Directorio de Profesores del Curso FUNDAMENTOS DE LAS TECNICAS DE MUESTREO ESTADISTICO 1985.

1. M. en C. Edmundo Francisco Berumen Torres
Fomento Industrial SOMEX
Reforma 211-6° Piso
Col. Cuauhtémoc
México, D.F.
591 16 11 Ext. 3900

2. M. en I. Rubén Téllez Sánchez
Profesor
Subjefatura del Area de Ingeniería de Sistemas
DEPFI
UNAM
México, D.F.
550 52 15 Ext. 4482

3. M. en I. Augusto Villarreal Aranda (Coordinador)
Profesor
DEPFI
UNAM
México, D.F.
554 45 31

4. Dr. Octavio A. Rascón Chávez
Director
Facultad de Ingeniería
UNAM
México, D.F.
548 33 54

5. M. en C. Alejandro Servín Andrade
Asesor en la Jefatura de
Desarrollo de Recursos Humanos
I M S S
Toledo No. 10-1° Piso
México 6, D.F.
511 00 87

# FUNDAMENTOS DE LAS TECNICAS DE MUESTREO ESTADISTICO julio - agosto 1985

| FECHA | TEMA | HORARIO | PROFESOR |
|---|---|---|---|
| julio 22 | INTRODUCCION<br>Importancia y naturaleza del muestreo estadístico. Poblaciones y parámetros que se emplean. Actividades principales en el proceso de muestreo. Marco de referencia estadístico: conceptos fundamentales. Población a estudiar y población muestreada. Aplicaciones. | 18 a 21 h | M. en C. Edmundo Berumen T. |
| julio 24,26 29 y 31 | MUESTREO ALEATORIO SIMPLE<br>Descripción. Uso de tablas de números aleatorios. Estimación de valores medios, totales, proporciones y razones. Esperanzas y variancias de los estimadores. Estimador de variancia. Intervalos de confianza. Aplicaciones. | 18 a 21 h | Dr. Octavio A. Rascón Chávez<br>M. en I. Rubén Téllez Sánchez |
| agosto 2 y 5 | TAMAÑO DE LA MUESTRA<br>Precisión estadística. Fórmulas para determinar tamaños de muestra. Sobpoblaciones. Determinación del tamaño de la muestra para cuestionarios y subpoblaciones. Aplicaciones. | 18 a 21 h | M. en I. Augusto Villarreal A. |
| agosto 7 y 9 | MUESTREO ALEATORIO SIMPLE PARA RAZONES O COCIENTES | 18 a 21 h | M. en I. Rubén Téllez Sánchez |
| agosto 12 y 14 | MUESTREO ASTRATIFICADO<br>Descripción, estimación de valores medios, totales, porcentajes. Afijación proporcional. Tamaños de muestra. Estimación de valores medios y totales en subpoblaciones de tamaño conocido. Aplicaciones. | 18 a 21 h | M. en C. L. Alejandro Servín A. |
| agosto 16 | ESTIMADORES DE RAZON EN MUESTREO ESTRATIFICADO | 18 a 21 h | M. en C. L. Alejandro Servín A. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| agosto 19 y 21 | MUESTREO POR CONGLOMERADOS<br>Descripción, estimación de valores medios, totales y porcentajes. Construcción y tamaño de los conglomerados. Selección con probabilidad proporcional al tamaño. Submuestreo. Aplicaciones. | 18 a 21 h | M. en C. L. Alejandro Servín A. |
| agosto 23 y 26 | SUBMUESTREO | 18 a 21 h | M. en C. L. Alejandro Servín A. |
| agosto 28 y | MUESTREO SISTEMATICO<br>Método de selección. Método de estimación. Comparación con otros métodos. Aplicaciones. | 18 a 21 h | M. en C. Edmundo Berumen Torres |

# EVALUACION DEL PERSONAL DOCENTE

CURSO: FUNDAMENTOS DE LAS TECNICAS DE MUESTREO ESTADISTICO

FECHA: Del 12 de julio al 28 de agosto de 1985.

| CONFERENCISTA | DOMINIO DEL TEMA | EFICIENCIA EN EL USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES | MANTENIMIENTO DEL INTERES. (COMUNICACION CON LOS ASISTENTES, AMENIDAD, FACILIDAD DE EXPRESION) | PUNTUALIDAD | |
|---|---|---|---|---|---|
| M. EN C. EDMUNDO BERUMEN T. | | | | | |
| DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ | | | | | |
| M. EN I. RUBEN TELLEZ SANCHEZ | | | | | |
| M. EN I. AGUSTO VILLARREAL A. | | | | | |
| M. EN C. L. ALEJANDRO SERVIN A. | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

ESCALA DE EVALUACION: 1 A 10

CURSO:

FECHA:

| TEMA | ORGANIZACION Y DESARROLLO DEL TEMA | GRADO DE PROFUNDIDAD LOGRADO EN EL TEMA | GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO EN EL TEMA | UTILIDAD PRACTICA DEL TEMA | |
|---|---|---|---|---|---|
| INTRODUCCION | | | | | |
| MUESTREO ALEATORIO SIMPLE | | | | | |
| TAMAÑO DE LA MUESTRA | | | | | |
| MUESTREO ALEATORIO SIMPLE PARA ... | | | | | |
| MUESTREO ASTRATIFICADO | | | | | |
| ESTIMADORES DE RAZON EN MUESTREO | | | | | |
| MUESTREO POR CONGLOMERADOS | | | | | |
| SUBMUESTREO | | | | | |
| MUESTREO SISTEMATICO | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

ESCALA DE EVALUACION: 1 A 10

# EVALUACION DEL CURSO

③

| | CONCEPTO | EVALUACION |
|---|---|---|
| 1. | APLICACION INMEDIATA DE LOS CONCEPTOS EXPUESTOS | |
| 2. | CLARIDAD CON QUE SE EXPUSIERON LOS TEMAS | |
| 3. | GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO CON EL CURSO | |
| 4. | CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO | |
| 5. | CONTINUIDAD EN LOS TEMAS DEL CURSO | |
| 6. | CALIDAD DE LAS NOTAS DEL CURSO | |
| 7. | GRADO DE MOTIVACION LOGRADO CON EL CURSO | |

ESCALA DE EVALUACION DE 1 A 10

1. ¿Qué le pareció el ambiente en la División de Educación Continua?

| MUY AGRADABLE | AGRADABLE | DESAGRADABLE |
|---|---|---|
| | | |

2. Medio de comunicación por el que se enteró del curso:

| PERIODICO EXCELSIOR ANUNCIO TITULADO DI VISION DE EDUCACION CONTINUA | PERIODICO NOVEDADES ANUNCIO TITULADO DI VISION DE EDUCACION CONTINUA | FOLLETO DEL CURSO |
|---|---|---|
| | | |

| CARTEL MENSUAL | RADIO UNIVERSIDAD | COMUNICACION CARTA, TELEFONO, VERBAL, ETC. |
|---|---|---|
| | | |

| REVISTAS TECNICAS | FOLLETO ANUAL | CARTELERA UNAM "LOS UNIVERSITARIOS HOY" | GACETA UNAM |
|---|---|---|---|
| | | | |

3. Medio de transporte utilizado para venir al Palacio de Minería:

| AUTOMOVIL PARTICULAR | METRO | OTRO MEDIO |
|---|---|---|
| | | |

4. ¿Qué cambios haría usted en el programa para tratar de perfeccionar el curso?

_____

_____

_____

5. ¿Recomendaría el curso a otras personas?

| SI | NO |
|---|---|
| | |

6. ¿Qué cursos le gustaría que ofreciera la División de Educación Continua?

_____

_____

7. La coordinación académica fue:

| EXCELENTE | BUENA | REGULAR | MALA |
|---|---|---|---|
| | | | |

8. Si está interesado en tomar algún curso intensivo ¿Cuál es el horario más conveniente para usted?

| LUNES A VIERNES DE 9 A 13 H. Y DE 14 A 18 H. (CON COMIDAS) | LUNES A VIERNES DE 17 A 21 H. | LUNES, MIERCOLES Y VIERNES DE 18 A 21 H. | MARTES Y JUEVES DE 18 A 21 H. |
|---|---|---|---|
| | | | |

| VIERNES DE 17 A 21 H. SABADOS DE 9 A 14 H. | VIERNES DE 17 A 21 H. SABADOS DE 9 A 13 Y DE 14 a 18 H. | O T R O |
|---|---|---|
| | | |

9. ¿Qué servicios adicionales desearía que tuviese la División de Educación Continua, para los asistentes?

_____

_____

10. Otras sugerencias:

_____

_____

_____

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

FUNDAMENTOS DE LAS TECNICAS DE MUESTREO ESTADISTICO

# TAMAÑO DE LA MUESTRA

M. EN I. AUGUSTO VILLARREAL ARANDA

JULIO, 1985

# 4. TAMAÑO DE LA MUESTRA

Por: M en I Augusto Villarreal Aranda

## *INTRODUCCION*

Dentro de un plan de muestreo, cuando ya se ha establecido la característica (o características) a estimar, así como el nivel de confianza y el grado de precisión requeridos, se debe decidir cuál debe ser el tamaño de la muestra o número de elementos a seleccionar por el procedimiento de muestreo que vaya a emplearse, en forma tal que los resultados que se obtengan no sean en exceso costosos o imprecisos.

Una vez que se ha fijado el error máximo admisible, que representa la precisión mínima que se exige tengan los resultados, así como el nivel de confianza $P_K = 1 - \alpha$, se requiere conocer además, en la forma más precisa posible, la variabilidad de la población,

ya que cuanto más dispersos estén los valores de la variable asociada a ella más arriesgado será el utilizar una muestra de tamaño pequeño.

A continuación se expondrá el procedimiento para seleccionar el tamaño de muestra más adecuado en el caso del muestreo aleatorio simple o irrestrictamente aleatorio (sin remplazo). Más adelante se estudiarán los métodos para calcular el tamaño de la muestra para otros procedimientos de muestreo.

## 4.1 Tamaño de una muestra aleatoria simple (Medias)

En este caso se trata de estimar la media $\mu$ de una población con variable aleatoria asociada X mediante el empleo del promedio aritmético $\bar{X}$, obtenido de una muestra aleatoria de tamaño n con un error máximo admisible absoluto e y un nivel de confianza $P_K$. Es natural que a la probabilidad $P_K$ le corresponderá un cierto valor de desviación K, obtenido a partir de la desigualdad de Chebyshev, o bien considerando a K como el número de desviaciones estándar para una distribución normal o para una $t$ de Student.

El procedimiento para obtener el tamaño de la muestra se fundamenta en el hecho de que

$$P\left( \bar{X} - K\sigma_{\bar{X}} \leq \mu \leq \bar{X} + K\sigma_{\bar{X}} \right) = P_K = 1 - \alpha$$

o sea que con probabilidad o nivel de confianza $P_K$ se puede asegurar que el valor de $\mu$ de una población se encuentra dentro del

$(1-\alpha)$ % de los intervalos formados a partir de muestras de tamaño n, de la forma siguiente

$$(\bar{X} - K\sigma_{\bar{X}} \ , \ \bar{X} + K\sigma_{\bar{X}})$$

Lo anterior implica que los límites de confianza del $P_K$ % para estimar a $\mu$ son

$$\bar{X} \pm K\sigma_{\bar{X}}$$

es decir, que el error en la estimación del valor de $\mu$ es, en valor absoluto,

$$|\text{error en la estimación de } \mu| = K\sigma_{\bar{X}} \qquad (4.1)$$

Por lo tanto, es posible escribir

$$|\text{error máximo admisible}| = |\text{error en la estimación de } \mu| = e$$

4.1.1 Muestreo de una población finita

De la inferencia estadística, el valor de $\sigma_{\bar{X}}$, la desviación estándar de la distribución muestral de $\bar{X}$ (o error estándar de $\bar{X}$) cuando la población es finita es

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1} \frac{\sigma_X^2}{n}}$$

pudiéndose escribir entonces

$$e = K\sigma_{\bar{X}} = K \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1} \frac{\sigma_X^2}{n}}$$

siendo K la desviación correspondiente al nivel de confianza $P_k$, $N_p$ el tamaño de la población, $\sigma_x^2$ la variancia de esta última y n el tamaño de la muestra.

Puesto que se desea conocer el tamaño de la muestra, éste se puede obtener despejando de la ecuación anterior el valor de n. Para ello, se requiere elevar al cuadrado ambos miembros, es decir

$$e^2 = K^2 \frac{N_p - n}{N_p - 1} \frac{\sigma_x^2}{n}$$

$$e^2 = \frac{K^2 \sigma_x^2 N_p - K^2 \sigma_x^2 n}{(N_p - 1) n}$$

despejando a n:

$$ne^2 (N_p - 1) = K^2\sigma_x^2N_p - K^2\sigma_x^2n$$

$$ne^2N_p - ne^2 = K^2\sigma_x^2N_p - K^2\sigma_x^2n$$

$$ne^2N_p - ne^2 + K^2\sigma_x^2n = k^2\sigma_x^2N_p$$

$$n(e^2N_p - e^2 + K^2\sigma_x^2) = k^2\sigma_x^2N_p$$

$$\therefore n = \frac{K^2\sigma_x^2N_p}{e^2N_p - e^2 + K^2\sigma_x^2} \qquad (4.2)$$

La fórmula anterior permite obtener el tamaño de la muestra considerando conocidos K, e, $N_p$ y $\sigma_x^2$ . Puesto que el valor de $\sigma_x^2$ de la población usualmente se desconoce, se debe estimar previamente en forma adecuada considerando la información disponible de poblaciones semejantes a la que deberá muestrearse, o tomando una muestra preliminar suficientemente grande de dicha población.

Puesto que el tamaño de la muestra debe corresponder a un número entero positivo, se deberá asignar a n el valor entero más próximo por exceso al obtenido mediante la fórmula 4.2.

4.1.2 Muestreo de una población infinita

Cuando el muestreo se realiza a partir de una población infinita, el valor de $\sigma_{\bar{x}}$ , la desviación estándar de la distribución muestral de $\bar{X}$ , es

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

en donde $\sigma_x$ es la desviación estándar de la población y n el tamaño de la muestra.

considerando la ecuación 4.1, se puede escribir en este caso

$$|\text{error en la estimación de } \mu| = e = K\sigma_{\bar{x}} = K\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Para obtener el valor de n, se elevan al cuadrado ambos miembros de la expresión anterior, es decir,

$$e^2 = \frac{K^2 \sigma_x^2}{n}$$

Por lo cual

$$n = \frac{K^2 \sigma_x^2}{e^2}$$

Para resaltar el hecho de que en este caso el tamaño de la muestra se obtiene a partir de una población infinita, en lugar de emplear n se puede emplear $n_\infty$ , es decir

$$n_\infty = \frac{K^2 \sigma_x^2}{e^2} \qquad (4.3)$$

Al igual que en el caso de una población finita, el tamaño de la muestra dado por la ec 4.3 debe corresponder a un número natural, por lo cual se debe aproximar por exceso al valor entero más cercano.

4.1.3 Comparación entre n y $n_\infty$

Si se divide entre $N_p e^2$ el numerador y el denominador del miembro izquierdo de la ecuación 4.2, se obtiene

$$n = \frac{\frac{K^2 \sigma_x^2 N_p}{N_p e^2}}{\frac{e^2 N_p - e^2 + K^2 \sigma_x^2}{N_p e^2}} = \frac{\frac{K^2 \sigma_x^2}{e^2}}{1 - \frac{1}{N_p} + \frac{K^2 \sigma_x^2}{N_p e^2}}$$

$$n = \frac{\frac{K^2 \sigma_x^2}{e^2}}{1 + \frac{1}{N_p}\left(\frac{K^2 \sigma_x^2}{e^2} - 1\right)}$$

y, considerando el valor de $n_\infty$ dado por la ec 4.3, se obtiene finalmente

$$n = \frac{n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p}(n_\infty - 1)} \qquad (4.4)$$

Como se puede apreciar de la ec 4.4, el valor de n es menor que el de $n_\infty$, a menos que $N_p = \infty$.

4.1.4 Empleo adecuado de n y $n_\infty$

Para una población finita, se definirá la <u>fracción de muestreo</u> como

$$\text{fracción de muestreo} = fm = \frac{n_\infty}{N_p}$$

siendo $n_\infty$ el tamaño de la muestra calculada con la ec 4.3, y $N_p$ el tamaño de la población.

Al obtener el tamaño de la muestra cuando se trata de una población finita, usualmente se acostumbra emplear la fórmula 4.3, que proporciona dicho tamaño para población infinita, y considerar como bueno dicho valor siempre que se cumpla la condición

$$fm \leq 0.05$$

Lo anterior quiere decir que en la práctica se calcula el valor de $n_\infty$, y si $n_\infty / N_p$ cumple con la condición mencionada, entonces se considera que $n_\infty$ es una aproximación satisfactoria de n. Si la

condición no se cumple, entonces se emplea la ec 4.4 para obtener el valor de n.

Es claro que tomando como tamaño de la muestra a $n_\infty$ siempre se estará del lado más prudente, en el sentido de que se toma una muestra igual o mayor que la necesaria. Sin embargo, la eficiencia del diseño exige que el gasto y el tiempo de muestreo no sean superiores a los que haya que efectuar.

*Ejemplo* 4.1

Sea una población normal finita con variancia aproximadamente igual a 500. Se desea obtener una muestra aleatoria para estimar mediante $\bar{X}$ a la media poblacional $\mu_X$, con error en la estimación no mayor de 10 y nivel de confianza igual a 90%. Obténgase el valor de n considerando que el tamaño de la población es igual a

a. 1000

b. 100

*Solución*

a. Puesto que $\sigma_X^2 = 500$, $e = 10$ y $1 - \alpha = 0.90$, tratándose de una población normal se tiene que

$$K = Z_{0.45} = 1.645$$

por lo cual

$$n_\infty = \frac{K^2\sigma_X^2}{e^2} = \frac{(1.645)^2 \ (500)}{10^2}$$

$$= (2.706)\ (5) = 13.53$$

$$\therefore n_\infty = 14$$

En virtud de que en este caso

$$fm = \frac{n_\infty}{N_p} = \frac{14}{1000} = 0.014 < 0.05$$

se considera que n = 14.

b. En este caso

$$fm = \frac{14}{100} = 0.14 > 0.05$$

por lo cual se emplea la ec 4.4 para obtener el valor de n, es decir,

$$n = \frac{n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p}\ (n_\infty - 1)} = \frac{14}{1 + \frac{1}{100}\ (14 - 1)}$$

$$= \frac{14}{1 + \frac{13}{100}} = \frac{14}{1.13} = 12.389$$

$$\therefore n = 13$$

*Ejemplo* 4.2

Cierta universidad cuenta con 4726 estudiantes, y se desea conocer el rendimiento académico medio de todos ellos, en términos de una escala de calificación que va de cero a cien puntos. En estudios semejantes en otras universidades, se obtuvo que la desviación estándar de las calificaciones es aproximadamente igual a 7 puntos. Si el error en la estimación de la media de calificaciones no debe ser mayor de un punto en valor absoluto, y el nivel de confianza es igual a 99%, ¿cuál debe ser el tamaño de la muestra para realizar la estimación?

*Solución*

En este caso, aproximando la distribución muestral de $\bar{X}$ mediante la distribución normal, se debe considerar que

$$P_K = 1 - \alpha = 0.99 \quad \therefore \quad K = Z_{0.495} = 2.58$$

$$\sigma_X^2 = (7)^2 = 49 \quad ; \quad e = 1 \text{ punto}$$

Por lo tanto,

$$n_\infty = \frac{Z_C^2 \, \sigma_X^2}{e^2} = \frac{(2.58)^2 \ (49)}{(1)^2}$$

$$= \frac{(6.656) \ (49)}{1} = 326.144$$

O sea $n_\infty = 327$

Puesto que

$$fm = \frac{n_\infty}{N_p} = \frac{327}{4726} = 0.0692 > 0.05$$

se procede a calcular n, es decir,

$$n = \frac{n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p}(n_\infty - 1)} = \frac{327}{1 + \frac{1}{4726}(327 - 1)}$$

$$= \frac{327}{1 + \frac{326}{4726}} = \frac{327}{1.069} = 305.89$$

$$\therefore n = 306$$

*Ejemplo* 4.3

Una muestra aleatoria de 14 observaciones de la altura alcanzada por cierto tipo de planta arrojó los siguientes datos:

| Nº de elemento | Altura, X, en pulgadas |
|---|---|
| 1 | 52.3 |
| 2 | 48.1 |
| 3 | 55.7 |
| 4 | 56.8 |
| 5 | 50.1 |
| 6 | 49.2 |
| 7 | 47.7 |
| 8 | 50.8 |
| 9 | 57.9 |
| 10 | 52.5 |
| 11 | 54.7 |
| 12 | 49.6 |
| 13 | 53.9 |
| 14 | 56.0 |

Obténgase el tamaño de muestra necesario para asegurar, con una probabilidad igual a 0.95, que el error en la estimación de la media de alturas de esta variedad de planta no sea mayor del 2.86%.

*Solución*

Se deben obtener primero los valores de $\bar{X}$ y $S_X^2$ de la muestra, con los cuales se estimarán los de $\mu_X$ y $\sigma_X^2$ de la población. Para ello, se dispone la información en la forma siguiente :

| | $X_i$ | $X_i^2$ |
|---|---|---|
| | 52.3 | 2735.3 |
| | 48.1 | 2313.6 |
| | 55.7 | 3102.5 |
| | 56.8 | 3226.2 |
| | 50.1 | 2510.0 |
| | 49.2 | 2420.6 |
| | 47.7 | 2275.3 |
| | 50.8 | 2580.6 |
| | 57.9 | 3352.4 |
| | 52.5 | 2756.2 |
| | 54.7 | 2992.1 |
| | 49.6 | 2460.2 |
| | 53.9 | 2905.2 |
| | 56.0 | 3136.0 |
| $\Sigma$ | 735.3 | 38766.2 |

Por lo tanto,

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{14}(735.3) = 52.52 \text{ pulgadas}$$

$$S_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{14}(38766.2) - (52.52)^2$$

$$= 2769.01 - 2758.35 = 10,66 \text{ pulgadas}$$

Puesto que el error en la estimación de la media no debe ser mayor del 2.86%, y el estimador de $\mu_X$ es $\bar{X} = 52.52$, se tiene que

$$e = 52.52\ (0.0286) = 1.5 \text{ pulgadas}$$

Por otra parte, se desconoce el valor real de $\sigma_X^2$ de la población, además de que $S_X^2$, su estimador, se ha obtenido de una muestra menor de 30 elementos. Por lo tanto, la distribución teórica a la cual se debe aproximar la muestral debe ser la $t$ de Student, siendo en este caso $K = t_C$ . Sin embargo, puesto que en este caso se estima $\sigma_X^2$ mediante $S_X^2$ de la muestra, se debe tener presente que el error en la estimación de $\mu_X$ es

$$e = K\,\sigma_{\bar{X}} = t_C\,\sigma_{\bar{X}} = t_C\,\frac{S_X}{\sqrt{n-1}}$$

O sea, elevando al cuadrado

$$e^2 = t_C^2\,\frac{S_X^2}{n-1}$$

y, despejando a n,

$$n - 1 = \frac{t_C^2\,S_X^2}{e^2}$$

$$n = \frac{t_C^2\,S_X^2}{e^2} + 1$$

Por ser muestreo de población infinita, se puede escribir finalmente

$$n_\infty = \frac{t_C^2 \, S_X^2}{e^2} + 1 \qquad (4.5)$$

Ya que el valor de $t_C$ depende del número de grados de libertad de la muestra $\upsilon$, y este último depende del tamaño de la muestra (ya que $\upsilon = n - 1$), la fórmula anterior para obtener el valor de $n_\infty$ contiene dos incógnitas. Por ello, se sigue el siguiente proceso iterativo para obtener el valor de $n_\infty$ :

1. Se hace $t_{0.025} = Z_{0.475}$ , es decir

$$t_{0.025} = 1.96$$

Con dicho valor de $t_C$ se obtiene

$$n_\infty = \frac{(1.96)^2 \ (10.66)}{(1.5)^2} + 1 = 18.2 + 1 = 19.3 \Rightarrow 20$$

De la tabla de la distribución $t$, se obtiene $t_{0.025} = 2.09$, para $\upsilon = 20-1 = 19$ grados de libertad.

2. Se toma ahora $t_{0.025} = 2.09$, y se obtiene

$$n_\infty = \frac{(2.09)^2 \ (10.66)}{(1.5)^2} + 1 = 20.7 + 1 = 21.7 \Rightarrow 22$$

De la tabla de la distribución $t$, se obtiene $t_{0,025} = 2.08$, para $\upsilon = 22-1 = 21$ grados de libertad.

3. Se toma ahora $t_{0.025} = 2.08$, y se obtiene

$$n_\infty = \frac{(2.08)^2\ (10.66)}{(1.5)^2} + 1 = 20.5 + 1 = 21.5 \Rightarrow 22$$

En este paso se obtiene un valor de $n_\infty$ igual al del paso anterior, por lo que se puede considerar que el tamaño de muestra adecuado es igual a 22 plantas.

En este caso la población es infinita, por lo cual no se requiere hacer la corrección para población finita con la ec 4.4. Sin embargo, debe aclararse que es posible emplear la ec 4.5 para obtener $n_\infty$ primero y, si la población de la que se muestrea es finita, usar después la ec 4.4 para obtener el valor de n corregido.

## 4.2 Tamaño de una muestra aleatoria simple (Totales)

Una característica o parámetro poblacional de gran interés es el total, que corresponde a la suma de todos los valores $y_i$ que constituyen la población, es decir,

$$Y = \sum_{i=1}^{N_p} y_i$$

en donde Y denota al total, y $N_p$ es el número de elementos de la misma.

Si se multiplica y divide por $N_p$ el 2° miembro de la ecuación ante

rior, se obtiene

$$Y = \frac{N_p}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} y_i = N_p \mu_Y$$

Es decir, el total de una población es igual al tamaño de la misma multiplicado por la media correspondiente.

Cono estimador puntual del total de la población se puede tomar el de la estadística

$$\hat{Y} = N_p \bar{Y}$$

en donde $\bar{Y}$ es el promedio aritmético de la muestra, y $\hat{Y}$ un estimador insesgado en virtud de que

$$E\{\hat{Y}\} = E\{N_p \bar{Y}\} = N_p E\{\bar{Y}\} = N_p \mu_Y = Y$$

Por otra parte, la variancia de la distribución muestral de $\hat{Y}$ es

$$\sigma^2_{\hat{Y}} = \sigma^2_{N_p \bar{Y}} = \text{Var}\{N_p \bar{Y}\} = N_p^2 \text{ Var}\{\bar{Y}\} = N_p^2 \sigma^2_{\bar{Y}}$$

y la desviación estándar es

$$\sigma_{\hat{Y}} = \sigma_{N_p \bar{Y}} = N_p \sigma_{\bar{Y}} = N_p \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

De igual manera a como se hizo para las medias, el valor del tamaño de muestra para estimar el total con un nivel de confianza y un error absoluto dados, se obtiene en la forma siguiente

$$e = K\,\sigma_{\hat{Y}} = K\,N_p\,\frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

Elevando al cuadrado y realizando operaciones algebraicas,

$$e^2 = K^2\,N_p^2\,\frac{\sigma_Y^2}{n}\,\frac{N_p - n}{N_p - 1}$$

$$e^2 = \frac{K^2\,N_p^3\,\sigma_Y^2 - K^2\,N_p^2\,\sigma_Y^2\,n}{n(N_p - 1)}$$

$$n\left(1 + \frac{K^2\,N_p^2\,\sigma_Y^2}{e^2(N_p - 1)}\right) = \frac{K^2\,N_p^3\,\sigma_Y^2}{e^2(N_p - 1)}$$

O sea

$$n = \frac{K^2\,N_p^3\,\sigma_Y^2}{e^2(N_p - 1) + K^2\,N_p^2\,\sigma_Y^2}$$

Dividiendo el numerador y denominador de la expresión anterior entre $N_p e^2$, se obtiene

$$n = \frac{\dfrac{K^2 N_p^3\,\sigma_Y^2}{N_p e^2}}{\dfrac{e^2 N_p - e^2 + K^2 N_p^2\,\sigma_Y^2}{N_p e^2}}$$

$$= \frac{N_p^2\,\dfrac{K^2\sigma_Y^2}{e^2}}{1 - \dfrac{1}{N_p} + \dfrac{N_p^2}{N_p}\dfrac{K^2\,\sigma_Y^2}{e^2}}$$

Considerando la ec 4.3, queda finalmente

$$n = \frac{N_p^2\,n_\infty}{1 + \dfrac{1}{N_p}\,(N_p^2\,n_\infty - 1)} \qquad (4.6)$$

*Ejemplo* 4.4

Con el fin de hacer una solicitud al Gobierno, se recogieron firmas de habitantes de una ciudad en 676 hojas. Cada hoja tenía espacio suficiente para 42 firmas, pero en varias hojas se recolectó un número menor de ellas. Para obtener una estimación del total de firmas, se contó el número de firmas por hoja en una muestra aleatoria de 50 hojas, obteniéndose los datos que aparecen en la tabla siguiente:

| Número de firmas, $y_i$ | Número de hojas, $f_i$ |
|---|---|
| 42 | 23 |
| 41 | 4 |
| 36 | 1 |
| 32 | 1 |
| 29 | 1 |
| 27 | 2 |
| 23 | 1 |
| 19 | 1 |
| 16 | 2 |
| 15 | 2 |
| 14 | 1 |
| 11 | 1 |
| 10 | 1 |
| 9 | 1 |
| 7 | 1 |
| 6 | 3 |
| 5 | 2 |
| 4 | 1 |
| 3 | 1 |

Obtener el tamaño de muestra necesario para estimar el valor del total de firmas con un error absoluto igual al 5%, considerando un nivel de confianza igual a 95%.

*Solución*: Por conveniencia para realizar los cálculos, se dispone la información en la forma siguiente:

| $y_i$ | $f_i$ | $y_i^2$ | $f_i y_i$ | $f_i y_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 42 | 23 | 1764 | 966 | 40572 |
| 41 | 4 | 1681 | 164 | 6724 |
| 36 | 1 | 1296 | 36 | 1296 |
| 32 | 1 | 1024 | 32 | 1024 |
| 29 | 1 | 841 | 29 | 841 |
| 27 | 2 | 729 | 54 | 1458 |
| 23 | 1 | 529 | 23 | 529 |
| 19 | 1 | 361 | 19 | 361 |
| 16 | 2 | 256 | 32 | 512 |
| 15 | 2 | 225 | 30 | 450 |
| 14 | 1 | 196 | 14 | 196 |
| 11 | 1 | 121 | 11 | 121 |
| 10 | 1 | 100 | 10 | 100 |
| 9 | 1 | 81 | 9 | 81 |
| 7 | 1 | 49 | 7 | 49 |
| 6 | 3 | 36 | 18 | 108 |
| 5 | 2 | 25 | 10 | 50 |
| 4 | 1 | 16 | 4 | 16 |
| 3 | 1 | 9 | 3 | 9 |
| $\Sigma$ | 50 | | 1471 | 54497 |

$$\bar{Y} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{19} f_i y_i = \frac{1471}{50} = 29.42$$

$$S_Y^2 = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{19} f_i y_i^2 - (\bar{Y})^2 = \frac{54497}{50} - (29.42)^2 =$$

$$= 1089.94 - 865.44 = 224.5$$

Entonces

$$\hat{Y} = N_p \bar{Y} = 676 \times 29.42 = 19888 \text{ firmas}$$

y, puesto que el error absoluto debe ser igual al 5%, se tendría

$$e = (0.05)\ (19888) = 995$$

Por otra parte, el tamaño inicial de muestra igual a 50 permite suponer que la estimación de $\sigma_Y^2$ de la población es suficientemente buena con $S_Y^2$, y que la distribución muestral de totales puede aproximarse mediante la normal. Por lo tanto,

$$K = Z_{0.475} = 1.96$$

$$N_p = 676$$

$$\sigma_Y^2 \doteq S_Y^2 = 224.5$$

$$N_p^2 n_\infty = N_p^2 \frac{K^2 \sigma_Y^2}{e^2} = \frac{(676)^2\ (1.96)^2\ (224.5)}{(995)^2} = 397.9$$

$$n = \frac{N_p^2 n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p}(N_p^2 n_\infty - 1)} = \frac{397.9}{1 + \frac{1}{676}(397.9 - 1)}$$

$$= \frac{397.9}{1 + 0.58} = \frac{397.9}{1.58} = 251.83$$

$$\therefore \quad n = 252 \text{ hojas}$$

## 4.3 Tamaño de una muestra aleatoria simple (Proporciones)

### 4.3.1 Antecedentes

Supóngase una población binomial de tamaño $N_p$ tal que cada uno de sus elementos únicamente puede estar en una de dos clases: A o B (buenos o malos, negros o blancos, grandes o chicos, etc). La proporción de elementos de la población que están en la clase A es

$$P = \frac{A}{N_p}$$

y la proporción de elemtos que están en B es

$$Q = \frac{B}{N_p}$$

por lo cual

$$P + Q = \frac{A}{N_p} + \frac{B}{N_p} = 1 \quad ; \quad (A + B = N_p)$$

Si a todos los elementos $X_i$ de la población que están en A se les asigna el valor 1 y a los de B el 0, se obtiene

$$P = \frac{A}{N_p} = \frac{\sum_{i=1}^{N_p} X_i}{N_p} = \mu_X$$

Es decir, la proporción puede considerarse un caso particular de la media cuando los elementos de la población son unos y ceros.

La variancia es

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} (X_i - P)^2$$

o sea

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} X_i^2 - P^2$$

Sin embargo, como $X_i$ sólo puede ser igual a uno o cero, se tiene que $X_i = X_i^2$, por lo cual

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} X_i - P^2 = P - P^2 = P(1 - P) = PQ$$

En virtud de lo anterior, si se muestrea sin remplazo y con tamaño n de una población binomial finita, para estimar la proporción de elementos con cierta característica, se obtienen, considerando que la proporción se puede calcular como una media, los siguientes parámetros de la distribución muestral de proporciones

$$\mu_p = P$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}} = \sqrt{\frac{PQ}{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

Si la población es infinita, se obtiene

$$\mu_p = P$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{PQ}{n}}$$

estimándose P en ambos casos con el valor de p de la muestra, si se desconoce P de la población.

En la práctica se considera que la distribución muestral de proporciones es aproximadamente igual a la normal para tamaños de muestra mayores o iguales a 30 elementos.

### 4.3.2 Obtención del tamaño de la muestra

Aprovechando el hecho de que la proporción se puede calcular como una media simple, las ecs 4.3 y 4.4 se pueden emplear en este caso para obtener el tamaño de la muestra haciendo $\sigma_x^2 = PQ$. Entonces,

$$n_\infty = \frac{K^2\ PQ}{e^2} \qquad (4.7)$$

para muestreo de población infinita, y

$$n = \frac{n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p}(n_\infty - 1)}$$

para muestreo de población finita con tamaño $N_p$.

Usualmente se calcula primero el valor de $n_\infty$, y si la fracción de muestreo es mayor de 0.05, se calcula a continuación el valor de n.

*Ejemplo* 4.5

En una colonia con 4000 casas se desea estimar el porcentaje de inquilinos que son a la vez propietarios de su casa, con un error estándar en la estimación no mayor del 1%. Se supone, de estudios semejantes, que el porcentaje real de inquilinos-propietarios se acerca al 10%. ¿Cuántas casas se deben muestrear para que se satisfaga la condición establecida?

*Solución*

El error estándar en la estimación de P de la población es

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{PQ}{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

y no debe ser mayor en este caso del 1%. Por lo tanto, siendo $N_p = 4000$, $P = 0.1$ y $Q = 1 - P = 0.9$, se obtiene

$$0.01 = \sqrt{\frac{(0.1)\ (0.9)}{n}} \sqrt{\frac{4000 - n}{4000 - 1}}$$

Elevando al cuadrado y realizando operaciones algebraicas

$$0.0001 = \frac{0.09}{n} \frac{4000 - n}{3999}$$

$$0.0001 = \frac{360 - 0.09\ n}{3999\ n}$$

$$0.3999\ n = 360 - 0.09\ n$$

$$n(0.3999 + 0.09) = 360$$

$$n = \frac{360}{0.4899} = 734.84$$

$$\therefore\ n = 735 \text{ casas}$$

*Ejemplo* 4.6

En un estudio antropológico para estimar el porcentaje de habitantes de una isla con sangre del grupo O, se obtuvo una muestra aleatoria de 50 isleños, en la cual 22 de ellos pertenecen al grupo sanguíneo mencionado. Si en la isla habitan 3208 gentes, ¿cuál debe ser el tamaño de muestra mínimo para estimar con un error absoluto del 5% el valor real de P, suponiendo que el nivel de confianza es del 95%?

*Solución*

En este caso la proporción de la muestra es

$$p = \frac{22}{50} = 0.44$$

o sea



$$q = 1 - p = 1 - 0.44 = 0.56$$

Considerando que la muestra inicial es suficientemente grande, se aproxima mediante la distribución normal, obteniéndose

$$K = Z_{0.475} = 1.96$$

por lo cual

$$n_\infty = \frac{K^2\ PQ}{e^2} = \frac{K^2\ pq}{e^2} = \frac{(1.96)^2\ (0.44)\ (0.50)}{(0.05)^2}$$

$$= \frac{0.84515}{0.0025} = 338.06$$

$$\therefore\ n_\infty = 339$$

Como

$$fm = \frac{n_\infty}{N_p} = \frac{339}{3208} = 0.106 > 0.05$$

se corrige el valor anterior, obteniéndose finalmente

$$n = \frac{n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p}\ (n_\infty - 1)} = \frac{339}{1 + \frac{1}{3208}\ (339-1)}$$

$$= \frac{339}{1.105} = 306,787$$

$\therefore$ n = 307 habitantes

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

FUNDAMENTOS DE LAS TECNICAS DE MUESTREO ESTADISTICO

# INFERENCIA ESTADISTICA

M. EN I. AUGUSTO VILLARREAL ARANDA

JULIO, 1985

# INFERENCIA ESTADISTICA

Por: M en I Augusto Villarreal Aranda

## 1. Introducción

La parte de la estadística que proporciona las reglas para inferir ciertas características de una población a partir de muestras extraídas de ella, junto con indicaciones probabilísticas de la veracidad de tales inferencias, se llama *inferencia estadística*.

En la inferencia estadística se estudian las relaciones existentes entre una población, las muestras obtenidas de ella, y las técnicas para estimar parámetros, tales como la media y la variancia, o bien para determinar si las diferencias entre dos muestras son debidas al azar, etc.

## 2. Distribuciones muestrales

Si se consideran todas las muestras posibles de tamaño

$n$ que pueden extraerse de una población, y para cada una se calcula el valor del promedio aritmético, este seguramente variará de una muestra a otra, ya que depende de los valores de los datos que se hayan obtenido en cada muestra. Por lo tanto, el promedio aritmético es en sí una variable aleatoria, como también lo son, por la misma razón, el rango y la variancia de la muestra.

A todo elemento que es función de los valores de los datos que se tienen en una muestra se le denomina *estadística;* toda estadística es, entonces, una variable aleatoria cuya distribución de probabilidades se conoce como *distribución muestral.* Si, por ejemplo, la estadística considerada es la variancia de la muestra, su densidad de probabilidades se llama *distribución muestral de la variancia.*

En forma similar se pueden obtener las distribuciones muestrales de la desviación estándar, del rango, etc., cada una de las cuales tendrá sus propios parámetros, lo que permite hablar de la media y la desviación estándar de la variancia, etc.

## 3. Muestreo con y sin remplazo

Cuando se efectúa un muestreo en una población de tal manera que cada elemento de la misma se pueda escoger más de una vez, se dice que el muestreo es *con remplazo;* en caso contrario, el muestreo es *sin remplazo.* Si de una urna se quiere extraer una muestra de bolas de colores, se puede proceder de dos maneras: se saca al azar una bola, se anota su color y se regresa a la urna antes de obtener otra, y así sucesivamente; en este caso el muestreo es *con remplazo.* La segunda forma consiste en extraer

al azar todas las bolas que constituyen la muestra sin regresarlas a la urna, siendo entonces un muestreo *sin remplazo*.

4. Distribucion muestral del promedio aritmético

Supóngase que se extraen sin remplazo todas las muestras posibles de tamaño $n$ de una población finita de tamaño $N_p > n$. Si la media y la desviación estándar de la distribución muestral del promedio aritmético se denotan con $\mu_{\bar{X}}$ y $\sigma_{\bar{X}}$, y la media y la desviación estándar de la población con $\mu$ y $\sigma$, respectivamente, entonces es posible demostrar que se cumplen las siguientes ecuaciones

$$\mu_{\bar{X}} = \mu$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

Además, si la población es infinita (o el muestreo es con remplazo), los resultados anteriores se reducen a

$$\mu_{\bar{X}} = \mu$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

puesto que

$$\lim_{N_p \to \infty} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Para valores grandes de $n$ ($n \geq 30$) se demuestra, empleando el teorema del límite central, que la distribución muestral del promedio aritmético es aproximadamente una distribución normal con media $\mu_{\bar{X}}$ y desviación estándar $\sigma_{\bar{X}}$, independientemente de cuál sea la densidad de probabilidades de X, la variable aleatoria asociada a la población. Si esta variable tiene distribución normal, la distribución muestral del promedio aritmético también es normal, aun para valores pequeños de $n$ ($n < 30$).

*Ejemplo* 4.1

Supóngase que se tiene una población finita formada por los datos 1,2,3,4,5. Se desea conocer la media y la desviación estándar de la distribución muestral del promedio aritmético, considerando las muestras de tamaño 3 obtenidas sin remplazo.

*Primer procedimiento.*

Siendo la población finita y el muestreo sin remplazo, es posible obtener la distribución muestral correspondiente para calcular después sus parámetros, considerando que el número total de muestras distintas de tamaño 3 que pueden obtenerse a partir de una población de 5 elementos es

$$\frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

Dichas muestras son las siguientes, junto con sus promedios aritméticos correspondientes:

| | $\bar{X}_i$ | | $\bar{X}_i$ |
|---|---|---|---|
| 1, 2, 3 | 6/3 | 3, 4, 5 | 12/3 |
| 1, 2, 4 | 7/3 | 3, 4, 1 | 8/3 |
| 1, 2, 5 | 8/3 | 4, 5, 1 | 10/3 |
| 2, 3, 4 | 9/3 | 4, 5, 2 | 11/3 |
| 2, 3, 5 | 10/3 | 5, 1, 3 | 9/3 |

Para calcular la media y la desviación estándar, se emplea la siguiente tabla

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{X}_i$ | 6/3 | 7/3 | 8/3 | 8/3 | 9/3 | 9/3 | 10/3 | 10/3 | 11/3 | 12/3 |
| $\bar{X}_i^2$ | 36/9 | 49/9 | 64/9 | 64/9 | 81/9 | 81/9 | 100/9 | 100/9 | 121/9 | 144/9 |

$$\sum_{i=1}^{10} \bar{X}_i = 90/3 \qquad \sum_{i=1}^{10} \bar{X}_i^2 = 840/9$$

$$\mu_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \bar{X}_i = \frac{1}{10} \cdot \frac{90}{3} = 3$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \bar{X}_i^2 - \bar{\bar{X}}^2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{840}{9} - (3)^2 =$$

$$= 9.333 - 9.000 = 0.333 \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \sqrt{0.333} = 0.577$$

Es decir, $\mu_{\bar{X}} = 3$ y $\sigma_{\bar{X}} = 0.577$

*Segundo procedimiento.*

Por tratarse de una población finita, se verifica que

$$\mu_{\bar{X}} = \mu \qquad \text{y} \qquad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

en donde $N_p = 5$, $n = 3$ y $\mu = 3$.

El valor de $\sigma^2$ de la población es

$$\sigma^2 = \frac{1+4+9+16+25}{5} - (3)^2 = \frac{55}{5} - 9 = 11-9 = 2$$

Por lo tanto, $\sigma = \sqrt{2} = 1.4145$ y

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{1.4145}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{5 - 3}{5 - 1}} = (0.8164)(0.7071) = 0.577$$

Es decir, $\mu_{\bar{X}} = 3$ y $\sigma_{\bar{X}} = 0.577$

Comparando los resultados, se puede observar que ambos procedimientos conducen a la obtención de los mismos valores de $\mu_{\bar{X}}$ y $\sigma_{\bar{X}}$ para la distribución muestral del promedio aritmético.

*Ejemplo* 4.2

En una bodega se tienen cinco mil varillas de acero; el valor medio del peso, X, de cada varilla es de 5.02 kg, y la desviación estándar 0.3 kg. Hallar la probabilidad de que una muestra de cien varillas, escogida al azar, tenga un peso total

a. entre 496 y 500 kg

b. de más de 510 kg.

Para la distribución muestral del promedio, se tiene que $\mu_{\bar{X}} = u = 5.02$ kg y, por tratarse de una población finita,

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}} = \frac{0.30}{\sqrt{100}} \sqrt{\frac{5000 - 100}{5000 - 1}} = 0.027$$

a. El peso total de la muestra estará entre 496 y 500 kg si el peso promedio de las cien varillas se encuentra entre 4.96 y 5.00 kg. Puesto que la muestra es mayor de 30 elementos se puede considerar como aproximadamente normal a la distribución muestral, y los valores estándar correspondientes a $\bar{X} = 4.96$ y a $\bar{X} = 5.00$ se obtienen mediante la transformación

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$$

es decir,

$$Z_1 = \frac{4.96 - 5.02}{0.027} = -2.22$$

$$Z_2 = \frac{5.00 - 5.02}{0.027} = -0.74$$

En la fig 4.1 se puede apreciar que

$$P[496 \leq X \leq 500] = P[-2.22 \leq Z \leq -0.74] =$$

$$= P[-2.22 \leq Z \leq 0] - P[-0.74 \leq Z \leq 0]$$

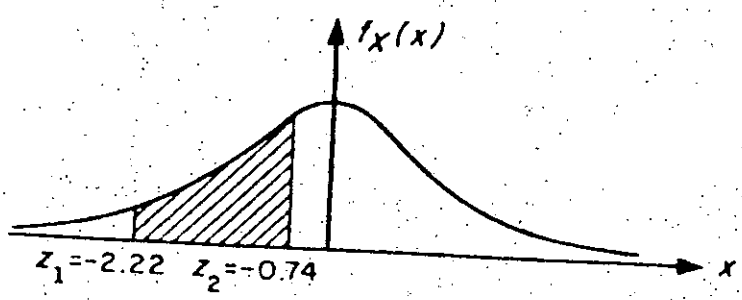



*Fig 4.1 Distribución normal correspondiente al ejemplo*

Recurriendo a la tabla de áreas bajo la curva normal estándar entre 0 y Z queda finalmente

$$P[496 \leq X \leq 500] = 0.4868 - 0.2704 = 0.2164$$

b. El peso total de la muestra excederá de 510 kg si el peso promedio de las cien varillas pasa de 5.10 kg.

Estandarizando dicho valor, queda

$$Z_3 = \frac{5.10 - 5.02}{0.027} = 2.96$$

Calculando el área bajo la curva normal a la derecha de este valor (fig 4.2), se tiene que

$$P[X \geq 510] = P[Z \geq 2.96] = P[Z > 0] - P[0 \leq Z \leq 2.96] =$$

$$= 0.5 - 0.4985 = 0.0015$$

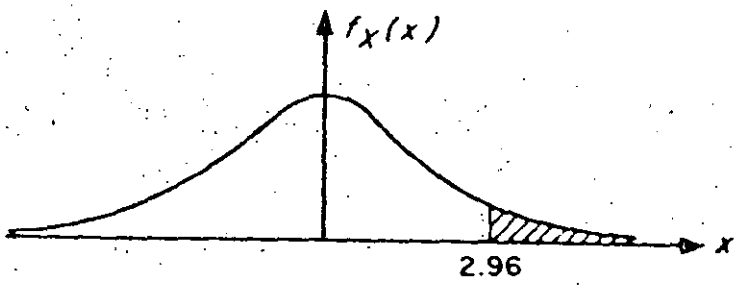



*Fig 4.2 Distribución normal correspondiente al ejemplo*

## 5. Distribución muestral de diferencias de promedios aritméticos

Con frecuencia se presenta el caso en el que se tienen datos de dos poblaciones con variables aleatorias asociadas X y Y, respectivamente, surgiendo la duda de si estas se pueden considerar como una sola, es decir, si X = Y. Para probar estadísticamente esta hipótesis (como se verá más adelante), es necesario obtener las distribuciones muestrales de la diferencia de los promedios y de las variancias de las muestras de ambas variables.

Sean $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ los promedios aritméticos obtenidos de muestras aleatorias de tamaño $n_X$ y $n_Y$ de dos poblaciones con características X y Y, respectivamente. Se puede demostrar que la distribución muestral de la diferencia de los promedios correspondientes a poblaciones infinitas con medias $\mu_X$ y $\mu_Y$ y desviaciones estándar $\sigma_X$ y $\sigma_Y$, tiene los siguientes parámetros:

$$\mu_{\bar{X} - \bar{Y}} = \mu_{\bar{X}} - \mu_{\bar{Y}} = \mu_X - \mu_Y$$

$$\sigma_{\bar{X} - \bar{Y}} = \sqrt{\sigma^2_{\bar{X}} + \sigma^2_{\bar{Y}}} = \sqrt{\frac{\sigma^2_X}{n_X} + \frac{\sigma^2_Y}{n_Y}}$$

si las muestras son independientes.

Esta distribución también es aplicable a poblaciones finitas si el muestreo es con remplazo. Para el caso de poblaciones finitas en las cuales el muestreo se hace sin remplazo, los parámetros de la distribución muestral de la diferencia de los promedios aritméticos son

$$\mu_{\bar{X}-\bar{Y}} = \mu_{\bar{X}} - \mu_{\bar{Y}} = \mu_X - \mu_Y$$

$$\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{\sigma^2_{\bar{X}} + \sigma^2_{\bar{Y}}} = \sqrt{\frac{\sigma^2_X}{n_X}\,\frac{N_X - n_X}{N_X - 1} + \frac{\sigma^2_X}{n_Y}\,\frac{N_Y - n_Y}{N_Y - 1}}$$

suponiendo que las muestras sean independientes.

*Ejemplo* 5.1

Considérese que de una población X se obtienen tres muestras posibles, cuyos correspondientes promedios aritméticos son 3, 7 y 8. De otra población Y se extraen dos muestras posibles, con promedios 2 y 4, respectivamente. Se deben obtener los parámetros de la distribución muestral de las diferencias de los promedios aritméticos.

*Primer procedimiento*

Todas las posibles diferencias de promedios aritméticos de X con los de Y serían

$$\begin{matrix} 3-2 & 7-2 & 8-2 \\ 3-4 & 7-4 & 8-4 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} 1 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 4 \end{matrix}$$

Es decir,

$$\mu_{\bar{X}-\bar{Y}} = \frac{-1+1+3+4+5+6}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\sigma^2_{\bar{X}-\bar{Y}} = \frac{(-1-3)^2 + (1-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2 + (6-3)^2}{6} =$$

$$= \frac{34}{6} = \frac{17}{3}$$

*Segundo procedimiento*

Se sabe que

$$\mu_{\bar{X}-\bar{Y}} = \mu_{\bar{X}} - \mu_{\bar{Y}} \quad ; \quad \sigma^2_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sigma^2_{\bar{X}} + \sigma^2_{\bar{Y}}$$

Por ello,

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{3+7+8}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

$$\mu_{\bar{Y}} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{(3-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\sigma^2_{\bar{Y}} = \frac{(2-3)^2 + (4-3)^2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\mu_{\bar{X}-\bar{Y}} = 6 - 3 = 3$$

$$\sigma^2_{\bar{X}-\bar{Y}} = \frac{14}{3} + 1 = \frac{17}{3}$$

Se observa que ambos procedimientos conducen a los mismos resultados.

*Ejemplo* 5.2

Las varillas de acero que fabrica una compañía A tienen un peso medio de 6.5 kg y una desviación estándar de 0.4, en tanto que las producidas por una empresa B tienen un peso medio de 6.3 kg y una desviación estándar de 0.3 kg. Si se toman muestras aleatorias de 100 varillas de cada fábrica, ¿cuál es la probabilidad de que las de la compañía A tengan un peso promedio de por lo menos

a. 0.35 kg

b. 0.10 kg

mayor que el de la compañía B?

Se puede suponer en este caso que las distribuciones muestrales involucradas son normales, en virtud de que el tamaño de ambas muestras es mayor de 30 elementos. También se puede suponer que ambas poblaciones son infinitas, y siendo $\bar{X}_A$ y $\bar{X}_B$ los pesos promedios de las muestras de las fábricas A y B, respectivamente, entonces

$$\mu_{\bar{X}_A - \bar{X}_B} = \mu_{\bar{X}_A} - \mu_{\bar{X}_B} = 6.5 - 6.3 = 0.20 \text{ kg}$$

$$\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{(0.4)^2}{100} + \frac{(0.3)^2}{100}} = 0.05 \text{ kg}$$

La variable estandarizada de la diferencia de los promedios es

$$Z = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - \mu_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}}{\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}} = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - 0.20}{0.05}$$

a. Estandarizando la diferencia de 0.35 kg se llega a

$$Z_1 = \frac{0.35 - 0.20}{0.05} = \frac{0.15}{0.05} = 3$$

La probabilidad deseada es el área bajo la curva normal a la derecha de $Z = 3$, es decir

$$P\left[\bar{X}_A \geq \bar{X}_B + 0.35\right] = P\left[Z \geq 3\right] = 0.500 - 0.4987 = 0.0013$$

b. Al estandarizar la diferencia de 0.10 kg, la variable $Z$ resulta

$$Z_2 = \frac{0.10 - 0.20}{0.05} = \frac{-0.1}{0.05} = -2$$

La probabilidad requerida es el área bajo la curva normal a la derecha de $Z = -2$, es decir

$$P\left[\bar{X}_A \geq \bar{X}_B + 0.10\right] = P\left[Z \geq -2\right] = 0.5 + 0.4772 = 0.9772$$

## 6. Teoría estadística de la estimación

En la práctica profesional a menudo resulta necesario inferir información acerca de una población mediante el uso de muestras extraídas de ella; una parte básica de dicha inferencia consiste en *estimar* los valores de los parámetros de la población (media, variancia, etc.) a partir de las estadísticas correspondientes de la muestra, como se explica a continuación.

## 7. Estimadores puntuales. Clasificación

Si un estimador de un parámetro de la población consiste en un solo valor de una estadística, se le conoce como *estimador puntual* del parámetro.

Cuando la media de la distribución muestral de una estadística es igual al parámetro que se está estimando de la población, entonces la estadística se conoce como *estimador insesgado* del parámetro; si no sucede así, entonces se denomina *estimador sesgado*. Ambos estimadores son puntuales, y sus valores correspondientes se llaman estimaciones insesgadas o sesgadas, respectivamente. Dicho de otra manera, si $S$ es una estadística cuya distribución muestral tiene media $\mu_S$, y el parámetro correspondiente de la población es $\theta$, se dice que $S$ es un estimador insesgado de $\theta$ si

$$\mu_S = \theta$$

Por otra parte, si la estadística $S_n$ de la muestra tiende a ser igual al parámetro $\theta$ de la población a medida que se

hace más grande el tamaño de la muestra, entonces la estadística recibe el nombre de *estimador consistente* del parámetro.

Empleando símbolos, si

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \theta$$

resulta que la estadística $S_n$ es un estimador consistente. Por ejemplo, el promedio aritmético es un estimador insesgado y consistente de la media, y la variancia de la muestra es un estimador sesgado y consistente de la variancia de la población.

Si las distribuciones muestrales de varias estadísticas tienen el mismo valor de la media, se dice que la estadística que cuenta con la menor variancia es un *estimador eficiente* de dicha media, en tanto que las estadísticas restantes se conocen como *estimadores ineficientes* del parámetro.

Por ejemplo, las distribuciones muestrales del promedio aritmético y de la mediana cuentan con medias que son, en ambos casos, iguales a la media de la población. Sin embargo, la variancia de la distribución muestral del promedio aritmético es menor que la de la distribución de la mediana, por lo que el promedio aritmético obtenido de una muestra aleatoria proporciona un estimador eficiente de la media de la población, en tanto que la mediana obtenida de la muestra proporciona un estimador ineficiente de dicho parámetro.

## 8. Estimación de intervalos de confianza para los parámetros de una población

La estimación de un parámetro de una población mediante un par de números entre los cuales se encuentra, con cierta probabilidad, el valor de dicho parámetro, se llama estimación del intervalo del mismo.

Sea $S$ una estadística obtenida de una muestra de tamaño $n$ para estimar el valor del parámetro $\theta$, y sea $\sigma_S$ la desviación estándar (conocida o estimada) de su distribución muestral. La probabilidad, $1 - \alpha$, de que el valor de $\theta$ se localice en el intervalo de $S - z_c \sigma_S$ a $S + z_c \sigma_S$, donde $z_c$ es una constante, se escribe en la forma

$$P[S - z_c \sigma_S \leq \theta \leq S + z_c \sigma_S] = 1 - \alpha$$

Si se fija el valor de $1 - \alpha$, se puede obtener el valor de $z_c$ necesario para que se satisfaga la ecuación anterior, con lo cual queda definido el *intervalo de confianza* del parámetro $\theta$, $(S - z_c \sigma_S, S + z_c \sigma_S)$, correspondiente al nivel de *confianza* $1 - \alpha$.

La constante $z_c$ que fija el intervalo de confianza se conoce como *valor crítico*. Si la distribución de $S$ es normal, el valor de $z_c$ correspondiente a uno de $\alpha$ se obtiene de la tabla de áreas bajo la curva normal o de la tabla 8.1 siguiente.

TABLA 8.1 VALORES DE $z_c$ PARA DISTINTOS NIVELES DE CONFIANZA

| Nivel de confianza, en porcentaje | $z_c$ |
|---|---|
| 99.73 | 3.00 |
| 99.00 | 2.58 |
| 98.00 | 2.33 |
| 96.00 | 2.05 |
| 95.45 | 2.00 |
| 95.00 | 1.96 |
| 90.00 | 1.64 |
| 80.00 | 1.28 |
| 68.27 | 1.00 |
| 50.00 | 0.674 |

*Ejemplo* 8.1

Sea el promedio aritmético $\bar{X}$ una estadística con distribución normal. Las probabilidades o niveles de confianza de que $\mu_{\bar{X}}$ (o $\mu$ de la población) se encuentre localizada entre los límites $\bar{X} \pm \sigma_{\bar{X}}$, $\bar{X} \pm 2\,\sigma_{\bar{X}}$ y $\bar{X} \pm 3\,\sigma_{\bar{X}}$ son 68.26, 95.44 y 99.73%, respectivamente, obteniéndose dichos valores de la tabla de áreas bajo la curva normal. Lo anterior significa que el intervalo $\bar{X} \pm 3\,\sigma_{\bar{X}}$ contendrá a $\mu_{\bar{X}}$ en el 99.73 por ciento de las muestras de tamaño $n$, por lo que los intervalos de confianza de 68.26, 95.44 y 99.73 por ciento para estimar a $\mu$ son $(\bar{X} - \sigma_{\bar{X}}, \bar{X} + \sigma_{\bar{X}})$ $(\bar{X} - 2\,\sigma_{\bar{X}}, \bar{X} + 2\,\sigma_{\bar{X}})$ y $(\bar{X} - 3\,\sigma_{\bar{X}}, \bar{X} + 3\,\sigma_{\bar{X}})$, lo cual se aprecia en la fig 8.1 siguiente.

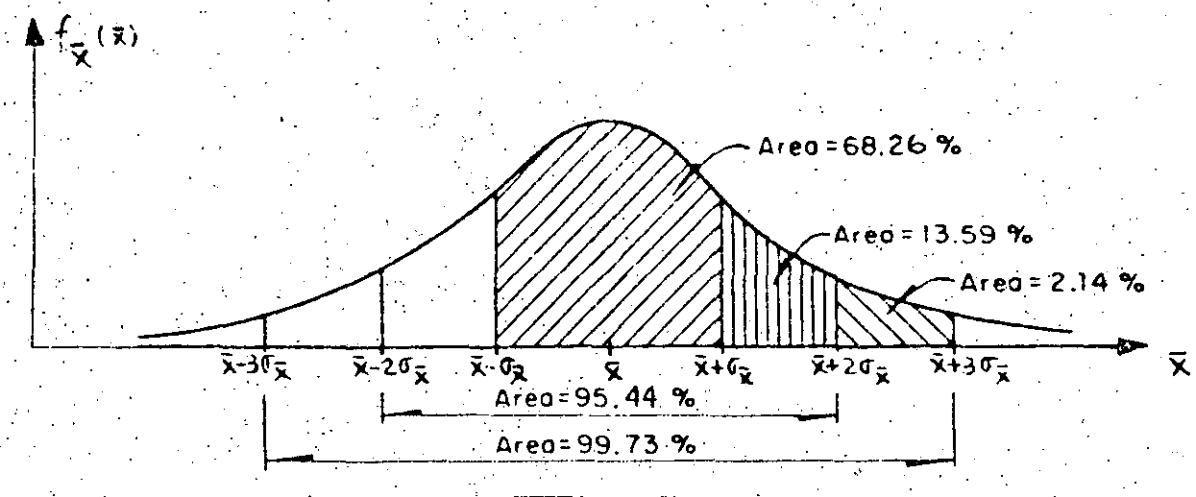



Fig 8.1

9. Estimación de intervalos de confianza para la media

Los límites de confianza para la media de una población con variable aleatoria $X$ asociada están dados por

$$\bar{X} \pm z_c \, \sigma_{\bar{X}}$$

en donde $z_c$ depende del nivel de confianza deseado. Si $\bar{X}$ tiene distribución normal, $z_c$ puede obtenerse en forma directa de la tabla 8.1. Por ejemplo, los límites de confianza de 95 y 99 por ciento para estimar la media, $\mu$, de la población son $\bar{X} \pm 1.96\sigma_{\bar{X}}$ y $\bar{X} \pm 2.58\, \sigma_{\bar{X}}$, respectivamente. Al obtener estos límites hay que usar el valor calculado de $\bar{X}$ para la muestra correspondiente.

Entonces, los límites de confianza para la media de la población quedan dados por

$$\bar{X} \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

en caso de que el muestreo se haga a partir de una población infinita o de que se efectúe con remplazo a partir de una población finita, o por

$$\bar{X} \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

si el muestreo es sin remplazo a partir de una población finita de tamaño $N_p$.

*Ejemplo* 9.1

Las mediciones de los diámetros de una muestra aleatoria de 100 tubos de albañal mostraron una media de 32 cm y una desviación estándar de 2 cm. Obténganse los límites de confianza de

a. 95 por ciento
b. 97 por ciento

para el diámetro medio de todos los tubos.

a. De la tabla 8.1, los límites de confianza del 95 por ciento son

$$\bar{X} \pm 1.96\sigma/\sqrt{n} = 32 \pm 1.96(2/\sqrt{100}) = 32 \pm 0.392 \text{ cm}$$

o sea 31.608 y 32.392, en donde se ha empleado el valor de $S_X$ para estimar el de $\sigma$ de la población, puesto que la muestra es suficientemente grande (mayor de 30 elementos). Esto significa

que con una probabilidad de 95 por ciento, el valor de $\mu_X$ se encuentra entre 31.608 y 32.392 cm.

b. Si $Z = z_c$ es tal que el área bajo la curva normal a la derecha de $z_c$ es el 1.5 por ciento del área total, entonces el área entre 0 y $z_c$ es 0.5 - 0.015 = 0.485, por lo que de la tabla de áreas bajo la curva normal se obtiene $z_c = 2.17$. Por lo tanto, los límites de confianza del 97 por ciento son:

$$\bar{X} \pm 2.17\sigma/\sqrt{n} = 32 \pm 2.17(2/\sqrt{100}) = 32 \pm 0.434 \text{ cm}$$

y el intervalo de confianza respectivo es (31.566 cm, 32.434 cm).

*Ejemplo* 9.2

Una muestra aleatoria de 50 calificaciones de cierto examen de admisión tiene un promedio aritmético de 72 puntos, con desviación estándar igual a 10. Si el examen se aplicó a 1018 personas, obtener

a. El intervalo de confianza del 95% para la media del total de calificaciones.

b. El tamaño de muestra necesario para que el error en la estimación de la media no exceda de 2 puntos, considerando el mismo nivel de confianza.

c. El nivel de confianza para el cual la media de la población sea 72 ± 1 puntos.

a. Si se estima a $\sigma$ de la población con $S_X$ de la muestra y se considera que la población es finita, los límites de confianza son, puesto que $\bar{X} = 72$, $Z_c = 1.96$, $S_X = 10$, $N_p = 1018$ y $n = 50$,

$$72 \pm 1.96 \frac{10}{\sqrt{50}} \sqrt{\frac{1018 - 50}{1018 - 1}}$$

$$72 \pm 1.96 \ (1.4142) \ (0.9755)$$

$$72 \pm 2.704$$

y el intervalo de confianza respectivo es

$$(69.296, \ 74.704)$$

b. Puesto que el error en la estimación de la media es, para población finita,

$$\text{Error en la estimación} = Z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

en este caso se tendría

$$Z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}} < 2$$

o sea, para un nivel de confianza de 95%,

$$1.96 \frac{10}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1018 - n}{1018 - 1}} < 2$$

$$\frac{19.6}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1018 - n}{1018 - 1}} < 2$$

Elevando al cuadrado la desigualdad, queda

$$\frac{384.16}{n} \quad \frac{1018 - n}{1017} < 4$$

o sea

$$87.85 < n$$

Por lo cual, se requieren al menos 88 elementos en la muestra para que el error en la estimación no exceda de 2 puntos, para $1 - \alpha = 0.95$.

c. Los límites de confianza son, en este caso

$$72 \pm Z_c \frac{10}{\sqrt{50}} \sqrt{\frac{1018 - 50}{1018 - 1}}$$

$$72 \pm Z_c \ (1.4142)(0.9755)$$

o sea

$$72 \pm 1.3795 \ Z_c$$

Puesto que se desea que el valor de la media sea 72 ± 1 puntos, se verifica que

$$1 = 1.3795 \ Z_c$$

Es decir

$$Z_c = \frac{1}{1.3795} = 0.725$$

El área bajo la curva normal estándar entre 0 y $Z_c = 0.725$ es, por interpolación lineal, igual a 0.2657. Por lo tanto, el nivel de confianza es igual al doble del área anterior, es decir, $2(0.2657) = 0.5314$ (o 53.14%), tal como se muestra en la *fig* 9.1.

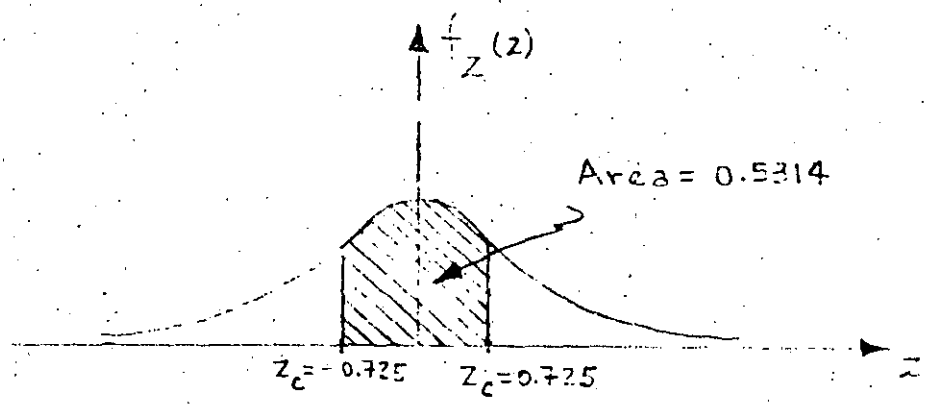



*Fig* 9.1

## 10. Intervalos de confianza para diferencias de medias

Los límites de confianza para la diferencia de las medias cuando las poblaciones X y Y son infinitas, o cuando el muestreo se realiza con remplazo de poblaciones finitas, se encuentran dados por

$$\bar{X} - \bar{Y} \pm Z_c\, \sigma_{\bar{X} - \bar{Y}} = \bar{X} - \bar{Y} \pm z_c \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}$$

en donde $\bar{X}$, $n_X$ y $\bar{Y}$, $n_Y$ son los respectivos promedios aritméticos y tamaños de las dos muestras extraídas de las poblaciones, y $\sigma_X$ y $\sigma_Y$ las desviaciones estándar de estas últimas.

En el caso de que las poblaciones X y Y sean finitas y el muestreo sin remplazo, los límites de confianza son

$$\bar{X} - \bar{Y} \pm Z_c \sigma_{\bar{X}-\bar{Y}} = \bar{X} - \bar{Y} \pm Z_c \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} \frac{N_X - n_X}{N_X - 1} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y} \frac{N_Y - n_Y}{N_Y - 1}}$$

en donde $N_X$ y $N_Y$ son los tamaños de las poblaciones X y Y, respectivamente.

Las dos ecuaciones anteriores son válidas únicamente si las muestras aleatorias seleccionadas son independientes.

*Ejemplo* 10.1

Para el ejemplo de las varillas tratado anteriormente (5.2), encontrar el intervalo de confianza del 95.45% para las diferencias de las medias de las poblaciones.

Siendo $\bar{X}_A = \mu_A = 6.5$ kg, $\sigma_A = 0.4$ kg, $\bar{X}_B = \mu_B = 6.3$ kg, $\sigma_B = 0.3$ kg y $n_A = n_B = 100$, los límites de confianza para la diferencia de las medias son, empleando la tabla 8.1

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B \pm z_c \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} = 6.5 - 6.3 \pm 2 \sqrt{\frac{(0.4)^2}{100} + \frac{(0.3)^2}{100}} =$$

$$= 0.2 \pm 0.1$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza respectivo es (0.1, 0.3).

*Ejemplo* 10.2

Se tienen en una bodega 3000 focos de marca X, y 5000 de marca Y. Se extrae una muestra aleatoria de 150 focos de la marca X, y se obtiene una duración promedio de 1400 horas, con desviación estándar igual a 120 horas. Otra muestra aleatoria de 200 focos de la marca Y tuvo una duración promedio de 1200 horas, con desviación estándar igual a 80 horas. Obtener intervalos de confianza de

a. 95%

b. 99%

para la diferencia de los tiempos medios de duración de los focos de ambas marcas.

a. Puesto que se trata de poblaciones finitas y $\bar{X} = 1400$ h, $S_X = 120$ h, $N_X = 3000$, $n_X = 150$, $\bar{Y} = 1200$ h, $S_Y = 80$ h, $N_Y = 5000$ y $n_Y = 200$, se obtiene, estimando a $\sigma_X$ y $\sigma_Y$ con $S_X$ y $S_Y$, respectivamente

$$1400 - 1200 \pm 1.96 \sqrt{\frac{(120)^2}{150}\,\frac{3000 - 150}{3000 - 1} + \frac{(80)^2}{200}\,\frac{5000 - 200}{5000 - 1}}$$

$$200 \pm 1.96\ (11.04)$$

$$200 \pm 21.638$$

o sea, (178.362, 221.638), puesto que de la tabla 8.1, para un nivel de confianza de 95%, $Z_c = 1.96$.

b. En este caso, al emplear la tabla 8.1 se obtiene

$Z_c = 2.58$ para un nivel de confianza de 99%, por lo cual los límites son

$$1400 - 1200 \pm 2.58 \sqrt{\frac{(120)^2}{150}\frac{3000 - 150}{3000 - 1} + \frac{(80)^2}{200}\frac{5000 - 2000}{5000 - 1}}$$

$$200 \pm 2.58\ (11.04)$$

$$200 \pm 28.483$$

y el intervalo de confianza es

$$(171.517,\ 228.483)$$

11. Pruebas de hipótesis

Supóngase que una empresa armadora de automóviles está en la disyuntiva de emplear una nueva marca de bujías en sus unidades o la que regularmente utiliza, y que su departamento de control de calidad debe decidir, con base en la información de las muestras de las dos marcas distintas. Las decisiones de este tipo, es decir, que se basan en estudios estadísticos, reciben el nombre de *decisiones estadísticas*, y a los procedimientos que permiten decidir si se acepta o rechaza una hipótesis se les llama *pruebas de hipótesis*, *pruebas de significancia* o *reglas de decisión*.

Al tomar decisiones estadísticas, es necesario postular las diversas alternativas o cursos de acción que pueden adoptarse.

En el caso particular de una *prueba de hipótesis* solamente se tienen dos cursos de acción posibles, los que se denotarán como $H_0$ y $H_1$. A la acción $H_0$ se le llama *hipótesis nula*, y a la $H_1$, *hipótesis alternativa*. Por ejemplo, si la hipótesis nula establece que $\mu_1 = \mu_2$, la hipótesis alternativa puede ser una de las siguientes:

$$\mu_1 > \mu_2, \mu_1 < \mu_2 \text{ o } \mu_1 \neq \mu_2$$

Al realizar una prueba de hipótesis, se prueba siempre la verdad de la hipótesis nula $H_0$, aun cuando de antemano se desee rechazarla.

## 12. Errores de los tipos I y II. Nivel de significancia

En muchas ocasiones se presenta el caso de que se rechaza una hipótesis nula cuando en realidad debería ser aceptada; cuando esto sucede se dice que se ha cometido un *error de tipo I*. En otras ocasiones se acepta una hipótesis nula siendo en realidad falsa; en este caso se dice que se ha cometido un *error de tipo II*.

Al probar una hipótesis nula, a la máxima probabilidad con la que se está dispuesto a cometer un error del tipo I se le llama *nivel de significancia*, $\alpha$, de la prueba, el cual dentro de la práctica se acostumbra establecer de 5 por ciento (0.05) o 10 por ciento (0.1). El complemento del nivel de significancia, $1 - \alpha$, se conoce como *nivel de confianza*.

Si, por ejemplo, al realizar una prueba de hipótesis se escoge un nivel de significancia de 10 por ciento, significa que existen 10 posibilidades en 100 de que se rechace ésta cuando debería ser aceptada; es decir, que se rechaza a un nivel de significancia del 10 por ciento, y que la probabilidad de que la decisión haya sido errónea es de 0.1.

13. Comportamiento de los errores tipos I y II

Supóngase que se trata de probar la hipótesis nula de que la media, $\mu_S$, de la distribución muestral de la estadística S es $\mu_1$, en contra de la hipótesis alternativa que establece que $\mu_S = \mu_2$, donde $\mu_2 > \mu_1$, es decir

$$H_0 : \mu_S = \mu_1$$

$$H_1 : \mu_S = \mu_2$$

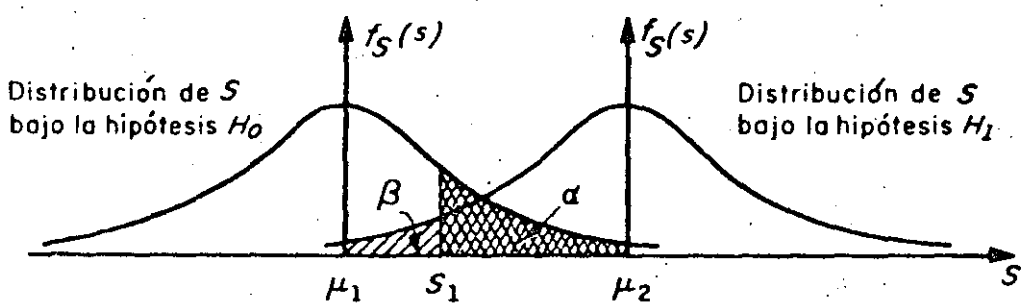
En la fig 13.1 se muestra en forma gráfica la relación entre los errores tipos I y II en el caso en el que la regla de decisión para aceptar o rechazar $H_0$ es la siguiente:

> *Si el valor de la estadística S obtenido de una muestra excede de cierto valor crítico $S_1$, rechácese $H_0$; en caso contrario, acéptese.*

Es evidente que si $H_0$ es verdadera, entonces $\alpha$ (área con rayado doble) es la probabilidad de que $S > S_1$, o sea la de rechazar a $H_0$ siendo verdadera (error tipo I). Por otro lado, si $H_1$ es verdadera, entonces $\beta$ (área con rayado sencillo) es la probabilidad

de que $S < S_1$, o sea la de aceptar $H_0$ siendo falsa (error tipo II).

Obsérvese que si se aumenta el valor de $S_1$ se reduce la probabilidad $\alpha$, pero se incrementa la $\beta$; lo contrario sucede si se disminuye el valor de $S_1$.




$$P[S>S_1] = \alpha \text{ (error tipo I)}$$
$$P[S<S_1] = \beta \text{ (error tipo II)}$$

*Fig 13.1 Probabilidades de los errores tipos I y II en pruebas de hipótesis.*

En realidad, la única forma posible en la cual se pueden minimizar simultáneamente los errores de tipos I y II es aumentando el tamaño de la muestra, para hacer más "picudas" las distribuciones muestrales de la estadística bajo las hipótesis $H_0$ y $H_1$.

Al observar la fig 13.2 siguiente, es posible concluir

que el tamaño de los errores I y II es menor para un tamaño de muestra igual a 100 que para un tamaño igual a 50, considerando la misma regla de decisión anterior.

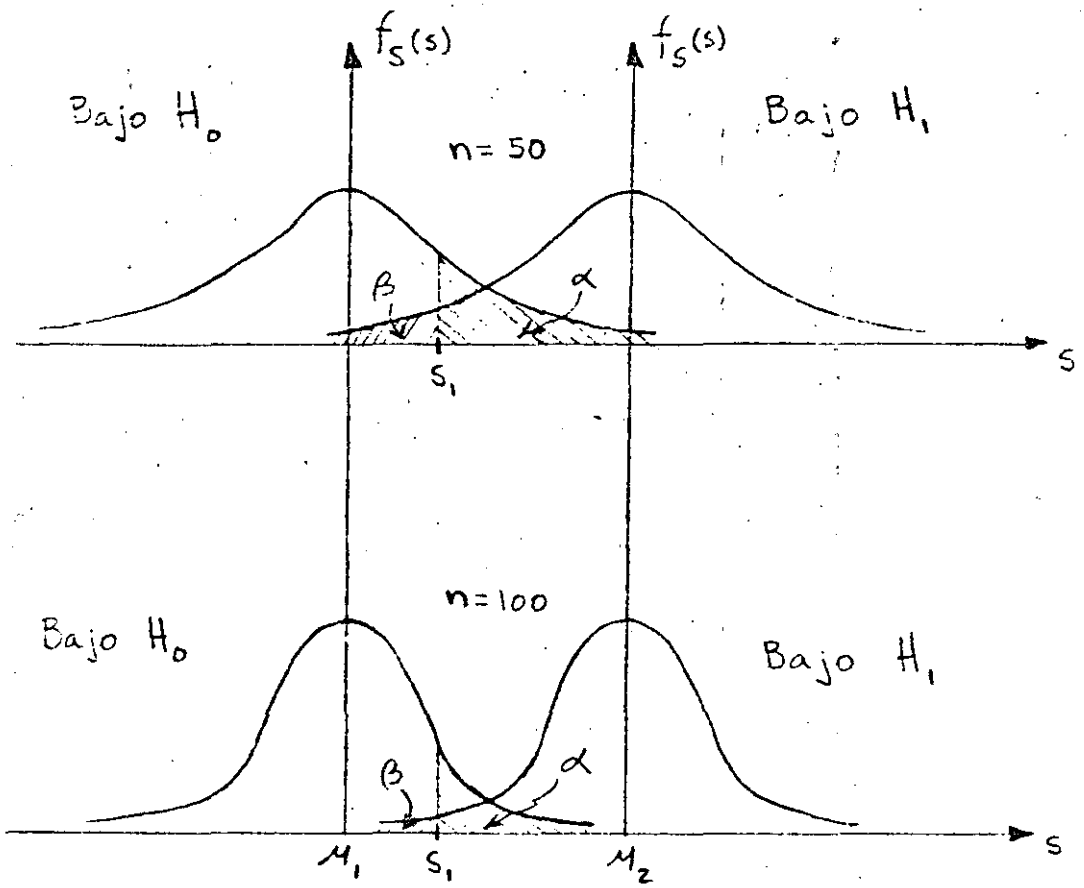



Fig 13.2

Sin embargo, esta técnica de reducción simultánea de ámbos tipos de errores no siempre puede ponerse en práctica, debido a razones de costo, tiempo, etc.

14. Regiones críticas, de rechazo ó de significancia. Regiones de aceptación.

Cuando una hipótesis nula no se acepta se dice que se *rechaza a un nivel de significancia del α por ciento*, o que el valor estandarizado de la estadística involucrada es *significativo a un nivel de significancia α*.

Al conjunto de los valores de la estadística en el que se rechaza la hipótesis nula se le denomina *región crítica, de rechazo, o de significancia*. Por el contrario, al conjunto de los valores de la estadística en que se acepta la hipótesis, se le llama *región de aceptación*.

Considérese que la distribución muestral de la estadística $S$ es normal con desviación estándar $\sigma_S$, que la variable $Z$ resulta de estandarizar a $S$, que la hipótesis nula, $H_0$, es que la media de $S$ vale $\mu_S$, y que la hipótesis alternativa $H_1$ es que dicha media es diferente de $\mu_S$, es decir, que

$$Z = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S}$$

$H_0$: media de la distribución muestral de $S = \mu_S$

$H_1$: media de la distribución muestral de $S \neq \mu_S$

Si se adopta la regla de decisión de aceptar la hipótesis $H_0$, si el valor de $Z$ caé dentro del intervalo central que encierra al 99 por ciento del área de la distribución de probabilidades, entonces $H_0$ se aceptará en el caso en que

$$-2.58 \leq Z \leq 2.58$$

empleando la tabla de áreas bajo la curva normal estándar. Pero si el valor estandarizado de la estadística se encuentra fuera de dicho intervalo, se concluye que el evento puede ocurrir con probabilidad de 0.01 si la hipótesis $H_0$ es verdadera (área rayada total de la fig 14.1). En tal caso, el valor Z de la variable estándar difiere *significativamente* del que se podría esperar de acuerdo con la hipótesis nula, lo cual inclina a rechazarla a un nivel de confianza del 99 por ciento.

De lo anterior de deduce que el área total rayada de la fig 14.1 es el nivel de significancia $\alpha$ de la prueba, y representa la probabilidad de cometer un error del tipo I. Por ello, la región de aceptación de $H_0$ es $-2.58 \leq Z \leq 2.58$, y la de rechazo es $Z > 2.58$ y $Z < -2.58$.

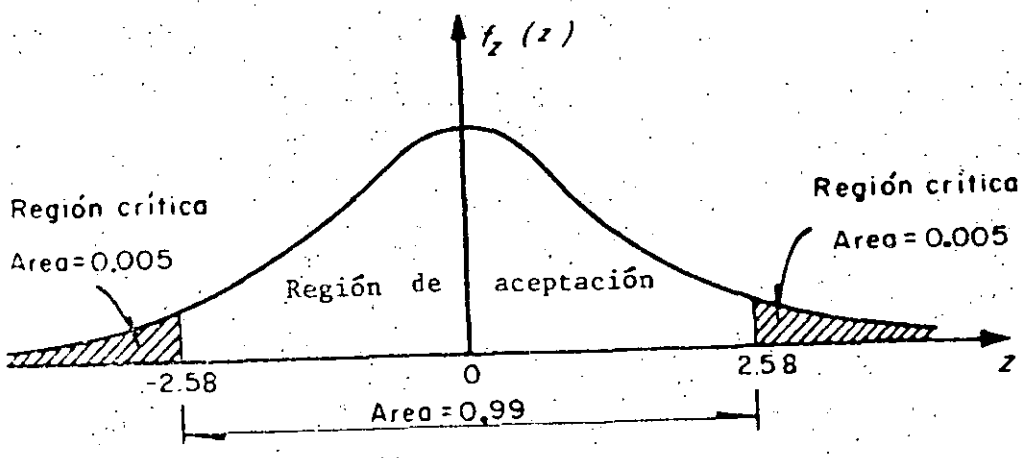



*Fig 14.1 Región de significancia*

En la tabla 14.1 se presentan los valores de la variable estandarizada, $Z$, que limitan las regiones de aceptación y de rechazo para el caso en el que la estadística involucrada en la prueba tenga distribución muestral normal. Cuando en alguna prueba de hipótesis se consideren niveles de significancia diferentes a los que aparecen en la tabla mencionada, resulta necesario emplear la de áreas bajo la curva normal estándar.

**TABLA 14.1 VALORES CRITICOS DE $z$**

| Nivel de significancia, $\alpha$ | Valores de $z$ para pruebas de una cola | Valores de $z$ para pruebas de dos colas |
|---|---|---|
| 0.1 | −1.281 o 1.281 | −1.645 y 1.645 |
| 0.05 | −1.645 o 1.645 | −1.960 y 1.960 |
| 0.01 | −2.326 o 2.326 | −2.575 y 2.575 |
| 0.005 | −2.575 o 2.575 | −2.810 y 2.810 |

15. Pruebas de una y de dos colas

En la prueba de hipótesis del ejemplo anterior, la región de rechazo de la hipótesis nula quedó en ambos extremos (colas) de la distribución muestral de la estadística involucrada en la prueba; a las pruebas de este tipo se les denomina *pruebas de dos colas*. Cuando la región de rechazo se encuentra solamente en un extremo de la distribución muestral en cuestión, se les llama *pruebas de una cola*.

Las pruebas de dos colas se presentan cuando en la hipótesis alternativa aparece el signo $\neq$ (diferente de), como en el siguiente caso

$$H_0 : \mu_S = \mu_1,$$

$$H_1 : \mu_S \neq \mu_1$$

en donde $\mu_S$ es la media de la estadística $S$, y $\mu_1$ es un valor fijo.

En los casos

$$H_0 : \mu_S = \mu_1$$

$$H_1 : \mu_S < \mu_1$$

y

$$H_0 : \mu_S = \mu_1$$

$$H_1 : \mu_S > \mu_1$$

las pruebas resultan de una cola.

16. Pruebas de hipótesis para la media

Para el caso de una población infinita (o finita en que se muestree con remplazo), cuya desviación estándar $\sigma$ se conoce o se puede estimar adecuadamente, si se tiene que la estadística $S$ obtenida de la muestra es el promedio aritmético, entonces la media de su distribución muestral es $\mu_S = \mu_{\bar{X}} = \mu$, y su desviación estándar es $\sigma_S = \sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$, en donde $\mu$ y $\sigma$ son, respectivamente, la media y la desviación estándar de la variable aleatoria $X$ asociada a la población, y $n$ es el tamaño de la muestra. En tal caso, si $\bar{X}$ tiene distribución normal, la variable estandarizada correspondiente será

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Para el caso de muestreo sin remplazo de población finita, se tiene que $\sigma_S = \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$, en donde $N_p$ es el tamaño de la población, por lo que la variable estandarizada será

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}}$$

En los dos casos anteriores, el valor de $Z$ correspondiente al de $\bar{X}$ de la muestra es el que se debe comparar con el valor crítico correspondiente al nivel de significancia fijado, para así aceptar o no la hipótesis nula (prueba de una cola). Si se trata de una prueba de dos colas, el valor de $Z$ se debe comparar con los dos valores críticos que corresponden al valor de $\alpha$ seleccionado. En cualquiera de los casos anteriores, el valor o valores críticos se pueden obtener de la tabla 14.1, para valores comunes de $\alpha$.

*Ejemplo* 16.1

Se sabe que el promedio de calificaciones de una muestra aleatoria de tamaño 100 de los estudiantes de tercer año de ingeniería civil es de 7.6, con una desviación estándar de 0.2. Si $\mu$ denota la media de la población de esas calificaciones, X, y si se supone que $\bar{X}$ tiene distribución normal, probar la hipótesis

$\mu = 7.65$ en contra de la hipótesis alternativa $\mu \neq 7.65$, usando un nivel de significancia de

a. 0.05

b. 0.01

Para la solución se deben considerar las hipótesis

$$H_0 : \mu = 7.65$$

$$H_1 : \mu \neq 7.65$$

Puesto que $\mu \neq 7.65$ incluye valores menores y mayores de 7.65, se trata de una prueba de dos colas.

La estadística bajo consideración es el promedio aritmético, $\bar{X}$, de la muestra, que se supone extraída de una población infinita. La distribución muestral de $\bar{X}$ tiene media $\mu_{\bar{X}} = \mu$, y desviación estándar $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$, en donde $\mu$ y $\sigma$ denotan, respectivamente, la media y la desviación estándar de la población de calificaciones.

Bajo la hipótesis $H_0$ (considerándola verdadera), se tiene que

$$\mu_{\bar{X}} = 7.65 = \mu$$

y utilizando la desviación estándar de la muestra como una estimación de $\sigma$, lo cual se supone razonable por tratarse de una muestra grande,

$$\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n} = 0.2/\sqrt{100} = 0.2/10 = 0.02$$

a. Para la prueba de dos colas a un nivel de significancia de 0.05 se establece la siguiente regla de decisión

*Aceptar $H_0$ si el valor Z correspondiente al valor del promedio de la muestra se encuentra dentro del intervalo de -1.96 a 1.96 (tabla 14.1). En caso contrario, rechazar $H_0$.*

Puesto que

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{7.6 - 7.65}{0.02} = -2.5$$

se encuentra fuera del rango de -1.96 a 1.96, se rechaza la hipótesis $H_0$ a un nivel de significancia de 0.05.

b. Si el nivel de significancia es 0.01, el intervalo de -1.96 a 1.96 de la regla de decisión del inciso a se reemplaza por el de -2.58 a 2.58 tabla (14.1). Entonces, puesto que el valor muestral $Z = -2.5$ se encuentra dentro de este intervalo, se acepta la hipótesis $H_0$ a un nivel de significancia de 0.01.

*Ejemplo* 16.2

La resistencia media a la ruptura de cables de acero fabricados por la empresa X es de 905 kg. Una empresa consultora sugiere a X que cambie su proceso de manufactura, con lo cual incrementará la resistencia de sus cables. Se prueba el nuevo proceso, y se extrae una muestra aleatoria de 50 cables, obteniéndose para ellos una resistencia promedio de 926 kg, con des-

viación estándar igual a 42 kg. ¿Se puede considerar que el nuevo proceso realmente incrementa la resistencia, con un nivel de confianza de 99%?

En este caso, se debe plantear una prueba de hipótesis de una cola, para la cual

$$H_0 : \mu = 905 \text{ kg}$$

$$H_1 : \mu > 905 \text{ kg}$$

Puesto que el tamaño de la muestra es suficientemente grande, se puede aproximar la distribución muestral de la resistencia promedio mediante una normal, y estimar el valor de $\sigma$ de la población mediante $S_X$ de la muestra.

Considerando a la población infinita, y suponiendo como verdadera a $H_0$, se tiene que

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 905 \text{ kg}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{42}{\sqrt{50}} = 5.94$$

Para la prueba de una cola a un nivel de significancia de $\alpha = 1 - (1 - \alpha) = 1 - 0.99 = 0.01$, la regla de decisión es

*Aceptar $H_0$ si el valor estandarizado de $\bar{X}$ de la muestra es menor o igual a $Z_c = 2.326$ (tabla 14.1); en caso contrario, rechazar $H_0$.*

En virtud de que

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{926 - 905}{5.94} = 3.535$$

es mayor de 2.326, se rechaza $H_0$ a un nivel de significancia de 1%, concluyéndose que en realidad el nuevo proceso sí incrementa la resistencia de los cables.

17. Pruebas de diferencias de medias

Sean $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ los promedios aritméticos obtenidos de dos muestras de tamaños $n_X$ y $n_Y$, extraídas respectivamente de dos poblaciones con medias $\mu_X$ y $\mu_Y$, y desviaciones estándar $\sigma_X$ y $\sigma_Y$. Se trata de probar la hipótesis nula, $H_0$, de que no existe diferencia entre las medias, es decir, que $\mu_X = \mu_Y$. Si $n_X$ y $n_Y$ son suficientemente grandes (>30), la distribución muestral de las diferencias de los promedios es aproximadamente normal. Dicha distribución muestral es rigurosamente normal si las variables aleatorias X y Y asociadas a la población tienen distribución normal, aunque $n_X$ y $n_Y$ sean menores de 30. Para esta distribución muestral, la variable estandarizada Z, que se compara con los valores críticos correspondientes, se encuentra dada por

$$Z = \frac{X - Y - \mu_{\bar{X}-\bar{Y}}}{\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}} = \frac{X - Y - 0}{\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}}$$

con la cual se puede probar la hipótesis nula $H_0$ en contra de otras hipótesis alternativas, $H_1$, a un nivel apropiado de significancia.

*Ejemplo* 17.1

En el laboratorio de pruebas de una empresa fabricante de aparatos electrónicos se ensayaron dos marcas de transistores, A y B, de características similares, con objeto de comprobar su ganancia de voltaje. Se tomaron muestras aleatorias de 100 transistores de cada marca, arrojando una ganancia promedio de 31 decibeles, con desviación estándar de 0.3 decibeles para la marca A, y 30.9 decibeles de ganancia promedio, con desviación estándar de 0.4 decibeles para la otra. ¿Existe una diferencia significativa entre las ganancias en voltaje de los transistores a un nivel de significancia de

a. 0.05

b. 0.01?

Si $\mu_A$ y $\mu_B$ son las medias respectivas de las dos poblaciones infinitas a las que corresponden las muestras, la prueba de hipótesis adopta la forma siguiente:

$$H_0 : \mu_A = \mu_B$$

$$H_1 : \mu_A \neq \mu_B$$

Entonces, el valor de $Z$ es, bajo la hipótesis $H_0$:

$$Z = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}} = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} = \frac{31 - 30.9}{\sqrt{\frac{(0.3)^2}{100} + \frac{(0.4)^2}{100}}} = 2$$

a. Puesto que se trata de una prueba de dos colas a un nivel de significancia de 0.05, la diferencia es significativa si el valor de $Z$ se encuentra fuera del intervalo de -1.96 a 1.96. Como este es el caso, puede concluirse que efectivamente existe diferencia significativa en la ganancia en voltaje de los transistores.

b. Si la prueba es a un nivel de significancia de 0.01, la diferencia es significativa si $Z$ se encuentra fuera del rango de -2.58 a 2.58. Partiendo del hecho de que $Z = 2$, la diferencia entre las ganancias es producto del azar, y se acepta la hipótesis de que ambos tipos de transistores tienen igual ganancia media en voltaje a un nivel de confianza de 99 por ciento.

*Ejemplo* 17.2

La estatura promedio de 50 estudiantes varones tomados al azar que participan en actividades deportivas es de 173 cm, con desviación estándar de 6.3 cm. Otra muestra aleatoria de 50 estudiantes varones que no participan en ese tipo de actividades tiene promedio de estatura igual a 171 cm, con desviación estándar igual a 7.1 cm. Probar la hipótesis de que los estudiantes varones que practican deportes son más altos que los que no lo hacen, a un nivel de significancia de 0.05.

Se debe decidir entre las hipótesis

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$

$$H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

siendo X la variable aleatoria asociada a la población infinita de estaturas de alumnos que practican deportes, y Y la asociada a la de estudiantes que no lo hacen, que también es infinita.

Bajo la hipótesis $H_0$ , se tiene que

$$\mu_{\bar{X}-\bar{Y}} = 0$$

$$\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}} = \sqrt{\frac{(6.3)^2}{50} + \frac{(7.1)^2}{50}} = 1.3424$$

Entonces, el valor de Z es

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}} = \frac{173 - 171}{1.3424} = \frac{2}{1.3424} = 1.489$$

Puesto que se trata de una prueba de hipótesis de una cola, a un nivel $\alpha = 0.05$, se rechazaría $H_0$ si el valor de Z muestral fuera mayor del valor crítico para dicho nivel, el cual es $Z_c = 1.645$. Puesto que $Z < Z_c$, en este caso se concluye que la diferencia en las estaturas de ambos grupos de estudiantes se debe únicamente al azar.

tiene ordenadas mayores de cero en el lado de las abscisas negativas. De hecho, la estadística $S_X^2$ se puede estudiar si se consideran muestras aleatorias de tamaño $n$ extraídas de una población normal con desviación estándar $\sigma_X$ y si para cada muestra se calcula el valor de la estadística.

$$\chi^2 = \frac{n\ S_X^2}{\sigma^2} \qquad (3.14)$$

donde $S_X^2$ es la variancia de la muestra.

El número de grados de libertad, $\nu$, de una estadística se define como

$$\nu = n - k$$

siendo $n$ el tamaño de la muestra y $k$ el número de parámetros de la población que deben estimarse a partir de ella.

La distribución muestral de la estadística $\chi^2$ está dada por la ecuación

$$f(\chi^2) = U\ \chi^{\nu-2}\ e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$$

en la que $U$ es una constante que hace que el área total bajo la curva resulte igual a uno, y $\nu = n - 1$ es el número de grados de libertad. Esta distribución se llama *Ji cuadrada*, misma que se presenta en la fig 21 para distintos valores de $\nu$.

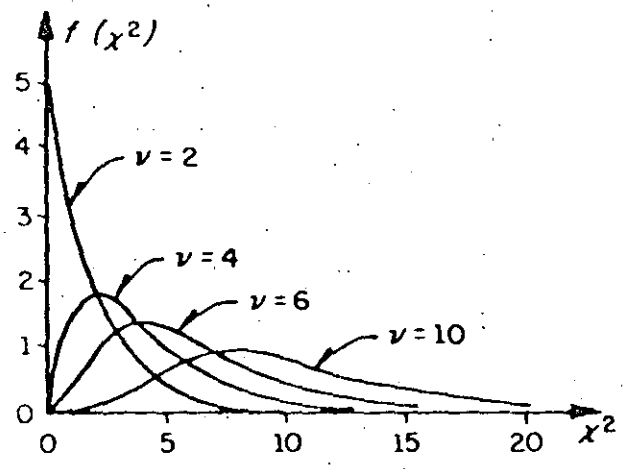



*Fig 21. Distribución Ji cuadrada para distintos valores de $\nu$*

## 3.4 Muestras pequeñas

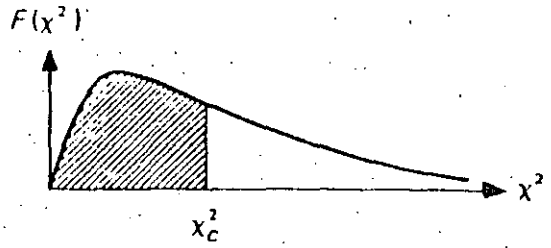
Como ya se indicó, para muestras grandes ($n \geq 30$) las distribuciones muestrales de muchas estadísticas son aproximadamente normales, siendo tanto mejor la aproximación cuanto mayor es el tamaño de $n$. Sin embargo, cuando se trata de muestras en las que $n < 30$, llamadas *muestras pequeñas*, la aproximación no es suficientemente buena, por lo que resulta necesario introducir una teoría apropiada para su estudio.

Al estudio de las distribuciones muestrales de las estadísticas para muestras pequeñas se le llama *teoría estadística de las muestras pequeñas*. Existen al respecto tres distribuciones importantes: *Ji cuadrada*, *F* y *t de Student*.

### 3.4.1 Distribución *Ji* cuadrada ($\chi^2$)

Hasta ahora sólo se ha tratado la distribución muestral de la media. En esta sección se verá lo concerniente a la distribución muestral de la variancia, $S_X^2$, para muestras aleatorias extraídas de poblaciones normales. Puesto que $S_X$ no puede ser negativa, es de esperarse que su distribución muestral no sea una curva normal, ya que esta

## TABLA 8. VALORES CRITICOS $\chi^2_c$




| $\nu$ | $\chi^2_{.995}$ | $\chi^2_{.99}$ | $\chi^2_{.975}$ | $\chi^2_{.95}$ | $\chi^2_{.90}$ | $\chi^2_{.75}$ | $\chi^2_{.50}$ | $\chi^2_{.25}$ | $\chi^2_{.10}$ | $\chi^2_{.05}$ | $\chi^2_{.025}$ | $\chi^2_{.01}$ | $\chi^2_{.005}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7.88 | 6.63 | 5.02 | 3.84 | 2.71 | 1.32 | .455 | .102 | .016 | .0039 | .0010 | .0002 | .0000 |
| 2 | 10.6 | 9.21 | 7.38 | 5.99 | 4.61 | 2.77 | 1.39 | .575 | .211 | .103 | .0506 | .0201 | .0100 |
| 3 | 12.8 | 11.3 | 9.35 | 7.81 | 6.25 | 4.11 | 2.37 | 1.21 | .584 | .352 | .216 | .115 | .072 |
| 4 | 14.9 | 13.3 | 11.1 | 9.49 | 7.76 | 5.39 | 3.36 | 1.92 | 1.06 | .711 | .483 | .297 | .207 |
| 5 | 16.7 | 15.2 | 12.8 | 11.15 | 9.2 | 6.63 | 4.35 | 2.67 | 1.61 | 1.15 | .831 | .554 | .413 |
| 6 | 18.5 | 16.8 | 14.4 | 12.6 | 10.6 | 7.84 | 5.35 | 3.45 | 2.20 | 1.64 | 1.24 | .872 | .676 |
| 7 | 20.3 | 18.5 | 16.0 | 14.1 | 12.0 | 9.04 | 6.35 | 4.25 | 2.83 | 2.18 | 1.69 | 1.24 | .989 |
| 8 | 22.0 | 20.1 | 17.5 | 15.5 | 13.4 | 10.2 | 7.34 | 5.07 | 3.49 | 2.73 | 2.18 | 1.65 | 1.34 |
| 9 | 23.6 | 21.7 | 19.0 | 16.9 | 14.7 | 11.4 | 8.34 | 5.90 | 4.17 | 3.33 | 2.70 | 2.09 | 1.73 |
| 10 | 25.2 | 23.2 | 20.5 | 18.3 | 16.0 | 12.5 | 9.34 | 6.74 | 4.87 | 3.94 | 3.25 | 2.56 | 2.16 |
| 11 | 26.8 | 24.7 | 21.9 | 19.7 | 17.3 | 13.7 | 10.35 | 7.57 | 5.58 | 4.57 | 3.82 | 3.05 | 2.60 |
| 12 | 28.3 | 26.2 | 23.2 | 21.0 | 18.5 | 14.8 | 11.3 | 8.44 | 6.30 | 5.23 | 4.40 | 3.57 | 3.07 |
| 13 | 29.8 | 27.7 | 24.7 | 22.4 | 19.8 | 16.0 | 12.3 | 9.30 | 7.04 | 5.89 | 5.01 | 4.11 | 3.57 |
| 14 | 31.3 | 29.1 | 26.1 | 23.7 | 21.1 | 17.2 | 13.3 | 10.2 | 7.79 | 6.57 | 5.63 | 4.66 | 4.07 |
| 15 | 32.7 | 30.6 | 27.5 | 25.1 | 22.3 | 18.2 | 14.3 | 11.0 | 8.55 | 7.26 | 6.25 | 5.22 | 4.60 |
| 16 | 34.3 | 32.0 | 28.8 | 26.3 | 23.5 | 19.4 | 15.3 | 11.9 | 9.31 | 7.96 | 6.91 | 5.81 | 5.14 |
| 17 | 35.7 | 33.4 | 30.2 | 27.6 | 24.8 | 20.5 | 16.3 | 12.8 | 10.1 | 8.67 | 7.56 | 6.41 | 5.70 |
| 18 | 37.2 | 34.8 | 31.5 | 28.9 | 26.0 | 21.6 | 17.3 | 13.7 | 10.9 | 9.39 | 8.23 | 7.01 | 6.26 |
| 19 | 38.6 | 36.2 | 32.9 | 30.1 | 27.2 | 22.7 | 18.3 | 14.6 | 11.73 | 10.1 | 8.91 | 7.63 | 6.84 |
| 20 | 40.0 | 37.6 | 34.2 | 31.4 | 28.45 | 23.8 | 19.3 | 15.5 | 12.4 | 10.9 | 9.59 | 8.26 | 7.43 |
| 21 | 41.4 | 38.8 | 35.6 | 32.7 | 29.6 | 24.9 | 20.3 | 16.3 | 13.2 | 11.6 | 10.3 | 8.90 | 8.02 |
| 22 | 42.8 | 40.3 | 36.8 | 33.9 | 30.8 | 26.0 | 21.3 | 17.2 | 14.0 | 12.3 | 11.0 | 9.54 | 8.64 |
| 23 | 44.2 | 41.6 | 38.1 | 35.2 | 32.0 | 27.1 | 22.3 | 18.1 | 14.8 | 13.1 | 11.7 | 10.2 | 9.26 |
| 24 | 45.6 | 43.0 | 39.4 | 36.4 | 33.2 | 28.2 | 23.3 | 19.0 | 15.7 | 13.8 | 12.4 | 10.9 | 9.89 |
| 25 | 46.9 | 44.3 | 40.6 | 37.7 | 34.4 | 29.3 | 24.3 | 19.9 | 16.5 | 14.5 | 13.15 | 11.5 | 10.5 |
| 26 | 48.3 | 45.6 | 41.9 | 38.9 | 35.6 | 30.4 | 25.3 | 20.8 | 17.3 | 15.4 | 13.8 | 12.2 | 11.2 |
| 27 | 49.6 | 47.0 | 43.2 | 40.1 | 36.7 | 31.5 | 26.3 | 21.7 | 18.1 | 16.2 | 14.6 | 12.9 | 11.8 |
| 28 | 51.0 | 48.3 | 44.5 | 41.3 | 37.9 | 32.6 | 27.3 | 22.7 | 18.9 | 16.9 | 15.3 | 13.6 | 12.5 |
| 29 | 52.3 | 49.6 | 45.7 | 42.5 | 39.1 | 33.7 | 28.3 | 23.6 | 19.8 | 17.7 | 16.0 | 14.3 | 13.1 |
| 30 | 53.7 | 50.9 | 47.0 | 43.8 | 40.3 | 34.8 | 29.3 | 24.5 | 20.6 | 18.5 | 16.8 | 15.0 | 13.8 |
| 40 | 66.8 | 63.7 | 59.3 | 55.8 | 51.8 | 45.7 | 39.3 | 33.7 | 29.1 | 26.5 | 24.4 | 22.2 | 20.7 |
| 50 | 79.5 | 76.2 | 71.4 | 67.5 | 63.2 | 56.3 | 49.3 | 43.0 | 37.7 | 34.8 | 32.4 | 29.7 | 28.0 |
| 60 | 92.0 | 88.4 | 83.3 | 79.1 | 74.4 | 67.0 | 59.3 | 52.3 | 46.5 | 43.2 | 40.5 | 37.5 | 35.5 |
| 70 | 104.2 | 100.4 | 95.0 | 90.5 | 85.5 | 77.6 | 69.3 | 61.7 | 55.3 | 51.7 | 48.8 | 45.4 | 43.3 |
| 80 | 116.3 | 112.3 | 106.6 | 101.9 | 96.6 | 88.1 | 79.3 | 71.1 | 64.3 | 60.4 | 57.2 | 53.5 | 51.2 |
| 90 | 128.3 | 124.1 | 118.1 | 113.1 | 107.6 | 98.6 | 89.3 | 80.6 | 73.3 | 69.1 | 65.6 | 61.8 | 59.2 |
| 100 | 140.2 | 135.8 | 129.6 | 124.3 | 118.5 | 109.1 | 99.3 | 90.12 | 82.4 | 77.9 | 74.2 | 70.1 | 67.3 |

No obstante que la distribución *Ji* cuadrada solo se ha presentado en el estudio de las muestras pequeñas, cabe aclarar que es válida para aquellas mayores de 30 si la variable aleatoria involucrada tiene distribución normal.

3.4.1.1 Intervalo de confianza para la variancia

Tal como se hizo para la distribución normal, se pueden establecer intervalos de confianza para la variancia de la población en términos de la variancia de una muestra extraída de ella, a un nivel de confianza dado $1 - \alpha$, si se hace uso de los valores críticos $\chi_c^2$ de la tabla 8. Por lo tanto, un intervalo de confianza para la estadística $\chi^2$, estaría dado por

$$\chi_{c'}^2 < \frac{n S_X^2}{\sigma^2} < \chi_c^2$$

donde $\chi_{c'}^2$ y $\chi_c^2$ son los valores críticos para los cuales el $(1 - \alpha)/2$ por ciento del área se encuentra en los extremos izquierdo y derecho de la distribución, respectivamente.

Con base en lo anterior, se concluye que

$$\frac{n S_X^2}{\chi_c^2} < \sigma^2 < \frac{n S_X^2}{\chi_{c'}^2}$$

es un intervalo de confianza para estimar a $\sigma^2$ a un nivel de confianza $1 - \alpha$.

3.4.1.2 Prueba de hipótesis para la variancia

La prueba de hipótesis para la variancia de una población normal se efectúa calculando el valor de la estadística $\chi^2$ y estableciendo las hipótesis $H_0$ y $H_1$ apropiadas, es decir, se adoptan reglas de decisión similares a las usadas para la estadística $Z$.

Ejemplo

La variancia del tiempo de elaboración de cierto producto es igual a 40 min; sin embargo, su proceso de manufactura se modifica y se toma una muestra de

veinte tiempos, para la cual la variancia resulta ser igual a 62 min. ¿Es significativo el aumento del tiempo de elaboración a un nivel de significancia de

a) 0.05

b) 0.01?

Se debe decidir de entre las hipótesis

$$H_0 : \sigma^2 = 40 \text{ min}$$

$$H_1 : \sigma^2 > 40 \text{ min}$$

Suponiendo que la hipótesis nula es correcta, el valor de la estadística $\chi^2$ para la muestra considerada es

$$\chi^2 = \frac{n S_X^2}{\sigma^2} = \frac{(20)\,(62)}{40} = 31$$

a) Como se trata de una prueba de una cola, la hipótesis $H_0$ se rechazaría si el valor de la estadística $\chi^2$ fuera mayor que el de $\chi^2$ para un nivel de significancia igual a 0.05, el cual, para $\nu = 20 - 1 = 19$ grados de libertad resulta ser 30.1 (tabla 8). Como $31 > 30.1$, $H_0$ se rechaza a un nivel de significancia de 0.05.

b) En este caso, el valor de $\chi^2$ para un nivel de significancia de 0.01 y 19 grados de libertad es igual a 36.2. Puesto que $31 < 36.2$, se acepta $H_0$ a un nivel de significancia de 0.01.

### 3.4.2 Distribución *F*

Al efectuar la prueba de hipótesis de igualdad de medias para muestras pequeñas, en la siguiente sección se supondrá que las variancias de las poblaciones a las que corresponden tales muestras son iguales. Por lo tanto, es necesario probar antes si tal suposición es correcta. Para ello, debe considerarse que si $S_X^2$, $n_X$ y $S_Y^2$, $n_Y$ son respectivamente la variancia y el tamaño de dos muestras extraídas de poblaciones normales que tienen igual variancia, entonces

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \qquad (3.15)$$

# TABLA 9. VALORES $F_c$ PARA $\alpha = 0.01$

| $\nu_2$ = Grados de libertad del denominador | $\nu_1$ = Grados de libertad del numerador | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| 1 | 4 052 | 5 000 | 5 403 | 5 625 | 5 764 | 5 859 | 5 928 | 5 982 | 6 023 | 6 056 | 6 106 | 6 157 | 6 209 | 6 235 | 6 261 | 6 287 | 6 313 | 6 339 | 6 366 |
| 2 | 98.50 | 99.00 | 99.20 | 99.20 | 99.30 | 99.30 | 99.40 | 99.40 | 99.40 | 99.40 | 99.40 | 99.40 | 99.40 | 99.50 | 99.50 | 99.50 | 99.50 | 99.50 | 99.50 |
| 3 | 34.10 | 30.80 | 29.50 | 28.70 | 28.20 | 27.90 | 27.70 | 27.50 | 27.30 | 27.20 | 27.10 | 26.90 | 26.70 | 26.60 | 26.50 | 26.40 | 26.30 | 26.20 | 26.10 |
| 4 | 21.20 | 18.00 | 16.70 | 16.00 | 15.50 | 15.50 | 15.00 | 14 80 | 14.70 | 14.50 | 14.40 | 14.20 | 14.00 | 13.90 | 13.80 | 13.70 | 13 70 | 13.60 | 13 50 |
| 5 | 16.30 | 13.30 | 12.10 | 11.40 | 11.00 | 10.70 | 10.50 | 10.30 | 10.20 | 10.10 | 9.89 | 9.72 | 9.55 | 9.47 | 9.38 | 9.29 | 9.20 | 9.11 | 9.02 |
| 6 | 13.70 | 10.90 | 9.77 | 9.15 | 8.75 | 8 47 | 8.26 | 8.10 | 7.98 | 7.87 | 7.72 | 7.56 | 7.40 | 7.31 | 7.23 | 7.14 | 7.06 | 6.97 | 6.87 |
| 7 | 12.20 | 9.55 | 8.45 | 7.85 | 7.46 | 7.19 | 6.99 | 6.84 | 6.72 | 6.62 | 6.47 | 6.31 | 6.16 | 6.07 | 5.99 | 5.91 | 5.82 | 5.74 | 5.65 |
| 8 | 11.30 | 8.65 | 7.59 | 7 01 | 6.63 | 6.37 | 6.17 | 6.03 | 5.91 | 5.81 | 5.67 | 5.52 | 5.36 | 5.28 | 5.20 | 5.12 | 5.03 | 4.95 | 4 86 |
| 9 | 10 60 | 8 02 | 6.99 | 6.42 | 6.06 | 5.81 | 5.61 | 5.47 | 5.35 | 5.26 | 5.11 | 4.96 | 4.81 | 4.73 | 4.65 | 4.57 | 4.48 | 4.40 | 4.31 |
| 10 | 10.00 | 7.56 | 6.55 | 5.99 | 5.64 | 5.39 | 5.20 | 5.06 | 4.94 | 4.85 | 4.71 | 4.56 | 4.41 | 4.33 | 4.25 | 4 17 | 4.08 | 4 00 | 3.91 |
| 11 | 9 65 | 7 22 | 6 22 | 5.68 | 5.32 | 5.07 | 4.89 | 4.74 | 4.63 | 4.54 | 4.40 | 4.25 | 4.10 | 4.02 | 3.93 | 3.86 | 3 78 | 3 69 | 3.60 |
| 12 | 9.33 | 6.93 | 5.95 | 5.41 | 5.06 | 4.82 | 4.64 | 4.50 | 4.39 | 4.30 | 4.16 | 4.01 | 3.86 | 3.78 | 3.70 | 3.62 | 3.54 | 3.45 | 3.36 |
| 13 | 9.07 | 6 70 | 5 74 | 5.21 | 4.86 | 4.62 | 4.44 | 4.30 | 4.19 | 4.10 | 3.96 | 3.82 | 3.66 | 3.59 | 3.51 | 3.43 | 3.34 | 3.25 | 3.17 |
| 14 | 8 86 | 6.51 | 5.56 | 5.04 | 4.70 | 4.46 | 4.28 | 4.14 | 4.03 | 3.94 | 3.80 | 3.66 | 3.51 | 3.43 | 3.35 | 3.27 | 3.18 | 3.09 | 3.00 |
| 15 | 8.68 | 6.36 | 5.42 | 4.89 | 4.56 | 4.32 | 4.14 | 4.00 | 3.89 | 3.80 | 3.67 | 3.52 | 3.37 | 3.29 | 3.21 | 3.13 | 3.05 | 2.96 | 2.87 |
| 16 | 8.53 | 6 23 | 5.29 | 4.77 | 4.44 | 4.20 | 4.03 | 3.89 | 3.78 | 3.69 | 3.55 | 3.40 | 3.26 | 3.18 | 3.10 | 3.02 | 2.93 | 2.84 | 2.76 |
| 17 | 8.40 | 6.11 | 5.19 | 4.67 | 4.34 | 4.10 | 3.93 | 3.79 | 3.68 | 3.59 | 3.46 | 3.31 | 3.16 | 3.08 | 3.00 | 2.92 | 2.83 | 2.75 | 2.65 |
| 18 | 8.29 | 6.01 | 5.09 | 4.58 | 4.25 | 4.01 | 3.84 | 3.71 | 3.60 | 3.51 | 3.37 | 3.23 | 3.08 | 3.00 | 2.92 | 2.84 | 2.75 | 2.66 | 2.57 |
| 19 | 8.19 | 5.93 | 5.01 | 4.50 | 4.17 | 3.94 | 3.77 | 3.63 | 3.52 | 3.43 | 3.30 | 3.15 | 3.00 | 2.92 | 2.84 | 2.76 | 2.67 | 2.58 | 2.49 |
| 20 | 8.10 | 5.85 | 4.94 | 4.43 | 4.10 | 3.87 | 3.70 | 3.56 | 3.46 | 3.37 | 3.23 | 3.09 | 2.94 | 2.86 | 2.78 | 2.69 | 2.61 | 2.52 | 2.42 |
| 21 | 8.02 | 5.78 | 4.87 | 4.37 | 4.04 | 3.81 | 3.64 | 3.50 | 3.41 | 3.31 | 3.17 | 3.03 | 2.88 | 2.80 | 2.72 | 2.64 | 2.55 | 2.46 | 2.36 |
| 22 | 7.95 | 5.72 | 4.82 | 4.31 | 3.99 | 3.76 | 3.59 | 3.45 | 3.35 | 3.26 | 3.12 | 2.98 | 2.83 | 2.75 | 2.67 | 2.58 | 2.50 | 2.40 | 2.31 |
| 23 | 7.88 | 5.66 | 4.76 | 4.26 | 3.94 | 3.71 | 3.54 | 3.41 | 3.30 | 3.21 | 3.07 | 2.93 | 2.78 | 2.70 | 2.62 | 2.54 | 2.45 | 2.35 | 2.26 |
| 24 | 7.82 | 5.61 | 4.72 | 4.22 | 3.90 | 3.67 | 3.50 | 3.36 | 3.26 | 3.17 | 3.03 | 2.89 | 2.74 | 2.66 | 2.58 | 2.49 | 2.40 | 2.31 | 2.21 |
| 25 | 7.77 | 5.57 | 4.68 | 4.18 | 3.86 | 3.63 | 3.46 | 3.32 | 3.22 | 3.13 | 2.99 | 2.85 | 2.70 | 2.62 | 2.53 | 2.45 | 2.36 | 2.27 | 2.17 |
| 30 | 7.56 | 5.39 | 4.51 | 4.02 | 3.70 | 3.46 | 3.30 | 3.17 | 3.07 | 2.98 | 2.84 | 2.71 | 2.54 | 2.47 | 2.39 | 2.29 | 2.20 | 2.11 | 2.01 |
| 40 | 7.31 | 5.18 | 4.31 | 3.83 | 3.51 | 3.29 | 3.12 | 2.99 | 2.89 | 2.80 | 2.66 | 2.52 | 2.37 | 2.29 | 2.20 | 2.11 | 2.02 | 1.92 | 1.80 |
| 60 | 7.08 | 4.98 | 4.13 | 3.65 | 3.34 | 3.12 | 2.95 | 2.82 | 2.72 | 2.63 | 2.50 | 2.35 | 2.20 | 2.12 | 2.03 | 1.94 | 1.84 | 1.73 | 1.60 |
| 120 | 6.85 | 4.79 | 3.95 | 3.48 | 3.17 | 2.96 | 2.79 | 2.66 | 2.56 | 2.47 | 2.34 | 2.19 | 2.03 | 1.95 | 1.86 | 1.76 | 1.66 | 1.53 | 1.38 |
| ∞ | 6.63 | 4.61 | 3.78 | 3.32 | 3.02 | 2.80 | 2.64 | 2.51 | 2.41 | 2.32 | 2.18 | 2.04 | 1.88 | 1.79 | 1.70 | 1.59 | 1.47 | 1.32 | 1.00 |

resulta ser el valor de una variable aleatoria (estadística) que tiene distribución $F$, con parámetros $\nu_X = n_X - 1$ y $\nu_Y = n_Y - 1$. Esta distribución (fig 22) cuenta con dos parámetros, $\nu_X$ y $\nu_Y$, que son los grados de libertad que corresponden a la variancia del numerador y del denominador de la ec 3.15, respectivamente. Cuando se hace referencia a una distribución $F$ en particular, siempre se dan primero los grados de libertad para la variancia del numerador; es decir, $F(\nu_X, \nu_Y)$. En la tabla 9 se presentan los valores críticos $F_c$ para distintos valores de $\nu_X$ y $\nu_Y$ y un nivel de significancia de 0.01. Cuando los grados de libertad $\nu_X$ o $\nu_Y$ no se encuentren en dicha tabla, el valor de F se puede obtener mediante interpolación lineal. Si se desea probar la hipótesis a otros niveles de significancia, es factible emplear las tablas de la distribución $F$ (refs 9 y 11).

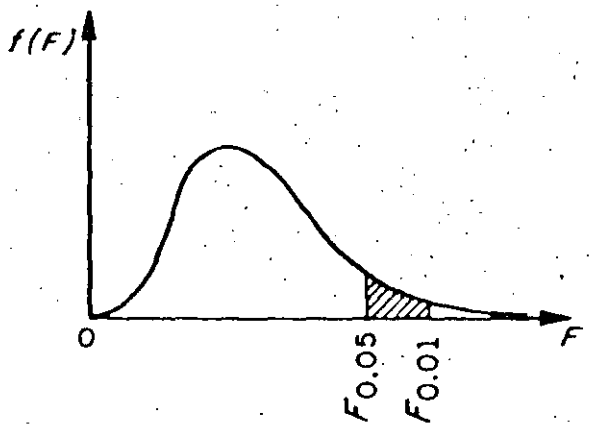



*Fig 22. Distribución F.*

De acuerdo con lo anterior, se puede probar la hipótesis nula

$$H_0: \quad \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$$

en contra de alguna hipótesis alternativa adecuada haciendo uso del hecho de que el cociente $S_x^2/S_Y^2$ es una estadística que tiene distribución $F$.

Ejemplo

Una empresa manufacturera de cartón prensado va a decidir acerca del empleo de una prensadora A o una B a fin de obtener un grosor determinado en su producto. El problema estriba en que ambas prensadoras proporcionan grosores muy similares, es decir, que la variancia de los grosores para las dos máquinas es la misma. Para decidir acertadamente, se toma una muestra aleatoria de 31 cartones prensados por la máquina A y otra de 41 por la B. Como las variancias del grosor para los cartones de las muestras resul-

tan ser de 12 y de 5 mieras, respectivamente, se establecen las hipótesis

$$H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2$$

$$H_1: \sigma_A^2 > \sigma_B^2$$

con objeto de probarlas a un nivel de significancia de 0.01.

El valor de la estadística $F$ resulta

$$F = \frac{S_A^2}{S_B^2} = \frac{12}{5} = 2.4$$

Puesto que $\nu_A = 31 - 1 = 30$ y $\nu_B = 41 - 1 = 40$, en la tabla 9 se puede ver que para un nivel de significancia de 0.01 el valor, $F_c$, de $F(30, 40)$ es 2.11. De acuerdo con estos valores, la hipótesis $H_0$ se rechazaría si el valor de $F$ fuera mayor que $F_c$ (30, 40).

Puesto que lo anterior resulta ser cierto, se rechaza $H_0$, concluyéndose que la prensadora B sería la mejor elección.

### 3.4.3 Distribución $t$ de Student

Si se consideran muestras de tamaño $n$ extraídas de una población normal con media $\mu$ y variancia desconocida, para cada muestra se puede calcular la estadística $T$ definida mediante la fórmula

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_X} \sqrt{n - 1} \qquad (3.16)$$

donde $\bar{X}$ es el promedio y $S_X$ la desviación estándar de la muestra.

La distribución muestral de $T$ (fig 23) está dada por la ecuación

$$f(t) = \frac{U}{\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{(\nu+1)/2}}$$

en la que $U$ es una constante que hace que el área bajo la curva sea igual a uno, y $\nu = n - 1$ es el número de grados de libertad.

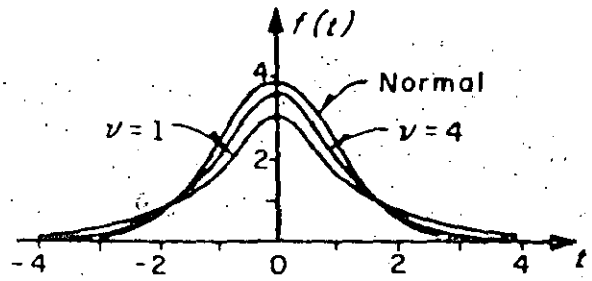



*Fig 23. Distribución t de Student para distintos valores de ν*

En la fig 23 se aprecia que conforme $\nu$ (o $n$, el tamaño de la muestra) aumenta, la distribución de $f(t)$ se aproxima a la distribución normal.

3.4.3.1 Límites e intervalos de confianza

De manera similar a como se hizo con la distribución normal, es posible estimar los límites de confianza de la media, $\mu$, de una población mediante los *valores críticos*, $t_c$, de la distribución $t$, que dependen del tamaño de la muestra y del nivel de confianza deseado, encontrándose dichos valores en la tabla 10.

Así pues,

$$-t_c \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S_X}\sqrt{n-1} \leq t_c$$

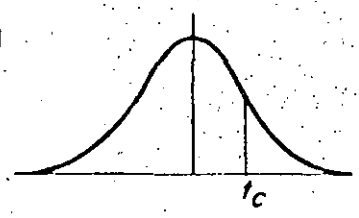
representa un intervalo de confianza para $t$, a partir del cual se puede estimar que $\mu$ se encuentra dentro del intervalo

$$\bar{X} - t_c \frac{\sigma_X}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{X} + t_c \frac{\sigma_X}{\sqrt{n-1}}$$

En términos generales, los límites de confianza para la media de la población se representan como

$$\bar{X} \pm t_c \frac{\sigma_X}{\sqrt{n-1}}$$

## TABLA 10. VALORES $t_c$ PARA LA DISTRIBUCION $t$ DE STUDENT




| $\nu$ | $t_{.995}$ | $t_{.99}$ | $t_{.975}$ | $t_{.95}$ | $t_{.90}$ | $t_{.80}$ | $t_{.75}$ | $t_{.70}$ | $t_{.60}$ | $t_{.55}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 63.66 | 31.82 | 12.71 | 6.31 | 3.07 | 1.376 | 1.000 | .727 | .325 | .158 |
| 2 | 9.92 | 6.96 | 4.30 | 2.92 | 1.89 | 1.061 | .816 | .617 | .289 | .142 |
| 3 | 5.84 | 4.54 | 3.18 | 2.35 | 1.64 | .978 | .765 | .584 | .275 | .138 |
| 4 | 4.60 | 3.75 | 2.78 | 2.13 | 1.53 | .941 | .741 | .569 | .271 | .134 |
| 5 | 4.04 | 3.36 | 2.58 | 2.02 | 1.48 | .920 | .727 | .560 | .267 | .132 |
| 6 | 3.71 | 3.14 | 2.45 | 1.94 | 1.44 | .906 | .718 | .553 | .265 | .131 |
| 7 | 3.50 | 3.00 | 2.36 | 1.91 | 1.43 | .896 | .711 | .549 | .263 | .130 |
| 8 | 3.36 | 2.90 | 2.31 | 1.86 | 1.40 | .889 | .706 | .546 | .262 | .130 |
| 9 | 3.25 | 2.82 | 2.26 | 1.83 | 1.38 | .883 | .703 | .543 | .261 | .129 |
| 10 | 3.17 | 2.76 | 2.23 | 1.81 | 1.37 | .879 | .700 | .542 | .260 | .129 |
| 11 | 3.11 | 2.72 | 2.20 | 1.80 | 1.36 | .876 | .697 | .540 | .260 | .129 |
| 12 | 3.06 | 2.68 | 2.18 | 1.78 | 1.36 | .873 | .695 | .539 | .259 | .128 |
| 13 | 3.01 | 2.65 | 2.16 | 1.77 | 1.36 | .871 | .694 | .538 | .259 | .128 |
| 14 | 2.98 | 2.62 | 2.14 | 1.76 | 1.34 | .868 | .693 | .537 | .258 | .128 |
| 15 | 2.95 | 2.61 | 2.13 | 1.75 | 1.34 | .866 | .691 | .536 | .258 | .128 |
| 16 | 2.92 | 2.58 | 2.12 | 1.75 | 1.34 | .865 | .690 | .535 | .258 | .128 |
| 17 | 2.90 | 2.57 | 2.11 | 1.74 | 1.33 | .863 | .689 | .534 | .257 | .128 |
| 18 | 2.88 | 2.55 | 2.10 | 1.73 | 1.33 | .862 | .688 | .534 | .257 | .128 |
| 19 | 2.87 | 2.54 | 2.09 | 1.73 | 1.33 | .861 | .688 | .533 | .257 | .127 |
| 20 | 2.84 | 2.53 | 2.09 | 1.72 | 1.32 | .860 | .687 | .533 | .257 | .127 |
| 21 | 2.83 | 2.52 | 2.08 | 1.72 | 1.32 | .859 | .686 | .532 | .256 | .127 |
| 22 | 2.82 | 2.51 | 2.07 | 1.72 | 1.32 | .858 | .686 | .532 | .256 | .127 |
| 23 | 2.81 | 2.50 | 2.07 | 1.71 | 1.32 | .858 | .685 | .532 | .256 | .127 |
| 24 | 2.80 | 2.49 | 2.06 | 1.71 | 1.32 | .857 | .685 | .531 | .256 | .127 |
| 25 | 2.79 | 2.48 | 2.06 | 1.71 | 1.32 | .856 | .684 | .531 | .256 | .127 |
| 26 | 2.78 | 2.48 | 2.05 | 1.71 | 1.32 | .856 | .684 | .531 | .256 | .127 |
| 27 | 2.77 | 2.47 | 2.05 | 1.71 | 1.31 | .855 | .683 | .531 | .256 | .127 |
| 28 | 2.76 | 2.47 | 2.05 | 1.70 | 1.31 | .855 | .683 | .530 | .256 | .127 |
| 29 | 2.76 | 2.46 | 2.04 | 1.70 | 1.31 | .854 | .683 | .530 | .256 | .127 |
| 30 | 2.75 | 2.46 | 2.04 | 1.70 | 1.30 | .853 | .683 | .530 | .256 | .127 |
| 40 | 2.70 | 2.43 | 2.02 | 1.68 | 1.30 | .851 | .681 | .529 | .255 | .126 |
| 60 | 2.66 | 2.39 | 2.00 | 1.67 | 1.30 | .848 | .679 | .528 | .254 | .126 |
| 120 | 2.62 | 2.36 | 1.98 | 1.66 | 1.29 | .845 | .677 | .526 | .254 | .126 |
| $\infty$ | 2.58 | 2.33 | 1.96 | 1.645 | 1.28 | .842 | .674 | .524 | .253 | .126 |

3.4.3.2 Pruebas de hipótesis

La prueba de hipótesis para la media de una población se puede efectuar con muestras pequeñas en forma análoga a la de muestras de tamaño mayor de 30 si en lugar de utilizar a la estadística $Z$ se emplea la $T$. Entonces, si se consideran dos muestras aleatorias cuyos tamaños, desviaciones estándar y promedios son $n_X$, $S_X$, $\bar{X}$ y $n_Y$, $S_Y$, $\bar{Y}$, respectivamente, extraídas de poblaciones normales de igual variancia ($\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$), se puede probar la hipótesis, $H_0$, de que las muestras provienen de una misma población, es decir, de que también sus medias son iguales, utilizando la estadística $T$ definida por

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\epsilon \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} \qquad (3.17)$$

donde

$$\epsilon = \sqrt{\frac{n_X S_X^2 + n_Y S_Y^2}{n_X + n_Y - 2}} \qquad (3.18)$$

cuya distribución es la $t$ de Student, con $\nu = n_X + n_Y - 2$ grados de libertad.

Ejemplo

Conforme al plan de desarrollo agrícola de una región, se probó un nuevo fertilizante para maíz. Para ello se escogieron 24 ha de terreno, aplicándose dicho producto a la mitad de ellas. El promedio de producción de maíz en la zona que se usó fertilizante fue de 5.3 ton, con una desviación estándar de 0.40 ton, en tanto que en la otra zona el promedio fue de 5.0 ton, con desviación estándar de 0.36 ton.

De acuerdo con los resultados, ¿se puede concluir que existe un aumento significativo en la producción de maíz al usar fertilizante, si se utiliza un nivel de significancia de

a) 0.01

b) 0.05?

Solución

Para probar la hipótesis de igualdad de medias es indispensable saber primero si las muestras provienen de dos poblaciones normales de igual variancia. En ese caso, si $\sigma_X^2$ y $\sigma_Y^2$ denotan a las variancias de la producción de maíz en la zona tratada y en la no tratada, respectivamente, se debe probar la hipótesis nula $H_0$: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ en contra de la hipótesis alternativa $H_1$: $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ a los dos niveles de significancia establecidos.

El valor de la estadística $F$ es, de la ec 3.15,

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} = \frac{(0.40)^2}{(0.36)^2} = 1.27$$

y el valor crítico de $F$ (11, 11), obtenido de la tabla 9 mediante interpolación lineal, resulta 4.47. Por lo tanto, como $1.27 < 4.47$, se acepta la hipótesis nula a un nivel de significancia de 0.01.

El valor crítico de $F$ (11, 11) a un nivel de significancia de 0.05 (ref 9) es 2.82, de ahí que como $1.27 < 2.82$, también se acepta la hipótesis $H_0$.

Con base en lo anterior, se debe decidir entre las hipótesis

$H_0$: $\mu_X = \mu_Y$ (la diferencia en los promedios se debe al azar)

$H_1$: $\mu_X > \mu_Y$ (el fertilizante mejora la producción)

Bajo la hipótesis $H_0$, se tiene que

$$\epsilon = \sqrt{\frac{n_X S_X^2 + n_Y S_Y^2}{n_X + n_Y - 2}} = \sqrt{\frac{12(0.40)^2 + 12(0.36)^2}{12 + 12 - 2}} = 0.397$$

por lo cual

$$t = \frac{5.3 - 5.0}{0.397\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{12}}} = 1.85$$

a) Puesto que se trata de una prueba de una cola a un nivel de significancia de 0.01, se rechaza la hipótesis $H_0$ si $t$ es mayor que el valor crítico, $t_c$, correspondiente a dicho nivel, el cual para $\nu = n_X + n_Y - 2 = 12 + 12 - 2 = 22$ grados de libertad, se obtiene de la tabla 8 como $t_c = 2.51$. Como $t < t_c$, la hipótesis $H_0$ no se puede rechazar a un nivel de significancia de 0.01.

b) Si el nivel de significancia de la prueba es de 0.05, se rechaza $H_0$ si $t$ es mayor que el valor $t_c$ respectivo que para 22 grados de libertad es $t_c = 1.72$, por lo que de acuerdo con lo anterior, $H_0$ se rechaza a un nivel de significancia de 0.05.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

FUNDAMENTOS DE LAS TECNICAS DE MUESTREO ESTADISTICO

# MUESTREO ALEATORIO SIMPLE PARA RAZONES

M. EN C. ADELA ABAD CARRILLO

JULIO, 1985

## MUESTREO ALEATORIO SIMPLE PARA RAZONES

1. En una pequeña comunidad se realiza una investigación para determinar qué proporción del gasto familiar es dedicado a la alimentación y qué proporción es dedicado a la atención médica y medicamentos. Se selecciona una muestra aleatoria simple de 40 familias de un total de 2000 familias que forman la comunidad.

Estimar: a. Proporción del gasto familiar dedicado a la alimentación.

b. La varianza del inciso a.

c. El error estándar del inciso a.

d. Intervalos de confianza del 95% para la proporción del gasto familiar dedicado a la alimentación.

e. La proporción del gasto familiar dedicado en atención médica y medicamentos.

f. La varianza del inciso e.

g. Intervalos de confianza del 90% para la proporción del gasto familiar dedicado a la atención médica y medicamentos.

Los datos que se presentan corresponden a los gastos de un mes y están expresados en miles de pesos.

| Familia | Gasto Familiar | Gasto Alimentación | Gasto en Médicos y Medicamentos |
|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 4 | 1 |
| 2 | 11 | 4.2 | 0.8 |
| 3 | 8 | 4 | 0.5 |
| 4 | 9 | 3.5 | 1 |
| 5 | 8.5 | 3 | 0.3 |
| 6 | 5 | 2.5 | 0 |
| 7 | 10 | 3.5 | 0.4 |
| 8 | 6 | 2 | 0.4 |
| 9 | 4 | 1.5 | 0 |
| 10 | 12 | 4.5 | 0.85 |
| 11 | 9 | 3 | 0.5 |
| 12 | 3.5 | 1.5 | 0.5 |
| 13 | 5 | 2 | 0 |
| 14 | 2 | 1.5 | 0 |
| 15 | 8 | 3 | 0.9 |

| Familia | Gasto Familiar | Gasto Alimentación | Gasto en Médicos y Medicamentos |
|---|---|---|---|
| 16 | 7 | 3.5 | 0.8 |
| 17 | 9.5 | 3 | 1.5 |
| 18 | 6 | 2.5 | 0.5 |
| 19 | 5 | 2 | 0.5 |
| 20 | 4.5 | 2.4 | 0.6 |
| 21 | 7.8 | 3 | 0 |
| 22 | 8 | 2.5 | 1.2 |
| 23 | 3 | 1.8 | 0 |
| 24 | 5.5 | 2 | 0.4 |
| 25 | 4.5 | 2.5 | 0 |
| 26 | 7 | 3.5 | 1 |
| 27 | 9 | 3 | 1.2 |
| 28 | 8.5 | 3.8 | 9.5 |
| 29 | 12 | 4.5 | 1.6 |
| 30 | 6.5 | 2.5 | 0.5 |
| 31 | 3.8 | 1.8 | 0 |
| 32 | 4 | 1.8 | 0.4 |
| 33 | 2.9 | 2 | 0 |
| 34 | 3.5 | 1.5 | 0.2 |
| 35 | 5 | 2 | 0.25 |
| 36 | 6.8 | 3 | 0.3 |
| 37 | 4 | 1.8 | 0.4 |
| 38 | 4.5 | 2 | 0.2 |
| 39 | 5.8 | 2.5 | 0.4 |
| 40 | 6.5 | 3 | 0.2 |
| Totales | 261.6 | 107.6 | 19.8 |

2. En una granja se está experimentando con una nueva alimentación para pollos. Se trabaja con una población de 600 pollos a los que se les pesa al iniciar el experimento, el peso total inicial resultó de 780 kilos . Después de un mes se desea conocer el peso medio por pollo y el peso total de los pollos , para lo cual se seleccionó una muestra aleatoria simple de 30 pollos que proporcionaron la siguiente información; considerando x el peso inicial del pollo , y el peso al mes del experimento

$\sum_{i=1}^{30} x_i = 37.5$, $\sum_{i=1}^{30} y_i = 46.8$, $\sum x_i^2 = 47.67$, $\sum y_i^2 = 254.02$, $\sum xy = 107.7$

Estimar:

a. Peso medio por pollo al mes de iniciado el experimento.
b. Peso total de los pollos.
c. Varianzas de los incisos a y b.
d. Intervalos de confianza del 95% para los incisos a y b.

3. Una institución bancaria cuenta con 1000 clientes con cuentas de cheques y para un estudio económico desea conocer qué proporción del ingreso mensual gastan sus clientes en promedio. Para estimar esta proporción deciden llevar a cabo un muestreo aleatorio simple de 30 clientes. De los estados de cuentas mensuales obtienen los gastos del cliente y de los datos confidenciales obtienen el ingreso mensual. Las observaciones obtenidas de la muestra fueron las siguientes:

| Cliente | Gasto (en miles de pesos) | Ingreso(miles de pesos) |
|---|---|---|
| 1 | 20 | 25 |
| 2 | 20 | 22 |
| 3 | 30 | 30 |
| 4 | 35 | 40 |
| 5 | 30 | 29 |
| 6 | 30 | 35 |
| 7 | 25 | 25 |
| 8 | 20 | 20 |
| 9 | 40 | 50 |
| 10 | 30 | 30 |
| 11 | 50 | 60 |
| 12 | 28 | 30 |
| 13 | 39 | 40 |
| 14 | 23 | 25 |
| 15 | 28 | 30 |
| 16 | 20 | 20 |
| 17 | 38 | 40 |
| 18 | 30 | 30 |
| 19 | 32 | 30 |
| 20 | 20 | 20 |
| 21 | 29 | 30 |
| 22 | 25 | 25 |
| 23 | 38 | 40 |
| 24 | 30 | 30 |
| 25 | 20 | 20 |
| 26 | 29 | 30 |
| 27 | 25 | 28 |
| 28 | 20 | 20 |
| 29 | 27 | 30 |
| 30 | 35 | 40 |
| Totales | 866 | 904 |

Estimar:

a. La proporción del ingreso que los clientes gastan mensualmente e intervalos del 95% de confianza.
b. La cantidad media del gasto por cliente y su varianza.
c. El total de gastos en la población y su error estándar.

Adela Abad Carrillo.

Junio de 1980

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

FUNDAMENTOS DE LAS TECNICAS DE MUESTREO ESTADISTICO

MUESTREO ESTADISTICO

MUESTREO POR CONGLOMERADOS

SUBMUESTREO

M. EN C. LUIS ALEJANDRO SERVIN

JULIO, 1985

MUESTREO ESTRATIFICADO,
MUESTREO POR CONGLOMERADOS Y
SUBMUESTREO.

EJERCICIOS ADICIONALES.

NOTA.- ESTOS EJERCICIOS FORMAN PARTE DE LA SEGUNDA EDICION DEL LIBRO: INTRODUCCION AL MUESTREO. ABAD Y SERVIN. LIMUSA, LA CUAL APARECERA PROXIMAMENTE.

Ejercicio a.

Se desea hacer un estudio sobre el personal que labora en una fábrica la cual cuenta con edificios en quince estados del país. El estudio se refiere a opiniones y actitudes de los empleados y obreros. En la muestra se desea tener representados a 1 de cada 30 empleados y existen en total 42 090 de ellos. Administrativamente, el personal de cada estado es independiente de la oficina central en cuanto a su nómina, de tal manera que, las listas de obreros y empleados se tienen para cada uno de ellos.

La distribución del personal en cada entidad aparece en la tabla No. 1.

TABLA NO. 1

| ENTIDAD | NUMERO DE EMPLEADOS | NUMERO DE HOJAS |
|---|---|---|
| Guanajuato | 19 043 | 635 |
| Hidalgo | 429 | 15 |
| Jalisco | 5 010 | 167 |
| Michoacán | 1 114 | 38 |
| Morelos | 721 | 25 |
| Nayarit | 474 | 16 |
| Nuevo León | 4 415 | 148 |
| Oaxaca | 450 | 15 |

| ENTIDAD | NUMERO DE EMPLEADOS | NUMERO DE HOJAS |
|---|---|---|
| Puebla | 2 750 | 92 |
| Querétaro | 487 | 17 |
| Quintana Roo | 150 | 5 |
| S.Luis Potosí | 925 | 31 |
| Sinaloa | 2 800 | 94 |
| Sonora | 2 900 | 97 |
| Tabasco | 422 | 15 |
| | 42 090 | 1 410 |

Para obtener a uno de cada treinta empleados en la muestra se requiere una muestra total de n=1 403 (¿Por qué?) los cuales serán sorteados a partir de algún esquema de selección apropiado.

Ejercicio b.(Continuación del ejercicio a)
Entonces, debemos elejir a 1 403 empleados de entre los 42 090 esparcidos en las quince entidades federativas. Disponemos de 15 listados de empleados,uno de cada entidad federativa. Si deseamos obtener una selección aleatoria simple, pues, habría necesidad de unir a esos listados de tal manera de asegurar una identificación única para cada empleado, y posteriormente efectuar la selección. Esta tarea resulta engorrosa (Intente el método). Si esto fuera necesario, posiblemente fuera mas adecuado recurrir a una selección sistemática (Capítulo 7) con intervalo igual a 30, de tal manera que seleccionaríamos a un número aleatorio entre 1 y 30, el cual tomaríamos como arranque (Supongamos que fue el 15) y, las instrucciones para la selección serían las siguientes:

i) Ordene los listados, digamos alfabéticamente.

ii) Encuentre al renglón número 15 del primer listado, este empleado se encuentra en la muestra.

iii) A partir del empleado número 15, vuelva a contar del 1 al 30. El empleado número 30 está en la muestra.

iv) Recomience la cuenta del 1 al 30 hasta agotar a todas las listas.

La selección anterior puede ser superada mediante una estratificación en la cual cada estrato es definido como un estado. Tendríamos 15 estratos, tales que, usando afijación proporcional, sus tamaños de muestra serían:

$n_1=(19\ 043/42\ 090)1\ 403\doteq 635$

$n_2=(429/42\ 090)1\ 403\doteq 14$

$n_3=(5\ 010/42\ 090)1\ 403=167$

$n_4=(1\ 114/42\ 090)1\ 403\doteq 37$

$n_5=(721/42\ 090)1\ 403\doteq 24$

$n_6=(474/42\ 090)1\ 403=16$

$n_7=(4\ 415/42\ 090)1\ 403\doteq 147$

$n_8=(450/42\ 090)1\ 403=15$

$n_9=(2\ 750/42\ 090)1\ 403=92$

$n_{10}=(487/42\ 090)1\ 403\doteq 16$

$n_{11}=(150/42\ 090)1\ 403=5$

$n_{12}=(925/42\ 090)1\ 403=31$

$n_{13}=(2\ 800/42\ 090)1\ 403\doteq 93$

$n_{14}=(2\ 900/42\ 090)1\ 403\doteq 97$

$n_{15}=(422/42\ 090)1\ 403=14$

Ejercicio c. (Continuación del ejercicio b)

Para efectuar la selección anterior (Ejercicio b) en cada uno de los estratos y en el caso concreto del primero de ellos, podemos obtener una muestra aleatoria simple de tamaño 635 de entre los 19 043 empleados en Guanajuato. Esto equivale a obtener 635 números aleatorios diferentes entre 1 y 19 043 (si estuvieran numerados del 1 al 19 043). Para continuar con Hidalgo, habría que elejir a 14 números aleatorios diferentes entre 1 y 429, y así sucesivamente.
Como en el ejercicio b, la selección aleatoria anterior pudo haberse efectuado mediante una selección sistemática con fracción de muestreo 1 de cada 30 (¿Realmente es la misma fracción de muestreo, 1/30, para cada estrato?, ¿por qué?).

Ejercicio d. (Continuación del ejercicio c).

Supongamos que las listas del personal en cada estado aparecen mecanografiadas en hojas tamaño carta y que el número de hojas por delegación es el registrado en la tabla No. 1. Ahí se ha supuesto que en promedio cada hoja tiene 30 nombres, debido a ello, y pensando en un esquema de muestreo por conglomerados, se requieren 47 hojas en la muestra (¿Por qué?). Lo mas posible, es que en estas condiciones, el tamaño de muestra resultante no coincida con el deseado, pero se parecerá a él. Esto ocurre en la práctica y de hecho constituye una manera de diseño; es decir, se diseña para terminar con un tamaño de muestra esperado igual a algún valor en particular y realmente, al final se terminará con una cantidad mayor o menor que la deseada. Esto ocurre con frecuencia cuando uno fija la fracción de muestreo

general para obtener estimadores autoponderados o como también se dice, diseños con igual probabilidad, aunque también existen métodos para controlar esta variación. (Ver por ejemplo el capítulo 7 del libro de Kish).

Las 47 hojas en la muestra pueden ser seleccionadas con f=47/1 410 ó 1 de cada 30 y esto puede ser hecho, ya sea con muestreo aleatorio simple o mediante una selección sistemática como en el ejercicio b.

Ejercicio e. (Continuación del ejercicio d).

Como continuación del ejercicio anterior y avanzando en la complejidad del diseño, consideramos ahora un submuestreo en el cual, la unidad primaria es la hoja con los nombres y la unidad secundaria es el nombre en sí. Nuestro objetivo es terminar con n=1 403 nombres. Aunque pudiéramos proponer un esquema tal que procurara terminar con exactamente 1 403, nuestro objetivo actual es proponer esquemas autoponderados en los cuales pudiera fluctuar el tamaño de muestra final, pero que mantendría las probabilidades de selección constantes y por lo tanto la sencillez en los estimadores. En el ejercicio anterior d, al seleccionar 47 hojas en la muestra podemos decir que las probabilidades de selección fueron las siguientes:

$$f_1 = 47/1\ 410$$
$$f_2 = 1/1$$

Es decir, la fracción de muestreo general fue $f = f_1 . f_2 = 47/1\ 410(1/1) = 47/1\ 410 = 1/30$ y requerimos un censo en las primarias seleccionadas. Si f=94/1 410 y, $f_2 = 1/2$ entonces, f=(94/1 410)(1/2)=1/30
Aqui, estamos seleccionando 94 hojas en la muestra y

dentro de cada una de ellas entramos con fracción de muestreo 1 de cada 2. El número de primarias en la muestra se ha duplicado. Otra opción es usar 188 primarias en la muestra y dentro de cada una de ellas seleccionar a 1 de cada 4 nombres, es decir, $f=(188/1\ 410)(1/4)=1/30$. A medida que aumentamos el número de primarias en la muestra, reducimos el número de nombres en la muestra dentro de cada hoja. Si las listas de nombres siguen al orden de adscripción del personal a cada uno de los departamentos u oficinas en la empresa, lo que estamos haciendo al aumentar el número de primarias en la muestra, es aumentar el número de departamentos u oficinas en la muestra, aumentando, por así decirlo, la representatividad de la muestra, y el precio que se está pagando por ello, es el tener que recorrer mas edificios o ciudades(digamos) buscando a las distintas oficinas seleccionadas.

Ing. Luis Servín.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

FUNDAMENTOS DE LAS TECNICAS DE MUESTREO ESTADISTICO

# PRACTICA DE MUESTREO

M. EN C. ADELA ABAD DE SERVIN

JULIO, 1985

# PRACTICA DE MUESTREO.

## ESTIMADORES DE RAZON

**1.** De una lista de 468 academias de 3 años de estudio fue sacada una muestra aleatoria simple de 100. La muestra contenía 54 instalaciones públicas y 46 privadas. Los datos para el número de estudiantes (y) y el número de profesores (x) se muestran a continuación.

| | n | $\sum(y)$ | $\sum(x)$ |
|---|---|---|---|
| Pública | 54 | 31 281 | 2 024 |
| Privada | 46 | 13 707 | 1 075 |

| | $\sum(y^2)$ | $\sum(yx)$ | $\sum(x^2)$ |
|---|---|---|---|
| Pública | 29 881 219 | 1 729 349 | 111 090 |
| Privada | 6 366 785 | 431 041 | 33 119 |

a. Para cada tipo de instalación en la población, estimar la proporción (número de estudiantes/número de profesores)
b. Calcular los errores estándar de los estimadores.
c. Para las instalaciones públicas encontrar los límites de confianza del 95% para la proporción de estudiante/maestro en la población.

**2.** En un estudio realizado en una zona formada por 70 manzanas, se listaron las 3000 familias que la componían y se eligieron aleatoriamente 30 familias. A cada familia se le preguntó el número de miembros y el número de autos que tenían. Se obtuvieron los siguientes resultados, donde la y indica número de miembros y la x número de coches.

$$\sum y_i = 236 \qquad \sum x_i = 115 \qquad \sum y_i x_i = 685$$

$$\sum y_i^2 = 1494 \qquad \sum x_i^2 = 401$$

a. Estimar el número de miembros por auto en la población.
b. Encontrar el error estándar de su estimador.
c. Calcular intervalos de confianza del 95% para el número de miembros por auto en la población.

**3.** En una zona formada por 2450 manzanas se desea estimar el número total de niños en edad pre-escolar en 1977. De acuerdo con el Censo de Población de 1970, este total fue de 25,000 niños. Se selecciona una muestra aleatoria simple de 10 manzanas y se obtienen los siguientes datos;

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 15 | 10 | 15 | 14 | 16 | 10 | 4 | 10 | 5 | 5 |
| $x_i$ | 20 | 15 | 12 | 13 | 10 | 5 | 6 | 4 | 0 | 5 |

**Estimar el número total de niños en esta zona en 1977, su varianza e intervalos de confianza del 95%.**

**4.** *Una compañía desea estimar el monto promedio en dinero pagado a sus empleados en gastos médicos, durante los 3 primeros meses del presente año. Los promedios trimestrales están disponibles en los reportes fiscales del año anterior. De la población de 1000 empleados fue seleccionada una muestra aleatoria de 100 registros de empleados. Los resultados de la muestra son totalizados y se encuentra que el total para el presente trimestre es de $\sum y_i = 1750$ y el total correspondiente al trimestre del año anterior es de $\sum x_i = 1200$. Los gastos médicos de la población total, correspondientes al mismo trimestre en el año anterior fue de 12500. Estime el monto promedio en dinero pagado por la compañía en el primer trimestre del presente año y su error estándar.*
*Se proporcionan los siguientes datos:*
$\sum y_i^2 = 30650$, $\sum x_i^2 = 15120$, $\sum y_i x_i = 21959.35$

**5.** *En un campo de cebada se pesaron el grano, $y_i$, y el grano más la paja, $x_i$, en cada una de un gran número de unidades de muestreo localizadas al azar por todo el campo.*
*También se pesó la cosecha total (grano más paja) del campo completo. Se obtuvieron los siguientes datos:*
$c_{yy} = 1.13$ $c_{yx} = 0.78$ $c_{xx} = 1.11$
*Calcule la ganancia en precisión obtenida estimando el rendimiento en grano del campo, de la razón grano a cosecha total en lugar de usar el rendimiento medio de grano por unidad.*

**6.** Se desea estimar el número total de niños en edad pre escolar en el Estado de México en 1979. De acuerdo a información obtenido del censo de Población de 1970, se sabe que este total fue de 25,000 niños. Se selecciona una muestra aleatoria simple de 10 manzanas y se investiga el número de niños en edad pre escolar en el año de 1979 por manzana. El mismo dato se obtiene del censo para 1970.

| MANZANA | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1979 | 15 | 10 | 15 | 14 | 16 | 10 | 4 | 10 | 5 | 5 |
| 1970 | 20 | 15 | 12 | 13 | 10 | 5 | 6 | 4 | 0 | 5 |

a. Estimar el número total de niños en edad pre escolar en 1979 en el Estado de México.
b. Calcular intervalos del 95% de confianza.

# 1. La Primera Cirujana del Ejército de E. U. Privada de su Presea

★ Fue Sufragista y Usaba Traje Masculino
★ Una Vieja Historia de la Guerra Civil
★ Iniciativa Para Restituirle la Medalla

WASHINGTON, 21 de enero (NYT)—Hace setenta años la doctora Mary Edwards Walker, cirujana con nombramiento durante la Guerra Civil de Estados Unidos, fue privada de su Medalla de Honor por una junta revisora del gobierno. La doctora Walker es la única mujer que jamas haya recibido la presea, lo cual también puede ser la razón para que la perdiera.

No es la primera vez que se envia una petición al Comité de los Servicios Armados del Senado para que devuelva postumamente a la doctora Walker la medalla, que es la mas alta distinción del pais por valor en combate.

El mes pasado la Junta del Ejército para la Corrección de los Expedientes Militares, junta revisora que actua en nombre del secretario del Ejército, Clifford L. Alexander Jr., celebró una audiencia para examinar el caso de la doctora Walker. El grupo envió su recomendación al secretario Alexander, si bien los portavoces del ejército se niegan a decir que se recomendó ni cuál será la decisión del secretario.

La medalla fue conferida a la doctora Walker por el Presidente Andrew Johnson el 11 de noviembre de 1865. Los generales William T. Sherman y George H. Thomas habían recomendado la presea y el Presidente Lincoln había firmado el testimonio poco antes de su muerte.

La doctora Walker fue cirujana por su papel como la primera cirujana del Ejército de Estados Unidos. La cita original se ha perdido y no se sabe que existan copias.

En 1917 la Junta de Acción Adversa de la Medalla de Honor revocó la medalla, arguyendo que había encontrado ambigüedades en la situación de la doctora Walker como miembro del ejército. El caso fue expuesto a Brooke por la señora Anne Walker, de Mt. Vernon, Virginia, quien se dice "escarba lejana" de la doctora Walker y cuya campaña para la restitución de la medalla le lleva casi todo su tiempo.

La doctora Mary perdió la medalla —dijo recientemente la señora Walker— solo porque se había adelantado cien años a su época y eso nadie lo podía aceptar.

La señora Walker quizás tenga razón. La doctora Walker fue sufragista toda su vida y partidaria de la reforma del vestido de la mujer. Desde la época de la Guerra Civil usó pantalones de hombre y capas de levita. Daba conferencias feministas ataviada con traje de gala masculino, con la Medalla de Honor pendiente de las anchas solapas.

Durante el decenio de... 1870, trabajó en la sede de las sufragistas en Washington, al lado de Susan B. Anthony, Lucy Stone, Mary Livermore y Belva Lockwood. Las mujeres se convirtieron en blanco favorito de los impugnadores. "Esa curioso entrometido". llamó un reportero de The New York Times a la doctora

Números aleatorios

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 04433 | 80674 | 24520 | 18222 | 10610 | 05794 |
| 60298 | 47829 | 72648 | 37414 | 75755 | 04717 |
| 67884 | 59651 | 67533 | 68123 | 17730 | 95862 |
| 89512 | 32155 | 51906 | 61662 | 64130 | 16683 |
| 32653 | 91895 | 12506 | 88535 | 36553 | 23757 |

1. Estimar el número medio de letras por renglón en el artículo de periódico que se adjunta, utilizando muestreo estratificado (2 estratos) y m.a.s. dentro de cada estrato. Una muestra de 10 renglones debe ser repartida con afijación proporcional.

   Calcular intervalos del 95% de confianza para la media en consideración.

   De manera muy breve vaya narrando en cada paso el procedimiento utilizado.

2. Uttilizando la misma muestra del ejercicio 1, estimar:

   a. La proporción de vocales en el artículo de periódico que se adjunta e intervalos de confianza del 95%.

   b. El número total de vocales en el artículo y su error estándar.

4

2. Una compañía desea estimar el número total de horas hombres perdidas, para un mes dado, a causa de accidentes entre sus empleados. Pero obreros, técnicos y administradores tienen distintas tasas de accidentes, por lo que se decide usar muestreo aleatorio estratificado considerando cada grupo un estrato separado. Información de años anteriores proporciona las varianzas para número de horas hombres perdidas por empleado en los 3 grupos y además se proporciona el tamaño de los estratos.

| I(obreros) | II(técnicos) | III(administradores) |
|---|---|---|
| $s_1^2 = 36$ | $s_2^2 = 25$ | $s_3^2 = 9$ |
| $N_1 = 132$ | $N_2 = 92$ | $N_3 = 27$ |

   a. Repartir en los estratos una muestra de 30 empleados con afijación proporcional.

   b. Estimar el número total de horas hombres perdidas durante el mes dado y establezca intervalos de confianza del 95% para este total. Utilice la siguiente información obtenida de una muestra de 18 obreros, 10 técnicos y 2 administradores.

| I(Obreros) | II(Técnicos) | III(Administradores) |
|---|---|---|
| 8 24 0 | 4 5 | 1 |
| 0 16 32 | 0 24 | 8 |
| 6 0 16 | 8 12 | |
| 7 4 4 | 3 2 | |
| 9 5 8 | 1 8 | |
| 18 2 0 | | |

3.

3. *Un muestrista tiene una población de N=5 elementos y lo máximo que puede tomar es una muestra de tamaño 2.*
*A continuación se indican los valores de las características para esas cinco unidades:*

| *Unidad i* | $y_i$ |
|---|---|
| *1* | *0* |
| *2* | *1* |
| *3* | *0* |
| *4* | *1* |
| *5* | *1* |

*El muestrista tiene completa libertad para utilizar muestreo aleatorio simple, muestreo estratificado, etc.*

a. *¿Qué plan le dará una varianza mínima para el el estimador de $\bar{Y}$?*
b. *¿Qué formato toma la varianza de $\bar{y}_{est}$ en el caso de afijación proporcional si se supone que la variabilidad por unidad en cada estrato es constante?*
c. *Proponga un estimador insesgado de la variabilidad por unidad en el caso b.*
d. *Proponga las fórmulas para la estimación de una proporción y su varianza en el caso de muestreo estratificado con muestreo aleatorio simple en cada estrato.*

1.- En una ciudad pequeña, para efecto de estimación del ingreso medio por varón adulto, se define cada manzana como un conglomerado. Al numerar las manzanas se encuentra que en total hay 415. De ellas se extrae una m.a.s. de 25 manzanas. Los resultados obtenidos se presentan en el cuadro siguiente.

a. Estime el ingreso medio por varón adulto en la ciudad y su e.e.
b. Estime el ingreso total de los varones adultos en la ciudad y su e.e.
c. Sabiendo que hay 2500 varones adultos en la ciudad, estime el ingreso total de los varones adultos en la ciudad y su e.e.

2.- En adición a la información sobre ingreso de varones adultos, se les pregunta si viven en casa propia o rentada. Los resultados se presentan en el mismo cuadro. Estime la proporción de varones adultos en la ciudad que viven en casa rentada y establezca su e.e.

| Conglomerado i | Nº de varones adultos $m_i$ | Ingreso total x congl. $y_i$ | No. de varones adultos en casas rentadas ($a_i$) |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 96,000 | 4 |
| 2 | 12 | 121,000 | 7 |
| 3 | 8 | 42,000 | 1 |
| 4 | 5 | 65,000 | 3 |
| 5 | 6 | 52,000 | 3 |
| 6 | 6 | 40,000 | 4 |
| 7 | 7 | 75,000 | 4 |
| 8 | 5 | 65,000 | 2 |
| 9 | 8 | 45,000 | 3 |
| 10 | 3 | 50,000 | 2 |
| 11 | 2 | 85,000 | 1 |
| 12 | 6 | 43,000 | 3 |
| 13 | 5 | 54,000 | 2 |
| 14 | 10 | 49,000 | 5 |
| 15 | 9 | 53,000 | 4 |
| 16 | 3 | 50,000 | 1 |
| 17 | 6 | 32,000 | 4 |
| 18 | 5 | 22,000 | 2 |
| 19 | 5 | 45,000 | 3 |
| 20 | 4 | 37,000 | 1 |
| 21 | 6 | 51,000 | 3 |
| 22 | 8 | 30,000 | 3 |
| 23 | 7 | 39,000 | 4 |
| 24 | 3 | 47,000 | 0 |
| 25 | 8 | 41,000 | 3 |
| | $\sum m_i = 151$ | $\sum y_i = 1,329,000$ | |

3.- El gerente de una editorial periodística desea estimar el número promedio de periódicos comprados por casa en una comunidad dada. Los costos de transportes de casa a casa son considerables, por lo que las 4000 casas en la comunidad se listan en 400 conglomerados geográficos de 10 casas cada uno, y se selecciona una m.a.s. de 4 conglomerados. Los resultados de la entrevistas son:

| Conglom. | No. de periódicos | | | | | | | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 4 | 1 | 1 | 19 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 3 | 1 | 4 | 1 | 1 | 2 | 20 |
| 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 16 |
| 4 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 5 | 1 | 2 | 3 | 1 | 20 |

Estime el número medio de periódico por casa en la comunidad y obtenga su error estandar.

4. En una estratificación con dos estratos, los valores de $W_h$ y $S_h$ son como sigue:

| Estrato | $W_h$ | $S_h$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.8 | 2 |
| 2 | 0.2 | 4 |

Calcule los tamaños de muestra $n_1$ y $n_2$ en los dos estratos necesarios para satisfacer las siguientes condiciones. Cada caso requiere un cálculo separado (ignore el cpf).

a. El error estándar del estimador de la media de la población $\bar{y}_{est}$ debe ser 0.1 y el tamaño de la muestra total $n = n_1 + n_2$ debe ser minimizado.

b. El error estándar de la media estimada de cada estrato debe ser de 0.1.

5. Cuatro recipientes, que contienen un número igual (y muy grande) de repuestos representan cuatro turnos de producción de una fábrica. El número de unidades correspondientes a muestras tomadas al azar de cada recipiente y el número de defectuosos encontrados se incluyen a continuación:

| Recipiente $h$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $n_h$ | 200 | 200 | 200 | 200 |
| $a_h$ | 4 | 2 | 10 | 8 |

a. Compute una estimación insesgada de la proporción de defectuosos en la población total (4 recipientes).

b. Compute una estimación de la varianza de su estimación en (a).

6. Dada una población de N = 500 recipientes con 200 unidades cada uno y una muestra de n = 5 recipientes., se obtiene la siguiente información con $p_i$, proporción de defectuosos en el recipiente i de la muestra:

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{2}{200}$ | $\frac{3}{200}$ | $\frac{8}{200}$ | $\frac{1}{200}$ | $\frac{2}{200}$ |

a. Estime el porcentaje de defectuosos para ese período de producción y la varianza de su estimación.
b. Si en la situación anterior se toma una muestra al azar de tamaño 2 en cada uno de los 500 recipientes y $a_i$ indicase el número de defectuosos encontrados en cada recipiente (i = 1,..,500), proponga Ud. un estimador para el porcentaje de defectuosos y una expresión para la varianza de su estimador.
c. ¿Cuál de los dos esquemas estimaría más adecuado?

4. En una ciudad pequeña se desea estimar el número medio de alumnos, por salón de clase, en las escuelas primarias. No se dispone de un listado de salones, pero se cuenta con un listado de 500 escuelas. La investigación se realiza considerando cada escuela un conglomerado y se selecciona una muestra de 25 escuelas y se obtienen los siguientes resultados:

| ESCUELA (i) | No. DE SALONES POR ESCUELA ($m_i$) | No. TOTAL DE ALUMNOS por escuela ($y_i$). |
|---|---|---|
| 1 | 12 | 520 |
| 2 | 6 | 310 |
| . | . | . |
| . | . | . |
| 25 | 8 | 380 |
| | 275 | 10500 |

Además $\sum y_i^2 = 2,100,000$ $\sum m_i^2 = 3050$ $\sum y_i m_i = 115,500$

Estimar:

a. El número medio de alumnos por salón de clase.
b. La varianza del número medio de alumnos por salón de clase.
c. Intervalos de confianza del 95% para el inciso a.
d. Si se sabe que el número total de salones es de 6000 en toda la población, estimar el número total de alumnos en la ciudad.
e. La varianza del inciso d.
f. El número medio de alumnos por escuela y su desviación estándar.
g. Si no se conoce el número total de salones en la comunidad, estimar el número total de alumnos en la ciudad y su error estándar.

* Extraído del libro " Técnicas de Muestreo", de William Cochran, Ed. CECSA.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

FUNDAMENTOS DE LAS TECNICAS DE MUESTREO ESTADISTICO

# CONGLOMERADOS

M. EN C. ADELA ABAD CARRILLO

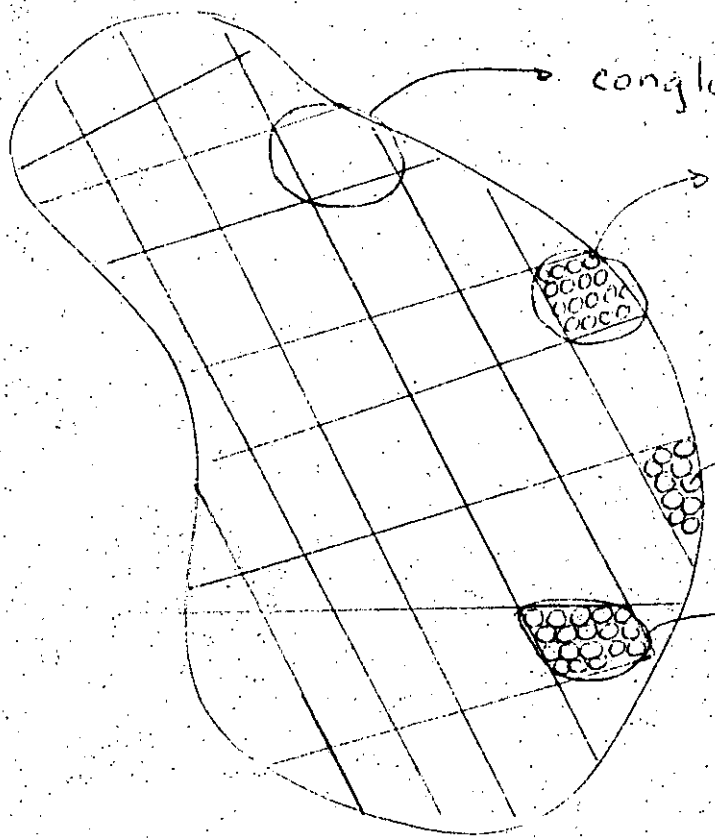
JULIO, 1985

# Muestreo por Conglomerados

Conceptos
- elemento
- unidad muestral
- conglomerado
- marco de referencia
- ventajas

Notación

Población : N conglomerados



conglomerado

$M_i$ nº de elementos del conglomerado i-ésimo

$M = \sum_{i=1}^{N} M_i$ total de elem en la pobl.

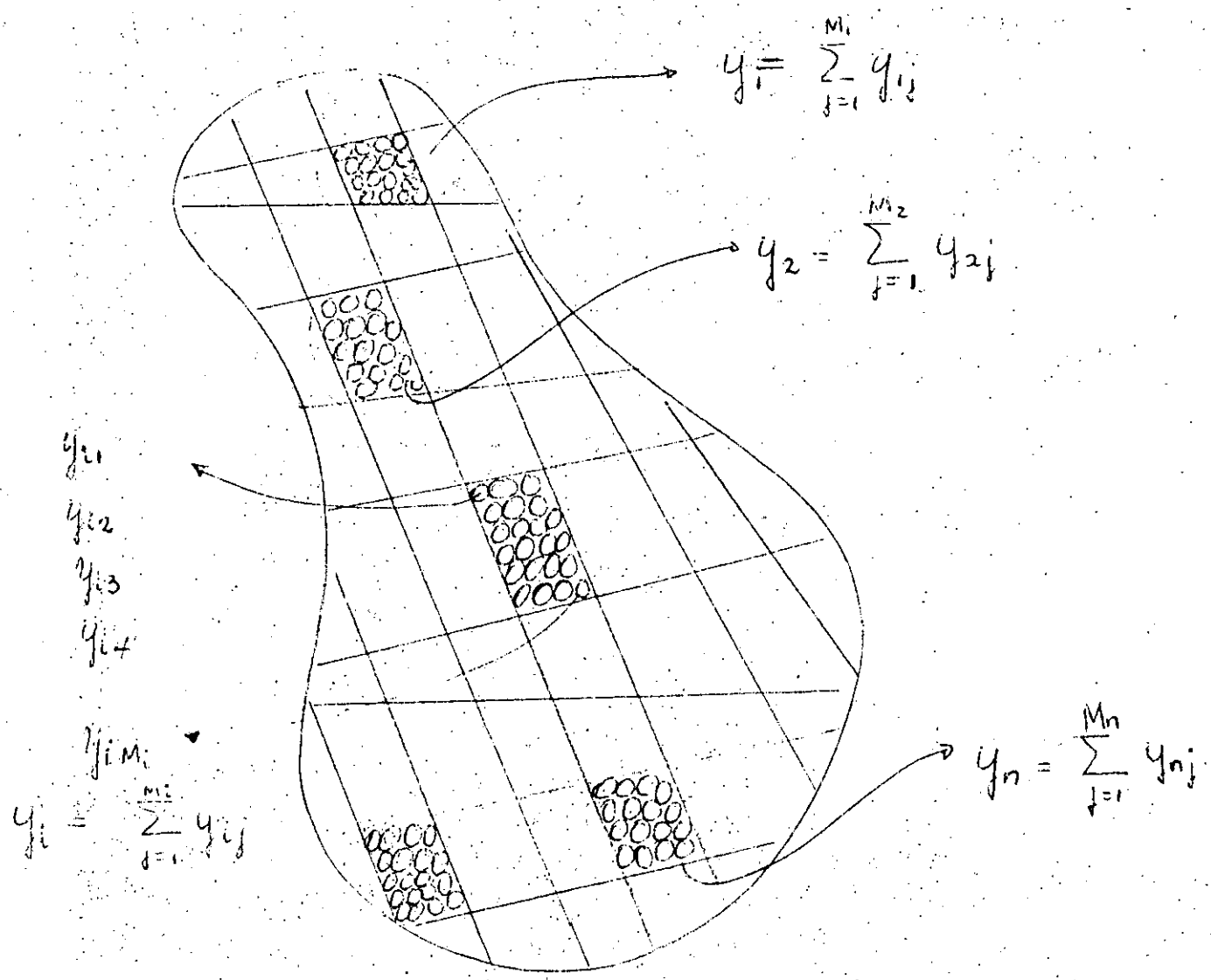
$y_{ij}$ característica del elem. j-ésimo del conglomerado i-ésimo

$y_i = \sum_{j=1}^{M_i} y_{ij}$ característica del congl. i-ésimo

$\bar{M} = \frac{M}{N}$ tamaño medio de los conglomerados en la población.

# Método de Selección en Conglomerados.

- Marco de referencia de conglomerados.
- Se selecciona una muestra de n conglomerados.




Los conglomerados que se seleccionan en la muestra se investigan totalmente.

- Parámetros a estimar:
  - Total de la característica de los elementos en la población $Y$
  - Media por unidad $\bar{Y}_U = \frac{Y}{N}$
  - Media por elemento $\bar{Y}$

## CA. A: Conglomerados de tamaños desiguales

### ESTIMADORES INSESGADOS y LAS ESTIMACIONES DE SUS VARIANZAS

- MEDIA por UNIDAD (conglomerado) $\hat{\bar{Y}} = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ donde $y_i = \sum_{j=1}^{M_i} y_{ij}$

$$v(\hat{\bar{Y}}) = v(\bar{y}) = \frac{1-f}{n}\,\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

- TOTAL $\hat{Y} = N\bar{y}$ $\qquad v(\hat{Y}) = N^2 v(\bar{y})$

- MEDIA por elemento $\hat{\bar{\bar{Y}}} = \bar{\bar{y}} = \frac{\hat{Y}}{M} = \frac{1}{\bar{M}n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

$$v(\hat{\bar{\bar{Y}}}) = v(\bar{\bar{y}}) = \frac{1-f}{\bar{M}^2 n}\,\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

### ESTIMADORES DE RAZÓN

La variable auxiliar es $M_i$ tamaño del conglomerado.

- Media por elemento $\hat{\bar{\bar{Y}}}_R = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i}$, $v(\hat{\bar{\bar{Y}}}_R) = \frac{1-f}{n\bar{M}^2}\,\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{\bar{y}}_R M_i)^2}{n-1}$

- Total $\hat{Y}_R = M\,\hat{\bar{\bar{Y}}}_R$, $v(\hat{Y}_R) = M^2 v(\hat{\bar{\bar{Y}}}_R)$

- Proporción $\hat{P}_R = p_R = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i}$, $a_i$: nº de elementos del conglom. $i$-ésimo que pertenecen a la clase de interés.

$$v(p_R) = \frac{1-f}{n\bar{M}^2}\,\frac{\sum a_i^2 - 2p_R\sum a_i M_i + p_R^2 \sum M_i^2}{n-1}, \qquad \bar{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i}{n}$$

## CASO B  Conglomerados de tamaños iguales

Población : N conglomerados  $M' = \bar{M}$ tamaños de los conglomerados
Muestra : n conglomerados  $M = NM'$ total de elem. en la población.

$$y_i = \sum_{j=1}^{M'} y_{ij}$$

Estimadores

- Media por unidad (conglomerado) : $\hat{\bar{Y}} = \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$ , $v(\bar{y}) = \frac{1-f}{n} \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1}$

- Total : $\hat{Y} = N\bar{y}$ , $v(\hat{Y}) = N^2 v(\bar{y})$

- Media por elemento : $\hat{\bar{\bar{Y}}} = \frac{\sum y_i}{nM'}$ , $v(\hat{\bar{\bar{Y}}}) = \frac{1}{(M')^2} v(\bar{y})$

- Proporción : $\hat{P} = p = \frac{\sum a_i}{n \cdot M'}$

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

# FUNDAMENTOS DE LAS TECNICAS DE MUESTREO ESTADISTICO

## EJEMPLO

M. EN C. ADELA ABAD CARRILLO

JULIO, 1985

Una empresa cuenta con los siguientes datos de sus empleados:

| Trabajador | Base/Confianza | Ingreso(miles) | Estado Civil | Gasto en transporte |
|---|---|---|---|---|
| 1 | b | 30 | s | 4 |
| 2 | c | 36 | c | 6 |
| 3 | c | 40 | s | 6 |
| 4 | c | 38 | c | 7 |
| 5 | b | 28 | c | 8 |
| 6 | c | 40 | c | 9 |
| 7 | c | 39 | s | 6 |
| 8 | b | 30 | s | 5 |
| 9 | b | 28 | c | 4 |
| 10 | c | 45 | c | 9 |
| 11 | c | 50 | c | 8 |
| 12 | b | 29 | s | 3 |
| 13 | c | 55 | c | 8 |
| 14 | c | 45 | c | 7 |
| 15 | b | 40 | s | 8 |
| 16 | b | 38 | c | 6 |
| 17 | b | 39 | c | 5 |
| 18 | b | 35 | s | 6 |
| 19 | c | 48 | s | 8 |
| 20 | b | 49 | c | 5 |
| 21 | c | 53 | c | 8 |
| 22 | c | 56 | c | 9 |
| 23 | b | 36 | s | 6 |
| 24 | b | 40 | c | 5 |
| 25 | b | 43 | s | 6 |
| 26 | b | 39 | s | 5 |
| 27 | c | 59 | c | 9 |
| 28 | b | 62 | c | 10 |
| 29 | b | 46 | c | 6 |
| 30 | c | 54 | s | 7 |
| 31 | c | 43 | c | 4 |
| 32 | b | 38 | c | 8 |
| 33 | b | 40 | c | 5 |
| 34 | c | 48 | c | 8 |
| 35 | b | 43 | s | 6 |
| 36 | b | 51 | c | 5 |
| 37 | c | 58 | c | 8 |
| 38 | c | 60 | c | 7 |
| 39 | b | 30 | s | 3 |
| 40 | b | 40 | s | 5 |
| 41 | b | 41 | c | 6 |
| 42 | b | 38 | c | 4 |
| 43 | b | 39 | s | 5 |
| 44 | c | 45 | c | 6 |
| 45 | c | 58 | c | 8 |
| 46 | b | 43 | s | 5 |
| 47 | b | 38 | s | 4 |
| 48 | c | 60 | c | 8 |
| 49 | c | 55 | c | 6 |
| 50 | b | 46 | c | 6 |
| 51 | b | 47 | s | 6 |
| 52 | b | 40 | s | 4 |
| 53 | b | 50 | c | 6 |

Seleccionar una muestra aleatoria simple de tamaño 10

Estimar:

a. Estimar el gasto medio en transporte por empleado y su correspondiente error estándar.

b. La proporción de trabajadores de base y intervalos de confianza del 95%.

c. El total de los ingresos de los trabajadores y su varianza.

d. El total de trabajadores de base en la empresa, su error estándar.

e. El ingreso medio de los trabajadores.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

FUNDAMENTOS DE LAS TECNICAS DE MUESTREO ESTADISTICO

# BIBLIOGRAFIA

JULIO, 1985

Palacio de Mineria Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

BIBLIOGRAFIA


1. Mendenhall, W. y Scheaffer, R. L., "Mathematical statistics with applications", Duxbury Press (1973)

2. Marascuilo, L. A. y Mc Sweeney, M., "Nonparametric and distribution-free methods for the social sciences", Brooks/Cole Publ. Co. (1977)

3. Blake, I. F., "An introduction to applied probability" John Wiley (1979)

4. Ott, L., "An introduction to statistical methods and data analysis", Duxbury Press (1977)

5. Afifi, A. A. y Azen, S. P., "Statistical analysis", Academic Press (1979)

6. Cassel, C. M., Särndal, C. E. y Wretman, J. H., "Foundations of inference in survey sampling", John Wiley (1977)

7. Davies, O. L., "The design and analysis of industrial experiments", Longman Group Limited (1979)

8. Timm, N. H., "Multivariate analysis with applications in education and psychology", Brook/Cole Publ. Co.

9. Spatz, Ch. y Johnston, J. O., "Basic statistics: tales of distributions" Brooks/Cole Publ. Co.

10. Kreyszig, E., "Introducción a la estadística matemática", Limusa-Wiley (1973)

11. Larson, H. J., "Introducción a la teoría de probabilidades e inferencia estadística", Limusa-Wiley (1978)

12. Rascón, O. A., "Introducción a la Estadística Descriptiva", Vols. I y II, Ed. UNAM

13. Rascón, O. A., "Introducción a la Teoría de Probabilidades", Ed. UNAM

14. Bair, D., "Experimentation: an introduction to measurement theory and experiment design", Prentice Hall (1962)

15. Benjamin, J., "Probability, statistics, and decision for civil engineers", McGraw-Hill (1970)

16. Bruning, J. and B. Kintz, "Computational handbook of statistics", Scott, Foreman and Co. (1968)

17. Cochran, W., "Experimental designs", Wiley (1957)

18. Dubes, R., "the theory of applied probability", Prentice-Hall (1968)

19. Feller, W., "Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones", Limusa-Wiley (1973)

20. Freund, J., "Mathematical statistics", Prentice Hall (1971)

21. Hays, W., "Statistics, probability, inference and decisions", Holt-Rinehart and Winston (1970)

22. Kish, L., "Muestreo de encuestas", Trillas (1972)

23. Lindgren, B., "Statistical theory", Macmillan (1968)

24. Van der Gerr, J., "Introduction to multivariate analysis for the social sciences", Freeman (1971)

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

FUNDAMENTOS DE LAS TECNICAS DE MUESTREO ESTADISTICO

# WHAT IS A SURVEY?

ROBERT FERBER,
PAUL SHEATSLEY
ANTHONY RURNER
JOSEPH WAKSBERG

JULIO, 1985

# What Is A Survey?

By Robert Ferber, Chair
Paul Sheatsley
Anthony Turner
Joseph Waksberg

Subcommittee of the Section on Survey Research Methods

**American Statistical Association**
**Washington, D.C.**

2

*This publication is available free upon request, in single copies. For multiple copy orders a small per-copy charge is made. For further information write to the American Statistical Association, 806 Fifteenth Street, N.W., Washington, D.C. 20005.* 

# Preface

People are accustomed to seeing the results of surveys reported in the daily press, incorporated in advertising claims, and mentioned on numerous occasions by political analysts, social critics, and economic forecasters. Much less frequent, however, is any discussion of the reliability of these surveys or what is involved in carrying them out. The wealth of reported information may easily lull the user into assuming that surveys are easy to undertake, and to overlook the many steps involved in a properly-conducted survey. If technical issues are recognized, there is a frequent tendency to assume that they should be safely left to the survey expert.

In fact, many of the surveys that appear in the daily press are conducted under great time pressure and with insufficient allowance for the many different aspects of the process that need to be controlled. Yet, unless the reader of these survey results is aware of what is involved in a survey, and what quality controls are needed, s(he) is unable to form any opinion of the confidence to be placed in the results, and usually is not even in a position to know what questions to ask about such surveys.

In an effort to fill this gap, the Section on Survey Research Methods of the American Statistical Association appointed a committee to prepare a brochure that would describe survey operations without using technical terminology, and be understandable to interested persons not trained in statistics. The result is the present brochure which, it is hoped, will promote a better understanding of what is involved in carrying out a sample survey, and aspects that have to be taken into account in evaluating the results of surveys.

The American Statistical Association is pleased to publish the report in the hope and expectation that it will prove useful to a wide readership. The association is fortunate to have had four such able statisticians as Robert Ferber, Professor of Economics and Business, Survey Research Laboratory, University of Illinois; Paul Sheatsley, Survey Director, National Opinion Research Center, University of Chicago; Anthony Turner, Chief of International Mathematical-Statistical Staff, Statistical Methods Division, U.S. Bureau of the Census; and Joseph Waksberg, Vice President, Westat, Inc., form the committee that undertook the work. It thanks them for their efforts.

Margaret E. Martin, President
American Statistical Association
1980

5

# Contents


Introduction ..... 1

Characteristics of Surveys
- The Need ..... 3
- Who Does Surveys? ..... 4
- Types of Surveys ..... 6
- What Sort of People Work on Surveys? ..... 7
- Are Responses Confidential? ..... 8

How a Survey Is Carried Out
- Designing a Survey ..... 9
- Sampling Aspects ..... 11
- Conducting a Survey ..... 13
- Shortcuts to Avoid ..... 14

Using the Results of a Survey
- How Good is the Survey? ..... 16
- Sources of Errors ..... 17

Budgeting a Survey ..... 20

Where to Get More Information ..... 24

# Introduction

The growing popularity of surveys for throwing light on different problems has led to a tendency to overlook the fact that surveys involve many technical problems. Too many surveys seem to be conducted more or less on an ad hoc basis, with the result that the GIGO (garbage in, garbage out) principle is brought into play. This brochure seeks to help the non-statistician to avoid this danger, by providing a nontechnical introduction to sample surveys of human populations and the many different ways in which such surveys are used.

The principal focus is on the design of a survey and on the collection of survey data—two areas in which the many intricacies involved are frequently overlooked. However, attention is also given to the need for proper evaluation of survey data, an essential prerequisite for assessing the value of a survey as well as a basis for proper analysis of the data. (Analysis of survey data is a major topic in itself, and is not covered here.)

This brochure can be used in a variety of ways, such as:

- By statisticians and survey agencies, to give prospective clients some appreciation of what is involved in a sample survey.
- By research executives, to help their nonresearch counterparts understand how surveys are conducted.
- By instructors in introductory social science and other courses, to give students a brief introduction to sample surveys.

• b, international agencies and others advising in other countries, to give government officials in these other countries an understanding of the various steps of a sample survey.

It should be stressed that this brochure is *not* intended to provide students of statistics or prospective specialists in the field with a comprehensive understanding of survey methods. For this purpose, the books listed at the end of the brochure need to be used, plus many of the specialized sources dealing with the techniques of survey design and data collection. This brochure is meant for nonspecialists, for the users of survey data. If it leads them to have a better appreciation of what is involved in a sample survey, its purpose will have been served.



# Characteristics of Surveys

## The Need

Any observation or investigation of the facts about a situation may be called a survey. But today the word is most often used to describe a method of gathering information from a number of individuals, a "sample," in order to learn something about the larger population from which the sample has been drawn. Thus, a sample of voters is surveyed in advance of an election to determine how the public perceives the candidates and the issues. A manufacturer makes a survey of the potential market before introducing a new product. A government agency commissions a survey to gather the factual information it needs in order to evaluate existing legislation or draft new legislation. For example, what medical care do people receive, and how is it paid for? Who uses food stamps? How many people are unemployed?

It has been said that the United States is no longer an industrial society but an "information society." That is, our major problems and tasks no longer focus merely on the production of the goods and services necessary to our survival and comfort. Rather, our major problems and tasks today are those of organizing and managing the incredibly complex efforts required to meet the needs and wishes of nearly 220 million Americans. To do this requires a prompt and accurate flow of information on preferences, needs and behavior. It is in response to this critical need for information on the part of the government, business and social institutions that so much reliance is placed upon surveys.

Surveys come in many different forms and have a wide variety of purposes, but they do have certain characteristics in common. Unlike a census, they gather information from only a small sample of people (or farms, businesses or other units, depending on the purpose of the study). In a bonafide survey, the sample is not selected haphazardly or only from persons who volunteer to participate. It is scientifically chosen so that each individual in the population has a known chance of selection. In this way, the results can be reliably projected to the larger public.

Information is collected by means of standardized questions so that every individual surveyed responds to exactly the same question. The survey's intent is not to describe the particular individuals who by chance are part of the sample, but to obtain a statistical profile of the population. Individual respondents are never identified and the survey's results are presented in the form of summaries, such as statistical tables and charts.

The sample size required for a survey will depend on the reliability needed which, in turn, depends on how the results will be used. Consequently, there is no simple rule for sample size that can be used for all surveys. However, analysts usually find that a moderate sample size is sufficient for most needs. For example, the well-known national polls generally use samples of about 1,500 persons to reflect national attitudes and opinions. A sample of this size produces accurate estimates even for a country as large as the United States with a population of over 200 million.

When it is realized that a properly selected sample of only 1,500 individuals can reflect various characteristics of the total population within a very small margin of error, it is easy to understand the value of surveys in a complex society such as ours. They provide a speedy and economical means of determining facts about our economy and people's knowledge, attitudes, beliefs, expectations, and behavior.

## Who Does Surveys?

We all know of the public opinion polls which are reported in the press and broadcast media. The Gallup Poll and the Harris Survey issue reports periodically, describing national public opinion on a wide range of current issues. State polls and metropolitan area polls, often supported by a local newspaper or TV station, are reported regularly in many localities. The major broadcasting networks and national news magazines also conduct polls and report their findings.

But the great majority of surveys are not exposed to public



view. The reason is that, unlike the public opinion polls, most surveys are directed to a specific administrative or commercial purpose. The wide variety of issues with which surveys deal is illustrated by the following listing of actual uses:

1. The U.S. Department of Agriculture conducted a survey to find out how poor people use food stamps.

2. Major TV networks rely on surveys to tell them how many and what types of people are watching their programs.

3. Auto manufacturers use surveys to find out how satisfied people are with their cars.

4. The U.S. Bureau of the Census conducts a survey every month to obtain information on employment and unemployment in the nation.

5. The National Center for Health Statistics sponsors a survey every year to determine how much money people are spending for different types of medical care.

6. Local housing authorities make surveys to ascertain satisfaction of people in public housing with their living accommodations.

7. The Illinois Board of Higher Education surveys the interest of Illinois residents in adult education.

8. Local transportation authorities conduct surveys to acquire information on people's commuting and travel habits.

9. Magazine and trade journals utilize surveys to find out what their subscribers are reading.

10. Surveys are used to ascertain what sort of people use our national parks and other recreation facilities.

Surveys of human populations also provide an important source of basic social science knowledge. Economists, psychologists, political scientists and sociologists obtain foundation or government grants to study such matters as income and expenditure patterns among households, the roots of ethnic or racial prejudice, comparative voting behavior, or the effects of employment of women on family life. (Surveys are also made of nonhuman populations, such as of animals, soils and housing; they are not discussed here, although many of the principles are the same.)

Moreover, once collected, survey data can be analyzed and reanalyzed in many different ways. Data tapes with identification

of individuals removed can be made available for analysis by community groups, scientific researchers and others.

## Types of Surveys

Surveys can be classified in a number of ways. One dimension is by size and type of sample. Many surveys study the total adult population, but others might focus on special population groups: physicians, community leaders, the unemployed, or users of a particular product or service. Surveys may be conducted on a national, state or local basis, and may seek to obtain data from a few hundred or many thousand people.

Surveys can also be classified by their method of data collection. Thus, there are mail surveys, telephone surveys, and personal interview surveys. There are also newer methods of data collection by which information is recorded directly into computers. This includes measurement of TV audiences carried out by devices attached to a sample of TV sets which automatically record in a computer the channels being watched. Mail surveys are seldom used to collect information from the general public because names and addresses are not often available and the response rate tends to be low, but the method may be highly effective with members of particular groups; for example, subscribers to a specialized magazine or members of a professional association. Telephone interviewing is an efficient method of collecting some types of data and is being increasingly used. A personal interview in a respondent's home or office is much more expensive than a telephone survey but is necessary when complex information is to be collected.

Some surveys combine various methods. Survey workers may use the telephone to "screen" for eligible respondents (say, women of a particular age group) and then make appointments for a personal interview. Some information, such as the characteristics of the respondent's home, may be obtained by observation rather than questioning. Survey data are also sometimes obtained by self-administered questionnaires filled out by respondents in groups, e.g., a class of school children or a group of shoppers in a central location.

One can further classify surveys by their content. Some surveys focus on opinions and attitudes (such as a pre-election survey of voters), while others are concerned with factual characteristics or behavior (such as a survey of people's health, housing or transportation habits). Many surveys combine questions of both types. Thus, a respondent will be asked if s(he) has heard or read about an



issue, what s(he) knows about it, his (her) opinion, how strongly s(he) feels and why, interest in the issue, past experience with it, and also certain factual information which will help the survey analyst classify the responses (such as age, sex, marital status, occupation, and place of residence).

The questions may be open-ended ("Why do you feel that way?") or closed ("Do you approve or disapprove?"); they may ask the respondent to rate a political candidate or a product on some kind of scale; they may ask for a ranking of various alternatives. The questionnaire may be very brief—a few questions taking five minutes or less, or it can be quite long—requiring an hour or more of the respondent's time. Since it is inefficient to identify and approach a large national sample for only a few items of information, there are "omnibus" surveys which combine the interests of several clients in a single interview. In such surveys, the respondent will be asked a dozen questions on one subject, half a dozen more on another subject, and so on.

Because changes in attitude or behavior cannot be reliably ascertained from a single interview, some surveys employ a "panel design," in which the same respondents are interviewed two or more times. Such surveys are often used during election campaigns, or to chart a family's health or purchasing pattern over a period of time. They are also used to trace changes in behavior over time, as with the social experiments that study changes by low-income families in work behavior in response to an income maintenance plan.

## What Sort of People Work on Surveys?

The survey worker best known to the public is the interviewer who calls on the phone, appears at the door, or stops people at a shopping center. Though survey interviewing may occasionally require long days in the field, it is normally part-time occasional work and is thus well suited for individuals who do not seek full-time employment or who wish to supplement their regular income. Previous experience is not usually required for an interviewing job. Most research companies will provide their own basic training for the task. The main requirements are an ability to approach strangers, to persuade them to participate in the survey, and to conduct the interview in exact accordance with instructions.

Behind the interviewers are the in-house research staff who design the survey, determine the sample design, develop the questionnaire, supervise the data collection, carry out the clerical and computer operations necessary to process the completed inter-

views, analyze the data, and write the reports. In most survey research agencies, the senior people will have taken courses in survey methods at the graduate level and will hold advanced degrees in sociology, statistics, marketing, or psychology, or they will have the equivalent in business experience. Middle-level supervisors and research associates frequently have similar academic backgrounds, or they have advanced out of the ranks of clerks, interviewers or coders on the basis of their competence and experience.

### Are Responses Confidential?

The privacy of the information supplied by survey respondents is of prime concern to all reputable survey organizations. At the U.S. Bureau of the Census, for example, the confidentiality of the data collected is protected by law (Title 13 of the U.S. Code). In Canada, the Statistics Act guarantees the confidentiality of data collected by Statistics Canada, and other countries have similar safeguards. Also, a number of professional organizations that rely on survey methods have codes of ethics that prescribe rules for keeping survey responses confidential. The recommended policy for survey organizations to safeguard such confidentiality includes:

1. Using only code numbers for the identity of a respondent on a questionnaire, and keeping the code separate from that of the questionnaires.

2. Refusing to give names and addresses of survey respondents to anybody outside of the survey organization, including clients.

3. Destroying questionnaires and identifying information about respondents after the responses have been put onto computer tape.

4. Omitting the names and addresses of survey respondents from computer tapes used for analysis.

5. Presenting statistical tabulations by broad enough categories that individual respondents cannot be singled out.



# How a Survey Is Carried Out

As noted earlier, a survey usually has its beginnings when an individual or institution is confronted with an information need and there are no existing data which suffice. A politician may wish to tap prevailing voter opinions in his district about a proposal to build a superhighway through the county. A government agency may wish to assess the impact on the primary recipients and their families of one of its social welfare programs. A university researcher may wish to examine the relationship between actual voting behavior and expressed opinion on some political issue or social concern.

### Designing a Survey

Once the information need has been identified and a determination made that existing data are inadequate, the first step in planning a survey is to lay out the objectives of the investigation. This is generally the function of the sponsor of the inquiry. The objectives should be as specific, clear-cut and unambiguous as possible. The required accuracy level of the data has a direct bearing on the overall survey design. For example, in a sample survey whose main purpose is to estimate the unemployment rate for a city, the approximate number of persons to be sampled can be estimated mathematically when one knows the amount of sampling error that can be tolerated in the survey results.

Given the objectives, the methodology for carrying out the survey is developed. A number of interrelated activities are involved. Rules must be formulated for defining and locating eligible respondents, the method of collecting the data must be decided

upon, a questionnaire must be designed and pretested, procedures must be developed for minimizing or controlling response errors, appropriate samples must be designed and selected, interviewers must be hired and trained (except for surveys involving self-administered questionnaires), plans must be made for handling nonresponse cases, and tabulation and analysis must be performed.

Designing the questionnaire represents one of the most critical stages in the survey development process, and social scientists have given a great deal of thought to issues involved in questionnaire design. The questionnaire links the information need to the realized measurement.

Unless the concepts are clearly defined and the questions unambiguously phrased, the resulting data are apt to contain serious biases. In a survey to estimate the incidence of robbery victimization, for example, one might want to ask, "Were you robbed during the last six months?" Though apparently straightforward and clearcut, the question does present an ambiguous stimulus. Many respondents are unaware of the legal distinction between robbery (involving personal confrontation of the victim by the offender) and burglary (involving breaking and entering but no confrontation), and confuse the two in a survey. In the National Crime Survey, conducted by the Bureau of the Census, the questions on robbery victimization do not mention "robbery." Instead, several questions are used which, together, seek to capture the desired responses by using more universally understood phrases that are consistent with the operational definition of robbery.

Designing a suitable questionnaire entails more than well-defined concepts and distinct phraseology. Attention must also be given to its length, for unduly long questionnaires are burdensome to the respondent, are apt to induce respondent fatigue and hence response errors, refusals, and incomplete questionnaires, and may contribute to higher nonresponse rates in subsequent surveys involving the same respondents. Several other factors must be taken into account when designing a questionnaire to minimize or prevent biasing the results and to facilitate its use both in the field and in the processing center. They include such diverse considerations as the sequencing of sections or individual questions in the document, the inclusion of check boxes or precoded answer categories versus open-ended questions, the questionnaire's physical size and format, and instructions to the respondent or to the interviewer on whether certain questions are to be skipped depending on response patterns to prior questions.

Selecting the proper respondent in a sample unit is a key ele-



ment in survey planning. For surveys where the inquiry is basically factual in nature, any knowledgeable person associated with the sample unit may be asked to supply the needed information. This procedure is used in the Current Population Survey, where the sample units are households and any responsible adult in a household is expected to be able to provide accurate answers on the employment-unemployment status of the eligible household members.

In other surveys, a so-called "household" respondent will produce erroneous and/or invalid information. For example, in attitude surveys it is generally accepted that a randomly chosen respondent from among the eligible household members produces a more valid cross section of opinion than does the nonrandomly selected household repondent. This is because a nonrandomly selected individual acting as household respondent is more likely to be someone who is at home during the day, and the working public and their attitudes would be underrepresented.

Another important feature of the survey planning process is devising ways to keep response errors and biases to a minimum. These considerations depend heavily on the subject matter of the survey. For example, memory plays an important role in surveys dealing with past events that the respondent is expected to report accurately, such as in a consumer expenditure survey. In such retrospective surveys, therefore, an appropriate choice of reference period must be made so that the respondent is not forced to report events that may have happened too long ago to remember accurately. In general, attention must be given to whether the questions are too sensitive, whether they may prejudice the respondent, whether they unduly invade the respondent's privacy, and whether the information sought is too difficult even for a willing respondent to provide. Each of these concerns has an important bearing on the overall validity of the survey results.

## Sampling Aspects

Virtually all surveys that are taken seriously by social scientists and policy makers use some form of scientific sampling. Even the decennial Censuses of Population and Housing use sampling techniques for gathering the bulk of the data items, although 100 percent enumeration is used for the basic population counts. Methods of sampling are well-grounded in statistical theory and in the theory of probability. Hence, reliable and efficient estimates of a needed statistic can be made by surveying a carefully constructed sample

of a population, as opposed to the entire population, provided of course that a large proportion of the sample members give the requested information.

The particular type of sample used depends on the objectives and scope of the survey, including the overall survey budget, the method of data collection, the subject matter and the kind of respondent needed. A first step, however, in deciding on an appropriate sampling method is to define the relevant population. This target population can be all the people in the entire nation or all the people in a certain city, or it can be a subset such as all teenagers in a given location. The population of interest need not be people; it may be wholesale businesses or institutions for the handicapped or government agencies, and so on.

The types of samples range from simple random selection of the population units to highly complex samples involving multiple stages or levels of selection with stratification and/or clustering of the units into various groupings. Whether simple or complex, the distinguishing characteristics of a properly designed sample are that all the units in the target population have a known, nonzero chance of being included in the sample, and the sample design is described in sufficient detail to permit reasonably accurate calculation of sampling errors. It is these features that make it scientifically valid to draw inferences from the sample results about the entire population which the sample represents.

Ideally, the sample size chosen for a survey should be based on how reliable the final estimates must be. In practice, usually a trade-off is made between the ideal sample size and the expected cost of the survey. The complexity of a sample plan often depends on the availability of auxiliary information that can be used to introduce efficiencies into the overall design. For example, in a recent Federal Government survey on characteristics of health-care institutions, existing information about the type of care provided and the number of beds in each institution was useful in sorting the institutions into "strata," or groups by type and size, in advance of selecting the sample. The procedure permitted more reliable survey estimates than would have been possible if a simple random selection of institutions had been made without regard to size or type.

A critical element in sample design and selection is defining the source of materials from which a sample can be chosen. This source, termed the sampling frame, generally is a list of some kind, such as a list of housing units in a city, a list of retail establishments in a county or a list of students in a university. The sampling frame



can also consist of geographic areas with well-defined natural or artificial boundaries, when no suitable list of the target population exists. In the latter instance, a sample of geographic areas (referred to as segments) is selected and an interviewer canvasses the sample "area segments" and lists the appropriate units—households, retail stores or whatever—so that some or all of them can be designated for inclusion in the final sample.

The sampling frame can also consist of less concrete things, such as all possible permutations of integers that make up banks of telephone numbers, in the case of telephone surveys that seek to include unlisted numbers. The quality of the sampling frame—whether it is up-to-date and how complete—is probably the dominant feature for ensuring adequate coverage of the desired population.

## Conducting a Survey

Though a survey design may be well conceived, the preparatory work would be futile if the survey were executed improperly. For personal or telephone interview surveys, interviewers must be carefully trained in the survey's concepts, definitions, and procedures. This may take the form of classroom training, self-study, or both. The training stresses good interviewer techniques on such points as how to make initial contacts, how to conduct interviews in a professional manner and how to avoid influencing or biasing responses. The training generally involves practice interviews to familiarize the interviewers with the variety of situations they are likely to encounter. Survey materials must be prepared and issued to each interviewer, including ample copies of the questionnaire, a reference manual, information about the identification and location of the sample units, and any cards or pictures to be shown to the respondent.

Before conducting the interview, survey organizations frequently send an advance letter to the sample member explaining the survey's purpose and the fact that an interviewer will be calling soon. In many surveys, especially those sponsored by the Federal Government, information must be given to the respondent regarding the voluntary or mandatory nature of the survey, and how the answers are to be used.

Visits to sample units are scheduled with attention to such considerations as the best time of day to call or visit and the number of allowable callbacks for no-one-at-home situations. Controlling the quality of the field work is an essential aspect of good

survey practice. This is done in a number of ways, most often through observation or rechecking of a subsample of interviews by supervisory or senior personnel, and through office editing procedures to check for omissions or obvious mistakes in the data.

When the interviews have been completed and the questionnaires filled out, they must be processed in a form so that aggregated totals, averages or other statistics can be computed. This will involve clerical coding of questionnaire items which are not already precoded. Occupation and industry categorizations are typical examples of fairly complex questionnaire coding that is usually done clerically. Also procedures must be developed for coding open-ended questions and for handling items that must be transcribed from one part of the questionnaire to another.

Coded questionnaires are keypunched, entered directly onto tape so that a computer file can be created, or entered directly into the computer. Decisions may then be needed on how to treat missing data and "not answered" items.

Coding, keypunching and transcription operations are subject to human error and must be rigorously controlled through verification processes, either on a sample basis or 100 percent basis. Once a computer file has been generated, additional computer editing, as distinct from clerical editing of the data, can be accomplished to alter inconsistent or impossible entries, e.g., a six-year-old grandfather.

When a "clean" file has been produced, the survey data are in a form where analysts can specify to a computer programmer the frequency counts, cross-tabulations or more sophisticated methods of data presentation or computation that are needed to help answer the concerns outlined when the survey was initially conceived.

The results of the survey are usually communicated in publications and in verbal presentations at staff briefings or more formal meetings. Secondary analysis is also often possible to those other than the survey staff by making available computer data files at nominal cost.

## Shortcuts to Avoid

As we have seen, conducting a creditable survey entails scores of activities, each of which must be carefully planned and controlled. Taking shortcuts can invalidate the results and badly mislead the user. Four types of shortcuts that crop up often are failure to use a proper sampling procedure, no pretest of the field procedures, failure to follow up nonrespondents and inadequate quality control.



One way to ruin an otherwise well-conceived survey is to use a convenience sample rather than one which is based on a probability design. It may be simple and cheap, for example, to select a sample of names from a telephone directory to find out which candidate people intend to vote for. However, this sampling procedure could give incorrect results since persons without telephones or with unlisted numbers would have no chance to be reflected in the sample, and their voting preferences could be quite different from persons who have listed telephones. This is what happened with the *Literary Digest* presidential poll of 1936 when use of lists of telephone owners, magazine subscribers and car owners led to a prediction that President Roosevelt would lose the election.

A pretest of the questionnaire and field procedures is the only way of finding out if everything "works," especially if a survey employs a new procedure or a new set of questions. Since it is rarely possible to foresee all the possible misunderstandings or biasing effects of different questions and procedures, it is vital for a well-designed survey plan to include provision for a pretest. This is usually a small-scale pilot study to test the feasibility of the intended techniques or to perfect the questionnaire concepts and wording.

Failure to follow up nonrespondents can ruin an otherwise well-designed survey, for it is not uncommon for the initial response rate to most surveys to be under 50 percent. Plans must include returning to sample households where no one was home, attempting to persuade persons who are inclined to refuse and, in the case of mail surveys, contacting all or a subsample of the nonrespondents by telephone or personal visit to obtain a completed questionnaire. A low response rate does more damage in rendering a survey's results questionable than a small sample, since there is no valid way of scientifically inferring the characteristics of the population represented by the nonrespondents.

Quality control, in the sense of checking the different facets of a survey, enters in at all stages—checking sample selection, verifying interviews and checking the editing and coding of the responses, among other things. In particular, sloppy execution of the survey in the field can seriously damage the results. Without proper quality control, errors can occur with disastrous results, such as selecting or visiting the wrong household, failing to ask questions properly, or recording the incorrect answer. Insisting on proper standards in recruitment and training of interviewers helps a great deal, but equally important is proper review, verification and other quality control measures to ensure that the execution of a survey corresponds to its design.

# Using the Results of a Survey

## How Good is the Survey?

The statistics derived from a survey will rarely correspond exactly with the unknown truth. (Whether "true" values always exist is not important in the present context. For fairly simple measurements—the average age of the population, the amount of livestock on farms, etc.—the concept of a true value is fairly straightforward. Whether true values exist for measurements of such items as attitudes toward political candidates, I.Q.'s, etc., is a more complex matter.)

Fortunately, the value of a statistic does not depend on its being exactly true. To be useful, a statistic need not be exact, but it does need to be sufficiently reliable to serve the particular needs. No overall criterion of reliability applies to all surveys since the margin of error that can be tolerated in a study depends on the actions or recommendations that will be influenced by the data. For example, economists examining unemployment rates consider a change of 0.2 percent as having an important bearing on the United States economy. Consequently, in the official United States surveys used to estimate unemployment, an attempt is made to keep the margin of error below 0.2 percent. Conversely, there are occasions when a high error rate is acceptable. Sometimes a city will conduct a survey to measure housing vacancies to determine if there is a tight housing supply. If the true vacancy rate is very low, say one percent, survey results that show double this percentage will not do any harm; any results in the range of zero to two or



three percent will lead to the same conclusion—a tight housing market.

In many situations the tolerable error will depend on the kind of result expected. For example, during presidential elections the major television networks obtain data on election night from a sample of election precincts, in order to predict the election results early in the evening. In a state in which a large difference is expected (pre-election polls may indicate that one candidate leads by a substantial majority and is likely to receive 60 percent of the vote), even with an error of five or six percent it would still be possible to predict the winner with a high probability of being correct. A relatively small sample size may be adequate in such a state. However, much more precise estimates are required in states where the two candidates are fairly evenly matched and where, say, a 52–48 percent vote is expected.

Thus, no general rule can be laid down to determine the reliability that would apply to all surveys. It is necessary to consider the purpose of the particular study, how the data will be used, and the effect of errors of various sizes on the action taken based on the survey results. These factors will affect the sample size, the design of the questionnaire, the effort put into training and supervising the interview staff, and so on. Estimates of error also need to be considered in analyzing and interpreting the results of the survey.

## Sources of Errors

In evaluating the accuracy of a survey, it is convenient to distinguish two sources of errors: 1. sampling errors, and 2. nonsampling errors, including the effect of refusals and not-at-homes, respondents providing incorrect information, coding or other processing errors, and clerical errors in sampling.

### *Sampling errors*

Good survey practice includes calculation of sampling errors, which is possible if probability methods are used in selecting the sample. Furthermore, information on sampling errors should be made readily available to all users of the statistics. If the survey results are published, data on sampling errors should be included in the publication. If information is disseminated in other ways, other means of informing the public are necessary. Thus, it is not uncommon to hear television newscasters report on the size of sampling errors as

part c[illegible] results of some polling activity.

There are a number of ways of describing and presenting data on sampling errors so that users can take them into account. For example, in a survey designed to produce only a few statistics (such as the votes that the candidates for a particular office are expected to get), the results could be stated that Candidate A's votes are estimated at 57 percent with the error unlikely to be more than 3 percent, so that this candidate's votes are expected to fall in the range of 54-60 percent. Other examples can be found in most publications of the principal statistical agencies of the United States Government, such as the Bureau of the Census.

### *Nonsampling errors*

Unfortunately, unlike sampling errors, there is no simple and direct method of estimating the size of nonsampling errors. In most surveys, it is not practical to measure the possible effect on the statistics of the various potential sources of error. However, in the past 30 or 40 years, there has been a considerable amount of research on the kinds of errors that are likely to arise in different kinds of surveys. By examining the procedures and operations of a specific survey, experienced survey statisticians will frequently be able to assess its quality. Rarely will this produce actual error ranges, as for sampling errors. In most cases, the analyst can only state that, for example, the errors are probably relatively small and will not affect most conclusions drawn from the survey, or that the errors may be fairly large and inferences are to be made with caution.

Nonsampling errors can be classified into two groups—random types or errors whose effects approximately cancel out if fairly large samples are used, and biases which tend to create errors in the same direction and thus cumulate over the entire sample. With large samples, the possible biases are the principal causes for concern about the quality of a survey.

Biases can arise from any aspect of the survey operation. Some of the main contributing causes of bias are:

1. *Sampling operations.* There may be errors in sample selection, or part of the population may be omitted from the sampling frame, or weights to compensate for disproportionate sampling rates may be omitted.

2. *Noninterviews.* Information is generally obtained for only part of the sample. Frequently there are differences between the non-



interview population and those interviewed.

3. *Adequacy of respondent.* Sometimes respondents cannot be interviewed and information is obtained about them from others, but the "proxy" respondent is not always as knowledgeable about the facts.

4. *Understanding the concepts.* Some respondents may not understand what is wanted.

5. *Lack of knowledge.* Respondents in some cases do not know the information requested, or do not try to obtain the correct information.

6. *Concealment of the truth.* Out of fear or suspicion of the survey, respondents may conceal the truth. In some instances, this concealment may reflect a respondent's desire to answer in a way that is socially acceptable, such as indicating that s(he) is carrying out an energy conservation program when this is not actually so.

7. *Loaded questions.* The question may be worded to influence the respondents to answer in a specific (not necessarily correct) way.

8. *Processing errors.* These can include coding errors, data keying, computer programming errors, etc.

9. *Conceptual problems.* There may be differences between what is desired and what the survey actually covers. For example, the population or the time period may not be the one for which information is needed, but had to be used to meet a deadline.

10. *Interviewer errors.* Interviewers may misread the question or twist the answers in their own words and thereby introduce bias.

Obviously, each survey is not necessarily subject to all these sources of error. However, a good survey statistician will explore all of these possibilities. It is considered good practice to report on the percent of the sample that could not be interviewed, and as many of the other factors listed as practicable.

16

# Budgeting a Survey

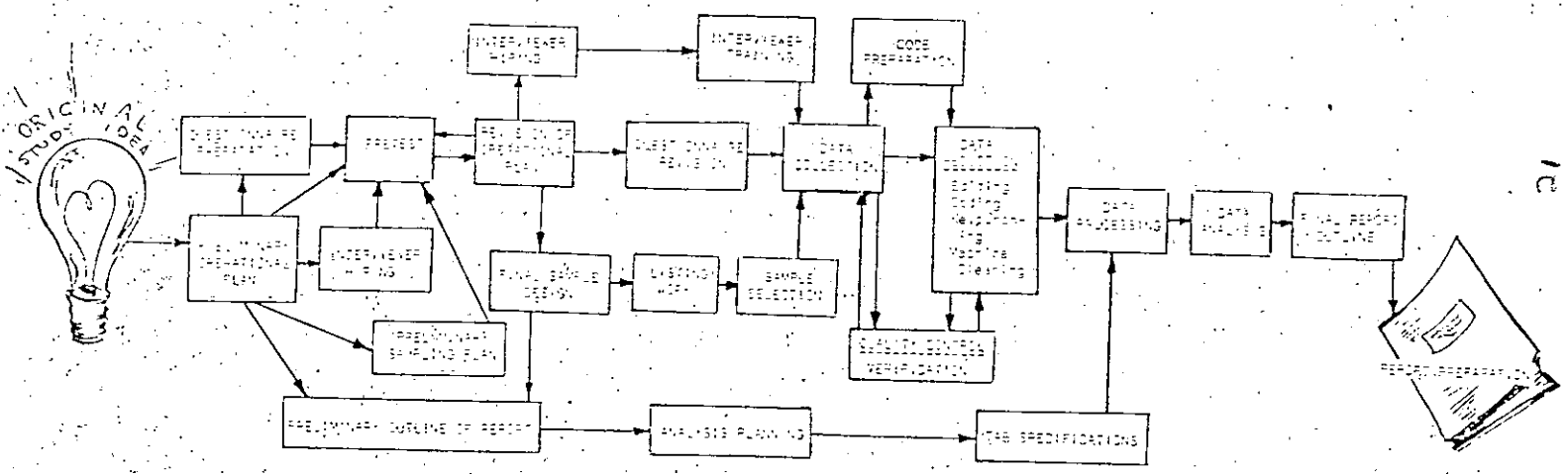
We have seen from the preceding sections that many different stages are involved in a survey. These include tasks such as planning, sample design, sample selection, questionnaire preparation, pretesting, interviewer hiring and training, data collection, data reduction, data processing, and report preparation. From a time point of view, these different stages are not necessarily additive since many of them overlap. This is illustrated in the attached diagram which portrays the sequence of steps involved in a typical personal interview survey. Some steps, such as sample design and listing housing units in the areas to be covered in the survey, can be carried out at the same time a questionnaire is being revised and put into final form. Although they are not additive, all of these steps are time-consuming, and one of the most common errors is to underestimate the time needed by making a global estimate without considering these individual stages.

How much time is needed for a survey? This varies with the type of survey and the particular situation. Sometimes a survey can be done in two or three weeks, if it involves a brief questionnaire, and if the data are to be collected by telephone from a list already available. More usually, however, a survey of several hundred or a few thousand individuals will take anywhere from a few months to more than a year, from initial planning to having results ready for analysis.

A flow diagram for a particular survey is very useful in estimating the cost of such a survey. Such a diagram ensures that allow-

17

## STAGES OF A SURVEY



ance is made for the expense involved in the different tasks, as well as for quality checks at all stages of the work. Thus, among the factors that enter into an expense budget are the following:

1. Staff time for planning the study and steering it through the various stages.

2. Labor and material costs for pretesting the questionnaire and field procedures.

3. Supervisory costs for interviewer hiring, training and supervision.

4. Interviewer labor costs and travel expense (and meals and lodging, if out-of-town).

5. Labor and expense costs of checking a certain percentage of the interviews (by reinterviews).

6. Cost of preparing codes for transferring information from the questionnaire.

7. Labor and material costs for editing, coding and keypunching the information from the questionnaire onto computer tape.

8. Cost of spot-checking to assure the quality of the editing, coding and keypunching.

9. Cost of "cleaning" the final data tapes, that is, checking the tapes for inconsistent or impossible answers.

10. Programming costs for preparing tabulations and special analyses of the data.

11. Computer time for the various tabulations and analyses.

12. Labor time and material costs for analysis of the data and report preparation.

13. Telephone charges, postage, reproduction and printing costs.

An integral part of a well-designed survey, both in terms of time and of costs is allowance for quality checks all along the way. For example, checks have to be made that the sample was selected according to specifications, that the interviewers did their work properly, that the information from the questionnaires was coded accurately, that the keypunching was done correctly, and that the computer programs used for data analysis work properly. For these reasons, a good survey does not come cheap, although some are more economical than others. As a rule, surveys made by personal



interview are more expensive than by mail or by telephone; and costs will increase with the complexity of the questionnaire and the amount of analysis to be carried out. Also, surveys that involve more interviews tend to be cheaper on a per interview basis than surveys with fewer interviews. This is particularly so where the sample size is less than about a thousand because "tooling up" is involved for just about any survey, except one that is to be repeated on the same group.

# Where to Get More Information

Several professional organizations have memberships heavily involved in survey research. They also frequently have workshops or sessions on surveys as parts of their regional and annual meetings. The principal organizations are the following:

1. The *American Statistical Association* is concerned with survey techniques and with general application of survey data. It has a separate Section on Survey Research Methods which sponsors sessions on surveys at the annual meetings of the association. The many chapters of the association in the various parts of the country also periodically have meetings and workshops on survey methods, and its publications, the *Journal of the American Statistical Association* and the *American Statistician*, carry numerous articles about surveys.

2. The *American Marketing Association* is concerned, among other things, with the application of survey methods to marketing problems. Like the American Statistical Association, it sponsors sessions on survey methods at its annual meetings, and still other sessions are sponsored by its local chapters. Its publications, the *Journal of Marketing* and the *Journal of Marketing Research*, frequently contain articles on surveys.

3. The *American Association for Public Opinion Research* focuses on survey methods as applied to social and media problems. Its journal, the *Public Opinion Quarterly*, regularly carries articles on survey techniques and on the application of survey methods to political and social problems.



A number of other professional associations in North America place emphasis periodically on survey methods, for example, the Statistical Society of Canada, the American Sociological Association, the American Political Science Association, the Association for Consumer Research, the American Public Health Association, the American Psychological Association, and the Canadian Psychological Association. There are also various business oriented associations such as the Advertising Research Foundation and the American Association of Advertising Agencies, that give attention to survey methods as applied to business. These and other associations publish a number of journals that carry a great deal of material on survey methods.

There are many good books on survey methods written for nontechnical readers. A few of these are:

1. Tanur, Judith, *et al., Statistics: A Guide to the Unknown.* San Francisco: Holden-Day Pub. Co., 1972.

2. Hauser, Philip, *Social Statistics in Use.* New York: Russell Sage Foundation, 1975.

3. Williams, William H., *A Sampler on Sampling.* New York: John Wiley & Sons, 1978.

For further information, contact . . .

Executive Director
American Statistical Association
806 15th Street, N.W.
Washington, D.C. 20005

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

FUNDAMENTO DE LAS TECNICAS DE MUESTREO ESTADISTICO

# IDEAS BASICAS EN MUESTREO

M. EN I. RUBÉN TÉLLEZ SÁNCHEZ

JULIO, 1985

# IDEAS BASICAS EN MUESTREO

## MÉTODO DE MUESTREO

UN METODO DE MUESTREO ES UN METODO DE SELECCIONAR DE TAL MANERA UNA FRACCION DE LA POBLACION QUE LA MUESTRA SELECCIONADA REPRESENTE A LA POBLACION ENTERA. UN METODO DE MUESTREO, SI VA A PROPORCIONAR UNA MUESTRA REPRESENTATIVA DE LA POBLACION, DEBE SER TAL QUE TODAS LAS CARACTERISTICAS DE LA POBLACION, INCLUYENDO LA DE VARIABILIDAD ENTRE SUS UNIDADES, SE REFLEJEN EN LA MUESTRA TAN APROXIMADAMENTE COMO EL TAMAÑO DE LA MUESTRA LO PERMITA, PARA QUE SE PUEDA FORMAR, A PARTIR DE LA MUESTRA, ESTIMACIONES DIGNAS DE CONFIANZA DE LOS CARACTERES DE LA POBLACION.

## ERROR ESTÁNDAR

CUALQUIERA QUE SEA EL METODO DE SELECCION, UNA ESTIMADA POR MUESTRA DIFERIRA INEVITABLEMENTE DE LA QUE SE OBTENDRIA ENUMERANDO, CON IGUAL CUIDADO, A LA POBLACION COMPLETA. ESTA DIFERENCIA ENTRE LA ESTIMADA DE LA MUESTRA Y EL VALOR DE LA POBLACION SE LLAMA EL ERROR DE MUESTREO. UN METODO DE MUESTREO, SI HA DE SER UTIL, DEBE PROPORCIONAR ALGUNA IDEA SOBRE EL ERROR DE MUESTREO EN LA ESTIMACION DE UN PROMEDIO. PARA ESTE PROPOSITO HAY VARIAS MEDIDAS DISPONIBLES. UNA DE ELLAS, QUE PROPORCIONA LA MAGNITUD MEDIA DEL ERROR DE MUESTREO, SE LLAMA EL ERROR ESTANDAR DE LA ESTIMADA Y DA UNA MEDIDA DE LA SEGURIDAD DE LA ESTIMADA DE LA MUESTRA. ES LA MAGNITUD DEL ERROR ESTANDAR LA QUE DETERMINARA SI UNA ESTIMADA POR MUESTREO ES UTIL PARA UN PROPOSITO DADO.

## PRINCIPIO DE SELECCIÓN ENTRE MÉTODOS ALTERNATIVOS DE MUESTREO

DEBEN TAMBIEN TOMARSE EN CUENTA LAS CONSIDERACIONES PRACTICAS

ETAPAS DE UNA ENCUESTA POR MUESTREO

1. PLANEACION
   - . ESPECIFICACION DE FINES: OBJETIVOS Y METAS
   - . DEFINICION DE LA POBLACION A MUESTREAR: POBLACION MUESTREADA=POBLACION OBJETO
   - . ESPECIFICACION DE DATOS A SER COLECTADOS Y DE LA UNIDAD DE MUESTREO
   - . ESPECIFICACION DE REFERENCIA DE TIEMPO Y PERIODO DE REFERENCIA
   - . SELECCION Y ESPECIFICACION DE METODOS DE MEDICION Y METODO DE INSPECCION DE LA POBLACION
   - . DISEÑO Y VALIDACION DE FORMAS DE REGISTRO O CUESTIONARIO ( => REALIZACION DE ENCUESTAS PILOTO)
   - . DETERMINACION DEL MARCO MUESTRAL O ESPECIFICACION DE LA LISTA DE UNIDADES DE MUESTREO
   - . SELECCION DEL METODO MUESTREO
   - . DETERMINACION DEL TAMAÑO DE LA MUESTRA
   - . ORGANIZACION DEL TRABAJO DE CAMPO
2. REALIZACION FISICA DE LA ENCUESTA
3. RESUMEN Y ANALISIS DE DATOS : INSPECCION DE LA INFORMACION CAPTADA
4. ANALISIS DE LA NO RESPUESTA
5. PROCESAMIENTO DE LA INFORMACION
6. ANALISIS E INTERPRETACION DE INFORMACION
7. EVALUACION DE LA INVESTIGACION MUESTRAL

**FACTORES EN LA DETERMINACION DEL TAMAÑO DE LA MUESTRA**

- TAMAÑO DE LA POBLACION
- HETEROGENIDAD DE LA POBLACION
- NIVEL DE ERROR: $\hat{\theta} - \theta$ , donde:

  $\hat{\theta}$ , estimación en base a información muestral

  $\theta$ , valor verdadero de la población desconocido
- NIVEL DE SIGNIFICANCIA: $\alpha = Pr.|Error\ I|$
- DISPONIBILIDAD DE RECURSOS
  - ECONOMICOS
  - HUMANOS
  - DE TIEMPO

EN EL USO DE UN METODO DE MUESTREO.

MAS AUN, UN METODO DE MUESTREO, SI HA DE ACEPTARSE EN LA -- PRACTICA, DEBE SER SENCILLO, ACOMODARSE A LA EXPERIENCIA ADMINISTRATIVA Y A LAS CONDICIONES LOCALES Y ASEGURAR QUE SE VA A HACER EL USO MAS EFECTIVO DE LOS RECURSOS DISPONIBLES PARA EL QUE MUESTREA. EL PRINCIPIO A SEGUIR EN LA SELECCION DE UN METODO DE MUESTREO ES, EN REALIDAD, EL DE OBTENER EL RESULTADO DESEADO CON LA SEGURIDAD REQUERIDA A COSTO MINIMO, O CON LA MAXIMA SEGURIDAD A COSTO DADO, HACIENDO EL USO MAS EFICAZ DE LOS RECURSOS DISPONIBLES.

## Muestreo Probabilístico

PARA LLENAR LOS REQUISITOS ANTERIORES ES NECESARIO QUE EL - METODO DE MUESTREO SEA OBJETIVO, BASADO EN LEYES DEL AZAR. EL METODO SE LLAMA DE MUESTREO PROBABILISTICO. EN ESTE METODO LA MUESTRA SE OBTIENE EN SELECCIONES SUCESIVAS DE UNA UNIDAD, CADA UNA CON UNA CONOCIDA PROBABILIDAD DE SELECCION ASIGNADA EN LA PRIMERA SELECCION A CADA UNIDAD DE LA POBLACION. EN CUALQUIER SELECCION SUBSECUENTE, LA PROBABILIDAD DE SELECCIONAR CUALQUIER UNIDAD DE ENTRE LAS UNIDADES DISPONIBLES PARA ESA SELECCION PUEDE SER PROPORCIONAL A LA PROBABILIDAD DE - SELECCIONARLA EN LA PRIMERA SELECCION O COMPLETAMENTE INDEPENDIENTE - DE ELLA.

LAS SELECCIONES SUCESIVAS DE UNA MUESTRA PROBABILISTICA PUEDEN HACERSE CON O SIN REEMPLAZO DE LAS UNIDADES OBTENIDAS EN LAS SELECCIONES PREVIAS. EL PRIMER PROCEDIMIENTO ES EL DE MUESTREAR CON REEMPLAZO, EL SEGUNDO ES EL PROCEDIMIENTO LLAMADO SIN REEMPLAZO.

LA APLICACION DEL METODO SUPONE QUE LA POBLACION PUEDE SUBDIVIDIRSE EN UNIDADES DISTINTAS E IDENTIFICABLES LLAMADAS UNIDADES DE MUESTREO. ESTAS PUEDEN SER UNIDADES NATURALES, TALES COMO INDIVIDUOS EN UNA POBLACION HUMANA, O TERRENOS EN UNA ESTIMACION DE CULTIVO, O - CONJUNTOS NATURALES DE ESAS UNIDADES COMO FAMILIAS O PUEBLOS; O PUEDEN

SER UNIDADES ARTIFICIALES TALES COMO UNA SOLA PLANTA, UNA HILERA DE - PLANTAS, O UN PEDAZO DE TERRENO.

LA APLICACION DEL METODO PRESUPONE, NATURALMENTE, LA DISPONIBILIDAD DE UNA LISTA DE TODAS LAS UNIDADES DE MUESTREO EN LA POBLACION. ESTA LISTA SE LLAMA EL MARCO Y PROPORCIONA LA BASE PARA LA SELECCION REAL DE LA MUESTRA.

## Muestreo Irrestricto Aleatorio

EL MAS SENCILLO DE LOS METODOS DE MUESTREO PROBABILISTICO - QUE PROPORCIONA ESTIMACIONES DE LOS CARACTERES DE LA POBLACION Y UNA MEDIDA DE LA CONFIANZA DE LAS ESTIMACIONES HECHAS, ES EL METODO DE - MUESTREO IRRESTRICTO ALEATORIO. EN ESTE METODO, GENERALMENTE LLAMADO POR BREVEDAD EL METODO DE MUESTREO ALEATORIO, SE ASIGNA UNA PROBABILIDAD IGUAL DE SELECCION A CADA UNIDAD DE LA POBLACION EN LA PRIMERA SELECCION. EL METODO IMPLICA UNA PROBABILIDAD IGUAL DE SELECCIONAR CUALQUIER UNIDAD DE ENTRE LAS UNIDADES DISPONIBLES EN LAS SELECCIONES SUBSECUENTES.

PUESTO QUE LA UNIDAD ESPECIFICADA PUEDE SER INCLUIDA EN LA MUESTRA EN CUALQUIERA DE LAS n SELECCIONES, TAMBIEN LA PROBABILIDAD DE QUE QUEDE INCLUIDA EN LA MUESTRA ES LA SUMA DE LAS PROBABILIDADES DE - QUE SEA ESCOGIDA EN LA PRIMERA SELECCION, EN LA SEGUNDA SELECCION,..., EN LA ENESIMA SELECCION, Y ES, POR LO TANTO, IGUAL A n/N. PUESTO QUE ESTE RESULTADO ES INDEPENDIENTE DE LA UNIDAD ESPECIFICADA, SE INFIERE QUE CADA UNA DE LASUNIDADES EN LA POBLACION TIENE LA MISMA PROBABILIDAD DE SER INCLUIDA EN LA MUESTRA BAJO EL PROCEDIMIENTO DE MUESTREO - IRRESTRICTO ALEATORIO.

EL METODO DE MUESTREO IRRESTRICTO ALEATORIO ES TAMBIEN EQUIVALENTE A DAR UNA PROBABILIDAD IGUAL A CADA POSIBLE CONGLOMERADO DE n UNIDADES PARA FORMA LA MUESTRA DE LA POBLACION.

METODOS DE MUESTREO

- PROBABILISTICOS
  - IRRESTRICTO ALEATORIO: IGUAL PROBABILIDAD DE QUEDAR INCLUIDA EN LA MUESTRA PARA TODOS LOS ELEMENTOS DE LA POBLACION
  - ESTRATIFICADO: COMBINACION DE MUESTREO IRRESTRICTO ALEATORIO EN CADA ESTRATO O SUBGRUPO DE LA POBLACION
  - DE CONGLOMERADOS: MUESTREO ALEATORIO, EN DONDE LAS UNIDADES MUESTRALES SON EN SI MISMAS POBLACIONES O CONGLOMERADOS
  - POLIETAPICO: MUESTREO ALEATORIO RECURSIVO DONDE LAS UNIDADES DE PRIMERA ETAPA CONTIENEN A LAS DE SEGUNDA ETAPA Y ASI SUCESIVAMENTE.
  - MONTECARLO O SIMULADO: MUESTREO ALEATORIO DONDE LA POBLACION REAL SE SUSTITUYE POR UNA QUE LA REPRESENTA: LA FUNCION DE DISTRIBUCION DE LA VARIABLE QUE DESCRIBE EL COMPORTAMIENTO PROBABILISTICO DE LA POBLACION.
- DETERMINISTICOS
  - SISTEMATICO: CAPTACION SISTEMATICA O SECUENCIAL DE LAS UNIDADES MUESTRALES CON RELACION AL TIEMPO O A SU UBICACION EN LA POBLACION
  - DE CUOTAS: EN BASE A LA ESTRUCTURA DE LA POBLACION EN UN PERIODO PASADO SE HACE LA DISTRIBUCION O AFIJACION DE LA MUESTRA EN LAS PARTES DE LA POBLACION.
  - DE TRAZOS O INTENCIONADO: DE REGISTROS DE LA POBLACION (DIRECTORIOS, NOMINAS, ETC.) SE SELECCIONA EN FORMA ARBITRARIA PARA CONSTRUIR LA MUESTRA PARTES DE LA POBLACION
  - CAOTICO: DE MANERA SUBJETIVA O ARBITRARIA SE SELECCIONA LA MUESTRA; VALIDO UNICAMENTE PARA POBLACIONES CON UN NIVEL DE HOMOGENIDAD ELEVADA.

## MUESTREO PROBABILISTICO

TODOS LOS PROCEDIMIENTOS DE MUESTREO, PARA LOS CUALES HA SIDO DESARROLLADA UNA TEORIA, TIENEN EN COMUN LAS SIGUIENTES PROPIEDADES MATEMATICAS.

1. ES POSIBLE DEFINIR INEQUIVOCAMENTE UN CONJUNTO DE MUESTRAS $S_1$, $S_2$, ... $S_r$, MEDIANTE LA APLICACION DEL PROCEDIMIENTO A UNA POBLACION ESPECIFICA QUE CONDUZCA A LA SELECCION DE ESTAS MUESTRAS. ESTO QUIERE DECIR QUE PODEMOS INDICAR CON PRECISION CUALES UNIDADES DE MUESTREO PERTENECEN A $S_1$, $S_2$, Y ASI, SUCESIVAMENTE.
2. A CADA POSIBLE MUESTRA $S_i$, LE HA SIDO ASIGNADA UNA PROBABILIDAD CONOCIDA DE SELECCION $\pi_i$
3. SELECCIONAMOS UNA DE LAS $S_i$ POR UN PROCESO MEDIANTE EL CUAL CADA $S_i$ TIENE UNA PROBABILIDAD $\pi_i$ DE SER SELECCIONADA
4. EL METODO PARA CALCULAR EL ESTIMADOR DE LA MUESTRA DEBE SER ESTABLECIDO Y DEBE CONDUCIR A UN ESTIMADOR UNICO PARA CUALQUIER MUESTRA ESPECIFICA.

**VENTAJAS DEL MUESTREO PROBABILISTICO**

- COSTO REDUCIDO
- MAYOR RAPIDEZ
- MAYOR ALCANCE Y FLEXIBILIDAD DE ACUERDO AL TIPO DE INFORMACION A OBTENERSE
- MAYOR EXACTITUD
- ESTIMACION Y CONTROL DEL ERROR
- SON BASE DE ESTIMACIONES INSESGADAS DE LAS CARACTERISTICAS DE LA POBLACION

### PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL DISEÑO DE LA MUESTRA

A TODO PROCEDIMIENTO DE MUESTREO Y ESTIMACION SE ASOCIA EL COSTO DE LA ENCUESTA Y LA PRECISION DE LAS ESTIMADAS HECHAS (MEDIDA, DIGAMOS, EN TERMINOS DEL ERROR CUADRATICO MEDIO). SOLO SE CONSIDERAN LOS PROCEDIMIENTOS DE LOS QUE PUEDE HACERSE UNA ESTIMADA OBJETIVA DE LA PRECISION ALCANZADA A PARTIR DE LA MISMA MUESTRA. ADEMAS, LOS PROCEDIMIENTOS DEBEN DE SER PRACTICOS EN EL SENTIDO DE QUE SEA POSIBLE DESARROLLARLOS DE ACUERDO CON LAS ESPECIFICACIONES DESEADAS. DE TODOS LOS PROCEDIMIENTOS DE SELECCION DE LA MUESTRA Y ESTIMACION (LLAMADOS DISEÑO DE LA MUESTRA), SE PREFERIRA EL QUE DE MAYOR PRECISION POR UN COSTO DETERMINADO DE LA ENCUESTA, O EL QUE TENGA EL COSTO MINIMO Y NOS DA EL NIVEL DE PRECISION ESPECIFICADO. ESTE ES EL PRINCIPIO RECTOR DEL DISEÑO DE LA MUESTRA.

EL MUESTREO ALEATORIO IMPLICA QUE CADA UNO DE ESTOS POSIBLES CONGLOMERADOS TENGA UNA PROBABILIDAD IGUAL, A SABER,

$$\frac{1}{\binom{N}{n}} \quad \text{CON} \quad \frac{N!}{(N-n)!n!}$$

DE SER SELECCIONADO COMO MUESTRA.

LA PALABRA "ALEATORIO" SE REFIERE AL METODO DE SELECCIONAR UNA MUESTRA MAS BIEN QUE A LA MUESTRA PARTICULAR ESCOGIDA. CUALQUIER MUESTRA POSIBLE PUEDE SER UNA MUESTRA IRRESTRICTA ALEATORIA, POR MUY POCO REPRESENTATIVA QUE PUEDA APARECER, CON TAL DE QUE HAYA SIDO OBTENIDA SIGUIENDO LA REGLA DE DAR UNA PROBABILIDAD IGUAL A CADA UNA DE LAS MUESTRAS POSIBLES.

## PROCEDIMIENTO DE SELECCIONAR UNA MUESTRA ALEATORIA

EL PROCEDIMIENTO ES EN LA SIGUIENTE FORMA: (A) IDENTIFICAR N UNIDADES EN LA POBLACION CON LOS NUMEROS DEL 1 AL N, O LO QUE ES LA MISMA COSA, PREPARAR UNA LISTA DE UNIDADES EN LA POBLACION Y NUMERARLAS SERIADAMENTE: (B) SELECCIONAR DE MANERA SISTEMATICA NUMEROS *DIFERENTES* DE LA TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS, Y (C) TOMAR PARA LA MUESTRA LAS n UNIDADES CUYOS NUMEROS CORRESPONDEN A AQUELLOS OBTENIDOS DE LA TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS.

UNA MANERA USADA COMUNMENTE PARA EVITAR EL RECHAZO DE TANTOS NUMEROS ES DIVIDIR UN NUMERO ALEATORIO ENTRE N Y TOMAR EL RESIDUO COMO EQUIVALENTE AL NUMERO SERIADO CORRESPONDIENTE ENTRE 1 Y N-1, CORRESPONDIENDO EL RESIDUO CERO AL N .

## MÉTODOS NO ALEATORIOS DE MUESTREO

LOS METODOS DE MUESTREO QUE NO ESTAN BASADOS EN LAS LEYES DE

PROBABILIDAD, SINO QUE EL JUICIO PERSONAL DEL ENUMERADOR DETERMINA CUALES UNIDADES DEBEN SER INCLUIDAS EN LA MUESTRA, SE LLAMAN METODOS NO ALEATORIOS O INTENCIONALES. SI QUEREMOS TENER ESTIMADAS INSESGADAS DEL CARACTER DE LA POBLACION CUYA EXACTITUD PUEDA SER CALCULADA DE LAS MISMAS MUESTRAS, SOLAMENTE DEBERA USARSE EL MUESTREO PROBABILISTICO.

## ERRORES NO DE MUESTREO

LA EXACTITUD DE UN RESULTADO SE AFECTA NO SOLO POR LOS ERRORES DE MUESTREO QUE SURGEN DE LA VARIACION POR AZAR EN LA SELECCION DE LA MUESTRA, SINO TAMBIEN POR: A) FALTA DE PRECISION AL REPORTAR OBSERVACIONES; B) SELECCION INCOMPLETA O DEFECTUOSA DE UNA MUESTRA ALEATORIA, Y C) METODOS DEFECTUOSOS DE ESTIMACION. ESTOS ERRORES, PARTICULARMENTE AQUELLOS DE A) Y B), SE AGRUPAN USUALMENTE BAJO EL ENCABEZADO DE "ERRORES NO DE MUESTREO".

DIRECTORIO DE ALUMNOS DEL CURSO "FUNDAMENTOS DE LAS TECNICAS DE MUESTREO ESTADISTICO" IMPARTIDO EN ESTA DIVISION DEL 29 DE JULIO AL 7 DE AGOSTO.

1.- ALDANA QUINTANA SAMUEL
FERROCARRILES NACIONALES DE MEXICO
AUXILIAR DE JEFATURA
TERMINAL VALLE MEXICO
TLALNEPANTLA, EDO. DE MEXICO
565-90-65

MATANZAS NO. 944
COL. LINDAVISTA
DELEGACION GUSTAVO A. MADERO
586-67-43

2.- BELLO JOSE ANTONIO
LABORATORIO CENTRAL DE CONTROL
JEFE DE LABORATORIO SATELITE
AV. DIVISION DEL NORTE NO. 3330
COL. JARDIN
DELEGACION COYOACAN
04370 MEXICO, D.F.
549-73-77

ANDADOR 27 NO. 34-4
COL. ACUEDUCTO DE GUADALUPE
DELEGACION GUSTAVO A. MADERO
07270 MEXICO, D.F.
391-20-11

3.- CANTU GARCIA FERNANDO RENE
INTITUTO DE INVESTIGACIONES ELECTRICAS
INVESTIGADOR
DANK NO. 36-60. PISO
COL. NUEVA ANZURES
DELEGACION CUAUHTEMOC
11590 MEXICO, D.F.
511-42-11

MILAN NO. 43
COL. JAUREZ
DELEGACION MIGUEL HIDALGO
511-42-11

4.- CARLOS HERNANDEZ GABRIELA
S. A. R. H.
JEFE DE OFICINA
AV. SAN BERNABE NO. 549
COL. SAN JERONIMO LIDICE
DELEGACION CONTRERAS
595-44-53

GLORIETA PARQUE SAN ANDRES NO. 20
DELEGACION COYOACAN
04040 MEXICO, D.F.
544-20-54

5.- CARMONA ROSAS CARLOS
LABORATORIOS CRYAPHARMA, S.A. DE C.V.
JEFE DEL DEPTO. DE DISEÑO E INSPECCION
FRANCIA NO. 17
COL. FLORIDA
DELEGACION ALVARO OBREGON
01030 MEXICO, D.F.
534-35-30

CALLE 31 NO. 89
COL. OLIVAR DEL CONDE
DELEGACION ALVARO OBREGON
01400 MEXICO, D.F.
680-37-62

6.- CERVANTES CUEVAS JESUS EDUARDO
GENERAL FOODS DE MEXICO
SUPERVISOR PLANTA Y ALMACENES
PONIENTE 116 NO. 553
INDUSTRIAL VALLEJO
DELEGACION ATZCAPOTZALCO
02300 MEXICO, D.F.
567-11-00

14 DE AGOSTO NO. 60-1
COL. AVILA CAMACHO
53910 NAUCALPAN DE JUAREZ
294-00-86

7.- GARCIA VARGAS ALFONSO
DIREC. GRAL. CONSTRUC. OPERAC. HIDRAULICA
JEFE DE SECCION
AV. DIVISION DEL NORTE NO. 3330
COL. JARDIN
549-82-20

PARALELA 6-23-4
COL. JOSE MA. RINO SUAREZ
DELEGACION ALVARO OBREGON
04010 MEXICO, D.F.

8.- GOMEZ NAVARRETE JORGE S.
S. A. R. H.
JEFE DEL SISTEMA DE INFORMACION
DE LA CALIDAD DEL AGUA
REFORMA NO. 107-50. PISO
COL. REVOLUCION
DELEGACION CUAUHTEMOC
592-10-21

OTE 156 NO. 3310
COL. DIAZ MIRON
DELEGACION GUSTAVO A. MADERO
07400 MEXICO, D.F.

9.- GUEVARA MARTINEZ JORGE

10.- IBARRA GARCIA JOSE ANTONIO
DIREC. GRAL. CONSTRUC. OPERAC. HIDRAUL.
ANALISTA PROGRAMADOR
SAN ANTONIO ABAD NO. 131
COL. OBRERA
DELEGACION CUAUHTEMOC
761-88-44 EXT. 2109

DR. JIMENEZ NO. 180-10
COL. DOCTORES
DELEGACION CUAUHTEMOC
06720 MEXICO, D.F.
519-53-75

11.- LEYVA GUZMAN RUBEN
IMPRESOS Y CAJAS, S.A DE .C.V.
GERENTE DE CONTROL DE PRODUCCION
ARENAL NO. 42
COL. TRANSITO
DELEGACION CUAUHTEMOC
552-72-66

CALLE ELENA NO. 191-2
COL. NATIVITAS
DELEGACION BENITO JUAREZ
03500 MEXICO, D.F.

12.- LOPEZ FUENTES JOEL
S. A. R. H.

13.- LOPEZ SOTO MIGUEL ANGEL
PLASTICOS AUTOMOTRICES DINA, S.A.
INGNEIERO DE LA CALIDAD
DOM. CONOCIDO CORREDOR INDUSTRIAL
CD. SAHAGUN, HGO.

BUENAVISTA NO. 109
PACHUCA, HGO. 42020

14.- MANDUJANO GORDILLO CECILIO CONCEPCION
UNIDAD DIFUSION FAC. INGENIERIA
550-57-20

ALEJANDRIA NO. 11
DELEGACION AZTCAPOTZALCO
527-11-49

15.- MARTINEZ ZAMUDIO CARLOS
LABORATORIOS SILANES Y METODOS PRODUC.
ANALISTA DE TIEMPOS Y METODOS PRODUC.
AMORES NO. 1304
COL. DEL VALLE
DELEGACION COYOACAN
03100 MEXICO, D.F.
575-40-11

CALLE 10 NO. 1
COL. INDEPENDENCIA
NAUCALPAN DE JUAREZ
589-20-38

16.- MAZA LOPEZ GUSTAVO
PLASTICOS AUTOMOTRICES DINA, S.A.
INGENIERO DE LA CALIDAD
DOM. CONOCIDO CORREDOR INDUSTRIAL
CD. SAHAGUN, HGO.
3-29-00

HERMOSILLO NO. 12
COL. B. JUAREZ
CD. SAHAGUN, HGO.
3-09-21

17.- NAVARRETE JORGE SAUL
S. C. T.

18.- NORRIGAN CURZ OSCAR
TELEFONOS DE MEXICO, S.A.
SUBGERENTE CENTRALES ANC-11
PARQUE VIA NO. 190
COL. SAN RAFAEL
DELEGACION CUAUHTEMOC
06470 MEXICO, D.F.
222-79-22

ERNESTO PUGIBET NO. 12
COL. CENTRO
DELEGACION CUAUHTEMOC
06070 MEXICO, D.F.
222-79-92

19.- ORTIZ MONDRAGON RAUL
CENTROS DE INTEGRACION JUVENIL,A.C.
ANALISTA ESPECIALIZADO
JOSE MA. OLLEQUI NO. 48
COL. DEL VALLE
DELEGACION BENITO JUAREZ

LAZARO CARDENAS NO. 10
COL. PRESIDENTE
DELEGACION ALVARO OBREGON
01400 MEXICO, D.F.

20.- REYES CHAVELA RENE

21.- VAZQUEZ ENRIQUEZ MA. DEL ROSARIO
DIREC. GRAL. TELECOMUNICACIONES
SUPERVISOR TELECOMUNICACIONES
EJE LAZARO CARDENAS NO. 567
TORRE CENTRAL TELECOMUNICACIONES
511-52-01

CALLE 33 NO. 140
COL. IGNACIO ZARAGOZA
DELEGACION VENUSTIANO CARRANZA
15000 MEXICO, D.F.
571-24-74

22.- VALLE GARCIA JOSE T.
INSTITUTO MEXICANO DEL PETROLEO
ING. DISE:O. ESTRUCTURAL
AV. EJE CENTRAL LAZARO CARDENAS NO.152
COL. SAN BARTOLO ATEPEHUACAN
DELEGACION GUSTAVO A. MADERO
07300 MEXICO, D.F.
567-66-00 EXT. 20559

EDIF. 38 DEPTO. 14 UNIDAD PATERA VALLEJO
DELEGACION GUSTAVO A. MADERO
07300 MEXICO, D.F.
391-12-10

23.- VALLE ORTEGA MARIA EUGENIA
SEGUROS MONTERREY, S.A.
ANALISTA
MASARYK NO. 8-50. PISO
COL. BOSQUES DE CHAPULTEPEC
11580 MEXICO, D.F.
250-84-00 EXT. 105

GUSTAVO BAS NO. 1-A-205
COL. XOCOYAHUALCO
TLALNEPANTLA EDO. DE MEXICO 54080
393-42-26

24.- VELASCO RODRITUEZ GRISELDA
I. P. N. CIDIR-OAXACA
ACACIAS NO. 45 SAN FELIPE DEL AGUA
OAXACA

MARCOS NO. 34
COL. SIMON BOLIVAR
DELEGACION VENUSTIANO CARRANZA
15410 MEXICO, D.F.
551-18=87

25.- VILLARREAL CHAVEZ GUILLERMO
UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
MAESTRO
CALZADA DEL HUESO S¢N
COL. VILAL QUIETUD
DELEGACION XOCHIMILCO

TOKIO NO. 211
COL. PORTALES
DELEGACION BENITO JUAREZ
03300 MEXICO, D.F.
539-03-81