



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
HIDRÁULICA – INGENIERÍA CIVIL

MODELO HIDRODINÁMICO DE CANALES DE RIEGO CON COMPUERTAS DE
REGULACIÓN

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
ING. PENÉLOPE CRUZ MAYO

TUTOR PRINCIPAL:
DR. ARIOSTO AGUILAR CHÁVEZ
INSTITUTO MEXICANO DE TECNOLOGÍA DEL AGUA

MÉXICO, D.F. SEPTIEMBRE 2015

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Aparicio Mijares Francisco Javier
Secretario: Dr. García Villanueva Nahun Hamed
1er. Vocal: Dr. Aguilar Chávez Ariosto
2do. Vocal: M. I. Pedroza González Edmundo
3er. Vocal: Dr. Mateos Farfán Efraín

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Instituto Mexicano de Tecnología del Agua.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Ariosto Aguilar Chávez

FIRMA

Dedicada con cariño a:

Mis padres
Rafaela y Moisés

Hermanos
Norma, Rogaciano, Joel, Julio, Eladio y Patty

Y padrino
Lorenzo Giancarlo Hernández Pérez

Agradecimientos

Al Concejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y al Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA) por su patrocinio y apoyo durante la realización de esta tesis.

A mi tutor Dr. Ariosto Aguilar Chávez, por el empeño puesto en este trabajo y la confianza en mí para desarrollar la investigación aquí plasmada.

A mis revisores: Dr. Francisco Javier Aparicio Mijares, Dr. Nahun Hamed García Villanueva, M. I. Edmundo Pedroza González y Dr. Efraín Mateos Farfán por el interés mostrado en la revisión de mi trabajo, ya que gracias a sus observaciones y comentarios logré mejorar la presente tesis.

También quiero agradecer a quienes me han acompañado estos últimos dos años: Alan, Alex, Aldo, Ángel, Carlos, Enrique, Fernando, Lidia, Lila y Natalie, por inspirarme a hacer mejor las cosas cada día, explicarme e invitarme pastel... y porque además de lo anterior me han abierto las puertas de sus casas y soportado mis locuras, gracias Nadir e Itzel.

Y finalmente a quienes siempre han estado conmigo impulsándome a superar cualquier reto en la vida y han sido el principal soporte para concluir esta etapa de mis estudios, Dios y mi familia.

GRACIAS

ÍNDICE GENERAL

1	Introducción	1
1.1	Objetivos y alcances	6
2	Ecuaciones de flujo en canales	7
2.1	Ecuaciones de Saint Venant	7
2.2	Modelo discreto	9
2.2.1	Esquema de discretización lineal (Leendertse).....	9
2.2.2	Esquema de discretización no lineal (Preissmann).....	23
3	Estructuras de regulación	33
3.1	Análisis dimensional de la descarga de una compuerta	33
3.2	Modelo general de compuertas	37
3.3	Modelos para determinar coeficientes de descarga.....	41
3.3.1	Para cualquier tipo de compuerta	41
3.3.2	Compuertas planas	42
3.3.3	Compuertas radiales.....	46
3.4	Conceptos básicos de regulación en canales.....	52
3.5	Condiciones de frontera.....	55
3.5.1	Fronteras en los extremos del canal	55
3.5.2	Fronteras internas de tirante y gasto	56
3.6	Condición inicial	57
4	Modelo numérico de Simulación de Múltiples Tramos (SMT).....	63
4.1	Algoritmo de cálculo de condición inicial	63
4.2	Modelo numérico bajo el esquema Leendertse	64
4.3	Modelo numérico bajo el esquema de Preissmann	65
4.3.1	Esquema de Preissmann en canal con múltiples tramos	65
4.3.2	Procedimiento de solución.....	66
4.3.3	Impresión de resultados.....	68
4.4	Control y regulación de flujo.....	71
4.4.1	Modelo de regulación local	71
4.4.2	Modelo de regulación global (RCAC)	72
5	Pruebas numéricas y análisis de resultados	75

5.1	Pruebas en canales de cuatro tramos	78
5.1.1	Canal rectangular	78
5.1.2	Aplicación de RCAC a un canal Trapecial	92
5.1.3	Verificación numérica de las propiedades de propagación	108
6	Conclusiones	111
7	Bibliografía	114

ÍNDICE DE LÁMINAS

Lámina 1 Esquema general de un Distrito de Riego (Pedroza & Hinojosa, 2014) ..	2
Lámina 2 Esquema de Discretización de Leendertse en el espacio solución $\Omega x_j, t_n$	10
Lámina 3 Numeración de nodos de la malla en el espacio	11
Lámina 4 Retrato de amplitud, régimen subcrítico $S_0 = 0.0001$	19
Lámina 5 Retrato de amplitud, régimen supercrítico	20
Lámina 6 Retrato de fase, régimen subcrítico ($S_0=0.0001$)	21
Lámina 7 Retrato de fase, régimen supercrítico ($S_0=0.01$)	22
Lámina 8 Esquema de Discretización de Preissmann	23
Lámina 9 Regiones de estabilidad en el plano $\Psi - \theta$, para $Cr > 0$. Tomado de (Lyn & Goodwin, 1987).....	31
Lámina 10 Esquema hidrodinámico de funcionamiento de una compuerta de regulación en un canal riego	35
Lámina 11 Orificio de pared delgada	38
Lámina 12 compuerta plana con descarga libre	40
Lámina 13 Compuerta con descarga ahogada	40
Lámina 14 Análisis comparativo de modelos de cálculo del coeficiente de descarga para compuertas planas bajo descarga libre.	45
Lámina 15 Análisis comparativo de modelos de cálculo del coeficiente de descarga para compuertas planas bajo ahogada	45
Lámina 16 Compuerta radial con descarga libre	46
Lámina 17 Compuerta radial con descarga sumergida	46
Lámina 18 Geometría de una compuerta radial cerrada	47
Lámina 19 Geometría de una compuerta radial abierta.....	47
Lámina 20 Análisis comparativo de modelos de cálculo del coeficiente de descarga para compuertas radiales con descarga libre.....	48
Lámina 21 Algoritmo de cálculo de coeficiente de descarga, utilizando modelo de Swamee	49
Lámina 22 Esquema general de algoritmo de cálculo de apertura de compuertas con 3 modelos diferentes.....	50
Lámina 23 Subrutina para evaluar la función de apertura de acuerdo con distintos modelos	50
Lámina 24 Esquema de un canal con compuertas	54
Lámina 25 Algoritmo de regulación local de apertura de compuerta, donde y_r es el nivel de referencia y y_f el nivel real a controlar en el canal.....	54

Lámina 26 Definición de condiciones de frontera	55
Lámina 27 Tipos de hidrograma.....	56
Lámina 28 Ley tirante gasto.....	60
Lámina 29 Condición inicial de un canal con 2 tramos divididos por compuertas	61
Lámina 30 Condición inicial de un canal con 3 tramos divididos por compuertas	61
Lámina 31 Condición inicial de un canal con 4 tramos divididos por compuertas	61
Lámina 32 Ajustes de compuerta en la solución con esquema de Leendertse	64
Lámina 33 Esquema general del funcionamiento del simulador	65
Lámina 34 Ejemplo de impresión de resultados del SMT, las pantallas de: a) hidrograma de entrada por tramos; b) variación de nivel y gasto; c) variación del nivel de control, y d) aperturas o maniobras en las compuertas.	70
Lámina 35 Algoritmo local de regulación de compuertas	72
Lámina 36 Definición de los tiempos de acción de acuerdo con los retardos de cada tramo.....	73
Lámina 37 Ley de operación de canal rectangular de tres tramos.....	76
Lámina 38 Resultado de SMT en canal con tres tramos, a) Gasto ingresado por tramos; b) ΔQ , variación en el gasto respecto n , perfil de flujo y distribución de gasto;c) Δy Incrementos en el nivel, respecto a la condición inicial	77
Lámina 39 Ley tirante-gasto utilizada en Prueba A (Canal Rectangular).....	79
Lámina 40 Condición inicial de prueba A	79
Lámina 41 Condición de frontera superior	80
Lámina 42 Resultado de SMT en un canal Rectangular con tres compuertas (1:45 h). a) hidrograma que ingresa a cada tramo; b) diferencia ΔQ del gasto actual en el canal ($n + 1$) respecto al tiempo n ; c) registro de las variaciones del tirante Δy final de cada tramo, y d) registro de las aperturas de cada compuerta	81
Lámina 43 Ídem Lámina 42 a las 2:30 h	82
Lámina 44 Ídem 42 a 5:00 h	83
Lámina 45 Flujo permanente en canal rectangular con el gasto máximo del hidrograma	85
Lámina 46 Resultado de SMT con el RCAC en un canal rectangular (00:40 h). a) muestra que el gasto máximo (Q_m) apenas ingresa al Tramo 1; b) muestra que el gasto máximo a este tiempo está a la mitad del primer tramo, por lo que no afecta las fronteras aún, como se comprueba en la c), donde $\Delta y = 0$, y la d) indica que no se ha tenido actividad en las compuertas, nota, en último tramo se tiene valor porque es el extremo de canal y no compuerta.	86
Lámina 47 Ídem Lámina 46 a (00:55 h).....	87

Lámina 48 Ídem Lámina 46 a 2:00 h.....	88
Lámina 49 Ídem Lámina 46 a 06:00 h.....	89
Lámina 50 Resultado de SMT con RCAC en un canal rectangular con el modelo de Swamee. a) se aprecian pequeñas oscilaciones en los gasto descargados por las compuertas, pero logran estabilizarse; b) se puede apreciar que después de 5:30 h de hacer el cambio de gasto se está logrando alcanzar la condición de flujo permanente para $Q = 98 \text{ m}^3/\text{s}$. d) se observa que la maniobra de apertura en la compuerta genera inestabilidad en el tirante la cual se logra desaparecer apróx. 1:00 h después. En d) se observan las acciones programadas en la compuerta. .	91
Lámina 51 Condición inicial. Prueba en canal Trapecial con cuatro compuertas	93
Lámina 52 Hidrograma de ingreso al canal trapecial.....	93
Lámina 53 Resultado del SMT en un canal trapecial con cuatro compuertas a 01:45 h (TRAPECIAL 1)	94
Lámina 54 Ídem Lámina 53 a 02:30 h.....	95
Lámina 55 Ídem Lámina 53 a 05:00 h.....	96
Lámina 56 Perfil de flujo permanente para $Q_{\text{máx}} = 98 \text{ m}^3/\text{s}$ en un canal trapecial	97
Lámina 57 Resultado de SMT con RCAC de un canal trapecial a la 01:45 h; a) hidrogramas de entrada a cada tramo; b) cambios de flujo, nivel y gasto; c) evaluación del RCAC en el control de nivel, y d) propuesta del RCAC de apertura de compuertas (TRAPECIAL 2).	98
Lámina 58 Ídem Lámina 57 a las 02:30 h.	99
Lámina 59 Ídem Lámina 57 a las 05:00 h.	100
Lámina 60 Hidrograma con doble escalón.....	101
Lámina 61 Regulación de un canal trapecial bajo una ley de operación con doble incremento de gasto a 08:00 h (TRAPECIAL 3)	102
Lámina 62 Hidrograma con doble apertura y un cierre de compuerta	103
Lámina 63 Regulación en un canal operado con doble apertura y un cierre de compuerta (TRAPECIAL 4).....	104
Lámina 64 Condición inicial de canal con tramos de diferentes longitudes	105
Lámina 65 Regulación en un canal con tramos de diferentes longitudes operado con doble apertura y un cierre de compuerta (TRAPECIAL 5)	107
Lámina 66 Difusión numérica generada al utilizar números de $cr = [1, 5, 10]$. Se muestran dy adimensionalizados con respecto al tirante de referencia (yr).	109
Lámina 67 Análisis global de la dispersión de errores utilizando $cr = [1, 5, 10]$. Están contenidas todas las diferencias de nivel (divididas por yf), y están referenciadas a los valores calculados con $cr = 1$	110

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Escenarios de prueba de los algoritmos de simulación y de control	6
Tabla 2 Datos generales de la sección y cauce.....	19
Tabla 3 Definición de los escenarios S1 y S2.....	19
Tabla 4 Variables que intervienen en la descarga de una compuerta.....	34
Tabla 5 Resumen de modelos para el cálculo de C_d para compuertas planas bajo descarga libre. Basado en (Khalili Shayan & Farhoudi, 2013)	44
Tabla 6 Labio inferior de la compuerta redondeado	46
Tabla 7 Ejemplo de cálculo de coeficientes de descarga y aperturas de compuerta planas.....	51
Tabla 8 Descripción de pruebas numéricas realizadas con SMT y RCAC	75
Tabla 9 Canal rectangular con 3 tramos	76
Tabla 10 RCAC de canal Rectangular con cuatro tramos	85
Tabla 11 Regulación en canal Trapecial 2.	97
Tabla 12 Regulación en canal Trapecial 3	101
Tabla 13 Regulación en canal Trapecial 4	106
Tabla 14 Regulación en canal Trapecial 5	106

NOMENCLATURA

A , área hidráulica	N , número de intervalos computacionales de discretización temporal
A_c , área contracta	m , contador de iteraciones no lineales del método de Picard
a , factor de variación del tirante mínimo del canal con respecto al tirante máximo.	\mathcal{M} , Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, discretizada bajo el esquema de Leendertse.
b_1 , ancho del canal antes de estructura de control	M , Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento aproximada con polinomios de Taylor.
b_2 , ancho del canal después de la estructura de control	Q , gasto ($\frac{m^3}{s}$)
B , ancho de superficie libre	P , perímetro mojado
C_c , coeficiente de contracción	P_1, P_2 , presión
C_e , coeficiente de descarga de Swamee	r , radio del borde de la compuerta
C_d , coeficiente de descarga	R , radio hidráulico (m)
C_{dr} , corrección al coeficiente de descarga por condición de ahogamiento (ISO 13550)	Re , Número de Reynolds
Cr , número de Courant	S_f , pendiente de fricción
C_v , coeficiente de velocidad	S_b , pendiente de plantilla
f , una función continua	t , tiempo
Fr , número de Froude	T , tiempo total
G_1, G_2 ,	U , velocidad media (m/s)
g , aceleración de la gravedad, considerada de 9.8 (m/s)	V_1 , velocidad media en la sección antes de la compuerta
H , carga hidráulica (m)	Ve , Número de Vedernikov
h , posición del eje de giro de la compuerta radial	V_2 , velocidad aguas abajo de la compuerta con descarga libre
h_r , pérdidas por fricción	V_3 , velocidad aguas abajo de la compuerta con descarga sumergida
l , parámetro de fricción	w , apertura de compuerta
j , contador espacial	We , Número de Weber
J , número de intervalos computacionales de discretización espacial	x , coordenada sobre el eje longitudinal del canal
L , longitud total del tramo de canal	Y , tirante hidráulico medio
\mathcal{L} ,	y_1 , tirante antes de la compuerta
L , Ecuación de conservación de masa aproximada con polinomios de Taylor.	y_2 , tirante aguas abajo de la compuerta con descarga libre
\mathcal{L} , Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, discretizada bajo el esquema de Leendertse.	y_3 , tirante aguas debajo de la compuerta con descarga sumergida
n , número de intervalos computacionales de discretización temporal, como superíndice es contador temporal	y_c , tirante crítico
n , coeficiente de rugosidad de Manning	y_n , tirante normal
	y_{min} , tirante mínimo que se presenta en el canal ante el Q_{min}
	y_t , tirante aguas debajo de la compuerta
	z , carga de posición

α_1 y α_2 , Coeficientes de Coriolis en dos secciones distintas

ζ , relación de fases

ε , coeficiente por labio redondeado de la compuerta

ε_a y ε_q , tolerancia en la convergencia de área y gasto respectivamente.

Δt , tamaño del paso en el tiempo

Δx , tamaño del paso en el espacio

γ , factor de forma de la sección del canal (usado en la definición de Ve)

K_1, K_2, K_3 , exponentes de las variables independientes en el análisis adimensional

γ_o , peso específico del agua (1000 kg/m^3)

$\gamma^*, \alpha^*, \beta^*$, variables de cálculo para C_{dr}

$\gamma, \alpha, \beta, \xi$ Variables auxiliares en método de Leendertse

χ , exponente de radio hidráulico (usado en la definición de Ve)

ρ , relación de dispersión numérica

ρ_A , relación de dispersión analítica o continua.

ρ_o , densidad del agua

μ_o , viscosidad dinámica

σ , tensión superficial

θ , factor de ponderación temporal

Θ , ángulo de inclinación de la compuerta

Ψ , factor de ponderación espacial

$\Pi_{1,2,3,4,5}$, términos no lineales utilizados en la discretización con el esquema de Preissmann

Resumen

En México el 76.6 % del uso del agua se destina para la agricultura, representando el mayor volumen concesionado para uso consuntivo (CONAGUA, 2013) y la eficiencia de aprovechamiento oscila entre 36% (Peña E. , 2007) y 47% según SAGARPA (2010). Una de las principales unidades de manejo del agua en la agricultura la constituyen los Distritos de Riego y estos para la distribución del agua cuentan con una red de canales. Una estrategia de mejora en la eficiencia del uso del agua en la agricultura es realizar estudios de la forma de regular y distribuir el agua en la red de canales.

En este trabajo se plantea un desarrollo tecnológico que permita establecer al menos dos características de un canal de distribución principal,

- a) el funcionamiento hidrodinámico de flujo entre varios tramos de canal con estructuras de regulación y
- b) establecer las condiciones de frontera entre dos tramos del canal cuando hay una compuerta o varias como estructuras de regulación.

Además de estas características, se desarrolló un modelo de control para establecer la política de operación de las compuertas, ante un cambio del gasto circulante a la entrada del canal.

Esta trabajo tiene como propósito final la construcción de un algoritmo de regulación de un canal principal con control aguas arriba (U.S.B.R., 1991), que incluye las maniobras necesarias para mantener constante el tirante aguas arriba de la compuerta (Losada, 1997).

Para evaluar el funcionamiento del algoritmo se desarrolló un modelo numérico que soluciona las ecuaciones de flujo a superficie libre de Saint-Venant en una dimensión. El modelo numérico en primera instancia se elaboró para un tramo con una propuesta de solución bajo el esquema de discretización de Leendertse, considerando como condiciones de frontera una compuerta aguas abajo con una descarga libre y un hidrograma aguas arriba.

El esquema de Leendertse presentó problemas de convergencia para flujo supercrítico y en subcrítico cuando el número de Froude era cercano a la unidad. Por lo tanto se optó por utilizar el esquema de Preissmann que es estable para flujo supercrítico y subcrítico e independientemente del número de Courant (Abbott, 1979), (Lyn & Goodwin, 1987), (Aldama & Aguilar, 1996).

Con este esquema se construyó el Modelo numérico de Simulación de Múltiples Tramos (SMT) y estructuras de regulación RCAC. Las condiciones de frontera se basaron en acoplar la ley de descarga de compuertas, para descarga libre o ahogada con el modelo de simulación del canal. Para asegurar que esta condición de frontera sea adecuada se elaboró un análisis dimensional de la descarga de una compuerta, y se analizaron los límites de aplicación de los coeficientes de

descarga reportados por diferentes autores (Khalili Shayan & Farhoudi, 2013), (ISO 13550, 2002), (Sotelo, 2009) y (Swamee, 1992).

El funcionamiento del SMT se verificó mediante varios escenarios de prueba: un canal largo de cuatro tramos de 20 km de sección rectangular, y otro similar en longitud pero de sección trapezoidal; ambos con caudales de 70 a 98 m^3/s . En ambos se implementó el control local de la compuerta y uno global para gasto. En ambos casos se obtuvieron resultados satisfactorios. Se probaron diferentes leyes de operación y se verificó el funcionamiento del algoritmo de regulación, tanto en canales trapeziales con tramos de igual longitud como de longitudes variables.

1 Introducción

Entre los diversos usos del agua, la agricultura es la actividad económica que más agua utiliza en el mundo, en el caso de México demanda el 77% del agua (INEGI), con una superficie bajo riego de 6.5 millones de hectáreas, de las cuales 3.51 millones hectáreas están organizadas en 85 Distritos de Riego y el resto en 39,000 Unidades de Riego (CONAGUA, 2012).

Para abastecer toda su zona regable los Distritos de Riego cuentan en su infraestructura cuando menos con los siguientes elementos (Ver Lámina 1):

- Cuenca hidrológica de aportación de un escurrimiento base,
- Presa de almacenamiento con el fin de regular los periodos de abundancia de escurrimiento (lluvia) y el déficit o estiaje,
- Zona potencial regable con una división característica que incluye a cada usuario de riego o un conjunto de ellos considerados como una unidad de riego y la agrupación de todas las unidades conforman el Distrito de Riego,
- Infraestructura de control y regulación desde la fuente de almacenamiento hacia la zona regable en sus diferentes escalas, esto se asemeja a la irrigación sanguínea, entonces se parte del embalse o presa, por un red principal y después se distribuye a una red secundaria o terciaria de distribución y durante todo su trayecto de distribución suministra los volúmenes necesarios a los usuarios para mantener la producción agrícola del Distrito de Riego.

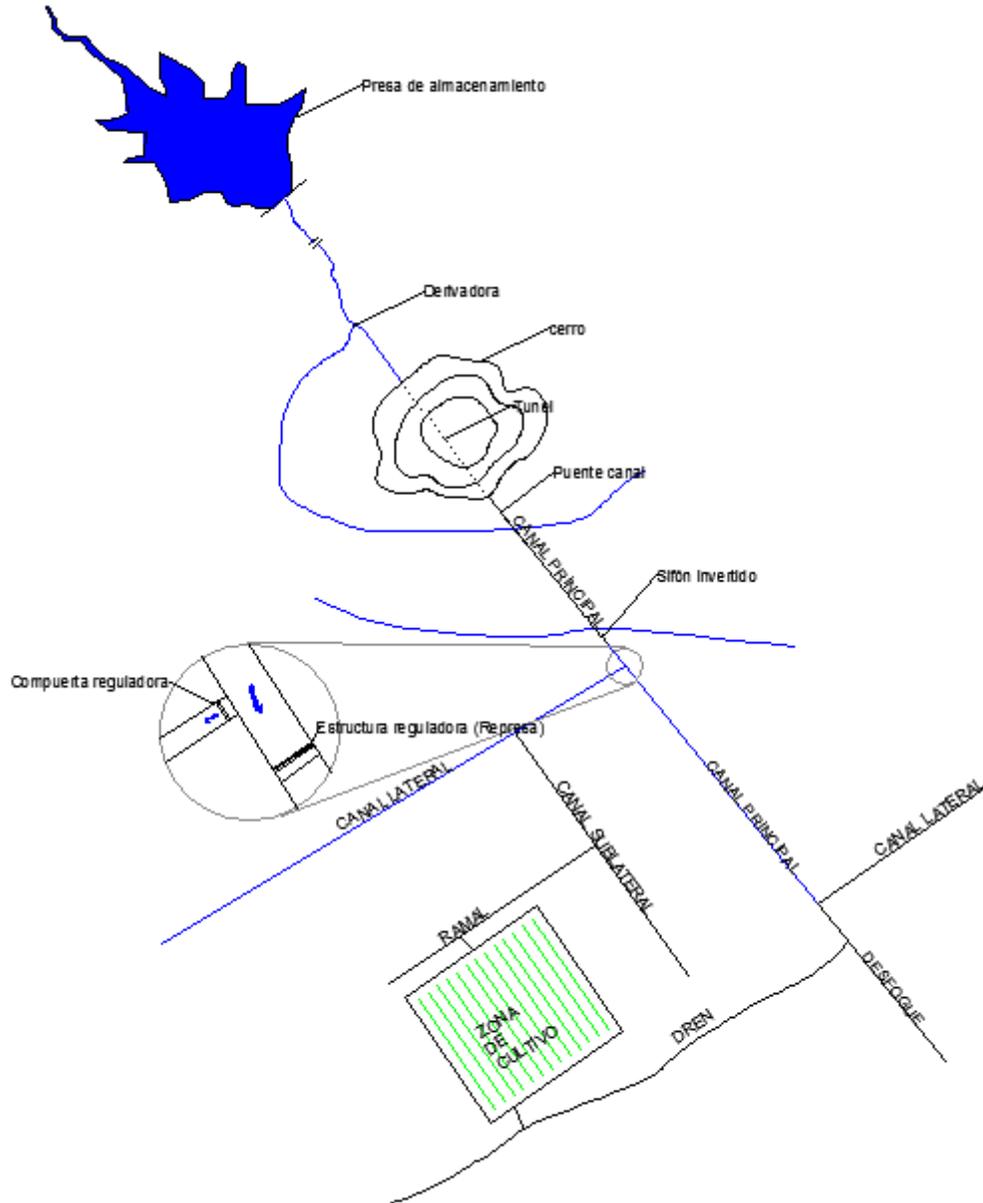
Toda la infraestructura de una gran irrigación se diseña bajo criterios de operación de demanda máxima o punta, esto significa que para el periodo de demanda máxima de los cultivos el sistema tiene la capacidad de distribuir y suministrar a todo los usuarios los requerimientos de los cultivos, aunque se considera que las demandas máximas no suceden al mismo tiempo.

Pero una vez que se pone en operación un Distrito de Riego, se tiene una variabilidad en la operación de la red de distribución que está en función de la fecha de siembra de los cultivos, la distribución de las plantaciones o del cultivo que el usuario considera sembrar y las características climáticas. Entonces se tiene una gran cantidad de variables para predecir cómo será un año agrícola, por lo tanto es necesario establecer esquemas de operación de un Distrito de Riego. La forma más usual de organizar a los usuarios es en módulos, que en algunos casos concuerdan con los canales secundarios, y saber cuál será su requerimiento de riego en una semana, este requerimiento se conoce como demanda predefinida. El operario de la red mayor elabora un balance de masa y determina el volumen a extraer en el almacenamiento y también cómo hacer su distribución.

Dada la demanda del agua es necesario optimizar el uso del recurso, esto se logra con la regulación de canales, que implica un conjunto de técnicas para mejorar la

explotación aprovechando la capacidad de almacenamiento de la conducción (U.S.B.R., 1991).

Lámina 1 Esquema general de un Distrito de Riego (Pedroza & Hinojosa, 2014)



El ideal de diseño del distrito de riego es que no existan pérdidas de agua, pero la realidad indica una eficiencia de riego entre 46% (SAGARPA, 2010) y 35 % (Peña E. , 2007). Estas pérdidas en forma general se engloban en dos partes, a la práctica agrícola en parcela, por ejemplo si es riego por gravedad con surcos o melga, o se tiene un sistema presurizado con aspersores, y la otra parte a las

pérdidas por mal manejo de la infraestructura de control en los canales de la red mayor o secundaria.

La red de canales es la encargada de distribuir el agua desde la obra de toma hasta la parcela. Los tramos del canal deben cumplir los siguientes criterios de diseño básico: se define un punto de control de regulación en cada tramo, y se aplica el principio de conservación de masa, considerando los flujos de entrada y salida, ya sea por el caudal que circula por las compuertas de control de nivel o por los extraídos por las tomas laterales.

Los puntos de control en una red de canales y la eficiencia de distribución están ligados a dos aspectos: la forma de operación (control aguas arriba o abajo) y la forma estructural de la compuerta, por ejemplo el número de vanos, forma de la hoja recta o circular, etc. (U.S.B.R., 1991). Su ubicación en cada tramo está en función de la técnica de regulación, las más usuales son: control agua arriba y abajo de la compuerta. En México la mayoría de las redes de canales están diseñadas con la técnica de control aguas arriba (Prado, León, & Ruiz, 2003) y para este trabajo se analizará esta condición de regulación.

El control aguas arriba requiere un conocimiento de las demandas futuras, se basa en mantener un tirante aguas arriba de la compuerta usando un lazo de control entre éste y la apertura de la compuerta (U.S.B.R., 1991). Las variaciones del nivel repercuten hacia aguas abajo como una carencia o desperdicio de agua. La operación del canal será eficiente en la medida que, siendo sencilla, evite el desperdicio o la sobreelevación de bordos y compuertas, y al mismo tiempo, permita suministrar los gastos demandados de modo creciente y uniforme en el menor lapso posible (Sánchez & Gracia, 1988).

Debido a la importancia de los canales de riego en la agricultura, ha sido necesaria su modelación. Por esto en los últimos años, se han tenido en México trabajos como el de (Sánchez & Gracia, 1988) quienes desarrollaron un modelo matemático para simular la operación de un canal de riego, esto con la finalidad de poder seleccionar la maniobra más adecuada para suministrar la demanda en cada caso de operación

Existen simuladores de flujo en canales de uso libre como HEC-RAS (por sus siglas en inglés para Hydrologic Engineering Centers River Analysis System), que fue desarrollado por el Cuerpo de Ingenieros del Ejército de E.U.A. , basado en un modelo de flujo unidimensional e hidrodinámico adaptado por Dr. Robert L. Barkau's (US Army Corps of Engineers, s.f.). Este modelo tiene como objetivo simular zonas de inundación, transporte de sedimentos y modelación de temperatura de agua, ya que la regulación no está dentro de sus objetivos principales, este software presenta problemas en la modelación de compuertas, incrementándose sus problemas de inestabilidad numérica.

Otro modelo numérico es el llamado SIC (por sus siglas en inglés Simulation of irrigation Canals), cuyo desarrollo inició en los años 80's a cargo del CEMAGREF, en Francia. Utiliza las ecuaciones completas de Saint Venant en una dirección y

para flujo subcrítico, aunque también modela flujo supercrítico. El SIC ha tenido gran aceptación a nivel mundial.

Pero estos no han sido los únicos, en Dinamarca el DHI (Danish Hydraulic Institute) Desarrolló MIKE 11 que además de la simulación de canales puede analizar estructuras complejas como presas. Es altamente usado en Nueva Zelanda, Bangladesh y varios países europeos. Al igual que el SIC este no es un software libre y para su configuración es necesaria la asistencia del DHI. SOBEK Incluye el control de aguas subterráneas, inundaciones en alcantarillas, control de sistemas de riego, control de calidad del agua, y puede simular en 1D o 2D. Tiene la desventaja de necesitar una gran capacidad en RAM y no es compatible con GIS para la extracción de datos (Ramesh, 2013).

Por su parte (Islam, Raghuvanshi, & Singh, 2008) de la India elaboraron un modelo numérico llamado “CanalMod” basado en las ecuaciones de flujo de Saint Venant, muy parecido al utilizado en esta tesis con la diferencia de que los autores incluyen un factor de corrección en la ecuación de conservación de cantidad de movimiento. “CanalMod” es capaz de modelar compuertas, vertedores, descargas laterales y redes de canales.

En la investigación bibliográfica de los diferentes softwares de flujo a superficie libre se observó que el implementar un algoritmo de regulación, implica una dependencia tecnológica por parte del usuario, ya que estos módulos no son de fácil aplicación o no están disponibles.

En este trabajo se plantea un desarrollo tecnológico que permita establecer al menos dos características de un canal de distribución principal,

- c) el funcionamiento hidrodinámico de flujo entre varios tramos de canal con estructuras de regulación y
- d) establecer las condiciones de frontera entre dos tramos del canal cuando hay una compuerta o varias como estructuras de regulación.

Además de estas características, se desarrolló un modelo de control para establecer la política de operación de las compuertas, ante un cambio del gasto circulante a la entrada del canal.

En forma resumida el trabajo presenta la siguiente secuencia:

En el capítulo 2 se muestra el sistema de ecuaciones de Saint Venant que describen el flujo unidimensional no permanente en un canal o río, en su versión conservativa y no conservativa. Para la solución discreta de las ecuaciones de Saint-Venant se aplica el método de diferencias finitas, con un esquema de caja o Preissmann para la versión conservativa y de diferencias alternantes o Leedertse para la versión no conservativa. El modelo discreto conservativo es no lineal y para su solución se aplica una actualización tipo Newton. En este mismo capítulo se presenta el análisis de convergencia (teorema de equivalencia de Lax) de las ecuaciones discretas no conservativas.

Subsecuentemente, en el capítulo 3 se analiza con detalle las características hidrodinámicas de una compuerta de regulación, con lo cual se definen los rangos y límites de los modelos de descarga de una compuerta (relación carga-gasto). También se verificaron los requerimientos mínimos para construir un algoritmo numérico integral para operar todas las compuertas del canal (condiciones de frontera entre tramos de canal) a flujo permanente. Con este análisis, se obtuvo un algoritmo para establecer la condición inicial de apertura de compuertas, en condición de descarga libre y ahogada y que se utilizó en el apartado 4.

La construcción del Modelo numérico de Simulación de Múltiples Tramos (SMT) se presenta en el capítulo 4, y toma en cuenta lo siguiente:

- a) *Condición inicial* con las siguientes características: gasto a la entrada del canal, nivel-descarga al final de canal; definición de los niveles de control de nivel aguas arriba de cada compuerta (objetivo de la regulación o *set point*); solución de la ecuación de flujo gradualmente variado para establecer niveles dentro de los tramos del canal, y finalmente apertura de las compuertas con el algoritmo presentado en el capítulo 3,
- b) *Condiciones de frontera*, en este caso se define la condición de Dirichlet de variación de gasto en la entrada; en las fronteras interiores (unión entre dos tramos que incluye una compuerta como elemento de regulación) se aplica el principio de conservación de masa para gasto y para nivel el modelo de descarga de la compuerta, como se planteó en el capítulo 3, y
- c) *Modelo discreto*, para la modelación transitoria dentro de cada tramo se utilizó el modelo de Preissmann conservativo no lineal (capítulo 2). Para visualizar la información de los transitorios en el caso se construyó las subrutinas de impresión de resultados numéricos, así como el despliegue gráfico

También en el capítulo 4 se desarrolló el Modelo de Regulación para Control Automático de Compuertas (RCAC), para establecer los tiempos y las magnitudes de apertura y cierre de las compuertas, con el objetivo de mantener el nivel de operación en cada tramo (*set point*). El modelo RCAC opera en forma paralela al modelo SMT, ya que extrae la información de gasto de ingreso (variación transitoria), nivel aguas arriba y abajo de cada compuerta, y apertura actual de las compuertas del SMT, y con esta información RCAC genera una política de operación temporal de las compuertas e interviene en SMT abriendo o cerrando estas, para cumplir el objetivo del control.

El modelo RCAC tiene dos características:

- a) *Retardo*, los tiempos de retardo en la apertura de las compuertas se determinan en forma dinámica con los eigenvalores de los términos convectivos de las ecuaciones de Saint-Venant.
- b) *Amplitud del control*, esta magnitud es la apertura de las compuertas (control proporcional PD) y se define con el modelo de condición inicial del SMT (capítulo 3).

Para verificar los modelos SMT y RCAC, planteados en este trabajo, se elaboraron una serie de escenarios de pruebas numéricas y estos se muestran en el capítulo 5, y en forma de resumen se enlistan en la Tabla 1.

Tabla 1 Escenarios de prueba de los algoritmos de simulación y de control

Tipo se sección	Número de tramos	Longitud de tramos (metros)	Ley de operación de gasto al inicio del canal
Rectangular	3	100	Un escalón
Rectangular	4	5000	Un escalón
Trapezoidal	4	500	Un escalón
Trapezoidal	4	5000	Dos escalones
Trapezoidal	4	5000	Tres escalones
Trapezoidal	4	Longitudes variables entre 4000 a 6000	Tres escalones

1.1 Objetivos y alcances

Con el fin de mejorar las capacidades de los ingenieros de los Distritos de Riego se propuso elaborar un sistema de uso libre que permita simular el flujo en canales y también implementar algoritmos de regulación.

El objetivo de la tesis es verificar el funcionamiento de un modelo de regulación multitramos.

Las actividades para cumplir el objetivo fueron las siguientes:

- a. Elaborar un modelo numérico de simulación de flujo unidimensional transitorio en canales
- b. Desarrollar un algoritmo para establecer aperturas de compuertas en un canal con múltiples tramos para una condición flujo permanente
- c. Construir un modelo de simulación de flujo unidimensional de múltiples tramos que tome en cuenta el funcionamiento continuo de una estructura de regulación, como frontera interna.
- d. Desarrollar e implementar un algoritmo de regulación global, que considere el control de nivel ante cambios de gasto al inicio del canal.

2 Ecuaciones de flujo en canales

Se considera flujo en canales abiertos aquel donde existe flujo a superficie libre, aunque el canal esté cerrado como en un túnel (Chaudhry, 1979). El flujo en un canal puede ser permanente o no permanente, se considera permanente cuando las variaciones en la velocidad y nivel con el paso del tiempo son nulas, en caso contrario se tiene un flujo no permanente o transitorio.

Para el análisis del flujo en ríos se han desarrollado diferentes modelos, así existen modelos hidrológicos y modelos hidráulicos. Los modelos de enfoque hidrológico son fáciles de usar pero se dice que su fundamentación teórica llega a ser escasa, y lo que interesa en estos modelos son los hidrogramas de entrada y de respuesta a la salida. Mientras que los modelos hidráulicos están mejor fundamentados teóricamente ya que se basan en principios físicos, aunque su aplicación es más compleja debido a que utilizan ecuaciones diferenciales parciales (US Army Corps of Engineers, 1993).

2.1 Ecuaciones de Saint Venant

Los principios físicos para analizar el flujo transitorio en cauces naturales o prismáticos están definidos por las ecuaciones de Saint-Venant (Abbott, 1979), propuestas en 1871 por Barre de Saint-Venant. Están formadas por una ecuación de conservación de masa y otra de cantidad de movimiento, estas ecuaciones se sustentan en las siguientes hipótesis:

1. El flujo es unidimensional. por ejemplo. la velocidad es uniforme sobre la sección transversal y el nivel del agua en lo ancho de la sección es horizontal.
2. La curvatura de las líneas de corriente es pequeña, la aceleración vertical es insignificante y así como la distribución de presiones es hidrostática.
3. Los efectos de la fricción en las paredes y la turbulencia pueden ser contabilizados con leyes de resistencia análogas a las usadas para flujo permanente
4. La pendiente promedio del fondo del canal es pequeña de modo que el coseno del ángulo que este hace con respecto a la horizontal puede ser reemplazado por la unidad.
5. La variación del ancho del canal a lo largo del canal es pequeña. (Chaudhry, 1979)

Cabe recalcar que las ecuaciones de Saint Venant describirán correctamente el flujo mientras que las mencionadas hipótesis se cumplan, no obstante que esto no siempre pasa, (Litrico & Fromion, 2009) describen las siguientes limitaciones de las ecuaciones de Saint-Venant:

1. El flujo puede no ser unidimensional en el caso de ríos muy largos o llanuras de inundación. El caso de canales de riego se puede modelar como unidimensionales.
2. Cuando se tienen saltos hidráulicos u oleaje la distribución de presiones no es hidrostática, en estos casos es necesario modificar el término de presión en la ecuación de momentum considerando las ecuaciones de Boussinesq.
3. Cuando el flujo tiene discontinuidades como las provocadas por estructuras hidráulicas, como compuertas, las ecuaciones de Saint Venant ya no son aplicables, a menos que estas sean tratadas como límites

La recomendación última indica que estas ecuaciones no son válidas cuando existen estructura de control, lo cual es provocado por que una estructura de regulación interrumpe el paso de la onda de presión y velocidad entre dos tramos. En este trabajo se seguirá esta recomendación por lo que se tendrá que construir un modelo acoplado multitramos.

En la literatura se tienen diferentes versiones de las ecuaciones de Saint-Venant y se clasifican como forma conservativa o no conservativa. La diferencia está en la forma de trabajar los cambios del área y presión a lo largo de un canal, y para el caso de canales prismáticos cuasi regulares y de gran longitud, no se espera una gran diferencia entre ambas versiones (Abbott, 1979). A continuación se muestran las diferentes versiones de las ecuaciones de Saint-Venant.

Ecuaciones No Conservativas de Saint-Venant (ENCS-V):

$$L(H, U; x, t) = B(H; x, t) \frac{\partial H}{\partial t} + A(H; x, t) \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial A(H; x, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$M(H, U; x, t) = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g (S_b - S_f(H, U; x, t)) = 0 \quad (2.2)$$

$$S_f(H, U; x, t) = \frac{n(x)^2 |U| U}{g R(H; x, t)^{4/3}} \quad (2.3)$$

Donde se tienen como variables independientes a x , la coordenada en el sentido horizontal, y t el tiempo; $H(x, t)$ el tirante, $U(x, t)$ la velocidad, $B(H; x, y)$ ancho de superficie libre, $A(H, x, y)$ área hidráulica, como variables dependientes; además $\Omega(x, t) = [0, L] \times [0, T]$, donde Ω es el espacio de solución; L , longitud de la conducción; T , tiempo final de solución; g , $S_b(x)$ la pendiente del fondo del canal y $S_f(H, U; x, t)$.

El sistema de ecuaciones (2.1) y (2.2) representa un problema de valor inicial y de valores en la frontera, bien planteado en el sentido de Hadamard (Drolier & Gray, 1988).

La condición inicial se define para $H(x, 0) = H_0(x)$ y $U(x, 0) = U_0(x)$. Las condiciones de frontera se definen en función del tipo de régimen, entonces para flujo

subcrítico (número de Froude menor a la unidad $Fr < 1$), $H(L, t) = s(t)$ y $U(0, t) = f(t)$ para $t > 0$ y para flujo supercrítico ($Fr > 1$), $H(0, t) = s(t)$ y $U(0, t) = f(t)$, $t > 0$.

Ecuaciones Conservativas de Saint-Venant (ECS-V).

$$L(A, Q; x, t) = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

$$M(A, Q; x, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial H(A; x, t)}{\partial x} + gAS_f(A, Q; x, t) = 0 \quad (2.5)$$

$$S_f(A, Q; x, t) = \frac{n(x)^2 |Q| Q}{g R(A; x, t)^{4/3} A^2} \quad (2.6)$$

Donde $A(x, t)$ y $Q(x, t)$, el área y gasto respectivamente, como variables dependientes; $H(A; x, t) = y(A; x, t) + z_b(x)$ la elevación de la superficie libre del agua desde un nivel de referencia; $y(A; x, t)$ elevación de la superficie libre del agua medida desde la plantilla del fondo del canal; $z_b(x)$ la elevación de la plantilla del fondo del canal desde un nivel de referencia y $S_f(A, Q; x, t)$ la pendiente de fricción (ecuación (2.6)), y $Q(x, t)$ entrada o salida de masa normal al eje longitudinal x .

La condición inicial se define para $A(x, 0) = A_0(x)$ y $Q(x, 0) = Q_0(x)$. Las condiciones de frontera se definen en función del tipo de régimen, entonces para flujo subcrítico (número de Froude menor a la unidad $Fr < 1$), $A(L, t) = s(t)$ y $Q(0, t) = f(t)$ para $t > 0$ y para flujo supercrítico $Fr > 1$, $A(0, t) = s(t)$ y $Q(0, t) = f(t)$, $t > 0$.

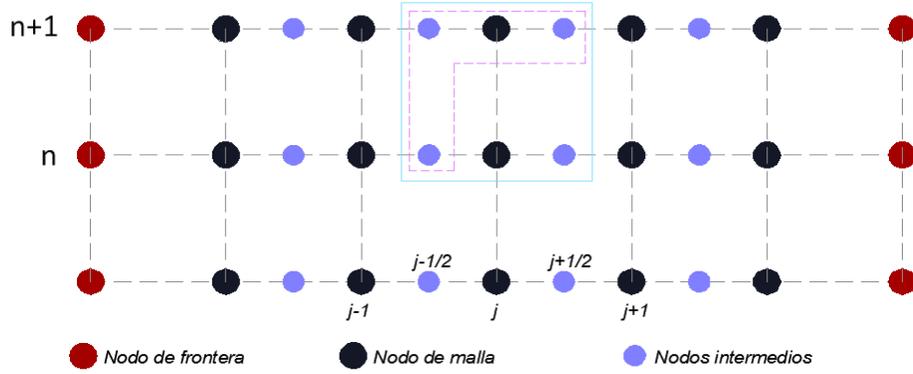
En este trabajo se utilizarán ambas versiones, con lo que se busca la estrategia más adecuada de solución numérica las ecuaciones de flujo en canales con compuertas. Para el caso de la versión no conservativa se utiliza el esquema Leendertse, que es un esquema lineal de coeficientes constantes y para el caso de la versión conservativa se aplica el esquema de Preissmann no lineal de coeficientes variables, en este último caso se buscó no perder información del tránsito de las ondas en un canal para cualquier longitud de onda.

2.2 Modelo discreto

2.2.1 Esquema de discretización lineal (Leendertse).

La propuesta de discretización de Leendertse es un esquema implícito, conocido como *staggerd grid* o tipo tresbolillo (ver Lámina 2), que tiene la ventaja de reescribir la ecuación de conservación de masa dentro de un tiempo equivalente y en un espacio centrado, lo que permite resolver de forma directa un sistema matricial tridiagonal y por consiguiente logra un menor tiempo de cómputo para obtener la solución.

Lámina 2 Esquema de Discretización de Leendertse en el espacio solución $\Omega(x_j, t_n)$



Para la discretización de las ENC- S. V. en el esquema de diferencias de Leendertse (Aguilar Chávez, 2002) se toman en cuenta las siguientes consideraciones: cada función continua se aproxima a una variable discreta F_j^n en cada punto (x_j, t_n) del plano Ω , espacio solución tal que $\Omega(x_j, t_n) = \Omega(j\Delta x, N\Delta t)$ encontrándose cubierto por una malla de espacio uniforme Δx para cualquier Δt . Definido J y N como los intervalos computacionales de discretización espacial y temporal, el paso en el espacio y tiempo son: $\Delta x = L/J$ y $\Delta t = T/N$. A continuación se presentan las ecuaciones discretizadas bajo este esquema:

Conservación de masa

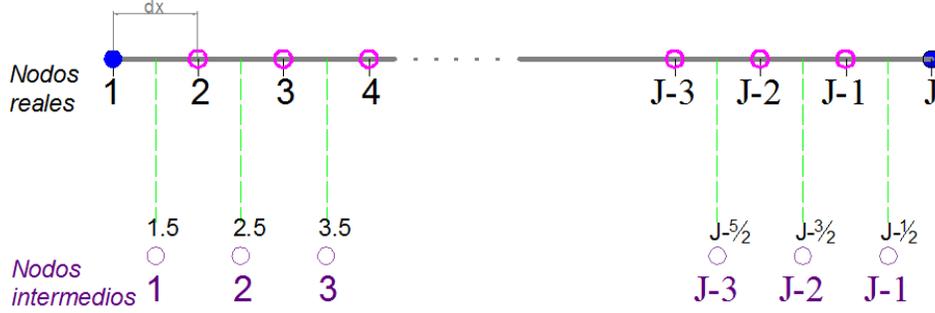
$$\mathcal{L}(H_j^n, U_j^n; x_j, t_n) = B(H_j^n; x_j, t_n) \frac{H_j^{n+1} - H_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left[U_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} A \left(H_{j+\frac{1}{2}}^n; x_{j+\frac{1}{2}}, t_n \right) - U_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} A \left(H_{j-\frac{1}{2}}^n; x_{j-\frac{1}{2}}, t_n \right) \right] = 0 \quad (2.7)$$

Cantidad de movimiento

$$\mathcal{M}(H_j^n, U_j^n; x_j, t_n) = \frac{U_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - U_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + U_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \left(\frac{U_{j+\frac{3}{2}}^n - U_{j-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta x} \right) + g \frac{H_{j+1}^{n+1} - H_j^{n+1}}{\Delta x} + \frac{gn^2 \left| U_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \right| U_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}}{R \left(H_{j+\frac{1}{2}}^n, Q_j^n; x_j, t_n \right)^{\frac{4}{3}}} - gS_b = 0 \quad (2.8)$$

Considerando la numeración de la malla como en la Lámina 3, si se desarrollan y agrupan las ecuaciones de acuerdo al nodo como se muestra en las siguientes ecuaciones:

Lámina 3 Numeración de nodos de la malla en el espacio



Frontera izquierda

En esta frontera se ingresa el gasto $Q(t)$ de acuerdo con el hidrograma. Y las variables se evalúan de la siguiente manera.

$$\xi_{1.5}^n = \frac{\lambda}{2}(-3U_{1.5}^n + 4U_{2.5}^n - U_{3.5}^n) + gn^2\Delta t|U_{1.5}^n|/(R_{1.5}^n)^{\frac{4}{3}} \quad (2.9)$$

$$\alpha_{1.5}^n = -\frac{g\lambda^2 A_{1.5}^n}{1 + \xi_{1.5}^n} \quad (2.10)$$

$$\beta_1^n = B_1^n - \alpha_{1.5}^n \quad (2.11)$$

$$\gamma_1^n = B_1^n H_1^n + \lambda Q(t) + \frac{\alpha_{1.5}^n}{g\lambda}(U_{1.5}^n + gS_b\Delta t) \quad (2.12)$$

En los nodos intermedios, es decir de $2 < j < J-1$

$$\xi_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{\lambda}{2}\left(U_{j+\frac{3}{2}}^n - U_{j-\frac{1}{2}}^n\right) + gn^2\Delta t\left|U_{j+\frac{1}{2}}^n\right|/\left(R_{j+\frac{1}{2}}^n\right)^{\frac{4}{3}} \quad (2.13)$$

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n = -\frac{g\lambda^2 A_{j+\frac{1}{2}}^n}{1 + \xi_{j+\frac{1}{2}}^n} \quad (2.14)$$

$$\beta_j^n = B_j^n - \alpha_{j+\frac{1}{2}}^n - \alpha_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (2.15)$$

$$\gamma_j^n = B_j^n H_j^n - \frac{\alpha_{j-\frac{1}{2}}^n}{\lambda}\left(U_{j-\frac{1}{2}}^n + gS_b\Delta t\right) + \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{g\lambda}\left(U_{j+\frac{1}{2}}^n + gS_b\Delta t\right) \quad (2.16)$$

Frontera derecha (aguas abajo)

2.2.1.1 Análisis de convergencia del esquema de discretización de Leendertse Análisis de consistencia

La consistencia numérica se puede englobar bajo el siguiente teorema:

Teorema de consistencia numérica. La discretización aplicada a las ecuaciones de Saint-Venant no conservativas es consistente numéricamente bajo cualquier norma $\|\cdot\|$, cuando se tiene un refinamiento de malla tal que $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ (Morton, 1994, Aguilar, 2002).

Demostración: La funciones discretas en la ecuaciones (2.7) y (2.8) tienen un grado de continuidad $F \in C^0$, por lo tanto se propone introducir unos polinomios con las siguientes características $g(j\Delta x, n\Delta t) = F_j^n$, $g \in C^n$, entonces a este polinomio se aplica una expansión en serie de Taylor en dos dimensiones, como se muestra a continuación:

$$g(x_j + \Delta x, t_n + \Delta t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n} g(x_j, t_n)}{\partial^m x \partial^n t} (\Delta x)^m (\Delta t)^n \quad (2.24)$$

Aplicando la expansión anterior a los términos de las ecuaciones (2.7) y (2.8) se tienen:

$$B(H_j^n; x_j, t_n) = B(x, y) \quad (2.25)$$

$$H_j^n = h(x_j, t_n) = h_j^n \quad (2.26)$$

$$H_j^{n+1} = h(x_j, t_n + \Delta t) = h_j^n + \Delta t \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \quad (2.27)$$

$$H_{j+1}^{n+1} = h(x_j + \Delta x, t_n + \Delta t) = h_j^n + \Delta x \frac{\partial h}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2!} \Delta x^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{2!} \Delta t^2 \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \Delta x \Delta t \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \quad (2.28)$$

$$U_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = u\left(x_j + \frac{\Delta x}{2}, t_n + \Delta t\right) = u_j^n + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta x \Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \quad (2.29)$$

$$U_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} = u\left(x_j - \frac{\Delta x}{2}, t_n + \Delta t\right) = u_j^n - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\Delta x \Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \quad (2.30)$$

$$U_{j+\frac{1}{2}}^n = u(x_j + \Delta x/2, t_n) = u_j^n + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^3) \quad (2.31)$$

$$U_{j-\frac{1}{2}}^n = u(x_j + \Delta x/2, t_n) = u_j^n - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^3) \quad (2.32)$$

$$U_{j+\frac{3}{2}}^n = u(x_j + 3\Delta x/2, t_n) = u_j^n + \frac{3}{2}\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{9}{8}\Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + O(\Delta x^3) \quad (2.33)$$

$$A\left(H_{j+\frac{1}{2}}^n; x_{j+\frac{1}{2}}, t_n\right) = a(x_j + \Delta x/2, t_n) = a_j^n + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 a}{\partial^2 x} + O(\Delta x^3) \quad (2.34)$$

$$A\left(H_{j-\frac{1}{2}}^n; x_{j-\frac{1}{2}}, t_n\right) = a(x_j - \Delta x/2, t_n) = a_j^n - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 a}{\partial^2 x} + O(\Delta x^3) \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} R_{j+\frac{1}{2}}^n \left(H_{j-\frac{1}{2}}^n; x_{j-\frac{1}{2}}, t_n \right)^{\frac{4}{3}} &= r \left(x_j + \frac{\Delta x}{2}, t_n \right)^{\frac{4}{3}} = r^{-\frac{4}{3}j} - \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\partial r^{-\frac{4}{3}}}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 r^{-\frac{4}{3}}}{\partial^2 x} \\ &= r^{-4/3j} - \frac{2\Delta x}{3} r^{-7/3} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{7}{18} \Delta x^2 r^{-10/3} \frac{\partial^2 r}{\partial^2 x} + O(\Delta x^3) \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$S_b(H_j^n; x_j, t_n) = S_b(x_j) \quad (2.37)$$

$$B(H_j^n; x_j, t_n) = B(x_j) \quad (2.38)$$

Posteriormente se sustituyen las aproximaciones en las ecuaciones de flujo discretas (2.7) y (2.8):

$$\begin{aligned} L(H_j^n, U_j^n; x_j, t_n) &= \frac{1}{\Delta t} B(H_j^n; x_j, t_n) \cdot \left(h_j^n + \Delta t \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 h}{\partial^2 t} + O(\Delta t^3) - h_j^n \right) \\ &+ \frac{1}{\Delta x} \left(u_j^n + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + \frac{\Delta x \Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \right) \\ &\quad \cdot \left(a_j^n + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 a}{\partial^2 x} + O(\Delta x^3) \right) \\ &- \frac{1}{\Delta x} \left(u_j^n - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + O(\Delta x^3) \right) \cdot \left(a_j^n - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 a}{\partial^2 x} + O(\Delta x^3) \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$M(H_j^n, U_j^n; x_j, t_n) =$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t} \left[u_j^n + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + \frac{\Delta x \Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) - \left(u_j^n + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + O(\Delta x^3) \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2\Delta x} \left(u_j^n + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + \frac{\Delta x \Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \right) \cdot \\ &\left[u_j^n + \frac{3}{2}\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{9}{8}\Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + O(\Delta x^3) - \left(u_j^n - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + O(\Delta x^3) \right) \right] \\ &+ g \frac{1}{\Delta x} \left(h_j^n + \Delta x \frac{\partial h}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial^2 x} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial^2 t} + \Delta x \Delta t \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \right) - g \frac{1}{\Delta x} \left(h_j^n + \Delta t \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial^2 t} + O(\Delta t^3) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{gn^2}{r^{-\frac{4n}{3}} - \frac{2\Delta x}{3} r^{-\frac{7}{3}} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{7}{18} \Delta x^2 r^{-\frac{10}{3}} \frac{\partial r}{\partial x} + O(\Delta x^3)} \left| u_j^n + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + \frac{\Delta x \Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right. \\
 & \quad \left. + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \right| \\
 & \left(u_j^n + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + \frac{\Delta x \Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \right) - gS_b(x_j) = 0
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

De acuerdo con el teorema de consistencia numérica $\|L(\cdot) - \mathcal{L}(\cdot)\| = 0$ y también $\|M(\cdot) - \mathcal{M}(\cdot)\| = 0$; la verificación de estas diferencias se realizó con ayuda de Symbolic Math Toolbox™ del programa MATLAB®, esta barra de herramientas tiene funciones para resolver y manipular expresiones matemáticas algebraicas, puede hacer diferenciación analítica, integración, simplificación, transformación y solucionar ecuaciones. Este análisis de consistencia se utiliza para simplificar las normas; con el comando “syms” se definen las variables simbólicas. Finalmente se obtiene para la ecuación de conservación de masa:

$$\begin{aligned}
 \|L - \mathcal{L}\| = & -\Delta x^2 \left(\Delta x^2 \frac{\partial^3 A}{192} \frac{\partial^2 u}{\partial^5 x} + u \frac{\partial^3 A}{24} \frac{\partial^3 u}{\partial^3 x} + \Delta x^2 \frac{\partial^2 A}{192} \frac{\partial^3 u}{\partial^5 x} + \frac{\partial^2 A}{8} \frac{\partial u}{\partial^3 x} + \frac{\partial A}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial^3 x} \right. \\
 & \left. + \frac{A}{24} \frac{\partial^3 u}{\partial^3 x} \right) \\
 & - \Delta t \left(\frac{\Delta x^2 t \partial^3 A}{48} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t \partial^3 x} + \frac{\Delta x^2 \Delta t \partial^2 A}{16} \frac{\partial^3 u}{\partial^2 t \partial^3 x} + \frac{\Delta t \partial A}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t \partial x} + \frac{b \partial^2 h}{2 \partial^2 t} + \frac{A \Delta t}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial^2 t \partial x} \right) \\
 & - \Delta t^2 \left(\frac{\Delta x^2 \Delta t}{144} \frac{\partial^3 A}{\partial^3 t} \frac{\partial^3 u}{\partial^3 x} + \frac{\Delta t \partial A}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial^3 t \partial x} + \frac{b \partial^3 h}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial^3 t} \right) \\
 & - \Delta t \left(\frac{\Delta x^4 \partial^3 A}{192} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial^5 x} + \frac{\Delta x^2}{24} \frac{\partial^3 A \partial u}{\partial t \partial^3 x} + \frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 A \partial^2 u}{\partial t \partial^3 x} + \frac{\partial A \partial u}{\partial t \partial x} + A \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Y para la ecuación de conservación de cantidad de movimiento se llega a:

$$\begin{aligned}
 \|M - \mathcal{M}\| = & - \left(\frac{\Delta x}{\partial^2 x} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\Delta^2 t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + \frac{\Delta^2 x}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta t \Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) \\
 & - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \frac{g \Delta x \partial^2 h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} - \frac{\Delta x \partial^2 u}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} - \frac{\Delta t \partial^2 u}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial^2 t} - g \Delta t \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} \\
 & + \frac{gn^2 u^2}{r^{\frac{4}{3}}} \left(\frac{\Delta^2 t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + \frac{\Delta^2 x}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta t \Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Debido a que todos los términos se encuentran multiplicados por Δx y Δt se puede tener la certeza de que cuando $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \|L(\cdot) - \mathcal{L}(\cdot)\| &\rightarrow 0 \\ \|M(\cdot) - \mathcal{M}(\cdot)\| &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Con lo que queda demostrada la consistencia numérica del esquema de Leendertse.

Análisis de estabilidad

La estabilidad se refiere a la forma en que se propagan los errores numéricos, por lo que para verificar el comportamiento del sistema se utilizarán expansiones en serie de Fourier.

Teorema de Condición de estabilidad. Se dice que un esquema discreto es estable si la condición de propagación de la relación de dispersión es menor o igual a la unidad, entonces $|\rho| \leq 1$ (Morton & Mayers, 1994).

Debido a que este análisis requiere que el sistema de ecuaciones sea lineal y de coeficientes constantes, en este trabajo se utilizó el sistema de ecuaciones linealizadas determinado por (Aldama & Aguilar, 1996) el cual se estableció con un método de análisis perturbatorio y de localización; con el cual las ecuaciones de conservación de masa y de cantidad de movimiento adquieren la forma mostrada en (2.44) y (2.45). La propuesta localizada es un problema lineal de valor inicial puro bien planteado y de coeficientes constantes para un espacio de solución $x \in (-\infty, \infty)$.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U_o \frac{\partial h}{\partial x} + Y_o \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U_o \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + F_1 h + F_2 u = 0 \quad (2.45)$$

$$F_1 = -\frac{4}{3} \frac{n^2 |U_o| U_o}{R_o^{7/3}} \frac{dR}{dH} \Big|_o \quad (2.46)$$

$$F_2 = 2 \frac{n^2 |U_o|}{R_o^{4/3}} \quad (2.47)$$

Donde el tirante $h(x, t)$ y la velocidad $u(x, t)$ son las variables dependientes; x, t distancia y tiempo las variables independientes; U_o , la velocidad media; Y_o , el tirante hidráulico medio y n es el coeficiente de fricción de Manning.

Series de Fourier continuas. El sistema de ecuaciones linealizadas propuesta (2.44) y (2.45), puede representarse como las ecuaciones de Euler para describir el flujo a superficie libre si se desprecian los términos de fricción. Estas ecuaciones pueden ser solucionadas por medio de la aplicación de una expansión en serie de Fourier continua para las variables dependientes:

$$h = \hat{h} e^{i(kx - \omega t)} \quad (2.48.a)$$

$$u = \hat{u}e^{i(kx-\omega t)} \quad (2.48.b)$$

Donde \hat{h} , \hat{u} es la amplitud de la variable; k , el número de onda y ω la frecuencia, aplicado a un modo arbitrario de Fourier. Sustituyendo estas ecuaciones en las de Euler (ecuaciones (2.44) y (2.45) sin considerar los términos de fricción) y desarrollando se tiene:

$$e^{i(kx-\omega t)} \begin{bmatrix} \omega - kU_o & -kY_o \\ -kg & \omega - kU_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

El sistema anterior tiene solución sí y sólo si su determinante de la matriz es nula, descartando la solución trivial entonces se tiene:

$$(\omega - kU_o)^2 - k^2gY_o = 0$$

$$\omega(k) = (U_o \pm \sqrt{gY_o})k \quad (2.50)$$

Entonces la condición de estabilidad límite para el sistema se tiene para $\omega_i \leq 0$, por lo tanto las ecuaciones de Euler son neutralmente estables.

Series de Fourier discretas. Ya que se tiene un sistema de ecuaciones lineal (ecuaciones (2.44) y (2.45)), éste se discretiza bajo el esquema de Leendertse, como se muestra a continuación:

$$\frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{\Delta t} + \frac{U_o}{\Delta x} (h_{j+1/2}^n - h_{j-1/2}^n) + \frac{Y_o}{\Delta x} (u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j-1/2}^{n+1}) = 0 \quad (2.51)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{U_o}{2\Delta x} (u_{j+3/2}^n - u_{j-1/2}^n) + \frac{g}{\Delta x} (h_{j+1}^{n+1} - h_j^{n+1}) + F_1 h_{j+1/2}^n + F_2 (u_{j+1/2}^{n+1} + u_{j+1/2}^n) = 0 \quad (2.52)$$

Este modelo lineal ya puede ser solucionado aplicando una serie discreta de Fourier, en que las variables dependientes se expresan como:

$$h_j^u = h(j\Delta x, n\Delta t, m) = \hat{h}_m \rho_m^n e^{ik_m j \Delta x} \quad (2.53.a)$$

$$u_j^u = u(j\Delta x, n\Delta t, m) = \hat{u}_m \rho_m^n e^{ik_m j \Delta x} \quad (2.53.b)$$

Donde \hat{h}_m y \hat{u}_m representan las amplitudes del nivel y la velocidad; ρ_m^n es la relación de dispersión discreta; $i = \sqrt{-1}$ y k_m el número de onda adimensional, para el m -ésimo modo de Fourier discreto. Sustituyendo (2.53.a) y (2.53. b).

$$\rho^n e^{ik_j \Delta x} \begin{bmatrix} \rho - 1 + 2iU_o \lambda s & 2iY_o \rho \lambda s \\ 2ig\rho \lambda s + F_1 \Delta t & \rho - 1 + 2iU_o \lambda s c + F_2 \Delta t (\rho + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h}_m \\ \hat{u}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Donde se introducen las siguientes variables $\lambda = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, $s = \sin\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)$ y $c = \cos\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)$. Se puede ver que el sistema tiene la forma: $\rho^n e^{ikj\Delta x} \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Calculando el determinante de la matriz de coeficientes (\mathbf{A}), e igualando a cero, ya que es la única forma de garantizar una solución diferente a la trivial. Se llega finalmente a la relación de dispersión discreta mostrada en la ecuación

$$|\rho| = \left| -\frac{B + iC}{2A} \pm \frac{1}{2A} \sqrt{(B + iC)^2 - 4A(D + iE)} \right| \leq 1 \quad (2.55)$$

$$A = 1 + F_2 \Delta t + 4gD_o \lambda^2 s^2 \quad (2.56)$$

$$B = -2 \quad (2.57)$$

$$C = 2\lambda s [U_o(c + 1 + F_2 \Delta t) - Y_o F_1 \Delta t] \quad (2.58)$$

$$D = 1 - 4U_o^2 \lambda^2 s^2 c - F_2 \Delta t \quad (2.59)$$

$$E = 2U_o \lambda s (-c - 1 + F_2 \Delta t) \quad (2.60)$$

Con la relación de dispersión (2.55) se puede establecer la condición de estabilidad límite del esquema discreto y esta se define para $|\rho| \leq 1$ (Aguilar Chávez, 2002). Para determinar la condición de estabilidad numérica del esquema de Leendertse se propuso analizar diferentes condiciones de flujo (flujo subcrítico y supercrítico), para evaluar los coeficientes (2.56) a (2.60) para toda la longitud de onda y con diferentes valores del número de Courant, definido en la ecuación

$$C_r = (U_o \pm \sqrt{gY_o}) \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (2.61)$$

Para el cálculo y graficación de la relación de dispersión numérica se propusieron diferentes números de Courant. El número de Courant es el cociente entre el intervalo de tiempo y el tiempo de residencia en un volumen finito. La condición de Courant-Friedrichs-Lewy (condición CFL) es una condición de convergencia de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales solucionadas mediante ciertos algoritmos. Como consecuencia de esta condición, el paso de tiempo debe ser inferior a un cierto valor de otro modo la simulación producirá resultados incorrectos.

En la Tabla 2 se muestran los valores geométricos de la conducción. Las condiciones de flujo se definieron para dos valores de la pendiente del canal, teniendo así dos escenarios, uno en régimen subcrítico (S1) y otro en supercrítico (S2), ver Tabla 3. Así también, se propusieron diferentes valores del número de Courant: $C_r = 0.01, 1, 2, 5, 10, 20$.

Los retratos de amplitud calculados para los escenarios S1 y S2 se muestran en las Lámina 4 y 5. En las cuales se observa que el esquema es incondicionalmente

estable en flujo subcrítico ya que los valores de la relación de dispersión son menores a la unidad para todos los números de Courant propuestos. Mientras que en el caso supercrítico se observa que para $Cr > 5$, $\rho > 1$. Por lo que se dice que el esquema es inestable en el caso de flujo supercrítico.

Tabla 2 Datos generales de la sección y cauce

DATO	VALOR
Gasto	$Q=300 \text{ m}^3/\text{s}$
Ancho de plantilla	$b=200 \text{ m}$
Talud	$k=1:4$
Rugosidad de Manning	$n=0.025$
Longitud del cauce	$L=25 \text{ 000 m}$
Discretización espacial	$\Delta x=62.5 \text{ m}$

Tabla 3 Definición de los escenarios S1 y S2

Condición de flujo	Pendiente	Tirante normal (m)	Número de Froude
S1	0.0001	2.1918	0.1443
S2	0.01	0.5541	1.1548

Lámina 4 Retrato de amplitud, régimen subcrítico ($S_0 = 0.0001$)

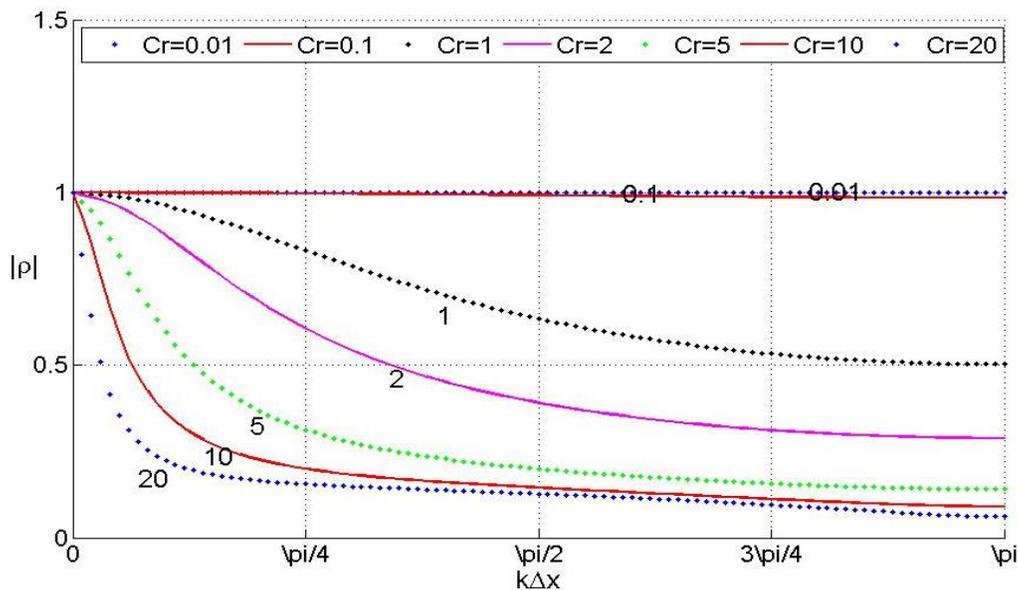
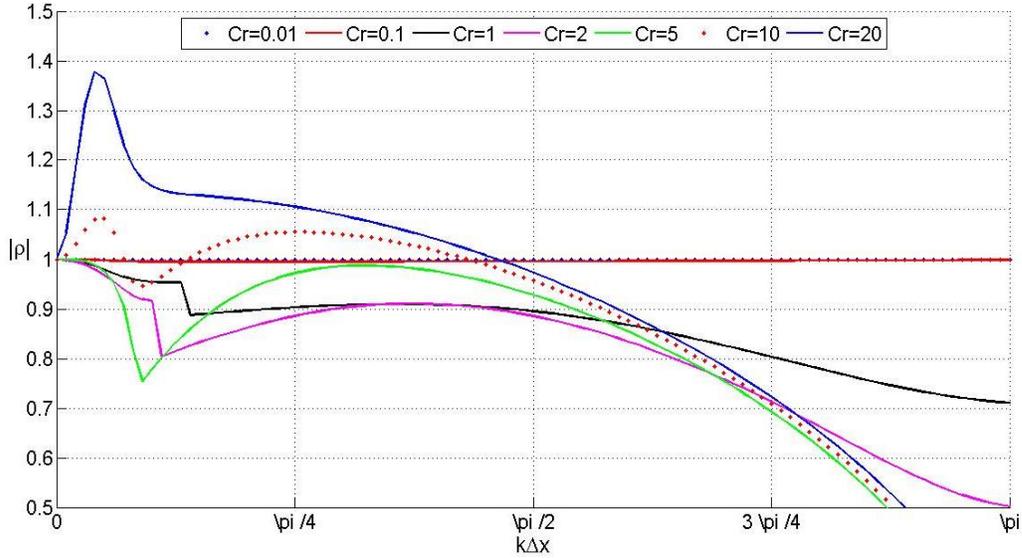


Lámina 5 Retrato de amplitud, régimen supercrítico



Los modelos numéricos al ser aproximaciones a las soluciones exactas, pueden generar que las ondas de propagación discretas sean diferentes a las continuas. La manera cuantificar estas diferencias en la propagación es con la estimación de las relaciones de fase, que consideran los cambios en la propagación de las ondas, entre el sistema continuo (2.50) y (2.55). Del análisis de estabilidad con el método de Fourier se tiene que el factor de amplificación es:

Del análisis de estabilidad con el método de Fourier se tiene que el factor de amplificación es:

$$\rho_A = e^{-i\omega\Delta t} \quad (2.62)$$

Sustituyendo la relación de dispersión continua (2.50)se tiene:

$$\rho_A = e^{-i(u_o \pm \sqrt{gD_o})k\Delta t}$$

$$\rho_A = e^{-i(u_o \pm \sqrt{gD_o}) \frac{\Delta t}{\Delta x} k\Delta x} \quad (2.63)$$

Sustituyendo el número de Courant (ecuación (2.61)), finalmente se tiene la relación de amplitud del sistema continuo si la ecuación (2.63) se escribe como:

$$\rho_A = e^{-i C_r k \Delta x}$$

o bien

$$\rho_A = \cos(C_r k \Delta x) - i \operatorname{sen}(C_r k \Delta x) \quad (2.64)$$

Donde ρ_A esta en función de $k\Delta x$ y C_r .

Entonces los retratos de fase se calculan con la relación de amplitud del esquema continuo (2.64) y la relación de amplitud del esquema numérico (2.55).

$$\zeta = \frac{Arg(\rho)}{|\rho|} \quad (2.65)$$

Así es como se define la relación de fases ζ , de la misma forma que para la relación de dispersión se graficó para el canal descrito en la Tabla 2 y los escenarios mostrados en la Tabla 3. Las Lámina 6 y 7 muestran los retratos de fases calculados para los dos escenarios de flujo y los mismos números de Courant para los cuales se calculó la relación de amplitud.

En los retratos de fase se puede observar que para el flujo subcrítico la fase es $\zeta > 0$, mientras que para el caso de flujo supercrítico se observan saltos en las fases y siempre son negativas para frecuencias $k\Delta x < \frac{\pi}{2}$.

De este análisis se concluye que el esquema es incondicionalmente estable cuando se analiza la condición de flujo subcrítico, lo que significa que se puede usar cualquier tamaño de paso en el tiempo y el espacio. Mientras que para la condición de flujo supercrítico no es estable bajo ninguna circunstancia.

Lámina 6 Retrato de fase, régimen subcrítico (So=0.0001)

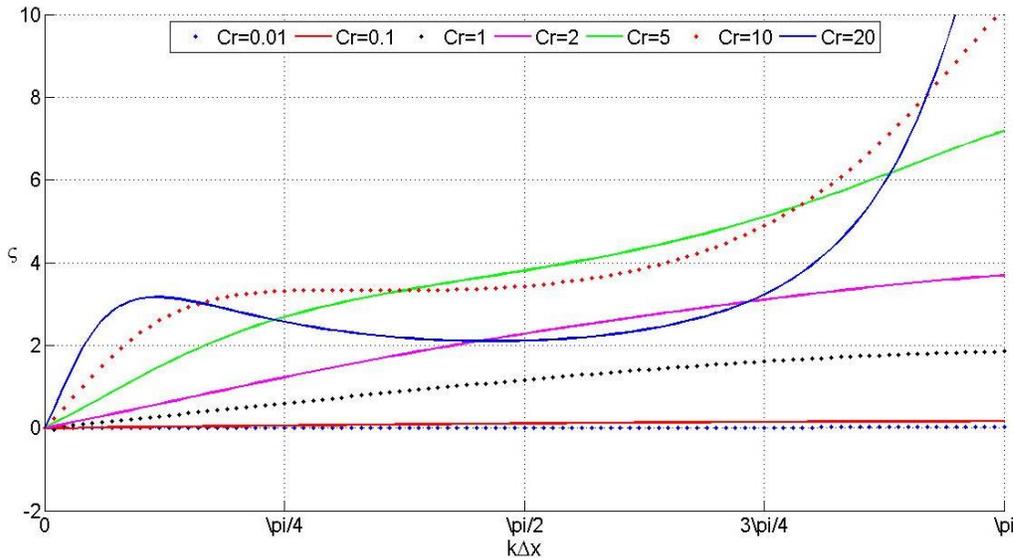
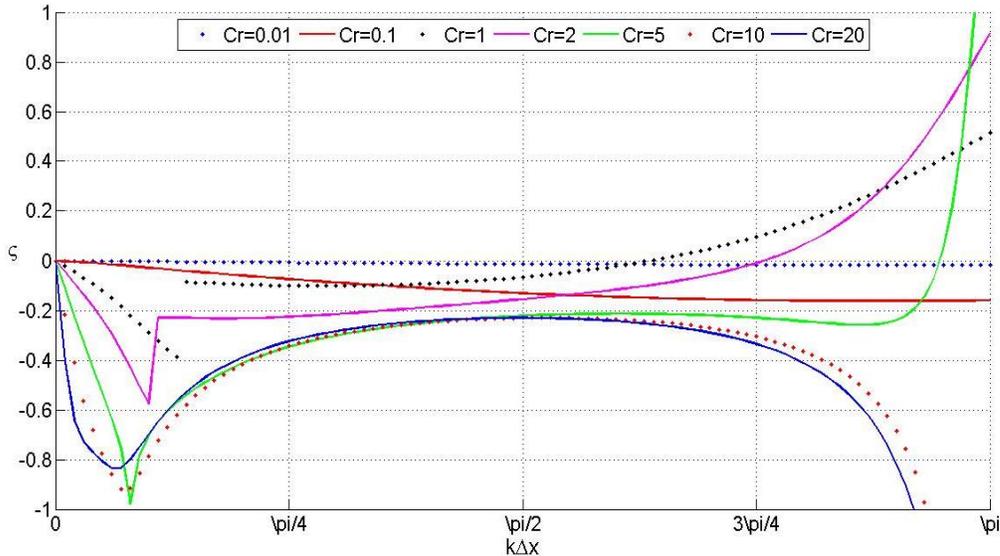


Lámina 7 Retrato de fase, régimen supercrítico ($So=0.01$)



Análisis de convergencia

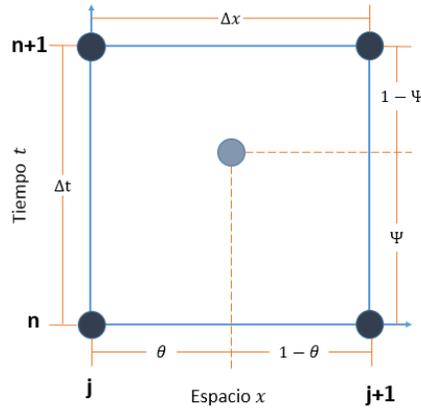
Se realizó el análisis de convergencia a la Discretización de las ecuaciones de Saint-Venant aplicando el *Teorema de equivalencia de Lax*, que en forma general enuncia las siguientes premisas: *cualquier esquema discreto lineal de un problema de valor inicial y de valores en la frontera bien planteado, es convergente si la propuesta discreta es “consistente” y además es “estable”* (Morton & Mayers, 1994). El desarrollo de este análisis se encuentra publicado (Cruz, López, & Aguilar, 2014) y el resultado fue que el esquema es estable para flujo subcrítico, ya que la relación de amplitud es menor a la unidad y las relaciones de fase mayores a cero para todos los números de Courant probados. Pero para flujo supercrítico no se cumple el criterio de estabilidad numérica, por lo que se dice que el modelo es incondicionalmente inestable.

El esquema de Leendertse presenta condiciones de inestabilidad en flujo supercrítico pero también para ciertas condiciones subcríticas, por lo anterior se buscó un esquema que fuera más apropiado para la simulación subcrítica en cualquier condición. Por lo tanto en el siguiente apartado se presenta otra forma de solucionar las ecuaciones de Saint-Venant.

2.2.2 Esquema de discretización no lineal (Preissmann)

Este es un esquema de discretización implícito que considera un coeficiente de ponderación espacial θ y otro coeficiente de ponderación temporal ψ . Que tiene la ventaja de que la estabilidad no depende de la selección del intervalo de tiempo y tiene la particularidad de producir una solución numéricamente estable con una gran precisión (Abbott, 1979).

Lámina 8 Esquema de Discretización de Preissmann



De acuerdo con este esquema, las derivadas temporal y espacial se definen como:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx (1 - \psi) \frac{(f_j^{n+1} - f_j^n)}{\Delta t} + \psi \frac{(f_{j+1}^{n+1} - f_{j+1}^n)}{\Delta t} \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx (1 - \theta) \frac{(f_{j+1}^n - f_j^n)}{\Delta x} + \theta \frac{(f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1})}{\Delta x} \quad (2.67)$$

Y los términos independientes se definen como:

$$f \approx (1 - \theta)[(1 - \psi)f_j^n + \psi f_{j+1}^n] + \theta[(1 - \psi)f_j^{n+1} + \psi f_{j+1}^{n+1}] \quad (2.68)$$

Basado en esto, se pueden escribir las ecuaciones (2.4) y (2.5) como de describe a continuación.

$$L(A_j^n, Q_j^n; x_j, t_n) = (1 - \psi) \frac{A_j^{n+1} - A_j^n}{\Delta t} + \psi \frac{A_{j+1}^{n+1} - A_{j+1}^n}{\Delta t} + (1 - \theta) \frac{Q_{j+1}^n - Q_j^n}{\Delta x} + \theta \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_j^{n+1}}{\Delta x} \quad (2.69)$$

La ecuación de conservación de movimiento se puede escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = \frac{2Q}{A} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} gA \frac{\partial h(A; x, t)}{\partial x} &= gA \frac{\partial y(A; x, t)}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{gA}{B(A; x, t)} \frac{\partial A}{\partial x} - gAS_b(x) \\ &= gD \frac{\partial A}{\partial x} - gAS_b(x) \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$M(A, Q; x, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{A} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} + gD \frac{\partial A}{\partial x} - gAS_b(x) + gAS_f(A, Q; x, t)$$

$$M(A, Q; x, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{A} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + \left(gD - \frac{Q^2}{A^2} \right) \cdot \frac{\partial A}{\partial x} + gA(S_f - S_b) \quad (2.72)$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned} M(A_j^n, Q_j^n; x_j, t_n) &= (1 - \Psi) \frac{(Q_j^{n+1} - Q_j^n)}{\Delta t} + \Psi \frac{(Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n)}{\Delta t} + \\ &2 \left((1 - \theta) \left[(1 - \psi) \left(\frac{Q}{A} \right)_j^n + \psi \left(\frac{Q}{A} \right)_{j+1}^n \right] + \theta \left[(1 - \psi) \left(\frac{Q}{A} \right)_j^{n+1} + \psi \left(\frac{Q}{A} \right)_{j+1}^{n+1} \right] \right) \cdot \left((1 - \theta) \frac{(Q_{j+1}^n - Q_j^n)}{\Delta x} + \theta \frac{(Q_{j+1}^{n+1} - Q_j^{n+1})}{\Delta x} \right) + \\ &\left((1 - \theta) \left[(1 - \psi) \left(\frac{Q^2}{A^2} \right)_j^n + \psi \left(gD - \frac{Q^2}{A^2} \right)_{j+1}^n \right] + \theta \left[(1 - \psi) \left(gD - \frac{Q^2}{A^2} \right)_j^{n+1} + \psi \left(gD - \frac{Q^2}{A^2} \right)_{j+1}^{n+1} \right] \right) \\ &\cdot \left((1 - \theta) \frac{(A_{j+1}^n - A_j^n)}{\Delta x} + \theta \frac{(A_{j+1}^{n+1} - A_j^{n+1})}{\Delta x} \right) \\ &+ g \left((1 - \theta) \left[(1 - \psi) A_j^n + \psi A_{j+1}^n \right] + \theta \left[(1 - \psi) A_j^{n+1} + \psi A_{j+1}^{n+1} \right] \right) \cdot \left((1 - \theta) \left[(1 - \psi) (S_f - S_b)_j^n + \right. \right. \\ &\left. \left. \psi (S_f - S_b)_{j+1}^n \right] + \theta \left[(1 - \psi) (S_f - S_b)_j^{n+1} + \psi (S_f - S_b)_{j+1}^{n+1} \right] \right) \end{aligned}$$

Se puede escribir también como:

$$\begin{aligned} M(A_j^n, Q_j^n; x_j, t_n) &= \frac{(1 - \psi)}{\Delta t} (Q_j^{n+1} - Q_j^n) + \frac{\psi}{\Delta t} (Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n) \\ &+ \Pi_1 \left[\frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (Q_{j+1}^{n+1} - Q_j^{n+1}) \right] \\ &+ \Pi_2 \left[\frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (A_{j+1}^{n+1} - A_j^{n+1}) \right] \\ &+ \Pi_3 \left\{ (1 - \theta) \left[(1 - \psi) A_j^n + \psi A_{j+1}^n \right] + \theta \left[(1 - \psi) A_j^{n+1} + \psi A_{j+1}^{n+1} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.73)$$

Donde

$$\begin{aligned} \Pi_1(A^n, Q^n, A^{n+1}, Q^{n+1}) & \quad (2.74) \\ &= 2(1-\theta) \left[(1-\psi) \left(\frac{Q}{A} \right)_j^n + \psi \left(\frac{Q}{A} \right)_{j+1}^n \right] \\ &+ 2\theta \left[(1-\psi) \left(\frac{Q}{A} \right)_j^{n+1} + \psi \left(\frac{Q}{A} \right)_{j+1}^{n+1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_2(A^n, Q^n, A^{n+1}, Q^{n+1}) &= (1-\theta) \left[(1-\psi) \left(gD - \frac{Q^2}{A^2} \right)_j^n + \psi \left(gD - \frac{Q^2}{A^2} \right)_{j+1}^n \right] + \theta \left[(1-\psi) \left(gD - \frac{Q^2}{A^2} \right)_j^{n+1} + \psi \left(gD - \frac{Q^2}{A^2} \right)_{j+1}^{n+1} \right] \quad (2.75) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_3(A^n, Q^n, A^{n+1}, Q^{n+1}) &= g(1-\theta) \left[(1-\psi)(S_f - S_b)_j^n + \psi(S_f - S_b)_{j+1}^n \right] + g\theta \left[(1-\psi)(S_f - S_b)_j^{n+1} + \psi(S_f - S_b)_{j+1}^{n+1} \right] \quad (2.76) \end{aligned}$$

2.2.2.1 Iteraciones no lineales tipo Picard

Debido a que no es posible ordenar la ecuación de cantidad de movimiento de manera que en un miembro queden despejados los términos del tiempo n y del otro lado de la igualdad todos los del futuro. Es decir, para calcular el tiempo $n + 1$ es necesario conocer las variables en el tiempo n y también el mismo $n + 1$. Por esto se dice que la solución del sistema de ecuaciones es no lineal, por lo que en su solución se empleará el método de Picard, también conocido como el método de las sustituciones consecutivas, utiliza iteraciones tipo punto fijo para solucionar sistemas de ecuaciones no lineales. Este método consiste en hacer una primer aproximación de la solución y con base en esta generar la siguiente aproximación $X^{(m+1)} = G(X^m)$, donde m es el indicador de la iteración no lineal (Szymkeiwicz, 2010).

Para su aplicación es necesario separar los términos que producen la no linealidad, indicando con el subíndice m la iteración en que son resueltos los términos no lineales en el tiempo $n + 1$.

$$A^m \cdot X^{(m+1)} = B \quad (2.77)$$

Si la serie de iteraciones se lleva al límite $m \rightarrow \infty$, se encontrará la solución al sistema de ecuaciones en cuestión (Szymkeiwicz, 2010). Dado que ∞ no es un valor definido, se busca satisfacer un criterio de convergencia definido para las ecuaciones de Saint -Venant como:

$$\begin{aligned} \|A^{n+1,m+1} - A^{n+1,m}\| &< \varepsilon_a \\ \|Q^{n+1,m+1} - Q^{n+1,m}\| &< \varepsilon_q \end{aligned} \quad (2.78)$$

Donde ε_a y ε_q son números positivos definidos como tolerancia en la convergencia.

Entonces las ecuaciones (2.69), (2.73), (2.74), (2.75) y (2.76) se pueden escribir como sigue:

Ecuación de conservación de masa:

$$L(A_j^n, Q_j^n; x_j, t_n) = (1 - \psi) \frac{A_j^{n+1, m+1} - A_j^n}{\Delta t} + \psi \frac{A_{j+1}^{n+1, m+1} - A_{j+1}^n}{\Delta t} + (1 - \theta) \frac{Q_{j+1}^n - Q_j^n}{\Delta x} + \theta \frac{Q_{j+1}^{n+1, m+1} - Q_j^{n+1, m+1}}{\Delta x} \quad (2.79)$$

Ecuación de conservación de momentum:

$$M(A_j^n, Q_j^n; x_j, t_n) = \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} (Q_j^{n+1, m+1} - Q_j^n) + \frac{\Psi}{\Delta t} (Q_{j+1}^{n+1, m+1} - Q_{j+1}^n) + \Pi_1 (A^n, Q^n, A^{n+1, m}, Q^{n+1, m}) \left[\frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (Q_{j+1}^{n+1, m+1} - Q_j^{n+1, m+1}) \right] + \Pi_2 \left[\frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (A_{j+1}^{n+1, m+1} - A_j^{n+1, m+1}) \right] + \Pi_3 \{ (1 - \theta) [(1 - \Psi) A_j^n + \Psi A_{j+1}^n] + \theta [(1 - \Psi) A_j^{n+1, m+1} + \Psi A_{j+1}^{n+1, m+1}] \} \quad (2.80)$$

Siendo definidos los coeficientes $\Pi_{1,2,3}$

$$\Pi_1 = 2(1 - \theta) \left[(1 - \Psi) \left(\frac{Q}{A} \right)_j^n + \Psi \left(\frac{Q}{A} \right)_{j+1}^n \right] + 2\theta \left[(1 - \Psi) \left(\frac{Q}{A} \right)_j^{n+1, m} + \Psi \left(\frac{Q}{A} \right)_{j+1}^{n+1, m} \right] \quad (2.81)$$

$$\Pi_2 = (1 - \theta) \left[(1 - \Psi) \left(gD - \frac{Q^2}{A^2} \right)_j^n + \Psi \left(gD - \frac{Q^2}{A^2} \right)_{j+1}^n \right] + \theta \left[(1 - \Psi) \left(gD - \frac{Q^2}{A^2} \right)_j^{n+1, m} + \Psi \left(gD - \frac{Q^2}{A^2} \right)_{j+1}^{n+1, m} \right] \quad (2.82)$$

$$\Pi_3 = g(1 - \theta) \left[(1 - \Psi) (S_f - S_b)_j^n + \Psi (S_f - S_b)_{j+1}^n \right] + g\theta \left[(1 - \Psi) (S_f - S_b)_j^{n+1, m} + \Psi (S_f - S_b)_{j+1}^{n+1, m} \right] \quad (2.83)$$

Finalmente la solución del flujo en un canal se encuentra desarrollando el sistema de ecuaciones (3.89) y (3.90), y agrupando como se muestra a continuación:

$$a_1 Q_j^{n+1, m+1} + b_1 A_j^{n+1, m+1} + c_1 Q_{j+1}^{n+1, m+1} + d_1 A_{j+1}^{n+1, m+1} = e_1 \quad (2.84)$$

$$a_2 Q_j^{n+1, m+1} + b_2 A_j^{n+1, m+1} + c_2 Q_{j+1}^{n+1, m+1} + d_2 A_{j+1}^{n+1, m+1} = e_2 \quad (2.85)$$

Donde los coeficientes están definidos como sigue:

$$a_1 = -\frac{\theta}{\Delta x} \quad (2.86) \quad a_2 = b_1 + a_1 \Pi_1 \quad (2.87)$$

$$b_1 = \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} \quad (2.88) \quad b_2 = a_1 \Pi_2 + \theta(1 - \Psi) \Pi_3 \quad (2.89)$$

$$c_1 = \frac{\theta}{\Delta x} \quad (2.90) \quad c_2 = d_1 - a_1 \Pi_1 \quad (2.91)$$

$$d_1 = \frac{\Psi}{\Delta t} \quad (2.92) \quad d_2 = -a_1 \Pi_2 + \theta \Psi \Pi_3 \quad (2.93)$$

$$e_1 = d_1 A_{j+1}^n + b_1 A_j^n - \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) \quad (2.94)$$

$$e_2 = d_1 Q_{j+1}^n + b_1 Q_j^n - \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} [(Q_{j+1}^n - Q_j^n) \Pi_1 + (A_{j+1}^n - A_j^n) \Pi_2] - (1 - \theta) [(1 - \Psi) A_j^n + \Psi A_{j+1}^n] \Pi_3 \quad (2.95)$$

Como un ejemplo de la solución del sistema (2.79) y (2.80) se presenta un arreglo matricial para un tramo con 5 nodos, el sistema de ecuaciones tomaría la siguiente forma $\mathbf{A X}=\mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & c_2 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & & & & \\ & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & & & \\ & & a_1 & b_1 & c_1 & & & \\ & & a_2 & b_2 & c_2 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ Q_2 \\ A_2 \\ Q_3 \\ A_3 \\ Q_4 \\ A_4 \\ Q_5 \end{bmatrix} \stackrel{n+1}{=} \begin{bmatrix} e_1 - a_1 Q_1 \\ e_2 - a_2 Q_1 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_1 - d_1 A_5 \\ e_2 - d_2 A_5 \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

Como se mencionó antes, el esquema numérico es no lineal por lo que la solución para el tiempo $n + 1$, matriz \mathbf{b} , dependen de e_2 , que involucra a los términos Π_1 , Π_2 y Π_3 , dependientes del tiempo $n+1$.

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{X}^{n+1,(m+1)} = \mathbf{A}^{-(n+1,m)} \mathbf{B}^{(n+1,m)}$$

La solución para un tiempo se encuentra cuando la diferencia entre $\mathbf{A}^{n+1,m+1}$ y $\mathbf{A}^{n+1,m}$ está dentro de un error permitido.

2.2.2.2 Metodología Newton Raphson

Considerando que \mathbf{X} es el vector de soluciones exactas, un sistema de ecuaciones se puede escribir como: $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{B} = 0$. Digamos que \mathbf{X}^m es la solución

aproximada en la iteración m . Entonces se puede representar la solución exacta como: $\mathbf{X} = \mathbf{X}^m + \Delta\mathbf{X}^m$, donde $\Delta\mathbf{X}^m$ es la diferencia entre la solución exacta y la aproximada. Si las funciones que forman al sistema son continuas y diferenciables con respecto a \mathbf{X} (Szymkeiwicz, 2010). Usando una expansión en serie de Taylor truncada se puede escribir la solución exacta como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}^m + \Delta\mathbf{X}^m) \approx \mathbf{F}(\mathbf{X}^m) + \frac{\partial\mathbf{F}(\mathbf{X}^m)}{\partial\mathbf{X}}\Delta\mathbf{X}^m \approx 0$$

Si se expresa el vector de correcciones como: $\Delta\mathbf{X}^m = \mathbf{X}^{m+1} - \mathbf{X}^m$, se tiene que

$$\frac{\partial\mathbf{F}(\mathbf{X}^m)}{\partial\mathbf{X}}(\mathbf{X}^{m+1} - \mathbf{X}^m) = -\mathbf{F}(\mathbf{X}^m)$$

o bien

$$\mathbf{J}^m(\mathbf{X}^{m+1} - \mathbf{X}^m) = -\mathbf{F}(\mathbf{X}^m)$$

donde \mathbf{J}^m es la matriz Jacobiana del sistema de ecuaciones $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{B} = 0$

Una variante del método se define para reducir el tiempo de cálculo es aplicar la matriz Jacobiana de cálculo a las subsecuentes iteraciones (Szymkeiwicz, 2010), es decir $\mathbf{J}^0(\mathbf{X}^{m+1} - \mathbf{X}^m) = -\mathbf{F}(\mathbf{X}^m)$.

Por medio de la expansión en serie de Fréchet-Taylor de la ecuación de cantidad de movimiento y mediante un tratamiento de los términos no lineales con la metodología tipo Picard se logra reescribir la conservación de momentum mediante la ecuación (2.97) (Aguilar Chávez, 2002).

Ecuación de conservación de momentum:

$$\begin{aligned} M(A_j^n, Q_j^n; x_j, t_n) &= \frac{(1-\Psi)}{\Delta t}(Q_j^{n+1,m+1} - Q_j^n) + \frac{\Psi}{\Delta t}(Q_{j+1}^{n+1,m+1} - Q_{j+1}^n) \\ &+ \Pi_1 \left[\frac{(1-\theta)}{\Delta x}(Q_{j+1}^n - Q_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x}(Q_{j+1}^{n+1,m+1} - Q_j^{n+1,m+1}) \right] \\ &+ \Pi_2 \left[\frac{(1-\theta)}{\Delta x}(A_{j+1}^n - A_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x}(A_{j+1}^{n+1,m+1} - A_j^{n+1,m+1}) \right] \\ &+ \Pi_3 \{ (1-\theta)[(1-\Psi)A_j^n + \Psi A_{j+1}^n] + \theta[(1-\Psi)A_j^{n+1,m+1} + \Psi A_{j+1}^{n+1,m+1}] \} \\ &+ \Pi_4 \{ (1-\psi)(A_j^{n+1,m+1} - A_j^{n+1,m}) + \psi(A_{j+1}^{n+1,m+1} - A_{j+1}^{n+1,m}) \} \\ &+ \Pi_5 \{ (1-\psi)(A_j^{n+1,m+1} - A_j^{n+1,m}) + \psi(A_{j+1}^{n+1,m+1} - A_{j+1}^{n+1,m}) \} = 0 \end{aligned} \quad (2.97)$$

En esta es posible notar dos términos adicionales Π_4 y Π_5 , definidos a continuación

$$\begin{aligned} \Pi_4 = & -2 \left\{ (1-\theta) \left[(1-\Psi) \left(\frac{Q}{A^2} \right)_j^n + \Psi \left(\frac{Q}{A^2} \right)_{j+1}^n \right] + \theta \left[(1-\Psi) \left(\frac{Q}{A^2} \right)_j^{n+1,m} + \Psi \left(\frac{Q}{A^2} \right)_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{1-\theta}{\Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (Q_{j+1}^{n+1,m} - Q_j^{n+1,m}) \right] \\
 & + 2 \left\{ (1-\theta) \left[(1-\Psi) \left(\frac{Q^2}{A^3} \right)_j^n + \Psi \left(\frac{Q^2}{A^3} \right)_{j+1}^n \right] + \theta \left[(1-\Psi) \left(\frac{Q^2}{A^3} \right)_j^{n+1,m} + \Psi \left(\frac{Q^2}{A^3} \right)_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\} \\
 & \left[\frac{1-\theta}{\Delta x} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (A_{j+1}^{n+1,m} - A_j^{n+1,m}) \right] + \\
 & g \left\{ \frac{1-\theta}{\Delta x} \left[\left(\frac{A}{B} \right)_{j+1}^n - \left(\frac{A}{B} \right)_j^n \right] + \frac{\theta}{\Delta x} \left[\left(\frac{A}{B} \right)_{j+1}^{n+1,m} - \left(\frac{A}{B} \right)_j^{n+1,m} \right] \right\} + \\
 & g(1-\theta) \left[(1-\Psi)(S_f - S_b)_j^n + \Psi(S_f - S_b)_{j+1}^n \right] + \\
 & g\theta \left[(1-\Psi)(S_f - S_b)_j^{n+1,m} + \Psi(S_f - S_b)_{j+1}^{n+1,m} \right] + \\
 & g \left\{ (1-\theta) \left[(1-\Psi)A_j^n + \Psi A_{j+1}^n \right] + g\theta \left[(1-\Psi)A_j^{n+1,m} + \Psi A_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\} \\
 & \cdot \left\{ (1-\theta) \left[(1-\Psi)G_{1j}^n + \Psi G_{1j+1}^n \right] + g\theta \left[(1-\Psi)G_{1j}^{n+1,m} + \Psi G_{1j+1}^{n+1,m} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$\Pi_5 =$

$$\begin{aligned}
 & -2 \left\{ (1-\theta) \left[(1-\Psi) \left(\frac{1}{A} \right)_j^n + \Psi \left(\frac{1}{A} \right)_{j+1}^n \right] + \theta \left[(1-\Psi) \left(\frac{1}{A} \right)_j^{n+1,m} + \Psi \left(\frac{1}{A} \right)_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\} \\
 & \left[\frac{1-\theta}{\Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (Q_{j+1}^{n+1,m} - Q_j^{n+1,m}) \right] \\
 & + 2 \left\{ (1-\theta) \left[(1-\Psi) \left(\frac{Q}{A^2} \right)_j^n + \Psi \left(\frac{Q}{A^2} \right)_{j+1}^n \right] + \theta \left[(1-\Psi) \left(\frac{Q}{A^2} \right)_j^{n+1,m} + \Psi \left(\frac{Q}{A^2} \right)_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\} \\
 & \left[\frac{1-\theta}{\Delta x} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (A_{j+1}^{n+1,m} - A_j^{n+1,m}) \right] + \\
 & g \left\{ (1-\theta) \left[(1-\Psi)A_j^n + \Psi A_{j+1}^n \right] + g\theta \left[(1-\Psi)A_j^{n+1,m} + \Psi A_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\} \\
 & \left\{ (1-\theta) \left[(1-\Psi)G_{2j}^n + \Psi G_{2j+1}^n \right] + g\theta \left[(1-\Psi)G_{2j}^{n+1,m} + \Psi G_{2j+1}^{n+1,m} \right] \right\} \quad (2.99)
 \end{aligned}$$

Quedando definidos los términos G_1 y G_2 para una sección prismática cualquiera como:

$$\begin{aligned}
 G_1 &= -2\alpha \left(\frac{K_s}{R} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{|Q|Q}{gRA^2} \left(\frac{5}{3A} - \frac{4\sqrt{k^2+1}}{PB} \right) \\
 G_1 &= -2n^2 \frac{|Q|Q}{R^{\frac{4}{3}}A^2} \left(\frac{5}{3A} - \frac{4\sqrt{k^2+1}}{PB} \right)
 \end{aligned} \quad (2.100)$$

Y

$$\begin{aligned}
 G_2 &= 2\alpha \left(\frac{K_s}{R} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{|Q|}{gRA^2} \\
 G_2 &= 2n^2 \frac{|Q|}{gR^{\frac{4}{3}}A^2}
 \end{aligned} \quad (2.101)$$

Donde k es el talud del canal, B ancho de superficie libre y P el perímetro mojado.

El nuevo sistema de ecuaciones (2.79) y (2.97) se puede escribir de manera matricial, solamente que se deben actualizar los coeficientes a_2, b_2, c_2, d_2 y e_2 de manera que:

$$a_2 = b_1 + a_1\Pi_1 + (1 - \Psi)\Pi_5 \quad (2.102)$$

$$b_2 = a_1\Pi_2 + \theta(1 - \Psi)\Pi_3 + (1 - \Psi)\Pi_4 \quad (2.103)$$

$$c_2 = d_1 - a_1\Pi_1 + \Psi\Pi_5 \quad (2.104)$$

$$d_2 = -a_1\Pi_2 + \theta\Psi\Pi_3 + \Psi\Pi_4 \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned} e_2 = & d_1Q_{j+1}^n + b_1Q_j^n - \frac{1 - \theta}{\Delta x} [(Q_{j+1}^n - Q_j^n)\Pi_1 + (A_{j+1}^n - A_j^n)\Pi_2] \\ & - (1 - \theta)[(1 - \Psi)A_j^n + \Psi A_{j+1}^n]\Pi_3 + [(1 - \Psi)A_j^{n+1,m} + \Psi A_{j+1}^{n+1,m}]\Pi_4 \\ & + [(1 - \Psi)Q_j^{n+1,m} + \Psi Q_{j+1}^{n+1,m}]\Pi_5 \end{aligned} \quad (2.106)$$

Para su solución se sigue la misma metodología de Picard y en la programación se aplica la técnica de matriz porosa (*sparse matrix*) para así reducir el tiempo computacional ya que ignora los elementos iguales a cero.

De acuerdo con (Szymkeiwicz, 2010), el método de Newton converge muy rápidamente cuando el primer valor está cerca de la solución, pero en general se dice, que el método de Newton tiene mala convergencia global. El método Picard, Szymkeiwicz menciona que es más lento, pero siempre converge incluso si la estimación inicial está lejos de la solución. En el modelo numérico desarrollado se tienen las opciones de solución solamente Picard, o bien la metodología de Picard agregando los términos Π_4 y Π_5 obtenidos con la metodología de Newton.

2.2.2.3 Condición de estabilidad límite para el esquema de Preissman

La metodología comúnmente usada para el análisis de estabilidad y convergencia de los esquemas de diferencias es la basada en series de Fourier atribuida a von Neumann. (Aldama & Aguilar, 1996), definen el límite de estabilidad por las dos condiciones, la primera es definida en presencia de fricción como:

$$|Ve| < 1 \quad (2.107)$$

Siendo Ve , el número de Vedernikov, el cual describe el comportamiento de ondas de remolino que provoca inestabilidades en el flujo uniforme. Las ondas de remolino se forman normalmente cuando la velocidad es muy alta o existen pendientes pronunciadas. Este número fue definido en 1945 por V. V. Vedernikov. Y de acuerdo con (Chow, 2000) se puede expresar como en la ecuación (2.108):

$$Ve = \chi\gamma Fr \quad (2.108)$$

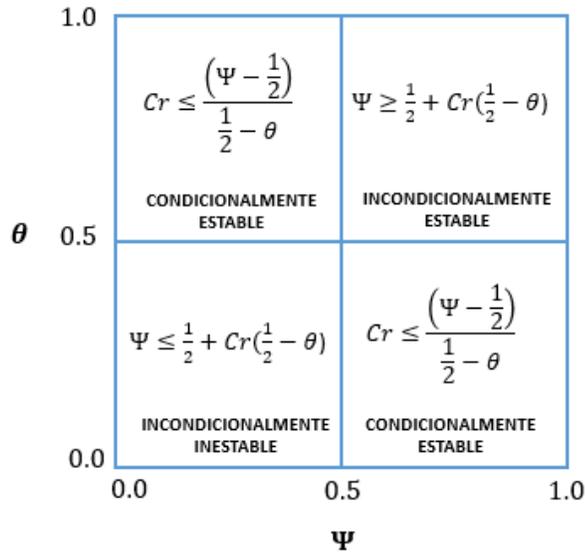
Donde: χ , es el exponente del radio hidráulico en la ecuación general del flujo uniforme (para flujo laminar $\chi = 2$, para flujo turbulento $\chi = 2/3$ si se utiliza la ecuación de Manning); γ , factor de forma de la sección de canal $\gamma = 1 - R \frac{dP}{dA}$; Fr, es el número de Froude. Por su parte (Aguilar Chávez, 2002) lo muestra como:

$$Ve = \left| -\frac{2 A_o}{3 R_o} \left[\frac{dR}{dA} \right]_o \right| Fr \quad (2.109)$$

La segunda condición queda definida por los factores de peso en el tiempo y espacio, y el número de Courant. (Lyn & Goodwin, 1987), muestran la relación (2.110) que es la condición de estabilidad numérica de von Neumann para un problema homogéneo, que esquemáticamente se puede interpretar en la Lámina 9.

$$\frac{\Psi - \frac{1}{2}}{Cr} + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \geq 0 \quad (2.110)$$

Lámina 9 Regiones de estabilidad en el plano $\Psi - \theta$, para $Cr > 0$. Tomado de (Lyn & Goodwin, 1987)



De acuerdo con Richtmyer y Morton (Lyn & Goodwin, 1987), la condición de estabilidad de Von Neumann es necesaria y suficiente si la matriz de amplificación posee una colección completa de eigenvalores.

Por su parte (Aldama & Aguilar, 1996) expresan esta condición de estabilidad numérica de acuerdo con la expresión (2.111), que considera el parámetro de fricción $I = gS_f \Delta t$ teniendo valor de cero en ausencia de fricción.

$$\frac{\left(\psi - \frac{1}{2}\right)}{Cr + \frac{\left(\psi - \frac{1}{2}\right)I}{u_o}} + \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \quad (2.111)$$

La condición de estabilidad límite para el esquema no lineal de Preissmann es $\psi = 0.5$ y $\theta = 0.6$ (Aldama & Aguilar, 1996).

Dado que el esquema es incondicionalmente estable, el paso en el tiempo se puede cambiar, incluso durante los cálculos, se puede usar un Δt más pequeño para incrementar la precisión cuando las condiciones del flujo cambian rápidamente, o un Δt mayor cuando las condiciones del flujo cambian lentamente (Chaudhry, 1979).

No obstante los cambios de Δt no deben ser arbitrarios, sino considerando la precisión y estabilidad del esquema. Para grandes Δt , las diferencias finitas no representan las derivadas parciales de las ecuaciones originales de flujo, (Chaudhry, 1979) recomienda revisar la precisión comparando los cálculos obtenidos con Δt pequeños y si la diferencia es insignificante, entonces se puede usar el Δt deseado.

3 Estructuras de regulación

Las compuertas son un elemento importante en el control de canales, estas son placas de madera o hierro que al levantarse permiten graduar la altura del orificio formado entre el piso del canal y el borde inferior de la compuerta, controlando la descarga producida. Se deslizan a través de carriles o corredera, con accionamiento manual o motorizado, automático o no (Losada, 1997). Existe una gran variedad de compuertas de regulación de canales, las que se estudiarán son: las deslizantes y radiales.

En este capítulo se analizará con detalle las características hidrodinámicas de una compuerta de regulación, con lo cual se definirán los alcances o limitaciones de los modelos para estimar capacidad de descarga. También se verificarán los requerimientos mínimos para ser utilizados con algoritmo numérico integral, para operar una red de canales.

3.1 Análisis dimensional de la descarga de una compuerta

Para conocer con el mayor detalle posible la influencia de cada parámetro hidrodinámico de una compuerta de regulación, en un canal de riego. En este apartado se realizará un análisis dimensional, el cual es una herramienta que permite simplificar el estudio de cualquier fenómeno en el que estén involucradas muchas magnitudes físicas en forma de variables independientes. En este caso se utiliza el teorema de Vaschy-Buckingham (Π), que permite cambiar el conjunto original de parámetros de entrada dimensionales de un problema físico, por otro conjunto de parámetros de entrada adimensionales más reducido (Panton, 1994). En la Tabla 4 se enlistan las variables que intervienen en la descarga de una compuerta, desglosando sus magnitudes y en la Lámina 10, se muestra el esquema general del funcionamiento hidrodinámico de una compuerta.

Como se puede observar en la Tabla 4, para la aplicación del teorema de Buckingham se considera que existen $K = 10$ variables y $n = 3$ dimensiones fundamentales, por lo tanto se pueden establecer que existen al menos $K - n = 7$ parámetros adimensionales y se pueden expresar de la forma siguiente:

$$\Pi_1 = H^{K_1} \rho^{K_2} g^{K_3} b^{K_4} B^{K_5} W^{K_6} y^{K_7} Q^{K_8} \mu^{K_9} \sigma^{K_{10}} \quad (3.1)$$

Ahora se considera que se tiene una función de estado f que relaciona todos los parámetros adimensionales¹.

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, \Pi_7) = 0 \quad (3.2)$$

¹ En esta sección el símbolo Π_k no tiene relación con los coeficientes Π_k , del capítulo 4 que son las variables auxiliares utilizadas en la discretización de las Ecuaciones de Saint-Venant.

Las variables repetidas cumplen con las siguientes características:

- a) Deben contener en conjunto las n dimensiones fundamentales,
- b) En caso de un fluido, las variables repetitivas más importantes serán: una dimensión geométrica importante, una propiedad del fluido y una característica del flujo, y
- c) Si se desea despejar una de las variables de la función $f(\Pi_k) = 0$ ésta no deberá usarse como variable repetitiva.

Siguiendo las recomendaciones para elegir las variables repetidas, se seleccionaron para el análisis H , g y ρ .

Tabla 4 Variables que intervienen en la descarga de una compuerta

	Magnitudes variables	Masa (M)	Longitud (L)	Tiempo (T)
1	Gasto (Q)	0	3	-1
2	Ancho del canal (b)	0	1	0
3	Ancho canal llegada (B)	0	1	0
4	Apertura de compuerta (w)	0	1	0
5	Carga hidráulica (H)	0	1	0
6	Tirante aguas abajo (y_3)	0	1	0
7	Aceleración de la gravedad (g)	0	1	-2
8	Densidad del fluido (ρ)	1	-3	0
9	Viscosidad dinámica (μ)	1	-1	-1
10	Tensión superficial (σ)	1	0	-2

Con la selección se analiza la condición dimensional para el ancho de superficie,

$$\Pi_1 = H^{K_1} \rho^{K_2} g^{K_3} b$$

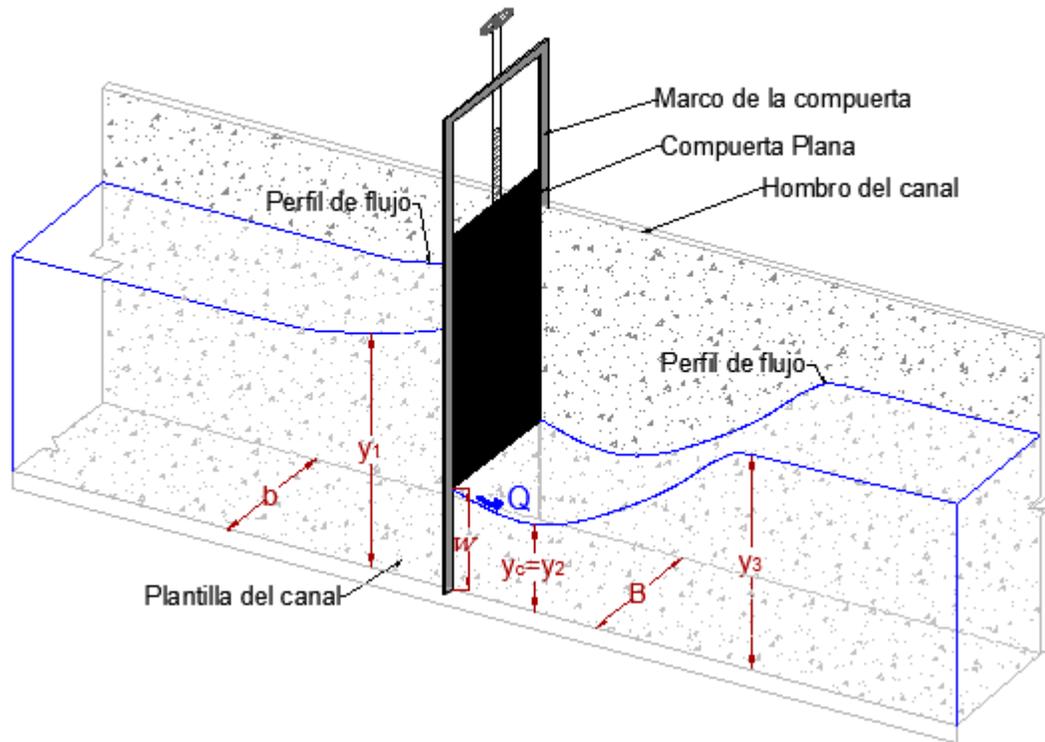
Las características dimensionales de la ecuación anterior son:

$$\dim(\Pi_1) = (L)^{K_1} (ML^{-3})^{K_2} (LT^{-2})^{K_3} (L)$$

O también

$$\dim(\Pi_1) = M^{K_2} L^{K_1 - 3K_2 + K_3 + 1} T^{-2K_3}$$

Lámina 10 Esquema hidrodinámico de funcionamiento de una compuerta de regulación en un canal riego



Como el término del lado izquierdo es adimensional ($\dim(\Pi_1)$), entonces los exponentes deben cumplir las siguientes condiciones dimensionales:

$$M: K_2 = 0$$

$$L: K_1 - 3K_2 + K_3 + 1 = 0$$

$$T: -2K_3 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los siguientes parámetros.

$$K_2 = 0$$

$$K_3 = 0$$

$$K_1 = 3K_2 - K_3 - 1 = -1$$

Los valores de los coeficientes (K_1, K_2 y K_3), indican que el grupo adimensional Π_1 es:

$$\Pi_1 = \frac{b}{H} \quad (3.3)$$

Siguiendo este procedimiento para evaluar cada grupo dimensional si tiene:

$$\Pi_2 = \frac{B}{H} \quad (3.4)$$

$$\Pi_3 = \frac{w}{H} \quad (3.5)$$

$$\Pi_4 = \frac{y}{H} \quad (3.6)$$

$$\Pi_5 = \frac{Q}{H^2 \sqrt{Hg}} = \frac{V}{\sqrt{Hg}} \quad (3.7)$$

$$\Pi_6 = \frac{\mu}{H^{\frac{3}{2}} \rho g^{\frac{1}{2}}} = \frac{v}{H \sqrt{Hg}} \frac{V}{V} = \frac{v}{HV} \frac{V}{\sqrt{Hg}} \quad (3.8)$$

$$\Pi_7 = \frac{\sigma}{H^2 \rho g} = \frac{\sigma}{HV^2 \rho} \cdot \frac{V^2}{Hg} \quad (3.9)$$

Finalmente sustituyendo los grupos dimensionales (3.3) al (3.9) en la función de estado (3.2) se tiene:

$$f \left(\frac{b}{H}, \frac{B}{H}, \frac{w}{H}, \frac{y}{H}, \frac{Q}{H^{5/2} g^{1/2}}, \frac{\mu}{H^{\frac{3}{2}} \rho g^{\frac{1}{2}}}, \frac{\sigma}{H^2 \rho g} \right) = 0 \quad (3.10)$$

Considerando los siguientes números adimensionales (Panton, 1994)

$$Fr = \frac{Q}{H^{\frac{5}{2}} g^{\frac{1}{2}}} \quad (3.11)$$

$$Re = \frac{Q}{H^2 v} \quad (3.12)$$

$$We = \frac{Q}{H \sigma} = \frac{lv^2 \rho}{\sigma} \quad (3.13)$$

Donde Fr es el número de Froude; Re , el número de Reynolds, y We el número de Weber. Sustituyendo las ecuaciones en la función de estado (3.11) al (3.13) tenemos la siguiente relación dimensional para el funcionamiento hidrodinámico de una compuerta.

$$f\left(\frac{b}{H}, \frac{B}{H}, \frac{w}{H}, \frac{y}{H}, Fr, \frac{Fr}{Re}, \frac{Fr^2}{We}\right) = 0 \quad (3.14)$$

Para determinar la ley de descarga de gasto se puede usar el grupo adimensional Π_5 , entonces despejando esta condición de la ecuación (3.14), se tiene:

$$Fr = \frac{Q}{\frac{5}{H^2} \frac{1}{g^2}} = f\left(\frac{b}{H}, \frac{B}{H}, \frac{w}{H}, \frac{y}{H}, \frac{Fr}{Re}, \frac{Fr^2}{We}\right)$$

O también

$$Q = H^{5/2} g^{1/2} f\left(\frac{b}{H}, \frac{B}{H}, \frac{w}{H}, \frac{y}{H}, \frac{Fr}{Re}, \frac{Fr^2}{We}\right) \quad (3.15)$$

Esta última expresión contiene la ecuación de la ley de descarga de una compuerta que se reporta en la literatura (ISO 13550, 2002), (Sotelo, 2009), (U.S.B.R., 1991). Los términos adimensionales que se agrupan en el lado derecho de la ecuación (3.15) se considera como un coeficiente global de gasto (Cd) entonces:

$$Cd = f\left(\frac{b}{H}, \frac{B}{H}, \frac{w}{H}, \frac{y}{H}, \frac{Fr}{Re}, \frac{Fr^2}{We}\right) \quad (3.16)$$

Como resultado del análisis dimensional del flujo descargado por una compuerta se puede concluir que él Cd está influenciado principalmente por la forma geométrica de la estructura y los efectos turbulentos de la descarga.

3.2 Modelo general de compuertas

En esta sección se revisarán las propuestas clásicas en la literatura para establecer el gasto descargado en una compuerta, no obstante la función de estado (3.15) es la condición más general del funcionamiento de esta estructura.

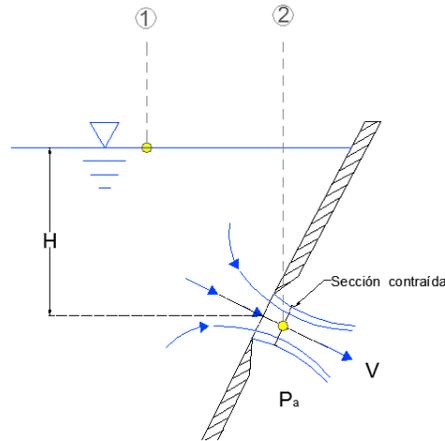
Por ejemplo aplicando la ecuación de Bernoulli entre un punto aguas arriba de una descarga y el centro de un orificio (Sotelo, 2009), (ver Lámina 11), se tiene:

$$y_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \Sigma hr \quad (3.17)$$

Suponiendo que son despreciables las pérdidas por rozamiento y deformación de la línea de corriente (hr), y que la descarga es libre a presión atmosférica, entonces $\Sigma hr = \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} = 0$, entonces se tiene.

$$H = \frac{V_2^2}{2g} \quad (3.18)$$

Lámina 11 Orificio de pared delgada



La velocidad de descarga para un flujo ideal se puede evaluar por la siguiente relación:

$$V_2 = \sqrt{2gH} \quad (3.19)$$

Esta es conocida como la ecuación de Torricelli, en caso de conocer el área de descarga se dice que el gasto descargado ideal es:

$$Q = A\sqrt{2gH} = 2Ag^{1/2} H^{1/2} \quad (3.20)$$

Entonces en forma análoga el gasto real descargado por un orificio se puede evaluar de la forma siguiente:

$$Q = C_v A \sqrt{2gH} \quad (3.21)$$

Donde C_v es coeficiente de velocidad y es de esperarse que sea menor a la unidad y de valor positivo $0 < C_v < 1$ (Desarrollo basado en (Sotelo, 2009)).

El valor de coeficiente de descarga se debe a que: la ecuación de la energía está planteada considerando líneas de corriente paralelas y en este caso se tienen líneas de corriente curva; además, se considera que las pérdidas de energía son nulas. En la ecuación de Bernoulli se incluye coeficiente de Coriolis que es una cuantificación de la no uniformidad del flujo en una vena líquida (Sotelo, 2009), pero por el tipo de descarga en este caso se considera válido tomarlo como la unidad.

En las Lámina 10 y Lámina 11 se puede observar que aguas abajo de la descarga, el área del orificio o compuerta se contrae, por efecto del torcimiento de la líneas de corriente. Entonces el área de descarga real es:

$$A_c = C_c A \quad (3.22)$$

Donde C_c , es el coeficiente de descarga y A_c , es el área real de descarga o contraída, entonces el gasto de descarga se evalúa de la forma siguiente:

$$Q = C_v C_c A \sqrt{2gH} \quad (3.23)$$

En la literatura se considera que los dos coeficientes son parte del mismo proceso de la descarga, entonces se dice:

$$C_d = C_c C_v \quad (3.24)$$

Donde C_d es el coeficiente de descarga.

En los reportes experimentales se ha estudiado que el valor del coeficiente de descarga depende de los tirantes aguas arriba y debajo de la descarga, así como también de la apertura y forma de la compuerta (plana o radial). Finalmente el gasto descargado por un orificio con descarga libre es (Sotelo, 2009):

$$Q = C_d A \sqrt{2gH} \quad (3.25)$$

Las ecuaciones (3.15) y (3.25) describen el mismo fenómeno, el gasto descargado por una compuerta, por lo que es válido hacer una comparación entre sus términos. Se observa que el coeficiente de descarga además de depender de C_c y C_v de acuerdo a la ecuación (3.24). Por inspección entre la ecuación (3.15) y (3.25) se observa que dimensionalmente son similares y para un flujo real el coeficiente de descarga toma en cuenta las pérdidas por rozamiento y cambio de curvatura, por lo tanto $C_d < 1$.

Finalmente si el funcionamiento hidráulico de las compuertas es similar al de un orificio de pared delgada, la ley de descarga de una compuerta está dada por las siguientes relaciones (ver Lámina 10 para la ubicación de las dimensiones):

Ecuación de descarga libre de una compuerta

$$Q = C_d w b \sqrt{2g y_1} \quad (3.26)$$

Ecuación de una compuerta con descarga ahogada

$$Q = C_d w b \sqrt{2g(y_1 - y_3)} \quad (3.27)$$

Donde: w , es la apertura; b , ancho de la compuerta; y_1 , tirante aguas arriba de la compuerta; y_2 , tirante de la compuerta aguas abajo cuando hay descarga libre; y_3 ,

tirante aguas abajo de la compuerta cuando hay descarga sumergida (ver Lámina 12 y Lámina 13).

Las ecuaciones (3.26) y (3.27) son válidas para relaciones apertura – tirante aguas arriba $\frac{w}{y_1} < 1.35$, que es cuando se inicia el despegamiento del chorro desde el canto de la compuerta además del arrastre de aire al interior (Sotelo, 2009).

Lámina 12 compuerta plana con descarga libre

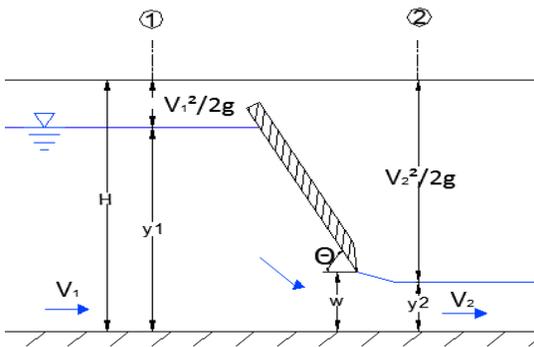
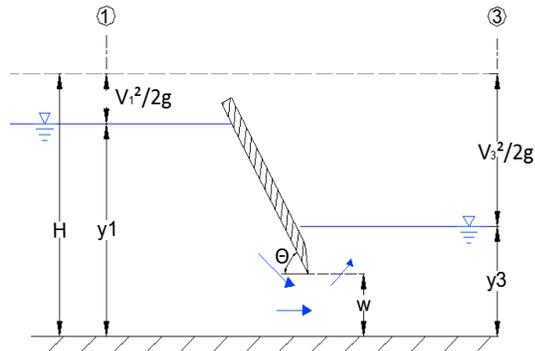


Lámina 13 Compuerta con descarga ahogada



El tirante aguas arriba (y_1), de acuerdo con la Norma (ISO 13550, 2002), debe ser medido en una sección a suficiente distancia aguas arriba para evitar la zona de turbulencia pero tan cercana a la compuerta para garantizar que no existan pérdidas de energía considerables entre la sección de medición y la sección de control, y recomienda que esta distancia no exceda el doble de la carga sobre la compuerta.

De manera general el C_d se puede expresar en terminos del coeficiente de contracción (C_c) y de velocidad, para los casos en que la compuerta tenga una descarga libre se obtiene con la ecuación (3.28) (Sotelo, 2009).

$$C_d = \frac{C_c}{\sqrt{1 + \frac{C_c a}{y_1}}} \quad (3.28)$$

Cuando se tiene una descarga ahogada, como la mostrada en la Lámina 13, se hace un análisis similar al anterior, donde la ecuacion de energía antes de la compuerta y después es:

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_3 + \frac{V_3^2}{2g} \quad (3.29)$$

La velocidad después de la compuerta es:

$$V_3 = \frac{C_v}{\sqrt{1 - \frac{y_3^2}{y_1^2}}} \sqrt{2g(y_1 - y_3)} \quad (3.30)$$

Luego el gasto será:

$$Q = C_d y_3 b \sqrt{2g(y_1 - y_3)} \quad (3.31)$$

Ahora el coeficiente de descarga C_d se define por:

$$C_d = \frac{C_v}{\sqrt{1 - \frac{y_3^2}{y_1^2}}} \quad (3.32)$$

Estos modelos matemáticos dependen de valores experimentales, como C_c y C_v . Las ecuaciones (3.28) y (3.32) están afectadas por los factores descritos en las variables adimensionales del modelo de descarga mostradas en la ecuación (3.16). En el siguiente apartado se muestran diferentes modelos diseñados con base a experimentos, en los que se puede calcular tanto C_c e incluso directamente el C_d , conociendo las características geométricas y carga hidráulica de la descarga.

3.3 Modelos para determinar coeficientes de descarga

Como se mostró en el análisis dimensional (subcapítulo 3.1), la forma geométrica de la compuerta influye en la descarga. Las compuertas más comunes en los canales de México son las planas y radiales, es por esto que en este subcapítulo se muestran los modelos numéricos para cálculo de la descarga de este tipo de compuertas.

Una compuerta plana deslizante consiste en una placa plana que se desplaza por ranuras verticales, mientras que las compuertas radiales tienen borde redondeado. Se suben o bajan a través de un vástago manual o mecánicamente.

Deben estar situadas en secciones rectangulares con un fondo plano, para regular el nivel de aguas arriba o la descarga a través de la abertura. El flujo inferior es en dos dimensiones, excepto en compuertas estrechas (ISO 13550, 2002).

3.3.1 Para cualquier tipo de compuerta

La Norma ISO 13550 (2002) para la medición de gastos en canales abiertos utilizando estructuras, muestra una metodología basada en las ecuaciones (3.26)

y (3.27) indica que el cálculo del C_c para compuertas con descarga libre se pueden obtener de acuerdo con la siguiente relación:

$$C_c = \begin{cases} 0.510 + 0.1 \sqrt{23.04 - \left(\frac{2r}{w} - 4.69\right)^2} & ; r/w < 2.35 \\ 0.999 & ; r/w \geq 2.35 \end{cases} \quad (3.33)$$

Siendo r el radio del borde redondeado de la compuerta, estas ecuaciones son aplicables tanto para compuertas planas como radiales. Este coeficiente de contracción se debe sustituir en la ecuación (3.28) para el cálculo del coeficiente de descarga (C_d); el gasto se calcula con la ecuación (3.26). Y en el caso de compuertas con descarga ahogada, C_d se verá afectado por C_{dr} definido en ecuación(3.35).

$$C_{dr} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2\alpha^*}{1 - \alpha^{*2}}(1 - \beta^*) - \sqrt{\left(\frac{2\alpha^*}{1 - \alpha^{*2}}(1 - \beta^*) - 1\right)^2 + \frac{\alpha^{*2}}{\beta^{*2}} - 1}}{1 - \alpha^*}} \quad (3.35)$$

donde $\alpha^* = w \frac{C_c}{y_1}$ y $\beta^* = w \frac{C_c}{y_2}$

Finalmente el gasto de una compuerta con descarga ahogada se puede obtener con la siguiente ecuación:

$$Q = C_{dr} C_d w b \sqrt{2gy_1} \quad (3.36)$$

La mencionada norma considera como el límite de descarga libre la relación (3.37), este límite se tiene cuando C_c adquiere valores $0.611 < C_c < 0.990$.

$$\frac{y_3}{w} = \frac{C_c}{2} \left(\sqrt{1 + 16 \left(\frac{y_1}{w C_c} - 1 \right)} - 1 \right) \quad (3.37)$$

3.3.2 Compuertas planas

Para compuertas planas se han obtenido diferentes modelos del estudio de descargas en compuertas de este tipo, uno de ellos es el obtenido de manera experimental por Swamee en 1992, el cual define el valor del coeficiente de descarga (C_e) de acuerdo con la condición de ahogamiento, así sugiere que bajo descarga libre se utilice la ecuación (3.38) y para el caso de una descarga ahogada con la ecuación (3.39).

$$C_e = 0.611 \left(\frac{y - w}{y + 15w} \right)^{0.072} \quad (3.38)$$

$$C_e = 0.611 \left(\frac{y-w}{y+15w} \right)^{0.072} \left\{ 0.320 \left[\frac{0.810 y_3 \left(\frac{y_3}{w} \right)^{0.720} - y}{y - y_3} \right]^{0.7} + 1 \right\}^{-1} \quad (3.39)$$

Para su aplicación se deben tener en cuenta los siguientes criterios (Swamee, 1992):

- Cuando el tirante aguas arriba y el de aguas abajo son iguales el coeficiente de descarga $C_e = 0$.
- La condición límite se obtiene para cuando es igual el coeficiente calculado con la ecuación para descarga libre y sumergida. Entonces las condiciones para que exista la sumersión es:

$$y_t < y < 0.8193 y_t \left(\frac{y_t}{w} \right)^{0.716} \quad (3.40)$$

Y para que exista descarga libre es:

$$y \geq 0.8193 y_t \left(\frac{y_t}{w} \right)^{0.716} \quad (3.41)$$

donde y_t , es el tirante aguas abajo de la compuerta, si la descarga es libre $y_2 = y_t$ y si la descarga es ahogada $y_3 = y_t$. Cabe recalcar que los criterios de ahogamiento definidos por Swamee (1992) (ecuaciones (3.40) y (3.41)) son los límites de aplicación de cada ecuación, que el criterio indique que existe descarga libre, no significa que físicamente la descarga será libre, si no que ecuación se utilizará para calcular C_e , (3.38) ó (3.39).

La propuesta de Swamee (1992) define el gasto descargado como:

$$Q = C_e w b \sqrt{2gy_1} \quad (3.42)$$

En la Tabla 5 se muestra una recopilación de modelos de cálculo de coeficientes de descarga basado en (Khalili Shayan & Farhoudi, 2013).

De los modelos encontrados en la bibliografía se seleccionaron cinco para descargas libres: El de Rajartman por ser el mas antiguo, los de Swamee y Alhamid por ser parecidos entre ellos, el de Noutsopoulos por contener una ecuación de forma diferente a la de los tres anteriores, y el de la ISO 13550 (2002) por ser una norma de referencia.

Tabla 5 Resumen de modelos para el cálculo de C_d para compuertas planas bajo descarga libre. Basado en (Khalili Shayan & Farhoudi, 2013)

Investigador	Modelo	Investigador	Modelo
Rajaratman y Subramanya (1967)	$C_d = \frac{0.611}{\sqrt{1 - 0.611^2 \left(\frac{w}{y_1}\right)^2}}$	Ferro (2000)	$C_d = \frac{\alpha(w/2\beta)}{\sqrt{2}} (\alpha)^{w/4\beta}$
Larsen y Mishra (1990)	$C_d = 0.489 \left(\frac{w}{y_1}\right)^{0.075}$	Garbrecht (1977)	$C_d = 0.6468 - 0.1641 \sqrt{\frac{w}{y_1}}$
Swamee (1992)	$C_e = 0.611 \left(\frac{y - w}{y + 15a}\right)^{0.072}$	Noutsopoulos y Fanariotis (1978)	$C_d = 0.62 - 0.15 \sqrt{\frac{w}{y_1}}$
Alhamid (1999)	$C_e = 0.613 \left(\frac{y - w}{y + 15w}\right)^{0.0649}$	Nago (1978)	$C_d = 0.6 \exp\left(-\frac{0.3w}{y_1}\right)$

En la Lámina 14, se muestra un análisis comparativo entre estos modelos, en donde fue notable que el modelo de Rajaratman sobrestima el coeficiente de descarga, resultado ya registrado en la literatura (Khalili Shayan & Farhoudi, 2013). Aunque en menor medida, el modelo propuesto por la norma ISO 13550 (2002), también sobreestima el coeficiente de descarga, quedando por encima de los otros tres métodos.

En la Lámina 15 se muestra la comparación entre los modelos de Swamee y el propuesto por la norma ISO 13550 (2002) para compuertas planas con descarga ahogada, en donde nuevamente se observa una diferencia considerable entre los dos modelos.

En este estudio no se puede corroborar que modelo es el más adecuado, ya que no se compararon con resultados experimentales, pero el criterio de que modelo utilizar fue que tuviera mejor correlación entre ellos, por lo tanto se utilizó el de Swamee como se muestra en la Lámina 14.

Lámina 14 Análisis comparativo de modelos de cálculo del coeficiente de descarga para compuertas planas bajo descarga libre.

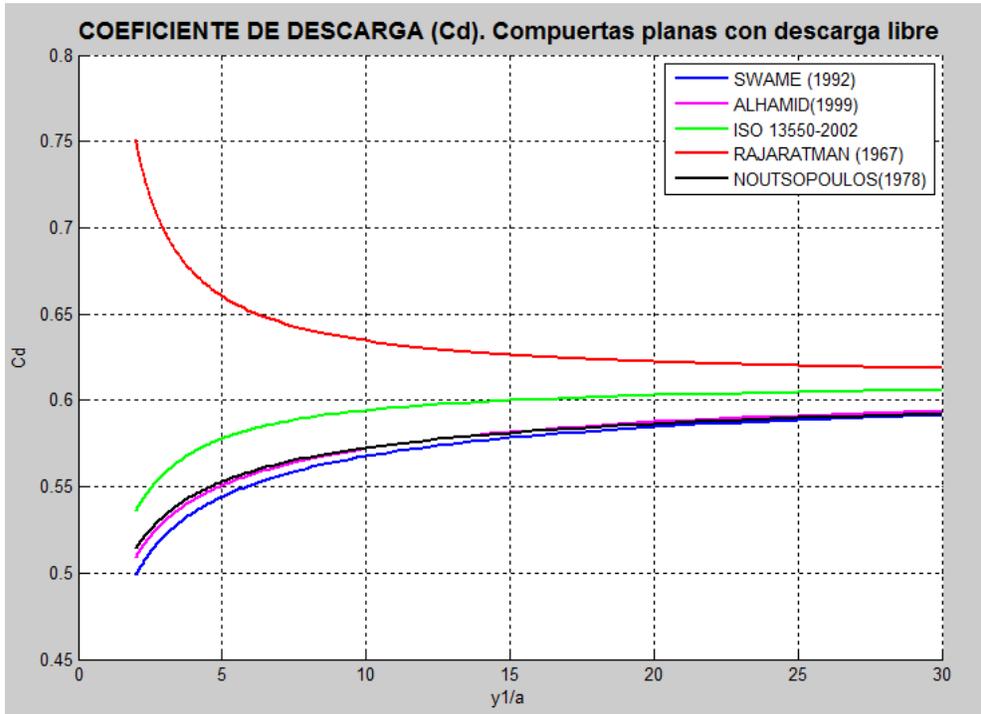
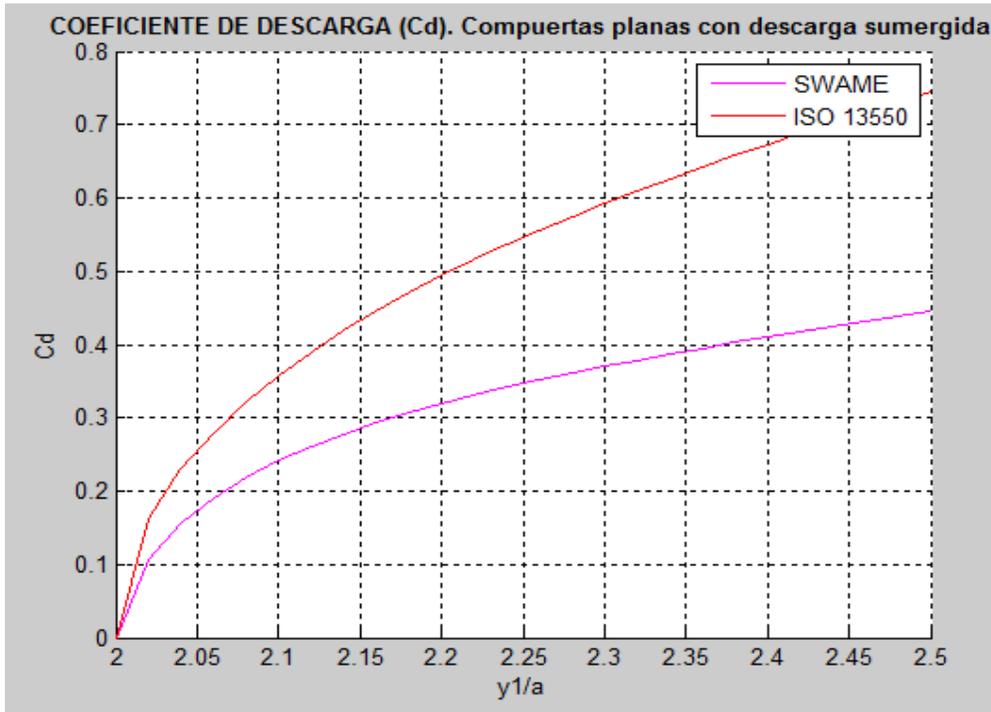


Lámina 15 Análisis comparativo de modelos de cálculo del coeficiente de descarga para compuertas planas bajo ahogada



3.3.3 Compuertas radiales.

Al igual que para las compuertas planas, también se han desarrollado una variedad de modelos para el cálculo de descargas en compuertas radiales. Además de la metodología propuesta en la norma ISO 13550 (2002), Sotelo menciona que es posible calcular C_d como si fuera una compuerta plana y afectarlo por el coeficiente ϵ con valores determinados de acuerdo con la relación entre el radio de la compuerta y la apertura (r/w) (Sotelo, 2009).

Tabla 6 Labio inferior de la compuerta redondeado

r/a	0.1	0.2	0.3	0.4
ϵ	1.03	1.13	1.25	1.25

Lámina 16 Compuerta radial con descarga libre

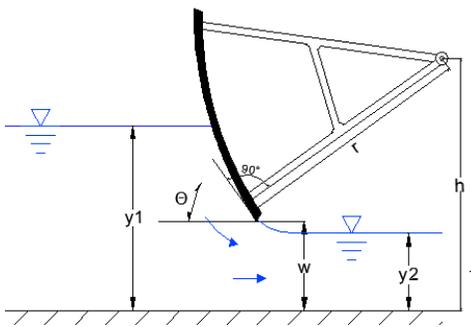
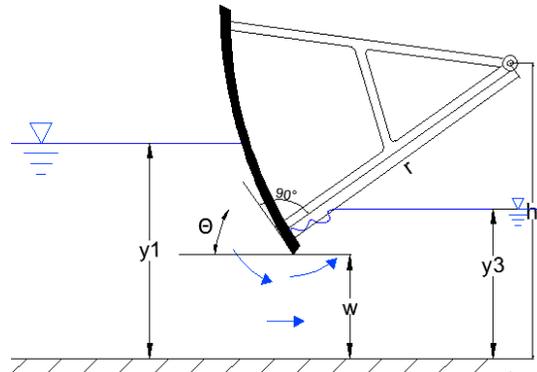


Lámina 17 Compuerta radial con descarga sumergida



Otra opción es utilizar la ecuación de Henderson para determinar el coeficiente de contracción de acuerdo con el ángulo de inclinación de la compuerta θ definido por la horizontal y la tangente al borde inferior de la compuerta (Sotelo, 2009).

$$C_c = 1 - 0.00822\theta^\circ + 0.0000445(\theta^\circ)^2 \quad (3.43)$$

Considerando el ángulo de inclinación también se tienen las ecuaciones desarrolladas por A. Toch en 1959 (Sotelo, 2009).

$$C_c = 0.11166\theta^3 - 0.183\theta^2 - 0.2298\theta + 1.0003 \quad (3.44)$$

Por otra parte Tel propone la siguiente relación (Sotelo, 2009) :

$$C_c = 0.1133\theta^3 - 0.1843\theta^2 - 0.2349\theta + 1.001 \quad (3.45)$$

3.3.3.1 Relación geométrica de la abertura de una compuerta radial (w) y su ángulo de inclinación (θ).

Debido que los modelos de compuerta estudiados utilizan diferentes parámetros de la geometría de la compuerta, A continuación se define por trigonometría la relación entre las aperturas de las compuertas con los ángulos que las delimitan (Ver Lámina 18 y Lámina 19)

Lámina 18 Geometría de una compuerta radial cerrada

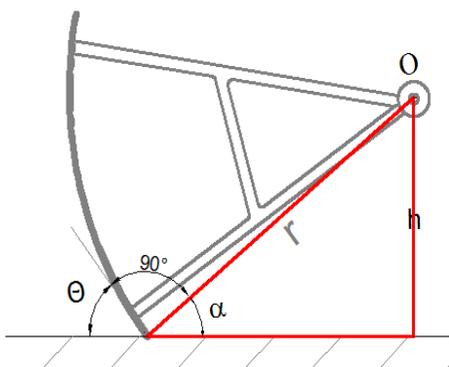
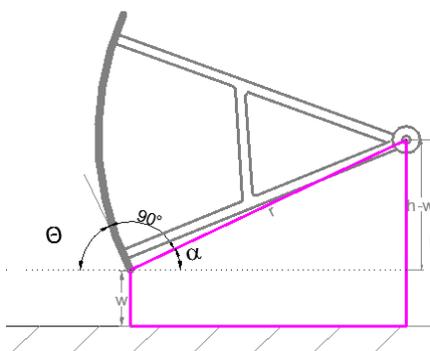


Lámina 19 Geometría de una compuerta radial abierta



Cuando $w = 0$, es decir la compuerta está cerrada (ver Lámina 18):

$$\sin \alpha = \frac{h}{r} ; \quad \alpha = \sin^{-1} \frac{h}{r} ; \quad \cos \theta = \frac{h}{r} \quad (3.46)$$

Cuando $w \neq 0$, es decir, se encuentra abierta (ver Lámina 19):

$$\sin \alpha = \frac{h-w}{r} ; \quad \cos \theta = \frac{h-w}{r} ; \quad r \cos \theta = h-w \quad (3.47)$$

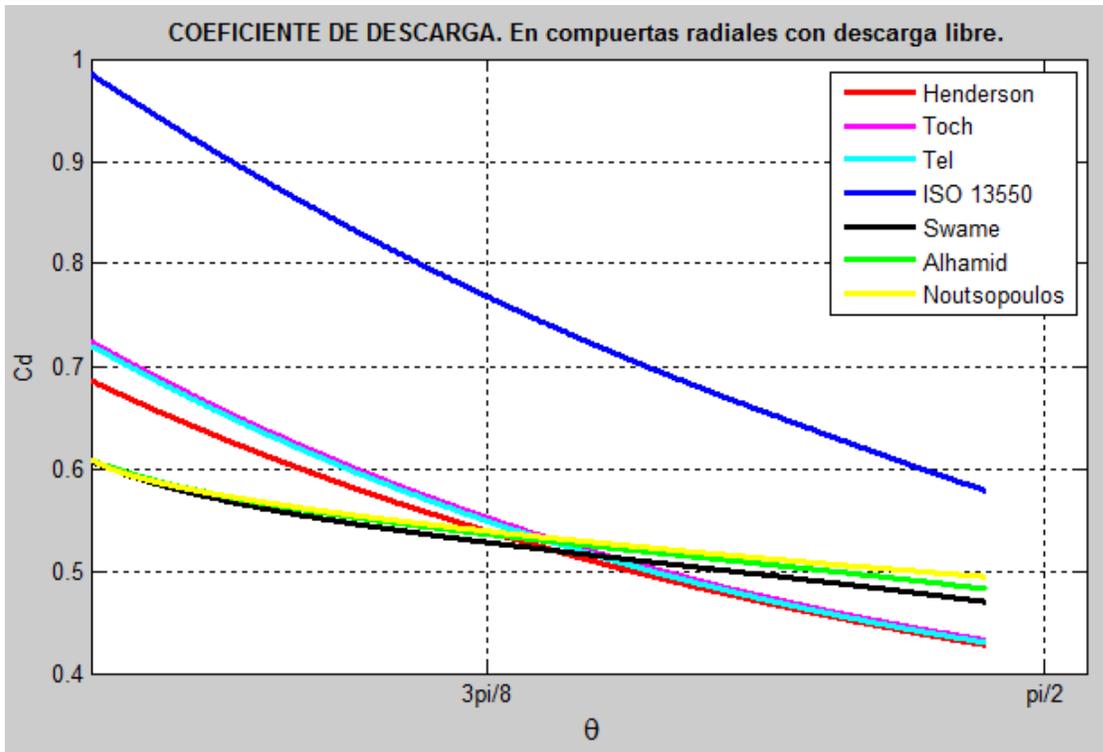
Finalmente la apertura queda relacionada con el ángulo de inclinación de la compuerta mediante la ecuación (3.48).

$$w = h - r \cos \theta \quad (3.48)$$

La equivalencia de la ecuación (3.48) facilita el cálculo de los coeficientes de descarga, y ayuda a comparar entre modelos que utilizan en su cálculo a θ y los que consideran la apertura w . Se hizo un análisis comparativo de los modelos mencionados para cálculo de descarga en compuertas radiales, en el que también se incluyeron los modelos de Swamee, Alhamid y Noutsopoulos (Khalili Shayan & Farhoudi, 2013) que fueron definidos para compuertas planas, como mejor correlación en el apartado anterior.

La Lámina 20 se obtuvo considerando una compuerta radial con las siguientes dimensiones: $r = 1.8 \text{ m}$, $h = 1.125 \text{ m}$, $y_1 = 1.5 \text{ m}$, para diferentes aperturas y ángulos de inclinación de compuerta.

Lámina 20 Análisis comparativo de modelos de cálculo del coeficiente de descarga para compuertas radiales con descarga libre.



Una vez que se conocen los alcances y limitaciones en el uso de los modelos de descarga de una compuerta en un canal de riego, se consideró utilizar la metodología propuesta por Swamee para el cálculo de coeficientes de descarga. Para su implementación en el código numérico se muestra el diagrama de flujo de la Lámina 21 Este algoritmo permite estimar las aperturas de las compuertas y los gastos que circulan para una demanda predefinida y toman como variable de control el nivel de operación en el tramo.

Este algoritmo se utilizará posteriormente para generar la condición inicial de flujo antes de transitar los cambios de gasto en la operación de un canal. También es una forma directa para conocer el funcionamiento real de una descarga de un canal de riego.

En la Lámina 22 se muestra el algoritmo de cálculo de la apertura de compuerta mediante el método de bisección, se tiene opción de elegir el modelo de descarga que se desea utilizar para lo cual se construyó la subrutina auxiliar (Lámina 23), en la cual se define cuál de los 3 modelos se utilizará: Modelo 1. Swamee (1992), Modelo 2. ISO 13550 (2002) y Modelo 3 procedimiento descrito en Sotelo (2009).

Lámina 21 Algoritmo de cálculo de coeficiente de descarga, utilizando modelo de Swamee

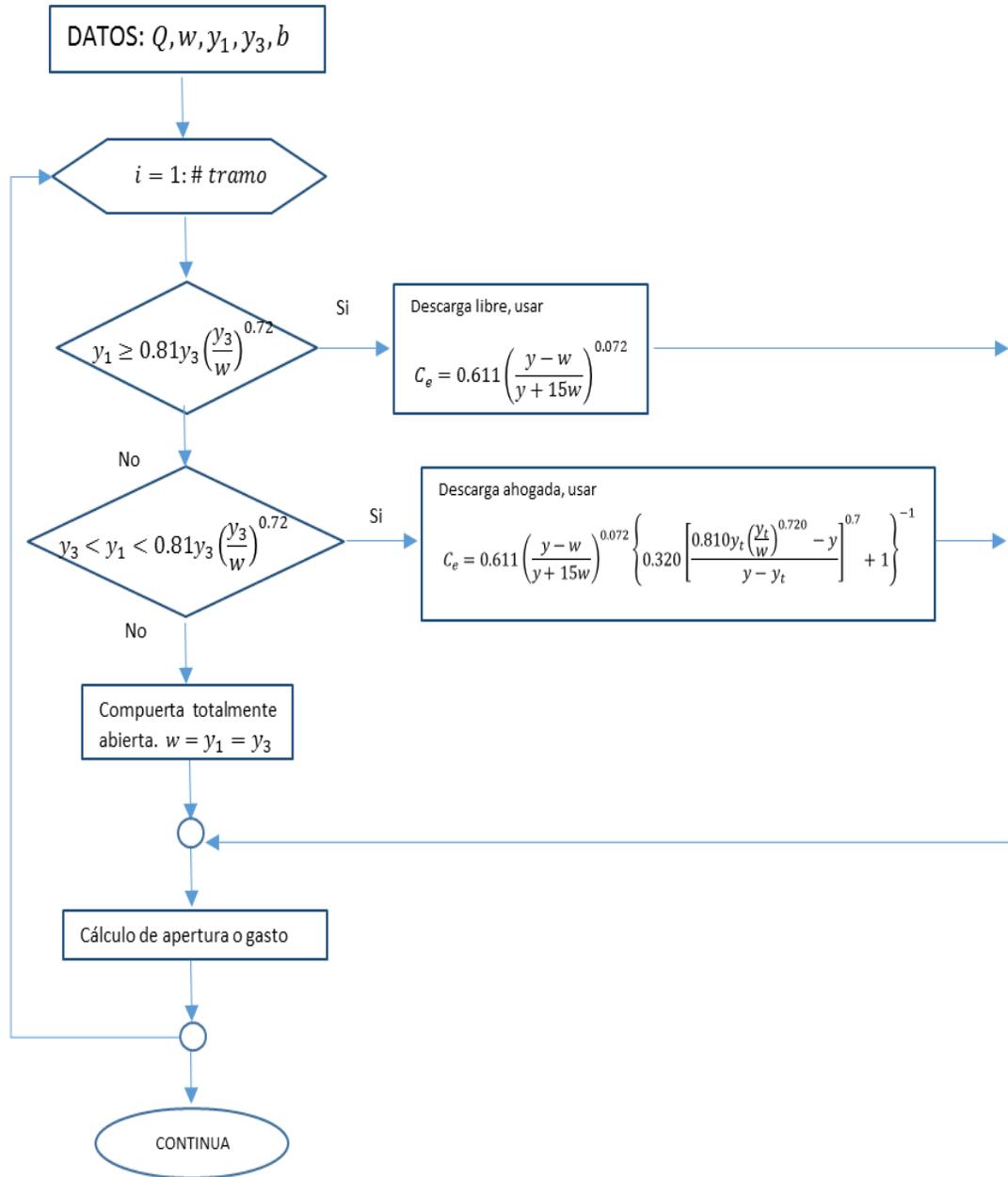


Lámina 22 Esquema general de algoritmo de cálculo de apertura de compuertas con 3 modelos diferentes

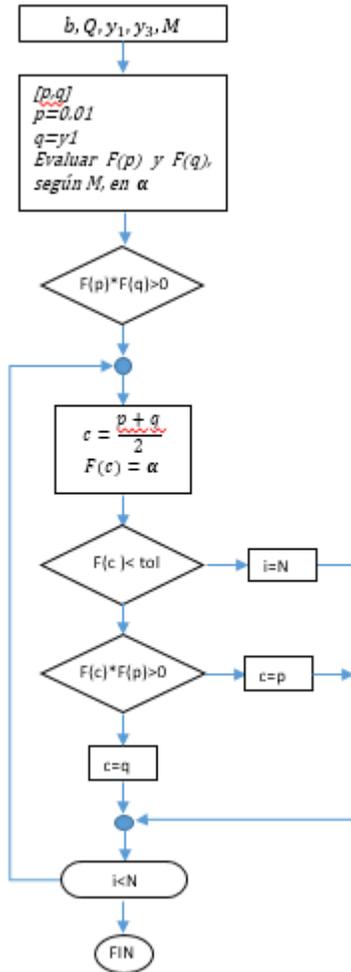
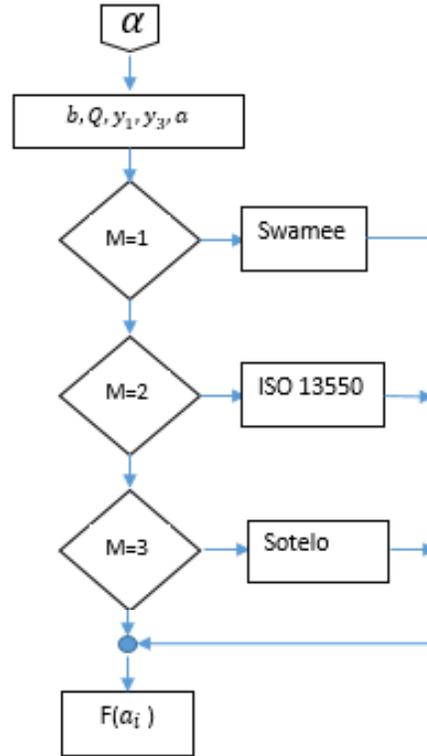


Lámina 23 Subrutina para evaluar la función de apertura de acuerdo con distintos modelos



En la Tabla 7 se presentan una comparación de aperturas de compuerta calculadas con los 3 métodos mencionados. El primer caso se encuentra resuelto en (Sotelo, 2009) donde simplemente proponen un coeficiente de descarga, este resultado se comparó con el obtenido mediante el método numérico utilizando las mismas ecuaciones de (Sotelo, 2009) obteniéndose una diferencia de 7 cm en la apertura.

Tabla 7 Ejemplo de cálculo de coeficientes de descarga y aperturas de compuerta planas

Q (m ³ /s)	y _n (m)	y _c (m)	y ₁ (m)	y ₃ (m)	Tipo de descarga	Modelo	Cd (adim)	Apertura (m)
7	-	-	2.4	0.6	Ahogada	Swamee	0.5322	0.6389
					Ahogada	ISO	0.5703	0.5962
					Ahogada	Sotelo	0.5821	0.6745
Ejemplo resuelto en Libro de Sotelo (2009)							0.5700	0.6070
40	2.47	0.89	6.01	2.86	-	Swamee	0.4683	0.5244
					-	ISO	0.5018	0.4800
					-	Sotelo	0.5952	0.4126
50	2.86	1.04	6.01	2.86	Ahogada	Swamee	0.497	0.6177
					Ahogada	ISO	0.5224	0.5877
					Ahogada	Sotelo	-	-
70	3.60	1.30	-	2.88	Ahogada	Swamee	0.5568	0.7672
					Ahogada	ISO	0.5907	0.7276
					Libre	Sotelo	0.5834	0.7515
100	4.62	1.65	-	2.93	Libre	Swamee	0.5468	1.1228
					Libre	ISO	0.5817	1.0554
					Libre	Sotelo	0.5409	1.3025
53.68	-	-	4.01	2.91	Libre	Swamee	0.5207	1.36
					Libre	ISO	0.4476	1.36
					Libre	Sotelo	0.546	1.36
Cálculo mostrado en el Informe final de automatización de canales SH 9408, (Aguilar Chávez, Pedroza González, & Kosuth, 1994)					Libre	SIC	0.53	1.36

De este capítulo se pudo comprobar que la descarga en las compuertas, descrita por las ecuaciones Swamee, la norma ISO 13550 y el que aparece en Sotelo; depende de las condiciones de la descarga (tirantes aguas arriba y abajo), la

geometría de la compuerta (plana - radial) y la turbulencia generada (Jung-Fu Yen, 2011). Así también se muestra que el coeficiente de descarga absorbe todos estos factores. Para elegir un modelo de cálculo de descarga en compuertas, como en cualquier caso de modelos obtenidos a partir de experimentos, es necesario conocer las condiciones del canal para el cual fueron obtenidos y tener presente sus limitaciones. Como se puede observar en los ejemplos de la Tabla 7 el valor de la apertura puede variar en el orden de decenas de centímetros según un modelo u otro.

3.4 Conceptos básicos de regulación en canales

Es importante aclarar algunos conceptos utilizados en la regulación que podrían confundirse tales como operación de canales y control de canales. La primera está determinada por los *criterios de uso* del sistema de canales y determina el calendario de gastos, mientras que el *control* determina *cómo se ajustan* las estructuras de control del canal para satisfacer el concepto de la operación. Ambos conceptos de operación y control dependen de las condiciones anteriores o posteriores a la estructura. A continuación se describen los conceptos de acuerdo con el Manual de automatización de Canales de (U.S.B.R., 1991)

Operación aguas abajo: La demanda de agua en sentido descendente o entrega programada determina el calendario de flujos del sistema de canales. El concepto de la operación aguas abajo se aplica a los sistemas de canales que están principalmente orientados a la demanda y por lo general se asocia con sistemas de entrega.

Operación aguas arriba: La fuente de abastecimiento aguas arriba o el gasto de entrada determina el calendario de flujos del sistema de canales. El concepto de la operación aguas arriba se aplica a los sistemas de canales que están principalmente orientados a suministrar y por lo general se asocia el concepto con sistemas colectores, que es el caso de la mayoría de los canales en México.

El control de canales es definido por la localización de la información necesaria para el control de la estructura de “control”, y de manera similar a la operación, puede ser:

Control aguas abajo: Los ajuste en la estructura de control se basan en la información de aguas abajo. La información requerida puede ser medida por un sensor situado aguas abajo o se basará en la de aguas abajo o la programación de riego del operador (especialista). El concepto de control aguas abajo es compatible con el concepto de operación aguas abajo.

Control aguas arriba: El ajuste de las estructuras de control está determinado por la información proveniente aguas arriba. La información requerida puede ser medida por sensores localizados aguas arriba o puede estar basada en el calendario de riego determinado por el operador o especialista (U.S.B.R., 1991).

Un algoritmo de control de canales es un procedimiento lógico que mediante cambios en la variable de entrada (variable a regular) y su valor de referencia produce una salida (variable de control), para compensar el error entre el valor de referencia y el observado (Rogers, 1998). Las variables de control pueden ser la apertura de compuertas y el gasto. Como se mencionó antes en este trabajo se analiza el control aguas arriba.

Los algoritmos de control pueden estar basados en la regulación de tirante, del gasto o del volumen. Algunos algoritmos desarrollados recientemente son:

- Proporcional-integral-Derivativo (PID)
- Ubicación de Polos
- Localización de raíces
- Control predictivo
- Regulador cuadrático lineal (LQR por sus siglas en inglés) o heurísticos

Prado en (2003) hizo una evaluación experimental de algoritmos de control de canales de riego, que tenía la finalidad de probar que la instrumentación de estructuras de control y la aplicación de sistemas de supervisión y control permite mejorar la operación de canales de riego. Hicieron pruebas en el esquema de regulación aguas arriba y estudiaron los algoritmos de control; proporcional-integral-derivativo y por ubicación de polos. La variable a regular y de medición que usaron fue el nivel al final del tramo (nivel aguas arriba de la compuerta) y la variable de control es la apertura de la compuerta deslizante, aguas abajo del tramo.

Las principales conclusiones a que llegaron los autores fueron que: El controlador Proporcional e Integral modificado por el factor universal ($PI \times UF$) es una buena opción para la regulación de canales y que debe considerarse la posibilidad de usar más de un factor de corrección por compuerta. Y recomiendan estudiar algoritmos de control basados en modelos para facilitar la obtención de la ley de control (Prado, León, & Ruiz, 2003).

En el desarrollo de la presente tesis se decidió trabajar en dos etapas descritas a continuación:

1. Calcular el tirante antes de la compuerta teniendo una apertura de compuerta fija. Esto con la finalidad de verificar que la conexión entre tramos se esté realizando de manera correcta, ver Lámina 24.
2. Mantener un tirante de referencia y_f descargando un gasto conocido, a través de la manipulación de una compuerta aguas abajo, como algoritmo de regulación y su esquema de funcionamiento se muestra en la Lámina 25.

Lámina 24 Esquema de un canal con compuertas

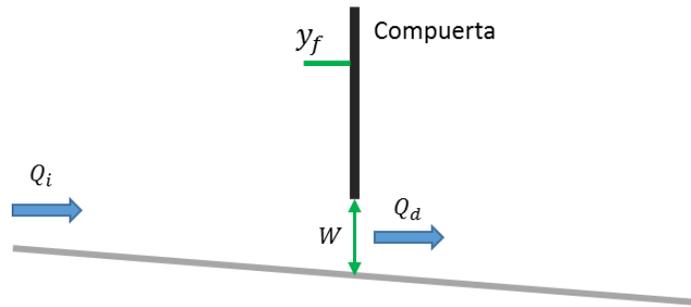
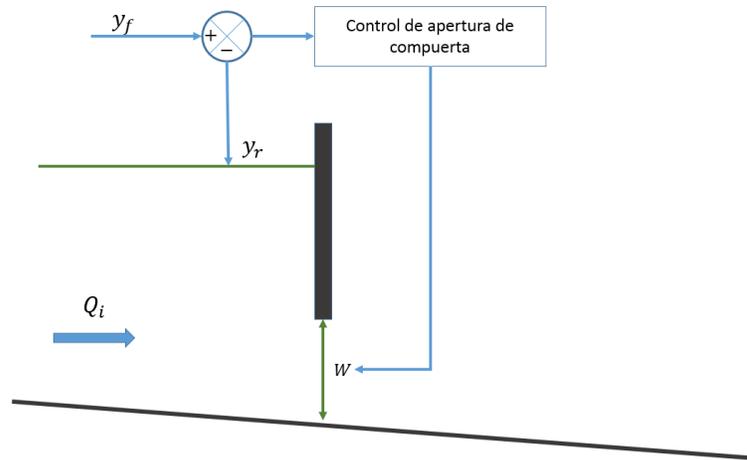


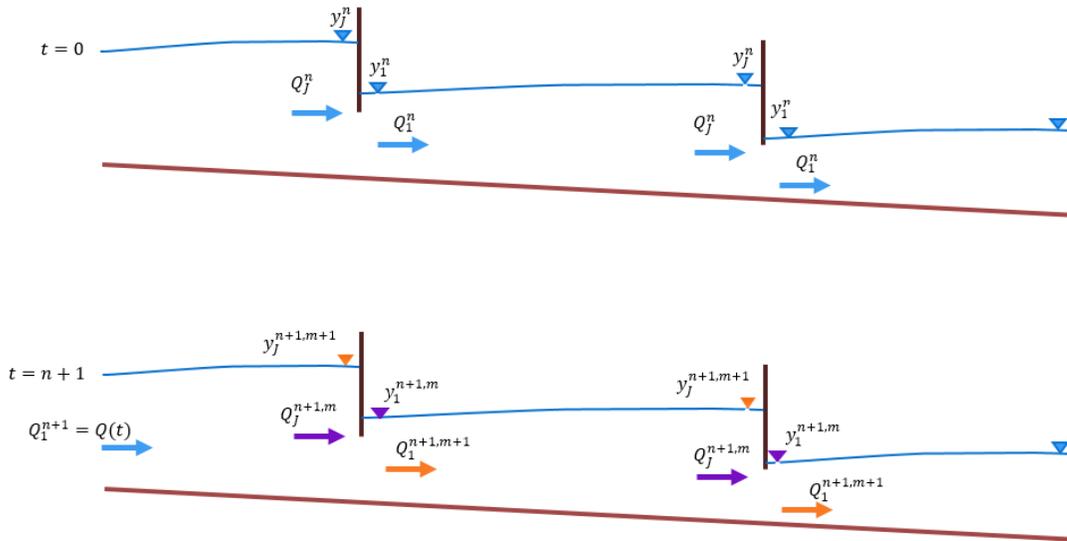
Lámina 25 Algoritmo de regulación local de apertura de compuerta, donde y_r es el nivel de referencia y y_f el nivel real a controlar en el canal.



3.5 Condiciones de frontera

Es importante especificar correctamente las condiciones de frontera pues estas definen el comportamiento del flujo durante el transitorio. La posición de las condiciones de frontera se especifican de acuerdo con el régimen de flujo: Para régimen subcrítico se debe definir una condición aguas arriba y otra aguas abajo., en régimen supercrítico las dos condiciones de frontera se definen aguas arriba. En este trabajo se estudia flujo subcrítico y se considera como frontera aguas arriba la condición de gasto ($Q(0, t)$) definida por un hidrograma y como frontera aguas abajo un tirante ($Y(L, t)$). Estas definiciones son las indicadas en el apartado (2.1) para las ecuaciones de Saint-Venant, en cualquiera de sus versiones, pero en este caso se tiene que adaptar una frontera aguas arriba de nivel (condición final de un tramo), con una frontera de gasto aguas abajo (condición inicial de un tramo), pero con un modelo adicional que las relaciona que es el funcionamiento hidrodinámico de un compuerta, tal como se muestra en la Lámina 26.

Lámina 26 Definición de condiciones de frontera

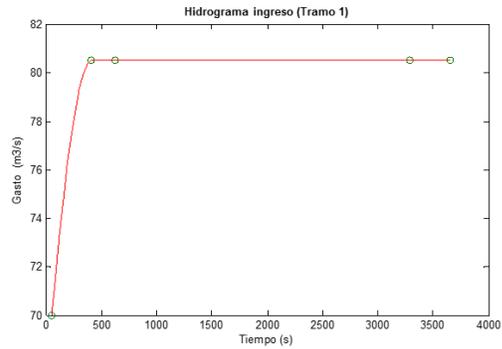
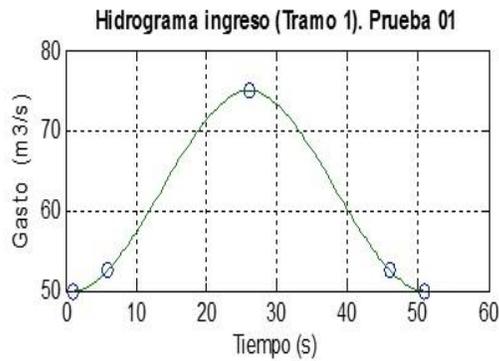


Entonces, en forma directa se tiene un modelo de valor inicial y de valores en la frontera para el dominio interno entre compuertas y se acopla con un modelo de descarga de una compuerta (condición de conservación de masa entre tramos y la de cantidad de movimiento descrita por la ley de descarga).

3.5.1 Fronteras en los extremos del canal

La condición aguas arriba (Q_1 en el sistema de ecuaciones (2.96)) está dada por una función del gasto conocida, por ejemplo puede ser un hidrograma como se muestra en la Lámina 27.

Lámina 27 Tipos de hidrograma



La frontera aguas abajo del canal es de nivel y se calcula con una ley de descarga, con el modelo siguiente:

$$y_{J,R}^{n+1} = m(Q_{J,R}^{n+1} - Q_{mín}) + y_{mín} \quad (3.49)$$

donde

$y_{J,R}^{n+1}$, $n + 1$ se refiere al tiempo futuro, J , es la última sección del tramo R , y Q_J^{n+1} , es el gasto que se tiene en la última sección del canal, (Q_9 en el sistema de ecuaciones (2.96)). Los valores de m , $Q_{mín}$ y $y_{mín}$, se deben definir desde el modelo de condición inicial tal y como se describe en el subcapítulo (3.6).

3.5.2 Fronteras internas de tirante y gasto

En las fronteras interiores se debe definir una condición de tirante antes de la compuerta y una en la descarga, para la condición de tirante aguas arriba se propusieron las siguientes condiciones:

- a) Promedio de los últimos tirantes calculados, en donde se considera una enumeración de nodos donde J es el último del tramo y se utiliza la ecuación (3.50).

$$y_J^{n+1} = \frac{y_{J-1}^n + 2y_{J-2}^n + y_{J-3}^n}{4} \quad (3.50)$$

Este tipo de frontera tiene el inconveniente de no ser apropiada para Δx grandes, cuando el perfil de la superficie libre de agua no es paralela al fondo del canal, ya que introducen cambios incluso cuando no hay variaciones en el gasto de entrada.

- b) Tirante conocido y de preferencia constante (y_{ref}), este tipo de frontera es válida cuando se está aplicando el control, ya que se modifica la apertura de la compuerta para lograr que se mantenga el tirante y_{ref} .

- c) Tirante de acuerdo a la ley de descarga de la compuerta, expresado con la ecuación (3.51).

$$y_{J,r}^{n+1} = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q_{1,r+1}^{n+1}}{C_d(y_{1,r+1}^n, y_{J,r}^{n+1}, Q_{1,r+1}^n)ab} \right)^2 \quad (3.51)$$

- d) Condición de descarga de la compuerta, en caso de no utilizar la condición de tirante de la ecuación (3.51), la frontera de gasto o descarga puede estar definida por la ley de descarga de una compuerta y se utiliza el modelo de Swamee. Esta frontera de gasto se puede utilizar en combinación con la frontera de tirante a) (ecuación (3.50)).

$$Q_{1,r+1}^{n+1} = C_d ab \sqrt{2g y_{J,r}^{n+1}} \quad (3.52)$$

- e) Sin cambios en el volumen de almacenamiento (Islam, Raghuwanshi, & Singh, 2008), es válido considerar la ecuación (3.53):

$$Q_{1,r+1}^{n+1} = Q_{J,r}^n \quad (3.53)$$

Para el modelo de flujo transitorio se utilizó en la definición del tirante y_J^{n+1} (J para tramos intermedios) la ecuación (3.51) para evaluar la cantidad de movimiento y la ecuación (3.53) para la conservación de masa. Durante las pruebas cuando no se utilizaba el criterio antes descrito de forma rigurosa se presentaron inestabilidades numéricas en las fronteras intermedias.

3.6 Condición inicial

Dado que las ecuaciones de Saint-Venant, en cualquiera de sus versiones, es un problema de valor inicial y de valores en la frontera bien planteado, entonces para condición inicial los términos temporales son cero $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, por lo que el principio de conservación de masa se cumple si $\frac{dQ}{dx} = 0$ o $Q_1 = Q_2$ y el principio de cantidad de movimiento se cumple con la ecuación de flujo gradualmente variado, entonces se llega a:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \frac{S_b - S_f(x, y)}{1 - Fr(x, y)^2} \quad (3.54)$$

Donde S_f , es la pendiente de la línea de fricción; Fr es el número de Froude, y S_b , es la pendiente de la plantilla, y se determina de la forma siguiente:

$$S_b = \frac{dz}{dx} = \sin \theta \quad (3.55)$$

La pendiente de fricción S_f se puede calcular de la ecuación de Manning:

$$S_f(x, y) = \frac{n(x)^2 |U(x)| U(x)}{R(y; x)^{4/3}} \quad (3.56)$$

El número de Froude se puede escribir como:

$$Fr(x, y) = \frac{U(x)}{\sqrt{gA(y; x)/B(y; x)}} \quad (3.57)$$

Donde B , es el ancho de la superficie libre del canal.

La ecuación diferencial es no lineal y para su solución indica que se debe conocer el gasto de circulación en el canal (ecuación de conservación de masa) y un tirante en una sección de control, no obstante lo anterior la ecuación (3.55) presenta una singularidad y ésta se tiene para $Fr = 1$, entonces se dice que deben tener ramas de solución, entonces sí:

- Si $Fr < 1$, se tiene flujo subcrítico y se debe plantear una condición inicial aguas abajo del canal con un nivel del agua superior al crítico.
- Si $Fr > 1$, se tiene flujo supercrítico y se debe plantear una condición inicial aguas arriba del canal con un nivel del agua menor al crítico.

Tomando en cuenta estas dos condiciones para la solución de la ecuación de flujo espacialmente variado se propone utilizar el Método de Runge Kutta de cuarto orden (RK4)² (Burden & Faires, 2002), y se tiene la siguiente expresión de cálculo, en donde se aplica una discretización del dominio, tal $x_i = i\Delta x$, $\Delta x = \frac{L}{J}$, donde L , es la longitud del canal y J , el número de intervalos de discretización espacial, entonces para expresar el tirante sobre cada nodo de discretización y_i , se tiene:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3.58)$$

donde

$$\begin{cases} k_1 = \Delta x f(x_i, y_i) \\ k_2 = \Delta x f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 = \Delta x f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 = \Delta x f(x_{i+1}, y_i + k_3) \end{cases} \quad (3.59)$$

En el programa de cómputo que resuelve la ecuación (3.54) con RK4, denominado 'hidra', es necesario introducir una condición inicial: $y(x_0) = y_0$ y

²Este es un método implícito de resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Fue inicialmente desarrollado alrededor del año 1900 por los matemáticos C. Runge y M. W. Kutta. Tiene por objetivo hacer aproximaciones con un error local de truncamiento de orden alto como los métodos de Taylor, pero sin tener que utilizar las derivadas de alto orden.

debido a que se está analizando el caso de flujo en régimen subcrítico, fue definido con el tirante antes de cada compuerta.

Para el cálculo general para múltiples tramos se propuso una condición de descarga tipo ley de descarga (ecuación (3.49)) y considera en forma general lo siguiente:

El ultimo tirante del tramo final se obtiene con base en una ley de descarga, que consiste en definir un gasto mínimo ($Q_{mín}$) y uno máximo ($Q_{máx}$), proponer un tirante mínimo ($y_{mín}$); posteriormente se define el tirante máximo como el tirante normal (y_n) correspondiente al gasto máximo ($Q_{máx}$) .

$$y_{máx} = y_n(Q_{máx}) \quad (3.60)$$

Donde $y_{máx}$, el tirante máximo del canal para gasto máximo a flujo uniforme.

A continuación se calcula la pendiente

$$m = \frac{y_{máx} - y_{mín}}{Q_{max} - Q_{mín}} \quad (3.61)$$

Donde se propone que $y_{mín} = a y_{máx}$, siendo a la variación mínima del tirante en la descarga $a \in (0,1)$ (ver Lámina 28).

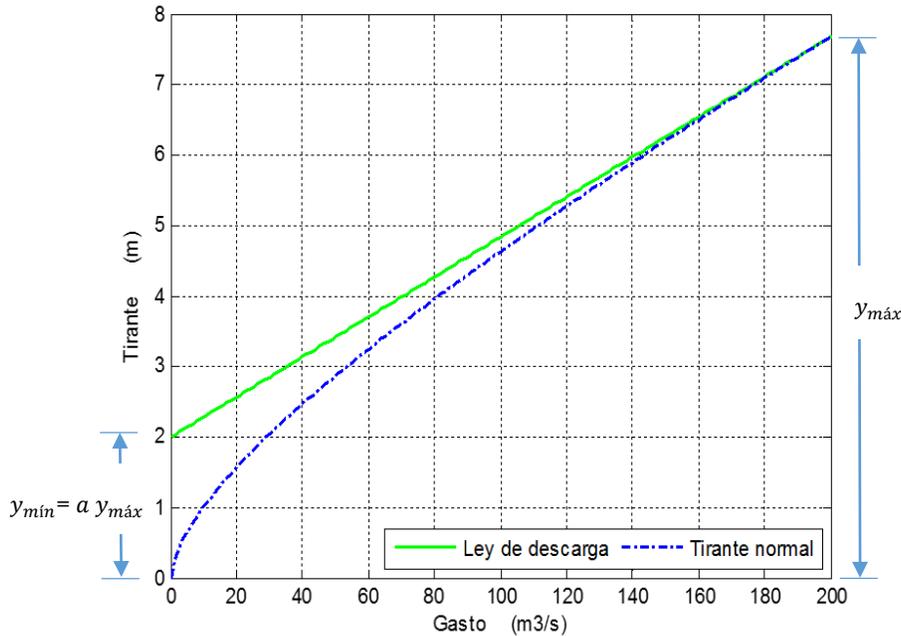
Una vez conocidos los tirantes en el canal, se calculan las aperturas de las compuertas y los valores de Cd , calculados con el modelo de Swamee, tal como se muestra en la Lámina 21, con el algoritmo descrito en el apartado 3.4, Lámina 25)

Finalmente el tirante en la frontera aguas abajo queda definido por la siguiente función del gasto

$$y_f(Q) = m(Q - Q_{mín}) + a y_{máx} \quad (3.62)$$

Una vez conocidos los tirantes en el canal, se calculan las aperturas de las compuertas y los valores de Cd , calculados con el modelo de Swamee, tal como se muestra en la Lámina 21, con el algoritmo descrito en el apartado 3.4, Lámina 25.

Lámina 28 Ley tirante gasto



Nota: En la programación se aplicó el siguiente criterio, para flujo permanente el modelo descrito por la descarga con el modelo de Swamee (ecuación (3.42)) o con el propuesto por Sotelo (ecuación (3.31)), para condiciones libres o ahogadas de las compuertas, con lo cual se estimaron las aperturas y los coeficientes de descargas.

En el modelo transitorio la propuesta de Swamee (1992) introduce perturbaciones de alta frecuencia, lo cual hace inestable la condición de frontera entre los tramos de canal, por lo cual se propuso ajustar las descargas con la ecuación (3.63).

$$Q = C_d w b \sqrt{2g(y_1 - y_3)} = C_e w b \sqrt{2gy_1}$$

$$C_d = \frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{(y_1 - y_3)}} C_e \quad (3.63)$$

A manera de ejemplo en las Lámina 29 a Lámina 31 se muestran los perfiles de flujo y las aperturas de compuertas, para una configuración de dos, tres y cuatro tramos, respectivamente. Representan la condición de flujo permanente considerando que aguas arriba de compuerta se tiene el tirante de referencia igual al tirante normal a gasto máximo.

Lámina 29 Condición inicial de un canal con 2 tramos divididos por compuertas

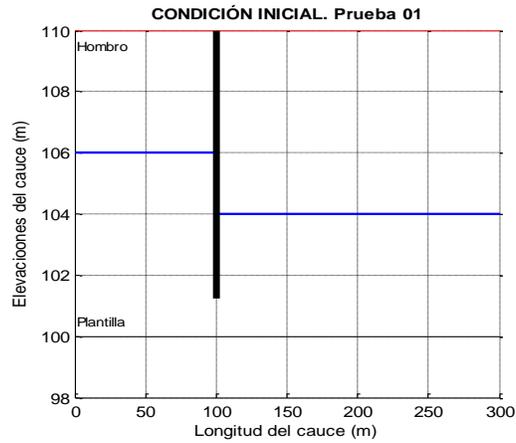


Lámina 30 Condición inicial de un canal con 3 tramos divididos por compuertas

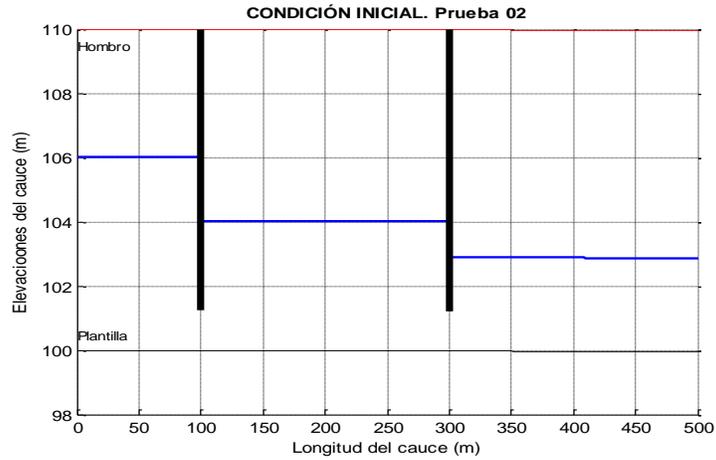
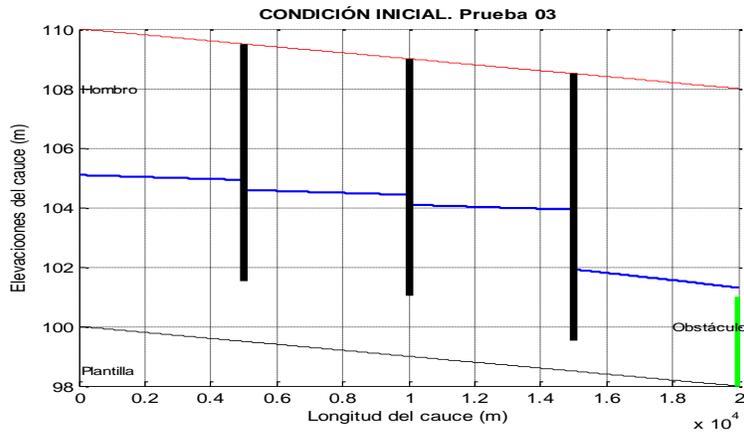


Lámina 31 Condición inicial de un canal con 4 tramos divididos por compuertas



Cabe mencionar que el modelo de cálculo de compuertas elegido para generar la condición inicial será el mismo que se utilice en el flujo transitorio, en el desarrollo del modelo simulación se tuvieron resultados no satisfactorios cuando se combinaron los modelos, ya que estos fueron obtenidos con base a criterios distintos. De igual forma, la ley de tirante gasto (3.62) junto con los parámetros con que se genera para la condición inicial, se mantienen invariantes el cálculo de flujo transitorio.

4 Modelo numérico de Simulación de Múltiples Tramos (SMT)

La construcción del Modelo numérico de Simulación de Múltiples Tramos (SMT) se toma en cuenta lo siguiente:

- a) *Condición inicial* con las siguientes características: gasto a la entrada del canal, nivel-descarga al final de canal; definición de los niveles de control de nivel aguas arriba de cada compuerta (objetivo de la regulación o *set point*); solución de la ecuación de flujo gradualmente variado para establecer niveles dentro de los tramos del canal, y finalmente apertura de las compuertas con el algoritmo presentado en el capítulo 3,
- b) *Condiciones de frontera*, en este caso se define la condición de Dirichlet de variación de gasto en la entrada; en las fronteras interiores (unión entre dos tramos que incluye una compuerta como elemento de regulación) se aplica el principio de conservación de masa para gasto y para nivel el modelo de descarga de la compuerta, como se planteó en el capítulo 3, y
- c) *Modelo discreto*, para la modelación transitoria dentro de cada tramo se utilizó el modelo de Preissmann conservativo no lineal (capítulo 2). Para visualizar la información de los transitorios en el caso se construyó las subrutinas de impresión de resultados numéricos, así como el despliegue gráfico

4.1 Algoritmo de cálculo de condición inicial

Para el cálculo de la condición inicial del SMT simplemente se repite el procedimiento descrito en el capítulo 3.6 para cada i –ésimo tramo.

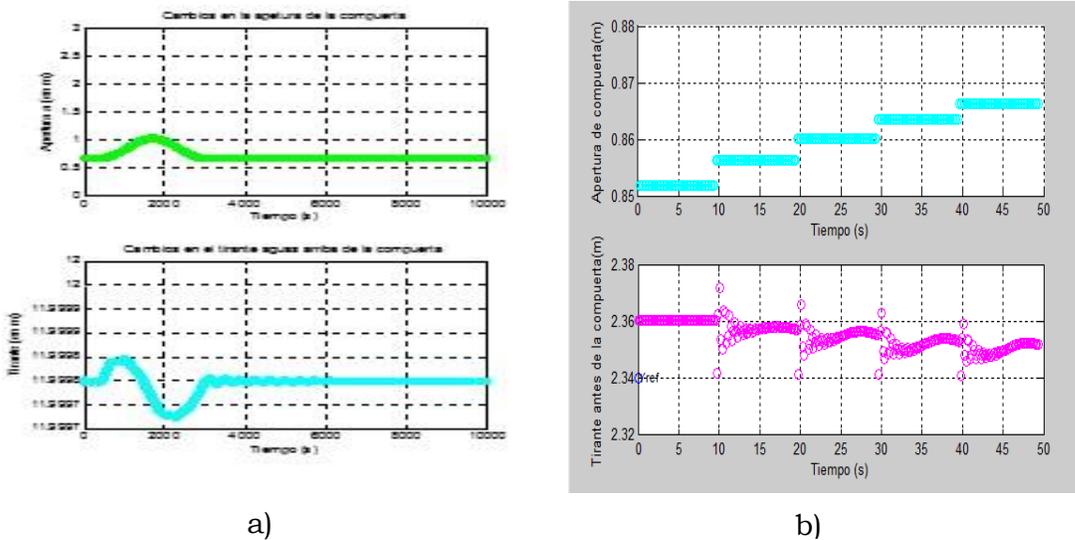
1. Se deben cargar la geometría del canal y el gasto que está circulando en su condición permanente definido como Q , debido a que en esta tesis se está analizando el problema para el caso en que las extracciones laterales son cero, es suficiente con definir el gasto de ingreso al canal.
2. Se define el valor de $Q_{m\acute{a}x}$ que es el gasto máximo esperado en el canal, y se calculan los parámetros de la relación tirante-gasto de acuerdo con la ecuación (3.49). Se deben introducir los tirantes finales de los tramos intermedios, es decir antes de las compuertas.
3. Se inicia calculando el perfil de flujo del último tramo $i = I$
4. Se verifica que el tirante final (y_j) del tramo ($i - 1$) sea mayor que y_1 del tramo i , en caso de no ser así se considera $y_{j,i-1} = y_{1,i}$
5. Se repiten los pasos 2 y 3 hasta llegar al tramo 1.
6. Una vez calculados los perfiles de flujo, se define la condición de la compuerta y el valor del coeficiente de descarga de cada una.
7. Graficación y guardado de tirantes, aperturas y coeficientes de descarga.

4.2 Modelo numérico bajo el esquema Leendertse

Bajo el esquema de Leendertse se trabajó el caso de un tramo de canal que tenía como frontera aguas abajo una compuerta con descarga libre, regida bajo la Ley de descarga. Se probaron las siguientes condiciones de frontera aguas abajo:

- Apertura de la compuerta fija. Fue posible modelar la elevación de niveles por la acumulación de agua.
En este caso se probó calcular el tirante aguas abajo a partir de la ley de descarga de una compuerta de acuerdo con la ecuación (3.51).
- Apertura de la compuerta ajustable. Aquí se probaron dos casos: El primero considerando que la compuerta podía moverse cada Δt (ver a) en Lámina 32), y el segundo suponiendo que los ajustes solamente se podían hacer cada determinado tiempo de revisión (t_{rev}), se probó con $t_{rev} = 10$ s; observándose pequeñas perturbaciones en el tirante al hacer el ajuste de la compuerta (ver b) en Lámina 32).

Lámina 32 Ajustes de compuerta en la solución con esquema de Leendertse

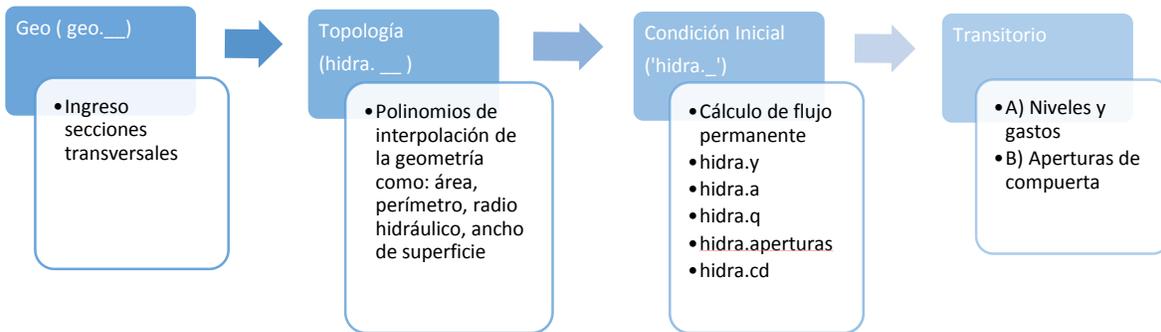


La variaciones de nivel que produce el esquema Leendertse son perturbaciones que inestabilizan las condiciones de frontera entre los tramos, se intentó variar el número Courant (uno más pequeño), pero estas perturbaciones se mantenían. Este fue uno de los motivos porque se adaptó el modelo de Preissmann.

4.3 Modelo numérico bajo el esquema de Preissmann

La secuencia del modelo SMT tiene los programas de pre-proceso geo, Topología y Condición), el proceso de modelación transitoria se realiza en el código transitorio, y los post-procesos de visualización o gráficos se elaboran de los archivos de resultado, esta secuencia se muestra en la Lámina 33.

Lámina 33 Esquema general del funcionamiento del simulador



4.3.1 Esquema de Preissmann en canal con múltiples tramos

La solución al esquema de Preissmann para un tramo se encuentra formando un sistema de ecuaciones como el mostrado en (2.96). Cuando se tiene el caso de dos tramos separados por una compuerta, la condición de frontera aguas arriba del segundo tramo estará directamente relacionada con el tirante antes de la compuerta mediante la Ley de la descarga (3.51); y el sistema de ecuaciones a resolver tiene la forma de (4.1).

En forma práctica para la programación, los vectores utilizados en el cálculo se configuraron como: *hidra.'variable'* (# de tramo, # de sección, # iteración).

$$\# \text{ iteración} \begin{cases} 1 & \text{almacena valor en 'n'} \\ 2 & \text{valor de 'n + 1' en iteración no lineal 'm'} \\ 3 & \text{valor de 'n + 1' en iteración no lineal 'm + 1'} \end{cases}$$

De esta forma cuando se quiere nombrar al tirante de la última sección del primer tramo se escribirá: *hidra.y(1,J,1)* y el gasto de entrada en la segunda sección *hidra.q(2,1,1)*.

Nota: El simulador está formado por el módulo 'geo' que es donde se ingresan las características de las secciones transversales, el módulo de topología 'topo' donde se calculan los coeficientes de los polinomios interpolantes de las funciones de área, perímetro y todas las variables geométricas, y la condición inicial se genera en el módulo "hidra".

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 \begin{array}{cccc}
 b_1 & c_1 & d_1 & \\
 b_2 & c_2 & d_2 & \\
 a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\
 a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\
 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\
 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\
 & & a_1 & b_1 & c_1 \\
 & & a_2 & b_2 & c_2
 \end{array} & & 0 & \begin{array}{c}
 A_1 \\
 Q_2 \\
 A_2 \\
 Q_3 \\
 A_3 \\
 Q_4 \\
 A_4 \\
 Q_{5i} \\
 A_{5d} \\
 Q_6 \\
 A_6 \\
 Q_7 \\
 A_7 \\
 Q_8 \\
 A_8 \\
 Q_9
 \end{array} \\
 \hline
 0 & \begin{array}{cccc}
 b_1 & c_1 & d_1 & \\
 b_2 & c_2 & d_2 & \\
 a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\
 a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\
 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\
 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\
 & & a_1 & b_1 & c_1 \\
 & & a_2 & b_2 & c_2
 \end{array} & & \begin{array}{c}
 A_{5d} \\
 Q_6 \\
 A_6 \\
 Q_7 \\
 A_7 \\
 Q_8 \\
 A_8 \\
 Q_9
 \end{array} \\
 \hline
 \end{array} = \begin{array}{c}
 e_1 - a_1 Q_1 \\
 e_2 - a_2 Q_1 \\
 e_1 \\
 e_2 \\
 e_1 \\
 e_2 \\
 e_1 - d_1 A_{5i} \\
 e_2 - d_2 A_{5i} \\
 e_1 - a_1 Q_{5d} \\
 e_2 - a_2 Q_{5d} \\
 e_1 \\
 e_2 \\
 e_1 \\
 e_2 \\
 e_1 - d_1 A_9 \\
 e_2 - d_2 A_9
 \end{array}
 \quad (4.1)$$

4.3.2 Procedimiento de solución

Para la solución transitoria del canal de múltiples tramos se sigue el algoritmo mostrado a continuación:

1. Definir variables transitorias tales como factores de peso espacial y temporal, se utilizarán en general los definidos por (Aldama & Aguilar, 1996). El tamaño del paso en el tiempo y los errores de convergencia en la solución no lineal con el método de Picard.
2. Se introduce la condición inicial descrita en los 3.6 y 4.1. Generada en el módulo "hidra"; se obtiene el perfil de flujo, gastos, aperturas iniciales de las compuertas y valores de los coeficientes de descarga que tiene cada compuerta en la condición permanente.
3. Condición de frontera extrema aguas arriba. Se define el hidrograma de ingreso al canal (τ) de acuerdo con lo descrito en el subcapítulo 3. 5.
4. A continuación se define la dimensión de la matriz de coeficientes, calculan los coeficientes invariantes a_1, b_1, c_1 y d_1 , y se colocan en la Matriz A_1 que al momento tiene el aspecto de la ecuación (4.2).

$$A_1 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} b_1 & c_1 & d_1 & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & & & & \\ & & 0 & 0 & 0 & & & & \\ & & & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & a_1 & b_1 & c_1 & & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & & \\ \hline & & & & b_1 & c_1 & d_1 & & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & a_1 & b_1 & c_1 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & & & & \end{array} \right] \quad (4.2)$$

5. Se hace una revisión de la condición de estabilidad, calculando el Número de Courant: $Cr = \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_0 + \sqrt{gD_0})$. De acuerdo con este número se calcula el retardo teórico del canal y con base en este se definen los tiempos de acción del algoritmo de control global.
6. Si es el caso de simulación aplicando regulación en esta etapa se ordena hacer los cálculos de aperturas de compuertas y los tiempos de accionamiento de compuertas, entre otros. Estos cálculos se realizan en el módulo "Multiregulación" y solamente se carga la estructura de datos Mreg.*.
7. En el inicio del análisis transitorio, es decir $t > 0$. Se hace una actualización en el tiempo

$$\begin{aligned} y^n &= y^{n+1,m+1} \\ A^n &= A^{n+1,m+1} \\ Q^n &= Q^{n+1,m+1} \end{aligned} \quad (4.3)$$

8. Actualización de las fronteras. Se calcula el gasto que ingresa al canal en t , en la frontera extrema aguas arriba y en los tramos intermedios. $Q_{1,r}^{n+1,m+1}$

9. Se calcula el tirante futuro al final de cada tramo $y_{J,r}^{n+1,m+1}$
10. Se procede a calcular los retardos.
11. Se actualizan los valores del perímetro, anchos de superficie y pendientes de fricción de acuerdo con y_n, Q_n y A_n .
12. Inicia la metodología de Picard para la solución de los términos no lineales, en la cual se calcula $y_{J,r}^{n+1,m} = y_{J,r}^{n+1,m+1}$; $A_{J,r}^{n+1,m} = A_{J,r}^{n+1,m+1}$ y $Q_{J,r}^{n+1,m} = Q_{J,r}^{n+1,m+1}$.
13. A continuación se calculan los términos no lineales $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5$. Posteriormente se calculan los coeficientes no lineales a_2, b_2, c_2 y d_2 . Y el vector **B**
14. Finalmente se completa la Matriz A, al sumarle a A1 los coeficientes no lineales recién calculados. Y se soluciona el sistema de ecuaciones:

$$X = inv(A) B$$
15. Se hace la prueba de convergencia de los términos no lineales, en caso de ser negativa se repiten los pasos 6, 7 y 8, hasta lograr la convergencia definida, existiendo un número límite de iteraciones de 50.
16. De tenerse activado el módulo de regulación de compuertas, en este punto es cuando se define si es necesario hacer algún cambio en las aperturas de las compuertas.
17. Se guardan los valores calculados del perfil de flujo, área y gasto a lo largo del canal, así también apertura de compuertas (W) en una nueva estructura de datos llamada "impr.*"
18. Se hace un incremento en el tiempo $t = t + \Delta t$
19. Se repite el procedimiento desde el punto 7 hasta que el tiempo sea $t \geq tiempo\ de\ simulación$
20. Una vez terminada la simulación se guardan todos los resultados en el archivo Imp_res.mat.

4.3.3 Impresión de resultados

Consiste en un programa que grafica los gasto que ingresan a cada tramo en cada Δt , el perfil de flujo, área y gastos a lo largo del canal; así como también las aperturas que presentan las compuertas y los tirantes aguas arriba de cada compuerta. Esta aplicación tiene la opción de imprimir los resultados cada $timp * \Delta t$ segundos.

En este módulo se despliegan cuatro figuras; en la Lámina 34 inciso a) se muestran tantas gráficas como tramos, cada una representa el gasto que está ingresando a cada tramo; la Lámina 34 inciso b) muestra tres gráficas, la primera representa una diferencia del gasto entre el tiempo pasado n y el actual $(n + 1)$, definida como:

$$\Delta Q = Q^{n+1,m+1} - Q^n \quad (4.4)$$

La segunda representa el perfil del flujo del canal con compuertas y la última el gasto en el canal.

En la Lámina 34 inciso c), se observan los cambios que va teniendo el tirante final de cada tramo durante la simulación con respecto al de la condición inicial (ver (4.5)). Mientras que en la Lámina 34 inciso d) se registran las aperturas de compuerta (w).

$$\Delta y = y_f^{n+1} - y_f^{t=0} \quad (4.5)$$

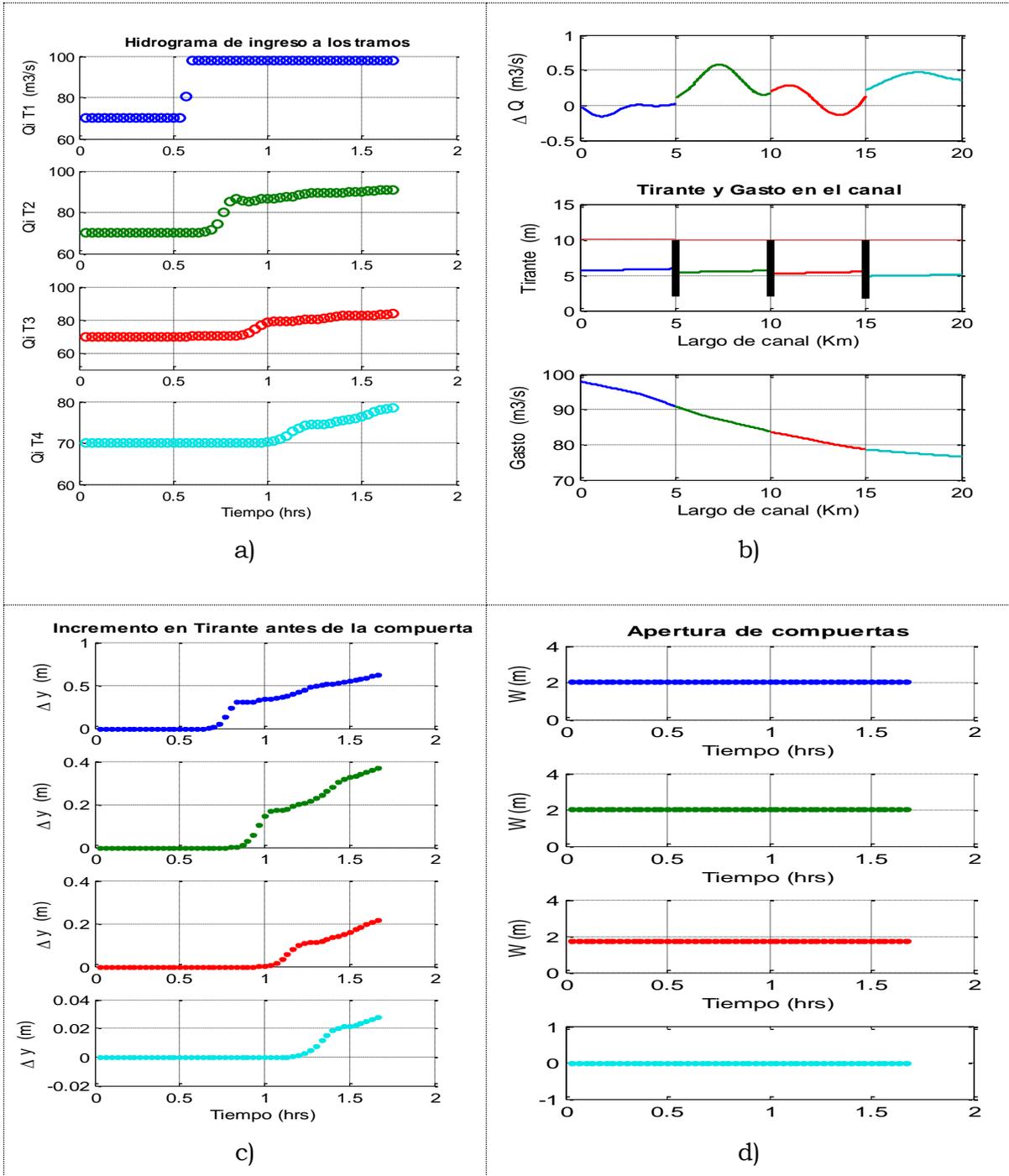
Si se está aplicando el algoritmo de regulación, se tendrá una Lámina adicional (un caso de esta condición se muestra en la Lámina 45), en la cual se representa el perfil de flujo en régimen permanente para el $Q_{m\acute{a}x}$.

Para la regulación global se consideraron los siguientes criterios:

- 1 Un fenómeno transitorio describe las perturbaciones dentro del dominio, entre dos condiciones permanentes.
- 2 Las propagaciones de las perturbaciones en la frontera para un problema hiperbólico lo definen los valores característicos.

En forma práctica las condiciones permanentes son posibles de definir con el modelo “*hidra*” y la propagación de las perturbaciones se estiman con los retardos de la onda, en cada tramo, calculados con el modelo de los valores característicos (en este caso es el número de Courant, ecuación $\tau = \frac{L}{V_o + \sqrt{gD_o}}$).

Lámina 34 Ejemplo de impresión de resultados del SMT, las pantallas de: a) hidrograma de entrada por tramos; b) variación de nivel y gasto; c) variación del nivel de control, y d) aperturas o maniobras en las compuertas.



4.4 Control y regulación de flujo

4.4.1 Modelo de regulación local

Este algoritmo de control consiste en definir el tirante de referencia y_r . Para hacer el ajuste pertinente en la compuerta se debe comparar el tirante en el tramo final y_j^{n+1} con el tirante de referencia y_r y se aplica la corrección necesaria c , como se indica a continuación (ver lámina 17):

- Si $y_j = y_r$ → No se aplica alguna acción
 $w^{n+1} = w^n$
- Si $y_j < y_r$ → Es necesario abrir la compuerta para que se pueda elevar el nivel y_j ($w^{n+1} = w^n + c$)
- Si $y_j > y_r$ → Es necesario cerrar la compuerta para descargar un gasto mayor y disminuya el nivel y_j

$$(w^{n+1} = w^n - c)$$

El tirante de referencia y_r es la carga necesaria para lograr las descargas en los canales laterales.

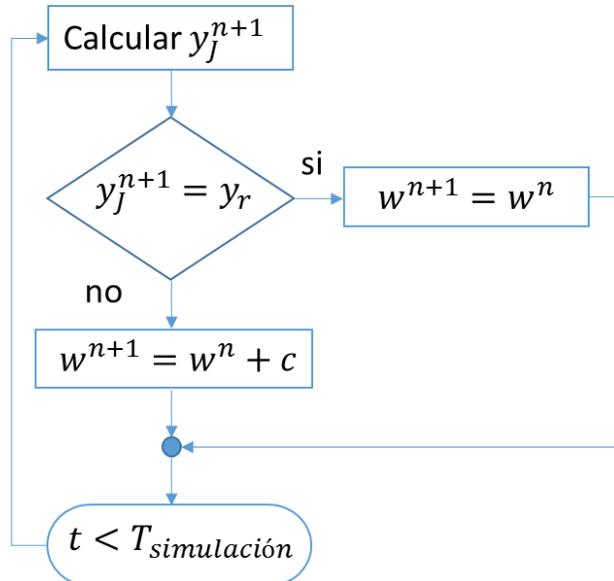
Este algoritmo calcula la apertura requerida para descargar un gasto Q_d conservando la carga aguas arriba (y_r), y debido a que el coeficiente de descarga es no lineal se utiliza un método numérico para su cálculo. La apertura se obtiene con la Ley de descarga siguiente:

$$w_2 = \frac{Q_d(x_{j-1})}{C_d b \sqrt{2gy_r}} \quad (4.6)$$

Entonces la corrección estará dada por la diferencia entre la apertura existente y la necesaria $c = w^n - w_2$, y sólo se aplica la corrección cuando $y_j \neq y_r$ entonces $w^{n+1} = w^n + c$, y en caso contrario $w^{n+1} = w^n$.

El control propuesto en la Lámina 35 es de tipo local, ya que todos los elementos de que depende se encuentran en el mismo punto, y es el procedimiento de cálculo indicado en la Lámina 25 del capítulo 3.4.

Lámina 35 Algoritmo local de regulación de compuertas



4.4.2 Modelo de regulación global (RCAC)

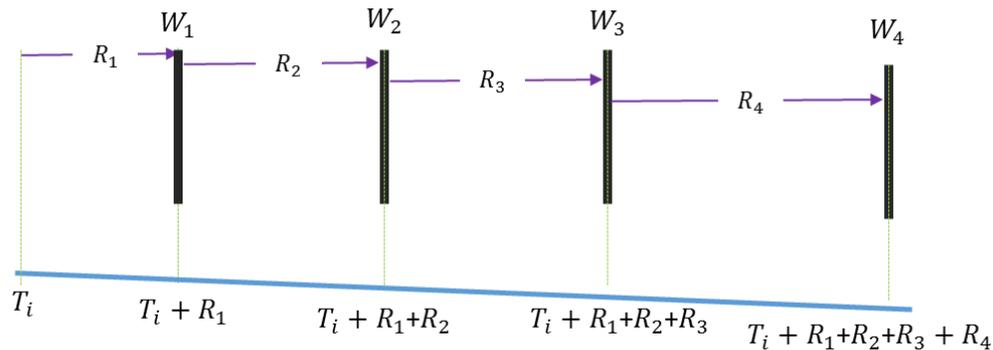
El control de canales de riego es complicado debido a las variaciones espaciales y temporales de las características hidráulicas del flujo (de León Mojarro & Robles Rubio, 2007). Las variaciones en el flujo de ingreso no se sentirán inmediatamente en la estructura aguas abajo. Debido a que la onda provocada por cada acción se transmite con una velocidad o aceleración particular, así que llega de forma gradual a la estructura aguas abajo. Por lo que los ajustes de las aperturas de compuerta se pueden hacer cuando la onda llegue o bien si se conoce la aceleración de la onda será posible anticipar la maniobra oportunamente. La apertura de las compuerta no es tan fácil de calcular, debido a que esta puede tomar unos minutos o incluso horas en estabilizarse, ya que los tirantes del canal no serán los niveles de operación (de León Mojarro & Robles Rubio, 2007).

Se propuso un Modelo de Regulación para Control Automático de Compuertas (RCAC) que predice los cambios en los niveles del canal antes de ingresar al transitorio, esto se hace conociendo la geometría y condiciones de flujo iniciales, además requiere la ley de operación del canal durante todo el tiempo a simular. El modelo RCAC actúa de la siguiente forma:

- Ingresa a toda la información de la condición inicial contenida en el módulo hidra.*, la Ley de operación del canal contenida en los vectores *tau* y *tiempo*. Es necesario definir el modelo de compuerta a utilizar.
- Se guardan las variaciones de gasto (en Q_m) y el tiempo en que ingresará cada nuevo gasto Q_m (en el vector T_i)

- Predicción de las aperturas de compuerta. Estas se hacen calculando el flujo espacialmente variado para cada Qm , suponiendo que se tienen los niveles de operación yf . Las aperturas para cada compuerta y para cada gasto se guardan en el vector $W_Qm(\# Qm, \# tramos)$.
- A continuación se calculan los retardos en cada tramo τ_i y respecto a cada gasto Qm . Se considera que el área hidráulica será la misma que en la condición inicial ya que lo que se desea es conservar estos niveles. Por lo que la velocidad con que se calculará el retardo será $V = Qm_i/A_o$. El tiempo que tarda una onda en cruzar el tramo se guarda en el vector $Retardo(\# Qm, \# tramo)$
- Por consiguiente se calculan los tiempos en que deben ser accionadas las compuertas. Esto se hace considerando una suma acumulada de los retardos, al cual se le agrega el tiempo en que ingresa al canal el nuevo gasto Qm , tal y como se describe en la Lámina 36.

Lámina 36 Definición de los tiempos de acción de acuerdo con los retardos de cada tramo



- Finalmente es necesario guardar las variables calculadas, principalmente las aperturas de compuerta (W_Qm) y los tiempos de accionamiento (Tac), se utiliza la estructura de datos $Mreg.*$. Donde además de lo mencionado se guardan los coeficientes de descarga, no necesarios en el cálculo pero se conservan para revisión (Cd_Qm); El retardo de cada tramo ($Retardo$) y el número de cambios de gasto en la ley de operación (NQm).

El modelo de Descarga por una compuerta utilizado en la condición inicial debe ser el mismo que se utilice en el del transitorio, esto debido a que cada uno tiene consideraciones distintas, y se generan cambios pequeños en el coeficiente de descarga que repercuten en el gasto y tirantes al iniciar el transitorio, y producen inestabilidades en el simulador.

En cuanto a la regulación se tiene la opción de hacerla de forma local, esta implica definir durante la simulación del transitorio el momento de la maniobra y el tamaño de la apertura lo que genera inestabilidades en algunos casos. O bien se puede utilizar el algoritmo de regulación global que programa los movimientos con base a la ley de operación, y que tiene la desventaja de no poder hacer ajustes si se dieran cambios inesperados.

5 Pruebas numéricas y análisis de resultados

Para demostrar el funcionamiento del modelo numérico, se hicieron pruebas con diferentes condiciones hidráulicas y de operación del canal. Todas las pruebas se hicieron garantizando flujo subcrítico, En estas pruebas se verifican los parámetros de estabilidad tales como el Número de Courant y el Número de Vedernikov para tener la certeza de que el modelo es convergente.

Para verificar los modelos SMT y RCAC, planteados en este trabajo, se elaboraron una serie de escenarios de pruebas numéricas y estos se muestran en el capítulo 5, y en forma de resumen se enlistan en la Tabla 8.

Tabla 8 Descripción de pruebas numéricas realizadas con SMT y RCAC

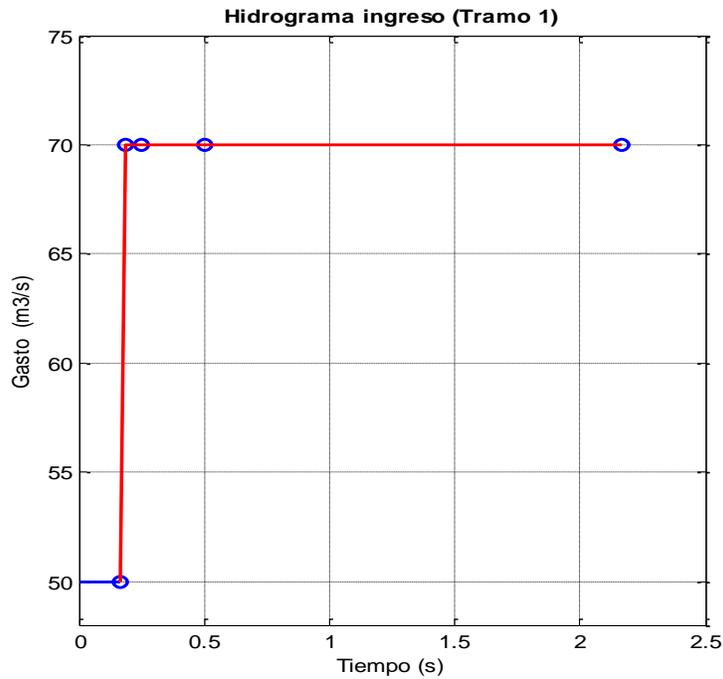
Tipo se sección	Número de tramos	Longitud de tramos (m)	Ley de operación de gasto	RCAC	Mod. de compuertas
Rectangular	3	100	Un escalón	x	Swamee
Rectangular	4	5000	Un escalón		Sotelo
Rectangular	4	5000	Un escalón	x	Sotelo
Rectangular	4	5000	Un escalón	x	Swamee
Trapezoidal	4	500	Un escalón		Swamee
Trapezoidal	4	500	Un escalón	x	Sotelo
Trapezoidal	4	5000	Dos escalones	x	Swamee
Trapezoidal	4	5000	Tres escalones	x	Swamee
Trapezoidal	4	Variables entre 4000 a 6000	Tres escalones	x	Swamee

Se hicieron pruebas desde dos tramos a cuatro, la Tabla 9 muestra los datos utilizados en la simulación de un canal de tres tramos y en la Lámina 37 se define la Ley de gastos al inicio del canal.

Tabla 9 Canal rectangular con 3 tramos

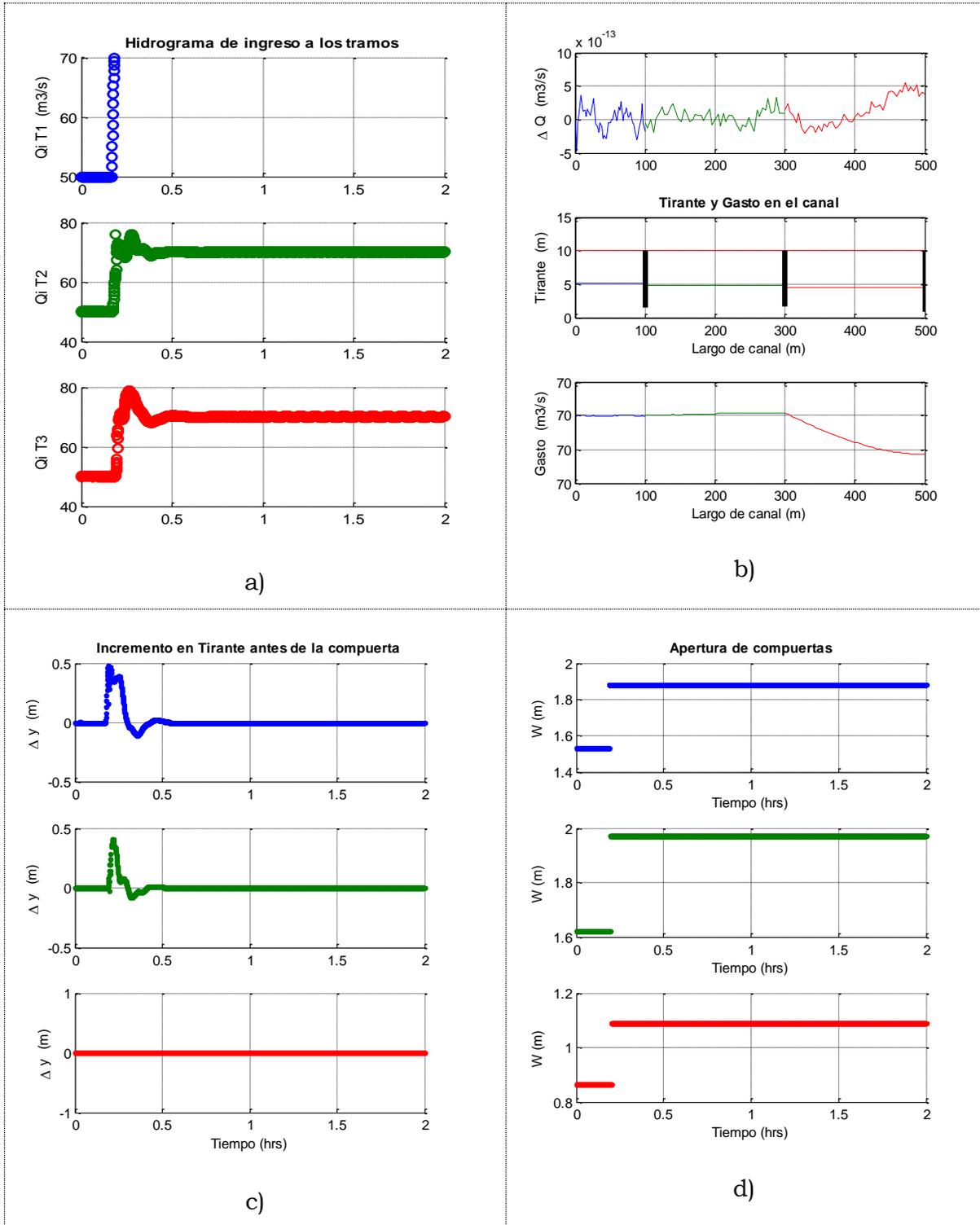
Ancho. $b=15$ m	Tirante normal $y_n=2.86$ m
Talud $k=0$	Tirante crítico $y_c=1.04$ m
Pendiente de plantilla $s_b=0.0001$ Gasto $Q_0 = 50$ m³/s	Longitudes Tramo 1. $L_1=100$ m Tramo 2. $L_2=200$ m Tramo 3. $L_3=200$ m $Cr=1; \Delta x = \{1,2,2\}m$

Lámina 37 Ley de operación de canal rectangular de tres tramos



En la Lámina 38 se muestra el registro final de la simulación a las 2:00 h, observándose que se logra pasar de una condición de flujo permanente (en $Q = 50$ m³/s) a otra para $Q = 70$ m³/s, tras haber tenido un cambio en la apertura de compuerta, y además se presentan las variaciones de nivel que se estabilizan a las 00:15 h, aproximadamente.

Lámina 38 Resultado de SMT en canal con tres tramos, a) Gasto ingresado por tramos; b) ΔQ , variación en el gasto respecto n , perfil de flujo y distribución de gasto; c) Δy Incrementos en el nivel, respecto a la condición inicial



5.1 Pruebas en canales de cuatro tramos

5.1.1 Canal rectangular

En la serie de prueba de cuatro tramos el SMT tiene un canal de sección rectangular, con tramos de 5000 m cada uno divididos por tres compuertas planas. Se propuso introducir un hidrograma con duración de 5:00 h, con un gasto inicial de $70 \text{ m}^3/\text{s}$. Los datos hidráulicos del canal son:

Ancho $b = 15 \text{ m}$

Talud $k = 0$

Coefficiente de rugosidad de Manning, $n = 0.014$

Pendiente de plantilla, $S_b = 0.0001$

Longitud de cada tramo, $L = 5000 \text{ m}$

$\Delta x = \{50 \ 40 \ 40 \ 40\} \text{ m}$

5.1.1.1 Condición inicial.

La condición inicial se generó en el módulo “hidra”, de acuerdo con el procedimiento descrito en 4.1, se definió el gasto en estado permanente $Q = 70 \text{ m}^3/\text{s}$, el gasto máximo esperado en el canal $Q_{m\acute{a}x} = 120 \text{ m}^3/\text{s}$. Así mismo se determinó el tirante máximo esperado, que como se menciona antes es el tirante normal correspondiente al gasto máximo, resultando $y_{m\acute{a}x} = 5.27 \text{ m}$.

Se definió la ley tirante gasto en la descarga del último tramo con el $y_{m\acute{i}n} = 0.9y_{m\acute{a}x}$, entonces:

$$Y_q = \frac{y_{m\acute{a}x} - 0.9y_{m\acute{a}x}}{Q_{m\acute{a}x} - Q_{m\acute{i}n}} Q + 0.9y_{m\acute{a}x} \quad (5.1)$$

Con los valores de flujo la ecuación (5.1) es $Y_q = 0.0044Q + 4.74$ (Ver Lámina 39)

Para las compuertas se utilizó el modelo de Swamee, algoritmo de la Lámina 21, y se obtuvieron las aperturas $W = [2.0402, 2.0402, 1.7568]$ m, además los coeficientes de descarga: $Cd = [0.2249, 0.2249, 0.2612]$. También se utilizaron las ecuaciones propuestas por Sotelo con valores de $Cd = [0.9138, 0.9138, 0.8346]$, pero no se obtuvieron buenos resultados cuando se aplica el modelo de regulación.

Con lo mencionado anteriormente y de acuerdo al capítulo 3.6 se definió el perfil de flujo en la condición inicial, la cual se muestra en Lámina 40.

Lámina 39 Ley tirante-gasto utilizada en Prueba A (Canal Rectangular)

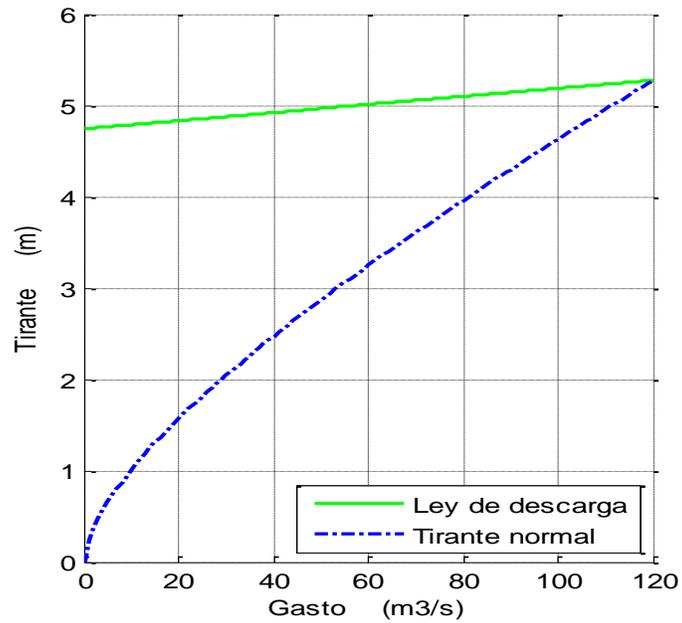
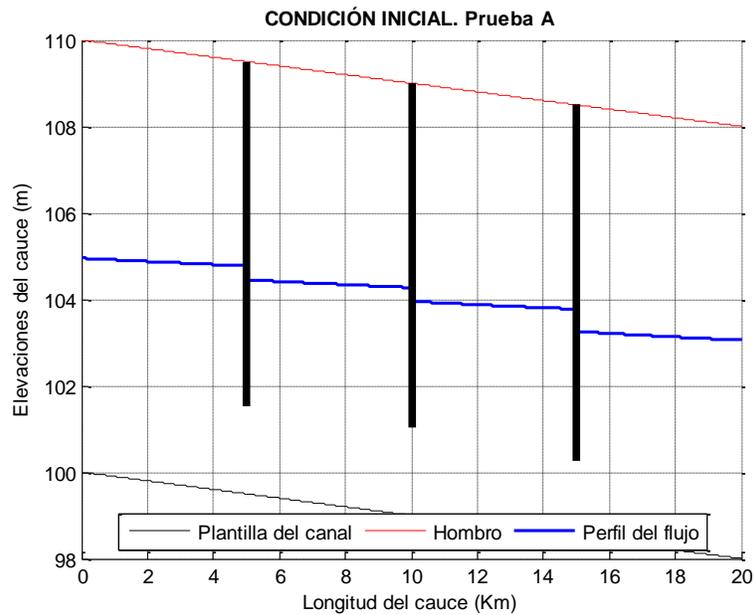


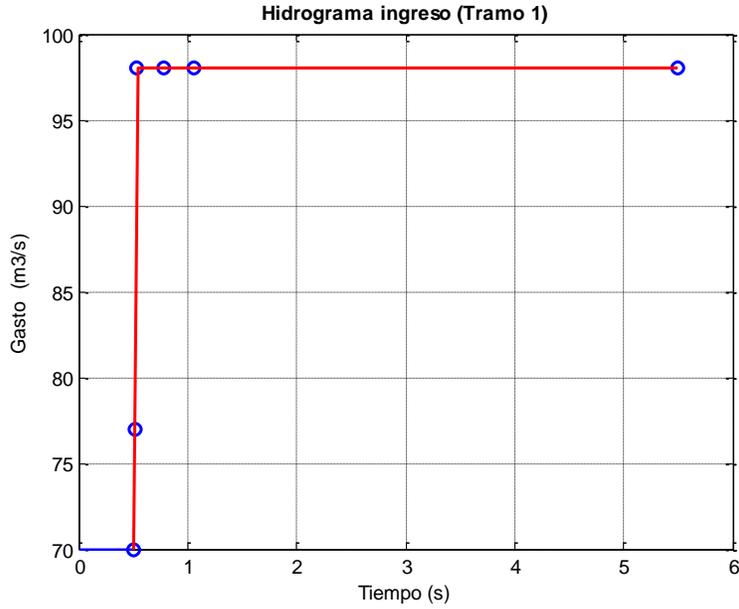
Lámina 40 Condición inicial de prueba A



5.1.1.2 Condiciones de Frontera.

En la frontera aguas arriba del canal se introduce la condición de gasto descrito en el hidrograma de la Lámina 41 con las siguientes características: *Tiempo de inicio: 30 min; Duración = 5:00 h; Gasto máximo = 98 m³/s.*

Lámina 41 Condición de frontera superior



Para la frontera de tirante aguas abajo del canal se considera la función tirante gasto de la ecuación (5.1). La frontera interna de tirante que se utilizó fue la descrita por la ecuación (3.51) del subcapítulo 3.5.

$$y_{j,r}^{n+1} = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q_{1,r+1}^{n+1}}{C_d(y_{1,r+1}^n, y_{j,r}^{n+1}, Q_{1,r+1}^n)ab} \right)^2 \tag{5.2}$$

Por lo que la condición de frontera de gasto interno quedó definida por la conservación de masa entre tramos dada por la relación.

$$Q_{1,r+1}^{n+1} = Q_{j,r}^n \tag{5.3}$$

Se hicieron pruebas considerando la solución con el método de Newton. En cuanto a la estabilidad se utilizó un $\Delta t = 120 s$, con lo que el número de Courant fue de $Cr=19$.

Lámina 42 Resultado de SMT en un canal Rectangular con tres compuertas (1:45 h). a) hidrograma que ingresa a cada tramo; b) diferencia ΔQ del gasto actual en el canal ($n + 1$) respecto al tiempo n ; c) registro de las variaciones del tirante Δy final de cada tramo, y d) registro de las aperturas de cada compuerta

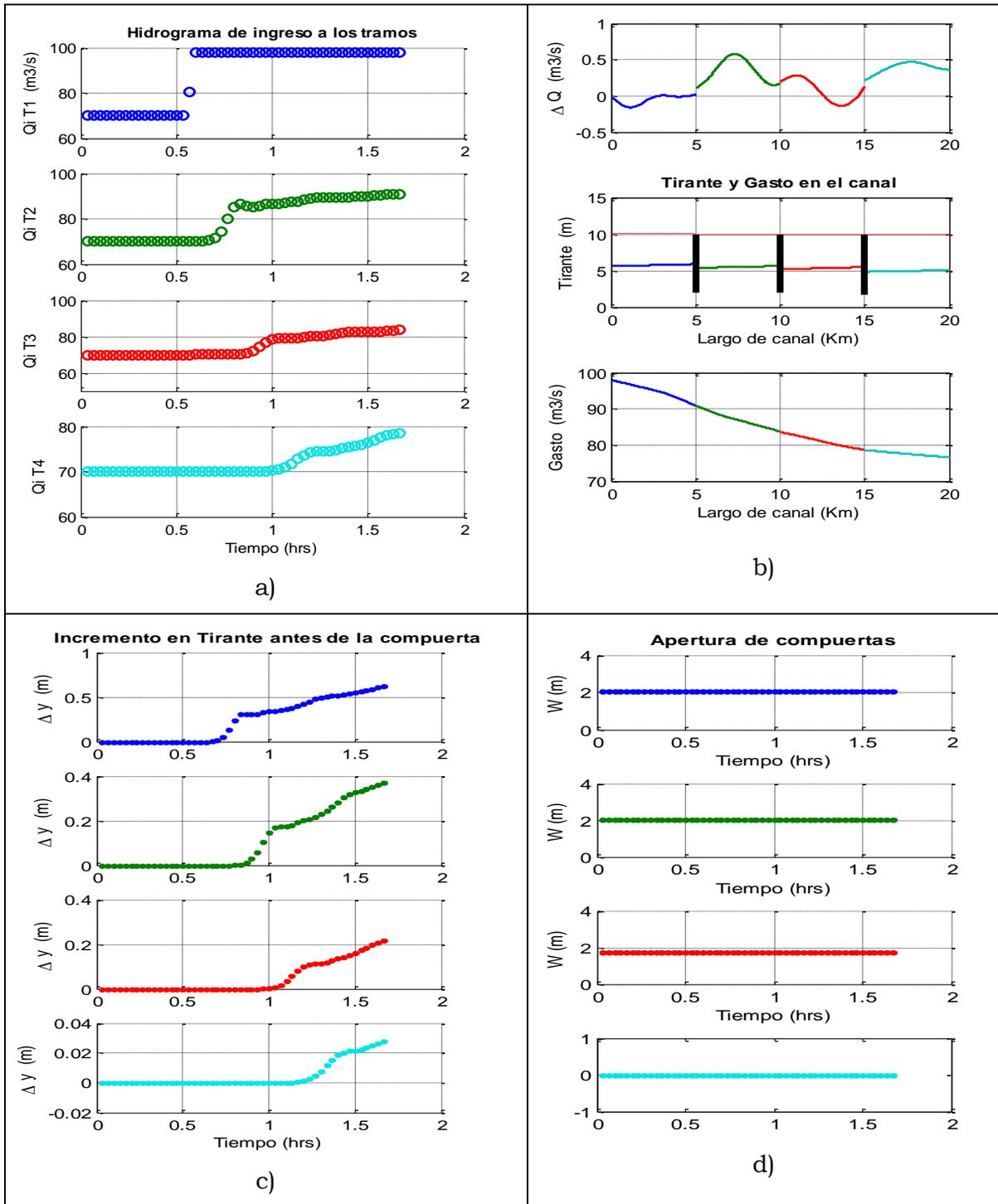


Lámina 43 Ídem Lámina 42 a las 2:30 h

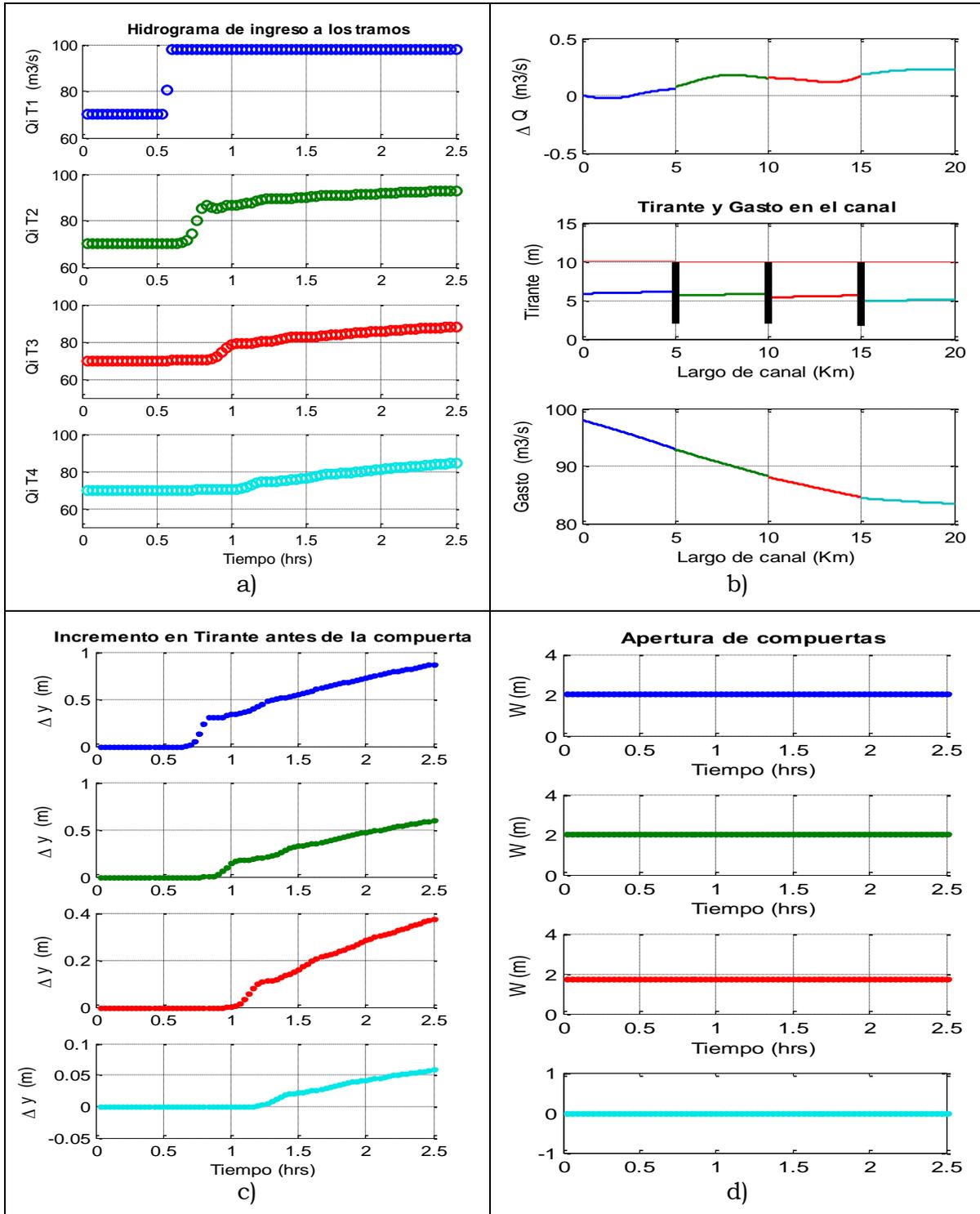
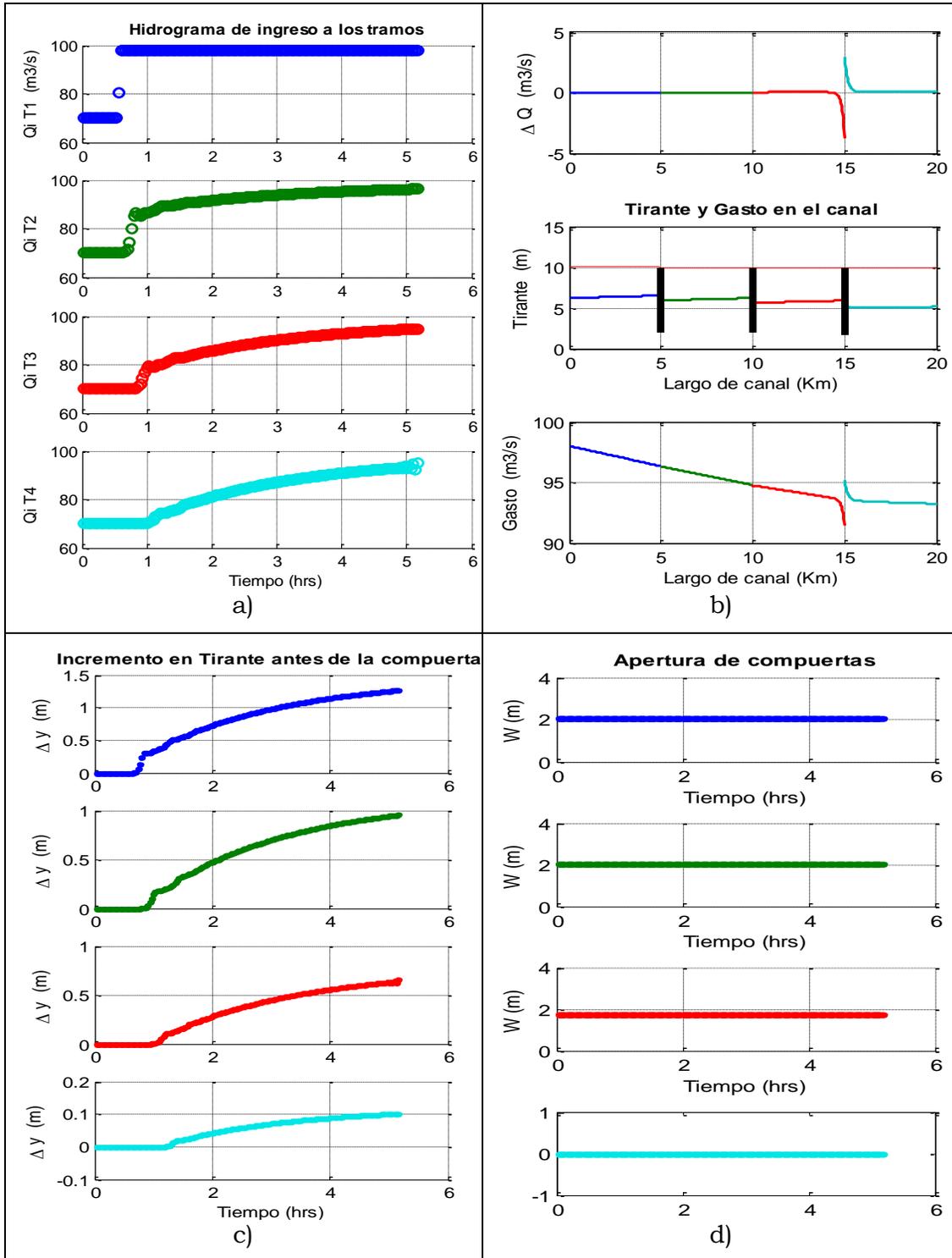


Lámina 44 Ídem Lámina 42 a 5:00 h



Los resultados de la simulación se muestra con la secuencia de imágenes de las Lámina 42-44, donde se pueden ver los ingresos, niveles y aperturas de compuerta a diferentes tiempos (1:45, 2:30 y 5:10 h). En esta secuencia de imágenes se puede observar el incremento en los niveles antes de las compuertas, debido a que está aumentando el gasto de entrada y las compuertas se encuentran fijas. La simulación se limita a 5 h debido a que al no haber control de niveles el modelo de compuertas introduce inestabilidades al sistema como se observa en la Lámina 44.

Cabe mencionar que la falla de la simulación se debe a que conforme se acerca a la condición de flujo uniforme, es decir los niveles aguas arriba y debajo de la compuerta son muy parecidos, se aproxima el límite de aplicación de la condición de frontera interna definida, y por esto el modelo de cálculo de compuerta introduce perturbaciones al sistema.

5.1.1.3 Regulación en un canal rectangular

Una vez que, se comprobó que el simulador era capaz de modelar el flujo en un canal con compuertas sin desestabilizarse durante 5:00 h, entonces se procedió a realizar un caso con un control de compuertas. No hay que olvidar que el control tiene la finalidad de conservar el tirante antes de la compuerta en un valor definido (objetivo del control).

Para el primer algoritmo de control se generan las características de las compuertas en flujo permanente con $Q = 70 \text{ m}^3/\text{s}$, se tienen conocidos los niveles de operación (y_f), las aperturas (W) y los coeficientes de descarga.

Además se calcula la condición de flujo permanente para gasto máximo del hidrograma de ingreso $Q_{\text{máx}} = 98 \text{ m}^3/\text{s}$. Para generar este perfil se consideran los mismos niveles de operación que se quieren conservar. De este cálculo se guardan las aperturas ($Ap_{Q_{\text{max}}}$) y los coeficientes de descarga ($cd_{Q_{\text{max}}}$), que son las aperturas cuando se tenga en el canal el $Q_{\text{máx}}$, control de nivel para un gasto distinto.

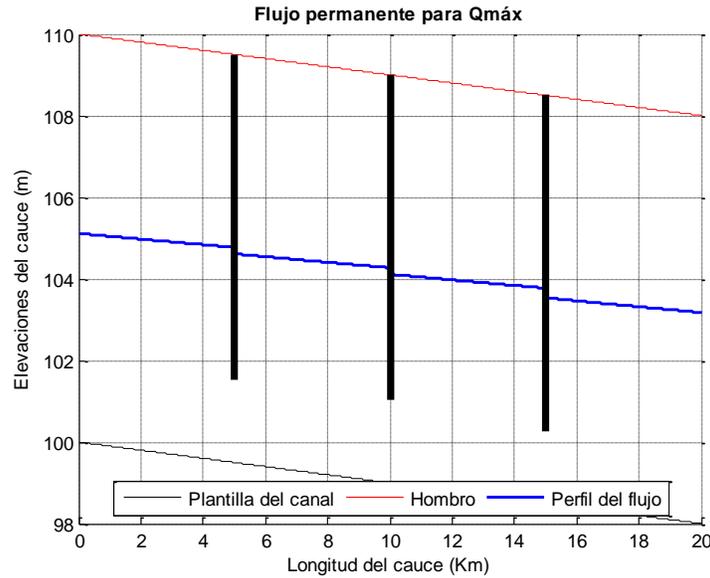
La parte dinámica del control se calcula con el retardo en cada tramo del canal y es el tiempo que tarda una onda en cruzar el tramo. La celeridad de onda son los eigenvalores de los matriz de coeficiente de los términos convectivos, y en forma práctica se calcula de la forma siguiente:.

Para $Q = 70 \text{ m}^3/\text{s}$; $A = 79.0875 \text{ m}^2$ y la velocidad media es $U = 0.8851 \text{ m/s}$

$$U_t = U + \sqrt{gy} = 0.8851 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \sqrt{(9.81 \text{ m/s}^2)(5.27 \text{ m})} = 8.0752 \text{ m/s}$$

El retardo será $\Delta T = L_t/U_t = 5000 \text{ m}/8.0752 \text{ m/s} = 620 \text{ s}$

Lámina 45 Flujo permanente en canal rectangular con el gasto máximo del hidrograma



En forma teórica este retardo es válido, pero para tener un valor más real se debe considerar varios aspectos: la fricción de fondo, la variación espacial de la profundidad del canal, por consiguiente la variación de las velocidades de propagación temporal, y la combinación de todos estos parámetros en forma no lineal. No obstante se obtuvieron resultados satisfactorios con este modelo.

Tabla 10 RCAC de canal Rectangular con cuatro tramos

Q (m ³ /s)	Tiempo de acción (min)			w ₁	w ₂	w ₃
				m		
98	41			2.86		
		52			2.86	
			63			2.86

La regulación mostrada en las Lámina 46 a Lámina 49 fue hecha utilizando el coeficiente de descarga ajustado del modelo mostrado en Sotelo (2009) como se muestra en la ecuación, se observa que no se cumple totalmente el objetivo de la regulación ya que $\Delta y \neq 0$.

Lámina 46 Resultado de SMT con el RCAC en un canal rectangular (00:40 h). a) muestra que el gasto máximo (Q_m) apenas ingresa al Tramo 1; b) muestra que el gasto máximo a este tiempo está a la mitad del primer tramo, por lo que no afecta las fronteras aún, como se comprueba en la c), donde $\Delta y = 0$, y la d) indica que no se ha tenido actividad en las compuertas, nota, en último tramo se tiene valor porque es el extremo de canal y no compuerta.

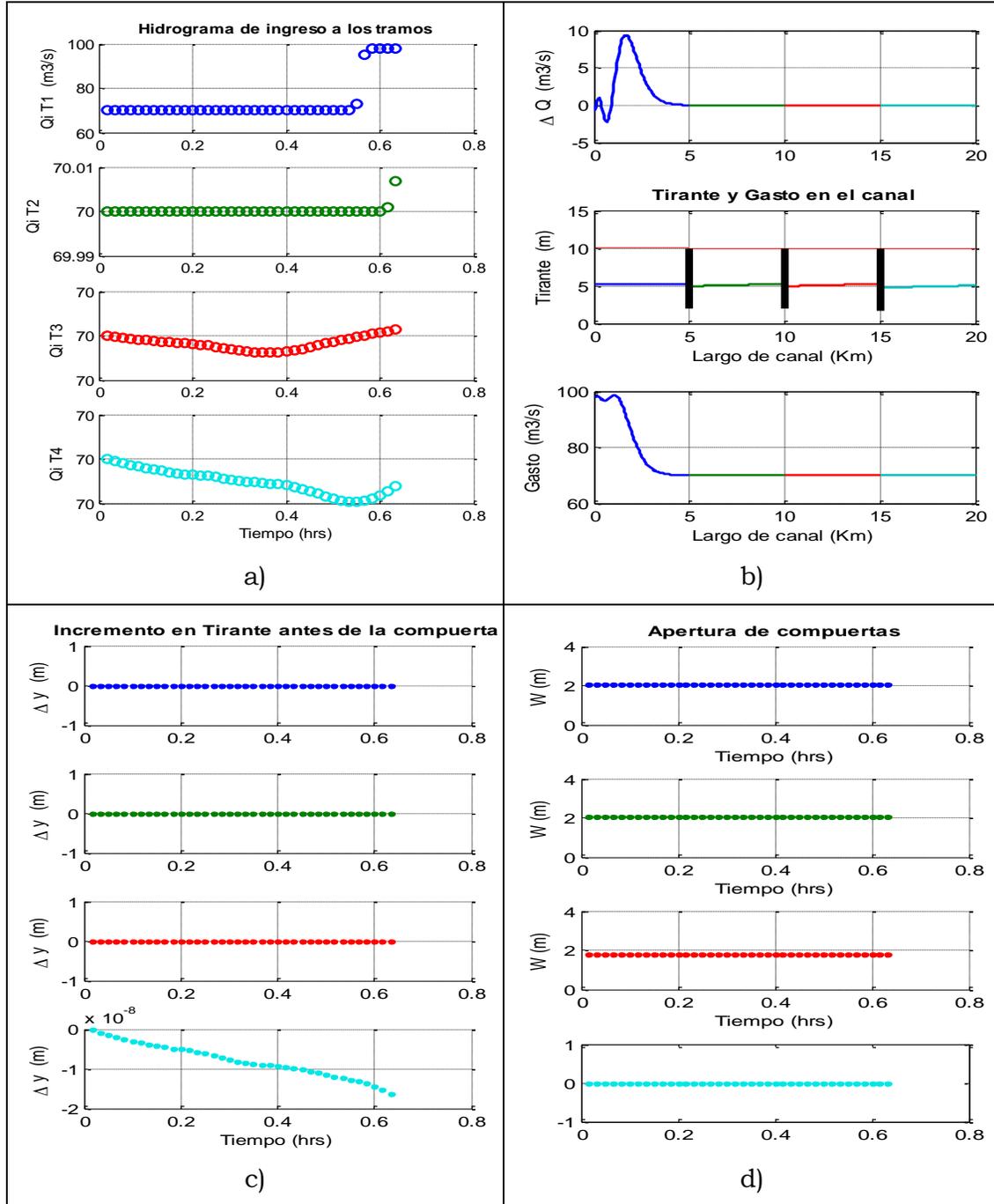


Lámina 47 Ídem Lámina 46 a (00:55 h).

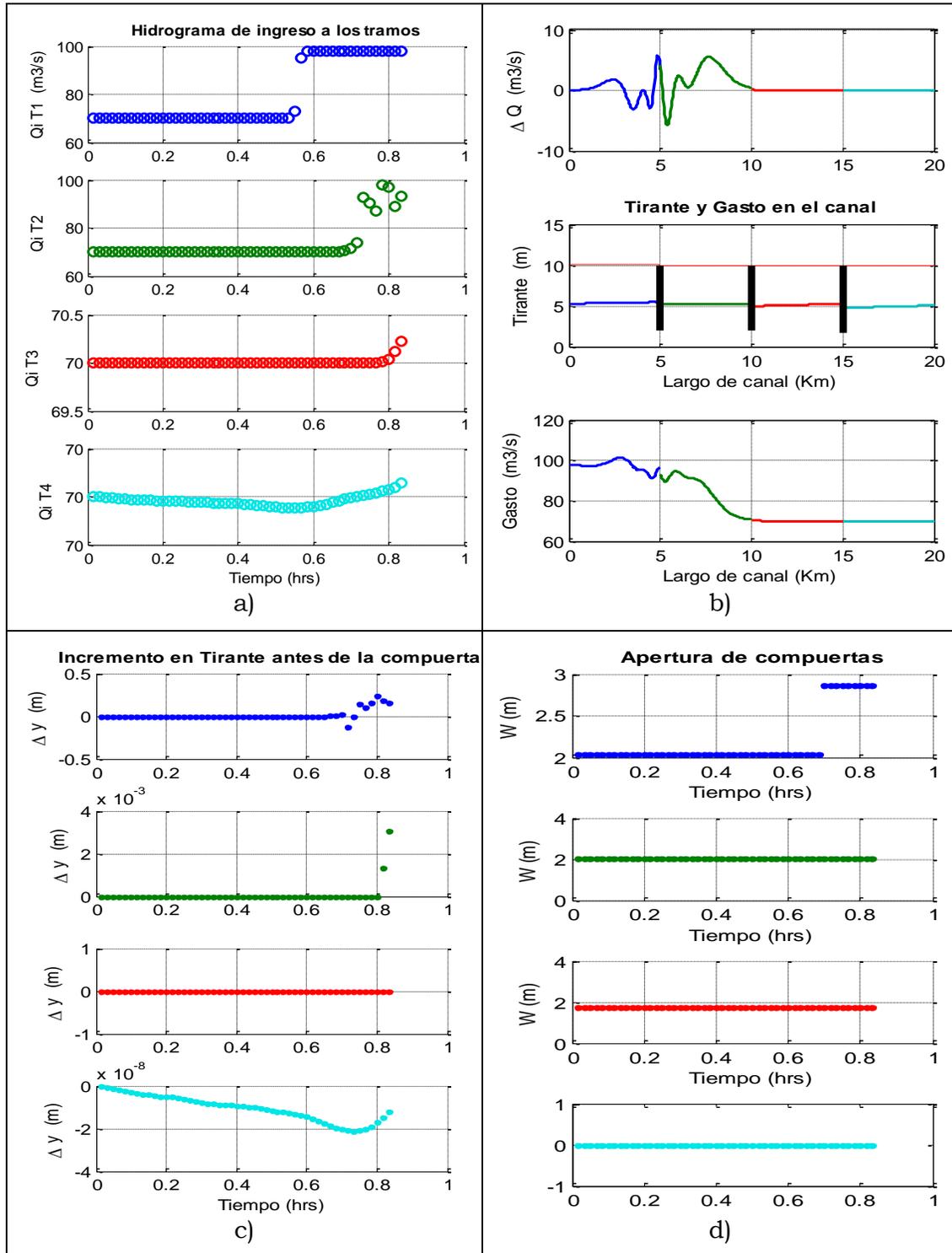


Lámina 48 Ídem Lámina 46 a 2:00 h

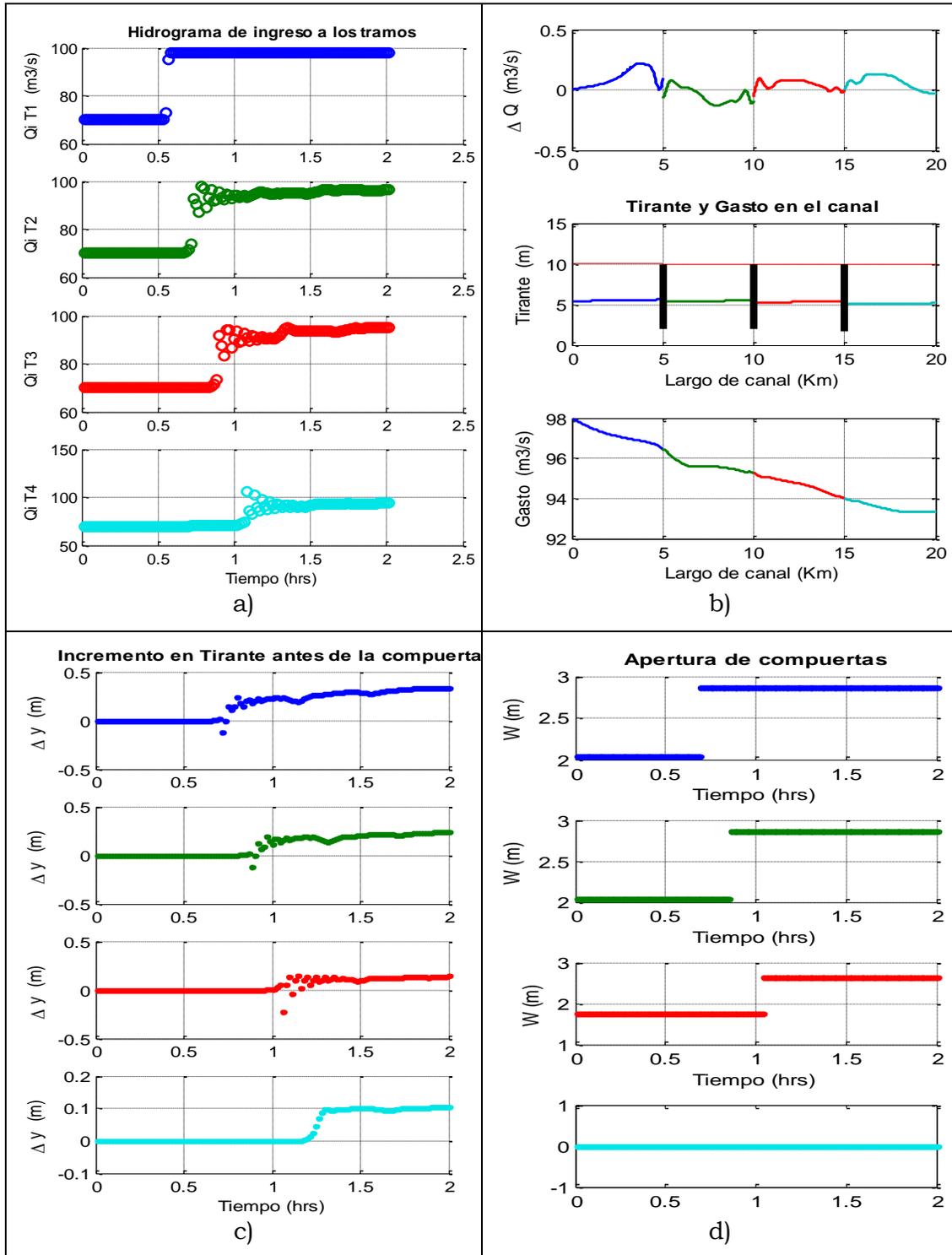
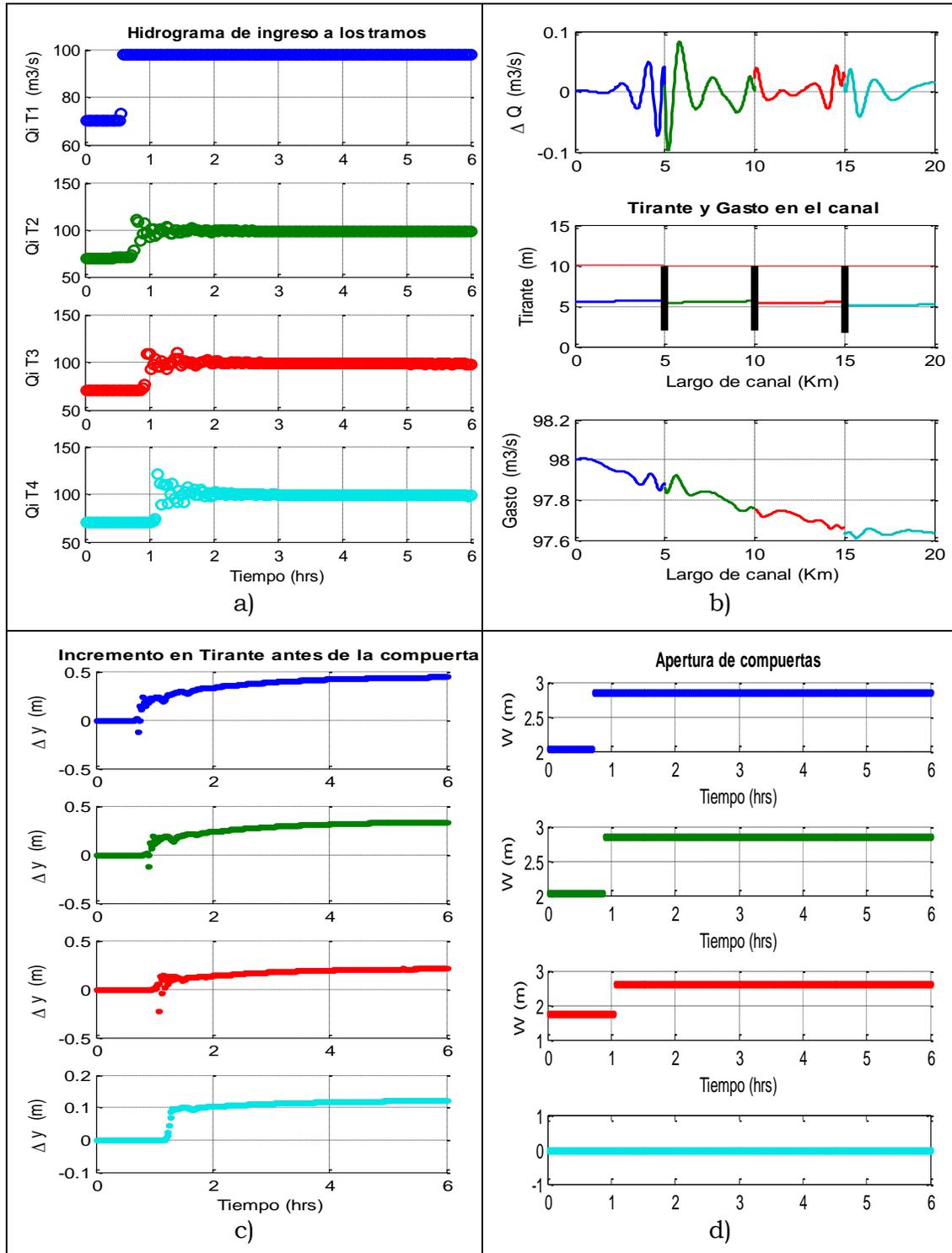


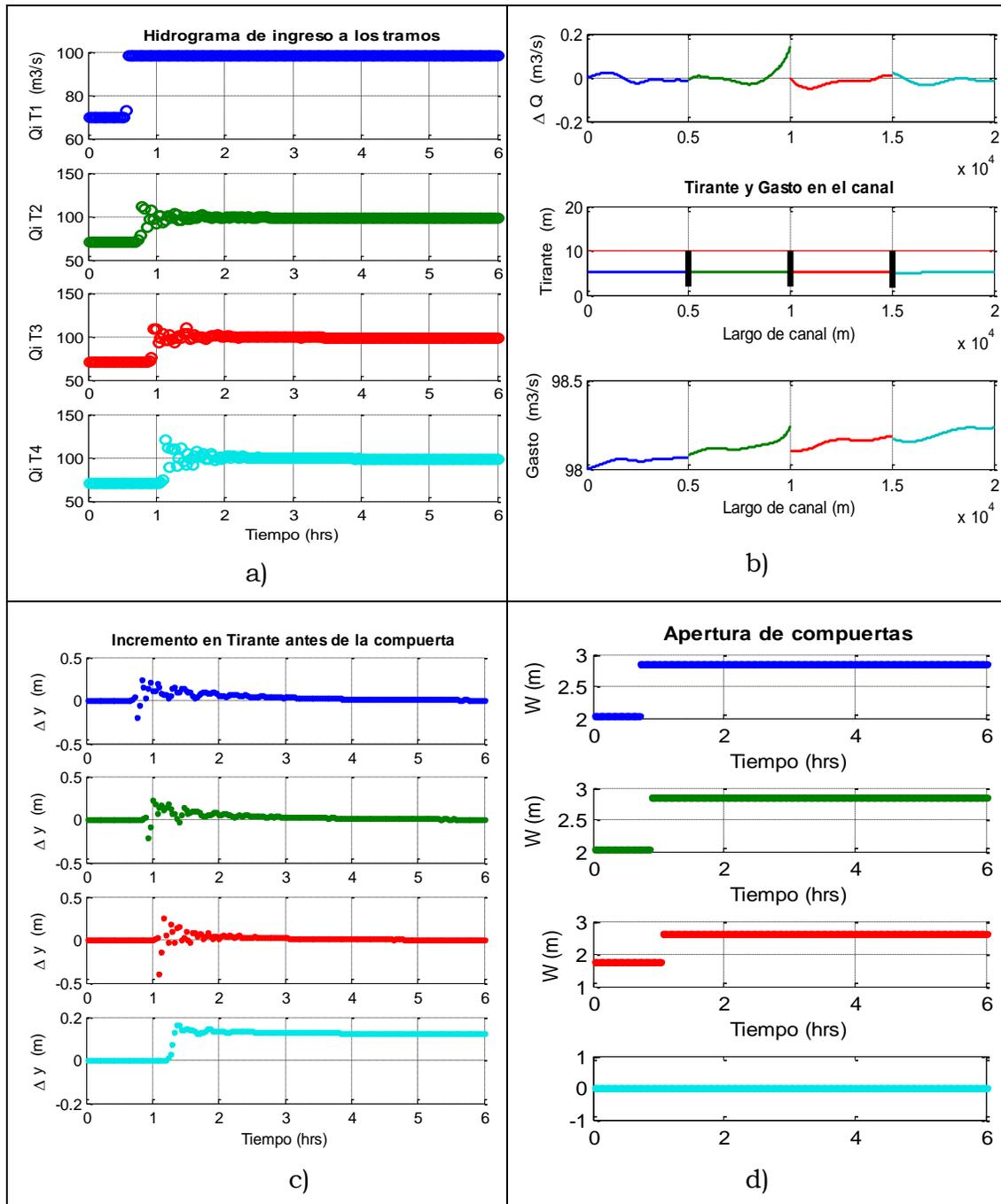
Lámina 49 Ídem Lámina 46 a 06:00 h



Se realizó una segunda simulación de la regulación en este canal, bajo las mismas condiciones hidráulicas y de operación que la simulación de Lámina 49, pero ahora utilizando el modelo de compuertas propuesto por Swamee (1992). Obteniéndose los resultados de la Lámina 50 en donde se observa que la regulación es más efectiva que la mostrada en Lámina 49 (donde se hace un ajuste de los coeficientes de descarga según Sotelo (2009) y Swamee (1992)), ya que si es posible mantener los tirantes de operación ($\Delta y \rightarrow 0$).

La diferencia fundamental en el comportamiento de cada modelo se debe a que con el de Swamee se calcularon los coeficientes de descarga para cada combinación de niveles dada durante el transitorio, mientras que en el modelo ajustado de las ecuaciones de Sotelo se consideran coeficientes congelados. Con esto se demuestra que es importante la actualización de los C_d .

Lámina 50 Resultado de SMT con RCAC en un canal rectangular con el modelo de Swamee. a) se aprecian pequeñas oscilaciones en los gasto descargados por las compuertas, pero logran estabilizarse; b) se puede apreciar que después de 5:30 h de hacer el cambio de gasto se está logrando alcanzar la condición de flujo permanente para $Q = 98 \text{ m}^3/\text{s}$. d) se observa que la maniobra de apertura en la compuerta genera inestabilidad en el tirante la cual se logra desaparecer apróx. 1:00 h después. En d) se observan las acciones programadas en la compuerta.



5.1.2 Aplicación de RCAC a un canal Trapecial

Esta prueba se realiza en un canal largo, con sección trapecial de características geométricas similares al utilizado en la Prueba anterior.

Ancho $b = 15 \text{ m}$

Talud $k = 1$

Coefficiente de rugosidad de Manning, $n = 0.014$

Pendiente de plantilla, $S_b = 0.0001$

Longitud de cada tramo, $L = 5\,000 \text{ m}$

$\Delta x = \{100\ 100\ 100\ 100\} \text{ m}$

5.1.2.1 Condición inicial

En esta prueba se considera que hay una compuerta al final de cada tramo, por lo que todas las fronteras aguas abajo se calculan con la ley de descarga de la compuerta descrita en la ecuación (3.51). En la condición inicial se supone que existe el tirante de operación $y_{m\acute{a}x}$. Para la última compuerta es necesario definir el tirante de descarga (y_{d_4}), en esta prueba se consideró $y_{d_4} = 0.8 y_{m\acute{a}x}$. Con lo que los tirantes al final de cada tramo fueron:

$$y_f = [4.2037\ 4.2037\ 4.2037\ 4.2037] \text{ m}$$

Y los de descarga de las cuatro compuertas son:

$$y_3 = [3.8913\ 3.8913\ 3.8913\ 3.36] \text{ m}$$

De la condición inicial se obtuvo el perfil de flujo de la Lámina 51 y las aperturas siguientes (W_0):

$$W_0 = [1.8437\ 1.8437\ 1.8437\ 1.3494] \text{ m}$$

$$C_d = [0.2787\ 0.2787\ 0.2787\ 0.3808] \text{ m}$$

5.1.2.2 Condiciones de frontera

Condición de frontera en el extremo aguas arriba del canal fue el hidrograma descrito en la Lámina 52 con *Tiempo de inicio* = 10 min; *Duración de 8 horas*; *Gasto máximo* = $98 \text{ m}^3/\text{s}$ y se alcanza en 2 minutos.

Las fronteras internas de gasto se calculan de acuerdo con la conservación de gasto descrita en la ecuación (2.95). Las fronteras aguas abajo fue la Ley de descarga de la compuerta con coeficientes de descarga actualizados para cada tiempo, para la última se mantiene el tirante de descarga propuesto en la condición inicial (y_{d_4}).

La simulación del flujo transitorio se realizó considerando la solución con el método de Newton. En cuanto a la estabilidad se utilizó un $\Delta t = 120 \text{ s}$, con lo que el número de Courant fue $Cr=8$. En la Lámina 53 se muestra la simulación bajo las condiciones descritas y con las compuertas en posición fija.

Lámina 51 Condición inicial. Prueba en canal Trapecial con cuatro compuertas

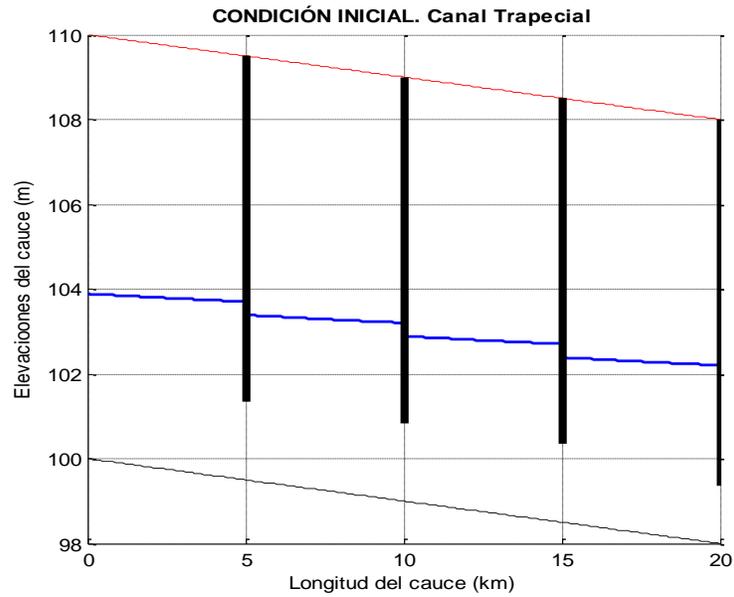


Lámina 52 Hidrograma de ingreso al canal trapecial

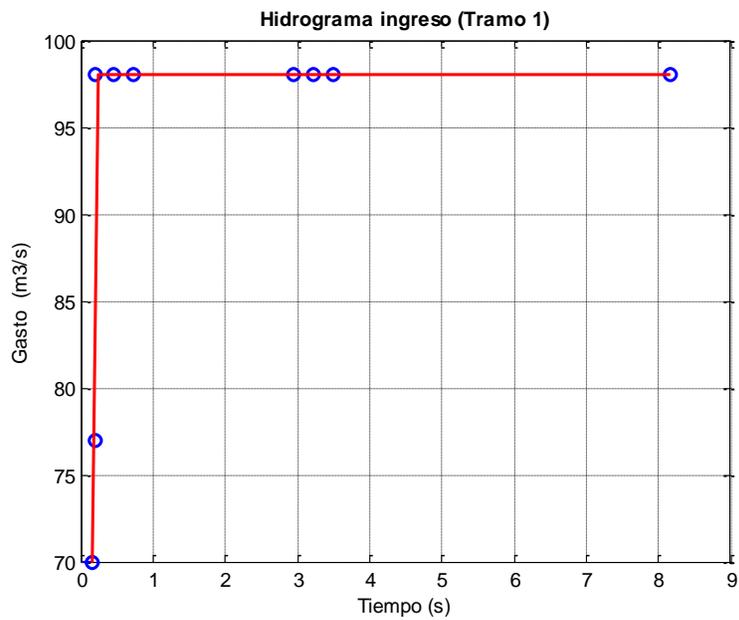


Lámina 53 Resultado del SMT en un canal trapecial con cuatro compuertas a 01:45 h (TRAPEZIAL 1)

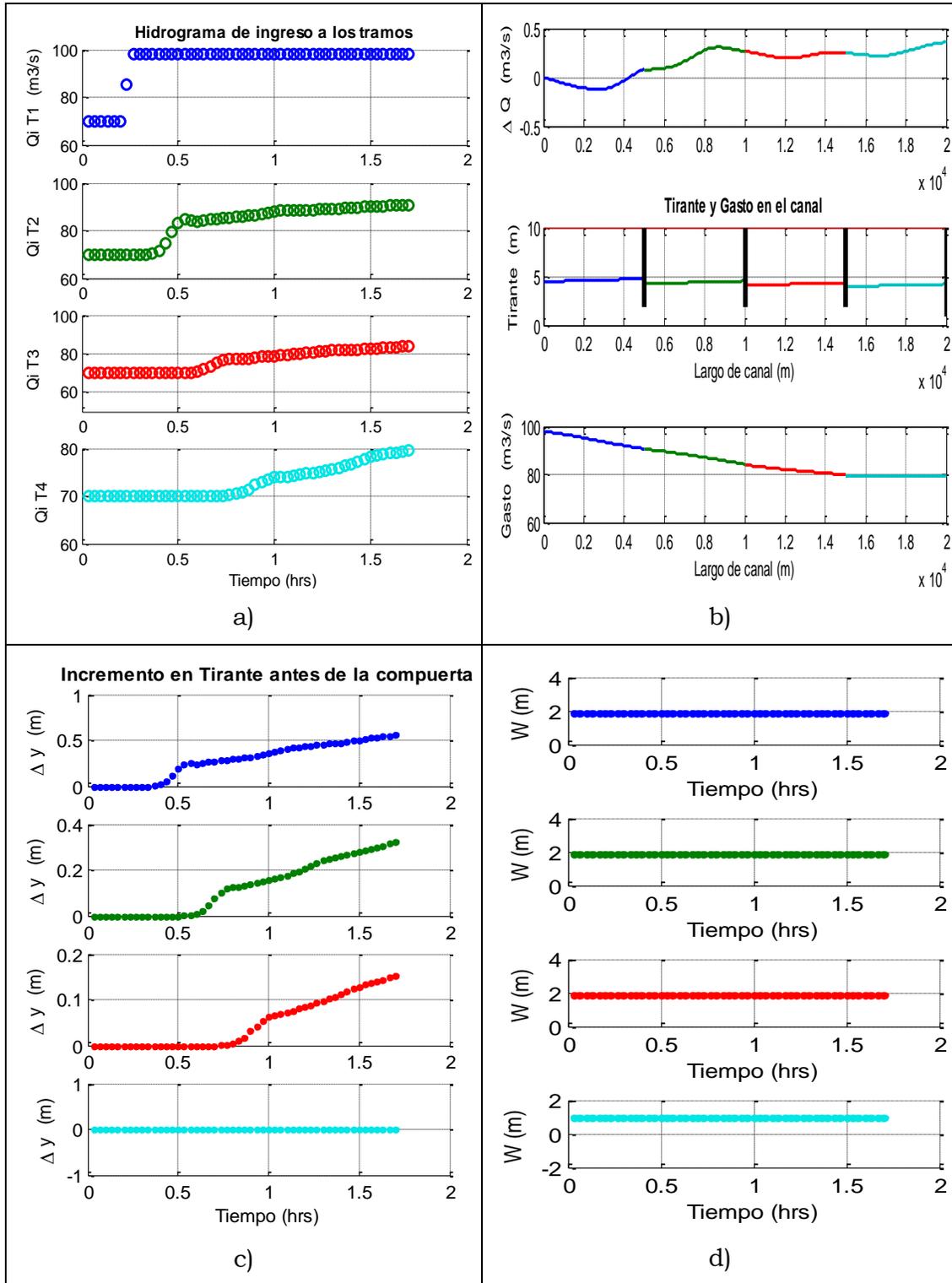


Lámina 54 Ídem Lámina 53 a 02:30 h

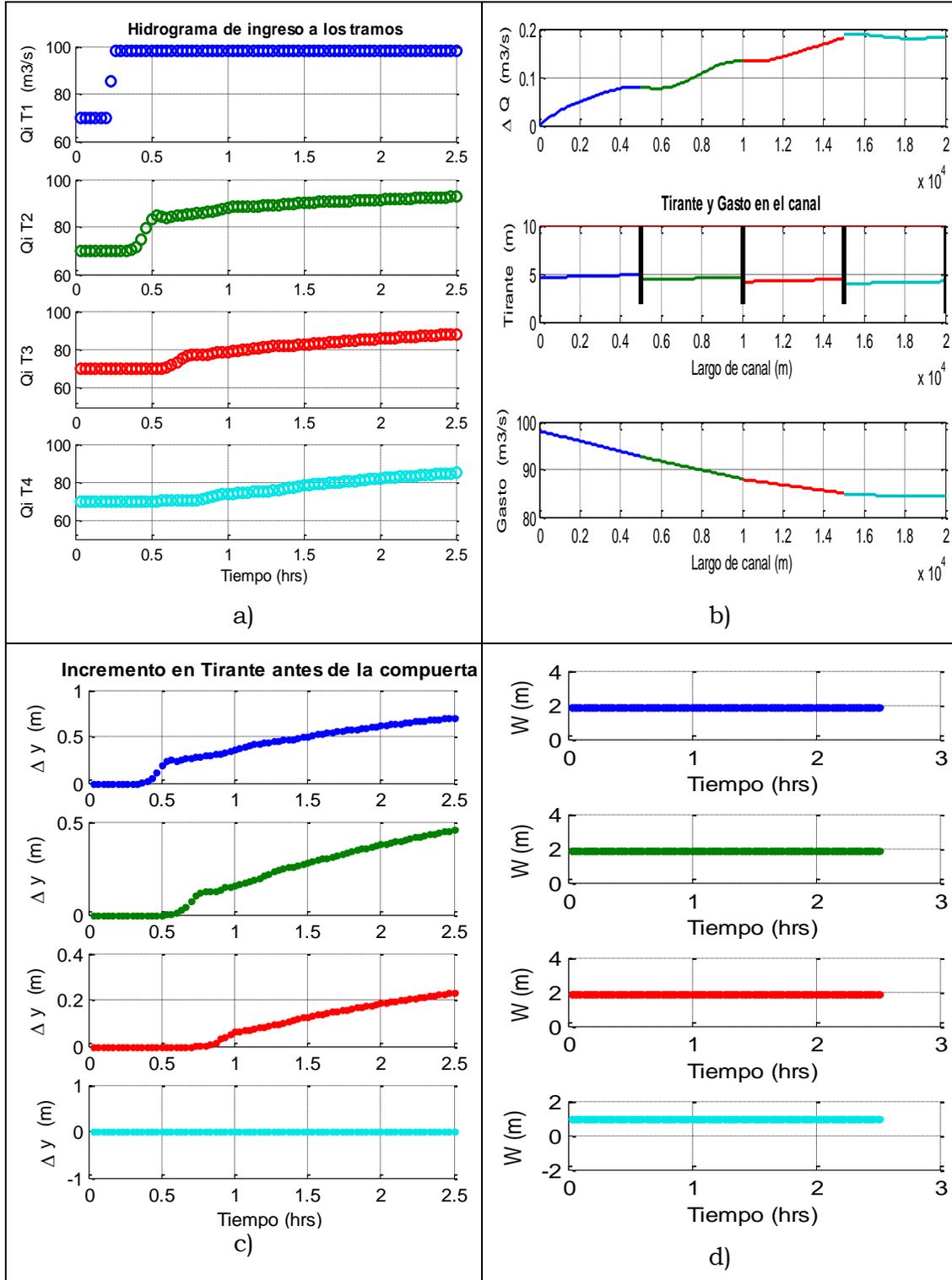
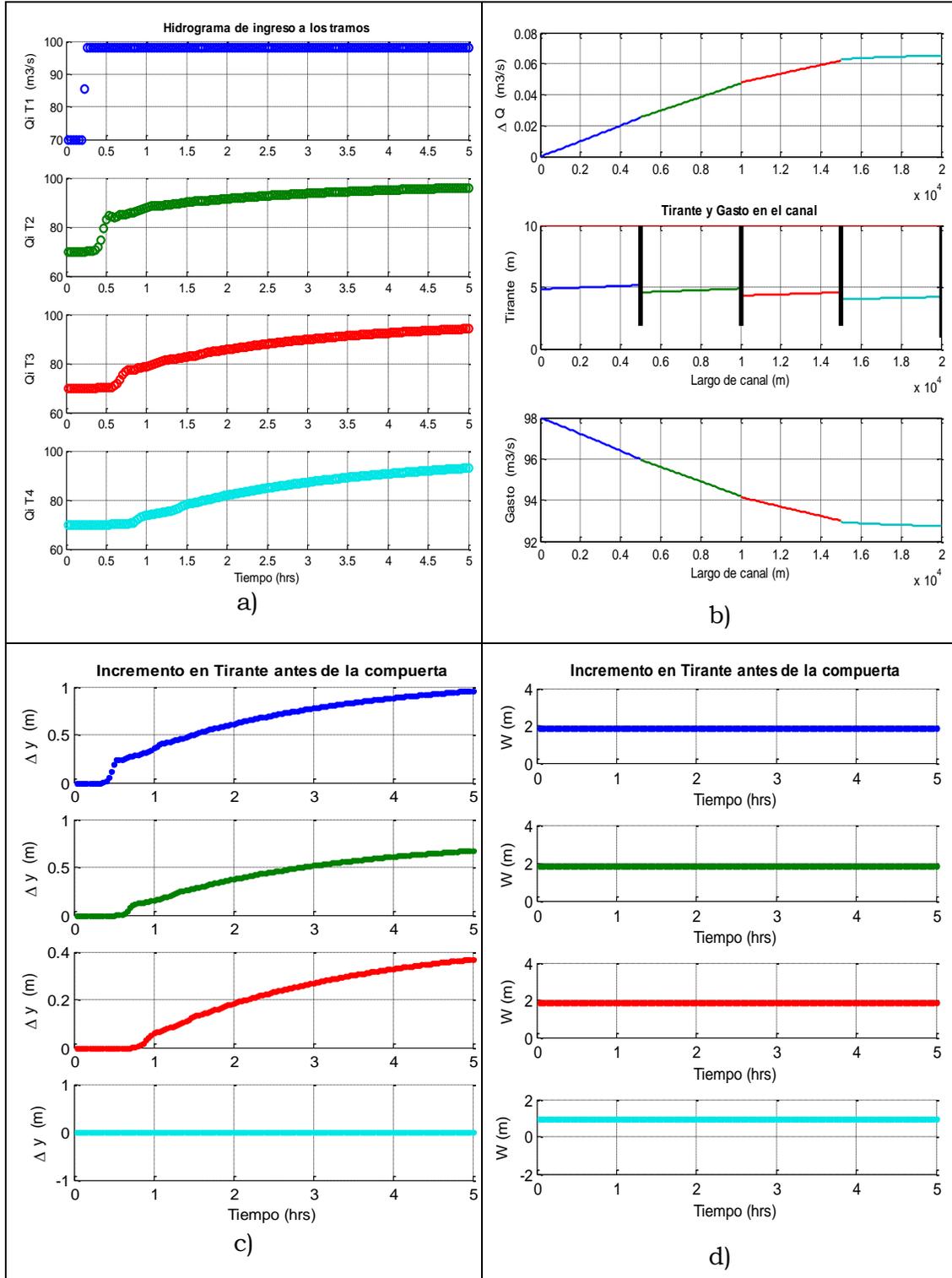


Lámina 55 Ídem Lámina 53 a 05:00 h



Prueba en un canal Trapecial 2. De la misma forma que la regulación en el canal rectangular, se definió el algoritmo de regulación global. Para lo cual se calculó el retardo teórico, resultando $\Delta T = 740 s = 12.3 min$. Se calculó el perfil de flujo permanente en $Q = 98 m^3/s$ mostrado en la Lámina 56. Los coeficientes de descarga necesarios para conservar los niveles de operación son: $Cd = [0.2879 \ 0.2879 \ 0.2879 \ 0.4370]$. Las aperturas y los tiempos de accionamiento, calculados de acuerdo al retardo, necesarios para el control se describen en la Tabla 11.

Lámina 56 Perfil de flujo permanente para $Q_{m\acute{a}x} = 98 m^3/s$ en un canal trapecial

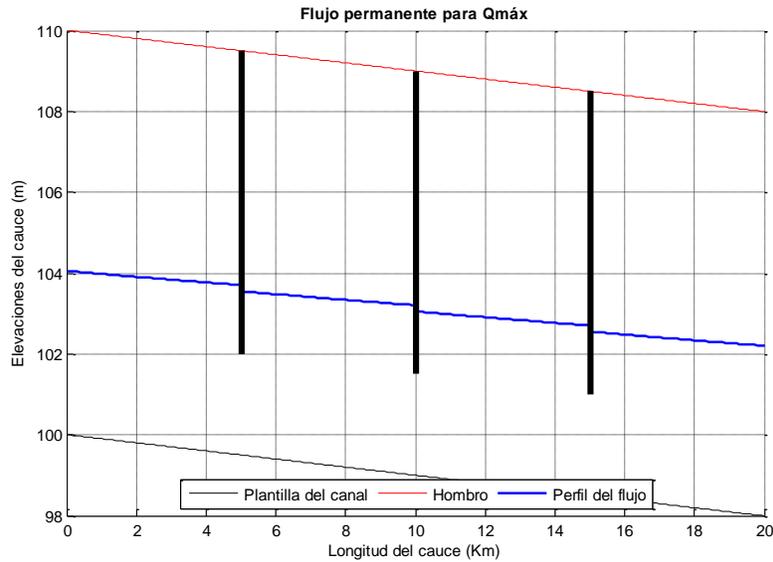


Tabla 11 Regulación en canal Trapecial 2.

Q (m^3/s)	Retardo (min)				w_1	w_2	w_3	w_4
					m			
98	25				2.50			
		37				2.50		
			50				2.50	
				62				1.64

Lámina 57 Resultado de SMT con RCAC de un canal trapecial a la 01:45 h; a) hidrogramas de entrada a cada tramo; b) cambios de flujo, nivel y gasto; c) evaluación del RCAC en el control de nivel, y d) propuesta del RCAC de apertura de compuertas (TRAPECIAL 2).

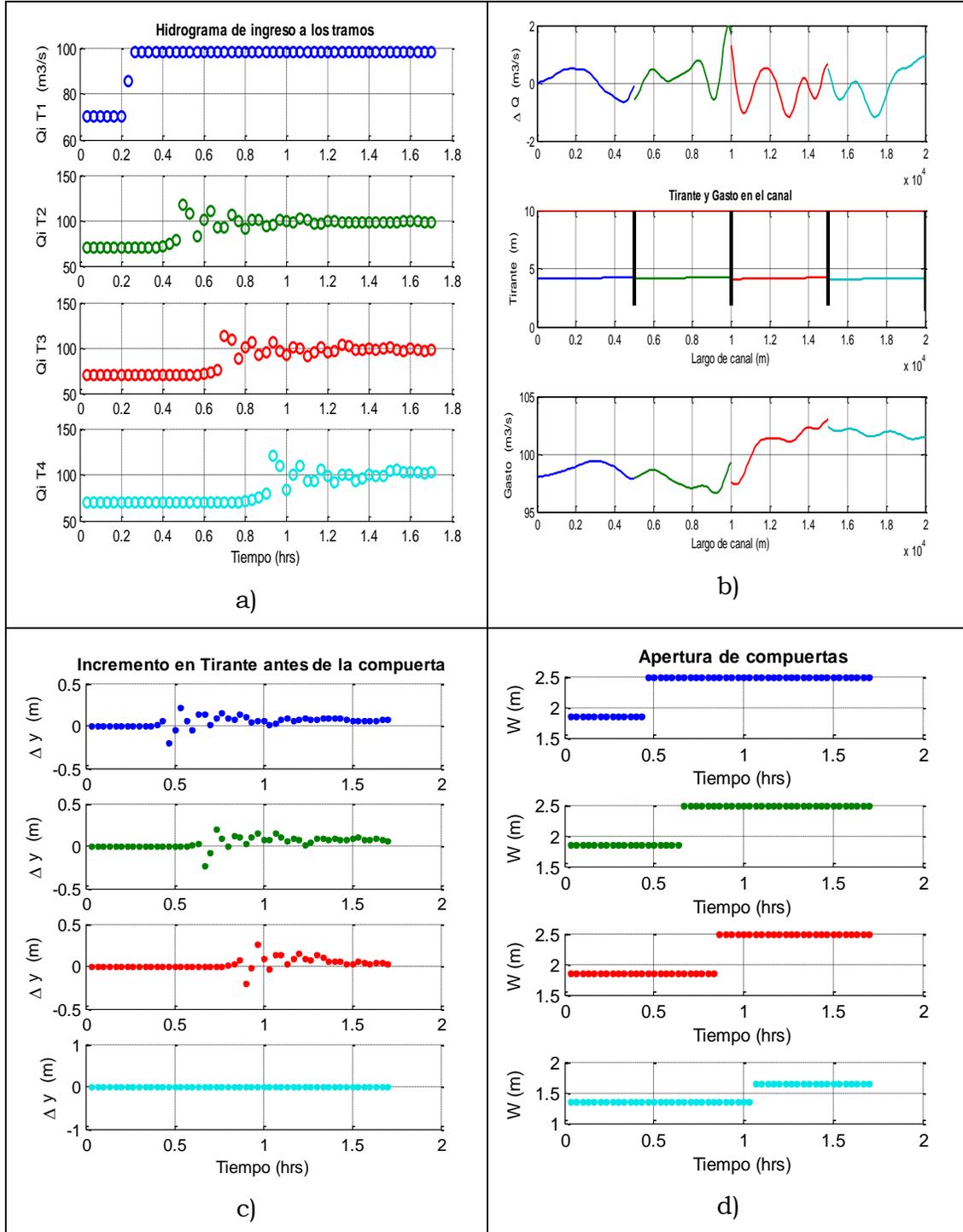


Lámina 58 Ídem Lámina 57 a las 02:30 h.

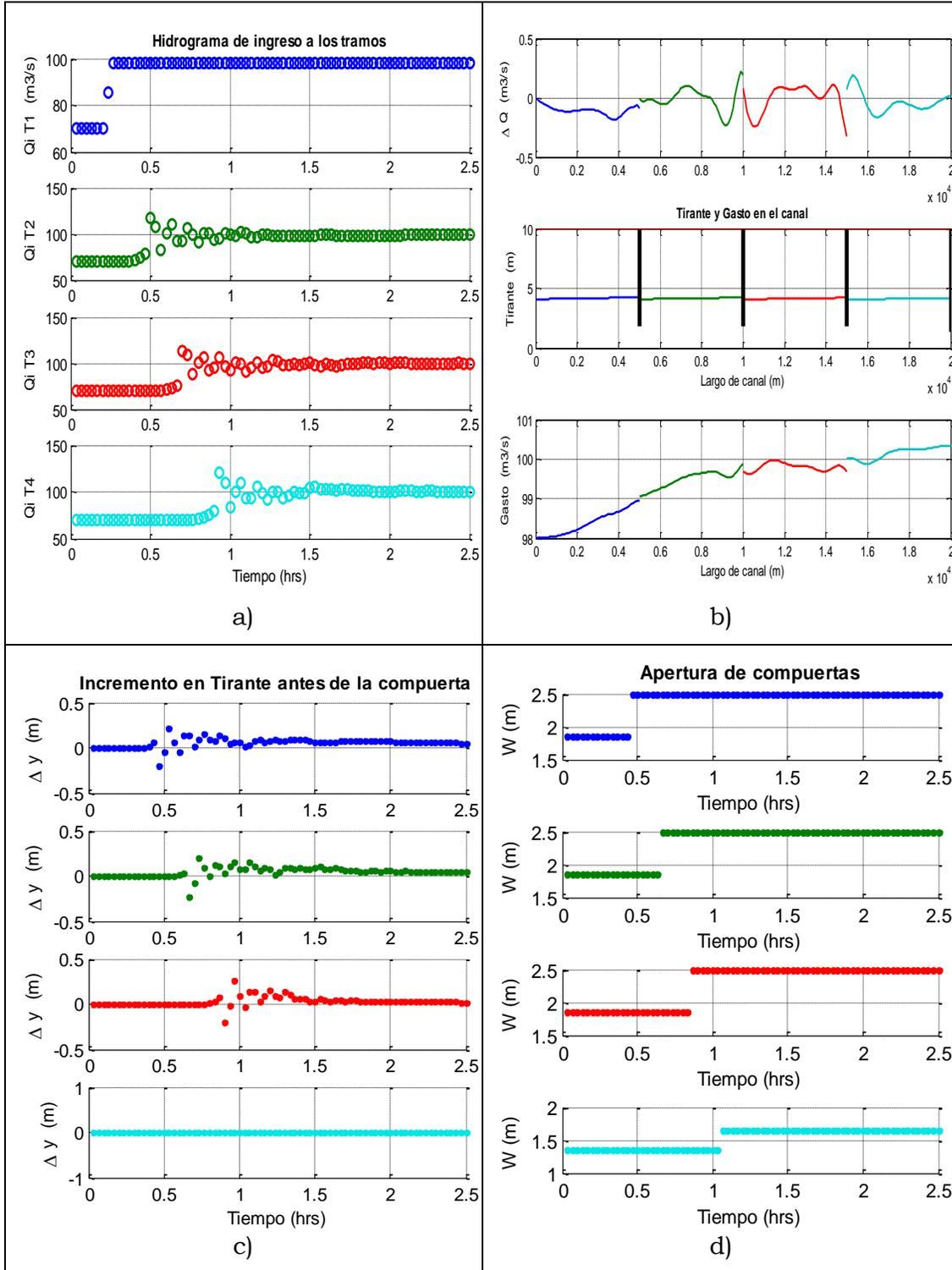
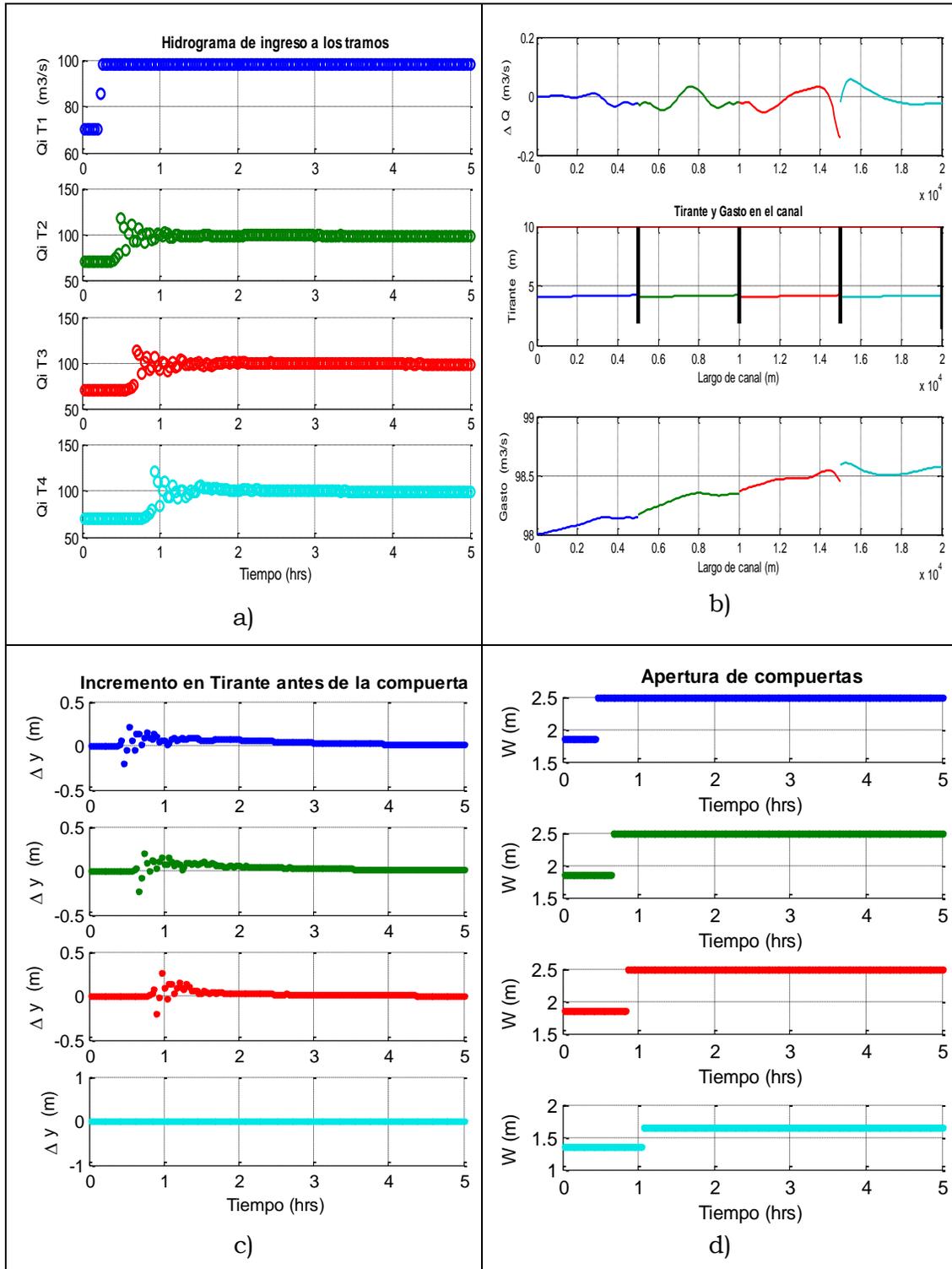


Lámina 59 Ídem Lámina 57 a las 05:00 h.



Prueba en canal Trapecial 3. Considerando como condición inicial la Lámina 51; como fronteras internas la conservación de gastos en los tramos internos y la ley de descarga de una compuerta de la misma forma que en la simulación de la Lámina 59.

Se probó operar el canal trapecial con un hidrograma como el de la Lámina 60, que muestra doble escalón, lo cual representa dos incrementos de gasto en la operación del canal. En este caso se tendrán dos retardos, ya que cambia de acuerdo con el gasto. Así el primer retardo $R_1 = 758.6 s \approx 12.6 min$ corresponde al primer gasto, y $R_2 = 739.15 s \approx 12.3 min$ correspondiente al segundo.

Las acciones de control quedan resumidas en la Tabla 12 y los resultados de 8:00 h de simulación se muestran en la, en la cual se observa que con el simulador desarrollado en esta tesis es posible hacer doble regulación sin que el sistema se desestabilice, ya que las variaciones del nivel Δy logran amortiguarse.

Lámina 60 Hidrograma con doble escalón

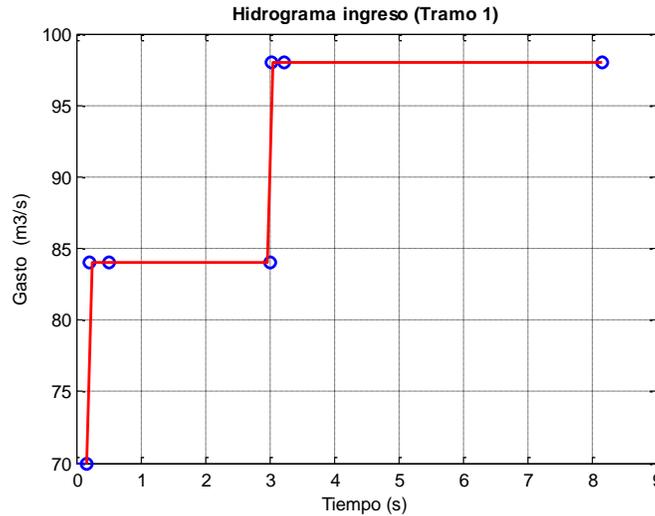
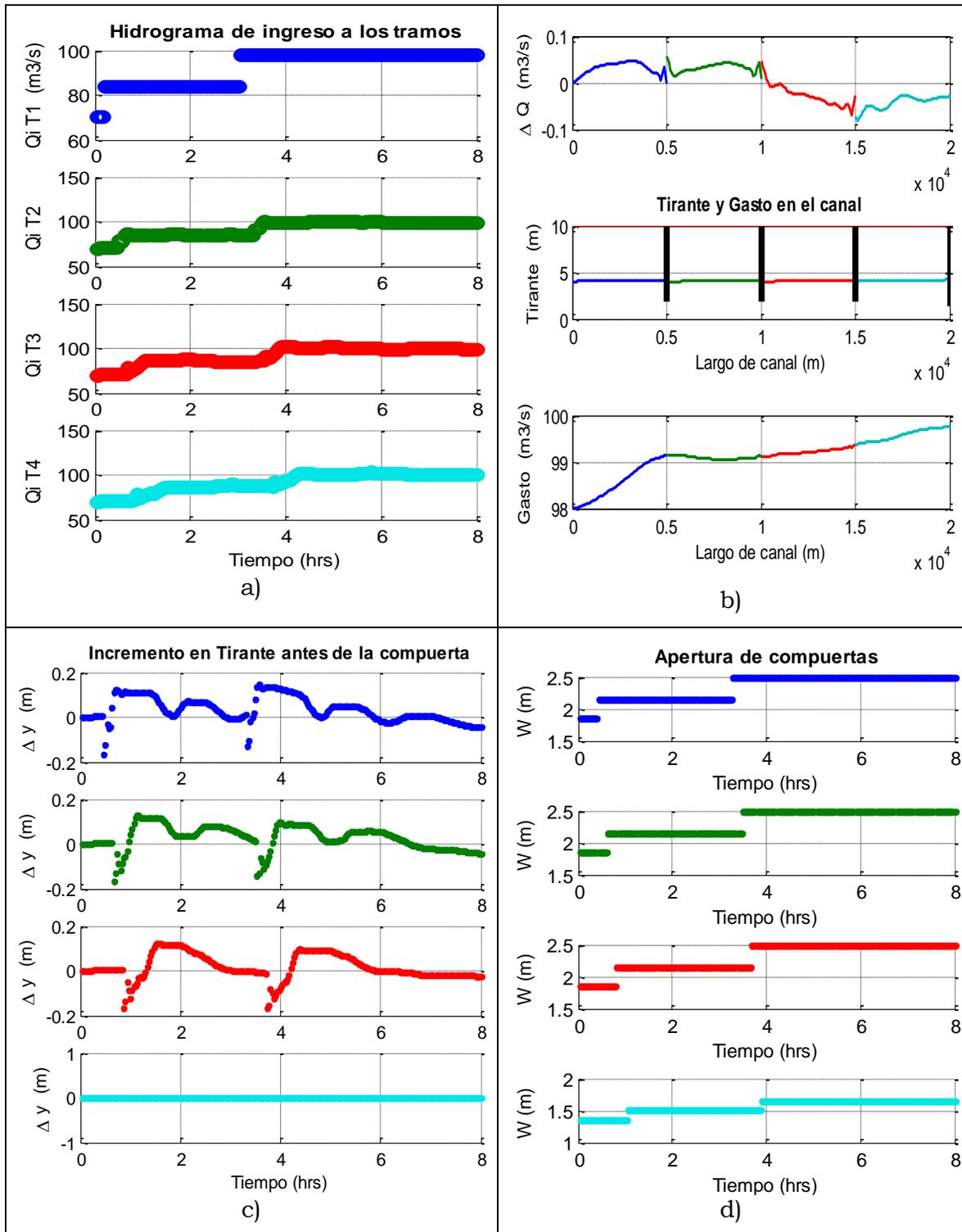


Tabla 12 Regulación en canal Trapecial 3

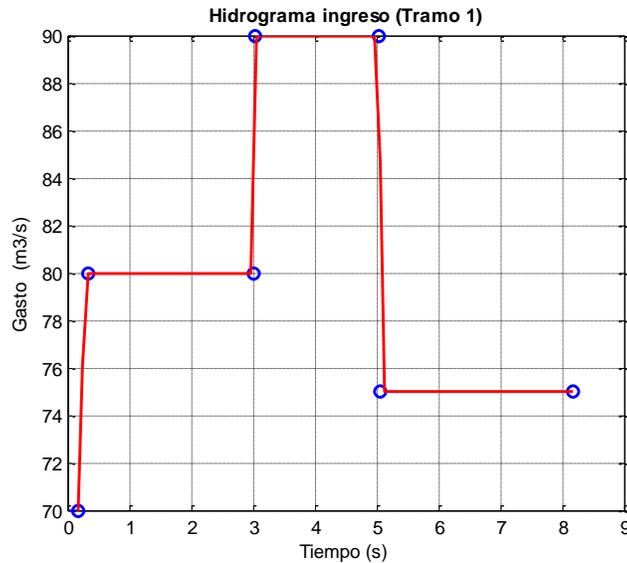
Q (m ³ /s)	Retardo (min)				W ₁	W ₂	W ₃	W ₄
					m	m	m	m
84	23				2.16			
		35				2.16		
			48				2.16	
				61				1.50
98	194				2.50			
		206				2.50		
			218				2.50	
				231				1.64

Lámina 61 Regulación de un canal trapecial bajo una ley de operación con doble incremento de gasto a 08:00 h (TRAPECIAL 3)



Prueba en canal Trapecial 4. Tomando en cuenta el mismo canal trapecial, se probó como condición de frontera extrema aguas arriba un hidrograma con dos incrementos de gasto y una disminución, tal y como se observa en la Lámina 62. Los cambios de gasto se hacen en un intervalo de 2 minutos.

Lámina 62 Hidrograma con doble apertura y un cierre de compuerta

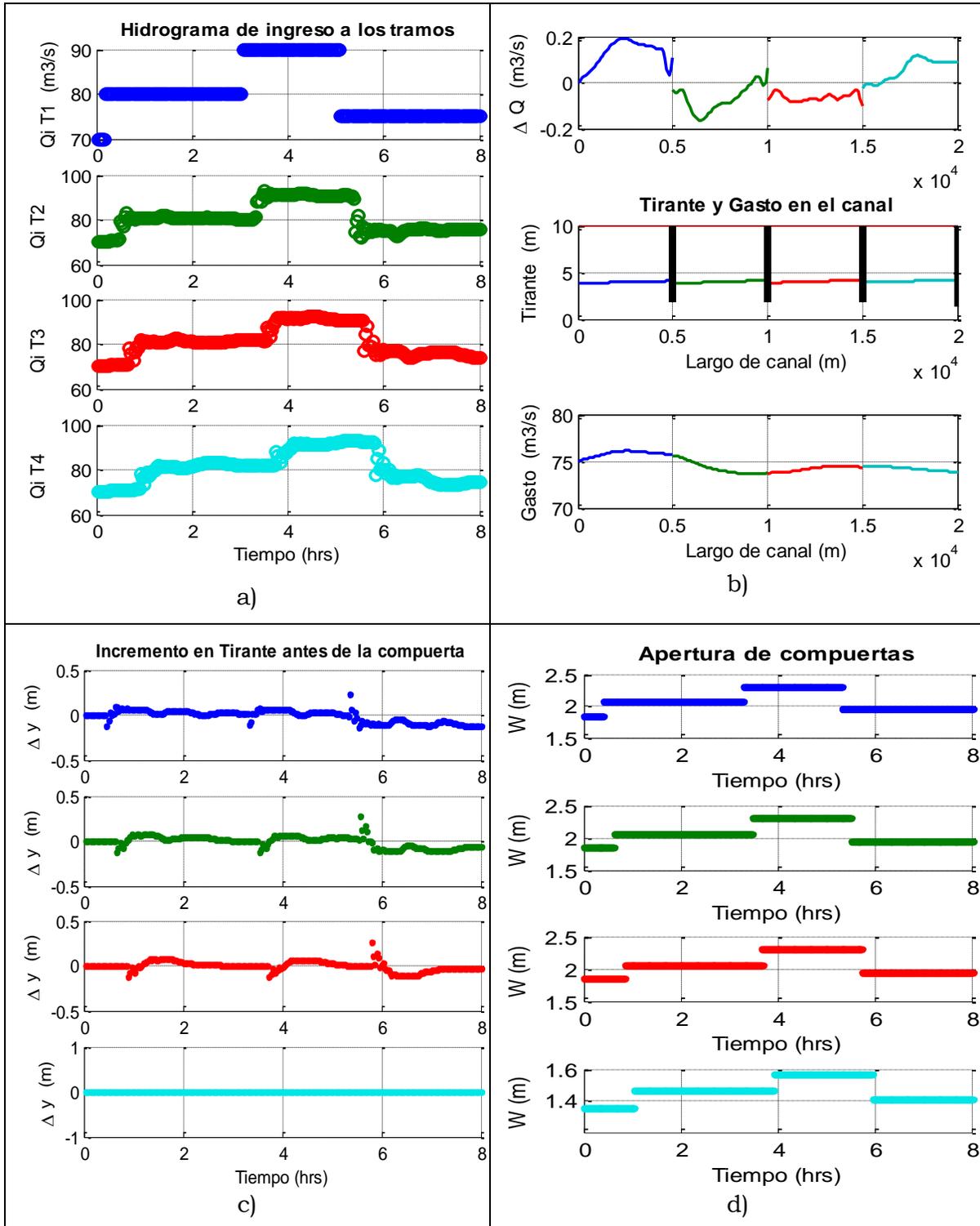


Debido a que todos los tramos tienen la misma longitud, el retardo solamente varía de acuerdo al gasto que entra al canal, así se tendrán los tiempos de llegada registrados en la primer columna de la Tabla 13.

En esta simulación se hacen tres cambios en las aperturas de las compuertas obedeciendo a los cambios en la ley de operación del canal, en la Tabla 13 se registran los tiempos de accionamiento, y las aperturas de la compuerta que corresponda operar; por ejemplo al minuto 36 de la simulación se abrirá la compuerta a una apertura de 2.06 m, al minuto 45 se abrirá la compuerta 2 a una apertura de 2.06 m, al minuto 49 se abrirá nuevamente la compuerta 1 y así sucesivamente de acuerdo con lo registrado en las columnas 2 a 9 de la Tabla 13.

Se simuló este escenario durante 8:00 h, aplicando la estrategia de regulación antes descrita, los resultados se muestran en la Lámina 63. Se observa que hay una buena respuesta del sistema ante los cambios en las compuertas, ya que los incrementos en los niveles son $\Delta y \approx 0$.

Lámina 63 Regulación en un canal operado con doble apertura y un cierre de compuerta (TRAPEZIAL 4).



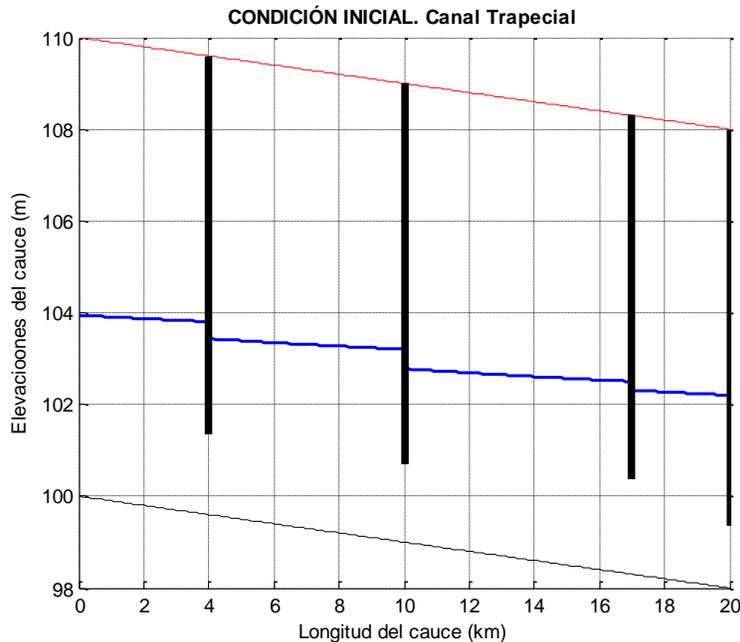
En la Lámina 53 se observa en a) que el hidrograma pasa completo hasta el último tramo, tal y como se esperaba. En b) se observa que a este tiempo en canal está retomando la condición de flujo permanente. En c) se observa que para cada maniobra el tirante dura apróx. 1:00 h en estabilizarse. d) muestra las maniobras realizadas de acuerdo a la Tabla 13.

Prueba en canal Trapecial 5. Se propuso un nuevo canal trapecial, de características similares al anterior con la diferencia de que ahora sus tramos tienen longitudes diferentes, las cuales son $L = [4000, 6000, 7000, 3000] m$. Su condición inicial es la mostrada en la Lámina 64. Se consideran 4 compuertas de la misma forma que el anterior canal trapecial. La apertura de las compuertas y coeficientes de descarga son:

$$w_0 = [1.7619 \quad 1.6943 \quad 2.0776 \quad 1.3494] m$$

$$Cd_0 = [0.2916 \quad 0.3033 \quad 0.2473 \quad 0.3808]$$

Lámina 64 Condición inicial de canal con tramos de diferentes longitudes



La ley de operación del canal es descrita por el hidrograma de la Lámina 62, debido a que el retardo depende del gasto y de la longitud del tramo, en este ejemplo tenemos velocidades de llegada totalmente diferentes para cada nuevo gasto como se puede observar en la Tabla 14. Estos son calculados en el módulo de “Multiregulación”, del cual además se obtuvieron las aperturas y tiempos de acción descritos en la Tabla 14, los coeficientes de descarga de esta simulación estuvieron entre 0.2 y 0.4.

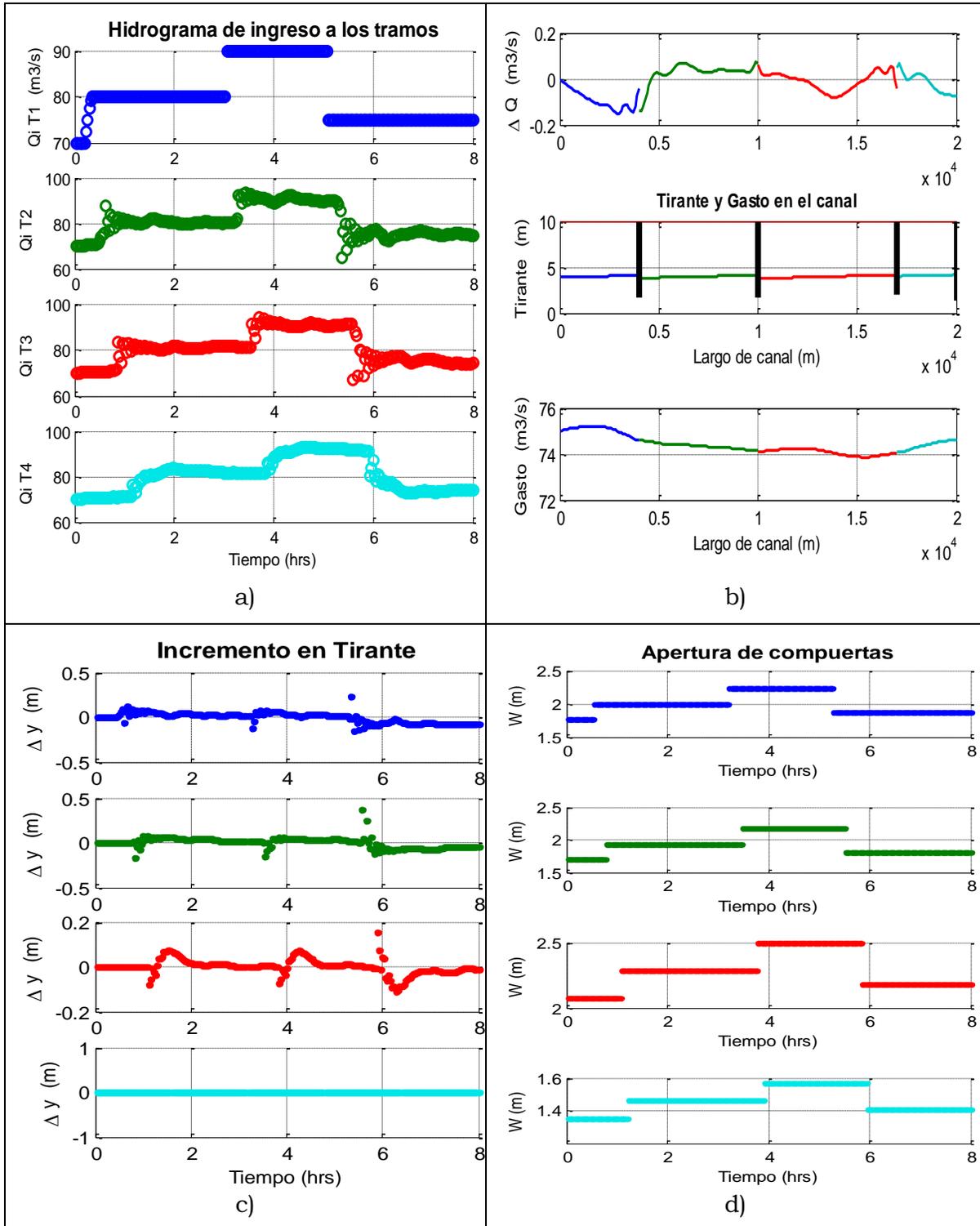
Tabla 13 Regulación en canal Trapecial 4

Q (m ³ /s)	Retardo (min)	Acciones en cada compuerta							
		Tiempo de acción (min)				Aperturas (m)			
		w ₁	w ₂	w ₃	w ₄				
80	12.7	36				2.06			
			45				2.06		
				207				2.06	
					330				2.06
90	12.5	49				2.3			
			58				2.3		
				220				2.3	
					343				1.57
75	12.8	62				1.95			
			71				1.95		
				232				1.95	
					355				1.4

Tabla 14 Regulación en canal Trapecial 5

Q (m ³ /s)	Retardo por tramo (min)				Acciones en cada compuerta								
	R1	R2	R3	R4	Tiempo de acción (min)				Aperturas (m)				
	w ₁	w ₂	w ₃	w ₄									
80	10.1				30				1.98				
		15.4				45				1.92			
			18.1				63				2.28		
				7.5				71					1.46
90	9.9				191				2.22				
		15.1				207				2.16			
			17.8				224				2.50		
				7.4				232					1.57
75	10.2				314				1.87				
		15.5				329				1.80			
			18.3				348				2.18		
				7.6				355					1.40

Lámina 65 Regulación en un canal con tramos de diferentes longitudes operado con doble apertura y un cierre de compuerta (TRAPEZIAL 5)



5.1.3 Verificación numérica de las propiedades de propagación

Para evaluar la influencia de la difusión numérica del SMT en RCAC se realizó una serie de pruebas bajo los siguientes argumentos:

- a) Una configuración de canal de múltiples tramos
- b) Una condición de frontera al inicio del canal con un solo escalón
- c) Aplicación RCAC para mantener los niveles de operación

Bajo estas condiciones se realizaron simulaciones en SMT con diferentes valores en el número de Courant, $C_r = \{1,5,10\}$, y se determinó la difusión numérica en SMT, los resultados de estas pruebas se presentan en la Lámina 66 y Lámina 67.

En estas láminas se comparan la relación entre la variación de nivel aguas arriba de la compuerta, entre el valor de referencia para un número de Courant igual a la unidad $\Delta y(C_r^*)/y_r$ y los valores de $\Delta y/y_r$ para los escenarios de Courant $C_r = \{5,10\}$, que son distintos a de referencia (evaluación de la dispersión numérica).

En la Lámina 66 cada punto representa la variación de nivel en cada compuerta durante la simulación, y en la Lámina 67 se presentan las diferencias de nivel (divididas entre y_f), y referenciadas a los valores calculados con $cr = 1$.

Para evaluar la dispersión se aplicó la desviación estándar de $\frac{\Delta y_*}{y_f}$ y el valor obtenido para cada prueba son:

$$\sigma_{cr=1} = 0.0104$$

$$\sigma_{cr=5} = 0.0136$$

$$\sigma_{cr=10} = 0.0104$$

Estos valores y los resultados mostrados en las Láminas 66 y 67 indican que los cambios en el número de Courant para $cr = (1,10)$ no producen efectos significativos en la convergencia numérica. Una explicación de este resultado se debe al uso de la técnica de solución no lineal tipo Newton que contribuye a mantener la convergencia numérica.

Lámina 66 Difusión numérica generada al utilizar números de $cr = [1, 5, 10]$. Se muestran dy adimensionalizados con respecto al tirante de referencia (y_r).

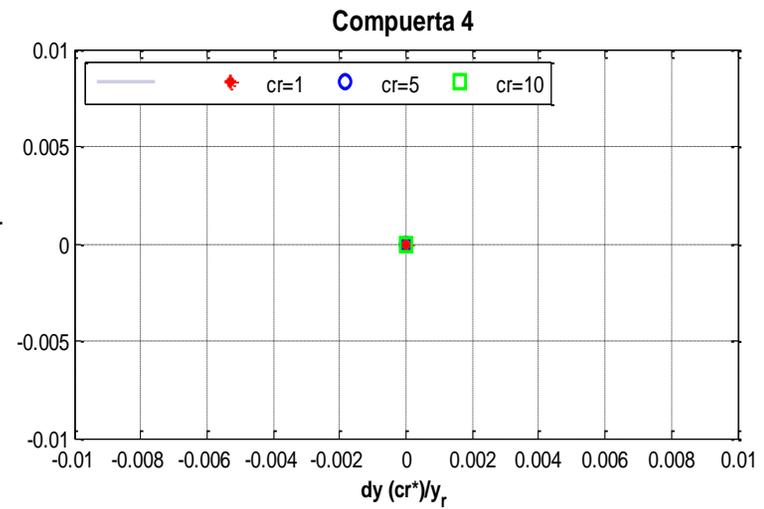
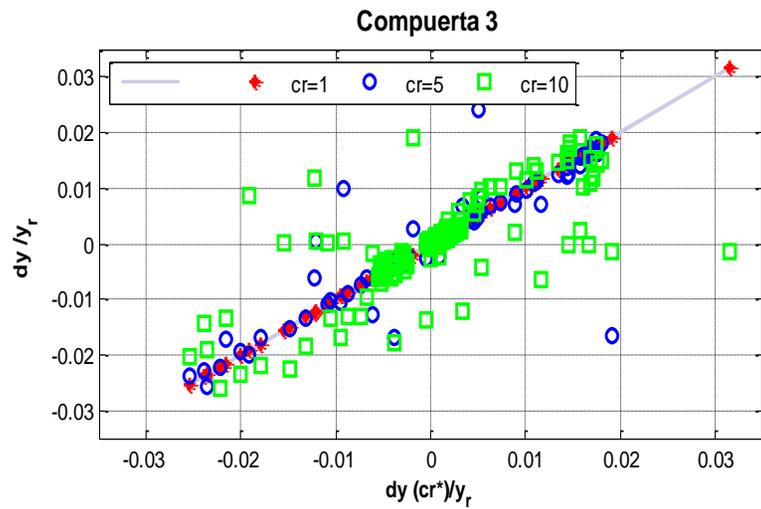
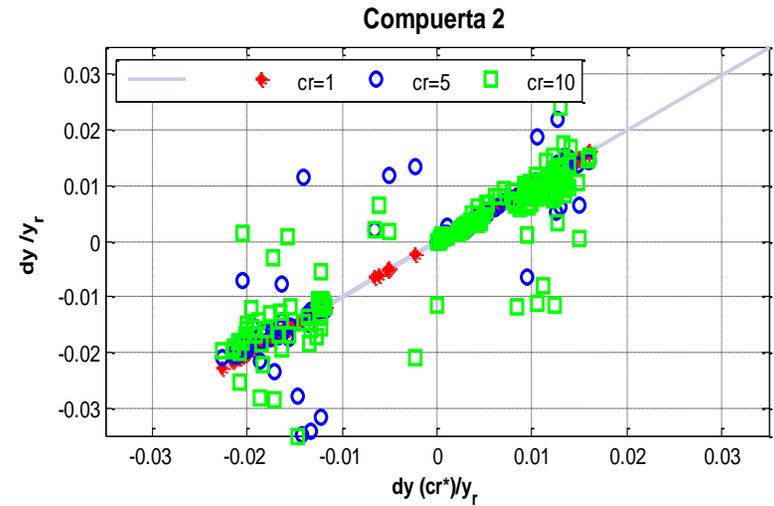
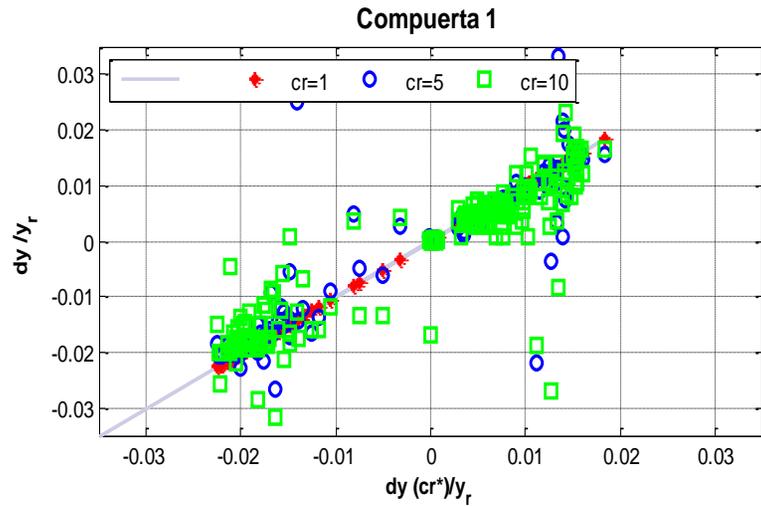
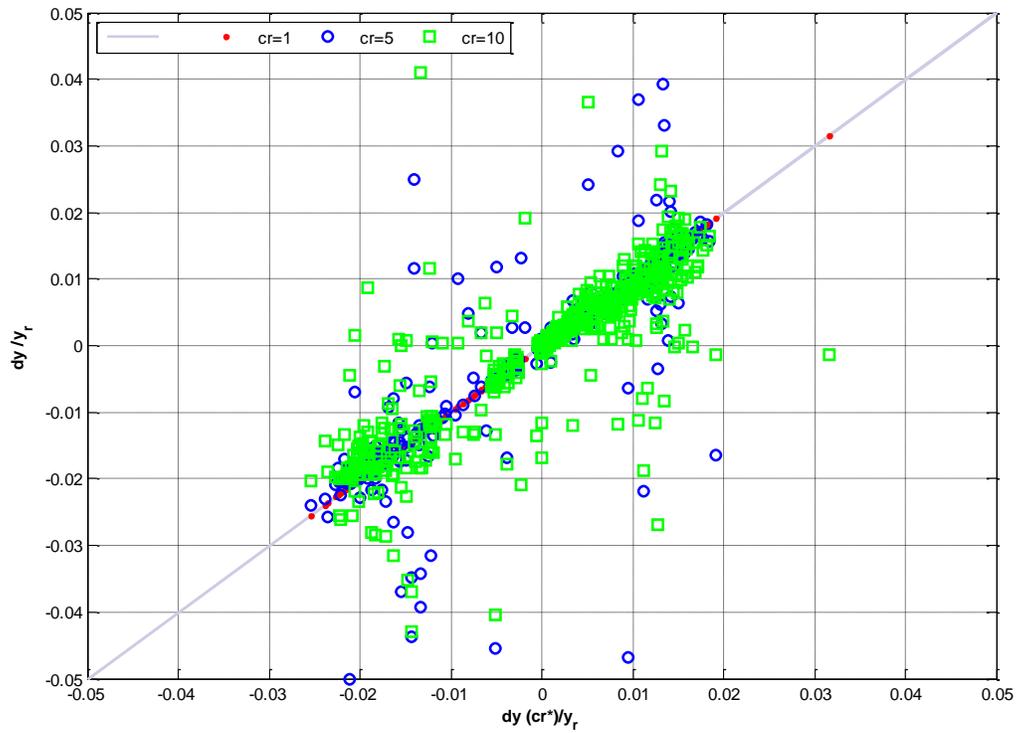


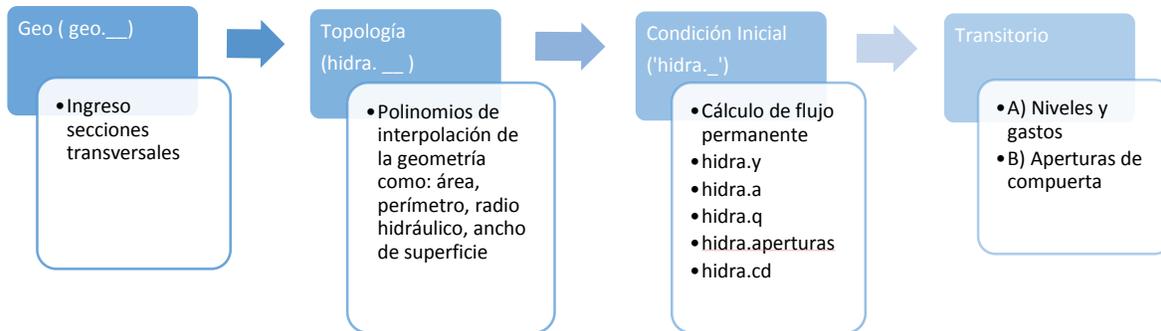
Lámina 67 Análisis global de la dispersión de errores utilizando $cr = [1, 5, 10]$. Están contenidas todas las diferencias de nivel (divididas por y_f), y están referenciadas a los valores calculados con $cr = 1$.



6 Conclusiones

En este trabajo se demuestra que fue posible diseñar, construir y poner en operación un modelo de simulación multitramos (SMT) y elaborar un algoritmo de regulación de una canal (RCAC), y que además pueden operar en forma simultánea. Por lo tanto la secuencia de actividades previstas para lograr el objetivo fueron acertadas tal y como se muestra en cada uno de los capítulos presentados en este documento.

A manera de resumen el modelo SMT tiene un funcionamiento que se muestra en la Lámina siguiente.



Este diseño del modelo SMT permitió establecer por separado los datos de pre-proceso y de condición inicial, y además realizar las modelaciones numéricas de un forma sistemática y trazable en caso de que existiera un error en los algoritmos, ya sea en la condición inicial o durante la modelación.

Entonces cada módulo de SMT contiene modelos matemáticos y algoritmos de solución numérica, por ejemplo:

- Modelo de apertura de compuerta, solución de la ecuación de descarga de una compuerta con coeficientes de descarga variables en función del grado de ahogamiento, este algoritmo e la condición de base de interconexión entre los tramos.
- Modelo de condición inicial; solución de la ecuación diferencia ordinaria no lineal de flujo gradualmente variado, con una frontera dinámica de apertura de compuerta.
- Modelo de simulación transitorio; solución de las ecuaciones conservativas de Saint Venant, utilizando el esquema de discretización de Preissmann; el cual de acuerdo con la literatura es incondicionalmente estable tanto para flujo subcrítico como supercrítico. Y se aplicó la metodología de Picard y de Newton Raphson para solucionar los términos no lineales.
- Modelo de Regulación para Control Automático de Compuertas que revisa los cambio de gasto en la Ley de operación del canal. Genera el perfil de

flujo para cada uno de los cambios de gasto, calcula las aperturas necesarias para conservar los niveles de operación, los retardos de cada tramo para cada condición de gasto con lo que define los tiempos de acción en las compuertas.

Los modelos SMT y RCAC trabajan en forma acoplada, RCAC extrae del simulador información sobre la geometría del canal, condición inicial y Ley de operación; y genera en un archivo (Mreg.mat) al cual SMT accede para hacer los cambios necesarios en las de fronteras.

En el desarrollo del análisis dimensional fue posible verificar que la geometría y la turbulencia de la descarga tienen efecto en el gasto descargado y que esta recae en el coeficiente de descarga. Por lo cual se le dio importancia a este (C_d), y se analizaron diferentes formulaciones para calcular el coeficiente de descarga de una compuerta (ahogada o libre). Para ver la diferencia entre un modelo y otro se resolvieron ejemplos utilizando el modelo de Swamee, el de la norma ISO 13550 y las ecuaciones mostradas en Sotelo (2009), observándose diferencias de hasta 10 cm en las aperturas.

En este trabajo se decidió utilizar la propuesta por Swamee, 1992 debido a que de acuerdo con la Lámina 14 tiene buena correlación con el resto de los modelos y además fue posible obtener la información completa acerca de sus criterios de aplicación. Aunque también se desarrollaron los algoritmos para la Norma ISO 13550 (2002) y de los modelos presentados en (Sotelo, 2009).

Para la solución del modelo de flujo en canales, se propuso utilizar un esquema de diferencias finitas, por lo que se consideró el esquema de Leendertse obteniéndose un modelo lineal que de acuerdo al análisis de convergencia era incondicionalmente estable en flujo subcrítico, por lo que se programó el modelo y en las pruebas numéricas se observó el inconveniente de ser inestable ante las fronteras dinámicas (maniobras de compuertas).

Por lo que se optó por utilizar un modelo de onda dinámica y el esquema de discretización de Preissmann, recomendado por diferentes autores ((Chaudhry (1979), Aldama & Aguilar (1996), Litrico & Fromion (2009)) el cual es un esquema no lineal y de acuerdo con Aldama y Aguilar (1996) y Lyn & Goodwin (1987) es incondicionalmente estable tanto para flujo subcrítico como supercrítico. Y se aplicó la metodología de Picard y de Newton Raphson para solucionar los términos no lineales, se observó que el modelo converge mejor, aunque se demora un 30 % más, cuando se aplica la solución con el método de Newton Raphson (ecuaciones (3.89) y (3.107)).

RCAC, considera los cambios de gastos (Q_m), calcula el flujo permanente para cada uno de estos Q_m , y finalmente, define la apertura de compuertas (W) suficiente para lograr el paso de Q_m sin que incrementen los niveles aguas arriba de la compuerta. De este algoritmo se obtienen también los tiempos en que deberán ejecutarse las maniobras. Para verificar el flujo en el modelo numérico

para múltiples tramos se realizaron una serie de pruebas tanto para canales rectangulares como trapeciales, enfocándose más a estos últimos debido a que son los de mayor interés, se simuló un canal trapecial con 4 tramos de igual longitud, y se le aplicaron distintas leyes de operación, a las cuales el canal respondió adecuadamente en los casos en que se aplicaba regulación. Se observó que las maniobras del control de canales produjeron pequeñas inestabilidades que poco a poco se atenuaban, como se puede observar en el incremento de tirantes de las pruebas tanto en canales rectangulares como trapeciales. Por lo que se concluye que SMT es estable, y conserva la convergencia aún con valores de $Cr = 10$.

El problema principal de esta tesis lo constituyeron las fronteras, ya que se encuentran interrelacionadas entre tramos conectados por compuertas, suponiendo que no hay maniobra de compuerta para conocer el tirante aguas arriba de la compuerta es necesario conocer el C_d , por lo que este es un cálculo no lineal y no se pueden considerar C_d fijos (o congelados) debido a que en la zona de la compuerta se tienen tirantes y velocidades variables, que de acuerdo al análisis dimensional afectan a C_d y además se verifica en la prueba Lámina 46 y Lámina 50, en que se aplica regulación pero las acciones son efectivas con los C_d actualizados.

Cuando las compuertas eran fijas se presentaron inestabilidades conforme el canal se iba llenando, esto se debía a que el canal se encuentra cerca de la condición de flujo uniforme, pero está habilitado el cálculo de tirante con la ley de descarga, es decir se llega al límite de aplicación de los modelos.

De acuerdo con las pruebas realizadas se ha cumplido el objetivo de esta tesis, ya que como se puede observar en los resultados de las simulaciones (capítulo 5) es posible que el modelo SMT desarrollado en el presente trabajo simule el flujo en un canal y además se pueden adaptar diferentes algoritmos de regulación, por ejemplo el propuesto en esta tesis (RCAC). Lo anterior puede ayudar en la explicación y entendimiento de la regulación de canales, así como dar una idea del comportamiento del flujo ante la regulación.

Para la aplicación de SMT a un caso real, será necesario conocer el modelo de coeficiente de descarga de las compuertas en estudio, en caso de que este no se pueda obtener se deberá buscar en la literatura el modelo que se halla obtenido para condiciones similares al caso de estudio.

Trabajo a futuro

Cabe mencionar que este desarrollo no contempla las descargas laterales, por lo que faltaría incorporarlas, además también falta analizar en detalle los cambios de sección y agregar otras estructuras de regulación como las compuertas automáticas fluidicas tipo AMIL o AVIO (Litrico & Fromion, 2009).

7 Bibliografía

- Abbott, M. B. (1979). *Computational Hydraulics. Elements of the Theory of Free Surface Flows* . PITMAN.
- Aguilar Chávez, A. (2002). *Propiedades de Propagación de esquemas numéricos para la simulación de flujos a superficie libre*. Tesis doctoral UNAM.
- Aguilar Chávez, A., Pedroza González, E., & Kosuth, P. (1994). *Informe final del proyecto: Automatización de canales SH 9408*. IMTA, CONAGUA, Coordinación de Tecnología Hidráulica. Subcoordinación de Hidráulica Rural y Urbana.
- Aldama, A., & Aguilar, C. (1996). Stability analysis of the Preissmann scheme. *Computational Methods in Water Resources*, XI, 37-44.
- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2002). *Análisis numérico* (Septima ed.). (Thomson, Trad.) Estados Unidos de América: Brooks/Cole.
- Chaudhry, P. D. (1979). *Applied Hydraulic Transients*. Nueva York: Van Nostrand Reinhold: Springer .
- Chow, V. T. (2000). *Hidráulica de canales abierto*. McGraw -Gill.
- CONAGUA. (2012). *Atlas digital del agua en México*. Obtenido de <http://www.conagua.gob.mx/atlas/usosdelagua32.html>
- CONAGUA. (2013). *Estadísticas del Agua en México*. México, D.F. Obtenido de <http://www.conagua.gob.mx/CONAGUA07/Noticias/SGP-2-14Web.pdf>
- Cruz, P., López, N. F., & Aguilar, A. (2014). Estudio de convergencia límite del esquema de Leendertse para flujos transitorios. *XXIII Congreso Nacional de Hidráulica*.
- de León Mojarro, B., & Robles Rubio, B. D. (Edits.). (2007). *Manual para diseño de obras de riego pequeñas*. Jiutepec, Morelos, México: Instituto Mexicano de Tecnología del Agua .
- Droler, J., & Gray, W. (1988). On the well posedness of some wave formulations of shallow water equations. *Advances in Water Resources*, 11, 84-91.
- INEGI. (s.f.). *Cuentame*. Obtenido de <http://cuentame.inegi.org.mx/>
- Islam, A., Raghuvanshi, N. S., & Singh, R. (1 de February de 2008). Development and Application of Hydraulic Simulation Model. (ASCE, Ed.) *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 134(1), 49-59.
- ISO 13550. (2002). ISO-13550. Hydrometric determinations. Flow measurements in open channels using structures — Use of vertical underflow gates. ISO.

- Jung-Fu Yen, C.-H. L.-T. (2011). Hydraulic characteristics and discharge control of sluice gates. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 24(3), 301-310. doi:10.1080/0.2533839.2001.9670628
- Khalili Shayan, H., & Farhoudi, J. (12 de junio de 2013). Effective parameters for calculating discharge coefficient of sluice gates. *Flow Measurement and Instrumentation*.
- Litrico, X., & Fromion, V. (2009). *Modeling and Control of Hydrosystems*. Springer. doi:10.1007/978-1-84882-624-3
- Losada, A. (diciembre de 1997). Glosario sobre sistemas de riego. 4(4), 55-68.
- Lyn, D. A., & Goodwin, P. (Enero de 1987). Stability of a General Preissmann Scheme. (ASCE, Ed.) *Journal of Hydraulic Engineering*, 16-27.
- Morton, K., & Mayers, D. (1994). Numerical Solution of Partial Differential Equations. Cambridge: Cambridge University Press.
- Panton, R. (1994). *Incompressible Flow*. New York: John Wiley & Sons.
- Pedroza, E., & Hinojosa, G. (2014). *Manejo y distribución del agua en distritos de riego. Breve introducción didáctica*. Jiutepec, Morelos, México: Instituto Mexicano de Tecnología del Agua.
- Peña, E. (Julio de 2007). *Gaceta del IMTA (Instituto Mexicano de Tecnología del Agua)*. Recuperado el 22 de 11 de 14, de Eficiencias del uso del agua en distritos de riego en México: <https://www.imta.gob.mx/gaceta/anteriores/g03-07-2007/eficiencias-uso-agua.html>
- Peña, E. (Julio de 2007). *Gaceta del IMTA (Instituto Mexicano de Tecnología del Agua)*. Recuperado el 22 de 11 de 14, de Eficiencias del uso del agua en distritos de riego en México: <https://www.imta.gob.mx/gaceta/anteriores/g03-07-2007/eficiencias-uso-agua.html>
- Prado, J., León, M., & Ruiz, V. (2003). Evaluación experimental de algoritmos de control de canales de riego. *Agrociencia*, 37(4), 393-403.
- Ramesh, A. (2013). *Response of Flood Events to Land Use and Climate Change: Analyzed by Hydrological and Statistical Modeling In Barcelonnette*. Francia: Springer.
- Rogers, D. C. (1998). Canal control algorithms currently in use. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 124(1), 11-15.
- SAGARPA. (2010). *Proyecto Estratégico de Tecnificación del Riego 2010*. Obtenido de <http://2006-2012.sagarpa.gob.mx/agricultura/Documents/Proyectos/Boletin.pdf>
- Sánchez, J. L., & Gracia, J. (1988). *Desarrollo de un modelo Matemático para simular la operación de un canal de riego*. Instituto de Ingeniería UNAM.

- Sotelo, G. (2009). *Hidráulica General I. Fundamentos*. México, México: Limusa. Recuperado el Febrero de 2014
- Swamee, P. K. (28 de Enero de 1992). Sluice-Gate discharge equations. *Journal of Irrigation and Drainage*, 118(1), 56-60.
- Szymkeiwicz, R. (2010). *Numerical Modeling in Open Channel Hydraulics*. (W. S. library, Ed.) Springer Science & Business Media. doi:10.1007/978-90-481-3674-2
- U.S.B.R. (1991). *Canal Systems Automation Manual*.
- US Army Corps of Engineers. (1993). *Engineering and Design. River Hydraulics*. Recuperado el 04 de 05 de 2015, de http://www.publications.usace.army.mil/Portals/76/Publications/EngineerManuals/EM_1110-2-1416.pdf
- US Army Corps of Engineers. (s.f.). *US Army Corps of Engineers*. Recuperado el 29 de 04 de 2015, de Hydrologic Engineering Center: <http://www.hec.usace.army.mil/software/hec-ras/>