



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN  
INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERÍA

**“PROPIEDADES DINÁMICAS DE LA SEÑAL  
ELECTROENCEFALOGRÁFICA GENERADA POR EL  
CEREBRO CON PARKINSON”**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

(ELÉCTRICA- PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES)

P R E S E N T A:

**MARÍA DE LOS ÁNGELES CORNEJO  
VILLEGAS**

DIRECTOR DE TESIS

M. en C. GUILLERMO A. VÁZQUEZ COUTIÑO



MÉXICO D., F.

JULIO 2006

**JURADO ASIGNADO:**

**Presidente:** DRA. GRACIELA VELASCO HERRERA

**Secretario:** M. C. GUILLERMO ARNULFO VÁZQUEZ COUTIÑO

**Vocal:** DR. MARIO ENRIQUE RODRÍGUEZ GARCÍA

**1<sup>er.</sup> Suplente:** DR. VLADIMIR TCHIJOV

**2<sup>do.</sup> Suplente:** DR. HÉCTOR ENRIQUE CURIEL REYNA

LUGAR: FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLÁN

TUTOR DE TESIS:

**M. C. GUILLERMO ARNULFO VÁZQUEZ COUTIÑO.**

---

**FIRMA**

## **AGRADECIMIENTOS**

A la UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO por ser mi  
alma-máter.

A la FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLÁN, en  
específico al centro de cómputo C-1, por las facilidades y espacios  
proporcionados para la realización de este trabajo.

Al M. C. Guillermo Arnulfo Vázquez Coutiño, por su valioso tiempo para la  
dirección y realización de esta investigación.

Al jurado por el tiempo que dedicaron a la revisión del trabajo y por sus  
invaluables comentarios para enriquecer este proyecto.

Si crees que vales mucho, obtienes mucho, si crees que puedes hacer  
grandes cosas, las harás no dudes de ti y ten fe.

## **DEDICATORIAS**

Te agradezco señor con todo mi pensamiento y mi corazón por ser el pilar de mi existencia, por estar siempre en los momentos más importantes.

Mario Soyd, G. Nahúm y Angy mis niños, por ser la razón de mi vida.

Carmelita por tu grandioso amor y apoyo absoluto

Lulucita, Guillermo, Amandita, Pablito, por su amor.

A todos mis Amigos y Familiares, por confiar en mí y por su alta estima.

Deseo ardientemente aprender cuatro cosas:  
Pensar con claridad. Amar a todos con sinceridad. Proceder siempre con nobleza y humildad. Poner toda mi confianza en DIOS.

Helen Keller.

**DIOS LOS BENDIGA, LOS AMO.**

# ÍNDICE GENERAL

<b>ÍNDICE GENERAL</b>	<b>i</b>
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b>	<b>iii</b>
<b>ÍNDICE DE TABLAS</b>	<b>v</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>vi</b>
<b>CAPÍTULO 1 ANTECEDENTES</b>	<b>1</b>
1.1 Antecedentes	1
1.2 Planteamiento del problema	5
1.3 Objetivo	6
1.4 Desarrollo	7
<b>CAPÍTULO 2 ANÁLISIS DE SERIES DE TIEMPO</b>	<b>8</b>
2.1 Generalidades	8
2.2 Sistema dinámico	10
2.3 Diagrama espacio-fase	12
2.4 Atractor	16
2.5 Exponente de Lyapunov	20
2.6 Entropía	22
2.7 Exponente de Hurst	24
2.8 Dimensiones	26
2.9 Análisis espectral	31
2.10 Análisis de Recurrencia Visual	33

<b>CAPÍTULO 3 ELECTROENCEFALOGRAFÍA</b>	<b>38</b>
3.1 Potenciales bioeléctricos	38
3.2 Comportamiento eléctrico de la membrana	42
3.3 El cerebro	43
3.4 Electroencefalograma	47
3.5 Requerimientos técnicos para la electroencefalografía clínica	56
<b>CAPÍTULO 4 RESULTADOS ANÁLISIS Y DISCUSIÓN</b>	<b>60</b>
4.1 Desarrollo	60
4.2 Investigación visual	61
4.3 Distribución de probabilidad	66
4.4 Diagrama espacio-fase Atractores	68
4.5 Índices	73
4.6 Dimensiones	75
4.7 Análisis espectral	77
4.8 Análisis de Recurrencia Visual	79
<b>CAPÍTULO 5 CONCLUSIONES</b>	<b>83</b>
<b>CAPÍTULO 6 BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>89</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

Fig	Nombre	Pag
2.1	Procedimiento para determinar los vectores de estado del sistema	14
2.2	Determinación del h óptimo con información mutua	15
2.3	Atractor puntual	17
2.4	Atractor de ciclo límite	18
2.5	Atractor toroidal	19
2.6	Atractor extraño	20
2.7	Problema de Hurst	25
2.8	Autosemejanza	28
2.9	Proceso fractal	28
2.10	Gráfico de control de Shewart para 3 niveles de fluctuación	36
2.11	Gráfico de recurrencia	36
3.1	Potencial de membrana	39
3.2	Potencial de acción nervioso	39
3.3	Potencial de acción tipo espiga característico de células nerviosas	40
3.4	Representación esquemática del potencial de acción	41
3.5	Modelo eléctrico de la membrana celular	43
3.6	Partes que componen el cerebro	44
3.7	Estructura de una neurona	45
3.8	Difusión pasiva de la corriente a lo largo de un axón	46
3.9	Propagación de los potenciales de acción en ambas direcciones a lo largo de la fibra conductora.	47
3.10	Electroencefalograma	49
3.11	Vista lateral izquierda de las marcas sobre el cráneo	52

<b>3.12</b>	<b>Sistema Internacional 10-20 de colocación de electrodos y su nomenclatura.</b>	<b>56</b>
<b>3.13</b>	<b>Vista sencilla y plana de la parte superior de la cabeza, que muestra la colocación de electrodos adicionales encerrados en un círculo.</b>	<b>55</b>
<b>4.1</b>	<b>Actividad bioelectroquímica de sujetos sanos jóvenes</b>	<b>62</b>
<b>4.2</b>	<b>Actividad bioelectroquímica de sujetos sanos adultos</b>	<b>64</b>
<b>4.3</b>	<b>Actividad bioelectroquímica de sujetos con Parkinson</b>	<b>65</b>
<b>4.4</b>	<b>Histogramas de actividad bioelectroquímica de sujetos sanos jóvenes</b>	<b>67</b>
<b>4.5</b>	<b>Histogramas de actividad bioelectroquímica de sujetos sanos adultos</b>	<b>67</b>
<b>4.6</b>	<b>Histogramas de actividad bioelectroquímica de sujetos con Parkinson</b>	<b>68</b>
<b>4.7</b>	<b>Atractores del mismo registro con diferente retardo</b>	<b>69</b>
<b>4.8</b>	<b>Atractores de cinco registros de sujetos sanos jóvenes</b>	<b>70</b>
<b>4.9</b>	<b>Atractores de cinco registros de sujetos sanos adultos</b>	<b>71</b>
<b>4.10</b>	<b>Atractores de cinco registros de sujetos con Parkinson</b>	<b>72</b>
<b>4.11</b>	<b>Dimensión de correlación en sujetos sanos y con Parkinson</b>	<b>77</b>
<b>4.12</b>	<b>Frecuencia de datos de sujetos sanos jóvenes</b>	<b>78</b>
<b>4.13</b>	<b>Frecuencia de datos de sujetos sanos adultos</b>	<b>78</b>
<b>4.14</b>	<b>Frecuencia de datos de sujetos con Parkinson</b>	<b>78</b>
<b>4.15</b>	<b>Gráficos de recurrencia de registros de sujetos sanos jóvenes</b>	<b>80</b>
<b>4.16</b>	<b>Gráficos de recurrencia de registros de sujetos sanos adultos</b>	<b>80</b>
<b>4.17</b>	<b>Gráficos de recurrencia de registros de sujetos con Parkinson</b>	<b>81</b>

## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla</b>	<b>Nombre</b>	<b>Pag</b>
<b>Tabla 3.1</b>	<b>Características de las ondas de la señal electroencefalográfica</b>	<b>50</b>
<b>Tabla 3.2</b>	<b>Características de las ondas de la señal electroencefalográfica</b>	<b>54</b>
<b>Tabla 4.1</b>	<b>Registros de sujetos sanos jóvenes</b>	<b>73</b>
<b>Tabla 4.2</b>	<b>Registros de sujetos sanos adultos</b>	<b>74</b>
<b>Tabla 4.3</b>	<b>Registros de sujetos con Parkinson</b>	<b>74</b>

## RESUMEN

---

---

En la presente investigación se desarrolla un sistema metodológico para estimar las características dinámicas de series de tiempo de Electroencefalogramas de individuos sanos jóvenes, sanos adultos y con Parkinson, con el propósito de tener una herramienta más en la estimación del estado fisiológico de los enfermos que padecen esta enfermedad, para obtener esta manera, modelos visuales de reconocimiento e interpretación que le permitan al especialista de una manera más contundente tener certeza del comportamiento de la compleja red neuronal del cerebro y del grado de avance de la enfermedad, y no referirse únicamente con el electroencefalograma que es el procedimiento visual que comúnmente utilizan los médicos en el diagnóstico.

Investigaciones desarrolladas recientemente, indican que clínicamente es un avance para la ciencia, poder caracterizar las medidas dinámicas para las señales provenientes del Electroencefalograma (EEG), que pueden extenderse a diferentes estados patológicos, se sabe que las características dinámicas provenientes de las señales del cerebro son altamente sensibles a condiciones iniciales, esto significa que es posible predecir lo que ocurre en corto tiempo, pero sobre período largos de tiempo, la predicción puede ser imposible, desde entonces, no se puede tener la certeza exacta del valor para la condición inicial en un sistema real que es el caso del cerebro, que no se mantiene en estado estable, es decir cambia su actividad con respecto al tiempo.

Para la caracterización dinámica y la exploración de la actividad eléctrica del cerebro, primero se obtuvieron los electroencefalogramas, se digitalizaron para tener las series de tiempo, de individuos sanos jóvenes, individuos sanos adultos mayores e individuos con la enfermedad de Parkinson, los datos se analizaron con las herramientas de la Teoría de Análisis de Sistemas Dinámicos no Lineales, también

llamado teoría del caos. La idea básica de la caracterización de los sistemas dinámicos es calcular la dimensión apropiada del atractor y cuantificar su topología.

Se realizó una caracterización de las señales electroencefalográficas, basadas en la no linealidad, estimando las características dinámicas y observando la evolución del proceso dinámico sobre el tiempo, aplicando estas características dinámicas que pueden ser usadas para mejorar la visualización del espacio de estados de las señales Electroencefalográficas de la enfermedad del Parkinson, con el propósito de obtener modelos visuales de reconocimiento e interpretación (atractores), que permita establecer, si el paciente esta enfermo o no, aun cuando no se manifieste completamente la sintomatología, que es cuando el médico ya detecta la presencia real de la enfermedad.

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 Antecedentes

El desarrollo de la dinámica no lineal y la teoría del caos ha hecho posible desde los años 80's nuevos avances para entender la complejidad de los sistemas biológicos, especialmente del Sistema Nervioso Central SNC. [21].

Varias teorías se han desarrollado desde esta perspectiva en diferentes tópicos en neurobiología, alrededor de 50 artículos científicos, reflejan el interés en el desarrollo e investigación de técnicas neurofisiológicas, donde lo principal es analizar las series de tiempo, caracterizando el sistema en términos de las dimensiones o medidas topológicas del atractor, que son las propiedades de los sistemas no lineales, donde se ha encontrado dependencia y alta sensibilidad a las condiciones iniciales, complejidad, e impredecibilidad, es decir no se mantiene en estado estable exhibiendo una dinámica cambiando la actividad con respecto al tiempo, manifestándose auto-organización, similitud a diferentes escalas, autosemejanza e intermitencia en el comportamiento temporal característico del SNC. [23] [17] [64].

Lopes da Silva, manifiesta que modelos de poblaciones de neuronas describen el mecanismo de generación de éstos ritmos. Desde que Berger descubrió las ondas de los EEG en 1929, numerosos estudios han sido publicados en los cambios oscilatorios de una espontánea actividad bioeléctrica medida en una escala. [64].

Hebb intuyó en 1949, que un limitado grupo de neuronas distribuidas de manera difusa e irregular en el SNC, cuyas conexiones son reforzadas de tal manera que forman los circuitos que hacen posible las funciones del cerebro entre ellas la memoria.

Recientemente ha sido confirmado que grupos de neuronas debido a sus propiedades no lineales, de actividad cooperativa y de regeneración, pueden

desarrollar características de organización y orden, que son no deducibles de las propiedades de las neuronas y que están aisladas de ellos, como ejemplo sostener la habilidad de la memoria a través de las interconexiones. [64].

Estos patrones de la dinámica espacio-temporal de organización interactiva neuronal han sido llamados por Prigogine como de macroestados, similar al concepto de “Estructura Disipativa” desarrollada en termodinámica.

Casdagli en 1997 estudió y comparó Electroencefalogramas de gente sana y pacientes con epilepsia temporal, los analizó por métodos estadísticos y aplicando estudios de sistemas no lineales, él encontró que se pueden caracterizar las regiones epiloptogénicas del cerebro durante el período interictal y pudo elucidar el mecanismo dinámico en la transición epiléptica. [22].

Aftanas en 1998 examinó los cambios en la dinámica en diferentes áreas del cerebro responsables de las emociones, encontró e identificó patrones dinámicos específicos para diferentes emociones, que proveen información intracortical básica del proceso emocional. [2].

Al principio, el comportamiento caótico fue considerado como algo perjudicial e indeseable, ya que se pensaba que la preservación de las condiciones estáticas en el medio interno del organismo permitían mantener su equilibrio; sin embargo, se sabe que la célula como un sistema abierto está caracterizada por estados de equilibrio dinámico y presenta variaciones locales y temporales de las variables fisiológicas que la caracterizan, por lo que, las variables que son objeto de control de los diferentes sistemas de regulación, están asociados con los sistemas biológicos, oscilan alrededor de ciertos valores programados, presentando además cierto desorden aparente (alta variabilidad), por lo que es imposible, que la variable controlada se mantenga constante, aún en ausencia de perturbaciones, ya que si esto ocurriera, la célula se habría convertido en un sistema aislado y entonces no tendría manera de mantener su orden a expensas del intercambio de energía con los alrededores. [35] [19].

Cariani en su primera revisión, describen los ritmos y oscilaciones, con periodos de longitud de 100 milisegundos que fueron observados en animales de experimentación. Ellos sugieren que la oscilación del EEG es una actividad

correlacionada de un largo número de neuronas cuyas interacciones son generalmente no lineales. [18].

El Parkinson, es un desorden común del sistema nervioso, tiene una prevalencia en el país de 70 a 100 pacientes por cada 100,000 habitantes, del que, de acuerdo con el Instituto Nacional de Neurología y Neurocirugía INNN, han sido reportados en México al menos 500,000 casos. De ahí la importancia del estudio de esta enfermedad. La incidencia del Parkinson es impredecible, por eso es importante investigar el perfil dinámico, como un punto de partida para los desequilibrios fisiológicos que ocurren en el cerebro con Parkinson.

La enfermedad del Parkinson, es un padecimiento degenerativo del Sistema Nervioso Central, conocida también como parálisis agitante, es ocasionada por la degeneración del sistema nigroestriado, que es una parte del cerebro que participa en el control de los movimientos motores.

El Parkinson, se caracteriza por un desorden motor, que estar asociado a una homeostasis patológica, dentro de un sistema biológico caótico, originado por una deficiencia en la interacción dopamina sustancia nigra. La dopamina es un neurotransmisor del encéfalo, cuyos efectos son principalmente inhibitorios. Dicha sustancia química, es sintetizada en el estriado del cerebro, justo en las terminaciones nerviosas de las neuronas dopaminérgicas, generadoras de dopamina, ubicadas en la sustancia nigra del mismo, llamadas neuronas nigroestriatales. [23].

Para que sea posible la comunicación nerviosa, las neuronas liberan a sus mensajeros químicos llamados neurotransmisores, en un pequeño grupo de células blanco, específicas para transmitir los mensajes, sin embargo, también se tiene conocimiento de disturbios a nivel cortical y subcortical. [43].

Para entender la dinámica del Parkinson, es necesario, determinar las propiedades dinámicas de la señal electroencefalográfica generada por el cerebro. Una aproximación tradicional de este problema, es el análisis de series de tiempo, para encontrar el modelo o representación de los datos y determinar el orden (dimensión) y los parámetros del modelo, una simple generalización es encontrar el mejor modelo visual de reconocimiento e interpretación de la dinámica no lineal. [63].

El análisis dinámico de señales EEG tienen muchas aplicaciones en fisiología y neurofisiología. [33].

Investigaciones desarrolladas recientemente, indican que clínicamente es importante poder calcular las medidas dinámicas dentro de las señales Electroencefalográficas de la enfermedad del Parkinson, sin embargo, la complejidad caótica, la inestabilidad, lo que significa altamente sensible a las condiciones iniciales, el ruido, requiere nuevas aproximaciones para el mejor entendimiento de este proceso, así como incluir otras características dinámicas. [22] [25].

## 1.2 Planteamiento del problema

La medicina ha evolucionado de tal manera, que en la actualidad, muchas especialidades cuentan con equipo muy sofisticado para el diagnóstico y prevención de las enfermedades, para el caso específico del cerebro, se siguen llevando a cabo de manera tradicional, la adquisición de electroencefalogramas y de manera visual, se observa la señal que se produce en el papel, según sean las formas y las variaciones de las ondas, es como los médicos determinan cual es el estado fisiológico actual y cualquier alteración del paciente, sin embargo a simple vista no es posible determinar que tan delicado o avanzado es el estado patológico del paciente, se ha visto, que existe información que no es posible apreciar con esta práctica cotidiana, por lo que es necesario emplear otra metodología que permita saber con mayor certeza la complejidad del sistema y el grado de evolución de la enfermedad en el paciente.

Para un entendimiento mejor de los mecanismos neurofisiológicos responsables del ritmo de las ondas cerebrales, es importante conocer si el proceso no lineal juega un papel en ésta generación. Es posible, determinar las propiedades dinámicas de señales provenientes de sistemas biológicos, que exhiben una dinámica bioelectroquímica no lineal como es el caso de los electroencefalogramas, generados por el cerebro con Parkinson y el cerebro sano a través del análisis de series de tiempo, sin embargo, se ha encontrado que existe información que no es posible observar.

Desde los ochentas se vienen empleando herramientas de tipo matemático, que proponen el Análisis Dinámico no Lineal o teoría del caos determinista, para encontrar el modelo de los datos, generando atractores en el espacio-fase, como una técnica visual de reconocimiento e interpretación, para determinar la complejidad y el orden óptimo del sistema y su posible evolución en el tiempo.

### 1.3 Objetivo

De acuerdo a la importancia que reviste, no solo el hecho de conocer si el paciente presenta alguna alteración importante en su estado de salud, si no de proponer, desde un punto de vista científico, distinto al procedimiento que se realiza de manera cotidiana con el electroencefalograma, el objetivo de la tesis es obtener y analizar modelos visuales de reconocimiento e interpretación como un sistema dinámico, a partir de series de tiempo generadas por electroencefalogramas de individuos sanos jóvenes, sanos adultos mayores y que presentan alguna patología (Mal de Parkinson), a través del implemento de herramientas matemáticas computacionales, como el Análisis de Sistemas Dinámicos No Lineales, que permita realizar un análisis comparativo y poder caracterizar la señal electroencefalográfica, de tal manera que permita determinar las propiedades dinámicas de la señal electroencefalográfica generada por el cerebro, y de esa manera comparar las imágenes, al mismo tiempo establecer las diferencias entre los cada uno de los individuos sanos y enfermos, para entender el comportamiento del cerebro como un sistema altamente sensible a condiciones iniciales (caótico).

## 1.4 Desarrollo

Esta investigación se estructura de la siguiente manera: en el capítulo 2 se describe un panorama de la Teoría del Análisis de Sistemas Dinámicos que incluye algunos conceptos, fórmulas y definiciones acerca de la dinámica no lineal, los cuales se esgrimen a lo largo de esta tesis. Cómo y para qué se reconstruye el espacio-fase; al evolucionar en el tiempo el sistema dinámico genera en el espacio-fase una estructura (atractor), el exponente de Lyapunov predice si un sistema converge o diverge; el exponente de Hurst mide la persistencia del sistema y cuantifica el grado de complejidad de la señal; la dimensión de correlación y la dimensión fractal nos ayudan en la identificación de las series de tiempo; el gráfico de recurrencia nos indica la recurrencia y determinismo que tiene nuestro sistema, la entropía que es una medida de la información que se recibe.

En el capítulo 3 se presentan los conceptos básicos teóricos, necesarios para el desarrollo de esta tesis en cuanto al cerebro como sistema y su funcionamiento. Se explica cómo es el comportamiento eléctrico de la célula, cómo se generan y miden los potenciales bioelectroquímicos, el comportamiento del sistema específico de conducción neuronal; cómo se genera el Electroencefalograma, como se interpreta y cómo se identifican en el Electroencefalograma los trastornos del cerebro.

En el capítulo 4 se expone como se obtuvieron los datos y como se prepararon para el análisis; como se realizó la inspección visual de los gráficos; el análisis de la complejidad del sistema para la obtención de resultados. Se analizan los resultados comparando los obtenidos a partir de individuos sanos jóvenes y adultos, con los obtenidos de individuos enfermos para encontrar diferencias entre ellos.

En el capítulo 5 se presentan las conclusiones del trabajo, basadas en los resultados obtenidos y expuestos en el capítulo de resultados, resumiendo las principales aportaciones y dando una perspectiva de este estudio.

# ANÁLISIS DE SERIES DE TIEMPO

## 2.1 Generalidades

Una serie de tiempo está definida como una colección de mediciones de fenómenos físicos, biológicos o químicos, registradas de manera secuencial con respecto al tiempo, los tipos de datos de las series de tiempo pueden ser continuos o discretos, estacionarios o no estacionarios, determinista o estocásticos.

Las series de tiempo continuas son observaciones hechas continuamente en el tiempo.

Las series de tiempo discretas son observaciones hechas sólo en intervalos de tiempo con un espaciamiento bien definido y preferentemente equidistante.

Las series de tiempo estacionarias son aquellos datos que fluctúan alrededor de un valor constante, con una tendencia horizontal.

Las series de tiempo no estacionarios son los datos con una tendencia ascendente o descendente.

Determinista significa que para cada valor posible de  $x(t)$  hay solo un posible valor para  $x(t+1)$  que es una función de  $x(t)$ , para sistemas deterministas  $x_0$  puede usarse para calcular todos los valores futuros de  $x(t)$ , estos datos pueden ser predecidos exactamente.

Estocásticos son los datos que sólo pueden ser parcialmente determinados por valores pasados, tienden a ser descritos con una distribución de probabilidad.

Uno de los problemas que se intenta resolver con las series de tiempo es el de la predicción; esto es, dada una serie de tiempo  $\{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$ , el objetivo es describir el comportamiento e investigar el mecanismo generador de la serie

temporal y buscar posibles modelos temporales que permitan sobrepasar la incertidumbre del futuro [61 ].

Para analizar una serie de tiempo, primero se plantea una gráfica, ya que esto nos permite realizar una inspección visual identificando la tendencia, así como la estacionariedad y las variaciones irregulares. Al graficar observamos la tendencia, que representa el comportamiento predominante de la serie.

La serie puede tener una variación estacional que representa un movimiento periódico de la serie de tiempo, las variaciones irregulares que representan todos los tipos de movimientos de una serie de tiempo, que no sea tendencia, variaciones estacionales y fluctuaciones cíclicas.

Los datos fuera del intervalo (error craso) se refieren a puntos de la serie que se escapan de lo normal y corresponden a un comportamiento anormal del fenómeno (sin incidencias futuras) o posiblemente a un error de medición. Por lo que se debe omitir el valor antes de analizar la serie.

Después se analizan estadísticamente los datos, calculando la media, moda, mediana, la varianza, los histogramas, etc., para tratar de construir un modelo que explique la estructura y la evolución de una variable a lo largo del tiempo.

Finalmente para poder hacer una estimación y cálculo de los índices o propiedades métricas y la aplicación de procedimientos gráficos que permitan determinar si una serie de tiempo aparentemente aleatoria puede corresponder a un comportamiento caótico, es necesario recurrir al Análisis de Sistema Dinámico no Lineal determinista. Esta herramienta permite estudiar el sistema que originó la serie de tiempo y su posible evolución en el tiempo [5].

El análisis acostumbrado de series de tiempo, empleando gráficos y razonamiento estadístico, tiene limitaciones, cuando se evalúan sistemas biológicos tales como señales eléctricas del cerebro, corazón y en general cualquier sistema dinámico de este tipo, mediante la inspección visual del electroencefalograma se obtiene información limitada, y los resultados estadísticos, contrastando una serie de un sujeto saludable con otra de un sujeto con Parkinson son aparentemente idénticos, por lo que actualmente, la tendencia de los científicos es analizar los datos

desde el punto de vista del sistema dinámico de origen, aplicando la teoría del Análisis de Sistemas Dinámicos no Lineales y la geometría fractal para evaluar la complejidad del sistema.

## **2.2 Sistema Dinámico**

Un sistema dinámico, es aquel que evoluciona en el tiempo de forma lineal o no lineal, puede ser conservativo, esto es, que mantiene constante su energía sobre el tiempo, es un sistema que no tiene atractores, tiene una entropía cero y la suma de todos los exponentes de Lyapunov es igual a cero, en contraste un sistema disipativo donde la energía no se conserva se pierde y genera atractores. Autónomo, en el cual, el campo vectorial que define al sistema dinámico no depende del tiempo.

A finales del siglo diecinueve, el matemático francés Henry Poincaré descubrió, que en un sistema cerrado, determinista, exhibe un comportamiento aperiódico que depende sensiblemente de las condiciones iniciales, puede dar origen a resultados diferentes e impredecibles, en contraposición con la teoría de Isaac Newton en la que los sistemas cerrados son muy ordenados y predecibles. Henry Poincaré hacia finales del siglo XIX, reveló que una alta sensibilidad a las condiciones iniciales, asociada con el concepto de caos es la esencia de un sistema no lineal.

El descubrimiento de Poincaré, quedó en el olvido hasta que el meteorólogo Edward Lorenz, lo estudió y utilizó en el año 1960, en sus estudios de predicción del tiempo, concluyó que los cambios atmosféricos exhiben notoria impredecibilidad en el clima sobre largos periodos, ya que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales, producen diferentes comportamientos en series de tiempo meteorológicas. Con estos experimentos Lorenz descubrió el movimiento caótico y los atractores extraños, éste fue el inicio de la teoría del caos, herramienta muy útil para analizar sistemas biológicos [61] [62].

En sistemas lineales, la salida ( $y$ ) está determinada por la entrada ( $x$ ) de acuerdo a la ecuación de la forma  $y = mx+b$ . Los sistemas lineales se distinguen por dos principios importantes que son, proporcionalidad y superposición. La proporcionalidad nos dice que la salida sostiene una relación de línea recta con la entrada. La superposición se refiere a que todos los componentes del sistema mantienen una relación individual de entrada-salida [28].

Los sistemas no lineales violan los principios de proporcionalidad y superposición cualquier ecuación, en la que existan procesos iterativos, esto es, que el valor actual de la salida sea el siguiente valor de la entrada y donde pequeños cambios puedan tener efectos dramáticos y no esperados, no sostiene los principios de proporcionalidad y superposición.

Los sistemas biológicos fisiológicos y bioelectroquímicos, exhiben un comportamiento no lineal por lo que, frecuentemente resulta difícil predecir su comportamiento frente a un estímulo dado. Existen modelos matemáticos que sirven para describir el comportamiento de sistemas, valiéndose de distintas ecuaciones; sin embargo, éstos modelos no se ajustan adecuadamente al comportamiento de los sistemas reales, debido a que, presentan una dinámica no lineal.

Para solucionar el problema, se han desarrollado herramientas de tipo computacionales para el análisis, con las que se puede reconstruir el diagrama espacio-fase y obtener las trayectorias del sistema, así como el atractor, estableciendo además los índices como el exponente de Lyapunov, el exponente de Hurst, la entropía de Kolmogorov, la dimensión de correlación y las gráficas de recurrencia. Todas estas técnicas están compiladas en la teoría del caos determinista, y la geometría fractal, proporcionadas por un conjunto de ecuaciones matemáticas con la forma de funciones que gobiernan la dinámica del sistema [30].

### 2.3 Diagrama Espacio-fase

En la mayoría de las aplicaciones prácticas, en el diagrama espacio-fase, se obtiene un conjunto de observaciones del proceso, estructuradas como una serie de tiempo univariada. Para obtener la información del proceso de estudio, Dikanev et al, sugieren una reconstrucción del espacio-fase que es el espacio matemático constituido por las variables que describen un sistema dinámico, donde cada punto del espacio-fase, representa un posible estado del sistema. [26] [28]

La evolución en el tiempo de un sistema, se representa con una trayectoria en el espacio-fase. Existen varias técnicas desarrolladas, una de ellas se obtiene graficando las variables en un sistema de coordenadas. Otra manera es graficar una función con respecto la derivada de la misma función y una más, consiste en representar una función con respecto a sí misma introduciendo un retardo [55].

Para reconstruir el diagrama de estados espacio-fase y la trayectoria de los valores en el diagrama, a partir de los datos experimentales medidos en cualquier instante, se sabe que la posición del sistema en el espacio-fase está dada por las coordenadas  $(x, y)$ , mientras que la serie de tiempo proporciona solamente los valores de  $x$  de manera puntual en cada instante. Si se grafica  $dx/dt$  con respecto  $x$ , se obtiene la trayectoria del sistema en el plano espacio-fase, con esto se describe la trayectoria del sistema con base en los datos medidos [1].

Si lo que se requiere es calcular la derivada de una serie de tiempo  $dx/dt$ , los datos de los fenómenos importantes se registran periódicamente puede ser (diaria, semanal, mensual, etc.) a través de la observación en campo o a través de dispositivos electrónicos vinculados a equipos de cómputo, de tal manera que las mediciones  $x(t)$  en realidad consisten de una secuencia de observaciones realizadas a intervalos discretos de tiempo  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Existen diversos métodos para obtener aproximaciones a la derivada de una función a partir de una serie de valores, las características de estos métodos son una aproximación polinomial, deducción de fórmulas y cálculo de la longitud de paso que minimice los errores. [57]

Se utiliza una de las definiciones posibles de derivada de una función  $x$  en un punto  $t$  observando lo siguiente,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \quad (1)$$

La definición anterior se puede extender para el cálculo de la derivada de la serie de tiempo dada,

$$\frac{dx_t}{dt} = \frac{x_{(t+h)} - x_{(t)}}{h} \quad (2)$$

Para medidas de tiempo discretas,  $h$  puede solo tomar los valores  $0, 1, 2, 3, \dots$  y no puede tomar un valor fraccional, el mínimo valor que  $h$  puede tomar es 1, pero a veces es mas apropiado seleccionar grandes valores para  $h$ .

La aproximación anterior, llamada de diferencias hacia delante es la expresión común dada en cálculo para la derivada, una mejor aproximación es el cálculo de diferencias centradas con las que se obtiene,

$$\frac{dx_t}{dt} = \frac{x_{(t+h)} - x_{(t-h)}}{2h} \quad (3)$$

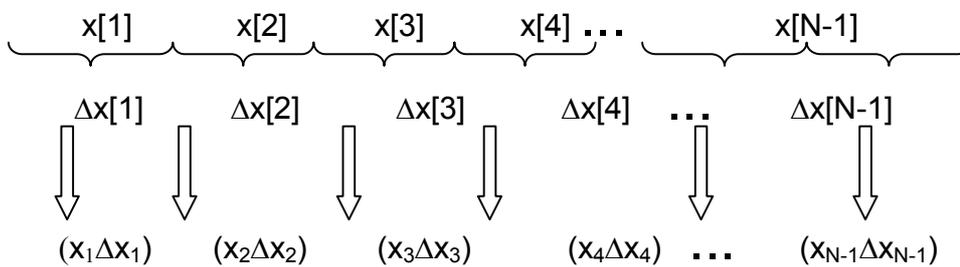
y reconstruir en el diagrama espacio-fase toda la información relevante acerca de la dinámica del fenómeno en estudio con una serie de tiempo, ya que si se cuenta con una medición  $x_{(t)}$  y se calcula su derivada con respecto al tiempo es decir  $dx_{(t)}/dt$  se tiene una medición directa de  $x$  como un valor calculado de  $f_{(x,y)}$ .

La siguiente técnica es la representación en el diagrama espacio-fase, se introduce un retardo, normalmente se utiliza el tiempo como referencia de la evolución del estado del sistema y un espacio vectorial de dos dimensiones que describe la trayectoria. Cada punto de este espacio vectorial representa el estado del sistema en un instante y se forma por dos coordenadas, la magnitud y su primera derivada respecto al tiempo [29].

Se define un vector  $\bar{x}$  que representa un punto en el espacio-fase como  $\bar{x} = (x, \Delta x)$  donde  $x$  es una muestra de tensión o intensidad y  $\Delta x$  la diferencia entre

dos muestras sucesivas. Entonces se define  $\bar{x} \in X \subseteq \mathfrak{R}^2$  que representa un estado instantáneo del espacio-fase del sistema.

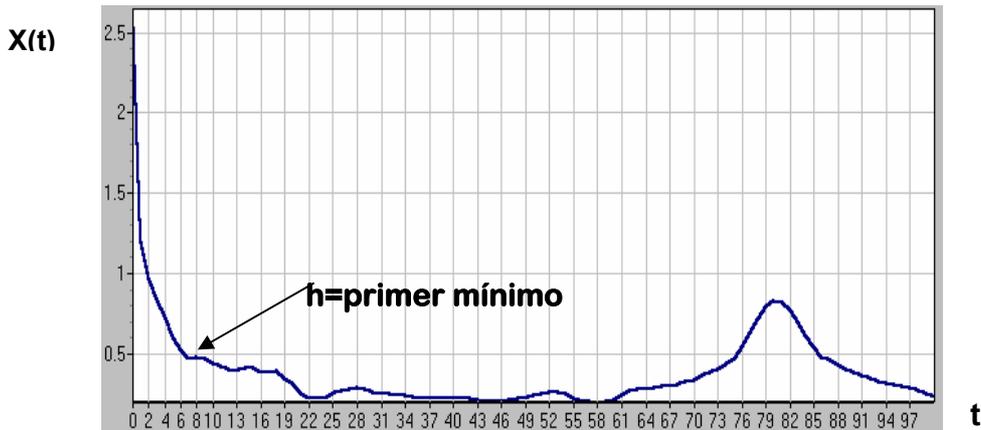
Si se toman  $N+1$  muestras de la señal a una frecuencia de muestreo constante es posible definir  $\bar{x}_i$  con  $i=1,2,\dots,N$ , donde cada índice representa un estado instantáneo del sistema tal como se muestra en la Fig. 2.1 [26]



**Fig. 2.1 Procedimiento para determinar los vectores de estado del sistema**

La función de información mutua se utiliza, según Fraser y Swinney, para determinar el valor óptimo del retardo en la reconstrucción del diagrama espacio-fase. Encontrar el tiempo óptimo de retardo es difícil; si es corto, las coordenadas usadas para cada vector reconstruido, pueden no ser lo suficientemente independientes, para transportar nueva información acerca de la trayectoria del sistema en el espacio, si el tiempo es muy largo las coordenadas pueden llegar a ser aleatorias con respecto a cada una de las otras. [32] [34]

Lo ideal es que, dado el estado del sistema  $x(t)$ , proporcione un máximo de información con  $x(t+T)$ ; donde el primer mínimo en la curva, ver Fig. 2.2, es considerado como el tiempo de retardo ideal.



**Fig. 2.2 Determinación del h óptimo con información mutua**

Otra técnica consiste en calcular la distancia entre dos vectores de N-dimensiones, que es distancia Euclidiana, distancia mínima y distancia máxima. El más utilizado es la distancia Euclidiana. Si la dimensión es 1, los tres métodos producen el mismo resultado.

Esta técnica de representar el dato la serie de tiempo medida u observada como una sucesión de puntos en un espacio de p dimensiones se conoce como un incrustamiento de rezagos en el tiempo. El Teorema de incrustamiento o inmersión de Takens [63][29] [34].

$$(D_t, D_{t-h}, D_{t-2h}) \tag{4}$$

Más generalmente, se puede incrustar la serie de tiempo en el espacio de la dimensión p, tomando la coordenada-p.

$$D_t = (D_t, D_{t-h}, D_{t-2h}, \dots, D_{t-(p-1)h}) \tag{5}$$

$D_t$  incorpora medidas hechas a diferentes tiempos (t-h), (t-2h), representa la medida de la serie de tiempo como una secuencia de puntos en el espacio dimensional-p, establece que la dinámica reconstruida del sistema dinámico, es similar a la dinámica original, tanto para los sistemas dinámicos continuos, como para los sistemas dinámicos discretos. La sucesión de vectores o puntos creados al

incrustar una serie de tiempo es llamada como la trayectoria de la serie de tiempo reconstruida,  $p$  se conoce como la dimensión de incrustamiento y  $h$  como el rezago de incrustamiento. [34] [61] [29].

En el diagrama espacio-fase participan tantas dimensiones o variables como se necesiten en el sistema, para describir el comportamiento.

## 2.4 Atractor

En matemáticas se dice que un punto  $\alpha$  es un atractor para la función  $f(x)$  si existe una vecindad alrededor de  $\alpha$  tal que las órbitas de los puntos en la vecindad convergen en  $\alpha$ . Atractor es un conjunto para el cual todas las trayectorias vecinas convergen. [34].

Los puntos estacionarios estables y ciclos límite estables son ejemplos de atractores, más precisamente, se define un atractor como un conjunto cerrado de  $A$  con las siguientes propiedades:

I)  $A$  es un conjunto invariante, con una trayectoria  $x_{(t)}$  que comienza en  $A$  y esta en  $A$  por todo el tiempo.

II)  $A$  es un conjunto abierto de  $U$  con condiciones iniciales, y es un conjunto abierto de  $U$  contenido en  $A$  tal que si  $x_{(0)} \in U$ , entonces la distancia de  $x_{(t)}$  en  $A$  tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esto significa, que todas las trayectorias del atractor comienzan suficientemente cerca de él. Lo más grande como  $U$  es llamado la cuenca o vasija de atracción de  $A$ .

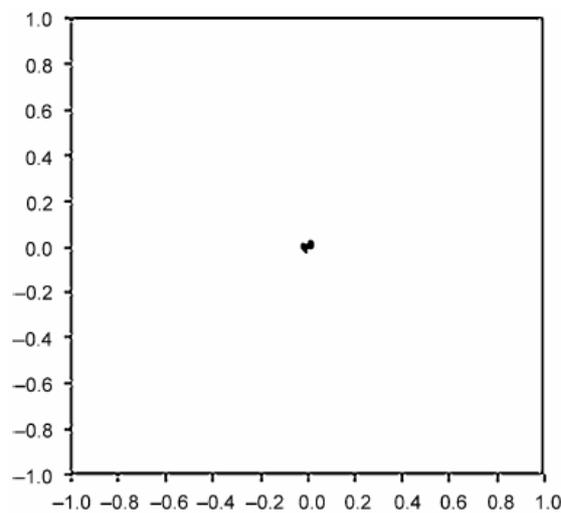
III)  $A$  es un conjunto mínimo, no hay un subconjunto propio de  $A$  que satisfaga las condiciones I y II. [61] [62].

En el Análisis de Sistemas Dinámicos no Lineales, se llama atractor, a la estructura que se genera en el diagrama espacio-fase, al evolucionar en el tiempo el sistema dinámico generado por las  $n$  variables del proceso.

Moon define a un atractor, como un conjunto de puntos o un subespacio en el diagrama espacio de estados, hacia el cual una historia de tiempo se aproxima asintóticamente. [55]

### 2.4.1 Atractor Puntual:

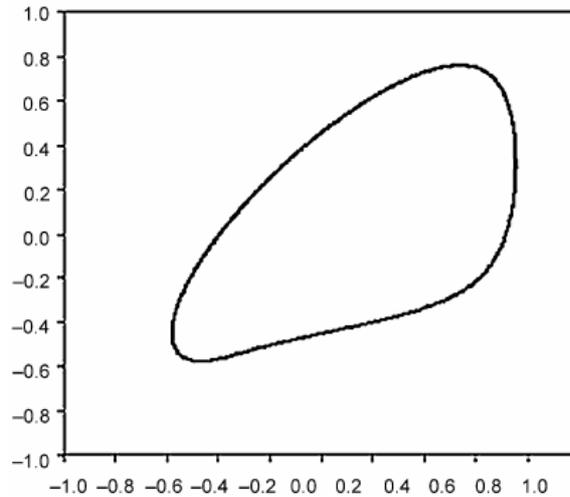
Este atractor es el resultado de un sistema cuyas variables tienden a un valor estable. Un ejemplo de atractor de punto fijo puede ser el péndulo real, el cual tiene fricciones y resistencia del aire por lo que termina parándose, la dinámica del sistema se representa gráficamente en el espacio-fase bidimensional por una espiral que tras varios giros muere en el origen de coordenadas, con velocidad y posición nula. Como el péndulo está limitado a oscilar de un lado a otro en ambas direcciones se dice que tiene un grado de libertad (Fig. 2.3). [13] [14] [28].



**Fig. 2.3 Atractor puntual**

### 2.4.2 Atractor de Ciclo Límite:

Este atractor es el resultado de un sistema periódico donde las trayectorias que describen las variables son siempre iguales, siendo predecible su comportamiento en el tiempo. Un ejemplo de atractor de ciclo límite puede ser el péndulo forzado o ideal, por ejemplo un reloj con pila eléctrica, con la que se compensa la pérdida de energía. El atractor en este caso es una elipse con brazos espirales en el exterior y en el interior que terminan en un bucle cerrado hacia el cual convergen las trayectorias vecinas (Fig. 2.4). [13] [14] [28].

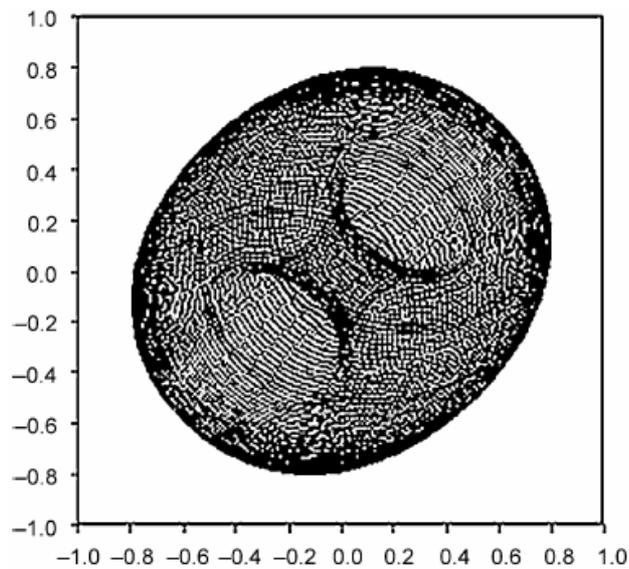


**Fig. 2.4 Atractor de ciclo límite**

### 2.4.3 Atractor Toroidal:

Cuando el sistema es cuasiperiódico se genera un atractor similar al del ciclo límite, aunque las trayectorias no siempre pasan por los mismos puntos, se aprecia el comportamiento no uniforme. Un ejemplo de atractor toroidal es un circuito eléctrico donde se tienen dos ciclos límites (A y B) separados, que interactúan entre sí.

Si se ignora el ciclo A, el movimiento del ciclo B, tiene un atractor de ciclo límite simple. Así mismo, si se ignora el ciclo B, el movimiento de A tiene un atractor de ciclo límite simple, pero, si los dos interactúan, el tamaño del espacio-fase aumenta y los ciclos límite antes independientes se entrelazan. Es como si el ciclo A fuera impulsado en un círculo por el ciclo B. El resultado de que un ciclo impulse a otro en círculos es la generación de una figura con forma de rosquilla tipo dona, llamada atractor toroidal, el cual es una estructura más compleja y evolucionada que los atractores anteriores (Fig. 2.5). [13] [14] [28].



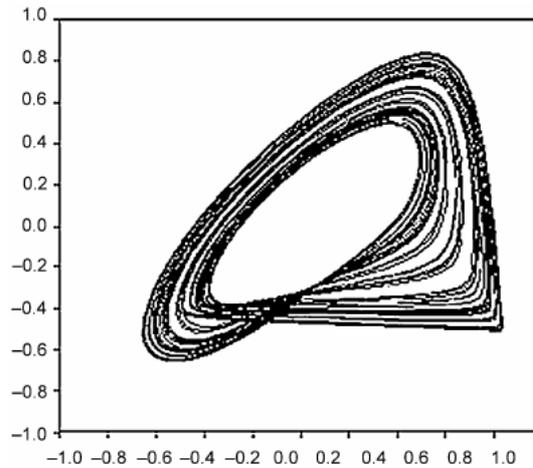
**Fig. 2.5 Atractor toroidal**

#### **2.4.4 Atractor Extraño:**

En 1987 Moon define el atractor característico de los sistemas con comportamiento caótico, pero en 1991 Brindley llama la atención sobre el hecho de que “aunque por algún tiempo los conceptos de atractor extraño y comportamiento caótico eran vistos como sinónimos, se reconoce la existencia de atractores extraños no caóticos en osciladores forzados no lineales cuasiperiódicos”. [55] [15]

El término extraño se refiere a la estructura del atractor y la palabra caótico se refiere al comportamiento de las trayectorias sobre el atractor, donde éste es caótico si las órbitas cercanas al mismo divergen con el tiempo [45].

En la Fig 2.6 se presenta un diagrama de un atractor extraño.



**Fig. 2.6 Atractor extraño**

## 2.5 Exponente de Lyapunov

Un sistema es estable, si y solo si, cuando se produce una perturbación, su trayectoria a través del diagrama de espacio de estados cambia sólo un poco. El matemático ruso A. M. Lyapunov encuentra que es posible emplear un número para simbolizar el cambio causado por una perturbación; Lyapunov divide el tamaño de la perturbación en un instante dado por su tamaño en un momento anterior. Entonces, se realiza la misma operación a varios intervalos y promedió los resultados, esta cantidad se le conoce con el nombre de exponente de Lyapunov, el cual describe cuanto cambiará en promedio una perturbación.

Si el exponente de Lyapunov es menor de cero, o negativo (que indica una convergencia exponencial), las perturbaciones mueren a la salida y el sistema es estable. Si el exponente de Lyapunov es mayor que cero o positivo (que indica una divergencia exponencial), se desarrollan las perturbaciones y el sistema es inestable. [25].

Todos los sistemas caóticos tienen un exponente de Lyapunov mayor que cero, de aquí que siempre sean inestables. Los sistemas dinámicos continuos siempre tienen por lo menos un exponente que es exactamente cero, con estos

conceptos de Lyapunov es posible dar definiciones exactas de la dinámica conservativa, disipativa y caos. [8] [25]

Si se consideran dos puntos alineados en la dirección  $\alpha$  y separados por una distancia  $L_\alpha(t)$  en un tiempo  $t$ , se denota por  $L_\alpha(t+\tau)$  la distancia en un tiempo  $t+\tau$ , el exponente de Lyapunov se define por la proporción de expansión media

$$\lambda_\alpha \equiv \frac{1}{\tau} \left\langle \log \frac{L_\alpha(t+\tau)}{L_\alpha(t)} \right\rangle \quad (4)$$

Si  $\lambda_\alpha$  es positivo los dos puntos se separan exponencialmente,  $\alpha$  especifica la dirección y se necesitan tantos  $\alpha$  como grados de libertad que tenga el sistema [39], esto es, en un espacio-fase  $d$ -dimensional, se necesita  $d$  exponentes de Lyapunov  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ . La dimensión de Lyapunov o fractal del sistema está dada por la fórmula,

$$D = j - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_d}{\lambda_d} \quad (5)$$

donde se colocan los  $\lambda_d$  en orden de magnitud ascendente y  $d$  es el entero más pequeño, tal que se cumpla la siguiente condición,

$$d \equiv \min \left\{ n \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0 \right\} \text{ donde } n \in \mathbf{N} \quad (6)$$

Los exponentes de Lyapunov positivos (+), se pueden asociar con una alta sensibilidad a las condiciones iniciales (caos o divergencia), mientras que los exponentes negativos (-), miden la convergencia exponencial de las trayectorias sobre el atractor.

Las magnitudes de los exponentes de Lyapunov cuantifican la dinámica del atractor desde el punto de vista de la información en bits. Dichos exponentes miden la rapidez con la cual en un proceso se crea o se destruye la información, expresando la misma en bits de información por unidad de tiempo. Su recíproco, es el límite de predictibilidad de un sistema [8] [29].

El exponente de Lyapunov, mide los puntos vecinos de cualquier sistema dinámico y como se separan unos de otros, también mide como se descomponen las

correlaciones del sistema y cuán rápido se difunden los efectos de una pequeña perturbación. [8].

Los exponentes de Lyapunov indican la razón de expansión que es la divergencia ( $\lambda > 0$ ) o de contracción que es la convergencia ( $\lambda < 0$ ) que sufre una figura de determinada señal y de esta manera se analiza su comportamiento. Por lo anterior, es difícil calcular los exponentes de Lyapunov negativos, la convergencia debido a los exponentes desaparece rápidamente, mientras que la trayectoria debido a los exponentes positivos es más duradero. Por esta razón, se puede calcular el máximo exponente de Lyapunov con cierto margen de error tolerable, que se utiliza para estimar la sensibilidad de un fenómeno a las condiciones iniciales [8].

## 2.6 Entropía

El concepto de entropía, aparece en la física y se introduce por el físico alemán Rudolf Clausius durante el siglo XIX, corresponde a una medida del desorden que presentan las moléculas de un gas; en matemáticas se utiliza una definición más abstracta basada en la información, dada una variable aleatoria discreta  $X$  que tiene una determinada distribución de probabilidad  $p(x)$ , la entropía de  $X$  es una medida de la información que recibe y está dada por, [2] [27] [38].

$$H(X) = - \sum_{x \in X} p(x) \log_b p(x) = \sum_{x \in X} p(x) \log_b \frac{1}{p(x)} = E \left[ \log_b \frac{1}{p(x)} \right] \quad (7)$$

La base ( $b$ ) del logaritmo es la unidad en que se mide la información.

La entropía conjunta de dos variables aleatorias está dada por,

$$H(X, Y) = - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log_2 p(x, y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log_2 \frac{1}{p(x, y)} = - E [\log_2 p(x, y)] \quad (8)$$

siendo  $E = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y)$

La información mutua  $I(X;Y)$ , entre  $X$  y  $Y$ , es la medida de la cantidad de información que una variable aleatoria tiene sobre la otra y se calcula de la siguiente manera,

$$I(X;Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \log_2 \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} = \quad (9)$$

$$D(p(x,y) // p(x)p(y)) = E_{p(x,y)} \log_2 \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}$$

La relación entre información mutua y entropía se deduce de la siguiente manera,

Dado que la probabilidad de dos variables aleatorias se puede reescribir de la forma

$$p(x,y) = p(y)p\left(\frac{x}{y}\right) \quad (10)$$

entonces, la ec.(9) utilizando (10) se obtiene (11) y (12)

$$I(X;Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \log_2 \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \log_2 \frac{p(y)p\left(\frac{x}{y}\right)}{p(x)p(y)} =$$

$$= \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \log_2 p\left(\frac{x}{y}\right) - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \log_2 p(x) =$$

$$= - \sum_{x \in X} p(x) \log_2 p(x) - \left[ - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \log_2 p\left(\frac{x}{y}\right) \right] = H(X) - H\left(\frac{X}{Y}\right) \quad (11)$$

$$I(X;Y) = I(Y;X) = H(X) - H\left(\frac{X}{Y}\right) = H(Y) - H\left(\frac{Y}{X}\right) \quad (12)$$

Y lo que define como simetría,

$$I(X;Y) = H(Y) - H\left(\frac{Y}{X}\right) \quad (13)$$

La información mutua y la entropía se definen como la información aportada por una variable aleatoria sobre otra, el conocimiento de  $Y$  reduce la incertidumbre sobre  $X$ . [2] [27] [38].

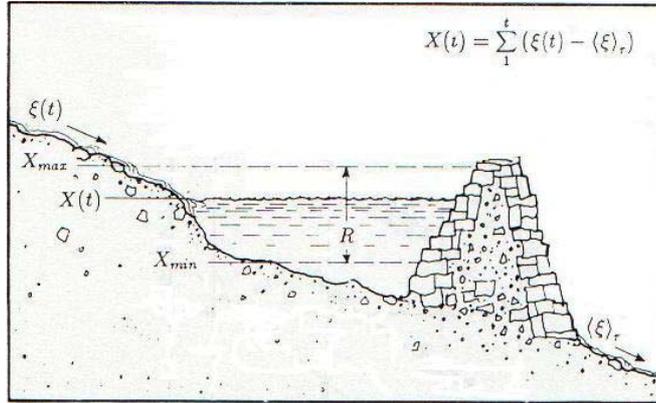
Partiendo de la entropía de la información de Shannon, Kolmogorov-Sinai, se elabora el concepto de entropía generada por unidad de tiempo, la cual demuestra que puede utilizarse para manifestar el caos. La entropía de Kolmogorov-Sinai permite predecir:

- ✚ El nivel de incertidumbre de los siguientes  $n$  eventos,
- ✚ La medida en que se pierde la precisión en las predicciones en función de cómo se incrementa el horizonte de predicción,
- ✚ La rapidez con que se pierde información sobre un sistema.

La entropía de Kolmogorov-Sinai a semejanza con la entropía termodinámica, mide la pérdida de información que experimenta el sistema en su evolución y se expresa en bits/s. En sistemas deterministas no hay pérdida de información, en consecuencia la entropía es nula, mientras que en sistemas aleatorios se pierde toda la información por lo que la entropía tiende a infinito y en sistemas caóticos la entropía toma valores altos pero finitos. [2] [40]

## 2.7 Exponente de Hurst

Para conocer la persistencia de un sistema, esto es, la autosemejanza de una serie consigo misma al evolucionar en el tiempo; se calcula el exponente de Hurst. Harold E. Hurst estudia las series de tiempo relacionadas con el caudal del río Nilo y los problemas relacionados con el almacenamiento de agua (fig. 2.7);. para estos estudios, diseñó un método estadístico que describe con todo detalle en su libro "Long-Term Storage, An Experimental Study", 1965; Hurst investiga muchos fenómenos naturales y utiliza una relación adimensional  $R/S$  donde  $R$  indica el rango (la diferencia entre el valor de la descarga máxima acumulada de un lago y la mínima, a lo largo de un periodo de estudio) y  $S$  la desviación típica de los valores observados de las descargas [31] [32].



**Fig. 2.7 Problema de Hurst**

Retomando los estudios de Hurst y para calcular R se obtienen los valores de  $\langle \xi \rangle_\tau$ ,

$$\langle \xi \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi(t) \quad (14)$$

donde  $\langle \xi \rangle_\tau$  es el flujo promedio en  $\tau$  años

Por lo que para la variable aleatoria discreta  $X(t)$  que depende del tiempo

$$X(t) = \sum_{i=1}^t \{ \xi(t) - \langle \xi \rangle_\tau \} \quad (15)$$

$X(t)$  que representa la desviación acumulada durante un periodo  $t$

$$R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} X(t) - \min_{1 \leq t \leq \tau} X(t) \quad (16)$$

Para  $S(t)$

$$S = \left( \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \{ \xi(t) - \langle \xi \rangle_\tau \}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

que representa la desviación acumulada

$$R/S = \left( \frac{\tau}{2} \right)^H \quad (18)$$

Donde  $R/S$  es el rango reescalado y  $H$  el exponente de Hurst.

Los pasos para obtener el exponente de Hurst son los siguientes,

Se descompone la serie de tiempo en un conjunto de intervalos de una amplitud temporal determinada,  $\tau_H$ .

Se calcula la media para cada intervalo y las desviaciones acumuladas de esta media.

Se determina la amplitud normalizada (R/S) arriba descrita.

A cada valor de  $\tau_H$  se asigna el valor promedio de R/S sobre todos los subintervalos que determina.

Se elige otro  $\tau_H$  y se procede de modo semejante, de modo que se obtiene un conjunto de valores  $\tau_H$  y sus R/S asociados.

El cálculo práctico se hace graficando  $\log(R/S)_{\tau_i}$  vs  $\log(\tau_H)$  donde la pendiente de la recta obtenida es el exponente de Hurst. Valores de  $0.5 < H < 1$  indican persistencia (un periodo de crecimiento es seguido de otro análogo), mientras que los valores de  $0 < H < 0.5$  corresponden a un comportamiento antipersistente (un periodo de crecimiento es seguido por otro de decrecimiento), si las curvas tienden a oscilar de modo errático se trata de un sistema más complejo; un valor de  $H = 0.5$  indica que la señal es aleatoria. El exponente de Hurst es una medida de la complejidad del sistema y de la información que conserva al cabo de cierto tiempo. [34]

## 2.8 Dimensiones

La geometría clásica, a pesar de su gran utilidad, tiene limitaciones cuando se pretende medir estructuras naturales. Por ejemplo para medir la superficie de una piedra, se aproxima a una esfera o a un cubo; de igual manera, si se desea saber cual es la superficie de absorción del intestino, la medida cambia según la resolución que se utilice para hacerlo, ya que el intestino presenta pliegues; una línea irregular que tiende a llenar un espacio bidimensional tiene una dimensión fraccionaria entre 1 y 2, así como un plano que se pliega tiende a llenar un espacio tridimensional teniendo una dimensión fraccionaria entre 2 y 3. Mandelbrot denomina esta dimensión fraccionaria con el nombre de fractal, una forma fractal tiene una característica básica que contribuye a reconocerla y que se llama de autosimilitud, lo

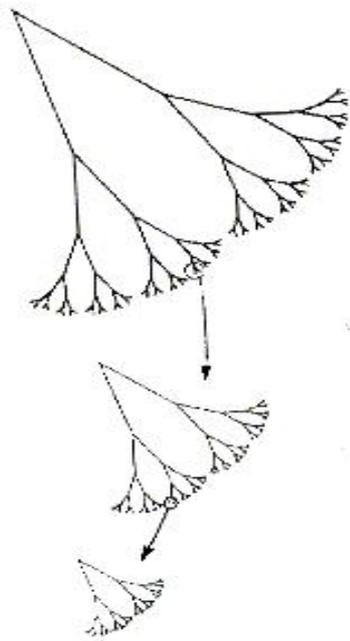
cual quiere decir que dicha forma consiste en un motivo geométrico que se repite a sí mismo a cualquier escala que se le observe (Fig. 2.8). [53]

Muchos objetos que se encuentran en la naturaleza principalmente la biología son autosimilares, por ejemplo el sistema vascular, el sistema de la bifurcación de bronchi en los pulmones, todo el subsistema de la red de neuronas en el cerebro. A pesar de ser muy complejos en virtud de su detalle infinito, los fractales se generan por procedimientos relativamente simples; la matemática sueca H. Von Koch propone en 1904, una curva que cumple los requisitos para ser un fractal y que se construye de manera sencilla, se parte de un segmento de recta de longitud 1 y en su tercio medio se construye un triángulo equilátero. La longitud de la línea es ahora  $4/3$ , si se repite la operación se obtiene la figura con una longitud  $(4/3)^2$  e iterándola infinitas veces se llega a una forma fractal de longitud infinita y cuyos extremos están separados por la misma distancia que el segmento inicial de longitud 1 [13] [39].

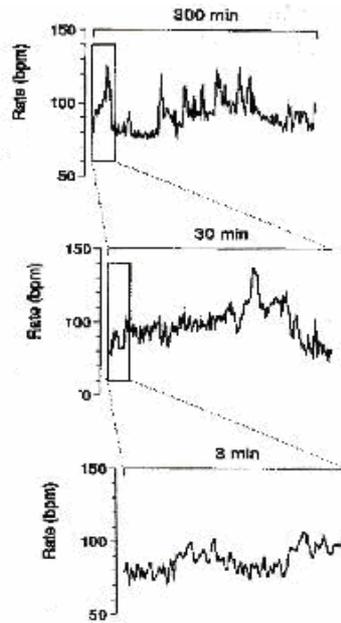
Un atractor, como forma geométrica, no puede estar sobre una superficie, ya que de ser así llegaría un momento en que las trayectorias, al no ser paralelas, forzosamente se cruzarían. Este atractor tiene más de dos dimensiones, que son las que corresponden a una superficie y al mismo tiempo menos de tres dimensiones porque no ocupa la totalidad del espacio-fase; luego entonces un atractor extraño es una figura geométrica de dimensión mayor que dos y menor que tres, o sea una situación intermedia entre una superficie y un volumen. Para concebirse es necesario salir de la geometría de Euclides donde las dimensiones son números enteros, para dar cabida a formas irregulares o fragmentadas que se caracterizan con dimensiones que no sean enteros. [25] [27]

Muchos sistemas tienen características fractales, en el sistema nervioso en particular, la repetida ramificación de las neuronas en axones y dendritas puede parecer caótica, pero si se ve detenidamente, se nota que la misma y compleja ramificación se repite en el cerebro cada vez más pequeños, en la fig. 2.9 se muestra un proceso fractal en el sistema nervioso central encontrado por Goldberger, en el

cual se aprecia la autosemejanza a cualquier escala, de esta manera, se puede decir que la dimensión fractal es un índice que permite cuantificar mejor las características geométricas de los objetos. [41] [42]



**Fig. 2.8 Autosemejanza**



**Fig. 2.9 Proceso fractal**

### 2.8.1 Dimensión de similitud

La dimensión de similitud no está restringida a números enteros; cuando una forma está compuesta de  $b$  formas similares de tamaño  $1/a$ , la dimensión de similitud para la forma está dada por,

$$D_s = \frac{\log b}{\log a} \quad ..(19)$$

La dimensión de similitud no está definida para formas que no tienen una similitud estricta; para estos casos se utiliza la dimensión de Hausdorff. [31]

### 2.8.2 Dimensión de Hausdorff

Se tiene los números reales  $D > 0$  y  $\varepsilon > 0$  y se cubre un conjunto  $E$  con esferas de diámetro más pequeño que  $\varepsilon$ , denotando los radios de las esferas por  $r_1, r_2, \dots, r_k$  la dimensión de Hausdorff está dada por,

$$M_D(E) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{r_k < \varepsilon} \sum_k r_k^D \quad (20)$$

La dimensión de Hausdorff para el conjunto  $E$  está definida por  $D_H$

### 2.8.3 Dimensión de capacidad

La dimensión de capacidad es una dimensión fraccional introducida por Kolmogorov, parecida a la dimensión Hausdorff en cuanto a la idea del recubrimiento. [25]

Si se considera una forma como un conjunto cerrado en un espacio euclidiano  $d$ -dimensional y se cubre el conjunto con esferas  $d$ -dimensionales de radio  $1/\varepsilon$ , la dimensión de capacidad  $D_c$  esta dada por,

$$D_c \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \quad \text{donde } N(\varepsilon) \text{ es el número mínimo de esferas} \quad (21)$$

Esta definición parece muy diferente de la de Hausdorff pero tienen una relación estrecha; si se considera un recubrimiento eficiente, la medida  $D$ -dimensional de la forma es estimada como  $N(\varepsilon)\varepsilon^D$ ; para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño es equivalente a la siguiente relación,

$$N(\varepsilon) \propto \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{D_c} \quad (22)$$

En el límite de  $\varepsilon \rightarrow 0$  la medida  $D$ -dimensional diverge si  $D$  es más pequeño que  $D_c$  y converge si  $D$  es más grande que  $D_c$ . De aquí que la definición de dimensión de capacidad puede parecer una versión especial de la dimensión de Hausdorff con la restricción de que los radios de las esferas son los mismos. La dimensión de capacidad a veces coincide con la dimensión de Hausdorff pero

algunas veces difiere por lo que se tiene la siguiente relación para cualquier forma.

[27]

$$D_C \geq D_H \quad (23)$$

### 2.8.4 Dimensión fractal

Las dimensiones mencionadas anteriormente son rigurosas, sin embargo, se definen en el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$  y longitud cero y se utilizan en formas geométricas básicas con características de longitud tales como círculos, segmentos de línea, cuadrados y cubos; sin embargo, para determinar la dimensión fractal de espacios bidimensionales o tridimensionales se utiliza la siguiente ecuación,

$$N(r) \propto r^{-D} \quad (24)$$

Donde  $N(r)$  es el número total de segmentos y  $D$  es la dimensión fractal. [4] [10] [13]

### 2.8.5 Dimensión de correlación

La dimensión de correlación es un tipo de dimensión probabilística, la cual depende del refinado del recubrimiento con  $N(\varepsilon)$  elementos de volumen esferas, cubos, etc. de diámetro  $r$ , sobre la figura señal, curva característica, etc. que describe el comportamiento de un sistema, es igual a,

$$d_c := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln C(r)}{\ln r} \quad (25)$$

donde  $C(r)$  es la correlación dada por

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} H(\xi_{i,j}) \quad (26)$$

como una función de la distancia entre dos puntos del espacio representado en la figura 2.1 y la función de Heavyside esta dada por,

$$H(\xi_{i,j}) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \left| r - \|\bar{x}_i - \bar{x}_j\| \leq \varepsilon \right. \\ \\ 1 & \Leftrightarrow \left| r - \|\bar{x}_i - \bar{x}_j\| > \varepsilon \right. \end{cases} \quad (27)$$

donde  $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathfrak{R}$

Para sistemas no lineales la dimensión de correlación no necesariamente es un valor entero. Con series de tiempo, la dimensión de correlación se calcula como la pendiente de la región más lineal de  $\ln C(r)$  vs  $\ln(r)$ , debido a que el hecho de tener una cantidad finita de datos distorsiona el cálculo de  $d_c$  para valores extremos de  $r$  [25] [45].

En general, para calcular la integral de correlación de un conjunto de puntos, se utiliza cada uno de los puntos como de referencia y se cuentan cuantos de los otros puntos se encuentran a una distancia  $r$ , lo cual sugiere que la integral de correlación de un conjunto de puntos dispersos dentro de un volumen  $d$ -dimensional debe ser proporcional a  $r^{d_c}$ , es decir

$$C(r) = Ar^{d_c} \quad \text{donde } A \text{ es una constante de proporcionalidad} \quad (28)$$

o bien,  $C(r) \approx r^{d_c}$

Si se toma el logaritmo de ambos lados se obtiene,

$$\log C(r) = d_c \log(r) + \text{constante} \quad (29)$$

Por lo tanto, para determinar el valor de  $d_c$  conocido como dimensión de correlación, simplemente se grafica  $C(r)$  contra  $r$ , y emplear la escala logarítmica, se calcula la pendiente de las curvas resultantes para varios valores de  $r$ . La ecuación (28) se conoce como regla de escalamiento. [46]

## 2.9 Análisis espectral

El análisis espectral consiste en tomar una señal continua y separar las frecuencias que la componen para diferenciar entre un espectro continuo y un espectro discontinuo; para realizar este análisis se utiliza la transformada de Fourier.

Gracias a los trabajos del matemático francés Fourier (1822) y del matemático alemán Dirichlet (1829) mediante la suma de vibraciones armónicas simples es posible construir una nueva vibración por compleja que sea, del teorema de Fourier

se deduce que cualquier vibración  $x(t)$  que esté definida en un período de tiempo de  $T$  segundos y de la cual dispongamos de  $N$  muestras, se puede reconstruir mediante la suma de ondas armónicas [45]

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{N/2} \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \text{sen}\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right] \quad (30)$$

El teorema de Fourier asigna a cada frecuencia armónica  $f_k$  dos amplitudes,  $a_k$  y  $b_k$ , una para la onda armónica coseno y otra para la onda armónica seno. Por lo que la representación espectral completa reúne las dos amplitudes de cada frecuencia, esto se consigue mediante la definición matemática de la amplitud compleja

$$X_k = a_k - ib_k \quad (31)$$

Con lo que la serie compleja de Fourier se determina por

$$x(t) = \sum_{K=1}^{N/2} X_k e^{i(2\pi kt / T)} \quad (32)$$

Donde

$$e^{i(2\pi kt / T)} = \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + i \text{sen}\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \quad (33)$$

A  $X_k$  se le llama la transformada de Fourier de  $x(t)$  y se valúa mediante

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} x_r e^{-i(2\pi kt / N)} \quad k=0,1,\dots,N-1 \quad (34)$$

de esta manera se calculan los coeficientes  $\{a_k\}$  y  $\{b_k\}$  que definen a la vibración  $x(t)$  y la representación espectral se define mediante el cálculo del módulo  $X_k$

$$|X_k|^2 = a_k^2 + b_k^2 \quad (35)$$

si una señal no es periódica, en vez de una sumatoria de componentes espaciados a intervalos  $1/T$  se tiene una integral con espaciamiento  $1/T$  nulo y los coeficientes de

Fourier discretos  $\{a_k\}$  y  $\{b_k\}$  se transforman en las funciones continuas  $A(\omega)$  y  $B(\omega)$ , las cuales se denominan las componentes de la transformada de Fourier de  $x(t)$  y están definidas por las integrales,

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt$$

$$B(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \text{sen } \omega t dt \quad (36)$$

Por otra parte la serie de Fourier se transforma en la integral de Fourier o también llamada transformada inversa de Fourier dada por [30]

$$x(t) = 2 \left( \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega) \text{sen } \omega t d\omega \right) \quad (37)$$

donde la función compleja se define por

$$X(\omega) = A\omega - iB(\omega) \quad (38)$$

y la forma compleja de la transformada de Fourier de  $x(t)$  es

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (39)$$

El análisis espectral es sensible al ruido, su aplicación esta limitada a determinar la presencia o ausencia de señales periódicas. El análisis espectral, por si solo, no puede distinguir un proceso caótico de uno aleatorio. Pero permite distinguir entre señales con comportamiento periódico y no periódico. [21]

## 2.10 Análisis de Recurrencia Visual

Para el análisis de los sistemas, inicialmente se construyen los gráficos que se originan en el análisis de recurrencia visual, ésta técnica fue aplicada por Eckmann, Kamphorst y Ruelle en 1987, con la finalidad de investigar el comportamiento dinámico de las series de tiempo no estacionarias e identificar la estructura de la

serie de tiempo. Vazquez Coutiño, propone e identifica de manera general 4 tipos de comportamiento en series de tiempo, determinista y posiblemente periódico o multiperiodico, caótico, estocástico y biótico. [22] [27] [72] [73].

Castellini, afirman que con los gráficos de recurrencia, se puede detectar patrones y cambios estructurales ocultos en los datos o ver semejanzas a través de la serie de tiempo bajo estudio; esta es una poderosa herramienta para la visualización de la dinámica altamente dimensional, es decir, si se tiene una función  $y=f(x)$  y se desea examinar su comportamiento, se traza  $y$  vs  $x$  en un gráfico normal, pero si es mas compleja, por ejemplo  $y=f(x, w, z, r)$ , no hay manera de trazar todas las variables en el mismo tiempo. En una gráfica de recurrencia es posible trazar y visualizar la dinámica del sistema en cualquier número de dimensiones. Sin embargo, la interpretación del diagrama no es convencional, requiere de un análisis cuidadoso. [21] [51]

Una vez que el sistema dinámico se reconstruye, el gráfico de recurrencia se puede utilizar para demostrar que tan lejanos o cercanos están los vectores en el espacio reconstruido. Específicamente, el método de recurrencia visual, calcula las distancias euclidianas entre los pares de vectores y las codifica como colores. Esencialmente, el gráfico de recurrencia de una matriz de color codificada, donde cada entrada  $[i][j]_{esima}$  se calcula como la distancia entre los vectores  $Y(i)$  y  $Y(j)$  en la serie reconstruida. Por lo tanto las distancias son graficadas en los colores del mapeo preestablecido y estas se muestran como pixeles coloreados en sus lugares correspondientes. El diagrama de recurrencia visual es esencialmente una representación gráfica de una integración de correlación. Una ventaja y distinción de los mapas de recurrencia es que los diagramas a diferencia de las integrales de correlación, preservan la dependencia de las series de tiempo, además de la dependencia espacial. [51]

Para detectar las fluctuaciones de nivel en el mapa de recurrencia visual se utiliza el método de conteo de cuadros de nivel desarrollado por Vázquez Coutiño, se observa que cualquier señal sea o no dependiente del tiempo puede mostrar

cambios abruptos o ligeros en el nivel de fluctuación, o de ruido, demuestra que los mapas de recurrencia son una técnica que permite visualizar fluctuaciones o cambios de nivel y que dichos gráficos se utilizan para revelar la no estacionalidad de una serie de tiempo. En la técnica de análisis de recurrencia visual Eckmann parte de la serie de datos dependientes del tiempo o de un parámetro  $t$  que puede no ser el tiempo:  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . [27] [72] [73].

La construcción de los gráficos de recurrencia se basa en el cálculo de las distancias mutuas entre puntos de una trayectoria generada por un sistema dinámico. La distancia  $D(y_i, y_j)$  se toma como la p-normal euclidiana o norma máxima, con lo cual se define la matriz de recurrencia como:

$$R(i,j)=D(y_i,y_j), \quad 1 \leq i, j \leq m$$

$$D(y_i, y_j) = \max_{1 \leq k \leq d_E} |x_{i+(k-1)\tau} - x_{j+(k-1)\tau}|$$

En la figura 2.10 se muestra un sistema con tres niveles de fluctuación, se pueden advertir, que los límites de control superior e inferior para el primer nivel de fluctuación, en la figura no es posible detectar la existencia de mas subniveles de fluctuación en los tres niveles mostrados, de esa manera acorde con Vázquez-Coutiño la detección de la existencia de uno o mas niveles de fluctuación, tiene su respuesta en los gráficos de recurrencia ver Fig. 2.11. [72] [73].

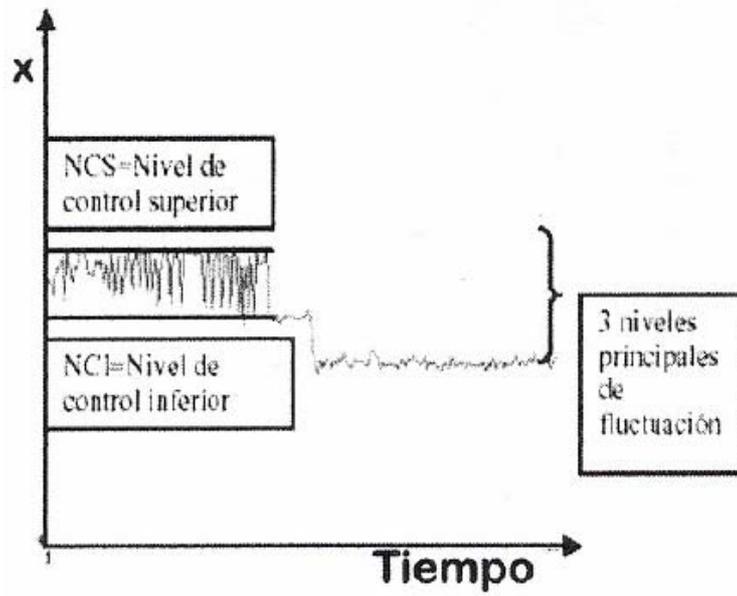


Fig. 2.10 Gráfico de control de Shewart para 3 niveles de fluctuación.

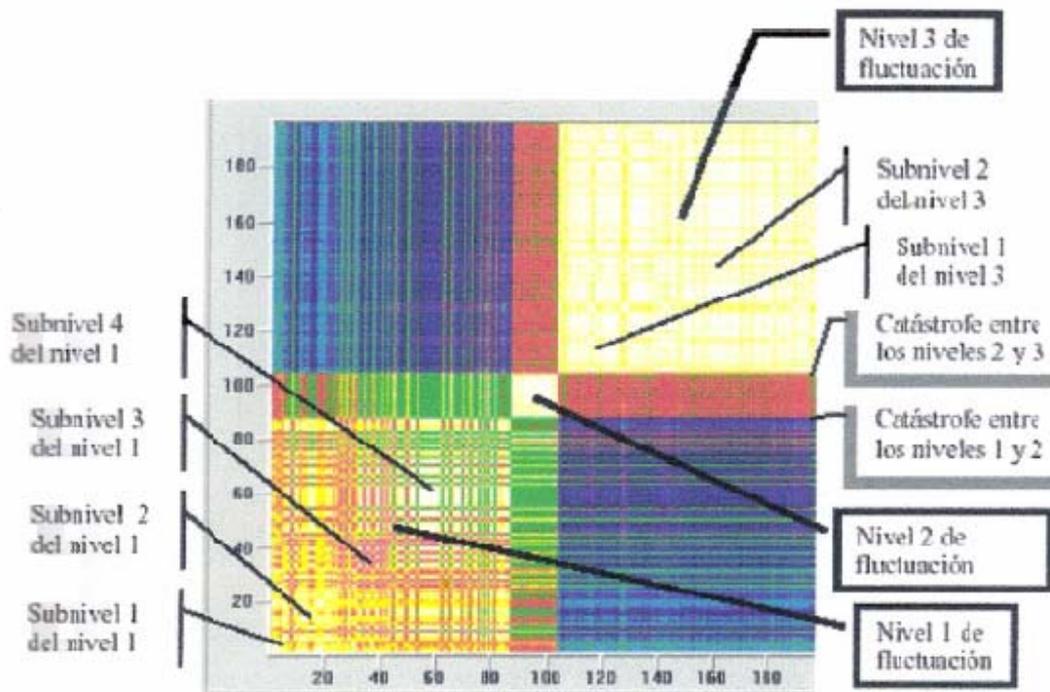


Fig. 2.11 Gráfico de recurrencia

Los gráficos de recurrencia ayudan a detectar con un menor margen de error varios niveles y subniveles de fluctuación ver fig. 2.11, en donde se pueden observar los niveles principales y los subniveles de fluctuación. A cada nivel principal mostrado en la figura 2.11, se le asocia un cuadro de nivel sobre la diagonal principal, se observa claramente 3 niveles principales de fluctuación y 4 subniveles asociados al primer nivel, dos subniveles al tercer nivel.

Estos cambios o catástrofes asociados a la señal en el tiempo, y evidenciados con la técnica de conteo de cuadros de nivel, permite descubrir cambios abruptos muy finos asociados a cambios en la actividad eléctrica o bioelectroquímica en los procesos fisiológicos para el electroencefalograma los mentales. Los gráficos de recurrencia pueden evidenciar con mayor detalle la existencia de los niveles de fluctuación principales y de los subniveles correspondientes a estas fluctuaciones principales. Esta técnica de análisis aplicado en series de tiempo para el caso del cerebro con Parkinson permite establecer otra metodología para observar los cambios asociados a las catástrofes referidas a los cambios que tiene la actividad eléctrica del cerebro de individuos sanos con respecto a aquellos que sufren algún alteración o trastorno fisiológico.

Las técnicas mencionadas integran el marco teórico para el Análisis de Sistemas Dinámicos no Lineales, el cual se utiliza en el análisis de los resultados obtenidos a partir de las 15 series de tiempo de los EEG y que permiten establecer el comportamiento dinámico, se presentan en el capítulo 4 de resultados.

# ELECTROENCEFALOGRAFÍA

### 3.1 Potenciales bioeléctricos

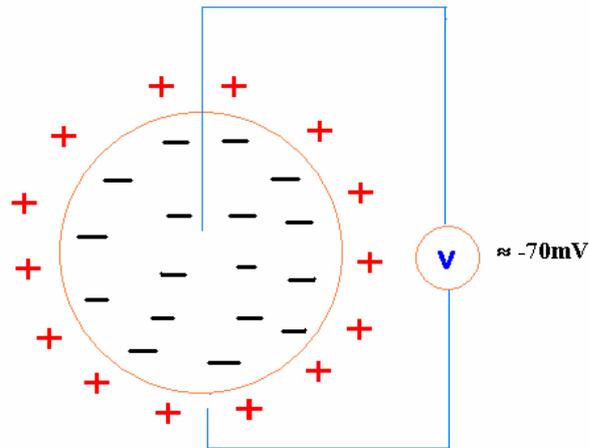
Los potenciales bioeléctricos o biopotenciales son voltajes iónicos producidos como resultado de la actividad electroquímica de ciertos tipos especiales de células denominadas excitables, que pueden ser nerviosas, musculares y algunas glándulares. Su registro requiere de transductores, capaces de convertir los flujos iónicos en corrientes eléctricas, que proporcionen información complementaria para el diagnóstico y tratamiento médico.

#### 3.1.1 Origen del potencial de membrana celular

El potencial de membrana  $V_m$  o potencial de reposo, es la diferencia de potencial entre uno y otro lado de la membrana, debida a la distribución asimétrica de las cargas eléctricas, la cual a su vez, es el resultado de la diferencia de concentración iónica, determinada por el transporte activo y por la permeabilidad selectiva de la membrana.

En general, se acumula un exceso de iones negativos aniones no difusibles dentro de la membrana celular, y un número igual de iones positivos cationes, inmediatamente fuera de la misma. El resultado, es el desarrollo de un potencial de membrana y cuando el flujo neto de iones es cero, es decir, cuando la membrana se encuentra en reposo, se dice que está polarizada. (Fig. 3.1)

Se ha comprobado que el potencial de membrana en reposo varía generalmente entre  $-70$  a  $-95$  mV, y que su valor promedio es alrededor de  $-85$ mV.

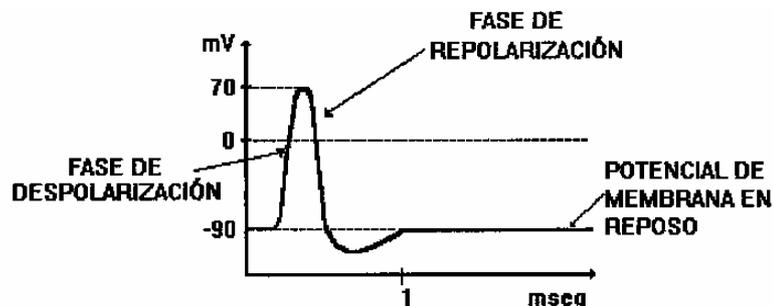


**Fig. 3.1 Potencial de membrana**

### 3.1.2 Potenciales de acción en células nerviosas y musculares.

Las células vivas, se caracterizan por responder a los cambios en el medio o a estímulos. Esta capacidad de las células, se llama excitabilidad y se encuentra especialmente desarrollada en las células nerviosas o neuronas y en las células musculares.

Cuando las células nerviosas o musculares son excitadas, el potencial de membrana o reposo sufre una alteración rápida, la cual dura una pequeña fracción de segundo, aproximadamente 1/1000s, para regresar de inmediato a su valor de reposo (Fig. 3.2)

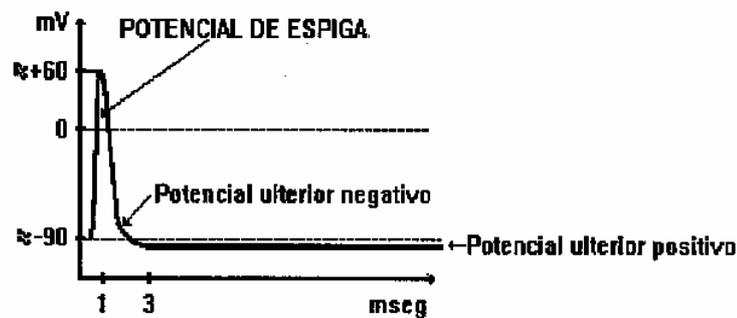


**Fig. 3.2 Potencial de acción nervioso.**

### 3.1.3. Potencial de acción de espiga

Este tipo de potencial, se presenta en fibras nerviosas y dura alrededor de 0.4mseg. El potencial ulterior negativo, depende de la acumulación de  $K^+$  inmediatamente por fuera de la membrana, Fig. 3.3.

El potencial ulterior positivo, dura 50 milésimas de segundo y depende principalmente de la impulsión del sodio hacia afuera.



**Fig. 3.3 Potencial de acción tipo espiga característico de células nerviosas**

### 3.1.4. Factores que intervienen en el desarrollo del potencial de acción.

Las células vivas, se caracterizan por responder a estímulos o a cambios en el medio; esta capacidad se llama excitabilidad. Se encuentra especialmente desarrollada, en las células nerviosas o neuronas y en las células musculares. Se produce en la membrana celular, y consiste en una serie de cambios térmicos, iónicos, metabólicos, eléctricos, que se propagan a lo largo de toda ella.

El potencial de acción, proviene de esta serie de cambios rápidos, que se producen en el potencial de membrana de las células excitables, teniendo la propiedad de extenderse por toda la superficie celular; cuando las células nerviosas o musculares son excitadas, el potencial de reposo o membrana sufre una alteración rápida la cual dura una pequeña fracción de segundo, (aproximadamente 1/1000 s) para regresar de inmediato a su valor de reposo.

Los mecanismos que desencadenan el potencial de acción son: estimulación eléctrica de la membrana, aplicación de productos químicos, lesión mecánica y cambios térmicos. Todos ellos, producen un cambio transitorio en la permeabilidad de la membrana.

El potencial de acción se representa en dos etapas separadas que se denominan:

a).- Despolarización de la membrana celular. Cuando es excitada la célula, la permeabilidad de la membrana para los iones de  $\text{Na}^+$  aumenta bruscamente, de esta manera, muchos iones  $\text{Na}^+$  penetran en el interior de la fibra, llevando consigo suficientes cargas positivas, para causar la desaparición total del potencial normal de reposo. El estado positivo dentro de la fibra, recibe el nombre de potencial invertido. Fig. 3.4.

b).- Repolarización de la membrana celular. Casi inmediatamente después de producida la despolarización, los poros de la membrana, vuelven a ser impermeables a los iones de  $\text{Na}^+$ , se eleva bruscamente la permeabilidad de la membrana a los iones de  $\text{K}^+$ . Esto provoca, el movimiento de cargas positivas, desde el interior de la membrana hacia el exterior, lo que restaura la carga negativa en el interior de la misma. En consecuencia, el potencial invertido desaparece y se reestablece el potencial normal de membrana en reposo.

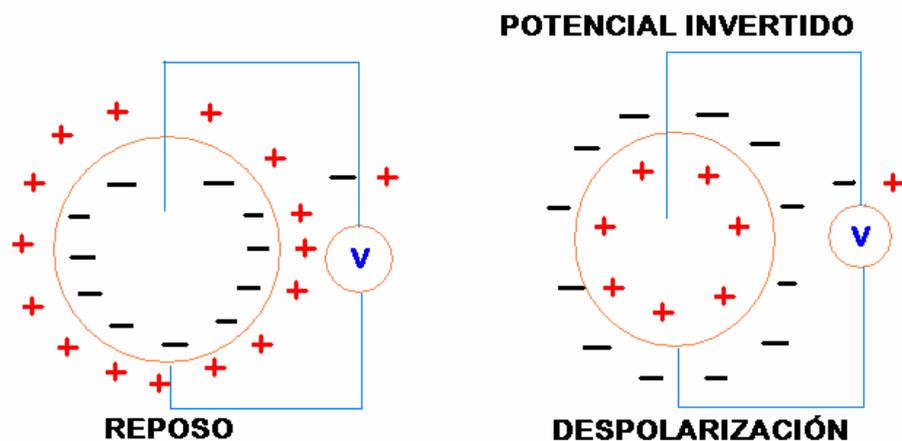


Fig. 3.4 Representación esquemática del potencial de acción

### 3.2. Comportamiento eléctrico de la membrana

La célula está formada por una membrana celular, un citoplasma que contiene diversos organelos y un núcleo central. La membrana se comporta como un capacitor en combinación con una resistencia (Fig. 3.5), además trabaja como barrera selectiva para las diferentes sustancias químicas de los organelos de la célula, permitiendo el paso a través de ella de los iones, pero no de las partículas aniónicas y proteicas. [47].

Las sustancias, atraviesan la membrana celular, a través de dos procesos:

La difusión, que es el movimiento continuo y al azar, de las moléculas y sustancias, causado por los movimientos cinéticos de la materia.

El transporte activo, es el movimiento de sustancias producido por procesos químicos, que proporcionan la energía necesaria, para originar este movimiento, el cual depende, de los procesos enzimáticos ocurridos en la membrana. Durante este proceso, las moléculas se desplazan contra un gradiente de concentración, de presión o eléctrico.

Existe un mecanismo de transporte activo de sodio y potasio en todas las células, el cual es más eficaz para transportar sodio que potasio, de manera que siempre se mantiene un gradiente de concentración a través de la membrana celular, a pesar de que existe movimiento neto de sodio hacia el interior de la célula y de potasio hacia la parte externa de la misma.

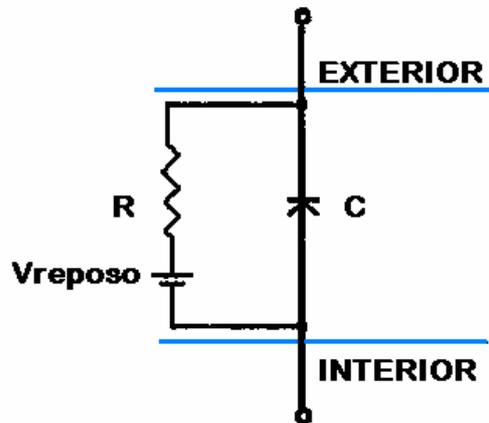
La diferencia de concentración iónica, determinada por el transporte activo y por la permeabilidad selectiva de la membrana, genera el potencial de membrana.

El comportamiento de la impedancia a través de la membrana es el siguiente:

a. Alta impedancia: cuando se pasa de CD (corriente directa) o alterna de baja frecuencia.

b. Baja impedancia: cuando se pasa CA (corriente alterna) de alta frecuencia.

Por lo tanto, la membrana desde el punto de vista eléctrico, se comporta como un capacitor en combinación con una resistencia, como se observa en la Fig. 3.5.



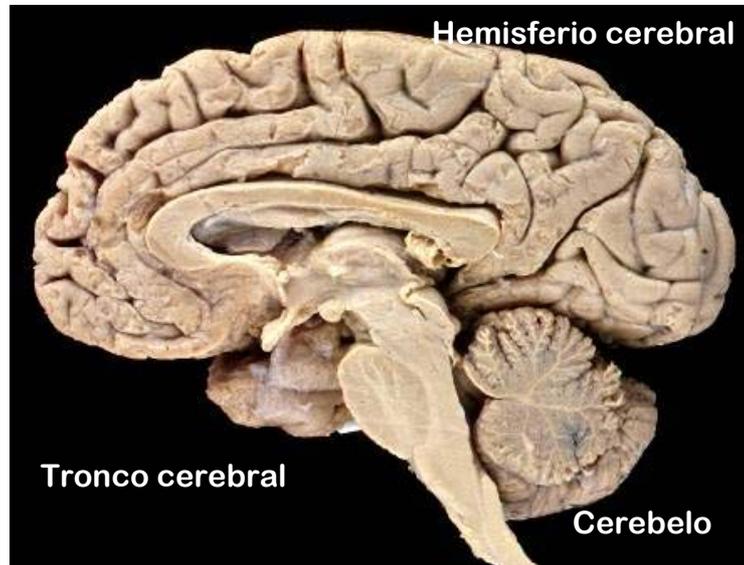
**Fig. 3.5 Modelo eléctrico de la membrana celular**

### 3.3 El cerebro

El encéfalo humano es una estructura relativamente pequeña, que pesa alrededor de 1,400 gramos y representa aproximadamente el 2% del peso total del cuerpo humano, de forma ovoide, es una masa de tejido gris-rosáceo, que se estima está compuesta por unos 100.000 millones de células nerviosas o neuronas, conectadas unas con otras y responsables del control de todas las funciones mentales. Además de las neuronas, el cerebro contiene células de la glía o neuroglia que son células de soporte, vasos sanguíneos y órganos secretores.

Por lo general, se considera como un órgano relacionado únicamente con el pensamiento, la memoria y la conciencia entre otras. Toda la información captada, es conducida centralmente hacia el encéfalo, a través de un complicado sistema sensorial. Receptores de diversas clases actúan como transductores que transforman los estímulos físicos y químicos del ambiente en impulsos eléctricos nerviosos, que el encéfalo puede interpretar y darles un significado. La capacidad de discriminar entre estímulos, de una o de diferentes modalidades constituye una de las bases principales del aprendizaje. La atención, la conciencia, la experiencia emocional y el sueño son todas funciones nerviosas centrales Fig. 3.6. [19,20].

El encéfalo, aparece dividido en tres partes distintas pero conectadas que son: el cerebro, el cerebelo y el tronco cerebral, que están protegidos por el cráneo y además cubiertos por tres membranas denominadas meninges. Fig. 3.6

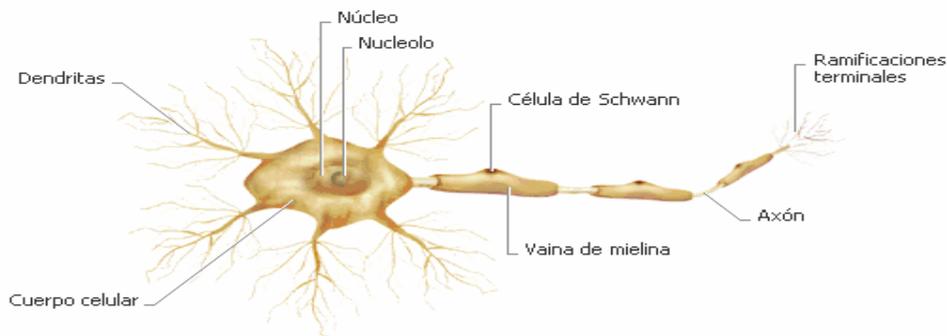


**Fig. 3.6 Partes que componen el cerebro.**

### **3.3.1 Flujo de corriente eléctrica a lo largo de los nervios**

Las fibras nerviosas son muy semejantes a un cable eléctrico, ya que poseen un núcleo, conductor central de axoplasma, rodeado por una membrana aislada y reforzada a menudo con capas adicionales no conductoras de mielina, sin embargo, las características de conducción de las fibras nerviosas, son superiores a las de un cable ordinario.

La neurona, es la unidad funcional del sistema nervioso y está formada por el cuerpo celular, que contiene el núcleo y la mayor parte del citoplasma; unas prolongaciones cortas, normalmente muy ramificadas, que salen del cuerpo celular y que reciben el nombre de dendritas, y una prolongación más larga denominada axón. El axón de las neuronas del sistema nervioso periférico, está rodeado de múltiples capas de membrana celular, (mielina) de una célula de Schwann. Esta capa mielínica, está interrumpida periódicamente en los nódulos de Ranvier. Fig. 3.7



**Fig. 3.7 Estructura de una neurona**

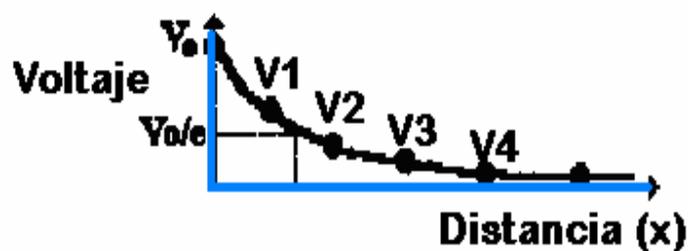
Se considera una longitud unitaria de axón, llamado  $R_M$  a la resistencia transversal asociada y  $R_L$  a la resistencia longitudinal del axoplasma, se puede pensar que todo axón contiene numerosas unidades de este tipo de extremo a extremo. Si el medio externo ofrece una resistencia insignificante al flujo de la corriente, entonces se ponen a todos los extremos exteriores de la  $R_M$  individual, como si estuviera en cortocircuito, produciendo una red escalera de resistores como se muestra en la Fig. 3.8, que llamaremos circuito equivalente de la fibra nerviosa.

Si se aplica un potencial  $V_0$  en el inicio de esta red, en el primer arreglo, la corriente generada se divide circulando parte por  $R_M$  y el resto por  $R_L$  para entrar al siguiente arreglo. Mientras mayor sea la resistencia de la membrana  $R_M$  y más pequeña la del axoplasma  $R_L$ , mayor será la tendencia de la corriente a transportarse hacia los diferentes arreglos.

A menos que el aislamiento sea perfecto, o el axoplasma infinitamente conductor, la corriente que entra a la segunda célula, será más pequeña que la que entró a la primera en una razón fija. Esto significa, que en cada arreglo el potencial de acción descenderá en una proporción fija, conforme se va alejando, lo que resulta,

en una declinación exponencial del voltaje como una función de la distancia a lo largo del axón.

Por consiguiente, el potencial está dado por  $V_0 e^{-x/\lambda}$ , donde  $\lambda$  es un parámetro llamado constante de espacio, que describe la rapidez con que declina el voltaje como función de la distancia  $x$ ;  $\lambda = (R_m/R_L)^{1/2}$ , y como es de esperarse mientras mas permeable es el axón, la  $R_m$  es mas pequeña y la constante del espacio más corta.

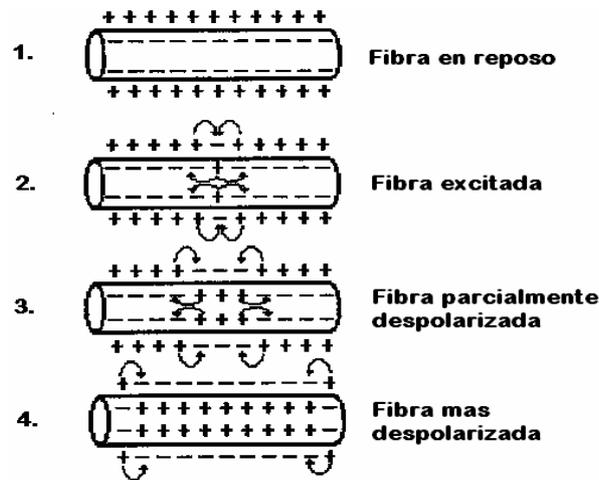


**Fig. 3.8 Difusión pasiva de la corriente a lo largo de un axón.**

3.3.2 Propagación del potencial de acción y regeneración cíclica de los potenciales de acción.

Las propiedades de los potenciales de acción del nervio, demuestran en forma bastante clara que éstos no son pasivos, sino que son activamente regenerados, conforme pasan a lo largo de las fibras se amplifican de tal manera, que vencen las enormes pérdidas que experimentan a través de la membrana.

Un potencial de acción desencadenado en cualquier punto de una membrana excitable, puede a su vez excitar porciones vecinas de la misma, causando la propagación de dicho potencial. Este proceso es cíclico y presenta tres etapas; primero, un mecanismo por el cual el potencial resulta en un flujo pasivo de corriente y, por lo tanto, en la despolarización de las regiones mas abajo del axón, segundo, esta despolarización dispara algún cambio en la membrana, y tercero, se produce un nuevo potencial que es mucho mayor al que lo disparó. Como se muestra en la Fig. 3.9.



**Fig. 3.9 Propagación de los potenciales de acción en ambas direcciones a lo largo de la fibra conductora.**

### 3.4. Electroencefalograma

Edgar Douglas Adrián, fue el primero en registrar potenciales de fibras nerviosas simples. Pero Hans Berger se conoce como el padre de la electroencefalografía.

Electroencefalograma EEG es el registro extracelular de la actividad eléctrica cerebral en el cuero cabelludo. Para que un potencial pueda registrarse desde la superficie del cráneo, es preciso que grandes cantidades de tejido nervioso produzcan de manera simultánea corriente eléctrica, es decir que se exciten. La descarga parcial de grupos de neuronas, produce corrientes duraderas que oscilan lentamente al cambiar la excitabilidad de las mismas, mientras que grandes grupos descargan y sincrónicamente producen corrientes intensas.

El registro simultáneo con electrodos superficiales y micro electrodos extracelulares, demuestra correlaciones entre la actividad en la superficie y las descargas de las células piramidales situadas superficialmente. Sin embargo, cuando se sigue la actividad de una neurona simple por largos períodos, la relación entre

este evento unitario y el EEG, resulta ser aleatorio. Estas características hacen creer que existe cierta sincronía y aleatoriedad en las interacciones entre neuronas.

Debido a que los electrodos de superficie que se utilizan en electroencefalografía, promedian los potenciales de 4 numerosos dipolos con capas internas que se proyectan hacia la superficie del cuero cabelludo, cualquier cambio de potencial registrado, debe indicar la formación simultanea de un gran número de dipolos orientados de forma similar.

Es probable que el registro de EEG, represente el efecto promediado de numerosos potenciales postsinápticos excitatorios e inhibitorios, inducidos en diferentes partes de las dendritas de las células piramidales, que se encuentran ordenadas perpendicularmente.

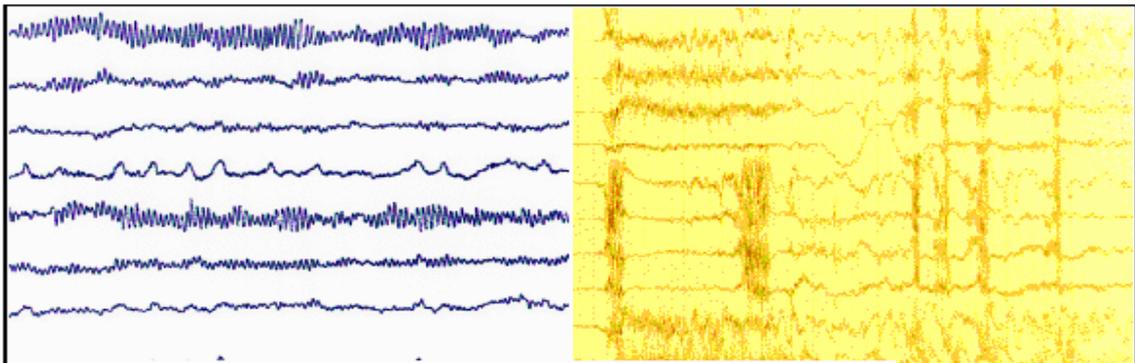
Varios experimentos de aislamiento cortical, han demostrado que la sincronización de las células piramidales, depende de la entrada de fuentes subcorticales, mientras que la actividad superficial parece reflejar el grado de sincronización de las células piramidales más que del total de la actividad neuronal.

El EEG presenta una amplitud, varios órdenes menores que los potenciales postsinápticos, y se estima que la sincronía que tiene el 1% de las neuronas corticales, puede ser suficiente para producir actividad electroencefalográfica de amplitud normal.

Actualmente la electroencefalografía, es una disciplina en gran parte empírica, que se basa en observaciones de fenómenos eléctricos particulares, presentes en ciertos estados fisiológicos y en condiciones de desordenes clínicos.

#### **3.4.1. Formas de las ondas electroencefalográficas**

El electroencefalograma está compuesto por una serie de ondas eléctricas generadas por la corteza cerebral, las cuales son indicativas de la actividad del cerebro (fig. 3.10).

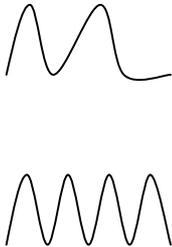
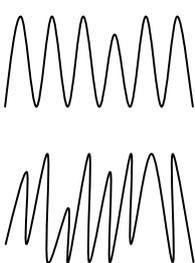
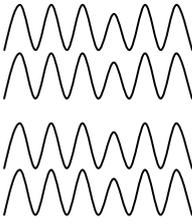
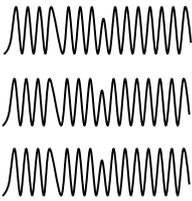


**Fig. 3.10 Electroencefalograma**

El criterio de normalidad es difícil de definir, debido a la variación entre individuos, así como al estado de alerta y a la edad, ya que estas variables fisiológicas, tienen una relación muy estrecha con las características de EEG.

La amplitud de las señales, se encuentran en el rango de 0 a 300 mV con un ancho de banda de 0.5 a 100 Hz. La mayor parte del tiempo, son asíncronas y no tiene un patrón. La aparición de patrones, se asocia con la existencia de patologías cerebrales o con ciertas ondas de funcionamiento normal, como se muestra en la tabla 3.1

**Tabla 3.1 Características de las ondas de la señal electroencefalográfica**

Ritmo	Delta (d)	Teta (t)	Alfa (a)	Beta (b)
Componentes en frecuencia	Hasta 4	4.1-8	8.1-13	b1:13-25 b2:25-50
Amplitud (mV)	100	Niños 50 Adultos 10	Infantes 20 Niños 75 Adultos 50	10-20
Región craneal	Frontal	Temporal	Parietal Occipital	Frontal
Condición	Sueño profundo (adulto)	Somnolencia	Reposo con ojos cerrados	Reposos con ojos abiertos
Forma de onda				

Fuente: García, G., Jiménez, G., Ortiz, P., Peña, C. Potenciales bioeléctricos: origen y registro.

### 3.4.2 Derivaciones para registro del EEG

Derivación es la manera en que se conectan las terminales de entrada del amplificador de EEG a los electrodos, y el montaje es un arreglo de las derivaciones en una secuencia particular.

### 3.4.2.1 Colocación de los electrodos

Debido a que las actividades registradas difieren de una región del cuero cabelludo a otra, ya que para muchas aplicaciones clínicas la información concerniente a esta topografía es importante, es necesario el registro simultáneo de al menos 20 electrodos distribuidos en toda la superficie del cuero cabelludo. Es un sistema ideal de colocación, la posición de los electrodos se determina por marcas estándar en el cráneo, los electrodos se colocan a intervalos iguales a lo largo de los ejes antero-posterior y transversos de la cabeza, la posición es simétrica con respecto al plano sagital y cubre adecuadamente todas las partes de la misma.

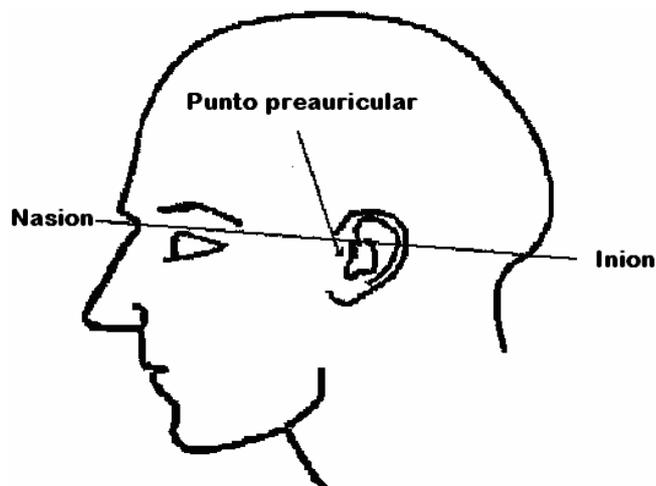
Existen varios sistemas de colocación de electrodos para registro electroencefalográfico, como son el Illinois, Montreal, Aird Cohn, Lennox, Merlis, Gaustaut, Schwab, Marshal, etc. el más usado en la actualidad y que cumple bien los criterios antes mencionados es el sistema 10-20 (método Montreal, Jasper, 1958).

El sistema 10-20, es un procedimiento para colocar y medir las posiciones a espacios iguales en el cuero cabelludo, utiliza marcas identificables en el cráneo que sirven como punto de referencia.

El sistema 10-20, se basa en la relación comprobada que existe entre un sitio medido de electrodos, las estructuras y áreas corticales subyacentes. El sistema se denomina 10-20, porque los electrodos se colocan espaciados al 10 o 20% de la distancia total entre un determinado par de marcas en el cráneo. El sistema 10-20, se diseñó para dar una cobertura adecuada de la cabeza, con flexibilidad para la colocación de electrodos adicionales, dentro del marco establecido, empleando la nomenclatura 10-20.

### 3.4.2.2 Nomenclatura del sistema 10-20

En el sistema 10-20, se utilizan cuatro marcas sobre el cráneo: el nasion, elinion y los puntos preauriculares izquierdo y derecho. (Fig. 3.11)



**Fig. 3.11 Vista lateral izquierda de las marcas sobre el cráneo.**

Fuente: García, G., Jiménez, G., Ortiz, P., Peña, C. Potenciales bioeléctricos: origen y registro.

La ubicación de las marcas es la primera etapa del procedimiento de medición. Una vez localizados, se marcan sobre la piel con un lápiz ya que son puntos de referencia desde los cuales se realizan las mediciones básicas.

La nomenclatura se diseñó, para dar a cada sitio del electrodo una abreviatura alfabética lógica, que la identifique de inmediato con el lóbulo o área del cerebro a que se refiere. Todos los caracteres alfabéticos, se refieren al área del cerebro sobre la cual se localizan, con excepción de la “z”, que se utiliza para el número o sea la referencia cero de la línea media. Todos los puntos de la línea media, los que se encuentran sobre la línea recta que une el nasion y el inion tienen el símbolo “z”. Procediendo de adelante para atrás los sitios de electrodos sobre la línea media son:

**Fz**= Frontal cero línea media frontal

**Cz**= Central cero vértice o coronilla.

**Pz**= Parietal cero línea media parietal.

Por otra parte, los símbolos numéricos se refieren al hemisferio izquierdo o derecho. Todos los números pares, por ejemplo Fp2, F4, F8 etc. se refieren a las posiciones de los electrodos sobre la parte derecha de la cabeza; en tanto que los nones, como Fp1, F3, F7, son para la mitad izquierda (Fig. 3.12).

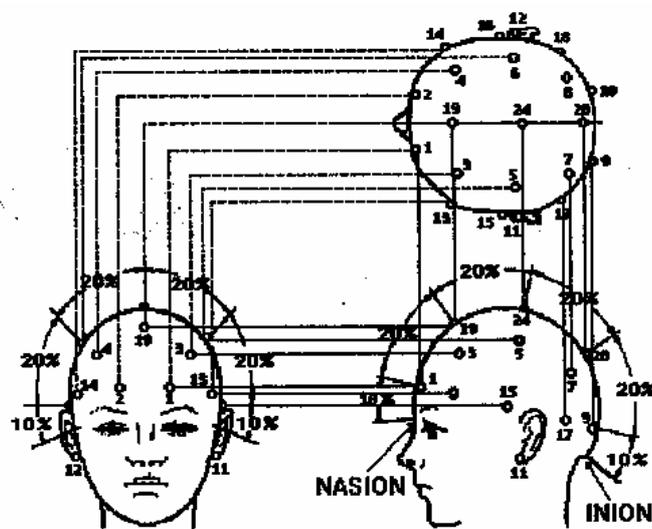


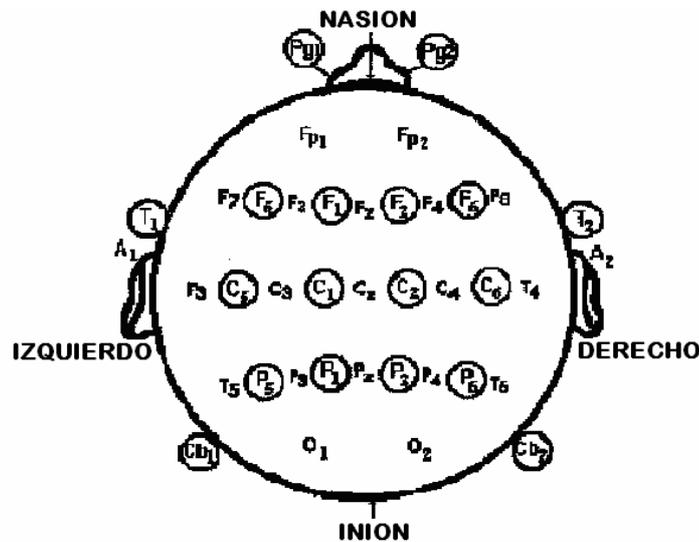
Fig. 3.12 Sistema Internacional 10-20 de colocación de electrodos y su nomenclatura.

**Tabla 3.2 Sistema internacional 10-20 Posición de electrodos.**

Electrodo izquierdo	Electrodo derecho	Marca internacional izquierda	Marca internacional derecha	Posición
1	2	FP <sub>1</sub>	FP <sub>2</sub>	Polo frontal
3	4	F <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>	Frontal
5	6	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	Central
7	8	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	Parietal
9	10	O <sub>1</sub>	O <sub>2</sub>	Occipital
13	14	F <sub>7</sub>	F <sub>8</sub>	Temporal anterior
15	16	T <sub>3</sub>	T <sub>4</sub>	Media temporal
17	18	T <sub>5</sub>	T <sub>6</sub>	Temporal posterior
19	19	F <sub>Z</sub>	F <sub>Z</sub>	Línea media frontal
24	24	C <sub>Z</sub>	C <sub>Z</sub>	Línea media central
20	20	P <sub>Z</sub>	P <sub>Z</sub>	Línea media parietal
11	12	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	Auricular

Fuente: García, G., Jiménez, G., Ortiz, P., Peña, C. Potenciales bioeléctricos: origen y registro.

Los símbolos numéricos, definen la ubicación del electrodo en relación con la línea media. Por ejemplo el número más bajo indica la posición más cercana del electrodo a la línea media, F3 se encuentra más cerca de la línea media que F7. Si se desea un electrodo adicional entre F3 y la línea media, este se denominará F1. El electrodo que quede entre Cz y C4 se denominará C2, y así sucesivamente (Fig. 3.13). Esto se aplica a todos los electrodos, con excepción de los que están sobre los lóbulos temporales donde la numeración sube en dirección a la parte posterior de la cabeza.



**Fig. 3.13 Vista sencilla y plana de la parte superior de la cabeza, que muestra la colocación de electrodos adicionales encerrados en un círculo.**

### 3.4.3 Aplicaciones en el campo médico y diagnóstico.

Dado que el EEG refleja el índice de la función cerebral, las pruebas de EEG se practican en neurología y psiquiatría, también en otras especialidades, para evaluar situaciones posteriores a un tratamiento, así como en el diagnóstico o discriminación de alguna enfermedad que afecte al sistema nervioso central, a continuación se mencionan algunas de ellas:

Neurología: Traumatismo cráneo cerebral y sus secuelas, tumor cerebral y otros desórdenes espaciales intracraneales, lesiones, desórdenes cerebrovasculares, examen electroencefalográfico durante y después de neurocirugía, examen electroencefalográfico durante cirugía estereotáxica cerebral.

Medicina Interna: daños endocrinos, daños metabólicos, encefalopatía pulmonar, daños hepáticos, toxemia del embarazo.

1. Obstetricia: daños psicosomáticos.
2. Urología: esclerosis tubercul encefálica, nicturia, diabetes insípida, impotencia.

3. Psiquiatría: epilepsia, desórdenes en epilepsia no paroxística, daño cerebral y sus secuelas, daños orgánicos cerebrales.
4. Ortopedia: parálisis infantil.
5. Otorrinolaringología: desórdenes en la función vestibular, desórdenes ópticos aproximales, glaucoma, aracnoiditis, neuritis retrobulbar.
6. Pediatría: epilepsia pediátrica, síndrome de Down, enfermedad de Wilson.

Algunas de las aplicaciones más comunes de la electroencefalografía se encuentran en el diagnóstico de los diferentes tipos de epilepsia, también en la localización de tumores o lesiones voluminosas y en ciertos trastornos psicopáticos como el Parkinson.

#### 3.4.4 Electroodos.

Los electrodos más utilizados en EEG, son los de disco de cloruro-plata, que evitan la polarización, de 1cm de diámetro aproximado, ligeramente cóncavos y con un pequeño orificio en el centro. La cavidad de los electrodos se llena de gel y se fijan el cuero cabelludo por medio de un adhesivo (colodión), después de haber sido raspada la superficie de la piel.

### **3.5 Requerimientos técnicos para la electroencefalografía clínica.**

Aunque no existe un método único que sea el mejor para cualquier circunstancia, los siguientes estándares son los mínimos utilizados en el registro electroencefalográfico para todas las edades, excepto neonatos.

1 Canales: el electroencefalógrafo es un registrador multicanal, ya que para encontrar la distribución de la actividad del EEG es necesario registrar el mayor número de regiones craneales posibles, para evitar errores principalmente en actividad transiente.

Se requiere un registro mínimo de 8 canales, pero existen equipos con 12, 16 o hasta 60 canales para aplicaciones especiales. Se requiere de una alta precisión

ya que la interpretación clínica del EEG, involucra la detección de pequeñas diferencias en la cantidad de actividad entre diferentes regiones del cuero cabelludo.

2 Sensibilidad: el rango de sensibilidad típico (relación voltaje de entrada contra deflexión de la plumilla) es de 10 mV/cm. (1 mV/mm.) a 1mV/cm. (100mV/mm.).

En registros comunes la sensibilidad del equipo se selecciona en el rango de 5-10 mV/mm, ya que sensibilidades altas (20mV/mm) ocasionan registros indiscernibles, mientras que sensibilidades bajas (3mV/mm) pueden saturar el sistema (ondas cuadradas).

3 filtrado: La respuesta en frecuencia se controla mediante filtros para baja y para alta que dan un ancho de banda máximo de 0.5 a 70 Hz.

Para registros estándar el filtro de baja frecuencia no debe ser mayor de 1 Hz (-3dB), que corresponde a una constante de tiempo de al menos 0.16seg, 0.3seg es satisfactorio para desplegar la actividad principal de EEG y ayuda a eliminar los cambios de la línea basal (drift), debidos a cambios en los potenciales entre piel y electrodo (potencial de polarización). El filtro de alta frecuencia no debe ser menor de 70Hz (-3dB). Estos rangos deben respetarse para evitar pérdida de información de importancia clínica.

4 Circuito de entrada: los cables de los electrodos se conectan en una caja de distribución que cuenta con entradas extra para la conexión de electrodos adicionales, que pueden utilizarse en sitios no estándar o para registrar otras variables fisiológicas como respiración o frecuencia cardiaca. Se proporcionan interruptores para seleccionar los electrodos que serán registrados en cada canal. Normalmente se puede escoger entre 5 a 20 combinaciones de electrodos precableados, o seleccionar de forma independiente las conexiones de cada cable.

5 Tierra: debe existir una entrada de tierra fijada en la cubierta de la caja de distribución y conectada a su vez a la malla externa del cable del equipo.

### 3.5.1 Artefactos e interferencias

Toda una serie de oscilaciones de potencial extracerebrales pueden superponerse a la actividad del cerebro, perturbando considerablemente el curso de las curvas. En general, tales artefactos son fáciles de reconocer como tales. El conocimiento de sus variadas formas y distribución en la curva, así como de sus fuentes, es de máxima importancia para evitar los juicios erróneos por confusión de potenciales cerebrales.

Las señales no deseadas se clasifican en:

Artefactos con señales no deseadas debidas al sujeto o al sistema de registro. Son de origen biológico, físico o de ambos, las fluctuaciones en la resistencia o en el potencial de los electrodos producen transientes abruptos en el trazo, frecuentemente de alto voltaje, los cuales se deben a una mala técnica de aplicación o de preparación de los electrodos, o bien, a movimientos del sujeto, estas señales son eliminadas, o bien a movimientos del sujeto, estas señales se eliminan recolocando los electrodos y asegurando que el sujeto este confortable para evitar movimientos innecesarios.

Otros artefactos importantes se provocan por difusiones de la red, es decir, superposiciones de corriente alterna por mala derivación a tierra del equipo o del paciente, por elevadas resistencias en los electrodos o por campos electromagnéticos variables, que se constituyen en torno a los aparatos eléctricos instalados en las inmediaciones; también se provocan por instalaciones de alta tensión en las paredes de la habitación, con asilamiento deficiente.

Interferencias: estas son convencionalmente las señales que se adquieren de fuentes eléctricas lejanas, ocurren por acoplamiento capacitivo entre el sujeto y objetos cercanos, donde cambia el potencial eléctrico con respecto al equipo, para reducir este tipo de interferencia se aterriza el paciente al equipo, o por medio de circuitos supresores, los cuales minimizan la diferencia de potencial entre sujeto y tierra del equipo, haciendo uso de retroalimentación. También se presenta por inducción electromagnética en el circuito formado por el aparato, los cables y el paciente. La interferencia inductiva es más problemática en áreas donde se utiliza

gran cantidad de equipo, como es el caso de unidades de terapia intensiva. Como la fuerza electromotriz inducida depende del número de líneas de fuerza que conforman el circuito, este tipo de interferencia puede reducirse manteniendo los cables del paciente trenzados y variando la orientación del aparato, de los cables y del paciente con respecto al campo eléctrico, hasta que por pruebas y error se encuentre la posición óptima.

### RESULTADOS Y DISCUSIÓN

#### 4.1 Desarrollo

Estas series de tiempo se obtuvieron de registros de la página PhysioNet del Health's National Center, los cuales se desarrollaron en el laboratorio Hospital Beth Israel de Boston en el Instituto Tecnológico de Massachussets.

Las señales analógicas se elaboraron en el laboratorio de electroencefalografía utilizando un equipo ambulatorio con un ancho de banda de 500 Hz. con un convertidor A/D de 12 bits, en una terminal C3, C4, Oz, y Fz, de acuerdo con el sistema internacional 10-20, cada registro individual tiene una duración de 10 minutos y contiene la señal del intervalo del ritmo alpha de EEG, los datos se tomaron a razón de 200 datos por segundo con una resolución de 12 bits cubriendo un intervalo de  $\pm 10$  mV. Los registros analógicos se digitalizaron en el Instituto Tecnológico de Massachussets utilizando un convertidor analógico-digital, adquiriéndose un archivo secuencial binario con dos columnas de datos (tiempo en segundos, señal electroencefalográfica en mV) para cada registro individual.

El método para determinar el intervalo del ritmo alpha (stride intervalo) es una modificación de un método previamente validado que ha sido exteriorizado para estar de acuerdo con medidas de la plataforma de fuerza, en un estándar internacional.

Los registros mencionados se separaron en dos columnas dejando solamente en un archivo la columna de la señal del ritmo alpha (stride intervalo) y convirtiendo el archivo a tipo datos (.dat) para poder analizarlo, de esta manera se obtuvieron 5 series de tiempo de sujetos jóvenes sanos con 1000 datos cada una, 5 series de tiempo de sujetos adultos sanos con 1000 datos cada una y 5 series de tiempo de sujetos con enfermedad del Parkinson con 880 datos cada una.

Se evaluaron 5 series de tiempo de sujetos jóvenes sanos, 5 series de tiempo de sujetos adultos sanos tercera edad y 5 series de sujetos adultos enfermos de Parkinson, los sujetos sanos fueron voluntarios de entre 20 y 30 años, los sujetos adultos sanos también voluntarios de entre 65 a 75 y los enfermos de Parkinson de 65 a 78 años, los voluntarios y enfermos fueron instruidos para relajarse con los ojos cerrados, correspondiente al estado de vigilancia “completamente relajados”.

Los datos adquiridos fueron interpretados absorbiendo en un cuarto especial sin sonido externo, en escala unipolar grabando la actividad bioelectroquímica espontánea (EEG), se adquirieron del lado izquierdo C-3 canal 1 y derecho corteza cerebral C-4 canal 2, medio occipital Oz canal 3 y región media frontal Fz canal 4 correspondiente al sistema 10-20 internacional y referido a los lóbulos de los oídos pabellón de la oreja. Las posiciones de los electrodos fueron cambiados en orden hasta cubrir la convexidad bihemisférica C-3 C-4 y grabar la actividad eléctrica de la región con la preponderancia de alpha Oz y ritmo beta Fz.

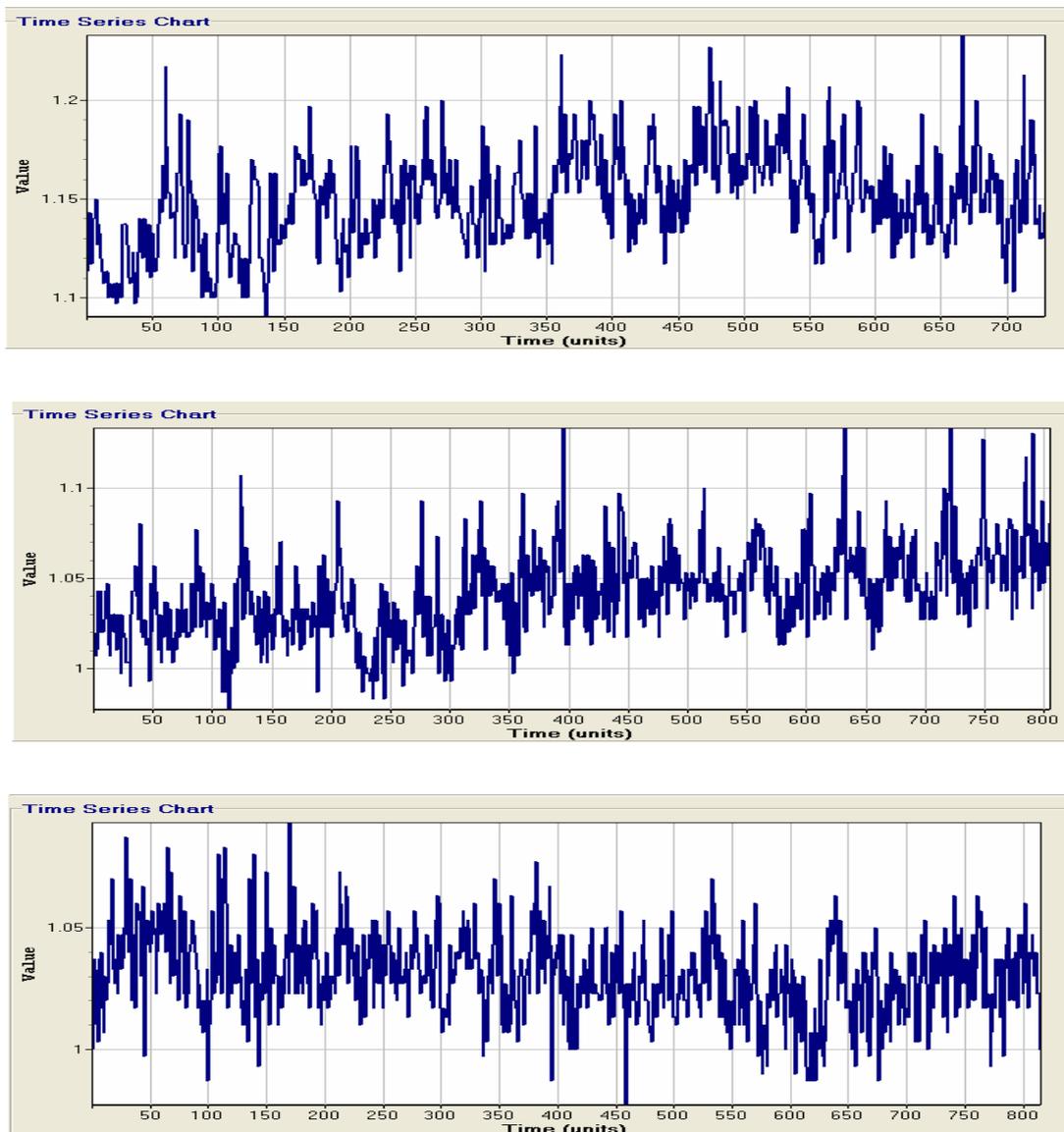
Las 15 series de tiempo se analizaron con el programa de cómputo Análisis de Sistemas Dinámicos no Lineales, y estudiado los resultados con el fin de caracterizar los registros electroencefalográficos, observando los gráficos obtenidos y la variación en los diferentes índices y propiedades métricas para obtener modelos visuales de reconocimiento e interpretación y algún invariante para distinguir entre los tres tipos de sujetos.

## **4.2 Investigación visual**

El primer paso para analizar una serie de tiempo es graficarla y eso fue lo primero que se hizo, se graficaron todas las series de tiempo y se realizó una inspección visual por intervalos de 50 datos, para poder detectar puntos fuera de lo normal, tendencia y variación, los gráficos muestran el ritmo alpha en micro volts ( $\mu$ Volts) contra el tiempo.

Las series de tiempo originadas por la actividad bioelectroquímica del cerebro de individuos sanos jóvenes se presentan en la figura 4.1, muestran algunas irregularidades con una tendencia parecida, lo que nos lleva a pensar que es muy difícil

que todas las series de tiempo de cada base de datos, aún las de sujetos saludables jóvenes, sean semejantes, se tiene algunas diferencias en el intervalo en que se mueven los impulsos eléctricos en estos casos estudiados se encontró un intervalo que va desde 1.0 a 1.25  $\mu\text{Volts}$ , existiendo algunas diferencias como se muestran en la figura 4.1 donde podemos observar que la primera el intervalo va de 1.1 hasta 1.2  $\mu\text{Volts}$ , la segunda de 1.0 a 1.1  $\mu\text{Volts}$ , la tercera de 1 a 1.05  $\mu\text{Volts}$ .

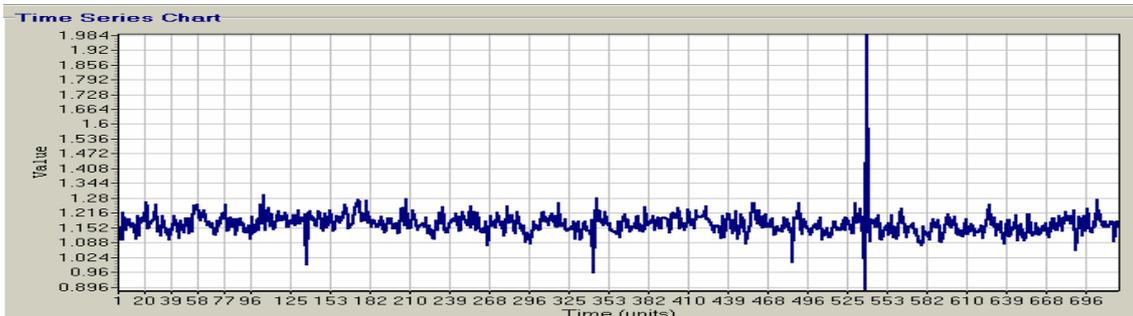
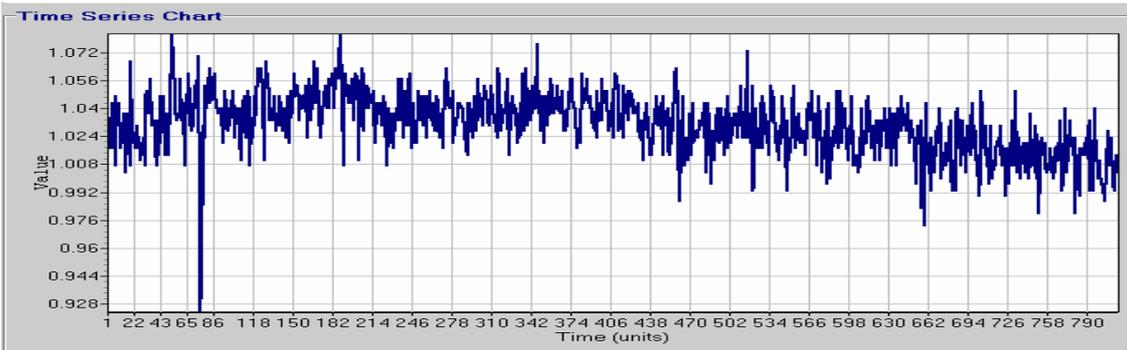
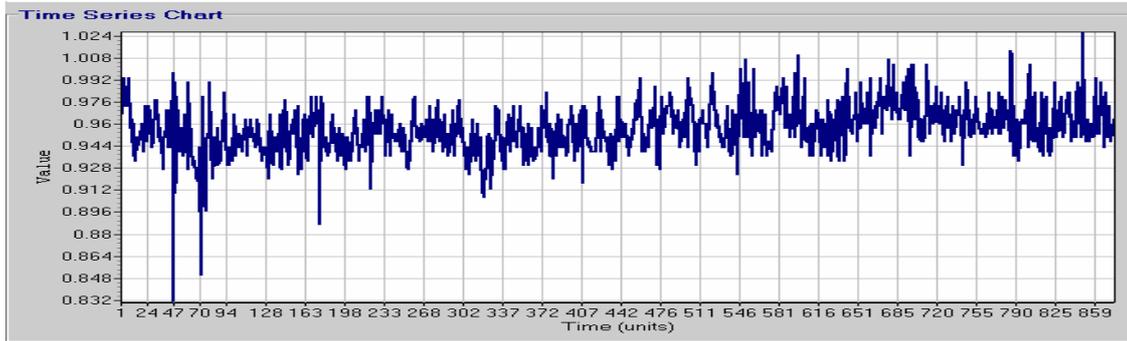


**Fig. 4.1 Actividad bioelectroquímica de 3 sujetos jóvenes sanos**

Como se puede observar todas las series de tiempo de sujetos jóvenes saludables son similares en la tendencia y variación, los picos del ritmo alpha están bien definidos con una oscilación continua de arriba hacia abajo.

En las series de tiempo de sujetos adultos sanos que se muestran en la Fig. 4.2, se puede observar que el intervalo del ritmo alpha oscila de 0.896 a 1.984  $\mu$ Volts, el intervalo para la primera serie va de 0.832 a 1.024  $\mu$ Volts, la segunda oscila de 0.928 a 1.072 y la tercera va de 0.896 a 1.984  $\mu$ Volts.

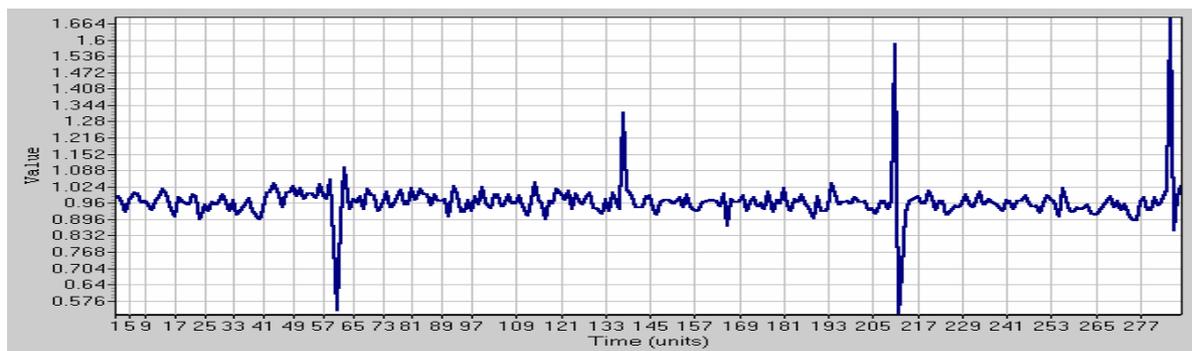
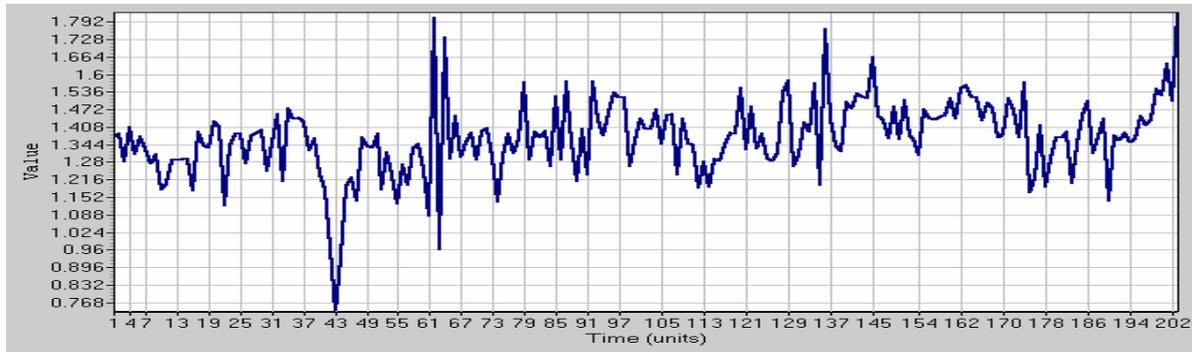
Como se puede notar, la señal para los sujetos adultos sanos empieza a salirse del intervalo, dando saltos abruptos, esto se debe a que puede estar comenzando a manifestarse alguna alteración en la fisiología del cerebro de los individuos adultos.



**Fig. 4.2 Actividad bioelectroquímica de sujetos adultos sanos**

Los resultados para sujetos con la enfermedad de Parkinson plenamente manifestada en la Fig. 4.3 muestran un intervalo que va de 0.576 a 1.792  $\mu$ Volts la primera serie va de 0.768 a 1.792  $\mu$ Volts, la segunda va de 0.576 a 1.664  $\mu$ Volts y la tercera de 0.832 a 1.536  $\mu$ Volts.

Como se puede advertir la señal es más irregular dando saltos muy abruptos entre uno y otro, saliéndose del intervalo, el comportamiento predominante de estas series es diferente entre cada una de ellas.



**Fig. 4.3 Actividad bioelectroquímica de sujetos con Parkinson**

En la inspección visual se encontró que todas las series de tiempo no son estacionarias, que el sistema es determinista perturbado por variables de tipo estocástico y que los diferentes tipos de registros tienen cierto patrón de comportamiento. Todas las series son diferentes en cuanto a la tendencia, para el caso de los sujetos sanos, jóvenes se tiene una variación de 0.1  $\mu$ Volts de diferencia y los intervalos son muy cercanos.

Para los sujetos adultos sanos se tiene una variación entre las series de tiempo de 0.192 a 1.0  $\mu$ Volts y se comienzan a ver picos muy grandes que aparecen de manera irregular en la serie.

Para los sujetos enfermos el rango de variación es de 0.704 a 1.088  $\mu$ Volts con una tendencia muy irregular apareciendo los picos de manera aleatoria a lo largo de la serie. Aparentemente esto podría estar relacionado con el estado de salud del paciente entre más sano y joven este se manifiesta una actividad cerebral muy regular con un rango muy pequeño en la variación de la serie de tiempo, en cambio entre más adulto, la variación va siendo más alta y si existe alguna patología en este caso Mal del Parkinson, se observa más grande el intervalo de la señal de las ondas alpha y la variación muy irregular de la actividad eléctrica del cerebro. Aunque de manera visual es muy difícil diferenciar entre un adulto aparentemente sano o alguno que ya este manifestando principios de alguna patología.

#### **4.3 Distribución de probabilidad**

La distribución de probabilidad muestra la frecuencia de los datos obtenidos ordenándose de acuerdo a su valor, los datos estocásticos tienden a ser descritos con la distribución de probabilidad.

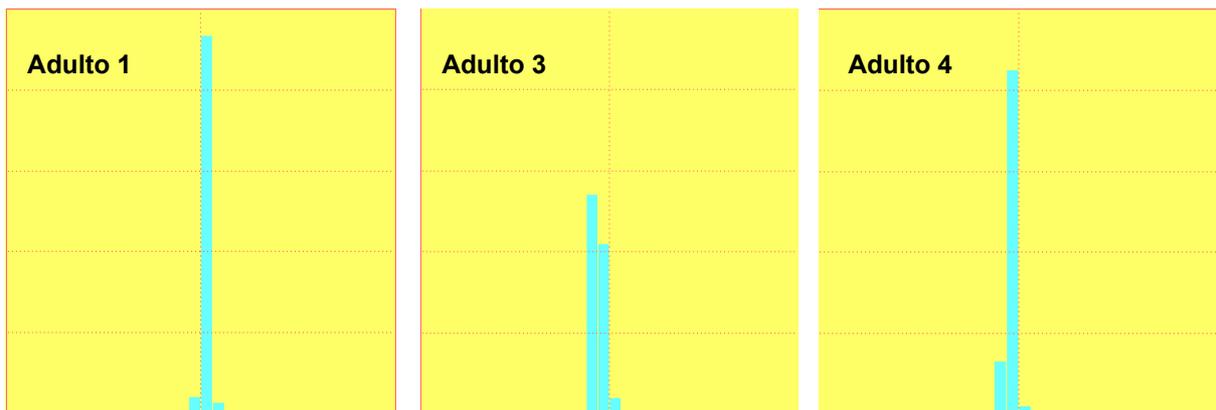
Dependiendo de la forma del histograma elaborado es el tipo de sistema, para un comportamiento puramente estocástico se obtiene una distribución que puede ser Gaussiana, la cual se muestra como una simple curva en forma de campana, o no Gaussiana, como por ejemplo la distribución de Lévy, en el caso de un comportamiento caótico se genera la llamada distribución de Wigner. [58].

Los comportamientos periódicos o multiperiódicos suelen dar un histograma con picos en las orillas, cuando el número de estados es mayor y no tienen una distribución simétrica se trata de un comportamiento caótico.

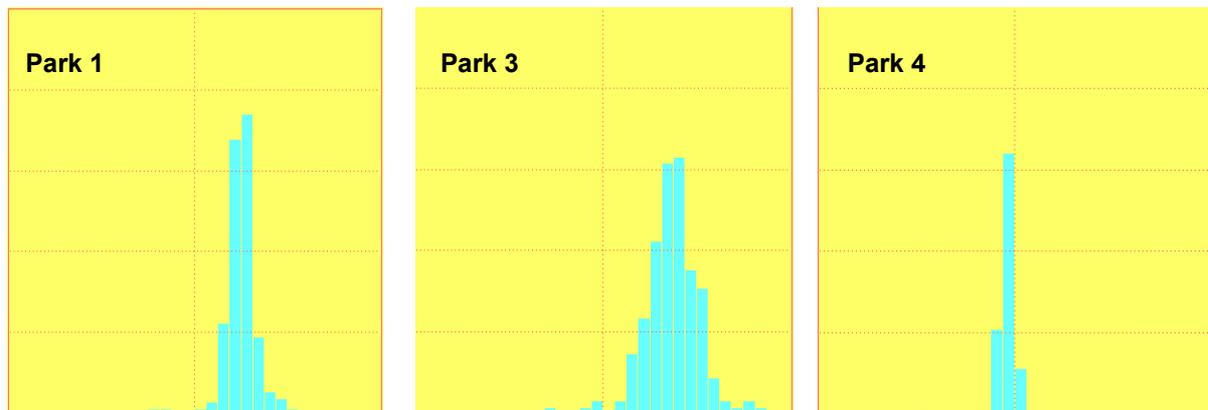
En las Fig. 4.4, 4.5 y 4.6 se muestran los histogramas obtenidos a partir de sujetos jóvenes sanos, sujetos adultos sanos y sujetos con Mal de Parkinson respectivamente.



**Fig. 4.4 Histogramas de actividad bioelectroquímica de sujetos jóvenes sanos**



**Fig. 4.5 Histogramas de actividad bioelectroquímica de sujetos adultos sanos**



**Fig. 4.6 Histogramas de actividad bioelectroquímica de sujetos con Parkinson**

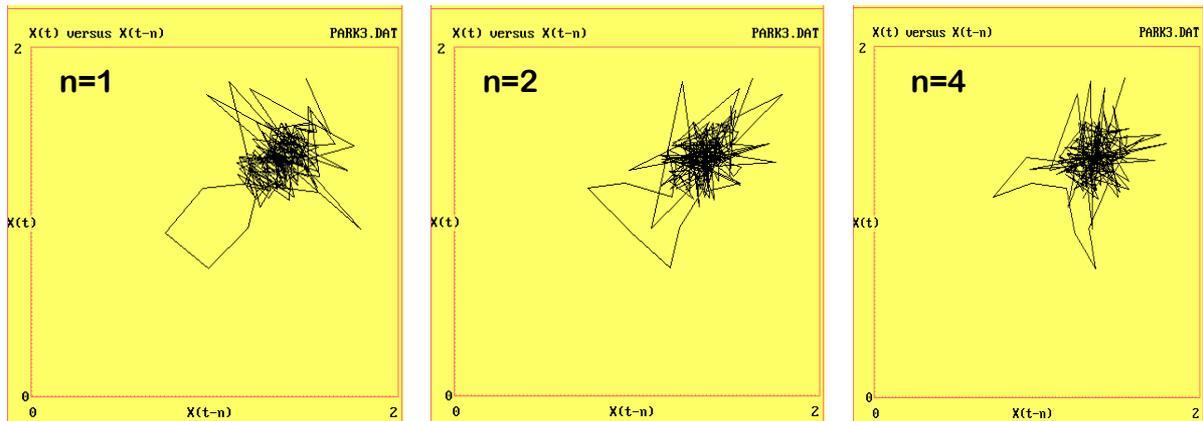
A partir del análisis de los histogramas, podemos decir que las series de tiempo no presentan comportamiento estocástico y las gráficas de distribución de probabilidad no son de utilidad para distinguir entre los diferentes tipos de sujetos.

Este tipo de análisis que se realiza de manera cotidiana en sistemas lineales, lo implementé en el trabajo de tesis, para evidenciar que no es contundente el resultado y no es posible inferir de manera decisiva a cerca de un sistema dinámico como es el caso del cerebro, ya que no ofrece de manera real información que pueda concluir que el sistema es caótico o determinista, sin embargo es una herramienta que ayuda a tener solo una idea parcial de cómo se comporta el sistema para cada una de las series de tiempo.

#### **4.4 Diagrama espacio-fase Atractores**

Se analizaron las 15 series de tiempo, reconstruyendo el diagrama espacio-fase, esta parte del estudio se realizó de forma íntegra, buscando un modelo visual de reconocimiento e interpretación, para el cual no se necesitarán manejar muchos parámetros ya que la mala selección de estos puede arrojar diferentes resultados.

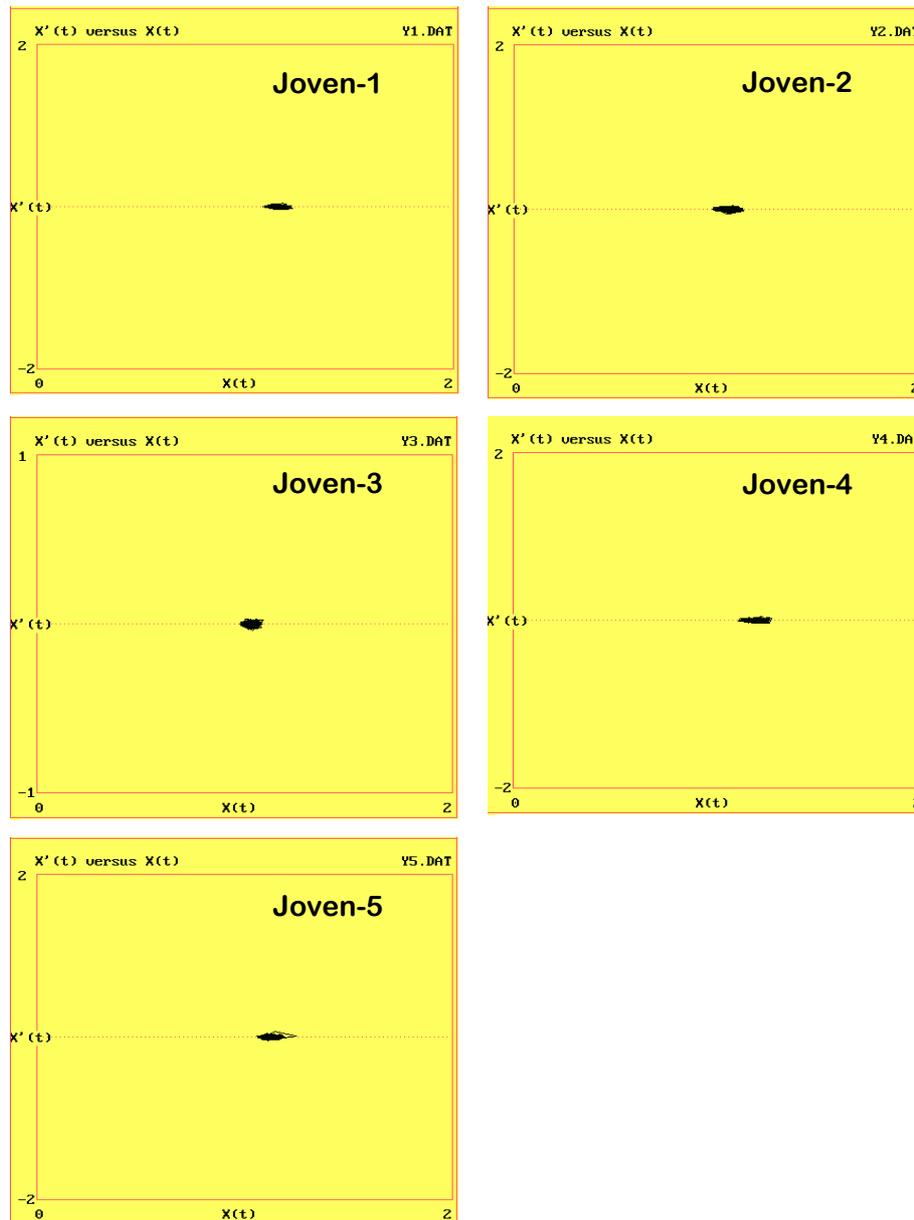
Al reconstruir el sistema, a partir de la gráfica  $x(t)$  vs  $x(t-n)$ , se encontró, que al graficar el modelo se tiene el mismo atractor aún cuando han cambiando los parámetros de retardo, esto quiere decir, que la estructura del atractor no cambia en función del retardo porque éste lo da el propio instrumento de medición [59] [60], en la Fig. 4.7 se muestran los atractores del mismo registro con retardo de 1, 2 y 4 respectivamente.



**Fig. 4.7 Atractores del mismo registro con diferente retardo**

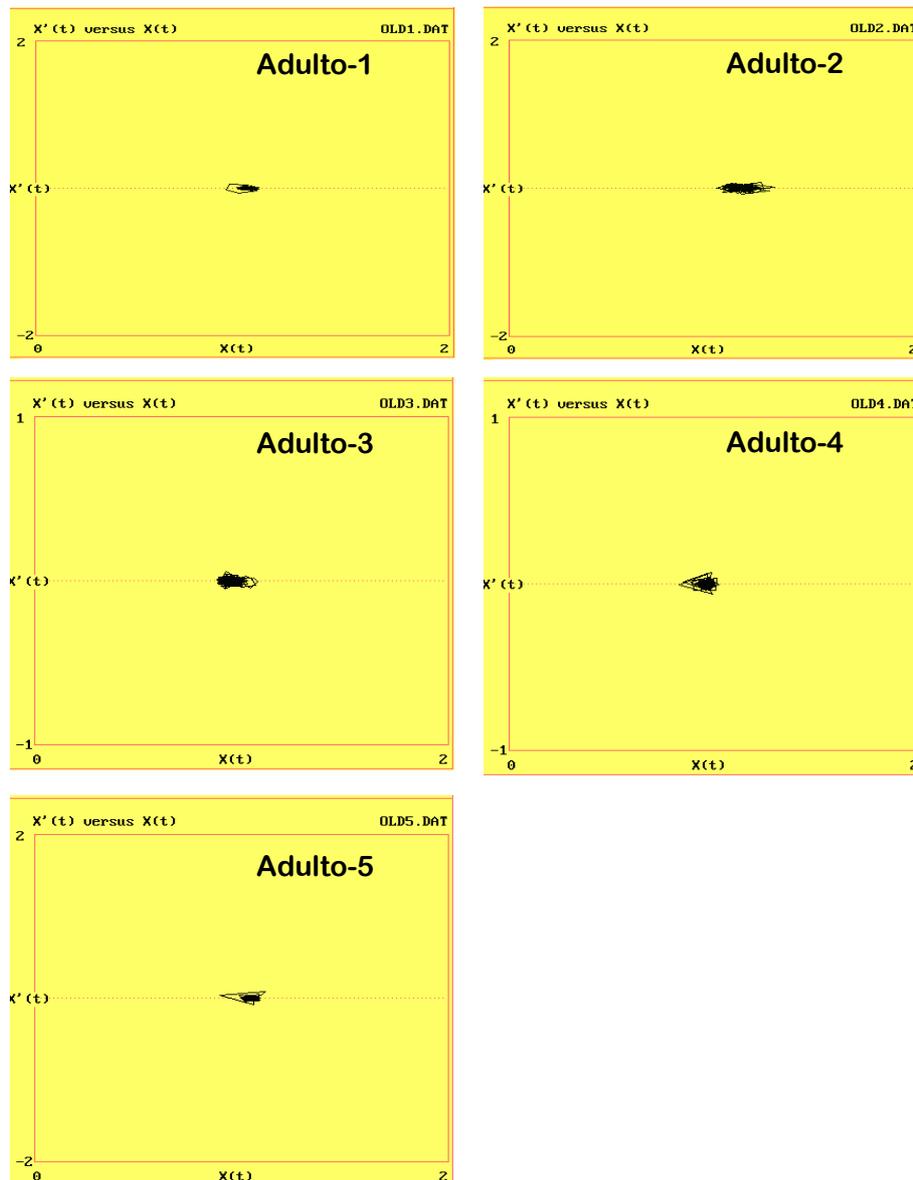
En cambio al graficar  $x'(t)$  vs  $x(t)$  se observan diferencias entre cada uno de los individuos por esto, se graficaron de esta manera todas las series de tiempo en el diagrama espacio-fase de los quince sujetos.

Los atractores obtenidos a partir de series de tiempo de sujetos jóvenes sanos se muestran en la figura 4.8, los atractores elaborados a partir de sujetos saludables adultos se muestran en la figura 4.9 y los atractores obtenidos a partir de sujetos con mal de Parkinson se muestran en la figura 4.10



**Fig. 4.8 Atractores de cinco registros de sujetos jóvenes sanos**

Los atractores generados en el diagrama espacio-fase de sujetos jóvenes sanos se presentan con una cuenca o núcleo del atractor cerrado, con las mismas características visuales.



**Fig. 4.9 Atractores de cinco registros de sujetos adultos sanos**

Los atractores generados en el diagrama espacio-fase de sujetos adultos sanos, se aprecian con una cuenca o núcleo del atractor ligeramente mas abierta, como si perdiera un poco su estructura cerrada y definida que poseen cuando están jóvenes, si observamos los atractores de las personas adultas vemos en el adulto 1, adulto 4 y adulto 5, de una manera mas clara este aspecto, al parecer ya no se presentan una

salud integral, que se va perdiendo gradualmente conforme avanza la edad, según se aprecia en los modelos.

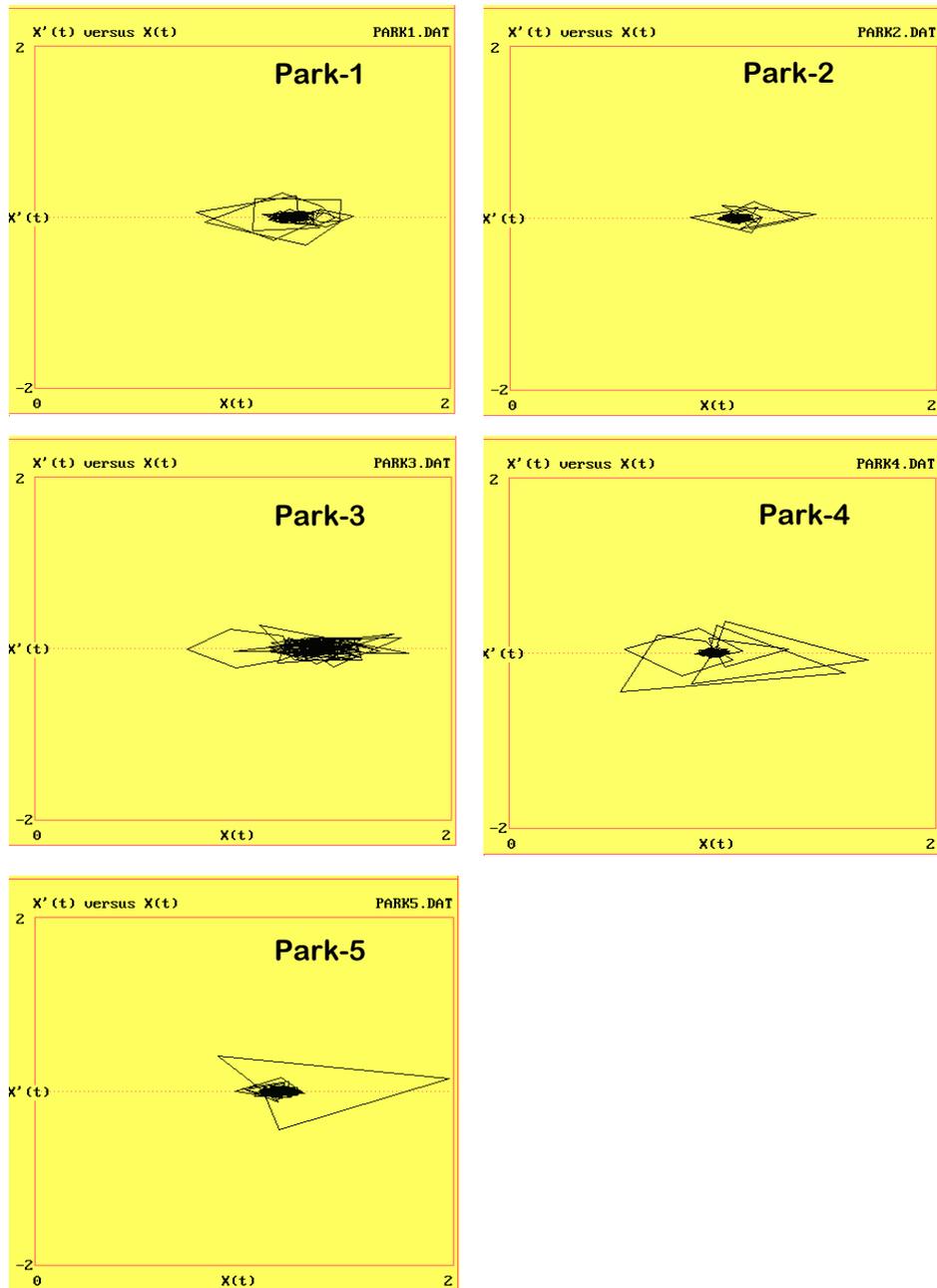


Fig. 4.10 Atractores de cinco registros de sujetos con Parkinson

Para el caso de los atractores generados en el diagrama espacio-fase para los enfermos del Parkinson los modelos muestran claramente una pérdida considerable de la cuenca de atracción o núcleo, en comparación con los sujetos adultos sanos, se ve claramente que a medida que la enfermedad va evolucionando se va perdiendo más la forma y se va abriendo la cuenca de atracción del atractor.

Cuando ya el Parkinson se manifiesta totalmente, se pierde por completo el núcleo del atractor varias líneas salen fuera del centro comparativamente con los individuos sanos se nota claramente la diferencia,

#### 4.5 Índices

Después de obtener los atractores se estudiaron los resultados de los índices calculados tratando de encontrar algún invariante para reconocer y diferenciar de una manera objetiva los tres tipos de serie de tiempo de los sujetos analizados.

Los resultados obtenidos en cuanto a la complejidad del sistema fueron muy variados, los índices más representativos de cada tipo de sujeto fueron: el exponente de Hurst, el exponente de Lyapunov y la entropía de Kolmogorov los cuales se muestran en las tablas 4.1, 4.2 y 4.3.

**Tabla 4.1 Registros de sujetos jóvenes sanos**

<b>REGISTRO</b>	<b>EXPONENTE de HURST</b>	<b>EXPONENTE de LYAPUNOV</b>	<b>ENTROPIA de KOLMOGOROV</b>
JOVEN1	0.1337	0.184 ± 0.05	0.640
JOVEN2	0.0867	0.192 ± 0.0	0.598
JOVEN3	0.0740	0.127 ± 0.0	0.473
JOVEN4	0.0806	0.162 ± 0.0	0.401
JOVEN5	0.1175	0.182 ± 0.0	0.269

**Tabla 4.2 Registros de sujetos adultos sanos**

<b>REGISTRO</b>	<b>EXPONENTE de HURST</b>	<b>EXPONENTE de LYAPUNOV</b>	<b>ENTROPIA de KOLMOGOROV</b>
ADULTO1	0.0212	0.117 ± 0.0	0.456
ADULTO2	0.0572	0.192 ± 0.0	0.655
ADULTO3	0.4047	0.182 ± 0.0	0.315
ADULTO4	0.3022	0.131 ± 0.0	0.491
ADULTO5	0.0450	0.127 ± 0.0	0.433

**Tabla 4.3 Registros de sujetos con Parkinson**

<b>REGISTRO</b>	<b>EXPONENTE de HURST</b>	<b>EXPONENTE de LYAPUNOV</b>	<b>ENTROPIA de KOLMOGOROV</b>
PARK1	0.0514	0.328 ± 0.0	0.488
PARK2	0.0147	0.273 ± 0.0	0.569
PARK3	0.0137	0.414 ± 0.0	0.439
PARK4	0.0235	0.206 ± 0.0	0.526
PARK5	0.0246	0.337 ± 0.0	0.670

Los resultados del exponente de la Entropía de Kolmogorov obtenidos a partir de sujetos jóvenes saludables y sujetos adultos sanos se compararon con los obtenidos a partir de sujetos con mal de Parkinson, no encontrándose diferencias, incluso hay datos que se superponen no importando si son enfermos o sanos.

Asimismo, los resultados del Exponente de Lyapunov para el caso de las personas jóvenes sanas y personas adultas sanas, no presentan diferencias son muy parecidos, en el caso de los individuos enfermos de Parkinson el valor del Exponente de Lyapunov se incrementa. Todos los resultados son positivos dando como resultados que presentan un comportamiento caótico.

Los resultados del Exponente de Hurst para todos los casos, son muy parecidos no hay diferencias.

Se afirma que todas las series de tiempo son no estocásticas, presentan comportamiento caótico, determinista y son antipersistentes.

Se estudiaron los resultados de las tablas 4.1, 4.2 y 4.3 hasta encontrar una relación entre los tres índices que nos permitiera diferenciar cada tipo de registro. Las relaciones son las siguientes:

Para los registros de sujetos sanos jóvenes

$$K > L > H \quad \bullet \quad L > H < K$$

Para los registros de sujetos sanos adultos

$$K > L > H \quad \bullet \quad L > H < K$$

Para los registros de sujetos con Enfermedad de Parkinson

$$K > L > H \quad \bullet \quad L > H < K$$

donde

**H** = exponente de Hurst

**L** = exponente de Lyapunov

**K** = entropía de Kolmogorov

#### 4.6 Dimensiones

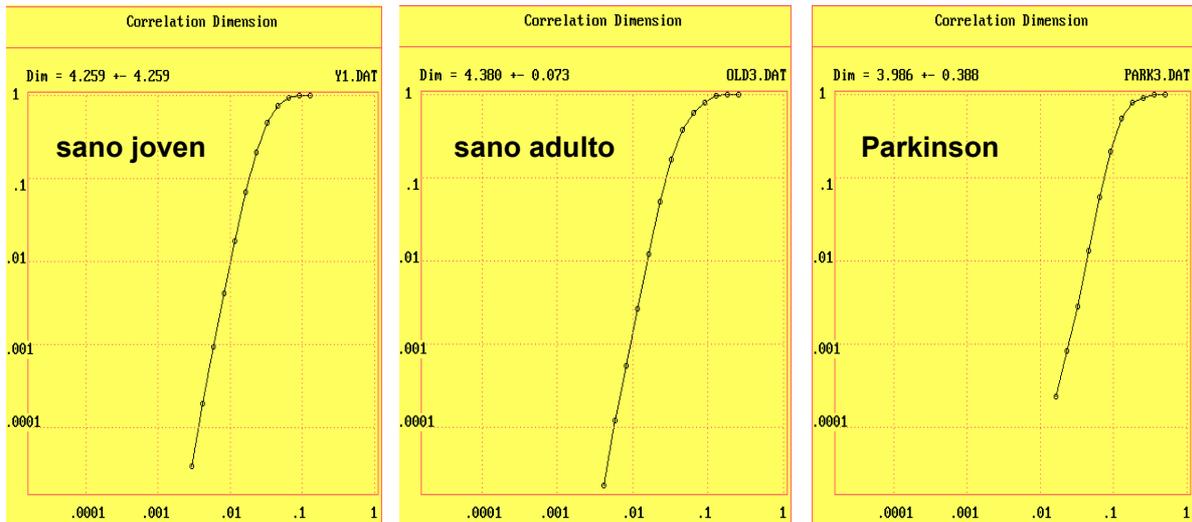
Las dimensiones de correlación de los registros de sujetos saludables jóvenes fueron desde 4.25 a 4.85, en registros de sujetos saludables adultos fueron desde 4.38 a 4.58 y los registros de sujetos con enfermedad del Parkinson fueron desde 3.98 a 4.99

Las dimensiones de capacidad de los registros de sujetos saludables jóvenes fueron desde 0.708 a 0.953, en registros de sujetos saludables adultos fueron desde 0.640 a 0.868 y los registros de sujetos con enfermedad de Parkinson fueron desde 0.368 a 0.850.

Las dimensiones de correlación y de capacidad son buenas aproximaciones a la dimensión fractal, en este trabajo se prefirió considerar que la dimensión de correlación es una mejor aproximación a la dimensión fractal. Se conoce que el cálculo de la dimensión fractal nos da una cota mínima al número de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y acopladas que se tendrían que proponer para modelar nuestro sistema. La dimensión fractal, también nos da una cota máxima del número de ecuaciones diferenciales ordinarias, que es dos veces la dimensión fractal más uno.

Los resultados obtenidos en el análisis de sistemas dinámicos de las series de tiempo de sujetos saludables jóvenes, de sujetos saludables adultos y de sujetos con Mal de Parkinson, arrojan valores de la dimensión fractal (dimensión de correlación) que van de aproximadamente 3.986 a 4.996, lo que indica que el sistema bajo estudio y su atractor “no son tan complejos”, esto es, presentan baja dimensionalidad.

Con los resultados se puede inferir que el cálculo de la dimensión fractal en el estudio de actividad eléctrica de sujetos jóvenes sanos, sujetos adultos sanos y con el mal de parkinson ilustrados en esta investigación, no se puede utilizar como un indicador de la salud del cerebro del sujeto en estudio, porque los intervalos en los que se encuentran los valores de la dimensión fractal están traslapados casi completamente, ver fig. 4.11.



**Fig. 4.11 Dimensión de correlación en sujetos sanos y con Parkinson**

#### 4.7 Análisis espectral

Para el análisis espectral en nuestro caso, aún cuando la señal problema no sea periódica, como es el caso de la señal del cerebro, sus componentes ocuparán una cierta banda de frecuencias, por lo cual se efectuó el cálculo de la transformada discreta de Fourier mediante el algoritmo de la transformada rápida de Fourier y su representación gráfica como el cuadrado de la amplitud en función de la frecuencia.

La gráfica que resulta de un sistema caótico o aleatorio tiene una tendencia a subir y es ancha, en el caso de un sistema periódico se producen pocos picos o uno sólo y estos son prácticamente discretos.

En las fig. 4.12, 4.13 y 4.14 se muestran los gráficos de frecuencia obtenidos a partir de sujetos jóvenes sanos, sujetos adultos sanos y sujetos con Parkinson, respectivamente.

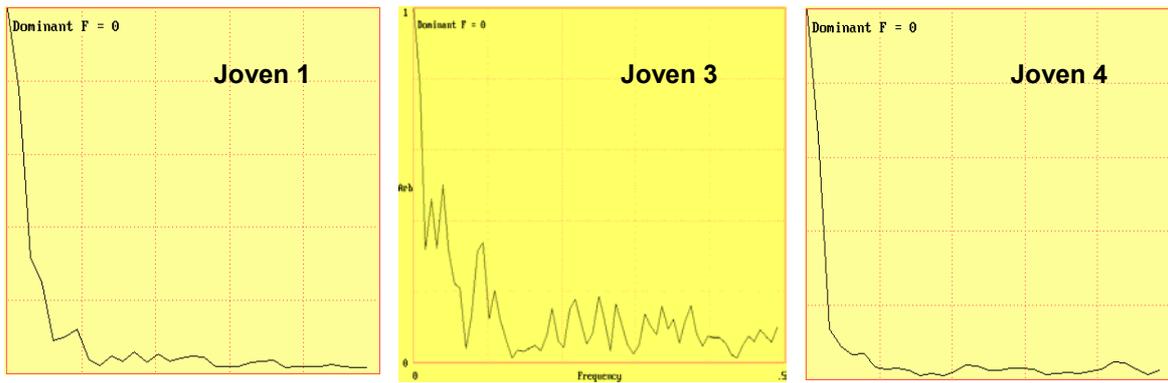


Fig. 4.12 Frecuencia de datos de sujetos jóvenes sanos

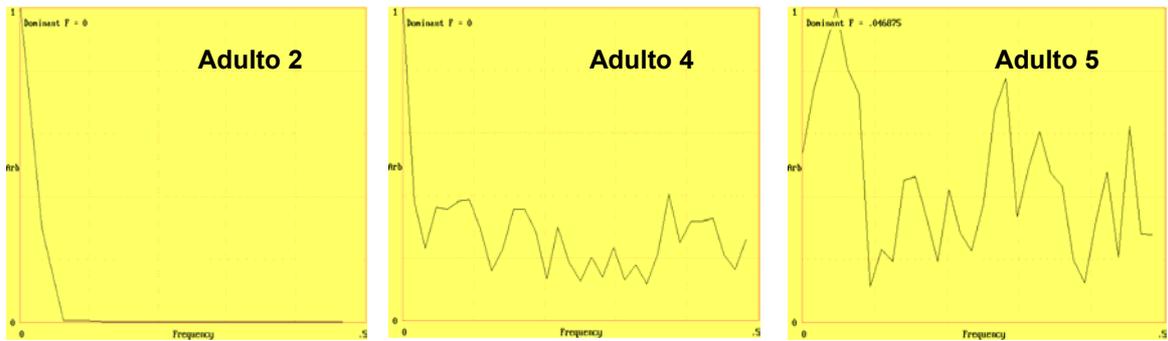


Fig. 4.13 Frecuencia de datos de sujetos adultos sanos

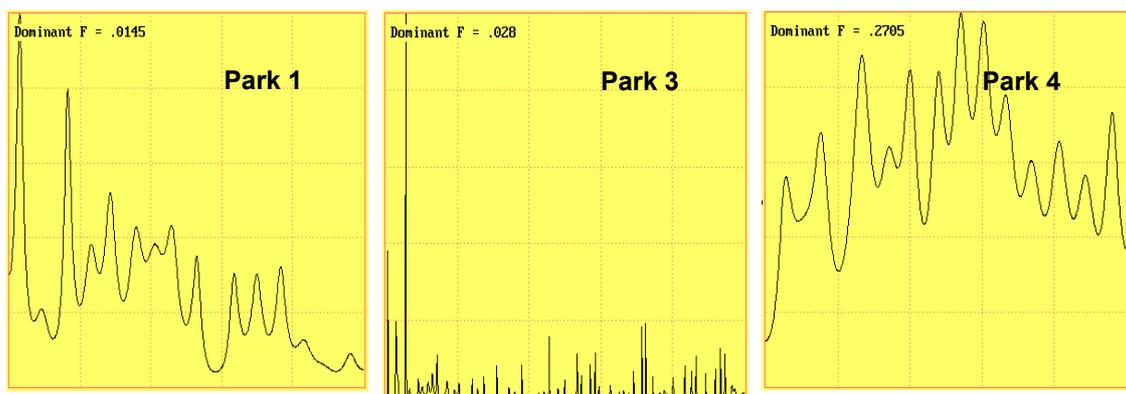


Fig. 4.14 Frecuencia de datos de sujetos con Parkinson

A partir del análisis espectral de la frecuencia se observa que todos los resultados son diferentes salvo el caso de Park-3 que se puede asociar a un comportamiento periódico, que posiblemente pueda estar asociado a un poco de ruido en la señal, pero en los demás casos no es posible de manera contundente saber cual es el tipo de comportamiento que se está manifestando en las diferentes señales.

De antemano se sabe que la señal bioelectroquímica del cerebro humano presenta un comportamiento dinámico caótico. Desafortunadamente, no podemos, partir del análisis del espectro de Fourier para diferenciar todas las series de tiempo analizadas de los tres tipos de sujetos, sanos jóvenes, sanos adultos y enfermos de Parkinson.

#### **4.8 Análisis de Recurrencia Visual**

La aplicación de esta técnica, como una nueva propuesta en la búsqueda de modelos visuales de reconocimiento e interpretación nos permiten establecer una nueva metodología para evaluar el estado fisiológico de las personas, para de antemano desear saber cual es el estado que guarda o si ya está enfermo, cosa que el EEG que es el instrumento que se utiliza de manera tradicional, por si solo no es capaz de brindar toda la información necesaria, esto va a ayudar a los médicos a visualizar aun cuando no se tenga mucha experiencia cual es el desarrollo del paciente. Además que permite detectar los cambios de nivel de salud asociado a las llamadas “catástrofes” que están referidas a los cambios que sufren los pacientes con Parkinson en la señal eléctrica que se genera en la corteza cerebral.

En las figuras 4.15, 4.16 y 4.17 se muestran los mapas de recurrencia visual para cada uno de los individuos respectivamente, nos permitirán conocer el comportamiento dinámico de las series de tiempo y detectar gráficamente los cambios estructurales que de manera visual el en EEG no es posible detectar.

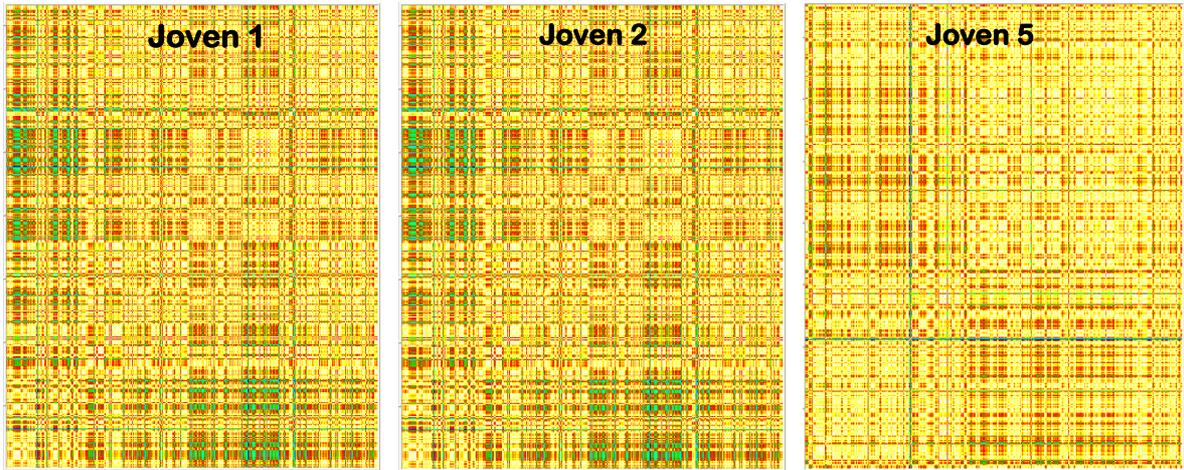


Fig. 4.15 Gráficos de recurrencia de registros de sujetos jóvenes sanos

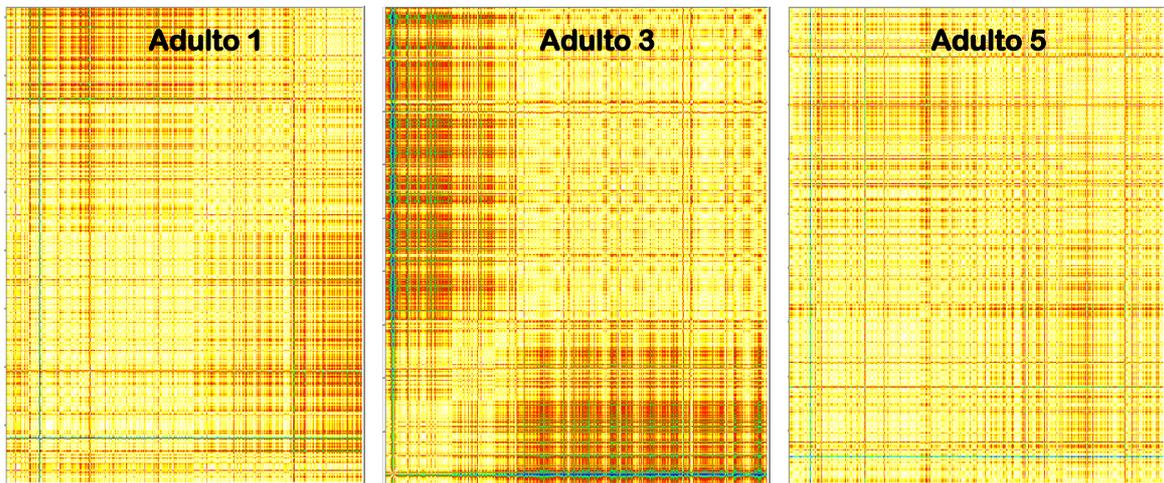
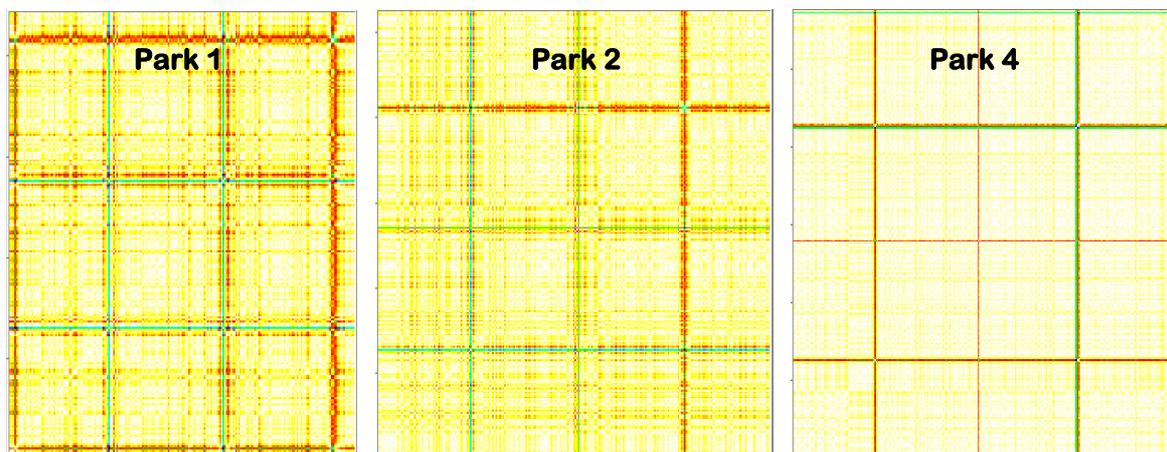


Fig. 4.16 Gráficos de recurrencia de registros de sujetos adultos sanos



**Fig. 4.17 Gráficos de recurrencia de registros de sujetos con Parkinson**

Los gráficos de recurrencia que vemos reportados en las anteriores figuras, se trazaron con los valores de dimensión incrustada de 1 y de tiempo de retraso de 0, datos que da de inicio el programa y son de forma directa.

Para el caso de jóvenes sanos, fig. 4.15, se tiene una tendencia uniforme en la estructura del gráfico, tanto en la distribución de los niveles como en los colores, sobre la diagonal principal se pueden observar cuatro niveles de fluctuación bien definidos en cada uno.

Para el caso de los adultos sanos, fig. 4.16, se tiene una tendencia menos uniforme en la estructura del gráfico, como que se va perdiendo la estructura cerrada que tiene en los mapas de los sujetos jóvenes sanos, se observa sobre la diagonal principal cuatro niveles de fluctuación

Para el caso de los enfermos de Parkinson, fig. 4.17, se pierde por completo la estructura uniforme de la gráfica, sobre la diagonal principal se tiene cuatro niveles de fluctuación separados por líneas verdes y rojas bien delimitados, que sería la catástrofe en sentido matemático, entre un nivel y otro de fluctuación, que sería por tanto un

cambio abrupto muy fino relacionado con los procesos cerebrales que se llevan a cabo en la corteza cerebral, o sea la dinámica del cerebro.

Los resultados del análisis de recurrencia visual aplicado en las 15 series de tiempo muestran estructuras perfectamente definidas y con trazos de color significativos, asociados a colores predominantemente amarillo y naranja distancias pequeñas en los vectores para el caso de los sanos jóvenes que se va perdiendo paulatinamente en los adultos y aún mas en los enfermos, De la misma forma se visualiza un comportamiento dinámico acorde a la estructura que presenta el diagrama de recurrencia, que es la distribución típica para este tipo de sistemas.

Al aplicar el método de conteo de cuadros de nivel para detectar las fluctuaciones en el comportamiento dinámico de las series de tiempo de los EEG, nos permite analizar los diferentes niveles de fluctuación mostrados, así como poder observar las catástrofes en algunos mapas lo que nos lleva a saber que éstas se presentan en los sujetos enfermos.

### CONCLUSIONES

En el presente trabajo de tesis se estudiaron y analizaron 15 series de tiempo, obtenidas a partir de la actividad eléctrica del cerebro, de sujetos jóvenes sanos, sujetos adultos sanos y sujetos con alteraciones neurológicas. Dicho estudio se realizó con técnicas de Análisis de Sistemas Dinámicos no Lineales, reconstruyendo en el diagrama de estados de espacio-fase el sistema de origen para encontrar modelos visuales de reconocimiento e interpretación visual y algún invariante que nos permita diferenciar entre un sujeto sano y otro con neuropatías. A la vez también se utilizó como herramienta el Análisis de Recurrencia Visual que permitió de igual manera tener la reconstrucción del mapa de recurrencia como un modelo para la interpretación de la dinámica del sistema.

En la inspección visual se encontró que las series de tiempo estudiadas no son estacionarias, que el sistema es determinista, perturbado por variables de tipo estocástico y que los diferentes tipos de registros tienen cierto patrón de comportamiento. Como un primer resultado se concluyó: que no es posible de manera visual diferenciar entre un adulto aparentemente sano o alguno que ya este manifestando principios de alguna neuropatología.

A partir del análisis de los histogramas, podemos decir que las series de tiempo no presentan comportamiento estocástico y las gráficas de distribución de probabilidad no son de utilidad para diferenciar entre los diferentes tipos de sujetos.

Para las personas jóvenes sanas, los atractores se presentan con una cuenca de atracción o núcleo cerrada y consistente. En los adultos sanos se va presentando la cuenca o núcleo del atractor mas abierta, se va perdiendo la estructura, y se van los atractores abriendo o dispersando en su núcleo. Los enfermos del Parkinson tienen atractores con comportamiento errático con líneas dispersas a lo largo del diagrama.

La pérdida de la estructura del núcleo del atractor y la dispersión de las líneas que lo componen, indican procesos degenerativos en el estado de salud de las personas.

Los atractores generados en el diagrama espacio fase, sirven como modelo visual de reconocimiento e interpretación del estado fisiológico de los individuos.

El cálculo de la dimensión fractal no se puede utilizar como un indicador del estado de salud del cerebro de los sujetos en estudio, porque los resultados son parecidos en todos los casos. Por otro lado el cálculo de las dimensiones de correlación, no es contundente como parámetro para saber el estado fisiológico del individuo, el análisis espectral no infiere resultado en el diagnóstico de las personas.

El Análisis de Recurrencia Visual sirve como modelo visual de reconocimiento e interpretación del estado fisiológico de las personas.

En la práctica cotidiana los neurólogos fisiólogos, basan su diagnóstico directamente en el análisis visual del electroencefalograma, el problema esta en que la aparición de daños por la enfermedad del parkinson en el electroencefalograma, solo queda de manifiesto, cuando la enfermedad está prácticamente desarrollada.

Es difícil encontrar en México y aún en otros países, neurofisiólogos que realicen estudios de la señal proveniente de un EEG, en términos de un análisis digital de señales, incluso clásico o lineal, hasta hace algunos años solo se investigaban utilizando como herramienta el método de Fourier. Actualmente algunos neurólogos con estudios a nivel nacional, comienzan a hacer este tipo de tratamiento digital de la señal EEG. Se ha demostrado para el caso particular del tratamiento de la serie con el espectro de Fourier, que tiende a ser periódica la señal cuando el Parkinson está plenamente desarrollado.

Los neurólogos actualmente no tienen una manera contundente de efectuar la detección temprana del Parkinson mediante el empleo exclusivo del EEG.

Las técnicas del Análisis de Sistemas Dinámicos no Lineales permitieron generar modelos visuales de reconocimiento e interpretación inusuales, que eventualmente ayudan a efectuar la detección temprana del Parkinson. En particular los atractores extraños de personas sanas jóvenes y sanos adultos mayores, exhiben una gran diferencia en comparación con los atractores extraños de personas con mal de Parkinson.

La diferencia entre los atractores generados de personas sanas jóvenes y personas adultos mayores con respecto a los atractores de personas enfermas con Parkinson, consiste en que el atractor de estas últimas la cuenca o vasija de atracción o también llamado núcleo del atractor se expande o se ensancha, lo cual a su vez significa que la amplitud de la señal correspondiente a la cuenca de atracción es mayor.

En el estudio se presenta una comparación entre individuos sanos y enfermos, como parte complementaria se propone un estudio de predicción sujetos sanos después de los 50 años a corto plazo.

El análisis de recurrencia visual de las señales EEG exhiben también diferencias notables. En el caso de personas con Parkinson completamente desarrollado se observó la aparición en el gráfico de recurrencia de 4 niveles de fluctuación principales correspondientes a 4 cuadros de nivel sobre la diagonal principal. Esto es evidencia de cambios bruscos (catástrofes) en la señal electroencefalográfica cuando hay problemas de Parkinson. Esto indica que la aparición en el gráfico de recurrencia de algunos cambios bruscos en el nivel de fluctuación de la señal EEG, podrá servir como una forma de manifestación del Parkinson y su posible detección temprana.

La diferencia entre los atractores de personas sanas jóvenes y personas sanas adultas con respecto a los atractores de personas enfermas con Parkinson consiste en que el atractor de estas últimas, la cuenca de atracción o núcleo del atractor se expande o se ensancha; lo cual a su vez significa que la amplitud de la señal correspondiente a la cuenca de atracción, es mayor.

El análisis de recurrencia visual (VRA) de las señales, EEG también exhibe diferencias notables. En el caso de personas con Parkinson completamente desarrollado se observó la aparición del gráfico de recurrencia de 4 niveles de fluctuación principales correspondientes a 4 cuadros de nivel sobre la diagonal principal. Esto es evidente de cambios bruscos (catástrofes) en la señal electroencefalográfica cuando hay problema de Parkinson. Esto indica, que la aparición en el gráfico de recurrencia de algunos cambios bruscos en el nivel de fluctuación de la señal EEG, puede servir, como indicativo de una forma de manifestación del Parkinson y su detección temprana.

Los resultados indican que hay un fuerte acoplamiento de la red neuronal de los cambios periódicos del cerebro, con una alteración cíclica del proceso central a proceso paralelo en el modo de información, reflejando estados de transición en la sincronización.

Esta técnica de Análisis permite que las series de tiempo de los EEG puedan ser interpretadas como un objeto geométrico multidimensional, esta es una herramienta para caracterizar el sistema dinámico como el cerebro humano.

Con respecto a la dinámica del cerebro estos atractores pueden ser un adecuado modelo, puesto que consiguen interpretar el resultado del proceso de organización dentro del cerebro, que produce estados coordinados del patrón de actividad.

Esta técnica provee la detección de los cambios del sistema oscilatorio en la actividad señal más claramente. Dando modelos de reconocimiento e interpretación visual para las señales bioelectroquímicas.

El modelo no lineal de la actividad bioelectroquímica del cerebro es utilizado en esta tesis como interpretación de las características no lineales que corresponden a diferentes estados fisiológicos o patológicos que no pueden ser identificados por un análisis convencional.

Un aspecto importante adicional en el estudio del orden temporal de la dinámica no lineal, es revelar los disturbios en el orden que puede acompañar disfunciones en el SNC y muchas enfermedades.

En general en las aplicaciones de tipo clínicas, pueden presentarse lesiones que con el tiempo, vienen a ser más evidentes en cortos estados, estas lesiones en la estructura o en el sustrato, cuando se presentan puede ser una forma básica y común de tener un correcto diagnóstico y su terapia.

Este trabajo se presentó en los siguientes congresos.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN

“The Third International Workshop Grapha Operads Logic”. Realizado del 9 al 11 de febrero del 2004. Poster sessions.” **Bioelectrochemical Dynamics of Parkinson’s Electroencephalographic Signals”. Poster sessions.**

UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO MÉXICO

VIII Mexican symposium on medical physics. Realizado del 17 al 19 de marzo del 2004. Guanajuato México.

Poster sessions **“Phase Space Attractors and Visual Recurrence Plots of Parkinson’s Electroencephalographic Data”.**

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN

The first International Conference on Non-linear, fractional and stochastic dynamics and stochastic dynamics and The first International Workshop of complex system, applied category theory, fractals, fractional calculus and chaos.

Poster session **”Parkinson’s disease detection via strange attractor study and recurrence plot analysis of electroencephalographic data”.** 24 al 28 de enero del 2005.

### BIBLIOGRAFÍA

- 1) **Abarbanel**, H. D. I., (1995) "Analysis of Observed Chaotic Data" Springer, Verlag New York.
- 2) **Aftanas**, L. I., Lotova, N. V. (1997) "Non-linear analysis of emotion EEG: calculation of Kolmogorov entropy and the principal Lyapunov exponent". Neuroscience Letters 226: 13-16.
- 3) **Alligood**, K. T., Saver T. D., Yorke J. A. (1996) "An Introduction to Dynamical Systems". Springer New York.
- 4) **Amara**, I. L., (2003) "A brief overview of multifractal times series". Physionet.org
- 5) **Arellano**, M., "Introducción al Análisis Clásico de Series de Tiempo," [en línea] <http://www.5campus.com>.
- 6) **Arita**, S., Yoshii, K., Ishihara S., Takeda, T. (2002). "Time Series Analysis of Electrocardiogram and Pulse Wave Responses," International Journal Chaos Theory Applied, vol. 7, no. 1-2: 81-84.
- 7) **Aubry**, N.,Holmes P. (1967) "The Dynamics of Coherent Structures in the Wall Region of a Turbulent Boundary Layer". J. Fluid Mech. Vol. 192: 115-173.
- 8) **Aurell**, E. G. Boffetta, A. Crisanti, G. Paladin, and A. Vulpiani, (1997) "Predictability in the Large: an Extension of the Concept of Lyapunov Exponent," Journal of Physics A, vol. 30, no. 1: 1-26.
- 9) **Baveye**, P., Parlange J. Steward B. (1998) "Fractals in Soil Science". CRC Press LLC. USA
- 10) **Begley**, S., Service R., Underhil W. (1992) "Finding Order in Chaos". Newskeek: 48-50.
- 11) **Belaire**, F. J., Contreras D., Tordera L. (2002) "Assesseing nonlinear structures in real Exchange rates using recurrence plot strategies". Physica D 171: 249-264.

- 12) **Betuke**, P. (1998) "Recurrence Plots".  
[www.mhri.edu.au/pdb/fractals/recurrence](http://www.mhri.edu.au/pdb/fractals/recurrence)
- 13) **Braun**, E. (1996) "Caos, Fractales y Cosas Raras". Primera Edición. Fondo de Cultura Económica. México D. F.
- 14) **Briggs**, J., Peat F. D. (1991) "Espejo y Reflejo: Del Caos al Orden". Primera Edición. Editorial Gedisa Mexicana S. A.
- 15) **Brindley**, J. T. Kapitaniak, (1991) "Existence and Characterization of Strange Nonchaotic Attractors in Nonlinear Systems". Chaos, Solitons and Fractals, vol. 1, no. 4: 323-330,
- 16) **Burke**, D., Paor A. (2001) "Signal Prediction Based On a Chaotic Attractor Model of the Electroencephalogram". Measurement Science Review. vol 1 Num 1: 19-22.
- 17) **Burt**, A. M. (1993) "Textbook of Neuroanatomy". W. B. Saunders Company. Philadelphia, Pennsylvania, USA.
- 18) **Cariani**, P. (2001) "Symbols and dynamics in the brain". Biosystems 60: 59-83.
- 19) **Carpenter's**, M. B. (1999) "Neuroanatomía Fundamentos". 4 edición, Editorial Médica Panamericana, Buenos Aires Argentina.
- 20) **Carpenter's**, M. B., Strong, Elwyn (1978) "Neuroanatomía Humana". 5 edición. El ateneo editorial, Buenos Aires Argentina.
- 21) **Castellini**, H., Romanelli L., (2004) "Applications of recurrence quantified analysis to study the dynamics of chaotic chemical reaction". Physica A 342: 301-307.
- 22) **Casdagli**, M. C., Iasemidis L. D., Savit R. S. (1997) "Non-linearity in invasive EEG recordings from patients with temporal lobe epilepsy". Electroencephalogram. and clinic. Neurophy. 102: 98-103.
- 23) **Crossman**, A. R., Neary, D. (1995) "Neuroanatomy". Pearson Professional limited, Churchill Livingstone.
- 24) **D'Alessandro**, A., (1995) "Sistema Vascular Periférico". Ediciones Nueva Física, Caracas,
- 25) **Dennis**, W. D. (1995) "Measuring Chaos in the Brain: A Tutorial Review of EEG Dimension Estimation". Brain and Cognition 27: 353-397.

- 26) **Dikanev**, T., Smirnov, D., (2005) "EEG nonstationarity during intracranially recorded seizures: statistical and dynamical analysis". *Clinical Neurophysiology* 116: 1796-1807.
- 27) **Eckmann**, J.P. and D. Ruelle, (1992) "Fundamental Limitations for Estimating Dimensions and Lyapunov Exponents in Dynamical Systems". *Physica D*, vol 56: 185-187.
- 28) **Eguiluz**, L.I., M. Mañana y J.C. Lavadero, (2001) "Clasificación de Perturbaciones Mediante la Representación en el Espacio Fase," Jornadas Hispano-Lusas Ing. Eléctrica, Madrid Julio.
- 29) **Erdi**, P., Tsuda I. (2002) "Hermeneutic Approach to the Brian Process versus Device. *Theoria et Historia Scientiarum*". Vol. 6 No. 2. Ed. Nicolas Copernicus University: 307-321.
- 30) **Farbiarz**, J., Alvarez, D. L., (2000). "Complejidad, Caos y Sistemas Biológicos". *Academia Nacional de Medicina de Colombia*, vol. 22, no. 1: 52-55, mayo.
- 31) **Feder**, J. (1988) "Fractals". Department of Physics University of Oslo, Plenum Press.
- 32) **Fraser** A.M., H.L. Swinney, (1991) "Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information," *Physical Review A*, vol. 33: 1134-1138.
- 33) **Freeman**, W., W. (1992) "Tutorial on Neurobiology: From Single Neurons to Brain Chaos". *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 2, No. 3: 451-482.
- 34) **Galka**, A. Maab T. Pfister, G. (1998) "*Estimating the Dimensions of High Dimensional Attractors: a Comparison between two Algorithms*," *Physical Review Letter* vol. 121: 237-251.
- 35) **García**, G. T., Jiménez G. A., Ortía P. R., Peña C. A. (1998) "Potenciales Bioeléctricos origen y registro". Primera impresión U.A.M. Iztapalapa. México D. F.
- 36) **García**, T. M., Sáiz R., Talavera J. A., Blanco C. (1999) "Chaos theories and therapeutic commonalities among depresión, Parkinson's disease, and cardiac arrhythmias". *Com. Psychiatry*, Vol 40 No. 3: 238-244.

- 37) **Glass, L., Kaplan D.** (1998) "Understanding Nonlinear Dynamics". second printing, Springer-Verlag New York
- 38) **Grassberger, P., Procaccia, I.,** (1984) "Dimensions and Entropies of Strange Attractors from a Fluctuating Dynamics Approach". *Physica D*, vol. 13, no. 1-2: 34-54.
- 39) **Grassberger, P., Schreiber, T., Schaffrath, C.,** (1991) "Non-linear Time Sequence Analysis". *International Journal Bifurcation and Chaos*, vol. 1: 521-529.
- 40) **Grassberger, P., Procaccia,** (1983) "Estimation of the Kolmogorov Entropy from a Chaotic Signal". *Physical Review A*, vol. 28, no. 4: 2591-2593
- 41) **Goldberger, A. Rigney D., West R., Bruce J.** (1990) "Chaos and Fractals in Human Physiology". *Scientific American*: 43-84.
- 42) **Goldberger, A.L.** (1996) "Non-linear Dynamics for Clinicians. Chaos Theory, Fractals and Complexity at Bedside". *Lancet*, vol. 347: 1312-1314.
- 43) **Gutiérrez, C. G.** (1990) "Anatomía Fisiología e Higiene". Sexta edición, Editorial Kapelusz Mexicana, S. A. de C.V. México D. F.
- 44) **Guyton, A.C.** (1990) "Anatomía y Fisiología del Sistema Nervioso". Editorial Médica Panamericana. Buenos Aires Argentina.
- 45) **Hastings, M., H., Sugihara G.** (1993) "Fractals user Guide for the Natural Sciences". Oxford University Press.
- 46) **Holden, A. V., Kryukov V.** (1991) "Neurobiology". *Synchronization and Chaos Neurocomputers and Attention Vol. 1. Cap 23 Dynamic Inhibitory Masking By Means of Compensation Learning in Neural Networks* Manchester University Press USA.
- 47) [http://www.biopsychology.org/tesis\\_esteve/apendices/fourier/tfour.htm](http://www.biopsychology.org/tesis_esteve/apendices/fourier/tfour.htm)
- 48) **Holden, C.,** (2001) "Attention Chaotic Neural Networks and Thesaurus" Manchester University Press USA. Vol. 1. Cap 28: 405-424.
- 49) **Kapitaniak, T., Bishop S.** (2000) "The Illustrated Dictionary of nonlinear Dynamics and Chaos". John Wiley & sons USA.
- 50) **Korn, H., Faure P.** (2003) "Is there chaos in the brain? II. Experimental evidence and related models". *C.R. Biologies* 326: 787-840.

- 51) **López, J.**, Camacho M., García T., Romero G. (2001) “El gráfico de Recurrencia en el Análisis de series temporales: El Programa VRA (Visual Recurrence Análisis)”. Revista Electrónica de Metodología Aplicada, Vol. 6 No. 1: 1-8.
- 52) **Mahecha, B.**, A., Garhyan P., Elnashaie S.S.E.H. (2004) “Bifurcation and chaotic behavior of coupled acetylcholinesterase/choline acetyltransferase diffusion-reaction enzymes system”. Chemical engineering science 59: 581-597.
- 53) **Mandelbrot, B.**, (1983) “The Fractal Geometry of Nature”. Freeman, New York. USA
- 54) **Matsumoto, K.** Tsuda I. (1983) “Noise- Induced Order”. Journal of Statistical Physics, Vol. 31 No. 1: 87-106.
- 55) **Moon, F.C.**, (1987) “Chaotic Vibrations,” John Wiley & Sons, New York.
- 56) **Morales, J.**, Fariñas, W., (2001) “El Orden Dinámico del Organismo: ¿Un Nuevo Concepto en la Medicina?”. Memorias II Congreso Latinoamericano de Ingeniería Biomédica, Sociedad Cubana de Bioingeniería, artículo 00384,
- 57) **Nolte, J.**, (1994) “El Cerebro Humano Introducción a la Anatomía funcional”. Lavel S.A. Mosby Doyma libros, 3 edición, Madrid España.
- 58) **Pardalos, P. M.**, Yatsenko . V. Sackellares J. C. (2003) “Analysis of EEG data using optimization, statistics, and dynamical system techniques”. Computational statistics and data analysis, vol. 44: 391-408.
- 59) **Parent, A.**, (1996) “Human Neuroanatomy”. Williams & Wilkins 9 edition, Quebec Canada.
- 60) **Pascolo, P. B.**, Marini A., Carniel R., Barazza F. (2004) “Posture as a chaotic system and an application to the Parkinson’s disease”. Chaos, solitions and fractals
- 61) **Peak, D.**, Frame, M., (1998) “Chaos Under Control the Art and Science of Complexity”. W. H. Freeman and Company. New York.
- 62) **Peng, C. K.**, Hausdorff J. M., Goldberger A. L. (2000) “Fractal mechanisms in neural control: Human Heartbeat and gait dynamics in health and disease”. Physionet.org

- 63) **Pezard**, L., Jech R., Ruzicka E. (2001) "Investigation of non-linear properties of multichannel EEG in the early stages of Parkinson's disease". Clin. neurophysiology 112: 38-45.
- 64) **Popivanov**, D., Janyan A. (2002) "Self-Similarity and Chaotic Dynamics of Biosignals During Movement Imagery". Behavioral and Brain Sciences. 32-37.
- 65) **Rasouli**, G., Lenz, F. A., (2006) "Fractal Characteristics of Human Parkinsonian Neuronal Spike Trains" Neuroscience Article in Press.
- 66) **Recurrence** "Plots for Time Series Analysis". (2000). <http://amath.Colorado.edu/appm/student/iwanski/rsrch/recur.html>.
- 51) **Richman**, J.S., Moorman, J.R. (2000) "Physiological Time Series Analysis using Approximate Entropy and Sample Entropy". American Journal Physiology, vol. 278, no. 6: H2039-H2049.
- 52) **Rowlands**, G., Sprott J. C. (1992) "Extraction of Dynamical Equations from Chaotic data". Physica D 58: 251-259.
- 53) **Sabelli**, H. (2001) "Creative Feedback in Natural and Mental Systems". Meeting of the Indian System Society.
- 54) **Sarbadhikari**, S. N., Chakrabarty K. (2001) "Chaos in the Brain: a short alluding to epilepsy, depression, exercise and lateralization". Medical Engineering and Physics 23: 445-455.
- 55) **Schreiber**, T., (1999). "Interdisciplinary Application of Nonlinear Time Series Methods". Physics Reports, vol. 308, no. 1: 1-64.
- 56) **Stanley**, W. J. (1982) "Anatomía y Fisiología Humana". Editorial Interamericana. México D., F.
- 57) **Smith**, W.A. (1988) "Elementary Numerical Analysis". Prentice-Hall. USA
- 58) **Sprott**, J. C., Rowlands G. (1992) Chaos Data Analyzer, American Institute of Physics New York. USA.
- 59) **Stam**, C. J. (2005) "Nonlinear Dynamics analysis of EEG and MEG: Review of an emerging field" Invited Review Clinical Neurophysiology 116: 2226-2301.
- 60) **Stam**, C.J., Lopes da Silva F. H., (1999) "Dynamics of human alpha rhythm, evidence for non linearity" Technical report, Clinical Neurophysiology 110: 1801-1813.

- 61) **Strogatz**, S., H. (2000) "Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineerins". Westview Press, USA.
- 62) **Strogatz, Talanquer** V. (1996) "Fractus, Fracta, Fractal, Fractales de laberintos y espejos". Primera edición. Fondo de Cultura Económica. México D. F.
- 63) **Takens**, F., (1981) "Detecting Strange Attractors in Turbulence", Lecture notes in Mathematics, Dynamical Systems and Turbulence, vol. 898: 366, Springer, Berlin.
- 64) **Tirsch**, W. S., Stude, Ph., Scherb, H., (2004) "Temporal order of nonlinear dynamics in human brain" Brain Research 45: 79-95.
- 65) **Tsuda**, I., Koerner E., Shimizu H. (1987) "Memory Dynamics in Asynchronous". Neural Networks Progress of Theoretical, Vol. 78, No. 1: 51-71.
- 66) **Tsuda**, I., (1991) "Chaotic Itinerancy as a Dynamical Basis of Hermeneutics in Brain and Mind". World Futures Vol. 32: 167-184.
- 67) **Tsuda** I., (1992) "Dynamic Link of Memory Chaotic Memory Map in Nonequilibrium". Neural Networks, Vol. 5: 313-316.
- 68) **Tsuda**, I., Kuroda S. (2001) "Cantor Coding in the Hippocampus". Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics Vol. 18 No. 2: 249-258.
- 69) **Tsuda**, I., (1993) "Dynamic-binding theory is not plausible without Chaotic Oscilation". Behavioral and Brain Sciences. 475-476.
- 70) **Tsuda**, I., (1996) "The form of Chaos in the Noisy Brain can manifest function". Behavioral and Brain Sciences. 309.
- 71) **Tsuda**, I., (2001) "Toward an interpretation of Dynamic Neural Activity in terms of Chaotic Dynamical Systems". Behavioral and Brain Sciences. Vol 24: 793-847.
- 72) **Vázquez**, C. (2004) "Detección de cambios de nivel en señales analíticas con fluctuaciones mediante la técnica del gráfico de recurrencia", XVIII Congreso nacional de química analítica (AMQA), 1 julio, Pachuca Hidalgo.
- 73) **Vázquez**, C., Cazares I., (2005) "Application of recurrence plots as a new tool in the analysis of electrochemical oscillations of copper" Journal of Electroanalytical Chemistry, Vol. 583, 17-33.

74) **Visual Recurrence Analysis** Demonstration 2000.

<http://home.Netcom.com/eugenek/demo.html>

68) **Yoshimura, N.**, Kawamura M., Masaoka Y., Homma I. (2005) "The amygdala of patients with Parkinson's disease is silent in response to fearful facial expressions". *Neuroscience* 131: 523-534.

### **Software empleado**

✚ **Chaos Data Analyzer (CDA)**.- Es una herramienta que consiste de 19 programas que nos ayudan en el análisis de series de tiempo. El objetivo principal es encontrar caos determinístico con ayuda de cálculos de distribución de probabilidad, exponente de Hurst, exponente de Lyapunov, dimensión de correlación y gráficos en el espacio-fase entre otras.

✚ **Visual Recurrence Analysis (VRA)**.- Es una herramienta para análisis topológico, análisis o evaluación cualitativa y cuantitativa y predicciones en series de tiempo caóticas no-lineales; nos permite encontrar el valor óptimo del retardo y de la dimensión de incrustación por medio de los métodos de información mutua promedio y falsos vecinos cercanos para la reconstrucción del espacio de estado. El gráfico de recurrencia nos ayuda en el análisis de periodicidad, estacionariedad, determinismo y complejidad del sistema dinámico.