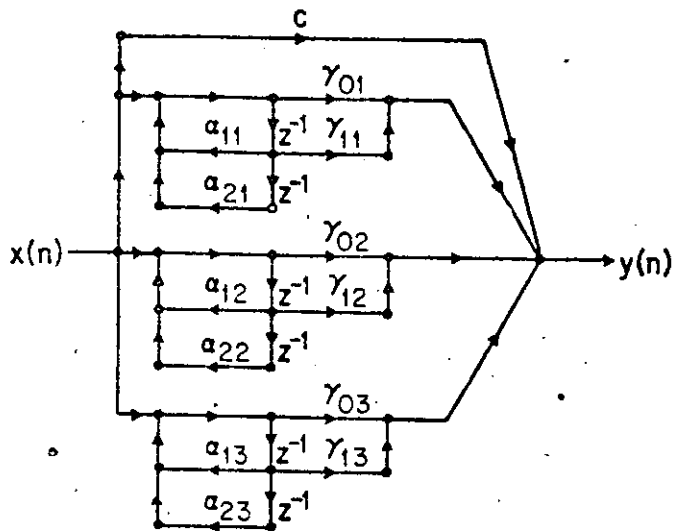


fig. 25 Estructura en paralelo  
a) función                      b) estructura.

### 1.6.3. FILTROS PASIVOS.

- A. CALCULO DEL ORDEN DEL FILTRO.
- B. APROXIMACION
- C. REALIZACION
- D. IMPLEMENTACION

#### A. CALCULO DE ORDEN DEL FILTRO.

De acuerdo a las especificaciones técnicas, obtener el orden del filtro que las satisface y así poder determinar la función de transferencia.

## SINTESIS DE LA RED PASIVA

La aproximación y realización, son los pasos que forman la síntesis de la red pasiva. Que para ilustración de la metodología, se escoge la síntesis de una red LC de dos terminales sin pérdida tipo cauer.

### B. APROXIMACION .

Este punto se refiere a la determinación de una función racional positiva, la cual es identificada con una función de red, es decir, aproximar la respuesta en magnitud de un filtro ideal paso bajas, a través de funciones racionales en la norma conocida como mini-max ó TCHEBY-CHEFF, planeando los teoremas de existencia y unicidad, que aseguran que la función racional minimice el máximo de error. Dicha función posteriormente se identificará con una función de Red.

### C. REALIZACION .

La realización consiste en obtener la Red Fisica (LC) y el procedimiento es el siguiente, dado una PRF, se expresa como una suma de dos PRF'S, una de las cuales puede ser identificada como la impedancia ( o admitancia), de elementos simples ( o combinados) LC, conectados en serie o paralelo

$$F(p) = F_1(p) + F_2(p)$$

( $f_1(p)$  es tan simple que puede ser reconocida como la impedancia o admitancia de alguna Red)

$$F_2(p) = F(p) - F_1(p)$$

Al formar la nueva función  $F_2(p)$  se dice que  $F_1(p)$  ha sido removida de  $F(p)$ , existen basicamente cinco operaciones de removimiento importantes que son:

- 1.- Removimiento de un polo infinito (ver fig. 26)
- 2.- Removimiento de un polo en cero (ver fig. 27)
- 3.- Removimiento de polos conjugados imaginarios (ver fig. 28).
- 4.- Removimiento parcial de polos.
- 5.- Removimiento de una constante.

Habiendo edentificado una red, que corresponde a la función de impedancia más simple, el proceso se vuelve a repetir hasta realizar red, es decir construirla.

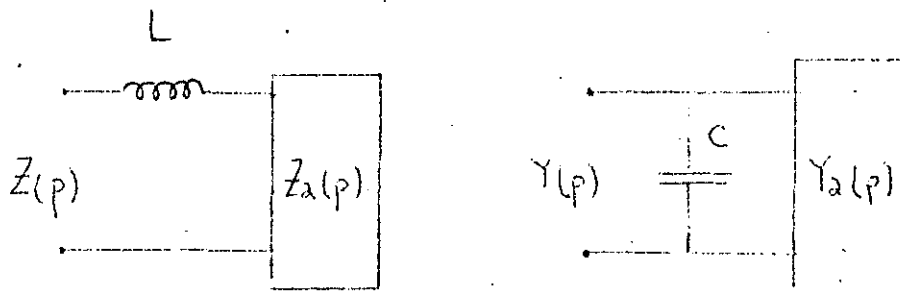


Fig. 26 Reomovimiento de un polo infinito.

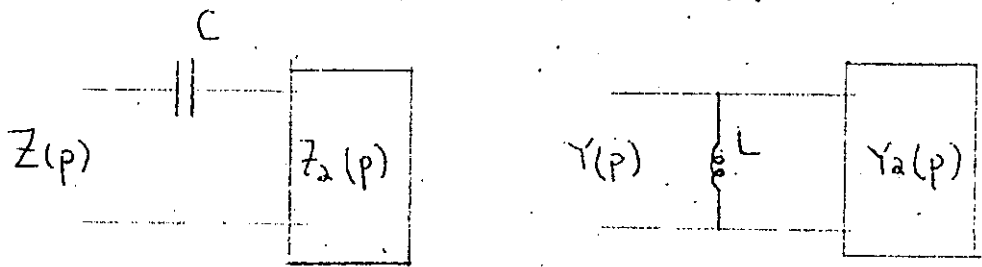


Fig. 27 Removimiento de un polo en cero.

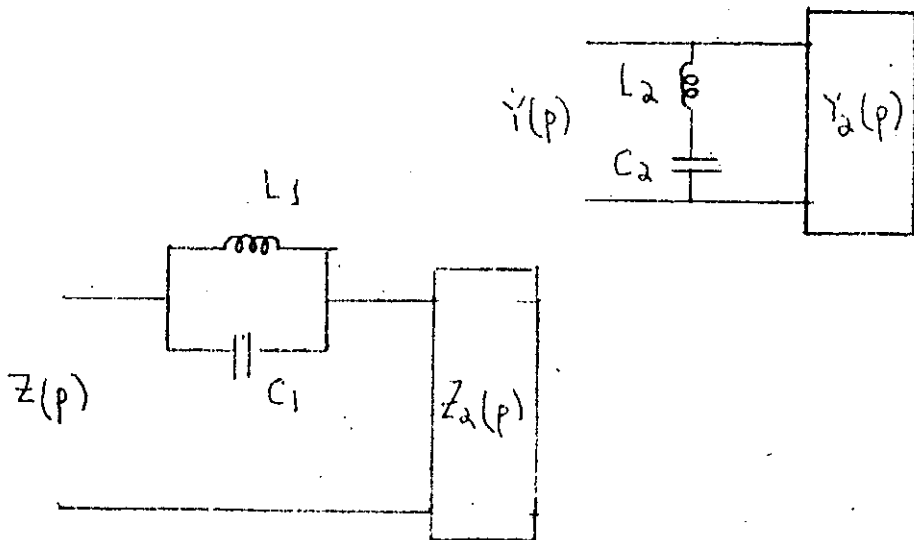


Fig. 28 Removimiento de polos conjugados imaginarios.

DEFINICION DE FILTRO ELECTRICO.

Se puede definir un filtro eléctrico ideal en dos formas, en el dominio de la frecuencia y del tiempo.

En el dominio de la frecuencia.

Definición # 1.

Es un sistema (continuo o discreto) que permite el paso o rechazo de ciertas frecuencias.

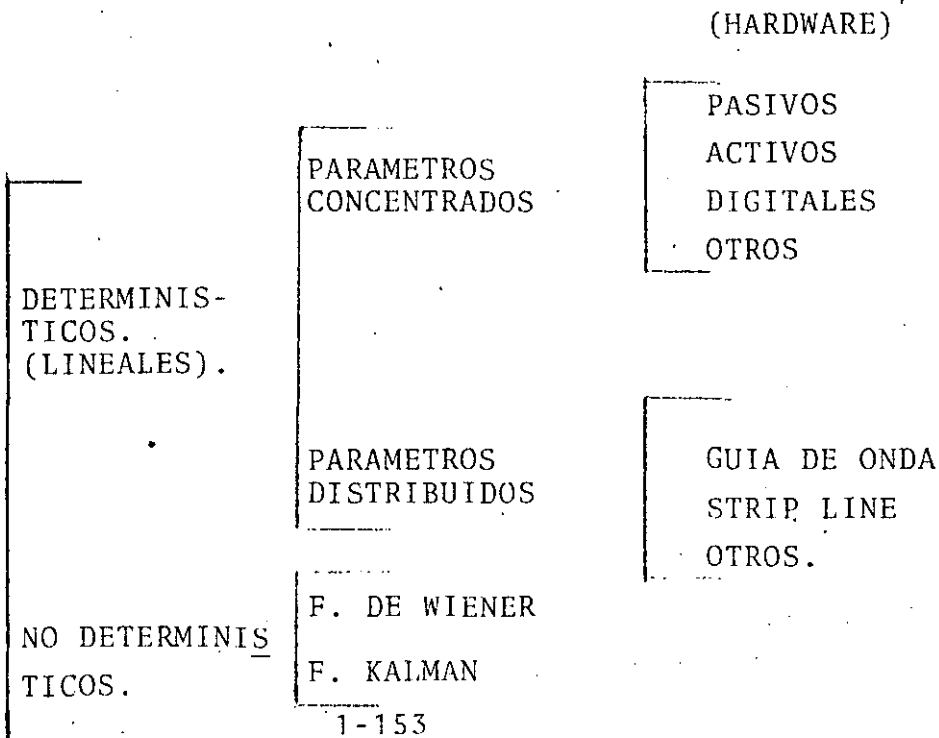
En el dominio del tiempo.

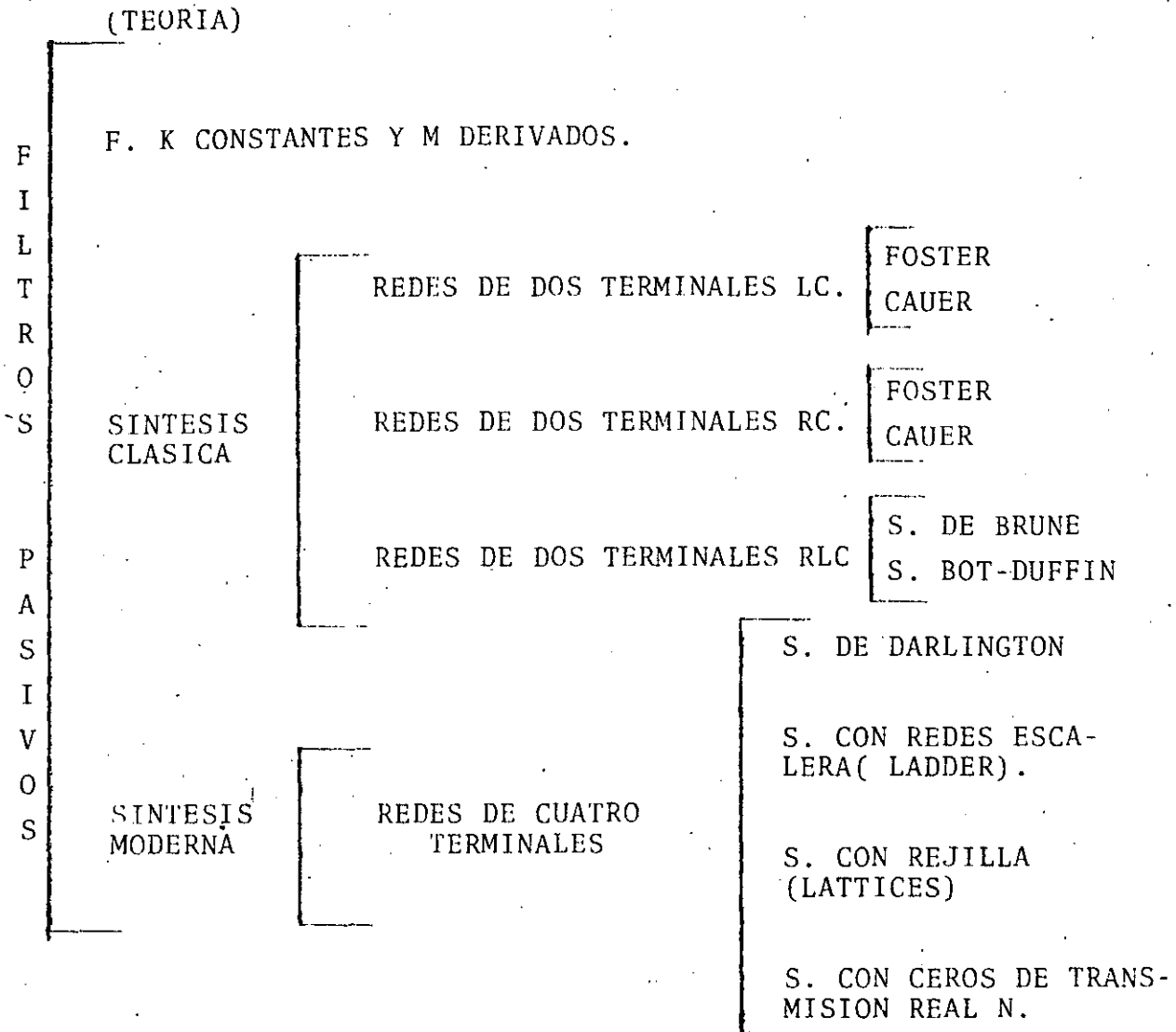
Definición # 2.

Dada una salida, encontrar un sistema que la produzca (síntesis).

CLASIFICACION DE FILTROS ELECTRICOS (REALES).

F  
I  
L  
T  
R  
O  
S







F  
I  
L  
T  
R  
O  
S  
  
A  
C  
T  
I  
V  
O  
S

COMPARACION DE COEFICIENTES.

SALLEN-KEY  
SIMULACION  
R. MULTIREALIMENTACION  
OTROS

SIMULADORES DE INDUCTANCIAS

(GIRADORES)

M. CONVENCIONAL DE SINTESIS.

LINVILL  
YANASIGAWA  
HOROWITZ  
HAKIM

OTROS METODOS.

CAPACITORES CONMUTADOS  
SINTESIS DE MATRIZ DE  
DISPERSION

ALTA FRECUENCIA  
(R. ACOMULADAS)

F  
I  
L  
T  
R  
O  
S  
  
D  
I  
G  
I  
T  
A  
L  
E  
S

(TEORIA)

RECTANGULAR

FUNCIONES VENTANAS

TECNICAS DE MUESTREO EN FRECUENCIA

P. DE OPTIMIZACION

HANN  
HAMMING  
BARTLETT  
KAISER  
OTROS

TECNICAS CON D.F.T.

FILTROS OPTIMOS

FILTROS DE RESPUESTA AL IMPULSO FINITO (FIR-F.NO RECURSIVOS)

FILTROS DE RESPUESTA AL IMPULSO INFINITA (IIR-F. RECURSIVOS)

TRANSFORMADA BILINEAL

M. INVARIANCIA AL IMPULSO (M. D. DE TRANSFORMADA Z)

THE DESIGN OF REACTIVE FILTER NETWORKS FROM TABLES AND GRAPHS

DEFINITION OF TERMS AND STATEMENT OF THE PROBLEM

A large class of reactive networks serve the purpose of passing signals in a specified part of the frequency range (passband) and of preventing any signal flow in another part of the frequency range (stopband). The general case that the source impedance  $R_1$  and the load impedance  $R_2$  are different and arbitrary—including zero and infinite—can be derived from the special case that  $R_1 = R_2 = R$  and finite. The actual power flow from the generator through the reactive network into the load can be expressed in terms of the maximum available power from the generator into a matched load. (Fig. 1A). A fraction  $P_t$  of this reference power  $P_{ref}$  will be transferred through

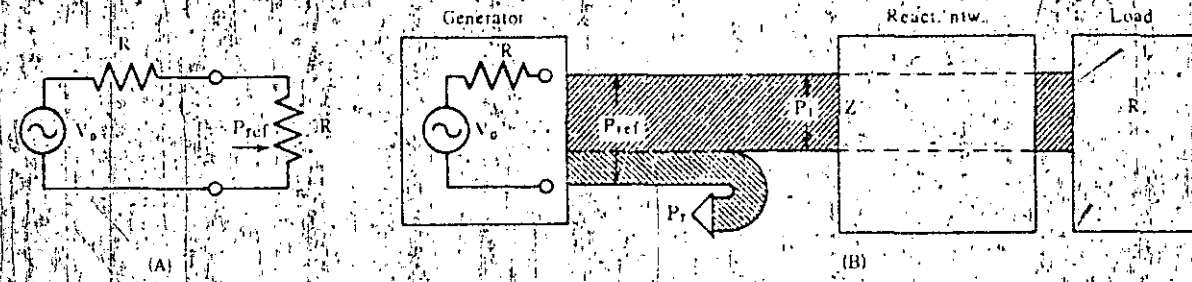


Fig. 1

the network into the load, the rest  $P_r$  may be considered to be reflected or returned to the generator. (Fig. 1B). Transferred and reflected power depend on the input impedance of the reactive network and can be expressed in terms of the reflection coefficient  $p$ :

$$p = \frac{R - Z}{R + Z} \quad \text{Reflection Coefficient} \quad (1)$$

$$P_r = |p|^2 P_{ref} \quad \text{Reflected Power} \quad (2)$$

$$P_t = (1 - |p|^2) P_{ref} \quad \text{Transferred Power} \quad (3)$$

The logarithmic ratio of the maximum available power  $P_{ref}$  to the transferred power will be called "transfer loss" (also called operating loss or effective loss):

$$A[\text{db}] = 10 \log_{10} \frac{P_{ref}}{P_t} = -10 \log_{10} (1 - |p|^2) \quad \text{Transfer Loss} \quad (4)$$

The analogous logarithmic ratio of maximum available power to the reflected power is called "return loss":

$$A_r[\text{db}] = 10 \log_{10} \frac{P_{ref}}{P_r} = -20 \log_{10} |p| \quad \text{Return Loss} \quad (5)$$

The return loss is a useful measure of the tolerance of the input impedance and therefore of the passband performance of a filter.

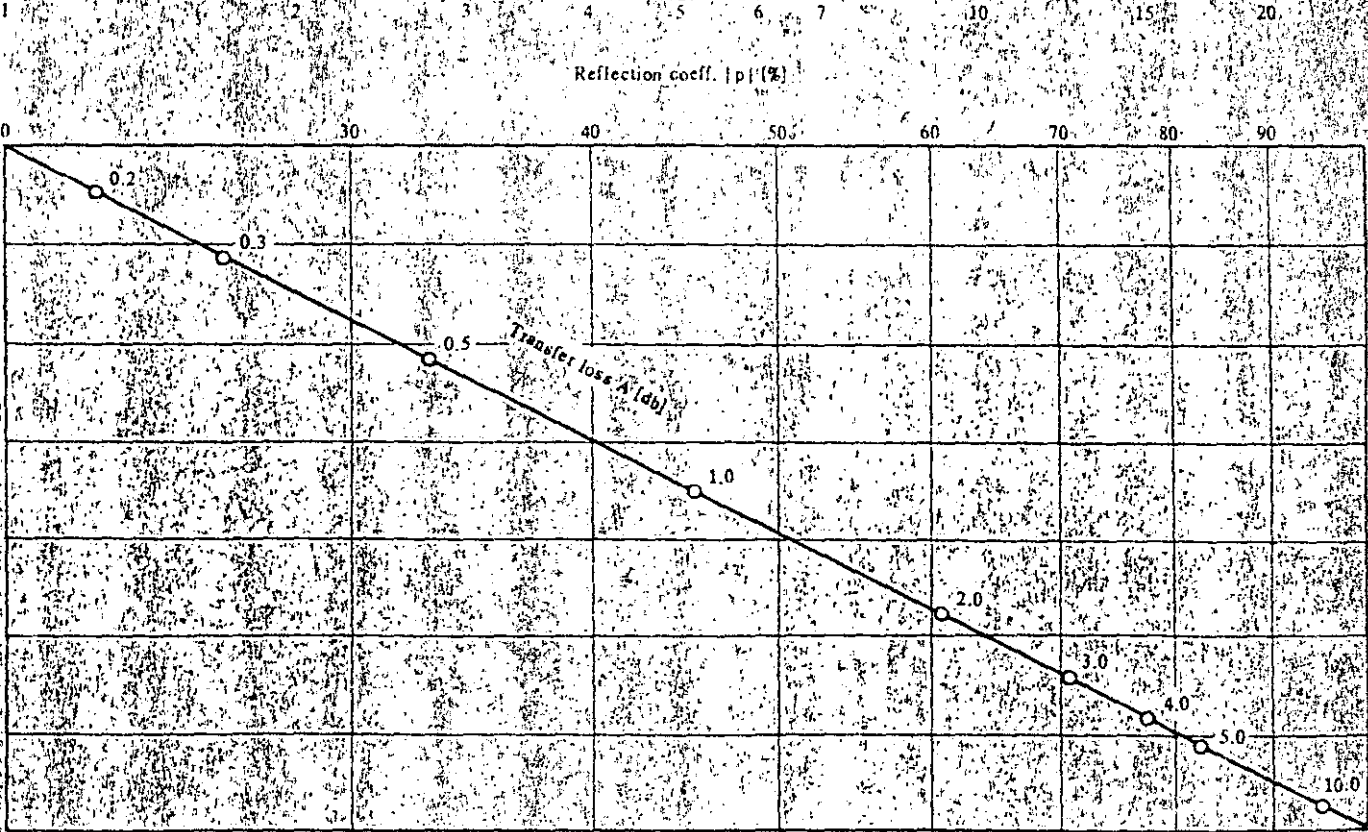
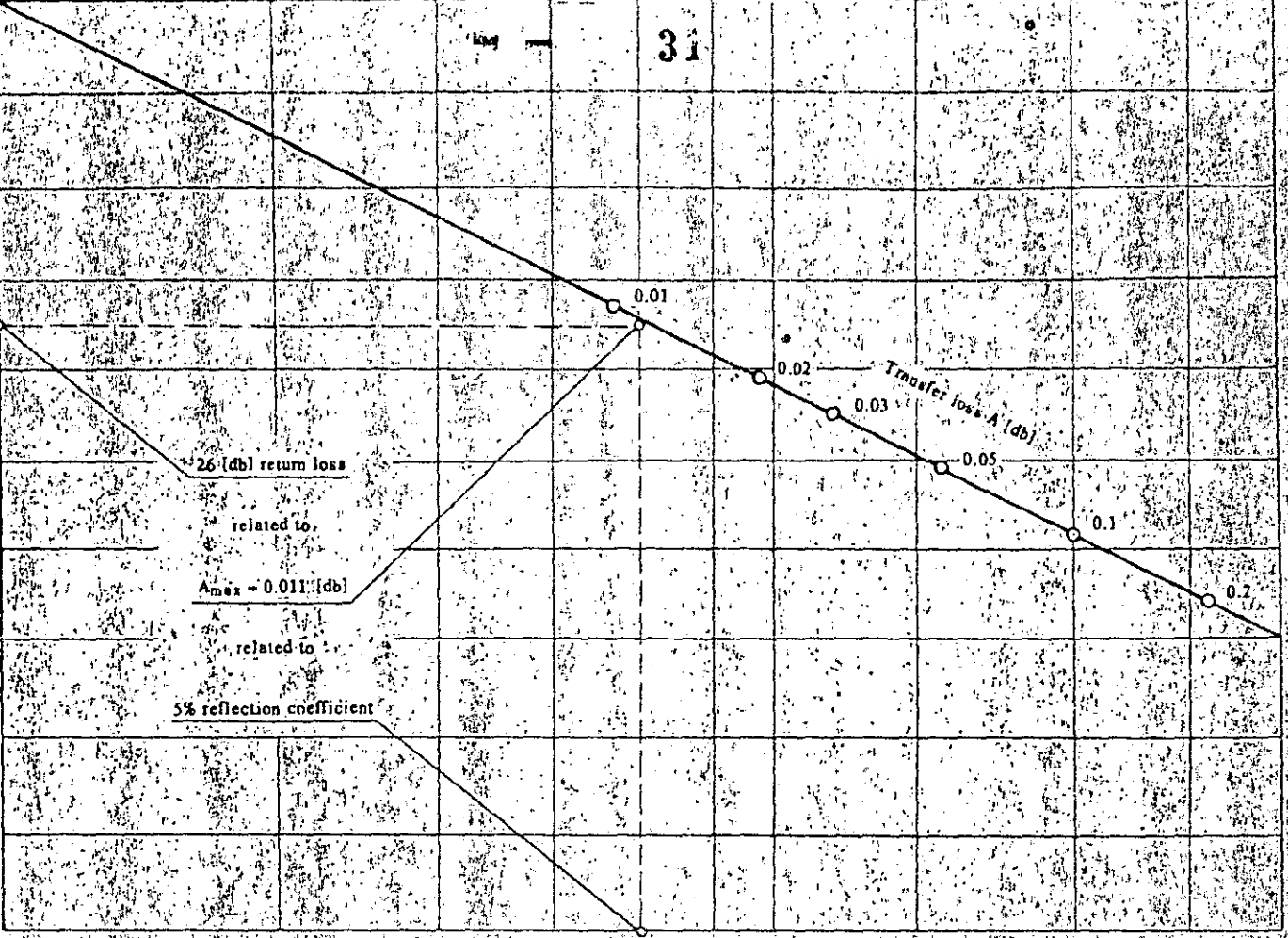


Fig. 2

Practical specifications for the amplitude performance of a filter can be satisfied only within finite boundaries:

(a) In the passband by an upper boundary  $A_{\max}$  [db] for the transfer loss, or the magnitude of the reflection coefficient or a lower boundary for the return loss. The relation between these quantities is expressed by eqs (4) and (5) and can be determined from the nomograph of Fig. 2. A specified tolerance of 10% for the input impedance, for instance, is related to a reflection coefficient  $|r| = 5\%$  and to an upper boundary for the transfer loss  $A_{\max} = 0.011$  [db].

(b) In the stopband by lower boundaries  $A_{\min}$  (db) for the transfer loss.

Specifications of this type can be plotted over the frequency axis (Fig. 3).

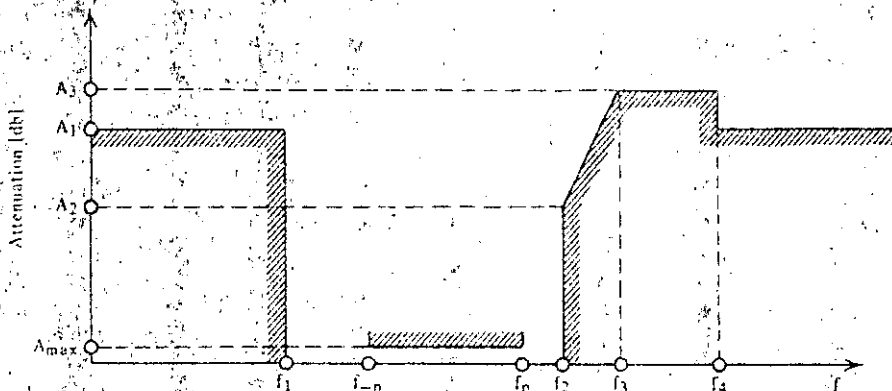


Fig. 3

According to standard procedures, the first objective of filter design is to find a suitable transfer-loss function  $H(s)$ :

$$H(s) = \frac{E(s)}{P(s)} \quad (6)$$

such that its related transfer loss  $A$  [db]:

$$A[\text{db}] = 10 \log_{10} |H(s)|^2 \quad (7)$$

falls within the unshaded area of the tolerance plot. The quantity  $s = \sigma + j\omega$  represents the frequency parameter of the complex plane;  $E(s)$  is a Hurwitz polynomial and  $P(s)$  must be either an even or odd polynomial in  $s$ . The name "transfer-loss function", in preference of transfer function was selected to avoid confusion with established definitions. Rather than using the transfer-loss function it is much more convenient to use the characteristic function  $K(s)$  for the initial step of approximating the specified tolerance plot:

$$K(s) = \frac{F(s)}{P(s)} \quad (8)$$

$$A(\text{db}) = 10 \log_{10} (1 + |K(s)|^2) \quad (9)$$

$$|H(s)|^2 = (1 + |K(s)|^2) \quad (10)$$

The only restriction for the numerator polynomial  $F(s)$  is that it must be a polynomial of  $s$  with real coefficients.

## NORMALIZATION

It simplifies the actual calculations considerably if suitable normalizations of impedances and frequencies are performed. For this purpose, all impedances are expressed as multiples of an arbitrarily chosen reference resistance  $R_{ref}$  usually the generator or the load resistance. Any resistance  $R_x$  or any impedance  $Z_x$  is then of the form:

$$R_x = r_x R_{ref}; Z_x = z_x R_{ref} \quad (11)$$

$r_x$  and  $z_x$  are called normalized resistance or normalized impedance, respectively. Likewise, all frequencies can be expressed as multiples of a suitably chosen reference frequency  $f_{ref}$ :

$$f = \Omega f_{ref} \text{ or } f = \eta f_{ref} \quad (12)$$

The quantities " $\Omega$ " and " $\eta$ " are called normalized frequencies. The two reference quantities  $R_{ref}$  and  $f_{ref}$  can be used to define a reference inductance and a reference capacitance:

$$L_{ref} = \frac{R_{ref}}{2\pi f_{ref}}; C_{ref} = \frac{1}{2\pi f_{ref} R_{ref}} \quad (13)$$

which may serve as reference quantities for actual inductances and capacitances:

$$L = l L_{ref}; C = c C_{ref} \quad (14)$$

the quantities " $l$ " and " $c$ " are then called normalized inductance and normalized capacity, respectively. All normalized quantities are proportionality factors and have therefore the dimension 1.

## BAND TRANSFORMATIONS

Further simplifications of filter designs are possible in those cases in which specified performances can be related to reference filters of less complicated structures. The various types of frequency transformations are valuable aids for this task.

The purpose of frequency transformations is twofold:

- They can be used to transpose a specified tolerance plot to a different region in which the performance of a proper reference filter can be selected.
- They can then be used to transform to the original region the set of poles and zeros of the selected reference filter, or to carry out the entire circuit calculation of the reference filter and apply reactance transformations to the elements.

All transformations are applied to the independent variable " $s$ " of the reference filter only. The  $s$ -plane of this filter and the  $s_1$ -plane in which the performance is actually specified are mapped onto each other by the transformation formula:

$$s = f(s_1) \quad (15)$$

Instead of the subscript " $f$ ", the subscript "LP", "HP", "BP", or "BS" will also be used for a particular transformation.

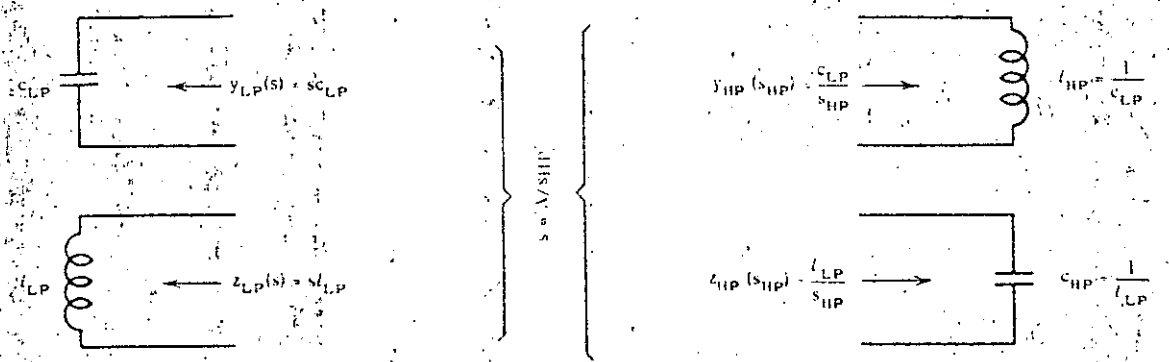
Of special importance are transformations for which  $f(s)$  is a reactance function (frequency-reactance transformations). The transformation (15) can then also be applied to the independent variable of immittances:

$$\begin{aligned} y(s) &= sc & y_f(s_f) &= c f(s_f) \\ z(s) &= s/c & z_f(s_f) &= 1/f(s_f) \end{aligned} \quad (16)$$

For instance, the transformation:

$$s = f(s_{HP}) = \frac{1}{s_{HP}}$$

maps the passband and stopband of a reference lowpass to the reciprocal locations of a normalized highpass. More complicated mapping functions are compiled in the table of Fig. 4. Significant for all these transformations is that the entire calculation including the circuit can be carried out in the  $s$ -plane of the reference lowpass. Applying it to the elements of reference lowpass yields the following reactance transformations:



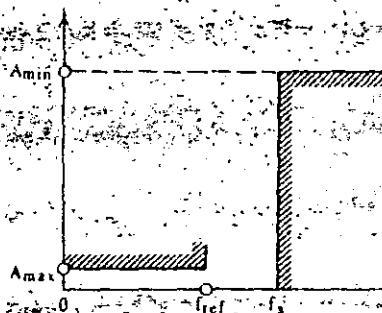
Degree	$f(s)$	Type	Passband transposed from LP
1	$\frac{a}{s}$	LP $\rightarrow$ HP	
2	$\frac{a(s^2 + b)}{s}$	LP $\rightarrow$ BP	
	$\frac{as}{(s^2 + b)}$	LP $\rightarrow$ BS	
3	$\frac{a(s^2 + b)s + c}{(s^2 + c)}$	LP $\rightarrow$ LP/BP	
	$\frac{a(s^2 + c)}{s(s^2 + b)}$	LP $\rightarrow$ HP/BS	

The dark areas represent the transposed passbands.

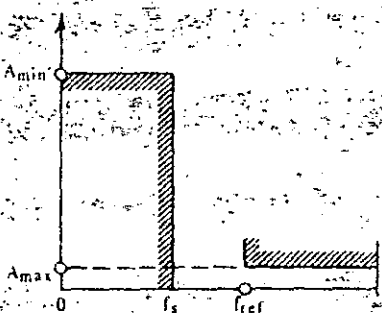
Fig. 4

Specified Tolerance Plot

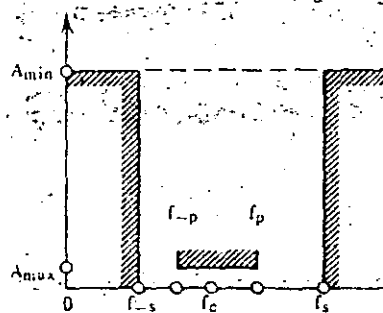
A. Lowpass



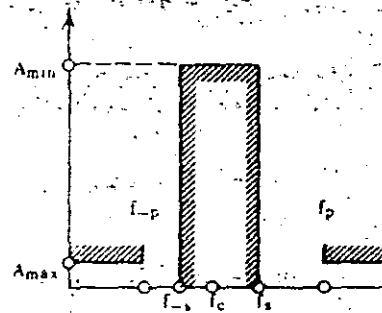
B. Highpass



C. Bandpass (frequ. symm. \*)



D. Bandstop (frequ. symm. \*)



$s_1$

$$s_{LP} = j/f_{ref}$$

$$s_{HP} = j/f_{ref}$$

$$s_{BP} = j/f_c$$

$$s_{BS} = j/f_c$$

$f(s_1)$

$$s = s_{LP}$$

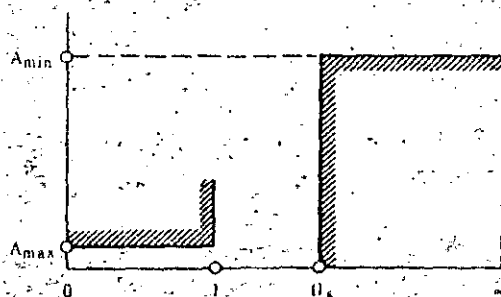
$$s = 1/s_{HP}$$

$$s = a (s_{BP} + 1/s_{BP})^{**}$$

$$s = \frac{j}{a (s_{BP} + 1/s_{BP})}^{**}$$

Reference Lowpass

E: Reference Lowpass



\*) Condition for Frequency-Symmetry:

$$f_{-p} f_p = f_{-s} f_s = f_c^2$$

\*\*) Transformation Constant "a":

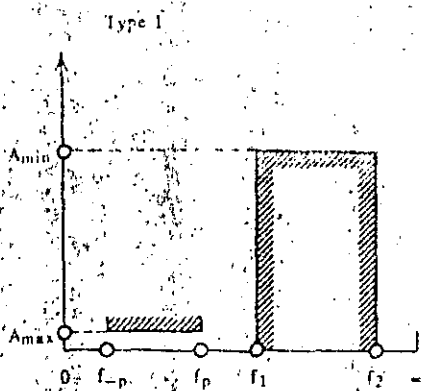
$$a = \frac{f_c}{f_p - f_{-p}}$$



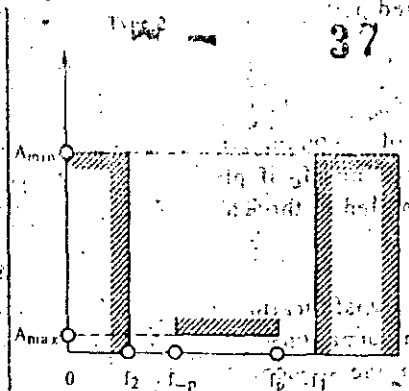
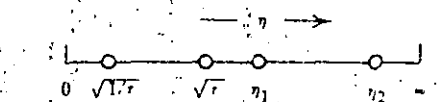
	LP-Elem.	HP-Elem.	React. Transform.	
Highpass Transform.			$c_1 = 1/l_0$	
			$l_1 = 1/c_0$	
Bandpass Transform.	LP-Elem.	BP-Elem.	React. Transf. (exact)	approx. for $a \gg 1$
			$l_1 = a l_0; \quad c_1 = 1/a l_0$	
			$c_1 = a c_0; \quad l_1 = 1/a c_0$	
			$c_1 = 1/l_2 = \frac{1}{a l_0} \cdot \frac{b-1}{2b}$ $c_2 = 1/l_1 = \frac{1}{a l_0} \cdot \frac{b+1}{2b}$	$c_1 \sim c_2 \sim 1/2 a l_0$ $l_1 \sim l_2 \sim 2 a l_0$
			$l_1 = 1/c_2 = \frac{1}{a c_0} \cdot \frac{b-1}{2b}$ $l_2 = 1/c_1 = \frac{1}{a c_0} \cdot \frac{b+1}{2b}$	$l_1 \sim l_2 \sim 1/2 a c_0$ $c_1 \sim c_2 \sim 2 a c_0$
	$b = \sqrt{(2a/\Omega_0)^2 + 1};$		$\Omega_0 = 1/\sqrt{l_0 c_0};$	$a = \text{transform. constant}$
Bandstop Transform.	LP-Elem.	BS-Elem.	React. Transform.	
			$c_1 = c_0/a; \quad l_1 = a/c_0$	
			$l_1 = l_0/a; \quad c_1 = a/l_0$	
			$c_1 = 1/l_2 = \frac{c_0}{a} \cdot \frac{b-1}{2b}$ $c_2 = 1/l_1 = \frac{c_0}{a} \cdot \frac{b+1}{2b}$	$c_1 \sim c_2 \sim c_0/a$ $l_1 \sim l_2 \sim a l_0$
			$l_1 = 1/c_2 = \frac{l_0}{a} \cdot \frac{b-1}{2b}$ $l_2 = 1/c_1 = \frac{l_0}{a} \cdot \frac{b+1}{2b}$	$l_1 \sim l_2 \sim a l_0$ $c_1 \sim c_2 \sim c_0/a$
	$b = \sqrt{(2a\Omega_0)^2 + 1}$		$\Omega_0 = 1/\sqrt{l_0 c_0}$	$a = \text{transform. constant}$

Fig. 6

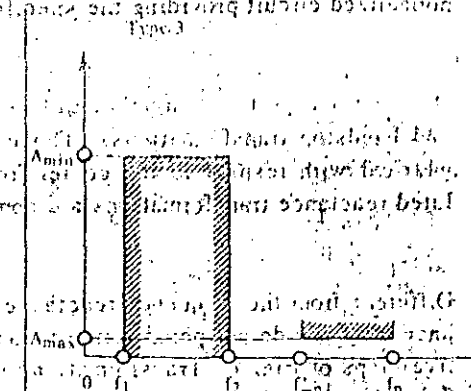
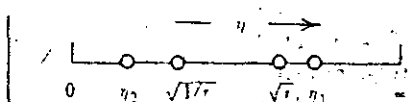
Specified Tolerance Plot



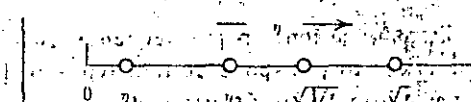
Normalization:  $f_c = f_{-p}$   $f_p/f_{-p} = r$



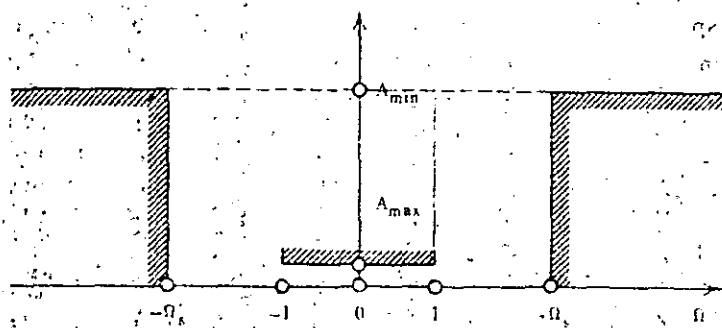
Normalization:  $f_c = f_c$   $f_p/f_c = r$   $\eta = f/f_c$



Normalization:  $f_c = f_c$   $f_p/f_c = r$   $\eta = f/f_c$



Tolerance Plot of the Reference Lowpass:



Related Frequency Pairs

$\eta$	$\eta_1/\sqrt{r}$	$\sqrt{r}/\eta_2$	$\eta_1$	$\eta_2$
$s_{BP}^2$	$-1/r$	$r$	$-\eta_1^2$	$-\eta_2^2$
$-\Omega$	$-1$	$-1$	$-\Omega_s$	$-\Omega_s$

Transformation Formulas

$$\Omega = \frac{A\eta^2 + B}{\eta^2 - r^2}$$

or

$$s = j \frac{A s_{BP}^2 - B}{s_{BP}^2 - \eta_1^2}$$



$$s_{BP}^2 = \frac{s^2 - jB}{s - jA}$$

Parameters:

$$a = \frac{r^2 + 1}{r^2 - 1}$$

$$b = \frac{2r}{r^2 - 1}$$

$$A = \eta_1^2 b - a$$

$$B = \eta_2^2 a - b$$

$$\eta_1^4 [b(\eta_1^2 + \eta_2^2) - 2a] - \eta_2^4 [2b - 2\eta_1^2 \eta_2^2 b] - 2\eta_1^2 \eta_2^2 a - b(\eta_1^2 \eta_2^2) = 0$$

Solve for  $\eta_1^2$  and select the root which falls in the stopband range.

After the elements of a suitable lowpass are determined reactance transformations of these elements will yield a normalized circuit providing the specified performance.

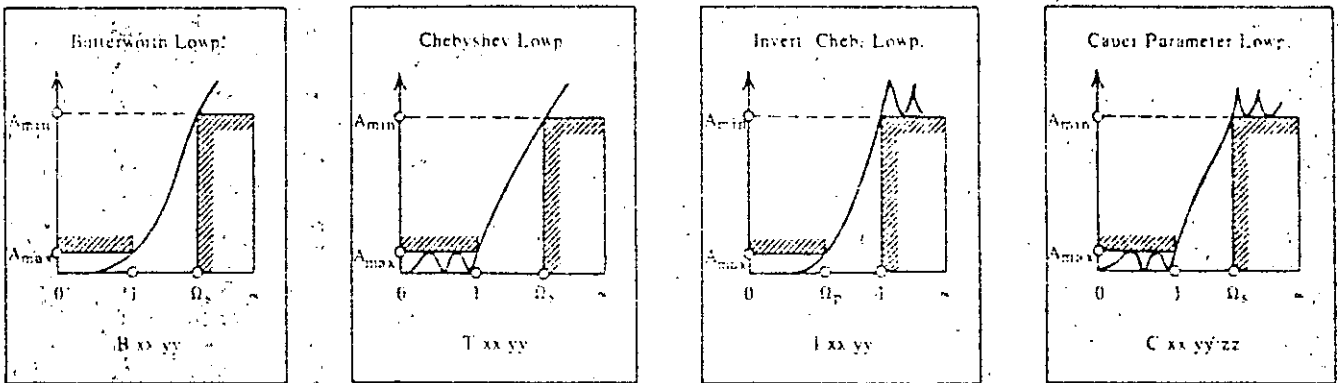
Of special importance are the first and second-degree transformations, generally called highpass-, bandpass- and bandstop transformations. Those of second-degree can be used to satisfy tolerance plots which are symmetrical with respect to the center frequency  $f_c$  if plotted over a logarithmic frequency axis (Fig. 5.) The related reactance transformations are compiled in the Table of Fig. 6.

Different from the frequency-reactance transformations are those which apply to a transposition of the performance only and do not permit circuit transformations. Significant for these transformations are the three consecutive steps of Fig. 7. Transformations in the sequence: 1a - 2 - 3 have been discussed in general form by Caer ([CA-1], pages 307-315.) They are applied, for instance, to generate antimetrical lowpass performances of type "b" and "c" from type "a" (Caer [CA-1, pages 525-529]). They are also used to reduce the requirements for the precision of the numerical operations [WA-1; SZ-1].

Transformations in the sequence 1b - 2 - 3 have been applied by Zdunek [ZD-1]. They can be used, for instance, to transpose certain types of frequency-unsymmetrical tolerance-plots to the region of a reference lowpass filter. The details of this transposition and its inverse are shown in Fig. 8.

STANDARD APPROXIMATION METHODS FOR THE REFERENCE LOWPASS

The previously discussed methods transpose a specified tolerance plot to the region of a reference lowpass. The standard lowpass types shown in Fig. 9 can then be used for the approximation if the boundaries  $A_{max}$  and  $A_{min}$  of this lowpass are constant.



xx = degree yy = refl. coeff. zz = modular angle (yy = stopb. atten. for "I" type)

Fig. 9

The quantities  $A_{max}$ ,  $A_{min}$  and  $\Omega_s$  (or  $\Omega_p$  in the case of "I xx yy" filters) are the primary design parameter of a particular design. The required complexity of the circuit depends on well established relations between these quantities for a given type and degree. The cut-off curves of Part 2 are nomographs for these relations. The common part with the design parameters  $A_{min}$  and  $A_{max}$  (or the reflection coefficient) is common to all cut-off curves and can be folded out. Fig. 10 may serve to illustrate the use of these curves. The cut-off curves are plotted up to a degree  $N = 19$ .

The secondary design parameters, namely the poles and zeroes of  $H(s)$  and  $K(s)$  and the constant "C", can be found in the Tables of Part 1, for filters up to 9th degree.

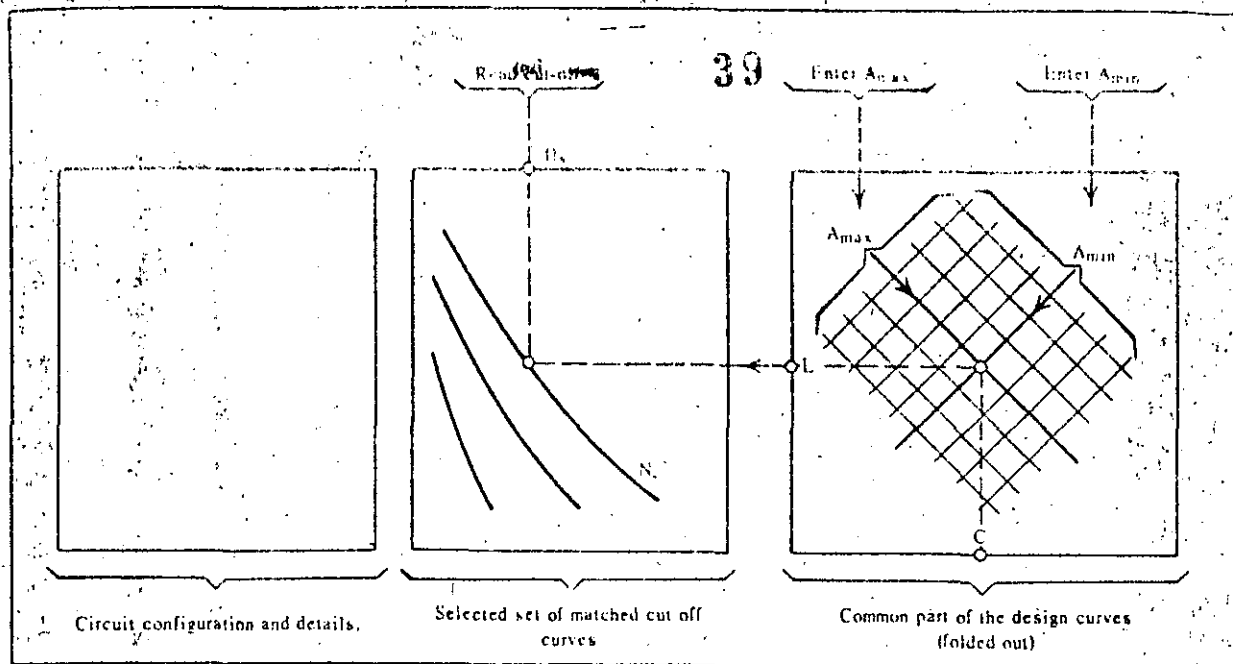


Fig. 10

The reflection coefficients selected for these Tables represent frequently used passband specifications:

$ \rho $	%	5	10	15	25	50
$A_{\max}$	db	0.011	0.044	0.10	0.27	1.25
Ret.L.	db	26	20	16.6	12	6

The selection of a particular set of poles and zeroes and of a constant "C" yields the numerator polynomial  $F(s)$  of the characteristic function, the numerator polynomial  $E(s)$  of the transfer-loss function and the denominator polynomial  $P(s)$ , common to both functions. The structure of these polynomials is also shown in the Tables.

The numerical data compiled in the Tables of Part 1 can be extended to even degrees  $N > 9$  by a method shown in Fig. 11. ([ZD 1]; the variable " $s = j\Omega$ " of this Figure refers to the complex plane of the lower degree model, the variable " $s_1 = j\eta$ " to the derived lowpass.) Formula (A) of this Figure can be used to transpose the complex zeroes of  $E(s)$ , Formula (B) to transpose those of  $F(s)$  and  $P(s)$ .

Either by such transformations or directly from the Tables, suitable functions  $K(s)$  and  $H(s)$  can be established numerically for the reference lowpass. The subsequent realization of a related circuit may be continued in the  $s$ -plane of the reference lowpass only if transformations according to Fig. 5 were used originally to transpose a specified tolerance plot to the region of the reference lowpass. Reactance transformations according to Fig. 6, applied to the elements of the resulting lowpass, and subsequent denormalization will eventually yield the desired circuit.

Such procedures will not be possible, however, if transformations according to Fig. 8 were originally used for the transposition of the tolerance of plot. It will then be necessary to transform the established functions,  $K(s)$  and  $H(s)$  of the reference lowpass to the  $s_{pp}$ -plane. However, this procedure may cause considerable difficulties in the subsequent realization because of unrealistic element values. The reason for these difficulties

is that the inverse of the transformation does not necessarily transpose lowpass poles to the extreme bandpass frequencies zero and infinity.

40

For the sake of practical element values, a transformation similar to Fig. 11 is more useful. It must be applied to a reference lowpass of higher than optimum cut-off rate. According to the details shown in Fig. 12, two consecutive attenuation poles  $\Omega_{\infty, v}$  and  $\Omega_{\infty, v-1}$  of the selected reference lowpass are used as the parameters  $\Omega_z$  and  $\Omega_p$  in the transformation formula. It is further useful to determine the constant "k" such that the normalized passband limits  $\Omega_s = \pm 1$  are transposed to reciprocal frequencies  $s_{BP}^2 = -\tau$  and  $s_{BP}^2 = -1/\tau$ , respectively.

This postulates:

$$k^2 = \frac{\Omega_{\infty, v}^2 - 1}{\Omega_{\infty, v-1}^2 - 1} \quad (17)$$

A series of these transformations will be needed in general to exhaust all possible combinations of adjacent poles  $\Omega_{\infty, v}$  and  $\Omega_{\infty, v-1}$ . In each case, comparison of the resulting normalized frequencies  $\eta-s$ ,  $\eta-p$ ,  $\eta p$ ,  $\eta s$  with the specified limits (Fig. 8) will decide whether to accept or reject the selected reference lowpass and the selected pair  $\Omega_{\infty, v}$  and  $\Omega_{\infty, v-1}$ .

Any of the discussed methods may serve to approximate a specified tolerance plot for the transfer loss. The established transfer-loss function can then also be used for the calculation of phase and group delay:

$$\text{Phase: } b[\text{rad}] = \text{arc } H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$\text{Group Delay: } t_g[\text{sec}] = \frac{d b(s)}{ds} \Big|_{s=j\omega} \quad (18)$$

$$= \frac{E_e(s)E_o'(s) - E_e'(s)E_o(s)}{E_e^2 - E_o^2} \Big|_{s=j\omega}$$

in which formula  $E(s)$  represents the numerator polynomial of the transfer-loss function  $H(s)$  and the indices "e" and "o" denote its even and odd part, respectively [SA-1].

### THE REALIZATION PROCEDURE

The methods of the preceding subsection can be used to establish numerically the structure and parameter values of the functions:

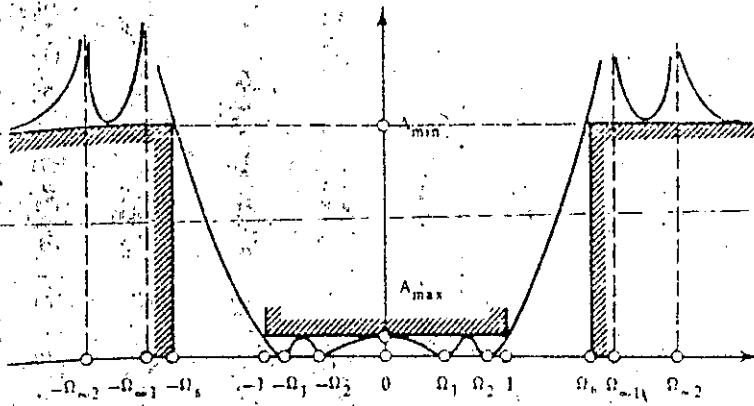
$$H(s) = \frac{E(s)}{P(s)} \quad \text{and} \quad K(s) = \frac{F(s)}{P(s)} \quad (19)$$

In general, all three "transfer polynomials"  $E(s)$ ,  $F(s)$  and  $P(s)$  will be needed for the realization of related circuits,  $E(s)$  and  $F(s)$  for the driving point impedances, the zeroes of  $P(s)$  for the attenuation poles.

The open - or short circuit driving point immittance of any reactive network which is inserted between finite resistances are expressions of the following structure [SA-1]:

Reference Lowpass ( $s = j\Omega$ )

Transformation Formulas



(A)  $s_1 = z_1 \sqrt{\frac{s - j\Omega_z}{s - j\Omega_1}}$  (complex form)

(B)  $\eta^2 = k^2 \frac{\Omega - \Omega_z}{\Omega - \Omega_1}$

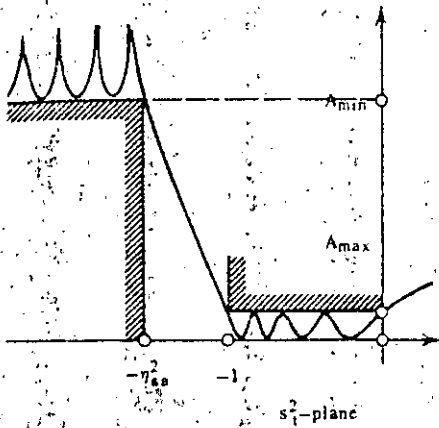
$\Omega_z$  and  $\Omega_1$  are frequencies which are transposed to 0 and infinity, respectively.  
 $k$ : normalization constant.

For  $s = -j - \epsilon_1 + z_1 j$ ,  $k$  becomes:

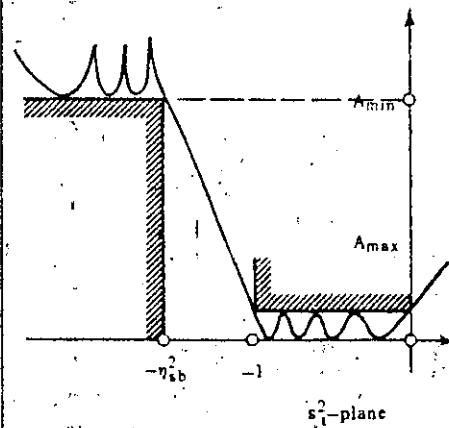
$$k = \sqrt{\frac{1 - \Omega_1}{1 + \Omega_2}}$$

Resulting Performance (in the  $s_t^2$ -plane)

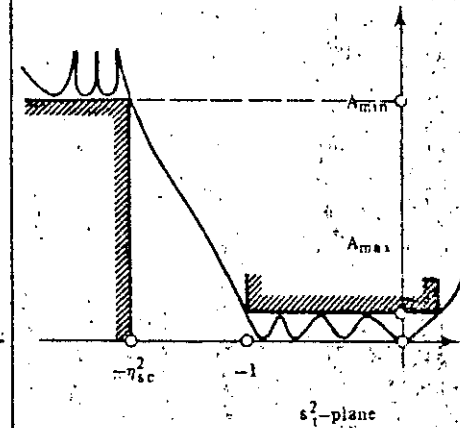
If:  $\Omega_z = 1, \quad \Omega_1 = \Omega_s$  then Type 8a



If:  $\Omega_z = 1, \quad \Omega_1 = \Omega_{\infty 2}$  then Type 8b



If:  $\Omega_z = \Omega_2, \quad \Omega_1 = \Omega_{\infty 2}$  then Type 8c



The normalized cut-off frequencies of the transformed performances can be determined from the cut-off curves of Part 2.

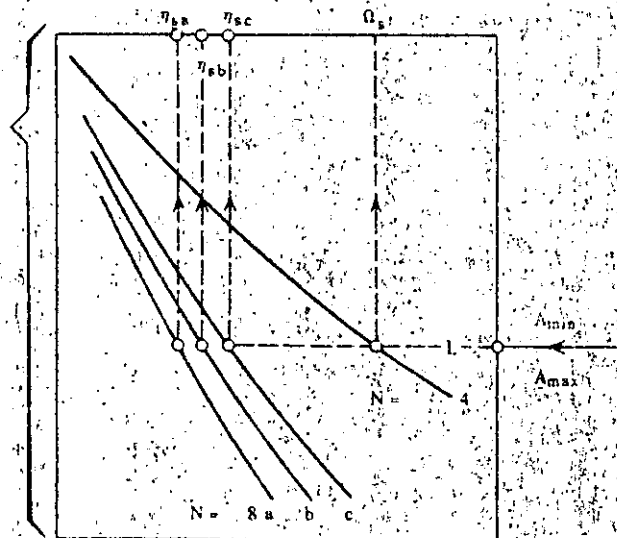


Fig. 11

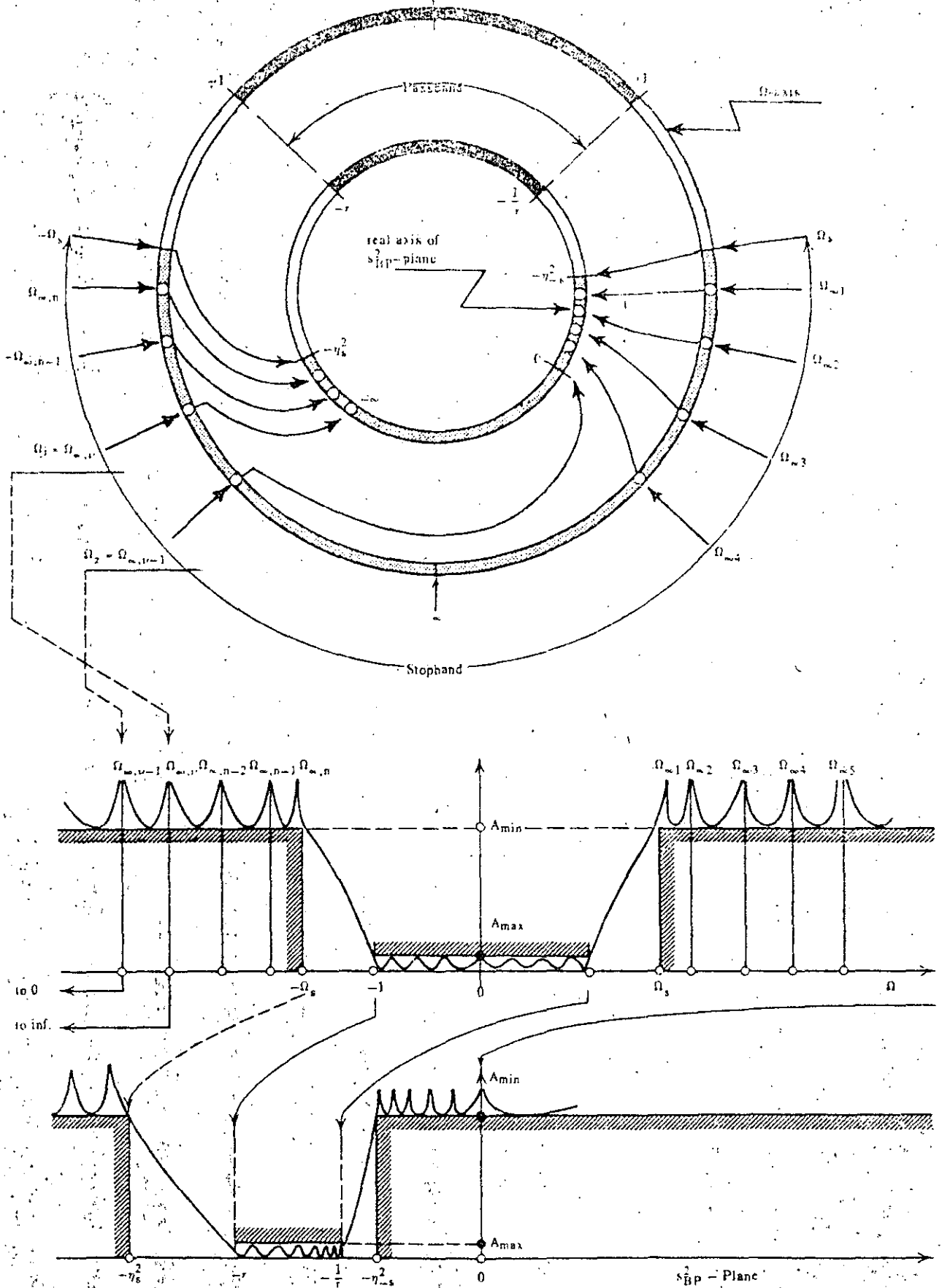


Fig. 12

	$P(s) = \text{even}$	$P(s) = \text{odd}$
$x_1, \text{ open}$	$= \frac{E_e - F_e}{E_o + F_o}$	$= \frac{E_o - F_o}{E_e + F_e}$
$x_1, \text{ shunt}$	$= \frac{E_o - F_o}{E_e + F_e}$	$= \frac{E_e - F_e}{E_o + F_o}$
$x_2, \text{ open}$	$= \frac{E_e + F_e}{E_o + F_o}$	$= \frac{E_o + F_o}{E_e + F_e}$
$x_2, \text{ shunt}$	$= \frac{E_o - F_o}{E_e - F_e}$	$= \frac{E_e - F_e}{E_o - F_o}$

(20)

These expressions are simpler in the case of symmetrical or antisymmetrical filters where  $F(s)$  is either even or odd. Driving point immittances for reactive networks with extreme terminations (zero or infinity) and for branching filters depend only on the Hurwitz polynomial  $E(s)$  ([CA-1], pgs. 406-409, pg. 417, pgs. 597-602).

The standard realization of a ladder structure from a specified driving point immittance follows Brune's method. Details can be found in all introductory textbooks on network synthesis. Realizations of symmetrical filters in lattice- or the related bridged-T configuration are of importance for narrow-band and wide-band crystal filters and for wide-band bandstop filters. For the simplified calculation of the branch reactances of a lattice it is necessary to separate the zeroes of  $H(s)$  in two groups ([CA-1], pgs. 437-443). In the Tables, the parameters " $a_i$ " and " $b_i$ " with even index are assigned to a Hurwitz polynomial  $E_a(s)$ , those with odd index to a Hurwitz polynomial  $E_b(s)$ . The normalized lattice branch reactances are then:

$$z_a = \frac{E_{a, \text{ even}}}{E_{a, \text{ odd}}} = y_a, \text{ dual}; \quad z_b = \frac{E_{b, \text{ odd}}}{E_{b, \text{ even}}} = y_b, \text{ dual} \quad (21)$$

THE DESIGN OF FILTERS BETWEEN ARBITRARY TERMINATIONS

The Tables of Part 1 can also be used for the design of filters operated between arbitrarily specified terminations. This is of special importance in the case of lowpass- and highpass filters because it may eliminate the need for transformers. According to equ. (7) and (9), the operating loss of a filter inserted between normalized resistances "1" can be described by either of the functions,  $H(s)$  or  $K(s)$ :

$$A[\text{db}] = 10 \log_{10} |H(s)|^2 = 10 \log_{10} (1 + |K(s)|^2)$$

$$A[\text{db}] = 10 \log_{10} |C^* \frac{E(s)}{P(s)}|^2 = 10 \log_{10} [1 + |C \frac{F(s)}{P(s)}|^2] \quad (22)$$

$$C^* = \begin{cases} = \sqrt{1 + C^2} & \text{in case "a"} \\ = C & \text{in case "b" and "c"} \end{cases}$$

The following calculations are continued for case "b" and "c." For the less frequently used case "a," a modification of some of the formulas would be needed. The highest coefficient of all transfer polynomials  $E(s)$ ,  $F(s)$  and  $P(s)$  in equation (22) is assumed to be "1". These three polynomials are then related by the equation:

$$E(s) E(-s) = F(s) F(-s) + C^{-2} P(s) P(-s) \quad (23)$$

For a given set of zeroes and poles of the characteristic function  $K(s)$ , the variation of the constant  $C$  will produce a family of Hurwitz polynomials  $E(s)$ , the roots of which move closer to those of  $F(s)$  as  $C$  is increased. This variation will also cause a change of the loss between pole and zero frequencies of  $K(s)$ .



The particular case is now considered that a given set of specifications  $A_{max}$ ,  $A_{min}$  and  $\Omega_s$  can be satisfied by the following functions (Fig. 13):

$$H_1(s) = C_1 \frac{E_1(s)}{P_1(s)} \quad ; \quad K_1(s) = C_1 \frac{F_1(s)}{P_1(s)} \quad (24)$$

The lowpass related to these functions will be called the primary reference filter. In order to be compatible, its transfer polynomials must satisfy equ. (23):

$$E_1(s) E_1(-s) = F_1(s) F_1(-s) + C_1^{-2} P_1(s) P_1(-s) \quad (25)$$

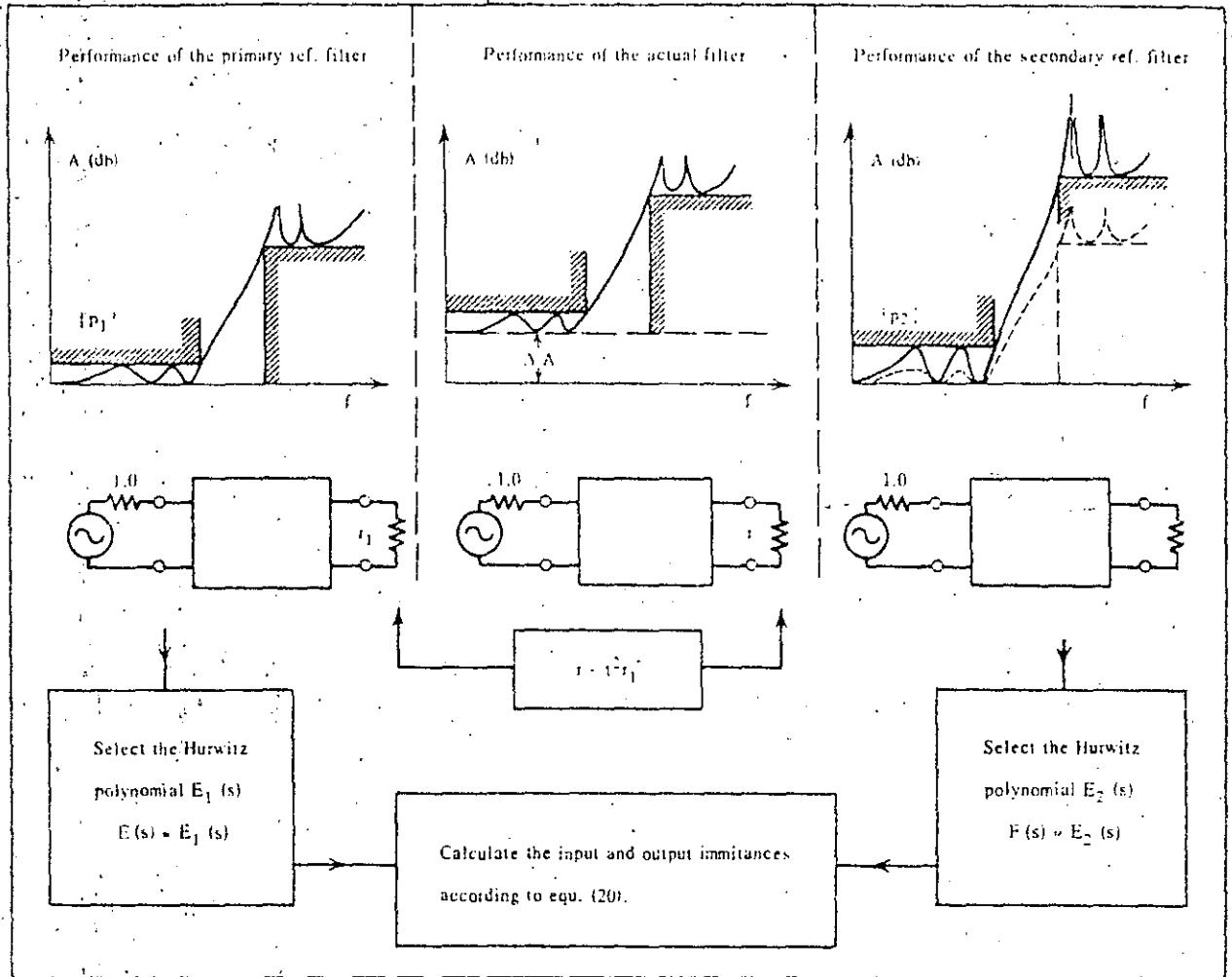


Fig. 13

The realization of a related circuit may also include an ideal transformer if a termination "1.0" is postulated for either terminal pair. A well-defined termination  $r_1 \neq 1.0$  will then be necessary if the transformer must be avoided.

It is sometimes desirable to terminate the lowpass by a specified normalized resistor  $r = t^2 r_1$  without the use of a transformer. (Extreme values  $t^2=0$  or infinite are related to short or open circuit terminations and represent current or voltage transfer, respectively.) This can be achieved if a constant increment  $\Delta A$  (db) is permitted for the entire transfer loss ([SA-1], Section F):

$$\Delta A[\text{db}] = 10 \log_{10} 10\gamma^2 = 10 \log_{10} [\frac{1}{2}(t + t^{-1})]^2 \quad (26)$$

$$A[\text{db}] = A_1[\text{db}] + \Delta A[\text{db}] = 10 \log_{10} |H_1(s)|^2 + 10 \log \gamma^2$$

$$A[\text{db}] = 10 \log_{10} \left| \gamma C_1 \frac{E_1(s)}{P_1(s)} \right|^2$$

can be related to the transfer loss function of the actual filter:

$$H(s) = (\gamma C_1) \frac{E_1(s)}{P_1(s)}$$

A compatible polynomial  $F(s)$  must then be found by substituting the transfer polynomials of equ. (28) (23):

$$E_1(s) E_1(-s) = F(s) F(-s) + (\gamma C_1)^{-2} P_1(s) P_1(-s)$$

Subtracting (29) from (25) yields then eventually the following relation:

$$F(s) F(-s) = F_1(s) F_1(-s) + \underbrace{C_1^2 (1 - \gamma^2)}_{C_2^2} P_1(s) P_1(-s)$$

Except for the constant  $C_2$ , the right side of this equation is identical to the relation expressed by eq. (23). The root pattern of  $F(s) F(-s)$  must therefore belong to the one parametric family of Hurwitz polynomials primary reference filter. The Tables of Part 2 which are grouped in this manner can therefore also be used to select a proper polynomial  $F(s)$ . First, a primary reference filter is selected which will satisfy the passband variation  $A_{\max-1}$ , the cut-off rate, and the stopband attenuation  $A_{\min}$ . These design parameters specify the Hurwitz polynomial  $E(s) = E_1(s)$  and a constant  $C_1$ . The secondary reference filter within the same family is related to a constant  $C_2$ :

$$C_2 = C_1 \sqrt{\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}}$$

The Hurwitz polynomial  $E_2(s)$  of this filter can be used as  $F(s)$  of the actual filter. It is not necessary, however, to restrict its zeroes to the left half of the  $s$ -plane. Transposing part or all of them to the right half is permitted, increasing the number of possible circuits considerably. All these circuits will have the same performance but different locus curves of the input impedances.

Within a one-parametric family, the various Hurwitz roots of Part 2 are tabulated in ascending order of real coefficients. To facilitate the selection of proper secondary reference filter for a given primary reference filter, the matrix of Fig. 14 can be used.

A numerical example may later serve to demonstrate the details of the procedure. The resulting network is neither symmetrical nor antisymmetrical must be realized from the open or short circuit immittances of either terminal pair ([SA-1], section E). It should be noted that  $t$  as well as  $t^{-1}$  is related to the same  $\Delta A$ . Term resistances:

$$r = t^2 r_1 \quad \text{or} \quad r = t^{-2} r_1$$

of the actual filter are therefore possible. It may then be necessary to reverse input and output or to dual network [SA-2].

		Reflection coefficient of the secondary reference filter							
		$ p_2  = 5\%$	$ p_2  = 10\%$	$ p_2  = 15\%$	$ p_2  = 25\%$	$ p_2  = 50\%$			
<div style="text-align: center;"> <p>The numbers in each block mean:</p> <table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td><math>\Delta A</math> (db)</td> </tr> <tr> <td><math>r^2</math>                      <math>r^{-2}</math></td> </tr> </table> </div>	$\Delta A$ (db)	$r^2$ $r^{-2}$	0	1.24	0.49	0.17	0.03		
	$\Delta A$ (db)								
	$r^2$ $r^{-2}$								
	10%	2.99	0.33	1.99	0.50	1.49	0.67	1.19	0.84
	15%			2.54	0.72	0.13			
25%			4.92	0.20	4.92	0.44	1.42	0.70	
50%				1.84	0.31				
			0	3.84	0.26	1.72	0.585		
					0	2.62	0.97	-0.38	
								0	

$|p_1|$  = Reflection coefficient of the primary reference filter

Fig. 14

The main diagonal of the matrix is related to the terminations  $r = 0$  and  $\infty$ . The transfer loss function represents then a current or voltage transfer from the generator to the output terminals. The polynomial  $F(s)$  is then the image of  $E_1(s)$  with respect to the imaginary axis:

$$F(s) = \pm E_1(-s) \tag{33}$$

(The sign depends on whether  $P_1(s)$  is even or odd). A related circuit is usually realized from the output terminal pair ([CA-1], pages 406-409). According to equ. (20) and (33), these immittances are:

$$\left. \begin{array}{l} x_2, \text{ shunt} \\ x_2, \text{ open} \end{array} \right\} = \frac{E_{1, \text{ even}}}{E_{1, \text{ odd}}} \quad \text{or} \quad \frac{E_{1, \text{ odd}}}{E_{1, \text{ even}}}$$

**NUMERICAL EXAMPLES**

The following typical applications may serve to demonstrate how to use the Graphs and Tables of Part 1 and 2. Examples illustrated were selected to emphasize those designs for which tabulation of circuits would be impractical or impossible. Originally, the following numerical examples were calculated with parameters of less than ten significant digits. The use of the tables of Part 2 may therefore yield insignificant deviations.

**1. THE DESIGN OF THE 10TH-DEGREE TRANSFER POLYNOMIALS FROM A 5TH-DEGREE MODEL.**

(Zdunek's method, Fig. 11)

LP-Specifications: Passband:  $|p| = 15\%$  (equivalent to  $A_{max} = 0.1$  [db])  
 Stopband:  $A_{min} = 54$  [db], cut-off rate 1.07  
 Terminations: Equal resistors on either terminal pair.

According to the Graphs of Part 2, these specifications can be satisfied by a Cauer lowpass C 10 15 type "c" (Type "c" because of equal terminations). Poles and zeroes for 10th-degree filters are not tabulated; they can be derived, however, from a 5th-degree model: C 05 15. A horizontal line from the intersection of the parameter lines " $p = 15\%$ " and " $A_{min} = 54$  [db]" intersects the  $N = 5$  curve at  $\Omega_s \sim 1.81$ . A potentially possible reference filter from the Tables is:

C 05 15 32 with  $A_{min.} = 55.9$  [db] and  $\Omega_s = 1.88708$ .

According to the method shown in Fig. 11, the derived filter of 10th degree will have a cut-off of  $\eta = 1.056$  leaving sufficient margin for the cut-off rate as well as  $A_{min}$ . The transformation to  $N = 10$ , type "c" postulates:

$$\Omega_z = 0.958140 \quad \text{and} \quad \Omega_j = 1.96952$$

The actual transformation of poles and zeroes of the reference filter yields then:

Zeroes of  $F_{10}(s)$ :  $0, \pm j0.616977, \pm j0.858926, \pm j0.961260,$   
 $\pm j0.996301$

Normalized cut-off: 1.05774

Zeroes of  $P_{10}(s)$ :  $\pm j1.06166, \pm j1.10036, \pm j1.23146,$   
 $\pm j1.71438$

Zeroes of  $E_{10}(s)$ :  $-0.476117162 \pm j0.265511905,$   
 $-0.173830391 \pm j0.697573783,$   
 $-0.120057326 \pm j0.904647797,$   
 $-0.044828720 \pm j0.981961497,$   
 $-0.011127756 \pm j1.006739423$

$$F_{10}(s) = s^{10} + 3.035049115 s^8 + 3.341621072 s^6 + 1.564060146 s^4 + 0.257579323 s^2$$

$$P_{10}(s) = C_{10}^{-1} \prod_{i=1}^4 (s^2 + \eta^2 \omega_i^2)$$

$$E_{10}(s) = s^{10} + 1.851922709 s^9 + 4.749857368 s^8 + 6.126954529 s^7 + 8.013703079 s^6 + 7.295374618 s^5 + 5.925746400 s^4 + 3.644268438 s^3 + 1.798635924 s^2 + 0.623829936 s + 0.136134636$$

$E_{10}(s)$  and  $F_{10}(s)$  are then used to establish the input immittances according to equations (20), from which the circuit can be realized.

2. FREQUENCY-UNSYMMETRICAL BANDPASS. (Zdunek's method, see Fig. 11 and 12)

BP Specifications: Passband:  $f_{-p} = 92$  kc;  $f_p = 108$  kc;  $|p| = 5$  [%]

Stopband:  $f_{-s} = 30$  kc;  $f_s = 120$  kc;  $A_{\min} = 50$  [db]

A frequency-symmetrical bandpass with seven coils could be derived from a 5th degree reference lowpass. A more economical solution with 4 coils only can be obtained by Zdunek's transformation.

(a) Frequency normalization:  $f_c = \sqrt{f_{-p} f_p} = 99.679$  kc

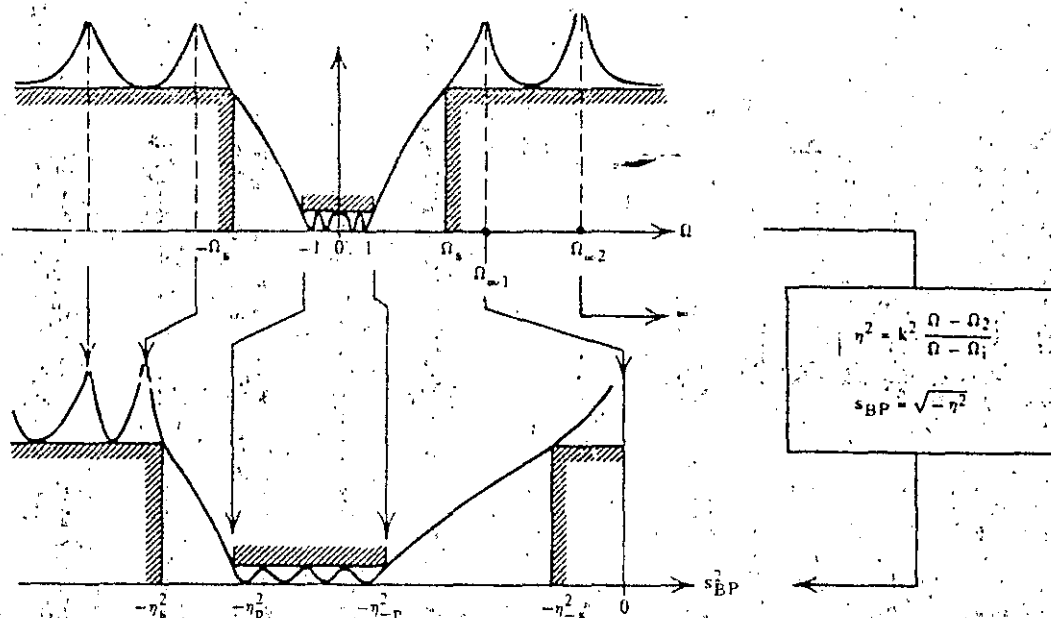
$$\eta_{-p} = f_{-p}/f_c = 0.923; \quad \eta_p = f_p/f_c = 1.083$$

$$\eta_{-s} = f_{-s}/f_c = 0.301; \quad \eta_s = f_s/f_c = 1.204$$

(b) Selection of a reference lowpass of 4th degree:

C 04 05 18 with  $|p| = 5$  %.  $A_{\min} = 50.05$  [db] is potentially capable to serve as reference lowpass.

(c) Unsymmetrical lowpass transformation:



Parameters of the transformation:

$$\Omega_z = \Omega_{\infty 1} = -3.49006; \quad \Omega_j = \Omega_{\infty 2} = 8.27853; \quad k = 2.457708$$

With these parameters, the transformation formula of Fig. 11 yields the following related frequencies:

$\Omega$	-8.27853	-3.49006	-3.23607	-1.00000	+1.00000	+3.23607
$\pm s_{BP}$	$j1.32171$	$j1.20735$	$j1.19818$	$j1.09057$	$j0.916956$	$j0.35185$

attenuation poles

passband limits  
stopband limits

Comparison of the transposed passband and stopband limits shows that the selected reference lowpass is suitable.

(d) Transformation of the transfer polynomials:

Zeros of  $F_{BP}(s)$ :  $\pm j0.925642820$ ;  $\pm j0.982684261$ ;  
 $\pm j1.048913088$ ;  $\pm j1.085958370$ ;

49

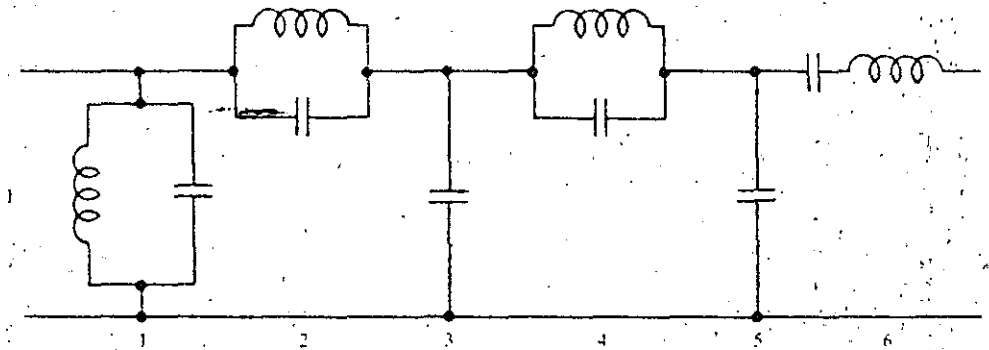
$$F_{BP}(s) = s^8 + 4.102007235 s^6 + 6.179286951 s^4 + 4.250736340 s^2 + 1.073544960$$

Zeros of  $E_{BP}(s)$ :  $-0.050390113 \pm j8.899645468$   
 $-0.020794854 \pm j1.111556565$   
 $-0.068598626 \pm j1.074630305$   
 $-0.100633940 \pm j0.979368111$

$$E_{BP}(s) = s^8 + 0.480835065 s^7 + 4.21760838 s^6 + 1.511401539 s^5 + 6.525170820 s^4 + 1.55870749 s^3 + 4.379627686 s^2 + 0.526062359 s + 1.07354490$$

(e) Realization:

$$z_{1, \text{shunt}} = \frac{E_{BP, \text{odd}}}{E_{BP, \text{even}} + F_{BP}}, \quad z_{2, \text{open}} = \frac{1}{z_{1, \text{shunt}}}$$

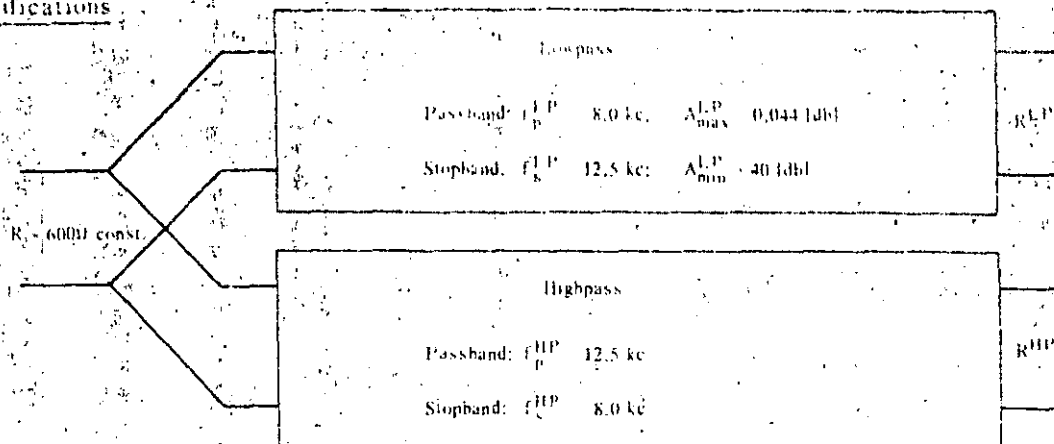


normal elements	{	$c_1 = 3.960$	$l_1 = 0.2450$	
		$c_2 = 0.4912$	$l_2 = 1.165$	$\eta_2 = 1.321709$
		$c_3 = 0.3036$		
		$c_4 = 0.1217$	$l_4 = 5.634$	$\eta_4 = 1.207354$
		$c_5 = 0.04344$		
		$c_6 = 0.005320$	$l_6 = 191.5$	
		$r = 46$		

### 3A. LOWPASS-HIGHPASS COMBINATION WITH CONSTANT IMPEDANCE

30

#### Specifications



Because a constant impedance is specified at the common terminal pair, the highpass performance will depend on the selected lowpass. Its characteristic function  $K_{HP}(s)$  is reciprocal to  $K_{LP}(s)$  of the lowpass if the frequencies are normalized properly. For this reason, it is useful to normalize all frequencies with respect to the geometric means of the respective passband limits:

$$f_{ref} = \sqrt{f_p^{LP} f_p^{HP}} = 10 \text{ kc}$$

This frequency is defined as "center of the transition range". The related normalized frequencies and all transfer polynomials are denoted by "\*" :

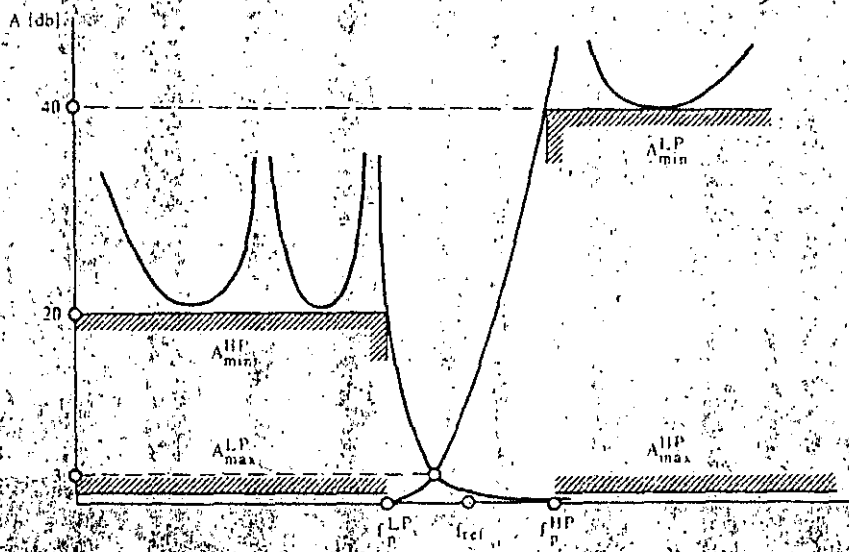
$$\Omega_p^* = f_p^{LP} / f_{ref} = 0.8$$

From Part 2: "Cauer Filter normalized with respect to the transition range" follows:

$$\left. \begin{array}{l} A_{min}^{LP} = 40 \text{ [db]} \\ |p| = 10 \text{ [\%]} \end{array} \right\} C^{LP} = 3.15; L^{LP} = 0.0315; N = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} A_{min}^{HP} = 20 \text{ [db]} \\ |p|^{HP} = 1 \text{ [\%]} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} L^{HP} = L^{LP} \\ C^{HP} = 1/C^{LP} = 0.315 \end{array} \right.$$

#### Performance



Design Procedure:

The normalized lowpass C 05 10.40 of Part I with  $A_{min} = 41.9$  [db] and  $\Omega_c = 1.55573$  is a suitable lowpass to satisfy the tolerance plot of the lowpass performance. However, the poles and zeroes are normalized with respect to the passband limit  $\Omega = 1.0$ . All must be multiplied by the factor:

$$\Omega_p^* = \sqrt{\sin 40^\circ} = 0.801740$$

to modify the performance with respect to the center of the transition range. This yields:

Zeroes of  $F^*(s) = 0, \pm j0.511678, \pm j0.771369$

Zeroes of  $P^*(s) = \pm j1.29640, \pm j1.95438$

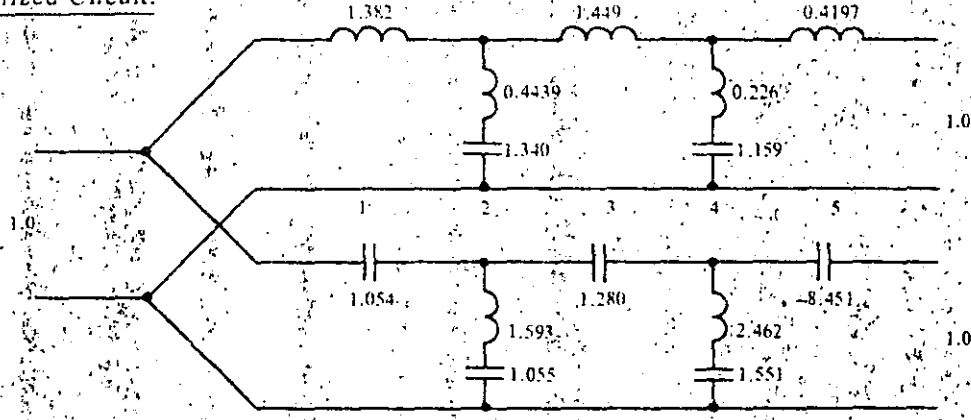
Zeroes of  $E^*(s) = -0.613357614, -0.392031386 \pm j0.653544166$   
 $-0.107372316 \pm j0.884335255$

$$E^*(s) = s^5 + 1.612165018 s^4 + 2.155385639 s^3 + 1.693203518 s^2 + 0.919058190 s + 0.282706777$$

A related circuit can be realized from the shunt-circuit impedances of the non-common side ([CA-1], pgs. 597-600):

$$z_{2,shunt}^{(LP)} = \frac{E^*_{odd}}{E^*_{even}} = 1/z_{2,shunt}^{(HP)}$$

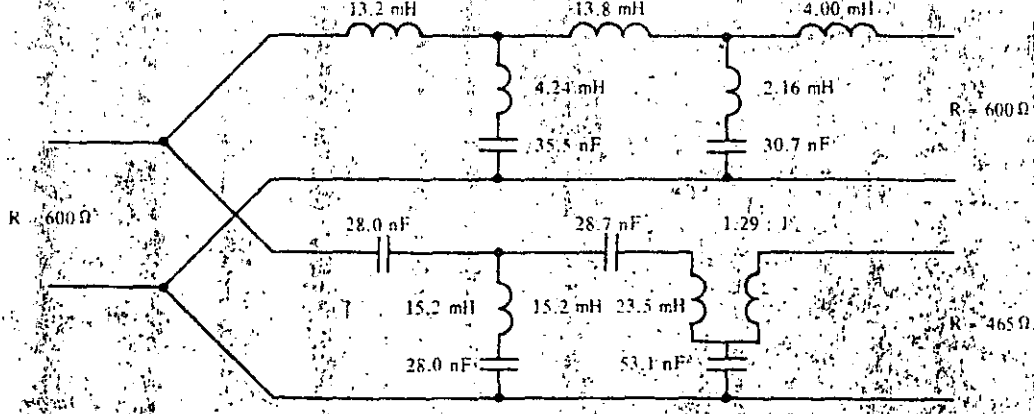
Normalized Circuit:



The negative capacitor in the highpass can be eliminated ([CA-1], pg. 788 Fig. 427).

Actual Circuit:

$$R_{ref} = 600 \Omega, f_{ref} = 10 \text{ kc yields: } L_{ref} = 9.55 \text{ mH, } C_{ref} = 26.53 \text{ nF}$$





In case of branching filters with exactly constant impedance at the common terminal pair, the voltage at this terminal pair is exactly constant. The transfer through either network is then determined by the transfer-loss and the characteristic function for voltage transfer ([CA - 1], pg. 417). This postulates reciprocal characteristic function  $K_{LP}(s)$  and  $K_{HP}(s)$  and consequently different passband and stopband performances for either filter.

An exactly constant impedance at the common terminal pair of branching filters exceeds in most cases the specifications. A finite boundary for the return loss at these terminals can normally be tolerated. It is then no longer necessary to postulate  $CLP = 1/CLP$  or even reciprocal poles and zeroes of the respective characteristic functions which leaves more freedom for the design of the complementary highpass. Due to the partial cancellations of the admittances of the two complementary filters, the return loss at the common terminal pair is actually improved in the passband range.

Under the condition:

$$|K_{LP}(s)| = |K_{HP}(s)| = \sqrt{2.100.1 A_{max} - 1} \sim 1 + 0.23 A_{max}$$

at the crossover of the attenuation curves an estimate of the improved return loss is possible [RU-1]:

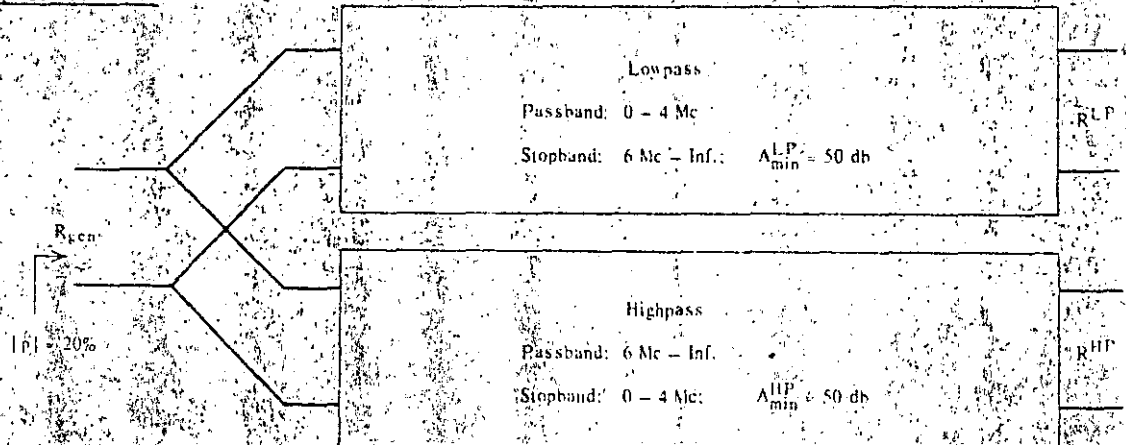
$$RL [db] \sim -20 \log_{10} [1 / (0.115 A_{max})]$$

A few correlated values according to this formula are compiled in the following table.

LP or HP	$A_{max}$ [db]	0.01	0.04	0.10	0.28	1.25
Common termination	RL [db]	58.1	46.0	38.9	29.8	16.9
	p  [%]	~0.1	< 1	1.2	3.2	14.3

In order to achieve the discussed improvement of the return loss due to admittance compensations, the voltage attenuation at the crossover in the transition range must not exceed 3 - 4 db. This may be achieved by extending both passbands beyond the specified limits, thus by narrowing the entire transition range. Any violation of the 4 db limit causes a decreased compensation and therefore a lower return loss at the common terminal pair. An estimate in this case is not possible any more. For a specified return loss at the common terminal pair, the above table may be consulted for the selection of suitable transfer polynomials. The following numerical example may serve to demonstrate the design procedure.

Specifications:



Normalization with respect to the center of the transition range.

$$f_{ref} = \sqrt{f_p^{LP} f_p^{HP}} = 4.9 \text{ Mc}$$

53

According to the specified cut-off rate of the lowpass:  $6 \text{ Mc} - 4 \text{ Mc}$ , a reference lowpass with  $\Omega_s = 1.5$  may seem appropriate. However, the attenuation at the crossover would exceed the 4 db limit. It is therefore necessary to extend the passbands. For this purpose, one starts with the specified reflection coefficient of 20% at the common terminal pair. Selection  $A_{max} = 0.3 \text{ [db]}$  as one of the design parameters for either filter yields then the following related parameters according to the graphs of Part 2:

$$\left. \begin{array}{l} A_{min} = 50 \text{ [db]} \\ |p| = 25 \text{ [%]} \end{array} \right\} \text{Cauer Parameter Filter } N = 6b, \text{ with } \Omega_s = 1.31$$

(It is useful to select antimetrical types for best economy of the final circuit.)

The Cauer Parameter filter C 06 25 60 b of the tables of Part 1 with

$$\Omega_s = 1.33458 \quad |p| = 25 \text{ [%]} \text{ and } A_{min} = 51.77 \text{ [db]}$$

extends both passbands appreciably:

$$\text{Lowpass} \quad f_s = 6.0 \text{ Mc}; \quad f_p = f_s / \Omega_s = 4.5 \text{ Mc}$$

$$\text{Highpass} \quad f_s = 4.0 \text{ Mc}; \quad f_p = f_s \Omega_s = 5.35 \text{ Mc}$$

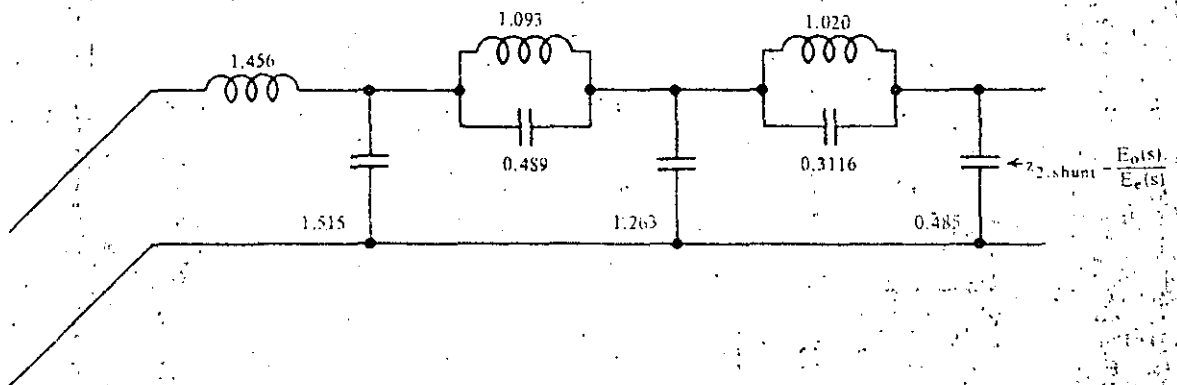
Design Procedure (with the parameters of C 06 25 50 b of Part 1)

$$\text{Zeros of } P(s): \quad \pm j1.36778, \quad \pm j1.77404 \quad (= \text{attenuation poles})$$

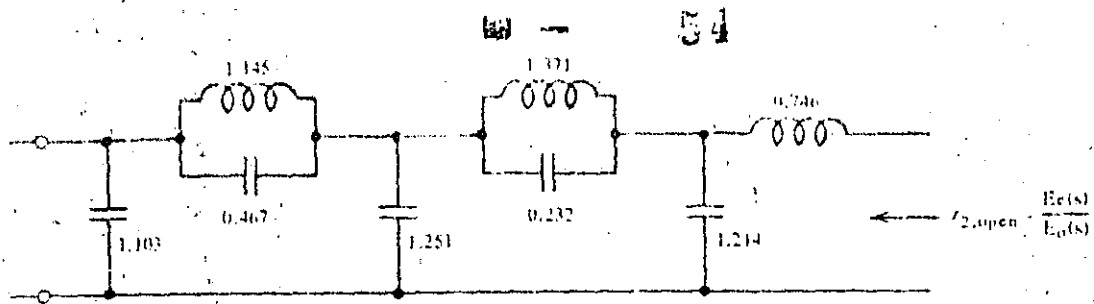
$$\begin{aligned} \text{Zeros of } E(s): \quad & -0.05872496 \pm j1.018778 \\ & -0.21512575 \pm j0.83181716 \\ & -0.39606770 \pm j0.34475262 \end{aligned}$$

$$E(s) = s^6 + 1.339836820 s^5 + 2.539668746 s^4 + 2.135442096 s^3 + 1.696922820 s^2 + 0.756381177 s + 0.211957355$$

Realization of the Lowpass from the shunt impedance of the output terminal pair:

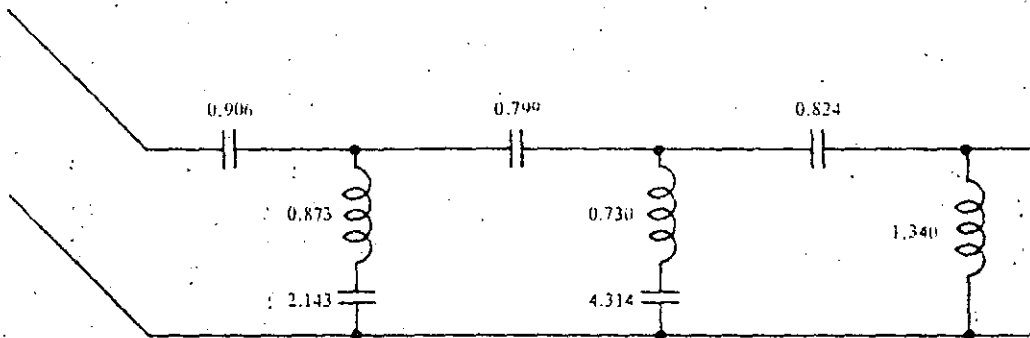


Realization of the Highpass from an auxiliary dual lowpass:



The normalized highpass is then calculated by a highpass transformation applied to the elements of the dual configuration which simplifies to:

$$l_V^{HP} = 1 / l_V^{LP} ; c_V^{HP} = 1 / c_V^{LP}$$



The normalized terminations for the lowpass as well as for the highpass is "1". The generator impedance at the common terminal pair can be calculated from the voltage transformation  $t$  between input and output of either filter:

$$t = \sqrt{1 - |p|^2} ; |p| = |p|^{HP} = |p|^{LP} = 25\%, \text{ thus } t^2 = 0.937$$

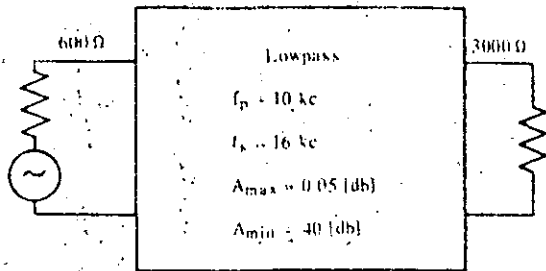
The normalized generator impedances is therefore 0.937.

The actual circuit elements result from the denormalization procedure with the reference quantities  $R_{ref}$ ,  $f_{ref}$ ,  $L_{ref}$  and  $C_{ref}$  (see equ. 11-14). In these formulas, the following reference frequencies are to be used:

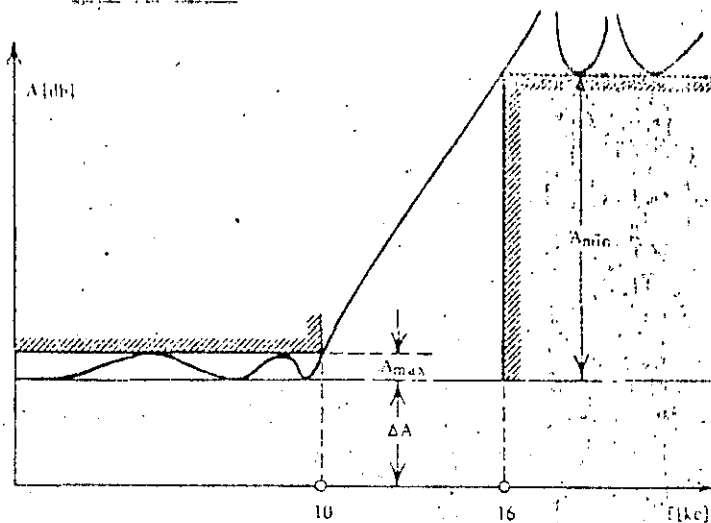
For the lowpass:  $f_{ref} = f_p^{LP} = 4.5 \text{ Mc}$

For the highpass:  $f_{ref} = f_p^{HP} = 5.35 \text{ Mc}$

Operating Condition



Tolerance Plot



Normalization:

$$f_{ref} = f_p = 10 \text{ kc}; \quad \Omega_s = f_s / f_{ref} = 1.60$$

Primary Reference Filter:

According to the Graphs of Part 2, a Cauer filter C 05 10:40 can be selected to satisfy the specified design parameters  $A_{max}$ ,  $A_{min}$  and  $\Omega_s$ . Its Hurwitz polynomial  $E_1(s)$  is used as  $E(s)$  of the actual filter:

$$E(s) = s^5 + 2.01083271 s^4 + 3.35318729 s^3 + 3.35318789 s^2 + 3.285553220 s + 2.22437907 s = 0.853431091$$

Secondary Reference Filter:

A symmetrical lowpass C 05 must be terminated by equal resistances on either side. According to the specifications:

$$R_{load} = 5 R_{gener}, \quad \text{therefore: } t^2 = 5.$$

The reflection coefficient of the primary filter is 10%. In the matrix of Fig. 14, the horizontal row " $|p_1| = 10\%$ " shows a value  $t^2 = 4.92$  in the column " $|p_2| = 15\%$ ". This is sufficiently close to the desired value. The Hurwitz polynomial of this particular lowpass can therefore be selected as the polynomial  $F(s)$  of the actual filter:

$$F(s) = s^5 + 1.718724200 s^4 + 2.809316770 s^3 + 2.509404605 s^2 + 1.620948107 s + 0.565350762$$

The transfer loss will be  $\Delta A = 2.5$  [db] higher compared with the primary reference filter.

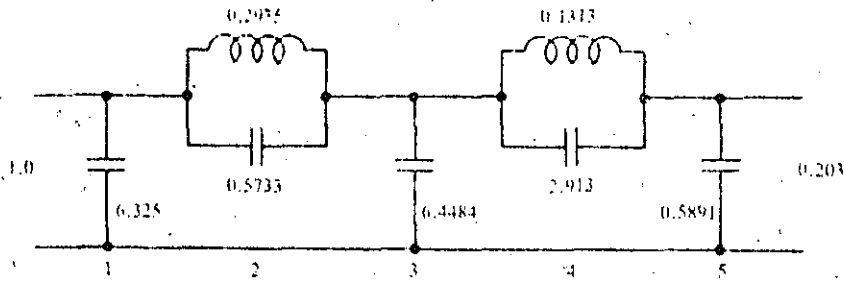
Realization from the open-circuit impedances:

$$z_{1, open} = \frac{E_e - F_e}{E_o + F_o} = \frac{0.292108510 s^4 + 0.716148615 s^2 + 0.288080329}{2s^5 + 6.162504599s^3 + 3.845327185s}$$

$$z_{2, open} = \frac{E_e + F_e}{E_o + F_o} = \frac{3.729556910 s^4 + 5.794957825 s^2 + 1.418781853}{8 s^5 + 6.162504599s^3 + 3.845327185s}$$

Normalized Circuit:

56



The normalized load is increased by a factor  $t^{-2}$  rather than  $t^2$ , compared with the primary reference filter. The circuit is then reversed and denormalized with  $R_{ref} = 3000 \Omega$ :

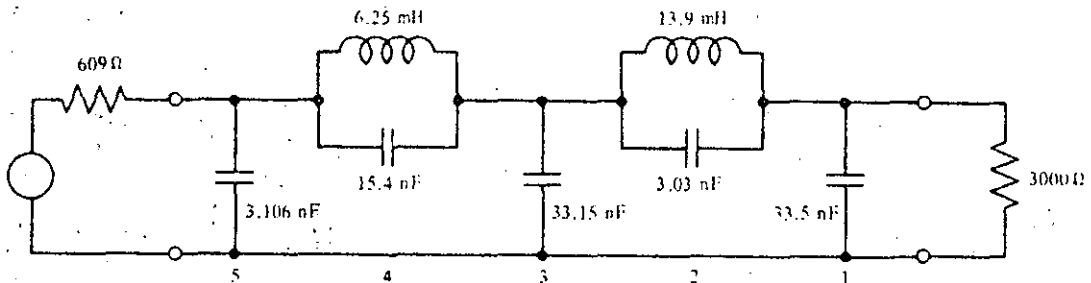
Denormalization Parameters:

$R_{ref} = 3000 \Omega$

$f_{ref} = 10\text{kc}$

yields:  $L_{ref} = 47.7 \text{ mH}$  and  $C_{ref} = 5.30 \text{ nF}$

Actual Circuit:



57

BIBLIOGRAPHY

W. CAUER: Synthesis of Linear Communication Networks (McGraw-Hill Book Company, Inc. 1958) [CA-1]

E. GLOWATZKI: Six-digit Tables of the Cauer Parameters. (Munich 1955) [GL-]

E. GLOWATZKI: Six-digit Tables of the Transformed Cauer Parameters. (Munich 1962; both published by Verlag d. Bayer. Akad. d. Wissensch.)

E. RUMPELT: On the Design of Electric Wave Filters with Specified Performance. (Diss. Munich Inst. of Techn., 1947) [RU-1]

R. SAAL A. E. ULBRICH: On the Design of Filter by Synthesis. (IRE Trans. CT, December, 1958) [SA-1]

R. SAAL: On the Design of Lowpass and Highpass Filters with unequal Terminations. (NTZ-Jhrg. 17., H. 11; pgs. 555-559) [SA-2]

G. SZENTIRMAI: Theoretical Basis of a Digital Computer Package for Filter Synthesis. (First Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory; Nov. 1963, Pages 37-49) [SZ-1]

H. WATANABE ET ALII: A new Calculation Method for the Design of Filters by Digital Computers with the special consideration of the accuracy problem (1963 IEEE Convention, Part II. Pages 100-112) [WA-1]

J. ZDUNEK: Generation of Filter Functions from a given model. (Proc. IEEE, Vol. 110, No. 2 Feb. 1963) [ZD-1]

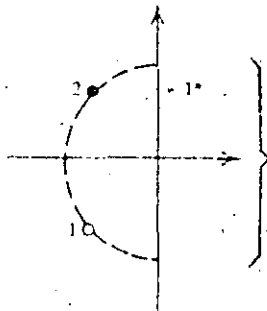
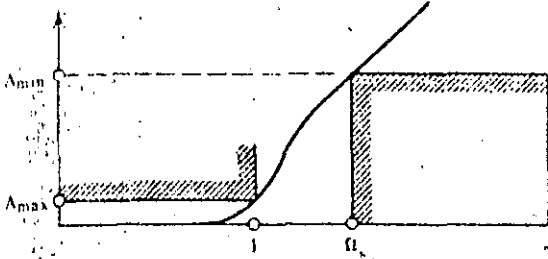
The Tables and Graphs for the "Design of Filters" are in many respects a supplement to:

R. Saal: The Design of Filters by a Catalog of normalized Lowpass Filters  
[Published by Telefunken, 1963; Backnang, Wtbg., Germany]

Except for the "B-" and "I-" Filters, this catalog contains the normalized elements of one feasible realization.

Butterworth Characteristic

b 02



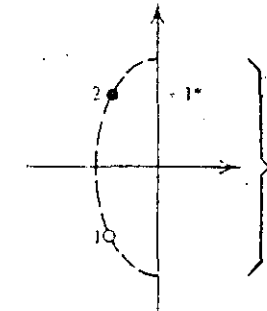
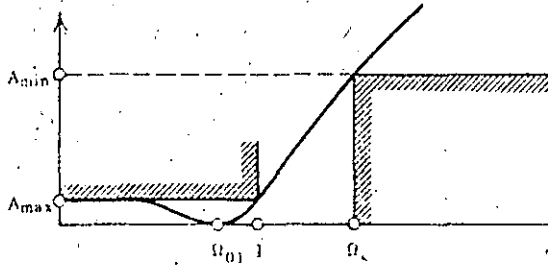
zeros of H(s)

$$K(s) = C s^2$$

$$H(s) = C (s^2 - 2a_1 s + a_1^2 + b_1^2)$$

Chebyshev Characteristic

T 02



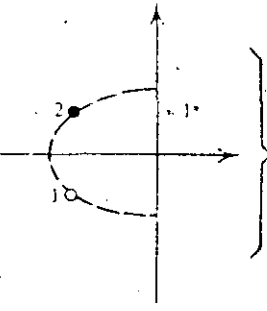
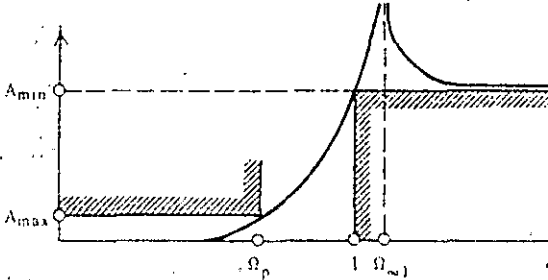
zeros of H(s)

$$K(s) = C (s^2 - \Omega_{01}^2)$$

$$H(s) = C (s^2 - 2a_1 s + a_1^2 + b_1^2)$$

Inverted Chebyshev Characteristic

I 02



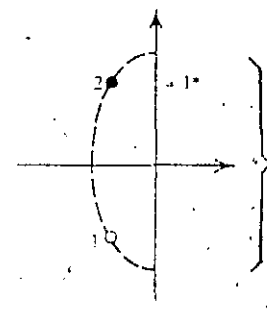
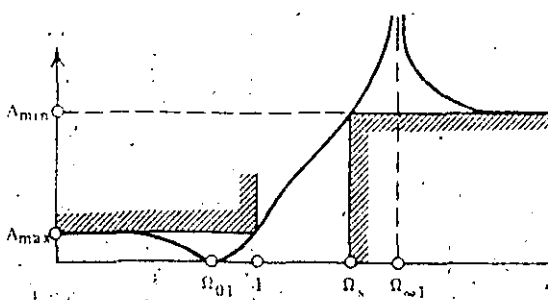
zeros of H(s)

$$K(s) = C \frac{s^2}{(s^2 - \Omega_{\infty 1}^2)}$$

$$H(s) = C \frac{(s^2 - 2a_1 s + a_1^2 + b_1^2)}{(s^2 - \Omega_{\infty 1}^2)}$$

Cauer Parameter Characteristic

C 02A



zeros of H(s)

$$K(s) = C \frac{(s^2 - \Omega_{01}^2)}{(s^2 - \Omega_{\infty 1}^2)}$$

$$H(s) = \sqrt{1 - C^2} \frac{s^2 - 2a_1 s + a_1^2 + b^2}{(s^2 - \Omega_{\infty 1}^2)}$$

p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>
5	-	.05006262	1	3.1602993308	3.1602993305		
10	-	.10050370	1	2.2304567213	2.2304567213		
15	-	.15171652	1	1.8153842510	1.8153842509		
25	-	.25819889	1	1.3915788419	1.3915788418		
50	-	.57735027	1	0.9306048582	0.9306048582		

ATTEN. ZEROS		0.707107	-	-	-	102 B
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	±b <sub>i+1</sub>
5	-	.10012523	1	2.1794494718	2.2912878475	
10	-	.20100756	1	1.5000000135	1.6583124073	
15	-	.30343304	1	1.1902380715	1.3844373105	
25	-	.51639778	1	0.8660254040	1.1180339888	
50	-	1.1547005	1	0.5000000000	0.8660254038	

ATTEN. POLES		1.41421	-	-	-	102 B
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	±b <sub>i+1</sub>
-	20	9.9498744	1	0.2999999979	0.3316624761	
-	30	31.606961	1	0.1749936473	0.1806177638	
-	40	99.995000	1	0.0994987438	0.1004987563	
-	50	316.22618	1	0.0561451481	0.0563229763	
-	60	999.99950	1	0.0316069613	0.0316385840	



ATTEN. ZEROS 0.707134				60		C02 A $\Theta = 01^\circ$ $\Omega_s = 57.2983$	
ATTEN. POLES 81.028969746							
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>
5	56.36	657.34583	1	2.1777802453	2.2930239472		
10	62.41	1319.6622	1	1.4994230468	1.6589387563		
15	65.99	1992.1096	1	1.1899313079	1.3847849425		
25	70.60	3390.2735	1	0.8658898677	1.1182016560		
50	77.59	7580.8820	1	0.4999593863	0.8660901334		

ATTEN. ZEROS 0.707217						C02 A $\Theta = 02^\circ$ $\Omega_s = 28.6537$	
ATTEN. POLES 40.516189130							
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>
5	44.31	164.31122	1	2.1727806670	2.2982414185		
10	50.37	329.86488	1	1.4977110697	1.6608359273		
15	53.94	497.95094	1	1.1890284823	1.3858437756		
25	58.56	847.43822	1	0.8654978412	1.1187169050		
50	65.55	1894.9295	1	0.4998477072	0.8662913130		

ATTEN. ZEROS 0.707349						C02 A $\Theta = 03^\circ$ $\Omega_s = 19.1072$	
ATTEN. POLES 27.012460747							
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>
5	37.27	73.008981	1	2.1643422826	2.3068358975		
10	43.32	146.57002	1	1.4948251283	1.6639667668		
15	46.90	221.25628	1	1.1875040297	1.3875889444		
25	51.52	376.54519	1	0.8648322758	1.1195625021		
50	58.51	841.98064	1	0.4996548949	0.8666176621		

ATTEN. ZEROS 0.707536						C02 A $\Theta = 04^\circ$ $\Omega_s = 14.3355$	
ATTEN. POLES 20.261193463							
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>
5	32.27	41.053061	1	2.1523769095	2.3187217937		
10	38.32	82.416544	1	1.4907637478	1.6683338778		
15	41.90	124.41275	1	1.1853661525	1.3900315417		
25	46.52	211.73194	1	0.8639032527	1.1207505238		
50	53.51	473.44700	1	0.4993883525	0.8670784818		

ATTEN. ZEROS 0.707779						CO2 A $\Theta = 05^\circ$	
ATTEN. POLES 16.210811265						$\Omega_s = 11.4737$	
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>
5	28.39	26.262000	1	2.1367106843	2.3337163702		
10	34.44	52.722500	1	1.4854851163	1.6739005701		
15	38.02	79.987915	1	1.1825939627	1.3931551522		
25	42.64	135.44676	1	0.8626998703	1.1222737437		
50	49.63	302.86816	1	0.4990421477	0.8676713307		

ATTEN. ZEROS 0.708075						CO2 A $\Theta = 06^\circ$	
ATTEN. POLES 13.510928281						$\Omega_s = 9.56675$	
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>
5	25.23	18.227352	1	2.1171595082	2.3516005087		
10	31.27	36.592530	1	1.4789572822	1.6806359202		
15	34.85	55.238632	1	1.1791782152	1.3969512743		
25	39.46	94.007912	1	0.8612224803	1.1241312564		
50	46.45	210.20808	1	0.4986192431	0.8683956882		

ATTEN. ZEROS 0.708429						CO2 A $\Theta = 07^\circ$	
ATTEN. POLES 11.582683939						$\Omega_s = 8.20550$	
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>
5	22.56	13.382608	1	2.0934986351	2.3720786248		
10	28.59	26.866407	1	1.4711290377	1.6884923748		
15	32.16	40.556463	1	1.1750962470	1.4014036881		
25	36.78	69.021050	1	0.8594614014	1.1263195726		
50	43.77	154.33576	1	0.4981149917	0.8692532319		

ATTEN. ZEROS 0.708834						CO2 A $\Theta = 08^\circ$	
ATTEN. POLES 10.136785501						$\Omega_s = 7.18530$	
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>
5	20.25	10.238244	1	2.0655010255	2.3947882121		
10	26.27	20.553903	1	1.4619512879	1.6974137342		
15	29.84	31.027357	1	1.1703303256	1.4064930098		
25	34.45	52.803933	1	0.8574133606	1.1288323827		
50	41.44	118.07318	1	0.4975313354	0.8702396341		

ATTEN. ZEROS 0.709293  
ATTEN. POLES 9.0124330264

62

C02 A  $\Theta = 09^\circ$   
 $\Omega_s = 6.39245$

p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>
5	18.22	8.0825062	1	2.0329395300	2.4192880937		
10	24.22	16.226128	1	1.4513642697	1.7073322185		
15	27.79	24.494319	1	1.1648548420	1.4121970821		
25	32.40	41.685677	1	0.8550689866	1.1316649805		
50	39.39	93.212009	1	0.4968649793	0.8713557601		

ATTEN. ZEROS 0.709808  
ATTEN. POLES 8.1131384863

C02 A  $\Theta = 10^\circ$   
 $\Omega_s = 5.75877$

p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>
5	16.41	6.5404751	1	1.9956092685	2.4450654761		
10	22.39	13.130406	1	1.4393090295	1.7181728792		
15	25.95	19.821140	1	1.1586459709	1.4184936194		
25	30.56	33.732623	1	0.8524215381	1.1348141966		
50	37.55	75.428438	1	0.4961151887	0.8726032418		

ATTEN. ZEROS 0.710378  
ATTEN. POLES 7.3775420686

C02 A  $\Theta = 11^\circ$   
 $\Omega_s = 5.24084$

p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>
5	14.79	5.3995719	1	1.9533464514	2.4715152244		
10	20.74	10.839972	1	1.4257187828	1.7298388153		
15	24.29	16.363592	1	1.1516730043	1.4253492057		
25	28.90	27.848394	1	0.8494595745	1.1382705323		
50	35.89	62.270901	1	0.4952785931	0.8739796208		

ATTEN. ZEROS 0.711003  
ATTEN. POLES 6.7647311563

C02 A  $\Theta = 12^\circ$   
 $\Omega_s = 4.80974$

p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>
5	13.33	4.5318304	1	1.9860639477	2.4979740710		
10	19.23	9.0979280	1	1.4105345884	1.7422285093		
15	22.78	13.733871	1	1.1439105012	1.4327332717		
25	27.38	23.373000	1	0.8461764956	1.1420289148		
50	34.37	52.263617	1	0.4943555103	0.8754855047		

ATTEN. ZEROS 0.711681				63				C02 A $\Theta = 13^\circ$ $\Omega_s = 4.44541$	
ATTEN. POLES 6.2463587838									
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>		
5	12.01	3.8565092	1	1.8537605438	2.5237143107				
10	17.85	7.7421793	1	1.3936965056	1.7552228592				
15	21.39	11.687287	1	1.1353294544	1.4406077155				
25	25.98	19.890019	1	0.8425631511	1.1460807111				
50	32.96	44.475434	1	0.4933451840	0.8771192989				

ATTEN. ZEROS 0.712416								C02 A $\Theta = 14^\circ$ $\Omega_s = 4.13356$	
ATTEN. POLES 5.8021705775									
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>		
5	10.80	3.3206658	1	1.7965389139	2.5479528476				
10	16.57	6.6664407	1	1.3751395907	1.7686786586				
15	20.10	10.063394	1	1.1258913435	1.4489232565				
25	24.69	17.126396	1	0.8386017311	1.1504131527				
50	31.67	38.295786	1	0.4922400965	0.8788802440				

ATTEN. ZEROS 0.713207								C02 A $\Theta = 15^\circ$ $\Omega_s = 3.86370$	
ATTEN. POLES 5.4173586938									
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>		
5	9.70	2.8884055	1	1.7346493467	2.5699062115				
10	15.39	5.7986516	1	1.3548180986	1.7824450073				
15	18.90	8.7534145	1	1.1155671290	1.4576301556				
25	23.48	14.897006	1	0.8342816734	1.1550149162				
50	30.46	33.310718	1	0.4910386713	0.8807668559				

ATTEN. ZEROS 0.714056								C02 A $\Theta = 16^\circ$ $\Omega_s = 3.62795$	
ATTEN. POLES 5.0807664378									
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>		
5	8.71	2.5345884	1	1.6684798459	2.5888384644				
10	14.30	5.0883419	1	1.3327030472	1.7963744405				
15	17.78	7.6811591	1	1.1043357637	1.4666869248				
25	22.35	13.072187	1	0.8295985555	1.1598830811				
50	29.32	29.230299	1	0.4897439657	0.8827834450				

ATTEN.ZEROS 0.714960  
ATTEN.POLES 4.7839088163

64

C02 A  $\Theta=17^\circ$   
 $\Omega_s=3.22030$

p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>
5	7.80	2.2413813	1	1.5985538724	2.6040194571		
10	13.27	4.4997107	1	1.3087627996	1.8102706938		
15	16.73	6.7925848	1	1.0921604265	1.4760189696		
25	21.29	11.559966	1	0.8245320833	1.1649939364		
50	28.26	25.848870	1	0.4883478005	0.8849226190		

ATTEN.ZEROS 0.715920  
ATTEN.POLES 4.5201516268

C02 A  $\Theta=18^\circ$   
 $\Omega_s=3.23607$

p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>
5	6.97	1.9956789	1	1.5255251823	2.6148458565		
10	12.32	4.0864480	1	1.2829922999	1.8239469715		
15	15.75	6.0479750	1	1.0790163837	1.4855620713		
25	20.29	10.292751	1	0.8190701254	1.1703339380		
50	27.25	23.015292	1	0.4868477265	0.8871841829		

ATTEN.ZEROS 0.716938  
ATTEN.POLES 4.2842612855

C02 A  $\Theta=19^\circ$   
 $\Omega_s=3.07155$

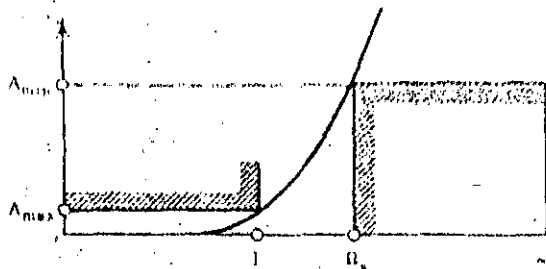
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>
5	6.23	1.7877226	1	1.4501520989	2.6208531482		
10	11.42	3.5889629	1	1.2554099362	1.8372154552		
15	14.82	5.4177561	1	1.0648858746	1.4952525171		
25	19.35	9.2202127	1	0.8132036706	1.1758923630		
50	26.29	20.617022	1	0.4852436493	0.8895703878		

ATTEN.ZEROS 0.718015  
ATTEN.POLES 4.0720654560

C02 A  $\Theta=20^\circ$   
 $\Omega_s=2.92380$

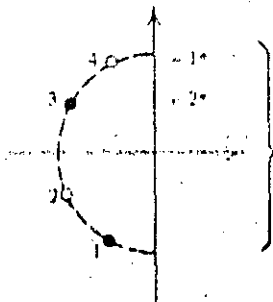
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>
5	5.55	1.6101862	1	1.3732667771	2.6216981356		
10	10.59	3.2325477	1	1.2260479888	1.8498584172		
15	13.95	4.8797258	1	1.0497446006	1.5050025435		
25	18.45	8.3045654	1	0.8069130329	1.1816442308		
50	25.39	18.569573	1	0.4835269346	0.8920766856		

Butterworth Characteristic



$$K(s) = C s^4$$

65

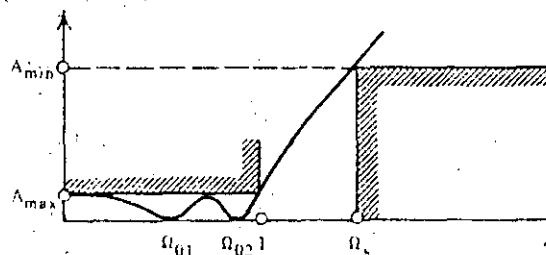


zeros of H(s)

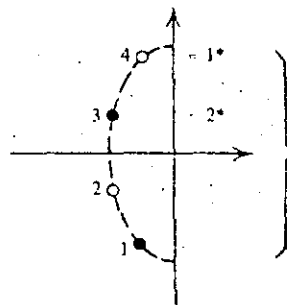
$$H(s) = C \prod_1^2 (s^2 - 2a_1 s + a_1^2 + b_1^2)$$

B 04

Chebyshev Characteristic



$$K(s) = C \prod_1^2 (s^2 + \Omega_{01}^2)$$

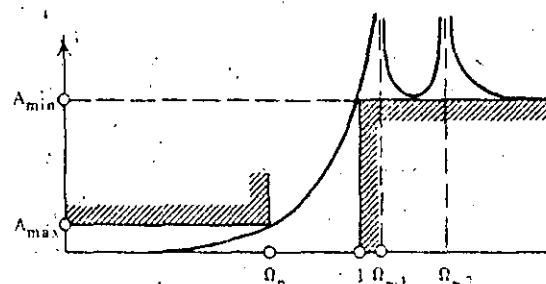


zeros of H(s)

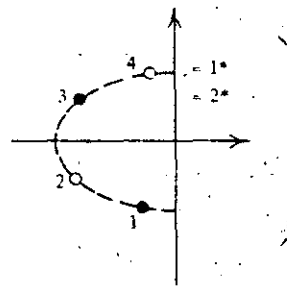
$$H(s) = C \prod_1^2 (s^2 - 2a_1 s + a_1^2 + b_1^2)$$

T 04b

Inverted Chebyshev Characteristic



$$K(s) = C \prod_1^2 \frac{s^2}{(s^2 + \Omega_{\infty 1}^2)}$$

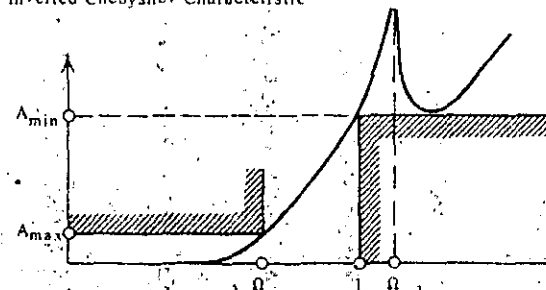


zeros of H(s)

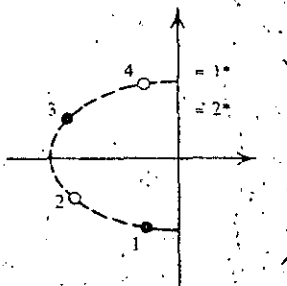
$$H(s) = \sqrt{1 + C^2} \prod_1^2 \frac{(s^2 - 2a_1 s + a_1^2 + b_1^2)}{(s^2 + \Omega_{\infty 1}^2)}$$

1 04b

Inverted Chebyshev Characteristic



$$K(s) = C \frac{s^4}{(s^2 + \Omega_{\infty 1}^2)}$$

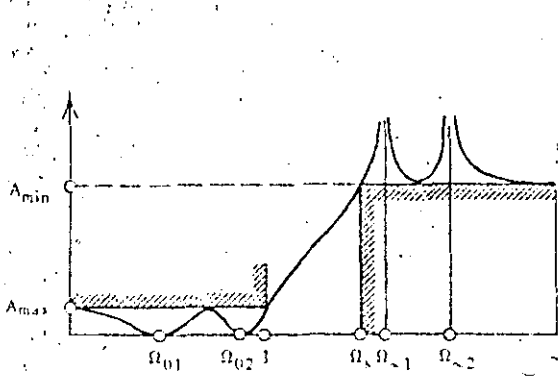


zeros of H(s)

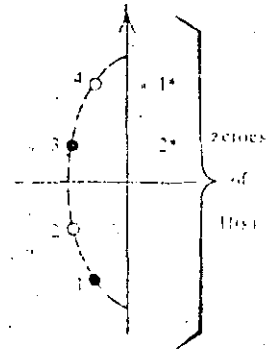
$$H(s) = C \frac{\prod_1^2 (s^2 - 2a_1 s + a_1^2 + b_1^2)}{(s^2 + \Omega_{\infty 1}^2)}$$

1 04c

Case: Parameter Characteristics (antisymmetrical)

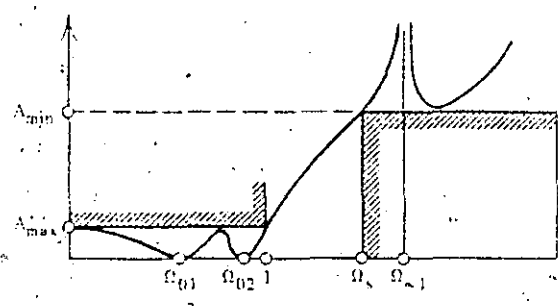


$$K(s) = C \frac{\prod_1^2 (s^2 - \Omega_{0i}^2)}{\prod_1^2 (s^2 - \Omega_{si}^2)}$$

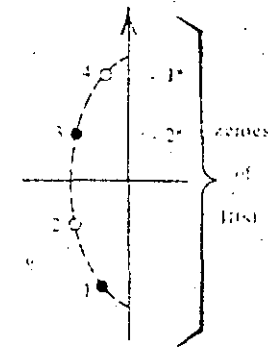


$$H(s) = \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot C^2 \frac{\prod_1^2 (s^2 - 2a_i s + a_i^2 + b_i^2)}{\prod_1^2 (s^2 - \Omega_{si}^2)}$$

C 04 a

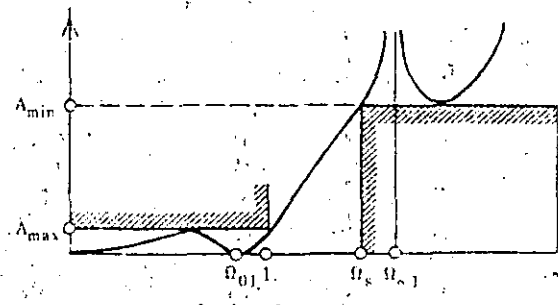


$$K(s) = C \frac{\prod_1^2 (s^2 - \Omega_{0i}^2)}{\prod_1^2 (s^2 - \Omega_{si}^2)}$$

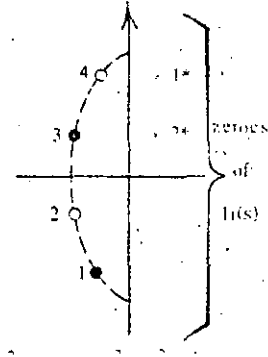


$$H(s) = C \frac{\prod_1^2 (s^2 - 2a_i s + a_i^2 + b_i^2)}{\prod_1^2 (s^2 - \Omega_{si}^2)}$$

C 04 b



$$K(s) = C \frac{s^2 (s^2 - \Omega_{01}^2)}{\prod_1^2 (s^2 - \Omega_{si}^2)}$$



$$H(s) = C \frac{\prod_1^2 (s^2 - 2a_i s + a_i^2 + b_i^2)}{\prod_1^2 (s^2 - \Omega_{si}^2)}$$

C 04 c

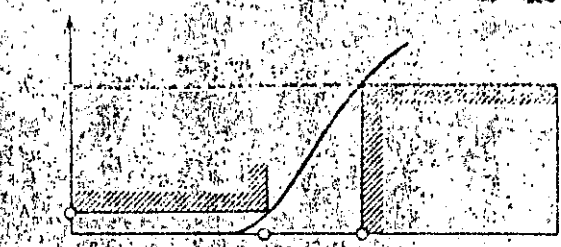
ATTEN. ZEROS 0.912275				67				054 C $\Theta = 17^\circ$ $\Omega_s = 3.98139$	
ATTEN. POLES 4.3642479029									
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>		
5	52.07	5.3856754	1	0.4271077243	1.3947548695	1.1385886911	0.6047394026		
10	56.12	10.812074	1	0.3408718771	1.2276700974	0.9066574375	0.5126423152		
15	61.70	16.321479	1	0.2920976541	1.1471188796	0.7845852525	0.4661124811		
25	66.32	27.776722	1	0.2315736120	1.0618732921	0.6411780324	0.4115900804		
50	73.31	62.110639	1	0.1470471708	0.9733235147	0.4527491580	0.3339037016		

ATTEN. ZEROS 0.912532								004 C $\Theta = 18^\circ$ $\Omega_s = 3.76399$	
ATTEN. POLES 4.1247771612									
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>		
5	50.05	4.7924011	1	0.4236611377	1.3939093706	1.1409278753	0.6090455653		
10	56.11	9.6210397	1	0.3388871917	1.2275812025	0.9082361705	0.5152635369		
15	59.68	14.523540	1	0.2906777903	1.1470264822	0.7858508278	0.4680811912		
25	64.30	24.716898	1	0.2306633381	1.0619446938	0.6421410442	0.4129634542		
50	71.29	55.268665	1	0.1465980727	0.9735193045	0.4534008398	0.3347209753		

ATTEN. ZEROS 0.912806								004 C $\Theta = 19^\circ$ $\Omega_s = 3.56970$	
ATTEN. POLES 3.9106950307									
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>		
5	48.14	4.2903153	1	0.4200169034	1.3930071669	1.1434074754	0.6136291068		
10	54.19	8.6130717	1	0.3367865816	1.2272734762	0.9099106961	0.5180514304		
15	57.77	13.001951	1	0.2891743438	1.1469291053	0.7871935684	0.4701743680		
25	62.39	22.127382	1	0.2296990551	1.0620209899	0.6431630332	0.4144231579		
50	69.38	49.478330	1	0.1461220985	0.9737280751	0.4540926005	0.3355893128		

ATTEN. ZEROS 0.913094								004 C $\Theta = 20^\circ$ $\Omega_s = 3.39504$	
ATTEN. POLES 3.7181750692									
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>		
5	46.32	3.8616178	1	0.4161745657	1.3920441262	1.1460283424	0.6184949751		
10	52.38	7.7524352	1	0.3345695121	1.2269439763	0.9116818818	0.5210083914		
15	55.95	11.702769	1	0.2875869329	1.1468233640	0.7886143592	0.4723935606		
25	60.57	19.916367	1	0.2286806651	1.0620997938	0.6442449945	0.4159701197		
50	67.56	44.534349	1	0.1456194718	0.9739473297	0.4548254664	0.3365092675		





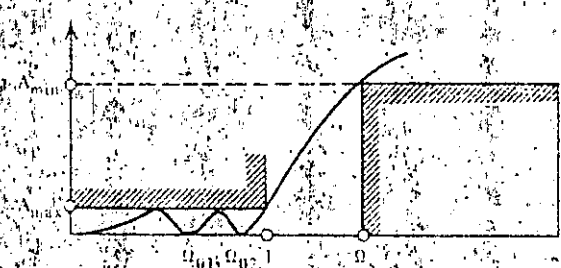
$$K(s) = C$$

$$H(s) = C(s - a) \prod_{i=1}^n (s^2 - 2\alpha_i s + \alpha_i^2 + \beta_i^2)$$



zeros  
of  
 $H(s)$

Chebyshev Characteristic



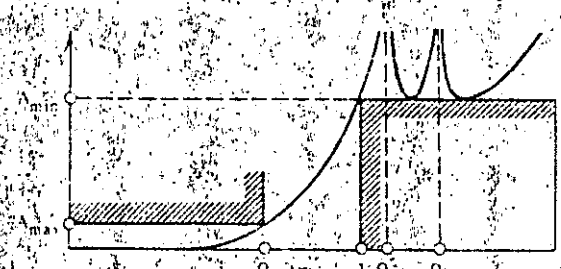
$$K(s) = C \prod_{i=1}^n (s^2 - \Omega_{0i}^2)$$

$$H(s) = C(s - a_0) \prod_{i=1}^n (s^2 - 2\alpha_i s + \alpha_i^2 + \beta_i^2)$$



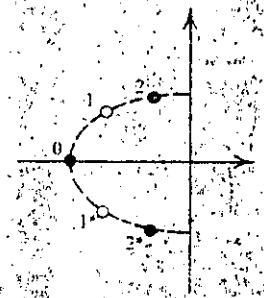
zeros  
of  
 $H(s)$

Inverted Chebyshev Characteristics



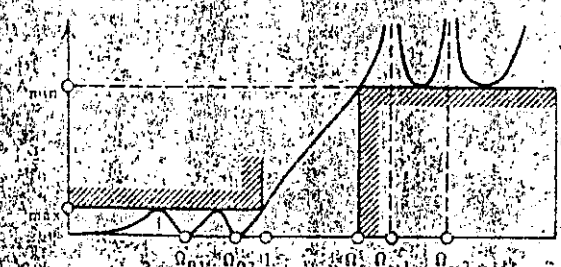
$$K(s) = C s \prod_{i=1}^n \frac{1}{(s^2 - \Omega_{0i}^2)}$$

$$H(s) = C(s - a_0) \prod_{i=1}^n \frac{(s^2 - 2\alpha_i s + \alpha_i^2 + \beta_i^2)}{(s^2 - \Omega_{0i}^2)}$$



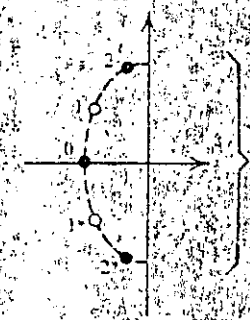
zeros  
of  
 $H(s)$

Cauer Parameter Characteristic



$$K(s) = C s \prod_{i=1}^n \frac{2^2 (s^2 - \Omega_{0i}^2)}{(s^2 - \Omega_{0i}^2)}$$

$$H(s) = C(s - a_0) \prod_{i=1}^n \frac{(s^2 - 2\alpha_i s + \alpha_i^2 + \beta_i^2)}{(s^2 - \Omega_{0i}^2)}$$



zeros  
of  
 $H(s)$

ATTEN. ZEROS		0.617174		0.957704		-		-		COS $\Theta = 31^\circ$	
ATTEN. POLES		2.0273496198		3.1459571841		-		-		$\Omega_s = 1.94168$	
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>				
5	47.72	27.023735	0	0.9168014415	-	-	0.6302950036	0.8533727981			
			2	0.1704965365	1.1928162984						
10	53.77	54.251809	0	0.7073438667	-	-	0.5022971731	0.7658519726			
			2	0.1578419223	1.1130072793						
15	57.35	81.896379	0	0.5963521856	-	-	0.4294572092	0.7256429645			
			2	0.1373863924	1.0735897341						
25	61.97	139.37542	0	0.4644092772	-	-	0.3390684603	0.6847546370			
			2	0.1104512548	1.0315963040						
50	68.96	311.65292	0	0.2889767810	-	-	0.2137794019	0.6440691247			
			2	0.0708943602	0.9876018645						

ATTEN. ZEROS		0.619191		0.958140		-		-		COS $\Theta = 32^\circ$	
ATTEN. POLES		1.9695210213		3.0476467763		-		-		$\Omega_s = 1.88708$	
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>				
5	46.27	23.636003	0	0.9248655860	-	-	0.6281817122	0.8600578452			
			2	0.1869030882	1.1905267982						
10	52.32	47.450728	0	0.7126430175	-	-	0.5012084782	0.7706114425			
			2	0.1554242156	1.1120532146						
15	55.90	71.629736	0	0.6004239810	-	-	0.4287327298	0.7295888923			
			2	0.1355010806	1.0730606353						
25	60.51	121.90313	0	0.4672768893	-	-	0.3386485798	0.6879255295			
			2	0.1091117526	1.0314633557						
50	67.50	272.58368	0	0.2905822409	-	-	0.2136017922	0.6465254880			
			2	0.0701449708	0.9880247365						

ATTEN. ZEROS		0.621286		0.958589		-		-		COS $\Theta = 33^\circ$	
ATTEN. POLES		1.9153945493		2.9552854336		-		-		$\Omega_s = 1.83608$	
p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>				
5	44.85	20.748469	0	0.9335498005	-	-	0.6259057304	0.8669803353			
			2	0.1832289937	1.1887646035						
10	50.90	41.653826	0	0.7181942898	-	-	0.5000369401	0.7755468320			
			2	0.1529434944	1.1110617766						
15	54.48	62.878963	0	0.6046827611	-	-	0.4279531156	0.7336826221			
			2	0.1335635202	1.0725093085						
25	59.10	107.01062	0	0.4702719349	-	-	0.3381964713	0.6912165066			
			2	0.1077329373	1.0313226109						
50	66.09	239.28301	0	0.2922545867	-	-	0.2134101994	0.6490750173			
			2	0.0693724819	0.9882529239						

ATTEN. ZEROS 0.638201 0.962119  
 ATTEN. POLES 1.6169785802 2.4376741117

70

CO5  $\Theta = 40^\circ$   
 $\Omega_s = 1.55873$

p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>
5	35.85	9.0682298	0 2	1.0080028097 0.1555251849	- 1.1722406923	0.6043840369	0.9220888493
10	41.90	18.205029	0 2	0.7650327833 0.1339240398	- 1.1030201927	0.4889754931	0.8151573814
15	45.48	27.481589	0 2	0.6403676419 0.1185940060	- 1.0679825390	0.4205838280	0.7666259518
25	50.10	46.769565	0 2	0.4951984232 0.0969953468	- 1.0300905188	0.3339040453	0.7177528918
50	57.09	104.57993	0 2	0.3060835250 0.0633077602	- 0.9899950673	0.2115684906	0.6696642425

ATTEN. ZEROS 0.640958 0.962677  
 ATTEN. POLES 1.5833478762 2.3780838400

CO5  $\Theta = 41^\circ$   
 $\Omega_s = 1.52425$

p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>
5	34.67	8.1377902	0 2	1.0209282958 0.1513202584	- 1.1695762307	0.6003426650	0.9308984145
10	40.73	16.337114	0 2	0.7730277751 0.1309897915	- 1.1017063607	0.4868985183	0.8215585008
15	44.30	24.661859	0 2	0.6464141519 0.1162656078	- 1.0672335617	0.4191984619	0.7719684390
25	48.92	41.970806	0 2	0.4993917017 0.0953113616	- 1.0298738525	0.3330941698	0.7220679942
50	55.91	93.849575	0 2	0.3083939557 0.0623484003	- 0.9902614605	0.2112177035	0.6730180480

ATTEN. ZEROS 0.643806 0.963250  
 ATTEN. POLES 1.5514947922 2.3213147403

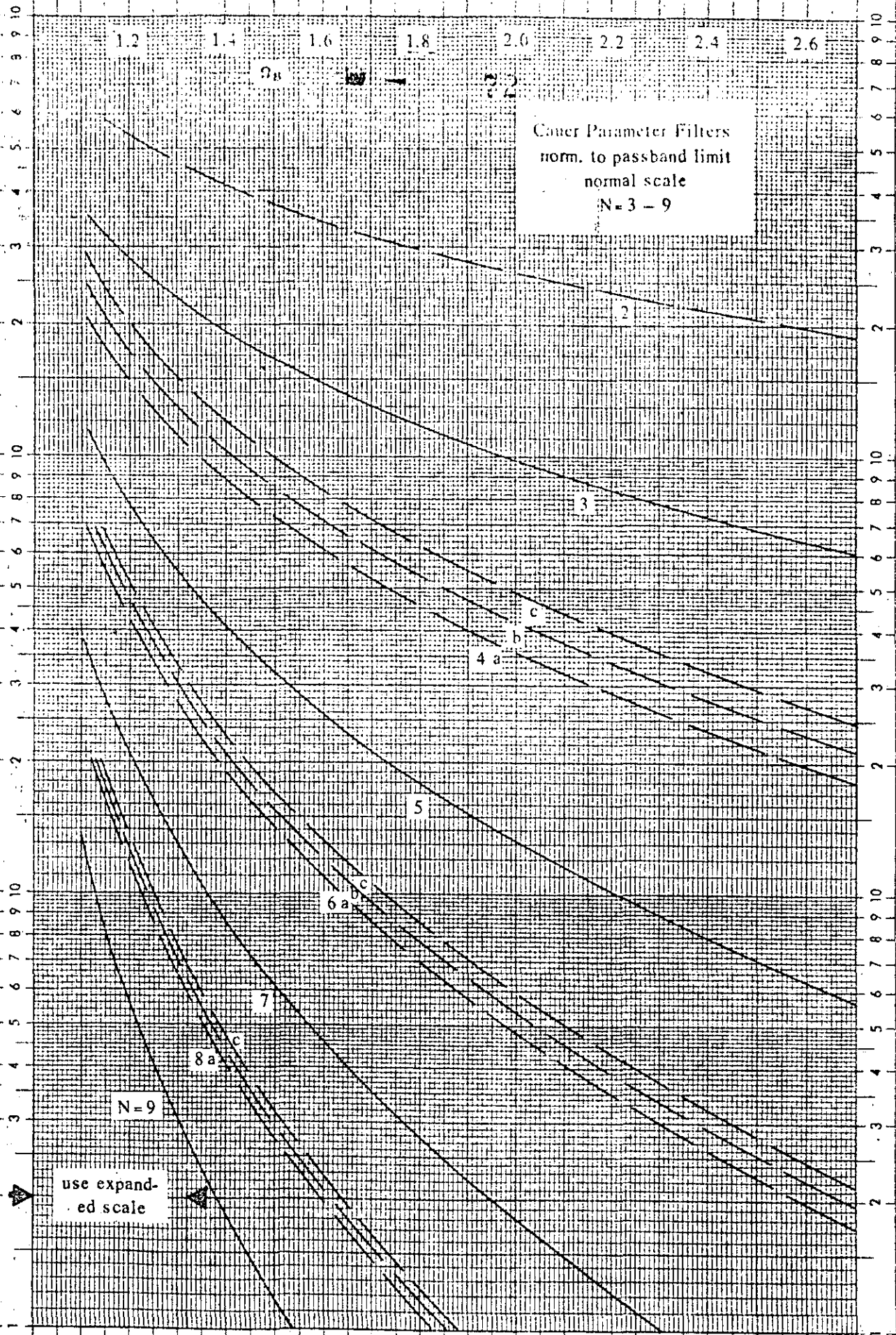
CO5  $\Theta = 42^\circ$   
 $\Omega_s = 1.49448$

p[%]	A <sub>min</sub> [db]	C	i	-a <sub>i</sub>	±b <sub>i</sub>	-a <sub>i+1</sub>	±b <sub>i+1</sub>
5	33.52	7.3179267	0 2	1.0345328026 0.1470716836	- 1.1668370110	0.5960127217	0.9399370785
10	39.57	14.691188	0 2	0.7814001106 0.1280067311	- 1.1003514733	0.4846727791	0.8281504866
15	43.15	22.177234	0 2	0.6527322658 0.1138929955	- 1.0664592227	0.4177134854	0.7774771497
25	47.76	37.742345	0 2	0.5037641240 0.0935911052	- 1.0296475678	0.3322254477	0.7265217130
50	54.75	84.394448	0 2	0.3107983664 0.0613661115	- 0.9905333139	0.2108407344	0.6764818612

(Summarized with respect to the passband limit. The parameters  $\omega_{ov}$  to which reference is made are defined in the written "Cover Parameter Filter", normalized with respect to the center of the transition range.)

2n anti-inductival		
Type 'a'	Type 'b'	Type 'c'
<p><b>Characteristic Function</b></p> $K(s) = C_a s^n \prod_{v=1}^n \frac{(s^2 + \Omega_{ov}^2)}{(s^2 + \Omega_{ov}^2)}$ $\left. \begin{aligned} \Omega_{ov} &= (\alpha_2^2 - 1) / \alpha_1 \\ \Omega_{ov} &= (\alpha_1^2 - 1) / \alpha_2 \end{aligned} \right\}$	<p><b>Characteristic Function</b></p> $K(s) = C_b \frac{\prod_{v=1}^n (s^2 + \Omega_{obv}^2)}{\prod_{v=1}^n (s^2 + \Omega_{obv}^2)}$ $\Omega_{obv} = \Omega_{ov} \sqrt{\frac{\Omega_{ov}^2 - 1}{\Omega_{ov}^2 - \Omega_{ov}^2}}$ $\Omega_{obv} = \Omega_{ov} \sqrt{\frac{\Omega_{ov}^2 - 1}{\Omega_{ov}^2 - \Omega_{ov}^2}}$	<p><b>Characteristic Function</b></p> $K(s) = C_c s^n \prod_{v=1}^n \frac{(s^2 + \Omega_{ocv}^2)}{(s^2 + \Omega_{ocv}^2)}$ $\Omega_{ocv} = k \sqrt{\frac{\Omega_{ov}^2 - \Omega_{ov}^2}{\Omega_{ov}^2 - \Omega_{ov}^2}}$ $\Omega_{ocv} = k \sqrt{\frac{\Omega_{ov}^2 - \Omega_{ov}^2}{\Omega_{ov}^2 - \Omega_{ov}^2}}$ $k = \sqrt{\frac{\Omega_{ov}^2 - 1}{1 - \Omega_{ov}^2}}$
<p><b>Performance</b></p>	<p><b>Performance</b></p>	<p><b>Performance</b></p>
<p><b>Configurations</b></p>	<p><b>Configurations</b></p>	<p><b>Configurations</b></p>

j and p  
 { 1 type  
 2 type  
 3 type  
 4 type



Chebyshev Filters  
 norm. to passband limit  
 normal scale  
 N=3-9

use expand-  
 ed scale

N=9

8a

b

c

7

6a

b

c

5

4a

b

c

3

2

1.2

1.4

1.6

1.8

2.0

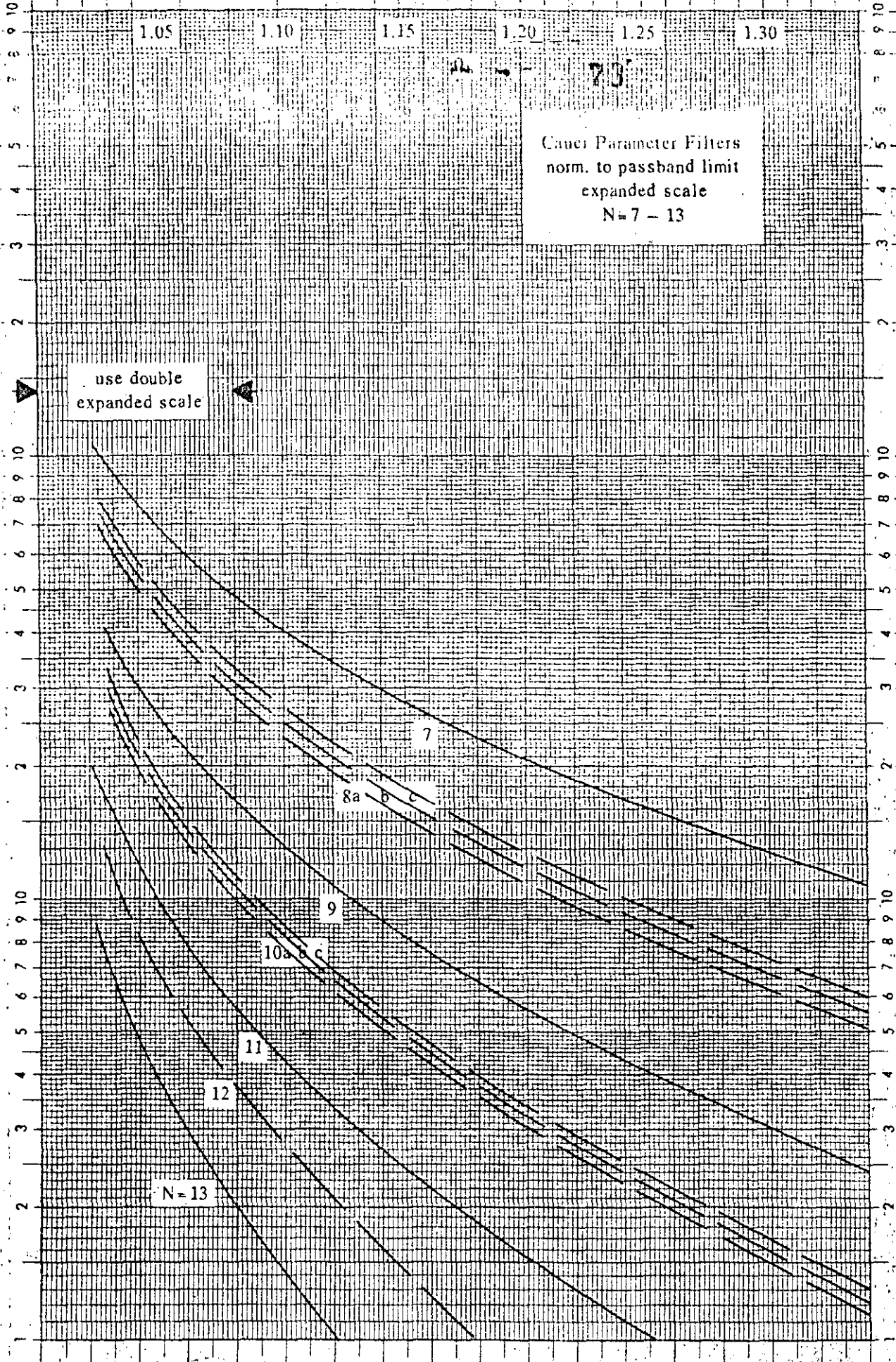
2.2

2.4

2.6

10  
9  
8  
7  
6  
5  
4  
3  
2  
10  
9  
8  
7  
6  
5  
4  
3  
2  
10  
9  
8  
7  
6  
5  
4  
3  
2  
10  
9  
8  
7  
6  
5  
4  
3  
2

10  
9  
8  
7  
6  
5  
4  
3  
2  
10  
9  
8  
7  
6  
5  
4  
3  
2  
10  
9  
8  
7  
6  
5  
4  
3  
2



1.05      1.10      1.15      1.20      1.25      1.30

Cauchy Parameter Filters  
norm. to passband limit  
expanded scale  
N=7-13

use double  
expanded scale

7

8a    b    c

9

10a    b    c

11

12

N=13

L  
↓

0.2

0.1

0.05

0.02

0.01

0.005

0.002

Reflection Coefficient (dB)

Amplitude (dB)

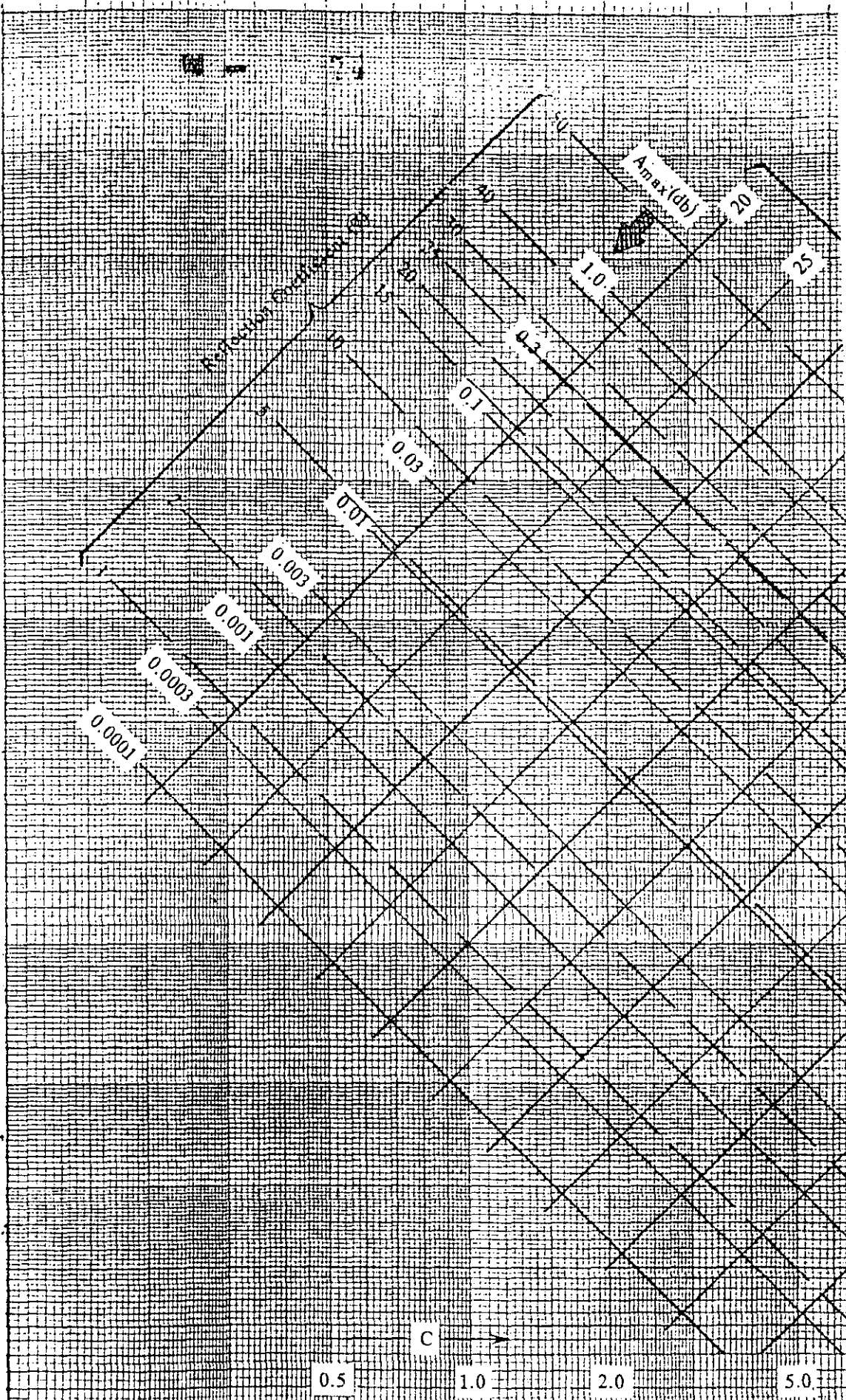
20 25

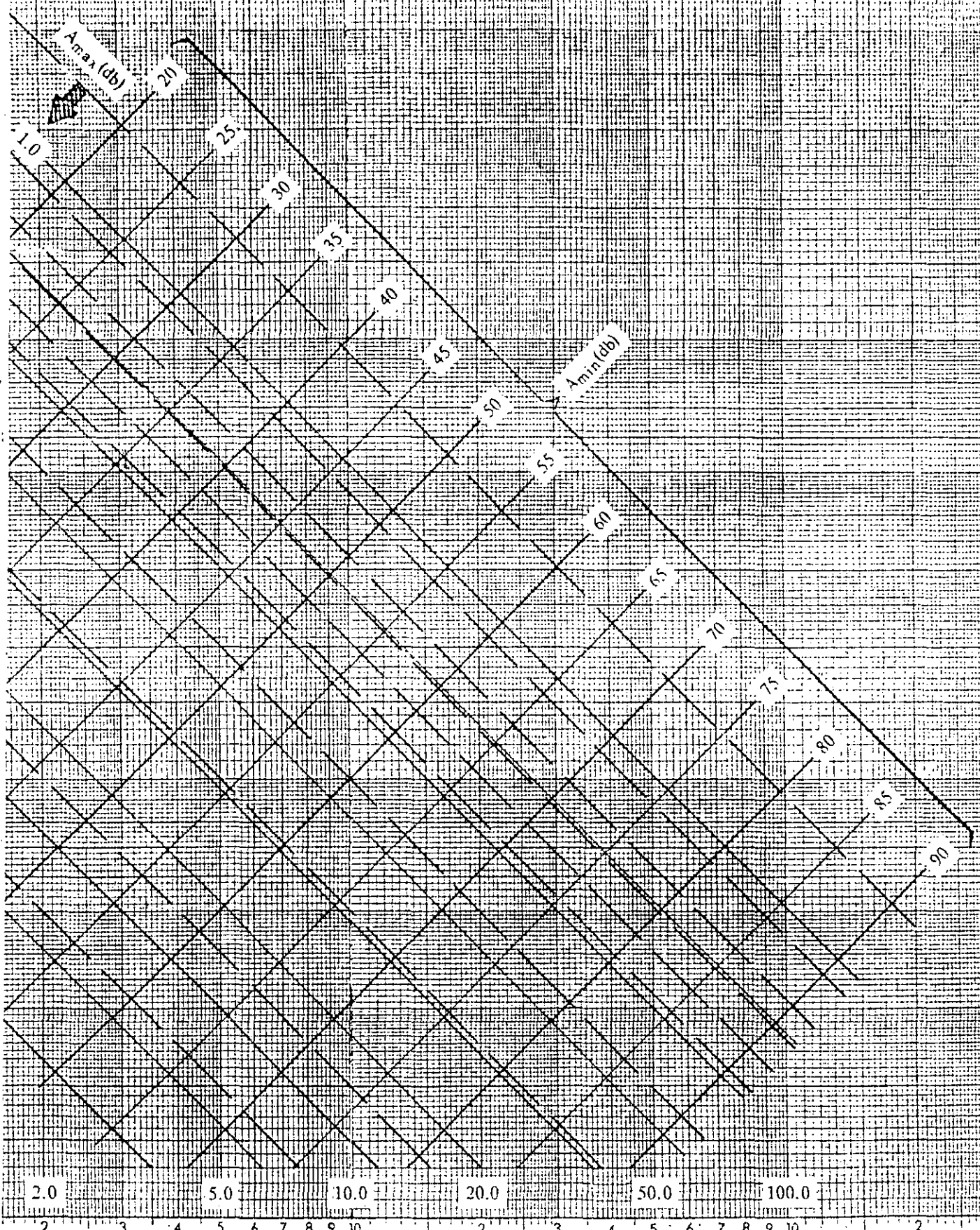
1000.0  
100.0  
10.0  
1.0  
0.1  
0.03  
0.01  
0.003  
0.001  
0.0003  
0.0001

C  
→

0.5 1.0 2.0 5.0

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 2 3 4 5 6









**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**TEORIA Y DISEÑO DE FILTROS ANALOGICOS Y DIGITALES**

**CAPITULO 4**

**FILTROS DIGITALES**

**V. MICHAEL LINDIG BOS**

**AGOSTO, 1985**

II.- SISTEMAS LINEALES, DISCRETOS, INVARIANTES

EN EL TIEMPO

II.1.- Características del sistema lineal discreto, invariante en el tiempo.-

La teoría de los sistemas lineales discretos, invariantes en el tiempo, se ocupa de la representación y el procesamiento de secuencias, tanto en el dominio del tiempo como en frecuencia. De entre los procesos que conducen a la generación de una secuencia, estudiaremos únicamente el proceso consistente en muestrear una señal continua en el tiempo a intervalos regulares. Cabe la aclaración que la teoría de sistemas discretos no está limitada a la cuantificación uniforme del tiempo, aunque el proceso de muestreo uniforme presente, tal vez, la aplicación más importante de la teoría.

Las señales discretas en el tiempo pueden representarse como una secuencia de números cuya amplitud puede asumir un continuo de valores. Se empleará el término " señal digital " cuando la representación de la amplitud de la señal discreta esté limitada a un conjunto finito de valores, esto es, cuando la señal es discreta tanto en tiempo como en amplitud. Se empleará la siguiente notación para describir secuencias:

$$x(nT), \quad N_1 \leq n \leq N_2$$

donde T representa el intervalo entre muestras ( una constante entera ). Cuando el valor de T no se requiere en forma explícita, se empleará la notación:

$$x(n), \quad N_1 \leq n \leq N_2$$

Finalmente, para designar un valor particular de entre el conjunto de valores que constituyen una secuencia, se empleará la notación siguiente:

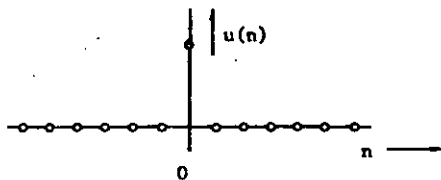
$$x_n, \quad N_1 \leq n \leq N_2$$

Para ejemplificar lo anterior, considérense las siguientes secuencias:

a.) la secuencia impulso unitario,  $u(n)$

$$x(n) = u(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

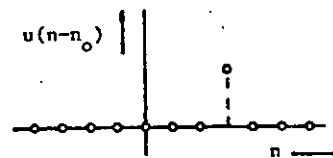
Aquí,  $u_0 = 1, u_1 = 0$  etc.



b.) la secuencia impulso unitario desplazado,  $u(n-n_0)$

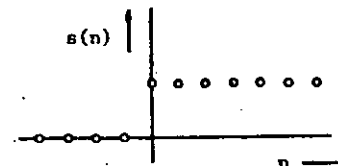
$$u(n-n_0) = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

Aquí,  $n_0 = 3$



c.) la secuencia escalón unitario,  $s(n)$

$$s(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

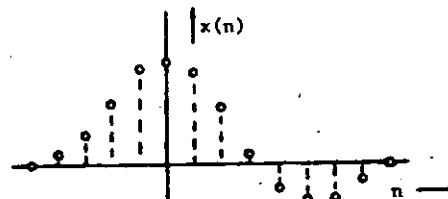


Nótese que  $s(n)$  puede representarse como una suma de impulsos unitarios, esto es:

$$s(n) = u(n) + u(n-1) + u(n-2) + \dots + u(n-k) + \dots$$

$$s(n) = \sum_{k=0}^{\infty} u(n-k)$$

Sea ahora una secuencia arbitraria,  $x(n)$  :



Es posible representar esta secuencia en términos de la amplitud de cada uno de los valores de la secuencia,  $x_n$ , y de impulsos unitarios, como sigue:

$$x(n) = x_{-\infty}u(n+\infty) + \dots + x_{-1}u(n+1) + x_0u(n) + x_1u(n-1) + \dots + x_{\infty}u(n-\infty)$$

O bien:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m u(n-m)$$

Se intentará, a continuación, definir a un sistema lineal discreto, invariante en el tiempo y establecer una relación de entrada - salida en términos de una función de transferencia.

Un sistema discreto transforma una secuencia de entrada en otra de salida, de acuerdo con una función de transferencia  $\phi$  :

$$y(n) = \phi\{x(n)\} \quad \dots (2.1)$$

donde  $x(n)$  es la secuencia de entrada y  $y(n)$  la secuencia de salida. Sean  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$  dos secuencias de entrada que originan, respectivamente, las secuencias  $y_1(n)$  y  $y_2(n)$  de salida.

Un sistema es lineal cuando se cumple que:

$$\phi\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = ay_1(n) + by_2(n) \quad \dots (2.2)$$

Eso es, cuando se cumplen las propiedades de superposición y escalamiento.

Un sistema lineal es invariante en el tiempo cuando, para una secuencia de entrada, desplazada en el tiempo  $x(n-n_0)$  se cumple que:

$$\phi\{x(n-n_0)\} = y(n-n_0) \quad \dots (2.3)$$

Sea ahora la secuencia de entrada a un sistema lineal, discreto, invariante en el tiempo, la secuencia impulso unitario. La salida del sistema,  $y(n)$ , está dada por:

$$y(n) = \phi\{u(n)\} \equiv h(n) \quad \dots (2.4)$$

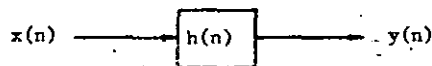
donde  $h(n)$  es la respuesta a impulso del sistema.

Si  $h(n)$  es la respuesta del sistema a  $u(n)$ , entonces, por invariancia en el tiempo,  $h(n-m)$  es la respuesta a la secuencia  $u(n-m)$ .

Similarmente, por la propiedad de escalamiento, la respuesta a la secuencia  $x_m u(n-m)$  es  $x_m h(n-m)$ . Finalmente, por la propiedad de superposición se obtiene la caracterización buscada:

$$\begin{aligned} y(n) = \phi\{x(n)\} &= \phi\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m u(n-m)\right\} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m h(n-m) \quad \dots (2.5) \end{aligned}$$

La relación anterior, llamada suma de convolución, indica que la secuencia  $h(n)$  caracteriza totalmente a un sistema lineal discreto, invariante en el tiempo:



En lo subsecuente, se entenderá por " sistema causal " aquél cuya salida,  $y(n)$ , es idénticamente cero para valores de  $n$  menores a cero.

Un sistema lineal discreto, causal, invariante en el tiempo, puede ser descrito mediante ecuaciones de diferencias finitas de coeficientes constantes. Esta descripción es análoga al papel que desempeñan las ecuaciones diferenciales ordinarias de coeficientes constantes en la descripción de sistemas lineales continuos.

La expresión más general de una ecuación lineal de diferencias finitas con coeficientes constantes toma la forma:

$$\begin{aligned} a_M y(n-M) + a_{M-1} y(n-M+1) + \dots + a_1 y(n-1) + a_0 y(n) = \\ b_M x(n-M) + b_{M-1} x(n-M+1) + \dots + b_1 x(n-1) + b_0 x(n) \end{aligned} \quad \dots (2.6)$$

donde  $M$  es el orden de la ecuación. La expresión anterior puede escribirse en forma compacta:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^M a_i y(n-i) \quad , \quad n = 0 \quad \dots (2.7)$$

En la ecuación (2.7) se consideró para  $a_0$  un valor igual a la unidad. Esto no representa una pérdida de generalidad, dado que es posible obtener un nuevo conjunto de coeficientes  $a'_M, a'_{M-1}, \dots, b'_M, b'_{M-1}, \dots$  dividiendo el conjunto de coeficientes original entre  $a_0$ .

Es posible demostrar que una ecuación de diferencias finitas constituye la relación entrada - salida para un sistema lineal discreto, causal, invariante en el tiempo. Para ello, conviene definir una transformación lineal, la llamada transformada Z:

$$Z\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} \quad \dots (2.8)$$

donde  $x(n)$  es una secuencia cualquiera y  $z$  un número complejo.

La demostración de que se trata de una transformación lineal puede hacerse por sustitución ( véase la ref. 1 ).

La transformada Z desempeña, para sistemas discretos, un papel similar al de la transformada de Laplace en la descripción de sistemas continuos. Considérese una señal continua,  $f(t)$ , muestreada por una secuencia de impulsos,

esto es, sea:

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{nT} \delta(t-nT) \quad \dots (2.9)$$

La transformada de Laplace de  $f^*(t)$  está dada por:

$$L\{f^*(t)\} = F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{nT} e^{-nTs} \quad \dots (2.10)$$

Haciendo  $z = e^{Ts}$  se obtiene la definición de la transformada Z para una señal causal. Las propiedades de la transformada Z son análogas a las propiedades de la transformada de Laplace ( véase la ref. 1 ); considérese, específicamente, la propiedad de desplazamiento:

$$\begin{aligned} Z\{x(n-k)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k) z^{-(n-k)} z^{-k} \\ &= z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k) z^{-(n-k)} \\ &= z^{-k} X(z), \text{ para valores de } k \text{ finitos} \quad \dots (2.11) \end{aligned}$$

Si se aplica la transformada Z a la ecuación de diferencias finitas ( 2.7 ) se obtiene:

$$Z\{y(n)\} = Z\left\{ \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^M a_i y(n-i) \right\}, n = 0$$

o bien:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^M b_i x(n-k) - \sum_{i=1}^M a_i y(n-k) \right\} z^{-n} \quad \dots (2.12)$$

Por las propiedades de linealidad y aplicando la propiedad de desplazamiento, se obtiene, directamente:

$$Y(z) = \left\{ \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} \right\} X(z) - \left\{ \sum_{i=1}^M a_i z^{-i} \right\} Y(z) \quad \dots (2.13)$$

Despejando  $Y(z)$  en la ecuación ( 2.13 ) se tiene:

$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M a_i z^{-i}} X(z) \quad \dots (2.14)$$

La relación anterior sugiere la definición de una función de transferencia,

$$H(z), \text{ dada por: } H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M a_i z^{-i}} \quad \dots (2.15)$$

de tal manera que:

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad \dots (2.16)$$

Queda por demostrar que la función  $H(z)$ , definida por la ecuación ( 2.15 ), constituye, en efecto, la función de transferencia de un sistema lineal discreto, causal, invariante en el tiempo. Para ello, considérese nuevamente la suma de convolución:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m h(n-m) \quad \dots (2.17)$$

Aplicando la definición de transformada Z se tiene:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m h(n-m) \right\} z^{-n} \quad \dots (2.18)$$

La ecuación anterior puede escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-m) z^{-(n-m)} \right\} z^{-m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m \{H(z)\} z^{-m} \quad \dots (2.19) \end{aligned}$$

O sea:

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad \dots (2.20)$$

De lo anterior se concluye que una ecuación de diferencias finitas lineal, de coeficientes constantes describe a un sistema lineal discreto, invariante en el tiempo. Así, se dispone de dos descripciones equivalentes, esto es, se puede visualizar a un sistema lineal discreto, invariante en el tiempo como un dispositivo que ejecuta una suma de convolución ó, alternativamente, como un dispositivo que resuelve una ecuación de diferencias finitas. Ambos puntos de vista son utilizados en la realización de filtros discretos ( véase las refs. 1,2,3 y 4 ).

II.2.- Relación entre sistemas lineales continuos y discretos.-

Al procesar en forma discreta una señal continua, surge naturalmente la pregunta sobre la validez de ese procesamiento. Conocer y cuantificar el error introducido al emplear únicamente un conjunto finito de valores de la señal original, es una condición necesaria para poder justificar el procesamiento subsecuente.

Bajo ciertas condiciones, generalmente satisfechas en problemas de ingeniería, es posible conocer el espectro de frecuencias de una función dada del tiempo. Concretamente, sea  $x(t)$  una función que satisface las condiciones de Dirichlet ( véase la ref. 5 ). Entonces, el espectro de frecuencias de la función  $x(t)$  está dado por la transformada de Fourier de  $x(t)$  :

$$X_A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad \dots ( 2.21 )$$

A partir del espectro,  $X_A(\omega)$ , es posible obtener en forma única la función original mediante la transformada inversa:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_A(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad \dots ( 2.22 )$$

Para una función discreta puede establecerse una relación de transformación similar. Considérese la definición de la transformada Z:

$$Z\{x(nT)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)z^{-nT} \quad , \text{ donde } T \text{ es el intervalo entre muestras} \quad \dots ( 2.23 )$$

La transformada Z constituye un mapeo de la secuencia  $x(nT)$  en el plano complejo, definido para aquellos valores de  $z$  para los cuales la serie de potencias converge.

Supóngase que la región de convergencia incluye el círculo de radio unitario con centro en el origen:

$$z = e^{j\omega} \quad \dots ( 2.24 )$$

Substituyendo la ecuación ( 2.24 ) en la ( 2.23 ) se obtiene:

$$Z\{x(nT)\} = X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega nT} \quad \dots ( 2.25 )$$

donde  $X(e^{j\omega T})$  es el espectro de frecuencias de la señal discreta.

Nótese que la ecuación anterior define el espectro de  $x(nT)$  como una

función periódica en  $\omega$  ( con período  $2\pi/T$  ). Por lo tanto, la ec. ( 2.25 ) puede considerarse como la expansión en serie de Fourier de  $X(e^{j\omega T})$ , donde la secuencia  $x(nT)$  son los coeficientes de la serie. De la teoría de series de Fourier ( véase la ref. 5 ), los coeficientes  $x(nT)$  pueden ser obtenidos a partir de la relación:

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{j\omega T})e^{j\omega nT} d\omega \quad \dots ( 2.26 )$$

Las dos ecuaciones anteriores constituyen las relaciones de transformación de Fourier para señales discretas.

Es posible relacionar el espectro de una señal continua con el de una señal discreta - obtenida muestreando la señal continua - de la siguiente forma:

Considérese nuevamente la transformada inversa de Fourier para una función continua:

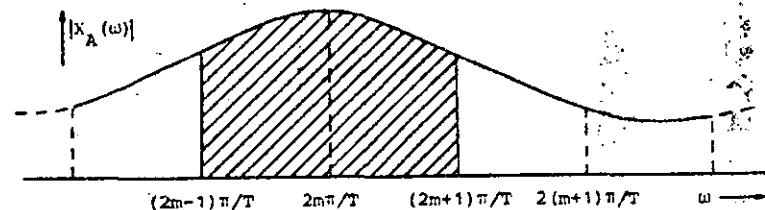
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_A(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad \dots ( 2.27 )$$

Como  $x(nT) = x(t)|_{t=nT}$ , la ecuación anterior se puede evaluar en  $t = nT$ . Por otra parte, la integral infinita puede expresarse como una suma infinita de integrales definidas sobre un periodo de duración  $2\pi/T$ , esto es:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{(2m-1)\pi/T}^{(2m+1)\pi/T} X_A(\omega)e^{j\omega nT} d\omega \quad \dots ( 2.28 )$$

$m$  entero

Véase también la figura adjunta:



Haciendo un cambio de variable, esto es, substituyendo  $\omega$  por  $\omega + 2\pi m/T$ , la ecuación anterior toma la forma:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_A(\omega + 2\pi m/T) e^{j\omega nT} d\omega \quad \dots (2.29)$$

Intercambiando el orden de la sumatoria con la integral, multiplicando y dividiendo por T, se obtiene:

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_A(\omega + 2\pi m/T) \right\} e^{j\omega nT} d\omega \quad \dots (2.30)$$

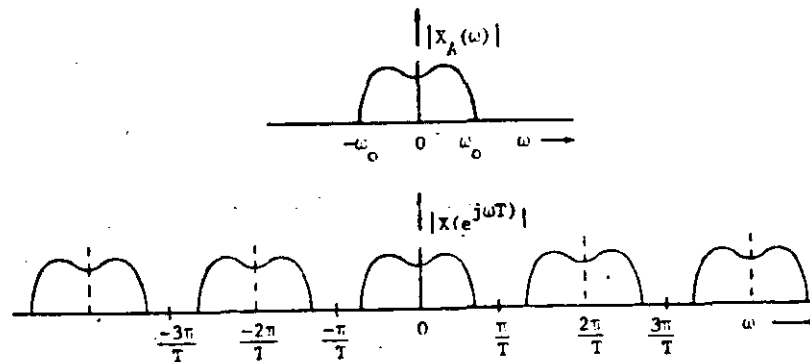
Comparando la ec. (2.30) con la transformada inversa para una función discreta, ec. (2.26):

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega nT} d\omega \quad \dots (2.31)$$

se concluye que el término entre paréntesis corresponde al espectro de la señal discreta, esto es:

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_A(\omega + 2\pi m/T) \quad \dots (2.32)$$

Es claro que  $X_A(\omega + 2\pi m/T)$  es el mismo espectro  $X_A(\omega)$ , desplazado sobre el eje  $\omega$  en  $2\pi m/T$  unidades. Esto es, el espectro de una señal discreta es una función periódica, con período  $2\pi/T$ :



$Y(e^{j\omega T})$  es el espectro de frecuencias de la secuencia de salida,  $y(nT)$ .

Ahora bien, como la señal de entrada,  $x(t)$ , está limitada en banda, debido a que fué previamente filtrada, tenemos que  $X_A(\omega) = 0$ ,  $|\omega| > \omega_c$  donde  $\omega_c = \pi/T$  es la mitad de la frecuencia de muestreo y, como por otra parte, el sistema discreto no genera componentes de frecuencias distintas a las contenidas en la señal de entrada,  $Y_A(\omega)$  deberá estar limitada en banda al mismo valor. Por lo tanto, se puede establecer el comportamiento del filtro reconstructivo:

$$G_A(\omega) = \frac{Y_A(\omega)}{Y(e^{j\omega T})} = 1, \quad \omega \leq \omega_c$$

$$G_A(\omega) = 0, \quad \omega > \omega_c \quad \dots (2.49)$$

(Recuérdese que  $Y(e^{j\omega T}) = Y_A(\omega)$  para señales limitadas en banda, en el rango  $|\omega| < \pi/T$ ) (Véase la sección II.2, ecuación 2.34.).

Volviendo a la descripción del filtro digital dada anteriormente, conviene resumir la función de transferencia ideal del sistema:

1.- Filtro pasabajos:

$$G_1(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi/T \\ 0, & |\omega| > \pi/T \end{cases} \quad \dots (2.50)$$

2.- Muestreador:

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_A(\omega + (2\pi n/T)) \quad \dots (2.51)$$

3.- Sistema lineal discreto, invariante en el tiempo:

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n T e^{-j\omega n T} \quad \dots (2.52)$$

donde  $h(nT)$  es la respuesta a impulso del sistema.

4.- El filtro reconstructivo:

$$G_2(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi/T \\ 0, & |\omega| > \pi/T \end{cases} \quad \dots (2.53)$$

Así, el espectro de frecuencias de la señal de salida,  $y(t)$ , estará dado por:

$$Y_A(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{T} H(e^{j\omega T}) X_A(\omega), & |\omega| \leq \pi/T \\ 0, & |\omega| > \pi/T \end{cases} \quad \dots (2.54)$$

Por lo tanto, el filtro digital afecta el espectro de la señal de entrada en

función a la respuesta a impulso del sistema. Obsérvese que, en principio, un filtro digital no puede ser del tipo "pasaltos" - en todo caso, la respuesta a la frecuencia está limitada a frecuencias iguales o menores a una frecuencia de corte,  $f_c$ , dada por el teorema del muestreo:

$$f_{c \text{ máx.}} = 1/2T \quad \dots (2.55)$$

donde T es el período entre muestras.-

II.4.- Tipos básicos de filtros: Respuesta a impulso infinita y respuesta a impulso finita.

Considérese la suma de convolución:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m x(n-m) \quad \dots (2.56)$$

donde se utilizó un cambio de variable para darle la forma anterior.

Aplicada a un sistema lineal discreto,  $x(n)$  es la secuencia de entrada,  $h(n)$  la respuesta a impulso y  $y(n)$  la secuencia de salida del mismo. Es claro que  $h(n)$  no está restringida en cuanto a longitud. Cuando, al tender  $n$  a infinito, a partir de cierto valor de  $n = N$  no todos los valores de  $h(n)$  son cero, se habla de una respuesta a impulso infinita (IIR). Si, al contrario, a partir de cierta  $n = N$  todos los valores de  $h(n)$  son idénticamente cero, se habla de un sistema de respuesta a impulso finita (FIR).

Si bien, desde un punto de vista práctico, la distinción entre filtros FIR e IIR puede parecer un tanto artificial - todo sistema realizable es de resolución finita, por lo que la respuesta a impulso necesariamente llega a asumir valores tan pequeños que resultan indistinguibles de cero - existen razones importantes, tanto desde el punto de vista teórico, como en relación a la realización física del filtro, que hacen necesaria esta distinción.

Para ilustrar lo anterior, supóngase que la entrada a un sistema lineal, continuo, invariante en el tiempo es un impulso. Además, se asume que el sistema es causal e inicialmente relajado. Entonces, el sistema queda descrito por la ecuación diferencial siguiente:

$$\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} = \delta(t) \quad \dots (2.57)$$

Tomando la transformada de Laplace, bajo las restricciones impuestas, obtenemos:

$$\sum_{n=0}^N a_n s^n x(n) = 1 \quad \dots (2.58)$$

Y la respuesta a impulso toma la forma:

$$H(s) = \frac{1}{\sum_{n=0}^N a_n s^n} \quad \dots (2.59)$$

Aplicando la expansión de Heaviside se obtiene:

$$H(s) = \frac{1}{a_n} \left\{ \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2} + \dots + \frac{K_n}{s - s_n} \right\} \quad \dots (2.60)$$

La antitransformada toma la forma:

$$h(t) = \frac{1}{a_n} \{ K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \dots + K_n e^{s_n t} \} \quad \dots (2.61)$$

Si el sistema es físicamente realizable y estable, se cumplen las restricciones adicionales:  $h(t)$  es una función real cuya magnitud tiende a cero cuando  $t$  tiende a infinito. Esto es, si ocurren valores complejos para  $s_j$ , éstos se presentan en la forma de complejos conjugados de manera tal que para cada  $s_j$  compleja, existe una  $s_k$  dada por:

$$s_k = s_j^*$$

En otras palabras,  $h(t)$  toma la forma de una superposición de senoides cuya envolvente es una exponencial.

De la expresión (2.61) se desprende que  $h(t)$  es una función continua. Si se muestrea  $h(t)$ , resulta una secuencia que satisface la definición de respuesta a impulso infinita dada anteriormente. En consecuencia, solamente un sistema IIR puede emular a un sistema continuo (dentro de las limitaciones del teorema del muestreo).

Considérese nuevamente la expresión (2.61). Supóngase que se desea indagar si  $h(t)$  posee propiedades de simetría, esto es, supóngase que:

$$h(t) = h(t - T)$$

donde  $T$  es una constante real. Entonces:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{a_n} \{ K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \dots + K_n e^{s_n t} \} \quad \dots (2.62) \\ &= \frac{1}{a_n} \{ K_1 e^{s_1 (t - T)} + K_2 e^{s_2 (t - T)} + \dots + K_n e^{s_n (t - T)} \} \end{aligned}$$

Es fácil ver que si no todos los valores  $s_j$  y  $K_j$  son cero, lo anterior se cumple solamente para  $T = 0$ . Por lo tanto,  $h(t)$  no posee propiedades de simetría.

Un sistema FIR no está sujeto a esta restricción, lo que establece que esta clase de sistemas no poseen paralelo en el campo continuo. A continuación se analizarán algunas propiedades de ambas clases de filtros.

#### II.4.1.- Filtros de respuesta a impulso infinita (IIR).-

En el punto II.1 se estableció que la respuesta a impulso de un sistema lineal discreto, invariante en el tiempo, descrito por medio de una ecuación de diferencias finitas, toma la forma (ec. 2.15):

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M a_i z^{-i}} \quad \dots (2.63)$$

donde no todos los valores para  $b_i$  son cero.

Es claro que una condición suficiente para que  $H(z)$  constituya una secuencia infinita consiste en que el orden del polinomio del numerador sea menor al orden del denominador, esto es:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M a_i z^{-i}}, \quad N < M \quad \dots (2.64)$$

describe a un sistema de respuesta a impulso infinita.

Obsérvese que la unidad que aparece en el denominador de la ecuación anterior corresponde al coeficiente de la variable dependiente en la ecuación de diferencias finitas que describe al sistema (ec. 2.7) y no puede ser omitido.

Las características del filtro son función de la ubicación de los polos y ceros en el plano complejo. Si bien, en general, no hay restricción para la ubicación de los ceros, los polos deben estar ubicados dentro del círculo unitario para garantizar que el filtro sea estable. Lo anterior se desprende de la siguiente discusión:

La condición necesaria y suficiente para que un sistema lineal discreto, invariante en el tiempo, sea estable es que su respuesta a impulso sea una



secuencia absolutamente sumable, esto es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad \dots (2.65)$$

Por otra parte, la existencia de la transformada Z está limitada a una región en la cual la serie de potencias

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n} \quad \dots (2.66)$$

sea convergente. Claramente, la zona de convergencia no incluye polos. Ahora bien, si se satisface la condición dada por la ec. (2.65), entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| |z^{-n}| \quad \dots (2.67)$$

es absolutamente sumable para valores de z ubicados fuera del círculo unitario, esto es, para  $|z| > 1$ . Consecuentemente, los polos deben localizarse dentro del círculo unitario, sin incluir éste.

El problema de diseño de un filtro consiste en encontrar coeficientes ( los valores  $a_i$  y  $b_i$ , en este caso ) tales que se satisfaga, dentro de cierto margen, un comportamiento en frecuencia y/o en fase deseados. Como tal, esta tesis se limitará a discutir algunos métodos para filtros FIR ( véase el capítulo IV ). Conviene aclarar, sin embargo, que un filtro IIR no puede emular de manera exacta a un filtro analógico. Esto se desprende directamente de la relación existente entre sistemas continuos y discretos, ya analizada anteriormente:

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_A(\omega + (2\pi m/T)) \quad \dots (2.68)$$

donde  $H_A(\omega)$  es la transformada de Fourier de una respuesta a impulso  $h(t)$  y  $H(e^{j\omega T})$  la respuesta a la frecuencia de la versión muestreada de  $h(t)$ .

Para que  $H(e^{j\omega T})$  fuese igual a  $H_A(\omega)$ , se requiere que el sistema discreto precediera a un filtro pasabajos ideal que eliminara las componentes armónicas que aparecen, como consecuencia del muestreo, en la ec. (2.68), condición claramente imposible. Además, y conceptualmente más importante,  $H_A(\omega)$  debe estar limitado en banda para que el correspondiente sistema continuo tuviera un equivalente discreto ( véase el teorema del muestreo, pág. 13 ). Como ningún filtro analógico limita en banda a una señal de entrada de manera perfecta, se concluye que ningún filtro analógico puede emularse de manera precisa con un filtro discreto.

Considérese, como ejemplo, el caso de un filtro Butterworth de 2.- orden, cuya respuesta a la frecuencia toma la forma:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\{1 + (\omega/\omega_c)^4\}^{1/2}}$$

Supóngase que  $\omega_c = 1$ . En términos de la transformada de Laplace, se puede escribir:

$$H(s)H(-s) = 1/(1 + s^4)$$

Las raíces de esta expresión están dadas por:

$$s_q = e^{j(180^\circ + 360^\circ q)/4}, \quad q = 0, 1, 2, 3$$

Se obtiene, para  $H(s)$ , la expresión:

$$H(s) = \frac{1}{(s + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}})(s + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}})} = \frac{1}{(s + \frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{2}}$$

donde se escogieron las dos raíces ubicadas en el semiplano complejo izquierdo, esto es, si  $s = \sigma + j\omega$ , se tomaron los valores para  $s_q$  correspondientes a valores de  $\sigma < 0$ .

Supóngase que este filtro se desea realizar en un sistema discreto. Conviene normalizar los valores de  $\omega$  con respecto al período de muestreo T. Sea  $T = 1$ , esto es, la frecuencia de muestreo  $f_s = 1$  y supóngase que la frecuencia de corte del filtro,  $f_c$ , es 10 veces menor a la frecuencia de muestreo:

$$f_c = 0.1 f_s = 0.1$$

O sea:  $\omega_c = 0.2\pi$

Haciendo la transformación  $s \rightarrow s + s/0.2\pi$ , se obtiene, para  $H(s)$ :

$$H(s) = \frac{(0.2\pi)^2}{(s + \frac{0.2\pi}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2}(0.2\pi)^2}$$

La respuesta a impulso,  $h(t)$ , está dada por la transformada inversa:

$$h(t) = (0.2\pi)^2 \frac{e^{-0.2\pi t/\sqrt{2}} \text{sen}(0.2\pi t/\sqrt{2})}{0.2\pi/\sqrt{2}}$$

Esto es,  $h(t) = 0.8886 e^{-0.4443t} \text{sen}(0.4443t)$

En su forma muestreada, y recordando que  $T = 1$ , se tiene:

$$h(n) = 0.8886 e^{-0.4443n} \text{sen}(0.4443n)$$

Aplicando la transformada Z, se obtiene:

$$1.- Z\{\text{sen}(0.4443n)\} = \frac{z \text{sen}(0.4443)}{z^2 - 2z \cos(0.4443) + 1}$$

$$2.- Z\{e^{-an} x(n)\} = X(e^a z)$$

Substituyendo valores, se obtiene:

$$H(z) = \frac{0.5956 z}{2.4317 z^2 - 2.8159 z + 1}$$

De la expresión anterior se puede obtener la respuesta a la frecuencia del filtro discreto, haciendo la substitución  $z = e^{j\omega T}$ ,  $T = 1$ , con lo cual:

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{0.5956 e^{j\omega T}}{2.4317 e^{2j\omega T} - 2.8159 e^{j\omega T} + 1}$$

Finalmente, la magnitud de  $H(e^{j\omega T})$  se reduce, mediante la substitución  $e^{j\omega T} = \cos(\omega T) + j \text{sen}(\omega T)$ , a la siguiente expresión:

$$|H(e^{j\omega T})| = \frac{0.5956}{(9.7268 \cos^2(\omega T) - 19.3266 \cos(\omega T) + 9.9791)^{1/2}}$$

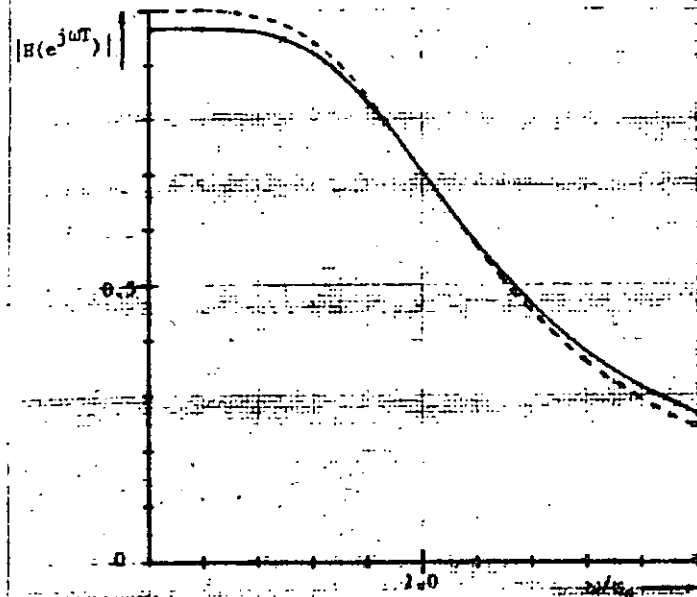
Siguiendo un análisis similar, pero suponiendo que  $f_c = 0.01 f_s$ , se obtiene:

$$|H(e^{j\omega T})| = \frac{0.004126}{(4.3717 \cos^2(\omega T) - 8.74339 \cos(\omega T) + 4.3717)^{1/2}}$$

La gráfica (2.1) adjunta muestra estas respuestas a la frecuencia, así como la correspondiente al filtro Butterworth prototipo. A continuación se enlistan algunos valores correspondientes a  $|H(e^{j\omega T})|$  para distintos valores de  $\omega/\omega_c$ :

$\omega/\omega_c$	prototipo	$f_c = 0.1f_s$	$f_c = 0.01f_s$
0.0	1.0000	0.9672	1.0007
0.2	0.9992	0.9654	0.9992
0.4	0.9874	0.9601	0.9882
0.6	0.9409	0.9210	0.9416
0.8	0.8423	0.8322	0.8429

$\omega/\omega_c$	prototipo	$f_c = 0.1f_s$	$f_c = 0.01f_s$
1.0	0.7071	0.7071	0.7076
1.2	0.5704	0.5788	0.5707
1.4	0.4545	0.4692	0.4548
1.6	0.3639	0.3832	0.3641
1.8	0.2949	0.3178	0.2952
2.0	0.2425	0.2681	0.2428



Gráfica 2.1

La línea llena corresponde al filtro discreto con  $f_c = 0.1f_s$ . La línea punteada al filtro prototipo. La respuesta del filtro discreto para  $f_c = 0.01f_s$  no es distinguible de la del filtro prototipo con las escalas empleadas.

Conviene recordar que  $H(e^{j\omega T})$  es periódica. Así, para el caso de  $f_c = 0.1f_s$ ,  $|H(e^{j\omega T})|_{(\omega/\omega_c)=1} = |H(e^{j\omega T})|_{(\omega/\omega_c)=9} = |H(e^{j\omega T})|_{(\omega/\omega_c)=11}$  etc.

Obsérvese la mejor correspondencia entre el filtro prototipo y el filtro IIR para  $f_c = 0.01f_s$ . Esto se debe a que, para este caso, el filtro prototipo se aproxima mejor a un filtro limitador de banda: para  $f = 0.99f_s$ , la magnitud de la respuesta a la frecuencia del filtro Butterworth es de sólo

Cambiando los límites de la primera sumatoria (recuérdese que  $h(n)$  es igual a  $h(-n)$ ) se obtiene:

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{N-1} h_n e^{j\omega n} + h_0 + \sum_{n=1}^{N-1} h_n e^{-j\omega n}$$

$$\sum_{n=1}^{N-1} h_n \{ \cos(\omega n) + j \operatorname{sen}(\omega n) \} + h_0 + \sum_{n=1}^{N-1} h_n \{ \cos(\omega n) - j \operatorname{sen}(\omega n) \} \quad \dots (2.88)$$

lo que reduce a:

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = h_0 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} h_n \cos(\omega n) \quad \dots (2.89)$$

Para el caso del filtro pasabajos, la respuesta a impulso está dada por:

$$h(n) = \frac{\operatorname{sen}(\omega_c n)}{n\pi} \quad \dots (2.90)$$

Substituyendo, se obtiene:

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = h_0 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\operatorname{sen}(\omega_c n)}{n\pi} \cos(\omega n) \quad \dots (2.91)$$

La expresión anterior es una serie de Fourier análoga a la representación de una onda rectangular en serie exponencial, con un número finito de términos, donde la respuesta a impulso toma el lugar de los coeficientes de la serie exponencial. Como en el caso de la representación de una onda rectangular, la serie no converge a una representación perfecta (aún cuando  $n \rightarrow \infty$ ) sino presenta rizo tanto en la región de pasabanda como en la de atenuación. Existen métodos para controlar este fenómeno, conocido como fenómeno de Gibbs, algunos de los cuales serán analizados en el capítulo IV.

Es posible obtener una expresión para la pendiente de corte de ese filtro. Tomando la derivada con respecto a  $\omega$  de la expresión anterior, se obtiene:

$$\frac{d\hat{H}(e^{j\omega})}{d\omega} = - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N-1} \operatorname{sen}(\omega_c n) \operatorname{sen}(\omega n) \quad \dots (2.92)$$

Y, para  $\omega = \omega_c$ :

$$\frac{d\hat{H}(e^{j\omega})}{d\omega} = - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N-1} \operatorname{sen}^2(\omega_c n) \quad \dots (2.93)$$

Es claro que el valor de la pendiente dada por la expresión anterior aumenta conforme  $N$  aumenta. Para analizar la dependencia con respecto a  $\omega_c$ , la

expresión anterior puede re - escribirse como sigue:

$$\frac{d\hat{H}(e^{j\omega})}{d\omega} = - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2} \{ 1 - \cos(2\omega_c n) \} \quad \dots (2.94)$$

$$= - \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{N-1}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} \cos(2\omega_c n) \right\}$$

La sumatoria indicada en la expresión anterior puede expresarse en términos de exponenciales como sigue:

$$\frac{d\hat{H}(e^{j\omega})}{d\omega} = - \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{N-1}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} (e^{2j\omega_c n} + e^{-2j\omega_c n}) / 2 \right\}$$

Expandiendo la sumatoria se obtiene una expresión cerrada para la pendiente de corte:

$$\frac{d\hat{H}(e^{j\omega})}{d\omega} = - \frac{1}{2\pi} \left\{ N + \frac{\operatorname{sen}(\omega_c N)}{\operatorname{sen}(\omega_c)} \right\} \quad \dots (2.95)$$

De la expresión anterior se desprende que, con excepción para valores de  $\omega_c$  cercanos a cero o  $\pi$  (esto es, a la mitad de la frecuencia de muestreo), la pendiente de corte varía esencialmente en forma proporcional a  $N$ , particularmente para valores de  $N$  grandes.

Las gráficas adjuntas son ejemplo de cómo se comporta  $|\hat{H}(e^{j\omega})|$  en función a  $\omega$ , para una  $\omega_c$  y  $N$  dadas (fig. 2.2), y como varía la pendiente de corte conforme  $N$  aumenta, para una  $\omega_c$  dada (fig. 2.3).

En toda la discusión anterior, se consideró a  $N$  un entero impar. Para el caso de filtros pasabajos y pasabanda, el hecho de que  $N$  sea un número par modifica únicamente el retardo que introduce el sistema. Existen aplicaciones importantes para filtros FIR, particularmente aquellas en las que se relaja la restricción de "fase lineal" a una de "retardo de grupo constante" (esto es, una función de fase seccionalmente lineal), para las cuales el hecho de que  $N$  sea par o impar adquiere importancia (diferenciadores y transformadores de Hilbert). Sin embargo, ese tema excede los propósitos de esta tesis.-

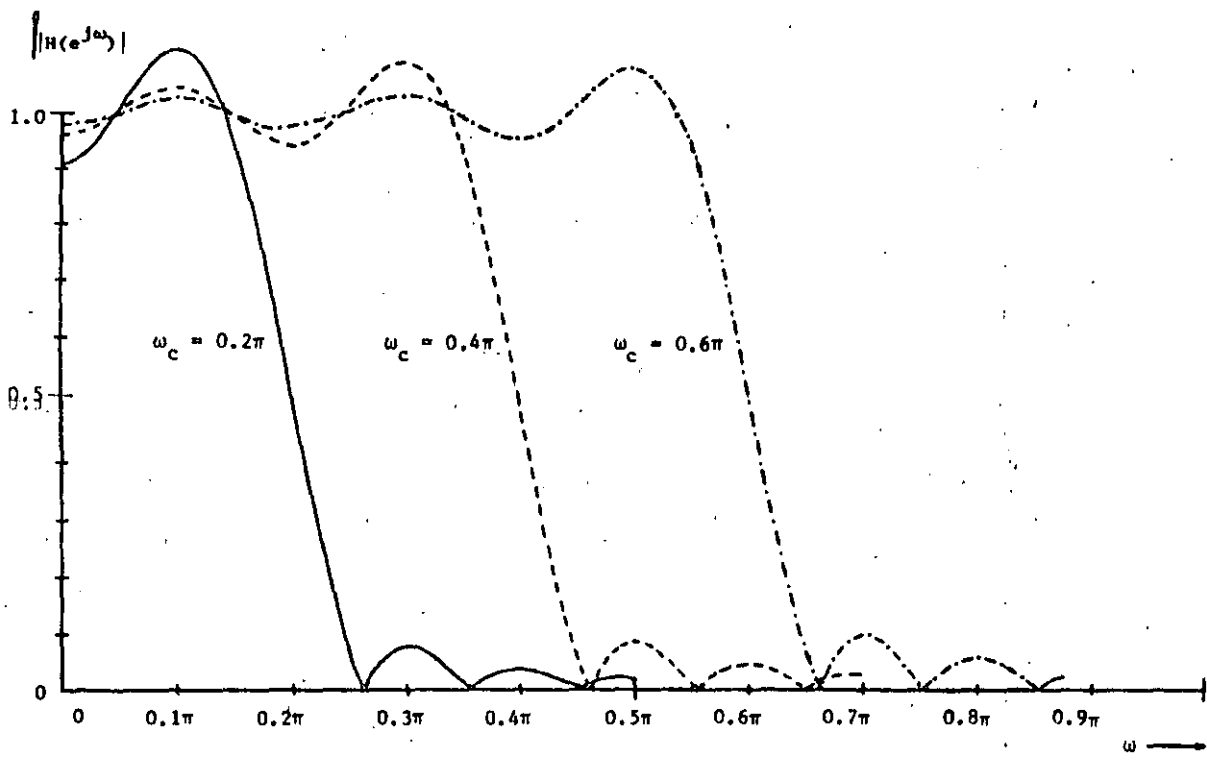


Figura 2.2

Respuesta a la frecuencia como función de la frecuencia de corte, para  $N = 21$ .

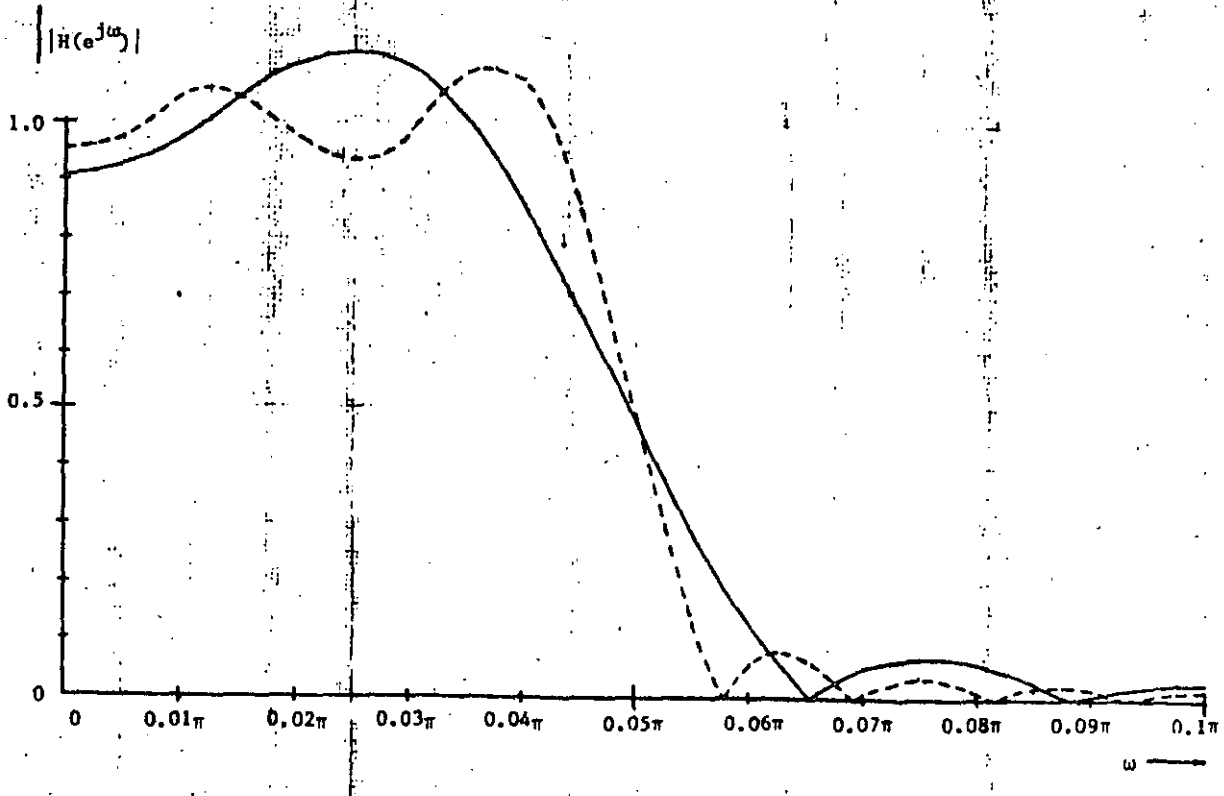


Figura 2.3

Respuesta a la frecuencia como función de la longitud de la secuencia respuesta a impulso, para  $\omega = 0.05\pi$ . La curva llena corresponde a  $N = 41$ ; la punteada corresponde a  $N = 81$ .

II.5.- Algunas estructuras empleadas en la realización de filtros digitales.-

En el primer punto del presente capítulo se discutió la representación de un sistema lineal discreto, invariante en el tiempo, en términos de una ecuación lineal de diferencias finitas con coeficientes constantes:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i) \quad \dots (2.96)$$

Se estableció la relación de esta representación con respecto a la respuesta a impulso del sistema por medio de la transformada Z:

$Y(z) = H(z)X(z)$ , donde  $H(z)$  está dado por:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \quad \dots (2.97)$$

Es claro que el límite de ambas sumatorias puede igualarse, haciendo cero los coeficientes correspondientes a la sumatoria afectada. Entonces, sin perder generalidad,  $H(z)$  puede escribirse:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}, \quad a_0 = 1 \quad \dots (2.98)$$

$H(z)$  puede considerarse como el producto de dos funciones de transferencia,  $H_1(z)$  y  $H_2(z)$ :

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} \times \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} \quad \dots (2.99)$$

Introduciendo las variables auxiliares  $W(z)$  y  $Y(z)$  se tiene:

$$H_1(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} \quad \dots (2.100)$$

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} \quad \dots (2.101)$$

De la expresión para  $H_1(z)$  resulta:

$$X(z) = W(z) \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} = \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} W(z) \quad \dots (2.102)$$

Reconociendo en  $z^{-i}W(z)$  la transformada Z de  $w(n-i)$  se obtiene:

$$x(n) = \sum_{i=0}^N a_i w(n-i) \quad \dots (2.103)$$

Y, recordando que  $a_0 = 1$ :

$$w(n) = x(n) - \sum_{i=1}^N a_i w(n-i) \quad \dots (2.104)$$

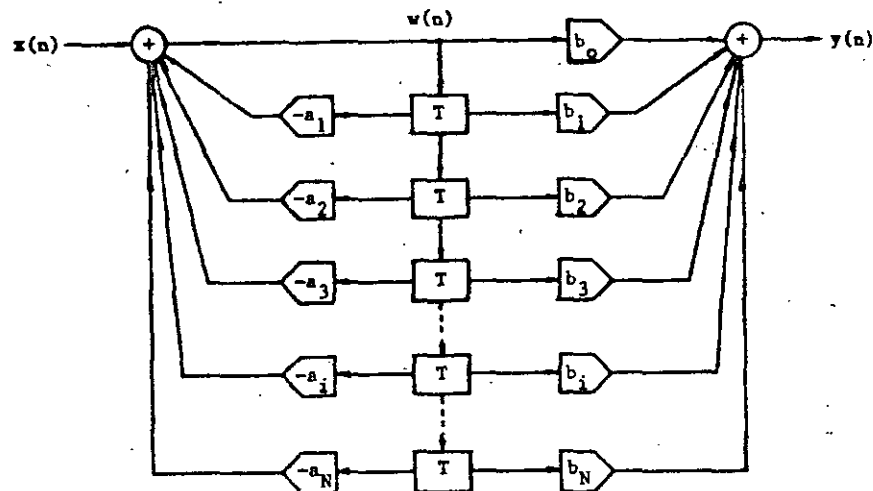
Similarmente, de la expresión correspondiente a  $H_2(z)$  se obtiene:

$$Y(z) = W(z) \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} W(z) \quad \dots (2.105)$$

Por el argumento expuesto arriba, la antitransformada resulta en:

$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i w(n-i) \quad \dots (2.106)$$

Lo anterior constituye un sistema de dos ecuaciones que pueden resolverse como sigue:



En el esquema anterior, que constituye una forma canónica ( de un mínimo de componentes ) de implementación directa, cada rectángulo corresponde a un retardo T, cada triángulo a una multiplicación y la sumatoria se indica con un círculo. Nótese que  $x_{n-1}$  está retardado con respecto a  $x_n$  una unidad de tiempo, representada por T.

Esta estructura, a pesar de ser muy sencilla y cuyo funcionamiento puede verificarse por inspección, no es muy empleada por una serie de desventajas inherentes a la misma. Es claro que representa la implementación más veloz posible, estando limitada la velocidad solamente por el tiempo requerido para efectuar una multiplicación. Sin embargo, requiere un multiplicador para cada coeficiente  $a_i$  y  $b_i$  distinto de cero ( o sea, para cada polo y cero de la función de transferencia ). Se puede demostrar, también, que esta estructura es muy sensible a variaciones en la precisión de la representación de los coeficientes, particularmente en filtros de alta selectividad de frecuencia. Nótese, también, que es una estructura recursiva con todos los problemas de estabilidad inherentes a un sistema retroalimentado.

El seleccionar una estructura particular de entre las muchas posibilidades para implementar un sistema discreto depende de las características que debe reunir el sistema y es objeto de estudio de un gran número de especialistas ( véase las refs. 1,2,3 y 4 ). Se analizará, a continuación, el caso para el cual todas las  $a_i$ 's,  $i \neq 0$ , sean cero, esto es la implementación de una ecuación de diferencias finitas de la forma:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) \quad \dots ( 2.107 )$$

O sea, un sistema discreto en el cual la salida para cualquier n depende únicamente de la entrada para ese valor de n y de los (N-1) valores previos de la señal de entrada.

Tomando la transformada Z de la expresión anterior, resulta:

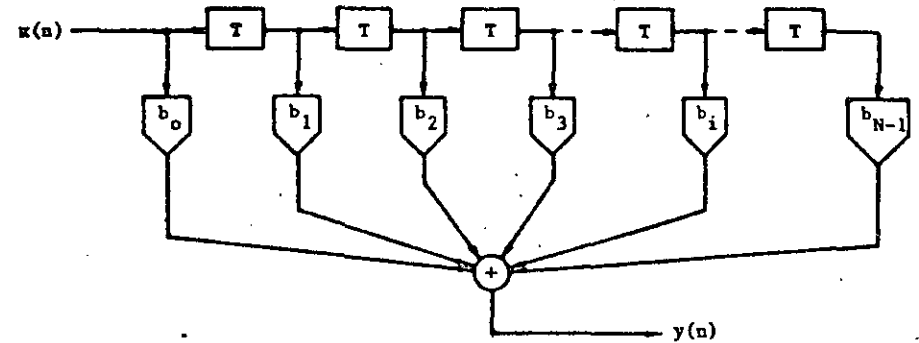
$$y(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} X(z) = X(z) \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} \quad \dots ( 2.108 )$$

Y, por la definición de función de transferencia se tiene:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} \quad \dots ( 2.109 )$$

Nótese que H(z) es finita, de N términos, o sea, su implementación conduce

a un sistema FIR. Además, se trata de un sistema que posee únicamente ceros. Finalmente, redibujando el esquema de la implementación directa para ese caso, se obtiene:



Es importante observar que esta implementación es no - recursiva y absolutamente estable, ya que no posee retroalimentación alguna.

Comparando la expresión correspondiente a la ecuación de diferencias finitas para ese caso:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) \quad \dots ( 2.110 )$$

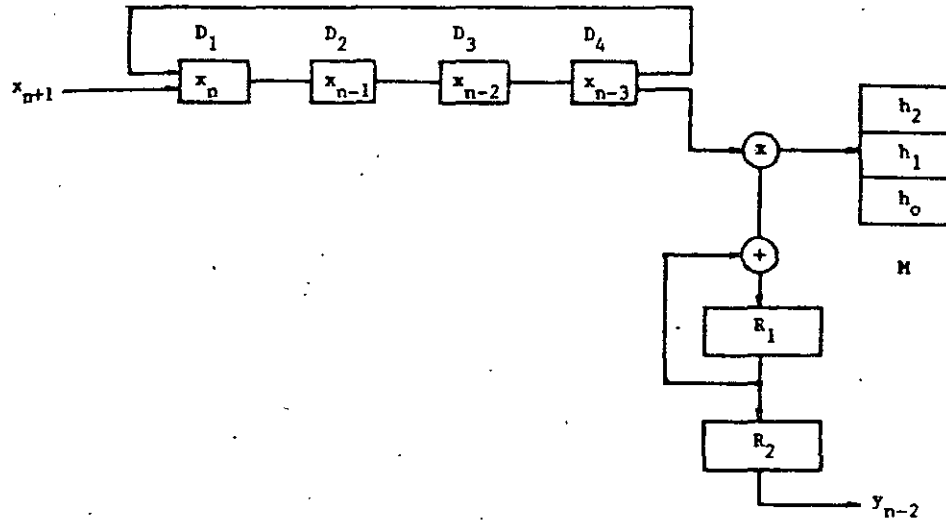
con la suma de convolución para un sistema FIR:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h_m x(n-m) \quad \dots ( 2.111 )$$

se observa que los coeficientes de la ecuación de diferencias finitas, ec. ( 2.10 ), corresponden a los valores  $h_i$  de la respuesta a impulso, por lo que la implementación directa, dada en el esquema anterior, es simplemente la implementación directa de la suma de convolución para una respuesta a impulso finita.

Existe una forma de reducir a uno el número de multiplicadores implícitos en la realización anterior, empleando un esquema secuencial. Con este esquema se sacrifica velocidad de ejecución en beneficio de una mayor economía en componentes. Estrictamente hablando, es posible realizar una estructura cuyo retardo es NT, donde N es el número de ceros de la función

de transferencia,  $\tau$  el tiempo requerido para efectuar una multiplicación y donde el retardo introducido por el sumador se considera despreciable. Se propone, sin embargo, una estructura que implica dos retardos adicionales, esto es,  $(N + 2)\tau$ , y cuya ventaja consiste en requerir un secuenciador particularmente sencillo. Considérese el siguiente esquema, en el cual, por simplicidad, se consideraron únicamente tres términos para la respuesta a impulso  $h(n)$ :



En el esquema anterior,  $D_1 \dots D_4$  constituyen un registro de desplazamiento recirculante,  $R_1$  y  $R_2$  son dos registros tipo D,  $M$  es una memoria para los valores  $h_n$ , eso es, los coeficientes de la ecuación de diferencias finitas y los círculos representan las operaciones aritméticas indicadas.

Supóngase que el contenido del registro de desplazamiento, en un instante dado, es el indicado en el esquema anterior. Entonces, la secuencia de operación es como sigue:

( véase la siguiente página )

$\tau$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$R_1$	$R_2$
0	$x_n$	$x_{n-1}$	$x_{n-2}$	$x_{n-3}$	0	$y_{n-2}$
1	$x_{n-3}$	$x_n$	$x_{n-1}$	$x_{n-2}$	$h_2 x_{n-3}$	$y_{n-2}$
2	$x_{n-2}$	$x_{n-3}$	$x_n$	$x_{n-1}$	$h_1 x_{n-2} + h_2 x_{n-3}$	$y_{n-2}$
3	$x_{n-1}$	$x_{n-2}$	$x_{n-3}$	$x_n$	$h_0 x_{n-3} + h_1 x_{n-2} + h_2 x_{n-3}$ $= y_{n-1}$	$y_{n-2}$
4	$x_n$	$x_{n-1}$	$x_{n-2}$	$x_{n-3}$	$y_{n-1}$	$y_{n-1}$
5	$x_{n+1}$	$x_n$	$x_{n-1}$	$x_{n-2}$	0	$y_{n-1}$
6	$x_{n-2}$	$x_{n+1}$	$x_n$	$x_{n-1}$	$h_2 x_{n-2}$	$y_{n-1}$
7	$x_{n-1}$	$x_{n-2}$	$x_{n+1}$	$x_n$	$h_1 x_{n-1} + h_2 x_{n-2}$	$y_{n-1}$
8	$x_n$	$x_{n-1}$	$x_{n-2}$	$x_{n+1}$	$h_0 x_n + h_1 x_{n-1} + h_2 x_{n-2}$ $= y_n$	$y_{n-1}$
9	$x_{n+1}$	$x_n$	$x_{n-1}$	$x_{n-2}$	$y_n$	$y_n$
10	$x_{n+2}$	$x_{n+1}$	$x_n$	$x_{n-1}$	0	$y_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Si  $T$  es el intervalo entre las muestras que constituyen a  $x(n)$ , este esquema realiza una secuencia de  $N+2$  pasos durante cada intervalo  $T$ , esto es,  $T = (N+2)\tau$ . Nótese que a cada  $\tau$  corresponde una sola transferencia, y que el multiplicador debe efectuar una multiplicación cada  $\tau$  unidades. Finalmente, para un valor de  $N$  impar, se requiere un registro de desplazamiento de longitud par.-

### II.6.- Consideraciones relativas a errores introducidos por sistemas físicamente realizables.-

En el punto 2.3 de este capítulo se dió una descripción de los elementos que constituyen a un filtro digital:

- a.) Filtro pasabajos, limitador del ancho de banda de la señal de entrada,  $x(t)$
- b.) Muestreador
- c.) Sistema lineal discreto, invariante en el tiempo
- d.) Filtro reconstructor

La realización física de estos elementos implica una serie de desviaciones

del comportamiento ideal de los mismos, de entre los cuales destacan:

- a.) Filtro pasabajos. Atenuación en la región de pasabanda, atenuación finita en la región de atenuación y distorsión de fase.
- b.) Muestreador. Este subsistema, en un sistema práctico, se compone de dos elementos: Un circuito muestreador - retenedor y un conversor analógico - digital. Las principales fuentes de error consisten en un tiempo de adquisición finito para el primero y una resolución finita, así como posible truncado, en el segundo.
- c.) Sistema lineal. Errores por redondeo y/o truncado.
- d.) Filtro reconstructor. Este subsistema, también, se considera constituido por dos elementos: Un convertidor digital - analógico y un filtro pasabajos. Mientras que el primero, en principio, no contribuye al error global del sistema, el segundo está sujeto a las mismas restricciones mencionadas en el punto a.)

Se procederá, a continuación, a discutir cada una de las fuentes de error mencionadas. Como no es posible, en el marco de una tesis, considerar todas las posibles realizaciones de los elementos antes mencionados, se hará énfasis en la realización utilizada en el desarrollo del presente trabajo.

#### II.6.1.- Filtro pasabajos.-

Se utilizó en el prototipo objeto de esta tesis un filtro Butterworth de 4.- orden, cuya función de transferencia está dada por la relación:

$$|G(\omega)| = \frac{1}{(1 + (\omega/\omega_c)^2)^{1/2}} \quad \dots (2.112)$$

En términos de la transformada de Laplace, se tiene:

$$G(s)G(-s) = \frac{1}{1 + (-s^2)^4} \quad \dots (2.113)$$

Y:

$$G(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^4 (s - s_k)} \quad \dots (2.114)$$

donde:

$$s_k = e^{j\pi\{(1/2) + (2k-1)/8\}} \quad \dots (2.115)$$

son las raíces correspondientes al semiplano complejo negativo, esto es, para valores de  $\sigma < 0$ .

Substituyendo, se obtiene:

$$\begin{aligned} s_1 &= -0.3827 + 0.9239 j \\ s_2 &= -0.9239 + 0.3827 j \\ s_3 &= -0.9239 - 0.3827 j \\ s_4 &= -0.3827 - 0.9239 j \end{aligned}$$

Substituyendo estos valores, se obtiene para G(s):

$$G(s) = \frac{K_0}{s^4 + 2.6133s^3 + 3.4144s^2 + 2.6133s + 1} \quad \dots (2.116)$$

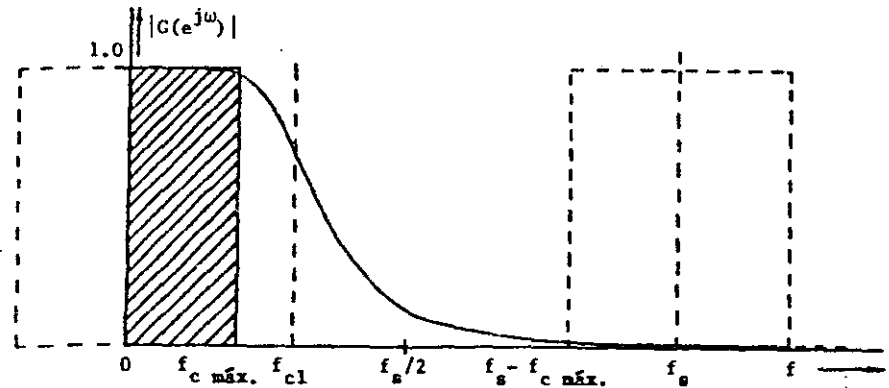
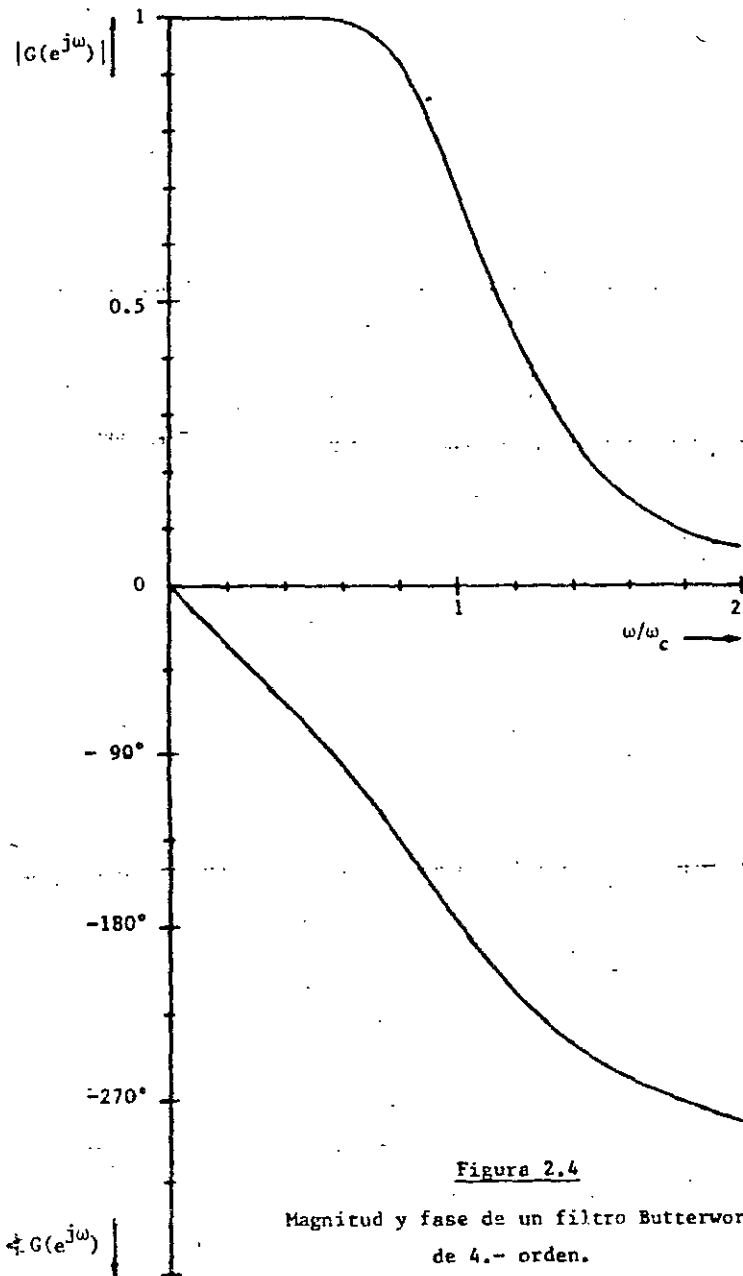
Haciendo  $s = j\omega$  se obtiene, para la fase de G(ω):

$$\angle G(\omega) = \text{tg}^{-1} \frac{-2.6133\omega(1-\omega^2)}{\omega^4 - 3.4144\omega^2 + 1} \quad \dots (2.117)$$

La gráfica 2.4 adjunta muestra la magnitud y fase de ese filtro para valores normalizados de  $\omega$ .

El problema de escoger la frecuencia óptima de corte para un error máximo permisible dado, se complica porque intervienen dos aspectos: la atenuación que introduzca el filtro limitador de banda en el rango de frecuencias que deberá pasar al sistema en su conjunto, y la atenuación que logre obtener el filtro limitador de banda para frecuencias mayores a la mitad de la frecuencia de muestreo. Considérese la siguiente figura: ( fig. 2.5 ), en la cual  $f_{c \text{ máx.}}$  es la frecuencia de corte máxima programable del filtro digital,  $f_{cl}$  es la frecuencia de corte del filtro limitador de banda, ( $f_s - f_{c \text{ máx.}}$ ) es el límite inferior de la primera armónica del espectro discreto del filtro digital y  $f_s$  es la frecuencia de muestreo. Considérese el caso en el cual  $f_{c \text{ máx.}} = 0.2 f_s$  y  $f_{cl} = 0.3 f_s$ . Para  $f = f_{c \text{ máx.}}$ , el filtro limitador de banda, para el caso analizado, posee una función de transferencia:





**Figura 2.5**

$$|G(\omega)|_{\omega = (2/3)\omega_c} = 0.9364$$

eso es, introduce una atenuación de 6.36 dB.

En el límite inferior de la primera armónica del espectro de frecuencias del filtro digital, esa función posee aún una magnitud de:

$$|G(\omega)|_{\omega = 2.666 \omega_c} = 0.0198$$

misma que decrece en el límite superior de la primera armónica a:

$$|G(\omega)|_{\omega = 4 \omega_c} = 0.0039$$

O sea, para los valores mencionados existe un fenómeno de superposición espectral ( aliasing ) de un 1.2%, aproximadamente, en promedio. Es claro que la magnitud de estos errores puede, o no, ser aceptable en función de la aplicación. Se pueden reducir disminuyendo la relación de  $f_{c \text{ máx.}}$  en relación a  $f_s$ , ó utilizando un filtro de mayor pendiente de corte. Finalmente, en el ejemplo analizado, el filtro limitador de banda también introduce una distorsión de fase. Haciendo un análisis por mínimos cuadrados, se obtiene una relación lineal:

$$\angle G(\omega) = - 158.6(f/f_c)^\circ$$

con una desviación máxima de 2.08° para  $f \leq 0.6 f_c$ .

II.6.2.- Muestreador - retenedor.-

Un circuito muestreador - retenedor puede modelarse por medio de un circuito RC ( véase el diagrama adjunto ) controlado por un interruptor, donde  $V_g(t)$  es la señal de entrada.

El interruptor S se cierra a intervalos regulares de T seg., durante un tiempo  $\tau_a$ . La constante de tiempo  $\tau_a = RC$  es la constante de adquisición del muestreador. En un sistema práctico se cumple:

$$\tau_a < \tau_g \ll T$$

Mientras el interruptor está cerrado, esto es, para  $nT < t < (nT + \tau_a)$ , el voltaje en el capacitor está dado por:

$$V_c(t) \Big|_{t < \tau_a} = \frac{1}{C} \int_{nT}^{nT+t} I(t) dt + V_c(nT) \quad \dots ( 2.118 )$$

donde  $V_c(nT)$  es el voltaje que existe en el capacitor al inicio del intervalo  $\tau_a$ .

Durante el intervalo  $(nT + \tau_a) < t < (n+1)T$  el voltaje en el capacitor es constante:

$$V_c(t) \Big|_{\tau_a < t < T} = V_c\{(nT + \tau_a)\} = V_c\{(n+1)T\} \quad \dots ( 2.119 )$$

La figura 2.6 ilustra lo anterior:

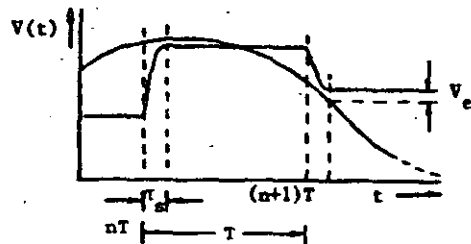
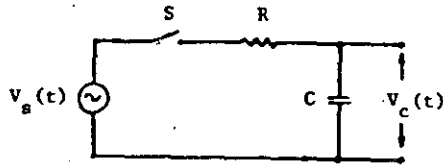


Figura 2.6

$V_e$  es el voltaje de error causado por la constante de tiempo de adquisición  $\tau_a$

Se supondrá en este análisis que la señal de entrada,  $V_g(t)$ , es una senoide:

$$V_g(t) = \text{sen}(\omega t)$$



Entonces, del circuito anterior y para  $nT < t < (nT + \tau_a)$  se obtiene:

$$i(t) = Ke^{-t/\tau_a} + \frac{\omega \tau_a}{R\sqrt{1 + \omega^2 \tau_a^2}} \text{sen}\{\omega t + \text{tg}^{-1}(1/\omega \tau_a)\} \quad \dots ( 2.120 )$$

donde  $i(t)$  es la corriente en el circuito,  $\tau_a = RC$  es la constante de adquisición y K una constante que depende de las condiciones iniciales.

Para  $t = nT$  se cumple:

$$i(t) = \{\text{sen}(\omega nT) - V_c(nT)\}/R = Ke^{-nT/\tau_a} + \frac{\omega \tau_a}{R\sqrt{1 + \omega^2 \tau_a^2}} \text{sen}(\omega nT + \text{tg}^{-1} \frac{1}{\omega \tau_a}) \quad \dots ( 2.121 )$$

De donde resulta para K:

$$K = -\frac{e^{-nT/\tau_a}}{R} \left\{ V_c(nT) + \frac{i}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_a^2}} \cos(\omega nT + \text{tg}^{-1} \frac{1}{\omega \tau_a}) \right\} \quad \dots ( 2.122 )$$

Substituyendo este valor en la ecuación ( 2.120 ) se obtiene, para  $i(t)$ :

$$i(t) = \frac{1}{R\sqrt{1 + \omega^2 \tau_a^2}} \left\{ \omega \tau_a \text{sen}(\omega t + \text{tg}^{-1} \frac{1}{\omega \tau_a}) - e^{-(t-nT)/\tau_a} \sqrt{1 + \omega^2 \tau_a^2} V_c(nT) + \cos(\omega nT + \text{tg}^{-1} \frac{1}{\omega \tau_a}) \right\} \quad \dots ( 2.123 )$$

Con este valor, se puede obtener el voltaje en el capacitor:

$$V_c\{(nT + \tau_a)\} = V_c(nT) + \frac{1}{C} \int_{nT}^{nT+\tau_a} i(t) dt \quad \dots ( 2.124 )$$

Efectuando la integración indicada, substituyendo límites y aplicando algunas transformaciones trigonométricas, resulta, para  $V_c\{(nT + \tau_a)\}$ :

$$V_c\{(nT + \tau_a)\} = e^{-\tau_a/\tau_a} \left[ V_c(nT) - \frac{\text{sen}(\omega nT - \theta)}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_a^2}} \right] + \frac{\text{sen}\{\omega(nT + \tau_a) - \theta\}}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_a^2}} \quad \dots ( 2.125 )$$

donde  $\theta = \text{tg}^{-1} \omega \tau_a$

Esta es una fórmula iterativa que permite obtener el valor de una muestra en términos de la muestra anterior. Haciendo  $nT = 0$ , se obtiene el valor de la primera muestra ( suponiendo que  $V_c = 0$  para  $t = 0$  ):

$$V_c(\tau_a) = e^{-\tau_a/\tau_a} \frac{\omega \tau_a}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_a^2}} + \frac{\text{sen}(\omega \tau_a - \theta)}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_a^2}} \quad \dots ( 2.126 )$$

Como se mencionó anteriormente,  $V_c\{(nT + \tau_a)\} = V_c\{(n+1)T\}$ . Esto es, la expresi-

sión ( 2.125 ) puede escribirse como una ecuación de diferencias finitas de la forma:

$$V_c \{ (n+1)T \} - e^{-\tau_s/\tau_a} V_c \{ nT \} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau_a^2}} \{ \sin\{\omega(n+1)T-\theta\} - e^{-\tau_s/\tau_a} \sin\{\omega nT-\theta\} \}$$

donde  $\alpha = \omega T - \tau_s$  ... ( 2.127 )

Desafortunadamente, la solución conduce a una expresión de difícil evaluación por lo complejo de la función de excitación en la expresión anterior.

Se propone aquí una aproximación basada en desprestigiar términos de segundo orden:

$$V_c \{ nT + \tau_s \} \approx \left\{ \frac{1 + e^{-\tau_s/\tau_a} (\cos \omega T - 1)}{1 + \omega^2 \tau_a^2} \right\}^{1/2} \sin\{\omega(nT + \tau_s) - \theta\}$$

... ( 2.128 )

La tabla adjunta corresponde a un sistema para el cual:

- $\tau_s = 0.1 T$
- $\tau_a = 0.02 T$
- $\tau_\omega = 5 T$

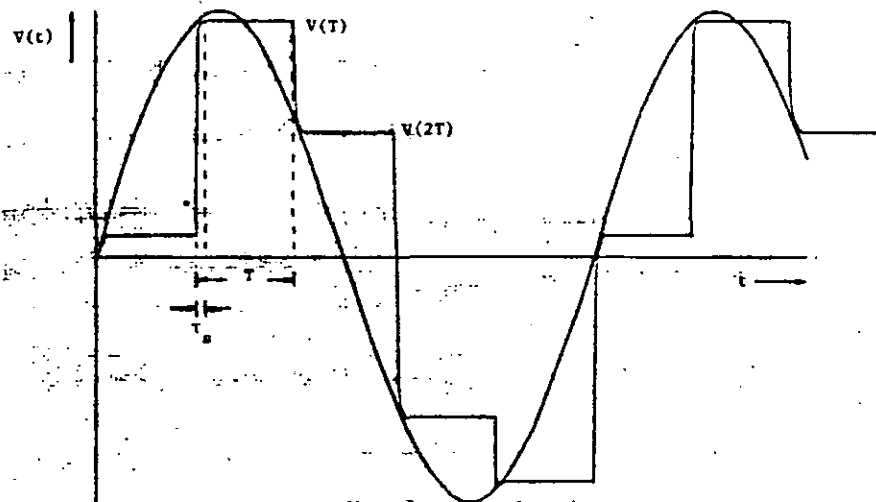
donde T es el período entre muestras,  $\tau_s$  la constante de tiempo de conducción del interruptor,  $\tau_a$  la constante de adquisición RC y  $\tau_\omega$  el período de la señal:

n	Solución de la ec. de dif.	Solución aproximada	Valor de $\sin\{\omega(nT + \tau_s)\}$
10	0.094353	0.100101	0.125333
11	0.971245	0.974684	-0.982287
12	0.305909	0.502286	0.481754
13	-0.658576	-0.664254	-0.684547
14	-0.912931	-0.912818	-0.904827
15	0.094353	0.100101	0.125333

La gráfica 2.7 adjunta ilustra este ejemplo.

Se consideraron valores para  $n \geq 10$  para no reflejar el transitorio inicial. Simulaciones efectuadas para otras relaciones entre T,  $\tau_s$ ,  $\tau_a$  y  $\omega$  indicaron que la correspondencia entre la solución de la ecuación de diferencias y la fórmula aproximada propuesta mejora conforme  $\tau_s$  y  $\tau_a$  disminuyen en relación a T.

En función a lo anterior, es posible visualizar al circuito muestreador-retenedor como un filtro pasabajos, cuya función de transferencia aproximada está dada por la ec. 2.128, esto es, el circuito introduce una atenua-



Gráfica 2.7

Círculo muestreador - retenedor  
 $\tau_s = 0.1 T$ ,  $\tau_a = 0.02 T$  y  $\tau_\omega = 5 T$

ción dada por:

$$|G(\omega)| \approx \left\{ \frac{1 + e^{-\tau_s/\tau_a} \cos(\omega T - 1)}{1 + \omega^2 \tau_a^2} \right\}^{1/2} \dots ( 2.129 )$$

e introduce un retardo dado por  $\theta = \text{tg}^{-1} \omega \tau_a$  ... ( 2.130 )

Para el ejemplo mencionado,  $|G(\omega)| \approx 0.995030$ .

Es claro que el circuito muestreador - retenedor analizado es un modelo de primer orden de un proceso que, idealmente, posee una constante de adquisición  $\tau_a = RC = 0$ . También, en un sistema ideal, el tiempo  $\tau_s$  es cero, esto es, el muestreo se efectúa en cero tiempo. Conviene aclarar que en este modelo no se incluyeron efectos inductivos, pérdidas de carga por fugas en el dieléctrico, transferencias de carga parasítica por conmutación etc.

Supóngase ahora que la señal es muestreada y retenida por un circuito muestreador - retenedor ideal que retiene el valor de la señal muestreada un tiempo  $\tau_h$ . El espectro de la señal muestreada, en estas condiciones, está dado por la expresión ( véase la ref. 5 ):

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = (\tau_h/T) \frac{\text{sen}(\omega\tau_h/2)}{\omega\tau_h/2} X(e^{j\omega}) \quad \dots ( 2.131 )$$

donde  $X(e^{j\omega})$  es el espectro de la señal muestreada por un tren de impulsos.

Considérese el caso de un sistema que no posea a un circuito muestreador retenedor, sino que alimente la señal de entrada directamente al convertidor analógico - digital. Supóngase que este convertidor efectúa la conversión en un tiempo  $\tau_s$ . El valor digital generado es, entonces, una muestra de la señal en el tiempo  $\tau_s$ , sin que se conozca con precisión el instante de muestreo. Si se considera que el instante de muestreo puede corresponder a cualquier instante de tiempo en el intervalo  $\tau_s$  con la misma probabilidad, entonces el espectro de la señal "muestreada" por el convertidor está dado por:

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(T+\tau_s)/2} \frac{\text{sen}(\omega T/2)}{\omega T/2} \frac{\text{sen}(\omega\tau_s/2)}{\omega\tau_s/2} \quad \dots ( 2.132 )$$

Para la derivación del resultado anterior, véase el apéndice I.

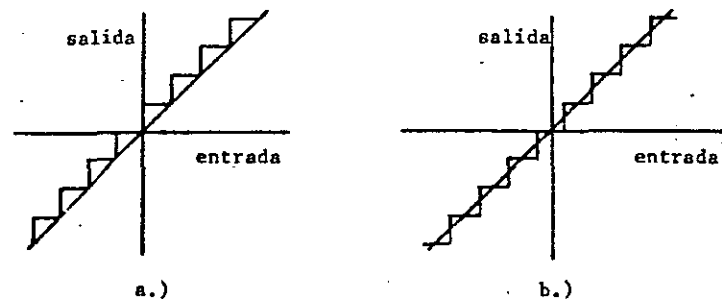
Si se compara la expresión anterior con la ecuación ( 2.131 ), se observa que la magnitud del espectro resultante de la incertidumbre en el instante de muestreo está afectada por un factor:

$$G(\omega) = \frac{\text{sen}(\omega\tau_s/2)}{\omega\tau_s/2} \quad \dots ( 2.133 )$$

Para los valores del ejemplo anterior (  $\tau_s = 0.1 T$ ,  $\tau_w = 5T$  ), este factor posee un valor de 0.999342. Si se compara lo anterior con la atenuación introducida por el circuito muestreador - retenedor antes analizado ( 0.99503 ) se llega a la conclusión de que, de hecho, el circuito muestreador - retenedor perjudica, por su presencia, la calidad total del sistema. Supóngase que  $\tau_s$  se aumente al triple de su valor original ( esto es, se utiliza un convertidor más lento ). Entonces, el factor dado por ( 2.133 ) resulta igual a 0.99409 y se comienza a notar la utilidad del circuito muestreador - retenedor. Las ecuaciones ( 2.129 ) y ( 2.133 ) proporcionan un criterio para decidir sobre la conveniencia de utilizar un circuito muestreador - retenedor para una aplicación dada, al permitir relacionar las constantes del muestreador con la velocidad de conversión requerida para un resultado equivalente.

### II.6.3.- Convertidor analógico - digital.-

Este dispositivo genera una representación discreta, en base a algún sistema numérico, de una señal continua. Su contribución al error total de un sistema de procesamiento de datos consiste en el llamado error de cuantificación, eso es, en la imposibilidad de representar con un número finito de cifras por intervalo dado una magnitud de resolución infinita en forma exacta. Si la resolución es uniforme sobre el rango de operación de valores de entrada del dispositivo, existen, en principio, dos formas de decidir a qué nivel corresponde un cierto valor de la señal de entrada:



En a.), el nivel de salida es el límite superior del intervalo para señales de entrada comprendidas en ese intervalo, mientras que en b.) la salida está referida a la mitad del intervalo. Es claro que b.) constituye una mejor opción en tanto que a.) contribuye con un error sistemático: La salida es siempre mayor a la entrada. En el análisis subsecuente, se considerará el caso b.) ya que, por otra parte, se puede lograr fácilmente esta forma de decisión en la práctica sumando a la referencia del comparador un voltaje igual a la mitad del intervalo de cuantificación.

Supóngase pues, el caso de un convertidor analógico - digital cuyo rango se extiende desde un límite inferior,  $x_L$ , a uno superior,  $x_H$ . Este rango se divide en  $2^n$  intervalos, donde  $n$  es el número de bits de la palabra de salida ( esto es, se considera que se utiliza el sistema binario ). Sea  $x_k$  el nivel de decisión correspondiente al inicio del  $k$ -ésimo intervalo. Se supone que la amplitud de la señal de entrada es una función aleatoria con una densidad de probabilidad uniforme sobre el rango del dispositivo ( véase la ref. 6 ).

Supóngase que la señal de entrada posee una amplitud comprendida entre el

intervalo  $(x_{k-1}, x_k)$ . Entonces, la representación a la salida del dispositivo para esa entrada es  $\hat{x}_k$ , y el error, en consecuencia, será:

$$\epsilon = \hat{x}_k - x \quad \dots (2.134)$$

Si la función de densidad de probabilidad de  $x$  es  $p(x)$ , la contribución del error  $\epsilon_k$  correspondiente a ese intervalo es:

$$\epsilon_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} (\hat{x}_k - x)^2 p(x) dx \quad \dots (2.135)$$

Y el error total debido a la contribución de todos los intervalos será:

$$\epsilon = \sum_k \epsilon_k = \sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} (\hat{x}_k - x)^2 p(x) dx \quad \dots (2.136)$$

Como se supuso una función de densidad uniforme, la ecuación anterior se reduce a lo siguiente:

$$\epsilon = \sum_k p_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} (\hat{x}_k - x)^2 dx = \frac{1}{3} \sum_k p_k \{ (\hat{x}_k - x_{k-1})^3 - (\hat{x}_k - x_k)^3 \} \quad \dots (2.137)$$

Es fácil ver que el error tendrá un valor mínimo si  $\hat{x}_k = (x_{k-1} + x_k)/2$  y los niveles de salida deberán corresponder al valor intermedio de los correspondientes niveles de decisión (véase la fig. 2.8). Substituyendo el valor de  $\hat{x}_k$ , se obtiene:

$$\epsilon = \frac{1}{12} \sum_k (x_k - x_{k-1})^3 p_k = \frac{1}{12} \sum_k p_k \Delta_k^3 \quad \dots (2.138)$$

donde  $\Delta_k$  es la longitud del  $k$ -ésimo intervalo.

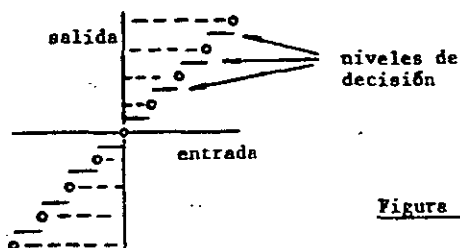


Figura 2.8

Ahora bien, el producto  $p_k \Delta_k$  es la probabilidad  $P_k$  de que la señal de entrada está en ese intervalo. Por la suposición de resolución (= cuantificación) uniforme sobre todo el rango y la restricción impuesta a la función de densidad de probabilidad, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\epsilon = \frac{\Delta^2}{12} \sum_k P_k \quad \dots (2.139)$$

Finalmente, si la amplitud de la señal de entrada está restringida a valores iguales o menores al rango del convertidor, la suma de probabilidades  $P_k$  es la unidad y

$$\epsilon = \frac{\Delta^2}{12} \quad \dots (2.140)$$

donde  $\epsilon$  es el error cuadrático medio.

Nótese que este error es inherente al hecho de cuantificar una señal continua, independientemente del tipo de conversión que se emplee. Una fuente potencial de error consiste en el tiempo finito para realizar una conversión y la correspondiente incertidumbre en el instante de ocurrencia del valor de la señal de entrada reflejado en la salida. Este error se puede controlar con un circuito muestreador - retenedor (véase el punto anterior). En caso de que no se emplee este esquema, un análisis de peor caso consiste en considerar una duración de muestreo igual al período de conversión (véase el apéndice I).

#### II.6.4.- Sistema lineal discreto, invariante en el tiempo.-

En la práctica, un sistema lineal discreto toma la forma de un procesador digital que realiza la solución, ya sea, de la suma de convolución ó de la transformada Z de una ecuación de diferencias finitas. Aunque la acción de filtrado puede ser realizada en el dominio de la frecuencia con el concurso de la pareja de transformadas discretas de Fourier, este tipo de procesamiento no es objeto de esta tesis y, en todo caso, los errores introducidos por el procesamiento son aplicables también a este tipo de realizaciones.

El procesamiento digital contribuye con dos tipos de errores inherentes al error global del filtro:

- 1.- Precisión finita en la realización de operaciones aritméticas debido a la longitud finita de registros y
- 2.- Precisión finita en la representación de las constantes involucradas (los valores de la respuesta a impulso).

El análisis de estos errores es un tema de investigación de considerable importancia en la actualidad, existiendo un considerable acervo de referencias ( véase las refs. 1,2 y 3 ).

Uno de los atractivos de los filtros FIR, realizados en forma no-recursiva, consiste en que los errores introducidos por precisión finita no son acumulativos y susceptibles de un análisis sencillo. Considérese el caso de la realización directa de la suma de convolución descrita en la página 37. En el sistema objeto de la presente tesis, se empleó aritmética de punto fijo en notación complemento a dos. El procesador efectúa las sumas con cero error, limitando la longitud de los productos por simple truncamiento a la longitud de los registros ( véase el capítulo III.3 ).

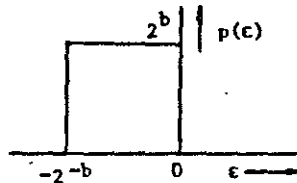
Si  $x$  es el valor del producto, y  $x_T$  el valor del producto truncado, entonces el error  $\epsilon$  cometido por el truncamiento cumple la desigualdad:

$$0 \geq x_T - x > -2^{-b} \quad \dots ( 2.141 )$$

donde  $b$  es el número del último bit no-truncado.

Esto es, el número truncado será siempre igual o menor al resultado exacto. Se harán dos suposiciones:

- 1.- La función de densidad de probabilidad del error,  $p(\epsilon)$ , toma la forma de una distribución uniforme sobre el intervalo  $-2^{-b} \leq \epsilon \leq 0$  :



- 2.- El error introducido por el truncamiento de un producto no está correlacionado con el error de otro producto. Nótese que esta suposición no es válida si la señal de entrada es una constante, un caso de escaso interés en el análisis de un filtro. Es decir, se supone que los errores son eventos estadísticamente independientes.

Para una distribución uniforme, la media de la distribución toma la forma:

$$\mu = \int_{-2^{-b}}^0 2^b \epsilon d\epsilon = \frac{2^{-b}}{2} = 2^{-(b+1)} \quad \dots ( 2.142 )$$

Y la varianza está dada por:

$$\sigma^2 = \int_{-2^{-b}}^0 2^b \epsilon^2 d\epsilon - \mu^2 = \frac{2^{-2b}}{12} = \frac{2^{-2(b+2)}}{3} \quad \dots ( 2.143 )$$

Para la realización antes descrita, cada multiplicación contribuye con un error  $\epsilon_i$  con las características mencionadas, que se supone no correlacionado con el error  $\epsilon_j$ ,  $j \neq i$ . Así, para  $N$  multiplicaciones se obtiene:

$$\epsilon(n) = \sum_{i=0}^{N-1} \epsilon_i(n) \quad \dots ( 2.144 )$$

y, por lo tanto:

$$\mu_{\epsilon(n)} = 2^{-(b+1)} N \quad \dots ( 2.145 )$$

$$\sigma_{\epsilon(n)}^2 = \frac{2^{-2(b+2)}}{3} N \quad \dots ( 2.146 )$$

Lo anterior constituye, por una parte, un error en la amplitud de la señal de salida del filtro,  $\{ 1 - \mu_{\epsilon(n)} \}$ , que puede ser compensado mediante un factor de escala, y la superposición de un ruido a la señal de salida cuya amplitud es una función de la varianza dada por la ec. ( 2.146 ) y que no puede ser compensado. ( véase también el capítulo III.3 ).

Los efectos de la cuantificación de coeficientes pueden analizarse a partir de la respuesta a la frecuencia del filtro:

$$H(e^{j\omega}) = h(0) + 2 \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} h(n) \cos(n\omega) \quad \dots ( 2.147 )$$

donde se consideró nuevamente la forma no-causal por razones de facilidad de manejo de las expresiones ( véase también la pág. 28 )

Se considerará que la precisión finita de los coeficientes se obtuvo por redondeo ( no por truncamiento ) del valor exacto a un paso de cuantificación  $q$ . Asimismo, es claro que el error así cometido para un coeficiente no está correlacionado con el de otro.

Sea  $h^*(n)$  la secuencia obtenida por redondeo de la secuencia  $h(n)$ :

$$h^*(n) = h(n) + \epsilon(n) , h^*(n) = h^*(-n) \quad \dots ( 2.148 )$$

donde  $\epsilon(n)$  constituye una variable aleatoria que se asume uniformemente distribuida sobre el intervalo  $( -q/2, q/2 )$ . Entonces, la respuesta a la frecuencia de  $h^*(n)$  toma la forma:

$$H^*(e^{j\omega}) = h(0) + \epsilon(0) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \{h(n) + \epsilon(n)\} \cos(\omega n) \quad \dots (2.149)$$

Esto es:

$$H^*(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) + E(e^{j\omega}), \text{ donde}$$

$$E(e^{j\omega}) = \epsilon(0) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \epsilon(n) \cos(\omega n) \quad \dots (2.150)$$

El valor medio cuadrático de  $E(e^{j\omega})$  está dado por:

$$\overline{E^2(e^{j\omega})} = \overline{\epsilon(0)^2} + 4 \sum_{n=1}^{N-1} \overline{\epsilon(n)^2} \cos^2(\omega n) \quad \dots (2.151)$$

Para una distribución uniforme,  $\epsilon(n)^2 = \frac{q^2}{12}$ , donde  $q$  es el paso de cuantificación y:

$$\overline{E^2(e^{j\omega})} = \frac{q^2}{12} \left\{ 1 + 4 \sum_{n=1}^{N-1} \cos^2(\omega n) \right\} \quad \dots (2.152)$$

Ahora bien,  $\left\{ 1 + 4 \sum_{n=1}^{N-1} \cos^2(\omega n) \right\} \leq \left( 1 + 4 \frac{N-1}{2} \right)$  para cualquier  $N$  y  $\omega$ .  
Entonces:

$$\overline{E^2(e^{j\omega})} \leq \frac{q^2}{12} (2N + 1) \quad \dots (2.153)$$

O sea:  $\sigma \leq \frac{q}{2} \sqrt{(2N + 1)/3} \quad \dots (2.154)$

donde  $\sigma$  es la desviación estándar de  $E(e^{j\omega})$ .

Nótese que  $E(e^{j\omega})$  es la respuesta a la frecuencia de un filtro de fase-lineal cuyos coeficientes son  $\epsilon(n)$ . Lo anterior puede interpretarse como la conexión en paralelo de dos filtros, de respuesta a la frecuencia  $H(e^{j\omega})$  y  $E(e^{j\omega})$ , que procesan la misma señal. Así, la cuantificación de los coeficientes contribuye con un ruido proporcional a tanto la señal como a la desviación estándar de  $E(e^{j\omega})$  al ruido total del sistema. En el capítulo III.3 se dará una interpretación cuantitativa de lo anterior.

### II.6.5 Filtro reconstructor.-

La función de este dispositivo es la de convertir a la secuencia de salida del sistema lineal discreto en una señal continua, función del tiempo. En la práctica, el procesador digital constituye un circuito retenedor para los efectos

del análisis de la señal de salida, ya que mantiene constante el valor de la salida durante el intervalo entre muestras. Es claro que la salida digital, transformada en una señal continua por medio de un convertidor digital - analógico, contiene componentes de alta frecuencia por la forma escalonada de la señal, que no corresponden al contenido de frecuencias de la secuencia de salida del procesador ideal. Así, el filtro reconstructor toma la forma de un convertidor digital - analógico seguido de un filtro pasabajos para eliminar esas frecuencias introducidas por el efecto retenedor del procesador digital.

Sea  $Y(e^{j\omega})$  el espectro de frecuencias de la secuencia de salida  $y(n)$  del procesador ideal. Por lo visto anteriormente,  $Y(\omega)$ , el espectro de la señal continua  $y(t)$ , puede obtenerse a partir de  $Y(e^{j\omega})$  con ayuda de un filtro pasabajos ideal. Sin embargo, el procesador digital entrega una señal cuyo espectro es:

$$Y_D(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad \dots (2.155)$$

donde  $H(e^{j\omega})$  es el espectro de un circuito retenedor ideal. Por la propiedad de simetría de la transformada de Fourier, el espectro de un circuito retenedor puede obtenerse a partir del espectro de un filtro pasabajos ideal:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2 \operatorname{sen}(\omega T/2)}{\omega} \quad \dots (2.156)$$

Así, el filtro reconstructivo deberá compensar la deformación del espectro dada por la expresión (2.156) de la señal de salida introduciendo la función inversa:

$$\frac{1}{H(e^{j\omega})} = \frac{\omega}{2 \operatorname{sen}(T/2)}$$

o, alternativamente, el sistema lineal discreto deberá incorporar esta función como parte del procesamiento de la señal, por medio de una modificación de la respuesta a impulso del mismo. Si se elige esta opción, el filtro reconstructor se limita a un convertidor digital - analógico que no introduce un error inherente, y a un filtro pasabajos cuya desviación de la idealidad depende de la realización física que se emplee. Aquí se utilizó un filtro Butterworth de 4. orden, con frecuencia de corte  $1/2T$ , que fué analizado anteriormente.-

De la discusión anterior se desprende que el error total del sistema depende de manera fundamental de las componentes analógicas ( filtro pasabajos, muestreador-retenedor y convertidor analógico - digital ), ya que el error introducido por el

procesamiento digital es más fácil de mantener dentro de límites preestablecidos. Finalmente, todo diseño deberá partir de las características de la señal a procesarse, particularmente de la relación señal a ruido que posea ésta, para adecuar la calidad del sistema a las posibilidades reales de procesamiento. En el capítulo siguiente se analizará este aspecto, así como sus consecuencias numéricas.

Bibliografía:

- 1.- Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer:  
" Digital Signal Processing ",  
Prentice - Hall, 1975
- 2.- Lawrence R. Rabiner, Bernard Gold:  
" Theory and Application of Digital Signal Processing ",  
John Wiley & Sons, 1975
- 3.- Abraham Peled, Bede Liu:  
" Digital Signal Processing ",  
John Wiley & Sons, 1976
- 4.- L. Shapiro:  
" Short Course in Digital Electronics ",  
RCA Technical Communications, 1976
- 5.- B.P. Lahti:  
" Communication Systems ",  
John Wiley & Sons, 1968
- 6.- Yannis P. Tsividis:  
" Nonuniform Pulse Code Modulation Encoding Using  
Integrated Circuit Techniques ",  
Tesis Doctoral, University of California at Berkeley, 1976



IV.- CALCULO DE COEFICIENTES

IV.1.- Caracterización de algunos métodos de cálculo de coeficientes.-

En el punto II.4.2 se dió la respuesta a la frecuencia de un filtro FIR ( véase la ec. 2.70 ):

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-j\omega n} \quad \dots (4.1)$$

Una razón fundamental para emplear al filtro FIR consiste en la propiedad de estos filtros de poder ser diseñados para un comportamiento de fase lineal, por lo que la discusión subsiguiente se limitará a este caso. La condición para que la respuesta a la frecuencia  $H(e^{j\omega})$  posea fase lineal es ( véase la ec. 2.80 ):

$$h(n) = h(N-1-n) \quad \dots (4.2)$$

Se impondrá la restricción adicional que N sea impar. Entonces, la ec. 4.1 puede escribirse:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(N-3)/2} h_n e^{-j\omega n} + h_{(N-1)/2} e^{-j\omega(N-1)/2} + \sum_{n=(N+1)/2}^{N-1} h_n e^{-j\omega n}$$

Haciendo el cambio de variable  $m=N-1-n$  en la segunda sumatoria de la ecuación anterior, resulta:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(N-3)/2} h_n e^{-j\omega n} + h_{(N-1)/2} e^{-j\omega(N-1)/2} + \sum_{m=0}^{(N-3)/2} h_m e^{-j\omega(N-1-m)}$$

Factorizando el término  $e^{-j\omega(N-1)/2}$  resulta:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \left\{ \sum_{n=0}^{(N-3)/2} h_n e^{-j\omega(n - \frac{N-1}{2})} + h_{(N-1)/2} + \sum_{m=0}^{(N-3)/2} h_{N-1-m} e^{j\omega(\frac{N-1}{2} - m)} \right\}$$

Como  $h(n) = h(N-1-n)$ , y  $m$  es una variable muda, la expresión anterior puede escribirse, combinando ambas sumatorias:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \left\{ h_{(N-1)/2} + 2 \sum_{n=0}^{(N-3)/2} h_n \cos\{\omega(n - \frac{N-1}{2})\} \right\} \dots (4.3)$$

En la expresión anterior, el término  $e^{-j\omega(N-1)/2}$  representa un desfaseamiento de la forma:

$$e^{j\theta} = e^{-j\omega\alpha}, \quad \alpha = (N-1)/2 \text{ - constante} \quad \dots (4.4)$$

Y, por lo tanto:

$$\pm |H(e^{j\omega})| = h_{(N-1)/2} + 2 \sum_{n=0}^{(N-3)/2} h_n \cos\{\omega(n - \frac{N-1}{2})\} \quad \dots (4.5)$$

La expresión ( 4.5 ) puede visualizarse como una aproximación por serie de Fourier a una función  $F(e^{j\omega})$ , donde  $h(n)$  toma el papel de los coeficientes de la serie. De la teoría de las series de Fourier ( véase la ref. 1 ) se desprenden las siguientes conclusiones:

- 1.- Si  $F(e^{j\omega})$  representa la respuesta a la frecuencia deseada, entonces la ecuación ( 4.5 ) corresponde a la mejor aproximación en el sentido de que minimiza el error cuadrático medio entre  $F(e^{j\omega})$  y  $H(e^{j\omega})$ .
- 2.- Si  $F(e^{j\omega})$  es una función seccionalmente continua,  $H(e^{j\omega})$  no converge sino de manera aproximada, presentando rizo ( ondulaciones ) cuya amplitud aumenta en la cercanía de la ó las discontinuidades ( fenómeno de Gibbs) aún si  $N \rightarrow \infty$ .

El problema de diseño de los coeficientes  $h(n)$  consiste, pues, en encontrar valores que aproximen  $H(e^{j\omega})$  a  $F(e^{j\omega})$  según algún criterio de optimización. Dependiendo del tipo de optimización, se han desarrollado un gran número de técnicas de diseño, algunas de las cuales se mencionan a continuación. Es claro que un criterio de optimización, en general, no es aplicable a cualquier tipo de filtro. Así, los criterios de optimización para un filtro que posea transiciones abruptas en la respuesta a la frecuencia ( pasabanda ), en general no serán aplicables a un diferenciador o transformador de Hilbert. Se analizarán algunos criterios aplicables a filtros pasabajos y pasabanda.

IV.1.1.- Técnicas de ventana.-

Esta técnica de diseño representa un compromiso entre el criterio de mínimo error cuadrático medio y máximo rizo permitido. Consiste, básicamente, en representar una respuesta a impulso  $\hat{h}(n)$  finita como el producto de una secuencia  $h(n)$  infinita, correspondiendo ésta a la respuesta a la frecuencia deseada, y una " ventana ",  $w(n)$ , de longitud finita. De la secuencia  $w(n)$  depende la calidad de la aproximación obtenida. Este método, que será analizado con más detalle en el siguiente punto, tiene como principal atractivo la sencillez de diseño que ofrece. Sin embargo, no satisface, en rigor, ningún criterio de optimización y el " máximo rizo permitido " no constituye un parámetro de diseño.

IV.1.2.- Técnica de muestreo de frecuencia.-

Un filtro FIR puede especificarse de manera única por medio de su respuesta a impulso o, equivalentemente, por los coeficientes de la transformada discreta de Fourier ( DFT ), dada por las ecuaciones ( véase la ref. 2 ):

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-j(2\pi/N)nk} \quad \dots (4.6)$$

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{j(2\pi/N)nk} \quad \dots (4.7)$$

Se puede demostrar ( véase la ref. 2 ) que la respuesta a la frecuencia  $H(e^{j\omega})$  de  $h(n)$  en términos de  $H(k)$  toma la forma:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega(N-1)/2}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k) e^{-j(\pi k/N)} \text{sen}(\omega N/2)}{\text{sen}((\omega/2) - \pi k/N)} \quad \dots (4.8)$$

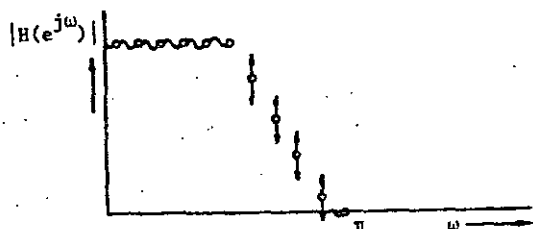
Los coeficientes  $H(k)$  constituyen muestras de la respuesta a la frecuencia  $H(e^{j\omega})$  tomadas a  $N$  intervalos sobre el rango  $0 \leq \omega \leq 2\pi$  ( recuérdese que la frecuencia de muestreo,  $f_s$ , corresponde a la unidad para  $T = 1$  y, por lo tanto,  $\omega_s = 2\pi$  . Véase el teorema de muestreo, pág. 13 ).

Entonces, la ec. ( 4.8 ) especifica la respuesta a la frecuencia del filtro como una combinación lineal de las muestras de la respuesta a la frecuencia,  $H(k)$ , con funciones de interpolación de la forma:

$$S(\omega, k) = e^{-j(\pi k/N)} \frac{\text{sen}(\omega N/2)}{\text{sen}((\omega/2) - \pi k/N)} \quad \dots (4.9)$$

Es claro que los coeficientes  $h(n)$  pueden obtenerse, a partir de las muestras de la respuesta a la frecuencia  $H(k)$ , por medio de la ecuación ( 4.7 ). Sin embargo, ello no representa ninguna ventaja sobre la obtención de  $h(n)$  a partir de la transformada inversa de Fourier de  $H(e^{j\omega})$  y truncando la longitud de la secuencia resultante a un valor arbitrario.

La técnica de muestreo de frecuencia permite establecer criterios de optimización, expresando éstos como función de algunas muestras  $H(k)$  de la respuesta a la frecuencia, mismas que para tal efecto deben no estar especificadas. Esto es, supóngase que se desea diseñar un filtro pasabajos con una pendiente de corte finita. También, supóngase que en el intervalo de frecuencias que delimitan la región pasabanda y rechazabanda ( o de atenuación ) se encuentran cuatro puntos de la respuesta a la frecuencia muestreada:



Si no se restringe la ubicación de las muestras en la región de transición, ésta puede optimizarse para que se cumplan restricciones tales como máximo rizo, mínima atenuación

etc. utilizando técnicas de programación lineal.

Estas técnicas resultan en filtros excelentes los cuales, sin embargo, no resultan óptimos en el sentido del problema de optimización de Chebyshev ( véase la ref. 2 ). Además, requieren de recursos de cómputo cuya realización resulta impráctica en el marco de un filtro programable.

#### IV.1.3.- Filtros óptimos ( Minimax )

Si se considera el problema de diseño de un filtro FIR como un problema de aproximación de Chebishev, se pueden encontrar condiciones para las cuales es posible probar que la solución es óptima, esto es, que el valor pico del error de aproximación sobre todo el intervalo de aproximación es mínimo. Existen algoritmos para resolver este tipo de problemas de aproximación, resultando filtros superiores a los obtenibles por los métodos anteriores para un conjunto de especificaciones dado. Como en el caso anterior, la implementación de estos algoritmos en el marco de un filtro programable resulta, por lo menos, impráctica. Por otra parte, el tema se encuentra desarrollado, incluyendo ejemplos de aplicación y un programa para el diseño de filtros Minimax, en la referencia 2 por lo que no se desarrollará aquí.

#### IV.2.- Diseño de Filtros FIR por técnicas de ventana.-

Como se mencionó anteriormente, la idea básica de esta técnica consiste en multiplicar una secuencia respuesta a impulso,  $h(n)$ , de un número infinito de términos, correspondiente a la respuesta a la frecuencia deseada, por otra secuencia,  $w(n)$ , finita:

$$\hat{h}(n) = h(n)w(n) \quad \dots (4.10)$$

donde  $w(n)$  se escoge de manera tal, que la secuencia resultante,  $\hat{h}(n)$ , converja " mejor ", en lo que a respuesta a la frecuencia se refiere, que la resultante por simple truncamiento. De hecho, el truncar una secuencia infinita,  $h(n)$ , es equivalente a multiplicarla por una ventana  $w(n)$  dada por la relación:

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \dots (4.11)$$

Se dará, a continuación, un breve resumen de la teoría de ventanas con objeto de explicar los factores que intervienen para " mejorar " la convergencia de la respuesta a la frecuencia de la serie truncada dada por la expresión ( 4.5 )

a una respuesta a la frecuencia deseada.

Considérese la aproximación,  $F_N(t)$ , a una función periódica  $f(t)$  con período  $2\pi$ , dada en términos de la serie trigonométrica de Fourier:

$$F_N(t) = \sum_{n=0}^N \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\} \quad \dots (4.12)$$

donde:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Es posible expresar a  $F_N(t) = a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$ ,  $n > 1$ , en términos de  $f(t)$  substituyendo los valores para  $a_n$  y  $b_n$ :

$$F_N(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \{ \cos(n\omega_0 \tau) \cos(n\omega_0 t) + \sin(n\omega_0 \tau) \sin(n\omega_0 t) \} d\tau$$

$$n > 1 \quad = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos\{n\omega_0(\tau - t)\} d\tau \quad \dots (4.13)$$

Por lo tanto, la aproximación  $F_N(t)$  resulta, substituyendo (4.13) en (4.12):

$$F_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \{ 1 + 2\cos\omega_0(\tau - t) + \dots + 2\cos N\omega_0(\tau - t) \} d\tau$$

Definiendo a  $1 + 2\cos\omega_0(\tau - t) + \dots + 2\cos N\omega_0(\tau - t) \equiv D_N\{\omega_0(\tau - t)\}$  resulta:

$$F_N(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} D_N\{\omega_0(\tau - t)\} f(\tau) d\tau \quad \dots (4.14)$$

Se puede verificar, haciendo el cambio de variable  $z = \omega_0(\tau - t)$  que

$$D_N(z) = \frac{\text{sen}\{(N + 1/2)z\}}{\text{sen}\{(1/2)z\}} \quad \dots (4.15)$$

donde  $D_N(z)$  recibe el nombre de "Kernel de Dirichlet" (véase la referencia 1).

Observando la ec. (4.14) se tiene que  $F_N(t)$  es de hecho la integral de una promediación de los valores de  $f(t)$ , "pesados" por un Kernel  $\frac{1}{2\pi} D_N(z)$ . Esto es,  $F_N(t)$  es la imagen que se tiene de la función  $f(t)$  vista a través de una "ventana" definida por la función de peso  $\frac{1}{2\pi} D_N(z)$ . Lo anterior conduce a una

definición formal de ventana:

Si  $f(t)$  y  $g(t)$  son funciones periódicas, con período  $2\pi$ , tales que

$$g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} G(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad \dots (4.16)$$

entonces  $G(t)$  es la ventana a través de la cual  $g(t)$  visualiza a  $f(t)$ .

De la expresión (4.16) se desprenden las propiedades que resultan deseables para una ventana:

- 1.-  $G(t)$  deberá ser una función par, para tratar de manera igual a valores de  $f(t)$  a ambos lados de un punto dado,  $t_0$ .
- 2.-  $G(t)$  deberá integrar a la unidad:

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(t) dt = 1$$

para no alterar a  $f(t)$  si ésta es idénticamente igual a una constante.

- 3.- Deberá estar concentrada lo más posible en deredor de  $t = 0$ , con objeto de que  $g(t)$ , para un valor dado de  $t$ , refleje lo mejor posible el comportamiento de  $f(t)$  en la vecindad de ese punto.

De la gráfica adjunta (curva superior de la gráfica 4.1) que corresponde al Kernel de Dirichlet para  $N = 40$ , se desprenden las medidas más usuales para calificar la calidad de una ventana:

a.- Concentración de la ventana:

El ancho del lóbulo principal del Kernel

b.- La relación entre las amplitudes del lóbulo principal y el segundo lóbulo más grande.

Para el Kernel de Dirichlet resultan los siguientes valores (suponiendo valores para  $N$  grandes):

Anchura del lóbulo principal:  $2\pi/(N + 1/2) = 4\pi/(2N + 1)$

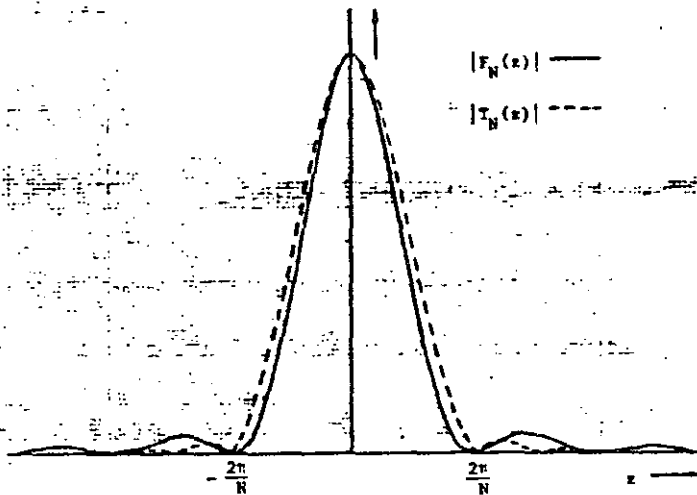
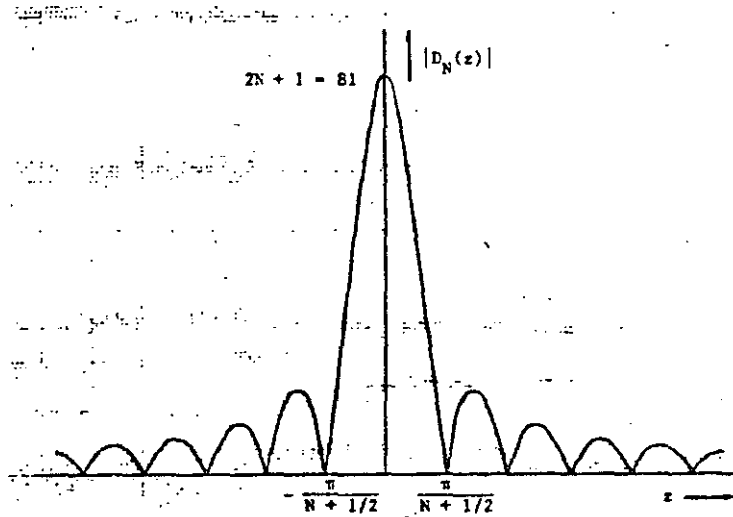
Amplitud del lóbulo principal:  $2N + 1$

Amplitud del lóbulo secundario mayor:  $\frac{2N + 1}{2/3\pi} \quad (z \approx \frac{3\pi}{2N + 1})$

Relación entre las amplitudes anteriores:  $2/3\pi \approx 0.21$

Claramente,  $g(t)$  dada por la ecuación (4.16) resulta una pobre aproximación a  $f(t)$ .

Considérese ahora la media aritmética,  $\overline{F}_N(t)$ , de los primeros  $N$  términos de la expansión en serie trigonométrica de Fourier de  $f(t)$ :



Gráfica 4.1

$$\overline{F}_N(t) = \frac{1}{N+1} \{F_0(t) + F_1(t) + \dots + F_N(t)\} \quad \dots (4.17)$$

entonces  $\overline{F}_N(t)$  es un polinomio armónico de grado N, y la secuencia  $\overline{F}_N(t)$  converge uniformemente a  $f(t)$  si  $f(t)$  es una función periódica continua ( véase la ref. 1 ).

En términos de los coeficientes de Fourier, la ec. ( 4.17 ) toma la forma:

$$\overline{F}_N(t) = \sum_{n=0}^N \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\} \quad \dots (4.18)$$

Y, substituyendo los valores de  $a_n$  y  $b_n$  dados por la ec. ( 4.12 ), se obtiene:

$$\overline{F}_N(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} F_{N+1}(\omega_0(\tau - t)) f(\tau) d\tau \quad \dots (4.19)$$

donde:

$$F_N(z) = \frac{1}{N+1} \left\{ \frac{\text{sen}\left(\frac{(N+1)z}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{z}{2}\right)} \right\}^2 \quad \dots (4.20)$$

$$y \quad z = \omega_0(\tau - t)$$

$F_N(z)$  dado en la expresión ( 4.20 ) constituye el Kernel de Fejér, en honor al descubridor de uno de los primeros métodos para aproximar, mediante coeficientes de Fourier, con un polinomio armónico una función continua.

La aproximación  $\overline{F}_N(t)$  de Fejér corresponde a observar a  $f(t)$  a través de la ventana  $\frac{1}{2\pi} F_N(\omega_0(\tau - t))$ . En la gráfica 4.1 ( curva inferior ) se muestra este Kernel normalizado a una amplitud máxima igual a  $2N+1$ ,  $N=40$ , para fines de comparación. La superioridad de esta ventana sobre el Kernel de Dirichlet es evidente. Sin embargo, nótese el ancho mayor del lóbulo principal. Las implicaciones relativas a la respuesta a la frecuencia se mencionarán más adelante.

La media de Tukey.-

Considérese la serie truncada de Fourier,  $F_N^*(t)$ , dada por la relación:

$$F_N^*(t) = F_N(t) - \frac{1}{2} \{a_N \cos(N\omega_0 t) + b_N \sin(N\omega_0 t)\} \quad \dots (4.21)$$

Se puede verificar, siguiendo el procedimiento antes empleado, que esta serie modificada está dada por la ecuación:

$$F_N^*(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} D_N^*(\omega_0(\tau - t)) f(\tau) d\tau \quad \dots (4.22)$$

donde  $D_N^*(z)$  es el Kernel de Dirichlet modificado dado por:

$$D_N^*(z) = D_N(z) - \cos Nz = \frac{\sin(Nz)}{\tan(\frac{1}{2}z)}$$

Entonces, una manera de formar la aproximación armónica a  $f(t)$  consiste en formar la media:

$$F_N^T = \frac{1}{2} F_N^*(t) + \frac{1}{4} F_N^*(t + \frac{\pi}{N}) + \frac{1}{4} F_N^*(t - \frac{\pi}{N}) \quad \dots (4.23)$$

Y  $F_N^*(t)$  está dado por:

$$F_N^*(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} D_N^*(\omega_0(\tau - t)) + \frac{1}{4} D_N^*(\omega_0(\tau - t) - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{4} D_N^*(\omega_0(\tau - t) + \frac{\pi}{4}) \right\} f(\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} T_N(\omega_0(\tau - t)) f(\tau) d\tau \quad \dots (4.24)$$

donde  $T_N(z) = \frac{1}{2} D_N^*(z) + \frac{1}{4} D_N^*(z + \frac{\pi}{N}) + \frac{1}{4} D_N^*(z - \frac{\pi}{N})$

y  $T_N$  es el Kernel de Tukey, graficado en forma normalizada en la gráfica 4.1 (curva inferior). Este Kernel debe su origen a las características insatisfactorias del Kernel de Dirichlet, particularmente en lo referente a la gran amplitud de sus lóbulos secundarios. Para reducir éstos, se combina  $D_N^*(z)$  con una versión desplazada de sí mismo, esto es, con  $D_N^*(z \pm \frac{\pi}{N})$ . Lo anterior conduce a una clase de Kernels posibles:

$$T_N^{(\alpha)}(z) = \alpha D_N^*(z) + \frac{1}{2} (1 - \alpha) (D_N^*(z + \frac{\pi}{N}) + D_N^*(z - \frac{\pi}{N})) \quad \dots (4.25)$$

donde  $0 < \alpha < 1$ .

Existen otros Kernels de importancia, tales como la media de Lanczos y la de Parzen, que escapan al propósito de esta tesis.

Considérese el problema de definir una ventana de coeficientes  $w(n)$  relacionada con alguno de los Kernels previamente mencionados. Para ello, se puede definir una aproximación armónica a la función periódica  $f(t)$ , de período  $2\pi$ , con ventana de coeficientes  $\{w_N(n), n = 0, 1, \dots, N\}$  dada por el polinomio:

$$F_N; w_N(t) = \sum_{n=0}^N w_N(n) \{a_n \cos(\omega_0 n t) + b_n \sin(\omega_0 n t)\} \quad \dots (4.26)$$

donde  $a_n$  y  $b_n$  son los coeficientes de Fourier de la expansión trigonométrica de  $f(t)$ .

Es fácil verificar que:

$$F_N; w_N = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} w_N(\omega_0(\tau - t)) f(\tau) d\tau \quad \dots (4.27)$$

Esto es,  $w_N(n)$  es la secuencia cuyo espectro de frecuencias corresponde a los Kernels previamente definidos (Nótese que, aunque se empleó en todo el desarrollo anterior la variable  $t$ , ésta puede poseer cualquier significado físico. Por otra parte, el problema consiste en aproximar una  $H(e^{j\omega})$  expresada en forma de serie de Fourier, esto es, una función de la frecuencia). Por lo tanto  $w_N(n)$  puede obtenerse a partir de la transformada inversa de Fourier:

$$w_N(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w_N(\omega_0(\tau - t)) e^{j\omega n} d\omega \quad \dots (4.28)$$

La tabla adjunta enlista las ventanas más frecuentemente empleadas así como sus características más sobresalientes.

Para obtener la respuesta a la frecuencia de un filtro FIR diseñado por técnica de ventana, considérese nuevamente la ec. (4.10):

$$\hat{h}(n) = h(n)w(n)$$

Por el teorema de la convolución,  $\hat{H}(e^{j\omega})$  estará dado por:

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} H(e^{j\tau}) w(e^{j(\omega-\tau)}) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} w(e^{j\tau}) H(e^{j(\omega-\tau)}) d\tau \quad \dots (4.29)$$

donde  $H(e^{j\omega})$  es la respuesta a la frecuencia deseada (para  $N \rightarrow \infty$ ) y  $w(e^{j\omega})$  la respuesta a la frecuencia de la ventana empleada. Un ejemplo de lo anterior se encuentra graficado en la fig. 2.2, en la cual aparece la respuesta a la frecuencia de un filtro pasabajos ideal, convolucionado con la ventana rectangular (Kernel de Dirichlet).

En el caso particular de filtros pasabajos y pasabanda, es claro que la pendiente de corte es función de las características de la ventana empleada, y, en particular, del ancho del lóbulo principal. En este sentido, una ventana constituye un compromiso entre una disminución en la pendiente de corte como precio para la obtención de un rizo menor, siendo este último función de, principalmente, la amplitud pico de los lóbulos secundarios de la ventana. La tabla adjunta incluye un factor aproximado por el cual habrá que multiplicar la pendiente de corte obtenida con la ventana rectangular (véase también la ec. 2.95), para obtener una estimación de la pendiente de corte obtenible con la ventana de que se trate.-

Ventana de coeficientes	$W(e^{j\omega})$	$W(0)$	ancho de lóbulo principal	amplitud pico de lóbulo secundario ( $W(0) = 1$ )	Pendiente de corte $D_N(z) \rightarrow 1$
Serie de Fourier truncada, $n = 0, 1, \dots, N$	$D_N(z) = \frac{\text{sen}((N+\frac{1}{2})z)}{\text{sen}(\frac{1}{2}z)}$	$2N + 1$	$\frac{2\pi}{N + 1/2}$	0.22	1
Serie de Fourier modificada, truncada, $n = 0, 1, \dots, N$	$D_N^*(z) = \frac{\text{sen}(Nz)}{\tan(\frac{1}{2}z)}$	$2N$	$2\pi/N$	0.20	1
Media de Fejér $W_N(n) = 1 - \frac{n}{N+1}$ $n = 0, 1, \dots, N$ (ventana Bartlett)	$F_N(z) = \frac{1}{N+1} \left( \frac{\text{sen}((N+1)\frac{z}{2})}{\text{sen}(\frac{z}{2})} \right)^2$	$N + 1$	$4\pi/N$	0.06	1/2
Media de Tukey $W_N(n) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{n\pi}{N}\right) \right]$ (ventana hanning)	$T_N(z) = \frac{1}{2} D_N^*(z) + \frac{1}{4} D_N^*\left(z + \frac{\pi}{N}\right) + \frac{1}{4} D_N^*\left(z - \frac{\pi}{N}\right)$	$N$	$4\pi/N$	0.03	1/2
Media de Tukey $\alpha = 0.54$ $W_N(n) = 0.54 + 0.46 \cos \frac{n\pi}{N}$ (ventana Hamming)	$T_N(z) = 0.54 D_N^*(z) + 0.23 \left[ D_N^*\left(z + \frac{\pi}{N}\right) + D_N^*\left(z - \frac{\pi}{N}\right) \right]$	$N$	$4\pi/N$	0.01	1/2

Tabla 4.1

Propiedades de algunas ventanas

Bibliografía:

1.- Emanuel Parzen:

" Notes on Fourier Analysis and Spectral Windows ",  
publicado en  
" Time Series Analysis Papers",  
Holden - Day, 1976

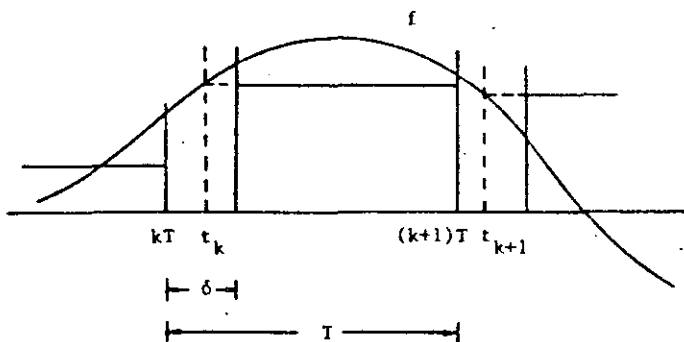
2.- Lawrence R. Rabiner, Bernard Gold:

" Theory and Application of Digital Signal Processing ",  
John Wiley & Sons, 1975

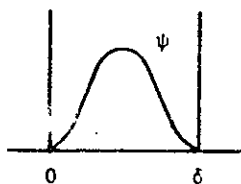
APÉNDICE I

Influencia de la incertidumbre en el instante de muestreo sobre el espectro de una señal muestreada \*.-

Considérese el caso en el cual una señal de banda limitada ( véase la pág. 13, ec. 2.33 ) es convertida en una señal digital sin el concurso de un circuito muestreador, esto es, supóngase que el convertidor analógico - digital efectúa una conversión cada T seg. y requiere un tiempo  $\delta$  para efectuar la conversión, donde  $\delta < T$  :



Entonces, el valor de la señal representado en forma digital corresponde al tiempo  $t = t_k$ , donde  $t_k$  es una variable aleatoria que posee una densidad probabilística  $\psi$  en  $\delta$  :



Se supondrá en lo subsecuente que todas las  $t_k$ 's son estadísticamente independientes.

El valor de la señal representado en forma digital y retenido después del tiempo  $t = kT + \delta$  es una variable aleatoria que puede ser expresada en la forma siguiente:

\* La solución a este problema se agradece al Dr. José Luis Farah, investigador del Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y Sistemas, U.N.A.M.

te:

$$\Psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT + t_k) c_k(t) \quad \dots (1)$$

donde:

$$f(kT + t_k) = f(t) \Big|_{t=kT + t_k} \quad \dots (2)$$

$$c_k(t) \equiv U\{t - (kT + \delta)\} - U\{t - ((k+1)T + \delta)\} \quad \dots (2)$$

El valor medio de  $\Psi(t)$  está dado por la relación:

$$\Psi(t) \equiv E\Psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^{\delta} f(kT + s) \psi(s) ds \right\} c_k(t) \quad \dots (3)$$

$$\text{Definamos } F(t) \equiv \int_0^{\delta} f(t + s) \psi(s) ds \quad \dots (4)$$

$$\text{Entonces: } \Psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(kT) c_k(t) \quad \dots (5)$$

Para obtener el espectro de frecuencias de  $\Psi(t)$ , considérese primero el espectro de  $F(t)$  :

$$\begin{aligned} \hat{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\delta} f(t + s) e^{-j\omega t} \psi(s) ds dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\delta} f(t + s) e^{-j\omega(t+s)} \psi(s) e^{j\omega s} ds dt \\ &= \int_0^{\delta} \psi(s) e^{j\omega s} \hat{f}(\omega) ds \\ &= \hat{f}(\omega) \hat{\psi}(\omega) \quad \dots (6) \end{aligned}$$

Denotemos  $F(t)$  por la "convolución"  $(f * \psi)(t)$ .

De la expresión (6) se desprende que, si  $\hat{f}(\omega)$  está limitada en banda,  $\hat{F}(\omega)$  también lo es independientemente del espectro de  $\psi(t)$ .

Considérese ahora el espectro de  $c_k(t)$  :

$$\begin{aligned} \hat{c}_k(\omega) &= \int_{kT+\delta}^{(k+1)T+\delta} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{-j} e^{-j\omega t} \Big|_{kT+\delta}^{(k+1)T+\delta} \\ &= 2 e^{-j\omega(kT+\delta)} e^{-j\omega T/2} \frac{\text{sen}(\omega T/2)}{\omega} \\ &= T e^{-j\omega(kT+\delta)} e^{-j\omega T/2} \text{sinc}(\omega T/2) \quad \dots (7) \end{aligned}$$

APENDICE II

Un programa para el cálculo de coeficientes  
empleando la ventana hanning.

Este programa calcula los valores de la respuesta a impulso,  $h(n)$ , para un filtro pasabanda dada por la ecuación ( 5.5 ):

$$h(n) = \frac{1}{2n\pi} \left\{ \text{sen}\left(2n\pi \frac{f_{o2}}{f_s}\right) - \text{sen}\left(2n\pi \frac{f_{o1}}{f_s}\right) \right\} \left\{ 1 + \cos\left(\frac{2n\pi}{N}\right) \right\}$$

donde:

- $f_{o2}$  - frecuencia de corte alta
- $f_{o1}$  - frecuencia de corte baja
- $f_s$  - frecuencia de muestreo y
- $N$  - longitud de la secuencia  
respuesta a impulso

Los valores calculados son depositados en un arreglo previamente especificado de la memoria de acuerdo con el siguiente formato:

$$h_n = A \times 2^7 + B$$

donde A y B son palabras de 8 bits.

El bit más significativo de A determina el signo de  $h_n$ , mientras que el bit más significativo de B siempre es cero ( esto es, B es una cantidad siempre positiva ). El programa calcula los coeficientes con una precisión de 15 bits y representa el resultado en notación complemento a dos en dos ubicaciones contiguas de la memoria, A precediendo a B.

El programa está escrito en BASIC 5 ( una versión de BASIC de Processor Technology, Inc. ) y consta de un programa principal y tres subrutinas, dos de ellas escritas en lenguaje ensamblador del microprocesador 8080.

El programa considera que  $N = 511$  y requiere de las siguientes entradas:

- $f_{o2}$
- $f_{o1}$
- $f_s$

Los resultados son depositados en un arreglo de 1024 palabras a partir de la ubicación 45056 ( B000 en hexadecimal ) de la memoria.

10 DIM H(255) ,Especifica un arreglo lineal de 256 valores  
15 INPUT " CUAL ES LA FRECUENCIA DE MUESTREO ?" FO

El espectro de  $\Psi(t)$  toma la forma:

$$\hat{\Psi}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(kT) e^{-j\omega(kT+\delta)} e^{-j\omega T/2} \text{sinc}(\omega T/2)$$

$$= T \text{sinc}(\omega T/2) e^{-j(\omega/2)(T+\delta)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(kT) e^{-j\omega kT} \quad \dots ( 8 )$$

Ahora bien, como  $F(t)$  es una función de banda limitada, la sumatoria en la ec. ( 8 ) representa la expansión en serie de Fourier de  $\hat{F}(\omega)$  ( véase también la pág. 10, ec. 2.25 ) y:

$$\hat{\Psi}(\omega) = \text{sinc}(\omega T/2) e^{-j(\omega/2)(T+\delta)} \hat{F}(\omega) \quad \dots ( 9 )$$

Y, por la ec. ( 6 ):

$$\hat{\Psi}(\omega) = \text{sinc}(\omega T/2) e^{-j(\omega/2)(T+\delta)} \hat{f}(\omega) \hat{\phi}(\omega) \quad \dots ( 10 )$$

La densidad probabilística  $\psi$  de  $t_k$  depende, desde luego, del tipo de conversión analógico - digital empleado ( rampa, aproximación sucesiva etc.). Sin embargo, un caso peor es claramente aquel en el cual la densidad probabilística es uniforme:

$$\psi = \frac{1}{\delta} \quad 0 \leq t \leq \delta \quad \dots ( 11 )$$

Es fácil verificar que el espectro de  $\psi$  está dado por:

$$\hat{\phi}(\omega) = \text{sinc}(\omega\delta/2) e^{j\omega\delta/2} \quad \dots ( 12 )$$

Substituyendo ( 12 ) en ( 10 ) se obtiene el espectro buscado:

$$\hat{\Psi}(\omega) = e^{-j(\omega/2)(T+\delta)} \text{sinc}(\omega T/2) \text{sinc}(\omega\delta/2) \hat{f}(\omega) \quad \dots ( 13 )$$

donde  $\hat{f}(\omega)$  es el espectro de la señal original.

Nótese que el efecto de la incertidumbre en el instante de muestreo se manifiesta en la magnitud del valor medio del espectro resultante como el factor:

$$\text{sinc}(\omega\delta/2) \quad \dots ( 14 )$$

La evaluación de este factor, para un tiempo de conversión y máxima frecuencia de la señal dados, permite establecer si se requiere, o no, de un circuito muestreador - retenedor para un error aún admisible.-



```

20 INPUT " LA FRECUENCIA DE CORTE PASALTOS ? " F2
25 INPUT " LA FRECUENCIA DE CORTE PASARAJOS ? " F1
30 B=CALL(45056)           , Inicializa el arreglo a nivel de lenguaje de
                           máquina ( subrutina " Inicialización ")

40 N1=512
45 N2=INT(N1-1)/2         , Forma entero inmediato menor de (N1-1)/2
50 P2=2*3.1415926         , Define valor de 2π
55 C1=F1/F0               , Define cociente  $f_{02}/f_0$ 
60 C2=F2/F0               , Define cociente  $f_{01}/f_0$ 
65 H(0)=2*(F1-F2)/F0     , Calcula valor de  $h_0$ 
70 FOR N=1 TO N2
75   P3=P2*N
80   H(N)=((SIN(C1*P3)-SIN(C2*P3))/P3*(1+COS(P3/N1)
                           , Calcula valores  $h_n$  para n=1 hasta n igual al va-
                           lor obtenido en el paso 45

85 NEXT N                 , Repite el lazo
90 FOR I=1 TO N2         , Escribe valores simétricos
95   X=H(N2-I+1)         de h(n)
100  GOSUB 200           , Llama subrutina "Formato" para la primera mitad
                           de los valores de h(n)

105 NEXT I
110 FOR I=0 TO N2
115   X=H(I)
120   GOSUB 200         , Llama subrutina "Formato" para la segunda mitad
                           de los valores de h(n)

125 NEXT I
130 X=0                 , Fija el valor H+1 ( 512 ) en cero
135 GOSUB 200           , Llama subrutina " Formato "
140 STOP

```

Subrutina "Formato"

```

200 Y=INT(X*32768)       , Multiplica los valores de  $h_n$  por  $2^{15}$  y trunca la
                           fracción
205 IF X<0 THEN Y=65536+INT(X*32768)
                           , Si el resultado es menor a cero, toma el comple-
                           mento
210 B=ARG(Y)             , Deposita resultado en el registro BC del 8080

```

```

215 B:CALL(45065)       , Llama subrutina "conversión"
220 RETURN
225 END

```

Subrutina "Inicialización";

```

B000 LXI H,0B400H       , Inicializa apuntador al área de datos ( B400 )
B003 SELD APUR
B006 RET

```

Subrutina "Conversión"

```

B007 APUR DW           , Esta subrutina expresa los valores  $h_n$  en el for-
                           mato antes definido y deposita los resultados en
                           el área de datos a partir de la ubicación B400.
B009 LEHL APUR
B00C MOV A,C
B00D RAL
B00E MOV C,A
B00F MOV A,B
B010 RAL
B011 MOV M,A
B012 INX H
B013 MOV A,C
B014 ANA A
B015 RAR
B016 MOV M,A
B017 INX H
B018 SELD APUR
B01B RET

```



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

TEORIA Y DISEÑO DE FILTROS ANALOGICOS Y DIGITALES

VI LABORATORIO (2a. PARTE)

PROGRAMAS DE DISEÑO DE FILTROS ACTIVOS

BORIS ESCALANTE RAMIREZ

AGOSTO , 1985.

### 6.3 PROGRAMAS DE DISEÑO

Un diagrama de flujo que podría emplearse para la programación en computadora de todas las rutinas de cálculo para diseñar un filtro activo se muestra en la figura 6.3.1.

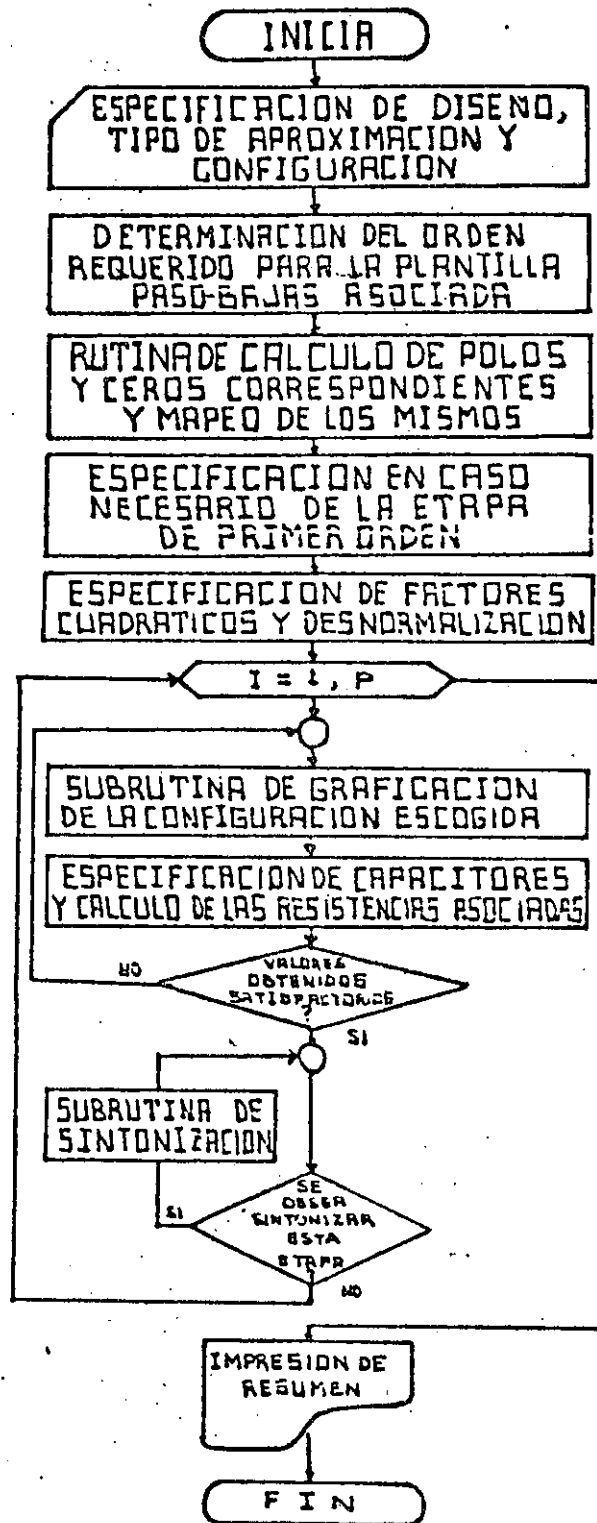


Fig. 6.3.1 Diagrama de flujo básico para diseñar filtros activos.

A continuación se muestran los listados de programas escritos en lenguaje BASIC, mediante los cuales se pueden diseñar filtros activos paso-bajas, paso-altas y paso-banda bajo las aproximaciones de Butterworth y Chebyshev. Se incluye también un programa que calcula los coeficientes de la función de transferencia factorizada de un filtro elíptico paso-bajas.

```

10 REM PROGRAMAS PARA EL CALCULO DE FILTROS PASA BAJAS DE TIPOS
15 REM BUTTERWORTH Y CHEBYSHEV
20 DIM A(50),B(50),R1(70),R2(50),R1(50),R(10),M(10),L(10),R3(50),C1(50),C2(50)
3 DIM C(50),FR(50),GM(50),YU(50),LG(82),RG(80),GY(80)
40 CLS
50 FOR IM=5 TO 65
60 PRINT@ (11,IM),CHR$(150)
70 IF IM>25 THEN 110
80 PRINT@ (2,IM),CHR$(150)
90 IF IM>20 THEN 110
100 PRINT@ (4,IM),CHR$(150)
110 NEXT IM
120 FOR IN=11 TO 0 STEP -1
130 PRINT@ (IN,5),CHR$(148)
140 IF IN<2 THEN 180
150 PRINT@ (IN,25),CHR$(148)
160 IF IN<9 THEN 180
170 PRINT@ (IN,40),CHR$(148)
180 NEXT IN
190 FOR IP=40 TO 62
200 PRINT@ (9,IP),CHR$(150)
210 NEXT IP
220 PRINT@ (11,25),CHR$(140)
230 PRINT@ (9,40),CHR$(140)
240 PRINT@ (11,5),CHR$(142)
250 PRINT@ (11,40),CHR$(140)
260 PRINT@ (2,5),CHR$(140)
270 PRINT@ (4,5),CHR$(140)
280 PRINT@ (2,25),CHR$(140)
290 PRINT@ (4,20),CHR$(129):PRINT@ (5,20),CHR$(131):PRINT@ (5,23),CHR$(150)
300 PRINT@ (5,24),CHR$(150):PRINT@ (5,29),CHR$(140):PRINT@ (9,21),CHR$(150)
310 PRINT@ (5,22),CHR$(150):PRINT@ (11,20),CHR$(132):PRINT@ (12,20),"Fa"
320 PRINT@ (0,2),"IG(jw)Idb"
330 PRINT@ (12,25),"Fp"
340 PRINT@ (12,40),"Fs"
350 PRINT@ (11,27),"F"
360 PRINT@ (2,3),"M"
370 PRINT@ (4,3),"n"
380 PRINT@ (9,30),"z"
390 FOR LT=3 TO 6
400 PRINT@ (LT,30),CHR$(149)
410 NEXT LT
420 PRINT@ (2,32),CHR$(136)
430 PRINT@ (9,32),C-14(138)
440 PRINT@ (5,31),"Pdb"
450 PRINT@ (1,19),"P L A N T I L L A D E D I S E N O"
460 PRINT@ (0,51),"_"
470 PRINT@ (12,21),"ESTE PROGRAMA ES UN AUXILIAR EN EL CALCULO DE FILTROS PACTIV
S"
480 PRINT"PASS BAJAS BUTTERWORTH Y CHEBYSHEV"
490 PRINT"SI VA A CALCULAR UN FILTRO BUTTERWORTH TECLEE"
500 PRINT"DESDO DECIBELES PARA EL RIZO."
510 PRINT"TECLEE CONFORME LA COMPUTADORA LO PIDA,LOS DATOS PERTINENTES."
520 PRINT@ (10,31)
530 INPUT "MAGNITUD DEL RIZO EN DECIBELES (Rdb)"IRW:GOSUB 5220
540 IF RW=3 THEN 5170
550 IF RW=0 THEN 5170
560 IF RW=0 THEN 430
570 FOR I=3 TO 24

```

```

590 PRINT$(5,12), " "
600 NEXT I2:PRINT$(11,20),CHR$(150):PRINT$(12,20), "
610 PRINT$(5,25),CHR$(140):PRINT$(4,5),CHR$(140):PRINT$(5,5),CHR$(140)
620 PRINT$(12,0), " "
  IZ INPUT" FRECUENCIA QUE LIMITA LA BANDA PASANTE (Fp) EN HERTZ";FO
640 GOTO 600
650 PRINT$(2,11),CHR$(136):PRINT$(4,11),CHR$(138):PRINT$(3,10),"Rdb=";RW
660 PRINT$(12,0), " "
670 INPUT" FRECUENCIA QUE LIMITA LA BANDA DE OSCILACION EN HERTZ (Fa)";FO
680 IF RW=0 THEN 710
690 PRINT$(3,10),"Fa=";FO
700 GOTO 710
710 PRINT$(3,40),"Fp=";FO
720 GOSUB 5200
730 INPUT "          FRECUENCIA QUE INICIA LA BANDA DE SUPRESION (Fs) EN HERTZ";F
740 IF F<FO THEN 5150
750 PRINT$(5,40),"Fs=";F
760 GOSUB 5200
770 INPUT"          PERDIDA EN DECIBELES EN LA BANDA DE TRANSICION (Pg)";G
780 PRINT$(7,40),"Pdb=";G
790 G=10^(-(G/20))
800 EP=SQR(10^(RW/12)-1)
810 S=F/FO
820 IF RW=2 THEN 1010
830 C(0)=1
840 C(1)=S
850 GA=1/SQR(1+(EP*S)^2)
860 IF GA>G THEN 890
  IZ N=1
880 GOTO 960
890 FOR J1=2 TO 50
900 C(J1)=2*S*C(J1-1)-C(J1-2)
910 GA=1/SQR(1+(EP*C(J1))^2)
920 IF GA>G THEN 940
930 GOTO 950
940 NEXT J1
950 N=J1
960 AC=LOG(SQR((1/EP)^2-1)+1/EP)/N
970 AD=(EXP(AC)+EXP(-AC))/2
980 F1=AD*FO
990 PRINT$(4,40),"Fp=";F1
1000 GOTO 1080
1010 Q=(1/Q)^2-1
1020 NI=.5+(LOG(Q)/LOG(S))
1030 IF NI<.001 THEN 1050
1040 IF NI1-NI=0 THEN 1070
1050 N=NI\1+1
1060 GOTO 1030
1070 N=NI
1080 GOSUB 5200
1090 INPUT"          TIPO DE CONFIGURACION A EMPLEARSE EN LA IMPLEMENTACION (RM O FVCM)";T
  IZ IF RW=0 THEN 1130
  IZ INPUT" SI NO LE SATISFACE LA FRECUENCIA DE CORTE (Fp) PULSE 1, EN OTRO CASO PULSE CUALQUIER OTRO NUMERO";RT
1100 IF RT=1 THEN 40
1110 PRINT"EL ORDEN ADECUADO PARA EL FILTRO ES";N
1120 IF N=1 THEN 1170
1130 PRINT

```

```

1160 GOTO 1700
1170 INPUT "PARA OBTENER UN BOSQUEJO DE LA MAGNITUD DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA DEL FILTRO TECLEE (1), EN OTRO CASO TECLEE CUALQUIER OTRO NUMERO";BA
1180 IF BA=1 THEN 1670
1190 IF BA=2 THEN 1490
1200 GOSUB 1210
1210 FOR JL=1 TO 79
1220 WT=JL/32:G(1)=WT
1230 FOR JK=2 TO N
1240 G(JK)=2+WT*G(JK-1)-G(JK-2)
1250 NEXT JK
1260 GY=10/SQR(1+(EP*G(N))^2)
1270 LG(JL)=10-GY
1280 GY(JL)=GY*GY^1
1290 RG(JL)=(LG(JL)+1)\1
1300 NEXT JL
1310 FOR JF=1 TO 79
1320 IF RG(JF)=10 THEN ZA=10 :GOTO 1360
1330 FOR JM=12 TO RG(JF) STEP -1
1340 PRINT$(JM,JF),CHR$(148)
1350 NEXT JM:ZA=RG(JF)-1
1360 IF GY(JF)<=.1 THEN 1470
1370 IF GY(JF)<=.2 THEN 1420
1380 IF GY(JF)<=.4 THEN 1430
1390 IF GY(JF)<=.6 THEN 1440
1400 IF GY(JF)<=.8 THEN 1450
1410 IF GY(JF)<=1 THEN 1460
1420 PRINT$(ZA,JF),CHR$(144):GOTO 1470
1430 PRINT$(ZA,JF),CHR$(145):GOTO 1470
1440 PRINT$(ZA,JF),CHR$(146):GOTO 1470
1450 PRINT$(ZA,JF),CHR$(147):GOTO 1470
1460 PRINT$(ZA,JF),CHR$(148):GOTO 1470
1470 NEXT JF
1480 GOTO 1370
1490 CLG:FOR IL=1 TO 79
1500 WT=IL/32
1510 GY=10/SQR(1+(WT)^(2*N))
1520 LG(IL)=10-GY
1530 GY(IL)=GY*GY^1
1540 RG(IL)=(LG(IL)+1)\1
1550 NEXT IL
1560 GOTO 1310
1570 PRINT$(11,38),CHR$(159)
1580 PRINT$(12,38),"Fs"
1590 WT=(2+EP)\1:PRINT$(12,NQ),"Fs" :PRINT$(11,40),CHR$(157)
1600 PRINT$(14,12),"BOSQUEJO DE LA MAGNITUD DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA"
1610 PRINT$(4,11),"Fs=";F0
1620 PRINT$(6,11),"Fs=";F
1630 IF BA=2 THEN 1690
1640 PRINT$(4,30),"RES=";RW
1650 PRINT$(15,2)," "
1660 INPUT "PARA CONTINUAR TECLEE 2";HN
1670 GOSUB 1210
1680 IF HN=2 THEN 1710
1690 GOTO 1710
1700 GOTO 1710
1710 GOTO 1710
1720 EP=(N/10*(RW/10)-1)
1730 IF EP=0 THEN 1770
1740 LG(1)=10/SQR(1+(1-EP)^2+(1/EP)^2):G(N)=10/SQR(1+(1-EP)^2+(1/EP)^2*(1/N))

```

```

1750 CHV=SQR(1+(SHV)^2)
1760 GOTO 1790
1770 SHV=1
1780 CHV=1
1790 TET=2*ATN(1)
1800 FOR K=1 TO N
1810 R=-SIN((2*K-1)*TET/N)*SHV
1820 I=COS((2*K-1)*TET/N)*CHV
1830 IF K=(N+1)/2 THEN 1930
1840 A=-I+R
1850 A(K)=A*4*TET*FO
1860 B=R^2+I^2
1870 B(K)=B*(4*TET*FO)^2
1880 HI=B(K)-A(K)^2/2
1890 YU(K)=A(K)/(2*SQR(B(K))):IF PI<0 THEN 1920
1900 GM(K)=B.686*LOG(1/(2+YU(K)+SQR(1-YU(K)^2)))
1910 FR(K)=.1391549*SQR(HI)
1920 GOTO 1940
1930 RE=R+4*TET*FO
1940 NEXT K
1950 IF RE=0 THEN 2030
1960 PRINT"EXISTE UN POLO REAL QUE VALE",RE
1970 PRINT"EL FACTOR DE PRIMER ORDEN CORRESPONDIENTE A ESTE POLO SE REALIZA
1980 PRINT"CON UN FILTRO PASO BAJAS DE PRIMER ORDEN, CUYA FRECUENCIA DE CORTE
1990 PRINT"EN RADIANES SOBRE SEGUNDO ES EL VALOR ABSOLUTO DEL POLO REAL."
2000 IF N=1 THEN 2020
2010 END
2020 PRINT"SE RECOMIENDA COLOCAR LA ETAPA DE PRIMER ORDEN AL FINAL DEL FILTRO"
2030 PRINT" A CONTINUACION SE PROCEDE AL CALCULO DE LOS CIRCUITOS QUE
2040 PRINT"REALIZAN LOS FACTORES CON POLOS COMPLEJOS. LA GANANCIA MAXIMA
2050 PRINT"EN LA BANDA PASANTE SERA EL PRODUCTO DE LAS GANANCIAS (KI)
2060 PRINT"EMPLEADAS EN LA IMPLEMENTACION DE CADA FACTOR CUADRATICO."
2070 PRINT"(LOS VALORES DE LOS CAPACITORES DEBERAN SER DADOS EN MICROFARADES
2080 PRINT"(LOS VALORES DE LAS RESISTENCIAS ESTARAN EN OHMS)"
2090 PRINT" PARA SEGUIR ADELANTE TECLEE CUALQUIER NUMERO"
2100 INPUT CV
2110 FOR L=1 TO P
2120 IF T="FVCV" THEN 2900
2130 GOTO 2170
2140 PRINT(19,5), "TECLEE LOS VALORES DE C1 Y KI DE ESTA ETAPA"
2150 INPUT C1, KI
2160 C1=C1/1000000
2170 GOTO 2250
2180 PRINT(19,5), "TECLEE LOS VALORES DE C1, C2 Y KI CORRESPONDIENTES A"
2190 PRINT"ESTA ETAPA"
2200 INPUT C1, C2, KI
2210 C1=C1/1000000
2220 C2=C2/1000000
2230 C1(L)=C1+1000000
2240 C2(L)=C2+1000000
2250 AL=A(L)/SQR(B(L))
2260 IF T="FVCV" THEN 2340
2270 C2(L)=4*(1+KI)*C1/(AL)^2
2280 R2(L)=AL/(2+SQR(B(L))*C1)
2290 R1(L)=R2(L)/KI
2300 R3(L)=R2(L)/(1+KI)
2310 C1(L)=C1+1000000
2320 C2(L)=C2+1000000
2330 GOTO 2150

```



```

2350 D=AL^2-4*(BE^2+1-KI)
2360 IF D<0 THEN 2390
2370 Z=(AL+SQR(D))/(2*BE)
2380 RA=Z^2
2390 R1(L)=1/SQR(B(L)*RA+C1+C2)
2400 R2(L)=R1(L)*RA
2410 PRINT(13,0),"
2420 PRINT(14,0),"
2430 PRINT(15,0),"
2440 PRINT(16,0),"
2450 KI(L)=KI
2460 IF T4="RM" THEN 5070
2470 PRINT(12,0),"KI=";KI(L)
2480 PRINT(13,0),"R1=";R1(L)
2490 PRINT(14,0),"R2=";R2(L)
2500 PRINT(15,0),"C1=";C1(L)
2510 PRINT(16,0),"C2=";C2(L)
2520 PRINT(18,0),"
2530 PRINT(17,0),"
2540 PRINT(19,0),"SI NO LE SATISFACEN LOS VALORES TECLEE UNO
2550 PRINT"EN OTRO CASO TECLEE CERO"
2560 INPUT PR
2570 IF PR=0 THEN 2630
2580 GOTO 2570
2590 PRINT"TRATE OTRO JUEGO DE VALORES PARA C1,C2 Y KI"
2600 PRINT"TECLÉE CUALQUIER NUMERO PARA CONTINUAR"
2610 INPUT H
2620 GOTO 2120
2630 NEXT L
2640 CLS
2650 PRINT(1,30),"R E S U M E N"
2660 FOR J1=1 TO P
2670 PRINT"
ETAPA";J1
2680 PRINT"C1=";C1(J1)
2690 PRINT"C2=";C2(J1)
2700 PRINT"R1=";R1(J1)
2710 PRINT"R2=";R2(J1)
2720 IF R3(J1)=0 THEN 2740
2730 PRINT"R3=";R3(J1)
2740 PRINT"KI=";KI(J1):IF FR(J1)=0 THEN 2770
2750 PRINT"GA=";GA(J1)
2760 PRINT"IG(GA)IG=0";GM(J1)
2770 PRINT"D=";YO(J1)
2780 NEXT J1
2790 GA=1
2800 FOR NB=1 TO P
2810 SA=GA/NB
2820 NEXT NB
2830 PRINT"NT=";GA
2840 IF RE=0 THEN 2860
2850 PRINT"EXISTE UN POLO REAL QUE VALE ";RE
2860 END
2870 IF RE=0 THEN 2900
2880 R(1)=7:R(2)=7:R(3)=2:R(4)=7:R(5)=2:R(9)=4:R(10)=1
2890 GOTO 2910
2900 R(1)=7:R(2)=7:R(3)=3:R(4)=5:R(5)=4
2910 END
2920 M(1)=10
2930 M(2)=10

```

```

2940 M(4)=3
2950 M(5)=10
2960 M(6)=3
2970 M(7)=3
2980 L(1)=3
2990 L(2)=24
3000 L(3)=55
3010 L(4)=37
3020 L(5)=45
3030 L(6)=18
3040 L(7)=72
3050 M(1)=10
3060 M(8)=16
3070 L(8)=54
3080 L(9)=18
3090 M(9)=10
3100 IT=10
3110 CL3
3120 GOTO 3230
3130 M1=1
3140 FOR K=M1 TO 9
3150 IF R(K)=7 THEN 3450
3160 IF R(K)=6 THEN 3580
3170 IF R(K)=5 THEN 3680
3180 IF R(K)=4 THEN 3850
3190 IF R(K)=3 THEN 3980
3200 IF R(K)=2 THEN 4460
3210 NEXT K
3220 GOTO 4140
3230 FOR J=1 TO 72
3240 PRINT@ (10, J), CHR$(150)
3250 IF JK18 THEN 3330
3260 PRINT@ (3, J), CHR$(150)
3270 IF R(10)=0 THEN 3330
3280 IF JK45 THEN 3330
3290 PRINT@ (16, J), CHR$(150)
3300 NEXT J
3310 IF R(10)=0 THEN 3330
3320 IT=16
3330 FOR I=4 TO IT
3340 PRINT@ (I, 18), CHR$(150)
3350 PRINT@ (I, 72), CHR$(150)
3360 IF I=10 THEN 3380
3370 PRINT@ (I+8, 45), CHR$(150)
3380 NEXT I
3390 IF R(10)=0 THEN 3400
3400 PRINT@ (16, 45), CHR$(150)
3410 PRINT@ (12, 72), CHR$(150)
3420 PRINT@ (3, 18), CHR$(150)
3430 PRINT@ (3, 72), CHR$(150)
3440 GOTO 3130
3450 M=M(K)
3460 L=L(K)
3470 PRINT@ (M, L+1), CHR$(133)
3480 FOR J=L+2 TO L+11
3490 PRINT@ (M, J), CHR$(150)
3500 NEXT J
3510 PRINT@ (M, L+1), CHR$(133)
3520 FOR J=L TO L+1
3530 PRINT@ (M, J), CHR$(150)

```

```

3540 PRINT@ (M, J+12), CHR$(150)
3550 NEXT J
3560 M1=M+1
3570 GOTO 3140
3580 M=M(K)
3590 L=L(K)
3600 FOR P=M+1 TO M+5
3610 PRINT@ (P, L), CHR$(150)
3620 PRINT@ (P, L+1), CHR$(150)
3630 PRINT@ (P, L-1), CHR$(150)
3640 NEXT P
3650 PRINT@ (M, L), CHR$(150)
3660 PRINT@ (M+6, L), CHR$(150)
3670 M1=M+1
3680 GOTO 3140
3690 M=M(K)
3700 L=L(K)
3710 FOR J=L TO L+4
3720 PRINT@ (M, J), CHR$(150)
3730 PRINT@ (M, J+9), CHR$(150)
3740 NEXT J
3750 PRINT@ (M, L+5), CHR$(133)
3760 PRINT@ (M, L+8), CHR$(135)
3770 PRINT@ (M+1, L+5), CHR$(148)
3780 PRINT@ (M+1, L+8), CHR$(148)
3790 PRINT@ (M-1, L+9), CHR$(148)
3800 PRINT@ (M-1, L+5), CHR$(140)
3810 PRINT@ (M, L+6), " "
3820 PRINT@ (M, L+7), " "
3830 M1=M+1
3840 GOTO 3140
3850 M=M(K)
3860 L=L(K)
3870 FOR I=M TO M+6
3880 PRINT@ (I, L), CHR$(150)
3890 NEXT I
3900 PRINT@ (M+3, L), " "
3910 FOR J=L-3 TO L+3
3920 PRINT@ (M+3, J), CHR$(150)
3930 PRINT@ (M+2, J), CHR$(150)
3940 NEXT J
3950 PRINT@ (M+2, L), CHR$(150)
3960 M1=M+1
3970 GOTO 3140
3980 M=M(K)
3990 L=L(K)
4000 N=2
4010 FOR J=L TO L+5 STEP 2
4020 FOR I=M-N TO M+N
4030 PRINT@ (I, J), CHR$(150)
4040 PRINT@ (I, J+1), CHR$(150)
4050 PRINT@ (M-N, J+1), CHR$(129)
4060 PRINT@ (M+N, J+1), CHR$(130)
4070 NEXT I
4080 N=N-1
4090 NEXT J
4100 PRINT@ (M, L+1), "KI"
4110 PRINT@ (M, L+5), CHR$(150)
4120 M1=M+1
4130 GOTO 3140

```

```

4140 M=16
4150 IF R(10)=0 THEN 4180
4160 L=10
4170 GOTO 4190
4180 L=45
4190 FOR J=L-3 TO L+3
4200 PRINT@ (M,J), CHR$(152)
4210 NEXT J
4220 FOR J=L-2 TO L+2
4230 PRINT@ (M+1,J), CHR$(150)
4240 NEXT J
4250 FOR J=L+1 TO L+1
4260 PRINT@ (M+1,J), CHR$(152)
4270 NEXT J
4280 PRINT@ (M+2,L), CHR$(150)
4290 PRINT@ (M+1,L), CHR$(150)
4300 PRINT@ (M,L), CHR$(158)
4310 PRINT@ (10,73), CHR$(150)
4320 PRINT@ (10,74), "o"
4330 PRINT@ (10,1), "o"
4340 IF T#="RM" THEN 4910
4350 L=T
4360 PRINT@ (13,51), "C1"
4370 PRINT@ (6,43), "C2"
4380 PRINT@ (11,9), "R1"
4390 PRINT@ (11,29), "R2"
4400 PRINT@ (0,35), "ETAPA"; L; "de"; P
4410 PRINT@ (14,3), "A="; A(L)
4420 PRINT@ (16,3), "B="; B(L)
4430 PRINT@ (17,3), "Fr="; FR(L)
4440 PRINT@ (13,3), "IG(Fr)Idb=", GM(L)
4450 GOTO 2180
4460 M=M(K)
4470 L=L(K)
4480 K1=K
4490 L=L+4
4500 K=2
4510 FOR J=L TO L+5 STEP 2
4520 FOR I=M-K TO M+K
4530 PRINT@ (I,J), CHR$(150)
4540 PRINT@ (I,J+1), CHR$(150)
4550 PRINT@ (M-K,J+1), CHR$(129)
4560 PRINT@ (M+K,J-1), CHR$(132)
4570 NEXT I
4580 K=K-1
4590 NEXT J
4600 PRINT@ (M-2,L-2), "--"
4610 PRINT@ (M,L+5), CHR$(150)
4620 PRINT@ (M+2,L-2), "+ "
4630 FOR LI=L-4 TO L-1
4640 PRINT@ (M-1,LI), CHR$(150)
4650 PRINT@ (M+1,LI), CHR$(150)
4660 NEXT LI
4670 PRINT@ (M,L+1), "AO"
4680 PRINT@ (M-1,L-4), CHR$(129)
4690 PRINT@ (M,L-4), CHR$(134)
4700 PRINT@ (M,L-3), " "
4710 PRINT@ (M,L-2), " "
4720 PRINT@ (M,L-1), " "
4730 PRINT@ (M+1,L-4), CHR$(150)

```

```
4740 PRINT@ (M+2,L-4),CHR$(158)
4750 M=M+3
4760 L=L-4
4770 FOR J=L-3 TO L+3
```

```
4780 PRINT@ (M,J),CHR$(152)
4790 NEXT J
4800 FOR J=L-2 TO L+2
4810 PRINT@ (M+1,J),CHR$(150)
4820 NEXT J
4830 FOR J=L-1 TO L+1
4840 PRINT@ (M+1,J),CHR$(152)
4850 NEXT J
4860 PRINT@ (M+2,L),CHR$(150)
4870 PRINT@ (M+1,L),CHR$(150)
4880 PRINT@ (M,L),CHR$(158)
4890 M1=M+1
4900 GOTO 3140
```

```
4910 L=T
```

```
4920 PRINT@ (0,30),"ETAPA";L;" de ";P
```

```
4930 PRINT@ (3,3),"A"
```

```
4940 PRINT@ (4,1),A(L)
```

```
4950 PRINT@ (5,3),"B"
```

```
4960 PRINT@ (6,1),B(L)
```

```
4970 PRINT@ (7,4),"Fr"
```

```
4980 PRINT@ (8,1),FR(L)
```

```
4990 PRINT@ (12,1),"IG(Fr)Idb"
```

```
5000 PRINT@ (13,1),GM(L)
```

```
5010 PRINT@ (11,9),"R1"
```

```
5020 PRINT@ (11,30),"R3"
```

```
5030 PRINT@ (4,43),"R2"
```

```
5040 PRINT@ (13,33),"C2"
```

```
5050 PRINT@ (18,60),"C1"
```

```
5060 GOTO 2140
```

```
5070 PRINT@ (9,3),R1(L)
```

```
5080 PRINT@ (9,25),R3(L)
```

```
5090 PRINT@ (2,38),R2(L)
```

```
5100 PRINT@ (13,26),C2(L)
```

```
5110 PRINT@ (13,25),"="
```

```
5120 PRINT@ (18,62),"=",C1(L)
```

```
5130 PRINT@ (19,5),"
```

```
5140 GOTO 2540
```

```
5150 INPUT"ENTRADA INVALIDA PARA UN FILTRO PASO BAJAS,TECLEE CUALQUIER NUMERO";ER
```

```
5160 GOTO 720
```

```
5170 INPUT" MAGNITUD DEL RIZO IMPRACTICA TECLÉE (1) PARA CONTINUAR";PL
```

```
5180 GOSUB 5220
```

```
5190 GOTO 530
```

```
5200 FOR I=13 TO 22
```

```
5210 PRINT@ (I,3),"
```

```
"
```

```
5220 NEXT I
```

```
5230 PRINT@ (12,3)," "
```

```
5240 RETURN
```

```

10 REM          BUTTERWORTH Y CHEBYSHEV
20 DIM A(50), B(50), R1(50), R2(50), RT(50), R(10), M(10), L(10), A3(50), C1(50), C2(50)
30 DIM C(50), FR(50), GM(50), YU(50), LG(80), RC(80), CY(80)
40 CLS
50 FOR IM=5 TO 65
60 PRINT@ (1, IM), CHR$(150)
70 IF IM<40 THEN 140
80 PRINT@ (2, IM), CHR$(150)
90 IF IM<45 THEN 140
100 PRINT@ (4, 44), CHR$(128)
110 PRINT@ (11, 44), CHR$(132)
120 PRINT@ (12, 44), "Fa"
130 PRINT@ (4, IM), CHR$(150)
140 NEXT IM
150 FOR IN=11 TO 0 STEP -1
160 PRINT@ (IN, 5), CHR$(148)
170 IF IN<2 THEN 210
180 PRINT@ (IN, 40), CHR$(148)
190 IF IN<9 THEN 210
200 PRINT@ (IN, 25), CHR$(148)
210 NEXT IN
220 FOR IP=6 TO 24
230 PRINT@ (9, IP), CHR$(150)
240 NEXT IP
250 PRINT@ (11, 25), CHR$(140)
260 PRINT@ (9, 25), CHR$(140)
270 PRINT@ (11, 5), CHR$(140)
280 PRINT@ (11, 40), CHR$(140)
290 PRINT@ (2, 40), CHR$(140)
300 PRINT@ (4, 40), CHR$(140)
310 PRINT@ (9, 5), CHR$(140)
320 PRINT@ (0, 2), "IG(Jw)Idb"
330 PRINT@ (12, 25), "Fs"
340 PRINT@ (12, 40), "Fp"
350 PRINT@ (11, 67), "F"
360 PRINT@ (2, 38), "M"
370 PRINT@ (4, 38), "m"
380 PRINT@ (9, 27), "B"
390 FOR IU=3 TO 8
400 PRINT@ (IU, 32), CHR$(149)
410 NEXT IU
420 PRINT@ (2, 32), CHR$(134)
430 PRINT@ (7, 32), CHR$(138)
440 PRINT@ (3, 31), "Add"
450 PRINT@ (1, 19), "P L A N T I L L A   D E   D I S E N O"
460 PRINT@ (2, 31), "_"
470 PRINT@ (13, 0), "ESTE PROGRAMA ES UN AUXILIAR EN EL CALCULO DE FILTROS ACTIVOS"
480 PRINT "PASO ALTAS BUTTERWORTH Y CHEBYSHEV"
490 PRINT "SI VA A CALCULAR UN FILTRO BUTTERWORTH TECLEE"
500 PRINT "CERO DECIBELES PARA EL RIZO"
510 PRINT "TECLEE CONFORME LA COMPUTADORA LO PIDA, LOS DATOS PERTINENTES."
520 INPUT "MAGNITUD DEL RIZO EN DECIBELES (Rdb):"; Rdb
530 GOSUB 5170
540 IF Rdb=0 THEN 600
550 IF Rdb<3 THEN 500
560 IF Rdb>3 THEN 500
570 PRINT@ (2, 48), CHR$(136); PRINT@ (4, 48), CHR$(130); PRINT@ (6, 47), "Rdb="; PRINT@
580 (12, 0), " : INPUT"
590 PRINT@ (12, 0), " FRECUENCIA QUE INICIA LA BANDA DE OSCILACION"

```

```

N (Fa)";FO:GOSUB 5170:GOTO 640
500 INPUT"MAGNITUD NO USUAL PARA EL RIZO,TECLEE CUALQUIER NUMERO";B
590 GOSUB 5172:GOTO 520
600 FOR IH=44 TO 45:PRINT@ (4,IH)," ":NEXT IH:PRINT@ (11,44)," ":PRINT@ (12,44)
":PRINT@ (11,44),CHR$(150):PRINT@ (4,42),CHR$(148):PRINT@ (4,38)," "
610 PRINT@ (12,0)," "
620 INPUT"          FRECUENCIA QUE INICIA LA ZANDA PASANTE (Fp)EN HERTZ";
0
630 GOSUB 5170
640 INPUT "FRECUENCIA QUE LIMITA LA ZANDA DE SUPRESION (Fs)EN HERTZ";F
650 GOSUB 5170
660 IF RW=0 THEN 690
670 PRINT@ (3,10),"Fa=";FO
680 GOTO 700
690 PRINT@ (3,10),"Fp=";FO
700 PRINT@ (7,10),"Fs=";F
710 PRINT@ (12,0)," "
720 IF F>FO THEN 5150
730 INPUT"          AUMENTO DE LA GANANCIA EN DECIBELES EN LA BANDA DE TRANSICION
(Adb)";G:IF G<0 THEN 5150
740 GOSUB 5170
750 PRINT@ (5,10),"Adb=";G
760 PRINT@ (12,0)," "
770 INPUT"          CONFIGURACION EMLPEADA (RM o FVCV) EN LA IMPLEMENTA
ION";T$
780 G=10^(-G/20)
790 S=FO/F
800 IF RW=0 THEN 1010
810 C(0)=1
820 C(1)=S
830 EP=SQR(10^(RW/10)-1)
840 GA=1/SQR(1+(EP+S)^2)
850 IF GA>G THEN 880
860 N=1
870 GOTO 950
880 FOR J1=2 TO 50
890 C(J1)=2*S*C(J1-1)-C(J1-2)
900 GA=1/SQR(1+(EP*C(J1))^2)
910 IF GA>G THEN 930
920 GOTO 940
930 NEXT J1
940 N=J1
950 AC=LOG(SQR((1/EP)^2-1)+1/EP)/N
960 AD=2/(EXP(AC)+EXP(-AC))
970 F1=AD*FO
980 PRINT@ (4,10),"Fp=";F1
990 PRINT@ (20,0)," "
1000 GOTO 1100
1010 Q=(1/S)^2-1
1020 NI=.5*(LOG(Q)/LOG(5))
1030 IF NI<1-NI<0 THEN 1060
1040 N=NI\1+1
1050 IF N<2 THEN 1100
1060 N=1
1070 GOTO 1100
1080 N=NI
1090 PRINT@ (4,10),"Fp=";F1
1100 INPUT" SI NO LE SATISFACE LA PLANTILLA TECLEE (1),EN OTRO CASO TECLEE C
UALQUIER NUMERO";HC
1110 IF HC=1 THEN 40

```

```

1120 CLS:PRINT"EL ORDEN ADECUADO PARA EL FILTRO ES",N
1130 IF N>1 THEN 1150
1140 GOTO 1710
1150 INPUT"PARA OBTENER UN BOSQUEJO DE LA MAGNITUD DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA
A DEL FILTRO TECLEE (1),EN OTRO CASO TECLEE CUALQUIER OTRO NUMERO"12A
1160 IF ZA <> 1 THEN 1450
1170 IF RW=0 THEN 1470
1180 CLS
1190 FOR JL=1 TO 79
1200 WT=20/JL:C(1)=WT
1210 FOR JK=2 TO N
1220 C(JK)=2*WT*C(JK-1)-C(JK-2)
1230 NEXT JK
1240 GY=10/SQR(1+(EP*C(N))^2)
1250 LG(JL)=10-GY
1260 GY(JL)=GY-GY\1
1270 RG(JL)=(LG(JL)+1)\1
1280 NEXT JL
1290 FOR JF=1 TO 79
1300 IF RG(JF)=10 THEN ZA=10 :GOTO 1340
1310 FOR JM=10 TO RG(JF) STEP -1
1320 PRINT@ (JM,JF),CHR$(140)
1330 NEXT JM:ZA=RG(JF)-1
1340 IF GY(JF)<=.1 THEN 1450
1350 IF GY(JF)<=.2 THEN 1400
1360 IF GY(JF)<=.4 THEN 1410
1370 IF GY(JF)<=.6 THEN 1420
1380 IF GY(JF)<=.8 THEN 1430
1390 IF GY(JF)<=1 THEN 1440
1400 PRINT@ (ZA,JF),CHR$(144):GOTO 1450
1410 PRINT@ (ZA,JF),CHR$(145):GOTO 1450
1420 PRINT@ (ZA,JF),CHR$(146):GOTO 1450
1430 PRINT@ (ZA,JF),CHR$(147):GOTO 1450
1440 PRINT@ (ZA,JF),CHR$(148):GOTO 1450
1450 NEXT JF
1460 GOTO 1550
1470 CLS:FOR IL=1 TO 79
1480 WT=20/IL
1490 GY=10/SQR(1+(WT)^(2*N))
1500 LG(IL)=10-GY
1510 GY(IL)=GY-GY\1
1520 RG(IL)=(LG(IL)+1)\1
1530 NEXT IL
1540 GOTO 1290
1550 PRINT@ (11,35),CHR$(159)
1560 PRINT@ (12,35),"Fp"
1570 WQ=(20/3)\1:PRINT@ (12,WQ),"Fq":PRINT@ (11,WQ),CHR$(159)
1580 PRINT@ (14,12),"BOSQUEJO DE LA MAGNITUD DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA"
1590 PRINT@ (14,12),"Fp=";FO
1600 PRINT@ (12,10),"Fq=";FQ
1610 IF RW=0 THEN 1630
1620 PRINT@ (17,10),"Rdb=";RW
1630 PRINT@ (19,3)," "
1640 INPUT"PARA CONTINUAR TECLEE 2"1HN
1650 CLS
1660 IF N/2-N/2=0 THEN 1700
1670 P=(N-1)/2
1680 ET=P
1690 GOTO 1710
1700 P=N/2

```

```

2300 R2(L)=AL/DR
2310 C1(L)=C1*1000000
2320 C2(L)=C2*1000000
2330 GOTO 2450
2340 BE=SQR(C1/C2)
2350 D=AL^2-4*(1-KI)*(1+BE^2)/(BE^2)
2360 IF D<0 THEN 2590
2370 BT=BE/(2*(1+BE^2))
2380 RA=(BT*(AL+SQR(D)))^2
2390 R2(L)=1/SQR(B(L)*RA*C1+C2)
2400 R1(L)=R2(L)*RA
2410 PRINT@(13,0),"
2420 PRINT@(14,0),"
2430 PRINT@(15,0),"
2440 PRINT@(16,0),"
2450 KI(L)=KI
2460 IF T#="RM" THEN 5080
2470 PRINT@(12,0),"KI=";KI(L)
2480 PRINT@(13,0),"R1=";R1(L)
2490 PRINT@(14,0),"R2=";R2(L)
2500 PRINT@(15,0),"C1=";C1(L)
2510 PRINT@(16,0),"C2=";C2(L)
2520 PRINT@(18,0),"
2530 PRINT@(17,0),"
2540 PRINT@(19,0),"SI NO LE SATISFACEN LOS VALORES TECLÉE UNO"
2550 PRINT"EN OTRO CASO TECLÉE CERO"
2560 INPUT PR
2570 IF PR#0 THEN 2630
2580 GOTO 2850
2590 PRINT"TRATE OTRO JUEGO DE VALORES PARA C1,C2 Y KI"
2600 PRINT"TECLÉE CUALQUIER NUMERO PARA CONTINUAR"
2610 INPUT H
2620 GOTO 2120
2630 NEXT L
2640 CLS
2650 PRINT@(1,30),"R E S U M E N"
2660 P=11
2670 FOR J1=1 TO P
2680 PRINT"
ETAPA";J1
2690 PRINT"C1=";C1(J1)
2700 PRINT"C2=";C2(J1)
2710 PRINT"R1=";R1(J1)
2720 PRINT"R2=";R2(J1)
2730 IF R3(J1)=0 THEN 2750
2740 PRINT"R3=";R3(J1)
2750 PRINT"KI=";KI(J1);IF FR(J1)=0 THEN 2760
2760 PRINT"FR=";FR(J1)
2770 PRINT"IG(F)IGB=";IG(J1)
2780 PRINT"B=";YU(J1)
2790 NEXT J1
2800 GA=1
2810 FOR NB=1 TO P
2820 GA=GA*KI(NB)
2830 NEXT NB
2840 PRINT"NT=";GA
2850 IF RE#0 THEN 2870
2860 PRINT"EXISTE UN POLO REAL QUE VALE ";RE
2870 END
2880 IF T#="FVCV" THEN 2910
2890 R(1)=SQR(C1) S(1)=C1/(R(1)+R(2)) S(2)=C1/(R(1)-R(2))-1

```



```

2900 GOTO 2920
2910 R(1)=5:R(2)=5:R(3)=3:R(4)=7:R(5)=6
2920 T=L
2930 M(2)=10
2940 M(3)=10
2950 M(4)=3
2960 M(5)=10
2970 M(6)=3
2980 M(7)=3
2990 L(1)=3
3000 L(2)=24
3010 L(3)=35
3020 L(4)=37
3030 L(5)=45
3040 L(6)=18
3050 L(7)=72
3060 M(1)=10
3070 M(8)=16
3080 L(8)=54
3090 L(9)=18
3100 M(9)=10
3110 IT=10
3120 CLS
3130 GOTO 3240
3140 M1=1
3150 FOR K=M1 TO 9
3160 IF R(K)=7 THEN 3460
3170 IF R(K)=6 THEN 3590
3180 IF R(K)=5 THEN 3720
3190 IF R(K)=4 THEN 3860
3200 IF R(K)=3 THEN 3990
3210 IF R(K)=2 THEN 4470
3220 NEXT K
3230 GOTO 4150
3240 FOR J=1 TO 72
3250 PRINT$(12,J),CHR$(150)
3260 IF J<18 THEN 3310
3270 PRINT$(3,J),CHR$(150)
3280 IF R(10)=0 THEN 3310
3290 IF J<45 THEN 3310
3300 PRINT$(16,J),CHR$(152)
3310 NEXT J
3320 IF R(10)=0 THEN 3340
3330 IT=16
3340 FOR I=4 TO IT
3350 PRINT$(1,16),CHR$(158)
3360 PRINT$(1,72),CHR$(150)
3370 IF I>10 THEN 3390
3380 PRINT$(I+6,45),CHR$(158)
3390 NEXT I
3400 IF R(10)=0 THEN 3430
3410 PRINT$(15,45),CHR$(158)
3420 PRINT$(16,72),CHR$(158)
3430 PRINT$(3,18),CHR$(154)
3440 PRINT$(3,72),CHR$(154)
3450 GOTO 3140
3460 M=M(K)
3470 L=L(K)
3480 PRINT$(M,L+1),CHR$(133)
3490 FOR I=L+1 TO L-1

```

```

3520 PRINT$(M, J), CHR$(158)
3530 NEXT J
3540 PRINT$(M, L+1), CHR$(133)
3550 FOR J=L TO L+1
3560 PRINT$(M, J), CHR$(150)
3570 PRINT$(M, J+12), CHR$(150)
3580 NEXT J
3590 M1=M+1
3600 GOTO 3150
3610 M=M(K)
3620 L=L(K)
3630 FOR P=M+1 TO M+5
3640 PRINT$(P, L), CHR$(158)
3650 PRINT$(P, L+1), CHR$(158)
3660 PRINT$(P, L-1), CHR$(158)
3670 NEXT P
3680 PRINT$(M, L), CHR$(150)
3690 PRINT$(M+4, L), CHR$(158)
3700 M1=M+1
3710 GOTO 3150
3720 M=M(K)
3730 L=L(K)
3740 FOR J=L TO L+4
3750 PRINT$(M, J), CHR$(150)
3760 PRINT$(M, J+9), CHR$(150)
3770 NEXT J
3780 PRINT$(M, L+5), CHR$(133)
3790 PRINT$(M, L+8), CHR$(133)
3800 PRINT$(M+1, L+5), CHR$(148)
3810 PRINT$(M+1, L+8), CHR$(148)
3820 PRINT$(M-1, L+8), CHR$(148)
3830 PRINT$(M-1, L+5), CHR$(148)
3840 PRINT$(M, L+6), " "
3850 PRINT$(M, L+7), " "
3860 M1=M+1
3870 GOTO 3150
3880 M=M(K)
3890 L=L(K)
3900 FOR I=M TO M+5
3910 PRINT$(I, L), CHR$(158)
3920 NEXT I
3930 PRINT$(M+3, L), " "
3940 FOR J=L-3 TO L+3
3950 PRINT$(M+3, J), CHR$(152)
3960 PRINT$(M+2, J), CHR$(152)
3970 NEXT J
3980 PRINT$(M+2, L), CHR$(158)
3990 M1=M+1
4000 GOTO 3150
4010 M=M(K)
4020 L=L(K)
4030 N=2
4040 FOR J=L TO L+3 STEP 2
4050 FOR I=M-N TO M+N
4060 PRINT$(I, J), CHR$(158)
4070 PRINT$(I, J+1), CHR$(158)
4080 PRINT$(M-N, J+1), CHR$(158)
4090 PRINT$(M-N, J-1), CHR$(158)
4100 NEXT I
4110 M=N-1

```

```

4100 NEXT J
4110 PRINT@ (M, L+1), "KI"
4120 PRINT@ (M, L+5), CHR$(150)
4130 M1=K+1
4140 GOTO 3150
4150 M=16
4160 IF R(10)=0 THEN 4190
4170 L=18
4180 GOTO 4200
4190 L=45
4200 FOR J=L-3 TO L+3
4210 PRINT@ (M, J), CHR$(152)
4220 NEXT J
4230 FOR J=L-2 TO L+2
4240 PRINT@ (M+1, J), CHR$(150)
4250 NEXT J
4260 FOR J=L-1 TO L+1
4270 PRINT@ (M+1, J), CHR$(152)
4280 NEXT J
4290 PRINT@ (M+2, L), CHR$(150)
4300 PRINT@ (M+1, L), CHR$(150)
4310 PRINT@ (M, L), CHR$(158)
4320 PRINT@ (10, 73), CHR$(152)
4330 PRINT@ (12, 74), "o"
4340 PRINT@ (10, 1), "o"
4350 IF T#="RM" THEN 4920
4360 L=T
4370 PRINT@ (13, 49), "R2"
4380 PRINT@ (4, 43), "R1"
4390 PRINT@ (8, 9), "C1"
4400 PRINT@ (8, 30), "C2"
4410 PRINT@ (1, 39), "ETAPA"; L; "ca"; ET
4420 PRINT@ (14, 3), "A="; A(L)
4430 PRINT@ (16, 3), "B="; B(L)
4440 PRINT@ (17, 3), "Fr="; FR(L)
4450 PRINT@ (18, 3), "IG(Fr)Icb="; GM(L)
4460 GOTO 2180
4470 M=M(K)
4480 L=L(K)
4490 K1=K
4500 L=L+4
4510 K=2
4520 FOR J=L TO L+5 STEP 2
4530 FOR I=M-K TO M+K
4540 PRINT@ (I, J), CHR$(150)
4550 PRINT@ (I, J+1), CHR$(158)
4560 PRINT@ (M-K, J+1), CHR$(129)
4570 PRINT@ (M+K, J+1), CHR$(133)
4580 NEXT I
4590 K=K-1
4600 NEXT J
4610 PRINT@ (M-1, L-2), "-"
4620 PRINT@ (M, L+5), CHR$(150)
4630 PRINT@ (M+2, L-2), "+"
4640 FOR LI=L-4 TO L-1
4650 PRINT@ (M-1, LI), CHR$(153)
4660 PRINT@ (M+1, LI), CHR$(153)
4670 NEXT LI
4680 PRINT@ (M, L+1), "AO"
4690 PRINT@ (M-1, L-4), CHR$(153)

```

```

4700 PRINT@ (M,L-4),CHR$(134)
4710 PRINT@ (M,L-3), " "
4720 PRINT@ (M,L-2), " "
4730 PRINT@ (M,L-1), " "
4740 PRINT@ (M+1,L-4),CHR$(120)
4750 PRINT@ (M+2,L-4),CHR$(158)
4760 M=M+3
4770 L=L-4
4780 FOR J=L-3 TO L+3
4790 PRINT@ (M,J),CHR$(152)
4800 NEXT J
4810 FOR J=L-2 TO L+2
4820 PRINT@ (M+1,J),CHR$(150)
4830 NEXT J
4840 FOR J=L-1 TO L+1
4850 PRINT@ (M+1,J),CHR$(152)
4860 NEXT J
4870 PRINT@ (M+2,L),CHR$(150)
4880 PRINT@ (M+1,L),CHR$(150)
4890 PRINT@ (M,L),CHR$(158)
4900 M1=K1+1
4910 GOTO 3150
4920 L=T
4930 PRINT@ (0,30),"ETAPA";L;"da";ET
4940 PRINT@ (3,3),"A"
4950 PRINT@ (4,1),A(L)
4960 PRINT@ (5,3),"B"
4970 PRINT@ (6,1),B(L)
4980 PRINT@ (7,4),"Fr"
4990 PRINT@ (8,1),FR(L)
5000 PRINT@ (14,1),"IG(Fr)Icb"
5010 PRINT@ (15,1),GM(L)
5020 PRINT@ (12,9),"C2"
5030 PRINT@ (12,30),"C2"
5040 PRINT@ (9,43),"C1"
5050 PRINT@ (13,22),"R2"
5060 PRINT@ (17,60),"R1"
5070 GOTO 2140
5080 PRINT@ (12,32),"=";C2(L)
5090 PRINT@ (5,45),"=";C1(L)
5100 PRINT@ (13,26),R2(L)
5110 PRINT@ (13,25),"="
5120 PRINT@ (17,23),"=";R1(L)
5130 PRINT@ (19,5),"
5140 GOTO 2540
5150 INPUT"ENTRADA INVALIDA PARA UN FILTRO PASO ALTAS,TECLEE CUALQUIER CLAVE";PH
5160 GOTO 40
5170 FOR I=13 TO 20
5180 PRINT@ (I,0),"
5190 NEXT I
5200 PRINT@ (12,0)," "
5210 RETURN

```

```

10 REM PROGRAMA PARA EL CALCULO DE FILTROS PASA BANDA DE TIPOS
15 REM BUTERWORTH Y CHEBYCHEV
20 DIM A(50), B(50), R1(50), R2(50), K1(50), R(10), M(10), L(10), R3(50), C1(50),
30 DIM C(50), PR(50), GM(50), YU(50), LC(50), RG(50), GY(50), BO(50), TU(50)
40 CLS
50 FOR IM=5 TO 65
60 PRINT@ (11, IM), CHR$(150)
70 IF IM<25 THEN 152
80 IF IM>44 THEN 150
90 PRINT@ (2, IM), CHR$(150)
100 IF IM<45 THEN 150
110 PRINT@ (4, 44), CHR$(128)
120 PRINT@ (11, 44), CHR$(132)
130 PRINT@ (12, 44), "Fa"
140 PRINT@ (4, IM), CHR$(150)
152 NEXT IM
160 FOR IN=11 TO 0 STEP -1
170 PRINT@ (IN, 5), CHR$(148)
180 IF IN<2 THEN 240
190 PRINT@ (IN, 44), CHR$(148)
200 PRINT@ (IN, 25), CHR$(148)
210 IF IN<9 THEN 240
220 PRINT@ (IN, 16), CHR$(148)
230 PRINT@ (IN, 54), CHR$(148)
240 NEXT IN
250 FOR IP=6 TO 16
260 PRINT@ (9, IP), CHR$(150)
270 PRINT@ (9, IP+48), CHR$(150)
300 NEXT IP
310 PRINT@ (11, 25), CHR$(140)
320 PRINT@ (9, 16), CHR$(132)
330 PRINT@ (11, 5), CHR$(140)
340 PRINT@ (11, 44), CHR$(140)
350 PRINT@ (2, 44), CHR$(132)
360 PRINT@ (2, 25), CHR$(132)
370 PRINT@ (9, 5), CHR$(140)
380 PRINT@ (0, 2), "IG(JW)Idb"
390 PRINT@ (12, 15), "Fsi"
400 PRINT@ (12, 23), "Fsa"
410 PRINT@ (12, 43), "Fps"
420 PRINT@ (12, 24), "Fpi"
430 PRINT@ (9, 54), CHR$(132)
440 PRINT@ (11, 15), CHR$(140)
450 PRINT@ (11, 54), CHR$(140)
460 PRINT@ (11, 57), "F"
470 PRINT@ (1, 23), "M"
480 PRINT@ (4, 23), "m"
490 PRINT@ (9, 13), "d"
500 PRINT@ (9, 32), "d":FOR IU=3 TO 8
510 PRINT@ (IU, 49), CHR$(149)
520 NEXT IU
530 PRINT@ (8, 49), CHR$(132)
540 PRINT@ (9, 49), CHR$(132)
550 PRINT@ (5, 43), "Pds"
560 FOR JU=29 TO 40
570 PRINT@ (4, JU), CHR$(150)
580 NEXT JU
590 PRINT@ (11, 29), CHR$(132)
600 PRINT@ (12, 29), "Fsi"
610 PRINT@ (12, 39), "Fsa"

```

```

620 PRINT$(11,42),CHR$(132)
610 PRINT$(11,34),CHR$(132)
620 PRINT$(12,34),"FO="
30 PRINT$(1,19),"PLANTILLA DE DISEÑO"
640 PRINT$(2,21),"_"
650 PRINT$(13,2),"ESTE PROGRAMA ES UN AUXILIAR EN EL CALCULO DE FILTROS ACTIVOS"
660 PRINT"PASO BANDA BUTTERWORTH Y CHEBYCHEV."
670 PRINT"SE VA A CALCULAR UN FILTRO BUTTERWORTH TECLEE"
680 PRINT"CEPO DECIBELES PARA EL RIZO.""
690 PRINT"TECLEE CONFORME LA COMPUTADORA LO PIDA,LOS DATOS PERTINENTES."
700 INPUT "MAGNITUD DEL RIZO EN DECIBELES (Rdb)";RW
710 IF RW=0 THEN 830
720 IF RW>3 THEN 790
730 IF RW<0 THEN 790
740 PRINT$(2,34),CHR$(136):PRINT$(4,34),CHR$(132):PRINT$(3,33),Rdb="":PRINT$(18,2),"
750 GOSUB 5660
760 INPUT "FRECUENCIA QUE LIMITA INFERIORMENTE LA BANDA DE OSCILACION (Fai) EN HERTZ";FC
770 INPUT "FRECUENCIA QUE LIMITA SUPERIORMENTE LA BANDA DE OSCILACION (Fas) EN HERTZ";FO:IF FO<FC THEN 5520
780 FC=SQR(FC*FO):GOSUB 5660:GOTO 900
790 GOSUB 5660
800 INPUT "MAGNITUD NO USUAL PARA EL RIZO,TECLEE CUALQUIER NUMERO";BV
810 GOSUB 5660
820 GOTO 730
830 FOR IH=29 TO 40:PRINT$(4,IH)," ":NEXT IH:PRINT$(11,42),CHR$(150):PRINT$(11,19)," ":PRINT$(11,29),CHR$(150):PRINT$(12,38)," "
840 PRINT$(4,23)," ":PRINT$(18,2)," "
850 GOSUB 5660
860 INPUT "FRECUENCIA QUE LIMITA INFERIORMENTE LA BANDA PASANTE (Fpi) EN HERTZ";FC
870 INPUT "FRECUENCIA QUE LIMITA SUPERIORMENTE LA BANDA PASANTE (Fps) EN HERTZ";FO
880 FC=SQR(FC*FO)
890 GOSUB 5660
900 INPUT "FRECUENCIA QUE LIMITA SUPERIORMENTE LA BANDA DE SUPRESION (Fsu) EN HERTZ";F
910 GOSUB 5660
920 IF FN=FO THEN 5520
930 IF RW=0 THEN 950
940 PRINT$(3,53),"Fas=";FO
950 GOTO 970
960 PRINT$(3,53),"Fps=";FO
970 PRINT$(7,53),"Fsu=";F
980 PRINT$(6,32),"Fo=";FC
990 PRINT$(18,2),"
1000 IF FN=FO THEN 5520
1010 GOSUB 5660
1020 INPUT "PERDIDA EN DECIBELES EN LA BANDA DE TRANSICION (Pdb)";G
1030 DB=G
1040 PRINT$(5,40),"Pdb=";G
1050 PRINT$(18,2),"
"
1060 GOSUB 5660
1070 DB=(G/20)
1080 LB=(FC-FO/F)/(FO/FC-FC/FO)
1090 LB=FC/(FB+FC*2/FO)

```

```

1100 IY=LS
1110 F3=FC+(SQR(S^2+4*(LS)^2)-S)/(2*LS)
1120 PRINT(7,10),"Fpi=";F3
1130 IF RW=0 THEN 1430
1140 F4=FC+(SQR(1+4*(LS)^2)-1)/(2*LS)
1150 PRINT(8,10),"Fpi=";F4
1160 C(0)=1
1170 C(1)=S
1180 EP=SQR(10^(RW/10)-1)
1190 GA=1/SQR(1+(EP*S)^2)
1200 IF GA>G THEN 1230
1210 N=1
1220 GOTO 1300
1230 FOR J1=2 TO 50
1240 C(J1)=2*S*C(J1-1)-C(J1-2)
1250 GA=1/SQR(1+(EP*C(J1))^2)
1260 IF GA>G THEN 1280
1270 GOTO 1290
1280 NEXT J1
1290 N=J1
1300 AC=LOG(SQR(1/EP)^2-1)+1/EP)/N
1310 AD=(EXP(AC)+EXP(-AC))/2
1320 F1=AD
1330 RC=SQR((4*(LS^2))+(F1^2))/(2*LS);RT=F1/(2*LS)
1340 FS=FC*(RC+RT)
1350 FI=FC*(RC-RT)
1360 PRINT(4,10),"Fps=";FS
1370 PRINT(6,10),"Fpi=";FI
1380 QR=FC/(FS-FI)
1390 IY=QR
1400 PRINT(2,10),"Qr=";QR
1410 PRINT(20,0)," "
1420 GOTO 1560
1430 Q=(1/G)^2-1
1440 PRINT(2,10),"Qr=";LS
1450 F2=FC+(SQR(1+4*(LS)^2)-1)/(2*LS)
1460 PRINT(4,10),"Fpi=";F2
1470 NI=.5*(LOG(Q)/LOG(S))
1480 IF NI\1-NI=0 THEN 1530
1490 N=NI\1+1
1500 IF N=0 THEN 1580
1510 N=1
1520 GOTO 1580
1530 N=NI
1540 GOTO 1580
1550 PRINT(4,10),"Fps=";FI
1560 INPUT "SI NO LE SATISFACE LA PLANTILLA TECLEE (1), EN OTRO CASO TECLEE CUA  

LQUIER NUMERO";HC
1570 IF HG=1 THEN 40
1580 GOSUB 5600:NF=2+N:PRINT"EL ORDEN ADECUADO PARA EL FILTRO ES";NF
1590 INPUT"CONFIGURACION A EMPLEARSE EN LA IMPLEMENTACION (FVGV,PM O RA)";TV
1600 NT=N
1610 IF NN=1 THEN 1630
1620 GOTO 2100
1630 INPUT"PARA OBTENER UN BOCQUEJO DE LA MAGNITUD DE LA RESPUESTA EN FRECUENC  

IA DEL FILTRO TECLEE (1), EN OTRO CASO TECLEE CUALQUIER OTRO NUMERO";BA
1640 IF BA=1 THEN 2130
1650 IF RW=0 THEN 1950
1660 CLS
1670 FOR JL=1 TO 79

```

```

2880 FOR J1=1 TO N
2890 PRINT "ETAPA";J1
2900 PRINT "C2=";C2(J1)
2910 PRINT "R1=";R1(J1)
2920 PRINT "R2=";R2(J1)
2930 IF R3(J1)=0 THEN 2950
2940 PRINT "R3=";R3(J1)
2950 IF FR(J1)=0 THEN 2980
2960 PRINT "Fr=";FR(J1)
2970 PRINT "IG(Fr)I=";TU(J1)
2980 PRINT "Q=";YU(J1)
2990 NEXT J1
3020 PRINT "DATOS GENERALES DEL FILTRO CALCULADO"
3010 IF RW=0 THEN PRINT "FILTRO PASO BANDA BUTTERWORTH DE ORDEN";NF ELSE PRINT
FILTRO PASO BANDA CHEBYSHEV DE ORDEN ";NF;"Y RIZO DE ";RW;"db"
3022 PRINT " CONFIGURACION EMPLEADA ";T
3030 PRINT "Qr=";IY
3040 PRINT "Fo=";FC
3050 IF RW=0 THEN 3080
3060 PRINT "Fps=";FS
3070 PRINT "Fpi=";FI
3080 PRINT "Fss=";F
3090 PRINT "Fsi=";F3
3100 IF RW<>0 THEN 3130
3110 PRINT "Fpi=";F2
3120 PRINT "Fps=";FO
3130 GA=1
3140 FOR NB=1 TO N
3150 GA=GA*KI(NB)/BO(NB)
3160 NEXT NB
3170 GA=GA*(LS/(4*TET*FC))^N
3180 PRINT "M=";GA
3190 PRINT "Pdb=";DP;"deciboles"
3200 IF RE=0 THEN 3220
3210 PRINT "EXISTE UN POLO REAL QUE VALE ";RE
3220 END
3230 IF T#="FVCV" THEN 3260
3240 R(1)=7:R(2)=5:R(3)=2:R(4)=5:R(5)=7:R(6)=6:R(7)=1
3250 GOTO 3270
3260 R(1)=7:R(2)=5:R(3)=3:R(4)=7:R(5)=6
3270 T=L
3280 M(2)=10
3290 M(3)=10
3300 M(4)=3
3310 M(5)=10
3320 M(6)=3
3330 M(7)=3
3340 L(1)=3
3350 L(2)=24
3360 L(3)=55
3370 L(4)=37
3380 L(5)=45
3390 L(6)=18
3400 L(7)=72
3410 M(8)=10
3420 M(9)=16
3430 L(8)=34
3440 L(9)=18
3450 M(9)=10

```



```

3470 CLS
3480 GOTO 3400
3490 M1=1
3520 FOR K=M1 TO 9
3510 IF R(K)=7 THEN 3820
3520 IF R(K)=6 THEN 3950
3530 IF R(K)=5 THEN 4060
3540 IF R(K)=4 THEN 4210
3550 IF R(K)=3 THEN 4350
3560 IF R(K)=2 THEN 4850
3570 NEXT K
3580 IF T$="FVCV" THEN GOSUB 5730
3590 GOTO 4510
3600 FOR J=1 TO 72
3610 PRINT@(10,J),CHR$(150)
3620 IF J<18 THEN 3670
3630 PRINT@(3,J),CHR$(150)
3640 IF R(10)=0 THEN 3670
3650 IF J<45 THEN 3670
3660 PRINT@(16,J),CHR$(150)
3670 NEXT J
3680 IF R(10)=0 THEN 3700
3690 IT=16
3700 FOR I=4 TO IT
3710 PRINT@(I,18),CHR$(158)
3720 PRINT@(I,72),CHR$(158)
3730 IF I>10 THEN 3750
3740 PRINT@(I+6,45),CHR$(158)
3750 NEXT I
3760 IF R(10)=0 THEN 3790
3770 PRINT@(16,45),CHR$(158)
3780 PRINT@(16,72),CHR$(150)
3790 PRINT@(3,18),CHR$(154)
3800 PRINT@(3,72),CHR$(154)
3810 GOTO 3490
3820 M=M(K)
3830 L=L(K)
3840 PRINT@(M,L+1),CHR$(133)
3850 FOR J=L+1 TO L+11
3860 PRINT@(M,J),CHR$(158)
3870 NEXT J
3880 PRINT@(M,L+1),CHR$(133)
3890 FOR J=L TO L-1
3900 PRINT@(M,J),CHR$(150)
3910 PRINT@(M,J-12),CHR$(132)
3920 NEXT J
3930 M1=M+1
3940 GOTO 3500
3950 M=M(K)
3960 L=L(K)
3970 FOR P=M+1 TO M+5
3980 PRINT@(P,L),CHR$(158)
3990 PRINT@(P,L+1),CHR$(158)
4000 PRINT@(P,L-1),CHR$(158)
4010 NEXT P
4020 PRINT@(M,L),CHR$(150)
4030 PRINT@(M+5,L),CHR$(133)
4040 M1=M+1
4050 GOTO 3500
4060 M=M(K)

```

```

4070 L=L(K)
4080 FOR J=L TO L+4
4090 PRINT@(M,J),CHR$(150)
4100 PRINT@(M,J+9),CHR$(150)
4110 NEXT J
4120 PRINT@(M,L+5),CHR$(133)
4130 PRINT@(M,L+8),CHR$(133)
4140 PRINT@(M+1,L+5),CHR$(148)
4150 PRINT@(M+1,L+8),CHR$(148)
4160 PRINT@(M-1,L+8),CHR$(148)
4170 PRINT@(M-1,L+5),CHR$(148)
4180 PRINT@(M,L+6), " "
4190 PRINT@(M,L+7), " "
4200 M1=M+1
4210 GOTO 3500
4220 M=M(K)
4230 L=L(K)
4240 FOR I=M TO M+6
4250 PRINT@(I,L),CHR$(158)
4260 NEXT I
4270 PRINT@(M+3,L), " "
4280 FOR J=L-3 TO L+3
4290 PRINT@(M+3,J),CHR$(152)
4300 PRINT@(M+2,J),CHR$(152)
4310 NEXT J
4320 PRINT@(M+2,L),CHR$(158)
4330 M1=M+1
4340 GOTO 3500
4350 M=M(K)
4360 L=L(K)
4370 N=2
4380 FOR J=L TO L+5 STEP 2
4390 FOR I=M-N TO M+N
4400 PRINT@(I,J),CHR$(156)
4410 PRINT@(I,J+1),CHR$(158)
4420 PRINT@(M-N,J+1),CHR$(129)
4430 PRINT@(M+N,J+1),CHR$(130)
4440 NEXT I
4450 N=N-1
4460 NEXT J
4470 PRINT@(M,L+1),"KI"
4480 PRINT@(M,L+5),CHR$(152)
4490 M1=M+1
4500 GOTO 3500
4510 M=16
4520 IF R(10)=0 THEN 4550
4530 L=L(K)
4540 GOTO 4560
4550 L=45
4560 FOR J=L-3 TO L+3
4570 PRINT@(M,J),CHR$(150)
4580 NEXT J
4590 FOR J=L-2 TO L+2
4600 PRINT@(M+1,J),CHR$(130)
4610 NEXT J
4620 FOR J=L-1 TO L+1
4630 PRINT@(M+1,J),CHR$(132)
4640 NEXT J
4650 PRINT@(M+1,L),CHR$(130)
4660 PRINT@(M+1,L),CHR$(152)

```

```

4672 PRINT@ (M,L),CHR$(158)
4682 PRINT@ (12,73),CHR$(158)
4692 PRINT@ (12,74),"o"
4702 PRINT@ (10,1),"o"
4712 IF T4="RM" THEN 5300
4722 L=T
4732 PRINT@ (13,49),"R"
4742 PRINT@ (4,43),"R"
4752 PRINT@ (9,9),"R"
4762 PRINT@ (8,30),"C2"
4772 N=NT
4782 PRINT@ (1,37),"ETAPA";L;"do";N
4792 PRINT@ (14,3),"A=";A(L)
4822 PRINT@ (16,3),"B=";B(L)
4812 PRINT@ (13,23),"C2"
4812 PRINT@ (17,3),"Fr=";FR(L)
4832 PRINT@ (18,3),"Q=";YU(L)
4842 GOTO 2542
4852 M=M(K)
4862 L=L(K)
4872 N1=K
4882 L=L+4
4892 K=2
4922 FOR J=L TO L+5 STEP 2
4912 FOR I=M-K TO M+K
4922 PRINT@ (I,J),CHR$(158)
4932 PRINT@ (I,J+1),CHR$(158)
4942 PRINT@ (M-K,J+1),CHR$(129)
4952 PRINT@ (M+K,J+1),CHR$(130)
4962 NEXT I
4972 K=K-1
4982 NEXT J
4992 PRINT@ (M-2,L-2),"-"
5022 PRINT@ (M,L+5),CHR$(152)
5012 PRINT@ (M+2,L-2),"+"
5022 FOR LI=L-4 TO L-1
5032 PRINT@ (M-1,LI),CHR$(158)
5042 PRINT@ (M+1,LI),CHR$(158)
5052 NEXT LI
5062 PRINT@ (M,L+1),"A0"
5072 PRINT@ (M-1,L-4),CHR$(120)
5082 PRINT@ (M,L-4),CHR$(134)
5092 PRINT@ (M,L-3)," "
5102 PRINT@ (M,L-2)," "
5112 PRINT@ (M,L-1)," "
5122 PRINT@ (M+1,L-4),CHR$(128)
5132 PRINT@ (M+2,L-4),CHR$(158)
5142 M=M+3
5152 L=L-4
5162 FOR J=L-3 TO L+3
5172 PRINT@ (M,J),CHR$(152)
5182 NEXT J
5192 FOR J=L-2 TO L+2
5222 PRINT@ (M+1,J),CHR$(152)
5212 NEXT J
5222 FOR J=L-1 TO L+1
5232 PRINT@ (M+1,J),CHR$(152)
5242 NEXT J
5252 PRINT@ (M+2,L),CHR$(152)
5262 PRINT@ (M+1,L),CHR$(130)

```

70

```

5270 PRINT$(M,L),CHR$(158)
5280 M1=M1+1
5290 GOTO 3530
5300 L=L+1
5310 PRINT$(0,30),"ETAPA";L;" de ";IN
5320 PRINT$(3,3),"A"
5330 PRINT$(4,1),A(L)
5340 PRINT$(5,3),"B"
5350 PRINT$(6,1),B(L)
5360 PRINT$(7,4),"Fr"
5370 PRINT$(8,1),FR(L)
5380 PRINT$(13,2),"Q=";YU(L)
5390 PRINT$(11,9),"R1"
5400 PRINT$(12,30),"C2"
5410 PRINT$(5,43),"C2"
5420 PRINT$(13,22),"R2"
5430 PRINT$(17,60),"R3"
5440 GOTO 2490
5450 PRINT$(12,32),"=";C2(L)
5460 PRINT$(13,26),R2(L)
5470 PRINT$(13,25),"="
5480 PRINT$(17,57),R3(L)
5490 PRINT$(11,4),R1(L)
5500 PRINT$(19,5),"
5510 GOTO 2790
5520 INPUT"ENTRADA INVALIDA. TECLEE CUALQUIER NUMERO";PH
5530 GOTO 40
5540 Q=L5:AN=ATN(2*R*I/(R^2-4*Q^2-I^2))+3.1415926
5550 AN=AN/2
5560 M=((R^2-4*Q^2-I^2)^2+(2*R*I)^2)^.25
5570 R1#=.5*(R+M+COS(AN))/Q
5580 R2#=.5*(R-M+COS(AN))/Q
5590 I1#=.5*(I+M*SIN(AN))/Q
5600 I2#=.5*(I-M*SIN(AN))/Q
5610 A(K)=-2*R1#*(4*TET*FC)
5620 A(K+N)=-2*R2
5630 B(K)=(R1#^2+I1#^2)*(4*TET*FC)^2
5640 B(K+N)=R2^2+I2^2
5650 RETURN
5660 FOR TX=13 TO 19
5670 FOR TY=0 TO 39 STEP 39
5680 PRINT$(TX,TY),"
5690 NEXT TY
5700 NEXT TX
5710 PRINT$(13,2)," "
5720 RETURN
5730 M=10;L=16
5740 FOR K=M TO M+5
5750 PRINT$(K,L),CHR$(158)
5760 NEXT K
5770 PRINT$(M+3,L)," "
5780 FOR J=L-3 TO L+3
5790 PRINT$(M+3,J),CHR$(152)
5800 PRINT$(M+2,J),CHR$(152)
5810 NEXT J
5820 PRINT$(M+2,L),CHR$(158)
5830 M=M+10
5840 FOR J=L-3 TO L+3
5850 PRINT$(M,J),CHR$(152)
5860 NEXT J

```

```

5070 FOR J=L+2 TO L+2
5880 PRINT@ (M+1, J), CHR$(150)
5990 NEXT J
5700 FOR J=L-1 TO L+1
5910 PRINT@ (M+1, J), CHR$(152)
5920 NEXT J
5930 PRINT@ (M+2, L), CHR$(150)
5940 PRINT@ (M+1, L), CHR$(150)
5950 PRINT@ (M, L), CHR$(159)
5960 RETURN
5970 FOR Y=1 TO N
5980 PRINT@ (4, 0), "A="; A(Y)
5990 PRINT@ (6, 0), "Q="; YU(Y)
6000 PRINT@ (8, 0), "Fr="; FR(Y)
6010 GOSUB 6220
6020 PRINT@ (5, 0), "B="; B(Y); PRINT@ (1, 38), "ETAPA"; Y; "de" IN
6030 PRINT@ (17, 0), " "
6040 INPUT " TECLÉE LOS VALORES DE C2 Y IHOI CORRESPONDIENTES A ESTA ETAPA"; C, T
U(Y)
6050 PRINT@ (7, 2), "IHOI="; TU(Y)
6060 R3(Y)=1000000/(SQR(B(Y))*C)
6070 R1(Y)=YU(Y)*R3(Y)
6080 C2(Y)=C
6090 R2(Y)=R1(Y)/TU(Y)
6100 KI(Y)=TU(Y)*A(Y)
6110 PRINT@ (3, 16), R1(Y)
6120 PRINT@ (11, 3), R2(Y)
6130 PRINT@ (3, 45), "="; R3(Y)
6140 PRINT@ (5, 48), "="; C; PRINT@ (17, 0), " "
6150 INPUT " SI NO LE SATISFACEN LOS VALORES, TECLÉE 1, EN OTRO CASO TECLÉE CUALQUIER
; YR
6160 IF YR=0 THEN 6190
6170 CLS
6180 GOTO 5980
6190 CLS
6200 NEXT Y
6210 RETURN
6220 FOR K=1 TO 78
6230 PRINT@ (12, K), CHR$(150)
6240 IF K<13 THEN 6260
6250 PRINT@ (2, K), CHR$(150)
6260 NEXT K
6270 M=12:L=1:GOSUB 6700
6280 M=12:L=13:GOSUB 6960
6290 M=12:L=23:GOSUB 6700
6300 M=12:L=43:GOSUB 6960
6310 M=12:L=54:GOSUB 6700
6320 M=12:L=69:GOSUB 6960
6330 M=7:L=13:GOSUB 7370
6340 M=7:L=41:GOSUB 7370
6350 M=7:L=67:GOSUB 6700
6360 M=4:L=14:GOSUB 6700
6370 FOR I=7 TO 11
6380 PRINT@ (1, 13), CHR$(146)
6390 PRINT@ (1, 27), CHR$(146)
6400 PRINT@ (1, 41), CHR$(146)
6410 PRINT@ (1, 54), CHR$(146)
6420 PRINT@ (1, 67), CHR$(146)
6430 PRINT@ (1, 79), CHR$(146)
6440 NEXT I

```

```

6450 PRINT@ (12, 13), CHR$(134)
6460 PRINT@ (12, 27), CHR$(134)
6470 PRINT@ (12, 41), CHR$(134)
6480 PRINT@ (12, 54), CHR$(134)
6490 PRINT@ (12, 67), CHR$(134):PRINT@ (7, 67), CHR$(128)
6500 PRINT@ (12, 79), CHR$(134)
6510 PRINT@ (7, 79), CHR$(129)
6520 PRINT@ (7, 41), CHR$(128):PRINT@ (7, 54), CHR$(129)
6530 FOR I=2 TO 7
6540 PRINT@ (I, 13), CHR$(148):PRINT@ (I, 79), CHR$(148)
6550 IF I=4 THEN 6570
6560 PRINT@ (I, 27), CHR$(148)
6570 NEXT I
6580 PRINT@ (7, 13), CHR$(140):PRINT@ (7, 27), CHR$(140):PRINT@ (4, 13), CHR$(140):PRI
70(7, 79), CHR$(140)
6590 PRINT@ (4, 27), CHR$(129):PRINT@ (2, 13), CHR$(128):PRINT@ (2, 79), CHR$(128)
6600 M=2:L=38:GOSUB 6700
6610 PRINT@ (3, 43), "R3"
6620 PRINT@ (11, 33), "R3"
6630 PRINT@ (11, 59), "R3"
6640 PRINT@ (6, 71), "R3"
6650 PRINT@ (3, 19), "R1"
6660 PRINT@ (11, 7), "R2"
6670 PRINT@ (5, 16), "C2"
6680 PRINT@ (5, 46), "C2"
6690 RETURN
6700 PRINT@ (M, L+1), CHR$(133)
6710 FOR J=L+2 TO L+11
6720 PRINT@ (M, J), CHR$(150)
6730 NEXT J
6740 PRINT@ (M, L+1), CHR$(133)
6750 FOR J=L TO L+1
6760 PRINT@ (M, J), CHR$(150)
6770 PRINT@ (M, J+12), CHR$(150)
6780 RETURN
6790 FOR K=M+1 TO M+5
6800 PRINT@ (K, L), CHR$(158)
6810 PRINT@ (K, L+1), CHR$(158)
6820 PRINT@ (K, L-1), CHR$(158)
6830 NEXT K
6840 PRINT@ (M, L), CHR$(158)
6850 PRINT@ (M+5, L), CHR$(158)
6860 INPUT M, L
6870 FOR N=M TO M+6
6880 PRINT@ (N, L), CHR$(155)
6890 NEXT N
6900 PRINT@ (M+3, L), " "
6910 FOR J=L-3 TO L+3
6920 PRINT@ (M+3, J), CHR$(152)
6930 PRINT@ (M+2, J), CHR$(152)
6940 NEXT J
6950 PRINT@ (M+2, L), CHR$(158)
6960 L=L+4
6970 K=1
6980 FOR J=L TO L+5 STEP 2
6990 FOR I=K-K TO M+K
7000 PRINT@ (I, J), CHR$(150)
7010 PRINT@ (I, J+1), CHR$(150)
7020 PRINT@ (M-K, J+1), CHR$(129)
7030 PRINT@ (M-K, J-1), CHR$(150)

```

```

7040 NEXT I
7050 K=K-1
7060 NEXT J
7070 PRINT@ (M-2,L-2), "--"
7080 PRINT@ (M,L+5), CHR$(150)
7090 PRINT@ (M+2,L-2), "+"
7100 FOR LI=L-4 TO L-1
7110 PRINT@ (M-1,LI), CHR$(150)
7120 PRINT@ (M+1,LI), CHR$(150)
7130 NEXT LI
7140 PRINT@ (M,L+1), "AO"
7150 PRINT@ (M-1,L-4), CHR$(123)
7160 PRINT@ (M,L-4), CHR$(134)
7170 PRINT@ (M,L-3), " "
7180 PRINT@ (M,L-2), " "
7190 PRINT@ (M,L-1), " "
7200 PRINT@ (M+1,L-4), CHR$(128)
7210 PRINT@ (M+2,L-4), CHR$(158)
7220 M=M+3
7230 L=L-4
7240 FOR J=L-3 TO L+3
7250 PRINT@ (M,J), CHR$(152)
7260 NEXT J
7270 FOR J=L-2 TO L+2
7280 PRINT@ (M+1,J), CHR$(150)
7290 NEXT J
7300 FOR J=L-1 TO L+1
7310 PRINT@ (M+1,J), CHR$(152)
7320 NEXT J
7330 PRINT@ (M+2,L), CHR$(150)
7340 PRINT@ (M+1,L), CHR$(150)
7350 PRINT@ (M,L), CHR$(158)
7360 RETURN
7370 FOR J=L TO L+4
7380 PRINT@ (M,J), CHR$(150)
7390 PRINT@ (M,J+9), CHR$(150)
7400 NEXT J
7410 PRINT@ (M,L+5), CHR$(133)
7420 PRINT@ (M,L+8), CHR$(135)
7430 PRINT@ (M+1,L+5), CHR$(146)
7440 PRINT@ (M+1,L+8), CHR$(140)
7450 PRINT@ (M-1,L+8), CHR$(148)
7460 PRINT@ (M-1,L+5), CHR$(148)
7470 PRINT@ (M,L+6), " "
7480 PRINT@ (M,L+7), " "
7490 RETURN

```

```

10 REM PROGRAMA PARA LA SINTESIS DE FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE
20 REM          FILTROS ELIPTICOS PASA BAJAS
30 CLS
40 FOR IM=5 TO 65
  J PRINT@ (11, IM), CHR$(150)
60 IF IM<25 THEN 120
70 PRINT@ (2, IM), CHR$(150)
80 IF IM>20 THEN 100
90 PRINT@ (4, IM), CHR$(150)
100 NEXT IM
110 FOR IN=11 TO 0 STEP -1
120 PRINT@ (IN, 5), CHR$(148)
130 IF IN<2 THEN 170
140 PRINT@ (IN, 25), CHR$(148)
150 IF IN<9 THEN 170
160 PRINT@ (IN, 40), CHR$(148)
170 NEXT IN
180 FOR IP=40 TO 62
190 PRINT@ (9, IP), CHR$(150)
200 NEXT IP
210 PRINT@ (11, 25), CHR$(140)
220 PRINT@ (9, 40), CHR$(140)
230 PRINT@ (11, 5), CHR$(140)
240 PRINT@ (11, 40), CHR$(140)
250 PRINT@ (2, 5), CHR$(140)
260 PRINT@ (4, 5), CHR$(140)
270 PRINT@ (2, 25), CHR$(140)
280 PRINT@ (4, 20), CHR$(127):PRINT@ (5, 20), CHR$(131):PRINT@ (5, 23), CHR$(133)
  70 PRINT@ (5, 24), CHR$(150):PRINT@ (5, 25), CHR$(140):PRINT@ (5, 21), CHR$(150)
  20 PRINT@ (5, 22), CHR$(150):PRINT@ (11, 20), CHR$(132):PRINT@ (12, 20), "Fa"
310 PRINT@ (0, 2), "IG(jw) IdB"
320 PRINT@ (12, 25), "Fp"
330 PRINT@ (12, 40), "Fs"
340 PRINT@ (11, 07), "F"
350 PRINT@ (2, 3), "M"
360 PRINT@ (4, 3), "m"
370 PRINT@ (9, 30), "c"
380 FOR LT=3 TO 3
390 PRINT@ (LT, 30), CHR$(149)
400 NEXT LT
410 PRINT@ (2, 30), CHR$(136)
420 PRINT@ (9, 30), CHR$(138)
430 PRINT@ (5, 31), "RES"
440 PRINT@ (1, 19), "E L A N T I D U L A D E D I S E N O"
450 PRINT@ (0, 51), "L"
460 PRINT@ (13, 0), "ESTE PROGRAMA ES UN AUXILIAR EN EL CALCULO DE FILTROS ACTI
  2"
470 PRINT "ELIPTICOS PASO BAJAS."
480 PRINT "TECLEE CONFORME LA COMPUTADORA LO PIDA, LOS DATOS PERTINENTES."
490 PRINT@ (18, 0), "
500 INPUT "MAGNITUD DEL RIZO EN LA BANDA PASANTE, EN DECIBELES (Rdb)"; R:GOSUB
  740
510 IF R<3 THEN 710
  20 IF R<=0 THEN 710
530 PRINT@ (2, 11), CHR$(136):PRINT@ (4, 11), CHR$(133):PRINT@ (3, 10), "Rdb="; R
540 PRINT@ (12, 0), "
550 INPUT "FRECUENCIA QUE LIMITA LA BANDA DE OSCILACION EN HERTZ (Fa)"; F:
560 IF F<=2 THEN 570
570 PRINT@ (3, 40), "Fa="; F:
580 GOTO 500

```

```

590 PRINT(3,40),"Fa=";FP
600 GOSUB 740
610 INPUT " FREQUENCIA QUE INICIA LA BANDA DE SUPRESION (Fs)EN HERTZ";FS
620 IF FS<FP THEN 690
630 PRINT(3,40),"Fs=";FS
640 GOSUB 740
650 INPUT " PERDIDA EN DECIBELES EN LA BANDA DE TRANSISION (Pdb
)" ;PD
660 PRINT(7,40),"Pdb=";PD
670 GOSUB 740
680 GOTO 790
690 INPUT"ENTRADA INVALIDA PARA UN FILTRO PASO BAJAS,TECLEE CUALQUIER NUMERO";
ER
700 GOTO 600
710 INPUT" MAGNITUD DEL RIZO IMPRACTICA TECLEE (1) PARA CONTINUAR";PL
720 GOSUB 740
730 GOTO 520
740 FOR I=13 TO 22
750 PRINT(I,0),"
760 NEXT I
770 PRINT(12,0)," "
780 RETURN
790 DIM A(20),B(20),C(20)
800 FJ=6.283185307*SQR(FS*FP)
810 K=FP/FS
820 K1=SQR(1-K^2)
830 K2=SQR(K1)
840 Q0=.5*(1-K2)/(1+K2)
850 Q=Q0+3*Q0^5+15*Q0^9+150*Q0^13
860 D=(10^(.1*PD)-1)/(10^(.1*R)-1)
870 N=LOG(16+D)/LOG(1/Q)
880 N=N\1+1
890 PRINT"EL ORDEN ADECUADO PARA EL FILTRO ES";N
900 INPUT"PARA CONTINUAR TECLEE CUALQUIER NUMERO ";HJ
910 CLS
920 D1=10^(.05*R)
930 DE=.5*LOG((D1+1)/(D1-1))/N
940 IF (N/2)-(N/2)\1>0 THEN TR=2 ELSE TR=0.5
950 IF TR=.5 THEN P=N/2 ELSE P=(N-1)/2
960 S1=0
970 S2=0
980 FOR I=0 TO 12
990 X=DE*(2+I+1)
1000 GOSUB 1400
1010 S1=S1+X*(Q^(I*(I+1)))*((-1)^I
1020 IF I=2 THEN 1060
1030 Y=Q+I*DE
1040 GOSUB 1420
1050 S2=S2-Y*((-1)^I)*Q^(I^2)
1060 NEXT I
1070 S0=S*(Q^(.25))*.51/(2+S2+1)
1080 S0=ABS(S0)
1090 S=SQR((1+K*S0^2)*(1+(S0^2)/K))
1100 FOR I=1 TO P
1110 S3=0:S4=0
1120 FOR J=0 TO 12
1130 MU=3.141592653*(I-TR)/N
1140 S3=S3+SIN((2+J+1)*MU)+((-1)^J)*Q^(J+(J+1))
1150 IF J=0 THEN 1170

```



```
1160 S4=S4+COS(2*J*MU)*((-1)^J)*(Q*(J^2))
1170 NEXT J
1180 WI=2*(Q^(.25))*S3/(1+2*S4)
1190 VI=SQR((1-K*WI^2)*(1-(WI^2)/K))
1200 C(I)=(FJ^2)*((1/WI)^2)
1210 DN=1+(S0*WI)^2
1220 A(I)=FJ*(2*S0*VI/DN)
1230 B(I)=(FJ^2)*((S0*VI)^2+(WI*W)^2)/(DN^2)
1240 NEXT I
1250 PR=1
1260 FOR I=1 TO P
1270 PR=PR*(B(I)/C(I))
1280 NEXT I
1290 IF TR=0 THEN HO=S0*PR ELSE HO=PR/(10^(.05*R))
1300 CO=FJ*S0
1310 IF TR=0 THEN PRINT"EXISTE UN POLO REAL EN -"150
1320 PRINT"PR=";PR
1330 PRINT"HO=";HO
1340 FOR I=1 TO P
1350 PRINT"A(";I;")=";A(I)
1360 PRINT"B(";I;")=";B(I)
1370 PRINT"C(";I;")=";C(I)
1380 NEXT I
1390 END
1400 X=(EXP(X)-EXP((-1)*X))/2
1410 RETURN
1420 Y=(EXP(Y)+1/EXP(Y))/2
1430 RETURN
```



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

TEORIA Y DISEÑO DE FILTROS ANALOGICOS Y DIGITALES

LABORATORIO  
PRIMERA PARTE

AGOSTO, 1985.



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

TEORIA Y DISEÑO DE FILTROS ANALOGICOS Y DIGITALES

L A B O R A T O R I O

FILTROS PASIVOS

MARIO A. IBARRA PERYRA

AGOSTO, 1985

## OBTENCION DE GRAFICAS DE RESPUESTA A LA FRECUENCIA PARA REDES DE 4 TERMINALES

La gráfica de respuesta a la frecuencia puede ser el resultado del proceso de análisis de un circuito ya existente o puede ser el "dato" que sirva de punto de partida para el diseño de un cuadripolo.

Para conocer la respuesta a la frecuencia de una red se debe excitar a ésta con una señal. De entre las muchas señales que pueden usarse como excitación en esta caso sólo mencionaremos a tres:

1. La señal senoidal teóricamente pura.
2. La señal impulso.
3. La señal ruido blanco.

Se acostumbra usar la onda senoidal porque se supone o se considera que mantiene su frecuencia en un valor único y constante mientras no accionemos los controles del generador de señales y aún en el caso de mover éstos, sólo genera una frecuencia a la vez.

La función impulso  $\delta(t)$  es útil porque teóricamente contiene todas las frecuencias con la misma amplitud, ya que si:

$$f(t) = \delta(t)$$
$$F(\omega) = \mathcal{F} f(t) = 1$$

de esta forma, la función de transferencia:

$$H(\omega) = \frac{R(\omega)}{F(\omega)} = \frac{R(\omega)}{1} = R(\omega) = \mathcal{F} r(t)$$

y  $r(t)$  es lo que obtenemos en un osciloscopio, a la salida del circuito, cuando a su entrada aplicamos un impulso.

El problema está en que no es posible generar un sólo impulso de duración cero.

Afortunadamente estamos acostumbrados a que en la ingeniería no existe nada absolutamente exacto (ya que la exactitud absoluta es muy cara), por lo que en vez de generar un sólo impulso, producirémos un tren de pulsos lo más angostos posible y tan separados entre sí que el efecto causado por uno de estos pulsos en el filtro (o sea  $r(t)$ ) se desvanezca antes de que llegue el siguiente pulso. Todo el problema, se concreta en calcular la transformada de la señal obtenida a la salida del filtro, (que generalmente aparece en un osciloscopio) y eso será la función de transferencia.

La ventaja de esta técnica es que se puede realizar en fracciones de segundo y no da tiempo a que se presenten efectos parásitos como las reverberaciones y el calentamiento excesivos de los componentes.

La desventaja es que un pulso alto y delgado puede resultar perjudicial para algunos semiconductores o simplemente puede llevar a la red en prueba a regiones de trabajo alineales lo cual perjudica la exactitud de los resultados.

La señal de ruido blanco se usa como excitación debido a que teóricamente contiene todas las frecuencias con una amplitud constante. Sin embargo, el ruido producido en los generadores de ruido (random noise generator) está limitado en frecuencia por el alcance de frecuencia de los amplificadores y moduladores contenidos dentro de los mismos generadores de ruido.

Es por eso que para esta prueba se debe uno asegurar que el ruido usado cubra todo el rango de frecuencias de interés con una amplitud aproximada constante.

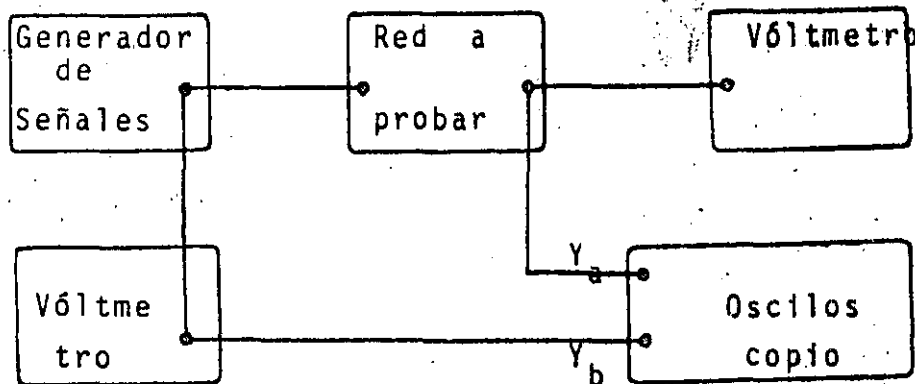
Otra desventaja del ruido como señal de prueba es que las gráficas no salen como líneas lisas sino que resultan muy-- "arrugadas" por lo que no se pueden usar para mediciones muy precisas.

El campo de aplicación de las pruebas con ruido blanco es generalmente la acústica o cualquier otro caso donde se requieran mediciones rápidas y no demasiado exactas.

Mencionaremos ahora los procedimientos de laboratorio mas usuales para obtener curvas de respuesta a la frecuencia.

### TECNICA DE LOS DOS VÓLTMETROS PARA OBTENER GRAFICAS DE RESPUESTA A LA FRECUENCIA.

1.-Conéctese el siguiente arreglo:



2.-Se selecciona una banda de frecuencias que de preferencia cubra un número entero de octavas o décadas, aunque esto no es condición indispensable.

3.-Se ajusta el voltaje de la señal generada a un valor tal que las dos senoides vistas en el osciloscopio se aprecien sin distorsión. Si las ondas se muestran achatadas en las crestas, es indicio de que estamos llevando al dispositivo a regiones de trabajo a lineales (o sea que se están produciendo armónicas)-- y las lecturas de los voltímetros serán erróneas. Una deformación de las ondas en la parte media, a veces puede corregirse ajustando la amplitud de la excitación, pero generalmente no ocurre así y entonces el dispositivo se considera no lineal y

la prueba no es válida.

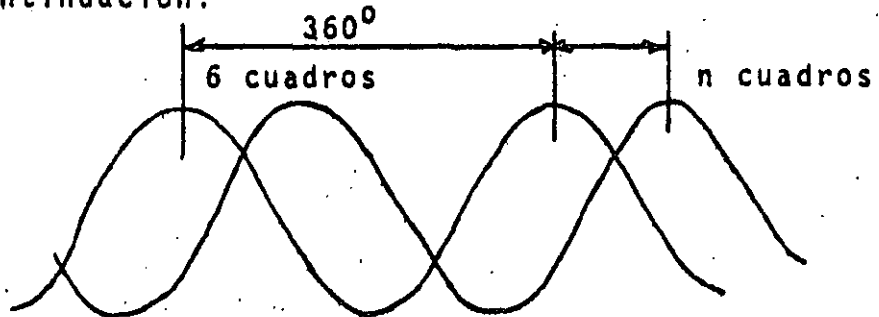
4.-Elabórese y llénese una tabla como la siguiente:

frec	V entr.	V sal	fase $\beta$	ganancia

La ganancia se calcula con la fórmula usual:

$$\text{Ganancia (dB)} = 20 \text{ Log}_{10} \frac{V \text{ sal}}{V \text{ entr.}}$$

5.-Para medir la fase se presentan en el osciloscopio las dos señales (los voltajes de entrada y salida del circuito) como se aprecia a continuación:

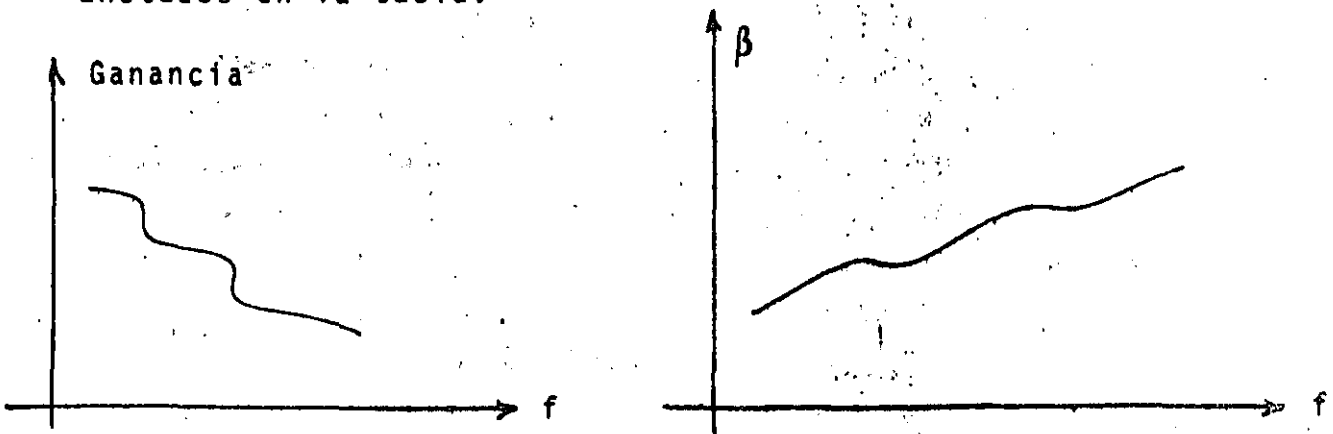


Con los valores leídos en la pantalla se resuelve la siguiente proporción (regla de 3):

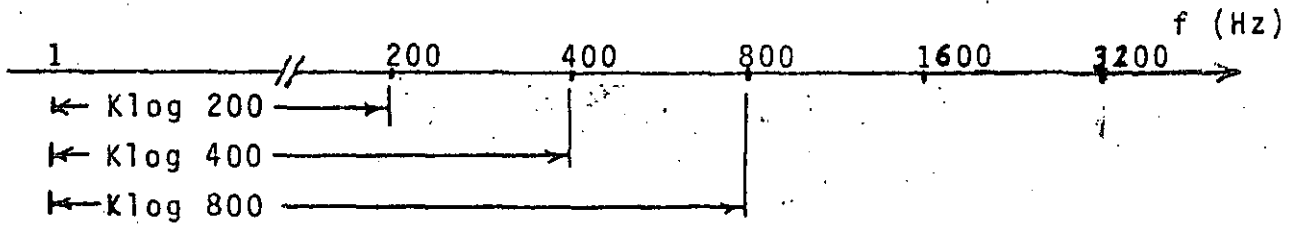
$$\frac{360^\circ}{6 \text{ cuadros}} = \frac{\beta^\circ}{n \text{ cuadros}}$$

$$\beta^\circ = \frac{360^\circ \times n \text{ cuadros}}{6 \text{ cuadros}}$$

6.-Se construyen las gráficas correspondientes a los valores anotados en la tabla:



La escala horizontal es logarítmica y está graduada en octavas, esto es:

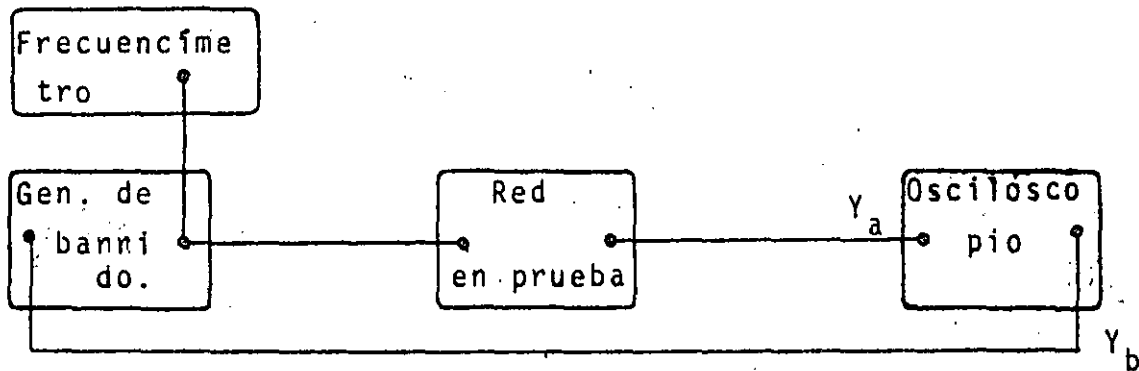


El factor (K) depende del tamaño de la gráfica que se desea. La escala vertical es lineal y está en dB.

8.-Se interpreta la gráfica según las normas acostumbradas.

### TECNICA DEL GENERADOR DE BARRIDO Y EL OSCILOSCOPIO PARA OBTENER CURVAS DE RESPUESTA A LA FRECUENCIA.

1.-Armese el siguiente arreglo:

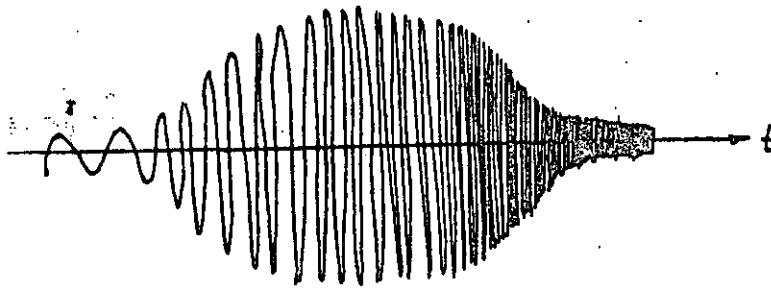


En este caso, no se obtendrá una curva de ganancia en dB contra frecuencia, sino de voltaje de salida contra frecuencia.

2.-Opérense los controles del generador para que actúe como generador de barrido de modo que automáticamente tome todos los valores de frecuencia que nos interese explorar.

3.-Ajústese el osciloscopio para trabajar con barrido 'x' externo; este será alimentado con una señal proveniente del generador y tiene un voltaje instantaneo proporcional al valor de la frecuencia producida. Esta señal es generalmente un diente de sierra. De este modo, el osciloscopio hará un barrido en sincronía con el barrido de frecuencia del generador de señales y en su pantalla aparecerá una gráfica semejante a la siguiente:





4.-La señal aparecida en el osciloscopio debe ser una senoide pura de amplitud cambiante. Si la onda resulta achatada, será indicio de que estamos operando al dispositivo en prueba en regiones alineales; deberá entonces reducirse el voltaje de la señal de entrada hasta que la salida sea senoidal.

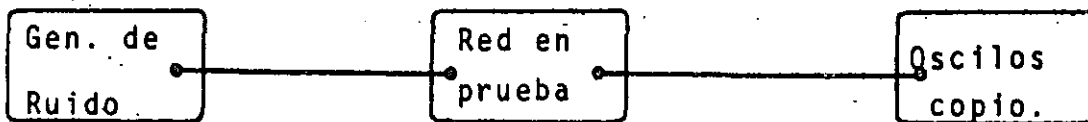
La envolvente superior de la figura aparecida en la pantalla del osciloscopio es la curva de respuesta a la frecuencia---- que en el eje vertical lleva la variable  $V_{sal}$ .

Si durante el desarrollo del experimento se mantuvo constante el voltaje de entrada, entonces esta curva equivale a la de  $V_{sal}$  contra la frecuencia.

$V_{entr}$

#### TECNICA DEL GENERADOR DE RUIDO Y EL ANALIZADOR DE ESPECTRO PARA OBTENER CURVAS DE RESPUESTA A LA FRECUENCIA.

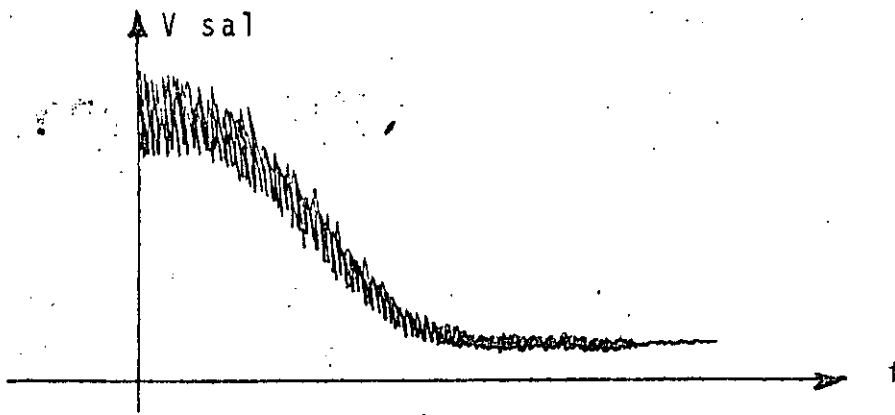
1.-Armese el siguiente arreglo:



En este caso, el generador de ruido produce automática y simultaneamente todas las frecuencias.

2.-Ajústese el analizador de espectros para explorar el rango de interés.

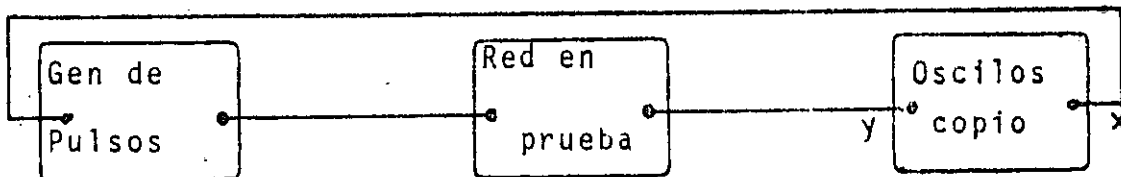
3.-En la pantalla del analizador de espectros aparecerá una figura como la que sigue:



Si pasamos una línea continua aproximadamente por el centro de las "arrugas", esta será la curva de voltaje de salida contra frecuencia del circuito probado.

### TECNICA DE LA RESPUESTA AL IMPULSO PARA OBTENER LA RESPUESTA A LA FRECUENCIA.

1.-Alámbrase el siguiente circuito de pruebas:



2.-Ajústese la anchura y la separación de los pulsos hasta lo grar:

- La mínima anchura de pulsos posible.

- La máxima amplitud de la respuesta del circuito (Vista en el osciloscopio).

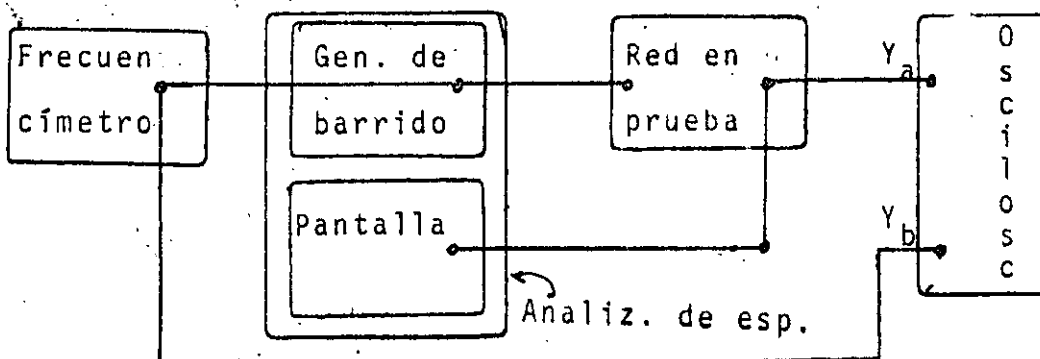
- Que la respuesta a un pulso desaparezca antes de que se inicie el siguiente pulso.

3.-Cópiese en un papel la gráfica obtenida en el osciloscopio

4.-Procédase a calcular la transformada de Fourier de tal gráfica y esa será la función de transferencia.

### METODO DEL ANALIZADOR DE ESPECTROS PARA OBTENER LA RESPUESTA A LA FRECUENCIA DE UN CUADRIPOLO.

1.- Conéctense los instrumentos como se muestra en seguida:



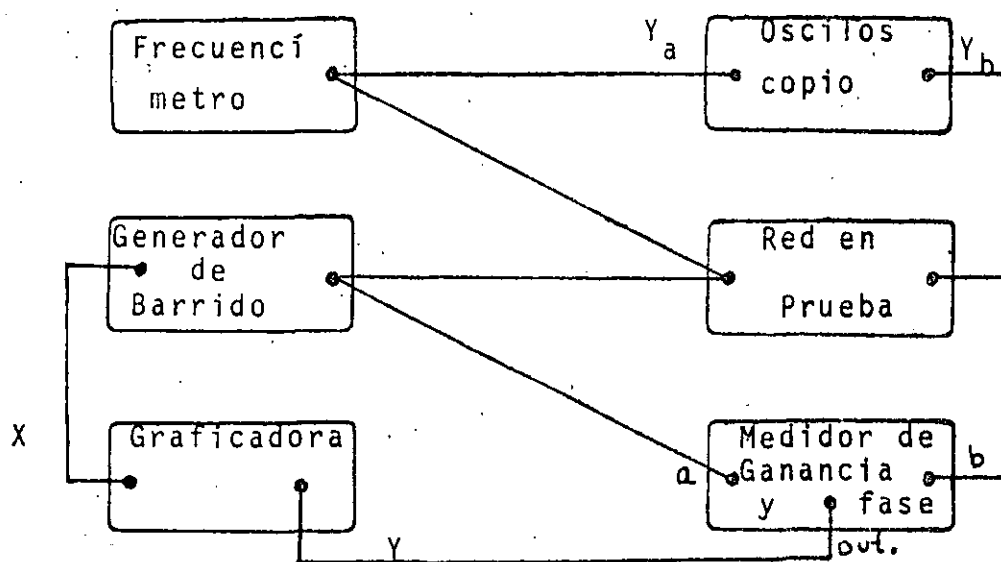
2.-Ajústese el rango de barrido del analizador a la banda de frecuencias que se desea explorar. En el osciloscopio se deben ver dos senoides puras de frecuencia variable. Si las ondas están achatadas, la amplitud de la señal de entrada es excesiva.

3.-La salida de la red a probar, alimentada al display del analizador de espectros nos dará directamente la gráfica de voltaje de salida contra frecuencia.

4.-Si el voltaje de entrada a la red en prueba es constante a lo largo de toda la banda de frecuencias, la gráfica obtenida equivale a la de  $V_{sal}/V_{ent}$  contra frecuencia.

#### METODO DEL MEDIDOR DE GANANCIA Y FASE PARA OBTENER CURVAS DE RESPUESTA A LA FRECUENCIA.

1.-Conéctense los aparatos como se ilustra en la sig. fig:



2.-El generador de barrido debe producir la gama de frecuencias que deseamos explorar.

3.-En el osciloscopio, debemos comprobar que las señales de entrada y salida de la red a probar son senoidales sin deformaciones apreciables; en caso contrario, se ajusta el voltaje de la señal de excitación hasta eliminar la distorsión.

4.-Se ajustan los controles de amplitud y frecuencia del medidor de ganancia y fase a los rangos usados en la prueba y en los displays alfanuméricos de su pantalla se podrá leer la ganancia en dB y la fase en grados directamente. Esta técnica debe dar resultados similares a los obtenidos con la técnica

de los dos vóltmetros.. la diferencia entre las dos gráficas es que con el medidor de ganancia y fase la escala horizontal es lineal y con el método de los dos vóltmetros, se usó una escala horizontal logarítmica en octavas.

5.-La graficadora X-Y se debe encender solo después de haber ajustado:

- a) Los controles de escalas X e Y al máximo.
- b) Los vernieres al mínimo.
- c) Los controles de cero al centro.

todo esto es para prevenir choques de la regla contra los toques extremos de su recorrido.

6.-Después de encender la graficadora se reajustan las escalas X e Y y la posición del cero hasta que la gráfica tenga las proporciones (largo y ancho) deseadas.

7.-Se debe ajustar también la velocidad del barrido de frecuencia a un valor lo bastante bajo (generalmente unos 5 segundos por barrido) para que el graficador tenga tiempo de moverse con comodidad. Recuérdese que el graficador es un aparato movido a motor, con mecanismos de engranes y bandas, de gran inercia y no puede dar mas de un recorrido en tres segundos con razonable precisión

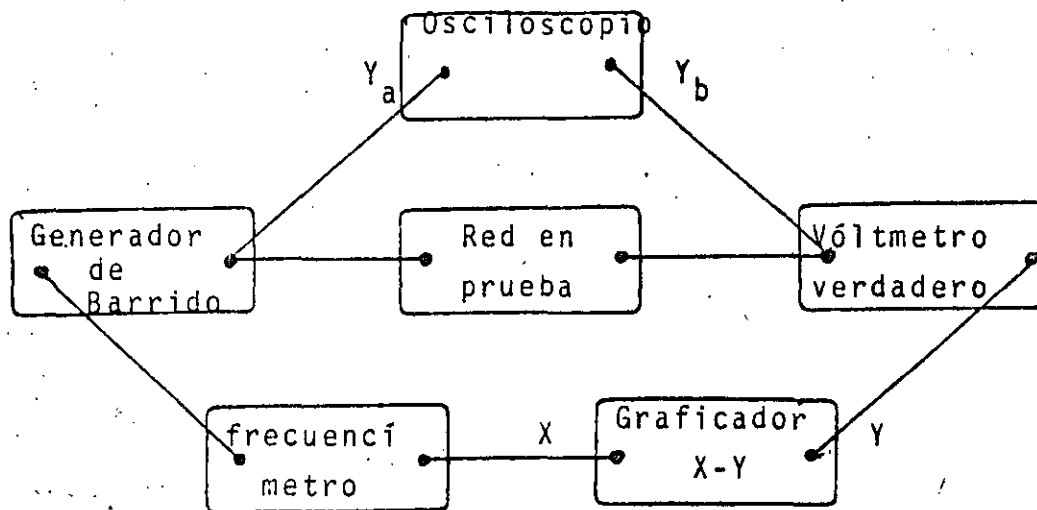
8.-Si el generador de barrido tiene control de arranque y parada, se puede subir y bajar la pluma del trazador sin ningún problema en el momento adecuado; pero si el generador de barrido carece de este control, entonces habrá que esperar cuidadosamente el momento en que la pluma esté al inicio de la gráfica (extremo izquierdo ) para bajarla y luego subirla cuando la pluma llegue a su extremo derecho. Si no se sube la pluma, esta regresa por otro camino diferente al de ida, pintando una raya "loca" y echando a perder la gráfica.

#### METODO DEL GENERADOR DE BARRIDO Y LOS CONVERTIDORES PARA OBTENER UNA CURVA DE RESPUESTA A LA FRECUENCIA.

1.-Se conectan los aparatos como se ilustra en la siguiente figura:

2.-Se ajusta el generador de barrido para cubrir el rango de frecuencias deseado y a una velocidad de barrido baja (El barrido completo debe durar aprox unos 5 seg).

3.-El voltaje del generador se gradúa de forma que no haya---



distorsión en las señales vistas en la pantalla del osciloscopio.

4.-El convertidor frecuencia-Voltaje tiene un selector que nos permite escoger hasta tres dígitos de su display para convertirlos a voltaje de directa por lo que se debe cuidar de que todas las lecturas del mencionado display estén contenidas en esos tres dígitos, de lo contrario, la conversión será errónea.

5.-El convertidor frecuencia-voltaje tiene otro control para ajustar el tiempo que tarda en hacer una conversión, que puede ser desde 0.1 seg hasta 10 seg. Por este motivo, hay que ajustar el convertidor a la máxima velocidad (mínimo tiempo) ya que de lo contrario, la gráfica saldrá muy escalonada

6.-La salida de la red en prueba está conectada a un voltmetro que tiene incorporado en su circuito un rectificador de precisión para convertir la señal de alterna en VCD. que nos es entregada para que alimentemos el eje vertical de la graficadora, ya que esta no puede recibir voltajes de alterna de más de tres Hz, porque su sistema de movimiento mecánico no los obedecería.

7.-Se ajustan los controles de la graficadora para que la curva salga del tamaño deseado, con lo que obtendremos la gráfica de voltaje de salida contra frecuencia, que se convierte automáticamente en  $V_{sal}/V_{entr}$  contra frecuencia si el voltaje de entrada es constante.



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**TEORIA Y DISEÑO DE FILTROS ANALOGICOS Y DIGITALES  
LABORATORIO**

**FILTROS ACTIVOS**

**BORIS ESCALANTE RAMIREZ**

**AGOSTO, 1985**

## 6.2 FILTROS ACTIVOS

En esta sección se presenta el diseño y realización de varios filtros, bajo distintas aproximaciones, destinados a ser llevados a la práctica en el tiempo destinado para laboratorio.

### 6.2.1. FILTRO PASO ALTAS.

Se pretende diseñar y realizar un filtro paso-altas bajo una aproximación Chebyshev con las siguientes características:

frecuencia de corte ( $f_p$ )	500 Hz
frecuencia de supresión ( $f_s$ )	250 Hz
pérdida en decibeles	30 db
rizo	3 db

La plantilla de diseño para estos requerimientos es la siguiente

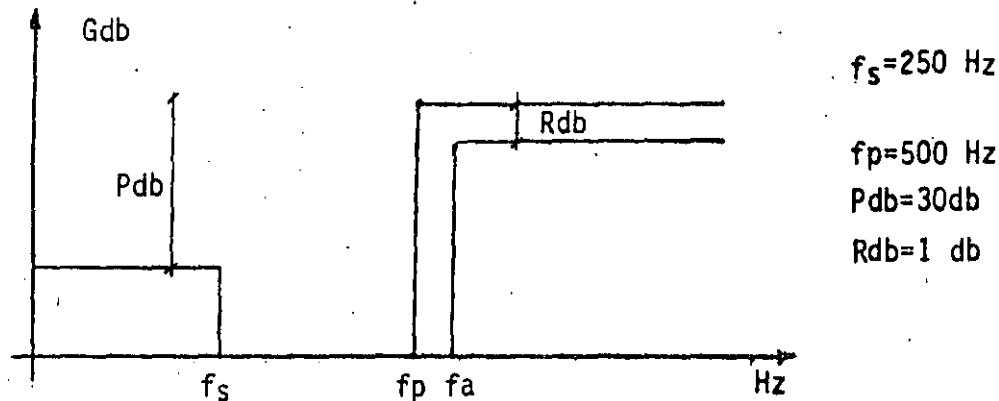


Figura 6.2.1 Plantilla de diseño para el filtro paso altas Chebyshev

En este caso, como el rizo es de 3 db, la frecuencia de corte ( $f_p$ ) y la frecuencia de fin de rizo ( $f_a$ ) son las mismas, es decir que  $f_p = f_a$

El primer paso para el diseño, es transformar la plantilla anterior a una plantilla de un filtro paso-bajas normalizado a  $\omega_p = 1 \text{ rad/seg}$  donde  $\omega_p = 2\pi f_p$

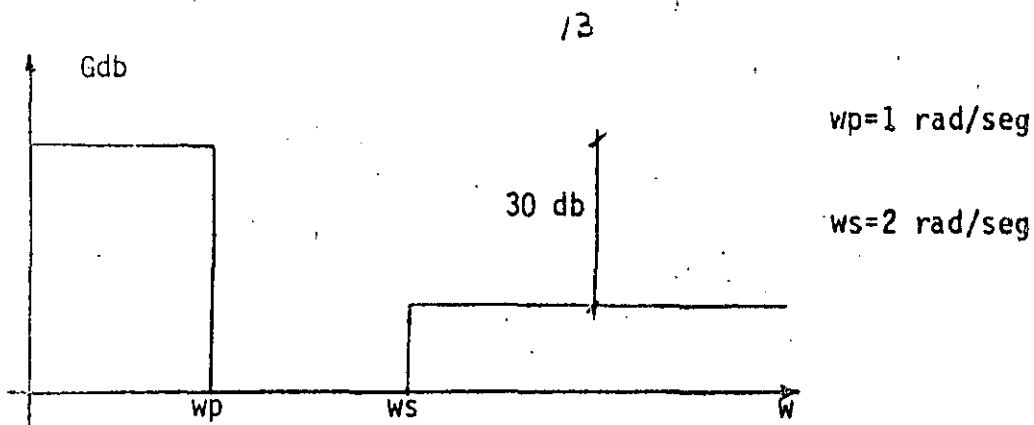


Figura 6.2.2. Plantilla de diseño para el filtro paso bajas normalizado.

A continuación se obtiene el orden del filtro paso bajas normalizado.

$$n = \left\lceil \frac{\text{ang cos h} \left( \frac{1}{E} \sqrt{10^{P_{db}-1}} \right)}{\text{ang cos h} \left( \frac{w_s}{w_p} \right)} \right\rceil + 1 \quad 6.2.1$$

Como el rizo es de 3 db, entonces  $E = 1$ .

El resultado de la ecuación 6.2.1 es  $n=4$

Conociendo el orden del filtro, y con ayuda de las tablas de los coeficientes de los factores de filtros Chebyshev con rizo de 3db, se obtiene la función de transferencia para el filtro paso-bajas normalizado: 6.2.2.

$$H(s) = \frac{(0.950309)^2}{s^2 + (0.179248)(0.950309)s + (0.950309)^2} \frac{(0.442696)^2}{s^2 + (0.928942)(0.442696)s + (0.442696)^2}$$

El siguiente paso consiste en transformar y desnormalizar la función de transferencia anterior a la función de transferencia del filtro paso-altas mediante la siguiente transformación:

$$G(s) = H \left( \frac{w_p}{s} \right) \quad 6.2.3.$$

donde  $w_p = 2\pi 500 \text{ rad/seg}$



De donde obtenemos:

$$G(s) = \frac{s^2}{s^2 + 592.5696s + 10928739.17} \cdot \frac{s^2}{s^2 + 6592.238s + 50360327.97} \quad 6.2.4$$

que es la función de transferencia del filtro paso altas con las especificaciones requeridas en el planteamiento del problema.

La realización física de la función de transferencia se llevará a cabo con dos etapas de segundo orden conectadas en cascada, empleando la configuración realimentación múltiple en cada una de ellas. Dicha configuración se muestra en la figura 6.2.3.

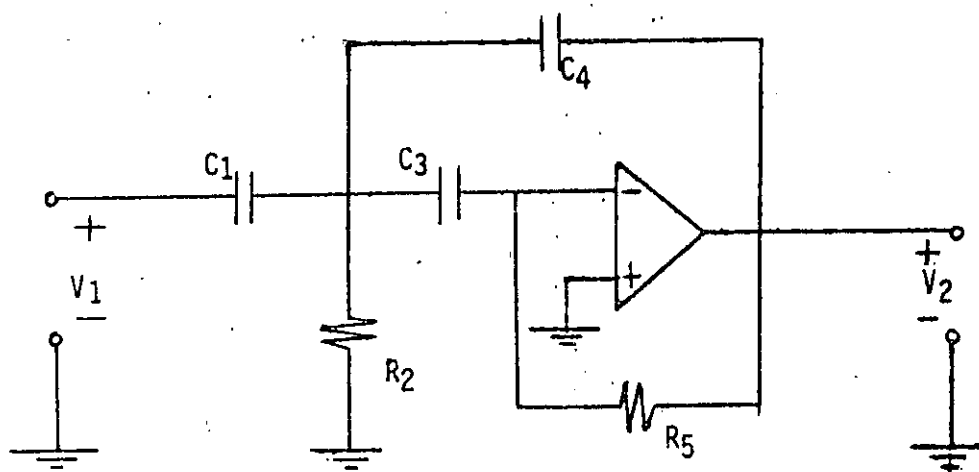


Figura 6.2.3. Configuración realimentación múltiple para una etapa de 2° orden de un filtro paso-altas.

La función de transferencia para la configuración de la figura 6.2.3 es la siguiente:

$$H(s) = \frac{-\frac{c_1}{c_4} s^2}{s^2 + \frac{1}{R_5} \left( \frac{c_1}{c_3 c_4} + \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_3} \right) s + \frac{1}{R_2 R_5 c_3 c_4}} \quad 6.2.5$$

donde

$$H_0 = \frac{c_1}{c_4} \quad 6.2.6$$

$$\omega_0 = \left( \frac{1}{R_2 R_5 c_3 c_4} \right)^{1/2} \quad 6.2.7$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{R_2}{R_3}} \left( \frac{c_1}{\sqrt{c_3 c_4}} + \sqrt{\frac{c_3}{c_4}} + \sqrt{\frac{c_4}{c_3}} \right) \quad 6.2.8$$

El procedimiento para asignar los valores adecuados a cada elemento es el siguiente:

$$\text{Se elige } c_1 = c_3 = c \quad 6.2.9$$

entonces se calcula

$$R_5 = \frac{1}{\alpha \omega_0 c} (2H_0 + 1) \quad 6.2.10$$

$$R_2 = \frac{\alpha}{\omega_0 c (2H_0 + 1)} \quad 6.2.11$$

$$c_4 = \frac{c_1}{H_0} \quad 6.2.12$$

Para la 1a. etapa, se tiene que si  $H_0 = 1$

$$c_1 = c_3 = c_4 = 0.1 \mu\text{f} \quad \omega_0 = \left[ 1.09288 \times 10^7 \right]^{1/2} \text{ rad/seg}$$

$$R_5 = 50.627 \text{ k}\Omega \quad \alpha = 0.17925$$

$$R_2 = 180.737 \Omega$$

De igual forma, para la 2a. etapa, si  $H_0 = 1$

$$c_1 = c_3 = c_4 = 0.01 \mu\text{f} \quad \omega_0 = \left[ 5.03603 \times 10^7 \right]^{1/2} \text{ rad/seg}$$

$$R_5 = 45.508 \text{ k}\Omega \quad \alpha = 0.92894$$

$$R_2 = 4.363 \text{ k}\Omega$$

### 6.2.2 FILTRO PASO - BANDA

Ahora se mostrará el diseño y realización de un filtro paso-banda con aproximación Butterworth que cumpla con los requerimientos muestrales en la plantilla de diseño de la figura 6.2.4

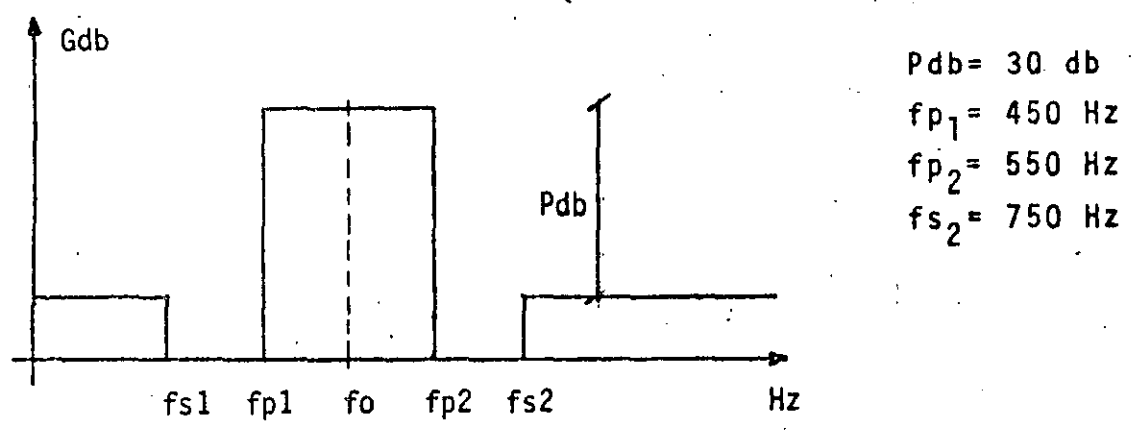


Figura 6.2.4 Plantilla de diseño del filtro paso-banda Butterworth

A partir de los datos de la plantilla de diseño se pueden obtener los parámetros restantes del filtro

$$f_0 = \sqrt{fp_1 \cdot fp_2} = 497.493 \text{ Hz} \tag{6.2.13}$$

$$fs_1 = \frac{f_0^2}{fs_2} = 330 \text{ Hz} \tag{6.2.14}$$

$$Q = \frac{f_0}{fp_2 - fp_1} = 4.97493 \tag{6.2.15}$$

Partiendo de estos valores, se encuentra la plantilla de diseño del filtro psao-bajas correspondiente, normalizado a  $w_p = 1$  rad/seg, como se muestra en la figura 6.2.5, mediante la transformación:

$$w' = Q \left( \frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w} \right) \tag{6.2.16}$$

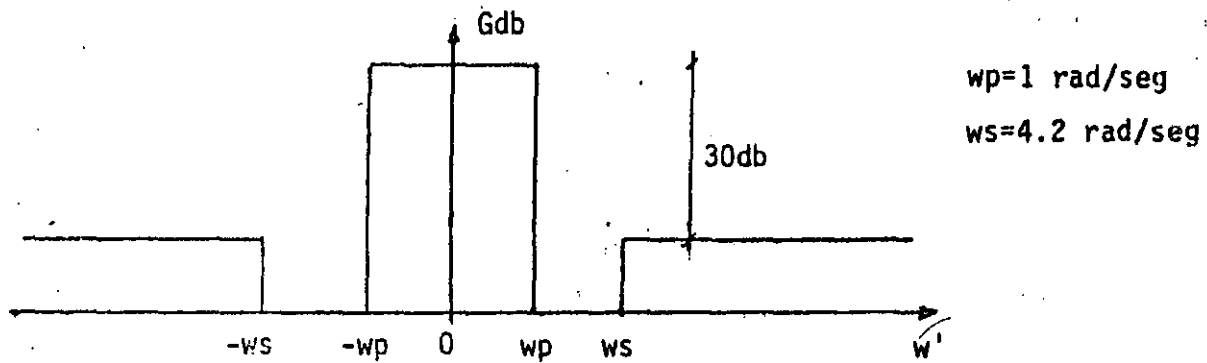


Figura 6.2.5 Plantilla de diseño del filtro paso-bajas normalizado asociado al filtro paso-banda que se desea diseñar :

Se calcula ahora el orden del filtro paso-bajas normalizado mediante la ecuación 6.2.17

$$n = 1 \left[ \frac{1}{2} \frac{\log(10^{0.1 \text{Pdb}} - 1)}{\log \frac{w_s}{w_p}} \right] + 1 = 3 \quad 6.2.17$$

Con ayuda de las tablas de coeficientes para los factores de los filtros Butterworth paso-bajas normalizados, se obtiene la función de transferencia que satisface la plantilla de diseño de la figura 6.2.16

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad 6.2.18$$

De esta función de transferencia, se puede observar que los polos de la misma están localizados en:

$$s_1 = -1 \quad 6.2.19$$

$$s_2 = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 6.2.20$$

$$s_3 = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 6.2.21$$

Mediante la transformación dada por la ecuación 6.2.22 se mapean los polos del filtro paso-bajas normalizado a los polos del filtro paso-banda requerido.

$$s = \frac{\omega_0}{2Q} (P \pm \sqrt{P^2 - 4Q^2}) \tag{6.2.22}$$

donde P es la singularidad que se va a mapear

Cabe aclarar que esta transformación lleva a cabo también la desnormalización del filtro.

Los polos del filtro paso-banda desnormalizados son:

$$S_1 = -314.1593 + j \cdot 3110.01352 \tag{6.2.23}$$

$$S_2 = -314.1593 - j \cdot 3110.01352 \tag{6.2.24}$$

$$S_3 = -170.71729 + j \cdot 3405.82573 \tag{6.2.25}$$

$$S_4 = -170.71729 - j \cdot 3405.82573 \tag{6.2.26}$$

$$S_5 = -143.44198 + j \cdot 2861.68448 \tag{6.2.27}$$

$$S_6 = -143.44198 - j \cdot 2861.68448 \tag{6.2.28}$$

Como se ve, el orden del filtro es 6, es decir, que se duplicó el orden del filtro paso-bajas. A partir de los polos, se calcula la función transferencia del filtro paso-banda desnormalizado

$$H(s) = \frac{341.435 H_0 s}{s^2 + 341.435 s + 1.16288 \times 10^7} \cdot \frac{628.32 H_0 s}{s^2 + 628.32 s + 9.77091 \times 10^6}$$

$$\frac{286.884 H_0 s}{s^2 + 286.884 s + 8.20984 \times 10^6} \tag{6.2.29}$$

Para llevar a cabo la realización de este filtro, se usarán 3 etapas cuadráticas, cada una con la configuración fuente de voltaje controlada por voltaje. Dicha configuración se muestra en la figura 6.2.6

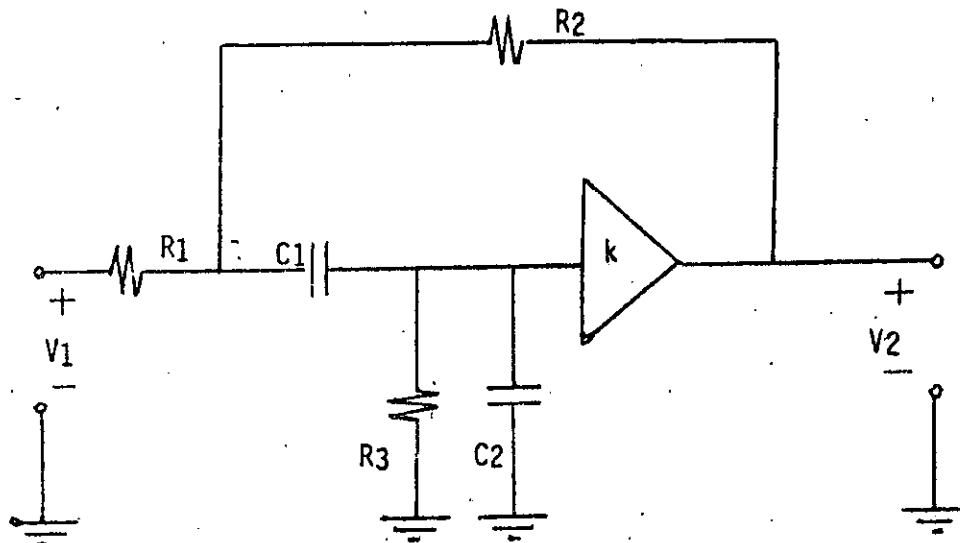


Figura 6.2.7 Configuración fuente de voltaje controlada por voltaje para una etapa de 2do. orden de un filtro paso-banda.

La función de transferencia de esta etapa se muestra a continuación

$$H(s) = \frac{k_s}{R_1 c_2} \quad 6.2.30$$

$$s^2 + \left[ \frac{1}{R_3 R_2} + \frac{1}{R_1 c_2} + \frac{1}{R_1 c_1} + \frac{1}{R_2 c_2} + \frac{1-k}{R_2 c_2} \right] s + \frac{1}{R_3} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{c_1 c_2}$$

Los parámetros de la red son:

$$H_0 = \frac{k}{1 + \frac{R_1}{R_3} + \frac{c_2}{c_1} \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + (1-k) \left( \frac{R_1}{R_2} \right)} \quad 6.2.31$$

$$\omega_0 = \left[ \frac{1}{R_3} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{c_1 c_2} \right]^{1/2} \quad 6.2.32$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{R_3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}} \left[ \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1-k}{R_2} \right] + \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \right] \quad 6.2.33$$

El procedimiento para la asignación de los valores de los elementos para cada etapa, es la siguiente:

Se elige  $c_1 = c_2 = c$  convenientemente

Posteriormente se calcula

$$k = 5 - \frac{\sqrt{2}}{Q} \quad 6.2.34$$

$$R = \frac{\sqrt{2}}{w_0 c} = R_1 = R_2 = R_3 \quad 6.2.35$$

Entonces  $H_0$  queda definida por

$$H_0 = \frac{5}{\sqrt{2}} Q - 1 \quad 6.2.36$$

A partir de las ecuaciones anteriores se pueden asignar los siguientes valores a los elementos de cada etapa:

1<sup>a</sup> Etapa.  $w_0 = [1.6288 \times 10^7]^{1/2}$ ,  $Q = 9.98757$

$$c_1 = c_2 = 0.01 \text{ uf}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 41.471 \text{ k}\Omega$$

$$k = 4.8584$$

$$H_0 = 34.31139$$

2<sup>a</sup> Etapa  $w_0 = [9.77091 \times 10^6]^{1/2}$ ,  $Q = 4.7493$

$$c_1 = c_2 = 0.01 \text{ uf}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 45.243 \text{ k}\Omega$$

$$k = 4.71573$$

$$H_0 = 16.58903$$

$$3^{\text{a}} \text{ Etapa} \quad \omega_0 = \left[ 8.20984 \times 10^6 \right]^{1/2} \quad Q = 9.98761$$

$$c_1 = c_2 = 0.01 \text{ uf}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 49.357 \text{ k}\Omega$$

$$k = 4.8584$$

$$H_0 = 34.31139$$

Finalmente cabe mencionar que para realizar el bloque amplificador  $k$  de cada etapa, se puede utilizar una configuración no inversora con un amplificador operacional como se muestra en la figura 6.2.8.

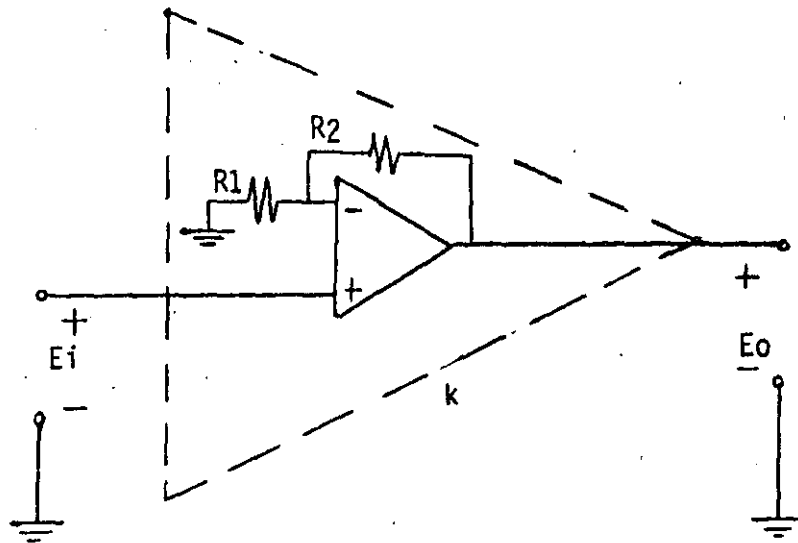


Figura 6.2.8 Circuito para realizar el amplificador  $k$ .

Con la configuración mostrada, se tiene que

$$k = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$



de donde

$$R_2 = R_1 (k - 1)$$

6.2.38

Algunos posibles valores para  $R_1$  y  $R_2$  se muestran a continuación

1<sup>a</sup> y 3<sup>a</sup> Etapas

$$R_1 = 4.7 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 18.134 \text{ k}\Omega$$

2<sup>a</sup> Etapa

$$R_1 = 2.7 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 10.032 \text{ k}\Omega$$

### 6.2.3 FILTRO PASO-BAJAS

Diseñar un filtro paso-bajas con la aproximación elíptica con las siguientes especificaciones.

$$f_p = 1000 \text{ Hz}$$

$$f_s = 1500 \text{ Hz}$$

$$P_{db} = 50 \text{ db}$$

$$\text{Rizo} = 1 \text{ db}$$

La plantilla de diseño correspondiente es la siguiente

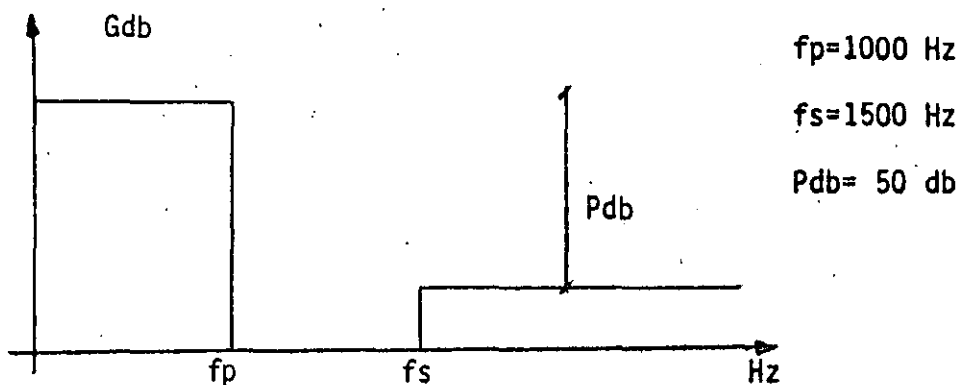


Figura 6.2.9 Plantilla de diseño para el filtro paso-bajas

Normalizando la plantilla de diseño a  $\omega_p = 1$  rad/seg. se obtienen las siguientes especificaciones para la nueva plantilla de diseño.

$$\omega_p = 1 \text{ rad/seg}$$

$$\omega_s = 1.5 \text{ rad/seg.}$$

Utilizando las tablas de polos y coeficientes de factores cuadráticos de filtros elípticos, se encuentra que para obtener las características deseadas el orden adecuado del filtro es 5, y la función de transferencia del filtro normalizado a  $\omega_p = 1$  rad/seg. es

$$H(s) = \frac{s^2+2.425515}{s^2+0.457749s+0.517069} \frac{s^2+5.437645}{s^2+0.133081s+0.994957} \frac{0.337846}{s+0.337846} \quad 6.2.39$$

Al desnormalizar la función de transferencia para

$$\omega_p = 2\pi 1000 \text{ rad/seg}$$

mediante la transformación

$$G(s) = H\left(\frac{s}{2\pi 1000}\right) \quad 6.2.40$$

se obtiene la función de transferencia del filtro deseado:

$$G(s) = \frac{s^2+95755494.09}{s^2+2876.1218s+20413065.92} \frac{s^2+214669620.1}{s^2+836.172584s+39279327.95} \frac{2122.749}{s+2122.749} \quad 6.2.41$$

Para la realización física de esta función de transferencia que contiene dos etapas cuadráticas con dos ceros de transmisión cada una, además de una etapa de 1er. orden, se utilizará una configuración de fuente de voltaje controlada por voltaje para cada etapa de 2º orden, y una configuración RC pasiva para la etapa de 1er orden.

La configuración para las etapas de 2º orden es la siguiente.

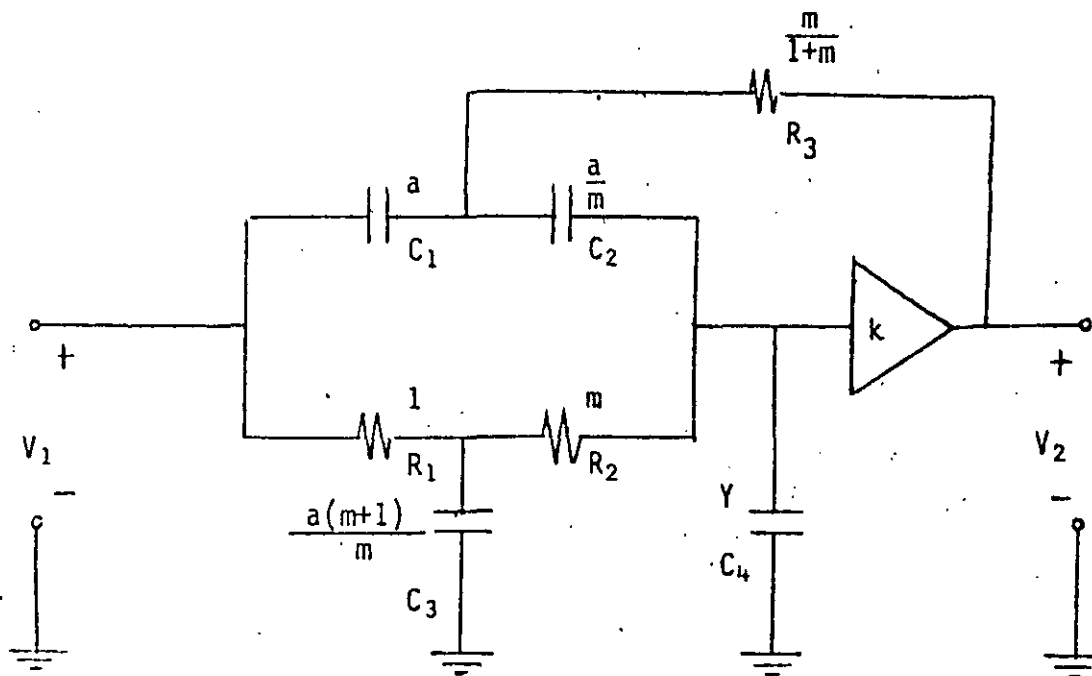


Figura 6.2.10 Configuración fuente de voltaje controlada por voltaje para realizar una etapa pasobajas con un cero de transmisión.

La función de transferencia del circuito anterior es la siguiente

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{k}{(m+1)c+1} \left( s^2 + \frac{1}{a^2} \right)}{s^2 + \left[ \frac{(m+1) \left( c + \frac{2-k}{m} \right)}{a [(m+1)c+1]} \right] s + \frac{1}{a^2 [(m+1)c+1]}} \quad 6.2.41'$$

Los parámetros de diseño son:

$$a = \frac{1}{b_0} \quad 6.2.42$$

$$c = \frac{\omega_0/a_0 - 1}{m+1} \quad 6.2.43$$

$$k = 2 + \frac{m}{m+1} \left( \frac{b_0}{a_0} - 1 - \frac{a_1 \sqrt{b_0}}{a_0} \right) \quad 6.2.44$$

$$H_0 = \frac{a_0}{b_0} k \quad 6.2.45$$

$$Y = aC \quad 6.2.46$$

A continuación se presenta un método para llevar a cabo la asignación de valores para los elementos de cada etapa.

Se puede ver en la figura 6.2.10, que los elementos del circuito están normalizados a  $R_1 = 1$  por lo tanto se propone un factor de desnormalización  $k_1$ , de tal forma que

$$R_1 = \frac{1}{k_1} \quad 6.2.47$$

de donde

$$R_2 = \frac{m}{k_1} \quad 6.2.48$$

$$R_3 = \frac{m}{k(1+m)} \quad 6.2.49$$

$$c_1 = ak_1 \quad 6.2.50$$

$$c_2 = \frac{a}{m} k_1 \quad 6.2.51$$

$$c_3 = \frac{a(m+1)}{m} k_1 \quad 6.2.52$$

$$c_4 = \frac{\frac{b_0}{a_0} - 1}{m+1} a k_1 \quad 6.2.53$$

De las ecuaciones 6.2.47, 6.2.50 y 6.2.42 se tiene

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{b_0} c_1} \quad 6.2.54$$

si se elige  $m = 1$

resulta que:

$$c_1 = c_2 \quad 6.2.55$$

$$c_3 = 2c_1 \quad 6.2.56$$

$$R_1 = R_2 \quad 6.2.57$$

$$R_3 = \frac{1}{2} R_1 \quad 6.2.58$$

$$c_4 = \frac{b_0/a_0 - 1}{2} c_1 \quad 6.2.59$$

Se muestra a continuación un juego de valores posibles para los elementos de las dos etapas de 2º orden que conforman el filtro.

1ª Etapa

$$b_0 = 95755494.09$$

$$a_0 = 20413065.92$$

$$a_1 = 2876.1218$$

$$c_1 = c_2 = 0.01 \text{ uf} \quad k = 3.15608$$

$$c_3 = 0.02 \text{ uf} \quad H_0 = 0.67281$$

$$R_1 = R_2 = 10.219 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 5.109 \text{ k}\Omega$$

$$c_4 = 0.01845 \text{ uf}$$

2ª Etapa.

$$b_0 = 214669620.1$$

$$a_0 = 39279327.95$$

$$a_1 = 836.172584$$

$$c_1 = c_2 = 0.01 \text{ uf}$$

$$k = 4.07665$$

$$c_3 = 0.02 \text{ uf}$$

$$H_0 = 0.74593$$

$$R_1 = R_2 = 6.825 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 3.412 \text{ k}\Omega$$

$$c_4 = 0.022326 \text{ uf}$$

Para realizar la etapa de 1er. orden, se puede utilizar el circuito de la figura 6.2.11 y se recomienda conectarse al final de las dos etapas anteriores para que no produzca caída de tensión.

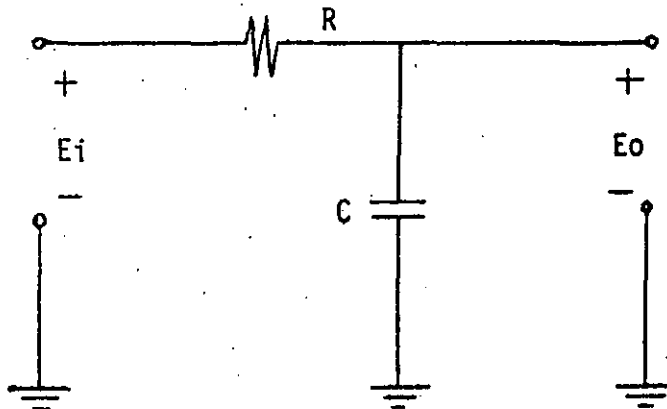


Figura 6.2.11 Circuito para realizar la etapa de 1er. orden del filtro pasobajas elíptico.

La función de transferencia del circuito anterior es

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{1}{Rc}}{s + \frac{1}{Rc}}$$

6.2.60

Por lo tanto, un juego de valores adecuado para esta etapa es:

$$c = 0.01 \text{ uf}$$

$$R = 47.108 \text{ k}\Omega$$

Los bloques amplificadores  $k$  se realizan de igual forma que se mostró en la figura 6.2.8 y los valores de resistencias se calculan con la ecuación 6.2.38. De esta forma, se obtienen valores tentativos para los bloques  $k$ :

1a. Etapa  $k = 3.15608$

$$R_1 = 5.6 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 12.074 \text{ k}\Omega$$

2a. Etapa  $k = 4.0766$

$$R_1 = 4.7 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 14.46 \text{ k}\Omega$$

#### 6.2.4 FILTRO SUPRESOR DE BANDA.

Diseñar un filtro supresor de banda elíptico cuyas características se muestran a continuación:

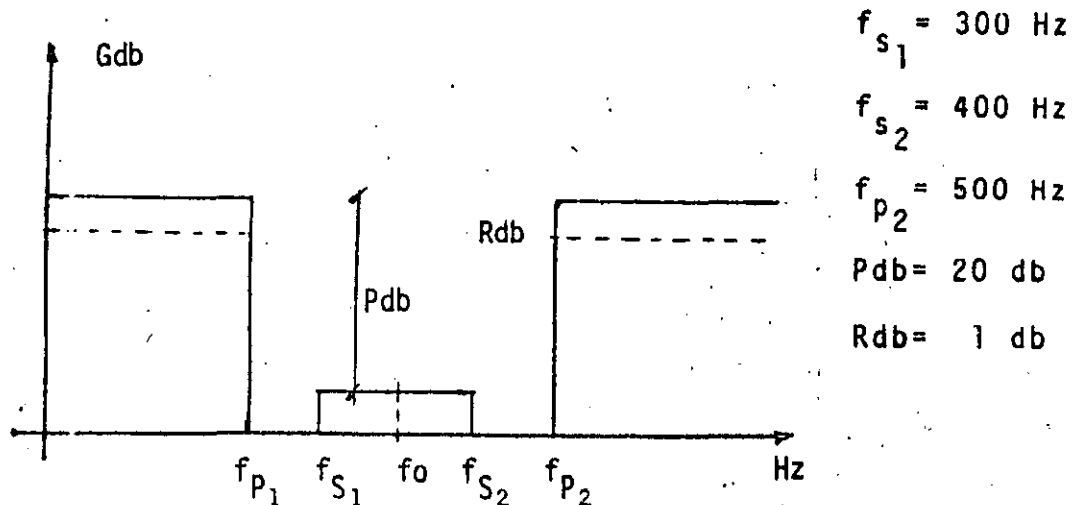


Figura 6.2.12 Plantilla de diseño para el filtro supresor de banda elíptico

De los datos anteriores se puede encontrar que:

$$f_{p1} = 240 \text{ Hz}$$

$$f_o = 346.41 \text{ Hz}$$

$$Q = 1.332$$

Mediante la transformación marcada por la ecuación 6.2.61 se obtiene la plantilla de diseño del filtro pasobajas normalizado, asociado al filtro supresor de banda.

$$w' = \frac{1}{Q \left( \frac{w}{w_o} - \frac{w_o}{w} \right)}$$

6.2.61

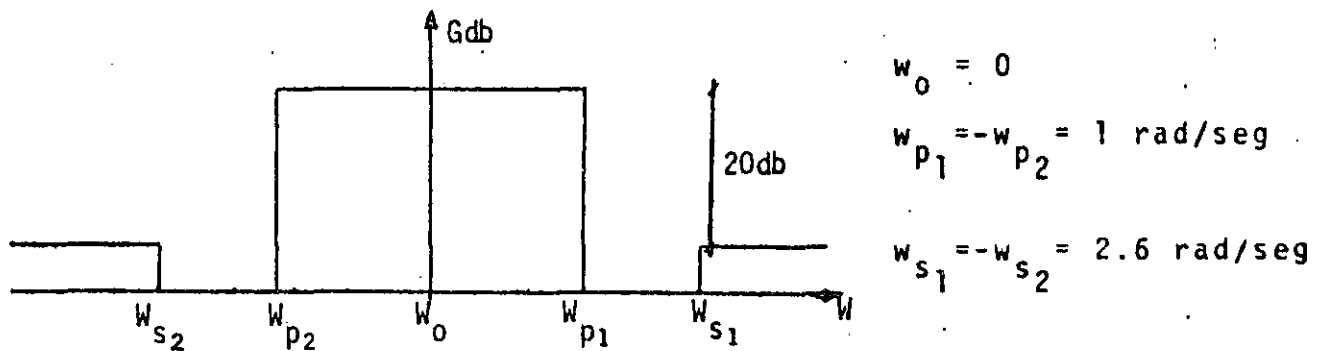


Figura 6.2.13 Plantilla de diseño para el filtro paso-bajas - normalizado asociado al filtro supresor de banda.

A partir de un programa de computadora digital cuyo listado se presenta en la sección 6.3, se calcula el orden y los coeficientes de los factores de la función de transferencia del filtro-paso-bajas normalizado a  $w_p = 1 \text{ rad/seg}$ .

El resultado que muestra dicho programa indica que el orden -- adecuado para el filtro es  $n=2$  y la función de transferencia - normalizado del mismo es



$$H(s) = \frac{H_0 (s^2 + 12.9486)}{s^2 + 1.04567 s + 1.1427} \quad 6.2.62$$

donde

$$H_0 = 0.078652$$

Por lo tanto los ceros de transmisión se encuentran localizados en:

$$s_2 = \pm j 3.5984 \quad 6.2.63$$

y los polos están localizados en

$$s_p = -0.52284 \pm j 0.93239 \quad 6.2.64$$

Mediante la transformación

$$s = \frac{\omega_0}{Q} \left[ \frac{1}{P_i} \pm \sqrt{\frac{1}{(P_i)^2} - 4 Q^2} \right] \quad 6.2.65$$

donde  $P_i$  son las singularidades de la función de transferencia del filtro paso-bajas normalizado, se obtiene que los ceros de la función de transferencia del filtro supresor de banda deseado están localizados en:

$$s'_{z_1} = \pm j 1961.3 \quad 6.2.66$$

$$s'_{z_2} = \pm j 2415.4 \quad 6.2.67$$

De igual manera, los polos se encuentran en:

$$s'_{p_1} = -484.69 \pm j 2914.8 \quad 6.2.68$$

$$s'_{p_2} = -263.02 \pm j 1581.6 \quad 6.2.69$$

Con estos datos se obtiene la función de transferencia del filtro buscado.

$$G(s) = \frac{s^2 + (2415.4)^2}{s^2 + 526.04s + (1603.3)^2} \cdot \frac{s^2 + (1961.3)^2}{s^2 + 969.38s + (2954.8)^2} \quad 6.2.70$$

Como se puede ver, el orden del filtro supresor de banda es 4, es decir, el doble del orden del filtro pasobajas normalizado.

Se observa que ambas etapas son de la forma

$$H(s) = \frac{s^2 + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} \quad 6.2.71$$

sin embargo, en la 1a. etapa:  $b_0 > a_0$

mientras que en la 2a. etapa:  $a_0 > b_0$

Esta diferencia ocasiona que las configuraciones utilizadas para realizar cada etapa no sean iguales, es decir, para la 1a. etapa se usará la configuración fuente de voltaje controlada por voltaje de un filtro pasobajas con un cero de transmisión, mientras que para la 2a. etapa se usará la configuración fuente de voltaje controlada por voltaje de un filtro paso-altas con un cero de transmisión.

A continuación se analizará la configuración empleada para cada etapa.

1a. Etapa.

$$H_1(s) = \frac{s^2 + (2415.4)^2}{s^2 + 526.04s + (1603.3)^2} = \frac{s^2 + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} \quad 6.2.72$$

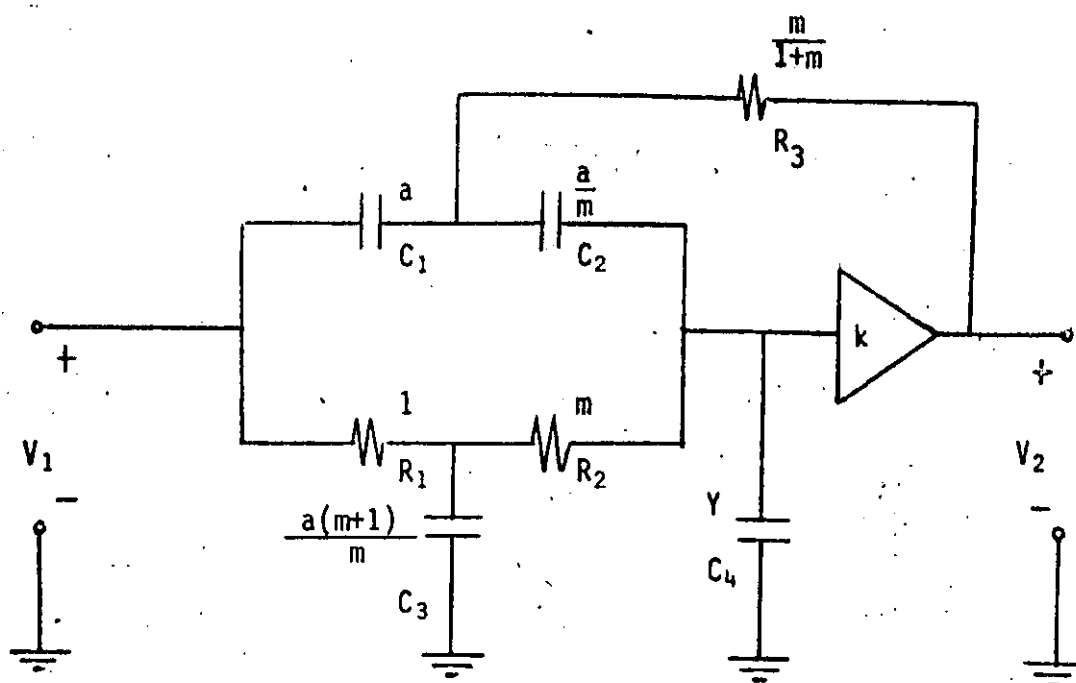


Figura 6.2.14 Configuración para realizar la 1a. etapa del filtro supresor de banda elíptico.

Como se recordará, esta configuración fue analizada en la sección 6.2.3.

Usando las ecuaciones 6.2.54, ..., 6.2.59

se obtienen los valores de los elementos para esta etapa

$$c_1 = c_2 = 0.033 \text{ uf}$$

$$c_3 = 0.066 \text{ uf}$$

$$c_4 = 0.0209 \text{ uf}$$

$$R_1 = R_2 = 12.545 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 6.272 \text{ k}\Omega$$

$$k = 2.38765$$

$$H_0 = 1.05202$$

2a. Etapa

$$H_2(s) = \frac{s^2 + (1961.3)^2}{s^2 + 969.38s + (2954.8)^2} = \frac{s^2 + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} \quad 6.2.73$$

$$a_0 > b_0$$

En la figura 6.2.15 se presenta la configuración fuente de voltaje controlada por voltaje que servirá para realizar la 2a. etapa del filtro supresor de banda.

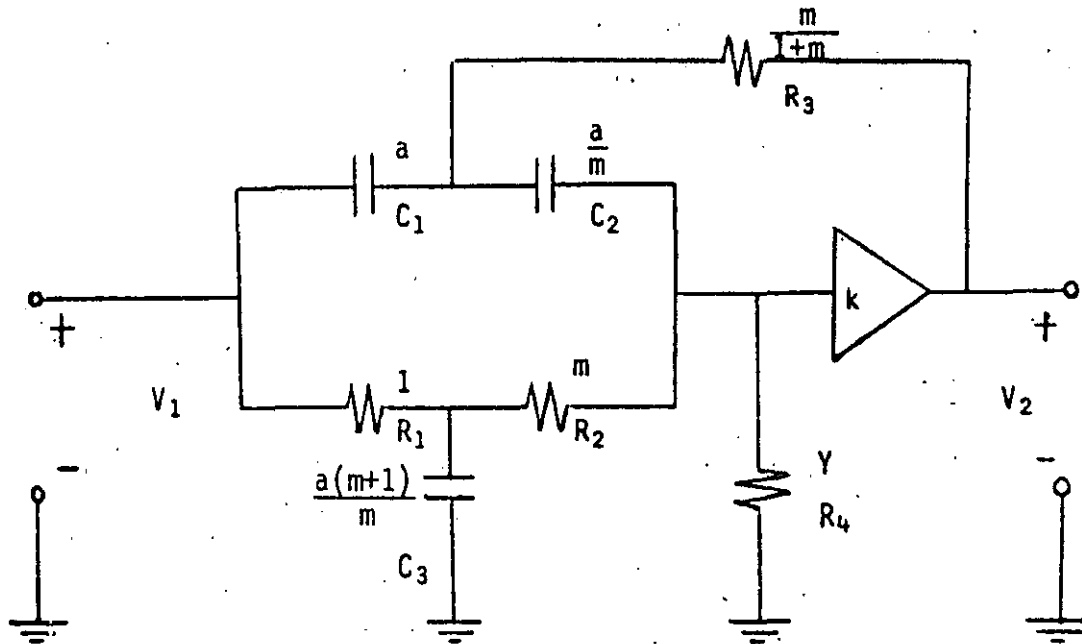


Figura 6.2.15 Configuración para realizar la 2a. etapa del filtro supresor de banda elíptico.

La función de transferencia de la configuración mostrada en la figura 6.2.15 es:

$$H_2(s) = \frac{k(s^2 + \frac{1}{2a})}{s^2 + \frac{m+1}{a} \left( \frac{1}{R} + \frac{2-k}{m} \right) s + \frac{1+m+1}{R} / a^2} \quad 6.2.74$$

Los parámetros de diseño están dados por:

$$a = \sqrt{\frac{1}{b_0}} \quad 6.2.75$$

$$R = \frac{m+1}{a_0/b_0 - 1} \quad 6.2.76$$

$$k = 2 + \frac{m}{m+1} \left( \frac{a_0}{b_0} - 1 - \frac{a_1}{b_0} \right) \quad 6.2.77$$

$$H_0 = k \quad 6.2.78$$

$$Y = \frac{1}{R} \quad 6.2.79$$

Siguiendo un proceso similar al tratado en la sección 6.2.3 se tiene que

$$R_1 = \frac{1}{k_2} \quad 6.2.80$$

$$R_2 = \frac{m}{k_2} \quad 6.2.81$$

$$R_3 = \frac{m}{k_2(1+m)} \quad 6.2.82$$

$$R_4 = \frac{a_0/b_0 - 1}{k_2(m+1)} \quad 6.2.83$$

$$c_1 = ak_1 \quad 6.2.84$$

$$c_2 = \frac{a}{m} k_1 \quad 6.2.85$$

$$c_3 = \frac{a(m+1)}{m} k_1 \quad 6.2.86$$

Entonces:

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{b_0} c_1} \quad 6.2.87$$

Si escogemos  $m=1$

$$c_1 = c_2 \quad 6.2.88$$

$$c_3 = 2c_1 \quad 6.2.89$$

$$R_1 = R_2 \quad 6.2.90$$

$$R_3 = \frac{1}{2} R_1 \quad 6.2.91$$

$$R_4 = \frac{a_0/b_0 - 1}{2} R_1$$

6.2.92

Con estas ecuaciones se puede encontrar el siguiente juego de valores para la 2a. etapa del filtro.

$$c_1 = c_2 = 0.01 \text{ uf}$$

$$c_3 = 0.02 \text{ uf}$$

$$R_1 = R_2 = 50.986 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 25.493 \text{ k}\Omega$$

$$R_4 = 32.368 \text{ k}\Omega$$

$$k = H_0 = 2.38772$$

Los bloques amplificadores  $k$  se realizan como en los casos anteriores con el circuito de la figura 6.2.8.

Para la 1a. etapa,  $k = 2.38765$ . De la ecuación 6.2.38:

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega \quad R_2 = 13.876 \text{ k}\Omega$$

Para la 2a. etapa  $k = 2.38772$

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega \quad R_2 = 13.877 \text{ k}\Omega$$

### 6.2.5 FILTRO PASA-TODO

Se desea diseñar un filtro pasa-todo de 2do. orden con una aproximación elíptica cuyo tiempo de retardo sea de 1 m seg.

De las tablas de polos y coeficientes de factores de filtros-Vessel se obtiene la función de transferencia para un filtro Bessel paso bajos de 2do. orden normalizado a un tiempo de retardo de 1 seg :

$$H(s) = \frac{3}{s^2 + 3s + 3}$$

6.2.93

Por lo tanto, tomando en cuenta la ecuación 3.1.25, se obtiene la función de transferencia de un filtro pasa-todo a partir del filtro paso-bajas normalizado de la ecuación 6.2.93:

$$G(s) = \frac{s^2 - 3s + 3}{s^2 + 3s + 3}$$

6.2.94

Sin embargo, esta función de transferencia no tiene un retardo normalizado de 1 seg, pues de la ecuación 3.1.26b se observa que la fase de un filtro pasa-todo de 2do. orden es el doble de la fase de un filtro paso bajas del mismo orden y con los mismos polos. Entonces, el retardo de la ecuación 6.2.94 es de 2 segundos.

Por lo anterior la desnormalización de la ecuación 6.2.94 está dada por la ecuación 6.2.95

$$H(s) = G\left(\frac{t}{2} s\right)$$

6.2.95

donde:  $t = 1$  m seg

Finalmente, el filtro pasa-todo con retardo de 1 m seg está dado por:

$$H(s) = \frac{\left(\frac{1}{2} \times 10^{-3} s\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2} \times 10^{-3} s\right) + 3}{\left(\frac{1}{2} \times 10^{-3} s\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2} \times 10^{-3} s\right) + 3}$$

o bien

$$H(s) = \frac{s^2 - 6 \times 10^3 s + 12 \times 10^6}{s^2 + 6 \times 10^3 s + 12 \times 10^6}$$

6.2.96

La realización de este filtro se lleva a cabo con el circuito

de la figura 6.2.16

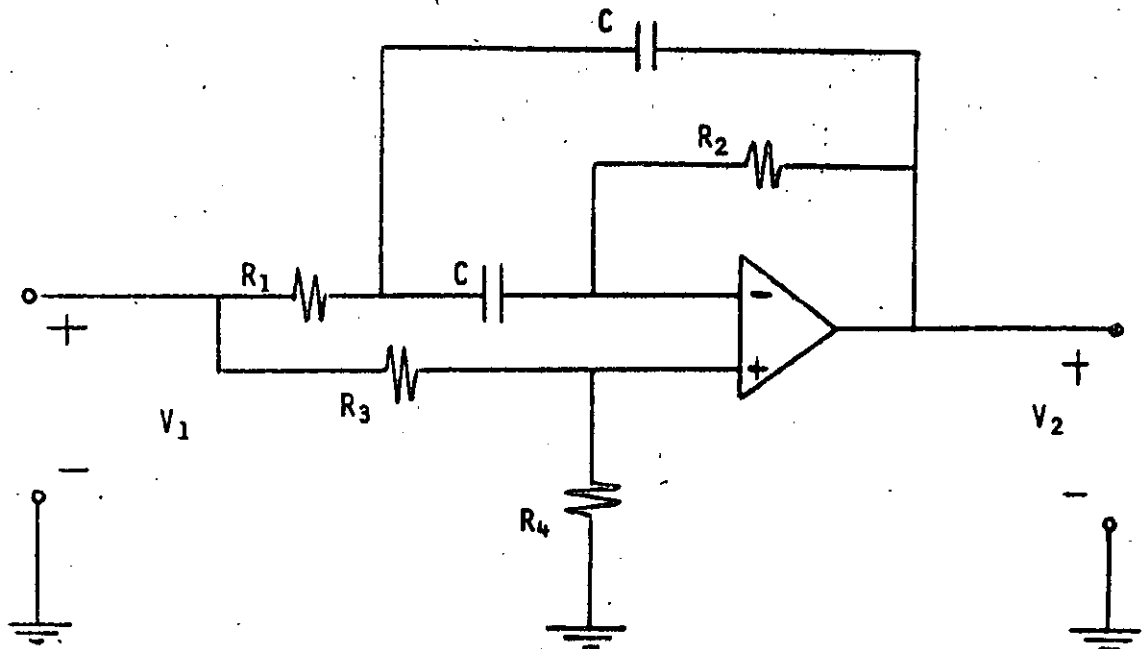


Figura 6.2.16 Filtro pasa-todo de 2do. orden con configuración realimentación múltiple

La función de transferencia del circuito anterior es:

$$H(s) = G \frac{s^2 - as + b}{s^2 + as + b} \quad 6.2.97$$

donde

$$a = \frac{2}{cR_2} \quad 6.2.98$$

$$b = \frac{1}{R_1 R_2 c^2} \quad 6.2.99$$

$$G = \frac{1}{3 \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right)} \quad 6.2.100$$



De esta última ecuación, se observa que  $G < 1$ .

Se recomienda que

$$R_2 = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \quad 6.2.101$$

entonces

$$R_1 = \frac{a}{abc} \quad 6.2.102$$

$$R_2 = \frac{2}{ac} \quad 6.2.103$$

$$R_3 = \frac{2(a^2 + b)}{abc} \quad 6.2.104$$

$$R_4 = \frac{a(a^2 + b)}{a^3 c} \quad 6.2.105$$

$$G = \frac{b}{a^2 + b} \quad 6.2.106$$

Un juego de posibles valores para los elementos podría ser:

$$c = 0.1 \text{ uf}$$

$$R_1 = 2.5 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 3.333 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 13.333 \text{ k}\Omega$$

$$R_4 = 4.444 \text{ k}\Omega$$

$$G = 0.25$$

#### REFERENCIA.

SALVA A. "PROGRAMAS INTERACTIVOS PARA EL DISEÑO DE FILTROS ACTIVOS"; MEMORIA DE LA IX CONFERENCIA INTERNACIONAL DE INVESTIGACION Y DESARROLLO EN INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA, (MEXICON 83); CUERNAVACA MORELOS, MEXICO, 1983.



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

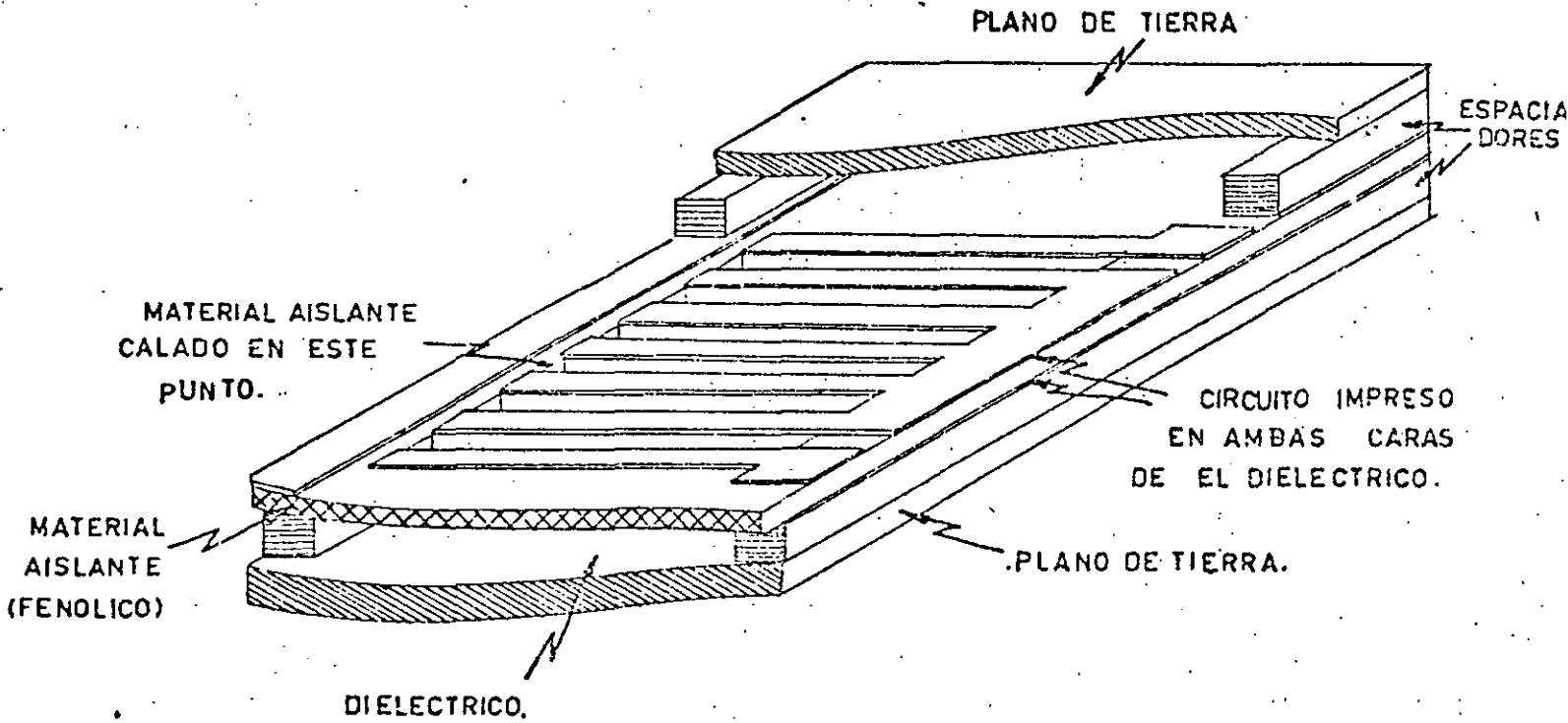
TEORIA Y DISEÑO DE FILTROS ANALOGICOS  
Y DIGITALES

FILTROS EN ALTA FRECUENCIA

LIZBETH ORTEGA LARA  
FRANCISCO HERNANDEZ RANGEL

AGOSTO, 1985

# FILTROS EN ALTA FRECUENCIA



LIZBETH ORTEGA LARA

FRANCISCO HERNANDEZ RANGEL

un ohm y el valor de la frecuencia de corte como un radian por segundo. Esta normalización de impedancia y frecuencia puede quitarse fácilmente para dar los niveles de operación requeridos de acuerdo con el siguiente procedimiento. La impedancia de los tres elementos diferentes que aparecen en un circuito son  $R$ , para la resistencia,  $j\omega L$  para la inductancia y  $\frac{1}{j\omega C}$  para la capacitancia; se notará que si la frecuencia se multiplica por una constante, la resistencia permanece inalterable pero para mantener invariable a la impedancia, de la inductancia y de la capacitancia es necesario dividir a  $L$  y  $C$  entre la misma constante. Esto proporciona la simple regla para quitar la normalización en frecuencia. Por ejemplo, para elevar la frecuencia  $\omega = 1$  radian/seg. a  $\omega = \omega_c$  (donde  $\omega_c =$  frecuencia de corte) habrá que dividir todos los valores de  $L$  y  $C$  de la red entre el valor de  $\omega_c$ .

Por otro lado para elevar el nivel de impedancia por un factor  $H$ , se debe multiplicar la impedancia de cada tipo de elemento por este factor, esto es multiplicar a todos los valores de  $R$  y  $L$  que aparezcan en la red por  $H$  y dividir todos los valores de  $C$  entre  $H$ .

En resumen estas dos reglas pueden combinarse en una sola operación y resultará que para elevar las frecuencias  $\omega = 1$  a  $\omega_c$  (frecuencia de corte) y el nivel de impedancia a un factor  $H$ ; se debe multiplicar todas las resistencias por  $H$ , todas las inductancias por  $H/\omega_c$  y todas las capacitancias por  $1/H\omega_c$  o sea:

## DESCRIPCION DE UN FILTRO PASA BANDA

En esta sección se presentarán una serie de conceptos básicos para obtener una red pasabanda empleando conceptos modernos de teoría de síntesis de redes; así mismo los valores de los elementos que forman las redes se calcularán de fórmulas específicas<sup>1</sup> o se leerán de valores tabulados en forma normalizada contenidos en tablas proporcionadas para tal efecto<sup>2</sup>. Este último hecho es muy importante ya que se eliminan cálculos laboriosos y permiten al ingeniero realizar un diseño de cualquier tipo de filtro de una manera directa y sin pérdida de tiempo. El tiempo ahorrado se puede emplear en seleccionar el tipo de materiales adecuados a emplearse, la construcción en si y las pruebas necesarias que hay que llevar a cabo a dicho dispositivo.

### 1. Definición de Normalización

Al iniciarse el cálculo de cualquier tipo de filtro de ondas electromagnéticas es conveniente trabajar con cantidades que no contengan potencias de 10 y valores de  $2\pi$ ; por esta razón se trabaja con valores normalizados, haciendo que los valores de los elementos estén normalizados con respecto a la resistencia de carga y a la frecuencia expresada en radianes. En otras palabras el valor de la resistencia de carga se considera

<sup>1</sup> Ver párrafo 3.

<sup>2</sup> Ver apéndice B.

$$R = R'H \quad (1)$$

$$L = \frac{HL'}{\omega c} \quad (2)$$

$$C = \frac{c'}{H\omega c} \quad (3)$$

En donde las letras acentuadas representan los valores normalizados y las no acentuadas los requeridos.

Al realizar el diseño de cualquier tipo de filtro es muy común partir de un prototipo pasa bajo<sup>1</sup>, cuyos valores de los elementos están normalizados. En función de los valores del prototipo las fórmulas para quitar la normalización son:

$$R = \left(\frac{R_0}{R_0'}\right)R' \quad G = \left(\frac{G_0}{G_0'}\right)G' \quad (1a)$$

$$L = \left(\frac{R_0}{R_0'}\right) \left(\frac{\omega_1'}{\omega_1}\right)L' = \left(\frac{G_0'}{G_0}\right) \left(\frac{\omega_1'}{\omega_1}\right)L' \quad (2a)$$

$$C = \left(\frac{R_0'}{R_0}\right) \left(\frac{\omega_1'}{\omega_1}\right)C' = \left(\frac{G_0}{G_0'}\right) \left(\frac{\omega_1'}{\omega_1}\right)C' \quad (3a)$$

En donde  $\omega_1' = R_0' = 1$  y las letras acentuadas representan los valores normalizados y las no acentuadas los requeridos.

## 2. Características Butterworth y Tchebyscheff

La característica de un filtro pasa bajo ideal se ilustra en la figura (1); en cuya respuesta no presenta atenuación a frecuencias que van desde cero a  $\omega = 1$ ; pero presenta una atenuación infinita a partir de la frecuencia de corte.

<sup>1</sup>Ver párrafo 3.

La respuesta obtenida por filtros reales; no es la misma que la respuesta de un filtro ideal, pero se puede aproximar de diferentes maneras;

- a) La figura, (2) muestra la aproximación del tipo "Butterworth" en donde se aprecia que la respuesta es excesivamente plana en la región del pasabanda cercana a cero; pero en la región cercana a la frecuencia de corte, la aproximación es muy pobre tanto para la banda de paso como para la banda suprimida. En esta aproximación se obtiene alta atenuación a altas frecuencias.
- b) En la figura (3) se ve la aproximación Tchebyscheff en la cual se observa que es igualmente aceptable a través de toda la región pasabanda; pero también la aproximación es pobre en la región de rechazo cercana a la frecuencia de corte.

En el diseño de filtros eléctricos para altas frecuencias, estas dos aproximaciones son generalmente las más empleadas.

En la aproximación Tchebyscheff la pendiente de atenuación es más pronunciada que la maximamente plana; esto es, tiene un corte más agudo, lo cual nos permite emplear un menor número de circuitos resonantes para lograr la atenuación requerida.

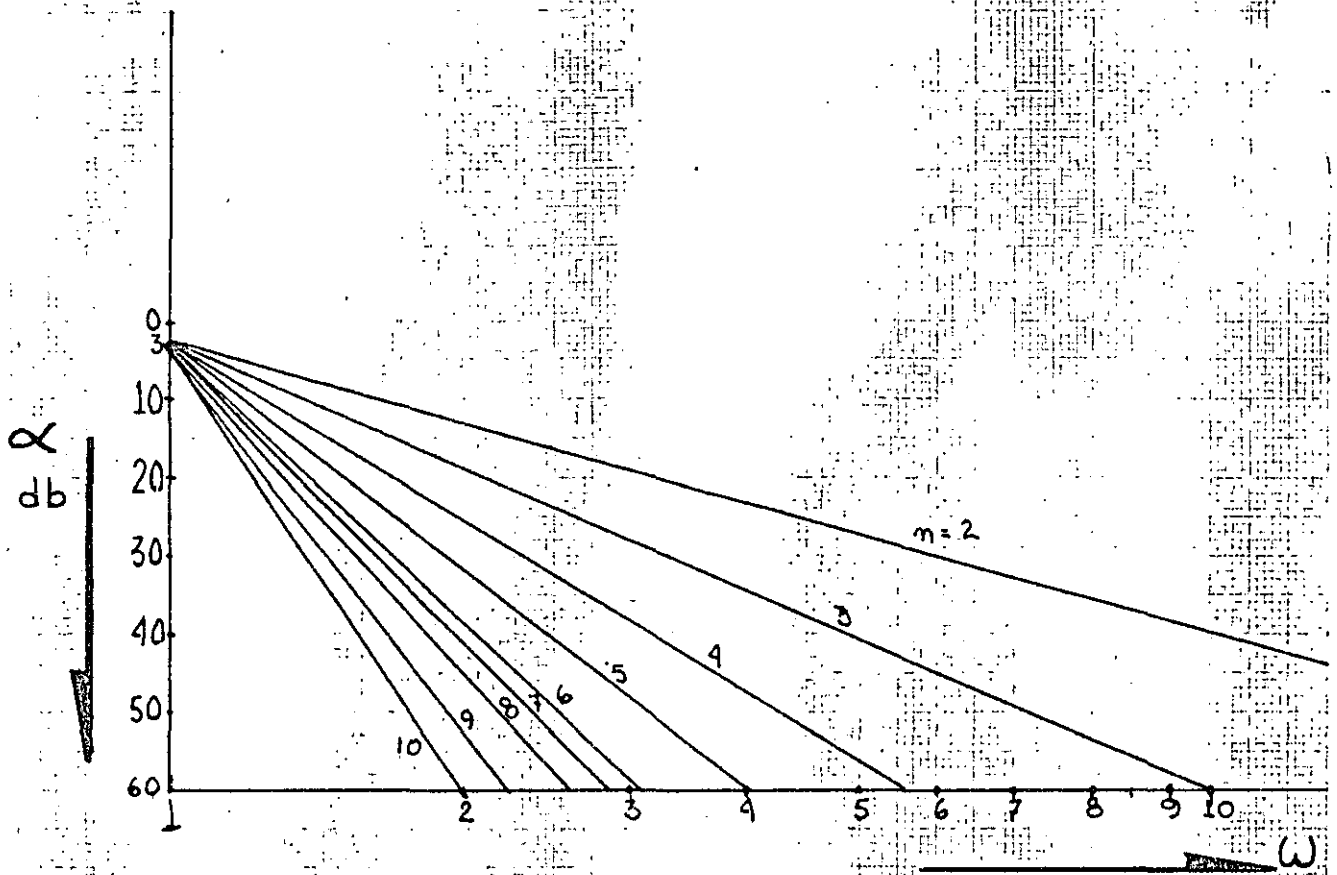


Fig. (4) Pérdida de inserción de la banda suprimida en filtros Butterworth

n es igual al número de elementos reactivos y  $\omega'$  y  $\omega_1'$  se definen en el párrafo siguiente.

#### 4 El Prototipo Pasabajo

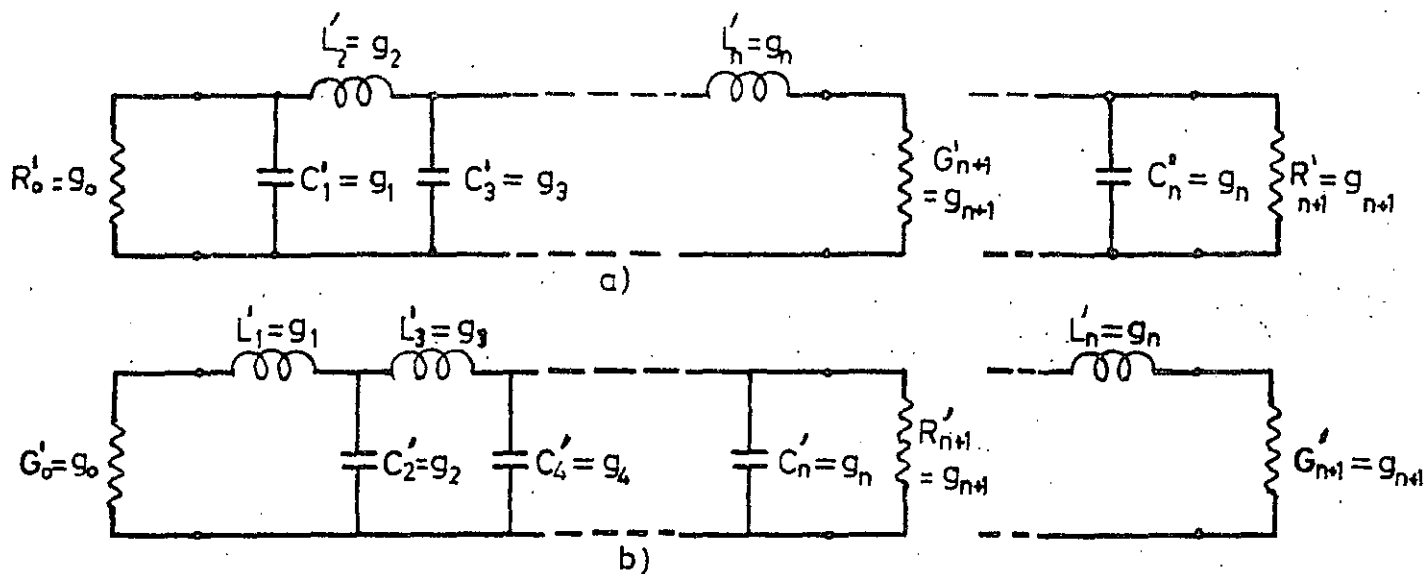
Las fórmulas de diseño para la mayoría de los filtros pasabanda con resonadores acoplados en serie o paralelo se basan en el "Prototipo pasabajo"; el cual es un filtro pasabajo que proporciona la respuesta en frecuencia deseada; ya sea en -

<sup>1</sup> Referencia (6)

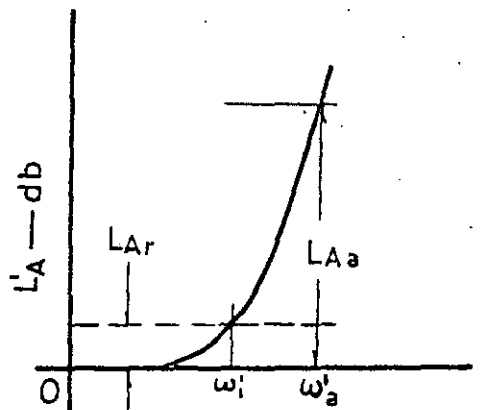


la aproximación máximamente plana (Butterworth) o en la de igual rizo (Tchebyscheff).

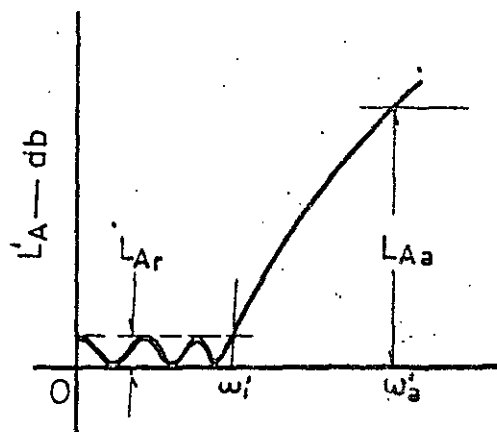
En la figura (5) se muestra el prototipo pasabajo, así - como sus respuestas maximamente plana y de igual rizo.



a) Prototipo pasa-bajo y b) Su dual



Respuesta maximamente plana



Respuesta de igual rizo

Fig. (5) Filtro prototipo pasa bajo con respuestas maximamente plana y de igual rizo

En el prototipo pasabaja se consideran las siguientes condiciones:<sup>1</sup>

- a) El lado del pasabanda ocurre a  $\omega'_1 = 1$  o sea  $f'_1 = 1/2\pi$
- b)  $g_0$  será igual a la resistencia del generador  $R'_0$  si  $g_1 = C'_1$  y se define como la conductancia del generador  $G'_0$  si  $g_1 = L'_1$
- c)  $g_{n+1}$  será igual a la resistencia de carga  $R'_{n+1}$  si  $g_n = C'_n$  y se define como la conductancia de carga  $G'_{n+1}$  si  $g_n = L'_n$
- d) El primer elemento  $g_1$  es un capacitor en paralelo; así los elementos impares  $g_1, g_3, g_5, \dots$  etc, son capacitancias en paralelo; y sus valores estarán expresados en farads, mientras que los elementos pares como son  $g_2, g_4, g_6, \dots$ , etc, son inductancias en serie y sus valores expresados en henrys

El último elemento  $g_n$ , es un capacitor en paralelo si  $n$  (el número de elementos reactivos) es impar o una inductancia en serie si el valor  $n$  es par.

Las ecuaciones generales para la respuesta de un filtro prototipo pasa bajo con aproximación Buterworth y Techebyscheff son las siguientes:

Respuesta maximamente plana (Buterworth)<sup>1</sup>

$$g_0 = R_0 = 1 \text{ para cualquier valor de } n$$

<sup>1</sup>Referencia (7)

$$g_k = 2 \operatorname{sen} \left\{ \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right\} \text{ para } k = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

$$g_{n+1} = 1; L'A = 10 \log_{10} (1 + \omega'^{2n}) \text{ db} \quad (9)$$

Respuesta Tchebyscheff<sup>1</sup>

$g_0 = R_0 = 1$  para cualquier valor de  $n$

$$g_1 = 2a_1/\gamma \quad (10)$$

$$g_k = \frac{4ak - 1}{bk - 1} \frac{ak}{gk - 1} \text{ para } k = 2, 3, \dots, n \quad (11)$$

$$g_n = g_1 R_0$$

$$\beta = Lge \left( \operatorname{Coth} \frac{LAR}{17.37} \right) \text{ en donde } LAR \text{ se expresa en db} \quad (12)$$

$$\gamma = \operatorname{sen} h \left( \frac{\beta}{2n} \right) \quad (13)$$

$$ak = \operatorname{sen} \left\{ \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right\} \text{ para } k = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

$$bk = \gamma^2 + \operatorname{sen}^2 \left( \frac{k\pi}{n} \right) \text{ para } k = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

$g_{n+1} = 1$  para  $n$  impar

$g_{n+1} = \operatorname{coth}^2 \left( \frac{\beta}{4} \right)$  para  $n$  par

$$L'A = 10 \log_{10} \left\{ 1 + (10^{LAR/10} - 1) \cos^2(ncos^{-1} \omega') \right\} \text{ db}$$

cuando  $\omega' \leq 1$

$$L'A = 10 \log_{10} \left\{ 1 + (10^{LAR/10} - 1) \cosh^2(ncosh^{-1} \omega') \right\} \text{ db}$$

cuando  $\omega' \geq 1$

<sup>1</sup> Referencia (8) y (9)

Observando las fórmulas se ve que la resistencia de carga de la derecha  $R_n + 1$  tiene un valor de 1 ohm para todos los casos considerados, excepto para el caso de respuesta Tchebyscheff en donde  $n$  tiene un valor par. El conjunto de valores de los elementos  $g_1, g_2, \dots, g_n$  son simétricos.

También se encuentra expresada la respuesta Tchebyscheff de la manera siguiente:<sup>1</sup>

$$L'A(\omega') = 10 \log_{10} \left\{ 1 + \epsilon \cos^2 \left[ n \cos^{-1} \left( \frac{\omega'}{\omega_1} \right) \right] \right\} \text{db} \quad (16)$$

Para  $\omega' \leq \omega_1$

$$L'A(\omega') = 10 \log_{10} \left\{ 1 + \epsilon \cosh^2 \left[ n \cosh^{-1} \left( \frac{\omega'}{\omega_1} \right) \right] \right\} \text{db} \quad (17)$$

Para  $\omega' \geq \omega_1$

$$\text{en donde } \epsilon = \left\{ \left[ \text{antilog} \left( \frac{LAR}{10} \right) \right] - 1 \right\} \quad (18)$$

Ver figura No. (5) en la cual se ilustran los parámetros referidos en estas ecuaciones.

Para determinar el número "n" de elementos reactivos que nos proporcione la respuesta de igual rizo deseada en el prototipo pasa bajo; se calcula con la fórmula siguiente, o se encuentra en forma gráfica de acuerdo con las curvas proporcionadas en el apéndice A.

<sup>1</sup> Referencia (9)

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \left| \frac{\text{antilog}_{10} \left( \frac{LAa}{10} \right) - 1}{\epsilon} \right|}{\cosh^{-1} \left( \frac{\omega_a}{\omega_1} \right)} \quad (19)$$

Los valores de los elementos reactivos en forma normalizada para el filtro prototipo pasa bajo con una respuesta Butterworth y Tchebyscheff se encuentran tabulados en el apéndice B.

#### 5 Transformación de un filtro pasabajo a un filtro pasabanda

Un filtro pasabajo de ancho de banda ( $\omega_c$ ) puede ser convertido a un filtro pasabanda de ancho de banda  $\omega_c = \omega_2 - \omega_1$  donde  $\omega_2$  es la frecuencia de corte superior y  $\omega_1$  es la frecuencia de corte inferior, mediante la siguiente regla:<sup>1</sup>

Por cada inductancia de la red de L henrys, agréguese -- una capacitancia en serie cuyo valor es  $1/\omega_0^2 L$  farads, (En donde  $\omega_0$  es el valor de la frecuencia central de operación) la cual resonará con la bobina L a una frecuencia  $\omega_0$ ; y por cada capacitor que aparezca en la red de C farads, agréguese una inductancia en paralelo con un valor de  $1/\omega_0^2 C$  henrys, la cual también resonará con el capacitor C a una frecuencia  $\omega_0$ . Las resistencias se mantienen invariables.

La figura (6) ilustra la transformación del filtro.

Cuando un filtro pasabajo es transformado a un pasabanda las relaciones de ancho de banda en puntos de igual atenuación permanecen constantes. (Ver figura 7). Esto es si llamamos Y

<sup>1</sup> Referencia 10

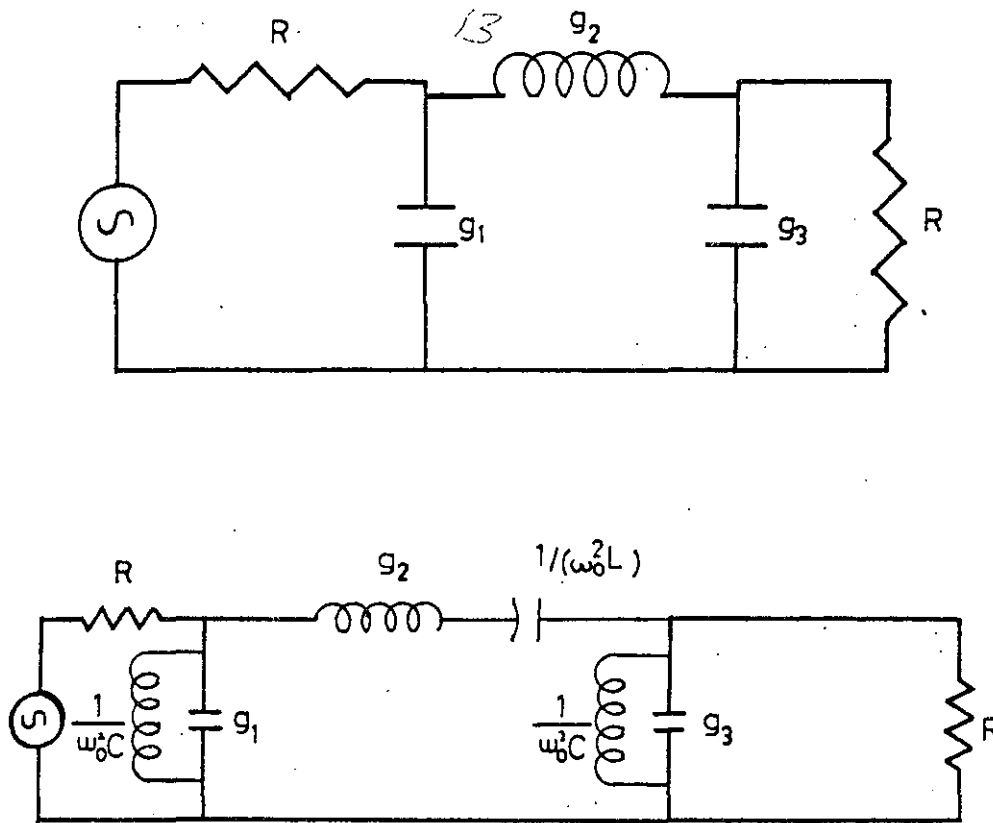


Fig. .6 Transformación de un filtro prototipo pasa bajo a un filtro pasa banda.

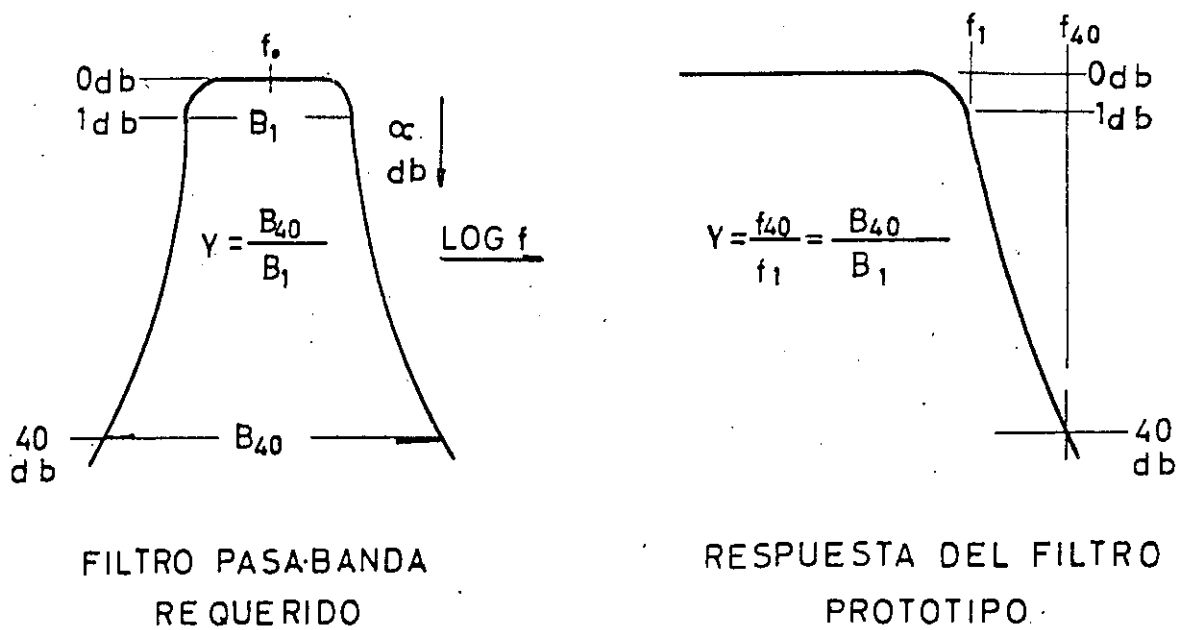


Fig. .7

14

a la relación de ancho de banda, tenemos que:

$$Y = \frac{f_{40}}{f_1} = \frac{B_{40}}{B_1}$$

En la figura (7) se muestra un filtro pasabanda con las características de atenuación deseadas; y un filtro pasabajo el cual cumple o llena estos requerimientos.

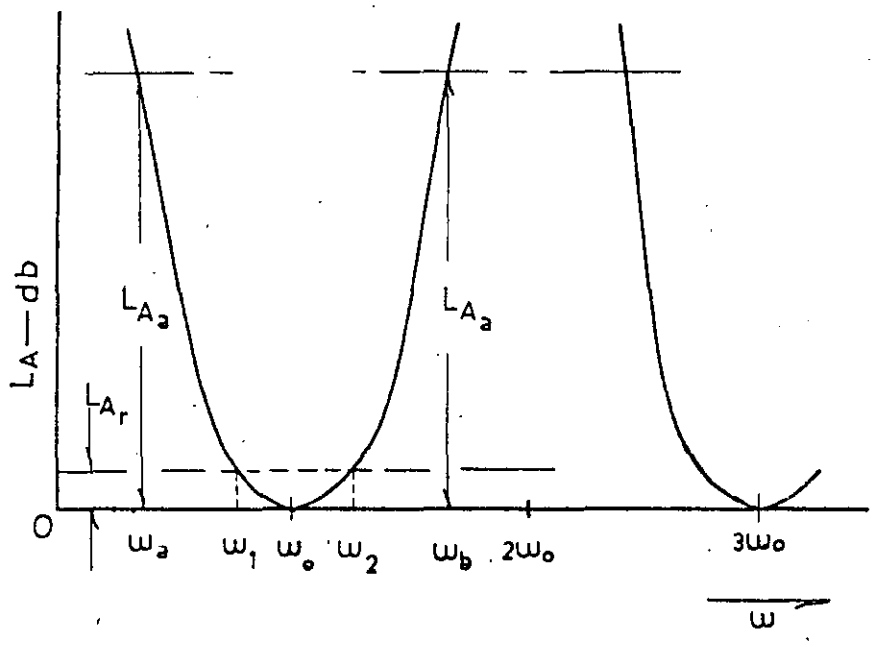
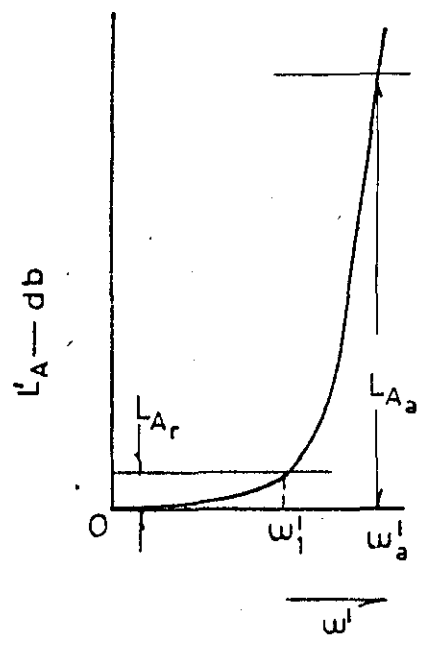
Las curvas de pérdida de inserción de la figura (8) muestra la relación entre las respuestas del prototipo y del pasabanda.

La respuesta del filtro pasabanda se obtiene a partir de la respuesta del filtro prototipo pasabajo transformando la escala de frecuencia, de tal manera que  $\omega_0$  del filtro pasabanda -- corresponda a  $\omega' = 0$  del filtro pasabajo y los puntos cuyas -- frecuencias son  $\omega_1$  y  $\omega_2$  del pasabanda correspondan al punto  $\omega'_1$  del prototipo.  $\omega_0$  está relacionada a  $\omega_1$  y  $\omega_2$  por  $\omega_0^2 = \omega_1\omega_2$ . -- Así si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son los puntos con pérdida de inserción de 3db y  $\omega_3$  y  $\omega_4$  son puntos con 40 dbs de pérdida de inserción, se tendrá que  $\omega_0^2 = \omega_1\omega_2 = \omega_3\omega_4$ .

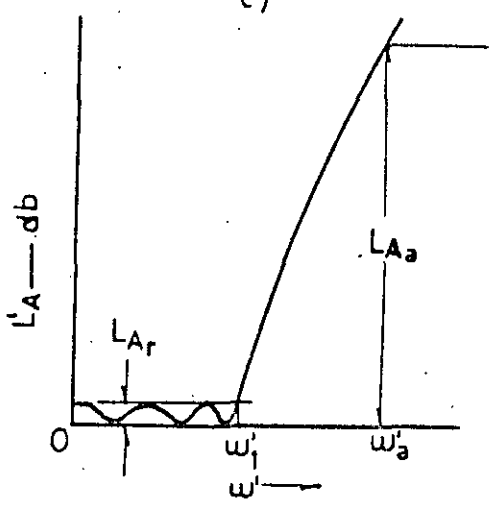
En las ecuaciones de diseño  $f'_1$ , debe tomarse como  $\frac{1}{2\pi}\omega'_1$  (En donde  $\omega'_1 = 1$ ) si se desea que la pérdida de inserción del pasabanda esté a 3 db en el caso de una respuesta maximamente plana, o se hace igual al nivel del rizo para el caso de la respuesta Tchebyscheff.

Para el caso de filtros acoplados en paralelo se hace la siguiente aproximación entre las escalas de frecuencia del filtro prototipo y del filtro resonador acoplado en paralelo.

a)



c)



d)

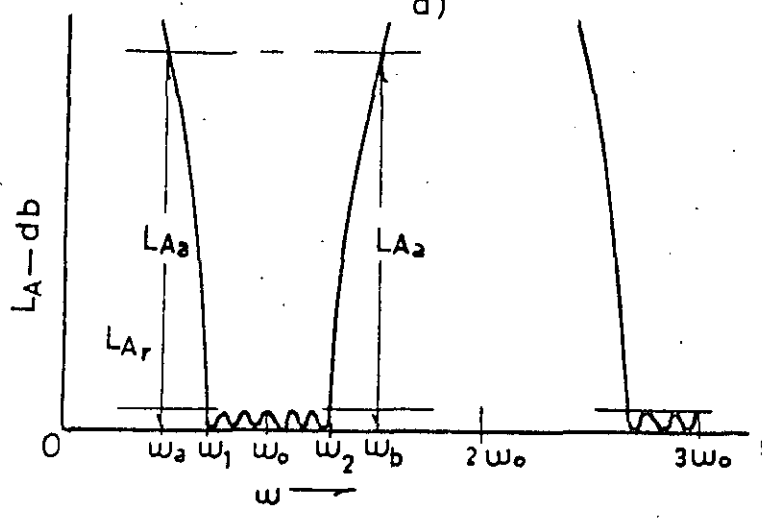


Fig. (8) Relación entre las respuestas Butterworth y Tchebyscheff del filtro prototipo pasabajo y el filtro pasabanda.



$$\omega' = 2\omega_1' \left( \frac{\omega - \omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \right) \text{ o sea}$$

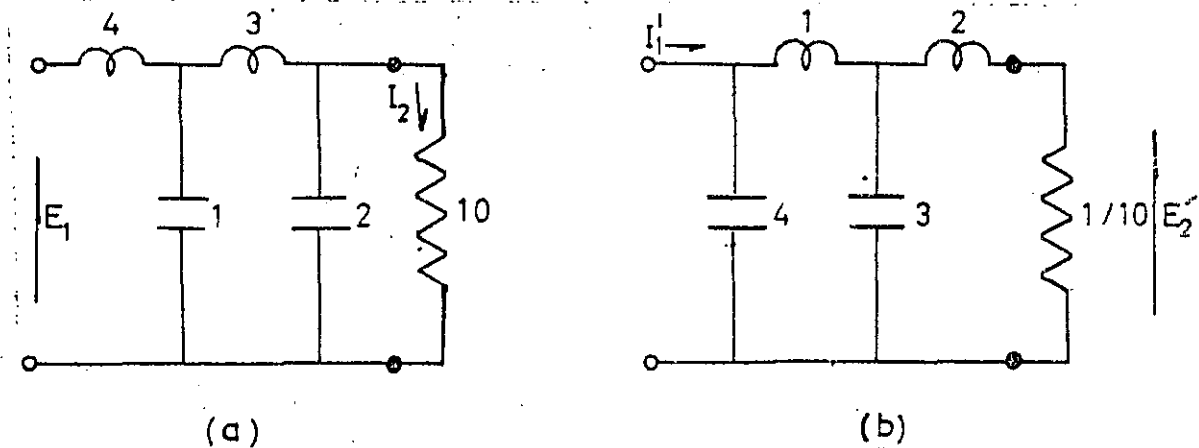
$$\omega' = 2\omega_1' \left( \frac{f - f_0}{f_2 - f_1} \right)$$

## 6 Dualidad de Redes

Cualquier red en escalera puede transformarse fácilmente en su dual y la respuesta de ambas es la misma; esto se logra mediante la regla siguiente:<sup>1</sup>

La impedancia de un brazo en serie se reemplaza por la admitancia de un brazo en paralelo y viceversa o sea de acuerdo a esto todos los capacitores de C farads son reemplazados por su elemento dual el cual es una inductancia de C henrys, y todas las inductancias de L henrys se reemplazan por un capacitor de L farads, y todas las resistencias de R ohms vienen siendo conductancias de R mhos; si el elemento original es un brazo en serie, entonces el elemento dual viene siendo un brazo en paralelo; mientras que si el elemento original es un brazo en paralelo; su elemento dual es un brazo en serie.

Por ejemplo el dual de la red en (a) de la figura (9) se muestra en (b).



<sup>1</sup> referencia 10

14  
7 INVERSORES DE IMPEDANCIA Y DE ADMITANCIA

Al derivar las ecuaciones de diseño para ciertos tipos de filtros pasabanda es conveniente convertir el prototipo de la figura 5 el cual emplea inductancias y capacitancias a formas equivalentes las cuales se componen únicamente de capacitancias o inductancias. Esta transformación puede llevarse a cabo mediante inversores ideales. Estos inversores se les conoce como inversores de impedancia e inversores de admitancia cuya definición esquemática se ilustra en las figuras 10 y 11.

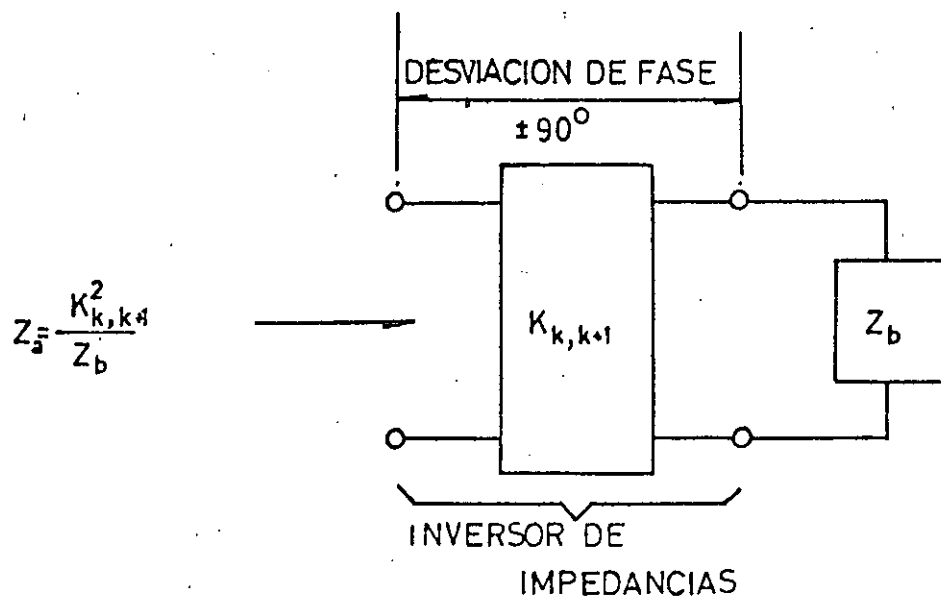


Figura (10) Definición de un inversor de impedancias

Un inversor de impedancias ideal opera igual que una línea de transmisión de un cuarto de longitud de onda cuya impedancia característica es  $K$  a todas las frecuencias. Si el inversor de impedancias está terminado con una impedancia  $Z_b$  en un extremo, (Ver figura 10) la impedancia  $Z_a$  vista desde el otro extremo es

$$Z_a = \frac{K^2 Z_b + jK}{K + jZ_b} \quad (10)$$

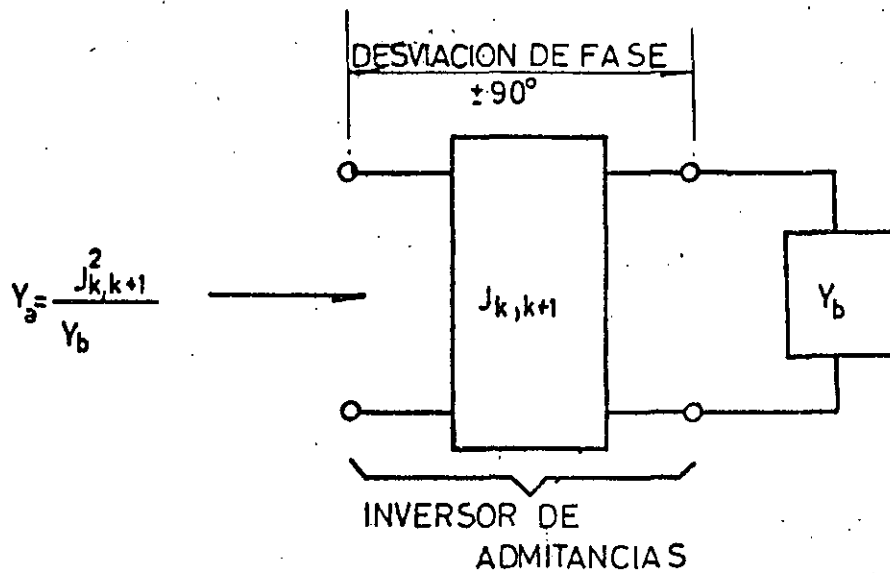


Figura (11) Definición de un inversor de admitancias

Un inversor de admitancia ideal opera igual que una línea de transmisión de un cuarto de longitud de onda cuya admitancia característica es  $J$  a todas las frecuencias. Si una admitancia  $Y_b$  se conecta a un extremo de este inversor; la admitancia  $Y_a$  - que se ve en el otro extremo es

$$Y_a = \frac{J^2 k, k + 1}{Y_b} \quad (11)$$

Debido a la acción de inversión indicada en las ecuaciones 10 y 11, una inductancia en serie conectada a un inversor se verá -- desde el otro extremo del inversor como una capacitancia en -- paralelo y una capacitancia en paralelo conectada a un inversor se verá desde el otro lado del inversor como una inductancia en serie.

Empleando las propiedades de estos inversores se puede lograr que un circuito prototipo pasabajo como el de la figura 5 se transforme en una red que contenga elementos únicamente en serie o únicamente en paralelo; la cual tendrá idéntica característica de transmisión que la del prototipo.

La figura (12) ilustra el empleo de los inversores para lograr un prototipo con elementos en serie o paralelo.

Uno de los procedimientos que se puede emplear para derivar el valor de la impedancia o admitancia característica del inversor ( $K k, k+1$  y  $J k, k+1$ ) puede ser la siguiente;

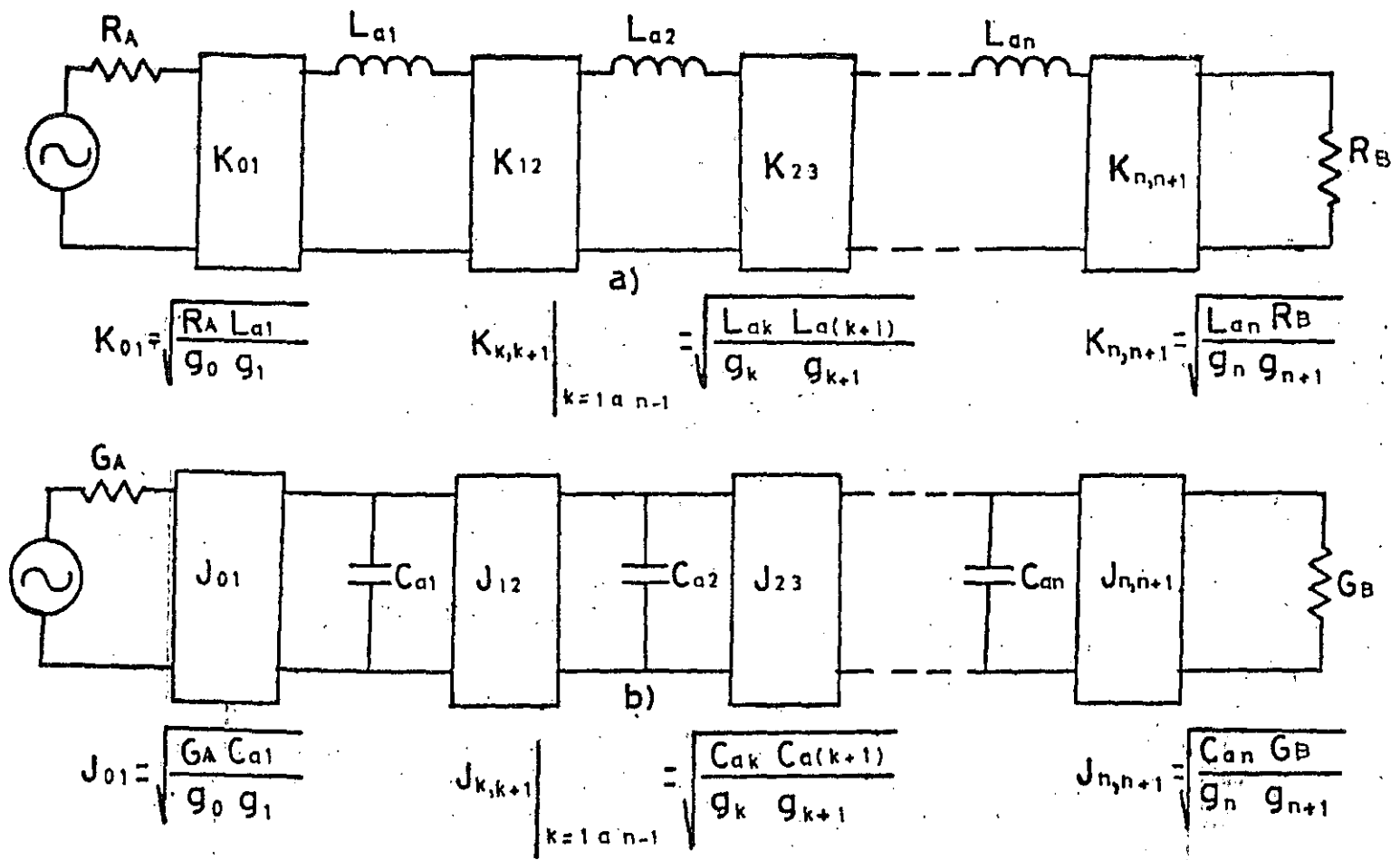


Figura (12) Prototipos modificados al incluir inversores de impedancia o admitancia

- a) Prototipo modificado mediante el empleo de inversores de impedancia
- b) Prototipo modificado mediante el empleo de inversores de admitancia

La figura (13a) ilustra una sección de un circuito prototipo pasabajo en el cual existe un circuito abierto después del capacitor  $C_{k+1}$ . La figura (13b) muestra su circuito dual. En la figura (13c) se muestra un circuito prototipo que emplea inversores de impedancia y cuyos inductores aparecen todos en serie. Los puntos de circuito abierto y en corte se han considerado únicamente para simplificar las ecuaciones.

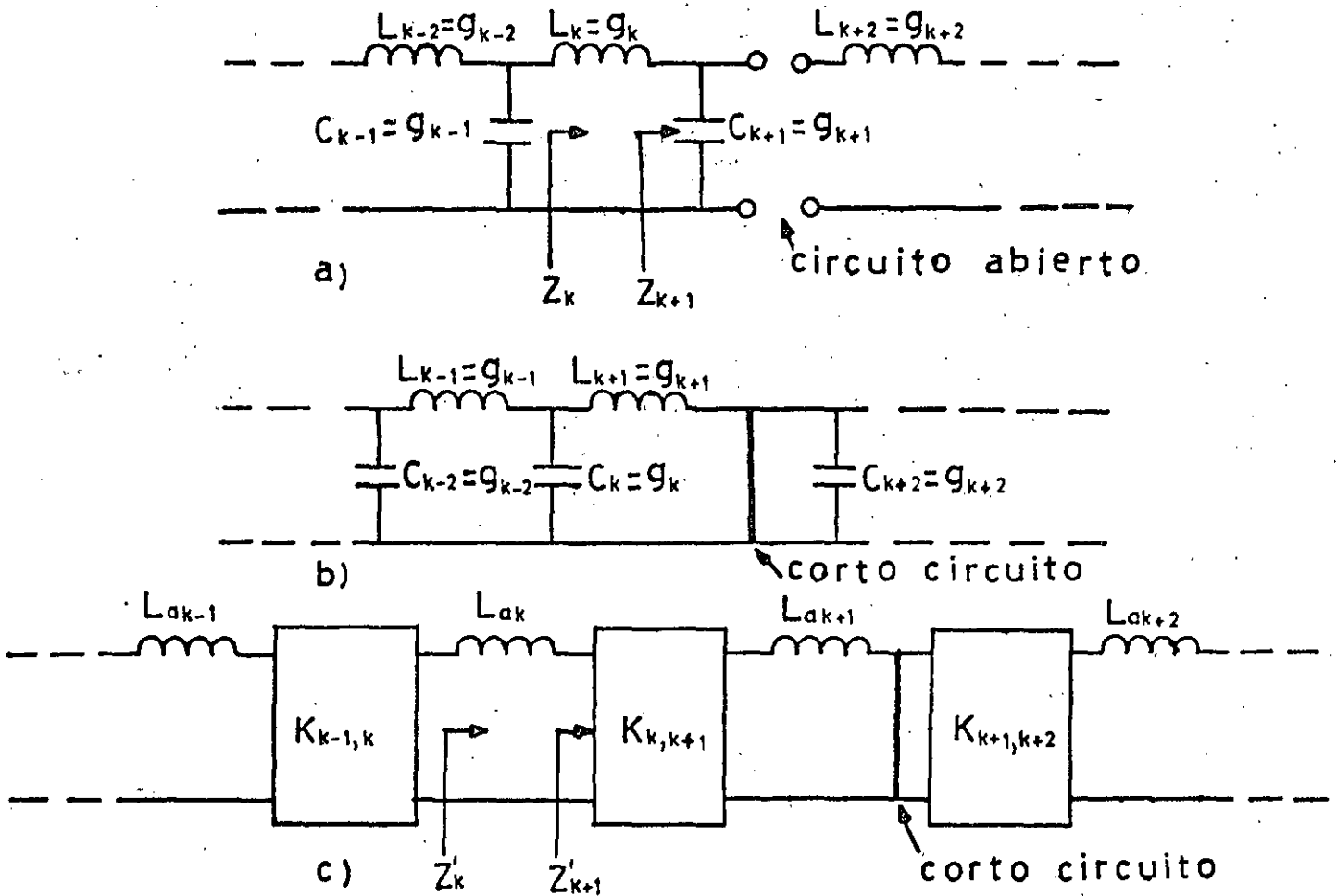


Fig. (13) Arreglo del prototipo y su dual para derivar las ecuaciones de  $K_{k,k+1}$  y  $J_{k,k+1}$

- a) Prototipo
- b) Dual
- c) Prototipo modificado mediante el empleo de inversores de impedancia

Un circuito determinado cuando se ve a través de un inversor de impedancias es como si se estuviera viendo al dual del circuito considerado, así la impedancia que se ve desde el inductor  $L_{a1}$  en la figura (12a) es la misma que la que se ve desde la inductancia  $L'_1$  de la figura (5b) a excepción de un cambio en el nivel de impedancias. La impedancia que se ve desde el inductor  $L_{a2}$  de la figura (12a) es idéntica a la que se ve desde la inductancia  $L'_2$  de la figura (5a) excepto por un cambio en el nivel de impedancias.

De acuerdo con el circuito de la figura (13a), la impedancia  $Z_k$  vista desde el elemento  $L_k$  tiene un valor de;

$$Z_k = j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_{k+1}} \quad (12)$$

considerando ahora el circuito de la figura (13c) en función -- del inversor; esta impedancia tiene un valor de

$$Z'_k = j\omega L_{ak} + \frac{K^2_{k,k+1}}{j\omega L_{ak+1}} \quad (13)$$

$Z_k$  y  $Z'_k$  son idénticas excepto por un cambio en el nivel de impedancias, el cual es  $L_{ak}/L_k$

Igualando las ecuaciones (12) y (13) se tiene que

$$Z'_k = \frac{L_{ak}}{L_k} Z_k = j\omega L_{ak} + \frac{L_{ak}}{L_k} \frac{1}{j\omega C_{k+1}} \quad (14)$$

igualando los segundos terminos de (13) y (14) se tiene

$$K_{k,k+1} = \sqrt{\frac{L_{ak}, L_{ak+1}}{L_k C_{k+1}}} \quad (15)$$

Como puede observarse en la figura (13a)  $L_k = g_k$  y  $C_{k+1} = g_{k+1}$ , por lo que la ecuación (15) se puede expresar como

$$K_{k,k+1} = \sqrt{\frac{L_{ak}, L_{a(k+1)}}{g_k g_{k+1}}} \quad (16)$$

al mover la posición de los puntos en que aparecen el corto - circuito y el circuito abierto se pueden calcular todos los inversores que aparecen en el circuito, excepto aquéllos situados en los extremos de la red. Esto quiere decir que la ecuación (16) se aplica a los inversores  $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ .

Para deducir las ecuaciones de los inversores situados al final de la red, considérese la figura (14). En a) se ilustran los dos últimos elementos de un circuito prototipo y en b) la misma sección del prototipo transformada mediante inversores de impedancia.

Como puede observarse en la figura (14a) la impedancia - vista de  $g_n$  es

$$Z_n = j\omega L_n + \frac{1}{G_{n+1}} \quad (17)$$

La impedancia  $Z'_n$  en la figura (14b) tiene un valor de

$$Z'_n = j\omega L_{an} + \frac{K^2_{n,n+1}}{R_B} \quad (18)$$



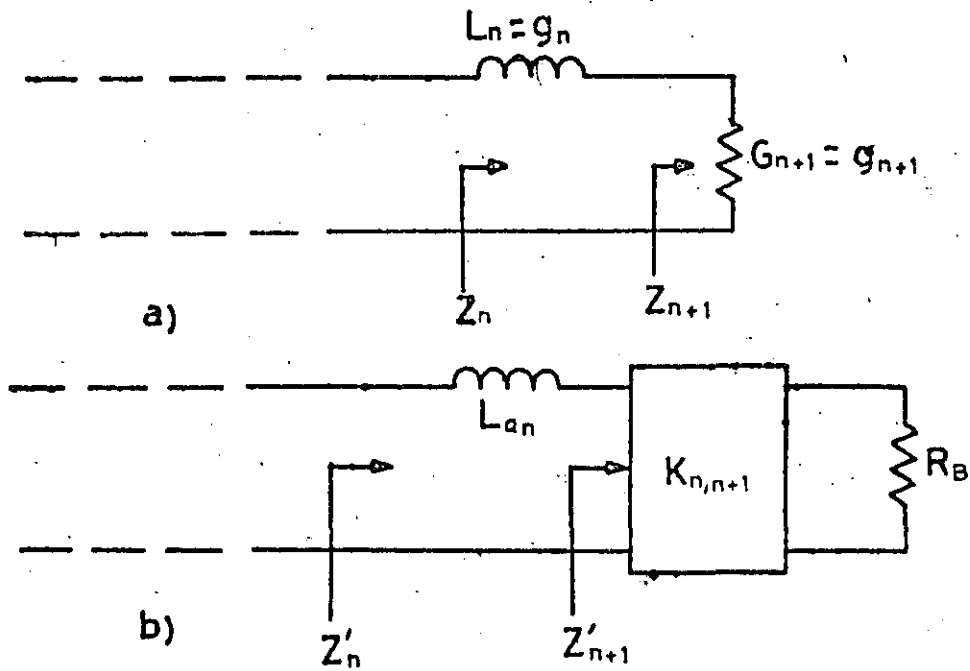


Fig. 14 Sección del prototipo empleada para derivar las ecuaciones de  $K_{n,n+1}$  y  $K_{0,1}$

a) Ultimo elemento reactivo y carga.

b) Transformación de la sección final del prototipo empleando inversores de impedancia.

25

Dado que  $Z_n$  es igual a  $Z'_n$  dentro de un factor de nivel de impedancias  $L_{an}/L_n$ .

$$Z'_n = \frac{L_{an}}{L_n} Z_n = j\omega L_{an} + \frac{L_{an}}{L_n} \frac{1}{G_{n+1}} \quad (19)$$

igualando los segundos terminos de las ecuaciones (18) y (19) - se tiene

$$K_{n, n+1} = \sqrt{\frac{L_{an} R_B}{L_n G_{n+1}}} \quad (20)$$

Substituyendo el valor de  $g_n$  y  $g_{n+1}$  en la ecuación (20) - resulta

$$K_{n, n+1} = \sqrt{\frac{L_{an} R_B}{g_n g_{n+1}}} \quad (21)$$

$$K_{0,1} = \sqrt{\frac{L_{a1} R_A}{g_0 g_1}} \quad (22)$$

La deducción de las ecuaciones para los parámetros  $J_{K, k+1}$  de la figura (12b) se obtienen de una manera semejante empleando las admitancias en lugar de las impedancias.

### 8 Redes de inversión de impedancia de banda ancha

En la figura (15) se ilustran seis redes que tienen la propiedad de inversión de impedancia similar a la de un trans--

formador de un cuarto de longitud de onda sobre un amplio ancho de banda.

La impedancia característica K y la desviación de fase  $\beta$ , de cada una de las redes puede deducirse de varias maneras; -- por ejemplo en la figura (15a) las impedancias de entrada a circuito abierto y acorto circuito de la mitad de la red son:

$$Z_{oc} = \frac{j}{\omega C} \quad \text{y} \quad Z_{sc} = \frac{-j}{\omega C} \quad (23)$$

Empleando la relación  $K = \sqrt{Z_{sc}Z_{oc}}$  se tiene que  $k = 1/\omega C$  (24)

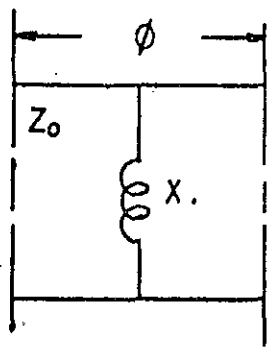
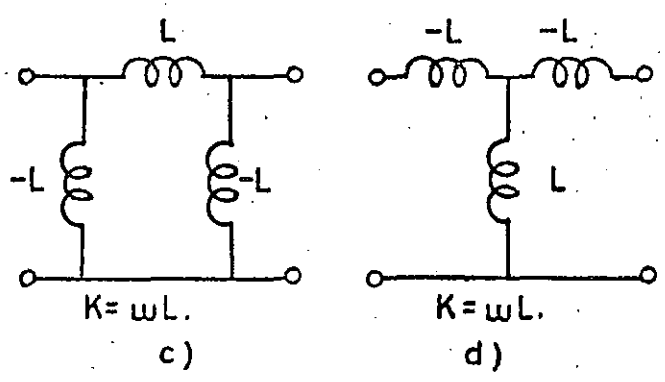
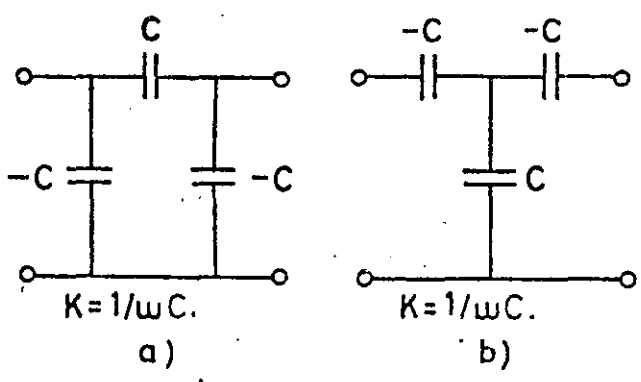
$$\beta = 2 \operatorname{tang}^{-1} \pm \left( \frac{-Z_{sc}}{Z_{oc}} \right)^{1/2} = \pm 90^\circ \quad (25)$$

Para la red de la figura (15a) el signo negativo de  $\beta$  es correcto pero en esta aplicación el signo no es importante.

Como puede observarse en este caso,  $\beta$  es independiente de la frecuencia y por lo tanto la propiedad de inversión de impedancia del circuito de la figura (15a) se mantiene a todas las frecuencias mientras que la impedancia característica tiene la misma variación con la frecuencia como lo hace el tipo de reactancia que se encuentra en la red. La red de inversión de impedancias más apropiada para un filtro determinado, es aquella cuyos elementos negativos pueden absorberse dentro de los circuitos resonantes; de tal manera que todos los valores de los elementos del filtro sean positivos.

Se pueden emplear redes que proporcionen inversión de impedancia sobre anchos de banda muy amplios en líneas de transmisión de modo TEM y en guías de onda.

En las figuras (15 e) y f) se muestran los casos en que se emplea una reactancia inductiva en paralelo y una reactancia capacitiva en serie.

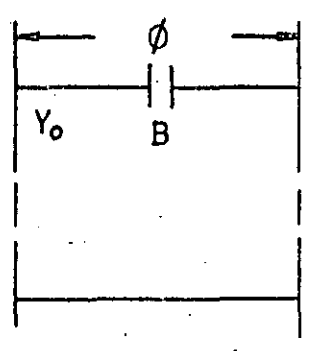


$$K = |Z_0 \tan(\phi/2)|$$

$$\phi = -\tan^{-1}(2X/Z_0)$$

$$X/Z_0 = \frac{K/Z_0}{1 - (K/Z_0)^2}$$

e)



$$K = |Z_0 \cot(\phi/2)|$$

$$\phi = -\tan^{-1}(2B/Y_0)$$

$$B/Y_0 = \frac{K/Z_0}{(K/Z_0)^2 - 1}$$

f)

Fig. (15) Redes de inversión de impedancia de banda ancha

Las fórmulas que aparecen en la figura se derivan partiendo de las impedancias en corto circuito y en circuito abierto - de la mitad de la estructura:

$$\begin{aligned} \beta &= 2 \tan^{-1} \pm \sqrt{\frac{-X_{sc}}{X_{cc}}} \\ &= 2 \tan^{-1} \pm \sqrt{\frac{-Z_c \tan \frac{\phi}{2}}{Z_o \tan \left\{ \frac{\phi}{2} + \tan^{-1} \left( \frac{2\omega L}{Z_o} \right) \right\}}} \end{aligned} \quad (26)$$

$$K = Z_o \sqrt{-\tan \left( \frac{\phi}{2} \right) \tan \left[ \frac{\phi}{2} + \tan^{-1} \left( \frac{2\omega L}{Z_o} \right) \right]} \quad (27)$$

Si se considera  $\beta = -90^\circ$  es necesario que a  $\omega_o$

$$\phi = -\tan^{-1} \left( \frac{2\omega_o L}{Z_o} \right) \text{ y } K = Z_o \tan \frac{\phi}{2} \quad (28)$$

En (26) el numerador y denominador son proporcionales a  $\phi$ , y esto origina que la variación de frecuencia de  $\beta = -90^\circ$  sea lo suficientemente pequeña para considerarse despreciable. También K es proporcional a  $\phi$ .

Para diseño se requiere a  $X = \omega L$  en función de K, y esto - se obtiene empleando la identidad trigonométrica

$$\frac{X}{Z_o} = \frac{1}{2} \tan(-\phi) = \frac{1}{2} \tan \left( 2 \tan^{-1} \frac{K}{Z_o} \right)$$

De donde

$$\frac{X}{Z_o} = \frac{\frac{K}{Z_o}}{1 - \left( \frac{K}{Z_o} \right)^2} \quad (29)$$

## 9 Derivación de las ecuaciones de diseño

En la figura (16 b) se muestra un filtro pasabanda el cual puede ser derivado de un filtro prototipo pasabajo como se vió anteriormente.

Los parámetros del prototipo  $g_0, g_1, \dots, g_{n+1}$  fueron definidos en el capítulo anterior párrafo 3.

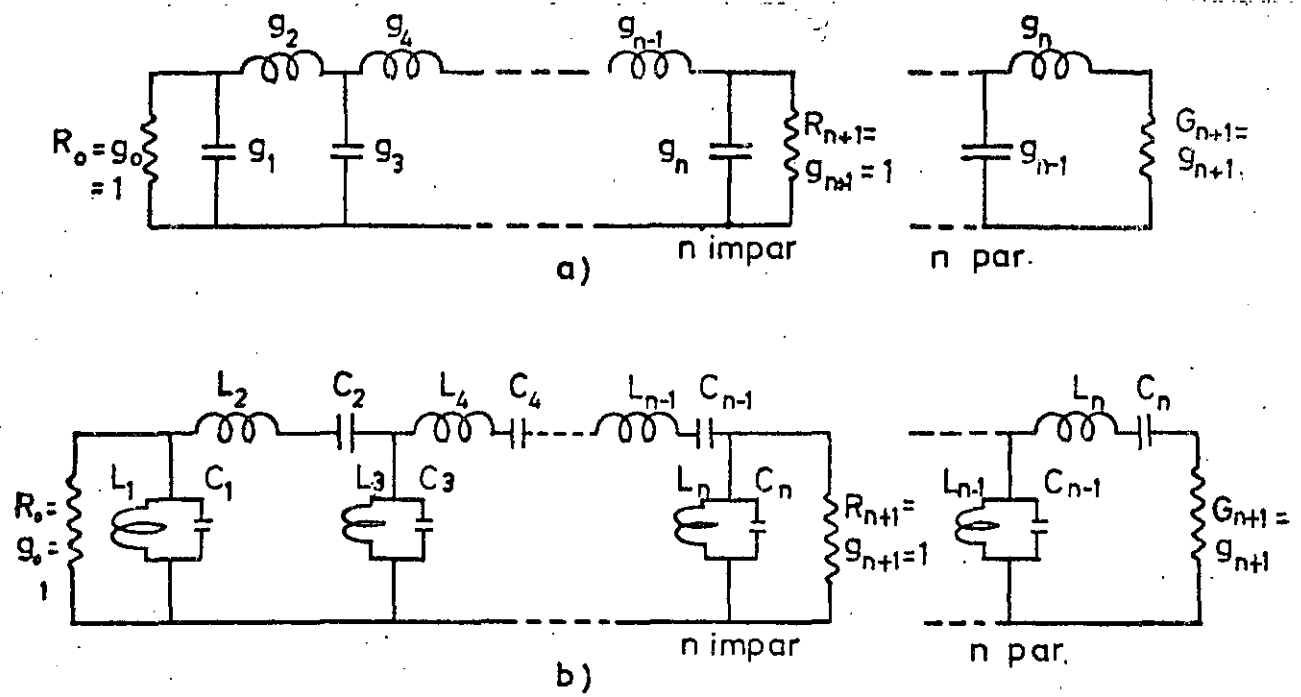
Este filtro tiene resonadores en serie y en paralelo; los cuales se caracterizan por su frecuencia de resonancia  $\omega_0$  y un parámetro en función de la pendiente. Para resonadores en paralelo se aplica el "parámetro pendiente de susceptancia"  $b_k$  y es simplemente la susceptancia de la capacitancia del resonador en paralelo a la frecuencia de resonancia. Para los resonadores en serie se aplica el "parámetro pendiente de reactancia"  $x_k$  y es simplemente la reactancia de la inductancia del resonador en serie a la frecuencia de resonancia.

Este parámetro de pendiente tiene una definición más general la cual se aplica para todas las formas de resonadores y se expresa de este modo;

Parámetro pendiente de susceptancia

$$b_k = \frac{\omega_0}{2} \left. \frac{dB_k(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega = \omega_0} \text{ mhos} \quad (30)$$

El parámetro  $x_k$  tiene una definición análoga en una base dual.



$$\left. \begin{aligned} L_k &= \frac{\omega}{\omega_0 \omega'_1 g_k} \\ C_k &= \frac{\omega_1 g_k}{\omega \omega_0} \end{aligned} \right\} \text{para } k \text{ impar}$$

$$\left. \begin{aligned} L_k &= \frac{\omega'_1 g_k}{\omega \omega_0} \\ C_k &= \frac{\omega}{\omega_1 \omega'_1 g_k} \end{aligned} \right\} \text{para } k \text{ par.}$$

$$\omega = \frac{f_2 - f_1}{b}$$

$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$$

$f_1$  y  $f_2$  corresponden a  $\omega'_1$  de la respuesta prototipo.

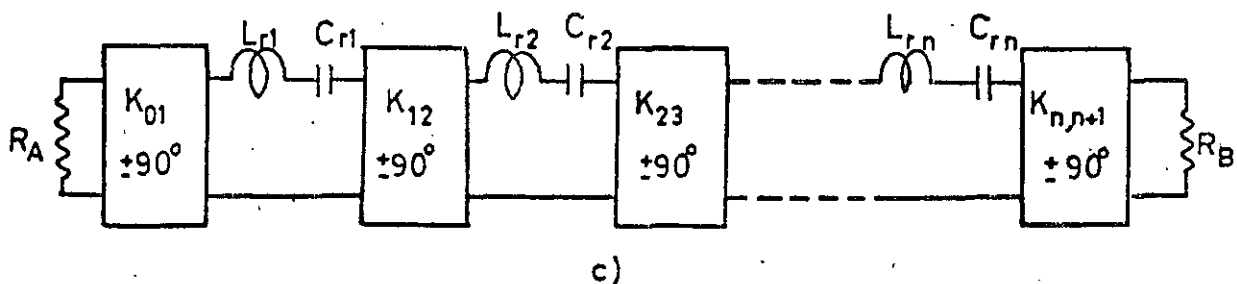


Fig. (10) Transformación de un filtro pasa-banda a partir de un prototipo pasa-bajo empleando inversores de impedancia de un cuarto de longitud de onda

Cualquier filtro de la forma de la figura (16 b) el cual emplea una configuración de resonadores en serie y paralelo, -- puede convertirse a la forma de la figura (16 c) el cual emplea solamente resonadores en serie. Las cajas marcadas como  $K_{k,k+1}$  son los inversores de impedancia.

Si los inversores de impedancia del circuito de la figura (16 c) fueran ideales; la respuesta de este circuito sería idéntica a la del filtro equivalente de la forma de la figura 16 b)

Como se vió en el párrafo 7 una línea de un cuarto de longitud de onda es por supuesto un inversor de impedancia de banda angosta y se ha empleado frecuentemente en el diseño de filtros; sin embargo muchos otros tipos de circuitos tienen propiedades de inversión, y muchos de ellos tienen una operación de inversión con un ancho de banda mucho más amplio que el que --- proporciona una sección de línea de un cuarto de longitud de onda (Como los descritos en el párrafo 8).

Las ecuaciones que se describirán están basadas en el -- circuito dual de la figura (16 c), o sea que en este nuevo circuito los resonadores se encuentran todos en paralelo. Un circuito de este tipo en la forma generalizada se muestra en la - figura (17).

Las cajas marcadas con  $B_k(\omega)$  representan resonadores - los cuales pueden ser de cualquier forma siempre que estén resonando a  $\omega_0$  y exhiban una característica de susceptancia igual a



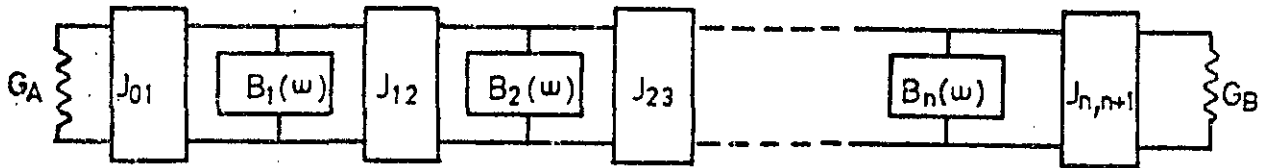


Fig. (17) Circuito de un filtro pasa banda generalizado empleando inversores de admitancia

la de un resonador en paralelo en la vecindad de  $\omega_0$ . (estos resonadores pueden estar formados por elementos concentrados, elementos distribuidos o una combinación de ellos). La forma requerida de la característica de susceptancia se muestra en la figura (18).

Si los resonadores en paralelo están formados por una bobina (L) y una capacitancia (C) en paralelo como los de la figura (19), el parámetro pendiente de susceptancia para el resonador  $k$  es simplemente  $b_k = \omega_0 C$ .

Si los resonadores son de alguna otra forma, el parámetro pendiente puede calcularse por la ecuación general dada en (30). Para resonadores en paralelo:

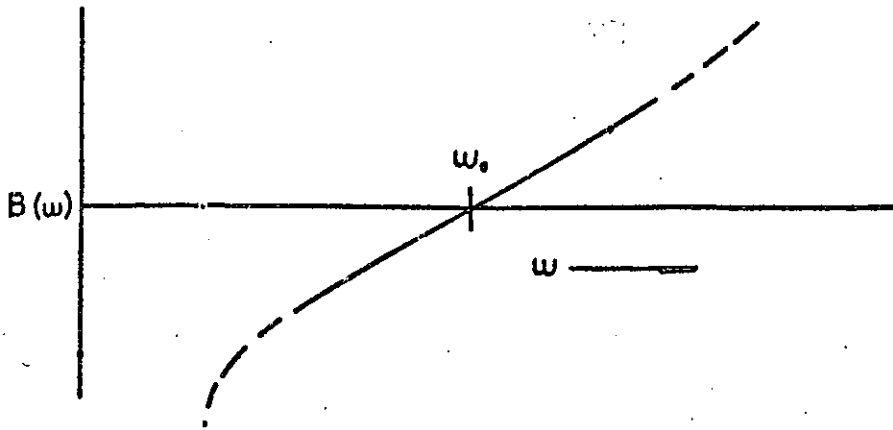


Fig. (18) Susceptancia del resonador k

$$b_k = \omega_0 C_k = \frac{1}{\omega_0 L_k} = \frac{\omega_0 g k}{w} = \text{"Parámetro pendiente de susceptancia"}$$

Para resonadores en serie:

$$x_k = \omega_0 L_k = \frac{1}{\omega_0 C_k} = \frac{\omega_0 g k}{w} = \text{"Parámetro pendiente de reactancia"}$$

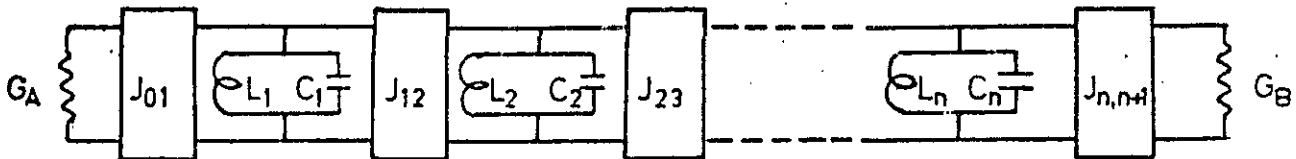


Fig. (19) Filtro pasabanda empleando circuitos resonantes en paralelo e inversores de admitancias

La definición del inversor de admitancias J es conveniente para el análisis de resonadores dispuestos en paralelo ya que este análisis será matemáticamente el mismo que para resonadores que se encuentran en serie excepto que las admitancias serán empleadas en lugar de las impedancias.

El valor de los inversores de admitancia J están determinados por las siguientes expresiones:

$$J_{01} = \sqrt{\frac{G_A b_1 w}{g_0 g_1 \omega_1}} \text{ mhos} \tag{31}$$

$$J_{k,k+1} \Big|_{K=1 \text{ a } n-1} = \frac{w}{\omega_1} \sqrt{\frac{b_k b_{k+1}}{g_k g_{k+1}}} \tag{32}$$

$$J_{n,n+1} = \sqrt{\frac{G_B b_n w}{\omega_1 g_n g_{n+1}}} \text{ mhos} \tag{33}$$

en donde  $w = \text{ancho de banda} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$  y  $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$  (34)

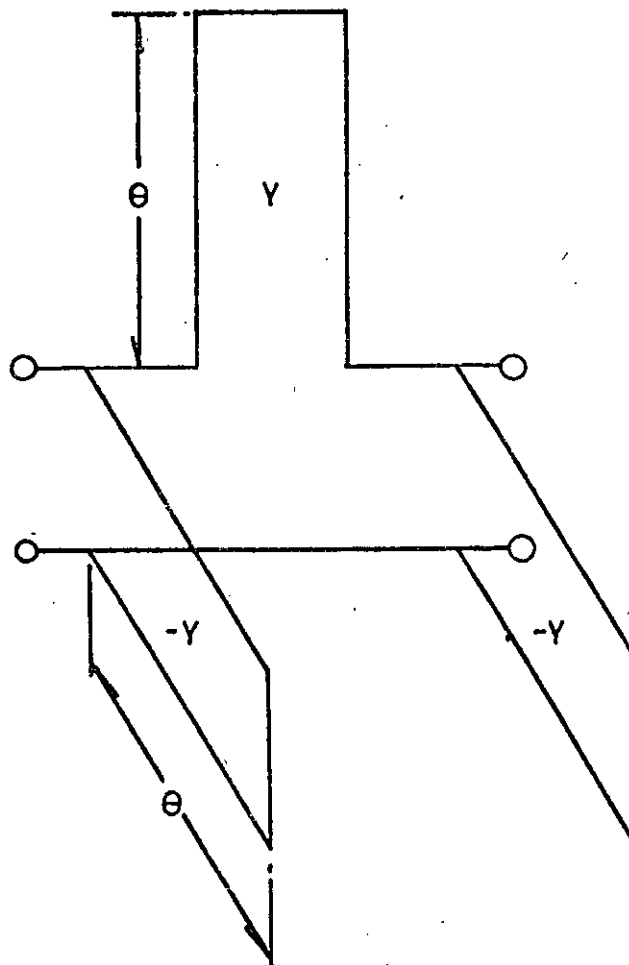
$G_A$  y  $G_B$  son las conductancias de entrada y salida respectivamente como se aprecia en el circuito de la figura (17).

En las ecuaciones de diseño las conductancias de carga (de entrada y salida)  $G_A$  y  $G_B$  junto con los parámetros pendientes

tes  $b_1, b_2, \dots, b_n$  pueden especificarse arbitrariamente.

Si los parámetros de inversión de admitancia  $J_{k, k+1}$  se determinan como se indica en las ecuaciones (31), (32) y (33), la respuesta de transmisión será idéntica a la de un filtro -- equivalente de la forma de la figura (16 b) (suponiendo que los inversores son ideales).

Los inversores  $J$  empleados en la derivación de las ecuaciones del filtro de línea en "peine" son de la forma mostrada en la figura (20).



$$J = | Y \cot \theta |$$

Fig. (20) Inversor de admitancia formado por secciones de línea en corto, de longitud eléctrica  $\theta$ .

Este tipo de transformador de admitancias opera como inversor a todas las frecuencias, pero dista mucho de ser un inversor ideal dado que su parámetro de inversión  $J$  varía con la frecuencia. Como se notará este inversor incluye líneas en paralelo que tienen admitancia característica negativa. Este tipo de admitancias negativas no causará dificultades dado que ellas estarán en paralelo con otras líneas que tienen una admitancia característica positiva y la admitancia característica total de las líneas en paralelo será positiva.

#### 10 Equivalencias de redes

En las figuras (21), (22) y (23) se muestra la equivalencia entre circuitos de línea acoplados en paralelo y circuitos de línea formada por dos conductores paralelos (línea abierta).

En las figuras antes citadas,  $y^{a_{oo}}$  y  $y^{a_{oe}}$  son las admitancias de modo impar y par respectivamente para la línea tipo cinta a;  $y^{b_{oo}}$  y  $y^{b_{oe}}$  son las admitancias de modo impar y par respectivamente para la línea tipo cinta b;  $C_a$  y  $C_b$  son las capacitancias por unidad de longitud entre la línea tipo cinta y tierra,  $C_{ab}$  es la capacitancia por unidad de longitud entre las líneas tipo cinta a y b.  $v$  es la velocidad de propagación.

El circuito de la figura (23) es de la misma forma que el de la figura (22) pero en aquel se ha determinado un valor terminal muy especial  $y_a$ .

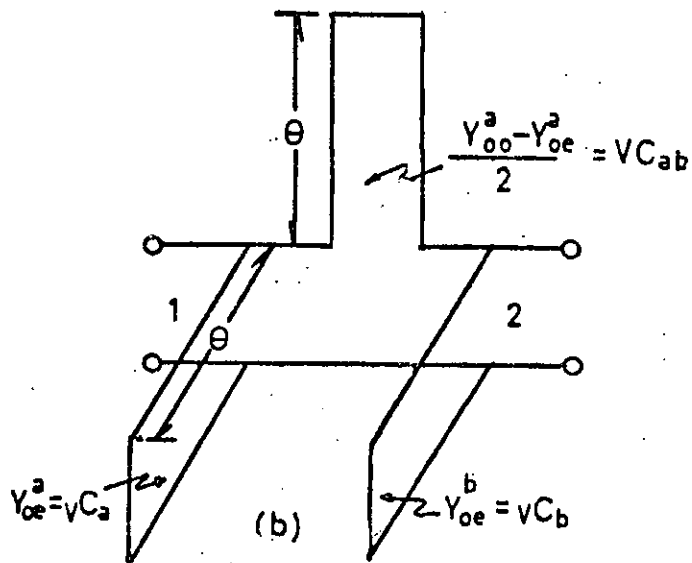
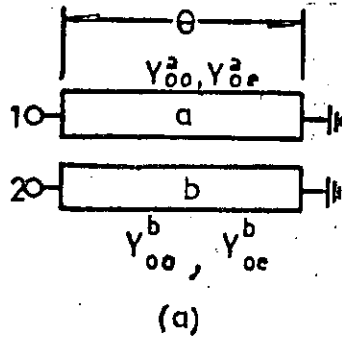


Fig. (21) a) Circuito de línea tipo cinta acoplada en paralelo  
 b) Su equivalente eléctrico en línea abierta

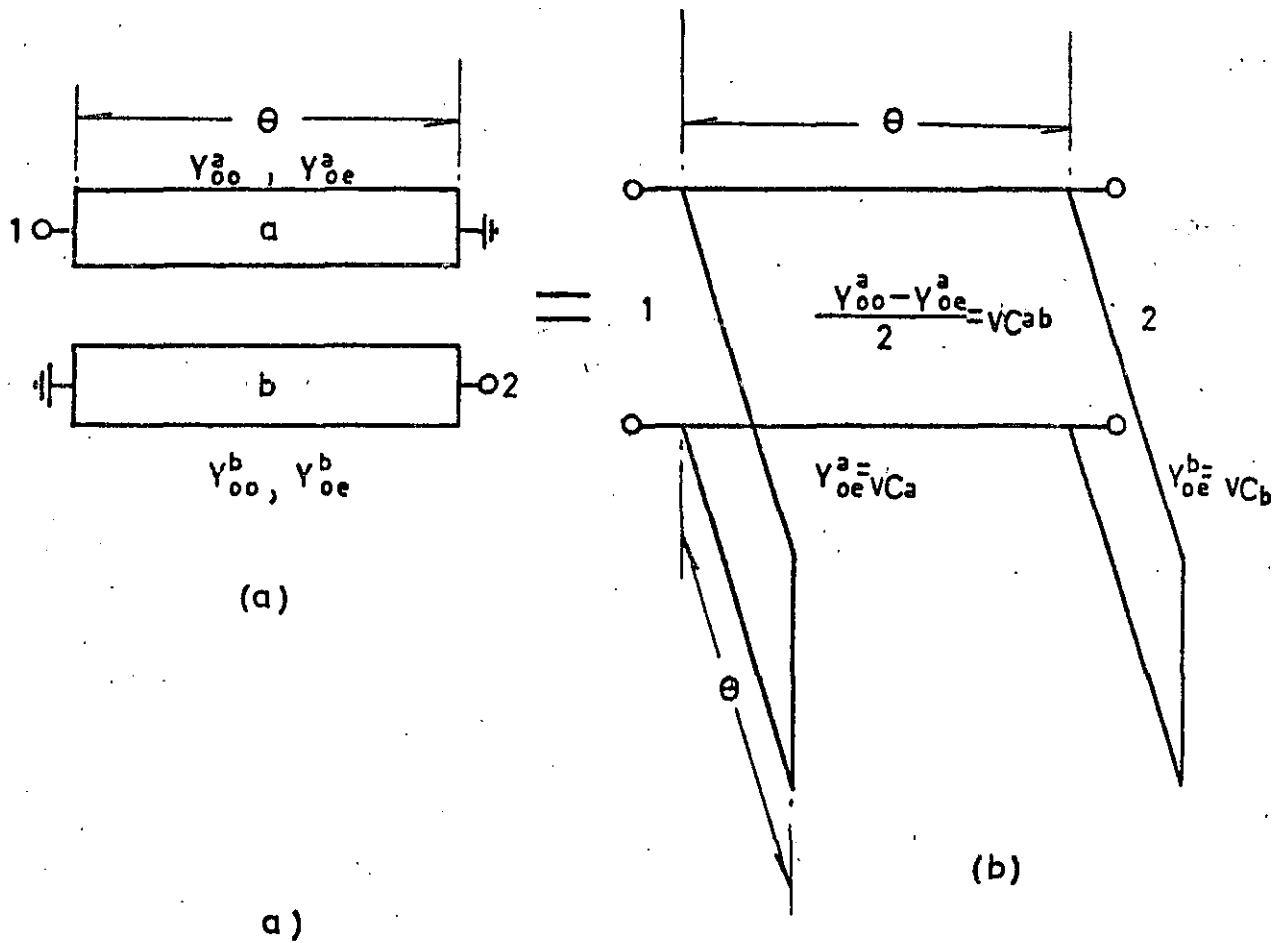
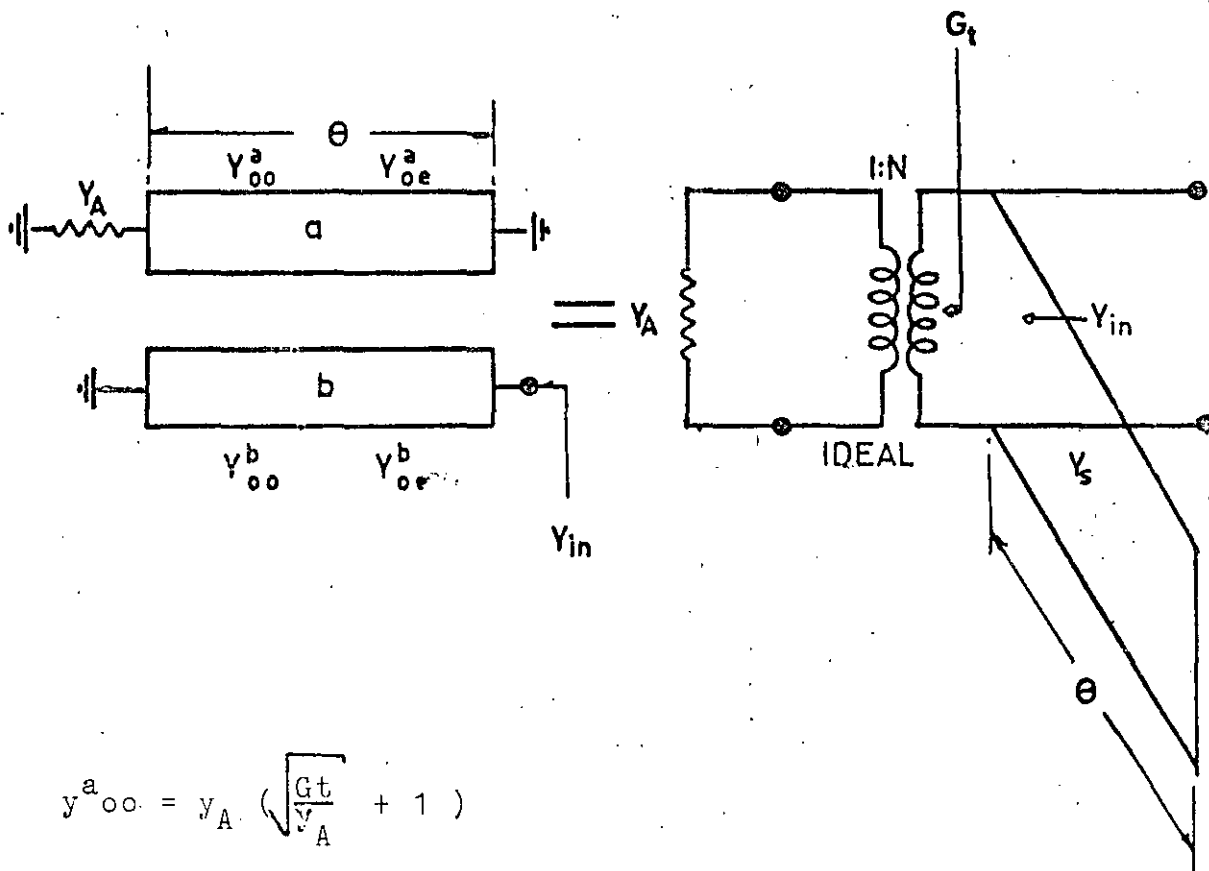


Fig. (22) a) Líneas en strip line corto-circuitadas y acopladas en paralelo (estas líneas pueden ser de igual o de diferente ancho).  
 b) Circuito equivalente en línea abierta

RESTRICCION ESPECIAL:  $y^{a_{oo}} + y^{a_{oe}} = 2y_A$



$$y^{a_{oo}} = y_A \left( \sqrt{\frac{G_t}{y_A}} + 1 \right)$$

$$y^{a_{oe}} = 2y_A - y^{a_{oo}}$$

$$y^{b_{oe}} = y_s - y_A \left( 1 - \frac{G_t}{y_A} \right) - y^{a_{oe}}$$

$$y_s = y_A \left| \frac{N^2 - 1}{N^2} \right| + y^{b_{oe}} - y^{a_{oe}}$$

$$y^{b_{oo}} = y^{b_{oe}} + y^{a_{oo}} - y^{a_{oe}}$$

$$N = \text{relación de vueltas} = \frac{2y_A}{y^{a_{oo}} - y^{a_{oe}}}$$

$$G_t = \frac{y_A}{N^2}$$

Fig. (23) Propiedades especiales de los circuitos de la figura (22)



DESCRIPCION DE LA LINEA DE TRANSMISION  
EN FORMA DE CINTA (STRIP-LINE)

El empleo de líneas de transmisión en forma de cinta ha tenido un gran auge en los últimos años, debido a que, permite realizar circuitos en miniatura en las bandas de VHF, UHF y microondas; empleándose para aplicaciones de bajas y medias potencias. Tales líneas de transmisión, se utilizan en circuitos del estado sólido de bajo costo con muy buenas características eléctricas y una alta confiabilidad.

La línea de transmisión en forma de cinta (Strip-line) consiste de un conductor delgado rectangular colocado en el centro de dos planos de tierra altamente conductores y rodeado por un material dieléctrico como se muestra en la fig. 24

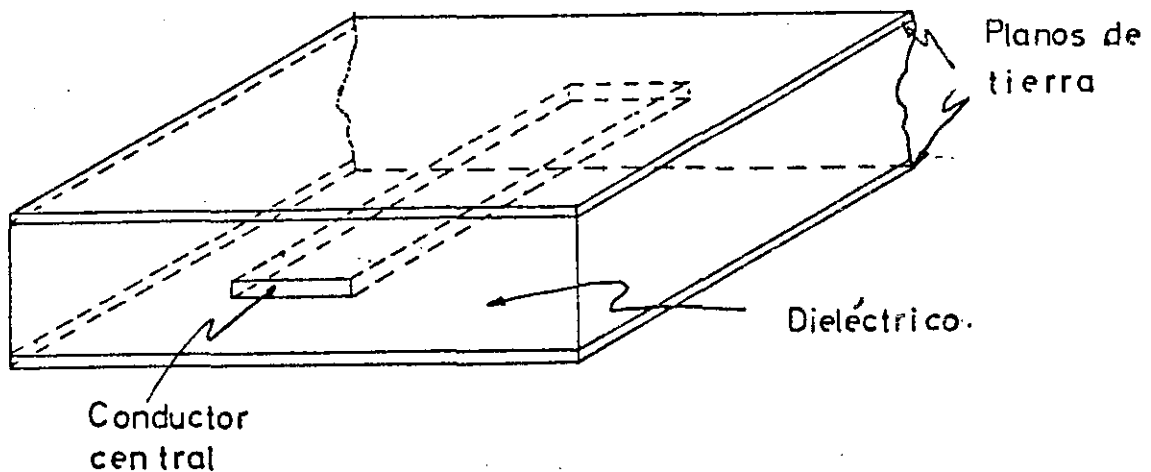


Fig. 24 Línea de transmisión del tipo cinta típica.

El modo de propagación fundamental es una onda electromagnética transversal (TEM). Componentes tales como diodos semiconductores y ferritas pueden ser introducidas dentro de la línea y formar de esta manera multiplicadores de frecuencia o amplificadores con diodos túnel. Tales líneas pueden utilizarse para construir filtros, acopladores direccionales, circuladores, etc.

#### 11 . EVOLUCION DE LA LINEA DE TRANSMISION EN FORMA DE CINTA.

Como punto de partida consideremos la línea abierta formada por dos alambres paralelos, como se ilustra en la figura 25a. En esta línea los dos alambres conducen corrientes de igual magnitud pero de sentido opuesto y el campo electromagnético generado forma una onda electromagnética transversal (TEM), por lo tanto, no existen componentes de campo longitudinal, es decir no hay componentes de campo en la dirección de propagación. Si consideramos una placa de metal delgada perfectamente conductora de longitud infinita colocada perpendicularmente y en el punto medio de la línea que une los centros de los conductores, como se observa en la fig. 25b, la forma del campo no se alterará si uno de los conductores es retirado; debido a que se produce una imagen virtual del alambre que permanece, en la placa de metal; manteniéndose la misma configuración del campo eléctrico. Este concepto básico determina la microcinta, la cual es una de las formas más simples de la línea en forma de cinta.

La microcinta está formada por un conductor rectangular y un material dieléctrico que sirve como soporte al conductor, más una placa metálica que se le denomina plano de tierra (ver fig. 26).

Una desventaja de la microcinta es la pérdida de radiofrecuen

cia debido al empleo de un solo plano de tierra, pero esta dificultad se puede corregir agregando un segundo plano de tierra, obteniéndose como resultado la línea de transmisión de la forma de la fig. 27.

En las líneas de transmisión con dieléctrico de aire el soporte para el conductor central es difícil de realizar. Debido a este inconveniente se emplean la línea en forma de cinta mostrada en la fig. 28. En este tipo de línea el conductor central puede ir impreso de una manera sencilla o doble como se muestra en la fig. 28 a) y b) respectivamente.

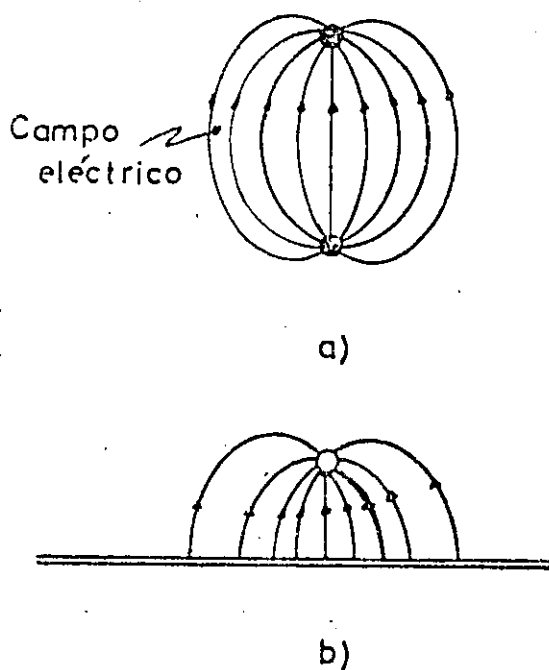


Fig. 25.- Evolución de la línea de transmisión del tipo cinta

- a) Línea de transmisión formada por dos conductores paralelos.
- b) Distribución del campo eléctrico cuando se inserta una placa metálica altamente conductora.

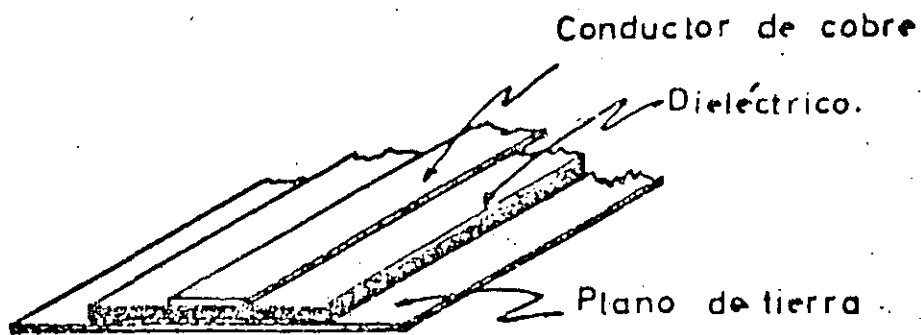


Fig. 26 Micro cinta.

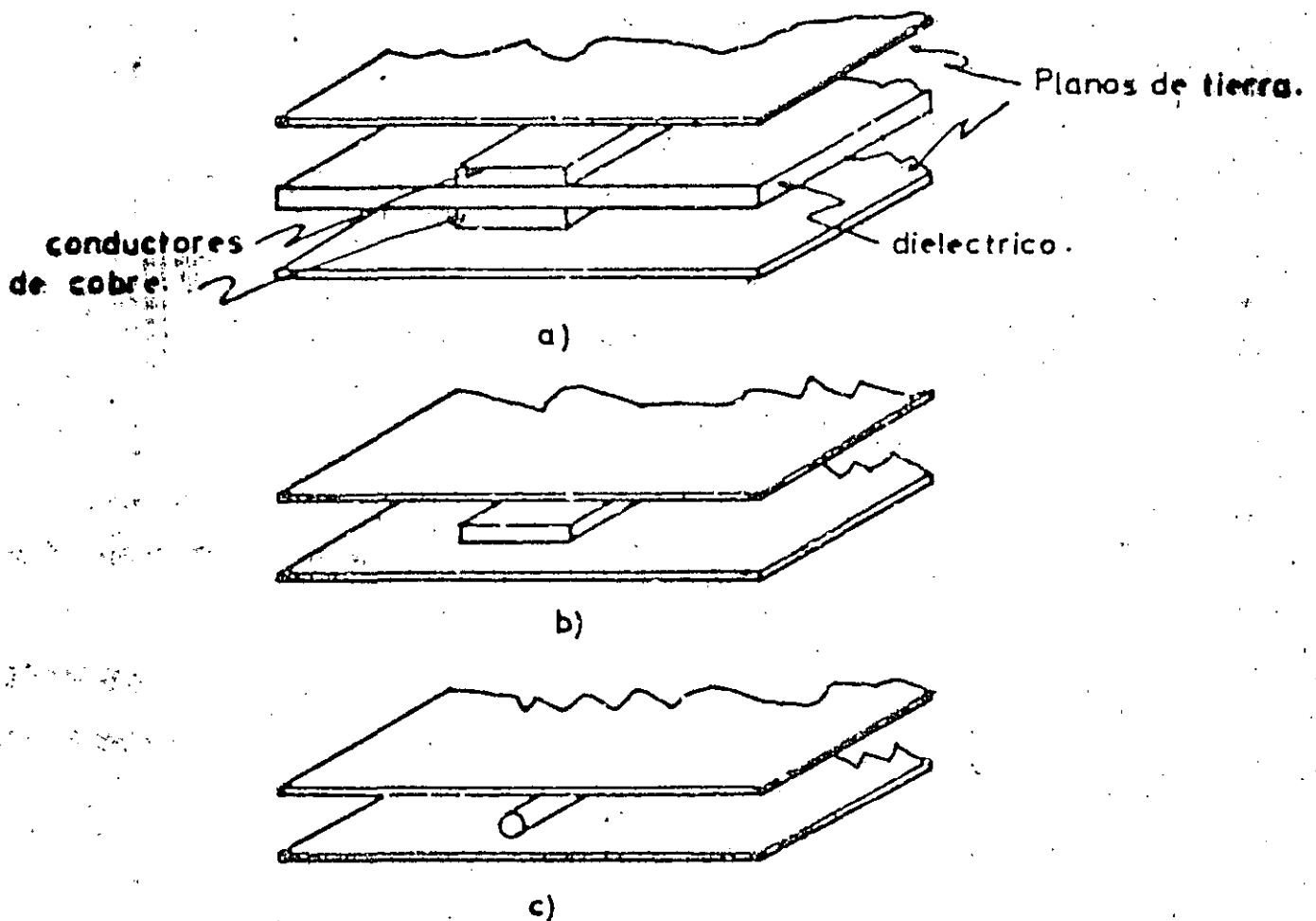


Fig. 27 Línea tipo cinta blindada.

a).- Línea tipo cinta con dieléctrico como soporte del conductor central.

b).- Línea tipo cinta con dieléctrico de aire.

c).- Línea tipo cinta con un conductor central de sección circular.

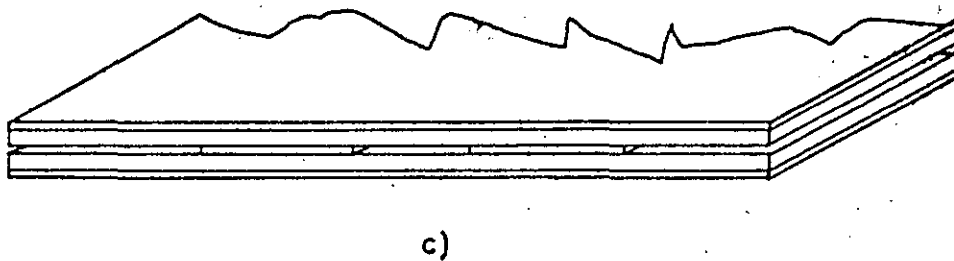
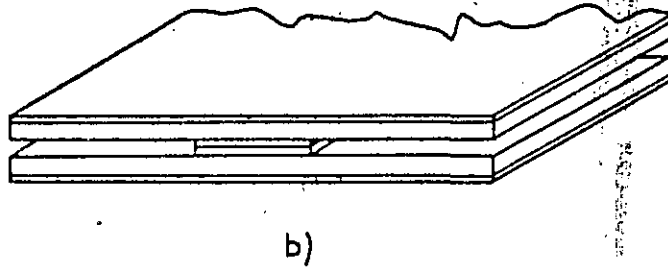
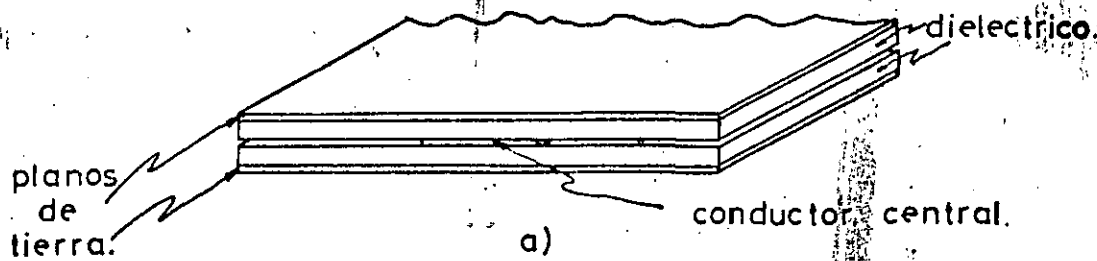


Fig. 28 Línea tipo cinta con conductor central impreso en el dieléctrico.

- a).- Conductor central impreso en una sola cara del dieléctrico.
- b).- Conductor central impreso en ambas hoja del dieléctrico.
- c).- Línea tipo cinta acoplada.

## 12. CONSTRUCCION

La línea de transmisión en forma de cinta que se construye emplea dos hojas de material dieléctrico que tiene generalmente un espesor de 1/16" ó 1/8" recubierto con cobre en ambas caras (1 ó 2 onzas por pie cuadrado). El conductor central se realiza empleando

técnicas de circuito impreso sobre una de las caras recubiertas de cobre del material dieléctrico. Las dos hojas se unen una contra otra para formar la estructura de un "sandwich"; y se sujetan entre dos placas de metal que las presione, con el objeto de obtener muy buena rigidez mecánica, lo cual también proporcionará un buen contacto eléctrico.

Debido al espesor del conductor central existirá un espacio libre de 0.0015" a 0.003" entre los dieléctricos de las dos hojas. Este espacio es importante solamente cuando existe la posibilidad que la potencia pico se rompa o arquee.

Cuando se emplean estructuras como la que se ilustra en la fig. 28b; el espesor adicional debido al doble circuito impreso produce un valor reducido de relación de ondas estacionarias (VSWR).

Las líneas de transmisión con un solo circuito impreso son ampliamente utilizadas.

La importancia de este tipo de construcción es básica para muchos dispositivos importantes, tales como acopladores direccionales, filtros acoplados en paralelo, etc.

### 13. MODOS DE TRANSMISION.

La distribución del campo electromagnético en una línea de transmisión del tipo de cinta, se ilustra en la fig. 29, en la cual se puede observar que el plano neutral no es atravesado por líneas de campo eléctrico y la mayor parte de éste, está concentrado en la región de la cinta.

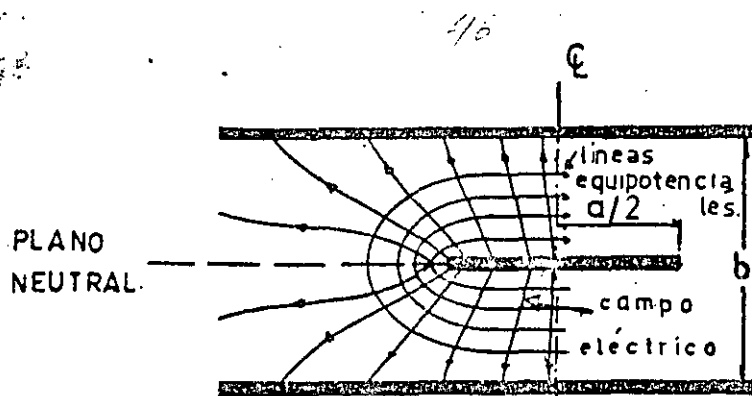


Fig. 29 Distribución de el campo eléctrico en una línea de transmisión en forma de cinta.

Como no existe diferencia de potencial entre las placas exteriores, ninguna energía se propaga en la dimensión lateral.

A primera vista en el estudio de una línea tipo cinta se puede pensar que la capacitancia de la línea, la cual determina su impedancia característica puede determinarse rápidamente partiendo de la fórmula de capacitancia entre placas paralelas. Para cintas anchas de baja impedancia, este concepto es cierto; pero para cintas que tienen una impedancia característica del orden de 50 ohms, la capacitancia debido a los efectos de orilla o borde en los lados del conductor central es una apreciable porción de la capacitancia total y produce un efecto digno de consideración como se muestra en la fig. 30.

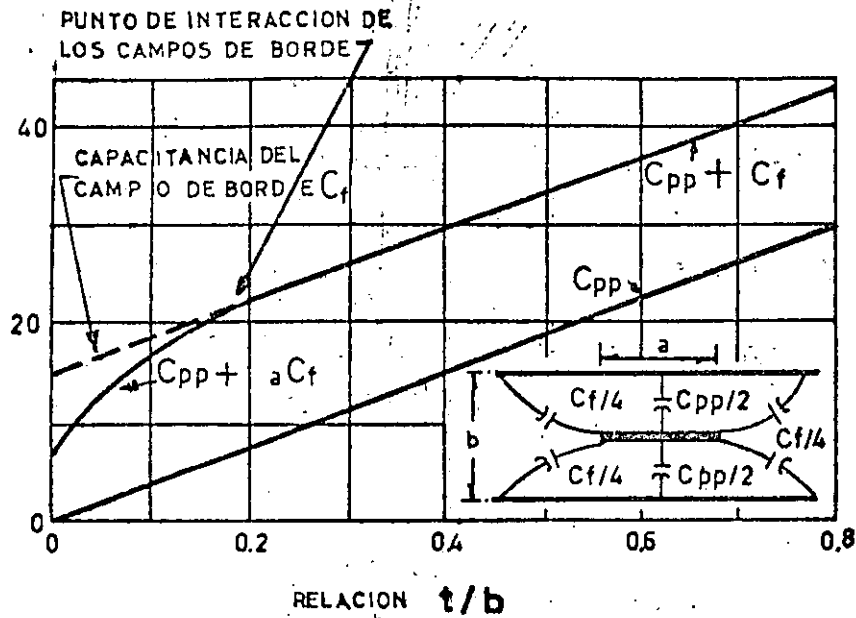


Fig. 30 Gráfica de capacitancia para una línea de transmisión en forma de cinta con un espesor aproximado a cero.

Cuando el ancho de la cinta se reduce para lograr mayor impedancia, el efecto de la interacción entre los campos dispersos en los dos lados del conductor central viene siendo mayor. Este efecto el cual viene siendo apreciable para todas las cintas angostas debe tomarse en cuenta en el análisis de líneas de transmisión de alta impedancia.

Si el ancho de la cinta aumenta, los campos de orilla disminuyen, llegando a ser una pequeña porción del campo total y su efecto sobre la impedancia es por lo tanto reducido.

El mecanismo de acoplamiento entre secciones de línea en forma de cinta como en el caso de la fig. 28c puede explicarse por la distribución del campo eléctrico para los modos fundamentales TEM



los cuales se muestran en la fig. 31.

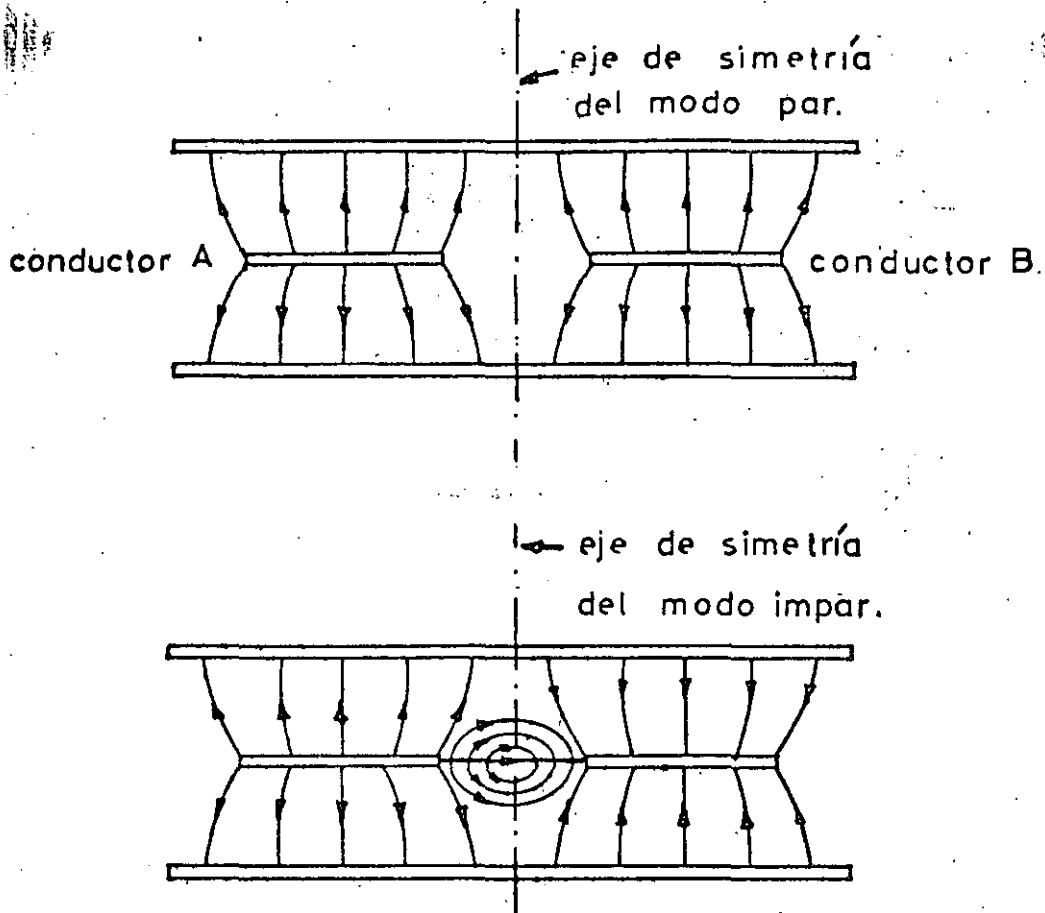


Fig. 31 Distribución del campo eléctrico del modo para e impar en una línea del tipo cinta acoplada.

El modo par resulta cuando las corrientes en los dos conductores son iguales y en la misma dirección. El modo impar resulta cuando las corrientes en los conductores son iguales pero de direcciones opuestas. Es el modo impar el que acopla los dos conductores. Si se sobreponen los campos producidos por los dos modos puede verse que el campo resultante tiende a aumentarse en un conductor y a oponerse en el otro. Bajo estas condiciones la mayor parte de la energía estará concentrada en uno de los conductores y un campo de

acoplamiento existirá entre ambos conductores. El mecanismo de acoplamiento puede también explicarse en términos de la capacitancia entre las dos líneas y este es un punto de vista muy empleado cuando las líneas acopladas se usan como elementos de un filtro electromagnético. En estos casos, la longitud eléctrica de la línea debe ser de  $\lambda/4$  (en donde  $\lambda$  es la longitud de onda en el dieléctrico) para que exista un máximo acoplamiento.

14. IMPEDANCIA DE LA LINEA.

La línea en forma de cinta al igual que la línea coaxial opera en el modo TEM y una de las características más importantes de cualquier medio de transmisión operando en este modo es la impedancia característica  $Z_0$ , la cual puede ser calculada mediante la siguiente relación:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{35}$$

en donde L es la inductancia por unidad de longitud, C es la capacitancia por unidad de longitud y  $Z_0$  es la impedancia característica. La velocidad de propagación v del modo principal en dicho medio de transmisión es;

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{36}$$

combinando las ecuaciones (35) y (36) se tiene

$$Z_0 = \frac{1}{CV} \tag{37}$$

En cualquier línea de dos conductores la velocidad de propagación es la velocidad de la luz c cuando el dieléctrico entre los conduc-

tores es el aire. Cuando el medio entre los conductores tiene una constante dieléctrica  $\epsilon$  y una permeabilidad magnética  $\mu$ ; se tiene que

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Por lo que  $Z_0$  puede expresarse como

$$Z_0 = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{C} = \frac{\epsilon}{C} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (38)$$

$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  es la impedancia característica del medio en el cual viaja la onda.

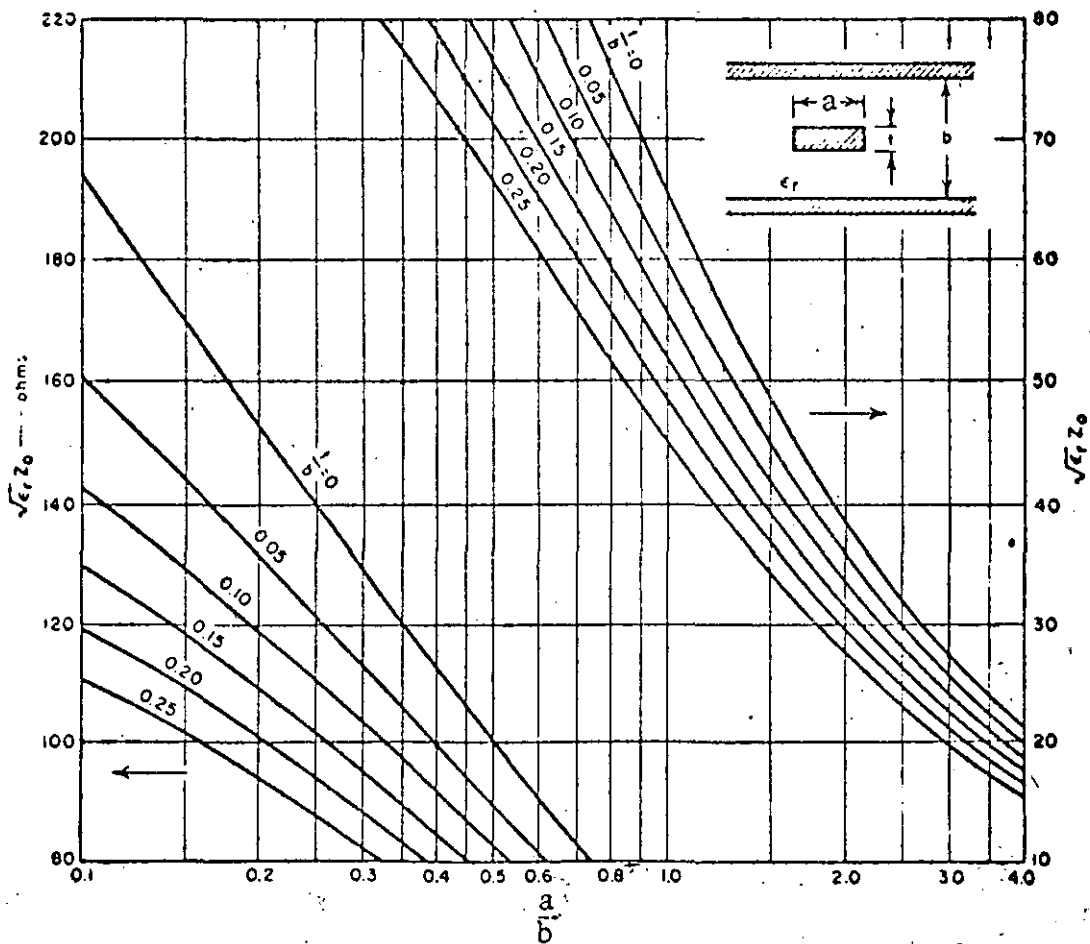


Fig. 32 Gráfica de  $Z_0$  en función de  $\frac{a}{b}$  para varios valores de  $\frac{t}{b}$

## 15. CAPACITANCIA E INDUCTANCIA DE LA LINEA.

Como puede observarse de la ecuación ( 38) para un medio determinado de transmisión, el único parámetro requerido para determinar la  $Z_0$  de la línea es la capacitancia  $C$  por unidad de longitud.

Un cálculo aproximado basado en la fórmula de capacitancia entre placas paralelas, nos proporciona algún conocimiento de la operación de esta línea.

La capacitancia entre placas paralelas expresada en  $\mu\mu$  farads por unidad de longitud para el caso de tres planos paralelos está dada por<sup>1</sup>

$$C_{pp} = 0.8976 \frac{a/b}{1-t/b} \epsilon \quad (39)$$

en donde  $a$  es el ancho de la cinta o sea el conductor central,  $b$  es la separación de las placas,  $t$  es el espesor del conductor central,  $\epsilon$  es la constante dieléctrica y  $C_{pp}$  es la capacitancia entre placas paralelas.

El empleo de la fórmula de la capacitancia entre placas paralelas para calcular la impedancia característica es aceptable para valores de impedancia menores de 25 ohms. La capacitancia debido al campo disperso en los bordes  $C_f$  viene siendo apreciable para impedancias mayores que este valor y debe tomarse en cuenta en los cálculos (sumarse).

La impedancia característica tomando en cuenta la capacitancia debida al campo disperso en los bordes será entonces<sup>2</sup>;

$$Z_0 = \left( \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \right) \left\{ \frac{1-t/b}{0.8976(a/b) + (1-t/b)C_f} \right\} \quad (40)$$

<sup>1</sup>Referencia 2.

<sup>2</sup>Referencia 2.

Considerando a  $C_f$  como una constante (esto se puede hacer, ya que  $C_f$  puede determinarse experimentalmente) la fórmula anterior para calcular la impedancia característica de la línea tiene una exactitud muy aceptada para usos de ingeniería, en el rango de 25 a 100 ohms. En este punto la interacción entre los campos de orilla son muy importantes, y está en función de las relaciones  $a/b$  y  $t/b$ .

En las figs. 32 y 41 se muestran gráficas para determinar el valor de  $Z_0$  y la capacitancia de orilla  $C'f/e$  en función de la constante dieléctrica del material dieléctrico, y las relaciones  $a/b$  y  $t/b$ .

Debido a que la línea puede ser representada por redes de elementos constantes, es posible en muchos casos emplear un análisis de baja frecuencia para diseñar circuitos pasivos de microondas tales como filtros. En la fig. 33 se muestran algunas relaciones equivalentes de impedancia.

En estos diagramas las figuras (a) y (b) son vistas del extremo de la línea y la figura (c) y (d) son vistas de planta de la línea.

La impedancia característica de la línea es una función de las dimensiones de la misma y un parámetro  $d_0$ , el cual está en función del espesor del conductor central  $t$ . El valor de  $d_0$  puede determinarse de gráficas proporcionadas en la referencia (3). En la figura

33 (b) la capacitancia en paralelo se observa que es equivalente a una línea de corta longitud  $S$ . La capacitancia total de esta línea puede considerarse que es la suma de capacitancia entre el conductor central y los planos de tierra y la capacitancia debida a los campos dispersos en los bordes de la cinta.

Por otro lado una capacitancia en paralelo también puede obtenerse por medio de un poste metálico cuando un extremo forma un pequeño hueco con el conductor central y el otro extremo está en corto con los planos de tierra. Generalmente se emplean pequeños tornillos como poste metálico.

Una capacitancia en serie se forma cuando se sobreponen longitudes de cintas (o conductor central) que esten separadas por una pequeña sección de dieléctrico. Esta técnica es muy empleada cuando se requiere grandes capacitancias. Cuando se requieren pequeños valores de capacitancia en serie se obtienen fácilmente cortando una pequeña sección del conductor central.

Una inductancia en serie se logra cuando se varía el ancho del conductor central como en la figura 33(c).

Una sección de línea en circuito abierto (Stub) es equivalente a un circuito en paralelo con un resonador en serie (como se ilustra en la figura 33 d).

Este circuito es muy usual particularmente para acoplamiento de impedancia y para filtros pasa bajos.

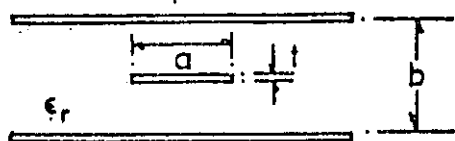
Para permitir un entonamiento con un capacitor variable, se emplean stubs en circuito abierto con una carga capacitiva. El circuito puede hacerse el cual aparezca primeramente capacitivo o inductivo dependiendo de que el stub sea menor o mayor que  $\lambda/4$ .

El análisis matemático de la línea de transmisión en forma de cinta (Strip-line) es bastante complicado y pretender desarrollarlo estaría fuera del propósito de este trabajo. Solamente mencionaré que existen dos métodos generales de análisis para este tipo de estructuras que son; el primero la solución del valor de frontera de

las ecuaciones de Laplace y el segundo una solución por método de -  
Mapeo Conformal<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>referencia (4).

IMPEDANCIA CARACTERISTICA.



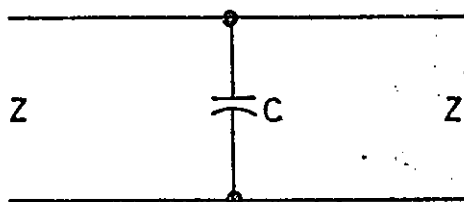
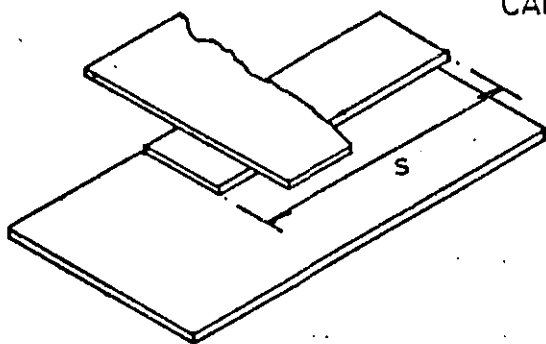
$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left| \frac{4b}{d_0 \pi} \right| \text{ Ohms.}$$

$\epsilon_r$  = CONSTANTE DIELECTRICA RELATIVA.

$d_0$  = DETERMINADA DE GRAFICAS DE REFERENCIA 3

a)  $a/b < 0.35$

CAPACITANCIAS EN PARALELO.

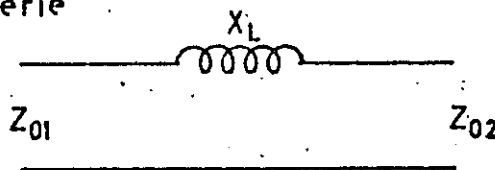
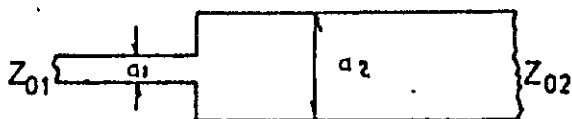


s en pulgadas

$$C \approx 0.9 \epsilon_r s \frac{a}{1 - \frac{t}{b}} \text{ pf}$$

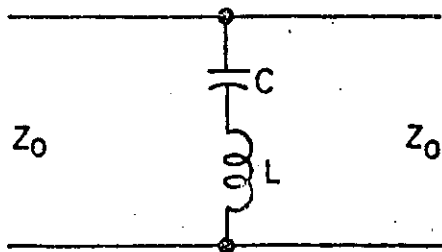
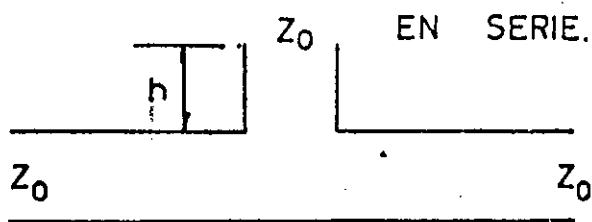
b)

Inductancias en serie



$$\frac{X_L}{Z_{02}} = \left[ \frac{2a_2 + (4b/\pi) X_L \ln 2}{\lambda} \right] \text{csc} \left[ \frac{\pi}{2} \frac{Z_{02}}{Z_{01}} \right] \quad \text{c)}$$

CIRCUITO PARALELO CON RESONADOR



$B_{oc}$  SUSCEPTANCIA

$$B_{oc} = \frac{1}{Z_0} \tan \left[ 2\pi \frac{h}{\lambda} \right] \text{ mhos} \quad \text{d)}$$

Fig. 33 Relaciones equivalentes de impedancias.



Una combinación de un filtro pasabanda en forma de Strip-line con un diodo tunel proporciona un amplificador de muy bajo nivel de ruido, en la banda de UHF y microondas; el cual puede emplearse en cualquier equipo receptor que opere en estas frecuencias, tales como receptores para televisión, aerocomunicación, radiotelescopios, etc.

El objetivo de este trabajo es el de familiarizarse con las tecnologías modernas, que se emplean para la construcción de estructuras que nos permitan recibir y acoplar elementos activos para operar en altas frecuencias (microondas).

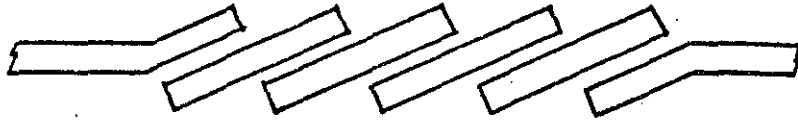
No se pretende realizar un estudio teórico matemático en detalle, sino que por el contrario únicamente se han empleado las fórmulas necesarias para describir los diferentes conceptos que intervienen y para realizar el diseño de la estructura.

En el presente trabajo se estudian las características de filtros pasabanda empleando como elementos del circuito a secciones de líneas de transmisión en forma de cinta (Strip-line) con frecuencia de operación en el rango de UHF.

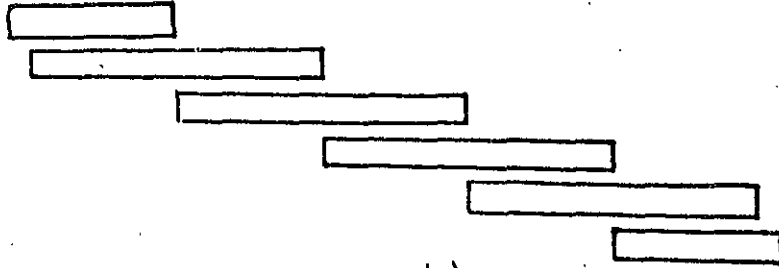
#### 16. Filtros acoplados directamente y en paralelo.

Los tipos de filtros pasabanda con resonadores multiacoplados en Strip-line más comunmente empleados, son aquellos formados por secciones de líneas de  $1/4$  de longitud de onda o menores.

Los arreglos eléctricos más frecuentes son el acoplamiento serie y paralelo como se muestra en la figura 34.



a)



b)



c)

Fig. 34 Filtros en línea en forma de cinta (Strip-line) acoplados directamente y en paralelo.

a) y b) acoplamiento en paralelo      c) acoplamiento en serie.

El acoplamiento en paralelo ofrece una serie de ventajas sobre aquellos acoplados en serie; a saber:

- a) La longitud física del filtro se reduce aproximadamente a la mitad.
- b) Se obtiene una respuesta de la frecuencia contra pérdida de inserción simétrica. (La primer respuesta espuria está localizada a tres veces la frecuencia central de operación).
- c) Se permite una mayor separación entre los elementos de línea adyacentes (Lo cual es de gran importancia, ya que facilita las tolerancias en la separación de las líneas para un

ancho de banda determinado).

d) Una mayor separación permite una gran capacidad de potencia en el filtro.

17. Características de un Filtro Pasabanda de Línea en "peine" en Strip-line.

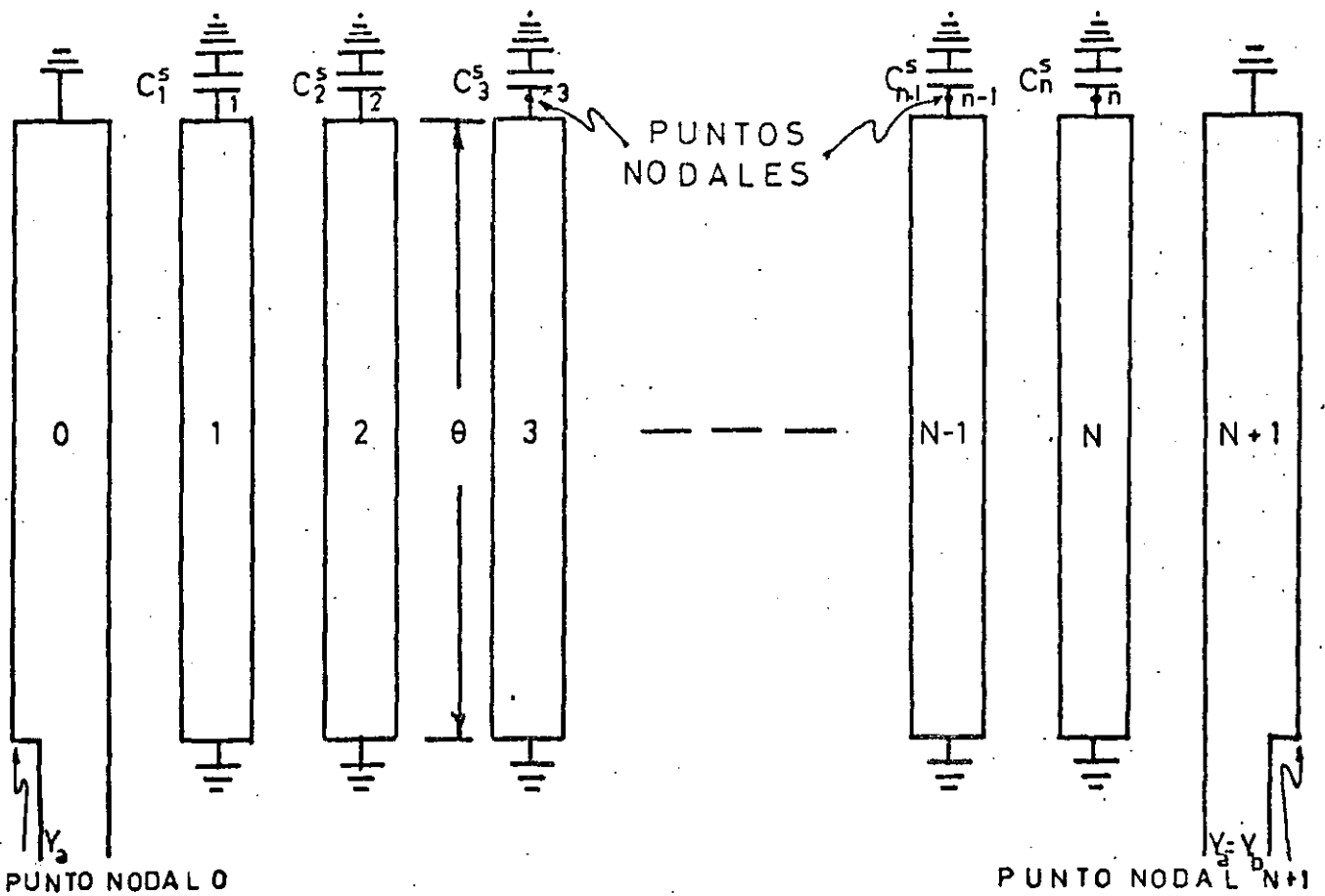


Fig. 35 Filtro pasa-banda tipo "peine" empleando Línea en forma de cinta.

La figura 35 muestra un filtro pasabanda en forma de "peine" en Strip-line. En esta clase de filtros los resonadores están formados por elementos de línea de transmisión; los cuales están cortocircuitados en un extremo y tienen un capacitor  $C_k^S$  en el otro extremo de cada resonador y tierra.

De acuerdo con la figura 35, los elementos de línea del 1 al  $n$  y sus capacidades asociadas forman los resonadores; mientras que los elementos de línea 0 y  $n + 1$  constituyen transformadores de impedancia en cada extremo del filtro.

El acoplamiento entre los resonadores de este tipo de filtros, se logra por medio de campos dispersos en los bordes de las líneas. Este acoplamiento es predominantemente magnético.

El capacitor  $C_k^S$  en el extremo de cada línea resonante permite que la longitud de estas líneas sea menor que  $\lambda_0/4$  en resonancia. (donde  $\lambda_0$  es la longitud de onda en el medio de propagación a media banda).

Sin carga reactiva en los extremos de cada elemento de línea, los efectos de acoplamiento eléctrico y magnético se cancelan uno con otro y la configuración no tiene el efecto deseado.

Al diseñar este tipo de filtro; se recomienda hacer el valor de  $C_k^S$  suficientemente grande para que los elementos de líneas resonantes tengan una longitud de  $\lambda_0/8$  o menor. La separación entre cada resonador adyacente debe de ser la adecuada para permitir un buen acoplamiento.

Una de las características de este tipo de filtro es que en su respuesta en frecuencia aparece un segundo pasabanda, el cual ocurre cuando la longitud de los elementos de línea resonantes están -

cerca de la media longitud de onda por la que si las líneas resonantes tienen una longitud de  $\lambda_0/8$  en el primer pasabanda; el segundo pasabanda estará localizado aproximadamente a 4 veces la frecuencia central del primer pasabanda. Por lo que si se hace que la longitud de las líneas resonantes sean menores de  $\lambda_0/8$  en el primer pasabanda, el segundo resultará bastante alejado del primer pasabanda.

Otra propiedad de este tipo de filtro es que teóricamente la atenuación que imprime a las frecuencias para las cuales los elementos de línea resonante tienen una longitud de  $\lambda_0/4$  es infinita. Debido a esta propiedad la atenuación arriba del primer pasabanda será muy elevada.

Por las propiedades antes mencionadas este tipo de filtro tienen las siguientes ventajas:

- a) Resulta en su aspecto físico muy compacto y de dimensiones muy reducidas.
- b) La atenuación de la señal en la región de rechazo es muy elevada y la banda eliminada arriba del primer pasabanda resulta muy amplia.
- c) Puede diseñarse este tipo de filtro para que la pendiente de atenuación en el lado superior sea excesivamente pronunciada.
- d) Se logra un buen acoplamiento magnético entre elementos resonantes cuando la separación entre ellos es óptima.
- e) Este tipo de filtro puede construirse sin la necesidad de soportes dieléctricos, por lo que las pérdidas debido a estos materiales se eliminan.

El procedimiento empleado para deducir las fórmulas que permitan determinar las dimensiones de los resonadores está basado en

aproximaciones; no obstante se obtiene buena exactitud para filtros de reducido ancho de banda, y aún se han obtenido buenos resultados en filtros con anchos de banda hasta del 15 % de  $f_0$ .

CALCULO DE UN FILTRO PASABANDA  
EMPLEANDO ELEMENTOS DE LINEA  
EN FORMA DE CINTA

El procedimiento del diseño se basa en el uso de los valores de los elementos del filtro prototipo pasabajo los cuales dan al filtro pasabanda su característica deseada.

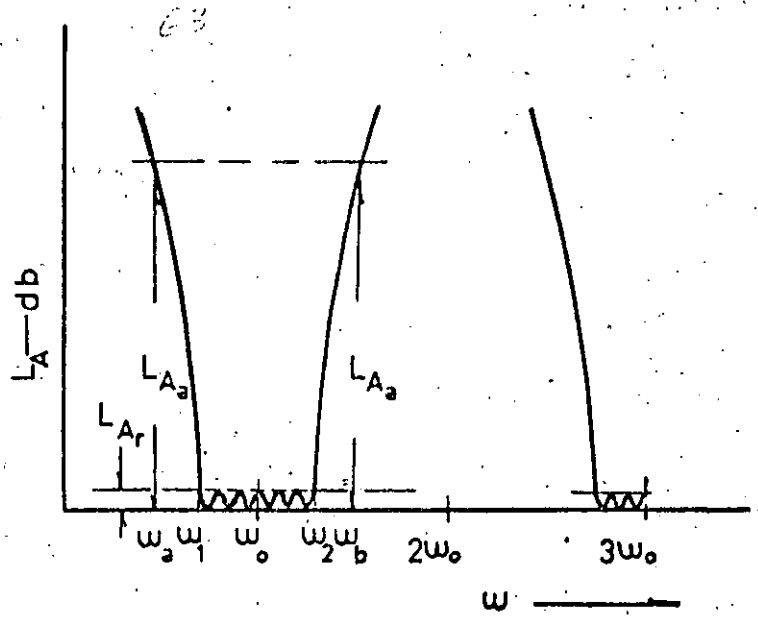
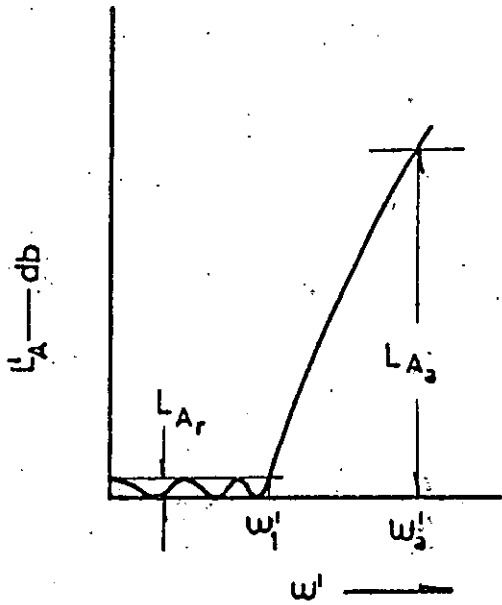
Un prototipo pasabajo con  $n$  elementos reactivos proporcionará un filtro pasabanda con  $n$  resonadores.

Las figuras 8(b) y (d) ilustran las respuestas de un filtro pasabanda las cuales corresponden a las respuestas de los prototipos pasabajos de (a) y (c) respectivamente. La respuesta del filtro pasabanda tendrá el mismo tipo de características que el prototipo, pero el ancho de banda del filtro pasabanda puede determinarse arbitrariamente.

La característica de atenuación del prototipo pasabajo la cual está en función de  $\omega'$  puede mapearse a la característica de atenuación del filtro pasabanda (centrada a  $\omega_0$ ) como una función de la variable  $\omega$  (la cual es la frecuencia en radianes del filtro pasabanda).

La característica de atenuación del filtro pasabanda puede predecirse dado que la atenuación es la misma tanto para el filtro pasabajo como para el pasabanda a frecuencias  $\omega'$  y  $\omega$  respectivamente; las cuales están relacionadas por el mapeo conformal.

El mapeo mostrado en la fig. 36 es más exacto para filtros que tengan un ancho de banda bastante angosto. Un mapeo más exacto tendría en cuenta el hecho de que la atenuación del filtro en forma de "peine" tiene un valor infinito (teóricamente) cuando las longi-



$$L'_A(\omega') = 10 \log_{10} \{ 1 + \epsilon \cos^2 [n \cos^{-1} (\frac{\omega'}{\omega_1'})] \} \text{ db}$$

para  $\omega' \leq \omega_1'$

$$L'_A(\omega') = 10 \log \{ 1 + \epsilon \cosh^2 [n \cosh^{-1} (\frac{\omega'}{\omega_1'})] \} \text{ db}$$

para  $\omega' \geq \omega_1'$

donde:

$$\epsilon = \{ [\text{antilog}(\frac{L_{Ar}}{10})] - 1 \}$$

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{\text{antilog}_{10}(L_{Aa}/10) - 1}{\epsilon}}}{\cosh^{-1} \frac{\omega'_a}{\omega_1'}}$$

$$L_A(\omega) = L'_A(\omega') \text{ db}$$

en donde

$$\omega' = \frac{2\omega_1'}{W} \left| \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right|$$

$$\omega_0 = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$$

Y

$$W = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$$

en donde  $\omega'_a = \frac{2\omega_1'}{W} \left| \frac{\omega_a - \omega_0}{\omega_0} \right|$

Fig. 36 Ecuaciones y parámetros para la respuesta Tchebyscheff.



tudes de la líneas resonantes son de  $1/4$  de longitud de onda ( $\frac{\lambda_0}{4}$ ).

Aunque el mapeo presentado en la fig. 36 está simplificado en algunos aspectos; éste representa resultados prácticos bastante -- aceptables. Para filtros experimentales de 10% de ancho de banda es te tipo de mapeo predice la atenuación con bastante exactitud en el lado inferior del pasabanda no así en el lado superior del mismo pa sabanda.

#### 18. Definición de los Parámetros de las líneas resonantes.

Las ecuaciones de diseño expresadas en este trabajo contienen capacitancias por unidad de longitud para todas las líneas que forman el filtro; de cuyos valores se podrán determinar las dimensiones físicas de las mismas. Cuando se trabaja con strip-line, uno de los problemas más comunes es el de acoplar conductores centrales que tienen un espesor apreciable. La sección transversal de una estructura de este tipo se muestra en la fig. 37, en la cual existen dos planos de tierra paralelos separados por una distancia  $b$  y dos barras rectangulares entre ellos colocadas al centro y paralelas a los planos de tierra. La propagación TEM a través de dicha estructura puede describirse en términos de dos modos ortogonales; generalmente denominados como el modo par y el modo impar. En el modo par los dos conductores centrales están al mismo potencial, mientras que en el modo impar los dos conductores centrales están a potencia les opuestos con respecto a los planos de tierra.

Estos dos modos TEM tienen impedancias características diferentes las cuales están íntimamente relacionadas a las capacitancias estáticas de las barras a tierra. Las capacitancias son designadas convencionalmente como capacitancias entre barras y los planos de tierra y capacitancias de orilla entre los extremos y esquinas de

las barras y los planos de tierra. Estas capacitancias se ilustran en la fig. 37

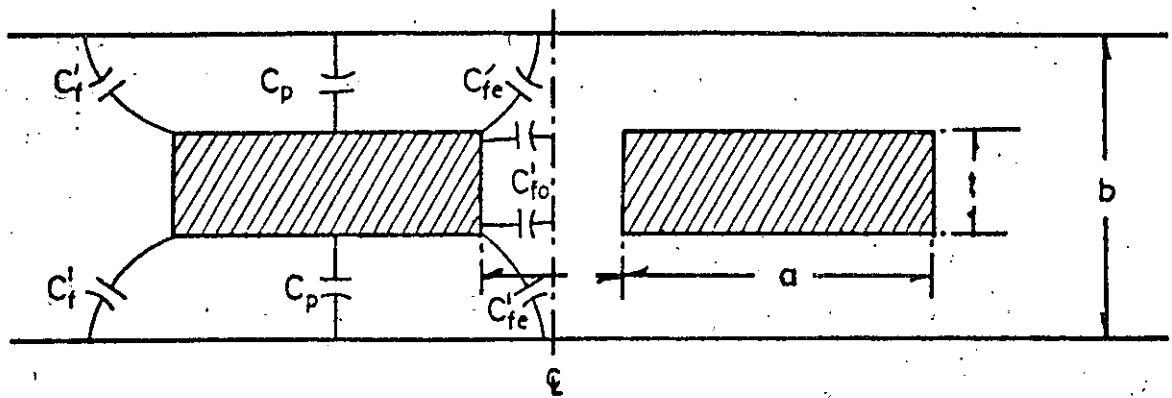


Fig. 37 Barras rectangulares acopladas entre placas paralelas.

La impedancia características  $Z_0$  de una línea de transmisión uniforme sin pérdidas operando en el modo TEM está relacionada a su capacitancia en paralelo por la expresión

$$Z_0 \sqrt{\epsilon_r} = \frac{\eta}{C/\epsilon} \text{ ohms} \quad (41)$$

En donde  $\sqrt{\epsilon_r}$  = constante dieléctrica relativa del medio en el cual viaja la onda

$\eta$  = impedancia del espacio libre la cual es 376.7 ohms.

$C/\epsilon$  = relación de la capacitancia estática por unidad de longitud entre conductores a la permitividad (en las mismas unidades) del medio dieléctrico (esta relación es independiente de la constante dieléctrica)

Las impedancias de modo par e impar de líneas TEM acopladas se encuentran sustituyendo las capacitancias de modo par e impar de las líneas en la ecuación (41)

La fig. 38 muestra un diagrama esquemático generalizado de línea de transmisión en forma de cinta acoplada y blindada. (Los

... las barras y a las barras...

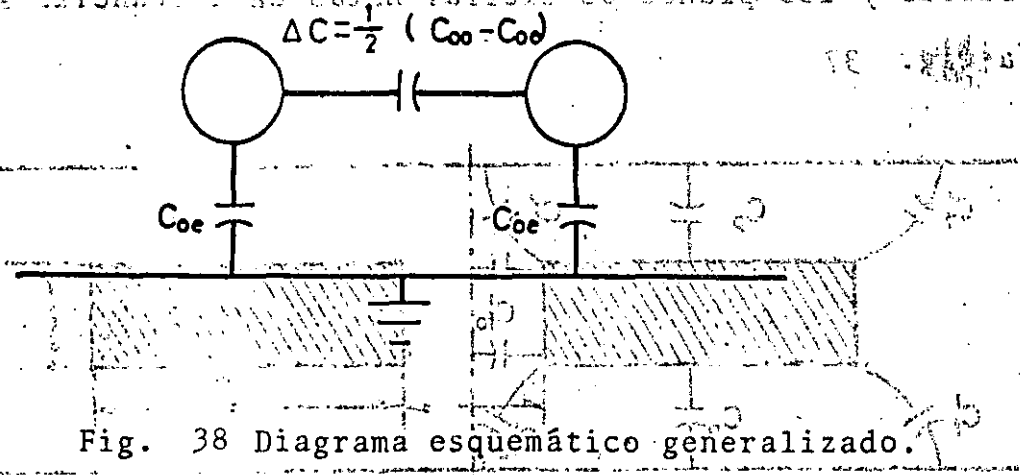


Fig. 38 Diagrama esquemático generalizado.

círculos representan los conductores acoplados). La capacitancia a tierra para un solo conductor, cuando ambos conductores están al mismo potencial (modo par) es  $C_{oe}$ ; la capacitancia de modo par. La capacitancia a tierra cuando los dos conductores están cargados opuestamente con respecto a tierra es  $C_{oo}$ ; la capacitancia del modo impar.

(1A) La estructura de la fig. 37 está formada por superficies planas y paralelas; lo cual la hace práctica para considerar la capacitancia total que está formada de capacitancias entre superficies planas y paralelas, más las capacitancias de orilla apropiadas (las capacitancias de orilla toman en cuenta la distorsión de las líneas del campo debido a la proximidad de los lados de la línea en forma de cinta).

En la fig. 37 se ven las capacitancias relacionadas con la geometría de la estructura; de la cual se deduce que la capacitancia total de modo par  $C_{oe}/\epsilon$  desde una barra a tierra es:<sup>1</sup>

$$\frac{C_{oe}}{\epsilon} = 2 \left( \frac{C_p}{\epsilon} + \frac{C'f_e}{\epsilon} + \frac{C'f}{\epsilon} \right) \quad (42)$$

y la capacitancia total de modo impar  $C_{oo}/\epsilon$  desde una barra a tierra es:

<sup>1</sup>referencia 11.

$$\frac{C_{00}}{\epsilon} = 2 \left( \frac{C_p}{\epsilon} + \frac{C'_{fo}}{\epsilon} + \frac{C'_{f}}{\epsilon} \right) \quad (43)$$

En las dos ecuaciones anteriores  $C_p$  es la capacitancia entre placas paralelas desde la parte superior o inferior de una barra al plano de tierra más próximo,  $C'_{fe}$  es la capacitancia a tierra desde una esquina y la mitad de la pared vertical asociada en la región de acoplamiento de una barra para excitación de modo par,  $C'_{fo}$  es la capacitancia a tierra desde una esquina y la mitad de la pared vertical asociada en la región de acoplamiento de una barra para excitación de modo impar y  $C'_{f}$  es la capacitancia a tierra desde una esquina y la mitad de la pared vertical asociada en la región donde no existe acoplamiento de una barra para cualquier tipo de excitación.

De acuerdo con la fig. 38 y las definiciones de las capacitancias de modo par e impar se observa que la capacitancia  $\frac{\Delta C}{\epsilon}$  desde una barra hasta otra inmediata está dada por

$$\frac{\Delta C}{\epsilon} = \frac{1}{2} \left( \frac{C_{00}}{\epsilon} - \frac{C_{0e}}{\epsilon} \right) \quad (44)$$

substituyendo  $\frac{C_{00}}{\epsilon}$  y  $\frac{C_{0e}}{\epsilon}$  por sus respectivos valores expresados en (42) y (43) se tiene a  $\frac{\Delta C}{\epsilon}$  expresada en términos de las capacitancias de orilla o sea:

$$\frac{\Delta C}{\epsilon} = \frac{C'_{fo}}{\epsilon} - \frac{C'_{fe}}{\epsilon} \quad (45)$$

En la fig. 39 se muestran gráficas para los valores de las capacitancias de orilla de modo par y las capacitancias  $\frac{\Delta C}{\epsilon}$ , en función del espesor de las barras, la separación entre planos de tierra y el espaciado entre las barras.

La fig. 40 muestra una gráfica con los valores de la capacitancia de orilla de modo impar  $\frac{C'_{fo}}{\epsilon}$  también en función del espesor de las barras, la separación entre ellas y la separación de los planos de tierra.

En la fig. 41 se muestran los valores para la capacitancia de orilla  $\frac{C'_{f}}{\epsilon}$  correspondientes a los lados sin acoplar de las barras, en función del espesor de las mismas y la separación de los planos de tierra.

La capacitancia de placas paralelas  $\frac{C_p}{\epsilon}$  está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{C_p}{\epsilon} = 2 \frac{\frac{a}{b}}{1 - \frac{t}{b}} \quad (46)$$

en donde a y t son el ancho y el espesor de las barras respectivamente. Con las gráficas y ecuaciones anteriores es posible relacionar las dimensiones físicas de la configuración en cuestión a las capacitancias e impedancias de modo par e impar.

#### 19. Empleo de las Gráficas.

Cuando se requiere diseñar líneas acopladas en paralelo; primeramente se determinan los valores de las impedancias de modo par e impar,  $Z_{oe}$  y  $Z_{oo}$  o las capacitancias de modo par e impar  $C_{oe}$  y  $C_{oo}$ ; las cuales se requieren en las ecuaciones de diseño. Enseguida se desea determinar las dimensiones de las líneas, para lo cual se sigue el procedimiento que a continuación se describe:

Empleando (41) y (44) se tiene que

$$\frac{\Delta C}{\epsilon} = \frac{n}{2\sqrt{\epsilon r}} \left( \frac{1}{Z_{oo}} - \frac{1}{Z_{oe}} \right) \quad (47)$$

Se seleccionan los valores de b y t y se emplean junto con el

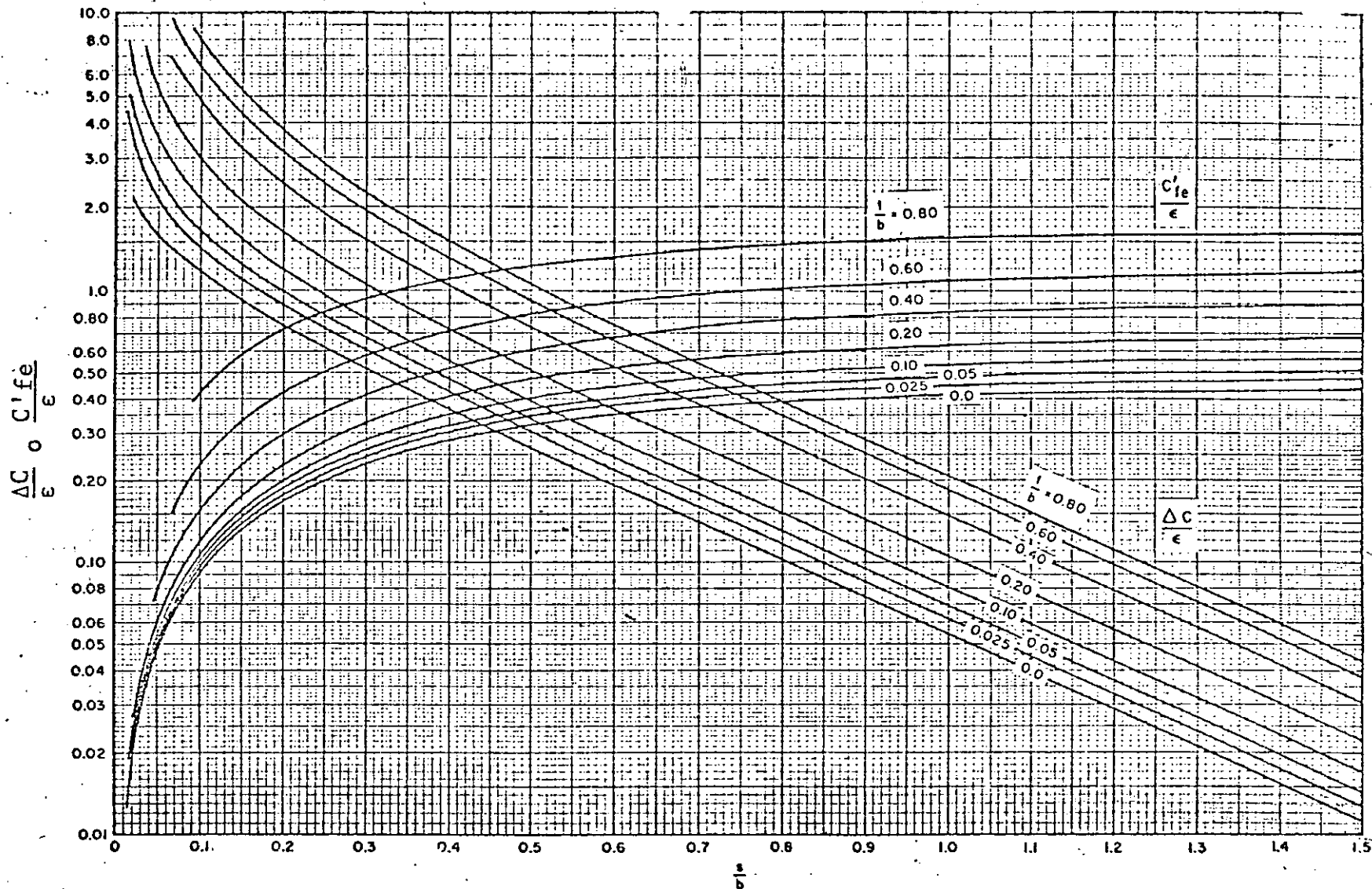


Figura 39

Capacitancia de orilla de modo par normalizada  $\frac{C'fe}{\epsilon}$  y capacitancia entre barras  $\frac{\Delta C}{\epsilon}$  para barras rectangulares acopladas<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Gráfica tomada de la referencia 9.

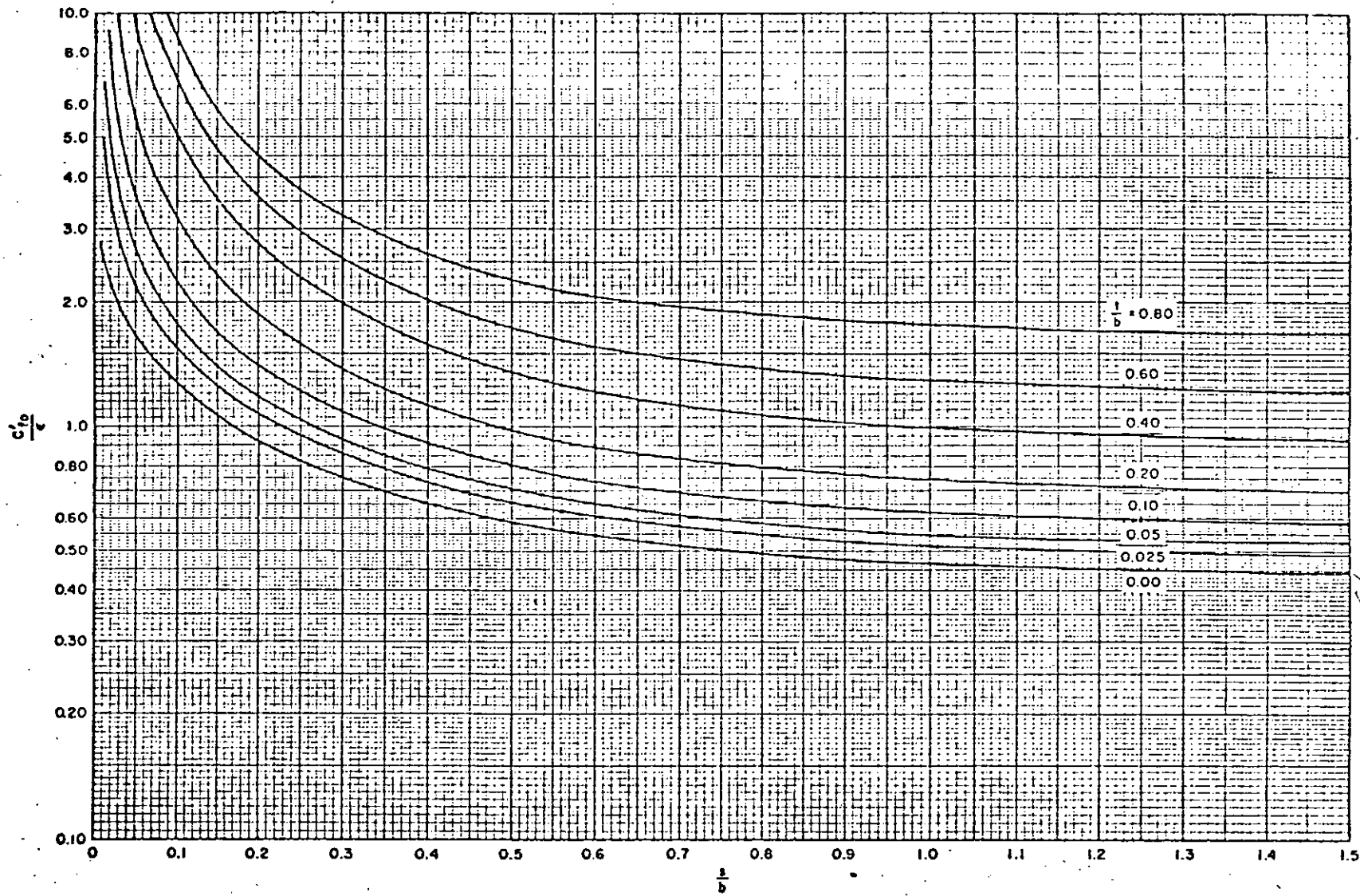


Figura 40.

Capacitancia de orilla de modo impar normalizada para barras rectangulares.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Cifra tomada de la referencia 9.

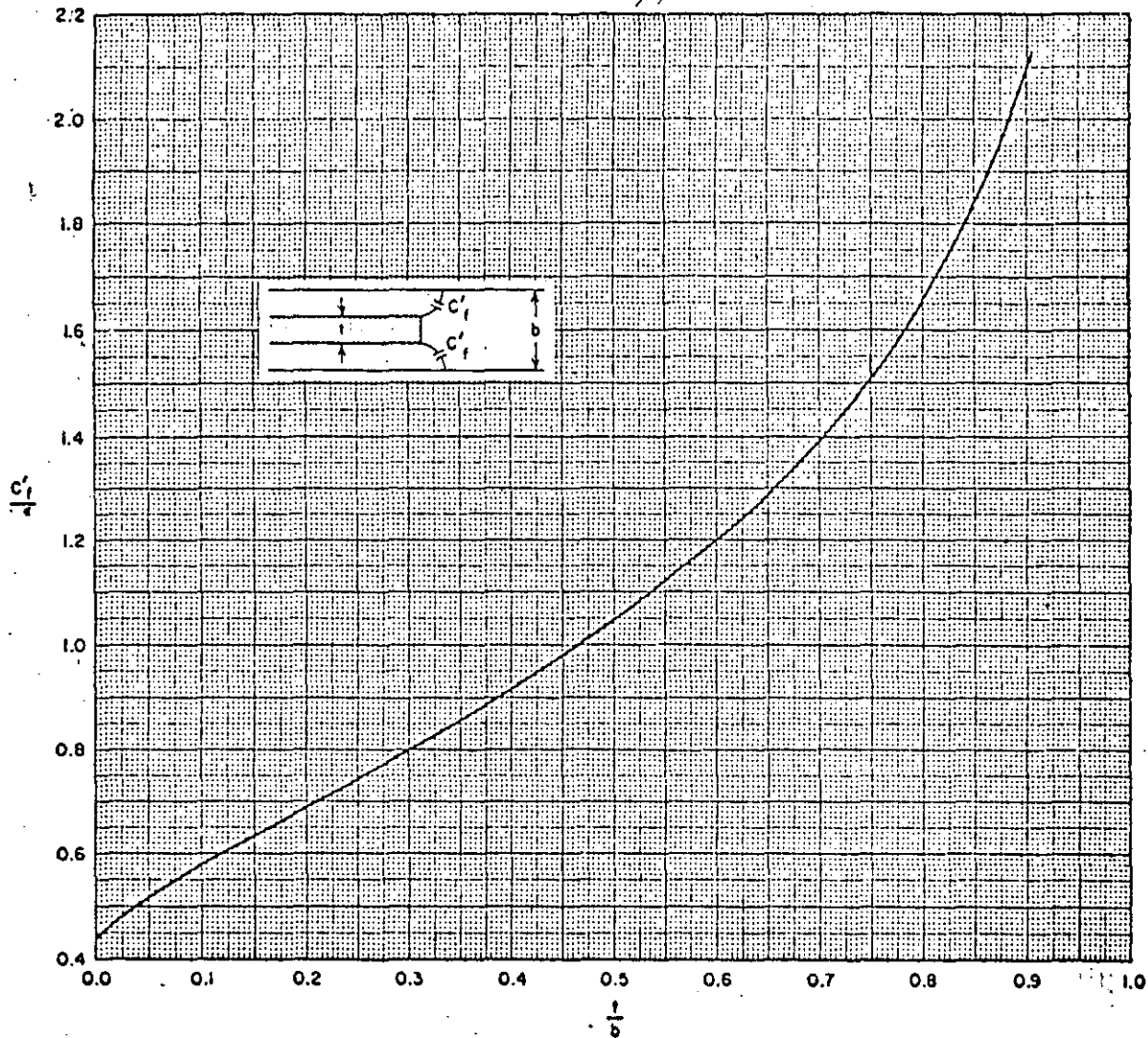


Figura 41

Capacitancia de orilla normalizada para una barra rectangular aislada<sup>1</sup>

valor de  $\frac{\Delta C}{\epsilon}$  que se calcula de (47) para determinar la relación  $\frac{s}{b}$  directamente de la gráfica de la fig. 39. En seguida se determina  $\frac{C_{oe}}{\epsilon}$  empleando  $Z_{oe}$  en (41) y luego se encuentran los valores de  $\frac{C'_{fe}}{\epsilon}$  y  $\frac{C'_{f}}{\epsilon}$  en función de  $\frac{t}{b}$  por medio de las gráficas de las figuras 39 y 41. Las cantidades así obtenidas se sustituyen en la siguiente ecuación la cual dará la relación  $\frac{a}{b}$ .

<sup>1</sup>Gráfica tomada de la referencia 9.



$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{b}\right) \left( \frac{Coe}{\epsilon} - \frac{C'fe}{\epsilon} - \frac{C'f}{\epsilon} \right) \quad (48)$$

La ecuación (48) resulta al sustituir (46) en (42).

De esta manera se determinan las dos dimensiones necesarias para las barras de las líneas que son  $\frac{s}{b}$  y  $\frac{a}{b}$ .

#### 20. Corrección en las dimensiones de las barras.

Si el ancho  $a$  de las barras es pequeño; existirá una interacción de los campos de orilla de los dos lados de la barra y el valor de la capacitancia total entre las placas paralelas y la capacitancia de orilla (las cuales están basadas en anchos infinitos de las barras) no tendrá una gran precisión. Para una sola barra centrada entre planos paralelos, el error<sup>1</sup> en la capacitancia total debido a la interacción de los campos de orilla es aproximadamente de 1.24% para  $a/b-t = 0.35$  en donde  $a$  es el ancho de la barra,  $t$  es su espesor y  $b$  la separación entre planos de tierra.

Debido a esta relación será necesario que  $\frac{a/b}{1-t/b} > 0.35$  para lograr obtener un error en la capacitancia total del orden arriba citado (1.24%). Debido a las restricciones anteriores; es posible hacer correcciones aproximadas basadas en un incremento a la capacitancia de placas paralelas para compensar la pérdida de capacitancia de orilla debido a la interacción de los campos de bordes.

Si se encuentra inicialmente un valor de  $a_1/b$  menor que  $0.35(1-t/b)$ ; se empleará un nuevo valor  $a_2/b$  en donde

$$\frac{a_2}{b} = \frac{0.07 \left(1 - \frac{t}{b}\right) + a_1/b}{1.20} \quad (49)$$

Previendo que

$$0.1 < \frac{a_2/b}{1-t/b} < 0.35$$

<sup>1</sup>referencia 14.

Las ecuaciones de diseño del filtro de línea en "peine" se derivan empleando la representación aproximada en línea abierta que aparece en la fig. 42 .

Como se observa los puntos nodales de la figura 42 corresponden a los puntos nodales de la figura 35. El circuito entre los nodos 0 y 1 de la figura 42 fue derivado con la ayuda de las equivalencias de la fig. 22 que corresponden a las líneas tipo cinta acopladas en paralelo entre los puntos nodales 0 y 1 de la figura 35 . El circuito entre los puntos nodales 1 y 2, 2 y 3. . . , n-1 y n, se deriva con la ayuda de las equivalencias de la fig. 21 (a) y (b) que corresponden a los pares de secciones acopladas en paralelo formadas por las líneas del tipo cinta conectadas a los puntos nodales 1 y 2 y 2 y 3, etc.

Como se notará las admitancias de las líneas en la fig. 22 están expresadas en términos de las capacidades de las líneas por unidad de longitud,  $C_k$  y  $C_{k,k+1}$  multiplicadas por la velocidad de propagación (lo cual da los valores de las admitancias). Esta representación del filtro de línea en "peine" es aproximada y se desprecian los efectos de capacitancias de orilla que se producen en las barras más alejadas.

Con el propósito de darle al circuito de la fig. 42 una forma tal que los datos de las ecuaciones 30 a la 34 pueden aplicarse fácilmente; las secciones en serie entre los puntos nodales 1 y 2, 2 y 3, etc., de la fig. 42 se incorporan dentro de los inversores J (de la forma de la fig. 20) dando por resultado el circuito de la fig. 43. En vista de que cada uno de los inversores  $J_{k,k+1}$  consisten de una configuración  $\pi$  la cual está formada por

una sección en serie de admitancia característica  $Y$  y dos secciones en paralelo de admitancia característica  $-Y$ , es necesario incrementar las admitancias características de las secciones en paralelo en cada lado para compensar las admitancias negativas incluidas en los inversores.

Debido a esta razón las secciones en paralelo de la número 2 a la  $n-1$  de la figura 43 tienen ahora las admitancias

$$Y_{ak} = V(C_k + C_{k-1,k} + C_{k,k+1})$$

en lugar de  $VC_k$ .

La porción del circuito de la fig. 42 entre los puntos nodales 0 y 1 se ha convertido a la forma mostrada en la fig. 43 mediante el empleo de la red equivalente de la fig. 23.

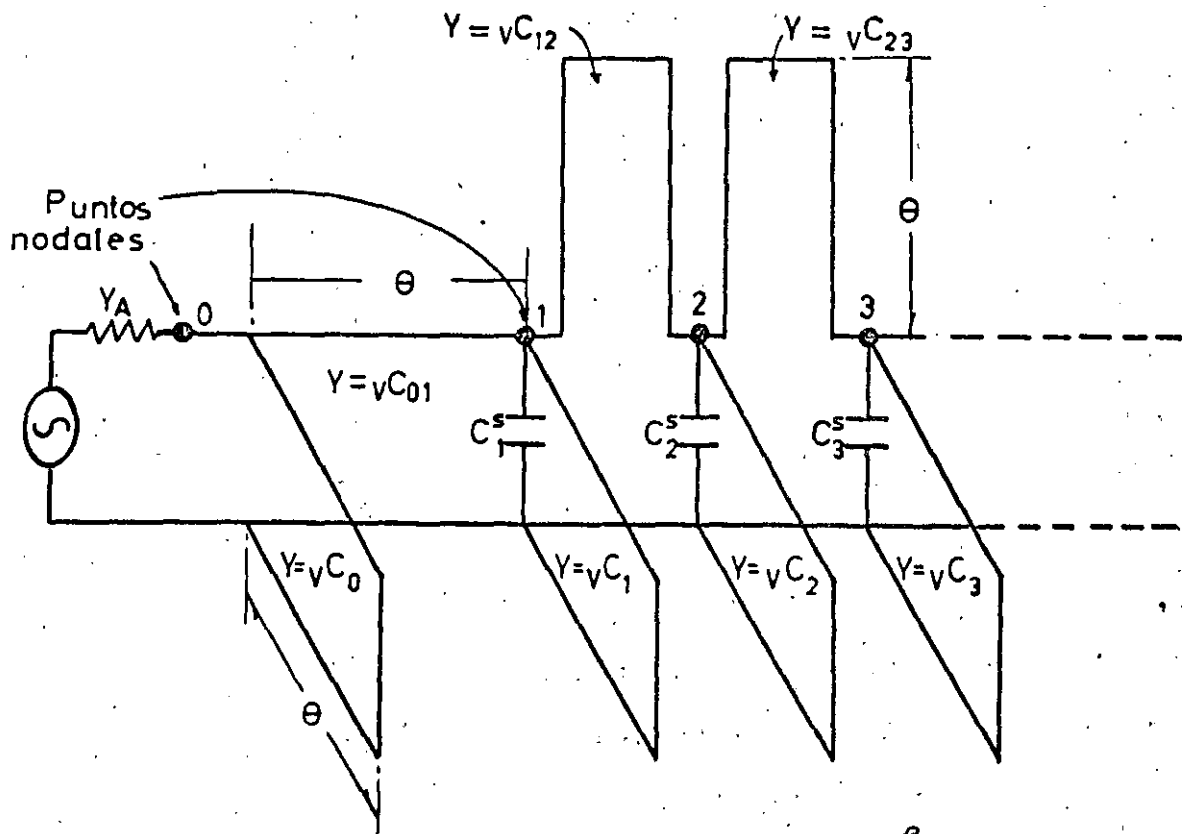
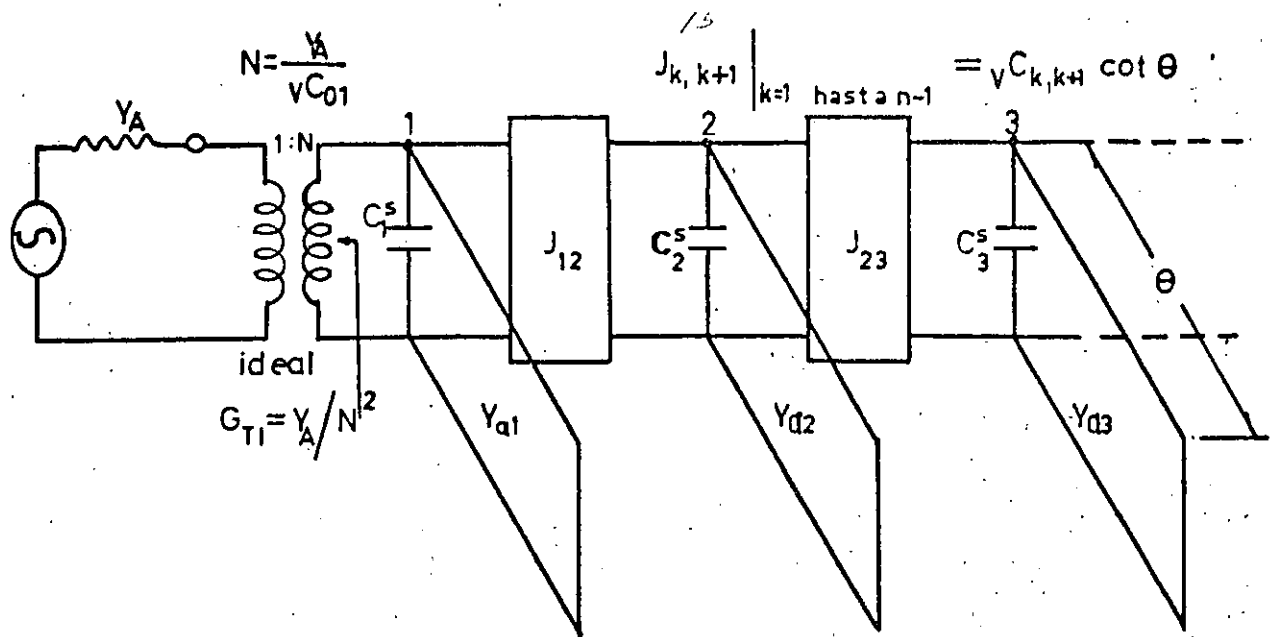


Fig. 42 Circuito equivalente aproximado del filtro de línea en peine de la fig. 35



$$Y_{a1} = Y_A \left[ 1 - \left( \frac{vC_{01}}{Y_A} \right)^2 \right] + v \left[ C_1 + C_{12} - C_0 \right]$$

$$Y_{ak} |_{=2a \ n-1} = v \left[ C_k + C_{k-1,k} + C_{k,k+1} \right]$$

Fig. 43 Circuito equivalente del filtro de línea en peine empleando inversores de admitancias.

Cuando se aplican las ecuaciones generales (de la 30 a la 34) en el circuito de la fig. 43 para derivar las ecuaciones de diseño para los filtros de línea en "peine", los parámetros de inversión de admitancia  $J_{k,k+1}$  se calculan a media banda. Las funciones del resonador  $B_k(\omega)$  son

$$B_k(\omega) = \omega C_k^S - Y_{ak} \cot \left( \theta_0 \frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad (50)$$

en donde  $\theta_0$  es la longitud eléctrica de las líneas resonantes a media banda y la  $Y_{ak}$  se indica en la fig. 43. Los parámetros pendiente de los resonadores se determinan por medio de la ecuación

30, la admitancia terminal  $G_{T1}$  de la fig. 43 está determinada de tal manera que  $G_{T1} = \frac{J_{01}^2}{Y_A}$  en donde el valor requerido para  $J_{01}$

21 Procedimiento de Diseño.

En la fig. 44 se muestra la sección transversal de un arreglo de líneas acopladas en paralelo tal como se emplean en el filtro de línea en "peine". En la estructura mostrada, todas las barras tienen la misma relación  $t/b$  y las otras dimensiones se obtienen por medio del procedimiento descrito en el párrafo 19 para líneas acopladas en paralelo formadas por barras rectangulares.

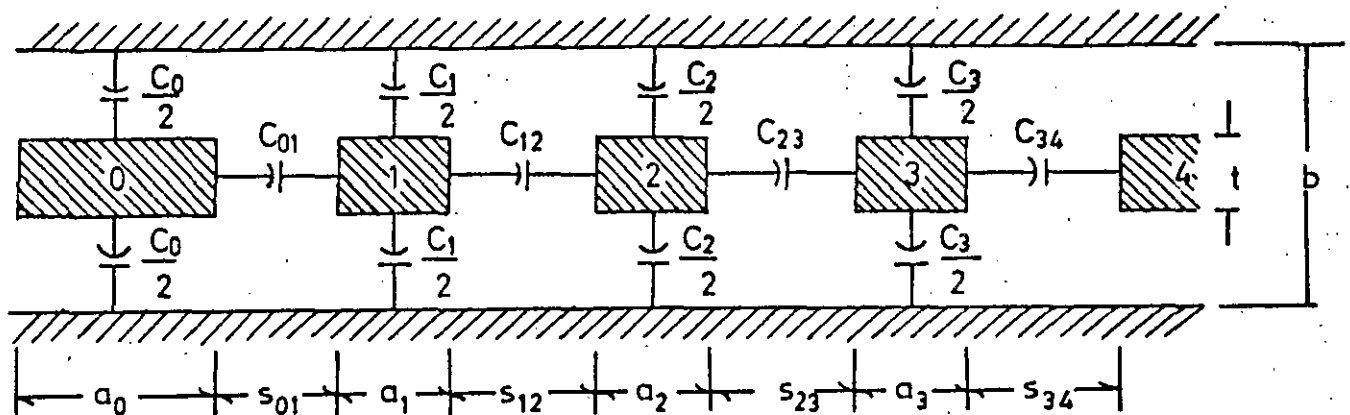


Fig. 44 Definiciones de las capacitancias de línea y sus dimensiones.

En la estructura de la fig. 44, las propiedades eléctricas están determinadas en función de las capacitancias  $C_k$  por unidad de longitud de cada barra con respecto a tierra y las capacitancias mutuas  $C_{k,k+1}$  por unidad de longitud entre barras adyacentes  $K$  y  $k+1$ . Esta consideración no es muy exacta debido a que existe una cantidad significativa de capacitancia de orilla entre un elemento de línea dado y el elemento de línea que se encuentra inmediatamente después del más próximo; sin embargo para arreglos tales como el de la fig. 44, los resultados prácticos obtenidos son de una exactitud satisfactoria. Basándose en los conceptos expuestos hasta aquí; se

resumirá en pasos el procedimiento que se debe emplear para diseñar un filtro pasabanda de línea en "peine", empleando elementos de línea tipo cinta.

- 1.- Seleccionar el tipo de función de respuesta (máximamente plana o de igual rizo).
- 2.- Calcular el número de resonadores que proporcionen la respuesta deseada.
- 3.- Calcular los valores de los elementos de filtro prototipo pass bajo  $g_1, g_2, \dots, g_n$ .
- 4.- Calcular las capacitancias propias y mutuas en forma normalizada  $C_{k/\epsilon}$  y  $\frac{C_{k,k+1}}{\epsilon}$  por unidad de longitud para todas las líneas de la estructura mediante el siguiente procedimiento:

Elegir las admitancias características normalizadas<sup>1</sup>  $Y_{ak}/Y_A$  de tal manera que proporcionen buenos  $Q_s$  a los resonadores cuando están sin carga. Entonces calcular

$$\left. \frac{b_k}{Y_A} \right|_{k=1 \text{ a } n} = \frac{Y_{ak}}{Y_A} \left( \frac{\cot \theta_o + \theta_o \csc^2 \theta_o}{2} \right) \quad (51)$$

en donde  $\theta_o$  es la longitud eléctrica de los elementos resonantes a la frecuencia  $\omega_o$  a media banda.

Calcular

$$\frac{GT_1}{Y_A} = \frac{W \frac{b_1}{Y_A}}{g_o g_1 \omega_1'} \quad (52)$$

$$\left. \frac{J_{k,k+1}}{Y_A} \right|_{k=1 \text{ a } n-1} = \frac{W}{\omega_1'} \sqrt{\frac{\left(\frac{b_k}{Y_A}\right) \left(\frac{b_{k+1}}{Y_A}\right)}{g_k g_{k+1}}} \quad (53)$$

<sup>1</sup>Ver paso 6.

$$\frac{GT_n}{Y_A} = \frac{W \left( \frac{b_n}{Y_A} \right)}{g_n g_{n+1} \omega_1} \quad (54)$$

las capacitancias normalizadas por unidad de longitud entre cada línea y tierra estan dadas por:

$$\frac{C_0}{\epsilon} = \frac{376.7 Y_A}{\sqrt{\epsilon_r}} \left( 1 - \sqrt{\frac{GT_1}{Y_A}} \right) \quad (55)$$

$$\frac{C_1}{\epsilon} = \frac{376.7 Y_A}{\sqrt{\epsilon_r}} \left( \frac{Y_{a1}}{Y_A} - 1 + \frac{GT_1}{Y_A} - \frac{J_{12}}{Y_A} \tan \theta_0 \right) + \frac{C_0}{\epsilon} \quad (56)$$

$$\left. \frac{C_k}{\epsilon} \right|_{k=2 \text{ a } n-1} = \frac{376.7 Y_A}{\sqrt{\epsilon_r}} \left( \frac{Y_{ak}}{Y_A} - \frac{J_{k-1,k}}{Y_A} \tan \theta_0 - \frac{J_{k,k+1}}{Y_A} \tan \theta_0 \right) \quad (57)$$

$$\frac{C_n}{\epsilon} = \frac{376.7 Y_A}{\sqrt{\epsilon_r}} \left( \frac{Y_{an}}{Y_A} - 1 + \frac{GT_n}{Y_A} - \frac{J_{n-1,n}}{Y_A} \tan \theta_0 \right) + \frac{C_{n+1}}{\epsilon} \quad (58)$$

$$\frac{C_{n+1}}{\epsilon} = \frac{376.7 Y_A}{\sqrt{\epsilon_r}} \left( 1 - \sqrt{\frac{GT_n}{Y_A}} \right) \quad (59)$$

En donde  $\epsilon$  es la constante dieléctrica absoluta del medio de propagación y  $\epsilon_r$  es la constante dieléctrica relativa.

Las capacitancias mutuas normalizadas por unidad de longitud entre líneas adyacentes son:

$$\frac{C_{01}}{\epsilon} = \frac{376.7 Y_A}{\sqrt{\epsilon_r}} - \frac{C_0}{\epsilon} \quad (60)$$

$$\left. \frac{C_{k,k+1}}{\epsilon} \right|_{k=1 \text{ a } n-1} = \frac{376.7 Y_A}{\sqrt{\epsilon_r}} \left( \frac{J_{k,k+1}}{Y_A} \tan \theta_0 \right) \quad (61)$$

$$\frac{C_{n,n+1}}{\epsilon} = \frac{376.7 Y_A}{\sqrt{\epsilon_r}} - \frac{C_{n+1}}{\epsilon} \quad (62)$$

Las capacitancias  $C_k^S$  están dadas por

$$\left. C_k^S \right|_{k=1 \text{ a } n} = Y_A \left( \frac{Y_{ak}}{Y_A} \right) \frac{\cot \theta_0}{\omega_0} \quad (63)$$

5.- Ahora se determinan las dimensiones de la sección transversal de las barras y la separación entre ellas de la manera siguiente:

a) Primero se seleccionan o se determinan los valores para  $t$  y  $b$  y -  
 dado que

$$\frac{(\Delta C)_{k,k+1}}{\epsilon} = \frac{C_{k,k+1}}{\epsilon} \quad (64)$$

Por medio de la gráfica de la fig. 4.4 se determina el valor de  $S_{k,k+1}/b$ .

De esta manera se obtienen las separaciones  $S_{k,k+1}$  de todas las barras.

b) Empleando ahora la gráfica de la fig. 39 se determinan las capacitancias de orilla normalizadas  $\frac{(C'fe)_{k,k+1}}{\epsilon}$  en función de la separación entre barras  $S_{k,k+1}$  y la relación  $t/b$ .

c) El valor normalizado para el ancho de la barra  $k$  se obtiene de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{ak}{b} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{b}\right) \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{C_k}{\epsilon}\right) - \frac{(C'fe)_{k-1,k}}{\epsilon} - \frac{(C'fe)_{k,k+1}}{\epsilon} \right] \quad (65)$$

En el caso de las barras de los extremos de la configuración (la barra "0" en la fig. 44);  $\frac{C'fe}{\epsilon}$  para el lado de la barra que no tiene acoplamiento debe reemplazarse por  $C'f/\epsilon$ , cuyo valor se determina mediante la gráfica de la figura 41, por lo que el ancho de la barra "0" será:

$$\frac{a_0}{b} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{b}\right) \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{C_0}{\epsilon}\right) - \frac{C'f}{\epsilon} - \frac{(C'fe)_{01}}{\epsilon} \right] \quad (66)$$

Si  $\frac{ak}{b} < 0.35 \left(1 - \frac{t}{b}\right)$  para cualquiera de las barras, esta dimensión debe corregirse empleando la fórmula siguiente:

$$\frac{a'k}{b} = \frac{0.07(1-t/b) + ak/b}{1.20} \quad (67)$$



previando que  $0.1 < \frac{a'k}{b}/(1-t/b) < 0.35$

En la ecuación 67  $a'k$  es el ancho de la barra no corregida y  $a'k$  e el ancho de la barra corregido.

Esta corrección se hace debido a la interacción de los campos de borde de los lados opuestos de la barra que ocurriría si la barra fuera muy angosta.

6.- Para aplicar las ecuaciones del punto 5 debe especificarse primeramente los parámetros siguientes:

- a) La admitancia de la línea terminal  $Y_A$
- b) La longitud eléctrica a media banda ( $\theta_0$ ) de las líneas resonantes.
- c) El ancho de banda fraccional  $W$
- d) La admitancia normalizada de las líneas  $\frac{Y_{ak}}{Y_A}$ .

Como se ha visto, es conveniente hacer a  $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$  radianes o menor. La selección de las admitancias de las líneas resonantes  $Y_{ak}$ , determinan el nivel de admitancias dentro del filtro y esto es importante ya que influirá en los valores de los  $Q_s$  que tendrán los resonadores.

Se recomienda tomar el valor de  $Y_{ak}$  para la ecuación (51) de aproximadamente 0.0143 mhos (o sea alrededor de 70 ohms).

La admitancia  $Y_{ak}$  se interpreta físicamente como la admitancia de la línea  $k$  con las líneas adyacentes  $k-1$  y  $k+1$  a tierra.

## 22.- Cálculo Numérico.

Para efectuar el cálculo numérico del filtro pasabanda de línea en "peine" es necesario primeramente determinar las especificaciones que se requieren; las cuales serán:

El primer pasabanda debe estar localizado a una frecuencia central  $(\omega_0)$  de 408 MHz, un ancho de banda  $W = 0.0392$  con un nivel de rizo en el pasabanda de 0.1 db.

En este diseño  $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$  radianes así que las líneas resonantes serán de  $\frac{\lambda_0}{8}$  de longitud a la frecuencia a media banda,  $\frac{Y_{ak}}{Y_A} = 0.677$  y  $Y_A = 0.020$  mhos; lo cual hace que  $Y_{ak} = 0.0135$  mhos o  $\frac{1}{Y_{ak}} = 74$  ohms, y a una frecuencia de 419 MHz se deben tener 10 db de atenuación o sea:

$$f_0 = 408 \text{ MHz}$$

$$f_1 = 400 \text{ MHz}$$

$$f_2 = 416 \text{ MHz}$$

$$f = 419 \text{ MHz}$$

$$W = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{f_2 - f_1}{f_0} = \frac{416 - 400}{408} = \frac{16}{408} = 0.0392$$

$$W = 0.0392$$

$$\omega'a = 2\omega_1' \left( \frac{f - f_0}{f_2 - f_1} \right) = 2 \left( \frac{419 - 408}{416 - 400} \right) = \frac{22}{16} = 1.375$$

$$\omega'a = 1.375$$

La respuesta que se requiere será una aproximación Tchebyscheff de acuerdo con los datos que se proponen.

El número de resonadores está dado por:

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{\text{antilog} \left( \frac{LAa}{10} \right) - 1}{\epsilon}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{\omega'a}{\omega_1} \right)}$$

$$\epsilon = \text{antilog} \left( \frac{LAa}{10} \right) - 1 = \text{antilog} 0.01 - 1$$

$$\epsilon = 0.023$$

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{\text{antilog}(\frac{10}{10}) - 1}{0.023}}}{\cosh^{-1} 1.375}$$

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} 19.75}{\cosh^{-1} 1.375}$$

Pero  $\cosh^{-1} u = \text{Ln}(u + \sqrt{u^2 - 1})$

$$\therefore \cosh^{-1} 19.75 = \text{Ln}(19.75 + \sqrt{391.30 - 1}) = \text{Ln}(19.75 + 19.74)$$

$$= \text{Ln } 39.49$$

$$= 2.3026 \times \text{Log } 39.49 = 3.6761$$

$$\cosh^{-1} 1.375 = \text{Ln}(1.375 + \sqrt{(1.375)^2 - 1}) = \text{Ln } 2.318$$

$$= 2.3026 \times \text{Log } 2.318 = 0.8406$$

$$\therefore n \geq \frac{\cosh^{-1} 19.75}{\cosh^{-1} 1.375} = \frac{3.6761}{0.8406} = 4.37$$

o sea que el filtro debe tener 5 resonadores.

Para calcular los valores de los elementos reactivos del filtro prototipo se emplearán las fórmulas de las ecuaciones ( 10) a la ( 15)

$$\beta = \text{Lg}(\coth \frac{\text{LAr}}{17.37}) = \text{Lg}(\coth \frac{0.1}{17.37}) = \text{Lg}(\coth 0.00579)$$

$$\beta = \text{Lg}(\frac{1}{\text{tanh} 0.00579}) = \text{Lg } 173 = 2.3026 \times 2.238 = 5.1532$$

$$\gamma = \text{Senh}(\frac{\beta}{2n}) = \text{Senh} \frac{5.1532}{10} = \text{Senh} 0.51532 = 0.5370$$

de ( 15) se tiene que

$$b_1 = \gamma^2 + \text{Sen}^2(\frac{\pi}{5}) = (0.5370)^2 + \text{Sen}^2 36^\circ$$

$$= 0.2883 + 0.3455 = 0.6338$$

de ( 14)

$$a_1 = \text{Sen } 18^\circ = 0.3090$$

$$g_1 = \frac{2a_1}{\gamma} = \frac{2 \times 0.3090}{0.5370} = 1.150$$

$$b_2 = (0.537)^2 + \text{Sen}^2 72^\circ = 0.2883 + (0.9511)^2$$

$$b_2 = 0.2883 + 0.9045 = 1.1928$$

$$a_2 = \text{Sen } 54^\circ = 0.8090$$

$$a_3 = \text{Sen } 90^\circ = 1$$

de ( 11) se tiene que

$$g_2 = \frac{4(a_1)a_2}{b_1 g_1} = \frac{4 \times 0.3090 \times 0.8090}{0.6338 \times 1.1468}$$

$$g_2 = \frac{0.99992}{0.72684} = 1.375$$

$$g_3 = \frac{4a_2 a_3}{b_2 g_2} = \frac{4 \times 0.8090 \times 1}{1.1928 \times 1.3712}$$

$$g_3 = \frac{3.2360}{1.6355} = 1.978$$

Como el filtro es simétrico; los valores de  $g_4$  y  $g_5$  serán las siguientes:

$$g_4 = g_2 = 1.375$$

$$g_5 = g_1 = 1.150$$

Los valores de  $g$  para propósitos de diseño se emplearán los que se proporcionan en forma tabulada (ver apéndice B) no obstante que la diferencia con los valores calculados es muy pequeña como se ve a continuación:

Valor de g calculado

Valor de g tomando de tablas del apéndice B

$g_1$	1.150	1.1468
$g_2$	1.375	1.3712
$g_3$	1.978	1.9750
$g_4$	1.375	1.3712
$g_5$	1.150	1.1468

Se procede ahora a calcular las capacitancias propias y mutuas por unidad de longitud de cada barra con respecto a tierra; o sea  $\frac{C_k}{\epsilon}$  y  $\frac{C_{k,k+1}}{\epsilon}$  respectivamente.

Para este cálculo se emplearán las fórmulas de las ecuaciones 51 a la 63.

de 51 se tiene:

$$\frac{b_1}{Y_A} = 0.677 \left( \frac{\text{Cot} \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \text{Csc}^2 \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0.677 \left[ \frac{1 + 0.7854 \left( \frac{1}{\text{Sen} 45^\circ} \right)^2}{2} \right] = 0.8726$$

$$\frac{b_1}{Y_A} = 0.8726 = \frac{b_2}{Y_A} = \dots = \frac{b_n}{Y_A}$$

de ( 52 )

$$\frac{G_{T1}}{Y_A} = \frac{0.0392 \times 0.8726}{1 \times 1.1468 \times 1} = \frac{0.03420}{1.1468} = 0.0297$$

de ( 53 )

$$\frac{J_{1,2}}{Y_A} = \frac{0.0392}{1} \sqrt{\frac{(0.8726)^2}{1.1468 \times 1.3712}} = 0.02724$$

$$\frac{J_{2,3}}{Y_A} = 0.0392 \sqrt{\frac{(0.8726)^2}{1.3712 \times 1.9750}} = 0.02077$$

$$\frac{J_{3,4}}{Y_A} = 0.0392 \sqrt{\frac{(0.8726)^2}{1.9750 \times 1.3712}} = 0.02077$$

$$\frac{J_{4,5}}{Y_A} = 0.0392 \sqrt{\frac{(0.8726)^2}{1.3712 \times 1.1468}} = 0.02724$$

de ( 54 )

$$\frac{G_{T5}}{Y_A} = \frac{0.0392 \times 0.8726}{1.1468 \times 1} = 0.0297$$

Empleando el aire como medio de propagación, el cual tiene una constante dieléctrica relativa  $\epsilon_r = 1$  se tiene;

de ( 55 )

$$\frac{C_0}{\epsilon} = \frac{376.7 \times 0.020}{1} \left[ 1 - \sqrt{0.0297} \right]$$

$$\frac{C_0}{\epsilon} = 7.5340(1 - 0.1723) = 6.2358$$

de ( 56 )

$$\frac{C_1}{\epsilon} = 7.5340(0.677 - 1 + 0.0297 - 0.02724) + 6.2358 = 3.8206$$

de ( 57 ) para  $k=2$

$$\frac{C_2}{\epsilon} = 7.5340(0.677 - 0.02724 - 0.02077) = 4.7388$$

para  $k=3$

$$\frac{C_3}{\epsilon} = 7.5340(0.677 - 0.02077 - 0.02077) = 4.7875$$

para  $k=4$

$$\frac{C_4}{\epsilon} = \frac{C_2}{\epsilon} = 4.7388$$

de ( 59 )

$$\frac{C_6}{\epsilon} = 7.5340(1 - \sqrt{0.0297}) = 6.2358$$

de ( 58 )

$$\frac{C_5}{\epsilon} = 7.5340(0.677 - 1 + 0.0297 - 0.02724) + 6.2358 = 3.8209$$

Para las capacitancias mutuas normalizadas por unidad de longitud entre líneas adyacentes tenemos; de ( 60 )

$$\frac{C_{01}}{\epsilon} = 7.5340 - 6.2358 = 1.2982$$

de ( 61 ) para k=1

$$\frac{C_{1,2}}{\epsilon} = 7.5340 \times 0.02724 = 0.20522$$

Para k=2

$$\frac{C_{2,3}}{\epsilon} = 7.5340 \times 0.02077 = 0.15648$$

Para k=3

$$\frac{C_{3,4}}{\epsilon} = 7.5340 \times 0.02077 = 0.15648$$

Para k=4

$$\frac{C_{4,5}}{\epsilon} = 7.5340 \times 0.02724 = 0.20522$$

de ( 62 )

$$\frac{C_{5,6}}{\epsilon} = 7.5340 - 6.2358 = 1.2982$$

Para calcular las capacitancias  $C_k^S$  se emplea la ecuación ( 63 )

Para k=1

$$C_1^S = 0.020(0.677) \frac{1}{6.283 \times 408 \times 10^6} = 5.25 \times 10^{-12} \text{fd}$$

$$C_1^S = C_2^S = C_3^S = \dots = C_n^S$$

Los materiales que se emplearon para el conductor central tienen un espesor de 0.065" o sea 1.5875 mm, lo cual viene a ser el valor de t. Se seleccionó una relación de  $\frac{t}{b} = 0.10$  por lo tanto b=15.875 mm.

Empleando las gráficas de la figura 39 se obtienen los valores para la separación o espaciados que deben existir entre barras; debido a que

$$\frac{(\Delta C)_{k,k+1}}{\epsilon} = \frac{C_{k,k+1}}{\epsilon} \quad \text{de donde resulta}$$

$$\frac{S_{0,1}}{b} = 0.180$$

$$S_{0,1} = 0.180 \times b = 0.180 \times 15.875 = 2.8575 \text{ mm}$$

$$\frac{S_{1,2}}{b} = 0.7040$$

$$S_{1,2} = 0.7040 \times 15.875 = 11.1760 \text{ mm}$$

$$\frac{S_{2,3}}{b} = 0.7950$$

$$S_{2,3} = 0.7950 \times 15.875 = 12.6206 \text{ mm}$$

$$S_{3,4} = 12.6206 \text{ mm.}$$

$$S_{4,5} = 11.1760 \text{ mm.}$$

$$S_{5,6} = 2.8575 \text{ mm.}$$

El ancho de las barras se obtienen mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{a_k}{b} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{t}{b} \right) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{C_k}{\epsilon} \right) - \frac{(C'_{fe})_{k-1,k}}{\epsilon} - \frac{(C'_{fe})_{k,k+1}}{\epsilon} \right] \quad (68)$$

Para determinar los valores  $\frac{C'_{fe}}{\epsilon}$  se hace uso de las gráficas de la Figura 39. En este caso:

$$\frac{(C'_{fe})_{0,1}}{\epsilon} = 0.185$$

$$\frac{(C'_{fe})_{3,4}}{\epsilon} = 0.500$$

$$\frac{(C'_{fe})_{1,2}}{\epsilon} = 0.480$$

$$\frac{(C'_{fe})_{4,5}}{\epsilon} = 0.480$$

$$\frac{(C'_{fe})_{2,3}}{\epsilon} = 0.500$$

$$\frac{(C'_{fe})_{5,6}}{\epsilon} = 0.185$$

Sustituyendo estos valores en (68) se tiene

$$\frac{a_1}{b} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{t}{b} \right) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{C_1}{\epsilon} \right) - \frac{(C'_{fe})_{0,1}}{\epsilon} - \frac{(C'_{fe})_{1,2}}{\epsilon} \right]$$



$$\frac{a_1}{b} = 0.45 \left[ \frac{1}{2}(3.82086) - 0.185 - 0.480 \right] = 0.5604$$

$$a_1 = 0.5604 \times 15.875 = 8.8963$$

de la misma manera se obtienen los valores para las demás barras hasta la barra n-1

$$\frac{a_2}{b} = 0.45 \left[ \frac{1}{2}(4.7388) - 0.480 - 0.500 \right] = 0.45 \times 1.3894 = 0.6252$$

$$a_2 = 0.6252 \times 15.875 = 9.9250 \text{ mm}$$

$$\frac{a_3}{b} = 0.45 \left[ \frac{1}{2}(4.7875) - 0.500 - 0.500 \right] = 0.45 \times 1.39375 = 0.6271$$

$$a_3 = 0.6271 \times 15.875 = 9.9552 \text{ mm}$$

$$a_4 = 9.9250 \text{ mm}$$

$$a_5 = 8.8963 \text{ mm}$$

Para el caso de las barras de los extremos el valor de  $\frac{C'fe}{\epsilon}$  en el lado sin acoplamiento debe reemplazarse por  $\frac{C'f}{\epsilon}$  el cual se obtiene de la gráfica de la figura 41. Tomando en cuenta, esta consideración la ecuación ( 68) resulta para la barra "0"

$$\frac{a_0}{b} = \frac{1}{2}(1-\frac{t}{b}) \left[ \frac{1}{2} \frac{C_0}{\epsilon} - \frac{C'f}{\epsilon} - \frac{(C'fe)_{0,1}}{\epsilon} \right]$$

$$\frac{a_0}{b} = \frac{1}{2}(1-0.1) \left[ \frac{1}{2}(6.2358) - 0.5800 - 0.1850 \right]$$

$$\frac{a_0}{b} = 0.450(2.3529) = 1.0588$$

$$a_0 = 1.0588 \times 15.875 = 16.8084$$

Para la barra número seis se tiene

$$\frac{a_6}{b} = \frac{1}{2}(1-0.10) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{C_6}{\epsilon} \right) - \frac{(C'fe)_{5,6}}{\epsilon} - \frac{C'f}{\epsilon} \right]$$

$$\frac{a_6}{b} = 0.45 \left[ \frac{1}{2}(6.2358) - 0.1850 - 0.5800 \right]$$

$$\frac{a_6}{b} = 1.0588$$

$$a_6 = a_0 = 16.8084 \text{ mm}$$

Como se indicó; se tomó al aire como medio de propagación, por lo que la longitud de onda a la frecuencia central de operación en este medio será:

$$\lambda = \frac{C}{f} = \frac{3 \times 10^8}{408 \times 10^6} = \frac{300}{408} = 0.7352 \text{ m}$$

$$\lambda = 73.52 \text{ cms.}$$

La longitud de los elementos de línea resultarán de  $\frac{\lambda}{8} = \frac{73.52}{8} = 9.19 \text{ cms}$

En este momento la única dimensión que falta por determinar es el ancho de la línea para una impedancia  $Z_0$  de entrada y salida.

En este caso se escogió una impedancia  $Z_0 = 50$  ohms para la entrada y salida. Esta dimensión se determina mediante las gráficas de la figura (32) la cual relaciona a  $\sqrt{\epsilon_r} Z_0$  con  $\frac{a}{b}$ .

Para este caso particular se tiene que la relación  $\frac{a}{b} = 1.154$

$$a = 1.154 \times 15.875 = 18.3192$$

$$a = 18.3192 \text{ mm.}$$

23. DISEÑO DE UN FILTRO PASABANDA EN GUIA DE ONDA CON  
 ACOPLAMIENTO INDUCTIVO EN PARALELO

El filtro mostrado en la figura ( 47 ) es un filtro con acoplamiento inductivo en paralelo. En este caso, los inversores son del tipo mostrados en la figura ( 48 ), y la estructura opera como un filtro con resonadores serie mostrados en la figura ( 49 ).

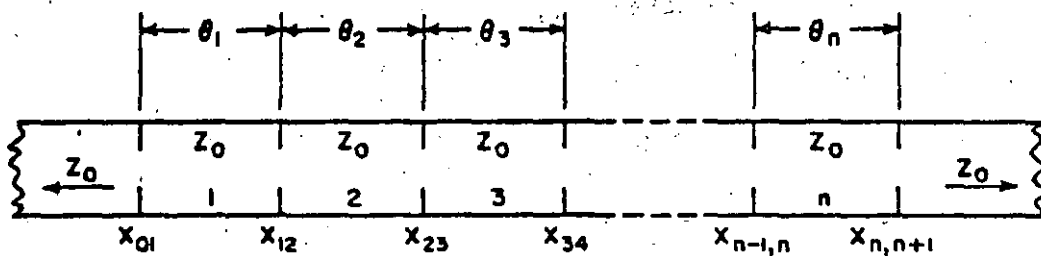


Fig. (47) Filtro con Acoplamiento Inductivo en Paralelo

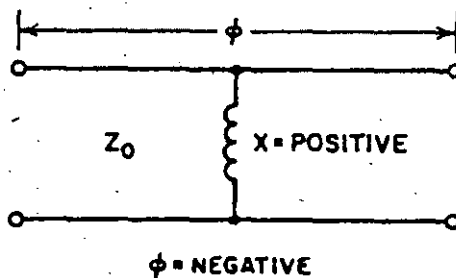


Fig. (48) Inversores de Impedancia

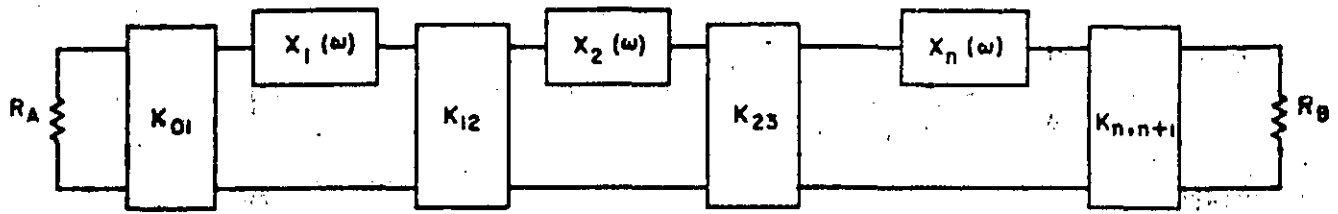


Fig. (49). Filtro Pasabanda usando inversores de impedancia

La transformación de pasa bajas a pasa banda se logra -- mediante las siguientes ecuaciones.

$$\frac{\omega'}{\omega_1} = \frac{2}{w\lambda} \frac{\lambda g_0 - \lambda g}{\lambda g_0} \tag{69}$$

$$w_\lambda = \frac{\lambda g_1 - \lambda g_2}{\lambda g_0} = \left(\frac{\lambda g_0}{\lambda_0}\right)^2 \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}\right) \tag{70}$$

$$\lambda g_0 = \frac{\lambda g_1 + \lambda g_2}{2} \tag{71}$$

donde

$\lambda g_0$ ,  $\lambda g_1$ ,  $\lambda g_2$  y  $\lambda g$  son las longitudes de onda de la guía a las frecuencias  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $\omega$  respectivamente y se definen en la figura ( 8 d ),  $\omega'$  y  $\omega_1'$  se definen en la figura ( 8 c ).  $\lambda_0$  es la longitud de onda de una onda plana a la frecuencia  $\omega_0$ . -- En particular, para una gama dada de longitudes de onda de la guía, el tipo de filtro en guía de onda tendrá un ancho de banda angosto debido a un cambio más rápido en la longitud de onda de la guía para los modos de propagación no TEM.

Suponiendo que la guía de onda propaga el modo  $TE_{1,0}$  y que todos los modos de alto orden no se propagan, las ecuaciones para diseño son:

$$\frac{k_{01}}{Z_0} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{w_\lambda}{g_0 g_1 \omega_1'}} \tag{72}$$

$$\frac{k_{j, j+1}}{Z_0} \Big|_{j=1 \text{ a } n-1} = \frac{\pi w_\lambda}{2\omega^1} \frac{1}{g_j g_{j+1}} \quad (73)$$

$$\frac{k_{n, n+1}}{Z_0} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{w_\lambda}{g_n g_{n+1} \omega^1}} \quad (74)$$

donde  $g_0, g_1, \dots, g_{n+1}$  se definen en la figura 5

$w_\lambda$  es el ancho de banda normalizado. Los parámetros  $K_{j, j+1}$  son inversores de impedancia y  $Z_0$  es la impedancia de la guía.

En las figuras ( 50 ) a ( 52 ) se presentan datos de acoplamiento para discontinuidades de con iris y postes inductivos. Las reactancias graficadas relacionan al circuito equivalente de la figura ( 53 ). Para iris muy delgados esto es  $X_0 \approx 0$ , en donde se considera una simple discontinuidad inductiva concentrada y en paralelo, pueden emplearse las siguientes relaciones.

$$\frac{X_{j, j+1}}{Z_0} = \frac{\frac{K_{j, j+1}}{Z_0}}{1 - \left(\frac{K_{j, j+1}}{Z_0}\right)^2} \quad (75)$$

y

$$\theta_j = \pi - \frac{1}{2} \left\{ \text{tang}^{-1} \frac{2X_{j-1, j}}{Z_0} + \text{tang}^{-1} \frac{2X_{j, j+1}}{Z_0} \right\} \quad (76)$$

radianes

Para el caso de postes inductivos (o un iris grueso),  $X_a$  no es despreciable y debe de tomarse en cuenta en el proceso de diseño.

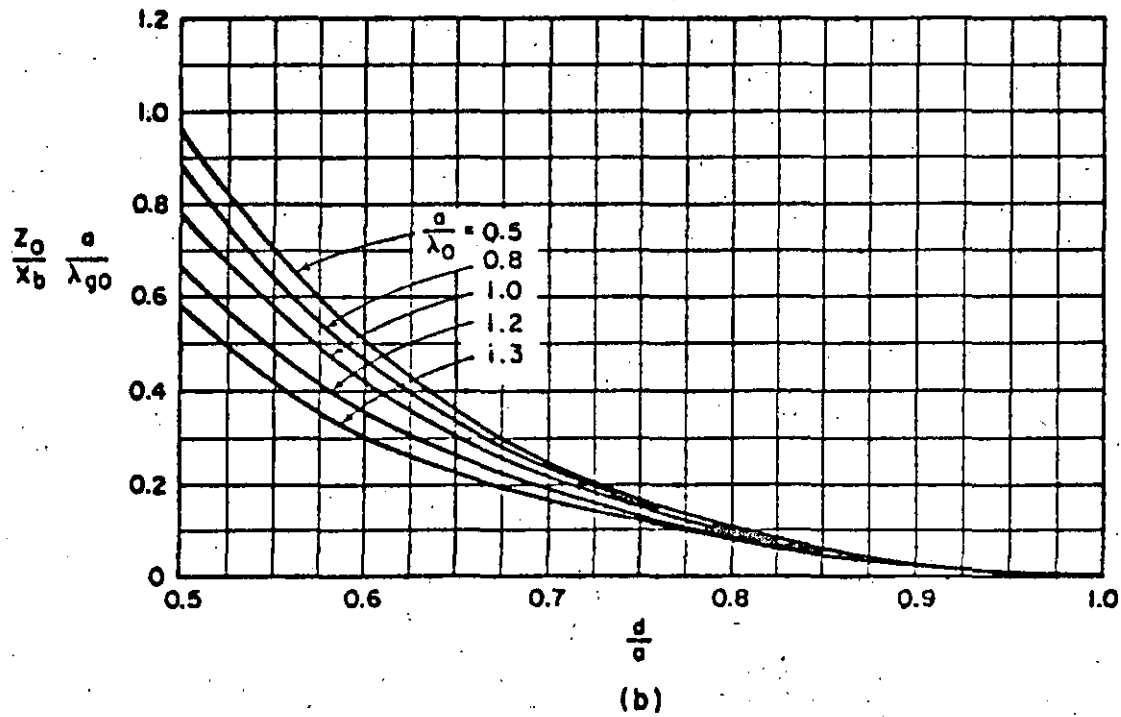
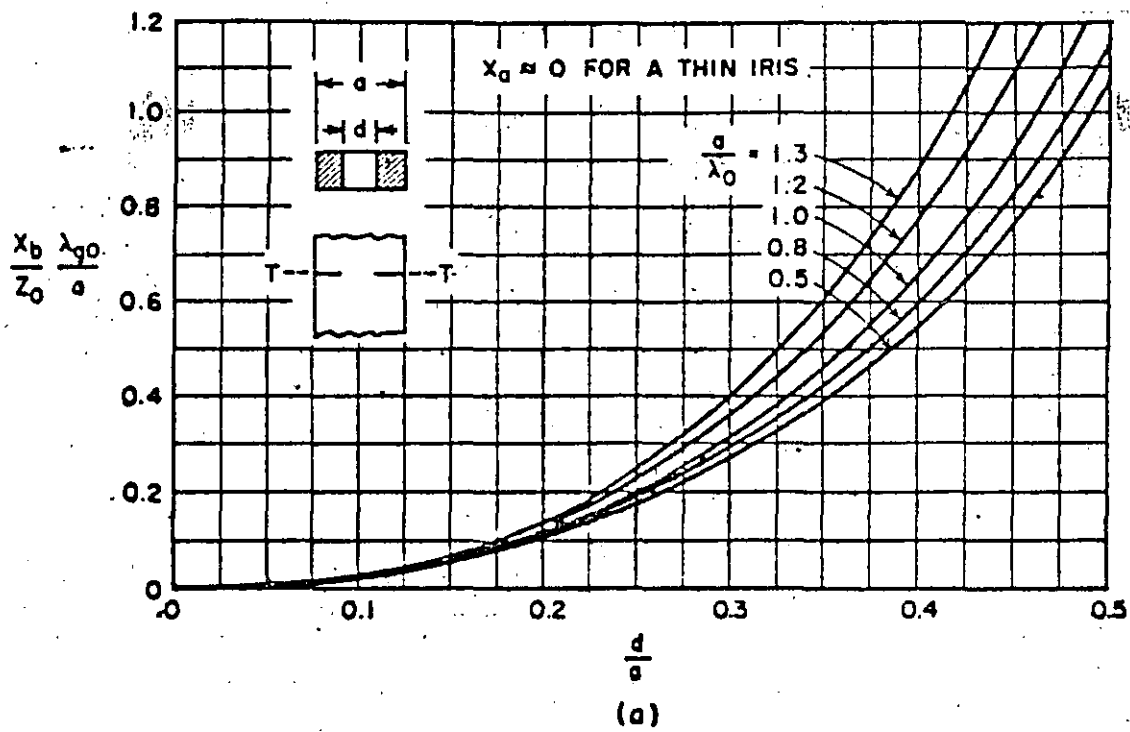


Fig. (50) Reactancia en paralelo de ventas inductivas simétricas en guías rectangulares

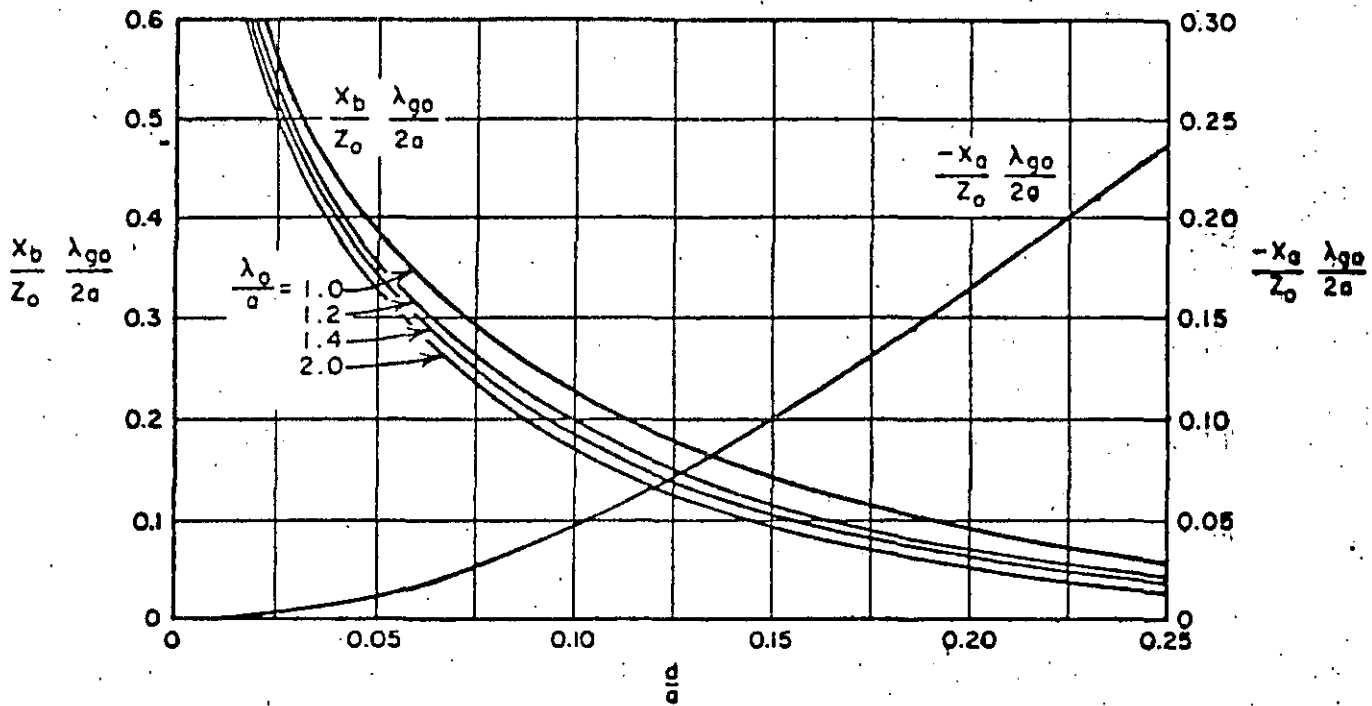


Fig. (51) Parámetros de postes inductivos centrados en guías rectangulares



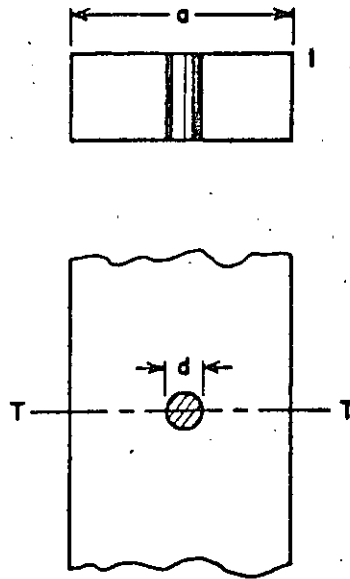


Fig. (52) Definición de dimensiones de la figura (51)

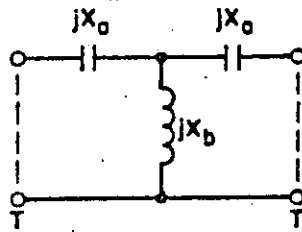


Fig. (53) Circuito equivalente para las discontinuidades inductivas en paralelo de las figuras (50), (51) y (52).

NOTA:  $X_a = 0$  para la figura (50)

## DISEÑO DE UN FILTRO PASA BANDA EN GUÍA DE ONDA

Para efectuar el cálculo numérico de un filtro pasa banda, primero se determinarán las características que se desean obtener; las cuales son;

frecuencia central ( $f_0$ )	9 GHz
respuesta Tchebycheff con un nivel de rizo de	0.1 dB
frecuencia inferior del pasa banda ( $f_1$ )	8.99 GHz
frecuencia superior del pasa banda ( $f_2$ )	9.01 GHz
frecuencia inferior del pasa banda con atenuación de 30 dB ( $f_a$ )	8.5 GHz
frecuencia superior del pasa banda con atenuación de 30 dB ( $f_b$ )	9.5 GHz

con un guía de onda cuyas dimensiones son

ancho (lado "a")	2.33 cm
altura (lado "b")	1.09 cm

haciendo uso de la ecuación

$$\lambda_g = \frac{\lambda_u}{1 - \frac{u}{2a}}$$

se obtienen los siguientes valores

$$\lambda_{g1} = 4.780 \text{ cm}$$

$$\lambda_{gz} = 4.759 \text{ cm}$$

$$\lambda_{g0} = 4.769 \text{ cm}$$

$$\lambda_{ga} = 5.405 \text{ cm}$$

$$\lambda_{gb} = 4.294 \text{ cm}$$

$$\lambda_u = 3.33 \text{ cm}$$

Para obtener el ancho de banda normalizado de la guía de onda de la ecuación anterior obtenemos

$$W_\lambda = \frac{4.780 - 4.759}{4.77} = 4.55 \times 10^{-3}$$

$$W = \frac{9.01 - 8.99}{9} = 2.22 \times 10^{-3}$$

de lo anterior se observa que  $W_\lambda$  es aproximadamente el doble de  $W$ .

El número de resonadores para una respuesta Tchebycheff se obtiene por medio de la ecuación

$$n \geq \frac{\cos h^{-1} \sqrt{\frac{\text{antilog}_{10} \left( \frac{LAa}{10} \right) - 1}{\epsilon}}}{\cos h^{-1} \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)}$$

Para  $Lar$  de 0.1 db, se tiene que

$$\epsilon = \text{antilog}_{10} \left( \frac{Lar}{10} \right) - 1$$

$$\epsilon = \text{antilog}_{10} \frac{0.1}{10} - 1 = 0.023$$

$$\frac{\omega_1'}{\omega_1} = 2 \left( \frac{f_b - f_o}{f_2 - f_1} \right)$$

$$\frac{\omega_1'}{\omega_1} = 2 \left( \frac{9.5 - 9}{9.01 - 8.99} \right) = 50$$

$$n \geq \frac{\cos h^{-1} \sqrt{\frac{\text{antilog } \frac{30}{10} - 1}{0.023}}}{\cos h^{-1} 50} = 1.31$$

o sea

$$n = 2$$

de la tabla (B.3a en el apéndice) se obtienen los siguientes valores para  $n = 2$

$$g_0 = 1$$

$$g_1 = 0.8430$$

$$g_2 = 0.6220$$

$$g_3 = 1.3554$$

para obtener los inversores de impedancia tenemos de acuerdo a las ecuaciones (72) (73) y (74).

$$\frac{k_{01}}{Z_0} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{W_\lambda}{g_0 g_1 \omega_1'}} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \left( \frac{4.55 \times 10^{-3}}{0.8430} \right)} = 0.0920$$

$$\frac{k_{12}}{Z_v} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{W_\lambda}{\omega_1 \sqrt{g_1 g_2}}} = \frac{\pi}{2} \frac{4.55 \times 10^{-3}}{\sqrt{0.8430 \times 0.6220}} = 0.0098$$

$$\frac{k_{23}}{Z_v} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{W_\lambda}{\omega_1 \sqrt{g_2 g_3}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \left( \frac{4.55 \times 10^{-3}}{0.6220 \times 1.3554} \right)} = 0.0920$$

de (75)

$$\frac{X_{j,j+1}}{Z_0} = \frac{\frac{K_{j,j+1}}{Z_v}}{1 - \left( \frac{K_{j,j+1}}{Z_v} \right)^2}$$

$$\frac{X_{01}}{Z_0} = \frac{X_{23}}{Z_v} = \frac{0.0920}{1 - (0.0920)^2} = 0.0928$$

$$\frac{X_{12}}{Z_v} = \frac{0.0098}{1 - (0.0098)^2} = 0.0098$$

$$\frac{X_{01}}{Z_v} \frac{\lambda g_0}{a} = \frac{X_{23}}{Z_v} \frac{\lambda g_v}{a} = 0.1900$$

$$\frac{X_{12}}{Z_0} \frac{\lambda g_v}{a} = 0.0202$$

con

$$\frac{a}{\lambda_0} = \frac{2.33}{3.33} = 0.699 \approx 0.7$$

De la gráfica 30a con  $\frac{a}{\lambda} = 0.7$ , para  $X_{01}$  y  $X_{23}$ .

se obtienen los siguientes valores

$$\frac{d_1}{a} = \frac{d_3}{a} = 0.25$$

de donde

$$d_1 = 0.25 \times 2.33 = 0.582 \text{ cm} = d_3$$

De una manera análoga

$$\text{con } \frac{X}{Z_v} = \frac{\lambda g_0}{a} \text{ se tiene que}$$

$$\frac{d_2}{a} = 0.0625$$

de donde

$$d_2 = 0.0625 \times 2.33 = 0.141 \text{ cm}$$

La distancia eléctrica entre los centros de los diaframas en cada resonador  $j$  es

$$\theta_j = \pi - \frac{1}{2} \left\{ \tan^{-1} \left( \frac{2X_j - 1, j}{Z_v} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{2X_j, j + 1}{Z_0} \right) \right\} \text{ radianes}$$

$$\begin{aligned} \theta_1 = \theta_2 &= \pi - \frac{1}{2} \left\{ \tan^{-1} (2 \times 0.0928) + \tan^{-1} (2 \times 0.0098) \right\} \\ &= 3.0399 \end{aligned}$$

El espaciado entre los iris es  $\lambda$

$$l_1 = l_2 = \theta_1 \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{3.0399 \times 4.77}{2\pi} = 2.3077 \text{ cm}$$

Una vez que se construye un dispositivo de esta naturaleza se tiene el problema de ajustar el circuito para que su operación se encuentre en la frecuencia deseada; y una vez que se ajusta, todavía existe la duda si los circuitos resonantes están trabajando a la frecuencia adecuada, o que si el entonamiento es correcto. Para realizar este ajuste se siguió un procedimiento de circuito abierto y corto circuito alternados; el cual se describe a continuación<sup>1</sup>.

Para ilustrar el procedimiento de entonamiento se hará referencia a la figura (45) la cual muestra un filtro pasabanda con cuatro puntos de entonamiento.

Este procedimiento es aplicable a todos los filtros de circuitos resonantes acoplados; y bien pueden ser filtros de configuraciones de K constante para bajas frecuencias, filtros de circuitos acoplados para frecuencias medias, filtros en --

<sup>1</sup>  
Referencia 15.



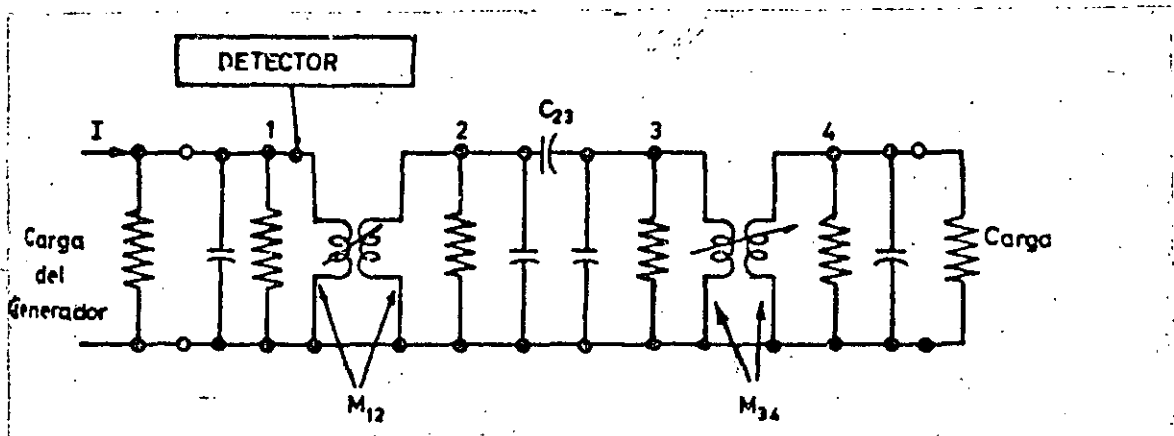


Fig. 45 Filtro pasa banda con cuatro puntos de entonamiento

guía de onda acoplados por medio de cuartos de longitud de onda para frecuencia de microondas, o cualquier otro tipo semejante.

- 1.- Conectar el generador al primer resonador del filtro y la carga al último resonador de la misma forma que trabajará el filtro en la práctica.
- 2.- Acoplar un detector no resonante<sup>1</sup>, ya sea al campo eléctrico (voltaje) o al campo magnético (corriente) del primer resonador de la cadena del filtro.
- 3.- Desintonar<sup>2</sup> completamente todos los resonadores.
- 4.- Colocar la frecuencia del generador a la frecuencia de operación del filtro (a media banda).

- 5.- Entonar el resonador 1 para una indicación de salida MAXIMA del detector. Al lograr este máximo se asegura el ajuste de entonamiento para que no tenga ningún movimiento y pueda desentonarse.
- 6.- Entonar el resonador 2 para una indicación de salida MINIMA del detector. Asegurar el ajuste de entonamiento.
- 7.- Entonar el resonador 3 para una máxima salida del detector. Asegurar el ajuste de entonamiento.
- 8.- Entonar el resonador 4 para una mínima salida del detector. Asegurar el ajuste de entonamiento.

Con el paso anterior el filtro de la figura ( 45 ) queda totalmente ajustado.

En el caso de ser impráctico desentonar completamente todos los resonadores, puede emplearse un sólo dispositivo para corto-circuitar el resonador que inmediatamente le sigue a -- aquel que se está entonando; en vista de que esto cancelará -- los efectos de todos los resonadores siguientes. Es muy importante asegurarse que éste corto circuito sea completamente --- efectivo a la frecuencia de operación.

<sup>1</sup> Un detector no resonante (o generador) se dice que está bien acoplado cuando éste disminuye la Q del resonador sin carga -- en una cantidad menor del 5%.

<sup>2</sup> Un resonador está suficientemente desentonado cuando su frecuencia de resonancia está alejada cuando menos 10 anchos de banda de la frecuencia central del pasabanda de operación.

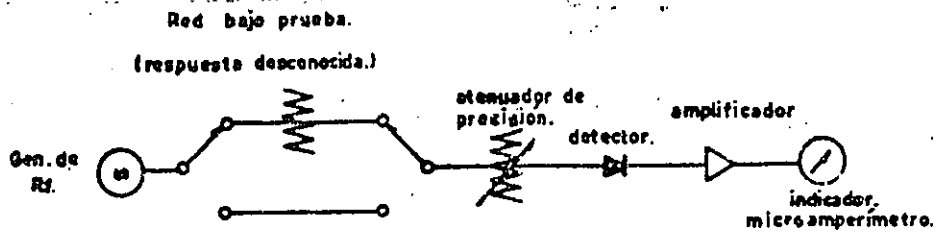
## 25 Mediciones de pérdida de inserción

Para medir la pérdida de inserción de una red de cuatro terminales está el método de substitución.

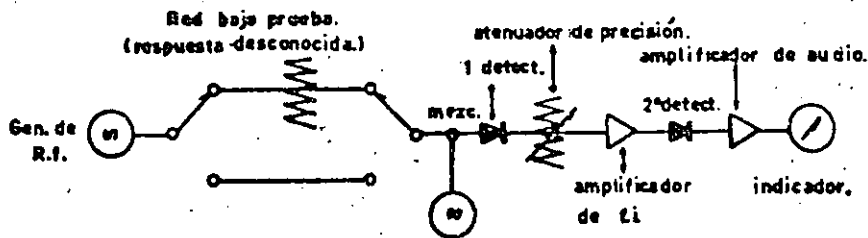
El equipo requerido para realizar la medición de pérdida de inserción es; un generador con el rango en el cual opera el dispositivo, un atenuador de precisión con 0 db de pérdida de inserción, un sistema detector, un amplificador de corriente directa, un microamperímetro y la red a la cual se requiere determinar su respuesta.

En este método se conectan en serie todos los dispositivos siguiendo este orden; generador de señales, filtro, atenuador, detector, amplificador de Cd y microamperímetro.

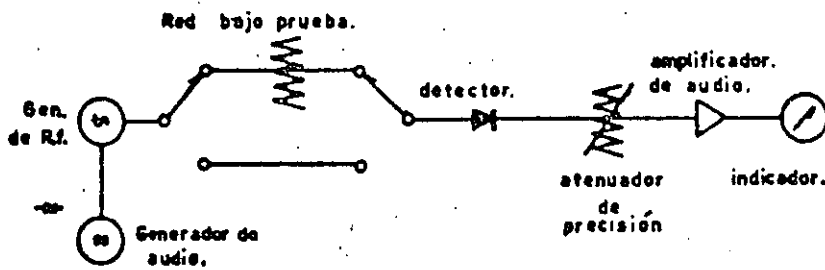
Procedimiento.- Una vez conectados los dispositivos en serie siguiendo el orden antes expuesto y que se ilustre en la figura (46 a) , se coloca el generador para que opera a una frecuencia a media banda de la frecuencia de operación del filtro o sea  $f_0$ ; y se ajusta la sensibilidad del amplificador de CD para obtener una lectura de referencia del nivel de potencia la cual se lee en el microamperímetro, esta lectura inicial se anota y enseguida se quita del circuito la red bajo prueba (en este caso el filtro) y se conectan los demás dispositivos de la misma forma que antes, observando que en el microamperímetro habrá un valor muy elevado del nivel de potencia, enseguida mediante el atenuador calibrado se restaura el valor original del nivel de potencia y se determina el valor de decibeles



a).



b).



c)

Fig. (46) Tres variaciones del método de sustitución para medir la pérdida de inserción de una red.

- a) La sustitución de R.f.
- b) La sustitución de F.i.
- c) La sustitución de audio.

que se necesitan para restaurar el valor del nivel de potencia a su punto original; siendo este número de decibeles la pérdida de inserción que presenta la red bajo prueba a la señal que va del generador hacia la carga con una frecuencia  $f_0$ .

Este procedimiento se repite para cada valor de frecuencia de tal manera que se barra un amplio rango hacia la parte superior e inferior de la frecuencia a media banda (hasta  $3\omega_0$  en la parte superior y la misma relación en la parte inferior) determinándose de esta manera la pérdida de inserción que imprime la red para cada frecuencia.

## APENDICE A

En este apéndice se ilustran las características de Atenuación para los filtros Butterworth y Tchebyscheff. El nivel del rizo en el caso Tchebyscheff es de 0.01, 0.10, 0.20, 0.50, 1.00, 2.00 y 3.00 db.

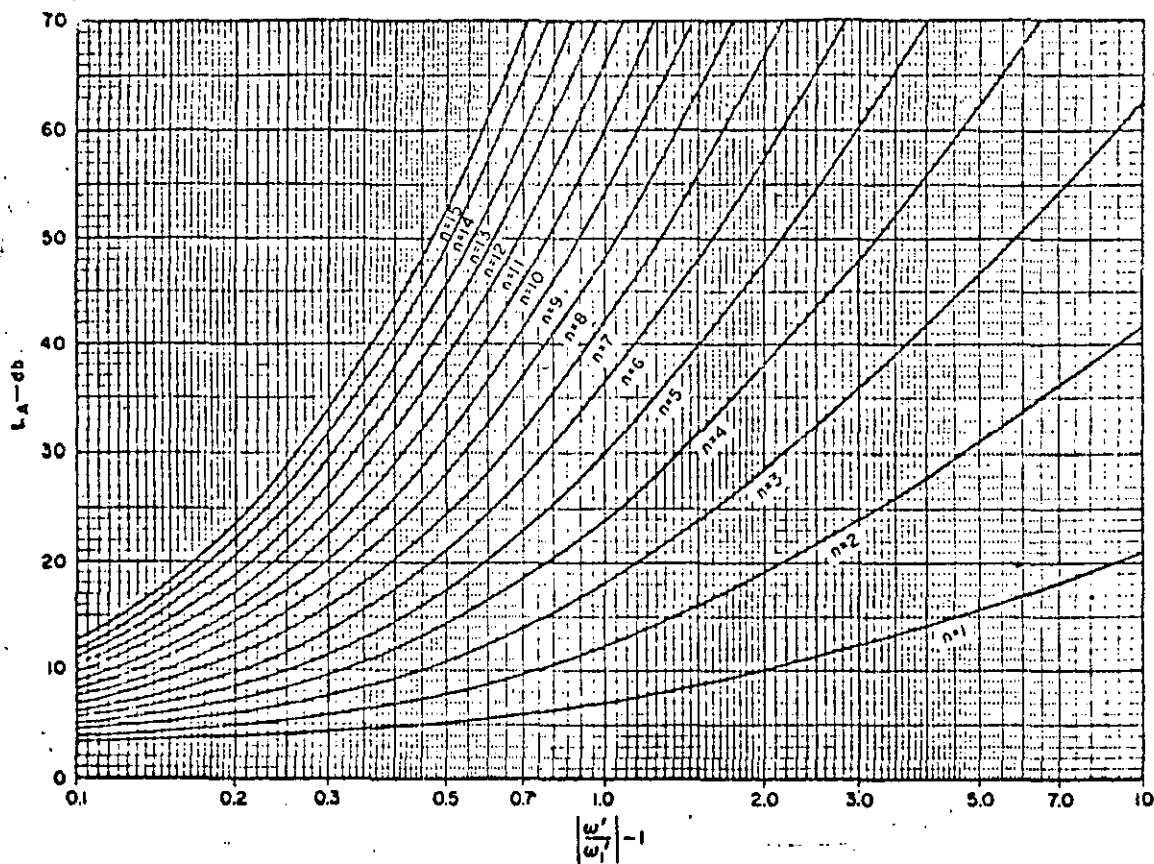


Fig. A.1 Características de atenuación para filtros Butterworth<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Gráfica tomada de la referencia 9.

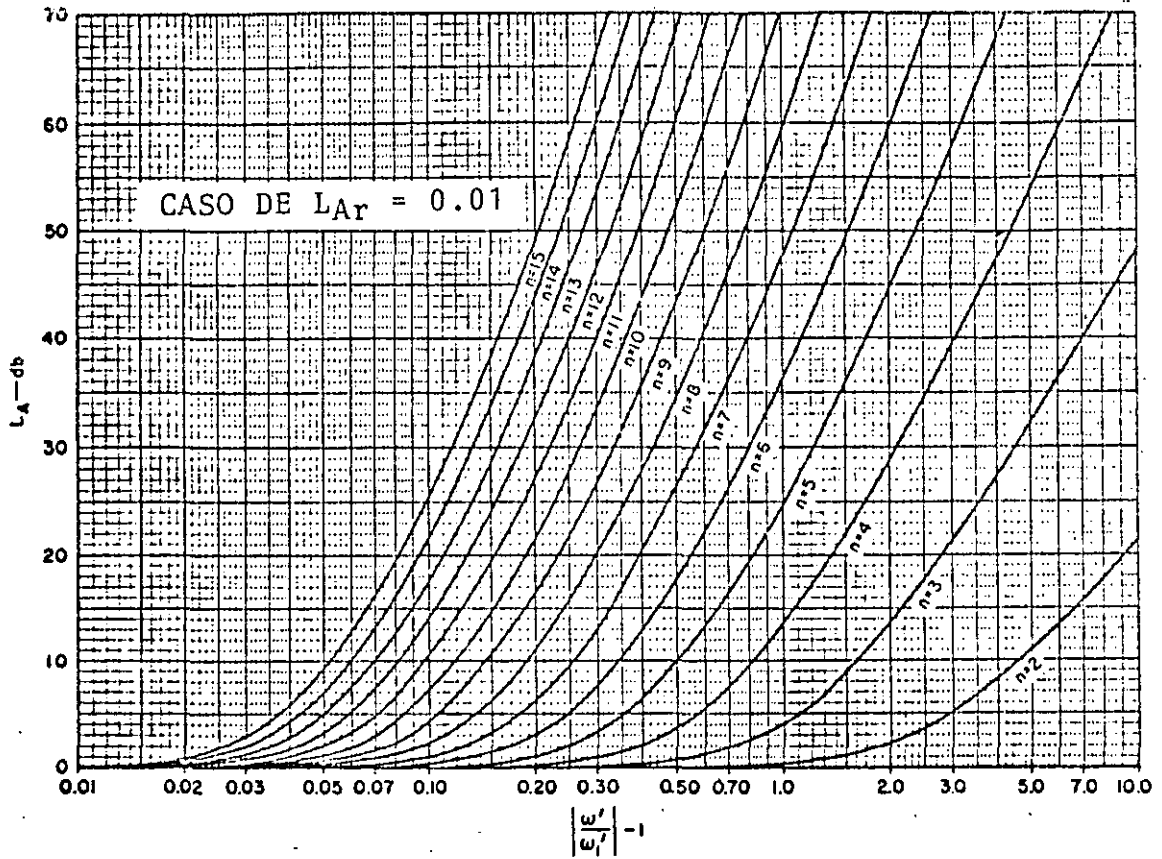


Fig. A.2 Características de filtros Tchebyscheff con un nivel de rizo en el pasa banda de 0.01 db<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Gráfica tomada de la referencia 9.



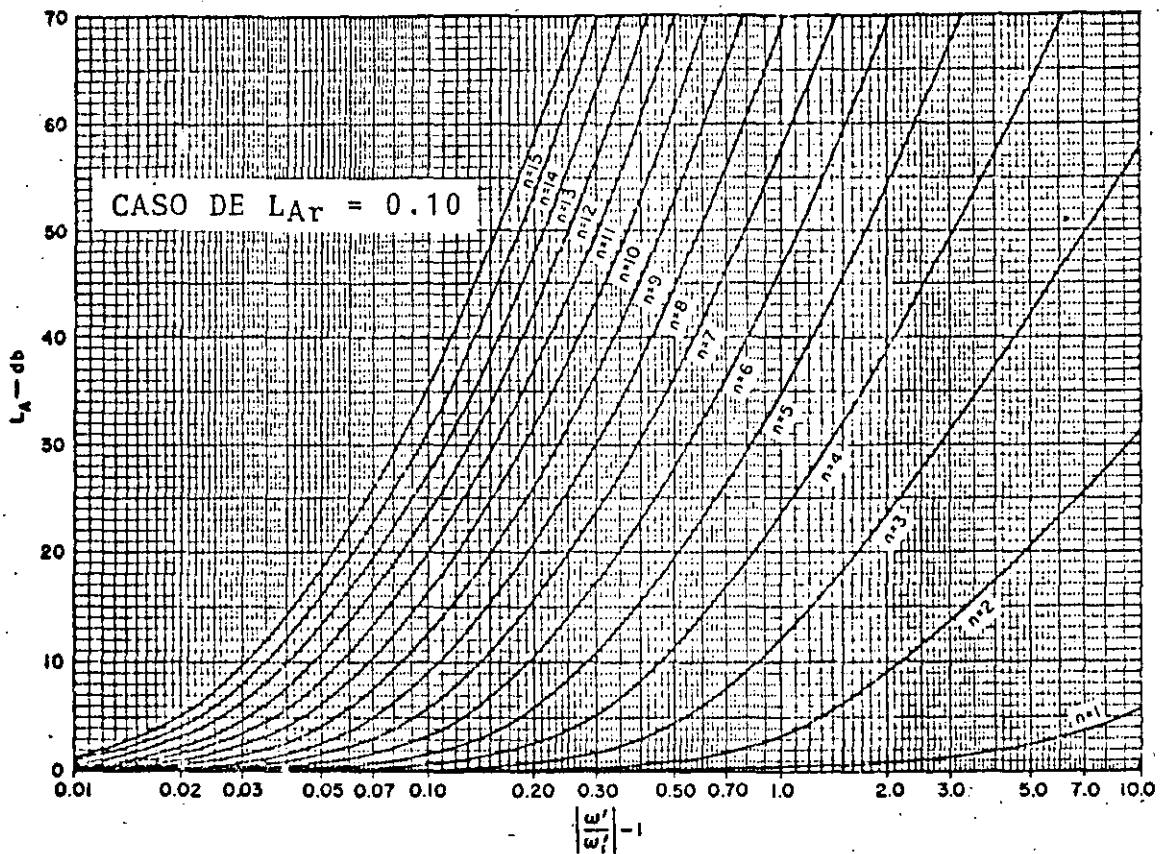


Fig. A.3 Características de filtros Tchebyscheff con un nivel de rizo en el pasa banda de 0.10 db<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Gráfica tomada de la referencia 9.

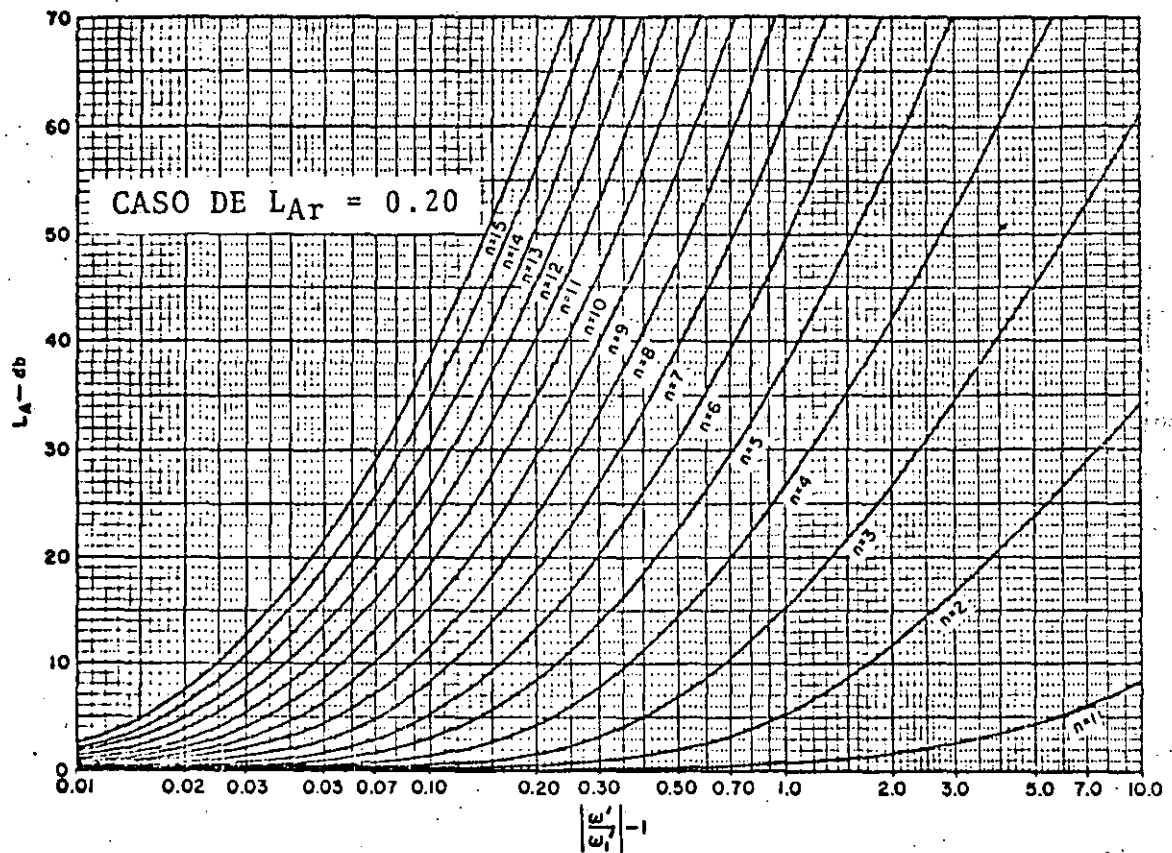


Fig. A.4 Características de filtros Tchebyscheff con un nivel de rizo en el pasa banda de  $0.20 \text{ db}^1$

<sup>1</sup>Gráfica tomada de la referencia 9.

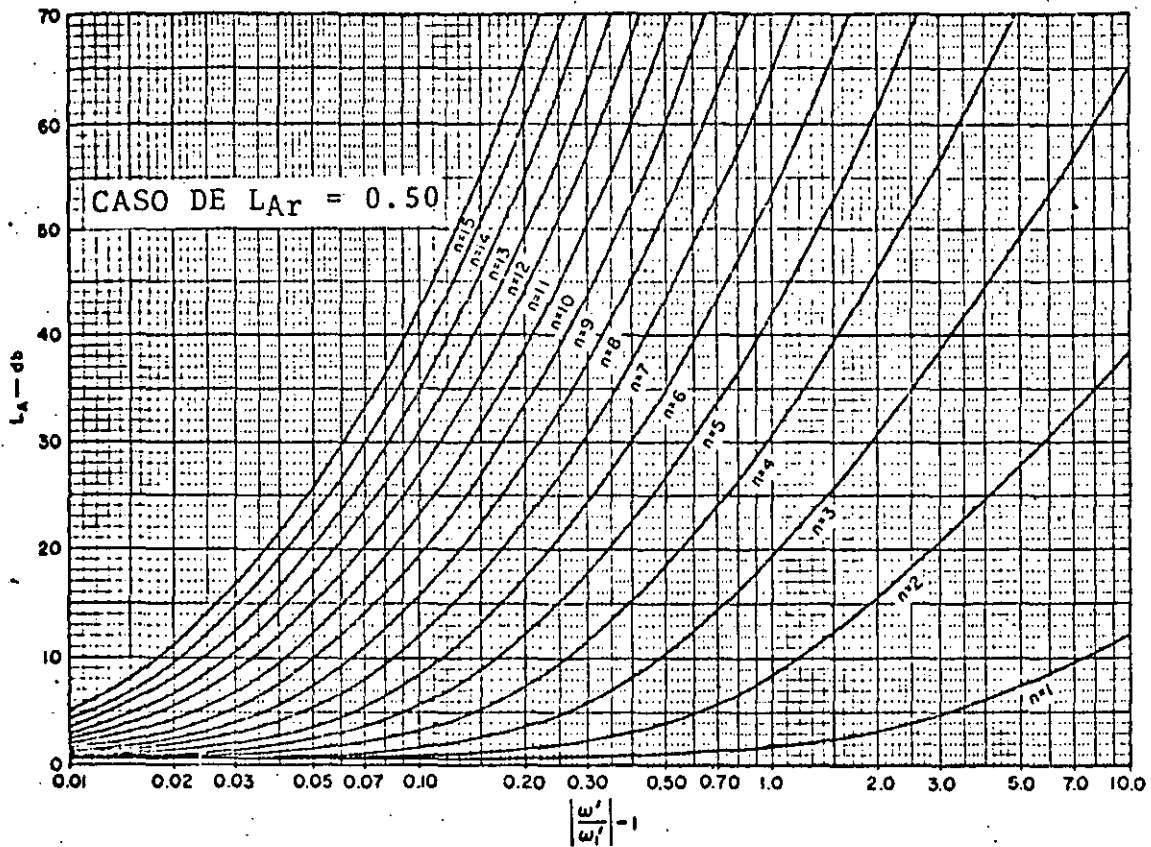


Fig. A.5 Características de filtros Tchebyscheff con un nivel de rizo en el pasabanda de  $0.50^1$

<sup>1</sup>Gráfica tomada de la referencia 9.

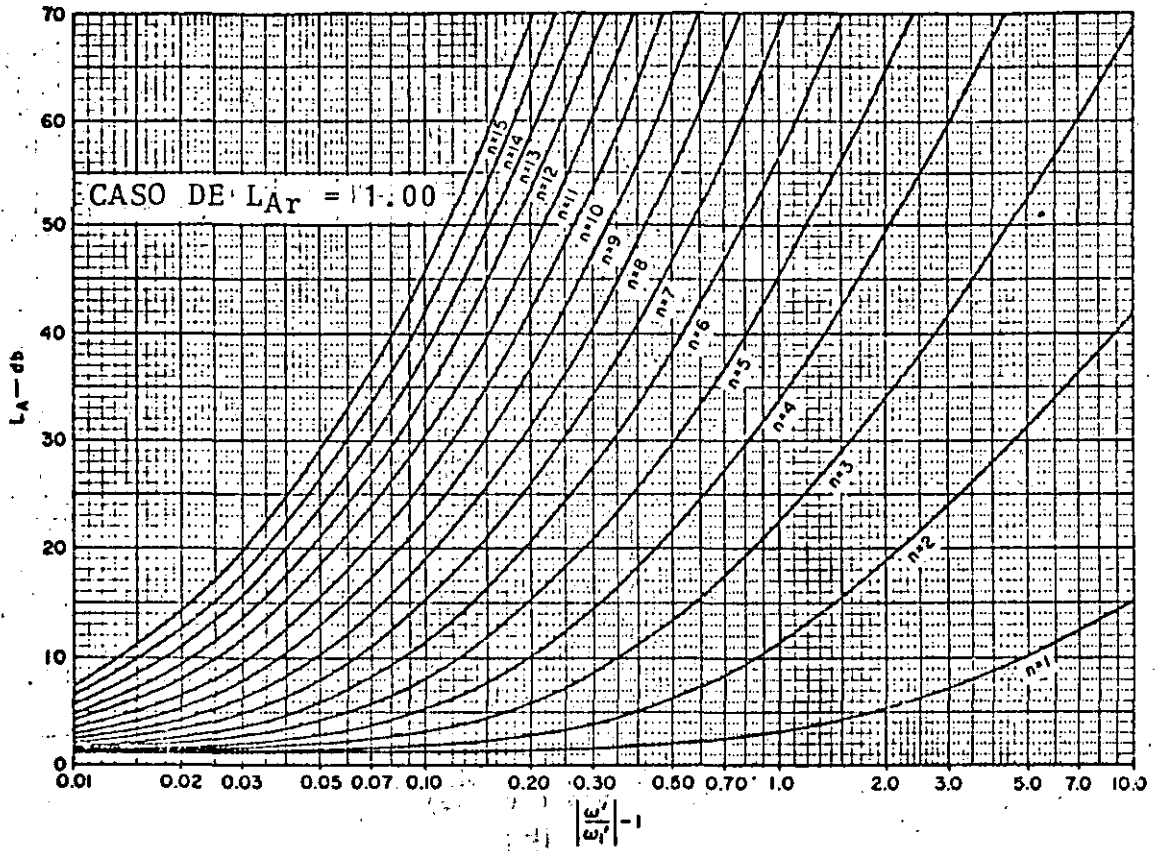


Fig. A.6 Características de filtros Tchebyscheff con un nivel de rizo en el pasa banda de 1.00 db<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Gráfica tomada de la referencia 9.

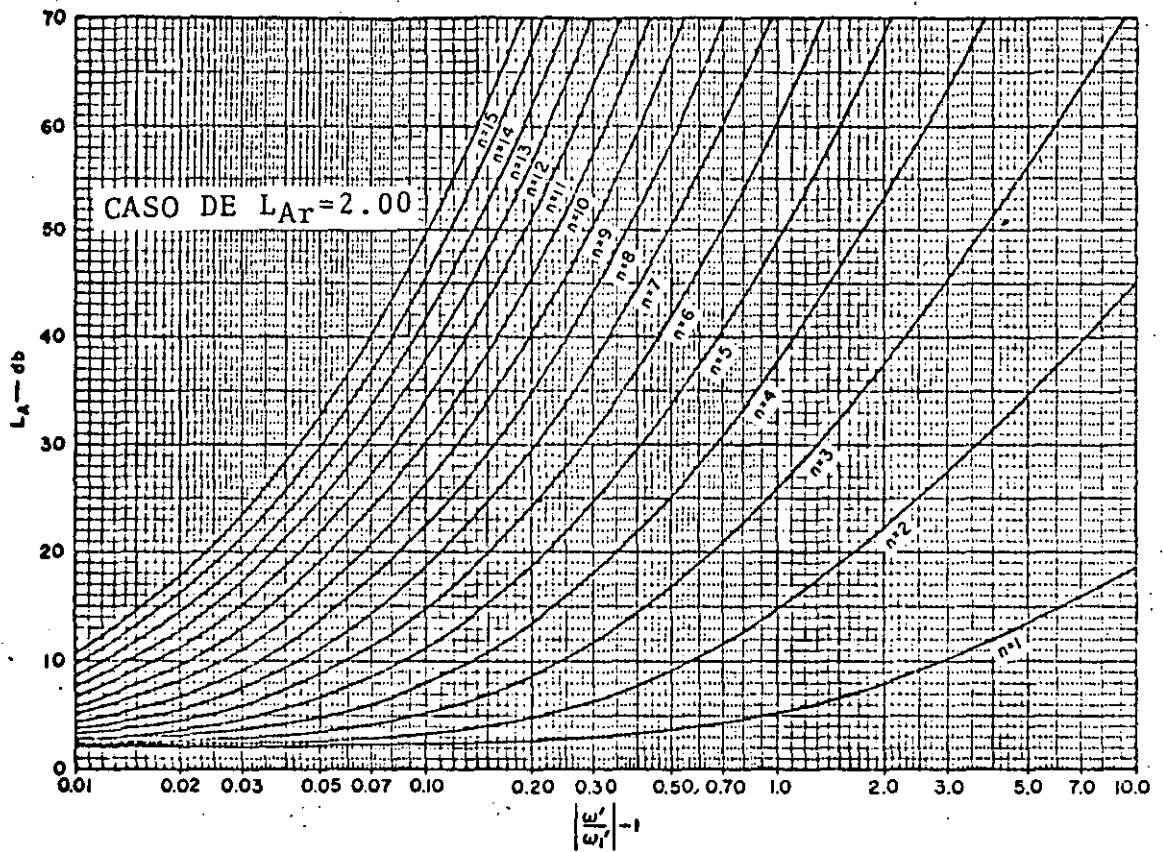


Fig. A.7 Características de filtros Tchebyscheff con un nivel de rizo en el pasa banda de 2.00 db<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Gráfica tomada de la referencia 9.

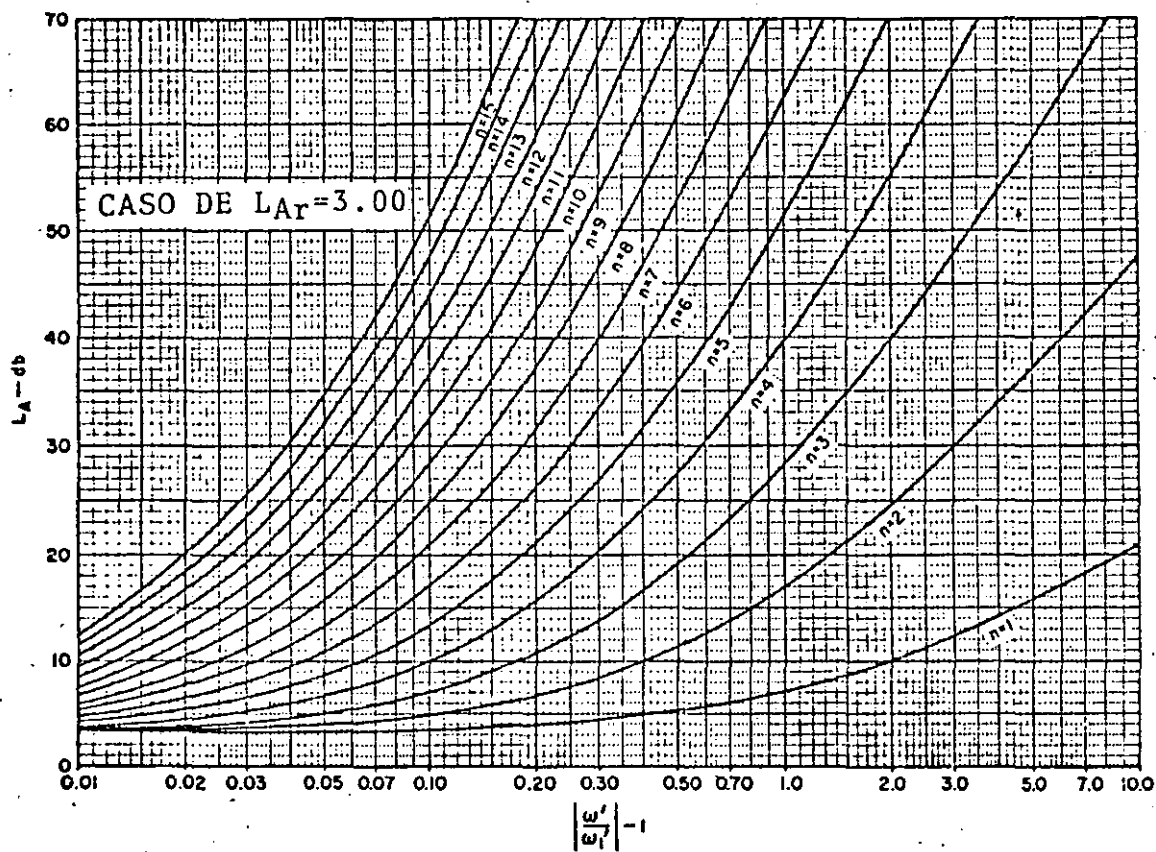


Fig. A.8 Características de filtros Tchebyscheff con un nivel de rizo en el pasa banda de 3.00 db<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Gráfica tomada de la referencia 9.

## APENDICE B

En este apéndice se presenta una serie de tablas con los valores normalizados de los elementos reactivos para el prototipo pasabajo con respuestas -- Butterworth y Tchebyscheff.

n	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\epsilon_3$	$\epsilon_4$	$\epsilon_5$	$\epsilon_6$	$\epsilon_7$	$\epsilon_8$	$\epsilon_9$	$\epsilon_{10}$	$\epsilon_{11}$
1	2.000	1.000									
2	1.414	1.414	1.000								
3	1.000	2.000	1.000	1.000							
4	0.7654	1.848	1.848	0.7654	1.000						
5	0.6180	1.618	2.000	1.618	0.6180	1.000					
6	0.5176	1.414	1.932	1.932	1.414	0.5176	1.000				
7	0.4450	1.247	1.802	2.000	1.802	1.247	0.4450	1.000			
8	0.3902	1.111	1.663	1.962	1.962	1.663	1.111	0.3902	1.000		
9	0.3473	1.000	1.532	1.879	2.000	1.879	1.532	1.000	0.3473	1.000	
10	0.3129	0.9080	1.414	1.782	1.975	1.975	1.782	1.414	0.9080	0.3129	1.000

TABLA B.1

Valores de los elementos para filtros con respuesta Butterworth, con  $g_0 = 1$ ,  $\omega_c = 1$  y n de 1 a 10, las respuestas son de la forma de la figura 3.8(a) con  $L_{Ar} = 3\text{db}^1$

n	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\epsilon_3$	$\epsilon_4$	$\epsilon_5$	$\epsilon_6$	$\epsilon_7$	$\epsilon_8$
11	0.2846	0.8308	1.3097	1.6825	1.9189	2.0000	1.9189	1.6825
12	0.2610	0.7653	1.2175	1.5867	1.8477	1.9828	1.9828	1.8477
13	0.2410	0.7092	1.1361	1.4970	1.7709	1.9418	2.0000	1.9418
14	0.2239	0.6605	1.0640	1.4142	1.6934	1.8877	1.9874	1.9874
15	0.2090	0.6180	1.0000	1.3382	1.6180	1.8270	1.9563	2.0000
	$\epsilon_9$	$\epsilon_{10}$	$\epsilon_{11}$	$\epsilon_{12}$	$\epsilon_{13}$	$\epsilon_{14}$	$\epsilon_{15}$	$\epsilon_{16}$
11	1.3097	0.8308	0.2846	1.0000				
12	1.5867	1.2175	0.7653	0.2610	1.0000			
13	1.7709	1.4970	1.1361	0.7092	0.2410	1.0000		
14	1.8877	1.6934	1.4142	1.0640	0.6605	0.2239	1.0000	
15	1.9563	1.8270	1.6180	1.3382	1.0000	0.6180	0.2090	1.0000

TABLA B.2

Valores de los elementos para filtros con respuesta Butterworth, con  $g_0 = 1$ ,  $\omega_c = 1$  y n de 11 a 15, las respuestas son de la forma de la figura 3.8(a) con  $L_{Ar} = 3\text{db}^1$

<sup>1</sup>Tabla tomada de la referencia 9.



n	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\epsilon_3$	$\epsilon_4$	$\epsilon_5$	$\epsilon_6$	$\epsilon_7$	$\epsilon_8$	$\epsilon_9$	$\epsilon_{10}$	$\epsilon_{11}$
rizo de 0.01 db											
1	0.0960	1.0000									
2	0.4488	0.4077	1.1007								
3	0.6291	0.9702	0.6291	1.0000							
4	0.7128	1.2003	1.3212	0.6476	1.1007						
5	0.7563	1.3049	1.5773	1.3049	0.7563	1.0000					
6	0.7813	1.3600	1.6896	1.5350	1.4970	0.7098	1.1007				
7	0.7969	1.3924	1.7481	1.6331	1.7401	1.3924	0.7969	1.0000			
8	0.8072	1.4130	1.7824	1.6833	1.8529	1.6193	1.5554	0.7333	1.1007		
9	0.8144	1.4270	1.8043	1.7125	1.9057	1.7125	1.8043	1.4270	0.8144	1.0000	
10	0.8196	1.4369	1.8192	1.7311	1.9362	1.7590	1.9055	1.6527	1.5817	0.7446	1.1007
rizo de 0.10 db											
1	0.3052	1.0000									
2	0.8430	0.6220	1.3554								
3	1.0315	1.1474	1.0315	1.0000							
4	1.1088	1.3061	1.7703	0.8180	1.3554						
5	1.1468	1.3712	1.9750	1.3712	1.1468	1.0000					
6	1.1681	1.4039	2.0562	1.5170	1.9029	0.8618	1.3554				
7	1.1811	1.4228	2.0966	1.5733	2.0966	1.4228	1.1811	1.0000			
8	1.1897	1.4346	2.1199	1.6010	2.1699	1.5640	1.9444	0.8778	1.3554		
9	1.1956	1.4425	2.1345	1.6167	2.2053	1.6167	2.1345	1.4425	1.1956	1.0000	
10	1.1999	1.4481	2.1444	1.6265	2.2253	1.6418	2.2046	1.5821	1.9628	0.8853	1.3554
rizo de 0.20 db											
1	0.4342	1.0000									
2	1.0378	0.6745	1.5386								
3	1.2275	1.1525	1.2275	1.0000							
4	1.3028	1.2844	1.9761	0.8468	1.5386						
5	1.3394	1.3370	2.1660	1.3370	1.3394	1.0000					
6	1.3598	1.3632	2.2394	1.4555	2.0974	0.8838	1.5386				
7	1.3722	1.3701	2.2756	1.5001	2.2756	1.3781	1.3722	1.0000			
8	1.3804	1.3875	2.2963	1.5217	2.3413	1.4925	2.1349	0.8972	1.5386		
9	1.3860	1.3938	2.3093	1.5340	2.3728	1.5340	2.3093	1.3938	1.3860	1.0000	
10	1.3901	1.3983	2.3181	1.5417	2.3904	1.5536	2.3720	1.5066	2.1514	0.9034	1.5386
rizo de 0.50 db											
1	0.6986	1.0000									
2	1.4029	0.7071	1.9841								
3	1.5963	1.0967	1.5963	1.0000							
4	1.6703	1.1926	2.3661	0.8419	1.9841						
5	1.7058	1.2296	2.5408	1.2296	1.7058	1.0000					
6	1.7254	1.2479	2.6064	1.3137	2.4758	0.8696	1.9841				
7	1.7372	1.2583	2.6381	1.3444	2.6381	1.2583	1.7372	1.0000			
8	1.7451	1.2647	2.6564	1.3590	2.6964	1.3389	2.5093	0.8796	1.9841		
9	1.7504	1.2690	2.6678	1.3673	2.7239	1.3673	2.6678	1.2690	1.7504	1.0000	
10	1.7543	1.2721	2.6754	1.3725	2.7392	1.3806	2.7231	1.3485	2.5239	0.8842	1.9841

TABLA B.3a

Valores de los elementos para filtros con respuesta Tchebyscheff, - con  $g_0 = 1$ ,  $\omega_1' = 1$  y respuestas de la forma de la figura 3.8(c) para varios niveles (en db) de rizo en el pasabanda

Casos de  $n = 1$  a  $10^1$

<sup>1</sup>Tabla tomada de la referencia 9.

n	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\epsilon_3$	$\epsilon_4$	$\epsilon_5$	$\epsilon_6$	$\epsilon_7$	$\epsilon_8$	$\epsilon_9$	$\epsilon_{10}$	$\epsilon_{11}$
rizo de 1.00 db											
1	1.0177	1.0000									
2	1.8219	0.6850	2.6599								
3	2.0236	0.9941	2.0236	1.0000							
4	2.0991	1.0644	2.8311	0.7892	2.6599						
5	2.1349	1.0911	3.0009	1.0911	2.1349	1.0000					
6	2.1546	1.1041	3.0634	1.1518	2.9367	0.8101	2.6599				
7	2.1664	1.1116	3.0934	1.1736	3.0934	1.1116	2.1664	1.0000			
8	2.1744	1.1161	3.1107	1.1839	3.1488	1.1696	2.9685	0.8175	2.6599		
9	2.1797	1.1192	3.1215	1.1897	3.1747	1.1897	3.1215	1.1192	2.1797	1.0000	
10	2.1836	1.1213	3.1286	1.1933	3.1890	1.1990	3.1738	1.1763	2.9824	0.8210	2.6599
rizo de 2.00 db											
1	1.5296	1.0000									
2	2.4881	0.6075	4.0957								
3	2.7107	0.8327	2.7107	1.0000							
4	2.7925	0.8806	3.6063	0.6819	4.0957						
5	2.8310	0.8985	3.7827	0.8985	2.8310	1.0000					
6	2.8521	0.9071	3.8467	0.9393	3.7151	0.6964	4.0957				
7	2.8655	0.9119	3.8780	0.9535	3.8780	0.9119	2.8655	1.0000			
8	2.8733	0.9151	3.8948	0.9605	3.9335	0.9510	3.7477	0.7016	4.0957		
9	2.8790	0.9171	3.9056	0.9643	3.9598	0.9643	3.9056	0.9171	2.8790	1.0000	
10	2.8831	0.9186	3.9128	0.9667	3.9743	0.9704	3.9589	0.9554	3.7619	0.7040	4.0957
rizo de 3.00 db											
1	1.9953	1.0000									
2	3.1013	0.5339	5.8095								
3	3.3487	0.7117	3.3487	1.0000							
4	3.4389	0.7403	4.3471	0.5920	5.8095						
5	3.4817	0.7618	4.5381	0.7618	3.4817	1.0000					
6	3.5045	0.7685	4.6061	0.7929	4.4641	0.6033	5.8095				
7	3.5182	0.7723	4.6386	0.8039	4.6386	0.7723	3.5182	1.0000			
8	3.5277	0.7745	4.6575	0.8089	4.6990	0.8018	4.4990	0.6073	5.8095		
9	3.5340	0.7760	4.6692	0.8118	4.7272	0.8118	4.6692	0.7760	3.5340	1.0000	
10	3.5384	0.7771	4.6768	0.8136	4.7425	0.8164	4.7260	0.8051	4.5142	0.6091	5.8095

TABLA B.3b

Valores de los elementos para filtros con respuesta Tchebyscheff, - con  $g_0 = 1$ ,  $\omega_1 = 1$  y respuestas de la forma de la figura 3.8(c) para varios niveles(en db) de rizo en el pasa banda.

Casos de  $n = 1$  a  $10^1$

<sup>1</sup>Tabla tomada de la referencia 9.

122

n	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\epsilon_3$	$\epsilon_4$	$\epsilon_5$	$\epsilon_6$	$\epsilon_7$	$\epsilon_8$	$\epsilon_9$	$\epsilon_{10}$	$\epsilon_{11}$	$\epsilon_{12}$	$\epsilon_{13}$	$\epsilon_{14}$	$\epsilon_{15}$	$\epsilon_{16}$
rizo de 0.01 db																
11	0.6234	1.4442	1.8298	1.7437	1.9554	1.7856	1.9554	1.7437	1.8298	1.4442	0.8234	1.0000				
12	0.8264	1.4497	1.8377	1.7527	1.9684	1.8022	1.9837	1.7883	1.9293	1.6695	1.5957	0.7508	1.1007			
13	0.8287	1.4540	1.8437	1.7594	1.9777	1.8134	2.0014	1.8134	1.9777	1.7594	1.8437	1.4540	0.8287	1.0000		
14	0.8305	1.4573	1.8483	1.7644	1.9845	1.8214	2.0132	1.8290	2.0048	1.8029	1.9422	1.6792	1.5041	0.7545	1.1007	
15	0.8320	1.4600	1.8520	1.7684	1.9897	1.8272	2.0216	1.8394	2.0216	1.8272	1.9897	1.7684	1.8520	1.4600	0.8320	1.0000
rizo de 0.10 db																
11	1.2031	1.4523	2.1515	1.6332	2.2378	1.6559	2.2378	1.6332	2.1515	1.4523	1.2031	1.0000				
12	1.2055	1.4554	2.1566	1.6379	2.2462	1.6646	2.2562	1.6572	2.2200	1.5912	1.9726	0.8894	1.3554			
13	1.2074	1.4578	2.1605	1.6414	2.2521	1.6704	2.2675	1.6704	2.2521	1.6414	2.1605	1.4578	1.2074	1.0000		
14	1.2089	1.4596	2.1636	1.6441	2.2564	1.6745	2.2751	1.6786	2.2696	1.6648	2.2283	1.5963	1.9784	0.8919	1.3554	
15	1.2101	1.4612	2.1660	1.6461	2.2598	1.6776	2.2804	1.6839	2.2804	1.6776	2.2598	1.6461	2.1660	1.4612	1.2101	1.0000
rizo de 0.20 db																
11	1.3931	1.4015	2.3243	1.5469	2.4014	1.5646	2.4014	1.5469	2.3243	1.4015	1.3931	1.0000				
12	1.3954	1.4040	2.3289	1.5505	2.4088	1.5713	2.4176	1.5656	2.3856	1.5136	2.1601	0.9069	1.5386			
13	1.3972	1.4059	2.3323	1.5532	2.4140	1.5758	2.4276	1.5758	2.4140	1.5532	2.3323	1.4059	1.3972	1.0000		
14	1.3986	1.4073	2.3350	1.5553	2.4178	1.5790	2.4342	1.5821	2.4294	1.5714	2.3929	1.5176	2.1653	0.9089	1.5386	
15	1.3997	1.4085	2.3371	1.5569	2.4207	1.5813	2.4388	1.5862	2.4388	1.5813	2.4207	1.5569	2.3371	1.4085	1.3997	1.0000
rizo de 0.50 db																
11	1.7572	1.2743	2.6807	1.3759	2.7488	1.3879	2.7488	1.3759	2.6807	1.2743	1.7572	1.0000				
12	1.7594	1.2760	2.6849	1.3784	2.7551	1.3925	2.7628	1.3886	2.7349	1.3532	2.5317	0.8867	1.9841			
13	1.7610	1.2772	2.6878	1.3802	2.7596	1.3955	2.7714	1.3955	2.7596	1.3802	2.6878	1.2772	1.7610	1.0000		
14	1.7624	1.2783	2.6902	1.3816	2.7629	1.3976	2.7771	1.3997	2.7730	1.3925	2.7412	1.3558	2.5362	0.8882	1.9841	
15	1.7635	1.2791	2.6920	1.3826	2.7654	1.3991	2.7811	1.4024	2.7811	1.3991	2.7654	1.3826	2.6920	1.2791	1.7635	1.0000
rizo de 1.00 db																
11	2.1865	1.1229	3.1338	1.1957	3.1980	1.2041	3.1980	1.1957	3.1338	1.1229	2.1865	1.0000				
12	2.1887	1.1241	3.1375	1.1974	3.2039	1.2073	3.2112	1.2045	3.1849	1.1796	2.9898	0.8228	2.6599			
13	2.1904	1.1250	3.1403	1.1987	3.2081	1.2094	3.2192	1.2094	3.2081	1.1987	3.1403	1.1250	2.1904	1.0000		
14	2.1917	1.1257	3.1425	1.1996	3.2112	1.2108	3.2245	1.2123	3.2207	1.2073	3.1908	1.1815	2.9944	0.8239	2.6599	
15	2.1928	1.1263	3.1442	1.2004	3.2135	1.2119	3.2282	1.2142	3.2282	1.2119	3.2135	1.2004	3.1442	1.1263	2.1928	1.0000
rizo de 2.00 db																
11	2.8863	0.9195	3.9181	0.9682	3.9834	0.9737	3.9834	0.9682	3.9181	0.9195	2.8863	1.0000				
12	2.8886	0.9203	3.9219	0.9693	3.9894	0.9758	3.9967	0.9740	3.9701	0.9575	3.7695	0.7052	4.0957			
13	2.8904	0.9209	3.9247	0.9701	3.9936	0.9771	4.0048	0.9771	3.9936	0.9701	3.9247	0.9209	2.8904	1.0000		
14	2.8919	0.9214	3.9269	0.9707	3.9967	0.9781	4.0101	0.9791	4.0062	0.9758	3.9761	0.9587	3.7739	0.7060	4.0957	
15	2.8930	0.9218	3.9287	0.9712	3.9990	0.9788	4.0139	0.9803	4.0139	0.9788	3.9990	0.9712	3.9287	0.9218	2.8930	1.0000
rizo de 3.00 db																
11	3.5420	0.7778	4.6825	0.8147	4.7523	0.8189	4.7523	0.8147	4.6825	0.7778	3.5420	1.0000				
12	3.5445	0.7784	4.6865	0.8155	4.7587	0.8204	4.7664	0.8191	4.7381	0.8067	4.5224	0.6101	5.8095			
13	3.5465	0.7789	4.6896	0.8162	4.7631	0.8214	4.7751	0.8214	4.7631	0.8162	4.6896	0.7789	3.5465	1.0000		
14	3.5480	0.7792	4.6919	0.8166	4.7664	0.8222	4.7800	0.8229	4.7766	0.8204	4.7444	0.8076	4.5272	0.6107	5.8095	
15	3.5493	0.7795	4.6938	0.8170	4.7689	0.8227	4.7847	0.8238	4.7847	0.8227	4.7689	0.8170	4.6938	0.7795	3.5493	1.0000

TABLA B.4

Valores de los elementos para filtros con respuesta Tchebyscheff, con  $g_0 = 1$ ,  $\omega'_1 = 1$  y respuesta de la forma de la figura 3.8(c) para varios niveles (en db) de rizo en el pasa banda.

Casos de  $n = 11$  a  $15^1$

<sup>1</sup>Tabla tomada de la referencia 9.

REFERENCIAS

123

- (1) J. Richard Dangl and Kenneth P. Steele  
"Using strip transmission line to design microwave  
Circuits, Part I"  
Microwave, February 7, 1966, Pags. 72 - 76
- (2) R.M. Barrett  
"Etched Sheets Serve as microwave Components"  
Electronics, June, 1952 Pags. 114 - 118
- (3) S.B. Cohn, P.M. Sherk, J.K. Shimizu and E.M.T. Jones  
"Strip transmission lines and components, final report"  
IRE Transaction PGMTT-3, 2 March 1955 Pags. 119 - 126
- (4) N.A. Begovitch and A.R. Margolin  
"Theoretical and Experimental Studies of a Strip Transmission  
Line"  
International Technical Memo No. 234  
Hughes Aircraft Co. May 12, 1950
- (5) PHILIP R. GEFPE  
"Simplified modern filter design"  
Hayden
- (6) George L. Matthaei  
"Comb-Line band-pass filters of narrow or moderate bandwidth"  
The microwave journal August 1963 Pags. 82 - 90

- (7) Seymour B. Cohn  
"Direct-Coupled-Resonator Filters"  
Proceedings of the IRE  
February 1957 Pags. 187 - 195
- (8) Seymour B. Cohn  
"Parallel coupled transmission line resonator filters"  
IRE Transactions on microwave theory and techniques  
April 1958 Pags. 223 - 231
- (9) George L. Matthaei, Leo Young and E.M.T. Jones  
"Microwave Filters, impedance-matching networks, and  
coupling structures"  
McGraw Hill
- (10) Louis Weinberg  
"Additional tables for design of optimum ladder networks"  
Part I and II  
Jorunal of Franklin Institute  
July and August 1957 Pags 7 - 23, 127 - 138
- (11) William J. Getsinger  
"Coupled rectangular bars between Parallel plates"  
IRE transactions on microwave theory and techniques  
January 1962 Pags. 65 - 72
- (12) B.M. Oliver  
"Directional electromagnetic couplers"  
Proceeding IRE  
November 1954 Vol. 42 Pags. 1686 - 1692

(13) E.M.T. Jones and J.T. Balljahn

"Couple-strip-transmission-Line filters and directional  
Couplers"

IRE Transactions on Microwave theory and Techniques

Vol. MTT-4, April 1956, Pags. 75 - 81

(14) S.B.Cohn

"Problems in strip transmission lines"

IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques

Vol. MTT-3, March 1955, Pags. 119 - 126

(15) MILTON DISHAL

"Alignment and Adjustment of Synchronously  
Tuned Multiple- Resonant- Circuit Filters"

Proceedings of the IRE,

November 1951 Pags. 1448 - 1455

(16) Eduard L. Ginzton

"Microwave Measurements"

McGraw - Hill



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

TEORIA Y DISEÑO DE FILTROS ANALOGICOS  
Y DIGITALES

A P E N D I C E  
( CONTINUACION DEL CAPITULO 1 )

EXPOSITOR:  
JAVIER VALENCIA F.

AGOSTO, 1985

## A P E N D I C E S .

- A.1 "SUMMARY OF THE HISTORY OF CIRCUIT THEORY".  
V. BELEVITCH, IRE, 1962.
- A.2 "A STEP-BY-ACTIVE FILTER DESIGN".  
J. TOW, BELL TELEPHONE LABORATORIES, IEEE  
SPECTRUM, DECEMBER 1969.
- A.3 "FILTER DESIGN TABLES AND GRAPHS".  
ERICH CHRISTIAN- EGON EISENMANN., JOHN  
WILEY SONS, 1966.
- A.4 "INTEGRATED-CIRCUIT IMPLEMENTATION OF DIRECT  
COUPLED GYRATOR".  
S.S. HAYKIM, S. KRAMER, J. SCHEWCHUN AND D.H.  
TRELEASEN, IEEE JOURNAL OF SOLID STATE  
CIRCUITS, JUNE 1969.



## Summary of the History of Circuit Theory\*

V. BELEVITCH†, FELLOW, IRE

**Summary**—After a brief survey of the state of circuit theory before World War I, the various directions of its development in the last 50 years are discussed, mainly in relation with applications to communication engineering. The early period of network design (1920-1925) was followed by the beginning of synthesis (1926-1935). The next steps were the development of feedback amplifier theory and insertion loss filter theory. The numerous new directions of research started during and after the second war are briefly mentioned. Finally recent progress is reported in formal realizability theory and in topological synthesis. A last section deals with nonlinear and linear variable circuits.

### INTRODUCTION

ALTHOUGH circuit theory is more than 100 years old (Ohm's law, 1827; Kirchoff's laws, 1845), it seems that no systematic account of its historical development has ever been written. The present essay attempts to cover the last 50 years, the fiftieth anniversary of the IRE being taken as an excuse to exclude the more distant past. This limitation is also justified by the development of circuit theory itself, which shifted from a steady to an accelerated progress a few years before World War I, simultaneously with the expansion of communication technology following the invention of the vacuum tube (de Forest's audion, 1906). This growth of circuit theory is directly testified by the number of articles published per year, which remained

below unity till 1910 and increased from 5 to 25 in the period 1920-1940; after a drop during World War II, the increase continued, and a figure of 100 was exceeded in 1954.

We start with a brief survey of the state of the theory just before World War I and discuss in separate sections the various directions of its development up to the present days, mainly in relation with applications to communication engineering. Due to space restrictions, bibliographic references are omitted altogether: at least 200 important contributions out of a total of some 2000 would deserve mention. Important authors and dates are simply quoted in the main text; the dates generally refer to publications in regular scientific journals, for it was materially impossible to search through patents, theses and reports.

### CIRCUIT ANALYSIS BEFORE 1914

Long before 1914 circuit theory had emerged, from general electromagnetic theory, as an independent discipline with original concepts and methods. The conception of a circuit as a system of idealized lumped elements is already firmly established—drawings of Leyden jars and rheostats have gradually disappeared in favor of the now familiar graphical symbols. This assumes, at least implicitly, that a resistor is considered as a 2-terminal *black box* defined by the relation  $v = Ri$ , rather than as a physical device made of metal or carbon. This abstract point of view becomes

\* Received by the IRE, May 22, 1961.

† Comité d'Etude des Calculateurs Electroniques, Brussels, Belgium.

more prominent in the modern developments, where the laws defining the elements, and the interconnection constraints (Kirchhoff's laws) are explicitly taken as postulates. With this approach, *network theory*<sup>1</sup> only studies the properties of systems of elements and becomes a purely mathematical discipline dealing with abstract structures generated by various sets of postulates. Another consequence of this point of view is that the physical devices themselves are no longer studied by network theory but by what is sometimes called *device theory*; complicated physical devices are then naturally described by their *equivalent circuits*.

Conventional network elements are linear and time-independent; moreover, the stored electric and magnetic energies, and the dissipated power, are positive definite quadratic forms, and the constraints are instantaneously workless. This reduces the problem of network analysis to the classical theory of small vibrations in dissipative mechanical systems. The use of complex variables to combine the amplitudes and phases of harmonic steady states, and the separation of transients into normal modes, all familiar in analytical dynamics, were naturally taken over by circuit analysts. In particular, Steinmetz (1894) vulgarized the use of complex quantities in electrical engineering. Some specifically electric properties were, however, also established; we mention Kirchhoff's topological rules (1847) and their extension by Feussner (1902-1904), the so-called Thévenin's theorem (Helmholtz, 1853), the star-delta transformation (Kennelly, 1899) and the concept of duality (Russel, 1904).

The impedance concept was fluently used by Heaviside, with  $p$  treated both as a differential operator and as an algebraic variable. The use of complex values for  $p$  is physically justified by Campbell in 1911. Although the relation between Heaviside's operational calculus and integration in the complex plane was only clarified after 1916, the mathematical tools allowing to derive transient behavior from harmonic response were available, since all is needed for lumped circuits is Heaviside's formula based on a partial fraction expansion. It took, however, 20 more years to introduce the terminology of poles and zeros into common engineering practice.

Although network analysis is, in principle, already separated from line theory, both branches remain in close contact in their later evolution, so that a few words about the latter are not out of place. Classical line theory has been worked out in detail by Heaviside, and such concepts as matching, reflection, iterative

impedance, etc. began to be transferred from continuous to discrete structures, probably through the intermediary of artificial lines, a subject to which Kennelly devoted a book in 1917. Although the general concept of quadripole, or 2 port, as a black box characterized by its voltage equations, does not explicitly appear before 1921 (Breisig), attenuators and artificial lines calibrated in "equivalent length of standard line" were used earlier for telephone transmission measurements (the decibel was only introduced in 1924). Finally, Heaviside's invention of inductive loading successfully applied by Pupin led Campbell, through the theory of iterative structures (1903), to the invention of the electric filter to be discussed in the next section.

#### NETWORK DESIGN, 1920-1925

The progress in circuit theory during this period is connected with the development of long distance telephony in more than one respect. First, the theory of loaded lines is closely related with the invention of the electric filter, which found an immediate application in carrier telephony (first realization in 1918, Pittsburgh-Baltimore). Secondly, the design of bidirectional amplifiers (two-wire repeaters) immediately raised several problems of network synthesis (hybrid coils, balancing networks, filters, equalizers), not to mention the question of over-all stability. Although satisfactory engineering solutions were rapidly found to all these problems, their theoretical foundation was insufficiently systematic—the art of design, with its cut and try procedures had not yet matured into modern synthesis.

The electric filter was invented during World War I, independently by Campbell and Wagner. The first filters were iterative ladder structures, although lattice sections (in particular all-pass sections) are discussed by Campbell (1920-1922). After Zobel's invention of  $m$ -derivation (1923-1924), the catalogue of elementary sections was sufficiently extended to cover most practical requirements. In the spirit of line theory, a filter was designed as a cascade connection of sections with matched image-impedances, but the difference between image attenuation and insertion loss was thoroughly estimated by Zobel.

To Zobel are also due the understanding of the ideal transmission conditions (frequency independent attenuation and linear phase), the design of constant impedance equalizers (1928) including a method of approximation to prescribed frequency characteristics, the discovery of bandwidth conservation in the low-pass/ band-pass transformation, and the first correction for mutual bridging effects in a parallel connection of two filters ( $x$ -derivation).

Simultaneously with the development of filter theory, the general concept of a quadripole, with its impedance, admittance and chain (ABCD) matrices was introduced in Germany and France, and the rules for computing the matrices of series, parallel and tandem combinations of quadripoles were discovered. One distinguished

<sup>1</sup>Our restriction of the term *network* (as opposed to *circuit*) to situations where reference is made to an idealized model conforms with the IRE Standards ("IRE Standards on Circuits: Definitions of Terms for Linear Passive Reciprocal Time Invariant Networks, 1960" (60 IRE 4.82), Proc. IRE, vol. 48, p. 1609; September, 1960). Both terms are in fact synonymous in common usage. Another distinction has sometimes been made which reserves *network* for systems with free terminals or terminal-pairs (Campbell and Foster, 1920); in this terminology, an  $n$ -port becomes a circuit when terminations are specified at all ports.

between 2-terminal pair networks and 3-terminal networks (grounded quadripoles), and the combination rules were correctly restricted to cases where no "longitudinal voltage" appears. Here again, the separation of a general disturbance into a transversal and a longitudinal wave (using both conductors as "go circuit" and the earth as "return") was familiar in line theory, and effectively used in long distance telephony (phantom circuits) since 1903. A similar separation into three modes (symmetrical components) for three-phase power circuits was introduced by Fortescue in 1918.

The concept of  $n$ -terminal-pair network, or  $n$ -port, does not seem to have appeared during this period. It occurs, however, implicitly in a 1920 paper by Campbell and Foster, which is probably the first publication on network synthesis in the true sense—the energy relations in matched nondissipative 4 ports are discussed, the biconjugacy of the networks is proved, and a complete enumeration of all realizations is given; moreover, the circuits (which include the familiar hybrid coil) are explicitly treated as composed of ideal transformers, a new network element whose theory is established:

Acoustical telephone repeaters (telephone + microphone) were used before the invention of the vacuum tube, and difficulties due to singing were experienced. It is not easy to trace the evolution during the first war, and the post war publications already show a well-established technique. This is testified by the Campbell-Foster paper of 1920, by the design formulas for balancing networks (Hoyt, 1923–1924), and by the recognition of the fact that singing is essentially limited by line irregularities (Crissin, 1925).

#### THE BEGINNING OF SYNTHESIS, 1926–1935

Although Foster's proof of his reactance theorem (1924) is already a transition from the methods of analytical dynamics to those of modern network synthesis, the first paper dealing explicitly with the realization of a one-port whose impedance is a prescribed function of frequency is Cauer's 1926 contribution, based on continuous fraction expansions (also studied by Fry, 1926). With Cauer's and Foster's theorems, the synthesis problem for one ports containing two kinds of elements only was solved. The analogous problem for general one ports was solved by Brune (1931) and led to the concept of positive real function. Pomey (1928) proved that the real part of the impedance matrix of a general passive 2-port was positive definite at real frequencies. The remaining developments of this period deal mainly with nondissipative  $n$ -ports; although Gewertz (1933) found a synthesis method for general 2-ports (containing all three kinds of elements), the general problem for  $n$ -ports was only solved after World War II and will be discussed in another section. The concentration on LC networks is closely connected with filter theory and its engineering interest. Another aspect of network synthesis, the approximation problem, made also its appearance during this period; the maximally

flat approximation was used by Butterworth (1930) in the design of multistage amplifiers; simultaneously and independently, Cauer realized the optimal character of the Chebyshev approximation and solved the approximation problem for an important class of image-parameter filters. Finally, it should be remarked that the canonical structures obtained as solutions of the various synthesis problems made a free use of ideal transformers; the much more difficult problem of synthesis without transformers was not of paramount interest for communication applications and has only been treated recently.

The simplest network after the one port is the symmetric 2-port, which involves two frequency functions only. Geometrically symmetric 2-ports were treated by Bartlett (1927) and Brune (1932), whereas Cauer (1927) and Jaumann (1932) found a number of canonical circuits for all symmetric 2-ports. Dissymmetric, and, in particular, antisymmetric 2-ports, were studied by Cauer, who also extended Foster's theorem to LC  $n$ -ports (1931) and showed (1932–1934) that all equivalent LC networks could be derived from each other by the linear transformations considered by Howitt (1931). Certain classes of symmetric  $n$ -ports were studied by Baerwald (1931–1932).

Cauer's first book on filter design (1931) contains tables and curves for the Chebyshev approximation to a constant attenuation in the stop-band of an image parameter low-pass filter, as well as frequency transformations for other filter classes. The solution of the approximation problem involved rational functions whose extremal properties were established by Zolotareff in 1877 and which reduce to ordinary Chebyshev polynomials when elliptic functions are replaced by trigonometric functions. Cauer's presentation of his design data was based on canonic structures, practically less convenient than ladder structures, and was not accepted in engineering circles before it was realized that the statement and the solution of the approximation problem were of interest in themselves, for most of Cauer's results could easily be transferred to the ladder structure. The systematic theory of image parameter filters was further developed by Bode (1934) and Piloty (1937–1938), thus placing Zobel's earlier results in a clearer perspective. The particular problems raised by crystal filters were studied by W. P. Mason (1934–1937).

#### FEEDBACK AMPLIFIERS, 1932–1945

The construction of oscillators was one of the first applications of vacuum tubes, and the amplification increase due to a positive feedback below the threshold of oscillation is mentioned in several early publications on radio-engineering. The elementary, but erroneous, physical reasoning based on the round and round circulation of the signal in the feedback loop yielded the geometric series  $\mu(1 + \mu\beta + \mu^2\beta^2 + \dots)$  for the effective amplification. This gave the impression that instability must occur for all  $|\mu\beta| > 1$ , for the series then diverges.

Stable behavior with a negative feedback exceeding 6 db was thus apparently forbidden, and such low values have little practical interest. It was soon recognized that the theory based on the geometric series was contradicted by experience, and the expression  $\mu/(1-\mu\beta)$  was used even for  $|\mu\beta| > 1$  without theoretical justification until Nyquist (1932) proved his famous stability criterion and showed the error in the older theory—the physical reasoning based on the loop circulation is only correct when transients are taken into account, the terms in the geometric series then becoming convolution products; the steady-state formula is obtained as the limit after infinite time; the transient series is convergent, but not always uniformly, so that the limit operation and the summation cannot be interchanged. The case of conditional stability, predicted by Nyquist's theory, was experimentally confirmed (Peterson, *et al.* 1934) and the advantages of negative feedback were systematically discussed by Black (1934).

The domestication of negative feedback made it possible to design the wide-band highly linear amplifiers required for multichannel carrier telephony. Although various designs for interstage networks were proposed, for instance by Wheeler and Percival, the limitations due to parasitic capacities, and the way of overcoming them by an optimum over-all design, were only clarified by Bode in 1940, with the help of the integral relations between attenuation and phase.

The fact that the real and imaginary parts of physical network functions could not be specified independently from each other was first stated in connection with the ideal filter paradox. Kùpfmüller's treatment (1926) of the transient response to a unit-step led to the well-known sine-integral embodying a response preceding the stimulus. Restrictions imposed by causality to physical response functions are mentioned by Y. W. Lee (1932) in connection with a method of synthesis for arbitrary transfer functions based on Fourier transforms, a method patented by Lee and Wiener (1938). Physical approximations to the ideal filter response, both in amplitude and phase, are discussed by Bode and Dietzold (1935). Explicit integral relations between real and imaginary parts of various network functions were studied independently by Cauer (1932–1940), Bayard (1935) and Leroy (1935–1937), but similar relations were known earlier in the theory of optical dispersion (Kramers-Kronig, 1926).

Bode extended the relations to the case where either component is specified in a partial frequency range, and worked out their consequences for input, output and interstage networks with prescribed parasitic capacities. He also computed the maximum obtainable over-all feedback in terms of band width and asymptotic loop transmission. The stability criterion for multi-loop amplifiers was obtained by Llewellyn, and the effect of feedback on impedances was discussed by Blackman (1943). Bode introduced the concepts of return reference and sensitivity in his classical book (1945).

#### INSERTION LOSS FILTERS AND RELATED PROBLEMS

The limitations of image-parameter theory first appeared in connection with the design of filter groups, a problem frequently encountered in carrier telephony. Zobel's procedure of  $x$ -derivation, already mentioned, was first replaced by a more systematic method of impedance correction (Bode, 1930). An image-parameter theory of constant impedance filter pairs was developed by Brandt (1934–1936), Cauer (1934–1937) and Piloty (1937–1939), and it was recognized that this also yielded a solution to the equivalent problem of open-circuit filter design.

A completely new approach to the whole problem is contained in Norton's paper (1937) on constant impedance filter pairs, where the method of design starting from a prescribed insertion loss is established. The general synthesis problem for a reactance 2-port with prescribed insertion loss was solved independently by Cocci (1938–1940), Darlington (1939), Cauer (1939–1941) and Piloty (1939–1941). These contributions establish the canonic realization of a reactance 2-port as a ladder structure with mutual inductances restricted to adjacent or nearly adjacent arms and, as a consequence, the possibility of realizing an arbitrary passive one port by a network containing one resistance only. The approximation problem for insertion loss filters was reduced to the similar problem for image-parameter filters. Finally, Darlington also devised a method for precompensating the dissipative distortion.

As already mentioned, the prewar evolution of network theory was closely related with the development of wire communication, and the perfection reached by filter and feedback amplifier theory around 1940 made possible the design to strict tolerances which is required in long distance telephone equipment. On the contrary, the easier narrow-band problems of radio-engineering were treated by elementary circuit analysis, and it is only with the advent of video and pulse techniques that the theory of wide-band multi-stage amplifiers (without over-all feedback) underwent a systematic development, mainly during World War II. Another direction of war-time evolution was the extension of filter techniques to higher frequencies, leading to transmission line filters and microwave networks. Both directions have influenced classical filter theory and, as a consequence, common mathematical methods are now used in an extended field.

In microwave applications, the classical description of network performance in terms of voltages, currents, impedance and admittance matrices, was naturally replaced by a description based on transmitted and reflected wave amplitudes, leading to the concept of scattering matrix (Montgomery, Dicke and Purcell, 1948) taken over from general physics. This concept is also of interest in the field of lumped networks, where it was introduced independently and simultaneously by Belevitch. The scattering formalism allowed an easier

presentation of insertion loss filter theory, and has been of great help in other applications to be discussed later.

The war-time progress in amplifier design is described in the book of Valley and Wallmann (1943), but similar work has been done independently in Germany, namely by Cauer (posthumous publications). Most input and inter-stage circuits are actually ladder filters, terminated or open-circuited, so that filter and amplifier problems are closely related. Explicit formulas for the element values of various important classes of ladder filters have been investigated by many workers, but it was recently realized that most results had been anticipated by Takahasi (paper in Japanese, 1951; English adaptation, 1960). The design of input and output circuits is also related with the broad-band matching problem, which consists in constructing a 2-port which transforms a given frequency-dependent output load (for instance a resistance shunted by a parasitic capacitance) into a pure input resistance. A rigorously constant resistance can be obtained by a lossy 2-port, but it is practically important to know the approximation to matching in a given frequency range obtainable from a lossless 2-port, and to see how the transmission loss varies with the degree of impedance equalization for lossy 2-ports. The broad-band matching problem with lossless 2-ports was solved by Fano (1950) for important classes of load impedances. The relations for lossy 2-ports were obtained by Carlin and La Rosa (1952-1955) with the help of the scattering formalism.

Distributed amplifiers, which overcame the limitations imposed by parasitic capacities to stagger-tuned circuits, had been invented by Percival in 1937, but were only practically exploited after 1948; the problem of their optimum design is still unsolved, although some progress has been recently achieved.

The scattering formalism proved useful in the design of various classes of  $n$ -ports of interest in telephone applications. Belevitch (1950-1955) discussed matched  $n$ -ports with equal losses between any couple of ports, and biconjugate  $n$ -ports for  $n > 4$ . Dosoer (1958) and Oswald (1958) established design methods for a class of filter 4-ports (invented by Darlington in 1938) used in sub-merged repeaters.

The methods of best approximation used in filter and amplifier design were applied to other problems, namely to the design of various classes of delay networks. The maximally flat approximation for the group delay was obtained by Thomson (1949), and the Chebyshev approximation by Ulbricht and Piloty (1960). The Chebyshev approximation to a constant phase difference between two all-pass 2-ports (of interest for polyphase modulation) was obtained independently by Darlington, Orchard and Saraga (1950), and a mathematically equivalent problem on the phase angle of an impedance (of interest in feedback amplifier design) was solved by Baumann (1950). For problems having no exact analytic solution, Darlington (1952) described a procedure based on a series expansion in Chebyshev polynomials,

whereas the potential analogy and the related electrolytic tank technique were practically applied at least since 1945 (Hansen and Lundstrom).

#### NEW TRENDS IN POST-WAR EVOLUTION

The field of application of circuit theory extended in so many new directions during and after World War II that only the major tendencies can be outlined. Several new developments lie on the borderline between circuit theory and other disciplines (information theory and noisy systems, electronic computers, automatic control), and will not be discussed. The present section attempts a brief classification of the new ideas, concepts and methods, in relation with their engineering applications; the next two sections review in detail the postwar developments of network theory *stricto sensu*. Nonlinear and linear variable circuits are treated separately in the last section.

Pulse techniques, already mentioned, raised various synthesis problems in the time domain. Although every problem stated in the time domain is, in principle, equivalent to a problem in the complex frequency domain, the approximation requirements are often difficult to translate from one domain into the other, and the convergence properties in the two domains may be quite different. Various mathematical methods, such as Laguerre functions (Lee, 1932), time series expansions (Lewis, 1952), complex integration (Guillemin and Cerillo, 1952), have been used, but there seems to have been little fundamental progress; for instance, the problem of the steepest monotonic response in presence of a given parasitic capacity is not completely solved, although important contributions have been published, namely by Zemanian (1954) and Papoulis (1958).

Microwave circuits have also been previously mentioned. The realization of a microwave gyrator (Hogan, 1952), based on the Faraday effect in ferrites, justified the interest of the ideal gyrator concept (Tellegen, 1948) and promoted theoretical research on nonreciprocal networks initiated by Tellegen (1948-1949). Theoretical work on the synthesis of passive  $n$ -ports (both reciprocal or not) is discussed in the next section. Its practical importance is due to the fact that, without the limitations of reciprocity, better performances can be obtained (interstage networks; Tellegen, 1951) or otherwise impossible behavior can be achieved (design of circulators; Carlin, 1955).

Progress has been slower in the theory of active networks because it was more difficult to represent the real physical devices by simple ideal elements; needless to say, even greater difficulties await the circuit theorists of the future, with the advent of integrated microelectronic devices. Classical amplifier theory dealt in fact with passive networks separated by ideal unilateral buffer stages, and amplifiers with large negative feedback were used to realize the active transfer function  $-1/\beta$  involving only the transfer ratio  $\beta$  of the passive feedback network. With the advent of the transistor

(Bardeen and Brattain, 1948), practical design problems became much more difficult due to the internal feedback of the device. The fundamental limitations of active non-unilateral devices, at a fixed frequency, were progressively understood; for instance, the conditions for intrinsic stability were established by Llewellyn (1952), power invariants were found by S. J. Mason (1954), and noise invariants by Haus and Adler (1956-1959). The analysis of complex feedback structures was clarified by the use of the flow-graph notation (S. J. Mason, 1953). After the introduction of gyrators, it appeared more convenient to represent active devices by an equivalent circuit containing gyrators and (positive and negative) resistors, so that negative resistance remained the only new element in the theory of active networks. Although various negative resistance effects (arc discharge, dynatron, etc.) had been known for many years, practical and economic devices simulating linear negative resistors became available only with solid-state components (negative impedance converter: Linvill, 1953; tunnel diode: Esaki, 1958), and this favored the adoption of negative resistance as the basic element in theoretical work. Recent results in the theoretical field are summarized at the end of the next section.

Returning now to the synthesis of passive reciprocal networks, we briefly comment on the progressive separation between formal realizability theory (where ideal transformers are freely accepted) and topological synthesis (where even mutual inductances are excluded). The recent interest in topological methods originated from several distinct fields. First, mutual inductances, and even self-inductances, are difficult to realize at very low frequencies; this stimulated research on RC circuits, mainly for servomechanism applications, although similar problems arose earlier in the design of RC-oscillators (invented by van der Pol and van der Mark in 1934). Secondly, even at higher frequencies, it may be economical to replace inductances by capacitances combined with positive and negative resistances; this possibility was known theoretically before 1930, but became only practical with the availability of solid-state devices. Topological problems also arose in the design of contact networks, and some recent developments in the theory of switching are related with various fundamental problems of conventional network theory. Finally, the treatment of network problems on electronic computers asked for a more complete and detailed algebraization of all topological notions and raised various enumeration problems. Topological analysis was recently discussed by many workers, such as Bryant, Okada, Percival, Seshu and Watanabe; for combinatorial and enumeration problems, we refer to the book of Riordan (1958).

#### FORMAL REALIZABILITY

The synthesis of passive reciprocal  $n$ -ports has been achieved by three methods. The first one extended Gewertz's procedure for 2-ports and consisted in the suc-

cessive extraction of reduced impedance matrices; the process is heavy and laborious, and only of historical interest; it enabled, however, Oono (1946) and Bayard (1949) independently to prove that any positive real impedance or admittance matrix is realizable, thus showing that RLC elements and the ideal transformer constitute a *complete* system of passive reciprocal elements. After a discussion of the 2-port case by Leroy and Belevitch (1949), it appeared that the first method was actually a disguised extension of Darlington's process for one ports, i.e., the realization of an  $n$ -port as a reactive  $2n$ -port closed on  $n$  resistors. The second method consists in a direct application of this idea; it was used by Bayard (1950) and with the scattering formalism by Belevitch (1951). The third method extends Brune's process for one ports and arrives to a structure containing the minimum number of reactive elements; synthesis by this method was achieved independently by Oono (1948), Mac Millan (1948-1952) and Tellegen (1953) and contributed to a satisfactory definition of the degree of a rational matrix. In an important paper (1954), Oono and Yasuura rediscuss the synthesis by the second method, using the scattering matrix both for reciprocal and nonreciprocal  $n$ -ports and solve completely the equivalence problem.

In connection with the design of narrow-band unsymmetrical band-pass filters, Baum (1957-58) introduced a new fictitious passive element, the imaginary resistance (or frequency-independent reactance), and showed its interest in various synthesis problems. Using this concept, Belevitch obtained a simple derivation of Brune's for one-ports (1959) and extended Tellegen's process to nonreciprocal  $n$ -ports (1960).

Extensions to active networks were delayed due to difficulties arising with certain pathological  $n$ -ports admitting none of the conventional matrix descriptions (Tellegen, 1954; Carlin, 1955). These difficulties were circumscribed by Oono (1960), and by Carlin and Youla (1960). The latter showed that any active  $n$ -port is realizable as a passive nondissipative  $3n$ -port closed on  $n$  positive and  $n$  negative resistors. In a companion paper, Youla and Smilen (1960) establish the gain-bandwidth limitations due to parasitic capacitances in negative-resistance amplifiers and derive design formulas for optimum amplifiers.

#### TOPOLOGICAL SYNTHESIS

Logically, but not historically, the first problem arising in this field is the one of discriminating between constraints which are realizable without ideal transformers and general workless reciprocal constraints. In synthesis problems, constraints generally appear under the form of prescribed incidence relations between loops and branches, and the problem is to determine the necessary and sufficient conditions under which a prescribed incidence matrix corresponds to a graph. A necessary condition is well known (the matrix must be totally unimodular, i.e., have all its minors of all orders equal

to 0 or  $\pm 1$ ), but is certainly not sufficient, a classical counter-example being the dual of the constraints in a nonplanar graph (Foster, 1952). Sufficient conditions were found by Tutte (1958-1959). Various algorithms have recently been devised which either prove a given matrix to be unrealizable, or lead to a unique realization, within trivial isomorphisms. The first such algorithm is due to Gould (1958) and was applied to the synthesis of contact networks.

The next problem is the synthesis of resistance  $n$ -ports, and of resistance networks having  $n+1$  terminals (grounded  $n$ -ports). It was known for some time that dominancy (any diagonal element not smaller than the sum of the moduli of all elements in the same row) was sufficient, but not necessary, for the admittance matrix of an  $n$ -port. Necessary and sufficient conditions for a 3-port with prescribed impedance or admittance matrix were obtained by Tellegen (1952) by expressing that the network cannot yield current nor voltage gain under any set of open- or short-circuit conditions. A nontrivial extension of Tellegen's approach led Cederbaum (1958) to the condition of paramouncy (any principal minor not smaller than the modulus of every minor based on the same rows), which is weaker than dominancy. Paramouncy is necessary for admittance and impedance matrices, but its sufficiency is not established for impedance matrices with  $n > 3$ . For  $(n+1)$ -terminal networks, the synthesis is equivalent to a congruence transformation into a positive diagonal matrix by means of a realizable constraint matrix. An algorithm yielding a unique (except for trivial variants) transformation, if possible at all, has been found by Cederbaum, but this algorithm accepts totally unimodular transformation matrices, which are not necessarily realizable. Related synthesis procedures were described by Guillemin (1960) and Biorci (1961).

For two-element kind one ports, the canonical structures of Foster and Cauer contain no transformers. It has long been thought that the transformers appearing in Brune's process are unavoidable in the synthesis of general three-element kind one ports; a canonical realization without mutual inductance was, however, published by Bott and Duffin (1949). In spite of various small improvements (Pantell, 1954; Reza, 1954), the method is quite wasteful in elements; no further general improvement has been obtained, but procedures due to Miyata (1952) and Guillemin (1955) sometimes yield more economical realizations.

The synthesis of RC 2-ports was first treated by Guillemin (1949), who showed that the class of grounded RC 2-ports was practically not narrower than the class of general reciprocal 2-ports, in the sense that the modulus of the input-output voltage ratio of any 2-port of the second class can be arbitrarily approximated within the first class, except for a constant multiplier. Guillemin's synthesis was in terms of parallel ladders; Orchard (1951) established a synthesis by RC lattices and discussed the extraction of terminal resistances in

order to realize prescribed insertion loss functions. The approximation problem was treated by Ozaki and Fujisawa (1953). Miscellaneous synthesis procedures were discussed by a number of authors, but the most general and complete results are due to Fialkow and Gerst in a half-dozen papers published between 1951 and 1955. These authors found the necessary and sufficient conditions for voltage ratios of grounded and nongrounded RC and RLC 2-ports, as well as for various restricted structures (ladder, lattice); they indicated canonic realizations and discussed the value of the constant multiplier which fixes the maximum available voltage gain. Articles by Cederbaum (1956) and Kuh and Paige (1959) bring certain additional precisions.

The synthesis of RC grounded 2-ports with prescribed admittance or impedance matrices is still an unsolved problem. A series-parallel synthesis procedure was described by Ozaki (1953), and sufficient conditions under which it succeeds are known, but have not been proved necessary. The problem progressed through contributions of Lucal (1955), Slepian and Weinberg (1958) and Adams (1958), but Darlington's conjecture (1955), stating that any RC grounded 2-port admits an equivalent series-parallel realization, is still unproved.

The problem of ladder synthesis of two-element kind 2-ports arose earlier in filter theory, and the important method of zero-shifting in cascade synthesis was introduced by Bader (1942). Necessary and sufficient conditions for ladder realizability, in the case of a prescribed impedance matrix, or prescribed insertion loss, are unknown in general, but have been established for important classes of networks (Fujisawa, 1955; Watanabe, 1958) and applied to filter design (Meinguet, 1958).

Active grounded RC networks have recently been discussed by Kinariwala (1959-1960) and Sandberg (1960).

#### NONLINEAR AND LINEAR VARIABLE CIRCUITS

In contrast with the maturity of linear network theory, it is often considered that the theory of nonlinear and of linear variable networks is still in its infancy: it is not yet completely separated from nonlinear mechanics and has not reached the stage of synthesis. The present brief review limited to purely electrical problems is intended to show, however, that there has been some systematic progress and that the theory in its present state is no longer a collection of odd results.

First, it is important to separate the problems raised by the unavoidable nonlinearities appearing in nominally linear systems, and the intentional nonlinear effects allowing performances unobtainable with linear systems. The calculation of nonlinear distortion is relatively elementary in the case of slightly nonlinear characteristics (vacuum tube amplifiers, carbon microphone, etc). A more difficult problem arose in connection with the cross-modulation due to hysteresis in loading coils (Kalb and Bennett, 1935). The computation of the modulation products generated by two harmonic signals turned out to be mathematically equivalent to the simi-

lar problem in an ideal rectifier, and the amplitudes were obtained as hypergeometric functions. Further progress is reported in later publications by Bennett and others, and the results proved useful in a number of problems involving sharp nonlinearities, such as overload effects in rectifier modulators and feedback amplifiers.

The typically useful properties of nonlinear, or linear variable systems are related with frequency conversion in a wide sense, including harmonic or subharmonic generation, and even simple oscillation, for an oscillator transforms dc power into power at its own frequency. The theory of the triode oscillator was developed by Appleton and van der Pol (1920-1926), and explained such effects as synchronization, amplitude hysteresis, etc. Subharmonic generations in the triode oscillator were analyzed by Mandelstam and Papalexi (1931). Although van der Pol had shown the continuity between quasi-harmonic and relaxation oscillations, these extreme types of behavior actually occur in different technical applications and continued to be treated in separated contexts. Starting from relaxation oscillators and multivibrators (Abraham and Block, 1919) a particular branch of electronic circuit technology developed in the direction of such applications as time bases, counters, logical circuits, wave form generators, etc. On the other hand, the main concern in the design of harmonic oscillators was frequency stability; the way it is affected by nonlinearities was deduced from the principle of harmonic balance (Groszkowski, 1933) and the analysis of linear effects led to the development of the numerous oscillator circuits bearing the names of their inventors. All the above problems are, however, treated by elementary circuit analysis and are more related with device technology than with circuit theory.

Frequency conversion by amplitude modulation raised only elementary problems as long as tubes were used. With the introduction of rectifier modulators, such as the Cowan and ring modulators, in the early thirties, more difficult problems appeared, due to the interaction of all products whose amplitudes thus finally depend on the load impedances at all frequencies. In carrier systems, modulators normally operate between highly selective filters, and a corresponding small signal theory for rectifier modulators between selective terminations was developed after 1939 by such workers as Caruthers, Kruse, Stieltjes, Tucker and Belevitch. The conception of a linear variable network as a linear network with an infinite number of ports (treating the impedance presented to each modulation product as a separate termination) did not yield tractable solutions in the case of nonselective terminations, and the case of RC loads (Belevitch, 1950) was treated by a direct method. The general problem became recently of major importance for the optimum design of filters for pulse-time modulated systems; after contributions by Cattermole (1958) and Desoer (1958), an analysis leading to a finite set of linear equations was obtained by Fettweis (1959). Another application of rectifier modulators was

treated by Miller (1959) who showed that better frequency dividers could be designed by separating the various nonlinear effects which occur simultaneously in the tube of ordinary oscillators—in the circuits of Miller, the tube is a linear amplifier and the necessary nonlinear effects are produced by rectifier circuits separated by selective filters.

Harmonic generation by rectifier circuits does not seem to have been treated until quite recently—Page (1956) published a theorem on the maximum harmonic efficiency, and Belevitch and Neiryneck (1957) described optimal circuits. On the contrary, harmonic production by non-linear reactance is not subject to the same restrictions, and magnetic harmonic generators (Peterson, Manley and Wrathall, 1937) are widely used. The theory of frequency conversion in magnetic modulators is more recent—power relations in non-linear reactances were discussed by Manley and Rowe (1956), Page (1957), Duinker (1957) and many others. The possibility of amplification and the related negative resistance effects (Hartley) were known however, around 1920 and applied quite early to frequency dividers (transformation of a 60 cps supply into a 20 cps telephone ringing current) and to magnetic amplifiers. The recent revival of interest in parametric amplification is due to the availability of solid-state nonlinear capacitances. On the other hand, resonant circuits with nonlinear inductances, and the phenomenon of ferro-resonance were also discussed before World War I, and led to Duffing's equation (1918). New interest in related phenomena was raised by the invention of the parametron (Goto, 1955).

The analysis of complicated nonlinear oscillator circuits by the classical methods of nonlinear mechanics is practically impossible and various approximate engineering methods have been developed, the first one being the so-called equivalent linearization of Krylov and Bogoliubov (1937). During the Second World War, a method based on the describing function has been introduced separately in the U.S.A., the U.S.S.R. and in France. In this method, one derives, from the instantaneous response of the nonlinear element to a harmonic excitation or to a combination of such excitations, an amplitude response or a set of amplitude responses, which are functions of the incident amplitudes; the linear part of the circuit is characterized by its transfer function or matrix. With the additional hypothesis that the linear circuits are highly selective, a finite set of algebraic equations is obtained for the steady-state amplitudes, and it is no longer necessary to consider explicitly any differential equations. This also holds true for the stability analysis of the steady-states, which is performed by linear perturbation methods, thus using only the standard criteria of linear network theory (Hurwitz, Nyquist). This "filter method" (as it is called in Russia) allowed a much simpler derivation of the classical results of van der Pol and others, and is now being successfully applied to new problems.



# A step-by-step active-filter design

A new approach to active-filter design uses as its basis a rudimentary knowledge of conventional, relatively simple passive filters, thus providing the nonspecialist with a valuable design tool

J. TOW Bell Telephone Laboratories, Inc.

This article presents, in a simplified manner, a design method for active filters intended for those who are not filter specialists. By following the described five-step approach, a circuit designer who has some knowledge of passive filters will (without having to learn a whole new technology) be able to design active filters just as easily as he now handles conventional passive filters. Starting with the filter specification, it is shown sequentially how to realize a network that meets the prescribed requirements. Configurations and element values are given for the low-pass (LP), bandpass (BP), high-pass (HP), all-pass (AP), and band-elimination (BE), second-order active filter building blocks.

## Passive-filter design vs. active-filter design

Analogies between the procedures used in the design of passive and active filters are given in this section. In conventional passive-filter design, the circuit designer usually follows these steps:

1. The specified high-pass, (geometrically) symmetrical bandpass, or (geometrically) symmetrical band-elimination requirements are converted into equivalent requirements in the normalized low-pass case.

2. A low-pass prototype configuration and its element values are obtained by consulting the many excellent tables, catalogs, etc., that are available.<sup>1</sup>

3. By suitable transformations on the  $L$  and  $C$  elements (for example, LP-to-BP transformation and denormalization of the element values), the final passive configuration

for the HP, BP, or BE filter is obtained.

4. The complete passive circuit is put together.

5. High-precision filter performance is obtained by resonating the appropriate  $L$  and  $C$  elements.

Active filter design calls for essentially the same five-step approach:

1. As in passive-filter design, the equivalent normalized low-pass requirements are first obtained.

2. An appropriate set of normalized transfer poles and zeros for the low-pass case can also readily be obtained from the many available sources (e.g., Ref. 2).

3. By suitable frequency and denormalizing transformations on the poles and zeros, the complete transfer function that meets the filter requirements is obtained.

4. The transfer function is factored into a product of second-order functions, and each of these functions is realized by a standard building block. In this article, a building block consists of  $RC$  and operational amplifiers.

5. The building blocks may be tuned separately and then cascaded directly to form the final active filter.

This five-step active filter design can be divided into two phases: obtaining the transfer function from the requirements and implementing this transfer function.

## Phase 1—Obtaining the transfer function

The first three steps just outlined form the basis of the technique used to obtain the transfer function.

Step 1 is assumed to be a familiar procedure and no discussion is necessary here. For convenience, the

FIGURE 1. A normalized LP filter characteristic.

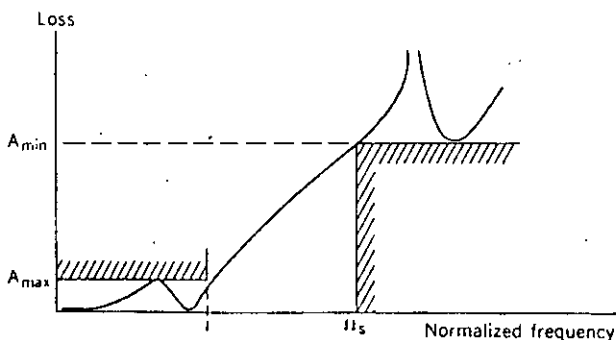
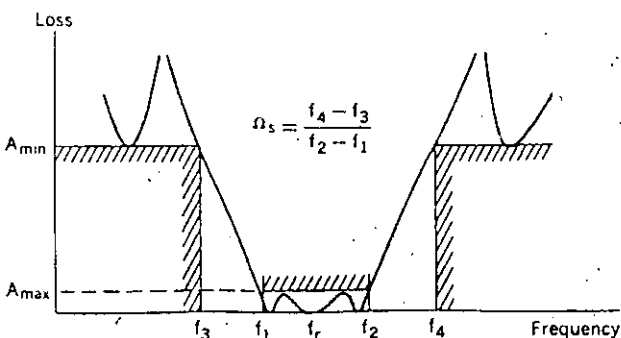


FIGURE 2. A bandpass filter characteristic.



characteristics of a normalized LP and the equivalent BP and BE characteristics are shown, respectively, in Figs. 1, 2, and 3. (The figures illustrate degree-3 Cauer filters.)

In Step 2, the degree (or order) and the type of filter (e.g., Butterworth, Chebyshev, Cauer) to be used in the active-filter design are obtained exactly as in the design of its passive counterpart. Once these are decided upon, the active design requires the computation of the transfer poles and zeros instead of obtaining the element values for a given configuration in the passive design. Tabulations of these poles and zeros are also available.<sup>2</sup>

**Example 1. Transfer function of an LP filter.** Throughout this article, filter designations—for example, C 03 25 30—are the same as those given in Ref. 1. The transfer function  $T(p)$  of a normalized low-pass Cauer filter with degree 3, 25 percent reflection coefficient (this corresponds to a 0.29-dB in-band ripple), and a stopband edge frequency  $\Omega$ , equal to 2 [that is,  $\theta = \sin^{-1}(1/\Omega) = 30^\circ$ ] is given in Ref. 2 (page 51) as follows:

$$T(p) = K \frac{N(p)}{D(p)}$$

where

$$K = 1/4.791\ 901\ 5$$

$$N(p) = p^2 + (2.270\ 066\ 959\ 6)^2$$

$$D(p) = (p + 0.831\ 246\ 722\ 6)$$

$$(p + 0.311\ 280\ 648\ 9 + j1.093\ 993\ 610\ 1)$$

$$(p + 0.311\ 280\ 648\ 9 - j1.093\ 993\ 610\ 1)$$

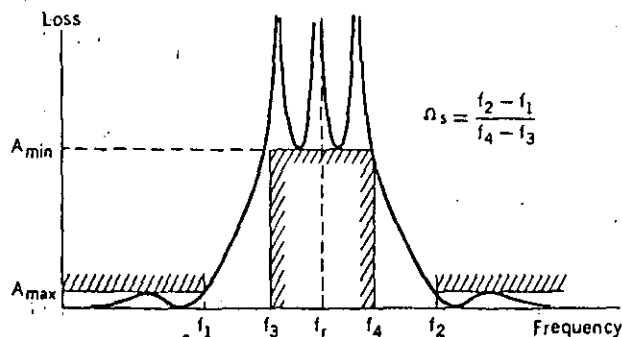
The normalized filter characteristic is as shown in Fig. 1, with  $A_{\min} = 28.57$  dB and  $A_{\max} = 0.29$  dB. The normalized poles and zeros are shown in Fig. 4.

Step 3 in the active design requires the transformation of the normalized LP poles and zeros into the actual poles and zeros. In practice, each pair of the normalized complex poles or zeros should be transformed separately, as should the single real pole. The product of all the resulting poles and zeros forms the final transfer function. A procedure based on the reactance transformation is given below for the transformations from normalized LP to BP and from normalized LP to BE. This easily programmable procedure computes the transformed poles and zeros directly in a few algebraic steps and without the need for finding the roots of a polynomial.

Let the normalized LP complex root (that is, a normalized LP pole or zero) be given by

$$p_0 = -\sigma_0 \pm j\omega_0$$

FIGURE 3. A band-elimination filter characteristic.



With reference to Figs. 2 and 3,

$$\omega_c = 2\pi f_c = 2\pi(\sqrt{f_1 f_2})$$

$$BW = f_2 - f_1$$

$$x = BW/f_c$$

$s$  = complex frequency in the actual transfer function

Then the LP-to-BP root transformation is as follows:

$$(p + \sigma_0 - j\omega_0)(p + \sigma_0 + j\omega_0)$$

$$\xrightarrow{\text{LP to BP}} \frac{(s - s_1)(s - s_1^*)(s - s_2)(s - s_2^*)}{K^2 s^2}$$

where the asterisk (\*) denotes the complex conjugate and the transformed roots  $s_1, s_1^*, s_2, s_2^*$  are given by

$$s_1 = -\frac{1}{2}(\sigma + v)\omega_c + j\frac{1}{2}(\omega + u)\omega_c \quad (1)$$

$$s_2 = -\frac{1}{2}(\sigma - v)\omega_c + j\frac{1}{2}(\omega - u)\omega_c \quad (2)$$

$$K^2 = 4\pi^2(f_2 - f_1)^2 \quad (3)$$

$$\text{and } \sigma = \sigma_0 \cdot x \quad \omega = \omega_0 \cdot x \quad (4)$$

$$u = \left[ \frac{1}{2} (4 - \sigma^2 + \omega^2) + \sqrt{\left( \frac{4 - \sigma^2 + \omega^2}{2} \right)^2 + \sigma^2 \omega^2} \right]^{1/2} \quad (5)$$

$$v = \sigma\omega/u \quad (6)$$

The LP-to-BE root transformation is as follows:

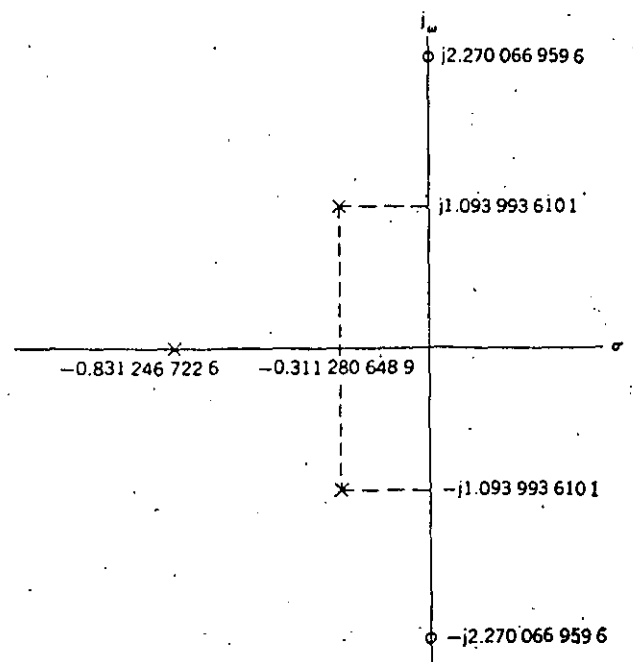
$$(p + \sigma_0 - j\omega_0)(p + \sigma_0 + j\omega_0)$$

$$\xrightarrow{\text{LP to BE}} \frac{(s - s_1)(s - s_1^*)(s - s_2)(s - s_2^*)}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$$

where  $s_1, s_2, u$ , and  $v$  are as given in Eqs. (1), (2), (5), and (6), respectively, and

$$\sigma = \frac{\sigma_0 x}{\sigma_0^2 + \omega_0^2} \quad \omega = \frac{\omega_0 x}{\sigma_0^2 + \omega_0^2} \quad (7)$$

FIGURE 4. A normalized LP pole-zero pattern.



**Example 2. Transfer function of a BP filter.** We wish to obtain the actual transfer function of a bandpass filter with a resonant (center) frequency at 2600 Hz, a bandwidth of 20 Hz, and a prototype transfer characteristic that is equivalent to the LP.Cauer filter (C 03 25 30). The normalized LP poles and zeros were already given in Example 1. The corresponding LP-to-BP transformations [Eqs. (1) to (6)] are

$$p^2 + (2.270\ 066\ 959\ 6)^2$$

$$\frac{[s^2 + 2.715\ 751\ 38 (10^3)][s^2 + 2.622\ 544\ 43 (10^3)]}{(125.663\ 706)^2 s^2}$$

$$(p + 0.831\ 246\ 722\ 6)$$

$$\frac{s^2 + 104.457\ 544s + 2.668\ 741\ 03 (10^6)}{125.663\ 706s}$$

$$ab \rightarrow cd/e$$

where

$$a = p + 0.311\ 280\ 648\ 9 + j1.093\ 993\ 610\ 1$$

$$b = p + 0.311\ 280\ 648\ 9 - j1.093\ 993\ 610\ 1$$

$$c = s^2 + 39.281\ 268\ 6s + 2.691\ 294\ 09 (10^6)$$

$$d = s^2 + 38.952\ 091\ 3s + 2.646\ 376\ 96 (10^6)$$

$$e = (125.663\ 706)^2 s^2$$

The actual BP transfer function is then given by

$$T(s) = \frac{125.663\ 706}{4.791\ 901\ 5}$$

$$\frac{s}{\frac{s^2 + 104.457\ 544s + 2.668\ 741\ 03 (10^6)}{\frac{s^2 + 2.715\ 751\ 38 (10^3)}{\frac{s^2 + 39.281\ 268\ 6s + 2.691\ 294\ 09 (10^6)}{\frac{s^2 + 2.622\ 544\ 43 (10^3)}{s^2 + 38.952\ 091\ 3s + 2.646\ 376\ 96 (10^6)}}}}$$

### Phase 2—Realization of the active filter

The foregoing discussion centers on how to obtain a transfer function that meets the desired filter requirements. We now show how this transfer function can be implemented to realize the actual active filter. On the basis of sensitivity studies, economic necessity, and practical considerations (for example, ease of tuning, troubleshooting), it is concluded that hybrid integrated active filters should be implemented in a cascaded manner, with each section capable of realizing a general second-order (biquadratic) transfer function or, equivalently, a pair of poles and zeros. Furthermore, a standard configuration should be used in each section.

Step 4 of the active-filter design requires an implementation of the second-order building blocks. Among the variety of techniques and configurations available, one will be discussed in some detail. Let the general biquadratic transfer function ("biquad") be given by

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{ms^2 + cs + d}{s^2 + as + b} \quad (8)$$

In Ref. 3, a single configuration, together with its element values expressed in terms of the biquad coefficients ( $m$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $a$ , and  $b$ ), is given for the realization of (8). This method—referred to as the operational amplifier biquad realization—uses resistors, capacitors, and operational amplifiers as its network elements. It is particularly suited for realizing high-precision active filters in a standard form. The various second-order cases (LP, BP, HP, AP,

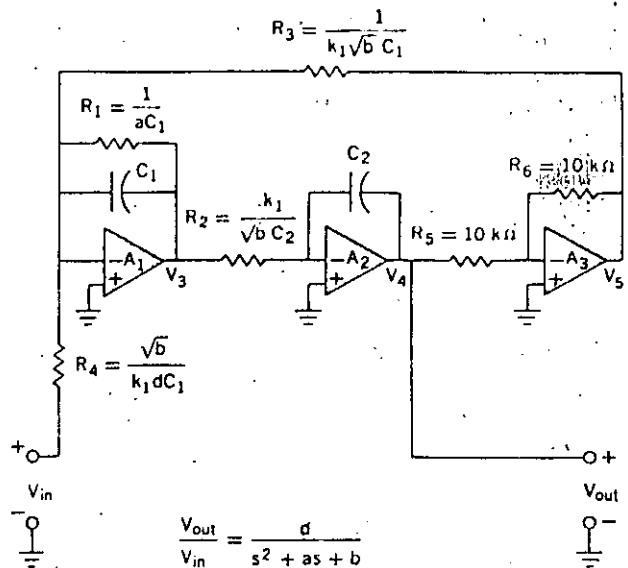


FIGURE 5. Biquad realization of an LP building block.

FIGURE 6. Biquad realization of a BP building block.

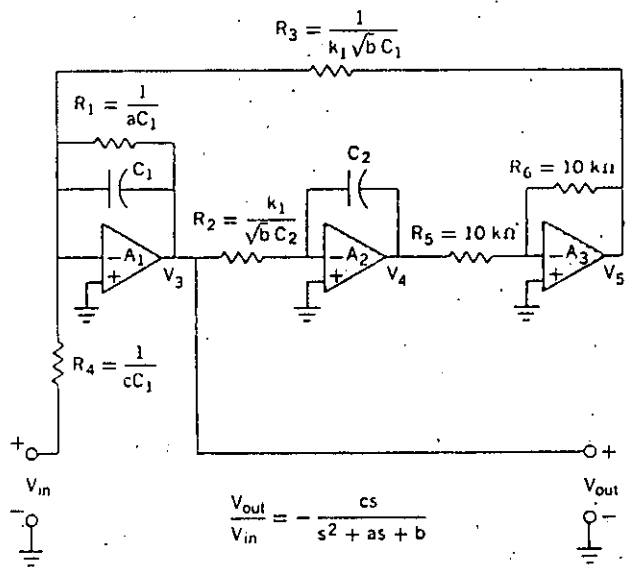
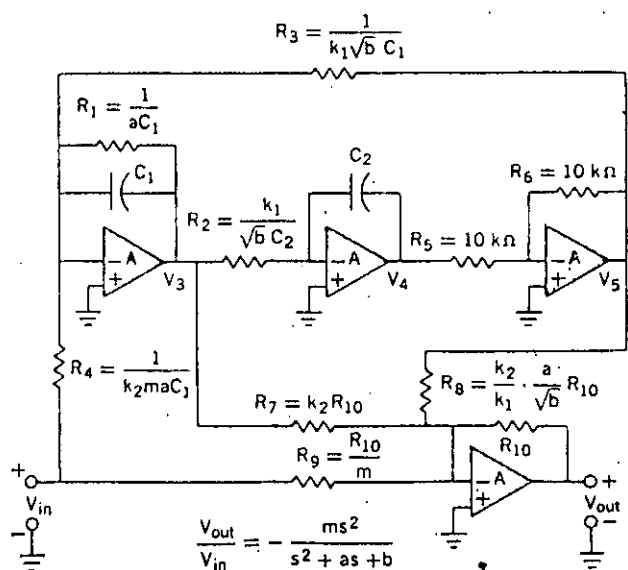


FIGURE 7. Biquad realization of an HP building block.



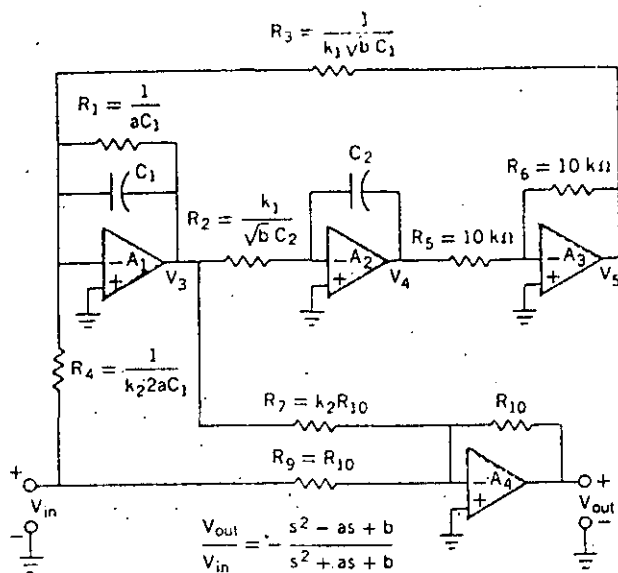
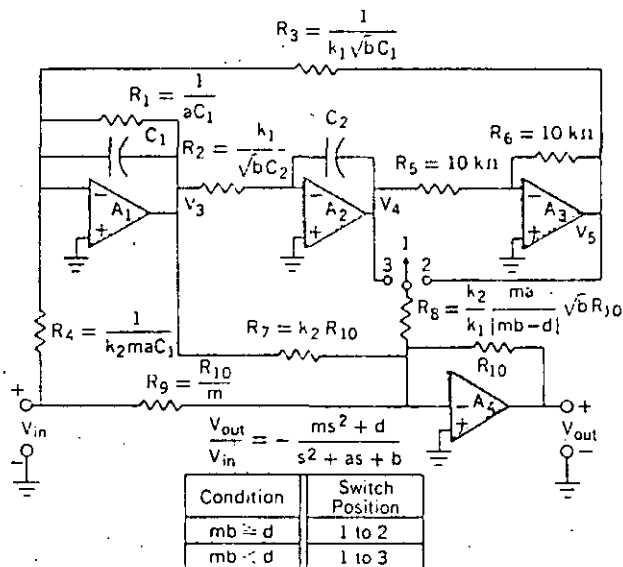


FIGURE 8: Biquad realization of an AP building block.

FIGURE 9: Biquad realization of a BE building block.



and BE) are but special forms of (8). Their biquad realizations can easily be obtained from the standard configuration given in Ref. 3. They are, respectively, shown here in Figs. 5 through 9. Values of  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $R_{10}$ ,  $k_1$ , and  $k_2$  can be conveniently chosen; e.g.,  $C_1 = C_2 = 0.01 \mu\text{F}$ ,  $R_{10} = 10 \text{ k}\Omega$ , and  $k_1 = k_2 = 1$ .

Step 5 of the active-filter design involves tuning of the building blocks. After the transfer function is obtained and factored into biquadratic factors, and each factor is implemented by a biquad building block, the building blocks can then be cascaded to form the final active filter. However, in applications in which high-precision performance is desired, adjustments on the filter sections must be made before cascading. The biquad realization is extremely easy to tune. The poles and zeros can be tuned independently. To demonstrate this, let us write the voltages at the output of the operational amplifiers in each of Figs. 5 through 9 as follows:

$$\frac{V_3}{V_{in}} = -\frac{1}{R_1 C_1} \frac{s}{s^2 + \frac{1}{R_1 C_1} s + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \cdot \frac{R_6}{R_5}} \quad (9)$$

$$\frac{V_4}{V_{in}} = \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \frac{1}{s^2 + \frac{1}{R_1 C_1} s + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \cdot \frac{R_6}{R_5}} \quad (10)$$

$$\frac{V_6}{V_{in}} = -\frac{R_6}{R_5} \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \frac{1}{s^2 + \frac{1}{R_1 C_1} s + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \cdot \frac{R_6}{R_5}} \quad (11)$$

Furthermore, in Figs. 7 to 9, for cases when  $mb \geq d$ ,

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{R_{10}}{R_9} \frac{s^2 - as + b}{s^2 + as + b} \frac{s^2 + \frac{1}{R_1 C_1} \left(1 - \frac{R_1 R_9}{R_4 R_7}\right) s + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \left(1 - \frac{R_1 R_9}{R_4 R_8}\right) \cdot \frac{R_6}{R_5}}{s^2 + \frac{1}{R_1 C_1} s + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \cdot \frac{R_6}{R_5}} \quad (12)$$

and for cases when  $mb < d$ ,

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{R_{10}}{R_9} \frac{s^2 + \frac{1}{R_1 C_1} \left(1 - \frac{R_1 R_9}{R_4 R_7}\right) s + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \left(\frac{R_6}{R_5} + \frac{R_3 R_9}{R_4 R_8}\right)}{s^2 + \frac{1}{R_1 C_1} s + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \cdot \frac{R_6}{R_5}} \quad (13)$$

Alternatively, for those cases where amplifier  $A_4$  is presented, the output voltages can also be written as

$$\frac{V_3}{V_{in}} = -k_2 \frac{(ma - c)s}{s^2 + as + b} \quad (14)$$

$$\frac{V_4}{V_{in}} = -\frac{V_3}{V_{in}} = \frac{k_2}{k_1} \frac{\sqrt{b}(ma - c)}{s^2 + as + b} \quad (15)$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{ms^2 + cs + d}{s^2 + as + b} \quad (16)$$

Comparing Eqs. (9) through (13) with the biquadratic transfer function,

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}(s) = \frac{ms^2 + cs + d}{s^2 + as + b} = m \frac{s^2 + \frac{\omega_N}{Q_N} s + \omega_N^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2} \quad (17)$$

Tuning can be achieved as follows:

- Resonant frequency  $\omega_0$  by  $R_3$
- Selectivity factor  $Q$  by  $R_1$
- "Notch" frequency  $\omega_N$  by  $R_8$
- "Notch attenuation factor"  $Q_N$  by  $R_7$
- Overall gain by  $R_{10}$

The first two tuning steps are monitored at  $V_2$  and the remaining steps at  $V_{out}$ . These tuning steps, when carried out in the above sequence, are mutually independent. One or more of the steps can, of course, be omitted.

### I. Maximum voltage levels at amplifier outputs

Amplifier	Maximum Output Level, dB	Frequency at Maximum Level, Hz
$V_3/V_{i0}$	0	2589.083
$V_4(\text{or } V_5)/V_{i0}$	6.22(10 <sup>-6</sup> )	2589.079
$V_{out}/V_{i0}$	11.8	2589.904

**Example 3. Realization of a BE building block.** Let us realize one of the sections from Example 2. Specifically, let the biquadratic transfer function be

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}(s) = \frac{s^2 + 2.622\ 544\ 43 (10^6)}{s^2 + 38.952\ 091\ 3s + 2.646\ 376\ 96 (10^6)}$$

The realization is in the form given in Fig. 9, with point 1 connected to point 2. If the typical values  $C_1 = C_2 = 0.01\ \mu\text{F}$ ,  $R_{10} = 10\ \text{k}\Omega$ , and  $k_1 = k_2 = 1$  are used, then

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.01\ \mu\text{F} & C_2 &= 0.01\ \mu\text{F} \\ R_1 &= 2.567\ \text{M}\Omega & R_2 &= 6.147\ \text{k}\Omega & R_3 &= 6.147\ \text{k}\Omega \\ R_4 &= 2.567\ \text{M}\Omega & R_7 &= 10\ \text{k}\Omega & R_8 &= 2.659\ \text{k}\Omega \\ R_9 &= 10\ \text{k}\Omega & R_{10} &= 10\ \text{k}\Omega \end{aligned}$$

The maximum voltage levels at the output of the amplifiers are listed in Table I.

The values of  $R_1$ ,  $R_2$ , and  $R_4$  can be lowered by increasing  $C_1$ . Since output levels at  $V_3$ ,  $V_4$ , and  $V_5$  are proportional to  $k_2$ , the maximum output levels at the amplifiers can be made identical if  $k_2$  is chosen to be 3.890 451 38. The final values are

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.03\ \mu\text{F} & C_2 &= 0.01\ \mu\text{F} \\ k_1 &= 1 & k_2 &= 3.890\ 451\ 38 \\ R_1 &= 855.8\ \text{k}\Omega & R_2 &= 6.147\ \text{k}\Omega & R_3 &= 2.049\ \text{k}\Omega \\ R_4 &= 220.0\ \text{k}\Omega & R_7 &= 38.9\ \text{k}\Omega & R_8 &= 10.34\ \text{k}\Omega \\ R_9 &= 10\ \text{k}\Omega & R_{10} &= 10\ \text{k}\Omega \end{aligned}$$

The maximum output levels of the amplifiers are now all the same and equal to 11.8 dB. Improvement in the dynamic range of the filter section is obtained.

**Example 4. A switchable BP building block.** A single-section BP filter is specified to have a constant 3-dB bandwidth of 212.058 radians, a midband gain of 50, and a resonant frequency that can be switched between the two frequencies 2025 Hz and 2225 Hz. The corre-

sponding transfer functions are as follows:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}(s) = \frac{50 (212.058)s}{s^2 + 212.058s + [2\pi(2025)]^2} \quad (f_0 = 2025)$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}(s) = \frac{50 (212.058)s}{s^2 + 212.058s + [2\pi(2225)]^2} \quad (f_0 = 2225)$$

The realization is in the form given in Fig. 6. Let us choose, for the 2025-Hz case, the typical values for  $C_2$  and  $k_1$ , and also let  $C_1 = 0.03\ \mu\text{F}$ . The element values are

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.03\ \mu\text{F} & C_2 &= 0.01\ \mu\text{F} & k_1 &= 1 \\ R_1 &= 157.2\ \text{k}\Omega & R_2 &= 7.86\ \text{k}\Omega \\ R_3 &= 2.62\ \text{k}\Omega & R_4 &= 3.144\ \text{k}\Omega \end{aligned}$$

For the 2225-Hz case, we further let

$$k_1 = 2225/2025 = 1.098\ 765\ 43$$

Then the element values are

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.03\ \mu\text{F} & C_2 &= 0.01\ \mu\text{F} & k_1 &= 1.098\ 765\ 43 \\ R_1 &= 157.2\ \text{k}\Omega & R_2 &= 7.86\ \text{k}\Omega \\ R_3 &= 2.17\ \text{k}\Omega & R_4 &= 3.144\ \text{k}\Omega \end{aligned}$$

If we compare the two foregoing sets of element values, we see that the switchable BP filter is realizable with one set of element values, except for  $R_3$ , which requires two values corresponding to the two resonant frequencies.

**Realization of a first-order building block.** When the filter transfer function contains also a real pole, then this first-order pole can be implemented as shown in Fig. 10. Specifically, let the transfer function be

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}(s) = \frac{K}{s + a} \quad (18)$$

If ideal operational amplifiers are assumed,

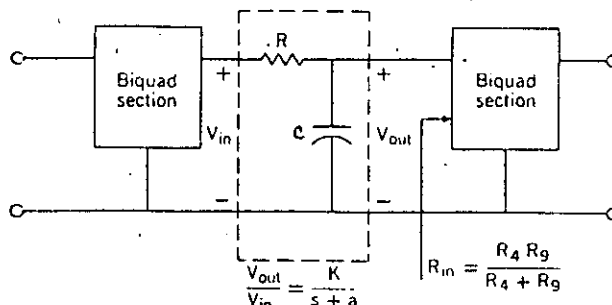
$$\frac{V_{out}}{V_{in}}(s) = \frac{1/RC}{s + \frac{R + R_{in}}{RR_{in}} \cdot \frac{1}{C}} \quad (19)$$

$R$  and  $C$  values can be obtained from (18) and (19).

#### REFERENCES

1. Saal, R., "The design of filters using the catalogue of normalized low-pass filters," Telefunken GmbH, Backnang/Württ., Western Germany, Copyright 1963.
2. Christian, E., and Eisenmann, E., *Filter Design Tables and Graphs*. New York: Wiley, 1966.
3. Tow, J., "Design formulas for active RC filters using operational amplifier biquad," *Electron. Letters*, pp. 339-341, July 24, 1969.

FIGURE 10. Implementation of first-order pole. (Dotted section shows realization of a real pole.)



# Integrated-Circuit Implementation of Direct-Coupled Gyration

**Abstract**—This correspondence describes an integrated gyration circuit that uses bipolar transistors, with a simulated inductance of 0.18 H and maximum  $Q$  factor of about 380 at 1 kHz.

An ideal gyration may be represented by the parallel connection of two oppositely directed transconductance amplifiers, one with 180 degrees phase shift and the other with 0 phase shift. Using such a model, Chua and Newcomb<sup>1</sup> have described an integrated-circuit realization of the direct-coupled gyration using bipolar transistors, with a gyration conductance of 0.3 mmho and a maximum- $Q$  factor of about 18 at 100 Hz or 35 at 5 kHz. In this correspondence we shall describe an integrated gyration circuit that also uses bipolar transistors, with a maximum  $Q$  factor that is an order of magnitude larger than that reported by Chua and Newcomb. The  $Q$  factors reported here are thus comparable to those reported by Sheahan and Orchard<sup>2</sup> who use a combination of discrete bipolar and MOS field-effect transistors; their circuit is, however, more difficult to fabricate in integrated form.

The gyration circuit is shown in diagrammatic form in Fig. 1(a). The amplifier transmitting from left to right consists of an emitter follower  $Q_1$ , followed by a common emitter amplifier  $Q_2$ . The signal developed at the collector of transistor  $Q_2$  is applied to a modified Darlington composite pair consisting of a lateral p-n-p transistor  $Q_3$  and n-p-n transistor  $Q_4$  and operated in the common base mode. The output signal developed at the emitter of transistor  $Q_4$  is thus 180 degrees out of phase with respect to the input signal, and the transconductance of the amplifier is approximately equal to  $1/R_5$ . The direct current for the modified Darlington composite pair  $Q_3$ - $Q_4$  is provided by transistor  $Q_5$  operated in its common base mode.

The amplifier transmitting from right to left consists of an ordinary Darlington composite pair ( $Q_6$  and  $Q_7$ ) operated as an emitter follower. The signal developed at the emitter of transistor  $Q_7$  is applied through resistor  $R_6$  to common base transistor  $Q_5$ . Thus, the amplifier has 0 phase shift and a transconductance approximately equal to  $1/R_5$ . The modified Darlington arrangement of  $Q_3$  and  $Q_4$ , operating in the common base mode, acts as a source of direct current for transistor  $Q_5$ . Thus, by adjusting  $R_2$  and/or  $R_3$ , it is possible to vary the gyration conductance of the circuit.

The various Zener diodes ( $D_1$  to  $D_4$ ), are employed for the purpose of maintaining the base terminals of the associated transistors in the output circuits of the two amplifier paths at constant dc voltages and thereby ensuring their operation in the common base mode.

The gyration shown in Fig. 1(a) was implemented with a hybrid monolithic silicon integrated circuit composed of 3 monolithic silicon chips interconnected as shown in Fig. 1(b). The largest chip is a Westinghouse "insta-circuit breadboard," WS177T, consisting of some 57 individual components. These are 8 p-n-p epitaxial transistors, 5 Zener diodes, and 44 resistors ranging in value from 20 ohms to 20 k $\Omega$ , all of which are contained on a 0.086  $\times$  0.124-inch die mounted on a standard T05 header.

The two smaller rectangular chips are Westinghouse IT-11 chips containing 5 epitaxial n-p-n planar silicon transistors and 1 lateral p-n-p transistor on a 10  $\Omega$ -cm p-type substrate. These transistors are double diffused into a 0.35  $\Omega$ -cm, 10-12  $\mu$  thick, n-type epitaxial layer over an  $n^+$  epitaxial layer, 2-3  $\mu$ , grown from a high resistivity p-type substrate. Standard process-

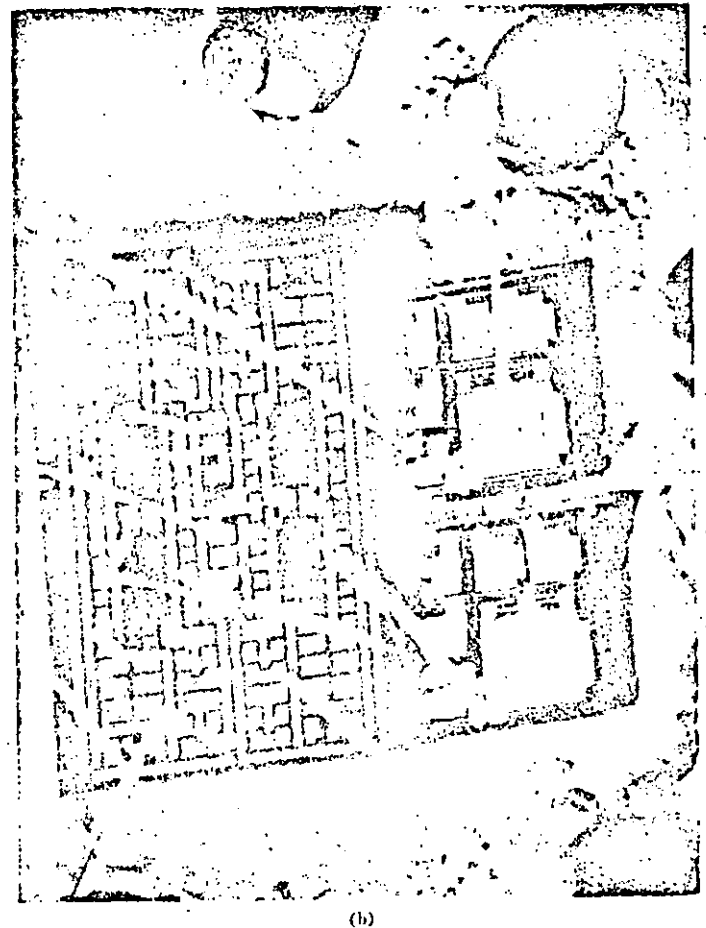
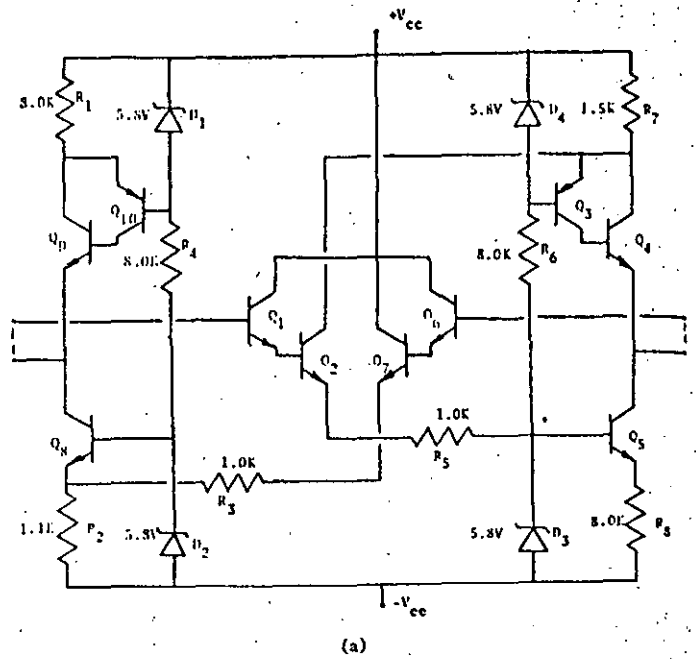


Fig. 1. (a) Grounded gyration schematic diagram.  $R_1 = 8 \text{ k}\Omega$ ;  $R_2 = 1.1 \text{ k}\Omega$ ;  $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ ;  $R_4 = 8 \text{ k}\Omega$ ;  $R_5 = 1 \text{ k}\Omega$ ;  $R_6 = 8 \text{ k}\Omega$ ;  $R_7 = 1.5 \text{ k}\Omega$ ;  $R_8 = 8 \text{ k}\Omega$ .  $D_1, D_2, D_3, D_4 = 5.8$ -volt Zener diodes. (b) Grounded gyration silicon chips.

ing conditions give a p-type junction of about 3  $\mu$  depth. The emitter is diffused to provide a typical base width of 1.0-1.4  $\mu$ . The lateral p-n-p is connected with one of the n-p-n transistors in a modified Darlington configuration to give a reasonably good p-n-p unit.

The lateral p-n-p transistors have  $h_{FE}$  approximately equal to unity, while the n-p-n transistors have an  $h_{FE}$  of 70-100 ( $V_{CC} = 5$  volts,  $I_0 = 5$  mA). The Darlington pair gives a p-n-p

Manuscript received October 28, 1968; revised November 20, 1968.  
<sup>1</sup>H. T. Chua and R. W. Newcomb, "Integrated direct-coupled gyration," *Electron. Letters*, May 1967.  
<sup>2</sup>D. F. Sheahan and H. J. Orchard, "Integratable gyration using M.O.S. and bipolar transistors," *Electron. Letters*, October 1969.

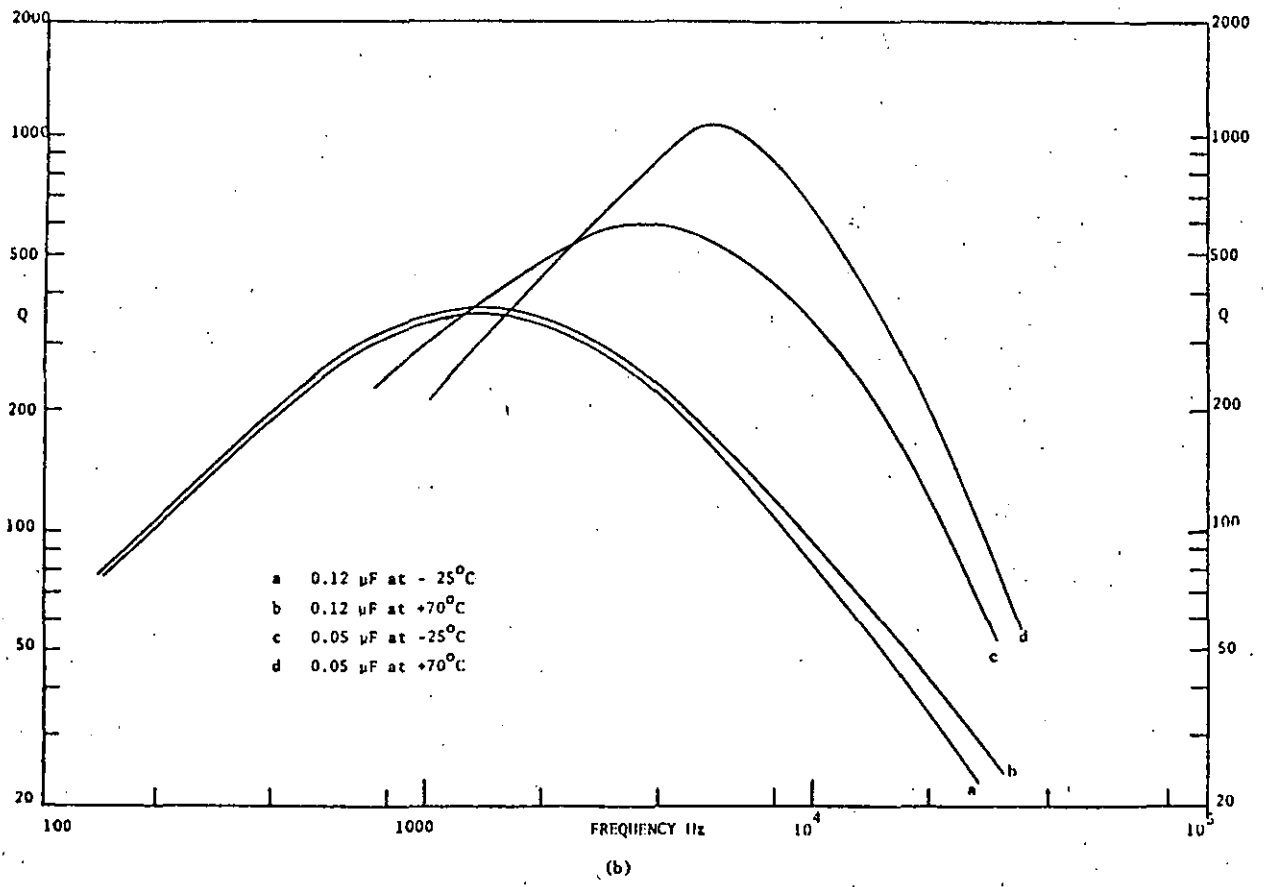
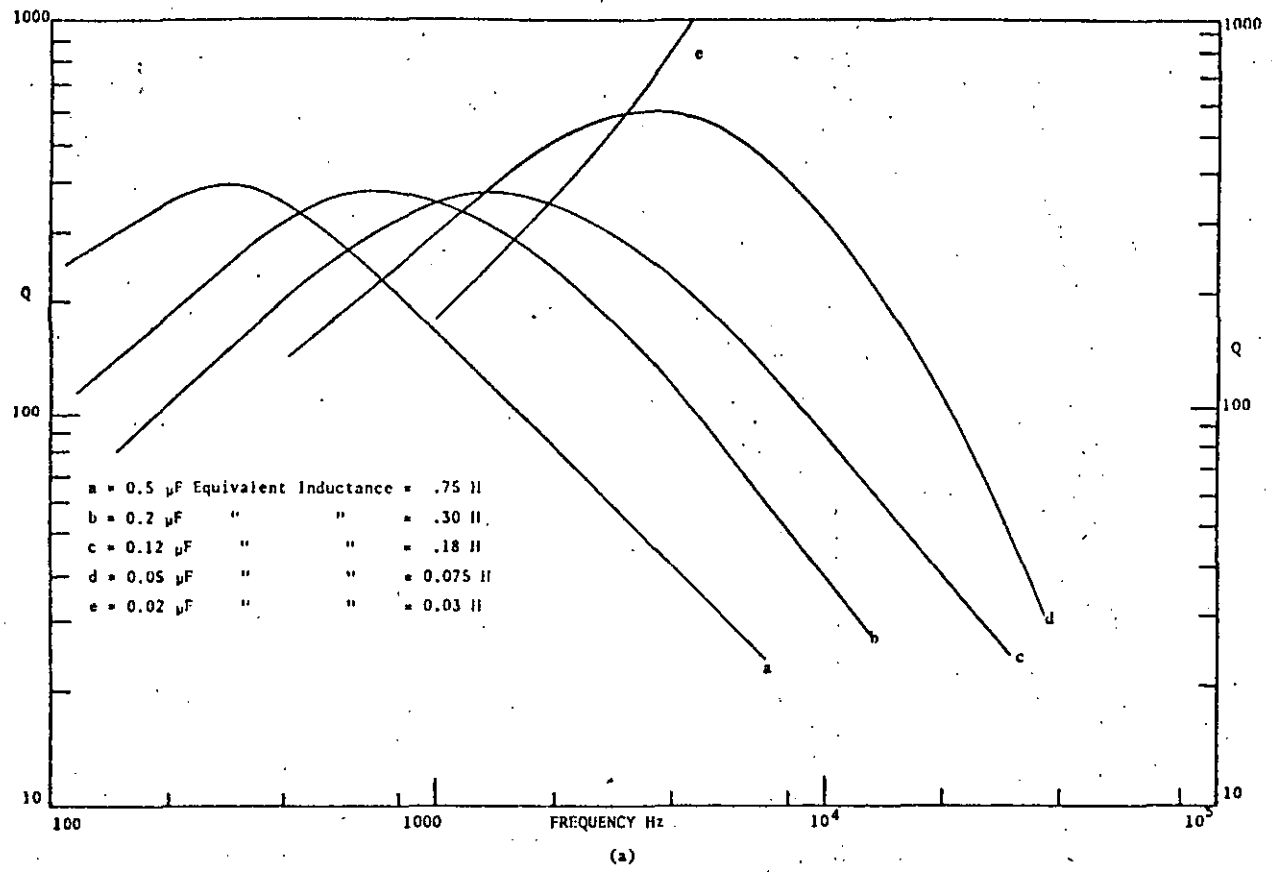


Fig. 2. Measured Q factor against frequency. (b) Q-factor dependence on temperature.

with an equivalent  $h_{FE}$  that is closely equal to the  $h_{FE}$  of the n-p-n transistor, as shown by

$$h_{FE} = h_{FE_{D-N-P}}(1 + h_{FE_{N-P-N}}) \\ \simeq h_{FE_{N-P-N}}$$

By measurement, it was found that the gyrator has a mean gyration conductance equal to 0.8 mmho. Fig. 2(a) shows the  $Q$  factor of the gyrator plotted against frequency for different values of terminating capacitance  $C_1$ . The increase in the maximum  $Q$  factor above 2 kHz is due to the delay around the gyrator loop.

A 5 percent change in supply voltages was found to have little effect on the operation of the circuit. Fig. 2(b) shows that at low frequencies a temperature change from  $-25$  to  $70^\circ\text{C}$  produces a change in the  $Q$  factor that is less than 0.5 percent. At higher frequencies, however, the temperature changes have a

more pronounced effect.

Work is in progress on the monolithic implementation of the gyrator circuit described in Fig. 1 on a  $59 \times 59$  mil chip.

S. S. HAYKIM

S. KRAMER

Dept. of Elec. Engr.

McMaster University

Hamilton, Ont., Canada

J. SHIEWCHUN

Dept. of Engr. Physics

McMaster University

Hamilton, Ont., Canada

D. H. TRELEAVEN

Canadian Westinghouse Co.

Hamilton, Ont., Canada



## EXAMEN DE EVALUACION

### TEORIA Y DISEÑO DE FILTROS ANALÓGICOS Y DIGITALES

AGOSTO 1985.

NOTA IMPORTANTE: FAVOR DE INDICAR LA RESPUESTA CORRECTA -- ENCERRANDO EN UN CÍRCULO LA LETRA CORRESPONDIENTE. SOLO UNA ALTERNATIVA ES CORRECTA, SI NO ESTÁ SEGURO, NO CONTESTE.

1.- LA ECUACIÓN  $F(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$

ES LA DEFINICIÓN DE:

- a. La Serie Trigonométrica de Fourier
- b. La Serie Exponencial de Fourier
- c. La Transformada de Fourier
- d. La Transformada Inversa de Fourier

2.- SI LA SEÑAL  $f(t)$  SE RETRASA  $t_0$  SEGUNDOS [ $f(t-t_0)$ ], ENTONCES,

- a.  $F(\omega)$  cambia a  $F(\omega-\omega_0)$
- b. El espectro  $|F(\omega)|$  no se altera
- c.  $F(\omega)$  se comprime
- d. Se aplica el teorema de la convolución.

3.- LA FUNCIÓN SISTEMA  $H(s)$  ES

- a. El coeficiente de las transformadas de la salida.
- b. Es la transformada de la salida
- c. Es la convolución de la entrada y la salida
- d. Es la transformada de la respuesta a impulso

4.- LOS FILTROS IDEALES NO SON REALIZABLES PORQUE:

- a. Son inestables y oscilan fácilmente
- b. No existen componentes ideales para construirlos
- c. No son causales
- d. Presentan distorsión de amplitud y fase

5.- LA APROXIMACIÓN BUTTERWORTH LOGRA

- a. Máxima planicidad
- b. Característica de fase lineal
- c. Máxima pendiente de rechazo
- d. Mínima distorsión.

6.- LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE UNA RED LINEAL NO SE ALTERA SI SE MULTIPLICAN POR UNA MISMA CONSTANTE.

- a. Todas las capacitancias
- b. Todas las resistencias
- c. Todas las inductancias
- d. Todas las impedancias

7.- LA IMPEDANCIA DE ENTRADA DE MODO DIFERENCIAL DE UNA AMP OP ES

- a.  $\beta R_{EE}$
- b.  $r_{\pi}$
- c.  $2r_{\pi}$
- d.  $r_{\pi} + \frac{2\beta R_{EE}}{\beta}$

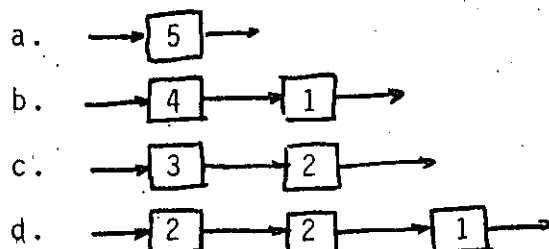
8.- LA SINTONÍA DE UN FILTRO ACTIVO CONSISTE EN EL AJUSTE DE

- a. Los componentes, para alcanzar las especificaciones.
- b. La ganancia, por las condiciones de realimentación.
- c. La sensibilidad, para limitar el ruido
- d. La polarización y offset de los Amp Op.

9.- EL FACTOR DE CALIDAD Q SE DEFINE EN FUNCIÓN DEL ANCHO DE BANDA  $\Delta f$  Y LA FRECUENCIA DE RESONANCIA  $f_0$ , DE LA SIGUIENTE FORMA:

- a.  $Q = \Delta f / f_0$
- b.  $Q = f_0 / \Delta f$
- c.  $Q = f_0 \cdot \Delta f$
- d.  $Q = f_0 / \sqrt{\Delta f}$

10.- PARA REALIZAR UN FILTRO DE 5º ORDEN SE CONECTAN EN CASCADA LAS SIGUIENTES ETAPAS.

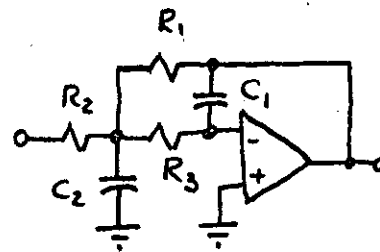


11.- EL ORDEN DE UN FILTRO DETERMINA

- a. La aproximación a usar
- b. La configuración electrónica
- c. La pendiente de la característica
- d. El factor de calidad Q

12.- EL CIRCUITO DE LA FIGURA ES UN FILTRO

- a. Pasabajas
- b. Pasaaltas
- c. Pasabanda
- d. De rechazo de banda



13.- EN UN FILTRO PASABAJAS, SI SE CAMBIAN LOS CAPACITORES -  
POR INDUCTORES Y ÉSTOS POR AQUÉLLOS SE OBTIENE UN FILTRO

- a. Pasabajas
- b. Pasaaltas
- c. Pasabanda
- d. De rechazo de banda

14.- LOS ELEMENTOS QUE FORMAN UN FILTRO DE ALTA FRECUENCIA SON

- a. No lineales
- b. De alta precisión
- c. Concentrados
- d. Distribuidos

15.- LOS FILTROS ELÍPTICOS TIENEN LA PROPIEDAD DE

- a. Aproximarse a la pendiente ideal
- b. Ser fáciles de diseñar
- c. Tener pendiente de forma elíptica
- d. Tener fase lineal máxima

16.- EL SISTEMA DISCRETO EN QUE LA ENTRADA  $X(N)$  Y LA SALIDA  $Y(N)$  ESTÁN RELACIONADAS POR,

$$Y(N) = 2X(N) + 3$$

ES UN SISTEMA

- a. lineal e invariante
- b. lineal y variante
- c. no lineal e invariante
- d. no lineal y variante

17.- PARA QUE UN SISTEMA DISCRETO SEA CAUSAL ES CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE QUE LA RESPUESTA A IMPULSO,

- a. sea absolutamente sumable
- b. sea igual a cero para  $n < 0$
- c. sea acotada
- d. tienda a cero para  $n \rightarrow \infty$

18.- UN MÉTODO PARA ENCONTRAR LA TRANSFORMADA Z INVERSA ES

- a. por propiedades de simetría
- b. el método de los residuos
- c. por la convolución circular
- d. por expansión en fracciones parciales

19.- UNO DE LOS SIGUIENTES NO ES UN MÉTODO PARA DISEÑAR FILTROS FIR.

- a. integral de contorno
- b. por ventanas
- c. por muestreo en frecuencia
- d. diseño "equiriple"

20.- LA TRANSFORMACIÓN DE FILTROS ANALÓGICOS A DIGITALES SE  
HACE

- a. por aproximación de componentes
- b. por medio de la transformada discreta de Fourier
- c. por muestreo de la respuesta a impulso analógico.
- d. esto no es posible.



DIRECTORIO DE ALUMNOS DEL CURSO "TEORIA Y DISEÑO DE FILTROS ANALOGICOS Y DIGITALES" IMPARTIDO EN ESTA DIVISION DEL 12 AL 24 DE AGOSTO 1985.

- 1.- AQUINO RUIZ HUGO  
PEMEX  
COORDINADOR DE C. DE CALIDAD  
Y MANTO. ESPECIALIZADO  
MARINA NACIOANL No. 329.  
COL. ANAHUAC  
DELEGACION MIGUEL HIDALGO  
254-73-40  
ELENA No. 7  
COL. INDUSTRIAL  
DELEGACION GUSTAVO A. MADERO  
07800 MEXICO, D.F.  
527-10-16
- 2.- BARRON PERALTA ARMANDO  
INSTITUTO MEXICANO DEL PETROLEO  
INGENIERO DE DISEÑO  
AVLOS 100 METROS No. 152  
COL. SAN BARTOLO ATEPEHUACA  
DELEGACION GUSTAVO A. MADERON  
07730 MEXICO, D.F.  
567-66-00 ext. 20073  
MARAVILLA MZ. 35 LT. 9  
COL. LOS ANGELES IZTAPALAPA  
09630 MEXICO, DF.
- 3.- CARRERA HERNANDEZ OCTAVIO  
SIST. INTERACTIVOS CIENTIFICOS, S.A.  
GERENTE DE SERVICIO  
PATRIOTISMO No. 4  
COL. CONDESA  
VERACRUZ No. 111-5  
515-09-87
- 4.- CASTRO ARREDONDO RUBEN  
DIREC. GRAL. CONSTRUC. OPERAC. HIDRAUL.  
JEFE DE OFICINA  
SAN ANTONIO ABAD No. 231  
COL. OBRERA  
DELEGACION CUAUHTEMOC  
06800 MEXICO, D.F.  
761-88-44 ext. 2504  
FF. CC. CENTRAL No. 594 EDIF. 7-503  
COL. COSMOPOLITA  
DELEGACION AZCAPOTZALCO
- 5.- CORNEJO CRUZ JAIME MANUEL  
UNIV. AUT. METROPOLITANA IZTAPALAPA  
PROFESOR  
AV. MICHOACAN Y PURISIMA  
COL. PROGRESISTA  
DELEGACION IZTAPALAPA  
686-16-11 ext. 158 y 525  
MANUEL GUTIERREZ NAJERA No. 161  
COL. OBRERA  
DELEGACION CUAUHTEMOC  
06800 MEXICO, D.F.  
588-21-65
- 6.- DE LA VEGA MUÑEZ JAIME ALEJANDRO  
PETROLEOS MEXICANOS  
JEFE DEL DEPTO. DE EVALUACION DE PROYEC.  
AV. EJERCITO NACIONAL No. 418-1er. PISO  
COL. POLANCO  
DELEGACION MIGUEL HIDALGO  
254-39-59  
COPORO 31 CASA 703  
FRACC. RINCON DE LOS BOSQUES  
ATIZAPAN DE ZARAGOZA  
54500 EDO. DE MEXICO

- 7.- GONZALEZ SANTOS LEOPOLDO  
CENTRO DE INVESTIGACION  
ANALISTA PROGRAMADO  
ZACATENCO  
AV. ZANEGA No. 113  
COL. AMPLIACION PROGRESO NACIONAL  
07604 MEXICO, D.F.  
392-58-89
- 8.- HERNANDEZ DOMINGUEZ JOSE LUIS  
S. C. T.  
ANLAISTA DE SIST. ESP. DE COMPUTO  
AV. LAZARO CARDENAS No. 567  
1er. PISO ANEXO B  
COL. NARVARTE  
DELEGACION BENITO JUAREZ  
519-26-26  
2-5-11 FCO. VILLA  
CD. EXHACIENDA DEL ROSARIO  
DELEGACION ATZCAPOTZALCO  
02420 MEXICO, D.F.
- 9.- LINAREZ FRIAS ARTURO  
BOLSA MEXICANA DE VALORES, S.A.  
ING. DE SERV. AREA TELEPROCESO  
URUGUAY No. 67-6o. PISO  
COL. CENTRO  
DELEGACION CUAUHTEMOC  
06000 MEXICO, D.F.  
548-00-46  
SUR 97-A No. 547  
COL. SECTOR POPULAR  
DELEGACION IZTAPALAPA  
09060 MEXICO, D.F.  
581-05-06
- 10.- LOPEZ CERON ANTON  
CENTRO DE INVESTIGAC. DESARROLLO TELEC.  
TECNICO EN TELECOMUNICACIONES  
AV. DE LAS TELECOMUNICACIONES S/N  
COL. EJIDAL DEL MORAL  
DELEGACION IZTAPALAPA  
692-07-47  
CALLE DEL RINCON MZA. 30 LTE. 404  
COL. EL PEDREGAL  
DELEGACION TLALPAN  
14100 MEXICO, D.F.  
652-25-93
- 11.- MARTINEZ MAGAÑA CESAR  
TECNICO INTERACTIVO, S.A. DE C.V.  
INGENIERO DE LABORATORIO  
VIADUCTO RIO BECERRA No. 283  
COL. NAPOLES  
03810 MEXICO, D.F.  
687-32-06 y 543-82-92  
152 ORIENTE No. 193-11  
DELEGACION VENUSTIANO CARRANZA  
15500 MEXICO, D. F.  
571-35-41 y 571-02-21
- 12.- MIRANDA ESCOBAR RODOLFO  
VALLE OAXACA No. 50  
COL. VISTA DEL VALLE  
373-27-29
- 13.- MORALES NOVELO CECILIO V.  
FERROCARRILES NACIONALES DE MEXICO  
INSTRUCTOR  
INSTITUTO DE CAPACITACION FERROCARR.  
COL. GUERRERO  
DELEGACION CUAUHTEMOC  
541-38-26  
CAMINO DE ENMEDIO No. 19  
DELEGACION GUSTAVO A. MADERO  
07530 MEXICO, D.F.  
757-79-48

14.- MORENO GARCIA J. MANUEL  
PETROLEOS MEXICANOS

15.- OLIVARES SANTOYO MARIO ENRIQUE  
MALVAS No. 584  
VILLA DE LAS FLORES, COACALCO  
874-07-20

U. N. A. M.  
SUPERVISOR  
AV. UNIVERSIDAD No. 3000  
DELEGACION COYOACAN  
548-97-91

16.- RIVERON MIRANDA MARCOS GUSTAVO  
TECNICO INTERACTIVO, S.A.  
TECNICO DE SERVICIO  
VIADUCTO RIO BECERRA No. 283  
COL. NAPOLES  
03810 MEXICO, D.F.  
681-37-00 y 543-82-92