

DIRECTORIO DE PROFESORES DEL  
XVIII CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA  
MODULO III, DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS  
DEL 3 AL 13 DE JULIO DE 1992.

DR. ROBERTO MELI PIRALLA  
INVESTIGADOR  
INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM  
CIUDAD UNIVERSITARIA, MEXICO, D.F.  
TEL. 548 97 94

M. EN I. JOSE LUIS CAMBA CASTAÑEDA  
GERENTE  
INGENIEROS CONSULTORES  
CAMPECHE 305, MEXICO 06100, D.F., COL. CONDESA, DELEG.  
CUAUHTEMOC, TEL. 564 30 02 y 564 33 28

M. EN I. OSCAR DE BUEN RICHKARDAY  
DIRECTOR DE PROGRAMACION ANALITICA  
DIRECCION GENERAL DE PLANEACION, S.C.T.  
LAGO PONIENTE 16, 2o. PISO, MEXICO, D.F. C.P. 03610  
TEL. 674 32 10

ING. OSCAR DE LA TORRE RANGEL  
GERENTE GENERAL  
PROYECTO ESTRUCTURAL S.A.  
DARWIN 18 A, 1er. PISO, COL. ANZURES, C.P. 11590, DELEG.  
MIGUEL HIDALGO, TEL. 207 96 35 y 207 55 65

M. EN C. ENRIQUE DEL VALLE CALDERON  
PROFESOR TITULAR DE TIEMPO COMPLETO, DEPARTAMENTO DE  
ESTRUCTURAS,  
DEPFI, UNAM  
CIUDAD UNIVERSITARIA, MEXICO, D.F., TEL. 550 52 15 EXT. 4479

DR. OSCAR HERNANDEZ BASILIO  
DIRECTOR GENERAL  
PROYECTOS TENSION S.A. DE C.V.  
RIO TIBER No. 70, 2o. PISO,  
TEL. 687 36 66 EXT. 111, 687 33 85 EXT. 112

DR. ROBERTO STARK FELDMAN  
GERENTE DE ESTRUCTURAS  
INGENIERIA DE PROYECTO Y SUPERVISION, S.A. DE C.V. (INPROS)  
SANTANDER No. 15-805, COL. INSURGENTES, MIXCOAC, DELEG.  
BENITO JUAREZ, TEL. 563 92 12 y 563 84 01

ING. JOSE OSCAR TREJO MARTINEZ  
COORDINADOR DE PROYECTOS Y REVISION Y DISEÑO DE LOS EDIFICIOS  
GRUPO INGENIERIA INTEGRAL S.A.  
ANA MA. MIER No. 10, COL. DEL VALLE, DELEG. BENITO JUAREZ;  
C.P. 03100, TEL. 536 37 70, 536 03 29 y 687 11 99

DR. JOSE LUIS TRIGOS SUAREZ  
DIRECTOR GENERAL  
TRIGOS INGENIEROS CONSULTORES S.A.  
TEL. 689 68 88 y 689 66 39

DR. SERGIO ALCOCER

1940

1940

1940

1940

1940

1940

**XVIII CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA 1992****MODULO III  
DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS**

Del 3 al 13 de julio de 1992

| FECHA       | TEMA   | EXPOSITOR                     |
|-------------|--|-------------------------------|
| VIERNES 3   | CRITERIOS DE DISEÑO SISMICO                                  | M. en C. Enrique del Valle C. |
| SABADO 4    | ESTRUCTURACION Y DESEMPEÑO OBSERVADO                         | M. en C. Enrique del Valle C. |
| LUNES 6     | ANALISIS DE ESTRUCTURAS ANTE CARGAS LATERALES.               | Dr. Roberto Stark             |
| MARTES 7    | COMPORTAMIENTO DE MATERIALES Y ELEMENTOS ESTRUCTURALES       | M. en I. José Luis Trigos     |
| MIERCOLES 8 | DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO                    | Dr. Roberto Meli              |
| JUEVES 9    | DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS DE MAMPOSTERIA                 | Dr. Oscar Hernández Basilio   |
| VIERNES 10  | DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS DE ACERO                       | Ing. Oscar de Buen            |
| SABADO 11   | EJEMPLOS DE DISEÑO   | Dr. Sergio M. Alcocer         |
| LUNES 13    | DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO PREFABRICADO Y PREZFORZADO | Dr. José Luis Camba C.        |
|             | REPARACION DE EDIFICIOS                                      | Ing. Oscar de la Torre        |

PROPERTY OF

DR. ROBERT J. ...

DR. ...

DR. ...

DR. ...

DR. ...

DR. ...

DR. ...

DR. ...

DR. ...

DR. ...

DR. ...

DR. ...

DR. ...

DR. ...

DR. ...

# EVALUACION DEL PERSONAL DOCENTE

CURSO:

XVIII CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

FECHA: Del 3 al 13 de junio de 1992

MODULO III: DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

|                               |                               | DOMINIO DEL TEMA | EFICIENCIA EN EL USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES | MANTENIMIENTO DEL INTERES. (COMUNICACION CON LOS ASISTENTES, AMENIDAD, FACILIDAD DE EXPRESION). | PUNTUALIDAD |  |
|-------------------------------|-------------------------------|------------------|--|---|-------------|--|
| CONFERENCISTA                 |                               |                  |  |   |             |  |
| 1                             | M. EN C. ENRIQUE DEL VALLE C. |                  |  |   |             |  |
| 2                             | DR. ROBERTO STARK             |                  |  |   |             |  |
| 3                             | M. EN I. JOSE LUIS TRIGOS     |                  |  |   |             |  |
| 4                             | DR. ROBERTO MELI              |                  |  |   |             |  |
| 5                             | DR. OSCAR HERNANDEZ BASILIO   |                  |  |   |             |  |
| 6                             | ING. OSCAR DE BUEN            |                  |  |   |             |  |
| 7                             | DR. SERGIO M. ALCOCER         |                  |  |   |             |  |
| 8                             | DR. JOSE LUIS CAMBA C.        |                  |  |   |             |  |
| 9                             | ING. OSCAR DE LA TORRE        |                  |  |   |             |  |
| ESCALA DE EVALUACION : 1 a 10 |                               |                  |  |   |             |  |

## EVALUACION DE LA ENSEÑANZA

SU EVALUACION SINCERA NOS AYUDARA A MEJORAR LOS PROGRAMAS POSTERIORES QUE DISEÑAREMOS PARA USTED.

XVIII CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA 1992

Del 3 al 13 de julio de 1992

Modulo III: DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

| TEMA                         |  | ORGANIZACION Y DESARROLLO DEL TEMA | GRADO DE PROFUNDIDAD LOGRADO EN EL TEMA | GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO EN EL TEMA | UTILIDAD PRACTICA DEL TEMA |  |
|------------------------------|--|------------------------------------|---|---|----------------------------|--|
| 1                            | CRITERIOS DE DISEÑO SISMICO                                  |                                    |   |   |                            |  |
| 2                            | ESTRUCTURACION Y DESEMPEÑO OBSERVADO                         |                                    |   |   |                            |  |
| 3                            | ANALISIS DE ESTRUCTURAS ANTE CARGAS LATERALES                |                                    |   |   |                            |  |
| 4                            | COMPORTAMIENTO DE MATERIALES Y ELEMENTOS ESTRUCTURALES       |                                    |   |   |                            |  |
| 5                            | DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO                    |                                    |   |   |                            |  |
| 6                            | DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS DE MAMPOSTERIA                 |                                    |   |   |                            |  |
| 7                            | DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS DE ACERO                       |                                    |   |   |                            |  |
| 8                            | EJEMPLOS DE DISEÑO   |                                    |   |   |                            |  |
| 9                            | DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO PREFABRICADO Y PREZFORZADO |                                    |   |   |                            |  |
| 10                           | REPARACION DE EDIFICIOS                                      |                                    |   |   |                            |  |
| ESCALA DE EVALUACION: 1 a 10 |  |                                    |   |   |                            |  |

EVALUACION DEL CURSO

| C O N C E P T O  |   |  |
|------------------|---|--|
| 1.               | APLICACION INMEDIATA DE LOS CONCEPTOS EXPUESTOS |  |
| 2.               | CLARIDAD CON QUE SE EXPUSIERON LOS TEMAS        |  |
| 3.               | GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO EN EL CURSO      |  |
| 4.               | CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO         |  |
| 5.               | CONTINUIDAD EN LOS TEMAS DEL CURSO              |  |
| 6.               | CALIDAD DE LAS NOTAS DEL CURSO                  |  |
| 7.               | GRADO DE MOTIVACION LOGRADO EN EL CURSO         |  |
| EVALUACION TOTAL |   |  |

ESCALA DE EVALUACION: 1 A 10

1.- ¿Qué le pareció el ambiente en la División de Educación Continua?

MUY AGRADABLE

AGRADABLE

DESAGRADABLE

2.- Medio de comunicación por el que se enteró del curso:

PERIODICO EXCELSIOR  
ANUNCIO TITULADO DE  
VISION DE EDUCACION  
CONTINUA

PERIODICO NOVEDADES  
ANUNCIO TITULADO DE  
VISION DE EDUCACION  
CONTINUA

FOLLETO DEL CURSO

CARTEL MENSUAL

RADIO UNIVERSIDAD

COMUNICACION CARTA,  
TELEFONO, VERBAL,  
ETC.

REVISTAS TECNICAS

FOLLETO ANUAL

CARTELERA UNAM "LOS  
UNIVERSITARIOS HOY" GACETA  
UNAM

3.- Medio de transporte utilizado para venir al Palacio de Minería:

AUTOMOVIL  
PARTICULAR

METRO

OTRO MEDIO

4.- ¿Qué cambios haría en el programa para tratar de perfeccionar el curso?

---

---

---

5.- ¿Recomendaría el curso a otras personas?

SI

NO

5.a. ¿Qué periódico lee con mayor frecuencia?

---

---



6.- ¿Qué cursos le gustaría que ofreciera la División de Educación Continua?

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

7.- La coordinación académica fué:

EXCELENTE

BUENA

REGULAR

MALA

8.- Si está interesado en tomar algún curso INTENSIVO ¿Cuál es el horario más conveniente para usted?

LUNES A VIERNES  
DE 9 a 13 H. Y  
DE 14 A 18 H.  
(CON COMIDAD)

LUNES A  
VIERNES DE  
17 a 21 H.

LUNES A MIERCOLES  
Y VIERNES DE  
18 A 21 H.

MARTES Y JUEVES  
DE 18 A 21 H.

VIERNES DE 17 A 21 H.  
SABADOS DE 9 A 14 H.

VIERNES DE 17 A 21 H.  
SABADOS DE 9 A 13 H.  
DE 14 A 18 H.

OTRO

9.- ¿Qué servicios adicionales desearía que tuviese la División de Educación Continua, para los asistentes?

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

10.- Otras sugerencias:

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

## ASPECTOS GENERALES DEL DISEÑO SISMICO

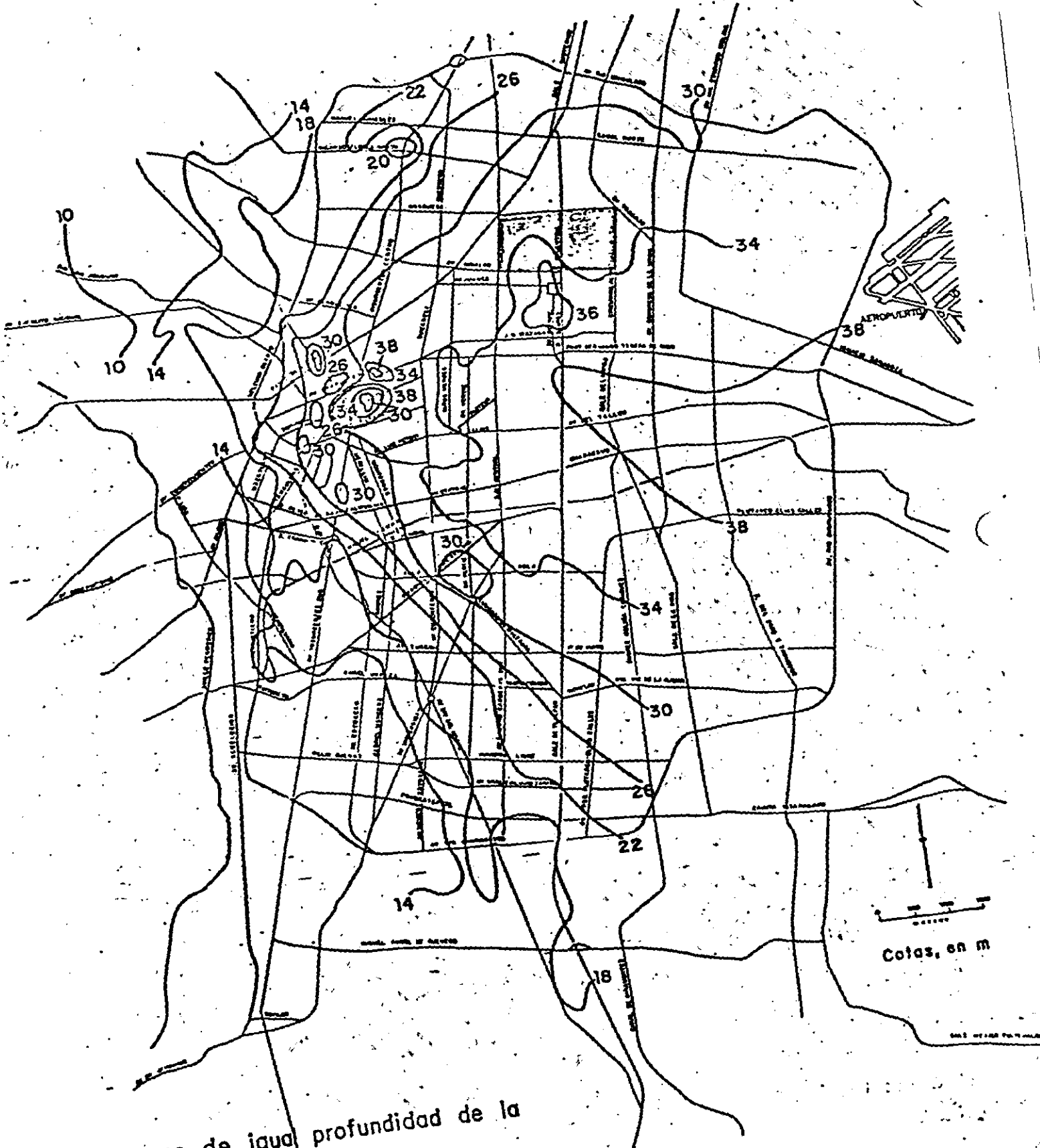
José Luis Sánchez Martínez

Vizuales  
03/07/92

Los avances en la ingeniería sísmica se dan a jalones, definidos por la -  
ocurrencia de un gran sismo, generalmente de consecuencias nefastas, que  
pone de manifiesto diferencias, a veces importantes, entre el comporta---  
miento real de las estructuras y aquel que teóricamente se preveía; y que  
también recuerda la importancia de cumplir con los principios elementales  
de la construcción antisísmica que, no por conocidos, se respetan más.

Así ocurre en todos los países que enfrentan este problema y así ha ocu---  
rrido en México, donde en 1957 y en 1985 después de sendos macrosismos, -  
ha sido necesario promulgar nuevos reglamentos para la construcción de --  
edificios, que pretenden reflejar nuevas experiencias adquiridas y esta--  
blecer disposiciones que eviten, en el futuro, los daños más graves obser  
vados.

Quizá una de las conclusiones de mayor importancia a las que se puede ---  
llegar después de las experiencias vividas es que el diseño sísmico debe  
basarse, principalmente, en aspectos cualitativos de simetría y uniformi-  
dad estructural y en resultados de análisis que reconozcan la importancia  
de las características dinámicas de las construcciones y del suelo que --  
las sustenta y que no necesariamente conduzcan a procesos de cálculo com-



Curvas de igual profundidad de la primera capa dura

-FIG. 2

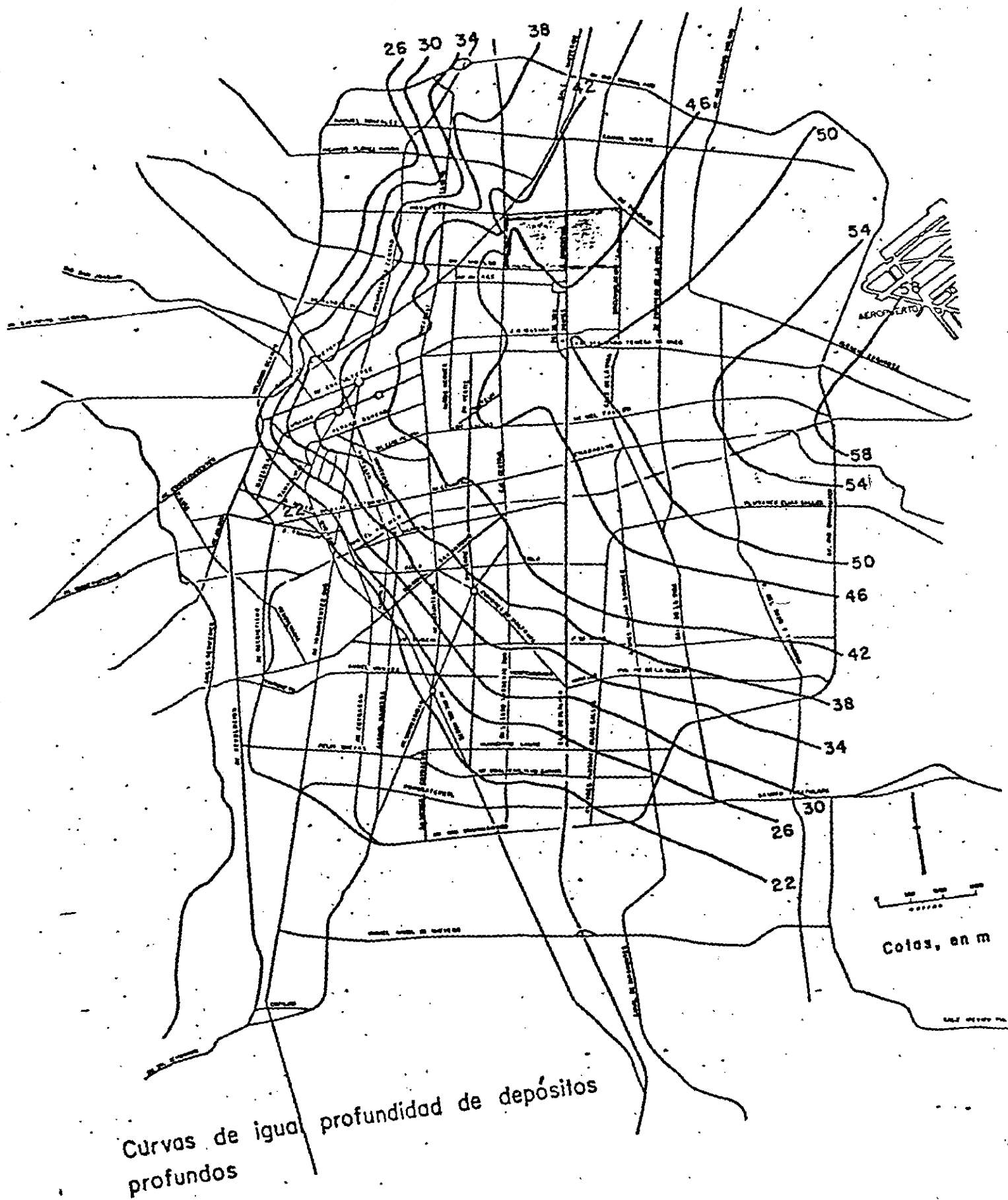
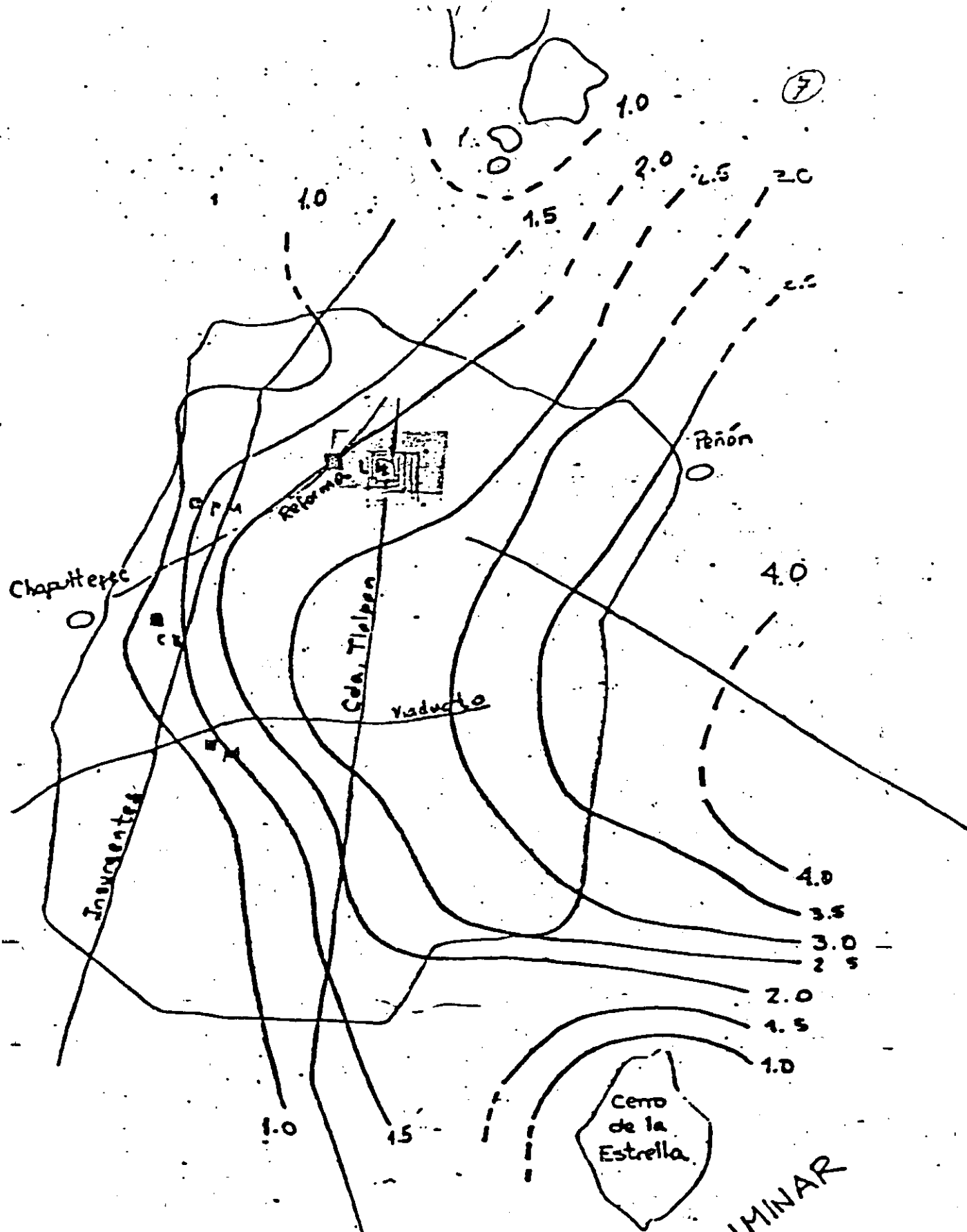


FIG. 3

estructura que, en amplias zonas, vibra con un período natural cercano a los dos segundos (Fig. 4).

Cuando esta estructura se ve excitada por vibraciones que tienen también un período natural dominante de aproximadamente dos segundos, como es el caso de las que ocurren como resultado de los sismos que, originados en la costa del Pacífico, se hacen sentir en la Ciudad de México (Fig. 5); se entra a una condición cercana a la resonancia produciéndose amplificaciones muy notables del movimiento que originalmente llega y que dan lugar, en la superficie del terreno, a amplitudes y aceleraciones de gran magnitud. Aquellos edificios que, colocados sobre este terreno, tengan también un período fundamental de vibración similar al del suelo, amplifican aún más el movimiento llegándose a condiciones que, en ciertos casos, difícilmente pueden ser resistidos por ellos aún en el caso de que cuenten con resistencias notablemente mayores a las que son usuales.

Esta amplificación no se presenta en construcciones bajas y rígidas que se mueven con el suelo, ni en edificios de gran altura en los que las aceleraciones que llegan a actuar pueden ser aún menores que las del propio terreno; sí se presenta en edificios de altura mediana, es decir, los que tienen de seis a quince pisos, como es el caso de las construcciones que se desplomaron en las áreas más afectadas durante los sismos de 85 en la

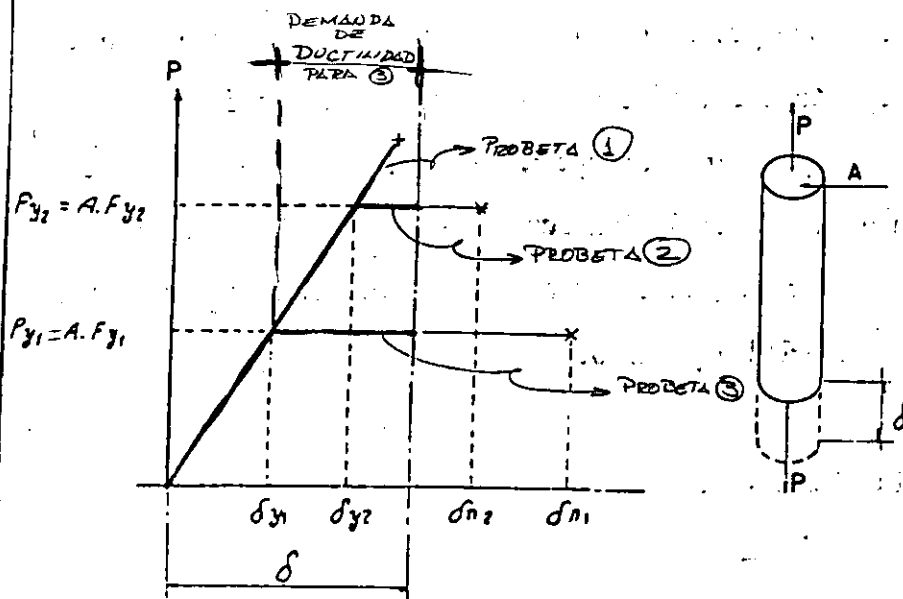


Periodo natural de vibración del suelo.

Fig A 4.1 Valores de  $T_s$

PRELIMINAR

VARILLA DE ACERO SOMETIDA A CARGAS VARIANTES DE TENSION PUEDE SER ACERO ESTRUCTURAL A-36 CON  $F_y = 2530 \text{ KG./CM}^2$  O ALTA RESISTENCIA CON  $F_y = 4200 \text{ KG/CM}^2$



AL AUMENTAR LA RESISTENCIA SE ELEVA EL LIMITE DE FLUENCIA EL RANGO ELASTICO ES MAYOR Y LA DEFORMACION INELASTICA REQUERIDA ES MENOR

EL FACTOR DE DUCTILIDAD:

$$\mu_1 = \frac{\delta_{n1}}{\delta_{y1}}$$

$$\mu_2 = \frac{\delta_{n2}}{\delta_{y2}}$$

FACTORES DE COMPORT. SISM.

$\delta_n$  SERA LA MAXIMA DUCTILIDAD DISPONIBLE  
 $(\delta - \delta_{y1})$  SERA LA DEMANDA DE DUCTILIDAD PARA LA 'PROBETA 1'

FIGURA 6

Es evidente que la demanda de ductilidad debe ser menor que la ductilidad disponible, concepto que, extrapolado a estructuras complejas ante la acción sísmica, es de excepcional importancia.

Grandes demanda de ductilidad implican la presencia de deformaciones importantes y, por tanto, daños estructurales notables; si éstos se quieren reducir será necesario aumentar la resistencia, ya que cuanto mayor sea ésta menor será la demanda de ductilidad. Si la resistencia se reduce deberá contarse con suficiente ductilidad disponible, en caso contrario, la falla sobreviene. Demandas excesivas de ductilidad propiciadas por estructuraciones poco apropiadas, han sido la causa directa de gran cantidad de colapsos.

La rigidez, medida por el módulo de elasticidad, permite controlar las deformaciones dentro de ciertos límites y regula el período de vibración de las estructuras y, en consecuencia, el valor de las fuerzas sísmicas que ocurren.

Las propiedades mencionadas se modifican cuando sobre la estructura actúan sollicitaciones dinámicas con ciclos consecutivos de carga y descarga, disminuyendo, a veces en forma apreciable, aún en ciclos de histeresis correspondientes a especímenes cuidadosamente elaborados. En estruc-



turas reales, el deterioro que los primeros ciclos de carga producen, --- puede ocasionar comportamientos muy distintos a los previstos inicialmente. Las estructuras deberán detallarse y construirse de modo que este -- efecto no sea demasiado nocivo.

La posibilidad de aceptar resistencias reducidas cuando se cuenta con la ductilidad necesaria se reconoce en las normas de diseño, disminuyendo -- los valores obtenidos de los espectros de aceleración que se basan en -- hipótesis de comportamiento estructural elástico. Para definir esa reducción se usa el llamado método del factor de ductilidad, que se ilustra en la Fig. 6.

El método del factor de ductilidad debe aplicarse con cautela, reconociendo que el hacerlo implica una seguridad razonable de haber proporcionado a la estructura la ductilidad requerida, tanto en su conjunto, como en -- cada una de sus partes.

El factor de ductilidad puede obtenerse teóricamente sólo en casos simples, en las estructuras usuales, altamente complejas, la decisión de su valor queda a juicio del diseñador y es función de las características especiales de cada estructura y de la conciencia de aceptar daños estructurales de mayor o menor importancia, al ocurrir el sismo de diseño.

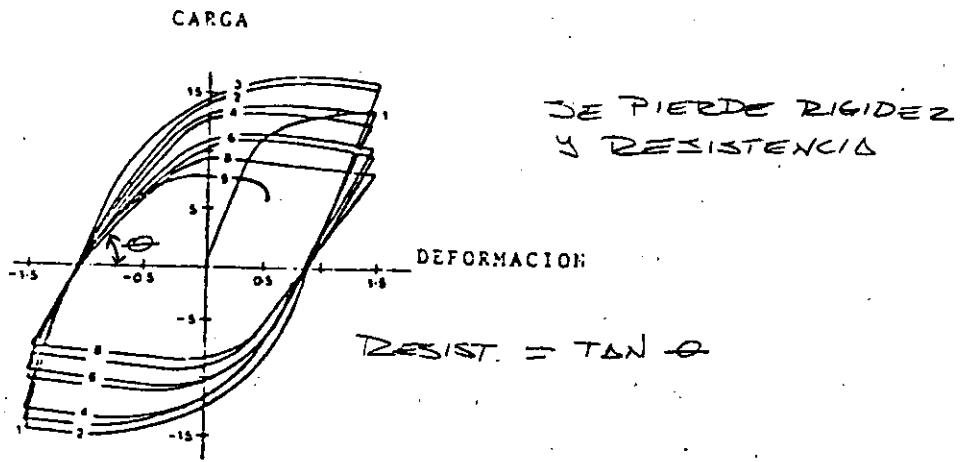
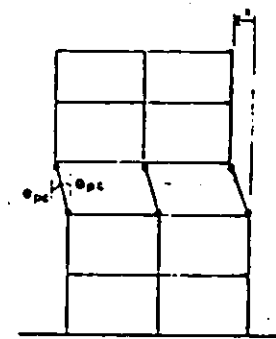


FIGURA 3

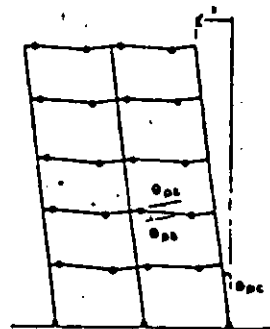


MECANISMO DE COLUMNA

para:  
 $\mu = 4$

$$\frac{\phi_u}{\phi_y} = 120$$

REACCION  
DE  
GIROS



MECANISMO DE VIGA

para:  
 $\mu = 4$   
 $\frac{\phi_u}{\phi_y} = 20$

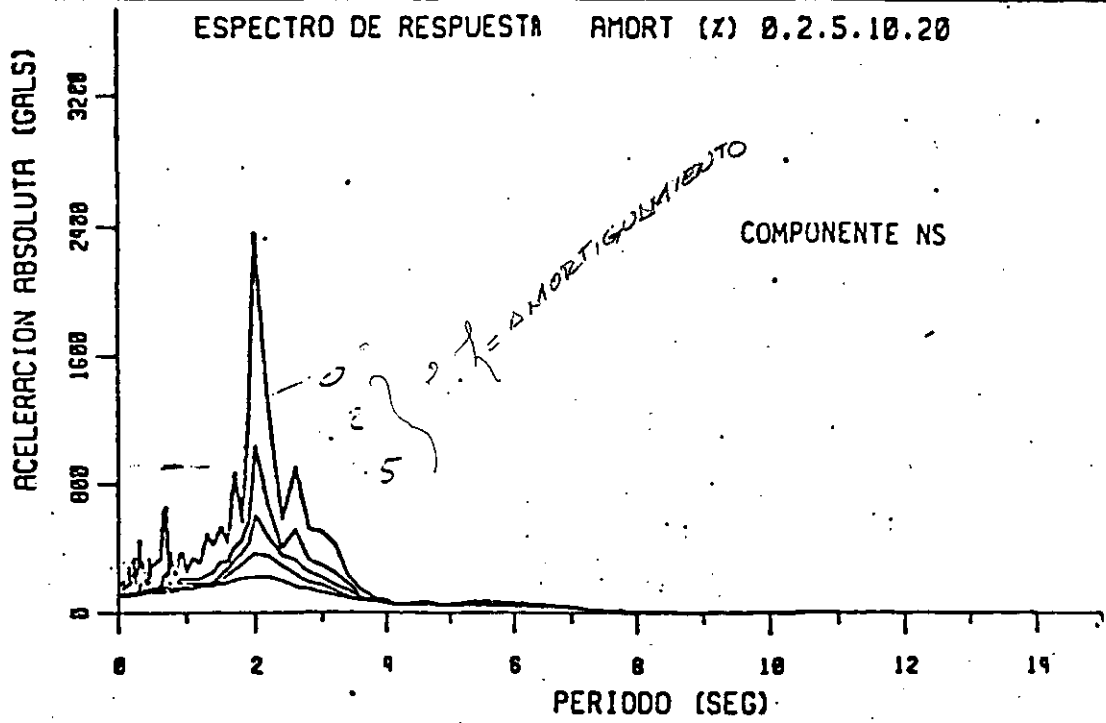
### III. AMORTIGUAMIENTO.

La influencia del amortiguamiento en el valor de las aceleraciones espectrales es de la mayor importancia (Fig. 8, 9); las normas de diseño en vigor mencionan que los espectros para diseño se han basado en un amortiguamiento del 5% del crítico, hipótesis un tanto arbitraria pero supuestamente suficientemente conservadora, sin embargo, si se tienen en cuenta las mediciones de los sismos de Septiembre de 85, los valores espectrales recomendados para diseño corresponderían a amortiguamientos superiores al 10% que dejan, con mucho, de ser conservadores.

No es posible establecer cuantitativamente el grado de amortiguamiento de una estructura por diseñarse, solo en forma cualitativa y en función de lo que se ha medido en algunos casos concretos, puede tenerse una idea de los valores que caben esperarse. Es claro, sin embargo, que debería garantizarse cierto grado de amortiguamiento en las estructuras reales, no es casual que una característica bastante común a las pocas estructuras de baja altura que tuvieron daños en los sismos pasados, haya sido el tener plantas abiertas y libres de elementos no estructurales.

Las consideraciones anteriores llevan a la recomendación de que en aquellos casos en que no se cuente con un número razonable de elementos que -

|       |                |          |                |                              |
|-------|----------------|----------|----------------|------------------------------|
| SISMO | GRO-MICH       | REGISTRO | SCT1852919AL.T | CORRECCION                   |
| DATOS | 10E1           | ESTA     | SCT1           | METODO CALTECH.              |
| FECHA | 850919         | INST     | 03-144         | FILTRO 0.070 0.100 23.0 25.0 |
| HORA  | 13:19:44       | COMP     | LONG           | $\Delta T$ 0.010             |
| EPIC  | 17.680 102.470 | HORA     | 13:19:43       | MAX ACEL 89.95. -97.85       |
| #     | 7.0            | DUR      | 59.99          | MAX VEL 38.68. -33.75        |
| #     | 33             | DIST     | 400            | MAX DESP 17.40. -14.29       |



|       |                |          |                |                              |
|-------|----------------|----------|----------------|------------------------------|
| SISMO | GRO-MICH       | REGISTRO | SCT1850919AT.T | CORRECCION                   |
| DATOS | 10E1           | ESTA     | SCT1           | METODO CALTECH.              |
| FECHA | 850919         | INST     | 03-144         | FILTRO 0.070 0.100 23.0 25.0 |
| HORA  | 13:19:44       | COMP     | TRAN           | $\Delta T$ 0.010             |
| EPIC  | 17.680 102.470 | HORA     | 13:19:43       | MAX ACEL 158.74. -167.79     |
| #     | 7.0            | DUR      | 59.99          | MAX VEL 56.62. -61.47        |
| #     | 33             | DIST     | 400            | MAX DESP 21.24. -20.88       |

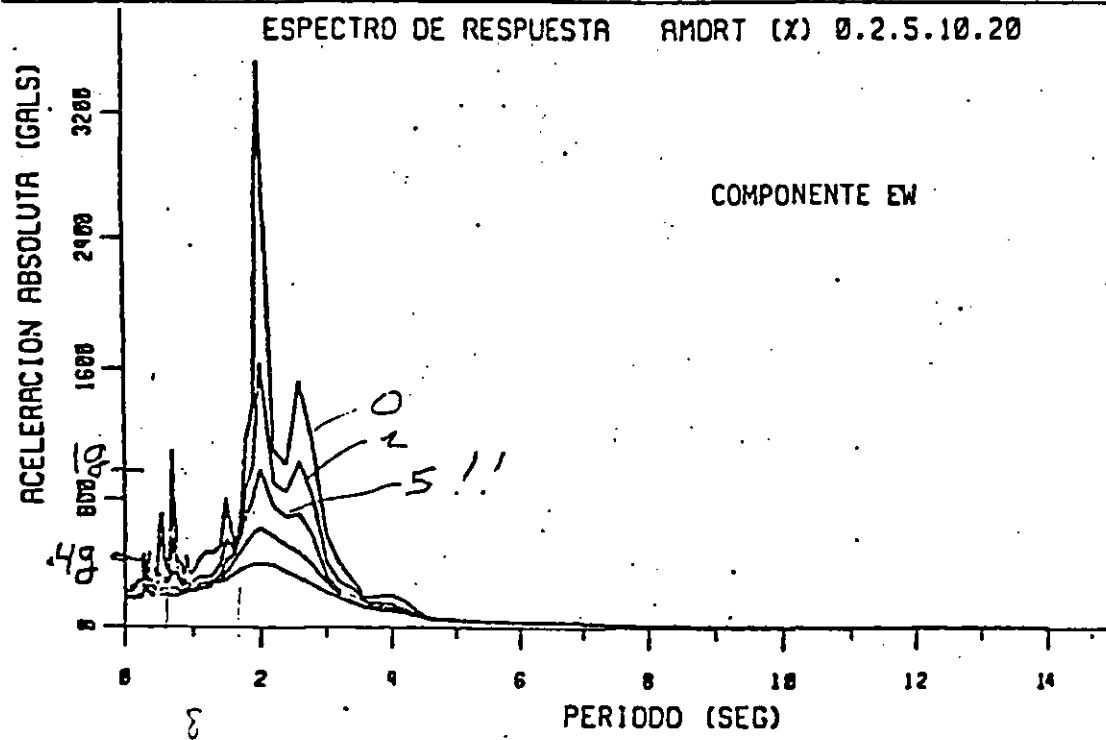
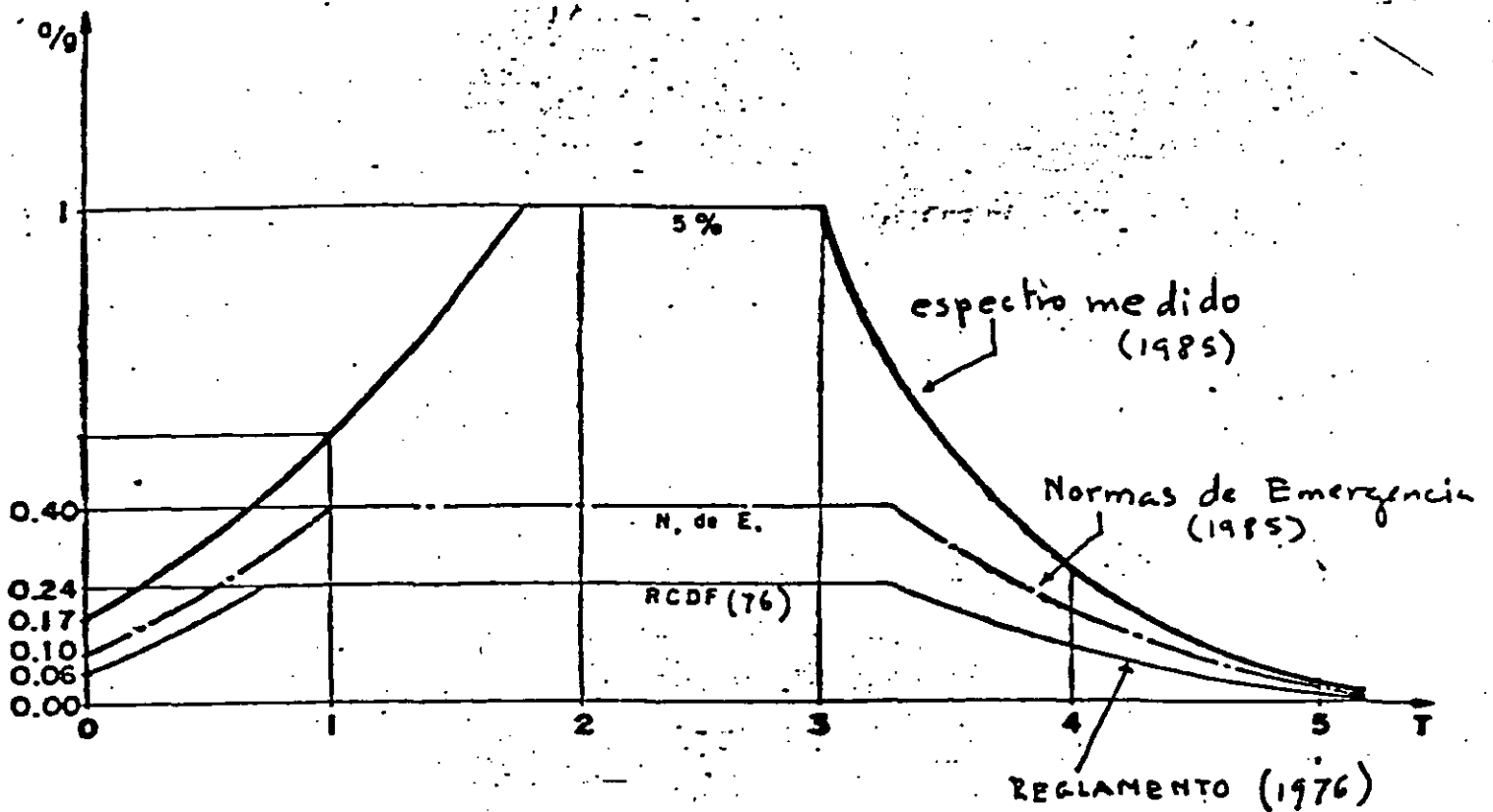
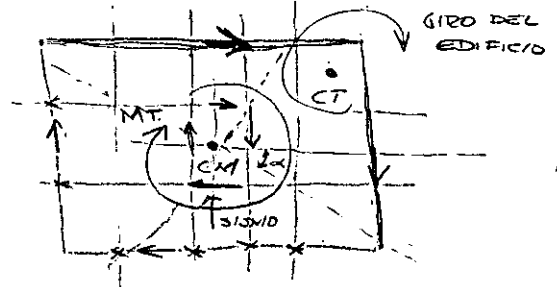


FIG. 8 Espectros de respuesta de aceleración absoluta. Acelerograma SCT del 190985, componentes NS y EW.



## ESPECTROS IDEALIZADOS

FIG. 9



proporcionan amortiguamiento, tales como muros estructurales, de relleno, contravientos o algún otro dispositivo para el mismo fin, las estructuras deberán proporcionarse generosamente para obtener resistencias mayores a las que como mínimo estipulan las normas.

Podría utilizarse, por ejemplo, el espectro de los sismos de 1985 para 5% de amortiguamiento.

La práctica que a veces se recomienda de separar los muros de la estructura para evitar su agrietamiento en sismos futuros debe pensarse cuidadosamente pues, desde el punto de vista que ahora se comenta, puede resultar contraproducente al disminuir con esta acción el amortiguamiento con que cuenta la estructura.

#### IV. TORSION.

El 42% de los edificios que se desplomaron durante los sismos de septiembre de 85 eran de esquina. Este hecho da idea de la importancia del efecto de la torsión, normalmente presente en este tipo de construcciones. - Las normas lo reconocen estableciendo una excentricidad máxima del 20% de la dimensión de la estructura perpendicular a la acción sísmica. La simetría en elevación y en planta es una condición que conviene buscar en las

estructuraciones de edificios ubicados en la zona del lago de la Ciudad de México.

El análisis por torsión debe incluir, además de la excentricidad teórica, la accidental que especifican las normas. El análisis puede realizarse en la forma estática convencional, para obtener incrementos en los elementos mecánicos de diseño que prevean en forma razonable el efecto de la torsión.

La necesidad de un diafragma horizontal rígido, para poder lograr el trabajo conjunto de todos los elementos resistentes a fuerzas laterales, debe enfatizarse; la revisión de la capacidad de este diafragma para transmitir a los elementos más rígidos las fuerzas que han de resistir, se ha hecho evidente en los últimos sismos; varias construcciones con muros rígidos presentaron la falla de la losa que llegaba a ellos.

#### V. COLINDANCIAS.

El choque entre estructuras de distintas características fue frecuente en los sismos de 1985, muchas construcciones se vieron dañadas únicamente por este hecho. Los requisitos de separación entre construcciones no se han modificado, lo que parece reconocer que la mayor parte de los daños -

— COLINDANCIAS —

$$\Delta = \Delta_c + \begin{matrix} 0.001 H & \text{ZONA I} \\ 0.003 H & \text{II} \\ 0.006 H & \text{III} \end{matrix}$$

$\Delta_c =$  DESPLAZAMIENTO CALCUL.

- ( 19 ) -

$$\Delta = \begin{matrix} 0.007 H & \text{ZONA I} \\ 0.009 H & \text{II} \\ 0.012 H & \text{III} \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} 0.007 H \\ 0.009 H \\ 0.012 H \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} \text{METODO} \\ \text{SIMPLIFIC.} \end{matrix}$$

por este concepto ocurrieron, bien sea por que no se respetaron las separaciones reglamentarias, o porque éstas se perdieron por desplome de las construcciones, caso frecuente en la zona blanda de la Ciudad. En todo caso es necesario reconocer esta situación problemática siendo generosos con las separaciones entre construcciones y reconociendo, cuando existan, la presencia de paramentos de construcciones ya edificadas, con respecto a los cuales se deberá tener como mínimo una separación del doble de la que establezca el Reglamento respecto al lindero.

## VI. CIMENTACIONES.

En un número importante de casos, en la zona blanda de la Ciudad, se presentó la falla de la cimentación. Las fallas ocurrieron, en casi todas las ocasiones, en cimentaciones compensadas y en cimentaciones con pilotes de fricción. No es posible descartar la consideración de que el comportamiento de la cimentación haya influido en la falla de muchas estructuras. La práctica usual de fragmentar el conjunto suelo-cimentación-estructura en tres sistemas que se estudian por separado, es una hipótesis que puede influir desfavorablemente en ciertos casos, modificando, por ejemplo, hacia valores críticos el período natural de estructuras normalmente supuestas empotradas en su base.



VII. SISTEMAS ESTRUCTURALES. *SE TRATA DE DISEÑAR CON EL CRITERIO DE COLUMNAS FUERTES Y TRAVES DEBILES.*

Los sistemas resistentes más utilizados para tomar las acciones debidas a sismo los constituyen los marcos rígidos, los muros de cortante y los marcos contraventeados; sistemas que a menudo se combinan en una misma estructura.

*ESTRUC. DE MURO SE LES DA*

*FACTOR DE DUCTILIDAD BAJO (2,1)*

En edificios cuya estructura está constituida por una serie de marcos rígidos, se recomienda buscar que la fluencia, si se presenta, ocurra en las trabes y no en las columnas. Esto se basa en lo siguiente:

En las vigas se puede conseguir una gran ductilidad con cierta facilidad, colocando el refuerzo en cantidades y lugares adecuados; en las columnas esto no resulta igualmente fácil, de hecho, una columna con carga mayor a la correspondiente a la condición balanceada es sólo capaz de desarrollar una ductilidad insignificante.

Para disipar una gran cantidad de energía se requiere una ductilidad relativamente moderada en las trabes, no así en las columnas. La fluencia local en los extremos de las trabes no afecta seriamente la capacidad de carga vertical de la estructura, mientras que la fluencia de los extremos de las columnas podría conducir fácilmente al colapso. Además, las tra-

bes son más fácilmente reparables que las columnas.

El criterio de diseño de buscar que la fluencia se presente en las trabes antes que las columnas, se conoce como de columna fuerte y trabe débil, y es ampliamente recomendable.

Una estructura constituida sólo por marcos rígidos es eficiente gracias a su ductilidad, y así lo reconoce el Reglamento al asignarle el máximo valor del coeficiente de reducción de las fuerzas sísmicas calculadas; es necesario, sin embargo, cuidar extremadamente los detalles de refuerzo -- necesarios para que se puedan proporcionar las demandas de ductilidad -- que impone el sismo.

Por otro lado, este tipo de estructuras tiene con frecuencia un amortiguamiento escaso lo que, evidentemente es poco conveniente y tiene además -- poca rigidez, lo que con frecuencia limita la posibilidad de su aplicación a edificios altos. Un caso especialmente crítico de este tipo de estructuras lo constituyen las losas planas, cuya excesiva flexibilidad los hace poco apropiados en zonas sísmicas.

El período de vibración de estructuras compuestas sólo por marcos es relativamente alto, lo que induce en ellas una respuesta también alta cuando

se encuentra en lugares en que el suelo se mueve también con períodos de vibración altos, esta es la situación que, como se ha visto, se presenta en el Centro de la Ciudad de México, y a la que el nuevo Reglamento sísmico no ha dado la importancia que ha demostrado tener. Muchos ingenieros opinan que las estructuras a base de marcos rígidos deberían siempre incluir muros de cortante estratégicamente colocados, que las protejan de un colapso súbito si las fuerzas esperadas llegaran a excederse en forma notable.

Las estructuras con muros de cortante son menos dúctiles pero son más rígidas y más seguras, se puede lograr un comportamiento dúctil adecuado si se cuidan sus características geométricas y la distribución de su refuerzo; pueden conseguirse así factores de ductilidad de 4 a 6 que resultan satisfactorios.

Los muros de cortante pueden ser aislados en voladizo, o bien, acoplados a otros; éstos últimos tienen las ventajas de ofrecer más de una línea de defensa, la fluencia más importante se confía al sistema de trabes de acoplamiento, que se diseña de modo de poder aceptar grandes deformaciones y que, similarmente a lo que sucede en las trabes de un marco rígido resulta más fácil de reparar que los muros.

Una condición importante que siempre debe cumplirse, es la continuidad de los muros hasta la cimentación para evitar zonas débiles en las que se produzcan fallas prematuras.

Los marcos contraventeados constituyen una solución estructural eficiente para transmitir fuerzas horizontales, ya que logran hacerlo mediante fuerzas axiales únicamente, proporcionan resistencia y rigidez, y al igual que los muros de cortante, si están bien diseñados pueden ser suficientemente dúctiles.

Debe cuidarse en extremo la posibilidad de pandeo lateral de los elementos en compresión, detallarse con precisión las conexiones entre elementos y asegurarse que la trayectoria de las cargas sea completa y las conduzca a la cimentación.

Cualquiera que sea el sistema estructural empleado, su resistencia y su rigidez deben variar uniformemente a lo alto de la construcción, sin que se presenten discontinuidades bruscas. Si una estructura presenta una zona notablemente más débil que el resto, se absorberá en ella la mayor parte de la energía que provoca el sismo, exigiéndose deformaciones locales tan importantes que normalmente no podrán ser proporcionadas por la construcción sin fallar.

Un caso típico es el de la planta baja débil que ha demostrado ser, por -- las razones antes dichas, una solución peligrosa y, aunque teóricamente -- pueda arguirse que un piso débil aísla a la estructura que se encuentra -- sobre él de movimientos excesivos del suelo, esta situación no puede aprovecharse ya que la planta débil puede tener alta probabilidad de fallar.

#### VIII. ELEMENTOS NO ESTRUCTURALES.

Debe mencionarse como aspecto importante a cuidar en el diseño sísmico, el de la construcción controlada de los elementos no estructurales, ya que de otro modo pueden formar parte, de manera inadvertida, del sistema estructural y causar esfuerzos desfavorables de torsión.

Los elementos no estructurales son, principalmente, los muros de relleno; los pretilos, que pueden ocasionar un acortamiento indeseable de algunas columnas del edificio, y las escaleras que pueden actuar como puntales que modifiquen el comportamiento previsto de la estructura.

La colocación de los elementos no estructurales debe detallarse en planos para lograr no se destruyan durante un sismo y para que no causen problemas a la estructura.

Los aspectos que se acaban de exponer podrían resumirse y conducir a las consideraciones y recomendaciones de diseño que se indican a continuación, aplicables a la Ciudad de México, y que responden a experiencias que, por otra parte, son quizá únicas, como lo son las características del Valle de México.

Todo parece indicar que, en el Centro de la Ciudad de México, el comportamiento del suelo y el de las estructuras sobre él puede tipificarse.

Los sismos ocurridos a través del tiempo han presentado características similares, y así ha sucedido también con la respuesta de las edificaciones.

El suelo ha amplificado notablemente los movimientos sísmicos afectando - especialmente a estructuras de mediana altura, con escaso amortiguamiento y período natural cercano a dos segundos.

Las cimentaciones por compensación, o en pilotes de fricción, parecen haber contribuido a incrementar el mal comportamiento de este tipo de estructuras al no restringir suficientemente las deformaciones por momento de volteo, y al modificar de manera desfavorable su modo de vibrar.

Las estructuras rígidas, poco esbeltas, y con amortiguamiento razonable, han sido, en términos generales menos sensibles y, salvo en casos especiales de estructuraciones muy desfavorables, han presentado comportamientos adecuados; así ha ocurrido con las iglesias y los antiguos edificios coloniales. Algo similar puede decirse de los edificios altos con períodos naturales notablemente mayores al del suelo, y cimentados en pilotes de punta apoyados en la llamada primera capa dura.

Naturalmente, las estructuraciones que propician torsiones, las de planta baja flexible, las muy alargadas o irregulares han sido poco satisfactorias, asimismo, lo han sido aquellas construcciones en que no se ha evaluado correctamente la posibilidad de interacción desfavorable con estructuras colindantes y las construidas con materiales o procedimientos deficientes.

Pueden tratar de establecerse las características que, de acuerdo con las experiencias expuestas, hacen que una estructura se encuentre en condiciones críticas ante futuras sollicitaciones sísmicas intensas:

1. Hallarse en la zona de la Ciudad, llamada de alta compresibilidad.
2. Tener un período de vibración cercano al del suelo en la zona.
3. Tener escaso amortiguamiento.
4. Contar con una cimentación incapaz de transmitir incrementos notables de esfuerzos sísmicos al suelo, sin ocasionarle deformaciones perjudiciales.
5. Propiciar torsiones.
6. Requerir una ductilidad difícil de cumplir; como ocurre en el caso de cambios fuertes y localizados de resistencia, edificaciones con planta baja flexible, etc.
7. Propiciar un mecanismo de falla en columnas.
8. Estar bajo la amenaza de una colindancia peligrosa.
9. Estar construidas con materiales o procesos constructivos deficientes.

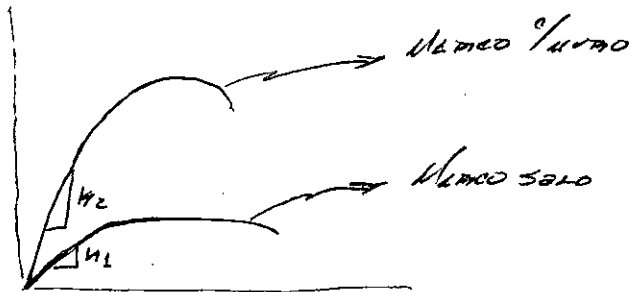
Lo anterior conduce a pensar que un criterio sano de diseño sísmico debe basarse en evitar que la construcción presente las condiciones señaladas como críticas. En los casos en que las condiciones críticas no pueden evitarse, cabe preguntarse si la acción sísmica que estas condiciones generan puede aceptarse incrementando la resistencia de la estructura que, en este caso, debe proporcionarse generosamente, recordando que el costo de la estructura es, en general, un porcentaje pequeño del de la totalidad de la obra.



SAB.040792

→  
GROUND MOTION

DR. ROBERTO MELI PIZZALLA





**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**XVIII CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA**

**MODULO III**

**DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS**

*Del 3 al 13 de julio de 1992*

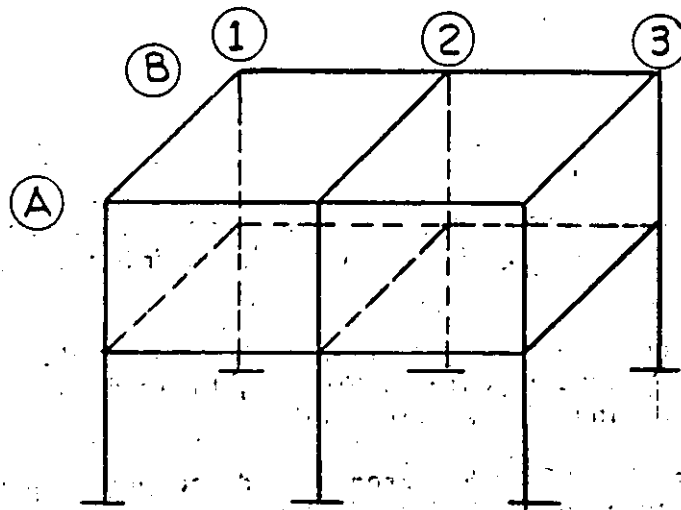
**EL MODELO MATEMATICO DE UNA ESTRUCTURA**

**TEMA**

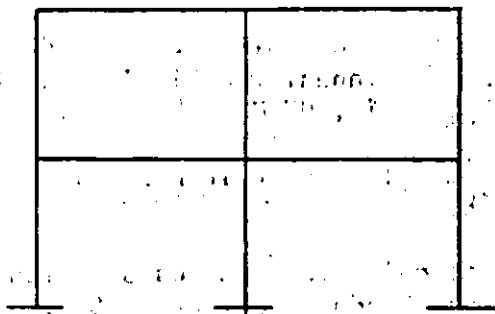
**CRITERIOS DE DISEÑO SISMICO**

**M. EN C. ENRIQUE DEL VALLE C.**

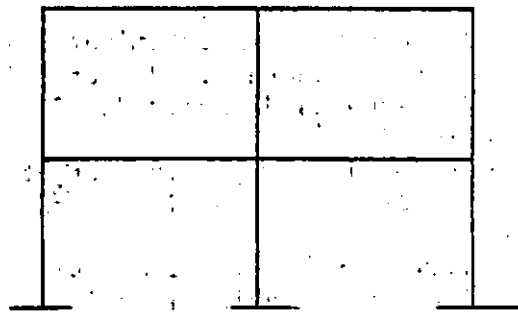
**JULIO - 1992**



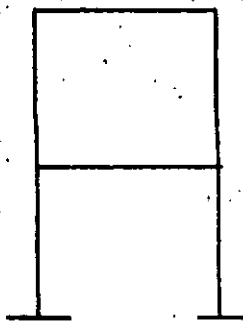
ESTRUCTURA EN EL ESPACIO



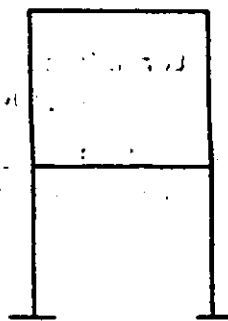
( A )



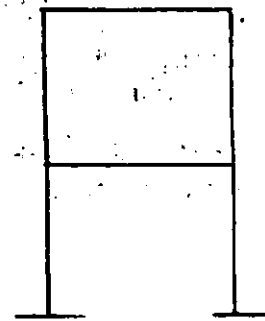
( B )



( 1 )

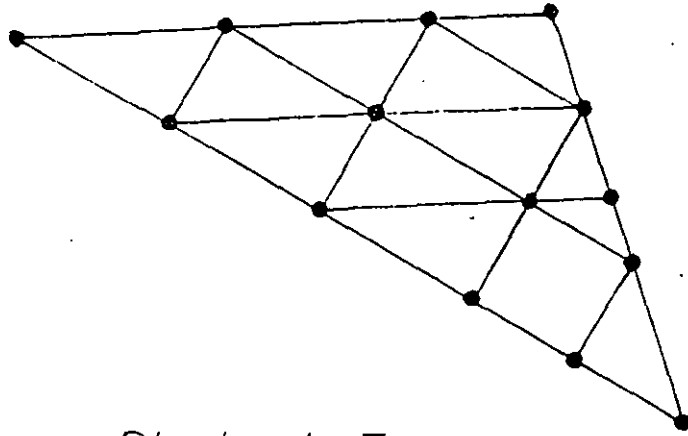


( 2 )

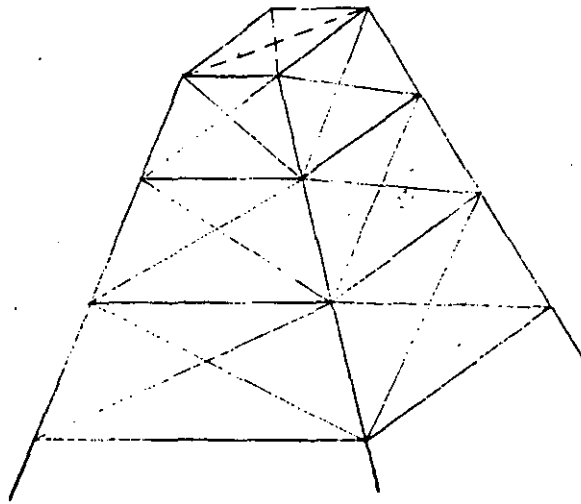


( 3 )

DESCOMPOSICION EN MARCOS PLANOS

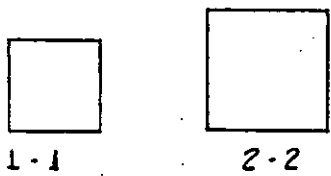
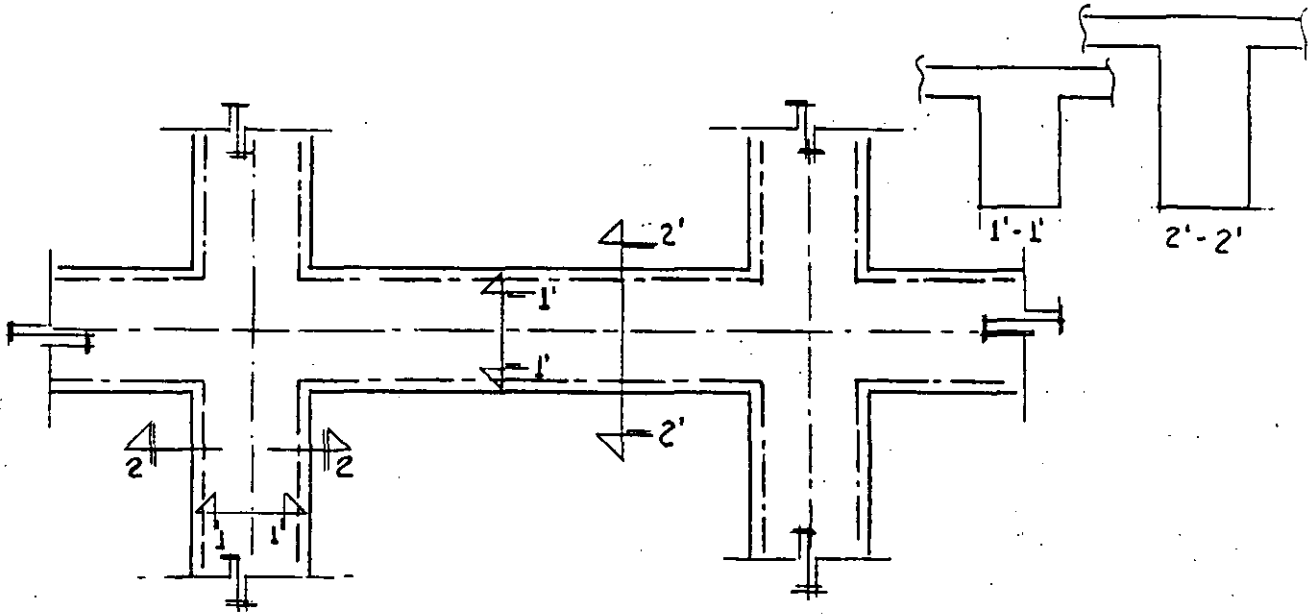


*Planta de Edificio*



*Torre*

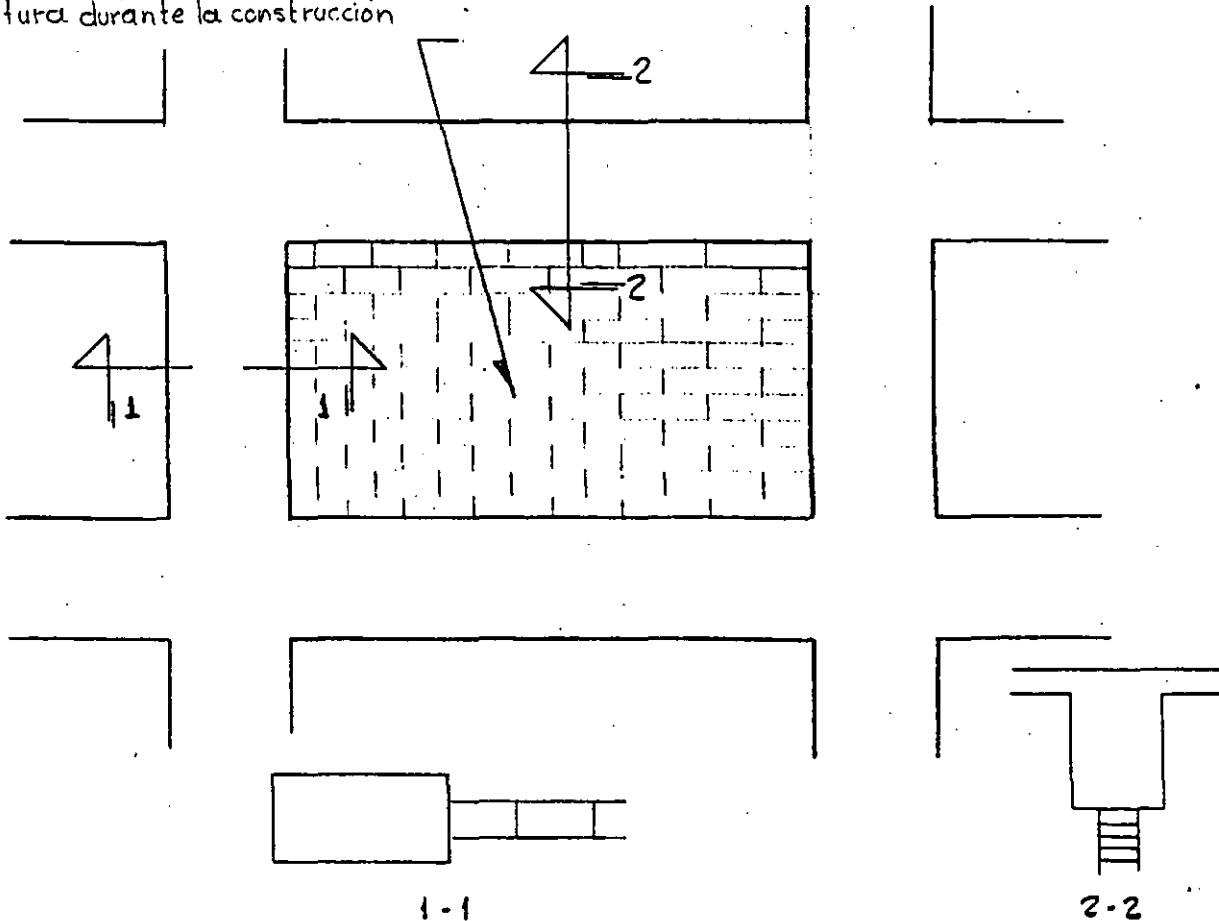
ESTRUCTURAS EN QUE LA DESCOMPOSICION EN MARCOS PLANOS NO ES CLARA



1-1 DIMENSIONES EMPLEADAS EN EL  
1'-1' ANALISIS DE LA CONSTRUCCION

2-2 DIMENSIONES DE CONSTRUCCION PROPUESTAS  
2'-2' EN LOS PLANOS SIN MODIFICAR EL ANALISIS

Muro de mampostería ligado a la estructura durante la construcción



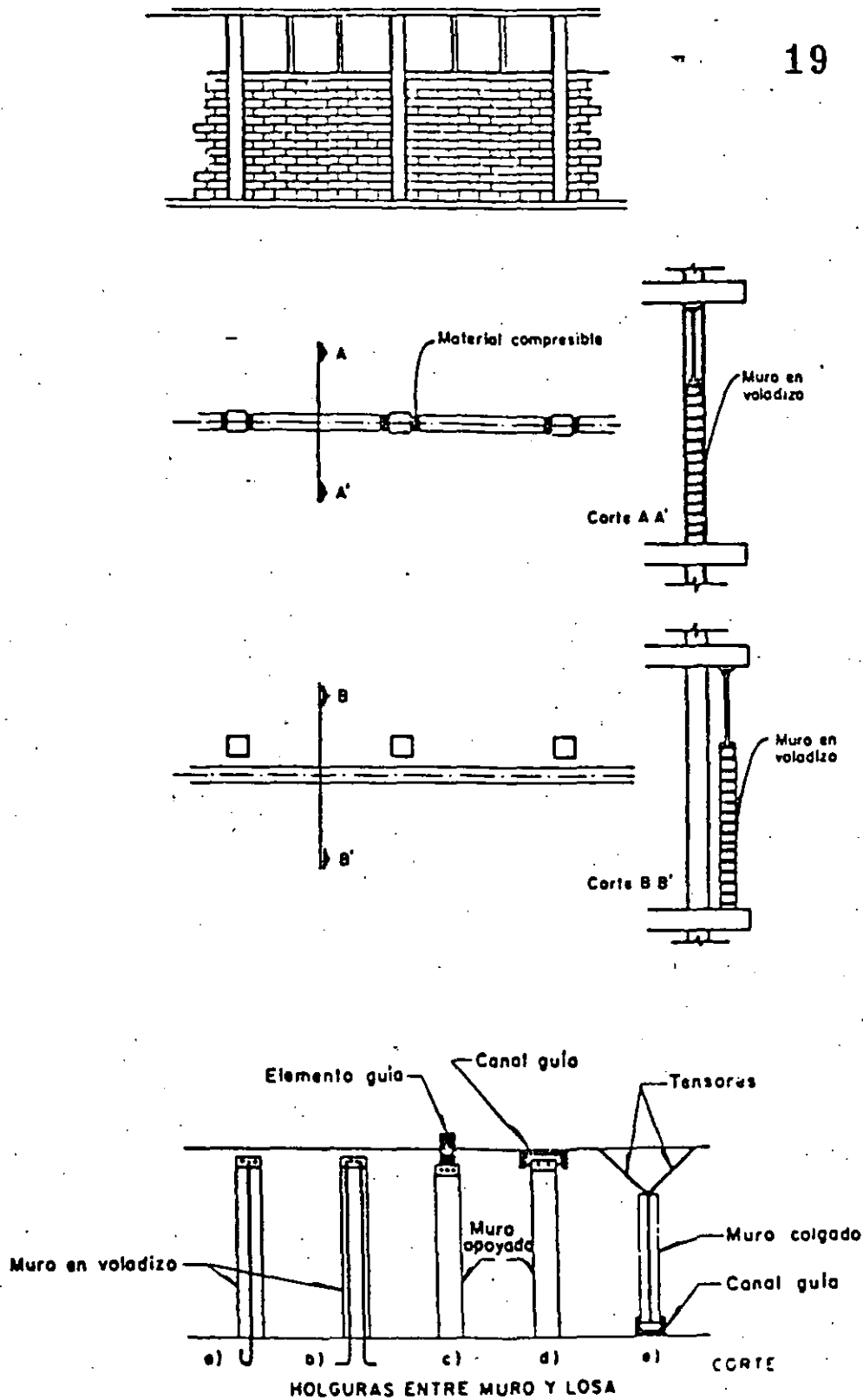
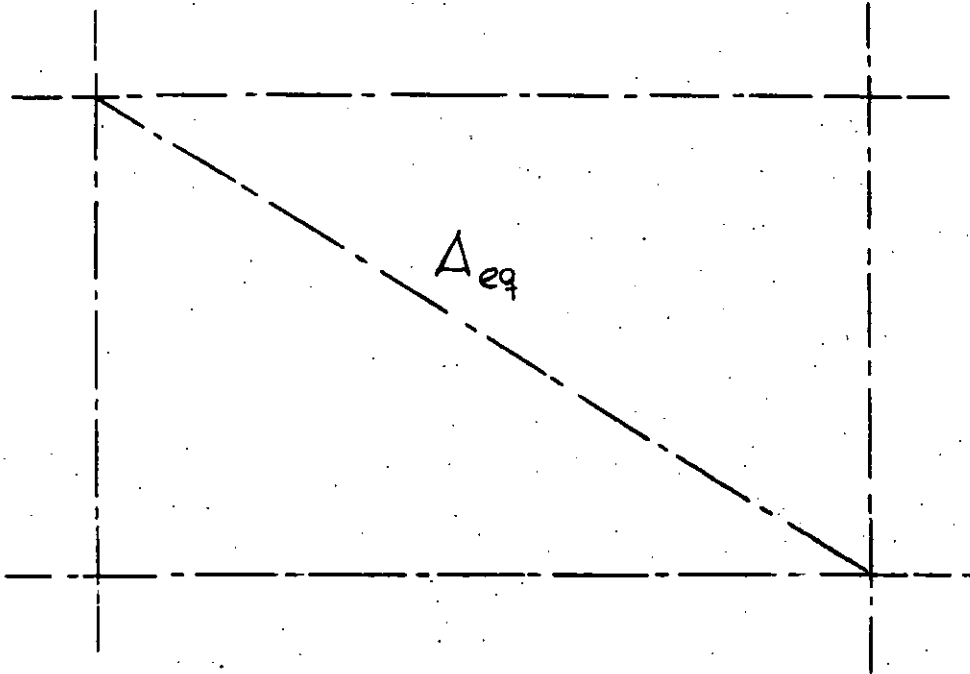
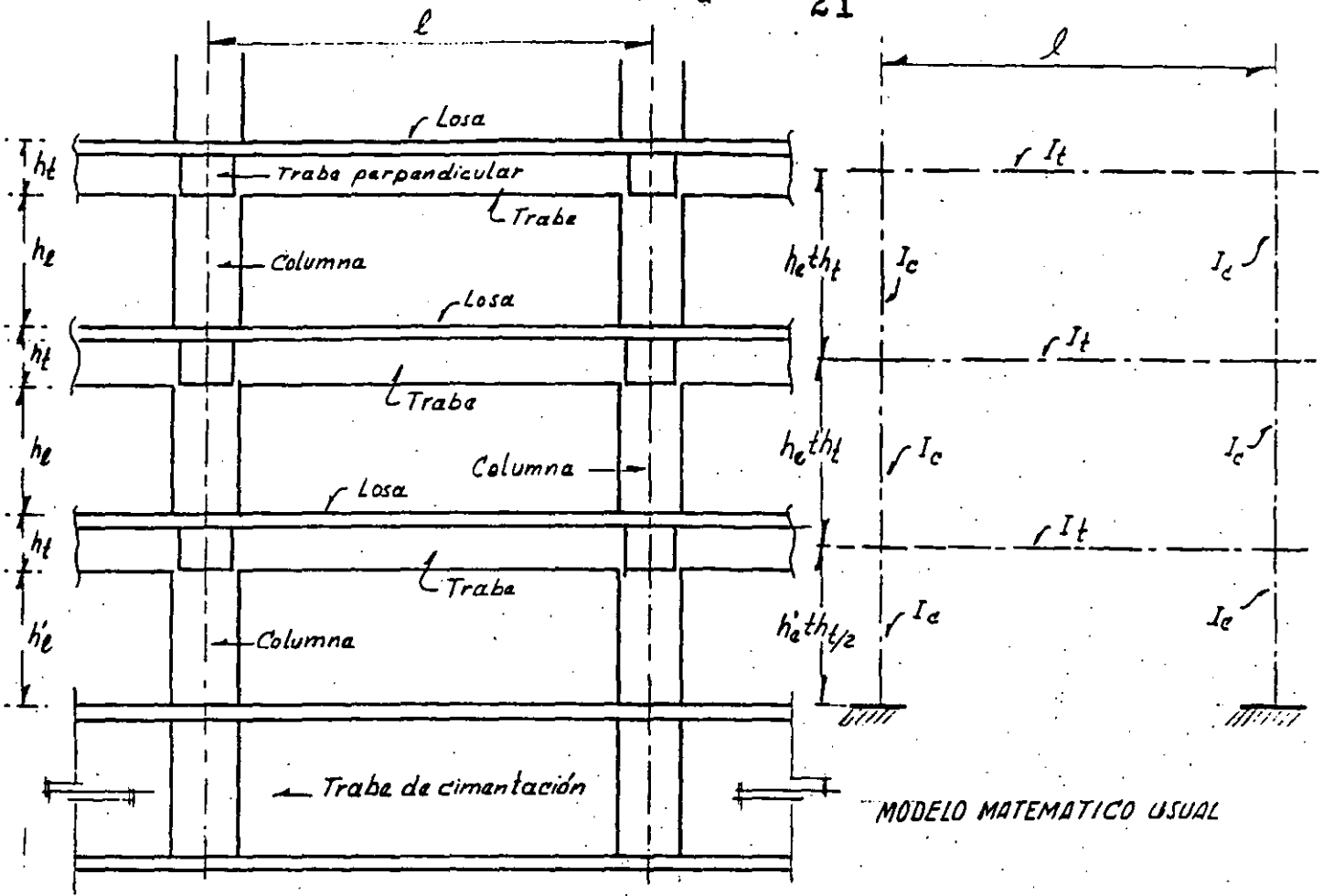


Fig 38. Posibles soluciones a muros que no forman parte integrante de la estructura

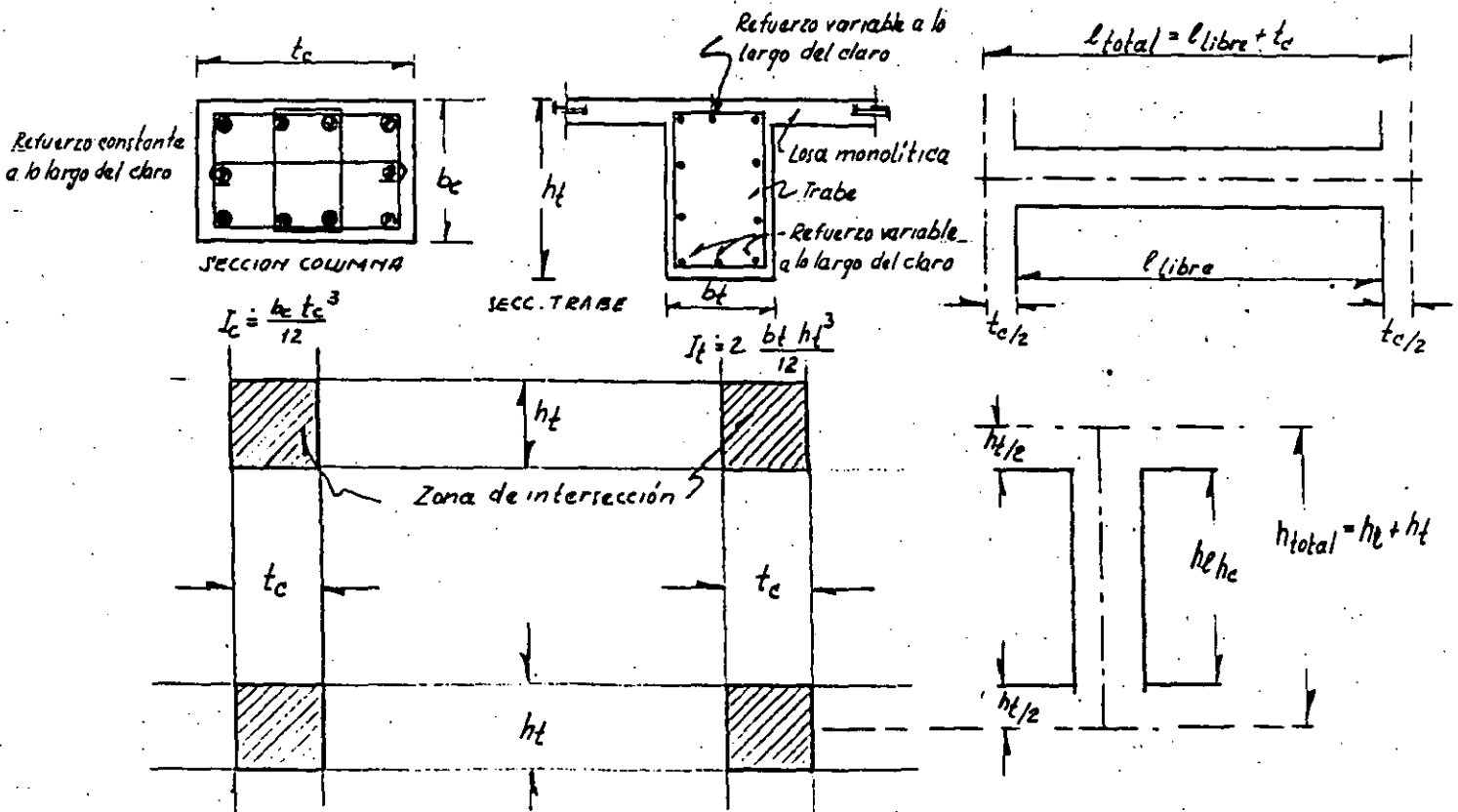


MODELO MATEMATICO PARA TOMAR EN CUENTA  
UN MURO DE MAMPOSTERIA LIGADO A LA ESTRUCTURA

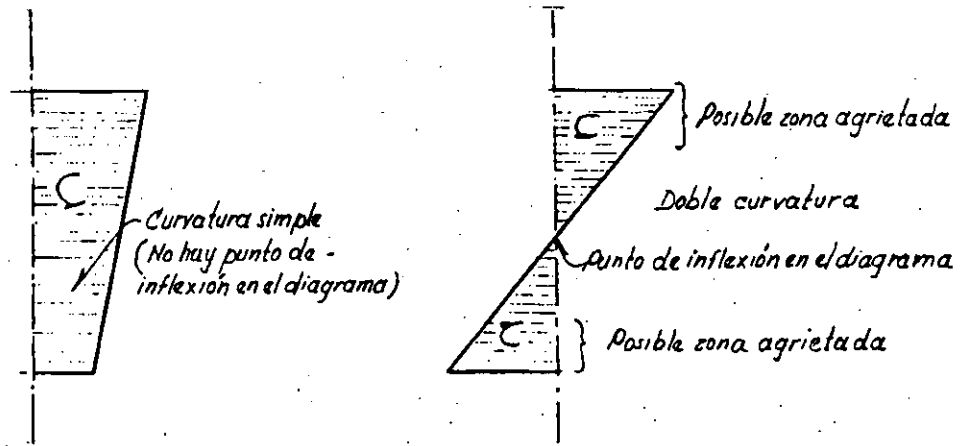


ESTRUCTURA REAL

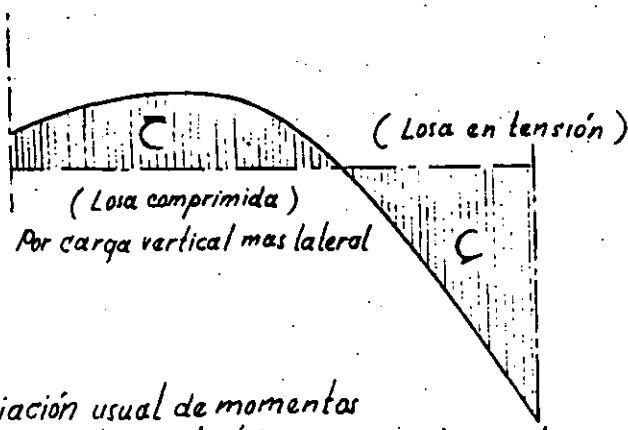
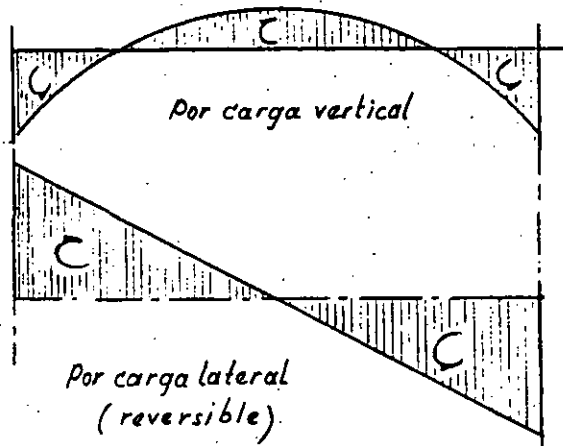
MODELO MATEMATICO USUAL





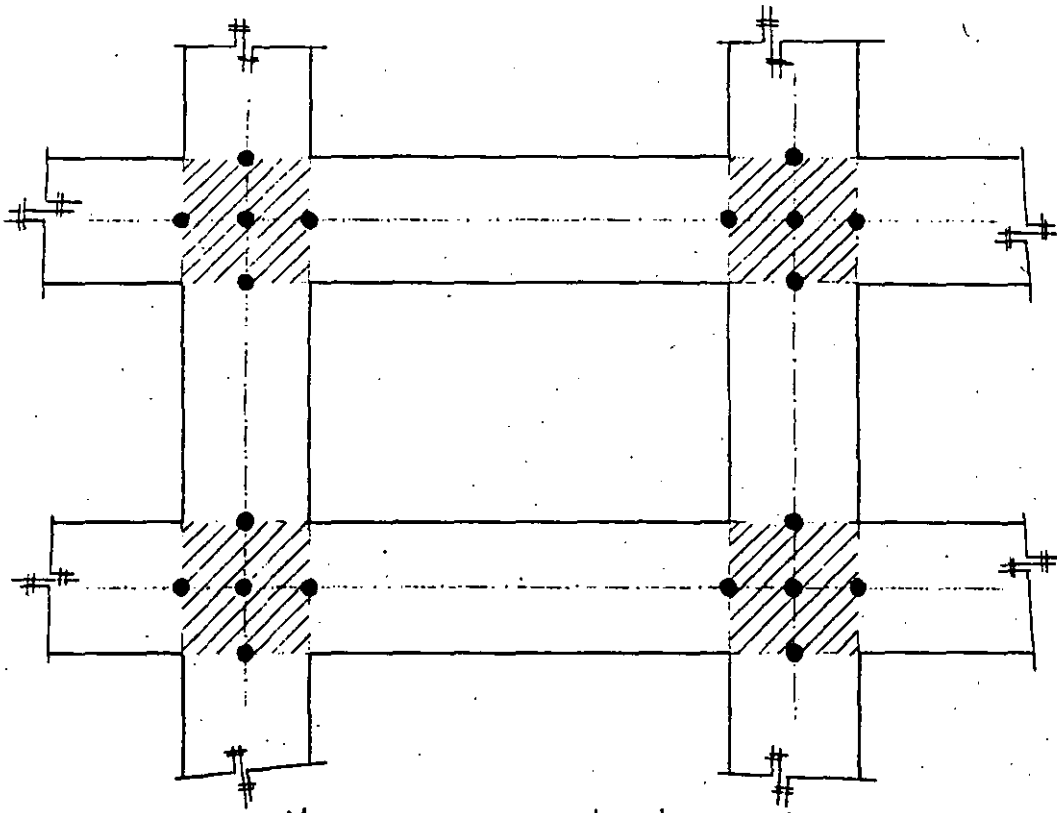


Variación usual de los momentos flexionantes en columnas (carga vertical o lateral)

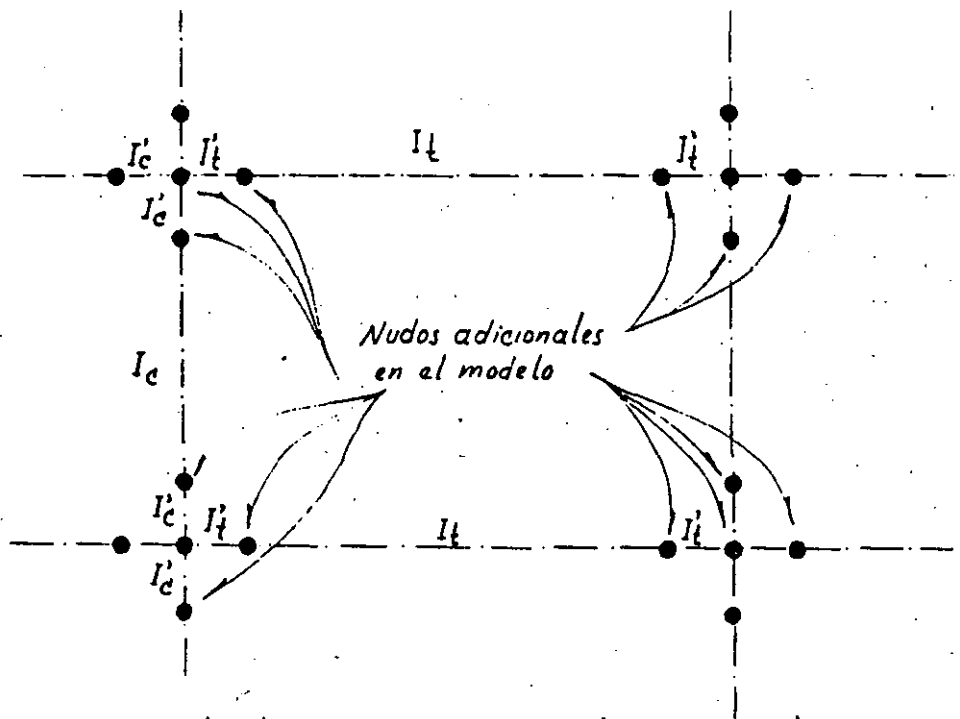


Variación usual de momentos flexionantes en traves

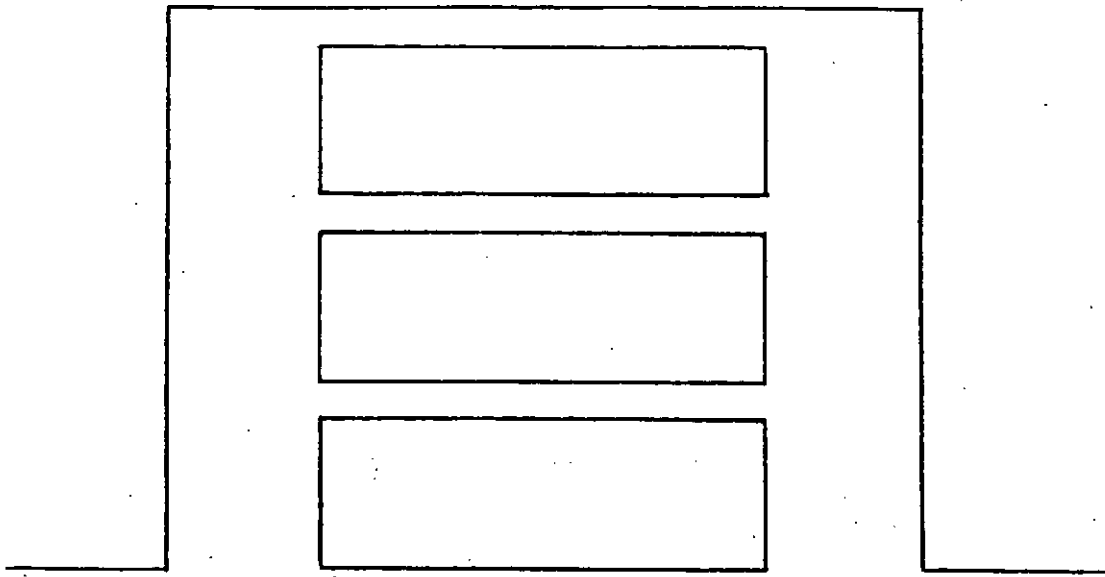
Efecto de la variación de momentos flexionantes a lo largo del claro de una barra estructural



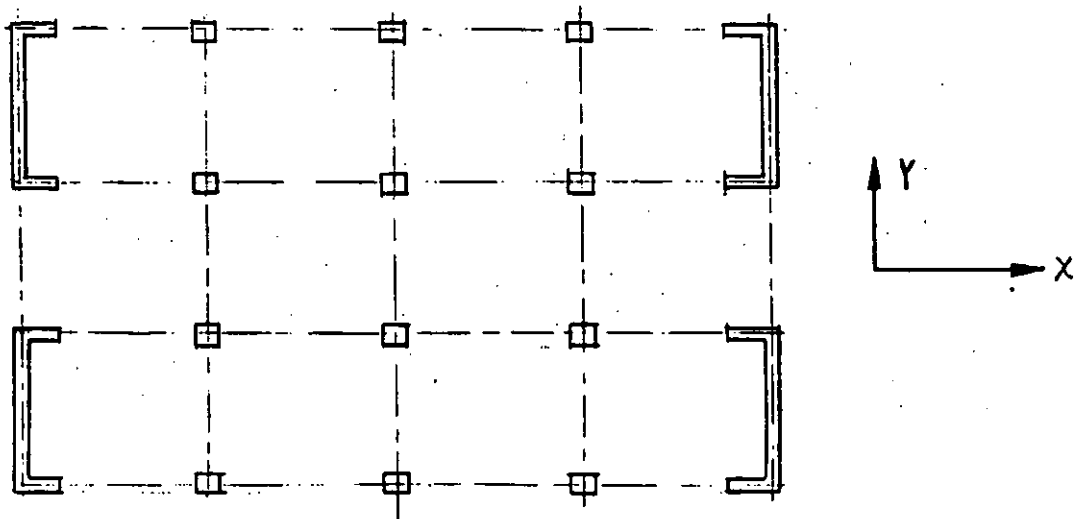
Marco con zonas de intersección entre traves y columnas importantes



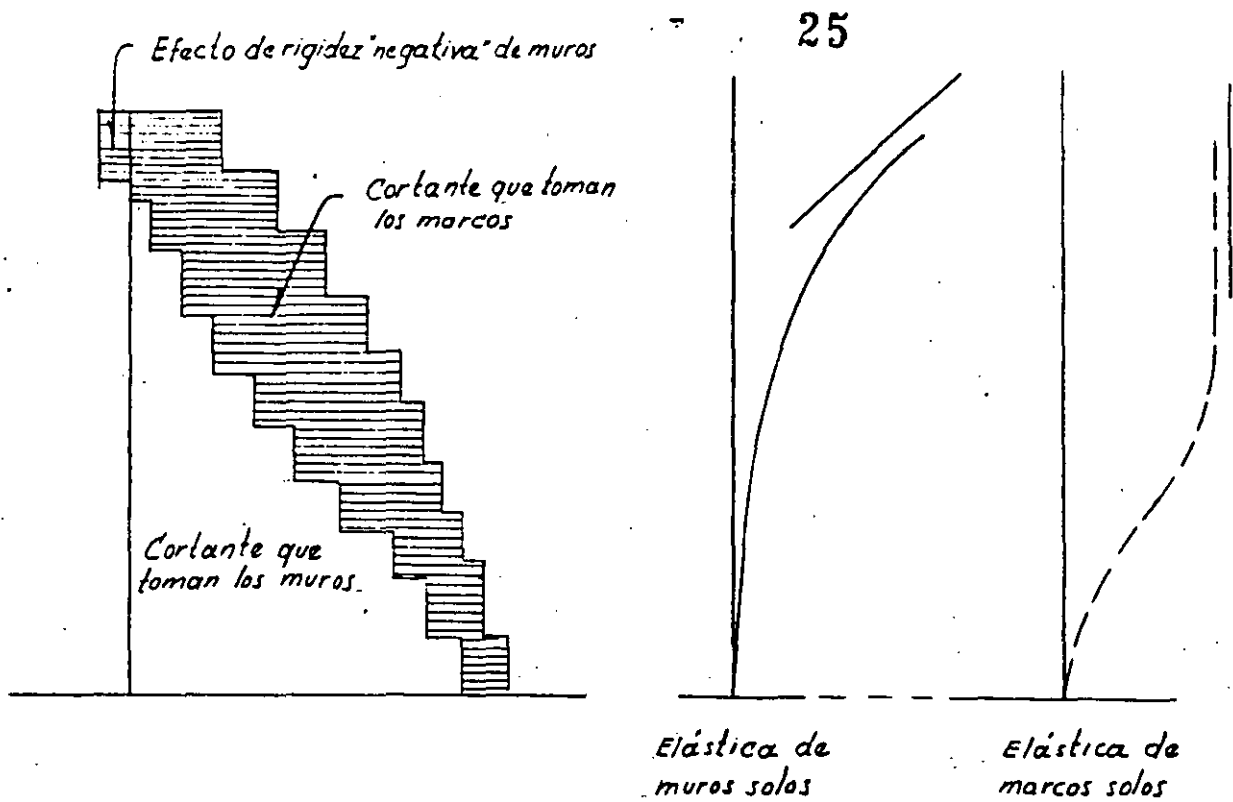
Modelo con nudos adicionales y diferentes propiedades en las barras



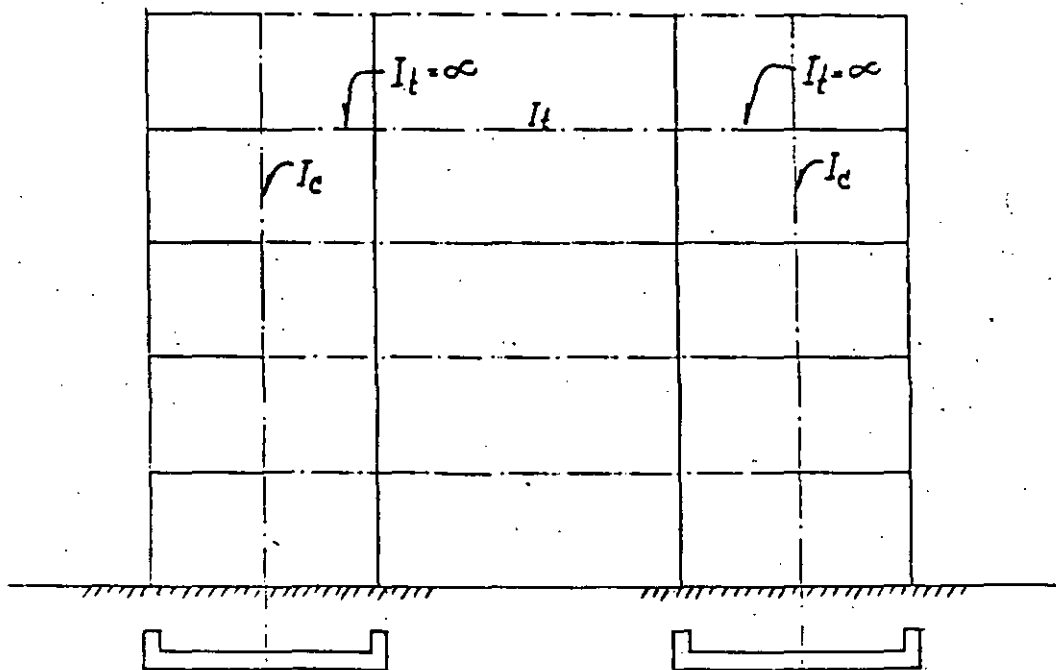
VOLADIZO DISFRAZADO DE MARCO



EDIFICIO CON MARCOS Y MURDOS DE RIGIDEZ EN DIRECCION Y



Distribución de fuerzas cortantes laterales entre marcos y muros y elásticas sin interacción.



Idealización de muros como columnas anchas



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**XVIII CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA**

**MODULO III**

**DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS**

*Del 3 al 13 de julio de 1992*

**RECOMENDACIONES PARA EL DISEÑO SISMICO CON BASE  
EN LA EXPERIENCIA DE LOS SISMOS DE  
SEPTIEMBRE DE 1985**

**TEMA**

**ESTRUCTURACION DE EDIFICIOS**

**M. EN C. ENRIQUE DEL VALLE C.**

**JULIO - 1992**

# RECOMENDACIONES PARA EL DISEÑO SISMICO CON BASE EN LA EXPERIENCIA DE LOS SISMOS DE SEPTIEMBRE DE 1985\*

Enrique del Valle Calderón\*\*

## RESUMEN

*Se analiza el proceso de cálculo que debe seguirse para diseñar una estructura contra sismos, discutiendo las incertidumbres existentes en la estimación del sismo de diseño y la elaboración de los modelos matemáticos. Con base en lo ocurrido durante los sismos de septiembre, se evalúan también las recomendaciones sobre estructuración propuestas por diversos autores y la influencia de la configuración de los edificios en su respuesta sísmica.*

## SUMMARY

*In this paper, the calculation process that must be undertaken to design a structure against earthquakes is analyzed. At the same time, the uncertainties in the estimation of the design seism and in the elaboration of mathematical models are discussed. Considering the events resulting from the september earthquakes, the construction recommendations proposed by several authors and the influence of the configuration of buildings on its seismic response are also evaluated.*

\* Ponencia presentada en el Seminario IMCYC sobre Evaluación y Reparación de Estructuras de Concreto Dañadas por Sismos, el 19 de noviembre de 1985.

\*\* Ingeniero Civil, UNAM. Maestro en Ciencias, Universidad de Illinois. Profesor, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM.

- a) Poco peso.
- b) Sencillez, simetría y regularidad tanto en planta como en elevación.
- c) Plantas poco alargadas y elevaciones de esbeltez reducida.
- d) Uniformidad en la distribución de resistencia, rigidez y ductilidad.
- e) Hiperestaticidad y líneas escalonadas de defensa estructural.
- f) Formación de articulaciones plásticas en elementos horizontales más que en los verticales.
- g) Propiedades dinámicas adecuadas al terreno en que se desplanta la estructura.
- h) Congruencia entre lo proyectado y lo construido.

La razones de estas recomendaciones son las siguientes:

- a) Las fuerzas que se generan en una estructura durante un sismo se deben a la inercia que tienen las masas para seguir el movimiento, por lo que, cuanto más pequeñas sean las masas, menores serán estos efectos. Es recomendable, por lo tanto, reducir sobre todo el peso de elementos no estructurales que no contribuyan a la resistencia, como por ejemplo acabados, muros divisorios, fachadas, etc., y buscar que las mayores cargas se ubiquen en los niveles inferiores.
- b) Mientras más sencillo, simétrico y regular sea un edificio, más fácil será modelarlo. Asimismo, serán más realistas las hipótesis que se hagan con respecto a su comportamiento. Para un edificio complejo es difícil hacer hipótesis de cálculo razonables y, por lo tanto, su comportamiento será incierto; además, será más complicada su construcción. La experiencia ha demostrado que las estructuras sencillas, simétricas y regulares son las que sufren menos daños en temblores excepcionales o de mediana intensidad.
- c) La razón para limitar la longitud de las plantas es que existe la posibilidad de que el movimiento no sea el mismo a todo lo largo de una estructura, y esto causa en ella efectos que no es

fácil determinar, debido a movimientos desfasados de los apoyos. Por otra parte, los efectos de la temperatura y la contracción también hacen recomendable limitar la longitud de las construcciones a sólo 50 m aproximadamente, a menos que se tomen precauciones especiales para reducir dichos efectos.

La esbeltez excesiva en un edificio ocasiona complicaciones en el análisis y el diseño, pues es necesario tomarla en cuenta en los modelos matemáticos. Además, durante un sismo, el exceso de esbeltez es causa de grandes deformaciones que provocan el pánico entre sus ocupantes. Por lo tanto, se recomienda que la altura de los edificios no sea más de 3 ó 4 veces la menor dimensión de su planta.

- d) La uniformidad en la distribución de la resistencia, rigidez y ductilidad también mejora notablemente el comportamiento de las estructuras. Las discontinuidades producen ampliificaciones dinámicas importantes que no son fáciles de predecir con modelos matemáticos simples. Si es necesario que la estructura no sea uniforme, habrá que tomar en cuenta, mediante modelos más complicados, los efectos dinámicos de esta falta de uniformidad.
- e) y f) Las estructuras hiperestáticas tienen más defensa que las isostáticas. Paradójicamente, esta recomendación se contrapone a la del inciso b en cuanto a la sencillez, pues las isostáticas son más simples; sin embargo, durante sismos excepcionales se comportan mejor las hiperestáticas debido a que, para llegar al colapso, es necesario que haya mayor número de articulaciones plásticas. En este sentido, se ha visto que la formación de articulaciones plásticas en las trabes, en el caso de estructuras porticadas, es más favorable, puesto que la demanda de deformación (ductilidad) en ellas, se reparte entre más secciones. Cuando las articulaciones plásticas se forman en los extremos de las columnas de un entrepiso, mientras el resto de la estructura permanece en estado elástico por no haber uniformidad en la distribución de la resistencia (punto d), la ductilidad global que puede lograrse es baja, y es fácilmente superada por la demandada en temblores extraordinarios; por lo tanto es muy probable que sobrevengan colapsos parciales o totales, como los que se observaron el 19 de septiembre. La ductilidad local que alcanzan los elementos a flexión pura (vigas) es mucho mayor que la que pueden desarrollar los elementos sometidos a flexo-

compresión (columnas). (Véase Dowrick o Bazán y Meli.)

Es recomendable la existencia de líneas de defensa escalonadas, pero complica el cálculo de la estructura, pues hay que prever lo que puede pasar al ir fallando cada una de esas defensas. En un edificio esto se logra colocando muros de resistencia reducida que limitan los desplazamientos, disipan los efectos de un sismo de baja o mediana intensidad y de ocurrencia más frecuente, y fallan como fusibles, absorbiendo energía, durante temblores más intensos. Los efectos de la falla deben tomarse en cuenta en un análisis de esa estructura sin los muros, sometida a un sismo violento.

g) El temblor del 19 de septiembre hizo evidente la conveniencia de esta recomendación. Aunque es muy difícil saber con precisión si las propiedades dinámicas de un terreno y de la estructura que se va a desplantar sobre él son adecuadas o no, se ha comprobado que el comportamiento de estructuras rígidas en terrenos blandos, o de estructuras flexibles en terrenos duros es más favorable, debido a la poca probabilidad de que se amplifiquen los efectos del movimiento del suelo por resonancia. Al analizar la forma de los espectros de diseño que presenta el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal para ambos tipos de terreno, se observa claramente que, en suelo firme, los mayores efectos tienen lugar cuando el periodo de vibración de la estructura está comprendido entre 0 y 0.5 segundos (estructuras rígidas), mientras que en terreno blando esto ocurre en periodos entre 0.8 y 3.3 segundos (estructuras flexibles). Las máximas aceleraciones de diseño eran, respectivamente, 0.16 g y 0.24 g; esto es, se sabía que el suelo blando conduce a mayores respuestas que el duro. Sin embargo, se pensaba que las arcillas no serían capaces de producir aceleraciones de respuesta mucho mayores que las propuestas, y había incluso ingenieros que consideraban que las aceleraciones sugeridas por el Reglamento eran exageradas. El sismo del 19 de septiembre demostró que las arcillas sí pueden generar aceleraciones mucho mayores, ya que en el acelerógrafo instalado en terrenos de la Secretaría de Comunicaciones y Transportes se midieron aceleraciones del terreno de 0.17 g en dirección E-W, con un periodo dominante de 2 segundos. Al procesar ese registro para obtener ordenadas de respuestas de aceleración máximas, se encontró

que se alcanzaron valores de 1.0 g para estructuras con periodos de 2 segundos, y amortiguamientos de 0.05 con respecto al crítico; o sea que se obtuvieron respuestas máximas cuatro veces mayores que las estipuladas por el Reglamento para ese tipo de estructuras, lo que explica por qué los daños más graves y el mayor número de colapsos parciales o totales se registraron precisamente en estructuras cuyas alturas variaban entre 6 y 15 pisos, ya que para ellas no se cumplía la recomendación sobre las propiedades dinámicas. Estructuras similares desplantadas sobre terreno firme no sufrieron daños. Tampoco en las estructuras rígidas, de pocos niveles y muros de carga, desplantadas en la zona blanda se observaron problemas importantes, con excepción de algunas casas y vecindades muy deterioradas por los efectos de hundimientos diferenciales y sismos previos. Las ordenadas de los espectros de diseño que deben aplicarse a terreno compresible y de transición fueron significativamente incrementadas en las normas de emergencia publicadas en octubre de 1985; se modificaron también ciertos aspectos sobre ductilidad y resistencia, para tratar de evitar problemas futuros. Se está trabajando en la elaboración de un nuevo reglamento en el que, seguramente, se incluirán medidas que conduzcan a la obtención de estructuras más seguras.

h) Todo lo que se refiere a la congruencia entre lo proyectado y lo construido se analizará más adelante.

Una vez definidas la estructuración y configuración de la estructura, para lo cual es necesaria la interacción entre el responsable del proyecto arquitectónico y el del proyecto estructural, en la tarea de estimar las secciones preliminares y definir las cargas que deben considerarse en función del uso al que se va a destinar el edificio, se procede a la elaboración de modelos matemáticos para tratar de predecir el comportamiento mecánico del sistema suelo-cimentación-estructura, aspecto que generalmente se restringe, por desconocimiento del método o por limitaciones económicas y de tiempo, a un modelo de la estructura únicamente, en el que se la supone empotrada en su base, lo que no siempre es cierto.

Al elaborar el modelo de la estructura se hacen nuevas simplificaciones pues, aunque un edificio es tridimensional, usualmente se modela en dos dimensiones, también por razones económicas y de tiempo. En dicho modelo existirán, además, serias incerti-



dumbres con respecto a los parámetros que deben emplearse, tanto para las propiedades elásticas de los materiales como para las propiedades geométricas de los elementos que integran la estructura, para la eficiencia de las conexiones, para la influencia de las partes del edificio que no se consideran estructurales y para algunas cargas que deben aplicarse, como la de sismo por ejemplo.

En la actualidad es cada vez más frecuente el empleo de computadoras para este objeto, y los resultados que éstas arrojan suelen tomarse como exactos; es preciso recordar que en computación se considera que "si entra basura, sale basura", por lo que vale la pena realizar estudios paramétricos que tomen en cuenta las incertidumbres que existan en la evaluación de módulos de elasticidad, áreas, momentos de inercia, etc., y calcular el efecto de posibles valores extremos en los resultados. El objetivo de esta etapa del proceso es la obtención de elementos mecánicos de diseño: momentos flexionantes y de torsión, fuerzas cortantes y fuerzas normales, así como desplazamientos de la estructura; estos elementos se compararán después con los correspondientes a estados límite definidos anteriormente con base en el Reglamento o en el uso a que se va a destinar la estructura, recordando siempre que, en general, los reglamentos recomiendan valores mínimos satisfactorios, pero que determinadas construcciones pueden requerir valores más conservadores, en función de su destino.

Cuando se han determinado las acciones de diseño y definido los estados límite para los que se debe diseñar, se procede a revisar si las dimensiones estimadas preliminarmente conducen a un comportamiento satisfactorio de la estructura, desde el punto de vista de la resistencia, verificando que el refuerzo requerido en el caso de estructuras de concreto reforzado no sea excesivo ni ocasione problemas constructivos en el momento del armado y colocación del concreto. También se debe hacer una revisión desde el punto de vista de la rigidez, verificando que los desplazamientos sean adecuados, es decir, lo suficientemente pequeños para que no se dañen los elementos no estructurales; y corroborando, además, que los efectos  $P - \Delta$  no sean importantes, o sea que los momentos adicionales por efecto de las cargas verticales multiplicadas por los desplazamientos laterales no provoquen problemas de inestabilidad y, sobre todo, que estos desplazamientos no produzcan pánico entre los ocupantes.

Para verificar la resistencia se emplean por lo general fórmulas semiempíricas que tienen cierto nivel de confiabilidad, según sea la sollicitación de que se

trate. Por ejemplo, están mejor definidas las fórmulas que predicen la resistencia a la flexión que las que estiman la resistencia al cortante o a la flexo-compresión. Por lo general, estas fórmulas son propuestas por los reglamentos. En el caso del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal se cuenta con Normas Técnicas Complementarias para el diseño de estructuras metálicas, de concreto reforzado, de mampostería o de madera. En las normas de emergencia emitidas después de los sismos de septiembre se modificaron las fórmulas para estimar la resistencia de elementos de concreto reforzado sujetos a flexocompresión (columnas y muros) tomando en cuenta la gran cantidad de casos de falla que se observaron.

Si en la revisión de las dimensiones preliminares se detectan insuficiencias o posibilidad de un comportamiento anormal, será preciso modificarlas y revisar qué efectos tendrá el cambio en los elementos mecánicos y en los desplazamientos calculados, ya que cualquier alteración de las dimensiones influirá en los parámetros empleados para el análisis original y en el modelo matemático. En ocasiones es necesario modificar drásticamente la estructuración y, por lo tanto, repetir el análisis.

Si los resultados del análisis y del diseño preliminar son satisfactorios, se procede a elaborar el diseño final, detallando sobre todo aspectos que pueden presentar problemas durante la construcción y haciendo hincapié en la forma en que se debe ejecutar la obra para que las hipótesis de cálculo no se alteren. Es muy común que el ingeniero estructurista detalle de manera más o menos clara todo lo que consideró estructural, pero que olvide detallar claramente cuáles elementos no son estructurales, de acuerdo con sus hipótesis de cálculo, y la forma en que deben construirse estos elementos. Esto es particularmente importante en el caso de muros de relleno, divisorios o de colindancia, contruidos con mampostería de tabique, pues suelen tener bastante rigidez y, si no se desligan adecuadamente de la estructura, alteran en forma tan radical el modelo matemático empleado, que a veces no hay congruencia entre lo calculado y lo construido. Cuando se llega a este límite, el comportamiento de la estructura resulta difícil de predecir, ya que cambia totalmente la forma en que las fuerzas son resistidas y el modo en que se desplaza la estructura. En el mejor de los casos la colaboración de elementos teóricamente "no estructurales", pero mal desligados de la estructura, evita el colapso o los daños importantes en un edificio; sin embargo, en otras ocasiones, dicha colaboración es la causa de fallas graves o derrumbe total o parcial de la es-

7


estructura. Por ejemplo, la colaboración de los muros de colindancia en edificios situados en esquina suele causar serios problemas por las torsiones que se generan; asimismo, en edificios de departamentos con plantas bajas sin muros por estar destinadas a estacionamientos o comercios, es muy frecuente el fenómeno conocido como "piso suave" (véase la obra de Arnold), que propicia colapsos parciales, muchos de los cuales se observaron durante el sismo del pasado 19 de septiembre.

Por consiguiente, debe vigilarse que la construcción respete las hipótesis de cálculo y que se notifique al calculista si se modifica el proyecto en cuanto se refiere a la posición de las columnas y los muros, a las dimensiones de los elementos estructurales, a las resistencias especificadas para los materiales y al uso al que se va a destinar la construcción.

Muchas de las fallas observadas se pueden atribuir a este tipo de problemas que se derivan de la falta de comunicación.

Es preciso vigilar también que se respeten las disposiciones reglamentarias relativas a la separación entre edificios. Muchos derrumbes fueron ocasionados por el choque entre construcciones vecinas, que se debió tanto a la intensidad y duración del temblor como a la separación inadecuada que había entre ellas. Cabe señalar que la escasa separación en algunos casos fue causada por desplomes previos debidos al mal comportamiento de la cimentación.

De todo lo anterior se puede concluir que el sismo del 19 de septiembre no reveló muchos aspectos nuevos; la mayoría de los problemas ya se conocían. Sin embargo, lo que no se esperaba, y resultó fundamental, fue que los sismos en la Ciudad de México pudieran alcanzar aceleraciones tan importantes en el suelo blando.

Esperamos que las experiencias recogidas esta vez sean tomadas en cuenta para diseños futuros, y que las reparaciones de los edificios dañados se hagan con base en un proyecto cuidadosamente estudiado, en el que se consideren las causas de las fallas y se procure evitarlas mediante reestructuraciones adecuadas o desligando los elementos que propicien comportamientos no adecuados. 

---

*Este artículo está basado en la ponencia "Recomendaciones para el diseño sísmico con base en la*

*experiencia de los sismos de septiembre de 1935", que presentó el M. en C. Enrique del Valle Calderón en el Seminario IMCYC sobre Evaluación y Reparación de Estructuras de Concreto Dañadas por Sismos, efectuado el 19 de noviembre de 1985. Al final de dicho seminario se realizó una serie de preguntas y respuestas; a continuación se presentan las que corresponden a esta ponencia.*

1. *¿Qué opina de los análisis sísmicos que idealizan el suelo como resorte, en lugar de suponer que la estructura está empotrada al terreno?*

El modelo puede ser más racional, aunque no es fácil determinar la rigidez que debe asignarse al resorte. Depende del tipo de estructura y de suelo el que sea necesario refinar el modelo; por ejemplo, una estructura rígida en terreno blando da resultados diferentes, al modificar la condición de apoyo en el terreno, suponiendo resortes en vez de empotramientos; pero si está en terreno firme no cambian tanto los resultados.

2. *Si un edificio no tuvo daño ni pertenece a los casos previstos por las normas de emergencia, pero se analiza con el Reglamento 1976 y rebasa estados límite, ¿debe entonces ser reforzado conforme a las normas de emergencia?*

Si las deformaciones que tiene son excesivas, es probable que en cada sismo tenga daños en elementos no estructurales y podría pensarse, para evitar esto, en rigidizarla, aunque, en mi opinión, no necesariamente debería satisfacer las normas de emergencia, pues el costo de la rigidización sería mucho más alto.

3. *¿Cómo se podrían modelar los diferentes tipos de daños observados en una estructura, con el objeto de efectuar un análisis para predecir el comportamiento y/o el reforzamiento de estructuras dañadas?*

Al reforzar una estructura dañada, considero más recomendable evitar que siga absorbiendo efectos sísmicos, para lo cual se requiere usar otra estructura paralela, mucho más rígida, que tome todos los efectos sísmicos, y que se encuentre bien conectada a la original. Además, se debe revisar que las losas sean capaces de transmitir esos efectos al refuerzo, o adicionar colectores especiales para lograrlo.

4. *De acuerdo con la información captada, ¿se puede indicar alguna razón por la cual se descompertaron algunos edificios dañados durante los sismos de septiembre?*

Considero que hubo varias razones. En algunos casos, la influencia de construcciones vecinas provocó cambios bruscos en masa y rigidez, los cuales causaron amplifica-

ciones dinámicas importantes; en otros casos, había cambios de rigidez y/o de masa en la misma estructura; también pueden haber influido los efectos  $P - \Delta$  (cargas verticales actuando sobre los desplazamientos horizontales), ya sea por deformabilidad de la estructura misma o por rotación de la base sumada a lo anterior. Es posible asimismo que la respuesta en un modo superior resultara determinante.

**5. ¿Qué tipo de estructura y cimentación se recomienda para las diferentes zonas del Distrito Federal, y por qué?**

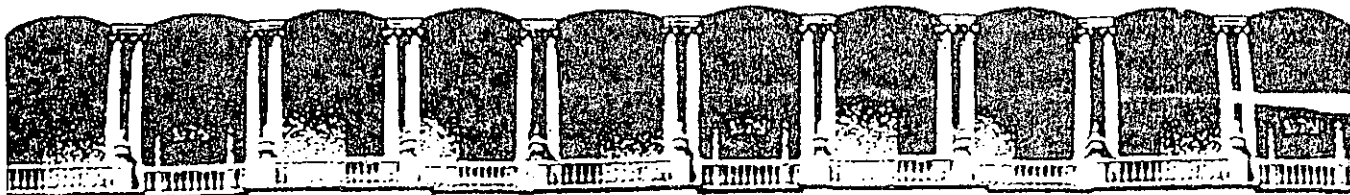
En general, se recomiendan estructuras rígidas en suelos blandos, y flexibles en suelos duros, para que las características dinámicas de la estructura (períodos) no coincidan con las del suelo. En este temblor se observó muy claramente el problema de resonancia, ya que los edificios con periodos cercanos a dos segundos (que fue el periodo dominante del movimiento del suelo en terreno blando) fueron los más afectados.

Por lo que respecta a tipos de cimentación, esto dependerá sobre todo de la capacidad de carga del terreno.

**6. Para revisar una estructura, dañada (con grietas en elementos estructurales, causadas por los movimientos de la propia estructura), si se está modelando dicha estructura para hacer un análisis por computadora ¿cómo se pueden o deben considerar estos elementos estructurales agrietados? es decir, ¿con qué valores de área, inercia, longitudes, etc.?**

*Si se han fabricado algunos aditivos epóxicos para concreto, que le confieran mayor resistencia a la tensión, y obviamente a la compresión ¿se considera recomendable su uso, de acuerdo con los resultados de pruebas de laboratorios?*

Para revisar una estructura, dañada o no, uno de los modelos matemáticos que deben suponerse debe tomar en cuenta el efecto de agrietamiento en las secciones, lo que reduce los momentos de inercia hasta en un 50 % en algunos casos; en torsión, por ejemplo, la rigidez se reduce hasta en un 90 %, según algunos autores. Considero que es un tema al que se ha prestado poca atención. En ciertas ocasiones, la inyección de resinas epóxicas en las grietas restituye las propiedades originales a la estructura, aunque a veces este procedimiento es difícil y, sobre todo, resulta costoso.



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**XVIII CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA**

**MODULO III**

**DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS**

*Del 3 al 13 de julio de 1992*

**EFFECTOS DE FUERZAS LATERALES**

**TEMA**

**ANALISIS DE ESTRUCTURAS**

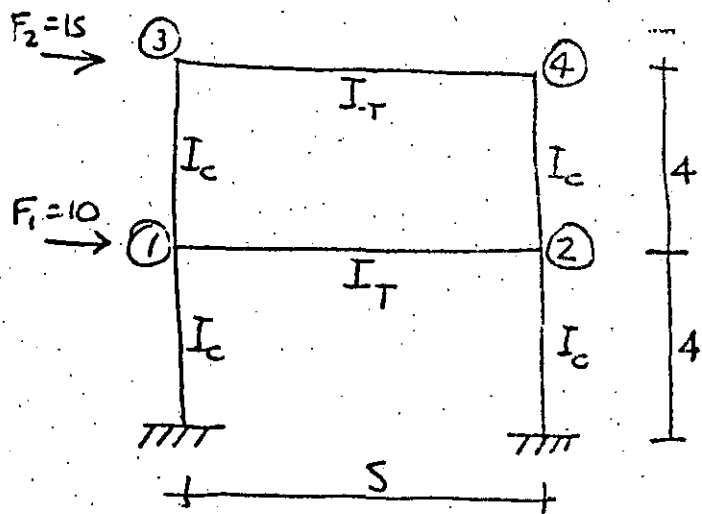
**DR. ROBERTO STARK**

**JULIO - 1992**



# EFECTOS DE FUERZAS LATERALES.

Ing. J. Domy K.



$$F = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 15 \end{Bmatrix}$$

$E = cte$   
 $I_T = 10I$   
 $I_c = I$

$[K] =$

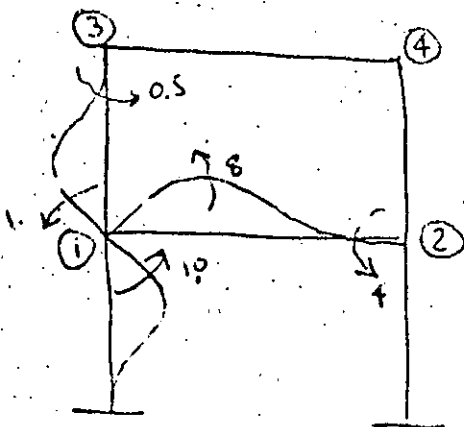
|       | $\phi_1$ | $\phi_2$ | $\phi_3$ | $\phi_4$ | $D_1$  | $D_2$  |
|-------|----------|----------|----------|----------|--------|--------|
| $M_1$ | 10       | 4        | 0.5      | 0        | 0      | 0.375  |
| $M_2$ | 4        | 10       | 0        | 0.5      | 0      | 0.375  |
| $M_3$ | 0.5      | 0        | 9        | 4        | -0.375 | 0.375  |
| $M_4$ | 0        | 0.5      | 4        | 9        | -0.375 | 0.375  |
| $F_1$ |          |          |          |          | 0.75   | -0.375 |
| $F_2$ |          |          |          |          | -0.375 | 0.375  |

Sim.

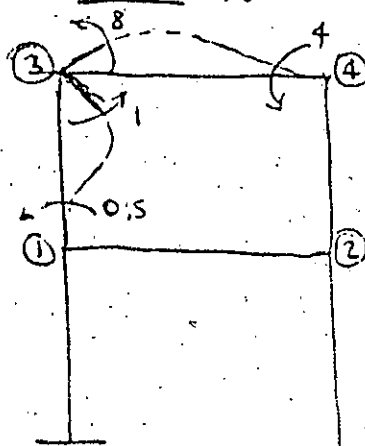
$\times EI$

$$[K][d] = \{F\} \quad ; \quad [K][I] = \{F\}$$

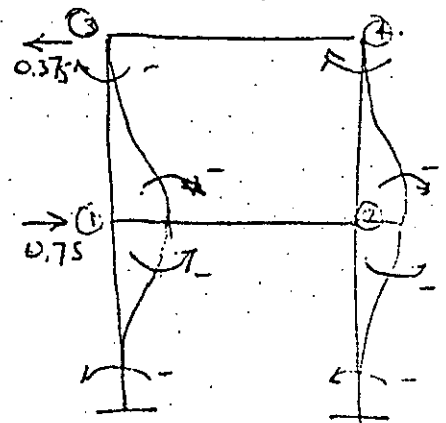
1<sup>er</sup> Col  $\phi_1 = 1$



3<sup>er</sup> Col  $\phi_3 = 1$



5<sup>o</sup> Col  $D_1 = 1$



(+)

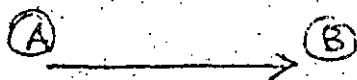
GAUSS - SEIDEL

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 0$$

3

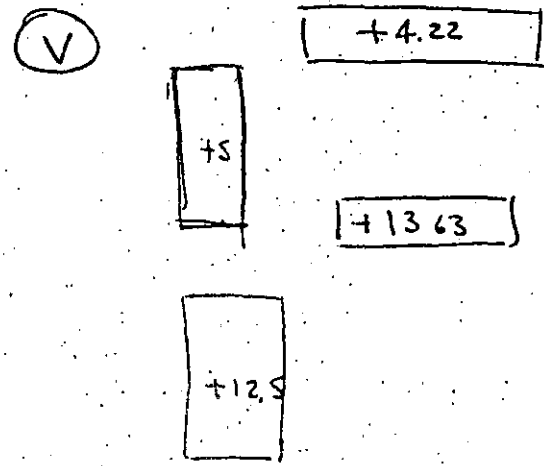
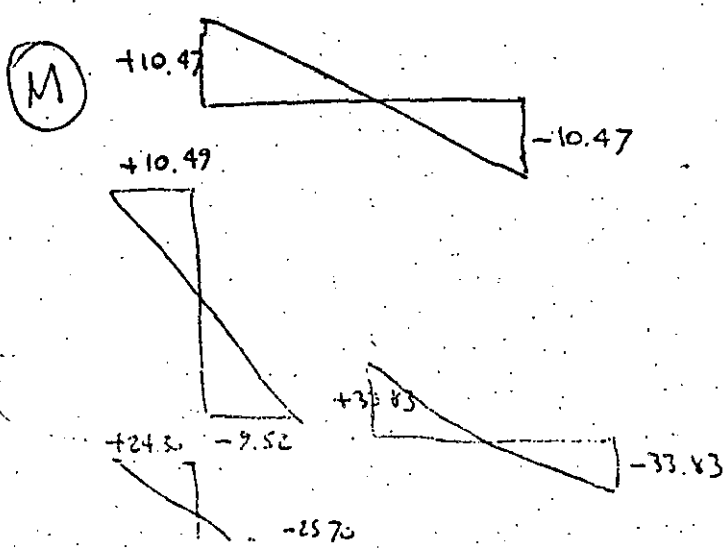
$$V_1 = 25; V_2 = 10$$

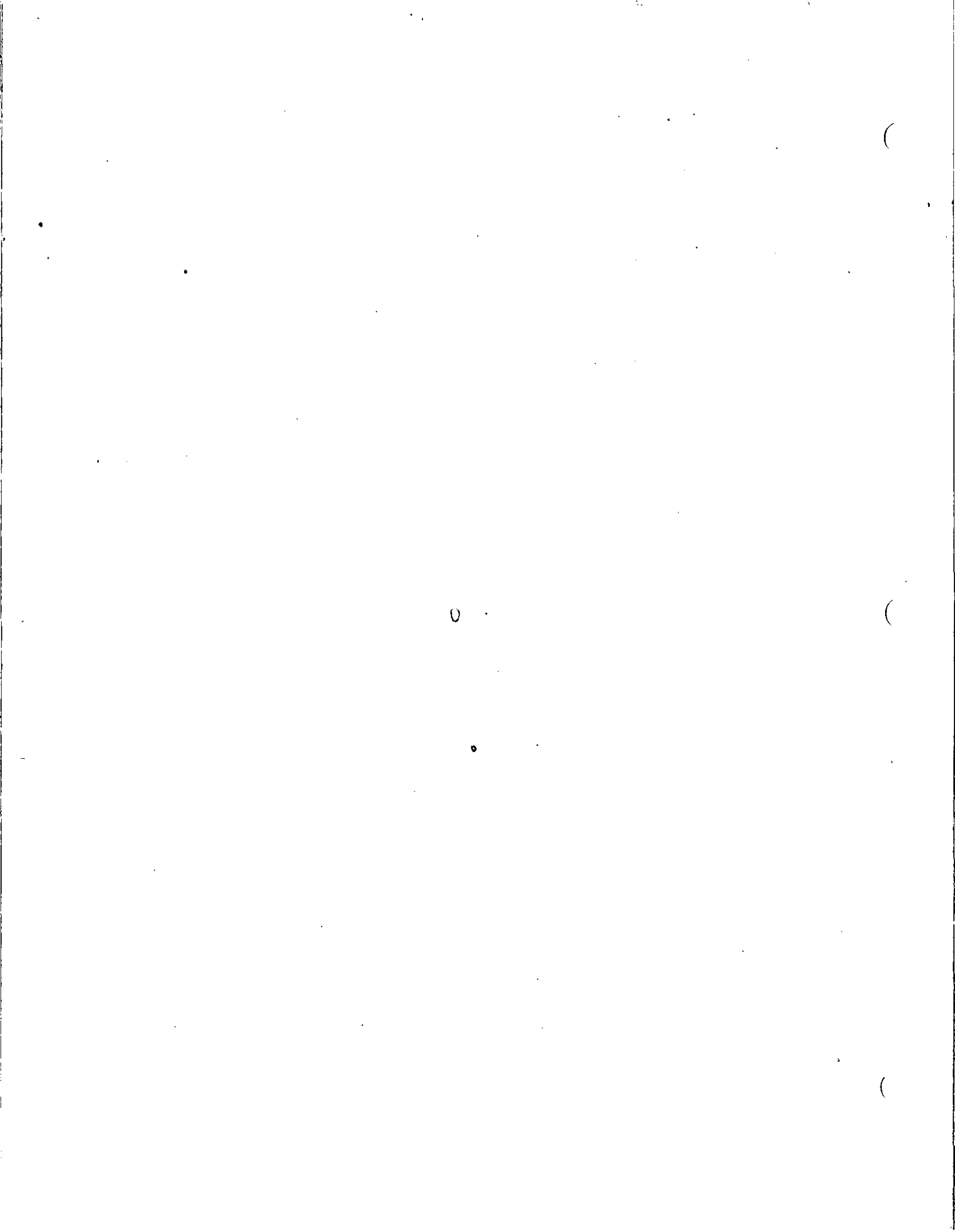
| $\phi_1$ | $\phi_3$ | $D_1'$  | $D_2'$  | I     |
|----------|----------|---------|---------|-------|
|          | -0.0357  | -0.0268 | -0.0268 | 0     |
| -0.0385  |          | 0       | -0.0268 | 0     |
| -2       | 0        |         | 0       | 66.67 |
| -2       | -2       | 0       |         | 26.67 |
| 0        | 0        | 66.67   | 26.67   |       |
| -2.501   | -0.672   | 71.669  | 33.013  |       |
| ---      | ---      | ---     | ---     |       |
| -2.819   | -0.872   | 72.306  | 34.050  |       |



Flex

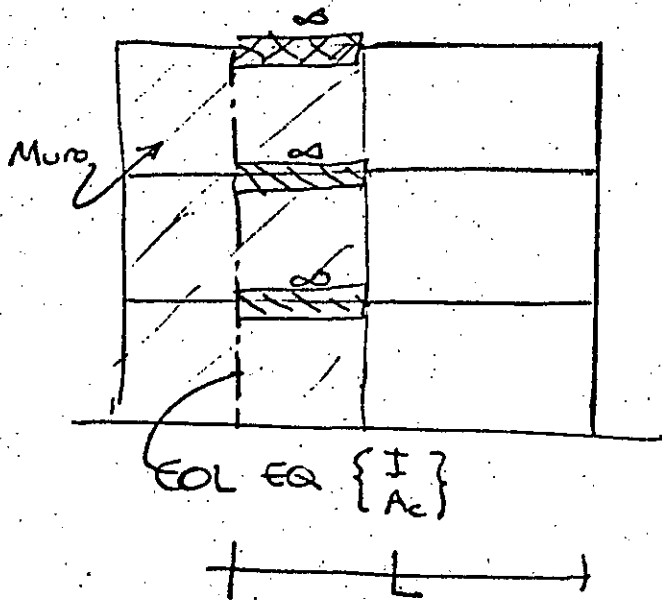
$$\begin{cases} M_A = -\frac{4EI}{L} \phi_A - \frac{2EI}{L} \phi_B - \frac{6EI}{L^2} \Delta \\ M_B = +\frac{2EI}{L} \phi_A + \frac{4EI}{L} \phi_B + \frac{6EI}{L^2} \Delta \end{cases}$$







Rigideces modificadas por tomar en cuenta deformaciones por cortante y por flexión.

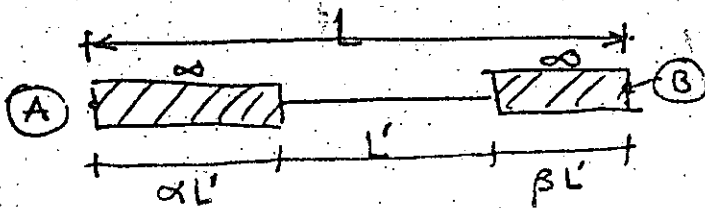


$$C = 6(1+\nu) \frac{I}{A_c L^2}$$

$$\frac{4EI(1+C)}{L(1+4C)}$$

$$\frac{2EI(1-2C)}{L(1+4C)}$$

$$\frac{6EI}{L^2(1+4C)} \quad ; \quad \frac{12EI}{L^3(1+4C)}$$



$$r_{AA} = t_1 \left( \frac{4EI}{L'} \right) \quad ; \quad r_{AB} = r_{BA} = t_3 \left( \frac{2EI}{L'} \right) \quad ; \quad r_{BB} = t_2 \left( \frac{4EI}{L'} \right)$$

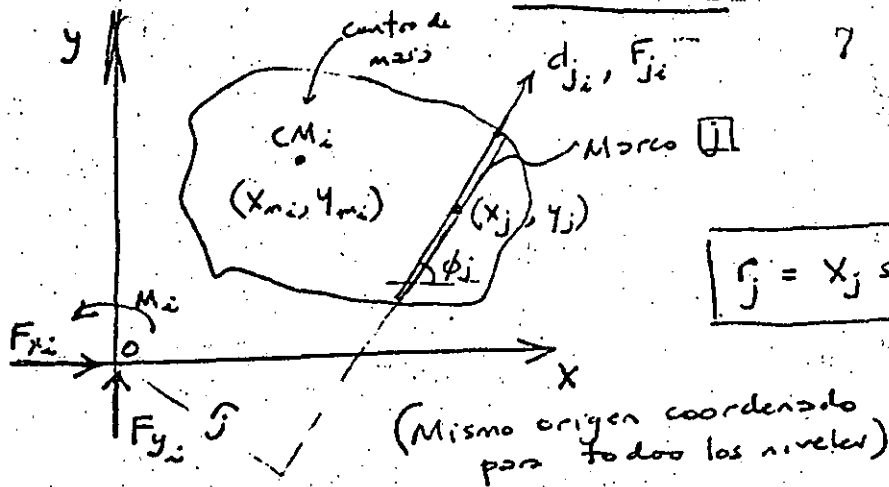
$$t_1 = \frac{L}{L'} \left[ \frac{1+C+3\alpha+3\alpha^2}{1+4C} \right]$$

$$t_2 = \frac{L}{L'} \left[ \frac{1+C+3\beta+3\beta^2}{1+4C} \right]$$

$$t_3 = \frac{L}{L'} \left[ \frac{1-2C+3\alpha+3\beta+6\alpha\beta}{1+4C} \right]$$

# TORSIÓN

7 Ing. J. Domy B



$$r_j = x_j \sin \phi_j - y_j \cos \phi_j$$

$$d_{ji} = u_i \cos \phi_j + v_i \sin \phi_j + \theta_i r_j$$

$$\underline{d}_j = \underline{M} \cos \phi_j + \underline{v} \sin \phi_j + \underline{\theta} r_j$$

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}; \quad \underline{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}; \quad \underline{\theta} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}; \quad \underline{d}_j = \begin{Bmatrix} d_{j1} \\ d_{j2} \\ \vdots \end{Bmatrix}; \quad \underline{F}_j = \begin{Bmatrix} F_{j1} \\ F_{j2} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

$$\underline{F}_x = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \\ \vdots \end{Bmatrix}; \quad \underline{F}_y = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ F_{y2} \\ \vdots \end{Bmatrix}; \quad \underline{M} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

$$\underline{F}_j = \underline{k}_j \underline{d}_j \quad \underline{F}_j = \underline{k}_j [\underline{u} \cos \phi_j + \underline{v} \sin \phi_j + \underline{\theta} r_j]$$

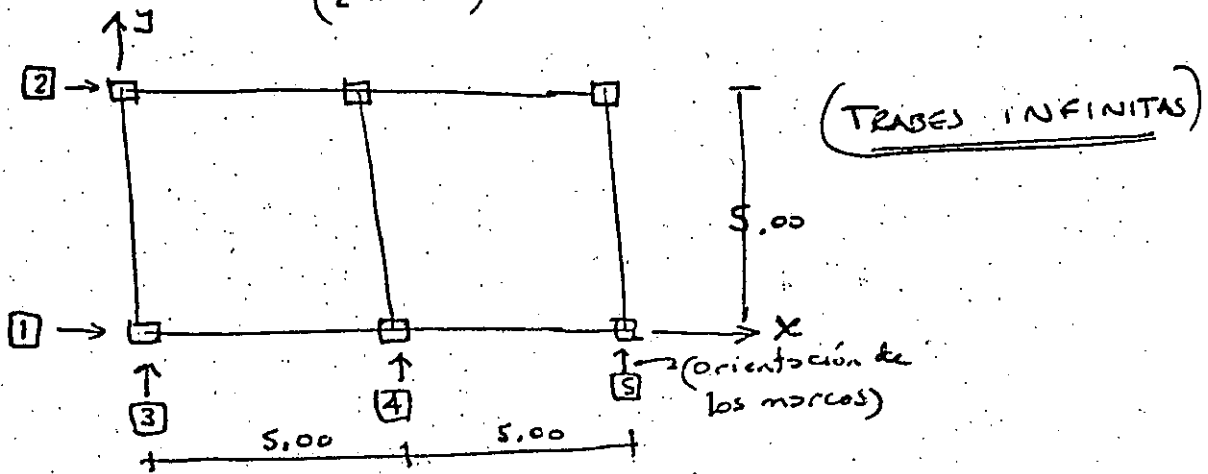
Por equilibrio

$$\underline{F}_x = \left[ \sum \underline{k}_j \cos^2 \phi_j \right] \underline{u} + \left[ \sum \underline{k}_j \cos \phi_j \sin \phi_j \right] \underline{v} + \left[ \sum \underline{k}_j r_j \cos \phi_j \right] \underline{\theta}$$

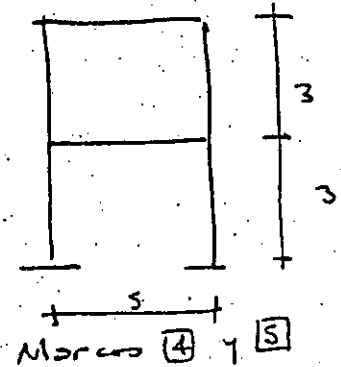
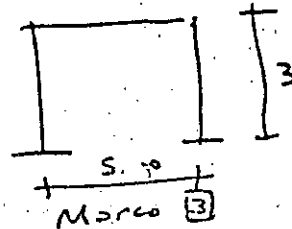
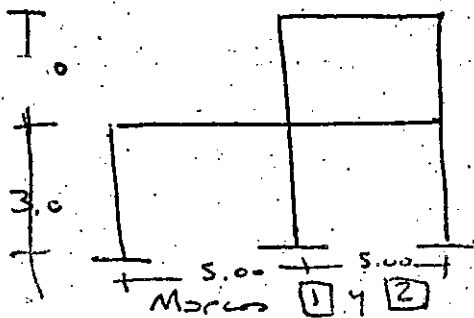
$$\begin{Bmatrix} \underline{F}_x \\ \underline{F}_y \\ \underline{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{xx} & \underline{k}_{xy} & \underline{k}_{x\theta} \\ \underline{k}_{yx} & \underline{k}_{yy} & \underline{k}_{y\theta} \\ \underline{k}_{\theta x} & \underline{k}_{\theta y} & \underline{k}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{\theta} \end{Bmatrix}$$

# Ejemplo

(2 niveles)



| Nivel | $X_{mi}$ | $Y_{mi}$ | $P_i$ | $V_i$ |
|-------|----------|----------|-------|-------|
| 1     | 5.00     | 2.50     | 10    | 30    |
| 2     | 7.50     | 2.50     | 20    | 20    |



$$K_1 = K_2 = \begin{bmatrix} 125 & -50 \\ -50 & 50 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = K_5 = \begin{bmatrix} 100 & -50 \\ -50 & 50 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 250 & -100 & 0 & 0 & -625 & 250 \\ -100 & 100 & 0 & 0 & 250 & -250 \\ 0 & 0 & 250 & -100 & 1500 & -750 \\ 0 & 0 & -100 & 100 & -750 & 750 \\ -625 & 250 & 1500 & -750 & 15625 & -7500 \\ 250 & -250 & -750 & 750 & -7500 & 7500 \end{bmatrix}$$

# I. - Dirección X

$$F_x = \begin{Bmatrix} 10 \\ 20 \end{Bmatrix}; \quad F_y = 0 \quad \therefore \begin{Bmatrix} \underline{u}_0 \\ -\underline{v}_0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0 \end{Bmatrix} = \underline{\delta}_0$$

$$\underline{M}_0 = \begin{Bmatrix} -25 \\ -50 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} M_{d1} = -(2,50)(10) - (-25) = 0 \\ M_{d2} = -(2,50)(20) - (-50) = 0 \end{cases}$$

$$\underline{M}_d^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (e=0)$$

(Obvio, por la simetría)

$$M_{a1}^* = 0.1 (5.00)(30) = 15$$

$$M_{a2}^* = 0.1 (5.00)(20) = 10$$

$$\begin{cases} M_{11}^* = 15 \\ M_{12}^* = 10 \end{cases} \quad \underline{M}_1 = \begin{Bmatrix} 5 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} M_{21}^* = -15 \\ M_{22}^* = -10 \end{cases} \quad \underline{M}_2 = \begin{Bmatrix} -5 \\ -10 \end{Bmatrix}$$

2) Resolvamos para  $\underline{M}_1$

$$F = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 5 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \underline{\delta}_1 \\ \underline{\theta}_1 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} 0.010909 \\ 0.030909 \\ \hline -0.021818 \\ -0.081818 \\ \hline 0.004364 \\ 0.012364 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \underline{\delta}_0 + \underline{\delta}_1 \\ \hline -\underline{\theta}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.210909 \\ 0.430909 \\ \hline -0.021818 \\ -0.081818 \\ \hline 0.004364 \\ 0.012364 \end{Bmatrix}$$

Obtenemos desplazamientos de algunos marcos

Marco ②  $(\cos = 1, \text{sen} = 0, r = -5)$

$$\begin{cases} d_{21} = 0.189091 \\ d_{22} = 0.369091 \end{cases}$$

Marco ③  $(\cos = 0, \text{sen} = 1, r = 10)$

$$\begin{cases} d_{31} = 0.021818 \\ d_{32} = 0.041818 \end{cases}$$

Marco ①  $(\cos = 1, \text{sen} = 0, r = 0)$

$$\begin{cases} d_{11} = 0.210909 \\ d_{12} = 0.430909 \end{cases}$$

b) Resolviendo por  $M_2$

$$\begin{Bmatrix} \delta_2 \\ -\theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.010909 \\ -0.030909 \\ 0.021818 \\ 0.041818 \\ -0.004364 \\ -0.012364 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_0 + \delta_2 \\ -\theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.189091 \\ 0.369091 \\ 0.021818 \\ 0.041818 \\ -0.004364 \\ -0.012364 \end{Bmatrix}$$

Marco ②

$$\begin{cases} d_{21} = 0.210909 \\ d_{22} = 0.430909 \end{cases}$$

Marco ③

$$\begin{cases} d_{31} = -0.021818 \\ d_{32} = -0.041818 \end{cases}$$

Marco ①

$$\begin{cases} d_{11} = 0.189091 \\ d_{12} = 0.369091 \end{cases}$$

II. Dirección Y

$$F_x = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; F_y = \begin{Bmatrix} 10 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

○

○

○

Marco ④. ( $\cos = 0$ ,  $\text{sen} = 1$ ,  $r = s$ )

$$\begin{cases} d_{\text{④}_1} = 0.20000 \\ d_{\text{④}_2} = 0.38000 \end{cases}$$

14

b) Resolvamos para  $M_2$

$$\begin{Bmatrix} \delta_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.014545 \\ -0.005455 \\ -0.029091 \\ 0.030909 \\ 0.005818 \\ -0.002182 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_0 + \delta_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.014545 \\ -0.005455 \\ - \\ 0.170909 \\ 0.430909 \\ - \\ 0.005818 \\ -0.002182 \end{Bmatrix}$$

Marco ②

$$\begin{cases} d_{\text{②}_1} = -0.014545 \\ d_{\text{②}_2} = 0.005455 \end{cases}$$

Marco ③

$$\begin{cases} d_{\text{③}_1} = 0.229091 \\ d_{\text{③}_2} = 0.409091 \end{cases}$$

Marco ①

$$\begin{cases} d_{\text{①}_1} = 0.014545 \\ d_{\text{①}_2} = -0.005455 \end{cases}$$

Marco ③

$$d_{\text{③}_1} = 0.170909$$

Marco ④

$$\begin{cases} d_{\text{④}_1} = 0.20000 \\ d_{\text{④}_2} = 0.420000 \end{cases}$$

### III. Centros de Torsión

a) Sismo en Y

$$M_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 150 \end{Bmatrix}$$

$$M_0^* = \begin{Bmatrix} 150 \\ 150 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} X_{T_1} &= 150/30 = 5.00 \\ X_{T_2} &= 150/20 = 7.50 \end{aligned}$$

b) Sismo en X

$$M_0 = \begin{Bmatrix} -75 \\ -50 \end{Bmatrix}$$

$$M_0^* = \begin{Bmatrix} -75 \\ -50 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Y_{T_1} &= +75/30 = 2.50 \\ Y_{T_2} &= +50/20 = 2.50 \end{aligned}$$

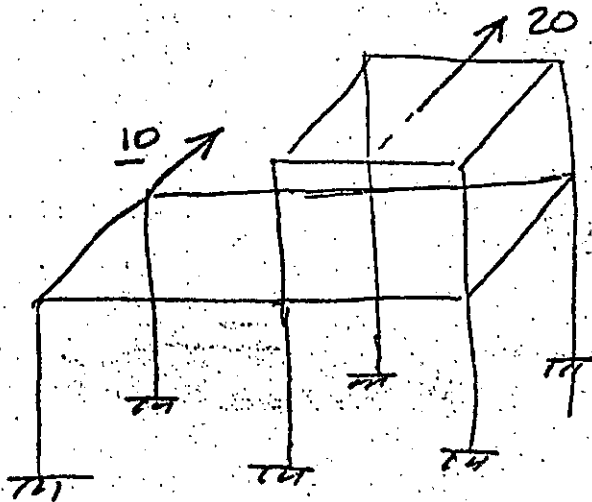
# Notas

15

9

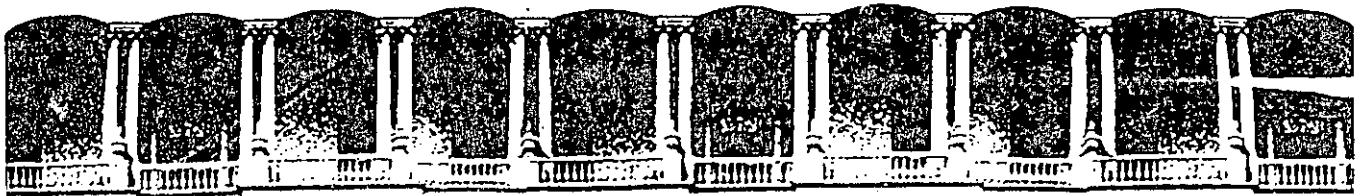
1) se obtienen los mismos resultados si se efectuó un análisis considerando los entrepisos independientes y trabajando con las rigideces de entrepiso.

2.)



En esta posición las fuerzas  $P$  no causan torsión ( $\Theta_H = 0$ )





**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**XVIII CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA**

**MODULO III**

**DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS**

*Del 3 al 13 de julio de 1992*

**EFFECTOS DE TORSION**

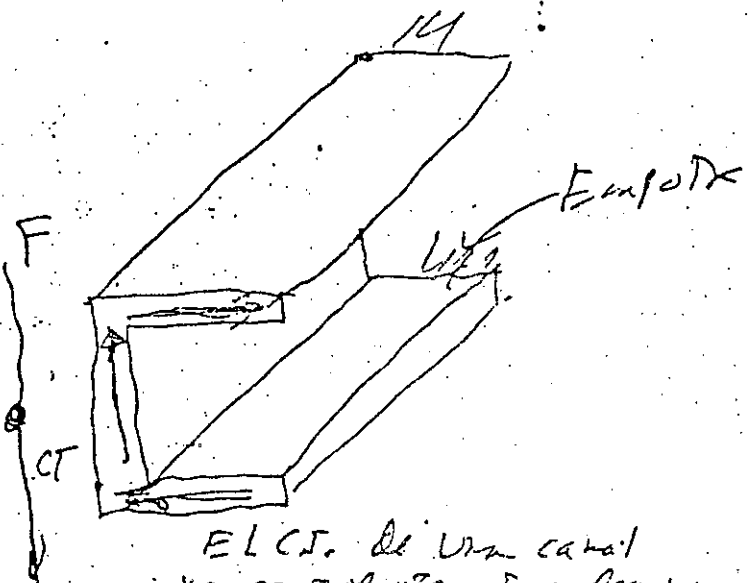
**TEMA**

**ANALISIS DE ESTRUCTURAS**

**DR. ROBERTO STARK**

**JULIO - 1992**

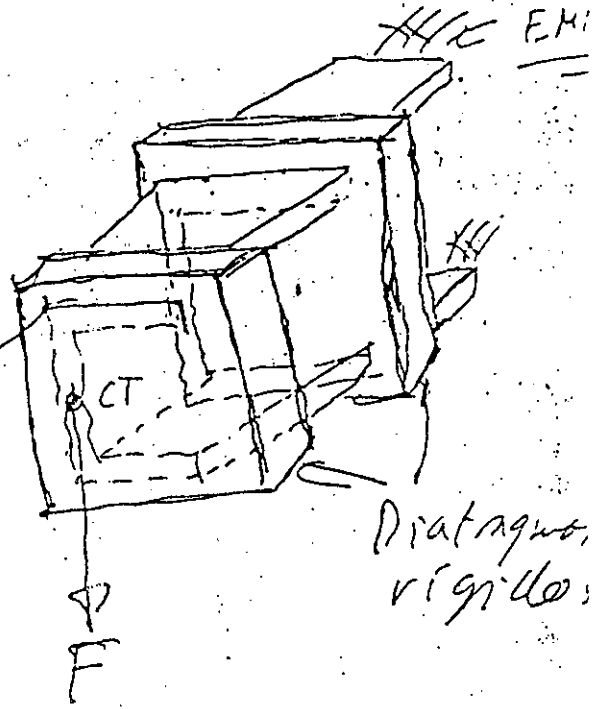
# NO SON IGUALES



EL CT. de una canal  
no es evidente. Fue descubierta  
hasta 1930 (Aprox)

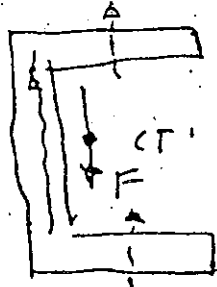
**PERFIL**

(Texto clásico en  
resistencia de  
materiales)

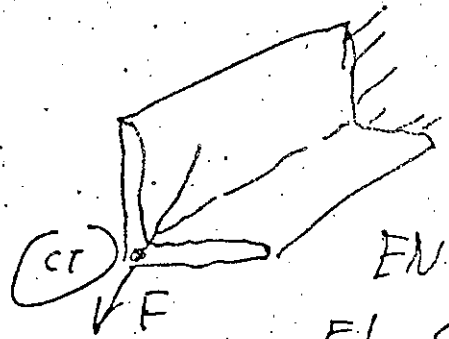


**EDIFICIO**

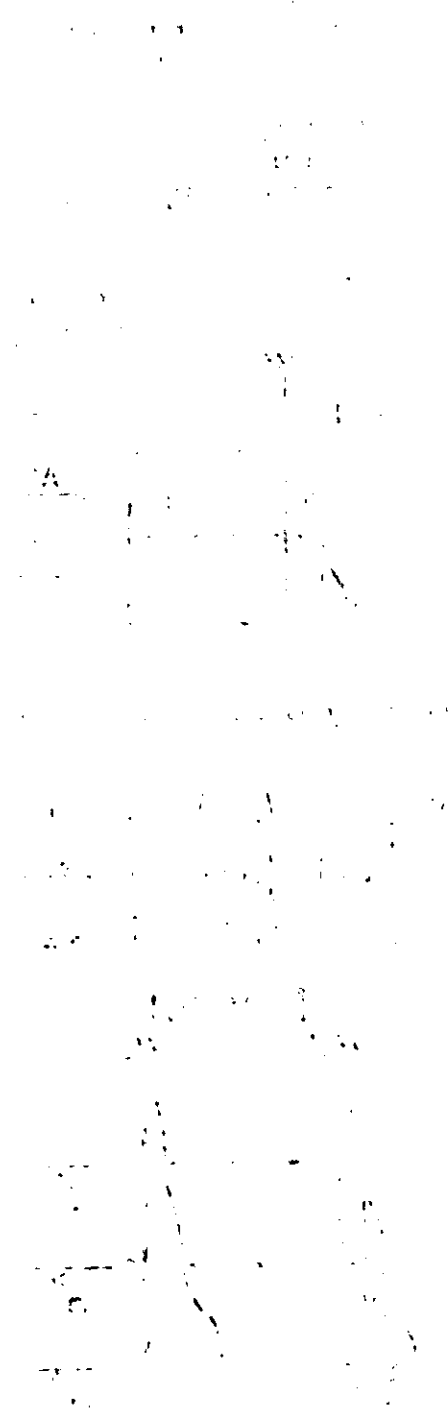
NOTA:



El CT se puede  
comer a la derecha si  
se considera la rigidez  
transversal (papelón) de  
los patinos.



EN UN ANGULO  
EL CT es obvio  
POR ESTÁTICA ELEMENTAL  
(OINCE DE CON EDIFICIO)



The diagram illustrates the structural analysis of a truss system. The primary load is applied at the top joint, where the reaction forces are determined. The internal forces within the members are calculated based on the geometry and the applied load.

The reaction forces at the supports are found to be  $R_1 = 1000$  N and  $R_2 = 1500$  N. The internal forces in the members are as follows:

| Member   | Force (N) | State       |
|----------|-----------|-------------|
| Member 1 | 1000      | Tension     |
| Member 2 | 1500      | Compression |
| Member 3 | 1000      | Tension     |
| Member 4 | 1500      | Compression |

The diagram shows the reaction forces at the supports. The reaction force at the left support is  $R_1 = 1000$  N, and the reaction force at the right support is  $R_2 = 1500$  N. The internal forces in the members are calculated based on the geometry and the applied load.

The reaction forces at the supports are found to be  $R_1 = 1000$  N and  $R_2 = 1500$  N. The internal forces in the members are as follows:

| Member   | Force (N) | State       |
|----------|-----------|-------------|
| Member 1 | 1000      | Tension     |
| Member 2 | 1500      | Compression |
| Member 3 | 1000      | Tension     |
| Member 4 | 1500      | Compression |

The reaction forces at the supports are found to be  $R_1 = 1000$  N and  $R_2 = 1500$  N. The internal forces in the members are as follows:

| Member   | Force (N) | State       |
|----------|-----------|-------------|
| Member 1 | 1000      | Tension     |
| Member 2 | 1500      | Compression |
| Member 3 | 1000      | Tension     |
| Member 4 | 1500      | Compression |

The reaction forces at the supports are found to be  $R_1 = 1000$  N and  $R_2 = 1500$  N.

The reaction forces at the supports are found to be  $R_1 = 1000$  N and  $R_2 = 1500$  N. The internal forces in the members are as follows:

| Member   | Force (N) | State       |
|----------|-----------|-------------|
| Member 1 | 1000      | Tension     |
| Member 2 | 1500      | Compression |
| Member 3 | 1000      | Tension     |
| Member 4 | 1500      | Compression |

$\Psi$  = ángulo que forma la dirección del sismo con el eje  $x$ , positivo en el sentido antihorario

$E = x_M \text{sen} \Psi - y_M \text{cos} \Psi$  = distancia del origen a la dirección sísmica

$$c_j = \text{cos} \beta_j$$

$$s_j = \text{sen} \beta_j$$

$d_j = x_j s_j - y_j c_j$  = distancia del origen al eje del marco  $j$

$V$  = fuerza cortante total (edificios de un entrepiso)

$V_j$  = fuerza cortante del marco  $j$  (edificios de un entrepiso)

$\Delta_j$  = desplazamiento del marco  $j$  (edificios de un entrepiso)

$K_j = V_j / \Delta_j$  = rigidez de entrepiso del marco  $j$  (edificios de un entrepiso)

$D_x$  = desplazamiento de la losa paralelo a  $x$

$D_y$  = desplazamiento de la losa paralelo a  $y$

$\theta$  = rotación de la losa, positiva en el sentido antihorario

$$V_x = V \text{cos} \Psi$$

$$V_y = V \text{sen} \Psi$$

$$M = E \cdot V$$

$$K_{xx} = \sum K_j c_j^2$$

$$K_{yy} = \sum K_j s_j^2$$

$$K_{xy} = K_{yx} = \sum K_j c_j s_j$$

$$K_{x\theta} = K_{\theta x} = \sum K_j c_j d_j$$

$$K_{y\theta} = K_{\theta y} = \sum K_j s_j d_j$$

$$K_{\theta\theta} = \sum K_j d_j^2$$

$\gamma$  = ángulo que forma el eje principal  $x'$  con el eje  $x$ , positivo en el sentido antihorario

$x_T, y_T$  = coordenadas del centro de torsión

$\Delta$  = desplazamiento relativo del entrepiso

$F$  = fuerza horizontal en el nivel  $i$

$V$  = fuerza cortante en el entrepiso  $i$

$[K_j]$  = matriz de rigidez para desplazamientos (marco  $j$ )

$V$  = cortante total en el entrepiso  $i$

$R_j$  = rigidez del entrepiso  $j$  (marco  $j$ )

$\alpha_j$  = escalar que multiplicado por una cierta matriz  $[K_0]$  da la matriz de rigidez del marco  $j$

$\{V\}$  = vector de cortantes totales

### CONCLUSIONES

Se ha presentado la justificación teórica de una simplificación muy usada en el análisis sísmico de edificios, que consiste en considerar independientemente a cada entrepiso y trabajar con las llamadas rigideces de entrepiso.

Se han determinado las condiciones que deben cumplir los edificios para que sea válido aplicar esta simplificación.

### REFERENCIAS

1. Bazán, Enrique, "Sobre el análisis de edificios con muros rigidizantes". Primer Congreso Nacional de Ingeniería Estructural, México, D. F. (octubre 1977)

### APENDICE I

Las ecuaciones de equilibrio de un edificio con más de un entrepiso son las siguientes:

$$\begin{Bmatrix} \{V\} \text{cos} \Psi \\ \{V\} \text{sen} \Psi \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{xx}] & [K_{xy}] & [K_{x\theta}] \\ [K_{yx}] & [K_{yy}] & [K_{y\theta}] \\ [K_{\theta x}] & [K_{\theta y}] & [K_{\theta\theta}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (5)$$

10

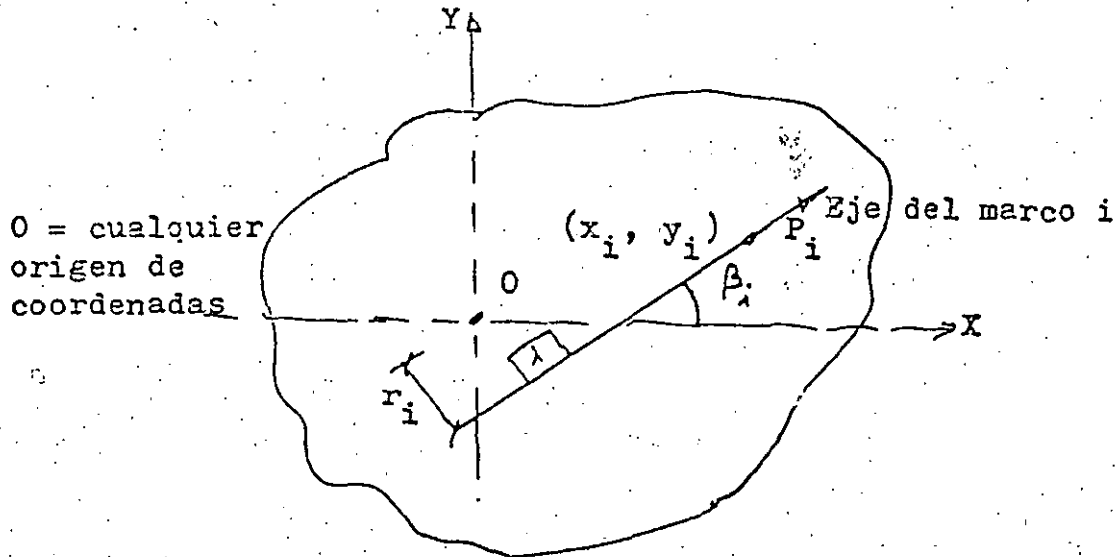


FIGURA 17

Si \$K\_{xy}\$ es nula, lo que corresponde a ejes principales de rigidez (5), las expresiones para las coordenadas del centro de torsión se simplifican

$$x_T = \frac{\sum K_i x_i c_i^2 - \sum K_i y_i c_i s_i}{K_{yy}}$$

$$y_T = \frac{\sum K_i y_i c_i^2 - \sum K_i x_i c_i s_i}{K_{xx}}$$

## 2.- excentricidades

Sean \$x\_c, y\_c\$ las coordenadas del centro de cortante del entre piso.

Las excentricidades de diseño \$E\_{d1}\$ y \$E\_{d2}\$ se obtienen con las siguientes expresiones

$$e_{d1} = 1.5 e + 0.1b \text{ SIG}(e)$$

$$e_{d2} = e - 0.1b \text{ SIG}(e)$$

$$E_{d1} = \text{Max}(e_{d1}, e_{d2})$$

$$E_{d2} = \text{Min}(e_{d1}, e_{d2})$$

donde:

$$e = y_T - y_C, \text{ si el sismo es paralelo a } X$$

$$e = x_C - y_T, \text{ si el sismo es paralelo a } Y$$

$$\text{SIG}(e) = +1, \text{ si } e \geq 0$$

$$\text{SIG}(e) = -1, \text{ si } e < 0$$

Estas expresiones coinciden con las que aparecen al final del inciso 8.6 de las Normas Complementarias, sin embargo el autor las ha modificado para mayor claridad y por razones que expondrá mas adelante.

### 3.- Obtención de las fuerzas cortantes de cada marco

Se presenta un método simplificado para distribuir la cortante total de entrepiso entre los marcos de ese entrepiso. El método solo es válido cuando se trabaja con rigideces de entrepiso, que como ya se ha dicho es válido aproximadamente para fuerzas estáticas, pero no para análisis dinámicos, en donde será necesario trabajar con las matrices de rigidez de la estructura obtenida en función de las matrices de rigidez de marcos ó muros.

En las fórmulas que a continuación se presentan se supone que el origen de coordenadas coincide con el centro de torsión

a) Sismo paralelo a X

$$V_i = K_i V \left[ \frac{c_i K_{yy} - s_i K_{xy}}{K_{xx} K_{yy} - K_{xy}^2} + \frac{r_i E_{dk}}{K_{\theta\theta}} \right]$$

si  $K_{xy}$  es nula, se tiene la siguiente simplificación

(5) Dany, J., "Diagonalización de matrices de rigidez de edificios". Revista de Ingeniería, México D.F., enero-marzo 1978.

$$V_i = K_i V \left[ \frac{c_i}{K_{xx}} + \frac{r_i E_{dk}}{K_{\theta\theta}} \right]$$

b) Sismo paralelo a Y

$$V_i = K_i V \left[ \frac{s_i K_{xx} - c_i K_{xy}}{K_{xx} K_{yy} - K_{xy}^2} + \frac{r_i E_{dk}}{K_{\theta\theta}} \right]$$

si  $K_{xy}$  es nula

$$V_i = K_i V \left[ \frac{s_i}{K_{yy}} + \frac{r_i E_{dk}}{K_{\theta\theta}} \right]$$

donde:

$V_i$  = fuerza cortante del marco i

$r_i = x_i s_i - y_i c_i$  (esta fórmula nos da la distancia del centro de torsión al marco i, con signo)

$$K_{\theta\theta} = K_i r_i^2$$

$E_{dk}$  = excentricidades de diseño (k=1,2)

V = fuerza cortante total en el entrepiso

Se analizarán todos los entrepisos del marco i con k=1 y posteriormente todos con k=2, diseñando al marco para la condición mas desfavorable.

#### 4.- Comentario final

Cuando los marcos son ortogonales en planta, las fórmulas presentadas coinciden con las que se han usado desde hace casi 30 años por los ingenieros estructuristas (6).

La razón del requisito de analizar todos los entrepisos del marco con las condiciones correspondientes a  $E_{d1}$  y luego con las de  $E_{d2}$ , obedece a que se debe cumplir que en las dos condiciones, las fuerzas cortantes de todos los entrepisos estén del mismo lado (izquierda ó derecha para sismo

$$d_{ji} = u_i \cos \phi_j + v_i \sin \phi_j + \theta_i r_j \quad (2)$$

donde, por geometría  $r_j = x_j \sin \phi_j - y_j \cos \phi_j$  (3)  
 (Nótese que  $r_j$  posee signo)

Empleando notación vectorial podemos establecer que para cada marco  $j$

$$\{d_j\} = \{u\} \cos \phi_j + \{v\} \sin \phi_j + \{\theta\} r_j \quad (4)$$

Ahora bien, de acuerdo al método de las rigideces

$$\{F_j\} = [K_D]_j \{d_j\} \quad (5)$$

De donde, sustituyendo 4 en 5 resulta

$$\{F_j\} = [K_D]_j [\{u\} \cos \phi_j + \{v\} \sin \phi_j + \{\theta\} r_j] \quad (6)$$

En las dos últimas igualdades el vector  $\{F_j\}$  representa el conjunto de fuerzas laterales que es necesario aplicar al marco  $j$ , para conseguir un vector desplazamiento  $\{d_j\}$ .

Por otro lado, sea  $F_i$  la fuerza sísmica -obtenida por algún método estático o dinámico que se supone conocido- correspondiente al nivel  $i$ -ésimo y que actúa en el centro de masa  $CM_i$ . Si la dirección del sismo está definida por el ángulo  $\psi$ ,

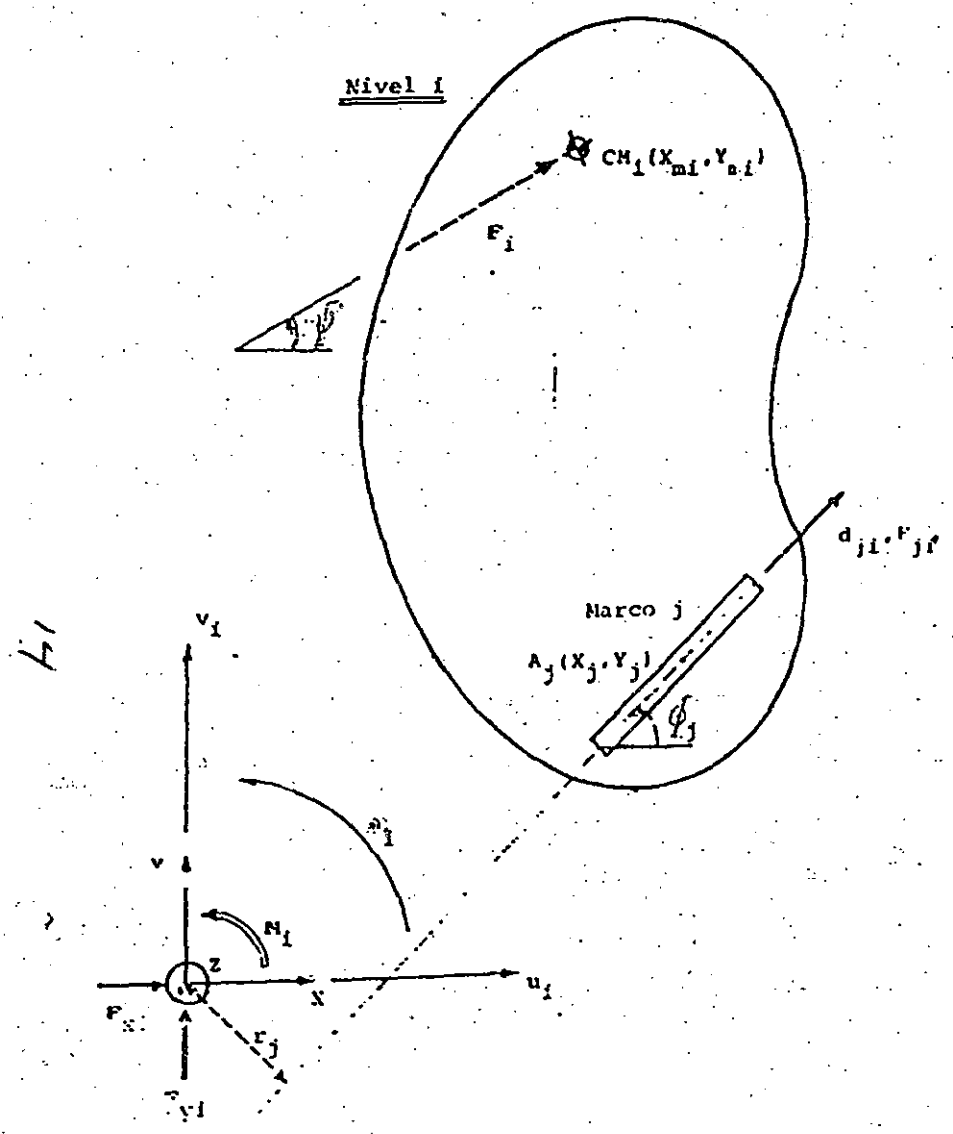


FIG. 2.2 Sistema de piso del nivel  $i$ -ésimo de una estructura cualquiera.



descomponiendo la fuerza sísmica en direcciones ortogonales tenemos:

y

$$\begin{aligned}
 F_{xi} &= F_i \cos \psi \\
 F_{yi} &= F_i \sin \psi
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} F_{xi} \\ F_{yi} \end{aligned}} \right\} (7.a)$$

o bien

$$\begin{aligned}
 \{F_x\} &= \{F_i\} \cos \psi \\
 \{F_y\} &= \{F_i\} \sin \psi
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \{F_x\} \\ \{F_y\} \end{aligned}} \right\} (7.b)$$

Si trasladamos el vector de fuerzas sísmicas al origen del sistema coordenado, se llega, de acuerdo a la figura 2.2 a

$$M_i = \sum X_{mi} F_{yi} - \sum Y_{mi} F_{xi} \quad (8)$$

Ahora bien, aplicando el principio de equilibrio

$$\begin{aligned}
 \{F_x\} &= \sum_j \{F_j\} \cos \phi_j \\
 \{F_y\} &= \sum_j \{F_j\} \sin \phi_j \\
 \{M\} &= \sum_j \{F_j\} r_j
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \{F_x\} \\ \{F_y\} \\ \{M\} \end{aligned}} \right\} (9)$$

donde  $[K]$  es la matriz de rigidez lateral del edificio, de tamaño  $3n_N \times 3n_N$  -  $n_N$  es el número de niveles-.

El planteamiento hasta aquí expuesto es de carácter general en el análisis tridimensional de estructuras. El tratamiento de la torsión proviene de la obtención del vector de momentos  $\{M\}$ , que es necesario aplicar en el edificio para impedir giros relativos de los niveles, y del cociente de éste entre las fuerzas cortantes lo que permite definir la posición del centro de torsión. Se debe, entonces, considerar dos direcciones del sismo:

a. Sismo en X

b. Sismo en Y

Nota: Si se emplean fuerzas cortantes se deben calcular las matrices  $[K_D]$  que las relaciona con desplazamientos relativos.

a. Sismo en X

El sismo actúa en dirección paralela al eje global X, en sentido positivo; por tanto

$$\{F_x\} = \{V\}$$

$$\{F_y\} = \{0\}$$

donde el vector  $\{V\}$  es el vector de fuerzas cortantes sísmicas de entrepiso.

## OBTENCION DEL CENTRO DE TORSION DE EDIFICIOS

Julio Dany Ríos (I)

Sergio M. Alcocer Martínez de Castro (II)

### RESUMEN

Se presenta un método aplicable a la obtención de las coordenadas del centro de torsión de los entrepisos de edificios en los cuales se utilice el llamado análisis tridimensional. A partir de la matriz de rigidez del edificio y de la distribución de las fuerzas sísmicas, se obtiene la posición de ese centro. La obtención de la posición del centro de torsión permite considerar apropiadamente los requisitos exigidos en el reglamento de las construcciones del D.F. que está vigente.

### I.- INTRODUCCION

Muchas de las fallas de edificios ocurridas durante el sismo del 19 de septiembre de 1985, se debieron a excesiva torsión, fué notable el número de edificios en esquina que se colapsaron, ya que en éstos es difícil evitar el que tengan grandes excentricidades.

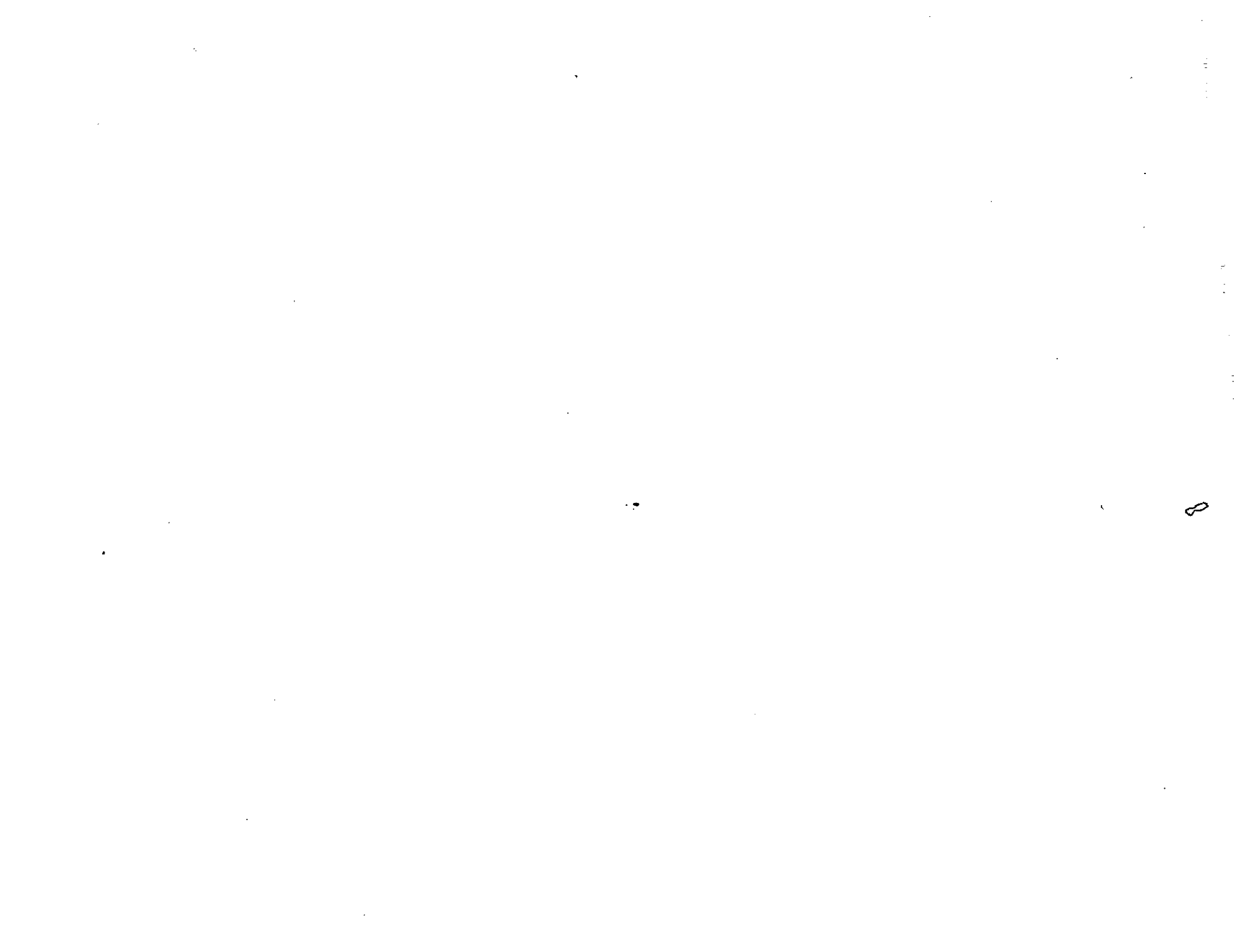
El reglamento de las construcciones vigente en el DF exige determinar la posición de los centros de torsión de entrepiso y verificar que la distancia entre éste y el punto de aplicación del cortante de entrepiso (excentricidad) sea menor del 20 % de la dimensión máxima de la planta (L), medida normalmente a la dirección del sismo. El reglamento también exige modificar la excentricidad, multiplicándola por un factor dinámico (1.5) y sumándole o restándole la excentricidad accidental (0.1 L).

En 1962 con la publicación del ya clásico "Diseño sísmico de edificios" de Rosenblueth y Esteva (1), se inicia en México la consideración del efecto de la torsión y sus incrementos en el análisis sísmico estático. En esta publicación se utilizan los conceptos de rigidez de entrepiso y centro de torsión de entrepiso, que en su época permitieron diseños antisísmicos satisfactorios.

El primer autor ha publicado un método simplificado (2) para obtener las rigideces de entrepiso y la posición del centro de torsión aún para edificios cuyos marcos no sean ortogonales en planta, recientemente ha sido publicado un

(I) Profesor de la Fac. de Ingeniería, UNAM

(II) Ing. civil, Instituto de Ingeniería UNAM y Universidad de Austin Texas



método similar (3), los dos métodos están basados en un análisis bidimensional.

Con la popularización de las computadoras fue posible desarrollar los llamados sistemas de análisis tridimensional de edificios (por ejemplo (4)), en los cuales se trabaja con la matriz de rigidez del edificio, la cual es de un orden igual a tres veces su número de niveles, ya que se consideran como grados de libertad los desplazamientos en x y así como los giros en z de las losas diafragmas. Todos estos sistemas de análisis tridimensional tienen el defecto de no poder obtener la posición del centro de torsión y por ende el no considerar los incrementos en los efectos torsionales. Hay publicaciones que demuestran que en general no es posible determinar el centro de torsión (5) como un invariante independiente del sistema de cargas, lo cual es cierto ya que como se verá la posición del centro de torsión depende de la distribución de las fuerzas horizontales.

En este trabajo se presenta un método para obtener, a partir de una distribución dada de fuerzas horizontales, la posición del centro de torsión. El método es una generalización de las ideas que proponen Bazán y Meli (6) y fue el tema de su tesis de licenciatura del segundo autor (7), en ésta el método está desarrollado ampliamente e ilustrado con varios ejemplos. El primer autor utilizó el método en el desarrollo de un programa para el análisis

bidimensional de edificios, siendo ésta la primera vez que en estos programas (8) se considera el incremento en torsión que exige el reglamento de construcciones vigente en el D.F..

## II.- PRESENTACION DEL METODO

Antes de presentar el método daremos algunas definiciones. Designaremos como centro de cortante de entrepiso al punto de aplicación de su fuerza cortante. Designaremos como centro de torsión de los niveles a los puntos en donde se deben aplicar las fuerzas, que obran en cada nivel, para que el movimiento del edificio sea solo de traslación, sin rotación de sus losas diafragmas; en forma similar se definen los centros de torsión de los entrepisos, solo que en este caso nos referimos a la posición de sus fuerzas cortantes.

Es bien sabido (2, 4, 6, 7, 8) que la matriz de rigidez de edificios en el análisis tridimensional es de la forma

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} & K_{X\theta} \\ K_{YX} & K_{YY} & K_{Y\theta} \\ K_{\theta X} & K_{\theta Y} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

esta matriz relaciona fuerzas con desplazamientos

$$x_{Ti} = \frac{M_i}{P_i}$$

Una vez obtenidas las coordenadas de los centros de torsión de los niveles, es simple obtener la de los entrepisos, utilizando las fórmulas siguientes, obtenidas de la aplicación de la estática

$$x'_{Tj} = \frac{\sum_{i=1}^N x_{Ti} P_i}{\sum_{i=1}^N P_i}$$

$$y'_{Tj} = \frac{\sum_{i=1}^N y_{Ti} P_i}{\sum_{i=1}^N P_i}$$

Donde  $x'_{Tj}$ ,  $y'_{Tj}$  son las coordenadas de los centros de torsión del entrepiso  $j$ ,  $N$  es igual al número total de entrepisos.

### III.- REFERENCIAS

1.- Rosenblueth, E. y Esteva, L., "Diseño sísmico de edificios", Folleto complementario al Reglamento de Construcciones del D.F., México DF (1962)

2.- Dany, J., "Diagonalización de matrices de rigidez de edificios". Revista Ingeniería, México, DF, enero-marzo

de 1978.

3.- B. Stafford Smith y Vezina, S., "Evaluación de centros de torsión". Revista IMCYC, No. 1995, agosto 1987.

4.- Wilson, E. y Dovey, H.. "Three dimensional analysis of building systems - TABS", Earthquake Engineering Research Center, Universidad de California, EERC 72-8, Berkeley (1972).

5.- Ridell, R. y Vasquez, J., "Existence of resistance and torsional uncoupling of earthquake response of buildings". Congreso Mundial de Ingeniería Sísmica, San Francisco, Cal. (1984).

6.- Bazán, E. y Meli, R., "Manual de diseño sísmico de edificios". Serie D-18 del Instituto de Ingeniería de la UNAM (1983)

7.- Alcocer M. de Castro, Sergio, "Centro de torsión de edificios obtenido matricialmente", tesis de Ingeniero Civil, Fac. de Ingeniería UNAM (1986).

8.- Dany, J. y Paulsen, M., "Programa de computadora para el análisis sísmico tridimensional de edificios", Instituto de Ingeniería de la UNAM, Reporte Interno 1985.

## 1. EJEMPLO 1

Se considera el edificio de 3 niveles mostrado en la figura 3.1, compuesto de marcos de concreto reforzado como elementos sismorresistentes.

Con el propósito de comparar los análisis tridimensional y tradicional, las columnas son de sección circular; por otro lado, las vigas son de sección rectangular. Las dimensiones de las columnas y vigas son tales que los momentos principales de inercia de la sección no agrietada sean iguales  $-I = \text{constante}-$ ; así

- Columnas :  $D = 50 \text{ cm}$

- Vigas :  $b = 25 \text{ cm}$

$h = 55 \text{ cm}$

El módulo de elasticidad del concreto,  $E$ , es el especificado por el RDF-76 para concretos con resistencia a compresión

$f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$ ; de esta forma

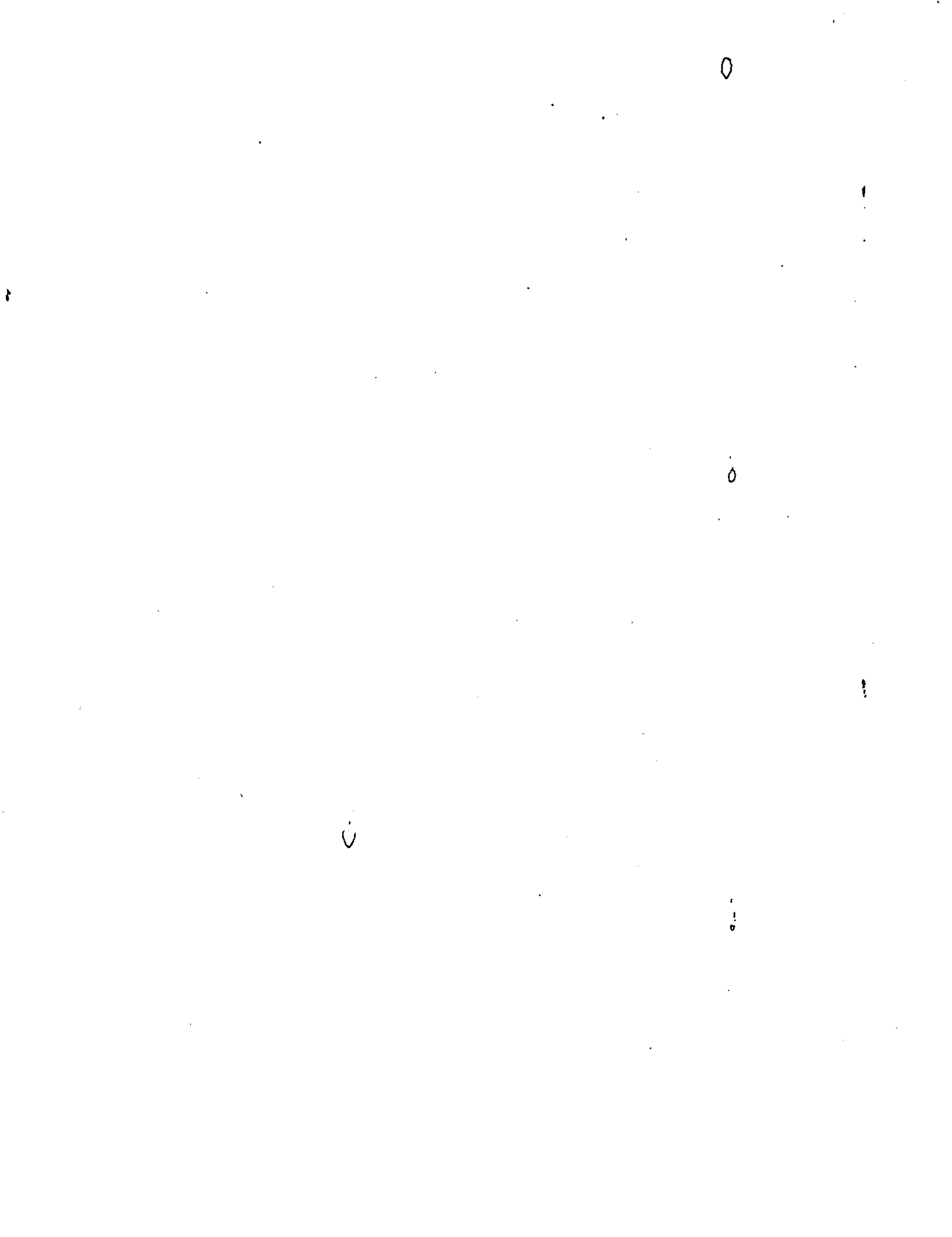
$$E = 100,000 / \sqrt{f'_c} \quad [\text{ton/m}^2]$$

$$E = 1,580,000 \text{ ton/m}^2$$

Por tanto, la rigidez a la flexión vale

$$EI = 4851 \text{ ton} \cdot \text{m}^2 = \text{constante}$$

Para el análisis sólo se consideran deformaciones por flexión.





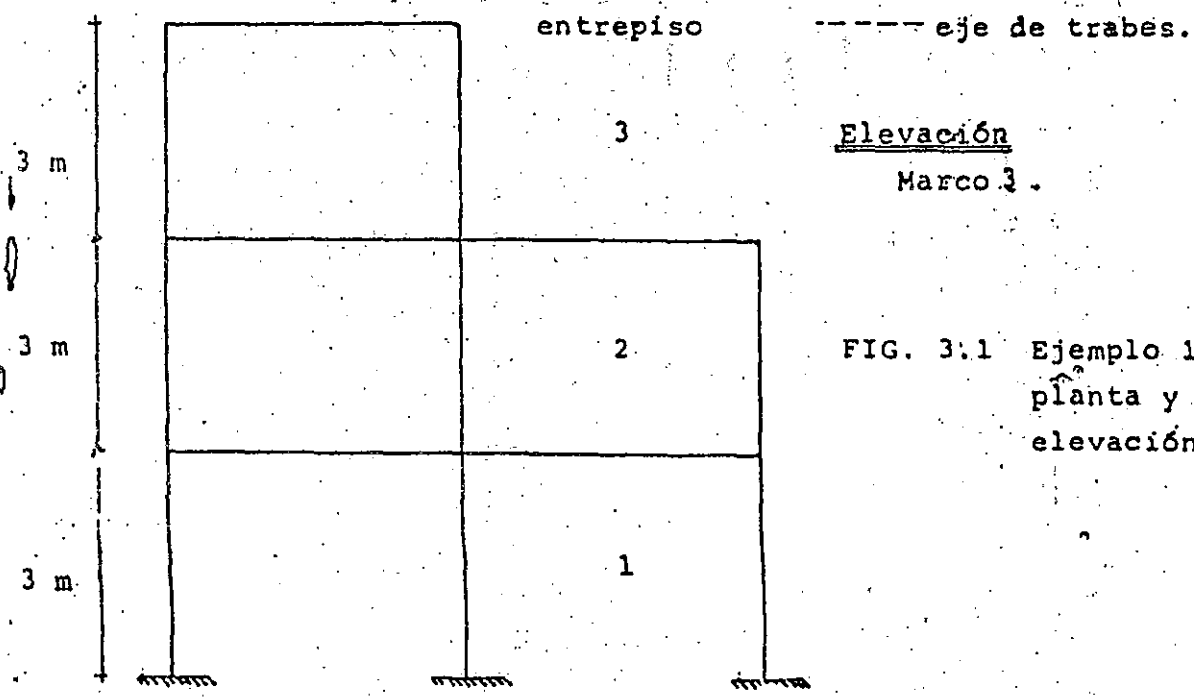
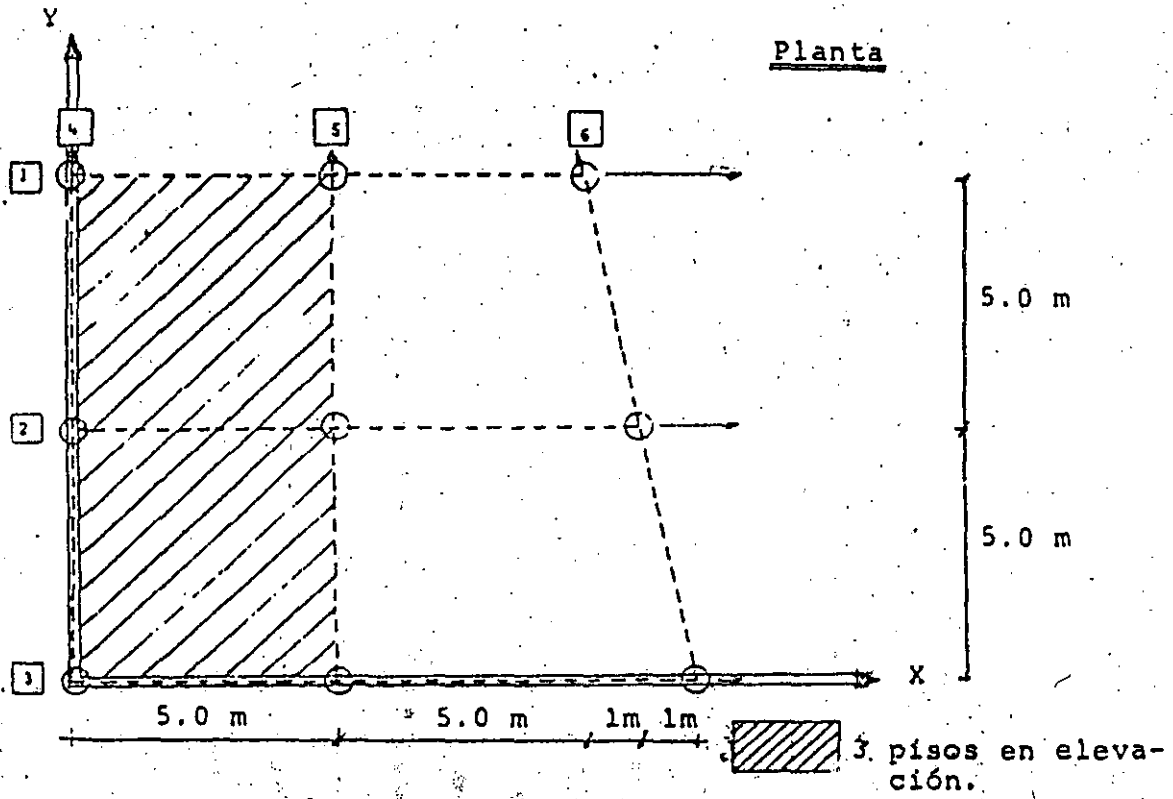


FIG. 3.1 Ejemplo 1:  
planta y elevación.

Marco 3.

$$[K_D] = \begin{bmatrix} 0.9821 & -0.2707 & 0.0245 \\ 0.2707 & 0.6905 & -0.1340 \\ 0.0245 & -0.1340 & 0.4116 \end{bmatrix} EI$$

Marcos 4 y 5:

$$[K_D] = \begin{bmatrix} 1.0043 & -0.2723 & 0.0417 \\ -0.2723 & 0.7737 & -0.2156 \\ 0.0417 & -0.2156 & 0.6602 \end{bmatrix} EI$$

Marco 6.

$$[K_D] = \begin{bmatrix} 0.9969 & -0.2511 & 0 \\ -0.2511 & 0.6607 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} EI$$

### 1.1.2 Matriz de rigidez lateral total del edificio

Ensamblando las matrices  $[K_D]_j$  de acuerdo a la expresión 10.a se obtiene que

Marco 3.

$$[K_D] = \begin{bmatrix} 0.9821 & -0.2707 & 0.0245 \\ 0.2707 & 0.6905 & -0.1340 \\ 0.0245 & -0.1340 & 0.4116 \end{bmatrix} \quad EI$$

Marcos 4 y 5.

$$[K_D]_j = \begin{bmatrix} 1.0043 & -0.2723 & 0.0417 \\ -0.2723 & 0.7737 & -0.2156 \\ 0.0417 & -0.2156 & 0.6602 \end{bmatrix} \quad EI$$

Marco 6.

$$[K_D] = \begin{bmatrix} 0.9969 & -0.2511 & 0 \\ -0.2511 & 0.6607 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad EI$$

### 1.1.2 Matriz de rigidez lateral total del edificio

Ensamblando las matrices  $[K_D]_j$  de acuerdo a la expresión 10.a se obtiene que

1.1.5.b. Abscisas de CT: sismo en Y

$$\{F_x\} = \{0\}; \{F_y\} = \{V\}$$

Resolviendo el sistema 12 resulta que

$$\{\delta_o\} = \begin{Bmatrix} 0.63 \\ 0.78 \\ 0.21 \\ 9.87 \\ 12.32 \\ 8.14 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \text{ [a]}$$

Obtenemos  $\{M_o\}$  y  $\{X_T\}$  a partir de 13 y 15, así

$$\{M_o\} = \begin{Bmatrix} 508.91 \\ 409.55 \\ 75.91 \end{Bmatrix} \text{ [ton.m]}$$

y

$$\{X_T\} = \begin{Bmatrix} 5.19 \\ 5.43 \\ 2.50 \end{Bmatrix} \text{ [m]}$$

el centro de torsión si tiene desplazamientos, producidos por la primera condición, por lo que no coincide con el centro de giro, a menos que sobre la losa obren solo momentos como en la segunda condición.

La obtención de la posición del centro de torsión es un problema que se resuelve en función de las rigideces<sup>v</sup> del sistema de fuerzas, tal como se vió anteriormente y no hay forma de obtenerlo a partir de los resultados que arrojen programas como ETABS, a menos que se les modifique su programación. Pretender obtener la posición del centro de torsión a partir de una construcción geométrica elemental, es absurdo ya que su obtención implica un proceso bastante mas complejo.

Dado un campo plano de desplazamientos existe una infinidad de combinaciones equivalentes de traslación y rotación, por lo que a partir del campo no esta determinada la posición del centro de torsión.

Observese que si el centro de cortante coincide con el centro de torsión, la losa tendrá solo traslaciones, o sea que el centro de giro se encuentra en un punto al infinito.

Julio Dany Ríos

México a 19 de agosto de 1988

EFFECTO

P

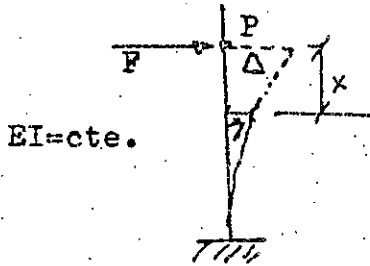
-  $\Delta$

40

Julio Dany Ríos

I.- Introducción

Consideremos la columna de la figura



Ecuación diferencial:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) = Fx + P(\Delta - y)$$

Resolviendo la ecuación diferencial, se obtiene

$$\Delta = \frac{FL^3}{\alpha^3 EI} (\tan \alpha - \alpha)$$

donde

$$\alpha = \sqrt{\frac{PL^2}{EI}}$$

observese que si  $\alpha = \pi/2$ ,  $\Delta = \infty$  ó sea que la carga crítica  $P_c$  es igual a

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{4 L^2}$$

si  $\alpha \rightarrow 0$ , se demuestra que

$$\lim \Delta = \frac{FL^3}{3EI}$$

si se desarrolla en serie a  $(\tan \alpha - \alpha)$  se obtiene:

$$F/\Delta = \frac{3EI}{L^3} (1 - P/P_c)$$

(se hizo la simplificación de suponer que  $\frac{2 \pi^2}{20} \approx 1$ )

o bien

$$K_p = \frac{3EI}{L^3} - \frac{12 P}{\pi^2 L}$$

$$K_p = \frac{3EI}{L^3} - 1.22 \frac{P}{L}$$

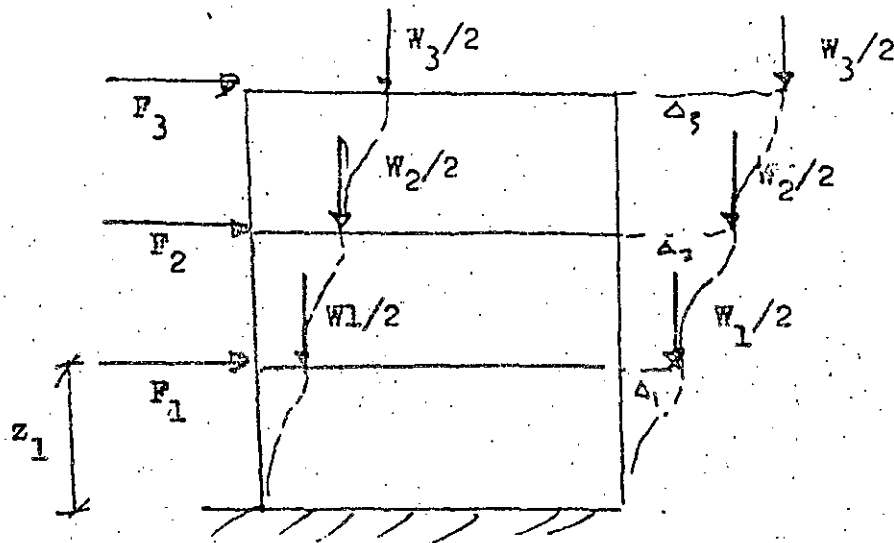
ó bien:

$$K_p = K - K_g$$

donde  $K = \frac{3EI}{L^3}$

$K_g = 1.22P/L \approx P/L$  (corrección geométrica)

II.- Efecto P-Δ



$$\text{Momento de volteo} = \sum z_i F_i + \sum W_i \Delta_i$$

Las fuerzas laterales y los desplazamientos están relacionados linealmente, si los pesos se consideran constantes.

$$\{F\} = [K_p] \{\Delta\}$$

pero:

$$[K_p] = [K_D] - [K_g]$$

donde \$[K\_D]\$ es la matriz de rigidez del marco y \$[K\_g]\$ su corrección geométrica que vale.

$$[K_g] = \begin{bmatrix} P_n^*/h_n & 0 & 0 \\ -P_n^*/h_n & P_n^*/h_n + P_{n-1}^*/h_{n-1} & -P_{n-1}^*/h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde:

$$P_i^* = \sum_{j>i}^m W_j$$

```

* "MD EN LA DIRECCION Y, CONSIDERANDO PARA CADA DIRECCION LAS",
* " DOS EXCENTRICIDADES"/30X,"QUE SENALA EL CITADO REGLAMENTO",
* //30X,"EL PROGRAMA FUE DESARROLLADO PARA EL INSTITUTO DE IN",
* "GENIERIA POR JULIO DAMY RIOS Y"/30X,"MANUEL PAULSEN DONDE",
* //30X,"MEXICO, D.F. A MAYO DE 1985"/20X,3(20X,1H*))
1001 FORMAT(///40X,40(1H*)/45X,"TIEMPO DE PROCESAMIENTO",F9.4,
* " MIN."/40X,40(1H*))
END

```

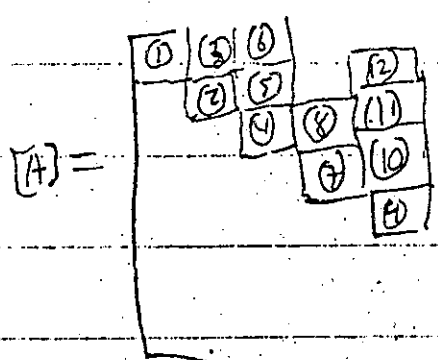
KYLI  
 ALMA CERVA

PROGRAMAS PARA RESOLVER ECUACIONES, CUANDO  
 MATRIZ DEL SISTEMA SE  
 CON EL SISTEMA DEL HORIZONT.

```

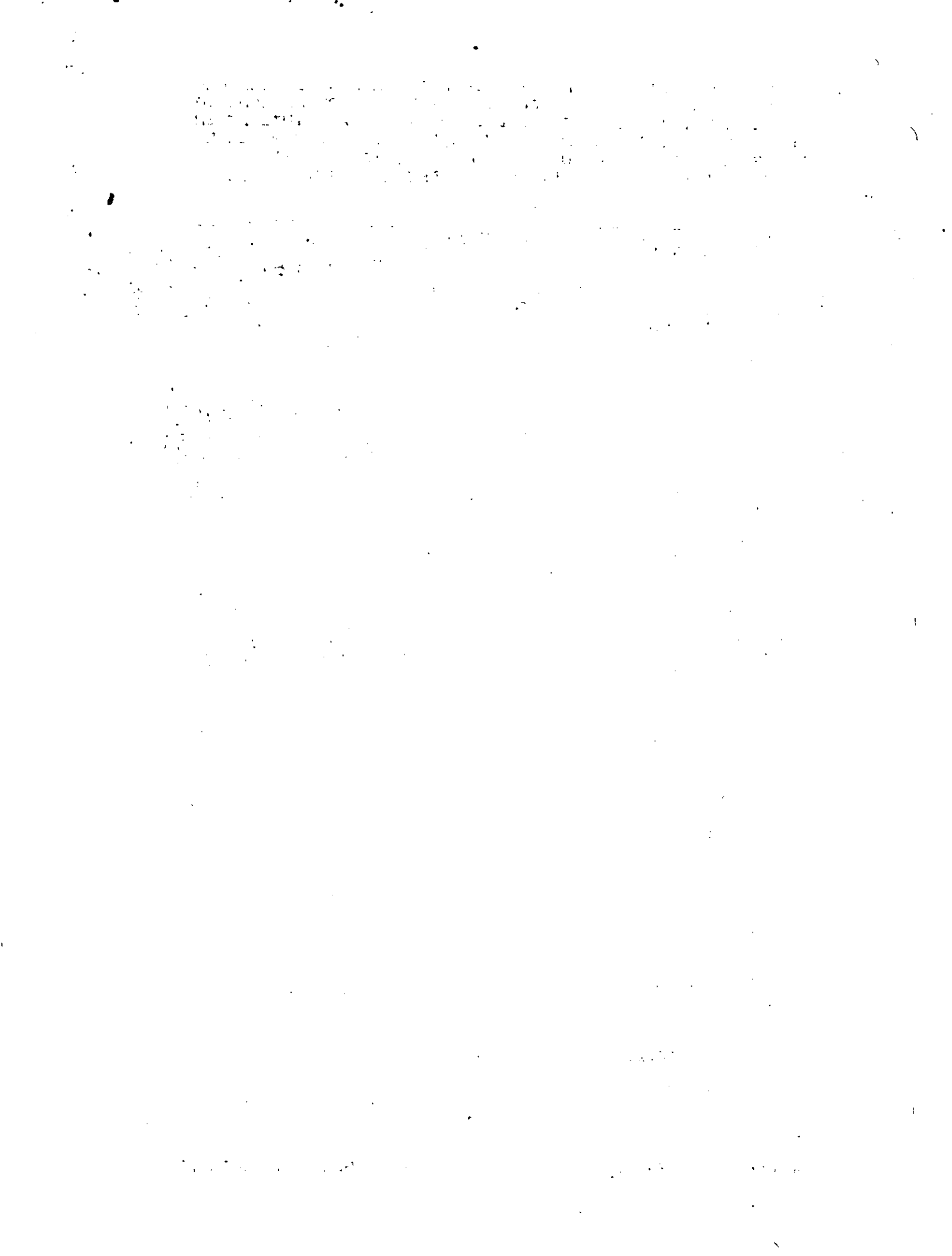
C*
C*
C*
C* SUBROUTINA PARA TRIANGULAR UNA MATRIZ
SUBROUTINE TRIAN(ISIN,AA,KDIAG,NG1)
DIMENSION AA(1),KDIAG(1)
ISIN=0
DO 100 I=1,NG1
L3=KDIAG(I+1)
L2=KDIAG(I)
0 L1=L2+1
IF(I.EQ.1)GO TO 41
I1=I+L1-L3
N1=L3-1
IF(L1.GT.N1)GO TO 100
DO 30 JP=L1,N1
J=L1-JP+N1
IF(J.EQ.N1)GO TO 30
J1=J+1
I2=N1-J+1
KN=N1
LL=KDIAG(I2)
JJ=KDIAG(I2+1)
LN=LL+N1-J
IF(LN.LT.JJ)GO TO 15
LN=JJ-1
KN=J+LN-LL
15 L=LL+1
IF(L.GT.LN)GO TO 30
SUMA=0
DO 20 K=J1,KN
SUMA=SUMA+AA(K)*AA(L)
20 L=L+1
AA(J)=AA(J)-SUMA
30 CONTINUE
L=I-1
SUMA=0
DO 40 K=L1,N1
LL=KDIAG(L)
R=AA(LL)
BB=AA(K)/R
SUMA=SUMA+BB*AA(K)
AA(K)=BB
40 L=L-1
AA(L2)=AA(L2)-SUMA
41 IF(ABS(AA(L2)).GT.1.E-20)GO TO 100
ISIN=1
WRITE(6,200)I
RETURN
100 CONTINUE
RETURN
200 FORMAT(//,1X,"**ERROR**MATRIZ DE RIGIDEZ SINGULAR, RENGLON",15)

```



KDIAG(1) = 1  
 KDIAG(2) = 2  
 KDIAG(3) = 4  
 KDIAG(4) = 7  
 KDIAG(5) = 9





END

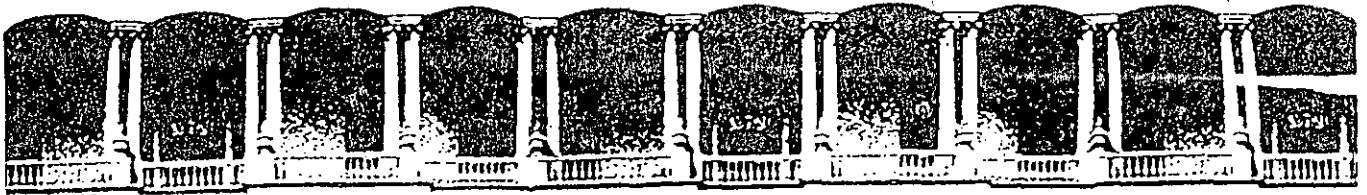
C\*  
C\*  
C\*

```
SUBROUTINE SOLUC (AA,KDIAG,FZMA,NG1)
DIMENSION AA(1),KDIAG(1),FZMA(1)
DO 120 I=2,NG1
L1=KDIAG(I)+1
N1=KDIAG(I+1)-1
IF(L1.GT.N1)GO TO 120
SUMA=0
L=I-1
DO 110 K=L1,N1
SUMA=SUMA+AA(K)*FZMA(L)
110 L=L-1
FZMA(I)=FZMA(I)-SUMA
120 CONTINUE
DO 130 I=1,NG1
L=KDIAG(I)
130 FZMA(I)=FZMA(I)/AA(L)
NG2=NG1-1
DO 150 IP=1,NG2
I=NG1-IP+1
L1=KDIAG(I)+1
N1=KDIAG(I+1)-1
IF(L1.GT.N1)GO TO 150
L=I-1
DO 140 K=L1,N1
FZMA(L)=FZMA(L)-AA(K)*FZMA(I)
140 L=L-1
150 CONTINUE
RETURN
END
```

C\*  
C\*  
C\*  
C\*  
C\*

SUBROUTINA PARA IMPRIMIR UNA MATRIZ DE 'M' X 'N' 9 COLUMNAS  
A LA VEZ.

```
SUBROUTINE MATPRT(M,N,A,NDI,TITU)
DIMENSION A(NDI,1)
IND=0
IF(M.LT.0) IND=1
M=IABS(M)
1 WRITE(6,1000)TITU
NPAGES=(N-1)/9+1
DO 101 I=1,NPAGES
LTCOL=9*(I-1)+1
ITCOL=9*I
IF(ITCOL.GT.N)ITCOL=N
WRITE(6,1001)(K,K=LTCOL,ITCOL)
DO 101 J=1,M
IF(IND.EQ.0)WRITE(6,1002)J,(A(J,K),K=LTCOL,ITCOL)
IF(IND.EQ.1)WRITE(6,1003)J,(A(J,K),K=LTCOL,ITCOL)
101 CONTINUE
RETURN
1000 FORMAT(//,2X,'MATRIZ',1X,A6,/)
1001 FORMAT(/,4X,9(5X,I4,5X))
1002 FORMAT(I4,1P9E14.6)
1003 FORMAT(I4,9I14)
END
```



**FACULTAD DE INGENIERIA. U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**XVIII CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA**

**MODULO III**

**DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS**

*Del 3 al 13 de julio de 1992*

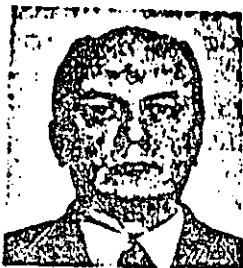
**MODIFICACIONES A LA PRACTICA DE DISEÑO Y CONSTRUCCION  
DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO**

**DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO**

**DR. ROBERTO MELI PIRALLA**

**JULIO - 1992**

MODIFICACIONES A LA PRACTICA DE DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO



Roberto Meli\*

Alcance

Fue en las estructuras de concreto donde se registró el mayor número de daños en los sismos de 1985 en la ciudad de México. Esto ocasionó que se avanzaran algunas dudas sobre la idoneidad del concreto reforzado para estructuras en zonas sísmicas. Si se compara el número de construcciones de concreto falladas con el de aquellas que tuvieron un desempeño satisfactorio en el sismo mencionado y en otros sismos severos, se concluye que es perfectamente factible construir edificaciones seguras en concreto reforzado. Es necesario sin embargo hacer modificaciones radicales a las prácticas de construcción que se seguían en el pasado. Estas modificaciones van más allá de la adopción de mayores coeficientes sísmicos en el diseño estructural: deben emplearse sistemas estructurales más idóneos para resistir acciones sísmicas, materiales con propiedades más adecuadas, métodos de diseño que mejor reflejen el comportamiento sísmico de las estructuras y detalles del refuerzo que permitan que los elementos soporten grandes deformaciones inelásticas sin deterioro de capacidad.

Parte de estas modificaciones se derivan de lo especificado por los nuevos reglamentos de construcciones. Otras modificaciones deben ser reflejo del criterio y la conciencia de los responsables del proyecto y construcción de las edificaciones.

En lo que sigue se harán algunas consideraciones sobre los cambios más importantes.

---

\*Instituto de Ingeniería, UNAM

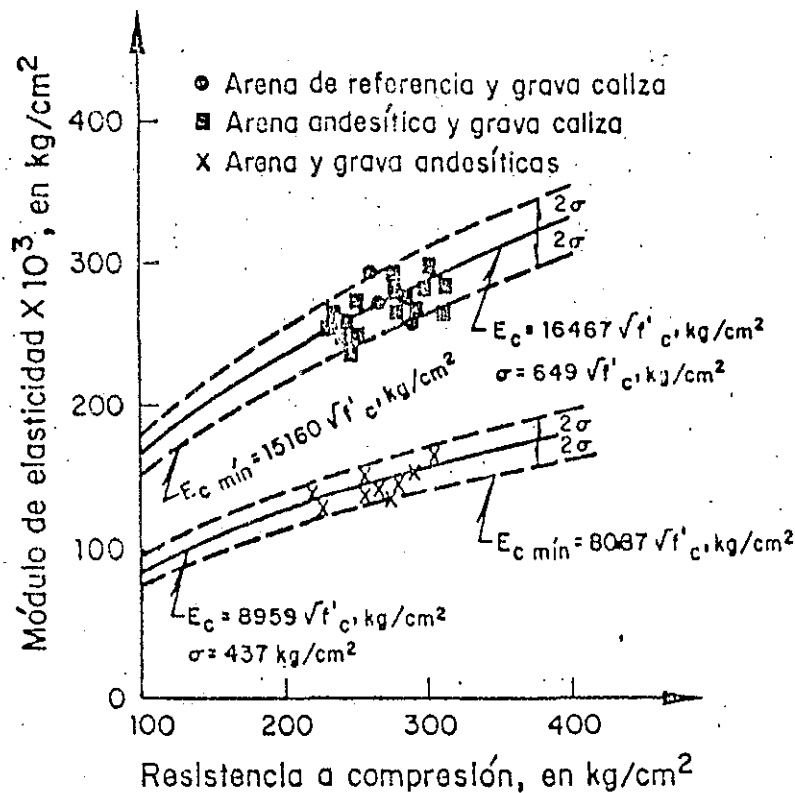


Fig 1. Relación módulo de elasticidad-resistencia a la compresión de los concretos andesíticos y calizos. (De Mendoza y Meña, Ref 1).

Otro aspecto preocupante de la práctica actual de elaboración del concreto es el uso de mezclas con proporciones excesivas de arena y consecuente escasez de grava así como con revenimientos muy elevados. Estas dosificaciones son típicas de los concretos que se transportan por bombeo y dan lugar a contracciones muy elevadas, las cuales tienden a producir una fisuración muy difundida en las estructuras y a debilitarlas para la resistencia a otras solicitaciones. La escasez de grava da lugar además a concretos con módulos de elasticidad bajos. Debe eliminarse por tanto esta práctica y lograr la fluidez que se requiere para el bombeo, sin salirse de las dosificaciones que permitan producir un concreto con todas las propiedades adecuadas para un buen comportamiento estructural.

Para el refuerzo de las estructuras de concreto en zonas sísmicas conviene contar con aceros que tengan una amplia zona de fluencia definida, para un esfuerzo no excesivamente elevado. Con frecuencia las barras de refuerzo que se producen en el país (Grado 42) tienen una composición química tal que la zona de fluencia es muy reducida o desaparece totalmente, (esencialmente por el alto contenido de carbono). Deben evitarse estas situaciones ya que, al

no existir fluencia definida, los esfuerzos en las barras crecen en forma continua al ser deformada la estructura por el efecto de un sismo y no existe un límite en la capacidad por flexión de los elementos de concreto, el cual impida que se produzcan en dichos elementos los modos de falla que pueden ser de tipo frágil (cortante, torsión, compresión en columnas, adherencia). Este punto se aclarará más adelante. Particularmente crítico es el problema de la adherencia: si los esfuerzos en el acero crecen excesivamente, la transmisión de esfuerzos de adherencia al concreto tiende a producir el aplastamiento del concreto en contacto con las corrugaciones de las barras y un corrimiento progresivo de las barras dentro del concreto ante la repetición de ciclos de carga.

Otro aspecto desfavorable de los aceros con alto contenido de carbono es la dificultad de lograr soldaduras adecuadas. Se ha estado promoviendo la producción de aceros de grado 42 de baja aleación, con bajo contenido de carbono en los que se tiene una zona de fluencia muy amplia y que son muy fáciles de soldar. Aceros de este tipo son muy recomendables en zonas sísmicas.

El problema de la soldadura de barras en obra es crítico. El control de calidad de estas operaciones es muy delicado y en barras de gran diámetro el traslape ya no es admisible. Debe promoverse el empleo de conectores metálicos para este tipo de barras.

### Sistemas estructurales

La edificación en las zonas urbanas se caracterizó hasta hace pocas décadas por su baja altura y por la abundancia de muros de mampostería de gran espesor; en los primeros edificios de cierta altura existía un esqueleto de estructura de acero, cubierto y rigidizado por gruesos muros de piedra o de tabique. Posteriormente, al aumentar la altura de los edificios y al popularizarse la construcción de concreto, subsistió la práctica de colocar un gran número de muros de tabique o de bloque en ambas direcciones y en todos los pisos. Poco a poco, sin embargo, los edificios se fueron haciendo más altos y más flexibles y el número de paredes rígidas de fachada y divisorias fue disminuyendo. Al mismo tiempo las formas se fueron haciendo más atrevidas e irregulares.

En la edificación tradicional las paredes divisorias y de fachada proporcionaban una resistencia apreciable a cargas laterales, suficiente para lograr un desempeño adecuado ante sismos de intensidad baja o moderada. Sin embargo la estructura resistente era inherentemente frágil y propiciaba el colapso ante sismos de excepcional intensidad.

En los edificios modernos, tanto en la ciudad de México como en la mayoría de las otras zonas sísmicas del país, no se sustituyó la resistencia y rigidez proporcionadas por los muros de mampostería, por la de otros elementos equivalentes como pudieron haber sido los muros de concreto; se adoptaron sistemas estructurales flexibles en los que el área de columnas y muros era relativamente pequeña y en los cuales la capacidad para resistir sismos de gran intensidad se basaba en la disipación de energía mediante deformaciones inelásticas.

Los resultados de la Fig 2 son muy ilustrativos. Se consignan los periodos fundamentales de vibración medidos en edificios de distinto número de pisos en la ciudad de México (Ref 2). Se aprecia que en promedio la relación entre el periodo (en segundos) y el número de pisos es 0.10 para los edificios en terreno firme y 0.15 para aquellos ubicados en la zona del lago. En contraste esta relación vale en promedio 0.06 para los edificios típicos que se construyen en Japón. Ya que el periodo es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la rigidez, lo anterior indica que en promedio los edificios en Japón tienen una rigidez lateral superior en más de seis veces a la de los edificios típicos de la ciudad de México en la zona del lago. Parte de la diferencia se debe al efecto de la falta de empotramiento en la base que tienen los edificios desplantados en la zona de lago; los desplazamientos y rotaciones de la base reducen significativamente la rigidez lateral efectiva de los edificios. Los periodos mencionados se midieron para vibraciones ambientales de muy baja amplitud. Para vibraciones producidas por sismos intensos los periodos serían muy superiores. La razón principal de los elevados periodos de vibración es la adopción de sistemas estructurales muy flexibles. Esta decisión es particularmente desafortunada si se considera que los movimientos sísmicos en la zona del lago tienen periodos dominantes elevados por lo que afectan particularmente a los edificios flexibles (ver Ref 3).

Por lo anterior los sistemas estructurales que conviene adoptar en edificios deben permitir en forma natural que se alcancen resistencias y rigideces elevadas ante cargas laterales. El marco es un sistema poco eficiente para tal efecto. Los muros de rigidez, los contravientos en distintas combinaciones y modalidades resultan mucho más ventajosos. Conviene, entonces, construcciones más robustas con abundancia de elementos rigidizantes distribuidos uniformemente de manera de transmitir a toda el área de la cimentación las fuerzas debidas a los efectos sísmicos.

Se ha señalado repetidamente que uno de los factores que contribuyeron más significativamente a la falla o mal

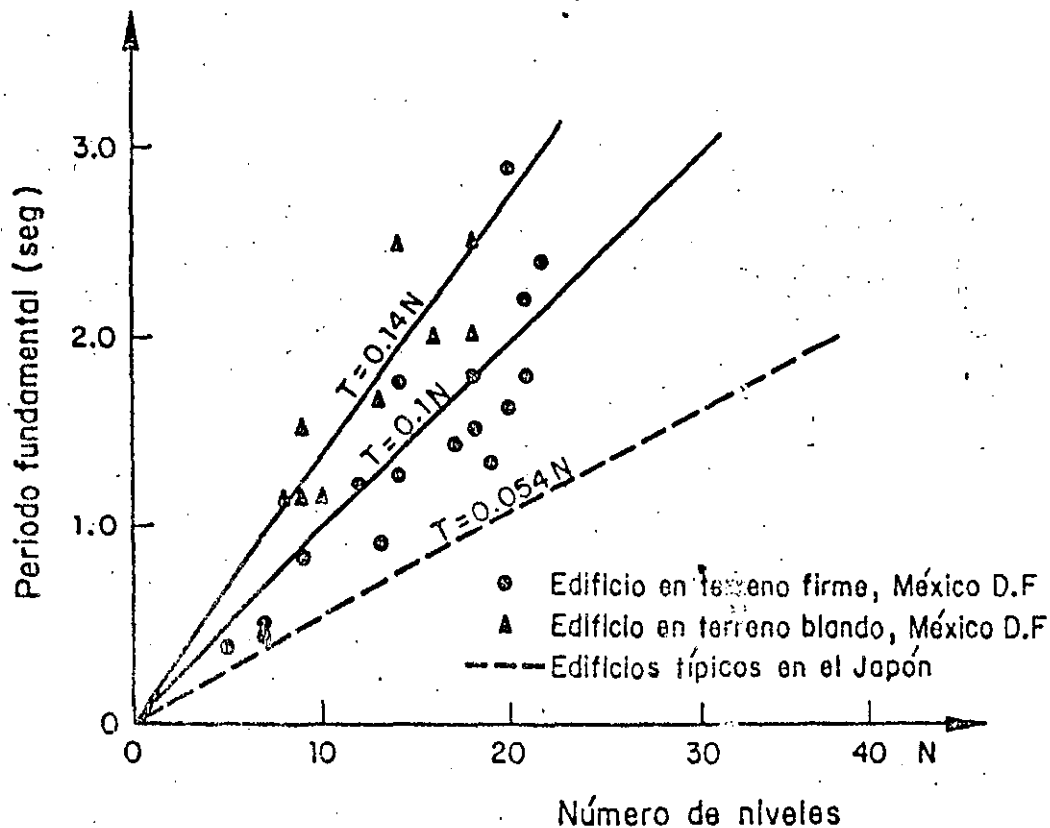
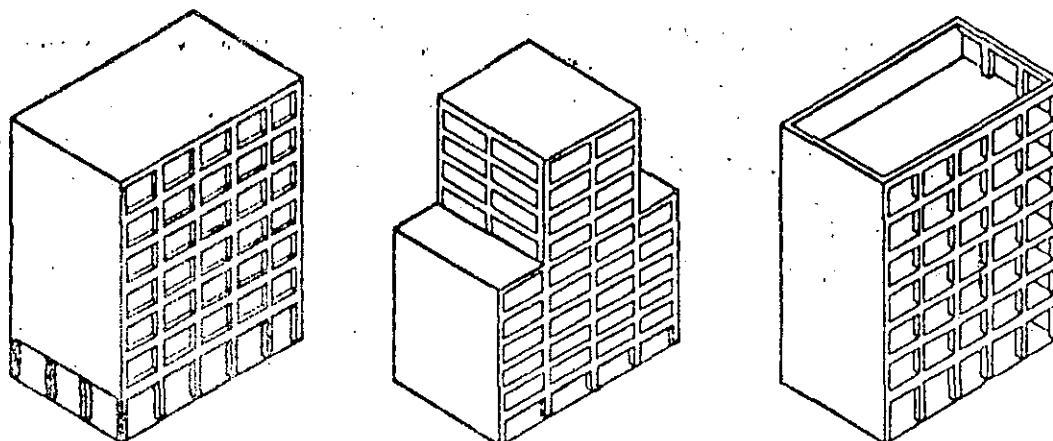


Fig 2. Relación de período fundamental contra número de pisos de edificios en distintas condiciones (de Ref 2)

comportamiento de los edificios fue la falta de regularidad del sistema estructural reflejada en formas irregulares en planta o en elevación del edificio, en asimetría en la disposición de los elementos resistentes, en cambios bruscos de rigidez y resistencia, en excesiva esbeltez o en discontinuidades en el flujo de fuerzas entre los elementos resistentes. Las ventajas de contar con estructuras regulares son indudables ya que se evitan las concentraciones y amplificaciones de solicitaciones y el comportamiento sísmico es más sencillo y más fácil de entender, por lo cual el diseño puede hacerse con reglas más simples y más comprobadas. El Reglamento del Distrito Federal contiene ahora requisitos bien definidos para considerar una estructura como regular y poder adoptar así factores menos conservadores en el diseño. La Fig 3 muestra algunos casos de estructuras irregulares.

Merece un comentario especial el sistema de losa plana reticular. Desde mucho antes del sismo se había llamado la atención sobre el abuso que se estaba haciendo de este sistema, al emplearlo en construcciones cada vez de mayor altura y sin considerar adecuadamente la limitación de las deformaciones laterales ante efectos sísmicos, ni los problemas de resistencia al cortante en la losa alrededor de





- a) Planta baja débil
- b) Reducción brusca de rigidez y resistencia lateral
- c) Fuerte asimetría en planta, de rigidez y resistencia

Fig 3 Sistemas estructurales irregulares

la columna y en las columnas mismas. Las fallas espectaculares experimentadas por algunos edificios de este tipo han llevado a muchos proyectistas y constructores a la opinión de que el sistema debe proibirse por ser inadecuado para resistir cargas laterales. La posición parece exagerada. La losa reticular ofrece un gran número de ventajas constructivas que pueden aprovecharse. Lo que es inadecuado es pretender resistir los efectos sísmicos en edificios de cierta altura, exclusivamente con la acción de marco que se forma entre las columnas y la losa. La resistencia a carga lateral debe ser proporcionada por muros de concreto o por elementos de rigidez y capacidad similar, dejando al sistema losa-columna la función de tomar las cargas verticales y una pequeña porción de las cargas laterales. La Fig 4 muestra esquemáticamente cómo podría combinarse una estructura de losa plana y columnas con un marco robusto de fachada que por su alta rigidez absorbería la casi totalidad de las fuerzas sísmicas. La ausencia de vigas en el interior del edificio mantendría las principales ventajas de la construcción con losa plana.

Un criterio de estructuración que debería promoverse también es que el edificio cuente con un núcleo robusto que proteja contra el colapso total de los entrepisos y la caída de las losas una sobre otra. Este mecanismo de falla fue el más catastrófico en el sismo de 1985 ya que fue responsable de la gran mayoría de las pérdidas de vidas

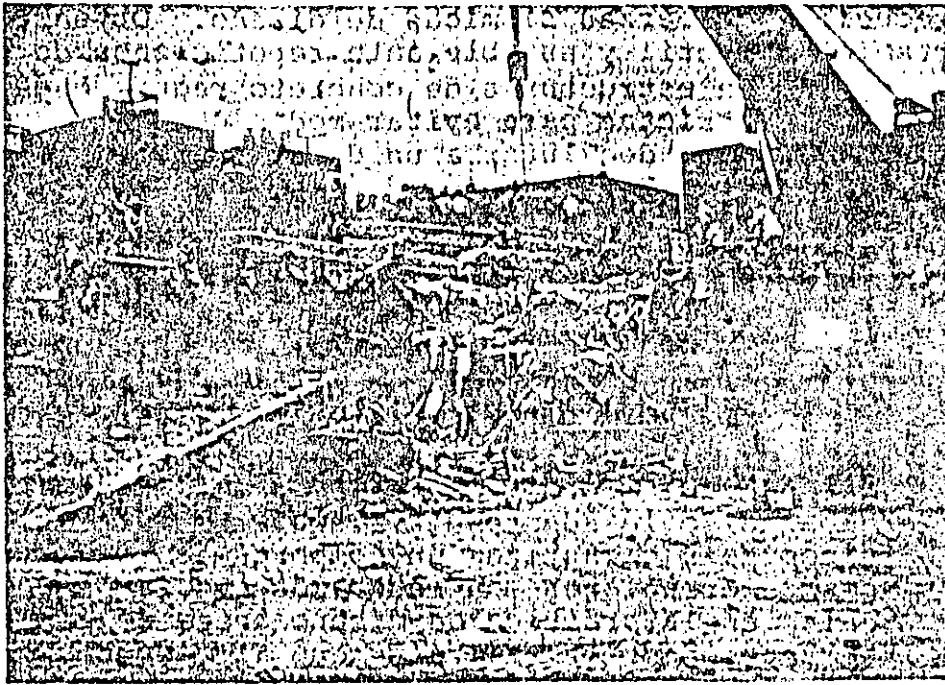


Fig 5 Colapso total de entrepisos de un edificio de con creto

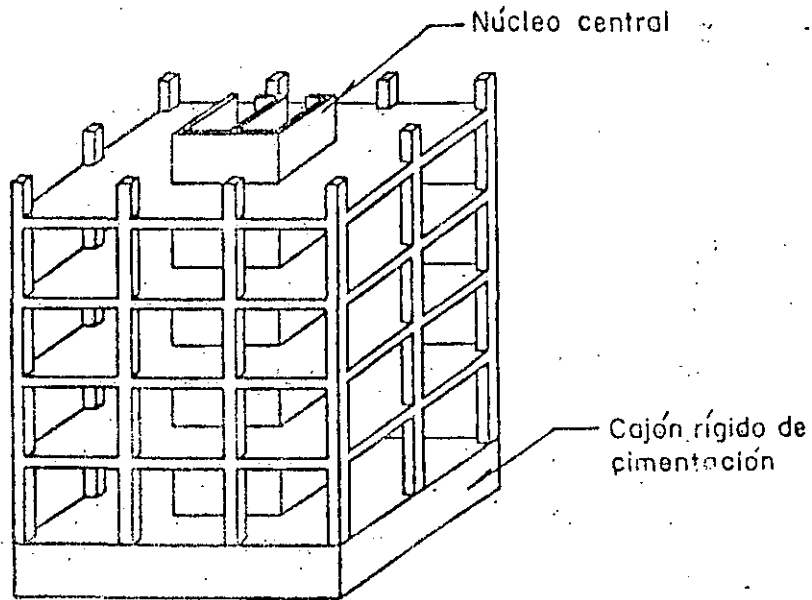
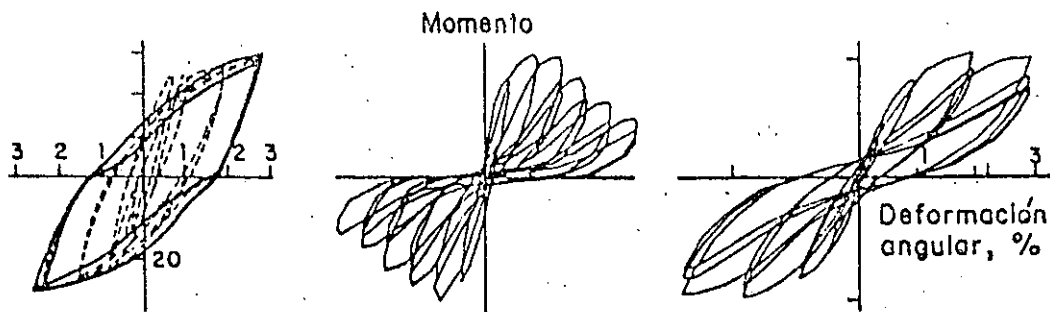


Fig 6 Estructura con núcleo central resistente

para reducir las fuerzas sísmicas de diseño. Obtener un comportamiento dúctil y estable ante repeticiones de ciclos de cargas en estructuras de concreto requiere de precauciones muy estrictas para evitar modos de falla que sean frágiles o que den lugar a un deterioro progresivo de la capacidad. La observación de los ciclos carga-deformación que se obtienen en ensayos de laboratorio muestra que en elementos sujetos a cargas axiales elevadas o en los que haya efectos importantes de cortante o de adherencia, el comportamiento se aleja mucho del elastoplástico, y tiende a deteriorarse.

En la Fig 7 se muestran las curvas carga-deformación ante ciclos de repetición de cargas para especímenes con diferente modo de falla. Se aprecia el deterioro notable cuando la carga axial o la adherencia rigen el comportamiento. Los requisitos para garantizar un comportamiento estable ante grandes deformaciones son mucho más estrictos que los que se seguían en la práctica de diseño antes de los sismos de 1985. Los cambios radicales que al respecto contienen las normas de concreto del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal así lo reflejan. Algunos de los requisitos que conducen a modificaciones drásticas con respecto a la práctica que se tenía antes de 1985, son el del refuerzo por confinamiento en los extremos de columnas, como se aprecia en el ejemplo de la Fig 8, la longitud de desarrollo y el confinamiento del concreto y



- a) Falla por flexión  
 b) Falla por flexo-compresión con carga axial elevada  
 c) Falla por flexión con corrimiento de las barras por adherencia

Fig 7 Lazos carga-deformación de elementos de concreto con diferente modo de falla

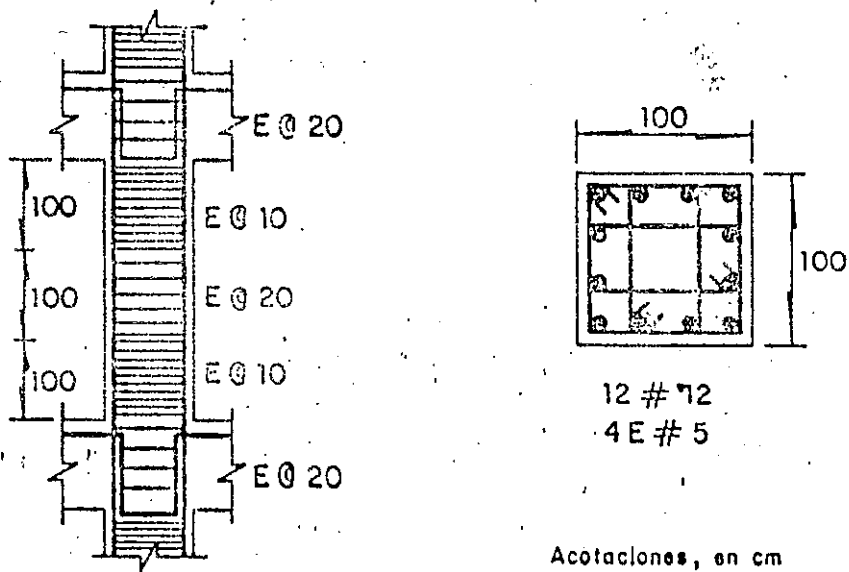


Fig 8. Ejemplo de refuerzo para columna de marco dúctil según requisitos de NTC de concreto del RDF87

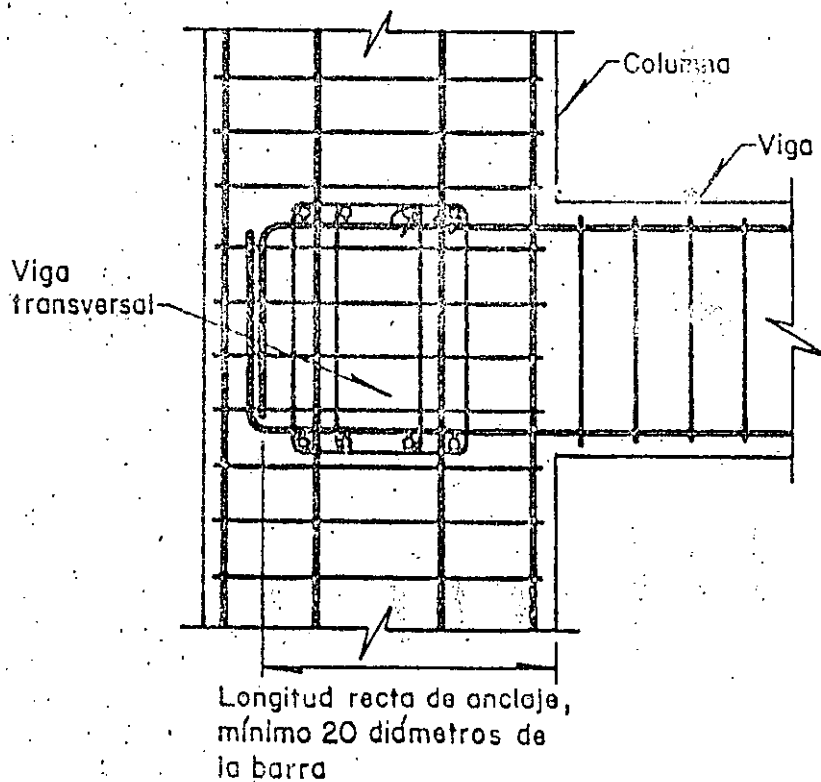


Fig 9. Ejemplo de unión viga-columna extrema según NTC del RDF87

el anclaje en las conexiones viga-columna, Fig 9, el confinamiento en los extremos de vigas, Fig 10 y el refuerzo transversal de las columnas en extremos de muros. La observancia de requisitos como los ilustrados en las figuras anteriores implica no solo un costo adicional por las cantidades de refuerzo que se requieren, sino un particular cuidado en la colocación del refuerzo y en el colado del concreto.

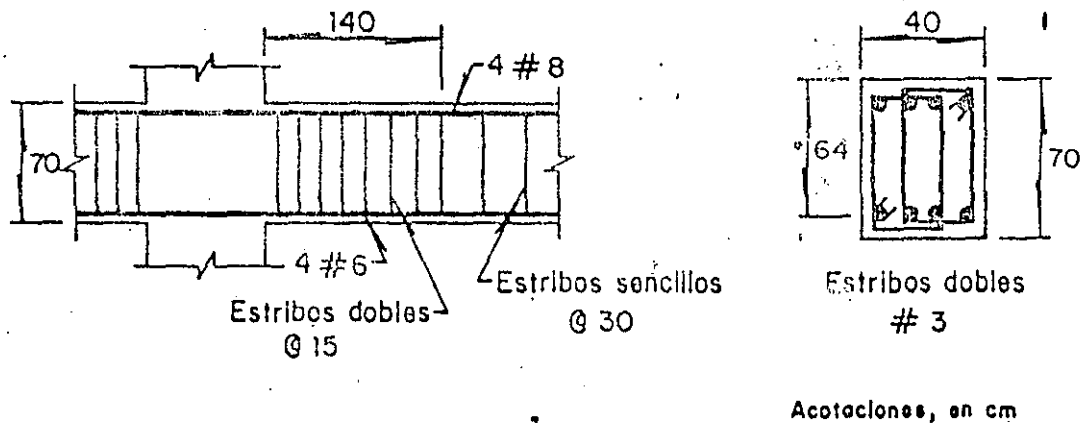
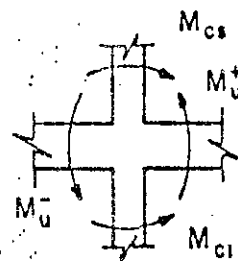
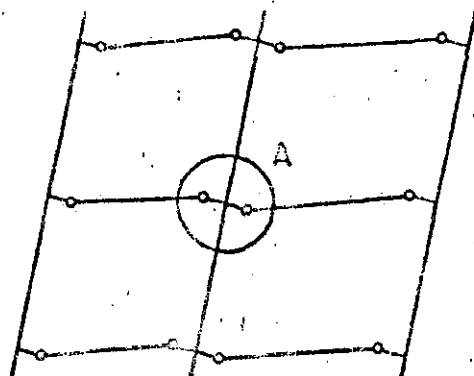


Fig 10. Ejemplo de refuerzo para extremo de viga de marco dúctil según requisitos de NTC de concreto del RDF87

Las precauciones para garantizar un comportamiento dúctil deben entenderse no como un medio para permitir grandes reducciones en las fuerzas sísmicas de diseño, sino como una protección contra el colapso de la estructura en caso de que las fuerzas sísmicas adquieran una intensidad excepcional. Un criterio de diseño que se ha estado propugnando desde hace algunos años para las estructuras de concreto en zonas sísmicas es una adaptación de métodos de diseño plástico de estructuras de concreto que se conoce en inglés como "capacity design". Se basa en la estrecha relación que existe en las estructuras de concreto entre la distribución de las fuerzas que se introducen en los distintos elementos estructurales y la forma en que estos se refuerzan y se detallan. Puede diseñarse la estructura de manera que, si el sismo alcanza intensidades excepcionales, esta sea capaz de disipar grandes cantidades de energía mediante el comportamiento inelástico de algunas zonas donde pueden desarrollarse grandes deformaciones sin problemas de falla frágil, mientras que el resto de la estructura se mantiene esencialmente elástico. Dado un sistema estructural, se elige el mecanismo de falla ante cargas laterales que se considera más apropiado para disipar energía y se diseñan las secciones que intervienen en

este mecanismo para que tengan la resistencia que corresponde a las cargas de diseño y se las detalla para un comportamiento dúctil. El resto de las secciones se diseña para capacidades superiores a las fuerzas que corresponden al mecanismo preseleccionado, de manera de asegurar de que no van a intervenir en el comportamiento inelástico.

De este criterio de diseño se han derivado el procedimiento de diseño que se prescribe para marcos dúctiles en las Normas de Concreto del Distrito Federal y de manera similar en las Normas del ACI. El procedimiento tiene como objetivo hacer que el comportamiento inelástico esté regido por un mecanismo de falla de "columnas fuertes-vigas débiles" como el que se ilustra en la Fig 11. Se trata que ocurra comportamiento inelástico solamente en los extremos de las vigas por la formación en ellas de articulaciones plásticas debidas a flexión. Se requiere detallar estas regiones para que sean capaces de desarrollar alta ductilidad y de diseñarlas para los momentos flexionantes que se obtienen del análisis sísmico. El diseño por cortante de las mismas vigas, el de las uniones viga-columna y el de las columnas por flexocompresión y cortante se hace con base en las fuerzas internas que se obtienen por equilibrio de los nudos cuando se alcanzó el momento de fluencia en las secciones extremas de las vigas. Las Fig 12 y 13 ilustran esquemáticamente los procedimientos para la revisión de las vigas y de las columnas, respectivamente.

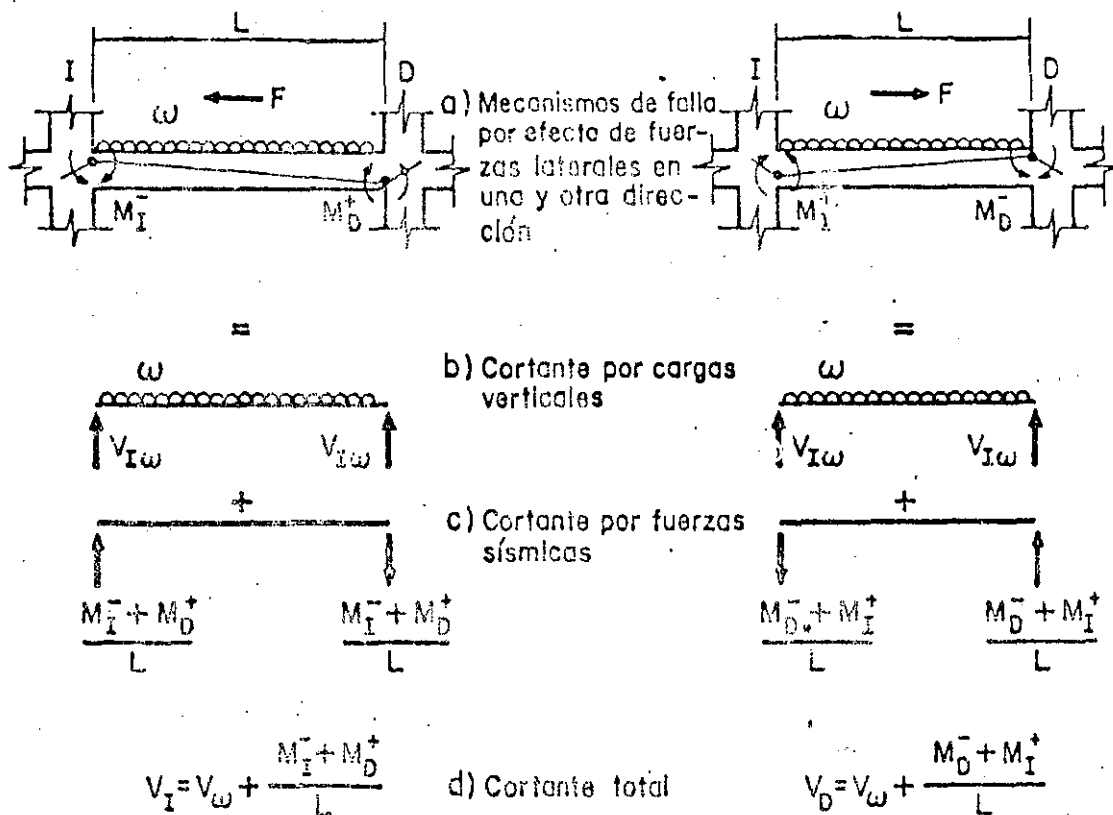


Detalle A

$$M_{cs} + M_{ci} = M_u^+ + M_u^-$$

- a) Mecanismo de falla de "columnas fuertes-vigas débiles"      b) Relación entre los momentos en vigas y columnas

Fig. 11. Mecanismo de falla postulado para marcos dúctiles



$M_D^-, M_D^+, M_I^-, M_I^+$  Son los momentos de fluencia para el refuerzo colocado en las secciones respectivas

Fig 12. Determinación de las fuerzas cortantes de diseño para vigas de marcos dúctiles de concreto

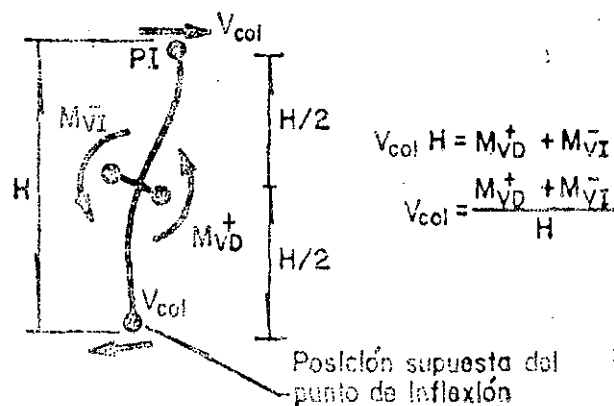


Fig 13. Fuerza cortante actuante en la columna, para el mecanismo de "columna fuerte-viga débil"

El nuevo Reglamento de Construcción para el Distrito Federal y las Normas correspondientes de concreto especifican el procedimiento anterior pero permiten un método opcional con el que tratan de lograr el mismo objetivo mediante la definición de factores de reducción de resistencia más

severos para los distintos elementos y modos de falla que no conviene intervengan en el comportamiento inelástico. Es deseable, sin embargo, que en estructuras importantes o con sistemas resistentes distintos de los convencionales, se identifiquen explícitamente los posibles modos de falla y se diseñe según el criterio anteriormente señalado.

La aplicación de los requisitos contenidos en los dos documentos mencionados va a ocasionar un cambio radical en la forma, las dimensiones, el refuerzo y el detallado de las estructuras de concreto en los edificios. Debe tenerse bien claro que los cambios van mucho más allá del mero incremento en los coeficientes sísmicos. La reducción en las deformaciones laterales permisibles, en los factores de comportamiento sísmico ( $Q$ ) y en los factores de resistencia ( $F_R$ ), así como una serie de requisitos mínimos para las dimensiones y para las cuantías de refuerzo longitudinal y transversal, van a redundar en incrementos sustanciales en la resistencia necesaria a cargas laterales. Estos van a influir en la modificación de los sistemas estructurales que sean económicamente más convenientes, así como en las alturas mismas de los edificios que se puedan construir.

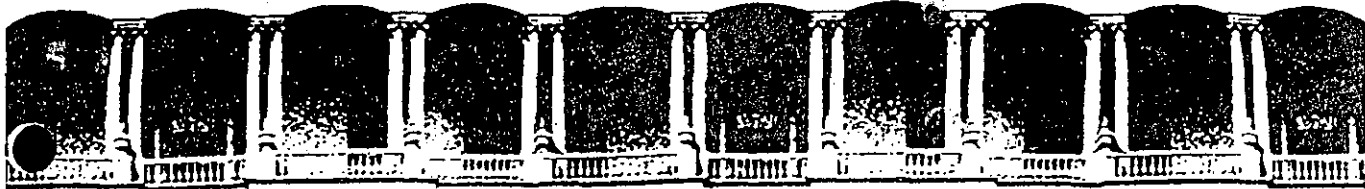
Los Reglamentos no prohíben sistemas estructurales que son poco eficientes para resistir efectos sísmicos ni recomiendan explícitamente los que sí lo son. Desalientan el uso de los primeros exigiendo el empleo de métodos de diseño más refinados y de factores de seguridad más elevados que inciden en la economía de cada solución estructural. El diseñador no debe forzar las soluciones a entrar en los límites permitidos por el Reglamento. Debe pugnar por la adopción de un sistema estructural sano que proporcione defensas claras ante los efectos sísmicos y cuya seguridad se puede comprobar mediante métodos aproximados y sencillos.

#### Referencias

1. Mendoza C.J. y M. Mena F. "Influencia de los agregados en los concretos estructurales del D.F." Revista IMCYC, vol 25 No 192, may 1987, p 9 a 20
2. Rodríguez Cuevas N. "Análisis experimental de vibraciones en edificios" Instituto de Ingeniería, Informe interno, ene 1987
3. Meli, R. y J.A. Avila "The 1985 Mexico Earthquake, Analysis of Buildings' Response" Earthquake Spectra, vol 5, No 1, Feb 1989, p 1 a 18.







**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**XVIII CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA**

**MODULO III**

**DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS**

*Del 3 al 13 de julio de 1992*

**REQUISITOS DE DUCTIBILIDAD PARA ESTRUCTURAS DE  
CONCRETO**

**DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO**

**DR. ROBERO MELI PIRALLA**

**JULIO - 1992**

## GUIA DE ESTUDIO

1. DESEMPEÑO EN SISMOS RECIENTES
2. COMPORTAMIENTO DEL CONCRETO ANTE CARGAS ALTERNADAS
3. COMPORTAMIENTO DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS
4. CRITERIOS DE DISEÑO SÍSMICO
5. SISTEMAS ESTRUCTURALES
6. MARCOS DÚCTILES
7. LOSAS PLANAS
8. MUROS DE CONCRETO
9. REFERENCIAS.

## GUIA DE ESTUDIO

### 1. DESEMPEÑO EN SISMOS RECIENTES

EL NÚMERO DE CONSTRUCCIONES DAÑADAS HA SIDO ELEVADO. PRINCIPALMENTE DEFECTOS DE ESTRUCTURACIÓN, FALTA DE DUCTILIDAD.

EL SISMO DE 85 EN MÉXICO PUSO EN EVIDENCIA TODA LA GAMA DE PROBLEMAS.

EVIDENCIA DE BUEN COMPORTAMIENTO CUANDO SE HAN SEGUIDO LAS PRÁCTICAS ADECUADAS.

LAS MODIFICACIONES AL REGLAMENTO Y NORMAS TÉCNICAS HAN SIDO MUY FUERTES. LAS ESTRUCTURAS HAN CAMBIADO RADICALMENTE DESPUÉS DE 85.

### 2. COMPORTAMIENTO DEL CONCRETO ANTE CARGAS ALTERNADAS

PARA ESTRUCTURAS QUE DEBEN RESISTIR EFECTOS SÍSMICOS SE REQUIERE UN COMPORTAMIENTO DÚCTIL ANTE CARGAS LATERALES Y UN COMPORTAMIENTO ESTABLE ANTE REPETICIONES DE CARGA ALTERNADAS. LOS CICLOS DE HISTERESIS DEBEN CONTENER UN ÁREA GRANDE PARA QUE LA ESTRUCTURA PUEDA DISIPAR ENERGÍA MEDIANTE AMORTIGUAMIENTO INELÁSTICO.

EL CONCRETO SIMPLE ES UN MATERIAL FRÁGIL, TANTO EN TENSIÓN COMO EN COMPRESIÓN.

VARIABLES QUE INFLUYEN EN LA CURVA ESFUERZO-DEFORMACIÓN: VELOCIDAD DE CARGA,  $F'_C$ ,

ESTADO BIAxIAL Y TRIAXIAL DE ESFUERZOS Y EL EFECTO DEL COMPORTAMIENTO.

EL CONFINAMIENTO CON ZUNCHO O CON UNA COMBINACIÓN DE ESTRIBOS Y BARRAS LONGITUDINALES ES EL ÚNICO MEDIO DE LOGRAR UN COMPORTAMIENTO DÚCTIL.

EL COMPORTAMIENTO DESEABLE SE PUEDE LOGRAR SÓLO CUANDO EL MODO DE FALLA QUE DOMINA ES EL DE FLEXIÓN O FLEXO COMPRESIÓN CON CARGA AXIAL MUY BAJA.

LA SECCIÓN DEBE SER AMPLIAMENTE SUBREFORZADA, DOBLEMENTE ARMADA.

SE REQUIERE CONFINAMIENTO EN LAS ARTICULACIONES PLÁSTICAS Y ESPECIALMENTE EVITAR EL PANDEO DEL REFUERZO EN COMPRESIÓN.

LAS FALLAS POR FLEXOCOMPRESIÓN, CORTANTE, TORSIÓN, ADHERENCIA NO GARANTIZAN COMPORTAMIENTO DÚCTIL.

### 3. COMPORTAMIENTO DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS

LOS CRITERIOS DE DISEÑO SÍSMICO ACTUALES SE BASAN EN LA CONSIDERACIÓN DE QUE SÓLO PARTE DE LA ENERGÍA DEL SISMO SE DISIPA POR TRABAJO DE LA ESTRUCTURA EN SU INTERVALO DE COMPORTAMIENTO LINEAL.

PARA SISMOS EXCEPCIONALES SE TENDRÁN DEFORMACIONES INELÁSTICAS Y HAY QUE DAR A LA ESTRUCTURA CAPACIDAD PARA ENTRAR EN ESA ETAPA SIN DAÑO GRAVE O COLAPSO.

EL CONCRETO TIENE COMPORTAMIENTO NO LINEAL DESDE NIVELES DE CARGA MODERADOS: AGRIETAMIENTO POR FLEXIÓN.

EL COMPORTAMIENTO NETAMENTE NO LINEAL SE TIENE CON LA FLUENCIA DE SECCIONES POR MOMENTO FLEXIONANTE.

EL COMPORTAMIENTO NO LINEAL IMPLICA REDISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS. LAS SECCIONES QUE SE AGRIETAN O FLUYEN PIERDEN RIGIDEZ O SE ARTICULAN Y AUMENTAN LOS MOMENTOS EN LAS ZONAS QUE PERMANECEN MÁS RÍGIDAS.

LA VIGA CONTINUA REPRESENTA UN EJEMPLO SIMPLE DEL FENÓMENO DE REDISTRIBUCIÓN.

EN CADA SECCIÓN EL MOMENTO ACTUANTE ESTÁ LIMITADO POR EL MOMENTO RESISTENTE (POSITIVO Y NEGATIVO) QUE DISPONE LA SECCIÓN DE ACUERDO CON EL REFUERZO PROPORCIONADO.

LOS MOMENTOS SE REDISTRIBUYEN DE ACUERDO A LA RESISTENCIA DISPONIBLE HASTA QUE SE FORME UN MECANISMO DE FALLA.

EL MECANISMO DE FALLA QUE SE PRESENTARÁ PUEDE SER SELECCIONADO EN LA ETAPA DE DISEÑO AL DEFINIR LOS MOMENTOS RESISTENTES DE LAS DISTINTAS SECCIONES.

ES ACEPTABLE DIMENSIONAR LAS SECCIONES A PARTIR DE LOS DIAGRAMAS DE ELEMENTOS MECÁNICOS QUE SE OBTIENE DEL ANÁLISIS ELÁSTICOS LINEALES. IDEALMENTE EN ESA CONDICIÓN SE ALCANZA SIMULTÁNEAMENTE LA CAPACIDAD DE TODAS LAS SECCIONES. TAMBIÉN ES FACTIBLE DIMENSIONAR PARA ELEMENTOS MECÁNICOS DIFERENTES DE LAS ELÁSTICAS Y QUE CUMPLAN CON EL EQUILIBRIO.

LOS CRITERIOS DE DISEÑO DE LAS NORMAS ACTUALES EXIGEN DISEÑAR DE MANERA QUE SE PRESENTEN MECANISMOS DE FALLA DÚCTILES Y TOMAR FACTORES DE SEGURIDAD ADICIONALES PARA MODOS DE FALLA FRÁGILES O QUE CORRESPONDAN A UN COMPORTAMIENTO CON DETERIORO.

#### 4. CRITERIOS DE DISEÑO SÍSMICO

ESTO SE BUSCA MEDIANTE EL MANEJO DE FACTORES DE RESISTENCIA DIFERENTES O MEDIANTE LA REVISIÓN DE CONDICIONES DE EQUILIBRIO LOCAL (DE NUDO, DE ENTREPISO, DE VIGA O DE COLUMNA), VER EJEMPLOS.

POR ESTAS CONDICIONES EL DIMENSIONAMIENTO SE ALEJA MUCHO DE LOS RESULTADOS DEL ANÁLISIS ELÁSTICO.

LOS CÓDIGOS PERMITEN REDUCCIONES A LOS COEFICIENTES SÍSMICOS DEPENDIENDO DE QUÉ TAN SEVEROS SON LOS REQUISITOS QUE SE OBSERVAN PARA GARANTIZAR UN COMPORTAMIENTO DÚCTIL.

LOS CÓDIGOS ESTABLECEN REQUISITOS DE RIGIDEZ Y DE RESISTENCIA. LOS PRIMEROS (DESPLAZAMIENTOS ADMISIBLES) DEFINEN ESENCIALMENTE LAS DIMENSIONES DE LOS ELEMENTOS ESTRUCTURALES, LOS SEGUNDOS EL REFUERZO. LA DISTRIBUCIÓN DEL REFUERZO LONGITUDINAL Y TRANSVERSAL OBEDECE LA BÚSQUEDA DE LOS MECANISMOS DE FALLA DÚCTILES.

LAS REDUCCIONES POR DUCTILIDAD DE LOS COEFICIENTES SÍSMICOS DEBEN LIMITARSE PARA EVITAR DAÑOS FRECUENTES Y REPARACIONES COSTOSAS.

## 5. SISTEMAS ESTRUCTURALES

LA ELECCIÓN DEL SISTEMA ESTRUCTURAL APROPIADO ES EL PASO BÁSICO DEL DISEÑO.

ADEMÁS DEBE EVITAR COMPORTAMIENTOS INDESEABLES POR CONCENTRACIÓN DE FUERZAS, AMPLIFICACIONES, VIBRACIONES TORSIONALES, ETC. POR ELLO DEBE BUSCARSE UN SISTEMA REGULAR Y SIMÉTRICO.

TAMBIÉN SE DEBEN EVITAR CONCENTRACIONES DE FUERZAS EN LA CIMENTACIÓN.

EL MARCO "RÍGIDO" ES UN SISTEMA RELATIVAMENTE FLEXIBLE CON EL QUE RESULTA DIFÍCIL LIMITAR LOS DESPLAZAMIENTOS LATERALES A LOS VALORES ADMISIBLES EN EDIFICIOS DE CIERTA ALTURA.

CONVIENE RECURRIR A RIGIDIZACIÓN DE LOS MARCOS CON MUROS DE CONCRETO DE OTROS ELEMENTOS.

## 6. MARCOS DÚCTILES

LA ESTRUCTURACIÓN A BASE DE MARCOS PERMITE ALCANZAR GRANDES DUCTILIDADES. PARA ELLO DEBEN OBEDECERSE REQUISITOS ESTRICTOS DE DISEÑO Y DETALLADO DE LAS VIGAS, COLUMNAS Y CONEXIONES VIGA-COLUMNA.

LOS REQUISITOS DEL RDF87 Y DEL ACI SON SIMILARES A ESTE RESPECTO. SUS OBJETIVOS SON QUE LAS ARTICULACIONES PLÁSTICAS SE PRESENTEN EN ZONAS ESPECIALMENTE DETALLADAS PARA ALCANZAR GRANDES DUCTILIDADES Y QUE AÚN LAS SECCIONES DONDE SE ESPEREN ARTICULACIONES PLÁSTICAS SE PROTEJAN CONTRA FALLA FRÁGIL.

RESUMEN DE REQUISITOS PARA VIGAS:

- . CUANTÍA MÁXIMA DE REFUERZO IGUAL A 50% DE LA BALANCEADA.
- . TENER UN REFUERZO MÍNIMO POSITIVO Y NEGATIVO EN TODAS LAS SECCIONES ( $P_{MIN} = 14/F_Y$ ); MÍNIMO DOS BARRAS EN CADA LECHO.
- . COLOCAR EN LOS EXTREMOS REFUERZO POSITIVO QUE PROPORCIONE UN MOMENTO RESISTENTE IGUAL POR LO MENOS A LA MITAD DEL NEGATIVO.

POR LO MENOS UNA TERCERA PARTE DEL REFUERZO NEGATIVO DEBE EXTENDERSE HASTA UN CUARTO DEL CLARO Y UNA CUARTA PARTE DEBE SER CONTINUA EN TODO EL LECHO SUPERIOR.

NO CORTAR REFUERZO EN ZONAS DE POSIBLES ARTICULACIONES PLÁSTICAS (A  $2D$  DEL APOYO); SI NO PUEDEN EVITARSE TRASLAPES DEBERÁN COLOCARSE ESTRIBOS A LO LARGO DE LOS MISMOS. ESTRIBOS, MÍNIMO #3, A  $D/2$  EN TODA LA VIGA Y A  $D/4$  EN UNA DISTANCIA DE 4 PERALTES A PARTIR DEL APOYO. EN ESTA ZONA A,  $\geq 0.15A_s \frac{S}{D}$  ó  $0.15A_s \frac{S}{D}$ .

EN LA ZONA DE ARTICULACIÓN PLÁSTICA ( $2D$  DEL APOYO) LAS BARRAS QUE DEBAN TRABAJAR EN COMPRESIÓN DEBERÁN ESTAR CONFINADAS POR ESTRIBOS (MÍNIMO #3) A UNA SEPARACIÓN NO MAYOR DE  $16 \emptyset$  NI 30 CM.

DEBE DISEÑARSE PARA LA FUERZA CORTANTE QUE SE PRESENTA EN LA VIGA CUANDO SE ALCANZAN LOS MOMENTOS ÚLTIMOS EN LOS EXTREMOS. ÉSTO ES CON LA FINALIDAD DE QUE PUEDA DESARROLLARSE UN MECANISMO DE FALLA POR FLEXIÓN.

RESUMEN DE REQUISITOS PARA COLUMNAS:

CUANTÍA DE REFUERZO ENTRE 1 Y 6%

LA SUMA DE LAS CAPACIDADES EN FLEXIÓN DE LAS COLUMNAS QUE CONCURREN A UNA UNIÓN DEBE SER MAYOR QUE LA SUMA DE CAPACIDADES DE LAS VIGAS QUE CONCURREN A LA MISMA. ÉSTO TIENE A ASEGURAR QUE LAS ARTICULACIONES PLÁSTICAS SE FORMEN EN LAS VIGAS. NO DICE CUÁNTO DEBEN SOBREDISEÑARSE LAS COLUMNAS.

SI  $P \leq 0.4 P_B$  (CARGA AXIAL PARA FALLA BALANCEADA) DEBEN RESPETARSE EN LA COLUMNA LOS MISMOS REQUISITOS QUE PARA VIGAS.

CUANDO  $P > 0.4 P_B$  HAY QUE CONFINAR EL NÚCLEO DE LA COLUMNA POR MEDIO DE ESPIRAL O ESTRIBOS EN UNA DISTANCIA IGUAL A UN PERALTE,  $1/6$  DE LA ALTURA DE LA COLUMNA O 45 CM (EL MAYOR DE LOS TRES) A PARTIR DE LA CARGA DE LA VIGA.



LA CUANTÍA DE REFUERZO ESPIRAL SERÁ

$$\rho_s = 0.45 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{F_c}{F_y} \leq 0.12 \frac{F'_c}{F_y}$$

EL ÁREA DE ESTRIBOS DE CONFINAMIENTO SERÁ POR LO MENOS

IGUAL A  $A_{SH} = \frac{l_H S_{SH}}{Z}$ ;  $S_H$  NO MAYOR QUE 10 CM.

PARA REDUCIR LA LONGITUD  $l_H$  PUEDEN EMPLEARSE GANCHOS DEL MISMO DIÁMETRO QUE LOS ESTRIBOS CUYA DEFORMACIÓN REQUIERE RETRINGIR.

SEPARACIÓN MÁXIMA DE ESTRIBOS:  $d/2$ ; DISEÑADOS PARA RESISTIR EL CORTANTE QUE SE INTRODUCE EN LA COLUMNA AL FORMARSE LAS ARTICULACIONES PLÁSTICAS EN LAS VIGAS.

LAS CONEXIONES VIGA-COLUMNA SON PUNTOS CRÍTICOS DEL COMPORTAMIENTO DE UN MARCO. HA HABIDO FALLAS FRECUENTES SOBRE TODO POR ANCLAJE INADECUADAS DEL REFUERZO DE LAS VIGAS.

LAS CONEXIONES EXTREMAS SON MUCHO MÁS CRÍTICAS QUE LAS INTERIORES.

SE REQUIERE REVISAR LAS CONEXIONES:

- A) POR CONFINAMIENTO PROLONGANDO EL REFUERZO TRANSVERSAL A LOS EXTREMOS DE LA COLUMNA, DENTRO DE LA CONEXIÓN CON LA TRABE.
- B) POR CORTANTE, REVISANDO LA CONEXIÓN PARA UNA CONDICIÓN DE CORTANTE ÚLTIMA.
- C) POR ANCLAJE; EVITANDO TRASLAPES; DANDO LONGITUD DE ANCLAJE SUFICIENTE A LAS BARRAS LONGITUDINALES (ESTO RIGE EL TAMAÑO DE LA COLUMNA), DANDO UN TAMAÑO SUFICIENTE A LA VIGA Y A LA COLUMNA PARA PERMITIR LA INVERSIÓN DE ESFUERZOS.

## 7. LOSAS PLANAS

AL NO TENER VIGAS FRANCAS SE LIMITA EL EFECTO DE MARCO; RESULTAN SISTEMAS MUY FLEXIBLES Y CON PROBLEMAS DE CORTANTE EN LA CONEXIÓN LOSA-COLUMNA.

GRAN NÚMERO DE FALLAS OBSERVADAS EN ESTE SISTEMA.

ES NECESARIO QUE TENGAN OTROS ELEMENTOS QUE TOMEN CARGAS LATERALES (MUROS).

EL REGLAMENTO DEL DISTRITO FEDERAL DA REQUISITOS DE ANÁLISIS (ANCHO EQUIVALENTE DE LOSA) Y DE DIMENSIONAMIENTO DE REFUERZO EN LOSA Y EN LA CONEXIÓN, PARA QUE RESISTAN EFECTOS SÍSMICOS. LA EFICIENCIA ES LIMITADA.

EL REFUERZO POR SISMO DEBE CONCENTRARSE EN LAS NERVADURAS DE EJE DE COLUMNA Y DEBE PROPORCIONARSE REFUERZO DE CORTANTE EN UNA VIGA AHOGADA.

#### 8. MUROS DE CONCRETO

MAL LLAMADOS MUROS DE CORTANTE, TRABAJAN PRINCIPALMENTE POR FLEXIÓN.

PUEDEN ALCANZAR GRAN DUCTILIDAD SI SE DETALLAN APROPIADAMENTE. POR SU ALTA RIGIDEZ TIENDEN A CONCENTRAR LAS FUERZAS SÍSMICAS.

REQUIEREN REFUERZO VERTICAL Y HORIZONTAL EN EL ALMA Y, ESPECIALMENTE, REFUERZO EN SUS EXTREMOS PARA QUE CUANDO TRABAJEN ESTAS EN COMPRESIÓN NO SE PRODUZCA FALLA FRÁGIL.

LOS ELEMENTOS EXTREMOS DEL MURO DEBEN DETALLARSE COMO COLUMNAS DÚCTILES.

LOS HUECOS Y ABERTURAS REQUIEREN DE DETALLADO ESPECIAL.

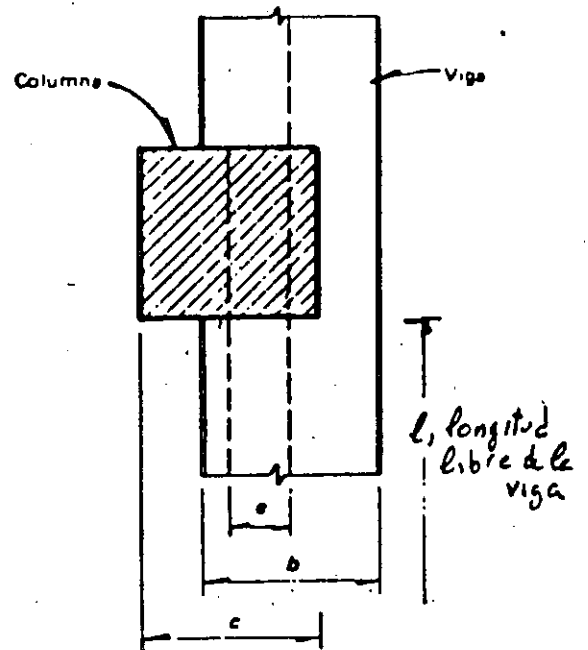
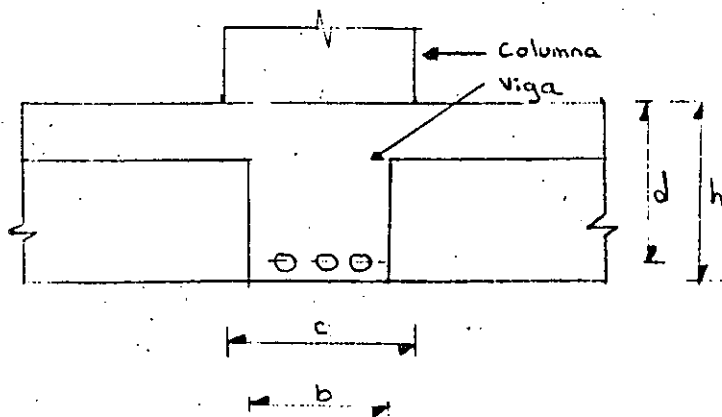
#### REFERENCIAS

1. PARK R. Y T. PAULAY "REINFORCED CONCRETE STRUCTURES", J. WILEY, 1975.
2. DOWRICK, D.J. "EARTHQUAKE RESISTANT DESIGN", 2<sup>A</sup> EDICIÓN. J. WILEY, 1988.
3. BAZÁN, E. Y R. MELI "MANUAL DE DISEÑO SÍSMICO DE EDIFICIOS", LIMUSA, 1985.

4. LOERA, S. "MANUAL DE LAS NORMAS TÉCNICAS DE DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO DEL RDF 87", INSTITUTO DE INGENIERÍA, 1991.

**REQUISITOS DE DUCTILIDAD**  
**PARA ESTRUCTURAS DE CONCRETO**

**ROBERTO MELI**



a) Requisitos Generales

$$l/b \leq 35$$

b) Requisitos para marcos dúctiles

$$b \geq 25 \text{ cm}$$

$$b \leq c$$

$$h/b \leq 3$$

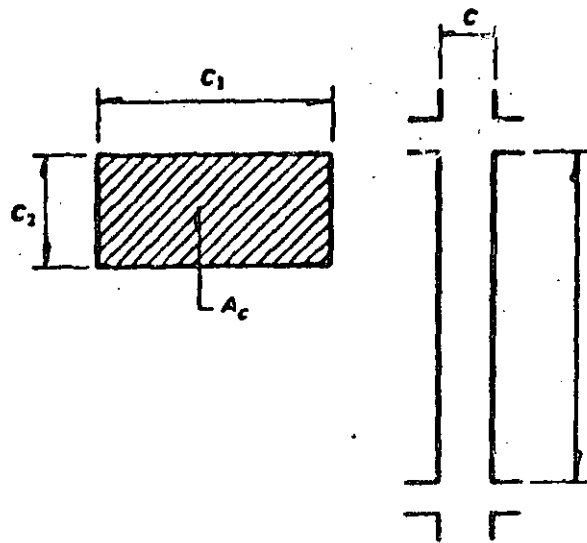
$$e \leq 0.1c$$

$$l/b \leq 30$$

$$l/d \geq 4$$

Fig 10.1 Requisitos geométricos para vigas de marcos de concreto.





Requisitos generales

$$c_1, c_2 \geq 20 \text{ cm}$$

$$c_1/c_2 \leq 4$$

Requisitos adicionales para marcos dúctiles

$$c_1, c_2 \geq 30 \text{ cm}$$

$$A_c \geq \frac{P_u}{0.5f'_c}$$

$$c_1/c_2 \leq 2.5$$

$$l/c \leq 15$$

Fig 10.6 Requisitos geométricos para columnas de marcos de concreto

)

... ..  
... ..

)

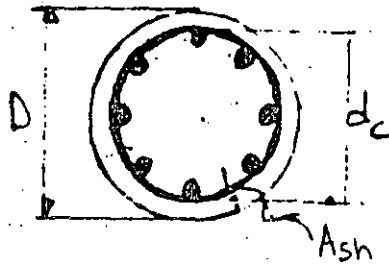
... ..  
... ..  
... ..

... ..  
... ..

)

... ..  
... ..  
... ..





Mínimo 6 barras longitudinales

Ref. Transversal  $\phi \geq \text{No. 3}$

El acero de la hélice  $\leq$  grado 42

$$A_{sh} \geq 0.11 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} d_c s$$

$$A_{sh} \geq 0.12 \frac{f'_c}{f_y} d_c s$$

$$l_c \geq \begin{cases} D \\ h/6 \\ 60 \text{ cm} \end{cases}$$

$$s_2 \leq 7 \text{ cm y } \geq 1.5 \text{ tamaño agregado}$$

Los traslapes tendrán 1.5 vueltas

Las hélices se anclarán en los extremos de la columna mediante 2.5 vueltas

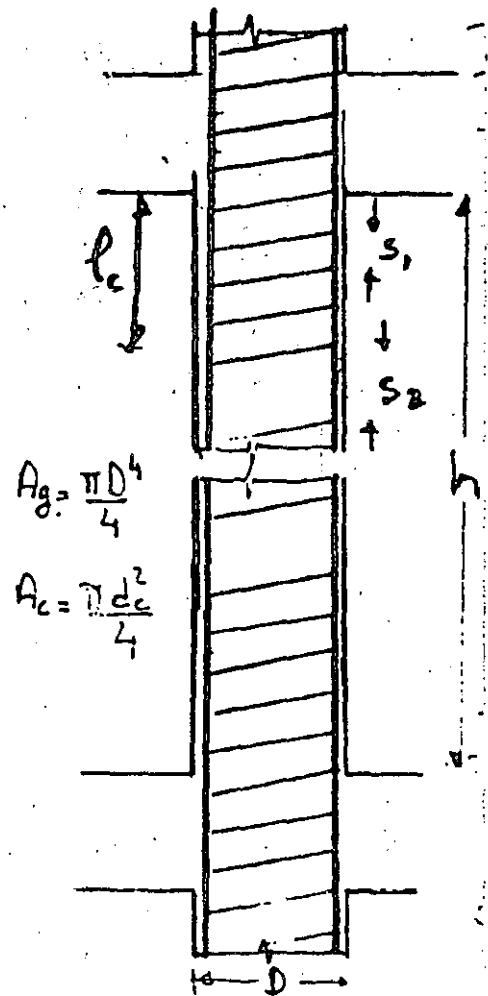


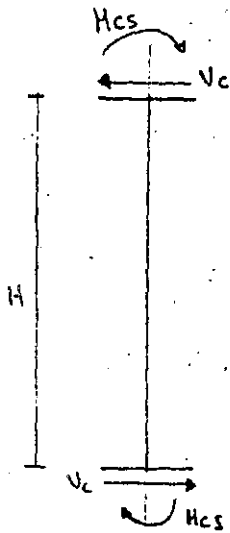
Fig 10.9 Requisitos para columnas zunchadas

1. The first part of the document is a list of names and addresses, which appears to be a directory or a list of contacts. The names are written in a cursive hand, and the addresses are listed below them.

2. The second part of the document is a list of names and addresses, similar to the first part. The names are written in a cursive hand, and the addresses are listed below them. This section appears to be a continuation of the directory or list of contacts.

3. The third part of the document is a list of names and addresses, similar to the first two parts. The names are written in a cursive hand, and the addresses are listed below them. This section appears to be a continuation of the directory or list of contacts.

4. The fourth part of the document is a list of names and addresses, similar to the first three parts. The names are written in a cursive hand, and the addresses are listed below them. This section appears to be a continuation of the directory or list of contacts.

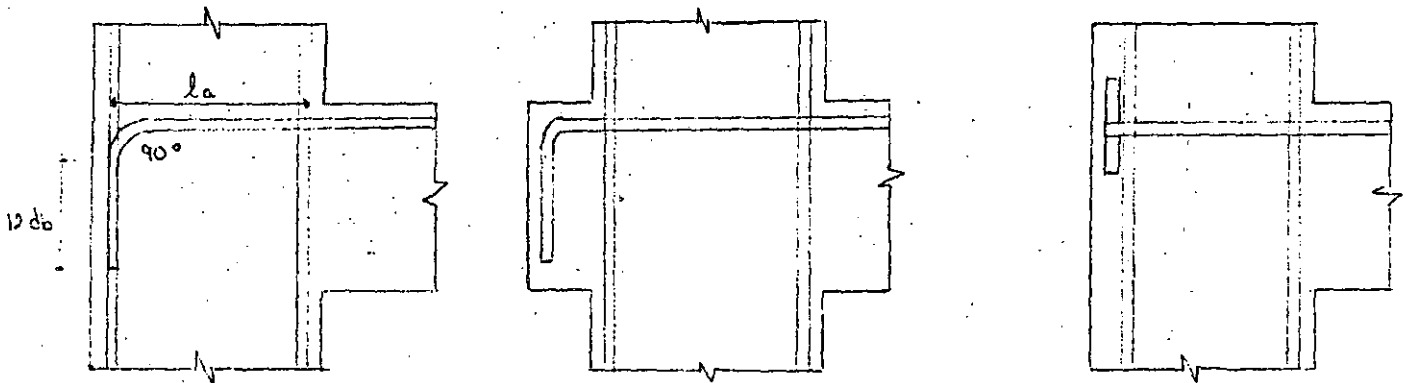


$$V_c = \frac{H_{cs} + H_{cs}}{H}$$

$$M_c \geq 1.5(\Sigma M_u)$$

- En el extremo inferior de columnas de planta baja, se usará el momento resistente de diseño de la columna obtenido con la carga axial de diseño que conduzca al mayor momento resistente.
- En el extremo superior de columnas del último entrepiso se usará  $1.5 \Sigma M_u$ .

Fig. 10.14 Procedimiento para la revisión de la capacidad por cortante de las columnas de marcos dúctiles.



$$l_a \geq \frac{0.076 f_y d_b}{\sqrt{f_c}}$$

15 cm  
8 db

NOTA: 30 % mayor en concreto ligero

a) Anclaje con gancho extremo

b) Viga con saliente para proporcionar la longitud de anclaje necesaria.

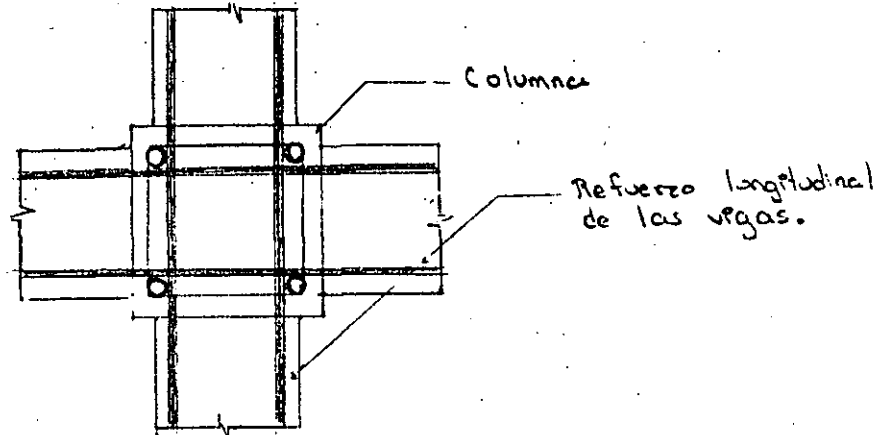
c) Anclaje mecánico

Fig. 10.15. Anclaje del refuerzo longitudinal en Vigas extremas de ...

# UNION VIGA-COLUMNA

## Marcos Dúctiles

### a) Requisitos generales

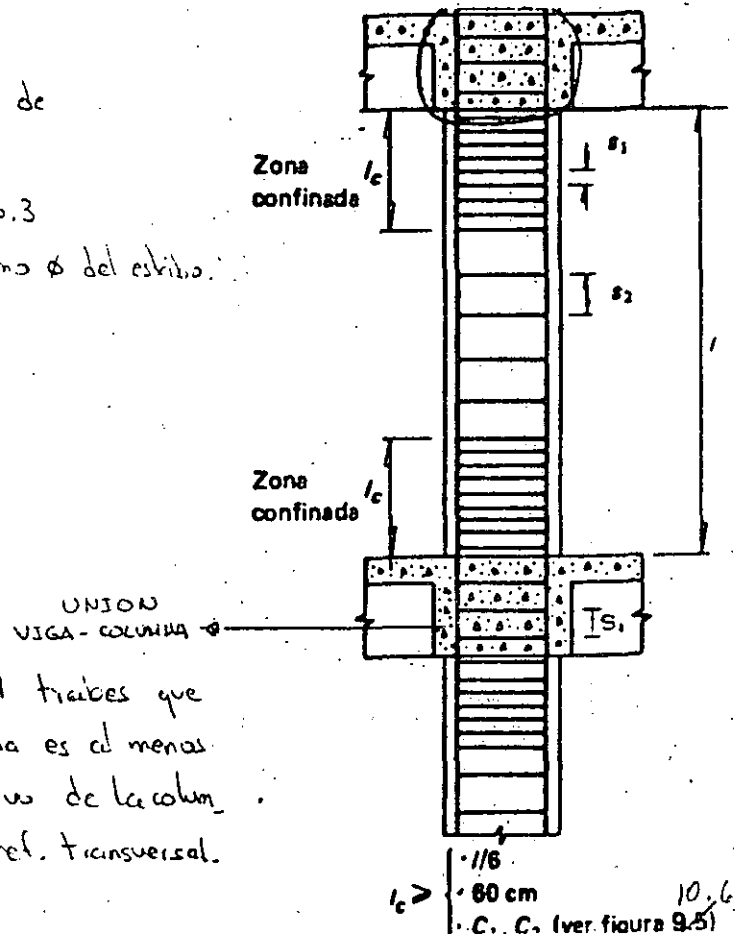


El refuerzo longitudinal de las vigas que llegan a la unión debe pasar dentro del núcleo de la columna.

### b) Refuerzo Transversal

- El refuerzo transversal no debe ser de grado mayor que el 42.
- Estribos cerrados de una pieza de  $\phi \geq$  No. 3
- Puede complementarse con grapos del mismo  $\phi$  del estribo.

$$S_1 \leq \begin{cases} 0.25 C_{\min} \\ 10 \text{ cm} \end{cases}$$



Si el núcleo está confinado por 4 tiras que llegan a él y el ancho de cada una es al menos igual a 0.75 veces el ancho respectivo de la columna, puede usarse la mitad del ref. transversal.

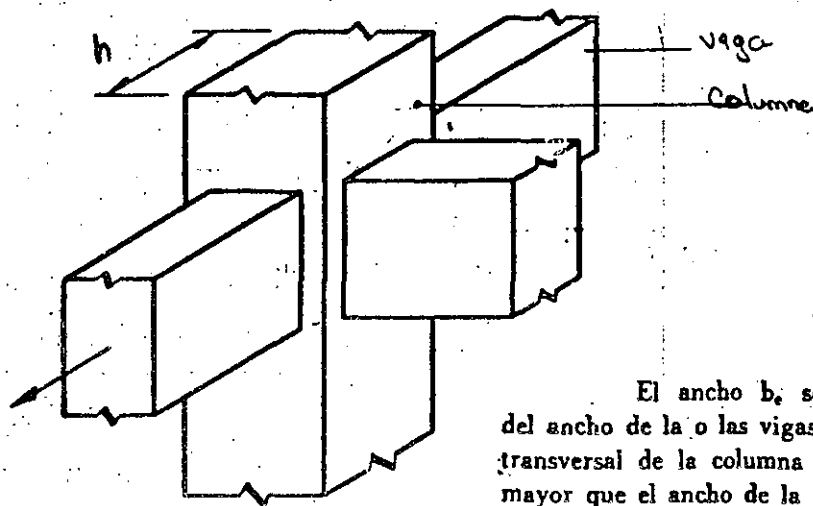
### c) Resistencia a fuerza cortante.

La fuerza cortante se calculará en un plano horizontal a media altura del nudo.

En nudos confinados  
otros nudos

$$V_u = 5.5 F_R \sqrt{f'_c} b_e h$$

$$V_u = 4.5 F_R \sqrt{f'_c} b_e h$$



El ancho  $b_e$  se tomará igual al promedio del ancho de la o las vigas consideradas y la dimensión transversal de la columna normal a la fuerza, pero no mayor que el ancho de la o las vigas más  $h$ .

### d) Anclaje del refuerzo

Los diámetros de las barras de vigas y columnas que pasen rectos a través de un nudo deben seleccionarse de modo que se cumplan las relaciones siguientes:

$$h(\text{col.})/d_b(\text{barra de viga}) \geq 20$$

$$h(\text{viga})/d_b(\text{barra de col.}) \geq 20$$

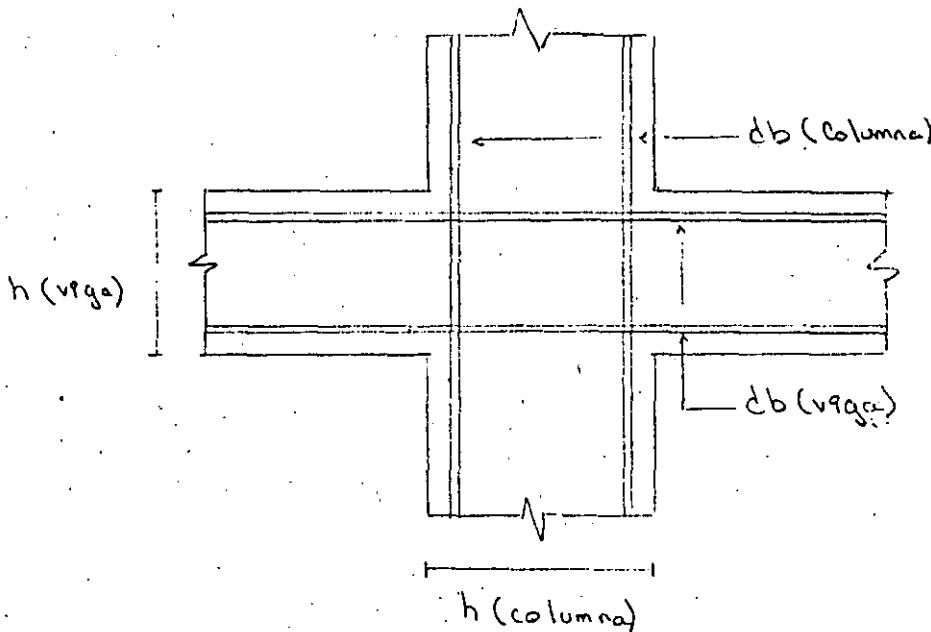
$h(\text{col.})$  es la dimensión transversal de la columna en la dirección de las barras de viga consideradas.

Si en la columna superior del nudo cumple:

$$\frac{P_u}{A_g f'_c} \geq 0.3$$

Entonces:  $h(\text{viga})/d_b(\text{barras de col.}) \geq 15$

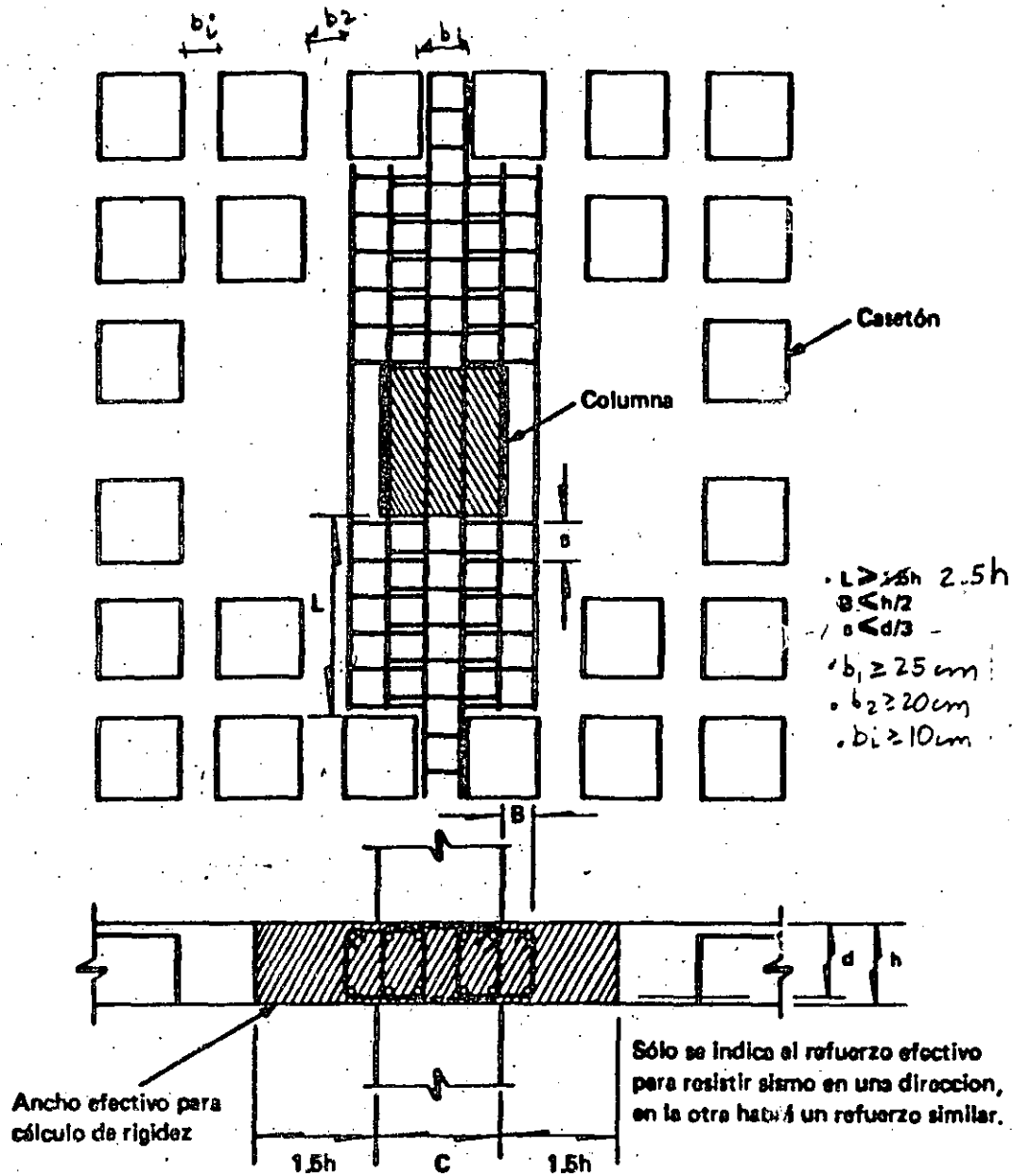
NOTA: también esta relación se cumplirá cuando en la estructura los muros de concreto reforzado resisten más del 50% de la fuerza lateral total.



GENERALES:

Será de la misma manera que en la zona de confinamiento (el diámetro del ref. transversal no será menor que los usados en la columna en las secciones próximas a dicha sección, Si igual que en la zona de confinamiento).

Si la intersección es excéntrica, deben tomarse en cuenta las fuerzas cortantes, momentos y torsiones causadas por la excentricidad.

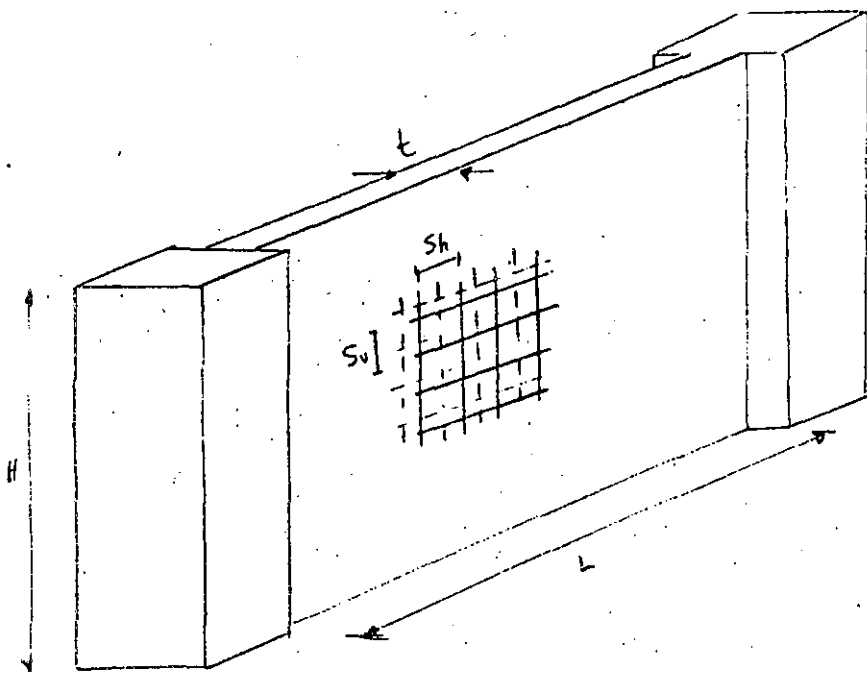


$$h(\text{columna})/d_b(\text{barras de losa}) \geq 20$$

$$h(\text{losa})/d_b(\text{barras de col.}) \geq 15$$

$h(\text{columna})$  - es la dimensión transversal de la columna en la dirección de las barras de losa consideradas.

Fig 10.17 Refuerzo en la conexión losa plana - columna



Limitaciones geométricas

$$L/t \leq 70$$

$$t \geq \begin{cases} 13 \text{ cms} \\ 0.06 H \text{ (altura no restrin.} \\ \text{gira lateralmente).} \end{cases}$$

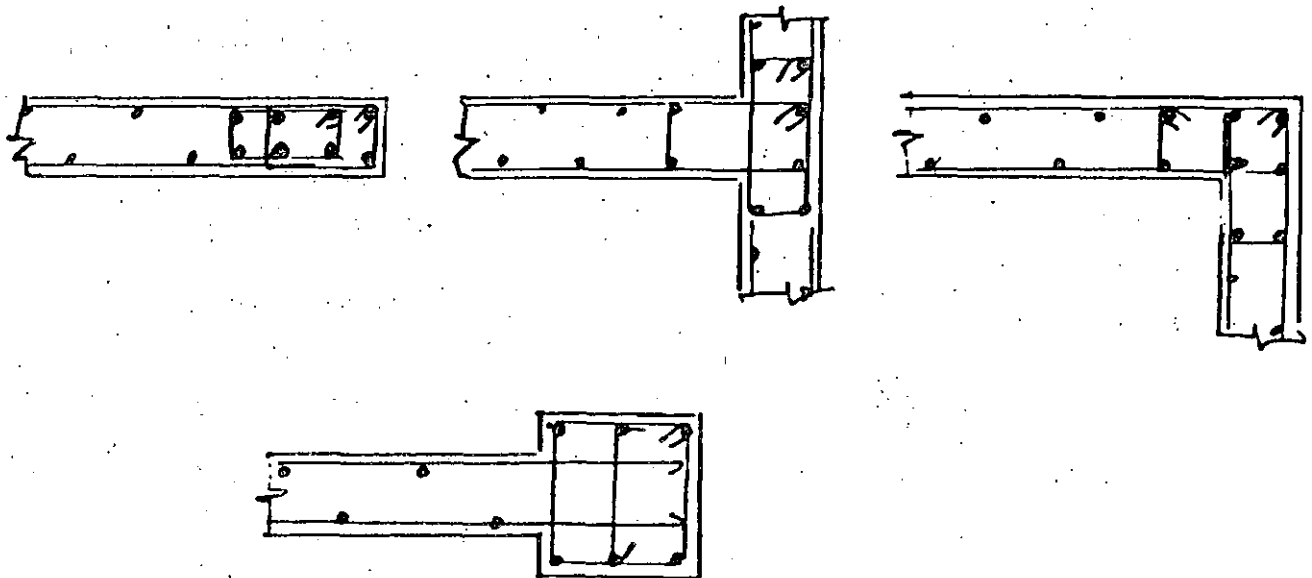
Refuerzo mínimo

$$P_v, P_h \geq 0.0025$$

$$S_v, S_h \leq 35 \text{ cm.}$$

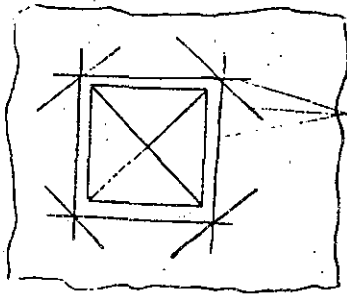
$$P_h = \frac{A_{sh}}{t S_v} \quad P_v = \frac{A_{sv}}{t S_h}$$

Figs. 10.18 Requisitos geométricos y de refuerzo en muros de concreto



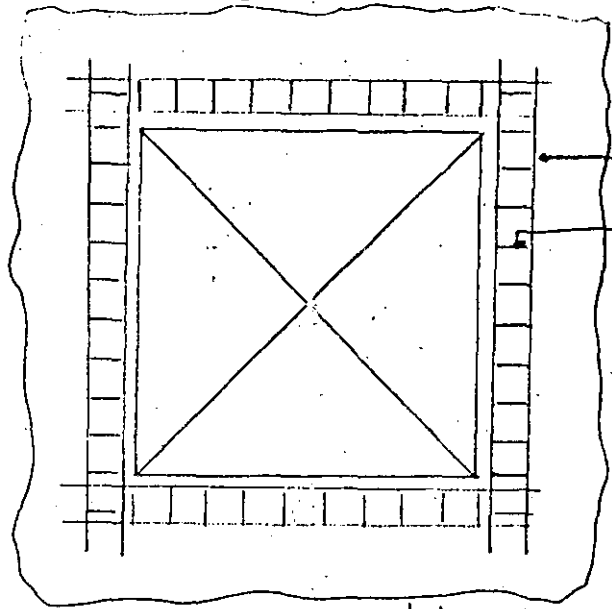
Figs. 10.19 Refuerzo en los extremos de muros





4 #4  
Cada uno

Reforzo mínimo alrededor de aberturas pequeñas (la mayor dimensión del vano no supera 80cm ni una cuarta parte de la dimensión de la pared)



4 #4  
#2 @ 2t

Reforzo mínimo alrededor de aberturas mayores.

Fig. 10.20 Detalles recomendados de reforzo alrededor de aberturas en muros de concreto.

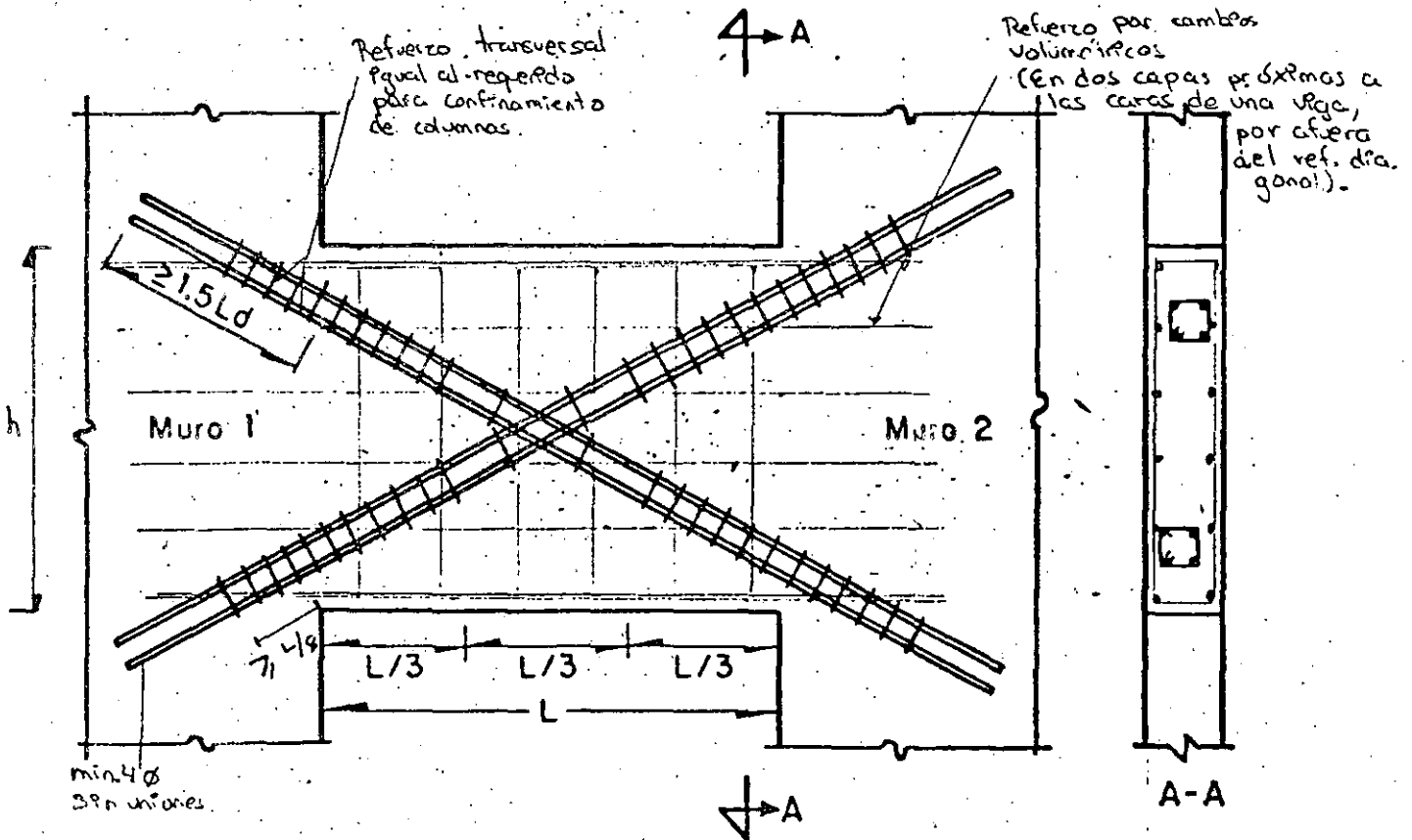
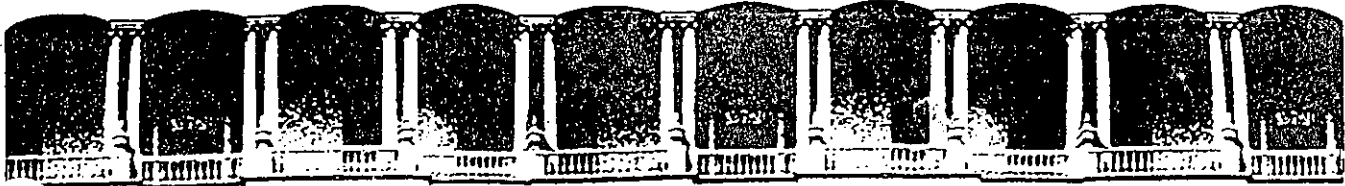


Fig. 10.21 Reforzo de viga de acoplamiento que une muros de concreto. (para  $l/n < a$ )



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**XVIII CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA**

**MODULO III**

**DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS**

*Del 3 al 13 de julio de 1992*

**DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS DE ACERO**

**ING. OSCAR DE BUEN LOPEZ DE H.**

**JULIO - 1992**

## DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS DE ACERO PARA EDIFICIOS

OSCAR DE BUEN LOPEZ DE HEREDIA \*

### INTRODUCCION

El objetivo que se persigue al construir una estructura es satisfacer una necesidad, que puede ser salvar una barranca para unir dos poblaciones que se encuentran a uno y otro lado de ella, detener el agua de un río para formar un embalse que permita utilizarla para generar energía eléctrica, o crear un espacio en el que se desarrollen actividades que no podrían llevarse a cabo a la intemperie. En el primer caso se construye un puente, en el segundo la cortina de una presa y en el tercero un edificio.

En un edificio urbano, para oficinas o departamentos, deben crearse espacios en los que se viva o trabaje en condiciones adecuadas de seguridad y confort.

Uno de los fenómenos más característicos de nuestra época es el gran crecimiento de las ciudades, ocasionado en parte por el aumento general de población y en parte por la emigración continua del campo hacia ellas; a su vez, la necesidad de proporcionar alojamiento y lugar de trabajo a un número cada vez mayor de personas dentro de un área reducida, ha sido la razón principal de que en las últimas décadas se hayan construido muchos edificios, algunos de gran altura; y de que esta tendencia subsista en la actualidad.

Todos los elementos requeridos para crear los espacios mencionados arriba, así como las personas que los ocuparán, y el mobiliario y equipo necesarios para desarrollar sus actividades, pesan, y su peso debe transmitirse hasta el terreno en el que se apoya el edificio; es el peso de pisos, plafones, fachadas, muros divisorios y de lindero, instalaciones, muebles y personas, el que crea la necesidad de contar con una estructura cuya finalidad primaria es transmitir esos pesos, y el suyo propio, hasta la cimentación y el terreno.

Pero, una vez construido, el edificio constituye un obstáculo para el libre flujo de las corrientes de aire, lo que da lugar a que aparezcan presiones y succiones en sus fachadas; además, en buena parte de nuestro planeta, y potencialmente en todo él, la corteza terrestre experimenta de vez en cuando movimientos que se transmiten a los edificios construidos sobre ella: tanto el viento como los sismos ocasionan solicitaciones que deben ser resistidas por la estructura, al mismo tiempo que sigue soportando las cargas verticales.

Dijimos al principio que el objeto de un edificio es crear espacios en los que se viva y se trabaje en condiciones adecuadas de seguridad y confort; para ello, la estructura debe tener resistencia suficiente para soportar la combinación de solicitaciones ocasionada por las cargas verticales y el viento o sismo y, además, ser de rigidez adecuada para que sus deformaciones, bajo esas solicitaciones, no sean

\* Profesor emérito de la Facultad de Ingeniería, U.N.A.M. Ingeniero - consultor en estructuras.

excesivas, con lo que se evita el pánico entre los ocupantes y se reducen a un mínimo los daños en los elementos no estructurales y en las instalaciones.

Las cargas verticales, muertas y vivas, se pueden evaluar con precisión aceptable, y se sabe bastante sobre el comportamiento de elementos estructurales y estructuras completas sometidos a cargas de ese tipo. En cambio, es imposible predecir la intensidad de los temblores que deberá resistir un edificio, y hay todavía bastantes lagunas en nuestro conocimiento sobre el comportamiento de las estructuras sometidas a sollicitaciones sísmicas. Nos encontramos, pues, ante un problema que aparentemente no tiene solución, que caracteriza al diseño sísmico: diseñar y construir estructuras que resistan sollicitaciones desconocidas mediante mecanismos que no se entienden todavía demasiado bien; y, para complicar más aún el problema, teniendo en cuenta, como en todas las obras de ingeniería, consideraciones económicas de importancia fundamental.

Muchos edificios construidos hasta ahora han estado sometidos a temblores de tierra intensos; algunos han quedado totalmente destruidos, otros se han mantenido en pie, pero sufriendo daños severos en elementos estructurales y no estructurales, mientras que el resto ha resistido los temblores con daños muy reducidos, o aún nulos.

Los métodos modernos de diseño sísmico provienen en gran parte del estudio del comportamiento, satisfactorio o no, de edificios que han experimentado movimientos telúricos importantes, y la filosofía en que se basan esos métodos proviene de la aceptación del hecho de que es imposible construir edificios que tengan una probabilidad nula de falla o de experimentar daños durante los temblores, desconocidos, a que puedan quedar sometidos durante su vida útil.

La solución ideal, desde un punto de vista económico, consiste en escoger sistemas estructurales que se diseñen para soportar las cargas verticales, y que sean capaces de resistir la combinación de éstas y las sollicitaciones sísmicas sin que el aumento de esfuerzos (o la disminución de factores de carga respecto a la falla) exceda el incremento permitido en los reglamentos para sollicitaciones producidas por cargas permanentes y accidentales combinadas; al mismo tiempo, debe revisarse que los desplazamientos horizontales relativos entre niveles consecutivos no sobrepasen límites aceptables, y comprobarse que se tiene una seguridad adecuada contra la inestabilidad de conjunto de la construcción.

Los edificios de pocos pisos, con muros de carga, suelen satisfacer automáticamente las dos condiciones anteriores de resistencia y rigidez; al aumentar el número de niveles y requerirse una estructura el problema se vuelve más difícil, y para evitar incrementos excesivos en costo y en el tamaño de los elementos estructurales deben utilizarse sistemas estructurales adecuados; si el número de pisos no es muy grande, los marcos rígidos constituyen una buena solución, mientras que para alturas mayores suelen obtenerse buenos resultados combinando los marcos con contraventeos o muros de rigidez, y en edificios muy altos conviene recurrir a sistemas estructurales especiales.

Una estructura puede diseñarse de manera que tenga resistencia y rigidez suficiente para que su respuesta ante la combinación de cargas verticales y sísmicas sea predominantemente elástica, pero al hacerlo se obtienen soluciones mucho más costosas que las empleadas tradicionalmente en edificios construidos en zonas sísmicas que han tenido, en general, un comportamiento aceptable durante temblores reales. Sin embargo, este tipo de soluciones puede ser recomendable en estructuras especiales, en las que se desee mantener los daños a niveles muy bajos, aún bajo temblores de gran intensidad; uno de esos casos lo constituyen las centrales nucleoelectricas.

#### FILOSOFIA DEL DISEÑO SISMICO.

En la mayoría de las construcciones convencionales los problemas económicos hacen que no se justifique la solución anterior, ya que el aumento de costo requerido para resistir vibraciones laterales de gran intensidad debe analizarse teniendo en cuenta la importancia de la estructura y la probabilidad de ocurrencia de los temblores. Esto hace que la filosofía actual del diseño de edificios que se construirán en zonas sísmicas, de donde provienen los criterios para fijar los niveles de carga indicados en los reglamentos modernos, sea la siguiente: los edificios deben ser capaces de resistir temblores menores sin sufrir daños, temblores moderados sin daños estructurales, pero con algunos daños en elementos no estructurales, y temblores muy intensos sin colapso, pero con daños no estructurales y estructurales. Se acepta, pues, la posibilidad de que el edificio sufra desperfectos importantes, pero no la de que se pierdan vidas. El objetivo de los códigos es, por consiguiente, obtener estructuras que se comporten elásticamente bajo temblores que puede esperarse que ocurran más de una vez durante la vida del edificio y que sean capaces de sobrevivir, sin colapso, el temblor de intensidad máxima que puede presentarse durante su vida útil. Para evitar el colapso durante el temblor más intenso los miembros, y la estructura en conjunto, han de poseer ductilidad suficiente para absorber y disipar energía por medio de deformaciones postelásticas, lo que exige excursiones importantes en el intervalo inelástico, con poca o ninguna pérdida de resistencia. La ductilidad necesaria puede estar asociada, en casos extremos, con deformaciones permanentes muy grandes, de manera que aunque no se presente el colapso de la estructura los daños que sufra pueden ser tales que no puedan repararse económicamente, y la construcción se pierda por completo.

La filosofía mencionada sigue siendo la base de los códigos modernos de diseño sísmico; sin embargo, a raíz de los últimos temblores intensos, sobre todo los de la Ciudad de México de septiembre de 1985, empieza a cuestionarse, si no la filosofía en sí, al menos el nivel de daños que debe permitirse durante movimientos de tierra de gran intensidad, pues los costos de reparación y refuerzo de las construcciones son tan elevados que seguramente se justifica aumentar la inversión inicial para disminuir los riesgos de que se presenten daños importantes en estructura, acabados o instalaciones.

#### ELECCION DEL SISTEMA ESTRUCTURAL.

Las características principales que debe tener un edificio que se va a construir en una zona sísmica son:

Resistencia. El edificio ha de tener una seguridad adecuada, contra el colapso durante temblores intensos. Para ello, debe diseñarse para que soporte solicitaciones sísmicas relativamente altas, compatibles con la sismicidad de la zona.

Rigidez. Es necesaria para evitar daños en muros, cancelas, instalaciones y otros elementos no estructurales, durante temblores frecuentes de poca intensidad, y para impedir fallas por inestabilidad, debida a amplificación excesiva de los momentos por interacción carga vertical - desplazamiento horizontal, en temblores intensos. La rigidez apropiada se logra manteniendo los desplazamientos laterales de entrepiso por debajo de límites adecuados, que se indican en los reglamentos.

Ductilidad. Esta propiedad no es indispensable, en teoría, puesto que pueden construirse estructuras que, también en teoría, se comporten elásticamente bajo temblores de cualquier intensidad; constituye, sin embargo, una manera económica de obtener estructuras capaces de soportar temblores intensos, si bien sufriendo daños que pueden ser importantes. Además, como no se conocen las características (intensidad, duración, contenido de frecuencias, etc.) del temblor más desfavorable a que quedará sometida la construcción, no puede suprimirse la ductilidad, al menos en zonas críticas de la estructura, sin correr el riesgo de que el comportamiento real esté muy por debajo del previsto.

En las últimas décadas se ha dado una importancia excesiva a la ductilidad; los reglamentos de diseño sísmico han estimulado el uso de estructuras dúctiles, generalmente flexibles, y han penalizado a las rígidas, a pesar de que en los temblores que han ocurrido últimamente en distintas partes del planeta se ha comprobado, de manera sistemática, el superior comportamiento de las estructuras rígidas y resistentes, especialmente si se les proporciona ductilidad adecuada en las zonas donde pueden concentrarse las deformaciones inelásticas.

R. Park y T. Paulay, en su libro "Estructuras de concreto reforzado", afirman lo siguiente:

"Como es imposible predecir con precisión las características de los movimientos de tierra que pueden ocurrir en un sitio dado, también es imposible evaluar el comportamiento completo de una estructura sometida a sismos intensos de características desconocidas\*. Sin embargo, las estructuras pueden diseñarse y construirse de manera que tengan características que aseguren que su comportamiento será el más deseable. En términos de daños, ductilidad, disipación de energía, o falla, ha de lograrse una secuencia deseable en el deterioro, y en la destrucción eventual, de la compleja cadena de resistencia de la estructura, lo que implica una jerarquización adecuada de sus modos de falla, que sólo puede lograrse si se conoce la resistencia de cada uno

\* La incertidumbre es el aspecto que caracteriza todo el diseño sísmico: debe diseñarse para solicitaciones desconocidas, sin conocer tampoco el mecanismo de respuesta de los elementos y sistemas estructurales - sometidos a ellos. Aunque se sabe bastante más acerca de este segundo punto que del primero, todavía existen lagunas muy importantes en -- nuestro conocimiento.

de los eslabones que forman esa cadena, es decir, de cada uno de los elementos que componen la estructura.

A pesar de la naturaleza probabilística del fenómeno, la mejor manera de obtener una estructura que se comporte con éxito ante temblores de intensidad media, y no llegue al colapso durante terremotos catastróficos consiste, dados los conocimientos actuales, en distribuir determinísticamente sus propiedades de resistencia y ductilidad para obtener el modo de falla más conveniente. Esta filosofía puede incorporarse en un proceso de diseño basado en la resistencia última de la estructura, durante el cual se escogen y detallan adecuadamente los elementos que formarán parte de los mecanismos disipadores de energía, y se proporciona a los elementos estructurales restantes resistencia suficiente para asegurar que los mecanismos escogidos conservarán toda, o casi toda, su resistencia durante los ciclos de carga y deformación producidos por el temblor".

La obra citada se publicó en 1975; sin embargo, los aspectos señalados siguen en vigor, por completo, hoy en día, y se pusieron de manifiesto durante los terremotos de septiembre de 1985. Ha de tenerse en cuenta, además, que las construcciones reales son muy complejas, mucho más que los modelos que se emplean para analizarlas y diseñarlas, por lo que para lograr el comportamiento deseable mencionado deben satisfacerse requisitos adicionales de simetría, uniformidad a lo largo de la altura, trabajo de conjunto, etc.

#### MÉTODOS PARA EL ANÁLISIS SISMICO.

No se pretende estudiar aquí los métodos que se emplean para evaluar las fuerzas sísmicas para las que debe diseñarse un edificio; sin embargo, conviene recordar los procedimientos más comunes. El más sencillo y, probablemente, el más utilizado, consiste en determinar un conjunto de fuerzas estáticas horizontales aplicadas en los diferentes pisos del edificio, cuya suma es igual a una cierta fracción, especificada en los códigos de diseño, del peso de la construcción; en general, las fuerzas laterales se distribuyen en la altura del edificio siguiendo una ley de variación triangular, con el vértice en la base de la construcción.

Un segundo procedimiento consiste en modelar el edificio como un sistema de masas concentradas en los pisos, conectadas entre sí por resortes cuya rigidez lateral depende de las características de la estructura, y en realizar un análisis dinámico modal del sistema. Las fuerzas cortantes de diseño se encuentran superponiendo adecuadamente unos cuantos modos de vibración y utilizando los espectros para diseño sísmico especificados en los reglamentos. Este enfoque dinámico es más apropiado que el estático, sobre todo para edificios irregulares, pero sigue teniendo muchas imprecisiones, que provienen en buena parte de la suposición de que el comportamiento del edificio es exclusivamente elástico.

Por este motivo, las construcciones importantes se analizan a veces teniendo en cuenta, al modelarlas, el comportamiento inelástico de la estructura, y sometiendo el modelo a temblores de características

adecuadas; la respuesta inelástica de la estructura, a lo largo del tiempo, se obtiene por medio de un proceso de integración paso a paso. Aunque costoso y complejo, éste es el método más preciso de análisis sísmico con que se cuenta en la actualidad, dada su precisión conceptual intrínseca; sin embargo, la intensidad, duración y demás características de los temblores futuros permanecen, como siempre, desconocidas.

Ha de recordarse siempre que las fuerzas laterales de diseño especificadas en los códigos son mucho menores que las que puede esperarse que actúen sobre las construcciones durante un movimiento de tierra importante, por lo que debe reconocerse que los sismos intensos harán que los elementos críticos de las estructuras se comporten inelásticamente; es, pues, esencial que el diseño y la construcción se lleven a cabo de manera que se garantice el comportamiento dúctil de miembros y conexiones sujetos a ciclos severos de inversión de cargas, independientemente de cual haya sido el método utilizado para determinar la distribución hipotética de fuerzas que obran sobre la estructura.

El acero estructural es un material muy dúctil, y tiene propiedades físicas que lo hacen ideal para construir estructuras resistentes a sismos. Sin embargo, su ductilidad intrínseca no se conserva necesariamente en la estructura terminada, sino puede perderse por fenómenos de inestabilidad local, de miembros individuales o de conjunto, porque la falla se presente de manera que no se obtenga la respuesta buscada (por ejemplo, por cortante), o porque el comportamiento de las conexiones sea defectuoso. Por todo ello, debe procederse con mucho cuidado durante el diseño y la construcción para evitar la pérdida de esas propiedades.

La ductilidad de los elementos de acero estructural varía con el tipo de sollicitación; es máxima en miembros en tensión, en los que se alcanza la ductilidad del material, y mínima en elementos en compresión axial. Para obtener ductilidades adecuadas en compresión directa, flexocompresión y cortante, es necesario tomar precauciones para evitar fenómenos prematuros de pandeo local y/o lateral.

#### SISTEMAS PARA PROPORCIONAR RIGIDEZ Y RESISTENCIA LATERALES.

A pesar de que la razón de ser de la estructura de un edificio proviene de la necesidad de soportar cargas verticales, la elección del sistema estructural queda determinada, casi siempre, por la manera en que han de resistirse las fuerzas horizontales; más todavía, aunque no hubiese más que cargas verticales, también se tendría que pensar en cómo obtener rigidez lateral adecuada, puesto que siempre es teóricamente posible que un edificio completo o alguno de sus entresijos falle por inestabilidad lateral. Las sollicitaciones horizontales son, pues, las que determinan las características principales de los sistemas estructurales de los edificios excepto, quizá, en los que no tienen más de dos o tres niveles.

Las estructuras deben ser estables bajo cualquier condición posible de carga. Cuando lo son, las sollicitaciones exteriores ocasionan en ellas deformaciones pequeñas, y las fuerzas interiores les devuelven su forma original cuando desaparecen las cargas. En cambio,



si una estructura es inestable las cargas producen deformaciones muy grandes, que crecen aunque las solicitaciones se mantengan constantes; además, las acciones interiores estabilizadoras no logran que la estructura recupere su configuración inicial cuando se descarga. El conjunto de vigas y columnas de la fig. 1a. es claramente inestable, pues no resiste fuerzas horizontales ni tiene ningún mecanismo que haga que recupere su forma inicial.

En la fig. 1.d se ilustran los pocos mecanismos que pueden utilizarse para obtener sistemas estructurales estables, capaces de resistir los efectos producidos por fuerzas horizontales. El primero consiste en añadir una diagonal, con lo que se obtiene una estructura contraventeada. En el segundo la estabilidad lateral se logra por medio de muros de cortante\*, de mampostería de tabique o de concreto reforzado, que son elementos planos verticales de gran rigidez y resistencia. Por último, los miembros que forman la estructura pueden unirse entre sí por medio de conexiones rígidas, que impiden las grandes rotaciones asociadas con el colapso: la estabilidad lateral se consigue con el uso de marcos rígidos.

Para asegurar la estabilidad, en todas las direcciones, de un edificio, puede utilizarse uno solo de los sistemas mencionados, o una combinación de varios de ellos.

#### MARCOS RIGIDOS.

Los marcos rígidos tridimensionales, formados por un conjunto de vigas y columnas, constituyen un sistema estructural eficiente para edificios de altura pequeña o media, hasta unos 10 ó 12 pisos. En edificios destinados a habitación no suele justificarse su empleo como únicos elementos resistentes, pues por requisitos de funcionamiento se cuenta con gran número de muros, que separan unas habitaciones de otras, colocados en las mismas posiciones en todos los niveles, que pueden utilizarse con ventaja, solos o en combinación con los marcos. En cambio, los edificios de oficinas carecen casi por completo de divisiones de carácter permanente, por lo que en ellos sí puede convenir utilizar los marcos rígidos como único sistema estructural, pues proporcionan la máxima libertad en la planeación y operación de los edificios.

Los marcos rígidos constituyen una solución adecuada en edificios de poca o mediana altura que se van a construir en zonas sísmicas porque, además de proporcionar la resistencia necesaria ante cargas verticales y horizontales de una manera económica, permiten obtener estructuras de ductilidad elevada, capaces de incursionar en el intervalo inelástico bajo solicitaciones sísmicas intensas, disipando una parte importante de la energía que les transmite el terreno sin sufrir daños, o experimentando desperfectos locales, de pequeña cuantía y fácil reparación.

Los marcos rígidos bien diseñados, detallados y construidos, tienen un comportamiento dúctil estable bajo cargas cíclicas que los hacen trabajar fuera del intervalo elástico, y la mayor parte de los có-

\* También llamados "muros de rigidez".

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records and the role of the auditor in this process. It highlights the need for transparency and accountability in financial reporting.

2. The second part of the document focuses on the specific procedures and standards that must be followed during the audit process. This includes the selection of samples, the use of statistical methods, and the documentation of findings.

3. The third part of the document addresses the challenges and risks associated with auditing, such as the potential for fraud and the complexity of modern financial systems. It provides strategies for mitigating these risks and ensuring the integrity of the audit.

4. The fourth part of the document discusses the importance of communication and collaboration between the auditor and the client. It emphasizes the need for clear reporting and the exchange of information throughout the audit process.

5. The fifth part of the document concludes with a summary of the key points and a final statement on the auditor's commitment to providing a high-quality audit service.

el primer caso que en el segundo. Sin embargo, esa desventaja se ve compensada favorablemente por la mayor rigidez del sistema y porque los muros combinados con marcos resisten las solicitaciones horizontales en forma más económica que los marcos solos. Quizá no sea exagerado afirmar que en edificios con alturas comprendidas entre 10 ó 12 y 15 ó 20 pisos sólo pueden obtenerse soluciones económicas empleando muros de cortante o contraventeos en combinación con marcos rígidos.

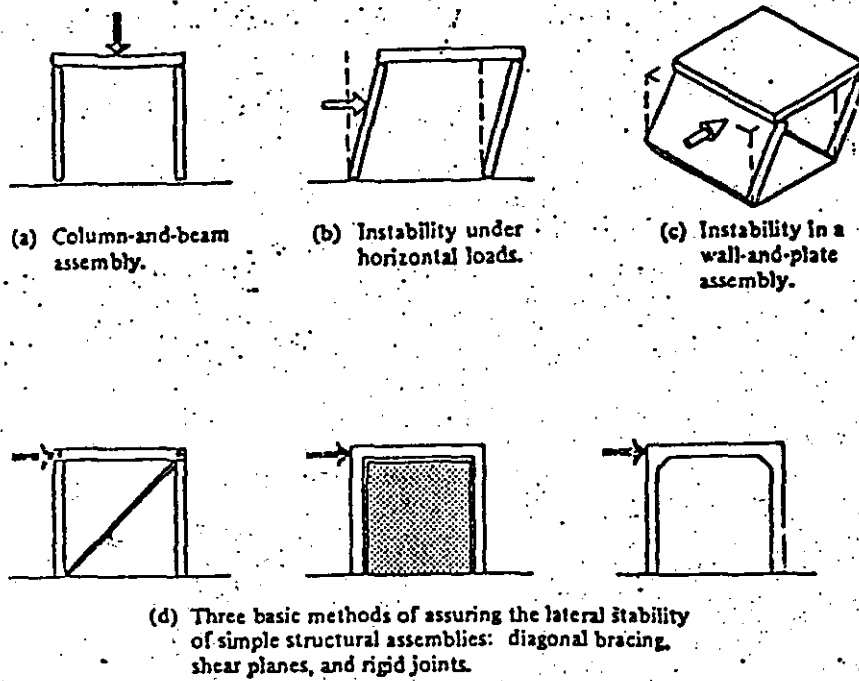


FIG. 1



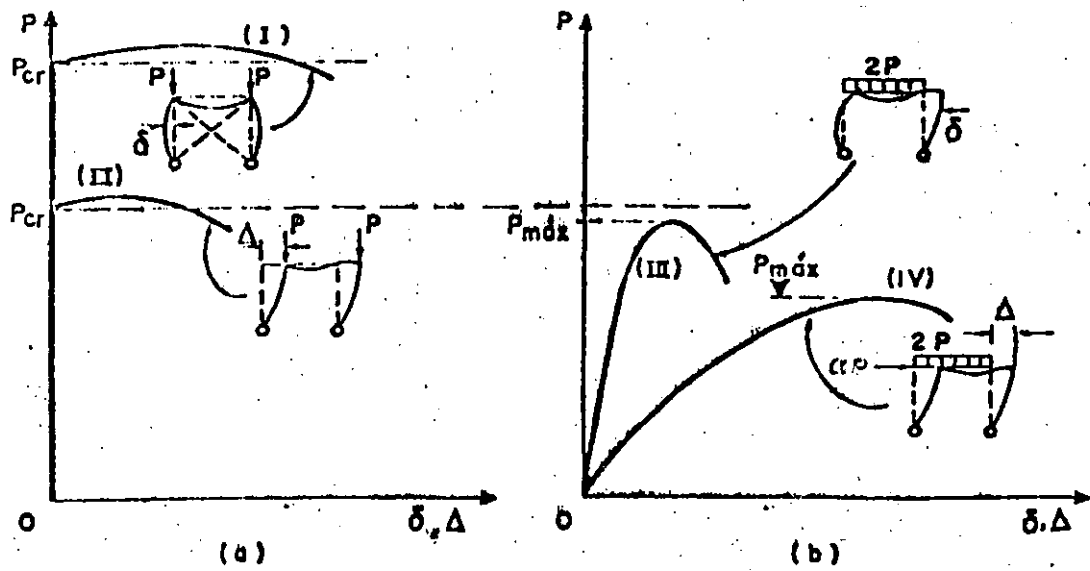


FIG. 5 Curvas carga-desplazamiento de marcos que fallan por pandeo y por inestabilidad

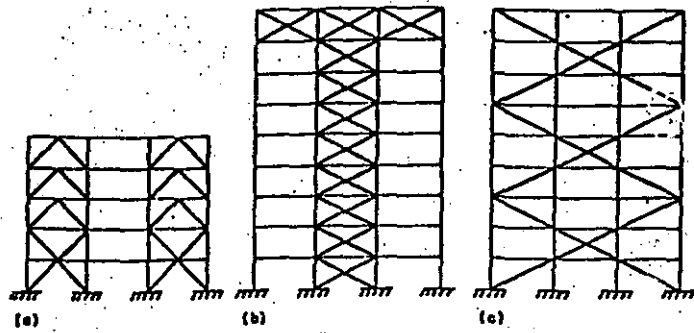


FIG. 6 Arrangements of Bracing Systems

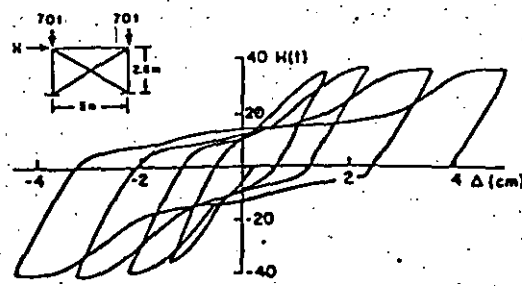


FIG. 7 Typical Pinched Hysteretic Loops for Concentrically Braced Frame (26) (1 cm = 0.39 in.; 1 ton = 2.20 kips)

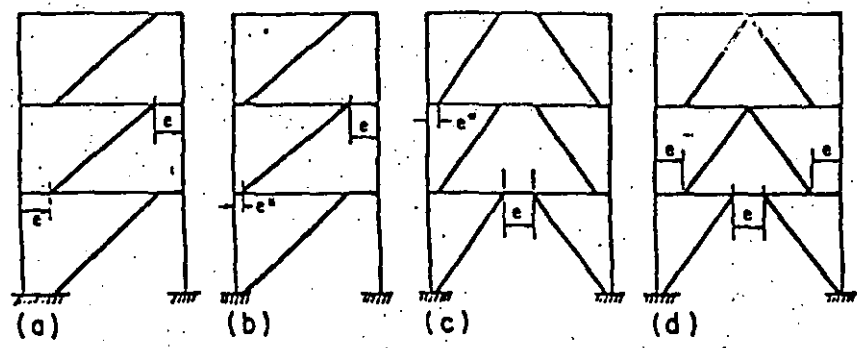


FIG. 8 Alternative Arrangements of Eccentric Bracing (5)

PARTES QUE COMPOEN LAS NTC PARA DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE ACERO (RDF 87).

1. CONSIDERACIONES GENERALES
2. PROPIEDADES GEOMÉTRICAS
3. RESISTENCIA
  - 3.1 MIEMBROS EN TENSIÓN
  - 3.2 MIEMBROS EN COMPRESIÓN
  - 3.3 MIEMBROS EN FLEXIÓN
  - 3.4 MIEMBROS FLEXOCOMPRESIÓN
  - 3.5 MIEMBROS EN FLEXOTENSIÓN
  - 3.6 CONSTRUCCIÓN COMPUESTA
  - 3.7 ALMAS Y PATINES CON CARGAS CONCENTRADAS
4. REQUISITOS ADICIONALES PARA DISEÑO
5. CONEXIONES
6. ESTADOS LÍMITE DE SERVICIO
7. EFECTOS DE CARGAS VARIABLES REPETIDAS (FATIGA)
8. FALLA FRÁGIL
9. OTROS METALES
10. EJECUCIÓN DE LAS OBRAS
11. ESTRUCTURAS DÚCTILES

## CONSIDERACIONES GENERALES

CRITERIOS DE DISEÑO. EL DIMENSIONAMIENTO SE EFECTUARÁ SIGUIENDO LOS CRITERIOS RELATIVOS A ESTADOS LÍMITE DE FALLA Y DE SERVICIO QUE SE ESTABLECEN EN EL TÍTULO VI DEL REGLAMENTO.

SE PERMITEN PROCEDIMIENTOS ALTERNATIVOS QUE PROPORCIONEN, A JUICIO DEL DEPARTAMENTO DEL D.F., NIVELES DE SEGURIDAD NO MENORES QUE LOS QUE SE OBTIENEN CON LAS NTC Y EL REGLAMENTO.

$$F_R R_N \geq F_c \sum S_N$$

DEBE REVISARSE QUE SE CUMPLE ESTA CONDICIÓN PARA LOS EDOS. LÍMITE DE FALLA CORRESPONDIENTES A TODAS LAS CONDICIONES DE CARGA DE TUBEDÉS, Y QUE SE SATISFACEN TAMBIÉN LOS EDOS. LÍMITE DE SERVICIO PROPIOS DEL PROBLEMA EN ESTUDIO.

LOS VALORES DE LAS ACCIONES, SUS COMBINACIONES Y LOS FACTORES DE CARGA (2º MIEMBRO DE LA EXPRESIÓN: ACCIONES DE DISEÑO) SE FIJAN EN EL TÍTULO VI DEL REGLAMENTO, MIENTRAS QUE EN LAS NTC SE ESTIPULAN LOS FACTORES DE RESISTENCIA Y LOS PROCEDIMIENTOS PARA EVALUAR LAS RESISTENCIAS NOMINALES DE LOS ELEMENTOS MÁS COMUNES EN ESTRUCTURAS METÁLICAS (1º MIEMBRO: RESISTENCIAS DE DISEÑO).

### TIPOS DE ESTRUCTURAS Y MÉTODOS DE ANÁLISIS

ESTRUCTURAS TIPO 1 (ESTR. CONTINUAS, MARCOS RÍGIDOS)

ESTRUCTURAS TIPO 2 (CONEXIONES LIBRES ANGULARMENTE)

LAS ESTRUCTURAS DE CUALQUIERA DE LOS DOS TIPOS PUEDEN ANALIZARSE ELÁSTICAMENTE. LAS DEL TIPO 1 PUEDEN ANALIZARSE TAMBIÉN UTILIZANDO MÉTODOS PLÁSTICOS, PERO PARA ELLO ES NECESARIO QUE EL MATERIAL TENGA CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS ADECUADAS Y QUE SE EVITEN FALLAS PREMATURAS POR PANDEO, LOCAL, LATERAL O DE CONJUNTO, O DE TIPO FRÁGIL.

EN LAS ESTR. TIPO 1, ANALIZADAS ELÁSTICAMENTE, SE PERMITE REDISTRIBUIR LOS MOMENTOS OBTENIDOS DEL ANÁLISIS, SI SE CUMPLEN CIERTOS REQUISITOS QUE SE ESTIPULAN EN LAS NTC.



## PROPIEDADES GEOMÉTRICAS

AREAS DE LAS SECCIONES TRANSVERSALES. SE DEFINEN "ÁREA TOTAL", "ÁREA NETA" Y "ÁREA NETA EFECTIVA" DE UN MIEMBRO, Y SE INDICA CÓMO DETERMINARLAS.

EL "ÁREA NETA" SE REFIERE A ELEMENTOS CON AGUJEROS, PARA REMACHES O TORNILLOS, Y EL "ÁREA NETA EFECTIVA" A LA MANERA EN QUE LOS MIEMBROS EN TENSIÓN ESTÁN CONECTADOS CON EL RESTO DE LA ESTRUCTURA Y A LA FORMA EN QUE SE TRANSMITEN LAS FUERZAS QUE OBRAN EN ELLOS.

ESTABILIDAD Y RELACIONES DE ESBELTEZ. SE ESPECIFICAN AQUÍ REQUISITOS DE CARÁCTER GENERAL PARA ASEGURAR LA ESTABILIDAD DE LAS ESTRUCTURAS EN CONJUNTO Y LA DE CADA UNO DE SUS ELEMENTOS.

SE DEFINE RELACIÓN DE ESBELTEZ PARA MIEMBROS EN COMPRESIÓN O EN TENSIÓN, Y SE INDICA CÓMO CALCULAR EL FACTOR DE LONGITUD EFECTIVA DE LAS COLUMNAS, PARA LO CUAL SE CONSIDERAN TRES CASOS, QUE DEPENDEN DE LAS CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LA ESTRUCTURA DE LA QUE FORMA PARTE EL MIEMBRO QUE SE ESTÁ DISEÑANDO Y DE LAS CONDICIONES DE SUJECIÓN EN SUS EXTREMOS:

- MIEMBROS CON EXTREMOS FIJOS LINEALMENTE ( $K \leq 1.0$ ).
- MIEMBROS EN LOS QUE PUEDEN DESPRECIARSE LOS EFECTOS DE ESBELTEZ DEBIDOS A DESPLAZAMIENTOS LINEALES DE SUS EXTREMOS ( $K \leq 1.0$ ).
- MIEMBROS EN LOS QUE NO PUEDEN DESPRECIARSE LOS EFECTOS ANTERIORES ( $K > 1.0$ ).

LAS COLUMNAS DE ESTRUCTURAS REGULARES SE ENCUENTRAN EN EL CASO b CUANDO SE CUMPLE LA CONDICIÓN

$$\frac{\Delta}{h} \leq 0.08 \frac{V}{\Sigma P}$$

$\Delta$  ES EL DESPLAZAMIENTO RELATIVO DE LOS NIVELES QUE LIMITAN EL ENTREPISO EN ESTUDIO,  $h$  LA ALTURA DE ENTREPISO,  $V$  LA FUERZA CORTANTE EN EL ENTREPISO Y  $\Sigma P$  EL PESO TOTAL DE LA CONSTRUCCIÓN POR ENCIMA DE ÉL.

EN EL CÁLCULO DE LOS DESPLAZAMIENTOS SE TOMA EN CUENTA LA RIGIDEZ DE TODOS LOS ELEMENTOS QUE FORMAN PARTE DE LA ESTRUCTURA.

LA EXPRESIÓN ANTERIOR SE APLICA A ENTREPISOS COMPLETOS, NO A MARCOS AISLADOS.

AL FINAL DE ESTE CAPÍTULO SE PROPORCIONAN RECOMENDACIONES DE CARÁCTER GENERAL PARA EL DISEÑO DE MARCOS CONTRAVENTADOS Y DE MARCOS SIN CONTRAVENTE.

### RELACIONES ANCHO/GRUESO Y PANDEO LOCAL

LAS SECCIONES ESTRUCTURALES SE CLASIFICAN EN CUATRO TIPOS, EN FUNCIÓN DE LAS RELACIONES ANCHO/GRUESO MÁXIMAS DE SUS ELEMENTOS PLANOS QUE TRABAJAN EN COMPRESIÓN AXIAL, EN COMPRESIÓN DEBIDA A FLEXIÓN O EN FLEXOCOMPRESIÓN.

LAS SECCIONES TIPO 1 (SECCIONES PARA DISEÑO PLÁSTICO) PUEDEN ALCANZAR EL MOMENTO PLÁSTICO Y CONSERVARLO DURANTE LAS ROTACIONES NECESARIAS PARA A REDISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS EN LA ESTRUCTURA.

LAS SECCIONES TIPO 2 (SECCIONES COMPACTAS) PUEDEN ALCANZAR EL MOMENTO PLÁSTICO, PERO NO TIENEN CAPACIDAD DE ROTACIÓN BAJO MOMENTO CONSTANTE DE ESA MAGNITUD.

LAS SECCIONES TIPO 3 (SEC. NO COMPACTAS) PUEDEN ALCANZAR EL MOMENTO CORRESPONDIENTE A LA INICIACIÓN DEL FLUJO PLÁSTICO.

LAS SECCIONES TIPO 4 (SEC. ESBELTAS) TIENEN COMO EDO. LÍMITE DE RESIST. EL PANDEO LOCAL DE ALGUNO DE LOS ELEMENTOS PLANOS QUE LAS COMPONEN.

LOS EDO. LÍMITE DE RESISTENCIA SON:

SEC. TIPO 1. DESARROLLO DEL MOMENTO PLÁSTICO EN VIGAS Y DEL MOM. PLÁSTICO REDUCIDO POR COMPRESIÓN EN BARRAS FLEXOCOMPRESIONADAS, CON CAPACIDAD DE ROTACIÓN SUFICIENTE PARA SATISFACER LOS REQUISITOS DEL ANÁLISIS PLÁSTICO.

SEC. TIPO 2. IGUAL QUE LAS TIPO 1, PERO SIN REQUISITOS DE CAPACIDAD DE ROTACIÓN

SEC. TIPO 3. DESARROLLO DEL MOMENTO CORRESPONDIENTE A LA INICIACIÓN DEL FLUJO PLÁSTICO EN VIGAS, O DE ESE MOMENTO REDUCIDO POR FLEXOCOMPRESIÓN EN BARRAS FLEXOCOMPRESIONADAS.

SEC. TIPO 4. PANDEO LOCAL DE ALGUNO DE LOS ELEMENTOS PLANOS QUE LAS COMPONEN.

EL FACTOR DE ÁREA  $Q_2$  ES EL COCIENTE DEL ÁREA EFECTIVA DE LA SECCIÓN ENTE SU ÁREA TOTAL, Y EL ÁREA EFECTIVA ES IGUAL A LA TOTAL MENOS LA SUMA LOS PRODUCTOS  $(b-b_e)t$  DE TODOS LOS ELEMENTOS PLANOS ATIESADOS QUE HAYA EN LA SECCIÓN.

SECCIONES FORMADAS POR ELEMENTOS PLANOS ATIESADOS Y ELEMENTOS PLANOS NO ATIESADOS. EN LA DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA DE DISEÑO DE MIEMBROS CUYA SECCIÓN TRANSVERSAL CONTIENE ELEMENTOS PLANOS NO ATIESADOS Y ELEMENTOS PLANOS ATIESADOS INTERVIENE EL FACTOR  $Q = Q_1 Q_2$ . EL ESFUERZO  $f$  QUE SE UTILIZA EN LA EC. 2.3.5 Ó 2.3.6 PARA CALCULAR EL ANCHO EFECTIVO  $b_e$  DE LOS ELEMENTOS PLANOS ATIESADOS NO TIENE QUE SER MAYOR QUE EL PRODUCTO  $Q_1 F_y$  DONDE  $Q_1$ , QUE SE CALCULA CON LA EC. 2.3.3 Ó 2.3.4, CORRESPONDE AL ELEMENTO NO ATIESADO QUE TIENE LA MAYOR RELACIÓN  $b/t$ .

### RESISTENCIA

EN ESTE CAPÍTULO SE PROPORCIONAN FÓRMULAS Y RECOMENDACIONES PARA DETERMINAR LA RESISTENCIA DE DISEÑO DE MIEMBROS DE ACERO ESTRUCTURAL Y DE MIEMBROS COMPUESTOS, FORMADOS POR PERFILES DE ACERO QUE TRABAJAN EN CONJUNTO CON ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO O CON RECUBRIMIENTOS O RELLENOS DE ESTE MATERIAL, SOMETIDOS A LAS SOLICITACIONES MÁS COMUNES EN ESTRUCTURAS REGICULARES.

PARTES QUE DEBEN COMPONER CADA UNO DE LOS CAPÍTULOS DE DISEÑO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES.

- I. ESTADOS LÍMITE DE INTERÉS, TANTO DE FALLA COMO DE SERVICIO
- II. COMBINACIONES DE CARGA QUE DEBEN CONSIDERARSE AL ESTUDIAR CADA ESTADO LÍMITE. FACTORES DE CARGA.
- III. FÓRMULAS Y PROCEDIMIENTOS PARA DETERMINAR LA RESISTENCIA DE DISEÑO CORRESPONDIENTE A CADA ESTADO LÍMITE DE FALLA. FACTORES DE RESISTENCIA.
- IV. MÉTODOS PARA DEVISAR LA ESTRUCTURA EN CONDICIONES DE SERVICIO.

## MIEMBROS EN TENSION

ESTADOS LIMITE. SE CONSIDERARÁN LOS ESTADOS LIMITE DE FLUJO PLÁSTICO EN LA SECCIÓN TOTAL Y DE FRACTURA EN EL ÁREA NETA.

RESISTENCIA DE DISEÑO. LA RESISTENCIA DE DISEÑO  $R_t$  DE UN ELEMENTO ESTRUCTURAL EN TENSION ES LA MENOR DE LAS SIGUIENTES :

a. ESTADO LIMITE DE FLUJO PLÁSTICO EN LA SECCIÓN TOTAL :

$$F_R = 0.90, \quad R_t = A_t F_y F_R$$

b. ESTADO LIMITE DE FRACTURA EN LA SECCIÓN NETA :

$$F_R = 0.75, \quad R_t = A_e F_u F_R$$

$A_t$  ES EL ÁREA TOTAL DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL DEL MIEMBRO,  $A_e$  SU ÁREA NETA EFECTIVA,  $F_y$  EL ESFUERZO EN EL LIMITE INFERIOR DE FLUENCIA DEL MATERIAL Y  $F_u$  SU ESFUERZO MÍNIMO ESPECIFICADO DE RUPTURA EN TENSION.  $F_R$  ES EL FACTOR DE DISMINUCIÓN DE LA RESISTENCIA.

## MIEMBROS EN COMPRESIÓN

ESTADOS LÍMITE. PARA EL DISEÑO DE MIEMBROS COMPRIMIDOS HECHOS CON SECCIONES TIPO 1, 2 O 3 SE CONSIDERARÁ EL ESTADO LÍMITE DE PAUDEO POR FLEXIÓN; EN SECCIONES TIPO 4 SE CONSIDERARÁ, ADEMÁS, EL EDO. LÍMITE DE PAUDEO LOCAL. EN COLUMNAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CON UNO O NINGÚN EJE DE SIMETRÍA, COMO ÁNGULOS O TÉS, O CON DOS EJES DE SIMETRÍA PERO BAJA RIGIDEZ TORSIONAL, COMO LAS SECCIONES EN FORMA DE CRUZ O LAS FORMADAS POR PLACAS DE PEQUEÑO ESPESOR, SE TENDRÁN EN CUENTA TAMBIÉN LOS EDOS. LÍMITE DE PAUDEO POR FLEXOTORSIÓN Y POR TORSIÓN.

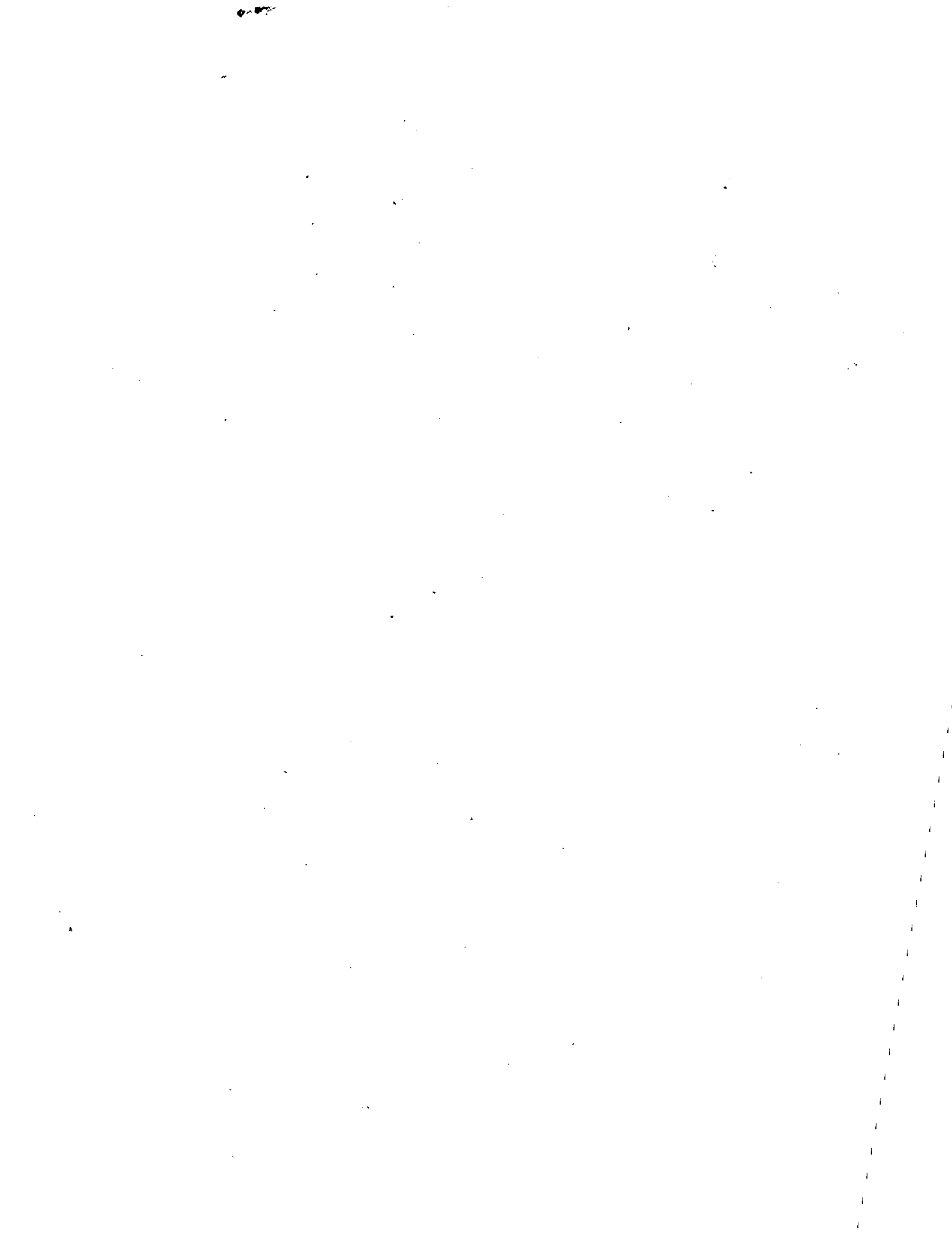
EN COLUMNAS COMPUESTAS, DEL TIPO DE LAS FORMADAS POR CUATRO ÁNGULOS LIGADOS ENTRE SÍ POR CELOSÍAS, SE CONSIDERARÁN LOS EDOS. LÍMITE DEL MIEMBRO COMPLETO Y DE CADA UNO DE LOS ELEMENTOS COMPRIMIDOS QUE LO FORMAN.

RESISTENCIA DE DISEÑO. LA RESISTENCIA DE DISEÑO  $R_c$  DE UN ELEMENTO ESTRUCTURAL DE EJE RECTO Y DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE SOMETIDO A COMPRESIÓN AXIAL SE DETERMINA COMO SE INDICA A CONTINUACIÓN (PRESENTAREMOS AQUÍ SÓLO LAS FÓRMULAS QUE CORRESPONDEN A SECCIONES TIPO 1, 2 O 3; EN LAS NTC SE CUBREN TAMBIÉN LAS SECCIONES TIPO 4).

### ESTADO LÍMITE DE PAUDEO POR FLEXIÓN.

a. MIEMBROS DE SECCIÓN TRANSVERSAL H O RECTANGULAR HUECA

$$F_r = 0.90$$



$$R_c = \frac{F_y}{[1 + \lambda^{2n} - 0.15^{2n}]^{1/n}} A_t F_R$$

$A_t$  ES EL ÁREA TOTAL DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL DE LA COLUMNA.

$\lambda = \frac{KL}{r} \sqrt{\frac{F_y}{\pi^2 E}}$ , DONDE  $KL/r$  ES LA RELACIÓN DE ESBELTEZ EFECTIVA MÁXIMA DE LA COLUMNA.

$n$  ES UN COEFICIENTE ADIMENSIONAL, QUE VALE:

COLUMNAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL H, LAMINADAS O HECHAS CON TRES PLACAS SOLDADAS, OBTENIDAS CORTÁNDOLAS CON OXÍGENO DE PLACAS MÁS ANCHAS, Y COLUMNAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL RECTANGULAR HUECA, LAMINADAS O HECHAS CON CUATRO PLACAS SOLDADAS, QUE CUMPLEN LOS REQUISITOS DE LAS SECCIONES TIPO 1, 2 Ó 3:

$$n = 1.4$$

COLUMNAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL H, HECHAS CON TRES PLACAS LAMINADAS SOLDADAS ENTRE SÍ, QUE CUMPLEN LOS REQUISITOS DE LAS SECCIONES TIPO 1, 2 Ó 3:

$$n = 1.0$$

CUANDO EL VALOR DE  $F_y$  DEL ACERO ES 3500  $\text{kg}/\text{cm}^2$  O MÁS, PUEDE UTILIZARSE VALORES MAYORES DE  $n$ , SI SE EFECTÚA UN ESTUDIO QUE LO JUSTIFIQUE.

b. MIEMBROS CUYA SECCIÓN TRANSVERSAL TIENE UNA FORMA CUALQUIERA,

NO INCLUIDA EN a.  $F_R = 0.85$

$$\text{Si } KL/r \geq (KL/r)_c, \quad R_c = \frac{20120000}{(KL/r)^2} A_t F_R$$

$$\text{Si } KL/r < (KL/r)_c, \quad R_c = A_t F_y \left[ 1 - \frac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^2} \right] F_R$$

$$(KL/r)_c = 6340 / \sqrt{F_y}$$

$KL/r$  ES LA RELACIÓN DE ESBELTEZ EFECTIVA MÁXIMA DE LA COLUMNA Y  $(KL/r)_c$  EL VALOR DE LA MISHA QUE SEPARA EL PÁNDULO ELÁSTICO DEL INELÁSTICO.

TOHANDO  $A_t$  EN  $\text{cm}^2$  Y  $F_y$  EN  $\text{kg}/\text{cm}^2$ ,  $R_c$  SE OBTIENE EN  $\text{kg}$ .



ESTADO LÍMITE DE PANDEO LOCAL. CUANDO LA SECCIÓN TRANSVERSAL DE LA COLUMNA ES TIPO 4, LA RESISTENCIA DE DISEÑO  $R_c$  SE DETERMINA, CUALQUIERA QUE SEA LA FORMA DE LA SECCIÓN, COMO SIGUE:

$$\text{SI } KL/r \geq (KL/r)_c^*, \quad R_c = \frac{20120000}{(KL/r)^2} A_e F_e \quad (3.2.4)$$

$$\text{SI } KL/r < (KL/r)_c^*, \quad R_c = Q A_e F_y \left[ 1 - \frac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^{*2}} \right] F_e \quad (3.2.5)$$

$$(KL/r)_c^* = 6340 / \sqrt{Q F_y}; \quad F_e = 0.75$$

EN MIEMBROS DE SECCIÓN TRANSVERSAL H O RECTANGULAR HUECA, LOS VALORES DE  $R_c$  OBTENIDOS CON LAS ECS. 3.2.4 Y 3.2.5 NO DEBEN SER MAYORES QUE LOS OBTENIDOS CON LA EC. 3.2.1 MULTIPLICADOS POR EL FACTOR  $Q$ .

EL ÁREA  $A_e$  Y EL RADIO DE GIRO  $r$  DE LAS ECS. 3.2.4 Y 3.2.5 SON LOS DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL TOTAL.

$Q$  ES UN FACTOR DE PANDEO LOCAL, DADO POR

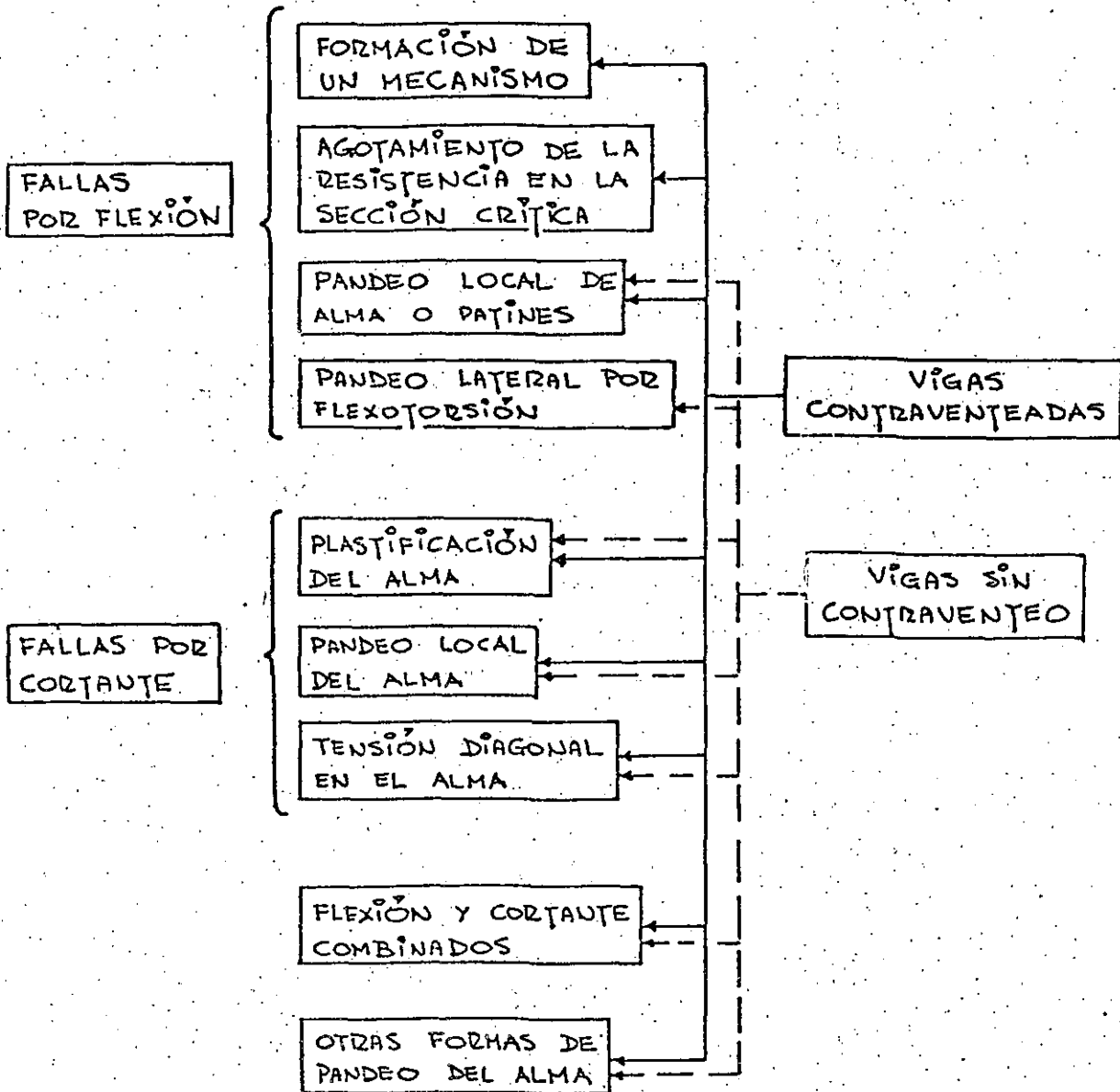
$$Q = Q_s Q_a$$

$Q_s$  Y  $Q_a$  SE CALCULAN COMO SE INDICÓ MÁS ARRIBA;  $Q_s$  CORRESPONDE AL ELEMENTO PLANO NO ATIESADO QUE TIENE LA MAYOR RELACIÓN  $b/t$ .

EN SECCIONES FORMADAS EXCLUSIVAMENTE POR ELEMENTOS PLANOS ATIESADOS  $Q_s$  SE TOMA IGUAL A 1.0, Y EN SECCIONES FORMADAS EXCLUSIVAMENTE POR ELEMENTOS PLANOS NO ATIESADOS  $Q_a$  SE TOMA IGUAL A 1.0.

# MIEMBROS EN FLEXIÓN

## ESTADOS LIMITE



SÓLO LOS ESTADOS LIMITE POR FORMACIÓN DE UN MECANISMO CON ARTICULACIONES PLÁSTICAS Y POR PANDEO LATERAL NO SON COMUNES A LAS VIGAS CONTRAVENTEADAS Y A LAS QUE NO TIENEN CONTRAVENTEADO. LOS ESTADOS LIMITE RESTANTES PUEDEN PRESENTARSE EN UNO U OTRO CASO.

RESISTENCIA DE DISEÑO. LA RESISTENCIA DE DISEÑO,  $M_R$ , DE UNA VIGA O TRABE DE EJE RECTO Y SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE SE DETERMINA COMO SE INDICA EN LO QUE SIGUE.

MIEMBROS SOPORTADOS LATERALMENTE ( $L \leq L_u$ )

SECCIONES TIPO 1 ó 2 :  $M_R = F_y Z F_y = F_y M_p$

PUEDE UTILIZARSE LA TEORÍA PLÁSTICA CUANDO LAS SECCIONES SON TIPO 1 Y LA DISTANCIA ENTRE PUNTOS DEL PATÍN COMPRIMIDO SOPORTADOS LATERALMENTE NO EXCEDE DE  $L_p$ , EN ZONAS DE FORMACIÓN DE ARTICULACIONES PLÁSTICAS ASOCIADAS CON EL MECANISMO DE COLAPSO.

SECCIONES TIPO 3 :  $M_R = F_y S F_y = F_y M_y$

EN SECCIONES I O H FLEXIONADAS ALREDEDOR DE CUALQUIERA DE SUS EJES ENTROIDALES Y PRINCIPALES PUEDE TOMARSE UN VALOR DE  $M_R$  COMPRENDIDO ENTRE  $F_y M_y$  Y  $F_y M_p$  CALCULADO POR INTERPOLACIÓN LINEAL, TENIENDO EN CUENTA QUE ESOS VALORES CORRESPONDEN, RESPECTIVAMENTE, A RELACIONES ANCHO/GRUESO DE LOS PATINES DE  $830/\sqrt{F_y}$  Y  $540/\sqrt{F_y}$ .

NO HAY LÍMITES EN LA LONGITUD SIN SOPORTE LATERAL CUANDO LA SECCIÓN TRANSVERSAL ES TIPO 1, 2 ó 3, CIRCULAR O CUADRADA, HUECA O MACIZA, O CUANDO LA VIGA, CUALQUIERA QUE SEA LA FORMA DE SU SECCIÓN TRANSVERSAL, SE FLEXIONA ALREDEDOR DEL EJE DE MENOR MOMENTO DE INERCIA.

SECCIONES TIPO 4. SE DAN RECOMENDACIONES PARA TOMAR EN CUENTA LA POSIBLE FALLA POR PANDEO LOCAL DE ESTAS SECCIONES.

EN LAS EXPRESIONES ANTERIORES,  $F_y = 0.90$ ,  $Z$  Y  $S$  SON LOS MÓDULOS DE SECCIÓN PLÁSTICO Y ELÁSTICO,  $M_p = Z F_y$  ES EL MOMENTO PLÁSTICO RESISTENTE DE LA SECCIÓN, Y  $M_y = S F_y$  EL MOMENTO CORRESPONDIENTE A LA ADICIÓN DEL ESFUERZO DE FLUENCIA EN ELLA (SIN CONSIDERAR ESFUERZOS RESIDUALES).

$L$  ES LA DISTANCIA ENTRE PUNOS DEL PATÍN COMPRESO DE LA VIGA...  
SOPORTADOS LATERALMENTE.

$L_p$  ES LA LONGITUD MÁXIMA NO SOPORTADA LATERALMENTE PARA LA QUE EL MIEMBRO PUEDE DESARROLLAR TODAVÍA EL MOMENTO  $M_p$ , Y CONSERVARLO DURANTE LAS ROTACIONES NECESARIAS PARA LA FORMACIÓN DEL MECANISMO DE COLAPSO.

PARA SECCIONES I: 
$$L_p = \frac{253000 + 155000 (M_d/M_p)}{F_y} \Gamma_y$$

PARA SECCIONES II: 
$$L_p = \frac{352000 + 211000 (M_d/M_p)}{F_y} \Gamma_y \leq \frac{211000 \Gamma_y}{F_y}$$

TOMANDO  $F_y$  EN  $\text{KG}/\text{CM}^2$  Y  $\Gamma_y$  EN  $\text{CM}$ ,  $L_p$  SE OBTIENE EN  $\text{CM}$ .

$L_u$  ES LA LONGITUD MÁXIMA NO SOPORTADA LATERALMENTE PARA LA QUE EL MIEMBRO PUEDE DESARROLLAR TODAVÍA EL MOMENTO  $M_p$ , SIN EXIGIR CAPACIDAD DE ROTACIÓN.

MÁS ADELANTE SE DAN FÓRMULAS PARA CALCULARLA.

### MIEMBROS NO SOPORTADOS LATERALMENTE ( $L > L_u$ )

SECCIONES TIPO 1 Ó 2 CON DOS EJES DE SIMETRÍA, FLEXIONADAS ALREDEDOR DEL

EJE DE MAYOR MOMENTO DE INERCIA:

Si  $M_u > \frac{2}{3} M_p$ , 
$$M_R = 1.15 F_y M_p \left( 1 - \frac{0.28 M_p}{M_u} \right) \leq F_y M_p$$

Si  $M_u \leq \frac{2}{3} M_p$ , 
$$M_R = F_y M_u$$

$M_u$ , MOMENTO RESISTENTE NOMINAL DE LA SECCIÓN, CUANDO EL PANDEO SE INICIA EN EL INTERVALO ELÁSTICO, VALE

$$M_u = \frac{\pi}{CL} \sqrt{EI_y GJ + \left( \frac{\pi E}{L} \right)^2 I_y C_2} = \frac{E\pi}{CL} \sqrt{I_y \left[ \frac{J}{2G} + \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 C_2 \right]}$$

EN SECCIONES I LAMINADAS O HECHAS CON PLACAS, DE DIMENSIONES SEMEJANTES

A LAS LAMINADAS, PUEDE TOMARSE

$$M_u = \frac{1}{C} \sqrt{M_{c1}^2 + M_{c2}^2}, \text{ DONDE } M_{c1} = \frac{EA^2}{L/\Gamma_y}, \quad M_{c2} = \frac{4.7 EAD}{(L/\Gamma_y)^2}$$

$F_p = 0.90$ ,  $A$  y  $d$  SON EL ÁREA TOTAL Y EL PEDALETE DE LA SECCIÓN,  $I_y$  y  $I_x$  SU MOMENTO DE INERCIA Y RADIO DE GIRO RESPECTO AL EJE DE SIMETRÍA SITUADO EN EL PLANO DEL ALHA,  $t$  EL GROSOR DEL PAJÍN COMPRIMIDO,  $J$  Y  $C_2$  LAS CONSTANTES DE TORSIÓN DE S. VENANT Y DE TORSIÓN POR ALABEO DE LA SECCIÓN, Y  $C$ , QUE PUEDE TOMARSE CONSERVADORAMENTE IGUAL A 1.0, ESTÁ DADO POR

$$C = 0.60 + 0.40 M_1/M_2 \text{ PARA TRABOS EN CURVATURA SIMPLE}$$

$$C = 0.60 - 0.40 M_1/M_2 \geq 0.40, \text{ PARA TRABOS EN CURVATURA DOBLE}$$

$C = 1.0$  CUANDO EL MOMENTO EN CUALQUIER SECCIÓN DEL TRAMO NO SOPORTADO LATERALMENTE ES MAYOR QUE  $M_2$ .

$M_1$  y  $M_2$  SON, RESPECTIVAMENTE, EL MEJOR Y EL MAYOR DE LOS MOMENTOS EN LOS EXTREMOS DEL TRAMO EN ESTUDIO, TOMADOS EN VALOR ABSOLUTO.

$L_r$  ES LA LONGITUD NO SOPORTADA LATERALMENTE QUE SEPARA EL PANDEO ELÁSTICO DEL INELÁSTICO.

PARA MIEMBROS DE SECCIÓN I,  $L_u$  y  $L_r$  ESTÁN DADOS POR

$$L_u = \frac{\sqrt{2} \pi}{X_u} \sqrt{\frac{EC_2}{GJ}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + X_u^2}}, \quad L_r = \frac{\sqrt{2} \pi}{X_r} \sqrt{\frac{EC_2}{GJ}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + X_r^2}}$$

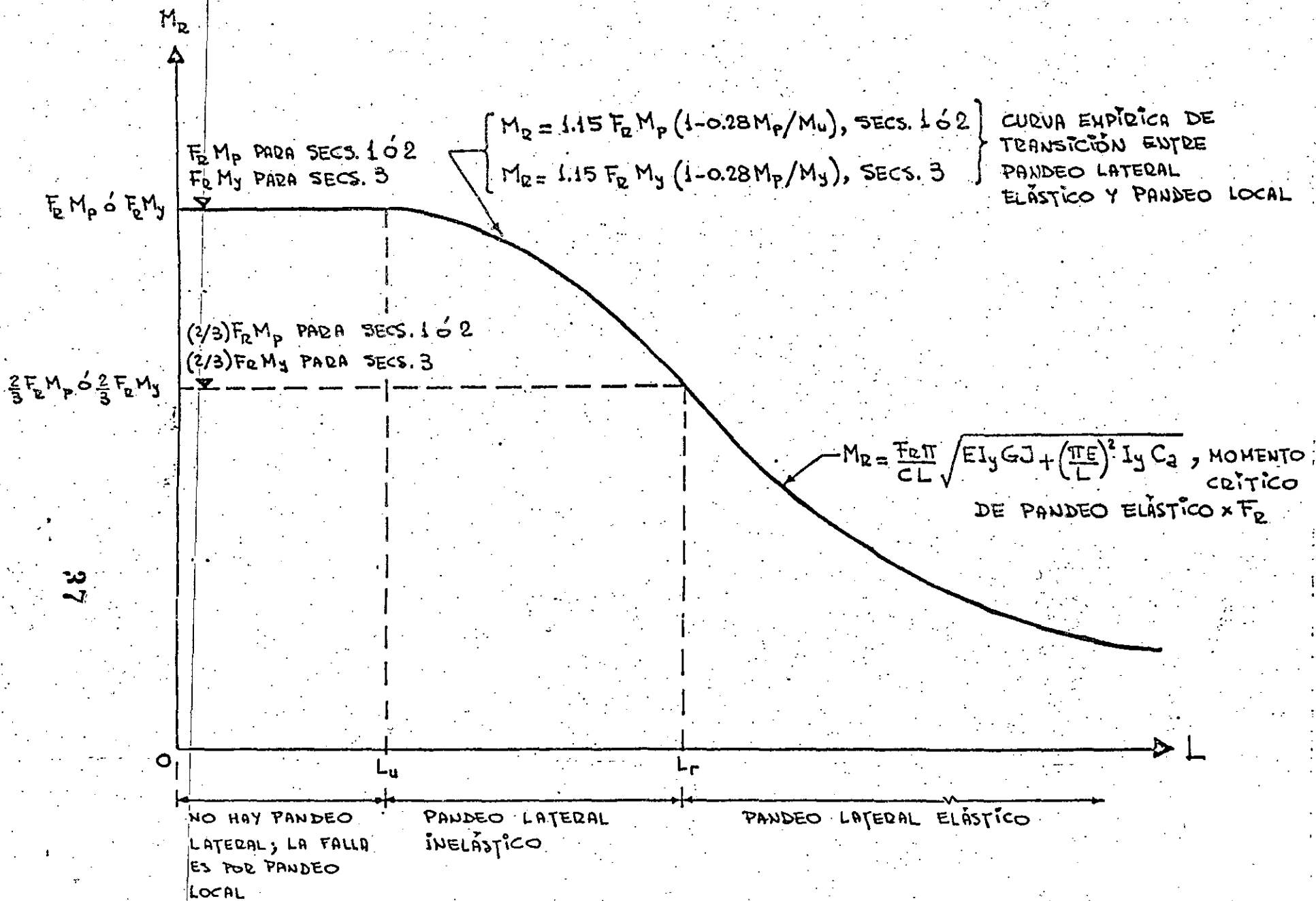
$$E = 2040000 \text{ Kg/cm}^2, \quad G = 784000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$X_u = 4.293 C \frac{ZF_y}{GJ} \sqrt{\frac{C_2}{I_y}} = 3.220 X_r, \quad X_r = \frac{4}{3} C \frac{ZF_y}{GJ} \sqrt{\frac{C_2}{I_y}}$$

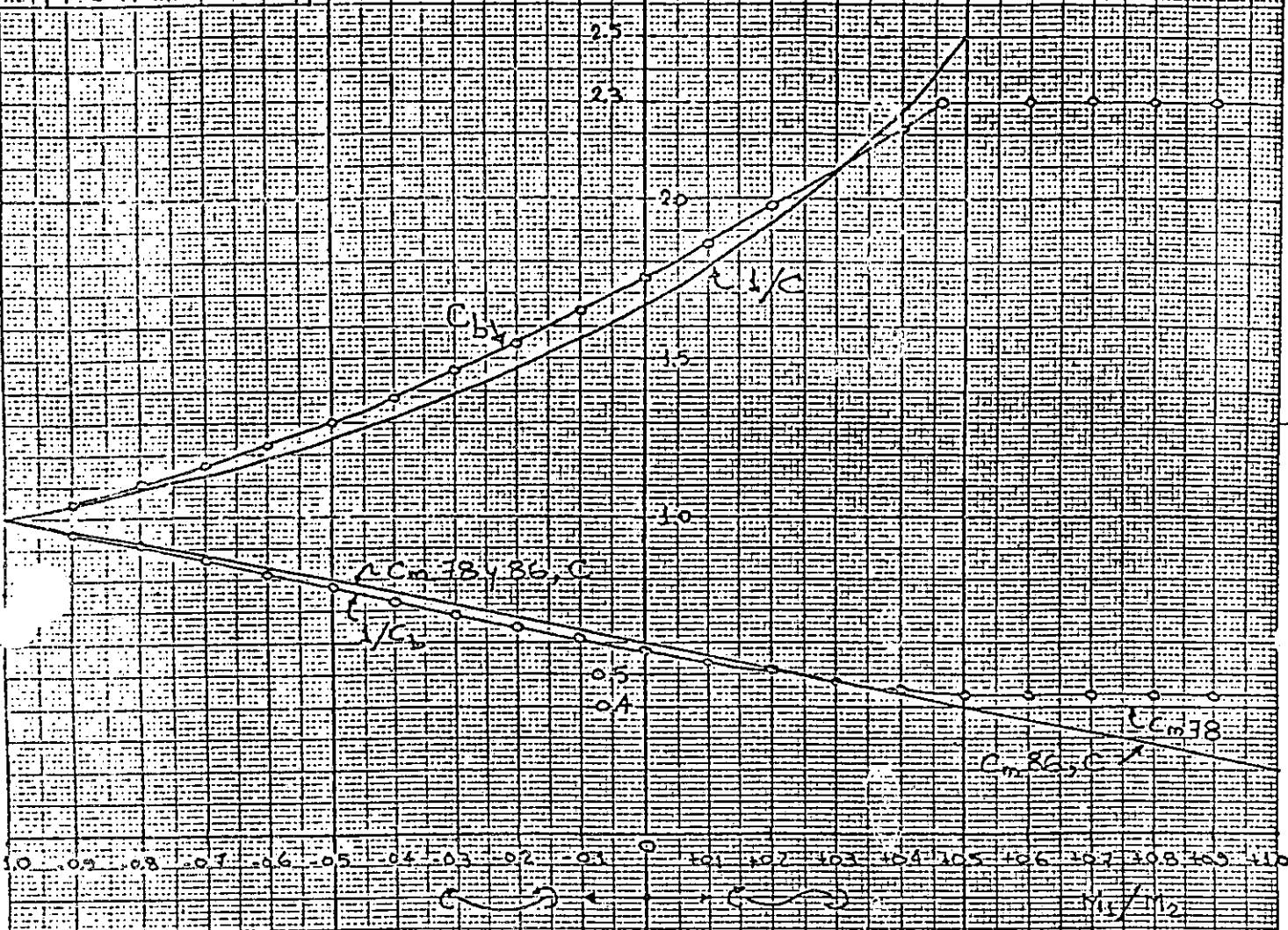
EN LAS NTC SE DAN TAMBIÉN EXPRESIONES APROXIMADAS PARA CALCULAR  $L_u$  Y  $L_r$  EN SECCIONES I LAUNADAS, ASÍ COMO PARA SECCIONES TRANSVERSALES RECTANGULARES.

TAMBIÉN SE INDICA COMO CALCULAR LA RESISTENCIA DE DISEÑO  $M_R$  PARA SECCIONES TIPO 3 O 4 CON DOS EJES DE SIMETRÍA Y PARA CANALES EN LAS QUE ESTÉ IMPEDIDA LA ROTACIÓN ALREDEDOR DEL EJE LONGITUDINAL, FLEXIONADAS ALREDEDOR DEL EJE DE MAYOR MOMENTO DE INERCIA.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA RESISTENCIA DE DISEÑO DE MIEMBROS EN FLEXIÓN



COEFICIENTES  
 $C_b, C_m$  y  $C$



AISC 86

$$C_b = 1.75 - 1.05(M_1/M_2) + 0.3(M_1/M_2)^2 \quad \text{LÍMITE } 2.3$$

AISC 78

$$C_m = 0.6 - 0.4(M_1/M_2) \geq 0.4$$

AISC 86

$$C_m = 0.6 - 0.4(M_1/M_2) \quad \text{DESAPARECE EL LÍMITE } 0.4$$

NTC 87

FLEXIÓN

$$C = 0.60 + 0.40 M_1/M_2$$

CURVA SÚPLE

$$C = 0.60 + 0.40 M_1/M_2 \geq 0.4$$

CURVA DOBLE

FLEXOCOMPRESIÓN

$$C = 0.60 + 0.40 M_1/M_2$$

CURVATURA SÚPLE

DESAPARECE EL LÍMITE 0.4

$$C = 0.60 + 0.40 M_1/M_2$$

CURVATURA DOBLE

MIEMBROS EN FLEXIÓN :

VALORES DEL COEFICIENTE C PARA DISTINTOS CASOS DE CARGA Y SOPORTE LATERAL

|                          |     |                             |  |  |   |                            |   |
|--------------------------|-----|-----------------------------|--|--|---|----------------------------|---|
| CARGAS                   |     |                             |  |  |   |                            |   |
| SOPORTE LATERAL (PLANTA) |     |                             |  |  |   |                            |   |
| DIAGRAMA DE MOMENTOS     |     |                             |  |  |   |                            |   |
| VALORES DE C             | 1.0 | $L_1 = 1.0$<br>$L_2 = 0.60$ | Si $M_1 > M_2$ ,<br>$0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0.4$<br>Si $M_1 < M_2$ , 1.0 | $L_1 = 0.6 - 0.4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0.4$<br>$L_2 = 0.6 - 0.4 \frac{M_2}{M_1} \geq 0.4$ | $L_1 = 0.6 - 0.4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0.4$<br>$L_2 = 1.0$<br>$L_3 = 0.6 - 0.4 \frac{M_2}{M_3} \geq 0.4$ | $L_1 = 0.6$<br>$L_2 = 1.0$ | $L_1 \text{ y } L_3 = 0.6$<br>$L_2 = 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2}$ |



RESISTENCIA DE DISEÑO AL CORTANTE. LA RESISTENCIA DE DISEÑO AL CORTANTE,  $V_R$ , DE UNA VIGA O TRABE DE EJE RECTO Y SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE, DE SECCIÓN I, C O EN CAJÓN, ES

$$V_R = F_R V_N = F_R A_w F_s$$

$F_R = 0.90$ , Y  $V_N = A_w F_s$  ES LA RESISTENCIA NOMINAL, QUE SE DETERMINA MULTIPLICANDO EL ÁREA DEL ALHA O ALHAS POR EL VALOR DE  $F_s$  QUE CORRESPONDA AL CASO EN CONSIDERACIÓN.  $F_s$  SE TOMA DE LA FIGURA DE LA HOJA SIGUIENTE.

PARA PODER TOMAR COMO ESTADO LÍMITE LA FALLA POR TENSIÓN DIAGONAL, LA SECCIÓN DEBE TENER UNA SOLA ALHA (SECCIONES I LAMINADAS O FORJADAS POR PLACAS) Y ESTAR REFORZADA CON ATIESADORES TRANSVERSALES DISEÑADOS ADECUADAMENTE.

$$k = 5.0 + \frac{5.0}{(a/h)^2}$$

" $a$ " ES LA SEPARACIÓN ENTRE ATIESADORES TRANSVERSALES Y  $h$  EL PEDALTE DEL ALHA (DISTANCIA LIBRE ENTRE PATINES).  $k$  ES UN COEFICIENTE SIN DIMENSIONES.

$k$  SE TOMA IGUAL A 5.0 CUANDO  $a/h$  ES MAYOR QUE 3.0 O QUE  $\left(\frac{260}{h/t}\right)^2$ . EN ALHAS SIN ATIESADORES TRANSVERSALES,  $a/h = \infty$ .

## MIEMBROS FLEXOCOMPRESIDOS.

ESTA ES UNA DE LAS PARTES DE LAS NTC QUE HA EXPERIMENTADO CAMBIOS DE MAYOR IMPORTANCIA. EN ELLA SE TRATA EL DISEÑO DE MIEMBROS DE EJE RECTO Y SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE, CON DOS EJES DE SIMETRÍA, SUJETOS A COMPRESIÓN Y A FLEXIÓN BIAXIAL.

LAS ESTRUCTURAS SE CLASIFICAN EN REGULARES E IRREGULARES Y SE PROPORCIONAN MÉTODOS DE ANÁLISIS Y DISEÑO QUE SOLO SON APLICABLES A LAS PRIMERAS, ASÍ COMO OTROS MÉTODOS DE CARÁCTER GENERAL.

MÉTODOS DE ANÁLISIS Y DISEÑO. LOS ELEMENTOS MECÁNICOS DE DISEÑO PUEDEN OBTENERSE CON UN ANÁLISIS DE PRIMER ORDEN, BASADO EN LA GEOMETRÍA INICIAL DE LA ESTRUCTURA, O MEDIANTE UN ANÁLISIS DE SEGUNDO ORDEN EN EL QUE SE TOMEN EN CUENTA, COMO MÍNIMO, LOS INCREMENTOS DE LAS FUERZAS INTERNAS PRODUCIDOS POR LAS CARGAS VERTICALES AL ACTUAR SOBRE LA ESTRUCTURA DEFORMADA Y, CUANDO SEAN SIGNIFICATIVOS, LA INFLUENCIA DE LA FUERZA AXIAL EN LAS RIGIDECES Y FACTORES DE TRANSPORTE DE LAS COLUMNAS Y EN LOS MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO, ASÍ COMO LOS EFECTOS DE LA PLASTIFICACIÓN PARCIAL DE LA ESTRUCTURA.

LOS FACTORES QUE NO SE CONSIDERAN EN EL ANÁLISIS SE INCLUYEN, DE MANERA INDIRECTA, EN LAS FÓRMULAS DE DISEÑO.

ESTADOS LÍMITE. DEBEN CONSIDERARSE LOS ESTADOS LÍMITE DE FALLA SIGUIENTES:  
PAUDEO DE CONJUNTO DE UN ENTREPISO, BAJO CARGA VERTICAL.

PAUDEO INDIVIDUAL DE UNA O MÁS COLUMNAS, BAJO CARGA VERTICAL.

INESTABILIDAD DE CONJUNTO DE UN ENTREPISO, BAJO CARGAS VERTICALES Y HORIZONTALES COMBINADAS.

FALLA INDIVIDUAL DE UNA O MÁS COLUMNAS, BAJO CARGAS VERTICALES Y HORIZONTALES COMBINADAS, POR INESTABILIDAD O PORQUE SE AGOTE LA RESISTENCIA DE ALGUNA DE SUS SECCIONES EXTREMAS.

PAUDEO LOCAL.

DEBE CONSIDERARSE TAMBIÉN UN ESTADO LÍMITE DE SERVICIO, DE DEFORMACIONES LATERALES DE ENTREPISO.

## MIEMBROS FLEXOCOMPRESIDOS

ES UNO DE LOS CAPÍTULOS QUE HA EXPERIMENTADO CAMBIOS DE MAYOR IMPORTANCIA.

LAS ESTRUCTURAS SE CLASIFICAN EN "REGULARES" E "IRREGULARES", PORQUE SE PROPORCIONAN MÉTODOS DE ANÁLISIS Y DISEÑO QUE SÓLO SON APLICABLES A LAS PRIMERAS. OTROS MÉTODOS SON DE CARÁCTER GENERAL.

SE PERMITE EL ANÁLISIS DE PRIMER O DE SEGUNDO ORDEN, Y SE INDICAN LOS EFECTOS QUE DEBEN INCLUIRSE EN ÉSTE. SE DA UN MÉTODO APROXIMADO PARA EL ANÁLISIS DE SEGUNDO ORDEN DE ESTRUCTURAS REGULARES.

ESTADOS LÍMITE. DEBEN CONSIDERARSE LOS ESTADOS LÍMITE DE FALLA SIGUIENTES:

PADEO DE CONJUNTO DE UN ENTREPISO, BAJO CARGA VERTICAL.

PADEO INDIVIDUAL DE UNA O MÁS COLUMNAS, BAJO CARGA VERTICAL.

INESTABILIDAD DE CONJUNTO DE UN ENTREPISO, BAJO CARGAS VERTICALES Y HORIZONTALES COMBINADAS.

FALLA INDIVIDUAL DE UNA O MÁS COLUMNAS, BAJO CARGAS VERTICALES Y HORIZ. COMBINADAS, POR INESTABILIDAD O PORQUE SE AGOTE LA RESISTENCIA DE ALGUNA DE SUS SECCIONES EXTREMAS.

DEBE CONSIDERARSE TAMBIÉN UN ESTADO LÍMITE DE SERVICIO, DE DEFORMACIONES LATERALES DE ENTREPISO.

DIMENSIONAMIENTO DE COLUMNAS EN ESTRUCTURAS REGULARES.

REVISIÓN DE LAS SECCIONES EXTREMAS.

a) SECCIONES TIPO 1 y 2. EN CADA UNO DE LOS EXTREMOS DE LA COLUMNA DEBE SATISFACERSE LA CONDICIÓN

$$\left( \frac{M_{uox}}{M_{pcx}} \right)^\alpha + \left( \frac{M_{uoy}}{M_{pcy}} \right)^\alpha \leq 1.0 \quad (3.4.1)$$

$M_{pcx}$  y  $M_{pcy}$  SON LOS MOMENTOS RESISTENTES DE DISEÑO DE LA SECCIÓN FLEXIONADA ALREDEDOR DE CADA UNO DE LOS EJES CENTROIDALES Y PRINCIPALES, CALCULADOS TENIENDO EN CUENTA LA FUERZA DE COMPRESIÓN Y SUPONIENDO, EN CADA CASO, QUE EL OTRO MOMENTO ES NULO.

$$M_{pcx} = 1.18 F_c M_{px} \left( 1 - \frac{P_u}{F_c P_y} \right) \leq F_c M_{px}; \quad M_{pcy} = 1.67 F_c M_{py} \left( 1 - \frac{P_u}{F_c P_y} \right) \leq F_c M_{py}$$

$\alpha$  TIENE ALGUNO DE LOS VALORES SIGUIENTES:

|                               |                            |
|-------------------------------|----------------------------|
| SECCIONES H                   | $\alpha = 1.60 - p/2L_n p$ |
| SECCIONES EN CAJÓN, CUADRADAS | $\alpha = 1.70 - p/2L_n p$ |
| CUALQUIER OTRA SECCIÓN        | $\alpha = 1.0$             |

$P_u$ ,  $M_{uox}$  Y  $M_{uoy}$  SON LA FUERZA AXIAL DE DISEÑO QUE OBRA EN LA COLUMNA Y LOS MOMENTOS DE DISEÑO EN EL EXTREMO CONSIDERADO.

$F_c = 0.90$ ,  $M_{px} = Z_x F_y$ ,  $M_{py} = Z_y F_y$ ,  $P_y = A_t F_y$ ,  $p = P_u / F_c P_y$ .  $L_n$  INDICA LOGARITMO NATURAL.

SI SE TOMA  $\alpha = 1.0$ , LA EC. 3.4.1 SE TRANSFORMA EN

$$\frac{P_u}{F_c P_y} + \frac{0.85 M_{uox}}{F_c M_{px}} + \frac{0.60 M_{uoy}}{F_c M_{py}} \leq 1.0$$

ESTA ECUACIÓN DEBE UTILIZARSE CUANDO NO SE CONOCE  $\alpha$  Y PUEDE EMPLEARSE, CONSERVADORAMENTE, EN VEZ DE LA EC. 3.4.1, AUN CONOCIENDO  $\alpha$ .

b) SECCIONES TIPO 3 Y 4. EN CADA EXTREMO DEBE CUMPLIRSE:

$$\frac{P_u}{F_c P_y} + \frac{M_{uox}}{M_{2x}} + \frac{M_{uoy}}{M_{2y}} \leq 1.0$$

$M_{2x}$  Y  $M_{2y}$  SE CALCULAN COMO SE INDICA EN EL CAPÍTULO DE FLEXIÓN, PARA MIEMBROS SOPORTADOS LATERALMENTE.

b) SECCIONES TIPO 3 y 4. DEBE CUMPLIRSE LA CONDICIÓN

$$\frac{P_u}{R_c} + \frac{M_{uox}^*}{M_{Ry}} + \frac{M_{uoy}^*}{M_{Rx}} \leq 1.0$$

$M_{Rx}$  y  $M_{Ry}$  SE CALCULAN COMO SE INDICA EN EL CAP. DE FLEXIÓN.

DETERMINACIÓN DE LOS MOMENTOS DE DISEÑO  $M_{uox}$ ,  $M_{uoy}$ ,  $M_{uox}^*$  y  $M_{uoy}^*$ .

a) ANÁLISIS DE PRIMER ORDEN. SI LAS FUERZAS NORMALES Y LOS MOMENTOS SE OBTIENEN POR MEDIO DE UN ANÁLISIS CONVENCIONAL DE PRIMER ORDEN, LOS MOMENTOS DE DISEÑO SE DETERMINAN COMO SIGUE:

$$M_{u0} = M_{TI} + B_2 M_{TP} \quad (3.4.11)$$

$$M_{u0}^* = B_1 M_{TI} + B_2 M_{TP} \quad (3.4.12)$$

EN LA EC. 3.4.11,  $M_{TI}$  ES EL MOMENTO DE DISEÑO EN EL EXTREMO EN CONSIDERACIÓN DE LA COLUMNA, Y EN LA EC. 3.4.12 ES UNO DE LOS MOMENTOS DE DISEÑO QUE ACTÚAN EN LOS DOS EXTREMOS, PRODUCIDOS, EN AMBOS CASOS, POR CARGAS QUE NO OCASIONAN DESPLAZAMIENTOS LATERALES APRECIABLES DE ESOS EXTREMOS.

LOS MOMENTOS  $M_{TP}$  SON ANÁLOGOS A LOS  $M_{TI}$ , PERO PRODUCIDOS POR CARGAS QUE SÍ OCASIONAN DESPLAZAMIENTOS LATERALES APRECIABLES DE LOS EXTREMOS DE LA COLUMNA.

EN MARCOS QUE FORMAN PARTE DE ESTRUCTURAS REGULARES PROVISTAS DE CONTRAVIENTOS O MUDOS DE CORTANTE DE RIGIDEZ ADECUADA PARA QUE PUEDAN DESPRECIARSE LOS EFECTOS DE ESBELTEZ DEBIDOS A DESPLAZAMIENTOS LATERALES DE ENTREPISO DESAPARECE EL TÉRMINO  $B_2 M_{TP}$  DE LAS ECS. 3.4.11 Y 3.4.12, Y LOS MOMENTOS  $M_{TI}$  SON LA SUMA DE LOS PRODUCIDOS POR LAS CARGAS VERTICALES Y LAS HORIZONTALES.

$B_1$  y  $B_2$  SON FACTORES DE AMPLIFICACIÓN DE LOS MOMENTOS; SE CALCULAN CON LAS ECUACIONES SIGUIENTES:

$$B_1 = \frac{C}{1 - \frac{P_0}{F_R P_E}} \geq 1.0 \quad (3.4.13)$$

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_0}{F_R (\sum P_E)}} \quad (3.4.14) \quad \text{ó} \quad B_2 = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_0 \Delta_{OH}}{F_R (\sum H)L}} \quad (3.4.15)$$

C ES UN COEFICIENTE QUE DEPENDE DE LA LEY DE VARIACIÓN DEL MOMENTO FLEXIONANTE. TIENE ALGUNO DE LOS VALORES SIGUIENTES, APLICABLES A COLUMNAS QUE FORMAN PARTE DE ARCS CON O SIN CONTRAVIENTO:

PARA TRAMOS QUE SE FLEXIONAN EN CURVATURA SIMPLE,  $0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2}$

PARA TRAMOS EN CURVATURA DOBLE,  $0.6 - 0.4 \frac{M_1}{M_2}$  ~~#####~~

$M_1$  Y  $M_2$  SON EL MENOR Y EL MAYOR DE LOS MOMENTOS EN LOS EXTREMOS DEL TRAMO DE BARRA EN ESTUDIO, TOMADOS EN VALOR ABSOLUTO.

EN LA EC. 3.4.13 SE CALCULA LA CARGA  $P_E$  CON UN COEFICIENTE K QUE CORRESPONDE A COLUMNAS CUYOS EXTREMOS NO SE DESPLAZAN LATERALMENTE, MIENTRAS QUE EN LAS ECS. 3.4.14 Y 3.4.15 SE USA UN COEFICIENTE K EN EL QUE SE TIENE EN CUENTA QUE LA COLUMNA FORMA PARTE DE UN ARCO EN EL QUE LOS DESPLAZAMIENTOS LATERALES DE ENTREPISO SON SIGNIFICATIVOS.

$$P_E = A_t \pi^2 E / (KL/r)^2$$

$\sum P_E$  = SUMA DE CARGAS CRÍTICAS DE PANDEO ELÁSTICO DE TODAS LAS COLUMNAS DEL ENTREPISO EN ESTUDIO, EN EL PLANO QUE SE ESTÉ ANALIZANDO.

$\sum P_0$  = SUMA DE FUERZAS AXIALES DE DISEÑO EN TODAS LAS COLUMNAS DEL ENTREPISO EN CONSIDERACIÓN.

$\Delta_{OH}$  = DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL RELATIVO DE LOS NIVELES QUE LÍMITAN EL ENTREPISO EN CONSIDERACIÓN

$\Sigma H$  = SUMA DE TODAS LAS FUERZAS HORIZONTALES DE DISEÑO QUE OBRAN ENCIMA DEL ENTREPISO EN CONSIDERACIÓN (FUERZA CORTANTE DE DISEÑO EN EL ENTREPISO).

$L$  = ALTURA DEL ENTREPISO.

ENTREPISOS CUYO DISEÑO QUEDA REGIDO POR CARGAS VERTICALES. EN COLUMNAS QUE FORMAN PARTE DE ENTREPISOS CUYO DISEÑO QUEDA REGIDO POR CARGAS VERTICALES ÚNICAMENTE, LO QUE ES FRECUENTE EN EDIFICIOS DE Poca ALTURA Y EN LOS ENTREPISOS SUPERIORES DE EDIFICIOS ALTOS, LOS MOMENTOS  $M_{TP}$  SUELEN SER NULOS EN LA CONDICIÓN DE CARGA DE DISEÑO.

SI SE DEMUESTRA QUE EL PANDEO DE CONJUNTO DE UN ENTREPISO, CON DESPLAZAMIENTOS LATERALES RELATIVOS DE LOS NIVELES QUE LO LÍMITAN, NO ES CRÍTICO,  $B_2$  VALE CERO Y  $P_E$  SE CALCULA CON  $K \leq 1.0$ . SI NO SE ESTUDIA EL PANDEO DE CONJUNTO, O SI ÉSTE ES CRÍTICO, LOS MOMENTOS DE DISEÑO VALEN

$$M_{uo} = M_{TI}, \quad M_{uo}^* = B_2 M_{TI}$$

$B_2$  SE CALCULA CON LA EC. 3.4.14.

SE CONSIDERARÁ QUE EL PANDEO DE CONJUNTO DE UN ENTREPISO NO ES CRÍTICO CUANDO  $(P_c / \Sigma P_u) \geq 2.5$ .  $P_c$  ES LA CARGA CRÍTICA DE DISEÑO DE PANDEO CON DESPLAZAMIENTO LATERAL DEL ENTREPISO Y  $\Sigma P_u$  ES LA SUMA DE LAS FUERZAS AXIALES DE DISEÑO DE TODAS LAS COLUMNAS DE DICHO ENTREPISO.

MÁS ADELANTE

~~SE DA UN PROCEDIMIENTO APLICADO PARA CALCULAR~~  
LA CARGA CRÍTICA DE ENTREPISOS DE ESTRUCTURAS REGULARES.

b) ANÁLISIS DE SEGUNDO ORDEN. SI LAS FUERZAS NORMALES Y LOS MOMENTOS SE OBTIENEN POR MEDIO DE UN ANÁLISIS DE SEGUNDO ORDEN. O SI SE DEMUESTRA QUE LOS EFECTOS DE 2º ORDEN NO SON SIGNIFICATIVOS, LOS MOMENTOS DE DISEÑO SE DETERMINAN COMO SIGUE:

$$M_{L2} = M_{T1} + M_{TP} \quad (3.4.16)$$

$$M_{L2}^* = B_1 (M_{T1} + M_{TP}) \quad (3.4.17)$$

TODAS LAS LITERALES TIENEN LOS MISMOS SIGNIFICADOS QUE EN LAS ECS. 3.4.11 Y 3.4.12, PERO  $P_e$  SE CALCULA CON  $K \leq 1.0$ .

DETERMINACIÓN DE CARGAS CRÍTICAS. LA CARGA CRÍTICA DE ESTRUCTURAS REGULARES PUEDE DETERMINARSE CON MÉTODOS RACIONALES QUE TENGAN EN CUENTA, CUANDO SEAN SIGNIFICATIVOS, LOS EFECTOS DE LA PLASTIFICACIÓN PARCIAL QUE SUELE PRECEDER A LA FALLA POR PANDEO.

LA CARGA CRÍTICA DE UN ENTREPISO PUEDE EVALUARSE CON LAS FÓRMULAS APROXIMADAS SIGUIENTES:

$$\text{SI } P_{cr} \leq \Sigma P_y / 2, \quad P_{cr} = F_R RL / 1.2 \quad (3.4.18)$$

$$\text{SI } P_{cr} > \frac{\Sigma P_y}{2}, \quad P_{cr} = F_R \Sigma P_y \left( 1 - \frac{0.3 \Sigma P_y}{RL} \right) \quad (3.4.19)$$

$P_{cr}$  ES LA CARGA CRÍTICA DE DISEÑO DE PANDEO CON DESPLAZAMIENTO LATERAL DEL ENTREPISO,  $\Sigma P_y = \Sigma A_c F_y$  ES LA SUMA DE FUERZAS AXIALES QUE, OBRANDO POR SÍ SOLAS, OCASIONARÍAN LA PLASTIFICACIÓN DE TODAS LAS COLUMNAS DEL ENTREPISO,  $R$  ES LA RIGIDEZ DEL ENTREPISO, DETERMINADA POR MEDIO DE UN ANÁLISIS ELÁSTICO DE PRIMER ORDEN, Y  $L$  ES LA ALTURA DEL ENTREPISO.  $F_R = 0.9$ .

EN EL CÁLCULO DE  $R$  DEBEN INCLUIRSE TODOS LOS MARCOS, MUROS Y CONTRAVIENTOS QUE FORMAN PARTE DEL ENTREPISO Y CONTRIBUYEN A SU RIGIDEZ LATERAL EN LA DIRECCIÓN ANALIZADA, Y  $\Sigma P_y$  CORRESPONDE A TODAS LAS COLUMNAS CONSIDERADAS AL CALCULAR  $R$ .

ANÁLISIS DE SEGUNDO ORDEN. EL ANÁLISIS DE SEGUNDO ORDEN DE ESTRUCTURAS REGULARES DEBE HACERSE UTILIZANDO MÉTODOS RACIONALES QUE TENGAN EN CUENTA, POR LO MENOS, LOS EFECTOS QUE SE INDICARON ARRIBA.

UNA MANERA APROXIMADA DE CALCULAR LOS MOMENTOS DE SEGUNDO ORDEN EN LOS EXTREMOS DE COLUMNAS CUYO DISEÑO QUEDE REGIDO POR LA COMBINACIÓN DE



CARGAS VERTICALES Y HORIZONTALES. CONSISTE EN EVALUAR POR SEPARADO LOS MOMENTOS PRODUCIDOS POR LOS DOS TIPOS DE CARGAS, UTILIZANDO MÉTODOS CONVENCIONALES DE ANÁLISIS DE PRIMER ORDEN, Y EN MULTIPLICAR LOS MOMENTOS OCASIONADOS POR LAS CARGAS HORIZONTALES POR EL FACTOR DE AMPLIFICACIÓN

$$FA = 1 + \frac{W_u/L}{(R/Q) - 1.2 W_u/L} \quad (3.4.20)$$

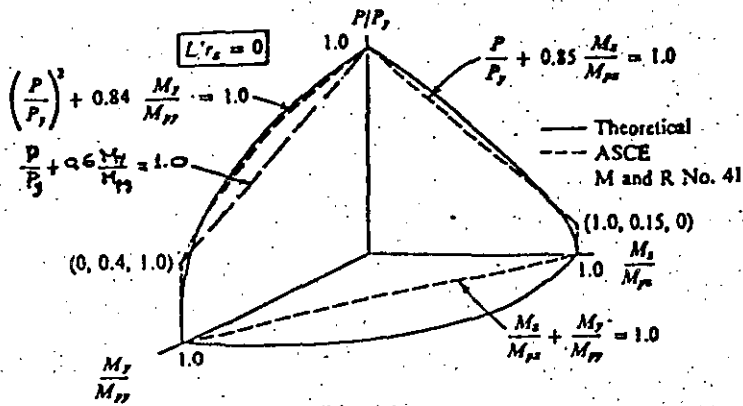
LOS MOMENTOS FINALES DE 2º ORDEN SE OBTIENEN SUMANDO LOS DE CARGA VERTICAL DE 1º ORDEN CON LOS PRODUCIDOS POR CARGAS HORIZONTALES AMPLIFICADOS.

$W_u$  ES LA SUMA DE LAS CARGAS DE DISEÑO MUERTAS Y VIVAS (CARGAS NOMINALES MULTIPLICADAS POR LOS FACTORES DE CARGA CORRESPONDIENTES A LA COMBINACIÓN DE ACCIONES EN ESTUDIO), ACUMULADAS DESDE EL EXTREMO SUPERIOR DE LA ESTRUCTURA HASTA EL ENTREPISO CONSIDERADO.  $Q$  ES EL FACTOR DE COMPORTAMIENTO SÍSMICO (EN DISEÑO POR VIENTO SE TOHA  $Q = 1.0$ ).

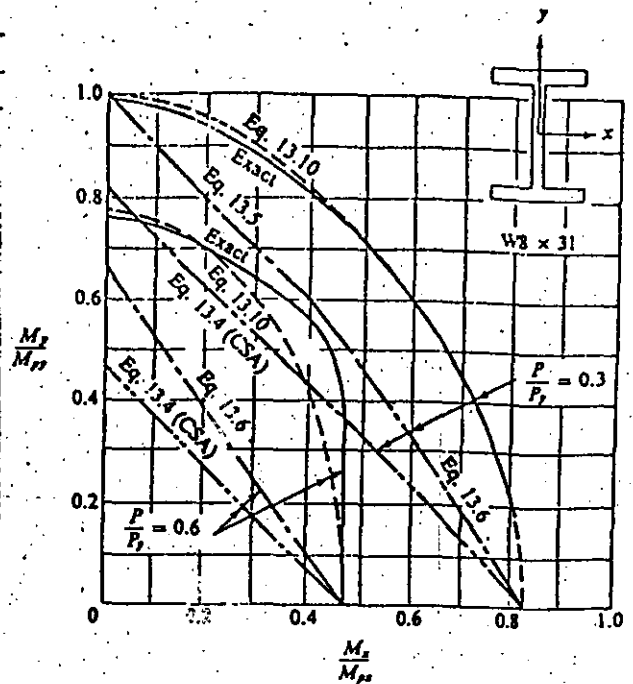
TODAS LAS FUERZAS INTERNAS Y, EN ESPECIAL, LOS MOMENTOS EN LAS TRABES, DEBEN INCREMENTARSE DE MANERA QUE SE SATISFAGA EL EQUILIBRIO CON LOS MOMENTOS AMPLIFICADOS DE LAS COLUMNAS.

DIMENSIONAMIENTO DE COLUMNAS EN ESTRUCTURAS IRREGULARES. SE CONSERVAN BÁSICAMENTE LAS FÓRMULAS DE LAS NTC 76, TANTO PARA REVISAR LAS SECCIONES EXTERNAS COMO PARA LA REVISIÓN DE LA COLUMNA COMPLETA. ESTO SE DEBE A QUE SE SABE QUE LOS MÉTODOS RECOMENDADOS PARA EL DISEÑO DE COLUMNAS QUE FORMAN PARTE DE ESTRUCTURAS REGULARES NO SON APLICABLES EN ALGUNOS CASOS, Y EN OTROS NO SE HA DEMOSTRADO QUE LO SEAN.

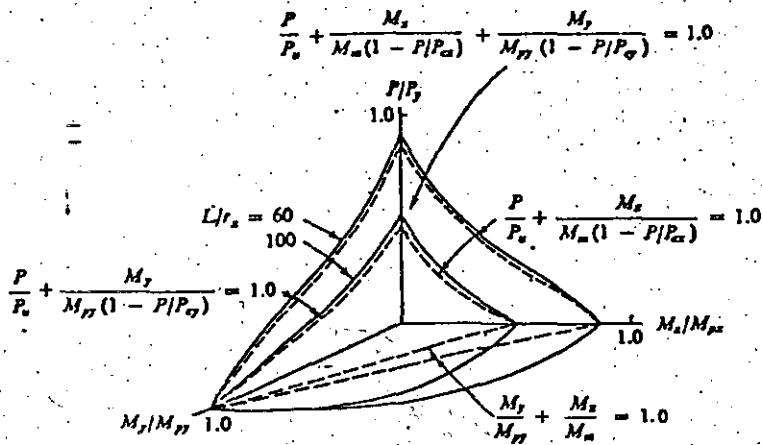
ADemás, NO SE CONOCEN LOS VALORES DE LOS EXPONENTES  $\alpha$  Y  $\beta$  PARA SECCIONES QUE NO SEAN H O EN CAJÓN.



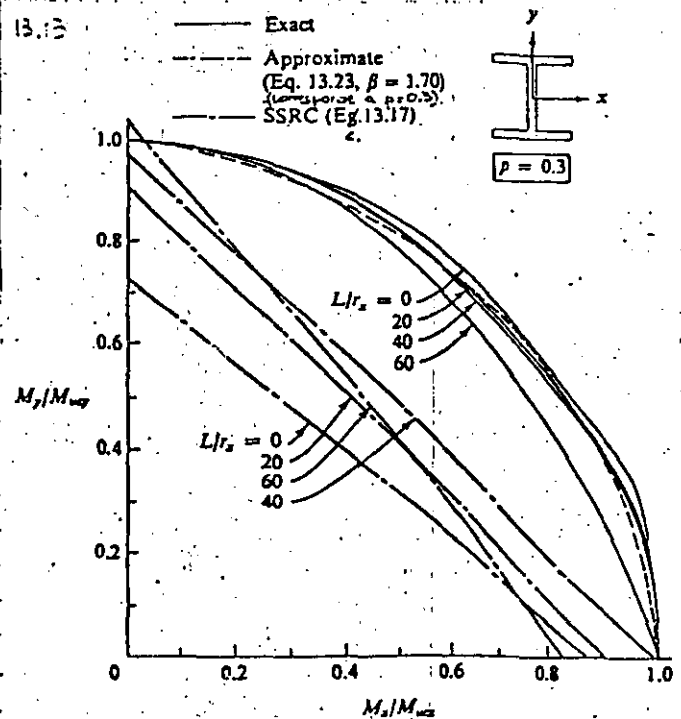
SUPERFICIE DE INTERACCION PARA COLUMNAS CORTAS DE SECCION H Y ECUACIONES APROXIMADAS.



CURVAS DE INTERACCION PARA COLUMNAS DE LONGITUD NULA



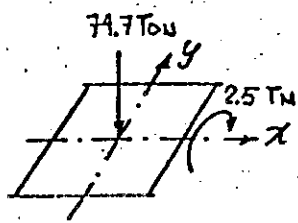
SUPERFICIES DE INTERACCION PARA COLUMNAS LARGAS DE SECCION H Y ECUACIONES APROX.



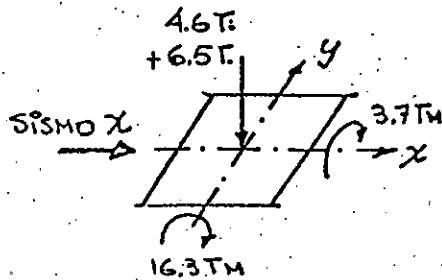
COMPARACION DE CURVAS DE INTERACCION PARA COLUMNAS LARGAS

ELEMENTOS MECÁNICOS EN LA COLUMNA. CORRESPONDEN A CARGAS DE TRABAJO.

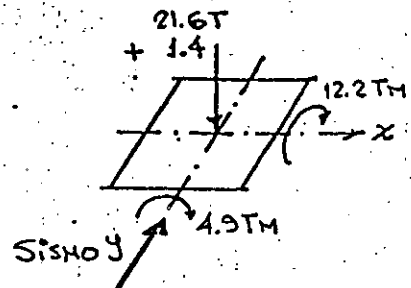
CARGA VERTICAL



SISMO X + 0.30 SISMO Y



SISMO Y + 0.30 SISMO X



TODOS LOS MOMENTOS, POR CARGA VERTICAL Y POR SISMO, SON IGUALES EN LOS DOS EXTREMOS DE LA COLUMNA, Y LA FLEXIONAN EN CUERATUDA DOBLE. LA CARGA VERTICAL NO OCASIONA DESPLAZAMIENTOS LINEALES RELATIVOS DE LOS EXTREMOS DE LA COLUMNA, Y EL SISMO SÍ.

CLASIFICACIÓN DE LA SECCIÓN.

LA MAYOR RELACIÓN ANCHO/GRUESO DE LAS PLACAS QUE COMPUEN LA SECCIÓN ES  $22.0/1.59 = 13.8$

PATINES. SUPONIENDO QUE TRABAJAN EN COMPRESIÓN PURA, EL LÍMITE PARA SECCIONES TIPO 1 O 2 ES  $(h/t)_{MÁX} = 1600/\sqrt{F_y} = 31.8 > 13.8$ .

ALMAS.  $P_y = A F_y = 149.5 \times 2.53 = 378.2 \text{ Ton}$

$P_u$  (PARA C. VERT. + SISMO X + 0.30 SISMO Y) =  $(71.7 + 11.1) 1.1 = 94.4 \text{ Ton}$

$P_u/P_y = 94.4/378.2 = 0.250 < 0.28$

∴ PARA SEC. TIPO 1,  $(h/t)_{MÁX} = \frac{3500}{\sqrt{F_y}} (1 - 1.4 \times 0.25) = 45.3 > 13.8$

LA SECCIÓN ES TIPO 1.

DETERMINACIÓN DE SI EL PAUDEO LATERAL POR FLEXOTORSIÓN ES CRÍTICO.

$P_y = 378.2 \text{ Ton}$ . ...  $M_{px} = Z_x F_y = 1322 \times 2530 \times 10^5 = 33.4 \text{ TM}$ ;  $M_{py} = Z_y F_y = 31.5 \text{ TM}$

$$L_{px} = \frac{352000 + 211000 (M_{ix}/M_{px})}{F_y} \quad \Gamma_x = \frac{352000 + 211000 (6.8/33.4)}{2530} \times 9.6 = 1499 \text{ CM} >$$

$$> 211000 \times 9.6 / 2530 = 800.6 \text{ CM}$$

ANÁLOGAMENTE SE OBTIENE  $L_{py} = 750.6 \text{ CM}$

LA LONGITUD MENOR, 750.6 CM, ES MUCHO MAYOR QUE LA ALTURA DE LA COLUMNA, 4.50M, DE MANERA QUE EL PAUDEO LATERAL NO ES CRÍTICO, Y LA COLUMNA PODRÍA DISEÑARSE CON LA T. PLÁSTICA (PARA SABER QUE EL PAUDEO LATERAL NO ES CRÍTICO BASTA CON DEMOSTRAR QUE LA LONGITUD DE LA COLUMNA ES MENOR QUE  $L_u$ ).

SOLICITACIONES DE DISEÑO. SE REVISARÁ LA CONDICIÓN DE CARGA VERTICAL.  
SISMO X + 0.30 SISMO Y.  $F_c = 1.1$ .

$$P_u = (74.7 + 11.1) \cdot 1.1 = 94.4 \text{ Ton}; \quad M_x = (2.5 + 3.7) \cdot 1.1 = 6.8 \text{ TM}; \quad M_y = 16.3 \cdot 1.1 = 17.9 \text{ TM}$$

MOMENTOS DE DISEÑO. LOS ELEMENTOS MECÁNICOS SE OBTUVIERON CON UN ANÁLISIS ELÁSTICO DE PRIMER ORDEN.

$C_x = C_y = 0.6 - 0.4 M_1/M_2 = 0.6 - 0.4 = 0.2$  LOS MOMENTOS EN LOS DOS EXTREMOS, TANTO ALREDEDOR DE X COMO DE Y, SON IGUALES EN VALOR ABSOLUTO Y PRODUCEN CURVATURA DOBLE.

$$P_{Ex} = A_c \pi^2 E / (KL/r)_x^2 = (149.5 \pi^2 \times 2040 \times 10^3 / 76^2) 10^{-3} = 521.1 \text{ Ton}; \quad P_{Ey} = 926.5 \text{ Ton}$$

EL EDIFICIO TIENE OCHO COLUMNAS EN PLANTA; EN EL ENTREPISO 2-3 TODAS SON IGUALES  $\therefore \sum P_{Ex} = 521.1 \times 8 = 4168.8 \text{ Ton}$ ,  $\sum P_{Ey} = 7412.0 \text{ Ton}$

USANDO UN MÉTODO APROXIMADO SE OBTUVO:

$$\text{MARCO A: } R = 686.6 \text{ Ton/M}, \quad \Delta_{OH} = V_{SISM.} / R = 38.9 \text{ Ton} / 686.6 \text{ T/M} = 0.0567 \text{ M} = 5.67 \text{ CM}$$

$$\text{MARCO 2: } R = 353.5 \text{ Ton/M}, \quad \Delta_{OH} = 5.50 \text{ CM} \quad (3.50 / 280 = 0.020)$$

FACTORES DE AMPLIFICACIÓN.

PARA CALCULAR LOS FACTORES  $B_1$  SE UTILIZAN ESBELTECES CORRESPONDIENTES A MARCOS "CONTRAVENTADOS".

$(KL/r)_x = 0.95 \times 280 / 9.6 = 28$ ,  $(KL/r)_y = 0.89 \times 280 / 9.0 = 28$  (RESULTARON IGUALES POR CASUALIDAD)  $\therefore P_{Ex} = P_{Ey} = (149.5 \pi^2 \times 2040 \times 10^3 / 28^2) 10^{-3} = 3839 \text{ Ton}$ .

a) EN EL PLANO DEL MARCO 2 (FLEXIÓN ALREDEDOR DEL EJE X DE LAS COL.)

$$B_{1x} = \frac{C_x}{1 - P_u / (F_c P_{Ex})} = \frac{0.2}{1 - 94.4 / (0.9 \times 3839)} = 0.206 < 1.0 \quad \therefore B_{1x} = 1.0$$

$$B_{2x} = \frac{1}{1 - \sum P_u / F_c \sum P_{Ex}} = \frac{1}{1 - 498.8 / 0.9 \times 4168.8} = 1.151$$

LOS DOS VALORES DE  $B_{2x}$  DEBEN SER, TEÓRICAMENTE, IGUALES; PARA FINES PRÁCTICOS EN ESTE CASO LO SON.

$$B_{2x} = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_u \Delta_{OH}}{F_c (\sum H) L}} = \frac{1}{1 - \frac{492.8 \times 5.50}{0.9 \times 77.8 \times 280}} = 1.160$$

OBSÉVASE QUE  $B_1$  DEPENDE DE LAS CARACTERÍSTICAS DE LA COLUMNA INDIVIDUAL DE LA CARGA QUE OBRA SOBRE ELLA, MIENTRAS QUE  $B_2$  ES FUNCIÓN DE LAS PROPIEDADES DE TODAS LAS COLUMNAS DEL ENTREPISO Y DE LAS FUERZAS TOTALES QUE ACTÚAN EN ÉL.

b) EN EL PLANO DEL MARCO A (FLEXIÓN ALREDEDOR DEL EJE Y DE LAS COL.)

$$B_{1y} = \frac{0.2}{1 - 94.4 / (0.9 \times 3839)} = 0.206 < 1.0 \therefore B_{1y} = 1.00$$

$$B_{2y} = \frac{1}{1 - \frac{492.8}{0.9 \times 7412}} = 1.080 ; \quad B_{2y} = \frac{1}{1 - \frac{492.8 \times 5.67}{0.9 \times 77.8 \times 280}} = 1.166$$

LA DIFERENCIA ENTRE LOS DOS VALORES DE  $B_2$  ES UN POCO MAYOR QUE EN EL MARCO 2.

$$M_{u0x} = M_{Tix} + B_{2x} M_{TPx} = 2.5 \times 1.1 + 1.16 \times 3.7 \times 1.1 = 7.5 \text{ Ton.M}$$

$$M_{u0y} = M_{Tiy} + B_{2y} M_{TPy} = 0 + 1.166 \times 16.3 \times 1.1 = 20.9 \text{ Ton.M}$$

$$M_{u0x}^* = B_{1x} M_{Tix} + B_{2x} M_{TPx} = 7.5 \text{ TM} ; \quad M_{u0y}^* = B_{1y} M_{Tiy} + B_{2y} M_{TPy} = 20.9 \text{ TM}$$

EN ESTE PROBLEMA, COMO  $B_{1x} = B_{1y} = 1.00$ , Y DADAS LAS CONDICIONES DE CARGA, LOS MOMENTOS  $M_{u0}^*$  SON IGUALES A LOS  $M_{u0}$ .

REVISIÓN DE LAS SECCIONES EXTREMAS. LAS DOS SE ENCUENTRAN EN LAS MISMAS CONDICIONES.

$$M_{pxx} = 1.18 F_R M_{px} \left(1 - \frac{P_u}{F_R P_y}\right) = 1.18 \times 0.9 \times 33.4 \left(1 - \frac{94.4}{0.9 \times 378.2}\right) = 25.6 \text{ TM} < F_R M_{px} = 30.1 \text{ TM}$$

$$M_{pzy} = 1.67 F_R M_{py} \left[1 - \frac{P_u}{F_R P_y}\right] = 1.67 \times 0.9 \times 31.5 \left(1 - \frac{94.4}{0.9 \times 378.2}\right) = 34.2 \text{ TM} > F_R M_{py} = 28.4 \text{ TM}$$

$\therefore M_{pzy} = 28.4 \text{ TM}$

$$\left(\frac{M_{u0x}}{M_{pxx}}\right)^\alpha + \left(\frac{M_{u0y}}{M_{pzy}}\right)^\alpha = \left(\frac{7.5}{25.6}\right)^{1.81} + \left(\frac{20.9}{28.4}\right)^{1.81} = 0.108 + 0.574 = 0.682 < 1.00$$

$$p = P_u / F_R P_y = 94.4 / 0.9 \times 378.2 = 0.277, \quad \alpha = 1.70 - p / 2L_p = 1.70 - 0.277 / 2 \times 0.277 = 1.81$$

CONSERVADORAMENTE, PUEDE UTILIZARSE LA ECUACIÓN

$$\frac{P_u}{F_R P_y} + \frac{0.85 M_{u0x}}{F_R M_{px}} + \frac{0.60 M_{u0y}}{F_R M_{py}} = 0.277 + \frac{0.85 \times 7.5}{0.9 \times 33.4} + \frac{0.60 \times 20.9}{0.9 \times 31.5} = 0.931 < 1.000$$

REVISIÓN DE LA COLUMNA COMPLETA

$$\beta = 1.3 + 1000 p / (4r)^2 = 1.3 + 1000 \times 0.277 / 31^2 = 1.59$$

$$\lambda = \left(\frac{KL}{F}\right)_{\max} \sqrt{\frac{F_y}{\pi^2 E}} = 76 \sqrt{\frac{2530}{2040 \times 10^3 \pi^2}} = 0.852 ; \quad n = 1.4$$

$$R_c = \frac{F_y}{(1 + \lambda^{2n} - 0.15^{2n})^{1/n}} A_t F_R = \frac{149.5 \times 0.9 \times 2530 \times 10^3}{(1 + 0.852^{2.8} - 0.15^{2.8})^{1/1.4}} = 239.8 \text{ Ton} <$$

$$< F_y A_t F_R = 2530 \times 149.5 \times 0.9 \times 10^3 = 340.4 \text{ Ton}$$

$$M_{uox} = M_m \left(1 - \frac{P_u}{D_c}\right) = 0.9 \times 33.4 \left(1 - \frac{94.4}{340.4}\right) = 21.7 \text{ TM}$$

COMO EL PANDEO LATERAL NO ES CRÍTICO,  $M_m = 0.9 M_{px}$ .

$$M_{uoy} = F_e M_{py} \left(1 - \frac{P_u}{D_c}\right) = 0.9 \times 31.4 \left(1 - \frac{94.4}{340.4}\right) = 20.5 \text{ TM}$$

$$\left(\frac{M_{uox}^*}{M_{uox}}\right)^\beta + \left(\frac{M_{uoy}^*}{M_{uoy}}\right)^\beta = \left(\frac{7.5}{21.7}\right)^{1.59} + \left(\frac{20.9}{20.5}\right)^{1.59} = 0.185 + 1.031 = 1.216 > 1.0$$

CONSERVADORAMENTE, PUEDE UTILIZARSE LA ECUACIÓN

$$\begin{aligned} \frac{P_u}{D_c} + \frac{M_{uox}^*}{M_m} + \frac{M_{uoy}^*}{F_e M_{py}} &= \frac{94.4}{340.4} + \frac{7.5}{0.9 \times 33.4} + \frac{20.9}{0.9 \times 31.5} = \\ &= 0.277 + 0.250 + 0.737 = 1.264 > 1.0 \end{aligned}$$

LA RESISTENCIA EN LOS EXTREMOS ES ADECUADA, PERO LA COLUMNA ESTÁ ESCASA POR INESTABILIDAD DE CONJUNTO DEL ENTREPISO.

CONEXIONES RIGIDAS ENTRE VIGAS Y COLUMNAS

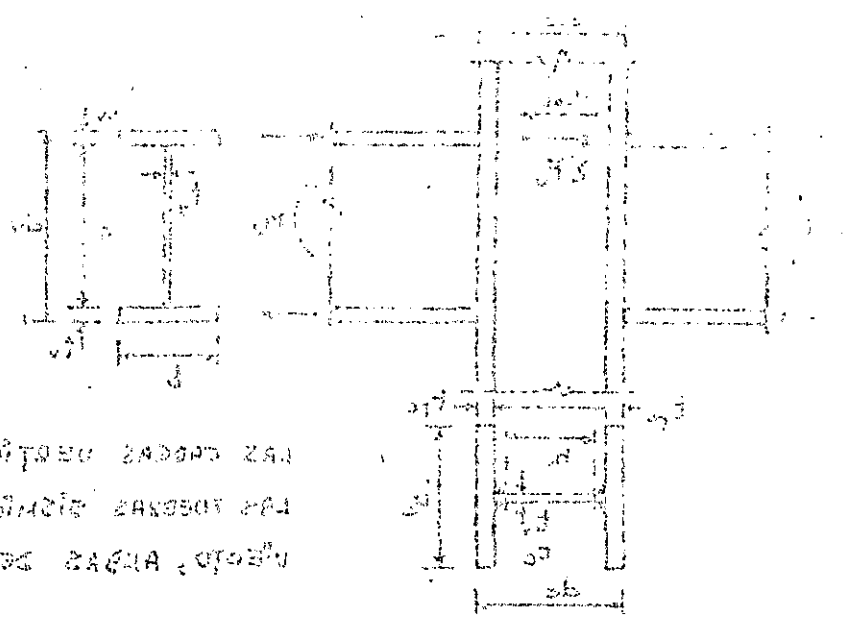
SE DA EL NOMBRE DE CONEXIÓN AL CONJUNTO DE ELEMENTOS QUE UNEN EL MIEMBRO A LA JUNTA: PLACA O ANCHURA POR PATÍN O UNA ZONA DE CONTACTO, BARRAS, SOLDADURAS, TORNILLOS.

JUNTA ES LA ZONA COMPLETA DE INTERSECCIÓN DE LOS MIEMBROS; EN LA ÁRBITRA DE LOS CASOS, ES LA PARTE DE LA COLUMNA, QUE ALTERNATIVAMENTE SE ENLACE CON LAS VIGAS, EN LA FORMA QUE SEAN MÁS CONVENIENTES EN LAS PRÁCTICAS MODERNAS QUE SEAN LOS QUE SEAN MÁS CONVENIENTES EN LA PRÁCTICA DE UNO DE LOS DOS SISTEMAS.

EN LAS UNIONES DE VIGAS Y COLUMNAS, LA RESISTENCIA DE LA CONEXIÓN DEBE SER SUFICIENTE PARA TRANSMITIR LA CARGA A LA COLUMNA SIN DEFORMACIONES EXCESIVAS EN LA UNIÓN. EN LA PRÁCTICA, SE DEBE EVITAR EL EMPLEO DE LOS SISTEMAS QUE SEAN MÁS CONVENIENTES EN LAS PRÁCTICAS MODERNAS QUE SEAN LOS QUE SEAN MÁS CONVENIENTES EN LA PRÁCTICA DE UNO DE LOS DOS SISTEMAS.

EN LAS UNIONES DE VIGAS Y COLUMNAS, LA RESISTENCIA DE LA CONEXIÓN DEBE SER SUFICIENTE PARA TRANSMITIR LA CARGA A LA COLUMNA SIN DEFORMACIONES EXCESIVAS EN LA UNIÓN. EN LA PRÁCTICA, SE DEBE EVITAR EL EMPLEO DE LOS SISTEMAS QUE SEAN MÁS CONVENIENTES EN LAS PRÁCTICAS MODERNAS QUE SEAN LOS QUE SEAN MÁS CONVENIENTES EN LA PRÁCTICA DE UNO DE LOS DOS SISTEMAS.

2) LA RESISTENCIA DE LA CONEXIÓN DEBE SER SUFICIENTE PARA TRANSMITIR LA CARGA A LA COLUMNA SIN DEFORMACIONES EXCESIVAS EN LA UNIÓN. EN LA PRÁCTICA, SE DEBE EVITAR EL EMPLEO DE LOS SISTEMAS QUE SEAN MÁS CONVENIENTES EN LAS PRÁCTICAS MODERNAS QUE SEAN LOS QUE SEAN MÁS CONVENIENTES EN LA PRÁCTICA DE UNO DE LOS DOS SISTEMAS.



## CONEXIONES RÍGIDAS ENTRE VIGAS Y COLUMNAS

SE DA EL NOMBRE DE CONEXIÓN AL CONJUNTO DE ELEMENTOS QUE UNEN EL MIEMBRO A LA JUNTA: PLACAS O ÁNGULOS POR PATINES O ALMA, SOLDADURAS, REMACHES, TORNILLOS.

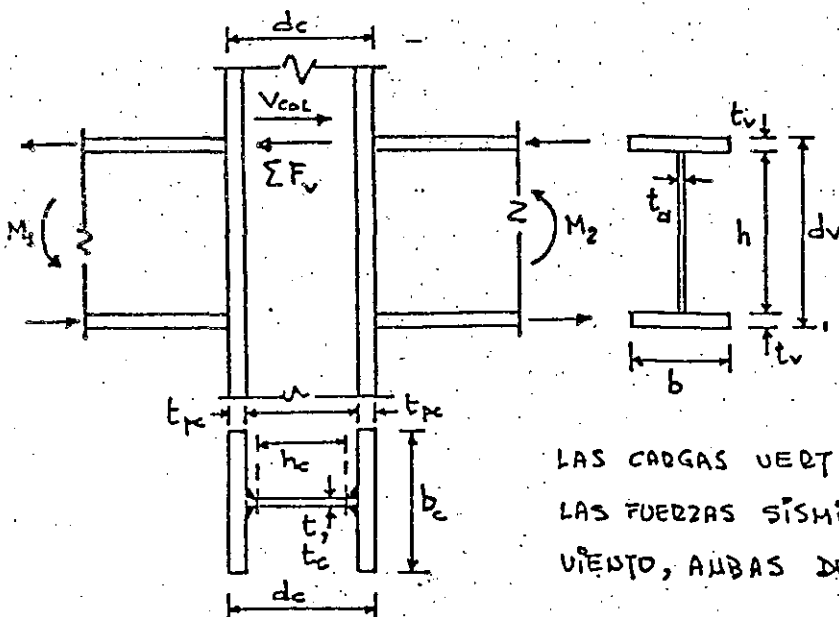
JUNTA ES LA ZONA COMPLETA DE INTERSECCIÓN DE LOS MIEMBROS; EN LA MAYORÍA DE LOS CASOS, ES LA PARTE DE LA COLUMNA, INCLUYENDO ATIESADORES HORIZONTALES O PLACAS AÑADIDAS A SU ALMA, QUE QUEDA COMPRESA ENTRE LOS PLANOS HORIZONTALES QUE PASAN POR LOS BORDES SUPERIOR E INFERIOR DE LA VIGA DE MAYOR PEDALTE.

RESISTENCIA DE LA CONEXIÓN, LA RESISTENCIA DE LA CONEXIÓN DE CADA VIGA DEBE SER SUFICIENTE PARA DESARROLLAR LA MAYOR DE LAS CANTIDADES SIGUIENTES:

- a) LA RESISTENCIA EN FLEXIÓN DE LA VIGA.
- b) EL MOMENTO REQUERIDO PARA INDUCIR EN EL TABLERO DEL ALMA DE LA COLUMNA UNA FUERZA CORTANTE IGUAL A  $0.8F_y d_c t_c$ , DONDE  $F_y$  ES EL ESF. DE FUERZA DEL ACERO DE LA COLUMNA,  $d_c$  SU PEDALTE TOTAL Y  $t_c$  EL GUESO DEL ALMA.

SE DAN ENSEGUIDA ALGUNAS MANERAS ADECUADAS PARA DESARROLLAR LA RESISTENCIA EN FLEXIÓN DE LA VIGA.

REVISIÓN DEL TABLERO DE ALMA DE LA COLUMNA. CONVIENE HACER ESTA REVISIÓN ANTES DE DETERMINAR SI SE NECESITAN ATIESADORES HORIZONTALES, PUES SI EL ALMA REQUIERE REFUERZO ÉSTE INFLUYE EN LA POSIBILIDAD DE QUE HAGAN FALTA LOS ATIESADORES.



a) LA RESISTENCIA AL CORTANTE DE LA JUNTA, CALCULADA CON LA EC. 5.8.4, DEBE SER SUFICIENTE PARA RESISTIR LAS FUERZAS CORTANTES HORIZONTALES CORRESPONDIENTES A LOS MOMENTOS FLEXIONANTES EN LOS EXTREMOS DE LAS VIGAS PRODUCIDOS POR

LAS CARGAS VERTICALES DE DISEÑO MÁS 1.7 VECES LAS FUERZAS SÍSMICAS, O 1.3 VECES LAS FUERZAS DE VIENTO, AUNAS DE DISEÑO.



CUANDO LA COLUMNA RECIBE VIGAS EN LOS DOS PATINES, LOS MOMENTOS EN LOS EXTREMOS DE LAS VIGAS SE TOMAN CON LOS SENTIDOS QUE OCASIONAN LA FUERZA CORTANTE HORIZONTAL MÁXIMA EN LA JUNTA.

LAS FUERZAS QUE APLICAN LOS PATINES DE LAS VIGAS NO SE TOMARÁN NUNCA MAYORES QUE EL PRODUCTO DEL ÁREA DEL PATÍN POR 1.25 VECES EL ESFUERZO DE FLUENCIA DEL MATERIAL CON EL QUE ESTÁ HECHO.

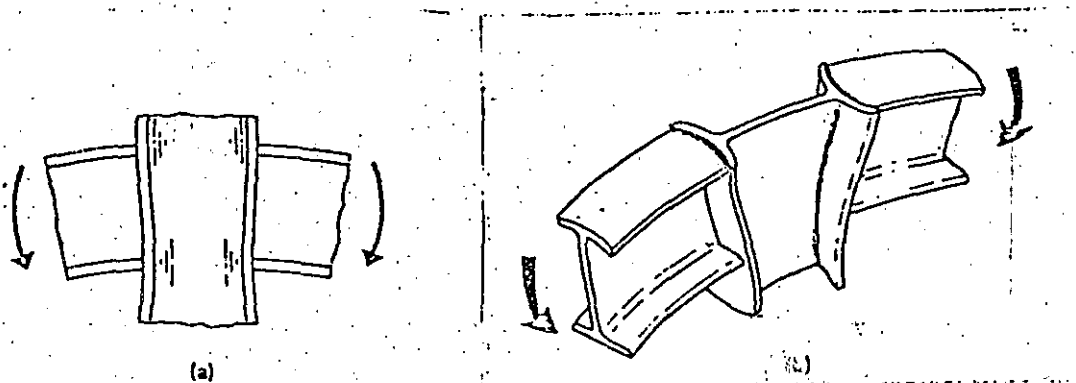
$$V = 0.55 F_{yc} d_c t \left( 1 + \frac{3b_c t^2}{d_v d_c t} \right) \quad (5.8.4)$$

LAS LITERALES QUE APARECEN EN ESTA EXPRESIÓN SE EXPLICAN EN LA FIGURA DE LA HOJA ANTERIOR.

b) EL COCIENTE DE LA SUMA DEL PEDALTE MÁS EL ANCHO DEL TABLEDO DE ALHA EN LA JUNTA DIVIDIDA ENTRE EL GUESO DEL ALHA NO DEBE EXCEDER DE 90. EN ESTE CÁLCULO, EL GUESO NO DEBE INCLUIR LAS PLACAS ADOADAS AL ALHA DE LA COLUMNA EXCEPTO CUANDO ESTÉN LIGADAS ADECUADAMENTE A ELLA POR MEDIO DE SOLDADURAS DE TAPÓN.

c) LAS PLACAS ADOADAS AL ALHA PARA REDUCIR LOS ESFUERZOS CORTANTES HORIZONTALES O LA RELACIÓN INDICADA EN b) NO DEBEN SEPARARSE DEL ALHA DE LA COLUMNA MÁS DE 1.5 MH, Y SE SOLDARÁN EN TODO SU ANCHO, EN LOS BORDES SUPERIOR E INFERIOR, CON SOLDADURA DE FILETE DE 5 MM O MÁS. ADEMÁS, SE SOLDARÁN A TOPE A LOS PATINES DE LA COLUMNA, CON PENETRACIÓN COMPLETA, O CON SOLDADURAS DE FILETE CAPACES DE DESARROLLAR LA RESISTENCIA AL CORTANTE DE LAS PLACAS.

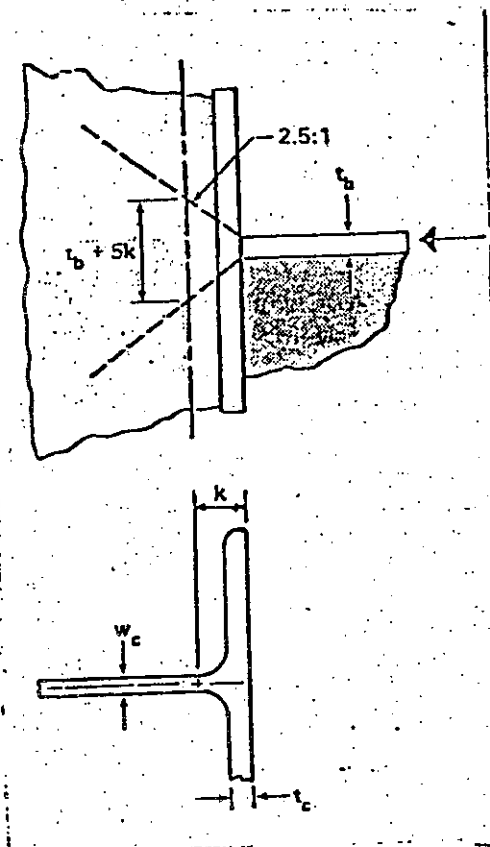
DISEÑO DE ATIESADORES. EN LA FIGURA SE MUESTRAN, EN FORMA ESQUEMÁTICA, LAS POSIBLES FORMAS DE FALLA DE UNA JUNTA VIGAS-COLUMNA.



LOS OBJETIVOS QUE SE PERSIGUEN AL COLOCAR LOS ATIESADORES

① HORIZONTALES SON VARIOS:

2) EVITAR EL FLUJO PLÁSTICO DEL ACERO DEL ALMA DE LA COLUMNA FRENTE A CADA UNO DE LOS PATINES DE LAS VIGAS, TANTO EN TENSION COMO EN COMPRESION.



LA RESISTENCIA DE DISEÑO EN LA SECCIÓN CRÍTICA DEL ALMA DE COLUMNAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL H EN LAS QUE ACTÚAN CARGAS CONCENTRADAS QUE PRODUCEN TENSIONES O COMPRESIONES EN ELLA ES  $F_c R_n$ , DONDE  $F_c = 1.0$  Y  $R_n = (t_w + 5k) F_{yc} t_c$ .

$P_{pv}$  ES LA FUERZA QUE TRANSMITE A LA COLUMNA EL PATÍN DE LA VIGA, O LA PLACA HORIZONTAL DE CONEXIÓN.

SI  $P_{pv} \leq R_n$  NO SE NECESITAN ATIESADORES, MIENTRAS QUE SI  $P_{pv} > R_n$  SÍ SE DEQUIEREN. EN ESTE CASO, LA SUMA DE LAS RESISTENCIAS DE DISEÑO DE ALMA Y ATIESADORES DEBE SER IGUAL O MAYOR QUE LA FUERZA EXTERIOR:

$$(t_w + 5k) F_{yc} t_c + A_{at} F_{yat} = P_{pv}$$

DESPEJANDO EL ÁREA DE ATIESADORES,  $A_{at}$ , SE OBTIENE

$$A_{at} = \frac{P_{pv} - (t_w + 5k) F_{yc} t_c}{F_{yat}}, \text{ QUE ES LA EC. 5.8.1.}$$

$F_{yc}$  Y  $F_{yat}$  SON LOS ESF. DE FLUENCIA DE LA COLUMNA Y DE LOS ATIESADORES.

SI  $A_{at}$ , EC. 5.8.1, RESULTA POSITIVO, SE COLOCA UN PAR DE ATIESADORES QUE PROPORCIONEN ESA ÁREA; SI RESULTA NEGATIVO, NO SE NECESITAN ATIESADORES, DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA RESISTENCIA AL FLUJO PLÁSTICO DEL ALMA DE LA COLUMNA.

$P_{pv}$  TIENE ALGUNO DE LOS VALORES SIGUIENTES:

② CUANDO EL DISEÑO QUEDA REGIDO POR CARGAS MUERTAS Y VIVAS, O POR CARGAS MUERTAS, VIVAS Y DE VIENTO,  $P_{pv}$  ES IGUAL A LA FUERZA TRANSMITIDA POR EL PATÍN O LA PLACA DE CONEXIÓN, CORRESPONDIENTE A CARGAS DE DISEÑO



The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry should be supported by proper documentation, such as receipts or invoices. This ensures transparency and allows for easy verification of the data.

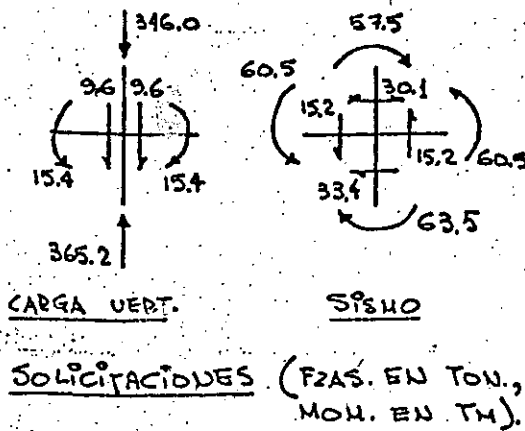
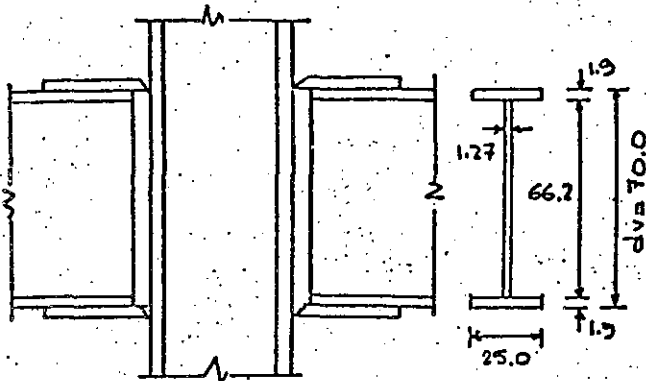
In the second section, the author outlines the various methods used to collect and analyze the data. This includes both qualitative and quantitative approaches, as well as the use of statistical tools to identify trends and patterns. The goal is to provide a comprehensive overview of the findings and their implications.

The third part of the document focuses on the results of the study. It presents a detailed analysis of the data, highlighting key findings and their significance. The author also discusses the limitations of the study and suggests areas for future research.

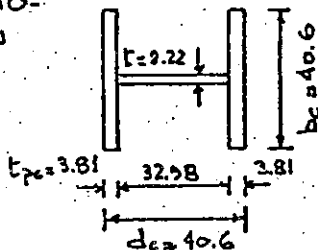
Finally, the document concludes with a summary of the main points and a final statement on the overall findings. It reiterates the importance of the research and the need for continued attention to this area of study.

**EJEMPLO**

DISEÑAR LA CONEXIÓN RÍGIDA QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA. TANTO LA COLUMNA COMO LAS VIGAS ESTÁN HECHAS CON TRES PLACAS SOLDADAS, DE ACERO CON  $F_y = 2530 \text{ KG/CM}^2$ . LOS ELEMENTOS MECÁNICOS QUE SE INDICAN CORRESPONDEN A CARGAS DE TRABAJO. LA CONEXIÓN FORMA PARTE DE UNA CONSTRUCCIÓN DEL GRUPO B. SE UTILIZARÁ SOLDADURA MANUAL CON ELECTRODOS E60XX.



ACOTACIONES EN M



ACCIONES DE DISEÑO. EL DISEÑO

SE HARÁ PARA LA COMBINACIÓN DE CARGA VERTICAL + SISMO CON  $F_c = 1.1$ .

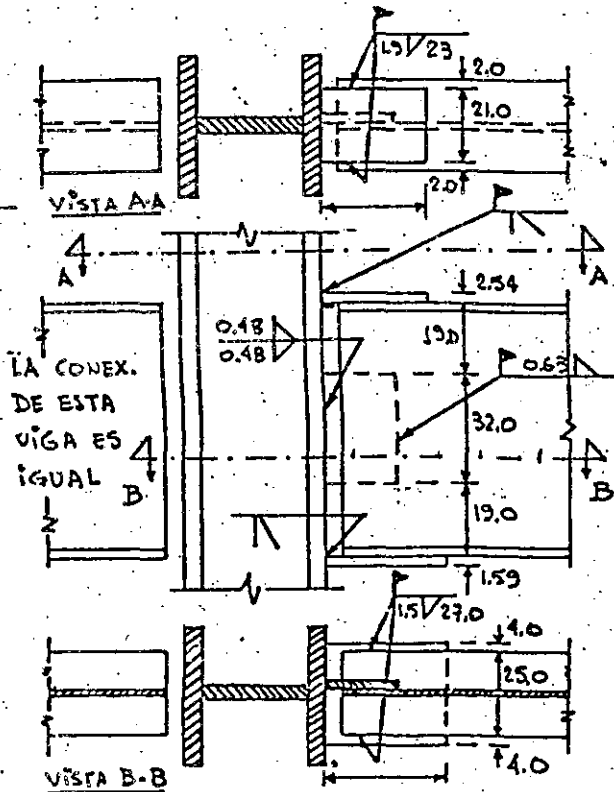
DISEÑO DE LOS ELEMENTOS DE CONEXIÓN.

LOS PATINES DE LAS VIGAS SE CONECTABAN A LA COLUMNA POR MEDIO DE PLACAS HORIZONTALES, Y EL ALMA CON

UNA PLACA VERTICAL. TODA LA CONEXIÓN SERÁ SOLDADA, CON ELECTRODOS E60XX.

PLACAS HORIZONTALES. PARA FACILITAR

LA SOLDADURA DE CAMPO CONVIENE QUE LA DEL PATÍN SUPERIOR SEA MÁS ANGOSTA QUE ÉSTE Y LA DEL INFERIOR MÁS ANCHA.



$$\text{MOHENTO DE DISEÑO } M = 1.1 (15.4 + 60.5) = 83.5 \text{ TM}$$

$$\text{FZA. EN CADA PLACA } T = \frac{M}{d_v} = \frac{83.5}{0.70} = 119.3 \text{ Ton}$$

61

AREA NECESARIA EN CADA PLACA :

$$A_t F_y F_c = T \therefore A_t = \frac{T}{F_y F_c} = \frac{119.3}{2.53 \times 0.9} = 52.4 \text{ cm}^2$$

PATÍN SUPERIOR.- R DE 254x21.0 CM ( $A=53.3 \text{ cm}^2$ )

PATÍN INFERIOR.- R DE 159x33.0 CM ( $A=52.5 \text{ cm}^2$ )

### SOLDADURA

PLACA SUPERIOR. SE USARÁ SOLDADURA DE FILETE DE 1.9 CM ( $3/4"$ ), QUE TIENE UNA RESISTENCIA DE DISEÑO  $F_R F_s A_{ef} = 0.8 \times 0.6 \times 4100 \times 1.905 \cos 45^\circ \times 1 = 2651 \text{ kg/cm}$   $\therefore$  LONGITUD NECESARIA =  $119.3 \times 10^3 / 2651 = 45.0 \text{ cm}$ .

SE COLOCARÁN DOS FILETES LONGITUDINALES DE 23 CM CADA UNO (PODRÍA UTILIZARSE TAMBIÉN UN FILETE TRANSVERSAL, PERO LA PLACA RESULTARÍA MUY PEQUEÑA).

PLACA INFERIOR. LONGITUD DE SOLD. DE 159 CM =  $119.3 \times 10^3 / 2210 = 54.0 \text{ cm}$ . SE COLOCARÁN DOS FILETES LONGITUDINALES DE 27.0 CM C/U. (EN ESTA PLACA NO CONVIENE UTILIZAR SOLDADURA TRANSVERSAL, PUES SERÍA SOBRE CABEZA).

LAS DOS PLACAS HORIZONTALES SE SOLDARÁN AL PATÍN DE LA COLUMNA A TOPE, CON SOLDADURAS DE PENETRACIÓN COMPLETA).

PLACA VERTICAL (POR ALHA)  $R = 1.1(9.6 + 15.2) = 27.3 \text{ Ton}$

DISEÑO DE LA PLACA (POR CORTANTE).  $V_R = F_R V_N = 0.9 \times 0.66 F_y A_e = 27300$

$$\therefore A_R = 27300 / 0.9 \times 0.66 \times 2530 = 18.2 \text{ cm}^2$$

LONGITUD NECESARIA DE SOLDADURA DE FILETE DE 0.63 CM =  $27300 / 884 = 30.9 \text{ cm}$ . SE EMPLEARÁ UNA PLACA DE 32 CM DE LONG. Y 0.63 CM DE GRUESO ( $A=20.2 \text{ cm}^2$ ), UNIDA AL ALHA DE LA VIGA CON UN FILETE DE 0.63 CM Y A LA COLUMNA CON DOS FILETES DE 0.48 CM.

REVISIÓN DEL TABLERO DEL ALHA DE LA COLUMNA. CONVIENE HACER ESTA REVISIÓN ANTES DE VER SI SE NECESITAN APRESADORES HORIZONTALES PORQUE EL REFUERZO DEL ALHA POR CORTANTE, DE SER NECESARIO, MODIFICA EL DISEÑO DE LOS APRESADORES.

RESISTENCIA AL CORTANTE DE LA JUNTA:

62

$$V = 0.55 F_y d_c t \left( 1 + \frac{3b_c t^2}{d_c d_c t} \right) = 0.55 \times 2530 \times 40.6 \times 2.22 \left( 1 + \frac{3 \times 40.6 \times 3.81^2}{70 \times 40.6 \times 2.22} \right) \times 10^3 = 160.6 \text{ Ton}$$

ESTA RESISTENCIA SE COMPARA CON LA SUMA DE LA FUERZA CORTANTE HORIZONTAL DE DISEÑO PRODUCIDA POR CARGA VERTICAL MÁS 1.7 VECES LA PRODUCIDA POR SISMO, PERO LAS FUERZAS QUE APLICAN LOS PATINES DE LAS VIGAS NO SE

RESISTENCIA AL CORTE, POR CM DE LONGITUD, DE CADA PLACA :

$$V_n F_r = 0.66 F_y (t \times l) 0.9 = 0.66 \times 2530 \times 1.11 \times 0.9 = 1668 \text{ KG/CM}$$

UN FILETE DE SOLDADURA DE TAMAÑO IGUAL AL GUESO DE LA PLACA, 1.11 CM, TIENE UNA RESISTENCIA DE 1547 KG/CM, QUE SE JUZGA ADECUADA.

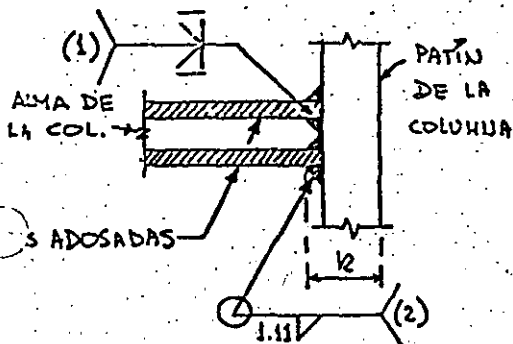
DISEÑO DE ATIESADORES HORIZONTALES.

$$A_{at} = \frac{P_{pv} - F_{yc} t_c (t_v + 5k)}{F_{yat}} \quad (5.8.1)$$

$P_{pv}$  ES IGUAL AL MENOR DE LOS VALORES SIGUIENTES :

$$1.25 M_{pv} / d_v = 1.25 \times 117.0 / 0.70 = 208.9 \text{ TON}; \quad 1.25 A_p F_{yv} = 150.2 \text{ TON} \quad \therefore P_{pv} = 150.2 \text{ T.}$$

$M_{pv}$  = MOMENTO PLÁSTICO RESISTENTE DE LA VIGA ::  $Z_v F_{yv} = 4626 \times 2530 \times 10^{-5} = 117.0 \text{ TM}$ ; EL PRODUCTO  $1.25 A_p F_{yv}$  SE OBTUVO ARRIBA.



- (1) EN EL ALMA DE LA COLUMNA
- (2) EN CADA PLACA ADOSADA

AL APLICAR LA EC. 5.8.1,  $t_c$  SE TOMA IGUAL A LA SUMA DE LOS GUESOS DEL ALMA Y DE LAS PLACAS ADOSADAS :  $t_c = 2.22 + 2 \times 1.11 = 4.44 \text{ CM}$ .  
 $k = 3.81 + 1.11 = 4.92 \text{ CM}$ ;  $t_v = 1.59 \text{ CM}$  (EN EL PATÍN INFERIOR, QUE ES EL MÁS DESFAVORABLE).

$$A_{at} = \frac{150200 - 2530 \times 4.44 (1.59 + 5 \times 4.92)}{2530} = -56.9$$

EL RESULTADO NEGATIVO INDICA QUE NO SE NECESITAN ATIESADORES HORIZONTALES

PADA EVITAR EL FLUJO PLÁSTICO DEL ACERO DEL ALMA DE LA COLUMNA, FRENTE A NINGUNO DE LOS PATINES DE LAS VIGAS.

INDEPENDIENTEMENTE DEL RESULTADO ANTERIOR, DEBEN COLGARSE ATIESADORES FRENTE AL PATÍN COMPRESO DE LAS VIGAS SI NO SE CUMPLE LA CONDICIÓN DADA POR LA EC. 5.8.2, Y FRENTE AL PATÍN EN TENSIÓN SI NO SE CUMPLE 5.8.3.

PATÍN COMPRESO. PEDALTE DEL ALMA DE LA COLUMNA  $h_c = 32.98 - 1.11 \times 2 = 30.76 \text{ CM}$   
 $0.85 \times \frac{34400 t_c^2 \sqrt{F_{yc}}}{P_{pv}} = 0.85 \times \frac{34400 \times 2.22^2 \sqrt{2530}}{150200} = 107.1 \text{ CM} > 30.76 \therefore$  NO SE NECESITAN ATIESADORES.

PATÍN EN TENSIÓN:

$$0.4 \sqrt{\frac{P_{pv}}{F_{yc} F_r}} = 0.4 \sqrt{\frac{150200}{2530 \times 0.9}} = 3.25 \text{ CM} < t_k = 3.81 \text{ CM} \therefore$$
 NO SE NECESITAN ATIESADORES.

EN RESUMEN, NO SE NECESITAN ATIESADORES HORIZONTALES EN EL ALMA DE LA COLUMNA.



[Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page. The text is scattered across the page and is mostly illegible due to low contrast and blurring.]

## 1.- INTRODUCCION.

La aplicación del presfuerzo en estructuras de concreto ha tenido un incremento importante en los últimos años, debido a las ventajas que presenta sobre el concreto reforzado principalmente en lo referente a esquadrias, a un mejor control de las deformaciones y el agrietamiento en el estado límite de servicio, bajo el efecto de cargas gravitacionales.

Sin embargo, la utilización del concreto presforzado para resistir efectos sísmicos es menos aceptada. Esto se debe principalmente a que se tiene poca información al respecto y a que comparativamente, con estructuras de concreto reforzado se observa cierto temor debido a que el primero tiene menor capacidad para disipar energía y por tratarse de un material menos dúctil que el concreto reforzado. En las presentes notas se comentan algunos detalles del comportamiento de miembros presforzados bajo cargas monótonicas y dinámicas, así como el detalle de conexiones y algunos lineamientos de reglamentos de construcción referentes al concreto presforzado.



## 2.- COMPORTAMIENTO DE TRABES PRESFORZADAS EN FLEXION.

2.1.- Concepto acción respuesta.

2.2.- Diagramas carga-deflexión.

2.3.- Variables que intervienen en el comportamiento de traves presforzadas.

2.4.- Estado límite de Falla.

1. Introduction

2. Background

3. Methodology

4. Results

5. Discussion

6. Conclusion

The study was conducted in a laboratory setting. The participants were recruited through various channels. The data was collected over a period of six months. The results show a significant correlation between the variables. The findings are consistent with previous research. The study has several limitations. Further research is needed to address these issues.

In conclusion, the study provides valuable insights into the relationship between the variables. The results suggest that there is a strong positive correlation. The findings have important implications for the field. The study contributes to the existing literature. The research was supported by several organizations. The authors would like to thank the participants for their contribution.

primera etapa el aplicarse el presfuerzo interviniendo también la carga permanente y la segunda etapa con las cargas de servicio. En el caso de elementos prefabricados, habrá una etapa adicional, anterior a las dos mencionadas que será solamente su peso propio y el presfuerzo, durante el transporte.

En general, la etapa crítica de carga en elementos presforzados es la que ocurre al tensar, ya que se tiene el valor de la fuerza máxima de presfuerzo por un lado y el concreto es relativamente joven, la cual significa un "test" para el elemento en cuestión.

### 2.3.- Variables que intervienen en el comportamiento de traveses presforzados.

a) Si se incrementa el acero de presfuerzo en una trabe, aumentará también el valor del momento resistente, pero se perderá ductilidad.

b) Las traveses con presfuerzo adherido, caso del pretensado y también del postensado cuando se inyectan los cables, de acuerdo con los ensayos del laboratorio y la experiencia en la práctica, son más dúctiles que sus equivalentes no adheridas.

c) El refuerzo no presforzado en tensión incrementa la capacidad resistente de momento, pero la trabe se hace menos dúctil. La presencia de dicho refuerzo la hace más estable en la ruptura.

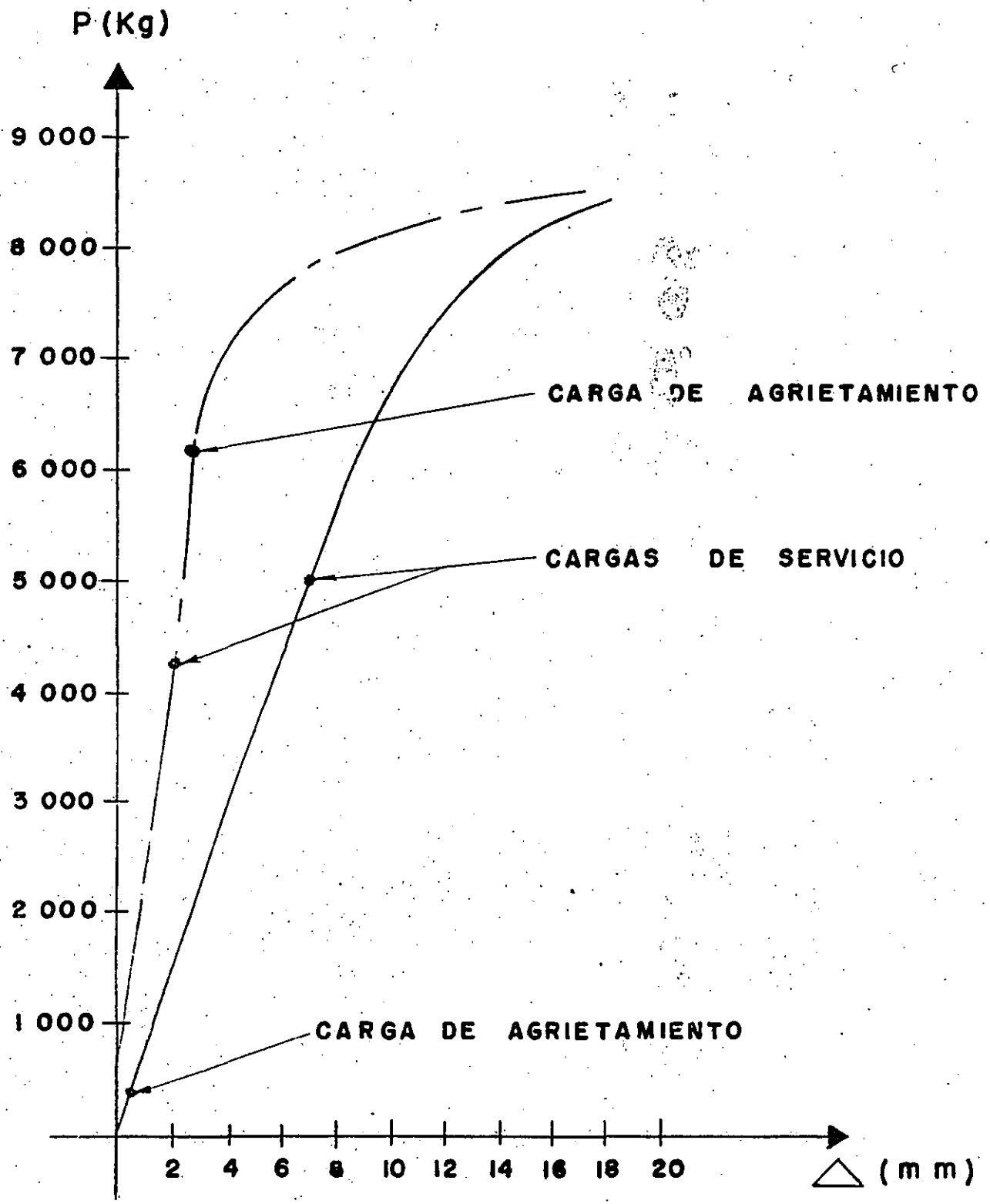
d) El refuerzo no presforzado en compresión no incrementa la capacidad de momento de una sección subreforzada pero la trabe se hace mas dúctil.

e) El comportamiento de una trabe depende de los diagramas esfuerzo - deformación de los materiales.

La idealización del diagrama esfuerzo -deformación del concreto en compresión, tiene poca influencia en el comportamiento de la trabe; en cambio el diagrama  $f_s - \epsilon_s$  para el acero de presfuerzo influye en el valor del momento resistente de la trabe y en la ductilidad de la misma.

En la figura 3 se muestra la gráfica acción-respuesta de un ensaye típico de flexión de dos trabes de concreto con sección rectangular de 15 x 30 cm y de 3 m de claro. Una es presforzada y la otra reforzada, proporcionando el acero de presfuerzo y de refuerzo respectivamente en tal forma que la carga teórica de falla en ambas trabes fuera la misma y en las figuras 4 y 5 los agrietamientos correspondientes.

En las figuras 6, 7 y 8 se muestran las condiciones en la falla, de vigas presforzadas y en la fig. 9 el caso de una columna presforzada, aun cuando este último se presenta en la práctica muy pocas veces.



———— Trabe de concreto reforzado  
- - - - - Trabe de concreto presforzado

G R A F I C A C A R G A — D E F L E X I O N

— F I G . 3 —

# AGRIETAMIENTO TRABE DE CONCRETO PRESFORZADO

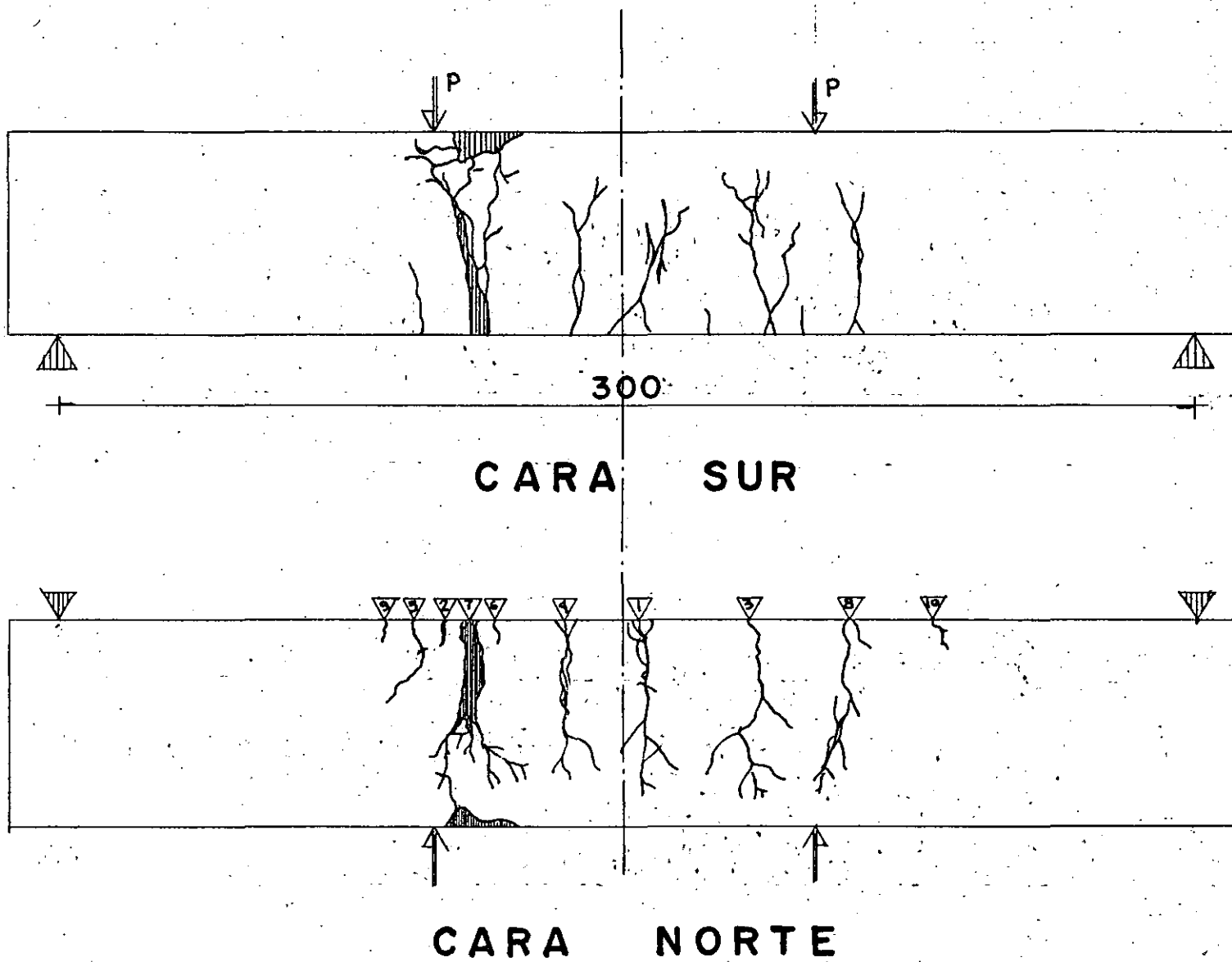
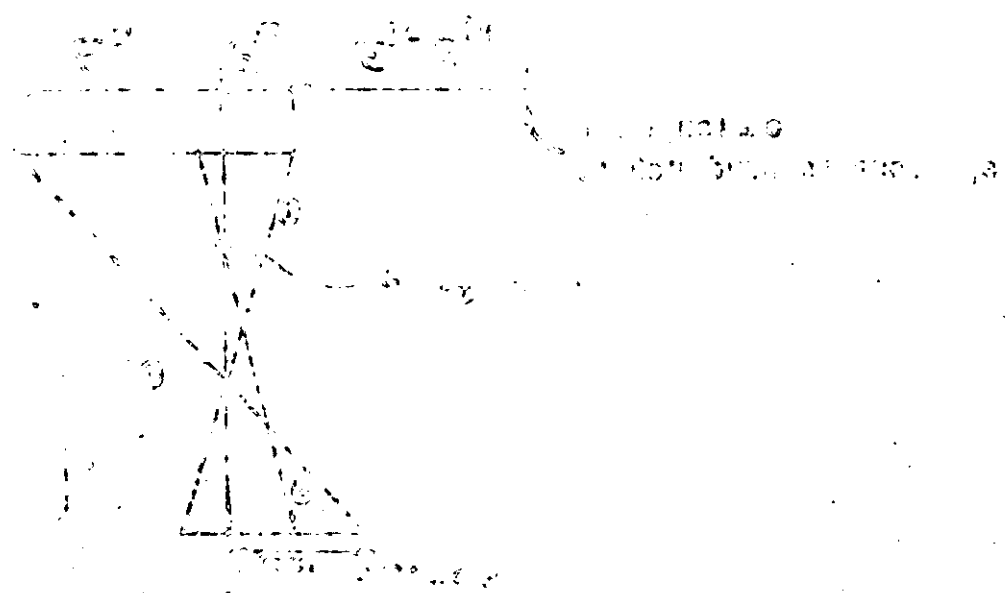


FIG. 4

)

THEORY OF THE ...



)

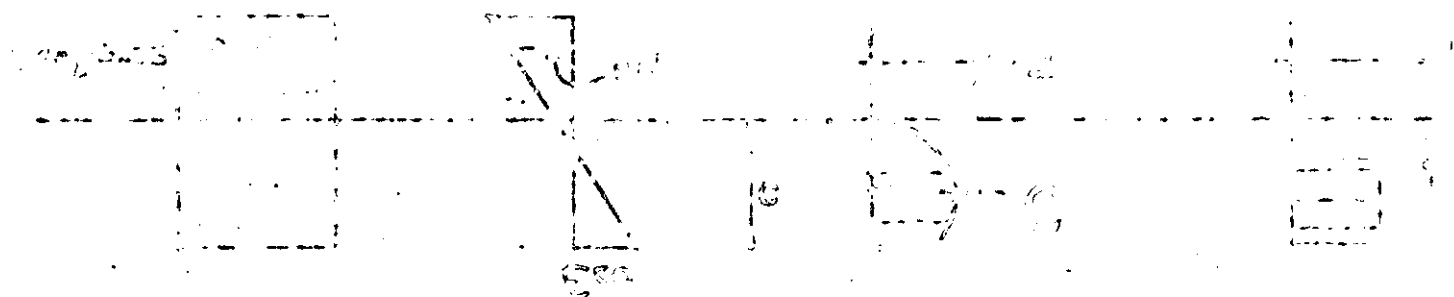
... of ...

... of ...

... of ...

... of ...

... of ...

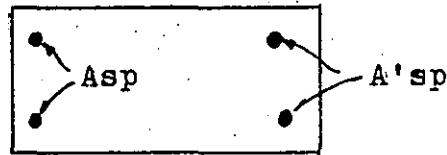


)

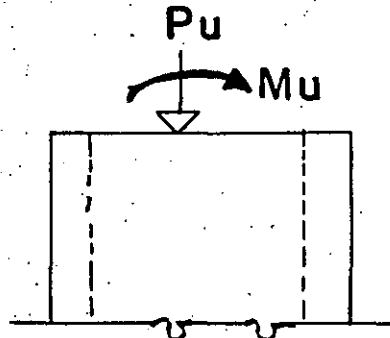
... of ...

# COLUMNAS P<sup>14</sup>RESFORZADAS

a).- Sección



b).- Elevación.



c).- Deformaciones bajo carga axial uniforme

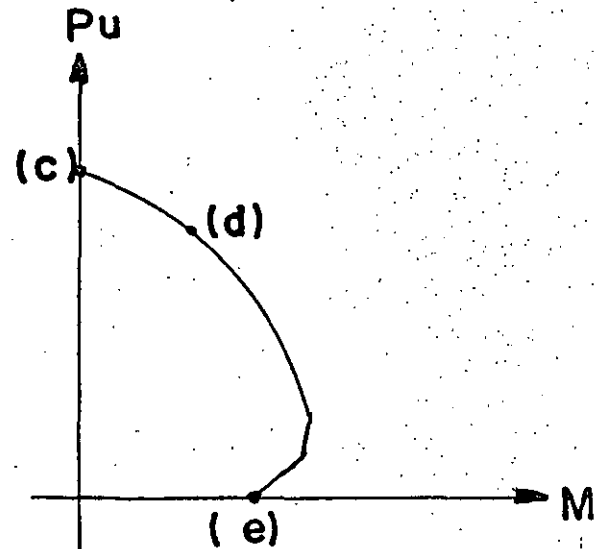
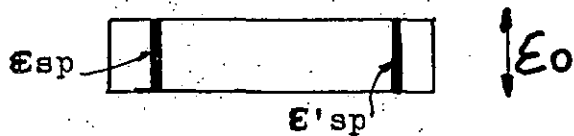
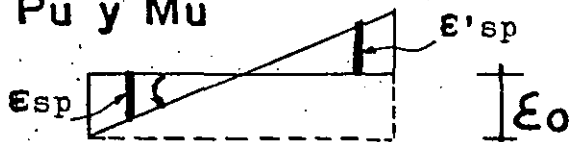
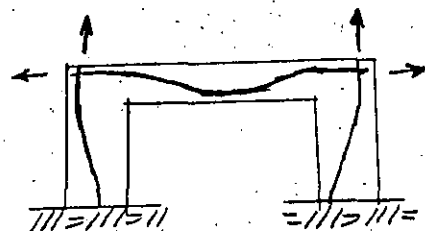
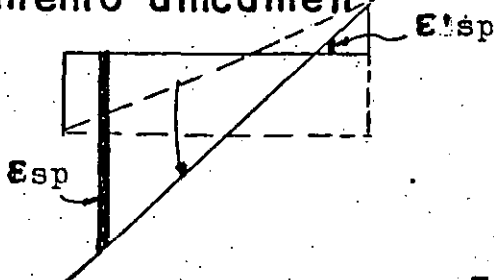


Diagrama típico de interacción

d).- Deformaciones bajo  $P_u$  y  $M_u$



e).- Deformaciones debidas a momento únicamente





### 3.- DUCTILIDAD DE MIEMBROS DE CONCRETO PRESFORZADO.

3.1.- Resumen histórico.

3.2.- Análisis de miembros presforzados en flexión.

3.3.- Amortiguamientos.

### 3.- DUCTILIDAD DE MIEMBROS DE CONCRETO PRESFORZADO.

3.1 Resumen histórico de estudios realizados. Es conocido que un análisis dinámico de la respuesta elástica de estructuras usando aceleraciones sísmicas, ponen de manifiesto que una estructura puede estar sujeta a cargas mayores que las especificadas por reglamentos, lo cual implica que una estructura debe ser capaz de desarrollar grandes deformaciones antes de llegar a la falla en caso de sismos severos. Por tanto, es importante conocer la ductilidad que puede obtenerse en miembros de concreto presforzado.

La relación momento-curvatura para concreto presforzado bajo cargas monotónicas y cíclicas, permite comprender la ductilidad y la energía de disipación.

T.Y. Lin (1) presentó algunos aspectos importantes para el diseño sísmico de estructuras presforzadas, referentes a los factores de carga y esfuerzos permisibles así como algunos ensayos estudiando la capacidad de absorber energía, concluyendo Lin en su artículo en que los diagramas Momento-Curvatura en vigas de concreto presforzado en flexión se presentaban áreas importantes

que mostraban alta capacidad para absorber energía.

Rosenblueth (2) comentando el artículo de Lin, enfatizaba el inconveniente de establecer conclusiones basadas en la curva de primera carga, indicando la importancia de las curvas idealizadas carga-deformación en la descarga Fig.1, para miembros de concreto presforzado y miembros de concreto reforzado presentaban que para masas y rigideces comparables una estructura de concreto presforzado tendría probablemente mayores deformaciones debido a su baja capacidad de amortiguamiento que una de concreto reforzado y que así mismo sería más flexible la primera, lo cual contrarrestaría en parte el efecto de su baja capacidad para absorber energía.

Despeyroux (3) concluye que las áreas bajo el diagrama Momento-Curvatura en concreto presforzado y reforzado son comparables y no necesariamente menores las de concreto presforzado, pero que un factor importante que afecta la respuesta sísmica de estructura es su capacidad para disipar energía, En su artículo, de acuerdo con la Fig.2 concluye que la energía absorbida es efectivamente comparable en miembros de concreto presforzado y reforzado pero que la energía disipada es bastante menor en los miembros de concreto presforzado, lo cual representará que la respuesta en estos últimos bajo el sismo será mayor.

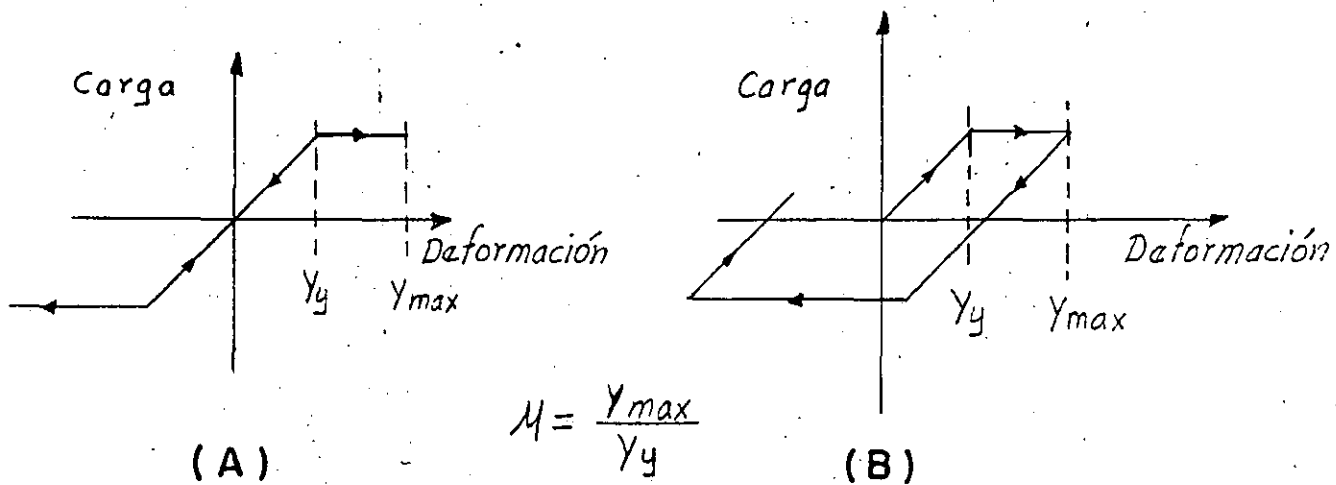


Fig. 1 Idealización de curvas típicas carga-deformación

A) concreto presforzado

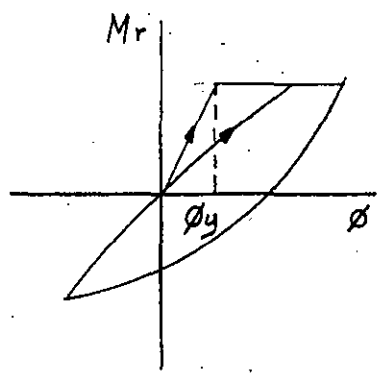
B) concreto reforzado

Un estudio reciente realizado por Blakeley (4) sobre la respuesta dinámica no lineal de sistemas de concreto presforzado - concluyó que el desplazamiento máximo obtenido es del orden de - 40% mayor que el de un sistema de concreto reforzado con misma - resistencia, rigidez inicial y mismo porcentaje de amortiguamiento viscoso.

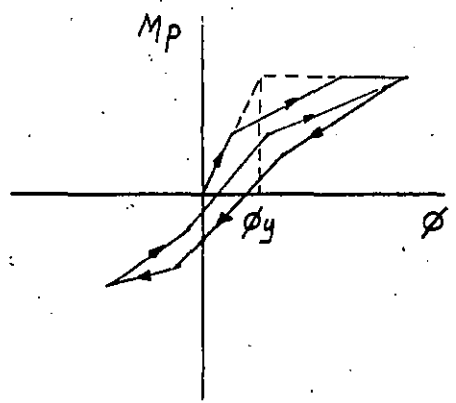
Thompson (5) hizo un estudio comparando las respuestas de - miembros presforzados, parcialmente presforzados y reforzados - bajo diversos movimientos sísmicos, idealizando los diagramas - Momento-Curvatura como lo indica la Fig. 3 y tomando los registros del sismo de El Centro 1940, N-S.

El factor de ductilidad se define como la relación que existe entre el desplazamiento en la falla y el desplazamiento correspondiente a la primera fluencia. Thompson encontró que para pequeños períodos el factor de ductilidad era mayor y que la tendencia a disminuir el desplazamiento se debía a un incremento en el acero de presfuerzo.

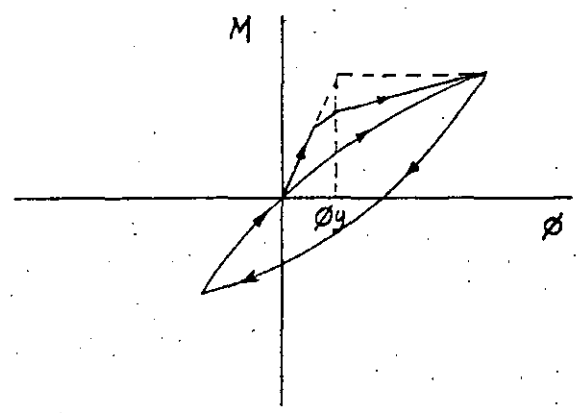
3.2 Análisis de miembros presforzados en flexión. Los estudios realizados por Blakeley (4) para determinar las relaciones Momento-Curvatura bajo carga monotónica, demostraron que la curva ob-



a) Concreto reforzado



b) Concreto prestorizado



c) Concreto parcialmente prestorizado

Fig. 3 Diagramas idealizados de Momento Curvatura

tenida para este tipo de carga es colineal con la curva envolvente de cargas cíclicas en miembros de concreto presforzado y que por lo tanto este análisis puede efectuarse para el estudio de la ductilidad bajo cargas sísmicas.

Se realizaron ensayos para obtener diagramas Momento-Curvatura en trabes haciendo variar el valor de la fuerza de presfuerzo, las posiciones del mismo en la sección y la cantidad de refuerzo transversal.

Así mismo, Thompson (5) realizó ensayos en uniones presforzadas viga-columna, reforzando el núcleo de acuerdo con las especificaciones de cortante del ACI 318-71. Las columnas se diseñaron de tal forma que tuvieran una mayor resistencia que las vigas y los ensayos se hicieron con carga cíclica estática simulando la carga sísmica.

Los resultados obtenidos por los estudios mencionados (4) y (5) se resumen a continuación:

a) Porcentaje del acero de presfuerzo.

El efecto de la relación entre el área de acero de presfuerzo y la de concreto,  $p = A_s/bh$ , se muestra en la Fig. 4. La forma de las curvas indican claramente que a un incremento de capacidad de momento corresponde una disminución de ductilidad. El --

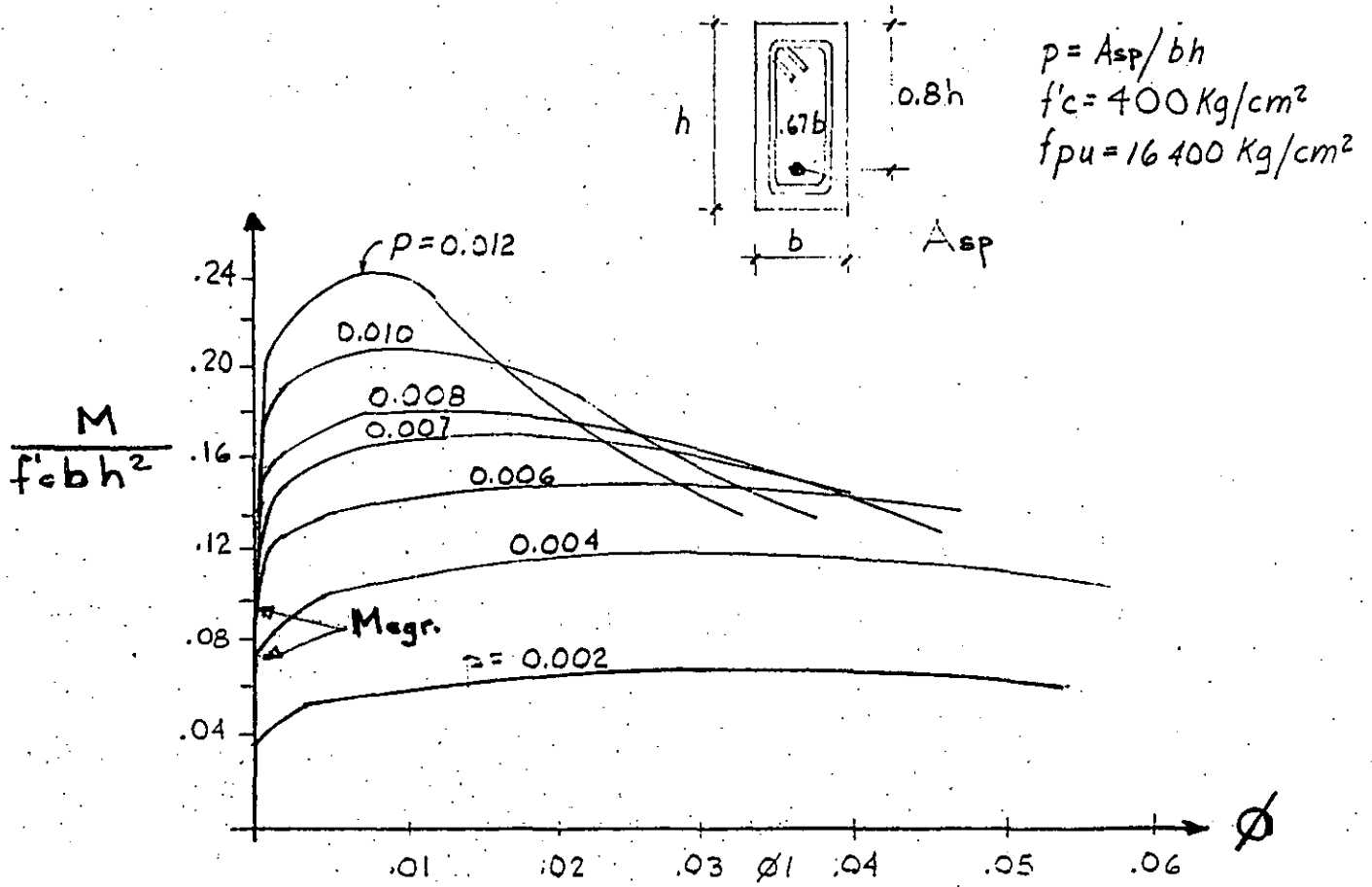


Fig. 4 Relaciones momento-curvatura para una sección con diferentes cantidades de presfuerzo excéntrico



ACI 318-71, especificaba que la máxima cantidad de acero de presfuerzo que debe tener una trabe para prevenir una falla frágil es:

$$\frac{f_{sp} A_{sp}}{b d f'c} \leq 0.3 \quad (1)$$

Este límite corresponde a  $p = 0.0069$ . El estudio de las curvas de la Fig.4 indica que para asegurar una ductilidad razonable en diseño sísmico, Blakeley y Thompson recomiendan disminuir la expresión a 0.2, lo cual conduciría a  $p=0.0043$ . La ecuación (1) significa que la máxima fuerza de tensión es  $0.2 f'c b d$ , lo cual implica que en el bloque de esfuerzos en una sección rectangular se tendrá:

$$a = \frac{0.2 f'c b d}{0.85 f'c b} = 0.235 d$$

y si

$d = 0.85h$ , la condición queda como:

$$a \leq 0.20h$$

b) Distribución del acero de presfuerzo.

En una sección transversal de una trabe se hizo variar el número y la posición en los cables de presfuerzo, permaneciendo constante la fuerza total de presfuerzo,  $p = 0.0069$  -

Así mismo, se observó que si se aumenta el acero de presfuerzo en la zona de compresión, la curvatura no disminuye, debido a que el cable de presfuerzo actúa como acero de compresión en curvaturas grandes. Cuando el acero de presfuerzo se concentra en un solo cable centrado hay una pérdida considerable de capacidad de momento para grandes curvaturas. En cambio solo existe una pequeña diferencia entre dos o más cables. Por tanto, se recomienda que el acero de presfuerzo se distribuya en dos o más posiciones por efecto de ductilidad.

c) Efecto del refuerzo transversal.

En los ensayos realizados, la cantidad de refuerzo transversal tuvo poco efecto en la ductilidad de trabes, ya que triplicando el número de estribos normalmente especificado se logró un incremento relativamente pequeño en la capacidad de momento.

d) Ductilidad en columnas de concreto presforzado.

En los ensayos de columnas bajo cargas cíclicas, las curvas experimentales se trazaron para una articulación plástica

directamente sobre la trabe, provocándose así el mecanismo en un marco de un nivel. El diagrama Momento-Curvatura en la columna de concreto presforzado se reduce con un nivel de carga axial y se requiere un refuerzo transversal especial cuando la carga alcanza valores de  $0.1 P_o$ , siendo  $P_o$  la resistencia de la columna con carga axial concéntrica únicamente. Hay poco conocimiento del comportamiento de acero presforzado de miembros a compresión, sin embargo de los estudios realizados se pudo concluir que en las curvas de Momento-Curvaturas, la correspondiente a  $p/f'cbd = 0.12$ , corresponde a la máxima curvatura obtenida en los ensayos.

3.3- Amortiguamiento de miembros de concreto presforzado. En la referencia (2), se menciona la relativamente baja capacidad de amortiguamiento en estructuras presforzadas.

Depeyroux (3) hace notar que el amortiguamiento del concreto presforzado es comparable al de las estructuras metálicas, es decir del orden del 3% del crítico. En cambio en concreto reforzado es del orden 10% del crítico. Nakano (6) encontró valores mayores del 7% del crítico para estructuras presforzadas.

Esto significaría que deberán tomarse coeficientes sísmicos mayores para estructuras de concreto presforzado, por-

ejemplo del orden de 20% mayores que los aplicados al concreto reforzado.

Una investigación reciente de Penzien ( 7 ) sobre el amortiguamiento en trabes de concreto presforzado, mostraron que el presfuerzo y la resistencia del concreto tienen efecto sobre el amortiguamiento solo cuando se aproximaba al momento del colapso.

Sin embargo el efecto desfavorable del concreto presforzado referente a su baja capacidad de amortiguamiento que se traduce en desplazamientos mayores, se contrarresta en parte por el hecho de que las estructuras de concreto presforzado debido a sus menores esquadrias que en el concreto reforzado, requieren una reducción en la demanda de ductilidad (8).

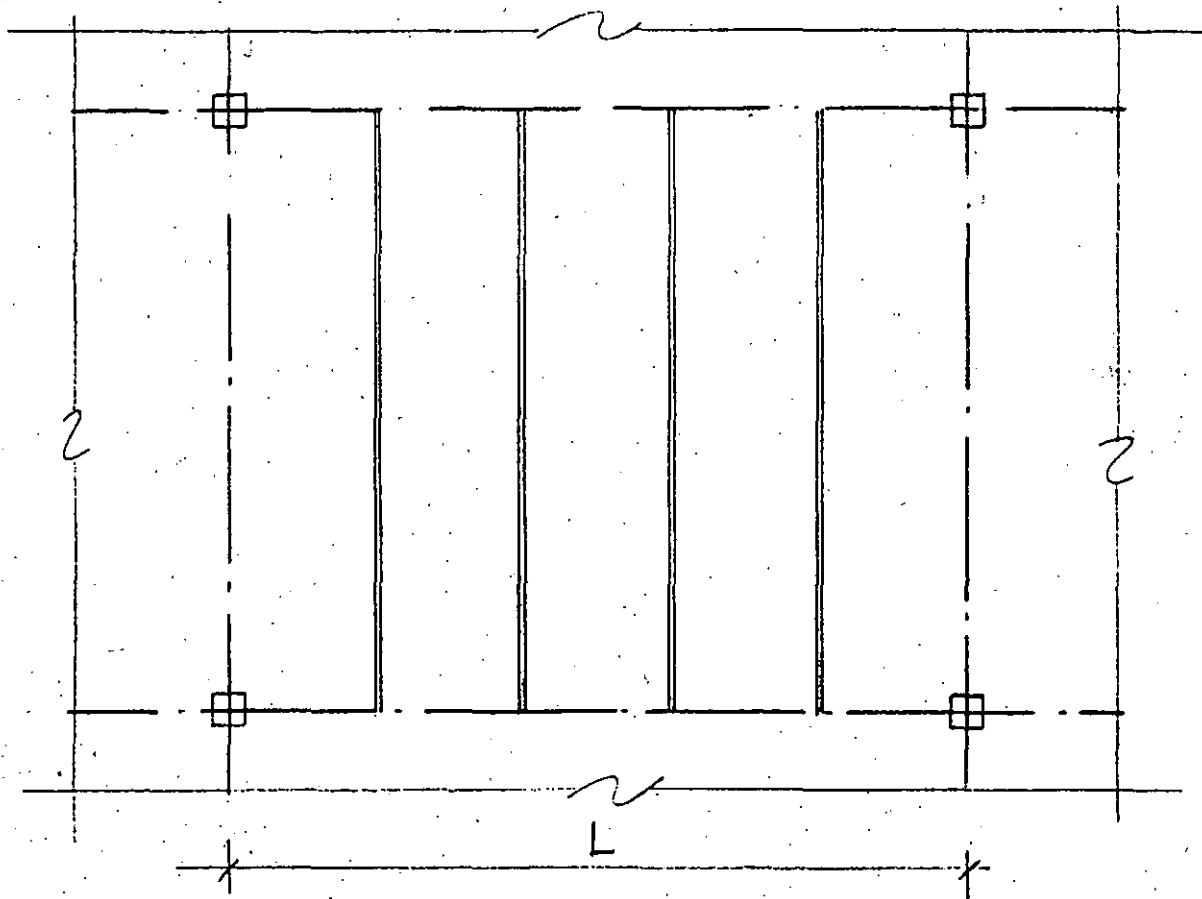
REFERENCIAS.

1. Lin, T.Y. "Design of Prestressed Concrete Buildings for Earthquake Resistance", Journal of the PCI, Vol. 9, No.6, Dic. 1964, pp. 15-31.
2. Rosenblueth, E. Discusión del artículo de T.Y. Lin "Design of Prestressed Concrete Building for Earthquake Resistance", Journal of the Structural División, American Society of Civil Engineers, Vol. 92 Feb. 1966.
3. Despeyroux, J. "L'utilisation du béton précontraint dans la construction parasismique "Travaux", No. 375, 1966.
4. Blakeley, R.W.G. "Ductility of Prestressed Concrete Frames Under Seismic Loading", University de Canterbury, Nueva Zelandia, 1973.
5. Thompson, K.J. "Ductility of Prestressed Concrete Frames Under Seismic Loading". Ph. D. Thesis University of Canterbury, Nueva Zelandia, 1971'
6. Nakano "Esperiment on behavior under lateral force of prestressed concrete frames". Reporte del Instituto de la Construcción, Tokyo, julio 1967.
- 7.- Penzien, J. "Damping Characteristics of Prestressed Concrete", ACI Journal, Vol. 61, No. 9.
8. Camba, J. "Edificios altos prefabricados parcialmente presforzados", Confencia Regional de Edificios Altos, México, D.F., abril 1973.
9. Dowrick, D.F. "Earthquake resistant Design" John Wiley and Sons, New York, 1977.

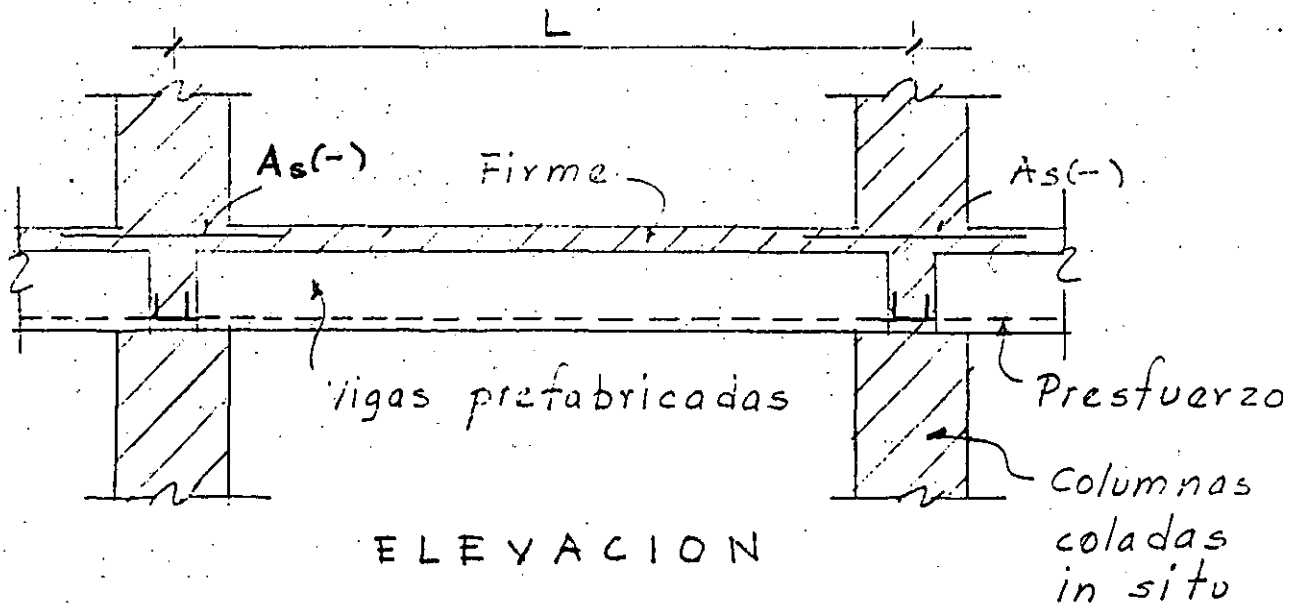
#### 4.- CONEXIONES TIPO DE MIEMBROS PRESFORZADOS.

4.1.- Estructuraciones pretensadas.

4.2.- Estructuraciones postensadas.

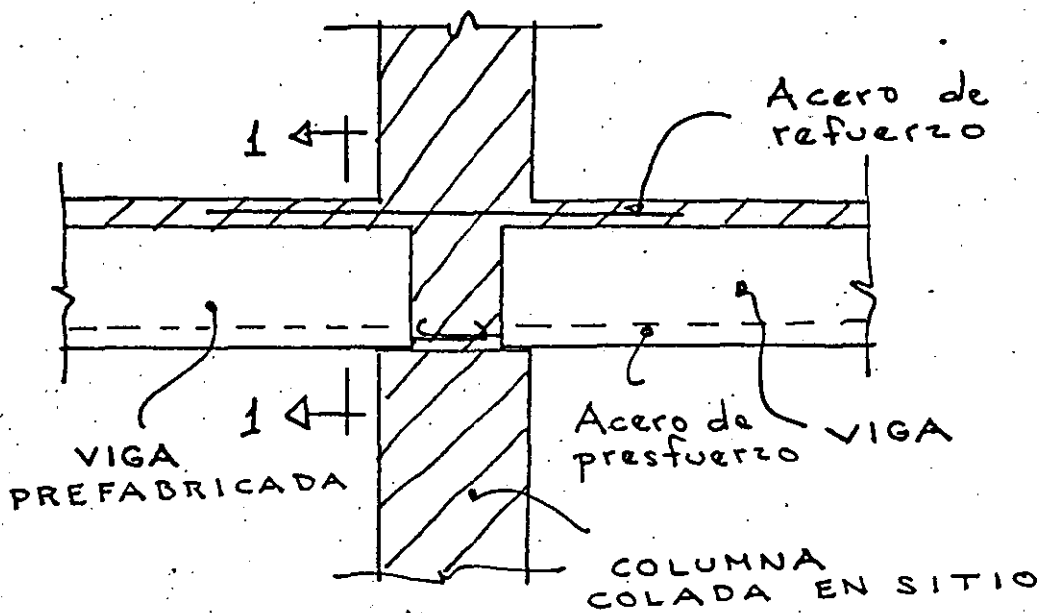


PLANTA

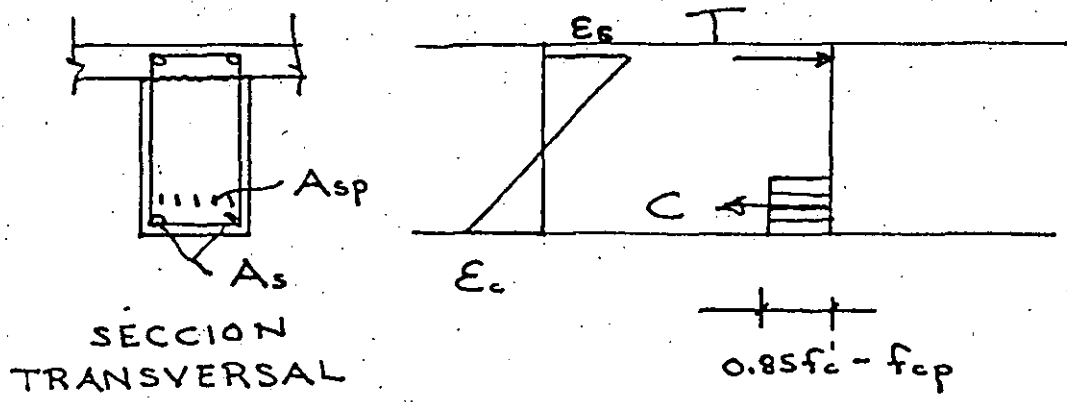


ELEVACION

ESTRUCTURACION PRETENSADA

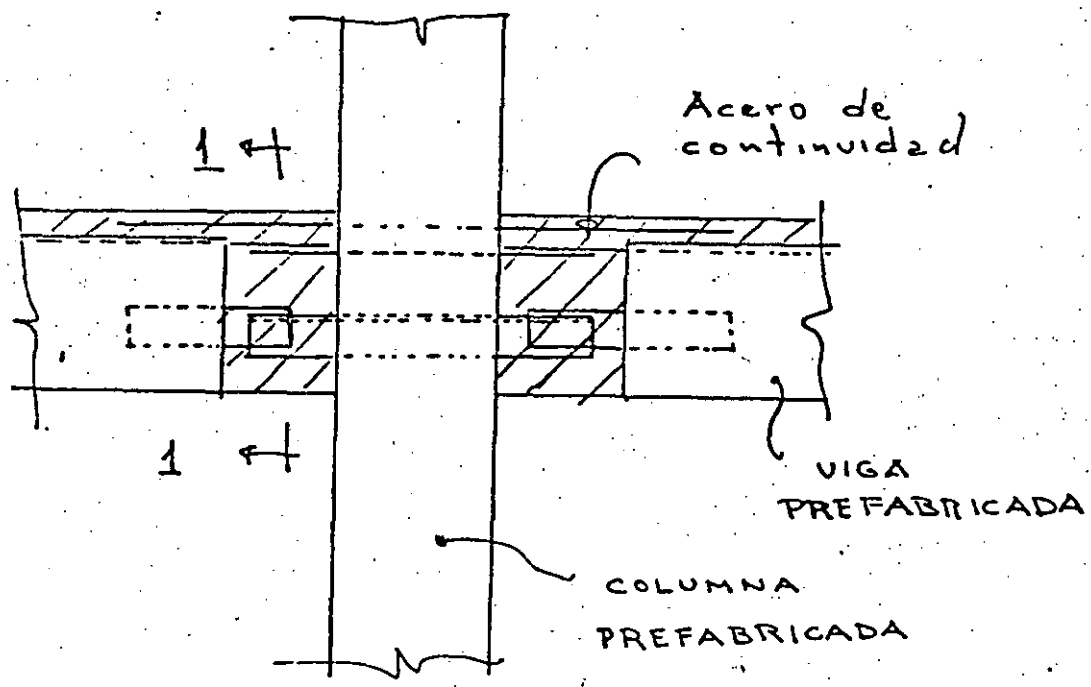


### ELEVACION

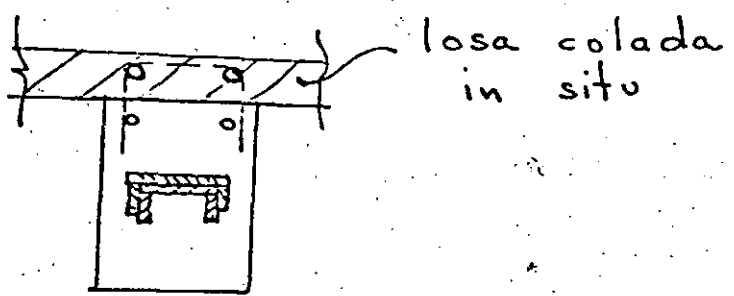


— FIG. 2 —

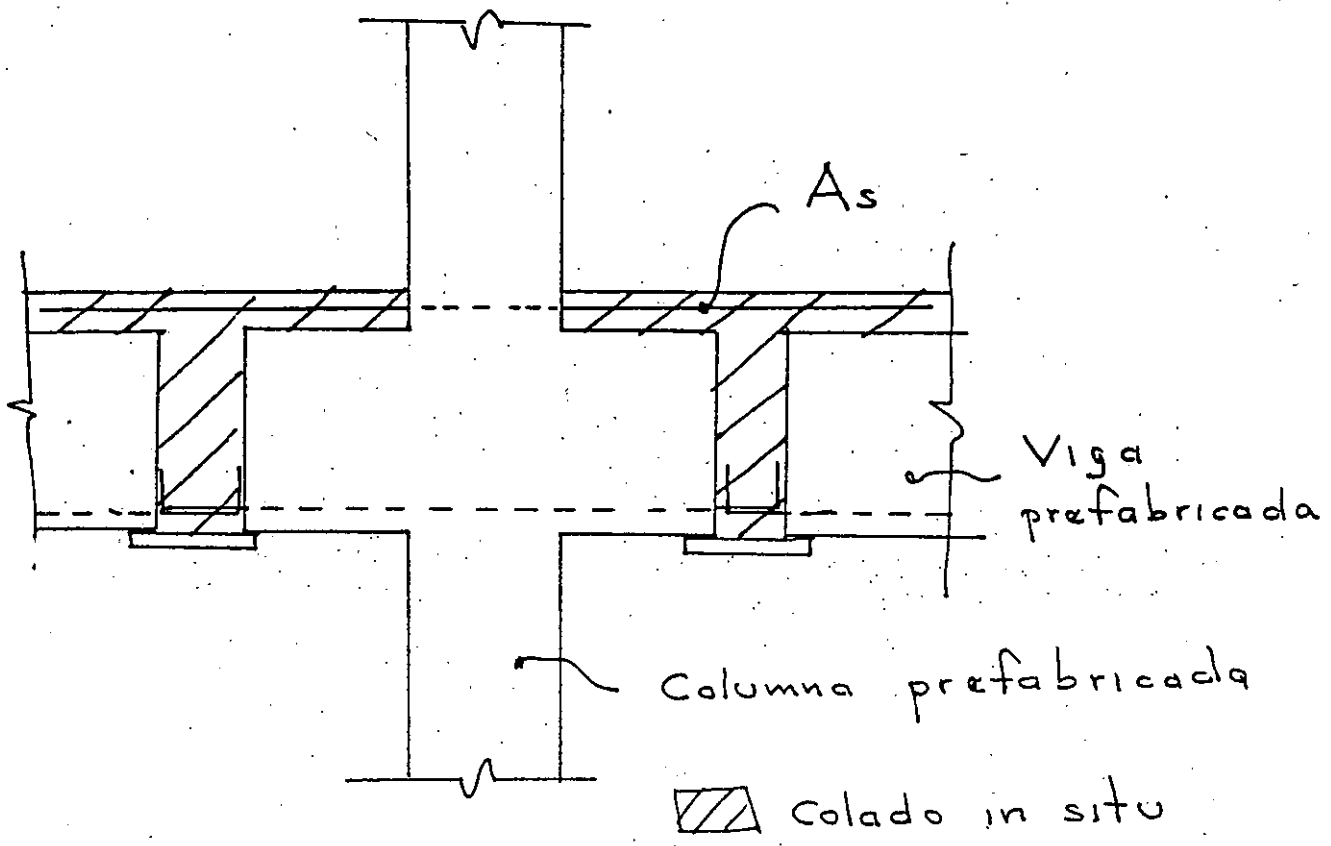




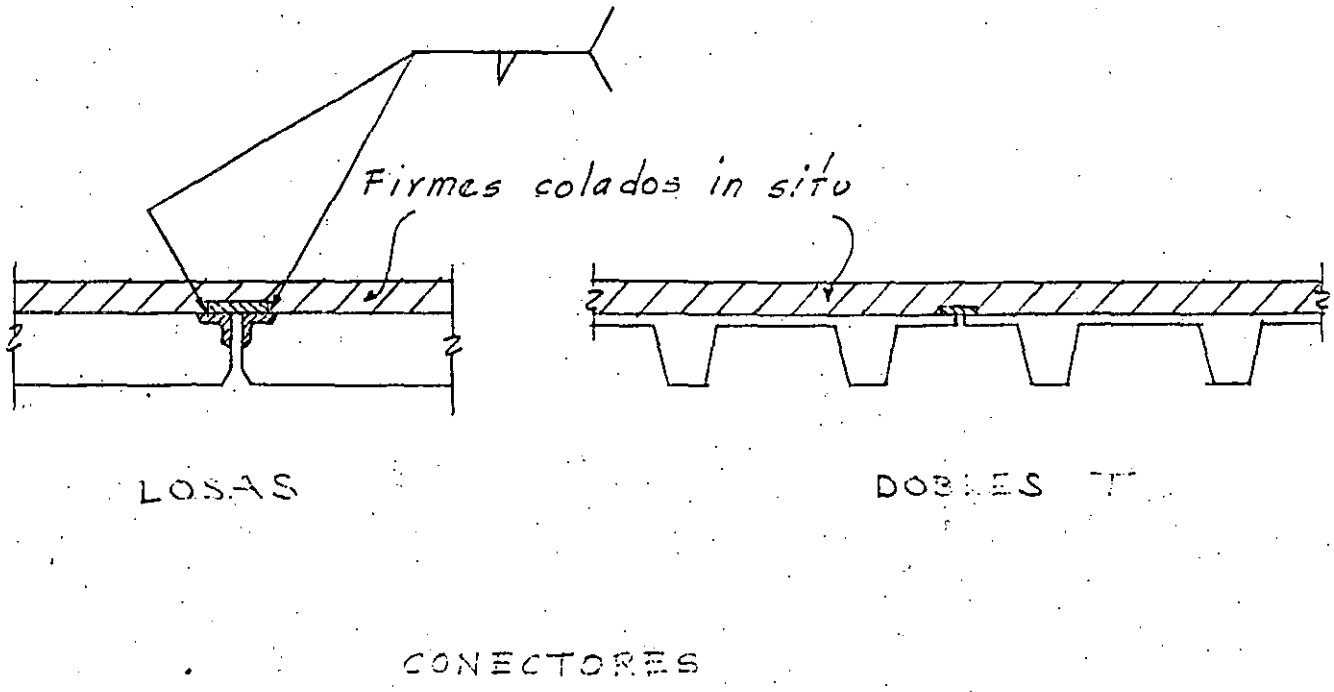
ELEVACION



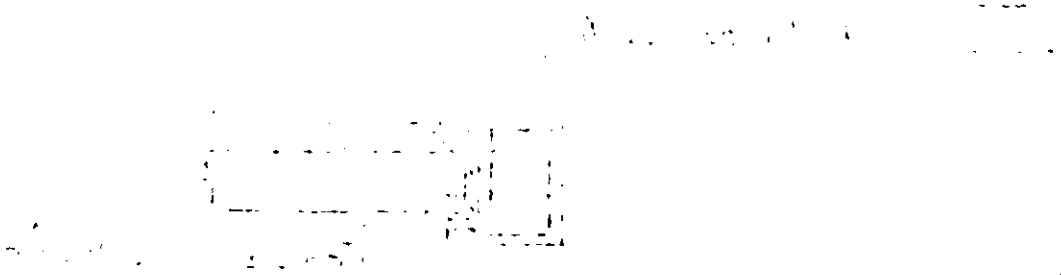
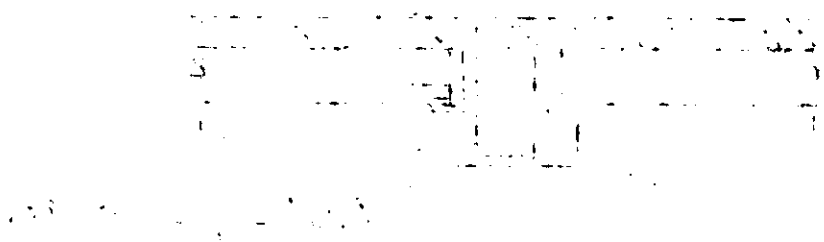
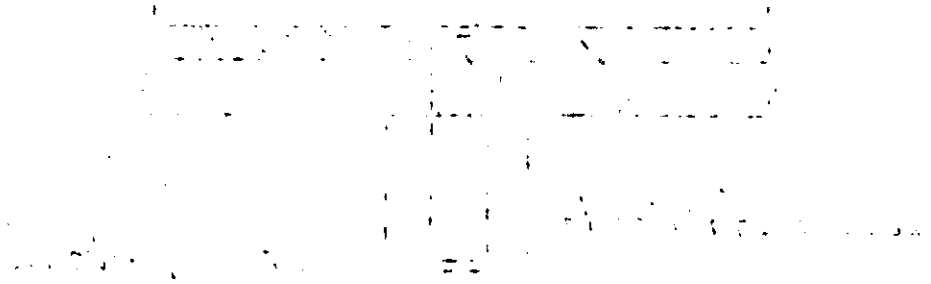
CORTE 1-1



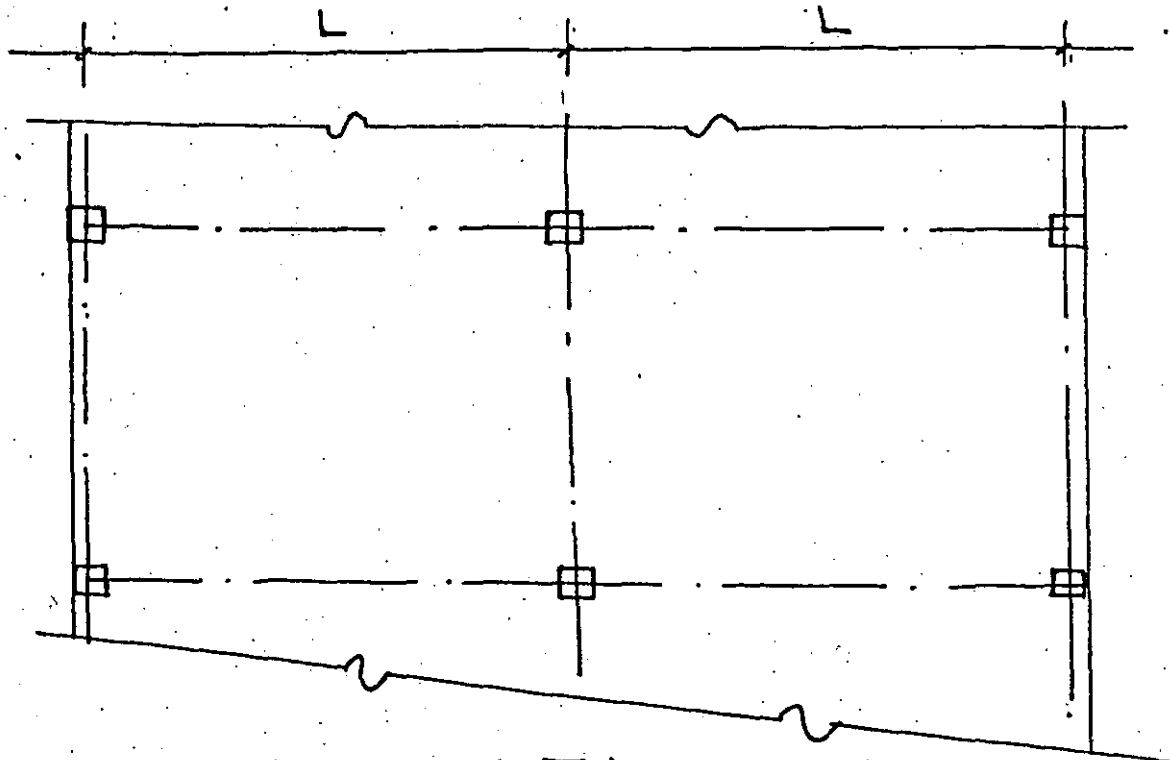
CONEXION PREFABRICADA  
FUERA DEL NUDO



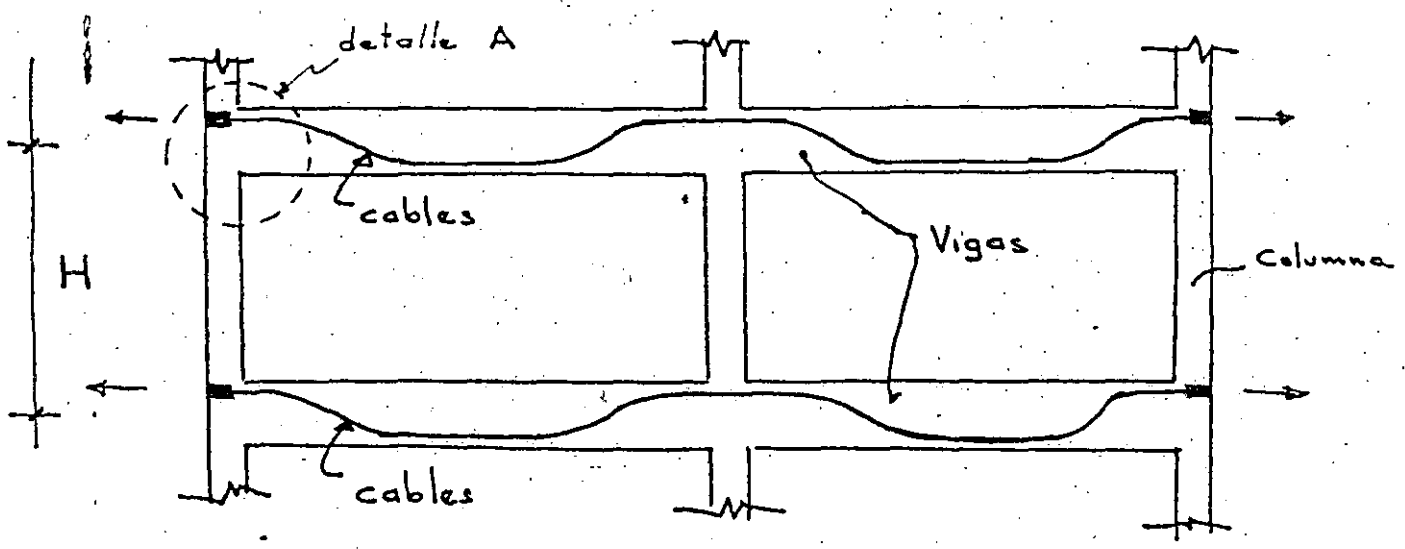
- FIG. 5 -



18

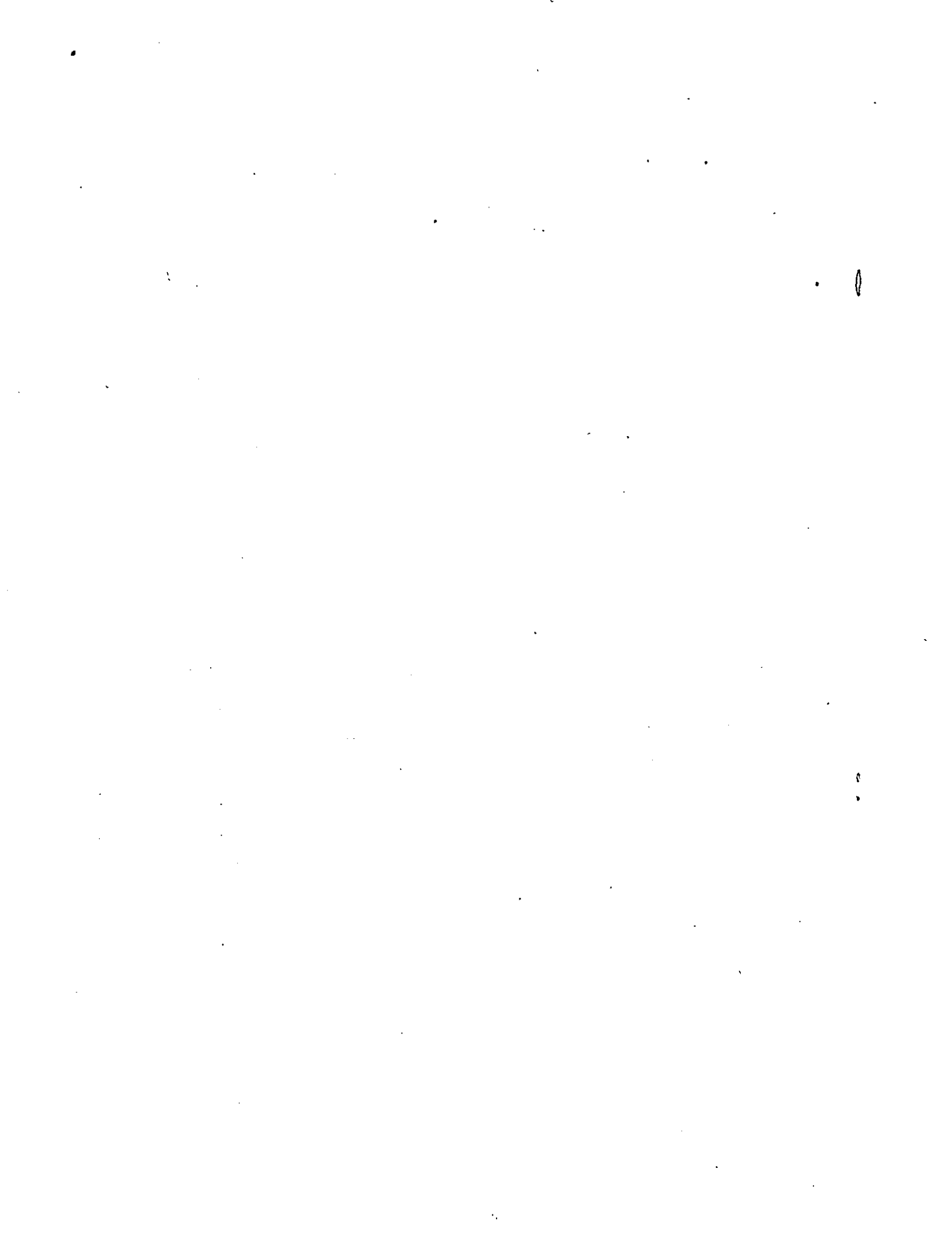


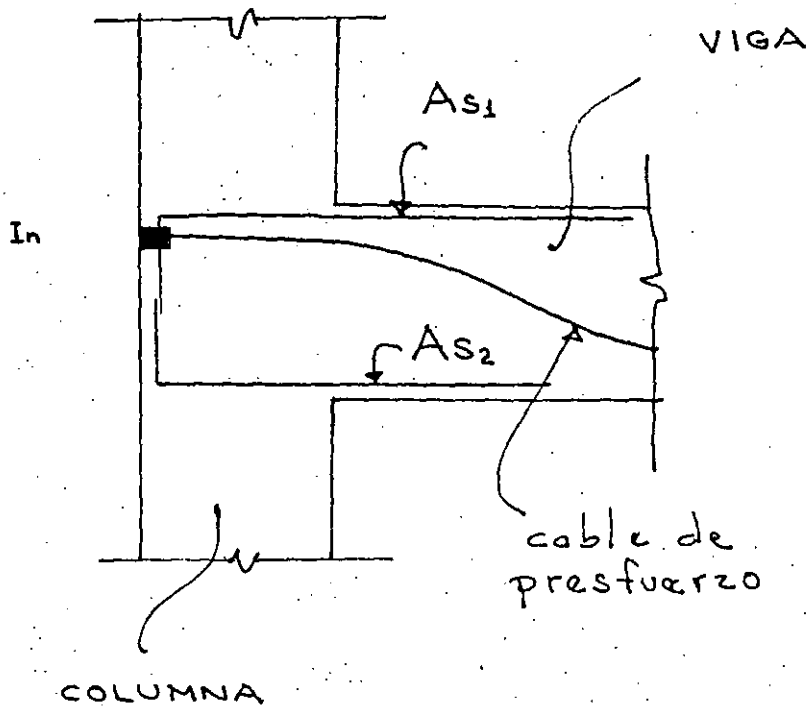
PLANTA



ELEVACION

ESTRUCTURACION POSTENSADA

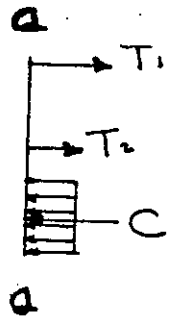
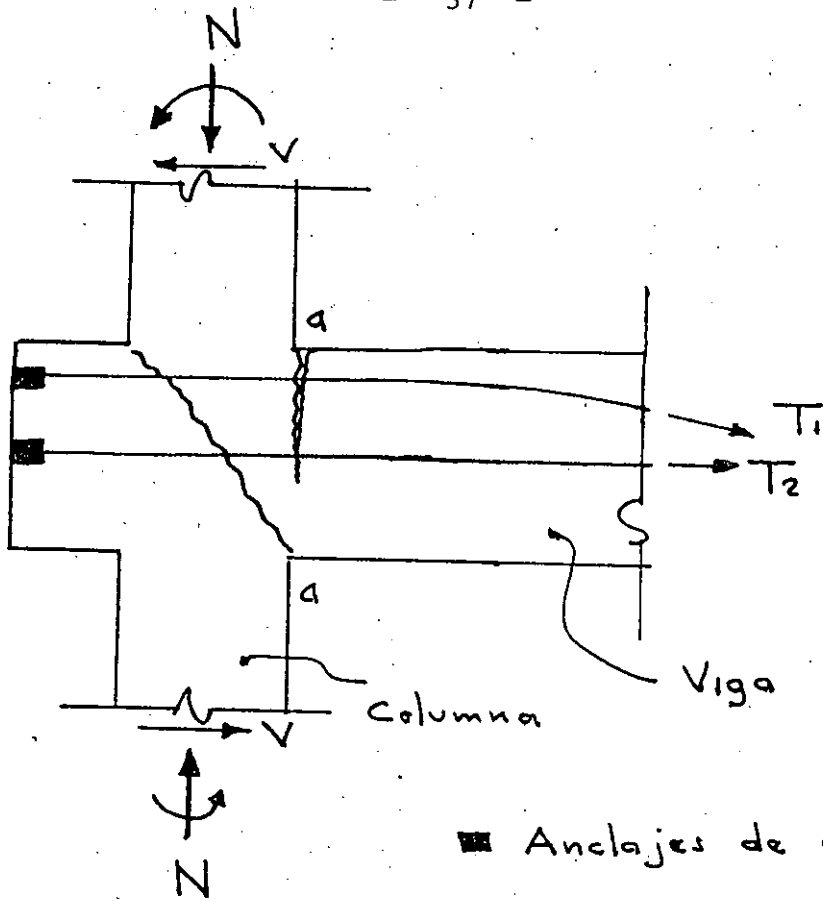




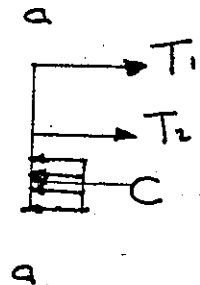
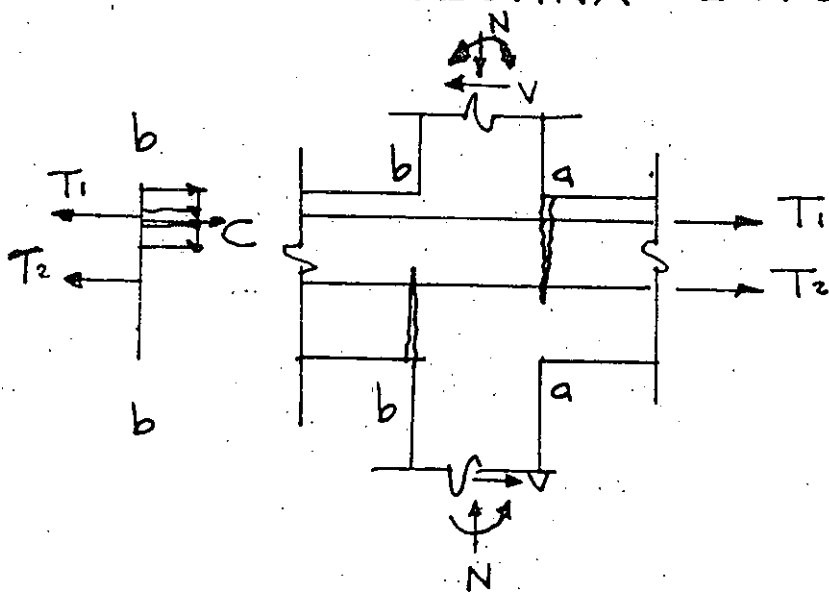
ELEVACION

DETALLE A

ESTRUCTURACION POSTENSADA



COLUMNA EXTERIOR



COLUMNA INTERIOR

FIG. 9



REVISIÓN ESTADOS LIMITE DE  
SERVICIO EN CONCRETO  
PRESFORZADO

(RDF 1987)

a) Concreto

$$\left. \begin{array}{l} \text{comp. } f_c = 0.60 f'_{ci} \\ \text{tensión } f_t = \sqrt{f'_{ci}} \end{array} \right\}$$

Después de la transferencia

$$\left. \begin{array}{l} \text{comp. } f_c = 0.45 f'c \\ \text{tensión } f_t = 1.6 \sqrt{f'c} \end{array} \right\}$$

En servicio

(nota sobre  $f_t = 3.2 \sqrt{f'c}$ )

b) Acero de presfuerzo

$$0.80 f_{sr}$$

al tensar

$$0.70 f_{sr}$$

en servicio

( valores  $\approx$  para presfuerzo total y parcial)

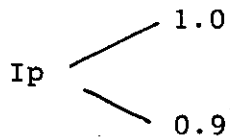
c) Por Aplastamiento

$$f_b = 0.8 f'_{ci} \sqrt{\frac{A_2}{A_1} - 0.2} \quad 1.25 f'_{ci}; \text{ al tensar}$$

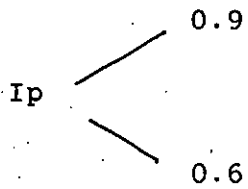
$$f_b = 0.6 f'c \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} \leq f'c$$

I N D I C E D E P R E S F U E R Z O (RDF 1987)

A) Presfuerzo total



B) Presfuerzo parcial



C) "Sin" presfuerzo

$$I_p < 0.6$$

$$I_p = \frac{MR_p}{MR_r + MR_p}$$

$$I_p = \frac{Asp_{fsp}}{Asp_{fsp} + Asp_fy}$$

L I M I T E S D E R E F U E R Z O

E N F L E X I O N

(RDF 1987)

A) SECCION CON PRESFUERZO TOTAL

Asmín → MR = 1.2 M. agrietamiento

B) SECCION CON PRESFUERZO PARCIAL

As → MR = (1.5 - 0.31 p ) M. agrietamiento

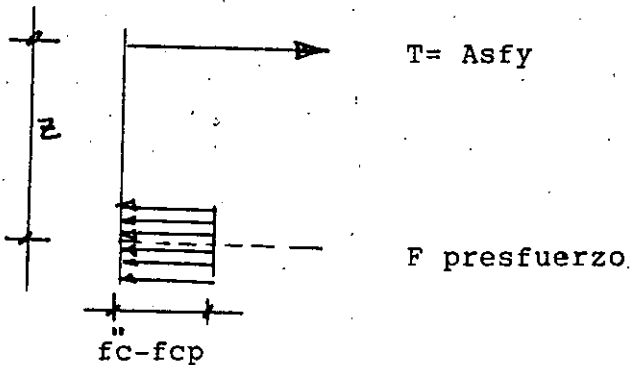
C) REFUERZO MAXIMO

$$\epsilon_{sp} \geq \frac{\epsilon_{y p}}{0.75}$$

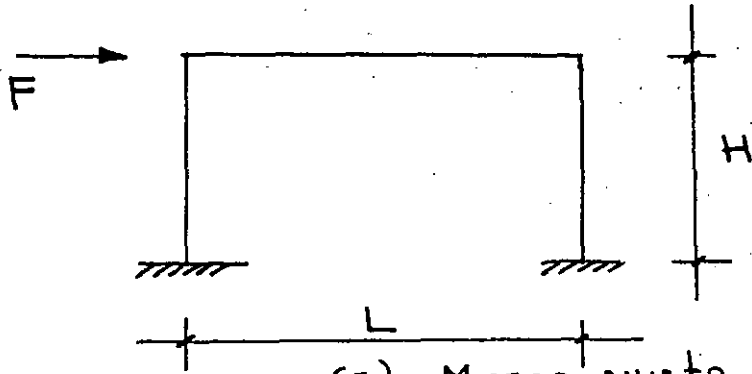
( $\epsilon_{y p} \approx 0.01$ )

CONCRETO PREFABRICADO (RDF 1987)

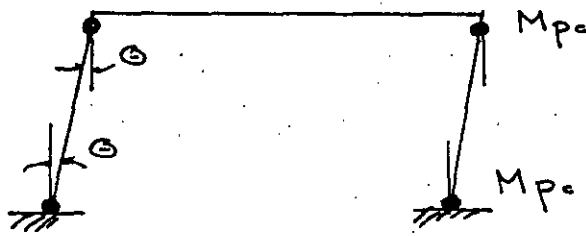
- 1) Resistencia conexiones  $\geq 1.3$  Valor acción interna
- 2)  $Q = 2$  ( salvo demostración de requisitos,  $Q=3$ )
- 3) En conexiones, la resistencia  $f'c > \begin{matrix} f'c \text{ losa } \acute{o} \\ f'c \text{ viga} \end{matrix}$
- 4) Acero en conexiones  $\leq 4,200 \text{ Kg/cm}^2$
- 5) Superficies acabado rugoso 5mm de espesor
- 6) Al revisar vigas prefabricadas tomar en cuenta reducción de capacidad del concreto debido al presfuerzo.



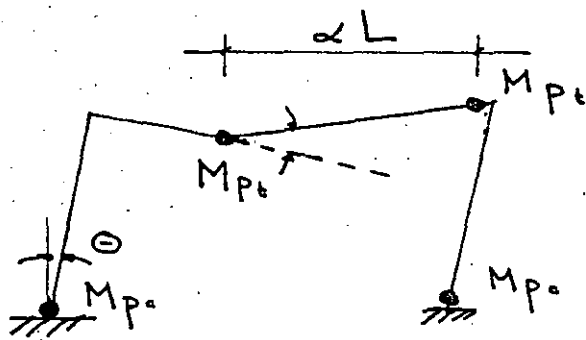




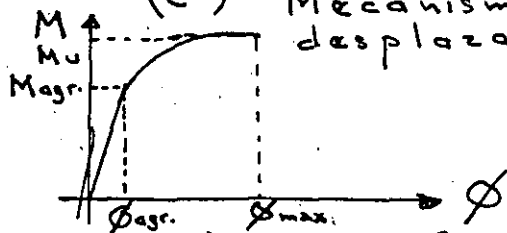
(a) Marco sujeto a fuerza sísmica



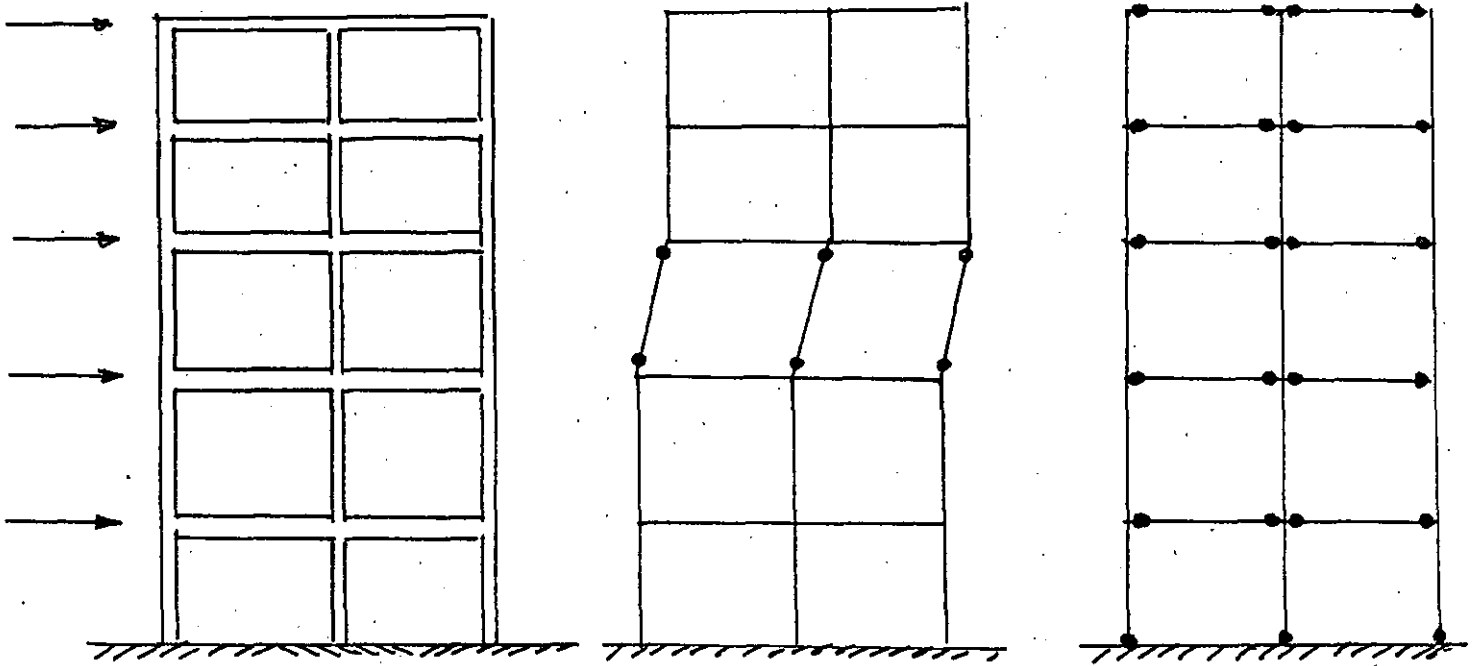
(b) Mecanismo de columnas



(c) Mecanismo en traves con desplazamiento



(d) Relación M-phi



(a)

Marcos Rígidos

(b)

Mecanismo de columnas

(c)

Mecanismo de trabes

MECANISMOS DE COLAPSO BAJO FUERZAS SISMICAS

REGLAMENTO ACI 318 - 83

Zonas alta, baja y moderada sismicidad.

Requerimientos con base en la disipación de energía en el rango no lineal de respuesta.

Resistencia a flexión de cables adheridos y no adheridos.

Límites de refuerzo en flexión.

1) Acero presforzado únicamente.

$$\omega_p = \frac{\rho_{pfs}}{f'_c} \leq 0.36 \beta_1 ; \rho_p = \frac{A_{sp}}{bd_r}$$

2) Acero presforzado y no presforzado.

$$\omega_p + \frac{d}{d_p} (w-w') \leq 0.36 \beta_1$$
$$\omega = \frac{\rho f_y}{f'_c} ; \omega' = \frac{\rho' f_y}{f'_c}$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad \text{y} \quad \rho' = \frac{A'_s}{bd}$$

Redistribución de momentos

$$20 \left( 1 - \frac{\frac{d}{d_p} (w_p - w')}{0.36 \beta_1} \right)$$

90



RECOMENDACIONES DE LA FIP PARA EL DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS. (EN EL ANEXO).

Se presentan a continuación un resumen de las principales recomendaciones.

1) Se considerarán dos estados límite de sismo: moderado y severo. En sismos severos la estructura no debe fallar, debiendo formarse un número significativo de articulaciones plásticas capaces de disipar energía.

2) Son válidos los análisis estático o dinámico para determinar las fuerzas sísmicas y las estructuras deberán analizarse en dos direcciones principales.

3) La ductilidad por flexión debe asegurarse mediante la posición de articulaciones plásticas bajo sismos severos. En esas articulaciones el eje neutro debe estar a  $0.25h$  en puntos donde ocurran inversión de momentos y el momento último deberá ser como mínimo 1.3 el momento de ruptura.

4) En las articulaciones plásticas, todo el cortante deberá ser tomado con estribos.

5) De preferencia los cables deberán lechadearse.

6) Los anclajes de presfuerzo deberán colocarse en zonas - alejadas a las de máximos esfuerzos como lo son las articulaciones plásticas.

7) Las uniones trabe-columna deberán diseñarse en tal forma que aseguren que la falla por cortante no ocurre en el núcleo de la unión.

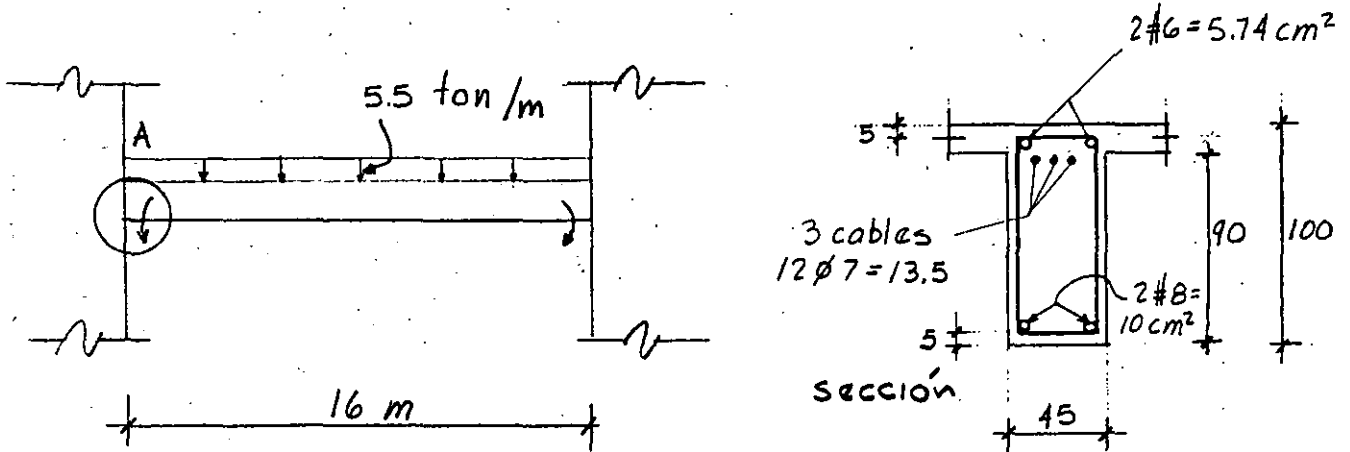
Una consideración importante en las Recomendaciones de Nueva Zelanda para estructuras presforzadas en zonas sísmicas es la de tomar un coeficiente de 20% mayor que las de concreto reforzado. Como un intento que permita incrementar la respuesta en estructuras presforzadas (5).

6.- EJEMPLOS

6.1.- Trabe postensada.

6.2.- Trabe pretensada.

EJEMPLO 1.- Verificar si la sección propuesta en concreto prestozado cumple los requisitos del reglamento del D. F. Los elementos mecánicos son los de servicio.

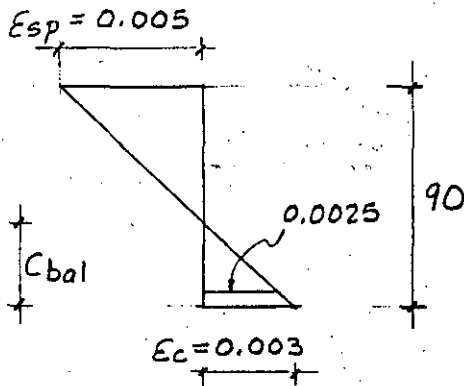


c.M  
 $M + c.v. = -75 \text{ tm}$   
 $M \text{ sismo} = -50 \text{ tm}$

Características de materiales:  
 $f'_c = 300 \text{ Kg/cm}^2$   
 $f_{sp} = 13,000 \text{ Kg/cm}^2$   
 $f_y = 4,000 \text{ Kg/cm}^2$

SOLUCION :-

a) Verificación de limitación de acero



$$C_{bal} = \frac{90 \times 0.003}{0.008} = 33.7 \text{ cm}$$

$$\therefore A_{bal} = 0.8 \times 33.7 = 27 \text{ cm}$$

Calculo de resistencias reducidas:

$$f^*_c = 0.8 \times 300 = 240 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f''_c = 0.8 f^*_c = 192 \text{ Kg/cm}^2$$

La fuerza de compresión valdrá:

$$C_{bal} = 45 \times 27 \times 192 + 10 \times 4000$$

$$= 233\ 280 + 40\ 000 = 273\ 280 \text{ Kg}$$

$$\therefore T_{bal} = 273.3 \text{ ton}$$

De acuerdo con el reglamento del D.F.

$$T_{m\acute{a}x.} = 0.75 T_{bal} = 0.75 \times 273.3 = 204 \text{ ton}$$

En la sección propuesta, suponiendo la fluencia del acero de prastuerzo.

$$T = A_{sp} \cdot f_{yp} + A_s \cdot f_y$$

$$= 13.5 \times 13\ 000 + 5.74 \times 4\ 000$$

$$= 175\ 500 + 22\ 960 = 198.4 \text{ ton}$$

$$\therefore T \leq T_{m\acute{a}x.} \quad \text{O.K.}$$

b) Cálculo del momento resistente

Suponiendo la fluencia del acero de pretuerzo:

Por equilibrio de fuerzas:

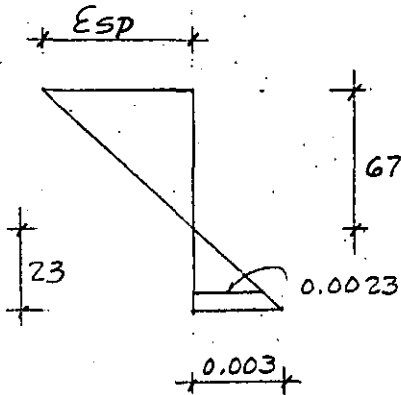
$$C = 45 \times 192 \times a + 10 \times 4000$$

$$T = 175.5 + 22.9 = 198.4$$

$$a = \frac{158,400}{8640} = 18.3 \text{ cm}$$

$$c = \frac{18.3}{0.8} = 23 \text{ cm}$$

Verificando el tipo de falla



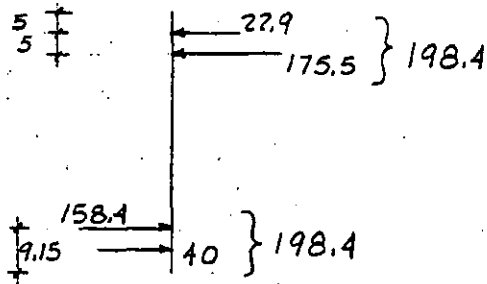
$$E_{sp} = \frac{6.7}{23} \times 0.003 = 0.0087$$

$$E_{sp \text{ total}} = 0.005 + 0.0087 = 0.0137$$

$$E_{sp} > E_y$$

∴ El acero de pretuerzo fluye y la suposición es correcta.

El momento resistente valdrá:



$$z = 100 - 8.31 - 9.42 = 82.2 \text{ cm}$$

$$M_{\text{resist.}} = \phi C_z = \phi T_z$$

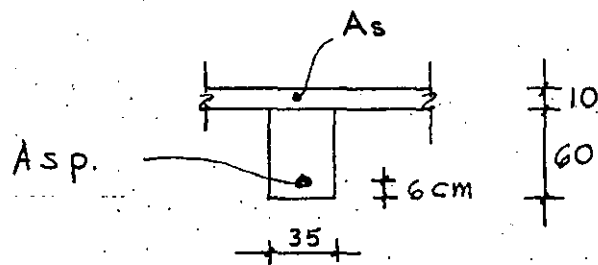
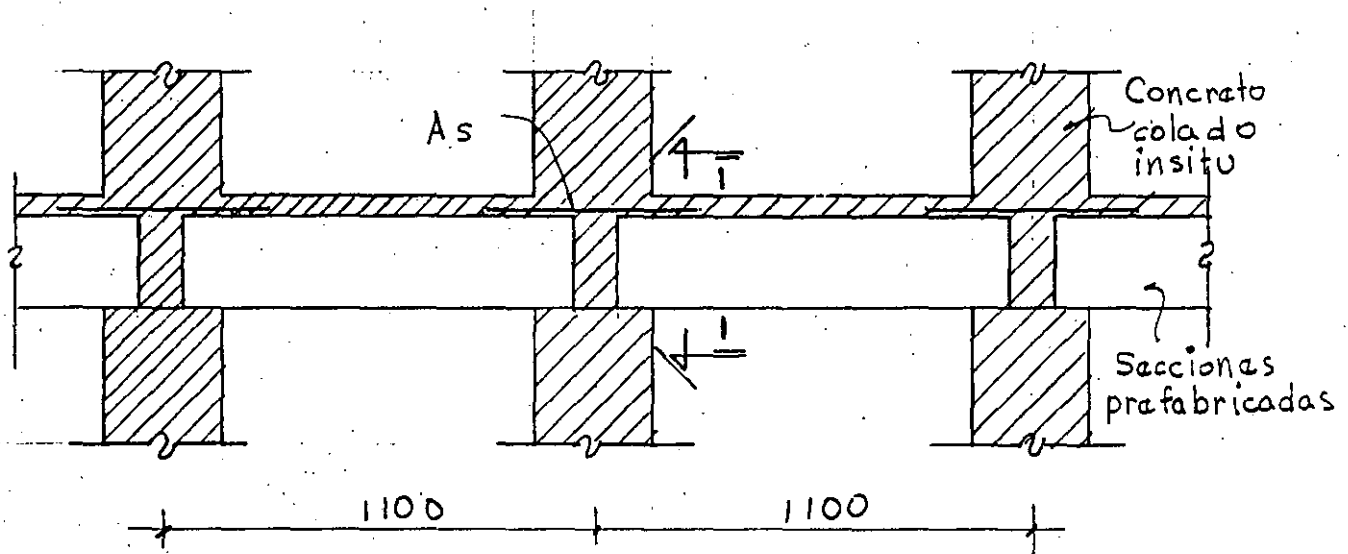
$$\begin{aligned} M_{\text{resist.}} &= 0.9 \times 198.4 \times 0.82 \\ &= 146.4 \text{ tm} \end{aligned}$$

$$M_{\text{actuante}} = (75 + 50) 1.1 = 137 \text{ tm}$$

$$M_{\text{resist.}} > M_{\text{actuante}}$$

∴ La sección y armado propuestos sí cumplen los requisitos del reglamento del D. F. en flexión.

EJEMPLO 2.- Calcular el área de acero de refuerzo en la viga pretensada de la figura para momento negativo debido a carga viva y sismo.



CORTE 1-1

$$M_{c.v.} = -10 \text{ tm}$$

$$M_{\text{sismo}} = -16 \text{ tm}$$

$$f'_c = 350 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_{sp} = 15,000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$A_{sp} = 6 \text{ toronas } 1/2''$$



### SOLUCION

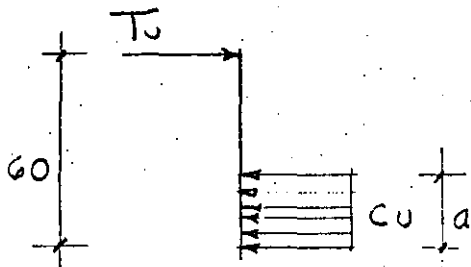
1) Cálculo del área acero para momento negativo.

$$M_u (-) = (10 + 16) 1.1 = 28.6 \text{ t m}$$

$$A_s \approx \frac{M_u}{0.9 \times 0.85 d \times f_y} = \frac{28.6 \times 10^5}{0.9 \times 0.85 \times 65 \times 4000} = 14.5 \text{ cm}^2$$

Se pondrán 2#8 + 2#6  $\rightarrow$   $A_s$  15.7 cm<sup>2</sup>.

Estableciendo el equilibrio en el apoyo:



$$C_u = T_u$$

$$C_u = (224 - f_{cp}) 35 a$$

$$T_u = 15.7 \times 4000$$

$$T_u = 62,800 \text{ Kg.}$$

$f_c'' - f_{cp}$   
compresión  
debida al prefuerzo

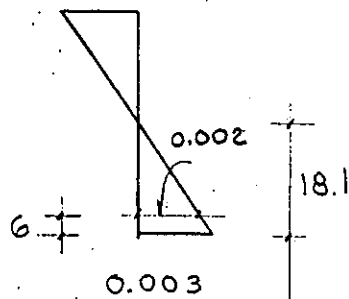
Suponiendo una compresión debida al prefuerzo de 100 Kg/cm<sup>2</sup>.

$$a = \frac{62800}{124 \times 35} = 14.5 \text{ cm}$$

$c = \frac{14.5}{0.8} = 18.1 \text{ cm}$  ; verificando la falla se confirma la fluencia del acero  $A_s$

verificando ahora la compresión supuesta en el concreto :

Del diagrama de deformaciones obtenido:



$$E_{sp} = 0.002$$

La deformación del acero al tensarse se supuso de 0.005

$$E_{sp} = 0.005 - 0.002 = 0.003$$

$$f_{sp} = E_{sp} \times E_s = 0.003 \times 2 \times 10^6$$

$$= 6,000 \text{ Kg/cm}^2$$

La fuerza de prestuerzo valdrá:

$$F = 6.000 \times 0,93 \times 6 = 33.480 \text{ Kg}$$

y la compresión en el concreto debida al prestuerzo será:

$$f_{cp} = \frac{33.480}{35 \times 14,1} = 67 \text{ Kg/cm}^2$$

67  $\neq$  100 Kg/cm<sup>2</sup> supuestos

Haciendo un segundo tanteo con el promedio de los dos: 80 Kg/cm<sup>2</sup> y repitiendo el proceso anterior, se tendrá:

$$a = \frac{62.800}{144 \times 35} = 12,5 \text{ cm}$$

$$c = 15,6 \text{ cm}$$

$$E_{sp} = 0,0018$$

$$\therefore E_{sp} \text{ final} = \underbrace{0,005}_{\text{al tensar}} - 0,0018 = 0,0032$$

$$E_{sp} = 0,0032 \times 2 \times 10^6 = 6.400 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F = 6.400 \times 0,93 \times 6 = 35.712 \text{ Kg}$$

$$f_{cp} = \frac{35.712}{35 \times 12,5} = 81 \text{ Kg/cm}^2$$

80  $\approx$  81 Kg/cm<sup>2</sup> O.K.

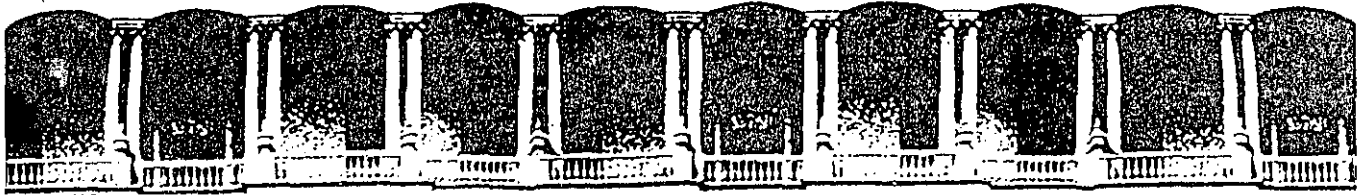
El momento resistente valdrá:

$$M_{resist} = \phi T_v z$$

$$= 0.9 \times 62\,800 \left( 60 - \frac{12.5}{2} \right)$$

$$= 30.4 \text{ tm} > 28.6 \text{ tm}$$

Nota.- La condición de  $T < T_{bal}$  se cumple con amplio margen, ya que el valor de  $T_{bal}$  es de 108.86 ton.



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**XVIII CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA**

**MODULO III**

**DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS**

*Del 3 al 13 de julio de 1992*

**REPARACION DE REFUERZOS DE ESTRUCTURAS**

**ING. OSCAR DE LA TORRE RANGEL**

**JULIO - 1992**

DETALLES CONSTRUCTIVOS

PARA REESTRUCTURACION

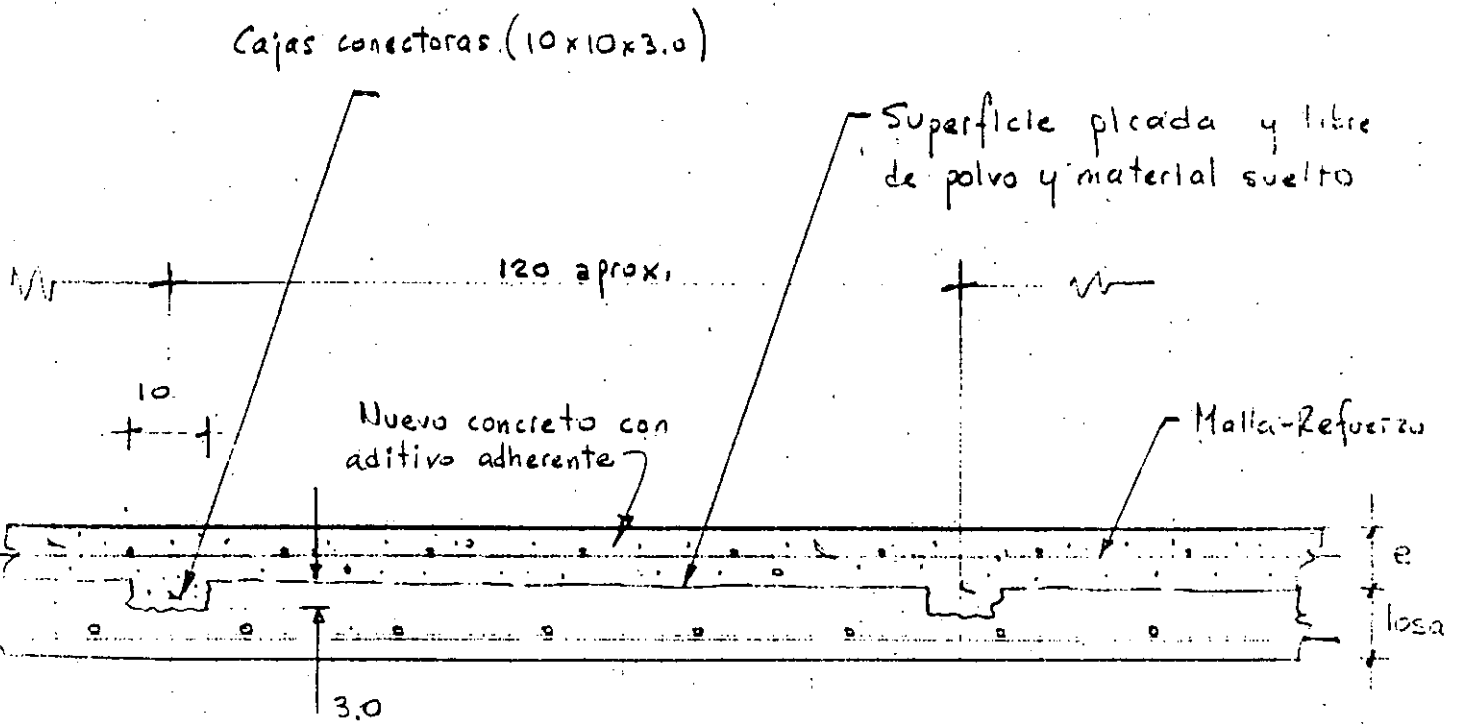
DE EDIFICIOS

|   |                       |   |
|---|-----------------------|---|
| 1 | LOSAS                 | L |
| 2 | TRABES                | T |
| 3 | COLUMNAS              | C |
| 4 | MUROS                 | M |
| 5 | CONTRAVENTEO DIAGONAL | D |

ING. OSCAR DE LA TORRE RANGEL

L O S A S

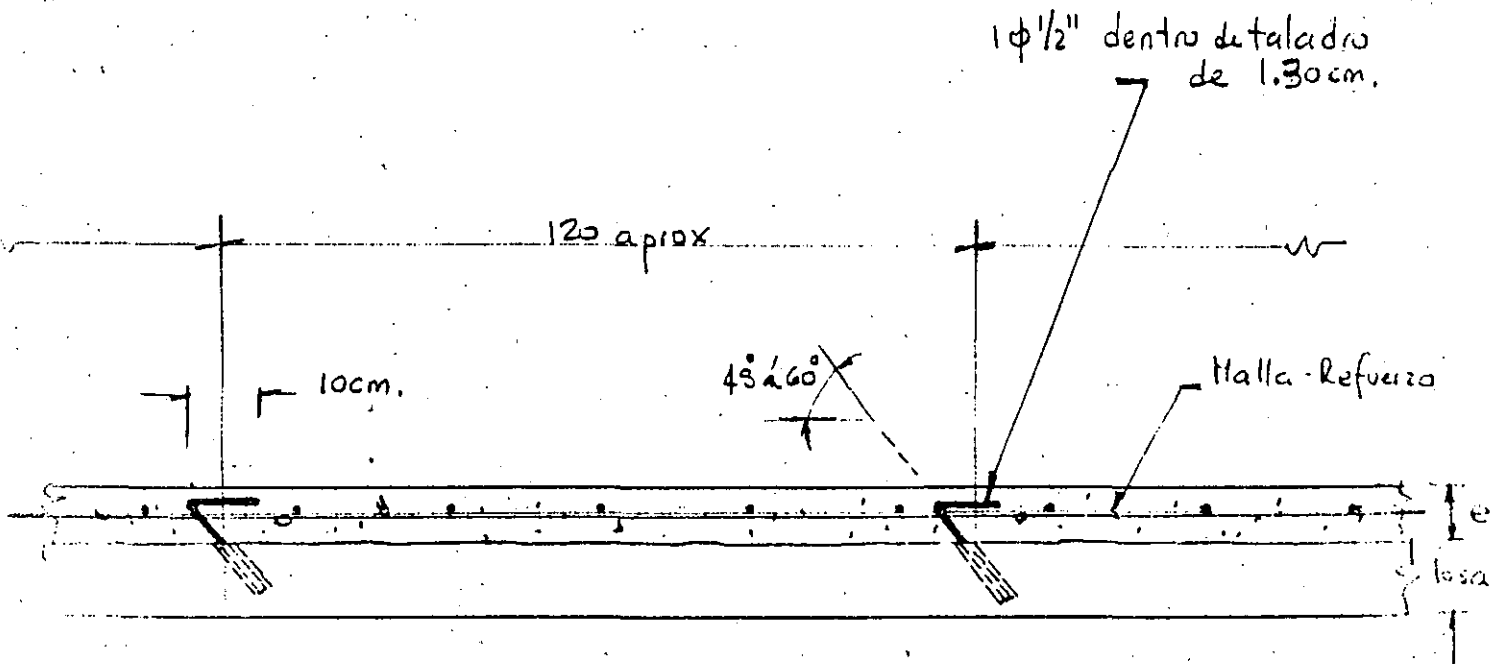
L



### REFUERZO DE LOSA

- 1.-) Para Mejorar el efecto de Diafragma de la losa como elemento de unión entre marcos y muros.
- 2.-) Para Mayor capacidad a flexión.



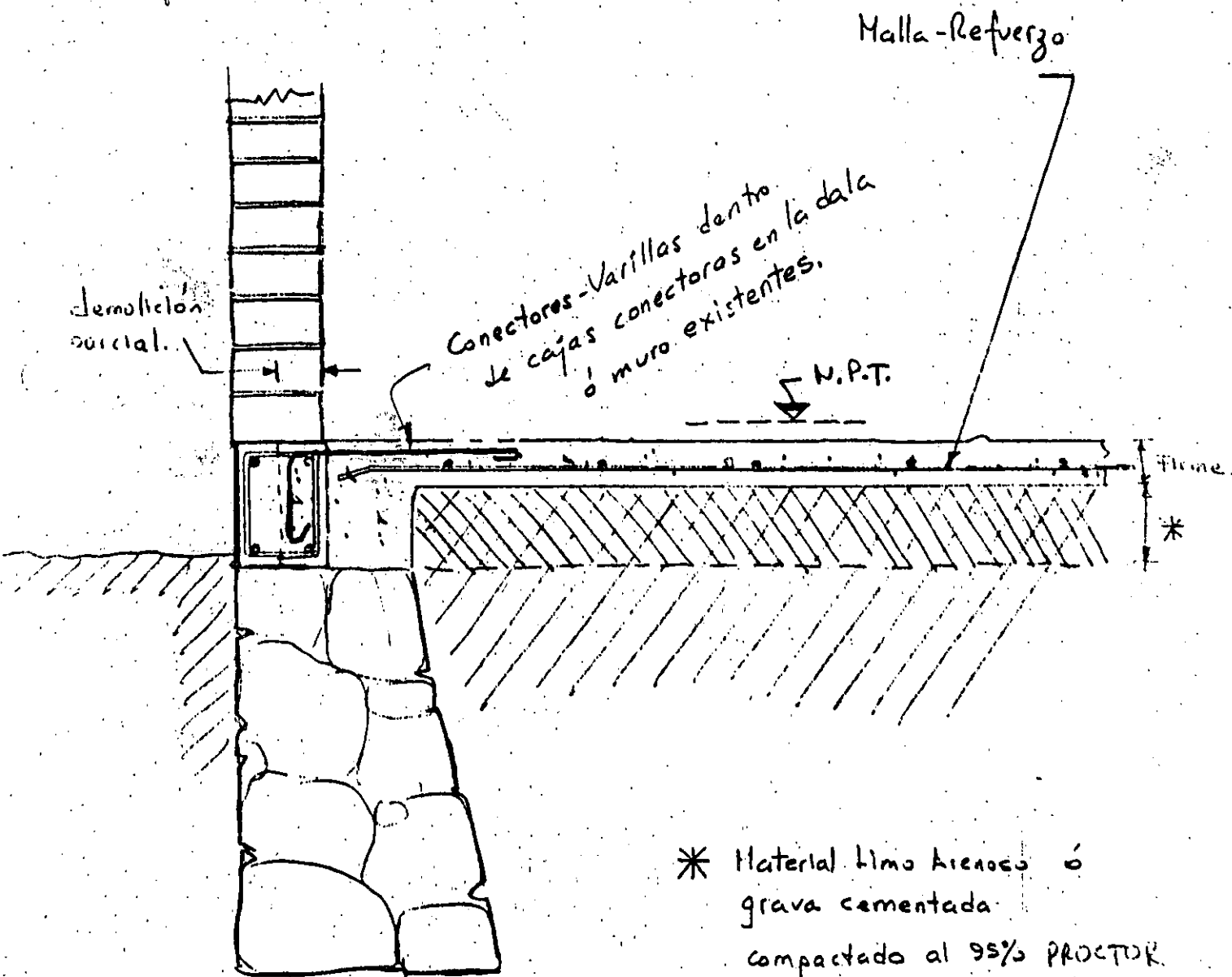


### REFUERZO DE LOSA

Con conectores metálicos doblados antes.  
ó después de colocar la malla-Refuerzo

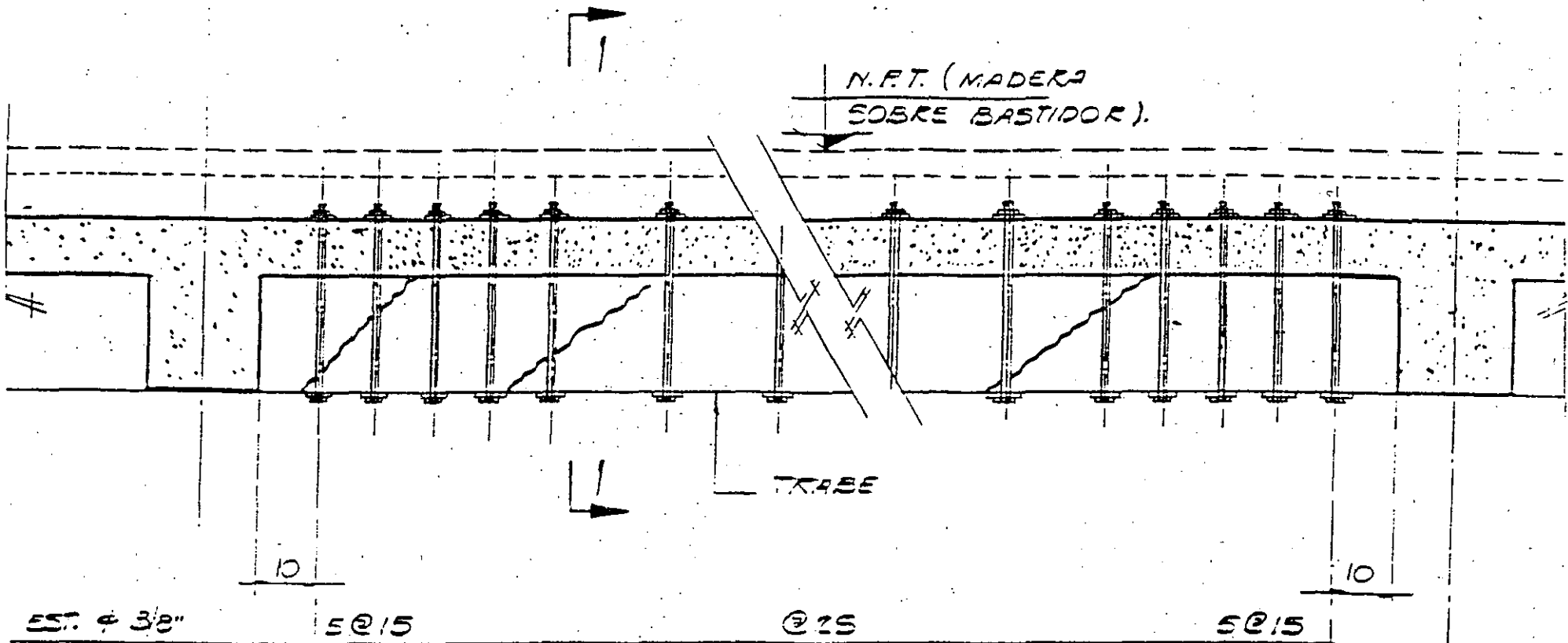
LOSA FIRME

REFUERZO A LA CIMENTACION



T R A B E S

T

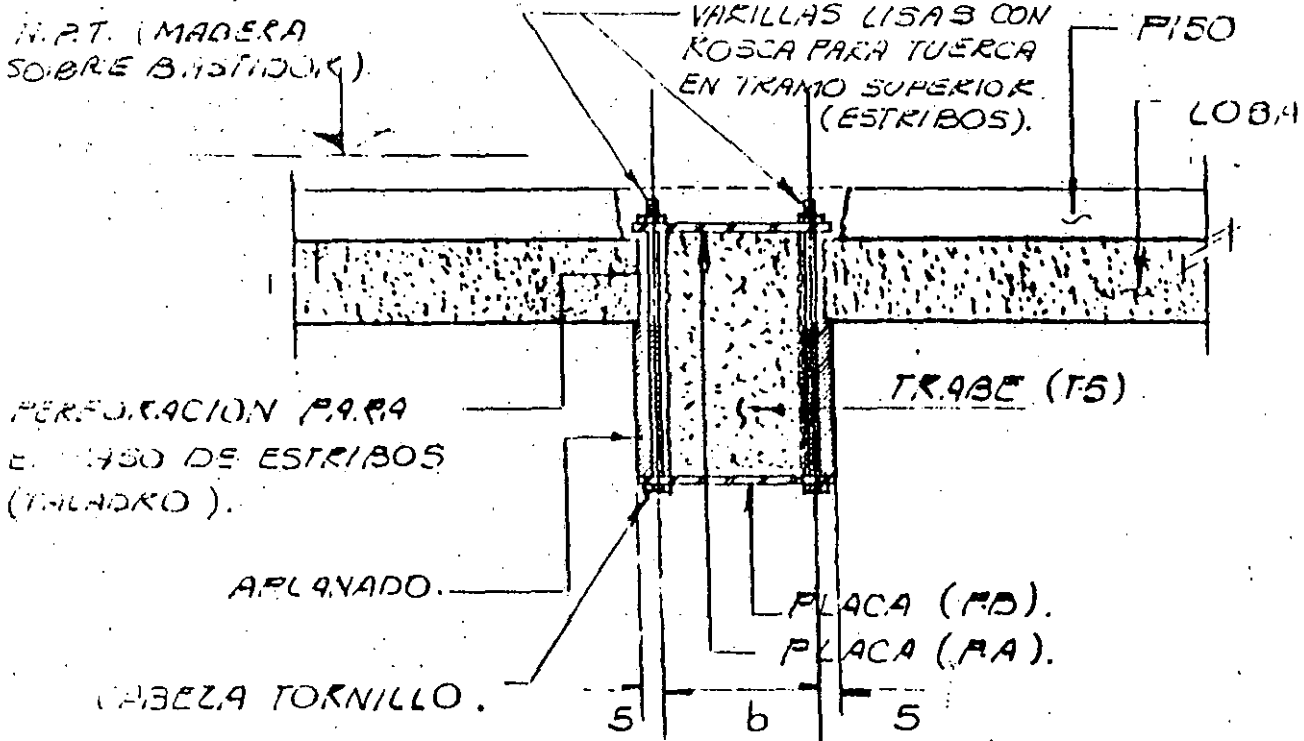


V I S T A L A T E R A L

E L E V A C I O N .

REFUERZO DE TRABES

(ESTR. BOF)

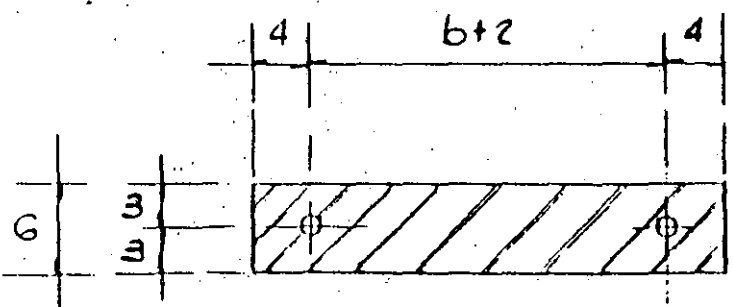


# CORTE 1-1

## REFUERZO DE TRABE

### PROCEDIMIENTO PARA LA COLOCACION DE REFUERZO EN FALLAS POR TENSION DIAGONAL.

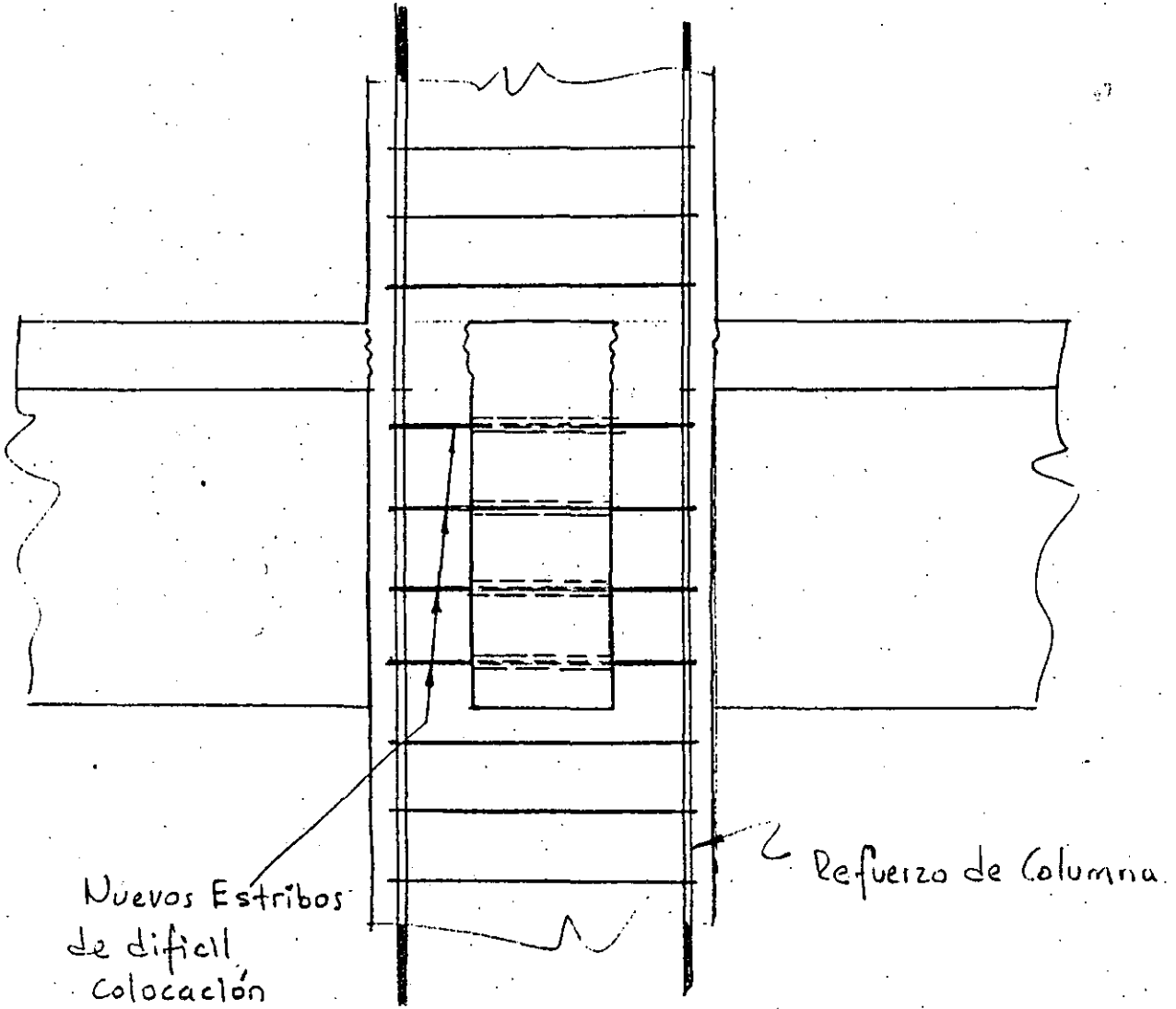
1. QUITAR EL PISO PARA DESCUBRIR LA LOSA.
2. TALADRO PARA EL PASO DE VARILLAS LISAS CON ROSCA EN SUS EXTREMOS SUPERIORES (ESTRIBOS).
3. HABILITACION DE PLACAS (PA) Y (PB) PERFORADAS Y DE VARILLAS CON CABEZA DE TORNILLO Y ROSCA PARA ARANDELA Y TUERCA.
4. COLOCACION DE PLACAS Y VARILLAS LISAS - PINTAR CON PINTURA ANTICORROSIVA (2 MANOS) LAS PLACAS Y VARILLAS PREVIAMENTE.
5. COLOCACION DEL RELLENO DE PERFORACION Y NUEVO N. P. T.
6. APLANAR CON MORTERO LAS CARAS DE LA TRABE HASTA AHOGAR TOTALMENTE LAS VARILLAS LISAS, EN TODA LA EXTENSION QUE OCUPEN LOS ESTRIBOS ADICIONALES, USAR TELA DE GALLINERO PARA REFORZAR ESTE APLANADO.



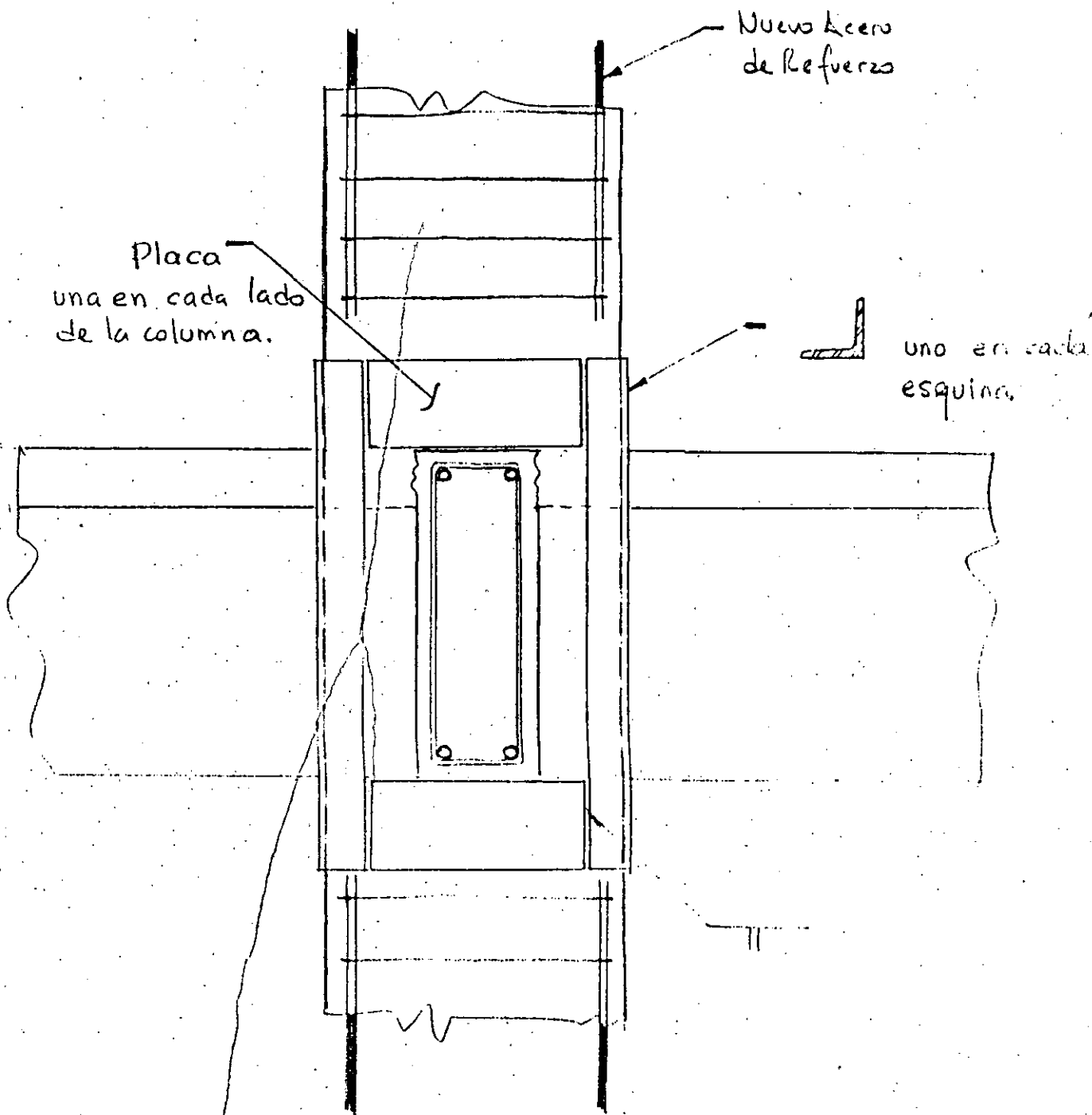
PLACA (PA) Y (PB)  
Rs. e = 0.6 (1/4").

C O L U M N A S

C



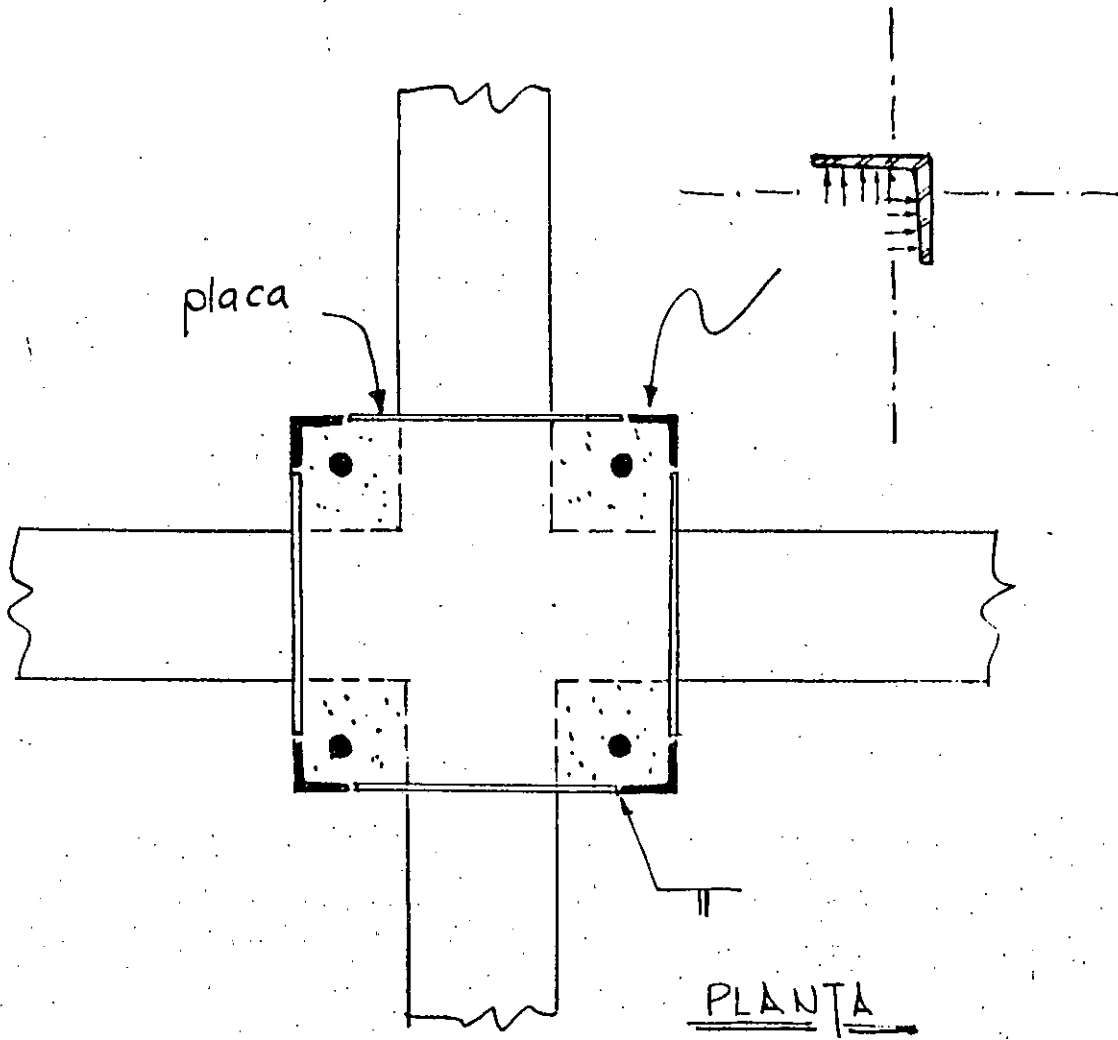
REFUERZO DE COLUMNA



REFUERZO DE COLUMNA.

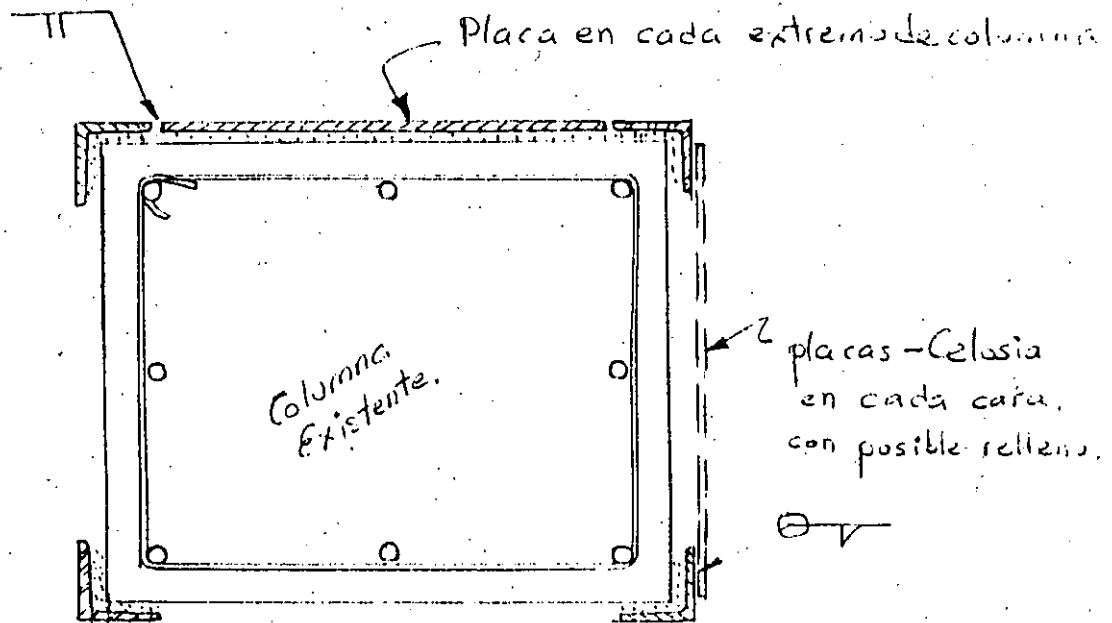
ELEVACION





REFUERZO DE COLUMNA

CONFINAMIENTO TRANSVERSAL CON  
4 ANGULOS Y 8 PLACAS  
EN LA ZONA DEL NUDO CON TRABES



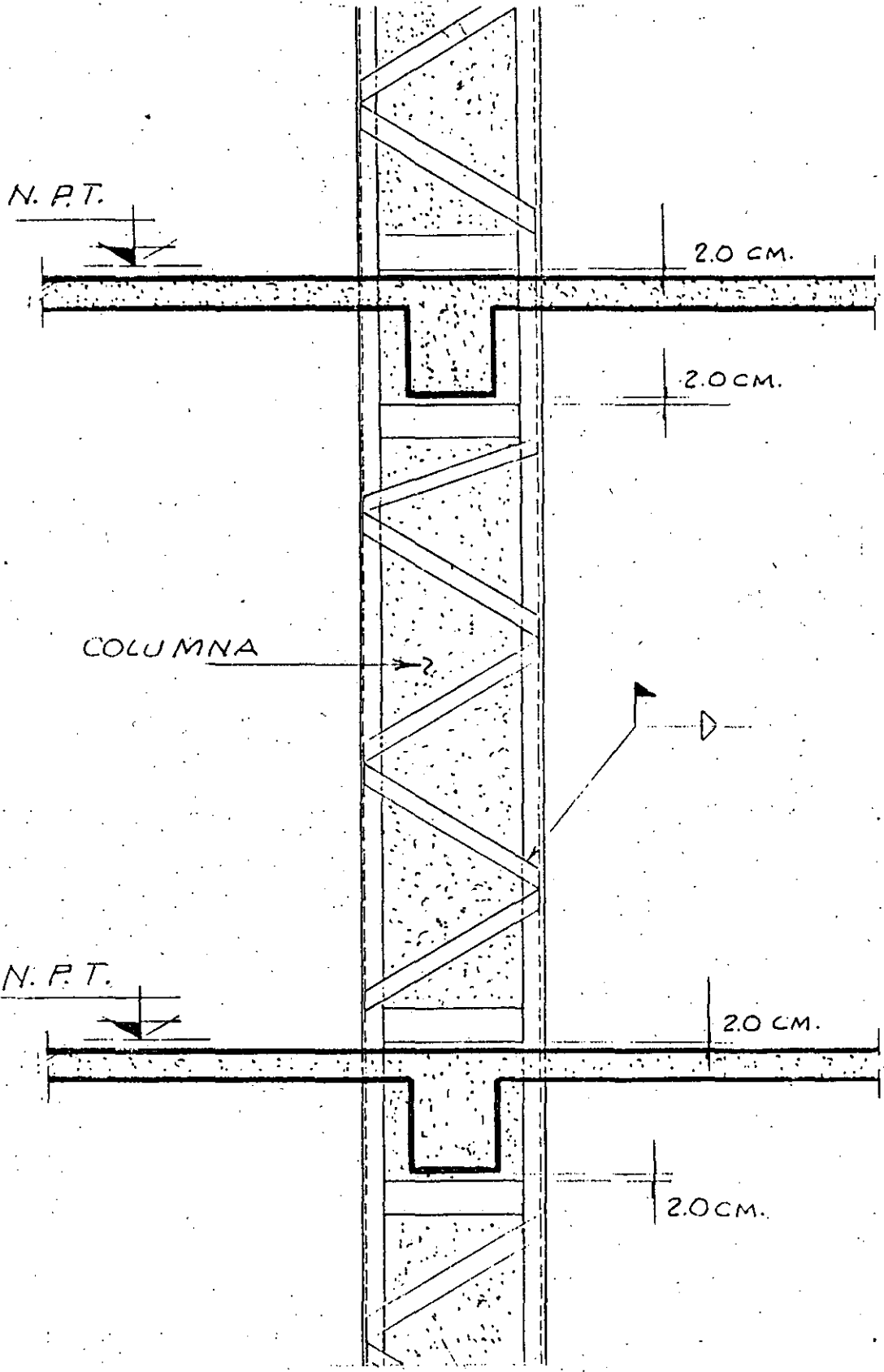
3 a 4 mm.  
mínimo

para rellenar con mortero fluido  
y aditivo estabilizador

### REFUERZO DE COLUMNA

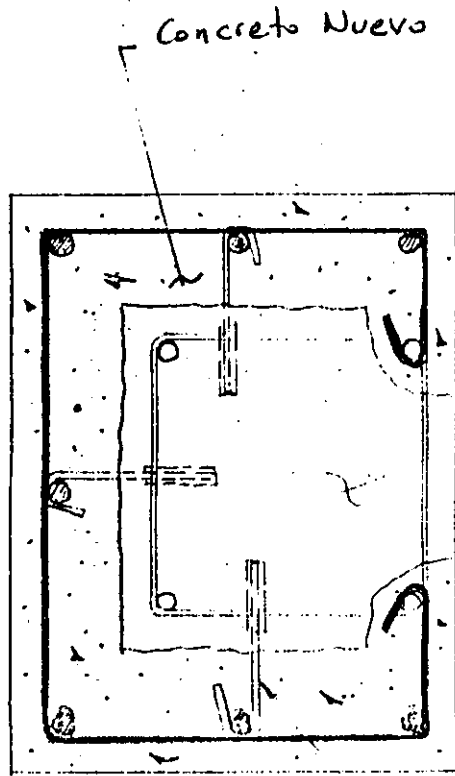
#### PLANTA

Ángulos en las esquinas  
y placas en celosía en  
cada cara.



REFUERZO EN COLUMNA.

FIXACION.



— Columna Existente

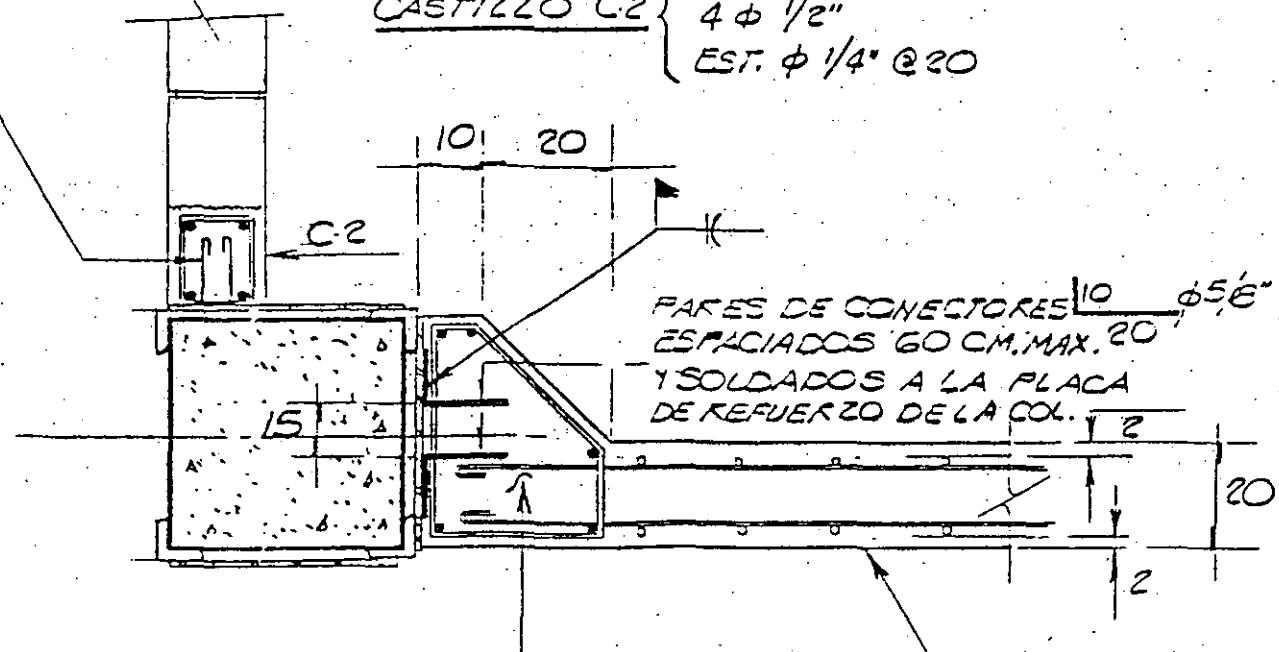
— barras ancladas a la columna interior de la estructura original.

REFUERZO PARA COLUMNA

PLANTA

1 1/2" @ 40 CM. MAX. SOLDADA A LA PLACA DE REFUERZO DE LA COLUMNA.

CASTILLO C2 { 15x25 ó 20x25  
4 φ 1/2"  
EST. φ 1/4" @ 20



5 VARS. (•) φ 1/2" Y EST. φ 3/8" @ 20 QUE PASARAN SIN INTERRUPCION A LOS LADOS DE LAS TRABES EXISTENTES.

MURO DE CONCRETO QUE QUEDARA APAÑADO CON LAS TRABES EXISTENTES DE FACHADA EJE (A), SIN RETIRAR ARMADOS.

# UNION DE MUROS A COLUMNA.

## PLANTA.

M U R O S

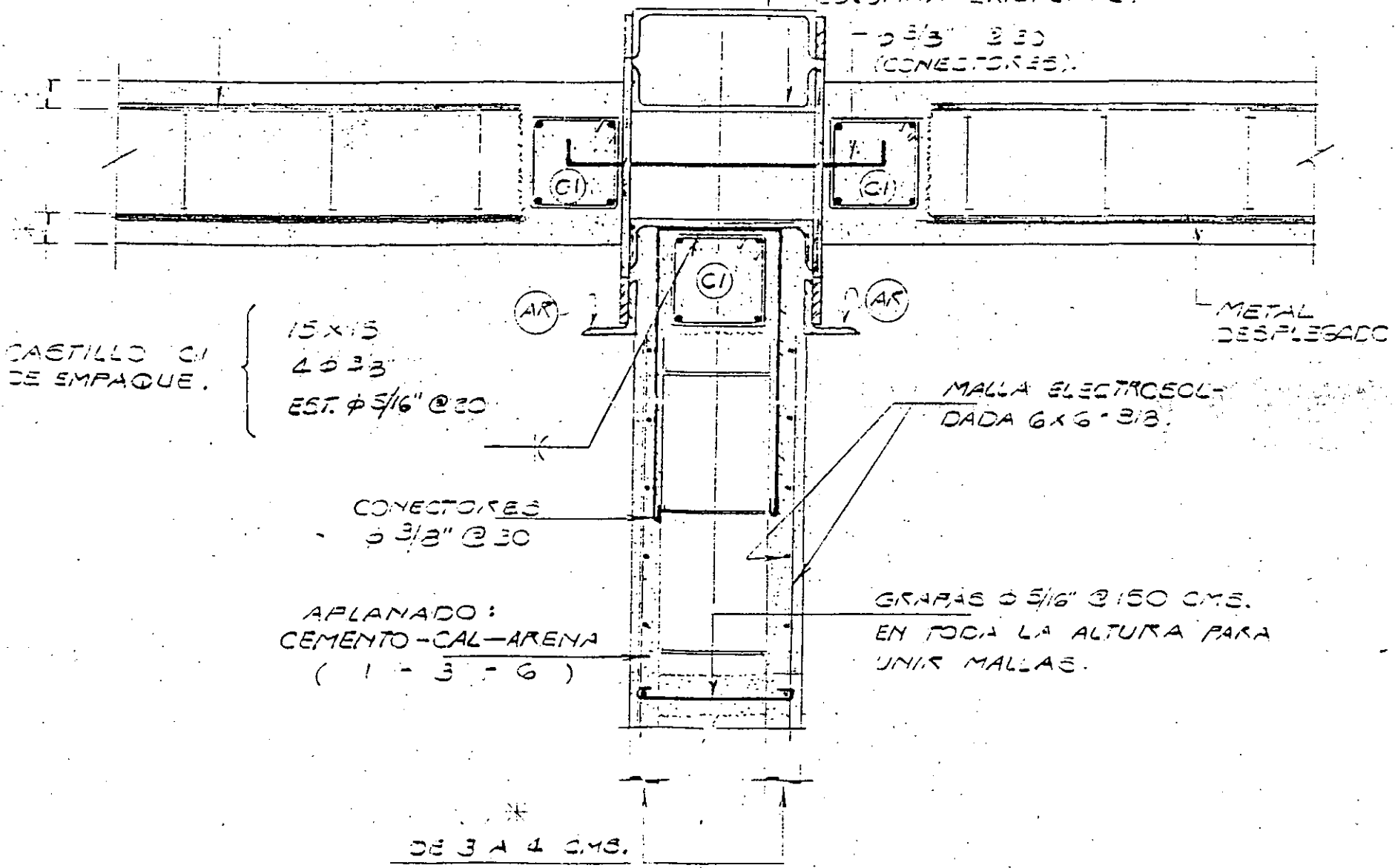
M

CAJAL DE REFLEJTO DE 3' LIV. (2 3' x 7.11 < 1/4)

DESPLIEGADO.

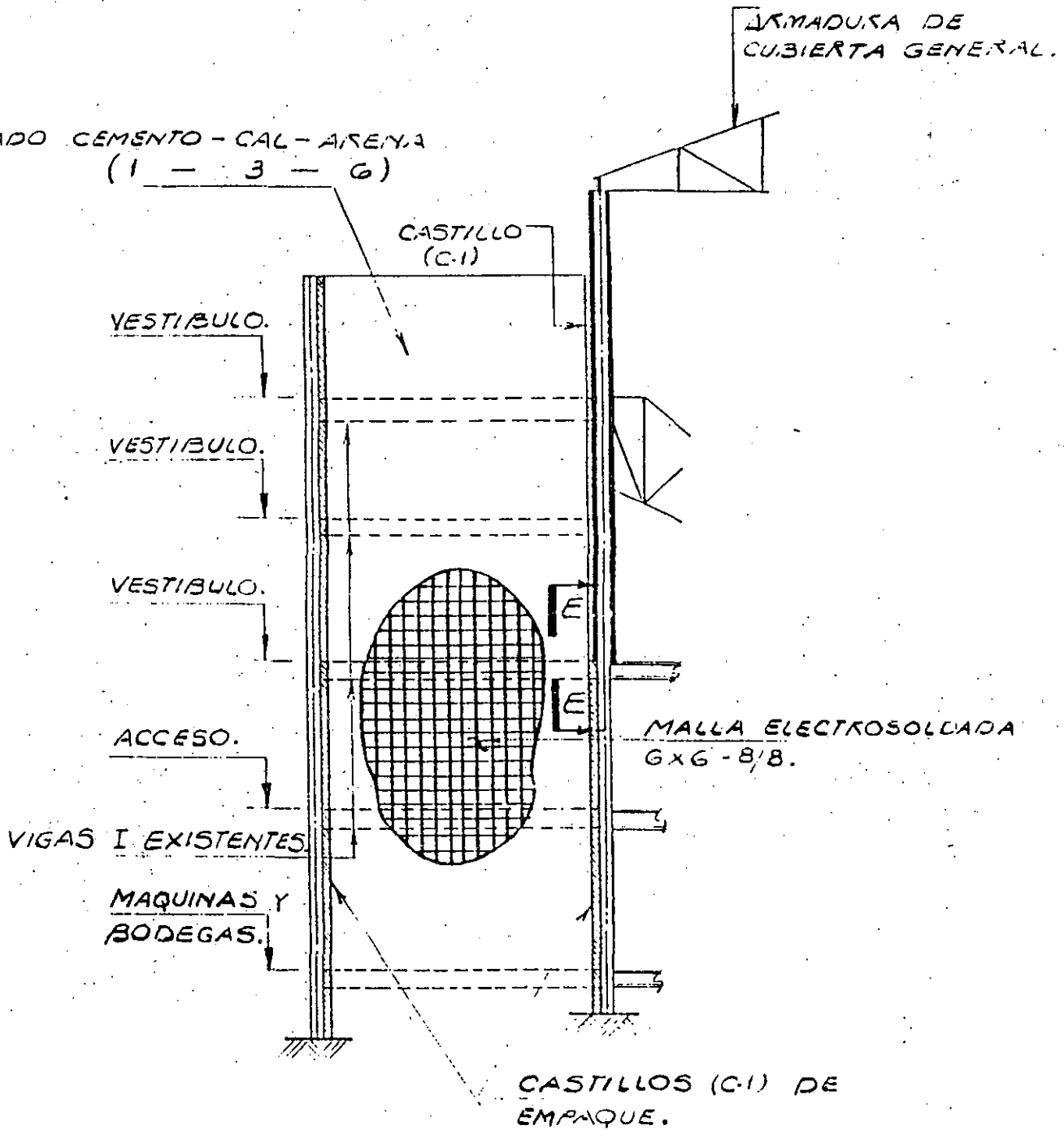
LA PARTE BOMBTEADA CORRESPONDE A LA COLUMNA EXISTENTE.

5 3/8" @ 30 (CONECTORES).



CONEXION DE MURDO A COLUMNA METALICA

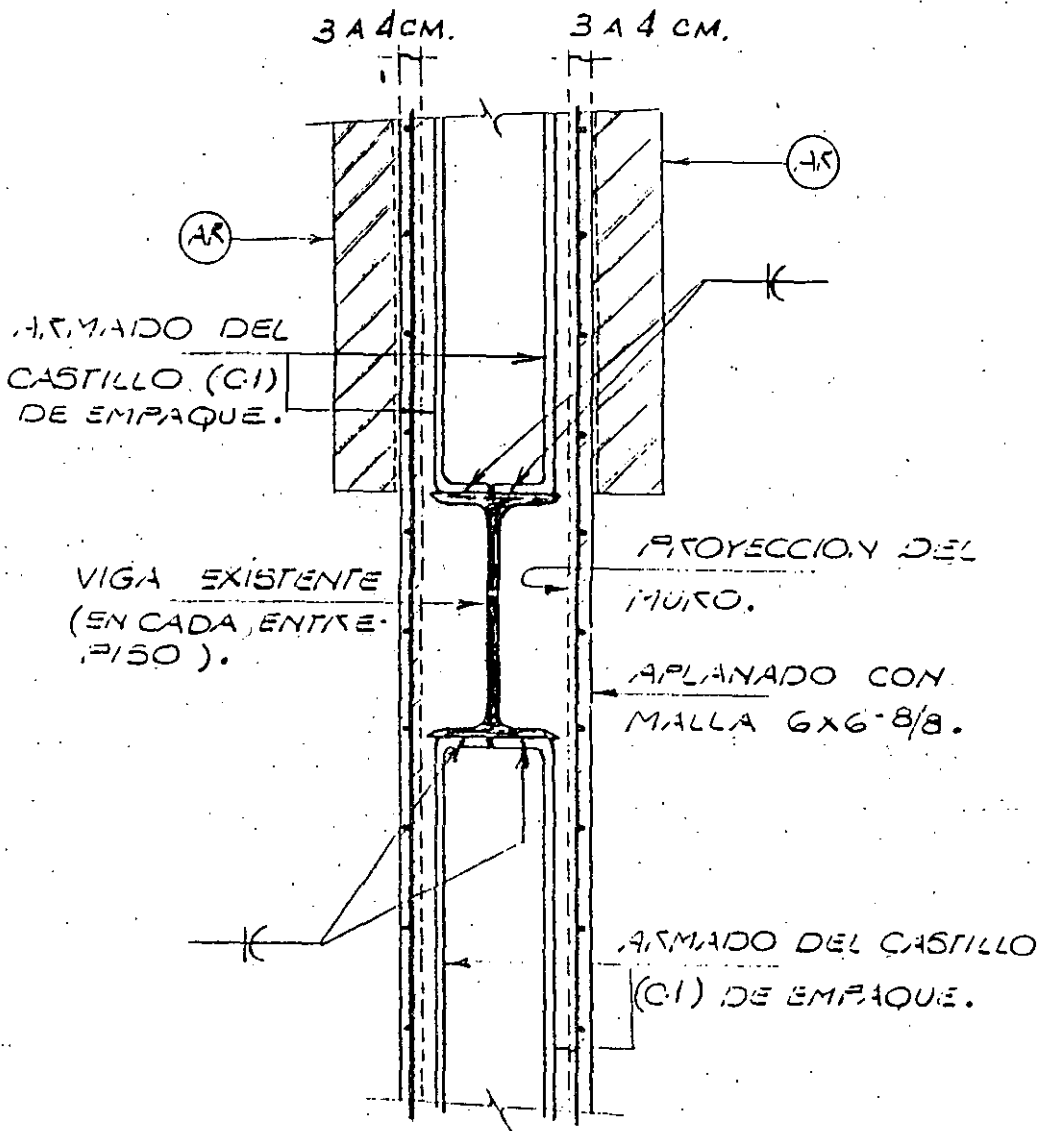
PLANTA



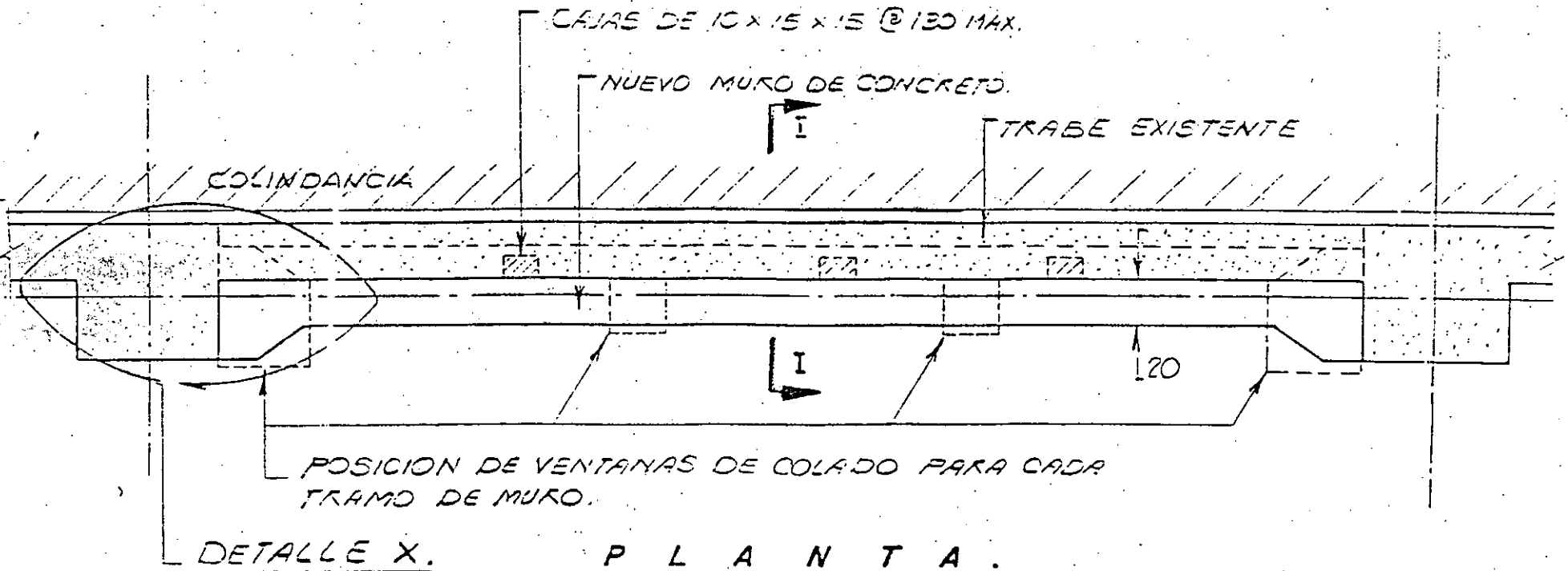
ELEVACION DEL MURO DE RIGIDEZ

PARA REFUERZO DE EST. METALICA.

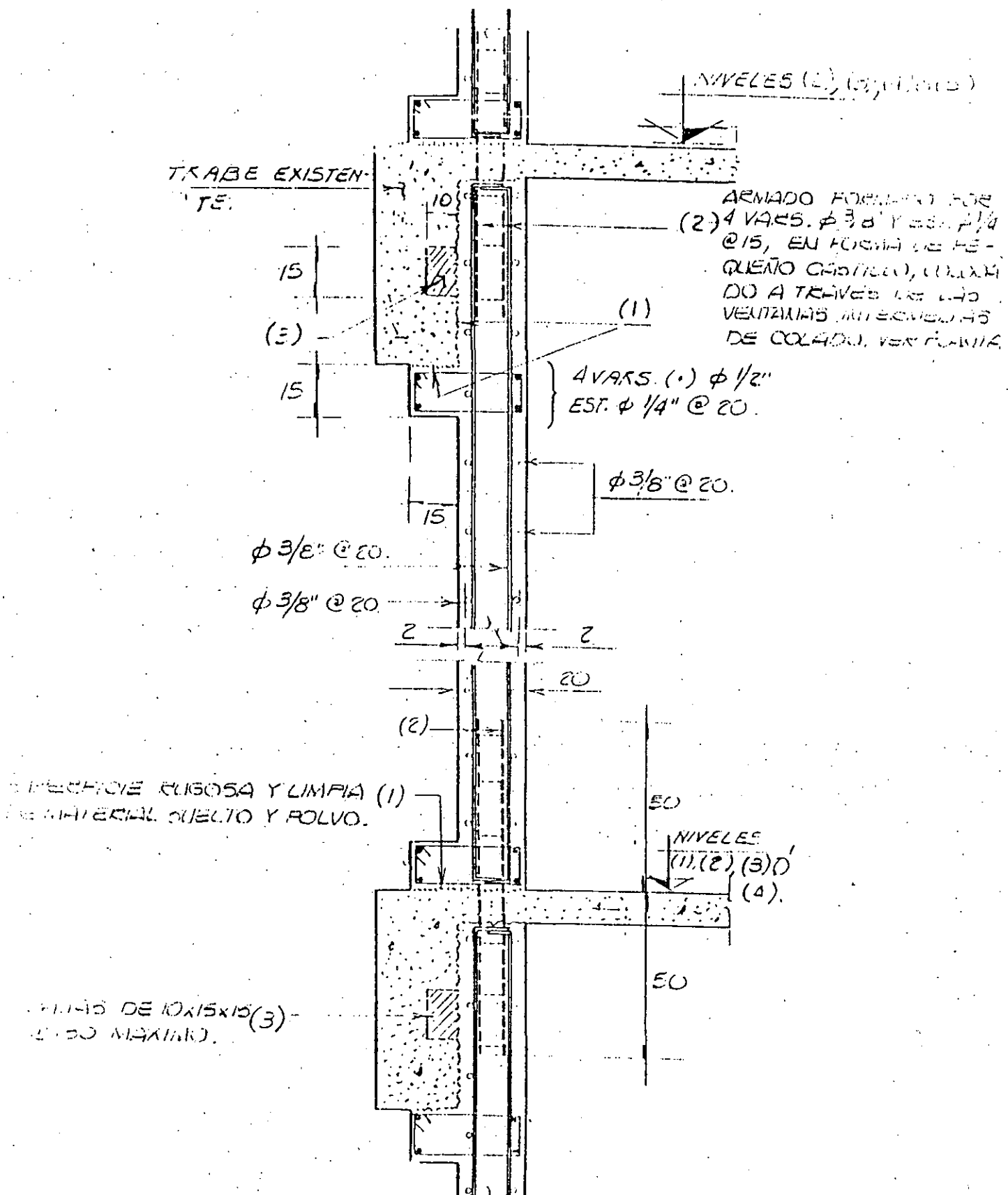


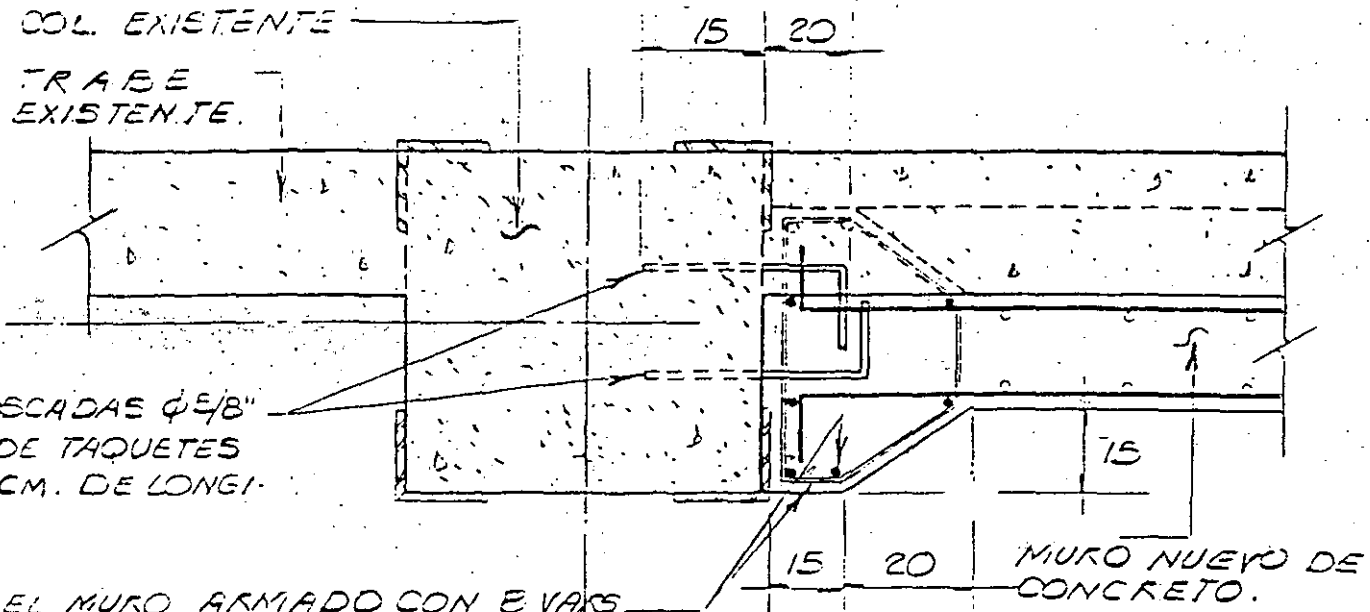


VISTA E-E.  
TIPICO



INCORPORACION DE MURO DE CONCRETO  
A ESTRUCTURA EXISTENTE.



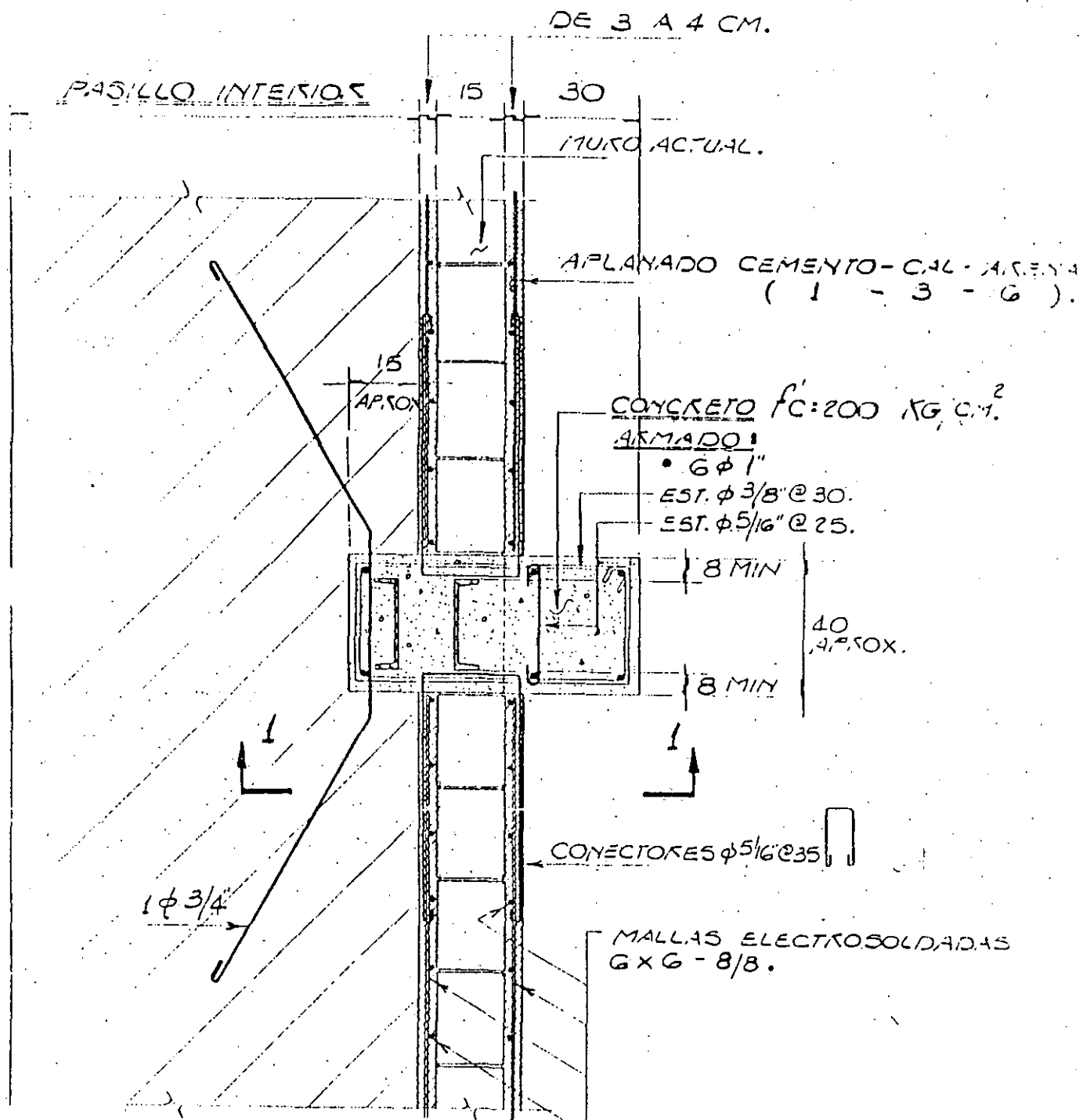


FRES DE VARS. ROSCADAS  $\phi 5/8"$   
 @ 50 MAX., DENTRO DE TAQUETES  
 EXPANSIVOS DE 15 CM. DE LONGI-  
 TUD.

EL B.O. EXTREMO DEL MURO, ARMADO CON 8 VARS.  
 $\phi 5/8"$  Y EST.  $\phi 3/8"$  @ 20". LAS VARS. (•) DEBERAN PASAR A  
 TRAVES DE TODOS LOS NIVELES Y ESTAR CONFINA-  
 DAS POR ESTRIBOS  $\nabla$ .

DETALLE X.

PLANTA



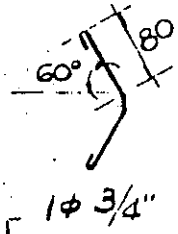
CONEXION DE MUROS DE TABIQUE A COLUMNA

P L A N T A

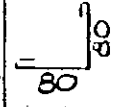
NUEVO PAÑO EXTERIOR

PAÑO EXTERIOR EXISTENTE

REFUERZO DE COLUMNAS EXISTENTES.



$\phi$  5/16" @ 35



(MASILLO PERIMETRAL)  
(NUEVO N.P.T.)

MIN. GRADERIA  
N. (5)



CAJAS CONECTORAS  
(15 X 15 X 5 @ 70)

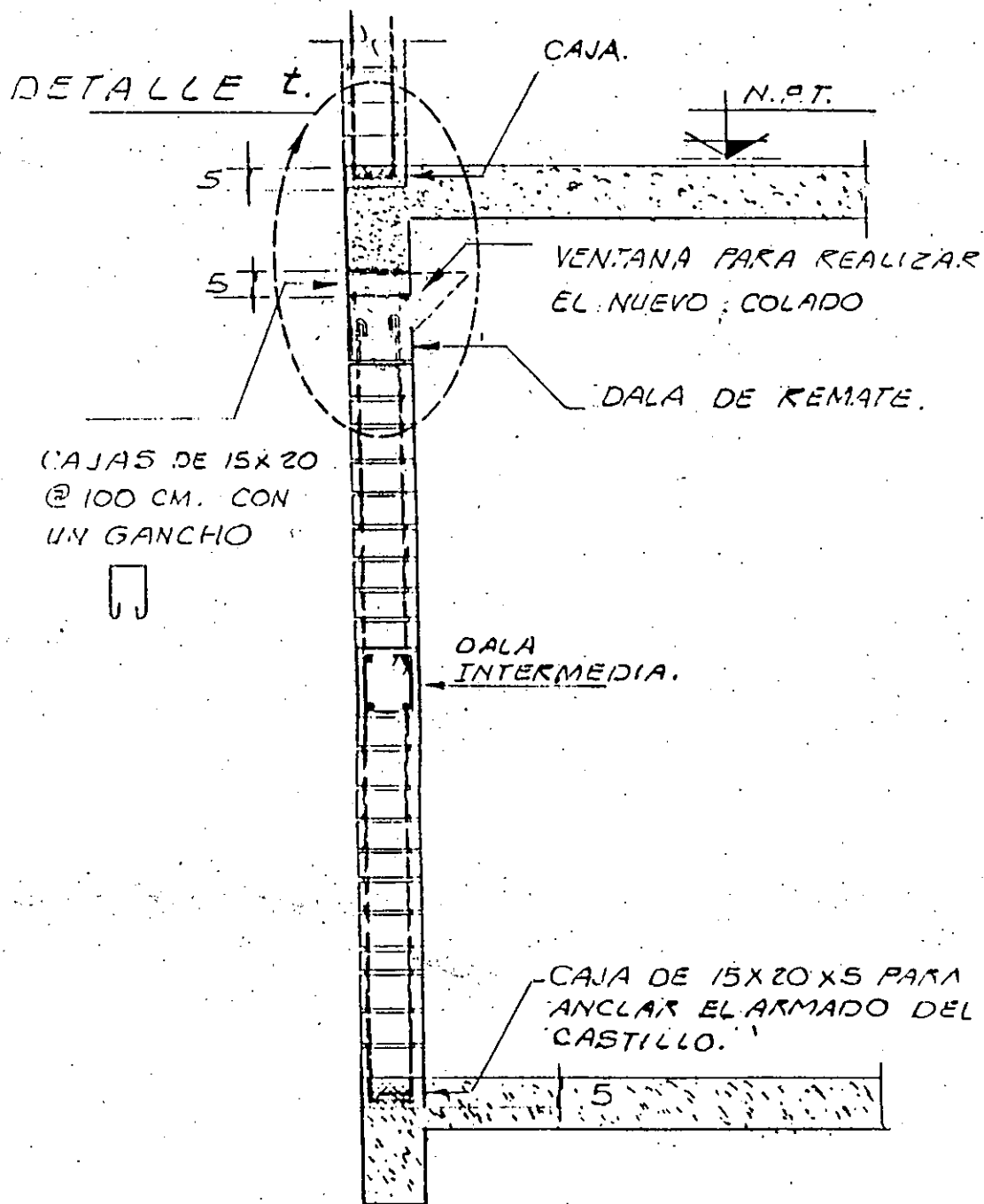
LOSA Y TRABE  
EXISTENTE.

GRAPAS  $\phi$  5/16" @ 150  
EN TODA LA ALTURA PARA  
UNIR MALLAS.

COL. METALICA EXISTENTE.

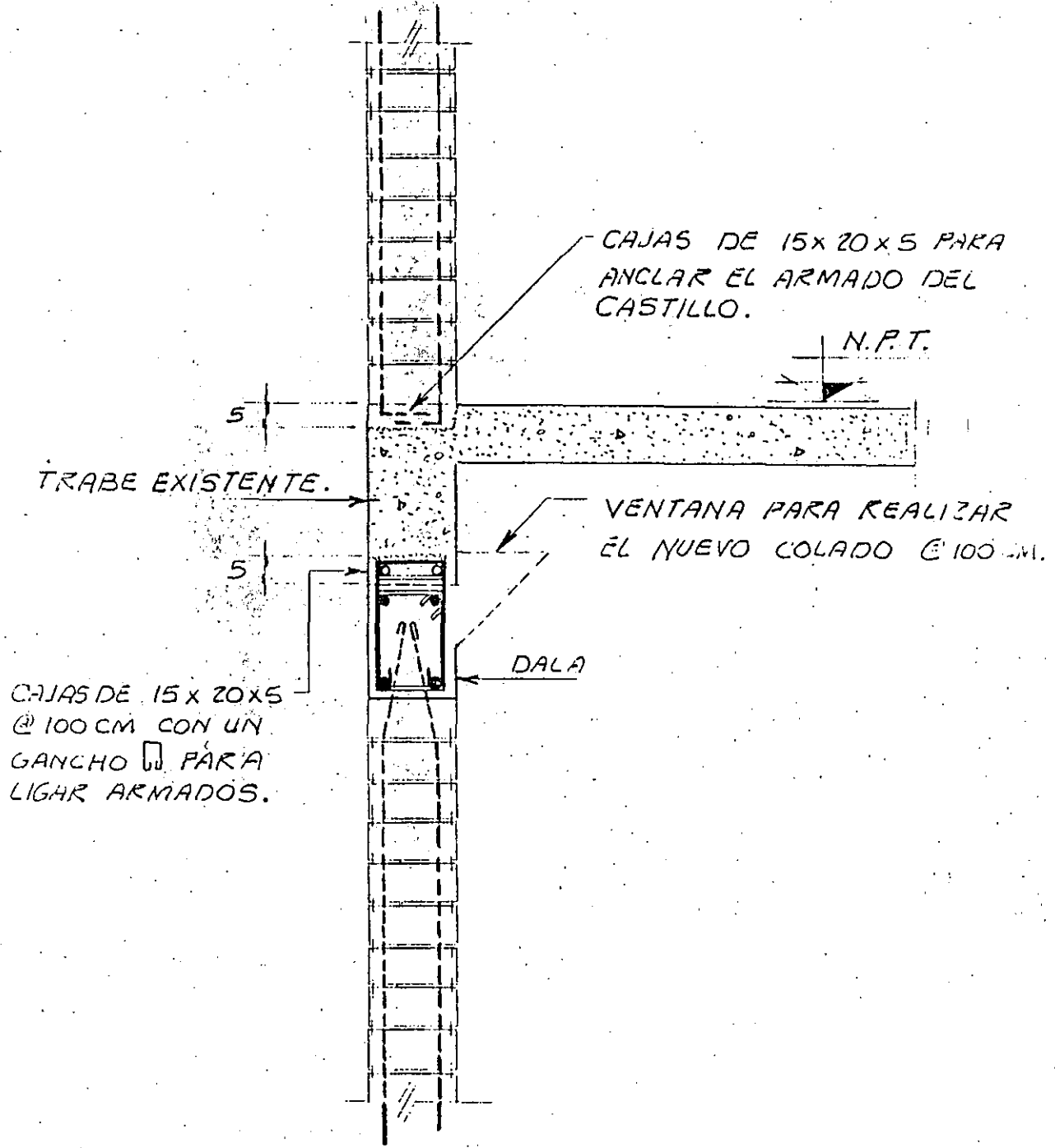
REFORZADO CON MALLA  
ELECTROSOLDADA  
6 X 6 - 8/8.

C O R T E I  
ELEVACION.



ELEVACION.

MURO DE RIGIDEZ ACOPLADO  
A LA ESTRUCTURA.

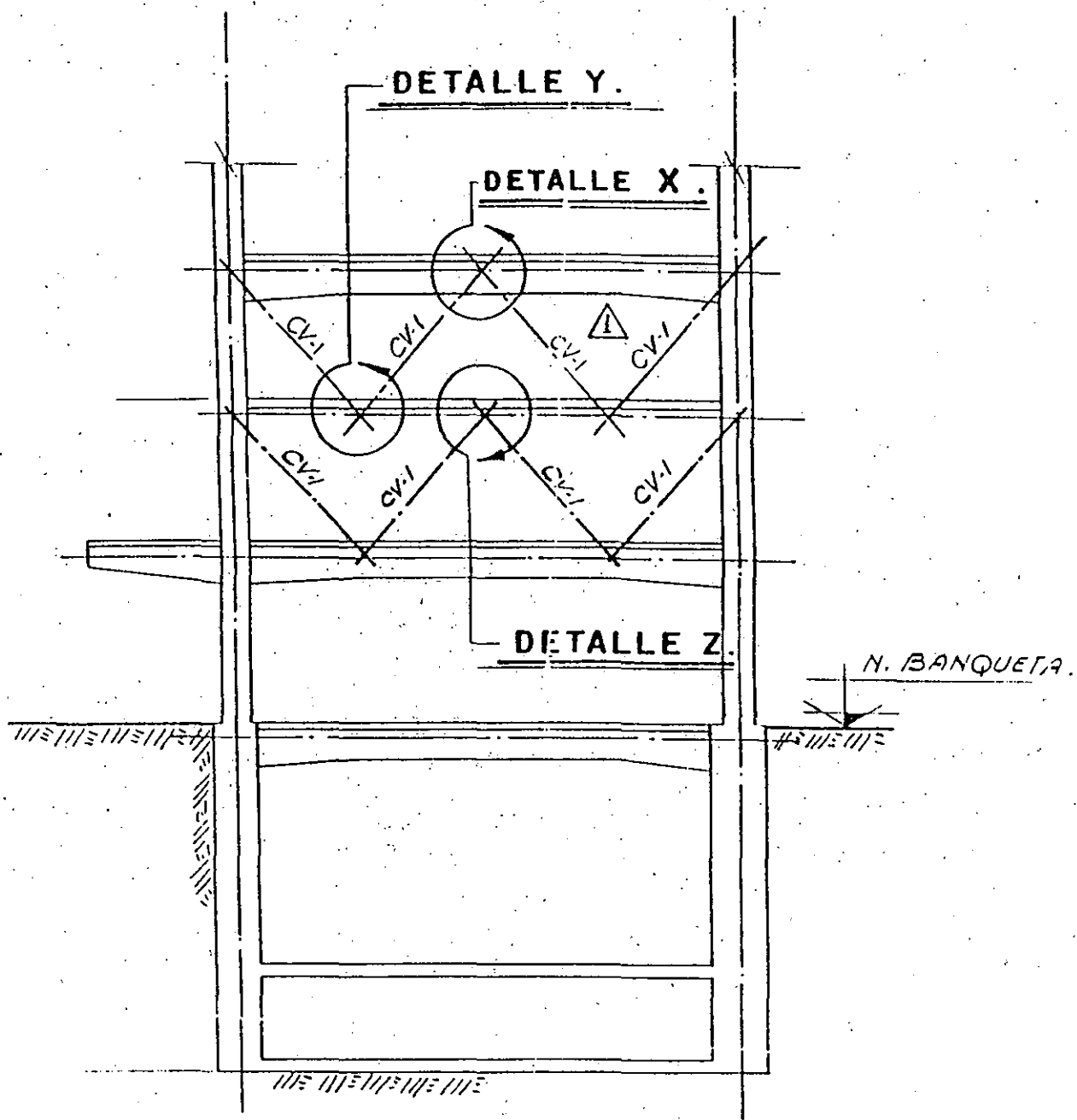


DETALLE t.



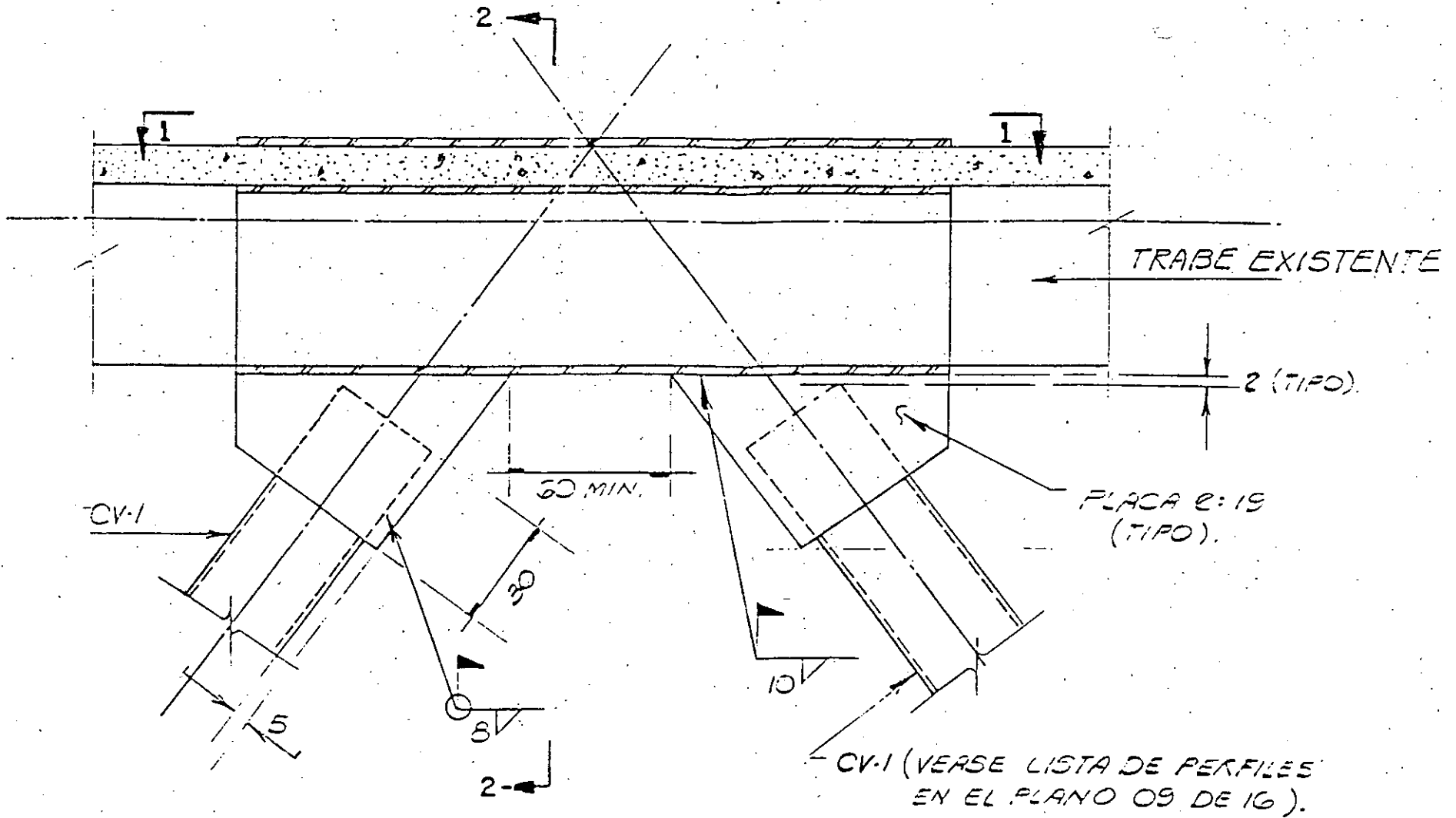
CONTRAVENTEO      DIAGONAL

D

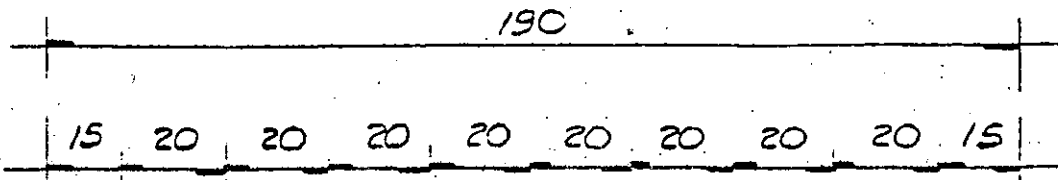


ELEVACION

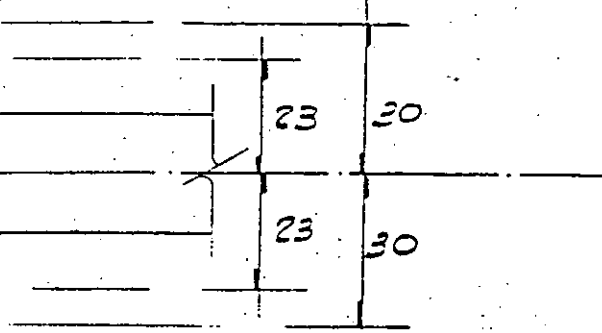
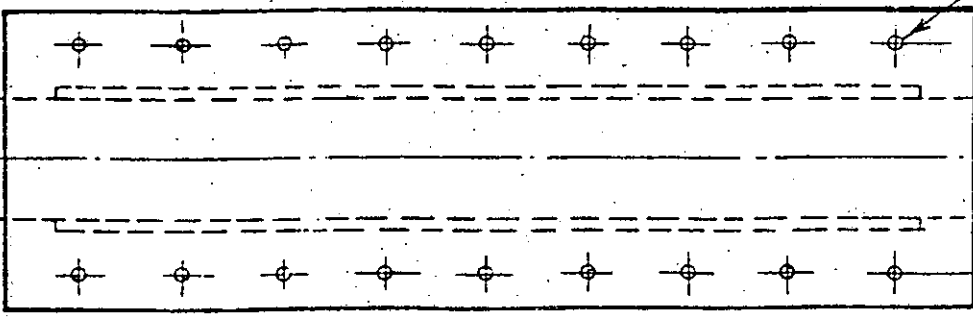
REFUERZO DE UN MARCO CON  
CONTRAVENTEO DIAGONAL.



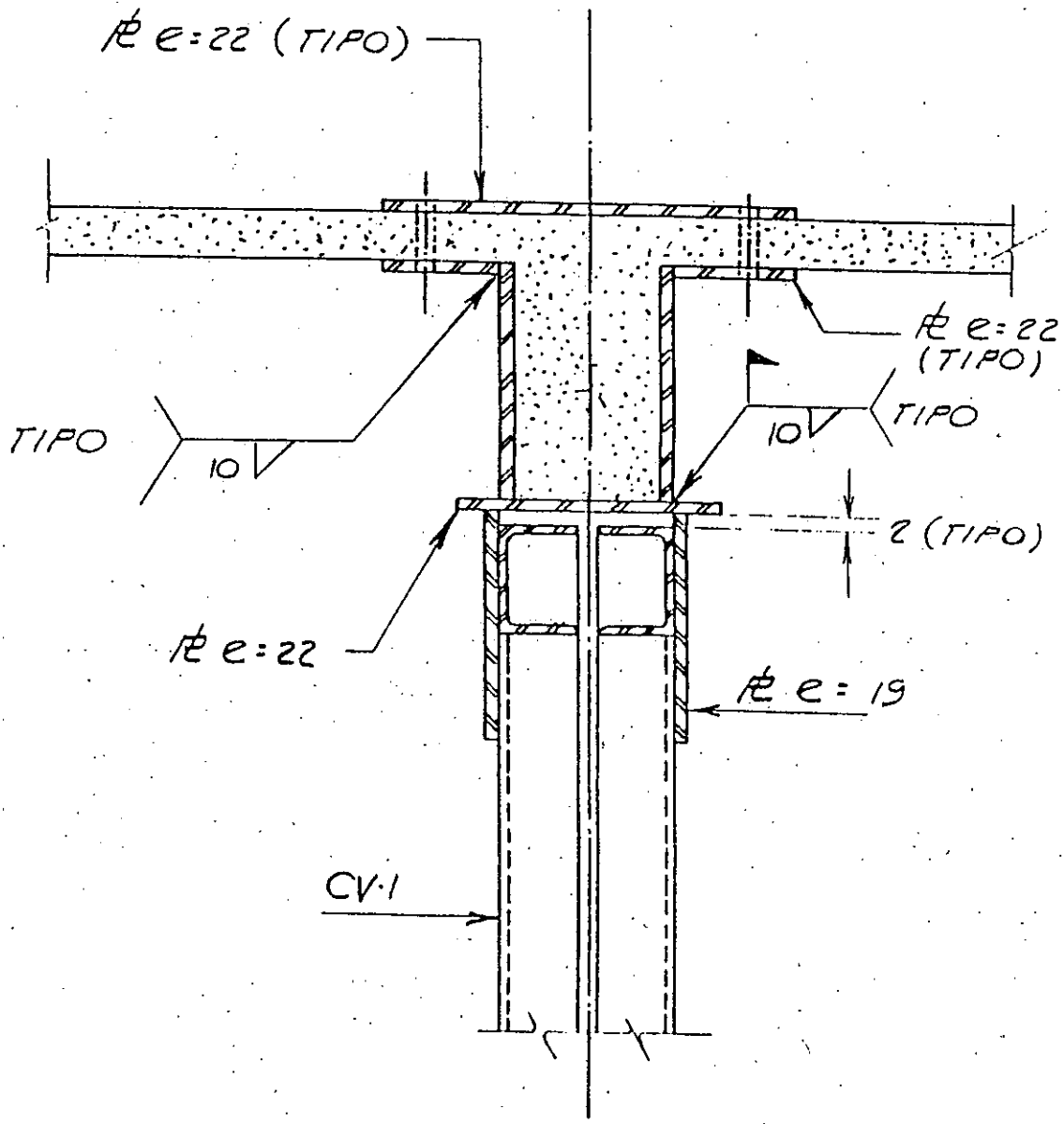
DETALLE X



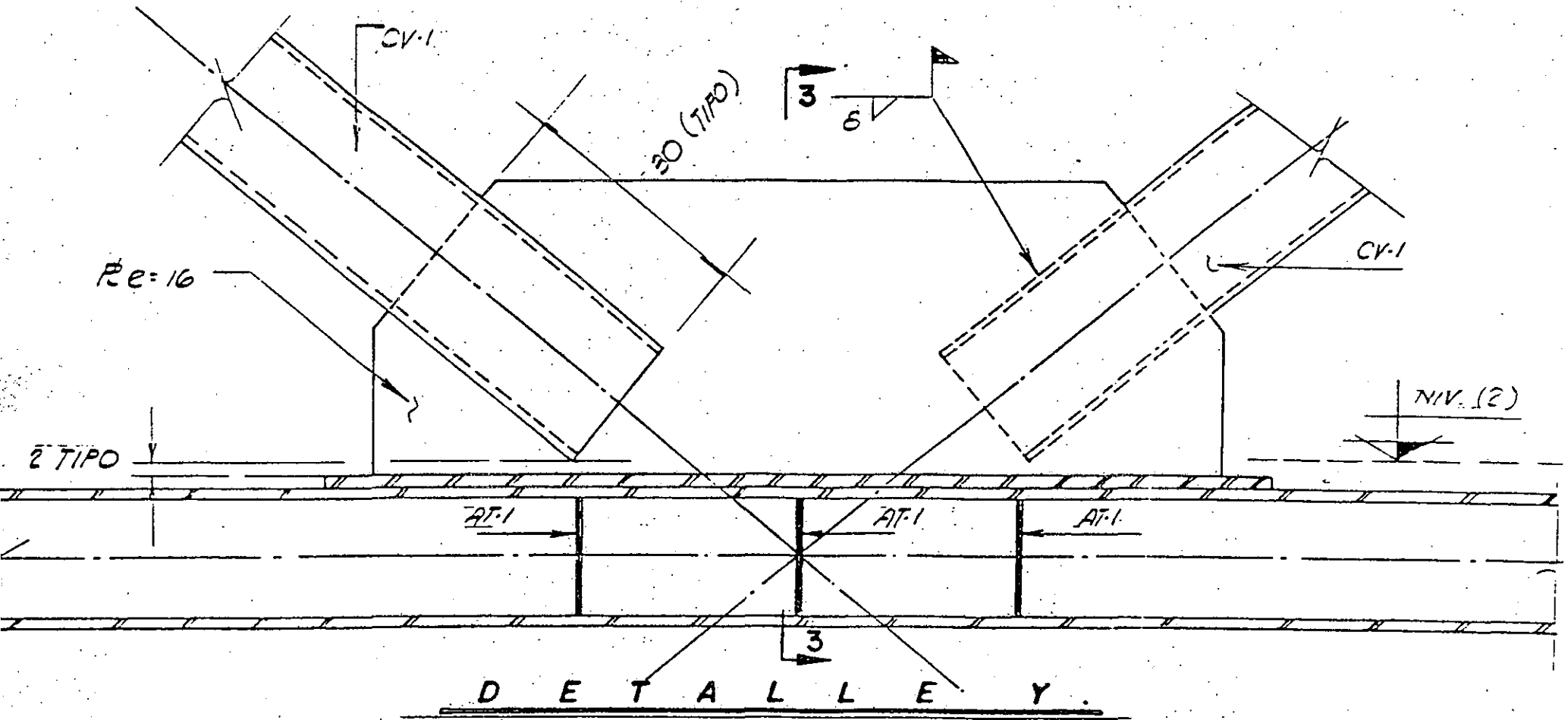
18 BARRENOS  $\phi = 22$   
PARA 18 TORNILLOS  $\phi = 15$ .

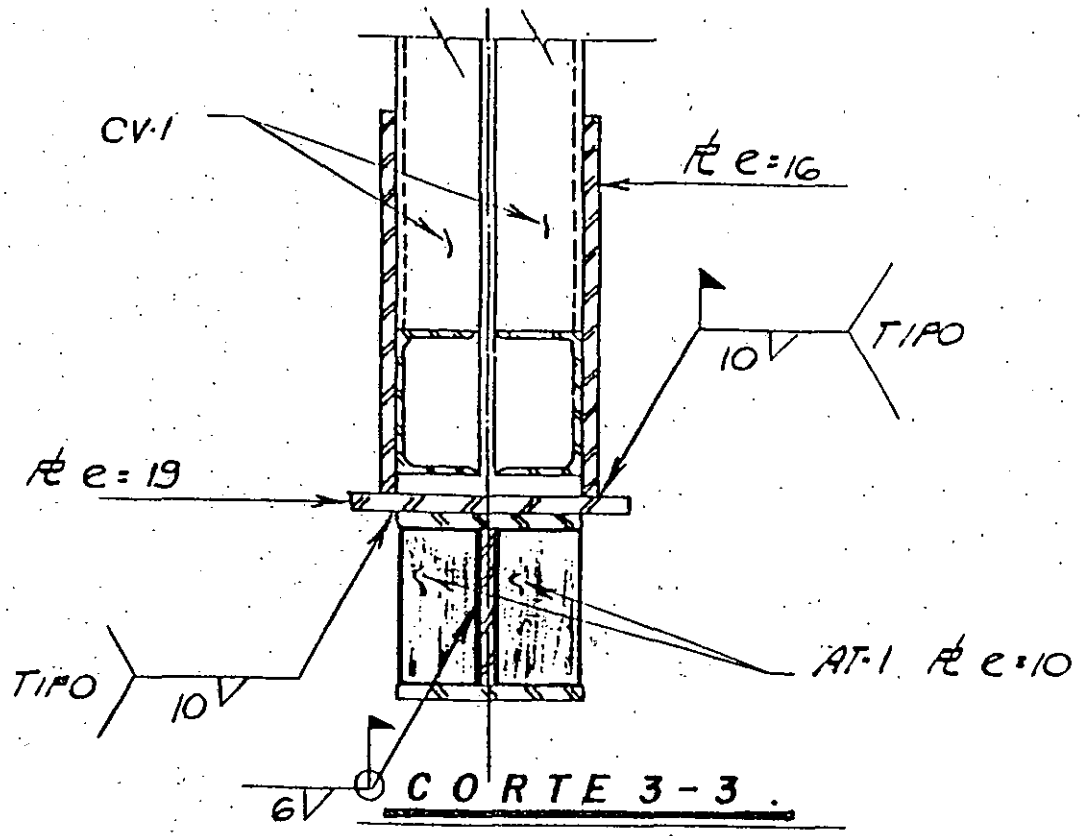


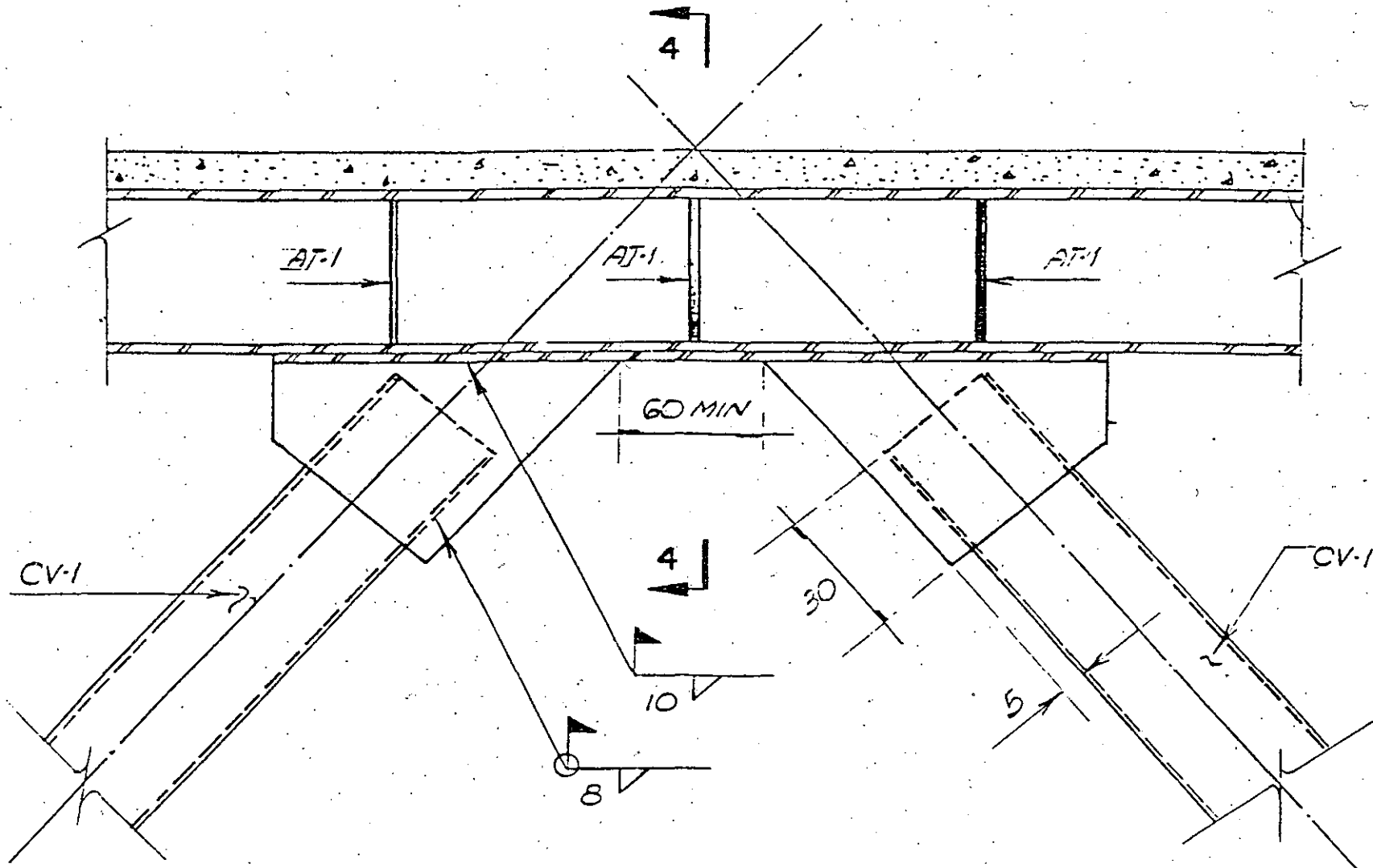
V I S T A 1 - 1 .



C O R T E 2 - 2 .

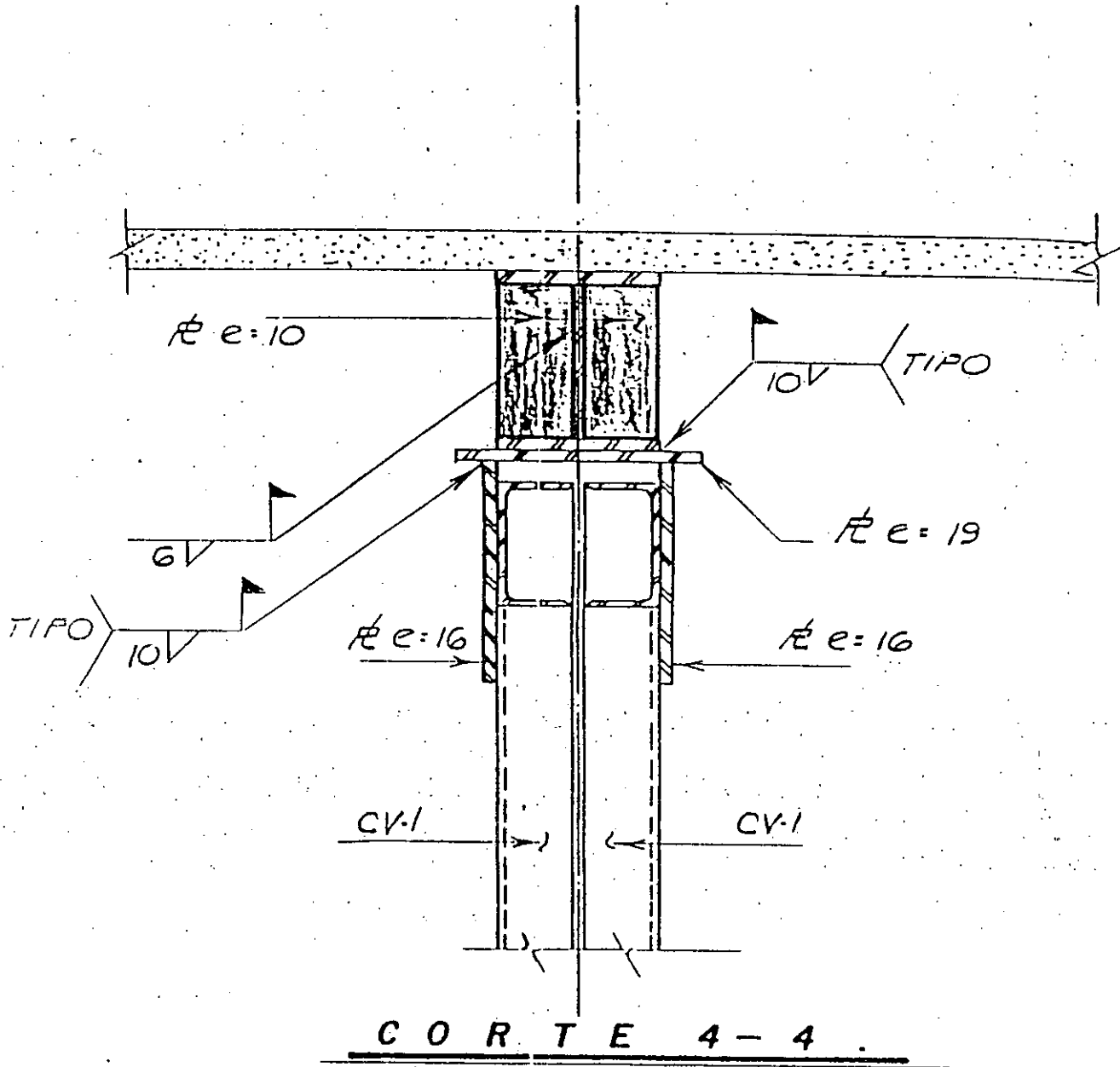






DETALLE Z.





## BIBLIOGRAFIA

1. "Repair and Strengthening of Reinforced Concrete, Stone and Brick-Masonry Buildings". Proc. Building Construction Under Seismic Conditions in the Balkan Region, Vol. 5, United Nations Development Programme, Vienna 1983.
2. Hernández B, O. "Procedimientos de Reparación de Estructuras Dañadas por Sismo" (primera etapa). Departamento del Distrito Federal. Dirección General de Construcción y Operación Hidráulica. México, D.F., Abril 1981.
3. Pinkham, C.W, y Hart, G.C. "A Methodology for Seismic Evaluation of Existing Multistory Residential Buildings". Department of Housing and Urban Development. Office of Policy Development & Research. Junio 1977.
4. Hirosawa, M. et al. "Analysis on Damage of the Kurayoshi Higashi City Office Building During the Tottori Earthquake of 1983". Building Research Institute, Japón, Diciembre 1984.
5. Hirosawa, M. et al. "Analysis on Damage of the Namioka Town Hospital Building During the 1983 Nihonkai-Chubu Earthquake and Retrofit Design of the Building". Building Research Institute, Japón, Agosto 1985.
6. Loera, S. "Manual para Evaluar Daños Causados por Sismos en Edificios de Concreto Reforzado", Departamento del Distrito Federal, México, Marzo 1982.
7. Mendoza, C.J. "Manual para Evaluar Daños causados por Sismos en Estructuras de Mampostería". Departamento del Distrito Federal, México, Mayo 1982.
8. Petrovski, J. "Metodología y Procedimientos para la Evaluación de Daños Producidos por Terremotos". Institute of Earthquake Engineering and Engineering Seismology, Yugoslavia, 1983.
9. "Basic Concepts of Seismic Codes", Vol. I. The International Association for Earthquake Engineering, Japón, 1980.
10. Mendoza, C.J. y Montero C., M. "Reparación de Estructuras de Mampostería Dañadas por Sismo". Secretaría de Asentamientos Humanos y Obras Públicas, México, Febrero 1982.
11. "Repair of Buildings Damaged by Earthquakes". Department of Economic and Social Affairs. United Nations. New York, 1977.

12. Robles F. V., F. y González R., R. "Aspectos Fundamentales del Diseño de Estructuras de Madera". 1a. edición. Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, México, 1985.
13. Ratay, R. T. "Handbook of Temporary Structures in Construction". McGraw-Hill Book Company. U.S.A., 1984.
14. Fernández Cánovas, M. "Las Resinas Epoxi en la Construcción". Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y del Cemento. Madrid, 1974.
15. "Concrete Manual" U.S. Department of the Interior Bureau of Reclamation. Washington, D.C., 1975.
16. Bazan Z., E. y Meli P., R., "Manual de Diseño Sísmico de Edificios". 1a. edición. Ed. Limusa, México, 1985.
17. Neville, A.M. "Properties of Concrete" 2a. edición. Pitman Publishing, Londres 1973.
18. "ACI Manual of Concrete Inspection". SP-2. 6a. edición, American Concrete Institute. Detroit 1975.
19. Okada, T. "Standard for Evaluation of Seismic Capacity of Existing Reinforced Concrete Building". Japan Building Disaster Prevention Association. Tokyo, 1977.
20. "A Guide for the Use of Epoxide Resins with Concrete for Building and Civil Engineering". Advisory Note, No. 12. British Plastics Federation. Cement and Concrete Association. Londres.
21. Jaber, M. M. et al. "Repair of Concrete with Polymers". Center for Highway Research the University of Texas at Austin, U.S.A., Febrero, 1975.
22. Van Vlack, L. H. "Materials for Engineering" Addison-Wesley Publishing Company, Inc. U.S.A. 1982.
23. Zbigniew, D.J. "Naturaleza y Propiedades de los Materiales para Ingeniería". 2a. edición. Nueva Editorial Interamericana, México, 1979.
24. "Special Concretes, Mortars and Products. Portland Cement Association". John Wiley & Sons, Inc. U.S.A. 1980.
25. Allen, R.T.L. "The Repair of Concrete Structures". Cement and Concrete Association. London 1974.
26. Fulton, F. S. "Defects and Repairs". Cement and Concrete. Johannesbrug 1971.

39. "El Cable de Acero. Especificaciones". Cables Mexicanos, S.A. México.
40. "Lista de Publicidad sobre Resinas": Sika Mexicana, S.A.; Especialidades Epóxicas e Industriales, S.A.; Duro Rock, S.A.; Poldi, S.A.; Fester de México; Adicionantes para Concreto, S.A.
41. "Lista de Publicidad sobre Polímeros": Sika Mexicana, S.A.; Poldi, S.A.; Fester de México; Química Hoechst de México, S.A.
42. "Lista de Publicidad sobre Aditivos y Adhesivos para Concreto": Fester de México; Sika Mexicana, S.A.; Poldi, S.A.; Duro Rock, S.A.
43. "Lista de Distribuidores de Andamios Tubulares en México" México.
44. "Manual de Operaciones y Aplicaciones para R-METER (JAMES C-4956)".
45. "Concrete Catalog" Soiltest, Inc., Evaston, Ill. U.S.A. 1976.
46. "The Windsor Probe Test System. Instruction Manual" Densicon, Inc. Elmwood, Conn., U.S.A.
47. "Sistema de Pruebas de Concreto por Medio de la Sonda de Windsor". Windsor Probe Test Systems, Inc., Elmwood, Conn. U.S.A.
48. Ripoll, J. "Reparación de Estructuras Fisuradas. Pretensado. Resinas Epoxi". Hormigón y Acero No. 112, 3er. Trimestre de 1974. España.
49. Guerrero V., G. "Reparación y Refuerzo de Edificios Dañados por el Sismo del 3 de Mayo de 1965 en la Ciudad de San Salvador, El Salvador" Ingeniería UNAM, Vol. XXXVI, No. 1, México, Enero 1966.
50. Falcon, B. "Reparación de Estructuras de Concreto". Proc. Simposio Internacional sobre Tecnología del Concreto. Monterrey, 1977.
51. Vié, G. "Interesantes Aplicaciones de las Resinas Sintéticas en Obras de Ingeniería Civil". Informes de la Construcción, Año XXIII, España, Diciembre 1970.
52. "Tratamiento de las Fisuras del Hormigón con Inyección de Resinas". Informes de la Construcción, Año XXVI, No. 252, España, Julio de 1973.

53. Gaul, R.W. et al. "Effective and Practical Structural Repair of Cracked Concrete". Proc. SP-21. American Concrete Institute. Detroit, 1968.
54. "Buildings Damaged in Earthquake" Civil Engineering, Vol. 43 No. 10, U.S.A. Octubre 1973.
55. Gallegos, H. y Ríos, R. "Earthquake-Repair-Earthquake". Proc. SP53-18. American Concrete Institute, Detroit.
56. Okamoto, S. et al. "Testing, Repair and Strengthening and Retesting of a Full Scale Seven Story Reinforced Concrete Building" Proc. SP84-6 American Concrete Institute. Detroit.
57. Nene, R.L. "Repairs and Restoration of Reinforced Concrete Columns" Proc. SP85-12. American Concrete Institute, Detroit.
58. Berger, R. "Reparación en Planta de Tubos de Concreto". Modern Concrete, Vol. 42, No. 5, U.S.A. Septiembre 1978.
59. Anderson, A. H. Jr. "Mantenimiento Adecuado para Evitar Deterioros en Edificios de Concreto" Concrete International Vol. 2, No. 9, U.S.A., Septiembre 1980.
60. Tabor, L.J. "Reparaciones del Concreto". Precast Concrete, Vol. 10, No. 2, Londres, Febrero 1979.
61. Warner, J. "Epoxyes-"Miracle"-Materials don't Always Give Miracle Results". Civil Engineering, Vol. 48, No. 2. U.S.A. Febrero 1978.
62. McKenzie, G.H.F., et al. "Guidelines and Procedures for Strengthening of Buildings" Procc. 8 WCEE, Vol. 1, San Francisco, E.U.A. 1984.
63. Yao, J.T.P., "Computer-Based Assesment of Seismic Damage" Proc. 8WCEE, Vol. 1, San Francisco, E.U.A., 1984.
64. Wyllie, L. A. Jr. y Olson, R.D. "Establishing Priorities and Financing for Seismic Strengthening of Existing Buildings in California". Proc. 8WCEE, Vol. 1, San Francisco, E.U.A. 1984.
65. Zezhen, N. et al. "A Study of Aseismic Strengthening for Multistory Brick Buildings by Additional R/C Columns" Proc. 8WCEE Vol. 1, San Francisco, E.U.A. 1984.
66. Kahn, L. F. "Shotcrete Retrofit for Unreinforced Brick Masonry" Proc. 8WCEE, Vol. 1, San Francisco, E.U.A. 1984.
67. Hutchison, D.L. et al. "Laboratory Testing of a Variety of Strengthening Solutions for Brick Mansonry Wall Panels". Proc. 8WCEE, Vol. 1, San Francisco, E.U.A., 1984.

68. Giangreco, E. et al. "Stress Analysis and Strengthening Techniques of Masonry Buildings" Proc. 8WCEE, Vol. 1, San Francisco, E.U.A. 1984.
69. Takaki, M. y Ikeda, A. "Evaluation & Strengthening of a Existing Reinforced Concrete School Building" Proc. 8WCEE, Vol. 1, San Francisco, E.U.A. 1984.
70. Kawabata, S. et al. "A Case Study of Seismic Strengthening of Existing Reinforced Concrete Buildings in Shizuka Prefecture, Japan", Proc. 8WCEE, Vol. 1, San Francisco, E.U.A. 1984.
71. Bolong, Z. y Xilin, L. "Earthquake Damage Analysis and Strengthening of the Main Building 311" Proc. 8WCEE, Vol. 1, San Francisco, E.U.A. 1984.
72. Freeland, G.E. y Sethi M. "Seismic Upgrade of Building 311". Proc. 8WCEE, Vol. 1, San Francisco, E.U.A. 1984.
73. Lakshmiathy, M. et al. "Repair of Structures Damaged During Earthquakes Using Fibrous Concrete". Proc. 8WCEE, Vol. 1, San Francisco, E.U.A. 1984.
74. Norman Owen, G., et al. "Vibration Testing of an Epoxy-Repaired Fullscale Reinforced Concrete Structure". Proc. 8WCEE, Vol. 1, San Francisco, E.U.A. 1984.
75. Endo, T. et al. "Practice of Seismic Retrofit of Existing Concrete Structures in Japan" Proc. 8WCEE, Vol. 1, San Francisco, E.U.A. 1984.
76. Aoyama, H. et al. "Strength and Behavior of Postcast Shear Walls for Strengthening of Existing Reinforced Concrete Building". Proc. 8WCEE, Vol. 1, San Francisco, E.U.A. 1984.
77. Higashi, Y. et al. "Experimental Studies on Retrofitting of Reinforced Concrete Building Frames" Proc. 8WCEE, Vol. 1, San Francisco, E.U.A. 1984.
78. Liangduo, Z. y Xiangqian, N. "Experimental Study and Analysis of Earthquake Damage of R/C Frame Buildings with Exterior Brick Bearing Walls Their Strengthening". Proc. 8WCEE, San Francisco, E.U.A. 1984.
79. Yüzügüllü, O. "Bolted Connections for Precast R.C. Panels Used for Repair and/or Strengthening" Proc. 8WCEE, Vol. 1, San Francisco, E.U.A., 1984.
80. Van Gemert, D.A. "Repair and Strengthening of Reinforced Concrete Plates by Epoxy-Bonded Steel Plates" Proc. 8WCEE Vol. 1, San Francisco, E.U.A. 1984.

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that this is essential for ensuring transparency and accountability in the organization's operations.

2. The second part of the document outlines the specific procedures and protocols that must be followed when conducting financial transactions. It details the steps from initial request to final approval and recording, ensuring that all necessary checks and balances are in place.

3. The third part of the document addresses the role of the audit committee in overseeing the organization's financial health. It describes how the committee should regularly review financial statements and reports to identify any potential issues or areas for improvement.

4. The fourth part of the document discusses the importance of maintaining up-to-date financial records and ensuring that they are easily accessible to authorized personnel. It highlights the need for secure storage and regular backups of all financial data.

5. The fifth part of the document provides a summary of the key findings and recommendations from the audit. It identifies the areas where the organization's financial practices are strong and where there are opportunities for improvement, along with specific action items to address these areas.

6. The sixth part of the document discusses the overall financial performance of the organization over the reporting period. It provides a detailed analysis of revenue, expenses, and profit margins, along with a comparison to budgeted figures and industry benchmarks.

7. The seventh part of the document outlines the organization's financial outlook for the coming year. It discusses the expected challenges and opportunities, along with the strategies and initiatives that will be implemented to ensure long-term financial success.

8. The eighth part of the document provides a final summary and conclusion, reiterating the organization's commitment to financial integrity and transparency. It expresses confidence in the organization's ability to meet its financial goals and maintain a strong financial position.

94. Uemura, H. "A Guideline to Evaluate Seismic Performance of Existing Medium and Low-Rise Reinforced Concrete Buildings and its Application" Proc. 7WCEE, Vol. 4, Estambul, Turquía, Sept. 1980
95. Kahn, L.F. "Strengthening Existing RC Columns for Earthquake Resistance" Proc. 7WCEE, Vol. 4, Estambul, Turquía, Sept. 1980.
96. Ifrim, M. "Strengthening Concept After Romanian Streng Earthquake of March 4, 1977" Proc. 7WCEE; Vol. 4, Estambul, Turquía Sept. 1980.
97. Jabarov, M. et al. "Strengthening of Damaged Masonry by Reinforced Mortar Layers" Proc. 7WCEE, Vol. 4, Estambul, Turquía, Sept. 1980.
98. Yüzügüllü, O. "Multiple Precast Reinforced Concrete Panels for Aseismic Strengthening of R.C. Frames" Proc. 7WCEE, Vol. 6, Estambul Turquía, Sept. 1980.
99. Ihki, K. y Bessho, S. "Experimental Investigation on Aseismic Strengthening for Existing Reinforced Concrete Frames" Proc. 7WCEE, Vol. 6, Estambul, Turquía.
100. Sheppard, P. y Terceelj, S. "The Effect of Repair and Strengthening Methods for Masonry Walls". Proc. 7WCEE, Vol. 6, Estambul, Turquía, Sept. 1980.
101. Yucheng, Yang y Liu, Yang "Empirical Relationship between Damage to Multistory Brick Buildings and Strength of Walls During the Tnaghahan Earthquake" Proc. 7WCEE, Vol. 6, Estambul, Turquía, Sept. 1980.
102. Kuroiwa, J. y Kogan, J. "Repair and Strengthening of Buildings Damaged by Earthquakes". Proc. 7WCEE, Vol. 4, Estambul, Turquía, Sept. 1980.
103. "Diseño y Construcción de Estructuras de Madera. Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcción para el Distrito Federal". Instituto de Ingeniería. UNAM. México, Julio 1977.
104. "Diseño y Construcción de Estructuras Metálicas. Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal". Instituto de Ingeniería UNAM. México, Julio 1977.
105. "Varillas Corrugadas y Lisas, de Acero, Procedentes de Lijote o Palanquilla, para Refuerzo de Concreto". (NOM-B-6-1980) Norma Oficial Mexicana, México, 1980



THE UNIVERSITY OF CHICAGO  
DEPARTMENT OF CHEMISTRY  
58 CHEMISTRY BUILDING  
CHICAGO, ILLINOIS 60637

DATE: 10/15/68  
TO: DR. J. H. GOLDSTEIN  
FROM: DR. R. M. WAYMIRE

RE: 13C NMR SPECTRA OF  
POLYMERIZATION PRODUCTS

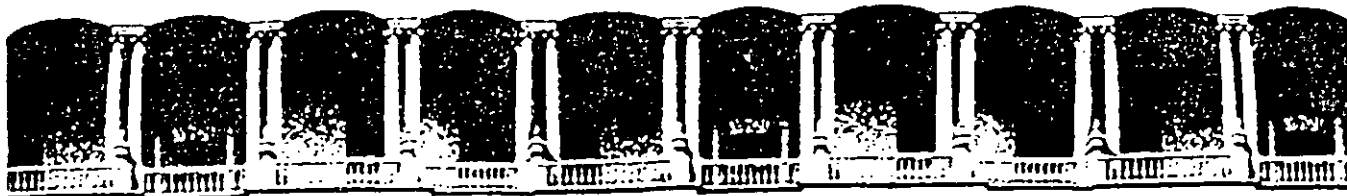
Enclosed are 13C NMR spectra  
of the polymerization products

of the reaction of ethylene  
with the catalyst system

described in your letter  
of 10/10/68.

The spectra show the presence  
of both the expected  
polymer and the catalyst

residuals. The chemical  
shifts are in the range  
of 10-40 ppm.



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

XVIII CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

MOD. III. DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

ANALISIS DE ESTRUCTURAS ANTE CARGAS LATERALES.

DR. ROBERTO STARK

JULIO 1992.

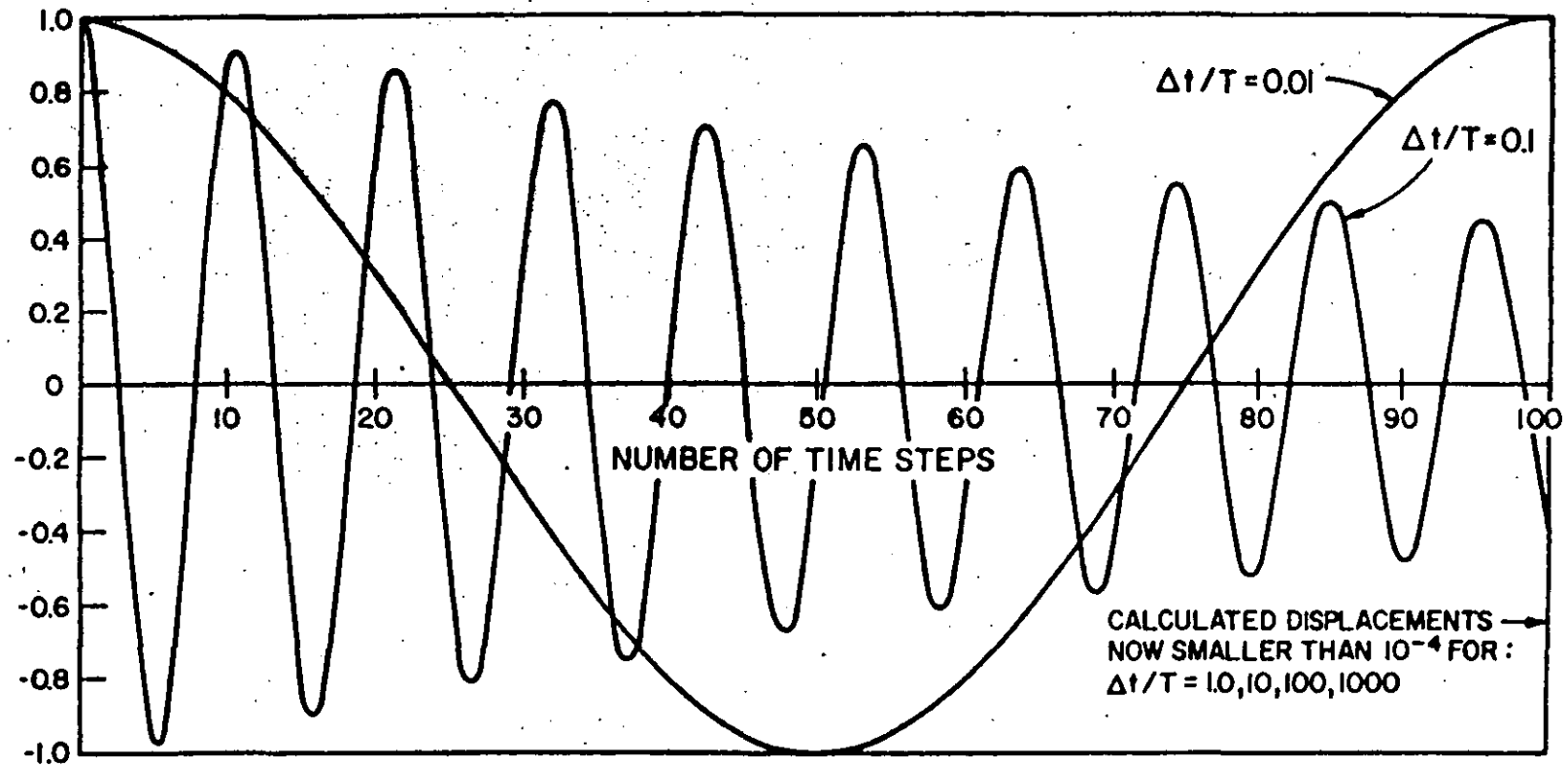


FIGURE 7 DISPLACEMENT RESPONSE IN 100 TIME STEPS (WILSON METHOD,  $\theta=1.4$ )

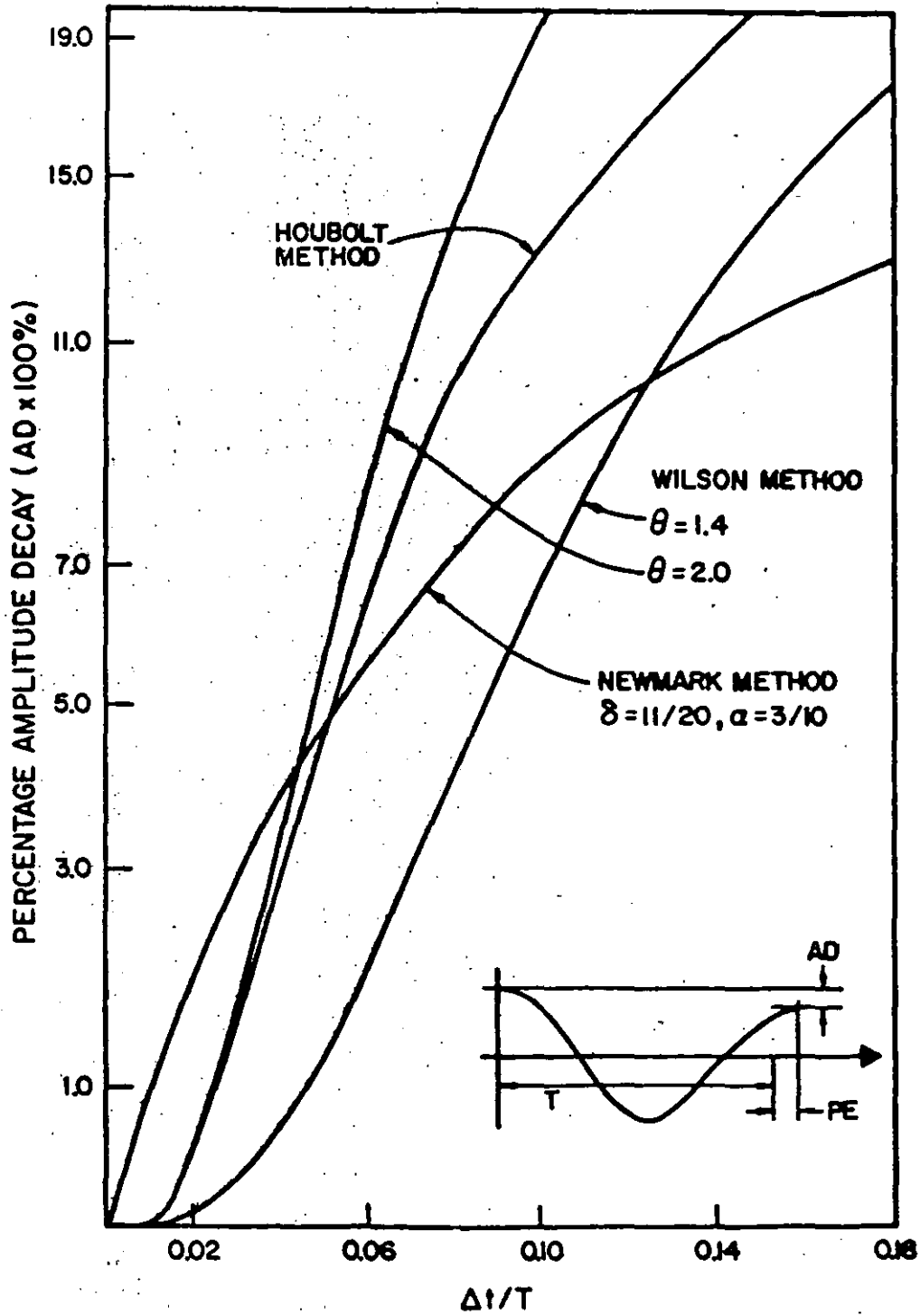


FIGURE 4 PERCENTAGE AMPLITUDE DECAYS

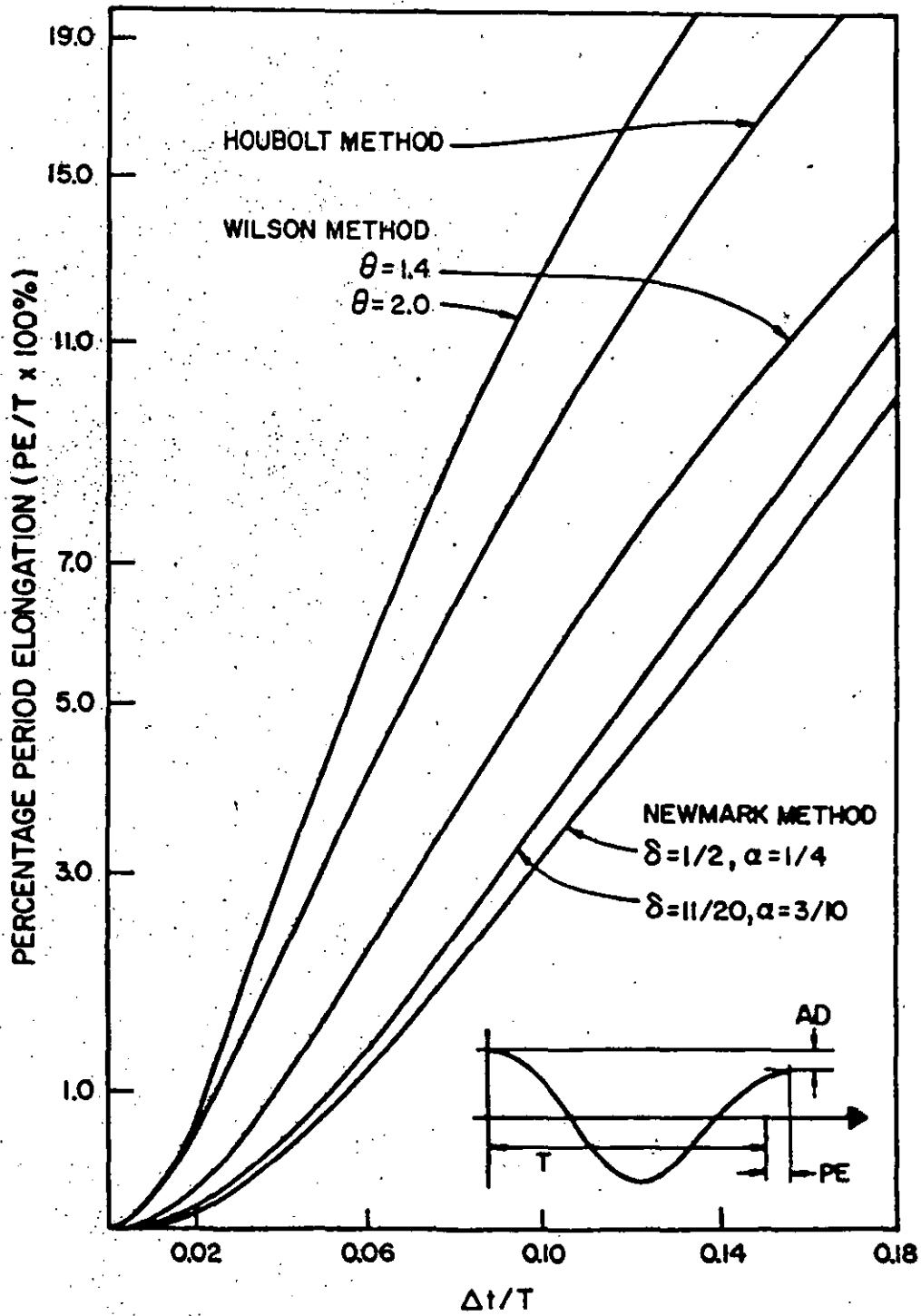


FIGURE 3. PERCENTAGE PERIOD ELONGATIONS

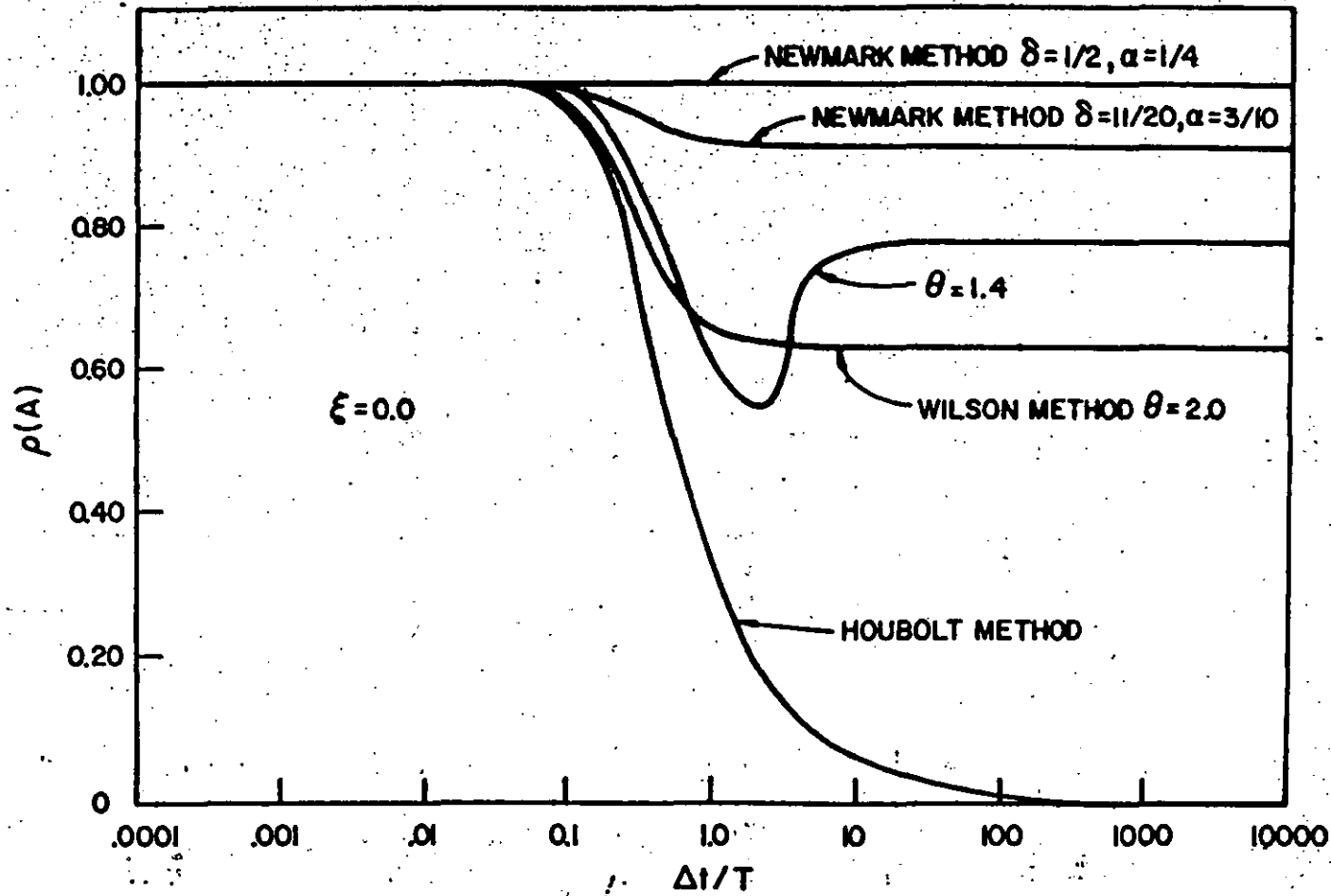


FIGURE 2 SPECTRAL RADII OF APPROXIMATION OPERATORS AS A FUNCTION OF  $\Delta t/T$

$$\begin{bmatrix} F_c \\ F_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{cc} & K_{cd} \\ K_{dc} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_D \\ \Delta_c \end{Bmatrix}$$

$$F_c = K_{cc} \Delta_D + K_{cd} \Delta_c \quad \text{--- (1)}$$

$$F_D = K_{dc} \Delta_D + K_{dd} \Delta_c \quad \text{--- (2)}$$

De (2)

$$\Delta_c = -K_{dc} K_{dd}^{-1} \Delta_D + F_D K_{dd}^{-1} \quad \text{--- (3)}$$

Subst (3) in (1)

$$F_c = K_{cc} \Delta_D + K_{cd} K_{dd}^{-1} F_D - K_{cd} K_{dd}^{-1} K_{dc} \Delta_D$$

$$F_c = (K_{cc} - K_{cd} K_{dd}^{-1} K_{dc}) \Delta_D + K_{cd} K_{dd}^{-1} F_D$$

$$\underbrace{(F_c - K_{cd} K_{dd}^{-1} F_D)}_{F^*} = \underbrace{(K_{cc} - K_{cd} K_{dd}^{-1} K_{dc})}_{K^*} \Delta_D$$

$$\begin{Bmatrix} 10 - F_1 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 0 - F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ 0_1 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{Bmatrix}$$

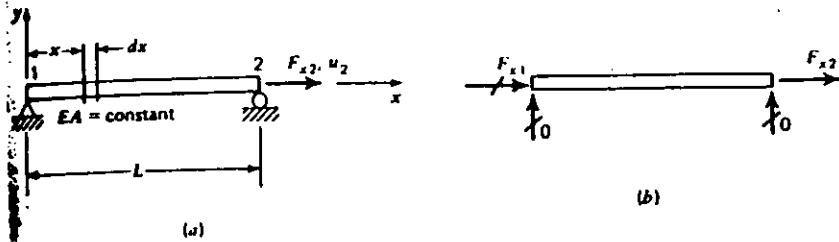


Figure 4.8 Axial force member. (a) Support system. (b) Free-body diagram.

Hence,  $[d] = L/EA$  or, from Equation 4.19,

$$[k_{ff}] = \frac{EA}{L}$$

By equilibrium, the reactive force  $\{F_r\}$ , which here is simply  $F_{x1}$ , is  $F_{x1} = -F_{x2}$  and, by comparison with Equation 4.20,

$$[\Phi] = -1$$

Thus from Equation 4.27,

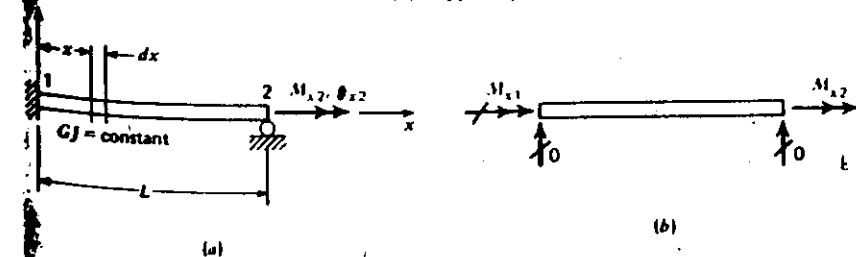
$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.31a)$$

and

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (4.31b)$$

**4.5.2 Pure Torsional Member** Mathematically, the pure torsional member (a shaft) is almost identical to the axial force member since, by comparison of Figures 4.8 and 4.9, we see that in the two cases the forces and displacements can be represented by sets of vectors of the same type. The obvious practical difference is that whereas the axial member stretches or shortens uniformly, the shaft twists uniformly. From elementary strength of materials we know that, for a shaft subjected to a pure torque  $M_{x2}$ , the rate of twist,  $\beta$ , is, the change in rotation of the cross section about the longitudinal axis

Figure 4.9 Pure torsion member. (a) Support system. (b) Free-body diagram.



per unit of length along that axis, can be expressed as

$$\beta = \frac{M_{x2}}{GJ}$$

where  $M_{x2}$  is the torque at the section considered,  $G$  is the modulus of rigidity, and  $J$  is the torsion constant—a geometric property of the cross section.  $J$  is equal to the polar moment of inertia in the special case of a circular, cylindrical shaft. The definition of  $J$  for some other types of cross section will be illustrated in later examples. From the above definition, its dimensions must be length units to the fourth power.

The rate of twist,  $\beta$ , is the measure of torsional strain and, if it is integrated along the full length of the member portrayed in Figure 4.9, the total angular displacement at point 2,  $\theta_{x2}$ , is obtained:

$$\theta_{x2} = \int_0^L \beta dx = \int_0^L \frac{M_{x2} dx}{GJ} = \frac{M_{x2}L}{GJ}$$

Thus, by comparison with the axial force member,  $[d] = L/GJ$ ,  $[\Phi] = -1$ , and it follows that

$$[k] = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.32a)$$

and

$$\begin{Bmatrix} M_{x1} \\ M_{x2} \end{Bmatrix} = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{Bmatrix} \quad (4.32b)$$

**4.5.3 Beam Bent About Its  $z$  Axis** Since this section introduces the basic force-displacement relationships for the flexural member, it is appropriate to comment briefly on certain fundamental aspects of beam flexure and to define conditions and terminology that will be used here and at a later time. As noted already and described in Figure 4.7, the member studied is assumed to possess a bisymmetrical cross section. We consider only bending about the  $z$  axis; relationships for bending about the  $y$  axis follow readily by replacement of the relevant subscripts.

The stresses and strains at any cross section caused by bending are directed along the  $x$  axis of the member, vary linearly with respect to the  $y$  axis, and are constant in the  $z$  direction for a fixed value of  $y$ . In elementary mechanics it is shown that the strain,  $\epsilon_x$ , is given by

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} = -y \frac{d^2v}{dx^2} \quad (4.33)$$

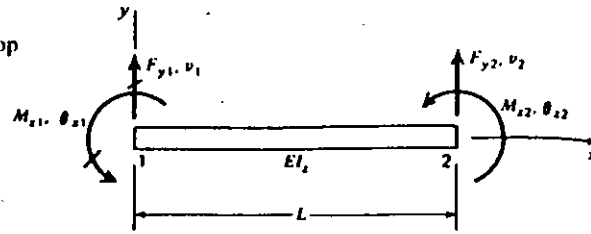
where  $\rho$ , the radius of curvature, is approximated by  $1/(d^2v/dx^2)$ .\* Also,

\* The negative signs in Equation 4.33 are occasioned by the fact that we are assuming tensile strain to be positive. Likewise, in Equation 4.35 to follow, we are assuming positive bending moments to be those that cause positive curvature.



**EXAMPLE 4.**

Using Equation 4.27 and the results of Example 4.3, develop the stiffness matrix for the prismatic beam shown.



Write equations for  $[\Phi]$  and  $[d]^{-1}$ :

$$\begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -L & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} \quad \text{Thus} \quad [\Phi] = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L & 1 \end{bmatrix}$$

$$[d]^{-1} = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} \frac{L^2}{3} & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix}$$

Apply Equation 4.27:

$$[k] = \begin{bmatrix} [d]^{-1} & [d]^{-1}[\Phi]^T \\ [\Phi][d]^{-1} & [\Phi][d]^{-1}[\Phi]^T \end{bmatrix}$$

$$[d]^{-1}[\Phi]^T = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -L \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 \end{bmatrix}$$

$$[\Phi][d]^{-1}[\Phi]^T = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -L & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 \end{bmatrix} = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix}$$

Collecting terms,

$$[k] = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 4 & \frac{6}{L} & 2 \\ \hline -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 2 & \frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix}$$

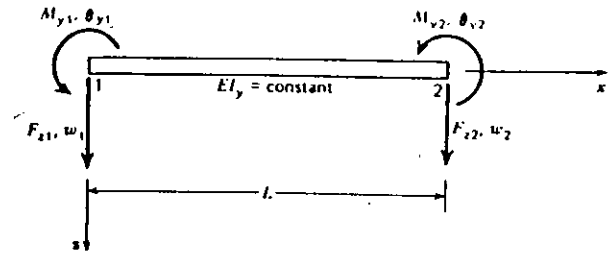
**89 4.5 The Framework Element Stiffness Matrix**

Figure 4.11 Beam bent about  $y$  axis.

**4.5.4 Beam Bent About Its  $y$  Axis** The development of the stiffness matrix for the beam bent about its other principal axis is identical to the previous case and need not be repeated. There is, however, a nuisance that is impossible to avoid if we are to employ uniform notation. This is a complication in signs. The source of the problem should be apparent in a comparison of Figures 4.11 and 4.10b. In each case the member is viewed from the positive side of the coordinate axis normal to the plane of the figure, and the forces and degrees of freedom of interest are shown in their positive directions. All moments and rotational displacements are positive counterclockwise on the ends of the members. In the case of the beam bent about its  $z$  axis, however, direct forces and translational degrees of freedom are positive upward, whereas in the other case they are positive downward. The practical effect of this is to require a change in the sign of all influence coefficients relating direct forces to rotations (and, by reciprocity, moments to translational displacements) when converting flexibility and stiffness matrices developed for the case in Figure 4.10 to the case in Figure 4.11. Thus we have, for the beam bent about its  $y$  axis,

$$[k] = \frac{EI_y}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ \hline -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \quad (4.37a)$$

and

$$\begin{Bmatrix} F_{z2} \\ M_{y2} \\ F_{z1} \\ M_{y1} \end{Bmatrix} = \frac{EI_y}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_{y2} \\ w_1 \\ \theta_{y1} \end{Bmatrix} \quad (4.37b)$$

It is left as an exercise for the reader to demonstrate the validity of the sign changes made (Problem 4.2).

**4.5.5 Complete Element Stiffness Matrix** All that remains of this particular development is to assemble the foregoing results in the complete stiffness equation for the 12-degree-of-freedom, bisymmetrical member. Since axial effects, torsion, and bending about each axis are uncoupled, the influence coefficients relating these effects are zero, for the reasons given earlier. Therefore, taking Equations 4.31b, 4.32b, 4.36b, and 4.37b, suitably re-ordering rows and columns, and letting  $G = E/2(1 + \nu)$  (Equation 4.4), we finally arrive at the result shown as Equation 4.38 in Figure 4.12.

(Problems 4.4 to 4.6)

**4.6 Commentary on Neglected Deformations**

As mentioned earlier, in developing Equation 4.38 we disregarded deformations due to transverse shearing stresses and torsional warping. Both effects are best illustrated by sketches (Figures 4.13 and 4.14).

When a beam is flexed, the transverse shear stresses in the web cause cross sections to warp in the longitudinal direction as in Figure 4.13b. We have neglected this, employing instead the conventional beam theory, which assumes that plane sections remain plane in flexure (Figure 4.13c and Example 4.3). Except in beams that have an unusually large depth-to-span ratio or open webs (perforated or laced), the additional displacement due to web shear strain is of no consequence.

Similarly, when all but circular cross-sectional shafts are twisted, cross sections warp longitudinally as shown in Figure 4.14b. This has been neglected. The increased flexibility due to this type of deformation is generally small. In shafts of closed cross section such as cylindrical or rectangular tubes, or rectangular reinforced concrete beams, the warping effect may always be neglected (Figure 4.14c). In steel wide-flanged beams, or in light-gauge steel beams, resistance to uniform out-of-plane warping, which may arise either as a result of fixing certain cross sections or varying a

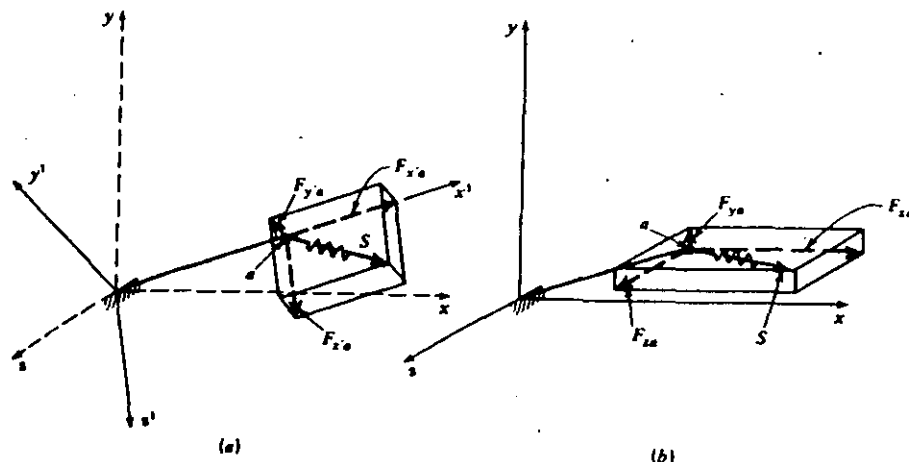


Figure 5.2 Direct force at "a." (a) Local coordinates. (b) Global coordinates.

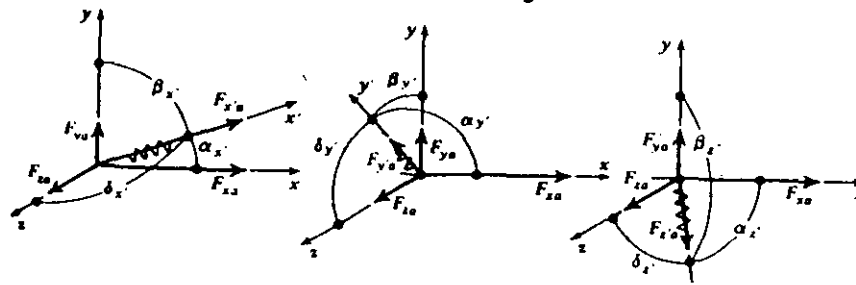
ponents  $F_{x'a}$ ,  $F_{y'a}$ , and  $F_{z'a}$  or the global components  $F_{xa}$ ,  $F_{ya}$ , and  $F_{za}$ . Each of the global components may, in turn, have components in each of the local directions—and vice versa. The easiest way to express one set of components in terms of the other is through direction cosines. Using the nomenclature for direction angles defined in Figure 5.3, we have, for the local components,

$$\begin{aligned} F_{x'a} &= F_{xa} \cos \alpha_x + F_{ya} \cos \beta_x + F_{za} \cos \delta_x \\ F_{y'a} &= F_{xa} \cos \alpha_y + F_{ya} \cos \beta_y + F_{za} \cos \delta_y \\ F_{z'a} &= F_{xa} \cos \alpha_z + F_{ya} \cos \beta_z + F_{za} \cos \delta_z \end{aligned}$$

Using, respectively, the symbols  $\lambda$ ,  $\mu$ , and  $\nu$ , with appropriate subscripts to designate the cosines of the nine direction angles between the global  $x$ ,  $y$ , and  $z$  axes and the subscripted local axis, we have

$$\begin{aligned} F_{x'a} &= \lambda_x F_{xa} + \mu_x F_{ya} + \nu_x F_{za} \\ F_{y'a} &= \lambda_y F_{xa} + \mu_y F_{ya} + \nu_y F_{za} \\ F_{z'a} &= \lambda_z F_{xa} + \mu_z F_{ya} + \nu_z F_{za} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Figure 5.3 Direction angles.



In matrix notation this becomes

$$\begin{Bmatrix} F_{x'a} \\ F_{y'a} \\ F_{z'a} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{x'} & \mu_{x'} & \nu_{x'} \\ \lambda_{y'} & \mu_{y'} & \nu_{y'} \\ \lambda_{z'} & \mu_{z'} & \nu_{z'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{xa} \\ F_{ya} \\ F_{za} \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

or, in short form,

$$\{F_{F'}\} = [\gamma]\{F_F\} \quad (5.3)$$

The matrix  $[\gamma]$  of the nine direction cosines relating the local coordinate system to the global one is a *rotation matrix*.

Recalling that the sum of the squares of the direction cosines for any axis is unity, we have

$$\begin{aligned} \lambda_{x'}^2 + \mu_{x'}^2 + \nu_{x'}^2 &= 1 \\ \lambda_{y'}^2 + \mu_{y'}^2 + \nu_{y'}^2 &= 1 \\ \lambda_{z'}^2 + \mu_{z'}^2 + \nu_{z'}^2 &= 1 \end{aligned} \quad (5.4)$$

The length of any vector is the square root of the sum of the squares of its components. Thus each row of  $[\gamma]$  has unit length. Also, for any two orthogonal axes such as  $x'$  and  $y'$ ,  $x'$  and  $z'$ , and  $y'$  and  $z'$ , the sum of the products of the corresponding direction cosines (the *scalar product*) is zero:

$$\begin{aligned} \lambda_{x'}\lambda_{y'} + \mu_{x'}\mu_{y'} + \nu_{x'}\nu_{y'} &= 0 \\ \lambda_{y'}\lambda_{z'} + \mu_{y'}\mu_{z'} + \nu_{y'}\nu_{z'} &= 0 \\ \lambda_{z'}\lambda_{x'} + \mu_{z'}\mu_{x'} + \nu_{z'}\nu_{x'} &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Together, Equations 5.4 and 5.5 state that the  $[\gamma]$  matrix consists of rows of orthogonal unit vectors. Such a matrix is called an *orthogonal matrix* which, in turn, may be defined as a square matrix having an inverse equal to its transpose:

$$[\gamma]^{-1} = [\gamma]^T \quad (5.6)$$

This property may be verified readily by the identity  $[\gamma][\gamma]^{-1} = [I] = [\gamma][\gamma]^T$ . It will be shown below (Equation 5.14) that utilization of the orthogonality of the  $[\gamma]$  matrix simplifies considerably the labor of transforming coordinates.

Recognizing again that direct forces and moments transform independently, and that all that has been said about forces applied to one end of a member applies equally well to the other end, we can use Equation 5.3 directly in compiling the force transformation equation for the 12-degree-of-freedom framework element. Referring to Figure 4.7, (repeated here) for general nomenclature, and using primes to designate local coordinates in accordance with the convention defined in Section 2.2, this equation is:

$$\begin{Bmatrix} F_{x'1} \\ F_{y'1} \\ F_{z'1} \\ M_{x'1} \\ M_{y'1} \\ M_{z'1} \\ F_{x'2} \\ F_{y'2} \\ F_{z'2} \\ M_{x'2} \\ M_{y'2} \\ M_{z'2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\gamma] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\gamma] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\gamma] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [\gamma] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

or, in shorthand,

$$\{F'\} = [\Gamma]\{F\} \quad (5.8)$$

where

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} [\gamma] & & & \\ & [\gamma] & & \\ & & [\gamma] & \\ & & & [\gamma] \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

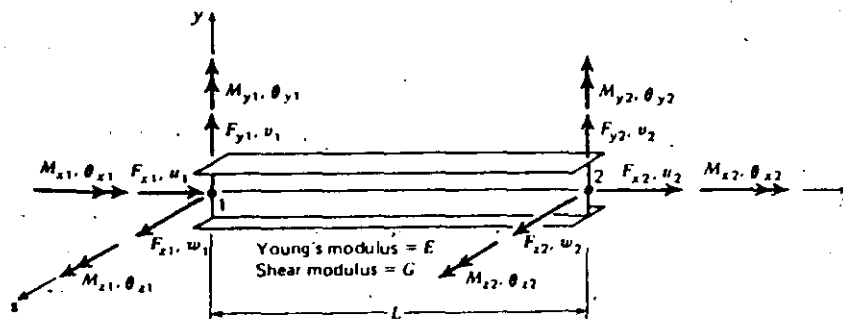
( $[\ ]$  symbolizes a diagonal matrix in this text). It is clear that, just as  $[\gamma]$  is orthogonal, so too is  $[\Gamma]$ , or

$$[\Gamma]^{-1} = [\Gamma]^T \quad (5.10)$$

Also, from the above, and considering that the 12 degrees of freedom of the member of Figure 4.7 are portrayed by vectors just as the forces are, we may use the same transformations for these, or

$$\{\Delta'\} = [\Gamma]\{\Delta\} \quad (5.11)$$

Figure 4.7 Bisymmetrical framework element.



**5.1.2 Transformation of Degrees of Freedom** Having the necessary rotation matrix, we may now proceed to develop the transformation equations for the member stiffness matrix. If we write Equation 2.1 in terms of local coordinates,

$$\{F'\} = [k']\{\Delta'\} \quad (5.12)$$

From Equation 5.11

$$\{F'\} = [k'][\Gamma]\{\Delta\} \quad (5.13)$$

and, from Equation 5.8,

$$[\Gamma]\{F\} = [k'][\Gamma]\{\Delta\}$$

or

$$\{F\} = [\Gamma]^{-1}[k'][\Gamma]\{\Delta\}$$

Using the property of orthogonality as stated by Equation 5.10,

$$\{F\} = [\Gamma]^T[k'][\Gamma]\{\Delta\} \quad (5.14)$$

Thus

$$\{F\} = [k]\{\Delta\} \quad (5.15)$$

where

$$[k] = [\Gamma]^T[k'][\Gamma] \quad (5.16)$$

This is the equation most generally used for finding the member stiffness matrix in global coordinates once one has formulated it in local coordinates and knows the geometrical relationship between the two sets of axes.

**5.1.3 Transformations and Energy** Although we have arrived at the necessary transformations in a direct and rigorous way, it is useful to reconsider the subject from an energy approach. This will bring out certain principles that may not be apparent from the above and which will be used later.

The transformed degrees of freedom are not necessarily equal in number to the original degrees of freedom. For example, compare Figures 2.8 and 2.9. In the first figure the behavior of the axial force member is defined by two degrees of freedom, whereas in the second figure, in which the only difference is the coordinate system, four degrees of freedom are required. The relationships connecting the two displacement vectors may be written symbolically as before:

$$\{\Delta'\} = [\Gamma]\{\Delta\} \quad (5.11)$$

where, now,  $[\Gamma]$  need not be the square matrix defined in Equation 5.9. Suppose the equations to be transformed are, again,

$$\{F'\} = [k']\{\Delta'\} \quad (5.12)$$

Also, we assume that each force component  $F'_i$  of the vector  $\{F'\}$  produces the work  $\frac{1}{2}F'_i\Delta'_i$  during the displacement  $\Delta'_i$ , with no work under any other displacement component in  $\{\Delta'\}$ . This is another consequence of employing components that act along orthogonal axes. Such force and displacement pairs are termed *conjugate vectors*. Both sets, that is,  $\{\Delta'\}$ ,  $\{F'\}$  and

$\{F\}$  are taken to be conjugate sets of vectors. Changing the frame of reference cannot alter the amount of work done. Therefore, in order that work remain invariant under the imposed transformation, we have

$$\frac{1}{2}\{F'\}\{\Delta'\} = \frac{1}{2}\{F\}\{\Delta\}$$

and, from Equation 5.11,

$$[\Gamma]\{F\} = [F']\{\Delta\}$$

Thus

$$[F'][\Gamma] = [F]$$

or, by transposition,

$$\{F\} = [\Gamma]^T\{F'\} \quad (5.17)$$

Since Equation 5.11 was invoked in the foregoing development of transformations, we see that the transformation of displacements presented in Equation 5.11 implies the transformation of forces given by Equation 5.17. The force and displacement transformations are termed *contragredient* under the stipulated conditions of conjugacy. The conclusion of immediate interest is that, if the force transformation is first defined as in Equation 5.17, then the displacement-transformation matrix of Equation 5.11 is given by the transpose of the force-transformation matrix. The principle of contragredience is of considerable importance when the displacement (or force) transformation is readily constructed from physical meaning, but the formation of the conjugate vector is not readily perceived. This occurs, for example, when the condensation of degrees of freedom is accomplished by means of a transformation process (see Section 10.3).

To follow the above approach to the element stiffness relationships, it is convenient to deal with strain energy and external work, quantities that were introduced in Section 4.2. Again we require that work remain invariant under the imposed transformation, permitting direct substitution of Equation 5.11 into Equations 4.5 and 4.6a. Thus, from Equation 4.5,

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\{\Delta'\}\{F'\} = \frac{1}{2}\{\Delta'\}^T\{F'\} \\ &= \frac{1}{2}\{\Delta\}[\Gamma]^T\{F'\} = \frac{1}{2}\{\Delta\}\{F\} \end{aligned} \quad (5.18a)$$

and, from Equation 4.6a,

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\{\Delta'\}[k']\{\Delta'\} = \frac{1}{2}\{\Delta\}[\Gamma]^T[k'][\Gamma]\{\Delta\} \\ &= \frac{1}{2}\{\Delta\}[k]\{\Delta\} \end{aligned} \quad (5.18b)$$

Hence the transformed stiffness matrix is again given by

$$[k] = [\Gamma]^T[k'][\Gamma] \quad (5.16)$$

The force vector is of course transformed in the manner described in Equation 5.17. The transformation of  $[k']$  into  $[k]$ , represented by Equation 5.16, is of the form of a congruent transformation (see page 79) so that if  $[k']$  is symmetric, the transformed matrix  $[k]$  will be symmetric.

**5.1.4 Rectangular Transformation Matrices** The main reason for introducing at this juncture the energy approach we have just described was to show clearly that, under the condition of contragredience, it is not necessary to use the condition that the inverse of the transformation matrix equals its transpose. Transposition can be invoked directly. This enables convenient definition of nonsquare, coordinate axis transformation matrices. As noted above, the stiffness matrix of the axial member in Figure 2.8 features the two axial displacements. The same element disposed in an  $x$ - $y$  plane as in Figure 2.9 is described by four displacement components. Arranging the local  $x'$  axis along the member of Figure 2.9 and defining the direction cosines as we have here, the relationship between the local and global degrees of freedom becomes

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{x'} & \mu_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{y'} & \mu_{y'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

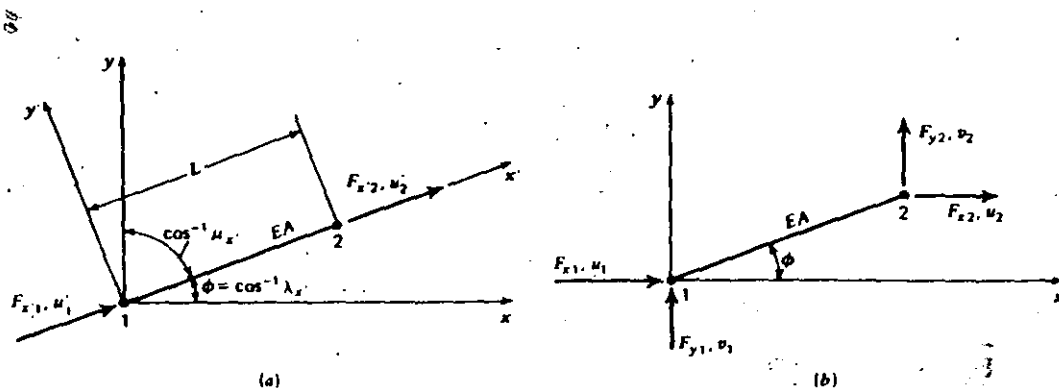
The validity of this transformation may be verified by inspection, but it is done formally in Example 5.1 by deleting irrelevant rows and columns from the complete transformation matrix of Equation 5.7. In this example the same transformation matrix is used to demonstrate the equivalence of Equations 2.2 and 2.6, which were developed independently from basic physical principles in Chapter 2.

Additional illustrations of basic transformations are contained in Examples 5.2 to 5.6.

#### EXAMPLE 5.1

Verify Equation 2.6 using Equation 2.2 and the transformation Equations 5.7 and 5.16.

Review development of Equations 2.2 and 2.6:



#### 5.1 Coordinate Transformations

Equation 2.2 was developed from a sketch similar to sketch a of the above figure. It may be written

$$\{F'\} = [k']\{\Delta'\}$$

where  $[k']$  is a  $2 \times 2$  matrix.

Equation 2.6 was developed from sketch b. It may be written

$$\{F\} = [k]\{\Delta\}$$

where  $[k]$  is a  $4 \times 4$  matrix.

Transform  $[k']$  to  $[k]$  using Equation 5.16,  $[k] = [\Gamma]^T [k'] [\Gamma]$ , as follows: In Equation 5.7 delete all columns except those corresponding to  $F_{x1}$ ,  $F_{y1}$ ,  $F_{x2}$ , and  $F_{y2}$  and all rows except those corresponding to  $F_{x1}$  and  $F_{x2}$ , leaving

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{x'} & \mu_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{x'} & \mu_{x'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix}$$

Thus

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} \lambda_{x'} & \mu_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{x'} & \mu_{x'} \end{bmatrix}$$

which is the transformation matrix of Section 5.1.4.

From Equations 2.2, 5.16 and the above figure,

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 \\ \sin \phi & 0 \\ 0 & \cos \phi \\ 0 & \sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi \end{bmatrix}$$

or

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin \phi \cos \phi & -\cos^2 \phi & -\sin \phi \cos \phi \\ & \sin^2 \phi & -\sin \phi \cos \phi & -\sin^2 \phi \\ & & \cos^2 \phi & \sin \phi \cos \phi \\ \text{Sym.} & & & \sin^2 \phi \end{bmatrix}$$

which is the stiffness matrix of Equation 2.6.

Example 5.2 is similar to Example 5.1 in that it illustrates the reduction of the complete 12-degree-of-freedom transformation matrix to a special situation—in this case, the planar framework member. The partitioning of the  $[\Gamma]$  matrix follows Equation 5.7.

In Example 5.3, the results of several previous examples are used to demonstrate the assembly of the global stiffness equations for a typical rigid frame. Axial deformation effects are included for completeness even though, in almost all practical civil engineering frames of this type, they may be neglected in linear analysis. Note that the example contains merely a listing of representative matrices and not details of their manipulation. The primed degrees of freedom refer to the local coordinates indicated. The reader is urged to reconstruct the matrices and perform typical multiplications.

The small space-truss analysis in Example 5.4 is illustrative of the application of the same transformation techniques to space structures.

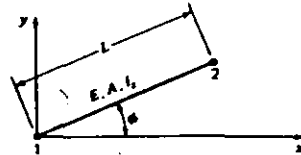
Example 5.5 is an application of geometry to the determination of direction angles and cosines. In Example 5.6 the same problem is solved in a more elegant way by viewing the total transformation as a series of rotations. The two illustrations complement each other. Most general-purpose computer programs have some built-in method for transforming coordinates that requires only simple descriptive input. Nevertheless, the analyst should understand the geometrical and analytical problems involved.

(Problems 5.1 to 5.4, Problem 5.17)

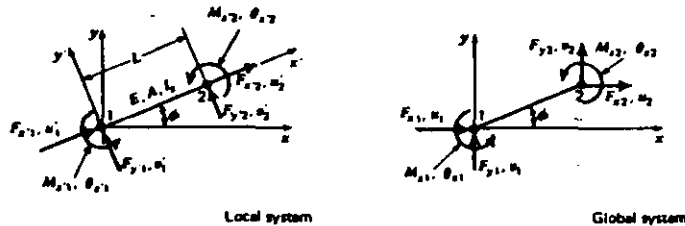
**EXAMPLE 5.2**

The member shown is part of a frame located and loaded in the  $x$ - $y$  plane.

1. Reduce the general Equation 5.7 to the particular transformation equation for this case.
2. Demonstrate the orthogonality of the transformation matrix.



Define the local and global coordinates, degrees of freedom, and forces:



1. Deleting all irrelevant rows and columns from Equation 5.7 leaves

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \mu_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_y & \mu_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & \mu_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_y & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix}$$

2. Orthogonality. Multiply  $[\Gamma]^T[\Gamma]$ :

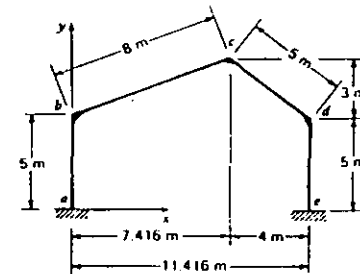
$$\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]$$

Thus

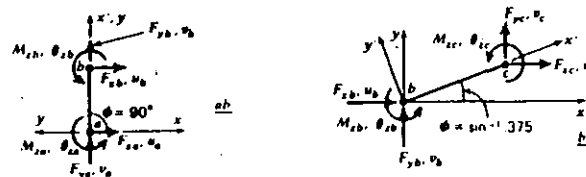
$$[\Gamma]^T = [\Gamma]^{-1}$$

**EXAMPLE 5.3**

The rigid frame shown has  $E = 200,000$  MPa and the following member properties: for  $ab, cd, ed, A = 4 \times 10^3$  mm<sup>2</sup>,  $I = 50 \times 10^6$  mm<sup>4</sup>; for  $bc, A = 6 \times 10^3$  mm<sup>2</sup>,  $I = 200 \times 10^6$  mm<sup>4</sup>. Using the results of Example 4.8 and the transformation matrix of Example 5.2, develop the global stiffness equations for the structure, including flexural and axial deformations.



Consider members  $ab$  and  $bc$  in detail; show  $[k]$  only for members  $cd$  and  $ed$ :



Member *ab*

$$200 \begin{bmatrix} u_a & v_a & \theta_{za} & u_b & v_b & \theta_{zb} \\ 0.800 & 0 & 0 & -0.800 & 0 & 0 \\ & 0.0048 & 12.00 & 0 & -0.0048 & 12.00 \\ & & 0.4 \times 10^5 & 0 & -12.00 & 0.2 \times 10^5 \\ & & & 0.800 & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & 0.0048 & -12.00 \\ & & & & & 0.4 \times 10^5 \end{bmatrix} \quad [\Gamma]: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$200 \begin{bmatrix} u_a & v_a & \theta_{za} & u_b & v_b & \theta_{zb} \\ 0.0048 & 0 & -12.00 & -0.0048 & 0 & -12.00 \\ & 0.800 & 0 & 0 & -0.800 & 0 \\ & & 0.4 \times 10^5 & 12.00 & 0 & 0.2 \times 10^5 \\ & & & 0.0048 & 0 & 12.00 \\ \text{Sym.} & & & & 0.800 & 0 \\ & & & & & 0.4 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

Member *bc*

$$200 \begin{bmatrix} u_b & v_b & \theta_{zb} & u_c & v_c & \theta_{zc} \\ 0.750 & 0 & 0 & -0.750 & 0 & 0 \\ & 0.00469 & 18.75 & 0 & -0.00469 & 18.75 \\ & & 1 \times 10^5 & 0 & -18.75 & 0.5 \times 10^5 \\ & & & 0.750 & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & 0.00469 & -18.75 \\ & & & & & 1 \times 10^5 \end{bmatrix} \quad [\Gamma]: \begin{bmatrix} 0.9270 & 0.3750 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3750 & 0.9270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9270 & 0.3750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3750 & 0.9270 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$200 \begin{bmatrix} u_b & v_b & \theta_{zb} & u_c & v_c & \theta_{zc} \\ 0.6452 & 0.2591 & -7.0313 & -0.6452 & -0.2591 & -7.0313 \\ & 0.1095 & 17.381 & -0.2591 & -0.1095 & 17.381 \\ & & 1 \times 10^5 & 7.0313 & -17.381 & 0.5 \times 10^5 \\ & & & 0.6452 & 0.2591 & 7.0313 \\ \text{Sym.} & & & & 0.1095 & -17.381 \\ & & & & & 1 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

Member *cd*

$$200 \begin{bmatrix} u_c & v_c & \theta_{zc} & u_d & v_d & \theta_{zd} \\ 0.5137 & -0.3817 & 7.200 & -0.5137 & 0.3817 & 7.200 \\ & 0.2911 & 9.600 & 0.3817 & -0.2911 & 9.600 \\ & & 0.4 \times 10^5 & -7.200 & -9.600 & 0.2 \times 10^5 \\ & & & 0.5137 & -0.3817 & -7.200 \\ \text{Sym.} & & & & 0.2911 & -9.600 \\ & & & & & 0.4 \times 10^5 \end{bmatrix}$$





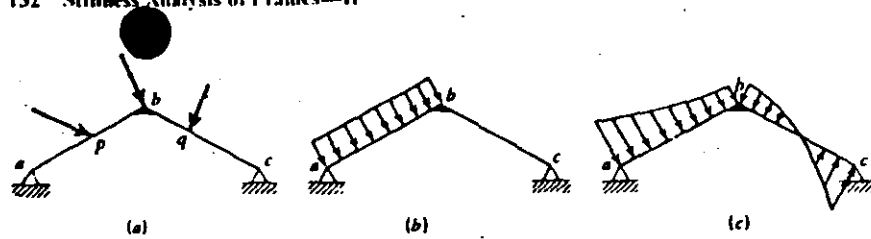


Figure 5.4 Loads between nodal points.

5.2 Loads Between Nodal Points

Generally, structures must resist loads applied between the joints or natural nodal points of the system. Three possibilities are shown in Figure 5.4. Loading may range from a few concentrated loads to an infinite variety of uniformly or nonuniformly distributed loads.

One way to treat such loads in analysis is to insert artificial nodes, such as "p" and "q" in Figure 5.4a. An exact solution can then be obtained for the case shown. It proceeds just as in many of the earlier examples. The degrees of freedom at the artificial nodes are added to the total inventory, and the necessary additional equations are written by considering the requirements of equilibrium at these nodes. The internal member forces on each side of nodes such as p and q must equilibrate the external loads applied at these points. Assigning the identical degree-of-freedom designation to the corresponding unknown displacement components at the two sides of the node ensures the satisfaction of compatibility. This procedure was used in Example 4.12 and its use was implied in several problems of Chapter 4.

Additional nodes may also be used when the load is distributed as in Figure 5.4b and 5.4c. Following some process selected or devised by the analyst, the distributed loads are "lumped" as concentrated loads at suitably selected arbitrary nodes, and the degrees of freedom at these and the natural nodes are treated as the unknowns of the problem. There are various ways of approaching or obtaining equivalence between the lumped and the actual loading. In all cases the lumped loads must be statically equivalent to the distributed loads they replace. For example, the transverse load at the artificial joint must equal the total transverse value of the distributed load associated with that joint.

In a few cases, the use of artificial nodes may be the most expeditious route to a satisfactory solution. It is not a very elegant procedure, however, and furthermore the addition of the displacements at the arbitrary nodes to the unknown degrees of freedom usually increases the labor of solution unduly. It seems clear that we should have recourse to a more general, rigorous method—one that eliminates the need for "artificial" joints.

The approach that is of most general use with the displacement method

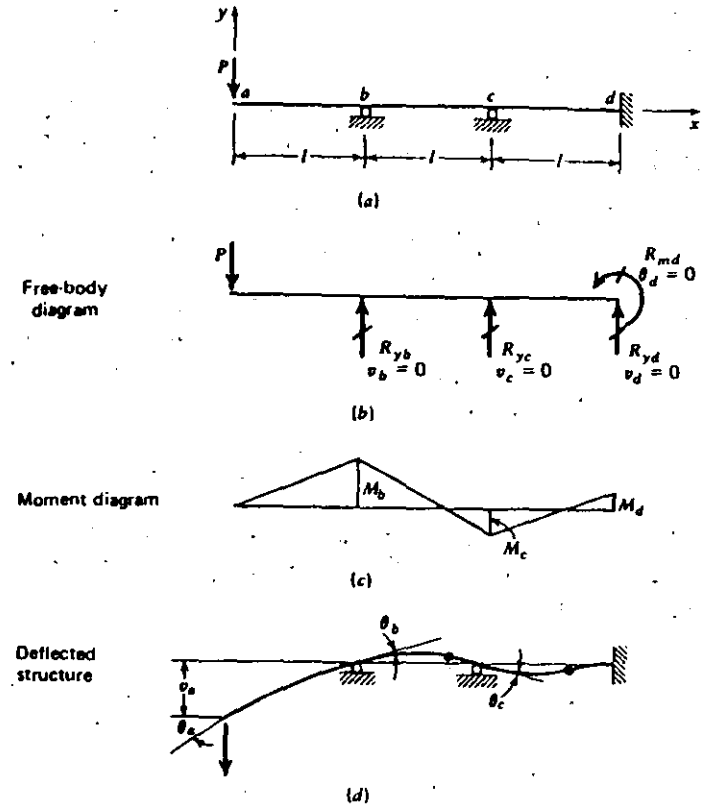


Figure 5.5 Continuous beam—nodal-point load.

is one employing the related concepts of artificial joint restraint, fixed-end forces, and equivalent nodal loads. It is best explained by example. Before taking up such an example, it is relevant to recapitulate the approach we have already used a number of times by relating it to the continuous beam of Figure 5.5a. To review, the solution to this problem of a system loaded only at a node would start with the writing of Equation 3.6:

$$\{P\} = [K]\{\Delta\} \tag{3.6}$$

The support and the remaining degrees of freedom would then be grouped as in Equation 3.7:

$$\begin{Bmatrix} P_f \\ P_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fs} \\ K_{sf} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_f \\ \Delta_s \end{Bmatrix}$$

For the particular loading, coordinate designations, and support conditions shown, the above would be written as

52

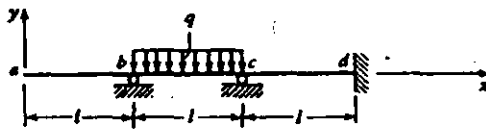
$$\begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_{yb} \\ R_{yc} \\ R_{yd} \\ R_{md} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fs} \\ K_{sf} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_a \\ \theta_a \\ \theta_b \\ \theta_c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

Solution for the unknown displacements, the reactions, and the internal forces proceeds in the usual way. The moment diagram and deflected structure are sketched in Figures 5.5c and 5.5d.

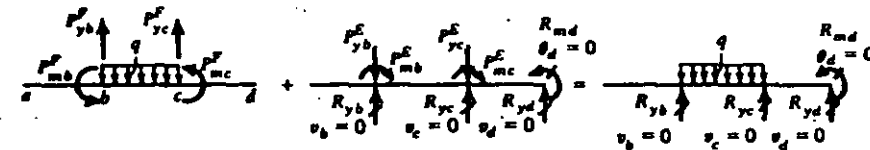
Now consider the same structure but with a uniformly distributed load of intensity  $q$  in the center span, as in Figure 5.6. This loading, which is between nodal points, will be treated in two stages and the results summed, as indicated in the sketches of parts a, b, and c of Figure 5.6.

First, as in Figure 5.6a, grant the existence of fictitious external constraints capable of reducing the nodal degrees of freedom to zero (clamping the joints). These constraints, which in this case consist of two direct forces and two moments, are shown in their positive sense under our sign conven-

Figure 5.6 Continuous beam—intermediate load.



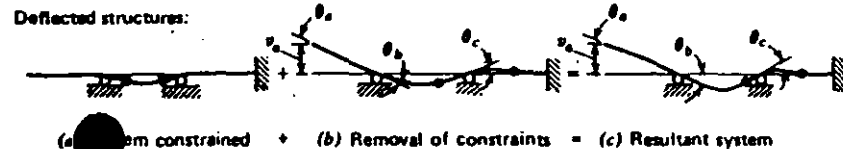
Free body diagrams:



Moment diagrams:



Deflected structures:



(a) Beam constrained + (b) Removal of constraints = (c) Resultant system

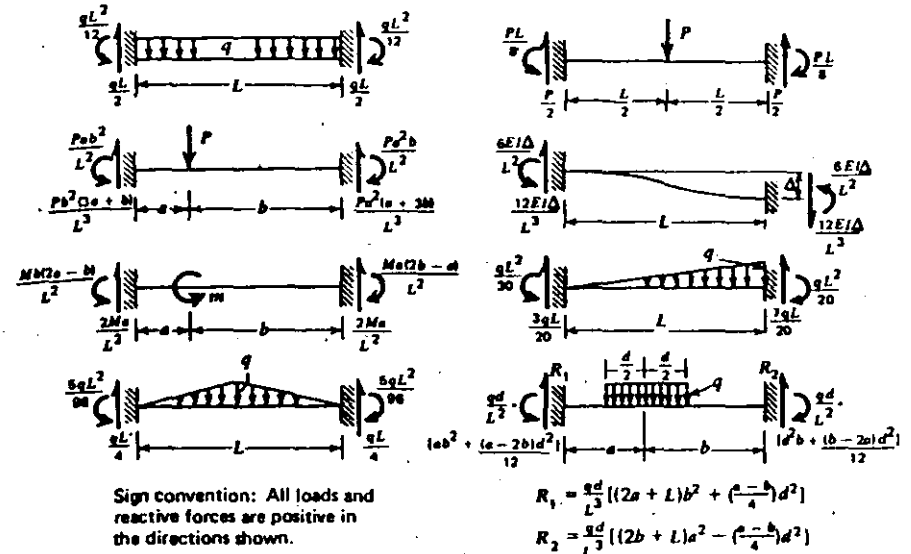


Table 5.1 Fixed-end forces.

tion. It should be clear that  $P_{mc}^E$  must actually be negative in order to constrain the rotation at point c. It should also be accepted that these forces are completely independent of the system—they are not being supplied by the real beam or its real supports. We presume that the solution for these fixed-end forces is known. In the case shown, the absolute values of the end reactions and fixing moments are  $qL/2$  and  $qL^2/12$ , respectively. Solutions for many other cases can be developed from elementary strength of materials. Some of the more common cases are summarized in Table 5.1. Knowing the fixed-end forces, the internal forces and deformations corresponding to the assumed constraints can be calculated, as portrayed in the bending moment diagram and deflected structure of Figure 5.6a.

Now it is necessary to remove the fictitious constraints, that is, to rectify what we have just done. This is accomplished by applying to the nodes loads that are equal and opposite to the fixed-end forces and by permitting the system to deform under the action of these equally fictitious loads. The reversed fixed-end forces are called equivalent nodal loads. They are indicated in Figure 5.6b for our example structure by the use of the symbol  $P^E$  and the appropriate subscripts. Solving in the usual way for the displacements, reactions, and internal forces caused by these loads results in the bending moment diagram and deflected structure of Figure 5.6b.

Last, the total solution is obtained by summing the two parts. In arriving at the free-body diagram of Figure 5.6c, the two sets of fictitious forces have cancelled each other and we are left with the real system in which all the requirements of equilibrium and compatibility are satisfied. The bending moment diagram and deflected structure of this part of the figure are the correct ones.

There are several ways to represent this physical process algebraically. We must recognize that the internal forces and displacements of the fixed-end problem (Figure 5.6a) must first be obtained by some means not detailed here, and reserved for addition to the solution of the displacement problem (Figure 5.6b). A clear way to formulate the solution to the displacement problem is after the fashion of Equation 3.6, but with the addition of a vector of fixed-end forces to the right-hand side of the equation; thus

$$\{P\} = [K]\{\Delta\} + \{P^F\} \quad (3.6a)$$

Physically, this may be accepted by observing that  $\{P\}$  may be interpreted as being equal initially to the vector of fictitious nodal forces that would obtain in the absence of any displacement ( $\{\Delta\} = 0$ ), that is, the vector  $\{P^F\}$ . Conceptually, this formulation is important because it helps to keep clear the distinction between the real nodal loads and reaction components of  $\{P\}$  and the fictitious components that comprise  $\{P^F\}$ .

The support and the remaining degrees of freedom of Equation 3.6a may be grouped as before:

$$\begin{Bmatrix} P_f \\ P_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{ff} & K_{fs} \\ K_{sf} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_f \\ \Delta_s \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_f^F \\ P_s^F \end{Bmatrix} \quad (3.7a)$$

For the particular loading and coordinate designations in Figure 5.6, the above may be written as (compare with Equation 5.19):

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_{yb} \\ R_{yc} \\ R_{yd} \\ R_{md} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fs} \\ K_{sf} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_a \\ \theta_a \\ \theta_b \\ \theta_c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ ql^2/12 \\ -ql^2/12 \\ ql/2 \\ ql/2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

Now, transference of the  $\{P^F\}$  vector in any of the above formulations (Equations 3.6a, 3.7a, or 5.20) to the left-hand side of the equation is the algebraic equivalent of applying the reversed fixed-end forces as nodal loads in Figure 5.6b. Hence

$$\{P\} - \{P^F\} = \{P\} + \{P^E\} = [K]\{\Delta\} \quad (5.21)$$

Where  $\{P^E\} = -\{P^F\}$  is the vector of equivalent nodal loads defined in the discussion of Figure 5.6b.

For the illustrative example of Figure 5.6, we therefore arrive at the statement of the displacement problem:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -ql^2/12 \\ +ql^2/12 \\ R_{yb} - ql/2 \\ R_{yc} - ql/2 \\ R_{yd} \\ R_{md} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fs} \\ K_{sf} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_a \\ \theta_a \\ \theta_b \\ \theta_c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.22)$$

Solution for the unknown displacements, the real reactions ( $R_{yb}$ ,  $R_{yc}$ ,  $R_{yd}$ ,  $R_{md}$ ), and the internal forces proceeds in the usual way. This part of the problem has been reduced to one that is identical to the nodal loading problems reviewed in the discussion of Figure 5.5. Again, in determining forces and displacements within the loaded members, we must remember to add to the results of the solution of Equations 5.22 the solution of the fixed-end problem.

These concepts are illustrated in Examples 5.7 to 5.10. We note that Equations 3.6a, 3.7a, 5.20, and 5.21 are cast in a global analysis form. In accordance with our convention for designating forces acting on the ends of elements, we use the symbols  $\{F^F\}$  and  $\{F^E\}$  to designate, respectively, vectors of fixed-end forces and equivalent nodal loads formulated on an element basis. Components of these vectors will be symbolized by  $F^F$ ,  $M^F$ ,  $F^E$ , and  $M^E$ , with appropriate subscripts. As shown in the examples, joint equilibrium requires that element fixed-end forces appear in the global equations with magnitudes and signs unchanged. The same applies to element and global equivalent nodal forces.

Example 5.7 is a straightforward beam analysis problem. In Example 5.8, a simple planar rigid frame is studied. In forming the stiffness equations, only those parts needed at each stage are written. Axial deformation effects are included for illustration. The example shows that there are no restrictions against combining real and equivalent nodal forces, but of course it must be done in algebraically proper fashion.

Example 5.9 illustrates the analysis of a plane frame loaded normal to its plane. Such a structure is often called a *grid*. The primed degrees of

freedom refer to the local coordinates indicated. The partitioning of the  $[\Gamma]$  matrix follows Equation 5.7. As in Example 5.3, much of the detail of matrix formulation and manipulation is omitted.

In Example 5.10, two analyses of a portal frame are simplified considerably by using two artifices commonly employed in classical frame analysis: (1) suppressing (equating to zero) displacements that are known in advance to be very small relative to the remainder, and (2) taking advantage of symmetry and antisymmetry to combine coefficients of related degrees of freedom. The principles of symmetry and antisymmetry are discussed in a more formal way in Section 10.6. They provide a powerful tool for the reduction of the labor of analysis of many structures.

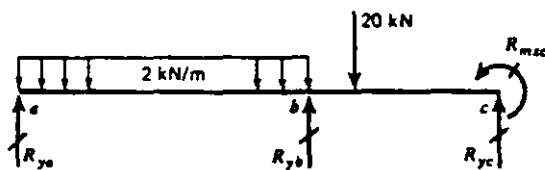
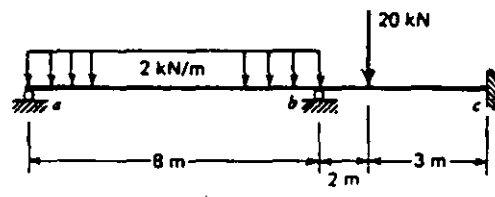
Although the devices used in Example 5.10 are used correctly and effectively, a word of caution regarding the employment of presumed shortcuts in a stiffness analysis is in order. Unless proper procedures are followed, significant contributions to the stiffness of the structure may be overlooked or incorrectly represented in the analytical model. In some cases solution of the stiffness equations will prove impossible but, in others, plausible but unrealistic results may be obtained. Problems 5.6 and 5.7 relate to some of the consequence of improper modeling.

(Problems 5.5 to 5.10)

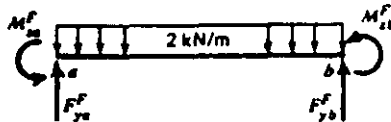
#### EXAMPLE 5.7

The beam of Example 4.8 is supported and loaded as shown.

1. Calculate the displacements at  $a$  and  $b$ .
2. Calculate the reactions and bending moments.



Fixed end forces:

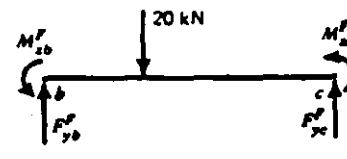


$$M_{ab}^F = \frac{2 \times 8^2}{12} = 10.67 \text{ kNm}$$

$$M_{ba}^F = -10.67 \text{ kNm}$$

$$F_{ya}^F = 8.00 \text{ kN}$$

$$F_{yb}^F = 8.00 \text{ kN}$$



$$M_{zb}^F = \frac{20 \times 2 \times 3^2}{8^2} = 14.40 \text{ kNm}$$

$$M_{zc}^F = \frac{-20 \times 2^2 \times 3}{8^2} = -6.60 \text{ kNm}$$

$$F_{yb}^F = \frac{3 \times 20}{8} + \left( \frac{14.4 - 6.6}{8} \right) = 12.96 \text{ kN}$$

$$F_{yc}^F = 7.04 \text{ kN}$$

1. *Displacements.* Use Equation 3.6a and the relevant stiffness equations of Example 4.8.

$$\begin{Bmatrix} R_{ya} \\ P_{mza} \\ R_{yb} \\ P_{mzb} \\ R_{yc} \\ R_{mzc} \end{Bmatrix} = 200 \begin{bmatrix} 0.00469 & 18.75 & -0.00469 & 18.75 & 0 & 0 \\ & 1 \times 10^5 & -18.75 & 0.5 \times 10^5 & 0 & 0 \\ & & 0.00949 & -6.75 & -0.00480 & 12.00 \\ \text{Sym.} & & & 1.4 \times 10^5 & -12.00 & 0.2 \times 10^5 \\ & & & & 0.00480 & -12.00 \\ & & & & & 0.4 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_a \\ \theta_{za} \\ v_b \\ \theta_{zb} \\ v_c \\ \theta_{zc} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 8.00 \\ 10.67 \times 10^3 \\ 20.96 \\ 3.73 \times 10^3 \\ 7.04 \\ -9.60 \times 10^3 \end{Bmatrix}$$

Let  $P_{mza} = P_{mzb} = 0$ ;  $v_a = v_b = v_c = \theta_{zc} = 0$ ; reorder and partition:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_{ya} \\ R_{yb} \\ R_{yc} \\ R_{mzc} \end{Bmatrix} = 200 \begin{bmatrix} \theta_{za} & \theta_{zb} & v_a & v_b & v_c & \theta_{zc} \\ 1 \times 10^5 & 0.5 \times 10^5 & 18.75 & -18.75 & 0 & 0 \\ & 1.4 \times 10^5 & 18.75 & -6.75 & -12.00 & 0.2 \times 10^5 \\ \text{Sym.} & & 0.00469 & -0.00469 & 0 & 0 \\ & & & 0.00949 & -0.00480 & 12.00 \\ & & & & 0.00480 & -12.00 \\ & & & & & 0.4 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{za} \\ \theta_{zb} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 10.67 \times 10^3 \\ 3.73 \times 10^3 \\ 8.00 \\ 20.96 \\ 7.04 \\ -9.60 \times 10^3 \end{Bmatrix}$$

Expand the upper partition and solve for  $[\theta_{za} \ \theta_{zb}]^T$ :

$$\begin{Bmatrix} \theta_{za} \\ \theta_{zb} \end{Bmatrix} = \frac{10^{-2}}{200} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1.4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -10.67 \\ -3.73 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.684 \times 10^{-4} \\ 0.698 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} \text{ rad}$$

2. *Reactions.* From the lower partition,

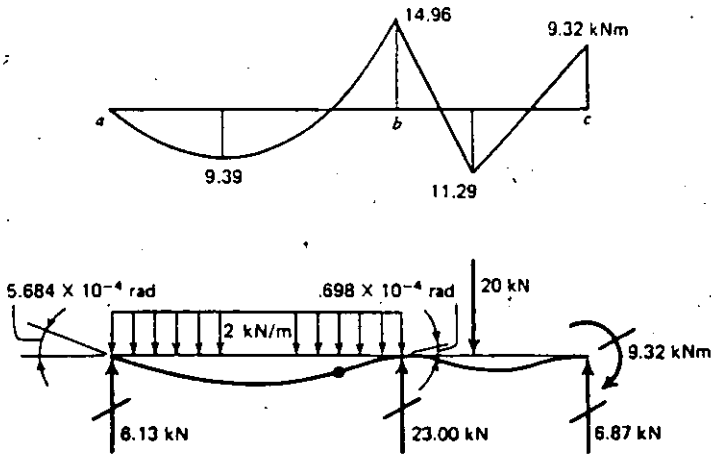
$$\begin{Bmatrix} R_{ya} \\ R_{yb} \\ R_{yc} \\ R_{mzc} \end{Bmatrix} = 2 \times 10^{-2} \begin{bmatrix} \theta_{za} & \theta_{zb} \\ 18.75 & 18.75 \\ -18.75 & -6.75 \\ 0 & -12.00 \\ 0 & 0.2 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -5.684 \\ 0.698 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 8.00 \\ 20.96 \\ 7.04 \\ -9.60 \times 10^3 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 6.13 \text{ kN} \\ 23.00 \text{ kN} \\ 6.87 \text{ kN} \\ -9.32 \times 10^3 \text{ kNmm} \end{Bmatrix}$$

*Bending moments.* Use the member stiffness equations of Example 4.8.

$$\begin{Bmatrix} M_{za}^{ab} \\ M_{zb}^{ab} \\ M_{zb}^{bc} \end{Bmatrix} = 2 \times 10^{-2} \begin{bmatrix} \theta_{za} & \theta_{zb} \\ 1 \times 10^5 & 0.5 \times 10^5 \\ 0.5 \times 10^5 & 1 \times 10^5 \\ 0 & 0.4 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -5.684 \\ 0.698 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 10.67 \times 10^3 \\ -10.67 \times 10^3 \\ 14.40 \times 10^3 \end{Bmatrix}$$

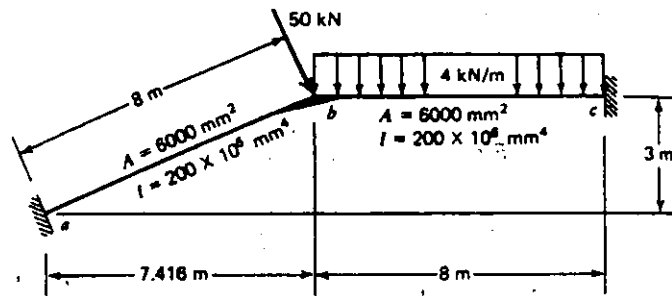
$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ -14.96 \times 10^3 \\ 14.96 \times 10^3 \end{Bmatrix} \text{ kNm}$$



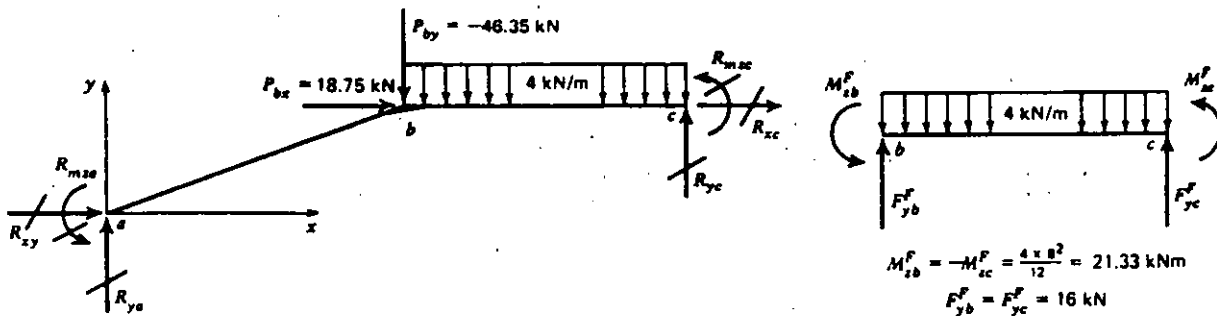
**EXAMPLE 5.8**

The rigid frame shown is made of elements studied in Examples 4.8 and 5.3.

1. Calculate the displacement at *b*. Include flexural and axial deformation effects.
2. Calculate the reactions.



Fixed end forces:



1. *Displacements.* Use Equation 3.6a and stiffness equations for the nonzero degrees of freedom drawn from Examples 4.8 and 5.3.

$$\begin{Bmatrix} P_{xb} \\ P_{yb} \\ P_{mzb} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 18.75 \\ -46.35 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= 200 \begin{bmatrix} (0.645 + 0.750) & (0.259 + 0) & (7.031 + 0) \\ & (0.109 + 0.00469) & (-17.382 + 18.75) \\ \text{Sym.} & & (1 + 1)10^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b \\ v_b \\ \theta_{zb} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 16 \\ 21.33 \times 10^3 \end{Bmatrix}$$

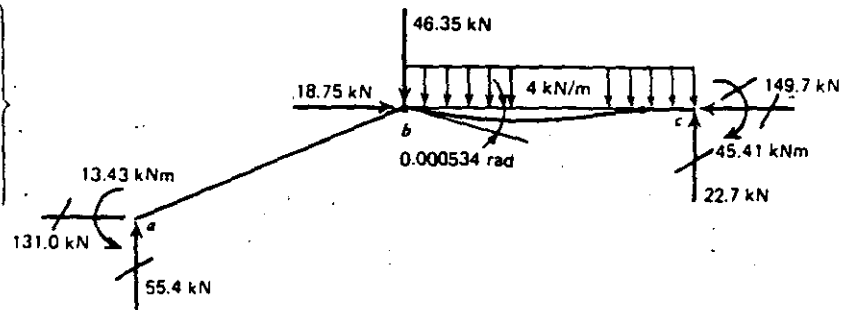
Solve for  $[u_b \ v_b \ \theta_{zb}]^T$ .

$$\begin{Bmatrix} u_b \\ v_b \\ \theta_{zb} \end{Bmatrix} = 0.5 \times 10^{-2} \begin{bmatrix} 1.394 & 0.259 & 7.031 \\ & 0.114 & 1.368 \\ \text{Sym.} & & 2 \times 10^5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 18.75 \\ -62.35 \\ -21.33 \times 10^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.09982 \text{ mm} \\ -4.996 \text{ mm} \\ -0.000534 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

2. *Reactions.* Use member stiffness equations from Examples 4.8 and 5.3.

$$\begin{Bmatrix} R_{xa} \\ R_{ya} \\ R_{mza} \\ R_{xb} \\ R_{yb} \\ R_{mzb} \end{Bmatrix} = 200 \begin{bmatrix} -0.644 & -0.259 & -7.031 \\ -0.259 & -0.109 & 17.382 \\ 7.031 & -17.382 & 0.5 \times 10^5 \\ -0.750 & 0 & 0 \\ 0 & -0.00469 & -18.75 \\ 0 & 18.75 & 0.5 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.9982 \\ -4.996 \\ -0.000534 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16.0 \\ -21.33 \times 10^3 \end{Bmatrix}$$

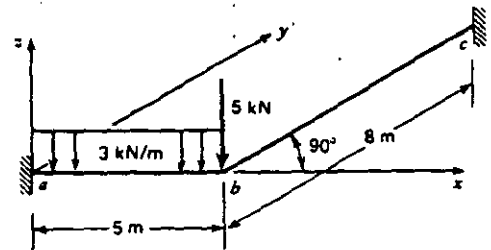
$$= \begin{Bmatrix} 131.0 \text{ kN} \\ 55.4 \text{ kN} \\ 13.43 \times 10^3 \text{ kNm} \\ -149.7 \text{ kN} \\ 22.7 \text{ kN} \\ -45.41 \times 10^3 \text{ kNm} \end{Bmatrix}$$

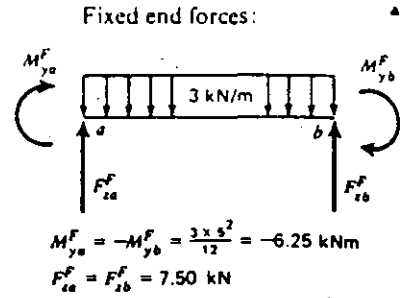
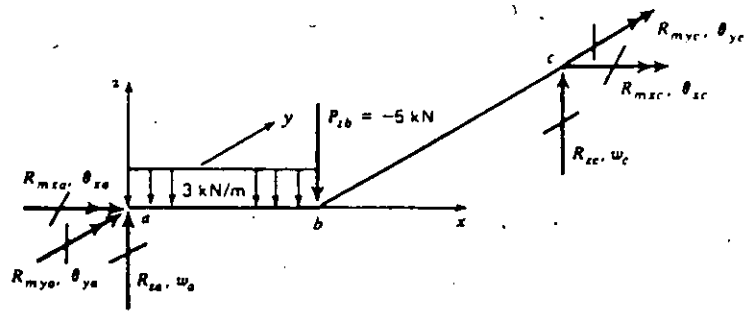


**EXAMPLE 5.9**

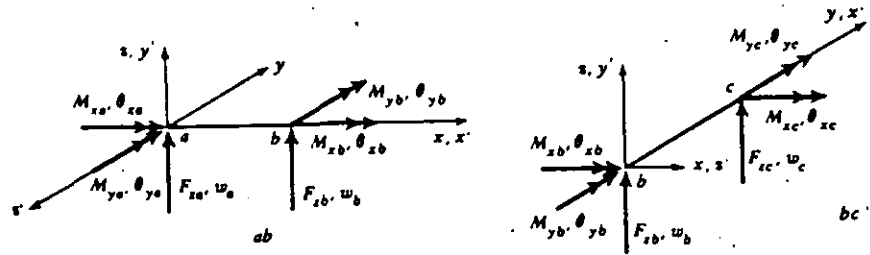
The rigid frame (grid) shown lies in a horizontal plane. The loads act vertically. Member *ab* has the properties of member *bc* of Example 4.8, and member *bc* has the properties of member *ab* of that example.

1. Calculate the displacement at *b*.
2. Calculate the reactions.





1. *Displacements.* Following the style of Example 5.3 and using the results of Example 4.8, develop the member stiffness matrices in global coordinates.



Member *ab*

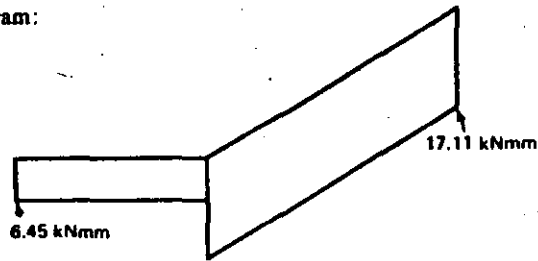
|        |   |                   |               |               |                   |               |               |        |   |       |         |   |       |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |        |   |                   |  |  |  |        |   |        |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|--------|---|-------------------|---------------|---------------|-------------------|---------------|---------------|--------|---|-------|---------|---|-------|--|-------|---|---|--------|---|--|--|-------------------|--------|---|-------------------|--|--|--|--------|---|--------|--|--|------|--|-------|---|--|--|--|--|--|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
|        |   | [k']              |               | [Γ]           |                   |               |               |        |   |       |         |   |       |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |        |   |                   |  |  |  |        |   |        |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 200    | <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>v_a</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\theta_{xa}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\theta_{ya}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>v_b</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\theta_{xb}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\theta_{yb}</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">0.0048</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">12.00</td> <td style="padding: 5px;">-0.0048</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">12.00</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">7.692</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">-7.692</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"><math>0.4 \times 10^5</math></td> <td style="padding: 5px;">-12.00</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;"><math>0.2 \times 10^5</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">0.0048</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">-12.00</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">Sym.</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">7.692</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"><math>0.4 \times 10^5</math></td> </tr> </table> | $v_a$             | $\theta_{xa}$ | $\theta_{ya}$ | $v_b$             | $\theta_{xb}$ | $\theta_{yb}$ | 0.0048 | 0 | 12.00 | -0.0048 | 0 | 12.00 |  | 7.692 | 0 | 0 | -7.692 | 0 |  |  | $0.4 \times 10^5$ | -12.00 | 0 | $0.2 \times 10^5$ |  |  |  | 0.0048 | 0 | -12.00 |  |  | Sym. |  | 7.692 | 0 |  |  |  |  |  | $0.4 \times 10^5$ | <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">-1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">-1</td> </tr> </table> | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| $v_a$  | $\theta_{xa}$   | $\theta_{ya}$     | $v_b$         | $\theta_{xb}$ | $\theta_{yb}$     |               |               |        |   |       |         |   |       |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |        |   |                   |  |  |  |        |   |        |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 0.0048 | 0   | 12.00             | -0.0048       | 0             | 12.00             |               |               |        |   |       |         |   |       |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |        |   |                   |  |  |  |        |   |        |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|        | 7.692   | 0                 | 0             | -7.692        | 0                 |               |               |        |   |       |         |   |       |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |        |   |                   |  |  |  |        |   |        |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|        |   | $0.4 \times 10^5$ | -12.00        | 0             | $0.2 \times 10^5$ |               |               |        |   |       |         |   |       |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |        |   |                   |  |  |  |        |   |        |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|        |   |                   | 0.0048        | 0             | -12.00            |               |               |        |   |       |         |   |       |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |        |   |                   |  |  |  |        |   |        |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|        |   | Sym.              |               | 7.692         | 0                 |               |               |        |   |       |         |   |       |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |        |   |                   |  |  |  |        |   |        |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|        |   |                   |               |               | $0.4 \times 10^5$ |               |               |        |   |       |         |   |       |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |        |   |                   |  |  |  |        |   |        |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 1      | 0   | 0                 | 0             | 0             | 0                 |               |               |        |   |       |         |   |       |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |        |   |                   |  |  |  |        |   |        |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 0      | 1   | 0                 | 0             | 0             | 0                 |               |               |        |   |       |         |   |       |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |        |   |                   |  |  |  |        |   |        |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 0      | 0   | -1                | 0             | 0             | 0                 |               |               |        |   |       |         |   |       |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |        |   |                   |  |  |  |        |   |        |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 0      | 0   | 0                 | 1             | 0             | 0                 |               |               |        |   |       |         |   |       |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |        |   |                   |  |  |  |        |   |        |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 0      | 0   | 0                 | 0             | 1             | 0                 |               |               |        |   |       |         |   |       |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |        |   |                   |  |  |  |        |   |        |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 0      | 0   | 0                 | 0             | 0             | -1                |               |               |        |   |       |         |   |       |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |        |   |                   |  |  |  |        |   |        |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

|        |   |                   |               |               |                   |               |               |        |   |        |         |   |        |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |       |   |                   |  |  |  |        |   |       |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |
|--------|---|-------------------|---------------|---------------|-------------------|---------------|---------------|--------|---|--------|---------|---|--------|--|-------|---|---|--------|---|--|--|-------------------|-------|---|-------------------|--|--|--|--------|---|-------|--|--|------|--|-------|---|--|--|--|--|--|-------------------|
|        |   | [k]               |               |               |                   |               |               |        |   |        |         |   |        |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |       |   |                   |  |  |  |        |   |       |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |
| 200    | <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>w_a</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\theta_{za}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\theta_{ya}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>w_b</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\theta_{zb}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\theta_{yb}</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">0.0048</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">-12.00</td> <td style="padding: 5px;">-0.0048</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">-12.00</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">7.692</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">-7.692</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"><math>0.4 \times 10^5</math></td> <td style="padding: 5px;">12.00</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;"><math>0.2 \times 10^5</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">0.0048</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">12.00</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">Sym.</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">7.692</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"><math>0.4 \times 10^5</math></td> </tr> </table> | $w_a$             | $\theta_{za}$ | $\theta_{ya}$ | $w_b$             | $\theta_{zb}$ | $\theta_{yb}$ | 0.0048 | 0 | -12.00 | -0.0048 | 0 | -12.00 |  | 7.692 | 0 | 0 | -7.692 | 0 |  |  | $0.4 \times 10^5$ | 12.00 | 0 | $0.2 \times 10^5$ |  |  |  | 0.0048 | 0 | 12.00 |  |  | Sym. |  | 7.692 | 0 |  |  |  |  |  | $0.4 \times 10^5$ |
| $w_a$  | $\theta_{za}$   | $\theta_{ya}$     | $w_b$         | $\theta_{zb}$ | $\theta_{yb}$     |               |               |        |   |        |         |   |        |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |       |   |                   |  |  |  |        |   |       |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |
| 0.0048 | 0   | -12.00            | -0.0048       | 0             | -12.00            |               |               |        |   |        |         |   |        |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |       |   |                   |  |  |  |        |   |       |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |
|        | 7.692   | 0                 | 0             | -7.692        | 0                 |               |               |        |   |        |         |   |        |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |       |   |                   |  |  |  |        |   |       |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |
|        |   | $0.4 \times 10^5$ | 12.00         | 0             | $0.2 \times 10^5$ |               |               |        |   |        |         |   |        |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |       |   |                   |  |  |  |        |   |       |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |
|        |   |                   | 0.0048        | 0             | 12.00             |               |               |        |   |        |         |   |        |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |       |   |                   |  |  |  |        |   |       |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |
|        |   | Sym.              |               | 7.692         | 0                 |               |               |        |   |        |         |   |        |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |       |   |                   |  |  |  |        |   |       |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |
|        |   |                   |               |               | $0.4 \times 10^5$ |               |               |        |   |        |         |   |        |  |       |   |   |        |   |  |  |                   |       |   |                   |  |  |  |        |   |       |  |  |      |  |       |   |  |  |  |  |  |                   |

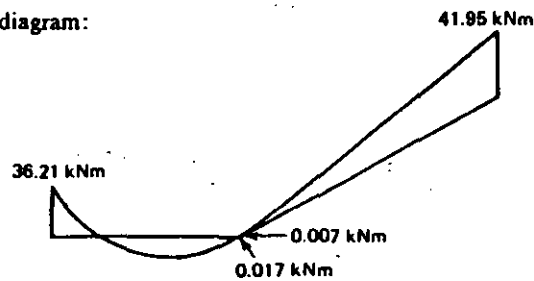


$$= \begin{Bmatrix} .4 & \text{kN} \\ -6.45 & \text{kNm} \\ -36.21 \times 10^3 & \text{kNm} \\ 5.25 & \text{kN} \\ -41.94 \times 10^3 & \text{kNm} \\ -17.11 & \text{kNm} \end{Bmatrix}$$

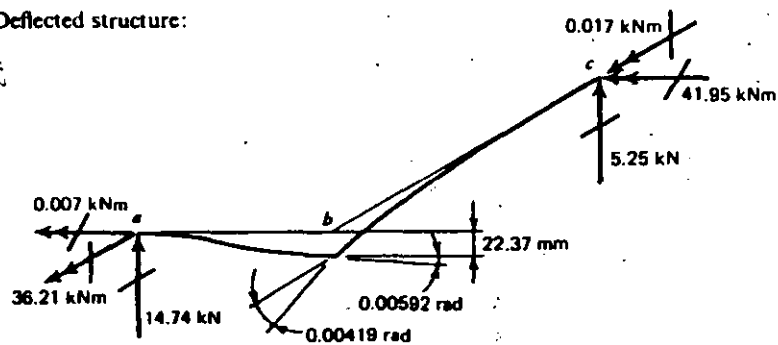
Torque diagram:



Moment diagram:



Deflected structure:

**EXAMPLE 5.10**

In the planar rigid frame shown, member  $ab$  corresponds to member  $ab$  of Example 5.3, member  $bc$  corresponds to member  $ab$  of Example 4.8, and member  $dc$  corresponds to member  $ed$  of Example 5.3. Neglect axial deformations.

Member  $bc$ 

$$200 \begin{bmatrix} r'_b & \theta'_{x,b} & \theta'_{z,b} & r'_c & \theta'_{x,c} & \theta'_{z,c} \\ 0.00469 & 0 & 18.75 & -0.00469 & 0 & 18.75 \\ 14.423 & 0 & 0 & 0 & -14.423 & 0 \\ & & 1 \times 10^5 & -18.75 & 0 & 0.5 \times 10^5 \\ \text{Sym.} & & & 0.00469 & 0 & -18.75 \\ & & & 14.423 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [k'] \\ [F] \end{Bmatrix}$$

$$200 \begin{bmatrix} w_b & \theta_{x,b} & \theta_{y,b} & w_c & \theta_{x,c} & \theta_{y,c} \\ 0.00469 & 18.75 & 0 & -0.00469 & 18.75 & 0 \\ 1 \times 10^5 & 0 & 0 & -18.75 & 0.5 \times 10^5 & 0 \\ & & 14.423 & 0 & 0 & -14.423 \\ \text{Sym.} & & & 0.00469 & -18.75 & 0 \\ & & & 1 \times 10^5 & 0 & 0 \\ & & & & & 14.423 \end{bmatrix}$$

Assemble global stiffness equations for the nonzero degrees of freedom:  $w_b, \theta_{x,b}, \theta_{y,b}$ :

$$\begin{Bmatrix} P_{z,b} \\ P_{m_{x,b}} \\ P_{m_{y,b}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.00 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 200 \begin{bmatrix} 0.00949 & 18.75 & 12.00 \\ & 1 \times 10^5 & 0 \\ \text{Sym.} & & 0.4 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_b \\ \theta_{x,b} \\ \theta_{y,b} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 7.50 \\ 0 \\ 6.25 \times 10^3 \end{Bmatrix}$$

Solve for  $[w_b, \theta_{x,b}, \theta_{y,b}]^T$ :

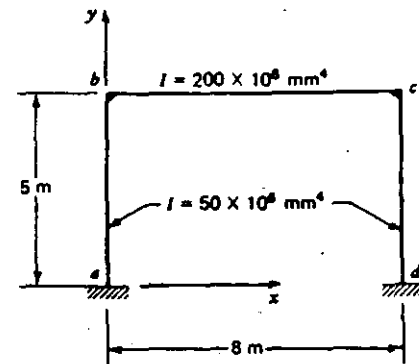
$$\begin{Bmatrix} w_b \\ \theta_{x,b} \\ \theta_{y,b} \end{Bmatrix} = 5.264 \times 10^{-8} \begin{bmatrix} 0.4 \times 10^8 & -7.5 \times 10^3 & -12 \times 10^3 \\ & 2.365 & 2.25 \\ \text{Sym.} & & 5.974 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -12.50 \\ 0 \\ -6.25 \times 10^3 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -22.37 \text{ mm} \\ 4.195 \times 10^{-3} \text{ rad} \\ 5.931 \times 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

2. Reactions. Use member stiffness equations:

$$\begin{Bmatrix} R_{z,b} \\ R_{m_{x,b}} \\ R_{m_{y,b}} \\ R_{z,c} \\ R_{m_{x,c}} \\ R_{m_{y,c}} \end{Bmatrix} = 200 \begin{bmatrix} w_b & \theta_{x,b} & \theta_{y,b} \\ -0.00480 & 0 & -12.00 \\ 0 & -7.692 & 0 \\ 12.00 & 0 & 0.2 \times 10^5 \\ -0.00469 & -18.75 & 0 \\ 18.75 & 0.5 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & -14.423 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -22.37 \\ 4.195 \times 10^{-3} \\ 5.931 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 7.50 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6.25 \times 10^3 \end{Bmatrix}$$

1. Calculate the displacements under a uniformly distributed vertical load of 2 kN/m. Use symmetry to reduce number of unknowns.
2. Calculate the displacements under horizontal loads of 2.5 kN at *b* and *c*. Use antisymmetry to reduce the number of unknowns.

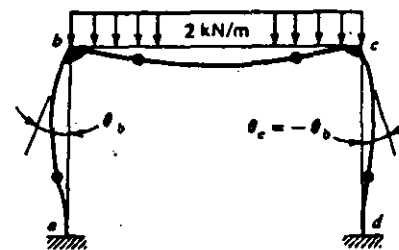


Neglecting axial deformations,  $v_b = v_c = 0$ , and  $u_b = u_c$ . Assemble global stiffness equations for nonzero degrees of freedom. Use Examples 4.8 and 5.3.

$$\begin{Bmatrix} P_{xb} \\ P_{mb} \\ P_{xc} \\ P_{mc} \end{Bmatrix} = 200 \begin{bmatrix} 0.00480 & 12.000 & 0 & 0 \\ & 1.4 \times 10^5 & 0 & 0.5 \times 10^5 \\ \text{Sym.} & & 0.00480 & 12.000 \\ & & & 1.4 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b \\ \theta_b \\ u_c \\ \theta_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_{xb}^F \\ P_{mb}^F \\ P_{xc}^F \\ P_{mc}^F \end{Bmatrix}$$

1. *Uniform vertical load.* By symmetry,  $u_c = -u_b$  and  $\theta_c = -\theta_b$ . Considering both symmetry and zero axial displacements,  $u_b = u_c = 0$ . Stiffness equations may be written

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 200 \begin{bmatrix} 0.00480 & 12.000 & 0 & 0 \\ & 1.4 \times 10^5 & 0 & 0.5 \times 10^5 \\ \text{Sym.} & & 0.00480 & 12.000 \\ & & & 1.4 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_b \\ 0 \\ -\theta_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 10.67 \times 10^3 \\ 0 \\ -10.67 \times 10^3 \end{Bmatrix} \text{ kNmm}$$



Expand second equation and solve for  $\theta_b$ :

$$0 = 200(1.4 - 0.5)10^5 \theta_b + 10.67 \times 10^3$$

$$\theta_b = 0.000593 \text{ rad}$$

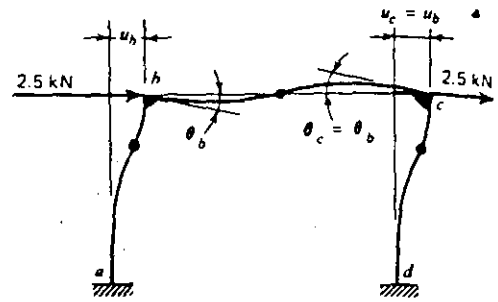
2. *Horizontal load.* Letting  $u_c = u_b$  and noting that, by anti-symmetry,  $\theta_c = \theta_b$ , stiffness equations may be written:

$$\begin{Bmatrix} P_{xb} \\ P_{mb} \\ P_{xc} \\ P_{mc} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.5 \\ 0 \\ 2.5 \\ 0 \end{Bmatrix} = 200 \begin{bmatrix} 0.00480 & 12.000 & 0 & 0 \\ & 1.4 \times 10^5 & 0 & 0.5 \times 10^5 \\ \text{Sym.} & & 0.00480 & 12.000 \\ & & & 1.4 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b \\ \theta_b \\ u_b \\ \theta_b \end{Bmatrix}$$

Simplify the first two equations and solve for  $[u_b \ \theta_b]^T$

$$\begin{Bmatrix} 2.5 \\ 0 \end{Bmatrix} = 200 \begin{bmatrix} 0.00480 & 12.000 \\ 12.000 & 1.9 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b \\ \theta_b \end{Bmatrix}$$

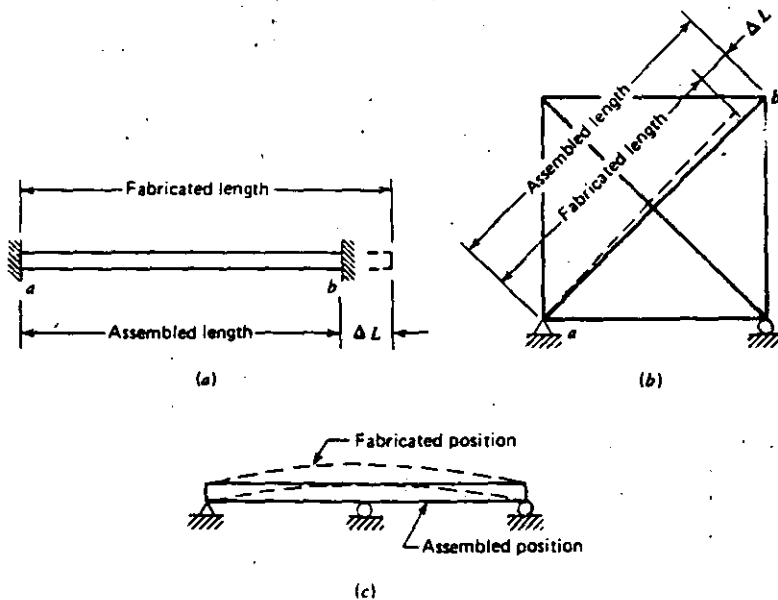
$$\begin{Bmatrix} u_b \\ \theta_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.09 \text{ mm} \\ -0.000195 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$



### 5.3 Self-Straining Problems—Initial and Thermal Strain Conditions

A self-strained structure may be defined as any system that is internally strained and in a state of stress while at rest and sustaining no external load. A number of examples are shown in Figure 5.7. A bar fabricated overly long and forced into place between fixed ends is one case (Figure 5.7a). To ensure tightness in the diagonal bracing of truss systems, some tension bars may be fabricated short intentionally and then drawn into place, producing self-straining of the type indicated by Figure 5.7b. If for some reason a continuous beam is fabricated with an upward bow and then pulled into place, as in Figure 5.7c, self-straining takes place. Shrink-fit problems, prestressed concrete girders, and cable-stayed bridges in which the cables are

Figure 5.7 Self-strained structures. (a) Compressed fit. (b) Draw of tie rod. (c) Fabricated bow.



After this, we shall look at some of the practically important features of support conditions and coordinate types, and the problem of revising structural properties in the light of the results of preliminary analysis. These topics are related in part by mathematics and in part by the common quality of contributing to the efficiency of analysis of some practical structures of moderate to large size.

We shall also consider the principles of symmetry and antisymmetry, since they may often be invoked to reduce the size of the problem dramatically.

Although the stiffness method is emphasized, in several places adaptation of the same or similar techniques to the flexibility method should be fairly obvious.

In the case of certain classes of structures, such as arches and cables, a method of solution known as the *transfer matrix method* may be more efficient than either the stiffness or flexibility methods. This is especially possible when dynamic or nonlinear effects must be taken into account. Therefore, it appears useful to examine at least the basic notions of the transfer matrix method in linear analysis. This is done in Section 10.7. The procedures to be followed in transfer matrix analysis differ so markedly from those in stiffness or flexibility analysis that a description of the transfer matrix method could not be accommodated in the chapters devoted to the latter methods.

### 10.1 Condensation

The term *condensation* refers to the contraction in size of a system of equations by elimination of certain degrees of freedom. The condensed equations are expressed in terms of preselected degrees of freedom  $\{\Delta_c\}$  which, together with the eliminated quantities  $\{\Delta_b\}$ , comprise the total original set of degrees of freedom, that is,  $\{\Delta\} = \{\Delta_b \mid \Delta_c\}$ . Mathematically, the process takes the original set of equations,  $[\mathbf{K}]\{\Delta\} = \{\mathbf{P}\}$ , which may be expressed in partitioned form as

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bc} \\ \mathbf{K}_{cb} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_b \\ \Delta_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_b \\ \mathbf{P}_c \end{Bmatrix} \quad (10.1)$$

and condenses them to the form:

$$[\hat{\mathbf{K}}_{cc}]\{\Delta_c\} = \{\hat{\mathbf{P}}_c\} \quad (10.2)$$

To reduce Equation 10.1 to Equation 10.2, first expand the upper partition and solve for  $\{\Delta_b\}$ . Thus

$$\{\Delta_b\} = -[\mathbf{K}_{bb}]^{-1}[\mathbf{K}_{bc}]\{\Delta_c\} + [\mathbf{K}_{bb}]^{-1}\{\mathbf{P}_b\} \quad (10.3)$$

Substituting this value of  $\{\Delta_b\}$  in the expanded lower partition of Equation 10.1 yields

$$-[\mathbf{K}_{cb}][\mathbf{K}_{bb}]^{-1}[\mathbf{K}_{bc}]\{\Delta_c\} + [\mathbf{K}_{cc}]\{\Delta_c\} = \{\mathbf{P}_c\} - [\mathbf{K}_{cb}][\mathbf{K}_{bb}]^{-1}\{\mathbf{P}_b\} \quad (10.4)$$

Letting

$$[[K_{cc}] - [K_{cb}][K_{bb}]^{-1}[K_{bc}]] = [\hat{K}_{cc}] \quad (10.5)$$

and

$$\{P_c\} - [K_{cb}][K_{bb}]^{-1}\{P_b\} = \{\hat{P}_c\} \quad (10.6)$$

Equation 10.4 becomes identical to Equation 10.2.

One way of using the condensation procedure is immediately obvious. If Equations 10.1 are stiffness equations in which  $\{P\} = \{P_b; P_c\}$  is a known load vector, one may solve for the unknown displacements in two steps. First, from Equation 10.2,

$$\{\Delta_c\} = [\hat{K}_{cc}]^{-1}\{\hat{P}_c\} \quad (10.7)$$

Second, by substituting the result in Equation 10.3,

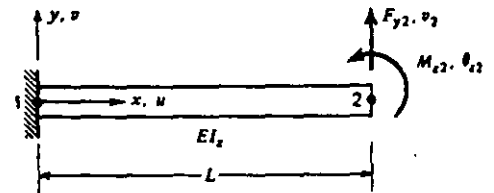
$$\{\Delta_b\} = [K_{bb}]^{-1}\{P_b\} - [K_{bb}]^{-1}[K_{bc}][\hat{K}_{cc}]^{-1}\{\hat{P}_c\} \quad (10.8)$$

Although it can be shown that the two-stage solution always requires a greater number of arithmetical operations than does the direct solution of the unpartitioned form of Equation 10.1, it has the virtue of enabling the solution to be effected through the inversion of matrices  $[K_{bb}]$  and  $[\hat{K}_{cc}]$ , which are each of lower order than the original unpartitioned matrix  $[K]$ . This can be important in treating problems of very large size or in using limited computer-core storage.

The concepts of condensation have already been used although they were not identified by that term. For instance, Examples 4.9 and 4.14 contain applications of condensation techniques. Example 10.1 is a further illustration of condensation.

#### EXAMPLE 10.1

From the results of Example 4.3, remove the degree of freedom  $\theta_{z2}$  by condensation.



Solving for  $\{M_{z2} \ F_{y2}\}$  from Example 4.3,

$$\begin{Bmatrix} M_{z2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} = \frac{2EI_z}{L} \begin{bmatrix} 2 & -3/L \\ -3/L & 6/L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

From Equation 10.5,

$$[k_{r,r}] = \frac{2EI_z}{L} \left[ \frac{6}{L^2} - \left( -\frac{3}{L} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \left( -\frac{3}{L} \right) \right] = \frac{3EI_z}{L^3}$$

From Equation 10.6,

$$\{F_r\} = F_{r2} - \left( -\frac{3}{L} \right) \left( \frac{1}{2} \right) M_{z2} = F_{r2} + \frac{3}{2} \frac{M_{z2}}{L}$$

From Equation 10.2,

$$\left[ \frac{3EI_z}{L^3} \right] \{v_2\} = \left\{ F_{r2} + \frac{3}{2} \frac{M_{z2}}{L} \right\} \quad \text{or} \quad v_2 = \frac{F_{r2}L^3}{3EI_z} + \frac{M_{z2}L^2}{2EI_z}$$

It is of interest to observe that condensation of a stiffness matrix means satisfaction of the equilibrium equations corresponding to the elements eliminated. Also, it should be clear that the "eliminated" degrees of freedom are not discarded. They are expressed as functions of the corresponding forces, the remaining degrees of freedom, and the coefficients of the equations, with the result substituted in the original equations (see Equations 10.3 and 10.4). This process is the matrix analogue of traditional Gaussian elimination for the solution of simultaneous linear algebraic equations (Section 11.2). Nothing is "lost" or "approximated" in the process of condensation. The effect of the forces that correspond to the eliminated degrees of freedom (the forces  $\{P_b\}$ ) on the remainder of the system is incorporated in the force vector  $\{F_r\}$  of Equation 10.6. In Equation 10.7 and 10.8 all of the elements contributing to the stiffness of the system are properly represented. Finally, selection of the degrees of freedom to be eliminated ( $\{\Delta_b\}$ ) is at the analyst's discretion. Usually, however, the selection is not an arbitrary one; there are generally logical reasons for choosing certain degrees of freedom for elimination.

(Problems 10.1 to 10.3)

### 10.2 Substructuring

When, for one of the reasons given in the introduction to this chapter, it is either impossible or undesirable to analyze a structure in its entirety in one page, it may be analyzed by the *substructuring method*. In this method, major components of the structure, called *substructures*, are first analyzed separately and the results are then combined. The mathematics of substructuring follow directly from the equations of condensation.

Figure 10.1a shows a structure partitioned into three major substructures M, N, and O. There is no physical significance to the fact that the interface members are shown heavier. They are just drawn that way to emphasize

dependency relationships between displacements (Sections 6.5 and 6.6). Now, we view the definition of "constraint" in the broad sense as a set of relationships between degrees of freedom that are supplemental to the basic stiffness relationships. Algebraically, a typical constraint equation—the *i*th such equation in a given problem—will be written in the form:

$$G_{i1}\Delta_1 + G_{i2}\Delta_2 + \dots + G_{ij}\Delta_j + \dots + G_{in}\Delta_n = H_i \quad (10.17)$$

where  $G_{i1}, G_{i2}, G_{ij}, G_{in}, H_i$  are specified coefficients and  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_j, \Delta_n$  are the degrees of freedom of the structure. Equation 10.17 is a linear algebraic equation, consistent with the limitation of this text to the treatment of linear problems.

In the simplest type of constraint, the familiar one of a single constrained degree of freedom at a support point, all  $G_{ij} = 0$  except the coefficient that multiplies that degree of freedom. The latter takes on the value 1.0. Also,  $H_i = 0$ . For example, if degree of freedom 2 is suppressed, we have  $G_{i2} = 1$ , and the constraint equation becomes

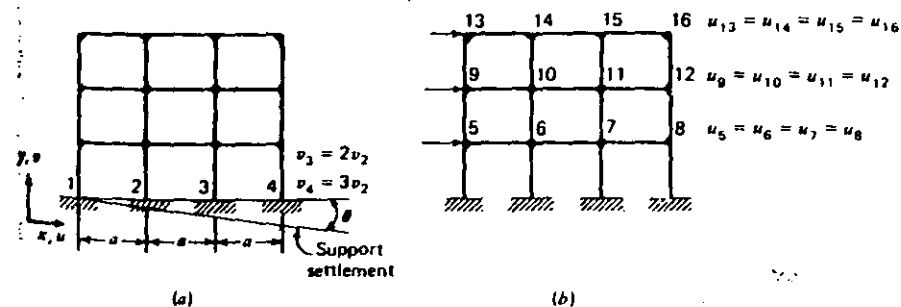
$$\Delta_2 = 0$$

Practical circumstances under which the general definition of a constraint given by Equation 10.17 plays a role are illustrated in Figure 10.3. In Figure 10.3a, for example, the column bases are assumed to settle in such a manner that their vertical displacements are related to one another as indicated. In Figure 10.3b we see that, because of the relatively great axial stiffness of the horizontal members of the frame, it is acceptable to set all horizontal displacements at a given level equal to one another.

Not only does the general constraint condition involve more than one degree of freedom, but a given structural analysis situation may feature more than one constraint condition. Thus, in developing the analytical approach to the treatment of constraints, we consider the case where *r* such conditions are present in a structure described by *n* degrees of freedom. The *r* linear constraint conditions are, for this case,

$$[G]\{\Delta\} = \{H\} \quad (10.18)$$

Figure 10.3 Representative constraint conditions.



$\{\Delta_c\}$  and the counterpart forces, there must be a corresponding, or contra-gradient, transformation of joint forces. As shown in Section 6.7, this transformation is given by the transpose of the matrix that transformed the displacements; that is,

$$\{\hat{P}_c\} = [\Gamma_{ec}]^T \{P_e\} \quad (10.23)$$

We have placed the hat ( $\hat{\quad}$ ) over  $\{P_c\}$  to emphasize that it represents the transference of forces  $\{P_e\}$  to the location of the degrees of freedom "c." Such forces supplement the loads  $\{P_c\}$  initially at these degrees of freedom. Hence, the total effective loads at degree of freedom "c,"  $\{\bar{P}_c\}$  are

$$\{\bar{P}_c\} = \{P_c\} + \{\hat{P}_c\} \quad (10.24)$$

and, by use of Equations 10.22,

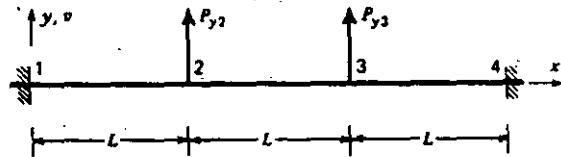
$$\begin{aligned} \{\bar{P}_c\} &= \{P_c\} + [\Gamma_{ec}]^T \{P_e\} \\ &= [[K_{cc}] + [K_{ee}][\Gamma_{ec}] + [\Gamma_{ec}]^T [K_{ee}] + [\Gamma_{ec}]^T [K_{ee}][\Gamma_{ec}]] \{\Delta_c\} \end{aligned} \quad (10.25)$$

Equation 10.25 discloses that if the transformation of degrees of freedom,  $[\Gamma_{ec}]$  can be established from a set of constraint conditions, then its use in this equation will result in a reduction of the degrees of freedom to be solved in the subsequent stiffness analysis. This reduction is equal to the number of constraint conditions. The eliminated displacements can subsequently be determined from Equation 10.20. Example 10.4 illustrates this.

(Problems 10.10 to 10.12)

#### EXAMPLE 10.4

The beam shown is constrained to displace in such a manner that  $v_2 = v_3$  and  $\theta_2 = -\theta_3$ . Calculate  $v_3$  and the bending moments at points 2 and 3.  $EI = \text{constant}$ .



The constraint conditions will be used to eliminate the  $v_2$  and  $\theta_2$  degrees of freedom. The global stiffness equation of the structure, arranged so as to facilitate the elimination,

$$\begin{Bmatrix} P_{r2} \\ P_{m2} \\ P_{r3} \\ P_{m3} \end{Bmatrix} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 & 3L \\ 0 & 4L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 12 & 0 \\ 3L & L^2 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ee} & K_{ec} \\ K_{ce} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

where  $[G]$  is an  $r \times n$  matrix of the constraint equation coefficients,  $\{\Delta\}$  is the list of joint degrees of freedom of the structure, and  $\{H\}$  is a vector of known constants. For simplicity, we deal only with the case  $\{H\} = 0$ . Development of the more general case,  $\{H\} \neq 0$ , is left as an exercise for the reader (Problem 10.11).

Now, each constraint equation can be viewed as a means to eliminate one of the degrees of freedom in favor of the remainder, simply by solving the constraint equation for the former and using the result in the stiffness equations. Hence, with  $r$  constraint conditions, it is possible to eliminate  $r$  degrees of freedom from the stiffness equations. To accomplish this elimination we partition Equation 10.18 as follows:

$$[G_e \mid G_c] \begin{Bmatrix} \Delta_e \\ \Delta_c \end{Bmatrix} = 0 \quad (10.19)$$

where  $G_e$  is a solvable (nonsingular)  $r \times r$  matrix and  $G_c$  is the  $r \times (n - r)$  remainder of the original matrix  $G$ .  $\Delta_e$  and  $\Delta_c$  are the corresponding degrees of freedom. Solving Equation 10.19 for  $\{\Delta_e\}$ ,

$$\{\Delta_e\} = -[G_e]^{-1}[G_c]\{\Delta_c\}$$

or

$$\{\Delta_e\} = [\Gamma_{ec}]\{\Delta_c\} \quad (10.20)$$

with

$$[\Gamma_{ec}] = -[G_e]^{-1}[G_c] \quad (10.21)$$

To account for the constraint condition in the stiffness analysis, the stiffness equations must be partitioned to separate the degrees of freedom  $\{\Delta_e\}$  and  $\{\Delta_c\}$ .

$$\begin{Bmatrix} P_e \\ P_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ee} & K_{ec} \\ K_{ce} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_e \\ \Delta_c \end{Bmatrix} \quad (10.22)$$

and, by substitution of Equation 10.20,

$$\{P_e\} = [[K_{ee}][\Gamma_{ec}] + [K_{ec}]]\{\Delta_c\} \quad (10.22a)$$

$$\{P_c\} = [[K_{ce}][\Gamma_{ec}] + [K_{cc}]]\{\Delta_c\} \quad (10.22b)$$

The degrees of freedom to be eliminated ( $\{\Delta_e\}$ ) have been expressed in terms of the degrees of freedom to be retained ( $\{\Delta_c\}$ ) by the transformation relationship, Equation 10.20. Equation 10.22b could be solved, as given, for  $\{\Delta_c\}$ , and this solution could then be inserted in Equation 10.20 to yield  $\{\Delta_e\}$ . The matrix on the right side of Equation 10.22b is unsymmetric, however, so that the solution of this equation is relatively expensive. To produce a symmetric set of equation coefficients and to establish relationships between



Solving:

$$\begin{Bmatrix} \theta_b \\ v_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.600 \times 10^{-3} \text{ rad} \\ -1.917 \text{ mm} \end{Bmatrix}$$

Antisymmetrical part

By antisymmetry,  $v_a = 0$ .

Unknown degrees of freedom:  $\theta_b, \theta_c$ .

Element stiffness equations (Equation 4.38):

$$ab \quad M_{ab} = 200(4 \times 10^4)\theta_b$$

$$bc \quad \begin{Bmatrix} M_{cb} \\ M_{bc} \end{Bmatrix} = 200 \begin{bmatrix} 8 \times 10^4 & 4 \times 10^4 \\ 4 \times 10^4 & 8 \times 10^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \end{Bmatrix}$$

Global stiffness equations:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 200 \begin{bmatrix} 12 \times 10^4 & 4 \times 10^4 \\ 4 \times 10^4 & 8 \times 10^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -4.00 \times 10^3 \\ -3.20 \times 10^3 \end{Bmatrix}$$

Solving:

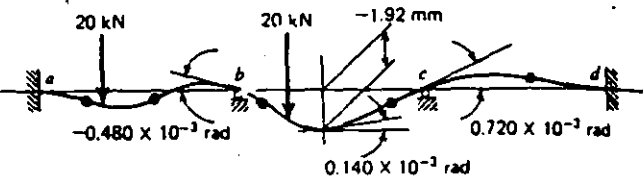
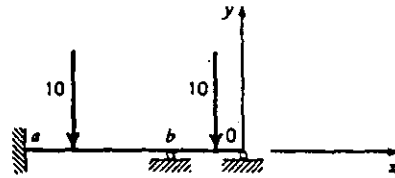
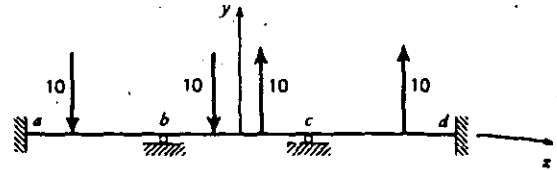
$$\begin{Bmatrix} \theta_b \\ \theta_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.120 \times 10^{-3} \\ 0.140 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} \text{ rad}$$

Combined analysis

$$\theta_b = (-0.600 + 0.120)10^{-3} = -0.480 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

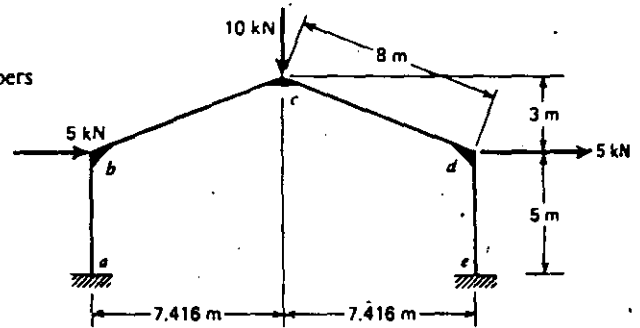
$$\theta_c = (+0.600 + 0.120)10^{-3} = +0.720 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$v_a = -1.92 \text{ mm}$$



**Example 10.9**

Using symmetry principles, determine the displacements at the joints of the rigid frame shown. For members  $ab$  and  $de$ ,  $A = 4 \times 10^3 \text{ mm}^2$ ,  $I = 50 \times 10^6 \text{ mm}^4$ . For members  $bc$  and  $cd$ ,  $A = 6 \times 10^3 \text{ mm}^2$ ,  $I = 200 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .  $E = 200,000 \text{ MPa}$  for all members. Use the results of Example 5.3.



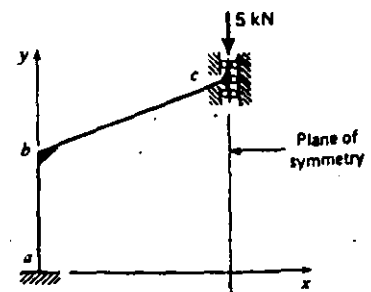
Symmetrical part

By symmetry,  $u_c = \theta_c = 0$ .

Unknown degrees of freedom:  $u_b, v_b, \theta_b, v_c$ .

From the element equations of Example 5.3, the global stiffness equations are

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{Bmatrix} = 200 \begin{bmatrix} 0.6500 & 0.2591 & 4.969 & -0.2591 \\ & 0.9095 & 17.381 & -0.1095 \\ & \text{Sym.} & 1.4 \times 10^5 & -17.381 \\ & & & 0.1095 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b \\ v_b \\ \theta_b \\ v_c \end{Bmatrix}$$



361 10.6 Symmetry and Anti-Symmetry

Solving,

$$[u_b \ v_b \ \theta_b \ v_c] = [-2.208 \text{ mm} \quad -0.0313 \text{ mm} \quad -0.611 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad -5.583 \text{ mm}]$$

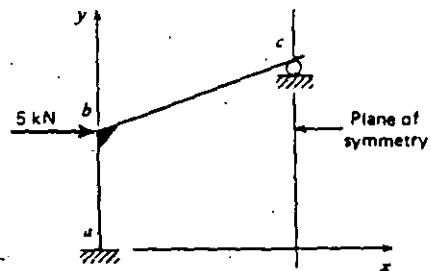
Antisymmetrical part

By antisymmetry,  $v_c = 0$ .

Unknown degrees of freedom:  $u_b, v_b, \theta_b, u_c, \theta_c$ .

From the element equations of Example 5.3, the global stiffness equations are

$$\begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 200 \begin{bmatrix} 0.6500 & 0.2591 & 4.969 & -0.6452 & -7.0313 \\ & 0.9095 & 17.381 & -0.2591 & 17.381 \\ & & 1.4 \times 10^5 & 7.0313 & 0.5 \times 10^5 \\ \text{Sym.} & & & 0.6452 & 7.0313 \\ & & & & 1 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b \\ v_b \\ \theta_b \\ u_c \\ \theta_c \end{Bmatrix}$$

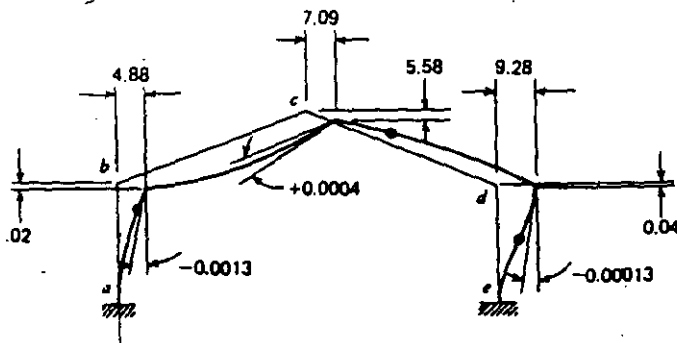


Solving,

$$[u_b \ v_b \ \theta_b \ u_c \ \theta_c] = [7.085 \text{ mm} \quad 0.0093 \text{ mm} \quad -0.7403 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad 7.093 \text{ mm} \quad 0.3680 \times 10^{-3} \text{ rad}]$$

Combined analysis

$$\begin{aligned} u_b &= -2.20 + 7.08 = 4.88 \text{ mm} \\ v_b &= -0.03 + 0.01 = -0.02 \text{ mm} \\ \theta_b &= (-0.611 - 0.740)10^{-3} = -1.351 \times 10^{-3} \text{ rad} \\ u_c &= 0 + 7.09 = 7.09 \text{ mm} \\ v_c &= -5.58 + 0 = -5.58 \text{ mm} \\ \theta_c &= 0 + 0.368 \times 10^{-3} = 0.368 \times 10^{-3} \text{ rad} \\ u_d &= +2.20 + 7.08 = 9.28 \text{ mm} \\ v_d &= -0.03 - 0.01 = -0.04 \text{ mm} \\ \theta_d &= (+0.611 - 0.740)10^{-3} = -0.129 \times 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned}$$



From Equations 11.10 and 11.11,  $[L]\{y\} = \{b\}$  and  $\{y\} = [L]^{-1}\{b\}$ ,

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 18 \\ 25 \\ 12 \end{Bmatrix} \quad \begin{aligned} y_1 &= b_1/l_{11} = 18/9 = 2 \\ y_2 &= (b_2 - l_{21}y_1)/l_{22} = (25 - 5 \times 2)/2 = 7.50 \\ y_3 &= (b_3 - l_{31}y_1 - l_{32}y_2)/l_{33} \\ &= (12 - 3 \times 2 - 1 \times 7.50)/7 = -0.2143 \end{aligned}$$

From Equations 11.9 and 11.12,  $[U]\{x\} = \{y\}$  and  $\{x\} = [U]^{-1}\{y\}$ ,

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -7 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.00 \\ 7.50 \\ -0.2143 \end{Bmatrix} \quad \begin{aligned} x_3 &= y_3/u_{33} = -0.2143/8 = -0.0268 \\ x_2 &= (y_2 - u_{23}x_3)/u_{22} = (7.50 - 2 \times 0.0268)/5 \\ &= 1.4892 \\ x_1 &= (y_1 - u_{13}x_3 - u_{12}x_2)/u_{11} \\ &= (2 - 7 \times 0.0268 - 3 \times 1.4892)/4 = -0.6639 \end{aligned}$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} -0.6639 \\ 1.4892 \\ -0.0268 \end{Bmatrix}$$

## 11.2 Elimination Methods

Although not always presented in this manner, the various elimination methods contain three basic steps or their equivalent: (1) decomposition of the coefficient matrix, (2) a process of forward (or backward) elimination, and (3) a process of backward (or forward) substitution. These steps should be clear in the descriptions of the Gauss and Cholesky methods that follow. Other schemes may, in addition, contain provisions for improving accuracy by interchanging rows and columns of the coefficient matrix at selected stages of the operation. Others may possess the capability of processing systems in which, although the number of equations is equal to the number of unknowns, the vectors  $\{x\}$  and  $\{b\}$  may each be admissible mixtures of unknown and known quantities.

**11.2.1 Gaussian Elimination** Basic Gaussian elimination proceeds as follows. Given a set of equations such as

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \quad (11.13)$$

eliminate the first unknown by multiplying the first equation by  $a_{21}/a_{11}$  and subtracting it from the second and then multiplying the original first equation by  $a_{31}/a_{11}$  and subtracting it from the third, yielding

$$\begin{aligned} \left(a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}}\right)x_3 &= \left(b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1\right) \\ \left(a_{32} - \frac{a_{31}a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 + \left(a_{33} - \frac{a_{31}a_{13}}{a_{11}}\right)x_3 &= \left(b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}b_1\right) \end{aligned} \quad (11.14)$$

Operating similarly on these two equations,  $x_2$  may be eliminated, leaving one equation in  $x_3$ . If we select the first equation from the original set and each stage of the elimination—or reduction—process, we may assemble them as

$$\begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 &= y_1 \\ u_{22}x_2 + u_{23}x_3 &= y_2 \\ u_{33}x_3 &= y_3 \end{aligned} \quad (11.15)$$

where  $u_{11} = a_{11}$ ,  $u_{22} = (a_{22} - a_{21}a_{12}/a_{11})$ ,  $y_1 = b_1$ ,  $y_2 = (b_2 - a_{21}b_1/a_{11})$ , etc. The unknowns  $x_3$ ,  $x_2$ ,  $x_1$  may now be obtained, in that order, by backward substitution in Equation 11.15. The same procedure can be applied to systems of any size, provided the coefficient of the leading unknown at any stage of elimination does not equal zero, a case we do not consider at the moment.

Comparing Equations 11.9 and 11.15, we see that they are identical; the former is just a matrix statement of the latter. It is clear, therefore, that Gaussian elimination accomplishes the decomposition of the coefficient matrix,  $[A]$ , into upper and lower triangular matrices and, further, that it inverts the lower triangle and postmultiplies the result by the right-hand side vector. The latter point can be seen by comparing Equation 11.11 with the right-hand sides of Equations 11.13 and 11.15.

Gaussian step-by-step decomposition of the  $[A]$  matrix into the product  $[L][U]$  can be represented algorithmically in several ways. One convenient scheme is the following (see Reference 11.4):

$$\begin{aligned} u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{r=1}^{i-1} l_{ir}u_{rj}, \quad i \leq j \\ l_{ii} &= 1 \\ l_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{r=1}^{j-1} l_{ir}u_{rj}}{u_{jj}}, \quad i > j \end{aligned} \quad (11.16)$$

Equation 11.16 may be applied by rows. It is illustrated and verified in Example 11.2. In Example 11.3, we carry the results of Example 11.2 one step further and show how the  $[U]$  matrix of the Gaussian procedure can be factored to yield the basic, unique, decomposition represented by Equation 11.4.

### EXAMPLE 11.2

Given

$$[A] = \begin{bmatrix} 7 & 9 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & -7 \\ 1 & 6 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

decompose by rows using Equation 11.16 and verify results.

$$\text{Row 1: } u_{11} = a_{11} = 7 \quad u_{12} = a_{12} = 9 \quad u_{13} = a_{13} = -1 \quad u_{14} = a_{14} = 2$$

$$\text{Row 2: } l_{21} = a_{21}/u_{11} = 4/7 = 0.5714$$

$$u_{22} = a_{22} - (l_{21} \times u_{12}) = -5 - (4 \times 9/7) = -10.1429$$

$$u_{23} = a_{23} - (l_{21} \times u_{13}) = 2 + (4 \times 1/7) = 2.5714$$

$$u_{24} = a_{24} - (l_{21} \times u_{14}) = -7 - (4 \times 2/7) = -8.1429$$

$$\text{Row 3: } l_{31} = a_{31}/u_{11} = 1/7 = 0.1429$$

$$l_{32} = [a_{32} - l_{31} \times u_{12}]/u_{22} = [6 - 0.1429 \times 9]/(-10.1429) = -0.4647$$

$$u_{33} = [a_{33} - l_{31} \times u_{13} - l_{32} \times u_{23}] \\ = [-3 - 0.1429(-1) - (-0.4647)(2.5714)] = -1.6622$$

$$u_{34} = [a_{34} - l_{31} \times u_{14} - l_{32} \times u_{24}] \\ = [-4 - 0.1429(2) - (-0.4647)(-8.1429)] = -8.0698$$

$$\text{Row 4: } l_{41} = a_{41}/u_{11} = 3/7 = 0.4286$$

$$l_{42} = [a_{42} - l_{41} \times u_{12}]/u_{22} = [-2 - 0.4286 \times 9]/(-10.1429) = 0.5775$$

$$l_{43} = [a_{43} - l_{41} \times u_{13} - l_{42} \times u_{23}]/u_{33} \\ = [-1 - 0.4286(-1) - 0.5775 \times 2.5714]/(-1.6622) = 1.2371$$

$$u_{44} = [a_{44} - l_{41} \times u_{14} - l_{42} \times u_{24} - l_{43} \times u_{34}] \\ = [-5 - 0.4286(2) - 0.5775(-8.1429) - (1.2371)(-8.0698)] = 8.8285$$

Check

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5714 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1429 & -0.4647 & 1 & 0 \\ 0.4286 & 0.5775 & 1.2371 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 9 & -1 & 2 \\ 0 & -10.1429 & 2.5714 & -8.1429 \\ 0 & 0 & -1.6622 & -8.0698 \\ 0 & 0 & 0 & 8.8285 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 9 & -1 & 2 \\ 4.000 & -5.000 & 2.000 & -7.000 \\ 1.000 & 6.000 & -3.000 & -4.000 \\ 3.000 & -2.000 & -1.000 & -5.000 \end{bmatrix}$$

$$[L][U] = [A] \quad \text{Q.E.D.}$$

**EXAMPLE 11.3**

Using the results of Example 11.2, develop the basic decomposition of the  $[A]$  matrix in that equation.

Write Equations 11.4 as

$$[A] = [L_o][D][U_o] \quad (a)$$

Comparing Equation a with Example 11.2, we see that  $[L_o] = [L]$ :

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5714 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1429 & -0.4647 & 1 & 0 \\ 0.4286 & 0.5775 & 1.2371 & 1 \end{bmatrix}$$

Also, by comparison,

$$[D] = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10.1429 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.6622 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.8285 \end{bmatrix}$$

$$\text{Row 4: } l_{41} = u_{14}/u_{11} = 4/7 = 1$$

$$l_{42} = u_{24}/u_{22} = 0/4 = 0$$

$$l_{43} = u_{34}/u_{33} = -8/1 = -8$$

$$u_{44} = a_{44} - l_{41} \times u_{14} - l_{42} \times u_{24} - l_{43} \times u_{34} \\ = 72 - 1 \times 4 - 0 \times 0 - (-8)(-8) = 4$$

Check

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 & 0 \\ 2.5 & -0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 & 4 \\ 6 & 13 & 13 & 6 \\ 10 & 13 & 27 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 72 \end{bmatrix}$$

$$[L][U] = [A] \quad \text{Q.E.D.}$$

**EXAMPLE 11.5**

Given

$$4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 4x_4 = 16$$

$$6x_1 + 13x_2 + 13x_3 + 6x_4 = 18$$

$$10x_1 + 13x_2 + 27x_3 + 2x_4 = 28$$

$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 72x_4 = 144$$

solve by Gaussian elimination.

The coefficient matrix is identical to  $[A]$  of Example 11.4—use results of that example. From Equations 11.10 and 11.11,  $[L]\{y\} = \{b\}$  and  $\{y\} = [L]^{-1}\{b\}$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 & 0 \\ 2.5 & -0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 18 \\ 28 \\ 144 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} y_1 = 16/1 = 16 \\ y_2 = 18 - 1.5 \times 16 = -6 \\ y_3 = 28 - 2.5 \times 16 - (-0.5)(-6) = -15 \\ y_4 = 144 - 1 \times 16 - 0 - (-8)(-15) = 8 \end{cases}$$

From Equations 11.9 and 11.12,  $[U]\{x\} = \{y\}$  and  $\{x\} = [U]^{-1}\{y\}$ .

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -15 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x_4 = 8/4 = 2 \\ x_3 = [-15 - (-8)(2)]/1 = 1 \\ x_2 = [-6 - (0)(2) - (-2)(1)]/4 = -1 \\ x_1 = [16 - (4)(2) - 10(1) - (6)(-1)]/4 = 1 \end{cases}$$

Check

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 & 4 \\ 6 & 13 & 13 & 6 \\ 10 & 13 & 27 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 18 \\ 28 \\ 144 \end{bmatrix}$$

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad \text{Q.E.D.}$$

**11 The Cholesky Method** Whereas Gaussian decomposition (Equation 11.1) is general, the Cholesky method applies only to cases in which matrix of coefficients of the unknowns is symmetrical. Its distinguishing

feature is that the [A] matrix is decomposed into upper and lower triangular matrices that are the transpose of each other; thus

$$[A] = [L][L]^T \quad (11.18)$$

Once this decomposition has been effected, equation solution proceeds by forward elimination and backward substitution following Equations 11.8 to 11.12, with [U] in those equations becoming [L]<sup>T</sup>.

Equation 11.18 follows from Equation 11.4, which we may write as

$$[A] = [L_o][D][U_o] \quad (11.4a)$$

The subscripts in Equation 11.4a are used merely to distinguish the unit triangular matrices from our presently desired end product. When [A] is symmetrical, [U<sub>o</sub>] must be the transpose of [L<sub>o</sub>], or

$$[A] = [L_o][D][L_o]^T$$

The diagonal matrix [D] can be factored into the product of two matrices, [D]<sup>1/2</sup>. In [D]<sup>1/2</sup>, the "square root" of [D], each element is the square root of the corresponding element of [D]. Making this substitution and the associations indicated by parentheses, we have

$$[A] = ([L_o][D]^{1/2})([D]^{1/2}[L_o]^T)$$

If we let

$$[L_o][D]^{1/2} = [L] \quad (11.19)$$

Equation 11.18 follows. The following is a convenient algorithm for Cholesky decomposition (see Ref. 11.2):

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{r=1}^{i-1} l_{ir}^2}$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{r=1}^{j-1} l_{ir}l_{jr}}{l_{jj}} \quad i > j \quad (11.20)$$

Equation 11.20 may be applied by columns. It is illustrated and verified in Example 11.6.

**EXAMPLE 11.6**

Given

$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 & 4 \\ 6 & 13 & 13 & 6 \\ 10 & 13 & 27 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 72 \end{bmatrix}$$

decompose by columns using Equation 11.20 and verify results.

Column 1:  $l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2$   
 $l_{21} = a_{21}/l_{11} = 6/2 = 3$   
 $l_{31} = a_{31}/l_{11} = 10/2 = 5$   
 $l_{41} = a_{41}/l_{11} = 4/2 = 2$

Column 2:  $l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{13 - (3)^2} = 2$   
 $l_{32} = [a_{32} - l_{31} \times l_{21}]/l_{22} = [13 - 5 \times 3]/2 = -1$   
 $l_{42} = [a_{42} - l_{41} \times l_{21}]/l_{22} = [6 - 2 \times 3]/2 = 0$

Column 3:  $l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{27 - (5)^2 - (-1)^2} = 1$   
 $l_{43} = [a_{43} - l_{41} \times l_{31} - l_{42} \times l_{32}]/l_{33} = [2 - (2)(5) - (0)(-1)]/1 = -8$

Column 4:  $l_{44} = \sqrt{a_{44} - l_{41}^2 - l_{42}^2 - l_{43}^2} = \sqrt{72 - (2)^2 - (0)^2 - (-8)^2} = 2$

Check

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 & 4 \\ 6 & 13 & 13 & 6 \\ 10 & 13 & 27 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 72 \end{bmatrix}$$

$$[L][L]^T = [A] \quad \text{Q.E.D.}$$

**11.2.3 Variations** The explanations of the Gauss and Cholesky procedures demonstrate the similarities that exist among elimination methods and their relation to matrix decomposition. The discussion should also furnish a basis for understanding the vast literature devoted to the many variants of the elimination approach.

Attempts to compare the merits of different variants are apt to prove fruitless, since their relative qualities are often functions of particular types of problems, or particular types of computers. For example, there have been lengthy but inconclusive arguments over whether the necessity of taking square roots in the Cholesky process (Equation 11.20) may cause numerical errors that should be avoided and therefore make this method undesirable. Suffice it to say that, in the late 1970s, the trend in computer programs was toward the use of the Gauss algorithm or some close variant of it. Cholesky is often used and referred to in the literature; hence it deserves the attention we have given it above. When other elimination methods, such as the Gauss-Jordan scheme used in Chapter 6, are employed as equation solvers, they require, at best, no fewer arithmetical operations than the methods just described. Usually they require more. Different approaches to equation solving such as iterative and orthogonalization methods (Ref. 11.1) have not been significantly utilized to date in general-purpose structural analysis programs.

To obtain the solution for the displacements, velocities, and accelerations at time  $t + \Delta t$ , the equilibrium equations (8.1) are considered at time  $t + \theta \Delta t$ . However, because the accelerations are assumed to vary linearly, a linearly projected load vector is used; i.e., the equation employed is

$$M\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} + C\dot{U}_{t+\theta\Delta t} + KU_{t+\theta\Delta t} = \bar{R}_{t+\theta\Delta t} \quad (8.25)$$

where

$$\bar{R}_{t+\theta\Delta t} = R_t + \theta(R_{t+\Delta t} - R_t) \quad (8.26)$$

Substituting (8.23) and (8.24) into (8.25), an equation is obtained from which  $U_{t+\theta\Delta t}$  can be solved. Then substituting  $U_{t+\theta\Delta t}$  into (8.23), we obtain  $\dot{U}_{t+\theta\Delta t}$ , which is used in (8.18), (8.19), and (8.20), all evaluated at  $\tau = \Delta t$  to calculate  $\ddot{U}_{t+\Delta t}$ ,  $\dot{U}_{t+\Delta t}$ , and  $U_{t+\Delta t}$ . The complete algorithm used in the integration is given in Table 8.3.

TABLE 8.3 STEP-BY-STEP SOLUTION USING WILSON  $\theta$  INTEGRATION METHOD

A. Initial Calculations:

1. Form stiffness matrix  $K$ , mass matrix  $M$ , and damping matrix  $C$ .
2. Initialize  $U_0$ ,  $\dot{U}_0$ , and  $\ddot{U}_0$ .
3. Select time step  $\Delta t$  and calculate integration constants,  $\theta = 1.4$  (usually):

$$a_0 = \frac{6}{(\theta \Delta t)^2}; \quad a_1 = \frac{3}{\theta \Delta t}; \quad a_2 = 2a_1; \quad a_3 = \frac{\theta \Delta t}{2};$$

$$a_4 = \frac{a_0}{\theta}; \quad a_5 = \frac{-a_2}{\theta}; \quad a_6 = 1 - \frac{3}{\theta}; \quad a_7 = \frac{\Delta t}{2};$$

$$a_8 = \frac{\Delta t^2}{6}$$

4. Form effective stiffness matrix  $\hat{K}$ :  $\hat{K} = K + a_0 M + a_1 C$ .
5. Triangularize  $\hat{K}$ :  $\hat{K} = LDL^T$ .

B. For Each Time Step:

1. Calculate effective loads at time  $t + \Delta t$ :

$$\hat{R}_{t+\theta\Delta t} = R_t + \theta(R_{t+\Delta t} - R_t) + M(a_0 U_t + a_2 \dot{U}_t + 2\ddot{U}_t) + C(a_1 U_t + 2\dot{U}_t + a_3 \ddot{U}_t)$$

2. Solve for displacements at time  $t + \theta \Delta t$ :

$$LDL^T U_{t+\theta\Delta t} = \hat{R}_{t+\theta\Delta t}$$

3. Calculate displacements, velocities, and accelerations at time  $t + \Delta t$ :

$$U_{t+\Delta t} = a_4(U_{t+\theta\Delta t} - U_t) + a_5 \dot{U}_t + a_6 \ddot{U}_t$$

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + a_7(\dot{U}_{t+\theta\Delta t} + \dot{U}_t)$$

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \Delta t \dot{U}_t + a_8(\ddot{U}_{t+\Delta t} + 2\ddot{U}_t)$$

As pointed out earlier, the Wilson  $\theta$  method is also an implicit integration method, because the stiffness matrix  $K$  is a coefficient matrix to the unknown displacement vector. It may also be noted that no special starting procedures are needed, since the displacements, velocities, and accelerations at time  $t + \Delta t$  are expressed in terms of the same quantities at time  $t$  only. The stability and accuracy of the integration scheme is studied in Chapter 9.

Example 8.3

Calculate the displacement response of the system considered in Examples 8.1 and 8.2 using the Wilson  $\theta$  method. Use  $\theta = 1.4$ .

First we consider the case  $\Delta t = 0.28$ . Following the steps of calculations in Table 8.3, we have

$$U_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \dot{U}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \ddot{U}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

where  $\ddot{U}_0$  was evaluated in Example 8.1. Then

$$a_0 = 39.0; \quad a_1 = 7.65; \quad a_2 = 15.3; \quad a_3 = 0.196; \quad a_4 = 27.9;$$

$$a_5 = -10.9; \quad a_6 = -1.14; \quad a_7 = 0.14; \quad a_8 = 0.0131$$

and

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 39.0 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84.1 & -2 \\ -2 & 43.0 \end{bmatrix}$$

For each time step we need to evaluate

$$\hat{R}_{t+\theta\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [39.0U_t + 15.3\dot{U}_t + 2\ddot{U}_t]$$

$$\hat{R}U_{t+\theta\Delta t} = \hat{R}_{t+\theta\Delta t}$$

and then calculate

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = 27.9(U_{t+\theta\Delta t} - U_t) - 10.9\dot{U}_t - 1.14\ddot{U}_t$$

$$U_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + 0.14(\dot{U}_{t+\theta\Delta t} + \dot{U}_t)$$

$$U_{t+\Delta t} = U_t + 0.28\dot{U}_t + 0.0131(\ddot{U}_{t+\Delta t} + 2\ddot{U}_t)$$

| Time        | $\Delta t$ | $2\Delta t$ | $3\Delta t$ | $4\Delta t$ | $5\Delta t$ | $6\Delta t$ | $7\Delta t$ | $8\Delta t$ | $9\Delta t$ | $10\Delta t$ | $11\Delta t$ | $12\Delta t$ |
|-------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|--------------|
| $U_t$       | 0.00605    | 0.0525      | 0.196       | 0.490       | 0.952       | 1.54        | 2.16        | 2.67        | 2.92        | 2.82         | 2.33         | 1.54         |
| $\dot{U}_t$ | 0.366      | 1.34        | 2.64        | 3.92        | 4.88        | 5.31        | 5.18        | 4.61        | 3.82        | 3.06         | 2.52         | 2.29         |

The solution obtained is compared with the exact results in Example 8.7.

Consider now the direct integration with a time step  $\Delta t = 28$ . In this case we have

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 0.00392 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.00784 & -2 \\ -2 & 4.00392 \end{bmatrix}$$

where we note that  $\hat{K}$  is nearly equal to  $K$ , as in the integration using the Houbolt method.

The displacement response obtained over 12 time steps is

| Time  | $\Delta t$ | $2\Delta t$ | $3\Delta t$ | $4\Delta t$ | $5\Delta t$ | $6\Delta t$ | $7\Delta t$ | $8\Delta t$ | $9\Delta t$ | $10\Delta t$ | $11\Delta t$ | $12\Delta t$ |
|-------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|--------------|
| $U_i$ | 1.09       | 2.82        | -2.61       | 5.85        | -4.47       | 6.59        | -4.38       | 5.97        | -3.46       | 4.92         | -2.39        | 3.89         |
|       | 1123.      | -834.       | 674.        | -519.       | 406.        | -308.       | 24.2        | -181.       | 144.        | -105.        | 86.1         | -60.8        |

Here it should be noted that the initial conditions on the accelerations, i.e.,  $\ddot{U}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$ , cause the large initial displacement response. This response is damped out with increasing time. If we use  $\ddot{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , the calculated displacement response is

| Time  | $\Delta t$ | $2\Delta t$ | $3\Delta t$ | $4\Delta t$ | $5\Delta t$ | $6\Delta t$ | $7\Delta t$ | $8\Delta t$ | $9\Delta t$ | $10\Delta t$ | $11\Delta t$ | $12\Delta t$ |
|-------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|--------------|
| $U_i$ | 0.363      | 1.44        | 0.632       | 1.29        | 0.782       | 1.17        | 0.875       | 1.09        | 0.923       | 1.05         | 0.960        | 1.03         |
|       | 1.09       | 4.33        | 1.89        | 3.87        | 2.32        | 3.52        | 2.60        | 3.31        | 2.77        | 3.18         | 2.86         | 3.11         |

where it is observed that the static solution is approached (see Example 8.2).

8.2.4 The Newmark Method

The Newmark integration scheme can also be understood to be an extension of the linear acceleration method. The following assumptions are used:<sup>17</sup>

$$\dot{U}_{i+\Delta t} = \dot{U}_i + [(1 - \delta)\dot{U}_i + \delta\dot{U}_{i+\Delta t}] \Delta t \quad (8.27)$$

$$U_{i+\Delta t} = U_i + \dot{U}_i \Delta t + [(\frac{1}{2} - \alpha)\dot{U}_i + \alpha\dot{U}_{i+\Delta t}] \Delta t^2 \quad (8.28)$$

where  $\alpha$  and  $\delta$  are parameters that can be determined to obtain integration accuracy and stability. When  $\delta = \frac{1}{2}$  and  $\alpha = \frac{1}{6}$ , relations (8.27) and (8.28) correspond to the linear acceleration method (which is also obtained using  $\theta = 1$  in the Wilson  $\theta$  method). Newmark originally proposed as an unconditionally stable scheme the constant-average-acceleration method, in which case  $\delta = \frac{1}{2}$  and  $\alpha = \frac{1}{4}$  (see Fig. 8.2).

In addition to (8.27) and (8.28), for solution of the displacements, velocities, and accelerations at time  $t + \Delta t$ , the equilibrium equations (8.1) at time  $t + \Delta t$  are also considered:

$$M\ddot{U}_{i+\Delta t} + C\dot{U}_{i+\Delta t} + KU_{i+\Delta t} = R_{i+\Delta t} \quad (8.29)$$

Solving from (8.28) for  $\dot{U}_{i+\Delta t}$  in terms of  $U_{i+\Delta t}$ , and then substituting for  $\dot{U}_{i+\Delta t}$  into (8.27), we obtain equations for  $\ddot{U}_{i+\Delta t}$  and  $\dot{U}_{i+\Delta t}$ , each in terms of the unknown displacements  $U_{i+\Delta t}$  only. These two relations for  $U_{i+\Delta t}$  and

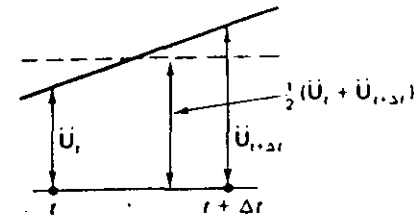


Figure 8.2. Newmark's constant-average-acceleration scheme.

$\ddot{U}_{i+\Delta t}$  are substituted into (8.29) to solve for  $U_{i+\Delta t}$ , after which, using (8.27) and (8.28),  $\dot{U}_{i+\Delta t}$  and  $\ddot{U}_{i+\Delta t}$  can also be calculated.

The complete algorithm using the Newmark integration scheme is given in Table 8.4. The close relationship between the computer implementation of the Newmark and the Wilson method should be noted, which makes it

TABLE 8.4 STEP-BY-STEP SOLUTION USING NEWMARK INTEGRATION METHOD

A. Initial Calculations:

1. Form stiffness matrix  $K$ , mass matrix  $M$ , and damping matrix  $C$ .
2. Initialize  $U_0$ ,  $\dot{U}_0$ , and  $\ddot{U}_0$ .
3. Select time step size  $\Delta t$ , parameters  $\alpha$  and  $\delta$ , and calculate integration constants:

$$\delta \geq 0.50; \quad \alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$$

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}; \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}; \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1;$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1; \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right); \quad a_6 = \Delta t(1 - \delta);$$

$$a_7 = \delta \Delta t$$

4. Form effective stiffness matrix  $\hat{K}$ :  $\hat{K} = K + a_0 M + a_1 C$ .
5. Triangularize  $\hat{K}$ :  $\hat{K} = LDL^T$ .

B. For Each Time Step:

1. Calculate effective loads at time  $t + \Delta t$ :  

$$\hat{R}_{i+\Delta t} = R_{i+\Delta t} + M(a_0 U_i + a_2 \dot{U}_i + a_3 \ddot{U}_i) + C(a_1 U_i + a_4 \dot{U}_i + a_5 \ddot{U}_i)$$
2. Solve for displacements at time  $t + \Delta t$ :

$$LDL^T U_{i+\Delta t} = \hat{R}_{i+\Delta t}$$

3. Calculate accelerations and velocities at time  $t + \Delta t$ :

$$\ddot{U}_{i+\Delta t} = a_0(U_{i+\Delta t} - U_i) - a_2 \dot{U}_i - a_3 \ddot{U}_i$$

$$\dot{U}_{i+\Delta t} = \dot{U}_i + a_6 \ddot{U}_i + a_7 \ddot{U}_{i+\Delta t}$$

possible to conveniently use both integration schemes in one single computer program.<sup>12,13</sup> The stability and accuracy analysis of the Newmark method is presented in Chapter 9.

In the following discussion we consider first a simple example analysis using the Newmark method. Then, to indicate the general applicability of direct integration, we develop an integration scheme for the analysis of transient heat transfer problems.

#### Example 8.4

Calculate the displacement response of the system considered in Examples 8.1 to 8.3 using the Newmark method. Use  $\alpha = 0.25$ ,  $\delta = 0.5$ .

Consider first the case  $\Delta t = 0.28$ . Following the steps of calculations given in Table 8.4, we have

$$U_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \dot{U}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \ddot{U}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

The integration constants are

$$a_0 = 51.0; \quad a_1 = 7.14; \quad a_2 = 14.3; \quad a_3 = 1.00;$$

$$a_4 = 1.00; \quad a_5 = 0.00; \quad a_6 = 0.14; \quad a_7 = 0.14$$

Thus the effective stiffness matrix is

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 51.0 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 108 & -2 \\ -2 & 55 \end{bmatrix}$$

For each time step we need to evaluate

$$\hat{R}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (51U_t + 14.3\dot{U}_t + 1.0\ddot{U}_t)$$

Then

$$\hat{K}U_{t+\Delta t} = \hat{R}_{t+\Delta t}$$

and

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = 51.0(U_{t+\Delta t} - U_t) - 14.3\dot{U}_t - 1.0\ddot{U}_t$$

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = \ddot{U}_t + 0.14\dot{U}_t + 1.0\ddot{U}_{t+\Delta t}$$

Performing the above calculations, we obtain

| Time  | $\Delta t$ | $2\Delta t$ | $3\Delta t$ | $4\Delta t$ | $5\Delta t$ | $6\Delta t$ | $7\Delta t$ | $8\Delta t$ | $9\Delta t$ | $10\Delta t$ | $11\Delta t$ | $12\Delta t$ |
|-------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|--------------|
| $U_t$ | 0.00673    | 0.0504      | 0.189       | 0.485       | 0.961       | 1.58        | 2.23        | 2.76        | 3.00        | 2.85         | 2.28         | 1.40         |
|       | 0.364      | 1.35        | 2.68        | 4.00        | 4.95        | 5.34        | 5.13        | 4.48        | 3.64        | 2.90         | 2.44         | 2.31         |

The solution obtained is compared with the exact results in Example 8.7.

Next we consider the time step  $\Delta t = 28.0$ . In this case we have

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 0.0051 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.0102 & -2.0000 \\ -2.0000 & 4.0051 \end{bmatrix}$$

Therefore,  $\hat{K}$  is, as in the integration using the Houbolt or Wilson  $\theta$  method, nearly equal to  $K$ .

Using the initial conditions  $\dot{U}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$ , we obtain, as the displacement response,

| Time  | $\Delta t$ | $2\Delta t$ | $3\Delta t$ | $4\Delta t$ | $5\Delta t$ | $6\Delta t$ | $7\Delta t$ | $8\Delta t$ | $9\Delta t$ | $10\Delta t$ | $11\Delta t$ | $12\Delta t$ |
|-------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|--------------|
| $U_t$ | 1.99       | 0.028       | 1.94        | 0.112       | 1.82        | 0.248       | 1.67        | 0.429       | 1.47        | 0.648        | 1.23         | 0.894        |
|       | 5.99       | 0.045       | 5.99        | 0.177       | 5.72        | 0.393       | 5.47        | 0.685       | 5.14        | 1.04         | 4.76         | 1.45         |

However, using as initial conditions  $\ddot{U}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , we obtain

| Time  | $\Delta t$ | $2\Delta t$ | $3\Delta t$ | $4\Delta t$ | $5\Delta t$ | $6\Delta t$ | $7\Delta t$ | $8\Delta t$ | $9\Delta t$ | $10\Delta t$ | $11\Delta t$ | $12\Delta t$ |
|-------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|--------------|
| $U_t$ | 0.363      | 1.44        | 0.632       | 1.29        | 0.782       | 1.17        | 0.875       | 1.09        | 0.929       | 1.05         | 0.960        | 1.03         |
|       | 1.09       | 4.33        | 1.89        | 3.87        | 2.32        | 3.52        | 2.60        | 3.31        | 2.77        | 3.18         | 2.86         | 2.11         |

and hence the static solution is approached (see Examples 8.2 and 8.3).

#### Example 8.5

Use the principles presented in this section to develop a step-by-step direct integration scheme for the solution of transient heat transfer problems. Use the heat flow equilibrium equations derived in Section 5.4 and assume that the temperature varies linearly over the time interval  $\Delta t$ .

The equilibrium equations obtained in Section 5.4 are given in relation (5.40) and are restated as follows:

$$C\dot{\theta} + K\theta = Q \quad (a)$$

where  $C$  and  $K$  are the heat capacity and conductivity matrices, and  $\theta$  and  $Q$  are nodal point temperatures and nodal point heat flow inputs, respectively.

The assumption of a linear temperature variation over the time interval  $\Delta t$  gives

$$\theta(\tau) = \theta_t + \frac{\tau - t}{\Delta t}(\theta_{t+\Delta t} - \theta_t)$$

where

$$t \leq \tau \leq t + \Delta t$$

Hence we can use

$$\dot{\theta}(\tau) = \frac{1}{\Delta t}(\theta_{t+\Delta t} - \theta_t)$$

and specifically at time  $t + \Delta t$ ,

$$\dot{\theta}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}(\theta_{t+\Delta t} - \theta_t) \quad (b)$$



8.2.3 The Wilson  $\theta$  Method

The Wilson  $\theta$  method is essentially an extension of the linear acceleration method, in which a linear variation of acceleration from time  $t$  to time  $t + \Delta t$  is assumed. Referring to Fig. 8.1 in the Wilson  $\theta$  method, the acceleration is assumed to be linear from time  $t$  to time  $t + \theta \Delta t$ , where  $\theta \geq 1.0$ .<sup>16</sup> When  $\theta = 1.0$ , the method reduces to the linear acceleration scheme, but we will

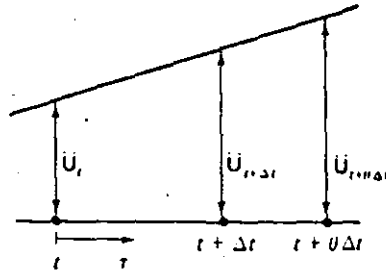


Figure 8.1. Linear acceleration assumption of Wilson  $\theta$  method.

show in Chapter 9 that for unconditional stability we need to use  $\theta \geq 1.37$ , and usually we employ  $\theta = 1.40$ .

Let  $\tau$  denote the increase in time, where  $0 \leq \tau \leq \theta \Delta t$ ; then for the time interval  $t$  to  $t + \theta \Delta t$ , it is assumed that

$$\ddot{U}_{i+\tau} = \ddot{U}_i + \frac{\tau}{\theta \Delta t} (\ddot{U}_{i+\theta \Delta t} - \ddot{U}_i) \quad (8.18)$$

Integrating (8.18), we obtain

$$\dot{U}_{i+\tau} = \dot{U}_i + \ddot{U}_i \tau + \frac{\tau^2}{2\theta \Delta t} (\ddot{U}_{i+\theta \Delta t} - \ddot{U}_i) \quad (8.19)$$

and

$$U_{i+\tau} = U_i + \dot{U}_i \tau + \frac{1}{2} \ddot{U}_i \tau^2 + \frac{1}{6\theta \Delta t} \tau^3 (\ddot{U}_{i+\theta \Delta t} - \ddot{U}_i) \quad (8.20)$$

Using (8.19) and (8.20), we have, at time  $t + \theta \Delta t$ ,

$$\dot{U}_{i+\theta \Delta t} = \dot{U}_i + \frac{\theta \Delta t}{2} (\ddot{U}_{i+\theta \Delta t} + \ddot{U}_i) \quad (8.21)$$

$$U_{i+\theta \Delta t} = U_i + \theta \Delta t \dot{U}_i + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{6} (\ddot{U}_{i+\theta \Delta t} + 2\ddot{U}_i) \quad (8.22)$$

from which we can solve for  $\ddot{U}_{i+\theta \Delta t}$  and  $\dot{U}_{i+\theta \Delta t}$  in terms of  $U_{i+\theta \Delta t}$ :

$$\ddot{U}_{i+\theta \Delta t} = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} (U_{i+\theta \Delta t} - U_i) - \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{U}_i - 2\ddot{U}_i \quad (8.23)$$

and

$$\dot{U}_{i+\theta \Delta t} = \frac{3}{\theta \Delta t} (U_{i+\theta \Delta t} - U_i) - 2\dot{U}_i - \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{U}_i \quad (8.24)$$

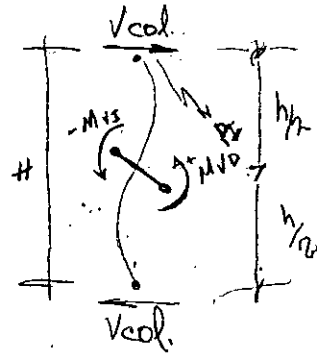
Baigorri

HOTEL "JUDREZ" 406

DISEÑO SISMICO DE ESTRUCTURAS DE  
CONCRETO

AUTOR: DR. PRIESTLEY

D.C. PAULY.



FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

COMPORTAMIENTO DE MATERIALES Y ELEMENTOS  
MODELOS ANALITICOS / MATEMATICOS DE EDIFICIOS

H. EN I. JOSE LUIS TRIGOS

PROFESOR, FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM  
INGENIERO CIVIL, CONSULTOR  
APARTADO 74 - 171, MEXICO D. F. 09080  
(905) 689 - 6888 FAX 689 - 6639

MEXICO

ELECCION DE MATERIALES ESTRUCTURALES

ALTA DUCTILIDAD.

ALTA RELACION RESISTENCIA / PESO.

HOMOGENEIDAD.

ORTOTROPIA.

FACILIDAD PARA HACER CONEXIONES DE RESISTENCIA PLENA.

MODELOS ANALITICOS / MATEMATICOS DE EDIFICIOS

INFORMACION BASICA.

INTERACCION CON OTRAS DISCIPLINAS.

ESTRUCTURACION.

PROPIEDADES GEOMETRICAS Y MECANICAS.

CONDICIONES Y COMBINACIONES DE CARGA.

MODELOS ANALITICOS.

MODELOS MATEMATICOS.

APLICACIONES



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

**XVIII CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA**

*Módulo 3: "DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS"*

*Del 3 al 13 de julio de 1992*

**COMPORTAMIENTO DE ELEMENTOS DE MAMPOSTERIA**

**ING. OSCAR HERNANDEZ BASILIO**

**PALACIO DE MINERIA**

de manera que, sin que se requiera un costo adicional significativo y sin cambiar radicalmente las características de las viviendas, se obtenga una seguridad adecuada con el efecto de sismos.

Cuando se trata de viviendas en las que se pueda invertir en materiales comerciales, como el ladrillo, el cemento y el acero, puede obtenerse seguridad adecuada contra sismos, y a la vez condiciones de habitabilidad favorables, mediante el empleo de muros de mampostería, de piezas de barro o de bloque de concreto, reforzados en distintas formas para proporcionar una mayor resistencia y continuidad al conjunto. En años recientes se ha incrementado notablemente el conocimiento del comportamiento sísmico de estos elementos estructurales, lo cual ha permitido la elaboración de recomendaciones específicas para el diseño y construcción de muros de mampostería en zonas sísmicas.

En este trabajo se tratará de resumir los principios del diseño sísmico de las construcciones de mampostería, partiendo del comportamiento sísmico observado y de resultados de ensayos de laboratorio; se recomendarán las formas de estructuración que se consideran más eficientes, se señalarán los defectos que más comúnmente dan lugar a fallas y se darán recomendaciones específicas de diseño. Se incluyen materiales y procedimientos constructivos muy distintos como las construcciones de adobe, las de ladrillo no reforzado, las reforzadas con dalas y castillos y las que tienen refuerzo en el interior de piezas huecas. Se analizarán también algunos nuevos procedimientos de refuerzo que pueden resultar convenientes en algunos casos y se harán algunos comentarios acerca de las formas de reparar las construcciones dañadas.

## 2. COMPORTAMIENTO SISMICO OBSERVADO DE CONSTRUCCIONES DE MAMPOSTERIA

Construcciones de adobe. La experiencia con este material es definitivamente negativa. La escasa resistencia en tensión del adobe y la poca adherencia que se logra en las juntas con los morteros de lodo son solo algunos de los inconvenientes. Aún con adobes de buena calidad no puede lograrse una buena liga entre los muros transversales; esto aunado al gran peso de los muros, y generalmente de los techos, hace que estos muros fallen generalmente por el efecto de fuerzas normales a su plano, ya sea por volteamiento o por fallas locales por los empujes de los elementos de techo. En muchas ocasiones las fallas de estas construcciones han sido agravadas porque el adobe se encontraba muy debilitado por efecto del intemperismo.

Como recomendaciones generales para mejorar el comportamiento sísmico de estas construcciones se pueden mencionar la selección cuidadosa de los suelos con que se fabrica el adobe, su mejoramiento con fibras o con aditivos estabilizadores, la reducción de la altura de los muros al mínimo admisible para la habitabilidad de la vivienda, la subdivisión de la misma en espacios pequeños por medio de muros ligados entre sí con el mejor cuatraperdo de las piezas posible, el evitar techos muy pesados y el estructurar estos techos para que tengan rigidez en su plano.

Sin embargo, una mejora sustancial en el comportamiento sísmico solo puede obtenerse por medio de algún refuerzo en el adobe que produzca una liga adecuada entre los elementos y proporcione cierto confinamiento y ductilidad a los muros. Algunos de estos procedimientos de refuerzo se describen en la ref 1.

Construcciones de mampostería no reforzada. Las construcciones de tabique o bloque de concreto sin refuerzo han tenido también un comportamiento sísmico muy deficiente ya que adolecen esencialmente de los mismos defectos que las de adobe: liga pobre y falla muy frágil. Una fuente muy frecuente de daños y colapsos es la presencia de huecos de puertas y ventanas no reforzadas, en los que la concentración de esfuerzos que se presenta en las esquinas provoca la iniciación de grietas diagonales que llevan a la falla a todo el muro. Este tipo de construcción debe evitarse en zonas sísmicas exceptuando quizás construcciones que encierren espacios pequeños y con techos ligeros.

Construcciones de mampostería confinada. Se denomina así a los muros que están rodeados en su perímetro por castillos y dadas que forman un marco que



encierra tableros relativamente pequeños, proporcionándoles una capacidad de deformación mucho mayor que la del muro no reforzado y una liga muy efectiva con los elementos adyacentes. El comportamiento observado de construcciones de este tipo hasta de varios pisos ha sido definitivamente mejor que el de la mampostería no reforzada; se cuentan con criterios para fijar la distribución de los elementos resistentes y de su refuerzo y con procedimientos para el diseño de la mampostería así reforzada. Hay que hacer notar sin embargo, que si con este sistema se reduce mucho la probabilidad de un colapso de la construcción y de daños mayores, no se evita la posibilidad de agrietamientos diagonales en los muros, ya que la resistencia en tensión diagonal de la mampostería no se incrementa apreciablemente por la presencia de las dalas y castillos.

Construcciones de mampostería con refuerzo interior. En años recientes se ha popularizado en diversos países un sistema constructivo que consiste en reforzar los muros de piezas huecas con barras verticales en los huecos de las piezas y horizontales en las juntas o en piezas especiales. La experiencia sobre el comportamiento sísmico de estas construcciones es más o menos amplia, hay evidencia de que con cantidades altas de refuerzo se obtiene un incremento en la resistencia con respecto a la mampostería no reforzada y un comportamiento bastante dúctil. Hay que recalcar que las cantidades de refuerzo necesarias para lograr un comportamiento adecuado son muy altas y que se requieren separaciones pequeñas tanto vertical como horizontalmente. El procedimiento tiene distintas modalidades que llegan en muros de edificios altos hasta el relleno total de los huecos de las piezas con concreto y el colado de muros delgados de concreto entre dos paños de muros de mampostería (cavity wall). La fig 1 muestra las características de algunos procedimientos de refuerzo típicos. En México, el refuerzo interior no es muy popular

También se ha observado que es más eficiente para soportar fuerzas cortantes el refuerzo horizontal colocado en las juntas y distribuido en forma uniforme en la altura del muro, que el vertical colocado en los extremos o en el interior de las piezas huecas.

Cuando la mampostería se coloca en el interior de un marco robusto de acero o concreto, se pueden seguir dos caminos:

1. Aislar la mampostería del marco para que aquella no soporte cargas
2. Hacer que trabaje la mampostería al colocarla con contacto con el marco perimetral.

El primer aspecto es muy difícil de realizar además de costoso; en el segundo caso se tiene un gran incremento de la rigidez lateral del sistema y de su resistencia. Ensayes realizados demuestran que es posible tener comportamiento dúctil cuando las columnas tienen refuerzo suficiente por cortante para permitir que desarrollen su momento de fluencia. El refuerzo horizontal colocado entre las juntas de mortero ayuda a repartir mejor la fuerza cortante en toda la altura del muro evitando que se concentre en sus extremos superior e inferior.

### 3.2 Evidencia experimental realizada en México

En la ref 4 se compila la información experimental que se tenía en México hasta 1972 aproximadamente.

Para carga lateral estática se efectúan dos tipos de pruebas; el denominado en voladizo, fig 7a, donde se presentan momentos flexionantes que pueden llegar a ser críticos; y el ensaye de compresión diagonal, fig 7b donde solo se inducen deformaciones por cortante. El efecto de pisos superiores se

representa con carga vertical. (15)

La primera forma de ensaye trata de ser representativa de los muros de carga; mientras que para cuando se tiene un marco confinante, el ensaye de compresión diagonal intenta reproducir a un muro diafragma.

Para cargas laterales dinámicas y alternadas también se efectúan las mismas formas de ensaye.

En las figs 8 y 9 se muestran diversas curvas cargas-deformación angular para diferentes formas de ensaye y en la fig 10 la forma típica de falla.

Se tienen en general tres formas de agrietamiento; la debida a flexión se caracteriza porque es una grieta sobre una junta del mortero cerca de la base del muro; la falla por cortante corre alternadamente por las juntas verticales y horizontales y la falla por tensión diagonal atraviesa indistintamente piezas y mortero.

La presencia de alguno de estos tipos depende principalmente de las características de la mampostería así como también de la sollicitación de carga.

En el muro en voladizo la falla se inicia por agrietamiento en la base, presentándose después una falla por agrietamiento diagonal al aumentar las deformaciones. El tener carga vertical aumenta apreciablemente la carga de primer agrietamiento y tiende a llevar a un tipo de falla por tensión diagonal, disminuyendo la ductilidad del muro. El agrietamiento por flexión se reduce también al aumentar el acero de refuerzo en los extremos del muro. El refuerzo interior puede aumentar la resistencia máxima pero no sustancialmente la de agrietamiento.

Para muros en compresión diagonal se presentan fallas de cortante o de ten-

sión diagonal y esto depende de las características de la mampostería; aquí también la carga vertical incrementa la resistencia al agrietamiento y la máxima, pero también la deformabilidad del muro; el acero interior aumenta ligeramente la carga resistente al agrietamiento pero disminuye la deformación correspondiente, aumentando la carga máxima y la deformabilidad post-agrietamiento. El aplonado del muro contribuye en forma importante a la resistencia del mismo. Se ha visto que el confinamiento exterior del muro no influye apreciablemente en la resistencia al agrietamiento, pero sí en la resistencia y ductilidad a la falla.

La presencia de agrietamiento no implica necesariamente la falla del muro sino que esta depende del confinamiento, refuerzo exterior e interior, que este tenga y que puede hacer que el muro resista cargas mayores a la de agrietamiento.

Desde el punto de vista práctico si se refuerza convenientemente los extremos del muro, el problema de flexión desaparece y puede considerarse que la principal sollicitación es una carga diagonal de compresión equivalente, a la que se añade la carga vertical proveniente de pisos superiores.

Los estudios bajo cargas dinámicas y alternadas son bastante complejos; en la fig 11 se muestran las características de respuesta que más nos interesan del muro siendo estas: la capacidad de energía, capacidad de disipación de energía, el factor de ductilidad y el deterioro del muro, el cual se define como la pérdida de rigidez y resistencia debida a la alternación de carga, fig 12.

Para cargas alternadas el deterioro del muro es pequeño cuando se tienen deformaciones angulares menores a la del agrietamiento y después de éste el deterioro depende de la resistencia del marco confinante. El material hue

co es mas sensible al deterioro que una maciza, y es diferente la intensidad del deterioro si la falla es por flexión (dúctil) a que si es por cortante o por tensión diagonal (frágil) siendo mayor en los últimos casos. La carga vertical reduce apreciablemente el deterioro. El deterioro mayor se tiene al pasar al segundo ciclo de carga después del cual permanece casi inalterado. (17)

En la ref 3 se estudió el comportamiento de muros bajo cargas ciclicas dinámicas observándose que el mismo comportamiento que un muro tiene para cargas alternadas se presenta para cargas dinámicas con excepción de la prueba en voladizo sin carga vertical (la de más flexibilidad), en la cual la prueba dinámicas muestra gran deterioro del muro, pero este caso tiene poca importancia desde el punto de vista práctico para una mampostería.

Se realizó recientemente un estudio para tratar de obtener procedimientos económicos para mejorar el comportamiento sísmico de la mampostería de piezas huecas con refuerzo interior (ref 5).

Se estudiaron diversas distribuciones de refuerzo (fig 13) que permitiesen mantener la capacidad de carga del muro después del agrietamiento sin que se viese disminuida por repeticiones de cargas alternadas.

Se encontró que la adición de barras de refuerzo de pequeño diámetro (4mm) y de alta resistencia ( $6\ 000\ \text{kg/cm}^2$ ) en las juntas horizontales, aumenta ligeramente la resistencia, restringe la propagación del agrietamiento del muro y reduce el deterioro ante la repetición de cargas. Este refuerzo puede colocarse también en muros de piezas macizas con castillos, produciendo una distribución más uniforme de los esfuerzos cortantes en toda la longitud del muro y evitando las altas concentraciones de esfuerzos que se producen en los castillos cuando el muro se agrieta diagonalmente. Cuando no se coloca este

refuerzo en las juntas, resulta muy conveniente que los castillos cuenten con refuerzo especial en sus extremos para evitar su falla por cortante después de que el muro se agrieta diagonalmente.

#### 4. REGLAMENTACION SOBRE ESTRUCTURAS DE MAMPOSTERIA

Desde tiempo Inmemorial se ha tratado de implantar reglamentos de diseño que aseguren buen comportamiento estructural. Del primer reglamento que se tiene evidencia es el que se contempla dentro del Código de Hamurabi, decretado por el Rey de Babilonia, Hamurabi, en el siglo 20 A.C.. En ese código se contemplan diversos tipos de leyes: civiles, penales, técnicas, etc. Dentro de lo relacionado con el aspecto construcción, el código mencionado establece que ..... si por causa adjudicable al constructor se daña la propiedad, aquel tendrá que pagar la reparación del inmueble; si un esclavo muere por la falla de la construcción, el constructor deberá sustituir el esclavo al dueño de la vivienda; si muere un hijo del propietario por la misma razón se tendrá que matar a un hijo del constructor.....; si muere el propietario, se debe dar muerte al constructor-----, con normas como las anteriores seguramente en nuestro tiempo serían muy pocos los que se dedicarían al diseño y construcción de estructuras.

Afortunadamente los avances de la tecnología han hecho que ahora los reglamentos equilibren los principales aspectos de una construcción: seguridad y economía .

El Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, ref 6, incluye un capítulo sobre diseño y construcción de estructuras de mampostería, el cual ha sido modificado sustancialmente con respecto a la versión anterior y trata en detalle los requisitos para diseño sísmico.

Uno de los problemas que se enfrentan al elaborar recomendaciones de diseño

para mampostería es la gran variedad de materiales de distintas formas y propiedades que se tiene que cubrir. Si se establecen requisitos generales, hay que fijar criterios comunes para determinar los esfuerzos básicos resistentes de la mampostería (principalmente resistencia en compresión y en cortantes). Con este fin en el reglamento se establecen procedimientos de ensaye relativamente simples para determinar dichas propiedades cuando no se tenga información previa acerca de los materiales en cuestión y se proporcionan, además, valores específicos para los materiales de empleo más común para los cuales se cuenta con un número suficiente de determinaciones; los esfuerzos propuestos representan valores característicos, o mínimos probables, del esfuerzo de falla, determinados con el criterio de que la probabilidad de que no sean alcanzados por los materiales empleados en la estructura sea muy pequeña. Dichos esfuerzos corresponden a la resistencia de la mampostería sin refuerzo. Se considera que la presencia de castillos y dalas incrementa solo ligeramente la resistencia a compresión y a cortantes. El refuerzo interior sí proporciona un aumento apreciable de la resistencia con respecto a la mampostería no reforzada; dicho incremento solo puede determinarse en forma confiable mediante ensayos a escala natural de muros con la misma disposición de refuerzo que se va a emplear en la construcción. En forma conservadora el reglamento permite que los esfuerzos resistentes para la mampostería no reforzada se incrementen en 50% cuando se emplee las cuantías y distribuciones de refuerzo interior especificadas por el reglamento que se describirán más adelante.

Las normas para mampostería del nuevo reglamento especifican dos modalidades para el refuerzo de la mampostería; la que se denomina mampostería confinada es la usual con castillos y dalas para los cuales se fijan separaciones y re-

quisitos de refuerzo similares a los del reglamento anterior. En el otro procedimiento, denominado mampostería con refuerzo interior, se coloca refuerzo vertical en el interior de los huecos de las piezas y refuerzo horizontal en piezas que permitan colocar varillas en las juntas y proporcionarles el recubrimiento necesario para que puedan transmitirse los esfuerzos de adherencia. Las normas admiten también construcciones de mampostería sin refuerzo; sin embargo, exigen que se diseñen con factores de seguridad muy altos, lo cual hace que solo para construcciones de un nivel con alta densidad de muros y techos ligeros, resulte económicamente factible construir muros sin refuerzo.

El reglamento incluye dos procedimientos de diseño con distinto nivel de refinamiento. El método simplificado es aplicable a la mayoría de construcciones para vivienda que cumplen con requisitos no muy estrictos en cuanto a densidad de muros, altura máxima de muros y ausencia de grandes excentricidades de las cargas. El método detallado de diseño es aplicable cuando no se cumplan las condiciones impuestas para el empleo del método simplificado o cuando se quiera obtener un diseño más refinado. Ambos procedimientos están planteados en un formato de diseño por resistencia que es el adoptado en general por el reglamento (hay que revisar que el efecto de las cargas de trabajo multiplicado por un factor de carga,  $F_C$ , no exceda de la resistencia calculada multiplicada por un factor de reducción de resistencia,  $F_R$ ). La conversión a un formato de esfuerzos admisibles es casi inmediata si se agrupan los factores parciales de seguridad en uno solo que afecta al esfuerzo resistente.



La carga vertical resistente se calcula con  $P_R = F_R F_C f_m^* A_T$ , en que  $A_T$  es el área transversal bruta del muro,  $f_m^*$  el esfuerzo resistente en compresión y  $F_E$  un factor correctivo por la esbeltez del muro y por la excentricidad de la carga para el cual se dan valores fijos en el método simplificado y un procedimiento para su determinación en el método general en función de la esbeltez y excentricidad calculadas. El factor de reducción  $F_R$  vale 0.6 para muros reforzados y 0.3 para no reforzados.

El cálculo de la resistencia a cargas laterales está ligada a los métodos de diseño sísmico especificados por el reglamento. Para la mayoría de las construcciones de mampostería es aplicable un método simplificado de diseño sísmico que permite encontrar en forma muy directa las fuerzas laterales para las que hay que diseñar los muros. Se especifican en este método simplificado fuerzas actuantes mayores para muros de piezas huecas que para muros de piezas macizas debido a la diferente ductilidad y deterioro que se tiene en los dos casos. Los requisitos que, según el reglamento, debe cumplir la mampostería confinada en lo que respecta a ubicación de los castillos y dadas y a la cantidad de refuerzo longitudinal y transversal en ellos, se presentan en el manual sobre Diseño de Estructuras de Mampostería. Los requisitos para la mampostería con refuerzo interior, fijan la cantidad total de refuerzo en 0.002 veces el área del muro y su separación máxima en 90 cm.

Para la determinación de fuerza cortante que resiste el muro se especifica en el método simplificado

$$V_R = 0.7 F_R v^* A_T$$

en que  $v^*$  es el esfuerzo resistente en cortante y  $F_R$  el factor de reducción que debe tomarse como 0.6 para muros confinados o con refuerzo interior y

Debe evitarse el empleo de piezas con altos porcentajes de huecos y paredes delgadas porque esto propicia fallas frágiles y deterioros graves y muy rápidos.

## 5.2 Nuevas formas constructivas para la mampostería

Se han desarrollado recientemente, o están en la etapa de desarrollo, nuevas técnicas para la construcción y refuerzo de los muros que presentan algunas ventajas sobre las tradicionales. En algunos casos se trata de sistemas radicalmente diferentes a los usuales, en otros, de pequeñas modificaciones que pretenden mejorar el comportamiento estructural de los muros. Algunas de las alternativas más interesantes se describen a continuación.

Refuerzos especiales en la mampostería convencional. Con el fin de mejorar la ductilidad de los muros y reducir el deterioro de su rigidez y resistencia ante el efecto de cargas alternadas se están estudiando detalles de refuerzo aplicables ya sea a muros confinados con castillos o a muros con refuerzo interior o a ambos.

La adición de barras de refuerzo de pequeño diámetro ( $\phi = 4\text{mm}$ ) y de alta resistencia en las juntas horizontales aumenta ligeramente la resistencia, restringe la propagación del agrietamiento del muro y reduce el deterioro ante la repetición de cargas. Este refuerzo puede colocarse también en muros de piezas macizas con castillos, produciendo una distribución más uniforme de los esfuerzos cortantes en toda la longitud del muro y evitando las altas concentraciones de esfuerzos que se producen en los extremos de los castillos cuando el muro se agrieta diagonalmente. Cuando no se coloque este refuerzo en las juntas, resulta muy conveniente que los castillos tengan refuerzo especial en sus extremos para evitar su falla por cortantes después de que el muro se

agrieta diagonalmente. La fig 13 muestra una forma en que puede proporcionarse este refuerzo. (25)

En muros con refuerzo interior también resulta muy conveniente confinar el refuerzo vertical en los extremos de los muros, ligando por medio de estribos, placas o mallas, como se muestra también en la fig 13.

Mampostería con junta seca y con refuerzo en las caras exteriores. La mampostería con junta seca consiste en colocar las piezas sin mortero en las juntas, formando el muro por la simple sobreposición de las piezas. La liga estructural del muro puede lograrse mediante el empleo de piezas machihembradas en las que se produzca un anclaje mecánico de las piezas, o mediante un aplinado en las dos caras del muro que proporcione continuidad al conjunto. La principal ventaja que se aduce para estos procedimientos es la rapidez de la construcción.

En lo que respecta al comportamiento sísmico para la mampostería de piezas machihembradas no se cuenta con información experimental. Para asegurar que se desarrolle la trabazón mecánica parece necesario que los muros estén confinados por dalas y castillos, lo cual elimina en parte las ventajas de la rapidez de construcción. En este procedimiento se requiere que las piezas tengan dimensiones muy uniformes para poder construir el muro a plomo y a nivel sin la ayuda de las juntas de mortero que absorben las diferencias geométricas. Se requiere además que las piezas tengan buena estabilidad volumétrica. Se han empleado para este procedimiento piezas de suelo-cemento, de concreto ligero y de barro macizas o huecas. En la fig 14 se muestran algunas de las formas propuestas. Las piezas huecas machihembradas permiten la colocación de refuerzo en los huecos verticales, lo cual aunado a la trabazón mecánica de las piezas posiblemente dé lugar a un sistema constructivo conve-

niente en zonas sísmicas. Se requiere, sin embargo, estudios adicionales para encontrar las formas, materiales y procedimientos constructivos convenientes para las piezas y para comprobar experimentalmente el comportamiento sísmico. Desde el punto de vista del comportamiento sísmico parece conveniente, y amerita estudio, el empleo de piezas machihembradas con junta de mortero, con lo cual al anclaje mecánico de las piezas se suma a la adherencia del mortero para mejorar la resistencia al cortante.

Recientemente se ha introducido comercialmente un mortero a base de cemento, aditivos que proporcionan alta adhesividad y fibra de vidrio, el cual colocado como aplanado en muros con junta seca, les proporciona una alta resistencia en tensión. Se han realizado diversos ensayos (ref 7) para estudiar el comportamiento estructural de este material, aplicado principalmente a muros de bloque de concreto. Se ha observado que, con respecto a la de un muro del mismo material junteado con mortero, la resistencia a carga axial de los muros así construidos es ligeramente menor, la resistencia a cargas normales al plano del muro es varias veces superior, la resistencia a fuerza cortante es ligeramente mayor y la ductilidad es mayor para las mismas condiciones de confinamiento. Si se coloca algún refuerzo interior en los huecos extremos para proporcionar liga entre los muros y para mejorar la ductilidad, se considera que este procedimiento da lugar a una seguridad aceptable contra sismo en construcciones de uno a dos niveles. El costo del producto, patentado, para el aplanado es relativamente alto; sin embargo, se requieren espesores muy pequeños para los aplanados (3mm). Se afirma que el costo total es competitivo con el de un muro convencional con aplanado de yeso en ambas caras.

Parece prometedor el estudio del empleo de otros materiales para proporcionar al muro continuidad y resistencia en tensión por medio de un aplanado, aplicado ya sea a las piezas colocadas con mortero o con junta seca. El uso de fibras minerales o vegetales (henequén, bambú, etc) más económicas que las de

vidrio y la sustitución del cemento por el azufre son alternativas que se han sugerido pero que no han sido suficientemente estudiadas.

Un procedimiento de este tipo que ha sido ampliamente usado y que resulta muy eficiente es el de reforzar los muros con una malla de acero (electrosoldada o tela de gallinero) anclada perfectamente al muro y recubierta por un aplanado de mortero de cemento. Este procedimiento se ha empleado esencialmente para refuerzo de muros agrietados.

Mampostería con morteros de alta adherencia. Cuando se emplean piezas de buena calidad (tabiques extruidos y bloque de concreto tipo pesado) la resistencia al cortante del muro está regida por la adherencia entre el mortero y las piezas en las juntas; si se mejora dicha adherencia se puede alcanzar la máxima resistencia del muro que está regida por la falla en tensión de las piezas.

Se han estudiado diversos aditivos para el mortero a base principalmente de resinas epóxicas y se han obtenido incrementos muy sustanciales en la adherencia. En algunos países estos morteros de alta adherencia se producen comercialmente, pero su empleo aumenta radicalmente el costo de los muros.

Mampostería postensada. La capacidad de carga de muros de mampostería está limitada por su baja resistencia a esfuerzos de tensión producidos por flexión o fuerzas cortantes. La resistencia a estos efectos puede mejorarse sustancialmente si se introducen en los muros esfuerzos de compresión mediante técnicas de postensado. Aunque el postensado reduce la capacidad útil de los muros a carga axial, esta rara vez es crítica en zonas sísmicas y normalmente son mucho más importante las ventajas que el presfuerzo proporciona,

que son las siguientes: se evita el agrietamiento por flexión en muros, se incrementa la resistencia a fuerza cortante porque se reducen los esfuerzos de tensión diagonal y se logra una distribución de carga más uniforme en la cimentación. El postensado ha sido poco usado hasta la fecha principalmente por el desconocimiento de las pérdidas de presfuerzo que se pueden tener y por las dificultades del procedimiento.

Algunos ensayos realizados en el Instituto de Ingeniería, ref 8, han demostrado que las pérdidas de presfuerzo son del mismo orden de las que se obtienen en estructuras de concreto (entre 10 y 20%) y son menores en piezas de barro que en bloques de concreto, que deben evitarse los sistemas de anclaje a base de cuñas y que resulta conveniente el empleo de un sistema de postensado como el mostrado en la fig 15 en el que los cables pueden tensarse en etapas de acuerdo con el proceso constructivo, reduciendo así, o eliminando, las pérdidas de presfuerzo.

### 5.3 Reparación y refuerzo de la mampostería

Cuando una construcción ha sufrido daño por efecto de un sismo no es suficiente normalmente con repararla (reintegrar su resistencia original) sino que es necesario reforzarla, o sea incrementar su resistencia con respecto a la que tenía antes de la ocurrencia del daño, para que este no ocurra nuevamente si se presenta la misma sollicitación.

Los procedimientos de refuerzo implican casi siempre una restructuración de la construcción mediante la adición de nuevos elementos resistentes, o la rigidización, el confinamiento, el anclaje y el refuerzo de los elementos existentes. En general hay que hacer que la estructura cumpla con los requisitos descritos en los capítulos anteriores. El refuerzo de construcciones de mampostería implica operaciones bastante laboriosas como el colado de dadas y cas

do actual de conocimientos acerca del diseño de mampostería ante diversas sollicitaciones de carga ha avanzado notablemente.

Para el caso de flexocompresión se pueden elaborar diagramas de interacción que se ha visto experimentalmente dan valores acertados del comportamiento de la mampostería.

Las estructuras rígidas, como las mamposterías, son más sensibles a los efectos producidos por un sismo; sin embargo, el criterio elástico que se ha estado empleando y que consiste en diseñar la mampostería para que resista un sismo intenso sin que esta sufra daño es irracional. La tendencia actual del diseño sísmico de mamposterías debe ser el diseñar la estructura para soportar sin sufrir daño en sismo moderado y resistir sin llegar al colapso para un movimiento intenso aprovechando así el comportamiento inelástico de la mampostería reforzada.

Para este criterio de diseño las estructuras dúctiles son las más adecuadas; se puede diseñar una mampostería suficientemente dúctil después de agrietamiento suponiendo al muro como un voladizo y diseñado como viga mediante una teoría de resistencia última similar a la del concreto reforzado, asegurando al mismo tiempo que no se exceda de la resistencia al corte o tensión diagonal de la mampostería. Es implícito que se tendría que limitar la cantidad de acero de refuerzo para evitar una falla frágil al igual que en flexión en concreto.

Una vez reforzado convenientemente por flexión, un muro debe ser capaz de resistir la fuerza cortante con muy poco daño siendo ahora representativo el estado de compresión diagonal. Por este estado de carga se pretende que de la prueba en muretes se obtenga el índice de resistencia de la mampostería que forma al muro hasta el agrietamiento; asimismo se puede valorar el

efecto de la carga vertical del refuerzo interior, y en forma indirecta la contribución del aplanado en el muro.

Es conveniente que los reglamentos de construcción contemplen la idea de que la mampostería convenientemente reforzada tiene comportamiento inelástico, con la finalidad de aumentar el factor de reducción por ductilidad de este tipo de estructuras; esto porque el actual Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal es más estricto que el anterior en cuanto a los requisitos de diseño sísmico para construcciones de mampostería. Las fuerzas sísmicas de diseño se hacen depender de la ductilidad de los sistemas estructurales y, como los distintos sistemas a base de muros de mampostería tradicionales son poco dúctiles, deben diseñarse para fuerzas mucho mayores que las que corresponden, por ejemplo, a una estructura a base de marcos de concreto. Las fuerzas de diseño que se especifican en la nueva versión son en algunos casos hasta dos veces mayores que los que se empleaban con el reglamento anterior. Por otra parte, los esfuerzos resistentes de diseño que se han deducido de la información experimental, son más bajos para algunos materiales que los que se emplean usualmente.

Lo anterior va a hacer más crítica la construcción de edificios de varios niveles a base de muros de mampostería, obligando a proyectos con una mayor densidad de muros, al empleo de materiales de resistencia mayor y más controlada y a procedimientos de refuerzo que proporcionen mayor resistencia y ductilidad. Con estas precauciones se considera que es posible seguir construyendo, en forma segura y económica, edificios de habitación a base de muros de carga de mampostería ya sea confinada o reforzada interiormente.

Un problema de la construcción en mampostería muy distinto a los tratados hasta aquí es el de la vivienda rural. La mayor parte de daños materiales y pérdi-



(22)

das de vidas a raíz de temblores se debe al colapso de construcciones de vivienda de bajo costo. En estas construcciones se emplean materiales de baja resistencia o que se deterioran rápidamente con el tiempo. Se usan además -- procedimientos constructivos que no permiten una buena liga de los muros entre sí y con el techo. Afortunadamente, también a este problema se le ha encontrado solución favorable (ver ref 1).

## REFERENCIAS

1. Hernández, O. et.al. "Refuerzo de vivienda rural en zonas sísmicas. Estudios experimentales", Instituto de Ingeniería, UNAM, en prensa (1981)
2. Priestley, M., Bridgemen, D.O, "Seismic resistance of brick masonry walls", Bulletin New Zealand Society for Earthquake Engineering, Vol 7, No 4 (dic 1974)
3. William, D., Scrivener, J., "Response of reinforced masonry shear walls to static and dynamic cyclic loading", Proc. 5WCEE. Roma (jun 1973).
4. Meli, R., "Comportamiento sísmico de muros de mampostería", Instituto de Ingeniería, UNAM, Informe No 352 (abril 1975)
5. Hernández, O. y Meli, R., "Modalidades de refuerzo para mejorar el comportamiento sísmico de muros de mampostería", Instituto de Ingeniería, UNAM, Informe 382 (dic 1976)
6. "Diseño y construcción de estructuras de mampostería, normas técnicas complementarias del Reglamento de construcciones para el Distrito Federal". Instituto de Ingeniería UNAM, Informe 403 (jul 1977)
7. Hernández, O., "Mampostería de bloque unida con mortero a base de fibra de vidrio. Comportamiento y diseño", Instituto de Ingeniería, UNAM, Informe 394 (jun 1977)
8. Hernández, O. y Aguilar, H., "Deformaciones diferidas en mamposterías postensadas. Recomendaciones preliminares de diseño", Instituto de Ingeniería, UNAM, en prensa (1981)

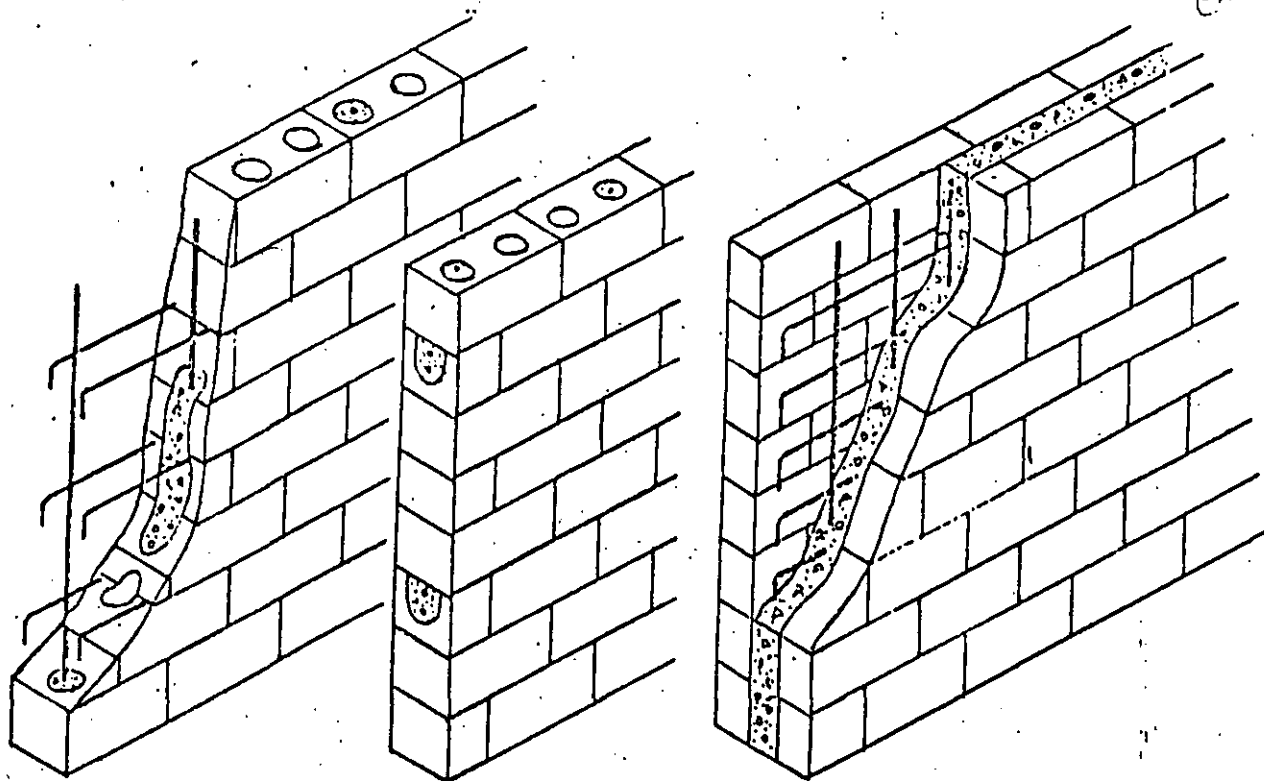


Fig 1 Diferentes formas de colocar refuerzo interior



Fig 2 Ensayo de compresión en pila

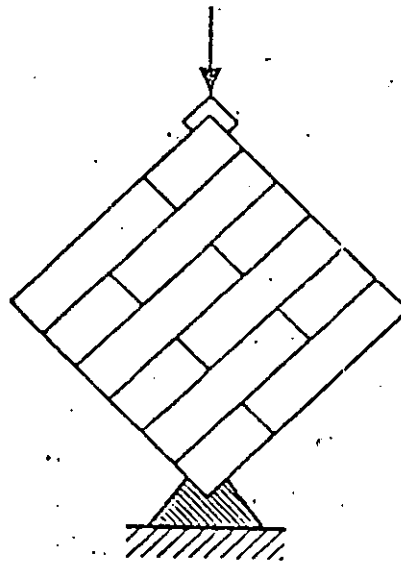


Fig 3 Ensayo de compresión diagonal

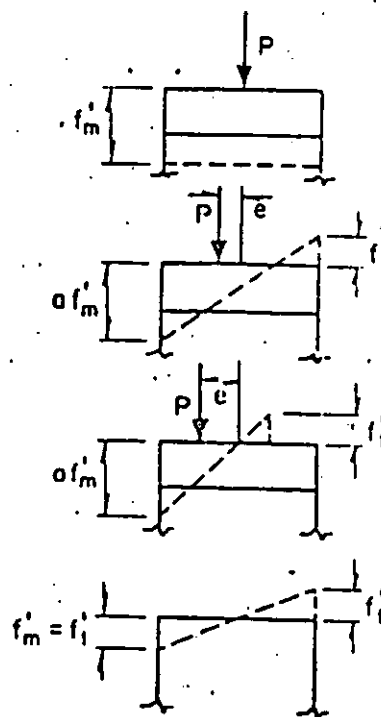


Fig 4 Distintas distribuciones de esfuerzos para carga axial y flexión

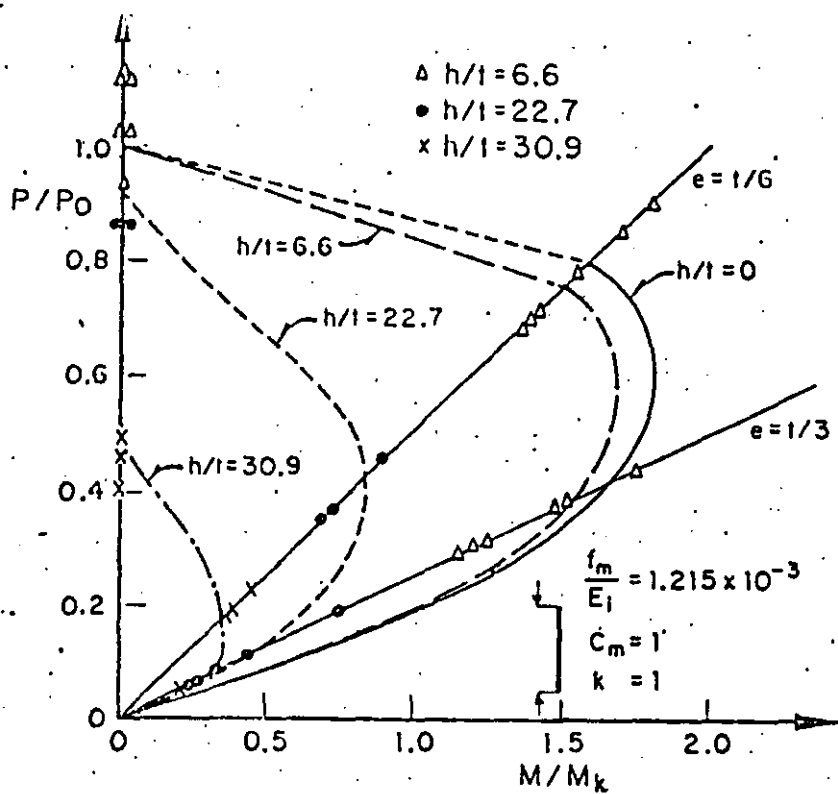


Fig 5 Diagrama de interacción en flexocompresión. Efecto de la relación de esbeltez

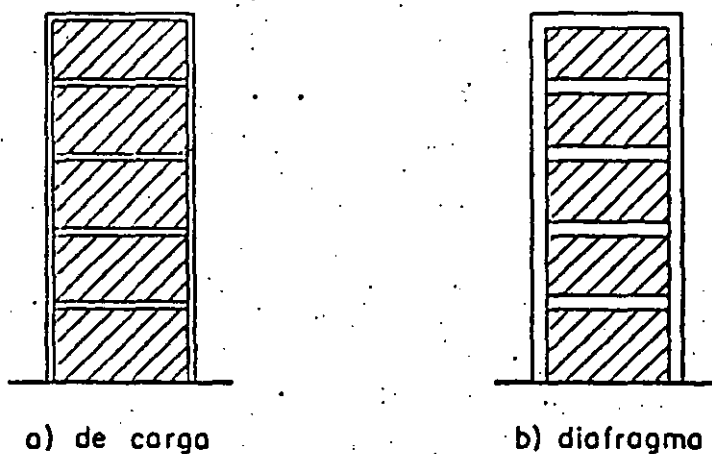


Fig 6 Estructuración a base de muros

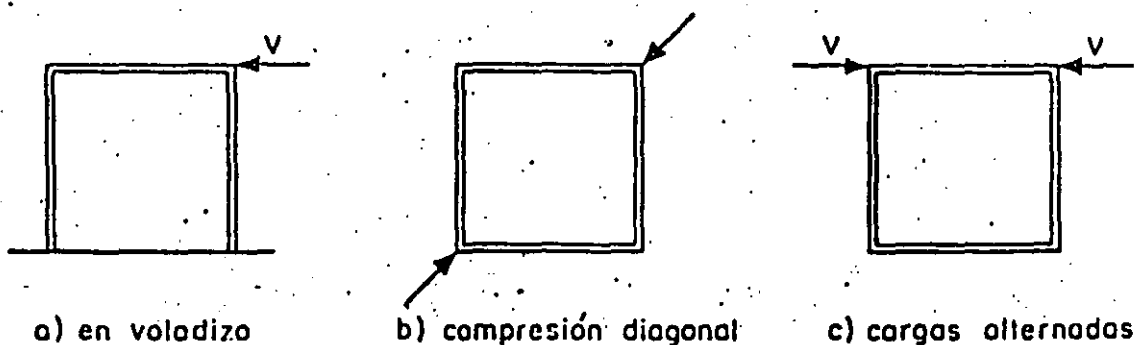


Fig 7 Diversas formas de ensayos de muros.

(37)

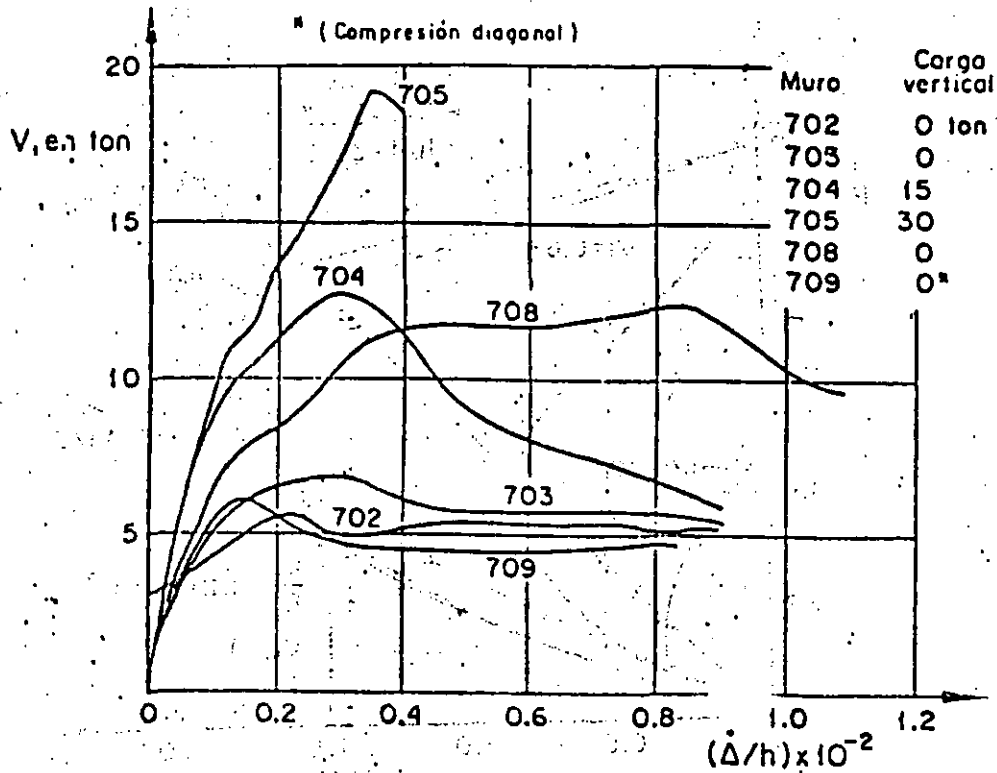
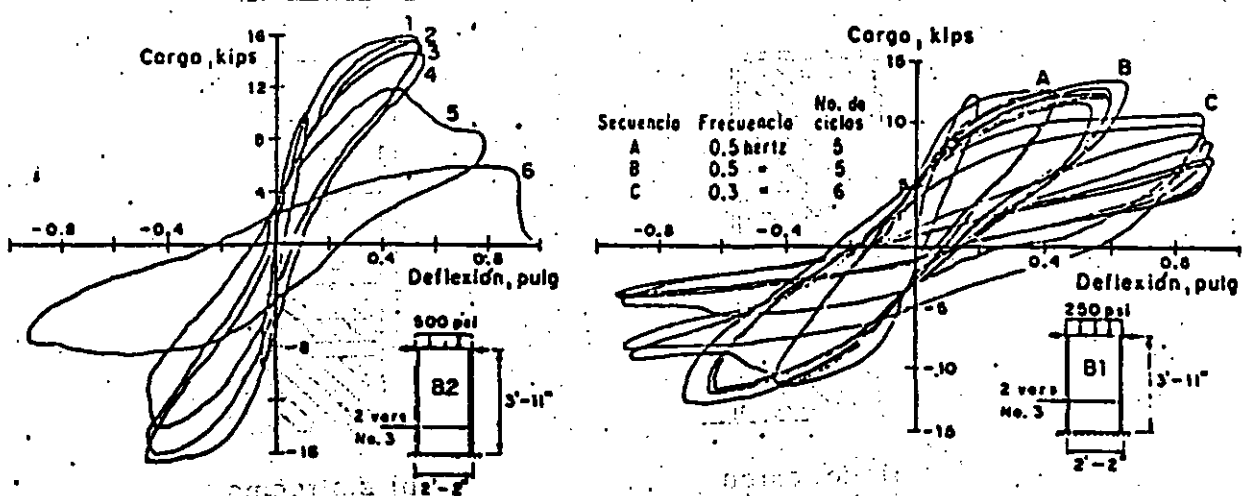
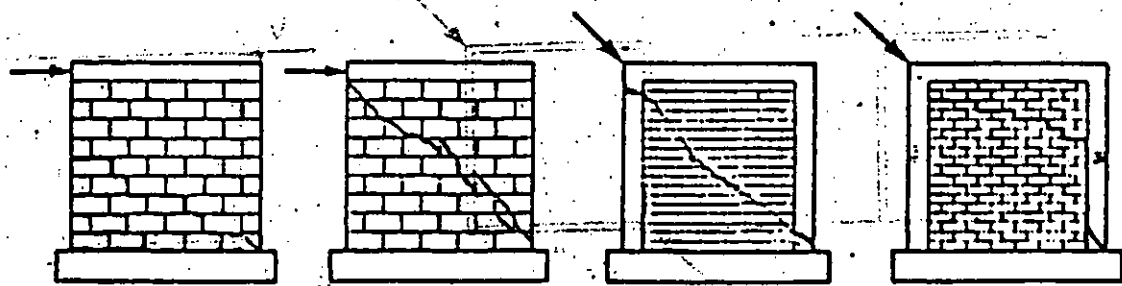


Fig 8 Ensayes a carga estática



a) Cargas alternadas b) Cargas dinámicas

Fig 9 Curvas carga deformación



a) Flexión b) Tensión diagonal (refuerzo interior) c) Tensión diagonal d) Cortante

Fig 10 Fallos típicos de muros

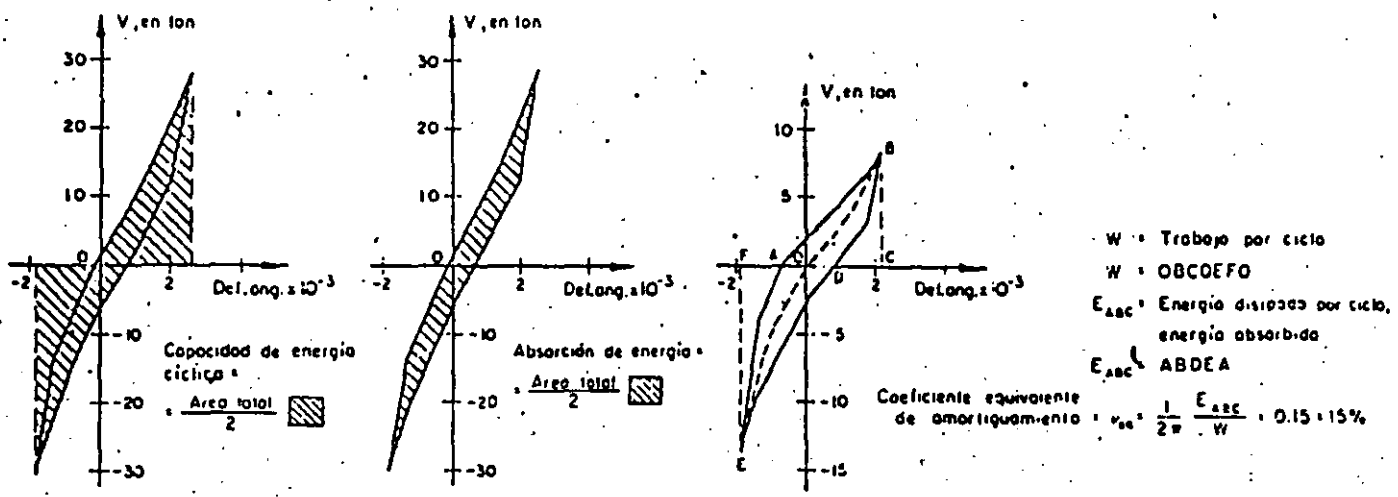


Fig. 11 Propiedades de muros de mampostería ante alternación de cargas

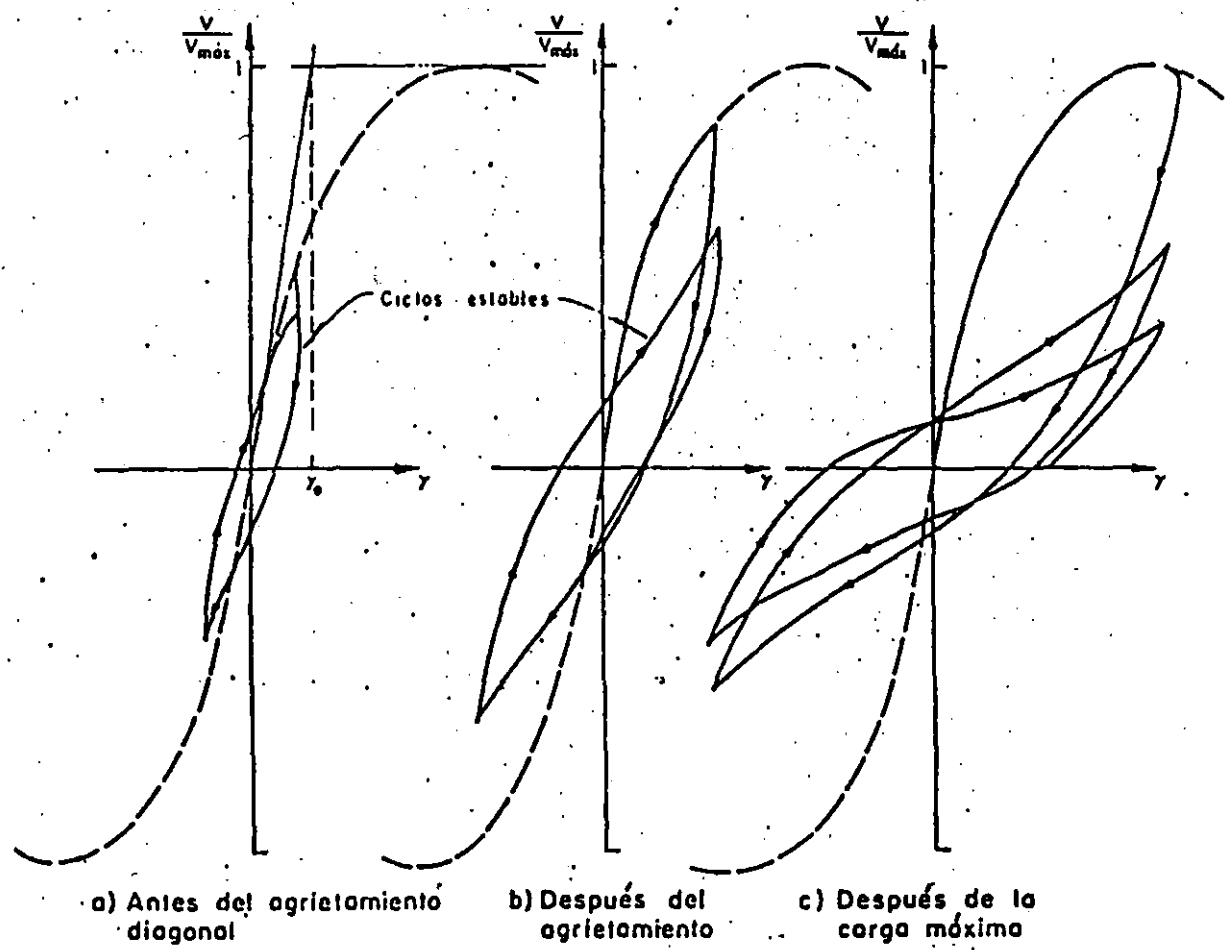
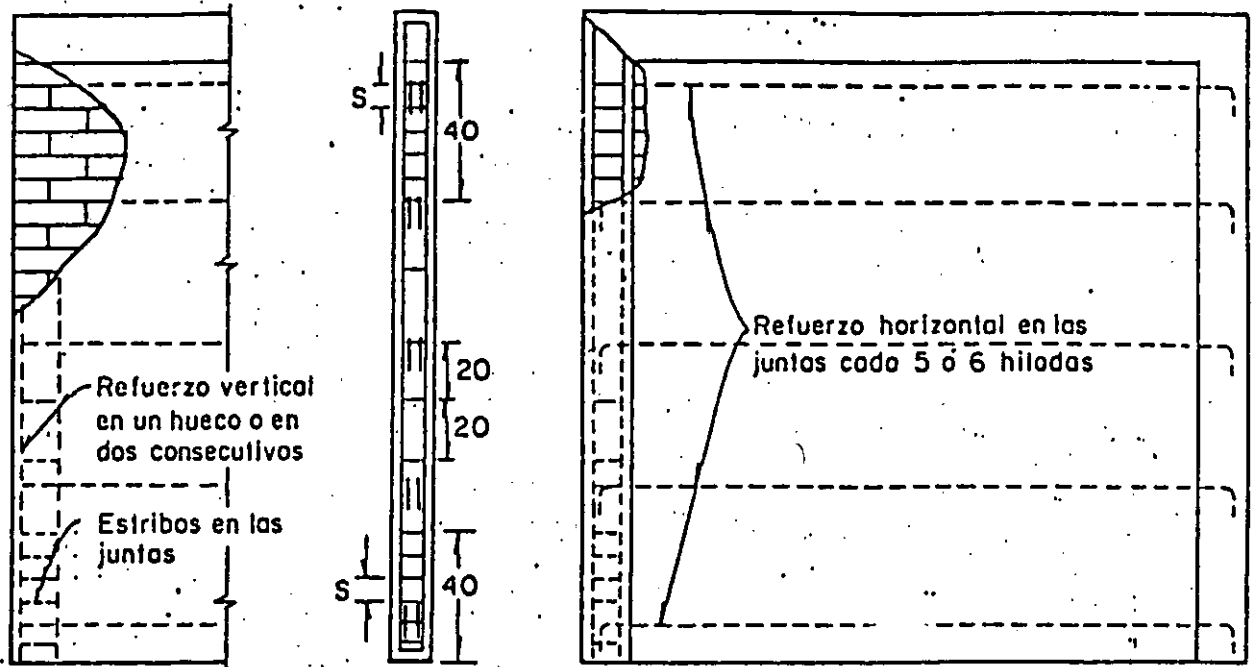


Fig 12 Deterioro del muro

Dimensiones en cm



Con refuerzo interior


Confinado con dalos y castillos

Muros de tabique extruído

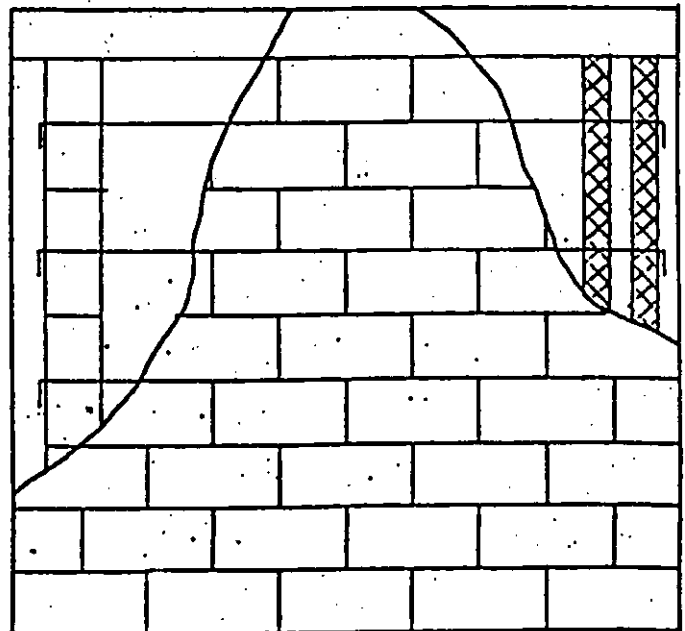
Variantes :

Con refuerzo horizontal cada 2 hiladas o sin el

Refuerzo vertical en un hueco o en dos consecutivos con estribos o cada hilada

Dos huecos consecutivos confinados con malla de metal desplegado 

Castillo Integral



Muros de bloques de concreto

Fig 13. Detalles generales de refuerzo



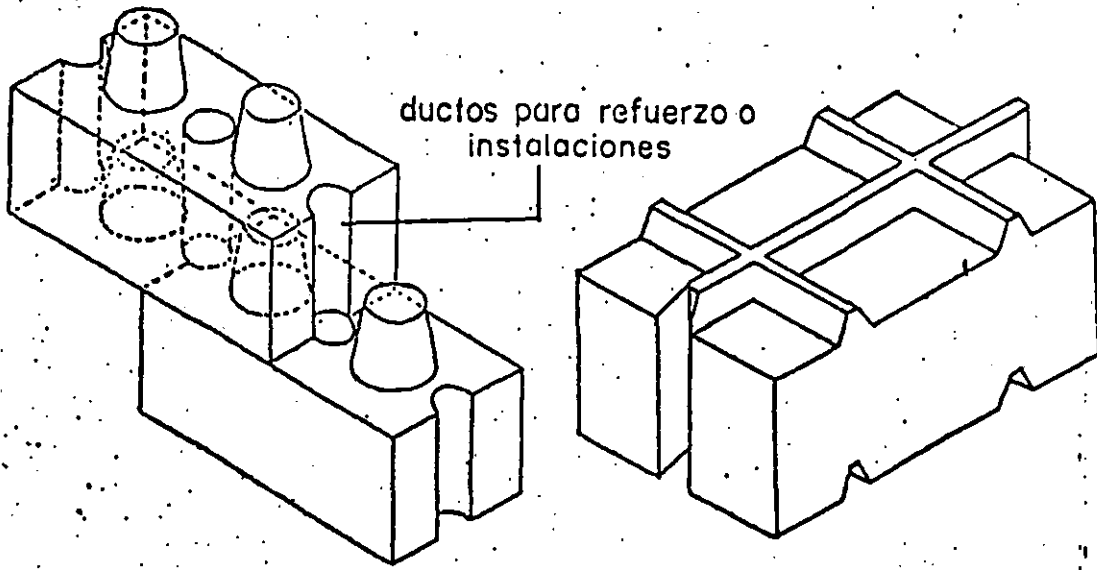


Fig 14 Piezas machiembradas

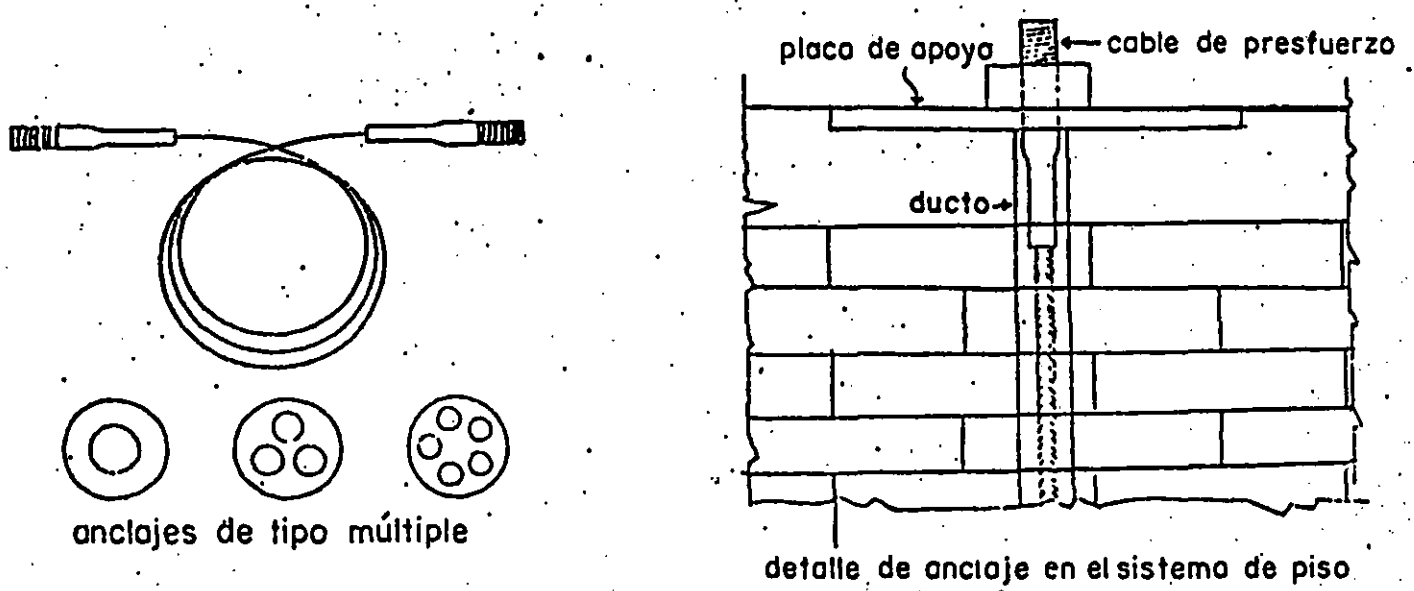


Fig.15 Aplicación del sistema de postensado RAMSA en mampostería.

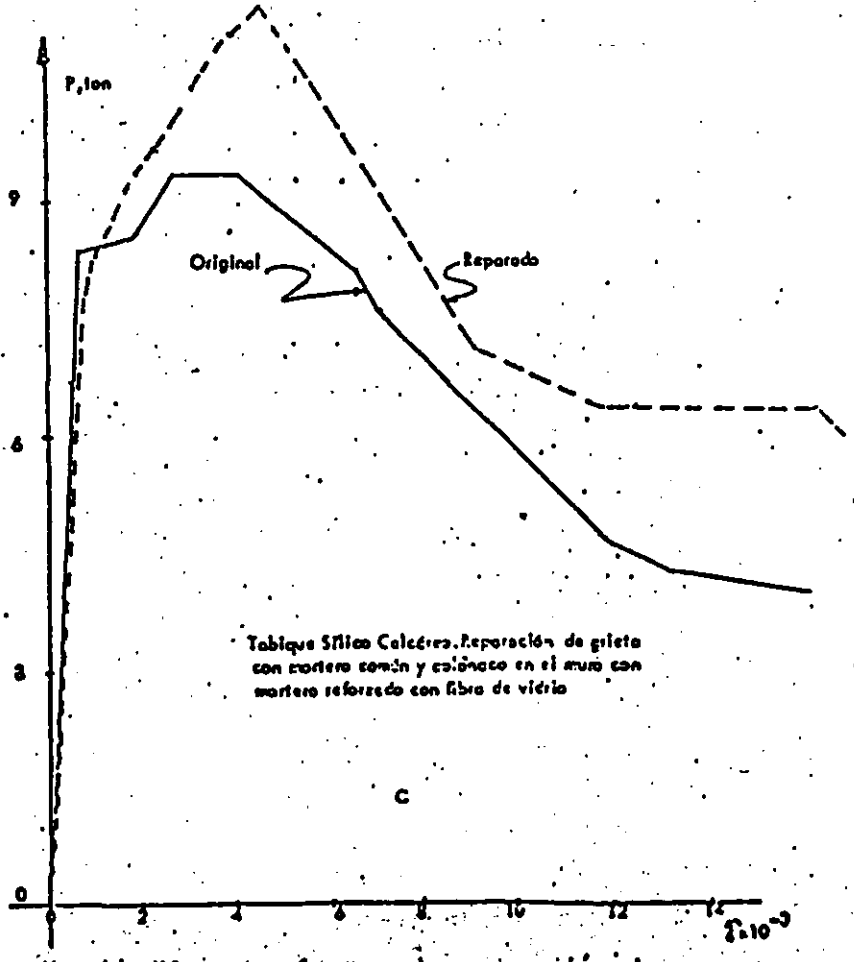
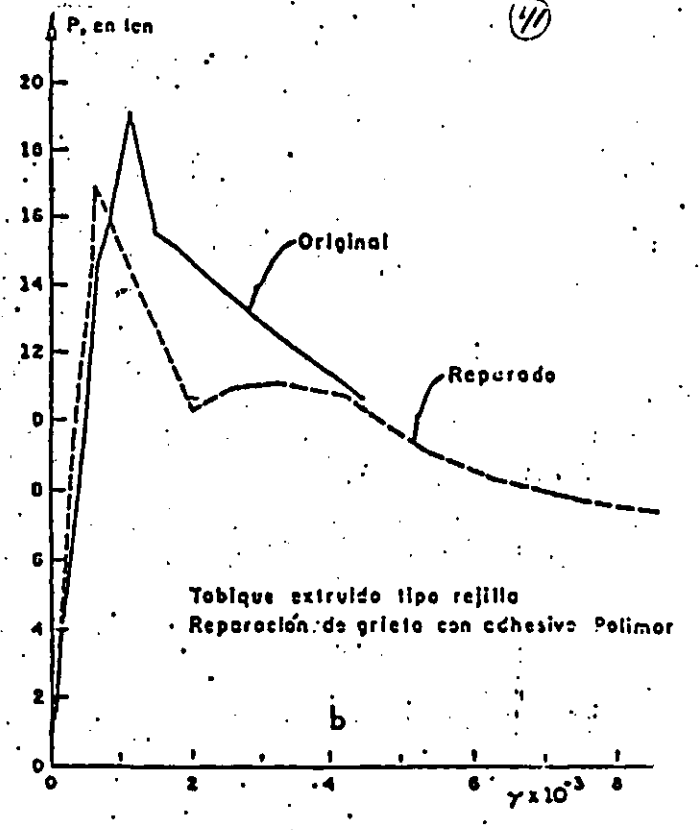
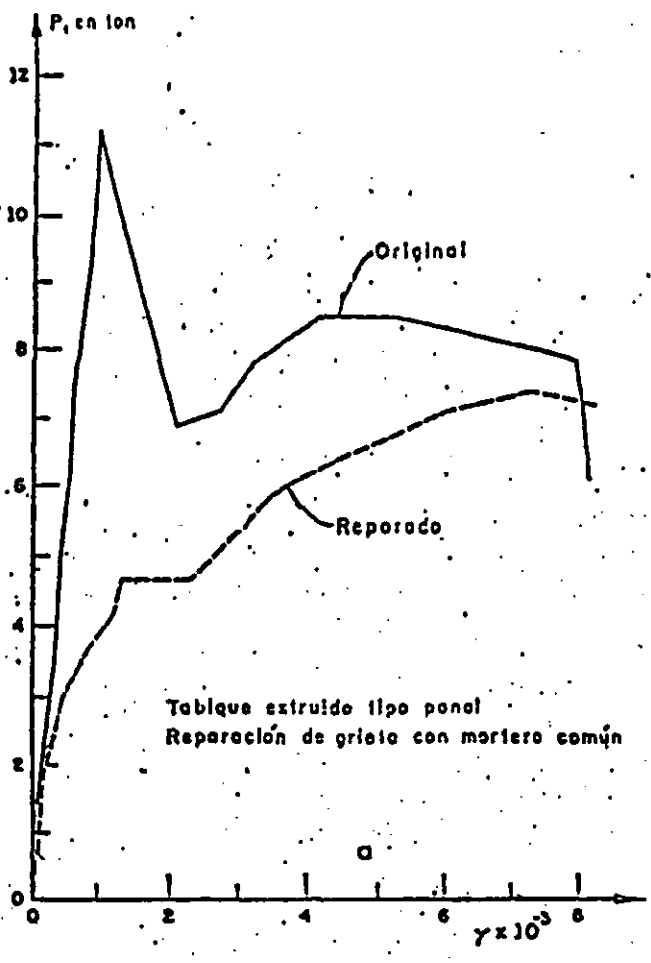


Fig 16 Eficiencia de diferentes formas de reparación de muros

No se ha incluido en ningún reglamento un procedimiento para calcular explícitamente la contribución del refuerzo a la resistencia por considerar que éste solo actúa cuando la mampostería se ha agrietado. Después del agrietamiento, el refuerzo deberá ser capaz de resistir la fuerza cortante total en el tablero; un procedimiento que se ha observado proporciona buena aproximación para calcular la capacidad del muro después de agrietado es el que a continuación se menciona.

Para calcular la resistencia del muro después de agrietado se harán las siguientes suposiciones:

- 1) El refuerzo del muro funciona una vez que éste se agrieta.
- 2) La grieta es única.
- 3) La resistencia a fuerzas cortantes va a ser proporcionada por el acero horizontal,  $V_h$ , los estribos en los castillos,  $V_{cast}$ , y la fricción desarrollada en la grieta,  $V_f$ .

Con las suposiciones anteriores, la resistencia del muro después de agrietado estará dada por la siguiente expresión

$$V_R = V_h + V_{cast} + V_f$$

sin embargo, debido a que no es posible que se llegue a desarrollar totalmente la capacidad del acero de refuerzo por el deterioro progresivo que sufre el muro ante las alternaciones de esfuerzos, y a que se introducen esfuerzos por flexión en las barras de refuerzo en adición a las de tensión, la fórmula anterior puede escribirse en la siguiente forma:

$$V_R = K \cdot (V_h + V_{cast}) + v_f A_T$$

donde

- $v_f$  es el refuerzo promedio que puede desarrollarse por fricción y  
 $A_T$  el área transversal bruta del muro  
 $K$  la constante toma en cuenta lo expresado en el párrafo anterior.

La contribución de la fricción en la resistencia se supondrá independiente del tipo de material, mortero y refuerzo que forman el muro.

La constante  $K$  y el esfuerzo debido a la fricción  $V_f$  se determinaron a partir de los datos experimentales, resultando

$$V_R = 0.34 (V_h + V_{\text{cast}}) + A_T \quad (1)$$

donde

$V_h = (A_{sh}/st) f_y A_T$   $A_{sh}$  es el área de acero horizontal colocado a una separación  $s$  en el espesor  $t$  del muro;  $f_y$  es el esfuerzo de fluencia y  $A_T$  el área bruta de la sección transversal del muro.

$V_{\text{cast}}$  Capacidad del castillo, interior o exterior, para resistir cortante; es igual a la suma de lo que resiste el concreto más la contribución del refuerzo transversal (estribos). La capacidad del concreto es igual a  $A_c f'_c$ , donde  $A_c$  es el área del castillo y  $f'_c$  la resistencia a compresión del concreto. La contribución de los estribos se calcula en igual forma que para vigas. Hay que tomar en consideración a todos los castillos que confinan al muro y que entran en una longitud menor que la altura del muro.

se observa que la fricción contribuye a la resistencia con un esfuerzo promedio de  $1 \text{ kg/cm}^2$ , aproximadamente. El coeficiente variación de la relación de valores calculadas con la expresión anterior, a valores experimentales resultó del 10 por ciento.

La anterior expresión permite diseñar el refuerzo de un muro para que sea capaz de soportar la fuerza cortante de diseño.

A manera de ejemplo se calculará el refuerzo necesario, horizontal y en los castillos, para que bajo alternaciones de esfuerzos un muro sea capaz de resistir una fuerza cortante igual a la que indujo el agrietamiento; suponiendo que este esfuerzo de agrietamiento sea de  $2.3 \text{ kg/cm}^2$ , y el muro tenga un área de  $2290 \text{ cm}^2$ , la fuerza cortante actuante que lo produjo es

$$V = 2.3 \times 2290 = 5270 \text{ kg}$$

Esta fuerza es la que tiene que resistir el refuerzo del muro. Se tienen tres alternativas de refuerzo: usar solo refuerzo en los castillos, usar solo refuerzo horizontal, o emplear una combinación de ambos refuerzos. Se resolverán a continuación las tres alternativas, en ellas se considera que las dimensiones de los castillos son 12 x 14 cm; se utilizará para los estribos alambraón No. 2 con  $f_y = 2500 \text{ kg/cm}^2$  y se despreciará la contribución del concreto a esfuerzos cortantes; como refuerzo horizontal se supondrá que se emplean varillas de 5/32 pulg de diámetro y  $f_y = 6000 \text{ kg/cm}^2$ .

a) Solo refuerzo en los castillos; de la expresión 1

$$V_R = 5270 = 0.34 (V_{\text{cast}}) + A$$

$$V_{\text{cast}} = 8760 \text{ kg}$$

Cada extremo del castillo deberá ser diseñado para resistir una fuerza cortante de

$$V'_{\text{cast}} = 8760/2 = 4380 \text{ kg}$$

la separación de los estribos es

$$S = \frac{2 \times 0.32 \times 2500 \times 12}{4382} = 4.4 \text{ cm}$$

$$S = 10 \text{ cm si } f_y = 6000 \text{ kg/cm}^2$$

Estos estribos se colocarán en las partes extremas de los castillos en una longitud de 40 cm a partir del vértice interior. En los castillos -- que confinan al muro puede aceptarse una separación de los estribos mayor que  $d/2$  pero menor que  $d$ ; esto debido al tipo y trayectoria de las grietas que se presentan en los castillos.

b) Solo refuerzo horizontal

$$V_h = 8760 \text{ kg} = \frac{A_{sh}}{s} f_y A_T$$

$$A_{sh} = 8760 \frac{st}{f_y A_t}$$

suponiendo una separación de 30 cm (a cada 5 hiladas) y  $t = 12$  cm

$$A_s = 0.23 \text{ cm}^2;$$

$$2 \text{ varillas } 5/32 \text{ pulg} = 0.24 \text{ cm}^2$$

el muro se reforzaría con 2 varillas 5/32 cada 5 hiladas

c) Combinando refuerzo en los castillos con horizontal

Aplicando la expresión 1 resulta

$$V_h + V_{cast} = 8760 \text{ kg}$$

suponiendo que cada uno de los refuerzos deba resistir la mitad de la carga se determina, siguiendo pasos similares a los incisos a y b, los estribos No. 2 deberán ir espaciados a cada 8.5 cm y el refuerzo horizontal consistirá en 2 varillas de 5/32 pulg cada 9 hiladas (o una varilla cada 4 hiladas).

En el caso de un muro de tabique rojo de 4 m de longitud, el refuerzo necesario para sostener la fuerza cortante resistente a un esfuerzo  $v^* = 3 \text{ kg/cm}^2$ ; consistiría en estribos de alambroón No. 2 espaciados a cada 2.5 cm, 7 cm en caso de usar alambroón con  $f_y = 6000 \text{ kg/cm}^2$ ; otra opción es reforzar el muro con estribos en los castillos a cada 7 cm y añadir 2 varillas 5/32 pulg (alta resistencia) cada 8 hiladas.

Si las piezas que forman el muro son huecas, se pide en diversos reglamentos colocar una cierta cantidad mínima de refuerzo interior. Generalmente se establece (probablemente sin una base sólida, sino más bien -- por extrapolación de resultados en muros de concreto) que la cuantía de refuerzo vertical y horizontal del muro no será menor de 0.2 por ciento, debiendo colocar una tercera parte de esta en cualquier dirección. Esta última cantidad, colocada como refuerzo horizontal representa una cuantía 25 por ciento mayor a la que necesitaría el muro analizado en el pá

rafo anterior, suponiendo que está formado de piezas huecas y reforzado solo con acero horizontal. En general, se observa que dicha cantidad mínima de refuerzo horizontal está en exceso de la necesaria para desarrollar la capacidad del muro; sería necesario que la mampostería de un muro de las mismas características anteriores tuviera un esfuerzo nominal de diseño,  $v^*$ , igual a  $3.4 \text{ kg/cm}^2$ , para que con solo el refuerzo horizontal fuera capaz de sostener la fuerza cortante resistente una vez que el muro se agrieta. Con lo discutido anteriormente se quiere hacer ver que la especificación sobre cuantía mínima de refuerzo para mampostería de piezas huecas está en exceso para la mayoría de los materiales a los que hacen mención los reglamentos mencionados; sin embargo, a falta de mayor información y estudio sobre el particular se sugiere respetar dicha disposición.

### 5.2.3 Resistencia a flexocompresión en el plano del muro

Es importante recordar que las cargas laterales producen no solo fuerzas cortantes en los muros, sino también momentos flexionantes que frecuentemente requieren de refuerzo especial por flexión en los extremos del muro.

La resistencia a flexión y a flexocompresión en el plano del muro se calculará, para muros sin refuerzo, según la teoría de resistencia de materiales suponiendo una distribución lineal de los esfuerzos en la mampostería. Se considerará que la mampostería no resiste tensiones y que la falla ocurre cuando aparece en la sección crítica un esfuerzo de compresión igual a  $f_m^*$ .

La capacidad a flexión o a flexocompresión en el plano de un muro con refuerzo interior o exterior se calculará con un método de diseño basado en las hipótesis vistas para el caso de carga vertical excéntrica.

Para muros reforzados con barras colocadas simétricamente en sus extremos, las fórmulas simplificadas siguientes dan valores suficientemente aproximados y conservadores del momento resistente de diseño.

Para flexión simple, el momento resistente se calculará como

$$M_o = F_R A_s f_y d'$$

donde

$A_s$  es el área de acero colocada en los extremos del muro  
 $d'$  la distancia entre los centroides del acero colocado en ambos extremos del muro

Cuando exista carga axial sobre el muro, el momento de la sección se modificará de acuerdo con la ecuación.

$$M_R = M_0 + 0.30 P_u d' ; \text{ si } P_u \leq \frac{P_R}{3}$$

$$M_R = (1.5 M_0 + 0.15 P_R d') \left(1 - \frac{P_u}{P_R}\right); \text{ si } P_u > \frac{P_R}{3}$$

donde

$P_u$  es la carga axial de diseño total sobre el muro, que se considerará positiva si es de compresión.

$d'$  el peralte efectivo del refuerzo de tensión

$P_R$  la resistencia a compresión axial

$F_R$  en este caso igual a 0.6

Estas fórmulas simplificadas se deducen al considerar que el diagrama de interacción en flexocompresión (representación gráfica de las combinaciones de carga axial y momento flexionante que ocasiona la falla del elemento) está formado por dos tramos rectos.



# REPARACION DE DAÑOS ESTRUCTURALES ELEMENTOS DE MAMPOSTERIA

Oscar Hernández B<sup>I, II</sup>

## INTRODUCCION

Dada la gran actividad sísmica que se presenta en México, se considera de gran importancia conocer el efecto de los sismos sobre las estructuras, los daños que les producen y la forma de lograr que éstas recuperen o superen sus características de resistencia y capacidad de deformación.

Al examinar los daños que ocasiona un sismo se encuentra que en general éstos pueden ser de dos tipos: estructurales y no estructurales; éstos últimos, como agrietamientos de muros de relleno y caída de acabados, son arreglados en forma rápida aunque en ocasiones a costos elevados.

Los daños estructurales corresponden a una categoría que es mucho más importante que la otra; en este caso es necesario rehabilitar la estructura tomando en cuenta diversos aspectos cuyo análisis y descripción constituye el objetivo del presente trabajo. Entre los aspectos que se considerarán están la identificación de las fallas que se producen en estructuras convencionales y las causas que las originan, la prescripción de métodos para evitarlas y los procedimientos para reparar y reforzar elementos estructurales y estructuras completas. Lo anterior se efectuará para estructuras de mampostería.

## EVALUACION DEL DAÑO EN ESTRUCTURAS

Aspectos generales. A pesar de los avances de la ingeniería sísmica, en opinión de muchos investigadores y profesionistas, el diseño y construcción de estructuras resistentes a sismos es parte de un arte y parte ciencia. Un hecho que ha mejorado el juicio de los ingenieros ha sido el observar el comportamiento, bueno o malo, de las estructuras después de que ha ocurrido un sismo; esto ha proporcionado invaluable ayuda para mejorar los códigos y métodos de análisis y dimensionamiento.

Entre los problemas de la ingeniería estructural que constituyen un reto está el definir qué acción debe tomarse cuando una estructura es dañada por un sismo, ya que se tiene que decidir si es susceptible de repararse o si debe condenarse a ser demolida.

En principio, cualquier estructura dañada que permanece en pie es reparable, pero influirán en la decisión de hacerlo aspectos de tipo económico, social y, en algunas circunstancias, aspectos políticos.

La reparación y refuerzo de estructuras es una actividad a la que sólo eventualmente se le ha dado importancia, generalmente después de que un sismo ha ocurrido; en algunos países se legisla acerca de la necesidad de que las estructuras con varios años de uso cumplan con los nuevos códigos de diseño, forzando incluso a realizar el refuerzo de las mismas aun cuando no hayan tenido daños durante temblores previos.

Después de la ocurrencia de un sismo severo, generalmente se procede a hacer una

I Director General, Proyectos Tensión, S.A. de C.V.

II Profesor, División de Ingeniería Civil, Facultad de Ingeniería, UNAM.

evaluación superficial de los daños y a la reparación de la estructura; en la mayoría de los casos esta reparación consiste en la remoción y sustitución del material dañado, sin realizar estudios acerca de la conveniencia de reestructurar la construcción, dejándola en condiciones precarias ante otro sismo. Por lo anterior, es necesario que se forme mayor conciencia de lo peligroso y anti-económico que resulta proceder en esta manera, y que es necesario entender mejor el porqué de las fallas, la manera de evitarlas y, en su caso, la forma de proceder a reparar el daño.

Procedimiento para evaluar el daño. El problema principal radica en establecer la magnitud del daño en la estructura y decidir si esta debe demolerse o repararse, y en este último caso, recomendar el procedimiento de reparación adecuado.

Para tomar esta decisión es necesario que el ingeniero haga uso de sus conocimientos y experiencia en la forma más razonada posible, aún cuando dispone de poco tiempo para hacerlos, porque por motivos económicos y sociales las estructuras tienen que volver a su uso a la brevedad posible.

El problema de diagnóstico y evaluación de los daños consiste en determinar la resistencia de la estructura en una situación actual y revisar si tiene un factor de seguridad adecuado; es decir, si la relación entre su resistencia y la intensidad de las cargas que puedan afectarla es suficientemente grande para cubrir con seguridad la posibilidad de un eventual colapso ante sismos futuros. Para esto, la primera acción a tomar es realizar una inspección detallada de la estructura para localizar los daños estructurales y no estructurales existentes, especificar el tipo de daño y elaborar planos con la información que al respecto se recabe; esto es indispensable para tener una visión de conjunto del comportamiento que tuvo la estructura, con el fin de establecer las causas de los daños.

Como segunda acción a tomar, o en paralelo con la primera, es indispensable analizar los planos estructurales y arquitectónicos de la estructura en su concepción original, con el propósito de determinar su estructuración, dimensiones y refuerzo de los elementos estructurales, localización de elementos no estructurales, propiedades de los materiales, etc., así como también las magnitudes de las cargas vivas y muertas de diseño. Cuando no se cuenta con los planos mencionados (situación muy frecuente), se debe llevar a cabo un levantamiento físico para recabar los datos necesarios incluyendo calas para determinar cantidades de refuerzo existente, así como obtención de muestras de concreto, mampostería y acero de refuerzo para pruebas de laboratorio.

Con lo anterior, se procede al análisis de la estructura en condiciones originales (antes del daño) bajo cargas verticales y horizontales, con el fin de comparar los elementos mecánicos resultantes con los daños observados y registrados en el levantamiento previo y llegar a conclusiones sobre la posible causa de los daños; si esta no es grave y los daños no son de gran magnitud, éstos pueden repararse localmente. Si la causa de los daños es grave, estos son numerosos y de consideración la estructura es insegura y se procede a rediseñarla a la brevedad posible; dejarla tal como está, efectuando únicamente reparaciones locales, es peligroso porque se presentarían daños ante otro movimiento sísmico, posiblemente con mayores consecuencias.

Para este propósito y tomando en cuenta las causas de la falla, hay que procurar mejor comportamiento de la estructura. Si tenía una excesiva flexibilidad, deben incluirse suficientes elementos resistentes a cargas laterales distribuidos en forma más o menos uniforme para no introducir excentricidades indeseables.

Con la nueva estructuración y secciones propuestas debe efectuarse otro análisis para dimensionar los miembros estructurales adicionales y, si así resulta necesario, proceder al refuerzo de los ya existentes.

Finalmente viene otro aspecto que es difícil de determinar: la eficiencia de la reparación, refuerzo o reestructuración. La manera más conveniente de verificar lo anterior es mediante pruebas de carga, tanto verticales como laterales; desafortunadamente en muchos casos no se cuenta con el sistema para proporcionar cargas laterales de la magnitud deseada, quedando entonces la duda acerca de la eficiencia de los procedimientos utilizados para restaurar o aumentar la resistencia y rigidez.

Una manera de lograr una idea burda acerca de la rigidez es midiendo el periodo de vibración de la estructura para oscilaciones pequeñas; si este periodo disminuye quiere decir, si no se ha incrementado la masa, que se ha aumentado la rigidez lateral de la estructura.

Por todo lo comentado con anterioridad y por las incertidumbres que se tienen durante el proceso de rediseño debe buscarse que se tenga un alto margen de seguridad entre la resistencia calculada y la necesaria según los nuevos análisis.

#### DAÑOS MAS COMUNES EN ESTRUCTURAS DE MAMPOSTERIA

En esta parte del trabajo se indican los daños más comunes que presentan distintos tipos de construcciones, las causas que los originan y la manera de evitarlos. La forma de reparar esos daños se verá en detalle más adelante, donde se describirán distintos procedimientos que se han estudiado en México.

Mampostería de adobe. El adobe es el material más empleado para los muros en la vivienda rural en México y muchas otras partes del mundo. Las viviendas más comunes se caracterizan por un cuerpo principal de un solo piso, planta rectangular alargada de 30 a 50 m<sup>2</sup> de área, muros de 3 a 3.5 m de altura con espesores de 40 a 60 cm sin refuerzo, frecuentemente sin muros divisorios, y escasa restricción de la parte superior de los mismos. Todo ello hace que el comportamiento esté regido por la flexión de los muros en dirección normal a su plano.

En la fig 1a se muestran los sistemas de techos más comunes y en la fig 1b la falla característica de estas viviendas.

Al vibrar los muros durante un sismo, se inducen momentos flexionantes críticos en las esquinas superiores de los mismos, los cuales se agrietan progresivamente hacia abajo, de manera que el muro frontal comienza a vibrar como en voladizo, ocurriendo el volteamiento cuando la altura agrietada del muro es suficiente para que la resultante de las fuerzas caiga fuera de la sección del muro. El volteamiento ocurre casi siempre hacia afuera, ayudado por el cocol del techo; este modo de falla es el que se ha observado con mayor frecuencia a causa de sismos.

En viviendas en las que la longitud no soportada de muros es pequeña o en las que los techos proporcionan restricción a la flexión, o en las de más de un piso, la falla suele ocurrir por cortante a través de grietas diagonales. Este modo de falla es propiciado con frecuencia por la existencia de aberturas importantes en los muros.

Se ha observado que el colapso se inicia en ocasiones por la caída del techo, ya sea por fallas locales en las conexiones o en la madera misma por encontrarse muy deteriorada, o por deslizamiento de los elementos del techo sobre los muros, a los

que están fijados en forma muy precaria. —

4

Son diversas las soluciones que se han propuesto en la literatura para evitar el daño en viviendas de adobe. Como recomendaciones generales para mejorar el comportamiento sísmico de estas construcciones se pueden mencionar:

1. Hacer una selección cuidadosa de los suelos con que se fabrica el adobe y su mejoramiento con fibras o con aditivos estabilizadores.
2. Reducir la altura de los muros al mínimo admisible para la habitabilidad de la vivienda.
3. Subdividir los espacios interiores mediante muros ligados entre sí con el mejor cuatrapeo posible de las piezas.
4. Evitar techos pesados y estructurar éstos para que tengan rigidez en su plano.

Si se siguieran las recomendaciones anteriores, se aliviarían algunos inconvenientes como son la escasa resistencia en tensión del adobe y la poca adherencia que se logra en las juntas con los morteros de lodo. Sin embargo, aún con adobes de buena calidad, no puede lograrse una buena liga entre los muros transversales, por lo que es probable que los muros fallen por el efecto de fuerzas normales a su plano, ya sea por volteamiento o por fallas locales debidas a los empujes de los elementos de techo. En muchas ocasiones las fallas de estas construcciones aumentan porque el adobe se encuentra muy debilitado por efecto del intemperismo. En consecuencia, una mejora importante en el comportamiento sísmico sólo puede obtenerse por medio de algún refuerzo en el adobe que proporcione una liga adecuada entre los elementos y cierto confinamiento y capacidad de deformación a los muros. La manera como esto puede lograrse se verá más adelante.

Elementos de mampostería de piedras artificiales. Existen diferentes modalidades para construir muros de mampostería, desde la no reforzada hasta las modalidades más conocidas como son la mampostería confinada y la mampostería con refuerzo interior.

Las mamposterías de tabique y bloque sin refuerzo han tenido un comportamiento deficiente ante el efecto de sismo o de movimientos de las cimentaciones; adolecen de dos defectos graves: la liga que se logra entre muros transversales por el simple cuatrapeo de las piezas, no es suficiente para impedir el volteamiento de los muros ante empujes en su plano, y la falta de confinamiento y refuerzo hace que pueda ocurrir una falla frágil por el efecto de las cargas en el plano del muro. Su comportamiento sísmico es similar al de las construcciones de adobe.

El comportamiento sísmico de construcciones cuyos muros están confinados con dalas y castillos ha sido definitivamente mejor que el de la mampostería no reforzada. Al estar rodeados por un elemento perimetral de concreto, los muros tienen una capacidad de deformación mucho mayor y no fallan bruscamente al agrietarse. Los castillos y dalas permiten realizar además una liga eficaz de los muros entre sí y de estos con los sistemas de piso.

Hay que hacer notar que a pesar de que con este sistema se reduce la probabilidad de un colapso de la construcción, no se evita los agrietamientos diagonales en los muros, ya que la resistencia en tensión diagonal de la mampostería no se incrementa apreciablemente por la presencia de las dalas y castillos.

Para la mampostería con refuerzo interior, tanto el comportamiento sísmico observado en estructuras reales como los ensayos de muros en el laboratorio indican que, si se coloca únicamente refuerzo vertical muy espaciado y no se proporciona refuerzo horizontal, el comportamiento sísmico es deficiente debido a la falla local de las piezas huecas.

Los daños que puede presentar las mamposterías son principalmente debidas al inadecuado refuerzo o liga con los elementos que los confinan, por las torsiones causadas al estructurar en forma deficiente la construcción o por la falla del suelo debida a asentamientos diferenciales, momentos de volteo o a la licuación del suelo.

En términos generales, en la mampostería se pueden presentar tres tipos de falla: compresión, flexión y cortante. La primera de ellas es muy raro que llegue a ocurrir y por lo tanto no se hablará más de ella; la falla por flexión se identifica por las grietas horizontales que se abren en un extremo del muro sobre las juntas de mortero situadas en la parte inferior, mientras que en el otro extremo del muro ocurre el aplastamiento de las piezas y/o elemento que confina al muro; ocurre una variante de la falla por flexión que se identifica por grietas verticales en la parte inferior del muro, esta se debe básicamente a hundimientos del terreno ocurridos en un lapso considerable de tiempo.

Mucho más frecuente que los dos tipos de falla antes descritos es el debido a fuerzas cortantes producidas ya sea por fuerzas laterales externas (sismo principalmente) o por hundimientos diferenciales del terreno; fácilmente se identifica esta falla porque son grietas diagonales sobre el muro que pueden seguir dos trayectorias: 1) sobre las juntas del mortero, en cuyo caso se dice que es una falla por cortante y 2) sobre piezas y juntas, dando lugar a la denominada falla por tensión diagonal.

En el caso de falla por tensión diagonal prácticamente se puede decir que se ha agotado la resistencia de la mampostería, por lo que de requerirse el reforzamiento de la misma implicará necesariamente el uso de acero de refuerzo o cambiar la mampostería por otra más resistente. No es así el caso cuando se tiene falla por cortante (por las juntas) en donde, como se verá posteriormente, se pueden utilizar otros procedimientos para aumentar su resistencia ante fuerzas cortantes.

#### PROCEDIMIENTOS DE REPARACION Y REFUERZO

La filosofía de diseño más aceptada establece que para sismos de intensidad moderada se deben diseñar las estructuras para que no presenten daños estructurales, aunque tal vez se tengan algunos daños no estructurales si la construcción es muy flexible; y para el sismo de diseño, la estructura debe quedar en pie aun cuando presente graves daños en sus elementos estructurales. Para sismos de intensidad intermedia la estructura puede presentar algunos daños estructurales debido a malos datos constructivos, deficiente calidad de los materiales, etc., surgiendo entonces la necesidad de reparar los daños. Se pueden establecer tres niveles de reparación:

1. Se resanan superficialmente los elementos estructurales. Esto ocurre con frecuencia en construcciones de personas de bajos recursos, o se hace por ignorancia en otros tipos de estructuras; como consecuencia, quedan debilitadas para eventos futuros.

2. La estructura se repara para recuperar su resistencia y rigidez original. Esto generalmente se trata de conseguir mediante la reparación local de los miembros dañados; sin embargo, se ha observado que casi nunca se alcanza, quedando la estructura susceptible de presentar los mismos daños, o más graves, ante sismos de la misma intensidad.
3. Se rediseña la estructura. A este nivel, además de la reparación local se procede a rediseñar la construcción para asegurar su supervivencia para sismos más intensos que el que produjo el daño.

De las alternativas anteriores; la tercera es la más conveniente a seguir, aun cuando la segunda es en ocasiones aceptable, sobre todo cuando están muy localizados los daños; la reparación superficial debe evitarse.

Los procedimientos de reparación y refuerzo que actualmente se emplean son empíricos, ya que han sido desarrollados con base en experiencia acumulada. Cuando se procede sólo a reparar localmente debe quedar muy claro el objetivo a lograr, pero en la mayoría de las ocasiones, se tiene que reestructurar la construcción en vista del comportamiento inadecuado observado para un sismo de menor intensidad al de diseño. En estos casos, el ingeniero depende de los resultados de la inspección, del análisis y, en un alto porcentaje, de su criterio, conocimiento y experiencia para hacer el diagnóstico adecuado.

También es conveniente tener en consideración que existen diversos elementos estructurales que, por su forma o por sus condiciones de sollicitación, pueden presentar falla de tipo frágil; ejemplo de esto lo constituyen las fallas por cortante en muros. En estos casos será necesario que el procedimiento de reparación además de restaurar la resistencia, proporcione capacidad de deformación al miembro estructural y a la estructura.

Cabe decir que los materiales que se utilicen para la reparación deben alcanzar altas resistencias a temprana edad porque en este caso la rapidez de ejecución es muy importante. También es importante mencionar que el sentir general de los expertos en el tema de reparación de estructuras es que la construcción más problemática de rehabilitar es la formada a base de elementos de mampostería, los cuales son capaces de soportar altas cargas laterales, pero tienen poca reserva de resistencia; además, se ha observado que por lo general el costo de su reparación es mayor al de otras construcciones con sistema de estructuración diferente.

Mampostería de piedras artificiales sin refuerzo. En el caso que la estructura dañada presente falla por las juntas puede no ser necesario utilizar refuerzo para aumentar su seguridad a niveles adecuados, a continuación se resumirá un estudio realizado por el autor para tratar de establecer como se puede incrementar la resistencia de este tipo de mampostería.

Se ensayaron diversos tipos de mampostería (piezas y morteros) provocando los tipos de falla típicos ante fuerzas cortantes, después de lo cual se repararon como a continuación se menciona: 1) mediante un aplanado de mortero rico en cemento (1:0:3 cemento, cal, arena); 2) llenado con mortero los huecos de las piezas y 3) combinando los dos procedimientos anteriores. Cabe mencionar que en ningún caso se volvieron a pegar las juntas donde el espécimen falló originalmente, sino solo se superpusieron las piezas y se aplicó el procedimiento de reparación; lo anterior se hizo para que los resultados obtenidos estuvieran dentro de la seguridad al ser aplicados porque por lo general se acostumbra "rajuelar" la zona dañada de las mamposterías.

Los especímenes ensayados (muretes) eran de aproximadamente 60 x 60 cm y se les aplicaba una carga en una de sus diagonales, lo que producía una falla de cortante o tensión diagonal en el murete. Las características de las diferentes mamposterías antes y después de reparados se pueden ver en la tabla 1. En dicha tabla solo se presentan los valores medios y sus coeficientes de variación; mientras que en la tabla 2 se muestran los valores mínimos probables que se calcularon con la expresión propuesta por el Reglamento para construcciones del D.D.F., dicha expresión es

$$v^* = \frac{\bar{v}}{1 + 2.5 \text{ C.V.}}$$

donde

- v\*      valor de diseño que tiene una probabilidad de no ser alcanzado del 2%
- $\bar{v}$      valor medio obtenido del ensaye
- C.V.    coeficiente de variación de la muestra

La interpretación de los resultados se hará con base en esta última tabla con la finalidad de tomar en cuenta la variabilidad de los datos y referirse a valores que tengan una probabilidad muy baja de que no se alcancen.

Debido a lo limitado del estudio en cuanto a número de variables: piezas y morteros, la interpretación que se realice deberá tomarse con reserva, y servir únicamente como guía en caso de tratar de extrapolar los resultados del estudio.

Considerando lo anterior, analizando los valores mostrados en la tabla 2 y el comportamiento observados de los especímenes durante su ensaye, se pueden hacer los siguientes comentarios:

- Si la capacidad de la mampostería está limitada por la baja calidad del mortero (falla por las juntas), se puede lograr un incremento sustancial de la resistencia empleando un mortero de buena calidad ya sea como aplanado o relleno de los huecos de las piezas.
- A mejor calidad del aplanado mayor incremento de la resistencia. Aún cuando por lo limitado del estudio no se puede determinar, debe haber un límite para lograr este efecto en forma óptima; es decir, debe existir alguna relación entre resistencia del aplanado, capacidad alcanzada y/o capacidad original.
- El aplanado aumenta la resistencia a cortante cuando hace que cambie el tipo de falla de la mampostería; esto generalmente sucede cuando el mortero del aplanado es de mucho mejor calidad del que se tiene en las juntas. El incremento esperado en estas condiciones es cuando menos del 40 por ciento.
- En el caso de llenar los huecos, se ve de la tabla 2 que el incremento es del orden del 50 por ciento, prácticamente independiente del tipo de pieza (porcentaje de huecos) y mortero utilizado; se observa también que cambia el tipo de falla. Este tipo de reparación sería adecuado cuando se quiere conservar la apariencia de las piezas y la falla haya sido por las juntas.
- El combinar el llenado de los huecos con un aplanado en las caras laterales aumenta sustancialmente la resistencia; incluso, se nota una cierta influencia del porcentaje de huecos de las piezas que componen la mampostería. La fig 2 muestra dicha variación para los resultados de este estudio; en el eje vertical se tiene

el factor por el que se incrementa el valor de la resistencia original de la mampostería, mientras que en el horizontal el porcentaje de huecos de la misma. Si por los valores promedio para el bloque de concreto y el tabique extraído se pasa una línea recta que también pase por el punto (0, 1), que correspondería a una pieza sólida (0 por ciento de huecos), se observa que se alinean aproximadamente sobre una recta haciendo ver que el incremento de resistencia es prácticamente proporcional al área de huecos.

Lo expresado en el párrafo anterior es cierto siempre y cuando se cumplan simultáneamente los siguientes aspectos:

- a) La mampostería original no presenta una falla neta de tensión diagonal (que sugeriría que está agotada totalmente la capacidad de la mampostería).
- b) Se llenan completamente todos los huecos.
- c) Se utiliza un mortero de buena calidad tanto para el aplanado como para el llenado de los huecos. Cumpliendo con lo anterior, la expresión que resulta de los datos de este estudio para calcular el incremento sobre la resistencia original es

$$F = 1 + 0.03 H_x$$

donde  $F$  es el factor que incrementa la resistencia original y  $H_x$  el porcentaje de huecos de las piezas. Debe tenerse presente que si la falla de la mampostería original tiende a ser por las piezas (o combinada), el incremento en resistencia es menor cuando la resistencia de la mampostería original es alta; por ejemplo, comparar la mampostería de bloque de concreto con mortero 1:2:9 AB — con aquella con mortero 1:0:3 AB; en el primer caso el incremento es del 80 por ciento respecto a la resistencia original, mientras que en el segundo es solo del 30 por ciento. En el caso del tabique extruido la diferencia es menor (2.35 versus 2.15) para los mismos criterios de reparación que en el caso anterior.

- Se observa también que el emplear un buen mortero como aplanado es equivalente a solo llenar los huecos.

Como conclusión de esta fase experimental puede decirse que es posible incrementar sustancialmente la capacidad de mampostería sin refuerzo ya sea mediante la colocación de un aplanado a base de morteros de buena calidad y/o llenando los orificios de las piezas huecas. En el caso de que las mamposterías dañadas ya posean un aplanado y el tipo de falla sea por las juntas, la colocación de otro aplanado de mucha mejor calidad seguramente incrementará su capacidad; mientras que si la falla de un muro, con o sin aplanado, es por tensión diagonal, solo será posible incrementar su resistencia mediante aplanados reforzados con malla de acero electrosoldada. En las mamposterías de piezas huecas el llenar los huecos incrementará su capacidad salvo en el caso que la falla hubiera sido de tensión diagonal; en este caso el llenado — cuando más recuperará su capacidad, pero como por apariencia debe ponerse un aplanado, seguramente incrementará su resistencia. Estas últimas variantes es necesario valuarlas experimentalmente.

Mampostería de adobe. En diversos estudios, refs 1 a 4, se proponen algunos procedimientos para reforzar y aumentar la seguridad ante sismo de estas estructuras. A continuación se describen los que se consideran más convenientes:



1. Una viga de concreto en la parte superior de los muros, como se muestra en la fig 3. Con este procedimiento se logra una liga adecuada con el adobe y con el techo mediante detalles constructivos sencillos (ref 2); se mejora sustancialmente el comportamiento si, además, se colocan tensores verticales en los extremos de los muros.
2. Otra opción es emplear una viga de alma abierta de madera (ref 3), como se muestra en la fig 4a.
3. Una forma muy sencilla de ligar los muros es mediante barras de acero tensadas, fig 4b; este procedimiento se ha empleado para reforzar viviendas de mampostería de piedra dañadas a raíz del temblor de Skopje, Yugoslavia (1963) y los del Friuli, Italia (1975); el empleo de tensores verticales mejora sustancialmente el comportamiento.
4. Un procedimiento que tiende a lograr refuerzo, rigidización y liga de los muros, así como su protección de la intemperie es el que se muestra en la fig 5 consiste, ref 4, en colocar un recubrimiento de mortero de cemento sobre una malla de acero de refuerzo cuidadosamente fijada al muro por ambas caras, formando un elemento compuesto de adobe y mortero reforzado.

Se tiene evidencia experimental de los sistemas de refuerzo 1, 3 y 4, que proporcionarán una mejoría notable de su comportamiento y resistencia ante sismo (cuando menos se duplica); en la ref 1 se describe con detalle el ensaye de modelos de vivienda reforzada con los procedimientos antes descritos.

Estos criterios de refuerzo también pueden aplicarse a construcciones de mampostería de tabiques de barro o de concreto sin refuerzo.

Mampostería de piedras artificiales con refuerzo. En algunos países como Estados Unidos y Nueva Zelanda la mampostería con refuerzo interior es bastante popular como sistema constructivo; sin embargo, es usual que se llenen completamente los huecos de las piezas con un mortero muy fluido y con abundante refuerzo vertical y horizontal. Con este sistema, en mampostería de bloques de concreto, se obtiene prácticamente un muro monolítico porque el concreto colado en los huecos se adhiere perfectamente al bloque; en piezas de barro, la eficacia del procedimiento es menor porque el concreto o mortero empleado para llenar los huecos, al contraerse por fraguado, se separa del tabique; el empleo de aditivos estabilizadores puede evitar este problema. En general la reparación de mampostería con refuerzo interior resulta, si no imposible de realizar, sí muy complicada.

El procedimiento de reparación a seguir depende del tipo de pieza y mortero que se tenga; por lo general es necesario añadir refuerzo al muro después de reparar localmente la grieta. A continuación se mencionan algunos estudios que se han realizado en esta dirección.

En la ref 5 se describe el empleo de mallas de acero en ambas caras del muro como sistema de refuerzo; también se describe la reparación local de las grietas.

En este último caso se observó que la resistencia original se recupera casi totalmente y en el caso de mampostería de piedra, aumenta aproximadamente al doble, esto, lo explica el autor, es debido a que la mampostería absorbe parte del material que se utiliza para reparar las grietas.

El refuerzo con malla de acero se realizó uniendo el refuerzo de ambas caras mediante alambres y cubriéndolas después con mortero que tenía un espesor de 3 cm; además, se reparó localmente la grieta. Con este procedimiento se sobrepasó la resistencia original.

En el Instituto de Ingeniería de la UNAM se realizó un programa experimental exploratorio tendiente a determinar los procedimientos más efectivos para la reparación de mampostería dañadas por sismo o hundimientos diferenciales.

Se repararon ocho muros que habían sido previamente llevados a la falla; seis de ellos se ensayaron bajo carga monotónica, como parte de otra investigación, y dos se probaron recientemente ante cargas laterales alternadas. Los seis primeros eran de tabique extruido con castillos en sus extremos; la falla consistía en una grieta de tensión diagonal en el muro la cual se prolongaba también sobre los castillos. En general, los muros se llevaron a un estado muy avanzado de falla y su capacidad estructural quedó prácticamente anulada. Los dos últimos muros eran de tabique rojo y quedaron en las mismas condiciones.

En la tabla 3 se presentan las características originales de los muros y las que se determinaron después de la reparación. El ensayo de los muros reparados se efectuó bajo las mismas condiciones que el original.

La reparación por tanto se hizo en el marco confinante y en la mampostería. En todos los casos los castillos se resanaron con un mortero de alta resistencia; en la mampostería la reparación se efectuó de diversas maneras.

El muro 1 sufrió falla de cortante (grietas por las juntas); se reparó rellenando las grietas con un mortero comercial denominado Polimor (de alta adherencia). En el muro 2 la reparación se efectuó resanando las grietas que se habían desarrollado con un mortero de cemento que contenía un aditivo para aumentar la adherencia; después se volvió a colocar el aplanado que originalmente tenía. El muro 3, que falló por tensión diagonal, (la grieta atraviesa tanto las juntas como las piezas), se reparó mediante rajueleo con mortero de cemento, colocando después malla de alambre, tipo gallinero, en un lado del muro; finalmente se cubrió la malla con un aplanado de yeso. El muro número 4 solamente se reparó en la zona de falla con mortero de cemento. En el muro 5 se reparó la zona dañada con mortero común, se colocó después una malla de alambre entrelazada de 7 cm por lado, que se fijó mediante taquetes al marco perimetral y al muro; finalmente, se añadió un aplanado de yeso y cemento. En el muro 6 se eliminó el aplanado de yeso que tenía para colocarle una malla tipo gallinero, después de haber rajueleado la zona de falla con un mortero de cemento; finalmente se volvió a colocar un aplanado de cemento y yeso. El muro 7 y 8 eran idénticos, al primero se le colocó, después de resanar la grieta con mortero de alta resistencia, una capa de malla electrosoldada 6 x 6 - 14/14, por ambas caras, que se cubrió con un aplanado de cemento-arena en proporción 1 a 3 (en volumen); el muro 8 tenía el doble de refuerzo.

Las figs 6 a 11 muestran las curvas carga diagonal deformación angular (desplazamiento en la parte superior del muro dividido por su altura) para los seis primeros muros, tanto para el muro original como para el reparado, y en las figs 12 y 13, los dos últimos ensayos; sobre el eje vertical se representa el esfuerzo cortante promedio.

El muro 1 recuperó su resistencia y rigidez originales casi totalmente; la falla del muro reparado le ocasionó una grieta diferente a la del muro original, la cual da fe de las buenas características de adherencia del material empleado.

En los muros 2 a 6 se presentó la misma configuración de agrietamiento que en el muro original.

El muro 2 conservó hasta la falla la misma rigidez que el agrietamiento que en el muro original.

El muro 3 alcanzó casi totalmente la resistencia original y conservó la misma rigidez; se considera que el aplanado es el que contribuyó esencialmente a proporcionar la resistencia y rigidez al muro reparado y que el acero de refuerzo trabajó solo después del agrietamiento, proporcionando ductilidad al muro para cargas menores a la del agrietamiento original; lo anterior se debió a la baja cantidad de refuerzo empleado y a que el tipo de malla usada no es eficiente para estos fines.

El comportamiento del muro 4 demuestra que resanar simplemente las grietas con mortero común no es eficiente como método de reparación; la rigidez y la resistencia se reducen drásticamente.

El muro 5 conservó la rigidez original hasta el agrietamiento, el que se presentó cuando se rebasó la contribución del aplanado (comparar muro 3 con 5); no disminuyó la resistencia por la malla de refuerzo.

Con el muro 6 se trató de ver el efecto de la malla de refuerzo; originalmente el muro tenía aplanado de cemento. Se observó que el muro no conservó su rigidez original, debido a que el aplanado que se utilizó después de reparar las grietas fue de menor calidad al que tenía originalmente. La malla de alambre comenzó a funcionar después que se agrietó el muro, incrementando la resistencia hasta que se dañó el marco perimetral; no se llegó a igualar la resistencia original probablemente por la poca cuantía de refuerzo y por el tipo de malla utilizada.

Durante esta serie de seis muros se observó que, para deformaciones grandes, el aplanado se despega del muro haciendo que la malla se desprenda sobre la diagonal de compresión, dando lugar a una disminución de la resistencia. Sería conveniente, por lo tanto, utilizar algún aplanado que se adhiriera mejor a la mampostería, o bien sujetar mejor el refuerzo al muro para ayudar a este propósito. Esto se hizo en los muros 7 y 8 donde las mallas de refuerzo de ambas caras se sujetaron entre sí, evitando el desprendimiento del aplanado y mejorando el comportamiento, como se observa en las figs 12 y 13.

Del análisis del comportamiento de los muros, del estudio de las figs 6 a 13 y de la tabla 4.2, se extraen las siguientes conclusiones:

- a) La rigidez del muro reparado es casi la misma que la del original hasta el instante de agrietamiento, siempre y cuando se utilicen morteros resistentes para resanar la grieta.
- b) El comportamiento de muros en los que sólo se resana la grieta con mortero común, resulta muy inferior al del muro original.
- c) El aplanado ayuda a retardar la aparición del agrietamiento en muros reparados con mortero común.
- d) El acero de refuerzo colocado en forma de malla y cubierto por un aplanado de yeso o cemento, es efectivo una vez que se agrieta el muro.

- e) La presencia del acero hace dúctil y resistente al muro después del agrietamiento.
- f) Con los sistemas de reparación empleados nunca se igualó la resistencia original, pero se llegó a valores bastante cercanos cuando se utilizó mortero de alta resistencia para resanar la grieta y porcentajes bajos de acero de refuerzo en forma de malla.
- g) Para las mamposterías aquí empleadas, la malla de alambre tipo gallinero parece ser suficiente para restaurar la resistencia original, y usándola por ambos lados del muro daría mejor resultado.
- h) Después de agrietada la mampostería, la resistencia disminuye notablemente cuando se daña el marco perimetral y no existe otro tipo de refuerzo.
- i) La resistencia después del agrietamiento es función del porcentaje de refuerzo.

Por lo anterior sería conveniente seguir con estos estudios que tendrían los siguientes objetivos:

- 1) Determinar procedimientos para calcular la cantidad de acero necesaria para alcanzar cierto porcentaje de la resistencia original y dar capacidad de deformación al muro reparado.
- 2) Probar aditivos que permitan aumentar la resistencia de la junta fallada para que también se recupere la rigidez original.
- 3) Ensayar diversos tipos de armado con el objeto de encontrar el recomendable para evitar la falla del marco perimetral.

#### CONCLUSIONES

El comportamiento de una estructura de mampostería reparada depende en gran medida de la elección del procedimiento de reparación, el que se debe seleccionar después de estudiar las causas que produjeron los daños, la naturaleza de éstos y la estructuración de la obra.

Generalmente los elementos de mampostería sin refuerzo son los más dañados cuando ocurre un sismo. Desde hace tiempo se ha tratado de establecer métodos de reparación que restituyan o superen la resistencia y rigidez originales; de estudios recientes se desprende que esto es posible siempre y cuando se emplee un procedimiento adecuado que considere lo establecido en el párrafo anterior. Generalmente habrá necesidad de colocar refuerzo en el muro, bien sea en forma de malla o dispuesto diagonalmente sobre el muro o enmarcando el elemento de mampostería, pudiendo ser sobre una o las dos caras del muro. Es dudosa la efectividad del rajueo de las grietas como método de reparación. Al momento no existe criterio alguno para calcular la cantidad de refuerzo necesaria para hacer que la mampostería alcance cierta resistencia predeterminada y aumente su capacidad de deformación; el autor trabaja sobre el particular y espera que muy pronto pueda establecerse un criterio racional que permita llegar a determinar la cuantía de refuerzo necesario para que un muro de mampostería sea capaz de soportar cierto nivel de fuerza cortante incrementando al mismo tiempo la capacidad de deformación de la mampostería.

## REFERENCIAS

- 1 Hernández O., Valencia E. (1980), "Refuerzo de la vivienda de bajo costo en zonas sísmicas", Instituto de Ingeniería UNAM, Informe de Investigación del proyecto 0701.
- 2 Escalante C, Merrifield C (1977), "Casas de adobe antisísmicas", Reporte interno de la Dirección General de Servicios Técnicos SAHOP.
- 3 "Asismicidad en vivienda económica" (1959), Centro Interamericano de Vivienda y Planteamiento, Bogotá.
- 4 Meli R, y Hernández O., (1976), "Recomendaciones sobre el empleo de la mampostería en construcciones para vivienda en zonas sísmicas", Ingeniería Sísmica N° 14.
- 5 Sheppard P y Tervelj S., (1980), "The effect of repair and strengthening methods for masonry walls", Proceedings 7WCEE, Vol. 6, pag 255-262, Estambul, Turquía
- 6 Makino M. et al" (1980), "An investigation for the design of framed structures with infill walls", Proceedings 7WCEE, Vol 4, pag 369-372, Estambul, Turquía.

TABLA 1 RESULTADOS PROMEDIO

| Material            | O R I G I N A L |         |              |      | Mortero | R E P A R A C I O N |              |      |
|---------------------|-----------------|---------|--------------|------|---------|---------------------|--------------|------|
|                     | $f_p$ a)        | Mortero | $\bar{v}$ b) | C.V. |         | Tipo                | $\bar{v}$ b) | C.V. |
| TABIQUE             | 109             | 0:1:3   | 2.47         | 21   | A       | aplanado            | 2.68         | 32   |
|                     |                 |         |              |      | B       | aplanado            | 4.72         | 44   |
|                     |                 | 1:0:3   | 5.59         | 8    | B       | aplanado            | 6.32         | 32   |
| TABIQUE<br>EXTRUIDO | 241             | 1:2:9   | 4.43         | 23   | A       | aplanado            | 5.7          | 4    |
|                     |                 |         |              |      | B       | aplanado            | 6.0          | 22   |
|                     |                 |         |              |      | B       | huecos              | 6.1          | 16   |
|                     |                 |         |              |      | A-B     | aplanado-<br>huecos | 10.36        | 23   |
|                     |                 | 1:0:3   | 5.02         | 19   | A-B     | aplanado-<br>huecos | 11.29        | 22   |
| BLOQUE<br>CONCRETO  | 102             | 1:2:9   | 3.54         | 21   | A       | aplanado            | 4.93         | 11   |
|                     |                 |         |              |      | B       | aplanado            | 5.74         | 18   |
|                     |                 |         |              |      | B       | huecos              | 6.70         | 38   |
|                     |                 |         |              |      | A-B     | aplanado-<br>huecos | 7.37         | 30   |
|                     |                 |         |              |      | A-B     | aplanado-<br>huecos | 7.69         | 20   |

\* A mortero 1:1:6

B mortero 1:0:3

A-B mortero A en aplanado y  
B en huecosa) resistencia a compresión, kg/cm<sup>2</sup>b) resistencia a cortante, kg/cm<sup>2</sup>

TABLA 2 VALORES DE DISEÑO (C.V. > 15%)

| Material            | O R I G I N A L        |          |   |                   | R E P A R A C I O N |          |                     |                   |                                |
|---------------------|------------------------|----------|---|-------------------|---------------------|----------|---------------------|-------------------|--------------------------------|
|                     | f <sup>a</sup> a)<br>p | Mortero* | + | v <sup>a</sup> b) | +                   | Mortero* | Tipo                | v <sup>a</sup> b) | v <sup>a</sup> /v <sup>a</sup> |
| TABIQUE             | 66                     | 0:1:3    | J | 1.62              | J                   | A        | aplanado            | 1.49              | 0.92                           |
|                     |                        |          |   |                   | T                   | B        | aplanado            | 2.25              | 1.39                           |
|                     |                        |          |   |                   | T                   | B        | aplanado            | 3.51              | 0.86                           |
| TABIQUE<br>EXTRUIDO | 175                    | 1:2:9    | J | 2.81              | J                   | A        | aplanado            | 4.15              | 1.47                           |
|                     |                        |          |   |                   | C                   | B        | aplanado            | 3.87              | 1.38                           |
|                     |                        |          |   |                   | C                   | B        | huecos              | 4.36              | 1.55                           |
|                     |                        |          |   |                   | T                   | A-B      | aplanado-<br>huecos | 6.58              | 2.34                           |
|                     |                        |          |   |                   | T                   | A-B      | aplanado-<br>huecos | 7.28              | 2.14                           |
| BLOQUE<br>CONCRETO  | 69                     | 1:2:9    | J | 2.32              | C                   | A        | aplanado            | 3.59              | 1.41                           |
|                     |                        |          |   |                   | C                   | B        | aplanado            | 3.96              | 1.70                           |
|                     |                        |          |   |                   | C                   | B        | huecos              | 3.43              | 1.48                           |
|                     |                        |          |   |                   | T                   | A-B      | aplanado-<br>huecos | 4.21              | 1.81                           |
|                     |                        |          |   |                   | T                   | A-B      | aplanado-<br>huecos | 5.1               | 1.32                           |

+ tipo de falla  
J por las juntas  
T por las piezas  
C combinada

Mortero\*  
A 1:1:6  
B 1:0:3  
A-B mortero A en aplanado y B en huecos

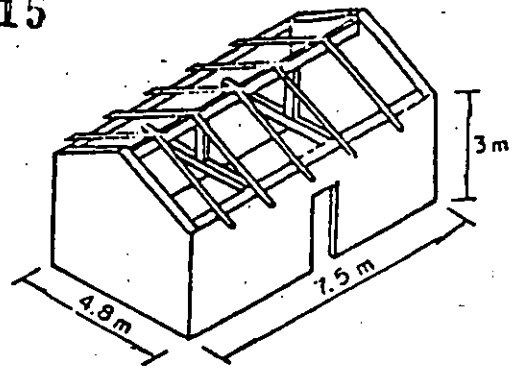
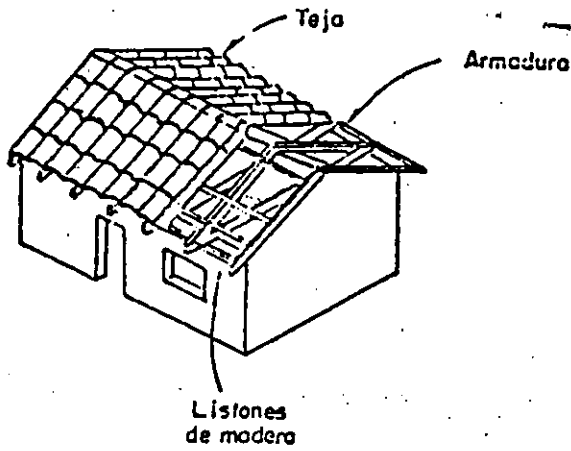
a) resistencia a compresión, kg/cm<sup>2</sup>  
b) resistencia a cortante, kg/cm<sup>2</sup>

TABLA 3 COMPARACION DE PROPIEDADES

| Muro<br>No | Características adicionales en<br>el muro reparado                      | Porcentaje<br>de acero | 1) P <sub>ndv</sub> |        | 2) Y <sub>10</sub> |      |
|------------|---|------------------------|---------------------|--------|--------------------|------|
|            |   |                        | I                   | II     | I                  | II   |
| 1          | Reparación de grieta con mortero Polimer                                | 0                      | 19.20               | 16.9   | 0.83               | 0.61 |
| 2          | Reparación de grieta con mortero Adhesión                               | 0                      | 24.8                | 13.2   | 1.15               | 0.63 |
| 3          | Reparación con mortero común malla de gallinero y recubrimiento de yeso | .0008                  | 14.1                | 13.0   | 1.03               | 1.02 |
| 4          | Reparación de grieta con mortero común                                  | 0                      | 11.2                | 7.4    | 0.98               | 7.29 |
| 5          | Reparación con mortero común malla trenzada y recubrimiento             | .001                   | 22.8                | 18.1   | 1.99               | 3.79 |
| 6          | Reparación con mortero común y malla de gallinero                       | .0008                  | 14.8                | 12.2   | 1.73               | 3.52 |
| 7          | Reparación con mortero 1:0:3 (con: res: arena) y malla de acero         | .0008                  | 9.7                 | 13.0   |                    |      |
| 8          | Similar al 7  | .0015                  | 9.8                 | >>13.0 |                    |      |

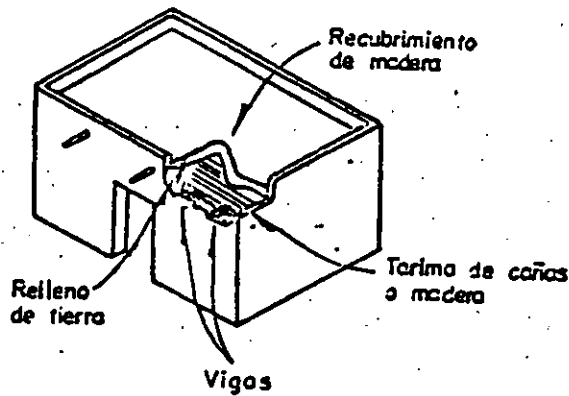
1. Carga, ton  
2. Distorsión

I. Muro original  
II. Muro reparado



a) Armaduras de madera

b) Vigas y puntales



c) Terrado

Fig 1a Tipos comunes de vivienda de adobe

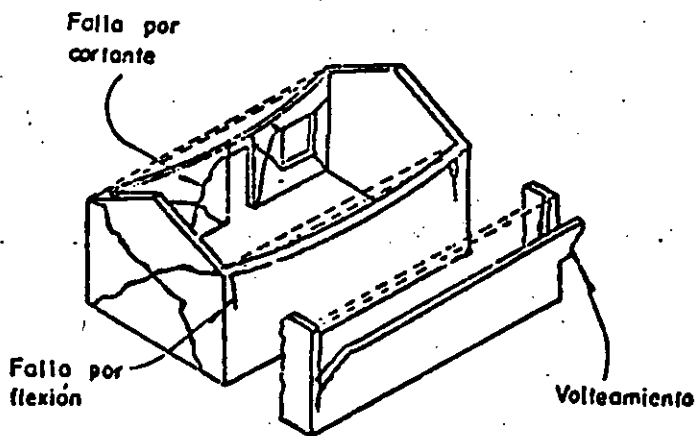


Fig 1b Modos de falla de viviendas de adobe

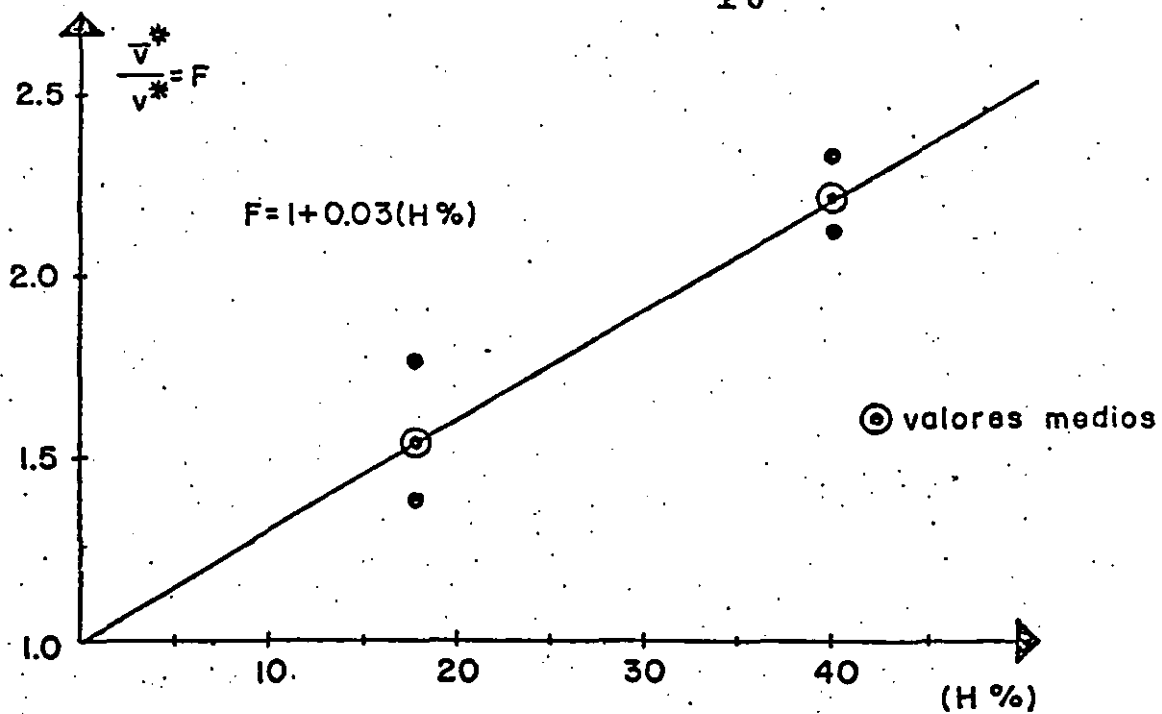


Fig.2 Aumento de la resistencia con el llenado de huecos y aplanado en las caras laterales.



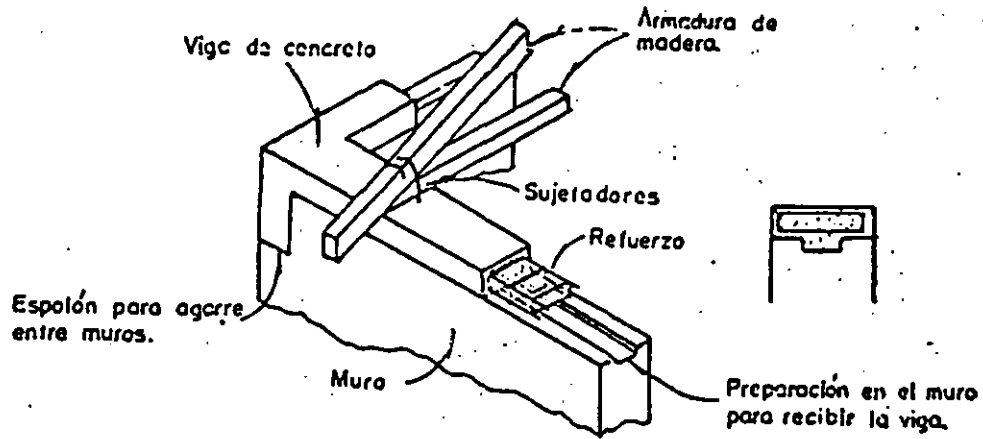
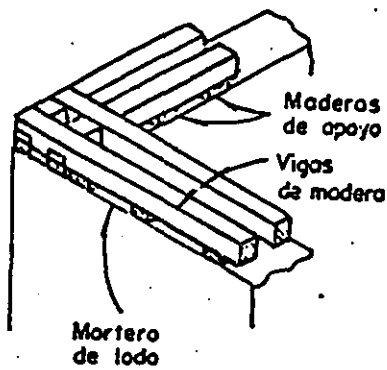
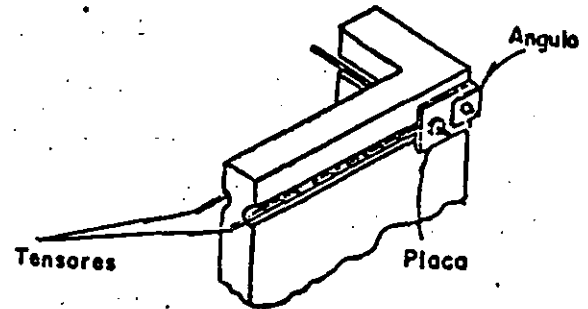


Fig 3 Refuerzo con viga - cadena de concreto

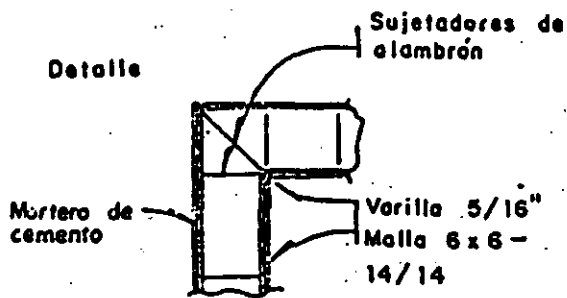


(a) Refuerzo con viga de madera

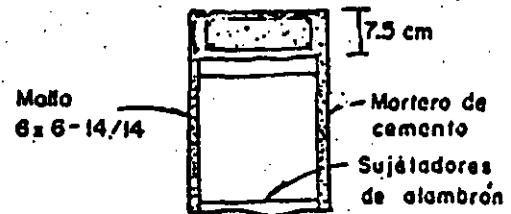


(b) Refuerzo con tensores de acero

Fig 4 Otros procedimientos



PLANTA



Detalle en la parte superior del muro

ELEVACION

Fig 5 Recubrimiento de mortero sobre malla

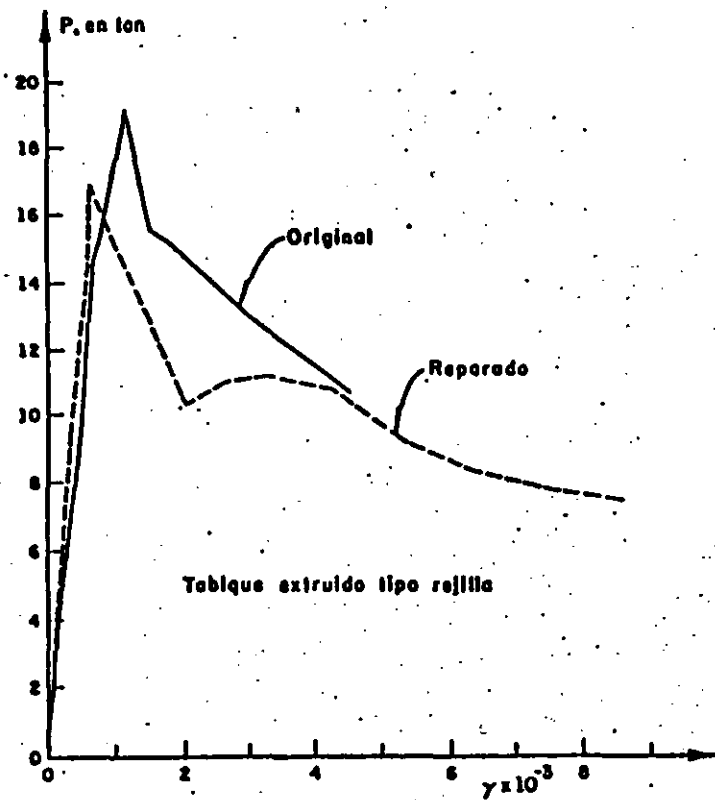


Fig 6 Muro 1. Reparación de grieta con adhesivo Polimor

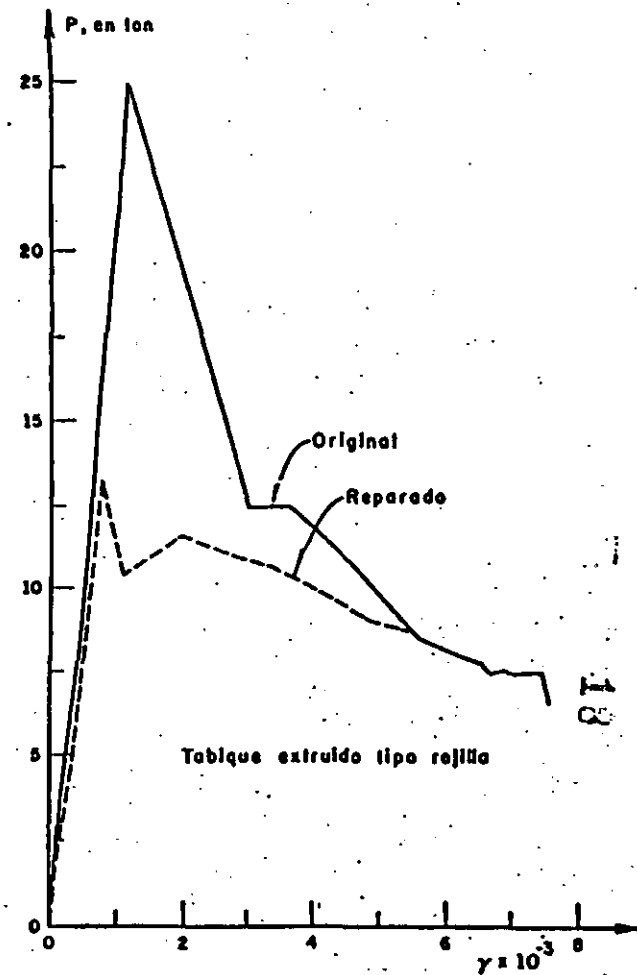


Fig 7 Muro 2. Reparación de grieta con Adhención

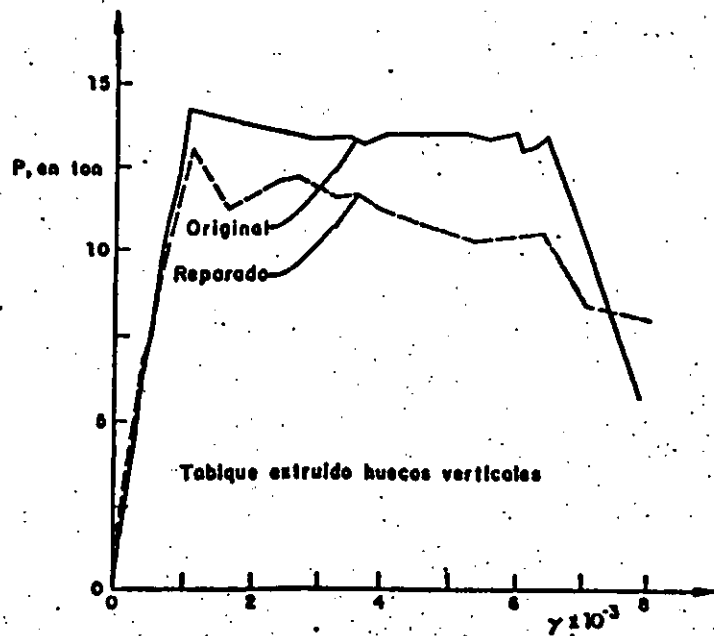


Fig 8 Muro 3. Reparación de grieta con mortero común, malla de gallinero y aplanado de yeso y cemento

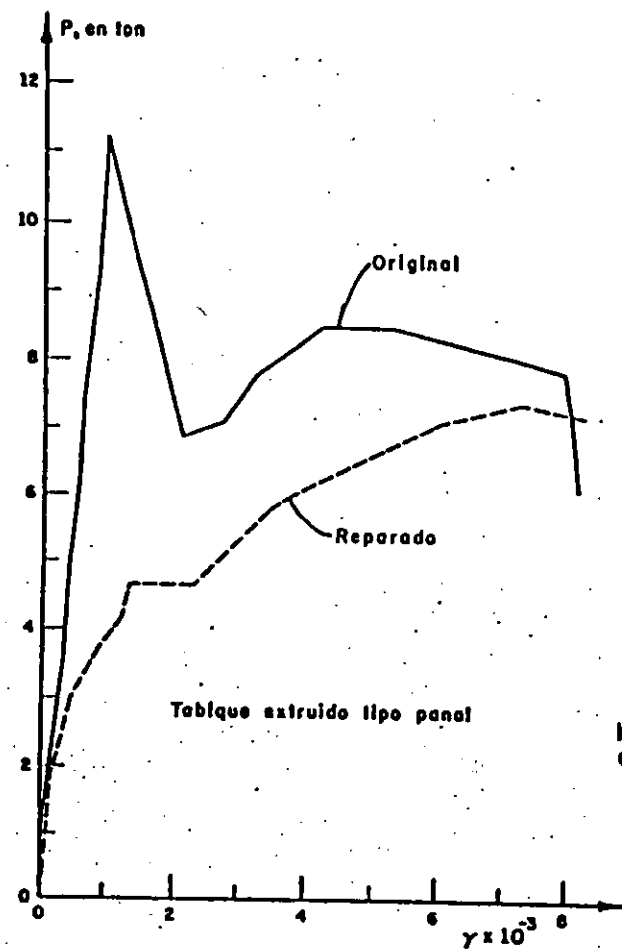


Fig 9 Muro 4. Reparación de grieta con mortero común

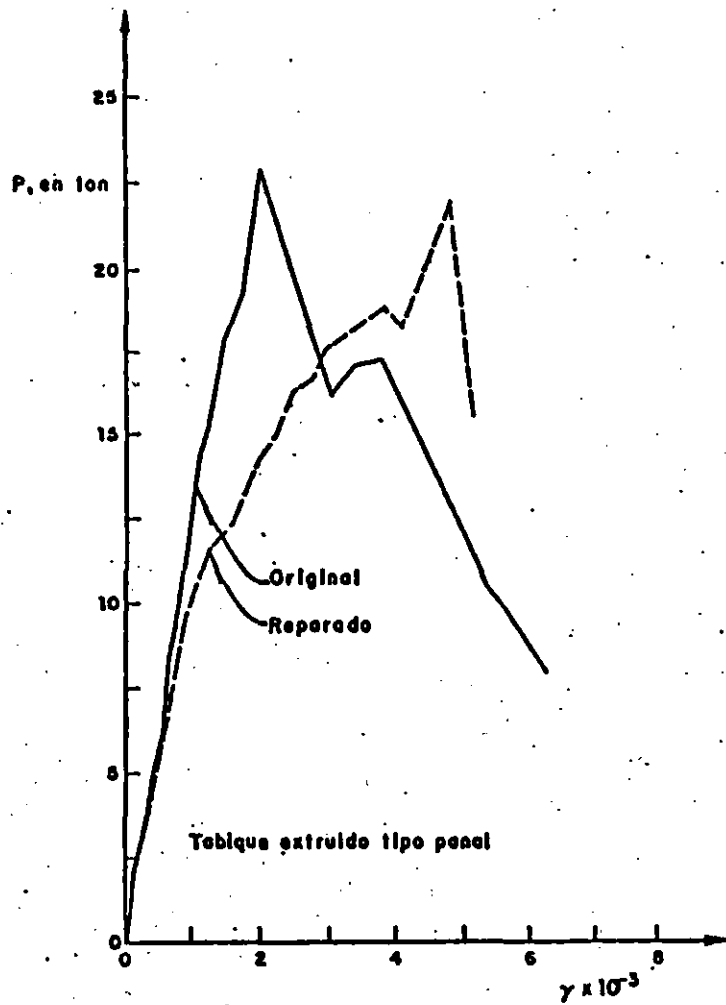


Fig 10 Muro 5. Reparación de grieta con mortero común, malla trenzada y aplanado de mortero

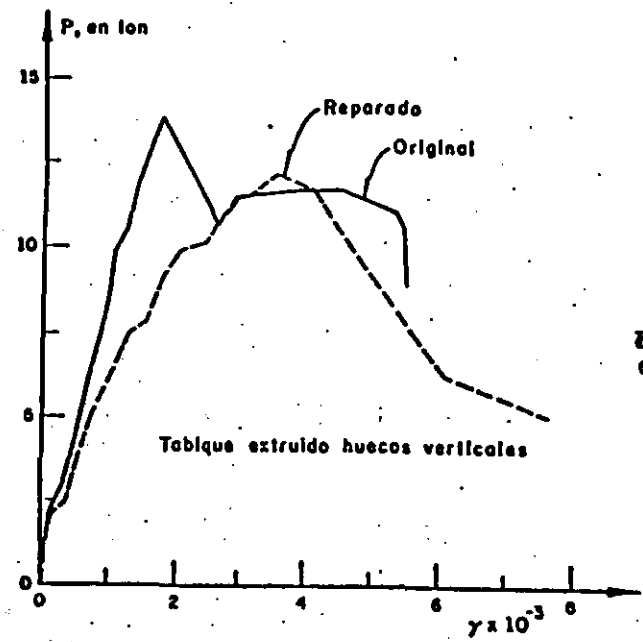


Fig 11 Muro 6. Reparación de grieta con mortero común, malla de gallinero y aplanado de yeso y cemento

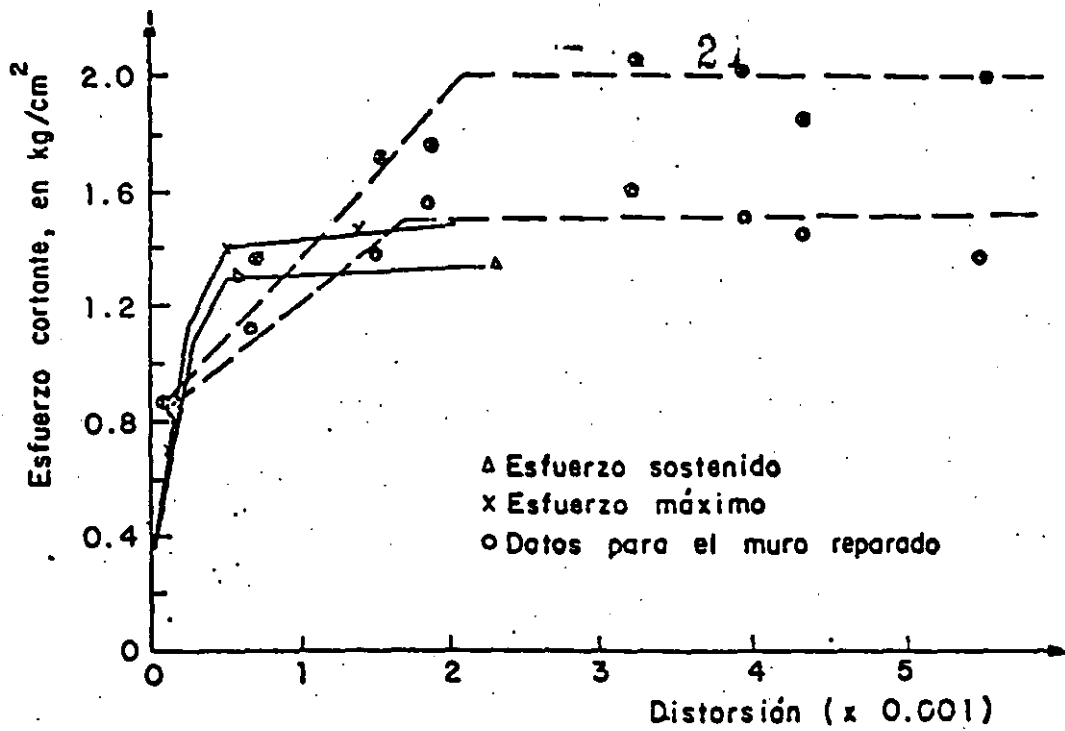


Fig 12. Envolventes de esfuerzos del muro 7

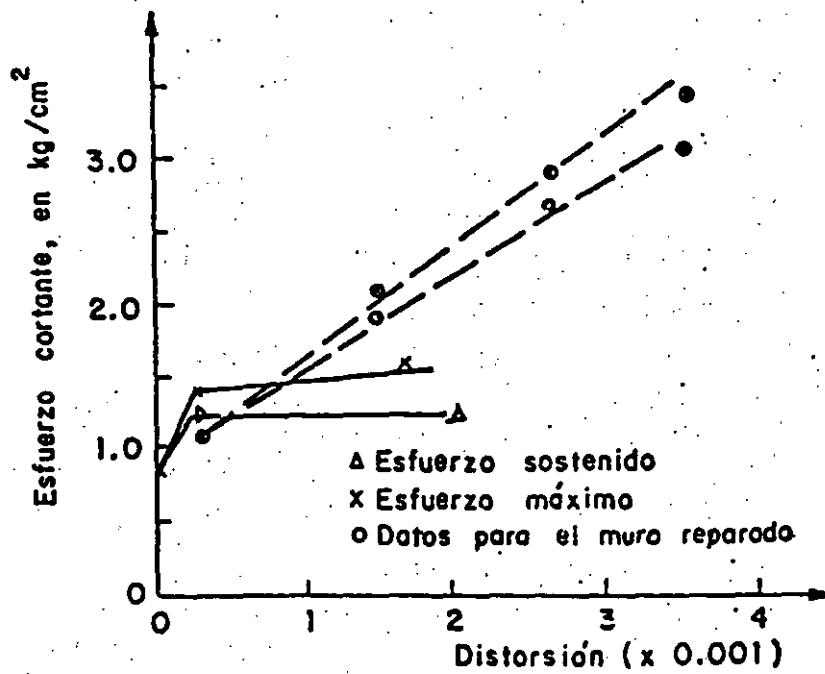


Fig 13. Envolventes de esfuerzos del muro 8.

LAS NORMAS TÉCNICAS PARA DISEÑO Y CONSTRUCCION DE  
ESTRUCTURAS DE MAMPOSTERIA DEL REGLAMENTO DE  
CONSTRUCCIONES PARA EL DISTRITO FEDERAL

Roberto Meli

BASES Y ALCANCE DE LAS MODIFICACIONES

La revisión del Reglamento y de sus Normas Técnicas tuvo como objetivos principales incorporar las lecciones derivadas del comportamiento de los edificios en los sismos de septiembre de 1985 y actualizar los distintos documentos con base en la experiencia adquirida por su aplicación en los más de diez años de su vigencia y en los nuevos conocimientos que sobre el tema se han generado en el país y en el extranjero.

Las normas de mampostería de 1976 representaron un cambio radical con respecto a la práctica de diseño anterior, por su presentación en un formato de diseño moderno y racional basado en las propiedades mecánicas del material y en los resultados experimentales así como en la evidencia del comportamiento de estructuras reales. Esas normas sirvieron de modelo para diversas recomendaciones y reglamentos de otros países sobre la materia. En la nueva versión no se consideraron necesarias modificaciones radicales al documento; solamente se procuró la reorganización de las disposiciones para hacerlas más claras, la simplificación de algunos métodos de diseño que resultaban de un grado de complejidad poco justificado en vista de las,

incertidumbres involucradas y el ajuste de algunos valores de diseño.

En términos generales la evaluación de los efectos de los sismos de 1985 indica que el comportamiento de las construcciones de mampostería fue satisfactorio. Los daños observados en muros de mampostería pueden agruparse en tres categorías:

a) Falla de muros de relleno en edificios con estructura de concreto o de acero. La destrucción de estos elementos fue notable y se derivó de una incompatibilidad entre la flexibilidad de la estructura principal y la fragilidad de los elementos de mampostería. Estos no eran generalmente considerados como elementos estructurales y por tanto no eran tomados en cuenta en el diseño. En muchos casos la falla de estos muros contribuyó a disipar la energía introducida en la estructura por el movimiento de su base y evitó el colapso de la estructura principal. Por otra parte cuando los muros de mampostería tenían una distribución y cantidad adecuada en dos direcciones ortogonales y una liga apropiada con la estructura principal, el comportamiento de los edificios fue satisfactorio.

b) Falla de viviendas de materiales débiles. Un número importante de fallas parciales o colapsos se presentaron en viviendas de adobe o de piedra de uno o dos pisos, especialmente en las colonias Guerrero y Morelos. Los daños se debieron esencialmente a las condiciones extremas de

deterioro de los materiales que constituían los muros y los techos, debido al intemperismo y a las filtraciones. No pueden considerarse estas viviendas representativas de las construcciones que se obtendrían aplicando las normas de 1976.

- c) Agrietamiento de viviendas de bloque y tabique. Numerosos fueron también los daños que se detectaron en viviendas de tabique con características similares a las requeridas por las normas recientes, sobre todo en las colonias Alamos, Obrera y Doctores. De las decenas de construcciones de este tipo que se revisaron en detalle, se concluyó que en su gran mayoría los agrietamientos existían previamente al sismo y eran debidos a hundimientos diferenciales. Los casos en que el daño era claramente atribuible al sismo mostraban una debilidad manifiesta ante cargas laterales en general por escasez de muros en una dirección. Por el contrario fueron numerosos los casos de viviendas con resistencia claramente inferior a la requerida por las normas vigentes y que tuvieron comportamiento satisfactorio.

Por otra parte los registros del movimiento del terreno obtenidos en la zona del lago indican que las aceleraciones fueron sustancialmente superiores a las previstas en el reglamento anterior, lo cual condujo a que en la nueva versión se impusiera un incremento en los coeficientes sísmicos tanto en dicha zona como en la de transición. Para reflejar la diferente



vulnerabilidad mostrada por distintos tipos de estructuras en sismos de la naturaleza de los que son típicos en la zona de lago se modificaron, además de los coeficientes sísmicos, otros factores que inciden en el nivel de resistencia que es necesario proporcionar a una estructura, como los factores de comportamiento sísmico ( $Q$ ), los factores de reducción de resistencia ( $F_R$ ) y los requisitos de calidad de materiales, de refuerzo y de construcción.

En estructuras de concreto los factores antes mencionados se modificaron de manera de obtener un incremento sustancial de la seguridad con respecto a lo prescrito en el reglamento anterior; en estructuras de acero los cambios han sido menores pero también tendientes a obtener un incremento adicional de resistencia; por el contrario en estructuras de mampostería los cambios han sido en sentido opuesto, tendientes a reducir el efecto del incremento en el coeficiente sísmico que se consideró para este material excesivo. Así se aumentó el factor de reducción para cálculo de la capacidad a fuerza cortante para los casos usuales de 0.6 a 0.7 y se permiten esfuerzos cortantes resistentes mayores cuando se coloca refuerzo horizontal en los muros. El saldo es inevitablemente hacia requisitos mayores de resistencia sísmica para las zonas de lago y de transición, lo que no afectará sensiblemente los proyectos usuales para viviendas de uno o dos pisos que cuentan con cantidades suficientes de muros en ambas direcciones para cumplir con los nuevos requisitos. Sin embargo para edificios de cuatro o más

niveles los efectos son significativos; por ejemplo diversos de los proyectos de vivienda multifamiliar de cinco pisos que se han empleado extensamente hasta la fecha deberán ser modificados para lograr el incremento en su resistencia a carga lateral que exige la nueva normativa.

En otros aspectos las modificaciones principales se encuentran en el método de diseño por cargas verticales y en la reorganización de los capítulos sobre métodos de diseño por cargas verticales y horizontales. Estos cambios no deberían redundar en diferencias significativas en los resultados del diseño. En las secciones siguientes de este artículo se comentarán los cambios a cada capítulo específico de las normas.

## CAPITULO 1. CONSIDERACIONES GENERALES

Al igual que en la versión anterior las normas cubren tanto la mampostería de piedras naturales como la de piedras artificiales (bloques, ladrillos, tabiques). Aunque lo relativo a propiedades mecánicas es de aplicación general, los procedimientos de diseño y requisitos de refuerzo sólo se refieren a muros que cumplan una función estructural; no se incluyen recomendaciones específicas para bóvedas, arcos, vigas o columnas de mampostería.

Existe un gran número de materiales y procedimientos de construcción para muros de mampostería. Solo se incluyen los

muros de piezas unidas con morteros convencionales (de arena con cemento, cal o cemento de albañilería). No se tratan los muros de piezas machimbradas o unidas con otro tipo de mezclas aglutinantes. Se dan valores numéricos específicos de las propiedades mecánicas solo para las combinaciones más usuales de piezas y morteros, para las que hay información experimental y experiencia práctica disponibles. Para otros materiales se indican las pruebas necesarias para determinar dichas propiedades. Algunas de estas pruebas están especificadas por una norma oficial; cuando este no es el caso se describe en las normas el procedimiento de ensaye y su interpretación.

El procedimiento de diseño prescrito es el general del reglamento (de estados límite) en el que se requiere que los efectos de las acciones de diseño, multiplicados por factores de carga, no excedan de la resistencia de diseño que incluye un factor de reducción de resistencia. Además de la revisión cuantitativa de la seguridad ante los distintos estados límite, se imponen requisitos geométricos y de refuerzo que están basados principalmente en la experiencia de comportamiento de estructuras reales.

## CAPITULO 2. MATERIALES PARA MAMPOSTERIA DE PIEDRAS ARTIFICIALES

### 2.1 Piezas

La distinción entre los muros construidos por piezas macizas y los de piezas huecas (fig 1) es importante en el comportamiento

sísmico. Los muros de piezas macizas tienen, ante esta sollicitación, un comportamiento menos frágil que los de piezas huecas, en las que la falla de las paredes da lugar a una pérdida brusca de capacidad. Es por ello que en las normas de diseño por sismo se especifica que para muros de piezas macizas, que cumplan con los requisitos de refuerzo impuestos para muros diafragma, confinados o con refuerzo interior, se reduzcan las fuerzas sísmicas por un factor de comportamiento  $Q = 2$ , mientras que para las piezas huecas debe usarse  $Q = 1.5$ , lo que implica fuerzas de diseño 33% mayores que en el caso anterior.

La resistencia en compresión de las piezas es el parámetro más importante del que dependen las propiedades mecánicas de los muros de mampostería. Por ello se requiere su determinación para fines de control de calidad y para deducir las otras propiedades cuando no se cuenta con determinaciones directas de las mismas.

El valor de diseño de la resistencia en compresión de las piezas se determina como un valor mínimo probable tomando en cuenta la variabilidad de la propiedad en cuestión. En función de la media y coeficiente de variación determinados en los ensayos se calcula con la fórmula especificada en esta sección, un valor de diseño que corresponde aproximadamente a una probabilidad de 2% de no ser alcanzado.

## 2.2 Morteros

La función del mortero es permitir la sobreposición de las piezas formando un conjunto que tenga una liga fuerte y duradera. Sus propiedades más importantes son: manejabilidad, resistencia a compresión y tensión y adherencia con las piezas. Estas propiedades varían según el tipo de cementante empleado, la relación entre arena y cementante y según la cantidad de agua en la mezcla, aunque esto último no se suele controlar en obra.

La resistencia a compresión es el índice de calidad del mortero generalmente aceptado y se determina según la norma NOM C61. Debe tenerse en cuenta que esta resistencia no corresponde a la del material colocado entre las piezas de un muro, donde las condiciones de confinamiento y de curado son muy diferentes de las que se tienen en el ensaye estándar.

Los proporcionamientos admitidos descartan el uso de la cal como único cementante del mortero en elementos que tengan función estructural, debido a la baja resistencia y poca durabilidad que se obtiene en los morteros a base únicamente de cal. Se limita la relación volumétrica arena-cementante a un valor entre 2.25 y 3 con el fin de poder lograr una mezcla compacta donde la pasta llene los vacíos del agregado y alcanzar así una adherencia máxima entre pieza y mortero.

En la tabla del inciso 2.2 se consignan resistencias mínimas que

debe cumplir el mortero en obra para diferentes proporcionamientos; estos valores son fácilmente alcanzados si se efectúa un control razonable en la elaboración del mortero.

### 2.3 Acero de refuerzo

Para el refuerzo que debe colocarse en castillos y dadas o como refuerzo interior en juntas o en huecos de las piezas se admiten las barras convencionales para refuerzo de concreto, pero también los alambres corrugados con esfuerzo de fluencia nominal de  $6000 \text{ kg/cm}^2$  y las mallas electrosoldadas incluyendo el refuerzo de alambre soldado tipo "escalerilla". Es recomendable emplear barras y alambres de pequeño diámetro para asegurar un recubrimiento adecuado y facilitar el correcto llenado de los espacios donde se coloca el refuerzo.

### 2.4 Mampostería

Para la resistencia de diseño en compresión del conjunto piezas-mortero se proporcionan, en la tabla de la fracción c) de esta sección, valores indicativos para los materiales más comunes sobre los cuales existen suficientes resultados experimentales. Para casos no cubiertos en esa tabla o cuando se quiera obtener una determinación más confiable, será necesario recurrir al ensayo de los materiales específicos que se vayan a emplear.

La forma más confiable para determinar la resistencia a compresión de la mampostería es mediante el ensaye de pilas formadas con las piezas y morteros que se van a emplear en la construcción (fig 2). Las otras opciones que se presentan son menos confiables y obligan, por tanto, a fijar valores más conservadores de la resistencia nominal a compresión.

Cuando se haga la determinación de la resistencia a partir del ensaye de pilas es aconsejable emplear especímenes con relación de altura a espesor del orden de cuatro; para esbelteces menores se presenta el efecto de confinamiento de los apoyos de la máquina de ensaye; para relaciones mayores de cuatro comienzan a ser importantes los efectos de esbeltez. Cuando no sea factible este tamaño, puede recurrirse al ensaye de pilas con otra esbeltez, multiplicando los resultados obtenidos por los factores que se indican en la tabla del inciso 2.4.1 de las recomendaciones. No se pretende que estos ensayos se empleen para fines de control de calidad en obra; su función es obtener un índice de resistencia de la mampostería formada con una combinación de piezas y mortero para la cual no se tenga una determinación previa. La verificación posterior en obra podrá hacerse sobre la calidad de las piezas y del mortero únicamente. La resistencia de diseño a compresión de la mampostería se determina con el criterio estadístico ya mencionado y que toma en cuenta la variabilidad de la resistencia de las pilas.

La opción presentada en la fracción b) permite determinar la

resistencia de la mampostería a compresión a partir de tablas que están en función de las propiedades de los materiales componentes. La resistencia de la mampostería depende principalmente de la resistencia de la pieza y en menor grado de la del mortero. Se ha observado de ensayos de laboratorio, que la relación entre la resistencia de la pila y de la pieza es aproximadamente lineal. El factor de proporcionalidad es, sin embargo, variable para las distintas piezas, dependiendo principalmente de su forma, del material de que están hechas y de la regularidad de sus dimensiones. Este factor de proporcionalidad es mayor para bloques que para tabiques debido a un número menor de juntas en el muro de bloque. Por ello se tienen tablas distintas para los dos tipos de piezas.

Los castillos y dalas que se colocan en la mampostería confinada contribuyen significativamente a la resistencia en compresión de los muros solo cuando la mampostería es de baja resistencia; por ello se acepta que se incremente la resistencia en compresión en una cantidad fija que es significativa para mampostería débil y poco importante para piezas de alta resistencia. Para la mampostería con refuerzo interior que cumple con los requisitos de cuantía y distribución especificados en la sección 3.4, se permite un ligero incremento de capacidad que es una fracción de la resistencia de la mampostería sin refuerzo. Cuando las cantidades de refuerzo sean sustancialmente superiores a los mínimos especificados será válido calcular la resistencia en compresión con base en las hipótesis de flexocompresión esbozadas



en el inciso 4.2... o con base en evidencia experimental y alcanzar así resistencias muy superiores a la de la mampostería sin refuerzo.

Para la resistencia en cortante se proporcionan también valores indicativos para las combinaciones más comunes de piezas y mortero. Para los casos no incluidos se especifica que la resistencia debe determinarse mediante la prueba de compresión diagonal en muretes, la que constituye un procedimiento relativamente sencillo y confiable (fig 2) que ha sido usado ampliamente en la investigación y en la práctica. Deberá tenerse cuidado en el manejo de los especímenes para no debilitar la junta entre piezas y morteros antes de la prueba.

En cuanto al módulo de elasticidad, este puede obtenerse de la curva esfuerzo-deformación medida en un ensaye de pilas en compresión. Una estimación aproximada se obtiene con los factores que multiplican a la resistencia en compresión proporcionados en el inciso 2.4.5. Estos factores se han incrementado con respecto a los que se proponían en la versión anterior de las normas, por considerar que se aplican a la resistencia de diseño la cual ya incorpora factores de seguridad importantes con respecto al valor promedio; estos factores de seguridad no se justifican en el módulo de elasticidad.

### CAPITULO 3. SISTEMAS ESTRUCTURALES A BASE DE MUROS DE MAMPOSTERIA

En este capítulo, que no existía en la versión anterior, se han agrupado los requisitos que deben cumplir los muros para ser catalogados en algunas de las cuatro categorías consideradas en las normas.

Los muros diafragma son los que se colocan para cerrar las crujiás formadas por las vigas (o losas) y columnas de marcos de concreto o acero y constituyen un diafragma que incrementa notablemente la rigidez del conjunto ante cargas laterales. Es práctica común ligar estos muros a la estructura principal sobre todo en muros de colindancia y en núcleos de escaleras y servicios. No es admisible ignorar el efecto de estos muros en el análisis por cargas laterales, ya que la gran rigidez que estos proporcionan altera significativamente la distribución de las fuerzas entre los distintos elementos resistentes. Procedimientos prácticos para tomar en cuenta los muros diafragmas en el análisis de marcos se proponen en la ref 1. La gran rigidez que estos muros proporcionan hace que pueda ser perjudicial que se encuentren colocados con una distribución asimétrica en la planta de la estructura o en cantidades radicalmente distintas de uno a otro piso.

Cuando se excede de la capacidad en tensión diagonal de los muros, estos se agrietan pero mantienen una rigidez

significativa y tienden a concentrar fuerzas cortantes importantes en los extremos de las columnas (fig 3). Por ello se requiere proporcionar en estas zonas de las columnas una resistencia a fuerza cortante igual a la capacidad total del muro, distribuida en partes iguales entre las dos columnas.

Cuando no puede lograrse una distribución uniforme de esfuerzos de relleno o cuando la estructura es muy flexible, es preferible desligar estos muros de la estructura principal, evitando su trabajo como diafragma. Deben en este caso proveerse holguras generosas y elementos de refuerzo o fijación que eviten la posibilidad de volteo del muro en dirección normal a su plano sin dejar de permitir el desplazamiento relativo del muro y la estructura. Nuevamente puede recurrirse a la ref 1 para detalles al respecto.

Los muros confinados, o sea los formados con castillos y dalas, han demostrado dar lugar a un comportamiento sísmico muy aceptable en edificios de muros de carga de varios pisos (fig 4). Estos elementos de refuerzo permiten una buena liga de los muros entre sí y con los sistemas de piso, a la vez que proporcionan un confinamiento que evita la falla frágil de los muros una vez que se agrietan por tensión diagonal. Los requisitos que se fijan para la distribución y refuerzo de castillos y dalas son los que se derivan de la práctica establecida. No se admite incremento alguno a la resistencia en cortante de la mampostería por la presencia de dalas y

castillos, solo un ligero aumento en la resistencia en compresión, según se establece en 2.4.1d). La única forma de incrementar la resistencia en cortante de la mampostería es con refuerzo horizontal colocado en la junta en la forma que se especifica en la sección 3.4.

El refuerzo de muros de piezas huecas con barras verticales colocadas en los huecos de las piezas y con barras horizontales ubicadas en las juntas entre hiladas o en piezas especiales, es un procedimiento de construcción que se está empleando con frecuencia en diversos países aun en zonas sísmicas y en edificios de cierta altura (fig 5). En México la difusión de este procedimiento, conocido como mampostería reforzada, ha sido limitada principalmente por la desconfianza de que puedan realizarse adecuadamente la colocación del refuerzo y el llenado de los huecos, operaciones que son difíciles de supervisar. Los requisitos que se especifican en las normas se derivan de lo que contienen los reglamentos de los EUA y de Nueva Zelanda; las cuantías de refuerzo horizontal y vertical especificadas son las mínimas para las cuales puede esperarse se logre evitar la falla frágil del muro y proporcionar cierta ductilidad. Nuevamente, no se pretende con estos refuerzos lograr un incremento sustancial en la resistencia de la mampostería, solamente un comportamiento más favorable. Es importante observar el requisito del párrafo final de esta sección, el cual indica que para poder emplear los valores de resistencia y factores de seguridad correspondientes a este tipo de mampostería es

en estructuras de vigas y columnas. Además la heterogeneidad de los materiales componentes, las holguras y los aplastamientos y agrietamientos locales entre mortero y piezas y entre estas y el concreto hacen que existan deformaciones inelásticas desde niveles pequeños de carga, lo que altera los resultados de los análisis elásticos. Por ello es aceptable recurrir a simplificaciones drásticas basadas en consideraciones de equilibrio y en la experiencia de comportamiento adecuado.

Para el análisis por cargas verticales es válido suponer que la junta entre muro y losa tiene suficiente capacidad de rotación para liberar al muro de los momentos que podría transmitir la losa debido a la asimetría de la carga vertical y se puede considerar que el muro está sujeto a carga vertical únicamente. Deben, sin embargo, tomarse en cuenta los momentos que no pueden ser redistribuidos por la rotación de la losa, como los que son debidos a voladizos empotrados en el muro o a una posición excéntrica del muro del piso superior y, en muros extremos, por la excentricidad de la carga que transmite la losa que se apoya directamente sobre el muro, mediante el criterio ilustrado en la fig 6.

Es muy recomendable que la estructura cumpla los requisitos indicados en los incisos a) hasta d) de esta sección, para evitar situaciones que puedan dar lugar a la aparición de momentos flexionantes importantes o a efectos de esbeltez significativos. Cuando se cumplen dichos requisitos basta

determinar las cargas verticales sobre cada tramo de muro mediante una bajada de carga convencional y tomar en cuenta los efectos de esbeltez y excentricidad mediante el factor correctivo,  $F_E$ , que se determina directamente con las reglas indicadas en 4.2.2.

El análisis por cargas laterales enfrenta también dificultades para modelar al sistema tridimensional. En la referencia 1 se encuentran recomendaciones detalladas y ejemplos al respecto. El procedimiento más idóneo es el de modelar los muros como columnas anchas con el mismo momento de inercia y área de cortante que los muros. Estas columnas están acopladas por vigas con el momento de inercia de la losa en un ancho equivalente, al cual deberá sumarse el momento de inercia de pretilos y dinteles.

Nuevamente es muy recomendable que la estructuración de las construcciones de muros de carga de mampostería cumpla con los requisitos de las fracciones I a III del inciso 4.1.3, para que sea aplicable el método simplificado de análisis sísmico según el cual se ignoran las deformaciones de flexión y se asigna a cada muro una fracción de la carga lateral que es proporcional a su área transversal, solo se requiere revisar la capacidad a cortante de los muros y se admite ignorar los efectos de torsión. Aunque la hipótesis de que pueden ignorarse las deformaciones de flexión y los momentos de volteo parece poco fundada cuando la relación altura a ancho de los muros no es muy

baja, el comportamiento observado de edificios diseñados con este método ha sido excelente y es indudable que la cantidad de área transversal de muros que se tiene en cada dirección es el parámetro decisivo en definir la capacidad sísmica de construcciones de este tipo.

#### 4.2 Resistencia a cargas verticales

La expresión para el cálculo de la carga vertical resistente es la misma de la versión anterior; según ella la capacidad es igual al área transversal del muro por el esfuerzo resistente en compresión de la mampostería; el producto es afectado por un coeficiente de reducción que toma en cuenta las diferencias en excentricidad y esbeltez entre un muro y la pila en que se basa la determinación de  $f^*$ . El resultado debe multiplicarse por el factor de resistencia que se considera igual a 0.6 para muros confinados o reforzados interiormente y a 0.3 para muros no reforzados, ya que en estos últimos se requiere de un factor de seguridad muy superior por el carácter frágil de su falla y por su sensibilidad a los efectos accidentales.

Cuando se cumplen los requisitos de regularidad y de relaciones geométricas anteriormente mencionados pueden usarse los valores directamente especificados para el factor por excentricidad y esbeltez,  $F_E$ , según se trate de muros interiores o exteriores. En caso contrario,  $F_E$  debe determinarse con una expresión que es más sencilla que la de la versión anterior y que está derivada

de la que tradicionalmente se ha aplicado para el diseño por carga vertical de muros de concreto. La expresión de la versión anterior se ha eliminado porque daba lugar a la posibilidad de resultados poco confiables cuando no se elegían adecuadamente los parámetros de momento de inercia, módulo de elasticidad y otros.

Para muros con refuerzo vertical con una cuantía significativa y colocado de manera adecuada, se pueden obtener incrementos sustanciales en la capacidad de carga vertical calculada si se aplica el criterio general de 4.2.4 que corresponde a las hipótesis comúnmente adoptadas para el diseño en flexocompresión de elementos de concreto reforzado.

#### 4.3 Resistencia a cargas laterales

Las expresiones para el cálculo de la resistencia a fuerza cortante de muros no han cambiado con respecto a la versión anterior. Para los muros diafragma el esfuerzo medio resistente es 85 por ciento del que corresponde a muretes,  $v^*$ , ya que la ~~Se:~~ distribución de esfuerzos en el muro es muy similar a la que se obtiene en los ensayos de muretes; la reducción es esencialmente por el efecto desfavorable del mayor tamaño del muro. Para los otros muros, sean confinados, reforzados interiormente o no reforzados, el esfuerzo resistente se reduce a la mitad del obtenido en muretes, por el efecto desfavorable de los esfuerzos de tensión por flexión. Sin embargo este esfuerzo resistente



21  
puede incrementarse hasta tres veces cuando se toma en cuenta el efecto favorable de la carga axial de compresión que contrarresta los esfuerzos de tensión generados por el cortante y por la flexión.

El factor de reducción,  $F_R$ , se ha incrementado de 0.6 a 0.7 tomando en cuenta que en los sismos de 1985 la mampostería mostró tener una resistencia significativamente superior a la calculada.

Las dalas y castillos que se colocan en la mampostería confinada tienen por objeto proporcionar cierta ductilidad a los muros pero no modifican significativamente la carga que produce el agrietamiento diagonal del muro y, aunque aumentan la capacidad máxima, este incremento se pierde cuando se aplican ciclos de carga alternadas. Por tanto no se admite incremento de capacidad por este concepto. De manera similar el refuerzo vertical y horizontal mínimo que se requiere colocar en los muros de mampostería con refuerzo interior no modifica sustancialmente la carga de agrietamiento diagonal, solo permite mantener esa capacidad para deformaciones algo mayores que la de agrietamiento, aun cuando estas se repiten cierto número de veces.

Los ensayos realizados en muros de distintas características (ref 2) muestran que para poder sostener cargas superiores a la de agrietamiento diagonal se requiere de refuerzo horizontal en

el muro. Es por ello que se admite, tanto en la mampostería confinada como en la reforzada interiormente, un incremento de 25% en la capacidad a cortante cuando se coloque una cuantía de refuerzo horizontal, igual al menos a la que se obtiene en la ecuación propuesta en esa sección.

Es importante recordar que las cargas laterales producen no solo fuerzas cortantes en los muros, sino también momentos flexionantes en el plano del muro los que frecuentemente requieren la colocación de refuerzo vertical en los extremos del muro. Los resultados experimentales han demostrado que el criterio general cálculo de la capacidad en flexocompresión de elementos de concreto reforzado es válido para la mampostería. Para evitar la complejidad de la determinación de la capacidad con el criterio general, se admite el uso de las expresiones expuestas en 4.3.3, las que se deducen de algunas hipótesis simplificativas sobre las condiciones de falla y de la suposición que el diagrama de interacción para flexocompresión está formado por tramos rectos entre el punto de flexión pura y el de falla balanceada, así como entre este y el de carga axial.

## CAPITULO 5. CONSTRUCCION

Los requisitos de este capítulo se basan en la práctica de México y los EUA para garantizar una calidad aceptable de los materiales y de la ejecución de la obra. No se han hecho modificaciones importantes a la versión anterior. Cabe realizar

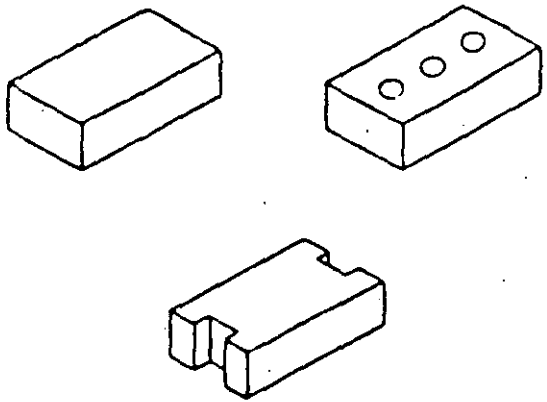
la necesidad de una supervisión continua y calificada especialmente en la construcción de muros de mampostería reforzada.

#### CAPITULO 6. MAMPOSTERIA DE PIEDRAS NATURALES

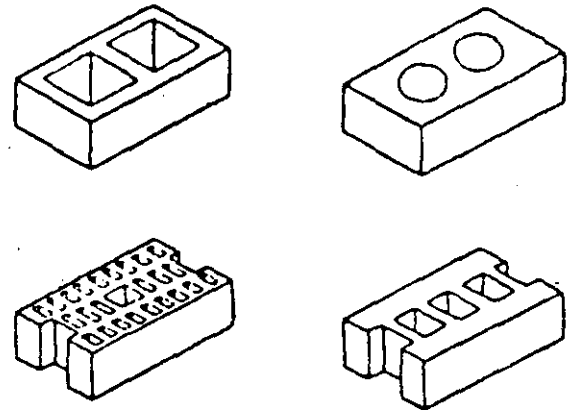
Tampoco este capítulo ha sido modificado con respecto a la versión anterior. El procedimiento de cálculo de la resistencia es congruente con el que se especifica para la mampostería de piedras artificiales. La información de que se dispone sobre las propiedades mecánicas de la mampostería es muy escasa. Los valores propuestos se suponen conservadores para la calidad de la mampostería comúnmente usada en México.

#### REFERENCIAS

1. Bazán, E. y R. Meli "Manual de Diseño Sísmico de Edificios" LIMUSA, México, 1985, 241 pp
2. Hernández, O. y R. Meli "Modalidades de refuerzo para mejorar el comportamiento sísmico de muros de mampostería" Instituto de Ingeniería, UNAM, Publ No. 382, México, D.F., dic 1976, 32 pp.

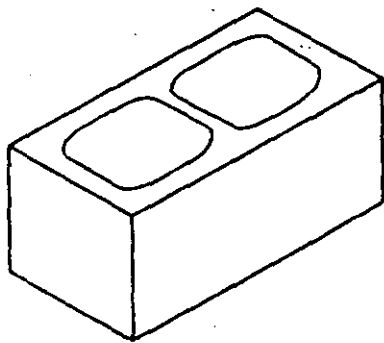


a) Ladrillos de barro macizos

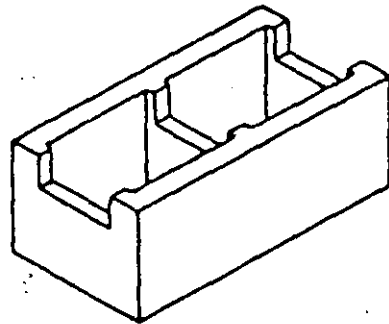


b) Ladrillos de barro huecos

*medida es variable  
s/o de huecos < 25%*



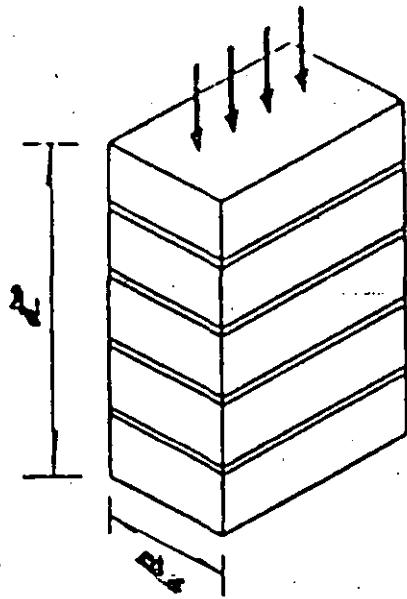
1) Pieza estándar



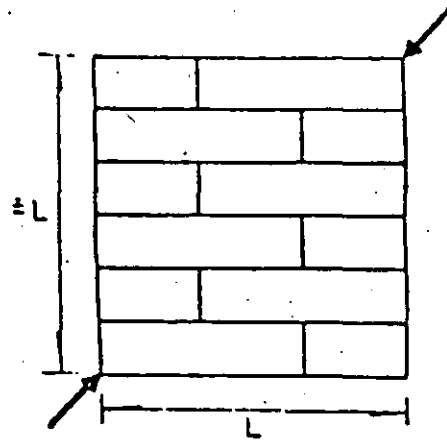
b) Pieza para refuerzo horizontal

c) Bloque de concreto

Fig 1 Tipos comunes de piezas para mampostería



a) Compresión simple



b) Compresión diagonal

25

Fig 2 Ensayes para determinación de propiedades mecánicas de la mampostería

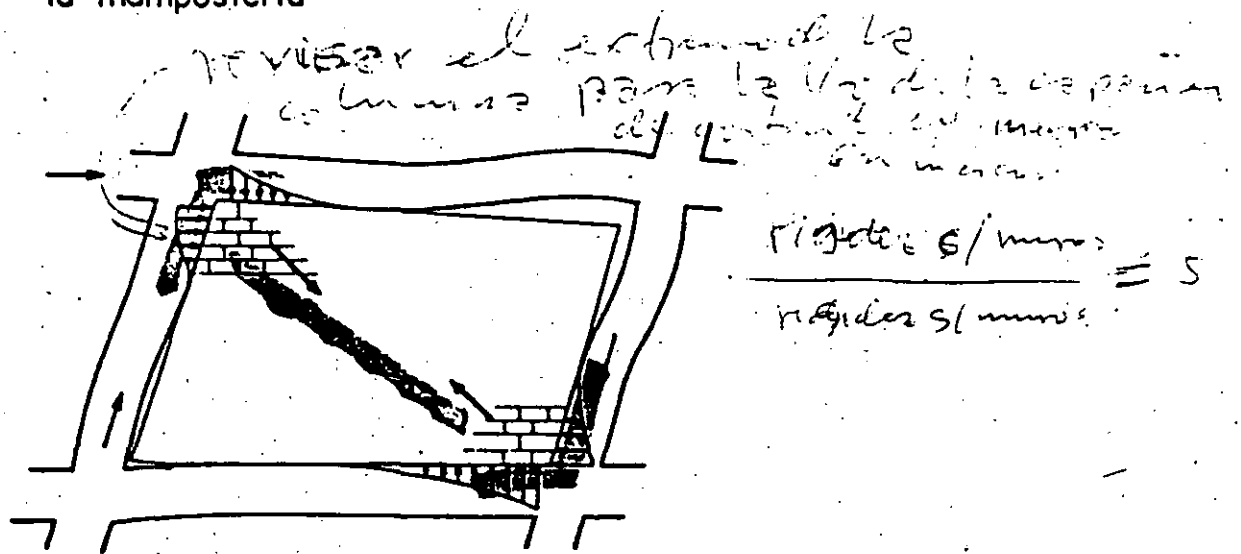
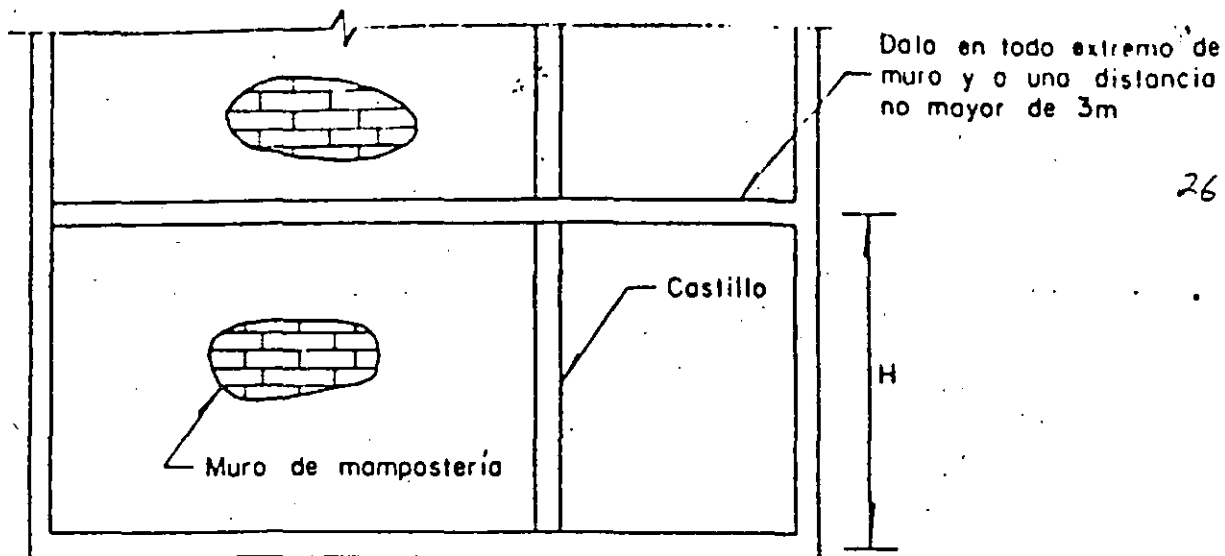
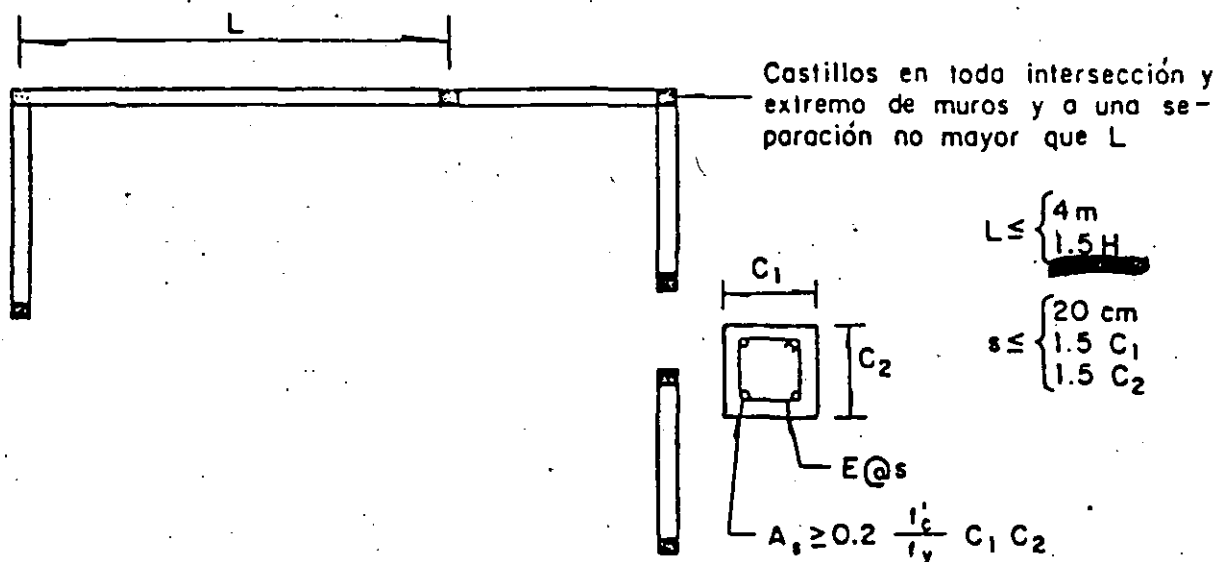


Fig 3 Interacción entre un muro-diafragma y el marco que lo rodea

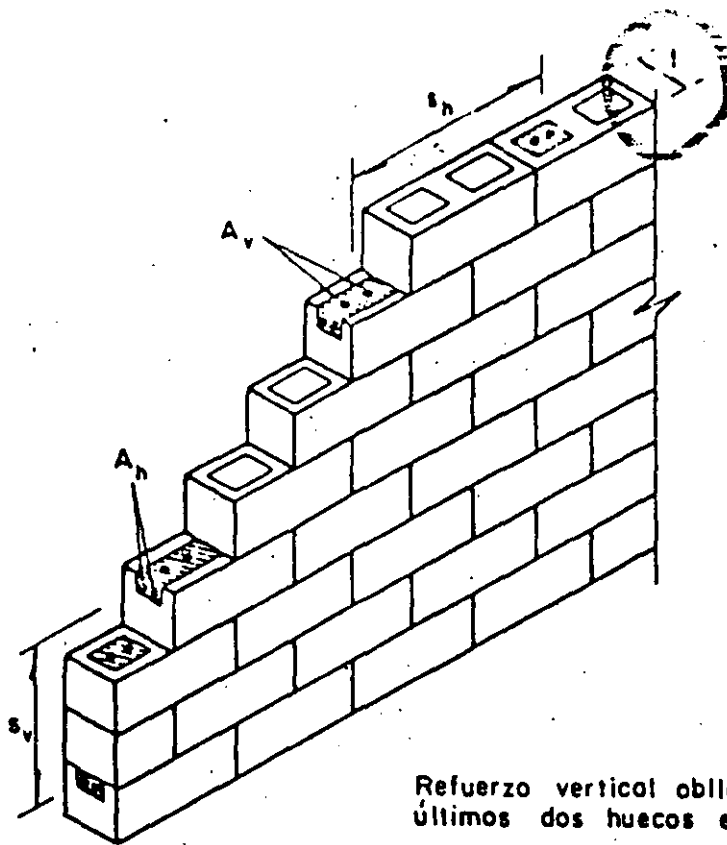


Distribución en elevación de elementos de refuerzo, verticales (castillos) y horizontales (dalas)



Distribución en planta de elementos verticales de refuerzo (castillos)

Fig 4 Características de la mampostería confinada



$$P_h = \frac{A_h}{s_v t}$$

$$P_v = \frac{A_v}{s_h t}$$

$$P_h, P_v \geq 0.0007$$

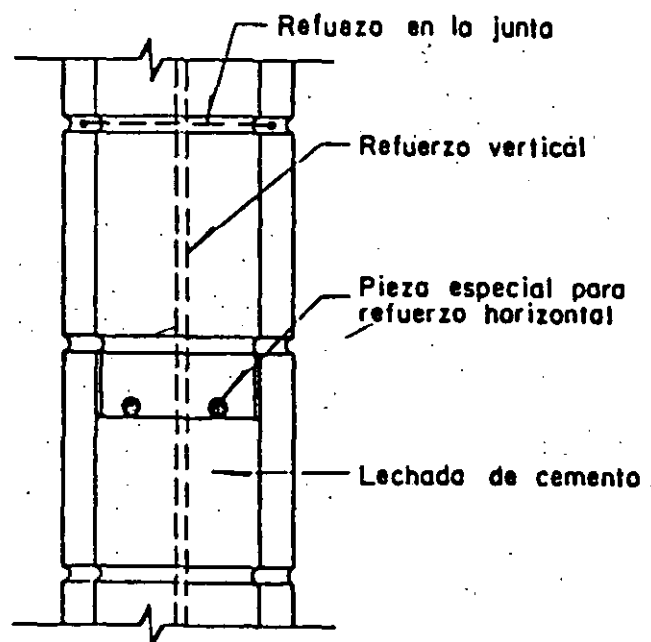
$$P_h + P_v \geq 0.0020$$

$$s_h, s_v \leq \begin{cases} 61 \\ 60 \text{ cm} \end{cases}$$

27

Refuerzo vertical obligatorio en los últimos dos huecos extremos

a) Requisitos de refuerzo



b) Modalidades de colocación del refuerzo

Fig 5 Características de la mampostería reforzada

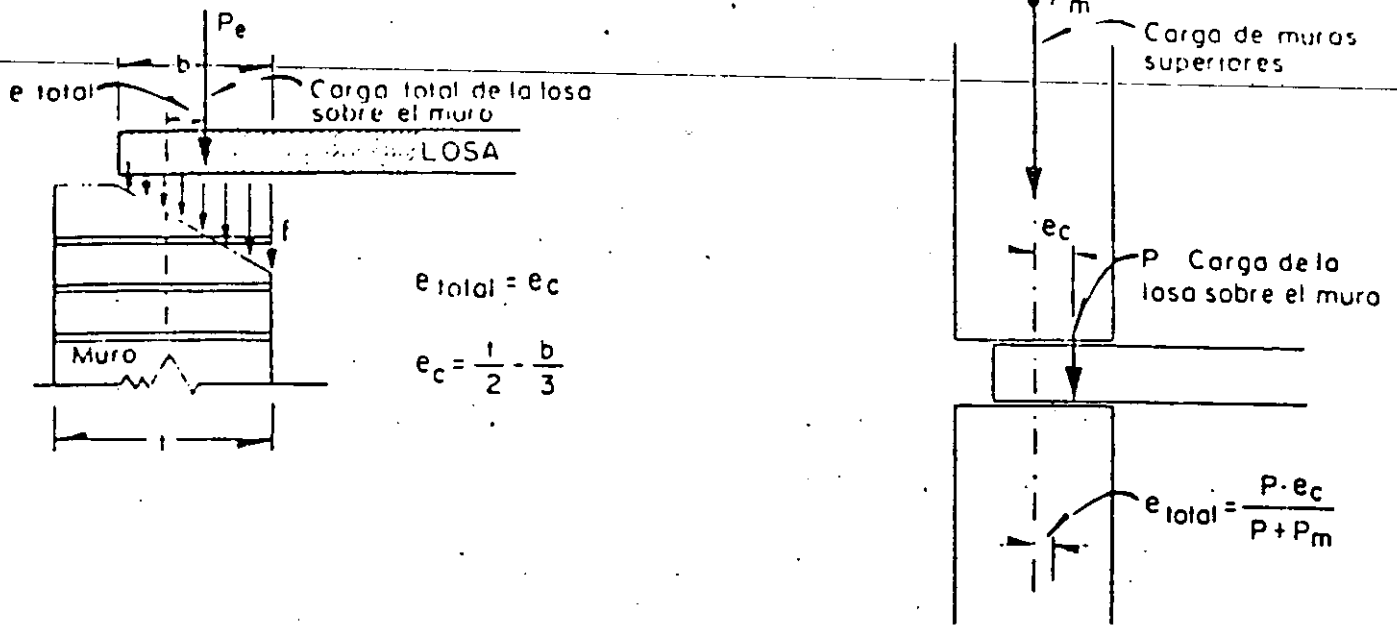


Fig 6 Excentricidad de la carga vertical transmitida a un muro





**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

*CURSOS ABIERTOS  
XVIII CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA  
MOD. III DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS  
DEL 3 AL 13 DE JULIO*

*REFUERZOS DE ESTRUCTURAS*

*ING. OSCAR DE LA TORRE*

*JULIO DE 1992.*

# REFUERZO DE ESTRUCTURAS

## A). INTRODUCCION.

LOS CONCEPTOS, ESTUDIOS Y TRABAJOS SIGUIENTES, PUEDEN CONFUNDIRSE, PERO TRATAN DE CONSEGUIR UNA RESPUESTA ACEPTABLE DE UNA ESTRUCTURA EXISTENTE ANTE LA ACCION DE FUERZAS HORIZONTALES SISMICAS.

- |      |                |                    |
|------|----------------|--------------------|
| A1). | REHABILITACION | (REHABILITATION ). |
| A2). | REPARACION     | (REPAIR ).         |
| A3). | REFORZAMIENTO  | (STRENGTHENING ).  |
| A4). | RIGIDIZACION.  | (STIFFENING )..    |

ESTOS ESTUDIOS Y TRABAJOS REPRESENTAN UN ARTE PERSONAL O DE GRUPO, QUE RAPIDAMENTE SE ESTAN CONVIRTIENDO EN UNA CIENCIA, DEBIDAMENTE APOYADA POR:

INVESTIGACION Y ENSAYES.

PROCEDIMIENTOS CONSTRUCTIVOS EFICIENTES Y REALIZABLES.

VERIFICACION DEL COMPORTAMIENTO POST SISMOS.

A MEDIDA QUE CRECE EL APOYO TECNICO Y VARIEDAD DE SOLUCIONES, ASI COMO MATERIALES NUEVOS, SE PUEDEN IDEAR MEJORES Y MAS NUMEROSAS SOLUCIONES PARA LOGRAR EL OBJETIVO FINAL QUE ES EL COMPORTAMIENTO O RESPUESTA ACEPTABLE DE LA ESTRUCTURA.

**B). OBJETIVO.**

LOGRAR UN MEJOR COMPORTAMIENTO O RESPUESTA ESTRUCTURAL, ANTE FUTURAS ACCIONES SISMICAS.

EL CONCEPTO DEL CONPORTAMIETO O RESPUESTA ESTRUCTURAL DEBE DEFINIRLO EL ESTRUCTURISTA DE COMUN ACUERDO CON EL PROPIETARIO Y/O USUARIOS, PARA ESTABLECER O DEFINIR LA SOLUCION DE REFUERZO O REHABILITACION.

LA RESPUESTA DE UNA ESTRUCTURA PUEDE MODIFICARSE, PARA CUBRIR DIFERENTES REQUERIMIENTOS, DESDE LA SEGURIDAD DE VIDAS HUMANAS, HASTA EL CONTROL RIGUROSO DE DAÑOS EN LA PROPIA ESTRUCTURA Y SUS ELEMENTOS, ACCESORIOS O CONTENIDOS.

POR LO ANTERIOR, NO EXISTE LA SOLUCION "OPTIMA" O "UNICA" QUE LOGRE EL OBJETIVO ESTABLECIDO, PERO AL CONFRONTAR DIVERSAS EXPERIENCIAS Y RESULTADOS, SE PUEDEN ESTABLECER LOS SIGUIENTES CONCEPTOS:

- B1). DIFERENTES CRITERIOS DE COMPORTAMIENTO, LLEVAN A DIFERENTES CONCEPTOS DE REFUERZO.
- B2). LAS CONDICIONES DEL SITIO PUEDEN OBLIGAR A UN TIPO DE SOLUCIONES.
- B3). PARA ESTRUCTURAS DE POCOS PISOS, PUEDEN EXISTIR DIFERENTES SOLUCIONES QUE LLEVAN A COMPORTAMIENTOS COMPARABLES.
- B4). PARA ESTRUCTURAS DE ALTURAS MAYORES (NO EDIFICIOS ALTOS) EN SUELOS POCO COMPRESIBLES, EL USO DE MUROS DE RIGIDEZ PUEDE REPRESENTAR MEJOR SOLUCION QUE CONTRAVENTEOS DIAGONALES, ESPECIALMENTE CONTRA COLAPSO.
- B5). EL USO DE ELEMENTOS DE RIGIDEZ COMO MUROS DE CONCRETO O MAMPOSTERIA ENMARCADOS, NO ES COMPATIBLE CON EL USO DE CONTRAVENTEIO DIAGONAL METALICO EN UNA MISMA ESTRUCTURA, YA QUE EL TRABAJO EFICIENTE DE ESTOS ULTIMOS OPERA DESPUES QUE UN ELEMENTO DE RIGIDEZ HA SUFRIDO DAÑO.

C). PROCEDIMIENTOS PARA REFUERZO.

C1). Sin cambiar el sistema resistente a fuerzas laterales.

- c1.1). Reforzando las losas para que su efecto como diafragma horizontal sea más eficiente, especialmente si sufrieron agrietamiento.
  
- c.1.2). Reforzando trabes, columnas y/o muros existentes, para garantizar que su sección transversal, participe con toda su área e inercia, además de que resistan los elementos mecánicos que les correspondan.
  
- c.1.3). Mejorando o rehaciendo la unión entre elementos estructurales existentes, para garantizar su trabajo de conjunto previsto en el diseño original o en la revisión.
  
- c.1.4.). Recimentando para reducir la amplificación de efectos, por volteo del conjunto o por desplazamiento excesivo de la cimentación.

C2). Cambiando el sistema resistente a fuerzas laterales.

c.2.1). Introduciendo nuevos elementos a la estructura original, como muros de rigidez, contraventeos diagonales, columnas y trabes nuevas.

c.2.2). Eliminando piezas estructurales del proyecto y construcción originales como muros, contraventeos, etc., de modo que no participen más para resistir fuerzas laterales.

c.2.3.). Recimentando, para modificar las condiciones de apoyo de columnas, muros ó contraventeos así como para reducir las características de volteo y/o desplazamiento del conjunto.

En cualquiera de los dos procedimientos, el trabajo simultaneo entre diferentes piezas debe ser garantizado, a menos que se pretenda aprovechar las características de ductilidad de algunos elementos, cuya participación completa y eficiente, sucede después de que otras piezas o elementos han sufrido daño parcial "aceptable".

En general creo que es válido generalizar, que además de evitar colapso y salvar vidas humanas debe procurarse que el comportamiento estructural garantice la continuidad de funcionamiento en operación del inmueble; este concepto no es fácil asociarlo al aprovechamiento de ductilidad como se dijo en el párrafo anterior.

En todos los casos la "integración" o "incorporación" total y completa de nuevos elementos estructurales debe garantizarse, de tal modo que la estructura reforzada reponda como si estas nuevas piezas hubieran estado presentes desde la construcción original.

Los siguientes croquis, esquemas, detalles y recomendaciones han sido propuestos por el autor, y construidos en diversas edificaciones, algunos de ellos sin respaldo suficiente de pruebas o investigaciones como pudieran desearlo otros estructuristas, y siempre serán objeto de adecuación y optimización para cada proyecto de refuerzo y ojala en el futuro cercano este arte llegue a convertirse en ciencia que aprovechemos todos.



- 9.- ESPITIA NIÑO JOSE JAIRO  
 PROFESOR  
 UNIVERSIDAD PEDAGOGICA Y TECNOLOGICA DE COLOMBIA  
 A.A. 332, SOGAMOSO- BOYACA-COLOMBIA,  
 TEL. 706 896 OFNA., 704 615 DOM.
- 10.- FRANCO MORENO OCTAVIO  
 PROFESOR  
 UNIVERSIDAD TECNOLOGICA  
 CIUDAD UNIVERSITARIA, PANAMA  
 TEL. 63 80 00 EXT.214 OFNA., 23 61 72 DOM.
- 11.- GARCIA OSCAR
- 12.- GEA SUSANA  
 PROFESORA  
 UNIVERSIDAD NACIONAL DE SALTA  
 BUENOS AIRES 177, SALTA-ARGENTINA, C.P. 4400,  
 TEL. 250 100 OFNA., 218 014 DOM.
- 13.- ISLAS HERRERA JUAN MARTIN  
 JEFE DEL DEPTO. DE APOYO TECNICO EN INGENIERIA  
 I.N.A.H.  
 CORDOBA 45, COL. ROMA, DELEG. CUAUHEMOC  
 TEL. 533 22 63 OFNA., OF. 91 595 600 52, CASA 586 78 93
- 14.- KALDMAN IRIGOYEN ERIK  
 JEFE DE GRUPO  
 ULTRA INGENIERIA  
 ANDES 98, LOMAS VERDES 4a. SECCION, NAUCALPAN, EDO.MEX.  
 C.P. 53120, TEL. 393 50 71, 393 50 04 y 393 50 61 OFNA.  
 824 45 50 DOM.
- 15.- LARA MELCHOR GONZALO  
 SUBDIRECTOR DE AREA  
 SECRETARIA DE ENERGIA MINAS E INDUSTRIA PARAESTATAL  
 INSURGENTES SUR 552, COL. ROMA SUR, DELEG. CUAUHEMOC,  
 C.P. 06769, TEL. 574 33 57 OFNA.
- 16.- LOPEZ GONGORA LUCIANO  
 CATEDRATICO  
 UNIVERSIDAD JUAREZ AUTONOMA DE TABASCO  
 CARR. CUNDUACAN-JALPA KM.1, UNIDAD C/JONTALPA, CUNDUACAN  
 TABASCO, 91-933-60300, TEL. 60342 OFNA.
- 17.- MARCHETTI SALAZAR RAUL  
 ACADEMICO JORNADA COMPLETA  
 FACULTAD DE ARQUITECTURA, UNIVERSIDAD DE CHILE  
 MARCOLETA 250, SANTIAGO, TEL. 222 65 01 OFNA, 285 43 16 DOM.
- 18.- MARTINEZ HERRERA JUAN MANUEL  
 CALCULISTA  
 PROYECTISTAS ESTRUCTURALES ACOCIADOS  
 DARWIN 118, COL. ANZURES, TEL. 514 12 01 OFNA.

- 19.- MONTEALEGRE LOPEZ ADOLFO.  
PROFESOR  
UNIVERSIDAD JUAREZ AUTONOMA DE TABASCO  
CARR. CUNDUACAN-JALPA A 1/2 KM, CUNDUACAN, TABASCO  
TEL. (91 933) 60342, 60016 Y 60300 DFNA., 13 47 98 DOM.
- 20.- NAVA MENDIVIL JOSE ALFREDO  
DIRECTOR DE PROYECTO ESTRUCTURAL  
DESPACHO DE CALCULO  
RENE ORTIZ 28-8, COL. CENTRO PLAYAS DE ROSARITO, BAJA  
CALIFORNIA NORTE, TEL. 219 10 DFNA., 215 87 DOM.
- 21.- ORDAZ GARDUÑO LAURA CATALINA  
INGENIERO CALCULISTA  
H.H.B. ASOCIADOS  
PROL. IXCATEOPAN 311-3, COL. SANTA CRUZ ATOYAC, DELEG.  
B. JUAREZ, TEL. 243 2801 DFNA., 243 2801 DOM.
- 22.- ORDOÑO PEREZ RAFAEL ANTONIO  
JEFE AREA CIVIL  
PRODUCTOS SAN CRISTOBAL, S.A.  
LA VIGA 220, JAJALPA, SN. CRISTOBAL ECATEPEC, EDO. DE  
MEXICO, TEL. 326 24 00/2253 DFNA., 670 40-52 DOM.
- 23.- ORTIZ RAMIREZ FERNANDO  
INGENIERO DE DISEÑO  
INSTITUTO COSTARRICENSE DE ELECTRICIDAD  
SABANA NORTE, SAN JOSE, COSTA RICA  
TEL. (506) 20 72 65 DFNA., (506) 40-54 34 DOM.
- 24.- POMARES CALERO HUMBERTO JOSE  
JEFE DEL DEPTO DE ESTRUCTURAS  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA  
CONTADO SUR DE VILLA PROGRESO, RUPAP, MANAGUA, NICARAGUA
- 25.- RAMIREZ CAZARES GENARO  
COORDINADOR DE SUPERVISION  
TECNOLOGIA APLICADA S.A. DE C.V.  
PLAYA REGATAS No. 501, COL. MILITAR MARTE, DELEG. IZTACALCO  
TEL. 579 47 69 DFNA., 755 04 29 DOM.
- 26.- RAMON ROURA THERAR E.  
PROFESOR ASIGNATURA  
CECYT 1 - IPN  
AV. 510, No. 1000, SAN PEDRO EL CHICO, DELEG. G.A.MADERO  
TEL. 551 12 43 DFNA., 543 62 76 DOM.
- 27.- RAQUEL QUAN ADOLFO  
PROFESOR TITULAR I, FACULTAD DE INGENIERIA  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE HONDURAS  
BLV. SUYAPA, CIUDAD UNIVERSITARIA  
TEL. 32 62 96 DOM.

28.- ROMAN VELARDE CARLOS  
DOCENTE UNIVERSITARIO  
UNIVERSIDAD NACIONAL "JORGE BASADRE"  
AV. BOLOGNESI, TALNA-PERU  
TEL. 71 34 03 DOM.

29.- SAFINA SALVADOR

30.- SEBRATO MORENO MA. DE LOS ANGELES  
INGENIERO CALCULISTA  
HERNANDEZ HIERRO Y BONILLA S.C.  
CDA. DE TAJIN No. 93-202, COL. STA. CRUZ ATOYAC, DELEG.  
B. JUAREZ, C.P. 03310, TEL. 601 04 95 OFNA., 671 07 59 DOM.

31.- SILVA GONZALEZ FRANCISCO LEONEL  
BECARIO  
INSTITUTO DE INGENIERIA  
CIUDAD UNIVERSITARIA, MEXICO, D.F.  
TEL. 688 35 24 DOM.

32.- TAPIA BECERRIL ADALBERTO  
JEFE DE GRUPO  
ULTRA INGENIERIA, S.A. DE C.V.  
ANDES No. 98, COL. LOMAS VERDES IV SECC., NAUCALPAN, EDO.  
DE MEXICO, TEL. 53120, TEL. 393 23 71, FAX 393 50 94 OFNA.  
393 50 71 DOM.

33.- TOVAR TAPIA PAULINO

34.- VICTORIA OJEDA ERNESTO  
INGENIERO CL-20A  
LUZ Y FUERZA  
VELAZQUEZ DE LEON 104-5o PISO, COL. SAN RAFAEL, DELEG.  
CUAUHTEMOC, TEL. 535 87 56 OFNA., 672 08 05 DOM.

35.- VILLALOBOS JIMENEZ JOSUE IGNACIO  
INGENIERO CALCULISTA  
ULTRA INGENIERIA, S.A. DE C.V.  
ANDES No. 98, COL. LOMAS VERDES IV SECC., NAUCALPAN, EDO.  
DE MEXICO, TEL. 53120, TEL. 393 50 61, 393 50 71 OFNA.  
549 04 54 DOM.

36.- WONG DIAZ DAVID  
JEFE DEL DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURA Y CONSTRUCCION  
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMA  
APDO. 6A-2894, EL DORADO, PANAMA, REP. DE PANAMA  
TEL. 63 8000 OFNA., 35 4152 DOM.

37.- ZAMBRANO GONZALEZ ANTONIO  
PROFESIONISTA "A"  
ICA INGENIERIA  
CALZADA LEGARIA 252, COL. PENSIL, DELEG. MIGUEL HIDALGO,  
C.P. 11430, TEL. 399 69 22 EXT. 6266 OFNA.

38.- ZAPATA MUNERA URIEL  
AUXILIAR DE INVESTIGACION  
INSTITUTO DE INGENIERIA  
CIUDAD UNIVERSITARIA, D.F., CUBICULO A 110,  
TEL. 62 23 500 OFNA., 677 39 39 DOM.