

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
CURSOS ABIERTOS

CIMENTACION DE MAQUINARIA

17 al 21 de febrero de 1992

<i>F E C H A</i>	<i>H O R A R I O</i>	<i>T E M A</i>	<i>P R O F E S O R</i>
<i>Lunes 17 de febrero</i>	<i>17:00 a 19:00</i>	<i>Elementos de dinámica</i>	<i>Dra. Sonia Ruiz</i>
	<i>19:00 a 21:00</i>	<i>Solicitaciones inducidas por máquinas</i>	<i>Dr. Angel Rojas</i>
<i>Martes 18 de febrero</i>	<i>17:00 a 19:00</i>	<i>Teoría del semiespacio y elemento finito</i>	<i>M. en I. Roberto Magaña</i>
	<i>19:00 a 21:00</i>	<i>Aplicaciones del semiespacio</i>	<i>M. en I. Martín Ramírez</i>
<i>Miércoles 19 de febrero</i>	<i>17:00 a 19:00</i>	<i>Aplicaciones del elemento finito</i>	<i>Ing. Héctor Sanginés</i>
	<i>19:00 a 21:00</i>	<i>Propiedades dinámicas de suelos</i>	<i>Dr. Efraín Ovando</i>
<i>Jueves 20 de febrero</i>	<i>17:00 a 21:00</i>	<i>Aislamiento de vibraciones</i>	<i>Dr. Javier Avilez y Dr. Venancio Trueba</i>
<i>Viernes 21 de febrero</i>	<i>17:00 a 19:00</i>	<i>Cimentación de equipo reciprocante</i>	<i>M. en C. Mario Juárez</i>
	<i>19:00 a 21:00</i>	<i>Cimentación de turbogeneradores</i>	<i>M. en I. Francisco Aguilar</i>

No.	Date	Particulars
1	1912	...
2	1912	...
3	1912	...
4	1912	...
5	1912	...
6	1912	...
7	1912	...
8	1912	...
9	1912	...
10	1912	...
11	1912	...
12	1912	...
13	1912	...
14	1912	...
15	1912	...
16	1912	...
17	1912	...
18	1912	...
19	1912	...
20	1912	...
21	1912	...
22	1912	...
23	1912	...
24	1912	...
25	1912	...
26	1912	...
27	1912	...
28	1912	...
29	1912	...
30	1912	...
31	1912	...
32	1912	...
33	1912	...
34	1912	...
35	1912	...
36	1912	...
37	1912	...
38	1912	...
39	1912	...
40	1912	...
41	1912	...
42	1912	...
43	1912	...
44	1912	...
45	1912	...
46	1912	...
47	1912	...
48	1912	...
49	1912	...
50	1912	...
51	1912	...
52	1912	...
53	1912	...
54	1912	...
55	1912	...
56	1912	...
57	1912	...
58	1912	...
59	1912	...
60	1912	...
61	1912	...
62	1912	...
63	1912	...
64	1912	...
65	1912	...
66	1912	...
67	1912	...
68	1912	...
69	1912	...
70	1912	...
71	1912	...
72	1912	...
73	1912	...
74	1912	...
75	1912	...
76	1912	...
77	1912	...
78	1912	...
79	1912	...
80	1912	...
81	1912	...
82	1912	...
83	1912	...
84	1912	...
85	1912	...
86	1912	...
87	1912	...
88	1912	...
89	1912	...
90	1912	...
91	1912	...
92	1912	...
93	1912	...
94	1912	...
95	1912	...
96	1912	...
97	1912	...
98	1912	...
99	1912	...
100	1912	...

Total 100 1912

EVALUACION DEL CURSO

C O N C E P T O		
1.	APLICACION INMEDIATA DE LOS CONCEPTOS EXPUESTOS	
2.	CLARIDAD CON QUE SE EXPUSIERON LOS TEMAS	
3.	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO EN EL CURSO	
4.	CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO	
5.	CONTINUIDAD EN LOS TEMAS DEL CURSO	
6.	CALIDAD DE LAS NOTAS DEL CURSO	
7.	GRADO DE MOTIVACION LOGRADO EN EL CURSO	
EVALUACION TOTAL		

ESCALA DE EVALUACION: 1 A 10

1.- ¿Qué le pareció el ambiente en la División de Educación Continua?

MUY AGRADABLE

AGRADABLE

DESAGRADABLE

2.- Medio de comunicación por el que se enteró del curso:

PERIODICO EXCELSIOR
ANUNCIO TITULADO DE
VISION DE EDUCACION
CONTINUA

PERIODICO NOVEDADES
ANUNCIO TITULADO DE
VISION DE EDUCACION
CONTINUA

FOLLETO DEL CURSO

CARTEL MENSUAL

RADIO UNIVERSIDAD

COMUNICACION CARTA,
TELEFONO, VERBAL,
ETC.

REVISTAS TECNICAS

FOLLETO ANUAL

CARTELERIA UNAM "LOS
UNIVERSITARIOS HOY"

GACETA
UNAM

3.- Medio de transporte utilizado para venir al Palacio de Minería:

AUTOMOVIL
PARTICULAR

METRO

OTRO MEDIO

4.- ¿Qué cambios haría en el programa para tratar de perfeccionar el curso?

5.- ¿Recomendaría el curso a otras personas? SI NO

5.a. ¿Qué periódico lee con mayor frecuencia?

6.- ¿Qué cursos le gustaría que ofreciera la División de Educación Continua?

7.- La coordinación académica fué:

EXCELENTE

BUENA

REGULAR

MAIA

8.- Si está interesado en tomar algún curso INTENSIVO ¿Cuál es el horario más conveniente para usted?

LUNES A VIERNES
DE 9 a 13 H. Y
DE 14 A 18 H.
(CON COMIDAD)

LUNES A
VIERNES DE
17 a 21 H.

LUNES A MIERCOLES
Y VIERNES DE
18 A 21 H.

MARTES Y JUEVES
DE 18 A 21 H.

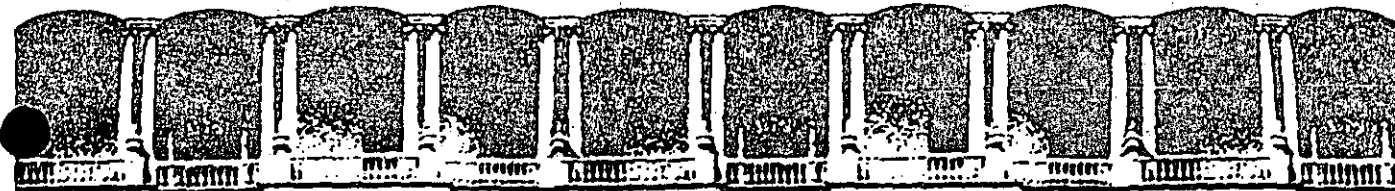
VIERNES DE 17 A 21 H.
SABADOS DE 9 A 14 H.

VIERNES DE 17 A 21 H.
SABADOS DE 9 A 13 H.
DE 14 A 18 H.

OTRO

9.- ¿Qué servicios adicionales desearía que tuviese la División de Educación Continua, para los asistentes?

10.- Otras sugerencias:



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

CURSOS ABIERTOS

CIMENTACION DE MAQUINARIA

17 al 21 de febrero de 1992

INTRODUCCION

DR. RAFAEL MORALES Y MONROY

PALACIO DE MINERIA

CIMENTACIÓN DE MAQUINARIA.

METODOLOGÍA:

deberá tomar en cuenta:

- interacción suelo - cimentación - maquinaria apoyándose para ello en:
 - diseño estructural
 - teoría de ondas
 - dinámica clásica
 - mecánica de suelos
 - solicitaciones.

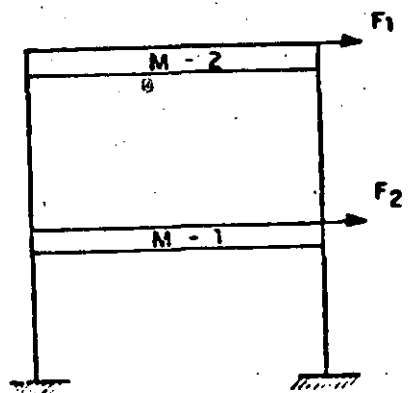
haciendo para ello una serie de hipótesis simplificadoras basadas en la experiencia práctica, en la teoría y en los conceptos básicos que justifiquen una cierta metodología.

DINAMICA BASICA

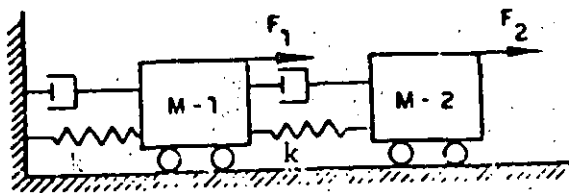
SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD (1 GDL)

En el análisis dinámico de estructuras o cimentaciones, se suele representar a los sistemas reales en sistemas equivalentes constituidos por masas concentradas que van unidas por resortes y amortiguadores. ^(Reológico) Dichas masas representan las masas correspondientes a los sistemas reales, mientras que los resortes y los amortiguadores representan, respectivamente, las rigideces y la disipación de energía que efectivamente existen. Un ejemplo de lo anterior se muestra en la fig 1.1.

k = constante del resorte
 M = masa del cuerpo



a) Sistema real



b) Sistema equivalente

Fig 1.1 Representación de un sistema real por un modelo reológico

La razón de la anterior representación es simplemente la de simplificar el análisis mediante el empleo de ecuaciones matemáticas.

En el caso de estructuras simples, como el de una viga que soporta un peso W o el de un marco estructural sujetos a una cierta fuerza dinámica $F(t)$, los elementos reales quedan representados por sistemas de 1 grado de libertad* (fig 1.2).

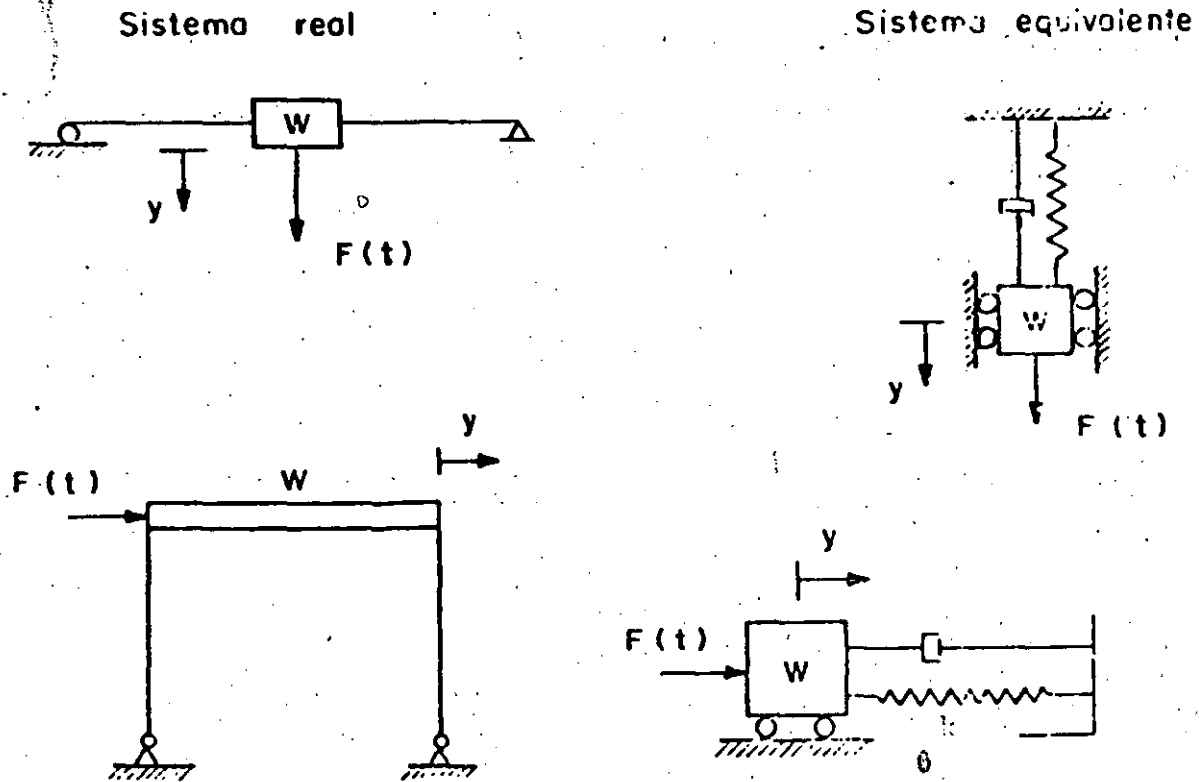


Fig 1.2 Sistemas de un grado de libertad

* Nota.- Se dice que un sistema tiene "n" grados de libertad cuando existen "n" tipos de movimientos independientes en el sistema.

Ecuación de movimiento para sistemas sin amortiguamiento

Considérese el sistema de la fig 1.3.

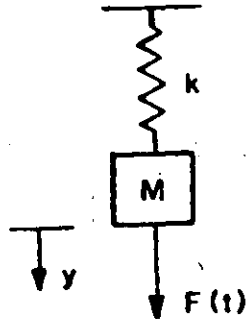


Fig 1.3-a Sistema de un grado de libertad

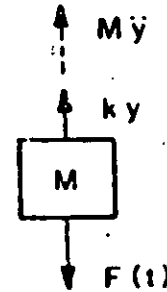


Fig 1.3-b Diagrama de cuerpo libre

Del equilibrio dinámico del sistema se obtiene

$$M\ddot{y} + ky = F(t) \quad (1-1)$$

La solución a esta ecuación nos dará la respuesta del sistema, es decir, el valor de y .

Vibraciones libres. En el caso particular de que $F(t) = 0$, la ecuación 1-1 resulta

$$M\ddot{y} + ky = 0 \quad (1-2)$$

A esta ecuación diferencial se le conoce en la literatura con el nombre de vibración libre del sistema y su solución está dada por

$$y = C_1 \sin \sqrt{\frac{k}{M}} t + C_2 \cos \sqrt{\frac{k}{M}} t \quad (1-3)$$

donde C_1 y C_2 son constantes que dependen de las condiciones iniciales.

Si se hace $\omega = \sqrt{k/M}$, y se considera que las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} y_{t=0} &= y_0 \\ \dot{y}_{t=0} &= \dot{y}_0 \end{aligned} \tag{1-4}$$

los valores de C_1 y C_2 son, respectivamente, $\frac{\dot{y}_0}{\omega}$ y y_0 . O sea, se obtiene

$$y = \frac{\dot{y}_0}{\omega} \text{ sen } \omega t + y_0 \text{ cos } \omega t; \tag{1-5}$$

esta última ecuación da el desplazamiento en cualquier instante cuando las condiciones iniciales son dadas. La descripción gráfica de cada término de la ecuación está dada por la fig 1.4.

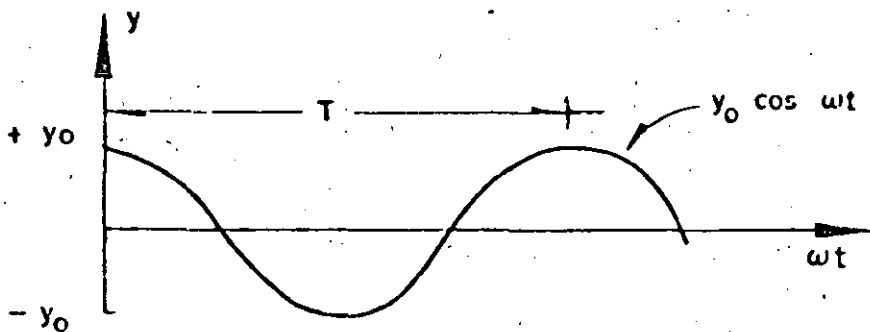


Fig 1.4-a Representación gráfica del término $y_0 \text{ cos } \omega t$

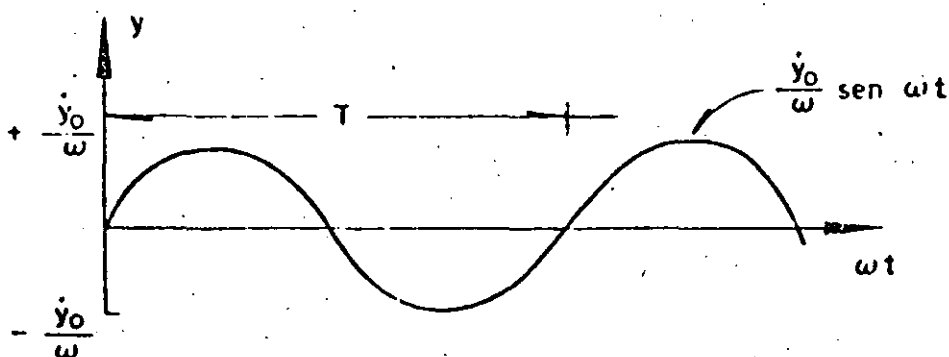


Fig 1.4-b Representación gráfica del término $\frac{\dot{y}_0}{\omega} \text{ sen } \omega t$

La fig 1.4 muestra que el movimiento es armónico con una frecuencia circular natural $\omega = \sqrt{k/M}$ (rad/seg). Esta misma frecuencia, expresada en ciclos/seg, es

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}} \text{ ciclos/seg o Hertz (Hz)}$$

Esta característica del sistema se acostumbra también expresar mediante el llamado período natural, que es el inverso de f , es decir

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{M/k} \text{ (seg)}$$

Vibraciones libres con amortiguamiento. El término amortiguamiento en dinámica de suelos se traduce como la pérdida de energía que generalmente ocurre, tanto en el suelo como en las estructuras; esta pérdida o absorción de energía origina una disminución en las amplitudes de vibración.

Como se mencionó anteriormente, el amortiguamiento en el sistema o modelo equivalente suele representarse mediante el elemento cilindro-pistón, según se aprecia en la fig 1.5.

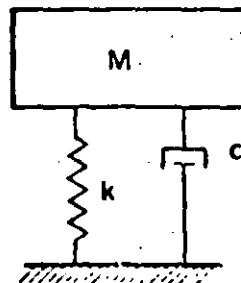


Fig 1.5 Modelo equivalente con amortiguamiento

La ecuación de movimiento libre para este caso está dada por

$$M\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \quad (1-6)$$

donde c es el coeficiente de amortiguamiento.

Existen dos tipos de solución a esta ecuación, según sea el valor de c .

- a) Si c es pequeño se tendrá un movimiento armónico que disminuye en forma exponencial, y la solución estará dada en términos de seno y coseno (figs 1.6-a y 1.6-b).

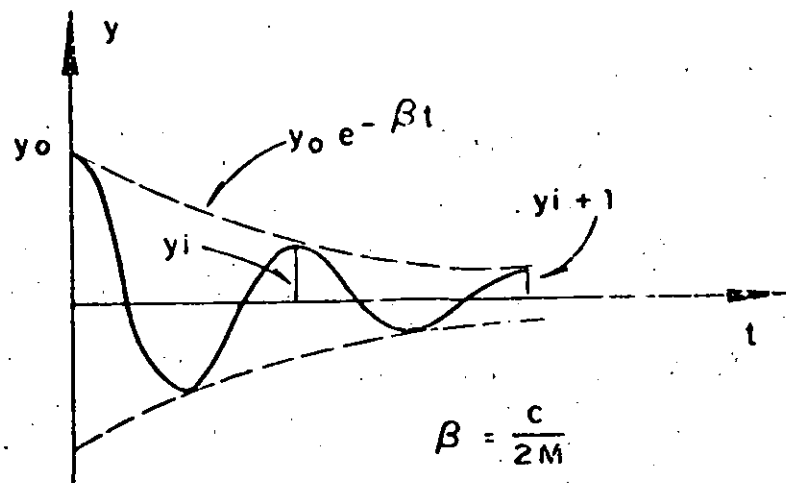


Fig 1.6 a Variación de y con respecto al tiempo, para un desplazamiento inicial y_0 .

- b) Si c es muy grande, no ocurrirán movimientos armónicos; esto último ocurre cuando $c > 2 \sqrt{kM} = c_{\text{crítico}}$.

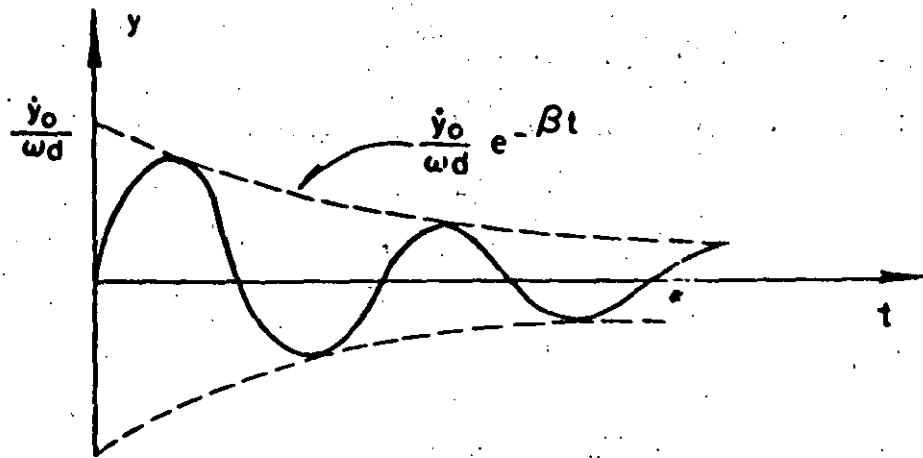


Fig 1.6-b Variación de y con respecto al tiempo ;
para una velocidad inicial \dot{y}_0

Suponiendo que las condiciones iniciales son

$$y_{t=0} = y_0$$

$$\dot{y}_{t=0} = 0$$

la solución a la ecuación diferencial (1-6) resulta igual a

$$y = y_0 e^{-\omega D t} \left(\cos \omega_1 t + D \frac{\omega}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \quad (1-7)$$

donde

$$D = \frac{c}{c_{\text{crit}}} = \text{relación de amortiguamientos}$$

$$\omega_1 = \omega \sqrt{1-D^2} ; \text{frecuencia circular natural con amortiguamiento}$$

Cuando D es pequeño, como sucede en la mayoría de los sistemas reales, la diferencia entre ω_1 y ω es muy pequeña y casi siempre se ignora; es decir, se supone que $\omega_1 = \omega$.

Haciendo algunos arreglos en la ecuación 1-7, se puede obtener la siguiente solución en términos de una sola función periódica

$$y = y_0 \sqrt{1 + \left(\frac{D\omega}{\omega_1}\right)^2} e^{-\omega D t} \cos(\omega_1 t + \theta) \quad (1-8)$$

donde

$$\theta = \tan^{-1} \left(-\frac{D\omega}{\omega_1}\right)$$

Nótese que cuando D es pequeño, se puede escribir

$$\frac{y_i}{y_{i+1}} = e^{\omega D t} = e^{2\pi D} \quad (1-9)$$

o también

$$\Delta = \ln \frac{y_i}{y_{i+1}} = 2\pi D \text{ (decremento logarítmico)} \quad (1-10)$$

Obsérvese que mediante la ecuación (1-10), y a partir de la observación de la disminución de las amplitudes en las vibraciones libres (fig 6), la relación de amortiguamiento D se puede obtener fácilmente.

Vibraciones forzadas. Supóngase que se tiene un sistema de un grado de libertad sujeto a una cierta fuerza $P = P_0 \sin \Omega t$, como se observa en la fig 1.7. La ecuación de equilibrio está dada por

$$M\ddot{y} + c\dot{y} + ky = P_0 \sin \Omega t \quad (1-11)$$

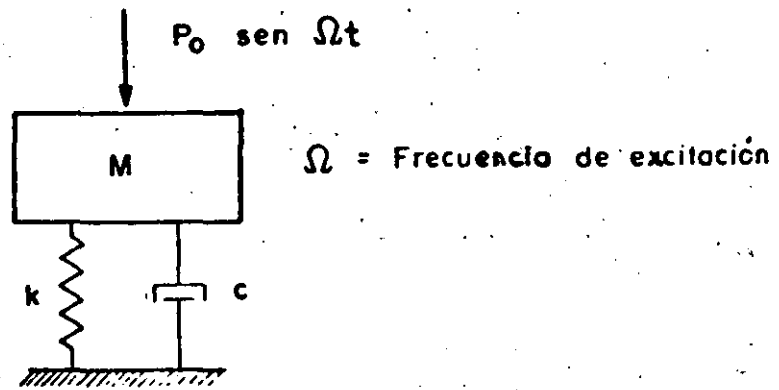


Fig 1.7 Sistema de un grado de libertad

donde $\alpha = \tan^{-1} \frac{2D \omega \Omega}{\omega^2 - \Omega^2}$

y $\frac{P_0}{k}$ es el desplazamiento estático

En la literatura se le denomina como factor dinámico o de amplificación al siguiente valor:

$$DLF = \left[\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + 4D^2 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 \right]^{-1/2} \quad (1-15)$$

que viene siendo la relación entre el valor de la respuesta dinámica máxima y la respuesta estática; es decir

$$y_0 = \frac{P_0}{k} DLF \quad (1-16)$$

La variación de DLF con la relación de frecuencias (Ω/ω) y el amortiguamiento, está dado por la fig 1.8:

Nótese en esta última figura que el DLF tiene un valor máximo cerca de $\Omega/\omega = 1$, y que para valores grandes de esta relación el $DLF \rightarrow 0$.

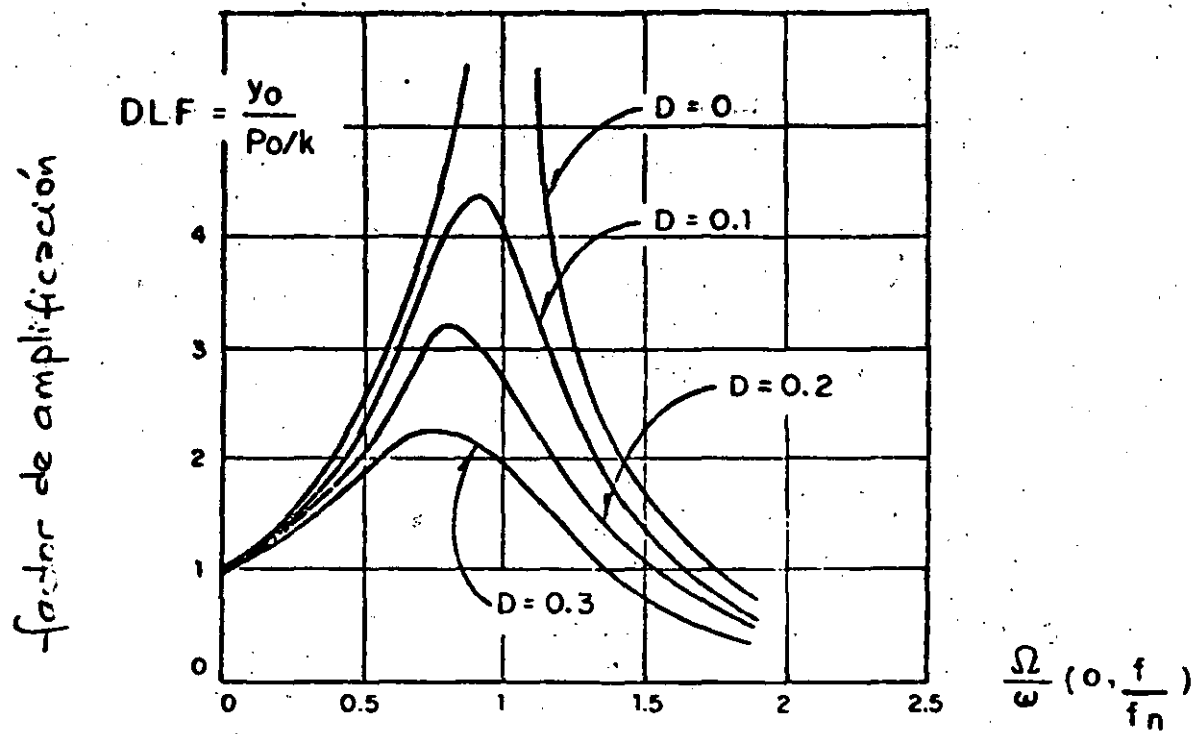


Fig 1.8 Factor de amplificación.

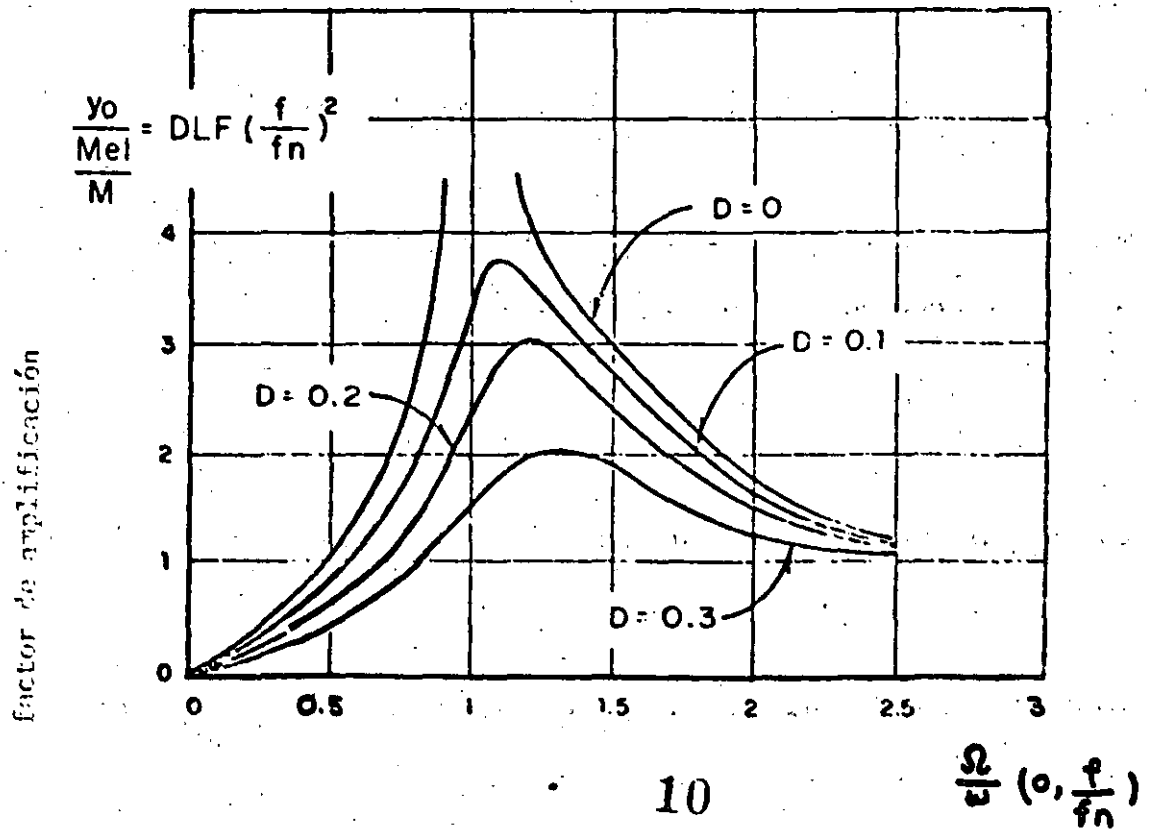


Fig 1.9 Curvas de amplificación para el caso de masas excéntricas

En el caso particular de tener fuerzas producidas por masas excéntricas, la amplitud de dichas fuerzas varía al cuadrado de la frecuencia de excitación, es decir

$$P_0 = Me l \Omega^2$$

donde

Me = masa excéntrica

l = radio de giro

Ω = frecuencia de excitación

y la amplitud de la respuesta se puede calcular mediante:

$$y_0 = \frac{Me l \Omega^2}{k} DLF = \frac{Me l}{M} \left(\frac{f}{f_n}\right)^2 DLF \quad (1-17)$$

Para este caso las curvas de la fig 1.8 son válidas, sin embargo se emplean más las dibujadas en la fig 1.9.

En esta figura 1.9 se observa nuevamente un valor máximo cuando $\Omega/\omega = 1$; sin embargo, para valores grandes de Ω/ω , el valor de DLF $(f/f_n)^2 + 1$.

Es importante observar en estas figuras que para frecuencias de excitación muy bajas ($\Omega \rightarrow 0$), la respuesta está regida fundamentalmente por la rigidez equivalente (constante del resorte k), mientras que para valores altos de Ω , la respuesta está regida por la inercia del sistema. Por otro lado, para frecuencias de excitación iguales o cercanas a la frecuencia natural del sistema, el amortiguamiento desempeña un papel muy importante; así por ejemplo, si $\Omega = \omega$, se puede ver que $DLF = \frac{1}{2D}$. (Nótese también en estas dos figuras que el pico

o valor máximo ocurre para $\Omega/\omega = 1$, solo cuando $D = 0$; en otros casos este pico está desfasado ligeramente a la izquierda o a la derecha, según se trate de la fig 1.8 o la fig 1.9, respectivamente). La Tabla 1 resume las propiedades observadas en ambas figuras.

Tabla No. 1 RESUMEN DE LAS PROPIEDADES OBTENIDAS DE LAS FIGS 848 y 849

PROPIEDAD	DE LA FIG 1.8	DE LA FIG 1.9
Respuesta adimensional para $\Omega = 0$	1	0
Respuesta adimensional para $\Omega \rightarrow \infty$	0	1
$\frac{\Omega_r}{\omega}$ (frec. de resonancia) / (frec. natural)	$(1 - 2D^2)^{1/2}$	$(1 - 2D^2)^{-1/2}$
Respuesta adimensional cuando $\Omega = \Omega_r$	$[2D \sqrt{1 - D^2}]^{-1}$	$[2D \sqrt{1 - D^2}]^{-1}$
Respuesta adimensional cuando $\Omega = \omega$	$1/2D$	$1/2D$
Respuesta aproximada cuando $\Omega < \frac{2}{3} \omega$, o $\Omega > \frac{3}{2} \omega$	$\frac{1}{ 1 - (\frac{\Omega}{\omega})^2 }$	$\frac{(\Omega/\omega)^2}{ 1 - (\frac{\Omega}{\omega})^2 }$

Efecto del amortiguamiento

Como se observa en las figs 1.8 y 1.9, el efecto del amortiguamiento es, en primer lugar, la disminución del factor de amplificación, y en segundo, la variación de la frecuencia de resonancia.

Ahora bien, la cantidad de energía por ciclo que se consume o se pierde, se puede calcular como sigue:

$$\Delta E = \int \underset{\text{fza}}{c \dot{y}} \underset{\text{despl}}{dy}$$

$$\text{pero } \dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

$$\text{o sea } \Delta E = c \int_0^T \dot{y}^2 dt$$

Derivando el valor del desplazamiento (Ec. 1.14) y substituyendo valores, resulta:

$$\Delta E = 4y_0^2 \frac{\Omega^2}{\omega} c$$

Por otro lado, sabemos que el valor de la energía máxima almacenada en cada ciclo está dada por:

$$E = \frac{1}{2} k y_0^2$$

Es decir:

$$\frac{\Delta E}{E} = \boxed{2\eta \frac{\Omega^2}{\omega} \frac{c}{k} = \psi} ; \text{ capacidad de amortiguamiento}$$

En el caso de que $\Omega = \omega$, se tiene:

$$\psi = 2\eta \omega \frac{c}{k} = 2\eta \sqrt{\frac{k}{M}} \frac{c}{k} = 4\eta \frac{c}{2\sqrt{kM}} = 4\eta D = 2\Delta$$

El ángulo de fase α (ángulo que indica lo retrazado o adelantado de la reacción con respecto a la fuerza aplicada), según se puede ver en la fig 1.10, es función del amortiguamiento

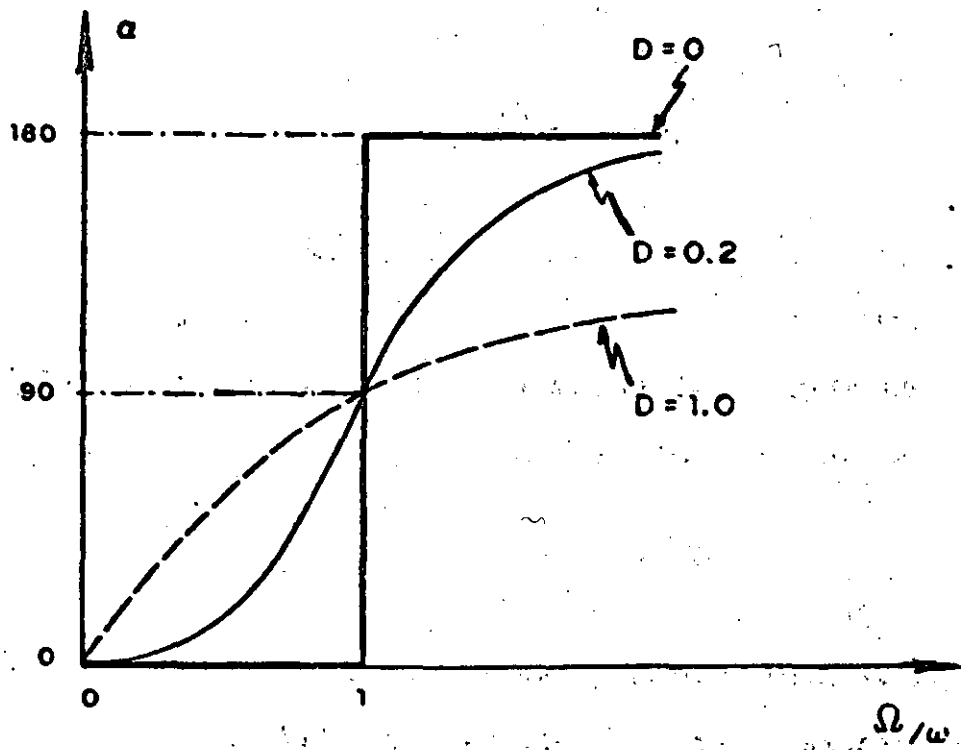


Fig 1.10 Variación del ángulo de fase α , con el amortiguamiento y con la relación Ω/ω

PARTE II

PROPAGACION DE ONDAS

II.1 INTRODUCCION

Puesto que las vibraciones transmitidas por las cimentaciones (bien de las estructuras hacia el suelo como son las fuerzas de maquinaria, o del suelo hacia las estructuras como es el caso de sismos) se efectúan siempre a través de ondas, es muy importante conocer los distintos tipos de ondas que se producen en el suelo y sus mecanismos de propagación.

En problemas relacionados al terreno de cimentación se tendrán situaciones que van, desde el caso de considerar un medio idealizado como homogéneo y elástico (depósitos profundos de arcilla), hasta el caso más complejo pero más común, consistente en un medio errático, con estratificaciones alternantes y con características no lineales de esfuerzo deformación. Además, cuando se analiza un suelo a través de probetas en el laboratorio, se tendrá un caso particular de medio no continuo por las condiciones de frontera allí existentes.

Los casos señalados se pueden analizar a partir del estudio de la propagación de ondas, tanto en semiespacios infinitos homogéneos o estratificados, así como en barras de longitud finita.

No ↓ El presente capítulo no pretende cubrir el estado del arte en propagación de ondas, sino simplemente presentar los fundamentos

que se requieren para el manejo de los conceptos que se tratan en la dinámica de suelos. Al lector que le interese profundizarse más sobre el tema, podrá consultar las referencias señaladas al final del capítulo.

Primeramente se indicarán los tipos de ondas elásticas existentes en un medio infinito, posteriormente se analizará la propagación de ondas en un medio seminfinito con características tanto homogéneas como las de un medio estratificado, y finalmente se describirá la propagación de ondas en barras.

II.2 PROPAGACION DE ONDAS EN UN MEDIO INFINITO

En un medio infinito, homogéneo e isótropo, sólo se pueden propagar los dos tipos de ondas que corresponden a las dos únicas soluciones que se obtienen de las ecuaciones de movimiento que más adelante se señalan; estas dos clases de ondas son las llamadas de compresión, primarias o dilatantes ^(P) y las conocidas como ondas cortantes, secundarias o distorsionales ^(S).

Partiendo del análisis de equilibrio de un pequeño elemento como el mostrado por la fig 2.1, se llega a las siguientes expresiones conocidas en la literatura como las ecuaciones de movimiento (los pasos para llegar a las mismas se pueden ver en la ref 1)

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + G \nabla^2 u \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial y} + G \nabla^2 v \quad (2.2)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial z} + G \nabla^2 w \quad (2.3)$$

donde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (operador laplaciano en coordenadas cartesianas)

u, v, w son los desplazamientos en las direcciones x, y y z respectivamente

ρ es la densidad de masa del medio (peso volumétrico/aceleración de la gravedad)

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (\text{constante de Lamé})$$

$$G = \frac{E}{2(1-\nu)} \quad (\text{módulo al cortante})$$

ν es la relación de Poisson

E el módulo elástico de Young

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (\text{dilatación cúbica})$$

y ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z son respectivamente las deformaciones normales en las direcciones x, y y z

Derivando las ecuaciones 2.1, 2.2 y 2.3 con respecto a x, y y z respectivamente, y sumando las expresiones obtenidas, se llega a la siguiente ecuación

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \nabla^2 \bar{\epsilon}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = v_c^2 \nabla^2 \bar{E} \quad (\text{ec de onda de dilatación cúbica}) \quad (2.4)$$

$$\text{donde } v_c = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad (2.5)$$

Esta última expresión representa la velocidad de propagación de una onda dilatante o irrotacional*, o dicho en otras palabras, la dilatación \bar{E} se propaga con una velocidad v_c . Al numerador de la ecuación 2.5 se le conoce comúnmente como módulo dilatante de E , es decir

$$D = \lambda + 2G = \frac{(1-\nu) E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \text{módulo de dilatación}$$

Derivando ahora la ecuación 2.2 con respecto a z y a 2.3 con respecto a y , y eliminando \bar{E} mediante la substracción de las dos expresiones resultantes, se obtiene

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = G \nabla^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\text{o sea } \rho \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} = G \nabla^2 \theta_x \quad (2.6)$$

donde $\theta_x = 2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$, o sea es la rotación alrededor del eje x

* En la literatura del medio continuo se le conoce como "cilindricidad".

La ecuación 2.6 se puede también escribir como sigue:

$$\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} = v_s^2 \nabla^2 \theta_x \quad (2.7)$$

donde $v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ es la velocidad de las llamadas ondas cortantes o equivolúmetricas y representa la velocidad de propagación de la rotación θ_x .

Las ecuaciones correspondientes a θ_y y θ_z se obtienen de manera similar a la ec (2.7), y se puede decir que la rotación se propaga con la velocidad v_s .

Además de la velocidad con que se propagan cada una de estas ondas existentes en un medio elástico infinito, llamadas ambas ondas de cuerpo, tienen la siguiente particularidad. En las ondas compresionales el movimiento de las partículas tiene la misma dirección en que se propagan (véase fig 2.2), mientras que en las ondas cortantes los movimientos de las partículas son perpendiculares a la dirección de su propagación. La relación entre las velocidades de estas dos clases de ondas está dada por la expresión:

$$\frac{v_c}{v_s} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \quad (2.8)$$

la cual implica que $v_c > v_s$ para cualquier valor de ν , y que para $\nu=0.5$, v_c adquiere un valor teórico de infinito.

II.3 PROPAGACION DE ONDAS EN UN MEDIO SEMINFINITO

En un medio seminfinito existe una frontera que permite obtener una tercera solución a las ecuaciones de movimiento y así tener un tercer tipo de onda. Este tercer tipo corresponde a las ondas superficiales llamadas de Rayleigh (en honor a quien las descubrió), las cuales producen en las partículas movimientos elípticos (fig 2.2) y disminuyen rápidamente su amplitud con la profundidad.

La ecuación de la onda Rayleigh se puede obtener estableciendo un sistema de coordenadas como el señalado en la fig 2.3, y suponiendo una onda plana que viaja en la dirección positiva de las x . Así, partiendo de que los desplazamientos u y w se pueden escribir respectivamente como

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{y} \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

donde ϕ y ψ son funciones potenciales que resultan estar relacionadas respectivamente con la dilatación y rotación del medio, se obtiene, al sustituir u y w en las ecs (2.1) y (2.3), las siguientes expresiones

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2G) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \phi) + G \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \psi) \quad (2.9)$$

y

$$\rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2G) \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \phi) - G \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi) \quad (2.10)$$

De estas ecuaciones se obtiene

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2G}{\rho} \nabla^2 \phi = v_c^2 \nabla^2 \phi \quad (2.11)$$

y

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(\frac{G}{\rho}\right) \nabla^2 \psi = v_s^2 \nabla^2 \psi \quad (2.12)$$

Ahora bien, suponiendo una solución del tipo de onda senoidal viajando en la dirección positiva de las x , se puede escribir

$$\phi = F(z) e^{i(\omega t - N_x)} \quad (2.13)$$

y

$$\psi = G(z) e^{i(\omega t - N_x)} \quad (2.14)$$

donde $F(z)$ y $G(z)$ son funciones que describen la variación de la amplitud de la onda con la profundidad, y $N=2\pi/L_R$ (conocido como número de onda); L_R es la longitud de la onda generada. Al sustituir los valores de ϕ y ψ dados por las ecuaciones (2.13) y (2.14) dentro de las ecuaciones (2.11) y (2.12), y considerar la condición de que la amplitud de la onda superficial tiende a cero con la profundidad, los valores de $F(z)$ y $G(z)$ resultan iguales a

$$F(z) = A_1 e^{-\sqrt{N^2 - \frac{\Omega^2}{v_c^2}} z}$$

y

$$G(z) = A_2 e^{-\sqrt{N^2 - \frac{\Omega^2}{v_s^2}} z}$$

Los valores de Λ_1 y Λ_2 se obtienen de aplicar las condiciones de frontera relativas a que los esfuerzos cortantes y normales en la superficie del semiespacio deben ser nulos. Aplicando dichas condiciones se obtienen las siguientes expresiones

$$\frac{A_1}{A_2} \frac{(\lambda + 2G) \left(N^2 - \frac{\Omega^2}{V_C^2}\right)^2 - \lambda N^2}{2i GN \sqrt{N^2 - \frac{\Omega^2}{V_S^2}}} - 1 = 0 \quad (2.15)$$

y

$$\frac{A_1}{A_2} \frac{2 \sqrt{N^2 - \frac{\Omega^2}{V_C^2}} iN}{2N^2 - \frac{\Omega^2}{V_S^2}} + 1 = 0 \quad (2.16)$$

Añadiendo estas dos ecuaciones y haciendo algunos arreglos matemáticos, se llega a la ecuación que da el valor de la velocidad con que se propagan las ondas Rayleigh

$$\left(\frac{v_R}{v_S}\right)^2 - 8 \left(\frac{v_R}{v_S}\right)^4 + \left[24 - 16 \left(\frac{v_S}{v_C}\right)^2\right] \left(\frac{v_R}{v_S}\right)^2 + 16 \left[\left(\frac{v_S}{v_C}\right)^2 - 1\right] = 0 \quad (2.17)$$

En la fig (2.4) se muestra la relación que guarda v_R/v_S y v_C/v_S para varios valores de la relación de Poisson ν ; obsérvese que v_R es aproximadamente igual a v_S , particularmente para valores grandes de ν .

En cuanto a la variación de los desplazamientos con la profundidad, éstos se pueden obtener a partir de las expresiones señaladas para $u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}$ y $w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$, así como de sus-

tituir en ellas los valores de ϕ y Ψ dados por las ecuaciones (2.13) y (2.14).

Las expresiones que resultan (ref 1), son las siguientes

$$u = A_1 N i \left\{ - \exp \left[- \frac{\sqrt{N^2 - \frac{\Omega^2}{v_c^2}}}{N} (zN) \right] + \frac{2 \sqrt{(N^2 - \frac{\Omega^2}{v_c^2})(N^2 - \frac{\Omega^2}{v_s^2})}}{N^2} \frac{N^2}{N^2 - \frac{\Omega^2}{v_s^2} + 1} \exp \left[- \frac{\sqrt{N^2 - \frac{\Omega^2}{v_s^2}}}{N} (zN) \right] \right\} \exp i(\Omega t - Nx) \quad (2.18)$$

y

$$w = A_1 N \left\{ \frac{2 \sqrt{N^2 - \frac{\Omega^2}{v_c^2}}}{N^2 - \frac{\Omega^2}{v_s^2} + 1} \exp \left[- \frac{\sqrt{N^2 - \frac{\Omega^2}{v_s^2}}}{N} (zN) \right] - \frac{\sqrt{N^2 - \frac{\Omega^2}{v_c^2}}}{N} \exp \left[- \frac{\sqrt{N^2 - \frac{\Omega^2}{v_s^2}}}{N} (zN) \right] \right\} \exp i(\Omega t - Nx) \quad (2.19)$$

De la observación de estas dos ecuaciones, se puede deducir que los términos dentro de las llaves representan la variación respectiva de u y w con la profundidad. O sea

$$u = U(z) A_1 N i e^{i(\Omega t - Nx)}$$

y

$$w = W(z) A_1 N e^{i(\Omega t - Nx)}$$

La variación de $U(z)$ y $W(z)$ con la profundidad para varios valores de v , se indica en la fig 2.5. Para fines recordatorios, la fig 2.6 señala la interpretación física del concepto de longitud de onda que interviene en la figura anterior.

Debe señalarse que son las ondas Rayleigh las que transmiten la mayor parte de la energía generada por la vibración de una zapata sobre la superficie de un semiespacio. (Cuando la zapata es circular, el 67% de la energía es transmitida por las ondas Rayleigh, mientras que las cortantes transmiten el 26% y las de compresión el 7% restante.) Por otro lado, en comparación con las ondas de cuerpo, las amplitudes de las ondas Rayleigh disminuyen más lentamente con la distancia r al centro de la fuente de excitación (mientras que la atenuación de las ondas P y S en la superficie es proporcional a $1/r^2$, en las ondas Rayleigh es proporcional a $1/\sqrt{r}$); la razón de esta diferencia se debe al concepto del llamado amortiguamiento radial que se estudia en el siguiente capítulo. Lo anterior hace, como se ilustrará posteriormente, que las ondas Rayleigh desempeñen un papel muy importante en la transmisión de vibraciones en o cerca de la superficie.

Las ondas Rayleigh son generalmente fáciles de reconocer ya que usualmente tienen una amplitud grande con frecuencia relativamente baja, según puede observarse en la fig 2.7.

II.4 PROPAGACION DE ONDAS EN UN MEDIO ESTRATIFICADO

En la mayoría de los casos reales se tienen depósitos de suelo constituidos por estratificaciones, lo cual obliga a conocer la transmisión de vibraciones a través de medios estratificados. En forma simplista se puede conocer lo que sucede con las ondas que llegan a las superficies de contacto de dos estratos con propiedades diferentes, partiendo del análisis de refracción y reflexión que experimentan cada una de las ondas de cuerpo.

Sin embargo, con el objeto de considerar la división de la energía que se origina en el punto de incidencia, es conveniente considerar primeramente el caso particular de la descomposición de las ondas P y S al llegar a una superficie libre. Para ello resulta a la vez conveniente tomar en cuenta que las ondas cortantes S se pueden descomponer en una componente paralela a la superficie (ondas S H), y en otra contenida en el plano vertical (ondas S V). La fig 2.8 ilustra esta descomposición.

Cuando una onda dilatante P incide sobre la superficie libre del semiespacio, parte de la energía se refleja a través de una onda cortante SV y parte a través de una onda P (fig. 2.9). El ángulo de reflexión θ_1 de la onda SV está dado de acuerdo con la ley de Snell

$$\text{sen } \theta_1 = \text{sen } \theta \frac{v_s}{v_p}$$

donde θ es el ángulo de incidencia.

Esta velocidad es menor que la velocidad v dada por la ecuación (2.5); la razón de ello es que en un medio infinito o seminfinito no existen desplazamientos normales a la dirección en que se propagan estas ondas, mientras que en una barra dichos desplazamientos son factibles. A esta clase de ondas compresionales en barras se les conoce en la literatura con el nombre de ondas longitudinales.

La obtención de la ecuación 2.21 se puede hacer a partir del análisis de fuerzas actuando en un elemento de barra de longitud Δx (fig 2.17), que tiene una sección transversal de área A .

Del equilibrio de fuerzas indicadas, en la fig 2.17 se obtiene

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} \Delta x A = \rho \Delta x A \left(- \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)$$

Simplificando la expresión anterior se obtiene

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{2.22}$$

Esta misma ecuación se puede expresar en otros términos de la siguiente manera: De la teoría de elasticidad se tiene

$$\sigma = E \epsilon \tag{2.23}$$

donde $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$

Llevando (2.23) a (2.22), se obtiene

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.24)$$

que es la llamada "ecuación de ondas en una dimensión". La solución a esta ecuación es del tipo

$$u = f\left(x \pm \sqrt{\frac{E}{\rho}} t\right) \quad (2.25)$$

Ejemplo de funciones que satisfacen la condición anterior son las siguientes

$$u = \text{sen} \left(x \pm \sqrt{\frac{E}{\rho}} t\right)$$

$$u = \text{cos} \left(x \pm \sqrt{\frac{E}{\rho}} t\right)$$

$$u = \left(x \pm \sqrt{\frac{E}{\rho}} t\right)^2$$

El significado físico de las implicaciones de dicha solución se muestra en la fig (2.18). Para un tiempo cualquiera t_1 (que puede ser $t_1=0$), se tiene un cierto tipo de desplazamiento caracterizado por una función que satisfaga la ec 2.25; posteriormente, en el tiempo t_2 , se observará exactamente el mismo tipo de desplazamiento pero en un lugar diferente. Es decir, el tipo de movimiento que se observa es precisamente como el de una onda que se desplaza a una velocidad $v_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Analíticamente lo anterior se puede comprobar de la siguiente manera; su-

póngase el signo negativo de la ecuación (2.25), y que $t_2 = t_1 + \Delta t$; se tiene entonces

$$u \Big|_{t=t_1} = f(x - v_L t)$$

$$u \Big|_{t_2=t_1+\Delta t} = f[(x + \Delta x) - v_L (t + \Delta t)]$$

$$u \Big|_{t_2=t_1+\Delta t} = f[(x + v_L \Delta t - v_L t - v_L \Delta t)] = f(x - v_L t),$$

lo cual confirma lo antes señalado.

Es importante distinguir la diferencia que existe entre la velocidad de onda y la velocidad de la partícula. Para el caso de una onda de compresión como la mostrada en la fig 2.13, la velocidad de la partícula se obtiene a partir de la determinación del esfuerzo

$$\sigma_x = E \frac{u}{\Delta x}$$

de donde se obtiene que

$$u = \frac{\sigma_x}{E} \Delta x = \frac{\sigma_x}{E} v_L \Delta t$$

Por lo tanto, la velocidad de la partícula es

$$\dot{u} = \frac{u}{\Delta t} = \frac{\sigma_x v_L}{E} \quad (2.26)$$

Obsérvese en esta última expresión que la velocidad de la partícula depende del valor del esfuerzo aplicado, mientras que la velocidad de propagación de ondas depende sólo de las propiedades del material.

Ahora bien, al analizar las ondas cortantes en barras, siguiendo un procedimiento similar al descrito para las ondas compressionales, se llega a que la ecuación de onda está dada por la siguiente expresión

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = v_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (2.27)$$

donde θ es el ángulo de giro y

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2.28)$$

es la velocidad con que se propagan las ondas cortantes en barras.

Este valor, como puede notarse, resulta ser igual al obtenido en el análisis de propagación de ondas en un medio infinito o seminfinito.

Obsérvese que conociendo las velocidades v_L o v_s los módulos E y G se pueden obtener respectivamente mediante las ecuaciones 2.21 y 2.28.

En la práctica la determinación de C_L y C_s se puede efectuar a través de probetas cilíndricas en el laboratorio, las

cuales constituyen barras de longitud finita. Si se consideran por ejemplo las ondas longitudinales a través de barras, la solución en este caso a la ecuación 2.24 se puede escribir en forma de series trigonométricas, de la siguiente manera

$$u = U(A_1 \cos \omega_n t + A_2 \operatorname{sen} \omega_n t) \quad (2.29)$$

donde

U es la amplitud de los desplazamientos.

A_1 y A_2 son constantes que dependen de las condiciones de frontera

y ω_n es la frecuencia circular natural de vibración del n -ésimo modo

Al sustituir (2.29) en la ecuación 2.24, se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\omega_n^2}{v_L^2} U = 0 \quad (2.30)$$

La solución a esta ecuación diferencial es del siguiente tipo

$$U = A_3 \cos \frac{\omega_n x}{v_L} + A_4 \operatorname{sen} \frac{\omega_n x}{v_L}$$

donde A_3 y A_4 son también constantes dependientes de las condiciones de frontera. Por ejemplo, suponiendo un extremo fijo y el otro libre (fig 2.19), dos condiciones son las siguientes

$$1) \quad U = 0 \Big|_{x=0} \quad (\text{significa que en el extremo fijo los desplazamientos son nulos})$$

$$2) \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Big|_{x=\ell} \quad (\text{en el extremo libre las deformaciones valen cero})$$

Aplicando la primera condición se deduce que $A_1 = 0$, y de la segunda se obtiene que

$$\cos \frac{\omega_n \ell}{v_L} = 0$$

de donde se deduce que

$$\omega_n = (2n-1) \frac{v_L}{2\ell}, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (2.31)$$

Lo anterior conduce a poder expresar la amplitud del desplazamiento de la siguiente manera

$$U = A_n \operatorname{sen} \frac{(2n-1) \pi x}{2\ell} \quad (2.32)$$

En la fig 2.19 se muestran los tres primeros modos de vibración de una probeta circular y el significado físico de la constante A_n . Al sustituir la ec (2.32) en (2.29), se obtiene la forma general de los desplazamientos

$$u = \operatorname{sen} \frac{(2n-1) \pi x}{2\ell} \left[(A_1)_n \cos \frac{(2n-1) \pi v_L t}{2\ell} + (A_2)_n \operatorname{sen} \frac{(2n-1) \pi v_L t}{2\ell} \right] \quad (2.33)$$

Para otras condiciones de frontera o para el caso de vibraciones torsionales se podrá seguir el procedimiento descrito y obtener expresiones análogas a la ec (2.33). La expresión co-

rrespondiente a la frecuencia circular natural bajo excitaciones torsionales, considerando las mismas condiciones de frontera (un extremo fijo y el otro libre), resulta exactamente la misma dada por la ec (2.31), sólo que en vez de v_L interviene v_s .

REFERENCIAS

1. Richart, F.E., Hall, J.R., and Woods, R.D. (1970), "Vibrations of Soils and Foundations", Prentice-Hall.
2. Mooney, H.M. (1973), "Handbook of Engineering Geophysics", Bison Instruments, Inc.
3. Ewing, W.M., Jardetzky, W.S., and Press, F. (1957), "Elastic Waves in Layered Media", McGraw-Hill Book Co (New York) pp 380.
4. Jones, R. (1958), "In-Situ Measurements of the Dynamic Properties of Soil by Vibration Methods", Geotechnique, Vol 8, No 1, Marzo, pp 1-21.

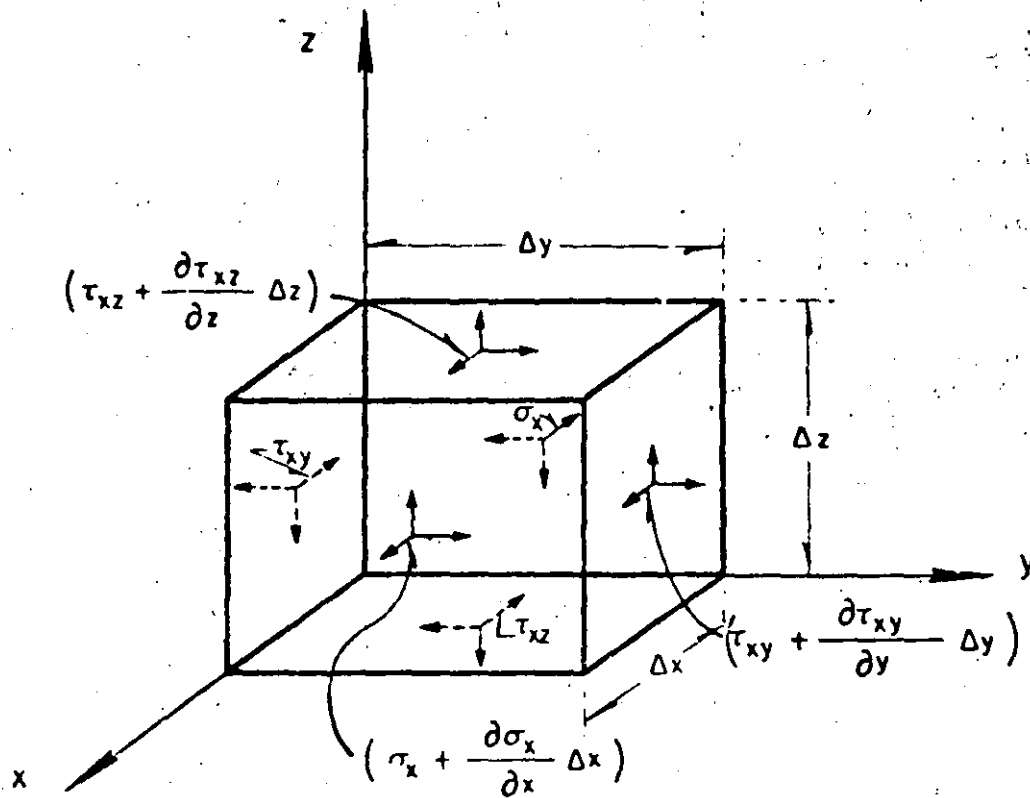
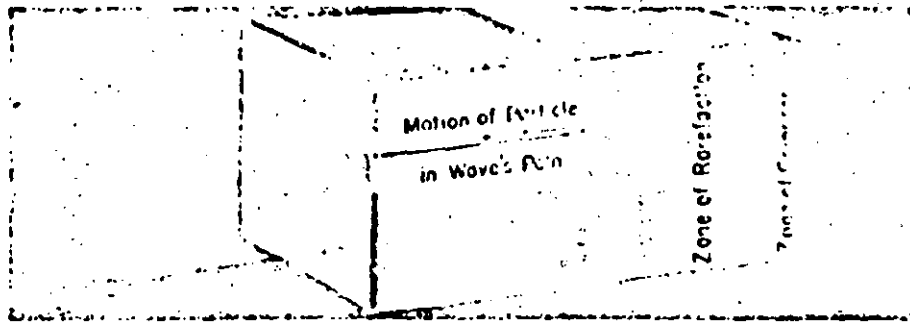
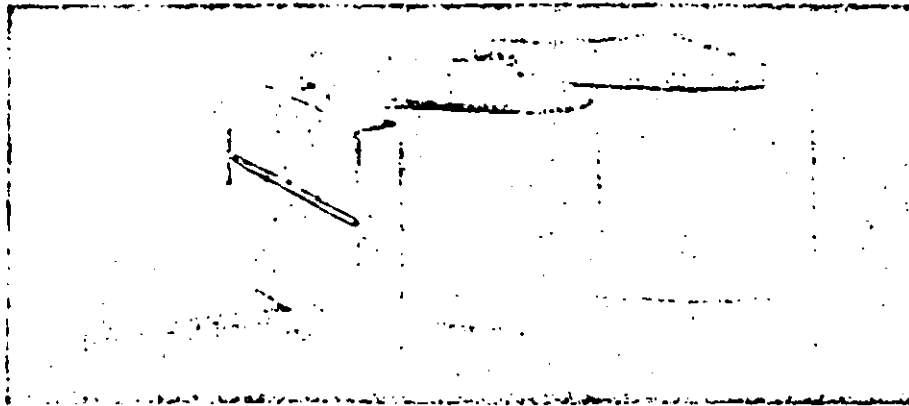


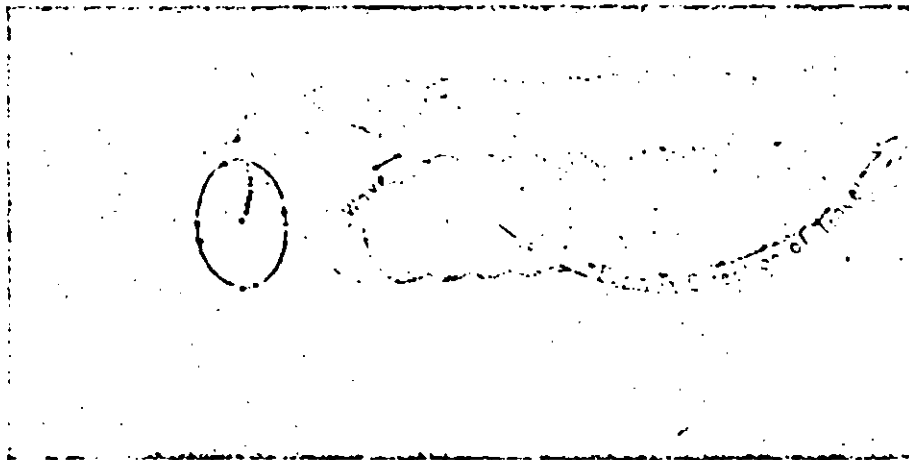
Fig 2.1 Esfuerzos actuando sobre un pequeño elemento



ONDA COMPRESIONAL



ONDA CORTANTE



ONDA DE SUPERFICIE

Fig 2.2 Naturaleza de los desplazamientos de las partículas de un suelo durante el paso de ondas de compresión (P) , cortante (S) y Rayleigh

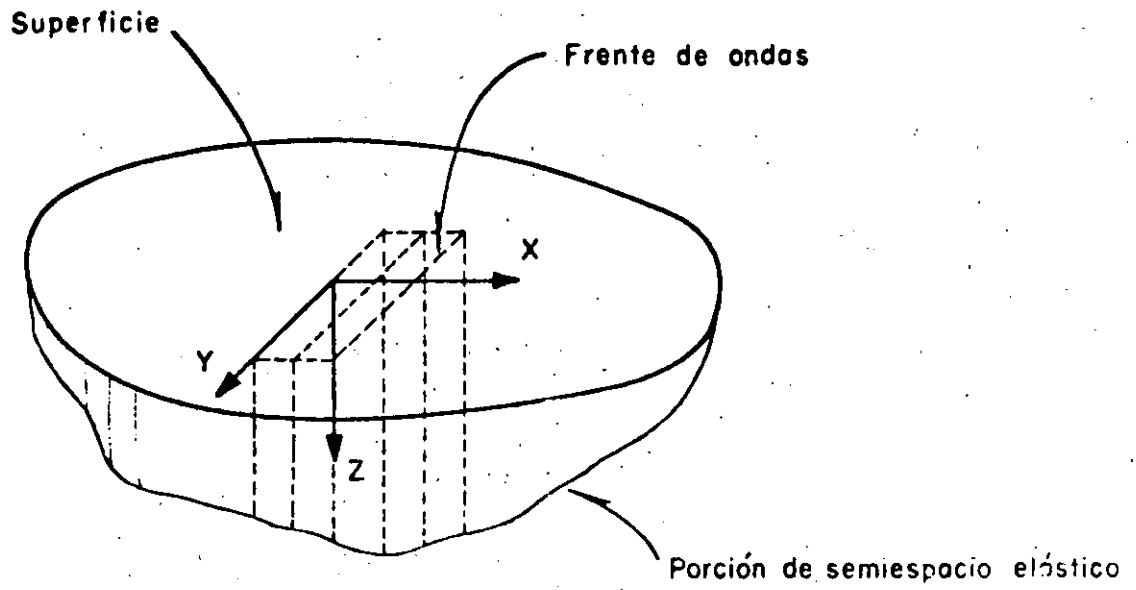


Fig 2.3 Sistema de coordenadas en un semiespacio elástico

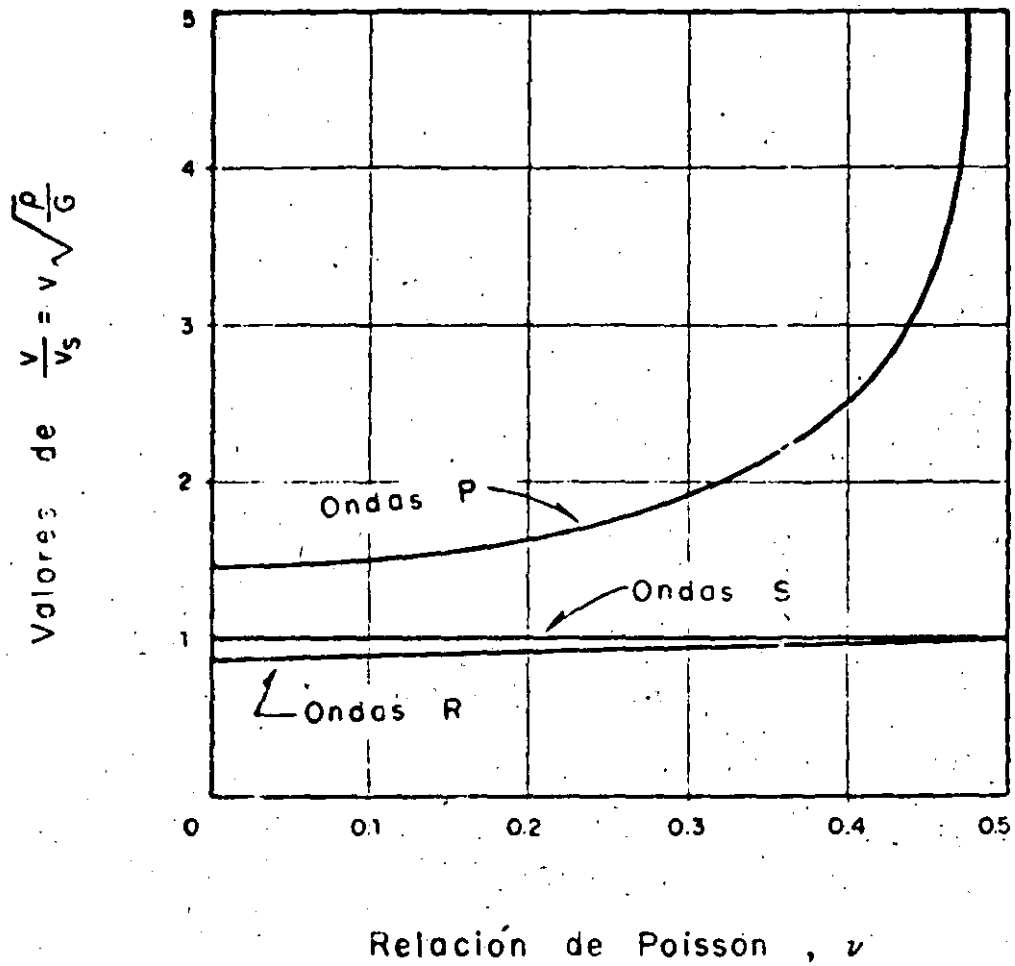


Fig 24 Relación entre v_s , v_c y v_R , contra la "relación de Poisson" ν

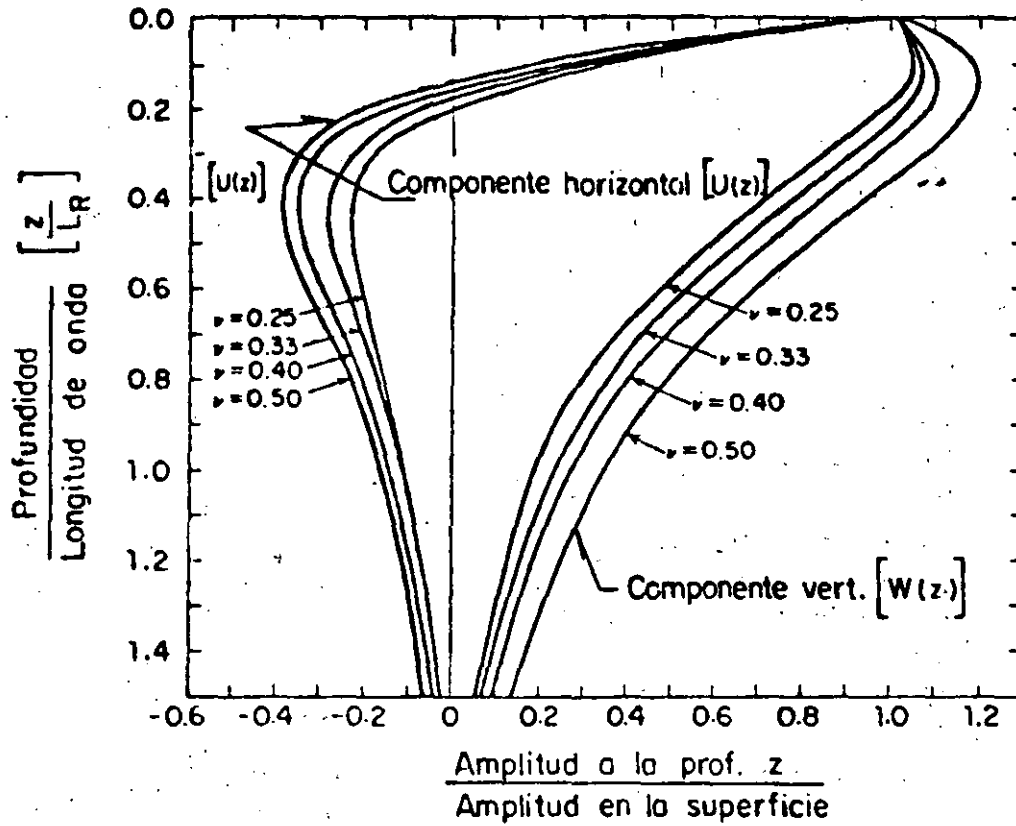


Fig. 2.5 Relación de la amplitud de las ondas Rayleigh vs la profundidad (Ref. 1)

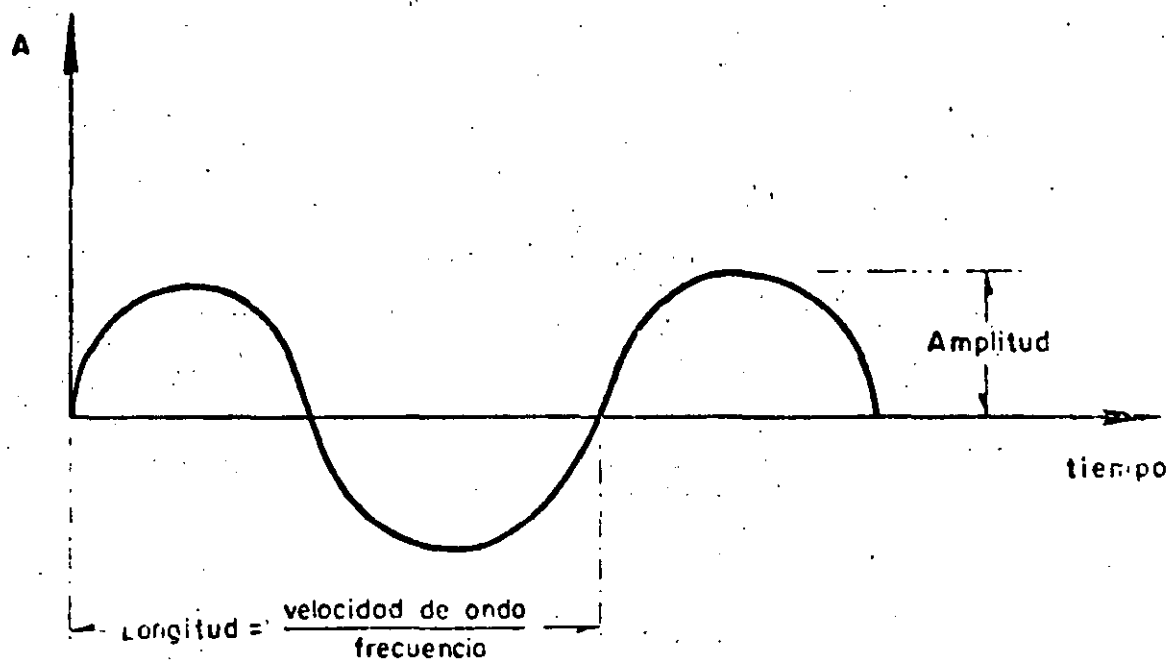


Fig 2.6 Interpretación gráfico de la longitud de onda

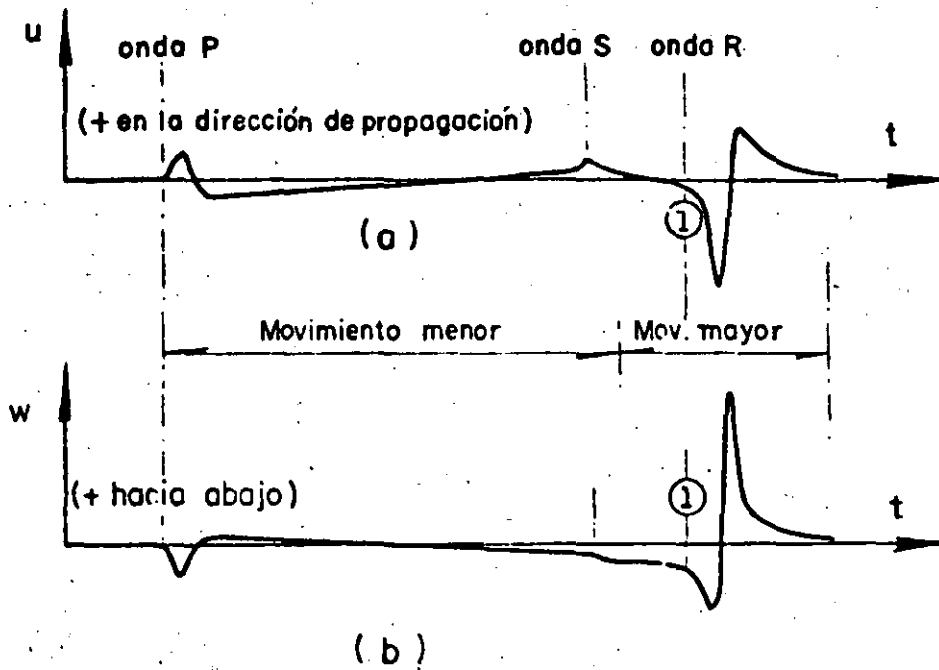


Fig 2.7 Sistema de ondas originadas por la excitación en un punto de la superficie de un medio idealizado. (Ref. 1)

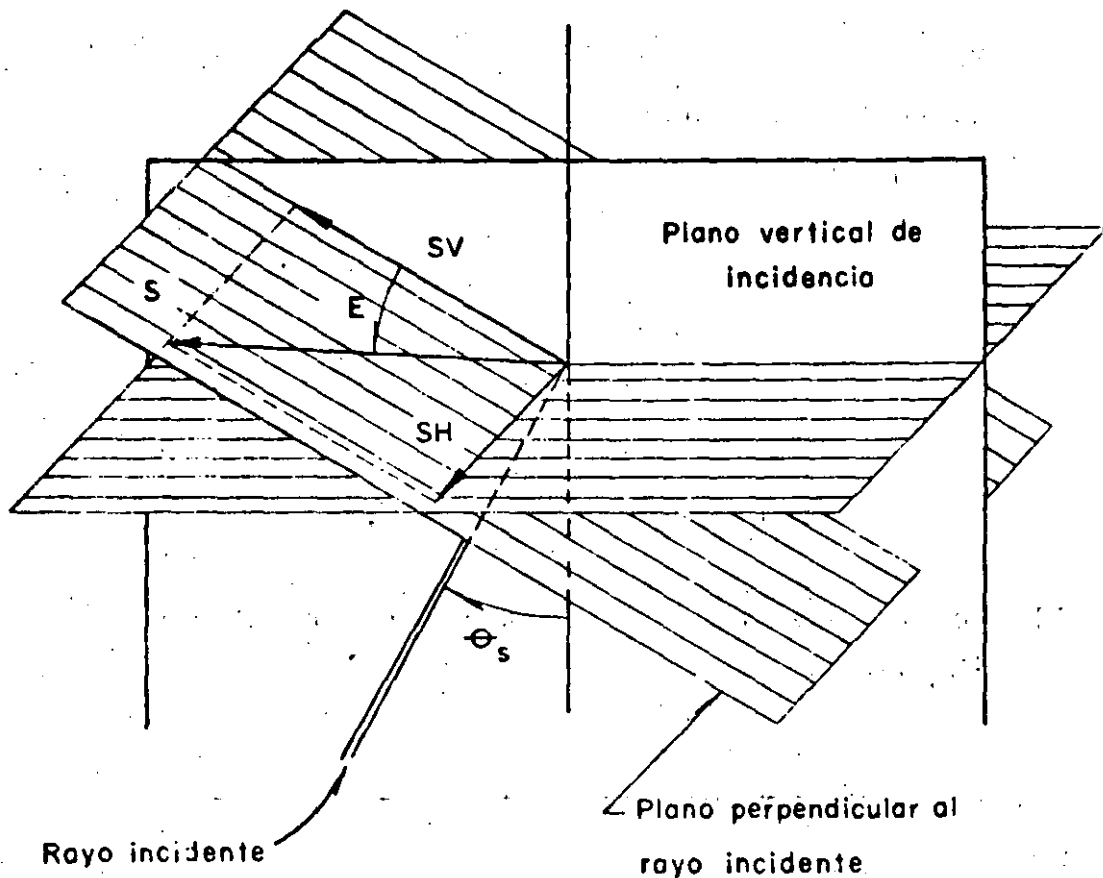


Fig 2.8 Componentes SV y SH de una onda cortante S
(Ref # 2)

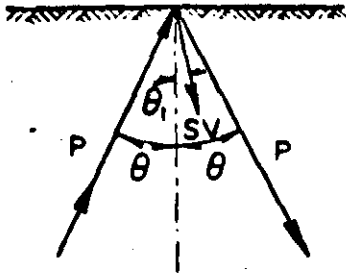


Fig 2.9 Reflexión en la superficie libre de una onda incidente P

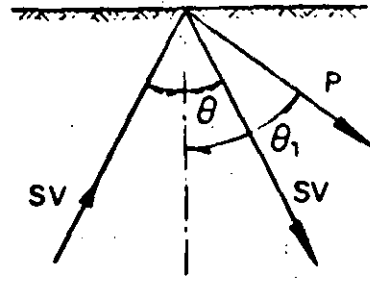


Fig 2.10 Reflexión de una onda incidente SV en una superficie libre

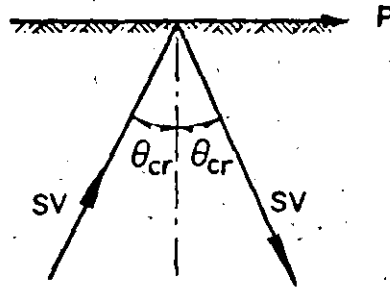


Fig 2.11 Reflexión horizontal de una onda P cuando una onda SV incide con un ángulo crítico

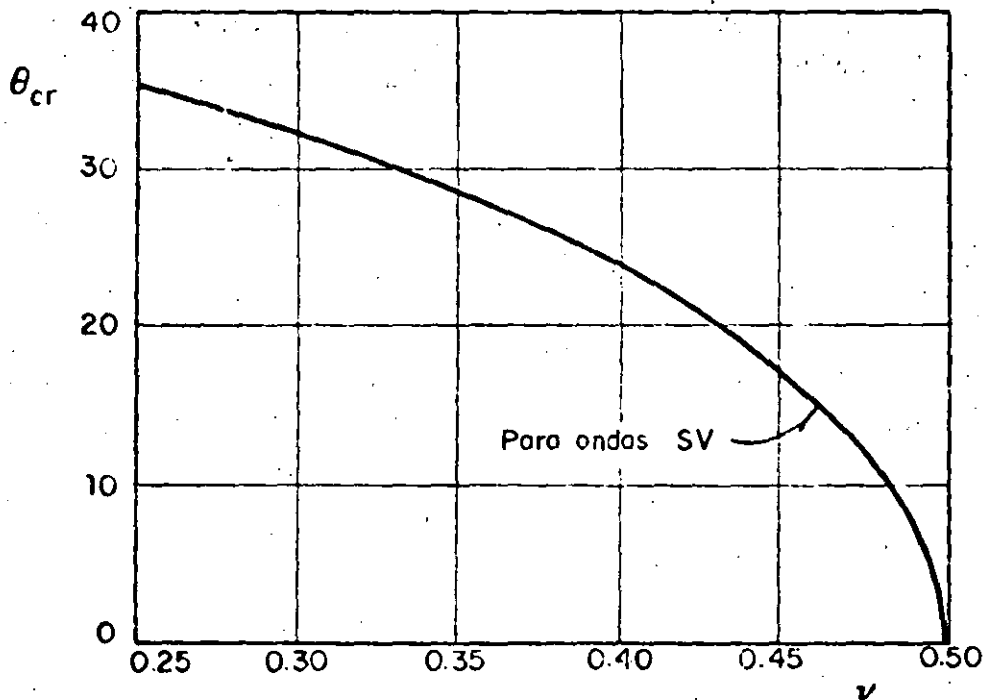


Fig 2.12 Angulo de incidencia crítica para las ondas SV , en función de la relación de Poisson ν

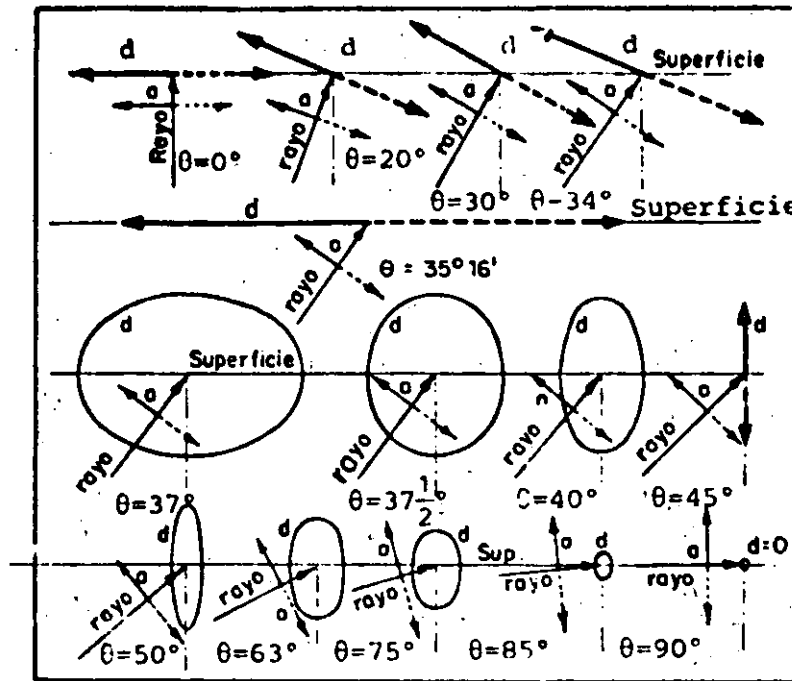


Fig 2.13 Desplazamientos (amplitud y direcci3n) de una partícula superficial producidos por una onda SV que tiene un ángulo de incidencia θ (Ref # 2)

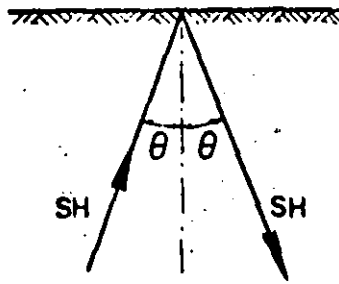
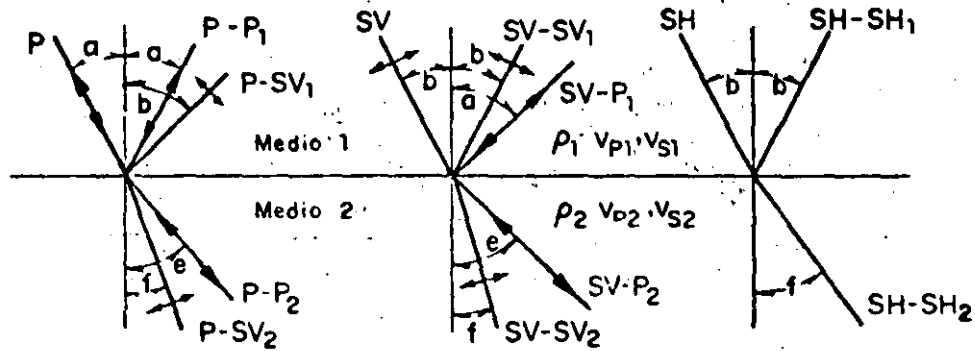


Fig 2.14 Incidencia y reflexión de una onda SH

(a) Onda incidente P (b) Onda incidente S (c) Onda incidente SH



$$\frac{\text{sen } a}{v_{p1}} = \frac{\text{sen } b}{v_{s1}} = \frac{\text{sen } e}{v_{p2}} = \frac{\text{sen } f}{v_{s2}}$$

Fig 2.15 Distribución de ondas elásticas en la interfase de dos medios elásticos

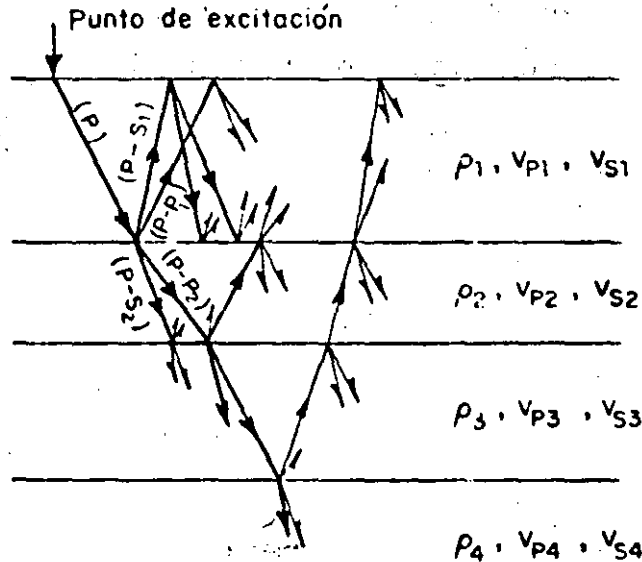


Fig 2.16 Reflexión y refracción múltiple de ondas en un sistema estratificado (Ref 1)

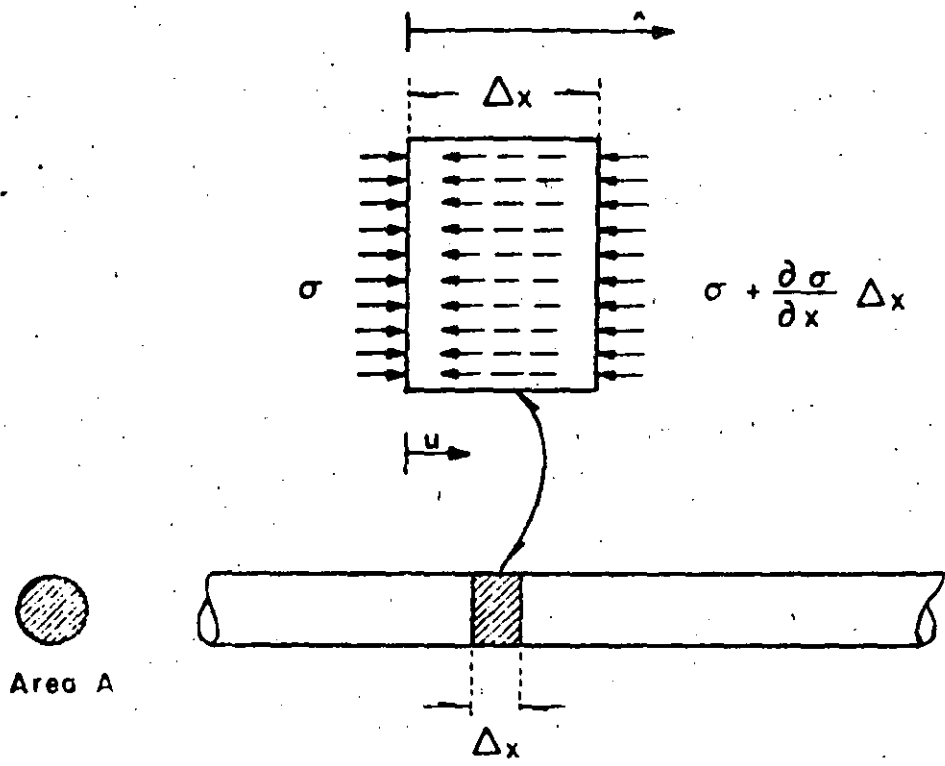


Fig 2.17 Fuerzas actuando sobre un elemento de una barra continuo

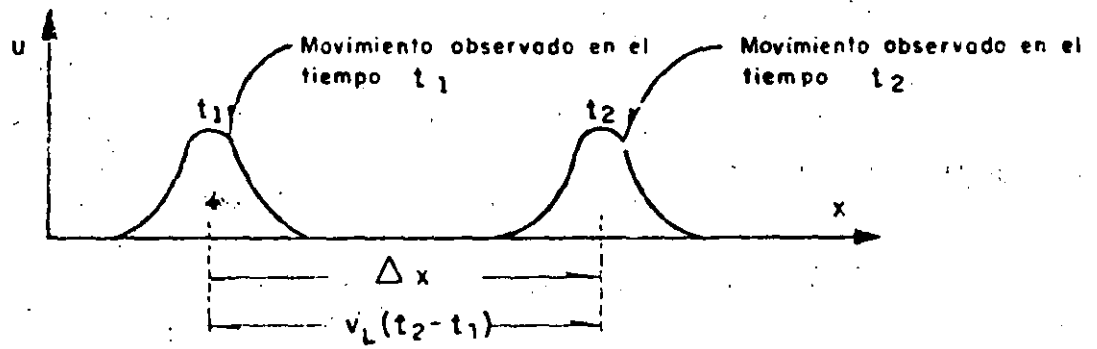


Fig. 2.18 Desplazamientos observados en los tiempos t_1 y t_2 , para una función del tipo señalado por la Ec. 2-5

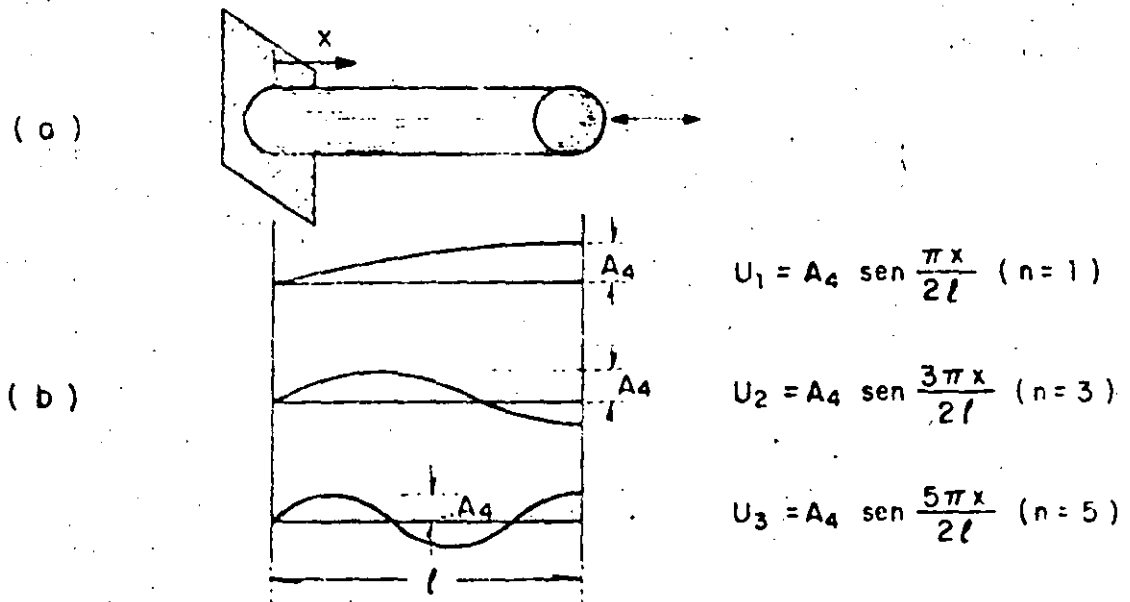


Fig 2.19 Primeros tres modos naturales de vibración de una barra

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Substituyendo la ec 2 en la 3 se obtienen:

$$\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) = \epsilon_x E \quad (4)$$

$$\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) = \epsilon_y E \quad (5)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (6)$$

$$2(1+\nu)\tau_{xy} = \gamma_{xy} E \quad (7)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (8)$$

Introduciendo la ec 6 en la 4 se llega a

$$\epsilon_x E = -\nu(1+\nu)\sigma_x + (1-\nu^2)\sigma_y \quad (9)$$

De manera semejante

$$\epsilon_y E = -\nu(1+\nu)\sigma_y + (1-\nu^2)\sigma_x \quad (10)$$

$$\gamma_{xy} E = 2(1+\nu)\tau_{xy} \quad (11)$$

La compatibilidad de esfuerzos, no considerando fuerzas de cuerpo (ref 25), es

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (12)$$

Un método para resolver este tipo de ecuación es el que emplea la función de Airy, Φ , en el cual

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (13)$$

Substituyendo la ec 13 en la 12, se tiene que la condición que debe cumplir la función Φ es

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (14)$$

Considerando que la solución $\Phi(x, y)$ tiene la forma:

$$\Phi(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad (15)$$

y que

$$f_1(x) = \cos \frac{n\pi}{e} x$$

Entonces, la ec 14 queda en la forma

$$\cos \frac{n\pi}{e} x \left(\frac{n\pi}{e} \right)^2 f_2(y) + 2 \left[-\cos \frac{n\pi}{e} x \left(\frac{n\pi}{e} \right)^2 f_2''(y) \right] + \cos \frac{n\pi}{e} x f_2^{(4)}(y) = 0 \quad (16)$$

La solución de esta ecuación es

$$f_2(y) = A e^{\frac{n\pi}{e} y} + B y e^{\frac{n\pi}{e} y} + C e^{-\frac{n\pi}{e} y} + D y e^{-\frac{n\pi}{e} y} \quad (17)$$

Debido a la asimetría vertical, un punto de la frontera superior tiene condiciones iguales a las del correspondiente en la frontera inferior, pero de signo opuesto; por tanto, $A = -C$ y $B = +D$.

Substituyendo y simplificando (ref 18), la función de esfuerzos es

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{e} x \left(C_{1n} \operatorname{sen} h \frac{n\pi}{e} y + C_{2n} y \cos h \frac{n\pi}{e} y \right) \quad (18)$$

donde

$$\frac{C_{1n}}{E\omega} = \frac{4}{9a_n^2} \cdot \frac{4 \operatorname{sen} h a_n + 3a_n \operatorname{cosh} a_n}{5 \operatorname{sen} h a_n \operatorname{cosh} a_n + 3a_n} \quad (19)$$

$$\frac{C_{2n}}{E\omega} = -\frac{4}{3a_n^2} \cdot \frac{\operatorname{sen} h a_n}{5 \operatorname{sen} h a_n \operatorname{cosh} a_n + 3a_n} \quad (20)$$

$$a_n = \frac{n\pi}{l}$$

Los componentes del esfuerzo son

$$\sigma_x = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \cos a_n x \left\{ C_{1n} a_n^2 \operatorname{sen} h a_n y + C_{2n} a_n (2 \operatorname{sen} h a_n y + a_n y \operatorname{cosh} a_n y) \right\} \quad (21)$$

$$\sigma_y = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} -a_n^2 \cos a_n x \left\{ C_{1n} \operatorname{sen} h a_n y + C_{2n} y \operatorname{cosh} a_n y \right\} \quad (22)$$

$$\tau_{xy} = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \operatorname{sen} h a_n x \left\{ C_{1n} \operatorname{cosh} a_n y + C_{2n} (\operatorname{cosh} a_n y + a_n y \operatorname{sen} h a_n y) \right\} \quad (23)$$

$$E u_x = \sum \frac{1}{2} \operatorname{sen} a_n x \left\{ (3 C_{1n} a_n + 4 C_{2n}) \operatorname{sen} h a_n y + 3 C_{2n} a_n y \operatorname{cosh} a_n y \right\} : E \omega y \quad (24)$$

$$E v_x = \sum \frac{1}{2} \cos a_n x \left\{ (3 C_{1n} a_n - C_{2n}) \operatorname{cosh} a_n y + 3 C_{2n} a_n y \operatorname{sen} h a_n y \right\} : E \omega (3-x) \quad (25)$$

Por medio de estas ecuaciones se obtuvieron las distribuciones de esfuerzos y deformaciones para distintas dimensiones de la muestra; las distribuciones correspondientes aparecen en las figs. A.1 a A.4.

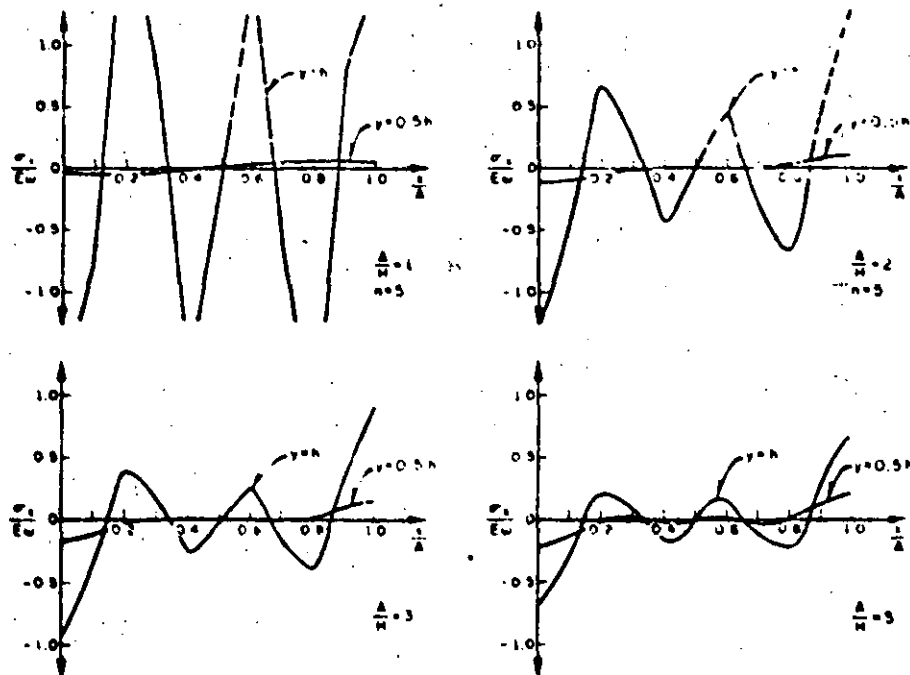


Fig. A.1. Distribución de esfuerzos σ_x (adimensional) para cuatro relaciones largo-alto.

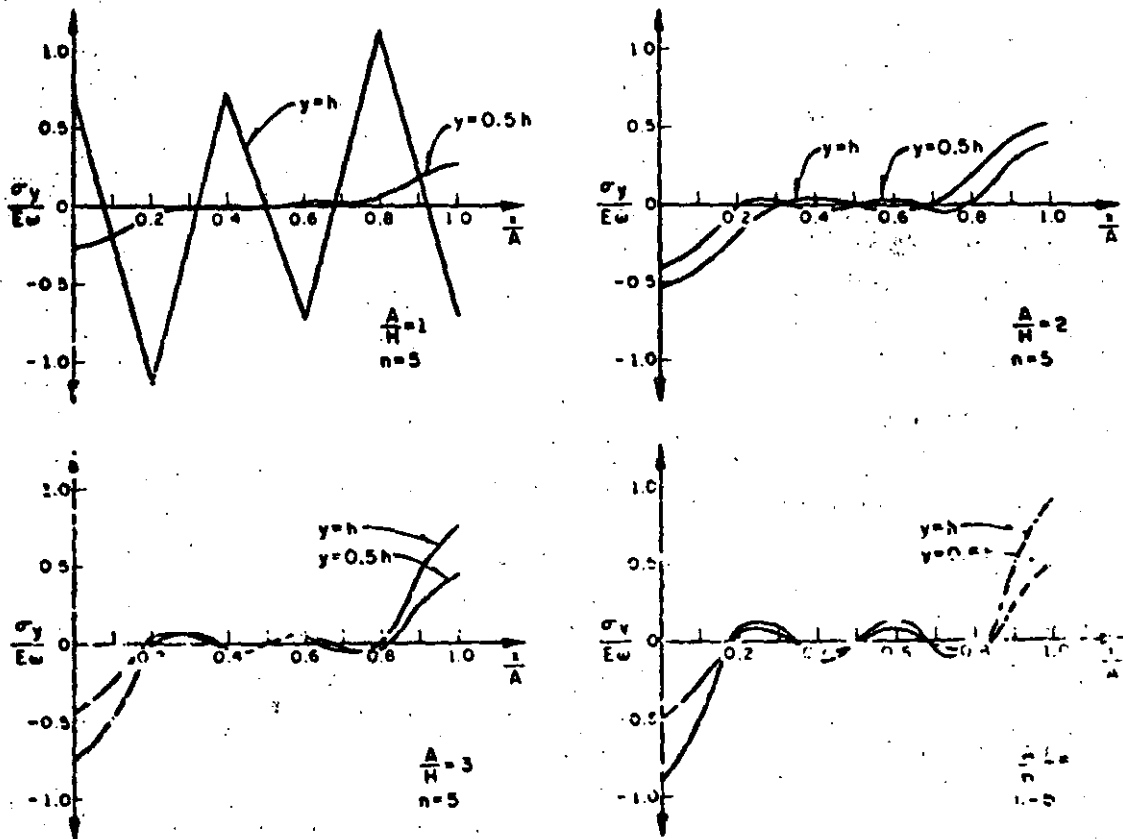


Fig. A.2. Distribución de esfuerzos σ_y (adimensional) para cuatro relaciones largo-alto

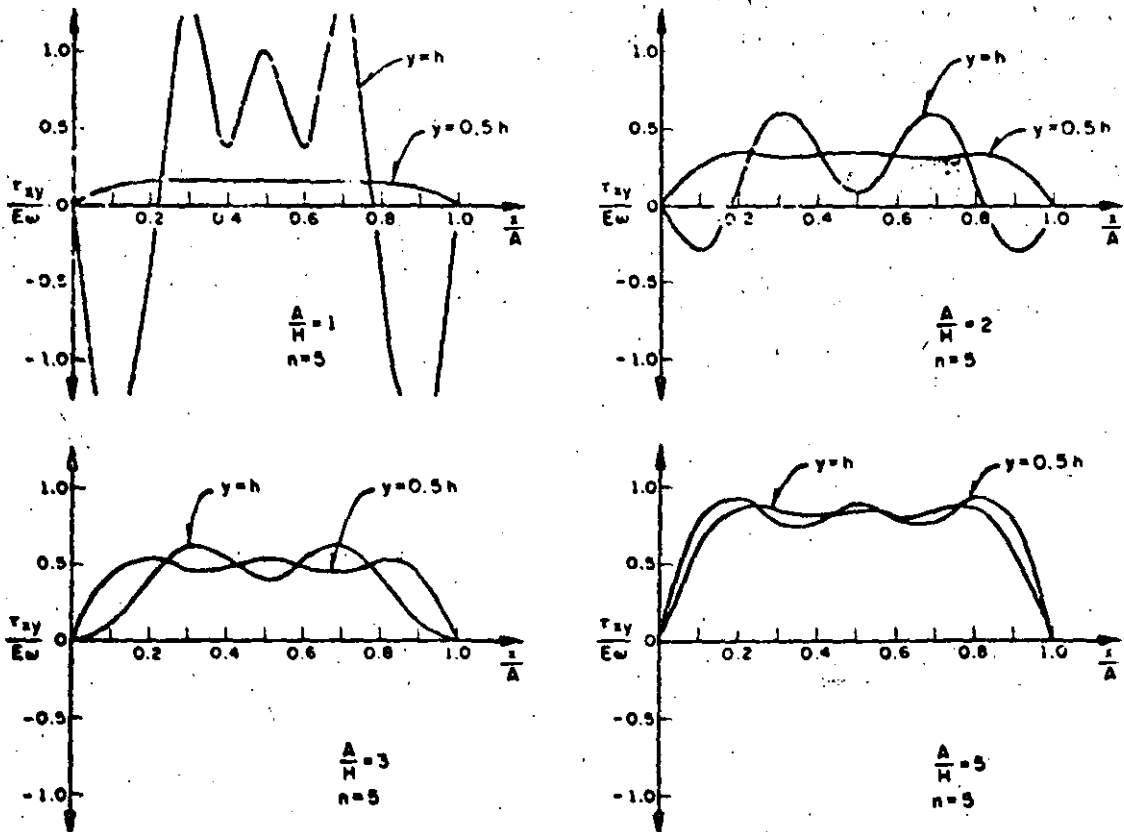
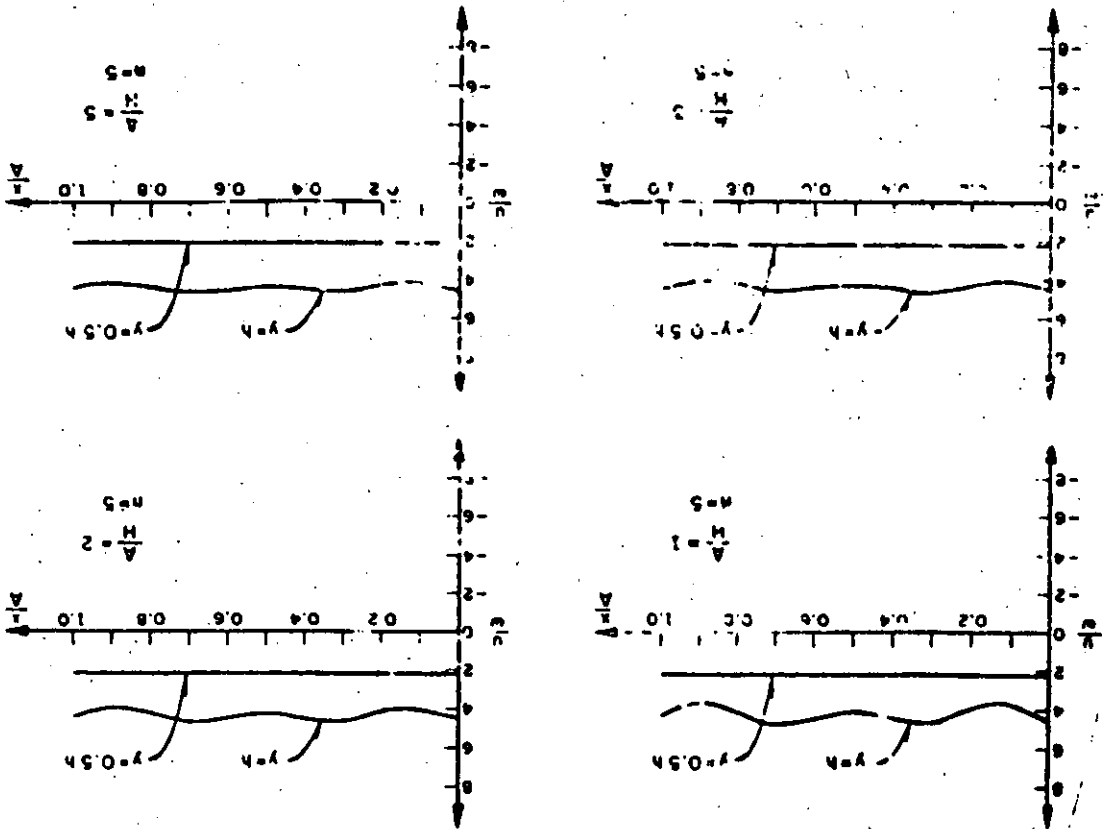
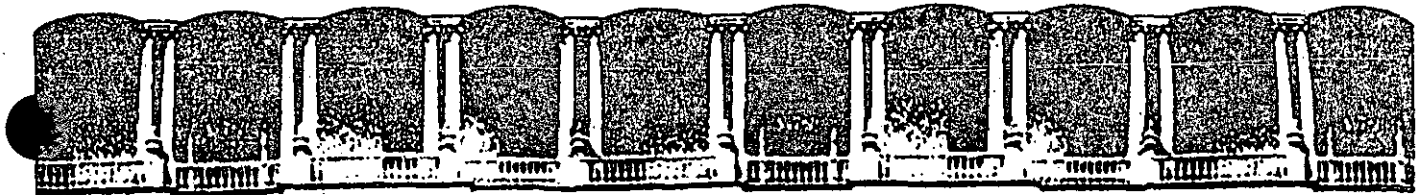


Fig. A.3. Distribución de esfuerzos τ_{xy} (adimensional) para cuatro relaciones largo-alto

Fig. A.4. Distribución de desplazamientos horizontales y (además: a)) para cuatro relaciones largo-dito





**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

CURSOS ABIERTOS

CIMENTACION DE MAQUINARIA

17 al 21 de febrero de 1992

ELEMENTOS MATEMATICOS DE DINAMICA PARA GEOTECNISTAS

ING. ROBERTO MAGANA DEL TORO

PALACIO DE MINERIA

ELEMENTOS MATEMÁTICOS DE DINÁMICA PARA GEOTECNISTAS

Roberto Magaña Del Toro

1.- INTRODUCCION

2.- ASPECTOS FÍSICOS

2.1 Oscilaciones

2.2 Propagación de ondas

2.3 Modos de vibración

2.4 Respuesta dinámica

3.- FORMULACION DE MODELOS

3.1 Identificación de variables

3.2 Establecimiento de hipótesis

3.3 Aplicación de principios físicos

3.4 Selección del modelo

3.5 Elección del proceso de deducción del modelo

3.6 Comparación con resultados experimentales

3.7 Modelos para los fenómenos físicos aquí tratados

4.- PROCEDIMIENTOS DE CÁLCULO

4.1 Cálculo de sistemas matriciales

4.2 Cálculo de ecuaciones diferenciales ordinarias

4.3 Cálculo de ecuaciones diferenciales parciales

4.4 Teoría de variable compleja

4.5 Teoría de probabilidad y estadística

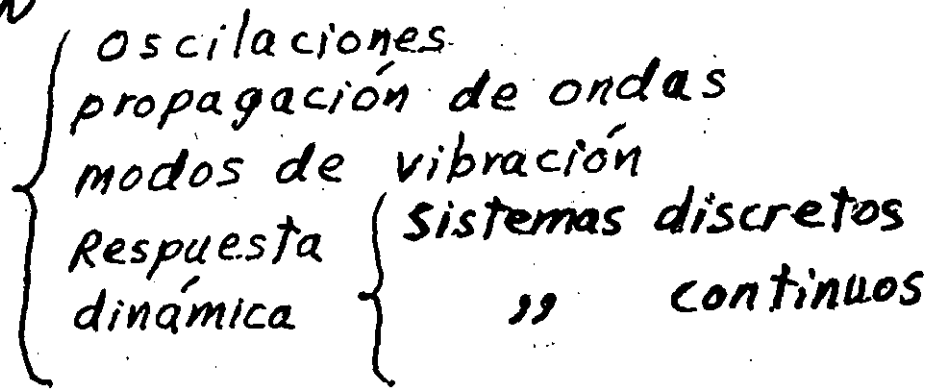
5.- APLICACIONES A DINAMICA DE SUELOS

- 5.1 Pruebas dinámicas de laboratorio
- 5.2 Propagación de temblores
- 5.3 Respuesta dinámica de medios discretos o continuos
- 5.4 Estudios de respuesta sísmica local

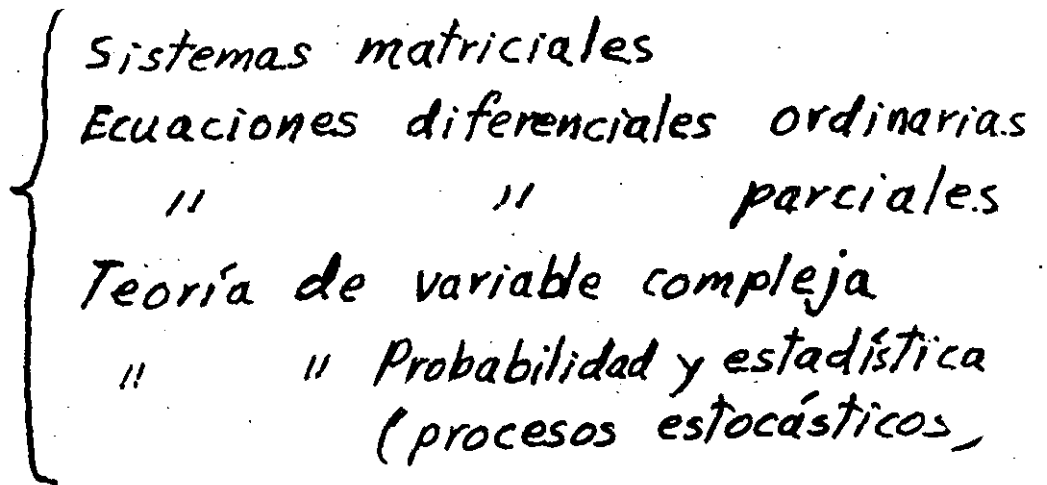
6.- CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

1.- INTRODUCCION

- Herramientas para simular



- Entre ellas se tienen:



- su utilidad es para comprender el comportamiento de obras civiles (en su aspecto geotécnico) ante acciones dinámicas y hacer diseños más confiables
- Existe el problema de que muchas veces en el desarrollo de algunas obras geotécnicas, este no implica un tratamiento científico serio para su realización, prescindiéndose del lenguaje matemático para predecir su comportamiento.
- Aversión común hacia las matemáticas por enseñanza defectuosa, poco motivante
- Se ignora su utilidad para complementar a bajo costo y tiempo corto el trabajo empírico (de campo y laboratorio)
- Aún aceptando que la ingeniería no pueda llegar a ser nunca una disciplina 100% exacta, se puede mejorar bastante lo que implica la práctica actual
- Incluso aceptando las hipótesis que involucra, proporciona información que es imposible obtener empíricamente p.ej, estados de esfuerzos en grandes extensiones de estratos naturales, etc

- Recordar que lo óptimo es la combinación del trabajo empírico y el computacional

2.- ASPECTOS FISICOS

- Aquí se tratan los fenómenos físicos que inducen los sismos en obras geotécnicas, ya mencionados antes: oscilaciones, propagación de ondas, etc.
- Las características de estos fenómenos son muy variadas por los factores que influyen: geometría, propiedades de materiales, zonificación, variación espacial y temporal de la excitación, así como interacciones entre elementos del sistema (p.ej) la de una presa con el agua almacenada, etc)
- Se analizará por separado cada tipo de fenómeno

2.1 Oscilaciones

- Movimiento alternativo de una partícula entorno a su posición de equilibrio
- Depende de: recuperación elástica del material, masa específica y capacidad de disipar energía
- Este tiene ciclos (constantes o no) de oscila-

2.2 Propagación de ondas

- Propagación de energía mediante las interacciones entre elementos constitutivos de un sistema (p.ej. todas las partículas de un medio continuo)
- Esto produce una perturbación en una gran parte (sino en todo) del medio considerado (sistema)
- La propagación en diferentes direcciones depende de: propiedades mecánicas, fronteras rígidas, cambios bruscos de propiedades (estratos diferentes). Generándose fenómenos de reflexión, retracción y difracción.

2.3 Modos de vibración

- Son las formas típicas de oscilación de un sistema de partículas, con su propia frecuencia cada una de ellas.
- Así un sistema de n componentes tiene n modos de vibración

Los modos de vibración son ondas estacionarias formadas por la superposición de ondas incidentes y reflejadas (en fronteras rígidas o superficies libres)

Debe aclararse que son independientes de la excitación, sólo dependen de la geometría y zonificación de materiales (incluyendo la de sus fronteras rígidas y o libres)

2.4 Respuesta Dinámica

- Esta depende de los modos de vibración del sistema y en este caso también de las características de la excitación
- Entre las características principales de la respuesta están los picos de resonancia
- La resonancia físicamente se debe a la sincronización de los modos de vibrar con frecuencias dominantes de la excitación, que origina acumulación de energía.

Para el estudio de los diferentes fenómenos aquí tratados se recurre a procedimientos tanto teóricos como empíricos (de campo y laboratorio). En este trabajo, solo se hablará de los teóricos en los siguientes capítulos, que es en sí el objetivo principal de él.

3.- FORMULACION DE MODELOS MATEMATICOS

- Es la actividad mediante la cual se generan representaciones simbólicas de procesos naturales
- Estas representaciones tienen leyes operacionales que a partir de datos de entrada producen resultados (salidas).
- Se podrían tener diferentes representaciones para cada proceso natural.
- Para la formulación se hacen los siguientes pasos
 - a) Identificación de variables
 - b) Establecimiento de hipótesis
 - c) Aplicación de principios físicos
 - d) Selección de modelos
 - e) Proceso de deducción (Formal o Conceptual)
 - f) Comparación con resultados experimentales

3.1.- Identificación de variables

- Esto se logra mediante la observación y experimentación, detectando tanto los factores de entrada y de salida

Las variables de salida se elijen de acuerdo a la información necesaria para el diseño.

3.2. Establecimiento de hipótesis

Aquí ayuda también la observación y experimentación, al detectar variables poco significativas o tendencias bien determinadas

También se hacen hipótesis cuando es difícil obtener información sobre algún aspecto del fenómeno fuera de control ó difícil de medir experimentalmente

3.3. Aplicación de principios físicos

- Se debe determinar cual de los principios es aplicable al problema.

Los principios son:

a) Conservación de masa. - En el cual se ve que el movimiento irregular produce cambios de densidad

b) Conservación de cantidad de movimiento. - En el cual se ve la influencia de fuerzas en aceleraciones de partículas ó deformaciones

c) Conservación de energía. - Donde se analizan los intercambios de energía (cinética, potencial, calorífica, etc).

d) Aumento de entropía. - En el que se manifiesta la tendencia uniformadora de temperatura y al deterioro estructural

- En este trabajo se ignora el principio relativista de intercambio materia-energía

3.4 Selección del modelo

- Para ello ayudan las características de la relación entrada-salida. Si las salidas son puntuales el modelo puede ser un sistema lineal de ecuaciones, en tanto que si son continuas puede ser necesario una ecuación diferencial

3.5 Proceso de deducción de modelos

Este puede ser formal o conceptual

En el formal se parte de un modelo muy general, el cual se particulariza.

En el conceptual se aplican directamente los principios al problema particular.

3.6 Comparación con resultados experimentales

Aquí se evalúa el grado de precisión del modelo empleado. En caso de no ser satisfactorio se deberá iterar de nuevo con otras hipótesis o modelo.

- los resultados deben tener aproximación suficiente y obtenerse en tiempos y costos no excesivos.

3.7 Modelos de los fenómenos físicos aquí tratados

- en esta parte se aplican los pasos anteriores a los fenómenos en estudio en este trabajo.

(11)

a) Modelo para oscilaciones

a.1 Identificación de variables:

entrada $\left\{ \begin{array}{l} m: \text{masa} \\ c: \text{amortiguamiento} \\ k: \text{constante elástica} \end{array} \right.$ salida $\left\{ \begin{array}{l} x: \text{desplazamiento} \\ \dot{x}: \text{velocidad} \\ \ddot{x}: \text{aceleración} \end{array} \right.$

a.2 Hipótesis:

- distribución discreta de variables
- aplicación instantánea de cargas
- podrían tenerse otras p.ej. (amortiguamiento nulo)

a.3 Aplicación de principios físicos:

- El de conservación de cantidad de movimiento. Puesto que se involucran las fuerzas: de inercia $m\ddot{x}$, la viscosa $c\dot{x}$ y la elástica kx en una ecuación de equilibrio dinámico
- El de conservación de energía. Porque implícitamente se manejan las transformaciones de energía cinética en potencial (viceversa) y en calorífica.

1.4 Selección del modelo

- Para ello se ven dos aspectos el espacial y el temporal
- Según el espacial se requiere la información en un punto, por tanto esto implica un modelo discreto
- Según el temporal se requiere la historia de movimientos en un punto, por tanto se requiere una función, esto implica una ecuación diferencial
- Ambos aspectos implican como modelo una ecuación diferencial ordinaria

1.5 Proceso de deducción

- Tomando en cuenta la sencillez del fenómeno se recurrirá al conceptual.
- Así la aplicación directa de los principios se hace empleando el de conservación de cantidad de movimiento que implica una suma de fuerzas, en este caso las actuantes, de donde

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

que es el modelo buscado y como se ve es una ecuación diferencial ordinaria que relaciona todas las variables de entrada y salida

1.6 Este paso solo implicaría la comparación de los cálculos con resultados experimentales

b.- Modelo de propagación de ondas

b.1 Identificación de variables:

entrada	{	<ul style="list-style-type: none"> E : módulo de elasticidad ν : " de Poisson ρ : densidad β : amortiguamiento • geometría de la región 	salida	{	<ul style="list-style-type: none"> $\vec{z}(x,y,z,t)$: Variables espacial y temporal de las oscilaciones.
---------	---	--	--------	---	--

b.2 Hipótesis:

- Medio perfectamente elástico
- Amortiguamiento casi nulo
- No existe transformación de energía mecánica en calor
- No existe deterioro estructural

b.3 Aplicación de principios físicos

- Se aplican el de conservación de masa y cantidad de movimiento. Por tanto, rigen las ecuaciones de equilibrio dinámico

$$\begin{aligned}
 \rho a_x &= \rho f_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\
 \rho a_y &= \rho f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\
 \rho a_z &= \rho f_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}
 \end{aligned}$$

b.4 Selección del modelo

- Tomando en cuenta que la salida requerida tiene una variación continua, tanto espacial como temporal, el modelo deberá ser una ecuación diferencial parcial

b.5 Proceso de deducción

- En este caso será formal (a fin de mostrar la otra técnica alternativa a la conceptual)
- Se deduce al acoplar tanto las ecuaciones de equilibrio dinámica (vistas antes) junto con las ecuaciones cinemáticas

$$\epsilon_x = \frac{\partial s_x}{\partial x} \quad ; \quad \epsilon_y = \frac{\partial s_y}{\partial y} \quad ; \quad \epsilon_z = \frac{\partial s_z}{\partial z}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) \quad ; \quad \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} \right) \quad ; \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} \right)$$

y las leyes de Hooke

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad ; \quad \epsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad ; \quad \epsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad ; \quad \nu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

con lo que se obtiene la ecuación fundamental de la elasticidad

$$\rho a = \rho f + G \nabla^2 s + (G + \lambda) \text{grad}(\text{div} s)$$

la cual junto con las condiciones de frontera definen

la solución general del problema

• Este modelo puede particularizarse a nuestro problema de la manera siguiente:

• se descompone en sus componentes volumétricas y distorsionantes

• Para el caso de onda de distorsión se tiene:

a) la dilatación es nula por tanto

$$\text{div } s = 0$$

b) se desprecian las fuerzas de cuerpo, por tanto

$$p \cdot f_n = 0$$

c) Entonces la ecuación de la elasticidad se trans-

forma en $\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = G \cdot \nabla^2 s$ que es la ec de onda distorsional

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

• Ahora para el caso de onda dilatacional se tiene:

a) ausencia de rotaciones; por tanto

$$\text{rot}(s) = 0$$

b) considerando la propiedad vectorial

$$\nabla^2 s = \text{grad}(\text{div}(s)) - \text{rot}(\text{rot}(s))$$

c) entonces queda

$$\nabla^2 s = \text{grad}(\text{div}(s))$$

d) de donde la ec. fund. de la elasticidad queda

$$p a = G \nabla^2 s + (G + \lambda) \text{grad}(\text{div}(s))$$

$$(\lambda = \frac{3K - 2G}{2})$$

$$\therefore \rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = (G + \lambda) \text{grad}(\text{div}(s))$$

que es la ec. de onda

Se ve por tanto que ambas ecuaciones de onda tienen tanto las variables de entrada como de salida.

C.- Modelo para modos de vibración

C.1 Identificación de variables

Entrada {

- geometría del sistema.
- zonificación
- propiedades mecánicas {
 - en medios continuos: E y ρ
 - en medios discretos: K y M

salida {

- frecuencias de vibración
- Configuraciones modales

C.2 Hipótesis:

- discretización {
 - masas
 - conjuntos de resorte

- no se considera amortiguamiento

C.3 Principios físicos:

- Se aplica el de conservación de masa
- " " " " de cantidad de movimiento
- " " " " de energía
(intercambio de energía cinética en potencial y viceversa)

C.4 Selección del modelo

- En este caso se deben encontrar configuraciones de forma característica cuya amplitud varía de manera continua en el tiempo periódicamente
- Lo anterior implica que el modelo requerido puede ser mediante el planteamiento de un problema de vectores y valores característicos de algebra lineal (matricial)

C.5 Proceso de deducción

- En este caso se hará una generalización del modelo planteado para oscilaciones libres de un sistema de un grado de libertad

$$[M]\ddot{\vec{X}} + [K]\vec{X} = 0 \quad C.5.1$$

solo que en este caso en vez de que M, K, \ddot{X} y X sean escalares, se tiene que $[M]$ y $[K]$ son matrices y $\vec{\ddot{X}}$ y \vec{X} son vectores

M es una matriz diagonal

Para plantear el problema de vectores y valores característicos se considera que la solución es del tipo

$$\vec{X}(t) = \vec{A} e^{i\omega t}; \quad e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

ω : frecuencia de vibración

entonces $\vec{\dot{X}}(t) = i\omega \vec{A} e^{i\omega t}$

$$\vec{\ddot{X}}(t) = -\omega^2 \vec{A} e^{i\omega t} = -\omega^2 \vec{X}(t) \quad \text{C.5.2}$$

reemplazando C.5.2 en C.5.1 se obtiene

$$-\omega^2 M \vec{X} + K \vec{X} = 0$$

$$\boxed{[K - \omega^2 M] \vec{X} = 0}$$

Problema de vectores y valores característicos

que es el modelo matemático buscado

En este modelo las matrices son de orden $n \times n$ y los vectores de $n \times 1$, donde

$$n = G \times N$$

N : Número de nudos del sistema

G : Grados de libertad de cada nudo

d) Modelo para respuesta dinámica

d.1 Identificación de variables

- Entrada
- geometría del sistema
 - Zonificación
 - propiedades mecánicas: K , M y C .
(C : matriz de amortiguamientos)
 - Características de las fuerzas excitadoras
(p.ej. variaciones espacial y temporal)

- salida
- Historias de movimiento (aceleraciones, velocidades y desplazamiento) en cada punto
 - Funciones de amplificación en cada punto
 - Espectros de respuesta en cada punto

d.2 Hipótesis:

- discretización del medio
- La matriz de amortiguamientos $[c]$ es una combinación lineal de las matrices $[M]$ y $[K]$ es decir

$$[c] = \alpha[M] + \beta[K]$$

d.3 Principios físicos

- AL igual que en el caso anterior se aplican los principios de conservación de masa, cantidad de movimiento y de energía
- Se agrega el principio de aumento de entropía a través de la inclusión del amortiguamiento del material

d.4 Selección del modelo

- Como en este caso se requiere conocer la variación temporal continua de los movimientos de los diferentes puntos nodales, esto implica que el modelo necesario sea un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

d.5 Proceso de deducción

- En este caso también se generaliza el modelo anterior incluyendo la matriz de amortiguamientos, así como un vector de fuerzas excitadoras quedando

$$[M]\ddot{\vec{X}} + [C]\dot{\vec{X}} + [K]\vec{X} = \vec{F}(t)$$

el cual como se ve equivale a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

Comentarios :

- Se ve que no es difícil deducir los modelos matemáticos requeridos
- Estos proporcionan la información necesaria, la cual sólo puede obtenerse mediante ellos a bajo costo y rapidez en relación a procedimientos empíricos. Esto aunque sea aproximadamente
- Debe observarse que la formulación solo produce modelos y no su solución, la cual se obtiene mediante procedimientos de cálculo, que se verán en el siguiente capítulo, para cada modelo aquí deducido.

4. PROCEDIMIENTOS DE CALCULO

- En esta etapa se presentan los algoritmos mediante los cuales se obtiene la solución de los modelos planteados
- Debe quedar claro que es la solución y no el modelo la que proporciona la información requerida. Así por ejemplo, la función solución de una ecuación diferencial ordinaria es la que da la historia de movimientos.
- Por lo general existen diferentes algoritmos para la solución de un modelo dado
- Muchos de ellos se presentan dentro de los planes curriculares de licenciatura, maestría y doctorado en Ingeniería y Ciencias
- Aquí sólo se verán algunos de los más comunes para cada uno de los modelos vistos
- Entre los procedimientos se tienen: cerrados (analíticos) y numéricos.

4.1. Cálculo de sistemas matriciales

- Los métodos pueden ser: directos o iterativos. p.ej el de Gauss-Jordan o el Gauss-Seidell respectivamente
- En general existen muchas variantes.
- También hay diferentes procedimientos para resolver el problema de vectores y valores característicos
- Entre ellos el de encontrar las raíces del polinomio característico, y para cada raíz, resolver un sistema lineal de ecuaciones para obtener el vector

4.2 Cálculo de ecuaciones diferenciales ordinarias

(24)

- Entre los procedimientos se tienen:

- a) Integración mediante series

- b) " " numérica

- c) Mediante funciones exponenciales

- En este trabajo se hablará en particular de este último, el cual es útil para ecuaciones con coeficientes constantes p. ej. la siguiente ecuación

$$a \frac{d^3 y}{dt^3} + b \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + dy = 0$$

se supone

$$y = ce^{\lambda t}$$

que al reemplazar en la ecuación queda

$$a\lambda^3 ce^{\lambda t} + b\lambda^2 ce^{\lambda t} + c\lambda e^{\lambda t} + dce^{\lambda t} = 0$$

de donde queda el polinomio en λ

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$$

Obteniendo las tres raíces la solución es

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t}$$

las constantes se obtienen de las condiciones iniciales y_0, \dot{y}_0 y \ddot{y}_0

- En ocasiones las raíces son complejas, de donde las soluciones corresponden a la teoría de variable compleja, la cual se mencionará brevemente después

4.3. Cálculo de ecuaciones diferenciales parciales

- También en este caso hay diferentes procedimientos, según sea el tipo de ecuación, p.ej. para las de la forma

$$a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y})$$

las cuales se clasifican en:

- Hiperbólicas; si $b^2 - 4ac > 0$
(p.ej. la ecuación de onda)

Parabólicas; si $b^2 - 4ac = 0$
(p.ej. la ecuación de difusión)

Elípticas, si $b^2 - 4ac < 0$
(p.ej. la ecuación de Poisson ó Laplace.)

Los métodos aplicables a ellas son:

- a) Superposición de autofunciones (ec. de onda)
- b) Transformada de Laplace (ec. de difusión)
- c) Funciones de Green (ec. de Poisson)
- d) Separación de variables (ec. de Laplace, ec. de onda)

Los tres tipos de ecuaciones se pueden presentar como casos particulares del modelo general dinámico de vibración

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t)$$

cuando se generaliza al continuo y que se transforma en

$$\rho(x,y,z) \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + H(x,y,z) \frac{\partial s}{\partial t} + G \nabla^2 s = f(x,y,z,t)$$

(s: desplazamiento)

que es un modelo más general que la ecuación de la elasticidad, ya que incluye el término de disipación de energía (2º término)

- si $H(x,y,z)$ y $f(x,y,z,t)$ son nulos se tiene la ecuación de onda.

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 s$$

- Aplicando el método de separación de variables: en el caso unidimensional

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad 4.3.1$$

se supone $s = X(x)T(t)$

entonces:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = T \ddot{X} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = X \ddot{T} \quad 4.3.2$$

reemplazando las ecuaciones 4.3.2. en 4.3.1

$$X\ddot{T} = C^2 T\ddot{X}$$

de donde
$$\frac{\ddot{T}}{T} - C^2 \frac{\ddot{X}}{X} = 0$$

la cual se satisface si

$$\ddot{T} = kT \quad \text{y} \quad \ddot{X} = \frac{k}{C^2} X \quad 4.3.3$$

que son un par de ecuaciones diferenciales que se resuelven como se vió en el inciso 4.2.

así
$$T(t) = a_1 e^{ikt} + a_2 e^{-ikt}$$

de la teoría de variable compleja se sabe que

$$e^{ik't} = \cos k't + i \sin k't$$

$$e^{-ikt} = \cos k't - i \sin k't$$

de donde
$$T(t) = (a_1 + a_2) \cos k't + (a_1 - a_2) i \sin k't$$

así para el eje real
$$T(t) = C_1 \cos k't$$

análogamente
$$X(x) = C_2 \cos k'_2 x$$

entonces

$$s(x,t) = C_3 \cos k_2' x \cos k_1' t$$

que también equivale a

$$s(x,t) = c \operatorname{sen}(ct+x)$$

$$\text{ó } s(x,t) = c \operatorname{sen}(ct-x)$$

en general $s(x,t) = \phi_1(ct+x) + \phi_2(ct-x)$

4.4 Teoría de Variable Compleja

- Es el manejo operacional de un conjunto de elementos (números complejos), de los cuales los números reales es un caso particular.
- Su utilidad en dinámica queda manifiesta, puesto que como se vió antes en ecuaciones diferenciales, muchas de sus soluciones son funciones complejas.
- Por ejemplo en el método de series de funciones, el cual sirve para muchos tipos de ecuaciones diferenciales.
- Las operaciones requeridas implican en realidad las reglas de suma y producto de binomios algebraicos (por tener parte real e imaginaria). Con la característica que $i \times i = -1$ (i : número imaginario).

- El número i al actuar como factor implica un giro de 90° en el plano complejo en sentido contrario a las manecillas del reloj; en tanto que $-i$ lo hace según el de ellas.

4.4.1 las operaciones elementales son:

$$(a+bi) + (c+di) = \underline{(a+c) + (b+d)i}$$

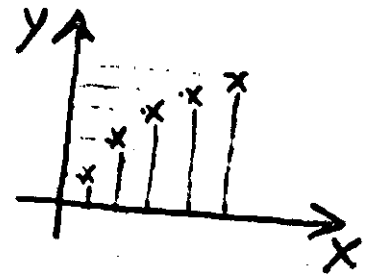
$$(a+bi) - (c+di) = \underline{(a-c) + (b-d)i}$$

$$\begin{aligned} (a+bi) \cdot (c+di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + (ad+bc)i - bd \\ &= \underline{(ac-bd) + (ad+bc)i} \end{aligned}$$

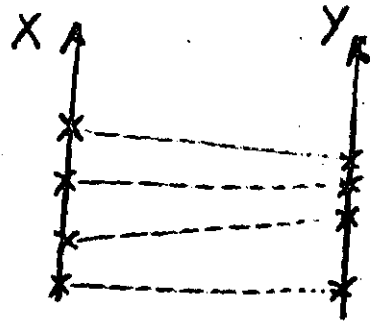
$$\begin{aligned} (a+bi) \div (c+di) &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} && \text{(multiplicando y} \\ &= \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} && \text{dividiendo por} \\ & && \text{el complejo con-} \\ & && \text{jugado del deno-} \\ & && \text{minador)} \end{aligned}$$

4.4.2. Implicaciones gráficas de funciones complejas

- Para esto se debe observar lo que se hace al representar gráficamente una función de una variable real en una proyección ortogonal

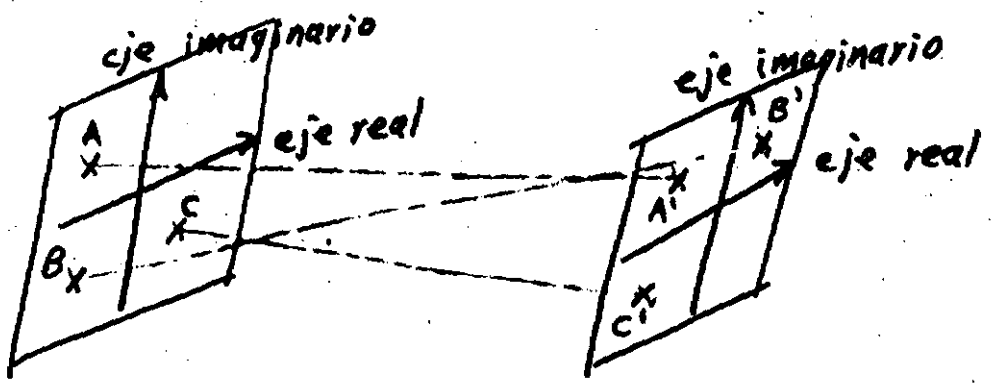


que es lo mismo que



en una proyección paralela

- Ahora en el caso de funciones complejas sólo se pueda emplear la proyección paralela de un plano complejo a otro



- De la cual no es posible dar una representación ortogonal ya que es tetradiimensional (observese además que es una función compleja de una sola variable, más difícil aún sería si fuera de más variables)
- la proyección paralela es en sí un mapeo (transformación matemática)

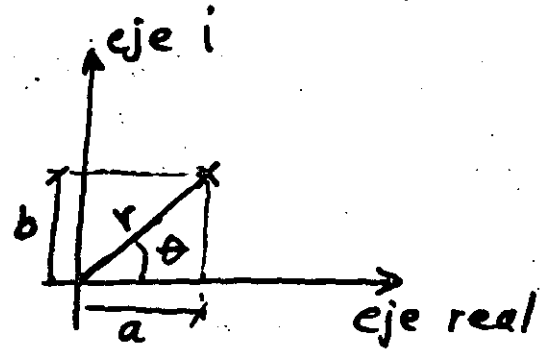
4.4.3. Función exponencial compleja

- Esta es muy importante, ya que se emplea para las expansiones en serie, útiles para encontrar soluciones a ecuaciones diferenciales
- Para comprender su empleo, conviene observar la representación polar de un número complejo

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad ; \quad (z = a + bi)$$

donde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

y $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$



esta notación polar también se puede representar como $z = r e^{i\theta}$; $e^{i\theta}$ equivale a $\cos \theta + i \sin \theta$ (por convención) que es la función exponencial compleja

de donde

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

$$z^{1/n} = r^{1/n} e^{i(\theta + 2\pi)/n}$$

4.5 Teoría de probabilidad y estadística

- Es el estudio de fenómenos donde no existe control o conocimiento de algunas de las variables que influyen en el
- Su importancia en dinámica de suelos se ve en:

- a) Por no conocerse las propiedades del suelo en todos los puntos
- b) Por no conocerse determinísticamente las características y efectos de los sismos, los cuales son procesos estocásticos

- En este trabajo nos enfocaremos más a los procesos estocásticos que a los comunes de probabilidad y estadística (p.ej media, coeficiente de variación, etc.)

- Un proceso estocástico puede verse como un experimento estadístico en el que los resultados son funciones, o como una distribución de probabilidades variable en el tiempo.

Se observa que en sistemas lineales de un grado de libertad, pueden estimarse los parámetros estadísticos de la respuesta a partir de los de la excitación

Lo anterior puede generalizarse para sistemas de varios grados de libertad

Por otra parte en sistemas no lineales, la mayoría de las veces no pueden estimarse los parámetros de respuesta a partir de los de la excitación. En este caso solo es posible recurrir a técnicas de Monte Carlo.

5.- APLICACIONES A DINAMICA DE SUELOS

- Aquí solo se mencionarán la aplicación de los resultados finales (tanto de formulación como de cálculo) a algunos problemas prácticos de geotecnia

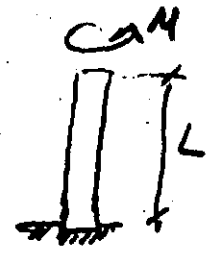
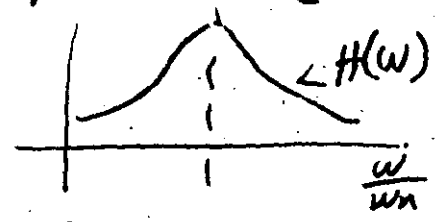
5.1 Pruebas dinámicas de laboratorio

- Entre estas se tiene la de resonancia, en ella está implícita la fórmula de amplificación $H(\omega)$ vista antes así como la de la frecuencia natural

$$\sqrt{K}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

la cual equivale a $\omega_n = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{G}{\rho}}$



G: módulo de elasticidad al corte
ρ: densidad
L: longitud de la probeta

- Asimismo de la solución de la ecuación diferencial ordinaria se sabe que es del tipo

$y(t) = e^{-\lambda t} (\text{sen } \omega_n t)$ $\lambda = \log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$

donde λ nos da la relación de disminución de amplificación entre ciclos sucesivos, de ella se puede estimar el amortiguamiento del material β ya que

$\lambda = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{1-\rho^2}}$; $\beta = \frac{c}{c_c}$; $c_c = \sqrt{2K\eta}$

5.2 Propagación de temblores

- Aquí se emplea la ecuación de onda y sus soluciones correspondientes, para ondas dilatacionales y distorsionales, cuya velocidad de propagación está dada respectivamente por

$c_D = \sqrt{\frac{2G + \lambda}{\rho}}$; $c_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

$(\lambda = \frac{3K - 2G}{3})$ λ: constante de Lamé
K: módulo de compresibilidad volumétrica

- La solución a la propagación se obtiene por tanto incluyendo la geometría, zonificación y propiedades dinámicas de los estratos, empleando el método de separación de variables (visto antes), donde las constantes C_{ij} que aparecen en la solución

$$S(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_{ij} \cos k_i x \cos k_j t$$

se determinan de las condiciones de frontera

5.3 Respuesta dinámica de medios discretos ante excitaciones de cualquier tipo

- Para determinarla previamente se discretiza el problema a estudiar, p.ej la cimentación de una maquinaria
- Se obtienen entonces una masa equivalente (que incluye máquina, cimentación y una región de suelo), una constante de resorte equivalente y un amortiguamiento equivalente. Todos estos parámetros están en función de la geometría del problema, así como de las propiedades mecánicas de los estratos involucrados.

Por otra parte para el estudio de interacción dinámica suelo-estructura, se aplica el modelo discreto de varios grados de libertad

$$[M]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [K]\vec{x} = \vec{f}(t)$$

las matrices $[M]$, $[c]$ y $[K]$ incluyen elementos tanto de la estructura como del suelo

También en los análisis de presas estas se discretizan bidimensional o tridimensionalmente, p.ej. mediante el método del elemento finito (los detalles de este se salen de los alcances de este trabajo), con el cual se obtiene un sistema matricial como el discutido en el caso anterior.

Estudios de respuesta local. - Para ellos también se discretiza la región, p.ej. con el método del elemento finito. Al obtener la solución se obtienen los espectros los cuales quedan en función de la estratigrafía y propiedades del sitio

6.- CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

● Considerando que este trabajo solo pretende establecer un vínculo entre los ingenieros (constructores e investigadores) a través del lenguaje de las matemáticas, se tienen las siguientes conclusiones:

a) Para entender los fenómenos físicos aquí tratados (oscilaciones, propagación de ondas, etc) es indispensable el conocimiento de las herramientas matemáticas presentadas.

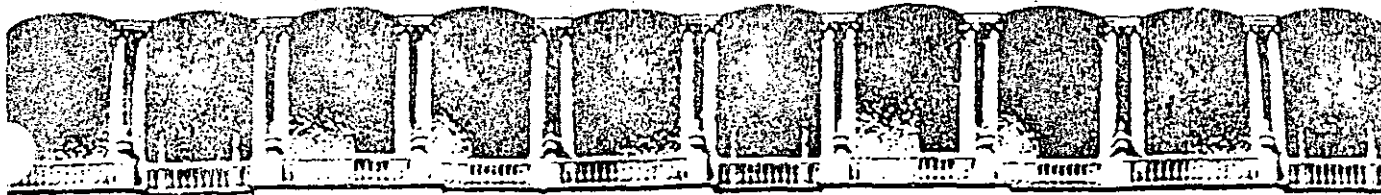
b) Los conceptos matemáticos vistos no son en sí difíciles de asimilar por un ingeniero constructor, lo que ocurre es que en licenciatura se les pone poco énfasis pensando que nunca serán de interés práctico, lo que definitivamente no es cierto y menos aún en regiones sísmicas.

c) Es importante diferenciar la fase de formulación de la de cálculo. Lo cual es útil para entender la lógica de solución de problemas de análisis.

d) En los problemas geotécnicos existen muchas interacciones (suelo-estructura, etc) que solo los tratamientos matemáticos pueden ayudar para comprender los resultados de mediciones experimentales de campo; ya que de lo contrario, sin ellos, existirá la tendencia en la interpretación de resultados a sobresimplificar las causas que los originan, alejándonos de la realidad

● En lo que se refiere a recomendaciones se mencionan las siguientes:

- a) Familiarizarse con los modelos matemáticos comunes así como con sus procedimientos de solución, tanto analíticos como numéricos
- b) Manejar programas de computadora de dichos procedimientos de cálculo
- c) Profundizar en las diferentes técnicas matemáticas modernas aplicables a problemas complejos de dinámica en obras geotécnicas, p.ej. el método del elemento finito, etc.



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

CURSOS ABIERTOS

CIMENTACION DE MAQUINARIA

17 al 21 de febrero de 1992

A N E X O

PALACIO DE MINERIA

CAPITULO I INTRODUCCION

METODOLOGIA DE LA INVESTIGACION:

- A) ELECCION DEL TEMA
- B) INVESTIGACION BIBLIOGRAFICA
- C) FORMULACION DEL MODELO MATEMATICO (O EXPERIMENTAL)
- D) PLANEACION DEL TRABAJO
- E) RECOLECCION DE DATOS
- F) EJECUCION DE LOS TRABAJOS
- G) INTERPRETACION Y COMPARACION DE RESULTADOS
- H) GENERALIZACION
- I) CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES
- J) COMUNICACION MEDIANTE REDACCION DE INFORME

A) ELECCION DEL TEMA

"EL PROBLEMA DE INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA EN LOSAS DE CONCRETO"

- 1) PAVIMENTOS
- 2) CIMENTACIONES
- 3) PRESAS

- PRESA: OBRA DE INGENIERIA CIVIL CONSTRUIDA PARA RETENCION DE AGUA

- OBJETIVOS:

- + DOTACION DE AGUA A UNA POBLACION
- + RIEGO DE TERRENOS DE LABOR
- + NECESIDADES DE ENERGIA ELECTRICA

* ASPECTOS FUNDAMENTALES INVOLUCRADOS:

- + FILOSOFICOS
- + CIENTIFICOS
- + TECNOLOGICOS
- + ECONOMICOS
- + SOCIALES

B) INVESTIGACION BIBLIOGRAFICA
CAPITULO II ESTADO DEL ARTE

* TIPOS DE CORTINA:(FIG. 1)

- + HOMOGENEAS
- + HOMOGENEAS CON FILTRO
- + DE MATERIALES GRADUADOS
- + CON DELANTAL O CON PANTALLA
- + DE ENROCAMIENTO:
 - CON CORAZON IMPERMEABLE
 - CON PANTALLA IMPERMEABLE
 - o ASFALTO
 - o CONCRETO

* PARTES INTEGRANTES DE LA CORTINA DE UNA PRESA DE ENROCAMIENTO CON PANTALLA DE CONCRETO:(FIG. 2)

A) CUERPO DEL ENROCAMIENTO (ZONAS)

B) PIE DE LOSA

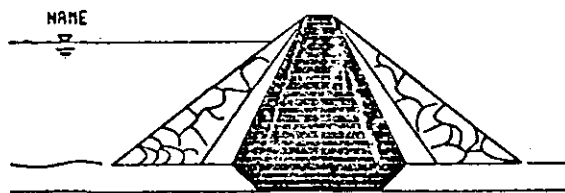
C) LOSA DE CONCRETO (INCLUYENDO JUNTAS)

* CARACTERISTICAS DEL ENROCAMIENTO

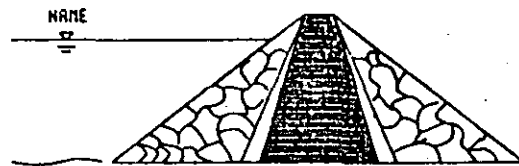
- + CALIDAD Y GRADUACION
- + EXCAVACION Y TRATAMIENTO DE LA CIMENTACION
- + ZONIFICACION:
 - ZONA 1 (FIG. 2)
 - ZONA 2
 - ZONA 3
- + USO DEL AGUA EN LA COMPACTACION

* PIE DE LOSA

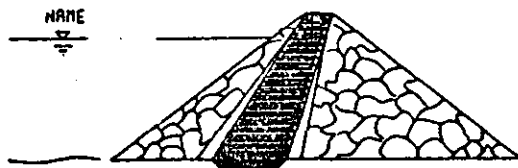
- + TRATAMIENTO DE LA CIMENTACION
- + DIMENSIONES
- + ACERO DE REFUERZO



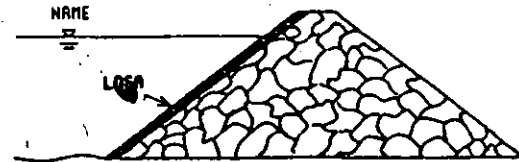
PRESA DE TIERRA Y ENROCAMIENTO
CON TRINCHERA



PRESA DE ENROCAMIENTO
-CORAZON VERTICAL-

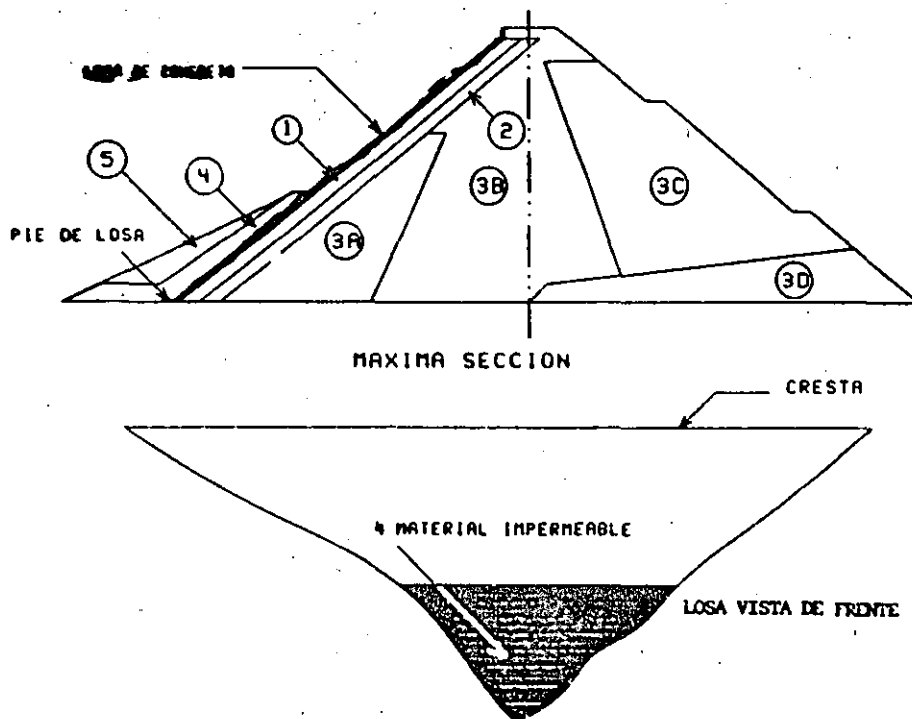


PRESA DE ENROCAMIENTO
-CORAZON INCLINADO-



PRESA DE ENROCAMIENTO CON LOSA
DE CONCRETO -CIMENTACION RIGIDA-

FIGURA 1 ALGUNOS TIPOS DE CORTINA



MATERIALES :

- 1 MATERIAL TRITURADO (MENOR DE 3")
- 2 MATERIAL TRITURADO (ENTRE 3 Y 6")
- 3 ENROCAMIENTO (A, B Y C. COMPACTADOS CON DIFERENTE ESPECIFICACION D. ENR. A VOLTEO)
- 4 MAT. IMPERMEABLE
- 5 VARIABLE

FIG. 2 SECCION CONCEPTUAL DE UNA PRESA DE ENROCAMIENTO CON PANTALLA DE CONCRETO

* LOSA DE CONCRETO

+ ESPESOR

- CON ENROCAMIENTO A VOLTEO

$$0.3 + 0.0067H \text{ (H = ALTURA DE LA PRESA EN M)}$$

- CON ENROCAMIENTO COMPACTADO

$$0.003H \text{ A } 0.002H \text{ Ó MENOS}$$

+ ACERO DE REFUERZO (REDUCCION DEL 5% EN PRESAS CON ENROCAMIENTO A VOLTEO, A 4% EN PRESAS CON ENROCAMIENTO COMPACTADO)
(COLOCADO AL CENTRO DEL ESPESOR DE LA LOSA)

+ CONCRETO

+ CONSTRUCCION (EN FRANJAS VERTICALES)

+ JUNTAS VERTICALES Y PERIMETRAL

TABLA 1 LISTA PARCIAL DE PRESAS DE ENROCAMIENTO CON PANTALLA DE CONCRETO

NOMBRE	ALTURA (m)	LOCALIZACION	AÑO DE TERMINACION	TALUD AGUAS ARRIBA	TALUD AGUAS ABAJO	AREA DE LA LOSA (m ²)
Strawberry	50	California	1916	1.2	1.3	
Salt Springs	100	California	1931	1.1	1.4	10900
Paradela	112	Portugal	1955	1.3	1.3	55000
<u>Pinzanes</u>	67	<u>México</u>	<u>1956</u>	<u>1.2</u>	<u>1.3</u>	
Courtright	98	California	1958	1.0	1.3	6700
<u>San Idelfonso</u>	62	<u>México</u>	<u>1959</u>	<u>1.4</u>	<u>1.4</u>	
New Exchequer	150	California	1966	1.4	1.4	
Rama	110	Yugoslavia	1967	1.3	1.3	
Cethana	110	Australia	1971	1.3	1.3	23700
Alto	140	Colombia	1974	1.4	1.4	22300
Anchincaya						
Golillas	130	Colombia	1978	1.6	1.6	14300
Bailey, R. D.	95	USA	1979	2.0	2.0	65000
Areia	160	Brasil	1980	1.4	1.4	139000
Neveri	115	Venezuela	1981	1.4	1.5	53000
Shiroro	130	Nigeria	1982	1.3	1.3	150000
Yacambu	150	Venezuela	1982	1.5	1.5	13000
Salvajina	145	Colombia	1983	1.5	1.5	
Kotmale	97	Sri Lanka	1985	1.4	1.45	60000
Lower Pieman	122	Australia	1986	1.3	1.5	35000
Musa	150	Nueva Guinea	P	1.5	1.5	
<u>Aguamilpa</u>	<u>180</u>	<u>México</u>	<u>BD</u>	<u>1.5</u>	<u>1.5</u>	

P=Propuesta

BD=Bajo Diseno

CAPITULO III INTERACCION ENTRE LOSAS DE CONCRETO Y SUELO

+TABLA 2 IDENTIFICACION DE VARIABLES QUE INFLUYEN EN EL COMPORTAMIENTO DE LOSAS DE CONCRETO Y SUELO

TIPO DE ESTRUCTURA	A	B	C
FACTORES	PAVIMENTOS	CIMENTACIONES	PRESAS
<p><u>1.-CARACTERÍSTICAS DE LOS MATERIALES DE APOYO.</u></p> <p>1)TIPO DE MATERIALES. 2)MODULO DE ELASTICIDAD 3)RELACIÓN DE POISSON. 4)RELACIÓN DE AMORTIGUAMIENTO 5)PERMEABILIDAD. 6)GEOLOGÍA DE LA REGIÓN. 7)ESTRATIFICACIÓN. A)TIPO DE MATERIALES. B)ESPEORES. 8)PESO VOLUMÉTRICO</p>	<p>MUCHO MUCHO MUCHO MUCHO MUCHO MUCHO REG.-MUCHO REGULAR MUCHO</p>	<p>MUCHO MUCHO MUCHO POCO POCO MUCHO MUCHO MUCHO</p>	<p>MUCHO MUCHO MUCHO MUCHO REG.-MUCHO MUCHO</p>
<p><u>2.-CARACTERÍSTICAS DE LA LOSA DE CONCRETO</u></p> <p>1)DIMENSIONES. A)ESPESOR. B)ANCHO. C)LARGO. 2)CALIDAD DEL CONCRETO. 3)MODULO DE ELASTICIDAD 4)ARMADO 5)CONTACTO SUELO-LOSA 6)SEPARCIÓN DE JUNTAS</p>	<p>REG.-MUCHO REG.-MUCHO REG.-MUCHO MUCHO REGULAR POCO-REG. MUCHO REGULAR</p>	<p>MUCHO POCO POCO REGULAR MUCHO MUCHO MUCHO POCO</p>	<p>MUCHO MUCHO MUCHO MUCHO REGULAR POCO MUCHO MUCHO</p>
<p><u>3.-CARACTERÍSTICAS DE LAS CARGAS</u></p> <p>1)DISTRIBUCIÓN 2)ORDENES DE MAGNITUD 3)VELOCIDAD DE APLICACIÓN</p>	<p>MUCHO MUCHO MUCHO</p>	<p>MUCHO MUCHO MUCHO</p>	<p>MUCHO MUCHO MUCHO</p>
<p><u>4.-FACTORES AMBIENTALES</u></p> <p>1)TEMPERATURA 2)HUMEDAD 3)ACCIÓN DE AGENTES QUIMICOS</p>	<p>MUCHO MUCHO MUCHO</p>	<p>POCO POCO REGULAR</p>	<p>REGULAR POCO POCO-REG.</p>

- EL PROBLEMA DE INTERACCION ESTA DADO COMO UNO DE DEFORMACION
- LAS INCOGNITAS BASICAS DEL PROBLEMA SON LAS DISTRIBUCIONES ESPACIALES DE LOS MOVIMIENTOS ASI COMO LAS REGIONES FALLADAS (SI SE PRESENTAN)
- LA DISTINCION BASICA ENTRE LOS TRES TIPOS DE INTERACCION LOSA-SUELO (PAVIMENTOS, CIMENTACIONES Y PRESAS) LA CONSTITUYEN LAS CARACTERISTICAS DE LA CARGAS, ASI COMO LA GEOMETRIA GLOBAL DEL PROBLEMA Y LAS CONDICIONES DE FRONTERA.

 C) FORMULACION DEL MODELO MATEMATICO
 CAPITULO IV FORMULACION MATEMATICA

+ MODELOS ELASTICOS

- EL MODELO DE WINKLER CONSIDERA QUE LA DEFLEXION EN UN PUNTO DEL MEDIO EN LA SUPERFICIE ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL AL ESFUERZO APLICADO EN ESE PUNTO E INDEPENDIENTE DE LOS ESFUERZOS APLICADOS EN OTROS PUNTOS:

$$Q(X,Y) = K W(X,Y)$$

$Q(X,Y)$ = CARGAS APLICADAS EN EL MEDIO

$W(X,Y)$ = DESPLAZAMIENTOS DEL MEDIO EN LA SUPERFICIE (CARACTERISTICA DEL MODELO)

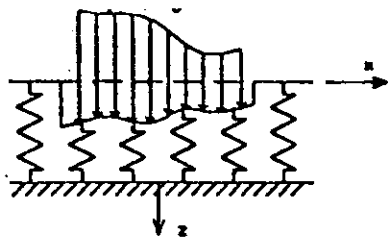
K = CONSTANTE DE LOS RESORTES (MEDIO)

- EL MODELO DE FILONENKO-BORODICH ES PARECIDO AL DE WINKLER, SOLO QUE LOS RESORTES SE ENCUENTRAN CONECTADOS MEDIANTE UNA MEMBRANA, LA QUE SE ENCUENTRA SOMETIDA A UN ESFUERZO DE TENSION CONSTANTE

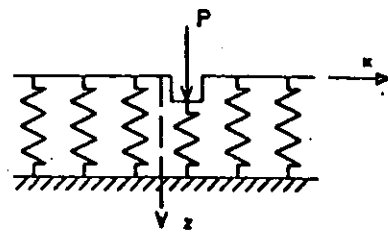
$$Q(X,Y) = K W(X,Y) + T \nabla^2 W(X,Y)$$

T = CONSTANTE DE LA MEMBRANA

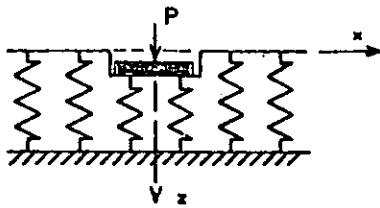
∇^2 = OPERADOR DIFERENCIAL LAPLACIANO EN LAS VARIABLES X Y Y



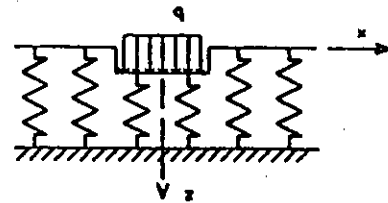
a) Carga no uniforme



b) Carga concentrado

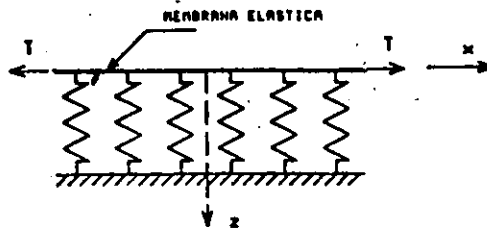


c) Carga rigido

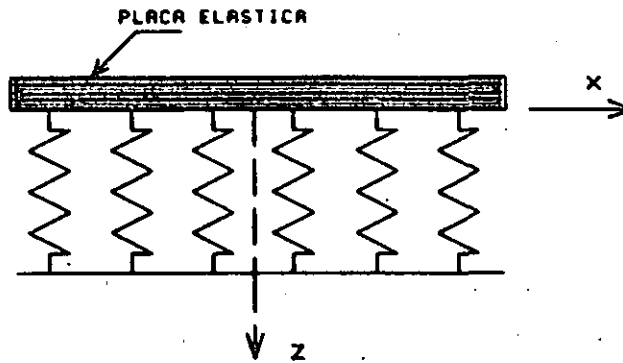


d) Carga flexible uniforme

A) Desplazamientos en un medio de Winkler



B) Modelo de Filonenko-Boredich



C) Modelo de Herengyi

FIGURA 3 MODELOS DE TIPO ELASTICO

- EN EL MODELO DE HETENYI LOS MISMOS RESORTES DEL MODELO DE WINKLER INTERACTUAN ENTRE SI POR MEDIO DE UNA PLACA ELASTICA

$$Q(X,Y) = K W(X,Y) + D \nabla^4 W(X,Y)$$

D = CONSTANTE DE LA PLACA ELASTICA

- SI EN LUGAR DE LA PLACA ELASTICA DEL MODELO DE HETENYI SE COLOCA UNA CAPA DE MATERIAL CAPAZ DE SOPORTAR ESFUERZOS CORTANTES, SE TIENE EL MODELO DE PASTERNAK

$$Q(X,Y) = K W(X,Y) + G_p \nabla^2 W(X,Y)$$

G_p = CONSTANTE DE LA CAPA DE MATERIAL

- CON LOS MODELOS ANTERIORES SE PUEDEN OBTENER LOS DESPLAZAMIENTOS EN LA SUPERFICIE DEL MEDIO, PERO NO EN EL INTERIOR DEL MISMO.

- LOS MODELOS ANTERIORES PARTEN DE UN ENFOQUE CONCEPTUAL, O SEA VAN DE LO PARTICULAR A LO GENERAL

- POR OTRA PARTE, EL MEDIO CONTINUO ELASTICO ISOTROPICO TIENE COMO ECUACION DIFERENCIAL

$$G \nabla^2 \vec{S} + (G + \lambda) \text{grad div } S + \rho \vec{f} = 0$$

G = MODULO DE RIGIDEZ AL CORTANTE

$$\lambda = \frac{\nu}{(1 + \nu)} \frac{E}{(1 - 2\nu)} = \text{CONSTANTE DE LAME}$$

$\text{div } S = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ = SUMA DE LAS DEFORMACIONES EN LA DIAG. PRINCIPAL

$\rho \vec{f}$ = FUERZAS DE CUERPO

∇^2 = OPERADOR DIFERENCIAL LAPLACIANO EN LAS VARIABLES X, Y y Z

- ESTE MODELO PARTE DE UN ENFOQUE FORMAL, ES DECIR, PARTE DE LO GENERAL A LO PARTICULAR. OFRECE LA VENTAJA DE QUE SE PUEDEN OBTENER LOS DESPLAZAMIENTOS EN SU INTERIOR Y DEDUCIR DE AHI EL ESTADO DE ESFUERZOS.

+ MODELOS NO ELASTICOS Y EN FUNCION DEL TIEMPO

■ EL MODELO DE RHINES ES UN MODELO NO ELASTICO QUE ASUME LA EXISTENCIA DE UNA CAPA DE MATERIAL QUE ES CAPAZ DE SOPORTAR ESFUERZOS CORTANTES HASTA UN CIERTO NIVEL

- SI LA FUERZA CORTANTE EN CUALQUIER PUNTO DE LA CAPA DEL MEDIO ES MENOR QUE UN CIERTO VALOR LIMITE ENTONCES EL MEDIO SE COMPORTA ELASTICAMENTE

- CUANDO LA FUERZA CORTANTE EN ALGUN PUNTO DEL MATERIAL ALCANZA EL VALOR LIMITE LAS PARTICULAS DEL MATERIAL PUEDEN DESLIZAR PRODUCIENDOSE UNA DISCONTINUIDAD

- LA DEFORMACION PLASTICA DEL MODELO SIMULA EL CORTE DE UN SUELO PROVOCADO POR UNA FALLA DE PUNZONAMIENTO

■ EL COMPORTAMIENTO POR CONSOLIDACION O POR FLUENCIA DE UNA MASA DE SUELO ESTA EN FUNCION DEL TIEMPO

- LA TEORIA DE BIOT DE CONSOLIDACION TOMA EN CUENTA EFECTOS TRIDIMENSIONALES

- LAS ECUACIONES DIFERENCIALES QUE DEFINE ESTA TEORIA SON

$$\left. \begin{aligned} G\nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} - \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0 \\ G\nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} - \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial y} &= 0 \\ G\nabla^2 w + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} - \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\epsilon = e_x + e_y + e_z$$

$$k\nabla^2 \sigma = \alpha \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{1}{Q} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (2)$$

α Y Q SON CONSTANTES QUE DEFINEN LA VARIACION DEL CONTENIDO DE AGUA EN EL MEDIO

∇^2 = OPERADOR DIFERENCIAL LAPLACIANO EN LAS VARIABLES X, Y y Z

CAPITULO V PROCEDIMIENTOS DE SOLUCION

+ LOS MODELOS MATEMATICOS SE FORMULAN SIGUIENDO PROCEDIMIENTOS CONCEPTUALES O FORMALES, RESPETANDO PRINCIPIOS FISICOS Y PRESENTANDOSE EN FORMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

+ COMO METODO DE SOLUCION SE DA EL PROCESO QUE TRANSFORMA ESAS ECUACIONES, POR EJEMPLO, EN UN SISTEMA LINEAL DE ECUACIONES

+ EXISTEN VARIOS METODOS PARA LA SOLUCION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES A LAS QUE SE LLEGA CON LA MODELACION MATEMATICA, ESTOS SE AGRUPAN EN:

1) METODOS CERRADOS (SERIES DE FUNCIONES ARMONICAS, TRANSFORMADA DE LAPLACE, FUNCION DE GREEN, ETC.)

2) METODOS VARIACIONALES (POR INTEGRACION DIRECTA, METODOS VARIACIONALES, ETC.)

+ LOS METODOS QUE UTILIZAN SERIES SE BASAN EN LA IDEA DE EXPRESAR LA SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL EN TERMINOS DE UN DESARROLLO EN SERIE

+ LOS DESARROLLOS EN SERIE PUEDEN SER:

A) DESARROLLOS EN SERIES DE POTENCIAS

B) DESARROLLOS EN SERIE DE FOURIER

■ LOS METODOS VARIACIONALES UTILIZAN EL CALCULO FUNCIONAL

+ UNA FUNCIONAL ES UNA VARIABLE DEFINIDA EN TERMINOS DE UNA O MAS FUNCIONES, POR EJEMPLO, EL AREA (J) DE UNA SUPERFICIE GENERADA EN EL PLANO XY A PARTIR DE LA UNION DE DOS PUNTOS MEDIANTE UNA CURVA Y(X) AL HACERLA GIRAR EN EL EJE X. LA FUNCIONAL J SE CALCULA COMO:

$$J = 2 \pi \int_{x_1}^{x_2} Y \sqrt{1 + Y'^2} \, dx ; Y' = \frac{dy}{dx}$$

- + EL OBJETO DEL CALCULO DE VARIACIONES CONSISTE EN BUSCAR UNA FUNCION ARGUMENTO $Y(x)$ EN CORRESPONDENCIA A LA CUAL UNA INTEGRAL DEL TIPO:
 $J = J [Y (x)]$, ADQUIERE UN VALOR MAXIMO O UN MINIMO.
- + LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PUEDEN SER TRANSFORMADAS EN FUNCIONALES, LO QUE PUEDE LOGRARSE UTILIZANDO LOS METODOS VARIACIONALES.
- + LA MAXIMIZACION O MINIMIZACION DE LA FUNCIONAL PUEDE LLEVARSE A CABO POR EJEMPLO, CON EL METODO DE RITZ O CON EL METODO DEL ELEMENTO FINITO.
- + LA IDEA DEL METODO DE RITZ CONSISTE EN QUE LOS POSIBLES VALORES SOLUCION DE LA FUNCIONAL SE CONSIDERAN SOLO EN UN CAMPO LIMITADO DE CURVAS QUE RESULTAN DEL DESARROLLO DE LAS COMBINACIONES LINEALES ADMISIBLES DEL TIPO

$$Y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x) ; W_i(x) = \text{FUNCIONES DE PESO}$$

- + LA FUNCIONAL SE TRANSFORMA ASI EN UNA FUNCION DE LOS COEFICIENTES α_i LOS CUALES SON LAS INCOGNITAS DEL PROBLEMA.
- + EL METODO DEL ELEMENTO FINITO ES UN METODO EN EL QUE LOS PROBLEMAS DE MECANICA DE MEDIOS CONTINUOS, QUE DEBEN SATISFACER LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO, RELACIONES CINEMATICAS Y LAS ECUACIONES CONSTITUTIVAS, SE TRANSFORMAN EN UN PROBLEMA EN EL QUE SE MINIMIZA LA ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMACION.
- + LA ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMACION ESTA DADA POR LA INTEGRAL, EN TODO EL VOLUMEN DEL MEDIO, DE LOS PRODUCTOS $\sigma_i \cdot \epsilon_i$
- + EN LA NATURALEZA AL APLICAR FUERZAS A UN SISTEMA ESTE SE DEFORMARA DE TAL MANERA QUE SE CONSUMA LA MENOR CANTIDAD DE ENERGIA.
- + EL PROBLEMA SERA ENTONCES ENCONTRAR LAS FUNCIONES $\sigma(x,y,z)$ Y $\epsilon(x,y,z)$ TALES QUE MINIMICEN LA ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMACION.

+ LA SOLUCION A LA QUE SE LLEGA CON LA MINIMIZACION DE LA ENERGIA POTENCIAL ES:

$$\boxed{[F] = [K]_T \{ \delta \}_T}$$

DONDE

$[F]$ = VECTOR DE FUERZAS ACTUANDO EN EL MEDIO

$[K]_T$ = MATRIZ DE RIGIDEZ

$\{ \delta \}_T$ = VECTOR DESPLAZAMIENTOS

Y A:

$$[E] = [B] \{ \delta \}$$

Y

$$[\sigma] = [D][E]$$

DONDE

$[E]$ = MATRIZ DE DEFORMACIONES

$[B]$ = MATRIZ DE CONSTANTES

$[D]$ = MATRIZ DE ESFUERZOS

PARA EL CASO BIDIMENSIONAL

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

D) PLANEACION DEL TRABAJO, E) RECOLECCION DE DATOS, Y F) EJECUCION DE LOS TRABAJOS

CAPITULO VI ANALISIS REALIZADOS

+ EL METODO DEL ELEMENTO FINITO APLICADO A PROBLEMAS DE MEDIOS CONTINUOS PERMITE LA SOLUCION DE PROBLEMAS COMPLEJOS, COMO ES EL CASO DEL ANALISIS DE LA LOSA DE CONCRETO DE LA PRESA DE AGUAMILPA.

+ LOS ANALISIS REALIZADOS SE AGRUPARON EN DOS GRANDES FAMILIAS, QUE SON:

1) ANALISIS ELASTICOS-LINEALES

2) ANALISIS NO ELASTICOS-NO LINEALES

+ A PARTIR DE LAS FAMILIAS SE CONSIDERARON LOS CASOS SIGUIENTES :

A) ANALISIS ELASTICO-LINEAL SIN JUNTAS EN PLANOS VERTICALES

B) ANALISIS ELASTICO-LINEAL CON JUNTAS FLEXIBLES EN PLANOS VERTICALES

C) ANALISIS NO ELASTICO-NO LINEAL SIN JUNTAS EN PLANOS VERTICALES

D) ANALISIS NO ELASTICO-NO LINEAL CON JUNTAS FLEXIBLES EN PLANOS VERTICALES

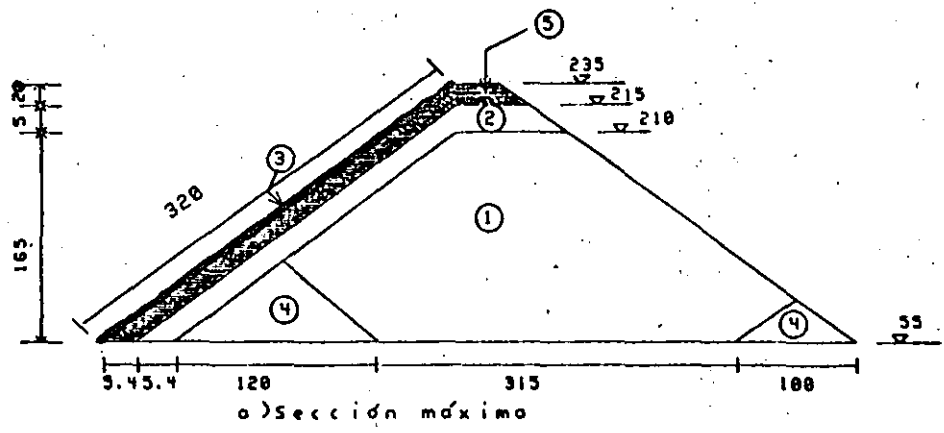
E) ANALISIS NO ELASTICO-NO LINEAL SIN JUNTAS FLEXIBLES VERTICALES EN LA FRANJA CENTRAL DE LA LOSA

■ CONSIDERACIONES EN LOS ANALISIS:

+ LAS LADERAS SE CONSIDERARON EMPOTRAMIENTOS ROCOSOS PERMITIENDO SOLO GIROS EN ESAS ZONAS

+ EL CONTACTO ENTRE EL SUELO Y LA LOSA SE CONSIDERO RUGOSO

+ LA LOSA SE DIVIDIO EN DOS PARTES DENOMINADAS "CAPA I" Y "CAPA II"



- MATERIALES**
- 1.-ENROCAMIENTO
 - 2.-FILTRO Y TRANSICIÓN
 - 3.-CONCRETO
 - 4.-ATAGUIAS
 - 5.-MEZCLA
- COTAS EN =**
(fuera de escala)

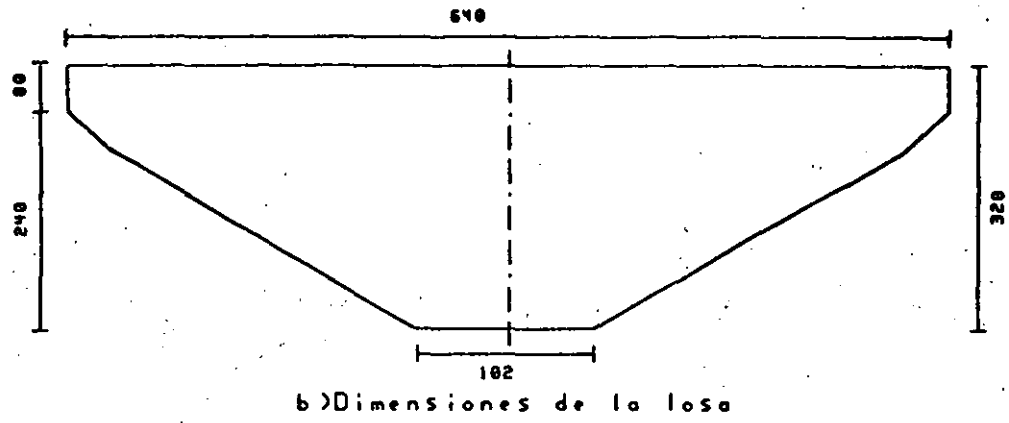
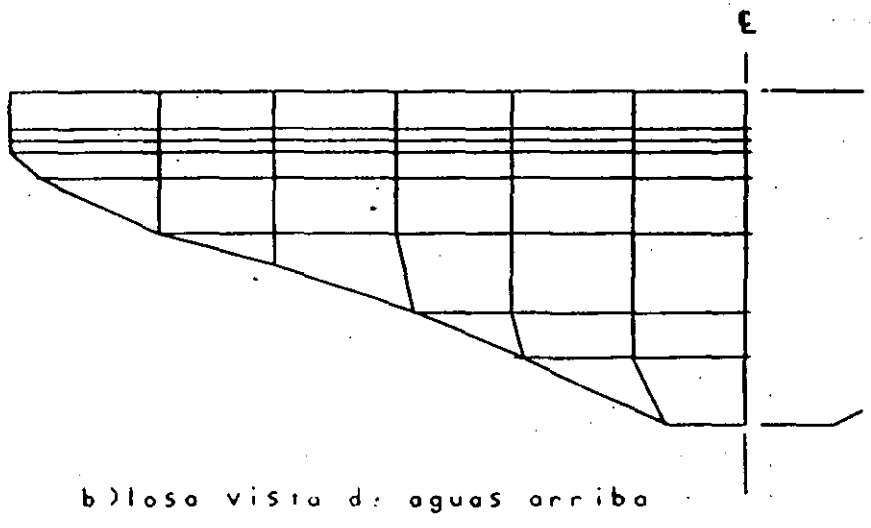
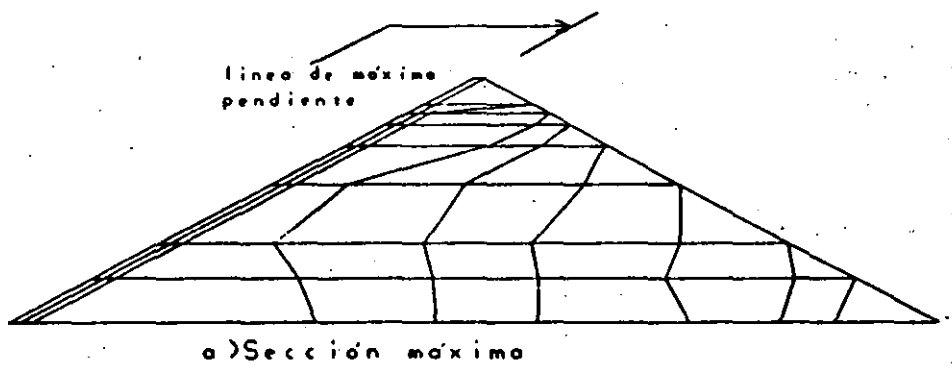


Fig. 4 Forma y dimensiones de la presa de Aguomilpa



b) losa vista de aguas arriba

- + EN LOS ANALISIS NO ELEASTICOS-NO LINEALES SE CONSIDERO UNA RELACION HIPERBOLICA PARA REPRESENTAR EL COMPORTAMIENTO NO LINEAL DE LOS MATERIALES DE LA PRESA, EN LA CURVA ESFUERZO-DEFORMACION.
- + TAMBIEN SE CONSIDERO EL EFECTO DE ENDURECIMIENTO DE LOS MATERIALES POR ESFORZAMIENTO (CON DEFORMACIONES PERMANENTES)
- + COMPORTAMIENTO DEL MATERIAL DE APOYO DE LA LOSA:

1) DURANTE LA CONSTRUCCION EL COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES CONSTITUTIVOS DE LA PRESA ES ELASTICO-LINEAL Y SUS PROPIEDADES SON LAS SIGUIENTES:

	E. x 10 ⁶ (KG/M ²)	v	φ	C. x 10 ⁶ (KG/M ²)	γ (KG/M ³)
LOSA	2000	.30	40°	2500	2400
JUNTAS VERTICALES	.0001	.40	0°	.00005	1900
JUNTA PERIMETRAL (SI LAS HAY)	.0001	.40	0°	.00005	1900
MATERIAL 5	15	.20	32°	5	1950
MATERIAL 2	18	.15	35°	0	2100
ENROCAMIENTO	15	.15	40°	0	2100

2) AL FINAL DE CADA ETAPA DE LLENADO:

SE DETERMINAN LOS ELEMENTOS DE SUELO EN LOS QUE POR LO MENOS DOS DE LOS ESFUERZOS PRINCIPALES SON DE TENSION, O BIEN, EN LOS QUE EL ESFUERZO NORMAL AL PARAMENTO DE AGUAS ARRIBA ES DE TENSION Y SUPERIOR A 0.1 Kg/cm², Y SE LES ASOCIA UN MODULO DE ELASTICIDAD IGUAL A:

$$E = 100 \text{ Kg/cm}^2$$

+ EN LOS ANALISIS ELASTICO-LINEALES SE CONSIDERO QUE LOS MATERIALES CONSTITUTIVOS DE LA PRESA TIENEN LAS PROPIEDADES SIGUIENTES:

	$E. \times 10^6$ (KG/M ²)	ν	ϕ	$C. \times 10^6$ (KG/M ²)	γ (KG/M ³)
LOSA	2000	.30	40°	2500	2400
JUNTAS VERTICALES	.0001	.40	0°	.00005	1900
JUNTA PERIMETRAL (SI LAS HAY)	.0001	.40	0°	.00005	1900
MATERIAL 5	15	.20	32°	5	1950
MATERIAL 2	18	.15	35°	0	2100
ENROCAMIENTO	15	.15	40°	0	2100

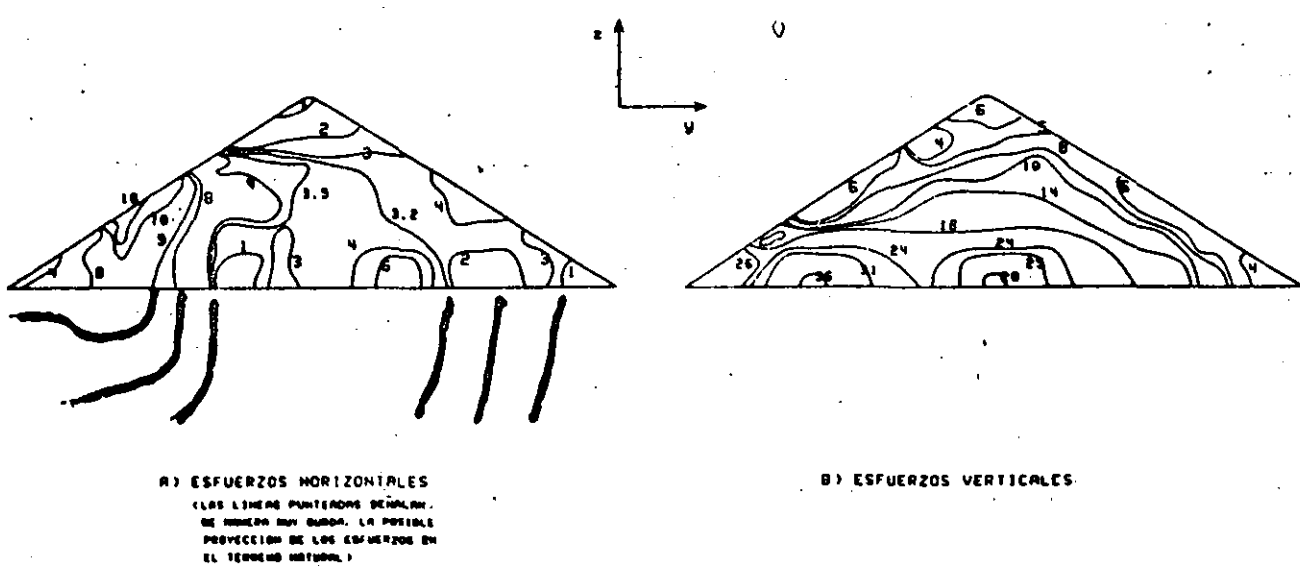


Fig. 6 ESFUERZOS EN LA SECCION MAXIMA, CASO B
 ESFUERZOS EN KG/CM² - COMPRESION

+ TAMBIEN, SE COMPARA EN CADA ELEMENTO EL ESFUERZO DESVIADOR ($\sigma_1 - \sigma_3$) CON EL QUE CORRESPONDIA AL DE LA ETAPA DE LLENADO ANTERIOR, PUDIENDO SUCEDER DOS CASOS:

1.- SI EL ESFUERZO DESVIADOR SUFRIO UN DECREMENTO A RAIZ DE LA ULTIMA ETAPA DE LLENADO, SE CONSIDERA QUE EL ELEMENTO SUFRIO UNA DESCARGA Y SE LE ASOCIA UN MODULO DE ELASTICIDAD

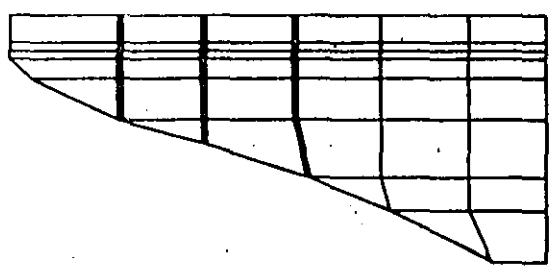
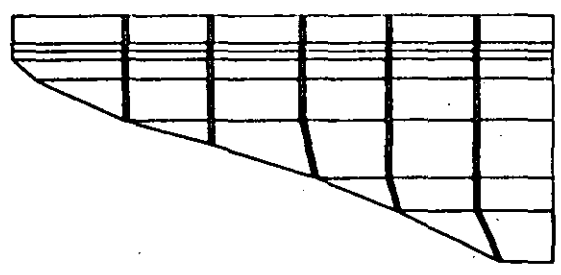
CONSIDERANDO DEFORMACIONES PERMANENTES:

$$E = 3000 (\sigma_3)^{1/3}$$

2.- SI EL ESFUERZO DESVIADOR SUFRIO UN INCREMENTO, SE ESTIMA EL VALOR DEL MODULO CONSIDERANDO LA EXPRESION PROPUUESTA POR KONDNER

$$E = 3000 (\sigma_3)^{1/3} \left[1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \right]^2$$

+ SI UN ELEMENTO LLEGA A LA FALLA POR ESFUERZO CORTANTE SE SUPONE QUE SU MODULO DE ELASTICIDAD (E) ES IGUAL A 100 Kg/cm².



a) losa con juntas flexibles verticales

b) Franja central sin juntas verticales

Fig. 7 Distribucion de las juntas en la losa de concreto.

■ RESULTADOS OBTENIDOS :

+ LA TABLA SIGUIENTE RESUME LOS MAXIMOS ESFUERZOS QUE SE PRESENTARON EN LA LOSA PARA LOS DISTINTOS CASOS ANALIZADOS

CASO	SENTIDO DEL ESF.	MAX. ESF TENSION (Kg/M ²)	ALTURA* (M)	MAX. ESF. COMPRESION (Kg/M ²)	ALTURA (M)
A	H	110	60 m L	305	63 m E
A	P	38	68 m L	45	5 m E
B	H	100	54 m L	263	63 m E
B	P	6	160 m L	110	0 m E
C	H	260	70 m L	650	63 m E
C	P	200	70 m L	40	75 m E
D	H	250	55 m L	450	40 m E
D	P	195	68 m L	100	0 m E
E	H	210	70 m L	650	63 m E
E	P	250	70 m L	40	75 m E

H = HORIZONTAL ; P = PARALELO A LA LINEA DE MAXIMA PENDIENTE
 L = CERCA DE LAS LADERAS ; E = EN EL EJE DE LA LOSA
 * EN RELACION AL PUNTO MAS BAJO DE LA LOSA

----- caso A
 - - - - - caso B
 - - - - - caso C
 - - - - - caso D
 - - - - - caso E

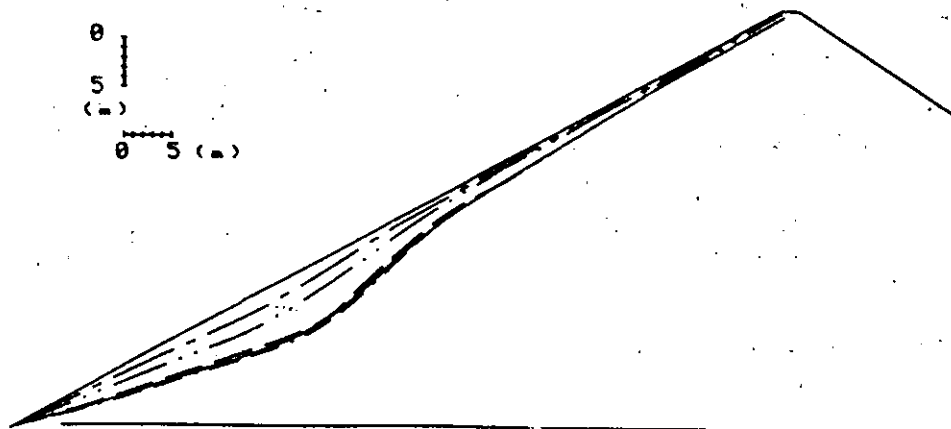
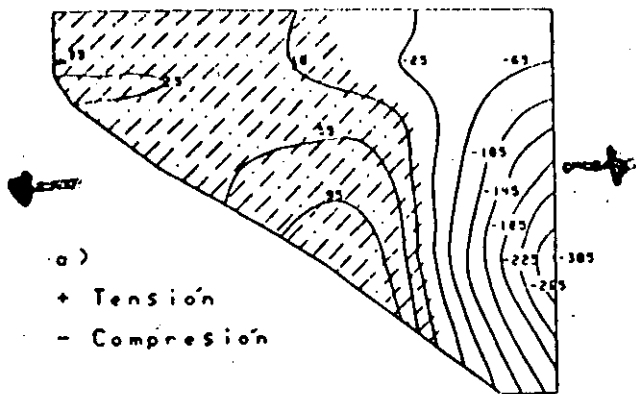
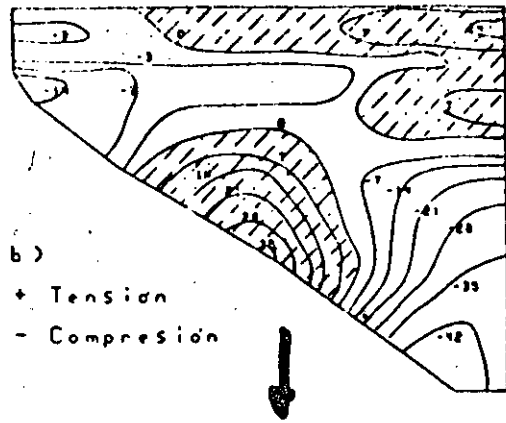


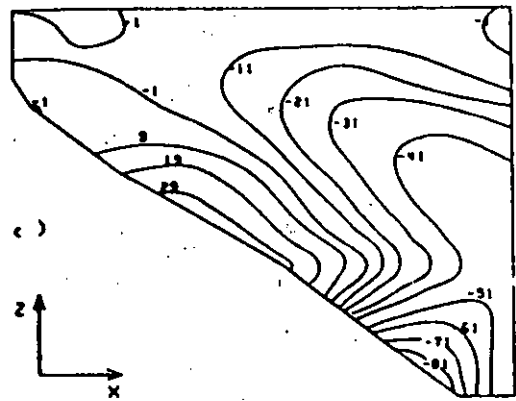
Fig. 8. Desplazamientos en la sección transversal de la Presa de Aguamilpa al final del llenado



a)
+ Tension
- Compresión



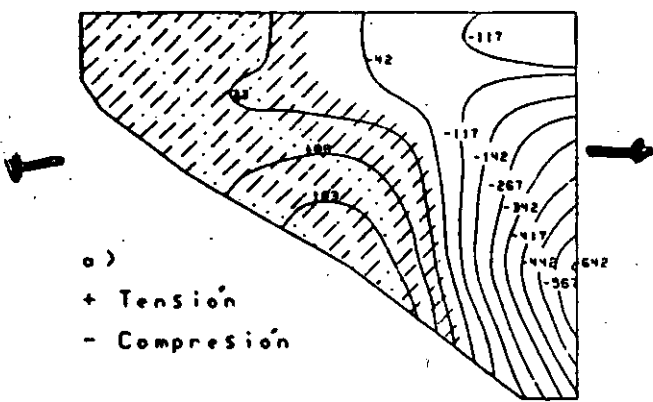
b)
+ Tension
- Compresión



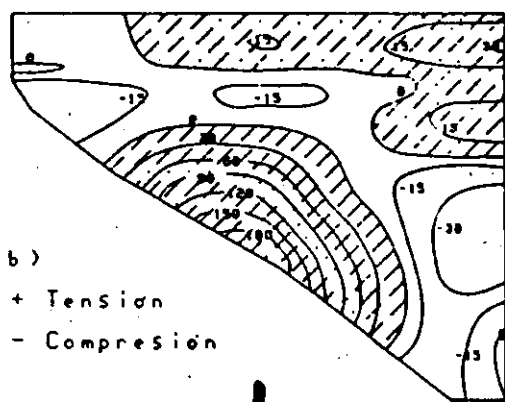
c)
Z
X

FIG. 9 CASO A, CAPA I DE LA LOSA

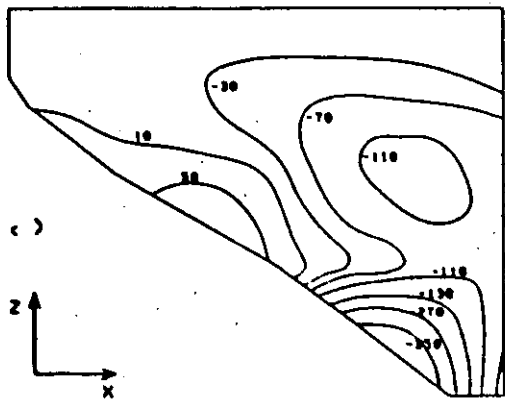
- a) ESFUERZOS NORMALES HORIZONTALES
 - b) ESFUERZOS NORMALES PARALELOS A LA LINEA DE MAXIMA PENDIENTE
 - c) ESFUERZOS CORTANTES PARALELOS A LA LINEA DE MAXIMA PENDIENTE
- ESFUERZOS EN Kg/cm^2



a)
+ Tension
- Compresión



b)
+ Tension
- Compresión



c)
Z
X

FIG.10 CASO C, CAPA I DE LA LOSA

- a) ESFUERZOS NORMALES HORIZONTALES
 - b) ESFUERZOS NORMALES PARALELOS A LA LINEA DE MAXIMA PENDIENTE
 - c) ESFUERZOS CORTANTES PARALELOS A LA LINEA DE MAXIMA PENDIENTE
- ESFUERZOS EN Kg/cm^2

G) INTERPRETACION Y COMPARACION DE RESULTADOS
CAPITULO VII

o COMPARACION DE RESULTADOS

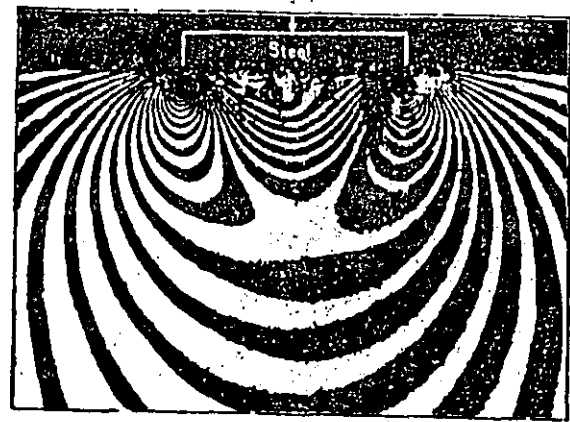
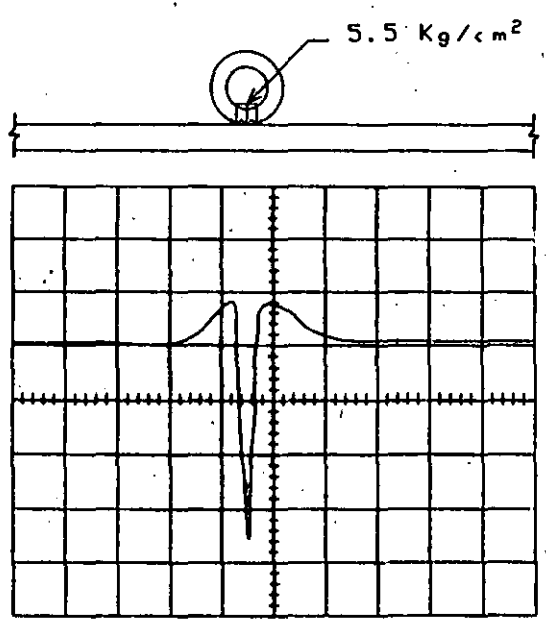


Figura 11

Distribución de esfuerzos en un material elástico
(placa de baquelita) determinado con la técnica de
foto-elasticidad

+ LAS PROYECCIONES DE LOS ESFUERZOS CONCUERDAN CUALITATIVAMENTE
CON LOS PRESENTADOS POR LA MASA DE LA CORTINA (FIGURA 6)



ESC. VERT. 250 $\mu\text{E}/\text{DIV}$

ESC. HORZ. 0.5 S/DIV

TEMP. = 19°C

PRESSION DE CONTACTO 5.5 Kg/cm^2

Figura 12

Deflexiones de un pavimento flexible
(mediciones en una pista de prueba)

* LAS ZONAS DE TENSION Y COMPRESION CONCUERDAN CON LAS PRESENTADAS
POR LA LOSA (COMPRESION AL CENTRO DEL AREA CARGADA Y TENSION EN
LOS EXTREMOS)

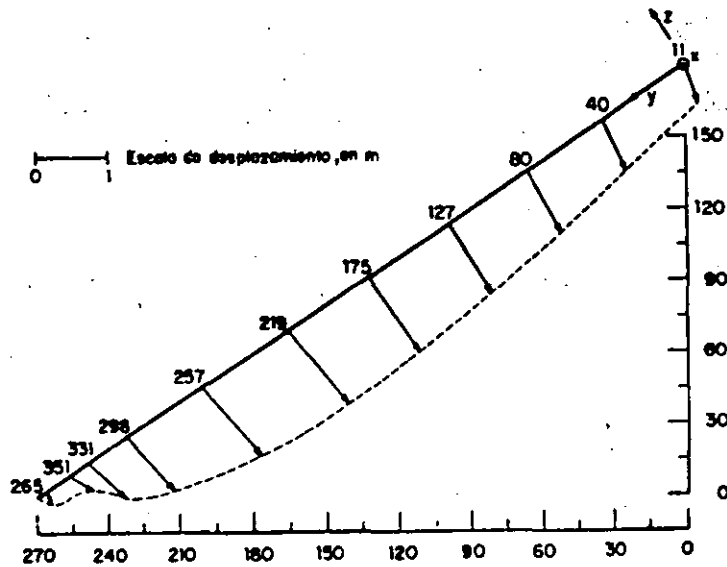


fig. 13 Vectores desplazamiento de los nudos localizados en la losa sobre un corte $x=0$

- + SI BIEN EN CUANTO A ORDENES DE MAGNITUD LOS DOS ANALISIS (1.-BASADO EN LA EXPRESION DE BOUSSINESQ Y 2.- CON ELEMENTO FINITO) NO CONCUERDAN, EN FORMA CUALITATIVA SE ASEMEJAN UN POCO MAS
- + LAS DIFERENCIAS PUEDEN DEBERSE A LAS HIPOTESIS ADOPTADAS (LOSA CON CONTACTO LISO CON LOS MATERIALES DE APOYO, EN EL PRIMERO CASO, Y CON CONTACTO RUGOSO EN EL SEGUNDO CASO)

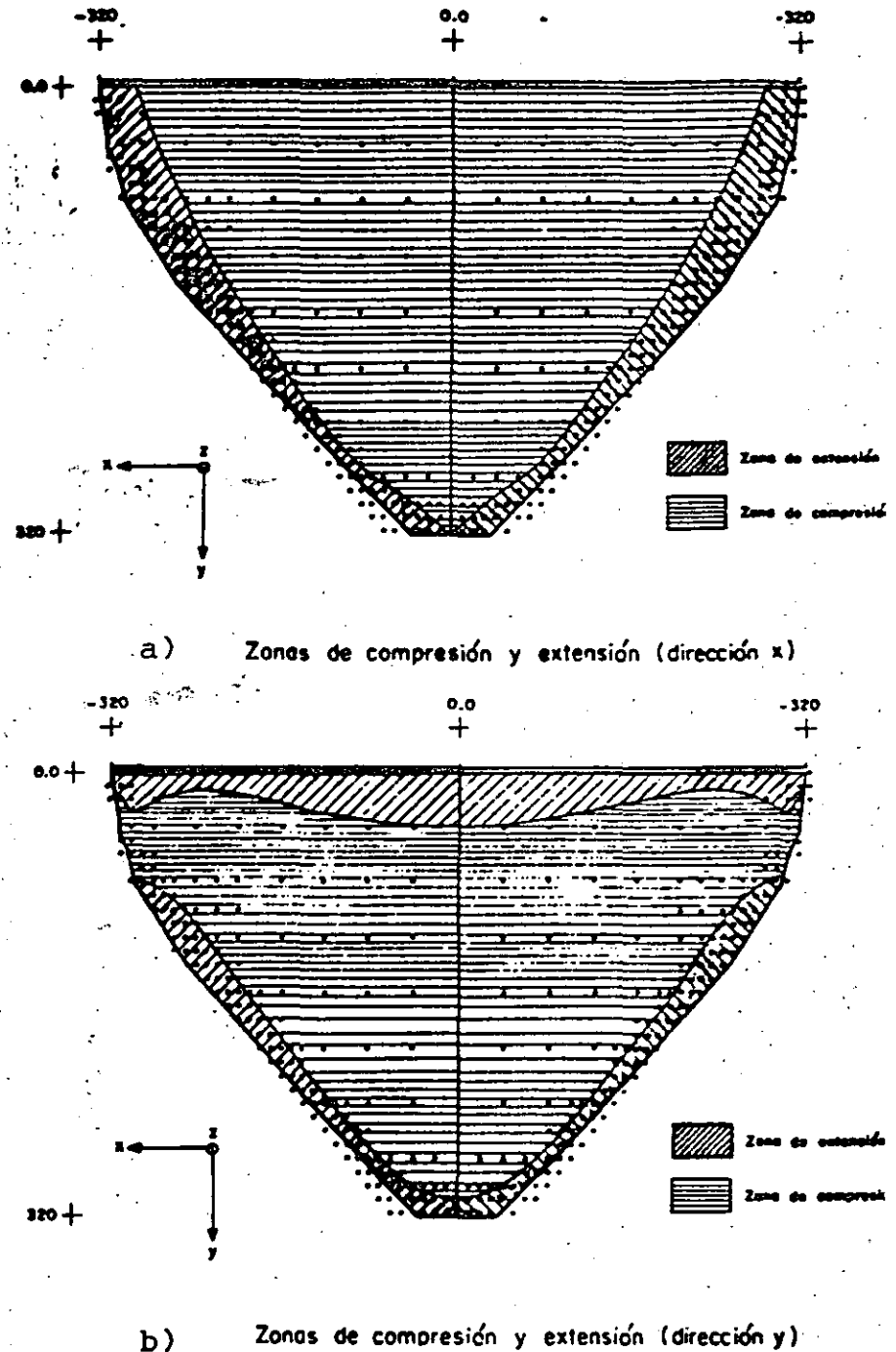


FIGURA 14

■ INTERPRETACION DE LOS RESULTADOS:

+ EN LOS PROBLEMAS DE INTERACCION ENTRE LOSAS Y SUELO (PAVIMENTOS, CIMENTACIONES O PRESAS) INFLUYEN LOS SIGUIENTES FACTORES:

A) PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

B) RIGIDECES RELATIVAS

C) CLAROS DE LA LOSA

D) SEPARACION DE JUNTAS

E) DISTRIBUCION ESPACIAL Y TEMPORAL DE CARGAS

F) RELACION ENTRE EL ESPESOR DE LA LOSA Y SUS OTRAS DIMENSIONES

+ LA INTERACCION DEPENDE DE LA MANERA COMO SE DISTRIBUYE LA ENERGIA DE DEFORMACION

+ DEBIDO A QUE LA LOSA ES MENOS FLEXIBLE QUE EL SUELO TIENDE A ABSORVER LA ENERGIA EXTERNA MEDIANTE FLEXION Y TRANSMITE UNA MENOR CANTIDAD DE ESA ENERGIA, HACIA EL SUELO DE APOYO.

+ SI LA ENERGIA QUE RECIBE EL SUELO ES SUFICIENTE PARA PLASTIFICARLO, ENTONCES ESTE YA NO TOMARA MAS ENERGIA, HACIENDO QUE SE INCREMENTE LA QUE TOMA LA LOSA, CON EL CONSECUENTE RIESGO DE QUE SE AGRIETE

+ LA COLOCACION DE JUNTAS EN LA LOSA HACE QUE SE TRANSMITA MENOS ENERGIA EN EL PLANO DE ELLA Y SE INCREMENTE LA QUE TOMA EL SUELO. ESTO PROVOCA MAYORES DESPLAZAMIENTOS PERO MENORES ESFUERZOS EN LA LOSA, REDUCIENDO SU PROBABILIDAD DE AGRIETARSE.

+ A MENOR LONGITUD DEL CLARO EXISTIRAN MENOS DEFLEXIONES EN LA LOSA POR TRANSMITIRSE ENERGIA HACIA LOS APOYOS.

H) GENERALIZACION, E I) CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES
CAPITULO VIII CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

+ CONCLUSIONES ACERCA DEL ESTUDIO DE LA INTERACCION LOSA-SUELO:

A) LA INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA REVISTE GRAN IMPORTANCIA EN EL COMPORTAMIENTO DE LA LOSA.

B) LAS JUNTAS VERTICALES FAVORECEN LA DISMINUCION DE LA INTERACCION LOSA-SUELO.

C) LAS ZONAS DE ESFUERZOS DE TENSION SE PRESENTAN EN LOS EMPOTRAMIENTOS Y EN LA CORONA.

+ RECOMENDACIONES PARA LA CONSTRUCCION DE LA CORTINA Y LA LOSA

A) COMPACTACION DEL MATERIAL DE APOYO DE LA LOSA

B) RIEGO DE ASFALTO A LA SUPERFICIE TERMINADA DEL SUELO DE APOYO DE LA LOSA PARA REDUCIR LA INTERACCION LOSA-SUELO.

C) JUNTAS VERTICALES DE COMPRESION EN LA ZONA CENTRAL DE LA LOSA

D) JUNTAS DE TENSION EN LA CERCANIA DE LOS EMPOTRAMIENTOS (FIG.15)

+ RECOMENDACIONES PARA MEJORAR LA INVESTIGACION:

A) MODELACION DE LA PRESA CON LA DISTRIBUCION FINAL DE JUNTAS (F.15)

B) INSTRUMENTAR LA PRESA DURANTE SU CONSTRUCCION A FIN DE OBSERVAR SU COMPORTAMIENTO DURANTE EL LLENADO Y OPERACION

C) COMPARAR LOS RESULTADOS OBSERVADOS DE LA INSTRUMENTACION, CON LOS CALCULADOS, CON EL OBJETO DE LLEGAR A GENERALIZACIONES APLICABLES A UN MAYOR NUMERO DE CASOS DE PRESAS DE ENROCAMIENTO CON PANTALLA DE CONCRETO.

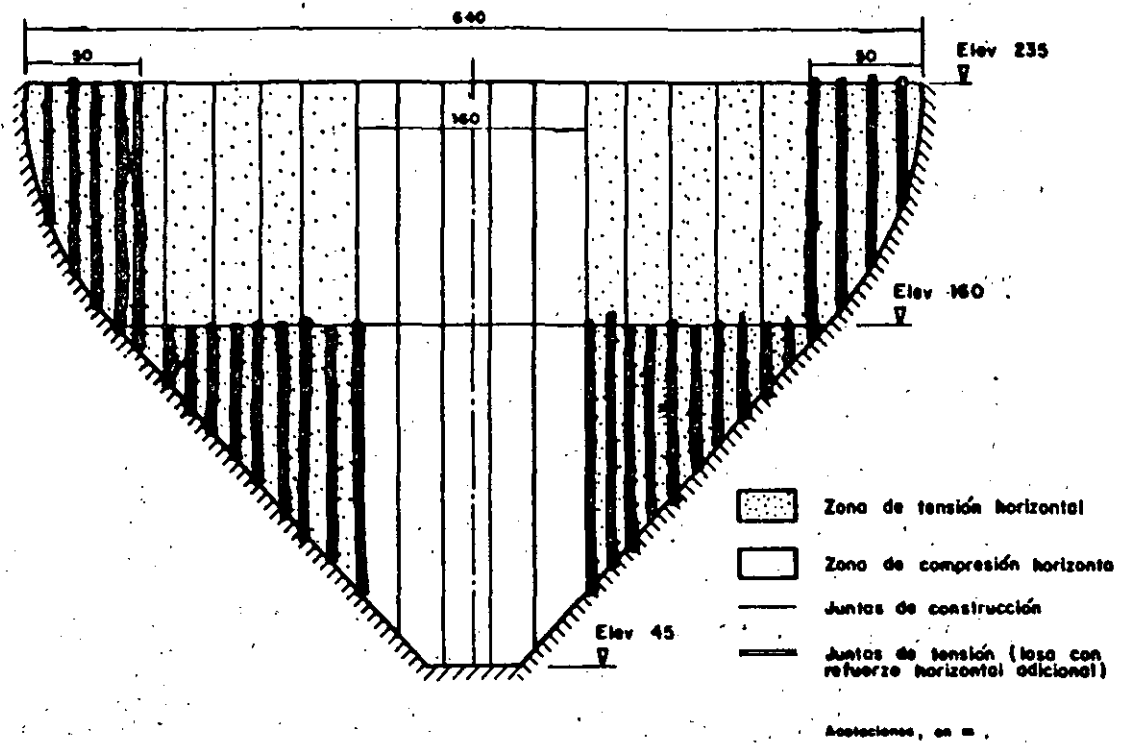


FIG. 15 DISTRIBUCION FINAL DE LAS JUNTAS DE TENSION

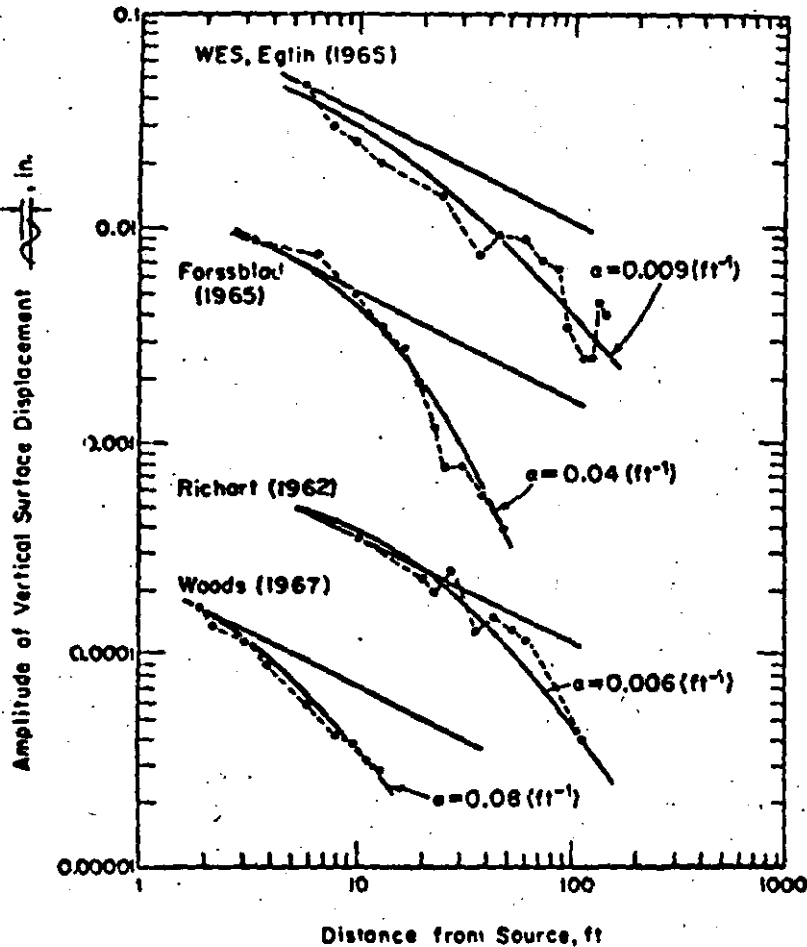


Figure 8-1. Attenuation of surface wave with distance from source of steady-state excitation.

the theoretical attenuation predicted by Eq. (8-1). All four sets of field data indicate amplitude attenuation greater than predicted by geometrical damping alone.

Both geometrical and material damping can be included in an expression for R -wave attenuation (Bornitz, 1931) as follows:

$$w = w_1 \sqrt{\frac{r_1}{r}} \exp[-\alpha(r - r_1)] \quad (8-2)$$

where α is the coefficient of attenuation, having dimensions of 1/distance (see Eq. 6-27). Equation (8-2) implies that the total energy on two concentric circles at radii r_1 and r from a point energy source is constant except for the

energy lost through material damping. Barkan (1962) suggested values of α ranging from 0.01 to 0.04 (1/feet) for various types of soils. The solid curves in Fig. 8-1 represent Eq. (8-2) with α selected to fit each set of data. The range of α in Fig. 8-1 is from 0.006 to 0.08 (1/feet). Although material damping occurs in real soils, as shown in Fig. 8-1, it is geometrical damping which contributes most to the attenuation of R -waves.

The attenuation considered so far has been associated only with horizontal (radial) distance from the source. An additional degree of isolation from R -wave energy can be obtained by locating foundations below the surface. It was shown in Chap. 3 that R -waves attenuate with depth; therefore, it may be useful for isolation purposes to seat a foundation as deep as practical while keeping the sides of the foundation separated from the surrounding soil.

Geologic Formations

If it is possible to select the site for sensitive structures or instruments, advantage may be taken of basic geologic formations. Foundations on sound, deep-seated bedrock, for example, will experience smaller vibration amplitudes than foundations on weathered materials or soils subject to the same excitation. Seismologists have found that abandoned rock quarries provide excellent sites for "quiet" seismograph stations. The depth of the quarry screens local microseismic noise and the freshly exposed rock at the quarry floor is an excellent foundation for instruments. Mines and underground caverns have similar advantageous properties.

It has been suggested by geophysicists that isolation can be achieved by locating a foundation in a protective natural geologic structure like a syncline. Also a deep valley or a mountain range may act as a barrier to long-period surface waves if it is situated between the source of excitation and a site to be isolated.

8.2 Isolation by Barriers

Examples from Practice

Isolation of structures and machine foundations from ground-transmitted vibrations by the installation of wave barriers has been attempted many times, and has met with various degrees of success. Barkan (1962) reported on an application of an open-trench and sheet-wall barrier to isolate a building from traffic induced vibrations, as shown in Fig. 8-2. This installation was unsuccessful and vibrations from the street continued to

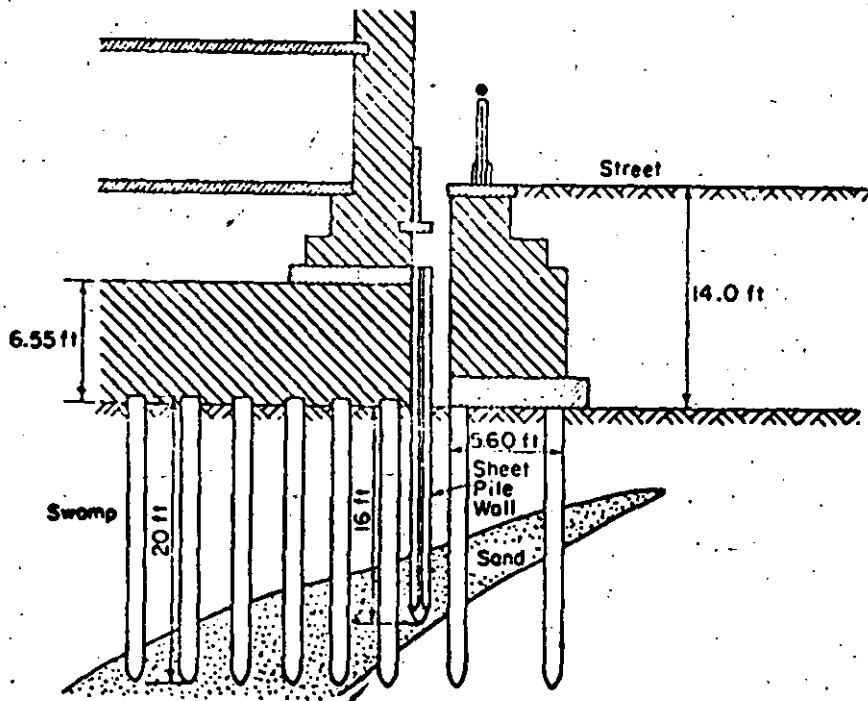


Figure 8-2. Isolation of building from traffic induced vibrations (after Barkan, 1962).

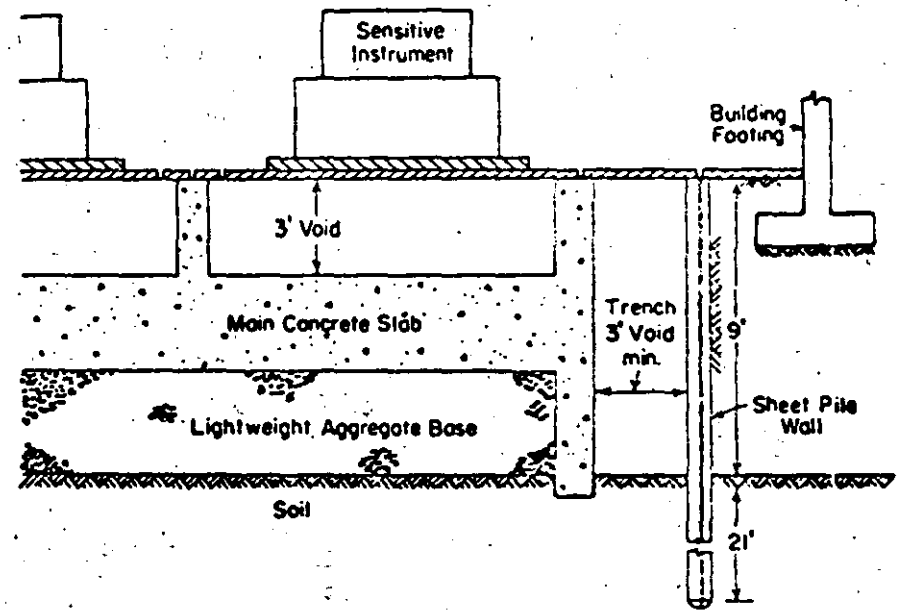


Figure 8-4. Isolation of standards laboratory (after McNeill et al., 1965).

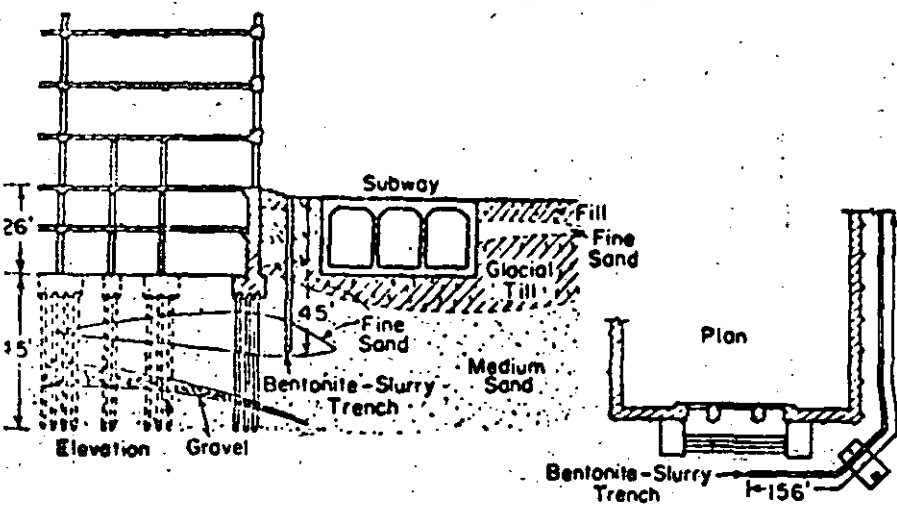


Figure 8-3. Building isolation using bentonite-slurry filled trench (after Neumeier, 1963).

|| affect the building adversely. Dolling (1965) and Neumeier (1963) reported on the use of a bentonite-slurry-filled trench to isolate a printing plant in Berlin from vibrations generated by subway trains. This application, as shown in Fig. 8-3, was reported as successful because the amplitude of vibration in the printing plant after trench installation was about one-half the amplitude before trench installation. It should be noted that a reduction of one-half in vibration amplitude would usually not be considered adequate. McNeill, Margason, and Babcock (1965) reported the successful application of a trench and sheet-wall barrier to isolate a sensitive dimensional-standards laboratory, as shown in Fig. 8-4. This isolation system effectively limited acceleration of the slab to the owners' specification (maximum acceleration of 100 micro-g).

Experimental Study of Trench and Sheet-Wall Barriers

|| In most applications of isolation barriers, the shape and size of the barriers have been selected without benefit of a rational design procedure. Barkan (1962) and Dolling (1965) reported on field investigations studying the effectiveness of barriers, and some guidelines for barrier size and shape were indicated. The tests by these investigators were limited in scope,

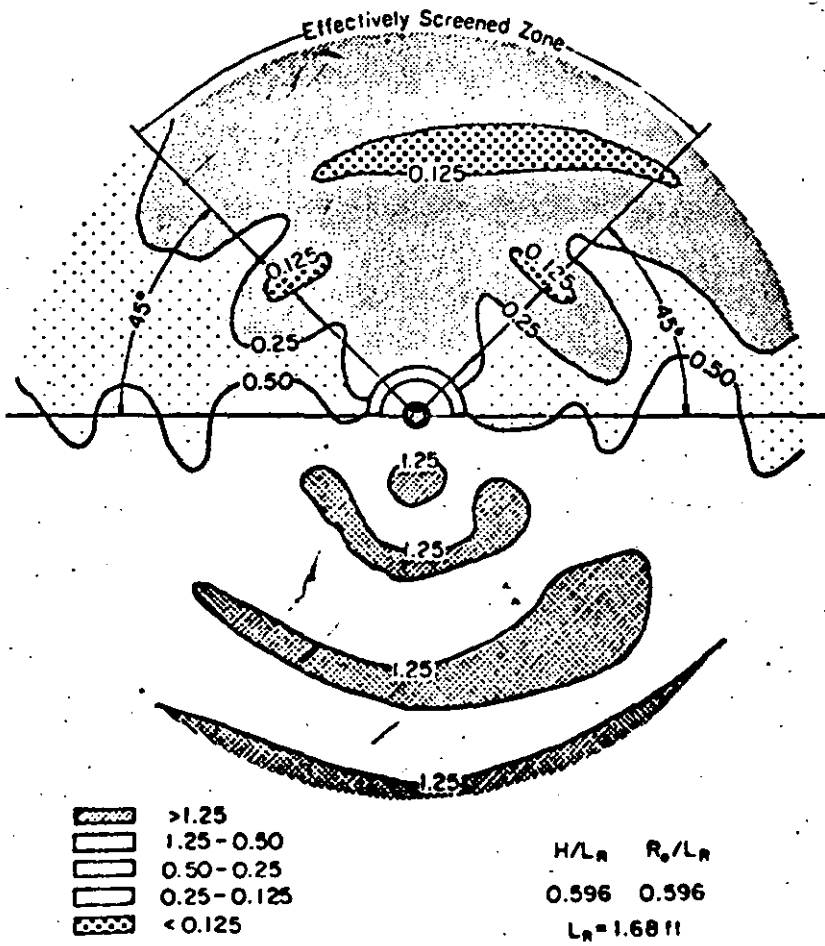


Figure 8-12. Amplitude ratio contour diagram (from Woods, 1968).

10 wavelengths from the source. The same criterion for screening effectiveness (amplitude reduction of 0.25 or less) when applied to trenches of angular length less than 360° showed that the same scaled trench depth $H/L_R = 0.6$ is required to produce an effectively screened zone.

Further examination of all tests for active isolation indicated that amplitude reductions greater than one order of magnitude are not likely to be achieved using trench barriers up to 2 wave lengths ($H/L_R = 2.0$) deep. The tests by Barkan (1962) and Dolling (1965) indicated similar results.

Passive-isolation tests. The test setup for passive isolation is shown schematically in Fig. 8-13. The layout consisted of two vibration exciter

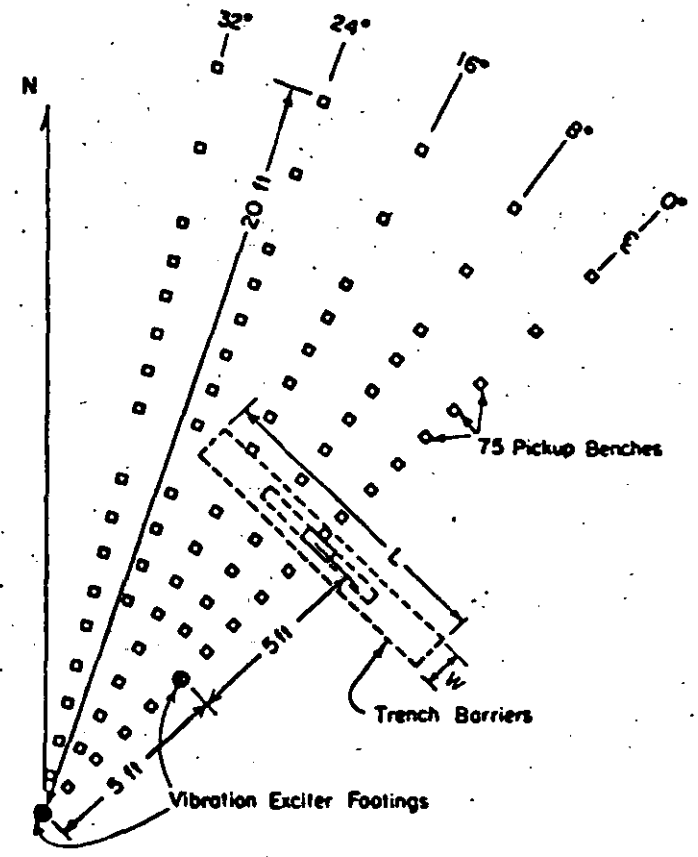


Figure 8-13. Plan view of field-site layout for passive isolation (from Woods, 1968).

footings, a trench barrier, and 75 pickup benches. For this series of tests it was assumed that the zone screened by the trench would be symmetrical about the 0° line; therefore, surface-motion measurements were made for only one-half of the screened zone. Symmetry of screening effects had been already sufficiently established in the active-isolation tests. The variables in these tests were trench depth H , trench length L , trench width W , and the distance from the source of excitation to the trench, R .

To study passive isolation, trenches ranging in size from 1.0-ft deep by 1.0-ft long by 0.33-ft wide, to 4.0-ft deep by 8.0-ft long by 1.0-ft wide were employed. By locating the vibration exciter at two distances from these trenches and using four frequencies of excitation (200, 250, 300, and 350 cycles/sec) a range of eight R/L_R ratios ($R/L_R = 2.22$ to 9.10) was obtained. This range in R/L_R was necessary to evaluate the effects of the exciter-trench distance R on trench performance.

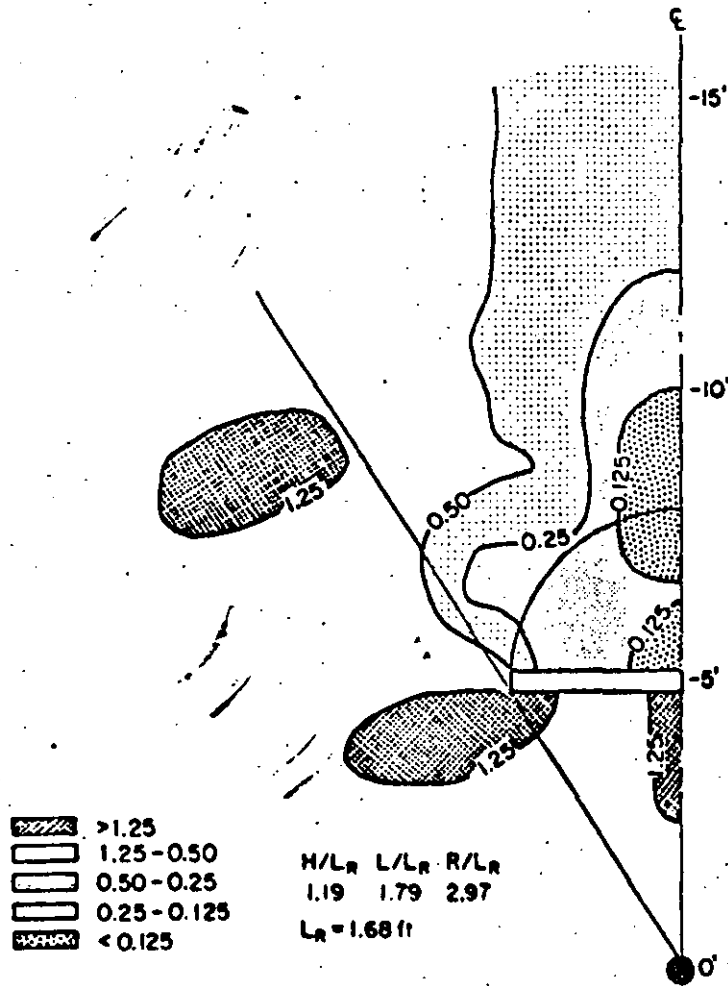


Figure 8-14. Amplitude-ratio contour diagram (from Woods, 1968).

From practical considerations, the critical dimension for trench barriers was the scaled depth H/L_R ; therefore, for each distance from the source the shallowest trench which satisfied the criteria was determined. The minimum scaled depth for the passive trenches was generally between $H/L_R = 1.2$ and $H/L_R = 1.5$. To evaluate the effect of total trench area on the screened zone, a quantity H/L_R^2 (scaled trench length times scaled trench depth) was computed for each trench. There was a general trend toward increasing H/L_R^2 increasing R/L_R . Figure 8-14 shows the amplitude-ratio contour diagram of a trench which satisfies the criteria.

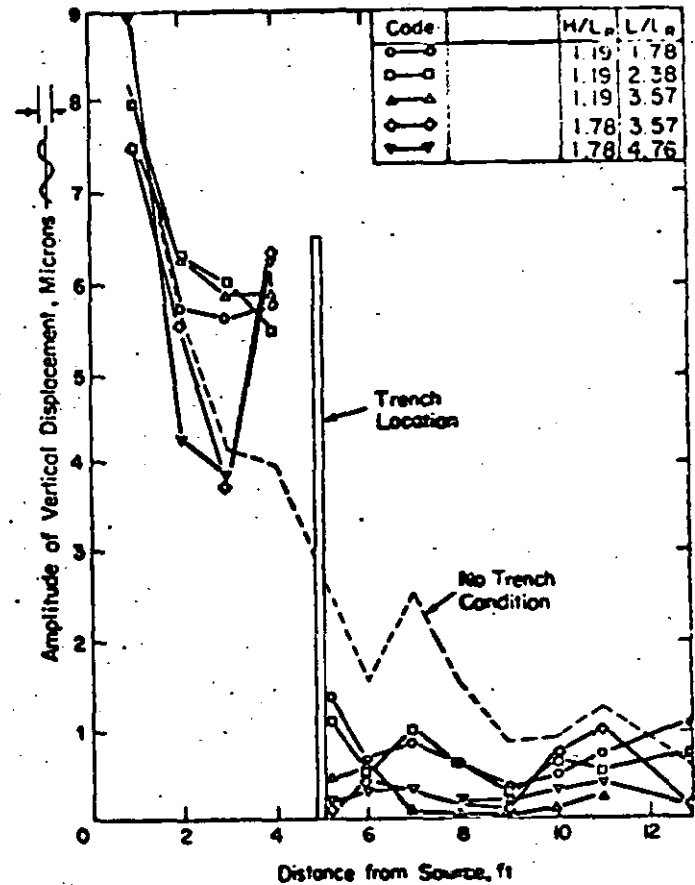
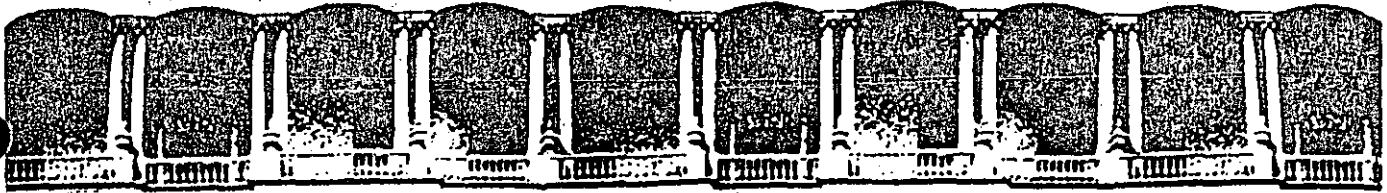


Figure 8-15. Amplitude of vertical displacement vs. distance from source for five tests (from Woods, 1968).

Amplitude magnification (indicated by amplitude-reduction-factor contours greater than 1.0) can be seen in Fig. 8-14 in front of and near the end of the trench. This phenomenon may explain some of the first unsatisfactory applications of trench barriers referred to earlier in this chapter. This magnification phenomenon was also noted in the work by Thau and Pao (1966) and can be seen in Fig. 8-5.

Curves of amplitude of vertical displacement vs. distance along a line of symmetry from the vibrator through the trench for five tests are shown in Fig. 8-15. The increasing effectiveness of the larger trenches can be seen in the region beyond the trench by the relative position of the curves for each test. Also apparent in this figure are the magnification in front of the trench and maximum reduction at some distance behind the trench.



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

CURSOS ABIERTOS

CIMENTACION DE MAQUINARIA

17 al 21 de febrero de 1992

**V. PROCEDIMIENTOS DE SOLUCION
DE PROBLEMAS DE MECANICA DE MEDIOS CONTINUOS**

**ING. ROBERTO MAGAÑA DEL TORO
ING. CARMELINO ZEA C.**

PALACIO DE MINERIA

V. PROCEDIMIENTOS DE SOLUCIÓN *de Problemas de Mecánica de Medias Continuas* por Roberto Magaña y Carmelino Zea C.

Siguiendo con la idea de la metodología de investigación, se puede señalar que los procedimientos de solución se relacionan con la etapa de cálculo.

Los modelos matemáticos indicados en el capítulo anterior para el estudio de la interacción suelo-estructura se formulan siguiendo procedimientos conceptuales o formales, respetando principios físicos y presentándose en forma de ecuaciones diferenciales. Como método de solución se da el proceso que transforma, por ejemplo, una ecuación diferencial en un sistema lineal de ecuaciones. Algunos de estos métodos pueden ser: 1) los métodos cerrados (series de funciones armónicas, transformada de Laplace, etc.), y 2) los métodos variacionales. Los primeros se describen en el apéndice C de esta tesis. El apéndice B trata el tema del cálculo funcional del que se derivan los métodos variacionales.

V.1. Métodos directos en los problemas variacionales

Sólo en casos excepcionales las ecuaciones diferenciales de los problemas variacionales se integran en forma finita (ver apéndice B). De aquí la necesidad de obtener otros métodos para la solución de estos problemas. Los llamados métodos directos consisten fundamentalmente en que el problema variacional (apéndice B), se considera como límite para cierto problema sobre el extremo de una función de un número finito de variables, suponiendo en la funcional $\phi(y(x))$ que las funciones admisibles pueden desarrollarse en series de potencias

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

o en series de Fourier

$$\psi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\alpha + b_n \operatorname{senn}\alpha)$$

o en general, en algunas series del tipo

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

donde $\varphi_n(x)$ son funciones dadas.

Así la funcional es función de un conjunto infinito de variables

$$\psi[\psi(x)] = \varphi(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$$

V.1.1. Método de diferencias finitas de Euler

La idea del método de diferencias finitas consiste en que se consideran los valores de la funcional $\psi[\psi(x)]$ en las líneas quebradas formadas por un número n dado de segmentos rectilíneos cuyas abscisas de los vértices están dadas por : $x_0, x_0 + \Delta x, x_0 + 2\Delta x, \dots, x_0 + (n-1)\Delta x$, donde

$$\Delta x = \frac{x_1 - x_0}{n} \quad (\text{ver figura V.1})$$

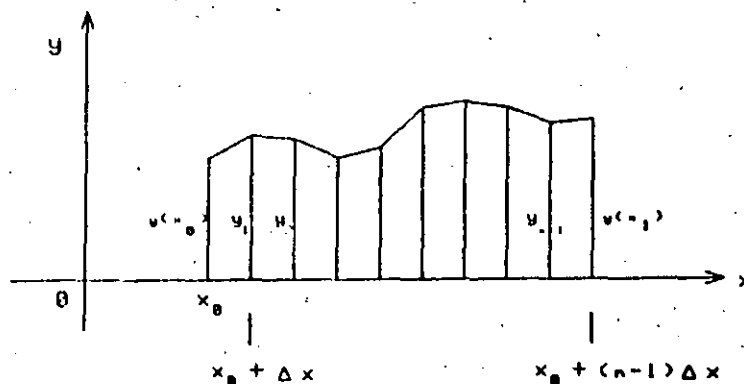


Figura V.1

De esta manera la funcional $\psi[\psi(x)]$ se transforma en una función $\varphi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$, de las ordenadas $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$, de los vértices de la quebrada.

El método consiste en escoger las ordenadas $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$, de

modo que la función $\varphi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$ tenga un extremo, es decir se determinan las $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$, del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \psi_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_{n-1}} = 0$$

y luego se pasa al límite cuando $n \rightarrow \infty$, de donde se obtiene, imponiendo ciertas restricciones, la solución del problema variacional.

Sin embargo, es más fácil calcular el valor de la funcional $\varphi[y(x)]$, en las quebradas, en forma aproximada. Si no se efectúa el paso al límite, puesto que n es finito, del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \psi_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

se pueden determinar las ordenadas $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$, buscadas, obteniendo así una quebrada que es la solución aproximada del problema variacional.

V.1.2. Método de Ritz

La idea del método de Ritz consiste en que los valores de la funcional $\varphi[y(x)]$ se consideran solo en las curvas de todas las combinaciones lineales admisibles

$$\psi_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x)$$

con coeficientes constantes. Las combinaciones se forman con las n primeras funciones de cierta sucesión elegida de funciones $W_1(x), W_2(x), \dots, W_n(x)$.

Así la función $\varphi[y(x)]$ se transforma en una función $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, se escogen de modo que la función $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ tenga un extremo, por lo que dichos coeficientes deben ser determinados del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Si se pasa al límite para $n \rightarrow \infty$ se obtiene

$$\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i W_i(x)$$

que es, para ciertas restricciones, la solución exacta del problema

variacional.

Si solo se consideran los n primeros términos

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x)$$

se obtiene una solución aproximada del problema variacional.

V.1.3. Método de Kantorovich

En el método de Kantorovich la solución aproximada se busca en la forma

$$y_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x_1) W_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

en donde los coeficientes $\alpha_k(x_1)$ son funciones incógnitas de una de las variables independientes x_1 .

La funcional $\mathcal{J}[y]$ se transforma entonces, en una funcional $\bar{\mathcal{J}}[\alpha_1(x_1), \alpha_2(x_1), \dots, \alpha_m(x_1)]$ que depende de m funciones, de una variable independiente, $\alpha_1(x_1), \alpha_2(x_1), \dots, \alpha_m(x_1)$.

Las funciones $\alpha_1(x_1), \alpha_2(x_1), \dots, \alpha_m(x_1)$, se escogen de modo que la funcional $\bar{\mathcal{J}}$ tenga un extremo.

Si se pasa al límite para $m \rightarrow \infty$, se puede obtener, bajo ciertas condiciones, la solución exacta. Si no se pasa al límite se puede obtener una solución aproximada.

Si se escoge el mismo número m de términos en este método y en el de Ritz y se comparan los resultados, se observa que la aproximación con el método de Kantorovich es más exacta que al aplicar el de Ritz, puesto que aquí es posible manejar una mayor clase de funciones, pudiéndose escoger de entre ellas las que mejor se aproximen a la solución del problema variacional.

V.1.4. Método de Galerkin

Este es un método no variacional, el cual puede ser aplicado a algunos problemas no lineales.

Considerando la ecuación

$$L(y) = f(x) \tag{5.1}$$

se toma un sistema de ecuaciones continuas

$$w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x) \tag{5.2}$$

linealmente independientes que satisfacen ciertas condiciones.

Escogiendo la solución aproximada del problema en forma de la

combinación lineal de las primeras n funciones del sistema lineal 5.2, se tiene

$$\psi_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \omega_i(x)$$

Se sustituyen las ψ_n en la ecuación 5.1 y se eligen los coeficientes α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) de tal manera que la función

$$L \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i \omega_i(x) \right] - f(x)$$

sea ortogonal a cada función $\omega_i(x)$, ($i = 1, 2, \dots, n$), esto es

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[L \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i \omega_i(x) \right] - f(x) \right] \omega_i(x) dx = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, ψ_n tiende a la solución exacta

$$\bar{\psi} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \omega_i(x)$$

En la mayoría de las veces se escoge solo un número n finito de constantes α_i , y además no muy grande ($n = 2, 3, 4, 5$, y a veces incluso $n = 1$). En este caso hay que tomar, claro está, solo n funciones $\omega_i(x)$ y elegir dichas funciones de modo que sean linealmente independientes (condición de ortogonalidad) y que satisfagan las restricciones establecidas.

V.2. Método del elemento finito

El elemento finito es un método numérico perteneciente a la familia de métodos variacionales, que sirven para resolver problemas de maximización o minimización de funcionales, los cuales a su vez sirven para resolver ecuaciones diferenciales, ya que estas pueden transformarse en funcionales.

La maximización de la funcional puede llevarse a cabo por ejemplo, con los métodos variacionales el *método de Ritz* o el *método del elemento finito*, o no variacionales por ejemplo el *método de Galerkin*.

El método del elemento finito utiliza el espacio de funciones de Hilbert.

V.2.1. Evolución del método del elemento finito

La evolución del método del elemento finito puede dividirse en tres periodos históricos: a) El periodo medieval, b) El renacimiento, y c) El periodo barroco.

PERIODO MEDIEVAL

Este periodo está caracterizado por la aplicación, por decirlo así a siegas, de las matemáticas a los problemas de ingeniería.

Por ejemplo, en el tratamiento de los problemas de ingeniería, los cuales presentan algunas veces dificultades en su análisis, no tanto por su complejidad matemática sino por el número de elementos que se puede involucrar, un elemento estructural se representaba por un gran número de elementos esencialmente simples, observándose la naturaleza individual de cada elemento. Luego se especificaban las variables de entrada y salida para cada elemento y los puntos que lo formaban y las relaciones entre ellos.

En forma matricial se tiene

$$F^o = K^o u^o + F_o^o \quad 5.3$$

$$F_1^o = K_{1j}^o u_j^o + F_{o1}^o$$

Aquí F podía representar, por ejemplo, el sistema de fuerzas actuando en el elemento estructural, y u los desplazamientos de los nodos del mismo elemento.

Las ecuaciones 5.3 implican un comportamiento lineal, pero no era evidente que la teoría se pudiese extenderse a situaciones no lineales.

Lo que seguía era establecer las conexiones del sistema. Primero identificando un campo de variables tales como u , para representar la continuidad del sistema ensamblado

$$u_j = u_j^o$$

Después, por el equilibrio del segundo campo de variables en cada nodo, la suma establece que

$$\sum_{o=1}^n F_1^o = 0$$

El sistema de ecuaciones se obtiene como

$$Ku + F_o = 0 \quad 5.4$$

donde

$$K = K_{1j} = \sum_{o=1}^n K_{1j}^o$$

y

$$F_o = F_{o1} = \sum_{o=1}^n F_{o1}^o$$

Aun siendo muy grande, el sistema de ecuaciones 5.4 puede resolverse.

EL RENACIMIENTO

Este periodo se caracteriza por la justificación de los modelos matemáticos del elemento finito empleados en el análisis de los problemas de ingeniería.

El principio del trabajo virtual representa una propiedad más general de un sistema estructural y es una herramienta más poderosa en el análisis estructural. El procedimiento en su forma presente asume el teorema clásico que dice: si un campo de fuerzas está en equilibrio para todos los puntos de un medio, entonces la suma del trabajo externo e interno (generado a partir de desplazamientos virtuales), debe ser igual a cero.

El trabajo virtual puede ser representado como la minimización de un funcional. Si $\chi(u)$ es tal funcional, representada generalmente por una integral tomada sobre el dominio, la aproximación de u conduce a la minimización de un campo aproximado de ecuaciones

$$\frac{\delta \chi}{\delta a} = 0 \quad 5.5$$

a queda definida por la expresión

$$u = Na$$

donde

u = vector de desplazamientos

y

N = número de parámetros necesarios para definir los desplazamientos a

Si la funcional 5.5 es cuadrática, y si

$$\chi = \sum \chi_0$$

entonces la ecuación 5.5 conduce a

$$Ka + F_0 = 0$$

EL PERIODO BARROCO

La era barroca ha sido caracterizada por la aparición de nuevas formas del método mediante una tremenda elaboración de detalle, yuxtaposición de formas para tratar mayor número de problemas, y abandono de los modelos clásicos con un importante registro de nuevas bases científicas y nuevas aplicaciones

V.2.2. Descripción del método

En muchas ocasiones los problemas físicos pueden representarse

matemáticamente por una o varias ecuaciones diferenciales, así mismo, pueden plantearse como un problema de funcionales. Luego entonces, cuando están dados en forma de ecuaciones diferenciales se puede transformar a un problema de funcionales equivalente.

De esta manera los problemas de mecánica de medios continuos en los cuales deben satisfacerse las ecuaciones de equilibrio, las relaciones cinemáticas y las ecuaciones constitutivas (relaciones de Hooke para casos elásticos, etc.), se transforman en un problema en el que se minimiza la Energía Potencial de Deformación dentro de una región dada, ante la acción de cargas.

Este funcional para el caso elástico se plantea así: se considera que la energía comunicada por las fuerzas externas a un sistema material se transforman en Energía Potencial de Deformación, por tanto

$$T_{ext} = E_p \quad 5.6$$

donde

T_{ext} = Trabajo externo

E_p = Energía de Deformación absorbida por el medio.

La ecuación 5.6 es válida para problemas estáticos y elásticos (No se consideran efectos inelásticos ni dinámicos que introducirían efectos de amortiguamiento por pérdida de calor).

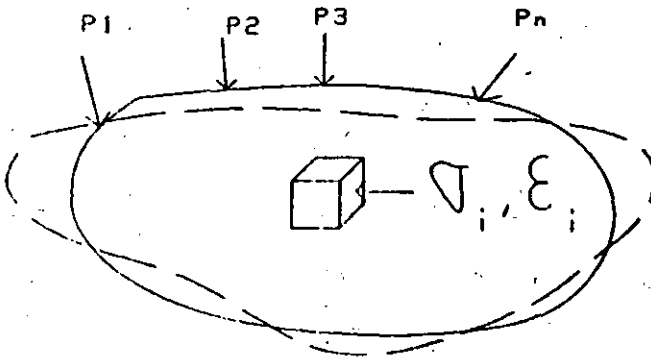


Figura V.2

El trabajo externo estará dado por:

$$T_{ext} = \int_S F_i \delta_i ds \quad 5.7$$

En tanto que la energía potencial de deformación está dada por la integral en todo el volumen del medio de los productos $\sigma \epsilon(dvol)$; ya que σ representa energía por unidad de volumen, en tanto que ϵ es una

cantidad adimensional, luego la Energía Potencial será:

$$E_p = \int_{vol} \sigma \, dvol \quad 5.8$$

Así que reemplazando en 4, a 5 y a 6, se obtiene

$$\int_s F_i \delta_i \, ds = \int_{vol} \sigma \, dvol \quad 5.9$$

Los productos $F_i \delta_i$, y $\sigma_i \epsilon_i$ son productos punto vectoriales (escalares).

Así por ejemplo si

$$F_i = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad \delta_i = \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{Bmatrix}$$

entonces:

$$\bar{F}_i \cdot \bar{\delta}_i = F_x \delta_x + F_y \delta_y + F_z \delta_z \quad 5.10$$

y matricialmente:

$$\bar{F}_i \cdot \bar{\delta}_i = [\delta]^t [F]$$

En tanto que

$$\bar{\sigma}_i = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad y \quad \epsilon_i = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

siendo:

$$\bar{\sigma}_i \cdot \bar{\epsilon}_i = \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} \quad 5.11$$

y matricialmente

$$\bar{\sigma}_i \cdot \bar{\epsilon}_i = [\sigma]^t [\epsilon]$$

Ahora bien, el problema en la ecuación 5.9 consiste en que se conocen las cargas exteriores F_i , así como la distribución en el medio de σ y de ϵ , o sea que se desconoce:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_i &= \delta_i(x, y, z) && \text{en la frontera} \\ \bar{\sigma}_i &= \sigma_i(x, y, z) && \text{en el medio} \\ \bar{\epsilon}_i &= \epsilon_i(x, y, z) && \text{en el medio} \end{aligned}$$

y por lo tanto el problema matemático que debe resolverse es calcular el valor de cualquiera de la integrales a ambos lados de la ecuación

5.9. Por ejemplo en el caso de la ecuación 5.8

$$E_p = \int_{\text{vol}} \sigma_i \epsilon_i d\text{vol}$$

el problema se plantea así: Encontrar las funciones $\sigma(x, y, z)$ y $\epsilon(x, y, z)$ tales que se minimice la Energía Potencial de Deformación. Es decir, deben encontrarse las distribuciones de esfuerzos y deformaciones tales que la Energía Potencial sea mínima; ya que en la naturaleza al aplicar fuerzas a un sistema este se deformará de tal manera que se consuma la menor cantidad de energía. Es decir no adoptará deformaciones tales que la integral 5.16. represente una energía excesiva, sino la mínima, y además, obsérvese que la configuración para un mínimo es única. Notese que las funciones solución del problema $\sigma(x, y, z)$ y $\epsilon(x, y, z)$ cumplen con las condiciones de equilibrio, relaciones cinemáticas y las ecuaciones constitutivas, por lo que representa la solución del problema físico planteado.

MÉTODO DE SOLUCIÓN

A continuación se detallara la solución de este problema, con referencia al problema bidimensional. En este caso los vectores se representarán así:

$$\bar{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\epsilon} = [\epsilon]_{3 \times 1} \quad \bar{\sigma} = [\sigma]_{3 \times 1}$$

Para materiales elásticos la ley de Hooke se escribe así:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad 5.12$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad 5.13$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad 5.14$$

$$\text{De 5.12} \quad \sigma_x = E \epsilon_x + \nu \sigma_y$$

$$\text{De 5.13} \quad \sigma_y = E \epsilon_y + \nu \sigma_x$$

entonces:

$$\sigma_x = E \epsilon_x + \nu (E \epsilon_y + \nu \sigma_x) = E \epsilon_x + \nu E \epsilon_y + \nu^2 \sigma_x$$

Despejando σ_x

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - \nu)} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y)$$

De manera análoga:

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

En forma matricial se tendrá lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

entonces:

$$[\sigma]_{3 \times 1} = [D]_{3 \times 3} [\epsilon]_{3 \times 1}$$

donde:

[D] es la matriz simétrica definida por:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

de ahí que:

$$[\sigma]^t [\epsilon] = [\epsilon]^t [D] [\epsilon]$$

Así que la ecuación 5.8 queda:

$$E_p = \int_{vol} [\epsilon]^t [D] [\epsilon] dv$$

Ahora bien, las relaciones cinemáticas son:

$$\epsilon_x = \frac{\partial \delta_x}{\partial x} ; \quad \epsilon_y = \frac{\partial \delta_y}{\partial y} ; \quad \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial \delta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta_y}{\partial x} \right) \quad 5.15$$

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \delta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \delta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta_y}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$E_p = \int_{\text{vol}} \left[\frac{\partial \delta x}{\partial \alpha} \quad \frac{\partial \delta y}{\partial \psi} \quad \left(\frac{\partial \delta x}{\partial \psi} + \frac{\partial \delta y}{\partial \alpha} \right) \right] [D] \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \delta y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \delta x}{\partial \psi} + \frac{\partial \delta y}{\partial \alpha} \end{bmatrix} dv \quad 5.16$$

Por lo que se ve el problema consiste en determinar los campos escalares $\delta x(\alpha, \psi)$ y $\delta y(\alpha, \psi)$ que minimizan el funcional 5.16. O sea determinar el campo de desplazamientos $\bar{\delta} = \delta x i + \delta y j$ que minimiza la energía potencial.

Por eso se ve que las integrales 5.7 y 5.8 dependen del campo vectorial de desplazamientos que se presenta en la región del problema considerado y que es el que debe determinarse.

Se tiene así que dicho campo puede tener la siguiente forma para cada uno de sus componentes escalares según α y ψ .

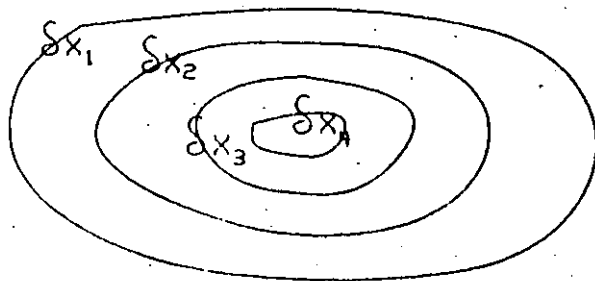


Fig.V.3 Curvas de nivel para δx
(o para δy)
 δ = desplazamiento

Si se discretiza la región, por ejemplo mediante triángulos (que es lo que se denomina "Elementos Finitos"), dentro del área comprendida en cada uno de ellos, puede suponerse que la variación de δx ó δy es lineal, es decir se define un plano.

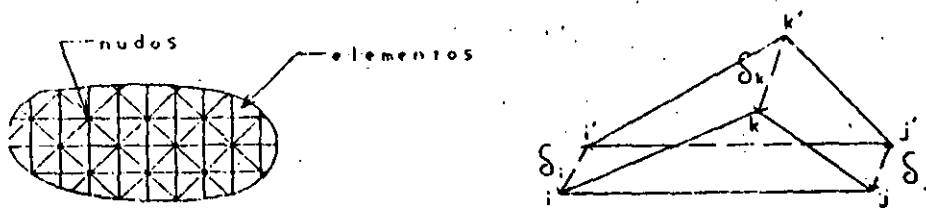


Figura V.4

La configuración real se aproxima por una serie de caras planas que definen una superficie poliédrica; esta será pues una aproximación al problema real. Las expresiones matemáticas de estas funciones serán:

$$\left. \begin{aligned} \delta_x(x, y) &= a + bx + cy \\ \delta_y(x, y) &= d + ex + fy \end{aligned} \right\} \quad 5.17$$

Las únicas incógnitas son los parámetros de estas funciones.

OBTENCIÓN DE LOS PARÁMETROS

Se establecen las siguientes hipótesis.

- 1.- Se supone que se conocen los desplazamientos en cada nudo del triángulo.

Si se conoce δ_{x_1} , δ_{x_j} , δ_{x_k}

$$\left. \begin{aligned} \delta_{x_1} &= a + bx_1 + cy_1 \\ \delta_{x_j} &= a + bx_j + cy_j \\ \delta_{x_k} &= a + bx_k + cy_k \end{aligned} \right\} \quad 5.18$$

De aquí se obtienen los valores de a , b y c .

Para los desplazamientos en y se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{y_1} &= d + ex_1 + fy_1 \\ \delta_{y_j} &= d + ex_j + fy_j \\ \delta_{y_k} &= d + ex_k + fy_k \end{aligned} \right\} \quad 5.19$$

Con esto se obtienen d , e y f .

OBTENCION DE LAS CONSTANTES.

Para el sistema 5.18 se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \psi_1 \\ 1 & \alpha_j & \psi_j \\ 1 & \alpha_k & \psi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_j \\ \delta x_k \end{bmatrix} \quad \Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \psi_1 \\ 1 & \alpha_j & \psi_j \\ 1 & \alpha_k & \psi_k \end{bmatrix}$$

Se tiene por tanto que:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \delta x_1 & \alpha_1 & \psi_1 \\ \delta x_j & \alpha_j & \psi_j \\ \delta x_k & \alpha_k & \psi_k \end{vmatrix}}{\Delta} \rightarrow a = \frac{a_1 \delta x_1 + a_2 \delta x_j + a_3 \delta x_k}{\Delta}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \delta x_1 & \psi_1 \\ 1 & \delta x_j & \psi_j \\ 1 & \delta x_k & \psi_k \end{vmatrix}}{\Delta} \rightarrow b = \frac{b_1 \delta x_1 + b_2 \delta x_j + b_3 \delta x_k}{\Delta}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \delta x_1 \\ 1 & \alpha_j & \delta x_j \\ 1 & \alpha_k & \delta x_k \end{vmatrix}}{\Delta} \rightarrow c = \frac{c_1 \delta x_1 + c_2 \delta x_j + c_3 \delta x_k}{\Delta}$$

De manera análoga se obtendrán las constantes d , e y f para el campo $\delta y(\alpha, \psi)$. Se tiene que:

$$d = \frac{\begin{vmatrix} \delta y_1 & \alpha_1 & \psi_1 \\ \delta y_j & \alpha_j & \psi_j \\ \delta y_k & \alpha_k & \psi_k \end{vmatrix}}{\Delta} \rightarrow d = \frac{a_1 \delta y_1 + a_2 \delta y_j + a_3 \delta y_k}{\Delta}$$

$$e = \frac{b_1 \delta y_1 + b_2 \delta y_j + b_3 \delta y_k}{\Delta} \quad ; \quad f = \frac{c_1 \delta y_1 + c_2 \delta y_j + c_3 \delta y_k}{\Delta}$$

Aplicando las relaciones cinemáticas 5.15 y 5.17 se tiene:

$$c_x = \frac{\partial \delta x}{\partial \alpha} = b \quad ; \quad c_y = \frac{\partial \delta y}{\partial \psi} = f \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial \delta x}{\partial \psi} + \frac{\partial \delta y}{\partial \alpha} = \text{Cte.}$$

Por lo cual la integral 5.16 queda:

$$E_p = \int_{\text{vol}} [b \quad f \quad (c+f)] [D] \begin{bmatrix} b \\ f \\ c+f \end{bmatrix} dV$$

Por lo tanto:

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} b \\ f \\ c+f \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} b_1 \delta x_1 + b_2 \delta x_j + b_3 \delta x_k \\ c_1 \delta y_1 + c_2 \delta y_j + c_3 \delta y_k \\ c_1 \delta x_1 + c_2 \delta x_j + c_3 \delta x_k + b_1 \delta y_1 + b_2 \delta y_j + b_3 \delta y_k \end{bmatrix}$$

$$[\epsilon] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \delta x_j \\ \delta y_j \\ \delta x_k \\ \delta y_k \end{bmatrix}$$

De otra forma:

$$[\epsilon]_{3 \times 1} = [B]_{3 \times 6} [\delta^0]_{6 \times 1} \quad 5.20$$

donde:

$$[B] = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [\delta^0] = \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \delta x_j \\ \delta y_j \\ \delta x_k \\ \delta y_k \end{bmatrix}$$

De este modo la ecuación 5.16 queda:

$$E_p = \int_{\text{vol}} [\delta^0]^t [B]^t [D] [B] [\delta^0] dV$$

$$E_p = [\delta^0]^t [B]^t [D] [B] [\delta^0] \int_{V_0} dv$$

ya que $[\delta^0]$ y $[B]$ son independientes de las coordenadas.

Así pues:

$$E_p = [\delta^0]^t [B]^t [D] [B] [\delta^0] t A_k$$

$$E_p = [\delta^0]^t [K]_0 [\delta^0] \quad 5.21$$

donde:

$$[K]_0 = [B]^t [D] [B] t A_t$$

t = espesor unitario

A_t = área del triángulo = $\frac{A}{2}$

La ecuación 5.21 sería válida solo para la figura triangular.

Ahora bien, las fuerzas que llegan a cada nudo del triángulo producen una energía tal que:

$$[\delta^0]_{1 \times 6}^t [F]_{6 \times 1} = E_p \quad 5.22$$

donde:

$$[F]_0 = \begin{bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{x_j} \\ F_{y_j} \\ F_{x_k} \\ F_{y_k} \end{bmatrix}_{6 \times 1}$$

Igualando 5.21 con 5.22 se tiene:

$$[\delta^0] [F]_0 = [\delta^0]^t [K]_0 [\delta^0]$$

remultiplicando por $[\delta^0]^{-1}$ ambos lados, se obtiene:

$$[F]_0 = [K]_0 [\delta^0] \quad 5.23$$

válida para un elemento.

Se puede generalizar a la malla total de la siguiente manera:

$$[F]_T = \sum_{i=1}^{N_e} [F]_e, \quad N_e = \text{Número de elementos}$$

$$[K]_T = \sum_{i=1}^{N_e} [K]_e$$

esta última expresión es válida ya que se pueden sumar las energías elementales de cada elemento, para obtener la energía total.

$$[\delta^e]_T = \sum_{i=1}^{N_e} [\delta_i]^e$$

Por lo tanto el problema global queda:

$$[K]_T \begin{Bmatrix} \delta \end{Bmatrix}_T = [F]_T \quad 5.24$$

$2n \times 2n$ $2n \times 1$ $2n \times 1$

Ahora se tiene un sistema lineal de $2n$ ecuaciones con $2n$ incógnitas, siendo n el número total de nudos de la malla. Así que el problema del funcional se ha transformado mediante el Método de Elementos Finitos en un sistema lineal de ecuaciones y los resultados que proporciona son valores discretos de las funcionales buscadas.

Conocidos los desplazamientos es posible calcular el estado de esfuerzos y deformaciones. Para ello se utilizan los desplazamientos conocidos de cada elemento.

Dado que, de 5.20 :

$$[\epsilon] = [B] \left\{ \delta^e \right\} \quad 5.25$$

$$y \quad [\sigma]_e = [D] [B] \left\{ \delta^e \right\} \quad 5.26$$

Nótese que los esfuerzos y deformaciones serán constantes en cada elemento, o sea tienen distribución uniforme en cada uno de ellos, pero, variando de elemento a elemento. Esto constituye un error de aproximación del método.

En lo que sigue se detallará la obtención de la matriz de rigidez total $[K]_T$, así como el vector de cargas $[F]_T$, mediante los cuales, al resolver el sistema 5.24, se obtendrán los desplazamientos de cada nudo, o sea el vector $\left\{ \delta \right\}_T$, que será parte de la solución buscada, la otra parte la constituyen la obtención del campo de esfuerzos y deformaciones mediante las ecuaciones 5.25 y 5.26.

Notese que los elementos vistos fueron triangulos, sin embargo, se pueden emplear rectángulos y, para problemas tridimensionales, pueden usarse paralelepípedos, etc. Además la solución se dió para el caso elástico, pero la misma metodología puede aplicarse a otros materiales e incluso a otros campos de la física (Termodinámica, Electricidad, etc.).

DETALLES DEL PROCESO

Servirán para ver como se generan mallas de elementos triangulares, numeración de nudos y elementos, elaboración de la matriz de rigidez total, del vector de cargas (incluyendo fuerzas de cuerpo), así como la solución de sistemas de ecuaciones y finalmente la manera de obtener el estado de esfuerzos y deformaciones conocidos los desplazamientos. Además se presentará un diagrama de bloques para programar el método por computadora.

ELABORACIÓN DE LA MALLA.

El medio se discretiza mediante una serie de elementos triangulares.

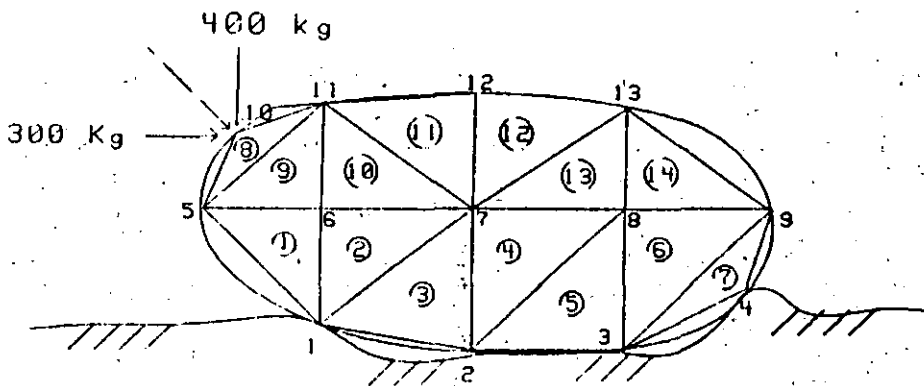


Figura V.5

Queda formada una malla caracterizada por el número de nudos y elementos, en la figura son 14 elementos y 13 nudos.

Comunmente los nudos y elementos se numeran de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba.

Existen restricciones para formar mallas, como la que un nudo no debe quedar sobre alguno de los lados de un elemento.

DATOS PARA NUDOS.

Los nudos se identifican mediante sus coordenadas y sus condiciones de restricción, o sea debe señalarse si los nudos son libres de moverse o no, según las direcciones x , y ó z , y de giro en las mismas direcciones. En la tabla siguiente el número 1 indica que están restringidos y el cero que están libres. De esta manera, en la

figura 1, los nudos 1 a 4 están restringidos en todas las direcciones en tanto que del 5 al 13 están restringidos según φ . Los giros se indican también en la misma tabla. En ella se ve que pueden señalarse diferentes posibilidades de movimiento (grados de libertad).

TABLA V.1

# de nudo	Rest. α	Rest. ψ	Rest. φ	Giro α	Giro ψ	Giro φ	Coor. α	Coor. ψ	Coor. φ
1	1	1	1	1	1	1	*	*	0
2	1	1	1	1	1	1	*	*	0
3	1	1	1	1	1	1	*	*	0
4	1	1	1	1	1	1	*	*	0
5	0	0	0	1	1	1	*	*	0
6	0	0	0	1	1	1	*	*	0
7	0	0	0	1	1	1	*	*	0
8	0	0	0	1	1	1	*	*	0
9	0	0	0	1	1	1	*	*	0
10	0	0	0	1	1	1	*	*	0
11	0	0	0	1	1	1	*	*	0
12	0	0	0	1	1	1	*	*	0
13	0	0	0	1	1	1	*	*	0

DATOS PARA ELEMENTOS

A su vez los elementos se indican señalando su número, los nudos que le pertenecen (incidencias), así como el tipo de material de que están constituidos. Al respecto los nudos de cada elemento se identifican como i , j y k , siguiendo el orden opuesto al giro de las manecillas del reloj (ver figura V.6)

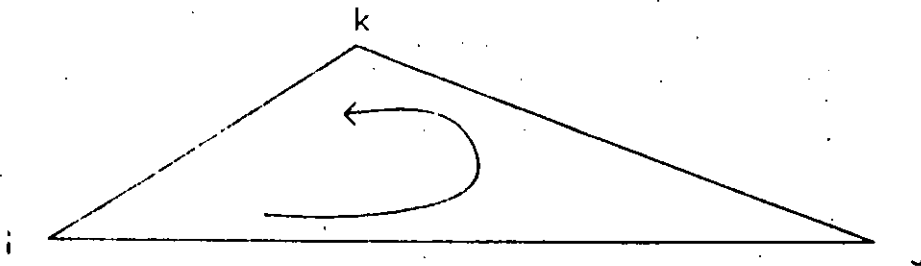


Figura V.6

Para el caso de la figura V.5, los datos serían los de la tabla.
2. En ella, a los nudos i , j y k se les designa, respectivamente:

NUD(I)

NUD(J)

NUD(K)

TABLA V. 2

# de elem.	NUD(I)	NUD(J)	NUD(K)	Tipo de material
1	1	6	5	3
2	1	7	8	2
3	1	2	7	2
4	2	8	7	2
5	2	3	8	2
6	3	8	8	3
7	3	4	8	3
8	5	11	10	3
9	5	6	11	3
10	6	7	11	3
11	7	12	11	1
12	7	13	12	1
13	7	8	13	3
14	8	9	13	3

DATOS SOBRE MATERIALES.

Puede tenerse más de un material, para esto, de cada material se dan los datos de: Peso volumétrico γ , Módulo de Elasticidad E y relación de Poisson ν .

TABLA V. 3

tipo de material	E (Kg/m ²)	ν	γ (Kg/m ³)
1	2×10^8	0.25	2000
2	3×10^8	0.35	2100
3	1×10^7	0.45	1800

DATOS DE CARGAS

Se indican señalando el nudo sobre el cual actúan y sus componentes según x , y y z . Por ejemplo, para la figura 1 se tienen los datos de la TABLA 5.4

TABLA V. 4

# de carga	# donde actúa	comp. x (Kg)	comp. y (Kg)	comp. z (Kg)
1	10	300	400	0
2	13	0	600	0

FORMACIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE CADA ELEMENTO

Recordar para ello que esta matriz, $[K]^o$, se forma por el producto:

$$[K]^o = [B]^t [D] [B] t A_t \quad \text{con } t = 1$$

siendo:

$$A_t = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad \text{donde: } \begin{aligned} b_1 &= y_i - y_k = b_i \\ b_2 &= y_k - y_j = b_j \\ b_3 &= y_i - y_j = b_k \\ c_1 &= y_j - y_k = c_i \\ c_2 &= y_k - y_j = c_j \\ c_3 &= y_i - y_j = c_k \end{aligned}$$

$$y \quad [D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

donde:

E = Módulo de elasticidad, y
 ν = relación de Poisson

Así que observando el orden de las matrices se tiene:

$$[B]_{6 \times 3}^t [D]_{3 \times 3} [B]_{3 \times 6} = [K]_{6 \times 6}^o$$

o sea que la matriz $[K]^o$ es de 6×6 . Se tiene por lo tanto que:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \} I \\ \} J \\ \} K \end{array} \right\}$$

I J K

Esto indica la influencia de los datos de los nudos correspondientes sobre los renglones y las columnas de la matriz:

Observese que en general el orden de la matriz es:

$$n_e = \text{Nudos del elemento} \times \text{grados de libertad}$$

Para el caso de un triángulo y para el problema bidimensional:

$$n_e = 3 \times 2 = 6$$

FORMACIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ TOTAL

Para esto, los elementos de la matriz de cada elemento se colocan en una matriz global, cuyas dimensiones serán:

$$NT = NN \times GL$$

donde:

NN = Número total de nudos de la malla.

GL = Grados de libertad.

De manera que los renglones y columnas de una matriz elemental se colocan en renglones y columnas de esta matriz global, según la regla siguiente:

Los renglones y columnas correspondientes a I se colocan en los renglones y columnas números N_1 y N_2 .

siendo:

$$N_1 = [GL \times NUD(I)] - 1$$

$$N_2 = GL \times NUD(I)$$

(Recordar lo que significa $NUD(I)$, $NUD(J)$, etc. en la tabla V.2)

Asimismo, los correspondientes J y K se colocan en los renglones y columnas N_3 , N_4 , N_5 y N_6 respectivamente:

siendo:

$$N_3 = [GL \times NUD(J)] - 1$$

$$N_4 = [GL \times NUD(J)]$$

$$N_5 = [GL \times NUD(K)] - 1$$

$$N_6 = [GL \times NUD(K)]$$

De esta manera los datos correspondientes al elemento 8 de la figura V.5, se colocan (considerando que $GL = 2$) en:

$$N_1 = 2 \times 5 = 10$$

$$N_2 = 10$$

$$N_3 = 2 \times 11 - 1 = 21$$

$$N_4 = 22$$

$$N_5 = 2 \times 10 - 1 = 19$$

De esta manera la matriz global quedará:

(siendo $NT = NN \times GL = 13 \times 2 = 26$)

FIGURA V.7

	1	2	...	8	10	11	...	18	20	21	22	...	26
1													
2													
...													
8				K_{11}	K_{12}			K_{18}	K_{19}	K_{13}	K_{14}		
10				K_{21}	K_{22}			K_{28}	K_{29}	K_{23}	K_{24}		
...													
10				K_{81}	K_{82}			K_{88}	K_{89}	K_{83}	K_{84}		
20				K_{81}	K_{82}			K_{88}	K_{89}	K_{83}	K_{84}		
21				K_{31}	K_{32}			K_{38}	K_{39}	K_{33}	K_{34}		
22				K_{41}	K_{42}			K_{48}	K_{49}	K_{43}	K_{44}		
...													
26													

Esta fué la matriz del elemento número 8.

Luego se formarían, de esta manera, matrices globales de cada elemento, y finalmente se sumarían entre sí todas estas matrices para obtener la matriz de rigidez total que se busca, la cual obviamente debe ser de orden $NT \times NT$.

OBTENCIÓN DEL VECTOR DE CARGAS.

Este vector se forma con las cargas concentradas aplicadas en cada nudo, así como por efecto de peso propio.

APORTACIÓN DE CARGAS CONCENTRADAS

En este caso como el vector de cargas concentradas $[F]$ es:

$$[F]_T = \begin{bmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \\ F_{x_3} \\ \vdots \\ F_{x_{NN}} \\ F_{y_{NN}} \end{bmatrix}$$

O sea un valor de orden $(NT \times 1)$, así que los datos de cargas se colocan en los renglones correspondientes al nudo donde actúan, por ejemplo para las cargas mostradas en la figura V.5, se obtendría (ver TABLA V.4).

$$\{F_T\} = \begin{Bmatrix} \text{Datos } F1(\text{nudo } 10) & 300 & \dots\dots\dots & \text{renglón } 19 \\ & 400 & & \text{renglón } 20 \\ & & & \text{renglón } 25 \\ \text{Datos } F2(\text{nudo } 13) & 800 & \dots\dots\dots & \text{renglón } 28 \end{Bmatrix}$$

CARGAS POR PESO PROPIO.

Para esto se procede concentrando un tercio del área correspondiente de cada elemento en cada uno de sus nudos, y luego la carga en cada nudo será igual a la suma de las cargas mencionadas correspondientes a cada elemento que llega a él. Por ejemplo (ver fig. V.5), para el nudo 6 la carga sería:

$$q = \frac{A_1 \gamma_1 + \frac{A}{2} \gamma_2 + \frac{A}{8} \gamma_9 + \frac{A}{10} \gamma_{10}}{3} \quad \begin{matrix} \text{(carga vertical)} \\ \text{(espesor unitario)} \end{matrix}$$

la cual estaría colocada en el renglón doce del vector de cargas, ya que al nudo 6 concurren los elementos 1, 2, 9 y 10. Este dato se colocaría en el renglón 12 del vector de cargas, ya que la componente vertical de esta carga se obtiene multiplicando $6 \times 2 = 12$. De la misma manera se colocarían los pesos correspondientes para los demás nudos. Con esto se tendría completo el vector de cargas.

ELIMINACIÓN DE ECUACIONES POR RESTRICCIÓN DE MOVIMIENTOS

Esto se consigue gracias a que se eliminan los renglones y columnas cuyos desplazamientos están restringidos, lo cual se identifica mediante el número de nudo y su condición de restricción. Por ejemplo si el desplazamiento en x del nudo n_1 está restringido se eliminan el renglón y la columna números:

$$(GL \times n_1) - 1$$

En tanto que si el desplazamiento en y de otro nudo n está restringido se eliminan el renglón y la columna:

$$GL \times n_2$$

En el ejemplo de la figura V.5 están restringidos en x y y los nudos del 1 al 4 y se eliminarían los 8 primeros renglones de la matriz que aparece en la figura V.7.

RESOLUCIÓN DEL SISTEMA LINEAL DE ECUACIONES

Como se vio antes, el Método del elemento finito conduce al

sistema lineal de ecuaciones dado por:

$$[K]_T [\delta]_T = [F]_T$$

Hemos ya visto como se forman $[K]_T$ y $[F]_T$. Solo falta resolver el sistema para obtener el vector de desplazamientos tanto en x como en y , correspondientes a cada nudo de la malla. Para esto puede emplearse cualquiera de los métodos numéricos conocidos, como el de Gauss-Jordan, Gauss-Seidel u otros (ver apéndice A). Vale la pena hacer la observación que la matriz $[K]_T$ resulta bandeda y porosa, es decir, tiene muchos elementos nulos. Por este motivo se han desarrollado diferentes versiones de los métodos anteriores que resultan más eficientes desde el punto de vista computacional, en lo referente a memoria necesaria y tiempo de cómputo. El tipo de estas matrices se representa en la figura V.8.

$$[K]_T = \begin{bmatrix} \text{xxx} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \text{xxx} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \text{xxx} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \text{xxx} \end{bmatrix}$$

FIGURA V.8

Ahora bien, cualquiera que sea el método de resolución empleado, nos proporciona la solución buscada, o sea el vector $[K]_T$ con lo cual se conocen los desplazamientos (tanto en x como en y) de los nudos de la malla. Los desplazamientos son en sí una representación discretizada del campo de desplazamientos buscado. De aquí se ve que entre más fina sea la malla mayor número de datos sobre dicho campo se conocerán, pero se incrementará el tiempo de cómputo, lo cual resulta más caro. Existe pues el problema de aproximación contra economía. Debe adoptarse entonces un criterio de optimización.

DETERMINACIÓN DEL ESTADO DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES

Conocidos los desplazamientos en cada nudo se calculan las deformaciones y los esfuerzos en cada elemento mediante las ecuaciones:

$$[\epsilon] = [B] \{\delta^e\} \quad \text{y} \quad [\sigma] = [D][B][\delta^e]$$

En este caso para $\{\delta^e\}$ se emplean solo datos correspondientes a los desplazamientos de los nudos asociados a cada elemento.

Por ejemplo para el nudo 8 se tendría:

$$[\delta^e] = \begin{bmatrix} \delta x_B \\ \delta y_B \\ \delta x_{11} \\ \delta y_{11} \\ \delta x_{10} \\ \delta y_{10} \end{bmatrix}$$

De esta manera se obtendría:

$$\left\{ \varepsilon_c \right\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{así como} \quad \left\{ \sigma \right\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Notese que $\left\{ \sigma \right\}$ es uniforme en cada elemento, y con esto se obtiene el tensor esfuerzo en cada elemento:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

A partir de este tensor pueden encontrarse los esfuerzos principales por métodos conocidos. Aquí se ve también que este estado de esfuerzos es burdo y se obtiene mayor aproximación si la malla es más fina.

No obstante las limitaciones de precisión mencionadas antes, las cuales son inherentes a cualquier método numérico, este método da resultados muy satisfactorios que incluso pueden graficarse mediante programación, y además, permiten el manejo de cualquier geometría irregular, distribución de cargas y de heterogeneidad de propiedades de los elementos, las cuales son limitadas en otros métodos de análisis.

Notese además que los errores numéricos involucrados pueden ser del mismo orden a los que se tienen por falta de datos experimentales completos en toda la región.

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

CIMENTACION DE MAQUINARIA

17 al 21 de febrero de 1992

ANALYSIS OF MACHINE FOUNDATION VIBRATIONS:

STATE OF THE ART.

PALACIO DE MINERIA

Analysis of machine foundation vibrations: state of the art

G. Gazetas
1987

GEORGE GAZETAS

Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, USA

The paper reviews the state-of-the-art of analysing the dynamic response of foundations subjected to machine-type loadings. Following a brief outline of the historical developments in the field, the concepts associated with the definition, physical interpretation and use of the dynamic impedance functions of foundations are elucidated and the available analytical/numerical methods for their evaluation are discussed. Groups of crucial dimensionless problem parameters related to the soil profile and the foundation geometry are identified and their effects on the response are studied. Results are presented in the form of simple formulae and dimensionless graphs for both the static and dynamic parts of impedances, pertaining to surface and embedded foundations having circular, strip, rectangular or arbitrary plan shape and supported by three types of idealized soil profiles: the halfspace, the stratum-over-bedrock and the layer-over-halfspace. Consideration is given to the effects of inhomogeneity, anisotropy and non-linearity of soil. The various results are synthesized in a case study referring to the response of two rigid massive foundations, and practical recommendations are made on how to inexpensively predict the response of foundations supported by actual soil deposits.

INTRODUCTION

The basic goal in the design of a machine foundation is to limit its motion to amplitudes which will neither endanger the satisfactory operation of the machine nor will they disturb the people working in the immediate vicinity. Thus, a key ingredient to a successful machine foundation design is the careful engineering analysis of the foundation response to the dynamic loads from the anticipated operation of the machine. Furthermore, when excessive motions of an existing foundation obstruct the operation of the supported machinery, analysis is necessary in order to understand the causes of the problem and hence to guide appropriate remedial action.

The theory of analysing the forced vibrations of shallow and deep foundations has advanced remarkably in the last 15 years and has currently reached a mature state of development. A number of formulations and computer programs have been developed to determine in a rational way the dynamic response in each specific case. Numerous studies have been published exploring the nature of associated phenomena and shedding light on the role of several key parameters influencing the response. Solutions are also presently available in the form of dimensionless graphs and simple mathematical expressions from which one can readily estimate the response of surface, embedded and pile foundations of various shapes and rigidities, supported by deep or shallow layered soil deposits. Clearly, the current state-of-the-art of analysing machine foundation vibrations has progressed substantially beyond the state of the art of the late 1960s which had been reviewed by Whitman and Richart in 1967¹ and by McNeil in 1969.²

In addition to the selection and application of analysis procedures to predict the response, the design of a machine foundation involves (1) the establishment of performance criteria, (2) the determination of dynamic loads, and (3)

the establishment of the soil profile and evaluation of critical soil properties. Great progress has also been made in current years in developing *in situ* and laboratory testing procedures to obtain representative values of dynamic soil parameters; a comprehensive review of the available experimental methods has been presented by Woods,³ while Ozaydin *et al.*,⁴ Woods⁵ and Richart⁶ have summarized the present knowledge on the factors influencing the dynamic soil parameters. These developments in determining material properties complement the advances in analysing foundation vibrations, and provide considerable justification for the use of sophisticated numerical formulations in the design of machine foundations.

On the other hand, little if any progress has been made in reliably estimating dynamic machine loads and improving (through calibration with field data) the available performance criteria. The state-of-the-art in these two areas has remained essentially unchanged during the last decade; reference is made to McNeil² and Richart, Woods and Hall⁷ for comprehensive reviews of these subjects.

An additional and often overlooked step in machine foundation design is the post-construction observation of the foundation performance and its comparison with the predicted foundation behavior. Such comparisons are needed to calibrate new analysis procedures — an essential task in view of the simplifying assumptions on which even sophisticated formulations are based.

In the final analysis, confidence in the advantages provided by the use of advanced methods of analysis can only be gained if these are shown to have the capability to predict the field performance of actual machine foundations. Unfortunately, only a limited number of case histories has so far been published evaluating state-of-the-art methods of analysis through detailed field observations.

The objective of this paper is to review the present state-of-the-art of determining the dynamic response of foundations subjected to machine-type loadings. The outline of the paper follows the chronology of historical developments: from the dynamics of circular footings resting on the surface of an elastic halfspace to the behavior of cir-

* Presented at the International Conference on Soil Dynamics and Earthquake Engineering, held at the University of Southampton, England, 13-15 July 1982.

cular and non-circular foundations embedded in a layered soil deposit and, finally, to the response of piles. Particular emphasis is accorded to the effects of dimensionless groups of geometric and material parameters on the dynamic stiffness functions and on the response of massive foundations. Normalized graphs and simple formulas are presented for a variety of idealized soil profiles and foundation geometries. The use of such data to estimate translational and rotational motions of actual foundations in practice is clearly demonstrated and the various results are synthesized by means of a case study. Practical recommendations are then made on how to approximately obtain dynamic stiffness and damping coefficients for actual foundations, accounting only for the most crucial parameters of the problem.

Since the limiting motion for satisfactory performance of a machine foundation usually involves displacement amplitudes of a few thousandths or even ten-thousandths of an inch, soil deformations are quasi-elastic, involving negligible nonlinearity and no permanent deformations. Thus, most of the solutions reported herein assume linear isotropic viscoelastic soil behavior, with a hysteretic soil damping to model energy losses at those small strain amplitudes. However, some consideration is also given to the effects of soil nonlinearity on the vibration of strip footings under strong horizontal and rocking excitation. Moreover, the importance of soil anisotropy and soil inhomogeneity are also considered.

OLDER METHODS OF ANALYSIS

In the past, machine foundations were frequently designed by rules-of-thumb without any analysis of the expected vibration amplitudes. For instance, one such design rule called for a massive concrete foundation of a total weight equal to at least three to five times the weight of the supported machine(s). Although such a proposition may at first glance seem logical, it is in fact an obsolete one since it ignores the effect on the motion of all the other variables of the problem (e.g. type of excitation, nature of supporting soil, and so on). For one thing, increasing the mass of a foundation decreases the resonant frequency of the system and, perhaps more importantly, reduces its effective damping.⁷ Obviously, this is not what those applying the rule had in mind.

Following the pioneering experimental studies carried out by the German Degebo in the early 1930s, a number of empirical analysis procedures were developed and used extensively at least until the 1950s. These methods focused on determining only the 'natural frequency' of a foundation. To this end, the concepts of 'in-phase mass' and 'reduced natural frequency' were developed. The former assumes that a certain mass of soil immediately below the footing moves as a rigid body, in-phase with the foundation. The latter postulates that the 'natural frequency' is solely a function of the contact area, the soil bearing pressure and the type of soil.

Physical reality contradicts the concept of an 'in-phase mass'. No soil mass moves as a rigid body with the foundation. Instead, shear and dilatational waves emanate from the footing-soil interface into the soil, causing oscillating deformations at the surface and carrying away some of the input energy. The factors that have an influence on these phenomena cannot be possibly accommodated through such an artificial concept. Indeed, the early attempts to obtain specific values of the 'in-phase mass' were frustrated

by the sensitivity of this 'mass' to the foundation weight, mode of vibration, type of exciting force, contact area, and nature of the underlying soil. Apparently, there is absolutely no value in this concept and its use in practice may very well mislead the designer.

Tschebotarioff's 'reduced natural frequency' method, based on the results of a few case histories, went a step beyond the original 'in-phase mass' methods.⁸ The 'reduced natural frequency' was defined as the 'natural frequency' multiplied by the square-root of the average vertical contact pressure and was given graphically as a function of the type of soil and of the contact area. Although this method was not without merit, it was often interpreted to mean that 'the single most important factor in machine-foundation design was the soil bearing pressure'.² Thus, in more than one occasion, the design was based on soil bearing capacity values taken from local building codes!

In addition to the aforementioned drawbacks, these old rules were only concerned with the resonant frequency, providing no information about vibration amplitudes that are primarily needed for design purposes. As a consequence, such rules are now obsolete and will not be further addressed in this paper. Reference is made to Richart *et al.*⁷ for more details on the subject.

Dynamic Winkler model

This model was introduced as an extension of the well known 'Winkler' or 'elastic subgrade reaction' hypothesis, which is still rather successfully employed in some static soil-foundation interaction problems.⁹ In order to simulate the stiffness characteristics of the actual system, the model replaces the supporting soil by a bed of independent elastic springs resting on a rigid base. Plate bearing tests, conducted in the field, form the basis for evaluating the spring constants (often called 'coefficients of subgrade reaction'). On the basis of field measurements in the USSR, Barkan¹⁰ has presented tables and empirical formulae with which one can readily estimate design values of the coefficient for several types of soil, for each possible mode of vibration (translational or rotational). He has also shown that, in each case, the dynamic coefficient is approximately equal to the ratio of applied pressure increment to the resulting displacement during static repeated loading tests. In these tests static loads 'similar' to the combined dead and live load of the actual foundation are first imposed, followed by repeated slow loading, at frequencies of the order of 0.001 cps, i.e. much slower than those expected in reality.

It is evident that this model can at least give some reasonable information on the low-frequency (near-static) response of a foundation. But since no radiation damping is included, the amplitude of motion at frequencies near resonance cannot be realistically estimated. It has been argued that by neglecting damping one obtains conservative estimates of the response and very good estimates of natural frequencies. In fact, this is the procedure currently incorporated into the 1970 Indian Standard Code of Practice for Design of Machine Foundations.¹¹ There is little merit in this argument, however. For instance, the high damping values present in the translational modes of vibration (of the order of 50% of critical) do affect the 'resonant' frequencies, in addition to drastically reducing amplitudes. Moreover, avoiding 'resonance' (by a safety factor of 2) in such cases is an unfortunate design recommendation which may lead to an overly conservative solution. In other cases, especially when the rotational modes are of main concern, an unsafe design is quite possible since

the actual foundation stiffness at high frequencies may very well be appreciably smaller than the static stiffness used in the analysis (see, for example, Fig. 5).

An improved version of the dynamic Winkler model (called 'Winkler-Voigt' model) places a set of independent viscous dampers in parallel with the independent elastic springs to provide the 'dynamic subgrade reaction'. According to Barkan and Ilyichev,¹² this model forms the basis of the 1971 USSR machine-foundation code. Again, however, the model itself provides no information on its spring and dashpot coefficients. These are instead backfigured from dynamic plate-load tests conducted in the field. Both the observed amplitude and frequency at resonance are utilized to backfigure the two coefficients. Analyzing the results of numerous field tests, Barkan and his co-workers found a discrepancy between the spring constants backfigured from resonance plate tests and from static repeated loading tests (described previously). They, thus, resorted to the 'in-phase soil mass' concept to essentially match the model constants obtained from the two types of tests. This added soil mass was found to depend on the size and embedment of the foundation and on the nature and properties of the soil deposit, for a given mode of vibration.

It therefore appears that the 'Winkler-Voigt' model is a purely empirical one, requiring field static and dynamic plate-load tests for each particular situation. Such tests are not only very expensive and difficult to successfully conduct, but, moreover, they yield results which cannot be readily interpreted and extrapolated to prototype conditions. If I may slightly rephrase Gibson:¹³

'The model conspicuously lacks what all models should possess — predictive power.'

The only possible explanation for the present-day use of dynamic Winkler models in machine-foundation analysis is the accumulation in some countries of a wealth of pertinent field data. Such data, often available in the form of tables,¹² can be directly utilized in practice, thus avoiding the burden of performing plate-load tests. Again, one should be very careful in picking up values for the coefficients from published field data. For it is practically impossible to ensure a similarity in all the crucial physical and geometric response parameters of the new prototype and of the old model foundation schemes.

FUNDAMENTALS OF CURRENT METHODS OF VIBRATION ANALYSIS

Historical perspective

Modern methods of analysis of foundation oscillations attempt to rationally account for the dynamic interaction between the foundation and the supporting soil deposit. Cornerstone of the developed methods is the theory of wave propagation in an elastic or viscoelastic solid (continuum). This theory has seen a remarkable growth since 1904, when Lamb published his study on the vibration of an elastic semi-infinite solid (half-space) caused by a concentrated load ('dynamic Boussinesq' problem). Numerous applications, primarily in the fields of seismology and applied mechanics, have given a great impetus in the development of the 'elastodynamic' theory. Reissner in 1936¹⁴ attempted what is considered to be the first engineering application; his publication on the response of a vertically loaded cylindrical disk on an elastic halfspace marked the beginning of modern soil dynamics. The solution was only an approximate one since a uniform distri-

bution of contact stresses was assumed for mathematical simplification. Nonetheless, Reissner's theory offered a major contribution by revealing the existence of radiation damping—a phenomenon, previously unsuspected but today clearly understood. Every time a foundation moves against the soil, stress waves originate at the contact surface and propagate outward in the form of body and surface waves. These waves carry away some of the energy transmitted by the foundation on to the soil, a phenomenon reminiscent of the absorption of energy by a viscous damper (hence the name).

For many massive foundations the assumption of a uniform contact stress distribution is an unrealistic one, for it yields a non-uniform pattern of displacements at the soil-footing interface. To closer approximate the rigid body motion of such foundations, a number of authors in the middle 1950s assumed contact stress distributions which produce uniform or linear displacements at the interface, under statically applied force or moment loadings, respectively. Thus, Sung¹⁵ and Quinlan¹⁶ presented results for vertically oscillating circular and rectangular foundations while Arnold *et al.*¹⁷ and Bycroft¹⁸ studied both horizontal and moment loading of a circular foundation. These solutions are only approximate; in reality the pressure distributions required to maintain uniform or linear displacements are not constant but vary with the frequency of vibration.

The first 'rigorous' solutions appeared about ten years later when the vibrating soil-foundation system was analysed as a mixed boundary-value problem, with prescribed patterns of displacements under the rigid footing and vanishing stresses over the remaining portion of the surface. Introducing some simplifying assumptions regarding the secondary contact stresses ('relaxed' boundary), Awojohi *et al.*¹⁹ studied all possible modes of oscillation of rigid circular and strip footings on a halfspace, by recourse to integral transform techniques. On the other hand, Lysmer²⁰ obtained a solution for the vertical axisymmetric vibration by discretizing the contact surface into concentric rings of uniform but frequency-dependent vertical stresses consistent with the boundary conditions. A conceptually similar approach was followed by Elorduy *et al.*²¹ for vertically loaded rectangular foundations.

Perhaps equally important with the aforementioned theoretical developments of this period was the discovery by Hsieh²² and by Lysmer²⁰ that the dynamic behavior of a vertically loaded massive foundation can be represented by a single-degree-of-freedom 'mass-spring-dashpot' oscillator with frequency-dependent stiffness and damping coefficients. Lysmer²⁰ went a step farther by suggesting the use of the following frequency-independent coefficients to approximate the response in the low and medium frequency range:

$$K_v = \frac{4GR}{1-\nu}; \quad C_v = \frac{3.4R^3}{1-\nu} \sqrt{G\rho} \quad (1)$$

in which: K_v = spring constant (stiffness), C_v = dashpot constant (damping), R = radius of the circular rigid loading area, G and ν = shear modulus and Poisson's ratio of the homogeneous halfspace (soil), and ρ = mass density of soil. Note that the expression for K_v in equation (1) is identical with the expression for the static stiffness of a vertically loaded rigid circular disk on a halfspace.

The success of Lysmer's approximation (often called 'Lysmer's Analog') in reproducing with very good accuracy the actual response of the system had a profound effect on the further development and engineering applications of the

'halfspace' theories. Richart and Whitman²³ extended Lysmer's Analog by demonstrating that all modes of vibration can be studied by means of lumped-parameter mass-spring-dashpot systems having properly selected frequency-independent parameters. The axisymmetric (vertical and torsional) oscillations of a cylindrical foundation can be represented by a 1-degree-of-freedom (1-dof) system described by:

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = P(t) \quad (2)$$

in which x , \dot{x} and \ddot{x} = the displacement, velocity and acceleration, respectively, of the vertically oscillating mass; $P(t)$ = the external dynamic force arising from the operation of the machine(s). The lumped parameters are the equivalent mass, m , the effective damping, C , and the effective stiffness K . (For torsional oscillations m should be replaced by I_x , the effective mass polar moment of inertia and x should be interpreted as the angle of rotation around the vertical axis of symmetry.) On the other hand, the two antisymmetric modes of oscillation (horizontal translation and rocking) of a cylindrical foundation are coupled and can be represented by a 2-dof system characterized by the effective mass and mass moment of inertia, the two effective values of damping (for swaying and rocking), and the two effective values of the stiffness (for swaying and rocking).

Different values of the inertia, stiffness and damping parameters are needed for each one of these four modes of excitation. Whitman and Richart²³ suggested the choice of stiffnesses appropriate for low frequencies, and of average damping values over the range of frequencies at which resonance usually occurs. In order to obtain a good agreement between the resonant frequencies of the lumped-parameter and the actual system, they recommended that a fictitious mass (or mass moment of inertia) be added to the actual foundation mass (or mass moment of inertia). The need for such a recommendation stemmed not from the existence of any identifiable soil mass moving in-phase with the foundation, but rather from the fact that in reality the stiffnesses decrease with increasing frequency (see Figs. 5 and 7), instead of remaining constant and equal to the static stiffnesses, as the model assumes. In other words, instead of decreasing K , the lumped-parameter model increases m to keep the resonant frequency, ω_r , unchanged. Recall that ω_r is proportional to the square-root of (K/m) .

Whitman and Richart²³ and later Richart, Woods and Hall⁷ and Whitman²⁴ presented expressions for these parameters for all four vibration modes. Table 1 displays these expressions, which have enjoyed a significant popularity over the last decade.

Primarily because of its simplicity, the lumped-parameter approximation had a great impact on the application of the 'half-space' theory. It demonstrated that this rational theory can be cast into a tractable, simple engineering form, which can be used by the profession with hardly any greater difficulty than the older empirical procedures.

Motivated to a large extent by the need to understand the phenomena associated with seismic soil-structure interaction, the analysis of the dynamic response of foundations has been a subject of considerable interest throughout the 1970s. A significant amount of related research has led to the development of new formulations and computer programs, while numerous publications have studied the importance of critical foundation, soil and loading parameters and have presented graphs, tables and simple ex-

Table 1. Equivalent lumped parameters for analysis of circular foundations on elastic halfspace*

Mode	Vertical	Horizontal	Rocking	Torsion
Stiffness:	$\frac{4GR}{1-\nu}$	$\frac{8GR}{2-\nu}$	$\frac{8GR^2}{3(1-\nu)}$	$\frac{16GR^2}{3}$
Mass ratio \bar{m} :	$\frac{m(1-\nu)}{4\rho R^2}$	$\frac{m(2-\nu)}{8\rho R^2}$	$\frac{3I_x(1-\nu)}{8\rho R^2}$	$\frac{I_g}{\rho R^2}$
Damping ratio:	$\frac{0.425}{\bar{m}^{1/2}}$	$\frac{0.29}{\bar{m}^{1/2}}$	$\frac{0.15}{(1+\bar{m})\bar{m}^{1/2}}$	$\frac{0.50}{1+2\bar{m}}$
Fictitious added mass:	$\frac{0.27m}{\bar{m}}$	$\frac{0.095m}{\bar{m}}$	$\frac{0.24I_x}{\bar{m}}$	$\frac{0.24I_g}{\bar{m}}$

I_x, I_g = mass moments of inertia around a horizontal, vertical axis, respectively; damping ratio = C/C_{cr} where $C_{cr} = 2(Km)^{1/2}$ or $C_{cr} = 2(KI)^{1/2}$ for translational or rotational modes of vibration, with $I = I_x$ or I_g for rocking or torsion, respectively.

pressions, suitable for direct use in practical applications. It is worth mentioning some of the most important contributions to the current state of the art.

Newly developed (mid-1960s) mathematical techniques to solve mixed boundary-value elastodynamic problems were utilized by Luco *et al.*²⁵ and Karasudhi *et al.*²⁶ to obtain 'exact' numerical solutions for all modes of vibration of strip footings on a halfspace, and by Luco *et al.*²⁷ and Veletsos *et al.*^{28, 29} to extend the available halfspace solutions for circular foundations to the high frequency range and, also, to a viscoelastic material with linear hysteretic damping. The development of dynamic finite-element formulations with energy absorbing ('viscous' and 'consistent') lateral boundaries prompted the study of the response of surface and embedded foundations supported by a layered soil stratum.³⁰⁻³⁶ Only plane-strain and axisymmetric geometries could be handled with these finite element formulations, however, and the presence at a relatively shallow depth of a non-compliant rock-like material underlying the stratum was an unavoidable requirement regardless of whether such rock did actually exist.

On the other hand, Luco³⁵ and Gazetas³⁶ presented analytical solutions for circular, strip and rectangular foundations on the surface of a layered halfspace or a layered stratum (i.e. with or without a rigid rock as the last layer, respectively). Utilizing these formulations they offered results³⁷⁻³⁹ which bridged the gap between the two previously studied extreme profiles - the halfspace and the stratum-on-rigid-base. At about the same time, Novak⁴⁰ obtained approximate analytical solutions for circular foundations embedded in a halfspace, by deriving closed-form expressions for the dynamic stiffness and damping coefficients along the vertical sides of the foundation. Later on this method was easily adapted to study the dynamic response of piles.⁴¹⁻⁴³

In more recent years research efforts have been primarily directed to determining solutions: (a) for rigid foundations of rectangular and arbitrary shapes;⁴⁴⁻⁴⁸ (b) for foundations of finite flexural rigidity;⁴⁹⁻⁵¹ (c) for foundations on inhomogeneous and on anisotropic soils;⁵²⁻⁵⁵ and (d) for foundations on nonlinear (Ramberg-Osgood) soils.⁵⁶ Furthermore, a very substantial amount of research work has been devoted to the dynamic behavior of single (floating and end-bearing) piles embedded in homogeneous,

inhomogeneous or layered soil deposits, and the first attempts have already been made to obtain solutions for dynamic loaded pile groups. For comprehensive lists of related references, see Dobry *et al.*,⁵⁷ Kagawa *et al.*,⁵⁸ and Novak.⁵⁹

Impedance and compliance functions: definition and physical interpretation

An important step in current methods of dynamic analysis of rigid massive machine foundations is the determination (using analytical or numerical methods) of the dynamic impedance functions, $K(\omega)$,* of an 'associated' rigid but massless foundation, as a function of the excitation frequency, ω . As shown in Fig. 1 the 'associated' foundation-soil system is identical (in both material properties and geometry) with the actual system, except that the foundation mass is taken equal to zero. It will be explained in the following section how, once the harmonic response of such a massless foundation has been determined, the steady-state response of the massive foundation, or of any structure supported on it, may be evaluated using standard procedures. In addition, the transient response to non-harmonic machine forces can also be evaluated by recourse to Fourier analysis and synthesis techniques.

For each particular harmonic excitation with frequency ω , the dynamic impedance is defined as the ratio between the steady-state force (or moment) and the resulting displacement (or rotation) at the base of the massless foundation. For example, the vertical impedance of a foundation whose plan has a center of symmetry is defined by:⁶

$$K_v = \frac{R_v(t)}{v(t)} \quad (3)$$

in which $R_v(t) = R_v \exp(i\omega t)$ is the harmonic vertical force applied at the base of the disk, and $v(t) = v \exp(i\omega t)$ is the uniform harmonic settlement of the soil-foundation interface. It is evident that R_v is the total soil reaction against the basemat plus, in case of embedded foundations, the shear stresses along the vertical side walls, as illustrated in Fig. 1.

Similarly one may define the torsional impedance, K_t , from the torsional moment and rotation; the horizontal impedances, K_h , from the horizontal forces and displacements along the principal axes of the base; and the rocking impedances, K_r , from the moments and rotations around the same horizontal principal axes. However, since horizontal forces along the principal axes produce rotations in addition to horizontal displacements, cross-horizontal-rotational impedances K_{rh} may also be defined; they are

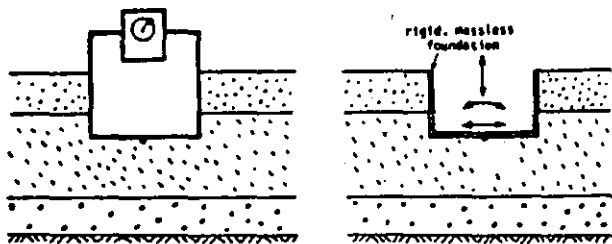


Figure 1. Machine foundation and the associated rigid massless foundation

* Bold letters are used in the text for impedances, compliances and some stiffness and damping coefficients (equation (17)); in the figures, calligraphic characters are used for these quantities.

usually negligibly small in case of surface and very shallow foundations, but their effect may become appreciable for greater depths of embedment.

Referring to equation (3), it is interesting to note that dynamic force and displacement are generally out of phase. In fact, any dynamic displacement can be resolved into two components: one in phase and one 90° out of phase with the imposed harmonic load. It is convenient then to introduce complex notation to represent forces and displacements. As a consequence, impedances may also be written in the form:⁶

$$K_o(\omega) = K_{o1}(\omega) + iK_{o2}(\omega) \quad (4)$$

$$a = v, h, r, hr, t; \quad i = \sqrt{-1}$$

The real and imaginary components are both functions of the vibrational frequency ω . The real component reflects the stiffness and inertia of the supporting soil; its dependence on frequency is attributed solely to the influence which frequency has on inertia, since soil properties are essentially frequency independent. The imaginary component reflects the radiation and material damping of the system. The former, being the result of energy dissipation by waves propagating away from the foundation, is frequency dependent; the latter, arising chiefly from the hysteretic cyclic behavior of soil, is practically frequency independent.

A very instructive analogy between the dynamic response of a simple 1-dof oscillator and of a three-dimensional massless foundation-soil system has been drawn by Roesset.⁶⁰ Assuming a harmonic excitation $P(t) = P_0 \exp(i\omega t)$, the steady-state response $x(t) = x_0 \exp(i\omega t)$ of the 1-dof oscillator may be obtained by substitution into equation (2):

$$(K - m\omega^2) + iC\omega = \frac{P(t)}{x(t)} \quad (5)$$

Contrasting equations (5) and (3) prompts the definition of a dynamic impedance function for the 1-dof mass-spring-dashpot system:

$$K = (K - m\omega^2) + iC\omega \quad (6)$$

and, by comparison with equation (4):

$$K_1 = K - m\omega^2 \quad (7)$$

$$K_2 = C\omega \quad (8)$$

In other words, the dynamic impedance of our familiar 1-dof oscillator is indeed a complex number with a frequency dependent real part representing the stiffness and inertia characteristics of the system, and a frequency dependent imaginary part expressing the energy loss in the system. Therefore, it is quite natural to express the dynamic impedance of soil-footing systems in a complex form, as done in equation (4):

Having, thus, established the analogy between 1-dof and massless footing-soil systems, let equation (6) for the 1-dof be rewritten as:

$$K = K \cdot \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + i2\beta \frac{\omega}{\omega_n} \right) \quad (9a)$$

or

$$K = K \cdot (k + i\omega c_r) \quad (9b)$$

in which the critical viscous damping ratio is:

$$\beta = \frac{C}{C_{cr}} = \frac{C}{2K/\omega_n} \quad (10)$$

halfspace or stratum-on-rock;^{34, 38, 39, 70} for rigid rectangular foundations on a halfspace;^{21, 36, 44, 46-48, 56, 65, 68, 71} for rectangular foundations of finite flexural rigidity;^{50, 51} for rigid rectangular foundations embedded in a halfspace;⁴⁷ and, finally, for rigid foundations of arbitrary shape.⁴⁴

Note that *approximate semi-analytical* procedures have already been developed to obtain the impedances of cylindrical embedded foundations and circular piles.^{40-43, 57, 72} These procedures assume that only horizontally propagating waves generate at the vertical foundation-soil interface, and they neglect the coupling between forces and displacements at various points. Instead, they only compute the displacement at the point of application of the load. Thus, in effect, the soil is modeled as a Winkler medium, the spring and dashpot characteristics of which are estimated from realistic, albeit simplified, wave propagation analyses.

Finally, several similar *approximate analytical* formulations have been developed, again for deeply embedded cylindrical foundations and end-bearing piles in soil strata.⁷³⁻⁷⁸ These procedures attempt to analytically solve the governing wave equations for the stratum, by neglecting the secondary component of displacement (i.e. the vertical component for lateral vibrations or the radial one for vertical vibrations). The boundary conditions at the soil-pile interface are analytically enforced by expanding the contact pressure distribution to an infinite series in terms of the natural modes of vibration of the soil layer.

'Discrete' models. Dynamic finite difference and finite element models have been developed for problems of complicated geometry which are not easily amenable to analysis with continuum type, analytical or semi-analytical formulations. Today, finite difference formulations such as those proposed by Ang *et al.*,⁷⁹ Agabain *et al.*,⁸⁰ Krizek *et al.*,⁸¹ and Tseng *et al.*,⁸² find very little if any application in solving foundation vibration problems, and, therefore, will not be further addressed in this paper. On the other hand, several finite element formulations and computer programs are presently widely available and frequently used in analysing foundation oscillations.

The use of finite elements in dynamic foundation problems is different from other applications of finite elements in statics and dynamics in that soil strata of infinite extent in the horizontal and even in the vertical direction must be represented by a model of a finite size. Such a finite model creates a fictitious 'box' effect, trapping the energy of the system and distorting its dynamic characteristics. To avoid this problem, wave absorbing lateral boundaries are introduced to account for the radiation of energy into the outer region not included in the model. Two main types of such boundaries are available. The approximate 'viscous' boundary proposed by Lysmer *et al.*⁸³ and extended by Valliappan *et al.*⁸⁴ must be placed at some distance from the foundation. The alternative 'consistent' boundary developed by Waas⁸¹ and extended by Kausel⁸⁵ is very effective in accurately reproducing the physical behavior of the system, and it also results in considerable economy by being placed directly at the edge of the foundation. This 'consistent' boundary provides a dynamic stiffness matrix for the medium surrounding the plane or cylindrical vertical cavity which is assumed to occupy the central region under the strip or circular foundation. This matrix corresponds exactly to the boundary stiffness matrix that would be obtained from a continuum type formulation.

Unfortunately, 'consistent' boundaries have been developed only for plane-strain and axisymmetric (cylindrical) geometries. No such boundary is available for truly three-

dimensional (3D) geometries, in cartesian coordinates. Thus, to solve 3D problems a finite-element model must resort to 'viscous' or elementary boundaries placed far away from the loaded area. In this way the fictitiously reflected waves are dissipated through hysteresis and friction (material damping) in the soil before they return to the foundation region. However, the cost of such analyses is prohibitive and truly 3D solutions are very rarely used in practice. An attempt has been made to modify a 2D computer program by adding viscous dashpots to the lateral faces of its plane-strain elements, in order to simulate the radiation damping of 3D situations.⁸⁵ Notwithstanding the popularity enjoyed by this pseudo-3D model, its only difference from the 2D model is that it introduces an artificial increase in damping, which cannot possibly reproduce all aspects of the true 3D behavior. In fact, in some cases the actual 3D radiation damping in rocking is over-estimated rather than under-estimated by a 2D model;⁸⁶ thus by adding viscous dashpots the situation may worsen instead of improving.^{86, 85}

Consequently, today, two types of finite-element models are practically available: plane-strain 2D models appropriate for strip footings or elongated rectangular structures;^{34, 84, 87} and 3D axisymmetric-geometry models appropriate for cylindrical foundations and nearly square structures.^{31, 33, 88}

It is noted that embedded foundations and layered soil strata can be routinely handled with all the finite-element formulations. On the other hand, the presence of a fixed bottom boundary is required by most of the available codes. This is hardly a drawback if a stiff, rock-like stratum does exist at a relatively shallow depth. Otherwise, when the supporting soil deposit is very deep, the cost of a realistic finite-element analysis may become substantial.

Conclusion. With the available analytical, semi-analytical and finite-element computer programs the foundation vibration analyst may obtain solutions for foundations of various shapes, surface or embedded, supported by deep or shallow soil deposits. In selecting the most appropriate code for each specific situation, attention should first focus on the depth of embedment and the nature of the underlying soil. When dealing with very shallow footings on deep deposits which can be well reproduced by a small number of layers with different properties, continuum type analytical or semi-analytical formulations are clearly more advantageous; the choice of the most appropriate among them will be mainly dictated by the shape of the footing (strip, circular, rectangular, arbitrary) and the desired degree of accuracy. On the other hand, for embedded foundations in a shallow stratum or whenever a large number of layers with sharply different properties exists below the footing, finite element models are particularly appropriate.

Furthermore, attention should be accorded to the operational frequencies of the machine and the inertia characteristics of the foundation. At very high frequencies of vibration, f , discrete models may become very costly; because, in order to transmit high frequencies, a large number of sufficiently small-sized elements must be used. For instance, it is usually recommended that the maximum dimension of an element should not exceed $\lambda/8$, where $\lambda = V/f$ is the wavelength in a particular soil layer having shear wave velocity V . Therefore, with high frequencies, analytical models may become advantageous. Notice, though, that the computer costs of semi-analytical formulations may also be adversely affected by a large increase in the operational frequency, since they, too, discretize the contact area or the whole uppermost surface.

Regarding the inertia characteristics of the foundation,

the author and Roesset³⁹ have demonstrated that for heavy foundations (i.e. with high mass ratios) small errors in modeling the different soil layers are unimportant and one can safely base the design on available halfspace solutions or on the results of analytical type computer programs. On the other hand, relatively light foundations are quite sensitive to the existence of competent rock at a shallow depth and of different soil layers beneath the footing, thus requiring a good soil exploration followed by finite-element analyses. These conclusions are further illustrated and generalized in a later section of this paper.

In addition to the existing computer programs numerous solutions have been published in the literature in the form of dimensionless graphs, tables and simple formulae for impedance and compliance functions of foundations with several different geometries, depths of embedment and stiffness characteristics, supported by various idealized soil profiles (halfspace, stratum, etc.). These solutions can give very satisfactory results in many practical cases and are especially valuable in conducting preliminary analyses and parameter sensitivity studies. One of the goals of this state-of-the-art paper is to present and discuss the most significant of these available solutions. Before doing this, however, it is expedient to illustrate how the impedance functions may be utilized to obtain the dynamic response of rigid massive foundations.

Use of Impedance functions: response of massive machine foundations

The first step in analysing the response of a massive machine foundation is to evaluate the pertinent dynamic impedances at the anticipated frequency, or range of frequencies, of the machine. This is done either by utilizing existing discrete or continuum type formulations, or by resorting to published solutions available in the soil dynamics literature. The use of dynamic impedance to obtain the response is illustrated herein.

Figure 3 portrays a massive, rigid foundation having equal depth of embedment along all the sides and possessing two orthogonal vertical planes of symmetry, the intersection of which defines a vertical axis of symmetry. The foundation plan, having two axes of symmetry, may be of any axis-symmetric or orthogonal shape, including the infinitely long strip (2D geometry). For such foundations, vertical and torsional oscillations are uncoupled, while horizontal forces and moments along and around the principal axes produce displacements and rotations only along and around the same axes. Thus, with the notation of Fig. 3, the equations of motion in vertical translation $v(t)$, torsional rotation $\theta(t)$, and coupled horizontal translation $h(t)$ and rocking $r(t)$, all referred to the center of gravity of the machine-foundation system, are respectively:

$$m \cdot \ddot{v}(t) + R_v(t) = Q_v(t) \quad (21)$$

$$I_z \cdot \ddot{\theta}(t) + T_z(t) = M_z(t) \quad (22)$$

$$m \cdot \ddot{h}(t) + R_h(t) = Q_h(t) \quad (23)$$

$$I_{0x} \cdot \ddot{r}(t) + T_r(t) - R_h(t) \cdot z_c = M_r(t) \quad (24)$$

in which: m = total foundation mass; I_{0x} = mass moment of inertia about a principal horizontal axis passing through the center of gravity; I_z = mass moment of inertia around the vertical axis of symmetry; R_v , T_z , R_h and T_r = vertical, torsional, horizontal and rocking reactions of the soil acting at the center of the foundation base (remember Fig. 1b); Q_v , M_z , Q_h and M_r = vertical, torsional, horizontal and

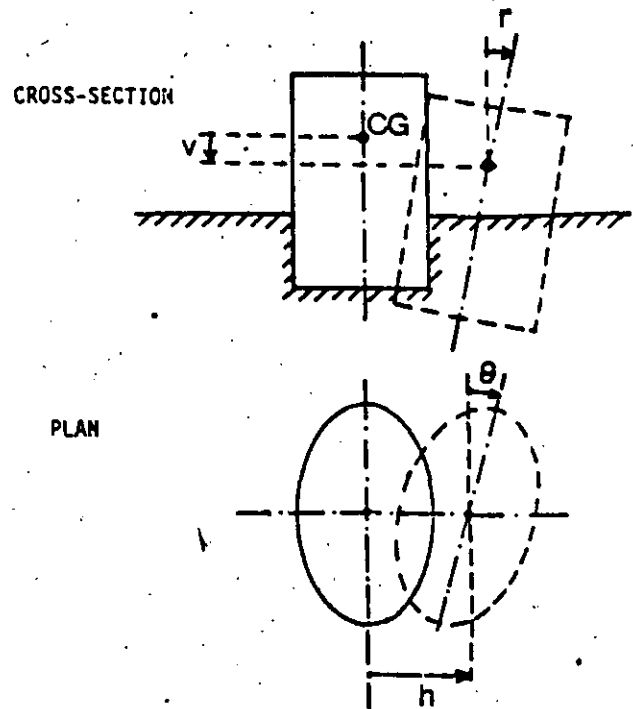


Figure 3. Definition of deformation variables

rocking exciting forces and moments, acting at the center of gravity and resulting from the operation of the machine.

As already mentioned, only the steady-state response due to a harmonic excitation is of interest here. Not only because most machines usually produce unbalanced forces which indeed vary harmonically with time (rotary or reciprocating engines), but also because non-harmonic forces (such as those, for example produced by punch presses and forging hammers) can be decomposed into a large number of sinusoids through Fourier analysis. Therefore, the excitations may be written as:

$$Q_a = Q_a \exp[i(\omega t + \phi_a)] \quad a = v, h \quad (25)$$

$$M_a = M_a \exp[i(\omega t + \phi_a)] \quad a = z, r \quad (26)$$

in which the amplitudes Q_a and M_a are either constants or (more frequently) proportional to the square of the operational frequency $\omega = 2\pi f$; ϕ_a are the phase angles of the four excitations, v, h, r and z .

With the excitation forces described by equations (25)-(26), the steady-state motions may be cast in the form:

$$v(t) = v \cdot \exp(i\omega t); \quad v = v_1 + iv_2 \quad (27)$$

$$\theta(t) = \theta \cdot \exp(i\omega t); \quad \theta = \theta_1 + i\theta_2 \quad (28)$$

$$h(t) = h \cdot \exp(i\omega t); \quad h = h_1 + ih_2 \quad (29)$$

$$r(t) = r \cdot \exp(i\omega t); \quad r = r_1 + ir_2 \quad (30)$$

in which: v, θ, h and r are complex, frequency-dependent displacement and rotation amplitudes at the center of gravity. Note that equations (27)-(30) do not by any means imply that the four components of motion are all in phase, nor that the phase-angles between the corresponding excitations and motions are equal to ϕ_a (equations (25)-(30)). Instead, the true phase angles ψ_a are 'hidden' in the complex form of each displacement component. For instance, the vertical motion will exhibit:

$$\psi_v = \arctan(v_2/v_1) \quad (31)$$

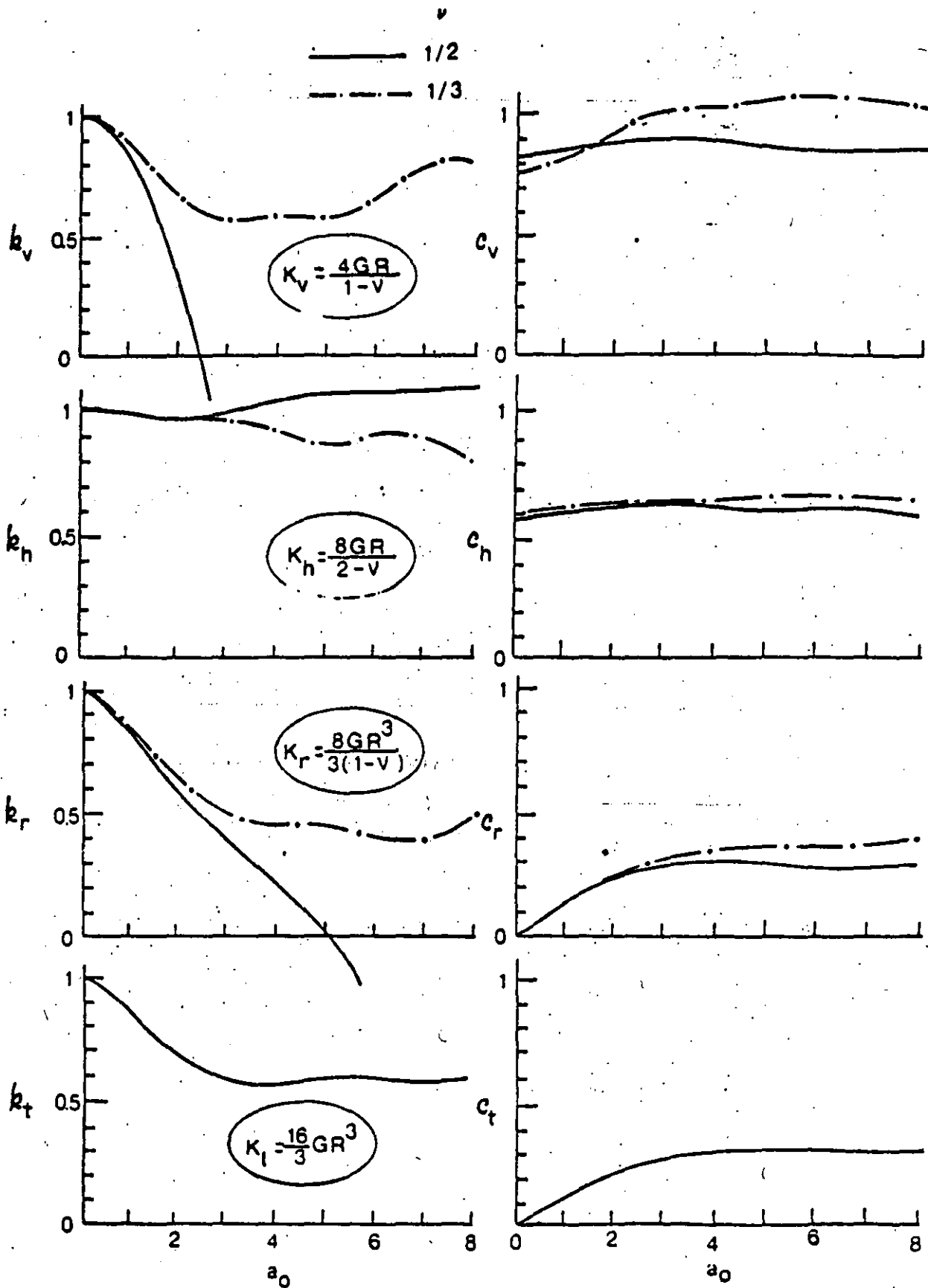


Figure 5. Impedance functions of rigid circular footings on homogeneous halfspace^{17, 24, 25}

Clearly, soil deposits having a constant G and extending to practically infinite depths, as the homogeneous halfspace model assumes, do not abound in nature. In addition, circular foundations are rather rarely constructed. Nonetheless, the results of Fig. 5 for a circular foundation on a halfspace are of great value in understanding the phenomena associated with foundation vibrations. From a practical point of view, however, the shape and trends of these impedance functions are more important than their exact values.

Rigid strip foundation

When dealing with long and narrow foundations, the length of which is larger than their width by a factor of 5 or greater, it is a common practice to idealize their shape as an infinitely long strip. If, moreover, the dynamic loading

is reasonably uniform along the longitudinal direction, plane-strain conditions prevail throughout and 2D analyses are sufficient to obtain the response.

Figure 6 displays the dynamic impedance of a rigid strip foundation on the surface of a homogeneous halfspace. These results were obtained by the semi-analytical procedure of Gazetas³⁶ and Gazetas and Roesset³⁸ and are in agreement with the results of Karasudhi *et al.*²⁰ It is noted that in this case the impedance functions are presented in the form described by equation (4), and not in one of the most usual forms of equations (12) or (17). The necessity for this change stemmed from the fact that the static vertical and horizontal stiffnesses of an infinite strip on a halfspace are zero, in agreement with the classical theory of elasticity. This is at variance with the behavior of circular foundations, whose (nonzero) static stiffnesses can be

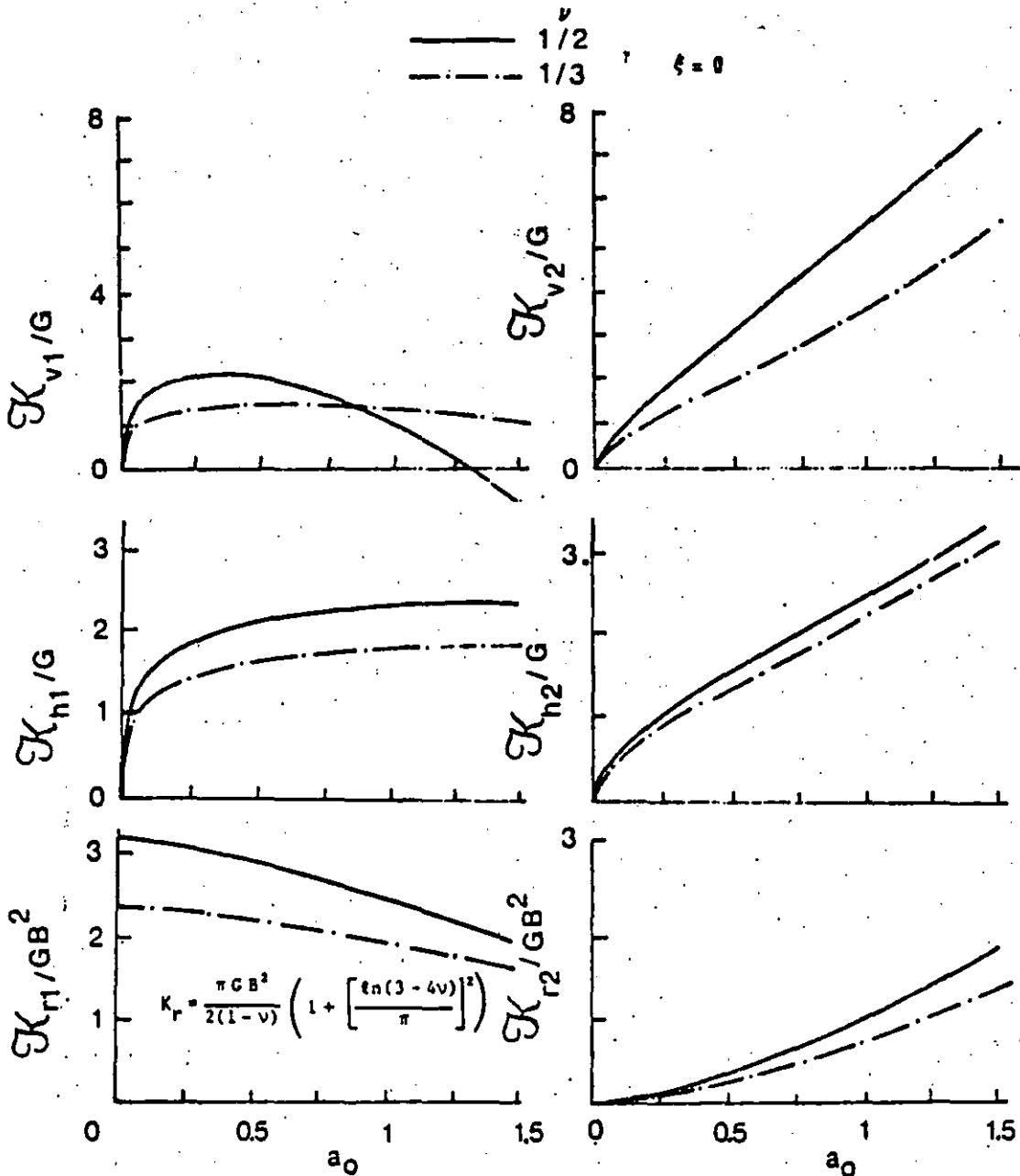


Figure 6. Impedance functions of rigid strip footings on homogeneous halfspace

found from the expressions included in Fig. 5. The infinite displacement of a strip-loaded halfspace arise from the large depths of the corresponding 'zones of influence'. In other words, the static stresses induced by the strip surface loads decay slowly with depth and, thus, cause appreciable straining of even remote soil elements; accumulation of these strains yields infinite displacements.

On the other hand, the stress and strain fields induced by moment loading are confined to the near surface soil only, thereby producing small surface displacements and non-zero static stiffnesses. For a rigid strip foundation, an expression for the static rocking stiffness is included in Fig. 6.

A few other trends are worthy of note in Fig. 6. First, one should notice that there are only three possible modes of vibration of a strip (vertical, horizontal and rocking) as compared to the four modes of a circular footing. Apparently, torsional oscillations involve out-of-plane motions and hence are impossible with strip footings.

In general, the dependence of the dynamic impedances on the Poisson's ratio of soil is very similar for strip and circular foundations. Thus, the discussion of the preceding section on the sensitivity of circular impedance functions to ν , is also applicable to the present case.

Regarding the variation of impedances with frequency, on the other hand, there are some differences between circular and strip footings, although clearly the general trends are similar. Thus, in the very low frequency range, the real parts K_{v1} and K_{h1} of the two translational modes increase with increasing a_0 and they attain peak values of a_0 ranging from about 0.25 to about 1.0, depending primarily on the Poisson's ratio and the type of oscillation. This implies that 'constructive interference' of various P and S waves originating at the soil-foundation interface reduces the depth of the 'zone of influence'; this results into finite displacements and non-zero dynamic stiffnesses.

Beyond their peak values, K_{v1} and K_{h1} behave much like their circular counterparts. Notice, however, that at Poisson's ratios close to 0.50 the vertical strip stiffness becomes negative at a_0 values greater than 1.3, as compared with the corresponding value of 2.5 which was observed for circular footings in Fig. 5.

The imaginary parts K_{v2} and K_{h2} of the vertical and horizontal modes increase almost linearly with a_0 , thus indicating qualitatively similar radiation damping characteristics of strip and circular foundations. (Notice that the damping coefficients c in the latter case are proportional to the slopes of the imaginary component of impedance-versus- a_0 curves; hence a constant c implies a linearly varying K_2 .)

Finally, the rocking stiffness and damping terms of both strip and circular foundations exhibit essentially identical trends. Evidently, rocking induced static or dynamic stresses influence only the near-surface soil under both plane-strain and axisymmetric loading conditions.

Rigid rectangular foundation

Results are now available for the complete dynamic impedance matrix of rigid rectangular foundations with varying aspect ratios L/B , over the low and medium frequency range.⁴⁷ For the vertical, horizontal and rocking modes, in particular, results are available even for moderately high values of a_0 .^{44, 46, 48}

Again, in presenting the variation with frequency and aspect ratio of impedances it is convenient to express them in the form of equation (17), with $a_0 = \omega B/V$, where $2B$

is the width of the smallest side of the foundation. Results for the static stiffnesses are presented first.

It has been known for some time that the static stiffness of a typical rectangular foundation can be approximated with reasonable accuracy by the corresponding stiffness of 'equivalent' circular foundations. For the translational modes in the three principal directions (x , y and z) the radius R_0 of the 'equivalent' circular foundation is obtained by equating the areas of the contact surfaces; hence:

$$R_0 = \left(\frac{2B \cdot 2L}{\pi} \right)^{1/2} \quad (47)$$

For the rotational modes around the three principal axes, the 'equivalent' circular foundations have the same area moments of inertia around x , y and z , respectively, with those of the actual foundation. Thus, the equivalent radii are:

$$R_{0x} = (16L \cdot B^3/3\pi)^{1/4} \quad (48)$$

for rocking around the x -axis;

$$R_{0y} = (16B \cdot L^3/3\pi)^{1/4} \quad (49)$$

for rocking around the y -axis; and

$$R_{0z} = \left[\frac{16B \cdot L \cdot (B^2 + L^2)}{6\pi} \right]^{1/4} \quad (50)$$

for torsion around the z -axis.

The results of recent parametric studies have confirmed the similar static behavior of rectangular and equivalent circular foundations. Table 2 is a synthesis of the results of several such investigations. It presents theoretically 'exact' formulae for all the translational and rotational static stiffnesses of rigid rectangular foundations having a wide range of aspect ratios. These formulae are cast in the form:

$$K = K_0(R_0) \cdot J(L/B) \quad (51)$$

in which: K = the actual static stiffness; $K_0(R_0)$ = the corresponding stiffness of the equivalent circular foundation, obtained from Fig. 5; R_0 = the radius of the 'equivalent' circle; and $J(L/B)$ = a 'correction' factor, function of the aspect ratio, L/B . If $J(L/B)$ were equal to 1 for all aspect ratios, the static equivalence between the two types of footings would have been perfect. Conversely, the larger the difference is between $J(L/B)$ and 1, the less accurate it would be the approximate a rectangular with a circular footing.

It may first be noted that only small discrepancies exist in the values of the 'correction' functions computed from the results of several authors. These discrepancies are due to either the assumed soil-footing interface behavior ('smooth' versus 'adhesive' contact), or the employed different numerical solution schemes. In practice, however, in view of the small magnitude of these differences, one may safely use for $J(L/B)$ the average of the values presented in Table 2, for each particular aspect ratio.

The following conclusions are evident from this Table.

1. Even for aspect ratios, L/B , as high as 8, the 'equivalent' circular foundations yield stiffnesses which are within 30% of the corresponding stiffness of the actual rectangular foundation. This is by no means a large error, in view, for example, of the uncertainty in estimating the soil modulus in practice.

2. For aspect ratios, L/B , less than 4 the 'equivalent' stiffnesses are in very good agreement with the actual

Table 2. Static stiffnesses for rectangular rigid foundation

1. Vertical stiffness

$$K_x = K_y = \frac{4GR_0}{1-\nu} \cdot J_v(L/B)$$

L/B	'Correction' factor J_v			
	Gorbunov-Posadov (1961)	Barkan (1962)	Savidis (1977)	Dominguez et al. (1978) 'Adhesive' 'Smooth'
1	1.023	0.953	0.944	1.052 1.081
2	1.025	0.975	0.973	1.063 1.130
4	1.108	1.077	1.072	1.107 1.196
6	1.197	1.152	-	- -
8	1.266	1.196	1.200	- -
10	1.313	1.250	-	- -
20	1.572	-	-	- -

2. Horizontal stiffnesses

$$K_x = \frac{8GR_0}{2-\nu} \cdot J_x(L/B) \quad K_y = \frac{8GR_0}{2-\nu} \cdot J_y(L/B)$$

L/B	'Correction' factor J_x		'Correction' factor J_y	
	Barkan (1962)	Dominguez et al. (1978)	Barkan (1962)	Dominguez et al. (1978)
1	0.993	1.035	0.993	1.035
2	0.983	1.044	1.008	1.105
4	1.000	1.085	-	1.221
6	1.055	-	-	-
8	1.132	-	-	-
10	1.191	-	-	-

3. Rocking stiffnesses

$$K_{rx} = \frac{8GR_{0x}^2}{3(1-\nu)} \cdot J_{rx}(L/B) \quad K_{ry} = \frac{8GR_{0y}^2}{3(1-\nu)} \cdot J_{ry}(L/B)$$

L/B	'Correction' factor J_{rx}		'Correction' factor J_{ry}	
	Gorbunov-Posadov et al. (1961)	Dominguez et al. (1978)	Gorbunov-Posadov et al. (1961)	Dominguez et al. (1978)
1	0.991	0.965	0.991	0.965
2	1.034	1.039	1.035	1.031
4	1.0488	1.117	1.072	1.140
8	1.178	-	1.226	-
10	1.281	-	1.319	-

4. Torsional stiffness

$$K_{rz} = K_t = \frac{16}{3} GR_{0z}^2 \cdot J_t(L/B)$$

L/B	'Correction' factor J_t	
	Dominguez et al. (1978)	Roesset et al. (1977)
1	0.950	1.0332
2	1.000	-
3	1.016	-
4	1.166	-

ones. Typically, the error is within 10% and, hence, it is insignificant for all practical purposes.

3. The greatest differences are observed between actual and 'equivalent' stiffnesses for torsion (K_t) and for hori-

zontal displacement in the y direction (K_y). For $L/B = 4$, the error in K_t is about 17% and in K_y about 22%. It is worthy of note that whereas for a circular foundation $K_{x0} = K_{y0} = 8GR_0/(2-\nu)$, where R_0 is given by equation (47), a rectangular foundation with the larger side $2L$ normal to the y -axis (Fig. 4) is characterized by:

$$K_y = K_x + \frac{1}{2}GB \left(\frac{L}{B} - 1 \right) \quad (52)$$

for typical values of Poisson's ratio.

Variation with a_0 . Figure 7 portrays the dependence of the dynamic stiffness and damping coefficients, k and c , on the frequency factor a_0 and the aspect ratio L/B . These results were obtained with the Boundary Element Method by Dominguez and Roesset,⁴⁷ for a single value of Poisson's ratio, $\nu = \frac{1}{2}$. Only the coefficients of the six diagonal components of the impedance matrix are shown, they correspond to the translational modes of vibration (x , y and z) along each of the three principal axes, and to the rotational modes (r_x , r_y and r_z) around each of the same three principal axes. The two cross-swaying-rocking (coupling) impedances, corresponding to the xr_y and yr_x modes, are negligibly small for surface foundations, and are thus omitted from this presentation. Also shown in Fig. 7 as circles are the predictions of the 'equivalent' circular foundations, computed from Fig. 5 in conjunction with equations (47)-(50). One may notice the following trends in Fig. 7.

1. The terms k_x and c_x of the impedance against motion normal to the smaller side $2B$ are insensitive to variations in a_0 . Moreover, k_x is essentially independent of the aspect ratio, L/B , while c_x increases almost in proportion to the square-root of L/B . Recall that c_x must be multiplied by $a_0 = \omega B/V_s$ to obtain the imaginary component of the dynamic part of the impedance (equations (12) or (17)), in which $2B$ is the width of the smallest side of the footing. On the other hand, the frequency factor a_{00} of the 'equivalent' footing equals $\omega R_0/V_s$, with:

$$R_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} B \left(\frac{L}{B} \right)^{0.5} \quad (47a)$$

i.e. a_{00} is proportional to the square-root of L/B . Hence, plotted in Fig. 7, both stiffness and damping coefficients of the 'equivalent' footing are in excellent agreement with the corresponding coefficients of the actual rectangular footing, for all aspect ratios studied ($L/B = 1-4$), at least in the frequency range, $0 < a_0 \leq 1.5$.

2. The variation of the vertical stiffness and damping coefficients, k_v and c_v , has a similar shape with the variation of k_x and c_x . In this case, however, the two coefficients are more sensitive to variations in a_0 and L/B and the damping term c_v is always larger than c_x . Moreover, the agreement between actual and 'equivalent' coefficients is reasonably good, for all practical purposes.

3. The coefficients k_y and c_y , for a motion parallel to the smaller side $2B$, show a greater sensitivity to both a_0 and L/B . Furthermore, the discrepancies between 'equivalent' and actual values for these coefficients are appreciable, increasing with the aspect ratio. In fact, footings with a large L/B ratio (e.g. >4) tend to behave more like strip rather than circular footings, as a comparison between Figs. 5, 6 and 7 indicates.

4. The stiffness coefficient k_{rx} for rocking around the longest axis, x , exhibits no sensitivity to the aspect ratio,

L/B ; moreover, its variation as a function of a_0 is nearly identical with the variation of the corresponding stiffness coefficient of both the 'equivalent' circular footing and a strip footing with the same width B (Fig. 6). The damping coefficient c_{rx} attains negligible values in the low frequency range and increases approximately in proportion to the

fourth-root of L/B at high frequencies. Recalling that the frequency factor of the 'equivalent' circular footing is proportional to:

$$R_{0x} = \frac{2}{(3\pi)^{1/4}} B \left(\frac{L}{B}\right)^{1/4} \quad (48a)$$

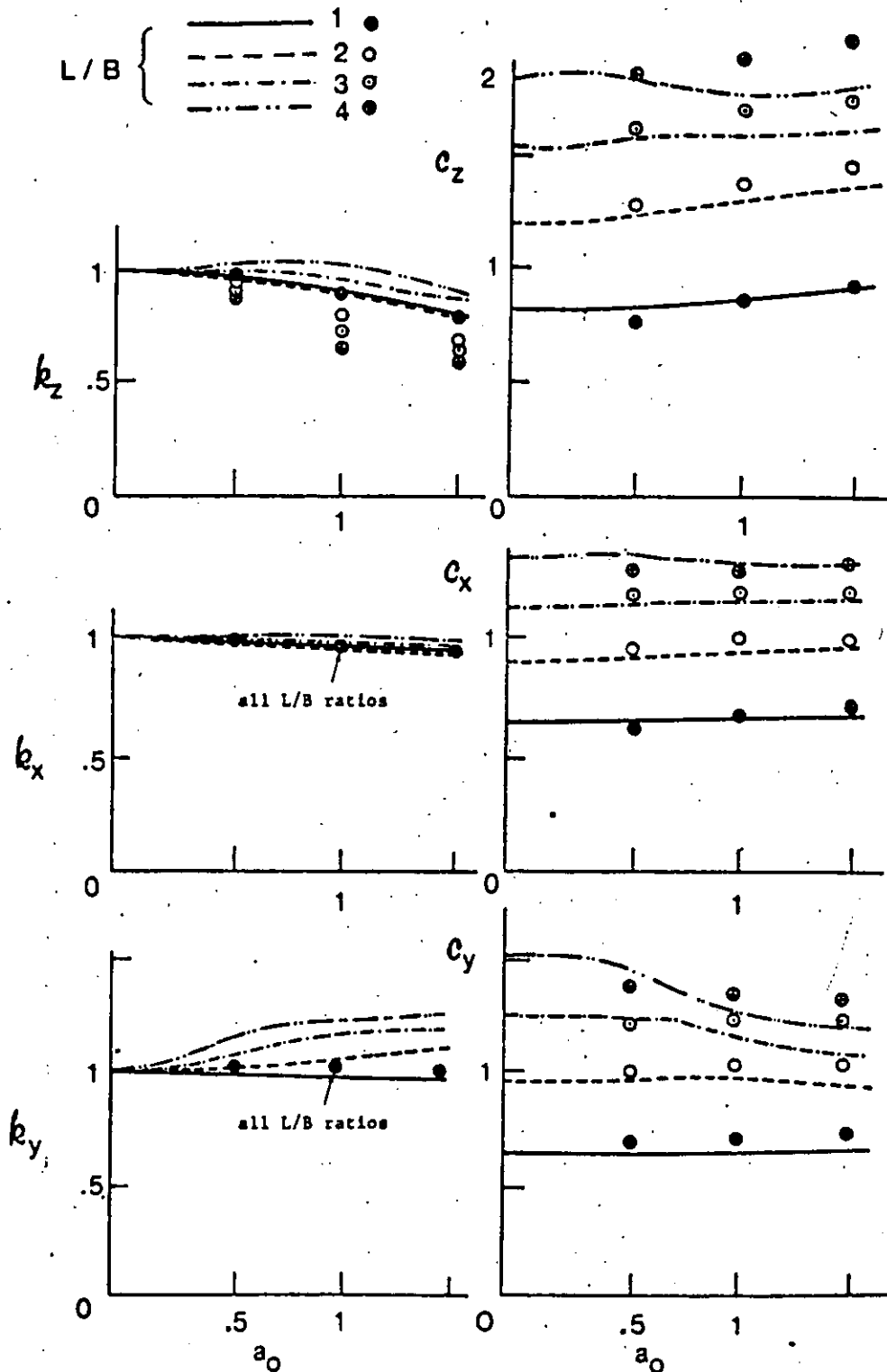
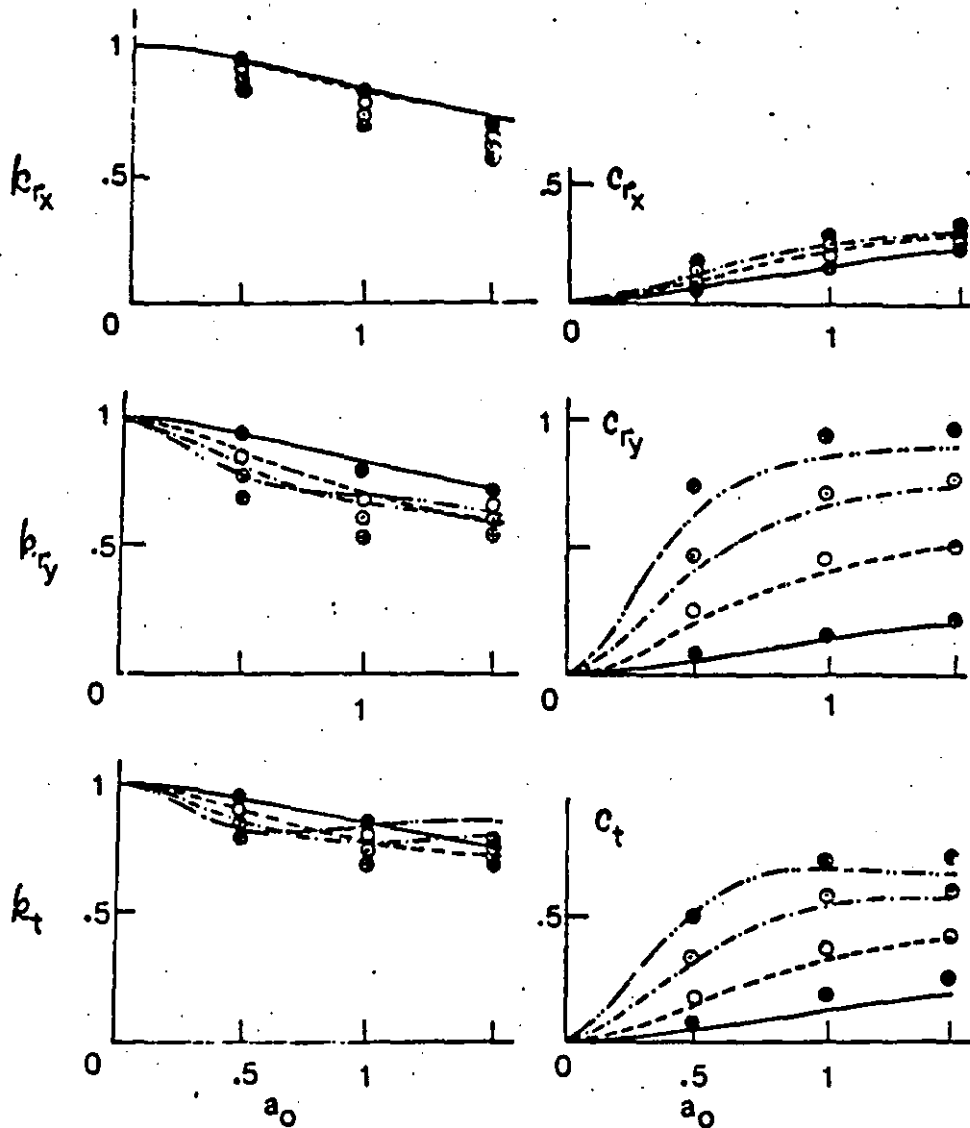


Figure 7. Dynamic coefficients of rigid rectangular footings on homogeneous halfspace;⁴⁷ (circles obtained by this author for 'equivalent' circular footings)

Figure 7 - continued



whereas the term c_{rx} is multiplied simply by $a_0 = \omega B/V_s$ in equations (12) or (17), one can directly unveil the very close proximity between the actual and 'equivalent' damping coefficients.

5. The stiffness coefficients k_{ry} and k_t for rocking around the shortest axis and torsion, respectively, show a somewhat similar dependence on L/B and exhibit some fluctuations with a_0 as L/B increases. The two coefficients are predicted only with small accuracy by the 'equivalent' circular footings. On the other hand, the two damping coefficients c_{ry} and c_t grow rapidly with both frequency and aspect ratio. In this regard, it is interesting to notice that, for instance, the frequency factor for the r_y mode is proportional to:

$$R_{oy} = \frac{2}{(3\pi)^{1/4}} B \left(\frac{L}{B}\right)^{3/4} \quad (49a)$$

which reveals a much stronger increase of c_{ry} with L/B , as compared with the corresponding increase of c_{rx} (a power of $\frac{3}{4}$ for c_{ry} versus $\frac{1}{4}$ for c_{rx}). Again, the values of the two coefficients may be reasonably well predicted by the 'equivalent' circular foundation.

In conclusion, with the help of the formulae of Table 2 and the graphs of Fig. 7, the dynamic behavior of rectangular foundations with essentially any aspect ratio can be obtained. Furthermore, the 'equivalent' circular footings described through equations (47)-(50), yield reasonably good estimates of the response for values of L/B less than about 4 and frequency factors at least up to 1.5. For larger values of L/B , the static stiffnesses of Table 2 can be utilized in conjunction with the dynamic coefficients of an equal-width strip foundation (Fig. 6). More parametric studies are, however, necessary to obtain results in the high frequency range ($1.5 < a_0 \leq 8$).

RIGID SURFACE FOUNDATIONS ON A HOMOGENEOUS SOIL STRATUM

Natural soil deposits very rarely have uniform properties within large depths from the loaded surface. More typical is the presence of a stiffer material or even bedrock at a relatively shallow depth. The response of a foundation on a soil stratum underlain by such a stiffer medium can be substantially different from the response of an identical

foundation resting on a uniform halfspace. It is, thus, imperative to study the dynamics of massless foundations on such soil deposits. Specifically two types of idealized soil profiles are considered in this section:

- (a) a homogeneous soil stratum over a rigid base, and
- (b) a homogeneous soil stratum over a homogeneous halfspace.

Results for non-homogeneous soil strata, with moduli continuously increasing or decreasing with depth, will be presented in a subsequent section of the paper.

In addition to the four dimensionless parameters which control the behavior of rigid footings on a halfspace, namely, a_0 , ν , ξ and L/B , the ratio H/B (or H/R) is of crucial importance in the response of footings on a homogeneous stratum. Its effect is, thus, studied throughout this section. Furthermore, the moduli ratio G_1/G_2 is of interest whenever the soil stratum is underlain by a non-rigid base (halfspace).

Circular foundation on stratum over a rigid base

Results for the dynamic impedance functions of a rigid circular disk at the surface of a stratum-on-rigid-base are presented in Table 3 and in Figs. 8 and 9. Specifically, Table 3 offers simple and quite accurate formulae for the determination of the static stiffnesses; Fig. 8 studies the effect of the H/B ratio on the dynamic stiffness and damping coefficients, k and c , for a single value of hysteretic damping ratio, $\xi = 0.05$; and Fig. 9 shows the sensitivity of k and c to variations in ξ , for a single value of the ratio, $H/B = 2$. These results have been derived by Kausel⁸⁸ and Kausel *et al.*^{89,90} and have been discussed by Roesset.^{60,91} Several significant conclusions may be drawn from this data:

Static stiffnesses. It is evident from the formulae of Table 3 that the existence of rigid bedrock at a relatively shallow depth may drastically increase the static stiffnesses of a rigid surface foundation. The four expressions reduce to the corresponding halfspace stiffnesses when H/R tends to infinity, but their values increase with decreasing H/R .

Vertical stiffnesses are particularly sensitive to variations in the depth to bedrock (notice the 1.28 factor). Horizontal stiffnesses are also appreciably affected by H/R (factor of 0.5) while the rotational stiffnesses (rocking and torsion) are the least affected. In fact, for $H/R > 1.5$ the response to torsional loads is practically independent of the layer thickness.

An indication of the causes of this different behavior of a circular footing to the four different types of loading can be obtained by observing the depths of the 'zone of influence' (known as 'pressure bulb' ever since Terzaghi) in each case. Thus, from Gerrand and Harrison,⁹² in a homogeneous halfspace, the vertical normal stress, σ_z , along the centerline of a vertically loaded rigid circular disk becomes less than 10% of the average applied pressure at depths greater than $z_v \approx 4R$; the horizontal shear stress, τ_{zr} , becomes less than 10% of the average applied shear traction at depth greater than $z_h \approx 2R$. From Gazetas,⁹³ the horizontal shear stresses $\tau_{z\theta}$ and $\tau_{r\theta}$ due to linearly distributed torsional surface stresses become less than 10% of the maximum applied shear traction at $z > z_t \approx 0.75R$. Finally, moment loading with a linear distribution of normal tractions varying from 0 to p yields $z_r \approx 1.25R$, below which σ_z is less than $0.10p$.

Variation with a_0 , H/R and ξ . The variation of the dynamic stiffness and damping coefficients with frequency reveals an equally strong dependence on H/B : On a stratum, both k and c are not as smooth functions as on a halfspace, but exhibit undulations (peaks and valleys) associated with the natural frequencies (in shear and dilation) of the soil layer. In other words, the observed fluctuations are the outcome of resonance phenomena: waves emanating from the oscillating foundation reflect at the soil-bedrock interface and return back to their source at the surface. As a result, the amplitude of foundation motion may significantly increase at specific frequencies of vibration, which, as shown subsequently, are close to the natural frequencies of the deposit. Thus, the stiffness coefficients exhibit valleys which are very steep when the hysteretic damping in the soil is small (in fact, in certain cases, k would be exactly zero if the soil were ideally elastic); on the other hand, with large amounts of hysteretic damping ($\xi = 0.10 - 0.20$) the valleys become less pronounced (Fig. 9). They also become less pronounced as the relative thickness of the layer, H/R , increases (Fig. 8).

Another important phenomenon is revealed through the variation with a_0 of the damping coefficients. At low frequencies, below the first resonant frequency, radiation damping is zero. This is due to the fact that no surface waves can be physically created in a soil stratum at such frequencies and, since the bedrock prevents waves from propagating downward, geometrical spreading of wave energy is negligible. The small values of the damping in this range (Fig. 9) just reflect the energy loss through hysteretic damping; for a purely elastic soil c would be zero.

Table 3. Static stiffnesses of rigid circular foundation on a stratum-over-rigid-base*

Type of loading	Static stiffness	Range of validity†	Soil profile
Vertical:	$K_v = \frac{4GR}{1-\nu} \left(1 + 1.28 \frac{R}{H} \right)$	$H/R > 2$	
Horizontal:	$K_h = \frac{8GR}{2-\nu} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R}{H} \right)$	$H/R > 1$	
Rocking:	$K_r = \frac{8GR^3}{3(1-\nu)} \left(1 + \frac{1}{6} \frac{R}{H} \right)$	$4 > H/R > 1$	
Torsion:	$K_t = \frac{16}{3} GR^3$	$H/R > 1.25$	

* Adapted from Kausel⁸⁸ and Kausel *et al.*⁸⁹

† For $H/R < 2$ or 1 these expressions would still provide reasonable estimates of the actual static stiffnesses

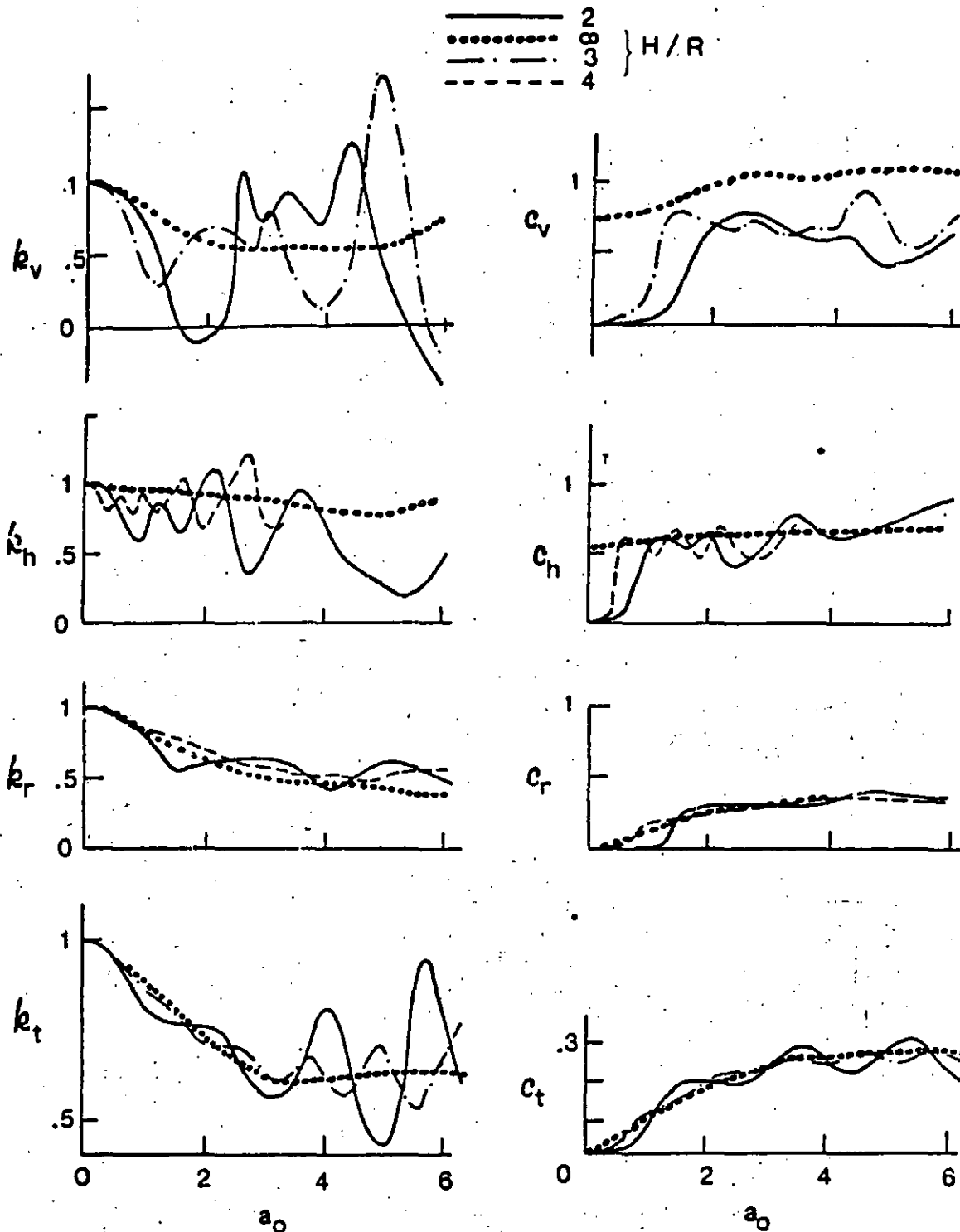


Figure 8. Dynamic coefficients of rigid circular footing on stratum-over-bedrock; effect of H/R ratio ($\nu = 1/3$, $\xi = 0.05$)^{33, 84, 90}

The phenomena described in the two preceding paragraphs are observed to a larger or lesser degree in all four modes of vibration. However, there exist marked differences among the dynamic coefficients of vertical, swaying, rocking and torsional oscillations. Specifically:

1. For rocking and torsion, k and c are relatively smooth functions of a_0 , rapidly approaching the corresponding half-

space curves as the layer thickness increases beyond $3R$. Thus, H/R exerts only a small influence on the variation of these two coefficients. On the other hand, for vertical and horizontal translation, k and c display some very pronounced fluctuations with a_0 . Both the location and the shape of the resonant valleys are quite sensitive to variations in H/R , and only for H/R values larger than 8 do

both strip and circular footings (factors of 1/5 and 1/6, respectively).

Dynamic behavior. Figures 10 and 11 portray the variation with frequency of the dimensionless compliance functions EF_v , where $a = v$ or h , and EB^2F_r . Specifically, Fig. 10 intends to show the effect of H/B , and Fig. 11 the effect of ν . The results of Fig. 10 were obtained for $\nu = 0.49$ and $\xi = 0.05$, with four different values of H/B , i.e. 1, 3, 8 and ∞ ; the last value corresponds to the homogeneous halfspace and is included for a comparison. Figure 11 shows the effect of ν on vertical and rocking compliances only, for a layer with $H/B = 2$ and a homogeneous halfspace; the effect of ν on swaying, being of secondary importance, is not studied herein.

The same general trends observed in the dynamic behavior of circular foundations can now be seen in the

response of strip footings, although some differences are also obvious.

One first notices in Figs. 10-11 that due to the presence of bedrock both the in-phase (real) and the 90°-out-of-phase (imaginary) components of displacement (compliance) are not smooth and monotonically decreasing functions of frequency, as on a halfspace. Instead, they exhibit peaks and valleys at frequencies related to the natural frequencies of the stratum. Note that, in general, the peaks of a compliance function correspond to valleys in the impedance function.

The major differences between strip and circular foundations stem from the much greater sensitivity of the vertical and swaying oscillation of a strip to variations in H/B . Even for $H/B = 8$, relatively high amplitude peaks are observed in the two compliance functions of the strip, for the case $\xi = 0.05$; their difference from the halfspace

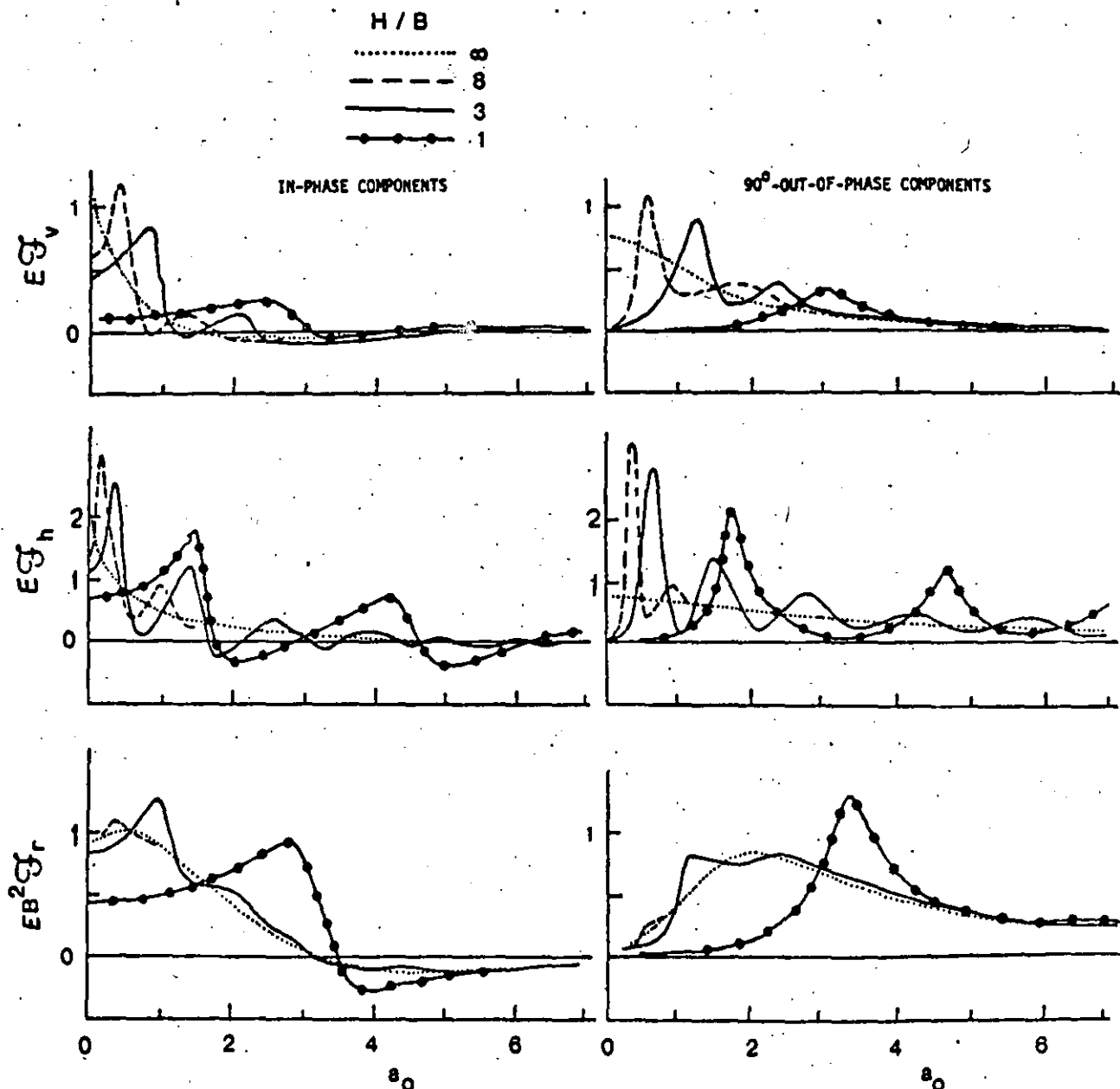


Figure 10. Compliance functions of rigid strip footing on stratum-over-bedrock; effect of H/B ratio ($\nu = 0.49$, $\xi = 0.05$)

compliances is substantial. On the other hand, rocking vibrations of a strip exhibit very similar trends with rocking of a circular plate; beyond $H/R = 3$ the presence of bedrock is hardly noticeable.

In the case of vertical loading, the resonant peaks are not as sharp as those of the horizontal displacements. In fact, on very shallow deposits ($H/B = 1$) only a single flat resonance takes place, which is characteristic of a highly damped system. A possible explanation of such a behavior has been suggested by Gazetas and Roesset³⁹: at frequencies below the first resonance some 'leakage' of energy occurs in the form of laterally propagating P , S - and R -waves. Evidence in favor of this explanation comes from the fact that the first resonant frequency, a_{0r} , lies in between the fundamental natural frequencies of the stratum in vertical S -waves, $a_{0s,1}$, and in vertical P -waves, $a_{0p,1}$. For example, Fig. 11 shows that, for $H/B = 2$ and $\nu = 0.40$, $a_{0r} \approx 1.30$ compared to $a_{0s,1} = 0.785$ and $a_{0p,1} = 1.90$. Recall that for the circular foundation a_{0r} was much closer to $a_{0p,1}$.

No extensive numerical results for rigid rectangular foundations supported by a soil stratum have been found in the literature.

Foundation on stratum over a halfspace

The homogeneous halfspace and the stratum-over-rigid-base are two idealizations of extreme soil profiles. A more general soil model, the stratum-over-halfspace, is studied in this subsection. Besides the H/R or H/B ratio, the moduli ratio G_1/G_2 is needed to describe such a soil model. When G_1/G_2 tends to 0, the stratum-on-rigid base is recovered; when it becomes equal to 1, the model reduces to a homogeneous halfspace. Thus, the results presented in this section help in bridging the 'gap' between 'halfspace' and 'stratum' solutions to which we have restricted our attention until now (Figs. 5-11).

Numerical solutions for a uniform layer over a halfspace have been published by Hadjian and Luco³⁷ who studied the dynamic of circular foundations, and by Gazetas and Roesset^{38,39} who studied the response of strip footings.

Based on the results provided by Hadjian and Luco,³⁷ the author has derived simple but reasonably accurate formulae for the static stiffnesses of a rigid circular disk, in terms of H/R and G_1/G_2 . Table 5 displays these formulae, which are valid for the usual case in which $G_1 < G_2$, i.e. a halfspace stiffer than the layer. At the lower limit, $G_1/G_2 \rightarrow 0$, these expressions reduce to those of Table 3 for a layer-on-rigid-base; at the upper limit, $G_1/G_2 = 1$, the halfspace expressions of Fig. 5 are recovered. At intermediate values, as the rigidity of the supporting halfspace decreases, the static stiffnesses of the foundation decrease, apparently due to increasing magnitude of strains in the halfspace. The results are intuitively obvious and need no further explanation.

For circular footings, no results are presented here on dynamic stiffness and damping coefficients, but reference is made to the original publication by Hadjian and Luco.³⁷

The variation of the dynamic compliances of a strip footing with a_0 and G_1/G_2 is portrayed in Fig. 12 for a layer with $H = 2B$, $\nu = 0.40$ and $\xi = 0.05$. Shallower as well as deeper layers have been examined by Gazetas and Roesset.^{38,39}

An inspection of Fig. 12 indicates that the effects of layering increase with increasing contrast between G_1 and G_2 ; these effects are extreme for a layer on rigid bedrock ($G_1/G_2 = 0$) and, naturally, disappear in the case of a homogeneous halfspace ($G_1/G_2 = 1$). There are two main effects of increasing the softness of the halfspace. First, even for small positive values of G_1/G_2 , i.e. as long as we do not deal with an infinitely rigid bedrock, the static translational displacement tends to infinity, although at a

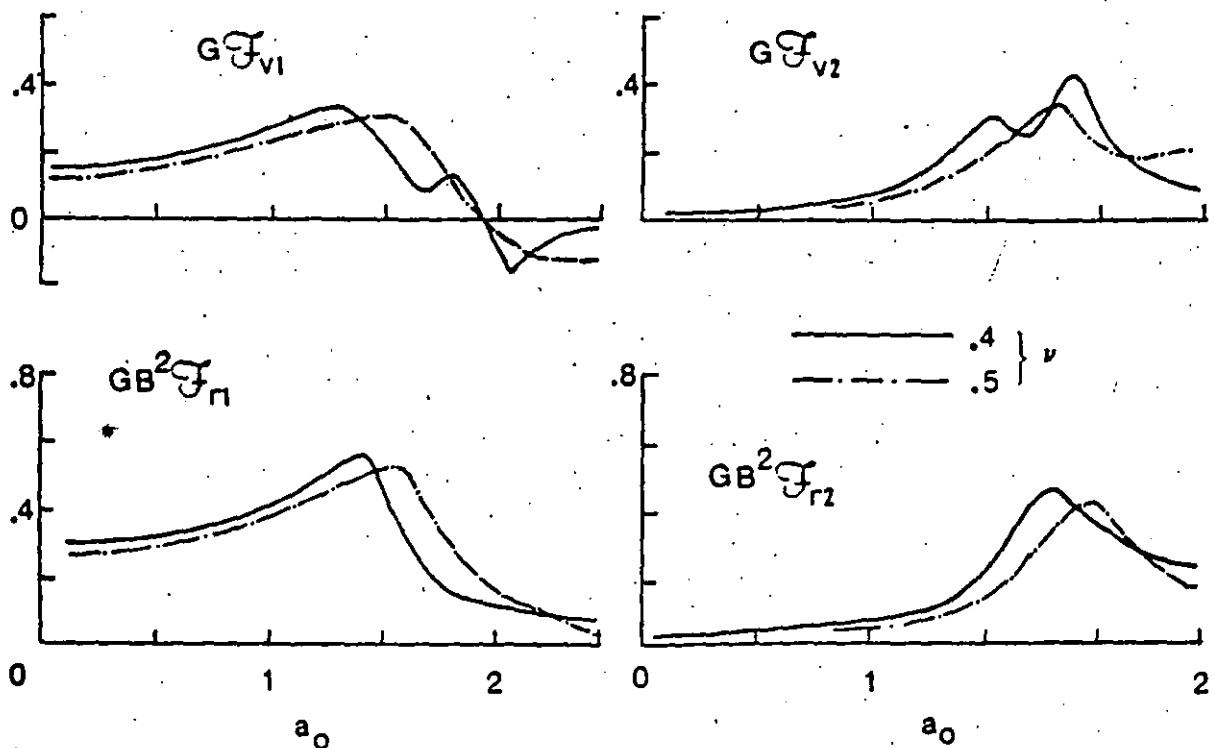


Figure 11. Compliance functions of rigid strip footing on stratum-over-bedrock: effect of ν ($H/B = 2$, $\xi = 0.05$)

Table 3. Static stiffnesses of circular foundations on a stratum-over-halfspace*

Type of loading	Static stiffness ^a	Range of validity	Profile
Vertical:	$\frac{4G_1 R}{1-\nu_1} \cdot \frac{1+1.28 \frac{R}{H}}{1+1.28 \frac{R G_1}{H G_2}}$	$1 < \frac{H}{R} < 5$	
Horizontal:	$\frac{8G_1 R}{2-\nu_1} \cdot \frac{1+\frac{1}{2} \frac{R}{H}}{1+\frac{1}{2} \frac{R G_1}{H G_2}}$	$1 < \frac{H}{R} < 4$	
Rocking:	$\frac{8G_1 R^3}{3(1-\nu_1)} \cdot \frac{1+\frac{1}{6} \frac{R}{H}}{1+\frac{1}{6} \frac{R G_1}{H G_2}}$	$0.75 < \frac{H}{R} < 2$	

* Derived by the author on the basis of results provided by Hadjian and Luco¹¹

much slower rate compared to the halfspace displacements. Thus, in the very low frequency range the in-phase (real) components of the displacements (compliances) are larger than in the case of rigid bedrock.

On the other hand, at any specific frequency, the radiation damping of the system increases due to partial transmission of body-waves in the halfspace and the existence of surface waves at all frequencies. Consequently, the resulting variation of displacements with ω_0 is smoother than in the rigid rock case.

The effects of decreasing stiffness and increasing radiation damping are of major importance at frequencies equal to or lower than the first resonant frequencies of the system. With G_1/G_2 ascending from 0 (rigid bedrock) towards 1 (homogeneous halfspace), the aforementioned resonant peaks become shorter and flatter and the corresponding resonant frequencies shift to lower values.

Higher resonant peaks also decrease substantially and may in some cases be completely suppressed. An example: the third resonant peak in swaying (which, we recall, occurs at the second natural frequency of the stratum in S-waves) disappears as soon as G_1/G_2 exceeds 0.10.

Finally, it is hardly surprising that the vertical dynamic compliances are most sensitive to variations in G_1/G_2 , while rocking compliances are least sensitive. The concept of a 'dynamic pressure bulb' proves again very convenient in explaining these differences. The depth of the 'bulb' attains relatively large values in case of vertical vibrations, somewhat smaller values for swaying and very small values for rocking.

SOME RESULTS FOR RIGID SURFACE FOUNDATIONS OF 'ARBITRARY' SHAPE

Only a few numerical results are available for foundations having 'arbitrary' geometries, i.e. plan shapes other than strip, circular or rectangular. One reason for the lack of interest is that foundations of such 'arbitrary' shape are not constructed very frequently. Moreover, substantial computational effort must be expended to obtain dynamic solutions for such foundation geometries. The following presentation is divided into two parts: one dealing with vertically loaded footings of various 'solid' shapes and one with the complete response of annular footings.

Vertically loaded foundations of various 'solid' shapes

Analytical expressions for the static stiffnesses of rigid foundations supported to an elastic halfspace and having several different shapes (but without internal holes) can be derived from the results of Borodachev²⁴ (see also Selvadurai⁹). It is convenient to cast these expressions into our familiar form:

$$K_v = \frac{4GR_0}{1-\nu} J_v \quad (55)$$

in which: $R_0 = \sqrt{A/\pi}$ is the radius of the 'equivalent' circular foundation, A being the area of the soil-footing contact surface; J_v is a shape-dependent correction factor, numerical values of which have been tabulated in Table 6 for numerous plan shapes.

Table 6 in conjunction with Table 2 (part 1) can be used for determining the vertical static stiffnesses of a variety of foundations with very good accuracy. Moreover, the following trends are worthy of note:

1. The circular disk yields the smallest stiffness of all footings with a given contact area.
2. Of all rigid footings with an n -sided polygon-shaped plan of a given area, the regular n -sided polygon yields the smallest stiffness.
3. The correction factor depends primarily on the 'aspect' ratio of the foundation, being surprisingly insensitive to the details of each particular shape. By 'aspect' ratio we somewhat loosely mean the ratio between largest and smallest critical foundation dimensions. Thus, for example, a rhombus, a rectangle and an ellipse having the same aspect ratio, equal to 4, yield very similar correction factors of about 1.12.

In conclusion it seems that, by means of equation (55) and Tables 2 and 6, very good estimates can be routinely made of the vertical static stiffnesses of arbitrary-shaped rigid foundations on homogeneous halfspace.

No information is available regarding the variation with frequency of the dynamic stiffness coefficient k_v . However, inspection of Figs. 5 and 7 reveals that the 'equivalent' circular footing can successfully predict the actual k_v of rectangular footings with aspect ratios up to 4, at least in the low and medium frequency range ($\omega_0 \leq 1.5$). Hence, and in view of the observed insensitivity of the static stiff-

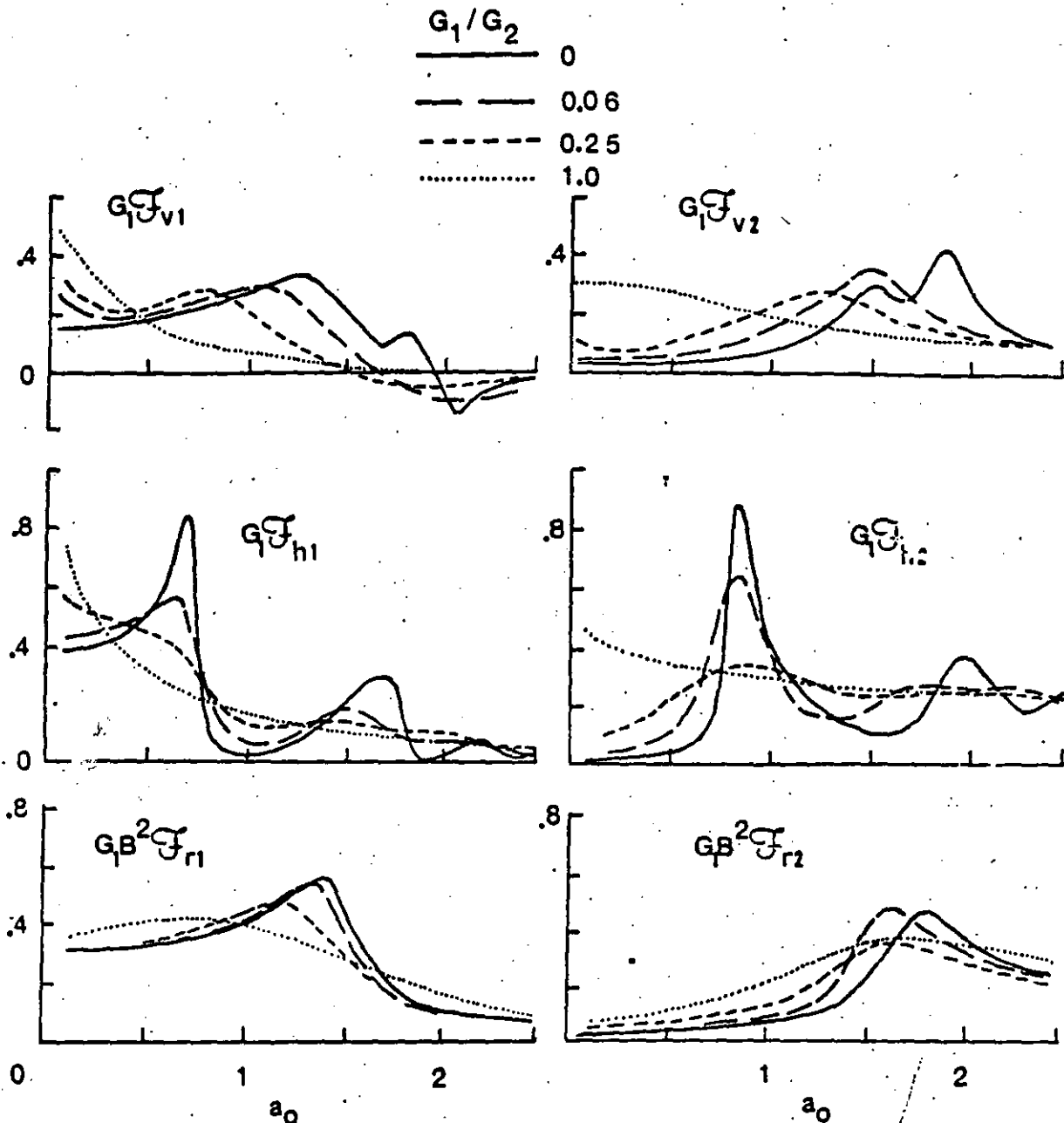


Figure 12. Effect of G_1/G_2 ratio on compliance functions of rigid strip footings on soil layer-over-halfspace ($H/R = 2$, $\nu = 0.40$, $\xi = 0.05$)

ness to the details of the foundation shape, it is proposed that the variation of k_v with a_0 for an 'arbitrary'-shaped foundation be estimated from Fig. 5 using the 'equivalent' radius, $R_0 = \sqrt{A/\pi}$.

On the other hand, the damping coefficient c_v is practically independent of frequency, as it is evident from Figs. 5 and 7. For an arbitrary-shaped foundation, moreover, Dobry *et al.*⁹⁵ have recently derived expressions for the (radiation) damping coefficients in vertical and swaying vibrations, based on simple but realistic physical approximations. For the vertical damping coefficient of a surface foundation their expression reduces to:

$$c_v = \frac{0.85}{J_v} \quad (56)$$

in which J_v = the shape correction factor to be read from Table 6 or Table 2. Consequently, the vertical dynamic impedance of an arbitrary-shaped rigid foundation on a homogeneous halfspace can be directly and reliably estimated using the provided information.

For the other translational and rotational modes of vibration of arbitrary-shaped rigid foundations, much less information is presently available. The 'equivalent-circle' approximation appears to be a simple and reasonable choice.

Rigid annular foundation on soil stratum

It appears that the conclusions of the preceding subsection cannot be extended to foundations containing internal holes, like annular and crossed-beam foundations.

Table 6. Values of shape-dependent correction factor for vertical static stiffnesses*

Shape of foundation plan	J_v
Circle	1.00
Regular hexagon	1.01
Semicircle	1.05
Equilateral triangle	1.07
Triangle with angles, 45°, 45°, 90°	1.10
Triangle with angles, 30°, 60°, 90°	1.12
Ellipse with $a/b = 2$ †	1.03
Ellipse with $a/b = 3$	1.07
Ellipse with $a/b = 4$	1.13
Ellipse with $a/b = 6$	1.21
Rhombus with an angle of 60°	1.07
Rhombus with an angle of 45°	1.14
Rhombus with an angle of 30°	1.27
Rectangle with $L/B = 2$	1.03
Rectangle with $L/B = 4$	1.13
Rectangle with $L/B = 8$	1.23

* Based on Borodachov⁹⁶

† a, b are the major, minor axes of the ellipse

For example, the vertical static stiffness of such foundations does not increase in proportion to the square-root of the contact area, A , as equation (55) implies. In other words, the 'equivalent-circle' approximation is no longer valid.

Results for the static displacements of a rigid circular ring on a halfspace have been published: by Egorov⁹⁶ and Dhawan⁹⁷ for vertical loading; by Dhawan⁹⁸ for moment loading; and by Dhawan⁹⁹ for torsional loading. Wong and Luco⁴⁴ studied the dynamic vertical response of a rigid square foundation with a square internal hole. Recently, Tassoulas⁸⁸ presented a comprehensive parametric investigation of the dynamic behavior of rigid circular-ring foundations on a homogeneous stratum-over-rigid-base. All modes of vibration were considered and the effect of the dimensionless parameters R_i/R , H/R and $a_0 = \omega R/V_s$ was graphically illustrated. The following discussion is based primarily on the results of Tassoulas,⁸⁸ although some results from Dhawan,⁹⁷⁻⁹⁹ are also included for comparison.

Figure 13 plots the variation of all static stiffnesses of a circular ring versus R_i/R , where R_i is the internal radius. As expected, all stiffnesses invariably decrease as the size of the hole increases, while the radius R remains constant. In the limit, when R_i becomes equal to R , the stiffnesses vanish (concentrated ring load). However, the sensitivity of stiffnesses to increases in the R_i/R ratio is surprisingly small. Particularly insensitive are the rocking and torsional stiffnesses. For values of R_i/R up to 0.50, they are practically equal to the corresponding stiffnesses of the circular foundation with radius R ; for $R_i/R = 0.95$, K_r and K_t are respectively equal to 86% and 83% of the circular stiffnesses in torsion and rocking (while the contact area has been reduced to only 10% of the original circle). The explanation is rather obvious: the large shear or normal stresses which develop near the outside edge of the footing, i.e. at large distances from the center, contribute substantially to equilibrating the applied torsion or rocking moments. In other words, the central foundation 'core' is 'underutilized' and, hence, its 'removal' is of little consequence. Notice also that the variation of K_r and K_t with R_i/R is independent of H/R - a result consistent with the shallow 'pressure bulb' of moment loading discussed in preceding sections (e.g. Table 3).

The horizontal stiffness is only slightly more sensitive to R_i/R . In contrast, the vertical stiffness is relatively

sensitive not only to R_i/R but to H/R as well. An example: increasing R_i from 0 to 0.95 R reduces K_v to 70% of its original value for $H/R = 2$; for a halfspace the corresponding value is 77%. But, again, for values of R_i/R up to 0.5, K_v remains practically equal to its original value, $4GR(1+1.28R/H)/(1-\nu)$.

Figure 14 depicts the variation with a_0 of the dynamic stiffness and damping coefficients, k and c . Four values of R_i/R are considered, 0, 0.5, 0.8 and 0.90, with the first value corresponding to a solid circular foundation. It is clear that: (1) there is little change in k and c with R_i/R ; (2) the effect of R_i/R is largest for vertical vibrations; and (3) the differences in the four sets of curves occur in the high frequency range ($a_0 > 1.5$).

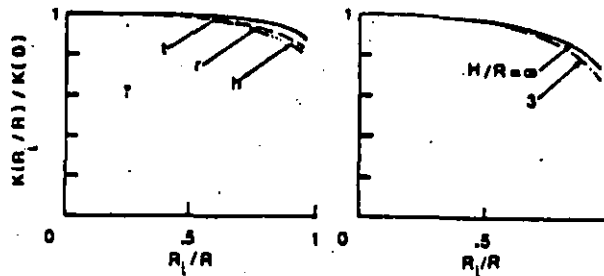


Figure 13. Static stiffnesses of a rigid annular foundation (R_i = internal radius)^{88,97}

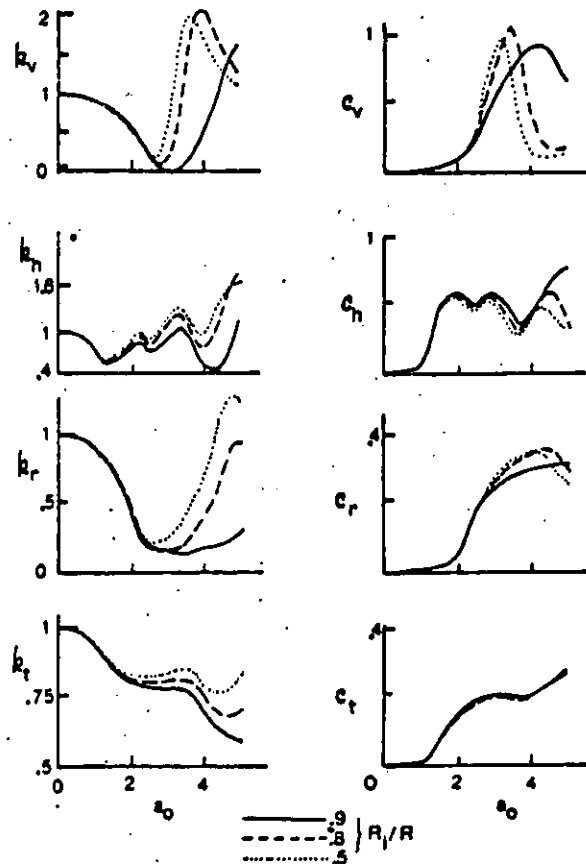


Figure 14. Dynamic coefficients of a rigid annular foundation⁸⁸

THE INFLUENCE OF INHOMOGENEITY, ANISOTROPY AND NONLINEARITY OF SOIL

The results presented so far have been based on the simplifying assumption that the soil can be modeled as a homogeneous, isotropic and linearly visco-elastic stratum or halfspace. However, real soil strata frequently increase in rigidity with depth as a reflection of the increase in overburden pressure, while in some other cases weathered crusts, in which rigidity decreases with depth, overlay deposits of softer clay. Furthermore, laboratory tests show that soils deform differently in the vertical and horizontal directions – a manifestation of anisotropic fabric acquired during natural formation and subsequent loading. Finally, when subjected to large enough stresses, soils respond as nonlinear and inelastic materials.

This section of the paper presents characteristic results and important conclusions from a number of recent studies aimed at assessing the influence of soil inhomogeneity, anisotropy and nonlinearity on the behavior of dynamically loaded surface foundations.

Effect of soil inhomogeneity

Existing dynamic finite-element formulations can easily, albeit approximately, simulate a continuous variation of soil properties, by dividing the deposit into a number of homogeneous layers of increasing or decreasing stiffness. Yet, such formulations have not been adequately exploited to parametrically study the dynamic behavior of foundations. Thus, most of the available solutions have been derived using analytical and semi-analytical methods.

Numerous studies have been published for the vertical static problem. Prominent among them is the work of Gibson and his co-workers^{13, 100, 101} who studied the response to arbitrary surface loads of a halfspace or stratum whose moduli increase linearly with depth, i.e. in the form $G = G_0 + \bar{m}(z/R)$, where G_0 and \bar{m} are the moduli at the surface and at a one-radius (or one-semiwidth) depth. These studies revealed that for an incompressible medium, i.e. with Poisson's ratio of 0.50, the stress distribution is hardly influenced by the degree of inhomogeneity; in the particular case of zero surface modulus ($G_0 = 0$) this distribution is identical with the distribution in a homogeneous

halfspace, regardless of foundation geometry. The surface settlement, on the other hand, being quite sensitive to the assumed soil profile, becomes directly proportional to the applied normal pressure when $G_0 = 0$, independent of the size and shape of the loaded area and of the thickness, H , of the soil layer on a rigid but frictionless (smooth) base. Thus, such a soil behaves like a Winkler medium rather than a homogeneous halfspace, its spring constant being simply equal to $2\bar{m}/R$. Expressions for the vertical static stiffnesses of surface foundations of several shapes supported by such a soil deposit (frequently referred to as 'Gibson soil') are shown in Table 7.

This behavior remains only qualitatively true when drained soil behavior is taking place (i.e. $\nu < 0.50$). Thus, with increasing degree of inhomogeneity (e.g. increasing \bar{m}) normal and shear stresses affect the soil at greater vertical and lesser horizontal distances, in agreement with intuition that expects stiffer material to attract larger stresses. On the other hand, surface displacements, being moderately sensitive to ν , do tend to become proportional to the applied local pressures as m increases. It is, thus, generally concluded that an inhomogeneous deposit leads to more uniform distribution of stresses under rigid foundations than the simple elastic theory (homogeneous halfspace) predicts.

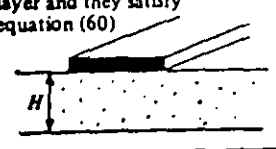
This general behavior of vertically loaded surface foundations on an inhomogeneous soil deposit has been recently shown to be applicable to torsionally loaded circular footings.⁹³

The static and dynamic vertical, horizontal and rocking behavior of a rigid strip foundation supported by a halfspace or a stratum whose wave velocities increase linearly with depth, has been studied by the author.⁹³ Some results of that study are presented here for a halfspace consisting of soil with a constant mass density, a constant Poisson's ratio, $\nu = 0.25$, and a constant hysteretic damping, $\xi = 0.05$, and an S-wave velocity varying with depth according to:

$$V_s = V_0 \left(1 + \lambda \frac{z}{B} \right) \quad (57)$$

in which: V_0 = surface velocity; $2B$ = foundation width; and λ = the dimensionless rate of inhomogeneity.

Table 7. Static stiffnesses of rigid foundations on inhomogeneous and cross-anisotropic soils*

Type of loading	Static stiffness	Range of validity	Soil profile
Vertical, on foundation of any shape	$2 \frac{\bar{m}}{B} A$ $A = \text{contact area}$	Undrained loading conditions	Cross-anisotropic 'Gibson' halfspace obeying equation (60), with a modulus $G_{VH} = \bar{m}(z/B)$
	$\frac{\bar{m}}{B} A \left(1 + \frac{E_V G_{VH} }{4 - n} \right)$ $A = \text{contact area}$		General cross-anisotropic 'Gibson' halfspace (i.e. not obeying equation (60)) with a modulus $G_{VH} = \bar{m}(z/B)$
Vertical, on rigid strip	$\frac{45 E_V}{\left(1 + 3.5 \frac{H}{B} \right) (4 - n) (1/6) (H/B)}$	$1 < \frac{H}{B} < 4$ $0.5 < n < 2.5$	Shallow cross-anisotropic undrained layer; soil properties are uniform throughout the layer and they satisfy equation (60)
Horizontal, on rigid strip	$\frac{8}{5} E_V \frac{1 + \frac{5B}{3H}}{4.10 - n(H/B)^{0.10}}$	$1 < \frac{H}{B} < 6$ $0.5 < n < 2.5$	

* Based on results by Gibson¹³ and Gazetas¹⁴

Figure 15 portrays the dependence of λ of the normalized vertical, horizontal and rocking stiffnesses. As one might expect, the vertical stiffness exhibits the largest sensitivity to λ and the rocking stiffness the smallest—another manifestation of the difference in the 'pressure bulbs' of the three types of loading.

The effect of soil inhomogeneity on the three dynamic compliance functions is shown in Fig. 16. Two values of the parameter λ are considered: 0 and 1.5. The former value corresponds to a homogeneous halfspace, the wave velocity of which, V_{eff} , was selected to be the same with the wave velocity of the inhomogeneous halfspace at a depth equal to the foundation halfwidth, B ; i.e.:

$$V_{eff} = V_0(1 + \lambda) \quad (58)$$

The choice of such a homogeneous halfspace for the comparison has been motivated by the frequent use in practice of solutions developed for homogeneous soils, with an effective modulus equal to the actual modulus at a depth equal to B or R , to approximate the actual response.

It is evident from the comparison of Fig. 16 that, in the low frequency range examined, the inhomogeneous medium yields vertical and horizontal displacements (both in-phase and 90°-out-of-phase components) which are, indeed, of about the same average level with those of the 'equivalent' homogeneous halfspace. However, the rocking motions on the inhomogeneous deposit are seriously underpredicted by the chosen homogeneous halfspace

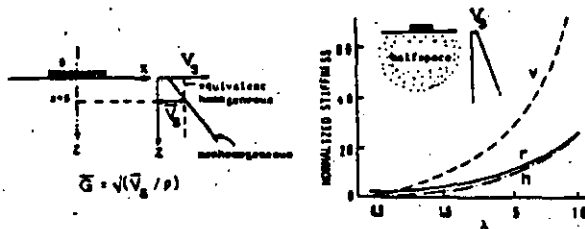


Figure 15. Static stiffnesses of a rigid strip foundation on an inhomogeneous halfspace ($\nu = 0.25$)⁵³

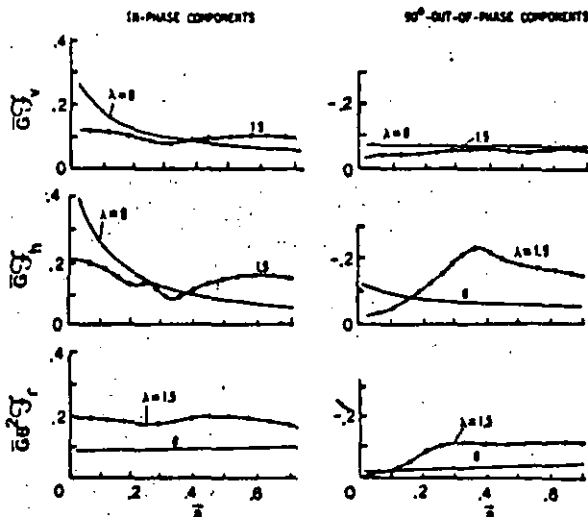


Figure 16. Compliance functions of a rigid strip foundation on an inhomogeneous halfspace ($\nu = 0.25$, $\xi = 0.05$)⁵³

model; to yield comparable rotation levels the two media must have the same moduli at a depth of about $B/2$, or somewhat less.

Furthermore, a substantial difference between the ' $\lambda = 1.5$ ' and ' $\lambda = 0$ ' compliance functions may be noted. Namely, the former are not smoothly varying functions of a_0 , as are the latter, but exhibit peaks and valleys which are apparently the result of resonance phenomena. In the very low frequency range the imaginary components of the ' $\lambda = 1.5$ ' compliances attain quite small values, increasing almost linearly with a_0 .

These phenomena are reminiscent of the dynamic behavior of foundations supported by a stratum-over-a-rigid-base (Figs. 10-11). In this case, total reflection of the downward propagating waves is possible due to the increasing soil velocity with depth. A discontinuity in velocity is not necessary for such a reflection, since the wave rays in inhomogeneous media with linear velocity profiles are not straight lines but circular arcs. As a result, however, the resonant peaks on inhomogeneous soils are very flat and the radiation damping is never zero. In contrast, the presence of stiff rock-like material at some depth beneath the surface leads to very sharp and pronounced displacement peaks, occurring at well separated frequencies (see Fig. 8-11).

Deposits with a weathered crust. The dynamics of a rigid strip foundation on an idealized soil deposit consisting of a homogeneous stratum or halfspace overlain by a top stiffer layer in which the shear modulus decreases as a second-degree parabola (Fig. 17) has been recently studied by the author.⁵⁵ Also recently, Rowe and Booker,¹⁰² presented comprehensive parametric results pertaining to vertical static uniform loading, both plane-strain and axisymmetric, on several realistic inhomogeneous deposits, including a homogeneous layer with a weathered crust.

Figure 17⁵⁵ illustrates the effect of the reduced crust thickness D_{cr}/B on the three normalized dynamic impedance functions of a rigid strip. The soil profiles are characterized by a shear modulus ratio, G_{cr}/G , equal to 4, and realistic values of the Poisson's ratios, ν_{cr} and ν , equal to 0.25 and 0.45, respectively. Note that the ratios G_{cr}/B and D_{cr}/B may be considered as indexes of the degree and depth of weathering.

It is evident that the presence of the crust has a pronounced effect on all impedances. Especially sensitive to changes in D_{cr}/B are the horizontal impedances, whereas the vertical and rocking ones are somewhat less affected. Variations in the assumed moduli ratio (not depicted in Fig. 17) have been shown to have a similar effect.

Furthermore, the weathering effects exhibit a strong dependence on frequency. For example, at low frequency factors vertical impedances are relatively indifferent to variations (within realistic limits) in either stiffness or depth of the crust. This is understandable in view of the fact that vertical surface strip loading affects the soil at great depths, of the order of $8B$, as discussed previously; thus, a stiff crust with $D_{cr} < B$ can only be of secondary importance. This picture, however, changes at higher frequency factors, i.e. lower wavelength-thickness ratios, as may be seen in Fig. 17. Greater participation of surface (Rayleigh) waves in the motion and stronger reflection of the body waves emanating from the foundation by the soft layer interface, may be part of the explanation.

It may also be noticed that rocking impedances show about the same sensitivity to weathering throughout the

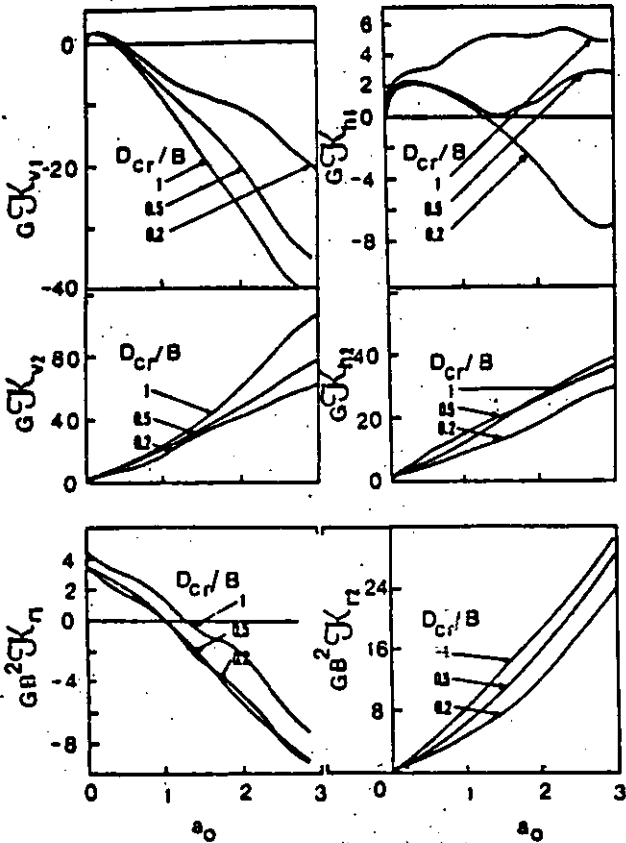
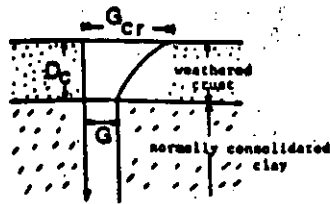


Figure 17. Impedance functions of a rigid strip foundation on deep soil deposit with a weathered crust ($G_{cr}/G = 4$, $\nu_{cr} = 0.25$, $\nu = 0.45$, $\xi = 0.05$)⁵⁵

frequency range examined, and that, in general, the imaginary parts of all three impedance functions exhibit only a small dependence on either D_{cr}/B or G_{cr}/G .

Reference is made to the original publication by the author for a more complete parametric assessment of the dynamic effects of 'weathering' on strip foundations. The author sees a definite need to extend these studies to dynamically loaded circular foundations.

Effect of soil anisotropy

Numerous experimental studies have shown that most natural soils and rocks possess anisotropic deformational characteristics.^{13, 103-106} This anisotropy stems from the fact that soil fabric is intimately related to the mechanical processes occurring during formation, which involves anisotropic stress systems. Thus, for example, natural clay deposits formed by sedimentation and, subsequently, one-dimensional consolidation over long periods of time acquire a fabric that is characterized by particles or particle clusters oriented in a horizontal arrangement. This preferred orien-

tation makes the clay a cross-anisotropic material with a vertical axis of symmetry. Similarly, fabric anisotropy in sands arises from the influence of gravity forces and particle shape on the deposition process, while in rocks the anisotropy may result from the anisotropy of forming minerals and micro- or macro-fabric features.

While an isotropic elastic material is characterized by only two independent elastic constants (e.g. shear modulus and Poisson's ratio), five parameters are needed to describe the stress-strain relationships of an elastic cross-anisotropic material: a Young's modulus E_V in the vertical direction; a Young's modulus E_H in the horizontal direction ($E_H = nE_V$); a Poisson's ratio ν_{VH} for the effect of vertical on horizontal strain; a Poisson's ratio ν_{HH} for the effect of horizontal on complementary horizontal strain; and a shear modulus $G_{VH} = G_{HV}$ for distortion in any vertical plane, i.e. any plane parallel to the vertical axis of material symmetry. Note that isotropic materials are just a particular class (subset) of cross-anisotropic materials characterized by $n = 1$ (i.e. $E_H = E_V \equiv E$, $\nu_{VH} = \nu_{HH} \equiv \nu$ and $G_{VH} \equiv G = E/2(1 + \nu)$).

The condition of incompressibility, appropriate for undrained loading conditions, requires that:

$$\nu_{VH} = 0.50, \quad \nu_{HH} = 1 - \frac{n}{2} \quad (59)$$

and, thus, reduces the number of independent material constants to three. Moreover, utilizing the results of several experimental investigations, the author has recently shown⁵⁴ that, in many clays, the shear modulus G_{VH} is closely related to the other four material constants. Under undrained conditions, for example, with a reasonable accuracy:

$$G_{VH} = \frac{E_V}{4 - n} \quad (60)$$

Thus, the number of independent material constants reduces to two, under undrained conditions, and to four, under drained conditions.

Results for statically loaded rigid foundations on cross-anisotropic soils have been presented by Gerrard and Harrison,^{92, 107} Gibson¹³ and Gazetas.⁵⁴ Solutions for dynamically loaded foundations on cross-anisotropic homogeneous soil deposits whose elastic constants satisfy equation (60) (or its 'drained' counterpart, not given here) have been presented by Kirkner⁶⁷ for circular foundations on halfspace and by the author^{54, 108, 109} for strip foundations on homogeneous stratum or on halfspace. Table 7 and Fig. 18 offer some characteristic results from the mentioned publications.

Specifically, Table 7 displays simple but fairly accurate formulae for the vertical static stiffness of arbitrary-shape foundations on a cross-anisotropic, incompressible and inhomogeneous halfspace ('Gibson' soil), and for the vertical and horizontal static stiffnesses on a homogeneous and incompressible cross-anisotropic shallow soil stratum-on-rigid base. Notice that on an anisotropic 'Gibson' halfspace obeying equation (60), the degree of anisotropy has no influence on the vertical stiffness. In all other cases, however, the stiffnesses increase substantially with $n = E_H/E_V$. In fact, for $n \rightarrow 4$ all stiffnesses tend to infinity, since the strain energy of such a material is zero for all possible applied stress systems.^{13, 107}

Regarding the sensitivity of the dynamic response to variations in the degree of anisotropy, n , under undrained conditions, the main conclusions of the aforementioned studies are summarized as follows.

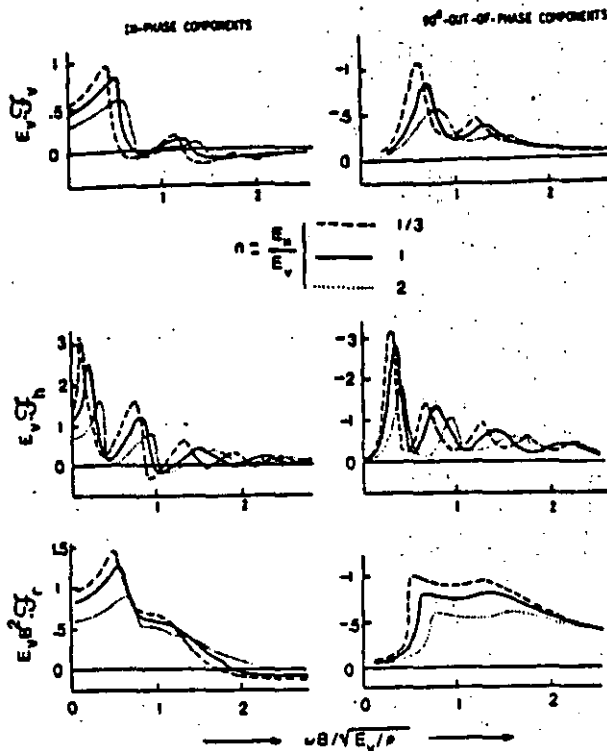


Figure 18. Effect of soil anisotropy on compliance functions of a rigid strip foundation on stratum-over-bedrock (undrained conditions, $H/B = 3$, $\xi = 0.05$)⁵⁴

For the two compressional modes of vibration, i.e. vertical and rocking, the influence of anisotropy is appreciable but seems to decrease as the thickness of the stratum-over-bedrock decreases, with the shear modulus G_{VH} remaining constant. The effect of anisotropy on the shearing mode of vibration, i.e. swaying, is similar with the effect of anisotropy on G_{VH} and independent of the layer thickness; in other words, two soils with identical G_{VH} and H but with different Young's moduli and n , will yield very similar undrained dynamic displacements.

Figure 18 portrays the dependence on n of the three compliance functions of frequency, for a layer with $H = 3B$ and constant E_v . It is concluded that, in the low and medium frequency range, by increasing n the dynamic displacements decrease and the resonant frequencies shift to the right, roughly in proportion to $(4-n)^{-1/2}$. Obviously, the corresponding decrease in the static stiffness may be held responsible for this effect. At certain higher frequencies, however, rocking and vertical displacements increase, instead of decreasing, with n . Nonetheless, the practical significance of such a reversal will probably be small, in view of the small displacement amplitudes at such frequencies.

In conclusion, anisotropy exerts its main effect through the static stiffnesses of the soil-foundation system.

Effect of soil nonlinearity

In current soil-structure interaction practice the nonlinear plastic soil behavior is usually approximated through a series of iterative linear analyses, using soil properties (moduli and damping ratios) that are consistent with the level of shearing strains resulting from the previous analysis.^{34, 110} These analyses may utilize a wealth of available experimental soil data relating the decrease in (secant)

shear modulus and the increase in (effective) damping ratio with increasing amplitude of shear strain.

Soil nonlinearities are not usually of a significant magnitude in machine foundation problems, for the reasons mentioned in the introduction. (In contrast, the response of soil-foundation systems to strong earthquakes is very sensitive to deviations from linear-elastic soil behavior.) Nonetheless, even with small amplitudes of vibration, it is almost certain that some soil elements will undergo plastic deformations. For instance, under the edges of rocking shallow foundations, large concentration of stresses and low confining pressures will invariably lead to yielding of soil.*

An interesting parametric investigation of the effects of soil nonlinearities on the dynamic impedance functions of a rigid strip foundation has been conducted by Jakub and Roesset.⁵⁶ In their studies the soil was modeled as a homogeneous or inhomogeneous stratum-over-rigid-base with reduced thicknesses $H/B = 1, 2$ and 4 . A Ramberg-Osgood model was used to simulate the nonlinear constitutive relation of soil, and iterative linear analyses were performed. One of the two parameters of the Ramberg-Osgood model, r , was kept constant equal to 2, while the second one, α , was varied so as to cover a wide range of typical soil stress-strain relations. For such a model the variation of secant modulus and effective damping ratio with stress amplitude is given by:

$$\frac{G}{G_0} = \frac{1}{1 + \alpha(\tau/G_0\gamma_y)} \quad (61)$$

and

$$\xi = \frac{2}{3\pi} \frac{G}{G_0} \frac{\tau}{G_0\gamma_y} \quad (62)$$

in which: G_0 = the initial shear modulus for low levels of strain; γ_y = a characteristic shear strain, typically ranging from 0.0001% to 0.01%, and τ = the amplitude of the induced shear stress.

From these studies Jakub and Roesset^{56, 65} concluded that a reasonable approximation to the swaying and rocking impedances of a rigid strip may be obtained from the available linear visco-elastic solutions (e.g. Table 4 and Figs. 10-11), provided that 'effective' values of G and ξ are estimated from equations (61)-(62) with:

$$\tau = \tau_c \quad (63)$$

where τ_c is the statically induced shear stress at a depth equal to $0.50B$, immediately below the foundation edge.

While more studies would be necessary to improve the reliability of this simple rule, its use in machine foundation analyses can be safely recommended, in view of the small local nonlinearities that usually develop.

RIGID EMBEDDED FOUNDATIONS

The response of embedded foundations to static and dynamic loads has received considerable attention. As a result, several finite-element as well as approximate continuum-type formulations have been developed, while parametric studies have explored the relative significance of the depth and 'type' of embedment. Reference is made to the work of Lysmer *et al.*,⁸³ Novak *et al.*,¹¹¹ Beredugo

* Evidence of such yielding has been presented by Richard *et al.* (Figs. 10 and 26), while recent experimental work at the University of Michigan revealed a similar phenomenon under torsionally excited footings.¹¹⁰

et al.,⁷² Waas et al.,³¹ Kausel et al.,⁸⁹ Chang-Liang,⁸⁷ Johnson et al.,¹¹² Luco,⁸⁴ Dominguez et al.,⁴⁷ Harada et al.⁷⁰ and Tassoulas,⁸⁴ among several others.

Results have been presented for circular, strip and rectangular foundations and a variety of idealized soil profiles, including the halfspace, stratum-over-bedrock and stratum-over-halfspace. In each case, the new key dimensionless problem parameter, in addition to the parameters controlling the response of surface foundations, is the relative embedment, D/B or D/R . Moreover, the assumed interface behavior at the contact between vertical sidewalls and backfill is of crucial importance. Most of the aforementioned studies assume that walls and soil remain in full contact during vibrations, as if they were welded at their interface. In reality, however, no tensile stresses can be sustained between the two media, while the magnitude of developing shear tractions cannot violate Coulomb's friction law. Hence, separation and sliding are likely to occur between sidewalls and backfill, depending primarily on the mode of vibration and the nature and method of placement of the soil. Field evidence, documented by Stokoe and Richart,¹¹³ seems to indicate that separation and sliding are more likely with clayey than with sandy soils, in accord with intuition. Furthermore, it is expected that separation will be more significant with the two antisymmetric modes of vibration (swaying and rocking), whereas sliding will be of greater importance in the two symmetric modes (vertical and torsional). Ideally 'welded' foundations are studied first.

'Welded' cylindrical foundations in a homogeneous stratum

The results to be presented are based on the work of Kausel³³ and are strictly applicable to foundations having infinitely rigid sidewalls and mat, which are all in perfect contact with the soil. Moreover, the backfill must be of very good quality and have the same properties with the soil beneath the mat. These are rather extreme conditions and, thus, yield an upper bound of the possible effect of embedment.

Table 8 displays five simple and sufficiently accurate formulae for the static stiffnesses of cylindrical foundations, perfectly embedded in a homogeneous soil layer overlying bedrock. It is evident that embedment increases the values of the static stiffnesses substantially. The increase in D/R is especially beneficial to the two rotational modes, rocking and torsion; the two translational modes, vertical and horizontal, are considerably less affected (factors of

1/2 and 2/3 for vertical and horizontal loading, as compared to 2 and 2.67 for rocking and torsion).

In contrast, the effect of D/H is more visible in the vertical and horizontal modes, appreciably less important in rocking, and negligible in torsion; this is consistent with the expected depths of the corresponding 'pressure bulbs', discussed in the preceding sections.

Note that with embedded foundations the cross-coupling stiffness, K_{hr} , can no longer be neglected, being approximately equal to $0.4K_h D$.

The effect of embedment on the frequency variation of the dynamic stiffness and damping coefficients is demonstrated in Fig. 19. We notice that k is not very sensitive to D/R . In fact, Elsabee et al.¹¹⁴ recommended that the actual frequency variation of k of an embedded foundation be approximated by the variation of the corresponding surface foundation. This seems to be very reasonable for all vibration modes at low frequencies. For rocking and torsion, in particular, the approximation will for all practical purposes be good throughout the frequency range examined; in other words, the beneficial effect of increasing D/R on the static rotational stiffnesses is preserved even at higher values of a_0 , at least for not very large D/R ratios. However, beyond the first resonant frequency, vertical and swaying vibrations exhibit undulations in k which cannot be well reproduced with the results of surface foundations.

All damping coefficients increase substantially with increasing embedment, although below the first resonance, a_{0r} , they remain small. It has been recommended^{90, 114} that for $a_0 > a_{0r}$, c be taken equal to a constant value, corresponding to the average value of c of a foundation embedded in a halfspace. To estimate this latter value of c , use may be made of the simple expressions derived by Dobry et al.⁹⁵ on the basis of simple but realistic physical approximations. For the two translational modes, the frequency-independent damping coefficients for cylindrical foundations embedded in a halfspace are approximated by:

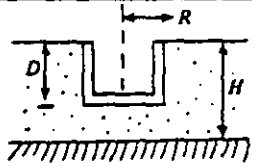
$$c_h \approx \frac{\pi(2-\nu)}{8} \frac{1+1.3(D/R)[1+(3.6/\pi(1-\nu))]}{1+\frac{1}{2}(D/R)} \quad (64)$$

and

$$c_v \approx 0.85 \frac{1+1.85(1-\nu)(D/R)}{1+\frac{1}{2}(D/R)} \quad (65)$$

The increase of the two damping coefficients with D/R is reflected in the much larger coefficients they are multi-

Table 8. Static stiffnesses of rigid embedded cylindrical foundations 'welded' into a homogeneous soil stratum-over-bedrock*

Type of loading	Static stiffness	Profile
Vertical	$\frac{4GR}{1-\nu} \left(1 + 1.28 \frac{R}{H}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{D}{R}\right) \left(1 + \left[0.85 - 0.28 \frac{D}{R}\right] \frac{D/H}{1-D/H}\right)$	 <p>Range of validity: $\frac{D}{R} < 2$ $\frac{D}{H} < 0.5 \dagger$</p>
Horizontal	$\frac{8GR}{2-\nu} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R}{H}\right) \left(1 + \frac{2}{3} \frac{D}{R}\right) \left(1 + \frac{5}{4} \frac{D}{H}\right)$	
Rocking	$\frac{8GR^3}{3(1-\nu)} \left(1 + \frac{1}{6} \frac{R}{H}\right) \left(1 + 2 \frac{D}{R}\right) \left(1 + 0.7 \frac{D}{H}\right)$	
Coupled horizontal-rocking	$0.40 K_h D$	
Torsion	$\frac{16}{3} GR^3 \left(1 + 2.67 \frac{D}{R}\right)$	

* From Elsabee et al.¹¹⁴ and Kausel et al.³³

† For foundation with deeper embedment the formulae underpredict the 'actual' increase in the stiffnesses

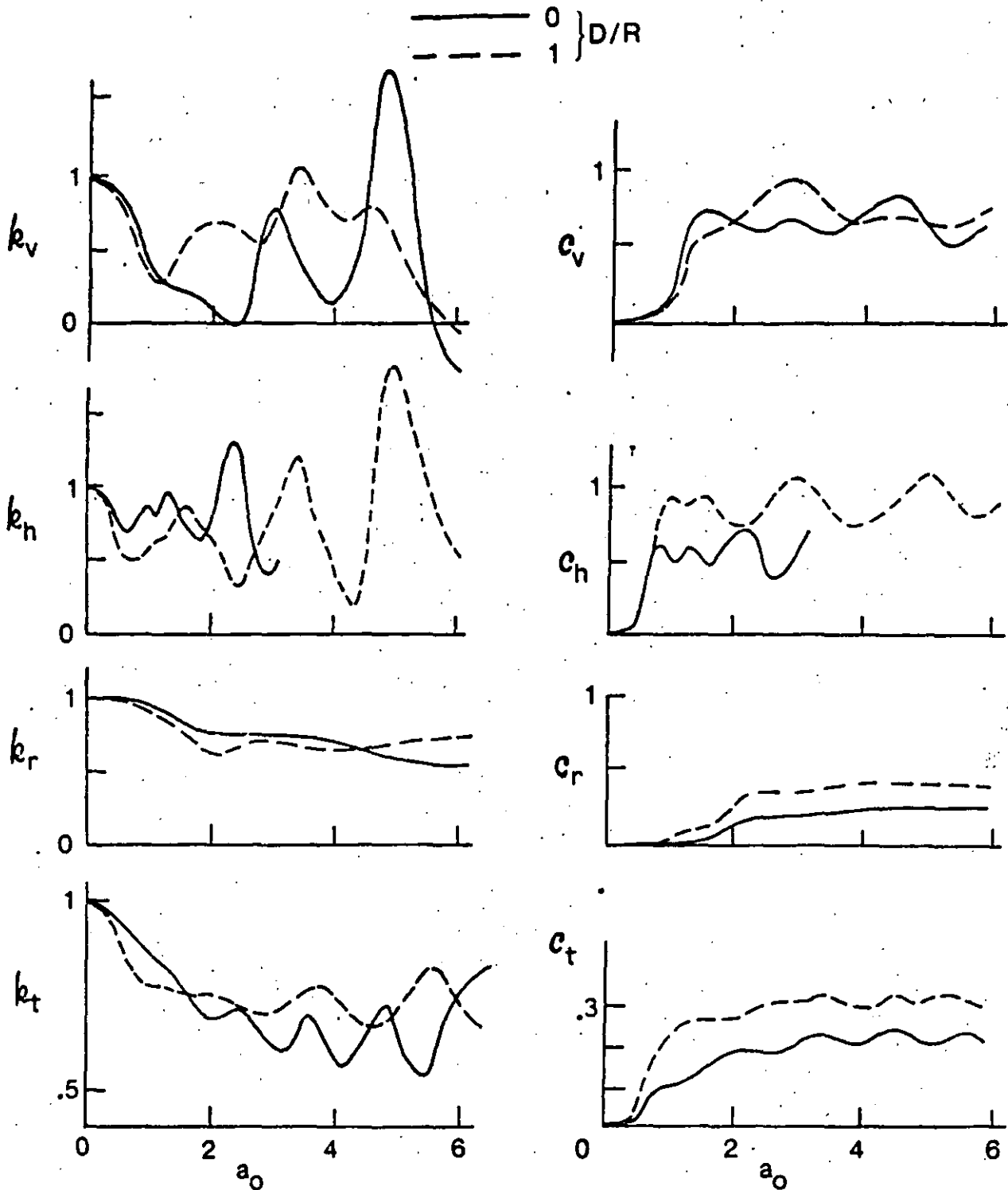


Figure 19. Effect of embedment on dynamic coefficients of a rigid cylindrical foundation on stratum-over-bedrock ($H/R = 3, \nu = 1/3, \xi = 0.05$)^{33, 68, 90}

plied with in the numerator than in the denominator; e.g. for $\nu = 0.40$, c_h is proportional to $(1 + 3.8D/R)/(1 + 0.67D/R)$ and c_v is proportional to $(1 + 1.1D/R)/(1 + 0.5D/R)$. Expressions similar to those of equations (64)-(65) have not been developed for rocking and torsion.

It is finally noted that, with very good accuracy, one may set for the cross-coupling impedance:

$$k_{hr} = 1; \quad c_{hr} = 0 \quad (66)$$

Imperfect contact between sidewall and backfill

Two recent studies have addressed the question of the dynamic response of embedded foundations, the sidewalls of which are not perfectly bonded to the backfill.^{68, 115} In both studies, the nonlinear contact phenomena associated with separation and sliding are modeled in an approximate way. Thus, Tassoulas assumes that no contact exists between sidewall and backfill near the ground surface but

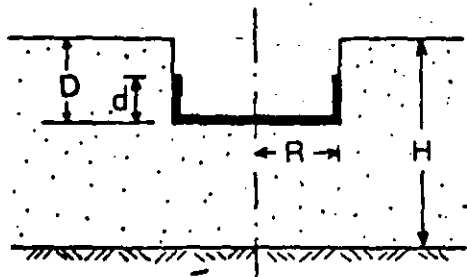
that a perfect contact is effective over a height equal to d above the basement. By allowing d to vary between 0 and D all cases between the extremes of 'no-contact' and 'welded-contact' could be studied. On the other hand, Novak *et al.* considers the sidewalls to be in contact not with the undisturbed soil but with a cylindrical zone consisting of softer material. By allowing the shear modulus of this zone to take values between the shear modulus of the backfill and zero, various qualities of contact could be considered. Note that a similar parametric study for statically loaded foundations, the sidewalls of which are surrounded by a soft cylindrical zone, has been presented by Johnson *et al.*¹¹⁶ Only results from Tassoulas⁶⁸ are shown herein.

The sensitivity of the static stiffnesses to variation in the contact-height over embedment ratio, d/D , is graphically displayed in Fig. 20. The effect is essentially independent of H/R and D/R ; hence only one curve is plotted for each mode. Consistent with the observations made in the previous subsection, the effects of d/D are very significant for rocking and torsional loading, substantial for horizontal loading and secondary for vertical loading. For instance, the 'welded-contact' stiffnesses ($d/D = 1$) are 2.74, 2.33, 1.60 and 1.30 times larger than the 'no-contact' stiffnesses ($d/D = 0$) for rocking, torsional, horizontal and vertical loading, respectively.

Figure 21 portrays the effect of d/D on the variation of k and c versus a_0 . The stiffness coefficients are only slightly affected by d/D at low frequencies; at higher frequencies, however, the sharpness of the resonant valleys decreases as d/D increases. On the other hand, the damping coefficients show a substantial decline as the 'welded-contact' height, d , between sidewalls and backfill, decreases. Exception: c_v , which is less affected by d/D as well as by D/R (see equation (65) and Fig. 19). Notice also that the influence of d/D on c_r depends strongly on the particular frequency of oscillation.

Embedded strip foundations

Dynamic compliance functions of rigid strip foundations embedded in a homogeneous soil stratum overlying bedrock have been obtained by Chang-Liang.⁸⁷ Perfect contact is assumed between the two sidewalls and the backfill, and the results are cast in the form of equation (20) (i.e. dynamic compliances normalized with the static stiffnesses).



Jakub and Roesset,^{56,65} by utilizing the results of an extensive parametric study, developed simple expressions for the static horizontal and rocking stiffnesses, which are displayed in Table 9. It is evident that the influence of embedment is much smaller for strip than it is for circular foundations. In fact, the two coefficients multiplying D/B in Table 9 (1/3 and 1) are exactly one-half of those multiplying D/H in Table 8 (2/3 and 2, respectively). Intuitively, these results appear to be very reasonable since a strip foundation has sidewalls along two sides only. Thus, per unit length, the ratio of sidewall area to basement area is equal to $2D/2B = D/B$. Whereas, for a circular foundation the ratio of the two areas is $2\pi RD/\pi R^2 = 2(D/R)$. This seems to imply that the influence of D/R or D/B is proportional to the sidewall-over-basemat area ratio.

The two normalized compliance functions, $f_{h1} + i f_{h2}$ and $f_{r1} + i f_{r2}$, show practically no sensitivity to the D/B ratio and hence are not reproduced herein. Reference is made to the original publication⁸⁷ for more detailed information.

Rectangular foundations embedded in halfspace

Domínguez and Roesset⁸⁷ developed a boundary element formulation on the basis of which they derived unique results for embedded rectangular foundations perfectly bonded into a homogeneous halfspace. Figure 22 presents a few of their results for a foundation with an aspect ratio $L/B = 2$ and three embedment ratios, $D/B = 0, 2/3$ and $4/3$. Only the stiffness and damping coefficients are plotted in Fig. 22 versus a_0 .

Results for the static stiffnesses are not shown here. It appears, however, that the sensitivity of most stiffnesses on D/B is not as strong as in the case of circular foundations, but is quite stronger than that of a strip footing. Note that the sidewall-basemat area ratio in this case becomes equal to $4(B+L)D/(2B \cdot 2L) = 1.5(D/B)$, which is in between the 1 and 2 times the embedment ratio of the previous two cases!

The dependence on D/B of the k and c versus a_0 curves, shown in Fig. 2, reveals the following trends.

1. In the frequency range examined the sensitivity of the stiffness coefficients to large variations in D/B is quite small. For all modes, the decline of k with a_0 at low frequencies becomes sharper as the level of embedment increases.

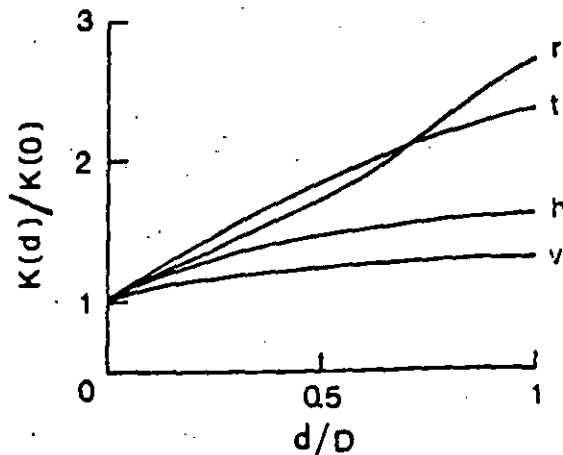


Figure 20. Static stiffnesses of cylindrical foundations with different d/D ratios ($H/R = 3, D/R = 1, v = 1/3$)⁶⁸

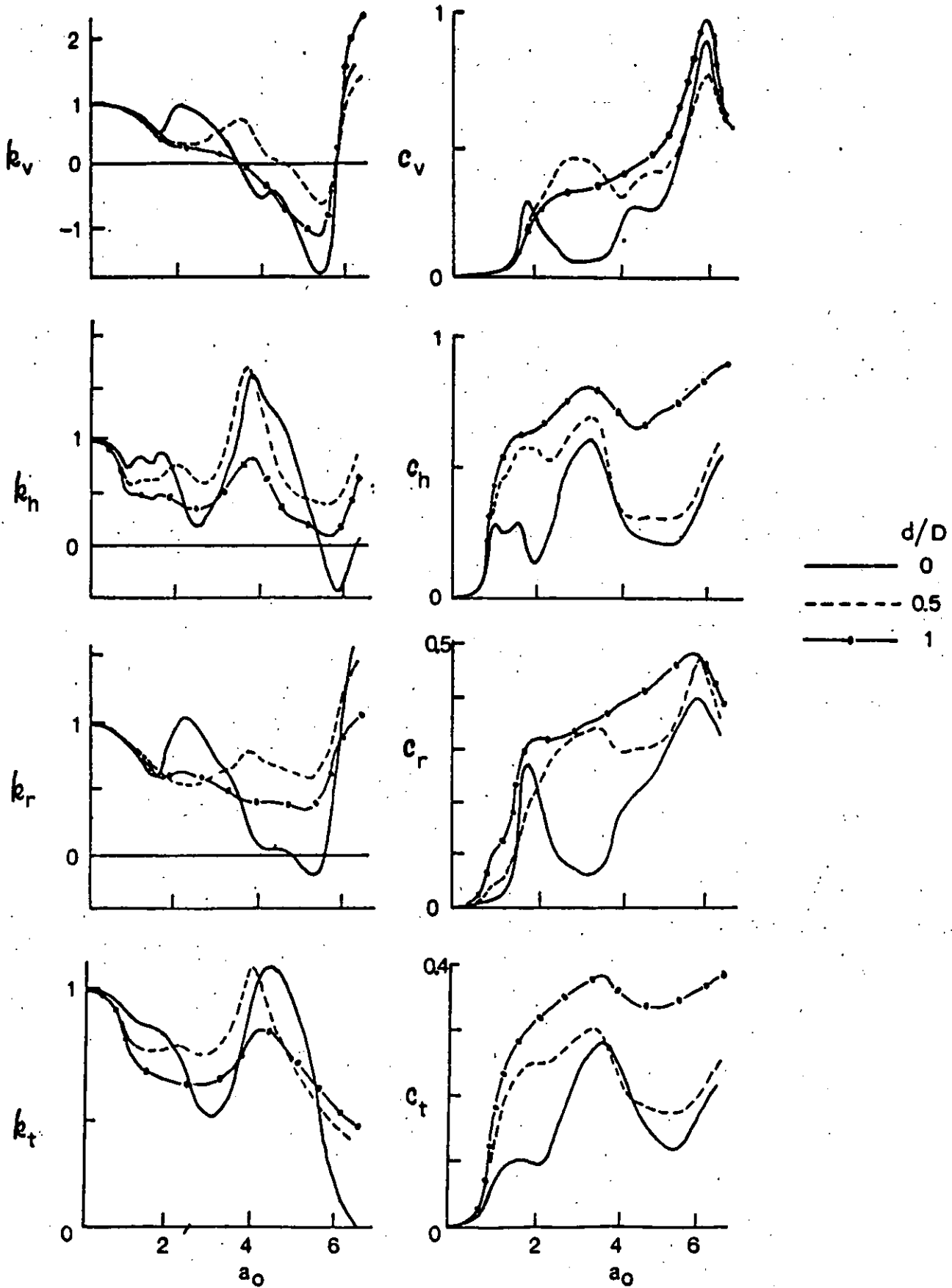
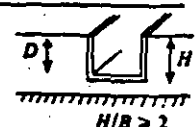


Figure 21. Dependence of dynamic coefficients of cylindrical foundations on height of sidewall-backfill contact ($H/R = 3$, $D/R = 1$, $\nu = 1/3$, $\xi = 0.05$)⁶⁸

Table 9. Static stiffnesses of rigid embedded strip foundations 'welded' into a homogeneous stratum-over-bedrock*

Type of loading	Static stiffness	Profile
Horizontal	$\frac{2.1G}{2-\nu} \left(1 + 2 \frac{B}{H}\right) \left(1 + \frac{1}{3} \frac{L}{B}\right) \left(1 + \frac{4}{3} \frac{D}{H}\right)$	 <p style="text-align: center;">$H/B > 2$ $D/B < 2/3$</p>
Rocking	$\frac{\pi GB^3}{2(1-\nu)} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{B}{H}\right) \left(1 + \frac{D}{B}\right) \left(1 + \frac{2}{3} \frac{D}{H}\right)$	

* From Jakub and Roesset^{14,15}

2. All the damping coefficients increase substantially with increasing D/B . The effect is particularly important for the rotational modes. Indeed, for rocking and torsion c does not tend to zero in the low frequency range when the foundation is embedded. The practical significance of this phenomenon is obvious, especially in cases involving small amounts of hysteretic damping in the soil.

SYNTHESIS: COMPARATIVE STUDY AND PRACTICAL RECOMMENDATIONS

The previous sections have studied the effects of crucial problem parameters, related to the soil profile and the foundation geometry, on the dynamic response of massless rigid foundation plates. It is interesting, however, to also investigate the influence of these parameters on the response of a massive foundation, and thus develop a better perspective of the role of some of these parameters. We note that, in such a study, equations (39)-(46) can be directly utilized to obtain amplitudes of steady-state motion, once the dynamic impedance functions have been evaluated.

The goal of the comparative study described here is to investigate the sensitivity of the response of massive foundations to the exact variation with frequency of the dynamic stiffness and damping coefficients, k and c . To this end, two different foundations, both circular in plan, are considered. Foundation A is a relatively heavy one, having a radius $R = 2$ m, a mass $m = 40 \rho R^3$ and a central mass moment of inertia $I_{ox} = m(0.75R)^2$. Foundation B is a relatively light one, having $R = 1$ m, $m = 5 \rho R^3$ and $I_{ox} = mR^2$. The center of gravity of the machine-foundation system is located in both cases at a distance $z_c = 1.10R$ above the base. Both foundations support a machine with an unbalanced mass m_0 rotating with an eccentricity d_0 at frequencies ω ; the center of rotation is located at a distance $z_0 = R$ above the center of gravity of the system, in each case. Thus, the excitation forces, referred to the center of gravity, are:

$$Q_0 = m_0 d_0 \omega^2 \exp[i(\omega t + 90^\circ)] \quad (67)$$

$$Q_h = m_0 d_0 \omega^2 \exp(i\omega t) \quad (68)$$

$$M_r = Q_h \cdot z_0 \quad (69)$$

and the solution can be derived from equations (39), (41) and (42) by substituting: $Q_0 = m_0 d_0 \omega^2$, $\phi_0 = 90^\circ$, $Q_h = m_0 d_0 \omega^2$, $\phi_h = 0$, $M_r = z_0 Q_h$ and $\phi_r = 0$.

Four different sets (1, 2, 3 and 4) of dynamic impedance functions, K expressed in the form of equation (17), are considered. Set 1 corresponds to a surface foundation on a halfspace (Fig. 5). Set 2 corresponds to a surface foundation on a stratum-over-bedrock with $H/R = 2$ (Fig. 8). Sets 3 and 4 correspond to a foundation embedded in a stratum with $H/R = 3$ and $D/R = 1$; 'welded' sidewall.

backfill contact is assumed for set 3, no contact for set 4 (Fig. 21). Material (hysteretic) damping is invariably taken equal to 0.05.

In our desire to isolate the effects of the dynamic parts of the impedance, $k + i\alpha_0 c$, from the effects of the static stiffnesses, K , the latter are assumed to be the same in all four sets. Thus, the four cases differ only in the corresponding k and c values. In reality, of course, the static stiffnesses of each set differ substantially from the corresponding stiffnesses of the other sets. For instance, the horizontal stiffnesses corresponding to sets 1, 2, 3 and 4, are in the ratio of 1:1.25:2.76:1.725, respectively. The appreciable influence of these static stiffnesses on the foundation response is well known, however, and requires no further demonstration. After all, the profession can determine static displacements with sufficient confidence, and the numerous closed-form expressions offered in this paper make very simple the task of reliably estimating the static stiffnesses of essentially arbitrary foundations on/in a variety of soil profiles.

The question then which we try to answer in this section is the following: After having properly determined the static stiffnesses of a foundation, how important is it to also accurately determine the dynamic stiffness and damping coefficients at the frequency range of interest?

Figure 22 compares the four response spectra of foundations A and B, corresponding to the aforementioned cases 1, 2, 3 and 4. Plotted in this figure is the variation with α_0 of the normalized amplitude of the horizontal displacement, $|u_r|$, experienced by the highest point of each foundation, at a distance $z_r = 1.2R$ above the center of gravity. The following trends are worthy of note in Fig. 22.

1. For frequency factors $\alpha_0 > 1$, no differences exist between the four response curves, of either the heavy or the light foundation. In fact, the four displacement curves attain a nearly constant value which is apparently controlled by the static stiffnesses of each foundation. (Remember that in our study these stiffnesses do not change from case to case.) Such a behavior is consistent with the high-frequency response of a 1-dof oscillator under a rotating-mass-type excitation.⁷ The implication is clear: at relatively high frequency factors, the motion of a rigid massive foundation is controlled by its static stiffnesses and it is not influenced by the exact variation of k and c with α_0 ; therefore, one can safely use for k and c the values obtained for surface foundations on halfspace, regardless of the actual soil profile and depth of embedment!

2. In the low frequency range $\alpha_0 < 1$, the response curves depend on the assumed dynamic coefficients as well as the inertia characteristics of the foundation.

The 'heavy' foundation experiences two resonant peaks. The first occurs at a frequency $\alpha_0 \approx 0.15$ regardless of the exact values of k and c . The only difference from case to case is in the maximum displacement amplitude, which is

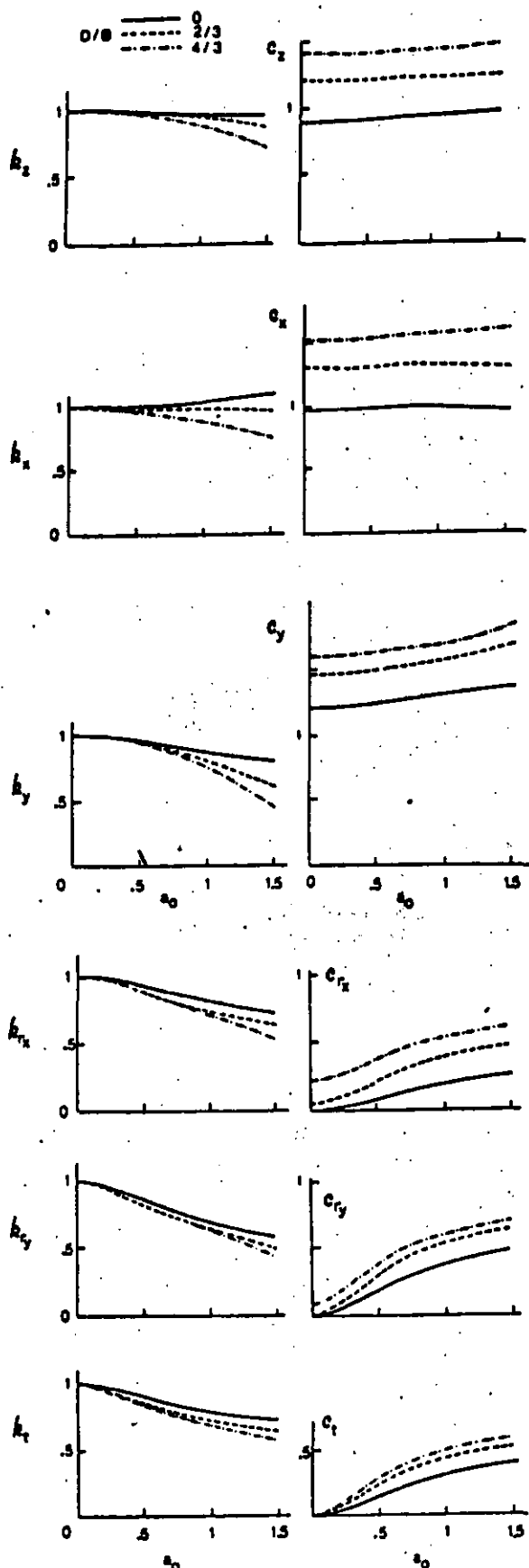


Figure 22. Dynamic coefficients of embedded rigid rectangular foundations on halfspace ($L/B = 2, \nu = 1/3$)¹¹

apparently controlled by the inertia characteristics and the radiation damping of each system. (At such frequencies $k \approx 1$, while the hysteretic damping is invariably equal to 0.05.) As a result, use of the available halfspace curves for c leads to an underprediction of the peak response.

The second resonant frequency and resonant peak are both sensitive to the assumed values of k and c . It appears that these peaks are the result of resonance phenomena due to standing waves in the soil stratum, and, hence, they are very little influenced by the foundation inertia. Notice that for the halfspace (case 1) the resonance is very flat since no standing waves can be generated in the soil. Thus, once more, the halfspace assumption proves unconservative.

The 'light' foundation, on the other hand, experiences only one resonance which reflects the characteristics of both the foundation inertia and the system dynamic coefficients. The main influence of k and c is seen on the peak amplitudes. Notice again that the halfspace values lead to the flattest peak; a consequence of the high radiation damping in a boundless medium.

On the basis of these observations and the results of some other case studies not presented herein, the following practical recommendation can be made: At relatively low frequency factors, the motion of a rigid massive foundation is controlled by its static stiffnesses, K , as well as its

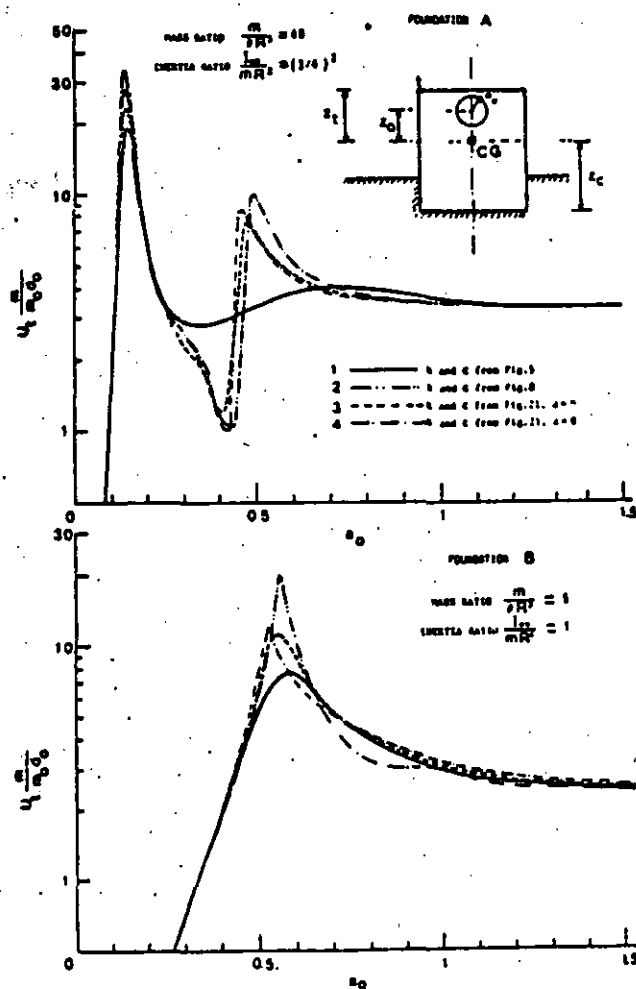


Figure 23. Sensitivity of the response of two massive foundations on the exact variation of k and c with a_0 ($\xi = 0.05$)

dynamic stiffness and damping coefficients, k and c ; c can be assumed to be equal to:

$$c = \begin{cases} 0 & \text{for } f < f_1 \\ c_{\text{halfspace}} & \text{for } f > f_1 \end{cases} \quad (70)$$

where $f_1 = V/4H$ is the first resonant frequency of the soil-foundation system for each particular mode; k can be approximated with the values obtained for surface foundations on a stratum-on-rigid-base; if, however, such solutions are not available, use can be made of the halfspace values of k provided that the latter are approximately corrected at and near the fundamental natural frequencies of the actual stratum, using as a guide the results of Fig. 8.

The above conclusions and recommendations are strictly applicable to rigid massive foundations carrying rotating-mass-type machines. For constant-force-type excitations the recommendations are still reasonably accurate. Frame-foundations, however, may be quite sensitive to the exact variation of k and c at frequencies around the fundamental frequency of the superstructure.

SOME OTHER TOPICS

The dynamic behavior of pile foundations, the effects of a finite flexural mat rigidity, and the dynamic interaction between adjacent foundations, are three topics that have received considerable attention in recent years. However, present knowledge and understanding of the phenomena related to these problems is more limited than for (single) rigid shallow foundations. Research is currently underway in several institutions, aimed at filling the existing gaps of knowledge in these three areas. This section is restricted to a brief general discussion of these topics and a listing of pertinent references for a more detailed study.

Dynamic impedances of piles

Results have been presented by numerous authors for end-bearing and floating single piles subjected to vertical, horizontal, rocking and torsional loading. One may broadly classify the developed formulations within three categories: (a) dynamic Winkler-foundation type formulations, which neglect the coupling between forces and displacements at various points along the pile-soil interface;^{41-43, 57, 116, 118} (b) analytical continuum-type formulations, which neglect the secondary components of deformation and enforce the boundary conditions at the soil-pile interface by expand-

ing the contact pressure distribution to an infinite series in terms of the natural modes of vibration of the soil layer;^{73-76, 78} and (c) finite-element formulations.¹¹⁹⁻¹²¹

Figure 24 presents a typical variation of the horizontal impedance K_h versus a_0 , for an end-bearing pile with length-over-diameter ratio, H/D , equal to 15. The soil-stratum consists of material with moduli increasing linearly with depth and a constant Poisson's ratio of 0.40, which is typical for normally consolidated clays. The pile is of circular cross-section and has a Young's modulus $E_p = 8000E_s$, where E_s is the soil modulus at a depth $z = H/4$. This figure has been adapted from a recent study by Velez *et al.*,¹²² who utilized the finite-element formulation of Blaney *et al.*¹¹⁹ The dynamic impedance is expressed in the form:

$$K_h = K_h(k_h + 2i\beta_h) \quad (71)$$

where K_h = static horizontal stiffness, k_h = dynamic stiffness coefficient, and β_h = equivalent critical damping ratio.

It is evident from this figure, that the general characteristics of the pile behavior are similar to those of a shallow foundation on a soil stratum. The first resonance occurs almost precisely at the fundamental frequency of the inhomogeneous stratum in vertical shear waves, and no radiation damping occurs below this frequency. At higher frequencies, k_h attains an essentially constant value; the second resonance is barely noticeable, and hence of minor importance, despite the relatively small amount of assumed hysteretic damping (0.05).

Reference is made to the aforementioned publications for detailed studies of the influence of the main problem parameters on the response of single piles.

In the last few years, interest has switched to the dynamics of groups of piles, a substantially more complex problem than that of a single pile. The first results, based on a rigorous formulation,¹²³ indicate that the dynamic stiffness and damping coefficients of a large group of closely-spaced piles may be drastically different from the coefficients obtained by a simple superposition of the results for a single pile. More extensive parametric studies are, however, needed before definitive conclusions can be drawn and before simple formulae and dimensionless graphs of direct applicability are developed for practical use.

Effects of finite foundation rigidity

The in-plane (membrane) rigidity of mat foundations is practically infinitely large, when compared to the deformability of soils; hence, for horizontal and torsional loading most foundations clearly qualify as 'rigid', and the results of the preceding sections of this paper are thus pertinent. However, in many practical situations, the foundation response to vertical and rocking loading cannot be properly predicted without accounting for the finite out-of-plane (flexural) rigidity of the mat.

A few studies have appeared lately on the dynamic behavior of flexible circular and rectangular plates resting on a homogeneous halfspace.⁴⁹⁻⁵¹ The additional dimensionless parameter which in this case controls the foundation response is the relative flexural rigidity factor $RF = (E_f/E_s) \cdot (1-\nu_f^2) \cdot (t/B)^3$, where E_f , ν_f and t are, respectively, the Young's modulus, Poisson's ratio and thickness of the foundation raft. In addition, moreover, the exact distribution of the applied loading influences appreciably the behavior, especially of very flexible foundations.

The results of the aforementioned studies indicate a reduction in the vertical and rocking damping coefficients

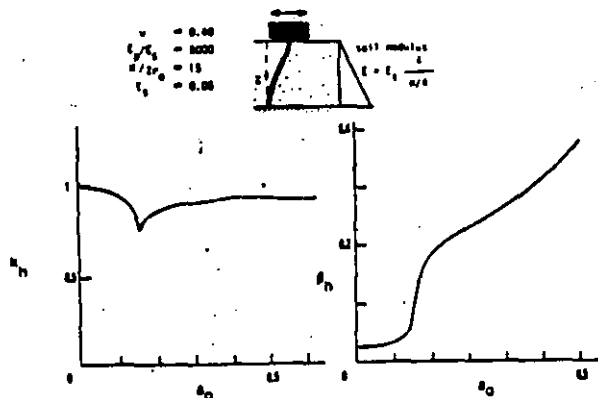


Figure 24. Lateral dynamic coefficients of single pile in an inhomogeneous stratum.¹²²

C_p and C_s as the relative rigidity of the plate decreases. On the other hand, for small RF values, the stiffness coefficients k_p and k_s do not exhibit as steep a decay with a_p as the one observed with rigid foundations (Fig. 5, for $\nu > 1/3$). Although additional parameter studies are needed to draw definitive conclusions, the author believes that the main influence of a decreasing RF on the response of a machine foundation materializes through the corresponding decrease of the static stiffnesses: in other words, the effect of the changes in k and c can be neglected, at least for realistic values of the RF factor. The results of the comparative study offered in the preceding section clearly support such a recommendation.

An idea of how sensitive the static stiffnesses, K_p and K_s , are to changes in the relative rigidity factor, RF , can be obtained from the results of Table 10. The vertical static stiffness of a circular mat supported by a homogeneous halfspace and loaded by either a uniformly or a parabolically distributed load, are expressed in the form of equation (55). The 'correction' factor J_p , which accounts for the mat flexural rigidity, is given as a function of RF . The J_p versus RF relationship was computed on the basis of some recent results by the author;¹²⁴ the average of the center and edge settlements were used in deriving the stiffness of the flexible mat.

Dynamic interaction between adjacent foundations

The vibration of a machine foundation may sometimes appreciably affect a nearby structure; conversely, the presence of such a structure may influence the response of the machine foundation itself. This 'coupling' in the motion of two adjacent structures through the soil is referred to as 'structure-soil-structure' interaction, and was first studied analytically by Warburton *et al.*,¹⁷⁵ in connection with cylindrical rigid foundations on a halfspace. More recently, comprehensive studies have been presented by Chang-Liang⁸⁷ who considered two rigid strip foundations on a stratum-over-bedrock and by Roesset *et al.*¹²⁶ for two rigid rectangular massive foundations or two structures idealized as simple 1-dof-systems and also resting on the surface of a homogeneous stratum. The following conclusions may be drawn from the results of these studies.

1. The presence of a nearby ('passive') mass has a rather small overall influence on the motion of the foundation carrying the machine ('active'). Perhaps the most important effect from a design point of view is the appearance of rocking motions, even under vertical excitation; this is apparently the result of waves that are reflected by the 'passive' foundation. These effects increase when the masses of the two foundations increase, when the distance between them decreases, and when the thickness of the soil stratum

increases. But even for distances as small as $5B$ (or $5R$) the presence of the second mass will in most cases be of secondary importance, in view of the many other uncertainties of the problem. It is noted, however, that the natural frequencies of the soil-foundation system may also change due to the interaction.

2. The motions induced in the 'passive' foundation are larger than the motion changes due to interaction effects on the 'active' foundation. This is a quite logical result since waves emanating from the 'active' foundation excite the 'passive' foundation before they are 'reflected' back to the 'active' one. Typically, one may expect the motions in the second foundation to be about 20% of those experienced by the excited mass, for distances of the order of $5R$ and hysteretic damping ratio in the soil of 5%. However, for strip foundations (plane-strain problem) on deep soil deposits, the above value may increase to about 50%.

To protect sensitive structures from the vibrations induced by a nearby machine foundation, 'active' and/or 'passive' isolation measures may frequently be necessary. Results of experimental and theoretical investigations on the effectiveness of several isolation schemes have been published by Barkan,¹⁰ Richart *et al.*⁷ and Haupt.¹²⁷

CONCLUSION

The state-of-the-art of analysing the forced oscillations of shallow and deep foundations has advanced remarkably in the last 15 years and has reached a mature stage of development. Several formulations and computer programs have been developed to determine in a rational way the response of foundations having various shapes and supported on/in any kind of soil deposit. Numerous studies have been published exploring the nature of associated phenomena and shedding light on the role of the key parameters influencing the response. This paper has reviewed these developments and presented results in the form of simple formulae and dimensionless graphs for the dynamic impedance functions of circular, strip, rectangular and arbitrary-plan-shape foundations. The various results have been synthesized in a case study referring to two massive foundations, and practical recommendations have been made on how to inexpensively predict the response of foundations in practice.

This progress in developing new methods of analysis for machine foundations has been paralleled by an equally impressive progress in our understanding of the dynamic behavior of soils and the development of excellent *in situ* and laboratory procedures to obtain representative values of dynamic soil parameters.

The author believes that, at present, there is a great need to calibrate our analytical procedures by means of actual case histories. Systematic post-construction observations of actual foundation performances are the key to this so important task. After all, confidence in advanced methods of analysis can only be gained if these are proved capable of predicting the field behavior of actual foundations.

Analytical work is also needed to improve the present knowledge and understanding of, among other topics, the dynamic behavior of groups of piles, including the influence of the pile-cap; the response of flexible mats founded on a soil stratum; the dynamic characteristics of foundations consisting of multiple isolated footings; and the effects of the non-uniform initial distribution of static stresses in the soil, arising from the weight of the structure.

Table 10. Static vertical stiffness of flexible circular mat on halfspace†

General expression	RF	$J_p(RF)$	
		Uniform load	Parabolic load*
$K_p = \frac{4CR}{1-\nu} J_p(RF)$	0.01	0.99	0.80
	0.1	0.98	0.86
	1	0.99	0.98
	10	1.00	0.98
	100	1.00	1.00

* $\rho = 2p_s(1-\nu^2/R^3)$
 † Based on results by Gazetas¹²⁴

ACKNOWLEDGEMENTS

I would like to acknowledge financial support by the US National Science Foundation (Grant CEE-82-00955) and by the Rensselaer Polytechnic Institute (BUILD program). I am also pleased to express my gratitude to my mentor Jose M. Roesset, who encouraged my interest in the subject of dynamic soil-foundation interaction. During the course of this work I had fruitful discussions with Ricardo Dobry who, also, read a draft of the paper and offered valuable comments. Professor Frank E. Richart, Jr., reviewed the paper and offered many useful suggestions. Finally, my thanks are extended to the Organizing Committee of the International Conference on Soil Dynamics and Earthquake Engineering for the invitation to prepare and present this state-of-the-art paper.

REFERENCES

- 1 Whitman, R. V. and Richart, F. E. Design procedures for dynamically loaded foundations, *J. Soil Mech. Fdn. Engrg.*, ASCE, 1967, 93, SM6, 169
- 2 McNeil, R. L. Machine Foundations: The State-of-the-Art. *Proc. Soil Dyn. Spec. Sess. 7th ICSMFE*, pp. 67-100, 1969
- 3 Woods, R. D. Measurement of Dynamic Soil Properties. *Proc. Earthq. Engrg. Soil Dyn.*, ASCE, Pasadena, 1978, 1, 91
- 4 Ozaydin, K., Richart, F. E., Dobry, R., Ishihara, K. and Marcuson, W. F. III. Dynamic Properties and Behavior of Soils. *Proc. 7th WCEE*, State-of-the-Art Volume, Istanbul, 1980
- 5 Woods, R. D. Parameters affecting elastic properties, *Dyn. Meth. Soil Rock Mech.*, 1977, 1, 37
- 6 Richart, F. E. Field and laboratory measurements of dynamic soil properties, *Dyn. Meth. Soil Rock Mech.*, 1977, 1, 3
- 7 Richart, F. E., Woods, R. D. and Hall, J. R. *Vibrations of Soils and Foundations*. Prentice-Hall, 1970
- 8 Tschebotarioff, G. P. and Ward, E. R. The Response of Machine Foundations and the Soil Coefficients Which Affect It, *Proc. 2nd ICSMFE*, 1948, 1, 309
- 9 Selvadurai, A. P. S. *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*, Elsevier Scientific Publishing Co., 1979
- 10 Barkan, D. D. *Dynamics of Bases and Foundations*, McGraw-Hill (translated), 1962
- 11 Prakash, S. *Soil Dynamics*, McGraw-Hill, 1981, pp. 361-7
- 12 Barkan, D. D. and Ilyichev, V. A. Dynamics of Bases and Foundations, *Proc. 9th ICSMFE*, Tokyo, 1977, 2, 630
- 13 Gibson, R. E. The analytical method in soil mechanics, *Geotechnique*, 1974, 24, No. 2, 115
- 14 Reissner, E. Stationäre, axialsymmetrische, durch eine schüt-telnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes, *Ing. Arch.*, 1936, 7, 381
- 15 Sung, T. Y. Vibration in Semi-infinite Solids Due to Periodic Surface Loading, *Sc.D. thesis*, Harvard University, 1953
- 16 Quinlan, P. M. The Elastic Theory of Soil Dynamics. *Symp. on Dyn. Test. of Soils*, 1953, ASTM STP No. 156, 1953, 3-34
- 17 Arnold, R. N. Bycroft, G. N. and Warburton, G. B. Forced vibrations of a body on an infinite elastic solid, *J. Appl. Mech. ASME*, 1955, 22, 391
- 18 Bycroft, G. N. Forced vibration of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic space and an elastic stratum, *Phil. Trans. Royal Soc. Lond.*, 1956, A248, 327
- 19 Awojobi, A. D. and Grootenhuis, P. Vibration of Rigid Bodies on Elastic Media, *Proc. Royal Soc. Lond.*, 1965, A287, 27
- 20 Lysmer, J. Vertical Motions of Rigid Footings, *Ph.D. thesis*, University of Michigan, Ann Arbor, 1965
- 21 Elorduy, J., Nieto, J. A. and Szekely, E. M. Dynamic Response of Bases of Arbitrary Shape Subjected to Periodical Vertical Loading, *Proc. Int. Symp. Wave Prop. & Dyn. Rep. Earth Mat.*, University of New Mexico, Albuquerque, 1967, 105-21.
- 22 Hsieh, T. K. Foundation Vibrations, *Proc. Inst. Civil Engrs.*, 1962, 22, 211
- 23 Richart, F. E. and Whitman, R. V. Comparison of footing vibration tests with theory, *J. Soil Mech. Fdn. Engrg. Div.*, 1967
- 24 Whitman, R. V. Soil-platform Interaction, *Proc. Conf. on Behav. of Offshore Struct.*, NGI, Oslo, 1976, 1, 817
- 25 Luco, J. E. and Westmann, R. A. Dynamic response of a rigid footing bonded to an elastic halfspace, *J. Appl. Mech.*, ASME, 1968, 35E, 697
- 26 Karasudhi, P., Keer, L. M. and Lee, S. L. Vibratory motion of a body on an elastic half plane, *J. Appl. Mech.*, ASME, 1968, 35E, 697
- 27 Luco, J. E. and Westmann, R. A. Dynamic response of circular footings, *J. Engrg. Mech. Div.*, ASCE, 1971, 97, EM5, 1381
- 28 Veletos, A. S. and Wei, Y. T. Lateral and rocking vibrations of footings, *J. Soil Mech. Found. Div.*, ASCE, 1971, 97, SM9, 1227
- 29 Veletos, A. S. and Verbic, B. Vibration of viscoelastic foundations, *Int. J. Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, 1973, 2, 87
- 30 Kuhlemeyer, R. Vertical Vibrations of Footings Embedded in Layered Media, *Ph.D. thesis*, University of California, Berkeley, 1969
- 31 Waas, G. Analysis Method for Footing Vibrations Through Layered Media, *Ph.D. thesis*, University of California, Berkeley, 1972
- 32 Chang-Liang, V. Dynamic Response of Structure in Layered Soils, *Ph.D. thesis*, MIT, 1974
- 33 Kausel, E. Forced Vibrations of Circular Foundations on Layered Media, *Research Rep. R74-11*, MIT, 1974
- 34 Lysmer, J., Udaka, T., Seed, H. B. and Hwang, R. LUSH - A Computer Program for Complex Response Analysis of Soil-Structure Systems, Report No. EERC 74-4, University of California, Berkeley, 1974
- 35 Luco, J. E. Impedance functions for a rigid foundation on a layered medium, *Nucl. Engrg. Des.*, 1974, 31, 204
- 36 Gazetas, G. Dynamic Stiffness Functions of Strip and Rectangular Footings on Layered Soil, *S.M. Thesis*, MIT, 1975
- 37 Hadjian, A. H. and Luco, J. E. On the Importance of Layering on Impedance Functions, *Proc. 6th WCEE*, New Delhi, 1977
- 38 Gazetas, G. and Roesset, J. M. Forced vibrations of strip footings on layered soils, *Mech. Struct. Anal.*, ASCE, 1976, 1, 115
- 39 Gazetas, G. and Roesset, J. M. Vertical vibration of machine foundations, *J. Geotech. Engrg. Div.*, ASCE, 1979, 105, GT12, 1435
- 40 Novak, M. Vibrations of Embedded Footings and Structures, *ASCE Natl. Struct. Engrg. Meet.*, 1973, Reprint 2029
- 41 Novak, M. Dynamic stiffness and damping of piles, *Canad. Geotech. J.*, 1974, 11, 574
- 42 Novak, M., Nogami, T. and Aboul-Elia, F. Dynamic Soil Reactions for Plane Strain Case, *Res. Rep. BLWT-1-77*, University of Western Ontario, 1977
- 43 Novak, M. and Aboul-Elia, F. Impedance functions for piles in layered media, *J. Engrg. Mech. Div.*, ASCE, 1978
- 44 Wong, H. L. and Luco, J. E. Dynamic response of rigid foundations of arbitrary shape, *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, 1976, 4, 579
- 45 Awojobi, A. O. and Tablowo, P. H. Vertical vibration of rigid bodies with rectangular bases on elastic media, *Earth. Engrg. Struct. Dyn.*, 1976, 4, 439
- 46 Kitamura, Y. and Sakurai, S. Dynamic stiffness for rectangular rigid foundations on a semi-infinite elastic medium, *Int. J. Anal. Num. Meth. Geomech.*, 1979
- 47 Dominguez, J. and Roesset, J. M. Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations, *Research Report R78-20*, MIT, 1978
- 48 Savidis, S. A. Analytical methods for the computation of wavefields, *Dyn. Meth. Soil Rock Mech.*, 1977, 1, 225
- 49 Lin, Y. J. Dynamic response of circular plates on viscoelastic halfspace, *J. Appl. Mech.*, ASME, 1978, 45E, 379
- 50 Whittaker, W. L. and Christiano, P. Dynamic response of plate on elastic halfspace, *J. Engrg. Mech. Div.*, ASCE, 1982, 108, EM1, 133
- 51 Iguchi, M. and Luco, J. E. Dynamic response of flexible rectangular foundations on an elastic halfspace, *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, 1981, 9, 239
- 52 Awojobi, A. O. Vibration of a rigid circular foundation on Gibson soil, *Geotechnique*, 1972, 22, No. 2, 333
- 53 Gazetas, G. Static and dynamic displacements of foundations on heterogeneous multilayered soils, *Geotechnique*, 1980, 30, No. 2, 159
- 54 Gazetas, G. Strip foundations on cross-anisotropic soil layer subjected to static and dynamic loading, *Geotechnique*, 1981a, 31, No. 2, 161

- 35 Gazetas, G. Machine foundations on deposits of soft clay overlain by a weathered crust, *Geotechnique*, 1981d, 31, No. 3, 387
- 36 Jakub, M. and Roesset, J. M. Nonlinear Stiffness of Foundations, *Research Report R77-35*, MIT, 1977a
- 37 Dobry, R., Vicente, E., O'Rourke, M. and Roesset, J. M. Horizontal stiffness and damping of single piles, *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 1982a, 108, GT3, 439
- 38 Kagawa, T. and Kraft, L. M. Lateral load-deflection relationships of piles subjected to dynamic loadings, *Soils & Foundations*, 1980, 20, No. 4, 19
- 39 Novak, M. Vertical vibration of floating piles, *J. Engrg. Mech. Div., ASCE*, 1977, 103, EM1, 153
- 40 Roesset, J. M. Stiffness and damping coefficients of foundations, *Dyn. Resp. Pile Fdn., ASCE*, 1980a, 1-30 (O'Neil and Dobry, eds.)
- 41 Bland, D. R. *The Theory of Linear Viscoelasticity*, Pergamon Press, 1960
- 42 Veletsos, A. S. and Verbic, B. Basic response functions for elastic foundations, *J. Engrg. Mech. Div., ASCE*, 1974, 100, EM2, 189
- 43 Lysmer, J. Foundation vibrations with soil damping, *Civ. Engrg. & Nucl. Power, ASCE*, 1980, 11, 10/4/1-18
- 44 Hadjian, A. H., Luco, J. E. and Tsai, N. C. Soil-structure interaction: continuum or finite-element?, *Nuclear Engrg. Des.*, 1974, 31, 151
- 45 Jakub, M. and Roesset, J. M. Dynamic Stiffness of Foundations: 2-D vs 3-D Solutions, *Research Report R77-36*, 1977b, MIT
- 46 Luco, J. E. Vibrations of a rigid disc on a layered viscoelastic medium, *Nucl. Engrg. Des.*, 1976, 36, 325
- 47 Kirkner, D. J. Steady-state Response of a Circular Foundation on a Transversely Isotropic Half-space. *PhD thesis*, Case Western Reserve University, 1979
- 48 Wong, H. L. Dynamic Soil-Structure Interaction, *Rep. No. EERL 75-01*, California Institute of Technology, 1975
- 49 Cruse, T. A. and Rizzo, F. J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem, *I. J. Math. Anal. & Appl.*, 1968, 22
- 50 Gazetas, G. and Roesset, J. M. Plane-strain Soil-Structure Interaction for Seismic Response, *Proc. 6th Symp. Earthq. Engrg., Roorkee, India*, 1978, 1, 259
- 51 Kobori, T., Minai, R., Suzuki, T. and Kusakabe, K. Dynamical Ground Compliance of Rectangular Foundations, *Proc. 16th Natl. Cong. for Appl. Mech.*, 1966
- 52 Beredugo, Y. O. and Novak, M. Coupled horizontal and rocking vibration of embedded footings, *Canad. Geotech. J.*, 1972, 9, 477
- 53 Tajimi, H. Dynamic Analysis of a Structure Embedded in an Elastic Stratum, *Proc. 4th WCEE*, Chile, 1969
- 54 Nogami, T. and Novak, M. Soil-pile interaction in vertical vibration, *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, 1976, 4, 277
- 55 Nogami, T. and Novak, M. Resistance of soil to a horizontally vibrating pile, *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, 1977, 5, 249
- 56 Harada, T., Kubo, K. and Katayama, T. Dynamic Soil-structure Interaction by Continuum Formulation Method, *Inst. Indus. Sc., University of Tokyo*, 1981, 29, No. 5
- 57 Takemiyu, H. and Yamada, Y. Layered soil-pile-structure dynamic interaction, *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, 1981, 9, 437
- 58 Akiyoshi, T. Soil-pile interaction in vertical vibration induced through a frictional interface, *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, 1982, 10, 135
- 59 Ang, A. H-S. and Harper, G. N. Analysis of contained plastic flow in plane solids, *Engrg. Mech. Div., ASCE*, 1964, 90, EMS, 397
- 60 Agabain, M. E., Parmelee, R. A. and Lee, S. L. A Model for the Study of Soil-structure Interaction, *Proc. 8th Conf. Int. Assoc. Bridge & Struct. Engrg.*, New York, 1968
- 61 Krizek, R. J., Gupta, D. C. and Parmelee, R. A. Coupled sliding and rocking of embedded foundations, *J. Soil Mech. Fdn. Engrg., ASCE*, 1972, 98, 1347
- 62 Tseng, N. M. and Robinson, A. R. A Transmitting Boundary for Finite Difference Analysis of Wave Propagation in Solids, *Civ. Eng. Report No. 240*, University of Illinois, Urbana-Champaign, 1975
- 63 Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R. L. Finite dynamic model for infinite media, *J. Engrg. Mech. Div., ASCE*, 1969, 95, EM4, 895
- 64 Valliappan, S., White, W. and Lee, I. K. Energy absorbing boundary for anisotropic material, *Num. Mech. Geomech., ASCE*, 1975, 2, 1013
- 65 Lysmer, J., Udaka, T., Tsai, C-F. and Seed, H. B. FLUSH - A Computer Program for Approximate 3-D Analysis of Soil-Structure Interaction Problems, *Report No. EERC 75-30*, University of California, Berkeley, 1975
- 66 Luco, J. E. and Hadjian, A. H. Two-dimensional approximations to the three-dimensional soil-structure interaction problem, *Nucl. Engrg. Des.*, 1974, 31, 195
- 67 Chang-Liang, V. Dynamic Response of Structure in Layered Soils, *Ph.D. thesis*, MIT, 1974
- 68 Tassoulas, J. L. Elements for the Numerical Analysis of Wave Motion in Layered Media, *Research Rep. R81-2*, MIT, 1981
- 69 Kausel, E. and Roesset, J. M. Dynamic stiffness of circular foundations, *J. Engrg. Mech. Div., ASCE*, 1975, 101, EM12, 771
- 70 Kausel, E. and Ushijima, R. Vertical and Torsional Stiffness of Cylindrical Footings, *Research Rep. R76-6*, MIT, 1979
- 71 Roesset, J. M. The use of simple models in soil-structure interaction, *Civ. Engrg. & Nucl. Power, ASCE*, 1980b, 11, 10/3/1-25
- 72 Gerrard, C. M. and Harrison, W. J. *Circular Loads Applied to a Cross-Anisotropic Halfspace*. Paper 8. Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization: Div. Appl. Mech., Australia, 1970a
- 73 Gazetas, G. Torsional displacements and stresses in non-homogeneous soil, *Geotechnique*, 1981e, 31, No. 4, 487
- 74 Borodachev, N. M. Determination of the settlement on rigid plates, *Soil Mech. Fdn. Engrg. (USSR)*, 1964, 1, 210
- 75 Dobry, R. and Gazetas, G. Stiffness and Damping of Arbitrary-shaped Embedded Foundations, *Research Rep. CE-82-04*, RPI, 1982
- 76 Egorov, K. E. Calculation of Bed for Foundation with Ring Footing, *Proc. 6th ICSMFE*, 1965, 2, 41
- 77 Dhawan, G. K. A transversely-isotropic halfspace indented by a flat annular rigid stamp, *Acta Mechanica*, 1979, 31, 291
- 78 Dhawan, G. K. An asymmetric mixed boundary value problem of a transversely-isotropic halfspace subjected to moment by an annular rigid punch, *Acta Mechanica*, 1981a, 38, 257
- 79 Dhawan, G. K. A mixed boundary value problem of a transversely-isotropic halfspace under torsion by a flat annular rigid stamp, *Acta Mechanica*, 1981b, 41, 289
- 80 Brown, P. T. and Gibson, R. E. Surface settlement of a deep elastic stratum whose modulus increases linearly with depth, *Can. Geotech. J.*, 1972, 9, 467
- 81 Gibson, R. E. and Kalsi, G. S. The surface settlement of a linearly inhomogeneous cross-anisotropic elastic halfspace, *Z. Angew. Math. Phys.*, 1974, 24, 843
- 82 Rowe, R. K. and Booker, J. R. The behavior of footings resting on a non-homogeneous soil mass with a crust. I. Strip footings. II. Circular footings, *Can. Geotech. J.*, 1981a,b, 18, 250
- 83 Oda, M. Initial fabrics and their relations to the mechanical properties of granular material, *Soils & Foundations*, 1972, 12, 17
- 84 Barden, L. Influence of structure on deformation and failure in clay soil, *Geotechnique*, 1972, 22, No. 1, 159
- 85 Yamada, Y. and Ishihara, K. Anisotropic deformation characteristics of sand under three-dimensional stress conditions, *Soils & Foundations*, 1979, 19, 79
- 86 Gazetas, G. Deformational Soil-Cross-Anisotropy: Experimental Evaluation and Mathematical Modelling, *Research Rep. CE-8102*, Case Western Reserve University, 1981b
- 87 Gerrard, C. M. and Harrison, W. J. *Stresses and Displacements in a Loaded Orthorhombic Halfspace*. Paper 9. Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization: Div. Appl. Mech., Australia, 1970b
- 88 Gazetas, G. Importance of soil anisotropy on foundation displacement functions, *Advances in Geotech. Earthq. Engrg. Soil Dyn.*, 1981c, 3, 1039
- 89 Gazetas, G. Dynamic compliance matrix of rigid strip footing bonded to a viscoelastic cross-anisotropic halfspace, *Int. J. Mech. Sc.*, 1981f, 23, No. 9, 547
- 90 Kausel, E., Roesset, J. M. and Christian, J. T. Nonlinear behavior in soil-structure interaction, *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 1976, 102, GT12, 1159
- 91 Novak, M. and Beredugo, Y. O. Vertical vibration of embedded footings, *J. Soil Mech. Fdn. Engrg. Div., ASCE*, 1972, 98, SM12, 000

- 2 Johnson, G. R., Christlano, P. and Epstein, H. I. Stiffness coefficients for embedded footings. *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 1975, 101, GT8, 789
- 113 Stokoe, K. H. and Richart, F. E. Dynamic response of embedded machine foundations. *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 1974, 100, GT4, 427
- 114 Elsabee, F. and Morray, J. P. Dynamic Behavior of Embedded Foundations. *Research Rep. R77-33*, MIT, 1977
- 115 Novak, M. and Sheta, M. Approximate approach to contact effects of piles. *Dyn. Resp. Pile Fdnx., ASCE*, 1980 (O'Neill and Dobry, eds.)
- 116 Johnson, G. R. and Epstein, H. I. Backfill effects on circular foundation stiffnesses. *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 1977, 103, GT8, 899
- 117 Kagawa, T. and Kraft, L. M. Lateral pile response during earthquakes. *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 1981, 107, GT12, 1713
- 118 Liou, D. D. and Penzien, J. Seismic Analysis of an Offshore Structure Supported on Pile Foundations. *Report No. EERC77-25*, University of California, Berkeley, 1977
- 119 Blaney, G. W., Kausel, E. and Roesset, J. M. Dynamic Stiffness of Piles. *Proc. 2nd Int. Conf. Num. Meth. Geomech.*, Blacksburg, Virginia, 1976
- 120 Kuhlmeier, R. Static and Dynamic Laterally Loaded Piles. *Research Rep. CE76-9*, University of Calgary, 1976
- 121 Angelides, D. C. and Roesset, J. M. Nonlinear lateral dynamic stiffness of piles. *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 1981, 107, GT11, 1443
- 122 Velez, A., Gazetas, G. and Krishnan, R. Lateral Stiffness and Damping of Piles in Non-homogeneous Soil. *Research Rep. CE-82-04*, RPI, 1982
- 123 Wolf, J. P. and von Arx, G. A. Impedance function of a group of vertical piles. *Earthq. Engrg. & Soil Dyn.*, ASCE, 1978, 11, 1024
- 124 Gazetas, G. Variational estimations of raft settlement on cross-anisotropic soil. *Soils and Foundations*, 1981g, 21, No. 4, 109
- 125 Warburton, G. B., Richardson, J. D. and Webster, J. J. Forced vibrations of two masses on an elastic half space. *J. Appl. Mech.*, ASME, 1971, 38, E
- 126 Roesset, J. M. and Gonzalez, J. J. Dynamic interaction between adjacent structures. *Dyn. Meth. Soil Rock Mech.*, 1977, 1, 127
- 127 Haupt, W. A. Surface waves in non-homogeneous halfspace. *Dyn. Meth. Soil Rock Mech.*, 1977, 1, 335
- 128 Richart, F. E., Jr., personal communication, 1982

NOTATION

The following symbols are frequently used in the paper:

Related to geometry

- B = half-width of a strip footing or the shortest half-width of a rectangular footing
- D = depth of embedment
- d = height of perfect sidewall-backfill contact above the foundation base

- H = thickness of soil stratum
- L = one-half of the longest side of a rectangular foundation
- R = radius of a cylindrical foundation
- R_0 = radius of 'equivalent' circular foundation (equations (47)-(50))
- z_c = distance of center of gravity of a machine-foundation system above the base.

Related to material properties

- G = shear modulus of soil
- \bar{m} = increase of shear modulus from the surface to a depth equal to R or B (applicable to inhomogeneous soil deposits)
- n = E_H/E_V , where E_H and E_V are the horizontal and vertical Young's moduli of a cross-anisotropic soil
- ν = Poisson's ratio of soil
- ξ = hysteretic critical damping ratio of soil

Related to foundation impedances

- K = static stiffness referred to the base of the foundation (Fig. 1)
- K = dynamic impedance function of frequency; it may be expressed in one of the following alternative forms:
- $= K_1(\omega) + iK_2(\omega)$
- $= K(k + ia_0c)(1 + 2i\xi)$
- $= K(k + ia_0c)$

Calligraphic characters are used on the figures in place of the bold K , k and c .

- k and k = (dynamic) stiffness coefficients, functions of ω
- c and c = (dynamic) damping coefficients, functions of ω
- a_0 = $\omega B/V_s$ or $\omega R/V_s$ (dimensionless frequency factor)
- F = dynamic compliance function of ω ; it may be expressed in one of the following alternative forms:
- $= F_1(\omega) + iF_2(\omega)$
- $= \frac{1}{K} [f_1(\omega) + if_2(\omega)]$

Subscripts

- v = vertical (also designated by z)
- h = horizontal (also x, y)
- r = rocking (also r_x, r_y)
- t = torsion (also r_z)
- hr = coupled horizontal-rocking (also xr_y, yr_x)



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

CURSOS ABIERTOS

CIMENTACION DE MAQUINARIA

17 al 21 de febrero de 1992

**PARAMETROS DE DISEÑO EN
CIMENTACIONES DE MAQUINARIA**

ING. R. FLORES BERRONES

EXPOSITOR:

ING. ROBERTO MAGAÑA DEL TORO

PALACIO DE MINERIA

**PARAMETROS
DE DISEÑO
EN CIMENTACIONES
DE MAQUINARIA**

R FLORES BERRONES ★

**★ JEFE DE ESTUDIOS ESPECIALES E INVESTIGACIONES
DIRECCION GENERAL DE CAMINOS RURALES, SAHOP,
COMISIONADO AL INSTITUTO DE INGENIERIA**

RESUMEN

NOTACION

1.	INTRODUCCION	1
2.	SISTEMAS EQUIVALENTES	2
3.	SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD	2
4.	TEORIA DEL SEMIESPACIO	5
4.1	<i>Antecedentes</i>	5
4.2	<i>Teoría de cuerpos rígidos en un medio elástico seminfinite</i>	6
4.3	<i>Evaluación de parámetros para el modo vertical</i>	9
4.4	<i>Parámetros para diferentes modos de vibración</i>	11
5.	EFFECTOS DE LA ESTRATIFICACION Y DEL ENCAJONAMIENTO	11
6.	RESPUESTA DE CIMENTACIONES EN UN MEDIO VISCOELASTICO	14
7.	CIMENTACIONES CUADRADAS O RECTANGULARES	14
8.	DETERMINACION DEL MODULO G	15
9.	ALGUNAS FORMAS PARA ESTIMAR DIRECTAMENTE k	19
9.1	<i>Cimentaciones piloteadas</i>	21
10.	CONCLUSIONES	24
11.	RECONOCIMIENTO	25
12.	REFERENCIAS	25
	TABLAS	31
	FIGURAS	37
	APENDICE. EJEMPLO DE APLICACION	53
	FIGURAS	59

ABSTRACT

The general approach for studying the vibrations of machine foundations, together with the methods for computing the behaviour of their equivalent lumped systems, is presented in this work. The elastic half-space theory for rigid bodies vibrating on the surface is summarized and formulae for obtaining the equivalent parameters on different modes of vibrations, and for different foundation shapes, are given. The most important factors that affect the numerical values of these parameters are found to be (besides the type of soil), the stress distribution at the contact area, the depth of embedment into the soil, and the depth to bedrock.

Several methods for computing the elastic shear modulus are given, and the use of the suggested criteria is illustrated through an example.

RESUMEN

Se presenta el enfoque general del análisis de las vibraciones de máquinas y se hace un repaso de los fundamentos que gobiernan el comportamiento de sistemas equivalentes constituidos por una masa, uno o varios resortes, y uno o varios amortiguadores. Se explica brevemente la teoría de cuerpos rígidos en un medio elástico seminfinito, y la forma cómo a partir de dicha teoría se obtienen los parámetros que rigen a los sistemas equivalentes. Se presentan las fórmulas con que se calculan estos parámetros en los distintos modos de vibración de zapatas circulares, cuadradas o rectangulares, y se mencionan los factores que influyen en sus valores numéricos. Entre dichos factores los más importantes son, además de la clase de suelo, el tipo de distribución de esfuerzos en el área de contacto, la profundidad de encajonamiento de la cimentación dentro del terreno, y la profundidad a la cual se encuentra la roca.

Finalmente, se incluyen varias formas para estimar el módulo elástico al cortante del suelo; dicho módulo constituye el factor más importante en la determinación de la constante, k , del resorte equivalente, y en forma de Apéndice se da un ejemplo donde se aplican varios de los conceptos expuestos en este trabajo.

NOTACION*

a	exponente empleado en la ec 13
a_n	$\Omega R/C_s$; relación de frecuencias
b	$M/\rho R^3$; relación de masas
B	ancho de cimentación
B_v, B_h, B_r	coeficientes para zapatas rectangulares (fig 11)
c	coeficiente de amortiguamiento
$c_{crítico}$	$2\sqrt{km}$
C_s	$\sqrt{G/\rho}$; velocidad de propagación de las ondas transversales
C_L	$\sqrt{E/\rho}$; velocidad de ondas dilatantes longitudinales
D	diámetro de la cimentación
D_0	$c/2\sqrt{kM}$; relación de amortiguamiento
E	módulo de Young del suelo
f_1, f_2	funciones empleadas en la teoría del semiespacio
f_n	frecuencia de resonancia
F(t)	fuerza que se aplica en la cimentación
FDC	factor dinámico de carga
G	$E/2(1 + \nu)$; módulo al cortante
h	profundidad equivalente
H	altura de probeta
I	momento de inercia

* Se incluyen todos los símbolos utilizados en este trabajo, excepto aquellos que se especifican en el texto

k	constante del resorte
k_v	$4GR/1-\nu$
L	largo de la cimentación (en el plano de cabeceo)
M	masa equivalente
P	fuerza aplicada directamente por la máquina a la cimentación
Q	fuerza aplicada por la cimentación al suelo
R	radio de la cimentación o radio equivalente
S_u	resistencia no drenada del suelo
T	$2\pi/\sqrt{k/M}$; periodo natural
w	desplazamiento vertical del suelo
x	desplazamiento del sistema equivalente.
X_0	amplitud de desplazamiento
X_1	$\frac{1-\nu}{4} \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2}$
X_2	$\frac{1-\nu}{4} \frac{f_2/a_0}{f_1^2 + f_2^2}$
α	ángulo de desfasamiento
γ_m	peso volumétrico del suelo
λ	longitud de onda
ν	relación de Poisson
ρ	masa específica del suelo
σ_0	esfuerzos de confinamiento
σ_v	esfuerzos verticales normales
ω	$\sqrt{k/M}$; frecuencia circular natural
Ω	frecuencia circular de excitación

1. INTRODUCCION

Muchos ingenieros especializados en mecánica de suelos se han encontrado alguna vez con el problema de diseñar o dar recomendaciones para cimentar adecuadamente cierto tipo de maquinaria. Cuando el profesional no es experto en solucionar esta clase de problemas, al pasar a la literatura encontrará que generalmente la respuesta de sistemas reales se hace a través de sistemas simplificados equivalentes, los cuales están constituidos por masas concentradas, resortes y amortiguadores, que representan las masas, rigideces y amortiguamientos de los sistemas reales, respectivamente.

Al tratar de pasar de un sistema real a uno equivalente, necesariamente se debe responder a dos preguntas:

1. ¿Cuál es el sistema equivalente más adecuado para representar al sistema verdadero?
2. ¿Qué valor se debe aplicar a los parámetros del sistema equivalente para que la respuesta sea congruente con la realidad?

Mientras que la primera pregunta se puede contestar directamente en función del sentido en que se aplican las fuerzas y los desplazamientos que tienden a producirse (ref 1), la segunda involucra muchos factores que requieren de un cuidadoso estudio. Sin embargo, un análisis completo dinámico de cimentaciones deberá comprender estos dos aspectos y

sus objetivos estarán encaminados a: 1) establecer claramente las partes involucradas en el problema; 2) estudiar las alternativas que permitan cumplir con las especificaciones de comportamiento, y 3) dar las recomendaciones de cimentación.

El objeto del presente trabajo se limita a proporcionar un resumen de los procedimientos más comunes en la determinación de los parámetros mencionados, con el enfoque principal dirigido hacia la evaluación más racional que actualmente se emplea. Para mayor información sobre el análisis general de las cimentaciones de maquinaria se recomiendan las refs 2 y 3.

2. SISTEMAS EQUIVALENTES

La intención de representar un sistema real de máquina-cimentación-suelo mediante un sistema matemático equivalente, es obtener con cierta facilidad la respuesta del primero, para lo cual se emplean las curvas de amplificación y las ecuaciones que rigen el movimiento de los sistemas equivalentes.

La mayor parte de los sistemas reales que constituyen los problemas de cimentación, se pueden analizar mediante sistemas de un grado de libertad. En efecto, aun en los formados por más de un grado de libertad, generalmente se obtiene suficiente aproximación al analizar y superponer cada uno de sus modos de vibración mediante el llamado *método de superposición modal* (ref 4). La fig 1 muestra algunos de los sistemas más comunes en la práctica.

Por lo anterior, conviene hacer un breve repaso de los conceptos fundamentales sobre comportamiento de sistemas de un grado de libertad.

3. SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

La ecuación de equilibrio que gobierna el movimiento dinámico de estos sistemas es

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (1)$$

donde

- M masa del sistema
- c coeficiente de amortiguamiento
- k constante del resorte

$F(t)$ fuerza exterior aplicada a la masa (fig 2)

\ddot{x} , \dot{x} , x aceleración, velocidad y desplazamiento del sistema, respectivamente

La derivación de la solución de la ec 1, se encuentra en cualquier texto de dinámica básica (refs 4 y 5). Dicha solución está compuesta por dos términos: el correspondiente a las vibraciones libres que desaparecen después de cierto tiempo (como consecuencia del amortiguamiento), y el de las vibraciones forzadas que permanecen en el sistema mientras la fuerza, F , actúa. Solo se analizarán las vibraciones forzadas, por ser las que realmente interesan para el diseño.

La expresión que da respuesta a las vibraciones forzadas, cuando existe excitación armónica, es

$$x = \frac{F_0}{k} \frac{\sin(\Omega t - \alpha)}{\sqrt{\left[1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right]^2 + 4D_0^2 \left[\frac{\Omega}{\omega}\right]^2}} \quad (2)$$

donde

F_0 amplitud de la fuerza aplicada

$\alpha = \tan^{-1} \frac{2 D_0 \omega \Omega}{\omega^2 - \Omega^2}$

Ω frecuencia circular de excitación, en rad/seg

$f = \frac{\Omega}{2\pi}$, frecuencia de excitación, en ciclos/seg

$D_0 = c/c_{\text{crítico}} = c/2 \sqrt{kM}$, relación de amortiguamientos

$c_{\text{crítico}}$ amortiguamiento que suprime las vibraciones libres

$\omega = \sqrt{k/M}$, frecuencia circular natural, en rad/seg

$T = 2\pi/\omega$, periodo natural, en seg

t tiempo transcurrido

$f_n = \frac{\omega}{2\pi}$, frecuencia natural, en ciclos/seg

Actualmente existen estudios más prácticos que consideran el medio espacio como un medio viscoelástico (ref 15) o un medio estratificado (ref 16); en ambos casos se obtiene la respuesta de cimentaciones circulares rígidas, para los modos vertical, horizontal y de cabeceo.

En esta sección se explica primeramente, en términos generales, en qué consiste la teoría de un cuerpo circular rígido vibrando en la superficie de un medio elástico seminfinito, y se presenta la evaluación de los parámetros equivalentes en los modos vertical, horizontal y de cabeceo. Posteriormente, se muestran los efectos de la estratificación y el encajonamiento, así como la respuesta de cimentaciones en un medio viscoelástico. Finalmente, se analizan las cimentaciones de forma cuadrada o rectangular.

4.2 Teoría de cuerpos rígidos en un medio elástico seminfinito

Las suposiciones originales de esta teoría son:

1. La cimentación se apoya en la superficie de un medio seminfinito y es rígida, de radio R y masa M .
2. El medio elástico es homogéneo, de profundidad infinita, y está caracterizado por las siguientes propiedades:

ρ densidad de masa

G módulo elástico al cortante, o E (módulo de Young) = $2G(1 + \nu)$

ν relación de Poisson

C_s velocidad de propagación de las ondas cortantes, función de G y ν

Bajo estas condiciones, el análisis se hace en dos partes. En la primera se obtiene la relación de la fuerza vertical Q , aplicada directamente en la superficie del medio espacio (figs 6a y b), y el desplazamiento vertical w . Dicha relación está dada por

$$w = \frac{Q_0 e^{i\Omega t}}{GR} (f_1 - if_2) \quad (5)$$

donde Q_0 es la amplitud de la carga, y f_1 y f_2 son funciones de:

1. $a_0 = \Omega R / C_s$
2. De la relación de Poisson
3. De la forma como los esfuerzos se distribuyen en el área cargada; si la cimentación es rígida la distribución queda dada por los otros parámetros.

La fig 7 muestra la forma en que varían f_1 y f_2 en función de a_0 , para una distribución dada de esfuerzos sobre un área circular.

La segunda parte consiste en considerar la ecuación que establece el equilibrio de la masa M de la cimentación

$$M\ddot{w} + Q = P \quad (6)$$

A continuación se verá como puede expresarse el desplazamiento w directamente en términos de la fuerza P , mediante la combinación de las ecs 5 y 6. Para ello, despéjese Q de la ec 5 e inclúyase en la ec 6, considerándose además de que $\ddot{w} = -\Omega^2 w$; es decir

$$-M\Omega^2 w + \frac{GR}{f_1 - if_2} w = P$$

Ahora, al despejar de esta expresión w se obtiene

$$w = P \frac{f_1 - if_2}{(GR - M\Omega^2 2f_1) + iM\Omega^2 f_2} = \frac{P}{GR} \frac{f_1 - if_2}{(1 - \frac{M\Omega^2}{GR} f_1) + i \frac{M\Omega^2}{GR} f_2}$$

puesto que

$$\frac{M\Omega^2}{GR} = \frac{\Omega^2 R^2 \rho}{G} \frac{M}{\rho R^3} = a_0^2 \frac{M}{\rho R^3}$$

y llamando

$$b = \frac{M}{\rho R^3}$$

el valor del desplazamiento se puede escribir también como

$$w = \frac{P}{GR} \frac{f_1 - if_2}{(1 - a_0^2 bf_1) + ia_0^2 bf_2}$$

Si se considera que $P = P_0 e^{i\Omega t}$, la anterior ecuación puede escribirse

$$w = \frac{P_0 e^{i(\Omega t - \alpha)}}{GR} \frac{f_1^2 + f_2^2}{\sqrt{(1 - a_0^2 bf_1)^2 + (a_0^2 bf_2)^2}}$$

donde $\tan \alpha = \frac{f_2}{f_1 - a_0^2 b (f_1^2 + f_2^2)}$

Finalmente, el valor del desplazamiento se puede expresar de la siguiente manera

$$w = \underbrace{\left[\frac{P_0 (1-\nu)}{4GR} \right]}_I \underbrace{\left[\frac{4}{1-\nu} \frac{f_1^2 + f_2^2}{\sqrt{(1 - a_0^2 bf_1)^2 + (a_0^2 bf_2)^2}} \right]}_{II} \underbrace{\left[e^{i(\Omega t - \alpha)} \right]}_{III} \quad (7)$$

La ec 7 relaciona directamente a w y P ; en ella se aprecian tres componentes: el término I representa el desplazamiento estático, el II la amplificación dinámica, y el III el ángulo de desfase entre la fuerza aplicada y el desplazamiento w .

Al dibujar el factor de amplificación para diferentes valores de a_0 y b , se obtienen las curvas de la fig 8a, muy parecidas a las de la fig 3; es decir, en ambos casos se tiene un solo peak o valor máximo, y la forma general de las curvas es la misma. Más aún, el semiespacio, aunque es totalmente elástico, se comporta como si fuera amortiguado debido a la energía que por radiación es disipada; esta pérdida de energía es lo que se conoce como *amortiguamiento radial* del sistema.

Si se hace $P_0 = M_e I \Omega^2$, la ec 7 se puede escribir

$$w = \frac{M_e I}{M} \left[a_0^2 b \frac{f_1^2 + f_2^2}{\sqrt{(1 - a_0^2 bf_1)^2 + (a_0^2 bf_2)^2}} \right] e^{i(\Omega t - \alpha)} \quad (8)$$

Las curvas de amplificación correspondientes se muestran en la fig. 3b, las cuales son muy similares a las obtenidas en la fig 4.

4.3 Evaluación de parámetros para el modo vertical

Al combinar nuevamente las ecs 5 y 6, se obtiene

$$M\ddot{w} + \frac{f_2/\Omega}{f_1^2 + f_2^2} GR\dot{w} + \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} GRw = P \tag{9}$$

Del análisis de esta ecuación, se observa que es muy similar a la correspondiente a un sistema de un grado de libertad compuesto por una masa, un resorte y un amortiguador, la que se puede también escribir como

$$M\ddot{w} + c_v X_2 \dot{w} + k_v X_1 w = P \tag{10}$$

donde

$c_v = \frac{4}{1-\nu} \sqrt{G} \rho R^2$	}	Coeficientes relacionados con el amortiguamiento
$X_2 = \frac{1-\nu}{4} \frac{f_2/a_0}{f_1^2 + f_2^2}$		
$k_v = \frac{4GR}{1-\nu}$	}	Coeficientes relacionados con la rigidez del sistema
$X_1 = \frac{1-\nu}{4} \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2}$		

Los valores de k_v y c_v son independientes de la frecuencia de excitación, en cambio X_1 y X_2 si dependen de ella, según se observa en la fig 9.

A fin de tener valores constantes de los coeficientes de \dot{w} y w , y obtener la equivalencia con sistema de masa-amortiguamiento-resorte de un grado de libertad, es necesario establecer el intervalo de frecuencias de interés y seleccionar en él los valores de estos coeficientes que, al usarse como constantes, den resultados aproximados a los que se obtendrían con los coeficientes reales.

Uno de los procedimientos más simplista y racional para efectuar esta selección de valores, es el propuesto por Lysmer (ref 18), con las siguientes sugerencias

- Para bajas frecuencias, $X_1 = 1$
- Para frecuencias altas, se considera solamente como masa equivalente la masa M , y se desprecia la llamada masa efectiva de suelo (concepto que se estudiará más adelante).
- Para frecuencias intermedias, usar un valor de $X_2 = 0.85$ (fig 9), o sea emplear una relación de amortiguamiento igual a

$$D_V = \frac{c}{c_{\text{crítico}}} = \frac{X_2 c_v}{2\sqrt{k_v M}} = \frac{0.85 c_v}{2\sqrt{k_v M}} = \frac{0.85}{\sqrt{b(1-\nu)}}$$

El error máximo con el procedimiento simplificado por Lysmer es de 30 por ciento, aun cuando en general es del orden de 10 por ciento. Sin embargo, la frecuencia de resonancia que se obtiene en el sistema de un grado de libertad equivalente es siempre menor que la obtenida directamente con la teoría del semiespacio.

A fin de mejorar la aproximación del método de Lysmer, Whitman (ref 19) sugiere introducir una masa adicional al sistema; el efecto de esta es hacer coincidir la frecuencia de resonancia del sistema equivalente con la que se obtiene directamente con la teoría del semiespacio. Para ello, se aproxima la curva de la función X_1 a la de una parábola de ecuación

$$X_1 = 1 - \xi a_0^2 \quad (11)$$

Al sustituir la ec 11 en la 10, se obtiene

$$\left(M + \frac{4\xi}{1-\nu} \rho R^3\right) \ddot{w} + c X_2 \dot{w} + k_v w = P \quad (12)$$

O sea, que el valor de la masa adicional está dado por

$$\frac{4\xi}{1-\nu} \rho R^3$$

Dicha masa es la que se conoce como *masa efectiva de suelo*.

4.4 Parámetros para diferentes modos de vibración

Para modos de vibración diferentes del vertical, el procedimiento que se sigue en la obtención de los parámetros equivalentes es similar al ya señalado. La tabla 1 contiene un resumen de los valores que se obtienen cuando la distribución de esfuerzos es la de una placa rígida en un medio elástico.

Dado que k y D_0 dependen de la distribución de esfuerzos (fig 10), la tabla 1 debe usarse con cierta precaución, por ejemplo, si se expresa el valor de k_v en términos de un coeficiente K , es decir, $k_v = \frac{KGR}{1-\nu}$, los valores de este coeficiente varían, según muestra la tabla 2.

5. EFECTOS DE LA ESTRATIFICACION Y DEL ENCAJONAMIENTO

Entre los efectos que influyen en el parámetro k están el del encajonamiento y el de la proximidad de la roca basal con el nivel de desplante. Al respecto, en la fig 11, H_1 es la distancia de la base de la cimentación a la roca, y H_2 la profundidad de encajonamiento; en todos los casos el coeficiente k está normalizado al k correspondiente a una profundidad infinita de la roca. En dicha figura se pueden hacer las siguientes observaciones:

1. Para el modo vertical, el valor de k es fuertemente influido por la presencia de la roca ($H_1/R < 4$) y por la profundidad del encajonamiento
2. Para el modo horizontal, el efecto del encajonamiento es mayor que en el caso vertical, y el efecto de la proximidad de la roca es un poco menor
3. Para el movimiento de cabeceo, el efecto de encajonamiento es más acentuado que en los demás tipos de movimiento; la influencia de la proximidad de la roca es, sin embargo, pequeña
4. Para la torsión, los coeficientes de rigidez son también influidos notablemente por efecto del encajonamiento, y muy poco por la proximidad de la roca. En la ref 20 se presenta un procedimiento para tomar en cuenta el caso de varios estratos en el cálculo de k .

Dos de los investigadores que más han analizado el caso de una masa sobre un estrato son Kobori (ref 21) y Luco (ref 16). De acuerdo con este último, los efectos principales de la estratificación, cuando el estrato superficial que se analiza es relativamente poco profundo y existe un contraste fuerte entre las velocidades de propagación de ondas de dicho

estrato y la roca basal, son un aumento del coeficiente de rigidez y una disminución en el coeficiente de amortiguamiento. Las gráficas que Luco presenta indican que ambos coeficientes son altamente dependientes de la frecuencia de excitación. La fig 12 ilustra esta dependencia para el caso del modo horizontal.

Kobori señala que para el caso de una zapata cuadrada de ancho B, sujeta a una fuerza horizontal periódica $P = P_0 e^{i\Omega t}$, la relación entre el desplazamiento u y la fuerza P es la misma que para el caso del medio espacio, esto es:

$$u = \frac{P_0 e^{i\Omega t}}{GB/2} (f_1 - if_2)$$

solo que las funciones f_1 y f_2 dependen ahora de la relación H/B. La fig 13 presenta valores típicos de las dos funciones; las singularidades que se observan se deben a las frecuencias correspondientes a las vibraciones libres del estrato donde f_1 y f_2 tienden al infinito.

El encajonamiento de las cimentaciones dentro del suelo, además de un incremento en la rigidez (y por tanto en la frecuencia de resonancia) produce otro en el amortiguamiento. Desde el punto de vista de amortiguamiento, el criterio tradicional de desprestigiar el efecto del encajonamiento es siempre conservador; sin embargo, desde el punto de vista de la rigidez, esto no es cierto cuando la frecuencia de operación es mayor que la de resonancia calculada desprestigiar dicho efecto. Experimentalmente, se ha observado que el aumento del amortiguamiento varía en la misma proporción en que la frecuencia de resonancia se incrementa, por ejemplo, si k_v aumenta dos veces por efecto del encajonamiento, f_r y D lo hacen aproximadamente $\sqrt{2}$ veces (ref 19). Otra forma de estimar la variación del amortiguamiento con la profundidad de encajonamiento, es a través de la gráfica que Stoke y Richart presentan en uno de sus trabajos y que fue obtenida a partir de resultados experimentales realizados en modelos de zapatas (fig 14).

Girard y Picard (ref 22) sugieren el uso de las siguientes fórmulas empíricas, deducidas a partir de resultados experimentales obtenidos en zapatas cuadradas.

$$k = k_0 \sqrt[3]{1 + (4h/\bar{D})}$$

$$D = D_0 \sqrt[4]{[1 + (4h/\bar{D})]^3}$$

donde

\bar{D} Ancho o diámetro de la cimentación

- D_0 constante del amortiguamiento para una cimentación superficial
- h profundidad de encajonamiento
- k_0 constante del resorte para una cimentación superficial

Con base en un trabajo realizado por Novak y Beredugo, Whitman (ref 23) obtuvo la siguiente tabla, que da las relaciones de k/k_0 y D/D_0 en los modos vertical, horizontal y de cabeceo. Posiblemente, las relaciones de la tabla 3 proporcionen los mejores valores de la rigidez y el amortiguamiento correspondiente a zapatas encajonadas.

El empleo de elementos finitos sirve también de gran auxiliar en el estudio del comportamiento dinámico de las cimentaciones y de los efectos producidos por la estratificación y el encajonamiento; algunos trabajos al respecto son los de Lysmer (ref 17), y Kausel (refs 24 a 26). Este último, mediante un modelo tridimensional axisimétrico, sometido a cargas dinámicas o desplazamientos no axisimétricos, obtuvo, para el caso de cimentaciones circulares apoyadas en la superficie de un medio elástico de profundidad infinita, valores de la rigidez y del amortiguamiento muy similares a los que se obtienen en el semiespacio elástico. En su análisis del efecto de la proximidad de la roca, Kausel encuentra que las rigideces estáticas para los modos horizontal y de cabeceo (los únicos que analizó); se pueden obtener mediante

- a) Movimiento horizontal

$$k_h = \frac{8GR}{2-\nu} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R}{H}\right)$$

para $R/H \leq 1/2$

- b) Movimiento de cabeceo

$$k_T = \frac{8GR^3}{3(1-\nu)} \left(1 + \frac{1}{6} \frac{R}{H}\right)$$

para $R/H \leq 1/2$

La limitación de $R/H \leq 1/2$ se debe a que para valores mayores que esta relación, las expresiones sobrestiman las rigideces estáticas.

En cuanto al estudio tridimensional del efecto de encajonamiento a través del elemento finito, Kausel presentó algunos resultados aunque no los suficientes para sacar

conclusiones prácticas. Sin embargo, es muy factible que en un futuro próximo sea el método de elementos finitos el que permita estudiar más convenientemente las distintas modalidades que existen en los casos reales.

6. RESPUESTA DE CIMENTACIONES EN UN MEDIO VISCOELASTICO

Para fines de diseño, es importante tomar en cuenta el amortiguamiento interno del sistema, es decir, el amortiguamiento histerético o viscoso. Para ello se pueden emplear los resultados de Veletsos y Verbic (ref 15) en su estudio sobre cimentaciones vibrando en un medio viscoelástico.

Una forma más simple de considerar el amortiguamiento interno, aunque desde luego menos aproximado, es aplicar el criterio sugerido por Whitman y Richart (ref 27); dicho criterio consiste en determinar los efectos combinados de los amortiguamientos radial e interno, suponiendo un valor típico de amortiguamiento interno de 0.05 y sumar este valor al amortiguamiento radial obtenido con la teoría elástica.

Este procedimiento simplificado de sumar directamente los amortiguamientos está basado en el estudio de los resultados obtenidos por Lee (ref 28) en su trabajo sobre cimentaciones en un medio viscoelástico, y en la comparación de los resultados que se obtienen, en las respuestas máximas, entre los valores exactos y los obtenidos de sumar los dos amortiguamientos; ambos valores resultaron muy parecidos (ref 23).

Para los modos vertical y horizontal, el amortiguamiento interno resulta relativamente poco importante con respecto al amortiguamiento radial; sin embargo, para los modos torsional y de cabeceo, el amortiguamiento radial es muy pequeño y el interno resulta importante. La tabla 4 presenta un resumen de algunos datos disponibles relacionados con el amortiguamiento interno en suelos al nivel de los esfuerzos que ocurren en cimentaciones de maquinaria.

Una forma de estudiar directamente el efecto del amortiguamiento interno es a través del método de elementos finitos. En uno de los trabajos de Kausel y Roesset (ref 26), se indica que el efecto principal de dicho amortiguamiento es la suavización de las curvas que señalan la variación que en realidad tienen los coeficientes de rigidez y amortiguamiento con la frecuencia de excitación; la fig 15 ilustra este efecto para los modos horizontal y cabeceo, y en ella se puede ver la gran dependencia que pueden tener estos coeficientes en el amortiguamiento interno, cuando la proximidad de la roca es relativamente pequeña.

7. CIMENTACIONES CUADRADAS O RECTANGULARES

Si la forma de la cimentación es cuadrada o rectangular, el valor de k se puede obtener en forma aproximada con la tabla 5 y la gráfica de la fig 16. Los valores con este método

semiempírico son prácticamente iguales a los calculados con la teoría exacta de Elorduy (refs 29 y 30). Existen también estudios de cimentaciones rectangulares sobre un medio viscoelástico (ref 31), aunque los resultados obtenidos no se han presentado en forma práctica.

En cuanto a los valores de amortiguamiento, D_0 , y la masa efectiva, M_{ef} , de cimientos cuadrados o rectangulares, éstos se obtienen mediante una cimentación circular equivalente, la que debe tener la misma área (cuando los movimientos son verticales u horizontales) o el mismo momento de inercia (en el caso de cabeceo) que la cimentación rectangular; el radio de una base circular equivalente será

$$R = \sqrt{\frac{BL}{\pi}} \quad \text{para movimiento horizontal o vertical}$$

$$R = \sqrt[4]{\frac{BL^3}{3\pi}} \quad \text{para cabeceo}$$

Una vez establecida la cimentación equivalente, se podrán emplear las tablas disponibles para bases circulares, por ejemplo, la tabla 1.

8. DETERMINACION DEL MODULO G

La rigidez k influye directamente en la determinación de la frecuencia de resonancia y la magnitud de los movimientos a frecuencias relativamente bajas y/o iguales a la de resonancia. Estas y algunas otras razones hacen que sea el parámetro más importante en el diseño de cimentación de máquinas. Dos de las características del suelo que influyen directamente en su valor, son G y ν .

En la mayoría de los suelos, el valor de ν varía en un intervalo relativamente estrecho: 0.35 y 0.4 en arenas, y cerca de 0.5 en arcillas saturadas; en cambio, el valor de G depende del nivel de deformaciones y es función fundamentalmente de e y $\bar{\sigma}_0$. (Existen algunos otros factores que influyen en el valor de G , tales como los efectos de duración de la carga aplicada y el de la historia de esfuerzos que Richart (ref 32) menciona en uno de sus trabajos; sin embargo, dichos efectos son secundarios en comparación con e y $\bar{\sigma}_0$.)

La determinación de G se puede hacer mediante los procedimientos que a continuación se indican:

Empleo de fórmulas

Existen fórmulas semiempíricas que dan el valor de G para niveles de deformación menores de 10^{-5} cm/cm (en dichos niveles el comportamiento del suelo es prácticamente elástico-lineal). Quizá la fórmula más común es la de Hardin y Drnevich (ref 33), que proporciona muy buenos resultados para valores pequeños de la relación de vacíos ($e \leq 2.0$), y es, además, válida tanto para suelos cohesivos como no cohesivos.

$$G = 1200 \frac{(3-e)^2}{1+e} (\text{OCR})^a (\bar{\sigma}_0)^{1/2} \quad (13)$$

donde σ_0 y G deben estar en lb/pulg²

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3}{3}$$

OCR es la relación de preconsolidación ($\sigma_{\text{máx}}/\bar{\sigma}_0$) y a depende del índice de plasticidad (fig 17).

Para el caso de arenas, Seed (ref 34) emplea la expresión

$$G = 1000K_2 (\bar{\sigma}_0)^{1/2}$$

donde K_2 depende de la densidad relativa (tabla 6).

Puesto que G es función de los esfuerzos efectivos que se tienen en el sitio, y la resistencia no drenada de suelos normalmente consolidados, S_u , también lo es, debe suponerse que G se puede obtener a partir de S_u ; al respecto, Whitman (ref 19) recomienda emplear

$$G = 1.600 S_u$$

para valores de deformación angular entre 10^{-5} y 10^{-6} .

Pruebas de laboratorio

Resonancia en una columna de suelo. Este procedimiento consiste en aplicar un momento torsionante en la parte superior de una probeta cilíndrica de suelo, y obtener las frecuencias en las que ocurren los valores de respuesta máximos; es decir, las frecuencias de resonancia. Para el caso en que la probeta esté fija en su base y libre en su parte superior, las frecuencias de resonancia están dadas por

$$f_n = (2n-1) \frac{C_s}{4H} \quad (14)$$

donde

n número entero (= 1 para el modo fundamental)

H altura de la probeta

C_s velocidad de onda al cortante

De la ec 14 se obtiene C_s , y el valor de G mediante

$$G = \rho C_s^2 \quad (15)$$

Técnica pulsativa. Consiste en colocar varios cristales piezoeléctricos en cada extremo de una probeta de suelo, y aplicar un pulso eléctrico en los cristales de uno de los extremos (ref 19). Dichos cristales están manufacturados en forma tal que producen una distorsión al cortante cuando se aplica un pulso eléctrico, con lo que se origina una onda transversal de esfuerzos que pasa a través de la probeta de suelo. La onda es registrada en el otro extremo y su velocidad se determina directamente mediante

$$C_s = \frac{H}{\Delta t}$$

Donde Δt es el tiempo que tardó la onda en ir de un extremo al otro.

Pruebas de campo

Empleo de un pequeño vibrador. Esta técnica estriba en medir la longitud de onda superficial que genera un vibrador, trabajando a una determinada frecuencia, en la superficie del terreno (fig 18). La longitud de onda se determina moviendo un receptor a lo largo de una línea radial al eje del vibrador, y localizando los puntos que están en fase (refs 1 y 35). Al cambiar la frecuencia de excitación, se puede variar la longitud de onda y, por tanto, la profundidad de inspección. Una regla semiempírica es suponer que el módulo calculado mediante este procedimiento, corresponde al valor que dicho módulo tiene a una profundidad del suelo igual a $\lambda/2$ (λ , longitud de onda)

Métodos geofísicos. Se pueden utilizar en forma indirecta para calcular G. En efecto, mediante los procedimientos que se emplean para determinar las velocidades de propagación de ondas dilatantes, se puede hacer uso de las relaciones que existen entre C_D (velocidad de ondas dilatantes) y C_s . La relación está dada por

$$C_s = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}} C_D$$

Teniendo C_s , el valor de G se obtiene mediante la ec 15.

Como se puede observar, la relación de Poisson, ν , debe conocerse para el empleo de esta técnica. Detalles de la forma como se realiza la medición de C_D mediante este procedimiento, pueden verse en las refs 5 y 36.

Método de hoyos en paralelo (cross-hole method). Este método (fig 19) consiste en determinar las velocidades de las ondas cortantes que se propagan y se detectan a diferentes profundidades en perforaciones hechas ex profeso. Cuando el transductor que capta la señal de salida se encuentra en la parte superior de la varilla de impulso (fig 19a), se debe hacer una corrección al tiempo de llegada a fin de considerar el tiempo que las ondas tardaron en viajar por dicha varilla. El proceso puede facilitarse en el osciloscopio si la dirección del impacto se cambia en el sentido opuesto; ello se debe a que las trazas generadas divergen en el momento en que las ondas cortantes llegan (fig 19b). Mayores detalles de este procedimiento, que es uno de los más empleados para determinar el módulo G a niveles pequeños de deformación, se pueden encontrar en las refs 5 y 37.

Ahora bien, tomando en cuenta que en general los esfuerzos efectivos y las características del suelo varían con la profundidad y, por tanto, el valor del módulo G también cambia, se presenta el problema de determinar la profundidad a la cual deberá escogerse el valor de G que se va a emplear en el cálculo de k . En general no existe un criterio único para la solución de este problema; se han propuesto varios procedimientos empíricos, algunos de los cuales se mencionan a continuación.

Cuando se conoce C_s con la profundidad, Whitman (ref 19) recomienda usar la profundidad correspondiente al punto medio del bulbo de presiones; dicha profundidad está dada por

$$h = \frac{\bar{\sigma}_v}{\gamma_m} + \frac{3}{4} D$$

donde

- D diámetro (real o equivalente) de la cimentación
- $\bar{\sigma}_v$ 0.42 veces los esfuerzos estáticos aplicados en la superficie (o sea el esfuerzo vertical efectivo a la profundidad de $3/4 D$, originado por el peso de la cimentación y la maquinaria).

Si se emplea la fórmula de Hardin y Drnevich para el cálculo de G , es recomendable también determinar los esfuerzos efectivos a la mitad del bulbo de presiones ($3/4 D$); es decir, $\bar{\sigma}_0$ se calcula en función de

1. $\bar{\sigma}_v$ y $\bar{\sigma}_h$ debidas al sobrepeso del suelo a esa profundidad
2. $\bar{\sigma}_v$ y $\bar{\sigma}_h$ producidas por el peso de la cimentación.

Richart et al (ref 5) propone que la profundidad equivalente sea aquella donde el valor de $\bar{\sigma}_0$, calculado a la orilla de la cimentación, sea mínimo (fig 20).

9. ALGUNAS FORMAS PARA ESTIMAR DIRECTAMENTE k

Pruebas de placa

La estimación de k mediante pruebas de placa, se hace aplicando cargas repetidas (fig 21). La magnitud de las cargas estáticas y dinámicas debe ser similar a la esperada. //

Barkan (ref 38) registra excelentes correlaciones entre los valores estimados de la frecuencia de resonancia (calculados con los resultados de pruebas de placa) y los determinados experimentalmente.

Para extrapolar las rigideces obtenidas usando las placas de áreas pequeñas a las áreas reales del prototipo, se pueden utilizar las recomendaciones de Terzaghi (ref 39) para cargas estáticas; es decir

$$\text{Suelo cohesivo } k_{\text{prototipo}} = k_1 \cdot \text{diám}^C$$

$$\text{Suelo no cohesivo } k_{\text{prototipo}} = k_1 \cdot \text{diám} \left(\frac{C+1}{2} \right)^2$$

donde

$$C = \frac{\text{tamaño menor de la cimentación}}{\text{tamaño menor de la placa}}$$

Pruebas a base de un vibrador

La prueba consiste en colocar un pequeño vibrador sobre una placa de 12 a 30 pulg de diámetro. La frecuencia de excitación se varía hasta alcanzar la condición de resonancia, y el valor de k se obtiene mediante

$$k = (f_r \cdot 2\pi)^2 M$$

donde

M masa del vibrador y placa + la masa efectiva del suelo

Los resultados que se obtienen con este procedimiento son muy similares a los de la prueba de placa, solo que la interpretación correcta de los datos resulta más complicada y difícil.

Correlaciones con el módulo de reacción

Para análisis preliminares de diseño, pueden emplearse las correlaciones que existen entre las constantes de resorte y el llamado módulo de reacción elástico. Dichas correlaciones son:

movimiento vertical	$k_v = c_v A$
movimiento horizontal	$k_h = c_h A$
movimiento de cabeceo	$k_r = c_r I'$
movimiento torsionante	$k_\phi = c_\phi I''$

donde

- A área de contacto entre la cimentación y el suelo
- I' segundo momento del área de contacto alrededor del eje horizontal que pasa por el centroide del área y es normal al plano de cabeceo
- I'' segundo momento del área de contacto alrededor del eje vertical que pasa por el centroide del área

Los coeficientes c_u , c_h , c_r y c_ϕ son los módulos de reacción que dependen del tipo de suelo, así como del tamaño y geometría de la cimentación. Existen, sin embargo, tablas que relacionan dichos coeficientes solo en función del tipo de suelo; al respecto, Barkan (ref 38) proporciona la tabla 7.

9.1 Cimentaciones piloteadas

Desafortunadamente, esta parte de la dinámica de suelos no se ha desarrollado lo suficiente como para ofrecer métodos racionales aplicables a toda clase de problemas prácticos.

Dentro de los métodos más simples y más prácticos está el propuesto por Maxwell et al (ref 40), el cual se basa en los resultados que se obtienen a partir de pruebas dinámicas realizadas en pilotes prototipo, sobre los cuales se coloca un oscilador en el que varía la frecuencia de excitación (fig. 22). Los parámetros del sistema equivalente de un grado de libertad obtenidos a partir de los datos observados y recomendados por estos investigadores para el modo vertical (el único que estudiaron), son:

$$k = \frac{Q_1}{W} \cos \alpha + M \Omega^2$$

$$c = \frac{Q_1}{\Omega W} \operatorname{sen} \alpha$$

donde

- k constante del resorte
- c coeficiente de amortiguamiento

- M masa sobre el terreno, que incluye la del oscilador, el cabezal y la carga estática
- Q fuerza de excitación periódica
- Q_1 amplitud de la fuerza de excitación
- t tiempo
- w desplazamiento periódico
- W amplitud del desplazamiento
- α ángulo de fase entre Q_1 y W
- Ω frecuencia circular, en rad/seg

En la resonancia α es aproximadamente 90° y la expresión anterior de la rigidez se reduce a la siguiente

$$k_0 = M\Omega_0^2$$

donde Ω_0 es la frecuencia observada de resonancia.

Considerando que el amortiguamiento crítico c_c vale $2M\Omega_0$, la relación de amortiguamiento

se obtiene mediante $D = \frac{c}{c_c}$, y el desplazamiento máximo por $W = \frac{Q_1}{2k_0 D}$

En pruebas experimentales realizadas por Maxwell et al en pilotes circulares de concreto y de acero con sección H, se encontró que los amortiguamientos a la frecuencia de resonancia eran relativamente pequeños (del orden de $D_0 = 0.06$) y que la rigidez dinámica aumentaba considerablemente si el cabezal se encontraba en contacto con el terreno natural, y ligeramente con el aumento de la carga estática.

Al considerar la variación de las frecuencias de excitación y definir como relación de rigideces a k/k_0 y de frecuencias a Ω/Ω_0 , los resultados experimentales de estos investigadores señalaron que, en general, la relación de rigideces disminuye y la del amortiguamiento se incrementa cuando la relación de frecuencias aumenta (fig 23). En lo que se refiere al grupo de pilotes, concluyen que se está del lado conservador si se considera como amortiguamiento para el grupo el obtenido a partir de pruebas en pilotes

individuales, y que la rigidez se puede considerar simplemente como la suma de las rigideces de cada pilote.

Boutwell y Saxema (ref 41) recomiendan, para el caso de pilotes de punta, utilizar el sistema de dos grados de libertad mostrado en la fig 24, donde:

- m_f masa total del sistema cimentación-máquina
- k_f rigidez de cada pilote; se obtiene mediante la teoría simple de columnas; por ejemplo, para el modo vertical $k_p = \frac{A_p E_p}{L_p}$; donde L_p , A_p y E_p son respectivamente longitud, área y módulo de elasticidad del pilote
- K_f rigidez del grupo; es igual a la rigidez de cada pilote multiplicada por el número total de pilotes
- c_f amortiguamiento del sistema cimentación-máquina obtenido a través de vibraciones libres (Cómo?)

m_s , c_s y k_s son los parámetros del suelo sobre el cual se apoyan los pilotes, y se obtienen mediante la teoría del semiespacio elástico (tabla 1). El problema principal en este procedimiento sugerido por Boutwell y Saxema estriba, precisamente, en la correcta determinación de estos últimos parámetros.

Para el movimiento vertical, la influencia que tiene la carga axial y la longitud del pilote sobre la frecuencia de resonancia en pilotes de punta se ilustra en la fig 25 obtenida por Richart (ref 43). Dicha figura muestra que a medida que la carga axial se incrementa y/o la longitud del pilote aumenta, la frecuencia de resonancia disminuye. El mismo autor señala, en otro de sus trabajos (ref 5), que la contribución de un pilote a la rigidez contra la torsión de una zapata, está dada por

$$k_t = K_h d^2 (EF)_m (EF)_F$$

donde

- d diámetro del pilote
- K_h módulo de reacción del suelo

l longitud del pilote

r radio de la zapata

$(EF)_m$ factor de eficiencia para un pilote rígido que considera el efecto del movimiento del suelo

$(EF)_F$ factor de eficiencia que considera la flexibilidad del pilote

Trabajos recientes realizados por Novak y Beredugo (refs 42,44 y 45) ofrecen resultados más realistas y por tanto más confiables. La tabla 8 señala los valores correspondientes a los coeficientes de rigidez y amortiguamiento para los distintos modos de vibración.

Las funciones $f_{11.1}$, $f_{11.2}$, etc, dependen de las características del suelo y del pilote y se obtienen a través de la tabla 9 y la fig 26.

De acuerdo con los resultados teóricos de Novak (ref 42), las cimentaciones piloteadas, en comparación con las cimentaciones por superficie, pueden tener mayores frecuencias naturales, menores amortiguamientos y mayores amplitudes en la resonancia. Como consecuencia de estos resultados, Novak establece que "los pilotes pueden eliminar o reducir asentamientos permanentes, pero no pueden eliminar vibraciones".

10. CONCLUSIONES

La respuesta de cimentaciones superficiales de maquinaria se puede obtener a través de sistemas equivalentes de un grado de libertad, los que están constituidos por una masa concentrada que representa la masa de la maquinaria y la de la cimentación, uno o varios resortes que simulan la rigidez del suelo, y uno o varios amortiguadores que representan la pérdida de energía que ocurre en el sistema máquina-cimentación-suelo.

Los trabajos teóricos sobre la teoría del semiespacio elástico y viscoelástico que hasta la fecha se han desarrollado, permiten, desde el punto de vista matemático, evaluar correctamente los parámetros de diseño que rigen los sistemas equivalentes. Faltan, sin embargo, datos experimentales que permitan determinar la influencia que puedan tener otros factores en el verdadero comportamiento de los sistemas reales.

Para el caso de cimentaciones piloteadas, existen procedimientos que utilizan sistemas de uno o más grados de libertad; sin embargo, el método sugerido por Novak es el que hasta ahora ofrece mejores bases y es por tanto el más recomendable. El empleo de programas de elementos finitos puede ofrecer, en un futuro próximo, considerable auxilio en el análisis de esta clase de cimentaciones profundas.

Los efectos principales del encajonamiento de la cimentación es aumentar la rigidez y el amortiguamiento. En lo que se refiere a la estratificación, los efectos que se pueden tener por el hecho de permanecer la roca basal a relativa poca profundidad, es un aumento en el coeficiente de rigidez y una disminución en el coeficiente de amortiguamiento; dichos efectos resultan prácticamente despreciables cuando la relación H/R (profundidad de la roca/radio de la cimentación) es mayor de 5.

En comparación con las cimentaciones por superficie, las cimentaciones piloteadas pueden tener mayores frecuencias naturales (como consecuencia del aumento en la rigidez), menores amortiguamientos y mayores amplitudes en la resonancia.

11. RECONOCIMIENTO

Se agradece muy sinceramente al Dr. Jacobo Bielak la revisión del manuscrito original y sus valiosas sugerencias. Este trabajo fue patrocinado por la Secretaría de Asentamientos Humanos y Obras Públicas, a la que el autor agradece profundamente las facilidades prestadas.

12. REFERENCIAS

1. Flores, J R, Técnicas vibratorias de evaluación en pavimentos, *Instituto de Ingeniería, UNAM*, Informe interno (1975)
2. Flores, J R, Lineamientos generales en el diseño de cimentaciones de maquinaria, *Ingeniería* (1977), Próxima publicación
3. Nieto, J A y Reséndiz, D, Criterios de diseño para cimentaciones de maquinaria, *Instituto de Ingeniería, UNAM*, 131 (jul 1967)
4. Biggs, J M, *Introduction to structural dynamics*, Mc Graw-Hill Book Co, Nueva York (1964)
5. Richart, F E, Jr, Hall, J R y Woods, R D, *Vibrations of soils and foundations*, Prentice Hall, Inc, Englewood Cliffs, Nueva Jersey (1970)
6. Reissner, E, Stationäre, axialsymmetrische durch eine schüttelnde masse erregte schwingungen eines homogen elastischen halbraumes, *Ingenieur Archiv*, 7, Parte 6 (dic 1936), 381-96

7. Lamb, H, On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, *Philosophical Transactions of the Royal Society, Serie A*, 203, Londres (1904), 1-42
8. Quinlan, P M, The elastic theory of soil dynamics, *Symposium on Dynamic Testing of Soil*, ASTM, STP-156 (1953), 3-34
9. Sung, T Y, Vibrations in semi-infinite solids due to periodic surface loadings, *Symposium on Dynamic Testing of Soils*, ASTM, STP-156 (1953), 35-64
10. Bycroft, G N, Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic space and on an elastic stratum, *Philosophical Trans, Royal Society, Serie A*, 248, Londres (1956), 327-68
11. Awojobi, A O y Grootenhuis, P, Vibration of rigid bodies on semi-infinite elastic media, *Procs, Royal Society*, 287, Londres (1965), 27-63
12. Robertson, I A, Forced vertical vibration of a rigid circular disc on a semi-infinite elastic solid, *Procs, Cambridge Philosophical Society*, 62 (1966), 547-53
13. Veletsos, A S y Wei, Y T, Lateral and rocking vibration of footings, *Procs, ASCE*, 97, SM-9 (1971), 1227-48
14. Luco, J E y Westmann, R A, Dynamic response of circular footings, *Procs, ASCE*, 97 EM-5 (1971), 1381-95
15. Veletsos, A S y Verbic, B, Vibration of viscoelastic foundations, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2 (1973), 87-102
16. Luco, J E, Impedance functions for a rigid foundation on a layered medium, *Nuclear Engineering and Design* 31, North-Holland Publishing Co (1974), 204-17
17. Lysmer, J y Kuhlemeyer, R L, "Finite dynamic model for infinite media", *Procs, ASCE*, 95, EM-4 (1969), 859-77
18. Lysmer, J, "Vertical motion of rigid footings", *Department of Civil Engineering, University of Michigan, Informe a WES Contract*, 3-115 (1965)
19. Whitman, R V, "Notas de dinámica de suelos", *Massachusetts Institute of Technology* (1973)

20. Johnson, G R, Christiano, P y Howard, I, "Stiffness coefficients for embedded footings", *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*, **101**, GT-8 (1975), 789-800
21. Kobori et al, "Dynamic ground compliance of rectangular foundation on an elastic stratum over a semi-infinite rigid medium", *Institute for Preventing Failures, Universidad de Tokio, Japón* (mar 1968)
22. Girard, J y Picard, J, *Etude experimentale du dynamique de massifs de foundation de machine, Annales de L'Institute Technique et des Travaux Publics*, 273 (1970)
23. Whitman, R V, *Soil-Structure interaction and foundation design, Fundamentals of Soil Engineering for Buildings, Cap XIII, Massachusetts Institute of Technology* (1972)
24. Kausel, E, *Forced vibrations of circular foundations on layer media, Tesis Doctoral, MIT* (1974)
25. Kausel, E, Roesset, J M y Wass, G, *Dynamic analysis of footing on layered media, Procs, ASCE*, **101**, EM-5 (1975), 679-95
26. Kausel, E y Roesset, J M, *Dynamic stiffness of circular foundation, Procs, ASCE*, **101**, EM-6 (1975), 771-85
27. Whitman, R V y Richart, F E, Jr., *Design procedures for dynamically loaded foundations, Journal Soil Mechanical and Foundations Division, Procs, ASCE*, **93**, SM-6 (nov 1967), 169-93
28. Lee, J M, *Dynamic surface loading on a viscoelastic half-space, School of Engineering, San Fernando Valley State College, California* (1968)
29. Elorduy, J, Nieto, J A y Szekely, M, *Dynamic response of bases of arbitrary shape subjected to periodic vertical loading, Procs, International Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Material, Albuquerque* (ago 1967)
30. Flores, J R, *Validity of approximate rules for square and rectangular foundations, Soil Dynamics Term Project, Department of Civil Engineering, MIT, Cambridge, Mass* (1968)

31. Kobori et al, Dynamic ground compliance of rectangular foundations on a semi-infinite viscoelastic medium, *Disaster Prevention Research Institute of Kyoto University, Informe anual, 11A (1968)*, 349-67
32. Richart, F E, Jr., Some effects of dynamic soil properties on soil-structure interaction, *Journal of the Geotechnical Division, Procs, ASCE 101, GT12 (1975)*, 1197-240
33. Hardin, B D y Drnevich, V P, Shear modulus and damping in soils II. Design equations and curves, *Journal of the Soil Mechanical and Foundations, Division, Procs, ASCE, 98, SM-7 (jul 1972)*, 667-92
34. Seed, H B e Idriss, I M, Soil moduli and damping factors for dynamic response analysis, EERC 70-10, *University of California, Berkeley (dic 1970)*
35. Blain, J, Generalite's sur le vibreur Goodman, *Bol des Laboratoires Routiers, Paris (1968)*
36. Mooney, H M, Seismic shear waves in engineering, *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, 100 GT8, Paper 10745 (ago 1974)*, 905-23
37. Richart, F E, Jr. y Whitman, R V, Comparison of footing vibration test with theory, *Journal Soil Mechanical and Foundations Engineering Division, ASCE, 93, SM-6 (nov 1967)*, 143-68
38. Barkan, D D, "Dynamics of bases and foundations", *Mc Graw-Hill Book Co, Nueva York (1962)*
39. Terzaghi, K, Evaluation of coefficients of subgrade reaction *Geotechnique (1955)*, 297-326
40. Maxwell, A A, Fry, Z V y Poplin, J K, Vibratory loading of pile foundations: Performance of Deep Foundations, *ASTM STP 444, American Society for Testing and Materials (1969)*, 338-61
41. Boutwell, G P y Saxema, D S, Design method: dynamically loaded pile foundations, *ASCE Annual and National Environmental Engineering, Meeting Preprint No 1833 (oct 1972)*

42. Novak, M, Dynamic Stiffness and Damping of Piles, *Can. Geotech J.*, 11 (1974) 574-98
43. Richart, F E, Jr., Foundation Vibrations, *Trans, ASCE*, 127, Parte 1 (1962), 863-98
44. Beredugo, Y O y Novak M, Coupled horizontal and rocking-vibration of embedded footings, *Can. Geotech. J.* 9, 4 (1972), 477-97
45. Novak, M y Beredugo, Y O, Vertical vibration of embedded footings, *J. Soil Mech. Found. Div. ASCE.*, 12 (1972), 1291-310
46. Lambe, T W y Whitman, R V, *Soil mechanics*, John Wiley & Sons Inc, Nueva York (1969), 228
47. Whitman, R V, Analysis of foundations vibrations, *Procs, Vibration in civil engineering*, Butterworths, Londres (1966)
48. Stokoe, K H y Richart, F E, Jr., Dynamic response of embedded machine foundations, *Procs, ASCE*, 98, SM-5, informe 8904 (may 1972), 443-60

TABLA 1. VALORES DE LOS PARAMETROS EQUIVALENTES EN CIMENTACIONES CIRCULARES* APOYADAS EN UN SEMIESPACIO ELASTICO (ref 19)

TIPO DE EXCITACION	RELACIONES DE MASAS MODIFICADAS	k	D ₀	M _{ef}
Vertical	$B_v = \frac{1-\nu}{4} b$	$\frac{4GR}{1-\nu}$	$\frac{0.425}{\sqrt{B_v}}$	$0.27 \frac{M}{B_v}$
Horizontal	$B_h = \frac{2-\nu}{8} b$	$\frac{8GR}{2-\nu}$	$\frac{0.29}{\sqrt{B_h}}$	$0.095 \frac{M}{B_h}$
Cabeceo	$B_r = \frac{3(1-\nu)}{8} \frac{I}{R^3}$	$\frac{8GR^3}{3(1-\nu)}$	$\frac{0.15}{(1+B_r)\sqrt{B_r}}$	$0.24 \frac{I}{B_r}$

- Los valores se obtuvieron de igualar las amplitudes máximas determinadas con la teoría del semiespacio, con las determinadas con los sistemas equivalentes

I momento de inercia de la masa con respecto al eje de giro

TABLA 2. VALORES DE K PARA DISTINTOS TIPOS DE DISTRIBUCION DE ESFUERZOS (ref 19)

DISTRIBUCION DE ESFUERZOS	K	$\frac{(1-\nu)}{K}$, para $\nu = 1/4$
Base rígida	4	0.188
Uniforme	π	0.239
Parabólica	$(3/4)\pi$	0.319

TABLA 3. EXPRESIONES APROXIMADAS PARA CONSIDERAR EL EFECTO DE ENCAJONAMIENTO

MODO	k/k_0	D/D_0
Vertical	$1 + 0.6 (1-\nu) \frac{h}{R}$	$\frac{1 + 1.9 (1-\nu) h/R}{\sqrt{k/k_0}}$
Horizontal	$1 + 0.55 (2-\nu) \frac{h}{R}$	$\frac{1 + 1.9 (2-\nu) h/R}{\sqrt{k/k_0}}$
Cabeceo	$1 + 1.2 (1-\nu) \frac{h}{R} + 0.2 (2-\nu) \left(\frac{h}{R}\right)^3$	$\frac{1 + 0.7 (1-\nu) \frac{h}{R} + 0.6 (2-\nu) \left(\frac{h}{R}\right)^3}{\sqrt{k/k_0}}$

TABLA 4. AMORTIGUAMIENTO INTERNO EN SUELOS (ref 27)

TIPO DE SUELO	AMORTIGUAMIENTO EQUIVALENTE
Arenas y gravas secas	0.03 a 0.07
Arena saturada o seca	0.01 a 0.03
Arenas y gravas saturadas	0.05 a 0.06
Arcilla	0.02 a 0.05
Arena limosa	0.03 a 0.10

TABLA 5. CONSTANTES DE RESORTE PARA UNA BASE RECTANGULAR RIGIDA APOYADA EN EL SEMIESPACIO

MOVIMIENTO	CONSTANTE DE RESORTE*
Vertical	$k_v = \frac{G}{1-\nu} \beta_v \sqrt{BL^{**}}$
Horizontal	$k_h = 2(1+\nu) G \beta_h \sqrt{BL}$
Cabeceo	$k_r = \frac{G}{1-\nu} \beta_r BL^2$

* Los valores de β_v , β_h y β_r están dados por la fig 16

** B = ancho de la cimentación y L = longitud de la cimentación (en el plano de rotación en caso de cabeceo)

TABLA 6. VALORES DE K_2 VS DENSIDAD RELATIVA

DENSIDAD RELATIVA	K_2
30	34
40	40
60	52
75	62
90	70

TABLA 7. VALORES DE DISEÑO RECOMENDADOS POR BARKAN PARA c_v *

TIPO DE SUELO	CAPACIDAD DE CARGA ESTÁTICA PERMISIBLE, en kg/cm ²	COEFICIENTE c_v , en kg/cm ³
Suelos blandos	<1.5	<3
Suelos de resistencia media	1.5 - 3.5	3 - 5
Suelos resistentes (arcillas duras o arenas compactas)	3.5 - 5	5 - 10
Rocas	>5	>10

* Los valores de c_h , c_r y c_ϕ se pueden estimar con las relaciones

$$c_h = c_v/2; c_r = 2c_v; c_\phi = \frac{3}{4} c_v$$

TABLA 8. COEFICIENTES DE RIGIDEZ Y AMORTIGUAMIENTO EN LA TEORÍA DE NOVAK (ref 42)

MODO	k	c
Vertical	$\frac{E_p A}{r_0} f_{18.1}$	$\frac{E_p A}{V_s} f_{18.2}$
Horizontal	$\frac{E_p I}{r_0^3} f_{11.1}$	$\frac{E_p I}{r_0^2 V_s} f_{11.2}$
Cabeceo	$\frac{E_p I}{r_0} f_{7.1}$	$\frac{E_p I}{V_s} f_{7.2}$
Acopladas (horizontal y de cabeceo)	$\frac{E_p I}{r_0^2} f_{9.1}$	$\frac{E_p I}{r_0 V_s} f_{9.2}$

A área de la sección transversal del pilote

E_p módulo de Young del pilote

I momento de inercia de la sección transversal

r_0 radio del pilote

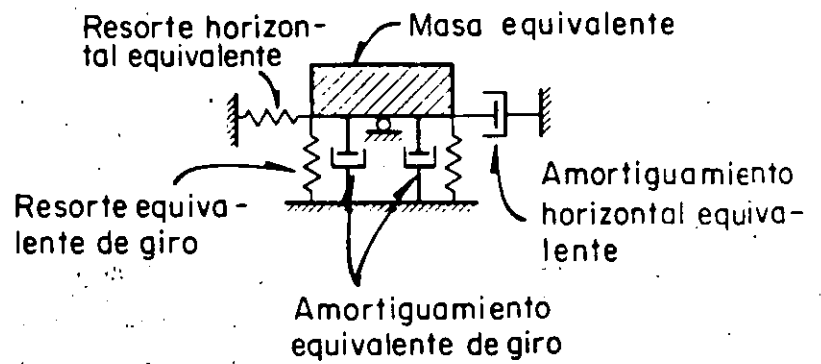
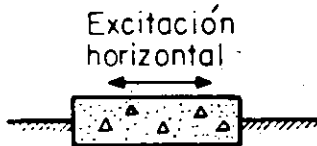
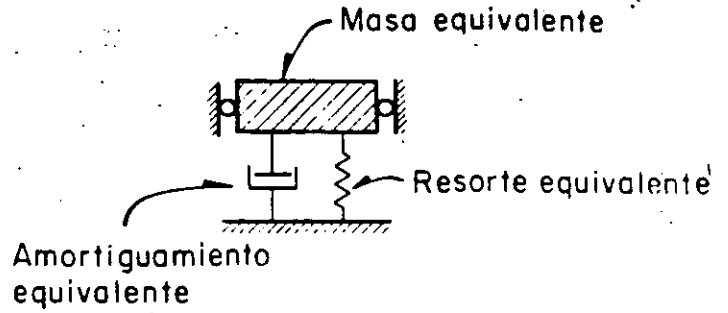
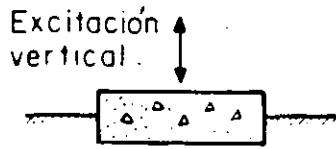
V_s velocidad de ondas cortantes en el suelo

Las funciones $f_{11.1}$, $f_{11.2}$, etc, dependen de las características del suelo y del pilote, y se obtienen a través de la tabla 9 y la fig 26.

TABLA 9. PARAMETROS DE RIGIDEZ Y AMORTIGUAMIENTO f_7 , f_9 y f_{11} PARA PILOTES DE MADERA Y DE CONCRETO CON $l/r_0 > 5$ (ref 42)

ν	$\frac{\rho}{\rho_p}$	$\frac{V_s}{V_c}$	PARAMETROS DE RIGIDEZ			PARAMETROS DE AMORTIGUAMIENTO		
			$f_{7.1}$	$f_{9.1}$	$f_{11.1}$	$f_{7.2}$	$f_{9.2}$	$f_{11.2}$
0.4	0.7 (Concreto)	0.01	0.202	-0.0194	0.0036	0.139	-0.0280	0.0084
		0.02	0.285	-0.0388	0.0100	0.200	-0.0566	0.0238
		0.03	0.349	-0.0582	0.0185	0.243	-0.0848	0.0438
		0.04	0.403	-0.0776	0.0284	0.281	-0.1130	0.0674
		0.05	0.450	-0.0970	0.0397	0.314	-0.1410	0.0942
0.4	2.0 (Madera)	0.01	0.265	-0.0336	0.0082	0.176	-0.0466	0.0183
		0.02	0.374	-0.0673	0.0231	0.249	-0.0932	0.0516
		0.03	0.459	-0.1010	0.0425	0.305	-0.1400	0.0949
		0.04	0.529	-0.1350	0.0654	0.352	-0.1860	0.1460
		0.05	0.592	-0.1680	0.0914	0.394	-0.2330	0.2040
0.25	0.7 (Concreto)	0.01	0.195	-0.0181	0.0032	0.135	-0.0262	0.0076
		0.02	0.275	-0.0362	0.0090	0.192	-0.0529	0.0215
		0.03	0.337	-0.0543	0.0166	0.235	-0.0793	0.0395
		0.04	0.389	-0.0724	0.0256	0.272	-0.1057	0.0608
		0.05	0.435	-0.0905	0.0358	0.304	-0.1321	0.0850
0.25	2.0 (Madera)	0.01	0.256	-0.0315	0.0074	0.169	-0.0434	0.0165
		0.02	0.362	-0.0630	0.0209	0.240	-0.0868	0.0465
		0.03	0.444	-0.0945	0.0385	0.293	-0.1301	0.0854
		0.04	0.512	-0.1260	0.0593	0.339	-0.1735	0.1315
		0.05	0.573	-0.1575	0.0828	0.379	-0.2168	0.1838





Excitación torsional

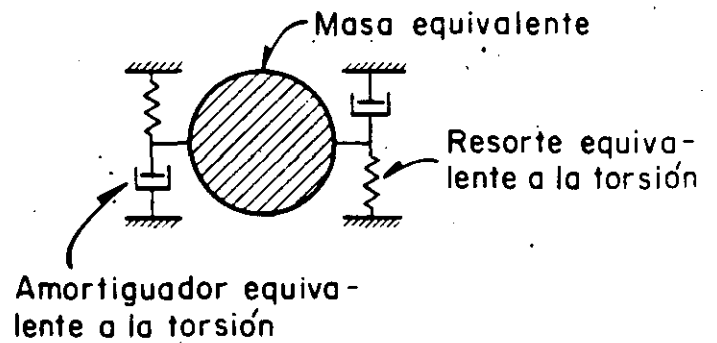
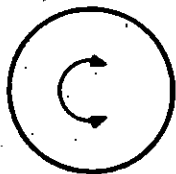


Fig 1. Sistemas equivalentes típicos (ref 46)

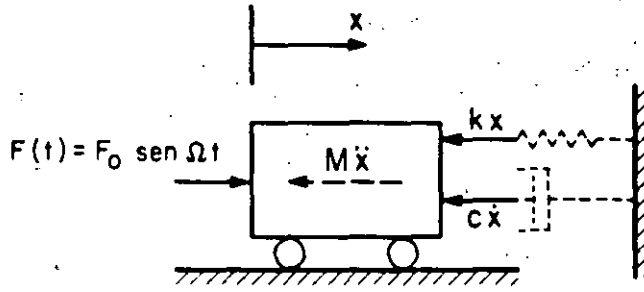


Fig 2. Fuerzas que actúan sobre un sistema de un grado de libertad

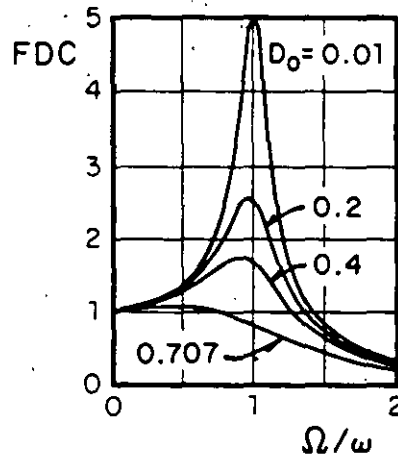


Fig 3. Curvas de amplificación

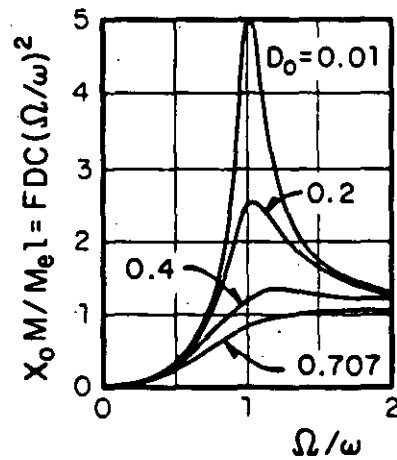
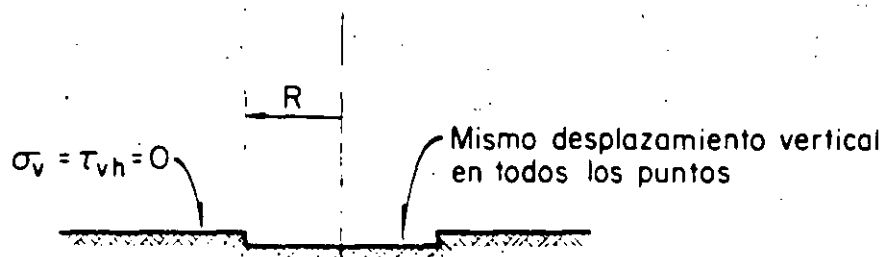
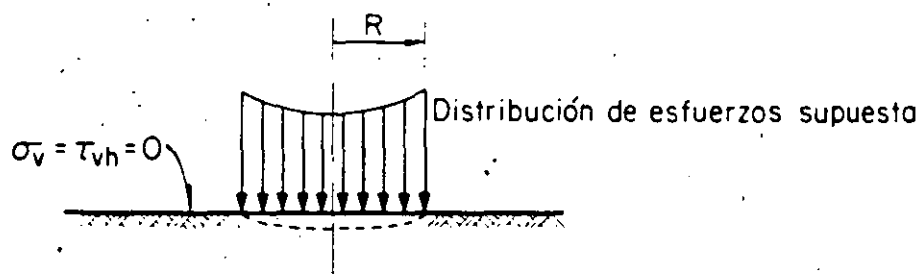


Fig 4. Curvas de respuesta en sistemas con masas excéntricas



a) Correcto establecimiento de las condiciones de frontera



b) Establecimiento aproximado de las condiciones de frontera

Fig 5. Condiciones de frontera (ref 19)

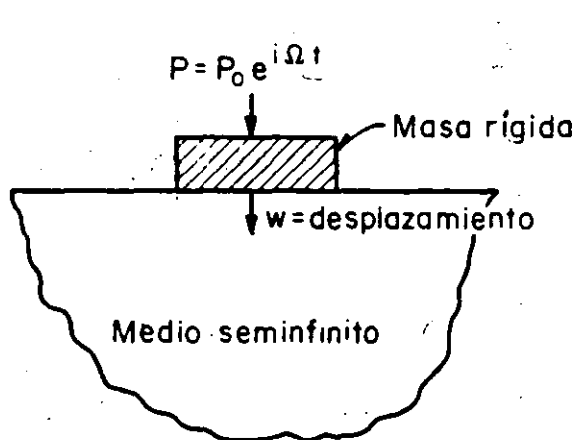


Fig 6a. Sistema de masa rígida en medio seminfinito (ref 19)

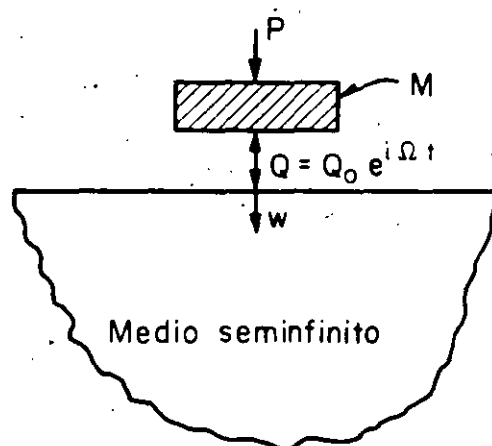


Fig 6b. Separación de las fuerzas que obran en el sistema (ref 19)

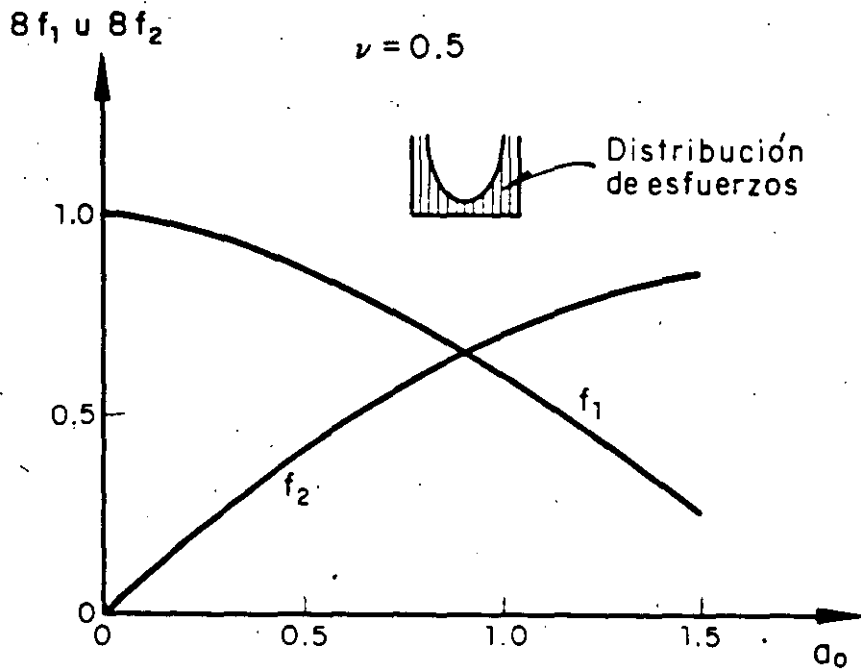
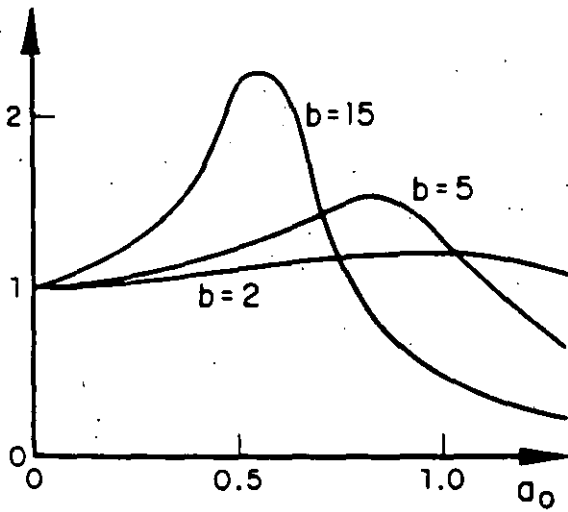


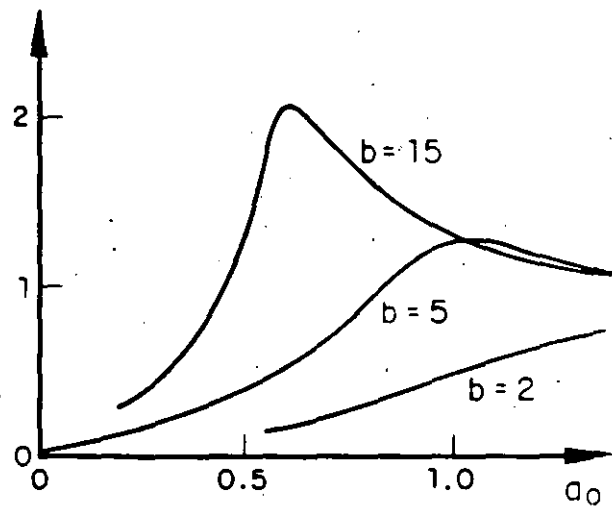
Fig 7. Valores de f_1 y f_2 en función de $a_0 = aR/C_s$

$$\frac{4GRW_0}{P_0(1-\nu)} = FDC_{m\acute{a}x}$$



(a)

$$\frac{W_0 M}{Me l}$$



(b)

Fig 8. Curvas de amplificación dinámica en el semiespacio elástico

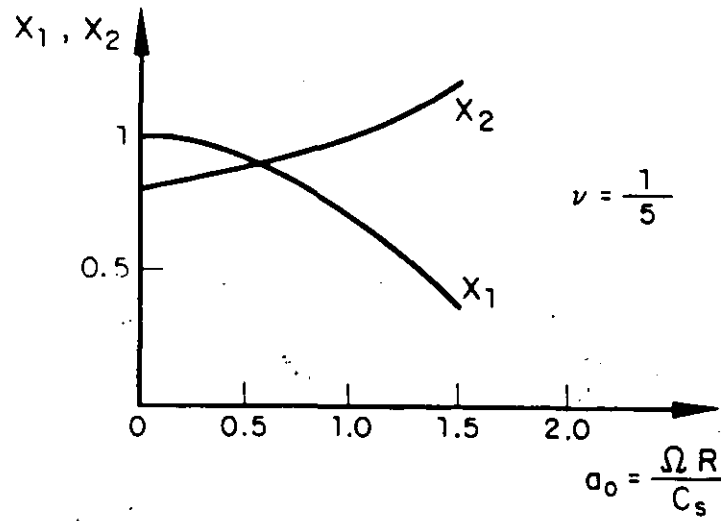


Fig 9. Variación de X_1 y X_2 en función de la relación adimensional de frecuencias a_0

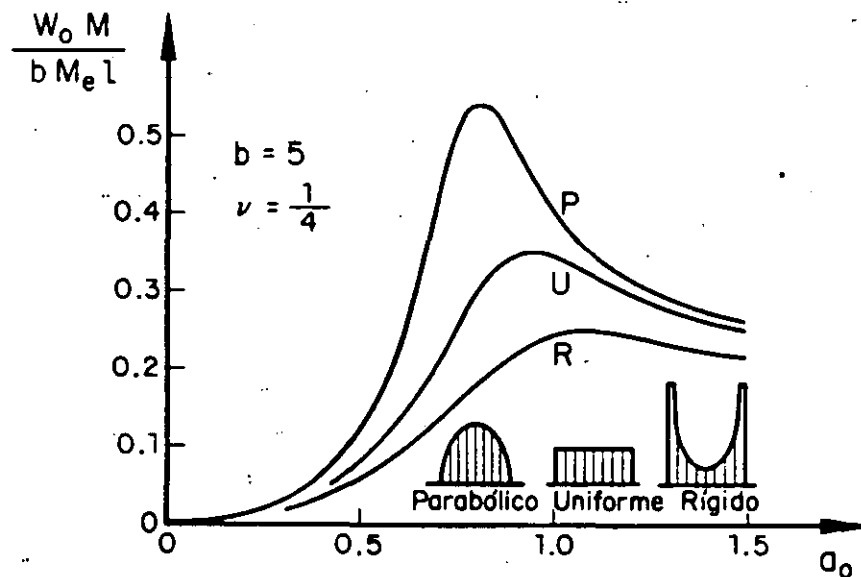
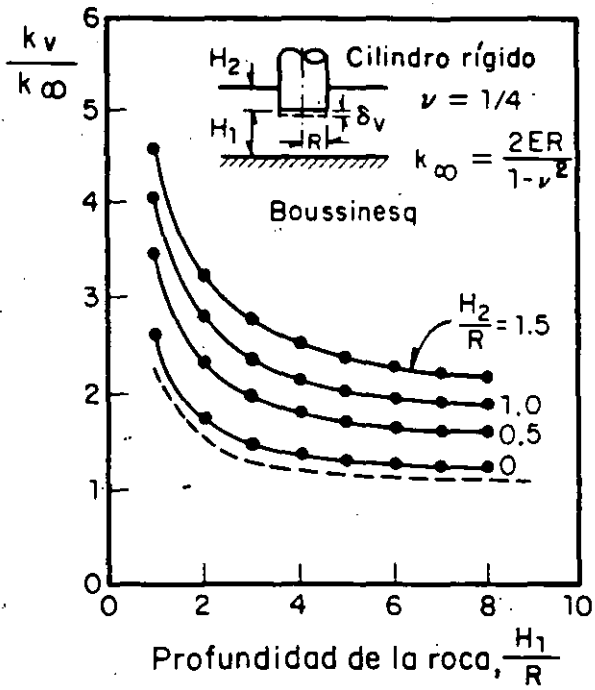
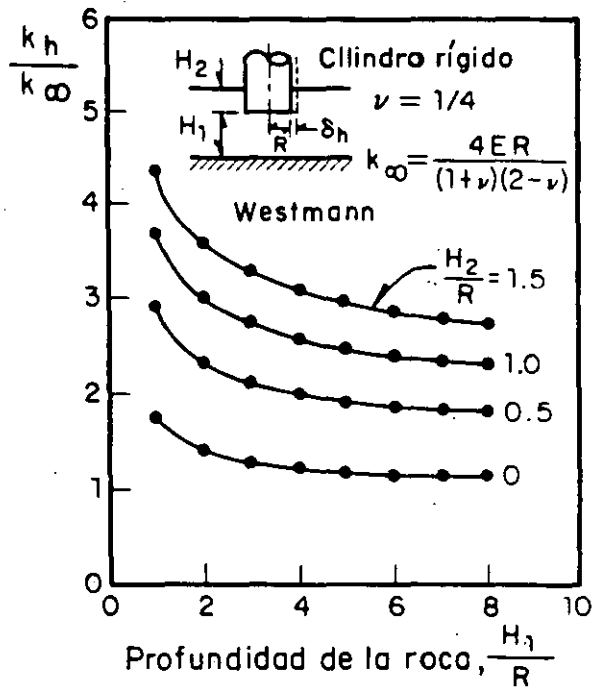


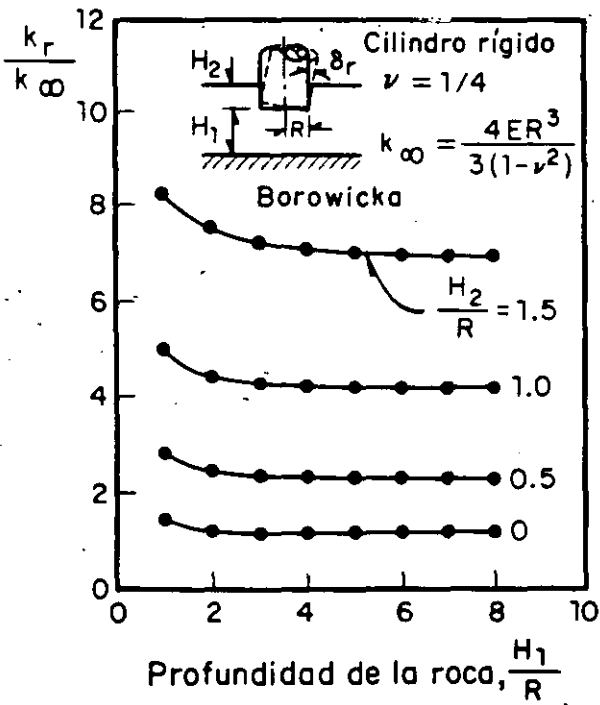
Fig 10. Efecto del tipo de distribución de esfuerzos en las curvas de respuesta (ref 37)



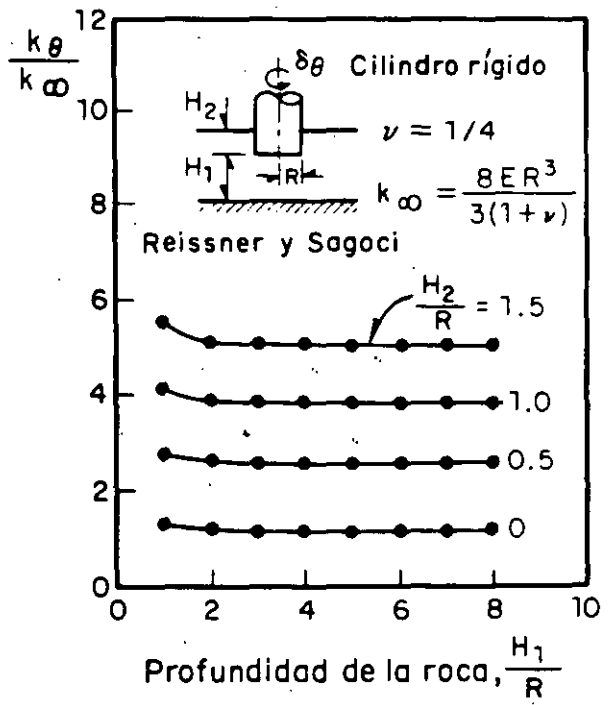
a) Modo vertical



b) Modo horizontal



c) Cabeceo



d) Modo torsional

Fig 11. Efecto del encajonamiento y la proximidad de la roca en el coeficiente k (ref 20)

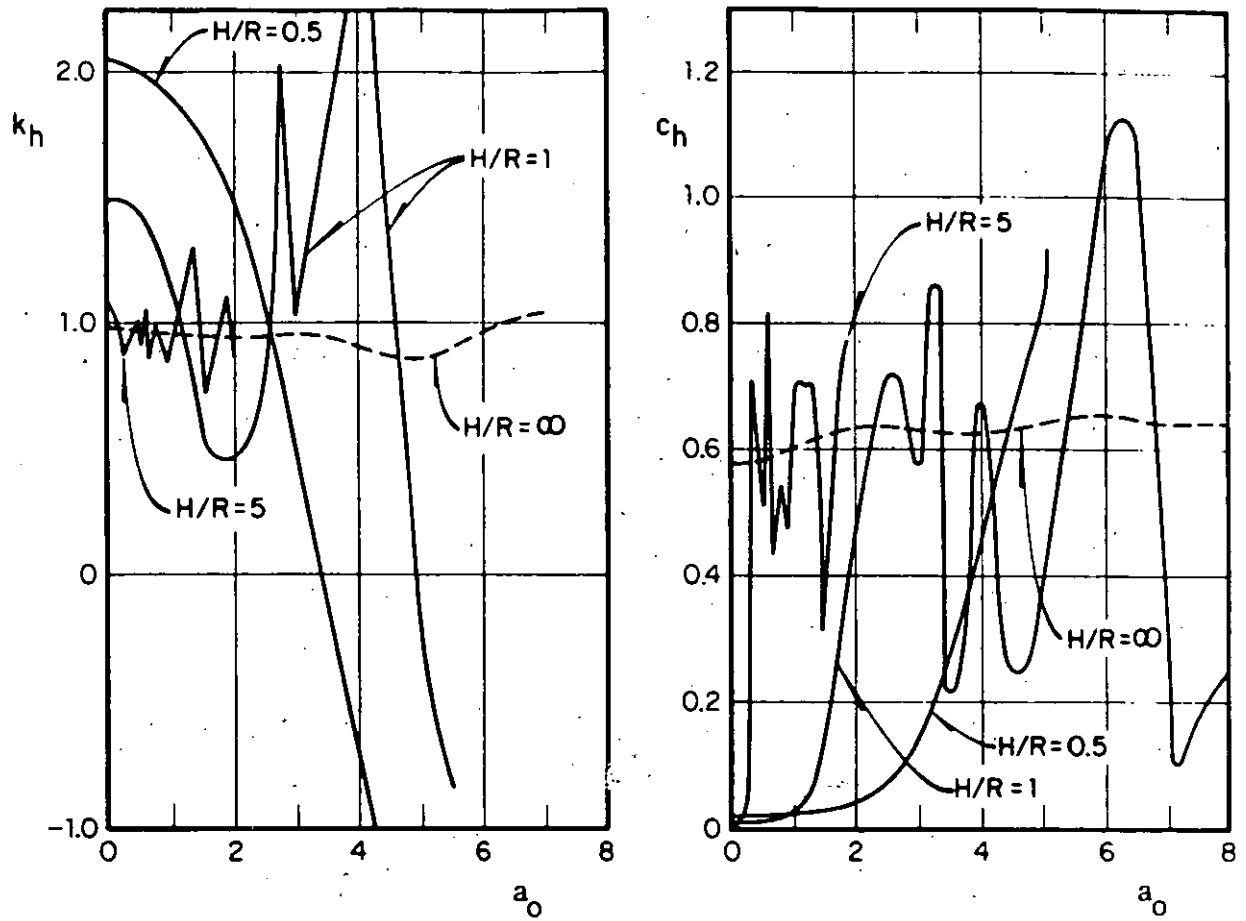
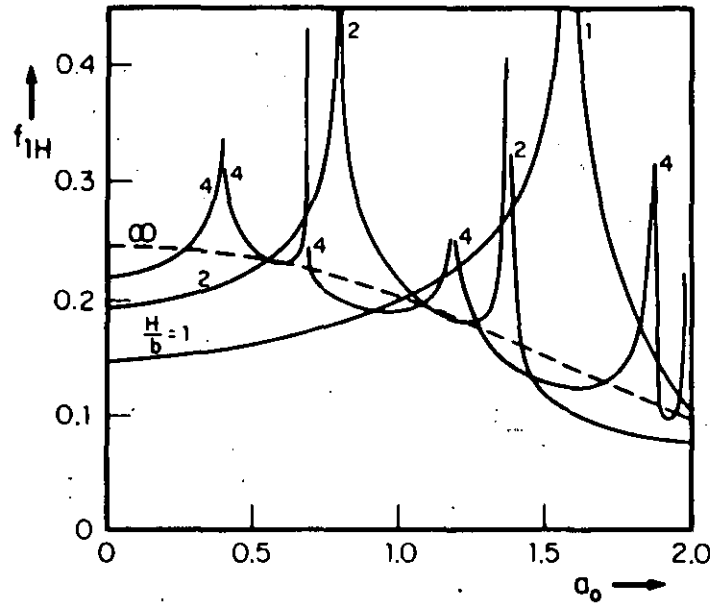
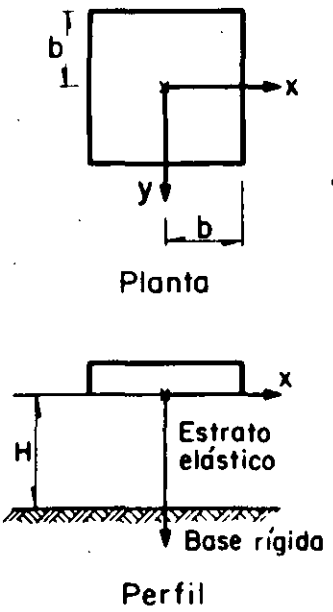
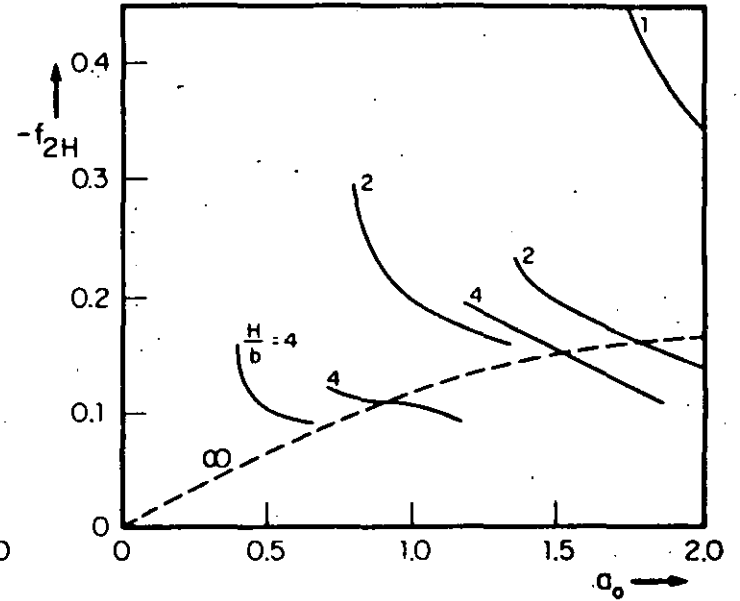


Fig 12. Coeficientes de rigidez y amortiguamiento, según Luco (ref 16)

Cimentación cuadrada



a) Función f_1 ($\nu = 1/4$)



b) Función f_2 ($\nu = 1/4$)

Fig 13.ª Funciones f_1 y f_2 para una cimentación cuadrada sujeta a una fuerza vertical horizontal dinámica, apoyada en un estrato elástico (ref 21)

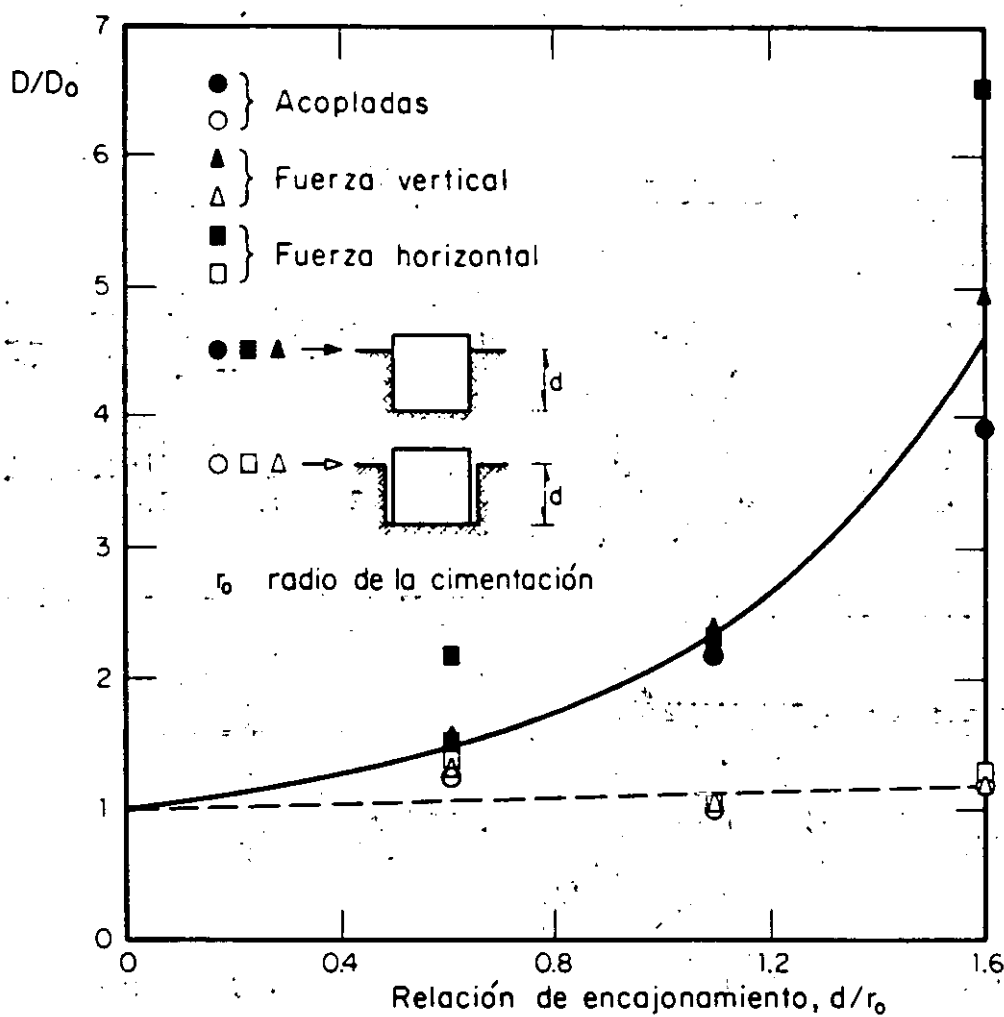
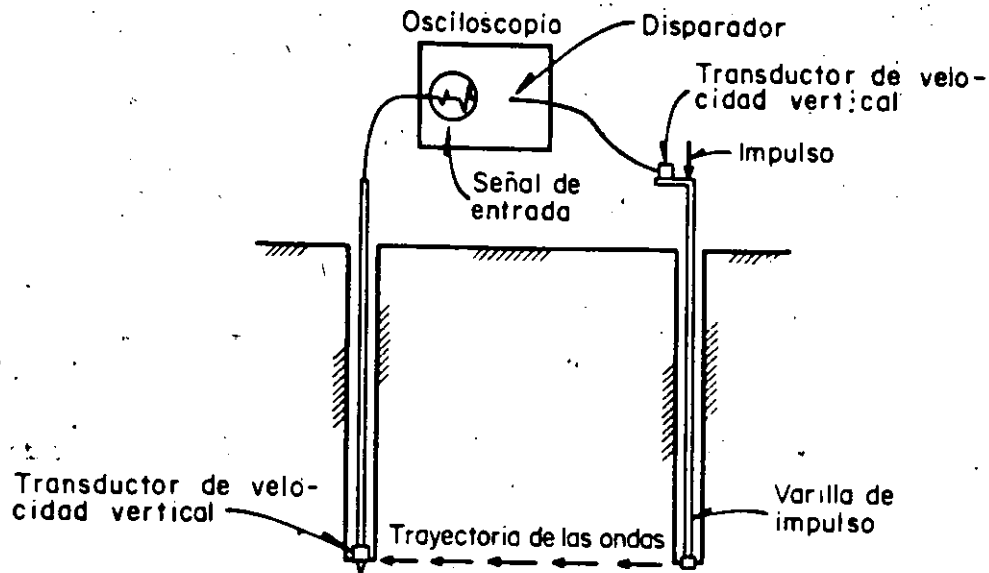
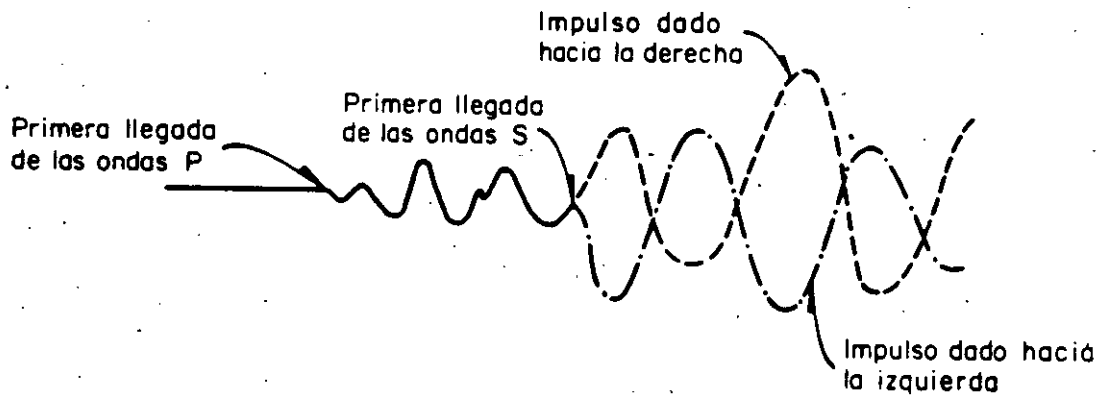


Fig 14. Variación de la relación de amortiguamiento con la profundidad de encajonamiento (ref 48)



a) Corte esquemático que ilustra la disposición de los elementos



b) Efecto en las trazas al invertir el sentido del impacto

Fig 19. Método de hoyos en paralelo (cross-hole method) (ref 32)

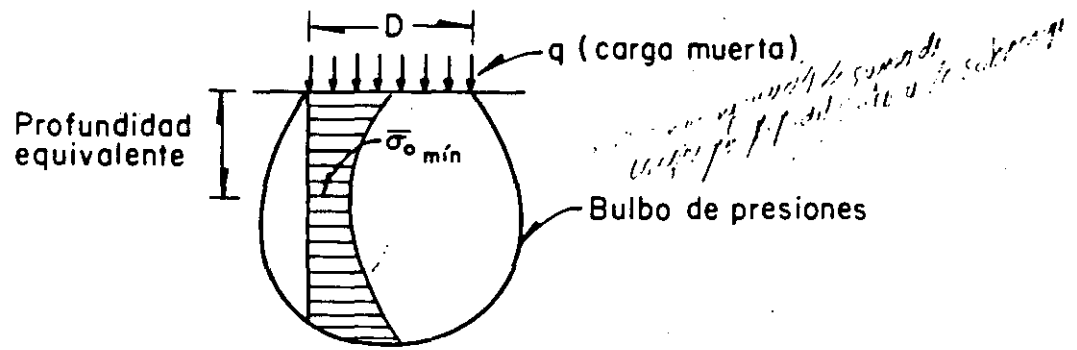


Fig 20. Determinación de la profundidad equivalente usando el procedimiento de Richart

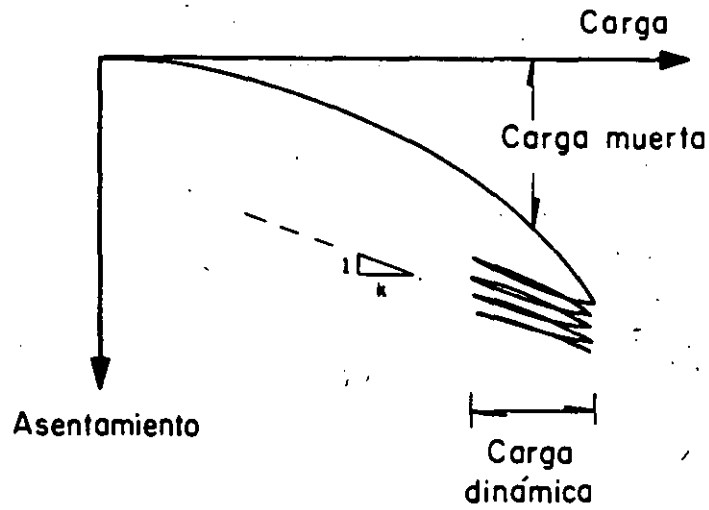
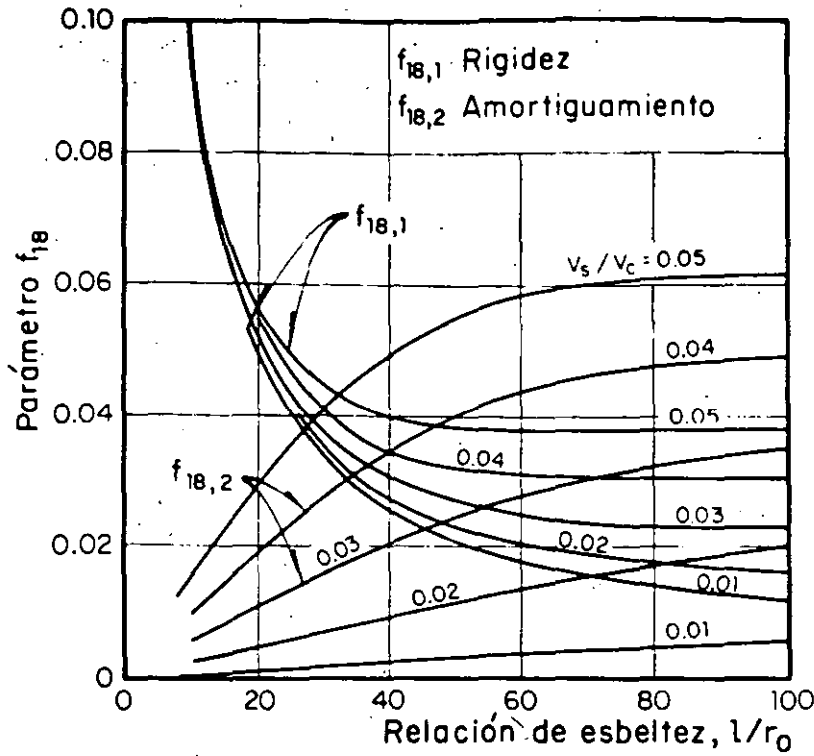
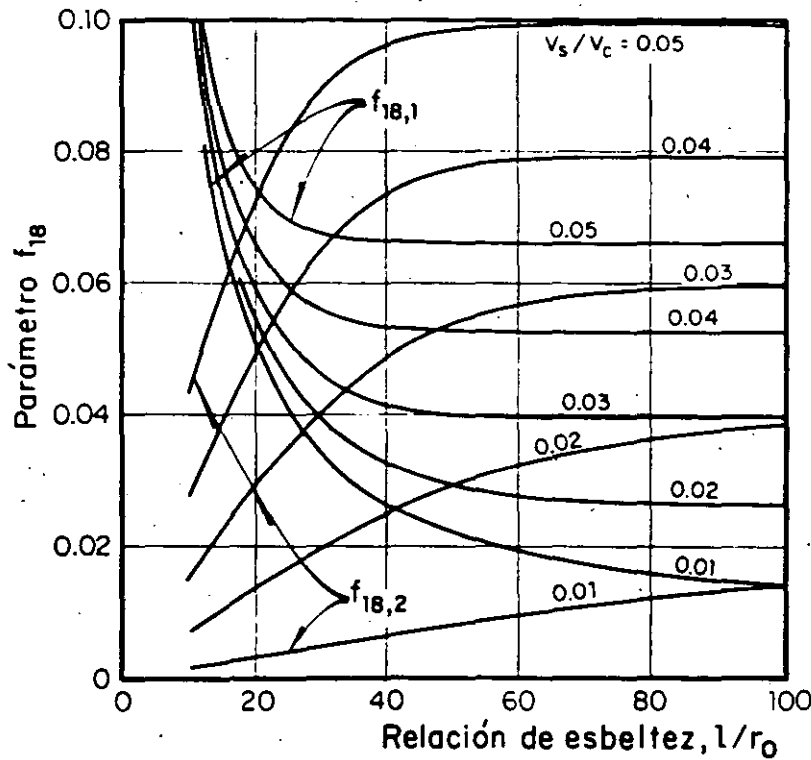


Fig 21. Determinación de k mediante pruebas de placa



a) Pilotes de concreto, $\rho/\rho_p = 0.7$



b) Pilotes de madera, $\rho/\rho_p = 2.0$

ρ densidad de masa del suelo
 ρ_p densidad de masa del pilote

Fig 26. Parámetros de rigidez y amortiguamiento para el modo vertical (ref 42)

APENDICE. EJEMPLO DE APLICACION*

Se requiere determinar las dimensiones de la cimentación cuadrada de una máquina que pesa 2 700 kg, sujeta a una fuerza dinámica de 680 kg, que opera con una frecuencia de 10 cps. Los requisitos que debe cumplir la cimentación son: 1) la máquina necesita quedar a 2 m sobre el nivel natural del terreno, y 2) la velocidad de las partículas debe ser menor de 0.075 cm/seg.

Datos del terreno de cimentación. Se trata de un suelo limoarcilloarenoso duro, con un peso volumétrico igual a 1.92 ton/m³. Los valores de la velocidad de onda al cortante, medidos in situ, están dados por la fig A1.

Los resultados de una prueba de placa cuadrada, de 1' x 1', son los de la fig A.2.

Cálculo de G

El valor de k, con los datos de la prueba de placa, es

$$k = \frac{2\,000 \times 12}{0.003} = 8 \times 10^6 \text{ lb/pie} = 12 \times 10^6 \text{ kg/m}$$

Profundidad de placa 0.125

* El ejemplo que se presenta fue adaptado del original que aparece en la ref 19

De la tabla 5 y de la fig 16 para una cimentación cuadrada, al asignar un valor de $\nu = 0.35$, se tiene

$$G = \frac{k_v(1-\nu)}{2.16B} = \frac{8 \times 10^6(1-0.35)}{2.16 \times 1} = 2.4 \times 10^6 \text{ lb/pie}^2$$

o sea

$$G = 1.187 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{A.1})$$

El siguiente paso es comprobar el valor de G con las mediciones de C_s obtenidas *in situ*, para lo cual se determina el valor del esfuerzo a mitad del bulbo de presiones en la placa. El radio equivalente para este caso sería

$$r = \sqrt{1/\pi} = 0.564 \text{ pies}$$

$$D = 1.12 \text{ pies}$$

$$3/4 D = 0.85 \text{ pies}$$

y los esfuerzos verticales a la mitad del bulbo

$$\sigma_v = 0.42^* \times 4000 \text{ lb/pie}^2 + 0.85' \times 120 \text{ lb/pie}^3 = 1782 \text{ lb/pie}^2$$

$$\sigma_v = .8815 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Profundidad equivalente} = \frac{0.8910}{1.92 \times 10^{-3}} = 460 \text{ cm} = 4.6 \text{ m}$$

De la fig A.1 se deduce que $C_s = 240 \text{ m/seg}$, o sea

$$G = \rho C_s \frac{1920}{9.8} \times 240^2 = 1.13 \times 10^7 \text{ kg/cm}^2$$

* Factor de esfuerzos correspondiente a una profundidad de $\frac{3}{4} D$

lo que equivale a

$$G = 1.13 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{A.2})$$

Como los valores de las ecs A.1 y A.2 son prácticamente iguales, se usará el valor dado por esta última en el diseño preliminar.

Diseño preliminar. Conforme la tabla 5, el valor de k para cimentaciones cuadradas está dado por

$$k_v = \frac{G}{1-\nu} 2.16B$$

por lo que al sustituir valores se obtiene

$$k_v = \frac{1.13 \times 10^7}{0.65} \times 2.16 \times B = 3.75 \times 10^7 B \quad (\text{B, en metros}) \quad (\text{A.3})$$

Si se supone que la frecuencia de operación es relativamente pequeña con respecto a la de resonancia, se puede aplicar la simplificación:

$$V_{\text{máx}} = \Omega X_0 = \Omega \frac{P_0}{k} \left| \frac{1}{1 - (\Omega/\omega)^2} \right| \approx \Omega \frac{P_0}{k}$$

o sea que el valor requerido de k será

$$k = \frac{P_0 \Omega}{\text{velocidad de diseño/factor de seguridad}} = \frac{680 \times (2\pi \times 10)}{0.075/2} \text{ kg/cm}$$

$$k = 1.14 \times 10^3$$

De las ecs A.3 y A.4 se obtiene que B = 3 m; por tanto, la cimentación mostrada en la fig A.3 puede suponerse como diseño preliminar.

Revisión del diseño preliminar

Para un análisis más detallado del diseño, se calculará la masa total del sistema

- a) Masa de la máquina (M_m)

$$M_m = \frac{2720}{9.8} = 278 \frac{\text{kg}}{\text{m/seg}^2}$$

- b) Masa de la cimentación (M_c)

$$M_c = \frac{\text{vol} \times \gamma_{\text{concreto}}}{9.8} = \frac{3 \times 3 \times 2.6 \times 2400}{9.8} = \frac{56160}{9.8}$$

$$M_c = 5730 \text{ kg/m/seg}^2$$

- c) Masa efectiva de suelo (M_{ef})

$$\text{Radio equivalente} = \sqrt{9/\pi} = 1.69 \text{ m}; R^3 = 4.85 \text{ m}^3$$

$$b = \frac{M}{\rho R^3} = \frac{5730 + 278}{\frac{1920}{9.8} \times 4.85} =$$

$$B_v = \frac{1-\nu}{4} b = \frac{0.65 \times 6}{4} = 0.975$$

De la tabla 5

$$M_{ef} = 0.27 \frac{M}{B_v} = \frac{0.27(6008)}{0.975} = 1663 \frac{\text{kg}}{\text{m/seg}^2}$$

- d) Masa total

Esta masa está dada por

$$M_m + M_c + M_{ef} = 278 + 5730 + 1663 = 7671 \text{ kg/m/seg}^2$$

Profundidad equivalente

Se estima ahora el punto medio del bulbo de presiones; para ello primero se calcularán los esfuerzos por peso propio al nivel de desplante. 9.8*

$$\sigma_v = \frac{56\,160 + 2\,720}{9} = 6.54 \text{ ton/m}^2$$

A la mitad del bulbo de presiones, los esfuerzos totales son

$$\sigma_v \left(@ \frac{3}{4} D \right) = 0.42 \times 6.54 + \frac{3}{4} \times 3.38 \times 1.92 = 7.6$$

z.R = 2x1.69

$$\text{Profundidad equivalente} = \frac{7.6}{1.92} = 4 \text{ m}$$

De la gráfica de la fig A.1 se deduce un valor de $C_s = 230 \text{ m/seg}$. Calculando el valor de G , se tiene

$$G = 230^2 \times \frac{1920}{9.8} = 1.03 \times 10^7 \text{ kg/m}^2 = 1.03 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$$

y

$$k = \frac{1.03 \times 10^7}{11.2} \times 2.16 \times 3 = 1.03 \times 10^8 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

Nótese que en el cálculo de k se ha estado despreciando la profundidad de encajonamiento de 0.6 m; ello se debe a que dicha profundidad es relativamente pequeña y que al despreciarla se está dentro del lado de la seguridad. Sin embargo, si se deseara utilizar la influencia del encajonamiento en k , se podría utilizar alguno de los criterios señalados en el cap 5.

Por tanto, la frecuencia natural del sistema es

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1.03 \times 10^8}{7\,671}} = 18.4 \text{ cps}$$

Cálculo de la velocidad máxima

$$V_{\text{máx}} = \Omega \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - (\Omega/\omega)^2} = 62.8 \times \frac{680}{1.03 \times 10^8} \frac{1}{1 - \left(\frac{10}{18.4}\right)^2}$$

$$V_{\text{máx}} = 5.8 \times 10^{-4} \text{ m/seg} = 0.058 \text{ cm/seg} < 0.075$$

Si se quiere tener un factor de seguridad mayor de $0.075/0.058 = 1.29$, deberá procurarse aumentar k sin que M aumente, lo que se consigue, por ejemplo, al ampliar la base de la cimentación, pero reduciendo las dimensiones superiores. Para la cimentación de la fig A.4, los resultados que se obtienen son:

M_m	=	278 kg/m/seg ²
M_c	=	4 861 kg/m/seg ²
M_{ef}	=	2 504 kg/m/seg ²
M_{TOT}	=	7 643 kg/m/seg ²
C_s	=	250 m/seg
G	=	1.22×10^7 kg/m ²
k	=	1.42×10^8 kg/m
f_n	=	21.7 cps
$V_{\text{máx}}$	=	0.038 cm/seg
FS	≈	2

Se recomienda al lector verificar, a manera de ejercicio, estos resultados.

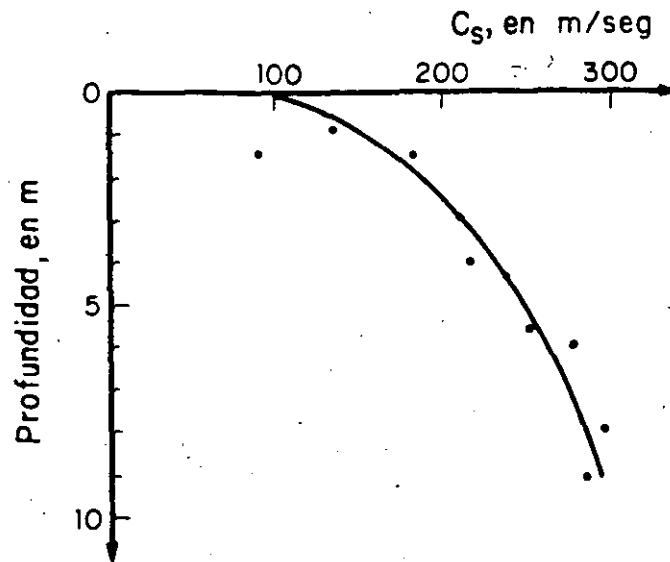


Fig A.1. Valores in situ de c_s vs profundidad

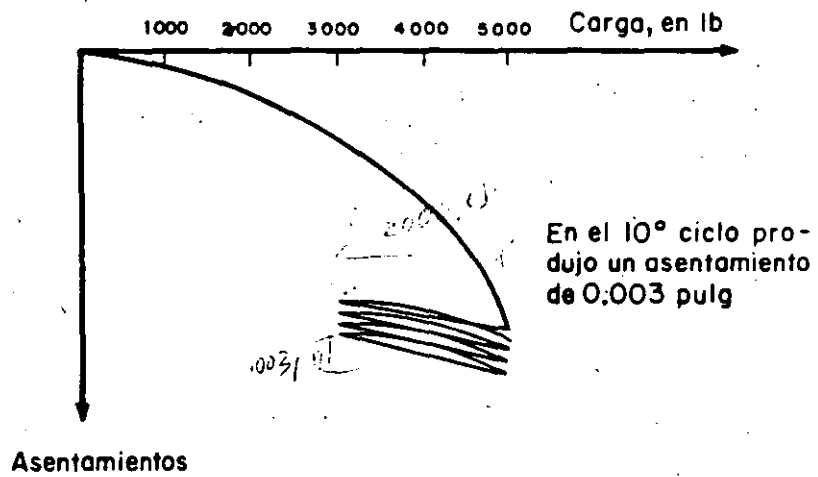


Fig A.2. Datos de la prueba de palanca

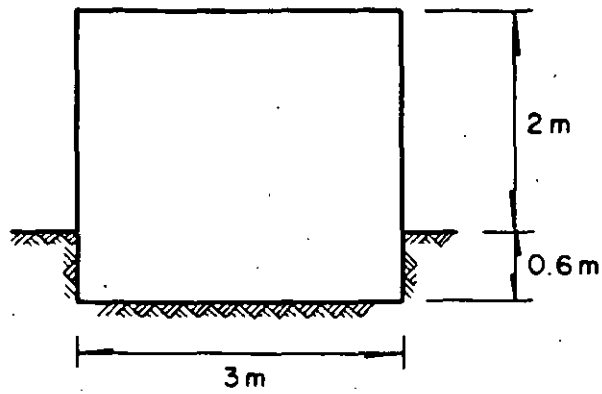


Fig A.3. Dimensiones preliminares del diseño de cimentación

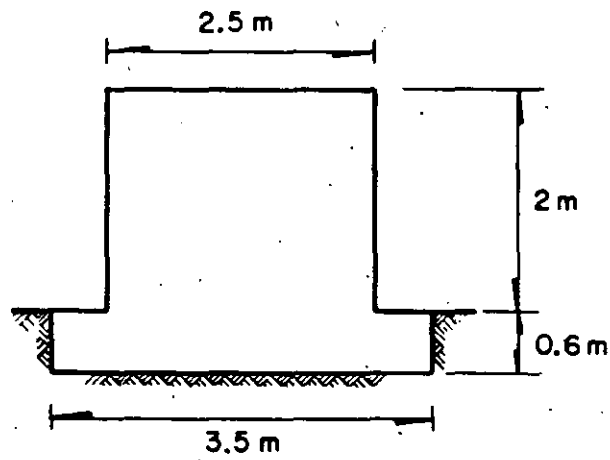
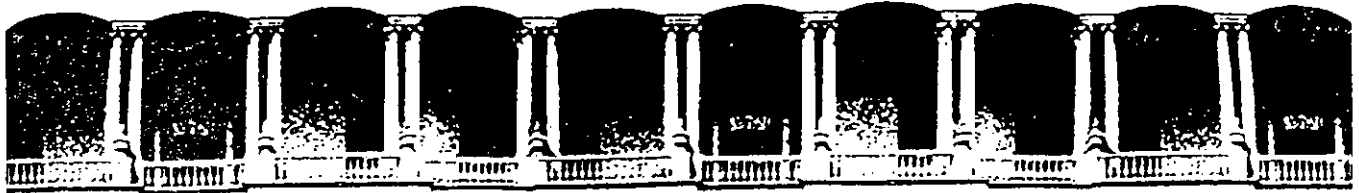


Fig A.4. Dimensiones definitivas de la cimentación



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

CURSOS ABIERTOS

CIMENTACION DE MAQUINARIA

17 al 21 de febrero de 1992

**ANALISIS DINAMICO DE SISTEMAS SUELO-ESTRUCTURA Y
PRESAS DE TIERRA**

DR. MIGUEL P. ROMO

EXPOSITOR:

M. EN I. ROBERTO MAGAÑA DEL TORO

PALACIO DE MINERIA

X

Morelia Noviembre 1980
SOCIEDAD MEXICANA DE MECANICA DE SUELOS, A. C.

ANALISIS DINAMICO DE SISTEMAS SUELO-ESTRUCTURA Y PRESAS DE TIERRA

Miguel P. Romo

Instituto de Ingeniería, UNAM

RESUMEN. En este artículo se presentan algunas técnicas analíticas para el estudio de la respuesta sísmica de sistemas suelo-estructura y presas de tierra. Se hace énfasis en los métodos generales que consideran el efecto de interacción entre el subsuelo y la estructura (por tanto se pueden utilizar para edificios o para plantas nucleoelectricas). Para el caso de presas se presenta un método general que permite evaluar deformaciones permanentes y calcular las presiones de poro, y dos procedimientos simplificados. Se hace hincapié en la necesidad de ejercer buen juicio Ingenieril y la colaboración de especialistas en el diseño sísmico de presas de tierra.

1. Introducción

En los últimos años se ha logrado un avance significativo en la comprensión del comportamiento dinámico de sistemas suelo-estructura y presas de tierra. Se han desarrollado procedimientos analíticos para calcular la respuesta sísmica de estructuras y pruebas dinámicas (de laboratorio y de campo) para evaluar las pro-

iedades de los suelos sujetos a cargas de tipo sísmico. Similarmente, se han propuesto métodos de diseño para evaluar la estabilidad sísmica y las deformaciones potenciales de presas de tierra bajo cargas dinámicas.

Los problemas dinámicos en geotecnia se pueden clasificar en tres categorías (ver fig 1.1):

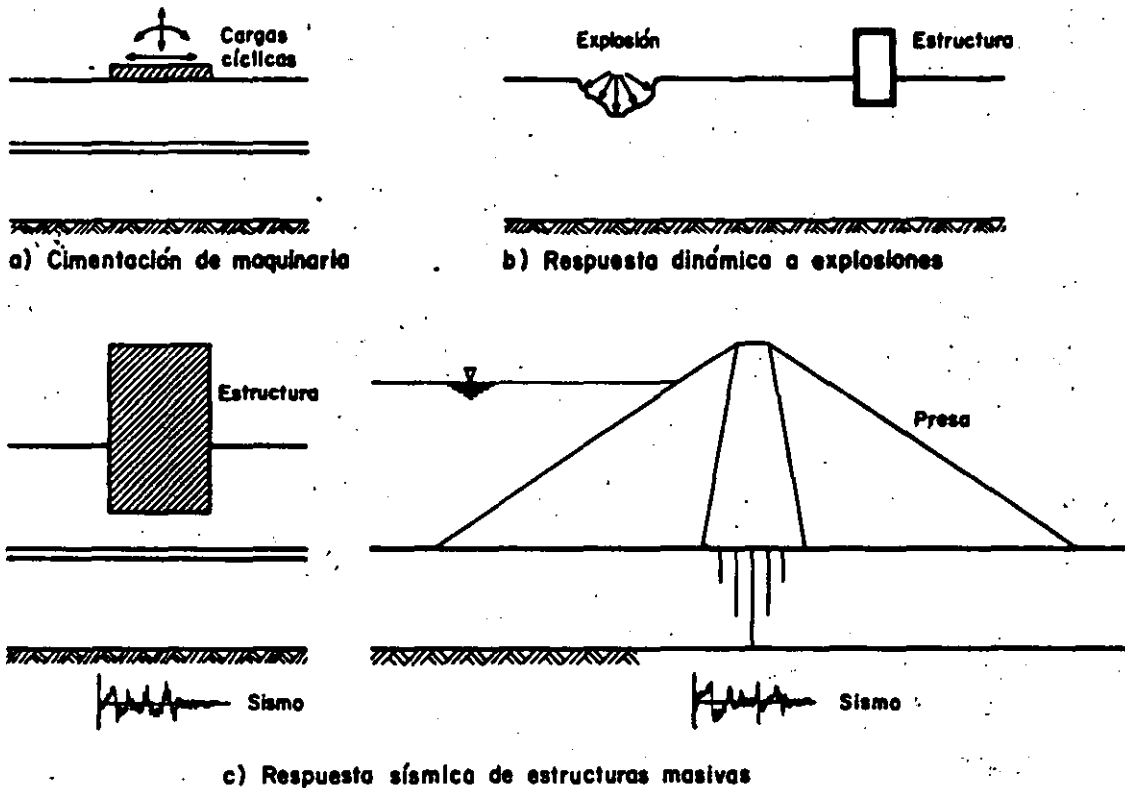


Fig 1.1 Problemas dinámicos en Geotecnia

- Problema de vibración de maquinaria (fig 1.1a), en el que la excitación dinámica se especifica al nivel de la cimentación y generalmente consiste de una oscilación de frecuencias conocidas.
- Problema de respuesta dinámica a ondas superficiales causadas por explosiones (fig 1.1b), en el que la excitación consiste normalmente de ondas de relativamente corta duración.
- Problema de respuesta sísmica (fig 1.1c), en el que la excitación dinámica se especifica normalmente a cierta profundidad en un estrato rocoso o, en la superficie del depósito de suelo de cimentación, cuando no se tiene un registro del sismo en roca. La excitación dinámica consiste en general en un histograma de aceleraciones con un amplio contenido de frecuencias.

El principal objetivo de este artículo es cubrir algunos aspectos analíticos de la tercera categoría de problemas, enfatizando los métodos para evaluar la respuesta sísmica de sistemas suelo-estructura y los procedimientos desarrollados para determinar tanto la estabilidad como las deformaciones potenciales de presas de tierra sujetas a cargas sísmicas.

2. Respuesta Dinámica de Sistemas Suelo-Estructura

Una consideración importante en el análisis dinámico de estructuras desplantadas sobre materiales flexibles es la evaluación de la relación que existe entre las características de la excitación sísmica del suelo de cimentación, las condiciones geológicas del sitio, las condiciones locales del depósito de suelo y la respuesta de las estructuras a la excitación sísmica. Los aspectos esenciales de este problema son dos:

- Las condiciones locales del suelo y las condiciones geológicas del sitio afectan en general las características de la excitación sísmica, en términos de su máxima aceleración y de su contenido de frecuencias. Por consiguiente es necesario evaluar la magnitud de estos efectos con el fin de establecer criterios de diseño apropiados. En la fig 2.1 se muestran espectros de respuesta promedio de sismos registrados en la superficie de varios depósitos de suelo con diferentes rigideces (Seed *et al.*, 1974). Es notorio el efecto del tipo de suelo en las formas de los espectros, especialmente para periodos mayores que 0.5 seg; para valores superiores las amplificaciones espectrales son mayores para depósitos profundos de suelos no cohesivos y depósitos de arcilla blanda a media que para condiciones de roca y de depósitos de suelos rígidos.
- Durante la excitación dinámica las estructuras interactúan con el suelo de cimentación. Por lo tanto, es necesario evaluar los efectos de esta interacción sobre la respuesta dinámica de las estructuras. El fenómeno de interacción suelo-estructura se manifiesta por una diferencia entre el movimiento u_1 en la base de la estructura y el movimiento u_0 en la superficie del terreno lejos del sitio de cimentación, como se indica en la fig 2.2. Este movimiento puede ser, en general, vertical, horizontal, de cabeceo y de torsión.

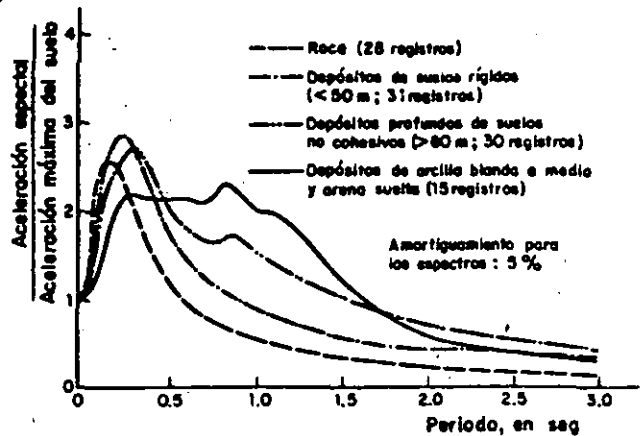


Fig 2.1 Espectros de aceleración promedio para diferentes condiciones locales

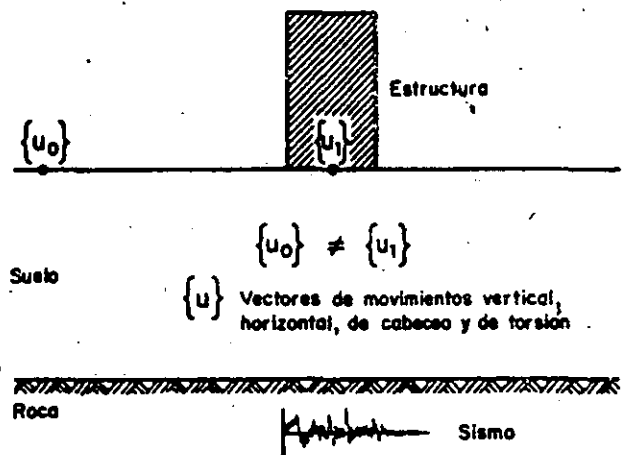


Fig 2.2 Definición de la interacción suelo-estructura

Debido a que, en general, el campo sísmico en el cual se va a colocar una estructura no se conoce y atendiendo a los dos aspectos antes mencionados, el problema básico de interacción suelo-estructura involucra el cálculo de la respuesta de una o más estructuras, en un sitio en particular, a partir de una excitación de diseño dada (excitación de control) actuando en un punto específico (punto de control) del sitio antes de la construcción de la estructura (análisis de campo libre). Una vez que se conocen las características sísmicas del campo libre se lleva a cabo un análisis de interacción que considera las características del suelo de cimentación y de la estructura. Los métodos para estudiar la respuesta del campo libre no se presentarán aquí, pero el lector puede consultar el estado del arte preparado por Lysmer (1978).

Los problemas de respuesta de campo libre y de interacción son de índole diferente; sin embargo, en principio se pueden formular en términos de modelos continuos o discretos. Debido al gran número de modelos matemáticos propuestos en la literatura, en este artículo sólo se discutirán modelos discretos enfatizando aquellos que utilizan la técnica del elemento finito.

Algunas de las ventajas de los modelos que emplean el método del elemento finito son: a) permiten tomar en cuenta la no linealidad y la heterogeneidad del suelo, y b) se pueden simular condiciones de frontera más representativas que con modelos continuos. Por otra parte, los modelos continuos tienen ventajas con geometrías simples y materiales lineales. Sin embargo, su utilidad se restringe básicamente al análisis de vibración de maquinaria, de problemas de interacción para estructuras con cimentación superficial y algunos tipos de problemas de respuesta del campo libre. Para depósitos estratificados y en particular para problemas que involucran estructuras desplazadas a profundidad las soluciones del continuo se tornan muy complicadas y sólo se pueden evaluar con procedimientos aproximados; por lo tanto, se pierde la ventaja principal de obtener una solución exacta.

2.1 Métodos de análisis

Los procedimientos analíticos para estudiar el problema de interacción dinámica suelo-estructura se pueden clasificar en dos categorías atendiendo al procedimiento seguido para resolver el problema; estas son: a) Métodos de Subestructura y b) Métodos Completos (Lysmer, 1978).

El planteamiento matemático es semejante para los dos grupos de métodos. Debido a la complejidad del problema el sistema de ecuaciones resultante se soluciona con el método del elemento finito.

Ecuaciones de Movimiento

La teoría que se presenta en este inciso se refiere a modelos de deformación plana, con propiedades viscoelásticas lineales, del tipo general mostrado en la fig 2.3. El modelo consiste en tres regiones: dos zonas estratificadas semi-infinitas (campo libre) y una zona central dentro de la cual pueden existir estratos de geometría irregular (problema de interacción). La frontera inferior del campo libre se supone rígida pero no necesariamente fija.

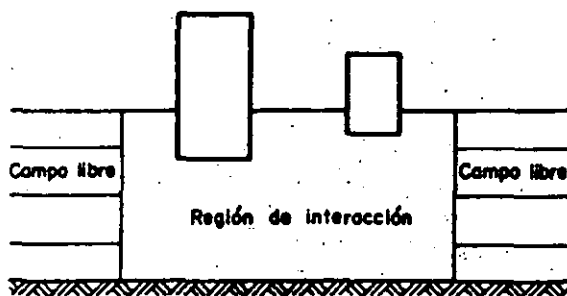


Fig 2.3 Modelo para el problema de interacción suelo-estructura

La frontera inferior del problema de interacción puede ser rígida o flexible, con una condición de frontera viscosa para simular la existencia de un semi-espacio elástico debajo de esta región.

La representación esquemática del procedimiento de solución se presenta en la fig 2.4. El sistema que se va a analizar corresponde a la estructura y el

suelo que la rodea (fig 2.4a, problema de interacción). Este sistema se descompone en dos modelos, el de campo libre (fig 2.4b) y el incremental que es equivalente a un problema de vibración de maquinaria (fig 2.4c). Superponiendo las soluciones de estos dos modelos (el teorema de superposición es aplicable puesto que los materiales se suponen viscoelásticos lineales) se obtiene la respuesta dinámica del sistema suelo-estructura. Entonces los desplazamientos del sistema suelo-estructura, $\{u_i\}$, se obtienen de la siguiente ecuación:

$$\{u_i\} = \{u_o\} + \{u_v\} \quad (2.1)$$

Donde $\{u_o\}$ y $\{u_v\}$ son los vectores de desplazamientos en el campo libre y en el modelo incremental, respectivamente.

Los modelos mostrados en la fig 2.4 son idénticos en el sentido que están discretizados igualmente con elementos finitos. Además, todas las masas y rigideces son las mismas, excepto que la parte estructural del modelo presentado en la fig 2.4b no tiene masa ni rigidez y para este modelo los nudos en la estructura arriba de la superficie del terreno se suponen fijos.

Suponiendo que las fronteras están lejos de la estructura (fig 2.4a) la ecuación de movimiento para el problema de interacción es:

$$[M]\{\ddot{u}_i\} + [C]\{\dot{u}_i\} + [K]\{u_i\} = \{F_i\} \quad (2.2)$$

Donde $[M]$, $[C]$ y $[K]$ son las matrices totales de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente; y $\{F_i\}$ es la excitación dinámica actuando en las fronteras del modelo.

Debido a que los nudos fijos en la estructura no afectan la respuesta del depósito de suelo (fig 2.4b) la ecuación de movimiento para el problema de campo libre es:

$$[M_o]\{\ddot{u}_o\} + [C_o]\{\dot{u}_o\} + [K_o]\{u_o\} = \{F_o\} \quad (2.3)$$

Donde $[M_o]$, $[C_o]$ y $[K_o]$ son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente, del campo libre.

Sustituyendo las ecs (2.1) y (2.2) en la ec (2.3) se obtiene la ecuación de movimiento para el modelo incremental (problema de vibración de maquinaria):

$$[M]\{\ddot{u}_v\} + [C]\{\dot{u}_v\} + [K]\{u_v\} = \{F\} \quad (2.4)$$

Donde

$$\{F\} = ([M_o] - [M])\{\ddot{u}_o\} + ([C_o] - [C])\{\dot{u}_o\} + ([K_o] - [K])\{u_o\} \quad (2.5)$$

es el vector de carga y puede determinarse de los desplazamientos del campo libre calculados con la ec (2.3). Es importante notar que el vector de carga $\{F\}$ depende sólo de la diferencia entre las propiedades de la estructura y del suelo excavado.

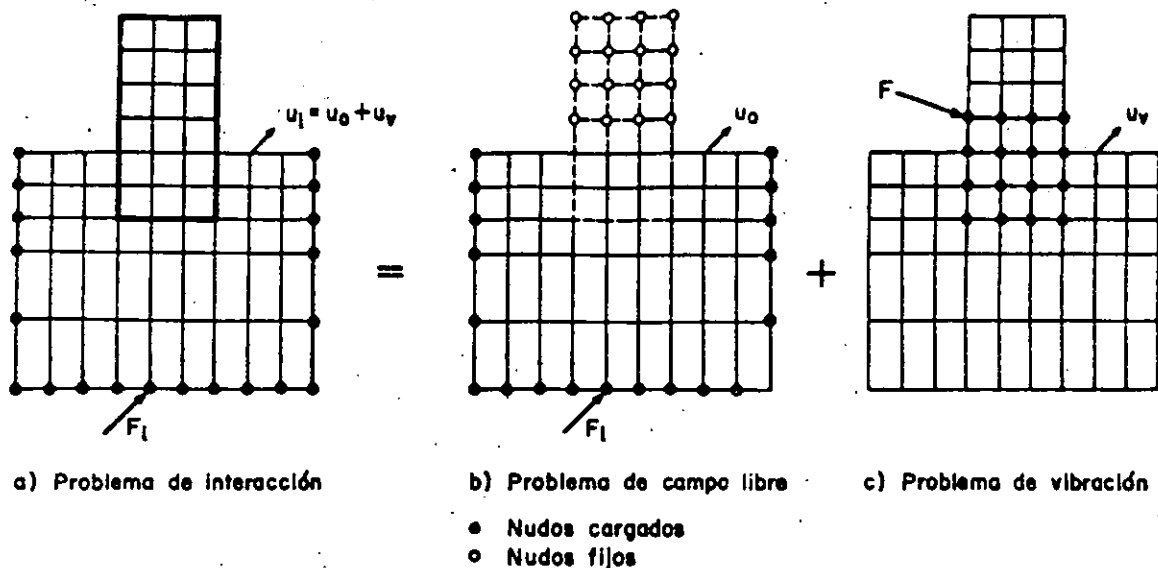


Fig 2.4 Etapas de superposición para el problema de interacción

Los desplazamientos totales $\{u_i\}$ del problema de interacción suelo-estructura se calculan por superposición como se indica en la ec (2.1).

De esta formulación matemática se pueden obtener las siguientes características importantes del fenómeno de interacción:

- Para el problema de interacción, se necesitan únicamente los movimientos del campo libre que ocurren dentro del volumen de suelo que se excava para el desplante de la estructura. Esto implica que para estructuras desplantadas en suelo blando, el análisis de campo libre es quizá la parte más importante del problema de interacción, debido a que para estos sitios los movimientos de campo libre varían significativamente con la profundidad. Por lo tanto, el uso de métodos que emplean impedancias constantes con la profundidad para simular el fenómeno de interacción puede conducir a resultados erróneos. Esto tiene gran implicación en el procedimiento de análisis dinámico usado para edificios en la Ciudad de México.
- Para estructuras desplantadas a cierta profundidad la importancia del fenómeno de interacción depende de la diferencia entre las masas y rigideces de la estructura y del volumen de suelo excavado. Esto significa que para estructuras compensadas (tanto en rigidez como en masa) los efectos de interacción son nulos.
- El análisis es válido para sistemas lineales. Sin embargo, el efecto no lineal se puede tomar en cuenta con un procedimiento equivalente lineal (Seed e Indriss, 1969) que consiste en resolver el problema linealmente pero iterando en una relación esfuerzo-deformación para incluir el cambio de rigidez del suelo con el nivel de deformaciones desarrollado por la excitación dinámica. Para estructuras diseñadas para aceptar pequeñas deformaciones como plantas nucleoelectricas esta restricción no es

importante. Además, el problema de campo libre no se puede resolver, en general, con métodos no lineales verdaderos (Lysmer, 1978).

Métodos de Subestructura

Debido a la complejidad para modelar el problema de interacción han surgido los llamados métodos de subestructura (Lysmer, 1978). Estos procedimientos dividen el problema de interacción en dos partes. En la primera se analiza el depósito del suelo de cimentación como si fuera un semi-espacio continuo, y las funciones de impedancia y las características de refracción de las ondas se determinan en la interfase suelo-estructura. En la segunda parte estas propiedades se usan como condiciones de frontera y se lleva a cabo el análisis dinámico de la estructura con un sistema de cargas que se obtiene directamente de los movimientos del campo libre.

Estructuras con cimentación superficial. Con base en la teoría presentada anteriormente los movimientos de interacción se pueden calcular usando la ec (2.5). Sin embargo, para el caso de una estructura con cimentación superficial las fuerzas $\{F\}$ actúan solamente en la base y en el primer nivel de la estructura como se indica en la fig 2.5a. Para este caso la ec (2.5) se reduce a la siguiente ecuación:

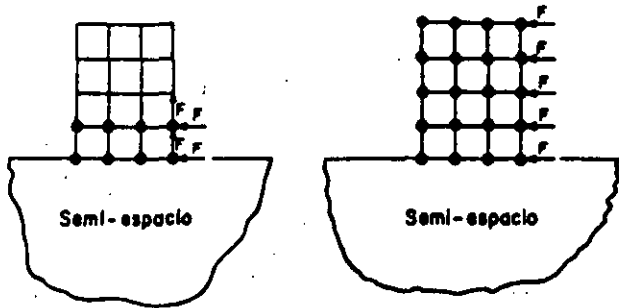
$$\{F\} = -[M_s]\{\ddot{u}_o\} - [C_s]\{\dot{u}_o\} - [K_s]\{u_o\} \quad (2.6)$$

Donde las matrices $[M_s]$, $[C_s]$ y $[K_s]$ sólo dependen de las características de la estructura y $\{u_o\}$ son los valores de los movimientos en la superficie del campo libre. Este modelo es válido para cualquier tipo de onda propagándose en el campo libre. Si el ambiente sísmico consiste íntegramente de ondas de corte propagándose verticalmente en campo libre, entonces fijando los puntos nodales de la estructura (fig 2.4b) en la dirección vertical y asignando los movimientos horizontales de la superficie del campo libre la estructura no se deforma cuando se le sujeta a la excitación del campo libre y la

ec (2.5) se reduce a:

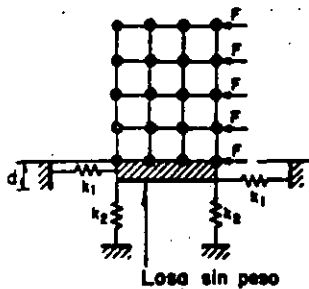
$$(F) = - [M_e] \{U_0\} \quad (2.7)$$

Por lo tanto, los movimientos relativos se pueden calcular usando el modelo inercial de interacción (fig 2.5b) donde todas las fuerzas (F) resultan de multiplicar la masa de la estructura a la elevación deseada por la aceleración de la superficie del campo libre.



a) Sistema general de ondas, base flexible

b) Ondas de corte, base flexible



c) Ondas de corte, base rígida

Fig 2.5 Análisis de estructuras con cimentación superficial

Si el semi-espacio se representa con elementos finitos, entonces la flexibilidad de la losa de cimentación se puede incluir fácilmente en los análisis de interacción. Por otra parte, si la losa de cimentación se considera rígida, entonces el modelo se reduce al mostrado en la fig 2.5c. Las impedancias k_1 y k_2 son función de la frecuencia y se pueden determinar a partir de los coeficientes de impedancia obtenidos en problemas de vibración de cimentaciones correspondientes. En problemas prácticos es común despreciar la dependencia de k_1 y k_2 de la frecuencia y utilizar valores constantes como los presentados en las tablas 2.1 y 2.2. El espesor de la losa rígida sin peso, d , representa la interacción acoplada entre los modos de vibración horizontal y de cabeceo, y es, en general, una función compleja de la frecuencia. En la práctica esta interacción se desprecia ($d=0$) debido a que se ha demostrado analíticamente que esta interacción acoplada es débil para cimentaciones superficiales (Veletsos y Wei, 1970).

Tabla 2.1 Constantes para la representación del problema de interacción suelo-estructura. Cimentación circular

Tipo de excitación	Constante de rigidez	Coefficiente de amortiguamiento
Horizontal	$k_x = \frac{32(1-\nu)GR}{7-8\nu}$	$c_x = 0.576 k_x R\sqrt{\rho/G}$
Cabeceo	$k_\psi = \frac{8GR^3}{3(1-\nu)}$	$c_\psi = \frac{0.30}{1+B_\psi} k_\psi R\sqrt{\rho/G}$
Vertical	$k_z = \frac{4GR}{1-\nu}$	$c_z = 0.85 k_z R\sqrt{\rho/G}$
Torsión	$k_t = 16GR^3/3$	$c_t = \frac{\sqrt{k_t I_t}}{1 + 2I_t/\rho R^4}$

donde

ν = relación de Poisson del medio de cimentación

G = módulo de corte del medio de cimentación

R = radio de la cimentación

ρ = densidad del medio de cimentación

$$B_\psi = \frac{3(1-\nu)I_0}{8\rho R^3}$$

I_0 = momento de inercia de la estructura y de la cimentación alrededor del eje de cabeceo en la base

I_t = momento de inercia polar de la estructura y la cimentación.

Tabla 2.2 Constantes para la representación del problema de interacción suelo-estructura. Cimentación rectangular

Tipo de excitación	Constante de rigidez	Coefficiente de amortiguamiento
Horizontal	$k_x = 2(1+\nu)G\beta_x\sqrt{BL}$	Use los resultados de la tabla 2.1 con los radios:
Cabeceo	$k_\psi = \frac{G}{1-\nu} \beta_x BL^2$	$R = \sqrt{BL/\pi}$ (traslación)
Vertical	$k_z = \frac{G}{1-\nu} \beta_z\sqrt{BL}$	$R = \sqrt{BL^3/3}$ (cabeceo)
Torsión	Use tabla 2.1 con $R = \sqrt{16BL(B^2+L^2)/6\pi}$	

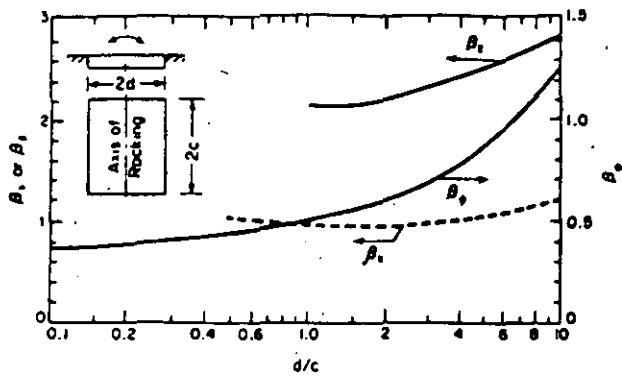
donde

ν y G se definen en la tabla 2.1

B = ancho de la cimentación perpendicular a la dirección de la excitación horizontal

L = longitud de la cimentación en la dirección de la excitación horizontal

$\beta_x, \beta_\psi, \beta_z$ = constantes que son función de la relación L/B como se indica en la figura:



Estructuras con cimentación profunda. La profundidad de desplante afecta significativamente la respuesta dinámica de la estructura. La principal dificultad para resolver el problema de interacción con métodos de subestructura es que, debido a que los movimientos en el campo libre varían con la profundidad (especialmente en suelos blandos), es difícil especificar la distribución de las fuerzas inducidas por el campo libre sobre la parte enterrada de la estructura. Esto ha conducido a algunos investigadores (p.e. Hall y Kissenpfenning, 1975) a utilizar un modelo como el mostrado en la fig 2.6. En este modelo las masas m_1 y m_2 representan las masas del campo libre; y se les da un valor numérico lo suficientemente grande para que no sean afectadas por la respuesta de la estructura y así tengan los movimientos correctos del campo libre. Las impedancias, k_1 , se suponen constantes y sus valores se obtienen de teorías aproximadas (Johnson *et al.*, 1975). Relaciones entre las impedancias, k_1 , y la profundidad de desplante se presentan en la fig 2.7 para cimentaciones circulares y en la fig 2.8 para cimentaciones de longitud semi-infinita. Aunque este método no se puede justificar rigurosamente, a través de comparaciones con análisis más completos, como el método del elemento finito, se ha demostrado que funciona razonablemente bien para algunos casos de edificios con cimentaciones enterradas.

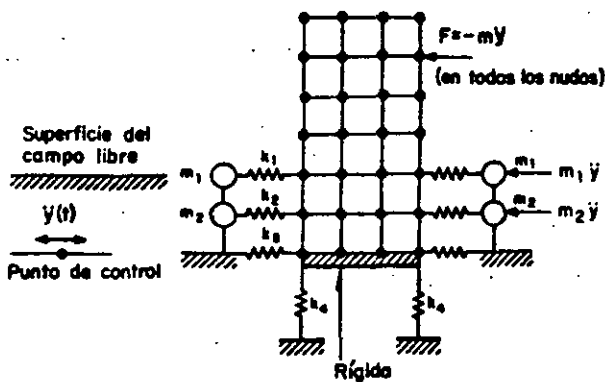


Fig 2.6 Modelo de parámetros concentrados para el problema de interacción

Un procedimiento alternativo es el **método de frontera rígida** propuesto por Kausel y Roesset (1974). Este método se basa en el principio de superposición y consiste en resolver el problema de interacción en tres etapas como se indica en la fig 2.9. En el primer paso se resuelve el problema del campo libre pero incluyendo una cimentación rígida, sin peso y de forma idéntica a la de la cimentación real (fig 2.9b). La excitación dinámica que se utiliza es la misma que la que se emplea en la solución total (problema de interacción). La solución de este problema produce un conjunto de aceleraciones de cuerpo rígido del campo libre (denominado interacción cinemática) para diferentes puntos en la cimentación de la estructura (fig 2.9b). En el segundo paso, que es un problema de vibración de cimentación, se determinan las impedancias (que son funciones de la frecuencia) del suelo de cimentación para los modos de vibración relevantes (fig 2.9c). En el tercer paso se calcula la respuesta dinámica de la estructura sujeta a las excitaciones dinámicas obtenidas en el paso uno, y considerando las fuerzas de inercia en la estructura, calculadas con la ec (2.7) usando los movimientos de campo libre (fig 2.9d). La solución total (problema de interacción) se obtiene superponiendo los resultados parciales como lo indica la ec (2.1). La única aproximación involucrada en este procedimiento se refiere a la rigidez de la cimentación de la estructura incluida en la respuesta del sitio (fig 2.9b). Esto tiene como consecuencia que, a menos que se pruebe que esta hipótesis es válida para cada caso, este método no permite evaluar las deformaciones y esfuerzos reales en la parte enterrada de la estructura. Por otra parte, es difícil obtener soluciones rigurosas para el primer paso de la solución excepto con el método del elemento finito y puesto que el segundo paso también requiere de un análisis con elemento finito, el método de frontera rígida difícilmente es más competitivo que otros métodos que utilizan el método del elemento finito (métodos completos) para obtener soluciones rigurosas.

Para salvar la dificultad de la frontera rígida, se propuso el **método de frontera flexible** (Gutiérrez, 1976). En este método el sistema estructura-suelo se considera compuesto de dos subestructuras: la estructura misma y el suelo subyacente. La excitación dinámica se define a partir de la respuesta del campo libre a la elevación de la interface entre el suelo y la estructura. Por lo tanto, la solución completa al problema de interacción con este método requiere primero obtener la respuesta del sitio para determinar el movimiento de la frontera flexible (equivalente al paso uno del método de frontera rígida), luego se obtienen las funciones de impedancia, similar al problema mostrado en la fig 2.9c, que involucran más grados de libertad (modos de vibración del problema de cimentación) y consecuentemente las matrices de impedancia son mayores. El tercer paso involucra el análisis de la estructura y es un poco más complicado que el problema mostrado en la fig 2.9d, por el mayor número de grados de libertad incluidos en la cimentación. Como para el método de frontera rígida, el punto débil de este procedimiento radica en que no existen soluciones analíticas para el problema del campo libre incluyendo la cimentación. Por consiguiente, para resolver el problema de manera rigurosa se tiene que recurrir al método del elemento finito, desapareciendo así el atractivo principal del método de frontera flexible.

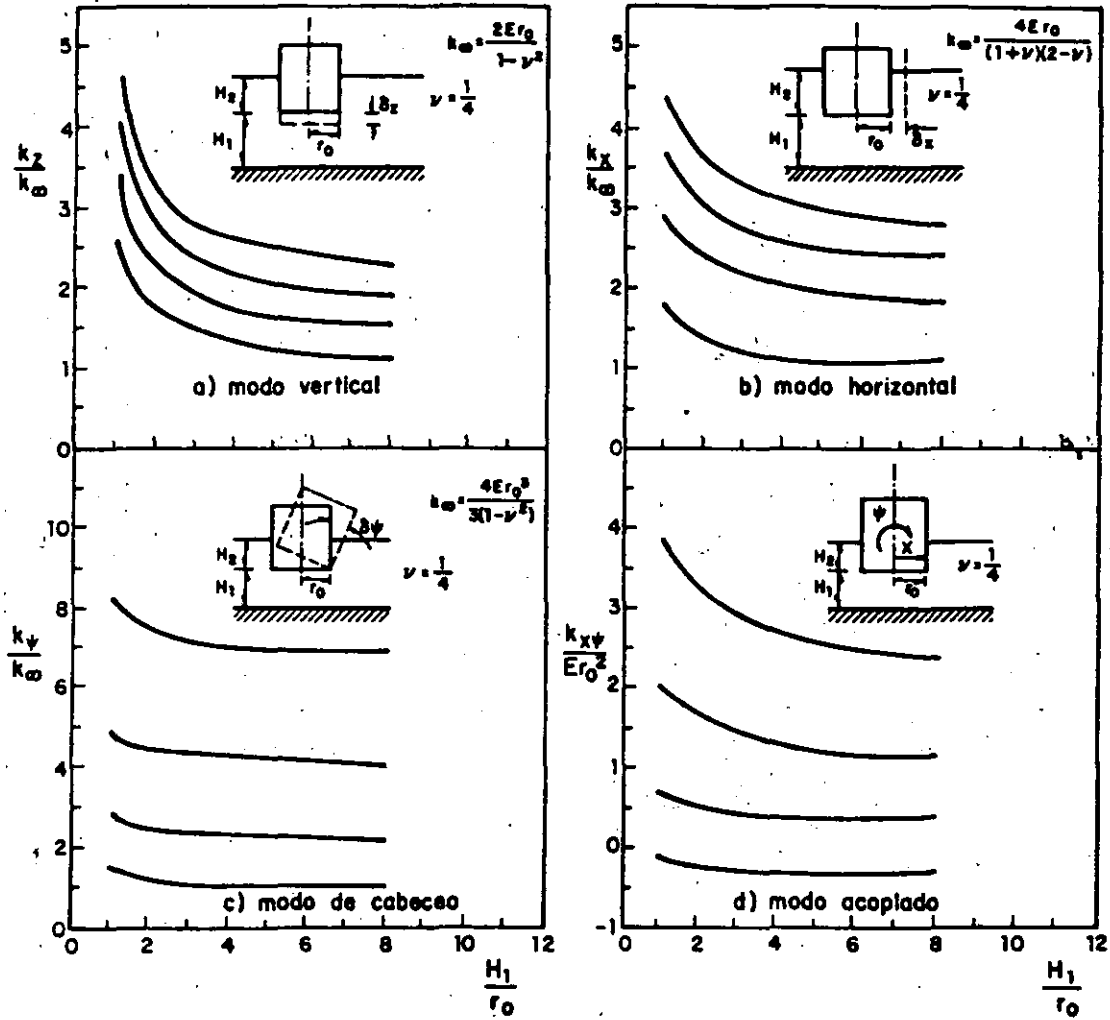


Fig 2.7 Funciones de Impedancia para cimentaciones circulares rígidas

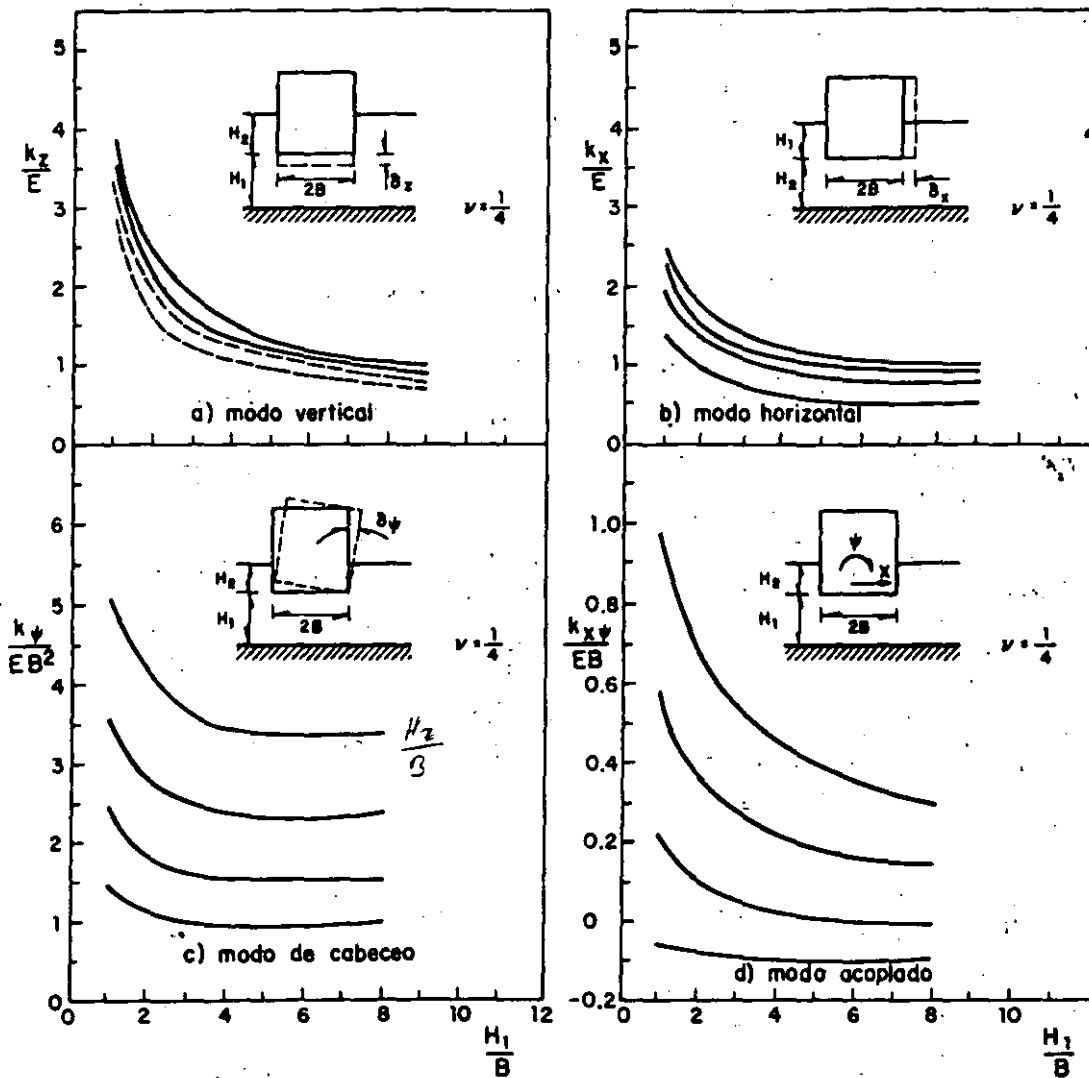


Fig 2.8 Funciones de impedancia para zapatas contínuas rígidas

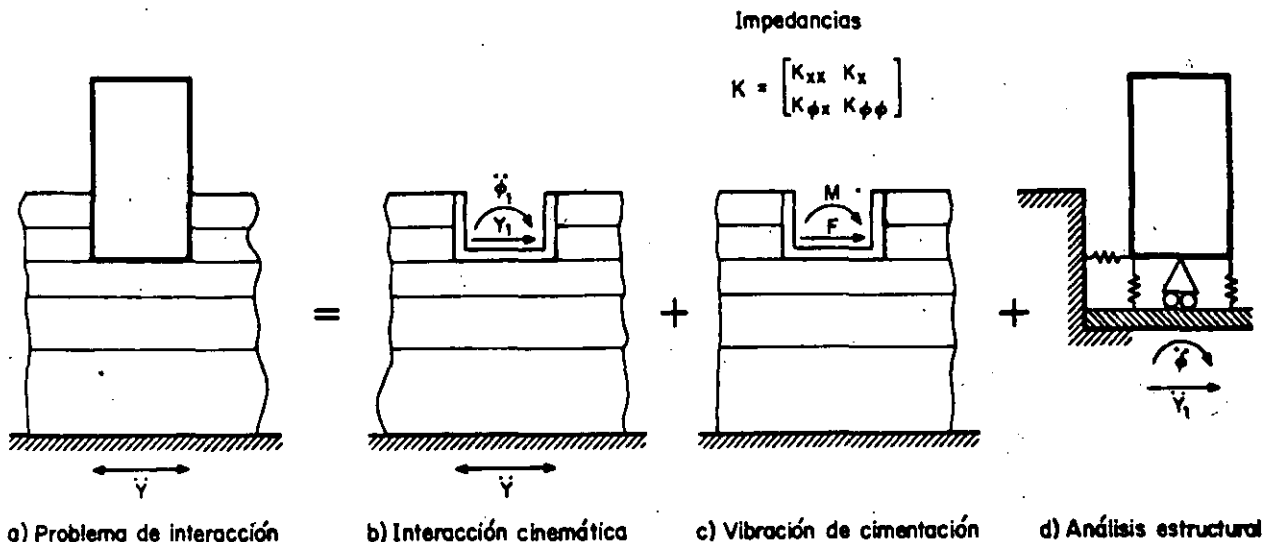


Fig 2.9 Método de frontera rígida

Los problemas de respuesta del sitio y de obtención de las funciones de impedancia concurrentes en los dos métodos presentados anteriormente, se pueden simplificar si en el problema de interacción se incluyen más grados de libertad entre el semi-espacio y la estructura. Este procedimiento denominado *método de volumen flexible* propuesto recientemente por Lysmer (1980) consiste en seccionar el suelo y la estructura no en su interface sino como se muestra en la fig 2.10. En esta división la estructura (fig 2.10c) consiste en la superestructura más la cimentación menos el suelo excavado, y la cimentación consiste del sitio original (fig 2.10b; note que el suelo por excavar se incluye en la cimentación); por lo tanto, la interacción entre suelo y cimentación ocurre en todos los nudos de la estructura en contacto con el subsuelo. La ecuación de movimiento en el dominio de la frecuencia (la excitación dinámica es armónica) para el sistema total mostrado en la fig 2.10a es:

$$[[K] - \omega^2 [M]] \{u\} = \{F\}_b \quad (2.8)$$

donde $[K]$ es la matriz de rigidez compleja (los componentes de esta matriz son complejas para tomar en cuenta el amortiguamiento histerético y viscoso β , p.e. $K = (1 + i\beta) k_i$) del sistema total, ω es la frecuencia de la excitación armónica, $[M]$ es la matriz de masas del sistema total, $\{u\}$ es el vector de desplazamientos en el dominio de la frecuencia y $\{F\}_b$ son las fuerzas externas en el dominio de la frecuencia.

La subestructura de la cimentación (fig 2.10b) está compuesta por suelo excavado (representado por los puntos nodales δ), por suelo del campo libre (representado por los puntos nodales g) y por la condición de frontera (representada por los puntos nodales b). La ecuación de movimiento para esta subestructura está compuesta por tres sistemas de ecuaciones acopladas. Estas ecuaciones en el dominio de la frecuencia son:

$$[[K] - \omega^2 [M]]_{\delta\delta} \{u\}_\delta + [[K] - \omega^2 [M]]_{\delta b} \{u\}_b + [[K] - \omega^2 [M]]_{\delta g} \{u\}_g = \{F\}_\delta \quad (2.9)$$

$$[[K] - \omega^2 [M]]_{b\delta} \{u\}_\delta + [[K] - \omega^2 [M]]_{bb} \{u\}_b + [[K] - \omega^2 [M]]_{bg} \{u\}_g = \{F\}_b \quad (2.10)$$

$$[[K] - \omega^2 [M]]_{g\delta} \{u\}_\delta + [[K] - \omega^2 [M]]_{gb} \{u\}_b + [[K] - \omega^2 [M]]_{gg} \{u\}_g = \{0\} \quad (2.11)$$

Haciendo $[A] = [K] - \omega^2 [M]$ y escribiendo las ecs (2.9), (2.10) y (2.11) en forma matricial, se obtiene la siguiente ecuación para el problema mostrado en la fig 2.10b:

$$\begin{bmatrix} A_{\delta\delta} & A_{\delta g} & A_{\delta b} \\ A_{g\delta} & A_{gg} & A_{gb} \\ A_{b\delta} & A_{bg} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\delta \\ u_g \\ u_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_\delta \\ 0 \\ F_b \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Note que las fuerzas $\{F\}_b$ son las fuerzas de interacción con la estructura del problema mostrado en la fig 2.10c.

La subestructuración (fig 2.10c) del problema de interacción está compuesta por la superestructura (representada por los nudos δ) y la parte de la estructura en contacto con el suelo (representada por los nudos i). La ecuación de movimiento para el problema de la fig 2.10c es,

$$\begin{bmatrix} A_{\delta\delta} & A_{\delta i} \\ A_{i\delta} & (A_{ii} - A_{\delta\delta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\delta \\ u_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F_\delta \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

donde se cumple con la compatibilidad de los desplazamientos ($u_i = u_\delta$) y las condiciones de equilibrio ($F_i + F_\delta = 0$). El término $(A_{ii} - A_{\delta\delta})$ indica que la rigidez y la masa del suelo excavado se resta de la rigidez y la masa de la estructura.

Haciendo la hipótesis de que la frontera externa (nudos b) está infinitamente lejos de la estructura (pa

ra eliminar el problema de reflexión y refracción de las ondas sísmicas en una frontera ficticia), la ecuación de movimiento para el problema de campo libre (similar al mostrado en la fig 2.10b) se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} A_{\delta\delta} & A_{\delta g} & A_{\delta b} \\ A_{g\delta} & A_{gg} & A_{gb} \\ A_{b\delta} & A_{bg} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_\delta \\ u'_g \\ u'_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_b \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

donde $\{u'\}$ son los desplazamientos de campo libre. Restando la ec (2.14) de la ec (2.12), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} A_{\delta\delta} & A_{\delta g} & A_{\delta b} \\ A_{g\delta} & A_{gg} & A_{gb} \\ A_{b\delta} & A_{bg} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_\delta \\ v_g \\ v_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_\delta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

donde $\{v\} = \{u\} - \{u'\}$ son los desplazamientos de interacción. Subdividiendo la ec (2.15) como se indica, $\{v_g\}$ and $\{v_b\}$ se pueden eliminar y $\{F_\delta\}$ se puede expresar de la siguiente forma:

$$\{F_\delta\} = [V_\delta] \{v_\delta\} = [V_\delta] (\{u_\delta\} - \{u'_\delta\}) \quad (2.16)$$

donde la matriz $[V_\delta]$ es la matriz de impedancias (dependientes de la frecuencia) correspondiente a los puntos nodales δ en el modelo de cimentación (fig 2.10b) y puede obtenerse de la solución de campo libre con cargas puntuales en los nudos correspondientes δ .

Si se sustituye la ec (2.16) en la ec (2.13) se obtiene la ecuación que permite calcular los movimientos finales de la estructura:

$$\begin{bmatrix} A_{\delta\delta} & A_{\delta c} \\ A_{c\delta} & (A_{cc} - A_{\delta\delta} + V_\delta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\delta \\ u_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ [V_\delta] \{u'_\delta\} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

La solución al problema de interacción suelo-estructura con el método de volumen flexible se obtiene de la siguiente manera:

- Se resuelve el problema del campo libre para determinar los movimientos $\{u'\}$ que están dentro del volumen de la parte de la estructura desplazada a profundidad.
- Se resuelve el problema de impedancia para determinar la matriz $[V_\delta]$.
- Se resuelve el problema estructural lo cual involucra formar las matrices complejas de rigidez y el vector de carga de la ec (2.17). De la solución de esta ecuación se obtienen los desplazamientos finales.

Es importante notar que con este método se elimina el problema de encontrar los movimientos de campo libre con la cimentación de la estructura, ya que con la subestructuración seleccionada el problema se reduce a uno de respuesta del sitio (campo libre). Por otra parte, el problema de impedancia es similar al de los métodos antes mencionados pero con una frontera superficial más regular (compare la fig 2.10b con la fig 2.9b) y se puede resolver como el inverso del problema de flexibilidad con métodos propuestos por Waas (1972) para el problema plano, por Kausel y Roesset (1974) para sistemas axisimétricos y aproximadamente para configuraciones generales tridimensionales usando soluciones axisimétricas (Wolf y von Arx, 1978). El análisis de la estructura es ligeramente más complicado que en el caso del método de frontera flexible debido al mayor número de nudos que intervienen en la interacción; sin embargo, se sigue el mismo procedimiento.

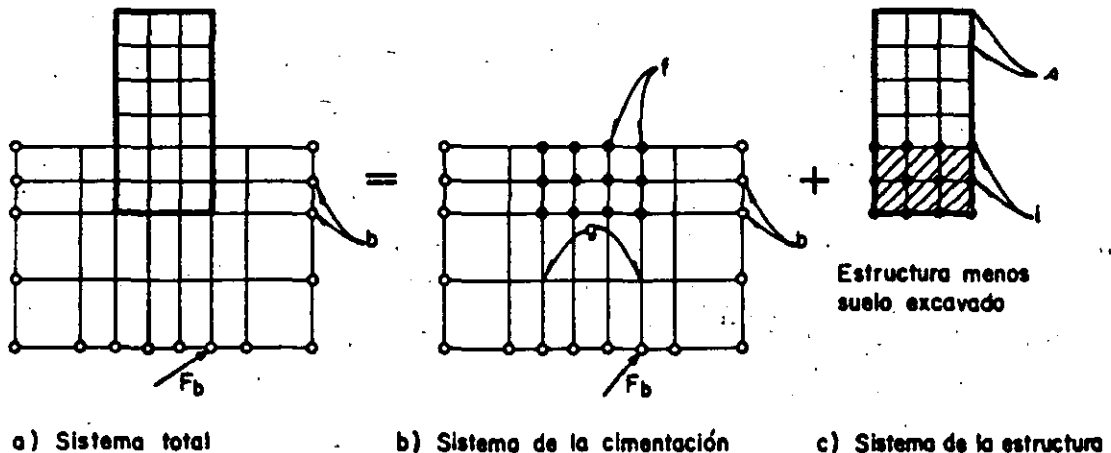


Fig 2.10 Método de volumen flexible

donde

ξ_0 , h y C son características del suelo

El valor de cada componente de $[Q]$ se obtiene con la siguiente relación:

$$[Q] = [Q]_m (1 + f(x)) \quad (2.25)$$

donde $[Q]_m$ es el valor promedio.

Actualmente se está implementando un programa de computadora que utiliza el método del elemento finito para resolver este planteamiento analítico.

3. Presas de Tierra

Los procedimientos analíticos para el estudio dinámico de presas y terraplenes han avanzado significativamente en la última década. Del método pseudoestático utilizado para evaluar la estabilidad sísmica de terraplenes, se ha pasado a métodos del elemento finito que permiten evaluar tanto la estabilidad (incluyendo las características esfuerzo-deformación del suelo constitutivo de la presa) como las deformaciones potenciales (incluyendo el desarrollo de presiones de poro en materiales susceptibles a licuación) de presas de tierra y enrocamiento sujetas a eventos sísmicos.

A pesar del avance significativo debemos admitir la existencia de problemas relativos a la evaluación de las propiedades dinámicas, a la selección del sismo de diseño, a la evaluación de las presiones de poro y de las deformaciones que resultan de los datos combinados del análisis de respuesta y pruebas de laboratorio, a la evaluación del efecto tridimensional y a la integración de las experiencias pasadas en el análisis. Por consiguiente, con el estado actual del conocimiento se requiere ejercer un buen juicio en todas las etapas del diseño sísmico de presas de tierra, y seguramente se seguirán utilizando en el futuro, independientemente de los avances logrados. El buen juicio ingenieril es una componente que nunca podrá ni deberá sustituirse cuando se diseñan obras geotécnicas.

Aunque el buen juicio es una de las premisas indispensables para lograr un diseño sísmico racional y así minimizar el peligro de falla de una presa, gufa en el ejercicio de este juicio se puede obtener por medio de estudios analíticos cuya complejidad dependerá de la magnitud y tipo de problema bajo consideración.

En este capítulo se presentan y se discuten algunos de los métodos existentes para los análisis de estabilidad y de deformaciones de presas y terraplenes sujetos a cargas sísmicas.

3.1 Consideraciones Generales en el Diseño de Presas

Antes de presentar los métodos de análisis, es conveniente notar que la mayoría de los daños potenciales que pueden resultar de la acción sísmica sobre presas (ver tabla 3.1) no requieren de un tratamiento analítico sino simplemente de la aplicación racional de medidas preventivas. Así, para prevenir

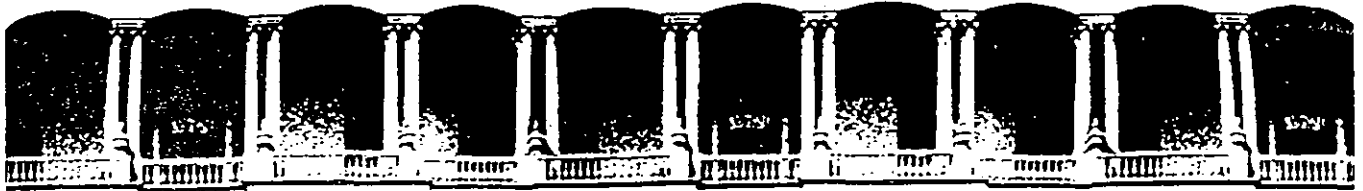
la pérdida de bordo libre (cuyas consecuencias podrían ser desastrosas) por compactación del suelo o asentamientos regionales causados por movimientos tectónicos, bastaría con dotar a la presa con una altura adicional. Similarmente, para evitar agrietamiento o destrucción de la presa por el movimiento de una falla geológica cerca de la cimentación, se requiere simplemente la identificación de fallas geológicas activas y la selección de un sitio donde este tipo de fallas no existan.

Tabla 3.1 Tipos de falla inducidos en presas de tierra y enrocamiento por sismo

1. Deslizamiento o distorsión por cortante del terraplén y/o de la cimentación
2. Tubificación a través de grietas inducidas por movimientos diferenciales
3. Pérdida de bordo libre debido a la compactación del terraplén o de la cimentación
4. Rotura de conductos subterráneos
5. Rotura de la presa por movimientos de una falla geológica en la cimentación
6. Deslizamientos en el vaso
7. Desbordamiento por oscilaciones del embalse de periodo largo
8. Pérdida de bordo libre por movimiento relativo del vaso y de la presa debido a desplazamiento de fallas.
9. Falla del vertedor

Por consiguiente, el daño potencial que los sismos pueden inducir a las presas de tierra y enrocamiento se pueden eliminar adoptando medidas de defensa del tipo de las mostradas en la tabla 3.2. Aunque esta lista proporciona medidas de seguridad aceptables bajo cualquier estándar, existen situaciones especiales que requieren medidas de defensa como un sistema de doble presa con el fin de que en caso de que la primera cortina falle, el agua sea retenida por la segunda. Esta medida se justifica cuando aguas abajo existen asentamientos humanos importantes (p.e. ciudades) que peligran en caso de una descarga súbita del embalse por colapso de la presa.

El uso potencial de medidas de defensa debe ser la primera consideración que debe hacerse en el diseño sísmico de presas de tierra, antes de llegar a la solución de los problemas planteados por la posible ocurrencia de eventos sísmicos importantes. Además, en el diseño se deben adoptar criterios razonables para asegurar que no ocurran deslizamientos en la cortina, no se pierdan los efectos benéficos de las medidas preventivas.



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

CURSOS ABIERTOS

CIMENTACION DE MAQUINARIA

17 al 21 de febrero de 1992

ATENUACION DE ONDAS ELASTICAS CON BARRERAS DE PILOTES

PALACIO DE MINERIA

ATENUACION DE ONDAS ELASTICAS CON BARRERAS DE PILOTES

JAVIER AVILES*

y

FRANCISCO J. SANCHEZ-SESMA**

**Escuela de Ingeniería Civil,
Universidad Autónoma de Puebla,
4 Sur 104. CP 72000, Puebla, MEXICO.*

***Instituto de Ingeniería,
Universidad Nacional Autónoma de México,
Cd. Universitaria, Coyoacán, D.F., MEXICO*

RESUMEN

Se presenta una solución analítica para resolver el problema de aislamiento de cimentaciones, de vibraciones generadas en su cercanía, mediante barreras de pilotes. El sistema de aislamiento está formado por una línea de pilotes elásticos y la excitación está dada por una fuente de ondas cilíndricas SV. El problema se formula bidimensionalmente como uno de difracción múltiple de ondas elásticas, los campos reflejados y refractados por los pilotes se construyen mediante expansiones de funciones de ondas cilíndricas. La solución exacta se obtiene al satisfacer idénticamente las condiciones de continuidad de desplazamientos y esfuerzos en las interfases suelo-pilote, con la ayuda del teorema de adición de Graf. Se presentan algunos resultados numéricos que muestran el comportamiento de barreras de pilotes como sistema de aislamiento, y se define un índice de transmisibilidad para medir su efectividad.

SUMMARY

An analytical solution is presented to solve the problem of foundation isolation, from vibrations generated in the neighborhood, using barriers of piles. This isolation system is formed by a row of elastic piles and the excitation is given by a source of cylindrical SV waves. The problem is formulated in two dimensions as one of multiple diffraction of elastic waves, the diffracted and refracted fields by the piles are constructed as expansions of cylindrical wave functions. The exact solution is obtained satisfying in an exact form the continuity conditions of displacements and stresses at the soil-pile interfaces, with the aid of Graf's addition theorem. Some numerical results are presented which show the behavior of barriers of piles as isolation system, and a transmissibility index is defined to measure their effectivity.

Recibido: Septiembre 1987

$$\begin{aligned}
w_s(r_l, \theta_l) = & w_0 \left[\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \varepsilon_m H_m^{(2)}(k_s d_{0l}) \cos m \theta_{0l} J_m(k_s r_l) \cos m \theta_l + \right. \\
& 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m H_m^{(2)}(k_s d_{0l}) \sin m \theta_{0l} J_m(k_s r_l) \sin m \theta_l \left. \right] + \\
& (1 - \delta_{ll}) \sum_{j=1}^{l-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n^j \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\varepsilon_m}{2} K_m^n(k_s d_{jl}) J_m(k_s r_l) \cos m \theta_l + \right. \\
& \left. \sum_{n=1}^{\infty} B_n^j \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m L_m^n(k_s d_{jl}) J_m(k_s r_l) \sin m \theta_l \right] + \\
& \sum_{m=0}^{\infty} A_m^l H_m^{(2)}(k_s r_l) \cos m \theta_l + \sum_{m=1}^{\infty} B_m^l H_m^{(2)}(k_s r_l) \sin m \theta_l + \\
& (1 - \delta_{ll}) \sum_{j=l+1}^l \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n^j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} K_m^n(k_s d_{jl}) J_m(k_s r_l) \cos m \theta_l + \right. \\
& \left. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n^j \sum_{m=1}^{\infty} L_m^n(k_s d_{jl}) J_m(k_s r_l) \sin m \theta_l \right]
\end{aligned} \tag{8}$$

donde

$$K_m^n(\cdot) = H_{n+m}^{(2)}(\cdot) + (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\cdot) \tag{9}$$

$$L_m^n(\cdot) = -H_{n+m}^{(2)}(\cdot) + (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\cdot) \tag{10}$$

ε_m = factor de Neumann ($\varepsilon_0 = 1$ y $\varepsilon_m = 2$, $m \geq 1$), d_{jl} = distancia centro a centro entre el j -ésimo pilote y el l -ésimo pilote, d_{0l} = distancia entre la fuente y el l -ésimo pilote, θ_{0l} = ángulo entre la fuente y el l -ésimo pilote (Figura 2) y δ_{ij} = delta de Kronecker (=1 si $i = j$; =0 si $i \neq j$).

Sustituyendo las ecuaciones 5 y 8 en las ecuaciones 6 y 7 y empleando las propiedades de ortogonalidad de las funciones trigonométricas, es posible obtener cuatro sistemas infinitos de ecuaciones algebraicas que definen los coeficientes A_n^j , B_n^j , C_n^j y D_n^j . Sin embargo, como no interesa la solución en los pilotes sino en el suelo, se pueden eliminar los coeficientes C_n^j y D_n^j obteniéndose dos sistemas de ecuaciones que tienen la siguiente forma:

$$(1 - \delta_{ll}) (-1)^m \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_m^n(k_s d_{jl}) A_n^j + \frac{2}{\varepsilon_m} \left[\frac{H_m^{(2)'}(k_s a) - F_m H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m'(k_s a) - F_m J_m(k_s a)} \right] A_m^l +$$

$$\begin{aligned}
 & + (1 - \delta_{lP}) \sum_{j=l+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_m^n(k_s d_{jl}) A_n^j = \quad (11) \\
 & = -2w_0 (-1)^m H_m^{(2)}(k_s d_{0l}) \cos m \theta_{0l}, \quad l = 1, 2, \dots, P \quad y \quad m = 0, 1, \dots, \infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (1 - \delta_{ll}) (-1)^m \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_m^n(k_s d_{jl}) B_n^j + \left[\frac{H_m^{(2)'}(k_s a) - F_m H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m'(k_s a) - F_m J_m(k_s a)} \right] B_m^l + \\
 & + (1 - \delta_{lP}) \sum_{j=l+1}^P \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_m^n(k_s d_{jl}) B_n^j = \quad (12) \\
 & = -2w_0 (-1)^m H_m^{(2)}(k_s d_{0l}) \sin m \theta_{0l}, \quad l = 1, 2, \dots, P \quad y \quad m = 1, 2, \dots, \infty
 \end{aligned}$$

donde

$$F_m = \sqrt{\frac{\mu_p \rho_p}{\mu_s \rho_s}} \frac{J_m'(k_p a)}{J_m(k_p a)} \quad (13)$$

la prima indica derivada con respecto al argumento.

Resolviendo los sistemas de ecuaciones 11 y 12 el problema está resuelto. Numéricamente dichos sistemas no pueden ser resueltos exactamente; una aproximación de la solución se obtiene al reducirlos a dimensión finita, truncando adecuadamente los órdenes m, n tal que la solución converja.

Analizando los sistemas de ecuaciones resultantes, se puede observar que el tipo de difractor, pilote elástico o rígido y cavidad, modifica sólo los coeficientes diagonales. Así, cuando $\mu_p = \infty$ se tiene el caso límite de pilotes rígidos y los coeficientes diagonales de las ecuaciones 11 y 12 se reducen a:

$$\frac{2}{\epsilon_m} \left[\frac{H_m^{(2)'}(k_s a) - F_m H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m'(k_s a) - F_m J_m(k_s a)} \right] \Big|_{\mu_p = \infty} = \frac{2H_m^{(2)'}(k_s a) - 4\delta_{m0}(\rho_s/\rho_p)H_1^{(2)}(k_s a)/(k_s a)}{\epsilon_m J_m(k_s a) - 2\delta_{m0}(\rho_s/\rho_p)J_1(k_s a)/(k_s a)} \quad (14)$$

$$\left[\frac{H_m^{(2)'}(k_s a) - F_m H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m'(k_s a) - F_m J_m(k_s a)} \right] \Big|_{\mu_p = \infty} = \frac{H_m^{(2)'}(k_s a)}{J_m(k_s a)} \quad (15)$$

Cuando $\mu_p = 0$ se tiene el caso límite de cavidades y los coeficientes diagonales de las ecuaciones 11 y 12 se reducen a:

$$\frac{2}{\epsilon_m} \left[\frac{H_m^{(2)'}(k_s a) - F_m H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m'(k_s a) - F_m J_m(k_s a)} \right] \Big|_{\mu_p=0} = \frac{2}{\epsilon_m} \frac{H_m^{(2)'}(k_s a)}{J_m'(k_s a)} \quad (16)$$

$$\left[\frac{H_m^{(2)'}(k_s a) - F_m H_m^{(2)}(k_s a)}{J_m'(k_s a) - F_m J_m(k_s a)} \right] \Big|_{\mu_p=0} = \frac{H_m^{(2)'}(k_s a)}{J_m'(k_s a)} \quad (17)$$

Repitiendo el mismo proceso de solución para el caso de incidencia normal de una onda plana, es posible llegar a las ecuaciones 11 y 12 con los mismos coeficientes pero diferentes términos independientes. Así, para incidencia normal de ondas planas los términos independientes de las ecuaciones 11 y 12 resultan ser, respectivamente:

$$- 2w_0 (-i)^m \cos \frac{m\pi}{2} \quad (18)$$

$$- 2w_0 (-i)^m \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2} \quad (19)$$

RESULTADOS

En los resultados que se presentan, los campos incidentes dependen de la frecuencia normalizada:

$$\eta_s = \frac{\sigma\omega}{\pi\beta_s} = \frac{2a}{\lambda_s} \quad (20)$$

donde λ_s = longitud de la onda incidente. Por definición, la frecuencia normalizada es la relación entre el diámetro de los pilotes y la longitud de la onda incidente. Los cálculos se realizaron usando 10 términos de los desarrollos infinitos, siendo suficientes para obtener soluciones estables en el rango de frecuencias considerado. Las barreras analizadas están formadas de 9 obstrucciones.

En la Figura 3 se presentan magnitudes normalizadas del desplazamiento w_s a lo largo de la recta $y/a = 150$ para diferentes separaciones entre pilotes. La fuente de ondas cilíndricas se encuentra localizada a una distancia $R/a = 350$, la frecuencia normalizada es $\eta_s = 0.4$ y las relaciones mecánicas son $\mu_p/\mu_s = 500$ y $\rho_p/\rho_s = 1.333$. En estos resultados se puede observar el comportamiento de barreras de pilotes como sistema de aislamiento: generación de abatimientos que resultan ser mayores en el centro de la barrera, comportándose ésta como una sola obstrucción y no como un conjunto de obstáculos independientes.

La Figura 4 muestra magnitudes normalizadas del desplazamiento w_s a lo largo de las rectas $x/a = 0, 3.5, 7, 10.5, 14$. La fuente de ondas cilíndricas se encuentra localizada a una distancia $R/a = 200$, la frecuencia normalizada es $\eta_s = 0.4$, se tiene una separación entre pilotes $S/a = 1.5$, los pilotes son rígidos y la relación de densidades es $\rho_p/\rho_s = 1.333$. Estos resultados muestran con detalle la variación del campo abatido: se puede apreciar que a distancias cercanas de la barrera el aislamiento es irregular y poco significativo, mientras que a distancias lejanas ocurre totalmente lo contrario.

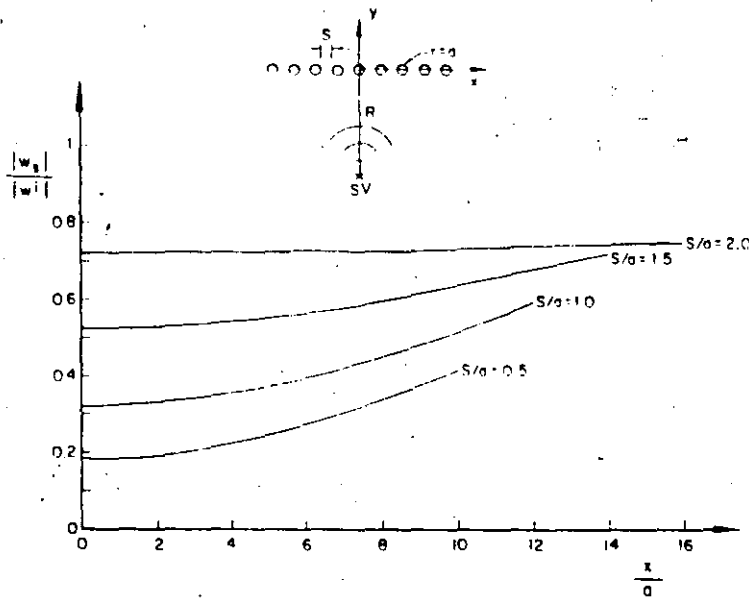


Figura 3.

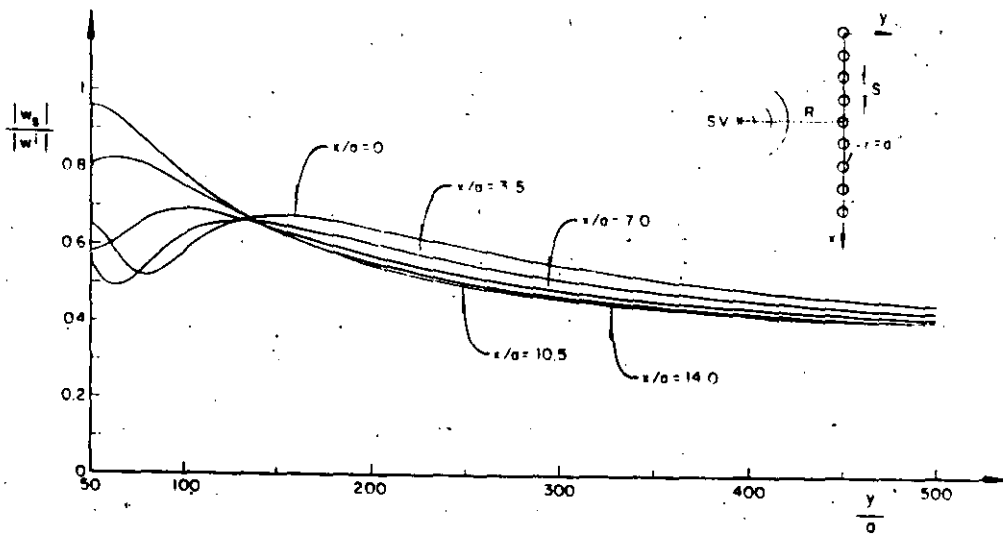


Figura 4.

En la Figura 5 se presentan magnitudes normalizadas del desplazamiento w_s , a lo largo de las rectas $x/a = 0, 3.5, 7, 10.5, 14$ para una barrera formada por cavidades. La fuente de ondas cilíndricas se encuentra localizada a una distancia $R/a = 100$; la frecuencia normalizada es $\eta_0 = 0.4$ y se tiene una separación entre pilotes $S/a = 1.5$. En estos resultados se puede ver que el comportamiento de barreras de cavidades es semejante al de barreras de pilotes, pero con niveles de efectividad bajos.

Los resultados que aparecen en la Figura 6 muestran la influencia de la rigidez de

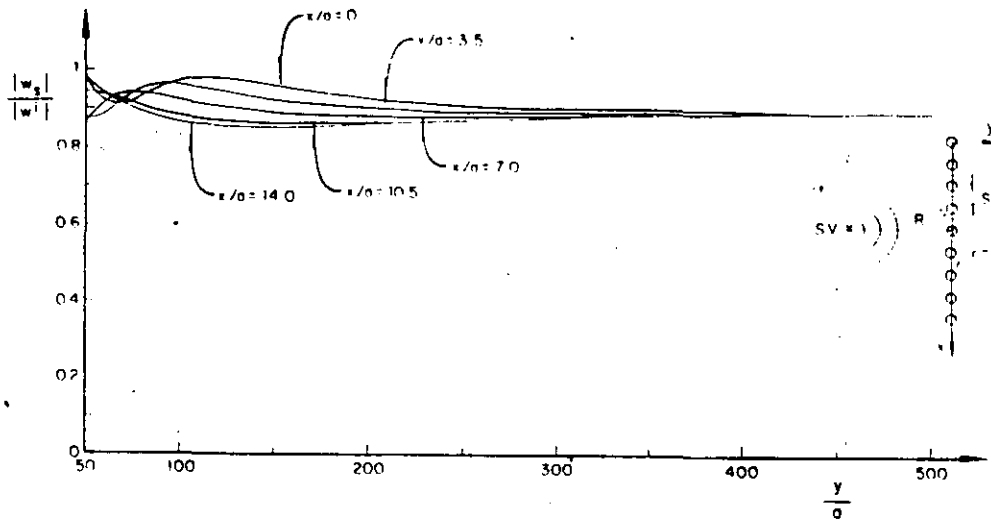


Figura 5.

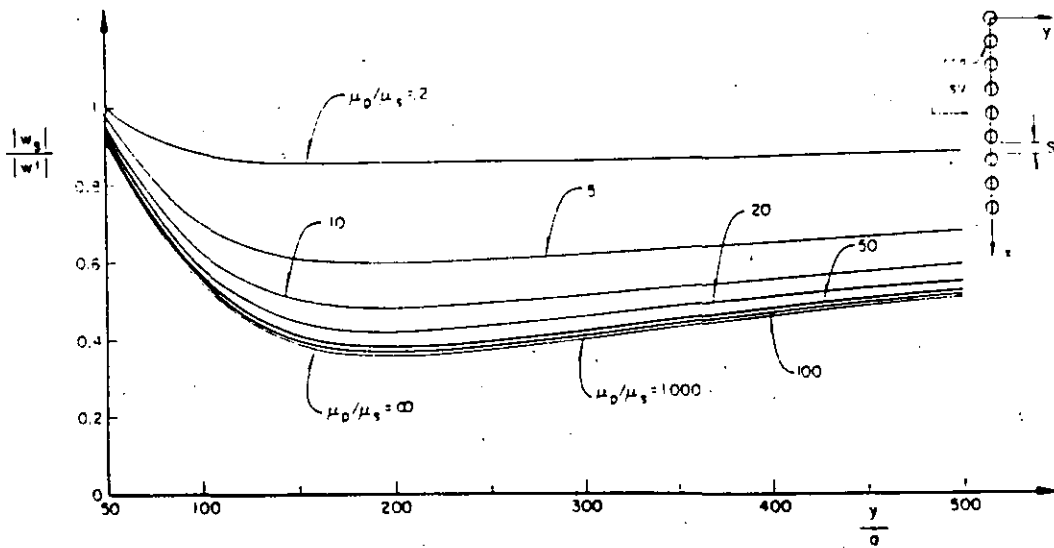


Figura 6.

los pilotes en la efectividad de la barrera. Las curvas que se presentan corresponden a magnitudes normalizadas del desplazamiento w_2 , a lo largo de la recta $x/a = 14$ para diferentes relaciones de rigideces. Inciden normalmente ondas planas con una frecuencia normalizada $\eta_s = 0.4$, la separación entre pilotes es $S/a = 1.5$ y se tiene una relación de densidades $\rho_p/\rho_s = 1.333$. Se puede observar que para casos reales la variación de la relación de rigideces no influye considerablemente en la efectividad de la barrera.

El efecto de la curvatura del frente de onda incidente se muestra en los resultados que aparecen en la Figura 7. Las curvas que se presentan corresponden a magnitudes normalizadas del desplazamiento w_2 , a lo largo de la recta $x/\lambda_s = 2.6$ para diferentes

posiciones de la fuente de ondas cilíndricas. La frecuencia normalizada es $\eta_s = 0.4$, se tiene una separación entre pilotes $S/\lambda_s = 0.25$, los pilotes son rígidos y la relación de densidades es $\rho_p/\rho_s = 1.333$. Se puede comprobar que si la distancia R a la que se encuentra localizada la fuente es grande el campo abatido tiende al correspondiente a ondas planas, ya que a grandes distancias de la fuente el frente de onda cilíndrico se comporta como plano.

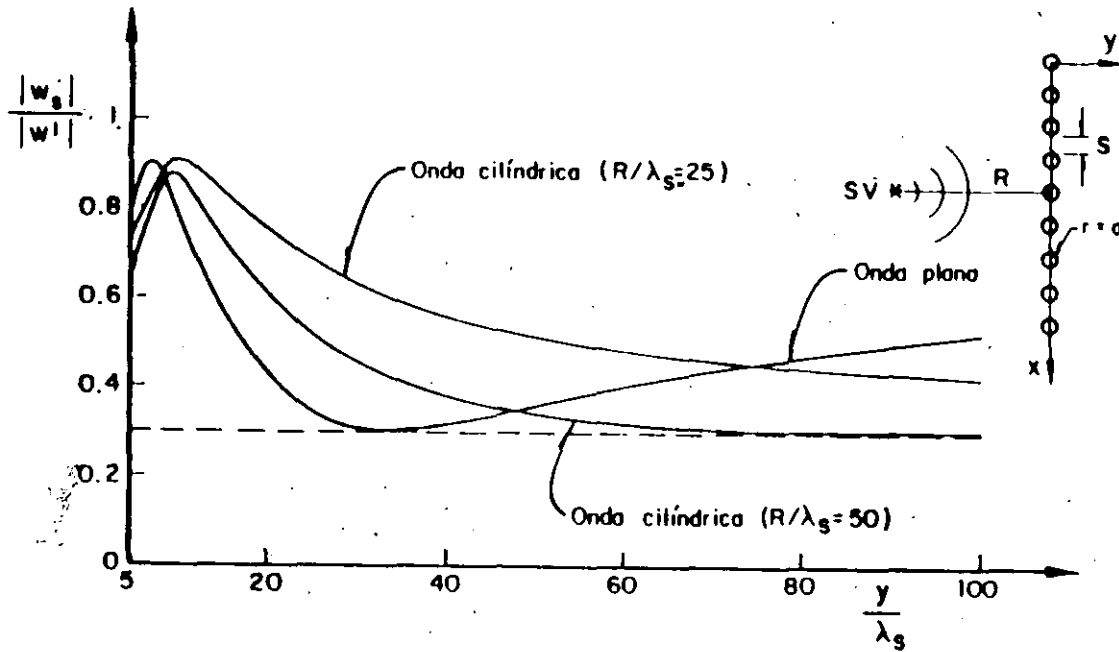


Figura 7.

Para medir la efectividad de barreras de pilotes como sistema de aislamiento, se define un índice de transmisibilidad, función de la separación entre pilotes y el radio de los pilotes, como:

$$IT(S, a) = \frac{|w^t|}{|w^i|} \tag{21}$$

donde w^t = campo transmitido. Para hacer que IT sea independiente de la posición, w^t se define como el valor mínimo del campo w_s . De acuerdo con su definición el índice de transmisibilidad variará entre 0 y 1. Cuando la barrera permita que el campo incidente pase totalmente, $|w^t| = |w^i|$ y entonces $IT = 1$; y cuando impida totalmente el paso del campo incidente, $|w^t| = 0$ y por lo tanto $IT = 0$.

En la Figura 8 se presentan índices de transmisibilidad para diferentes frecuencias normalizadas. Se tiene incidencia normal de ondas planas, pilotes rígidos y una relación de densidades $\rho_p/\rho_s = 1.333$. En estos resultados se puede apreciar la influencia del radio de los pilotes y la separación entre pilotes en la efectividad de la barrera definida

como $E \cong 1 - IT$: cuando el radio de los pilotes aumenta o la separación entre pilotes se reduce, la efectividad de la barrera se incrementa.

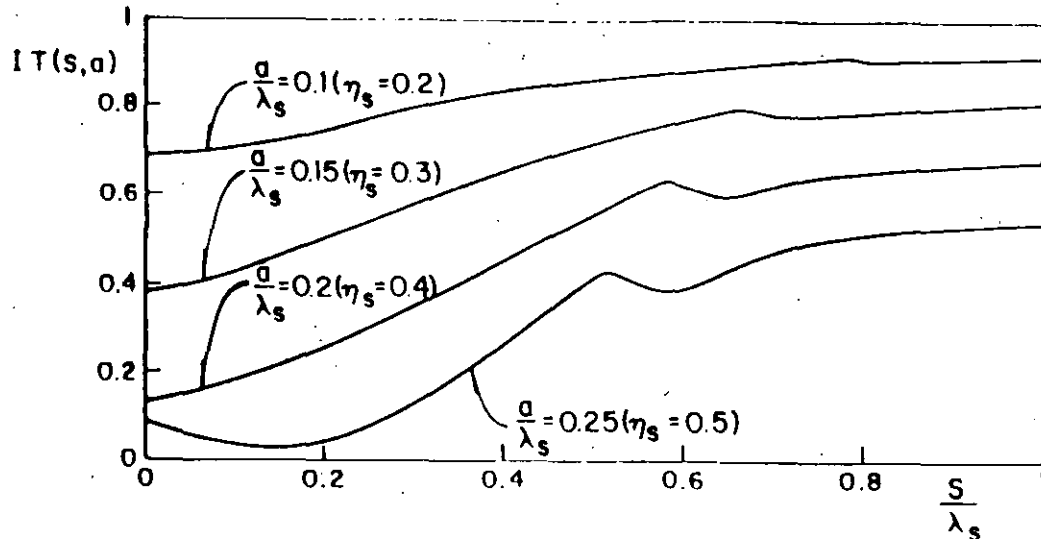


Figura 8.

Las curvas de índices de transmisibilidad pueden ser de gran ayuda para el diseño racional de barreras de pilotes, ya que conocida la longitud de la onda incidente y definida la efectividad deseada, se propone el radio de los pilotes o la separación entre pilotes, se entra a las curvas de índices de transmisibilidad y queda definida la variable de diseño. Por ejemplo, supóngase que se tiene un martinete con $\omega/2\pi = 40$ Hz, una arcilla con $\rho_s = 0.18$ ton-seg²/m⁴ y $\mu_s = 1200$ ton/m², pilotes rígidos de concreto con $\rho_p = 0.24$ ton-seg²/m⁴, y se desea una efectividad de la barrera $E = 0.5$. Entonces, de acuerdo con los datos: $\rho_p/\rho_s = 1.333$, $\beta_s = \sqrt{\mu_s/\rho_s} = 82$ m/seg, $\lambda_s = \frac{2\pi}{\omega}\beta_s = 2$ m y, proponiendo $a = 0.3$ m, $\eta_s = 2a/\lambda_s = 0.3$. Con estos valores se entra a las curvas de índices de transmisibilidad y se encuentra $S/\lambda_s = 0.25$, con lo que $S = 0.5$ m.

CONCLUSIONES

Se ha presentado una solución analítica al problema de aislamiento de cimentaciones mediante barreras de pilotes. El problema se modeló bidimensionalmente y se formuló como uno de difracción múltiple de ondas elásticas. Se presentaron resultados numéricos que muestran el comportamiento de barreras de pilotes como sistema de aislamiento. Se definió un índice de transmisibilidad, en función del radio de los pilotes y la separación entre pilotes, para medir la efectividad del sistema de aislamiento.

Los resultados están sujetos a salvedades debido a que se resolvió un problema ideal; convendría hacer experimentos en modelos o prototipos a escala a fin de calibrar la solución obtenida. Las curvas de índices de transmisibilidad muestran que el uso de barreras aisladoras formadas por una línea de pilotes es adecuado sólo para el caso

de longitudes de onda pequeñas; sería de interés estudiar el caso de líneas de pilotes alternados para longitudes de onda grandes.

APENDICE.-TEOREMA DE ADICION DE GRAF

En este trabajo se emplea el teorema de adición de Graf. Las ondas generadas por la fuente de ondas cilíndricas se pueden representar en el sistema de coordenadas (r_l, θ_l) como:

$$H_0^{(2)}(k, r_0) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \epsilon_m H_m^{(2)}(k, d_{0l}) J_m(k, r_l) \times (\cos m \theta_{0l} \cos m \theta_l + \sin m \theta_{0l} \sin m \theta_l) \tag{22}$$

Las ondas reflejadas por el j-ésimo pilote se pueden representar en el sistema de coordenadas (r_l, θ_l) como:

si $j < l$

$$H_n^{(2)}(k, r_j) \begin{matrix} \cos n \theta_j \\ \sin n \theta_j \end{matrix} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \epsilon_m J_m(k, r_l) \begin{matrix} K_m^n(k, d_{jl}) \cos m \theta_l \\ L_m^n(k, d_{jl}) \sin m \theta_l \end{matrix} \tag{23}$$

si $j > l$.

$$H_n^{(2)}(k, r_j) \begin{matrix} \cos n \theta_j \\ \sin n \theta_j \end{matrix} = \frac{1}{2} (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m J_m(k, r_l) \begin{matrix} K_m^n(k, d_{jl}) \cos m \theta_l \\ L_m^n(k, d_{jl}) \sin m \theta_l \end{matrix} \tag{24}$$

REFERENCIAS

1. F.E. Richart Jr., J.R. Hall Jr. y R.D. Woods, "Vibrations of Soils and Foundations", Prentice Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, (1970).
2. D.D. Barkan, "Dynamics of Bases and Foundations", McGraw-Hill Book Co., Nueva York, (1962).
3. R.D. Woods, N.E. Barnett y R. Sagesser, "Holography-A New Tool for Soil Dynamics", "Journal of the Geotechnical Engineering Division", ASCE, Vol. 100, pp. 1231-1247, (1974).
4. S. Liao y D.A. Sangrey, "Use of Piles as Isolation Barriers", "Journal of the Geotechnical Engineering Division", ASCE, Vol. 104, pp. 1139-1152, (1978).
5. J. Avilés y F.J. Sánchez-Sesma, "Piles as Barriers for Elastic Waves", "Journal of the Geotechnical Engineering Division", ASCE, Vol. 109, pp. 1133-1146, (1983).

6. F.J. Sánchez-Sesma, I. Herrera y J. Avilés, "A Boundary Method for Elastic Wave Diffraction: Application to Scattering of SH Waves by Surface Irregularities", *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 72, pp. 473-490, (1982).
7. G.N. Watson, "*A Treatise on the Theory of Bessel Functions*", Cambridge University Press, Londres, (1966).
8. J.D. Achenbach, "*Wave Propagation in Elastic Solids*", North-Holland Publishing Co., Amsterdam, (1973).
9. A. Sommerfeld, "*Partial Differential Equations in Physics*", Academic Press, Nueva York, (1949).



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

CURSOS ABIERTOS

CIMENTACION DE MAQUINARIA

17 al 21 de febrero de 1992

PROGRAMA: SEA-2GL

PALACIO DE MINERIA

Programa: SEA-2GL

Autor: Francisco Garcia Ranz

Departamento de Ingeniería Civil

Instituto de Investigaciones Eléctricas

91-(73)-18-3811 x3324 o x3325

Lenguaje: MS-FORTRAN77 v3.31

Fecha: marzo 1990

*** PARA USO ACADEMICO EXCLUSIVAMENTE ***

Propósito

Análisis de cimentaciones superficiales circulares rígidas de 2-GDL (HZL-ROT), sobre semiespacios elásticos homogéneos con amortiguamiento hysterético, sometidas a cargas armónicas de amplitud constante o debidas a masas excéntricas desbalanceadas (fig 1).

Resultados

Funciones de impedancia, frecuencias naturales del sistema, espectros de respuesta y ángulos de fase.

Método

Solución del sistema de ecuaciones de equilibrio en el dominio de la frecuencia. Se utilizan las funciones propuestas por Veletsos y Verbic (ref 1) para aproximar las funciones de impedancia de cimientos circulares sobre semiespacios elásticos. Se emplea el principio de correspondencia de la viscoelasticidad, propuesto por los mismos autores, para extrapolar las funciones con respecto a la cantidad de amortiguamiento hysterético.

Funciones de Impedancia

Las aproximaciones utilizadas (ref 1) para los modos de traslación horizontal y rotación transversal (cabeceo) se expresan respectivamente en la forma

$$K_h = K_h^0 (k_h(a_0) + i a_0 c_h(a_0)) \quad (1)$$

$$K_r = K_r^0 (k_r(a_0) + i a_0 c_r(a_0)) \quad (2)$$

donde K_h^0 y K_r^0 son las rigideces estáticas dadas por las siguientes

expresiones como función del módulo de cortante, G , la relación de Poisson, ν , del semiespacio, y el radio de la cimentación, R :

$$K_h^o = \frac{8GR}{2-\nu} \quad (3)$$

$$K_r^o = \frac{8GR^3}{3(1-\nu)} \quad (4)$$

los coeficientes k_j y c_j son función del módulo de Poisson y de la frecuencia adimensional a_o definida como

$$a_o = \omega R / V_s \quad (5)$$

donde V_s es la velocidad de onda de cortante del semiespacio ($V_s^2 = G/\rho$).

Los coeficientes k_j y c_j se determinan con las siguientes expresiones y de acuerdo a los valores de las constantes consignados en la *tabla 1* las cuales dependen del módulo de Poisson:

$$k_h = 1 \quad (6)$$

$$c_h = \alpha \quad (7)$$

$$k_r = 1 - \beta_1 \frac{(\beta_2 a_o)^2}{1 + (\beta_2 a_o)^2} - \beta_3 a_o^2 \quad (8)$$

$$c_r = \beta_1 \beta_2 \frac{(\beta_2 a_o)^2}{1 + (\beta_2 a_o)^2} \quad (9)$$

Coeficiente	$\nu = 0$	$\nu = 1/3$	$\nu = 0.45$	$\nu = 0.5$
α	0.775	0.65	0.6	0.6
β_1	0.525	0.5	0.45	0.4
β_2	0.8	0.8	0.8	0.8
β_3	0.0	0.0	0.023	0.027

Tabla 1

Las funciones así calculadas corresponden a un suelo sin amortiguamiento histerético. Para tener en cuenta de manera aproximada el amortiguamiento histerético del suelo se sustituye, en

las expresiones anteriores, el módulo de cortante G por el módulo de rigidez complejo definido como

$$G^* = G(1 + i 2 \xi) \quad (10)$$

donde ξ es la fracción de amortiguamiento histerético del suelo.

Solución de las Ecuaciones de Equilibrio

En la *fig 2* se presenta el sistema suelo-cimentación considerado; despreciando las rigideces dinámicas (funciones de impedancia) acopladas, el equilibrio dinámico del sistema se puede expresar como

$$[M] \{u(t)\} + [K] \{u(t)\} = \{p(t)\} \quad (11)$$

donde

$$[M] = \begin{bmatrix} M & MH_c \\ MH_c & I_y \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_r \end{bmatrix} \quad (12),(13)$$

$$\{u(t)\} = \begin{bmatrix} u_b(t) \\ u_r(t) \end{bmatrix} \quad \{p(t)\} = \begin{bmatrix} p_h(t) \\ p_r(t) \end{bmatrix} \quad (14),(15)$$

en donde

M = masa total de la cimentación (incluyendo masa del equipo o estructura que se apoyen sobre ésta)

H_c = altura del centro de masa (CM) con respecto a la base

$I_y = I_o + H_c^2 M$ = momento inercial de masa con respecto a la base

I_o = momento inercial de masa con respecto al CM

$K_h = K_h + i \omega C_h$ = función de impedancia del modo horizontal

$K_r = K_r + i \omega C_r$ = función de impedancia del modo rotacional (cabeceo)

ω = frecuencia circular de excitación [rad/s]

u_b = desplazamiento horizontal de la base

u_r = giro de la base [rad]

p_h = fuerza horizontal aplicada en el CM

p_r = momento aplicado en el CM

El sistema de cargas aplicado queda definido por

$$p_h(t) = P_h e^{i(\omega t + \psi_h)} \quad (16)$$

$$p_r(t) = P_r e^{i(\omega t + \psi_r)} \quad (17)$$

donde las amplitudes P_h y P_r serán constantes reales arbitrarias o definidas como función de la frecuencia de excitación en la forma $P_h = A \omega^2$ y $P_r = B \omega^2$, siendo A y B constantes reales arbitrarias (e.g., proporcionales al producto de masas desbalanceadas por su excentricidad). ψ_h y ψ_r son los ángulos de fase correspondientes en [rad].

La solución de (11) está dada por

$$u_b(t) = U_b e^{i\omega t} = |U_b| e^{i(\omega t + \phi_b)} \quad (18)$$

$$u_r(t) = U_r e^{i\omega t} = |U_r| e^{i(\omega t + \phi_r)} \quad (19)$$

donde $U_b = U_b(\omega)$ y $U_r = U_r(\omega)$ son las amplitudes complejas del desplazamiento horizontal y giro de la base de la cimentación, y ϕ_b y ϕ_r los ángulos de fase respectivos.

Sustituyendo las ecuaciones (16)-(19) en (11) se obtiene la ecuación de equilibrio en el dominio de la frecuencia:

$$\left[-\omega^2 [M] + [K] \right] \{U(\omega)\} = \{P(\omega)\} \quad (20)$$

donde

$$\{U(\omega)\} = \begin{Bmatrix} U_b \\ U_r \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$\{P(\omega)\} = \begin{Bmatrix} P_h e^{i\psi_h} \\ P_r e^{i\psi_r} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

El sistema (20) se resuelve para el vector complejo $\{U(\omega)\}$:

$$U_b = \frac{\alpha_2 P_h e^{i\psi_h} - \alpha_{12} P_r e^{i\psi_r}}{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_{12}} \quad (23)$$

$$U_r = \frac{\alpha_{1h} P_h e^{i\psi_h} - \alpha_{12} P_r e^{i\psi_r}}{\alpha_{12} \alpha_2 - \alpha_{12}} \quad (24)$$

donde $\alpha_1 = K_h - \omega^2 M$; $\alpha_{12} = -H_c M$; y $\alpha_2 = K_r - \omega^2 I_y$

La amplitud compleja del desplazamiento horizontal del CM, U_c , se obtiene aplicando la relación

$$U_c = U_b + H_c U_r \quad (25)$$

Presentación de Resultados

Las frecuencias naturales del sistema (modos 1 y 2) se obtienen con las rigideces estáticas correspondientes, ecuaciones (3) y (4), y resolviendo la ecuación característica del sistema. Las frecuencias naturales de los modos desacoplados se calculan con las expresiones:

$$\omega_h^2 = \frac{K_h^0}{M} \quad (26)$$

$$\omega_r^2 = \frac{K_r^0}{I_y} \quad (27)$$

Los resultados del análisis se presentan en columnas para el rango de frecuencias de excitación especificado en Hertz (ciclos/s). Adicionalmente se incluye una columna con las frecuencias adimensionales σ_0 correspondientes.

Las funciones de impedancia K_h y K_r calculadas se presentan en la forma definida por (11): $K_j = K_j + i \omega C_j$, $j = h, r$. Las amplitudes y ángulos de fase se obtienen utilizando las siguientes expresiones:

$$|U_j| = (U_{1j}^2 + U_{2j}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (28)$$

$$\phi_j = \text{ang} \tan \frac{U_{2j}}{U_{1j}} \quad (29)$$

donde $j = b, r, c$; U_{1j} y U_{2j} son las partes real e imaginaria del desplazamiento j , respectivamente.

Los ángulos de fase se reportan, en radianes y con el signo correcto, relativos al vector rotatorio $e^{i\omega t}$.

Referencias

Veletsos A S y Verbic B (1973), Vibrations of Viscoelastic Foundations, *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol 2, pp 87-102

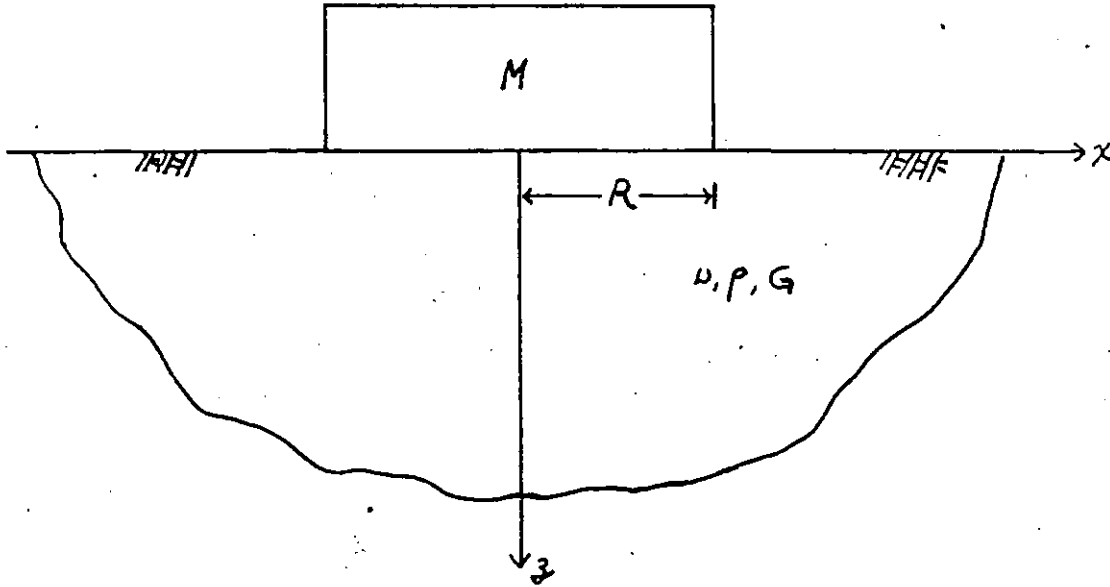


fig 1. idealización del suelo y la cimentación

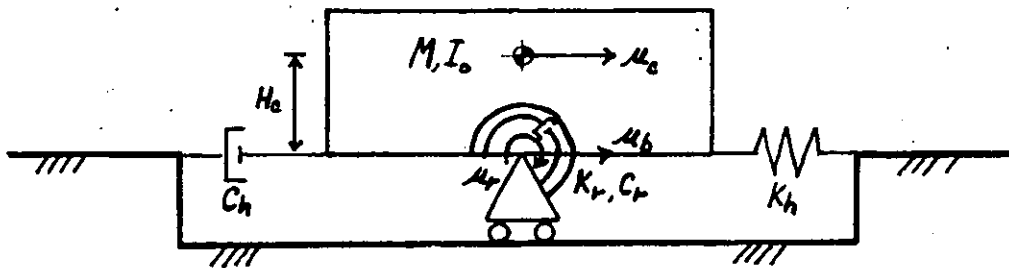


fig 2. modelo matemático

Ejemplo**Cimentación**

Radio: 2 m

Masa de la cimentación con equipo: 58 ton

Momento Inercial de masa centroidal: 130 ton-m²

Altura del centro de masa con respecto a la base: 2.2 m

Semiespacio

Relación de Poisson: 1/3

Densidad específica: 0.18 ton s²/m⁴Módulo de cortante: 1000 ton/m²

Fracción de amortiguamiento histerético: 0.05

Cargas

Las fuerzas excitadoras son causadas por una masa desbalanceada m_o con una excentricidad d_o , girando a una frecuencia ω ; el centro de rotación se encuentra a una altura $z_g = 2$ m por arriba del centro de masa. Por lo tanto, el componente horizontal de la excitación da lugar al siguiente sistema de cargas referido al centro de masa:

$$p_h(t) = m_o d_o \omega^2 e^{i\omega t} \quad (E.1)$$

$$p_r(t) = z_g m_o d_o \omega^2 e^{i\omega t} \quad (E.2)$$

Adicionalmente, el componente vertical de la excitación produce una fuerza vertical definida por

$$p_v(t) = m_o d_o \omega^2 e^{i(\omega t + 90^\circ)} \quad (E.3)$$

Considerando que el modo vertical de vibración se encuentra desacoplado de los otros dos, la cimentación se analiza para el sistema de cargas definido por (E.1) y (E.2) con $m_o d_o = 10$ kg-m, en el rango de 0 a 10 Hz. En la *fig E.1* se presenta el espectro de respuesta obtenido con el programa para 100 frecuencia y se anexa el listado de salida obtenido para 25 frecuencias.

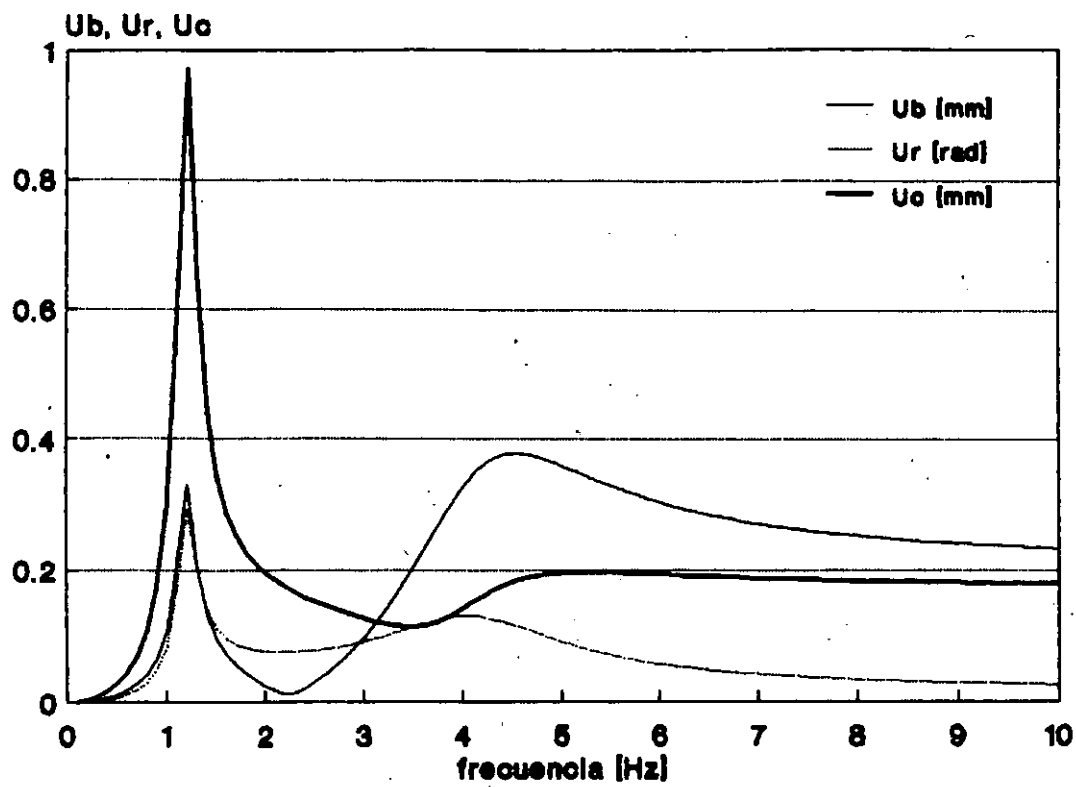


fig E.1 Espectros de respuesta

S E A - 2 G L

Análisis de cimentaciones de 2-GDL (HZL-ROT) sobre semiespacios elásticos homogéneo con amortiguamiento histérico (aproximación propuesta por Veletsos y Verbic 1973)

Francisco García Ranz

Departamento de Ingeniería Civil
Instituto de Investigaciones Eléctricas
91-(73)-18-3811 ext 3324 o 3325

*** PARA USO ACADEMICO EXCLUSIVAMENTE ***

Ultima Revisión: mar 90

DATOS DEL SISTEMA

Título: Curso CIMENTACION DE MAQUINARIA

CIMENTACION

Radio.....	:	2.000
Masa.....	:	58.000
Momento inercial de masa (centro masa)	:	130.000
Elevacion del centro de masa.....	:	2.200

SEMIESPACIO

Relacion de Poisson.....	:	.333
Densidad especifica.....	:	.180
Modulo de cortante.....	:	1000.000
Frac. de amortiguamiento histeretico..	:	.050

CARGAS

Amplitud/w2 (HZL).....	:	.010
Angulo de fase.....[rad]	:	.000
Amplitud/w2 (ROT).....	:	.020
Angulo de fase.....[rad]	:	.000
Frecuencia inicial.....[Hz]	:	.000
Frecuencia final.....[Hz]	:	10.000
No. de frecuencia.....	:	25
Incremento de frecuencia[Hz]	:	.417

RESULTADOS

Velocidad de onda S del semiespacio...	:	74.536
Momento inercial de masa BASE (Iy)....	:	410.720
Rigidez estatica HZL (base cim).....	:	.96000E+04
Rigidez estatica ROT (base cim).....	:	.32000E+0E

FRECUENCIAS Y PERIODOS DEL SISTEMA

	MODO 1	MODO 2	Modos Desacoplados	
			HZL	ROT
frec [rad/s]:	7.565	26.681	12.865	8.827
frec [Hz]:	1.204	4.246	2.048	1.405
periodo [s]:	.831	.235	.488	.712

FUNCIONES DE IMPEDANCIA

FREC	Ao	Kh	w*Ch	Kr	w*Cr
.000	.000	.9600E+04	.9600E+03	.3200E+05	.3200E+04
.417	.070	.9578E+04	.1399E+04	.3195E+05	.3203E+04
.833	.140	.9556E+04	.1838E+04	.3180E+05	.3222E+04
1.250	.211	.9534E+04	.2277E+04	.3156E+05	.3273E+04
1.667	.281	.9512E+04	.2716E+04	.3124E+05	.3369E+04
2.083	.351	.9491E+04	.3154E+04	.3084E+05	.3520E+04
2.500	.421	.9469E+04	.3593E+04	.3039E+05	.3733E+04
2.917	.492	.9447E+04	.4032E+04	.2988E+05	.4013E+04
3.333	.562	.9425E+04	.4471E+04	.2935E+05	.4363E+04
3.750	.632	.9403E+04	.4910E+04	.2878E+05	.4781E+04
4.167	.702	.9381E+04	.5349E+04	.2821E+05	.5265E+04
4.583	.773	.9359E+04	.5788E+04	.2763E+05	.5812E+04
5.000	.843	.9337E+04	.6227E+04	.2705E+05	.6417E+04
5.417	.913	.9315E+04	.6666E+04	.2648E+05	.7076E+04
5.833	.983	.9294E+04	.7105E+04	.2593E+05	.7783E+04
6.250	1.054	.9272E+04	.7543E+04	.2539E+05	.8532E+04
6.667	1.124	.9250E+04	.7982E+04	.2486E+05	.9319E+04
7.083	1.194	.9228E+04	.8421E+04	.2436E+05	.1014E+05
7.500	1.264	.9206E+04	.8860E+04	.2388E+05	.1099E+05
7.917	1.335	.9184E+04	.9299E+04	.2343E+05	.1186E+05
8.333	1.405	.9162E+04	.9738E+04	.2299E+05	.1276E+05
8.750	1.475	.9140E+04	.1018E+05	.2258E+05	.1367E+05
9.167	1.545	.9118E+04	.1062E+05	.2218E+05	.1459E+05
9.583	1.616	.9097E+04	.1105E+05	.2181E+05	.1553E+05
10.000	1.686	.9075E+04	.1149E+05	.2145E+05	.1648E+05

FREC= frecuencia [Hz]

Ao= frecuencia adimensional

w= frecuencia circular [rad/s]

Kh + i w Ch= funcion de impedancia modo HZL

Kr + i w Cr= funcion de impedancia modo ROT

ESPECTROS DE RESPUESTA Y ANGULOS DE FASE

FREC	Ao	Ub	Ang-b	Ur	Ang-r	Uc	Ang-c
.000	.000	.000E+00	.157E+01	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.000E+00
.417	.070	.784E-05	-.158E+00	.491E-05	-.117E+00	.186E-04	-.134E+00
.833	.140	.479E-04	-.295E+00	.342E-04	-.224E+00	.123E-03	-.252E+00
1.250	.211	.294E-03	-.219E+01	.268E-03	-.211E+01	.883E-03	-.214E+01
1.667	.281	.640E-04	-.302E+01	.922E-04	-.299E+01	.267E-03	-.299E+01
2.083	.351	.192E-04	-.271E+01	.769E-04	-.311E+01	.187E-03	-.307E+01
2.500	.421	.304E-04	-.829E+00	.792E-04	.307E+01	.153E-03	-.308E+01
2.917	.492	.843E-04	-.732E+00	.898E-04	.293E+01	.131E-03	-.303E+01

3.333	.562	.164E-03	-.902E+00	.107E-03	.271E+01	.116E-03	-.288E+01
3.750	.632	.268E-03	-.122E+01	.126E-03	.237E+01	.123E-03	-.263E+01
4.167	.702	.355E-03	-.165E+01	.130E-03	.194E+01	.158E-03	-.255E+01
4.583	.773	.379E-03	-.204E+01	.114E-03	.155E+01	.186E-03	-.266E+01
5.000	.843	.360E-03	-.232E+01	.927E-04	.127E+01	.196E-03	-.278E+01
5.417	.913	.334E-03	-.250E+01	.754E-04	.109E+01	.197E-03	-.286E+01
5.833	.983	.312E-03	-.261E+01	.629E-04	.965E+00	.195E-03	-.292E+01
6.250	1.054	.294E-03	-.269E+01	.540E-04	.879E+00	.192E-03	-.296E+01
6.667	1.124	.280E-03	-.275E+01	.474E-04	.815E+00	.190E-03	-.298E+01
7.083	1.194	.269E-03	-.280E+01	.424E-04	.764E+00	.188E-03	-.300E+01
7.500	1.264	.261E-03	-.283E+01	.386E-04	.723E+00	.186E-03	-.302E+01
7.917	1.335	.254E-03	-.286E+01	.355E-04	.688E+00	.185E-03	-.303E+01
8.333	1.405	.248E-03	-.289E+01	.330E-04	.658E+00	.183E-03	-.304E+01
8.750	1.475	.243E-03	-.291E+01	.310E-04	.632E+00	.182E-03	-.305E+01
9.167	1.545	.239E-03	-.292E+01	.294E-04	.608E+00	.181E-03	-.306E+01
9.583	1.616	.236E-03	-.294E+01	.279E-04	.586E+00	.180E-03	-.306E+01
10.000	1.686	.233E-03	-.295E+01	.267E-04	.566E+00	.180E-03	-.307E+01

FREC= frecuencia [Hz]

Ao= frecuencia adimensional

w= frecuencia circular [rad/s]

Ub= amplitud desplazamiento HZL en la base

Ur= amplitud giro en la base [rad]

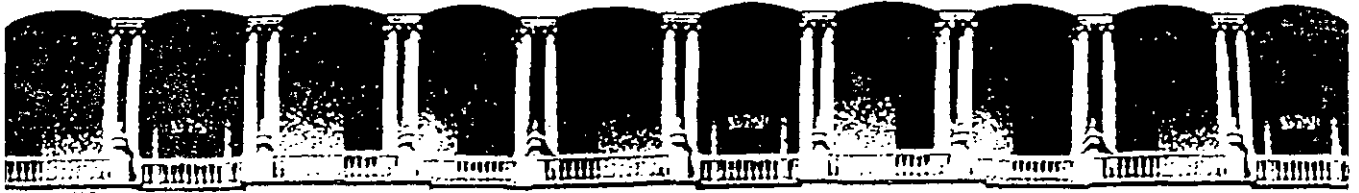
Uc= amplitud desplazamiento HZL en el centro de masa

Ang-b, Ang-r, Ang-c= angulos de fase correspondientes [rad]

VALORES MAXIMOS Y MINIMOS

	Maximos		Minimos	
	FREC	U	FREC	U
Ub :	4.583	.379E-03	.000	.000E+00
Ur :	1.250	.268E-03	.000	.000E+00
Uc :	1.250	.883E-03	.000	.000E+00

Fin del problema



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

CURSOS ABIERTOS

CIMENTACION DE MAQUINARIA

17 al 21 de febrero de 1992

CIMIENTOS CIRCULARES SOBRE ESTRATO HOMOGENEO

PALACIO DE MINERIA

Cimientos Circulares sobre Estrato Homogeneo**1. Funciones de Impedancia**

Se presentan a continuación funciones de impedancia correspondientes a cimentaciones rígidas de forma circular apoyadas en un estrato elástico homogéneo con amortiguamiento histerético sobre base indeformable como se muestra en la *fig 1*. Las funciones corresponden a los modos de traslación horizontal, K_h , rotación, K_r , y acoplamiento, K_{hr} , con respecto a la base de la cimentación (punto A, *fig 1*). Se definen mediante coeficientes de rigideces dinámicas dependientes de la frecuencia adimensional α_0 en la forma¹:

$$K_h(\alpha_0) = K_h^0 (k_h + i\alpha_0 c_h) (1 + i2\xi) \quad (1.a)$$

$$K_r(\alpha_0) = K_r^0 (k_r + i\alpha_0 c_r) (1 + i2\xi) \quad (1.b)$$

$$K_{hr}(\alpha_0) = K_h^0 R (k_{hr} + i\alpha_0 c_{hr}) (1 + i2\xi) \quad (1.c)$$

donde

K_j^0 : rigidez estática ($j = h, r$)

k_j y c_j : rigideces dinámicas ($j = h, r, hr$)

ξ : fracción de amortiguamiento histerético (material)

R : radio de la cimentación

La frecuencia adimensional α_0 está definida como

$$\alpha_0 = \frac{\omega R}{V_s} = \omega R \sqrt{\rho/G} \quad (2)$$

donde

ω : frecuencia de la excitación (rad/s)

V_s : velocidad de onda cortante

ρ : densidad específica ($\rho = \gamma/g$)

G : módulo de cortante

¹ El término $(1+i2\xi)$ en las ecs (1) es un factor de normalización que resulta conveniente para presentar los coeficientes de rigideces dinámicas; no implica en este caso que se este recurriendo al principio de correspondencia de la viscoelasticidad para incluir el efecto del amortiguamiento histerético del suelo.

Las rigideces estáticas están dadas por las siguientes expresiones²:

$$K_h^0 = \frac{8GR}{2-\nu} \left(1 + 0.5 \frac{R}{H}\right) \left(1 + \frac{2}{3} \frac{D}{R}\right) \left(1 + \frac{5}{4} \frac{D}{H}\right) \quad (3a)$$

$$K_r^0 = \frac{8GR^3}{3(1-\nu)} \left(1 + \frac{1}{6} \frac{R}{H}\right) \left(1 + 2 \frac{D}{R}\right) \left(1 + 0.7 \frac{D}{H}\right) \quad (3b)$$

siendo válidas para los rangos: $D/R \leq 1.5$; $D/H \leq 0.75$; $R/H \leq 0.5$.

La relación entre las funciones de impedancia expresadas en términos de ω y en la forma básica

$$K_h = K_h(\omega) + i\omega C_h(\omega) \quad (4.a)$$

$$K_r = K_r(\omega) + i\omega C_r(\omega) \quad (4.b)$$

$$K_{hr} = K_{hr}(\omega) + i\omega C_{hr}(\omega) \quad (4.c)$$

y los coeficientes de rigideces dinámicas, se obtiene sustituyendo la ec (2) en las ecs (1) e igualando con las ecs (4). Para las rigideces de traslación horizontal y rotación se obtiene

$$K_j(\omega) = K_j^0 \left(k_j - 2 \xi \frac{\omega R}{V_s} c_j \right) \quad (j = h, r) \quad (5.a)$$

$$C_j(\omega) = K_j^0 \left(\frac{R}{V_s} c_j + 2 \xi k_j / \omega \right) \quad (j = h, r) \quad (5.b)$$

y para las rigideces acopladas,

$$K_{hr}(\omega) = K_h^0 R \left(k_{hr} - 2 \xi \frac{\omega R}{V_s} c_{hr} \right) \quad (5.a)$$

$$C_{hr}(\omega) = K_h^0 R \left(\frac{R}{V_s} c_{hr} + 2 \xi k_{hr} / \omega \right) \quad (5.b)$$

² Elsabee F (1975). *Static Stiffness Coefficients for Circular Foundations Embedded in an Elastic Medium*. Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias. Depto de Ing Civil, MIT.

Las rigideces dinámicas que se anexan tanto en forma tabulada como gráfica corresponden a un número de casos que son de utilidad en la práctica profesional particularmente en las etapas de diseño preliminar. Se observa que las rigideces dinámicas que se presentan son función no solamente de la frecuencia adimensional ω sino también, de las demás variables que definen al problema (e.i. H/R , D/R , ν y ξ). Los valores presentados podrán ser utilizados con criterio por el diseñador para cubrir casos intermedios. No se recomienda hacer uso del principio de correspondencia para extrapolar, como función de ξ , los coeficientes presentados³, particularmente cuando las variaciones de los coeficientes con la frecuencia presentan picos muy marcados u oscilaciones importantes.

Los coeficientes de rigideces dinámicas acopladas, k_{hr} y c_{hr} , que se consignan, son consistentes con la convención de signo de la mano izquierda (giro positivo = sentido manecillas del reloj). Siguiendo esta convención, la matriz de rigideces dinámicas se construye sin cambiarle de signo a los términos acoplados.

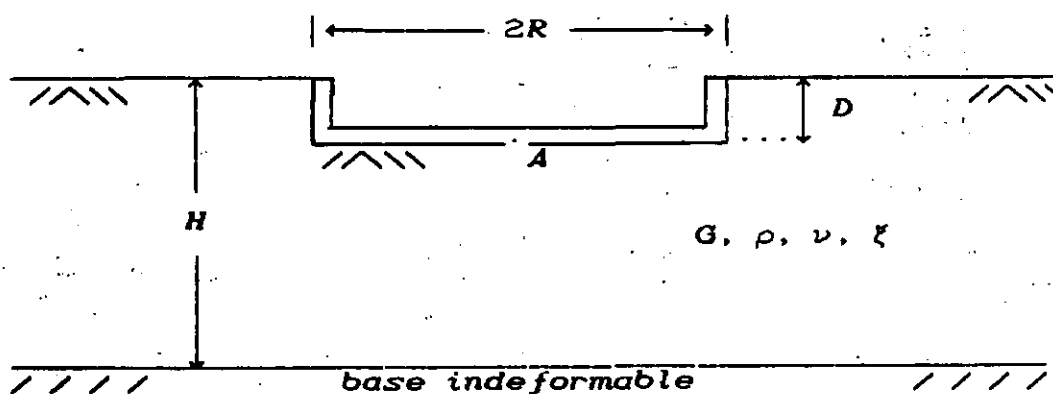


fig 1. Variables del sistema

³ Veletsos A y Verbic B (1973). Vibration of Viscoelastic Foundations. *Earthquake Engineering Structural Dynamics*, Vol 2, pp 87-102

Rigideces Dinámicas: Estrato sobre base rígida

 $H/R = 2.0$ $D/R = 0.0$ $\nu = 0.33$ $\xi = 0.05$

$\omega_0/2\pi$	k_h	c_h	k_r	c_r	k_{hr}	c_{hr}
.000	1.0000	.0000	1.0000	.0000	-.0420	.0000
.025	.9897	.0066	.9968	.0021	-.0417	-.0001
.050	.9571	.0144	.9870	.0042	-.0410	-.0003
.075	.8959	.0256	.9702	.0066	-.0394	-.0008
.100	.7867	.0484	.9455	.0093	-.0357	-.0019
.125	.5606	.1996	.9110	.0132	-.0258	-.0096
.150	.5726	.4675	.8652	.0195	-.0258	-.0271
.175	.6313	.5504	.8034	.0296	-.0309	-.0414
.200	.7110	.5835	.7179	.0503	-.0478	-.0608
.225	.8222	.5447	.6114	.1082	-.1134	-.0799
.250	.7042	.4985	.5916	.1827	-.1970	-.0282
.275	.7428	.5650	.5919	.2140	-.1980	.0127
.300	.8478	.5703	.5846	.2353	-.1878	.0387
.325	.9626	.5287	.5765	.2537	-.1607	.0582
.350	.9983	.4370	.5743	.2705	-.1133	.0657
.375	.7814	.3579	.5823	.2825	-.0741	.0545
.400	.5087	.4087	.5880	.2883	-.0801	.0473
.425	.3867	.4890	.5897	.2934	-.0836	.0521
.450	.3565	.5744	.5928	.2980	-.0704	.0612
.475	.4521	.6648	.6000	.3011	-.0306	.0707
.500	.7596	.7364	.6107	.3008	.0459	.0733
.525	1.2845	.7228	.6143	.2954	.1412	.0576
.550	1.7057	.5821	.5931	.2887	.1873	.0248
.575	1.6780	.4078	.5507	.2873	.1549	-.0030
.600	1.2984	.3015	.5067	.2918	.0897	-.0157
.625	.8064	.2828	.4681	.2992	.0234	-.0169
.650	.4082	.3254	.4339	.3096	-.0231	-.0108
.675	.1311	.3873	.4161	.3223	-.0503	-.0044
.700	-.0670	.4619	.4182	.3346	-.0715	.0022
.725	-.1623	.5538	.4392	.3446	-.0867	.0104
.750	-.0583	.6620	.4754	.3506	-.0860	.0213
.775	.4118	.7599	.5165	.3515	-.0474	.0328
.800	1.2651	.7743	.5495	.3480	.0358	.0362
.825	2.0203	.6536	.5624	.3419	.1095	.0259
.850	2.1381	.4824	.5507	.3364	.1227	.0120
.875	1.7401	.3645	.5235	.3339	.0979	.0038
.900	1.1671	.3193	.4914	.3343	.0698	.0012
.925	.6303	.3278	.4613	.3369	.0505	.0012
.950	.2002	.3661	.4367	.3411	.0392	.0020
.975	-.1272	.4235	.4194	.3462	.0345	.0032
1.000	-.3286	.4995	.4091	.3514	.0373	.0044

Rigideces Dinámicas: Estrato sobre base rígida

$$H/R= 2.0 \quad D/R= 0.0 \quad \nu= 0.40 \quad \xi= 0.01$$

$\omega_0/2\pi$	k_h	c_h	k_r	c_r	k_{hr}	c_{hr}
.000	1.0000	.0000	1.0000	.0000	-.0125	.0000
.025	.9897	.0013	.9968	.0004	-.0124	.0000
.050	.9569	.0029	.9870	.0008	-.0122	.0000
.075	.8950	.0052	.9703	.0013	-.0116	-.0001
.100	.7825	.0100	.9458	.0018	-.0100	-.0002
.125	.4346	.1250	.9121	.0025	-.0043	-.0016
.150	.5241	.4929	.8665	.0042	.0003	-.0104
.175	.5861	.5848	.8050	.0082	.0053	-.0220
.200	.6702	.6426	.7191	.0178	.0075	-.0424
.225	.8403	.6745	.5890	.0490	-.0144	-.0827
.250	1.1140	.5150	.4994	.1625	-.1781	-.0817
.275	.9628	.2742	.5269	.2062	-.1783	-.0039
.300	.5162	.5030	.5165	.2218	-.2274	.0206
.325	.7944	.5401	.5011	.2434	-.1938	.0608
.350	.9942	.4526	.4910	.2637	-.1290	.0820
.375	.7381	.2264	.5060	.2796	-.0356	.0574
.400	.2784	.3708	.5047	.2806	-.0940	.0450
.425	.1315	.4714	.4954	.2852	-.1154	.0546
.450	.0348	.5803	.4866	.2904	-.1215	.0704
.475	.0449	.7228	.4823	.2956	-.0996	.0924
.500	.3818	.9029	.4889	.2986	-.0120	.1162
.525	1.4411	.9888	.5034	.2930	.1787	.1139
.550	2.5685	.7005	.4785	.2781	.3084	.0557
.575	2.4467	.3307	.4039	.2726	.2415	.0097
.600	1.7480	.1503	.3279	.2783	.1541	-.0025
.625	.9090	.0900	.2661	.2891	.0887	-.0066
.650	.1335	.1976	.2166	.2997	.0216	-.0004
.675	-.1905	.2901	.1694	.3129	-.0134	.0082
.700	-.5031	.3775	.1362	.3273	-.0395	.0179
.725	-.8073	.4913	.1180	.3419	-.0543	.0311
.750	-1.0067	.6640	.1195	.3557	-.0374	.0496
.775	-.6761	.9286	.1464	.3664	.0666	.0703
.800	1.2702	1.1443	.1860	.3682	.3087	.0646
.825	3.7272	.8233	.1789	.3640	.3967	.0081
.850	3.5666	.3612	.1389	.3667	.2156	-.0185
.875	2.3604	.1551	.1024	.3750	.0818	-.0110
.900	1.0667	.1095	.0849	.3894	.0319	.0015
.925	.1678	.1918	.1418	.4060	.0224	.0123
.950	-.3661	.2617	.2368	.4087	.0287	.0215
.975	-.8645	.3389	.3156	.4059	.0596	.0324
1.000	-1.3319	.4454	.3921	.3984	.1425	.0435

Rigideces Dinámicas: Estrato sobre base rígida

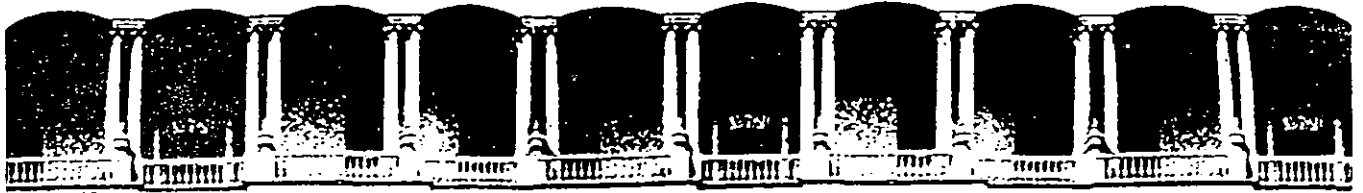
$$H/R = 2.0 \quad D/R = 0.0 \quad \nu = 0.40 \quad \xi = 0.05$$

ω/ω_n	k_h	c_h	k_r	c_r	k_{hr}	c_{hr}
.000	1.0000	.0000	1.0000	.0000	-.0125	.0000
.025	.9898	.0066	.9968	.0020	-.0124	.0000
.050	.9574	.0143	.9871	.0041	-.0122	-.0001
.075	.8964	.0255	.9706	.0064	-.0116	-.0003
.100	.7871	.0486	.9464	.0091	-.0101	-.0008
.125	.5595	.2011	.9132	.0123	-.0059	-.0033
.150	.5706	.4745	.8687	.0173	-.0022	-.0113
.175	.6305	.5652	.8090	.0258	-.0001	-.0223
.200	.7153	.6125	.7303	.0421	-.0044	-.0399
.225	.8598	.6172	.6270	.0809	-.0365	-.0651
.250	1.0113	.5066	.5597	.1577	-.1319	-.0558
.275	.8943	.3752	.5611	.2031	-.1630	-.0092
.300	.6930	.4559	.5536	.2251	-.1816	.0196
.325	.8062	.4962	.5419	.2452	-.1634	.0499
.350	.8835	.4422	.5360	.2628	-.1184	.0638
.375	.7280	.3693	.5399	.2753	-.0768	.0565
.400	.4737	.4131	.5404	.2812	-.0827	.0502
.425	.3527	.4917	.5351	.2863	-.0898	.0560
.450	.3192	.5788	.5294	.2911	-.0829	.0666
.475	.4107	.6743	.5258	.2949	-.0517	.0790
.500	.7236	.7557	.5249	.2965	.0167	.0870
.525	1.2857	.7531	.5204	.2940	.1140	.0788
.550	1.7759	.6132	.4968	.2893	.1786	.0521
.575	1.8099	.4285	.4521	.2880	.1720	.0262
.600	1.4740	.3064	.4012	.2922	.1317	.0126
.625	.9920	.2663	.3546	.3000	.0881	.0079
.650	.5442	.2961	.3148	.3094	.0497	.0092
.675	.2342	.3571	.2818	.3200	.0237	.0140
.700	.0233	.4299	.2581	.3312	.0103	.0206
.725	-.0857	.5171	.2455	.3421	.0127	.0284
.750	-.0134	.6188	.2446	.3519	.0394	.0362
.775	.3814	.7132	.2533	.3594	.0976	.0400
.800	1.1353	.7375	.2633	.3639	.1693	.0339
.825	1.8554	.6410	.2644	.3669	.2005	.0191
.850	2.0381	.4870	.2574	.3708	.1724	.0074
.875	1.7180	.3715	.2524	.3766	.1268	.0046
.900	1.1920	.3233	.2602	.3835	.0960	.0072
.925	.6849	.3289	.2874	.3894	.0859	.0117
.950	.2846	.3648	.3281	.3920	.0947	.0161
.975	-.0051	.4187	.3700	.3909	.1226	.0197
1.000	-.1617	.4875	.4039	.3866	.1712	.0208

Rigideces Dinámicas: Estrato sobre base rígida

$$H/R = 2.0 \quad D/R = 0.0 \quad \nu = 0.40 \quad \xi = 0.10$$

$\omega_0/2\pi$	k_h	c_h	k_r	c_r	k_{hr}	c_{hr}
.000	1.0000	.0000	1.0000	.0000	-.0125	.0000
.025	.9901	.0128	.9969	.0040	-.0124	-.0001
.050	.9588	.0278	.9875	.0081	-.0122	-.0002
.075	.9004	.0490	.9715	.0125	-.0117	-.0005
.100	.7998	.0904	.9481	.0175	-.0104	-.0014
.125	.6400	.2385	.9163	.0237	-.0074	-.0045
.150	.6259	.4504	.8743	.0321	-.0052	-.0114
.175	.6795	.5373	.8200	.0449	-.0059	-.0210
.200	.7579	.5753	.7514	.0662	-.0147	-.0340
.225	.8672	.5693	.6734	.1043	-.0452	-.0464
.250	.9545	.5011	.6200	.1591	-.1027	-.0370
.275	.9056	.4325	.6061	.2002	-.1361	-.0073
.300	.8154	.4485	.5984	.2250	-.1466	.0180
.325	.8356	.4695	.5906	.2441	-.1364	.0394
.350	.8526	.4495	.5864	.2598	-.1095	.0505
.375	.7762	.4276	.5865	.2715	-.0841	.0514
.400	.6514	.4478	.5866	.2792	-.0741	.0504
.425	.5768	.4973	.5842	.2850	-.0685	.0535
.450	.5768	.5546	.5808	.2897	-.0549	.0591
.475	.6690	.6079	.5771	.2934	-.0270	.0644
.500	.8699	.6399	.5725	.2955	.0168	.0657
.525	1.1448	.6270	.5636	.2961	.0675	.0597
.550	1.3717	.5627	.5459	.2962	.1046	.0468
.575	1.4277	.4766	.5191	.2977	.1150	.0330
.600	1.3044	.4082	.4876	.3016	.1043	.0230
.625	1.0789	.3765	.4566	.3076	.0849	.0178
.650	.8382	.3805	.4292	.3150	.0656	.0165
.675	.6424	.4090	.4069	.3232	.0515	.0177
.700	.5176	.4511	.3907	.3316	.0455	.0204
.725	.4802	.4992	.3814	.3397	.0496	.0235
.750	.5504	.5457	.3784	.3472	.0645	.0259
.775	.7379	.5783	.3802	.3535	.0884	.0262
.800	1.0058	.5833	.3844	.3587	.1135	.0238
.825	1.2541	.5556	.3887	.3630	.1296	.0192
.850	1.3757	.5078	.3929	.3671	.1317	.0146
.875	1.3368	.4614	.3988	.3711	.1245	.0117
.900	1.1817	.4317	.4088	.3749	.1164	.0108
.925	.9813	.4228	.4240	.3780	.1133	.0110
.950	.7940	.4316	.4427	.3798	.1175	.0116
.975	.6575	.4525	.4615	.3802	.1289	.0116
1.000	.5959	.4800	.4762	.3793	.1452	.0106



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

CURSOS ABIERTOS

CIMENTACION DE MAQUINARIA

17 al 21 de febrero de 1992

ANALISIS DE CIMENTACIONES SUPERFICIALES PARA MAQUINARIA

M. EN I. MARTIN RAMIREZ REYNAGA

PALACIO DE MINERIA

**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA**

ANALISIS DE IDENTIFICACIONES SUPERFICIALES PARA MAQUINARIA

TRABAJO

**PRESENTADO A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE
POSGRADO DE LA**

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN INGENIERIA
MECANICA DE SUELOS**

MARTIN BALIBREZ REYNAGA

**CIUDAD UNIVERSITARIA
ENERO 1989**

INDICE

	pag.
1.-Introducción.	2
2.-Criterios de diseño.	3
2.a).-Requisitos de seguridad y de servicio.	
3.-Metodología de diseño.	5
3.a).-Definición y evaluación de las acciones de de la maquinaria.	
3.b).-Definición y evaluación de la resistencia del suelo de cimentación.	
3.c).-Dimensionamiento.	
3.d).-Análisis de la respuesta dinámica del sistema suelo-cimentación-maquinaria.	
4.-Aplicaciones.	30
5.-Conclusiones.	36
Referencias.	38
Simbología.	42
Figuras.	44
Tablas.	75
Anexo A.-Ayudas de diseño.	78
Anexo B.-Solución de ecuaciones de equilibrio dinámico.	83
Anexo C.-Notación vectorial.	94

FE DE ERRATAS

Página	dice	debe decir
22	$K(\xi) = \xi - 250$	$K(\xi) = \xi - 2500$
75	$D = \frac{B}{9}$	$L = \frac{1}{9}$
85	$\frac{P_0}{XI}$	$\frac{P_0}{Y}$
86		el denominador de la relación debe ser f .
86		el numerador de la ecuación B.13 debe ser K .

I. INTRODUCCION

Para la ingeniería práctica es cada vez más importante disponer de métodos de análisis cuya aplicación sea rápida, sencilla y segura, tal que permitan que la solución a los problemas de ingeniería sea lo suficientemente aproximada y compatible con la realidad. En este trabajo se presentan los resultados obtenidos de la aplicación de uno de los métodos simples para evaluar la respuesta dinámica de cimentaciones de maquinaria aprovechando los resultados obtenidos en investigaciones recientes relacionadas con el tema.

El método se justifica porque toma en cuenta de manera racional la interacción entre suelo y cimentación de maquinaria, para lo cual se fundamenta en modelos simples de la dinámica estructural, de la teoría de propagación de ondas y de la mecánica de suelos así como en la definición, uso y manejo de conceptos útiles para la solución de las ecuaciones de movimiento. Estos rasgos hacen que el planteamiento sea fácil de aplicar a una gran cantidad de problemas que se presentan en la práctica de la ingeniería de cimentaciones de maquinaria.

El objetivo de éste trabajo consiste en proponer un método que permita resolver problemas de cimentación de maquinaria y hacer notar la sencillez del mismo, así como destacar la importancia que tiene el planteamiento de hipótesis simplificadoras basadas en la experiencia práctica, en el conocimiento teórico del ingeniero y en los conceptos fundamentales que justifican el método.

Finalmente se incluyen tres anexos, uno que se refiere a ayudas de diseño, en el que se mencionan algunos criterios principales con los que se diseñan las cimentaciones de maquinaria, en otro anexo se presenta la solución de las ecuaciones de equilibrio dinámico de los modelos utilizados y el último se presenta la notación matemática que se utiliza para la solución de los mismos.

2.-CRITERIOS DE DISEÑO

Es necesario definir criterios de diseño de tal manera que estos estén conformes con la condición de que cualquier estructura cumpla su función en la forma más adecuada.

Para el diseño de cimentaciones de maquinaria son dos los criterios más importantes con los cuales se revisa el comportamiento de la misma; uno de ellos considera que la amplitud de las deformaciones inducidas por la vibración no excedan los límites de servicio de la maquinaria; el otro considera el hecho de evitar que el sistema máquina-cimentación-suelo entre en resonancia con la frecuencia normal de operación de la máquina.

2.a).-ESTABLECIMIENTO DE LOS REQUISITOS DE SEGURIDAD Y DE SERVICIO.

En general, los criterios de diseño se definen mediante estados límite; los cuales estipulan comportamientos inaceptables de la cimentación. Muchos códigos y reglamentos consideran como requisitos de seguridad y de servicio de las cimentaciones de maquinaria a los siguientes :

2.a.1) La cimentación debe ser capaz de transmitir las cargas impuestas sin causar falla por corte o punzonamiento en el suelo de cimentación.

2.a.2) Los asentamientos inmediatos y diferidos deberán estar dentro de los límites permisibles.

2.a.3) La frecuencia natural de vibración del sistema máquina-cimentación-suelo deberá estar alejada de la frecuencia de operación de la máquina.

2.a.4) Las amplitudes de deformación del suelo de cimentación bajo condiciones de servicio deberán estar bajo límite permisibles.

Es importante notar que la magnitud de las deformaciones del suelo de cimentación, incluida en los criterios de diseño de cimentación de maquinaria, es mucho más pequeña que aquellas consideradas en el diseño para cargas estáticas; esto se debe a que se toman factores reguladores del diseño tales como efectos de las vibraciones en las personas, efectos en estructuras adyacentes, evitar daños a tuberías y otros accesorios conectados con la maquinaria, así como evitar daños a equipos muy sensibles y costosos y a consideraciones de costos iniciales, de mantenimiento y de reemplazo de la maquinaria.

Tomando en cuenta los factores antes mencionados, se han elaborado una serie de tablas y gráficas (refs.3,6,20 y 44), las cuales representan los estados límite de servicio con los que deberá compararse el comportamiento calculado de la cimentación de la maquinaria. En el anexo A.-"Ayudas de diseño" se presentan algunas de las tablas y

gráficas más utilizadas.

Una vez definidos los criterios que establecen los requisitos de seguridad y de servicio, deberá unificarse un procedimiento que permita llevar una metodología de diseño, la cual puede integrarse generalmente de lo siguiente :

- a).- Definición y evaluación de las acciones de la maquinaria.
- b).- Definición y evaluación de las características del suelo de cimentación.
- c).- Dimensionamiento.
- d).- Análisis de la respuesta del sistema maquinaria-cimentación-suelo.

A continuación, en el capítulo 3, se describe cada uno de estos incisos.

3. METODOLOGIA DE DISEÑO

3.a).-DEFINICION Y EVALUACION DE LAS SOLICITACIONES DEBIDO A MAQUINARIA.

3.a.1.-ORIGEN DE LAS SOLICITACIONES.

Las cargas inducidas por el funcionamiento de maquinaria son de naturaleza dinámica, es decir que el tiempo transcurrido entre la aplicación de estas es lo suficientemente pequeño para que las fuerzas de inercia lleguen a tener importancia respecto a las estáticas. El origen de ellas puede ser cualquiera de los siguientes:

i).- El propio funcionamiento de la máquina.

ii).-El desbalanceo debido a la no coincidencia del centro de masas con el eje de rotación de una máquina, por el desgaste de piezas y por defectos de fabricación o mala instalación de la máquina.

iii).-Movimientos de equipo complementario.

Los mecanismos anteriores producen fuerzas y momentos muy importantes los cuales serán las cargas a las que estará sometido el suelo a través de la cimentación, y dependiendo de la calidad, tipo y tiempo de funcionamiento de una maquinaria, las fuerzas "conocidas" pueden ser mucho mayores que las desconocidas o viceversa. Mayores detalles para el análisis de los mecanismos de funcionamiento de la maquinaria y la evaluación de las cargas que se producen se presentan en la referencias 21 y 30.

Pueden conocerse y calcularse las cargas que se producen por el funcionamiento propio de la máquina o ser obtenidas como dato dado por el fabricante de la máquina; por otra parte, las cargas debido al desbalanceo, desgaste u operación de la máquina a velocidades diferentes de la de diseño pueden ser desconocidas y difíciles de cuantificar, por ello los fabricantes muestran aversión a suministrar valores de tales cargas. Para contrarrestar esto, algunos manuales de diseño recomiendan que siempre se tomen en cuenta cargas debido a desbalanceo, aún y cuando éstas no existan recién instalada la máquina. (ref. 3).

3.a.2.-CARACTERIZACION DE FUERZAS.

Para su estudio las fuerzas se han caracterizado de acuerdo a su variación respecto al tiempo en armónicas e impulsivas; y para su análisis conviene representarlás en forma de armónica simple o como una suma de armónicas simples mediante un análisis de contenido de frecuencias, lo cual facilita mucho los cálculos posteriores de la respuesta de la máquina. Para mayor información sobre esta caracterización pueden consultarse las referencias 21, 30 y 36.

3.b).--DEFINICION Y EVALUACION DE LAS CARACTERISTICAS DEL SUELO DE CIMENTACION.

En general la respuesta del suelo puede ser elástica, plástica y viscosa; esto es, el comportamiento elástico se caracteriza por la capacidad que tiene de almacenar energía mecánica potencial sin la pérdida de ella, lo cual hace que pueda recuperarse. Se manifiesta en forma de deformación recuperada durante los lazos de histéresis de varios ciclos de carga y descarga (fig. 3.b.1), al mantenerse estos paralelos entre sí en cada ciclo sin que el esfuerzo aplicado esté cerca del de falla. Esto demuestra que la respuesta elástica, y por consiguiente el módulo correspondiente, son independientes del nivel de esfuerzos alcanzado antes de la descarga excepto a niveles de esfuerzo cercanos al de la falla (ref. 55).

El comportamiento plástico implica llevar al suelo a un estado de esfuerzos lo suficientemente grandes tal que los granos del suelo sufran desplazamientos relativos entre sí con tendencia a lograr posiciones más estables; entonces, el suelo mostrará deformaciones permanentes después de cada ciclo de carga-descarga, a este fenómeno se le dice que es puramente plástico. Una gran parte de este comportamiento toma lugar instantáneamente y al mismo tiempo que la deformación elástica, y debido a la fricción entre partículas, este comportamiento tiene la capacidad de disipar energía mecánica sin almacenarla ni recuperarla (amortiguamiento histerético).

Por otra parte, existe la respuesta viscosa, y se asocia a la que tiene un líquido perfectamente newtoniano cuya respuesta es función de la velocidad de deformación y directamente proporcional al esfuerzo aplicado, con la capacidad de disipar energía mecánica cinética sin almacenarla ni recuperarla.

En general, la respuesta del suelo se presenta como una combinación de respuestas elástica, plástica y viscosa; sin embargo, dependiendo de las condiciones de carga, de los niveles de esfuerzo o de deformación alcanzados y de los factores que influyen en el comportamiento de los suelos, la participación de cada una de las respuestas puede tener mayor o menor importancia. Por ejemplo, en la teoría incremental de la plasticidad, el estado de deformación depende no únicamente del estado final de esfuerzos sino que también de la trayectoria de esfuerzos llevada para alcanzar dicho estado final de esfuerzos, además de ser independiente de las escalas de tiempo implicado en las cargas y las descargas.

Por otra parte, en la teoría de la viscoelasticidad el comportamiento del suelo tiene una dependencia específica y continúa en el tiempo, ya que el material no sólo responde a cada estado de esfuerzos, sino que también tendrá una dependencia y superposición del estado de esfuerzos aplicado anteriormente (ref. 9).

Se han desarrollado una gran cantidad de relaciones esfuerzo - deformación - tiempo a través de las observaciones y resultados obtenidos de ensayos de campo y laboratorio, las cuales se han aproximado mediante expresiones analíticas sencillas que permiten mediante el simple manejo matemático de las variables que forman el modelo, obtener y visualizar las tendencias del comportamiento

simulados; situación tal, que bajo las limitaciones de obtener resultados precisos, resulta ser muy práctico.

En la mayoría de los casos resulta interesante para la solución de problemas de cimentación de maquinaria el comportamiento viscoelástico del suelo; ya que es el que a través de los elementos elásticos transmite las ondas de esfuerzo y a través de los elementos viscoplásticos disipa la energía cinética del movimiento, lo que hace que las fuerzas y los desplazamientos resultantes estén fuera de fase entre sí (ver figura 3.b.2).

Debido a la filosofía del diseño de las cimentaciones de maquinarias; es decir, que deben transmitir un nivel de esfuerzos tal que las deformaciones sean lo suficientemente pequeñas, es necesario un modelo que permita predecir o estimar la respuesta del suelo a cargas dinámicas impuestas y cuyas relaciones esfuerzo-deformación puedan definirse con las constantes que representan la respuesta elástica del suelo y las propiedades de amortiguamiento viscoso e histerético del mismo.

Estudios experimentales indican que la rigidez a la deformación del suelo y la cantidad de amortiguamiento histerético son función no solo de las constantes elásticas sino que también del número de ciclos de aplicación de las cargas y del nivel de deformación alcanzado. En nuestro caso, y si respetamos la filosofía del diseño de cimentaciones de maquinaria, es suficiente evaluar los parámetros del suelo para pequeños niveles de deformación. En la figura 3.b.3 vemos que para dichos niveles de deformación los parámetros β y ξ se mantienen prácticamente constantes e independientes de la frecuencia con que actúa la carga (respuesta elástica lineal del suelo).

Por lo anterior es necesario determinar los parámetros del suelo siguientes; el módulo de rigidez al corte G , la velocidad de propagación de ondas de esfuerzo cortante V_s , la relación de Poisson ν , la densidad del suelo ρ , incluyendo el agua puesto que esta se mueve junto con el suelo, y el amortiguamiento histerético del suelo ξ . Nótese que $G = \rho V_s^2$ y $\gamma = \rho g$ con lo que puede evaluarse G , si se conocen V_s y ρ ; o si se conocen E y ν , también puede conocerse G .

Todos los parámetros antes mencionados se obtienen de técnicas experimentales de campo y laboratorio cuyos detalles de ejecución e interpretación se presentan en las referencias 1, 14, 23 y 38.

3.c).-DIMENSIONAMIENTO.

Tanto el análisis como el dimensionamiento constituyen un proceso iterativo de prueba y error que converge cuando las características de la cimentación satisfacen todos los requisitos de seguridad y de servicio establecidos para el buen funcionamiento de la máquina.

Por lo anterior, el diseño de la cimentación se empieza con la proposición de una dimensión preliminar de la cimentación, la cual se propone generalmente con base en un gran número de guías y recomendaciones que han resultado de la experiencia práctica y empírica del diseño de cimentaciones de maquinaria; por consiguiente el dimensionamiento preliminar no constituye necesariamente el diseño final de la cimentación.

Las recomendaciones de prediseño siguientes dan por resultado una buena y aceptable aproximación de la configuración final de la cimentación (ref. 3) :

i).- Siempre que sea posible deberá desplantarse la cimentación arriba del nivel freático.

ii).- Evitar desplantar sobre rellenos, ni en suelos sensitivos a las vibraciones.

iii).- Con relación al bloque de cimentación se recomienda :

- 1.- Que el bloque de cimentación tenga una masa de dos a tres veces la masa de máquinas centrífugas o si la máquina es rotatoria que la masa del bloque sea de tres a cinco veces la masa de la máquina.
- 2.- Que el nivel superior del bloque esté al menos 30 cm sobre el nivel de piso terminado.
- 3.- Que el espesor del bloque no tenga menos de 60 cm, menos que $\frac{1}{3}$ de la dimensión más corta o $\frac{1}{10}$ que la dimensión más larga.
- 4.- La dimensión de la cimentación debe ser ancha para incrementar el amortiguamiento en los modos de cabeceo. El ancho debe ser al menos de 1 a 1.5 veces la distancia entre el nivel de desplante y el centro de masas de la maquinaria.
- 5.- Una vez que el ancho y el espesor de la cimentación han sido seleccionados, la longitud puede determinarse de acuerdo con el punto 1, además de dar el área suficiente para colocar la máquina y tener espacio para dar mantenimiento, 30 cm de sobredimensionamiento en planta es suficiente.
- 6.- La longitud y el ancho de la cimentación deberán ajustarse tal que el centro de gravedad de la máquina más equipo coincida con el centro de gravedad del área de cimentación.

- 7.- Para máquinas reciprocantes grandes podrá ser necesario incrementar la profundidad de empotramiento dentro del suelo tal que, del 50 al 80 % de la profundidad empotrada esté en contacto efectivo con las paredes.
- 8.- El análisis deberá predecir la resonancia con las frecuencias actuantes y así aumentar la masa de la cimentación para alejar la respuesta de la resonancia de máquinas reciprocantes o disminuir la masa para máquinas centrífugas.

(w).-El cabeceo es una de las causas principales que causan daño a la maquinaria, por lo cual se recomiendan los arreglos siguientes para minimizar sus efectos (ref.18) :

- 1.- Empotrar la cimentación y garantizar el efecto de empotramiento (fig.3.c.1.a).
- 2.- Hacer que $L > H$ como se muestra en la figura 3.c.1.b, ya que si $L > 4H$ el cabeceo tiende a anularse.
- 3.- Hacer que $H_1 < H_2$ como se muestra en la figura 3.c.1.c.
- 4.- Evitar excentricidades con el fin de anular el acoplamiento entre los modos vertical y cabeceo. En la figura 3.c.1.d se presenta esta idea y se sugiere hacer $e < 0.05 L$, siendo e la excentricidad y L el largo de la cimentación.

3.d).-ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DEL SISTEMA MÁQUINA-CIMENTACION-SUELO.

Es común resolver los problemas de geotecnia con la ayuda de modelos físicos y matemáticos lo más simple como sea posible ya que en muchos casos los refinamientos en los análisis no se justifican.

Tal actitud ha resultado de la necesidad de hacer más práctico el trabajo del ingeniero civil, a la exigencia de economía indiscriminada y a la dificultad de cumplir con los requisitos de las teorías usadas para resolver tales problemas. Esto significa que la teoría utilizada ha de ser consistente con la mayor parte del conocimiento aceptado, ha de tener capacidad explicativa y predictiva, ha de tener profundidad para explicar lo observable en función de lo no experimentado, es decir, explicar la realidad por el pensamiento, ha de tener capacidad unificadora o posibilidad de expansión para abarcar problemas diversos y así comprender una gama más amplia de situaciones prácticas, ha de tener capacidad indagatoria para guiar nuevas investigaciones y sugerir nuevas ideas, experimentos y problemas en el propio campo o campos afines.

En esta sección se presenta el método de análisis basado en modelos simples utilizados para evaluar la respuesta de cimentaciones sujetas a vibraciones. Dicha sección se ha propuesto como resultado de una recopilación de soluciones analíticas y numéricas del problema en cuestión, utilizando modelos simples de la dinámica estructural, de la teoría de propagación de ondas y de la mecánica de suelos.

3.d.1.-PLANTEAMIENTO Y SOLUCION DEL PROBLEMA.

El problema de la cimentación de una máquina se puede plantear como sigue.

Dado el sistema mostrado en la figura 3.d.1 sometido a la acción de la fuerza dinámica $P(t)$, y dada la masa del sistema máquina-cimentación (M), la geometría de la cimentación y las propiedades del suelo, estimar la respuesta $x(t)$ del sistema. A menos que se diga otra cosa los términos fuerza y desplazamiento se utilizan aquí en sentido generalizado e incluyen fuerzas y momentos, y traslaciones y rotaciones, respectivamente.

La solución de este problema se rige por tres principios básicos de la mecánica aplicada y una hipótesis fundamental. A saber, el principio del equilibrio dinámico, el cual relaciona las fuerzas externas $P(t)$ con las internas $R(t)$ (ver figura 3.d.2); el principio de continuidad que relaciona los desplazamientos con las deformaciones; el principio de las relaciones esfuerzo-deformación, las que están dadas por la naturaleza de las propiedades del suelo de cimentación y su respuesta a las sollicitaciones dinámicas; por último, la hipótesis fundamental en la que se basa todo el método de análisis así como la filosofía del diseño de cimentaciones de maquinaria, es que las ecuaciones que gobiernan el movimiento son lineales. Físicamente esto último ocurre cuando la perturbación ondulatoria es relativamente pequeña y las relaciones esfuerzo-deformación son lineales.

Se parte también de la hipótesis de que todo lo que se necesita para

constituir la forma más general de ondas periódicas es un conjunto de ondas armónicas simples; es decir, que un movimiento periódico cualquiera de una partícula se puede representar como una combinación de movimientos armónicos simples. Esto es el principio de superposición.

El principio de superposición parece tan obvio que vale la pena señalar que no siempre es aplicable, y falla cuando la perturbación es relativamente grande tanto como las relaciones esfuerzo-deformación no sean lineales o cuando las ecuaciones que gobiernan el movimiento no son lineales.

Para analizar el problema mostrado en la figura 3.d.1, puede separarse conceptualmente en dos diagramas, esto se muestra en la figura 3.d.2.

PRINCIPIO DEL EQUILIBRIO.

Aplicando la segunda ley de Newton al diagrama de cuerpo libre de la figura 3.d.2 para establecer el equilibrio dinámico durante el movimiento del sistema, se obtiene:

$$R(t) + M\ddot{u}(t) = P(t) \quad \text{ec. 3.d.1}$$

Esta ecuación representa, para todo tiempo, el equilibrio entre las fuerzas externas aplicadas al sistema cimentación-maquinaria y la inercia del mismo.

Por otra parte, en el otro esquema de la figura 3.d.2 se muestra que el suelo está sometido a esfuerzos dinámicos de contacto representados por la resultante $R(t)$, los cuales se propagan en forma de ondas de esfuerzos a través del depósito de suelo. Puede establecerse una relación entre esfuerzos de contacto y los desplazamientos resultantes (ref. 24):

$$R(t) = X \cdot u(t) \quad \text{ec. 3.d.2}$$

donde:

$R(t)$ = Fuerzas de contacto.

X = Función de impedancia que relaciona las fuerzas con los desplazamientos.

$u(t)$ = Desplazamientos resultantes.

de tal manera que al sustituir la ec. 3.d.2 en la ec. 3.d.1 resulta que:

$$X \cdot u(t) + M \cdot \ddot{u}(t) = P(t) \quad \text{ec.3.d.3}$$

Es evidente que la solución del problema expresado mediante la ecuación anterior se resuelve al encontrar la función X , sustituirla y resolver la ecuación diferencial 3.d.3.

Por definición X expresa la relación entre fuerza dinámica de contacto y desplazamiento, es decir:

$$X = \frac{R(t)}{u(t)}$$

ec. 3.d.4

donde :

$$X = X_1 + i X_2$$

es una ecuación que expresa a la función de impedancia X como una función de variable compleja, siendo :

X_1 = impedancia asociada a las características de rigidez y de inercia del suelo.

X_2 = impedancia asociada a las características de amortiguamiento geométrico de la cimentación.

PRINCIPIO DE LAS RELACIONES ESFUERZO DEFORMACION.

Para encontrar la función X es necesario encontrar la ecuación del desplazamiento $u(t)$ resultante de la aplicación de las fuerzas $R(t)$. Esto implica resolver el problema de propagación de ondas de esfuerzo transmitido al suelo a través de la superficie de contacto entre suelo y cimentación y consiste en resolver la ecuación (ref. 18) :

$$\frac{\partial(\sigma_z)}{\partial z} + \rho \ddot{u}_z = 0$$

ec. 3.d.5

siendo :

$$\sigma_z = M \epsilon_z = M \left(- \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$$

ec. 3.d.6

donde la ecuación 3.d.5 representa el equilibrio dinámico dentro del medio donde se propaga la onda de esfuerzo σ_z y la ecuación 3.d.6 representa la relación esfuerzo-deformación.

σ_z = Esfuerzo vertical aplicado.

\ddot{u}_z = aceleración de partículas del suelo en dirección z .

M = Módulo de deformación del suelo convenientemente elegido.

$\epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$ = deformación axial unitaria en la dirección z .

ρ = densidad del suelo.

z = dirección en la que se propaga el esfuerzo σ_z .

combinando las ecuaciones 3.d.5 y 3.d.6 obtenemos la ecuación de onda siguiente :

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} u_x$$

ec. 3.d.7

donde :

$$v = \sqrt{\frac{M}{\rho}}$$

=Velocidad de propagación de la onda.

La ecuación 3.d.7 se conoce como la ecuación unidimensional de propagación del esfuerzo σ_z , cuya solución es de la forma :

$$u(z,t) = f(z - vt) + F(z + vt)$$

ec. 3.d.8

donde :

$u(z,t)$ = desplazamiento en la dirección z .

z = dirección en la que se propaga la onda de esfuerzos.

t = tiempo.

$f(z - vt)$ = función arbitraria diferenciable respecto al argumento, corresponde a un esfuerzo que viaja con velocidad v en la dirección positiva del eje z .

$F(z + vt)$ = función análoga a $f(z - vt)$ pero en dirección contraria.

Si $u(a,t)$ representa el desplazamiento del punto $z = a$, siendo a constante, y que es producido por la acción de la maquinaria, entonces $f(a - vt)$ es la parte que se trasmite a la región $z > a$ y $F(a + vt)$ es la parte que lo abandona, es decir, las ondas que se reflejan.

Para la solución de problemas de cimentación de maquinaria (ref. 18) se utiliza la función :

$$u(z,t) = u_0 e^{i(\Omega t + kz)}$$

donde :

$$k = \frac{\Omega}{v}$$

Ω = frecuencia angular de la onda.

u_0 = amplitud máxima del desplazamiento.

v = Velocidad de propagación de la onda.

la cual es una ecuación de la forma 3.d.8, es una solución de la ecuación de onda unidimensional 3.d.7 y se denomina comúnmente ecuación de ondas armónicas. Puede verse que para un punto fijo dado, esto es, que para $z = a$ (constante) la función $u(z,t)$ queda únicamente en función del tiempo :

$$u(t) = u_0 e^{i(\Omega t + ka)}$$

ec. 3.d.9

conociéndose así la posición del punto $z = a$ en el tiempo "t" cualquiera.

La formulación de las condiciones de frontera permite simular la disipación de energía por propagación de ondas a través del paso libre de las ondas en un punto de interés $z = a$; este es un problema de valores en la frontera, como lo son la interfase suelo-cimentación, la interfase entre estratos o los límites del semiespacio (fig. 3.d.3). Dicho problema se resuelve mediante diferentes técnicas numéricas existentes que permiten simular diferentes características estratigráficas del depósito de suelo, condiciones diferentes de empotramiento de la cimentación (fig. 3.d.4), así como diferentes formas y rigidez de la misma.

Una vez resuelta la ecuación de movimiento 3.d.7, obtenido $u(t)$, para la acción $R(t)$ de la ecuación 3.d.4 se puede obtener la relación:

$$X = \frac{R(t)}{u(t)}$$

con la que, sustituyendo en la ecuación 3.d.1, puede resolverse la ecuación de equilibrio dinámico del sistema, esto es:

$$X u(t) + M \ddot{u}(t) = P(t)$$

La solución se obtiene en el anexo B, de la cual se obtiene lo siguiente:

$$\frac{P_0}{u_0} = \sqrt{(X_1 - M\Omega^2)^2 + X_2^2} \quad \text{ec. 3.d.10}$$

donde:

$P(t) = P_0 e^{i\Omega t}$ = Fuerza armónica actuante.

P_0 = Amplitud máxima de la fuerza actuante.

u_0 = Amplitud máxima del desplazamiento.

M = Masa del sistema maquinaria-cimentación.

Ω = Frecuencia angular de la excitación $P(t)$.

X_1 = Función de impedancia asociada a la de rigidez y a la inercia del suelo de cimentación.

X_2 = Función de impedancia asociada a las características de amortiguamiento geométrico de la cimentación.

Nótese que Ω es también la frecuencia angular de propagación de las ondas, esto implica que el sistema maquinaria-cimentación vibra con la misma frecuencia que la de la acción y con la misma frecuencia con las que se propagan las ondas de esfuerzo dentro del suelo.

En algunos problemas también se desea conocer el ángulo de

desfasamiento, ϕ , entre fuerza y desplazamiento, por lo que en el anexo B también se obtiene la expresión para obtener ϕ , siendo esta:

$$\phi = \text{Arc tan} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - M\Omega^2} \right) \quad \text{ec. 3.d.11}$$

siendo ϕ el ángulo de desfasamiento entre carga y desplazamiento.

Otra manera de representar y resolver el problema es mediante el uso de la notación vectorial compleja de donde puede obtenerse la solución (anexo B) en forma de notación matricial, esta es:

$$\begin{bmatrix} (\alpha_1 - M\Omega^2) & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & (\alpha_1 - M\Omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ecs. 3.d.12}$$

de donde al resolver el sistema de ecuaciones 3.d.12, se obtiene:

$$u_0 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad \text{ec. 3.d.13}$$

$$\phi = \text{Arc tan} \left(\frac{u_2}{u_1} \right) \quad \text{ec. 3.d.14}$$

donde:

u_1 = vector de desplazamientos asociado a la rigidez

u_2 = vector de desplazamientos asociado al amortiguamiento

Por otra parte, es común hacer una analogía con un sistema elemental equivalente de un grado de libertad como el que se muestra en la figura 3.d.5.a. Resolviendo tal problema (anexo B) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} (\bar{K} - M\Omega^2) & -C\Omega \\ C\Omega & (\bar{K} - M\Omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ecs. 3.d.15}$$

de cuya solución también se obtiene:

$$u_0 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad \text{ec. 3.d.16}$$

$$\phi = \text{Arc tan} \left(\frac{u_2}{u_1} \right)$$

ec. 3.d.14

y por semejanza entre los sistemas de ecuaciones 3.d.12 y 3.d.15 se tiene que :

$$\bar{K} = \rho g$$

$$C \Omega = \rho g$$

ec.3.d.16
ec.3.d.17.

siendo :

\bar{K} = rigidez del resorte dinámico equivalente. Incluye el efecto de la rigidez estática y la inercia del suelo de cimentación.

C = amortiguador equivalente.

y por analogía con el sistema elemental equivalente de un grado de libertad de la figura 3.d.5.a :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\alpha_1}{M}} = \sqrt{\frac{\bar{K}}{M}}$$

ec.3.d.18

$$\beta = \frac{C}{C_0} = \frac{\frac{\alpha_2}{\Omega}}{2\sqrt{\alpha_1 M}}$$

ec.3.d.19

donde :

ω_n = frecuencia angular natural de vibración no amortiguada.

β = relación de amortiguamientos del sistema elemental de un grado de libertad equivalente.

C = amortiguador equivalente del sistema.

C_0 = amortiguamiento crítico para el cual el sistema no vibra.

Por simplicidad y para ilustrar los conceptos fundamentales que se utilizan para el análisis se usó el modo vertical de vibración mostrado en la figura 3.d.1; sin embargo, el planteamiento anterior puede usarse y generalizarse para todos los modos de vibrar restantes mostrados en la figura 3.d.7, en los cuales la solución de las ecuaciones de movimiento es análoga a las formas de las ecuaciones 3.d.3, 3.d.5 y 3.d.6, con el tipo de cargas, inercias, esfuerzos, deformaciones y módulos correspondientes.

Aunque en muchos casos prácticos pueden ignorarse las impedancias acopladas de traslación y rotación debido a que su influencia es relativamente nula en cimentaciones superficiales (refs.13 y 53); en otros casos puede ser importante y debe tomarse en cuenta, por ello es de particular interés analizar el modo acoplado de traslación-rotación mostrado en la figura 3.d.8. En las referencias 39 y 51 se presentan análisis detallados al respecto.

3.d.2.-FACTORES QUE INFLUYEN EN LA RESPUESTA Y EVALUACION DE FUNCIONES DE IMPEDANCIA.

Cuando se trata la interacción de una cimentación rígida con el suelo el problema se puede plantear, en primera aproximación, como el de un cuerpo rígido apoyado en la frontera de un semiespacio viscoelástico y sometido a la acción de una carga armónica, y para simplificar el análisis se definen seis grados de libertad de la cimentación: tres desplazamientos a lo largo de tres ejes ortogonales y tres rotaciones alrededor de ellos (figura 3.d.7.).

El movimiento resultante ha sido estudiado por muchos investigadores y los resultados obtenidos presentados en numerosas publicaciones, así los estudios se han clasificado en grupos de acuerdo a las hipótesis de trabajo de cada uno de ellos (ref. 48).

El primer grupo obtiene la respuesta al tomar en cuenta que la distribución de presiones entre suelo y cimentación proviene de consideraciones estáticas, sin incluir efectos dinámicos.

Otro grupo, calcula la respuesta mediante planteamientos analíticos y numéricos que resuelven el problema de valores en la frontera mixtos al reducir las ecuaciones que gobiernan el movimiento a ecuaciones no homogéneas.

Otro grupo, considera métodos aproximados de análisis de cimentaciones rígidas de cualquier forma, los cuales en muchos casos requieren de un amplio y buen juicio del ingeniero que los aplica para obtener una buena solución.

Puede decirse que existen estudios suficientes para resolver el problema planteado razonablemente; siempre y cuando este sea de carácter lineal, sin embargo hoy día existe dedicación al desarrollo de nuevas técnicas numéricas que resuelvan lo que pueden resolver los métodos simplificados pero son: el carácter no lineal de las ecuaciones de movimiento y la obtención de respuestas en el dominio del tiempo.

En este inciso se presenta el planteamiento de los métodos aproximados de análisis en forma de información ordenada, tal como, gráficas con parámetros adimensionales, tablas o simples formulaciones que permitan la obtención de las funciones de impedancia para cimentaciones superficiales apoyadas en un semiespacio homogéneo elástico lineal, con las cuales puede resolverse un gran número de problemas prácticos. También se incluye la manera de tomar en cuenta algunos factores que influyen en la respuesta dinámica de las cimentaciones de maquinaria, se toman en cuenta factores tales como: la forma de la cimentación, la influencia del amortiguamiento interno del suelo en las características rigidez del suelo y en las características de amortiguamiento geométrico de la cimentación, el empotramiento de las cimentaciones y la estratigrafía del depósito de cimentación.

Para todos los modos de vibrar se necesita determinar el resorte dinámico equivalente K y el amortiguador equivalente C , los cuales dependen de la frecuencia angular de la excitación, Ω .

Existen seis pares de valores dinámicos resorte-amortiguador : uno para el modo vertical [K_z , C_z]; dos para los modos traslacionales [K_x , C_x y K_y , C_y]; dos para los modos rotacionales [K_{rx} , C_{rx} y K_{ry} , C_{ry}] y uno para el modo torsional [K_t y C_t]. La manera de evaluar cada uno de los valores K y C se describe a continuación y para referencia de términos utilícese las soluciones de la ecuación de equilibrio dinámico presentadas en el anexo B.

En todos los casos la rigidez o resorte dinámico equivalente se obtiene de :

$$\bar{K}_i = K_i A_i \quad \text{ec.3.d.22}$$

donde :

\bar{K}_i = rigidez dinámica equivalente.

K_i = rigidez estática.

A_i = se define como el coeficiente de variación de la rigidez dinámica (ver anexo B).

i = modo de vibrar analizado.

Todos los modos se suponen desacoplados, esto es suficiente para el caso de cimentaciones superficiales, no así en el caso de cimentaciones empotradas, donde tendrá que hacerse un análisis más riguroso de los modos acoplados.

3.d.2.1.-RIGIDEZ ESTÁTICA.

Existen soluciones aproximadas para evaluar la rigidez estática para cada modo de vibrar, las cuales están presentadas en forma de gráficas con parámetros adimensionales o en forma de expresiones algebraicas simples (refs. 15,16,17 y 18), en ellas puede notarse que la rigidez estática depende de un factor de forma, S_i , definido para la cimentación además de los parámetros del suelo; rigidez al corte (G) y de la relación de Poisson (ν).

Así, pueden usarse las expresiones siguientes (ref.16) con la notación de la figura 3.d.9.a de referencia :

Para el modo vertical :

$$K_z = S_z \frac{2LG}{1-\nu}$$

$$S_z = 0.8 \text{ para } \frac{A}{4L^2} < 0.02$$

$$S_z = 0.73 + 1.54 \left(\frac{A}{4L^2} \right)^{0.75} \text{ para } \frac{A}{4L^2} > 0.02$$

Para el modo horizontal transversal :

$$K_y = S_y \frac{2LB}{2-\nu}$$

$$S_y = 2.24$$

$$\text{para } \frac{A}{4L^2} < 0.16$$

$$S_y = 4.5 \left[\frac{A}{4L^2} \right]^{0.28} \text{ para } \frac{A}{4L^2} > 0.16$$

Para el modo horizontal longitudinal :

$$K_x = S_x \frac{2LG}{2-\nu}$$

o

$$K_x = K_y - \frac{0.21 LG}{0.75 - \nu} \left[1 - \frac{B}{L} \right]$$

Para el modo de cabeceo transversal :

$$K_{rx} = S_{rx} \frac{B}{1-\nu} (I_x)^{0.75}$$

$$S_{rx} = \frac{2.54}{\left(\frac{B}{L} \right)^{0.25}}$$

$$\text{para } \frac{B}{L} < 0.4$$

$$S_{rx} = 3.2$$

$$\text{para } \frac{B}{L} > 0.4$$

Para el modo de cabeceo longitudinal :

$$K_{ry} = S_{ry} \frac{B}{1-\nu} (I_y)^{0.75}$$

$$S_{ry} = 3.2$$

Para el modo de torsión :

$$K_t = S_t GJ^{0.75}$$

$$S_t = 3.8 + 10.7 \left[1 - \frac{B}{L} \right]^{10}$$

donde :

K_t = rigidez estática para el modo t.

S_t = factor de forma para el modo de vibrar t.

t = indica el modo de vibrar.

L = seallargo de la cimentación.

B = semiancho de la cimentación.
 A = área como se define en la figura 3.d.9.
 x, y, z = ejes ortogonales de referencia.
 r = indica rotación.
 t = indica torsión alrededor del eje z.
 I_x = momento de inercia del área A respecto al eje x.
 I_y = momento de inercia del área A respecto al eje y.
 J = momento polar de inercia del área A respecto al eje z.
 G = módulo de rigidez al corte del suelo de cimentación.
 ν = relación de Poisson del suelo de cimentación.

Las expresiones relativas a los factores de forma para los modos traslacionales también se presentan en forma de gráficas en las figuras 3.d.11.

3.d.2.2.-COEFICIENTE DE VARIACION DE RIGIDEZ DINAMICA.

El coeficiente de variación de la rigidez dinámica λ se evalúa en función de la frecuencia a través del parámetro adimensional (ref.16):

$$a_0 = \frac{\Omega B}{V_0} \quad \text{ec.3.d.23}$$

siendo :

a_0 = parámetro adimensional función de la frecuencia Ω .
 Ω = frecuencia angular de la excitación.
 B = semiancho de la cimentación.

Pueden usarse las figuras 3.d.12, 3.d.13 y 3.d.14 para evaluar los λ para cada modo de vibrar, en las que puede observarse que λ depende de la relación $\frac{L}{B}$ y del grado de saturación del suelo ($\nu \approx 0.33$ suelos parcialmente saturados $\nu \approx 0.50$ suelos saturados).

3.d.2.3.-AMORTIGUADORES EQUIVALENTES.

Por otra parte, para evaluar los amortiguadores, C_i , se supone y se calcula un amortiguador ideal que representa la disipación de la energía por radiación de las ondas de esfuerzo (amortiguamiento geométrico) sin importar la forma de la cimentación (ref.16). Así, dependiendo del tipo de onda, C_i puede evaluarse como :

$$C_i = \rho V_i A \quad \text{ec.3.d.24}$$

donde : i indica el modo de vibrar, ρ es la densidad del suelo, V_i la velocidad del tipo de onda que se propaga que depende del modo de vibrar y A el área donde actúa el esfuerzo y como se define en la figura 3.d.9. así se sugiere que (ref.25), dependiendo del modo de vibrar :

$$\begin{aligned}
 C_x &= \rho V_L A \\
 C_y &= \rho V_S A \\
 C_z &= \rho V_S A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{rx} &= \rho V_L y I_x \\ C_{ry} &= \rho V_L y I_y \\ C_i &= \rho V_s J \end{aligned}$$

donde :

ρ = densidad del suelo.

V_s = Velocidad de onda cortante.

V_L = Velocidad de onda compresional según la interpretación de Lysmer = $\frac{3.4}{n(1-\nu)} V_s$.

A = Área de la cimentación definida en la figura 3.d.9.a.

I_x = Momento de inercia del área A con respecto al eje x-x.

I_y = Momento de inercia del área A con respecto al eje y-y.

J = Momento polar de inercia del área A.

ν = Módulo de Poisson.

x, y, z = ejes ortogonales de referencia.

Si el fenómeno de traslación en los modos correspondientes fuera puramente unidimensional entonces la relación $\frac{C_i}{\rho V_i A}$ es igual a 1 para cualquier forma de la cimentación y para cualquier frecuencia; sin embargo, el fenómeno puede ser bidimensional o tridimensional. Por lo anterior se sugiere que para evaluar la influencia de la forma y de la frecuencia pueda usarse la relación (refs. 16 y 25) :

$$\xi = \frac{\bar{C}_i}{\rho V_i A}$$

donde:

\bar{C}_i = Amortiguador equivalente influenciado por la forma de la cimentación.

ξ = coeficiente de variación del amortiguador equivalente debido a la forma de la cimentación.

Así, en las figuras 3.d.15 y 3.d.16 puede verse la variación del coeficiente ξ en función de la forma de la cimentación y la frecuencia para cada modo de vibrar.

3.d.2.4.-INFLUENCIA DEL AMORTIGUAMIENTO INTERNO DEL SUELO.

Puesto que además de la disipación de energía por radiación de las ondas de esfuerzo existe la disipación por el amortiguamiento interno del suelo; es necesario incorporar la influencia de este en los parámetros de rigidez dinámica y de amortiguamiento geométrico de la cimentación, para ello se utiliza el principio de correspondencia de la viscoelasticidad con el cual, basta sustituir las constantes complejas viscoelásticas por las constantes elásticas considerando como si el suelo fuera puramente elástico (refs. 35 y 52).

Por lo anterior, es suficiente con efectuar la operación siguiente para tomar en cuenta la participación del amortiguamiento histerético del suelo (refs. 18 y 43) :

$$\mathcal{X}(\xi) = \mathcal{X}(1 + i2\xi)$$

ec.3.d.27.

donde :

$\mathcal{X}(\xi)$ = impedancia compleja como función de la frecuencia Ω y del amortiguamiento hysterético ξ del suelo.

ξ = amortiguamiento hysterético del suelo.

\mathcal{X} = impedancia compleja como función únicamente de la frecuencia Ω .

$(1 + i2\xi)$ = coeficiente complejo de un material viscoelástico.

efectuando las operaciones de la ecuación 3.d.27.

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\xi) &= [\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2] [1 + i2\xi] \\ &= [\mathcal{X}_1 - 2\xi\mathcal{X}_2] + i[\mathcal{X}_2 + 2\xi\mathcal{X}_1] \end{aligned}$$

igualando reales con reales y complejos con complejos

$$\mathcal{X}_1(\xi) = \mathcal{X}_1 - 2\xi\mathcal{X}_2$$

$$\mathcal{X}_2(\xi) = \mathcal{X}_2 + 2\xi\mathcal{X}_1$$

puesto que $\mathcal{X}_2 = \Omega C$ (ver ecuación 3.d.17) entonces :

$$\mathcal{X}_1(\xi) = \mathcal{X}_1 - 2\xi\Omega C \quad \text{ec.3.d.28}$$

$$\Omega C(\xi) = \Omega C + 2\xi\mathcal{X}_1 \quad \text{ec.3.d.29}$$

que dividiendo la ecuación 3.d.29 entre la frecuencia Ω , queda

$$C(\xi) = C + \frac{2\xi\mathcal{X}_1}{\Omega} \quad \text{ec.3.d.30}$$

y de la ecuación 3.d.16, $\mathcal{X}_1 = \bar{K}$, entonces las ecuaciones 3.d.28 y 3.d.30

quedan :

$$\bar{K}(\xi) = \bar{K} - 2\xi\Omega C \quad \text{ec.3.d.31}$$

$$\bar{C}(\xi) = C + \frac{2\xi\bar{K}}{\Omega} \quad \text{ec.3.d.32}$$

donde :

$\mathcal{X}_1(\xi)$ = impedancia asociada a las características de rigidez y de inercia del suelo, la cual es función de la frecuencia Ω y del amortiguamiento hysterético ξ del suelo. Es igual $\bar{K}(\xi)$.

$\mathcal{X}_2(\xi)$ = impedancia asociada a las características de radiación de las ondas de esfuerzo como función de la frecuencia Ω y del amortiguamiento hysterético ξ del suelo. Es igual a $\Omega C(\Omega, \xi)$.

$\bar{K}(\xi)$ = rigidez del resorte dinámico equivalente como función de Ω y ξ .

$\bar{C}(\xi)$ = amortiguador dinámico equivalente como función de Ω , de la forma de la cimentación y con el amortiguamiento histerético integrado.

Con lo anterior se ha incorporado la influencia del amortiguamiento interno del suelo, el cual hace que disminuya la rigidez dinámica equivalente K_i y aumente el valor del amortiguador equivalente C_i .

3.d.2.5.-CIMENTACIONES EMPOTRADAS.

Para tomar en cuenta la influencia del empotramiento de la cimentación, se han propuesto algunos factores de influencia que incorporan el efecto del empotramiento al modificar, mediante dichos factores, la rigidez estática, K_i , y el coeficiente de variación de la rigidez dinámica, λ_i , calculados, en primera aproximación, como si la cimentación fuera superficial.

Por lo que la rigidez estática puede modificarse como sigue :

$$K_{empotrada} = K_{superficial} (I_i) (I_w)$$

donde :

I_i = factor de empotramiento debido al efecto de zanja.

I_w = factor de empotramiento debido al efecto de contacto entre paredes de zanja y cimentación.

$K_{empotrada}$ = rigidez estática empotrada.

$K_{superficial}$ = rigidez estática superficial.

Nótese que $K_{superficial}$ es la misma K_i definida en la ecuación 3.d.22.

Por otra parte la rigidez dinámica puede modificarse como :

$$\bar{K}_{empotrada} = \bar{K}_{empotrada} (\lambda_{empotrada})$$

donde (ref. 27) :

$$\frac{\lambda_{empotrada}}{\lambda_{superficial}} = 1 - 0.09 \left[\frac{D}{B} \right]^{3/4} (\alpha_0)^2 \quad \text{para } \nu < 0.40$$

$$\frac{\lambda_{zanja}}{\lambda_{superficial}} = 1 + 0.09 \left[\frac{D}{B} \right]^{3/4} (\alpha_0)^2 \quad \text{para } \nu < 0.40$$

siendo :

$\bar{K}_{empotrada}$ = rigidez estática empotrada.

$\bar{K}_{empotrada}$ = rigidez dinámica equivalente empotrada.

$\lambda_{empotrada}$ = coeficiente de variación de la rigidez dinámica empotrada.

Azónjo = coeficiente de variación de la rigidez dinámica modificado por el efecto zanja.

Nótese que $\bar{K}_{empotrada}$ tiene el mismo sentido que \bar{K}_i definida la ecuación 3.d.22 y que el $\bar{K}_{empotrado}$ tiene el mismo sentido y efecto que el \bar{K}_i , es decir, además de inducir el efecto del empotramiento, modifica la rigidez estática en función de la frecuencia Ω .

Dos efectos son los que influyen al empotrar la cimentación, uno es el efecto de zanja y consiste en que el plano horizontal externo al área de la base de la cimentación (A_b) se mueve restringido por un estado de esfuerzos normal y de corte actuando en el plano de apoyo de la cimentación, situación tal, que no sucede en las cimentaciones superficiales, en las que dicho plano está libre de esfuerzos (ver figura 3.d.9). El resultado de este efecto es que augmenta la rigidez estática de la cimentación.

El otro efecto es el contacto de los lados verticales de la cimentación con las paredes de la zanja y el efecto principal es que, si está garantizado el buen contacto, este ayuda a soportar las cargas transmitidas con lo que se modifican las características de inercia del sistema.

Tomar en cuenta los efectos combinados anteriores, ha sido y son tema de estudio de algunos investigadores y en el presente no se cuenta con una manera clara y completa de considerar el efecto del empotramiento para todos los modos de vibrar de la cimentación. Sin embargo, se han propuesto algunas expresiones algebraicas simples para estimar la influencia del empotramiento; tales expresiones se utilizan en forma de factores y son las siguientes (refs.26,27 y 28) :

Para modo de traslación vertical :

$$I_t = 1 + \frac{1}{21} \frac{D}{B} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{Ab}{L^2} \right)$$

$$I_w = 1 + 0.09 \left(\frac{D}{B} \right)^{2/3}$$

donde :

I_t = factor de empotramiento debido al efecto de zanja.

I_w = factor de empotramiento debido al efecto de contacto entre paredes de zanja y cimentación.

D = profundidad de despeje de la cimentación.

B = semiancho de la cimentación ver figura 3.d.9.

L = semilargo de la cimentación ver figura 3.d.9.

A_b = Área de contacto de la base de la cimentación.

Para modo de traslación horizontal :

$$I_t = 1 + 0.15 \sqrt{\frac{D}{B}}$$

$$I_w = 1 + 0.52 \left(\frac{h}{B} \frac{A_w}{L^2} \right)$$

donde :

A_w = Suma de áreas de contacto de las paredes verticales de la cimentación con las paredes de la zanja.

h = distancia como se define en la figura 3.d.9.c.

como puede notarse, no se presentan expresiones algebraicas ni para los coeficientes de variación de rigidez dinámica, ni para factores de influencia de los otros modos de vibrar, con lo que la información queda incompleta, sin embargo para evaluar los coeficientes de variación de la rigidez dinámica pueden consultarse un conjunto de gráficas propuestas en la referencia 27.

Por otra parte, si se hacen hipótesis lo suficientemente razonables, puede estimarse de una manera más fácil la influencia del empotramiento en el amortiguamiento; así, si se suponen que las radiaciones de las ondas de corte y de las ondas de compresión son independientes entre sí y entre cada modo de vibrar, entonces :

$$C_{empotrado} = C_{superficial} + C_{paredes} \quad \text{ec.3.d.33}$$

donde:

$C_{empotrado}$ = Amortiguador equivalente modificado por el efecto de empotramiento.

$C_{superficial}$ = C_i , Amortiguador equivalente debido al contacto en la base de la cimentación como se define en la ecuación 3.d.26.

$C_{paredes}$ = Amortiguador equivalente debido al contacto en las paredes.

En la ecuación 3.d.33, la participación de cada término depende del modo de vibrar y de la certeza del contacto "efectivo" entre las paredes de la cimentación y las paredes de la zanja; en caso de duda, es conservador no considerar la participación del contacto entre paredes.

Mientras que $C_{superficial}$ tiene el mismo sentido planteado en la ecuación 3.d.26 y representa a las ondas que se originan y existen a través de la base de la cimentación; $C_{paredes}$ representa a las ondas que se generan y se emiten a través del contacto en las paredes verticales. Dependiendo de si la pared es paralela o perpendicular a la dirección de la carga, es el tipo de onda que se genera y para el caso de paredes inclinadas; se generan de manera simultánea, ondas de

corte y compresionales.

Por lo anterior y dependiendo del sentido de las cargas :

$$C_{\text{paredes}} = C_p + C_n \quad \text{ec. 3.d.34}$$

donde :

$$C_p = \rho V_s A_p \quad \text{ec. 3.d.35}$$

$$C_n = \rho V_L A_n \quad \text{ec. 3.d.36}$$

siendo :

C_p = Amortiguador equivalente asociado al contacto de paredes paralelas al sentido de la carga.

C_n = Amortiguador equivalente asociado al contacto de paredes normales al sentido de la carga.

A_p = suma de áreas de contacto de paredes paralelas al sentido de la carga.

A_n = área de contacto de las paredes que sirven de apoyo y son normales a la dirección de la carga.

Así, para modo de vibración vertical :

$$C_{z,\text{empotrado}} = \rho [V_L A_n + V_s (A_p)]$$

y para traslaciones horizontales :

$$C_{h,\text{empotrado}} = \rho [V_s A_n + V_s A_p + V_L A_n]$$

$C_{h,\text{empotrado}}$ = Amortiguador equivalente para modos de traslación modificado por el efecto del empotramiento.

Por intuición; para los modos rotacionales, puede inducirse la influencia del empotramiento al reemplazar en las ecuaciones 3.d.35 y 3.d.36 las áreas por los momentos de inercia de estas, tomando como referencia el mismo criterio que se usó para los amortiguadores superficiales de los modos de rotación definidos en las ecuaciones 3.d.25, es decir como si las paredes fueran la base de la cimentación.

En el caso de áreas de contacto inclinadas, puede usarse la proyección de estas sobre el plano vertical correspondiente.

3.d.2.6.-SUELOS ESTRATIFICADOS.

Hasta ahora se ha reemplazado al suelo por un resorte y un amortiguador, los cuales simulan su comportamiento ante cargas dinámicas. Esta simple idealización representa a un semiespacio homogéneo viscoelástico lineal y su valor principal es que ayuda a explicar características importantes de la respuesta de cimentaciones sujetas a cargas dinámicas.

En realidad los depósitos naturales de suelo no son tan uniformes; por lo que la idealización como semiespacio viscoelástico lineal ya no es

conveniente y la respuesta para otro tipo de perfiles que no se parecen al semiespacio es diferente. Es típico encontrar depósitos de suelo estratificados, suelos depositados sobre roca o depósitos de suelo cuyas propiedades varían con la profundidad.

Tomar en cuenta las características de los depósitos naturales mencionadas anteriormente ha sido motivo de muchas investigaciones, un resumen de los resultados obtenidos de muchas de ellas se presenta con más detalle en la referencia 24, de la cual entre otras consideraciones las más importantes son :

ESTRATO SOBRE ROCA.

Para cimentación rígida apoyada en un estrato homogéneo depositado en roca, el factor más importante es la relación $\frac{H_1}{B}$ como se define en la figura 3.d.4.b., el cual modifica la rigidez estática de la cimentación y hace que las funciones de impedancia presenten picos y valles asociados en función directa con las frecuencias naturales de vibrar del estrato, lo que en otras palabras, las fluctuaciones observadas (picos y valles) son la manifestación de fenómenos de resonancia. Esto se debe a que las ondas que emanan de la cimentación en vibración se reflejan en la roca y se regresan a la superficie, como resultado, la amplitud del movimiento de la cimentación puede incrementarse significativamente para una frecuencia específica de vibración, lo cual corresponde aproximadamente a las frecuencias naturales de vibrar del depósito.

Teóricamente y para un suelo puramente elástico ($\xi = 0$); otro efecto importante es que, a bajas frecuencias (menores que la correspondiente al modo fundamental de vibrar del estrato de suelo) el coeficiente de radiación ξ es nulo, esto se debe a que no se transmiten ondas a la roca y a que a tales frecuencias no pueden crearse ondas superficiales, única manera en que podría disiparse energía, por lo que la energía queda atrapada en el estrato y el amortiguamiento geométrico de las ondas es nulo.

Sin embargo el suelo tiene amortiguamiento histerético; por lo que en la circunstancias antes mencionadas, el amortiguamiento interno del suelo se vuelve la única manera de disipación de energía, convirtiéndose así en un parámetro importante a frecuencias menores que las del modo fundamental del estrato.

Por lo anterior, es importante poder evaluar la frecuencia fundamental de vibrar del estrato o de un depósito de suelo estratificado sobre roca. En la referencia 19 se presenta un resumen de métodos que permiten evaluar de manera sencilla la frecuencia fundamental de vibrar de un depósito de suelo sobre roca, estratificado o no.

ESTRATO SOBRE SEMIESPACIO.

Tanto el semiespacio como el depósito de suelo sobre roca son dos idealizaciones radicales de los depósitos de suelo, y para encontrar soluciones intermedias, se ha estudiado un modelo más general que representa una cimentación rígida apoyada en un estrato sobre semiespacio; el cual está basado en dos parámetros que lo definen, a

saber, la relación H/B y la relación entre módulos G_1/G_2 (ver figura 3.d.4.a).

Los resultados obtenidos del estudio de este modelo muestran que conforme aumenta el contraste entre G_1 y G_2 , los efectos son radicales para un estrato sobre roca ($G_1/G_2 = 0$) y, obviamente, no se manifiestan en el caso de un semiespacio ($G_1/G_2 = 1$); tales efectos son el aumento de la rigidez dinámica y una disminución de la capacidad de amortiguamiento. Esto se debe, para el caso de disminución de la rigidez dinámica, a que aún a pequeños valores de G_1/G_2 , es decir tan luego como no se considera base rígida, los desplazamientos tienden a ser muy grandes comparados con los de un semiespacio. Así, a muy bajas frecuencias las rigideces son más pequeñas comparadas con el caso del estrato sobre roca.

Para el caso del amortiguamiento y a cualquier frecuencia, esta se incrementa debido a la transmisión parcial de las ondas de cuerpo hacia el semiespacio que sirve de apoyo al estrato y a la generación de ondas superficiales.

Por consecuencia, los comportamientos antes descritos son una transición entre los modelos estrato sobre roca y semiespacio y así la magnitud de los efectos, disminución de la rigidez dinámica y aumento del amortiguamiento, son importantes a frecuencias menores o iguales que la frecuencia fundamental del sistema. Así conforme G_1/G_2 varía de 0 (estrato sobre roca) a 1 (semiespacio) los picos de las curvas de las funciones de impedancia son más pronunciados y alargados y los valores correspondientes a las frecuencias de resonancia disminuyen. En la figura 3.d.17 se muestran estas tendencias.

Por otra parte, un paso importante en el análisis es la elección de un módulo de rigidez cortante que represente al depósito de suelo.

Como se comentó, se ha utilizado como artificio de solución del problema de vibración de maquinaria la sustitución de la interfase suelo-cimentación por un resorte y un amortiguador, los cuales sustituyen y simulan el comportamiento del suelo ante carga dinámica, y puesto que los parámetros de rigidez dinámica y amortiguamiento son función de los valores θ y ν del suelo, se necesita elegirlos de manera conveniente para que representen el comportamiento del depósito de suelo.

En la mayoría de los suelos ν varía en un intervalo estrecho de valores, de 0.35 a 0.4 en arenas, y cerca de 0.5 en arcillas saturadas (ref.20), por lo que puede elegirse un valor entre este rango de acuerdo con las condiciones del depósito de suelo o al tipo de suelo predominante sin que existan diferencias significativas en los resultados al tomar un valor u otro. En cambio θ depende fundamentalmente del nivel de esfuerzos y de la compactación del suelo, entre otros factores secundarios respecto a los antes mencionados.

Como primera aproximación, puede idealizarse al depósito de suelo como un semiespacio, obtener la distribución de esfuerzos como se muestra en la figura 3.d.10.a y calcular G para el estado de esfuerzos que se tiene a la profundidad crítica " d_c " con las expresiones siguientes :

Para arenas y gravas con granos redondeados y deformaciones angulares menores que 10^{-4} (refs. 14 y 44).

$$G = \frac{2630 (2.17 - e)^2}{1 + e} \sqrt{\frac{\sigma_v}{\sigma_h}}$$

Para arenas y gravas con granos angulosos y deformaciones angulares menores que 10^{-4} (refs. 14 y 44).

$$G = \frac{1230 (2.97 - e)^2}{1 + e} \sqrt{\frac{\sigma_v}{\sigma_h}}$$

en las que :

G = módulo de rigidez cortante en lb/pulg.²

e = relación de vacíos.

$\frac{\sigma_v + 2\sigma_h}{3}$ = esfuerzo octaédrico normal efectivo.

σ_v = esfuerzo vertical efectivo.

σ_h = esfuerzo horizontal efectivo.

En el caso de arcillas la relación entre G y la resistencia no drenada S_u es aproximadamente constante a bajos niveles de deformación y para niveles de deformación cortante entre 10^{-5} y 10^{-6} puede emplearse (ref. 20) :

$$G = 1600 S_u$$

No existe un criterio definido para calcular el módulo de rigidez al corte equivalente, ni la relación de Poisson equivalente, para un depósito de suelo cuyas propiedades varían con la profundidad; no obstante lo anterior en la referencia 29 se ha usado un método que consiste en transformar un depósito de suelo estratificado, por ejemplo, a un semiespacio equivalente a través de un factor de influencia que toma en cuenta la estratificación y la suposición de que la distribución de esfuerzos en el medio estratificado y en el semiespacio es la misma (ver figura 3.d.10.b.).

Una alternativa con fines de diseño y para evaluar el comportamiento de la máquina consiste en obtener la respuesta en función de varios valores de G de tal manera de obtener un espectro como se muestra en la figura 3.d.10.c y comparar con las G medidas en el perfil del terreno de cimentación.

4. APLICACIONES

Es práctica común seleccionar e idealizar modelos de estructuras a base de resortes, amortiguadores y masas concentradas que representan aproximadamente el comportamiento de la estructura modelada. La aproximación del modelo depende del analista y las diferencias que existen entre un modelo u otro no significan una discordancia en el comportamiento pero sí en la precisión y eficiencia alcanzada con el método de solución.

Por lo anterior, es recomendable que el analista o diseñador conozca de manera adecuada las herramientas analíticas existentes y así pueda usarlas. En la referencia 3 se presenta un resumen de consideraciones prácticas para la elección de modelos, algunos de los cuales se muestran en las figuras 3.d.5 y 3.d.6 y se utilizan para la solución de los problemas siguientes:

PROBLEMA 1.

Se necesita diseñar la cimentación de un compresor cuyas características proporcionadas por el fabricante se muestran en la figura 4.1, y algunas de las cuales se presentan a continuación:

Se trata de un compresor reciprocante vertical de cuatro cilindros que pesa 12764.0 Kg y tiene el siguiente equipo complementario, un enfriador de gas de 1975.0 Kg, amortiguadores de 3182.5 Kg, y un motor de 8172.0 Kg, el cual tiene un rotor que pesa 2724 Kg. Con lo anterior el peso total de la máquina es de 26093.5 Kg y su masa equivalente de 2660 un (unidades técnicas de masa).

La frecuencia de operación primaria (f_{cp}) es de 585 rpm o (ω_p) de 61.3 rad/s y la frecuencia de operación secundaria (f_{cp}) es de 1170 rpm o (ω_s) de 122.52 rad/s, las cuales producen las fuerzas y momentos mostrados en la figura 4.1.b. Las fuerzas debidas al funcionamiento del motor se consideran nulas.

El suelo de cimentación es una arena lina medianamente compacta con grava, con peso volumétrico $\gamma = 1876 \text{ Kg/m}^3$, módulo de rigidez al corte $G = 9.6E6 \text{ Kg/m}^2$, velocidad de onda cortante $V_s = 227 \text{ m/s}$, relación de Poisson $\nu = 0.35$, amortiguamiento histerético $\xi = 0.05$ y capacidad de carga admisible $q_a = 12 \text{ T/m}^2$.

Las dimensiones de la cimentación propuesta se eligieron de acuerdo al inciso 3.c y resultaron como se muestra en la figura 4.1.a. Algunas dimensiones se enlistan a continuación:

$$\begin{aligned} L &= 4.20 \text{ m} \\ B &= 2.40 \text{ m} \\ A &= 40.32 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

El problema se resuelve para las acciones no armónicas periódicas resultantes de la superposición de las acciones primarias y secundarias (ver curvas V_{zp}, M_{xp} y V_{zs}, M_{xs} en la figura 4.1.b). Se resuelve también, el caso simple de considerar las acciones armónicas simples

como una función cuya máxima amplitud es la suma de las amplitudes de las acciones primaria y secundaria actuando con la frecuencia de la acción primaria (curvas V_z y M_x de la figura 4.1.b).

Los resultados obtenidos en términos de amplitudes se muestran en la figura 4.2 y en términos de desplazamientos en la figuras 4.3, 4.4 y 4.11, todas en el dominio de la frecuencia.

Los parámetros $\bar{K}(\xi)$ y $\bar{C}(\xi)$, de cada modo se obtienen de acuerdo con el inciso 3.d y su variación con respecto a las frecuencias se muestran en las figuras 4.5 a 4.10. Como ejemplo ilustrativo se muestran dos tablas de cálculo de los parámetros $\bar{K}(\xi)$, $\bar{C}(\xi)$, $K-M_0^2$, y $QC(\xi)$, términos que se utilizan en el análisis planteado por las ecuaciones del inciso 3.d. (ver tablas 4.1 y 4.2 respectivamente).

En la figuras 4.4.a y 4.11 se muestran las diferencias encontradas entre considerar la acción como envolvente o como una suma de armónicas simples.

En la tabla 4.3 se muestra un resumen de resultados comparativos que muestran las diferencias encontradas entre resultados obtenidos en este trabajo y los obtenidos por el análisis que se presenta en la referencia 3. Los resultados corresponden a la frecuencia de operación primaria, es decir para un parámetro $\omega_0 = 0.65$.

PROBLEMA 2.

Se plantea diseñar la cimentación para un generador que funciona a base de turbinas de gas. La condición del suelo de cimentación es mala pues se trata de una arcilla limosa blanda sensitiva a las vibraciones por lo que surge la necesidad de limitar la propagación de estas, así como las amplitudes de deformación; para ello, se ha propuesto un bloque adicional de inercia como aislador de vibraciones soportado por resortes, con el arreglo mostrado en la figura 4.12, donde puede verse que el paso entre altas y bajas frecuencias a las que funcionan el generador y la turbina respectivamente, está dado por una caja de engranes.

Para la solución del problema se toman los datos dados en la referencia 3, los cuales están relacionados con el funcionamiento del sistema de máquinas, las propiedades mecánicas del suelo así como las propiedades geométricas y de inercia del sistema cimentación - bloque de inercia - máquinas resultantes del arreglo, los cuales se enlistan a continuación.

A).-DATOS GENERALES DEL SISTEMA DE MAQUINAS.

A.1) GENERADOR.

Peso (M_m) = 12780 Kg

Peso rotor (M_r) = 4295 Kg

Frecuencia de operación (f_1) = 1800 rpm $\Leftrightarrow \omega = 188.5$ rad/s

Excentricidad de masa desbalanceada (e_1) \approx 0.00254 cm
Fuerza centrífuga (F_{o1}) = (M_r/g) $\cdot \omega^2$ = 395.5 Kg

A.2) TURBINA.

Peso (M_r) = 7402.5 Kg
Peso rotor (M_r) = 257.5 Kg
Frecuencia de operación (f_2) = 8990 rpm $\Leftrightarrow \omega_2 = 941.43$ rad/s
Excentricidad de masa desbalanceada (e_2) \approx 0.0145 cm
Fuerza centrífuga (F_{o2}) = 336.8 Kg

A.3) CAJA DE ENGRANES

Peso (M_c) = 5922.5 Kg
Se considera que las fuerzas generadas por la caja de engranes son nulas.

A.4) Las fuerzas desbalanceadas generadas por las máquinas se suponen aplicadas en el centro de masas del sistema de máquinas y perpendicular al eje de la flecha que las une. Ver figura 4.12.a.

La fuerza combinada de las máquinas es, según referencia 3 :

$$F(t) = 395.5 \text{ Sen } (188.5 t) + 336.8 \text{ Sen } (941.4 t)$$

o una equivalente que se obtiene al considerar una función senoidal cuya amplitud es la suma de las amplitudes de las armónicas simples y su frecuencia es la frecuencia de operación primaria, en este caso la del generador, por lo que :

$$F(t) = 732 \text{ Sen } (188.5 t)$$

ver la fig. 4.13.b.

B).-PARAMETROS DEL SUELO.

Arcilla limosa blanda
 $\gamma = 1763.6 \text{ Kg/m}^3$
 $G = 2.463E6 \text{ Kg/m}^2 \Leftrightarrow V_s = 117 \text{ m/s}$
 $\nu = 0.35$
 $\xi = 0.05$
 $q_0 = 4.9 \text{ T/m}^2$

El nivel freático fluctúa y llega hasta 0.91 m bajo la superficie del terreno en cierta época del año.

C).-PARAMETROS DE LA CIMENTACION.

Se ha seleccionado la cimentación de acuerdo a las recomendaciones del inciso 3.c y debido a que el nivel freático está relativamente a poca profundidad se ha recomendado que la cimentación sea superficial para evitar excavar bajo agua en caso de cimentación empotrada.

Las dimensiones resultantes así como las propiedades geométricas y de inercia del sistema, se muestran en la figuras 4.12 y 4.13.a.

enlistándose algunas de las más útiles a continuación:

$$L = 4.26 \text{ m.}$$

$$B = 2.13 \text{ m.}$$

$$A = 36.3 \text{ m.}$$

D).-ANÁLISIS DINAMICO.

Se seleccionan 20 resortes con rigidez vertical de 157291.34 Kg/m cada uno para disminuir la transmisión vertical de vibraciones, la rigidez total vertical equivalente será $K_v = 3.14E6 \text{ Kg/m}$. El criterio de selección de los resortes se ha hecho para tener un factor de transmisibilidad de los resortes de $T_r = 0.02$ considerando al bloque inercial como un sistema elemental de un grado de libertad independiente. T_r se define como la relación entre fuerza transmitida a fuerza aplicada.

La restricción al movimiento lateral está dada mediante postes verticales, dos a cada lado; la rigidez lateral es $K_x = 28.83E6 \text{ Kg/m}$.

La rigidez a la rotación de los resortes es función del arreglo de los micasos y de la rigidez vertical de cada uno de ellos, en este caso, el arreglo consiste de dos hileras de 10 resortes cada una separada 1.52 m a ambos lados del eje que pasa a través del punto o, ver figura 4.13.a, y su rigidez a la rotación equivalente respecto al eje y-y está dado por el momento ocasionado por las fuerzas en los resortes por unidad de rotación, esto es:

$$K_{ry} = \frac{\text{Momento}}{\text{rotación}} = \frac{\sum K_i d_i \psi d_i}{\psi} = \sum K_i d_i^2$$

siendo:

K_{ry} = rigidez a la rotación respecto al eje y-y.

K_i = rigidez vertical del resorte i.

d_i = distancia perpendicular del resorte i al eje y-y.

ψ = rotación.

en este caso:

$K_{ry} = 2 K_v e^2$ siendo K_v la rigidez vertical por cada hilera de resortes ($10 \times 157291.34 = 1.57E6 \text{ Kg/m}$) y e es la distancia perpendicular del eje de la hilera al eje y-y, $e = 1.52 \text{ m}$, por lo que $d_i = e = 1.52 \text{ m}$.

Por lo tanto $K_{ry} = 7.25E6 \text{ K-m}$

Con la información disponible presentada en el inciso 3.d.2 no se pueden evaluar los resortes y amortiguadores equivalentes del suelo para las altas frecuencias con que operan las máquinas, sin embargo como pudo observarse, conforme aumenta la frecuencia obtenemos que para muy altas frecuencias el coeficiente de amortiguamiento C tiende a $\rho V A$ donde V_i se elige de acuerdo al modo de vibración.

Por otra parte, tampoco existe información suficiente para evaluar el resorte dinámico equivalente \bar{K} , para altas frecuencias con que opera la máquina, aun así, \bar{K} puede estimarse de las ecuaciones B.26 y B.27 obtenidas en el anexo B., es decir :

$$\bar{K} = K (1 - r^2)$$

siendo :
 \bar{K} = rigidez dinámica equivalente.
 K = rigidez estática
 r = relación de frecuencias = (Ω/ω_n)
 Ω = frecuencia de la acción
 ω_n = frecuencia natural no amortiguada del sistema

Así en este caso, el amortiguamiento se vuelve independiente de las altas frecuencias y la rigidez del resorte dependiente de la relación de frecuencias.

Considerando lo anterior se evaluaron los amortiguadores y resortes equivalentes del eje para cada frecuencia resultando lo siguiente :

Para la frecuencia de operación $f_1 = 1800$ rpm $\leftrightarrow \Omega_1 = 188.5$ rad/s

Modo vertical :

$$\begin{aligned} \bar{K}_{z1}(\xi) &= -3.08E8 \text{ Kg/m} \\ \bar{C}_{z1}(\xi) &= 1.11E6 \text{ Kg s/m} \\ V_i &= V_{Ly} = 194.8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Modo traslacional :

$$\begin{aligned} \bar{K}_{x1}(\xi) &= -3.0E8 \text{ Kg/m} \\ \bar{C}_{x1}(\xi) &= 0.60E6 \text{ Kg s/m} \\ V_i &= V_s = 117 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Modo rotacional :

$$\begin{aligned} \bar{K}_{ry1}(\xi) &= -9.5E8 \text{ Kg m} \\ \bar{C}_{ry1}(\xi) &= 1.53E6 \text{ Kg s m} \\ V_i &= V_{Ly} = 194.8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Para la frecuencia de operación $f_2 = 8990$ rpm $\leftrightarrow \Omega_2 = 941.43$ rad/s

Modo vertical :

$$\begin{aligned} \bar{K}_{z2}(\xi) &= -8.65E9 \text{ Kg/m} \\ \bar{C}_{z2}(\xi) &= 0.35E6 \text{ Kg s/m} \\ V_i &= V_{Ly} = 194.8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Modo traslacional :

$$\begin{aligned} \bar{K}_{x2}(\xi) &= -86.09E8 \text{ Kg/m} \\ \bar{C}_{x2}(\xi) &= -0.14E6 \text{ Kg s/m} \\ V_i &= V_s = 117 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Modo rotacional :

$$\bar{K}_{ryz}(\xi) = 242.4E8 \text{ Kg m}$$

$$\bar{C}_{ryz}(\xi) = -0.64E6 \text{ Kg s m}$$

$$V_x = V_{Ly} = 194.8 \text{ m/s}$$

donde cada $\bar{K}_{ij}(\xi)$ y cada $\bar{C}_{ij}(\xi)$ está evaluado en función de la frecuencia Ω , la forma de la cimentación y el amortiguamiento histerético ξ , siendo i el modo de vibrar y j el grado de libertad. Así, usando el modelo de la figura 3.d.6 y la solución correspondiente planteada en el anexo B.2, se evalúa la respuesta únicamente para el modo de traslación vertical. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 4.4, donde se indican las diferencias obtenidas de los análisis siguientes :

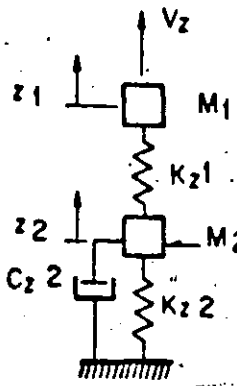
- a).-Considerando una acción envolvente con la frecuencia del generador y una amplitud máxima igual a la suma de las amplitudes que ocasionan el generador y la turbina.
- b).-Considerando la suma de armónicas simples correspondientes a la del generador y la de la turbina.

REFERENCIAS

- 1.- American Society for Testing and Materials (1977) "Dynamic geotechnical testing" SPT 654, Denver Colorado 28 Junio, 1977.
- 2.- Aranda Hernández R. (1987) "Modelación eficiente de dominios finitos en propagación de ondas sísmicas" Revista de Ingeniería vol. LVII No. 3 Septiembre 1987. F.I. UNAM.
- 3.- Arya, O'Neill y Pincus (1979) "Design of structures and foundations for vibration machines". Gulf Publishing Co. Book Division.
- 4.- Bentley y Cooke "Linear algebra with differential equations" Edit. Holt, Rinehart, Winston Inc.
- 5.- Beredugo y Novak (1972) "Coupled horizontal and rocking vibrations of embedded footings". Canadian Geotechnical Journal Vol. 9, 1972, pags. 477-497.
- 6.- Broch (1972) "Mechanical vibration and shock measurements" The application of the Brüel & Kjaer measuring systems.
- 7.- Bunge M. (1972) "Teoría y realidad" Editorial Ariel S.A. Barcelona, 1972.
- 8.- Calcote L.R. (1967) "Introduction to continuum mechanics" Van Nostrand Co. Inc. 1968.
- 9.- Christensen R.M. (1971) "Theory of viscoelasticity : An introduction" Academic Press Inc.
- 10.- Churchill y Brown (1986) "Variable compleja y aplicaciones" Traducción a la cuarta edición en inglés, Mc.Graw Hill.
- 11.- Clough y Penzien (1985) "Dynamics of structures" Mc Graw Hill Book Co.
- 12.- Comisión Federal de Electricidad (1979) "Manual de diseño de obras civiles, Estructuras C.II. Métodos de diseño". México D. F.
- 13.- Crouse, Liang y Martin (1985) "Experimental foundation impedance functions" Journal of Geotechnical Engineering Vol.111 No.6 Junio, 1985.
- 14.- Díaz Rodríguez J.A. (1978) "Determinación experimental de las propiedades dinámicas de los suelos" IV Curso Internacional de Ingeniería Sísmica, DEPEI-UNAM, Agosto 1978.
- 15.- Dobry y Gazetas (1985) "Dynamic stiffness and damping of foundations by simple methods" Vibration problems in

geotechnical engineering. GED-ASCE Convention , Detroit
Michigan, Octubre 1985.

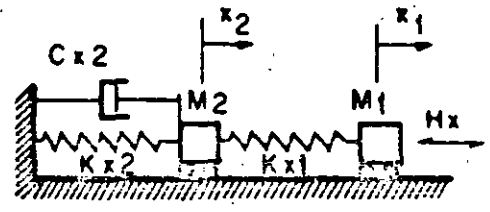
- 16.- (1986) "Dynamic response of arbitrarily shaped foundations" JGE-ASCE Vol. 112 No.2 Feb. 1986.
- 17.- (1986) "Dynamic response of arbitrarily shaped foundations : Experimental verification" JGE-ASCE Vol.112 No.2 Feb. 1986.
- 18.- (1988) "Dinamica de suelos y diseño de cimentaciones de maquinaria" Curso impartida en la Sociedad Mexicana de Mecanica de Suelos SMMS, Agosto 1988.
- 19.- Dobry, Oweis y Urzua (1976) "Simplified procedures for estimating the fundamental period of a soil profile" Bulletin of the Seismological Society of America Vol. 66 No.4 pags. 1293-1321, Agosto 1976.
- 20.- Flores Berrones J. R. (1977) "Parámetros de diseño en cimentaciones de maquinaria" Publicación No. 389 Instituto de Ingeniería UNAM.
- 21.- (1983) "Solicitaciones dinámicas debido a maquinaria" Revista de Ingeniería Vol. LIII No. 2 1983, FI-UNAM.
- 22.- Fotopoulou M. y Dobry R. (1988) "Manual of program vert (Dynamical response of oymmetric foundation)", Julio 1988.
- 23.- Fialho Rodrigues L. (1978) "Techniques for in situ measurement of shear wave velocity" Memoria No. 494 Ministerio de Habitação e obras publicas , Laboratorio Nacional de Engenharia Civil Lisboa Portugal, 1978.
- 24.- Gazetas G. (1983) "Analysis of machine foundation Vibrations : Plate of the art" Journal of Soil Mechanics and Earthquake Engineering Vol. 2 No. 1 1983 pags. 2-42.
- 25.- Gazetas G. y Dobry R. (1984) "Simple radiation damping model for piles and footings" Journal of Engineering Mechanics Vol. 110 No. 6 ASCE, Junio 1984 .
- 26.- Gazetas, Dobry, y Tassoulas (1987) "Vertical response of arbitrarily shaped embedded foundations" JGE-ASCE Vol. 111 No.6, Junio 1985.
- 27.- Gazetas y Tassoulas (1987) "Horizontal stiffness of arbitrarily shaped embedded foundations" JGE-ASCE Vol. 113 No.5, Mayo 1987.
- 28.- (1987) "Horizontal damping of arbitrarily shaped embedded foundations" JGE-ASCE Vol.113 No.5, Mayo 1987.



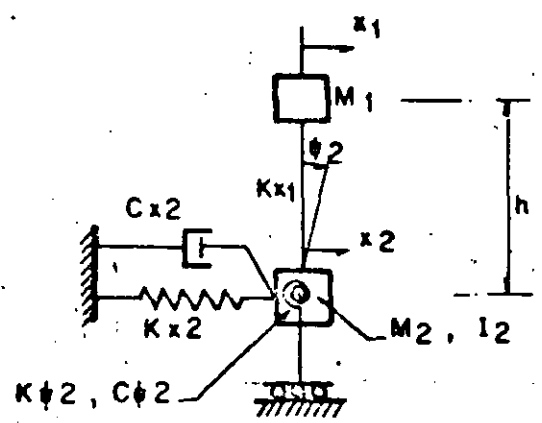
M_1 = Masa equivalente al sistema máquina - bloque de inercia

M_2 = masa de la cimentación

c).- Traslación vertical

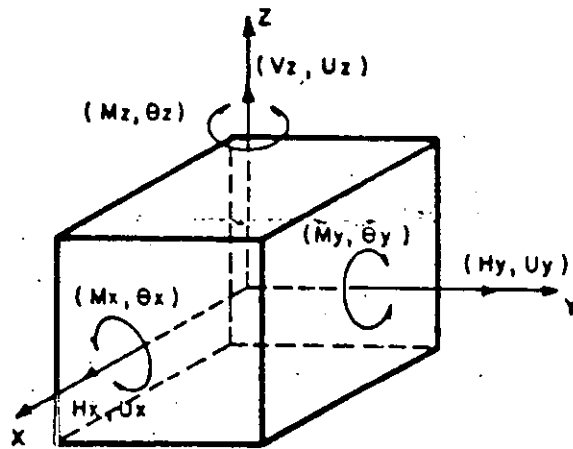


b).- Traslación horizontal



c).- Acoplamiento traslación - rotación

Fig. 3.d.6 - SISTEMA ELEMENTAL DE DOS GRADOS DE LIBERTAD



MODOS TRASLACIONALES

V_z = Fuerza vertical

U_z = Desplazamiento vertical

H_x = Fuerza longitudinal

U_x = Desplazamiento longitudinal

H_y = Fuerza transversal

U_y = Desplazamiento transversal

MODOS ROTACIONALES

M_z = Momento torsionante

θ_z = Rotación alrededor del eje z

M_x = Momento transversal

θ_x = Rotación transversal

M_y = Momento longitudinal

θ_y = Rotación longitudinal

Fig. 3.d.7 MODOS DE VIBRAR DE UNA CIMENTACION

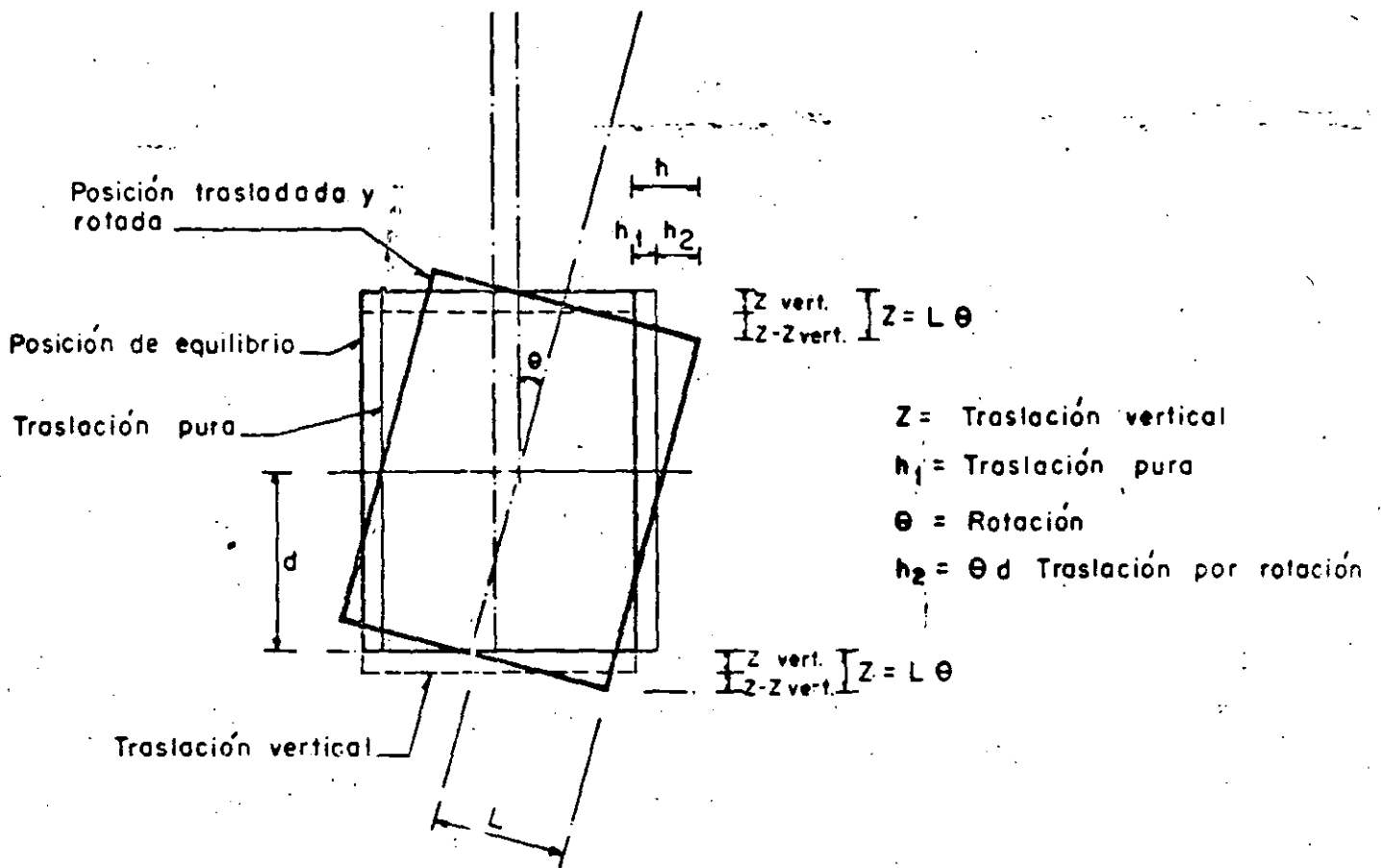
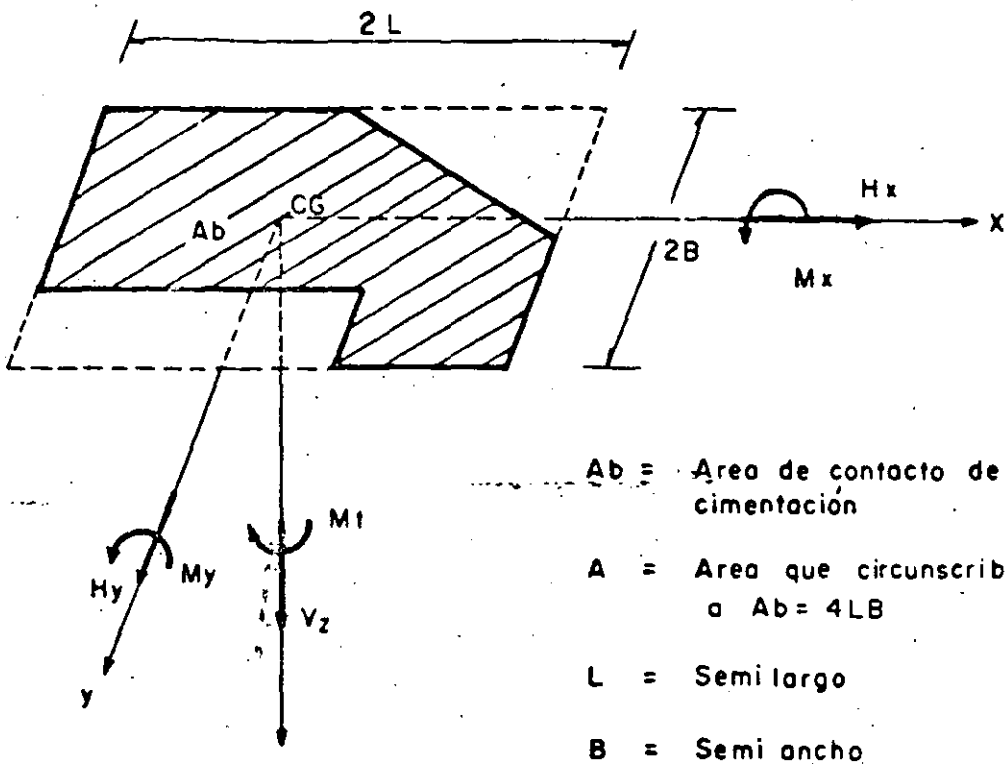
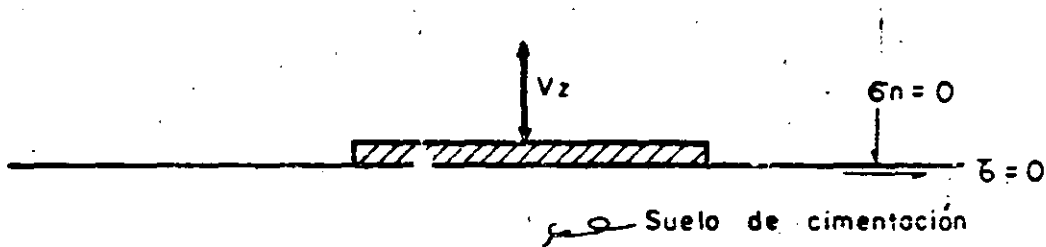


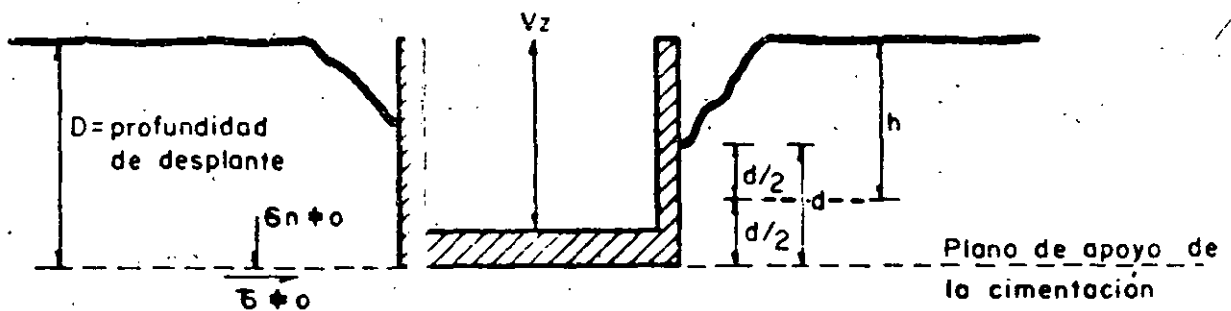
Fig. 3.d.8 - ACOPLAMIENTO ENTRE TRASLACION Y ROTACION



a).- Planta del area de contacto de una cimentación de forma irregular

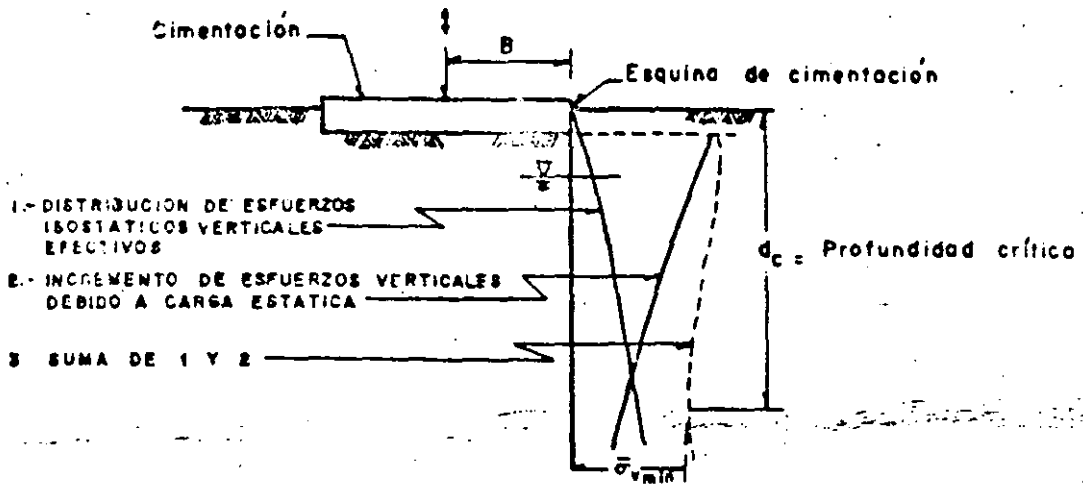


b).- Cimentación superficial

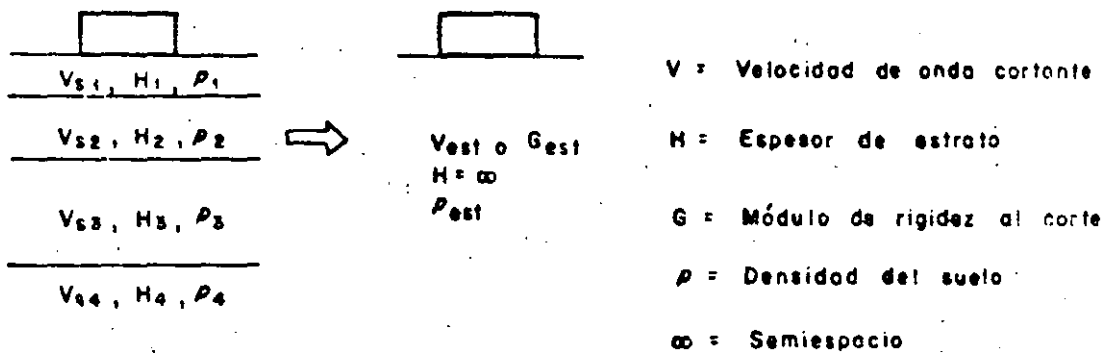


c).- Cimentación empotrada

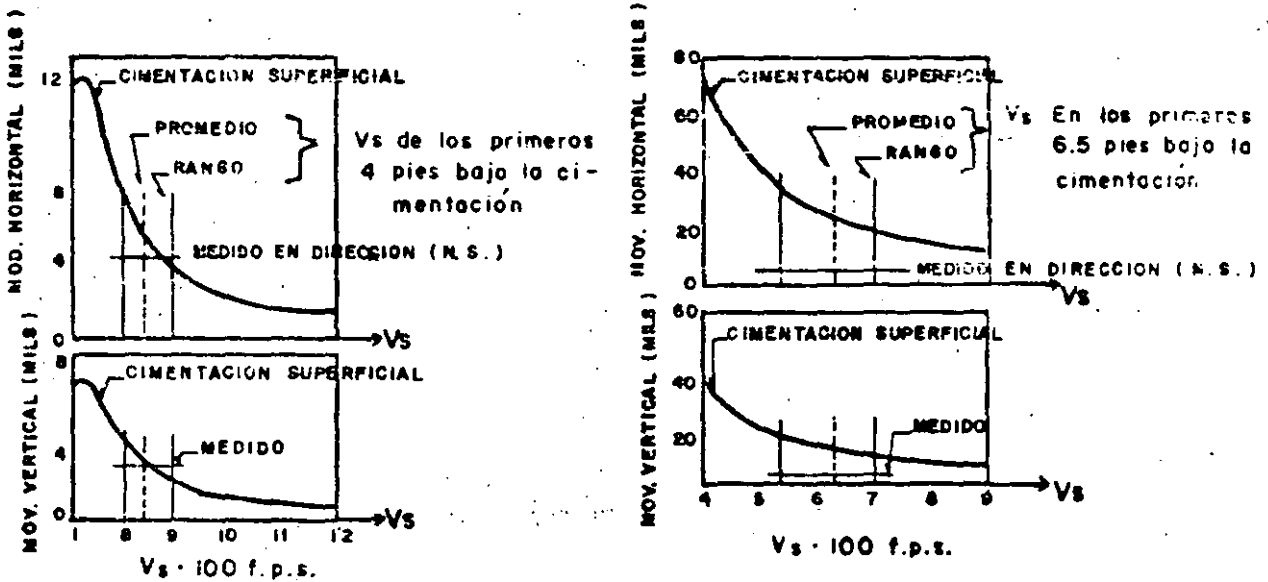
Fig. 3.d.9. DEFINICION DE GEOMETRIA DE CIMENTACION



a).- Distribución de esfuerzos verticales y profundidad crítica



b).- Sustitución por un semiespacio

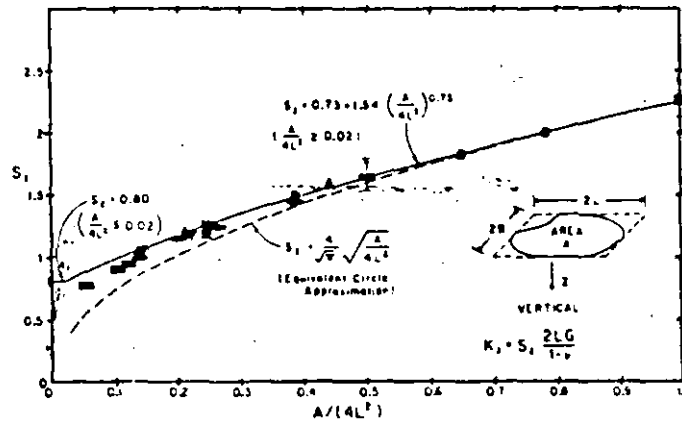


cimentación de compresor de aire

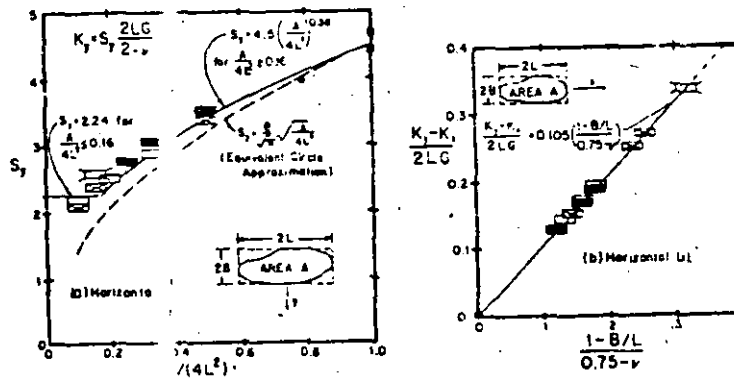
cimentación de bomba de vacío

c).- Comparación entre respuestas medidas y calculadas (Ref. 49)

Fig. 3.d.10. METODOS PARA CONSIDERAR LA G EQUIVALENTE



a).- Factor de forma para rigidez estática vertical



b).- Factores de forma para rigidez estática horizontal

Fig 3.d.II.- FACTORES DE FORMA PARA MODOS TRASLACIONALES
(REF. 15)

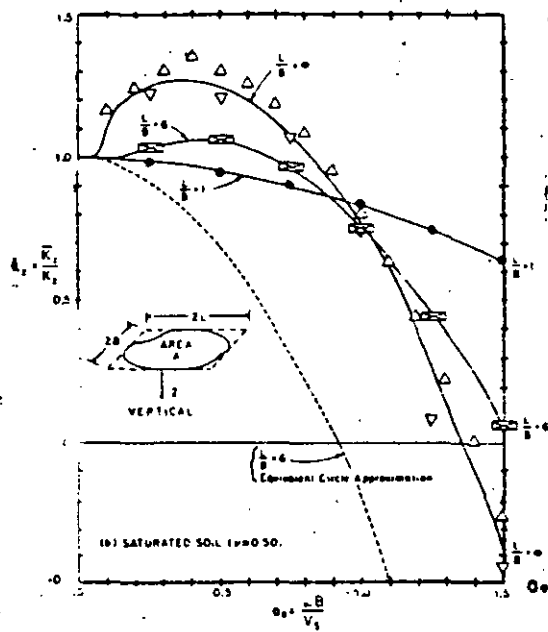
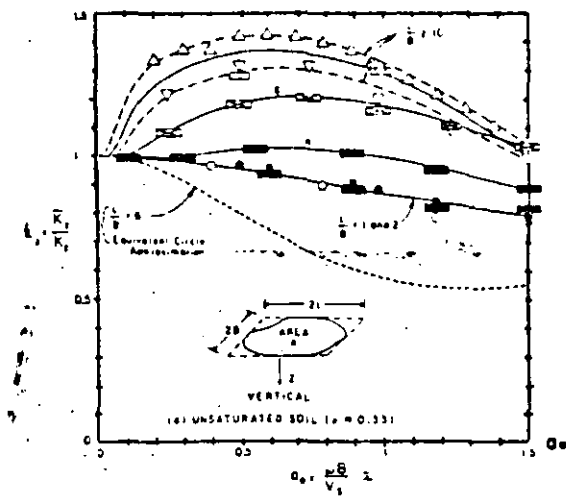


Fig 3.d.12.- COEFICIENTE DE VARIACION DE RIGIDEZ DINAMICA ; MODO TRASLACION VERTICAL.

(REF. 15)

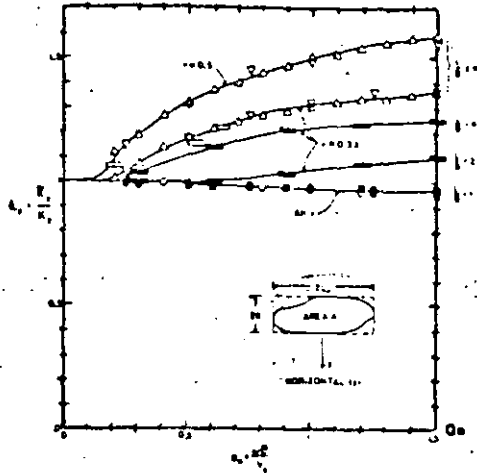
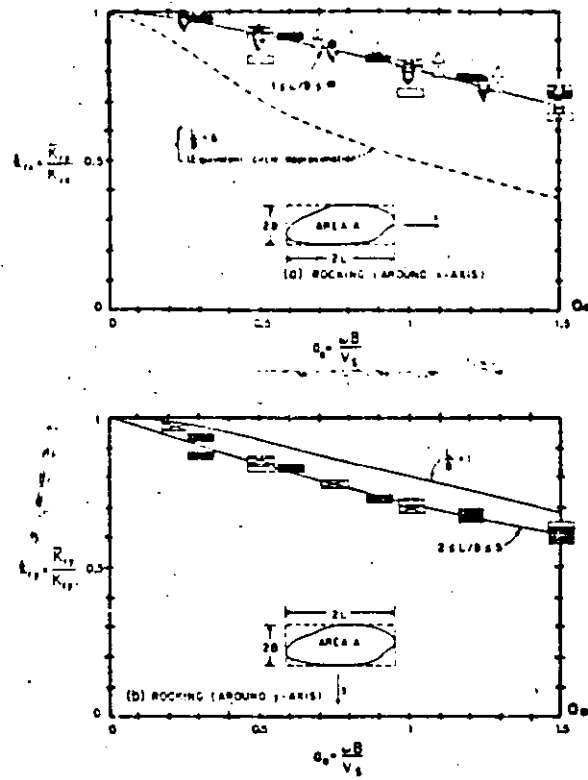
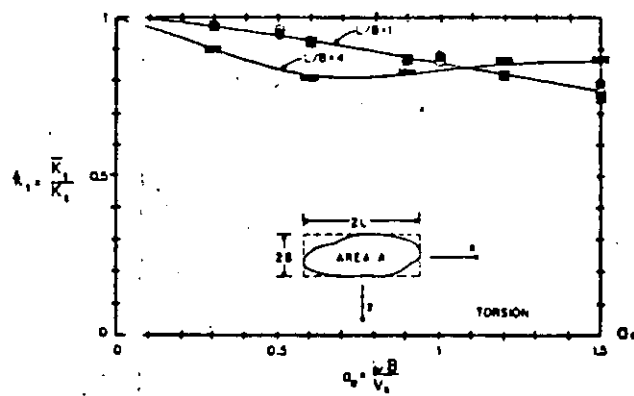


Fig. 3.d.13.- COEFICIENTE DE VARIACION DE RIGIDEZ DINAMICA
 MODO TRASLACION HORIZONTAL TRANSVERSAL
 (REF. 15)

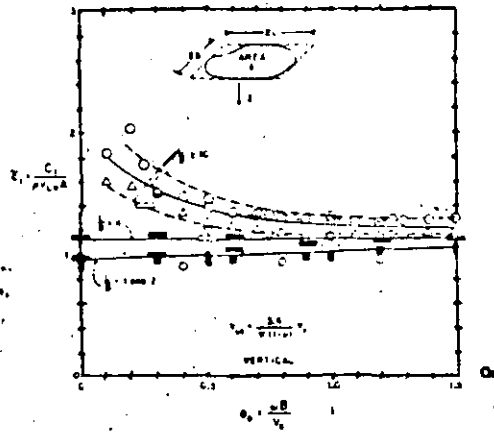


a).- Cabeceo

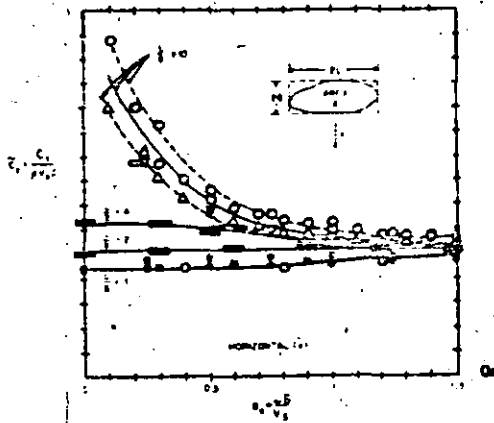


b).- Torsión

Fig 3.d.14.- COEFICIENTE DE VARIACION DE LA RIGIDEZ DINAMICA PARA MODOS ROTACIONALES (REF. 15)

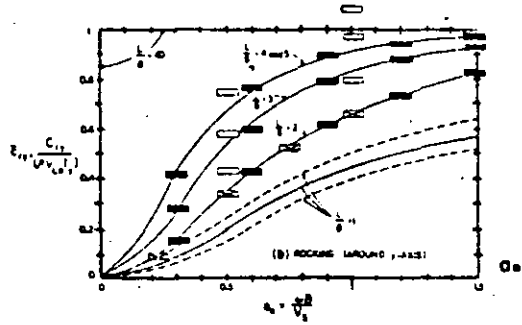
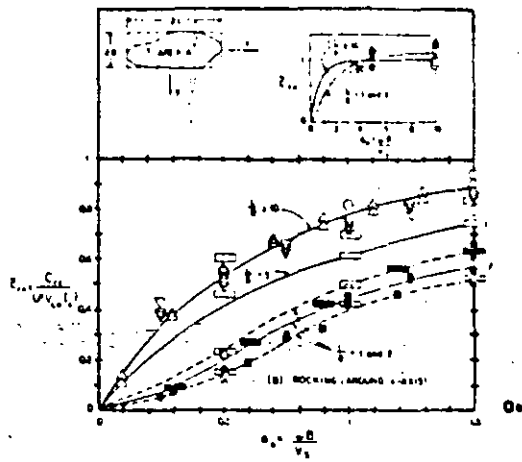


a).- Modo traslación vertical

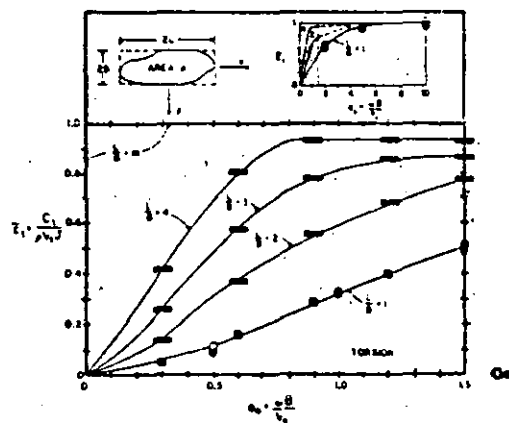


b).- Modo traslación horizontal

Fig. 3. d.15.- COEFICIENTE DE VARIACION DEL AMORTIGUAMIENTO PARA MODOS TRASLACIONALES (REF. 15)



a).- Modo cabeceo



b).- Modo torsión

Fig. 3.d.16- COEFICIENTE DE VARIACION DEL AMORTIGUAMIENTO PARA MODOS ROTACIONALES (REF. 15)

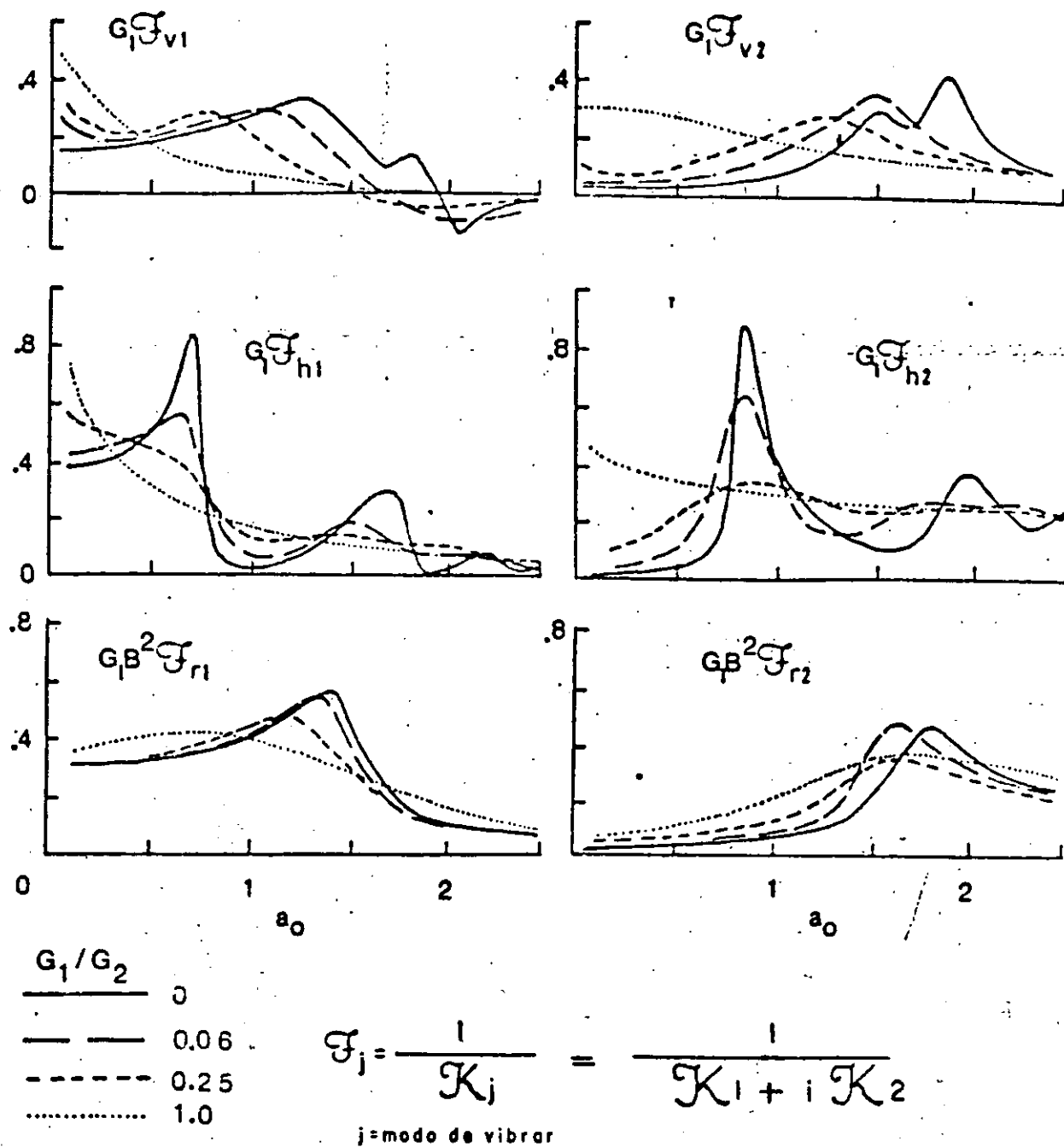


Fig. 3. d.17 EFECTO DE LA RELACION G_1/G_2 EN LAS FUNCIONES DE IMPEDANCIA DE UNA ZAPATA CORRIDA APOYADA SOBRE ESTRATO SOBRE SEMIESPACIO ($H/B = 2$, $\nu = 0.40$, $\xi = 0.05$) REF. 24.

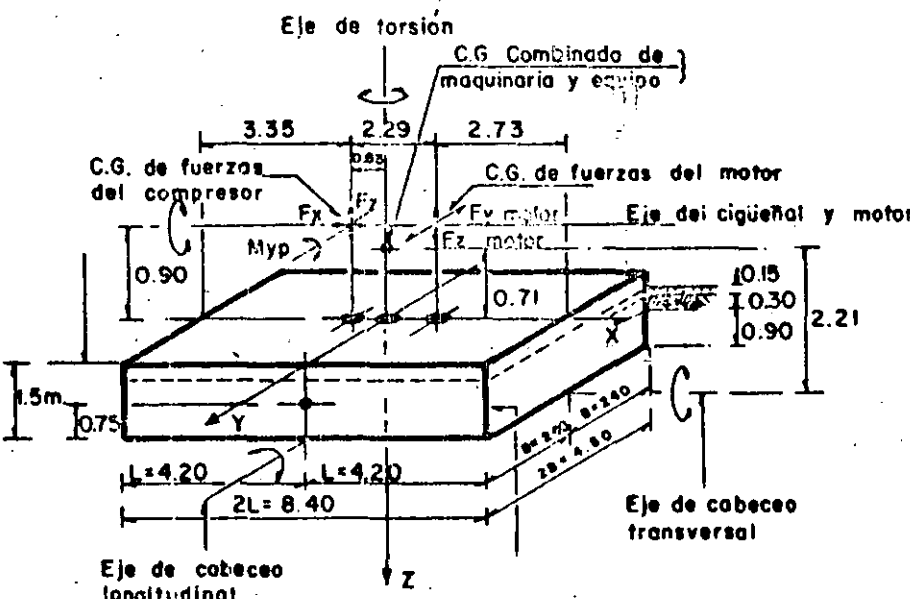
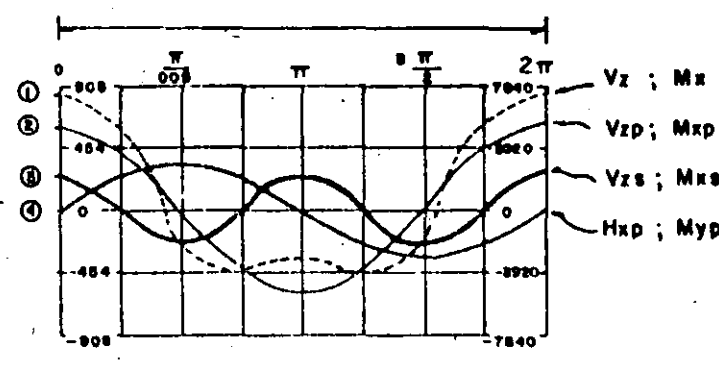
MODO DE VIBRAR		ACCIONES
VERTICAL		$V_z = 603 \cos \Omega t + 251 \cos 2 \Omega t$ $V_{zp} = 603 \cos \Omega t$ $V_{zs} = 251 \cos 2 \Omega t \quad [Kg.]$
HORIZONTAL TRANSVERSAL (No existe)		
HORIZONTAL LONGITUDINAL	<p>a).- Dimensiones propuestas</p> 	$H_{xp} = 329 \sin \Omega t$ <p style="text-align: right;">[Kg.]</p>
CABECEO TRANSVERSAL		$M_x = 4705 \cos \Omega t + 1709 \cos 2 \Omega t$ $M_{xp} = 4705 \cos \Omega t$ $M_{xs} = 1709 \cos 2 \Omega t \quad [Kg.-m.]$
CABECEO LONGITUDINAL		$M_{yp} = 1564 \sin \Omega t$ <p style="text-align: right;">[Kg.-m.]</p>
TORSION (No existe)	<p>b).- Fuerzas actuantes debido a maquinaria</p>	<p>① Combinación de fuerzas verticales Combinación de momentos verticales</p> <p>② Fuerza vertical primaria Momento vertical primario</p> <p>③ Fuerza vertical secundaria Momento vertical secundario</p> <p>④ Fuerza horizontal primaria Momento horizontal primario</p>

Fig. 4.1 ESQUEMA Y DATOS PARA EL PROBLEMA 1

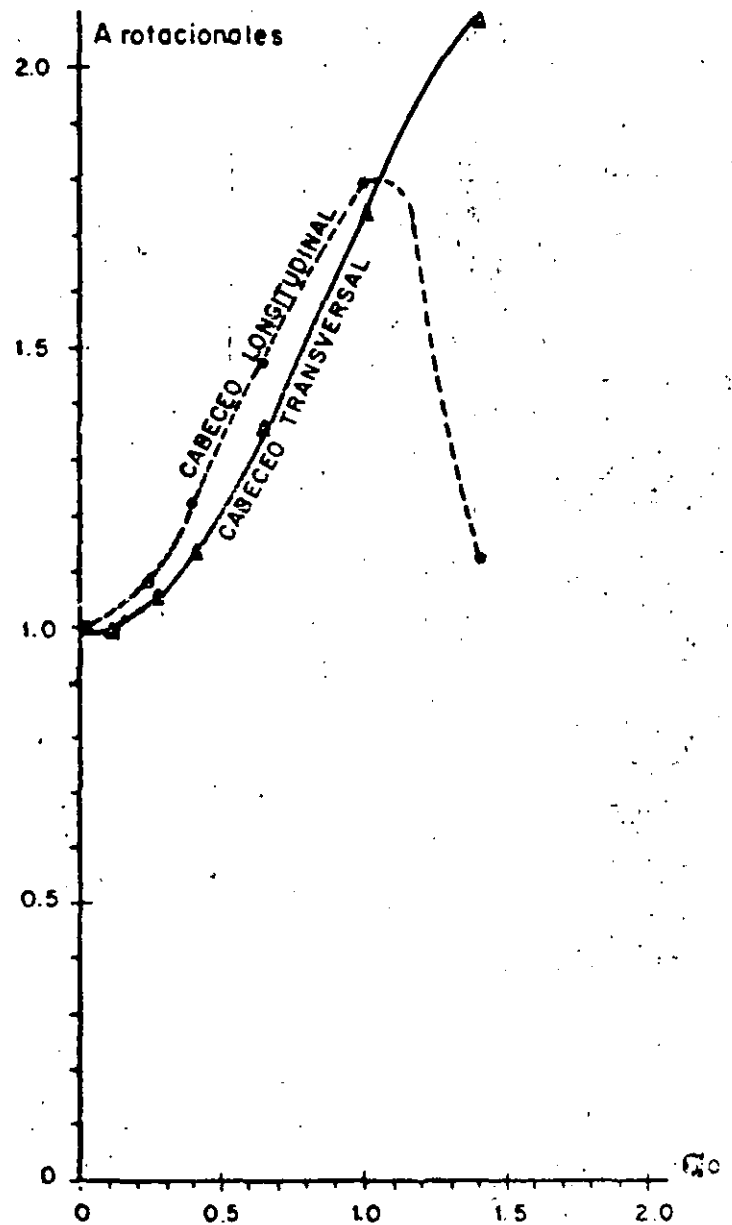
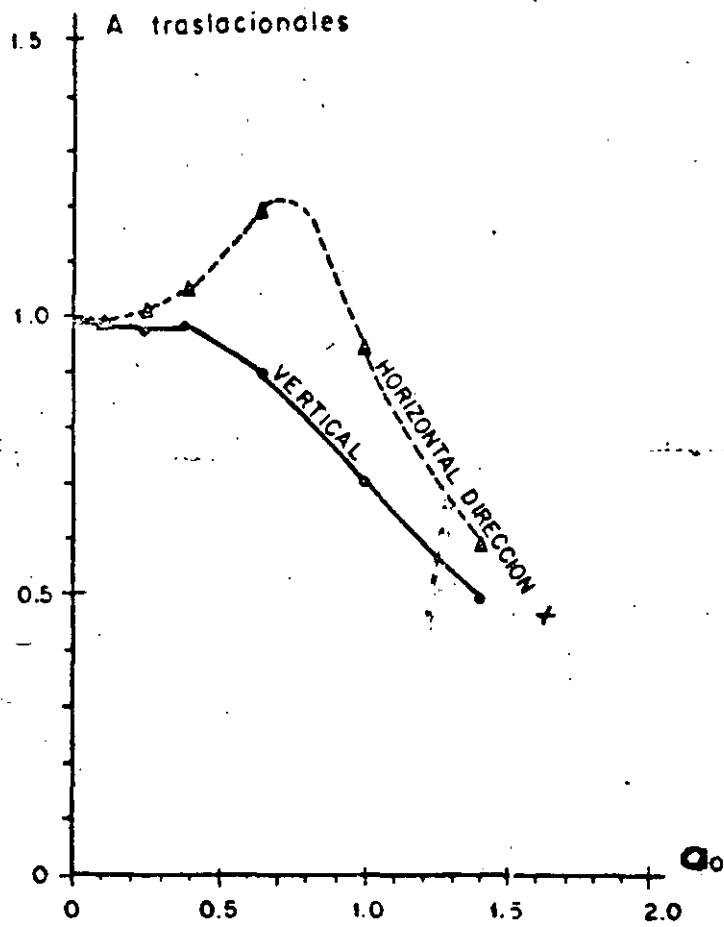


Fig. 4.2 RESPUESTA DE LA VIBRACION DEL PROBLEMA 1 EN TERMINOS DEL FACTOR DE AMPLIFICACION (A)

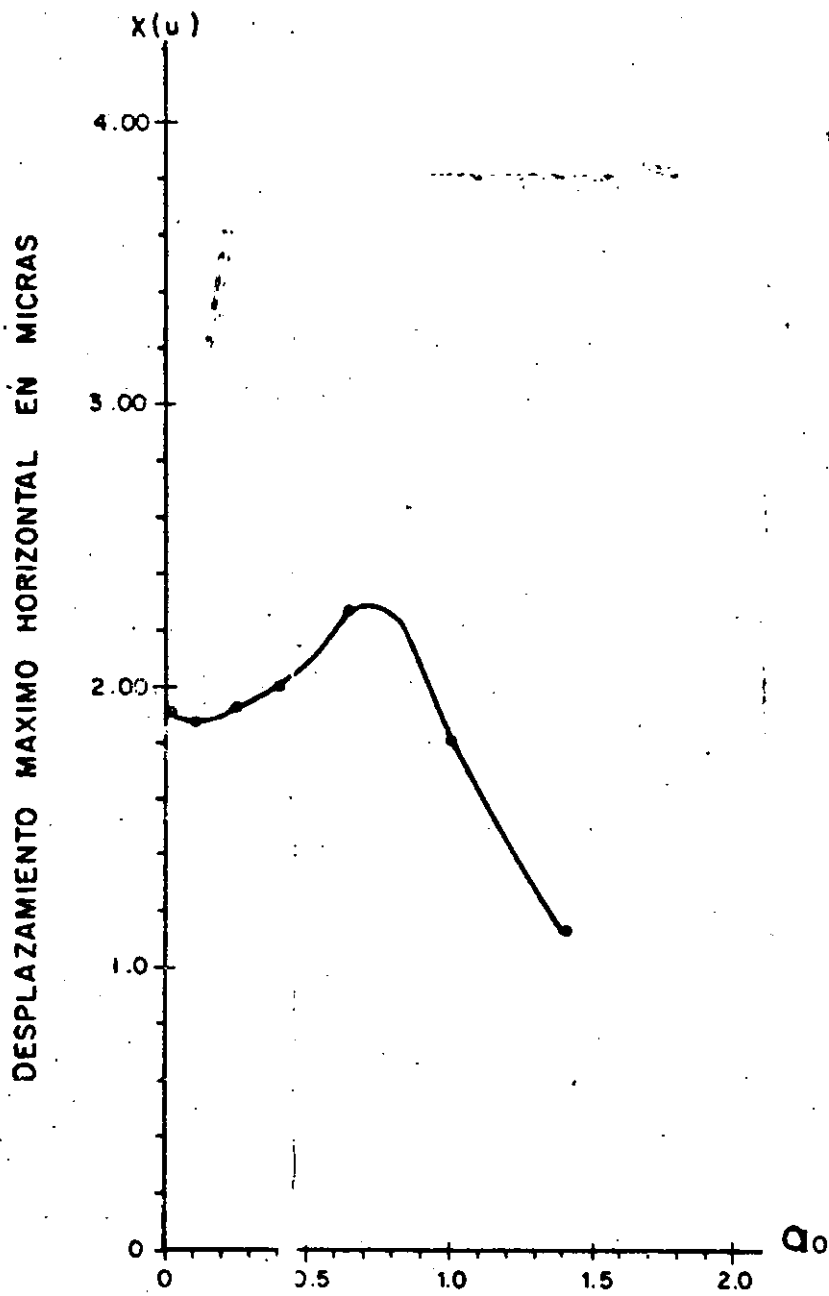
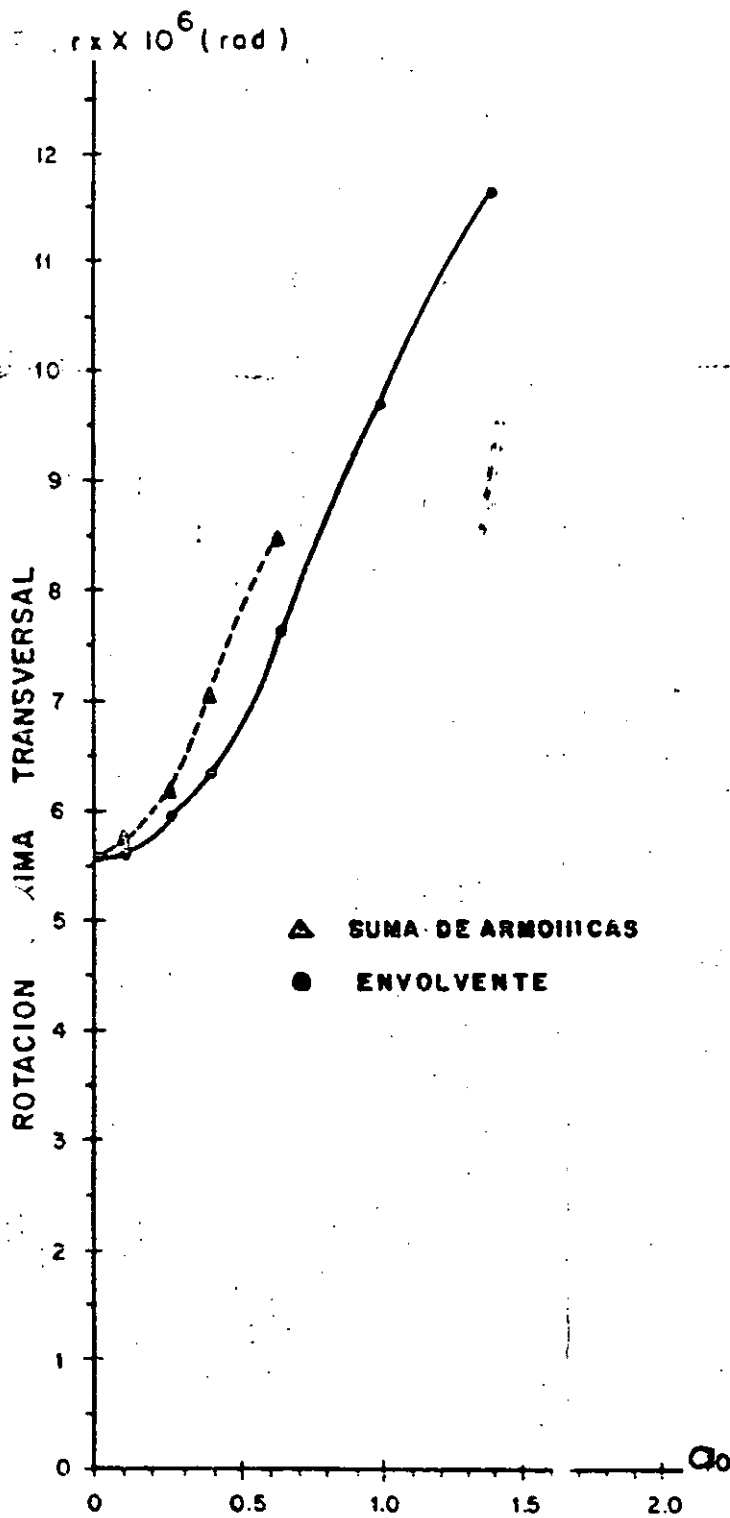
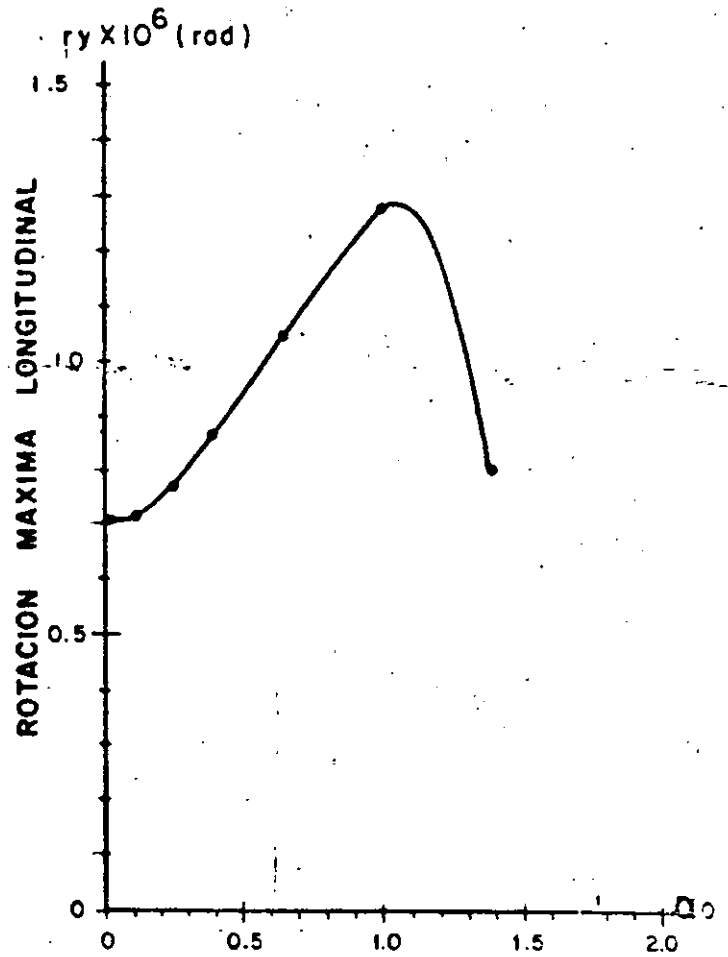


Fig. 4.3 - DESPLAZAMIENTOS MAXIMOS HORIZONTALES DIRECCION X



a).- Rotación alrededor del eje X



b).- Rotación alrededor del eje Y

Fig. 4.4 DESPLAZAMIENTOS MAXIMOS DE ROTACION

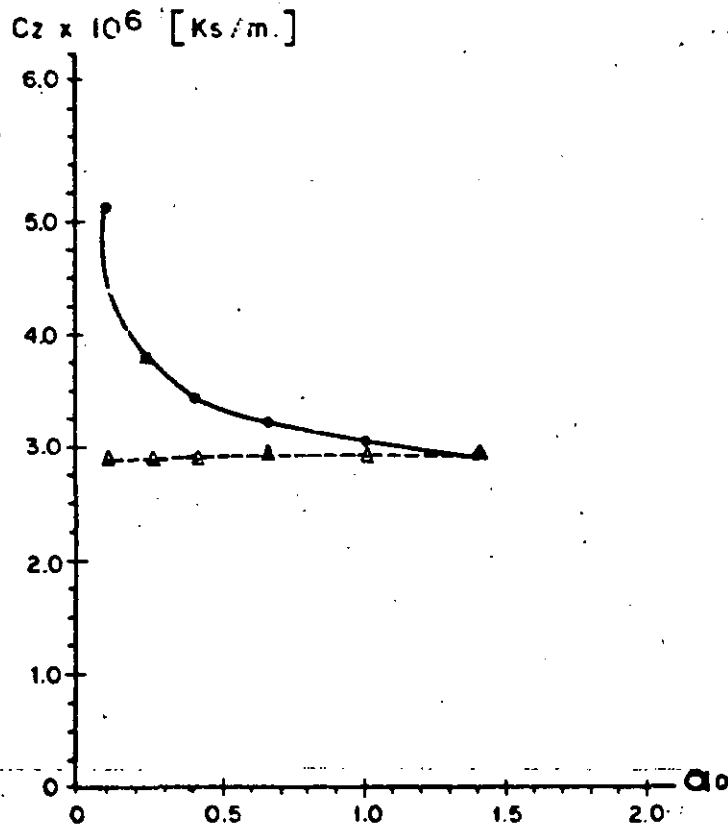
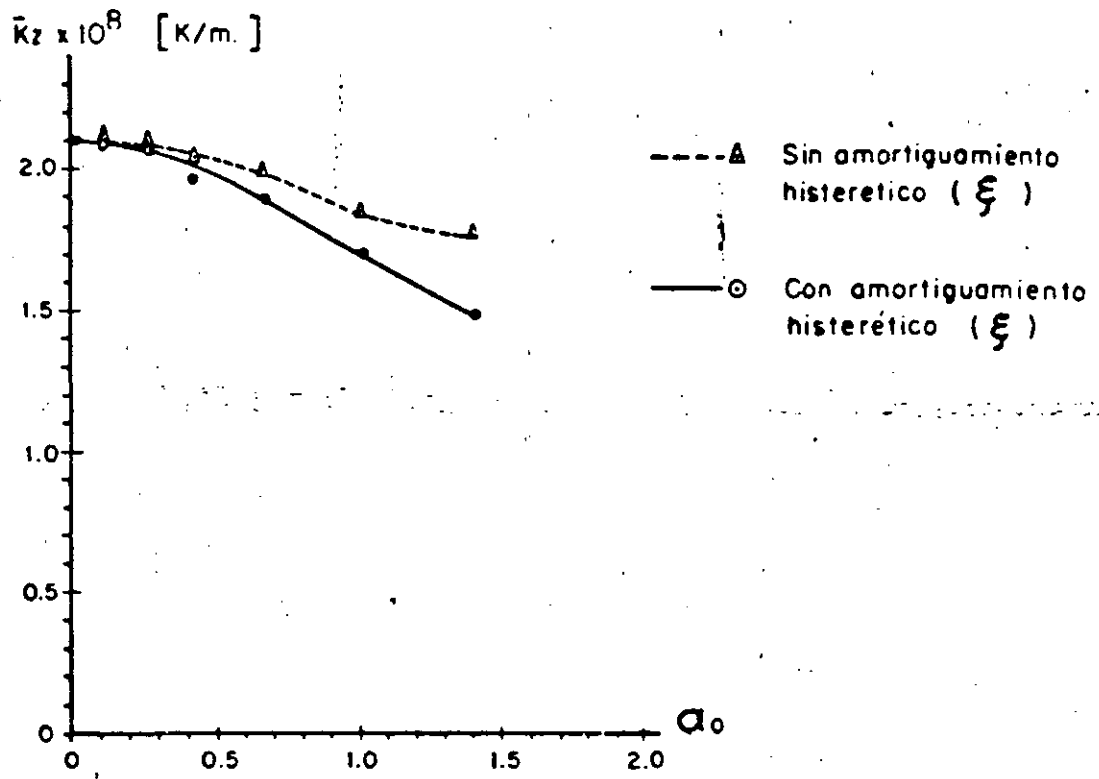


Fig. 4.5 PARAMETROS PARA IMPEDANCIAS VERTICALES

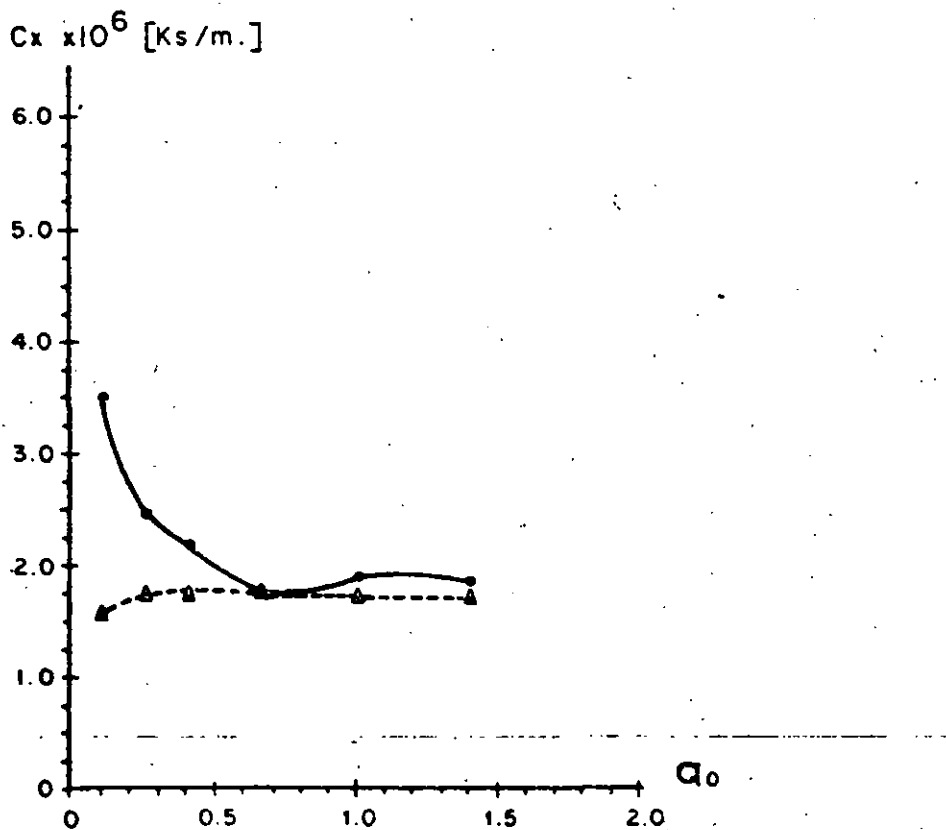
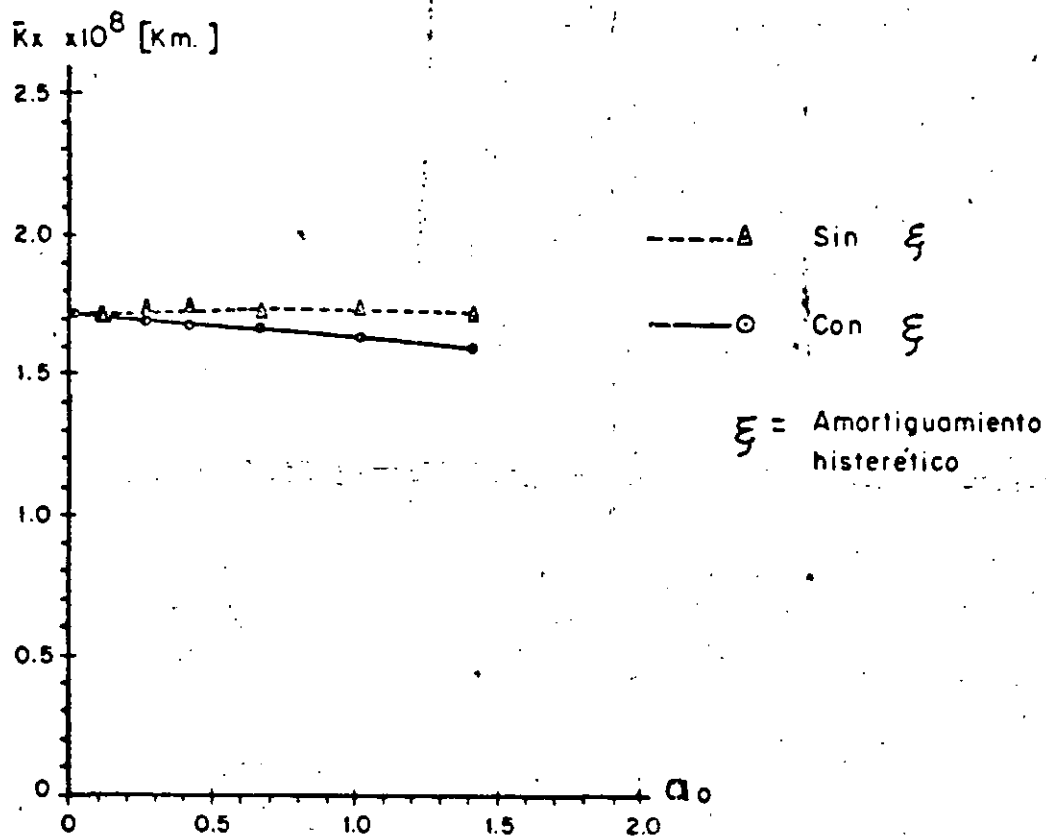


Fig. 4.6 PARAMETROS PARA IMPEDANCIAS HORIZONTALES DIRECCION X

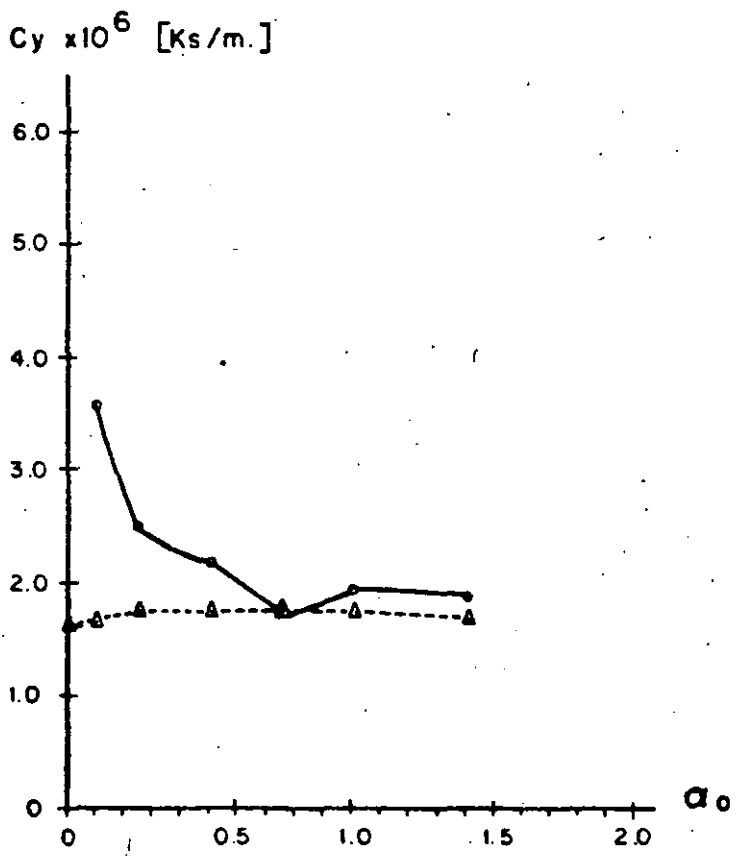
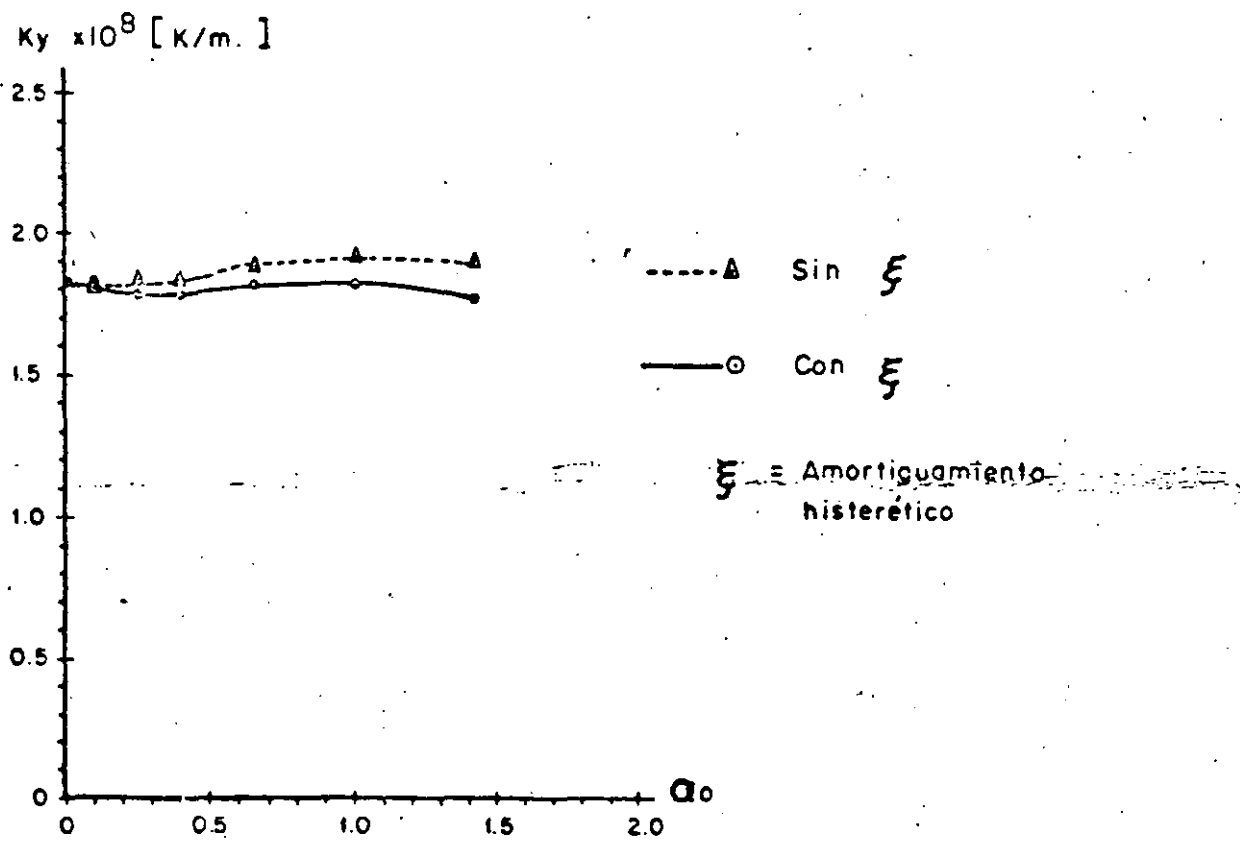


Fig. 4.7 PARAMETROS PARA IMPEDANCIAS HORIZONTALES DIRECCION Y

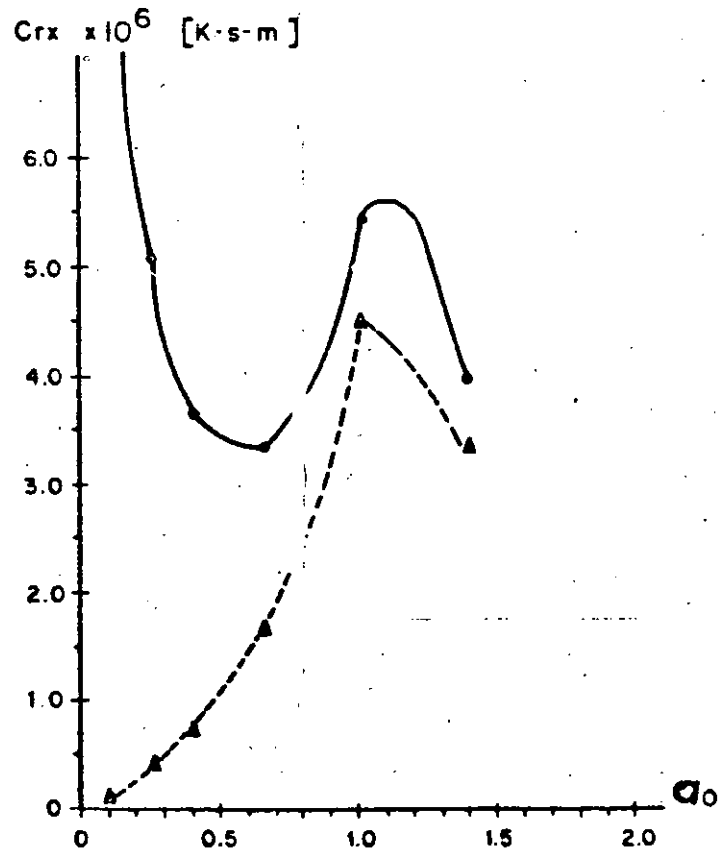
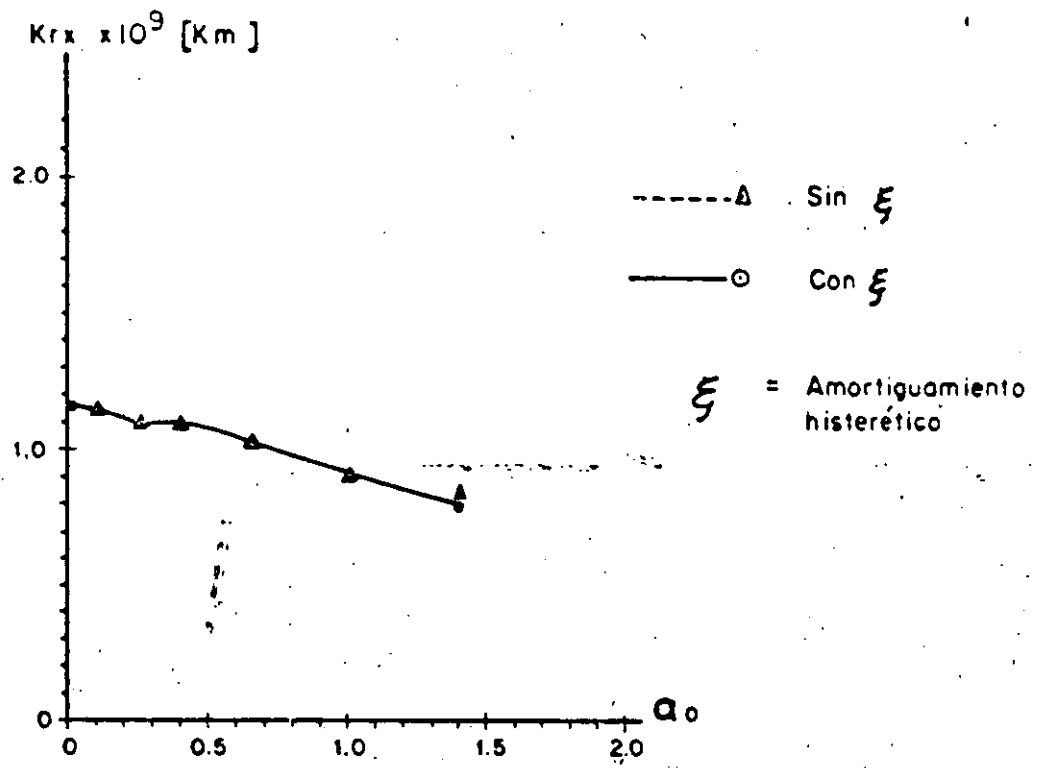


Fig. 4.8 PARAMETROS PARA IMPEDANCIAS ROTACIONALES ALREDEDOR DEL EJE Y 71

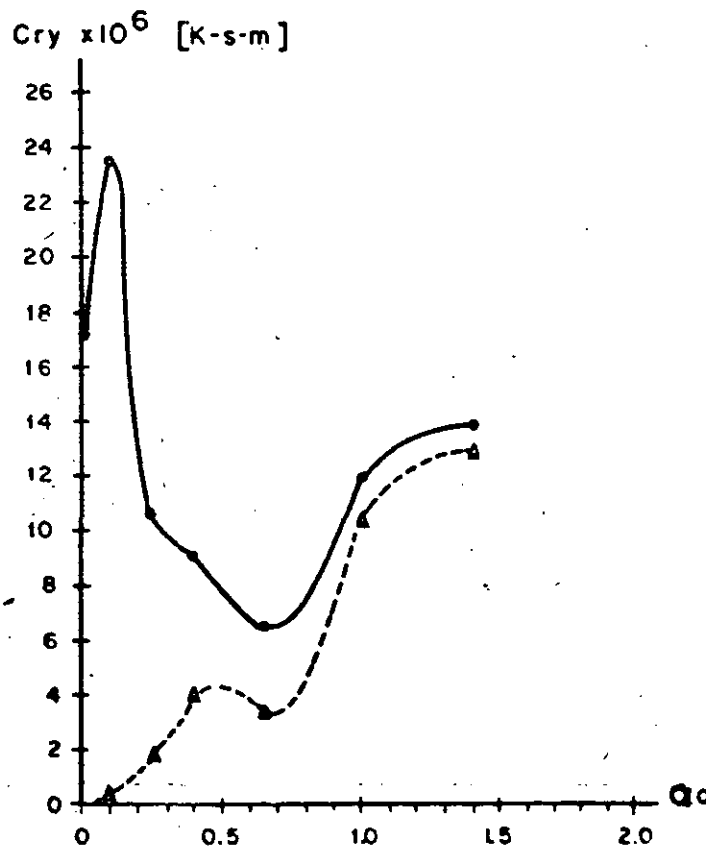
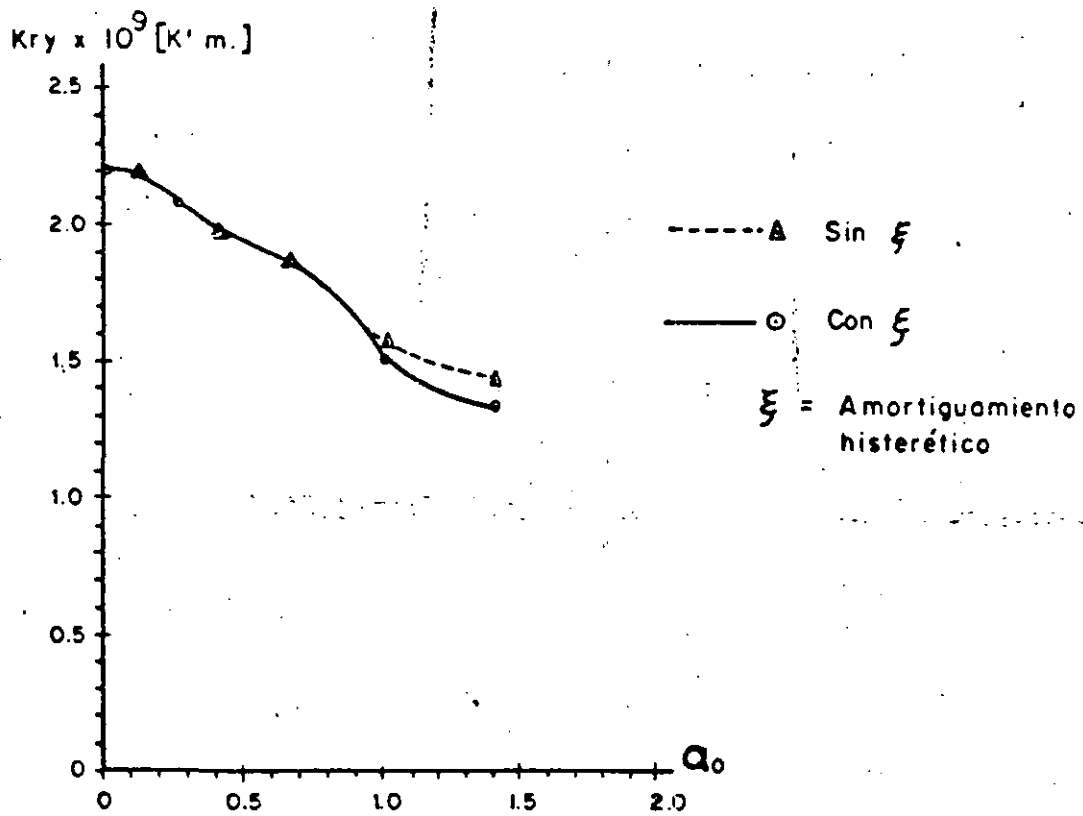


Fig. 4.9 PARAMETROS PARA IMPEDANCIAS ROTACIONALES ALREDEDOR DEL EJE Y

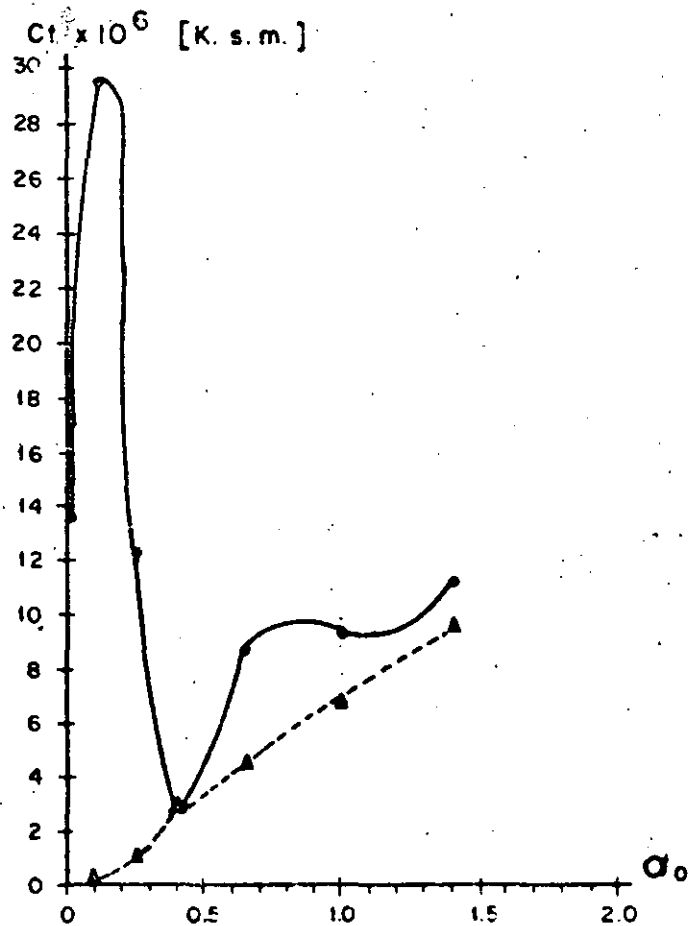
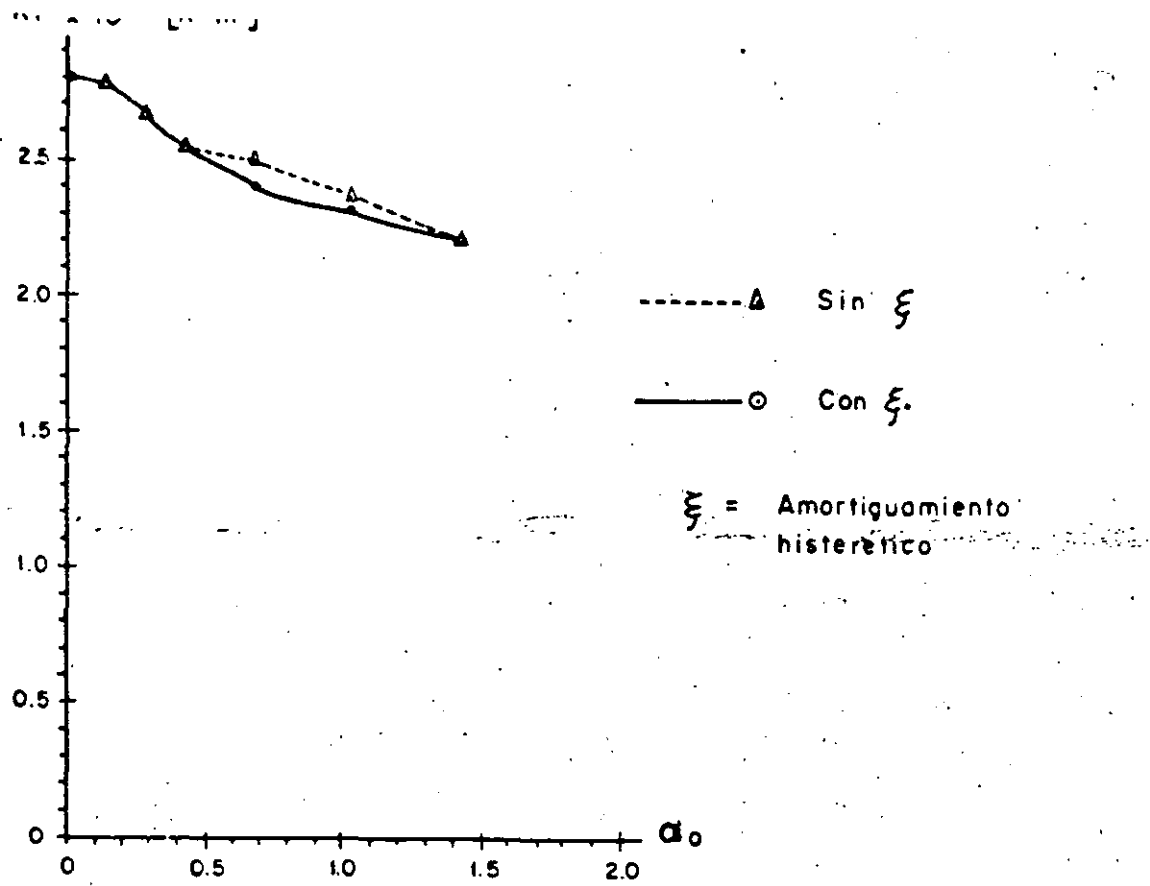


Fig. 4.10 PARAMETROS PARA IMPEDANCIAS DE TORSION

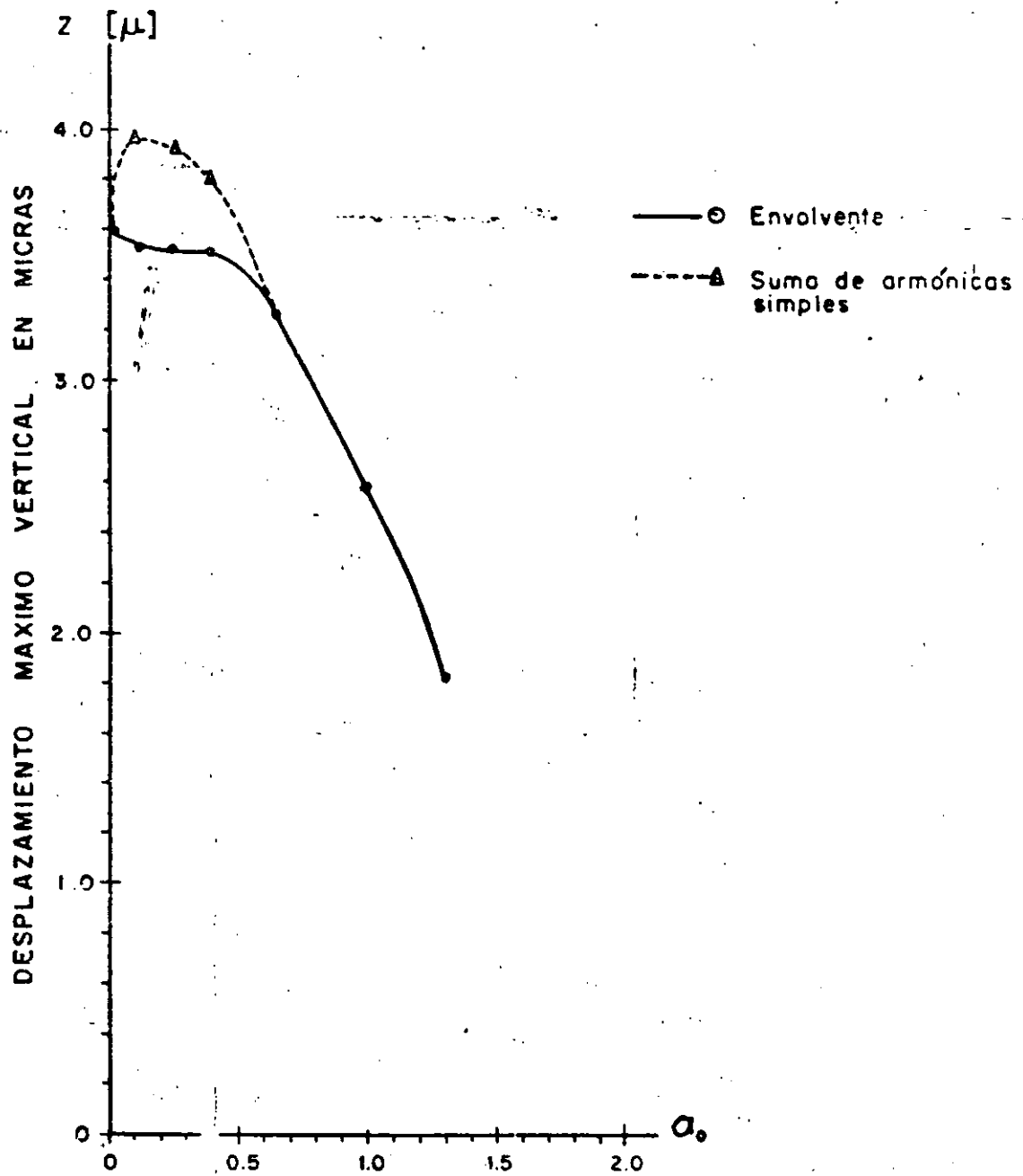
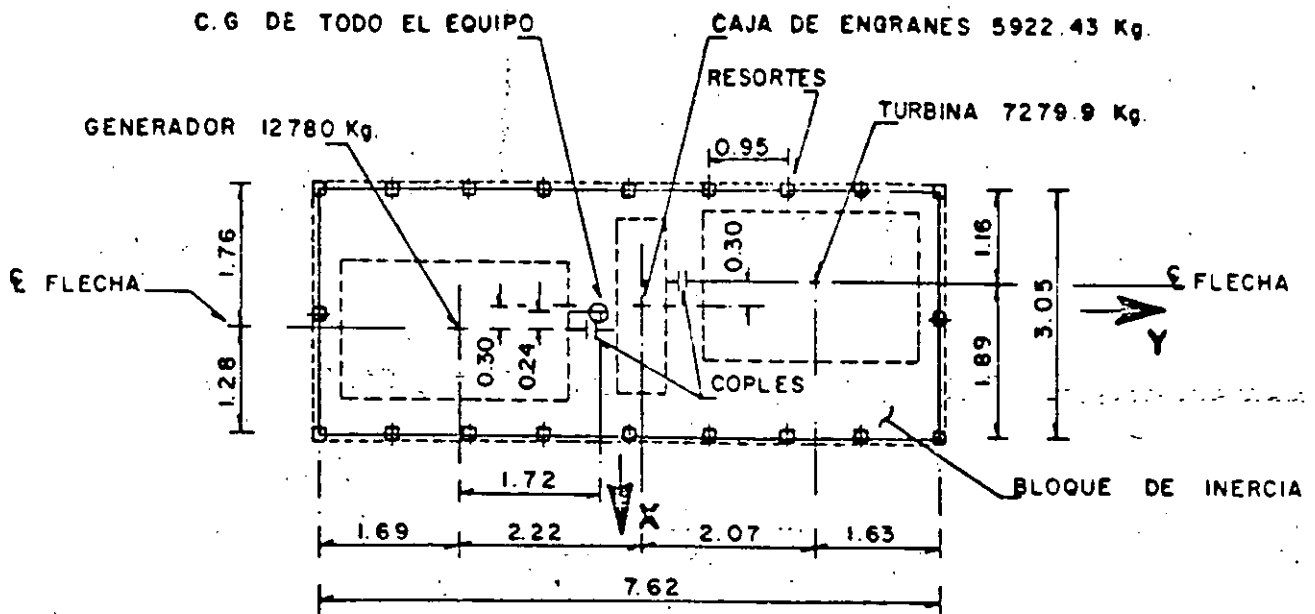
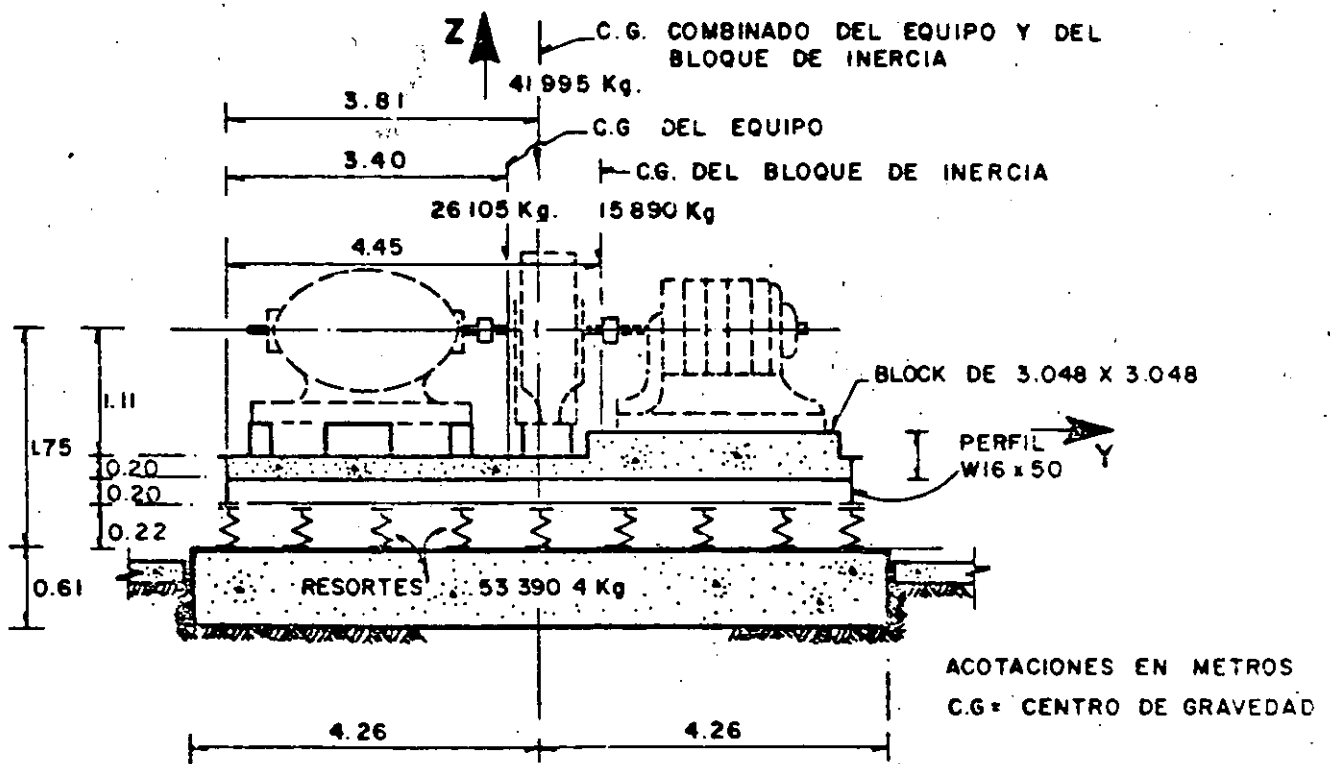


Fig. 4.11 DIFERENCIAS ENCONTRADAS POR EL ANALISIS MODO TRAS ACCION VERTICAL

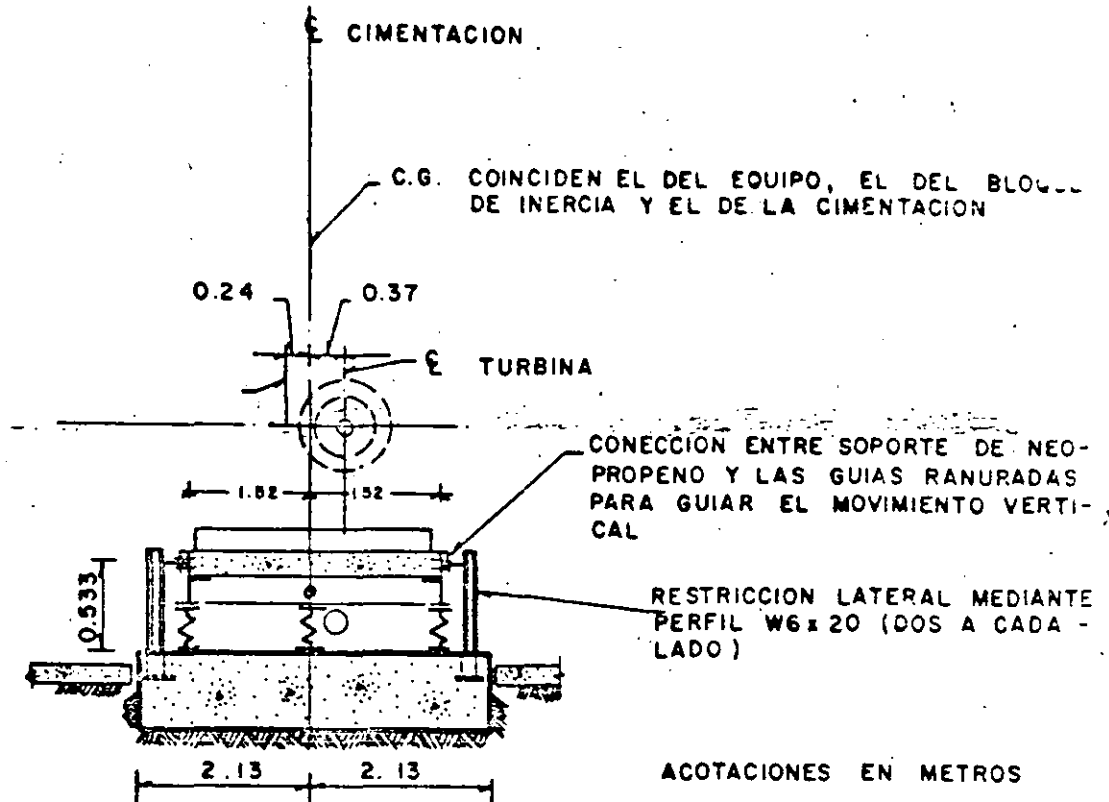


a).- Distribución en planta del equipo

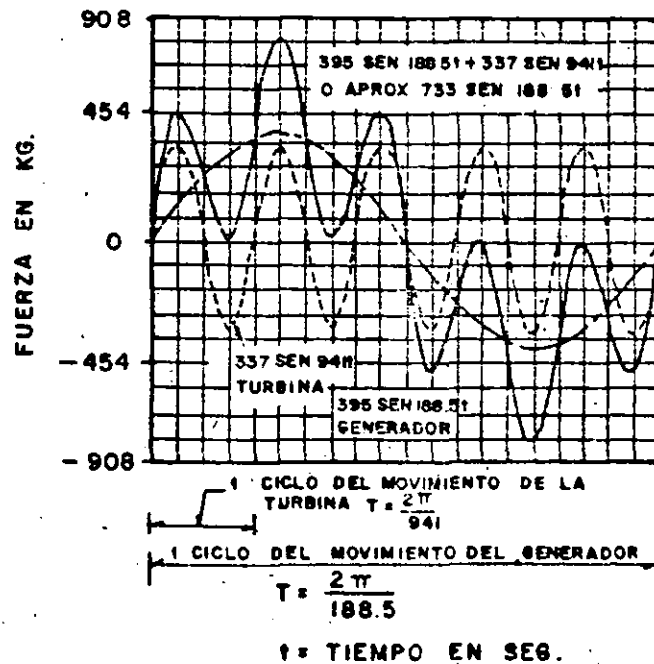


b).- Esquema de la cimentación de las cargas debido al equipo

Fig. 4.12 ESQUEMAS Y DATOS PARA EL PROBLEMA 2



a) - Detalle de restricción lateral



b) - Fuerzas centrífugas desbalanceadas

Fig. 4.13 ESQUEMAS Y DATOS PARA EL PROBLEMA 2 (CONTINUACION)

TABLA 4.1

$\Omega_0 = 0648$

Frecuencia de operación

$R = 61.3$

MODO DE VIBRAR	PARAMETROS REQUERIDOS	FORMULAS USADAS PARA LOS CALCULOS	CALCULO DE RIGIDECES $\bar{K}(\xi) = \bar{K} - \Omega \bar{C}$	CALCULO DE AMORTIGUADORES $\bar{C}(\xi) = \bar{C} + (\frac{2\bar{K}}{\Omega})\xi$	
VERTICAL	DATOS: $\gamma = 1876 \text{ k/m}^3$ $B = 2.4 \text{ m}$ $L = 4.2 \text{ m}$ $f = 9.75 \text{ Hz}$ $\xi = 0.05$	$S_1 = 0.73 + 1.54 (\frac{A}{4L})^{0.75}$ K_2 POR INTERPOLACION EN LA FIGURA 3.4.12 $K_1 = 5 \frac{21G}{1-\nu}$ $C_1 = \frac{34}{\omega(1-\nu)} \rho V A$	$S_2 = 0.73 + 1.54 (0.57)^{0.75} = 1.74$ $K_2 = 1.74 (2 \times 4.2 \times 985E6) / (1-0.35) = 2.1E8 \text{ K/m}$ $K_1 = 0.95 \Rightarrow \bar{K}_1 = 0.95 \times 2.1E8 = 1.99E8 \text{ K/m}$ $R_2(\xi) = 1.99E8 - (61.3)(2.9E6)(0.05) = 1.9E8 \text{ K/m}$	$V_1 = (3.4) 227 / (13.416)(1-0.35) = 378 \text{ m/s}$ $\bar{C}_1 = 1$ $\bar{C}_2 = (1)(378)(191.23)(40.22) = 2.9E6 \frac{\text{Kg}}{\text{m}}$ $\bar{C}_2(\xi) = 2.9E6 + (\frac{2(1.99E8)}{61.3})(0.05) = 3.2E6 \frac{\text{Kg}}{\text{m}}$	
HORIZONTAL TRANSVERSAL	$\Omega = 2\pi f$ $\Omega = 61.3 \text{ rad/2}$	$S_1 = 4.5 (\frac{A}{4L})^{0.38}$ K_y POR INTERPOLACION EN LA FIGURA 3.4.13 $C_1 = \rho V A$	$S_y = 4.5 (0.57)^{0.38} = 3.63$ $K_y = 3.63 (2 \times 4.2 \times 985E6) / (2-0.35) = 1.82E8 \text{ K/m}$ $K_y = 1.03 \Rightarrow \bar{K}_y = (1.03)(1.82E8) = 1.87E8 \text{ K/m}$ $\bar{K}_y(\xi) = 1.87E8 - 61.3(1.74E6)(0.05) = 1.81E8 \text{ K/m}$	$\bar{C}_y = 1$ $\bar{C}_y = (1)(191)(227)(40.22) = 1.74E6 \frac{\text{Kg}}{\text{m}}$ $\bar{C}_y(\xi) = 1.74E6 + \frac{2(1.87E6)}{61.3}(0.05) = 1.74E6 \frac{\text{Kg}}{\text{m}}$	
HORIZONTAL LONGITUDINAL	$A = 4LB$ $I_x = \frac{4}{3} LB^3$ $I_y = \frac{4}{3} L^3 B$	$A = 40.22 \text{ m}$ $I_x = 77.4 \text{ m}^4$ $I_y = 237 \text{ m}^4$	$K_x = K_y = \frac{0.71G}{0.75-\nu} (1 - \frac{B}{L})$ $K_x = 1$ $C_1 = \rho V A$ $C_2 = C_1$	$K_x = 1.82E8 - \frac{0.21(42)(985E6)}{(0.75-0.35)} (1-0.57) = 1.72E8 \text{ K/m}$ $\bar{K}_x = K_x \Rightarrow \bar{K}_x = 1.72E8 \text{ K/m}$ $\bar{K}_x(\xi) = 1.72E8 - 61.3(1.74E6)(0.05) = 1.66E8 \text{ K/m}$	$C_x = (1)(191)(227)(40.22) = 1.74E6 \frac{\text{Kg}}{\text{m}}$ $\bar{C}_y = \bar{C}_x = 1$ $\bar{C}_x(\xi) = 1.74E6 + \frac{2(1.72E6)}{61.3}(0.05) = 1.74E6 \frac{\text{Kg}}{\text{m}}$
CABECEO TRANSVERSAL	$J = \frac{4}{3} LB(L^2 + B^2)$ $J = 314.5 \text{ m}^4$ $\frac{A}{4L^2} = \frac{B}{L} = 0.57$ $\frac{A}{B} = 1.75$	$J = 314.5 \text{ m}^4$ $\frac{A}{B} = 1.75$	$S_1 = 3.2 \ln \frac{B}{L} > 0.4$ K_{fx} POR INTERPOLACION EN LA FIGURA 3.4.14 G $K_{fx} = 5 \frac{G}{1-\nu} (I_x)^{0.38}$ $C_1 = \frac{34}{\omega(1-\nu)} \rho V I_x$	$S_{rx} = 3.2$ $K_{rx} = 3.2 (\frac{98E6}{1-0.35})(77.4)^{0.38} = 1.27E9 \text{ K-m}$ $K_{rx} = 0.9 \Rightarrow \bar{K}_{rx} = (0.9)(1.05E9) = 1.05E9 \text{ K-m}$ $\bar{K}_{rx}(\xi) = 1.05E9 - 61.3(1.67E6)(0.05) = 1.02E9 \text{ K-m}$	$C_{rx} = (378)(191.23)(77.4) = 5.6E6 \text{ Kg-m}$ $\bar{C}_{rx} = 0.3 \Rightarrow \bar{C}_{rx} = 1.67E6 \text{ Kg-m}$ $\bar{C}_{rx}(\xi) = 1.67E6 + \frac{2(1.05E9)}{61.3}(0.05) = 3.35E6 \text{ Kg-m}$
CABECEO LONGITUDINAL	$\rho = \frac{\gamma}{g}$ $\rho = 191.23 \frac{\text{UTM}}{\text{m}^3}$ $V_0 = (\frac{g}{\rho})^{1/2}$ $V_0 = 227 \text{ m/2}$	$\rho = 191.23 \frac{\text{UTM}}{\text{m}^3}$ $V_0 = 227 \text{ m/2}$	$S_1 = 3.2$ K_{ry} POR INTERPOLACION EN LA FIGURA 3.4.14 G $K_{ry} = 5 \frac{G}{1-\nu} (I_y)^{0.38}$ $C_1 = \frac{34}{\omega(1-\nu)} \rho V I_y$	$S_{ry} = 3.2$ $K_{ry} = 3.2 (\frac{9.8}{1-0.35})(237)^{0.38} = 2.2E9 \text{ K-m}$ $K_{ry} = 0.85 \Rightarrow \bar{K}_{ry} = (0.85)(2.2E9) = 1.88E9 \text{ K-m}$ $\bar{K}_{ry}(\xi) = 1.88E9 - 61.3(3.42E6)(0.05) = 1.87E9 \text{ K-m}$	$C_{ry} = (378)(191.23)(237) = 1213E6 \text{ K-m}$ $\bar{C}_{ry} = 0.2 \Rightarrow \bar{C}_{ry} = 3.42E6 \text{ Kg-m}$ $\bar{C}_{ry}(\xi) = 3.42E6 + \frac{2(1.88E9)}{61.3}(0.05) = 6.5E6 \text{ Kg-m}$
TORSION	$\Omega_0 = \frac{\Omega B}{V_0}$ $\Omega_0 = 0.648$	$\Omega_0 = 0.648$	$K_t = 5.0(I_p)^{0.75}$ $S_1 = 3.8 + 10.7 (1 - \frac{B}{L})^{0.75}$ K_t POR INTERPOLACION EN LA FIGURA 3.4.14.B $C_1 = \rho V I_p$	$S_t = 3.8 + 10.7 (1 - 0.57)^{0.75} = 3.8$ $K_t = 3.8 (98E6)(314.5)^{0.75} = 2.78E9 \text{ K-m}$ $K_t = 0.9 \Rightarrow \bar{K}_t = 0.9(2.78E9) = 2.5E9 \text{ K-m}$ $\bar{K}_t(\xi) = 2.5E9 - 61.3(4.6E6)(0.05) = 2.4E9$	$C_t = (191)(227)(314) = 13.6E6 \text{ Kg-m}$ $\bar{C}_t = 0.34 \Rightarrow \bar{C}_t = 4.6E6 \text{ Kg-m}$ $\bar{C}_t(\xi) = 4.6E6 + \frac{2(2.6E9)}{61.3}(0.05) = 8.7E6 \text{ Kg-m}$
EXPRESIONES PARA INCORPORAR EL AMORTIGUAMIENTO HISTERETICO			$\bar{K}(\xi) = \bar{K} - 2\xi\bar{C}$	$\bar{C}(\xi) = \bar{C} + \frac{2\xi\bar{K}}{\Omega}$	

TABLA 4.2

$\alpha_0 = 0.648$

$\Omega = 61.3 \text{ rad/s}$

$M = 17693 \text{ UTM}$

$I_{xx} = 53129.7 \text{ K-s}^2\text{m}$

$I_{yy} = 112600.5 \text{ K-s}^2\text{m}$

MODO DE VIBRAR	$(\Omega) = \sqrt{K_1 - M\Omega^2}^2 + K_2^2$	$K_i(\Omega) = \bar{K}_i(\xi) =$	$K_2(\Omega) = \bar{c}_i(\xi)\Omega$
VERTICAL	$K_z(\Omega) = 2.31\text{E}8 \text{ K/m}$	$K_z(\Omega) = 1.9\text{E}8 \text{ K/m}$ $K - M\Omega^2 = 1.23\text{E}8 \text{ K/m}$	$K_{2z}(\Omega) = 3.2\text{E}6(61.3) = 1.96\text{E}8 \text{ K/m}$
HORIZONTAL TRANSVERSAL	$K_y(\Omega) = 1.56\text{E}8 \text{ K/m}$	$K_{iy}(\Omega) = 1.81\text{E}8 \text{ K/m}$ $K - M\Omega^2 = 1.145\text{E}8 \text{ K/m}$	$K_{2y}(\Omega) = 1.74\text{E}6(61.3) = 1.06\text{E}8 \text{ K/m}$
HORIZONTAL LONGITUDINAL	$K_x(\Omega) = 1.45\text{E}8 \text{ K/m}$	$K_{ix}(\Omega) = 1.66\text{E}8 \text{ K/m}$ $- M\Omega^2 = 0.99\text{E}8 \text{ K/m}$	$K_{2x}(\Omega) = 1.74\text{E}6(61.3) = 1.06\text{E}8 \text{ K/m}$
CABECEO TRANSVERSAL	$K_{rx}(\Omega) = 0.84\text{E}9 \text{ K/m}$	$K_{irx}(\Omega) = 1.02\text{E}9 \text{ K/m}$ $K - I_x\Omega^2 = 0.82\text{E}9 \text{ K/m}$	$K_{2rx}(\Omega) = 3.35\text{E}6(61.3) = 0.205\text{E}9 \text{ K/m}$
CABECEO LONGITUDINAL	$K_{ry}(\Omega) = 1.49\text{E}9 \text{ K/m}$	$K_{iry}(\Omega) = 1.87\text{E}9 \text{ K-m}$ $K - I_y\Omega^2 = 1.44\text{E}9 \text{ K-m}$	$K_{2ry}(\Omega) = 6.5\text{E}6(61.3) = 0.4\text{E}9 \text{ K-m}$
TORSION	$K_t(\Omega) =$	$K_{it}(\Omega) = 2.4\text{E}9 \text{ K-m}$ $K - J\Omega^2 =$	$K_{2t}(\Omega) = 8.7\text{E}6(61.3) = 0.53\text{E}9 \text{ K-m}$

78

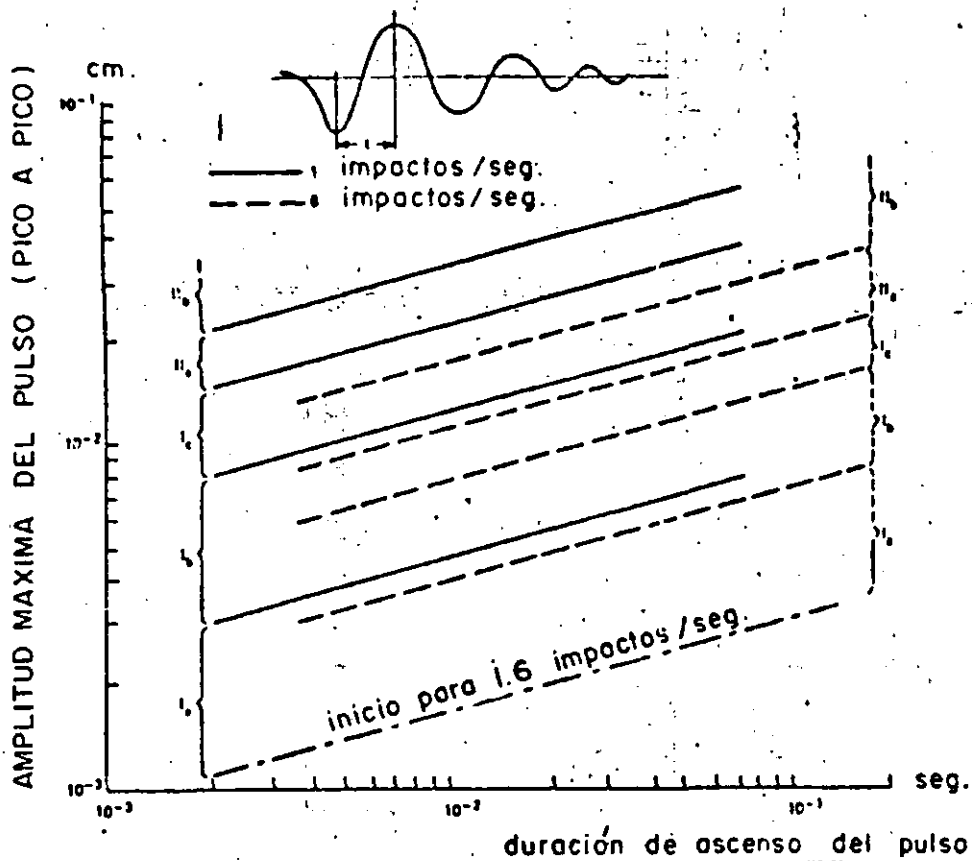
TABLA 4.3. -Resumen de resultados para el problema 1, corresponden a la frecuencia de operación primaria de la máquina, $\omega_0 = 0.65$.

modo de vibrar	acción envolvente	suma de armónicas simples	referencia 3
vertical	3.26 μ	3.26 μ	2.6 μ
horizontal xx	2.27 μ	-----	1.48 μ
cabeceo xx	7.63E-6 rad	8.49E-6 rad.	5.04E-6 rad.
cabeceo yy	1.05E-6 rad	-----	0.84E-6 rad.

TABLA 4.4. -Resumen de resultados para el problema 2

desplazamiento vertical	acción envolvente	suma de armónicas simples	referencia 3
máquina-bloque de inercia.	4.91 μ	2.73 μ	2.73 μ
cimentación	0.01 μ	0.03 μ	se considera nula.

μ = micras



- Ia = Empieza a percibirse
- Ib = De facil percepción
- Ic = De fuerte percepción, molesto
- IIa = Muy desagradable, daño potencial para exposiciones prolongadas
- IIb = Extremadamente desagradable, definitivamente peligroso

El proceso de decaimiento del pulso puede ser de poca importancia práctica.

Fig. A.3 TOLERANCIA DEL HUMANO A IMPACTOS VERTICALES REPETITIVOS (REF. 6)

ANEXO B.- SOLUCION DE LA ECUACION DE EQUILIBRIO DINAMICO.

B.1. SOLUCION DE LA ECUACION DE EQUILIBRIO DINAMICO :

$$R(t) \oplus M \ddot{u}(t) = P(t)$$

ec. B.1

Nota : El símbolo \oplus indica suma vectorial y para referencia úsese la notación de la figura B.1.

RESPUESTA MAXIMA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

$$P(t) = P_0 e^{i\Omega t} \quad \text{ec. B.2}$$

$$R(t) = \mathcal{X} u(t) \quad \text{ec. B.3}$$

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 + i\mathcal{X}_2 \quad \text{ec. B.4}$$

$$u(t) = U_0 e^{i(\Omega t + \phi)} \quad \text{ec. B.5}$$

$$\dot{u}(t) = i\Omega U_0 e^{i(\Omega t + \phi)} = i\Omega u(t) \quad \text{ec. B.6}$$

$$\ddot{u}(t) = i^2 \Omega^2 U_0 e^{i(\Omega t + \phi)} = -\Omega^2 u(t) \quad \text{ec. B.7}$$

sustituyendo en la ecuación B.1

$$\mathcal{X} u(t) + M (-\Omega^2 u(t)) = P_0 e^{i\Omega t}$$

$$\mathcal{X} U_0 e^{i\Omega t} e^{i\phi} - M \Omega^2 U_0 e^{i\Omega t} e^{i\phi} = P_0 e^{i\Omega t}$$

eliminando términos

$$\mathcal{X} U_0 e^{i\phi} - M \Omega^2 U_0 e^{i\phi} = P_0$$

factorizando

$$U_0 e^{i\phi} (\mathcal{X} - M \Omega^2) = P_0$$

ejecutando operaciones y sustituyendo \mathcal{X} por $(\mathcal{X}_1 + i\mathcal{X}_2)$

$$\frac{P_0}{U_0} = (\cos \phi + i \operatorname{Sen} \phi) \{ (\mathcal{X}_1 - M \Omega^2) + i\mathcal{X}_2 \}$$

$$\frac{P_0}{U_0} = \{ (\mathcal{X}_1 - M \Omega^2) \cos \phi - \mathcal{X}_2 \operatorname{Sen} \phi \} + i \{ \mathcal{X}_2 \cos \phi + (\mathcal{X}_1 - M \Omega^2) \operatorname{Sen} \phi \}$$

igualando reales con reales y complejos con complejos obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente :

$$(\mathcal{X}_1 - M\Omega^2) \text{Cos}\phi - \mathcal{X}_2 \text{Sen}\phi = \frac{P_0}{U_0} \quad \text{ec. B.8}$$

$$\mathcal{X}_2 \text{Cos}\phi + (\mathcal{X}_1 - M\Omega^2) \text{Sen}\phi = 0 \quad \text{ec. B.9}$$

de donde:

$$\mathcal{X}_2 + (\mathcal{X}_1 - M\Omega^2) \text{Tg}\phi = 0$$

es decir

$$\text{Tg}\phi = - \frac{\mathcal{X}_2}{\mathcal{X}_1 - M\Omega^2} = \frac{\mathcal{X}_2}{\mathcal{X}_1 - M\Omega^2} \quad \text{ec. B.10}$$

y por el teorema de Pitágoras

$$\text{Sen}\phi = \frac{\mathcal{X}_2}{\sqrt{\mathcal{X}_2^2 + (M\Omega^2 - \mathcal{X}_1)^2}} \quad \text{ec. B.11}$$

$$\text{Cos}\phi = \frac{M\Omega^2 - \mathcal{X}_1}{\sqrt{\mathcal{X}_2^2 + (M\Omega^2 - \mathcal{X}_1)^2}} \quad \text{ec. B.12}$$

por otra parte de la ecuación B.8

$$(\mathcal{X}_1 - M\Omega^2) - \mathcal{X}_2 \text{Tg}\phi = \frac{P_0}{U_0} \frac{1}{\text{Cos}\phi}$$

sustituyendo B.10 y B.12, entonces

$$(\mathcal{X}_1 - M\Omega^2) - \mathcal{X}_2 \left[\frac{\mathcal{X}_2}{M\Omega^2 - \mathcal{X}_1} \right] = \frac{P_0}{U_0} \frac{\sqrt{\mathcal{X}_2^2 + (M\Omega^2 - \mathcal{X}_1)^2}}{M\Omega^2 - \mathcal{X}_1}$$

$$(\mathcal{X}_1 - M\Omega^2)(M\Omega^2 - \mathcal{X}_1) - \mathcal{X}_2^2 = \frac{P_0}{U_0} \sqrt{\mathcal{X}_2^2 + (M\Omega^2 - \mathcal{X}_1)^2}$$

$$\mathcal{X}_1 M\Omega^2 - (M\Omega^2)^2 - \mathcal{X}_1^2 + \mathcal{X}_1 M\Omega^2 - \mathcal{X}_2^2 = \frac{P_0}{U_0} \sqrt{\mathcal{X}_2^2 + (M\Omega^2 - \mathcal{X}_1)^2}$$

cambiando de signo

$$\mathcal{X}_1^2 - 2\mathcal{X}_1 M\Omega^2 + (M\Omega^2)^2 + \mathcal{X}_2^2 = -\frac{P_0}{U_0} \sqrt{\mathcal{X}_2^2 + (M\Omega^2 - \mathcal{X}_1)^2}$$

factorizando

$$\left[(\mathcal{X}_1 - M\Omega^2)^2 + \mathcal{X}_2^2 \right]^2 = \frac{P_0^2}{U_0^2} \left[\mathcal{X}_2^2 + (M\Omega^2 - \mathcal{X}_1)^2 \right]$$

$$= \frac{P_0^2}{U_0^2} \left[\mathcal{X}_2^2 + (M\Omega^2)^2 - 2M\Omega^2 \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_1^2 \right]$$

$$= \frac{P_0^2}{U_0^2} \left[(\mathcal{X}_1 - M\Omega^2)^2 + \mathcal{X}_2^2 \right]$$

dividiendo entre el término entre paréntesis

$$(\mathcal{X}_1 - M\Omega^2) + \mathcal{X}_2 = \left(\frac{P_0}{U_0} \right)^2$$

sacando raíz cuadrada en ambos miembros tenemos :

$$\frac{P_0}{U_0} = \sqrt{(\mathcal{X}_1 - M\Omega^2)^2 + \mathcal{X}_2^2}$$

que es la ecuación 3.d.10

si $\frac{P_0}{K} = U_{est}$; siendo U_{est} . el desplazamiento estático, entonces :

elemental de un grado de libertad en la ecuación B.21, K tiene asociada la rigidez y la inercia del suelo de cimentación, por lo tanto K no es una constante, como es común suponer en la solución del sistema elemental de un grado de libertad. De lo anterior, por conveniencia y para diferenciar entre una resorte constante y una rigidez variable se define lo siguiente:

\bar{K} = rigidez o resorte dinámico equivalente, es una variable.
 K = rigidez o resorte estático, es una constante.

Por lo anterior, si se usa la solución del sistema elemental de un grado de libertad para representar el problema de interacción suelo estructura planteado en la ecuación B.1; la K del sistema de ecuaciones B.20 debe interpretarse como una \bar{K} , con lo que dicho sistema queda:

$$\begin{bmatrix} (\bar{K} - M\Omega^2) & -C\Omega \\ C\Omega & (\bar{K} - M\Omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ec. B.23}$$

La relación entre K y \bar{K} puede encontrarse como sigue:

Puede demostrarse que al dividir la ecuación B.19 entre u_1+iu_2 resulta

$$\frac{P_0}{u_1+iu_2} = \frac{P(t)}{u(t)} \quad \text{ec. B.24}$$

siendo:

$$P(t) = P_0 e^{i\Omega t}$$

$$u(t) = (u_1 + iu_2) e^{i\Omega t} = u_0 e^{i(\Omega t + \phi)} \quad (\text{ver anexo C})$$

$$u_0 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$\phi = \text{Arc. tan} \left(\frac{u_2}{u_1} \right)$$

de lo anterior, la ecuación B.19 puede arreglarse como se indica:

$$\frac{P(t)}{u(t)} = (K - M\Omega^2) + i C\Omega \quad \text{ec. B.25}$$

expresión que es semejante a la B.3, es decir:

$$\frac{P(t)}{u(t)} = (K - M\Omega^2) + i C\Omega$$

es semejante a:

$$\frac{R(t)}{u(t)} = \mathcal{R}_1 + i\mathcal{R}_2$$

Nótese que $P(t)$ es diferente de $R(t)$.

Otra vez, si se utiliza la solución del sistema elemental de un grado de libertad; debe mantenerse la misma impedancia, esto significa que:

$\frac{P(t)}{u(t)}$ sea igual a $\frac{R(t)}{u(t)}$; lo cual es cierto, si y sólo si, se cumple lo siguiente :

$$\mathcal{K}_1 = K - M\Omega^2$$

$$\mathcal{K}_2 = C\Omega$$

pero $\mathcal{K}_1 = \bar{K}$ por lo tanto :

$$\bar{K} = K - M\Omega^2$$

ec.B.26

que es lo que se quería encontrar.

Por otra parte, si analizamos el término $K - M\Omega^2$ de la ecuación B.26 vemos que:

$$(K - M\Omega^2) = K \left(1 - \frac{M\Omega^2}{K} \right)$$

$$= K \left(1 - \frac{\Omega^2}{K/M} \right)$$

$$= K \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} \right)$$

$$= K (1 - r^2)$$

$$= K\lambda$$

$$\text{siendo } \lambda = (1 - r^2)$$

ec.B.27

con lo que la ecuación B.26 queda:

$$\bar{K} = K\lambda$$

ec.B.28

donde :

$r = \frac{\Omega}{\omega_n}$ es la relación de frecuencia de la acción a frecuencia natural de vibración no amortiguada.

λ = coeficiente de variación de la rigidez dinámica con la frecuencia.

Por otra parte el amortiguamiento C se mantiene independiente de las características de inercia del sistema y si analizamos el término $C\Omega$ vemos que :

$$C\Omega = 2\beta rK \quad \text{puesto que :}$$

$$\beta = \frac{C}{C_c}$$

$$C_c = 2\sqrt{KM}$$

donde:

β = relación de amortiguamientos como se define en el sistema elemental de un grado de libertad.

C_c = amortiguamiento crítico para que el sistema elemental de un grado de libertad no vibre.

B.2.-SOLUCION DEL MODO VERTICAL DE DOS GRADOS DE LIBERTAD.

Ecuaciones de equilibrio, ver figura 3.d.6.a.

$$M_1 \ddot{z}_1 + K_1 u_1 + C_1 \dot{u}_1 = P(t) \quad \text{ec. B.29}$$

$$M_2 \ddot{z}_2 + K_2 z_2 + C_2 \dot{z}_2 - K_1 u_1 - C_1 \dot{u}_1 = 0 \quad \text{ec. B.30}$$

$$u_1 = z_1 - z_2 \quad \text{ec. B.31}$$

sustituyendo B.31 en B.30 y B.29

$$M_1 \ddot{z}_1 + K_1(z_1 - z_2) + C_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = P(t)$$

$$M_2 \ddot{z}_2 + K_2 z_2 + C_2 \dot{z}_2 - K_1(z_1 - z_2) - C_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = 0$$

efectuando operaciones quedan

$$M_1 \ddot{z}_1 + K_1(z_1 - z_2) + C_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = P(t) \quad \text{ec. B.32}$$

$$M_2 \ddot{z}_2 + (K_2 + K_1)z_2 + (C_2 + C_1)\dot{z}_2 - K_1 z_1 - C_1 \dot{z}_1 = 0 \quad \text{ec. B.33}$$

si :

$$P(t) = P_0 e^{i\Omega t}$$

$$z_1 = z_{10} e^{i(\Omega t + \phi_1)} = (z_{11} + iz_{12}) e^{i\Omega t}$$

$$z_2 = z_{20} e^{i(\Omega t + \phi_2)} = (z_{21} + iz_{22}) e^{i\Omega t}$$

entonces :

$$\dot{z}_1 = i\Omega z_{10} e^{i(\Omega t + \phi_1)} = i\Omega z_1$$

$$\ddot{z}_1 = -\Omega^2 z_{10} e^{i(\Omega t + \phi_1)} = -\Omega^2 z_1$$

$$\dot{z}_2 = i\Omega z_{20} e^{i(\Omega t + \phi_2)} = i\Omega z_2$$

$$\ddot{z}_2 = -\Omega^2 z_{20} e^{i(\Omega t + \phi_2)} = -\Omega^2 z_2$$

sustituyendo en B.32 y B.33

$$-M_1 \Omega^2 (z_{11} + iz_{12}) e^{i\Omega t} + K_1 \left[(z_{11} + iz_{12}) e^{i\Omega t} - (z_{21} + iz_{22}) e^{i\Omega t} \right] + \dots$$

$$\dots + C_1 (i\Omega) \left[(z_{11} + iz_{12}) e^{i\Omega t} - (z_{21} + iz_{22}) e^{i\Omega t} \right] = P_0 e^{i\Omega t} \quad \text{ec. B.34}$$

$$-\Omega^2 M_2 (z_{21} + iz_{22}) e^{i\Omega t} + (K_2 + K_1) (z_{21} + iz_{22}) e^{i\Omega t} + (C_2 + C_1) i\Omega (z_{21} + iz_{22}) e^{i\Omega t} + \dots$$

$$\dots - (-K_1) (z_{11} + iz_{12}) e^{i\Omega t} - C_1 (i\Omega) (z_{11} + iz_{12}) e^{i\Omega t} = 0 \quad \text{ec. B.35}$$

ANEXO C. NOTACION VECTORIAL.

Es conveniente utilizar la notación vectorial compleja para representar fuerzas y desplazamientos. Dicha notación permite representar el desfase entre fuerza y desplazamiento a través de las componentes, real y compleja, de un vector representado en el plano complejo. En este caso, la parte real de un número complejo estará asociada a las características de rigidez e inercia del sistema, mientras que la parte imaginaria, refleja las características de amortiguamiento del sistema. Para referencia se usará la figura C.1.

Por otra parte, es útil demostrar que

$$u(t) = (u_1 + i u_2) e^{i \Omega t} = u_0 e^{i(\Omega t + \phi)} \quad \text{ec.C.1}$$

Así, si

$$u(t) = (u_1 + i u_2) e^{i \Omega t} \quad \text{ec.C.2}$$

entonces esta ecuación es igual a

$$= (u_1 + i u_2) [\cos(\Omega t) + i \sin(\Omega t)]$$

de la que, efectuando operaciones, tenemos

$$\begin{aligned} &= [u_1 \cos(\Omega t) - u_2 \sin(\Omega t)] + i [u_1 \sin(\Omega t) + u_2 \cos(\Omega t)] \\ &= u_1 \left[\cos(\Omega t) - \frac{u_2}{u_1} \sin(\Omega t) \right] + i u_1 \left[\sin(\Omega t) + \frac{u_2}{u_1} \cos(\Omega t) \right] \end{aligned}$$

por el teorema de Pitágoras:

$$\tan \phi = \frac{u_2}{u_1} \quad \text{y} \quad \cos \phi = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$$

entonces la ecuación C.2 queda

$$\begin{aligned} &= u_1 \left[\cos(\Omega t) - \tan \phi \sin(\Omega t) + i (\sin(\Omega t) + \tan \phi \cos(\Omega t)) \right] \\ &= u_1 \left[\cos(\Omega t) - \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \sin(\Omega t) + i (\sin(\Omega t) + \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \cos(\Omega t)) \right] \\ &= \frac{u_1}{\cos \phi} \left[\cos \phi \cos(\Omega t) - \sin \phi \sin(\Omega t) + i (\cos \phi \sin(\Omega t) + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\dots \text{Sen } \phi \text{ Cos } (\Omega t) \Big]$$

y por las identidades trigonométricas :

$$\text{Cos } (\alpha \pm \beta) = \text{Cos } \alpha \text{ Cos } \beta \mp \text{Sen } \alpha \text{ Sen } \beta$$

$$\text{Sen } (\alpha \pm \beta) = \text{Sen } \alpha \text{ Cos } \beta \pm \text{Cos } \alpha \text{ Sen } \beta$$

se encuentra que

$$= \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \left[\text{Cos } (\phi + \Omega t) \pm i \text{Sen } (\phi + \Omega t) \right]$$

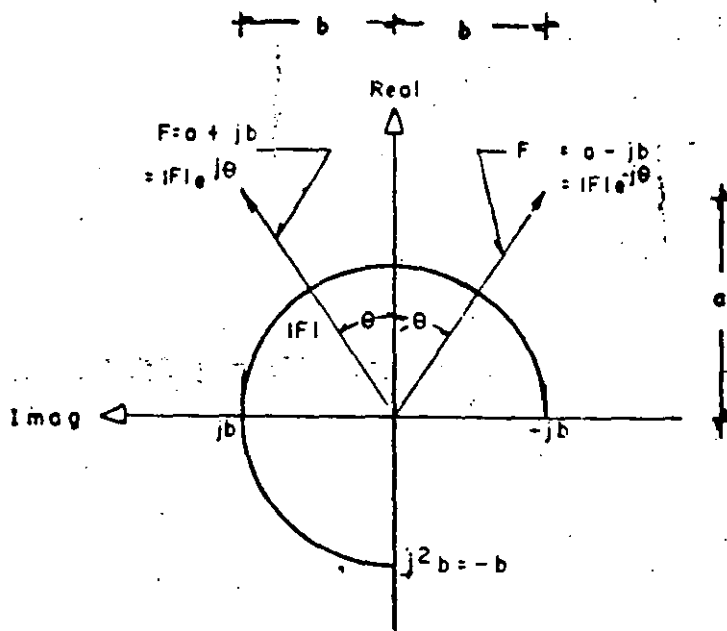
y se concluye que

$$u(t) = (u_1 + iu_2)e^{i\Omega t} = u_0 e^{i(\Omega t + \phi)} \quad \text{lo que se quería demostrar.}$$

siendo :

$$u_0 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$\phi = \text{Arc. Tan } \frac{u_2}{u_1}$$



a).- Notación vectorial compleja.

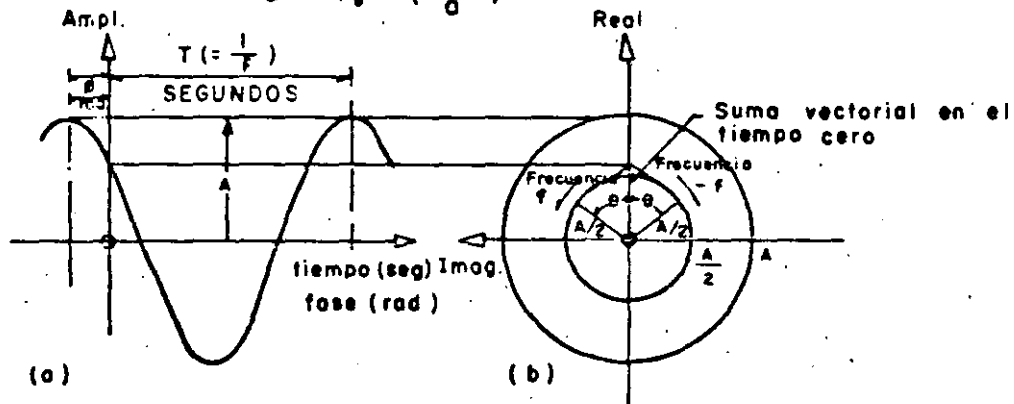
$$F = a + bj = (F) e^{j\theta}$$

$$a = |F| \cos \theta$$

$$b = |F| \sin \theta$$

$$(F) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$$



b).- Representación de la suma de dos vectores que giran en contra; uno respecto al otro.

Fig. C.1 NOTACION DE REFERENCIA



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

CURSOS ABIERTOS

CIMENTACION DE MAQUINARIA

17 al 21 de febrero de 1992

CIMENTACIONES PARA TURBOMAQUINARIA

M. EN C. MARIO JUAREZ RAMIREZ

PALACIO DE MINERIA

INTRODUCCION

En la determinación del comportamiento dinámico de las turbomaquinas intervienen factores sobre los cuales, aún en la actualidad, no existe un conocimiento pleno ni se ha desarrollado un método que permita reducir la complejidad del problema.

Las pruebas de giro que se realizan en los talleres de los fabricantes de estos equipos conducen a parámetros dinámicos del mismo que pueden tener variaciones importantes a las obtenidas en las pruebas de arranque o en condiciones de operación.

Por otra parte, la necesidad de integrar equipos o instalaciones a las turbomaquinas obliga a apoyarlas sobre una cimentación estructurada, esto es a base de columnas y trabes, las cuales también son conocidas como cimentaciones flexibles, por su baja rigidez lateral que presentan. La mayoría de las veces, estas cimentaciones son de concreto reforzado, evitando tener un control adecuado sobre el módulo de elasticidad del material el cual influye directamente en la rigidez del sistema y, por lo tanto, en las frecuencias naturales del sistema.

El terreno sobre el cual, finalmente, se transmiten los esfuerzos estáticos y dinámicos inducidos por el equipo y su cimentación, es otro elemento en el que existen serias dificultades para determinar sus parámetros característicos para integrarlos en un estudio detallado del comportamiento dinámico de un sistema equipo - cimentación - suelo.

Sin embargo, un buen número de investigadores en el mundo están desarrollando nuevas técnicas tanto analíticas como experimentales que permitan resolver las interfases equipo - cimentación y cimentación - suelo para poder establecer un procedimiento adecuado en la solución de este problema.

En estas notas se presentan, brevemente, algunos conceptos elementales sobre los equipos rotatorios que el diseñador de la cimentación debe conocer para obtener mejores resultados en su tarea. Asimismo se presentan descripciones de los métodos de las matrices de transición y del elemento finito, los cuales son en la actualidad los más utilizados para el análisis de cimentaciones de turbomaquinas. Por último, se reportan resultados de estudios analíticos y de campo realizados para determinar la causa que origina un problema de grandes amplitudes de vibración presentes en las cimentaciones de los equipos o en los edificios o instalaciones vecinas.

TURBOMAQUINARIA

Denominamos como turbomaquinas, a aquellos equipos con velocidades de operación mayores a 1500 rpm cuyo accionador es una turbina de vapor o de gas y las cuales, de acuerdo a su función pueden ser clasificadas como :

- Turbogeneradores
- Turbocompresores
- Turboventiladores
- Turbombas

En las turbinas de vapor la energía térmica del vapor generado en las calderas es transformada en energía cinética en las toberas para después ser conducido a través del paso de álabes en donde se le fuerza a modificar su velocidad y dirección, de manera tal que el momento lineal del vapor cambia y este cambio ejerce un empuje sobre los álabes dando origen al movimiento rotatorio. Mientras que los equipos Reciprocantes la transformación del calor en trabajo se realiza en una sola etapa, en las turbinas este proceso puede realizarse en varias etapas. Las turbinas diseñadas para convertir energía calorífica en energía cinética solamente, se conocen como turbinas de acción, en tanto que las turbinas donde esta transformación es realizada parte en la toberas y parte

en el paso entre álabes se conocen como turbinas de reacción.

Así brevemente descrito el proceso mediante el cual se origina el movimiento del rotor, las turbinas no parecen ser parte vital en los procesos industriales. Sin embargo, del adecuado funcionamiento de estos equipos depende la capacidad de producción de las plantas, de manera que la falla de una turbina puede ser causa de un funcionamiento deficiente e incluso del paro de una planta industrial.

La parte fundamental de una turbina es su rotor, el cual es una flecha que tiene montadas diversos tipos de componentes como lo son discos, camisas, ruedas de engrane, impulsores, álabes, etc. A su vez el rotor está apoyado sobre elementos estructurales denominados chumaceras, cuya función es separar el rotor de las componentes estáticas de la turbina.

Para poder determinar adecuadamente el comportamiento dinámico de una máquina rotatoria se requieren realizar una serie de estudios analíticos los que se muestran en la figura 1. Debido a que nuestro interés es conocer las frecuencias y formas modales del rotor de la turbina para evitar tener amplitudes de vibración grandes que dañen al mismo, por encontrarse en resonancia con alguna frecuencia excitadora del sistema, describiremos la forma de obtener estos parámetros dinámicos empleando el método de las matrices de transición.

Si ω es alguna frecuencia natural del rotor y Ω es la velocidad de operación, decimos que existe resonancia mecánica cuando la relación de frecuencias es igual a 1. Se puede demostrar que para un sistema dinámico, la respuesta de un sistema de masa m y velocidad de operación Ω , sobre el cual actúa una fuerza F , es

$$y_{din} = F / (m - z)$$

o bien

$$y_{din} = F / (1 - z/m)$$

multiplicando por k/k , siendo k la rigidez del sistema y

Al analizar las estaciones en donde existen masas concentradas podemos considerar dos casos:

a) Masa concentrada considerada como puntual, la cual introduce durante las vibraciones una fuerza de inercia que produce una discontinuidad en la fuerza cortante.

En este caso, la matriz que relaciona el vector de estado a la izquierda y a la derecha de la estación esta dada por

$$\begin{array}{c|cccc|c} | y |_{\text{der}} & | & 1 & 0 & 0 & 0 & | & | y |_{\text{izq}} \\ | \theta | & | & 0 & 1 & 0 & 0 & | & | \theta | \\ | M | & | & 0 & 0 & 1 & 0 & | & | M | \\ | V | & | & -m\omega^2 & 0 & 0 & 1 & | & | V | \end{array}$$

t-1

o bien

$$Z_i^{\text{der}} = P_i Z_{i-1}^{\text{izq}}$$

La matriz P se conoce como matriz de punto.

b) Cuando existe un apoyo de rigidez K, el cual tambien obliga a una discontinuidad en el cortante.

La matriz de punto P en este caso es

$$\begin{array}{c|cccc|c} | y |_{\text{der}} & | & 1 & 0 & 0 & 0 & | & | y |_{\text{izq}} \\ | \theta | & | & 0 & 1 & 0 & 0 & | & | \theta | \\ | M | & | & 0 & 0 & 1 & 0 & | & | M | \\ | V | & | & -K & 0 & 0 & 1 & | & | V | \end{array}$$

t-1

Finalmente, para definir completamente el problema se necesitan especificar las condiciones de frontera.

Si los extremos del rotor estan libres tenemos

$$\begin{array}{l} Z_0 = | \dot{y} \quad \theta \quad 0 \quad 0 | \\ Z_n = | y \quad \theta \quad 0 \quad 0 | \end{array}$$

A partir de las matrices de campo y de punto podemos relacionar entre sí a los vectores de estado adyacentes y mediante un proceso de sustitución usando productos matriciales es posible eliminar los vectores de estado intermedios, de la manera siguiente

$$Z_n = F_n P_n F_{n-1} P_{n-1} F_{n-2} P_{n-2} \dots F_2 P_2 F_1 P_1 Z_0$$

estableciendo la matriz

$$\begin{array}{c|cccc|c|c} | Y | & | u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & | y' | \\ | \theta | & | u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & | \theta' | \\ | M | & | u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & | M' | \\ | V | & | u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & | V' | \end{array}$$

Estableciéndose la submatriz

$$\begin{array}{c|cc|c|c} | 0 | & | u_{31} & u_{32} & | y' | \\ | 0 | & | u_{41} & u_{42} & | \theta' | \end{array}$$

Para que tenga una solución distinta de la trivial su determinante debe ser nulo, lo que conduce a un polinomio de grado N en ω^2 , siendo N el número de estaciones y las raíces de este sistema las las frecuencias naturales del rotor. Este análisis es muy importante pues variando la rigides de los apoyos podemos construir el Mapa de Velocidades Críticas del rotor, el cual es una gráfica que nos muestra la variación de las frecuencias naturales del sistema en función de la rigidez de sus apoyos. Las cimentaciones del tipo flexible tienen columnas cuya rigidez lateral influye en el comportamiento de estas frecuencias. En la figura 5 se presenta un mapa de estos, así como las formas de orbitar del rotor cuando los apoyos son completamente rígidos y cuando son flexibles.

En la figura 6 se presentan las formas modales del rotor de la turbina de un tren de aire utilizada en la industria Petroquímica, en la figura 7 se muestra el mapa de velocidades críticas y en la

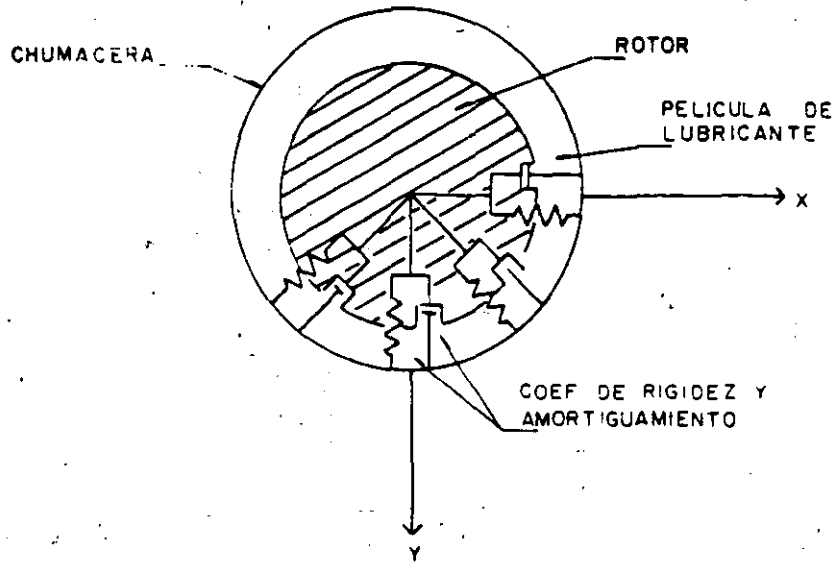


FIG. I. 4.
REPRESENTACION DINAMICA DE LAS CHUMACERAS

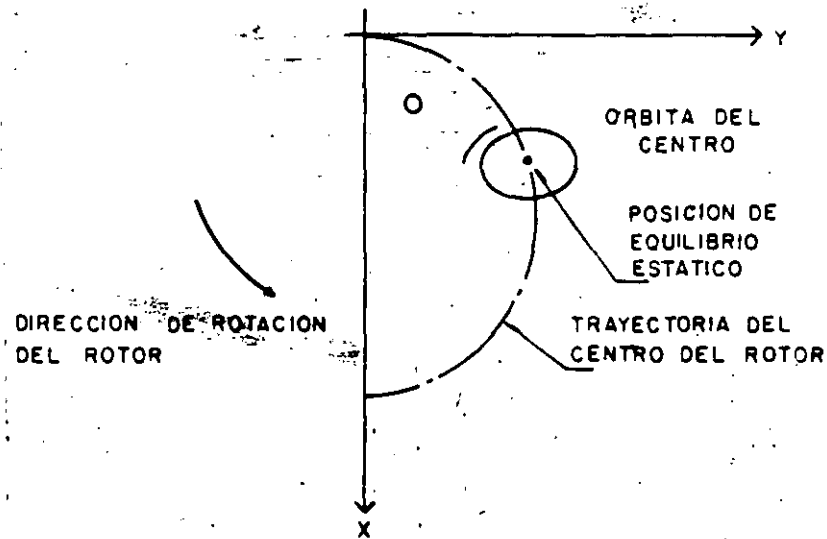


FIG. I. 5.
MOVIMIENTO DEL ROTOR DENTRO DE LA CHUMACERA

FIGURA 5

11-2 4 2

PLANTA PROPILENO

EQUIPO TURBINA ELLIOTT (T.AIRE CT-101)

LOCALIZACION NOROCCIDENTAL

CONTRATO 3377

MODELO 2SNV12

FECHA ABR-87

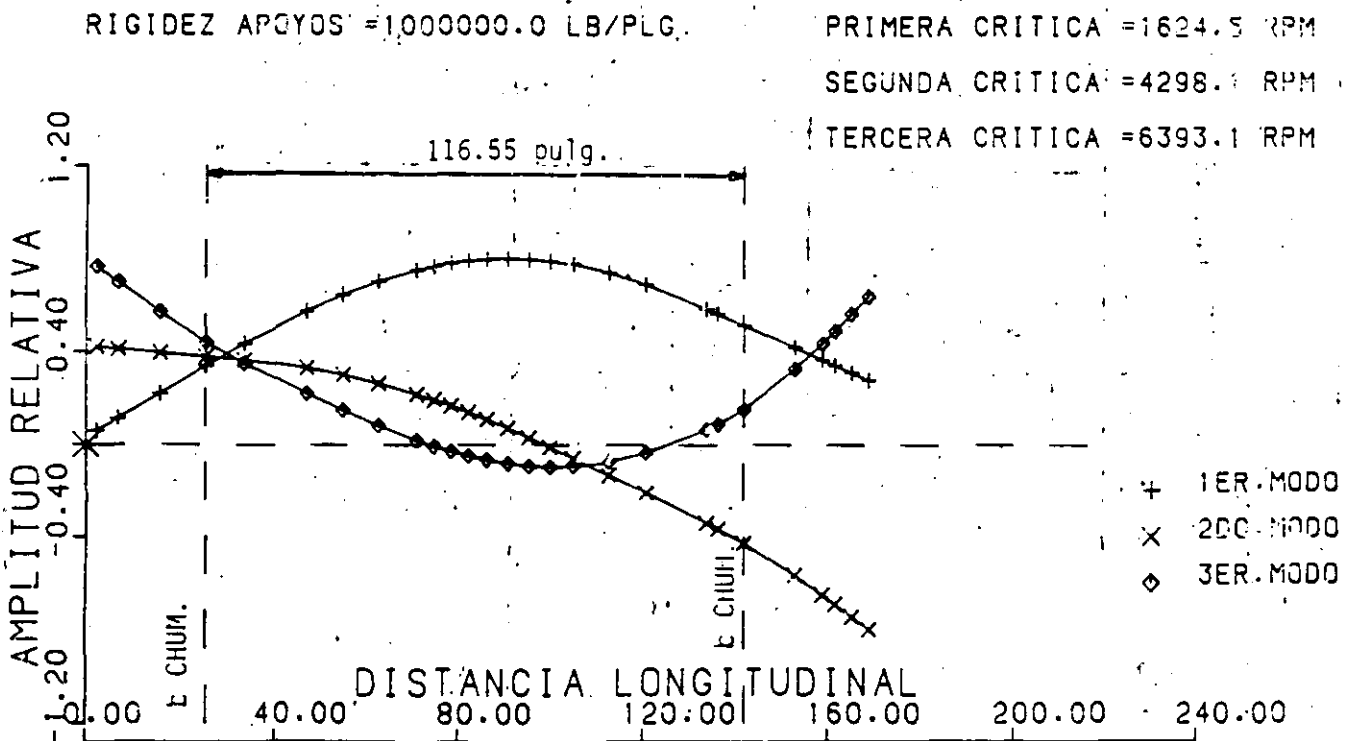
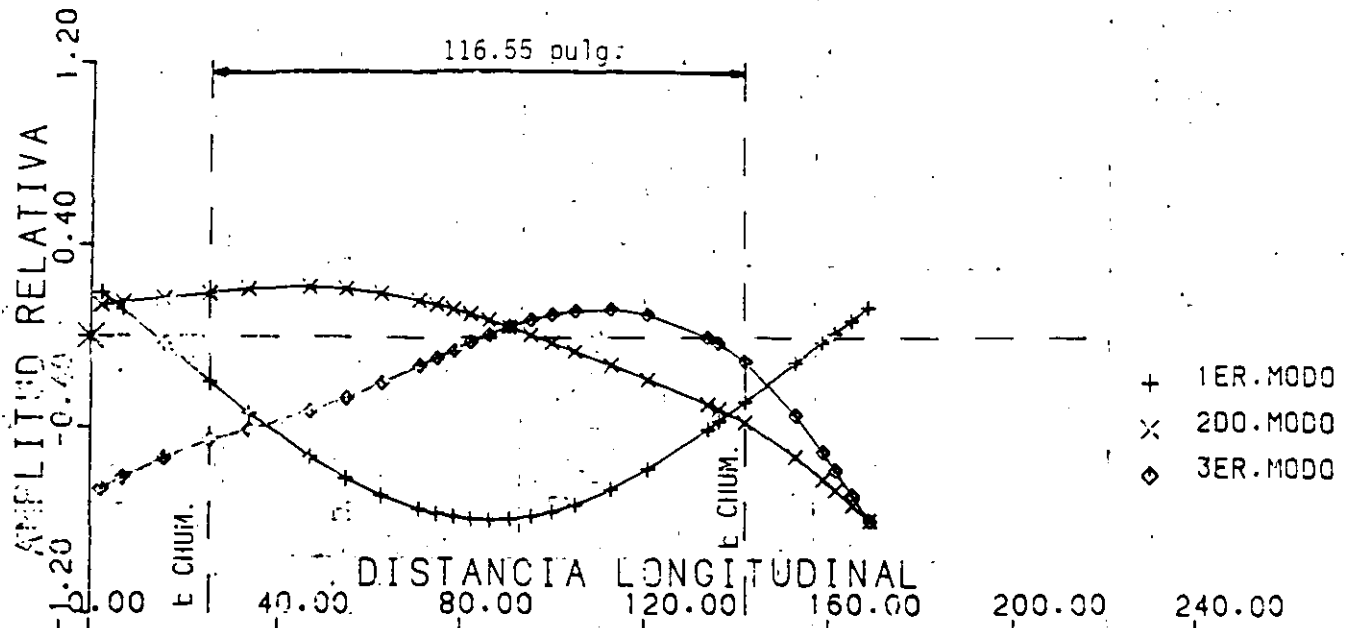


FIG. 3 FORMAS MODALES DEL SISTEMA ROTOR-CHUMACERAS

DINAMICA DE ROTORES
GERENCIA DE INGENIERIA

PLANTA PROPILENO
EQUIPO TURBINA ELLIOTT (T.AIRE..C-101)
LOCALIZACION ZAPATAS BASC. (L/D=0.875.M=0.4.BT

CONTRATO
MODELO 2SNV12
FECHA

CHUMACERAS
L/D= .875 C/R= .00244
CARGAS.. EST. 4=4167.LBS EST.22=6229.LBS

PRECARGA.M² .00

RIGIDEZ PEDESTALES= .1000+013 LB/PLG
DESBALANCEO PERMISIBLE= 11.95 ONZ-PLG
DESB.INDUCIDO = .00 ONZ-PLG

MASA= 0.LBS

EN FASE EST.13. 0

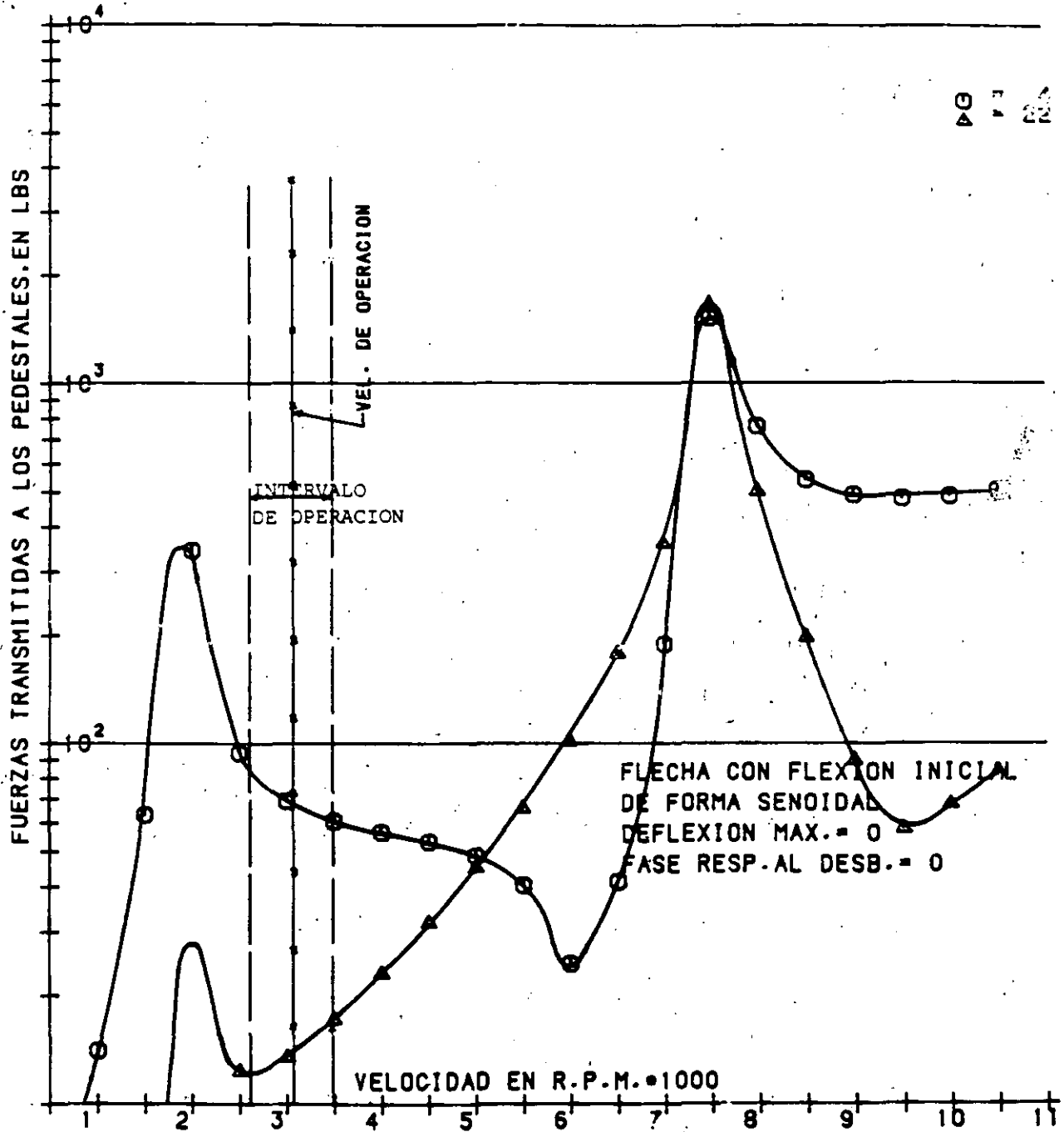


FIG. 6 FUERZAS TRANSMITIDAS A LOS PEDESTALES

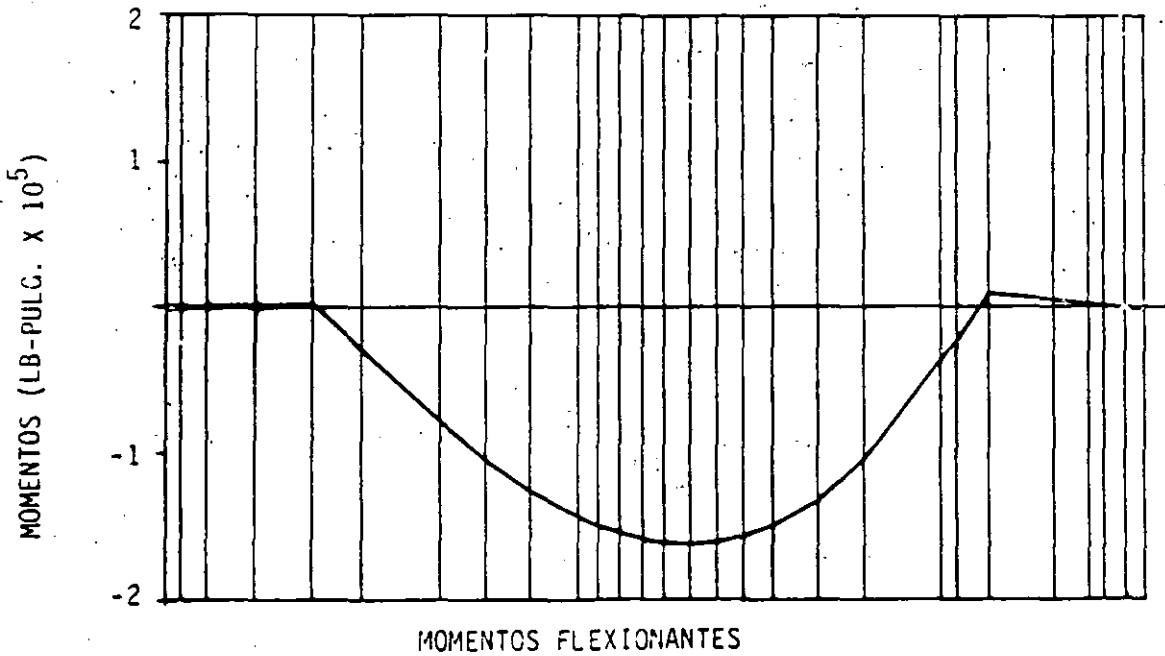
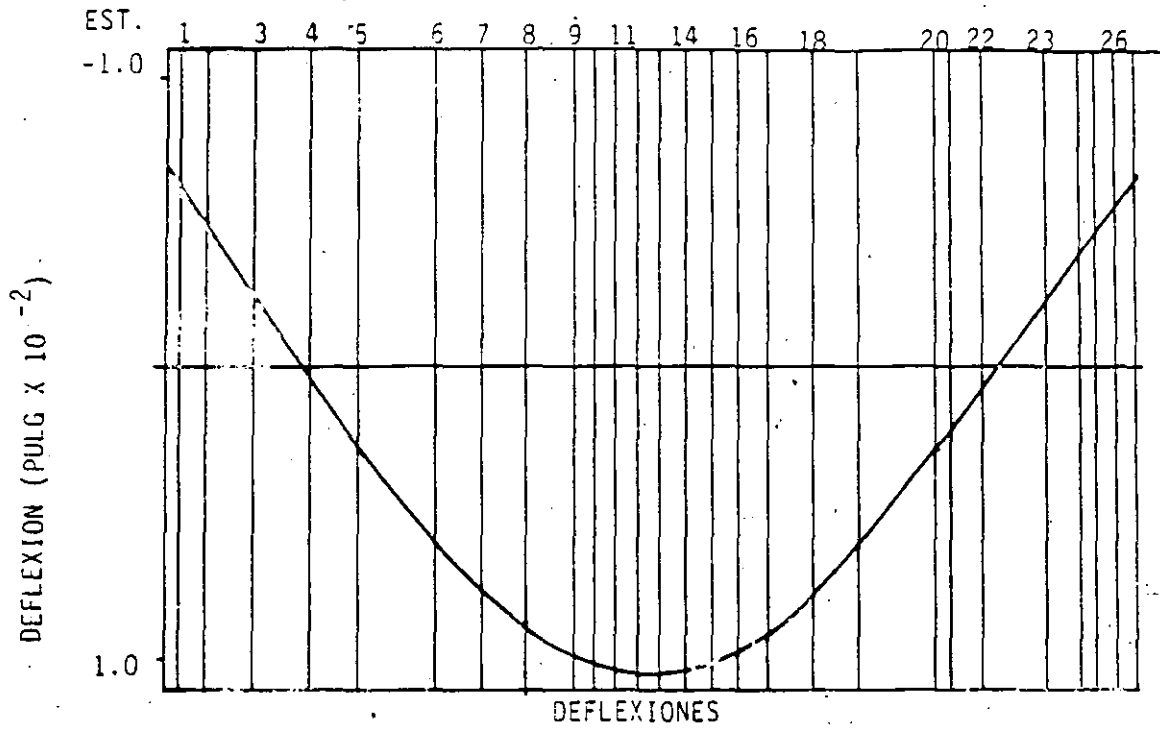


FIG. 4 DIAGRAMAS DE DEFLEXIONES Y MOMENTOS FLEXIONANTES

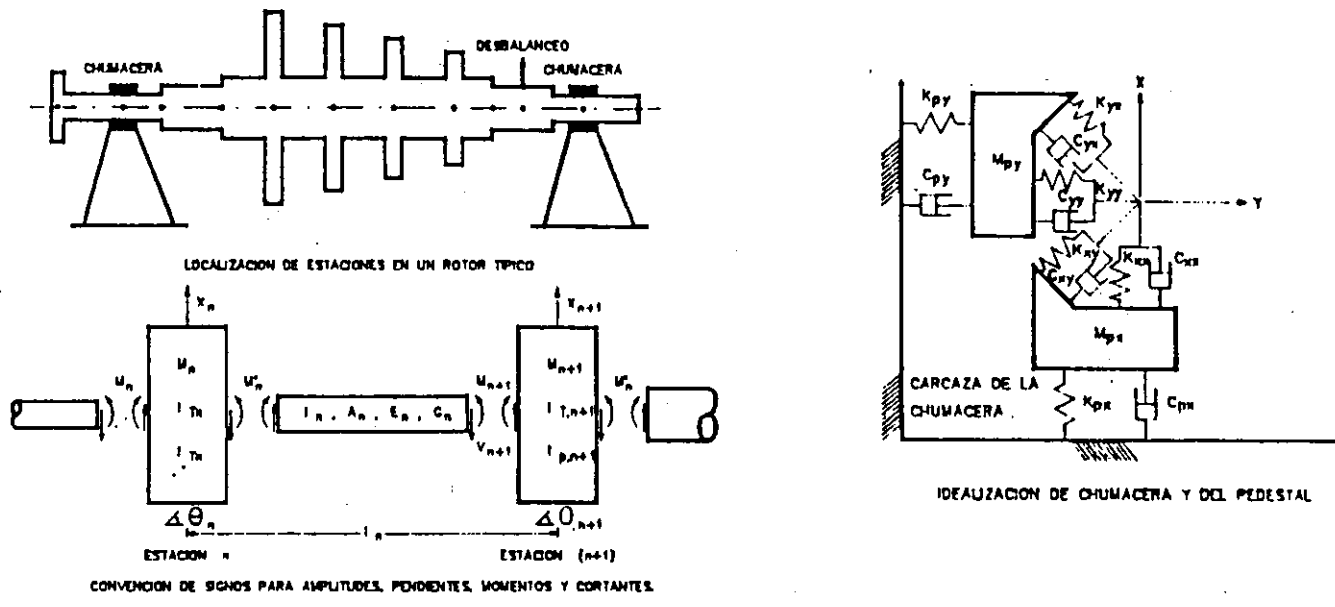


FIG. 1 MODELOS MATEMATICOS DE ROTOR Y CHUMACERAS.

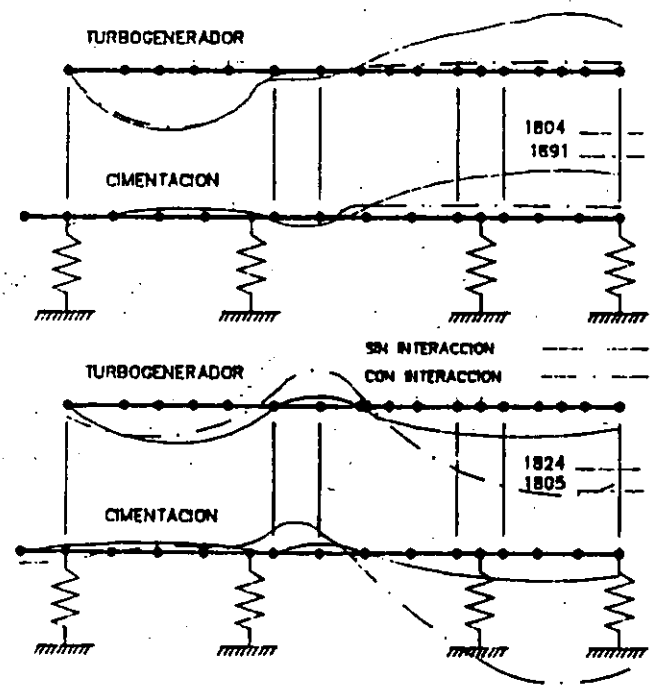


FIG. 2 COMPARACION DE MODOS Y FRECUENCIAS

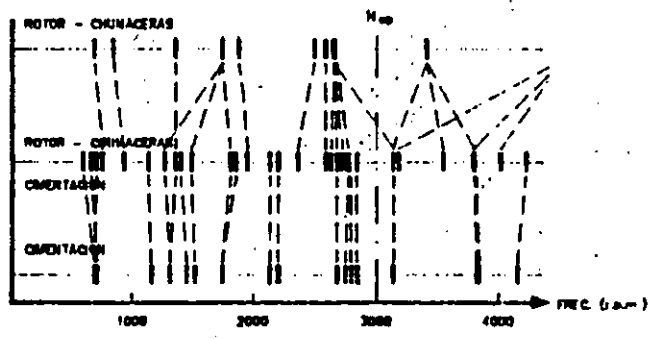


FIG. 3 COMPARACION DE FRECUENCIAS ACOPLADAS Y DESACOPADAS DE UN SISTEMAS ROTOR CHUMACERAS - CIMENTACION

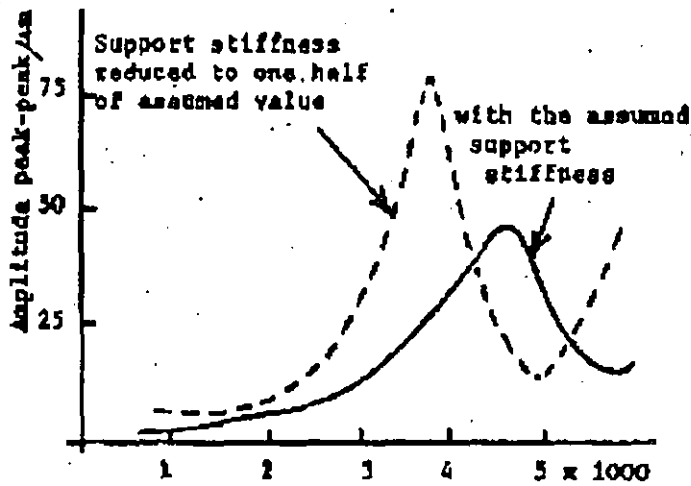


Fig. 1 Response at the drive-end bearing of a mechanical drive steam turbine to an unbalance of 24.4 kg.mm at the coupling.

(a)

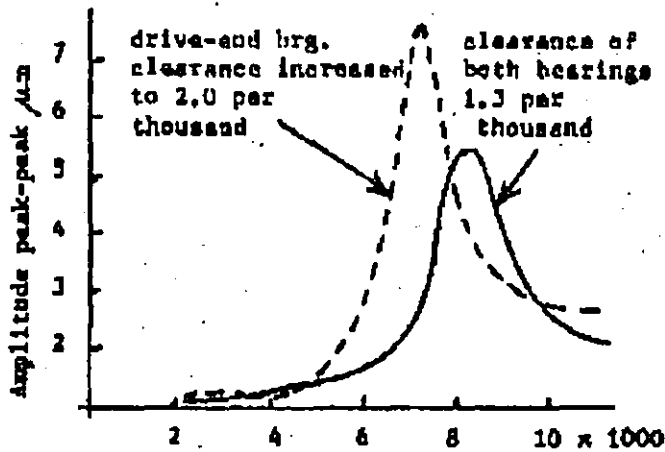


Fig. 2 Response at the drive-end bearing of a centrifugal compressor to an unbalance of 50 gm.mm. at the coupling.

(b)

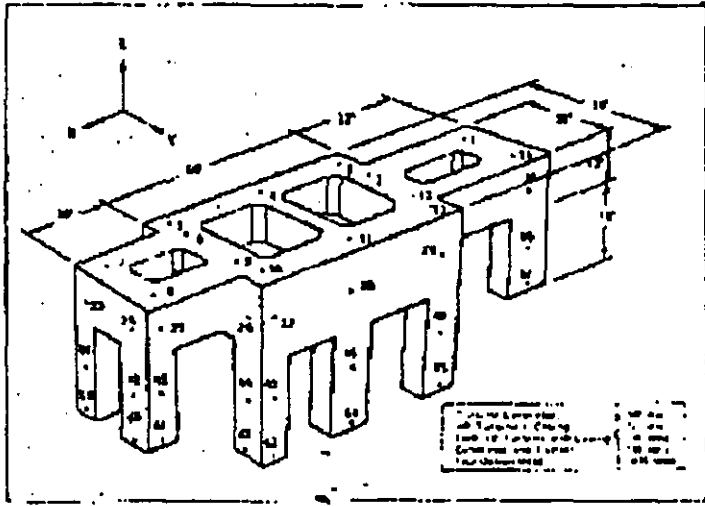


Figure 9. Turbine generator concrete foundation.

FIGURA 12

Table 4. Frequencies of natural modes, modal analysis and finite element calculations.

Mode	Measured Frequency, Hz	Calculated Frequency, Hz	Mode	Measured Frequency, Hz	Calculated Frequency, Hz
1.....	3.88	3.41	7.....	27.30	29.62
2.....	4.12	4.27	8.....	35.61	40.33
3.....	5.05	5.34	9.....	40.19	45.87
4.....	9.52	9.89	10.....	55.22	58.21
5.....	15.68	17.44	11.....	73.71	79.68
6.....	19.11	20.61	12.....	91.23	99.44

FIGURA 1

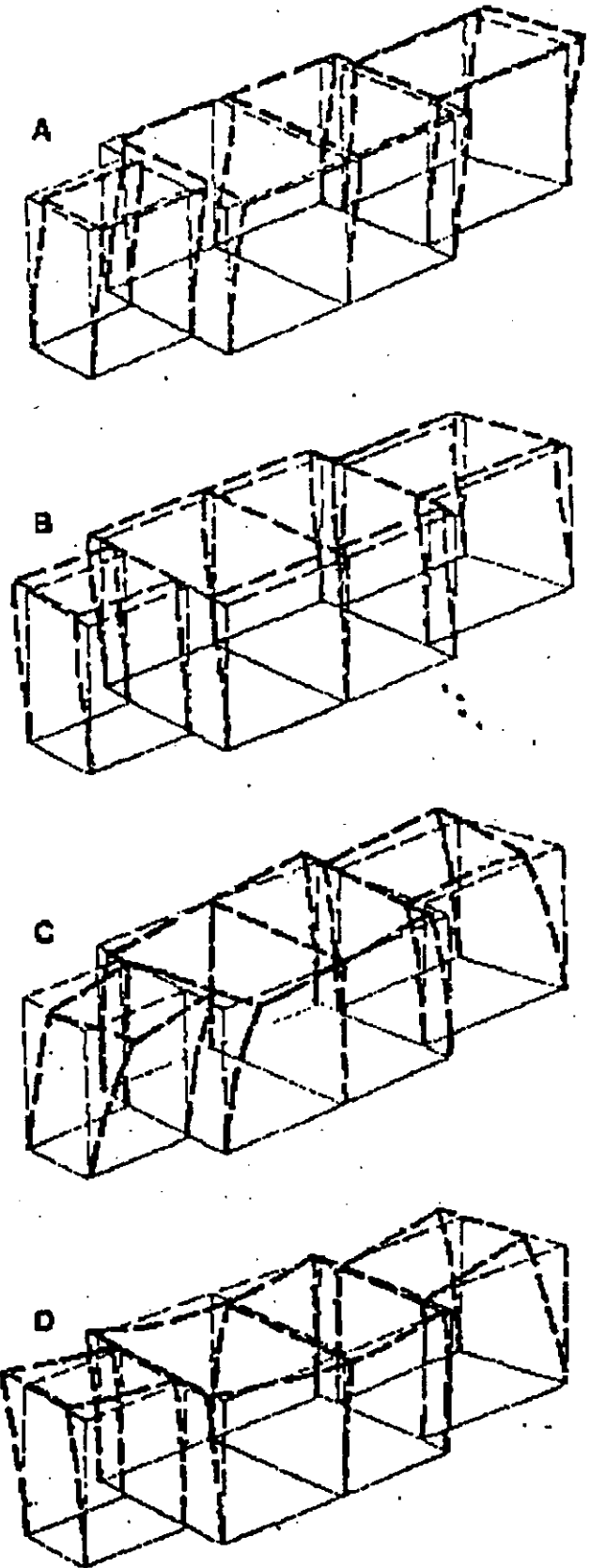


Figure 10. A - Mode 1, 3.88 Hz, x translational, in phase, rigid platform. B - Mode 2, 4.12 Hz, y lateral, in phase, rigid platform. C - Mode 3, 5.05 Hz, z-translational, platform warping. D - Mode 4, 9.52 Hz, y-lateral, platform bending.

FIGURA 13

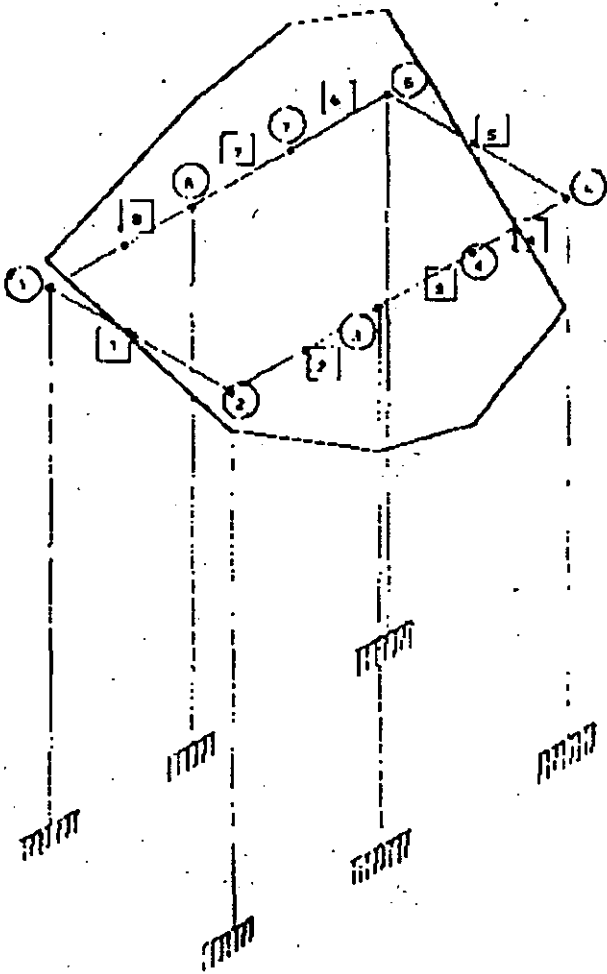


Fig. 3. Configuración del segundo punto.

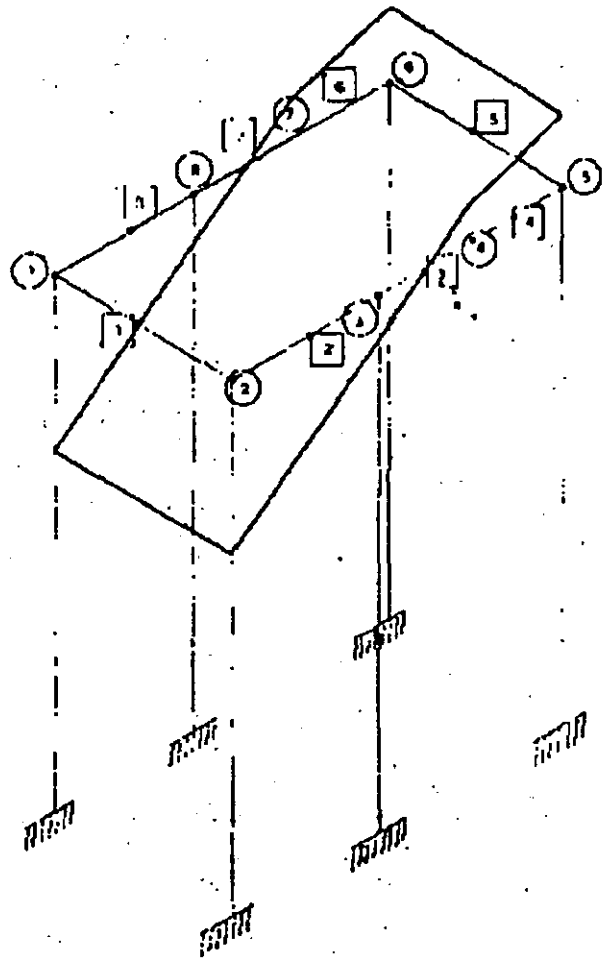



Fig. 4. Configuración del tercer punto.

Fig. 19

INSTITUTO MEXICANO DEL PETRÓLEO
 CENTRO NACIONAL DE INVESTIGACIONES Y ESTUDIOS CIENTÍFICOS
 LABORATORIO NACIONAL DE ESTUDIOS PETROLÍFEROS
 AV. PASEO DE LA LUNA 10000

REPORTE
 DEL N.º
 DEL 24 FEBR. 1978

PROCESO DE SEPARACIÓN DE UNA MEZCLA BIPHÁSICA



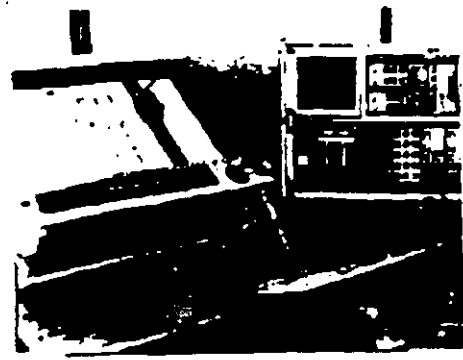
**FIG. 1 SEPARACIÓN DE COLONIAS DE LÍQUIDO BIPHÁSICO
 EN UNO DE LOS TUBOS DE SEPARACIÓN.**

10

INSTITUTO MEXICANO DEL PETRÓLEO
 CENTRO NACIONAL DE INVESTIGACIONES Y ESTUDIOS CIENTÍFICOS
 LABORATORIO NACIONAL DE ESTUDIOS PETROLÍFEROS
 AV. PASEO DE LA LUNA 10000

REPORTE
 DEL N.º
 DEL 24 FEBR. 1978

PROCESO DE SEPARACIÓN DE UNA MEZCLA BIPHÁSICA



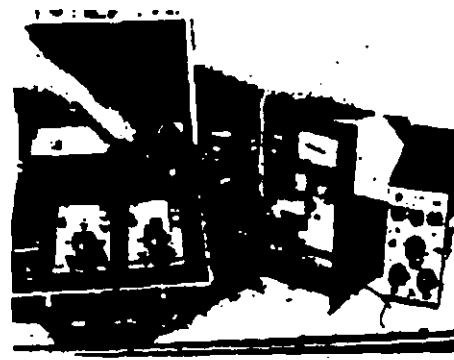
**FIG. 2 SEPARACIÓN DE COLONIAS DE LÍQUIDO BIPHÁSICO
 EN UNO DE LOS TUBOS DE SEPARACIÓN.**

11

INSTITUTO MEXICANO DEL PETRÓLEO
 CENTRO NACIONAL DE INVESTIGACIONES Y ESTUDIOS CIENTÍFICOS
 LABORATORIO NACIONAL DE ESTUDIOS PETROLÍFEROS
 AV. PASEO DE LA LUNA 10000

REPORTE
 DEL N.º
 DEL 24 FEBR. 1978

PROCESO DE SEPARACIÓN DE UNA MEZCLA BIPHÁSICA



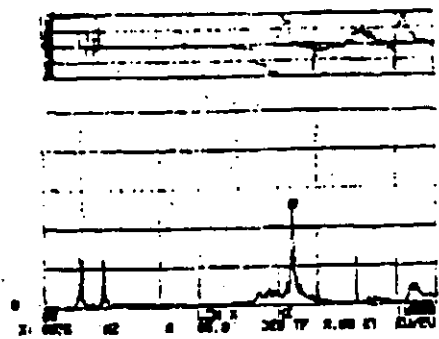
**FIG. 3 SEPARACIÓN DE COLONIAS DE LÍQUIDO BIPHÁSICO
 EN UNO DE LOS TUBOS DE SEPARACIÓN.**

12

INSTITUTO MEXICANO DEL PETRÓLEO
 CENTRO NACIONAL DE INVESTIGACIONES Y ESTUDIOS CIENTÍFICOS
 LABORATORIO NACIONAL DE ESTUDIOS PETROLÍFEROS
 AV. PASEO DE LA LUNA 10000

REPORTE
 DEL N.º
 DEL 24 FEBR. 1978

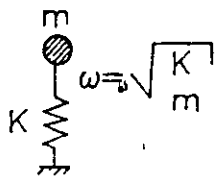
PROCESO DE SEPARACIÓN DE UNA MEZCLA BIPHÁSICA



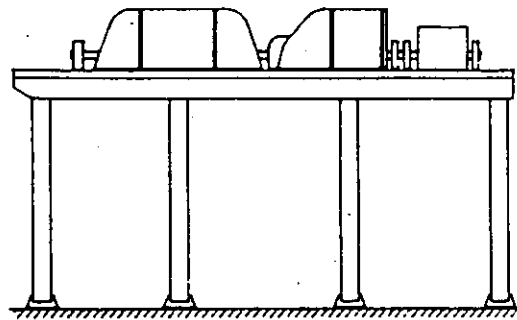
CASE	TEMPERATURE (°C)	TIME (min)	TEMPERATURE (°C)
1	120.0	1.40	120.0
2	117.7	1.30	117.7
3	95.3	2.20	95.3

**FIG. 3 GRÁFICO DE SEPARACIÓN DE TEMPERATURA COMPLETIVA
 PARA CASOS 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.**

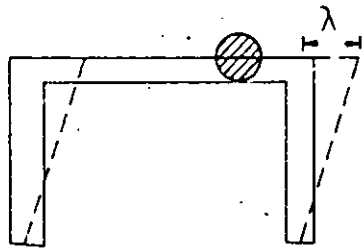
13



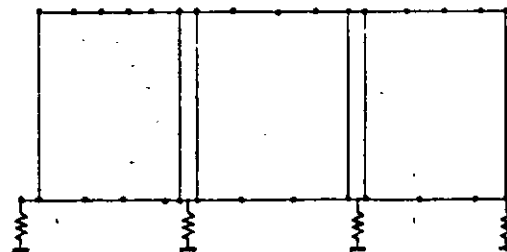
SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD



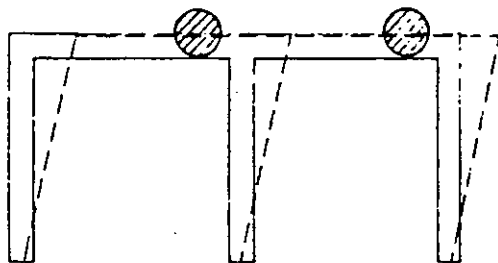
SISTEMA CIMENTACION - EQUIPO



MARCO TRANSVERSAL



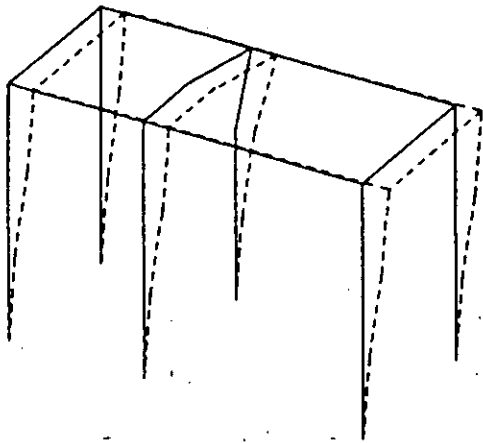
MODELO DE ANALISIS



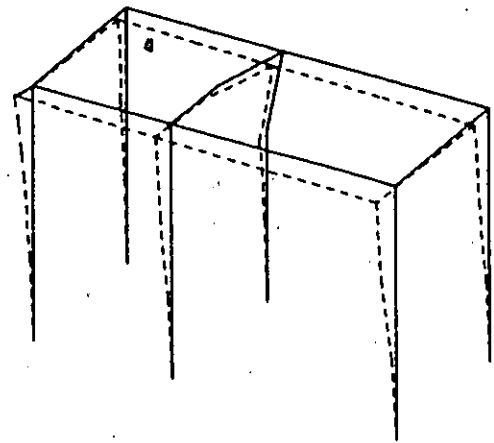
MARCO LONGITUDINAL

MARCOS EN EL PLANO

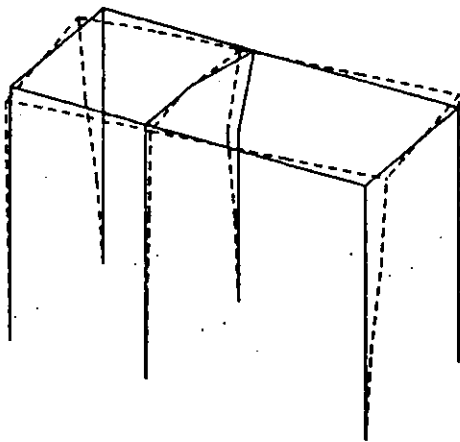
METODOS DE LAS MATRICES DE TRANSICION



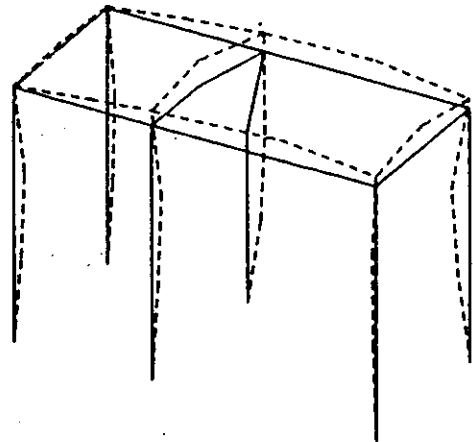
$f_1=3.21$ Hertz



$f_2=3.55$ Hertz

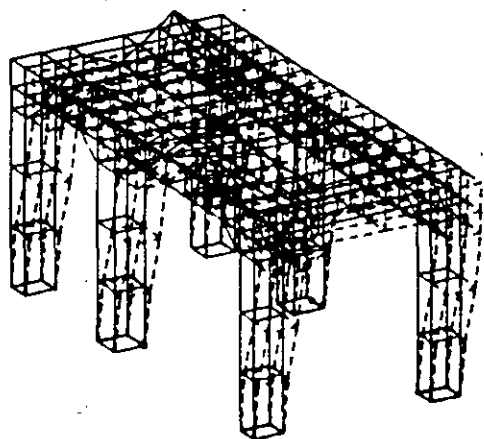


$f_3=4.47$ Hertz

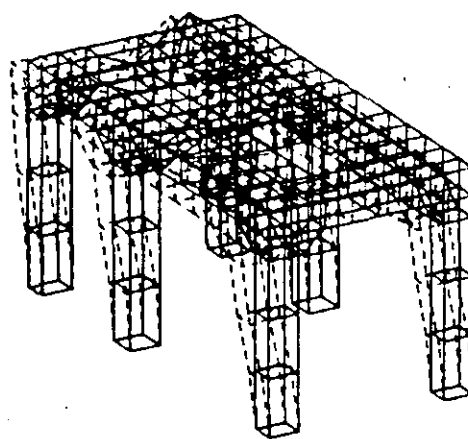


$f_4=22.7$ Hertz

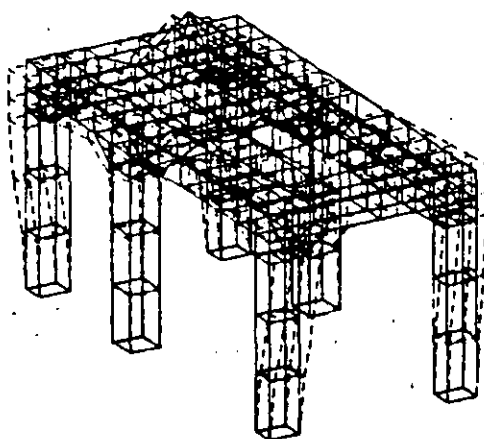
FRECUENCIAS Y FORMAS MODALES
DEL ELEMENTO VIGA



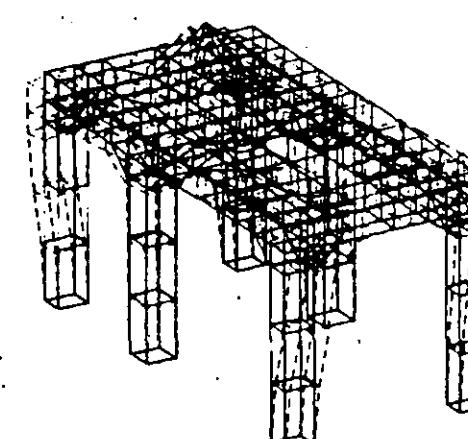
$f_1 = 4.54$ Hertz



$f_2 = 4.85$ Hertz



$f_3 = 7.06$ Hertz



$f_4 = 30.0$ Hertz

FRECUENCIAS Y FORMAS MODALES
DEL ELEMENTO SOLIDO TRIDIMENSIONAL

A n e x o A

ANALYTICAL AND FIELD STUDY OF A TURBOGENERATOR VIBRATION PROBLEM

by

Ing. Francisco Aguilar L. de N.
Instituto Mexicano del Petroleo
Mexico City, Mexico



Francisco Aguilar Lopez de Nava graduated as a civil engineer in 1963 from the Facultad de Ingenieria of the Universidad Nacional Autonoma de Mexico. In 1967 he obtained the Maestro en Ingenieria degree from the same University and is presently working for his Doctor's degree. His professional experience includes two years as assistant researcher in the Instituto de Ingenieria and more than 13 years experience in the Refinery and Petrochemical Industry serving at the Instituto Mexicano del Petroleo in different positions, being involved in foundation design, piping flexibility, thermal and stress analysis of pressure vessels and vibration of rotating equipment. Currently he is Head of the Engineering Division. His academic experience includes eight years lecturing in Structural Analysis, Numerical Methods for Computer Analysis and Finite Element Methods in the Graduate Engineering School. He is a member of the Colegio de Ingenieros de Mexico, Sociedad Mexicana de Ingenieria Sismica and the American Society of Mechanical Engineers. To date he has authored approximately 15 technical papers.

steam of 840 psi and 900° F, delivering 32,000 KW at 3,600 rpm.

The turbine is supported in two four-lobe bearings with radial clearances of 5.9 and 7.5 mils in the free and coupling end respectively. The preload of these bearings is 0.6. The generator bearings are of the elliptical type with bearing clearances of 7.5 mils and preload of 0.5.

During the initial runs of these units the PEMEX plant personnel detected, using velocity pick-ups and an IRD analyzer, relatively high amplitudes of vibration at twice per revolution in several bearing pedestals. Although the machines are equipped with a complete proximity sensor system it wasn't possible to use it at that time due to some mismatch problem that was solved later.

The Mexican Petroleum Institute was requested by Petroleos Mexicanos to participate in the acceptance field test of these units. The allowable vibration criteria in this case is according to the German specifications VDI.

From the analysis of the vibrations recorded on magnetic tape during the official start up, the following results were evident:

- a) There is a very high dynamic amplification when the unit operates on the neighborhood of 1,150 rpm, as shown in Figure 1.

ABSTRACT

The dynamic behavior observed during the commissioning of two power generation sets of 32,000 KW are analyzed. Some results of the field vibration measurements and the spectral and orbital analysis carried out to explain the observed behavior of the units are presented. Also the analytical rotor dynamics performed to correlate the vibration measurement with the expected results are discussed including the frequency analysis of the unit foundation that was made using the finite element method.

INTRODUCTION

Each of the turbogenerator sets installed in a PEMEX Refinery Complex in the northern part of Mexico consists of an extraction condensing steam turbine rigidly coupled to a two-pole generator set. The turbines are designed to operate with live

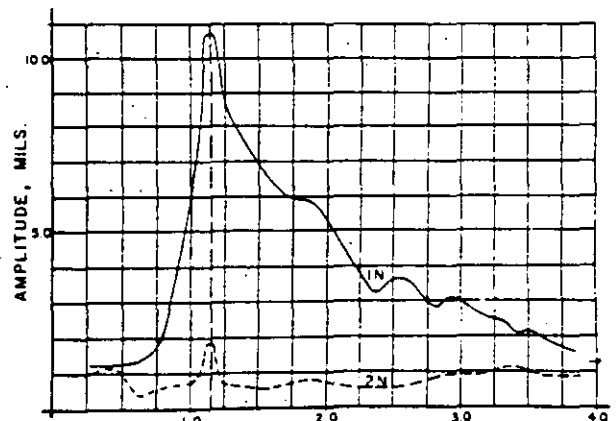


Figure 1. Amplitude vs. Speed During Start Up

- b) At nominal speed the rotor amplitude of vibration is predominantly at rotating speed.
- c) The orbit in the bearing turbine free end is practically a straight line (Figure 2).
- d) The spectral analysis of the pedestal's acceleration shows relatively high axial acceleration at twice per revolution.
- e) The rotor amplitude of vibration at 3,600 rpm in three bearings exceeded the limit allowable by the VDI specs.

The vendor representative present in the field suggested that the 1,150 rpm vibration amplification could be related with some resonance of the unit's foundation -- in that case it was the purchaser's responsibility. The reported first critical speeds of these units are 1,425 and 1,800 rpm in the horizontal and in the vertical direction, respectively.

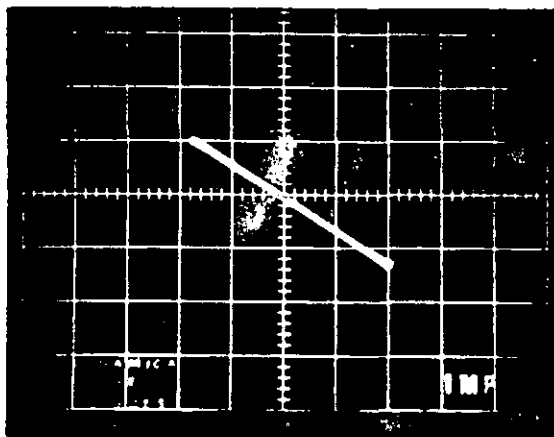


Figure 2. Orbit at Turbine Free End Bearing (3600 rpm)

ANALYTICAL INVESTIGATION

In order to gain more insight into the dynamic behavior of these four-bearing rotor systems, some analytical work was necessary. From the vendor's drawings a rotor model of 50 stations was obtained. The system's critical speed map is shown in Figure 3. The corresponding mode shapes for a combined bearing stiffness of 1.0×10^6 lb/in are indicated in Figure 4.

The first mode corresponds to bending mainly in the generator and the second in the turbine.

To calculate the rotor unbalance response of this system it was first neces-

sary to obtain the vertical load distribution on the four bearings.

The problem of calculating the bearing reactions in a multiple supported rotor is a non-linear iterative problem; because at each speed the stiffness of the bearings depends on the support reaction that is unknown until the static equilibrium of the rotor at this speed is obtained -- but this requires the stiffness of the bearings to be known in advance.

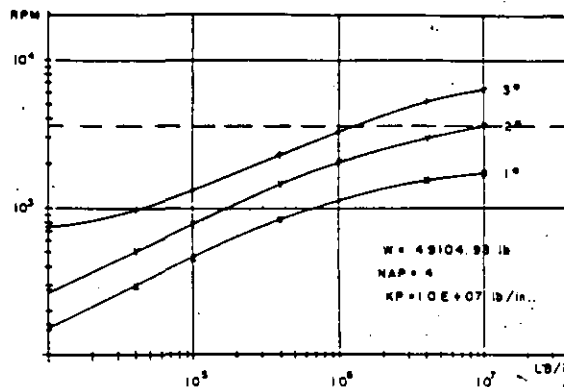


Figure 3. Critical Speed Map

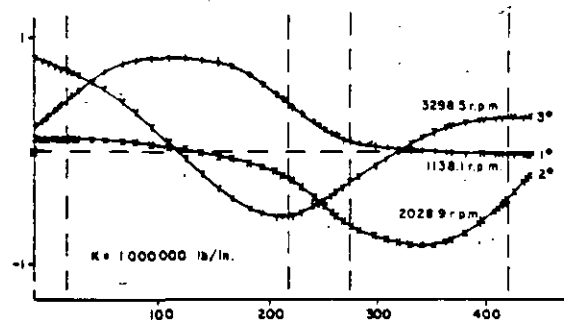


Figure 4. Turbogenerator Mode Shapes

Of course, some simplification can be made. One of the easiest is to consider the rotor infinitely stiff compared with the bearings. Also a hiperstatic beam analysis can be used with the bearings considered as rigid.

In calculating the system static equilibrium the nonlinearity of the static forces in the bearings must be taken into account, as well as the bearing alignment.

The static force in the bearings can be expressed in terms of the eccentricity of the shaft as a nonlinear function $F=F(e)$.

For the analysis the bearings were

introduced as springs with constant stiffness -- calculated as the slope of the curve fluid film force vs. eccentricity at a given eccentricity as shown in Figure 5.

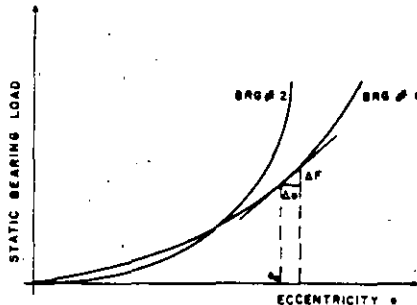


Figure 5. Fluid Film Static Stiffness

The static position of the rotor within its bearings for a given speed will be as shown in Figure 6. If the initial misalignment is written as a function of an initial eccentricity e_0 and initial attitude angle θ_0 , at rest the geometric relations between the coordinates of any bearing center (X_B, Y_B) and the coordinates of the shaft center (u_0, v_0) are:

$$X_B = u_0 - e_0 \sin \theta_0$$

$$Y_B = v_0 - e_0 \cos \theta_0$$

During rotation the shaft center moves to (X_C, Y_C) that can be expressed in terms of the movement of the casing center.

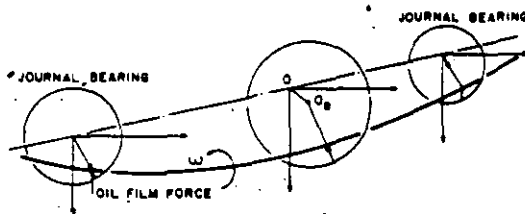


Figure 6. Static Equilibrium of a Multiple Bearing Rotor

For this analysis we developed a computer program that basically works as follows:

- a) At each speed, starting with an assumed load distribution on the bearings, the Sommerfeld number is calculated, finding by interpolation the eccentricity and attitude angle of the outer bearings.

- b) Varying the load by certain percentage a similar calculation is done. With both results the slope of the force eccentricity curve or the stiffness of the bearing can be obtained.
- c) By linear interpolation the eccentricities of the other bearings is calculated. The stiffness of these bearings is obtained varying the eccentricity and interpolating the corresponding Sommerfeld number.
- d) With the stiffness values so calculated the static equilibrium of the rotor-bearing system is obtained using the transfer matrix method.
- e) The calculated reactions on each bearing are compared with the estimated ones. This procedure is repeated until convergence to a given tolerance is reached.

To obtain the system response to induced unbalance it was necessary to calculate the lateral and vertical stiffnesses of the foundation -- the support structure of several massive concrete elements. In Figure 7 an isometric view of the model used for the finite element static and frequency analysis is shown. Only beam elements were used for modeling the elevated foundation. The cross section and geometry were obtained directly from the structural drawings. The total weight of the equipment installed on the foundation structure is 220 kips.

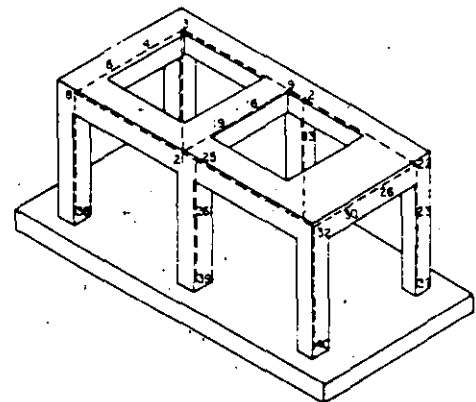


Figure 7. Isometric of the Support Structure

The stiffness of the structure was calculated applying the loads at the center of the bearing pedestals. In the horizontal direction the calculated value was 2.7×10^6 lb/in and 6.2×10^6 lb/in for the vertical.

The modal analysis was carried out with the SAP computer program for a frequency range from 0 to 65 cps -- trying to find a mode in the neighborhood of the dynamic amplification observed in the field.

Figure 8 shows the fifth mode of vibration corresponding to a frequency of 18.89 cps or 1,134 rpm. The first two modes have frequencies of 1.65 and 1.70 cps and correspond to lateral motion in both directions. The third mode is basically torsional.

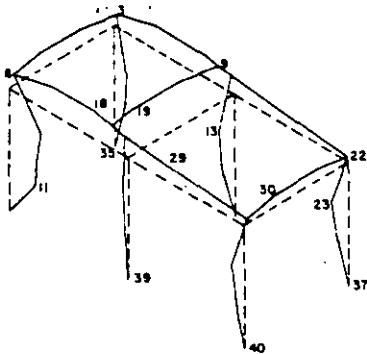


Figure 8. Fifth Mode of Vibration

In Figure 9 three noise spectra obtained at 3.0 ft. from each of the pedestals are shown. It can be seen the most important components are at rotational speed N and at twice per revolution 2N.

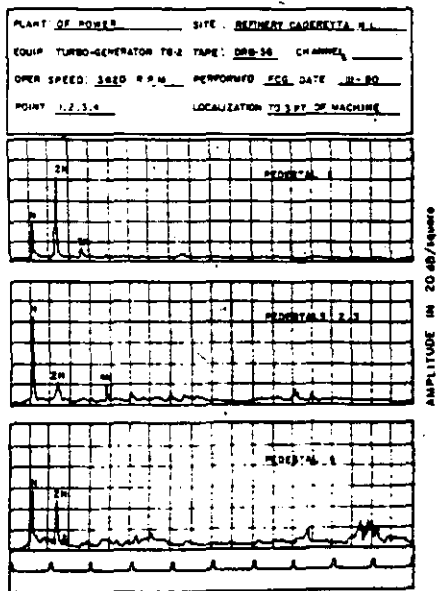


Figure 9. Noise Signal Spectrum

The dynamic response of the four-bearing machine for inphase unbalance in the generator is shown in Figure 10. It can be seen that the critical speeds occur at 1,350, 1,800, and 4,300 rpm.

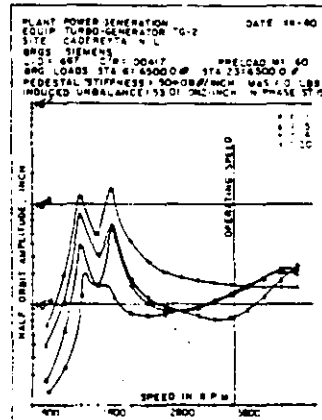


Figure 10. Rotor Unbalance Response

Other unbalance conditions were analyzed obtaining different amplitudes but similar frequencies. So it seemed at this point that the explanation of the 1,150 rpm displacement amplification was due to resonance with the fifth mode of the foundation.

In a second set of field measurements it was noticed that the oil pressure and temperature of the turbine coupling bearing were very low. This fact induced us to obtain the unbalance response of the system considering this bearing to be improperly loaded due to vertical misalignment. In Figure 11 the calculated response is shown and four criticals can be seen in the 0 to 4,000 rpm range -- the first at 1,050 rpm.

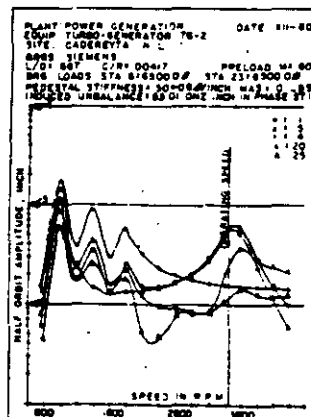


Figure 11. Rotor Unbalance Response

This result was transmitted to the plant maintenance engineer -- recommending the introduction of a 2 mil shims on the turbine coupling bearing.

Since we didn't have the cold vertical alignment of the bearing, we were unable to carry out the calculation to obtain a more precise figure -- thus the numerical value of this correction was suggested on an intuitive basis.

The vibration amplitudes recorded after this adjustment diminished appreciatively with respect to the original one; however, the amplification at 1,150 rpm still appeared. With this result we assumed that probably with an additional shim under the bearing the amplitude could be lowered to the permissible values and the critical of 1,150 rpm would be raised to 1,350 rpm.

Also during these field measurements the static and dynamic gaps were obtained to calculate the actual movement of the shaft in each bearing. The results were a little surprising because in three bearings the movement was as expected, but in the turbine free end there was a considerable misalignment in the horizontal direction as can be seen in Figure 12.

We are sure that this fact affected the bearing load distribution and the dynamic behavior of the unit -- so we are waiting to conduct additional field measurements as soon as this misalignment is corrected.

CONCLUSION

Rotating machinery supported on more than two bearings requires a careful assessment of the load distribution on the bearings.

Vertical and horizontal misalignment of the bearing plays a very important role in the dynamic behavior of the unit.

In solving dynamic problems it is of great importance to have adequate analytical simulation tools to complement and increment the value of field measurements -- for further data processing.

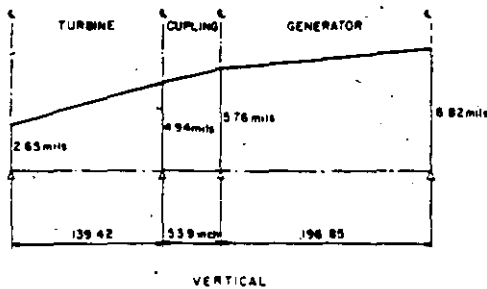
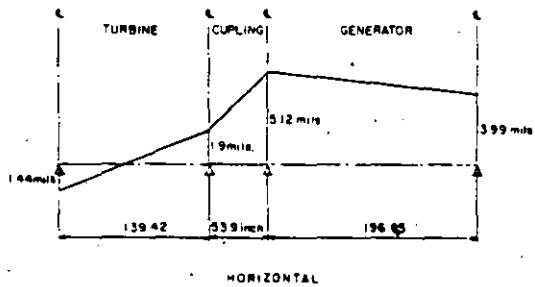


Figure 12. Measurement of the Static and Dynamic Gaps

A n e x o B

А п е х о С

IDENTIFICACION MODAL DE ESTRUCTURAS

M. en I. Francisco Aguilar López de Nava *
Ing. Roberto Estupiñán Saucedo **

RESUMEN:

La solución de problemas dinámicos de estructuras y/o componentes ya existentes, plantea diversas alternativas de solución, una de las más prometedoras por ser económica en tiempo de ejecución es la utilización de métodos de análisis modal experimental combinados con métodos analíticos de análisis lo que permite calibrar los modelos en base a mediciones físicas. Esta técnica permite una vez identificada la estructura probar diversas soluciones al problema modificando el modelo calibrado en forma numérica hasta satisfacer todos los requerimientos y hasta ese momento aplicar la solución encontrada la estructura o componente física.

En esta ponencia después de una introducción al método y algunas definiciones se describe el procedimiento y equipo utilizado en las mediciones requeridas por este método, así como algunos análisis que se realizan para la identificación modal de las estructuras.

En particular se muestra la aplicación de esta metodología a la solución de un problema de vibración de álabes de una turbina, haciendo mención de la identificación que hubo que hacer y aplicando la misma técnica a un marco de pruebas que se requirió utilizar. También se ha aplicado esta técnica a otras estructuras como a carcazas, bastidores y marcos estructurales de acero con buenos resultados, esperando reportar esta información próximamente.

* Gerente de Ingeniería, SIPPI - Instituto Mexicano del Petróleo.

** Ingeniero Principal, G.I., SIPPI - Instituto Mexicano del Petróleo

INTRODUCCION

En los países industrializados el análisis modal experimental se ha convertido en las últimas décadas en una de las herramientas más versátiles para la verificación de modelos analíticos, para la calificación dinámica de equipos y/o componentes y para el desarrollo del proceso de diseño de sistemas mecánicos complicados; su campo de aplicación es tan amplio que incluye el de diseño de máquinas-herramientas, automóviles, torres de enfriamiento, maquinaria rotatoria, vehículos espaciales, robots, equipos y componentes de plantas nucleares, e incluso componentes de circuitos integrados por computadora, Ref. 1, 2 y 3.

Entre las diversas aplicaciones de esta, técnica, Fig. 1, se encuentran las siguientes:

- 1.- Comparación de características dinámicas medidas en prototipos con las obtenidas con modelos analíticos.
- 2.- Identificación modal de estructuras para ajustar modelos de elemento finito con estructuras reales.
- 3.- Determinación de características modales de componentes complejas mediante mediciones para su incorporación en modelos de análisis por subestructuras.
- 4.- Análisis del efecto de cambios en parámetros geométricos y mecánicos en la variación de los parámetros modales.
- 5.- Determinación de cargas dinámicas a partir de mediciones de la respuesta dinámica.

En el primer caso que es bastante común solo se obtiene una indicación de la precisión de los modelos y procedimientos teóricos utilizados por comparación con los resultados obtenidos mediante pruebas y mediciones físicas. En el segundo caso que es la evolución lógica del primero se trata de correlacionar los resultados obtenidos por ambos caminos y de ajustar las propiedades de los modelos de análisis para que reproduzcan por lo menos ciertos comportamientos de los prototipos. En el tercer caso que es muy usado en industrias como la aeronáutica, la espacial y la nuclear en las que se requiere disponer de procedimientos que permitan analizar estructuras muy complejas en partes o secciones y posteriormente integrar los resultados parciales para obtener comportamientos satisfactorios del conjunto. La técnica del análisis modal experimental proporciona un camino alternativo para la obtención del modelo matemático de cualquier componente para utilizarse posteriormente en un análisis mediante subestructuras. Con este método es posible mezclar técnicas analíticas con técnicas experimentales para obtener las características dinámicas de un sistema complejo. En el cuarto caso que se utiliza para diseño de componentes, se llevan a cabo modificaciones y variaciones de las propiedades de inercia, rigidez o amortiguamiento y se determina el efecto resultante en el sistema de tales modificaciones; con ello se obtienen los cambios en el

parámetro del sistema que se requiere lograr el cambio deseado. En el último tipo de aplicación midiendo la respuesta de una estructura o componente y aplicar cierta metodología se determina la carga dinámica que lo produjo, Ref. 4.

La aplicación de la técnica de análisis modal experimental requiere la utilización de conceptos tales como los de funciones de transferencia, impedancia mecánica, autocorrelación, etc. mismas que se definirán más adelante. Cabe hacer notar que aunque estos conceptos pueden aplicarse sin contar con equipo especializado de medición, acondicionamiento y análisis, su aplicación es tan lenta que no es recomendable, mientras que por otra parte todavía no existe un instrumento que sea capaz de aplicar esta técnica de análisis modal automáticamente, requiriéndose contar con personal capacitado y con experiencia para obtener resultados satisfactorios en poco tiempo y sin incurrir en costos excesivos.

DESCRIPCION DEL PROCEDIMIENTO

La técnica de análisis modal experimental puede aplicarse tanto a la solución de problemas dinámicos existentes en algún equipo o componente, como al proceso de diseño de algún equipo o componente.

En el primer caso la técnica está básicamente constituida por cuatro pasos: a). Análisis del sistema de operación, b). Respuesta ante una excitación externa, c). Extracción de parámetros modales y d). Propuestas de modificación al sistema.

El primer paso consiste en analizar el contenido armónico de cualquier tipo de señal de vibración que se pueda obtener del sistema en cuestión, tratando de separar las causas de los efectos y de determinar las posibles causas de las frecuencias predominantes en la respuesta.

En el segundo paso generalmente se aplica una fuerza de excitación, en cualquier dirección, en algún punto del sistema y se mide la respuesta en varios puntos y varias direcciones. Existe una gran cantidad de formas de excitación tales como: Aleatoria de banda angosta, aleatoria de banda ancha, pseudoaleatoria, impulso, modulación senoidal, barrido senoidal y senoides de frecuencia variable. Para introducir este tipo de excitación, se utilizan desde martillos de impedancia con diversos tipos de punta, hasta mesas vibratorias excitadas por actuadores controlados por computadora.

La respuesta se mide mediante transductores de velocidad, aceleración o desplazamiento. La principal diferencia con otras técnicas es que es básico y fundamental medir con precisión las características de amplitud y contenido de frecuencias de la excitación. El método requiere utilizar un analizador en tiempo real de varios canales que proporcionen funciones de transferencia entre la respuesta y la excitación medidas. Esta operación puede hacerse en línea o fuera de línea, en cuyo caso es necesario registrar en cinta magnética, mediante grabadoras profesionales, toda la información necesaria para su posterior análisis en laboratorio.

La ventaja del análisis en el sitio es que de inmediato se pueden ver algunos resultados y rechazar o repetir los que muestren defectos, tales como: bajo nivel de señal, o alto grado de ruido. La ventaja del segundo procedimiento es que una vez almacenada la información se puede analizarla tantas veces como se requiera, sin tener que repetir la prueba.

Para el tercer paso se requiere un programa y una microcomputadora para la extracción modal propiamente dicha. El cuarto paso es el más difícil y no hay una metodología única para proponer las modificaciones requeridas para la solución del problema dinámico original.

En el caso de la aplicación de esta técnica a problemas de diseño, una de las técnicas más promisorias es la del método de subestructuras combinando los métodos analíticos con los experimentales de manera de lograr que el equipo o componente diseñado sintetice el comportamiento dinámico deseado. En este método el sistema se subdivide en varios subsistemas que pueden ser analizados o probados independientemente. Una vez obtenidas las características modales de cada uno de ellos, es posible establecer las ecuaciones dinámicas de todo el sistema y obtener las características dinámicas del conjunto. La parte importante consiste en que se puede empezar a trabajar por separado en cada una de las partes, tomando decisiones de diseño sin tener que esperar el resultado del sistema completo. Si los resultados obtenidos no son los deseados, no es necesario modificar todas las subestructuras o subsistemas, sino que se cuenta con información para decidir en donde hacer las modificaciones para que tengan el impacto deseado y todo ello sin modificar a las demás. Una aplicación de esta técnica al análisis de sistemas complejos de tuberías utilizando sólo resultados analíticos se presentó en la Ref. 6.

Otro método muy utilizado en la industria es el de "construcción a base de bloques", Ref. 5, similar al anterior en cuanto a que la filosofía básica es "divide y vencerás", sin embargo, el análisis, ensamble y acoplamiento se lleva a cabo en el dominio de la frecuencia.

BASES DEL METODO

El análisis modal experimental es un proceso para determinar los parámetros modales partir de una estructura o componente física.

La respuesta dinámica en una estructura causada por una función de excitación arbitraria, es la suma de un conjunto discreto de movimientos independientes, pero bien definidos. Estos movimientos son los modos, cada modo está descrito por tres parámetros modales: La frecuencia modal o frecuencia a la cual la estructura absorbe energía, el amortiguamiento modal o medida de la habilidad de la estructura para disipar energía a la frecuencia modal y la forma modal o deflexión relativa que asume la estructura a la frecuencia modal.

Correspondiendo a cada resonancia de una estructura existe un modo

particular de vibrar, Fig. 2, si se desprecia el efecto del amortiguamiento en esa forma modal todos los puntos de la estructura están en fase o fuera de fase. Cuando se excitan varias frecuencias simultáneamente el desplazamiento en cualquier punto, en cualquier tiempo, es la combinación lineal de los desplazamientos correspondientes a esas formas modales. En el análisis modal experimental se intenta separar la respuesta total en cada una de las formas modales correspondientes a cada una de las resonancias de la estructura

Un modelo matemático creado a partir del análisis modal tiene varias ventajas sobre el modelo analítico basado en parámetros espaciales, entre los que se cuenta con menor número de incógnitas.

En el análisis modal experimental, se requiere hacer mediciones de la función de transferencia (F.T) o función de respuesta en frecuencia (F.R.F.) Por definición la F.T. es el cociente complejo del espectro de salida medido en el i -ésimo grado de libertad y el espectro de excitación o entrada en el j -ésimo grado de libertad.

$$H_{ij}(\Omega) = \frac{X_i(\Omega)}{F_j(\Omega)}$$

La F.T. es una función de la frecuencia Ω y tiene su parte real (magnitud) y su parte imaginaria (fase); sus propiedades son:

- No depende del tipo de excitación (se puede medir con varios tipos de excitación: aleatorias, transitorios, etc.)
- Si se obtiene con un tipo de excitación particular, se puede usar para predecir la respuesta del sistema ante cualquier otro tipo de excitación.
- Se puede descomponer en parámetros modales.

La F.T. implica que necesitamos excitar al sistema por medio de una fuerza que sea medible en amplitud, frecuencia y algoritmos matemáticos e instrumentación electrónica para determinar la respuesta, para hacer la transformación al dominio de la frecuencia y calcular el cociente entre los dos espectros.

En mediciones prácticas es casi imposible medir entradas y salidas (excitaciones y respuestas) puras debido al ruido, que puede ser: ruido mecánico, ruido ambiental, ruido eléctrico en el sistema transductor, ruido en sistema de adquisición de datos, etc.

Debido a la contaminación por ruido se acostumbran utilizar otras mediciones como los espectros cruzados o correlación cruzada del autoespectro o autocorrelación de la respuesta o de la excitación, así como la función coherencia, Ref. 7.

La respuesta dinámica puede medirse como desplazamiento, velocidad o aceleración, por lo que se definen tres F.T., como la inversa de la relación también puede considerarse como una F.T., tenemos que ésta puede adoptar seis formatos, que son:

$$\text{Compliancia} - H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)}; \text{ Rigidez dinámica} - K(\omega) = \frac{F(\omega)}{X(\omega)}$$

$$\text{Movilidad} - M(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)}; \text{ Impedancia mecánica} - IM(\omega) = \frac{F(\omega)}{X(\omega)}$$

$$\text{Acelerancia} - A(\omega) = \frac{\ddot{X}(\omega)}{F(\omega)}; \text{ Masa dinámica} - M(\omega) = \frac{F(\omega)}{X(\omega)}$$

Obteniendo una de esas funciones, las otras cinco pueden calcularse a partir de ella. La medición de la acelerancia es la más popular, debido al uso de acelerómetros que cubren mayor rango de frecuencia de respuesta. Para trabajos analíticos de modelación normalmente se usa la compliancia, hace algún tiempo la movilidad era muy utilizada por la popularidad del transductor de velocidad. Debe mencionarse que si se conocen los parámetros modales es relativamente fácil calcular la función de transferencia como se muestra en la Fig. 3.

Para un sistema de un grado de libertad, la Fig. 5, muestra una gráfica típica de la F.T., de la cual se pueden extraer directamente sus parámetros modales. Para sistemas con varios grados de libertad la F.T. es más compleja como se muestra en la Fig. 6 y la determinación de parámetros modales es más complicada, Refs. 1 y 4.

En general para ello se requiere definir una malla de puntos sobre el sistema, asociando a cada uno de ellos dos valores, correspondientes a la parte real y la parte imaginaria de la función de transferencia obtenida para ese punto. Cuando el amortiguamiento es pequeño, y las frecuencias de resonancia están suficientemente espaciadas entre sí, la superficie formada por los valores imaginarios de la función de transferencia, para una misma frecuencia de resonancia en todos los puntos, representa el modo de vibración a esa frecuencia.

La representación gráfica de la F.T. $H_{ij}(\Omega)$ puede ser en el plano complejo mediante un diagrama de Nyquist o separando la parte real (relación de amplitudes) y la compleja (fase) conocido como diagrama de Bode, como el caso de la Fig. 5.

DESCRIPCION DEL EQUIPO EMPLEADO

Para la identificación modal se utilizó el siguiente equipo, Fig. 7.

- Analizador de Espectros SD/380 de 4 canales con memoria que utiliza la transformadora rápida de Fourier (FFT), con un rango de análisis hasta de 100 Hz y una resolución de 400 líneas
- Martillo de impulsos PCB 14043 con Transductor de fuerza POB-086B0B y diferentes tipos de material en la superficie de impacto, correspondientes al rango requerido de frecuencias de excitación.

- Acelerómetros piezo electrico B&K de diferentes tamaños.
- Acondicionadores de señal para amplificación, filtrado e integración de la señal del martillo y los acelerómetros.

METODO DE IDENTIFICACION

El método consiste básicamente en lo siguiente:

- 1.- Se determinan experimentalmente las funciones de respuesta en frecuencia FRF de la estructura real sometandola, a una serie de impactos o excitaciones aleatorias.
- 2.- Se hace un modelo matemático a partir de las características conocidas de la estructura y se extraen sus modos y frecuencias para generar las FRF teóricas.
- 3.- Mediante algún proceso de ajuste de curvas se modifican los parámetros del modelo hasta que reproduzcan el comportamiento de la estructura real.

La FRF además de ser función de Ω , depende de la masa M, rigidez K y amortiguamiento del sistema y como se menciona la FRF puede expresarse en función de los parámetros modales Ref. 1.

Para un sistema con N grados de libertad se puede ensamblar una matriz H de $N \times N$ de funciones de transferencia, sin embargo, para identificar una estructura es suficiente con determinar una columna y un renglón de la matriz H. Para obtener la columna de la matriz H se aplica la excitación en el punto i y se miden los desplazamientos en todos los grados de libertad.

Para determinar el renglón se miden los desplazamientos en el punto i cuando se aplican excitaciones en todos los demás grados de libertad. Si solo interesan los vectores y valores característicos derechos, Ref. 8, basta con determinar una columna de H para la identificación de la estructura.

PROBLEMA ANALIZADO

Como consecuencia de una falla en álabes de una turbina de vapor se llevó a cabo una investigación de las posibles causas, Ref. 9. El análisis metalúrgico y la superficie de la falla indicaron la posibilidad de falla por fatiga. Para corroborar esta hipótesis y para tener elementos para sugerir una solución se llevó a cabo un estudio de fatiga.

Los álabes que fallaron corresponden a dos pasos distintos, uno de ellos es de sección transversal recta con una ampliación o cabeza en la parte superior y el otro es alabeado, de sección transversal variable y está libre en su extremo superior, aunque tiene una perforación en el tercio, superior, por donde pasa lo que se denomina alambre amortiguador, Fig. 9.

En este trabajo nos referimos a pruebas y análisis correspondientes al segundo tipo de álabes. Para el estudio de fatiga se procedió a modelar el álabes y su raíz, mediante elementos finitos analizándolo ante esfuerzos centrífugos y por flexión producida por el paso del vapor.

También se obtuvieron analíticamente las frecuencias naturales y formas modales de un álabes solo. En la figura 8 se muestra el diagrama de Campbell correspondiente, pudiéndose notar la existencia de "interferencias" o posibles resonancias en la cercanía de la velocidad de operación mínima (6000 RPM) de la turbina.

Para confirmar por mediciones las frecuencias naturales nos proporcionaron un álabes, que se fijó en su raíz mediante un marco de prueba mostrado en la Fig. 10. Mediante mediciones de la función de transferencia se obtuvieron sus frecuencias naturales y la forma aproximada de los modos de vibración, Fig. 4

Mientras se hacían los análisis, para que la planta continuara operando se procedió a sustituir los álabes dañados y hacer pruebas de impacto en los 68 álabes de la rueda para tratar de detectar variaciones en sus características dinámicas. Encontrándose que los resultados eran muy consistentes en todos los álabes de esa rueda. Por otra parte, como resultado de esas mediciones se obtuvieron frecuencias naturales distintas que las calculadas para el álabes independiente y distintas que las determinadas experimentalmente en nuestro laboratorio.

Al parecer la causa es que el alambre amortiguador y el hecho de que los álabes al instalarse en la rueda de la turbina queden en contacto en su raíz produce un acoplamiento que modifica las frecuencias de vibración del conjunto de álabes. Para confirmar esto se hicieron corridas de computadora considerando paquetes de 3 y 6 álabes, modelando el alambre amortiguador como viga, obteniéndose resultados que reproducen varias de las frecuencias medidas en campo como puede verse en la Tabla I. Debe aclararse que la frecuencia analítica más baja no se presenta en las mediciones en campo porque el álabes se instala en la rueda en dirección perpendicular y no se excita por tratarse de una estructura periódica.

También se tiene planeado hacer pruebas en laboratorio fijando en el marco de prueba 2, 3 ó más álabes, determinando sus funciones de transferencia con y sin alambre amortiguador.

Debe mencionarse que en algunas mediciones en laboratorio apareció una frecuencia que parecía no corresponder a los álabes. Mediante mediciones de la F.T. del marco de prueba se corroboró que correspondía a una frecuencia natural del marco.

Para estimar la capacidad para resistir esfuerzos dinámicos se obtuvo el diagrama de Goodman para este álabes, obteniéndose un factor de Goodman cercano a 7.0. Este valor es menor al recomendado para diseño por distintos fabricantes de turbinas, por lo que se se confirmó que la falla pudo ser por efectos dinámicos acumulados

que produjeron fatiga.

CONCLUSIONES

- El análisis modal experimental es un método alternativo muy poderoso para diseño dinámico de estructuras y componentes.
- El procedimiento de identificación de parámetros modales permite modelar en forma sencilla y confiable el comportamiento de partes y componentes, permitiendo llevar a cabo análisis por subestructuras combinando métodos analíticos y experimentales.
- Este procedimiento comparado con cualquier método analítico es indudablemente más sencillo y rápido de aplicar para determinar características modales de estructuras o componentes.

REFERENCIAS

- 1.- A. Klosterman "On the Experimental Determination and Use of Modal Representations of Dynamic Characteristics", University Microfilms International, Ann Arbor, Michigan, USA.
- 2.- O. Dossing "Dynamic Design Verification of a Rapid Transit Rail Car, Bruel & Kjaer, Naerum, Denmark. Sound and Vibration January, 1985.
- 3.- S. Wang y H. Sato "New Approaches to the Modal Analysis for Machine Tool Structure", Transactions ASME, Journal of Engineering for Industry, Vol. 106, 1984, p.p. 40-47.
- 4.- D.J. Ewins "Modal Testing: Theory and Practice"
- 5.- A. Klosteman, W. A. Mc Clelland "Combining Experimental and Analytical Techniques for Dynamic System Analysis". Structure Dynamic Research Corporation, 1973, p.p. 20.
- 6.- F. Aguilar "Análisis Dinámico Mediante Síntesis Modal". Revista IMP, 1989.
- 7.- R. A. Collacott, "Vibration Monitoring and Diagnosis". George Godwin Ltd, 1979, London, Great Britain.
- 8.- R. Nordman "Model Parameter Identification and Sensitivity Analysis". International Conference Rotor Dynamics Problems in Power Plants, 1982, Rome, Italy.
- 9.- E. Vergara, M. Juárez y F. Aguilar "Investigación para Determinar las Causas de la Falla de los Alabes de la Turbina CKCT-101 de la Planta de Cd. Madero". Reporte Interno a Petróleos Mexicanos, 1988.

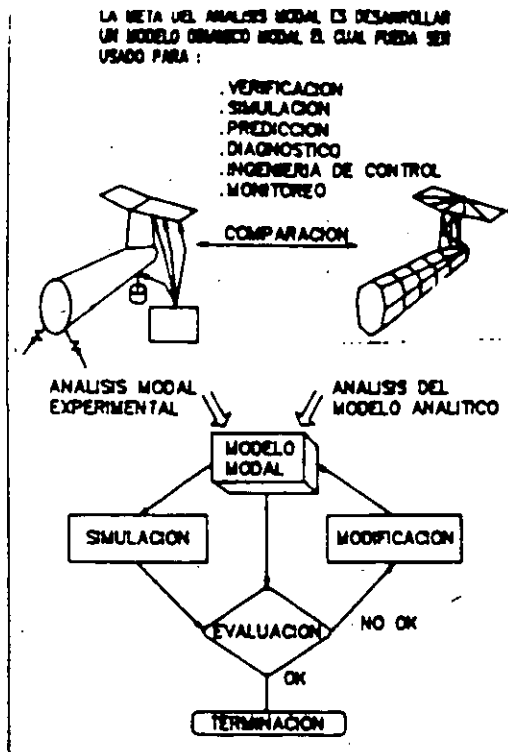


FIG. 1 ETAPAS DEL ANALISIS MODAL

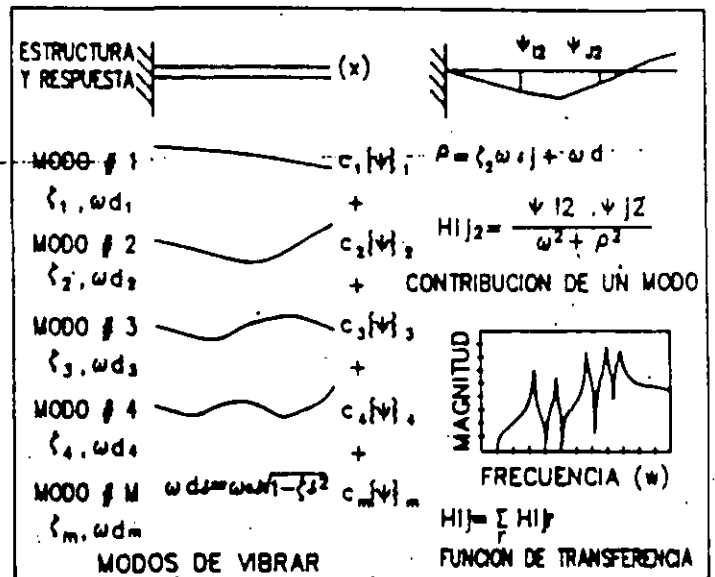


FIG. 3 ANALISIS MODAL EXPERIMENTAL

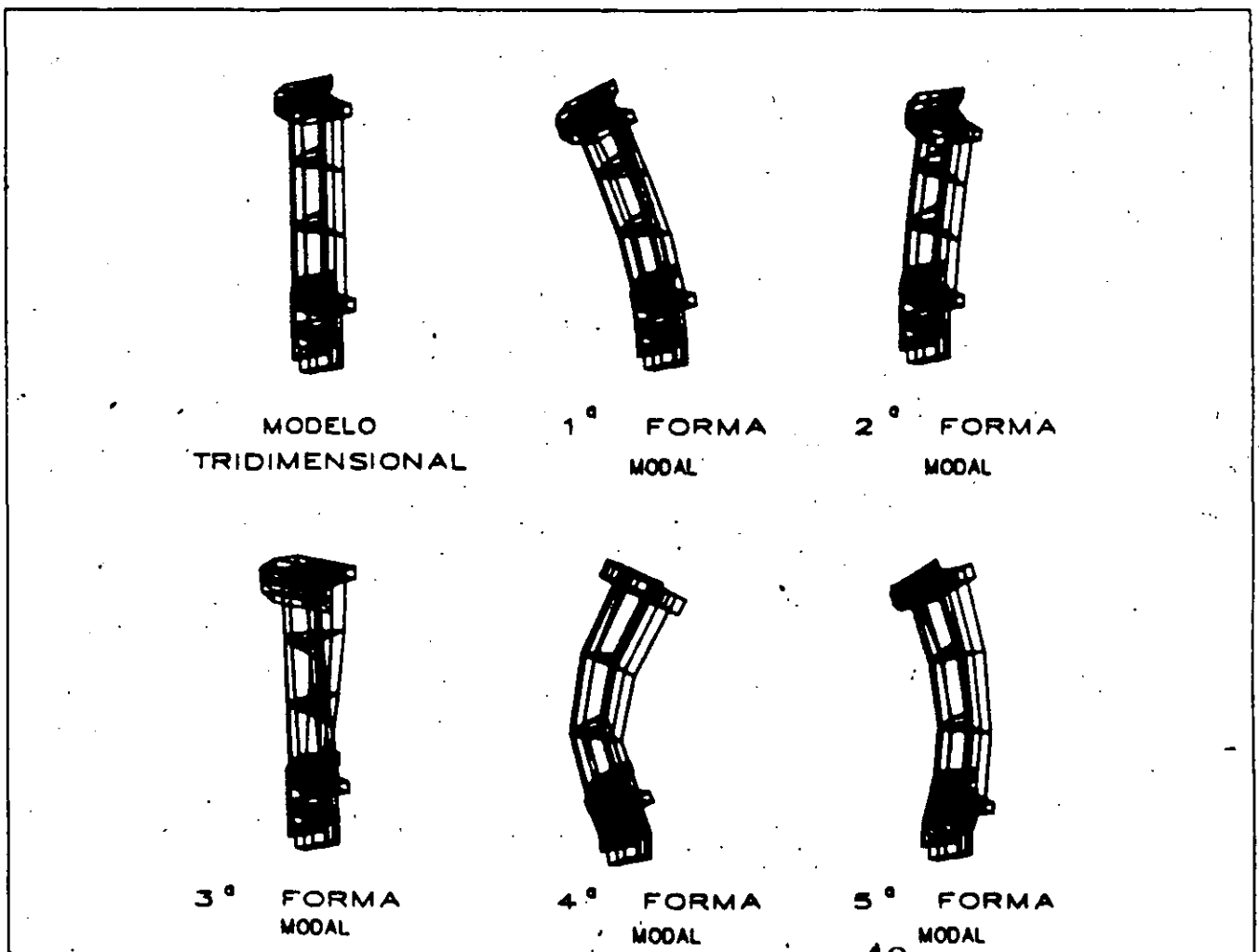


FIG. 2 FORMAS MODALES

4.9

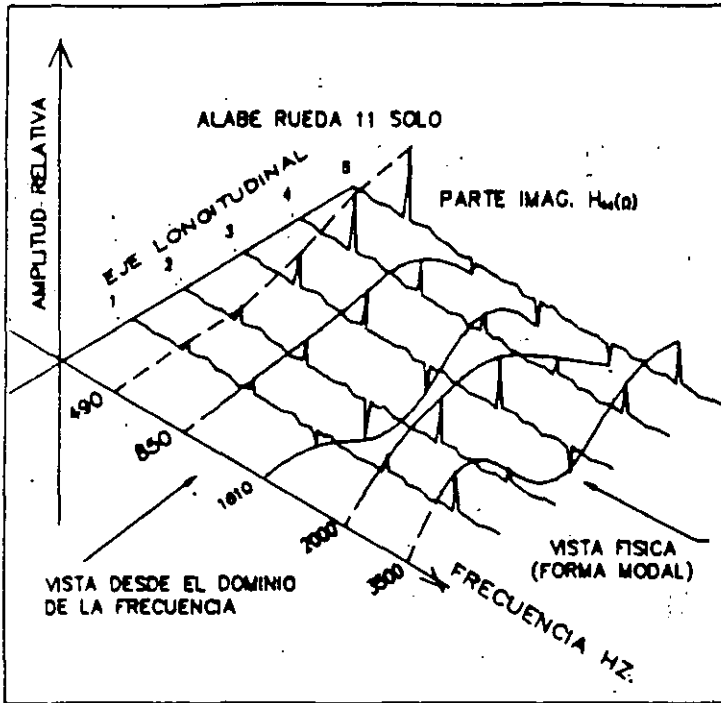


FIG. 4 EXTRACCION MODAL EXPERIMENTAL

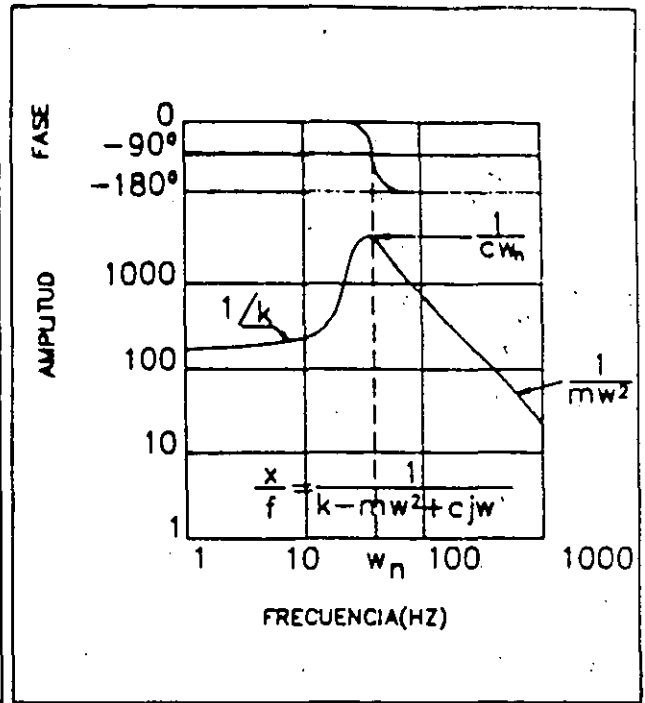


FIG. 5 FUNCION COMPLIANCIA X/F

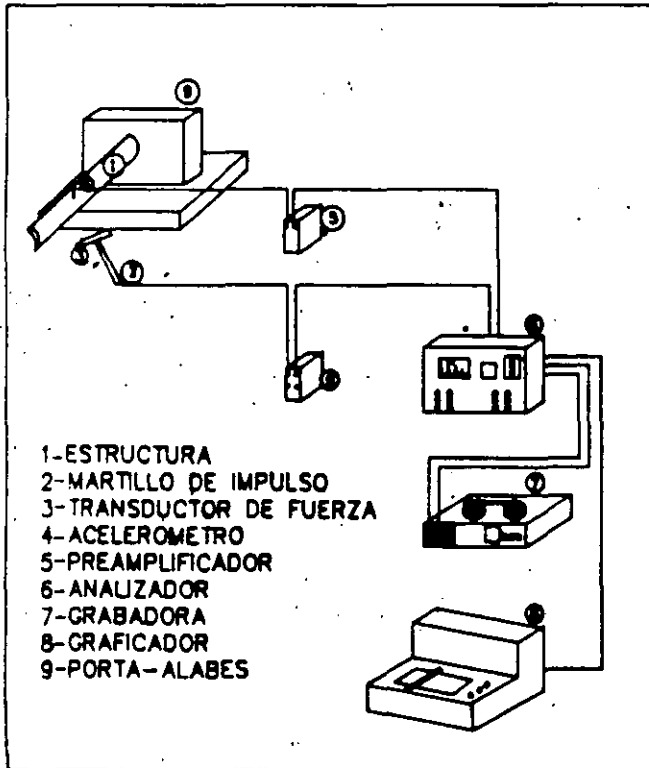


FIG. 7 INSTRUMENTACION PARA MEDICION DE F.T.

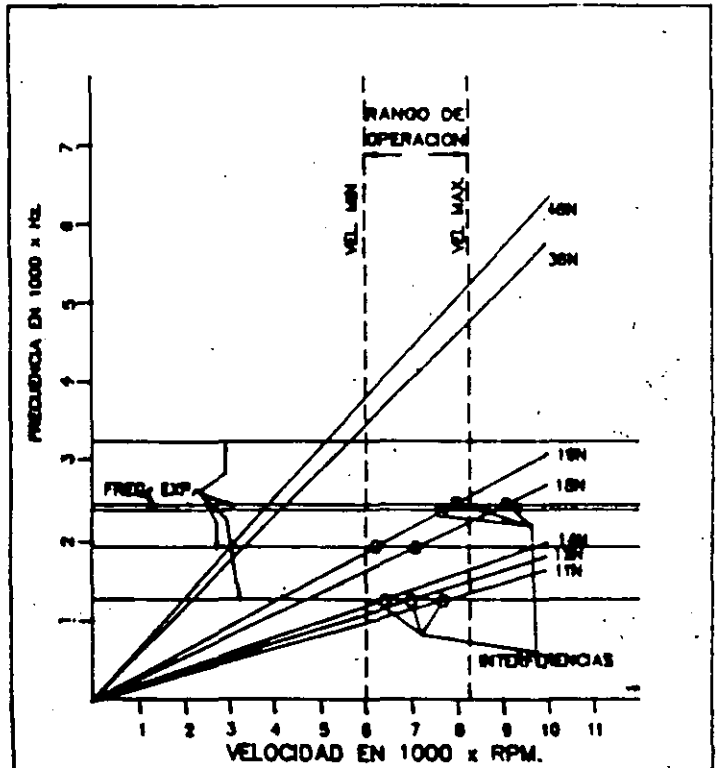


FIG. 8 DIAGRAMA DE CAMPBELL

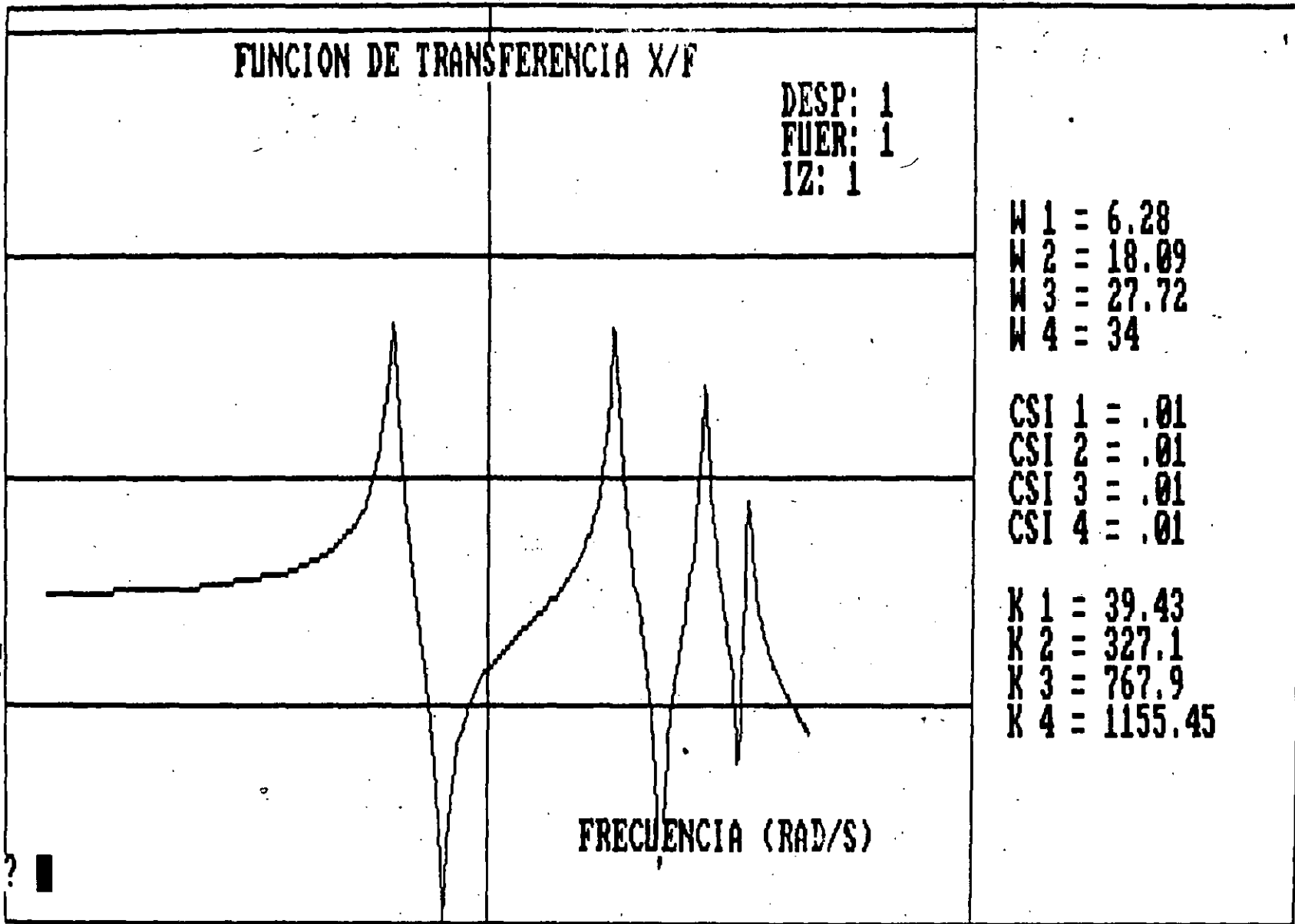


FIGURA 6



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

CURSOS ABIERTOS

CIMENTACION DE MAQUINARIA

17 al 21 de febrero de 1992

**ANALISIS DINAMICO DE CIMENTACIONES
PARA MAQUINAS RECIPROCANTES**

ING. MARIO JUAREZ RAMIREZ

PALACIO DE MINERIA

Tema : " Análisis Dinámico de Cimentaciones
para Máquinas Reciprocantes "

1.- Consideraciones generales

2.- Solicitaciones dinámicas

3.- Criterios de diseño

4.- Aplicaciones

5.- Comentarios

6.- Bibliografía

1.- Consideraciones generales

La industria nacional ha contemplado ya desde un par de décadas anteriores, la necesidad de que la ingeniería del país en sus diferentes fases, civil, mecánica, eléctrica, electrónica, etc., sea capaz de brindarle el apoyo técnico necesario para el diseño, la instalación, la operación y el mantenimiento de sus plantas de producción, debido a que las necesidades de expansión y competencia en los mercados, tanto nacionales como internacionales, se ve reflejada en un crecimiento de las instalaciones y equipos que las integran.

En muchas de estas plantas industriales, las máquinas rotatorias o reciprocantes son el centro alrededor del cual gira todo el proceso productivo, por tal motivo debe garantizarse un adecuado funcionamiento de estas unidades, ya que la operación ineficiente de estos se ve reflejada en una baja de la producción, teniéndose siempre la incertidumbre acerca del comportamiento dinámico estructural de las máquinas.

Diversos artículos técnicos e incluso libros se han publicado que se refieren al tema de cimentaciones masivas para maquinaria, en ellos se vierten criterios basados en la experiencia y desarrollos técnicos sustentados en las herramientas analíticas mas recientes que han sido llevados a la práctica con resultados satisfactorios en la mayoría de las ocasiones. Sin embargo, no debe de perderse de vista que, por una parte, el diseño de la cimentación de una máquina involucra el trabajo de tres especialidades con características bien definidas. La Ingeniería Mecánica, con la cual se realizan diseños de máquinas que se fabrican con configuraciones geométricas complejas y precisas, y con materiales que son sometidos a un gran control de calidad. La Ingeniería Civil, que utiliza métodos de análisis con los que se puede diseñar casi cualquier estructura, pero que

aun carece de un eficiente control de calidad en sus procesos constructivos. La Mecánica de Suelos es una especialidad que se enfrenta a uno de los retos más difíciles, su propósito es el de predecir la respuesta de un medio constituido, generalmente, por un conjunto de estratos de suelo de comportamiento no lineal.

Por otra parte, en este tipo de problemas el diseño está regido por el comportamiento dinámico estructural del sistema y no tanto por los esfuerzos estáticos que induzcan las cargas sobre la cimentación. Dicho de otro modo, la dimensión de los elementos estructurales es una consecuencia de tratar de eliminar el fenómeno de resonancia mecánica y de garantizar que no se presenten amplitudes de vibración excesivas o nocivas para el sistema o sus operadores.

Estos apuntes tienen la intención de mostrar, de manera muy superficial, los diferentes tópicos inherentes a este tema, tratando de que el lector intente dar un paso más y consulte los diferentes trabajos realizados por reconocidos investigadores con el propósito de, con nuevas aplicaciones, realizar un aporte de ideas en este campo.

2.- Solicitaciones dinámicas

Una fuerza dinámica que excita a un sistema estructural puede tener diferentes orígenes, un evento sísmico, la propagación de ondas causadas por una explosión o las ráfagas de viento. Estas fuentes de excitación tienen como característica común su eventualidad, esto es, son fenómenos que se presentan y disipan en periodos de tiempo relativamente cortos con respecto a la vida útil de la estructura. Sin embargo, otras fuentes excitadoras están presentes permanentemente durante toda esta vida útil; algunos ejemplos son el tránsito vehicular sobre puentes viales, el oleaje incidente sobre muelles y plataformas mar-

nas y, por supuesto, la velocidad de operación de las máquinas rotatorias.

Las máquinas reciprocantes reciben este nombre por su forma de generar el movimiento rotatorio, ya que se realiza un proceso de acción recíproca. Básicamente, el mecanismo consiste en, como se muestra en la figura 1, un pistón desplazándose verticalmente dentro de un cilindro, este movimiento se transmite a una manivela conectada al pistón por medio de una varilla de determinada longitud, dando origen a un movimiento circular.

Una descripción detallada del planteamiento matemático necesario para obtener las expresiones que permiten determinar las fuerzas y momentos de desbalanceo que se generan durante la operación del equipo se encuentra en la referencia 11, las cuales son :

$$F_v = (m_{rec} + m_{rot})r\omega \cos(\omega t) + m_{rec}(r/L)\omega \cos(2\omega t)$$

$$F_h = m_{rot} r\omega \sin(\omega t)$$

$$M = m_{rec} \omega r \sin(\omega t) [(r/(2L)) + \cos(\omega t) + (3r/(L))\cos(2\omega t)]$$

donde

F_v la fuerza vertical de desbalanceo

F_h la fuerza horizontal de desbalanceo

M es par de desbalanceo

ω la velocidad de operación del equipo

m_{rec} la masa reciprocante

m_{rot} la masa rotatoria

r la longitud de la manivela

L la longitud de desplazamiento del pistón

Como podemos observar, tanto la fuerza vertical como el par son función de dos términos, uno que depende de la velocidad de operación y otro que depende del doble de esta velocidad. El primer término da origen a lo que se conoce como las fuerzas de desbalanceo primarias, en tanto que las inducidas por el segundo término son las fuerzas secundarias.

Esta información es proporcionada por el fabricante de un equipo cuando este se adquiere y se utiliza para realizar el análisis y diseño de la cimentación. En otras ocasiones, cuando por disitintos motivos se hace necesario realizar un diseño sin contar con estos datos se recurre a determinar estas fuerzas basándose en máquinas o experiencias similares. En este trabajo se presenta como ejemplo el procedimiento que se sigue para estimar las fuerzas de desbalanceo generadas por un equipo reciprocante utilizando un programa de computadora que realiza una superposición de las fuerzas y pares de desbalanceo generadas por el conjunto de pistones que integran el equipo.

Cuando no existe la información de estas fuerzas es necesario estimarlas ya sea mediante algunaas fórmulas presentes en la literatura o si es posible, medir en campo los parámetros necesarios para aplicar las expresiones anteriores. Como un ejemplo de la manera de operar del programa se presenta el calculo de las fuerzas de desbalanceo verticales.

$$F_{vp} = K_{vp} \max [\sum \cos (\omega t)_i]$$

$$F_{vs} = K_{vs} \max [\sum \cos (2\omega t)_i]$$

$$K_{vp} = (m_{rec} + m_{rot}) r \omega$$

$$K_{vs} = \omega m_{rec} r / l$$

En el cvapitulo 6 se presenta una aplicación de este programa para obtener las fuerzas de desbalanceo generadas por un equipo del que se disponía en talleres y se habilitó para la sustitución de un equipo con problemas mecánicos.

3.- Criterios de diseño

Se han desarrollado un amplio conjunto de trabajos que versan acerca del diseño de las llamadas cimentaciones masivas para maquinaria. Originalmente se establecian reglas obtenidas empíricamente para proponer las dimensiones que debería de tener la cimentación en función del tamaño y peso del equipo asi como de relaciones de volumen de concreto por unidades de potencia del equipo. Las fuerzas de desbalanceo eran evaluadas

como un incremento de las fuerzas estáticas transmitidas a la cimentación. Otro concepto limitante en el diseño era la idea establecida de que la cimentación debería tener frecuencias naturales por encima de la velocidad de operación, lo que se traducía en una zona de resonancia del lado rígido, es decir, las cimentaciones deberían tener su primera frecuencia natural un 50% mayor que la velocidad de operación.

El primer criterio establecido fue el de las amplitudes de vibración máximas que se deberían presentarse durante la operación de la máquina. Después apareció el concepto de factor de amplificación dinámica que obligó a limitar las frecuencias naturales del sistema con el propósito de impedir el crecimiento de las fuerzas de desbalanceo. Este fue el primer paso para el planteamiento de un análisis dinámico en la solución de este tipo de problemas. Los criterios establecidos en la actualidad requieren de satisfacer ambos conceptos, el de las amplitudes de vibración y el de resonancia mecánica. Sin embargo, en los desarrollos matemáticos más recientes ya se han eliminado las ideas limitantes de los criterios originales. Primeramente, se sabe que las fuerzas de excitación pueden ser evaluadas en función de las características geométricas y de operación de los equipos eliminando así la imposición de un número arbitrario para su determinación.

Actualmente se sabe que las cimentaciones pueden tener frecuencias naturales por debajo de la velocidad de operación de los equipos que sustentan y que estas se registran o manifiestan durante los arranques o paros del equipo, sin embargo, estos pasos por zona de resonancia deben ser limitados con el fin de disminuir los efectos negativos sobre el sistema.

El criterio de análisis dinámico basado en la Teoría del Semiespacio Elástico es el más utilizado actualmente ya que considera en el análisis parámetros de diseño no contemplados en otros trabajos como lo son los factores de forma y enterramiento y su influencia en el análisis dinámico. Sin embargo, existen

otros trabajos, como el publicado en 1967 por los Doctores en Ingeniería J. A. Nieto y D. Reséndiz, basados en sistemas de un grado de libertad que permiten entender el problema de una manera simple antes de introducirse en desarrollos matemáticos más complicados, razón por la cual se presentan en estos apuntes un resumen breve de este trabajo.

Algunas reglas básicas que deben tenerse en cuenta en este tipo de problemas son las siguientes :

Las amplitudes de vibración deben tener un límite tal que no afecte la adecuada operación del equipo.

La zona de resonancia está definida desde el 80% hasta el 120% de la relación de frecuencias.

El centro de masas del sistema debe tener excentricidades no mayores del 5 % con respecto al centro de cargas.

En lo posible, el ancho de la cimentación debe ser un 50% mayor que la distancia de la base al eje de la máquina para disminuir los problemas de cabeceo.

En lo posible, la cimentación debe estar enterrada de un 50% a un 80% de su altura.

Las frecuencias naturales que principalmente son las críticas en estas cimentaciones son la frecuencia horizontal, la frecuencia vertical y la frecuencia de cabeceo. Debido a que la aplicación de la fuerza de desbalanceo horizontal actúa en el eje de la flecha, se presenta un acoplamiento de las frecuencias del movimiento horizontal y el cabeceo.

Por tratarse de un sistema estructural compuesto, existen variables de diseño propias de cada una de las partes que lo integran, la máquina, la cimentación y el suelo. Los parámetros que caracterizan a éste último no sólo son las que mayor dificultad presentan para su definición, sino que influyen decisivamente en la respuesta dinámica de la estructura. Se listan a continuación estas variables :

Equipo

rango de operación
velocidad de operación
velocidad de disparo
peso total
dimensiones generales
centro de cargas
centro de masas
altura del eje
fuerzas de desbalanceo

Cimentación

esfuerzo de ruptura $f'c$
dimensiones generales
peso volumétrico

Suelo

Módulo de elasticidad
relación de Poisson
peso volumétrico
capacidad de carga

El planteamiento del problema como tres sistemas de un grado de libertad propuesto por Nieto y Reséndiz se resumen en los siguientes pasos :

Estimación de la frecuencia natural reducida del sistema en función del tipo de suelo y el área de contacto.

Determinación de la frecuencia vertical de acuerdo a el esfuerzo actuante.

Obtención de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento para cada grado de libertad con las expresiones :

$$K_v = E / (1 - \nu^2) k_v \sqrt{A}$$

$$K_h = E / (1 - \nu^2) k_h \sqrt{A}$$

$$K_\phi = E (1 - \nu^2) k_\phi I / \sqrt{A}$$

$$C_v = 6.7 \sqrt{K_v \rho h^3}$$

$$C_h = 41.1 \sqrt{K_h \rho h^3}$$

$$C_\phi = 0.97 \sqrt{K_\phi \rho h^3}$$

Los coeficientes k_v, k_h y k_ϕ son función de la relación largo/ancho de la cimentación y de la relación de Poisson del suelo. Los coeficientes de amortiguamiento h_v, h_h y h_ϕ dependen del área de contacto de la cimentación con el suelo y la manera de evaluarlos puede encontrarse en la referencia 4.

Las frecuencias naturales, relaciones de amortiguamiento y amplitudes de vibración se obtienen de acuerdo a las expresiones :

$$\mu = \sqrt{(1 - \theta^4 / \omega^2) + (2\xi\theta/\omega)}$$

$$\omega_v = \sqrt{K_v / (M_v + M)}$$

$$\xi_v = C_v / (2\sqrt{K_v(M_v + M)})$$

$$A_v = \mu P_v / K_v$$

$$\omega_h = \sqrt{K_h / (M_h + M)}$$

$$\xi_h = C_h / (2\sqrt{K_h(M_h + M)})$$

$$A_h = \mu P_h / K_h$$

$$\omega_\phi = \sqrt{K_\phi / (I_\phi + I)}$$

$$\xi_\phi = C_\phi / (2\sqrt{K_\phi(M_\phi + M)})$$

$$A_\phi = \mu M_\phi / K_\phi$$

Las frecuencias acopladas están dadas por

$$\gamma = (I_{\phi\phi} + I_e) / (I_\phi + I)$$

siendo

$I_{\phi\phi}$ el momento de inercia de masa del prisma virtual de suelo e I_e el momento de inercia de masa del equipo y la cimentación.

$$\omega_{1,2} = 1/(2\gamma) [\omega_h + \omega_\phi + \sqrt{(\omega_h + \omega_\phi)^2 - 4\gamma\omega_h\omega_\phi}]$$

Finalmente, las amplitudes de vibración resultantes están definidas por

$$A_{vr} = \sqrt{A_v + A_v\phi}$$

$$A_{hr} = f A_h + A_h\phi$$

con

$$Av\phi = 1/2 c A\phi$$

$$Aho = h A\phi$$

siendo c la dimension de la base perpendicular al eje de cabeceo y h la altura del bloque de cimentación.

4.- Aplicaciones

```
CCCCCCCCC II MM MM AAAAAAAAAAA 00000000000
CC II MMM MMM AA AA 00 00
CC II MM MM MM MM AA AA 00 00
CC II MM MM MM MM AAAAAAAAAAA 00 00
CC II MM MM MM AA AA 00 00
CC II MM MM MM AA AA 00 00
CC II MM MM AA AA 00000000000
CCCCCCCCC II MM MM AA AA 000
```

Un programa de computadora para el analisis dinamico de la cimentacion de una maquina reciprocante de acuerdo al trabajo desarrollado por :
Dr. Jose Antonio Nieto - Dr. Daniel Resendiz
programado por :

Mario Juarez Ramirez

Datos del terreno

tipo de suelo	Arcilla plastica
capacidad de carga ultima	103.400 ton/m2.
modulo de elasticidad	10000. ton/m2.
relacion de Poisson	0.45000
peso volumetrico	1.500 ton/m3.

Datos de la cimentación

largo	9.000 m.
ancho	3.000 m.
altura	1.000 m.
peso	64.800 ton.

Datos del equipo

peso	90.000 ton.
velocidad de operacion	300. rpm
centro de masas	0.900 m.

	Fuerzas de desbalanceo
fza. vert. primaria	0.3 ton.
fza. vert. secundaria	0.0 ton.
fza. horizontal	0.0 ton.
par vert. primario	3.6 ton-m.
par vert. secundario	0.0 ton-m.

Vibracion vertical

frecuencia natural = 9.457 hertz.
amortiguamiento critico = 0.445
amplitud de vibracion = 0.00000465

Vibracion Horizontal

frecuencia natural = 8.615 hertz.
amortiguamiento critico = 0.259
amplitud de vibracion = 0.00000000

Vibracion de cabeceo

frecuencia natural = 8.372 hertz.
amortiguamiento critico = 0.117
amplitud de vibracion = 0.00003788

5.- Bibliografía

- 1.- Cimentación de Maquinaria.
Jorge López Ríos
Apuntes del curso " Cimentaciones de maquinaria " impartido en el Centro de Educacion Continua del IPN.
- 2.- Comparación de los modelos de análisis dinámico de cimentaciones de maquinaria .
Francisco Aguilar L. de N. - M. Juárez
VII Congreso Nacional de Ingeniería Estructural.
- 3.- Consideraciones y criterios para diseño de cimentaciones de maquinaria
D. M. León
Revista del Instituto Mexicano del Petroleo V- 1976
- 4.- Criterios de diseño para cimentaciones de maquinaria.
J. A. Nieto - D. Resendiz
Publicación 131 del Instituto de Ingeniería, UNAM.
- 5.- Dynamics in civil engineering Vol I,II,III
Alexander Major
Akademiai Kiado, Budapest
- 6.- Interacción dinámica entre estructuras masivas y subsuelo.
Jacobó Bielak
Publicación 362 del Instituto de Ingeniería, UNAM.
- 7.- Parámetros de diseño en cimentaciones de maquinaria
Raúl Flores Berrones
Publicación 389 del Instituto de Ingeniería, UNAM.
- 8.- Rigidez dinámica de cimentaciones corridas.
Javier Aviles
VII Congreso Nacional de Ingeniería Estructural.

9.- Sobre el comportamiento de bases rígidas sujetas a excitaciones armónicas.

Jorge Elorduy

Publicación 137 del Instituto de Ingeniería, UNAM.

10.- Solicitaciones dinámicas debidas a maquinaria.

Raul Flores Berrones

X Reunion Nacional de Mecánica de Suelos.

11.- Vibrations of Soils and Foundations

F. E. Richart - J. R. Hall

Prentice Hall



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

CURSOS ABIERTOS

CIMENTACION DE MAQUINARIA

17 al 21 de febrero de 1992

**COMPARACION DE MODELOS DE ANALISIS DINAMICO DE
CIMENTACIONES DE MAQUINARIA**

M. EN C. MARIO JUAREZ RAMIREZ

M. EN I. FRANCISCO AGUILAR LOPEZ

PALACIO DE MINERIA

COMPARACION DE MODELOS DE ANALISIS DINAMICO DE CIMENTACIONES DE MAQUINARIA

M. en I. Francisco Aguilar López de Nava *
M. en C. Mario Juárez Ramírez **

RESUMEN:

El análisis y diseño de cimentaciones de maquinaria rotatoria es un problema estructural de bastante complejidad, ya que involucra una estructura tridimensional compuesta por diversos elementos sobre la cual se apoya la maquinaria accionada y su accionador a través de un bastidor de acero. Debido al gran peso de las cimentaciones y el equipo se requiere, por lo general del empleo de pilotes que interactúan en conjunto con el suelo con el sistema equipo-cimentación.

Por otra parte, las restricciones en amplitudes permisibles de vibración son bastante rigurosas para evitar daños al equipo y también es relativamente complicado definir las fuerzas de excitación que produce la maquinaria.

Existen en la literatura diferentes modelos de análisis para este tipo de estructuras, variando desde modelos simples de un grado de libertad, hasta modelos complejos de análisis mediante elemento finito con miles de grados de libertad.

El propósito de este trabajo es comparar los resultados que proporcionan algunos de estos modelos y hacer recomendaciones sobre su aplicabilidad, haciendo énfasis en las interacciones que generalmente no se toman en cuenta y proporcionando guías para el análisis de otros casos similares al utilizado como ejemplo en este trabajo.

* Gerente de Ingeniería, SIPPI - Instituto Mexicano del Petróleo.

** Investigador, SIPPI - Instituto Mexicano del Petróleo.

INTRODUCCION:

El análisis y diseño de cimentaciones de maquinaria es uno de los campos más antiguos de la ingeniería civil en los que se utilizaron la dinámica y la teoría de vibraciones. Las primeras aplicaciones datan de los años 20's y desde los años 60's aparecieron libros dedicados a esta especialidad que se han convertido en clásicos (Rausch y Barkan).

Básicamente podemos distinguir dos tipos de cimentaciones las de tipo masivo apoyadas directamente sobre el suelo o sobre pilotes y las flexibles, formadas por una plataforma elevada apoyada sobre columnas, las que a su vez suelen apoyarse sobre pilotes generalmente a través de una losa de piso. En las del primer tipo la influencia de la interacción suelo-estructura es sumamente importante y ha sido suficientemente estudiada y esta documentada profusamente en la literatura.

CIMENTACIONES SUPERFICIALES:

Este tipo de cimentaciones masivas se utiliza tanto para maquinaria recíprocante como centrífuga. En ambos casos las fuerzas dinámicas producidas por el equipo son funciones de la velocidad de rotación. Una parte importante del diseño es la predicción de las frecuencias de vibración de la cimentación para evitar resonancias con las frecuencias de excitación. También es importante la determinación de las amplitudes de vibración del conjunto maquinaria-cimentación cuando opera en condiciones estacionarias. Por operar a frecuencia menor los equipos recíprocantes presentan más probabilidad de resonancia con alguna frecuencia natural del conjunto cimentación-equi-
po.

Las propiedades del suelo se describen en términos de funciones de impedancia complejas, dependientes de la frecuencia en las que la parte real k , es la rigidez (en fase) y la parte imaginaria representa el amortiguamiento viscoso equivalente. Ambas constantes son función de la frecuencia de vibración. Las funciones de impedancia han sido valuadas por varios investigadores utilizando métodos analíticos y numéricos de la mecánica del medio continuo, modelando al suelo como un semi-espacio visco-elástico homogéneo. Existiendo publicada información para diferentes formas de cimentación y diferentes parámetros dimensionales. Estos resultados son muy valiosos aunque deben aplicarse con criterio, principalmente por tres aspectos: La no homogeneidad del suelo, la estratificación del suelo y el efecto de confinamiento por la profundidad de desplante de la cimentación.

Existen correcciones para tomar en cuenta las no homogeneidades y la estratificación, Ref. 1, así como para la variación de las características del suelo con la profundidad.

CIMENTACIONES PILOTEADAS:

Si existen pilotes sus propiedades dinámicas también se pueden mane

jar convenientemente a través de funciones de impedancia. Las funciones de impedancia de los pilotes son rigideces complejas referidas a la cabeza del pilote y provienen de la interacción de toda la superficie del pilote que esta en contacto con el suelo. Esta interacción modifica la rigidez propia del pilote y produce amortiguamiento considerable por radiación de energía (amortiguamiento geométrico). En las Refs. 2 y 3 se puede encontrar tablas y gráficas para evaluar las rigideces y amortiguamientos de los pilotes. Debe mencionarse que casi todos esos resultados están basados en teorías elásticas que, sin embargo, la práctica ha validado como adecuadas. Cuando los pilotes están espaciados, del orden de 10 veces el diámetro, se puede considerar que no hay interacción entre los pilotes y aplicar directamente la superposición.

Para la respuesta vertical el tipo de punta del pilote es importante, siendo los pilotes de fricción los menos rígidos pero con mayor amortiguamiento. Para la respuesta horizontal un parámetro importante es la presión de confinamiento en la parte superior del pilote, ya que incluso puede haber separación del pilote y el suelo.

Cuando la separación es pequeña se debe incluir el efecto de grupo conocido como interacción pilote-suelo-pilote este análisis, por lo general, requiere de un programa de computadora pues los resultados dependen de la configuración y condiciones particulares del suelo. Teniéndose casos de interacción muy fuerte, Ref. 1.

CIMENTACIONES ELEVADAS

Existen equipos que requieren de una cimentación elevada para operar, ya que están conectados a su vez a otros equipos que deben instalarse a menor elevación, tal es el caso de los condensadores de las turbinas de vapor. Otros equipos como los compresores deben interconectarse con tanques y recipientes mediante tuberías y una cimentación elevada resulta conveniente.

La estructura consiste en una plataforma sólida con aberturas apoyadas sobre columnas, puede ser de acero o de concreto. En nuestro país predominan estas últimas.

Respecto a los métodos de análisis para este tipo de cimentaciones es bien sabido que durante mucho tiempo se utilizaron métodos simplificados, incluso modelos de un solo grado de libertad. Posteriormente se utilizaron marcos planos independientes en ambas direcciones. Una hipótesis común hasta fechas recientes es la de considerar a la cubierta como rígida, aunque se ha reportado varias veces que en mediciones en cimentaciones industriales Refs. 4 y 5, ese no es el caso.

En fechas recientes, gracias a la disponibilidad de programas de computadora y de equipo de cómputo adecuado, ha sido posible hacer análisis de estructuras tridimensionales y así muchas cimentaciones se han analizado mediante programas de vigas y columnas como el STRUDL o el SAP.

Este tipo de modelos ya es un poco más cercano a la realidad pero todavía adolece de muchas imperfecciones, ya que entre otros efectos no permite modelar adecuadamente las aberturas o los cambios bruscos de sección o las vigas cortas o peraltadas.

Diversos programas de elemento finito como el SAP, COSMOS, NISA, etc. permiten modelar con elementos sólidos este tipo de estructuras con lo que se logra hacer menos hipótesis simplificadoras. Sin embargo, aún persisten problemas importantes como el de como modelar la masa, si se utilizan masas concentradas existe el problema de decidir cuantas y de que valor. Si se quiere utilizar el concepto de masa consistente, no todos los programas tienen esta opción.

Igualmente importantes son las cuestiones sobre como considerar las interacciones, existiendo dos interfases básicas: la de el equipo con la cubierta y la de la losa de piso con el suelo y/o pilotes.

CONSIDERACIONES SOBRE EL ANALISIS

Debe recordarse que el propósito del diseño es proporcionar al equiporotatorio una sustentación que cumpla con los requisitos de funcionalidad, resistencia, rigidez y respuesta dinámica tal que no amplifique los efectos dinámicos propios del equipo.

Las dimensiones del o los equipos a instalarse en la cimentación y los requerimientos de instalación para una operación adecuada definen la geometría de la cimentación. Los requisitos de resistencia y rigidez son relativamente fáciles de cumplir, ya que en general se trata de estructuras con elementos masivos. La respuesta dinámica por el contrario es el problema más difícil ya que se requiere hacer un análisis no simplificado que tome en cuenta la mayor parte de las variables que intervienen.

Las componentes principales del modelo son el equipo rotatorio y su sistema de soporte, la cimentación propiamente dicha, el suelo subyacente y los pilotes, en su caso.

Para modelar el equipo rotatorio se cuenta con teorías establecidas Ref. 6 basadas en modelos de comportamiento lineal y se pueden tomar en cuenta todas las particularidades geométricas y mecánicas de los rotores (sección variable, efectos de cortante, efectos giroscópicos, aprietes térmicos, etc.) Para el sistema de soporte hay que distinguirdos partes las chumaceras y los pedestales. El comportamiento de las chumaceras se basa en la solución de la ecuación de Reynolds, resuelta para la geometría particular de las chumaceras utilizadas, linearizada, considerando desplazamientos y velocidades pequeñas, dando lugar a un conjunto de 4 coeficientes de rigidez y 4 de amortiguamiento dependientes de la velocidad de rotación, Ref. 7.

Para los pedestales se debe hacer un modelo de análisis estructural que refleje la forma y tipo de soporte real del equipo, teniéndose que en algunos casos también es necesario considerar la forma de fijación de las componentes de la chumacera a la caja de chumaceras

y a los pedestales.

Para la cimentación se pueden utilizar distintos tipos de elementos finitos desde vigas y columnas, elementos de placa o elementos para estados planos, hasta elementos sólidos tridimensionales, desde luego el número de grados de libertad se multiplica rápidamente.

En el análisis el suelo se incorpora mediante algún modelo de semi-espacio visco-elástico, que puede representarse mediante un conjunto de resortes y amortiguadores. En el caso de que existan pilotes un modelo refinado debe incluir sus características de rigidez y amortiguamiento, generalmente mediante funciones de impedancia en la cabeza de los pilotes que permiten su acoplamiento con el resto del modelo. Como una primera aproximación puede considerarse únicamente la rigidez del pilote enterrado a través de algún modelo de elemento finito para modelar el pilote y los estratos del suelo.

En la Ref. 8 se presenta un método de análisis para el sistema completo incluyendo la interacción con el equipo y el suelo. En ese artículo la estructura se trata mediante el método dinámico de rigideces en forma matricial, utilizando técnicas de subestructuras y elementos finitos con masa distribuida que incluyen efectos de cortante, fuerza axial e inercia rotacional. Esto da lugar a que la matriz de rigidez sea compleja y dependiente de la frecuencia. Para la interacción con el suelo primero se obtienen las funciones de impedancia de los pilotes referidas a sus cabezas o las funciones de impedancia del suelo si no hay pilotes. Estas funciones se incorporan a las matrices de rigidez de los elementos de placa de la losa inferior, para ello deben existir nodos en la losa que coincidan con el punto de unión del pilote con la losa. Aunque esta losa es gruesa y debería modelarse con elementos sólidos indican que es posible utilizar la teoría de placas delgadas incluyendo las deformaciones por cortante.

Otro efecto que generalmente no se toma en cuenta y puede ser importante es el de la rigidez propia del equipo instalado e incluso el de ciertas tuberías que llegan a ser de gran diámetro.

Si se consideran todas las componentes del sistema equipo-cimentación y se incluye el amortiguamiento de las chumaceras y del suelo, aún para una cimentación relativamente pequeña se puede llegar a un modelo con varios cientos de grados de libertad. Tratándose de la cimentación de un turbogenerador de varios cuerpos se tendrían miles de grados de libertad en un modelo completo.

A primera vista por el costo relativamente bajo de la estructura podría parecer que no se justifica resolver un problema estático, uno de valores característicos y uno de respuesta dinámica, probablemente no tan sólo una vez sino varias, hasta llegar a un comportamiento satisfactorio. Sin embargo, no debe olvidarse que el propósito fundamental es proteger al equipo rotatorio instalado en la cubierta el cual no sólo es costoso en cuanto a inversión inicial, sino que su mala operación o sus paros por problemas dinámicos es sumamente costosa, ya que implican pérdidas de producción o

suministro de varios cientos o de millones de pesos al día.

Por tanto aún sin tener que llegar a utilizar en todos los casos un modelo muy sofisticado se justifica y se requiere bastante cuidado en el modelado, análisis e interpretación de resultados de este tipo de estructuras.

Existe la tendencia a sobresimplificar el análisis no sólo debido a la complejidad inherente del modelo, sino a que los problemas donde hay interfases entre especialidades tienden a ignorarse y analizarse como independientes. Así los especialistas en dinámica de maquinaria analizan el rotor y sus chumaceras, los ingenieros estructuristas analizan la estructura de la cimentación y los especialistas en mecánica de suelos la cimentación y/o los pilotes. Desde luego cada uno de ellos hacen hipótesis para justificar su análisis.

Debe mencionarse que existen casos en que es válido tratar los problemas como independientes, sin embargo, no puede saberse a priori y no es justificación válida decir que así se han analizado varios casos y como no ha habido problemas se deduce que el análisis está bien hecho.

De hecho lo que sucede es que como no se acostumbra hacer mediciones físicas para corroborar el comportamiento del conjunto cuando este entra en operación, ni tampoco se hacen pruebas de vibración forzada cuando se termina de construir la cimentación, muchos de los problemas pasan desapercibidos en las etapas de arranque y cuando se manifiestan posteriormente no es fácil detectar la causa ya que se enmascaran y se interrelacionan con otros problemas (instalación defectuosa de tuberías, flexibilidad inadecuada de tuberías, operación en condiciones diferentes a las de diseño, modulación con otras fuentes de vibración, etc.) En algunos países ya es práctica común llevar a cabo este tipo de mediciones Refs. 9 y 10. En algunos casos ha tenido que desarrollarse instrumentación adecuada para poder excitar a la estructura, Refs. 4 y 10.

ANÁLISIS DEL SISTEMA ROTOR-CHUMACERAS

Para el análisis dinámico del sistema rotor-chumaceras se utilizan principalmente el método de matrices de transición Ref. 11 y el método del elemento finito, Ref. 12. En este caso el planteamiento conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden de la forma

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = f(t)$$

En donde x contiene los desplazamientos en las estaciones en que se divide el rotor. Debido a las características de las chumaceras de la película lubricante, las matrices de rigidez K y de amortiguamiento C no son simétricas y dependen de la velocidad de rotación del equipo ω . La función $f(t)$ representa el efecto de las fuerzas desbalanceadas producidas por la maquinaria.

El tamaño de este sistema de ecuaciones puede variar entre 50 y 200 incógnitas o grados de libertad, dependiendo del tipo de rotor y el refinamiento del modelo. En la fig. 1 se muestran modelos típicos representativos del rotor y las chumaceras.

En este análisis, por lo general, se considera que los pedestales y el resto del sistema de sustentación son rígidos o bien pueden representarse por dos resortes lineales, uno horizontal y uno vertical. Esta consideración sólo es válida en ciertos casos, teniéndose en cuenta que en general no es posible ignorar el comportamiento dinámico de la cimentación. Una aproximación es considerar la cimentación como un marco plano y acoplarlo con el modelo del rotor mediante resortes rígidos o flexibles. En la Ref. 11 se presenta una comparación entre frecuencias naturales para un rotor apoyado en tres puntos, considerando rígida la cimentación y las frecuencias obtenidas de un modelo acoplado en flexión del rotor y la cimentación. En la fig. 2, se muestran algunos resultados de esta comparación, pudiendo apreciarse que el efecto es diferente en cada modo y para algunas frecuencias la diferencia en la forma del modo es más significativa que las diferencias en frecuencia.

Un método para acoplar el modelo del rotor con el de la cimentación que resulta conveniente por el bajo número de grados de libertad de acoplamiento que es el método de síntesis modal, Refs. 13 y 14.

Otro método que puede utilizarse es obtener analíticamente o experimentalmente las funciones de transferencia de la cimentación en los puntos de apoyo del equipo sobre la cubierta de cimentación, Ref. 15. De esta información se puede obtener la rigidez dinámica de la cimentación en el dominio de la frecuencia, la cual puede incorporarse al modelo de análisis dinámico de la maquinaria.

De hecho la selección del método de análisis debe hacerse en función del tipo de resultados que se este buscando, aunque por lo general es la respuesta dinámica de la maquinaria la que más interesa determinar con precisión. Cuando se limitan las vibraciones permisibles de la cimentación lo que se esta tratando de proteger es el equipo, ya que los esfuerzos y deformaciones en la cimentación casi siempre son muy bajos. Por otra parte los resultados que se obtienen sin considerar la interacción son muy diferentes cuando esta se toma en cuenta. En la Ref. 13, se presentan los resultados de esta comparación en un caso particular, Fig. 3.

EJEMPLO DE APLICACION

Como ejemplo particular se presentarán algunos resultados correspondientes a la cimentación de un compresor que opera a 5700 RPM accionado por un motor a través de una caja de engranes. La velocidad del motor es de 1800 RPM = 30 Hz.

Un análisis simplificado como marco en dirección transversal indicó una frecuencia de casi 3.5 Hz y 34.2 Hz en dirección vertical, ambas alejadas de las frecuencia de excitación. En la tabla siguiente se muestra la comparación de algunas frecuencias en Hz

obtenida de un análisis como estructura tridimensional formada por elementos de viga considerando 31 nodos, incluyendo y sin incluir la masa del equipo

MODO	1	2	3	4	5	6	7
S/MASA	3.79	4.22	5.13	33.20	36.2	36.9	37.4
C/MASA	3.21	3.55	4.47	22.7	31.1	33.4	36.4

Analizando la cubierta como viga apoyada en las columnas consideradas rígidas verticalmente se obtuvieron frecuencias de 36.0, 97.0 y 145.0 Hz, el segundo valor esta muy cerca de la velocidad de rotación del compresor.

En la Fig. 4 se muestra un modelo de la cimentación a base de elementos sólidos tridimensionales, considerando los huecos de la cubierta, suponiendo el peso de los equipos distribuido alrededor de ellos y tomando las columnas como empotradas al nivel de piso. El modelo resultó de 321 nodos y 108 elementos dando lugar a un problema de valores característicos de 870×870 , cuya solución para obtener los primeros 20 modos tomo más de 30 minutos en una computadora Microvax. En la tabla siguiente se muestran algunos resultados con y sin masa del equipo e incluyendo también la rigidez del equipo. Los dos primeros modos son flexión transversal y longitudinal, el tercero es torsión, el cuarto y quinto flexión de cubierta del lado del motor y el compresor, la sexta torsión transversal de la losa, la séptima es flexión longitudinal de la losa con dos líneas de inflexión. Los modos 17 al 20 son combinaciones de flexión y torsión de la cubierta. En la Fig. 5 se muestra dos de estas formas modales.

MODO	1	2	3	4	5	6	7	8
S/MASA	5.49	6.00	7.66	35.17	46.91	48.61	51.58	55.04
C/MASA	4.53	4.86	6.88	24.8	39.70	43.10	46.60	54.06
C/MyR	4.54	4.85	7.06	30.0	36.10	42.10	51.7	52.4

Los resultados de este análisis indicaron posibilidades de amplificación dinámica importante entre la cimentación y el equipo.

También se analizó el efecto del suelo en las frecuencias de la cimentación, considerando rígida la losa de base e incorporando 6 resortes obtenidos con las propiedades del terreno. Para un suelo muy flexible la interacción sólo afecta a las frecuencias más bajas comportándose casi como un cuerpo rígido. Para un suelo intermedio el efecto también se restringió a modificar los primeros modos.

También se efectuó un análisis de las frecuencias naturales del equipo considerando a la cimentación como rígida. Los valores calculados para las tres primeras frecuencias fueron 1112, 1194 y 3390 RPM. Con objeto de tomar en cuenta la interacción dinámica del equipo con la cimentación se calculó la respuesta en frecuencia denominada compliancia x/F en los puntos de apoyo del equipo con la cimentación utilizando los modos y frecuencias de la misma. La inversa de esta función es la rigidez dinámica de la cimentación.

Esta información se incorporó al análisis de frecuencias del equipo obteniéndose frecuencias naturales de 893, 1637 y 3000 RPM. Como puede verse la interacción entre el equipo y la estructura produce una reducción en las frecuencias naturales del equipo.

CONCLUSIONES

- Este problema como todos aquellos donde existen interfaces se hacen sobre simplificaciones que pueden repercutir en mal comportamiento y problemas dinámicos posteriores.
- Dado que el propósito fundamental del diseño de la cimentación es evitar problemas al equipo a instalar debe hacerse el análisis adecuado para satisfacer ese requisito.
- Debe aprovecharse que existe publicada suficiente información sobre todos los aspectos y particularidades que presente este problema y hacer el análisis adecuado en cada caso.

REFERENCIAS

- 1.- M. Novak "State-of-the-Art in Analysis and Design of Machine Foundations", Faculty of Engineering Science, University of Western Ontario, London.
- 2.- R. Krishnan, G. Gazetas and A. Velez "Static and Dynamic Lateral Deflexion of Piles in Non-homogeneous", Geotechnique 33, No.3, 307-325, 1983.
- 3.- M. Novak, and F. Aboul-Ella, "Stiffness and Damping of Piles in Layered Media", Earthquake Engineering and Soil Dynamics, Vol.II, ASCE 1978, pp. 704-719.
- 4.- K. Schollhorn "Development of an Impact Exciter For Large Structure and Results of a First Application", Technische Hochschule Darmstad, German. International Conference on Rotor Dynamic IFTOMN 1982, Rome, Italy.
- 5.- D. Zhang, W.Lin and Z.Wu "Experimental Study on Vibration of Machine Foundations", South China Institute of Technology, Guangzhou, China.
- 6.- J.W. Lund "Stability and Damped Critical Speeds of a Flexibel Rotor in Fluid Bearing", Journal of Engineering for Industry, May, 1974, p.509,517.

- 7.- F.K. Orcut, "The Steady-State and Dynamic Characteristics of the Tilting-Pad", Journal Bearing in Laminar and Turbulent Flow Reg. Transactions, American Society of Mechanical Eng., July 1967, p.p. 392-400.
- 8.- F. Abould-Ella and M. Novak, "Dynamic Response of Pile-Supported Frame Foundations", Journal of the Engineering Mechanics Div., 1980.
- 9.- Z. Ma. Y. Wei "Experimental Study on Vibration of Machine Foundations", South China Institute of Technology, Guangzhou, China.
- 10.- N. Bachschmid, R. Bernante and C. Frigery "Dynamic Analysis of a 660 MW Turbogenerator Foundation" (Milan), International Conference on Rotor Dynamic Problems IFTOMN, 1982 Rome, Italy.
- 11.- E.C. Pestel, F.A Leckie, "Matrix Methods in Elasto Mechanics", McGraw-Hill Book Company, Inc., 1963
- 12.- R. Gasch "Vibration of Large Turbo-Rotors in Fluid-Film Bearing on an Elastic Foundation", Journal of Sound and Vibration, 1976.
- 13.- T. Jainski "Modal Resolution of Transient Vibrations in Rotor-Bearing-Foundations Systems Caused by Electrical System Faults" University Berlin. International Conference on Vibrations in Rotating Machinery I. Mech. E., Cambridge, 1980, UK
- 14.- F. Aguilar, "Análisis Dinámico Mediante Síntesis Modal", Revista IMP, 1989.
- 15.- F. Aguilar "Identificación Modal de Estructuras", Congreso de

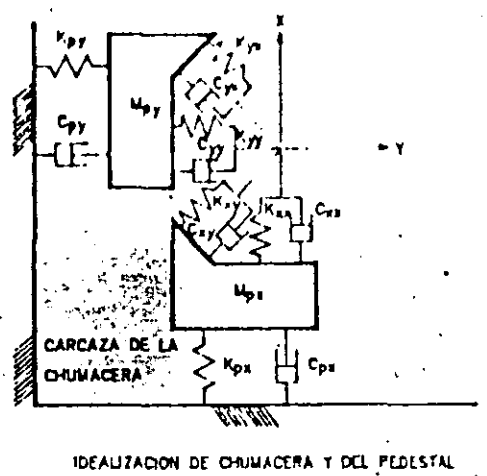
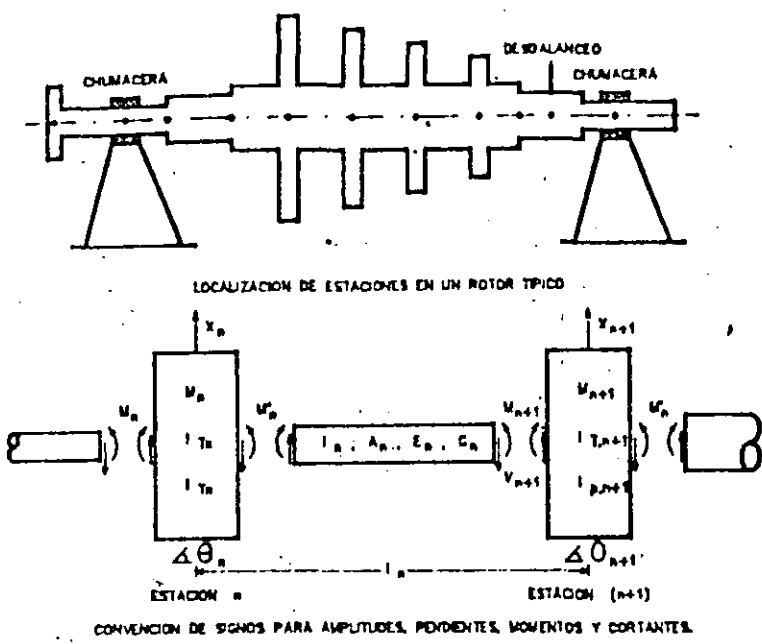


FIG. 1 MODELOS MATEMATICOS DE ROTOR Y CHUMACERAS.

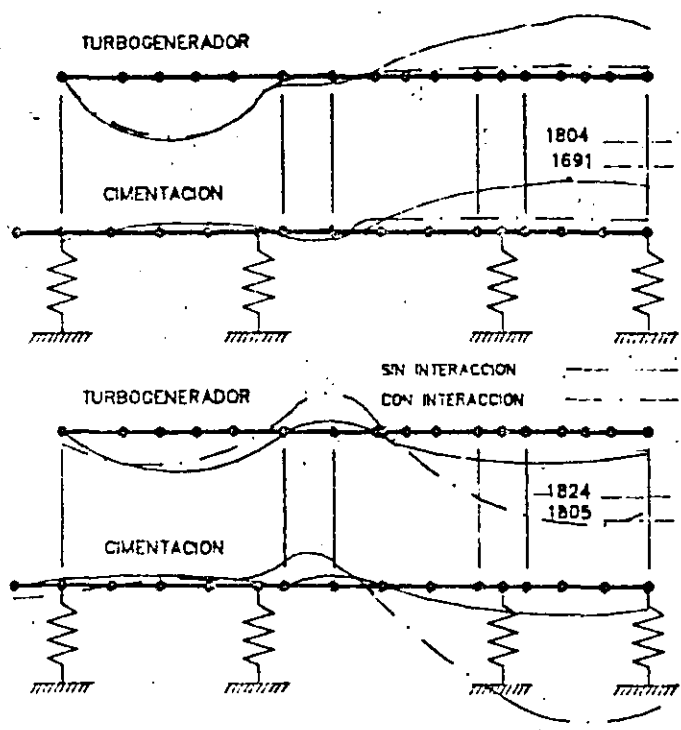


FIG. 2 COMPARACION DE MODOS Y FRECUENCIAS

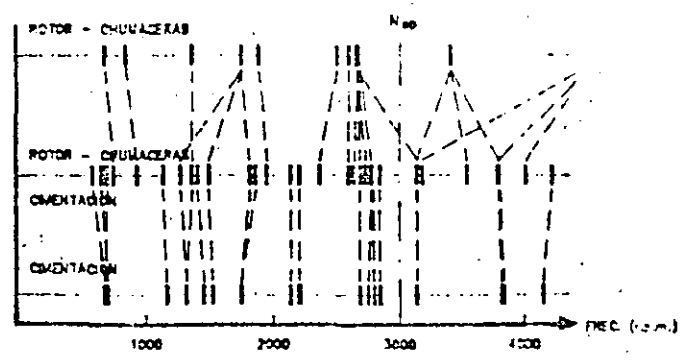


FIG. 3 COMPARACION DE FRECUENCIAS ACOPLADAS Y DESACOPLADAS DE UN SISTEMAS ROTOR CHUMACERAS - CIMENTACION

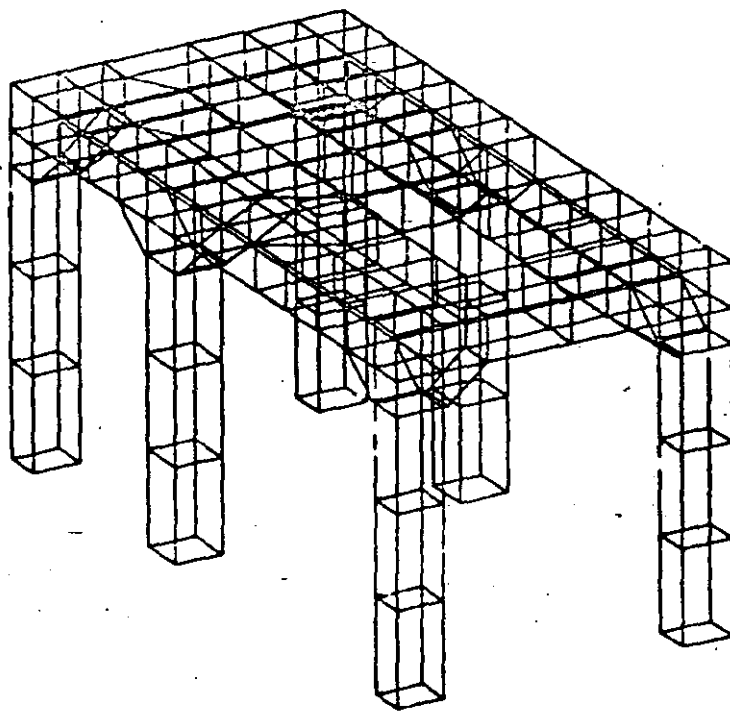
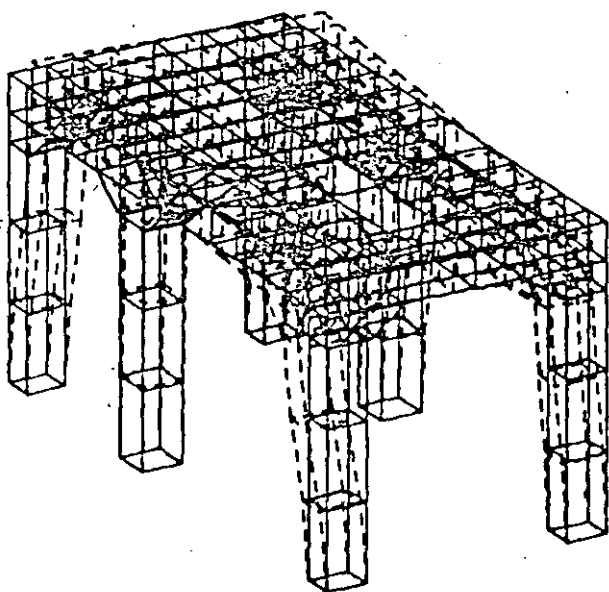
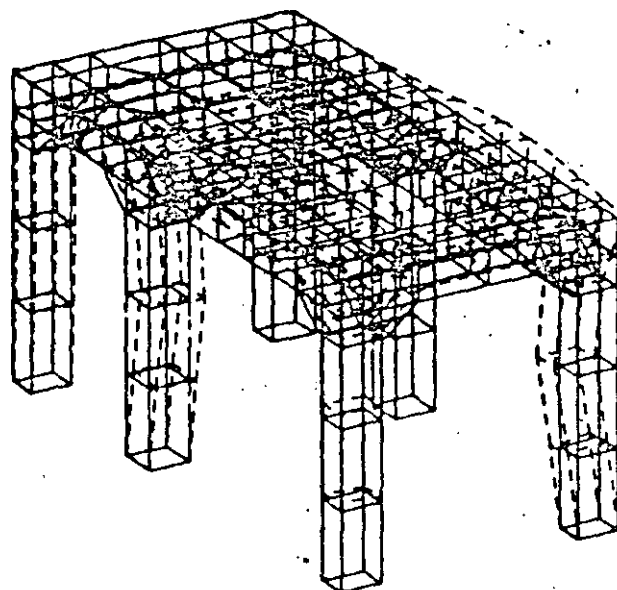


FIG. 4 MODELO DE ANALISIS

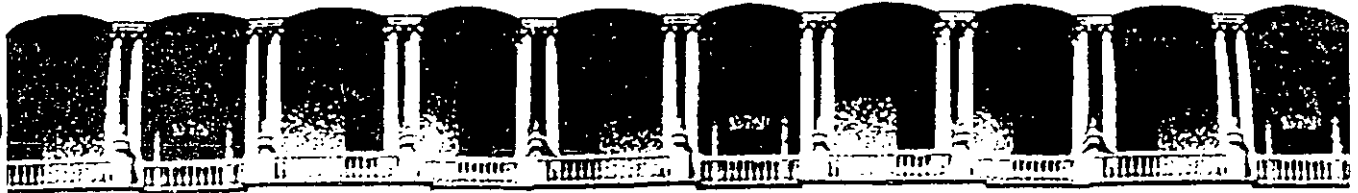


$f=6.88$ Hz.
(a) 3ª FORMA MODAL



$f=24.8$ Hz.
(b) 4ª FORMA MODAL

FIG. 5



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

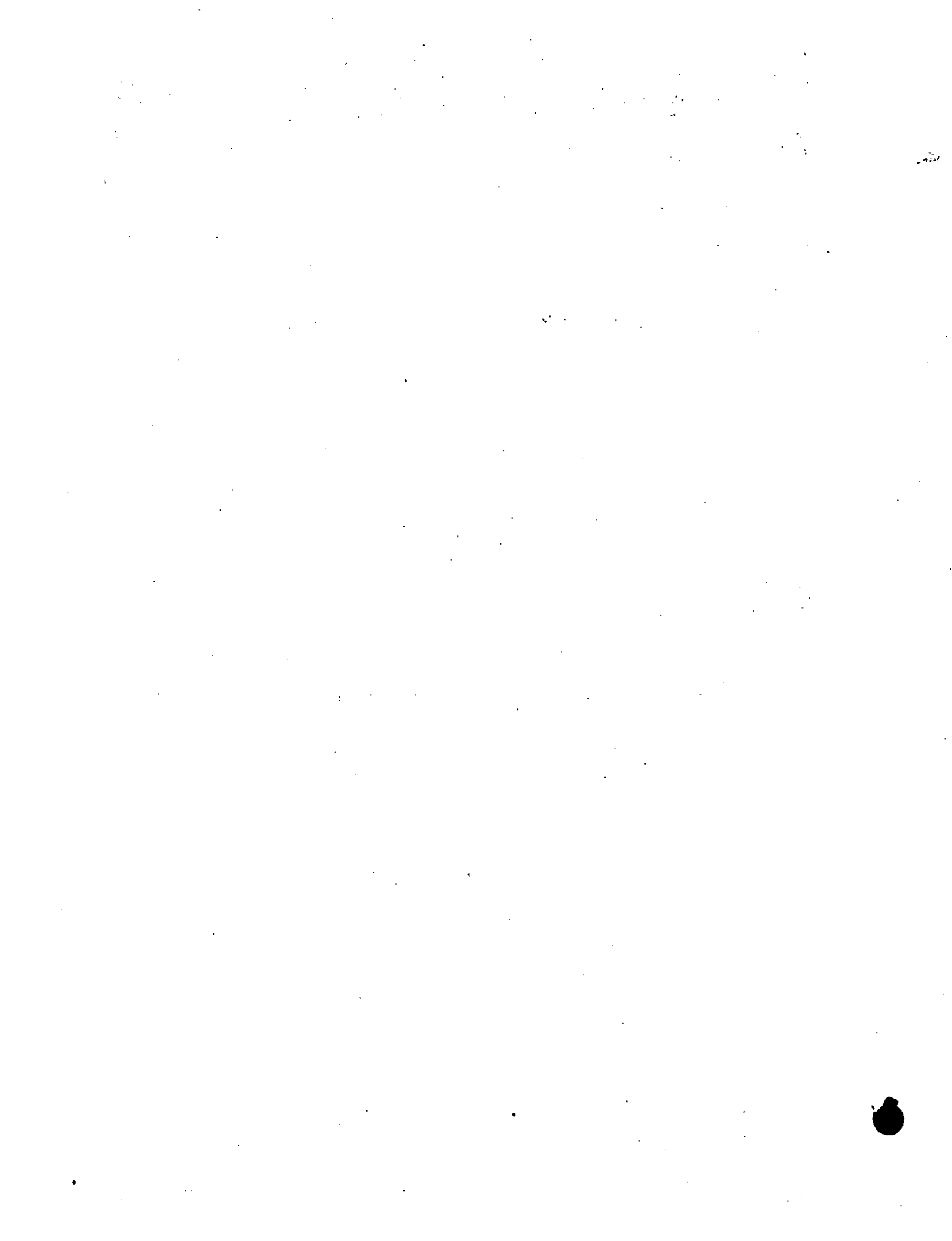
CURSOS ABIERTOS

CIMENTACION DE MAQUINARIA

17 al 21 de febrero de 1992

CIMENTACIONES PARA MAQUINARIA DE ROTACION

PALACIO DE MINERIA



INDICE

RESUMEN

1.	INTRODUCCION	1
2.	MODELO DE INTERACCION	4
2.1	<i>Caracteristicas del modelo</i>	4
2.2	<i>Ecuaciones de movimiento</i>	9
2.3	<i>Respuesta en estado estacionario</i>	10
3.	FUNCIONES DE IMPEDANCIA	12
3.1	<i>Concepto de rigidez dinamica</i>	12
3.2	<i>Coefficientes de rigidez y amortiguamiento</i>	15
4.	ESPECTROS DE RESPUESTA	19
5.	CONCLUSIONES	35
6.	REFERENCIAS	37

RESUMEN

Se presenta un modelo de interacción entre maquinaria, cimentación y suelo para el problema de vibraciones de cimentaciones de maquinaria de rotación. El modelo está formado con los elementos claves del sistema como son el rotor, los cojinetes, los pedestales, la cimentación y el suelo.

Los elementos del sistema, excepto el suelo, se idealizan como elementos discretos masa-amortiguador-resorte independientes de la frecuencia. El suelo se idealiza como un elemento continuo mediante funciones de impedancia o rigideces dinámicas dependientes de la frecuencia. La solución del sistema se obtiene empleando la técnica de la respuesta compleja en la frecuencia.

El modelo resulta apropiado para realizar análisis de sensibilidad con objeto de evaluar la influencia de los principales parámetros geométricos y mecánicos del sistema; también es adecuado para identificar probables causas de fallas. Para mostrar la aplicación

del modelo, se analiza un problema particular donde se estudia el efecto de la profundidad de desplante de la cimentación y la rigidez del suelo.

1. INTRODUCCION

En la industria eléctrica las cimentaciones masivas para ventiladores y en general para maquinaria de rotación son sistemas estructurales importantes que deben ser diseñados racionalmente para evitar asentamientos diferenciales inaceptables, vibraciones exageradas que produzcan daños al sistema mismo o a estructuras cercanas y vibraciones intolerables por equipo vecino sensible o por las personas.

En las plantas termoeléctricas los ventiladores son empleados para la extracción o suministro de aire o gases en un proceso. Estos se desplantan sobre cimentaciones masivas que tienen como función transmitir las cargas estáticas y dinámicas de la maquinaria al suelo así como mantener al sistema dentro de ciertos límites de vibración. Las cargas estáticas son producidas por el peso del equipo mientras que las dinámicas son generadas por la rotación de masas desbalanceadas. Las masas desbalanceadas al rotar dan origen a fuerzas armónicas cuya magnitud es proporcional a la masa

desbalanceada, su excentricidad y el cuadrado de la velocidad angular de operación. Por tanto, en ventiladores muy veloces se pueden desarrollar fuerzas significativas que den como resultado vibraciones excesivas del sistema.

En general, las cimentaciones empleadas para ventiladores han cumplido satisfactoriamente su función. Sin embargo, recientemente se han presentado fallas que consisten esencialmente de vibraciones excesivas en los cojinetes y pedestales que generan daños en el equipo con un alto costo para la industria eléctrica. Parcialmente, estas fallas se deben a que las dimensiones y potencia de los ventiladores y motores han crecido notablemente mientras que las técnicas y criterios tradicionales de análisis y diseño aún se siguen usando.

Probablemente la causa principal de fallas en ventiladores de gran potencia se debe a resonancia entre el ventilador y la cimentación por efectos de interacción; la resonancia entre la cimentación y el suelo generalmente no se presenta ya que las frecuencias naturales del conjunto cimiento-suelo son muy grandes con respecto a la de operación. La resonancia del sistema se puede presentar en dos situaciones: a) si la frecuencia fundamental del sistema es menor que la frecuencia de operación se pasará a través de la condición de resonancia durante la iniciación del movimiento al encender el equipo, y b) cuando se tiene el caso contrario la condición de resonancia se puede alcanzar al reducirse la frecuencia del sistema por efectos de interacción. La interacción entre el equipo, la cimentación y el suelo modifica la frecuencia natural del rotor que predice el fabricante así como las frecuencias naturales de la cimentación aislada. Por tanto, es necesario formular modelos de interacción que contemplen la maquinaria, la cimentación y el suelo como un sistema, Chen y Malanoski [1] y Walters y Kirby [2]. Estos modelos son apropiados para identificar la causa principal de fallas que aparentemente está relacionada con las rigideces de los cojinetes y pedestales.

El objetivo de este trabajo es formular y desarrollar una

metodología de análisis para sistemas maquinaria-cimentación-suelo, que permita diseñar satisfactoriamente cimentaciones para maquinaria de rotación. Se construirá un modelo discreto masa-amortiguador-resorte que contenga sólo los modos de vibración de interés práctico y los excitados directamente por el rotor, el cual se analizará en el dominio de la frecuencia. El modelo considerará como grados de libertad los movimientos en puntos claves del sistema, tales como los desplazamientos vertical y horizontal del rotor, los cojinetes, los pedestales y la cimentación. Para ésta, además se considerará la rotación por cabeceo la cual está acoplada con la traslación horizontal; juntas constituyen el fenómeno predominante que rige al diseño. La solución del modelo se obtendrá en el dominio de la frecuencia empleando la técnica de la respuesta compleja en la frecuencia. De esta manera se pueden calcular simultáneamente las frecuencias naturales del sistema y las amplitudes de vibración de los grados de libertad considerados. Además, con estas últimas es posible evaluar la funcionalidad del sistema, comparándolas con valores límites permitidos, así como determinar las fuerzas dinámicas para diseño. Finalmente, por las características del modelo se presta para llevar a cabo análisis de sensibilidad con objeto de estudiar el efecto de los principales parámetros geométricos y mecánicos del sistema.

2. MODELO DE INTERACCION

2.1 Características del modelo

Como los problemas importantes en ventiladores de gran potencia se deben a la interacción del ventilador con su cimentación y de ésta con el suelo, la cual modifica las frecuencias naturales del equipo y la cimentación aislados, el modelo para el sistema ventilador-cimentación-suelo que se muestra en la Fig.1 debe contemplar cinco elementos claves:

- a) Rotor
- b) Cojinetes
- c) Pedestales
- d) Cimentación
- e) Suelo

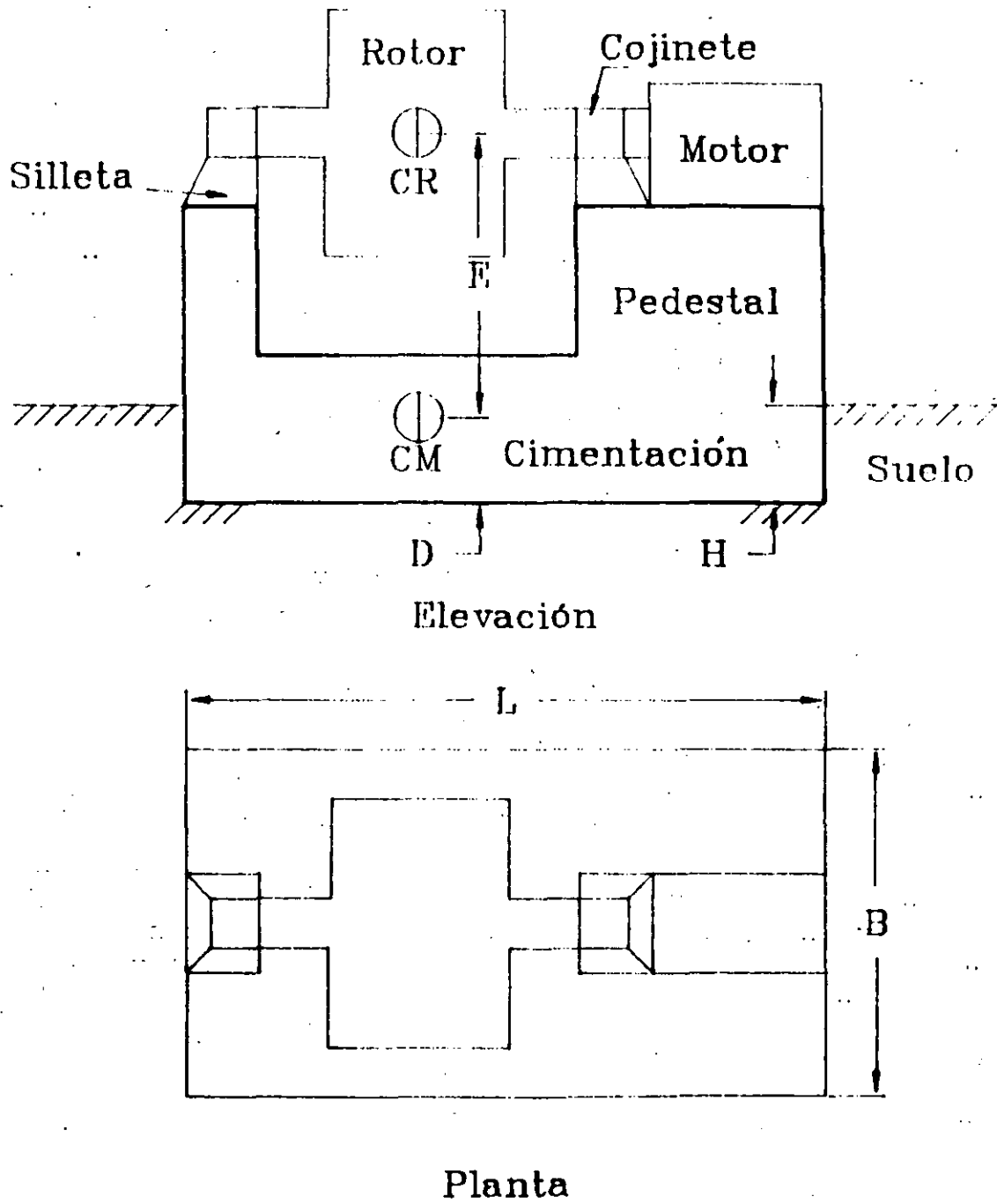


Fig. 1 Sistema maquinaria-cimentación-suelo

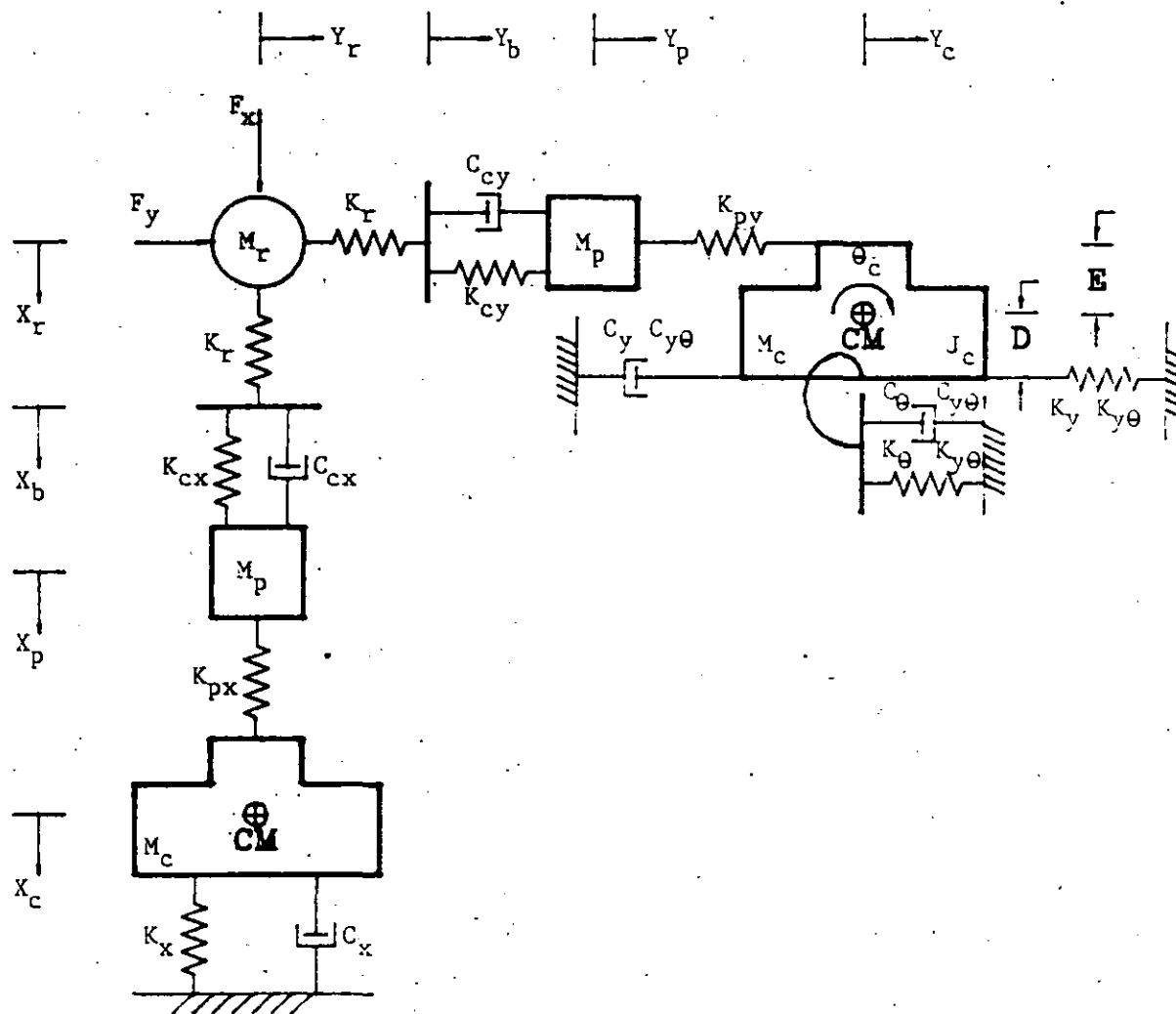


Fig. 2 Modelo discreto de un sistema máquina-cimiento-suelo

Con estos elementos se puede construir un modelo discreto masa-amortiguador-resorte como el que se presenta en la Fig. 2. Las consideraciones que llevaron a formular este modelo de nueve grados de libertad son las siguientes.

a) Por las características geométricas y mecánicas del rotor resulta adecuado representarlo por una masa concentrada con resortes laterales y despreciar su amortiguamiento. Si se conoce la frecuencia fundamental del rotor con apoyos rígidos, la rigidez se obtiene a partir de la ecuación del oscilador simple:

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_r}{M_r}} \quad (1)$$

donde f_r = frecuencia fundamental del rotor con apoyos rígidos, M_r = masa del rotor y K_r = rigidez del rotor.

b) Las propiedades dinámicas de los cojinetes son el amortiguamiento y la rigidez. Para tomar en cuenta esto, los cojinetes se idealizan sólo por amortiguadores y resortes laterales diferentes en las dos direcciones. K_{cj} y C_{cj} son la rigidez y el amortiguamiento, respectivamente, de los cojinetes en la dirección j ($j=x,y$); sus valores son datos del fabricante y dependen de la geometría, carga y velocidad.

c) Los pedestales tienen como características dinámicas la masa y rigidez por lo que se modelan mediante una masa concentrada con resortes laterales; por tratarse de elementos poco disipativos se desprecia su amortiguamiento. La masa incluye tanto las masas de las silletas de acero como las de los pedestales de concreto. La rigidez se calcula considerando las rigideces de las silletas y los pedestales en serie, de tal suerte que:

$$\frac{1}{K_{pj}} = \frac{1}{K_{sj}} + \frac{1}{K_{cj}} \quad (2)$$

donde K_{pj} = rigidez de los pedestales en la dirección j , K_{sj} = rigidez de las silletas de acero en la dirección j y K_{cj} = rigidez

de los pedestales de concreto en la dirección j.

d) La cimentación se comporta como un cuerpo rígido con tres grados de libertad; una traslación vertical, otra horizontal y una rotación. Su propiedad dinámica es la inercia; por tanto, se debe considerar como un elemento de inercia con masa M_c y momento de inercia de masa J_c , sin amortiguamiento ni rigidez. La profundidad del centro de masa (CM) respecto al de rotación (CP) es E y su elevación respecto al nivel de desplante es D.

e) El suelo tiene propiedades de inercia, amortiguamiento y rigidez. Para tenerlo en cuenta apropiadamente se puede reemplazar con funciones de impedancia, las cuales son funciones complejas donde la parte real define la rigidez e inercia del suelo, y la parte imaginaria su amortiguamiento material y geométrico, por irradiación. Así, el suelo se puede sustituir por amortiguadores y resortes acoplados dependientes de la frecuencia. Como el centro de masa no coincide con el de rigidez aparecen impedancias acopladas: éstas junto con las impedancias horizontales y de rotación definen las siguientes relaciones:

$$\begin{Bmatrix} F^r \\ M^r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_y & K_{y\theta} \\ K_{y\theta} & K_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_c \\ \Theta_c \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} F^a \\ M^a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_y & C_{y\theta} \\ C_{y\theta} & C_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y'_c \\ \Theta'_c \end{Bmatrix} \quad (4)$$

donde el apóstrofe indica derivada con respecto al tiempo. F^r, F^a = fuerzas horizontales restauradora y amortiguadora, respectivamente; M^r, M^a = momentos restaurador y amortiguador, respectivamente; Y_c, Θ_c = desplazamiento horizontal y rotación de la cimentación, respectivamente; $K_y, K_\theta, K_{y\theta}$ = rigideces del suelo horizontal, rotacional y acoplada, respectivamente; y $C_y, C_\theta, C_{y\theta}$ = amortiguamientos del suelo horizontal, rotacional y acoplado, respectivamente.

2.2 Ecuaciones de movimiento

Estableciendo el equilibrio dinámico para los nueve grados de libertad del modelo se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, que en notación matricial tiene la siguiente forma:

$$[M] \{w''(t)\} + [C] \{w'(t)\} + [K] \{w(t)\} = \{P(t)\} \quad (5)$$

donde [M], [C] y [K] son las matrices del sistema de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente. $\{w(t)\}$ es el vector de desplazamientos del sistema; está formado con los desplazamientos de los elementos del sistema como (ver Fig. 2):

$$\{w(t)\}^T = \{X_r, Y_r, X_b, Y_b, X_p, Y_p, X_c, Y_c, \Theta_c\} \quad (6)$$

$\{P(t)\}$ es el vector de fuerzas excitadoras del sistema, compuesto con las fuerzas que actúan en cada uno de los grados de libertad. Las únicas fuerzas diferentes de cero son las asociadas al rotor; por tanto, la forma de este vector es:

$$\{P(t)\}^T = \{F_x, F_y, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\} \quad (7)$$

La matriz de masa es una matriz diagonal formada con las masas asociadas a cada uno de los grados de libertad como:

$$[M] = \begin{bmatrix} M_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_c \end{bmatrix} \quad (8)$$

La matriz de amortiguamiento es una matriz simétrica definida por:

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{cx} & 0 & -C_{cx} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{cy} & 0 & -C_{cy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_{cx} & 0 & C_{cx} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_{cy} & 0 & C_{cy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_y & -DC_y + C_y e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -DC_y + C_y e & D^2 C_y + C_e - 2DC_y e \end{bmatrix} \quad (10)$$

La matriz de rigidez es una matriz simétrica definida por:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_r & 0 & -K_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_r & 0 & -K_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_r & 0 & K_r + K_{cx} & 0 & -K_{cx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_r & 0 & K_r + K_{cy} & 0 & -K_{cy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_{cx} & 0 & K_{cx} + K_{px} & 0 & -K_{px} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_{cy} & 0 & K_{cy} + K_{py} & 0 & -K_{py} & -EK_{py} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{px} & 0 & K_{px} + K_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{py} & 0 & K_{py} + K_y & 0 & K_{so} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EK_{py} & 0 & 0 & K_{so} & K_{oo} \end{bmatrix} \quad (11)$$

donde $K_{so} = K_{os} = EK_{py} - DK_y + K_y e$ y $K_{oo} = E^2 K_{py} + D^2 K_y + K_e - 2DK_y e$.

2.3 Respuesta en estado estacionario

En maquinaria de rotación como son los ventiladores se generan fuerzas de tipo armónico al girar las masas desbalanceadas a una velocidad angular constante. Así, sólo la respuesta en estado estacionario resulta ser de interés y es posible obtenerla empleando la técnica de la respuesta compleja en la frecuencia. Clough y Penzien [3].

La magnitud de la fuerza excitadora que se produce en el rotor es proporcional a la masa desbalanceada M_r , su excentricidad e y el cuadrado de la velocidad de operación ω , esto es:

$$Q = M_r e \omega^2 \quad (12)$$

La fuerza armónica que actúa en la dirección vertical se puede representar como:

$$F_x = Q e^{i\omega t} \quad (12)$$

donde i = unidad imaginaria y t = tiempo. La fuerza armónica que actúa en la dirección horizontal se encuentra desfasada noventa grados de F_x ; por tanto, esta fuerza se puede escribir como:

$$F_y = Q e^{i(\omega t + \pi/2)} = i Q e^{i\omega t} \quad (13)$$

Con esto, el vector de fuerzas excitadoras se transforma en:

$$\left\{ P(t) \right\} = \left\{ \tilde{P}(\omega) \right\} e^{i\omega t} \quad (14)$$

donde:

$$\left\{ \tilde{P}(\omega) \right\}^T = \left\{ Q \quad iQ \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\} \quad (15)$$

Debido a la forma armónica de la excitación la respuesta en estado estacionario se reduce a:

$$\left\{ W(t) \right\} = \left\{ \tilde{W}(\omega) \right\} e^{i\omega t} \quad (16)$$

Sustituyendo las Ecs. 14 y 16 en la Ec. 5 se obtiene la ecuación que gobierna el movimiento en el dominio de la frecuencia, la cual está dada por:

$$\left[\left[K \right] + i \omega \left[C \right] - \omega^2 \left[M \right] \right] \left\{ \tilde{W}(\omega) \right\} = \left\{ \tilde{P}(\omega) \right\} \quad (17)$$

Esta ecuación representa un sistema complejo de ecuaciones algebraicas que se puede resolver con cualquiera de los procedimientos de eliminación Gaussiana, Crandall [4].

3. FUNCIONES DE IMPEDANCIA

3.1 Concepto de rigidez dinámica

Para el análisis de la respuesta de cimentaciones de maquinaria es necesario calcular las funciones de impedancia para el rango de frecuencias de interés. Las funciones de impedancia o rigideces dinámicas se definen como la relación en estado estacionario entre la fuerza aplicada y el desplazamiento para una cimentación carente de masa y excitada armónicamente. Estas funciones son dependientes de la frecuencia y de tipo complejo; físicamente representan, la parte real, la rigidez e inercia del suelo y, la imaginaria, su amortiguamiento material y geométrico. La variación con la frecuencia de la rigidez del suelo y su amortiguamiento llega a ser trascendente en la respuesta de cimentaciones.

El significado matemático y físico de las rigideces dinámicas se puede ilustrar empleando una analogía con un sistema discreto de un grado de libertad. Para esto, la ecuación de movimiento de un

oscilador simple está dada por:

$$M W'' + C W' + K W = P(t) \quad (18)$$

Si se supone una excitación armónica $P(t) = P_0 e^{i\omega t}$, en el estado estacionario la respuesta es $W(t) = W_0 e^{i\omega t}$ y por tanto la Ec.18 se reduce a:

$$(K + i\omega C - \omega^2 M) W(t) = P(t) \quad (19)$$

Por definición, la rigidez dinámica del oscilador es la relación entre la fuerza excitadora y el desplazamiento en estado estacionario, entonces:

$$K(\omega) = \frac{P(t)}{W(t)} = (K - \omega^2 M) + i\omega C \quad (20)$$

Con esta ecuación se demuestra que la rigidez dinámica del oscilador es una función compleja dependiente de la frecuencia. Físicamente, la parte real representa la rigidez e inercia del sistema, y la parte imaginaria la energía disipada a través del amortiguamiento material.

La Ec.20 se acostumbra presentar de la siguiente manera:

$$K(\omega) = K (k + i\omega c) \quad (21)$$

$$\text{con: } k = 1 - \frac{M}{K} \omega^2 \quad (22)$$

$$c = \frac{C}{K} \quad (23)$$

Los parámetros k y c se conocen como coeficientes de rigidez y amortiguamiento, respectivamente. Para el oscilador simple k decrece con la frecuencia como una parábola de segundo grado siendo nula para la frecuencia natural del oscilador, mientras que c permanece constante. La Ec.21 implica que la rigidez dinámica K se puede expresar como el producto de la rigidez estática K por un factor dinámico complejo $(k+i\omega c)$ que considera las características

de inercia y amortiguamiento del sistema; para la frecuencia cero el factor dinámico se reduce a la unidad real y por tanto la rigidez dinámica coincide con la estática.

Con base en la analogía con un sistema discreto de un grado de libertad, la rigidez dinámica de un sistema continuo suelo-cimentación sin masa se puede expresar como una función compleja dependiente de la frecuencia como la de la Ec.21, la cual está dada por:

$$K_j(\eta) = K_j [k_j(\eta) + i \eta c_j(\eta)], \quad j = x, y, \theta \quad (24)$$

donde K_j = rigidez estática en la dirección j y η = frecuencia normalizada definida por:

$$\eta = \frac{\omega R_j}{\beta} \quad (25)$$

donde $\beta = \sqrt{G / \rho}$ = velocidad de propagación de ondas de cortante, G = módulo de cortante del suelo y ρ = densidad del suelo. Además, R_j = radio de una cimentación circular equivalente a la cimentación real; en traslación el círculo debe tener igual área que la superficie de desplante y en rotación igual momento de inercia con respecto al eje de rotación, es decir:

$$R_x = R_y = \left(\frac{B L}{\pi} \right)^{0.5} \quad (26)$$

$$R_\theta = \left(\frac{B^3 L}{3 \pi} \right)^{0.25} \quad (27)$$

donde B, L = ancho y largo de la cimentación real, respectivamente. La parte real de la Ec.24 representa la rigidez e inercia del suelo; su dependencia de la frecuencia se debe solamente a la influencia que ésta tiene en la inercia, ya que las propiedades del suelo son esencialmente independientes de la frecuencia. Mientras que la parte imaginaria representa el amortiguamiento material y geométrico del suelo; el primero es prácticamente independiente de la frecuencia y se debe al comportamiento histerético del suelo, y

el segundo es debido a la irradiación de ondas al suelo.

3.2 Coeficientes de rigidez y amortiguamiento

El cálculo de rigideces estáticas y coeficientes de rigidez y amortiguamiento necesarios para la obtención de rigideces dinámicas no es un problema trivial. El problema se puede tratar mediante dos enfoques: a) con modelos continuos y soluciones analíticas, y b) con modelos discretos y soluciones numéricas. Sin embargo, en la literatura se encuentran publicados una gran cantidad de resultados útiles para el análisis de vibraciones de cimentaciones de maquinaria, Gazetas [5].

Para cimentaciones enterradas se puede recurrir a las soluciones de Elsabee y Morray [6] y Kausel [7], a partir de las cuales se encuentra que las rigideces estáticas de cimentaciones embebidas en un semiespacio para los modos de traslación vertical y horizontal, rotación y acoplamiento, respectivamente, son:

$$K_x = \frac{4 G R_x}{1 - \nu} \left[1 + \frac{H}{2 R_x} \right] \quad (28)$$

$$K_y = \frac{8 G R_y}{2 - \nu} \left[1 + \frac{2 H}{3 R_y} \right] \quad (29)$$

$$K_\theta = \frac{8 G R_\theta^3}{3 (1 - \nu)} \left[1 + \frac{2 H}{R_\theta} \right] \quad (30)$$

$$K_{y\theta} = 0.4 H K_y \quad (31)$$

donde ν = módulo de Poisson del suelo y H = profundidad de desplante de la cimentación. Con estas ecuaciones resulta evidente que la relación de enterramiento H/R_j incrementa notablemente las rigideces estáticas con factores de $1/2$, $2/3$ y 2 para traslación vertical, horizontal y rotación, respectivamente. Además, se nota que $K_{y\theta}$ depende de H y no se puede despreciar salvo en el caso de

cimentaciones superficiales.

El efecto del enterramiento en los coeficientes de rigidez y amortiguamiento es diferente. Por lo que se refiere a k_x , se ha encontrado que no se modifica sensiblemente con H/R_j , de tal suerte que se recomienda que su variación con la frecuencia para una cimentación embebida se aproxime con la variación para la cimentación superficial correspondiente. En cambio c_x se incrementa sustancialmente con H/R_j ; sin embargo, si se desprecia esta situación la respuesta del sistema será conservadora pues se estará subestimando el valor del amortiguamiento.

Con base en lo anterior, resulta adecuado para fines de diseño considerar como coeficientes de rigidez y amortiguamiento los correspondientes a cimentaciones superficiales. Para este caso se tienen expresiones aproximadas desarrolladas por Veletsos y Verble [8], las cuales para los modos de traslación vertical, horizontal y rotación están dadas por:

$$k_x = 1 - \gamma_1 \frac{(\gamma_2 \eta)^2}{1 + (\gamma_2 \eta)^2} - \gamma_3 \eta^2 \quad (32)$$

$$c_x = \gamma_4 + \gamma_1 \gamma_2 \frac{(\gamma_2 \eta)^2}{1 + (\gamma_2 \eta)^2} \quad (33)$$

$$k_y = 1. \quad (34)$$

$$c_y = \alpha_1 \quad (35)$$

$$k_\theta = 1 - \beta_1 \frac{(\beta_2 \eta)^2}{1 + (\beta_2 \eta)^2} - \beta_3 \eta^2 \quad (36)$$

$$c_\theta = \beta_1 \beta_2 \frac{(\beta_2 \eta)^2}{1 + (\beta_2 \eta)^2} \quad (37)$$

donde los coeficientes α 's, β 's y γ 's se encuentran definidos en la tabla 1. Nótese que por tratarse de cimentaciones superficiales no existen coeficientes acoplados; sin embargo, para cimentaciones enterradas se tiene una buena aproximación si se considera sólo la rigidez estática, lo que implica que los coeficientes acoplados de rigidez y amortiguamiento sean:

$$k_{y\theta} = 1 \quad (38)$$

$$c_{y\theta} = 0 \quad (39)$$

Las rigideces estáticas y los coeficientes de rigidez y amortiguamiento presentados corresponden a un suelo con comportamiento elástico. En un modelo elástico la única forma de disipar energía es mediante la irradiación de ondas al suelo, amortiguamiento geométrico. Para tener en cuenta el amortiguamiento material se puede considerar un modelo viscoelástico aproximado introduciendo el concepto de módulo de rigidez complejo, Woods [9], como:

$$G = G_0 (1 + i 2 \xi) \quad (40)$$

donde G_0 = módulo de rigidez elástico y ξ = amortiguamiento del suelo el cual es de tipo histerético.

Coefficiente	$\nu = 0$	$\nu = 1/3$	$\nu = 0.45$	$\nu = 0.5$
α_1	0.775	0.85	0.8	0.8
β_1	0.525	0.5	0.45	0.4
β_2	0.8	0.8	0.8	0.8
β_3	0	0	0.023	0.027
γ_1	0.25	0.35	—	0
γ_2	1	0.8	—	0
γ_3	0	0	—	0.17
γ_4	0.85	0.75	—	0.85

Tabla 1. Coeficientes α 's, β 's y γ 's para diferentes ν 's

Finalmente, con objeto de no subestimar el amortiguamiento para

cimentaciones enterradas se pueden usar alternativamente los coeficientes de amortiguamiento aproximados desarrollados por Dibi y Gazetas [10], los cuales para los modos de traslación vertical y horizontal, respectivamente, son:

$$c_x = 0.85 \frac{1 + 1.85 (1 - \nu) (H/R_x)}{1 + (1/2) (H/R_x)} \quad (41)$$

$$c_y = \frac{\pi (2 - \nu)}{8} \frac{1 + 1.3 (H/R_y) [1 + 3.6/(\pi(1-\nu))] }{1 + (2/3) (H/R_y)} \quad (42)$$

Para el modo de rotación no se ha desarrollado una expresión similar a las anteriores.

4. ESPECTROS DE RESPUESTA

En esta sección se analiza el efecto de algunos parámetros críticos del sistema maquinaria-cimentación-suelo, tales como la profundidad de desplante de la cimentación y la rigidez del suelo. Para esto se calculan los espectros de respuesta de un sistema particular cuyos parámetros geométricos y mecánicos se dan en la tabla 2. El equipo consiste en un ventilador que con apoyos rígidos posee una frecuencia natural de vibración lateral igual a 20 Hz; la velocidad de operación es de 900 RPM (15 Hz). Con los datos de la tabla 2 se construye el archivo DAT que se emplea como entrada en el programa VCM; tanto el archivo DAT como el programa VCM se presentan en el Apéndice.

En las Figs. 3-11 se presentan los espectros de respuesta para cada uno de los grados de libertad del sistema. Los resultados con línea continua pertenecen a un suelo con módulo de cortante $G = 185000 \text{ ton/m}^2$ (suelo duro) y los de línea discontinua a $G = 46250 \text{ ton/m}^2$ (suelo blando). Los picos que aparecen en las curvas de

4. ESPECTROS DE RESPUESTA

En esta sección se analiza el efecto de algunos parámetros críticos del sistema maquinaria-cimentación-suelo, tales como la profundidad de desplante de la cimentación y la rigidez del suelo. Para esto se calculan los espectros de respuesta de un sistema particular cuyos parámetros geométricos y mecánicos se dan en la tabla 2. El equipo consiste en un ventilador que con apoyos rígidos posee una frecuencia natural de vibración lateral igual a 20 Hz; la velocidad de operación es de 900 RPM (15 Hz).

En las Figs. 3-11 se presentan los espectros de respuesta para cada uno de los grados de libertad del sistema. Los resultados con línea continua pertenecen a un suelo con módulo de cortante $G = 185000 \text{ ton/m}^2$ (suelo duro) y los de línea discontinua a $G = 46250 \text{ ton/m}^2$ (suelo blando). Los picos que aparecen en las curvas de desplazamiento corresponden a frecuencias naturales del sistema. Para el sistema con suelo duro las dos primeras frecuencias son $f_1 = 16.6$ y 17.6 Hz mientras que con suelo blando resultan ser $f_1 = 15.0$.

y 17.3 Hz. Estas frecuencias pueden interpretarse como las frecuencias laterales del rotor apoyado rígidamente modificadas por interacción. Por tanto, por efectos de interacción las frecuencias del rotor con apoyos rígidos se reducen con la flexibilidad del sistema. Lo mismo sucede con las frecuencias de la cimentación aislada: al disminuir la rigidez del suelo disminuyen las frecuencias de la cimentación. Como el sistema es más flexible en la dirección horizontal, las mayores reducciones se obtienen para los modos de traslación horizontal acoplada con rotación.

Elemento	Parámetro	Magnitud*
Ventilador	Masa rotor	1.5
	Excentricidad de masa rotor	0.00185
	Rigidez rotor	23600.0
	Amortiguamiento cojinete en x	380.0
	Amortiguamiento cojinete en y	270.0
	Rigidez cojinete en x	630000.0
	Rigidez cojinete en y	470000.0
Cimiento	Ancho cimiento	5.0
	Largo cimiento	7.5
	Profundidad enterramiento	1.5
	Profundidad centro de masa	3.25
	Elevación centro de masa	2.25
	Masa pedestal	2.5
	Rigidez pedestal en x	125000.0
	Rigidez pedestal en y	95000.0
	Masa cimiento	30.0
	Momento inercia del cimiento	115.0
Suelo	Módulo de cortante	185000.0
	Módulo de Poisson	0.333
	Densidad	0.185
	Amortiguamiento	0.03

(*ton, m, seg)

Tabla 2. Parámetros geométricos y mecánicos de un sistema ventilador-cimiento-suelo

Estos resultados muestran el efecto notable de la rigidez del suelo en la respuesta del sistema. Por un lado, en todos los elementos del sistema, excepto la cimentación, la pérdida de rigidez del suelo produce una atenuación de la respuesta; ésta es mayor en los grados de libertad de traslación horizontal. En la cimentación la respuesta se amplifica, lo cual es congruente ya que en suelo blando las deformaciones son mayores. Por otro lado, el efecto de la rigidez del suelo es más importante en la cimentación, en donde las diferencias en la respuesta llegan a ser alrededor de un orden de magnitud para la frecuencia de operación.

Además, en el caso de suelo blando la frecuencia del rotor, para el modo de traslación horizontal se reduce hasta niveles cercanos a la frecuencia de operación, lo que genera casi resonancia en todos los grados de libertad de traslación horizontal y rotación. El desplazamiento horizontal de la cimentación se observa que es del orden de 1 mm, rebasando el límite permitido para máquinas y cimentaciones de máquinas según las curvas de tolerancia de la Fig.12.

Por último, con estos resultados se puede detectar algo relevante: las vibraciones en los pedestales resultan excesivas con respecto a las correspondientes de la cimentación. En resonancia, se aprecia que los desplazamientos de los pedestales superan en más de un orden de magnitud los de la cimentación. Esto constituye una causa probable de fallas que aparentemente está relacionada con la rigidez de los pedestales.

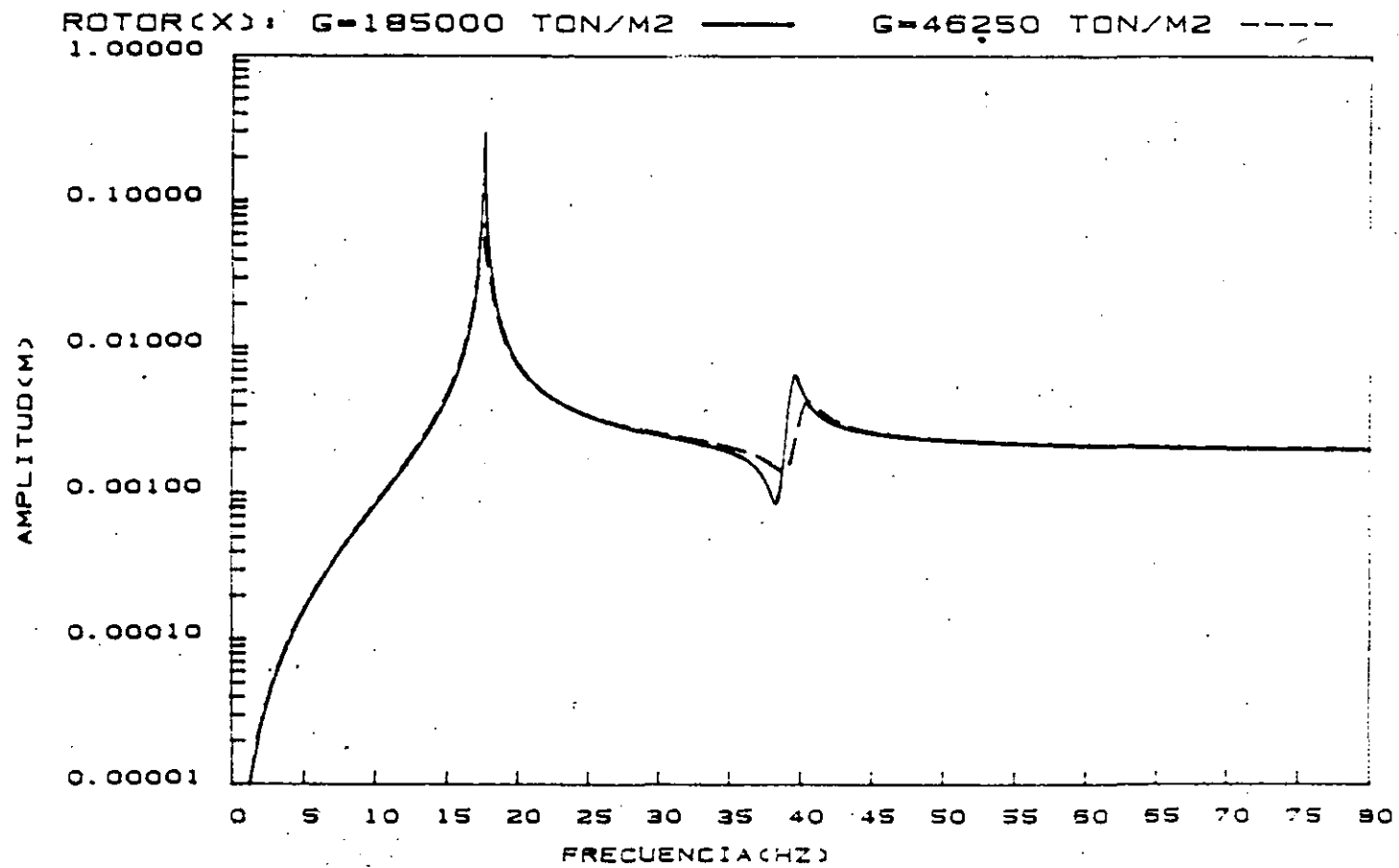


Fig. 3 Variación con la frecuencia del desplazamiento del rotor en la dirección X para dos tipos de suelo

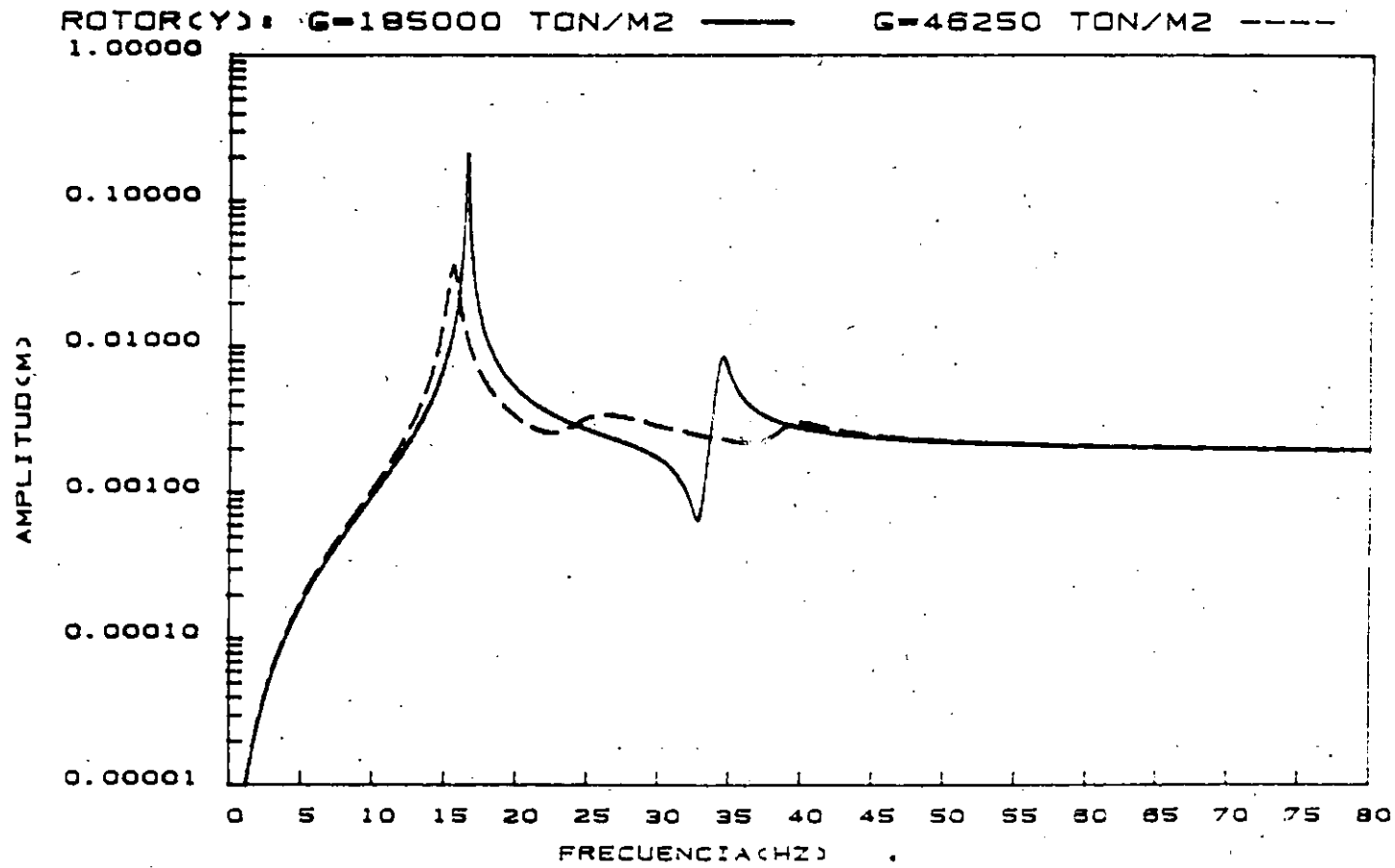


Fig. 4 Variación con la frecuencia del desplazamiento del rotor en la dirección Y para dos tipos de suelo

COJINETE(X): G=185000 TON/M2 ——— G=46250 TON/M2 - - - -

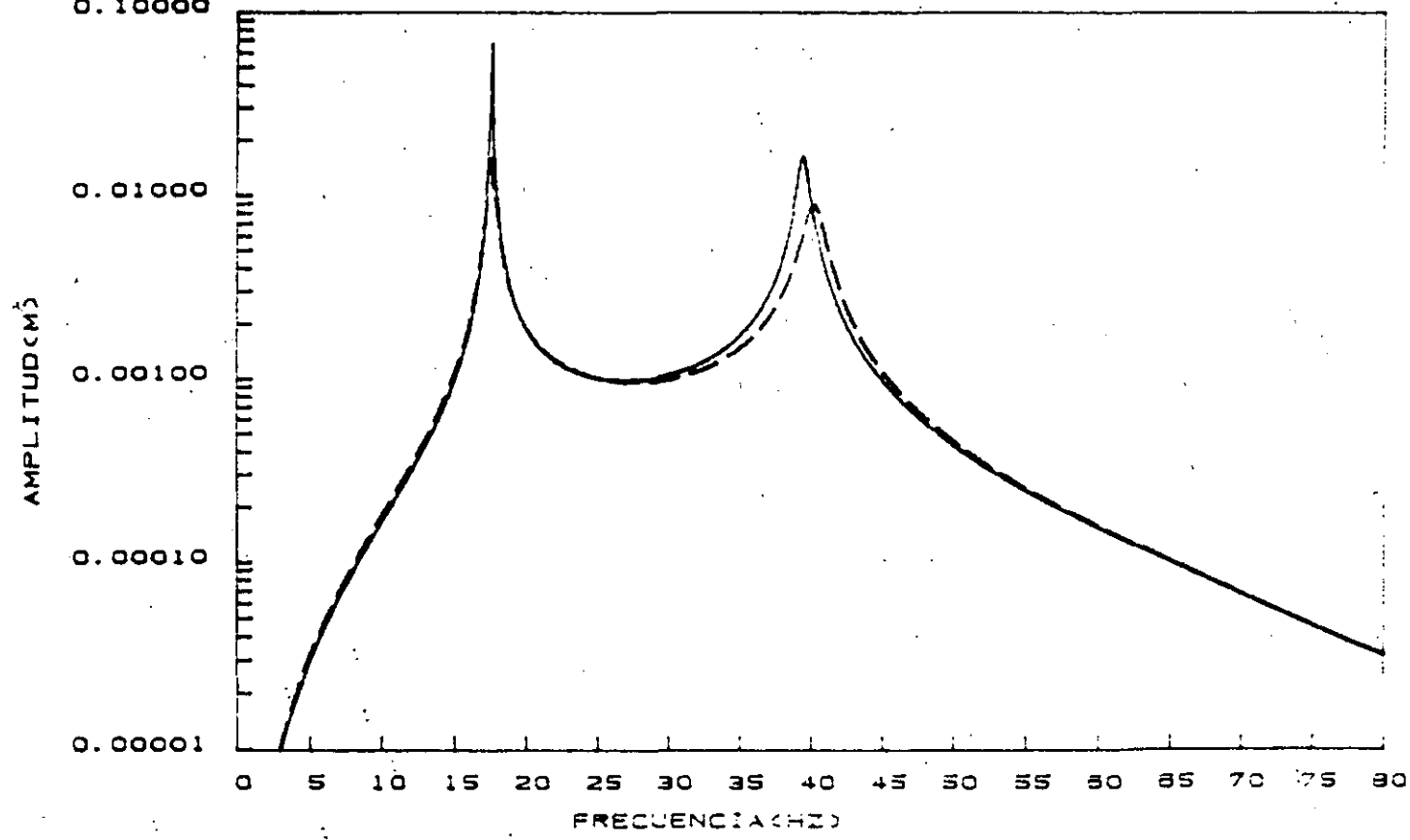


Fig. 5 Variación con la frecuencia del desplazamiento del cojinete en la dirección X para dos tipos de suelo

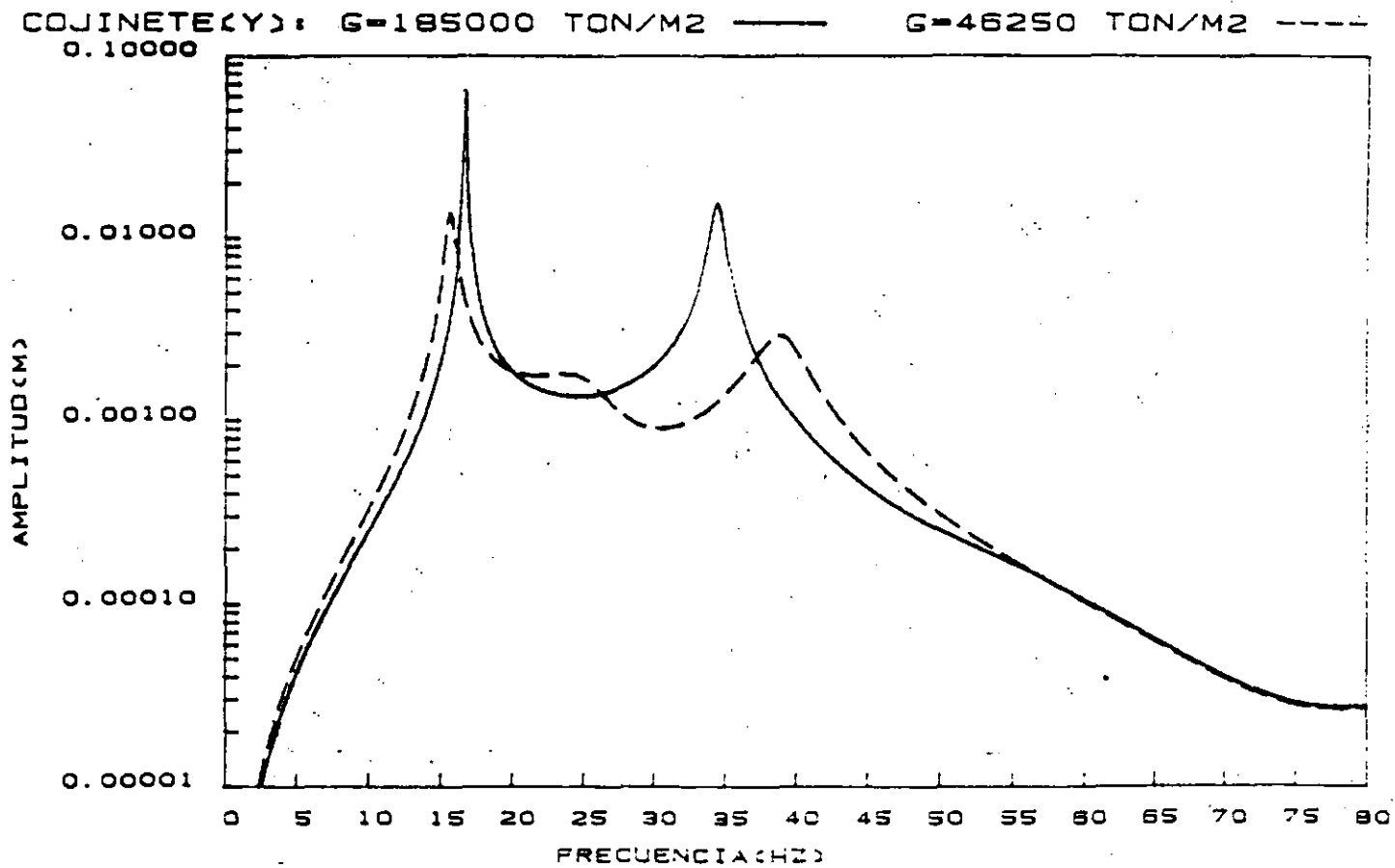


Fig. 6 Variación con la frecuencia del desplazamiento del cojinete en la dirección Y para dos tipos de suelo

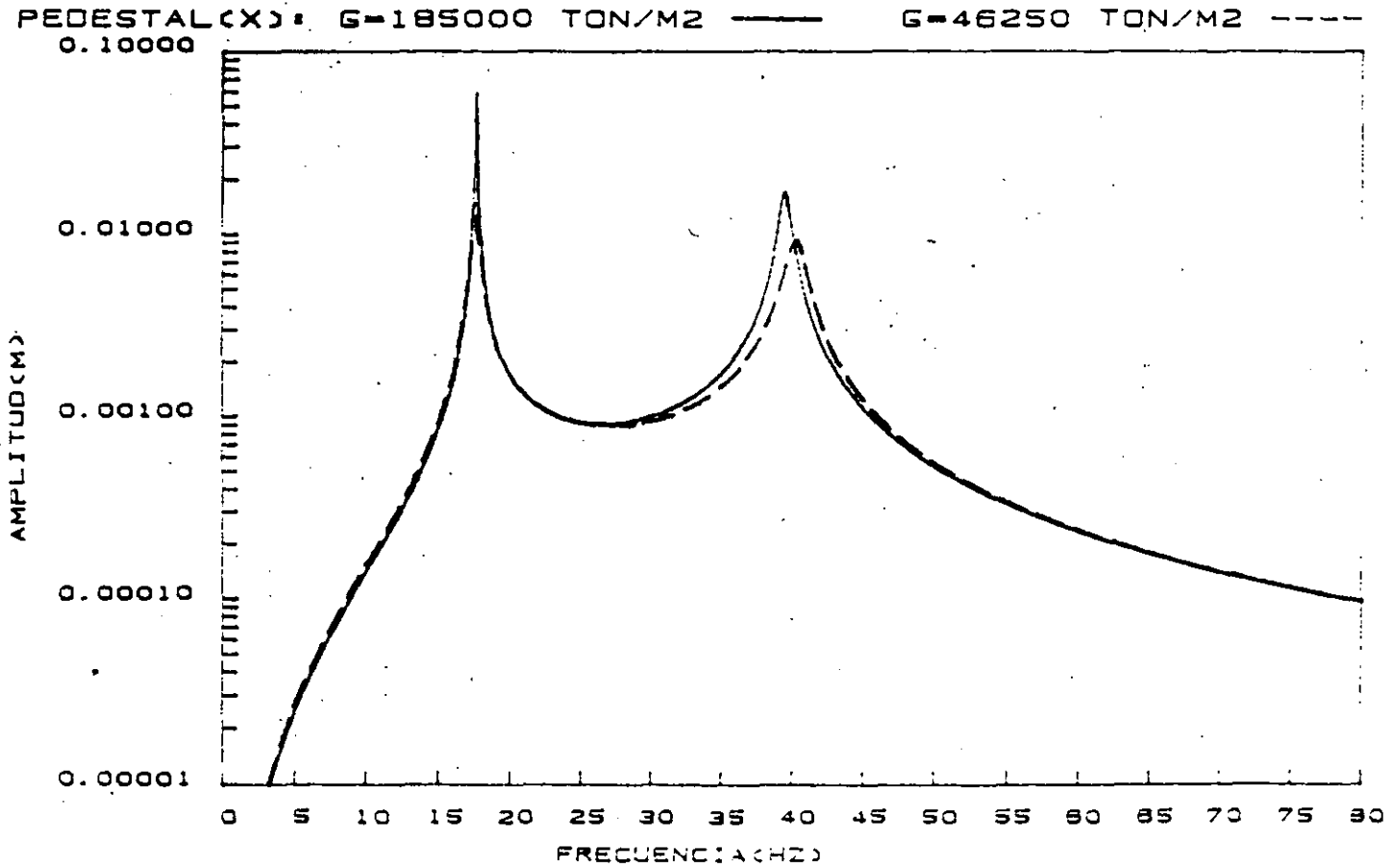


Fig. 7 Variación con la frecuencia del desplazamiento del pedestal en la dirección X para dos tipos de suelo

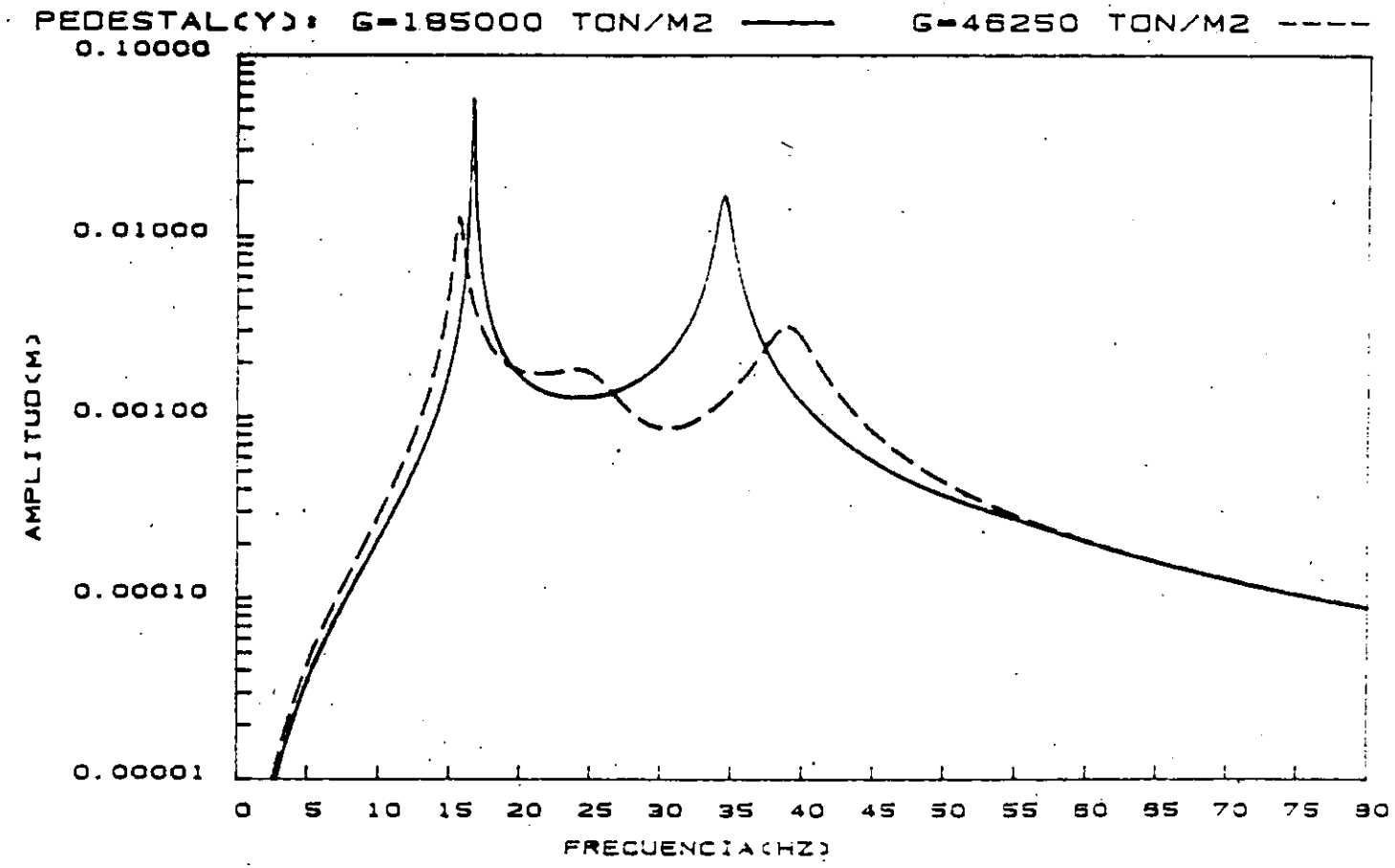


Fig. 8 Variación con la frecuencia del desplazamiento del pedestal en la dirección Y para dos tipos de suelo

CIMENTACION(X): G=185000 TON/M2 ——— G=46250 TON/M2 - - - -

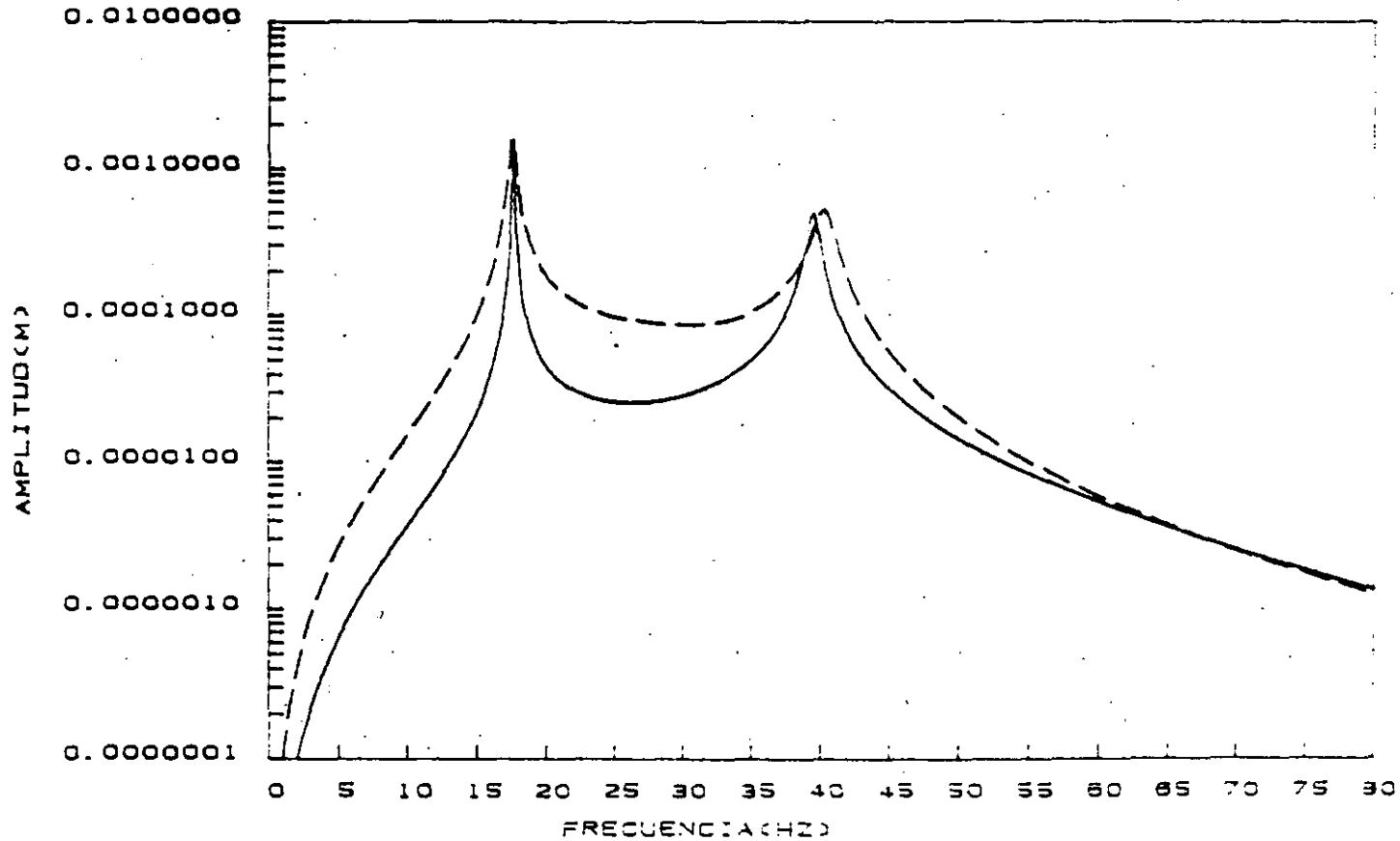
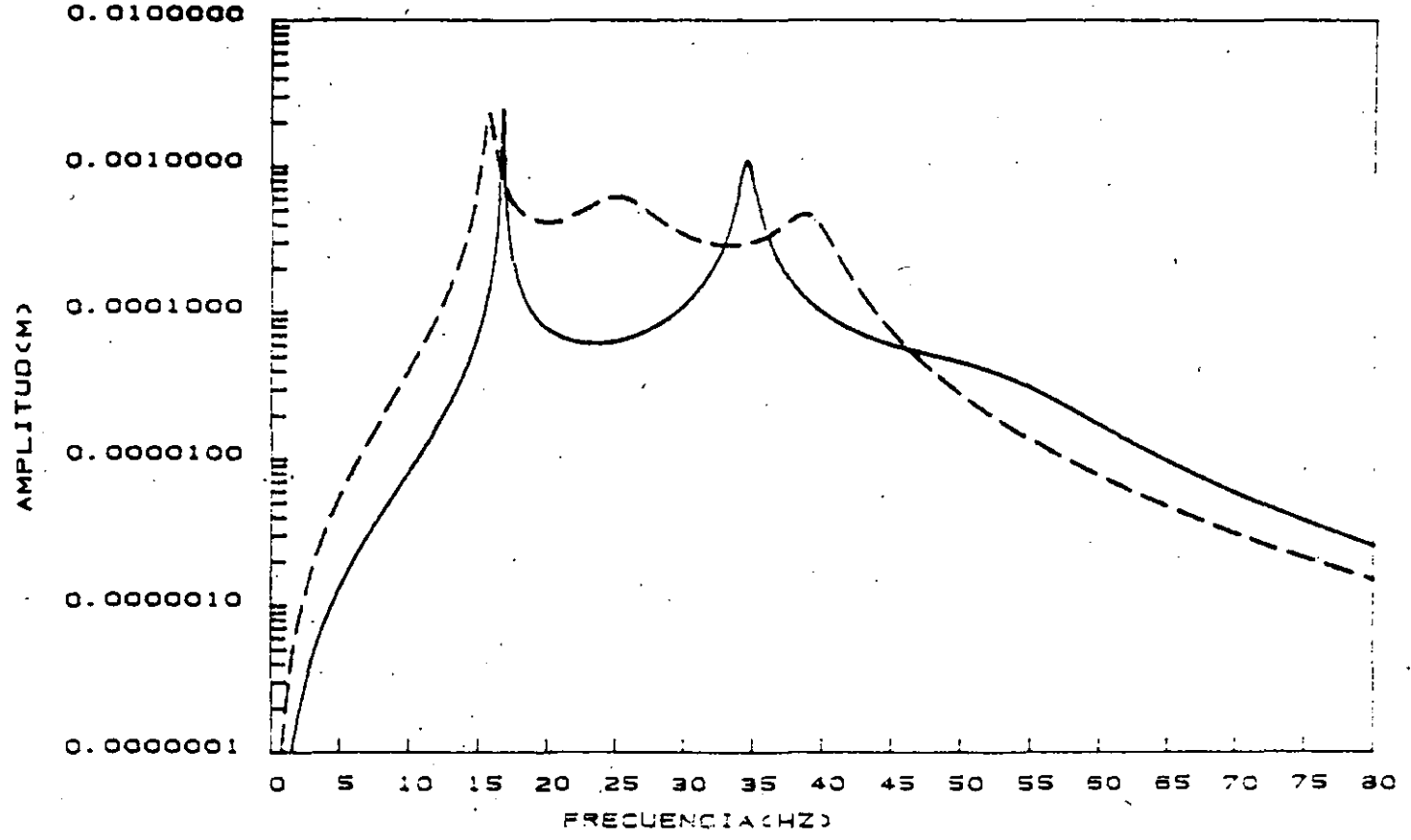


Fig. 9 Variación con la frecuencia del desplazamiento de la cimentación en la dirección X para los tipos de suelo

CIMENTACION(Y): G=185000 TON/M2 ——— G=46250 TON/M2 - - - -



• Fig. 10 Variación con la frecuencia del desplazamiento de la cimentación en la dirección Y para los tipos de suelo

34

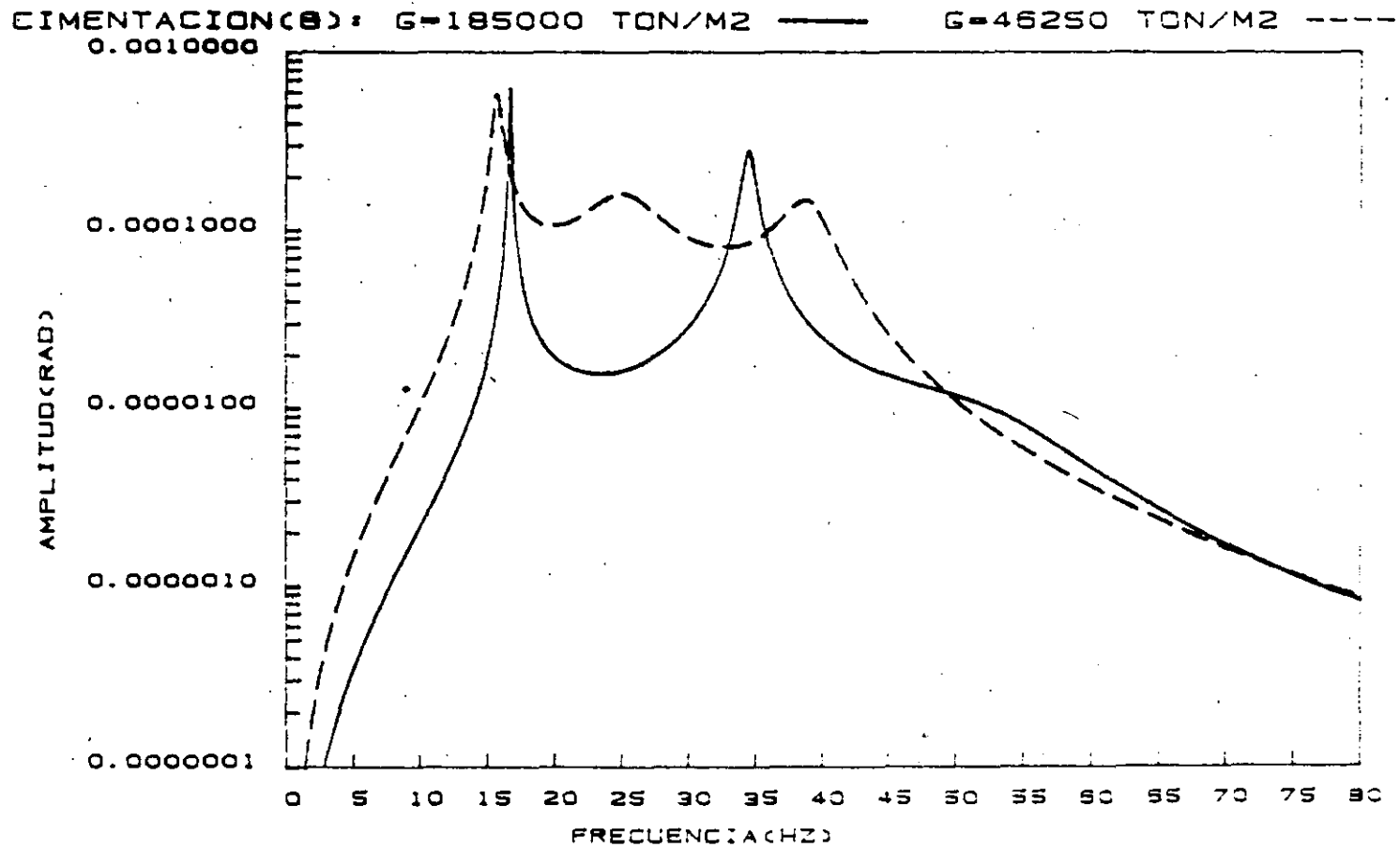


Fig. 11 Variación con la frecuencia de la rotación de la cimentación para dos tipos de suelo

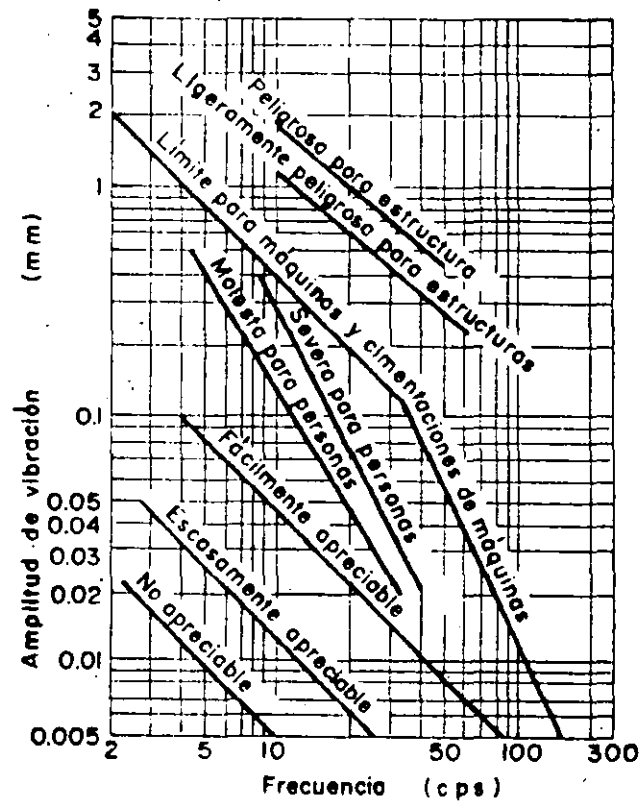


Fig. 12 Límites generales de desplazamiento en función de la frecuencia de vibración

La profundidad de desplante tiene influencia significativa en la respuesta del sistema. En las Figs. 13-15 se presentan los espectros de respuesta sólo para los grados de libertad de la cimentación. Los resultados con línea continua son para una profundidad de desplante $H = 2$ m y los de línea discontinua para $H = 1$ m; se trata de un suelo con módulo de cortante $G = 100000$ ton/m². En estos resultados se encuentra que todos los movimientos de la cimentación disminuyen con la profundidad de enterramiento. La menor disminución resulta en el movimiento vertical; por tanto, la profundidad de enterramiento es más efectiva en la atenuación del movimiento horizontal y de rotación. Además, se nota que la modificación de las frecuencias naturales del sistema debido a la profundidad de enterramiento es menor que por la rigidez del suelo.

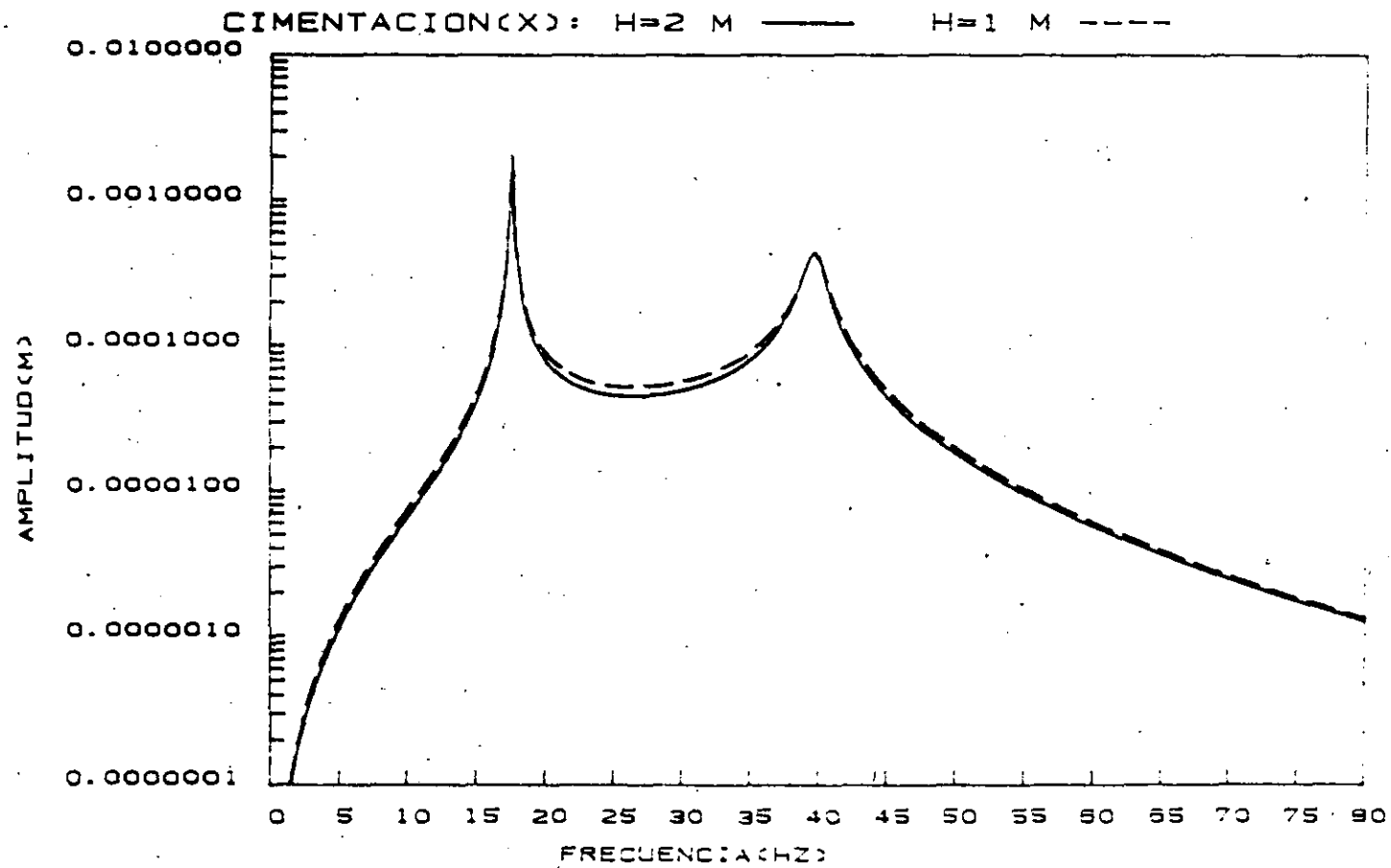


Fig. 13 Variación con la frecuencia del desplazamiento de la cimentación en la dirección X para diferentes profundidades de resplante

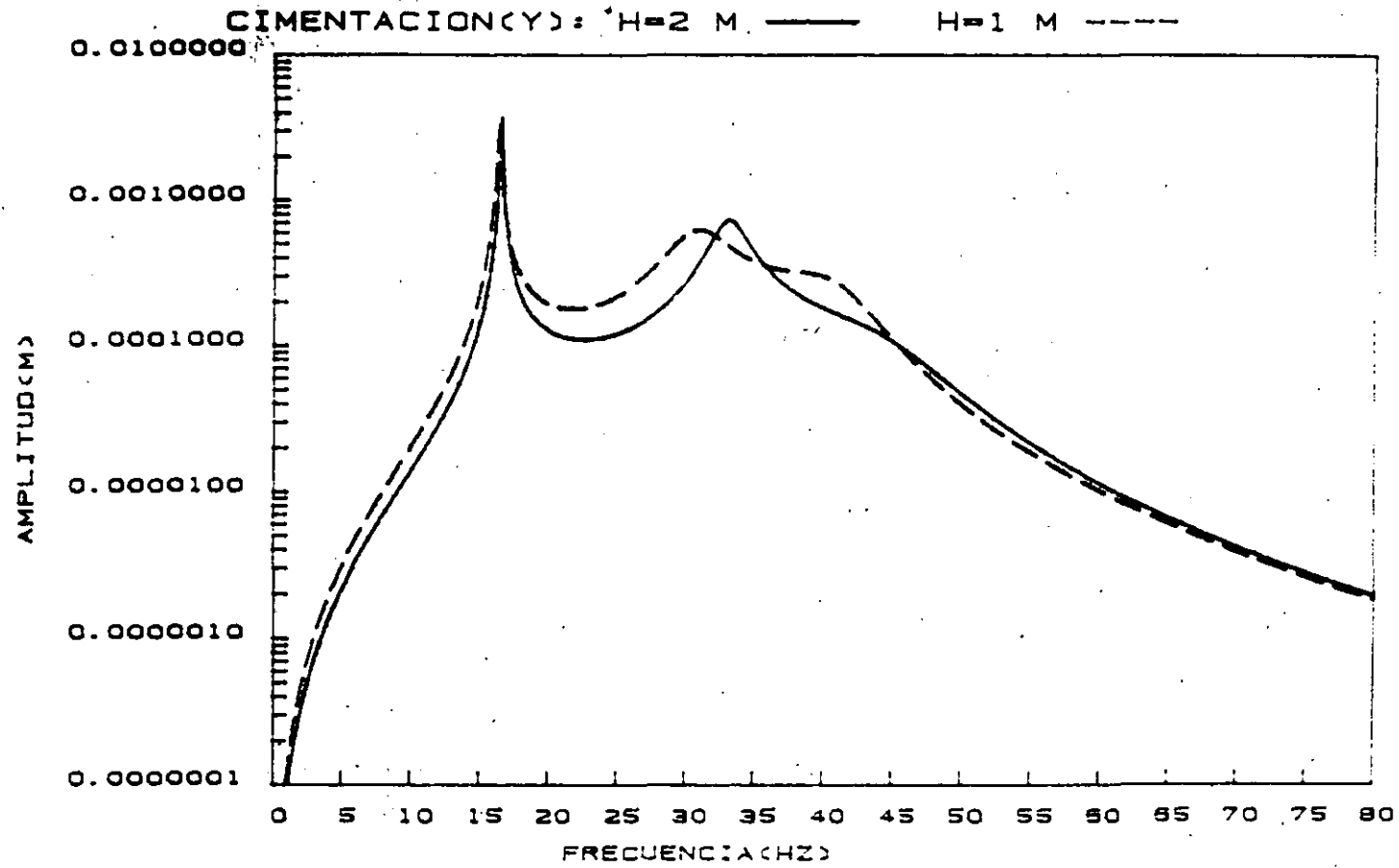


Fig. 14 Variación con la frecuencia del desplazamiento de la cimentación en la dirección Y para diferentes profundidades de desplante

CIMENTACION(B): H=2 M ——— H=1 M - - - -

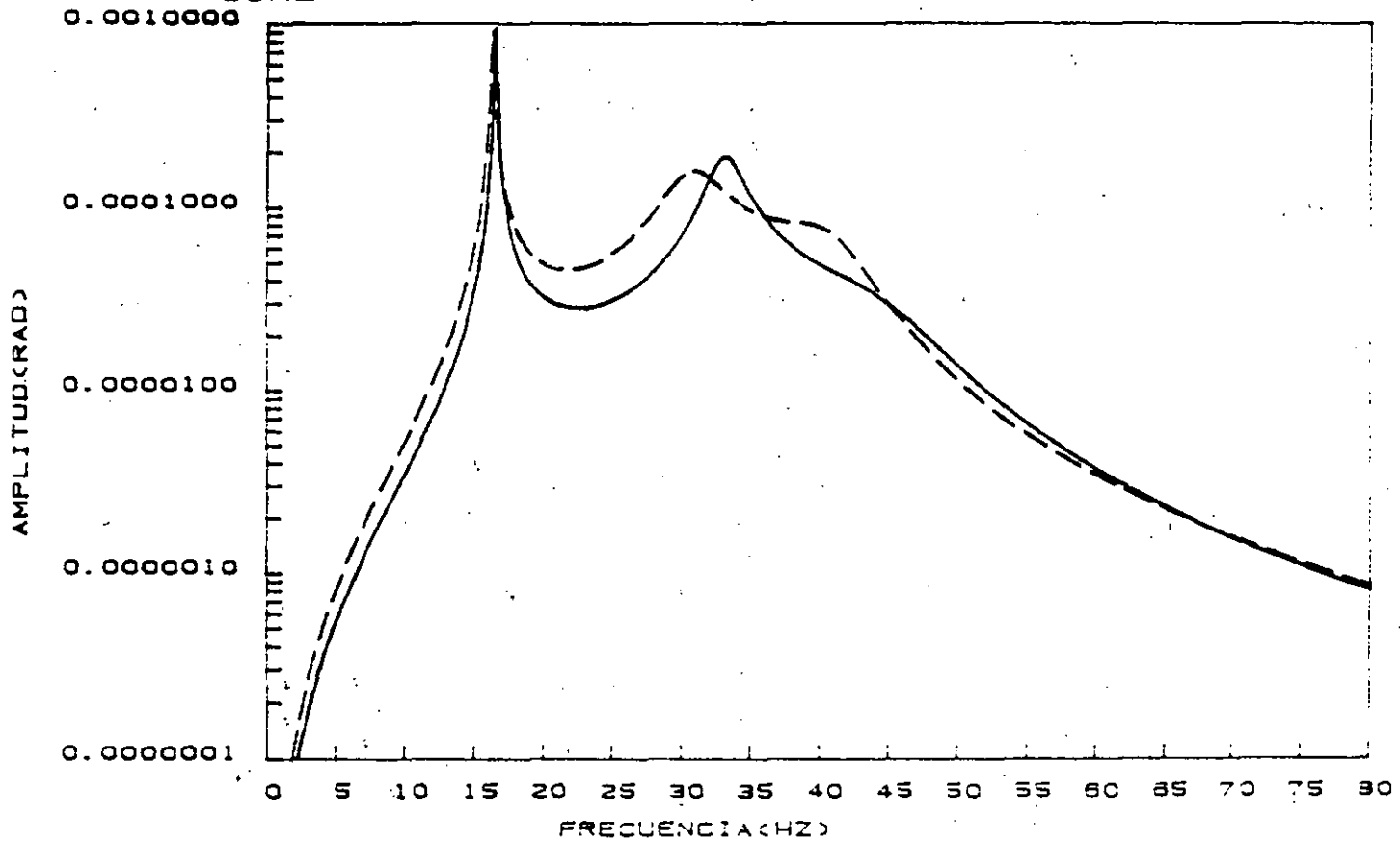


Fig. 15 Variación con la frecuencia de la rotación de la cimentación para diferentes profundidades de desplante

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado un modelo de interacción entre maquinaria, cimentación y suelo para el problema de vibraciones de cimentaciones de maquinaria de rotación. El modelo está formado con los elementos claves del sistema los cuales se idealizan como elementos discretos masa-amortiguador-resorte, excepto el suelo que se idealiza como un elemento continuo mediante funciones de impedancia.

El modelo resulta adecuado para realizar análisis de sensibilidad, con objeto de identificar los puntos críticos del sistema así como evaluar la influencia de los principales parámetros geométricos y mecánicos del mismo.

Analizando el efecto de la profundidad de desplante y la rigidez del suelo se concluye que: a) la variación de esta última produce el efecto dominante, y b) la cimentación se convierte en el elemento más afectado, al experimentar las mayores diferencias en

la respuesta del sistema.

Los resultados muestran que las vibraciones de los pedestales resultan excesivas con respecto a las correspondientes de la cimentación; esto parece ser una causa de fallas del sistema.

El modelo debería extenderse para el caso de depósitos de suelo estratificados el cual se presenta comúnmente en la práctica.

6. REFERENCIAS

1. Chen, H.M. y Malanoski, S.B., "Fan/Foundation Interaction: A Simplified Calculation Procedure", *Journal of Engineering for Power*, ASME, Vol. 103, 805-810, 1981.
2. Walters, D.B. y Kirby, J.B., "Design of Fan Foundations", *Journal of the Energy Division*, ASCE, Vol. 108, No. EY1, 23-36, 1982.
3. Clough, R.W. y Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, Inc., Nueva York, 1975.
4. Crandall, S.H., *Engineering Analysis*, McGraw-Hill, Inc., Nueva York, 1956.
5. Gazetas, G. "Analysis of Machine Foundation Vibrations: State of the Art", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 2, No. 1, 2-42, 1983.

6. Elsabee, F. y Morray, J.P., "Dynamic Behavior of Embedded Foundations", *Research Report R77-33*, MIT, 1977.
7. Kausel, E., "Forced Vibrations of Circular Foundations on Layered Media", *Research Report R74-II*, MIT, 1974.
8. Veletsos, A.S. y Verbic, B., "Vibration of Viscoelastic Foundations", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 2; 87-102, 1973.
9. Woods, R.D., "Measurement of Dynamic Soil Properties", *Proceedings of the Specialty Conference on Earthquake Engineering and Soil Dynamics*, ASCE, Vol. I, 91-178, 1978.
10. Dobry, R. y Gazetas, G., "Stiffness and Damping of Arbitrary-Shaped Embedded Foundations", *Research Report CE-82-04*, RPI, 1982.



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

CURSOS ABIERTOS

CIMENTACION DE MAQUINARIA

17. al 21 de febrero de 1992

**FUNDATION INSULATION FROM VIBRATIONS
USING PILES AS BARRIERS**

PALACIO DE MINERIA

FOUNDATION ISOLATION FROM VIBRATIONS USING PILES AS BARRIERS

By Javier Avilés¹ and Francisco J. Sánchez-Sesma²

ABSTRACT: A theoretical analysis is presented to solve the problem of foundation isolation from vibrations generated in the neighborhood using piles as barriers. The problem is formulated in two and three dimensions as one of multiple diffractions of elastic waves. The solution is determined imposing continuity and equilibrium conditions at the soil-pile interfaces with the aid of Graf's addition theorem. For the two-dimensional model the exact solution is obtained. The diffracted field by each pile is constructed as expansions of cylindrical wave functions. For the three-dimensional model an approximate solution is obtained. In this approximate solution the diffracted field by each pile is constructed only with Rayleigh waves. A parametric analysis is done to study the influence of the diameter of the piles, the separation between them, and their length on the effectiveness of the barrier. A transmissibility index is defined to measure the effectiveness of this isolation system.

INTRODUCTION

There are structures in which it is necessary to reduce the level of vibrations generated in the neighborhood by machinery or traffic because of several reasons. The problem has been studied by a number of researchers (Aboudi 1973; Avilés 1985; Avilés and Sánchez-Sesma 1983; Barkan 1962; Haupt 1977; Liao and Sangrey 1978; Segol et al. 1978; Woods 1968; Woods et al. 1974) and it is known in the literature (Barkan 1962; Richart et al. 1970) as foundation isolation. Some problems of undesired vibrations can be solved using mechanical devices. However, for those vibration problems in which mechanical isolation is inadequate, the solution can be foundation isolation by means of barriers of some kind.

Traditionally, the solution to the problem is to introduce a trench between source and structure. However, for long Rayleigh wavelengths, the requirements of trench depth often limit the application of trenches. This is the case in very soft ground or high water table level locations. An alternative to the use of trenches is to employ rows of piles. Piles generally are not limited in terms of depths. This alternative has been studied experimentally by Woods et al. (1974) and Liao and Sangrey (1978) and analytically by Avilés and Sánchez-Sesma (1983).

In this paper a theoretical analysis is presented to solve the problem of foundation isolation, using a row of elastic piles as an isolating barrier for elastic waves (Fig. 1). This work contains two closed-form analytical solutions:

¹Prof. of Engrg., Escuela de Ingeniería Civil, Universidad Autónoma de Puebla, 4 Sur 104, Puebla, Pue., México.

²Prof. of Engrg., Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Cd. Universitaria, Coyoacán, 04510, D.F., Mexico.

Note. Discussion open until April 1, 1989. To extend the closing date one month, a written request must be filed with the ASCE Manager of Journals. The manuscript for this paper was submitted for review and possible publication on March 23, 1987. This paper is part of the *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 114, No. 11, November, 1988. ©ASCE, ISSN 0733-9399/88/0011-1854/\$1.00 + \$.15 per page. Paper No. 22877.

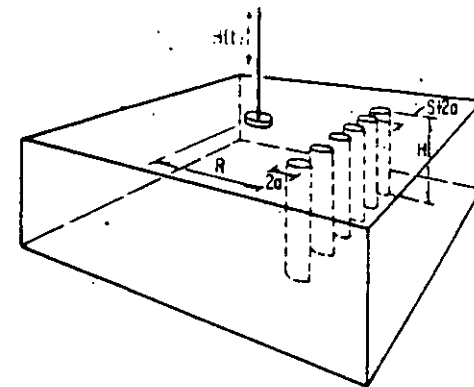


FIG. 1. Barrier of Piles as Isolation System; (Oscillating Force is Shown at a Distance R from Barrier)

1. The exact solution for a two-dimensional model formed with piles of infinite length and circular cross section that are embedded in an elastic, homogeneous, and isotropic unbounded space. The formulation and results are given for incident-plane SV waves.

2. An approximate solution for a three-dimensional model formed with piles of finite length and circular cross section that are embedded in an elastic, homogeneous, and isotropic half-space. The formation and results are given for incident-plane Rayleigh waves.

The problem is formulated as one of multiple diffraction of elastic waves. The solution is constructed as the superposition of the incident and diffracted fields by each pile. The solution is determined imposing continuity and equilibrium conditions at the soil-pile interfaces with the aid of Graf's addition theorem (Watson 1966). Using this theorem the total field can be referred to any coordinate system. A suitable set of cylindrical systems is used that allows solution of the problem in a closed form.

For the two-dimensional model the exact solution is obtained. The diffracted field by each pile is constructed as expansions of cylindrical wave functions (Pao and Mow 1973) and the boundary conditions on each pile can be satisfied in an exact form. For the three-dimensional model to obtain the exact solution is very difficult, due to the presence of the free surface and complex boundary conditions on each pile. In this work an approximate solution is obtained, since the diffracted field by each pile is constructed only with Rayleigh waves (Avilés 1985). Because of this assumption, the boundary conditions on each pile cannot be satisfied in an exact form. They must be solved in the least-squares sense (Sokolnikoff 1956).

TWO-DIMENSIONAL MODEL

Formulation of the Problem

In the propagation of vertically polarized harmonic SV waves, the displacement w in the z -direction (Fig. 2, with $\gamma_n = \pi/2$) satisfies the reduced

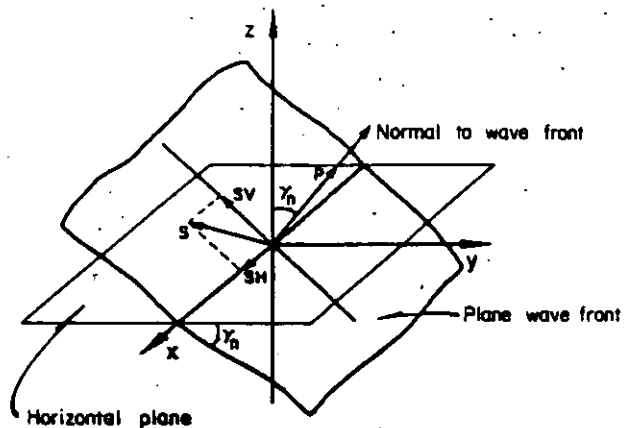


FIG. 2. Types of Plane Waves and Coordinate Reference System

wave equation or Helmholtz equation (Ackenbach, 1973):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_s^2 w = 0 \quad (1)$$

where $k_s = \omega/\beta_s$, = shear wave number; ω = circular frequency; $\beta_s = \sqrt{\mu_s/\rho_s}$ = wave propagation velocity of shear waves; μ_s = shear modulus of the soil; and ρ_s = density of the soil.

The presence of the row of piles produces multiple scattering and diffraction of the incident field. Therefore, the solution for the unbounded space can be constructed as:

$$w = w^i + \sum_{j=1}^P w_j^d \quad (2)$$

where w^i = incident field; w_j^d = diffracted field by the j th pile; and P = number of piles.

If the excitation consists of a plane SV wave with amplitude w_0 and incidence angle $\psi = \pi/2$ (Fig. 3), which propagates towards the barrier, the incident field in the reference system (x_1, y_1) is given by:

$$w^i(x_1, y_1) = w_0 \exp(-ik_s y_1) e^{i\omega t} \quad (3)$$

where $i = \sqrt{-1}$; and t = time. In what follows, the time factor $\exp(i\omega t)$ is omitted.

Using the method of separation of variables, the diffracted field by the j th pile in the reference system (r_j, θ_j) can be written as (Pao and Mow 1973);

$$w_j^d(r_j, \theta_j) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^j H_n^{(2)}(k_s r_j) \cos n\theta_j + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^j H_n^{(2)}(k_s r_j) \sin n\theta_j \quad (4)$$

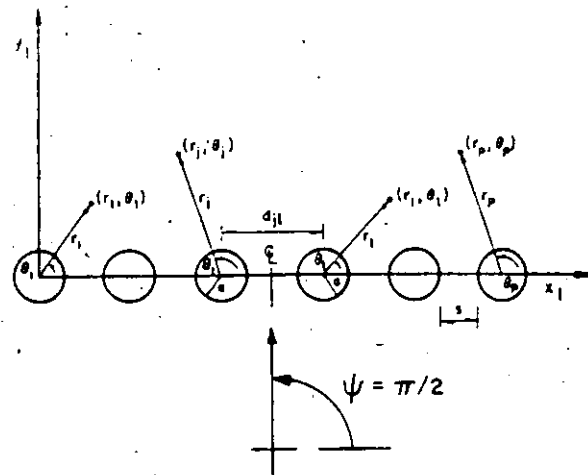


FIG. 3. Incidence of Plane Waves (SV and Rayleigh) and Reference System for Each Pile

where A_n^j, B_n^j = complex coefficients to be determined from boundary conditions; and $H_n^{(2)}(\cdot)$ = Hankel function of the second kind and order n . The functions $H_n^{(2)}(k_s r_j) e^{i\omega t}$ satisfy the Sommerfeld radiation condition at infinity (Sommerfeld 1949).

As the piles are elastic, part of the incident wave is refracted by the cylindrical surfaces and generates a standing wave inside each pile. The refracted field inside the j th pile can be represented by (Pao and Mow 1973):

$$w_j(r_j, \theta_j) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^j J_n(k_p r_j) \cos n\theta_j + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^j J_n(k_p r_j) \sin n\theta_j \quad (5)$$

where C_n^j, D_n^j = complex coefficients to be determined from boundary conditions; $J_n(\cdot)$ = Bessel function of the first kind of order n ; and subscript p means pile.

Assuming perfect adhesion, the boundary conditions to be satisfied at the soil-pile interfaces are continuity of displacements and shear stresses:

$$w(r_l, \theta_l)|_{r_l=a} = w_l(r_l, \theta_l)|_{r_l=a}, \quad 0 \leq \theta_l \leq 2\pi \quad \text{and} \quad l = 1, 2, \dots, P \quad (6)$$

$$\left[\mu_s \frac{\partial w(r_l, \theta_l)}{\partial r_l} \right]_{r_l=a} = \left[\mu_p \frac{\partial w_l(r_l, \theta_l)}{\partial r_l} \right]_{r_l=a}$$

$$0 \leq \theta_l \leq 2\pi \quad \text{and} \quad l = 1, 2, \dots, P \quad (7)$$

where a = radius of piles.

Solution

In order to obtain the solution of the problem, Eq. 2 should be referred to each coordinate system (r_l, θ_l) , in which $1 \leq l \leq P$. Doing this with the aid of Graf's addition theorem and expanding the incident plane wave into

series of cylindrical wave functions (Pao and Mow 1973), it can be found that:

$$\begin{aligned}
 w(r_i, \theta_i) = & w_0 \left[\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-i)^m \cos m\psi J_m(k, r_i) \cos m\theta_i \right. \\
 & + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^m \sin m\psi J_m(k, r_i) \sin m\theta_i \left. \right] \\
 & + (1 - \delta_{11}) \sum_{j=1}^{l-1} \left[\sum_{m=0}^{\infty} A_m^j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\epsilon_n}{2} K_n^*(k, d_j) J_m(k, r_i) \cos m\theta_i \right. \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} B_m^j \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_n^*(k, d_j) J_m(k, r_i) \sin m\theta_i \left. \right] \\
 & + \sum_{m=0}^{\infty} A_m^l H_m^{(2)}(k, r_i) \cos m\theta_i + \sum_{m=1}^{\infty} B_m^l H_m^{(2)}(k, r_i) \sin m\theta_i \\
 & + (1 - \delta_{lp}) \sum_{j=l+1}^P \left[\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_m^j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{2} K_n^*(k, d_j) J_m(k, r_i) \cos m\theta_i \right. \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m B_m^j \sum_{n=1}^{\infty} L_n^*(k, d_j) J_m(k, r_i) \sin m\theta_i \left. \right] \dots (8)
 \end{aligned}$$

where $K_n^*(\cdot) = H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\cdot) + (-1)^n H_{n-\frac{1}{2}}^{(2)}(\cdot)$; $L_n^*(\cdot) = -H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\cdot) + (-1)^n H_{n-\frac{1}{2}}^{(2)}(\cdot)$; ϵ_m = Neumann factor ($\epsilon_0 = 1$; $\epsilon_m = 2$, $m \geq 1$); d_j = distance between j th pile and l th pile; and δ_{ij} = Kronecker delta ($= 1$ if $i = j$; $= 0$ if $i \neq j$).

Substituting Eqs. 5 and 8 into Eqs. 6 and 7, and taking into account the linear independence of the trigonometric functions, two infinite linear systems of algebraic equations can be obtained.

They can be written as:

$$\begin{aligned}
 (1 - \delta_{11})(-1)^m \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_n^*(k, d_j) A_n^j + \frac{2}{\epsilon_m} \left[\frac{H_m^{(2)*}(k, a) - F_m H_m^{(2)}(k, a)}{J_m'(k, a) - F_m J_m(k, a)} \right] A_m^l \\
 + (1 - \delta_{lp}) \sum_{j=l+1}^P \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_n^*(k, d_j) A_n^j = -2w_0 (-i)^m \cos m\psi, \\
 l = 1, 2, \dots, P \text{ and } m = 0, 1, \dots, \infty \dots (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1 - \delta_{11})(-1)^m \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{n=1}^{\infty} L_n^*(k, d_j) B_n^j + \left[\frac{H_m^{(2)*}(k, a) - F_m H_m^{(2)}(k, a)}{J_m'(k, a) - F_m J_m(k, a)} \right] B_m^l \\
 + (1 - \delta_{lp}) \sum_{j=l+1}^P \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_n^*(k, d_j) B_n^j = -2w_0 (-i)^m \sin m\psi, \\
 l = 1, 2, \dots, P \text{ and } m = 1, 2, \dots, \infty \dots (10)
 \end{aligned}$$

where $F_m = \sqrt{(\mu_p/\mu_r)(\rho_p/\rho_r)}$ [$J_m'(k_p a)/J_m(k_p a)$]; and a prime denotes differentiation with respect to the argument.

Infinite systems cannot, in general, be solved. Here, truncation to a finite size was made. A comparison of results showed that, for the frequencies

studied, no difference is found in the results in 0.5 and 1.0 m frequencies when the order of the expansions is truncated to 8, since the results of Eqs. 9 and 10 are truncated appropriately and solved. Eq. 2 allows calculation of the displacement field in each point of the medium.

THREE-DIMENSIONAL MODEL

Formation of the Problem

For a homogeneous, isotropic, and elastic medium, the equation of harmonic motion is given by the Navier equation (Malvern 1969):

$$\mu_r \nabla^2 \{\delta\} + (\lambda_r + \mu_r) \nabla \nabla \cdot \{\delta\} + \rho_r \omega^2 \{\delta\} = \{0\} \dots (11)$$

where $\{\delta\}$ = vector of displacements with radial u_r , transverse v_θ , and vertical w_z components; and λ_r , μ_r = Lamé constants of the soil.

The displacement vector can be written, by means of the Helmholtz theorem (Aki and Richards 1980) as:

$$\{\delta\} = \nabla \phi + \nabla_x \nabla_x (0, 0, \psi) + \nabla_x (0, 0, \chi) \dots (12)$$

where ϕ , ψ , χ = displacement potentials of P, SV, and SH waves, respectively. It can be shown that Eq. 11 is satisfied by Eq. 12, if ϕ , ψ , and χ are solutions, respectively, of the following reduced wave equations:

$$\nabla^2 \phi + q_c^2 \phi = 0 \dots (13a)$$

$$\nabla^2 \psi + k_s^2 \psi = 0 \dots (13b)$$

$$\nabla^2 \chi + k_s^2 \chi = 0 \dots (13c)$$

where $q_c = \omega/\alpha_c$ = compression wave number; and $\alpha_c = \sqrt{(\lambda_r + 2\mu_r)/\rho_r}$ = wave propagation velocity of compression waves.

If it is assumed that the diffracted field by each pile is given only by Rayleigh waves, ϕ and ψ are the only non-vanishing coupled potentials. Then, as in Eq. 2, the solution in terms of potentials can be constructed as:

$$\phi = \phi^i + \sum_{j=1}^P \phi_j^d \dots (14)$$

$$\psi = \psi^i + \sum_{j=1}^P \psi_j^d \dots (15)$$

where ϕ^i , ψ^i = incident potentials; and ϕ_j^d , ψ_j^d = diffracted potentials by the j th pile.

The excitation is assumed to be a plane Rayleigh wave that propagates normally towards the barrier, the incident field in the reference system (x_1, y_1, z) is given by Achenbach (1973):

$$\phi^i(x_1, y_1, z) = A e^{i\gamma x_1} \exp(-ip, y_1) e^{i\omega z} \dots (16)$$

$$\psi^i(x_1, y_1, z) = B e^{i\gamma x_1} \exp(-ip, y_1) e^{i\omega z} \dots (17)$$

where $p_r = \omega/C_r$ = Rayleigh wave number; C_r = wave propagation velocity of Rayleigh waves; $\gamma = \sqrt{p_r^2 - q_c^2}$; and $\nu = \sqrt{p_r^2 - k_s^2}$. The constants A and B , and the velocity C_r , are given by:

$$\left(2 - \frac{C_1^2}{\beta_1^2}\right) - 4 \sqrt{1 - \frac{C_1^2}{\alpha_1^2}} \left| \sqrt{1 - \frac{C_1^2}{\beta_1^2}} \right| = 0 \quad (18)$$

$$\frac{A}{B} = \frac{p_1}{2} \frac{2 - \frac{C_1^2}{\beta_1^2}}{\sqrt{1 - \frac{C_1^2}{\alpha_1^2}}} \quad (19)$$

With the aid of the method of separation of variables, the diffracted field by the j th pile in the reference system (r_j, θ_j, z) can be written as (Aki and Richards 1980):

$$\phi_j^x(r_j, \theta_j, z) = A e^{\pi z} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n^j H_n^{(2)}(p_n r_j) \cos n\theta_j + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^j H_n^{(2)}(p_n r_j) \sin n\theta_j \right] \quad (20)$$

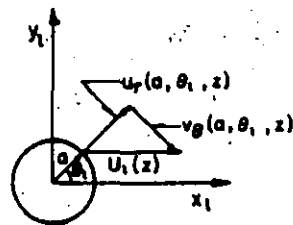
$$\phi_j^y(r_j, \theta_j, z) = B e^{\pi z} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n^j H_n^{(2)}(p_n r_j) \cos n\theta_j + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^j H_n^{(2)}(p_n r_j) \sin n\theta_j \right] \quad (21)$$

where A_n^j, B_n^j = complex coefficients to be determined from boundary conditions.

The boundary conditions to be satisfied at the soil-pile interfaces are continuity of displacements and equilibrium of forces. The piles are modeled as Euler-Bernoulli beams with longitudinal displacements (Newmark and Rosenbluth 1971). Then, the continuity conditions are [Figs. 4(a) and 4(b)]:

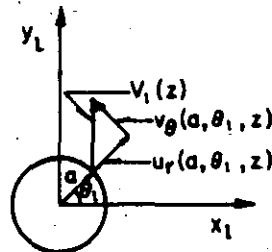
$$u_r(a, \theta_1, z) = U_1(z) \cos \theta_1 + V_1(z) \sin \theta_1, \quad 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, \quad -H \leq z \leq 0 \quad \text{and} \quad l = 1, 2, \dots, P \quad (22)$$

$$v_\theta(a, \theta_1, z) = -U_1(z) \sin \theta_1 + V_1(z) \cos \theta_1,$$



$$\begin{aligned} u_r(a, \theta_1, z) &= U_1(z) \cos \theta_1 \\ v_\theta(a, \theta_1, z) &= -U_1(z) \sin \theta_1 \\ w_z(a, \theta_1, z) &\doteq 0 \end{aligned}$$

FIG. 4(a). Conditions of Continuity of Displacements at Interface Soil-Pile l : Horizontal Translation



$$\begin{aligned} u_r(a, \theta_1, z) &= V_1(z) \sin \theta_1 \\ v_\theta(a, \theta_1, z) &= V_1(z) \cos \theta_1 \\ w_z(a, \theta_1, z) &\doteq 0 \end{aligned}$$

FIG. 4(b). Conditions of Continuity of Displacements at Interface Soil-Pile l : Vertical Translation

$$0 \leq \theta_l \leq 2\pi, \quad -H \leq z \leq 0 \quad \text{and} \quad l = 1, 2, \dots, P \quad (23)$$

$$w_z(a, \theta_l, z) = W_l(z), \quad 0 \leq \theta_l \leq 2\pi, \quad -H \leq z \leq 0$$

$$\text{and} \quad l = 1, 2, \dots, P \quad (24)$$

On the other hand, the equilibrium conditions are:

$$E_p I_p \frac{d^4 U_l(z)}{dz^4} - \omega^2 m_p U_l(z) = p_x^l(z), \quad -H \leq z \leq 0 \quad \text{and} \quad l = 1, 2, \dots, P \quad (25)$$

$$E_p I_p \frac{d^4 V_l(z)}{dz^4} - \omega^2 m_p V_l(z) = p_y^l(z), \quad -H \leq z \leq 0 \quad \text{and} \quad l = 1, 2, \dots, P \quad (26)$$

$$E_p A_p \frac{d^2 W_l(z)}{dz^2} + \omega^2 m_p W_l(z) = -p_z^l(z), \quad -H \leq z \leq 0 \quad \text{and} \quad l = 1, 2, \dots, P \quad (27)$$

where $U_l(z), V_l(z), W_l(z)$ = complex amplitudes of the motions of the l th pile in the $x, y,$ and z directions, respectively; $E_p I_p$ = bending stiffness of the piles; $E_p A_p$ = axial stiffness of the piles; and m_p = mass of the piles per unit length. $p_x^l(z), p_y^l(z), p_z^l(z)$ = amplitudes of the forces generated by the soil on the l th pile in the $x, y,$ and z directions, respectively, and are given by:

$$p_x^l(z) = a \int_0^{2\pi} [\sigma_{rr}(a, \theta_l, z) \cos \theta_l - \sigma_{r\theta}(a, \theta_l, z) \sin \theta_l] d\theta_l \quad (28)$$

$$p_y^l(z) = a \int_0^{2\pi} [\sigma_{rr}(a, \theta_l, z) \sin \theta_l + \sigma_{r\theta}(a, \theta_l, z) \cos \theta_l] d\theta_l \quad (29)$$

$$p_z^l(z) = a \int_0^{2\pi} \sigma_{zz}(a, \theta_l, z) d\theta_l \quad (30)$$

where:

$$\sigma_{rr} = \lambda_r \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + 2\mu_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (31)$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu_r \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad (32)$$

$$\sigma_{zz} = \mu_r \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) \quad (33)$$

Solution

Substituting Eqs. 28-30 into Eqs. 25-27, taking into account Eqs. 31-33 and the Graf's addition theorem, explicit expressions in terms of the coefficients A_n^j, B_n^j can be obtained for $U_l(z), V_l(z)$ and $W_l(z)$, where $1 \leq l \leq$

P . Then, from Eqs. 22-24, taking into account the linear independence of the trigonometric functions, six infinite linear systems of algebraic equations are obtained. They cannot be solved in an exact form; it is needed to solve them in the least-squares sense. The algebra needed for doing so fills many pages and even the final expressions are too long to be presented here; they have been reported elsewhere (Avilés 1985). As in the two-dimensional model, truncation allows for solution of the infinite systems of equations.

RESULTS

Results are given for the two-dimensional and three-dimensional models. The incident fields of SV and Rayleigh waves are characterized, respectively, by the normalized frequencies:

$$\eta_a = \frac{\alpha\omega}{\pi\beta_s} = \frac{2a}{\lambda_s} \quad (34)$$

$$\eta_b = \frac{\alpha\omega}{\pi C_s} = \frac{2a}{\lambda_p} \quad (35)$$

where λ_s, λ_p = wavelengths of incident SV and Rayleigh waves, respectively. It can be seen that the normalized frequency is the ratio of pile diameter to incident wave length.

For the results presented here, eight terms were used in all expansions considered. That was enough to obtain four-digit accuracy in the range of frequencies studied. The analyzed barriers are formed by eight or nine piles with a density contrast $\rho_p/\rho_s = 1.35$. Rigidity contrasts are $\theta_p/\mu_s = 1,000$ for the two-dimensional model and $E_p/E_s = 1,000$ in the three-dimensional case.

Two-Dimensional Model

Fig. 5 shows the normalized amplitude of w along the line $x = 0$, that is at the end of the barrier, for a separation between piles of $S/a = 1$ and normalized frequency $\eta_b = 0.4$. It is possible to see here the double effect of a barrier of piles as isolation system: amplifications are generated at the incidence side and reductions of the field appear after the barrier. The zone of reductions can be seen in more detail in Fig. 6 in which profiles are shown for the lines $x/a = 0, 3, 6,$ and 9 , respectively. At points near the barrier the reduced field shows large variability, in contrast with the smooth variations observed at longer distances. Moreover, observe that the field presents a uniform recovery, in the width observed, far away from the barrier and very slowly tends to attain the level of the incident field. This effect is typical of many diffraction problems. In Fig. 7 the normalized values of w are displayed for the line $y/a = 200$, for different separations between piles and normalized frequency $\eta_b = 0.5$. Two important facts become clear: (1) The greater reductions appear in the center of the barrier ($x/a = 0$), showing that it behaves as a whole, not as a set of independent obstacles; and (2) reductions are generally more efficient for smaller separation between piles.

To measure in a quantitative way the effectivity of barriers as isolation system, a transmissibility index (T) is defined by means of:

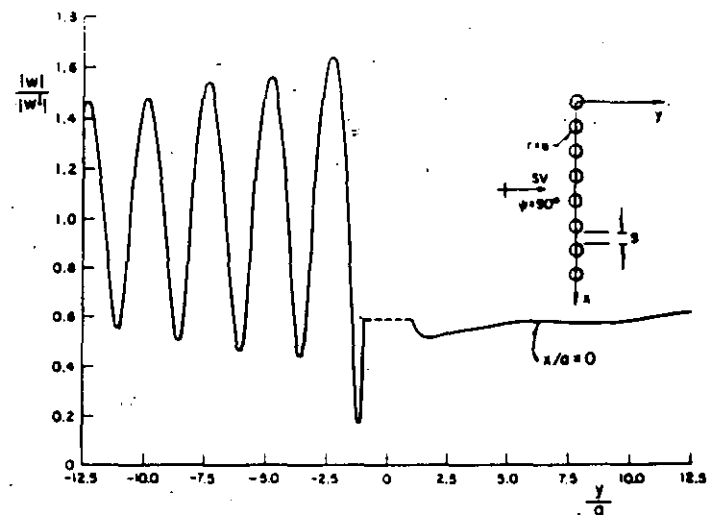


FIG. 5. Normalized Amplitude of Displacement w along Line $x = 0$; Separation between Piles $S/a = 1$ and Normalized Frequency $\eta_b = 0.4$; Isolating Barrier of Eight Piles with $\rho_p/\rho_s = 1.35$ and $\mu_p/\mu_s = 1,000$

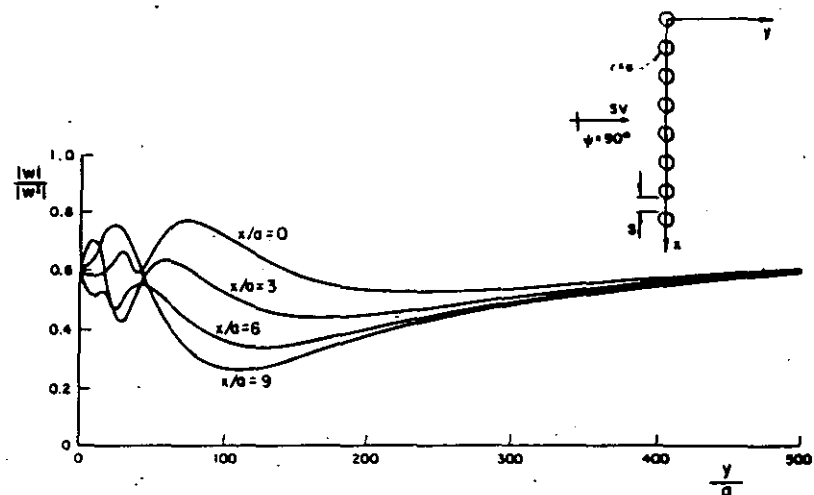


FIG. 6. Normalized Amplitudes of Displacement w along Lines $x/a = 0, 3, 6,$ and 9 (Properties as in Fig. 5)

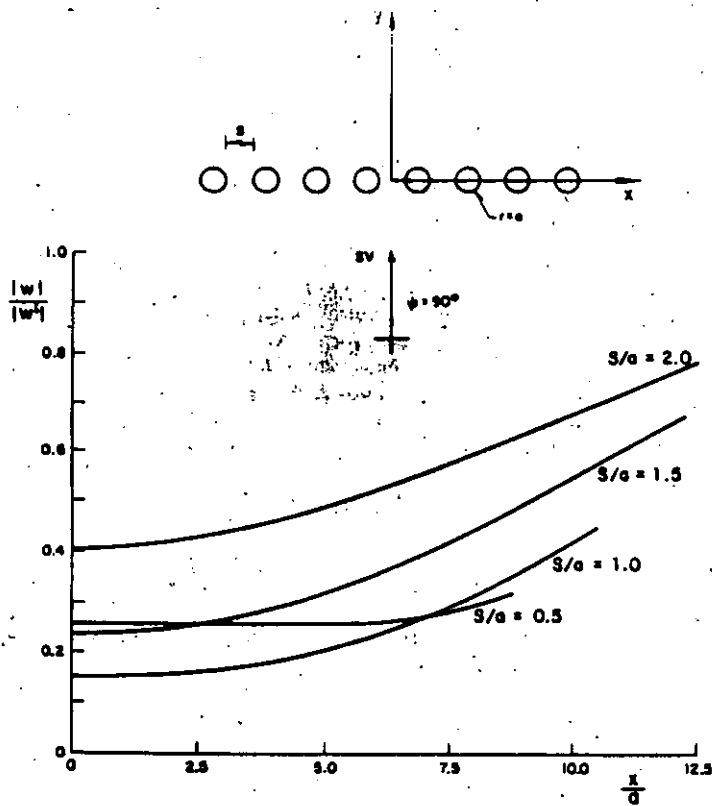


FIG. 7. Normalized Amplitudes of Displacement w along $y/a = 200$ for Different Separations between Piles; Normalized Frequency $\eta_b = 0.5$; Barrier of Eight Piles with $\rho_p/\rho_s = 1.35$ and $\mu_p/\mu_s = 1,000$

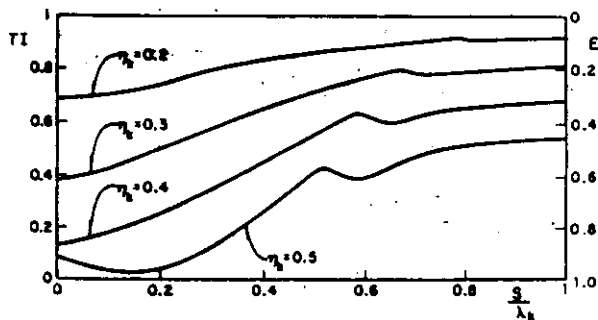


FIG. 8. Transmissibility and Effectivity indexes for Various Normalized Frequencies; Barrier of Nine Piles with $\rho_p/\rho_s = 1.35$ and $\mu_p/\mu_s = 1,000$

$$TI(S, \omega) = \frac{w^i}{w} \quad (36)$$

where w^i = transmitted field. To make the TI independent of position, w is defined as the minimum value of w in the zone of reductions. Thus, TI will vary between 0 and 1. In Fig. 8 the transmissibility index is given for various normalized frequencies. The figure shows influence of the piles' diameter as well as of their separation. If the effectiveness of the barrier is defined as $E = 1 - TI$ one can say that it is large when the diameter increases and/or when the separation between piles decreases.

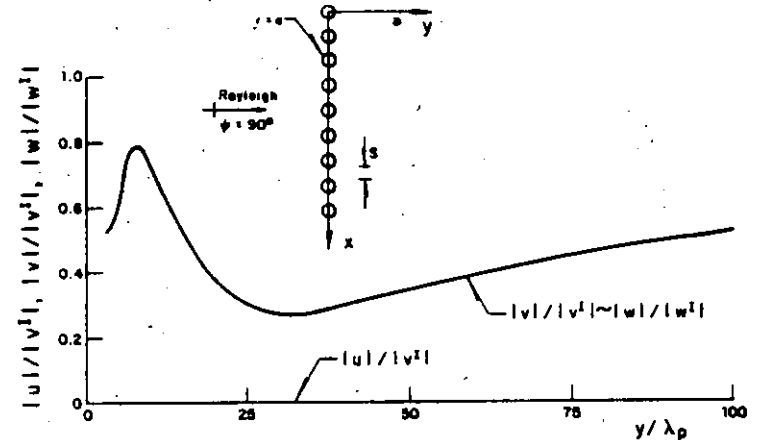


FIG. 9. Normalized Amplitudes of Displacements u , v , and w along $x/\lambda_p = 2.8$; Isolating Barrier of Nine Piles with $\rho_p/\rho_s = 1.35$, $E_p/E_s = 1,000$, $S/\lambda_p = 0.3$, $H/\lambda_p = 2$, $\nu_s = 0.3$, and $\tau_b = 0.4$

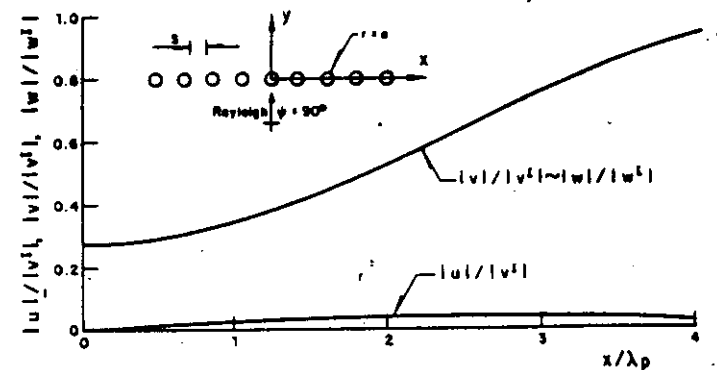


FIG. 10. Normalized Amplitudes of Displacements u , v , and w along $x/\lambda_p = 2.8$ (Properties Same as Fig. 9 but along $y/\lambda_p = 35$)

Three-Dimensional Model

In Figs. 9 and 10 normalized amplitudes of displacement components u , v , and w are displayed along the lines $x/\lambda_p = 2.3$ and $y/\lambda_p = 35$, respectively, for a separation between piles $S/\lambda_p = 0.3$, length of piles $H/\lambda_p = 2$, and normalized frequency $\eta_p = 0.4$. In this set of results the behavior of the displacement field in the reduction zone is clear. The existence of the component u is due to diffraction of waves by the barrier. On the other hand, the similarity of the normalized values of v and w is probably due to the fact that only Rayleigh waves are allowed to represent the diffracted field. However, this assumption seems reasonable (Avilés 1985), because of the nature of radiated fields from the piles.

The influence of piles' length, separation, and diameter on the effectiveness of the barrier can be seen in Figs. 11, 12, and 13, respectively. These results show the behavior of normalized values of v and w along the line $y/$

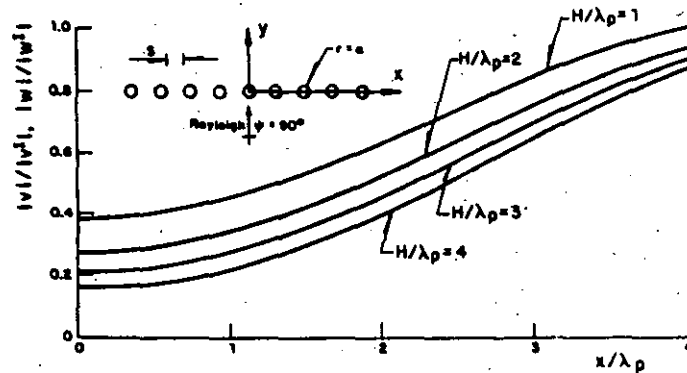


FIG. 11. Normalized Amplitudes of Displacements v and w along $y/\lambda_p = 35$ for Different Lengths of Piles (Other Properties as in Fig. 9)

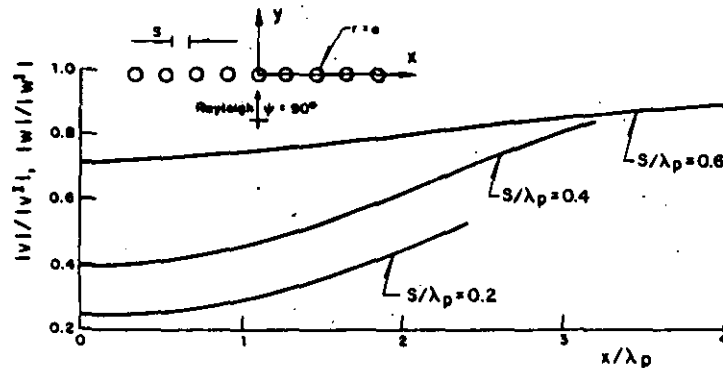


FIG. 12. Normalized amplitudes of Displacements v and w along $y/\lambda_p = 35$ for Different Separations between Piles (Other Properties as in Fig. 9)

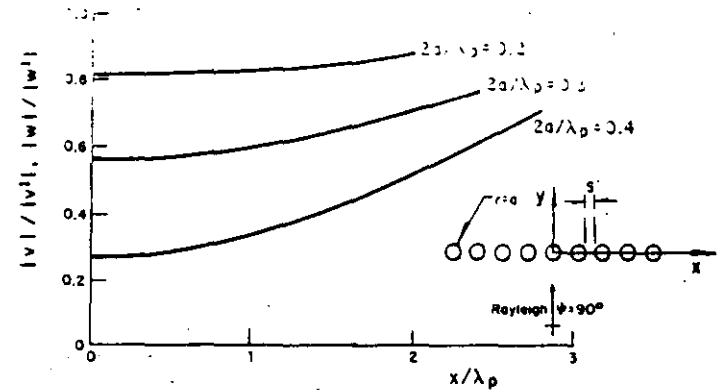


FIG. 13. Normalized Amplitudes of Displacements v and w along $y/\lambda_p = 35$ for Different Normalized Frequencies (Other Properties as in Fig. 9)

$\lambda_p = 35$. The values of u are not shown; they are very small and of no practical significance. Fig. 11 shows the influence of piles' length for separation $S/\lambda_p = 0.3$ and normalized frequency $\eta_p = 0.4$. Increasing reductions of the surface wave field are observed as the length of piles increases. However, due to the nature of Rayleigh waves which are confined near the surface, this effect will be less important for very long piles. More significant appears to be the separation and diameter. In fact, for a length $H/\lambda_p = 2$ and normalized frequency $\eta_p = 0.4$ the results of Fig. 12 show important reductions of the surface wave field as the separation between piles decreases. This is similar to what was observed in the two-dimensional model. The influence of pile diameter is illustrated in Fig. 13 for a separation $S/\lambda_p = 0.3$ and length $H/\lambda_p = 2$; the behavior is also similar to that of the two-dimensional model.

CONCLUSIONS

A theoretical analysis has been presented to solve the problem of foundation isolation from vibrations generated in the neighborhood using piles as barriers. The isolation system studied herein is formed by a row of piles with circular cross section. Two models were considered: a two-dimensional one with piles of infinite length and incident plane SV waves; and a more realistic three-dimensional model with finite piles, free surface and incident Rayleigh waves.

From a parametric study, in which the effects of pile diameter, separation, and length were considered among other parameters, the following conclusions may be drawn:

1. The diameter of piles must be $2a > \lambda_p/4$ to have an effectiveness $E > 0.5$.
2. The separation between piles S can be obtained from curves of the transmissibility index.
3. Length of piles must be $H > 2\lambda_p$.

4. The minimum width of the barrier must be of about three times the width of the desired isolation zone.

5. The maximum reductions in the field are observed in the region $150a < y < 250a$.

Other parameters may be considered. However, in this work it was assumed that the studied ones are the most significant in the behavior of this isolation system. It is believed that the results presented here can be useful in the design of barriers. However, they must be considered as general guidelines, as there are other factors that can limit the results of this study in a drastic way, such as soil stratification.

This theoretical study may also be useful to plan experimental work in the field or the laboratory, to extend the results reported here.

ACKNOWLEDGMENTS

Thanks are given to A. Arias and E. Rosenblueth for their encouragement and keen critical remarks and to M. A. Bravo for the critical reading of the manuscript.

APPENDIX I. REFERENCES

- Aboudi, J. (1973). "Elastic waves in half-space with thin barrier." *J. Engrg. Mech. Div.*, ASCE, 99(1), 69-83.
- Achenbach, J. D. (1973). *Wave propagation in elastic solids*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, The Netherlands.
- Aki, K., and Richards, P. G. (1980). *Quantitative seismology. Theory and methods*. Vol. I, W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif.
- Avilés, J. (1985). "Aislamiento de cimentaciones mediante Barreras de Pilotes," thesis presented to the Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico City, Mexico, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy (in Spanish).
- Avilés, J., and Sánchez-Seama, F. J. (1983). "Piles as barriers for elastic waves." *J. Geotech. Engrg. Div.*, ASCE, 109(9), 1133-1146.
- Barkan, D. D. (1962). *Dynamics of bases and foundations*. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N.Y.
- Haupt, W. A. (1977). "Surface-waves in non-homogeneous half-space." *Proc. Dynamic Meth. in Soil and Rock Mech.*, 77, Karlsruhe, Germany, vol. 1, 335-367.
- Liao, S., and Sangrey, D. A. (1978). "Use of piles as isolation barriers." *J. Geotech. Engrg. Div.*, ASCE, 104(9), 1139-1152.
- Maivern, L. E. (1969). *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- Pao, Y. H., and Mow, C. C. (1973). *Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations*. Crane Russak, New York, N.Y.
- Newmark, N. M., and Rosenblueth, E. (1971). *Fundamentals of earthquake engineering*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- Richart, F. E., Jr., et al. (1970). *Vibrations of soils and foundations*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- Segol, G., Lee, P. C. Y., and Abel, J. F. (1978). "Amplitude reduction of surface waves by trenches." *J. Engrg. Mech. Div.*, ASCE, 104(3), 621-641.
- Sokolnikoff, I. S. (1956). *Mathematical theory of elasticity*. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N.Y.
- Sommerfeld, A. (1949). *Partial differential equations in physics*. Academic Press, Inc., New York, N.Y.
- Watson, G. N. (1966). *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge University Press, London, N.W., England.

- Woods, R. D. (1968). "Screening of surface waves in soils." *J. Soils Mech. and Found. Div.*, ASCE, 94(4), 951-979.
- Woods, R. D., Barnett, N. E., and Sagesser, R. (1974). "Holography—a new tool for soil dynamics." *J. Geotech. Engrg. Div.*, ASCE, 100(11), 1231-1247.

APPENDIX II. NOTATION

The following symbols are used in this paper:

- A = constant;
- A'_n = complex coefficient;
- A_p = area of piles cross section;
- a = radius of piles;
- B = constant;
- B'_n = complex coefficient;
- C'_n = complex coefficient;
- C_r = propagation velocity of Rayleigh waves;
- D'_n = complex coefficient;
- d_{jl} = distance between j th pile and l th pile;
- E = effectivity of barrier;
- E_p = Young's modulus of piles;
- E_s = Young's modulus of soil;
- F_m = real factor;
- H = length of piles;
- $H_n^{(2)}(\cdot)$ = Hankel function of second kind and order n ;
- I_p = moment of inertia of piles cross section;
- $J_n(\cdot)$ = Bessel function of first kind and order n ;
- $K_n^*(\cdot)$ = complex function;
- k_p = shear wave number at piles;
- k_s = shear wave number at soil;
- $L_n^*(\cdot)$ = complex function;
- m_p = mass of the piles per unit length;
- P = number of piles;
- p_r = Rayleigh wave number at soil;
- p_x^i, p_y^i, p_z^i = forces per unit of length on l th piles in x , y , and z directions, respectively;
- q_s = compression wave number at soil;
- r, θ, z = cylindrical coordinates;
- S = separation between piles;
- $TI(\cdot)$ = transmissibility index;
- t = time;
- U_l, V_l, W_l = displacements of l th pile in x , y , and z directions, respectively;
- u, v, w = displacement components in x , y , z directions, respectively;
- u_r, v_θ, w_z = displacement components in r , θ , z directions, respectively;
- w^i = incident SV field;
- w^t = transmitted SV field;
- w_0 = amplitude of incident SV field;

- w_j = refracted SV field in j th pile;
 w_j^d = diffracted SV field by j th pile;
 x, y, z = rectangular coordinates;
 α_j = propagation velocity of compression waves;
 β_j = propagation velocity of shear waves;
 γ = constant;
 $\{\delta\}$ = vector of displacements;
 δ_{ij} = Kronecker delta;
 e_n = Neumann factor;
 τ_{sv} = normalized frequency of SV waves;
 τ_{rp} = normalized frequency of Rayleigh waves;
 λ_s = incident SV wavelength;
 λ_r = incident Rayleigh wavelength;
 λ_s = Lamé constant of soil;
 μ_j = shear modulus of piles;
 μ_s = shear modulus of soil;
 ν = constant;
 ν_s = Poisson's modulus of soil;
 ρ_j = density of piles;
 ρ_s = density of soil;
 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ = stress components in r, θ, z directions, respectively;
 ϕ = P -displacement potential;
 ϕ^i = incident P -potential;
 ϕ_j^d = diffracted P -potential by j th pile;
 χ = SH-displacement potential;
 ψ = SV-displacement potential;
 ψ^i = incident SV-potential;
 ψ_j^d = diffracted SV-potential by j th pile; and
 ω = circular frequency.

NUMERICAL ANALYSIS OF STEADY FLOW IN A 90° CIRCULAR SECTION BEND

By Ren Jai Liou,¹ Martyn E. Clark,² Member, ASCE, James M. Robertson,³ Fellow, ASCE, and Le-Chung Cheng⁴

ABSTRACT: Laminar-viscous flow around a bend of radius twice the conduit diameter, preceded and succeeded by a straight conduit, is calculated via primitive variables for a Reynolds number of 100. The nature of the finite-difference equations and the solution approach used are indicated. In the solution, pressure is evaluated via the Poisson equation involving velocity components. Initially, axial velocities are found to shift toward inside of bend; later they shift toward outer wall. Secondary flows initiate upstream of the bend proper and continue in the downstream conduit. They maximize and level off about one-third the way around the bend and decrease after another third. Detailed information on pressure field indicates appreciable modification in the bend proper together with significant modification in the upstream and downstream straight conduit. Wall shear stresses are found to vary greatly in the bend. Axial components are largest and vary most in the junction region between the bend and the straight conduit.

INTRODUCTION

Bend flows appear in many technological situations as well as in the mammalian circulatory system. When fluid flows through a conduit bend, the flow patterns become more complex than those in a straight conduit and are characterized by altered velocity distributions and the appearance of centrifugal forces and secondary flows. These forces create a transverse pressure gradient that increases the pressure toward the outer wall of the bend so that a maximum is found at the outer wall and a minimum is found at the inner wall. Corresponding to this pressure distribution, the velocity increases near the inner wall of the bend and decreases near the outer. Numerous investigators have conducted studies of the viscous effects in bends and in connecting conduits starting with Dubuat (1786); more recent studies are those of Dean (1927, 1928), Huang (1966), Greenspan (1973), Humphrey (1977), Humphrey et al. (1985), and Olson and Snyder (1985). It can be concluded from these studies that steady flow bend characteristics depend on three parameters: the Reynolds number Re , the ratio of the radius of curvature to the diameter of the conduit (L/D), and the Dean number which involves the other two ($Re\sqrt{L/D}$).

Deceleration of flow, if locally or generally severe enough, will result in nonuniform energy distribution and flow separation. Two separation regions are usually formed in bends, one at the outer wall of the upstream junction, the other at the inner wall of the downstream junction. Distortion of the

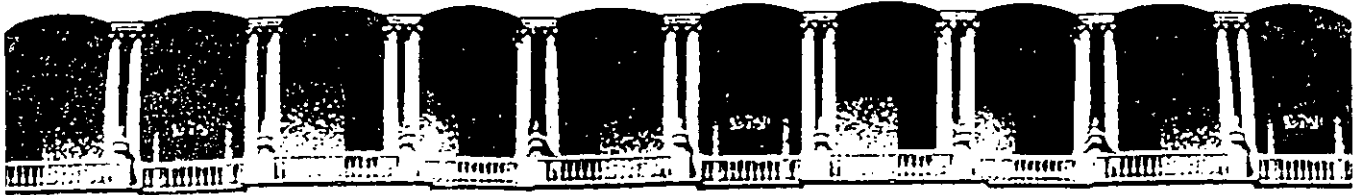
¹Tech. Specialist, HR Textron, Valencia, CA 91355.

²Prof., Dept. of Theoretical and Appl. Mech., Univ. of Illinois, 216 Talbot Lab., 104 S. Wright St., Urbana, IL 61801.

³Prof. Emeritus, Dept. of Theoretical and Appl. Mech., Univ. of Illinois, Urbana, IL 61801.

⁴Tech. Integrator, Boeing Military Airplane Co., Wichita, KS.

Note. Discussion open until April 1, 1989. To extend the closing date one month, a written request must be filed with the ASCE Manager of Journals. The manuscript for this paper was submitted for review and possible publication on December 9, 1986. This paper is part of the *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 114, No. 11, November, 1988. ©ASCE, ISSN 0733-9399/88/0011-1871/\$1.00 + \$15 per page. Paper No. 22878.



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

CURSOS ABIERTOS

CIMENTACION DE MAQUINARIA

17 al 21 de febrero de 1992

**ANALYSIS OF MACHINE FOUNDATION VIBRATIONS
STATE OF THE ART.**

PALACIO DE MINERIA

Analysis of machine foundation vibrations: state of the art

G. Gazetas
1987

GEORGE GAZETAS

Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, USA

The paper reviews the state-of-the-art of analysing the dynamic response of foundations subjected to machine-type loadings. Following a brief outline of the historical developments in the field, the concepts associated with the definition, physical interpretation and use of the dynamic impedance functions of foundations are elucidated and the available analytical/numerical methods for their evaluation are discussed. Groups of crucial dimensionless problem parameters related to the soil profile and the foundation geometry are identified and their effects on the response are studied. Results are presented in the form of simple formulae and dimensionless graphs for both the static and dynamic parts of impedances, pertaining to surface and embedded foundations having circular, strip, rectangular or arbitrary plan shape and supported by three types of idealized soil profiles: the halfspace, the stratum-over-bedrock and the layer-over-halfspace. Consideration is given to the effects of inhomogeneity, anisotropy and non-linearity of soil. The various results are synthesized in a case study referring to the response of two rigid massive foundations, and practical recommendations are made on how to inexpensively predict the response of foundations supported by actual soil deposits.

INTRODUCTION

The basic goal in the design of a machine foundation is to limit its motion to amplitudes which will neither endanger the satisfactory operation of the machine nor will they disturb the people working in the immediate vicinity. Thus, a key ingredient to a successful machine foundation design is the careful engineering analysis of the foundation response to the dynamic loads from the anticipated operation of the machine. Furthermore, when excessive motions of an existing foundation obstruct the operation of the supported machinery, analysis is necessary in order to understand the causes of the problem and hence to guide appropriate remedial action.

The theory of analysing the forced vibrations of shallow and deep foundations has advanced remarkably in the last 15 years and has currently reached a mature state of development. A number of formulations and computer programs have been developed to determine in a rational way the dynamic response in each specific case. Numerous studies have been published exploring the nature of associated phenomena and shedding light on the role of several key parameters influencing the response. Solutions are also presently available in the form of dimensionless graphs and simple mathematical expressions from which one can readily estimate the response of surface, embedded and pile foundations of various shapes and rigidities, supported by deep or shallow layered soil deposits. Clearly, the current state-of-the-art of analysing machine foundation vibrations has progressed substantially beyond the state of the art of the late 1960s which had been reviewed by Whitman and Richart in 1967¹ and by McNeil in 1969.²

In addition to the selection and application of analysis procedures to predict the response, the design of a machine foundation involves (1) the establishment of performance criteria, (2) the determination of dynamic loads, and (3)

the establishment of the soil profile and evaluation of critical soil properties. Great progress has also been made in current years in developing *in situ* and laboratory testing procedures to obtain representative values of dynamic soil parameters; a comprehensive review of the available experimental methods has been presented by Woods,³ while Ozaydin *et al.*,⁴ Woods⁵ and Richart⁶ have summarized the present knowledge on the factors influencing the dynamic soil parameters. These developments in determining material properties complement the advances in analysing foundation vibrations, and provide considerable justification for the use of sophisticated numerical formulations in the design of machine foundations.

On the other hand, little if any progress has been made in reliably estimating dynamic machine loads and improving (through calibration with field data) the available performance criteria. The state-of-the-art in these two areas has remained essentially unchanged during the last decade; reference is made to McNeil² and Richart, Woods and Hall⁷ for comprehensive reviews of these subjects.

An additional and often overlooked step in machine foundation design is the post-construction observation of the foundation performance and its comparison with the predicted foundation behavior. Such comparisons are needed to calibrate new analysis procedures — an essential task in view of the simplifying assumptions on which even sophisticated formulations are based.

In the final analysis, confidence in the advantages provided by the use of advanced methods of analysis can only be gained if these are shown to have the capability to predict the field performance of actual machine foundations. Unfortunately, only a limited number of case histories has so far been published evaluating state-of-the-art methods of analysis through detailed field observations.

The objective of this paper is to review the present state-of-the-art of determining the dynamic response of foundations subjected to machine-type loadings. The outline of the paper follows the chronology of historical developments: from the dynamics of circular footings resting on the surface of an elastic halfspace to the behavior of cir-

* Presented at the International Conference on Soil Dynamics and Earthquake Engineering, held at the University of Southampton, England, 13-15 July 1982.

cular and non-circular foundations embedded in a layered soil deposit and, finally, to the response of piles. Particular emphasis is accorded to the effects of dimensionless groups of geometric and material parameters on the dynamic stiffness functions and on the response of massive foundations. Normalized graphs and simple formulas are presented for a variety of idealized soil profiles and foundation geometries. The use of such data to estimate to translational and rotational motions of actual foundations in practice is clearly demonstrated and the various results are synthesized by means of a case study. Practical recommendations are then made on how to approximately obtain dynamic stiffness and damping coefficients for actual foundations, accounting only for the most crucial parameters of the problem.

Since the limiting motion for satisfactory performance of a machine foundation usually involves displacement amplitudes of a few thousandths or even ten-thousandths of an inch, soil deformations are quasi-elastic, involving negligible nonlinearity and no permanent deformations. Thus, most of the solutions reported herein assume linear isotropic viscoelastic soil behavior, with a hysteretic soil damping to model energy losses at those small strain amplitudes. However, some consideration is also given to the effects of soil nonlinearity on the vibration of strip footings under strong horizontal and rocking excitation. Moreover, the importance of soil anisotropy and soil inhomogeneity are also considered.

OLDER METHODS OF ANALYSIS

In the past, machine foundations were frequently designed by rules-of-thumb without any analysis of the expected vibration amplitudes. For instance, one such design rule called for a massive concrete foundation of a total weight equal to at least three to five times the weight of the supported machine(s). Although such a proposition may at first glance seem logical, it is in fact an obsolete one since it ignores the effect on the motion of all the other variables of the problem (e.g. type of excitation, nature of supporting soil, and so on). For one thing, increasing the mass of a foundation decreases the resonant frequency of the system and, perhaps more importantly, reduces its effective damping.⁷ Obviously, this is not what those applying the rule had in mind.

Following the pioneering experimental studies carried out by the German Degebo in the early 1930s, a number of empirical analysis procedures were developed and used extensively at least until the 1950s. These methods focused on determining only the 'natural frequency' of a foundation. To this end, the concepts of 'in-phase mass' and 'reduced natural frequency' were developed. The former assumes that a certain mass of soil immediately below the footing moves as a rigid body, in-phase with the foundation. The latter postulates that the 'natural frequency' is solely a function of the contact area, the soil bearing pressure and the type of soil.

Physical reality contradicts the concept of an 'in-phase mass'. No soil mass moves as a rigid body with the foundation. Instead, shear and dilational waves emanate from the footing-soil interface into the soil, causing oscillating deformations at the surface and carrying away some of the input energy. The factors that have an influence on these phenomena cannot be possibly accommodated through such an artificial concept. Indeed, the early attempts to obtain specific values of the 'in-phase mass' were frustrated

by the sensitivity of this 'mass' to the foundation weight, mode of vibration, type of exciting force, contact area, and nature of the underlying soil. Apparently, there is absolutely no value in this concept and its use in practice may very well mislead the designer.

Tschebotarioff's 'reduced natural frequency' method, based on the results of a few case histories, went a step beyond the original 'in-phase mass' methods.⁸ The 'reduced natural frequency' was defined as the 'natural frequency' multiplied by the square-root of the average vertical contact pressure and was given graphically as a function of the type of soil and of the contact area. Although this method was not without merit, it was often interpreted to mean that 'the single most important factor in machine-foundation design was the soil bearing pressure'.² Thus, in more than one occasion, the design was based on soil bearing capacity values taken from local building codes!

In addition to the aforementioned drawbacks, these old rules were only concerned with the resonant frequency, providing no information about vibration amplitudes that are primarily needed for design purposes. As a consequence, such rules are now obsolete and will not be further addressed in this paper. Reference is made to Richart *et al.*⁷ for more details on the subject.

Dynamic Winkler model

This model was introduced as an extension of the well known 'Winkler' or 'elastic subgrade reaction' hypothesis, which is still rather successfully employed in some static soil-foundation interaction problems.⁹ In order to simulate the stiffness characteristics of the actual system, the model replaces the supporting soil by a bed of independent elastic springs resting on a rigid base. Plate bearing tests, conducted in the field, form the basis for evaluating the spring constants (often called 'coefficients of subgrade reaction'). On the basis of field measurements in the USSR, Barkan¹⁰ has presented tables and empirical formulae with which one can readily estimate design values of the coefficient for several types of soil, for each possible mode of vibration (translational or rotational). He has also shown that, in each case, the dynamic coefficient is approximately equal to the ratio of applied pressure increment to the resulting displacement during static repeated loading tests. In these tests static loads 'similar' to the combined dead and live load of the actual foundation are first imposed, followed by repeated slow loading, at frequencies of the order of 0.001 cps, i.e. much slower than those expected in reality.

It is evident that this model can at least give some reasonable information on the low-frequency (near-static) response of a foundation. But since no radiation damping is included, the amplitude of motion at frequencies near resonance cannot be realistically estimated. It has been argued that by neglecting damping one obtains conservative estimates of the response and very good estimates of natural frequencies. In fact, this is the procedure currently incorporated into the 1970 'Indian Standard Code of Practice for Design of Machine Foundations'.¹¹ There is little merit in this argument, however. For instance, the high damping values present in the translational modes of vibration (of the order of 50% of critical) do affect the 'resonant' frequencies, in addition to drastically reducing amplitudes. Moreover, avoiding 'resonance' (by a safety factor of 2) in such cases is an 'unfortunate design recommendation' which may lead to an overly conservative solution. In other cases, especially when the rotational modes are of main concern, an unsafe design is quite possible since

the actual foundation stiffness at high frequencies may very well be appreciably smaller than the static stiffness used in the analysis (see, for example, Fig. 5).

An improved version of the dynamic Winkler model (called 'Winkler-Voigt' model) places a set of independent viscous dampers in parallel with the independent elastic springs to provide the 'dynamic subgrade reaction'. According to Barken and Ilyichev,¹² this model forms the basis of the 1971 USSR machine-foundation code. Again, however, the model itself provides no information on its spring and dashpot coefficients. These are instead backfigured from dynamic plate-load tests conducted in the field. Both the observed amplitude and frequency at resonance are utilized to backfigure the two coefficients. Analyzing the results of numerous field tests, Barkan and his co-workers found a discrepancy between the spring constants backfigured from resonance plate tests and from static repeated loading tests (described previously). They, thus, resorted to the 'in-phase soil mass' concept to essentially match the model constants obtained from the two types of tests. This added soil mass was found to depend on the size and embedment of the foundation and on the nature and properties of the soil deposit, for a given mode of vibration.

It therefore appears that the 'Winkler-Voigt' model is a purely empirical one, requiring field static and dynamic plate-load tests for each particular situation. Such tests are not only very expensive and difficult to successfully conduct, but, moreover, they yield results which cannot be readily interpreted and extrapolated to prototype conditions. If I may slightly rephrase Gibson:¹³

'The model conspicuously lacks what all models should possess - predictive power.'

The only possible explanation for the present-day use of dynamic Winkler models in machine-foundation analysis is the accumulation in some countries of a wealth of pertinent field data. Such data, often available in the form of tables,¹² can be directly utilized in practice, thus avoiding the burden of performing plate-load tests. Again, one should be very careful in picking up values for the coefficients from published field data. For it is practically impossible to ensure a similarity in all the crucial physical and geometric response parameters of the new prototype and of the old model foundation schemes.

FUNDAMENTALS OF CURRENT METHODS OF VIBRATION ANALYSIS

Historical perspective

Modern methods of analysis of foundation oscillations attempt to rationally account for the dynamic interaction between the foundation and the supporting soil deposit. Cornerstone of the developed methods is the theory of wave propagation in an elastic or viscoelastic solid (continuum). This theory has seen a remarkable growth since 1904, when Lamb published his study on the vibration of an elastic semi-infinite solid (half-space) caused by a concentrated load ('dynamic Boussinesq' problem). Numerous applications, primarily in the fields of seismology and applied mechanics, have given a great impetus in the development of the 'elastodynamic' theory. Reissner in 1936¹⁴ attempted what is considered to be the first engineering application; his publication on the response of a vertically loaded cylindrical disk on an elastic halfspace marked the beginning of modern soil dynamics. The solution was only an approximate one since a uniform distri-

bution of contact stresses was assumed for mathematical simplification. Nonetheless, Reissner's theory offered a major contribution by revealing the existence of radiation damping—a phenomenon previously unsuspected but today clearly understood. Every time a foundation moves against the soil, stress waves originate at the contact surface and propagate outward in the form of body and surface waves. These waves carry away some of the energy transmitted by the foundation on to the soil, a phenomenon reminiscent of the absorption of energy by a viscous damper (hence the name).

For many massive foundations the assumption of a uniform contact stress distribution is an unrealistic one, for it yields a non-uniform pattern of displacements at the soil-footing interface. To closer approximate the rigid body motion of such foundations, a number of authors in the middle 1950s assumed contact stress distributions which produce uniform or linear displacements at the interface, under statically applied force or moment loadings, respectively. Thus, Sung¹⁵ and Quinlan¹⁶ presented results for vertically oscillating circular and rectangular foundations while Arnold *et al.*¹⁷ and Bycroft¹⁸ studied both horizontal and moment loading of a circular foundation. These solutions are only approximate; in reality the pressure distributions required to maintain uniform or linear displacements are not constant but vary with the frequency of vibration.

The first 'rigorous' solutions appeared about ten years later when the vibrating soil-foundation system was analysed as a mixed boundary-value problem, with prescribed patterns of displacements under the rigid footing and vanishing stresses over the remaining portion of the surface. Introducing some simplifying assumptions regarding the secondary contact stresses ('relaxed' boundary), Ajiohi *et al.*¹⁹ studied all possible modes of oscillation of rigid circular and strip footings on a halfspace, by recourse to integral transform techniques. On the other hand, Lysmer²⁰ obtained a solution for the vertical axisymmetric vibration by discretizing the contact surface into concentric rings of uniform but frequency-dependent vertical stresses consistent with the boundary conditions. A conceptually similar approach was followed by Elorduy *et al.*²¹ for vertically loaded rectangular foundations.

Perhaps equally important with the aforementioned theoretical developments of this period was the discovery by Hsieh²² and by Lysmer²⁰ that the dynamic behavior of a vertically loaded massive foundation can be represented by a single-degree-of-freedom 'mass-spring-dashpot' oscillator with frequency-dependent stiffness and damping coefficients. Lysmer²⁰ went a step farther by suggesting the use of the following frequency-independent coefficients to approximate the response in the low and medium frequency range:

$$K_v = \frac{4GR}{1-\nu}; \quad C_v = \frac{3.4R^2}{1-\nu} \sqrt{G\rho} \quad (1)$$

in which: K_v = spring constant (stiffness), C_v = dashpot constant (damping), R = radius of the circular rigid loading area, G and ν = shear modulus and Poisson's ratio of the homogeneous halfspace (soil), and ρ = mass density of soil. Note that the expression for K_v in equation (1) is identical with the expression for the static stiffness of a vertically loaded rigid circular disk on a halfspace.

The success of Lysmer's approximation (often called 'Lysmer's Analog') in reproducing with very good accuracy the actual response of the system had a profound effect on the further development and engineering applications of the

'halfspace' theories. Richart and Whitman²³ extended Lymer's Analog by demonstrating that all modes of vibration can be studied by means of lumped-parameter mass-spring-dashpot systems having properly selected frequency-independent parameters. The axisymmetric (vertical and torsional) oscillations of a cylindrical foundation can be represented by a 1-degree-of-freedom (1-dof) system described by:

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = P(t) \quad (2)$$

in which x , \dot{x} and \ddot{x} = the displacement, velocity and acceleration, respectively, of the vertically oscillating mass; $P(t)$ = the external dynamic force arising from the operation of the machine(s). The lumped parameters are the equivalent mass, m , the effective damping, C , and the effective stiffness K . (For torsional oscillations m should be replaced by I_z , the effective mass polar moment of inertia and x should be interpreted as the angle of rotation around the vertical axis of symmetry.) On the other hand, the two antisymmetric modes of oscillation (horizontal translation and rocking) of a cylindrical foundation are coupled and can be represented by a 2-dof system characterized by the effective mass and mass moment of inertia, the two effective values of damping (for swaying and rocking), and the two effective values of the stiffness (for swaying and rocking).

Different values of the inertia, stiffness and damping parameters are needed for each one of these four modes of excitation. Whitman and Richart²³ suggested the choice of stiffnesses appropriate for low frequencies, and of average damping values over the range of frequencies at which resonance usually occurs. In order to obtain a good agreement between the resonant frequencies of the lumped-parameter and the actual system, they recommended that a fictitious mass (or mass moment of inertia) be added to the actual foundation mass (or mass moment of inertia). The need for such a recommendation stemmed not from the existence of any identifiable soil mass moving in-phase with the foundation, but rather from the fact that in reality the stiffnesses decrease with increasing frequency (see Figs. 5 and 7), instead of remaining constant and equal to the static stiffnesses, as the model assumes. In other words, instead of decreasing K , the lumped-parameter model increases m to keep the resonant frequency, ω_r , unchanged. Recall that ω_r is proportional to the square-root of (K/m) .

Whitman and Richart²³ and later Richart, Woods and Hall⁷ and Whitman²⁴ presented expressions for these parameters for all four vibration modes. Table 1 displays these expressions, which have enjoyed a significant popularity over the last decade.

Primarily because of its simplicity, the lumped-parameter approximation had a great impact on the application of the 'half-space' theory. It demonstrated that this rational theory can be cast into a tractable, simple engineering form, which can be used by the profession with hardly any greater difficulty than the older empirical procedures.

Motivated to a large extent by the need to understand the phenomena associated with seismic soil-structure interaction, the analysis of the dynamic response of foundations has been a subject of considerable interest throughout the 1970s. A significant amount of related research has led to the development of new formulations and computer programs, while numerous publications have studied the importance of critical foundation, soil and loading parameters and have presented graphs, tables and simple ex-

Table 1. Equivalent lumped parameters for analysis of circular foundations on elastic halfspace^a

Mode	Vertical	Horizontal	Rocking	Torsion
Stiffness:	$\frac{4GR}{1-\nu}$	$\frac{8GR}{2-\nu}$	$\frac{8GR^3}{3(1-\nu)}$	$\frac{16GR^3}{3}$
Mass ratio \bar{m} :	$\frac{m(1-\nu)}{4\rho R^3}$	$\frac{m(2-\nu)}{8\rho R^3}$	$\frac{3I_x(1-\nu)}{8\rho R^3}$	$\frac{I_z}{\rho R^3}$
Damping ratio:	$\frac{0.425}{\bar{m}^{1/2}}$	$\frac{0.29}{\bar{m}^{1/2}}$	$\frac{0.15}{(1+\bar{m})\bar{m}^{1/2}}$	$\frac{0.50}{1+2\bar{m}}$
Fictitious added mass:	$\frac{0.27m}{\bar{m}}$	$\frac{0.095m}{\bar{m}}$	$\frac{0.24I_x}{\bar{m}}$	$\frac{0.24I_z}{\bar{m}}$

I_x, I_z = mass moments of inertia around a horizontal, vertical axis, respectively; damping ratio = C/C_{cr} where $C_{cr} = 2(Km)^{1/2}$ or $C_{cr} = 2(KI)^{1/2}$ for translational or rotational modes of vibration, with $I = I_x$ or I_z for rocking or torsion, respectively.

pressions, suitable for direct use in practical applications. It is worth mentioning some of the most important contributions to the current state of the art.

Newly developed (mid-1960s) mathematical techniques to solve mixed boundary-value elastodynamic problems were utilized by Luco *et al.*²⁵ and Karasudhi *et al.*²⁶ to obtain 'exact' numerical solutions for all modes of vibration of strip footings on a halfspace, and by Luco *et al.*²⁷ and Veletsos *et al.*^{28,29} to extend the available halfspace solutions for circular foundations to the high frequency range and, also, to a viscoelastic material with linear hysteretic damping. The development of dynamic finite-element formulations with energy absorbing ('viscous' and 'consistent') lateral boundaries prompted the study of the response of surface and embedded foundations supported by a layered soil stratum.³⁰⁻³⁴ Only plane-strain and axisymmetric geometries could be handled with these finite element formulations, however, and the presence at a relatively shallow depth of a non-compliant rock-like material underlying the stratum was an unavoidable requirement regardless of whether such rock did actually exist.

On the other hand, Luco³⁵ and Gazetas³⁶ presented analytical solutions for circular, strip and rectangular foundations on the surface of a layered halfspace or a layered stratum (i.e. with or without a rigid rock as the last layer, respectively). Utilizing these formulations they offered results³⁷⁻³⁹ which bridged the gap between the two previously studied extreme profiles - the halfspace and the stratum-on-rigid-base. At about the same time, Novak⁴⁰ obtained approximate analytical solutions for circular foundations embedded in a halfspace, by deriving closed-form expressions for the dynamic stiffness and damping coefficients along the vertical sides of the foundation. Later on this method was easily adapted to study the dynamic response of piles.⁴¹⁻⁴³

In more recent years research efforts have been primarily directed to determining solutions: (a) for rigid foundations of rectangular and arbitrary shapes;⁴⁴⁻⁴⁸ (b) for foundations of finite flexural rigidity;⁴⁹⁻⁵¹ (c) for foundations on inhomogeneous and on anisotropic soils;⁵²⁻⁵⁵ and (d) for foundations on nonlinear (Ramberg-Osgood) soils.⁵⁶ Furthermore, a very substantial amount of research work has been devoted to the dynamic behavior of single (floating and end-bearing) piles embedded in homogeneous,

inhomogeneous or layered soil deposits, and the first attempts have already been made to obtain solutions for dynamic loaded pile groups. For comprehensive lists of related references, see Dobry *et al.*,⁵⁷ Kagawa *et al.*,⁵⁸ and Novak.⁵⁹

Impedance and compliance functions: definition and physical interpretation

An important step in current methods of dynamic analysis of rigid massive machine foundations is the determination (using analytical or numerical methods) of the dynamic impedance functions, $K(\omega)$,^{*} of an 'associated' rigid but massless foundation, as a function of the excitation frequency, ω . As shown in Fig. 1 the 'associated' foundation-soil system is identical (in both material properties and geometry) with the actual system except that the foundation mass is taken equal to zero. It will be explained in the following section how, once the harmonic response of such a massless foundation has been determined, the steady-state response of the massive foundation, or of any structure supported on it, may be evaluated using standard procedures. In addition, the transient response to non-harmonic machine forces can also be evaluated by recourse to Fourier analysis and synthesis techniques.

For each particular harmonic excitation with frequency ω , the dynamic impedance is defined as the ratio between the steady-state force (or moment) and the resulting displacement (or rotation) at the base of the massless foundation. For example, the vertical impedance of a foundation whose plan has a center of symmetry is defined by:^{*}

$$K_v = \frac{R_v(t)}{v(t)} \quad (3)$$

in which $R_v(t) = R_0 \exp(i\omega t)$ is the harmonic vertical force applied at the base of the disk, and $v(t) = v \exp(i\omega t)$ is the uniform harmonic settlement of the soil-foundation interface. It is evident that R_0 is the total soil reaction against the foundation; it is made up of the normal stresses against the basemat plus, in case of embedded foundations, the shear stresses along the vertical side walls, as illustrated in Fig. 1.

Similarly one may define the torsional impedance, K_θ , from the torsional moment and rotation; the horizontal impedances, K_h , from the horizontal forces and displacements along the principal axes of the base; and the rocking impedances, K_r , from the moments and rotations around the same horizontal principal axes. However, since horizontal forces along the principal axes produce rotations in addition to horizontal displacements, cross-horizontal-rotational impedances $K_{r,h}$ may also be defined; they are

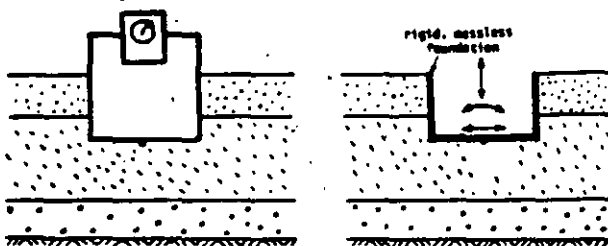


Figure 1. Machine foundation and the associated rigid massless foundation

* Bold letters are used in the text for impedances, compliances and some stiffness and damping coefficients (equation (17)); in the figures, calligraphic characters are used for these quantities.

usually negligibly small in case of surface and very shallow foundations, but their effect may become appreciable for greater depths of embedment.

Referring to equation (3), it is interesting to note that dynamic force and displacement are generally out of phase. In fact, any dynamic displacement can be resolved into two components: one in phase and one 90° out of phase with the imposed harmonic load. It is convenient then to introduce complex notation to represent forces and displacements. As a consequence, impedances may also be written in the form:^{*}

$$K_e(\omega) = K_{e1}(\omega) + iK_{e2}(\omega) \quad (4)$$

$$e = v, h, r, hr, t; \quad i = \sqrt{-1}$$

The real and imaginary components are both functions of the vibrational frequency ω . The real component reflects the stiffness and inertia of the supporting soil; its dependence on frequency is attributed solely to the influence which frequency has on inertia, since soil properties are essentially frequency independent. The imaginary component reflects the radiation and material damping of the system. The former, being the result of energy dissipation by waves propagating away from the foundation, is frequency dependent; the latter, arising chiefly from the hysteretic cyclic behavior of soil, is practically frequency independent.

A very instructive analogy between the dynamic response of a simple 1-dof oscillator and of a three-dimensional massless foundation-soil system has been drawn by Roesset.⁶⁰ Assuming a harmonic excitation $P(t) = P_0 \exp(i\omega t)$, the steady-state response $x(t) = x_0 \exp(i\omega t)$ of the 1-dof oscillator may be obtained by substitution into equation (2):

$$(K - m\omega^2) + iC\omega = \frac{P(t)}{x(t)} \quad (5)$$

Contrasting equations (5) and (3) prompts the definition of a dynamic impedance function for the 1-dof mass-spring-dashpot system:

$$K = (K - m\omega^2) + iC\omega \quad (6)$$

and, by comparison with equation (4):

$$K_1 = K - m\omega^2 \quad (7)$$

$$K_2 = C\omega \quad (8)$$

In other words, the dynamic impedance of our familiar 1-dof oscillator is indeed a complex number with a frequency dependent real part representing the stiffness and inertia characteristics of the system, and a frequency dependent imaginary part expressing the energy loss in the system. Therefore, it is quite natural to express the dynamic impedance of soil-footing systems in a complex form, as done in equation (4).

Having, thus, established the analogy between 1-dof and massless footing-soil systems, let equation (6) for the 1-dof be rewritten as:

$$K = K \cdot \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + i2\beta \frac{\omega}{\omega_n} \right) \quad (9a)$$

or

$$K = K \cdot (k + i\omega c_v) \quad (9b)$$

in which the critical viscous damping ratio is:

$$\beta = \frac{C}{C_{cr}} = \frac{C}{2K/\omega_n} \quad (10)$$

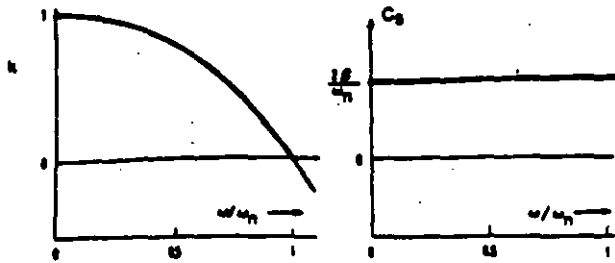


Figure 2. Dynamic stiffness and damping coefficients of a 1-dof simple oscillator

the natural frequency $\omega_n = (K/m)^{1/2}$, $k = (1 - \omega^2/\omega_n^2)$ and $c_s = C/K$. Equation (9b) implies that the dynamic impedance of a 1-dof simple oscillator may be expressed as a product of the spring constant K , which happens to be the static stiffness of the system, times a complex number $k + i\omega c_s$, which encompasses the dynamic characteristics of the system (inertia and viscous damping) and is hereafter called 'dynamic part' of the impedance. At zero frequency the dynamic part becomes a real number, equal to 1, and the impedance coincides with the static stiffness K of the simple system. k and c_s are named respectively stiffness and damping coefficients and their variation with frequency for the 1-dof's is plotted in Fig. 2. Notice that k decreases as a second degree parabola with increasing ω , whereas c_s remains constant.

It should not surprise the reader that the actual variation with ω of the stiffness and damping coefficients, k_s and c_{ps} , of a vertically vibrating circular disk on an elastic halfspace is indeed very similar to the variation of the k and c_s of the 1-dof system! (To see this similarity just compare Fig. 2 to Fig. 5(a).) However, in general, k and c_s of a foundation-soil system may vary in a rather complicated manner with ω , depending primarily on the mode of vibration, the geometry, rigidity and embedment of the foundation, and, finally, the profile and properties of the supporting soil deposit. Figures 5, 8, 9, 10 and 20 may be previewed to confirm this statement. Nonetheless, in all cases, the dynamic impedance functions can be expressed as products of a static and a dynamic part, as described by equation (9b). Alternatively, a dimensionless frequency factor is often introduced:

$$a_0 = \frac{\omega B}{V_s} \quad (11)$$

in which: B = a critical foundation dimension like, e.g., the radius of a circular foundation or half the width of a strip or a rectangular foundation; and V_s = a characteristic shear wave velocity of the soil. Combining equations (9b) and (11) allows the impedance to be cast in the form:

$$K = K(k + ia_0c) \quad (12)$$

with

$$c = c_s \frac{V_s}{B} \quad (13)$$

Since both a_0 and c are dimensionless quantities, equation (12) is strongly preferred to equation (9b) in presenting the results of dynamic analyses.

Let it now be assumed that a 'hysteretic damper' is added in-parallel with the spring and the 'viscous damper'

to support the mass of the simple oscillator. This damper is described through a hysteretic damping ratio, ξ . During each cycle of motion it dissipates an amount of energy proportional to the maximum strain energy, W , of the system:

$$\Delta W_h = 4\pi\xi W \quad (14)$$

in which $W = (\frac{1}{2}) Kx_0^2$. On the other hand, during a cycle of motion the viscous damper has consumed an amount of energy equal to:

$$\begin{aligned} \Delta W_v &= \pi C\omega x_0^2 \\ &= 4\pi\beta \frac{\omega}{\omega_n} W \end{aligned} \quad (15)$$

so that the total dissipated energy, $\Delta W = \Delta W_h + \Delta W_v$, as a function of W is:

$$\frac{\Delta W}{W} = 4\pi \left(\beta \frac{\omega}{\omega_n} + \xi \right) \quad (16)$$

This expression suggests that the simple addition rule, $\xi + \beta\omega/\omega_n$, may be used to obtain the 'effective' damping ratio of a system possessing both viscous, β , and hysteretic, ξ , damping. A vibrating foundation-on-soil is one such system, with its radiation damping being of a viscous nature while the material damping is of the hysteretic type.

The presence of material damping in the soil affects both the stiffness and damping coefficients, k and c . In an attempt to isolate the effects of hysteretic material damping, an alternative expression to equation (12) is often used for the dynamic impedance:

$$K = K(k + ia_0c) \cdot (1 + 2i\xi) \quad (17)$$

Recalling the so-called 'correspondence principle',⁶¹ one may anticipate that the new coefficients, k and c , are independent of material damping. If this were true, it would then be sufficient to obtain solutions for a purely elastic soil and then extrapolate the results to soils with any hysteretic damping ratio by multiplying the undamped impedances by $1 + 2i\xi$. Indeed, for very deep soil deposits which can be modeled as a halfspace the above 'principle' is reasonably accurate and has been repeatedly utilized to obtain solutions for damped soils.^{28, 62, 63} However, in the case of a shallow stratum on rigid rock both k and c are fairly sensitive to the assumed material damping ratio (see Fig. 9, for example); this discredits to a large extent the 'correspondence principle', as Kausel³³ had first noticed.

None the less, it is convenient to express the impedance functions in the form of equation (17), and this practice is frequently followed in the sequel. Alternatively, however, equation (12) is also used in some cases.

Dynamic compliance functions

Also given the names dynamic 'displacement' functions and dynamic 'flexibility' functions, they are essentially the ratios between dynamic displacements (or rotations) and the dynamic reactive forces (or moments) at the base of a foundation. They were first introduced by Reissner.¹⁴ Following the previous discussion, it is convenient to express each compliance using complex notation:

$$\begin{aligned} F_a &= F_{a1}(\omega) + iF_{a2}(\omega) \quad (18) \\ a &= v, h, r, hr, t \end{aligned}$$

The real and imaginary parts represent the displacement components which are in-phase and 90°-out-of-phase with

the reactive force, respectively, and they both are functions of frequency, as discussed in detail previously. For a foundation which in plan has a center of symmetry, the vertical and torsional compliances are simply the inverse of the vertical and torsional impedances:

$$F_b = \frac{1}{K_b}; \quad b = v, t \quad (19a)$$

However, due to the coupling between rocking and swaying motions, the corresponding compliances should be obtained by inverting the matrix of impedances:

$$\begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rv} \\ K_{rv} & K_{vv} \end{bmatrix}^{-1}$$

The following alternative form to equation (18) is also frequently used in presenting compliance functions:

$$F_a = \frac{1}{K_a} [f_{a1}(\omega) + i f_{a2}(\omega)] \quad (20)$$

where K_a is the corresponding static stiffness.

Computational procedures for determining impedance functions

Several alternative computational procedures are presently available to obtain dynamic impedance functions for each specific machine-foundation problem. The choice among these methods depends to a large extent on the required accuracy, which in turn is primarily dictated by the size and importance of the particular project. Furthermore, the method to be selected must reflect the key characteristics of the foundation and the supporting soil. Specifically, one may broadly classify soil-foundation systems according to the following material and geometry characteristics:

1. The shape of the foundation (circular, strip, rectangular, arbitrary).
2. The type of soil profile (deep uniform deposit, deep layered deposit, shallow layered stratum on rock).
3. The amount of embedment (surface foundation, embedded foundation, deep foundation).
4. The flexural rigidity of the foundation (rigid foundation, flexible foundation).

Two computationally different approaches have been followed over the years to obtain the dynamic impedances of foundations with various characteristics: a 'continuum' approach, which led to the development of analytical and semi-analytical formulations, and a 'discrete' approach, which resulted in the development of finite-difference and, primarily, finite-element models. In the past (mid-1970s), considerable controversy was held about the relative merits and deficiencies of each approach and some extreme and unjustified positions were advocated. Today, it is quite clear that both procedures, if correctly understood and implemented, are very useful tools in analysing the behavior of dynamically loaded foundations. Moreover, they yield very similar results if they are appropriately used to solve the same problem. Hadjian *et al.*⁶⁴ and Jakub *et al.*⁶⁵ have presented excellent discussions and comparative studies on this subject. The following paragraphs intend to rather briefly introduce the most important analytical, semi-analytical and numerical procedures which are currently available to the machine-foundation analyst. The list is by no means exhaustive, and the emphasis is on discussing the strong and weak points of each method.

'Continuum' methods. Starting point of all the developed formulations is the analytical solution of the pertinent wave equations governing the imposed deformations in each uniform soil layer or halfspace. However, the boundary conditions at the soil-footing interface are handled differently by the various methods. In that respect, one may very broadly classify the available continuum formulations into analytical and semi-analytical solutions.

The known analytical solutions simplify the mechanical behavior of the soil-footing contact surface by assuming a 'relaxed' boundary. That is, no frictional shear tractions can develop during vertical and rocking vibrations, while for horizontal vibrations the normal tractions at the interface are assumed to be zero. This assumption has been necessary to avoid the more complex mixed boundary conditions resulting from the consideration either of a perfect attachment between foundation and soil ('rough' foundation) or of a contact obeying Coulomb's friction law (an even more realistic idealization).

By recourse to integral transform techniques (involving Hankel or Fourier transforms for axisymmetric or plane-strain geometries, respectively) the relaxed boundary conditions yield sets of dual integral equations for each mode of vibration. Each set is then reduced to a Fredholm integral equation which is finally solved numerically.

Such analytical solutions have so far been published for surface circular and strip foundations of infinite flexural rigidity supported by an elastic or viscoelastic halfspace;²⁶⁻²⁹ for circular foundations on a layered elastic or viscoelastic soil deposit;^{34, 66} for circular foundations of finite flexural rigidity supported on a halfspace;⁶⁹ for circular foundations on a cross-anisotropic halfspace⁴⁷ and even for vertically loaded rigid rectangular foundations on a halfspace.⁴⁵

The semi-analytical type solutions are based on the determination of the displacements at any point within the footing-soil interface, caused by a unit normal or shear time-harmonic force applied at another point of the same interface. Then, by properly discretizing the contact surface, the matrix of dynamic influence or Green's functions is assembled and the problem is solved after imposing the rigid-body motion boundary conditions. Several different techniques (in essence different integration procedures) have been formulated to carry out these steps of the analysis. For example, Elorduy *et al.*²¹ and Whittaker *et al.*³⁰ utilized Lamb's solution for a point loaded halfspace; Luco *et al.*²⁷ obtained pairs of Cauchy type integral equations which they numerically solved after reducing to coupled Fredholm equations; Gazetas³⁶ and Gazetas *et al.*³⁸ utilized a fast Fourier transform algorithm; Wong⁶⁶ and Wong *et al.*⁴⁴ used the solution for a uniformly loaded rectangle; and so on.

For the purpose of this discussion, one may list as a semi-analytical solution the formulation of Domínguez and Roesset,⁴⁷ who applied the so-called 'boundary integral equation' or, more simply, 'boundary element' method to obtain dynamic impedance functions of rectangular foundations at the surface of, or embedded in a halfspace. To this end, they utilized the closed-form solution to the 'dynamic Kelvin' problem of a concentrated load in an infinite medium,⁶⁹ and discretized either only the contact surface, in the case of surface footings with 'relaxed' boundaries, or both the contact and the surrounding soil surfaces; in the cases of embedded footings and of surface footings 'adhesively' attached to the soil.

So far rigorous semi-analytical solutions have been published for rigid strip foundations on the surface of a layered

halfspace or stratum-on-rock;^{34, 38, 39, 70} for rigid rectangular foundations on a halfspace;^{21, 26, 44, 46-48, 54, 63, 68, 71} for rectangular foundations of finite flexural rigidity;^{50, 51} for rigid rectangular foundations embedded in a halfspace;⁴⁷ and, finally, for rigid foundations of arbitrary shape.⁴⁴

Note that *approximate semi-analytical* procedures have already been developed to obtain the impedances of cylindrical embedded foundations and circular piles.^{40-43, 57, 72} These procedures assume that only horizontally propagating waves generate at the vertical foundation-soil interface, and they neglect the coupling between forces and displacements at various points. Instead, they only compute the displacement at the point of application of the load. Thus, in effect, the soil is modeled as a Winkler medium, the spring and dashpot characteristics of which are estimated from realistic, albeit simplified, wave propagation analyses.

Finally, several similar *approximate analytical* formulations have been developed, again for deeply embedded cylindrical foundations and end-bearing piles in soil strata.⁷³⁻⁷⁸ These procedures attempt to analytically solve the governing wave equations for the stratum, by neglecting the secondary component of displacement (i.e. the vertical component for lateral vibrations or the radial one for vertical vibrations). The boundary conditions at the soil-pile interface are analytically enforced by expanding the contact pressure distribution to an infinite series in terms of the natural modes of vibration of the soil layer.

'Discrete' models. Dynamic finite difference and finite element models have been developed for problems of complicated geometry which are not easily amenable to analysis with continuum type, analytical or semi-analytical formulations. Today, finite difference formulations such as those proposed by Ang *et al.*,⁷⁹ Agabain *et al.*,⁸⁰ Krizek *et al.*,⁸¹ and Tseng *et al.*,⁸² find very little if any application in solving foundation vibration problems, and, therefore, will not be further addressed in this paper. On the other hand, several finite element formulations and computer programs are presently widely available and frequently used in analysing foundation oscillations.

The use of finite elements in dynamic foundation problems is different from other applications of finite elements in statics and dynamics in that soil strata of infinite extent in the horizontal and even in the vertical direction must be represented by a model of a finite size. Such a finite model creates a fictitious 'box' effect, trapping the energy of the system and distorting its dynamic characteristics. To avoid this problem, wave absorbing lateral boundaries are introduced to account for the radiation of energy into the outer region not included in the model. Two main types of such boundaries are available. The approximate 'viscous' boundary proposed by Lysmer *et al.*⁸³ and extended by Valliappan *et al.*⁸⁴ must be placed at some distance from the foundation. The alternative 'consistent' boundary developed by Waas³¹ and extended by Kausej³³ is very effective in accurately reproducing the physical behavior of the system, and it also results in considerable economy by being placed directly at the edge of the foundation. This 'consistent' boundary provides a dynamic stiffness matrix for the medium surrounding the plane or cylindrical vertical cavity which is assumed to occupy the central region under the strip or circular foundation. This matrix corresponds exactly to the boundary stiffness matrix that would be obtained from a continuum type formulation.

Unfortunately, 'consistent' boundaries have been developed only for plane-strain and axisymmetric (cylindrical) geometries. No such boundary is available for truly three-

dimensional (3D) geometries, in cartesian coordinates. Thus, to solve 3D problems a finite-element model must resort to 'viscous' or elementary boundaries placed far away from the loaded area. In this way the fictitiously reflected waves are dissipated through hysteresis and friction (material damping) in the soil before they return to the foundation region. However, the cost of such analyses is prohibitive and truly 3D solutions are very rarely used in practice. An attempt has been made to modify a 2D computer program by adding viscous dashpots to the lateral faces of its plane-strain elements, in order to simulate the radiation damping of 3D situations.⁸⁵ Notwithstanding the popularity enjoyed by this pseudo-3D model, its only difference from the 2D model is that it introduces an artificial increase in damping, which cannot possibly reproduce all aspects of the true 3D behavior. In fact, in some cases the actual 3D radiation damping in rocking is over-estimated rather than under-estimated by a 2D model.⁸⁶ Thus by adding viscous dashpots the situation may worsen instead of improving.^{86, 88}

Consequently, today, two types of finite-element models are practically available: plane-strain 2D models appropriate for strip footings or elongated rectangular structures;^{34, 84, 87} and 3D axisymmetric-geometry models appropriate for cylindrical foundations and nearly square structures.^{31, 33, 88}

It is noted that embedded foundations and layered soil strata can be routinely handled with all the finite-element formulations. On the other hand, the presence of a fixed bottom boundary is required by most of the available codes. This is hardly a drawback if a stiff, rock-like stratum does exist at a relatively shallow depth. Otherwise, when the supporting soil deposit is very deep, the cost of a realistic finite-element analysis may become substantial.

Conclusion. With the available analytical, semi-analytical and finite-element computer programs the foundation vibration analyst may obtain solutions for foundations of various shapes, surface or embedded, supported by deep or shallow soil deposits. In selecting the most appropriate code for each specific situation, attention should first focus on the depth of embedment and the nature of the underlying soil. When dealing with very shallow footings on deep deposits which can be well reproduced by a small number of layers with different properties, continuum type analytical or semi-analytical formulations are clearly more advantageous; the choice of the most appropriate among them will be mainly dictated by the shape of the footing (strip, circular, rectangular, arbitrary) and the desired degree of accuracy. On the other hand, for embedded foundations in a shallow stratum or whenever a large number of layers with sharply different properties exists below the footing, finite element models are particularly appropriate.

Furthermore, attention should be accorded to the operational frequencies of the machine and the inertia characteristics of the foundation. At very high frequencies of vibration, f , discrete models may become very costly; because, in order to transmit high frequencies, a large number of sufficiently small-sized elements must be used. For instance, it is usually recommended that the maximum dimension of an element should not exceed $\lambda/8$, where $\lambda = V/f$ is the wavelength in a particular soil layer having shear wave velocity V . Therefore, with high frequencies, analytical models may become advantageous. Notice, though, that the computer costs of semi-analytical formulations may also be adversely affected by a large increase in the operational frequency, since they, too, discretize the contact area or the whole uppermost surface.

Regarding the inertia characteristics of the foundation.

the author and Roesset³⁹ have demonstrated that for heavy foundations (i.e. with high mass ratios) small errors in modeling the different soil layers are unimportant and one can safely base the design on available halfspace solutions or on the results of analytical type computer programs. On the other hand, relatively light foundations are quite sensitive to the existence of competent rock at a shallow depth and of different soil layers beneath the footing, thus requiring a good soil exploration followed by finite-element analyses. These conclusions are further illustrated and generalized in a later section of this paper.

In addition to the existing computer programs numerous solutions have been published in the literature in the form of dimensionless graphs, tables and simple formulae for impedance and compliance functions of foundations with several different geometries, depths of embedment and stiffness characteristics, supported by various idealized soil profiles (halfspace, stratum, etc.). These solutions can give very satisfactory results in many practical cases and are especially valuable in conducting preliminary analyses and parameter sensitivity studies. One of the goals of this state-of-the-art paper is to present and discuss the most significant of these available solutions. Before doing this, however, it is expedient to illustrate how the impedance functions may be utilized to obtain the dynamic response of rigid massive foundations.

Use of impedance functions: response of massive machine foundations

The first step in analysing the response of a massive machine foundation is to evaluate the pertinent dynamic impedances at the anticipated frequency, or range of frequencies, of the machine. This is done either by utilizing existing discrete or continuum type formulations, or by resorting to published solutions available in the soil dynamics literature. The use of dynamic impedance to obtain the response is illustrated herein.

Figure 3 portrays a massive, rigid foundation having equal depth of embedment along all the sides and possessing two orthogonal vertical planes of symmetry, the intersection of which defines a vertical axis of symmetry. The foundation plan, having two axes of symmetry, may be of any axis-symmetric or orthogonal shape, including the infinitely long strip (2D geometry). For such foundations, vertical and torsional oscillations are uncoupled, while horizontal forces and moments along and around the principal axes produce displacements and rotations only along and around the same axes. Thus, with the notation of Fig. 3, the equations of motion in vertical translation $v(t)$, torsional rotation $\theta(t)$, and coupled horizontal translation $h(t)$ and rocking $r(t)$, all referred to the center of gravity of the machine-foundation system, are respectively:

$$m \cdot \ddot{v}(t) + R_v(t) = Q_v(t) \quad (21)$$

$$I_z \cdot \ddot{\theta}(t) + T_z(t) = M_z(t) \quad (22)$$

$$m \cdot \ddot{h}(t) + R_h(t) = Q_h(t) \quad (23)$$

$$I_{0x} \cdot \ddot{r}(t) + T_r(t) - R_h(t) \cdot z_c = M_r(t) \quad (24)$$

in which: m = total foundation mass; I_{0x} = mass moment of inertia about a principal horizontal axis passing through the center of gravity; I_z = mass moment of inertia around the vertical axis of symmetry; R_v , T_z , R_h and T_r = vertical, torsional, horizontal and rocking reactions of the soil acting at the center of the foundation base (remember Fig. 1b); Q_v , M_z , Q_h and M_r = vertical, torsional, horizontal and

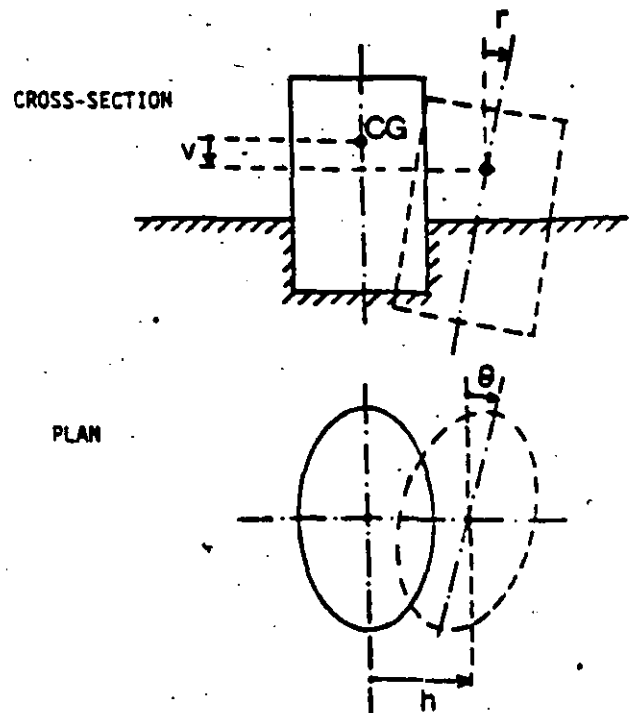


Figure 3. Definition of deformation variables

rocking exciting forces and moments, acting at the center of gravity and resulting from the operation of the machine.

As already mentioned, only the steady-state response due to a harmonic excitation is of interest here. Not only because most machines usually produce unbalanced forces which indeed vary harmonically with time (rotary or reciprocating engines), but also because non-harmonic forces (such as those, for example produced by punch presses and forging hammers) can be decomposed into a large number of sinusoids through Fourier analysis. Therefore, the excitations may be written as:

$$Q_a = Q_a \exp [i(\omega t + \phi_a)] \quad a = v, h \quad (25)$$

$$M_a = M_a \exp [i(\omega t + \phi_a)] \quad a = z, r \quad (26)$$

in which the amplitudes Q_a and M_a are either constants or (more frequently) proportional to the square of the operational frequency $\omega = 2\pi f$; ϕ_a are the phase angles of the four excitations, v, h, r and z .

With the excitation forces described by equations (25)-(26), the steady-state motions may be cast in the form:

$$v(t) = v \cdot \exp (i\omega t); \quad v = v_1 + iv_2 \quad (27)$$

$$\theta(t) = \theta \cdot \exp (i\omega t); \quad \theta = \theta_1 + i\theta_2 \quad (28)$$

$$h(t) = h \cdot \exp (i\omega t); \quad h = h_1 + ih_2 \quad (29)$$

$$r(t) = r \cdot \exp (i\omega t); \quad r = r_1 + ir_2 \quad (30)$$

in which: v, θ, h and r are complex, frequency-dependent displacement and rotation amplitudes at the center of gravity. Note that equations (27)-(30) do not by any means imply that the four components of motion are all in phase, nor that the phase-angles between the corresponding excitations and motions are equal to ϕ_a (equations (25)-(30)). Instead, the true phase angles ψ_a are 'hidden' in the complex form of each displacement component. For instance, the vertical motion will exhibit:

$$\psi_v = \arctan (v_2/v_1) \quad (31)$$

in which v_1 and v_2 are the real and imaginary parts of v (equation (27)), while its amplitude is of a magnitude:

$$|v| = (v_1^2 + v_2^2)^{1/2} \quad (32)$$

Also, since Q_a and M_a in equations (25)–(26) are real quantities, the phase lags between excitations and motions will be simply equal to $\phi_a - \psi_a$.

Using similar arguments with regard to the soil reactions, one may, without loss of generality, set:

$$R_a = R_a \cdot \exp(i\omega t) \quad a = v, h \quad (33)$$

$$T_a = T_a \cdot \exp(i\omega t) \quad a = z, r \quad (34)$$

whereby the complex amplitudes R_a and T_a are related to the complex displacement and rotation amplitudes through the corresponding dynamic impedances K_a , $a = v, h, r, hr$, r (see equations (3)–(4)). Recalling that the latter are referred to the center of the foundation base, one can promptly write:

$$R_v = K_v \cdot v \quad (35)$$

$$T_z = K_z \cdot \theta \quad (36)$$

$$R_h = K_h \cdot (h - z_c r) + K_{hr} \cdot r \quad (37)$$

$$T_r = K_r \cdot r + K_{hr} \cdot (h - z_c r) \quad (38)$$

Substituting equations (25)–(30) and (33)–(38) into the governing equations of motion (21)–(24) and solving the resulting system of four algebraic equations yields the following complex-valued displacement and rotation amplitudes at the center of gravity:

$$v = \frac{Q_v \cdot \exp(i\phi_v)}{K_v(\omega) - m\omega^2} \quad (39)$$

$$\theta = \frac{M_z \cdot \exp(i\phi_z)}{K_z(\omega) - I_z \omega^2} \quad (40)$$

$$h = (K_h^* \cdot Q_h \exp(i\phi_h) - K_{hr} \cdot M_r \exp(i\phi_r)) \cdot N \quad (41)$$

$$r = (K_r^* \cdot M_r \exp(i\phi_r) - K_{hr} \cdot Q_h \exp(i\phi_h)) \cdot N \quad (42)$$

in which the following substitutions have been performed:

$$K_h^* = K_h(\omega) - m\omega^2 \quad (43)$$

$$K_{hr}^* = K_{hr}(\omega) - K_h(\omega) z_c \quad (44)$$

$$K_r^* = K_r(\omega) - I_{zz} \omega^2 + K_h(\omega) z_c^2 - 2K_{hr}(\omega) z_c \quad (45)$$

and, finally,

$$N = (K_h^* K_r^* - K_{hr}^{*2})^{-1} \quad (46)$$

Notice that, for a particular frequency ω , determination of the motions from equations (39)–(42) is a straightforward operation once the dynamic impedances are known. Of course, the computations are somewhat tedious if performed by hand, since complex numbers are involved; but even with small microcomputers the calculations can be done routinely, at a minimal cost.

Therefore, the author proposes that this procedure (equations (39)–(42), in connection with an appropriate evaluation of impedances at the frequency(ies) of interest, should be used in machine foundation analysis in place of the currently popular 'equivalent lumped frequency-independent-parameter' approach.

PRESENTATION OF RESULTS FOR SURFACE AND EMBEDDED FOUNDATIONS

The subsequent four sections of the paper present a comprehensive compilation of characteristic numerical results

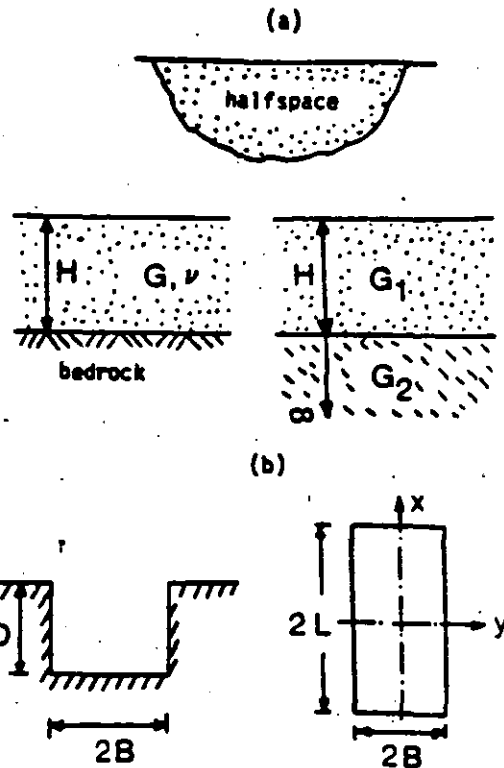


Figure 4. (a) The three soil profiles studied; (b) definition of geometric parameters

for the dynamic impedances (or compliances) of massless foundations, pertaining to all possible (translational and rotational) modes of vibration. These results can be directly used in equations (40)–(43) to make satisfactory and inexpensive predictions of the dynamic behavior of machine foundations in many practical cases, without the need to resort to costly computer programs for evaluating the impedances; this should be of especially great value in preliminary design calculations.

A second, equally important objective of the presentation is to assess the significance of various phenomena and to illustrate the role of key dimensionless geometric and material parameters on the response. It is thus hoped that the reader can gain a valuable insight into the mechanics of foundation vibrations.

Results are presented for three categories of idealized soil profiles (Fig. 4): the halfspace, the uniform stratum on rigid base and the layer on top of a halfspace. These models represent a wide spectrum of actually encountered soil profiles and are simple enough for their geometry to be described in terms of a single quantity, namely, the thickness H of the uppermost layer. (For the halfspace $H \rightarrow \infty$.) For most problems considered, the following groups of dimensionless parameters which appreciably influence the dynamic impedances have been identified:

- the ratio H/B of the top layer thickness, H , over a critical foundation-plan dimension, B ; the latter may be interpreted as the radius, R , of a circular foundation or half the width of a rectangular or a strip foundation
- the embedment ratio D/B , where D is the depth from the surface to the horizontal soil-footing interface

- (c) the shape of the foundation plan: circular, strip, rectangular, circular ring; in the last two cases the plan geometry may be defined in terms of the length-to-width or 'aspect' ratio, L/B , or the internal-to-external radii ratio, R_i/R , respectively
- (d) the frequency factor $a_0 = \omega B/V_s$, where V_s is a characteristic shear wave velocity of the soil deposit
- (e) the ratio G_1/G_2 of the shear moduli corresponding to the upper soil layer and the underlying halfspace, respectively; this ratio may attain values ranging from 0, in case of a uniform stratum on rigid base, to 1, in case of a uniform halfspace
- (f) the Poisson's ratio(s) ν of the soil layer(s)
- (g) the hysteretic critical damping ratio(s) ξ of the soil layer(s)
- (h) the factors n and \bar{m} which express the 'degree' of anisotropy and the 'rate' of inhomogeneity, respectively; $n = E_H/E_V$, where E_H and E_V are the horizontal and vertical Young's moduli of a cross-anisotropic soil; while \bar{m} , for a certain type of inhomogeneity, describes the change of shear modulus from the surface to a depth equal to B
- (i) the relative flexural rigidity factor $RF = (E_f/E_s) \cdot (1-\nu_f^2) \cdot (t/B)^3$ where E_f , ν_f and t are, respectively, the Young's modulus, Poisson's ratio and thickness of the foundation raft; RF ranges from ∞ , for a perfectly rigid foundation, to 0, for an ideally flexible mat.

RIGID SURFACE FOUNDATIONS ON HOMOGENEOUS HALFSPACE

Rigid circular foundation

When dealing with a deep and relatively uniform soil deposit, it makes engineering sense to model it as a homogeneous halfspace. This idealization, primarily because of its simplicity, has been widely employed to determine stresses and deformations in soils, and its use in soil dynamics has led to results in qualitative agreement with observations. From a practical point of view, perhaps the greatest value of the model has been in explaining important features associated with foundation vibrations.

The dynamic impedance functions for a rigid circular foundation on the surface of a homogeneous halfspace have been tabulated by Veletsos *et al.*²⁸ and Luco *et al.*^{27, 28, 62} Fig. 5 presents their results in the form of equation (17), with zero hysteretic damping ratio. (Obviously, in this case, $k = k$ and $c = c$.) The values of k and c corresponding to non-zero values of internal damping are, for all practical purposes, very similar to those plotted in Fig. 5, in accord with the correspondence principle. Reference is made to Veletsos *et al.*,²⁹ Luco⁶⁶ and Lysmer⁶³ for a more detailed discussion on this subject. Notice that only the diagonal elements of the impedance matrix are shown in the figure, as the cross swaying-rocking impedance is essentially zero.

It is evident from Fig. 5 that the normalized impedances K_a/GR and K_b/GR^3 , where a refers to the translational modes v and h and b to the rotational modes r and t , depend only on the Poisson's ratio ν of the halfspace and the frequency factor a_0 . The following trends are worthy of note in Fig. 5.

1. The vertical and rocking stiffness, K , and dynamic stiffness coefficients, k , are the most sensitive to variations in Poisson's ratio. On the other hand, the horizontal impedance function has a small dependence on ν , while the

torsional response is totally independent of ν at all frequencies. It thus appears that the importance of Poisson's ratio increases when the relative contribution of generated dilational (P) waves increases. Indeed, in the vertical and rocking modes P waves are significant; in the horizontal mode P waves are of secondary importance; and in the torsional mode only SH waves are generated and P waves play no role in the response.

2. The coefficients k_h , c_h and c_v are essentially independent of frequency and can be considered constant without any appreciable error. On the other hand, k_v , k_r , c_r and c_t exhibit a strong sensitivity to variations in the frequency parameter, while k_t shows an intermediate behavior. Of particular interest is the rapid decrease of the vertical and rocking stiffness coefficients k_v and k_r with increasing a_0 , for values of Poisson's ratio close to 0.5* (typical for saturated clays). In fact, k_v and k_r become negative for values of a_0 greater than 2.5 and 5, respectively. Some years ago it appeared that use of 'added masses' could adequately account for the decrease with a_0 of the stiffness coefficients, in the range of low frequencies. Such 'masses' would in effect produce dynamic stiffness coefficients of the form $k - m\omega^2$ - a reasonable approximation indeed for low frequencies, which formed the basis of the 'lumped-parameter' model, described in a preceding section of the paper. Unfortunately, as is evident from Fig. 5, this approximation may lead to substantial errors for larger frequencies. Moreover, the concept of 'added mass' has all too often been confused with the physically incorrect notion of an 'in-phase soil mass', which at much earlier times had found considerable use in the design practice.

3. While the damping coefficients of the translational modes, c_v and c_h , attain large and nearly constant values throughout the frequency range $0 < a_0 \leq 8$, the coefficients c_r and c_t of the two rotational modes are very sensitive to variations in frequency in the low range of a_0 , tending to zero as a_0 approaches zero. At larger frequencies (a_0 greater than about 3) c_r and c_t are essentially frequency-independent, but their values both equal to about 0.30, are significantly smaller than the corresponding values of $c_v = 0.95$ and $c_h = 0.60$. These differences imply that a smaller radiation of wave energy takes place during rocking and torsional than during vertical and horizontal oscillations. It seems that the dynamic stress and strain fields induced in the soil by the two types of rotational loadings are of limited extent, with the generated waves decaying very rapidly away from the loading area due to 'constructive interference'. These phenomena will become more evident in connection with the behavior of footings on layered or inhomogeneous soil deposits.

In any case, the practical implication of the existence of only a small amount of radiation damping in the rocking and torsional modes of oscillation is that a realistic estimate of the response may be obtained by incorporating the effects of material (hysteretic) damping in the soil. On the contrary, material damping is insignificant for horizontal and, especially, vertical oscillations and, with little loss in accuracy, it may be neglected in the presence of the much higher radiation damping.

* It is noted that although for saturated soft clays under static undrained loading one should use $\nu = 0.50$, with dynamic loading $\nu = 0.50$ leads to infinite dilatational wave velocity, which is not observed in the laboratory; instead the Biot-Ishihara theory for poroelastic media yields a maximum value of ν slightly less than 0.50.

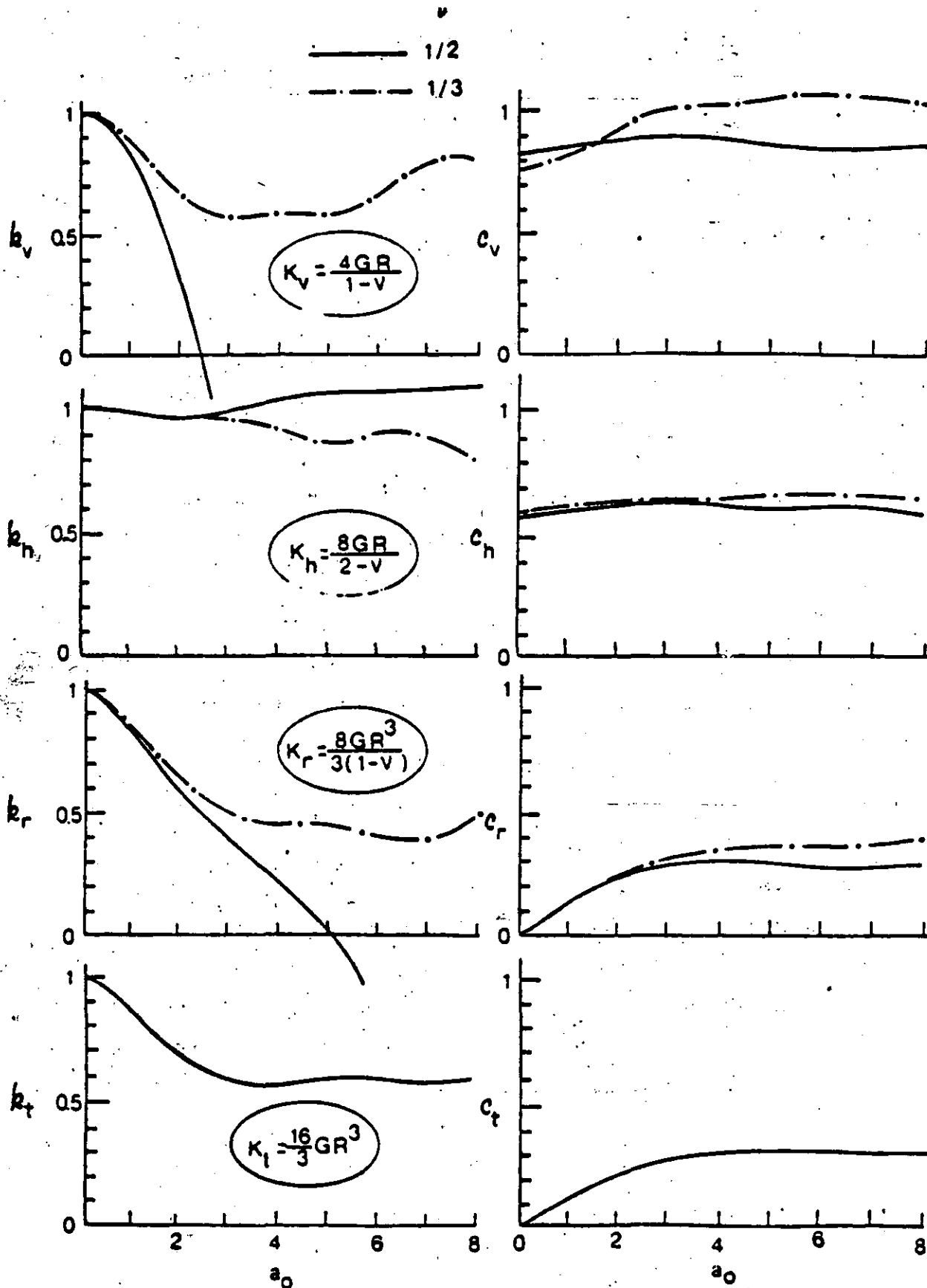


Figure 5. Impedance functions of rigid circular footings on homogeneous halfspace^{17, 28, 29}

Clearly, soil deposits having a constant G and extending to practically infinite depths, as the homogeneous halfspace model assumes, do not abound in nature. In addition, circular foundations are rather rarely constructed. Nonetheless, the results of Fig. 5 for a circular foundation on a halfspace are of great value in understanding the phenomena associated with foundation vibrations. From a practical point of view, however, the shape and trends of these impedance functions are more important than their exact values.

Rigid strip foundation

When dealing with long and narrow foundations, the length of which is larger than their width by a factor of 5 or greater, it is a common practice to idealize their shape as an infinitely long strip. If, moreover, the dynamic loading

is reasonably uniform along the longitudinal direction, plane-strain conditions prevail throughout and 2D analyses are sufficient to obtain the response.

Figure 6 displays the dynamic impedance of a rigid strip foundation on the surface of a homogeneous halfspace. These results were obtained by the semi-analytical procedure of Gazetas³⁶ and Gazetas and Roesset³⁸ and are in agreement with the results of Karasudhi *et al.*³⁹ It is noted that in this case the impedance functions are presented in the form described by equation (4), and not in one of the most usual forms of equations (12) or (17). The necessity for this change stemmed from the fact that the static vertical and horizontal stiffnesses of an infinite strip on a halfspace are zero, in agreement with the classical theory of elasticity. This is at variance with the behavior of circular foundations, whose (nonzero) static stiffnesses can be

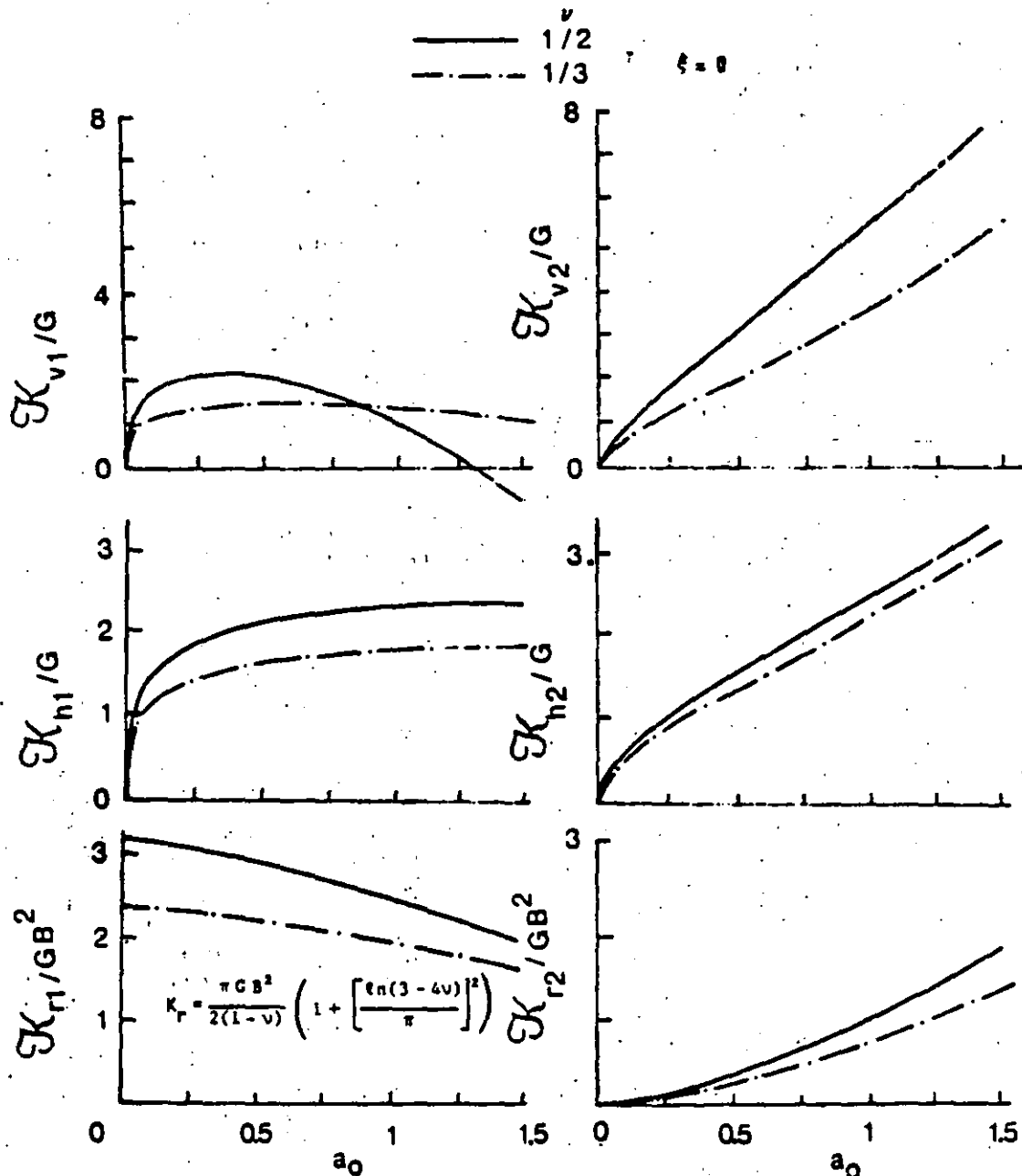


Figure 6. Impedance functions of rigid strip footings on homogeneous halfspace

found from the expressions included in Fig. 5. The infinite displacement of a strip-loaded halfspace arise from the large depths of the corresponding 'zones of influence'. In other words, the static stresses induced by the strip surface loads decay slowly with depth and, thus, cause appreciable straining of even remote soil elements; accumulation of these strains yields infinite displacements.

On the other hand, the stress and strain fields induced by moment loading are confined to the near surface soil only, thereby producing small surface displacements and non-zero static stiffnesses. For a rigid strip foundation, an expression for the static rocking stiffness is included in Fig. 6.

A few other trends are worthy of note in Fig. 6. First, one should notice that there are only three possible modes of vibration of a strip (vertical, horizontal and rocking) as compared to the four modes of a circular footing. Apparently, torsional oscillations involve out-of-plane motions and hence are impossible with strip footings.

In general, the dependence of the dynamic impedances on the Poisson's ratio of soil is very similar for strip and circular foundations. Thus, the discussion of the preceding section on the sensitivity of circular impedance functions to ν , is also applicable to the present case.

Regarding the variation of impedances with frequency, on the other hand, there are some differences between circular and strip footings, although clearly the general trends are similar. Thus, in the very low frequency range, the real parts K_{v1} and K_{h1} of the two translational modes increase with increasing α_0 and they attain peak values of α_0 ranging from about 0.25 to about 1.0, depending primarily on the Poisson's ratio and the type of oscillation. This implies that 'constructive interference' of various P and S waves originating at the soil-foundation interface reduces the depth of the 'zone of influence'; this results into finite displacements and non-zero dynamic stiffnesses.

Beyond their peak values, K_{v1} and K_{h1} behave much like their circular counterparts. Notice, however, that at Poisson's ratios close to 0.50 the vertical strip stiffness becomes negative at α_0 values greater than 1.3, as compared with the corresponding value of 2.5 which was observed for circular footings in Fig. 5.

The imaginary parts K_{v2} and K_{h2} of the vertical and horizontal modes increase almost linearly with α_0 , thus indicating qualitatively similar radiation damping characteristics of strip and circular foundations. (Notice that the damping coefficients c in the latter case are proportional to the slopes of the imaginary component of impedance-versus- α_0 curves; hence a constant c implies a linearly varying K_2 .)

Finally, the rocking stiffness and damping terms of both strip and circular foundations exhibit essentially identical trends. Evidently, rocking induced static or dynamic stresses influence only the near-surface soil under both plane-strain and axisymmetric loading conditions.

Rigid rectangular foundation

Results are now available for the complete dynamic impedance matrix of rigid rectangular foundations with varying aspect ratios L/B , over the low and medium frequency range.⁴⁷ For the vertical, horizontal and rocking modes, in particular, results are available even for moderately high values of α_0 .^{44, 46, 48}

Again, in presenting the variation with frequency and aspect ratio of impedances it is convenient to express them in the form of equation (17), with $\alpha_0 = \omega B/V$, where $2B$

is the width of the smallest side of the foundation. Results for the static stiffnesses are presented first.

It has been known for some time that the static stiffness of a typical rectangular foundation can be approximated with reasonable accuracy by the corresponding stiffness of 'equivalent' circular foundations. For the translational modes in the three principal directions (x , y and z) the radius R_0 of the 'equivalent' circular foundation is obtained by equating the areas of the contact surfaces; hence:

$$R_0 = \left(\frac{2B \cdot 2L}{\pi} \right)^{1/2} \tag{47}$$

For the rotational modes around the three principal axes, the 'equivalent' circular foundations have the same area moments of inertia around x , y and z , respectively, with those of the actual foundation. Thus, the equivalent radii are:

$$R_{0x} = (16L \cdot B^3/3\pi)^{1/4} \tag{48}$$

for rocking around the x -axis;

$$R_{0y} = (16B \cdot L^3/3\pi)^{1/4} \tag{49}$$

for rocking around the y -axis; and

$$R_{0z} = \left[\frac{16B \cdot L \cdot (B^2 + L^2)}{6\pi} \right]^{1/4} \tag{50}$$

for torsion around the z -axis.

The results of recent parametric studies have confirmed the similar static behavior of rectangular and equivalent circular foundations. Table 2 is a synthesis of the results of several such investigations. It presents theoretically 'exact' formulae for all the translational and rotational static stiffnesses of rigid rectangular foundations having a wide range of aspect ratios. These formulae are cast in the form:

$$K = K_0(R_0) \cdot J(L/B) \tag{51}$$

in which: K = the actual static stiffness; $K_0(R_0)$ = the corresponding stiffness of the equivalent circular foundation, obtained from Fig. 5; R_0 = the radius of the 'equivalent' circle; and $J(L/B)$ = a 'correction' factor, function of the aspect ratio, L/B . If $J(L/B)$ were equal to 1 for all aspect ratios, the static equivalence between the two types of footings would have been perfect. Conversely, the larger the difference is between $J(L/B)$ and 1, the less accurate it would be the approximate a rectangular with a circular footing.

It may first be noted that only small discrepancies exist in the values of the 'correction' functions computed from the results of several authors. These discrepancies are due to either the assumed soil-footing interface behavior ('smooth' versus 'adhesive' contact), or the employed different numerical solution schemes. In practice, however, in view of the small magnitude of these differences, one may safely use for $J(L/B)$ the average of the values presented in Table 2, for each particular aspect ratio.

The following conclusions are evident from this Table.

1. Even for aspect ratios, L/B , as high as 8, the 'equivalent' circular foundations yield stiffnesses which are within 30% of the corresponding stiffness of the actual rectangular foundation. This is by no means a large error, in view, for example, of the uncertainty in estimating the soil modulus in practice.
2. For aspect ratios, L/B , less than 4 the 'equivalent' stiffnesses are in very good agreement with the actual

Table 2. Static stiffnesses for rectangular rigid foundation

1. Vertical stiffness

$$K_x = K_y = \frac{4GR_0}{1-\nu} \cdot J_v(L/B)$$

$\frac{L}{B}$	'Correction' factor J_v				
	Gorbunov-Posadov (1961)	Barkan (1962)	Savidis (1977)	Dominguez et al. (1978)	
				'Adhesive'	'Smooth'
1	1.023	0.953	0.944	1.052	1.081
2	1.025	0.975	0.973	1.063	1.130
4	1.108	1.077	1.072	1.107	1.196
6	1.197	1.152	-	-	-
8	1.266	1.196	1.200	-	-
10	1.313	1.250	-	-	-
20	1.572	-	-	-	-

2. Horizontal stiffnesses

$$K_x = \frac{8GR_0}{2-\nu} \cdot J_x(L/B) \quad K_y = \frac{8GR_0}{2-\nu} \cdot J_y(L/B)$$

$\frac{L}{B}$	'Correction' factor J_x		'Correction' factor J_y	
	Barkan (1962)	Dominguez et al. (1978)	Barkan (1962)	Dominguez et al. (1978)
1	0.993	1.035	0.993	1.035
2	0.983	1.044	1.008	1.105
4	1.000	1.085	-	1.221
6	1.055	-	-	-
8	1.132	-	-	-
10	1.191	-	-	-

3. Rocking stiffnesses

$$K_{rx} = \frac{8GR_0^2}{3(1-\nu)} \cdot J_{rx}(L/B) \quad K_{ry} = \frac{8GR_0^2}{3(1-\nu)} \cdot J_{ry}(L/B)$$

$\frac{L}{B}$	'Correction' factor J_{rx}		'Correction' factor J_{ry}	
	Gorbunov-Posadov et al. (1961)	Dominguez et al. (1978)	Gorbunov-Posadov et al. (1961)	Dominguez et al. (1978)
1	0.991	0.965	0.991	0.965
2	1.034	1.039	1.035	1.031
4	1.0488	1.117	1.072	1.140
8	1.178	-	1.226	-
10	1.281	-	1.319	-

4. Torsional stiffness

$$K_{rz} = K_t = \frac{16}{3} GR_0^2 \cdot J_t(L/B)$$

$\frac{L}{B}$	'Correction' factor J_t	
	Dominguez et al. (1978)	Roesset et al. (1977)
1	0.950	1.0332
2	1.000	-
3	1.016	-
4	1.166	-

ones. Typically, the error is within 10% and, hence, it is insignificant for all practical purposes.

3. The greatest differences are observed between actual and 'equivalent' stiffnesses for torsion (K_t) and for hori-

zontal displacement in the y direction (K_y). For $L/B = 4$, the error in K_x is about 17% and in K_y about 22%. It is worthy of note that whereas for a circular foundation $K_{x0} = K_{y0} = 8GR_0/(2-\nu)$, where R_0 is given by equation (47), a rectangular foundation with the larger side $2L$ normal to the y -axis (Fig. 4) is characterized by:

$$K_y = K_x + \frac{1}{2}GB \left(\frac{L}{B} - 1 \right) \quad (52)$$

for typical values of Poisson's ratio.

Variation with a_0 . Figure 7 portrays the dependence of the dynamic stiffness and damping coefficients, k and c , on the frequency factor a_0 and the aspect ratio L/B . These results were obtained with the Boundary Element Method by Dominguez and Roesset,⁴⁷ for a single value of Poisson's ratio, $\nu = \frac{1}{2}$. Only the coefficients of the six diagonal components of the impedance matrix are shown, they correspond to the translational modes of vibration (x , y and z) along each of the three principal axes, and to the rotational modes (r_x , r_y and r_z) around each of the same three principal axes. The two cross-swaying-rocking (coupling) impedances, corresponding to the xr_y and yr_x modes, are negligibly small for surface foundations, and are thus omitted from this presentation. Also shown in Fig. 7 as circles are the predictions of the 'equivalent' circular foundations, computed from Fig. 5 in conjunction with equations (47)-(50). One may notice the following trends in Fig. 7.

1. The terms k_x and c_x of the impedance against motion normal to the smaller side $2B$ are insensitive to variations in a_0 . Moreover, k_x is essentially independent of the aspect ratio, L/B , while c_x increases almost in proportion to the square-root of L/B . Recall that c_x must be multiplied by $a_0 = \omega B/V_s$ to obtain the imaginary component of the dynamic part of the impedance (equations (12) or (17)), in which $2B$ is the width of the smallest side of the footing. On the other hand, the frequency factor a_{00} of the 'equivalent' footing equals $\omega R_0/V_s$, with:

$$R_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} B \left(\frac{L}{B} \right)^{1/2} \quad (47a)$$

i.e. a_{00} is proportional to the square-root of L/B . Hence, plotted in Fig. 7, both stiffness and damping coefficients of the 'equivalent' footing are in excellent agreement with the corresponding coefficients of the actual rectangular footing, for all aspect ratios studied ($L/B = 1-4$), at least in the frequency range, $0 < a_0 \leq 1.5$.

2. The variation of the vertical stiffness and damping coefficients, k_v and c_v , has a similar shape with the variation of k_x and c_x . In this case, however, the two coefficients are more sensitive to variations in a_0 and L/B and the damping term c_v is always larger than c_x . Moreover, the agreement between actual and 'equivalent' coefficients is reasonably good, for all practical purposes.

3. The coefficients k_y and c_y , for a motion parallel to the smaller side $2B$, show a greater sensitivity to both a_0 and L/B . Furthermore, the discrepancies between 'equivalent' and actual values for these coefficients are appreciable, increasing with the aspect ratio. In fact, footings with a large L/B ratio (e.g. ≥ 4) tend to behave more like strip rather than circular footings, as a comparison between Figs. 5, 6 and 7 indicates.

4. The stiffness coefficient k_{rx} for rocking around the longest axis, x , exhibits no sensitivity to the aspect ratio,

L/B ; moreover, its variation as a function of a_0 is nearly identical with the variation of the corresponding stiffness coefficient of both the 'equivalent' circular footing and a strip footing with the same width B (Fig. 6). The damping coefficient c_{rx} attains negligible values in the low frequency range and increases approximately in proportion to the

fourth-root of L/B at high frequencies. Recalling that the frequency factor of the 'equivalent' circular footing is proportional to:

$$R_{0,x} = \frac{2}{(3\pi)^{1/4}} B \left(\frac{L}{B}\right)^{1/4} \quad (48a)$$

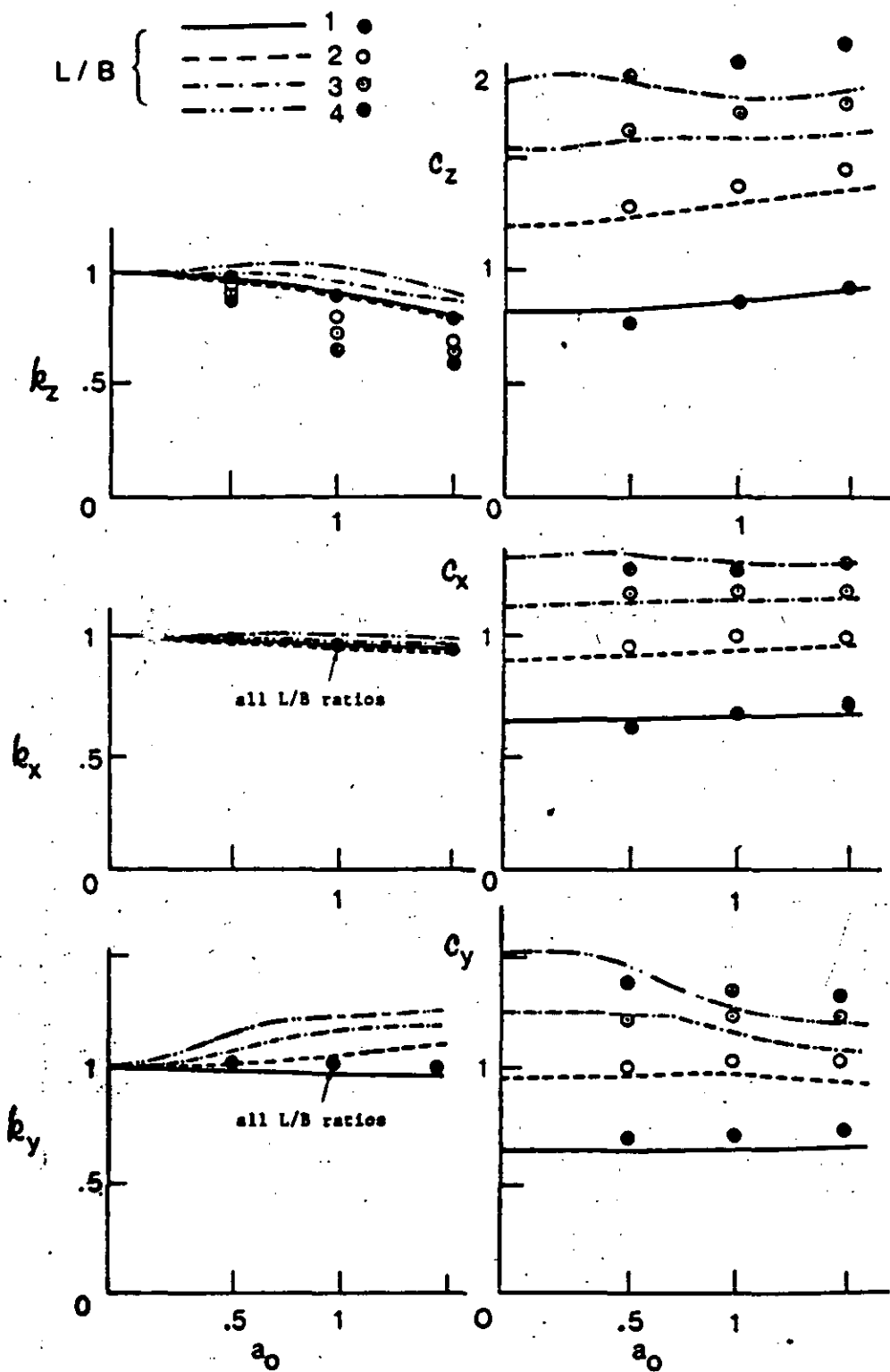
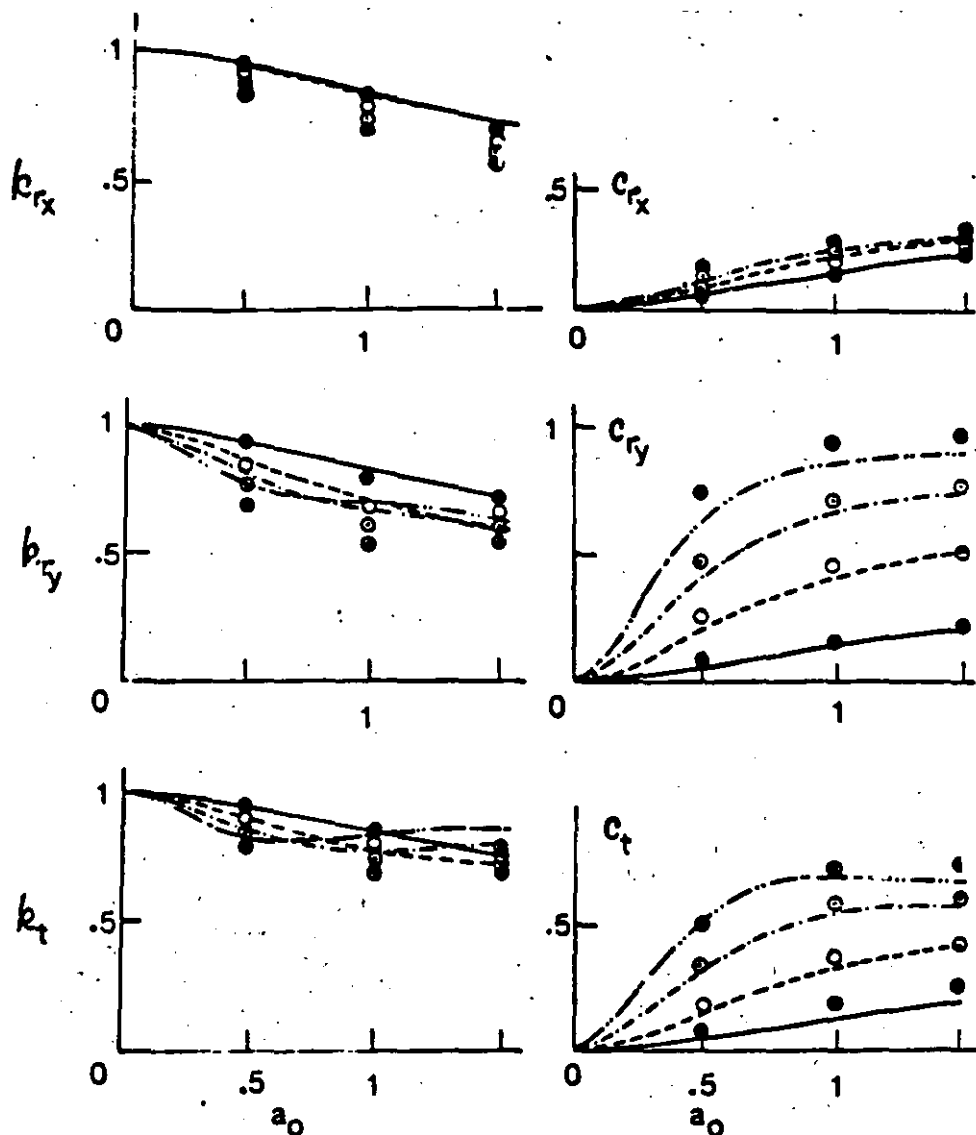


Figure 7. Dynamic coefficients of rigid rectangular footings on homogeneous halfspace;⁴⁷ (circles obtained by this author for 'equivalent' circular footings)

Figure 7 - continued



whereas the term c_{rx} is multiplied simply by $a_0 = \omega B/V_s$, in equations (12) or (17), one can directly unveil the very close proximity between the actual and 'equivalent' damping coefficients.

5. The stiffness coefficients k_{ry} and k_t , for rocking around the shortest axis and torsion, respectively, show a somewhat similar dependence on L/B and exhibit some fluctuations with a_0 as L/B increases. The two coefficients are predicted only with small accuracy by the 'equivalent' circular footings. On the other hand, the two damping coefficients c_{ry} and c_t grow rapidly with both frequency and aspect ratio. In this regard, it is interesting to notice that, for instance, the frequency factor for the r_y mode is proportional to:

$$R_{0y} = \frac{2}{(3\pi)^{1/4}} B \left(\frac{L}{B}\right)^{3/4} \quad (49a)$$

which reveals a much stronger increase of c_{ry} with L/B , as compared with the corresponding increase of c_{rx} (a power of $\frac{3}{4}$ for c_{ry} versus $\frac{1}{2}$ for c_{rx}). Again, the values of the two coefficients may be reasonably well predicted by the 'equivalent' circular foundation.

In conclusion, with the help of the formulae of Table 2 and the graphs of Fig. 7, the dynamic behavior of rectangular foundations with essentially any aspect ratio can be obtained. Furthermore, the 'equivalent' circular footings described through equations (47)-(50), yield reasonably good estimates of the response for values of L/B less than about 4 and frequency factors at least up to 1.5. For larger values of L/B , the static stiffnesses of Table 2 can be utilized in conjunction with the dynamic coefficients of an equal-width strip foundation (Fig. 6). More parametric studies are, however, necessary to obtain results in the high frequency range ($1.5 < a_0 < 8$).

RIGID SURFACE FOUNDATIONS ON A HOMOGENEOUS SOIL STRATUM

Natural soil deposits very rarely have uniform properties within large depths from the loaded surface. More typical is the presence of a stiffer material or even bedrock at a relatively shallow depth. The response of a foundation on a soil stratum underlain by such a stiffer medium can be substantially different from the response of an identical

foundation resting on a uniform halfspace. It is, thus, imperative to study the dynamics of massless foundations on such soil deposits. Specifically two types of idealized soil profiles are considered in this section:

- (a) a homogeneous soil stratum over a rigid base, and
- (b) a homogeneous soil stratum over a homogeneous halfspace.

Results for non-homogeneous soil strata, with moduli continuously increasing or decreasing with depth, will be presented in a subsequent section of the paper.

In addition to the four dimensionless parameters which control the behavior of rigid footings on a halfspace, namely, σ_0 , ν , ξ and L/B , the ratio H/B (or H/R) is of crucial importance in the response of footings on a homogeneous stratum. Its effect is, thus, studied throughout this section. Furthermore, the moduli ratio G_1/G_2 is of interest whenever the soil stratum is underlain by a non-rigid base (halfspace).

Circular foundation on stratum over a rigid base

Results for the dynamic impedance functions of a rigid circular disk at the surface of a stratum-on-rigid-base are presented in Table 3 and in Figs. 8 and 9. Specifically, Table 3 offers simple and quite accurate formulae for the determination of the static stiffnesses; Fig. 8 studies the effect of the H/B ratio on the dynamic stiffness and damping coefficients, k and c , for a single value of hysteretic damping ratio, $\xi = 0.05$; and Fig. 9 shows the sensitivity of k and c to variations in ξ , for a single value of the ratio, $H/B = 2$. These results have been derived by Kausel³³ and Kausel et al.^{69, 90} and have been discussed by Roesset.^{69, 91} Several significant conclusions may be drawn from this data.

Static stiffnesses. It is evident from the formulae of Table 3 that the existence of rigid bedrock at a relatively shallow depth may drastically increase the static stiffnesses of a rigid surface foundation. The four expressions reduce to the corresponding halfspace stiffnesses when H/R tends to infinity, but their values increase with decreasing H/R .

Vertical stiffnesses are particularly sensitive to variations in the depth to bedrock (notice the 1.28 factor). Horizontal stiffnesses are also appreciably affected by H/R (factor of 0.5) while the rotational stiffnesses (rocking and torsion) are the least affected. In fact, for $H/R > 1.5$ the response to torsional loads is practically independent of the layer thickness.

An indication of the causes of this different behavior of a circular footing to the four different types of loading can be obtained by observing the depths of the 'zone of influence' (known as 'pressure bulb' ever since Terzaghi) in each case. Thus, from Gerrand and Harrison,⁹² in a homogeneous halfspace, the vertical normal stress, σ_z , along the centerline of a vertically loaded rigid circular disk becomes less than 10% of the average applied pressure at depths greater than $z_p \approx 4R$; the horizontal shear stress, $\tau_{z,r}$, becomes less than 10% of the average applied shear traction at depth greater than $z_h \approx 2R$. From Gazetas,³³ the horizontal shear stresses $\tau_{z,\theta}$ and $\tau_{r,\theta}$ due to linearly distributed torsional surface stresses become less than 10% of the maximum applied shear traction at $z > z_t \approx 0.75R$. Finally, moment loading with a linear distribution of normal tractions varying from 0 to p yields $z_p \approx 1.25R$, below which σ_z is less than 0.10p.

Variation with σ_0 , H/R and ξ . The variation of the dynamic stiffness and damping coefficients with frequency reveals an equally strong dependence on H/B . On a stratum, both k and c are not as smooth functions as on a halfspace, but exhibit undulations (peaks and valleys) associated with the natural frequencies (in shear and dilation) of the soil layer. In other words, the observed fluctuations are the outcome of resonance phenomena: waves emanating from the oscillating foundation reflect at the soil-bedrock interface and return back to their source at the surface. As a result, the amplitude of foundation motion may significantly increase at specific frequencies of vibration, which, as shown subsequently, are close to the natural frequencies of the deposit. Thus, the stiffness coefficients exhibit valleys which are very steep when the hysteretic damping in the soil is small (in fact, in certain cases, k would be exactly zero if the soil were ideally elastic); on the other hand, with large amounts of hysteretic damping ($\xi = 0.10 - 0.20$) the valleys become less pronounced (Fig. 9). They also become less pronounced as the relative thickness of the layer, H/R , increases (Fig. 8).

Another important phenomenon is revealed through the variation with σ_0 of the damping coefficients. At low frequencies, below the first resonant frequency, radiation damping is zero. This is due to the fact that no surface waves can be physically created in a soil stratum at such frequencies and, since the bedrock prevents waves from propagating downward, geometrical spreading of wave energy is negligible. The small values of the damping in this range (Fig. 9) just reflect the energy loss through hysteretic damping; for a purely elastic soil c would be zero.

Table 3. Static stiffnesses of rigid circular foundation on a stratum-over-rigid-base*

Type of loading	Static stiffness	Range of validity†	Soil profile
Vertical:	$K_v = \frac{4GR}{1-\nu} \left(1 + 1.28 \frac{R}{H} \right)$	$H/R > 2$	
Horizontal:	$K_h = \frac{8GR}{2-\nu} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R}{H} \right)$	$H/R > 1$	
Rocking:	$K_r = \frac{8GR^3}{3(1-\nu)} \left(1 + \frac{1}{6} \frac{R}{H} \right)$	$4 > H/R > 1$	
Torsion:	$K_t = \frac{16}{3} GR^3$	$H/R > 1.25$	

* Adapted from Kausel³³ and Kausel et al.⁶⁹

† For $H/R < 2$ or 1 these expressions would still provide reasonable estimates of the actual static stiffnesses

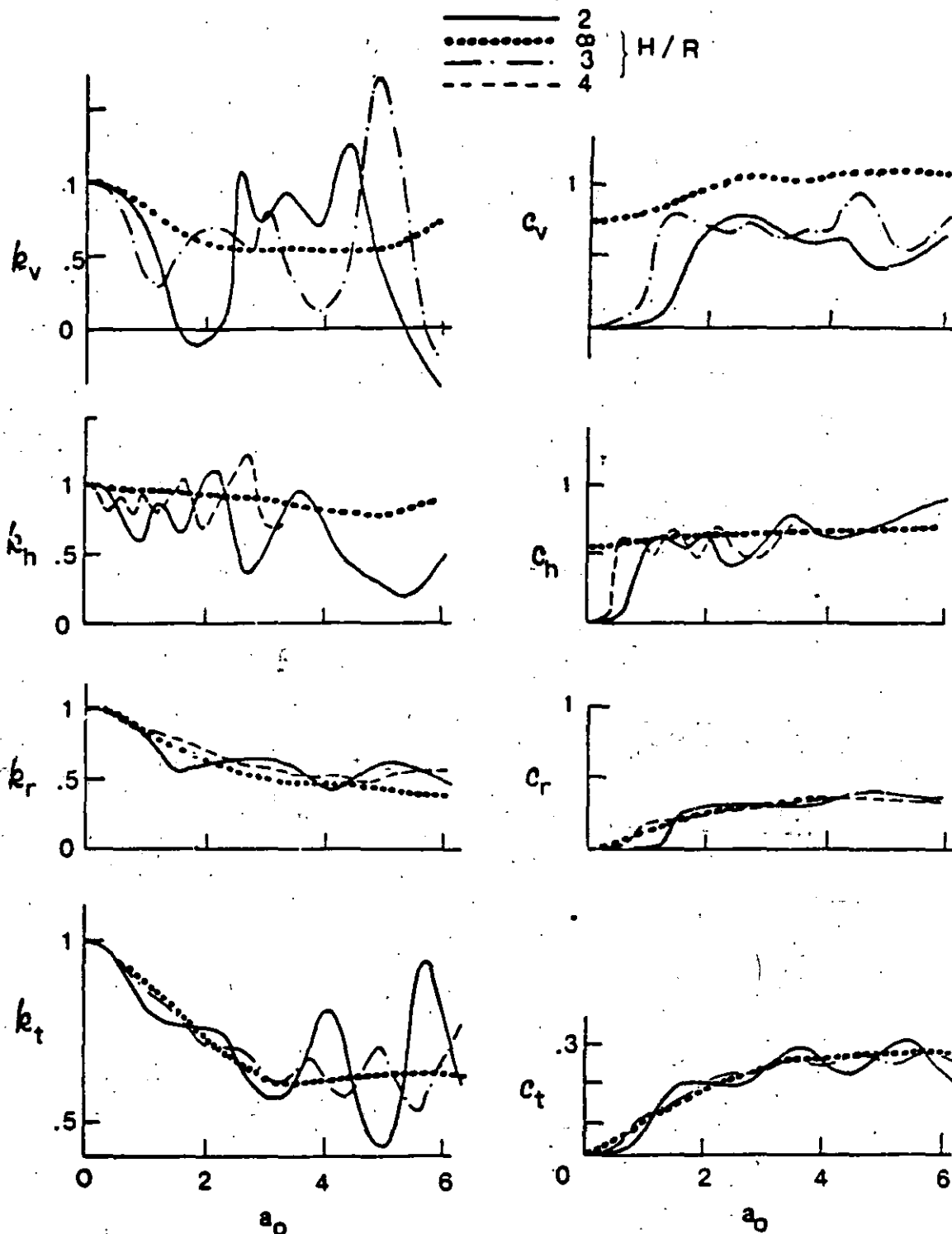


Figure 8. Dynamic coefficients of rigid circular footing on stratum-over-bedrock; effect of H/R ratio ($\nu = 1/3$, $\xi = 0.05$)^{33, 34, 39}

The phenomena described in the two preceding paragraphs are observed to a larger or lesser degree in all four modes of vibration. However, there exist marked differences among the dynamic coefficients of vertical, swaying, rocking and torsional oscillations. Specifically:

1. For rocking and torsion, k and c are relatively smooth functions of a_0 , rapidly approaching the corresponding half-

space curves as the layer thickness increases beyond $3R$. Thus, H/R exerts only a small influence on the variation of these two coefficients. On the other hand, for vertical and horizontal translation, k and c display some very pronounced fluctuations with a_0 . Both the location and the shape of the resonant valleys are quite sensitive to variations in H/R , and only for H/R values larger than 8 do

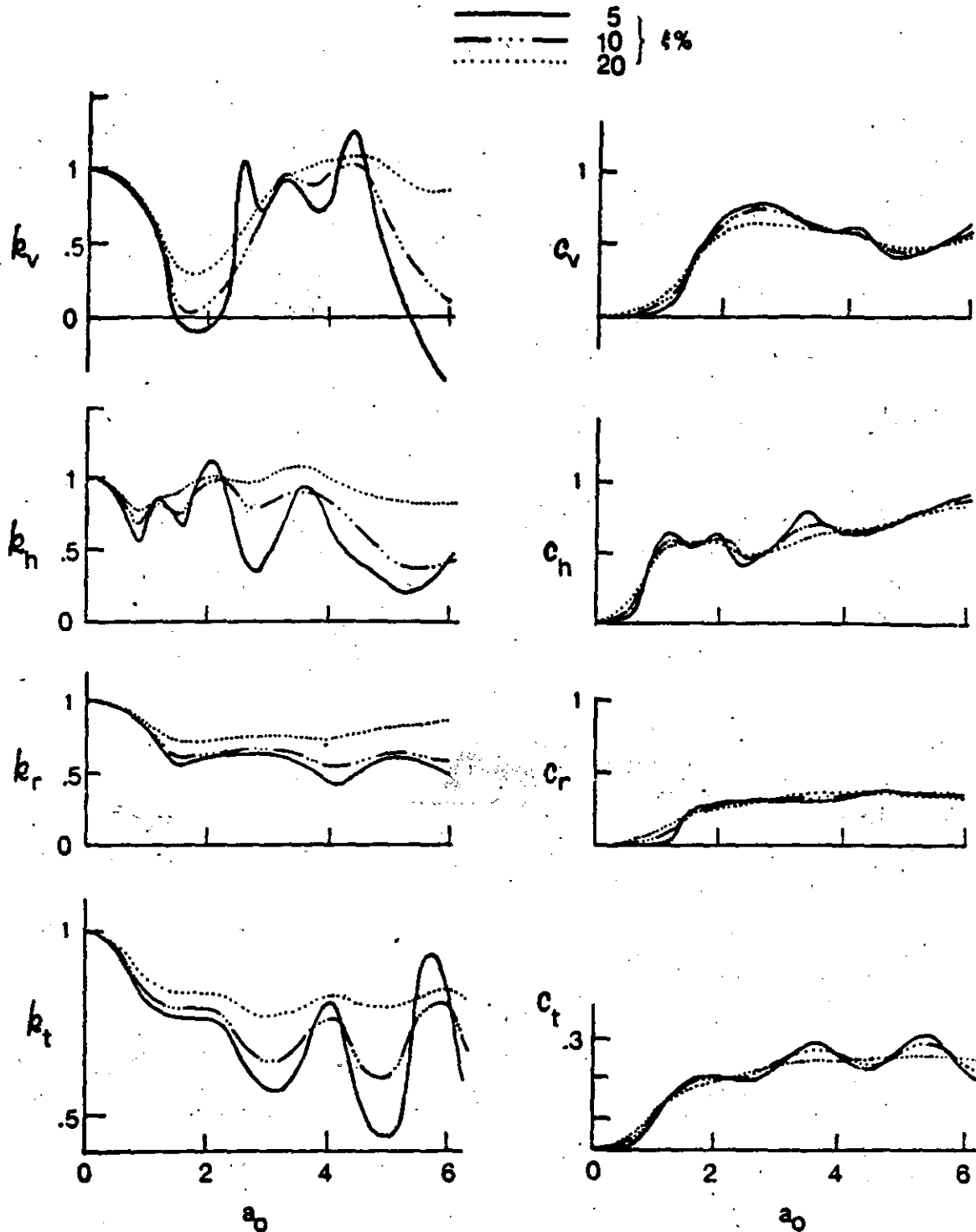


Figure 9. Dynamic coefficients of rigid circular footing on stratum-over-bedrock; effect of ξ ($\nu = 1/3, H/R = 2$)^{33,90}

$k(a_0)$ and $c(a_0)$ approach the corresponding halfspace curves, if $\xi = 0.05$. These results are consistent with the conclusions derived previously regarding the depth of the 'pressure bulb' or 'influence zone' of a statically loaded foundation. Under dynamic loads, 'constructive interference' of downward propagating waves leads to a shallow dynamic 'pressure bulb' in both rocking and torsion.

2. The resonant frequencies of horizontal (swaying) oscillations are in remarkable agreement with the natural

frequencies of the stratum. As an example, the fundamental frequency of the stratum in vertical shear waves, $f_{s,1}$, equals $V_s/4H$ and, thus:

$$a_{0s,1} = \frac{\pi R}{2H} \quad (53)$$

which is equal to $\pi/4$, for $H/R = 2$. As seen in Fig. 9, this value of a_0 essentially coincides with the first resonant frequency in swaying. It is not difficult to explain how the

simple one-dimensional wave propagation theory can so successfully predict the first resonant frequency of a three-dimensional problem: at values of a_0 below resonance essentially only shear waves exist in the stratum, propagating vertically between foundation and bedrock. Therefore, when this first resonance occurs we have a non-dimensional 'standing' wave and, in addition, little damping and thus high response. Of course, as it may be inferred from Figs. 8-9, the situation becomes a little more involved at higher resonant frequencies. Thus, the second 'resonance' occurs at about the fundamental natural frequency of the stratum in dilational waves, and the third 'resonance' at about the second natural frequency in shear waves. In both cases, however, some non-vertical waves also participate in the motion, as evidenced by the existence of non-zero radiation damping. Due to multiple wave reflections, P , S and Rayleigh waves are also generated and, hence, the one-dimensional theory predicts with smaller accuracy the pertinent swaying resonant frequencies of the soil-foundation system.

On the other hand, vertical and rocking foundation oscillations induce mainly P but also S waves in the stratum. The relative importance of each type of wave depends to some extent on the Poisson's ratio of the soil. Recall that the ratio between the two wave velocities and between the corresponding natural frequencies of the stratum is given by:

$$\frac{V_p}{V_s} = \frac{f_{p,n}}{f_{s,n}} = \left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \right]^{1/2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (54)$$

which, for $\nu = \frac{1}{2}$ yields a ratio of 2. Figures 8-9 clearly show that the first resonant frequencies for both vertical and rocking oscillations are reasonably close to the fundamental frequency of the stratum in vertical P -waves ($a_{0p,1} = \pi/2$ for $H/R = 2$). Higher resonances, however, can hardly be predicted by the simple one-dimensional wave propagation theory since, apparently, they involve a mixture of P , S - and Rayleigh (R) waves.

Referring to Fig. 9, it is observed that k and g are quite sensitive to variations in material damping, especially at frequencies near resonance. This is contrary to the so-called 'correspondence principle' which assumes that the impedances derived for an undamped but otherwise identical medium by a simple multiplication with the factor $1 + 2i\xi$. Remember, however, that this 'principle' works reasonably well for a homogeneous halfspace.

The effect of Poisson's ratio is not studied in detail herein and reference is made to Kausel *et al.*⁶⁹ for a rigorous assessment of its importance in swaying and rocking. Note, nonetheless, that the variation of the dynamic coefficients with frequency may be sensitive to

this parameter, because of its influence on V_p and $f_{p,n}$ as previously explained (equation (54)). Thus, vertical and rocking coefficients are highly sensitive to ν , especially with shallow layers; but swaying and torsional coefficients are practically independent of ν .

Strip foundation on stratum over a rigid base

Table 4 and Figs. 10 and 11 present the results for vertical, horizontal and rocking oscillations of a massless rigid strip footing which rests on the surface of a homogeneous soil layer overlying bedrock. These results were obtained with the formulation of Gazetas and Roesset^{34,39} and are in excellent agreement with the results of Chang-Liang.⁵⁷ Additional numerical studies can be found in Jakub *et al.*^{56,43} and Gazetas.⁵⁴

Static behavior. Simple expressions of sufficient accuracy for practical purposes have been derived for the three static stiffnesses and these are listed in Table 4. Evidently, the presence of (infinitely rigid) bedrock at shallow relative depths has a dramatic effect on the static behavior of strip foundations. Vertical and horizontal stiffnesses, being no longer zero as in the case of a halfspace, are strongly increasing functions of B/H . Rocking stiffness also increases with B/H . Two noteworthy conclusions may be drawn by contrasting the expressions of Table 4 to those of Table 3:

1. The effect of Poisson's ratio on the static stiffnesses is the same for both strip and circular rigid foundations. The effect is greatest for vertical and rocking loading [factor $(1-\nu)$] and smallest for horizontal loading [factor $(2-\nu)$].

2. Layer depth is substantially more important for strip than for circular foundations, especially with the two translational modes (factors of 3.5 and 2 in the vertical and rocking expressions for a strip, as compared with 1.28 and 0.5 in the corresponding expressions for a circle). This is a natural consequence of the much deeper 'pressure bulb' in a continuum subjected to plane-strain rather than axisymmetric surface loading, as it has already been illustrated in preceding sections.

3. Vertical stiffness is far more sensitive to variations in B/H (factor of 3.5) than horizontal and rocking stiffnesses are (factors of 2 and 0.20, respectively). The explanation lies again in the much greater 'depth of influence' of the vertical loads. On the other hand, moment loading induces stresses which decay very rapidly with depth; because on any horizontal plane, small normal stresses at large distances from the centerline contribute much to equilibrating the applied moment. Thus, rocking stiffnesses exhibit about the same small sensitivity to layer depth for

Table 4. Static stiffnesses of rigid strip foundation on a stratum-over-rigid-base

Type of loading	Static stiffness (per unit length)	Range of validity*	Soil profile
Vertical:	$K_v = \frac{1.23G}{1-\nu} \left(1 + 3.5 \frac{B}{H} \right)$	$1 < H/B < 10$	
Horizontal:	$K_h = \frac{2.1G}{2-\nu} \left(1 + 2 \frac{B}{H} \right)$	$1 < H/B < 8$	
Rocking:	$K_r = \frac{\pi GB^2}{2(1-\nu)} \left(1 + \frac{1}{5} \frac{B}{H} \right)$	$1 < H/B < 3$	

* Outside this range the proposed expressions would still provide reasonable estimates of the actual static stiffnesses

both strip and circular footings (factors of 1/5 and 1/6, respectively).

Dynamic behavior. Figures 10 and 11 portray the variation with frequency of the dimensionless compliance functions EF_v , where $e = v$ or h , and EB^2F_r . Specifically, Fig. 10 intends to show the effect of H/B , and Fig. 11 the effect of ν . The results of Fig. 10 were obtained for $\nu = 0.49$ and $\xi = 0.05$, with four different values of H/B , i.e. 1, 3, 8 and ∞ ; the last value corresponds to the homogeneous halfspace and is included for a comparison. Figure 11 shows the effect of ν on vertical and rocking compliances only, for a layer with $H/B = 2$ and a homogeneous halfspace; the effect of ν on swaying, being of secondary importance, is not studied herein.

The same general trends observed in the dynamic behavior of circular foundations can now be seen in the

response of strip footings, although some differences are also obvious.

One first notices in Figs. 10-11 that due to the presence of bedrock both the in-phase (real) and the 90°-out-of-phase (imaginary) components of displacement (compliance) are not smooth and monotonically decreasing functions of frequency, as on a halfspace. Instead, they exhibit peaks and valleys at frequencies related to the natural frequencies of the stratum. Note that, in general, the peaks of a compliance function correspond to valleys in the impedance function.

The major differences between strip and circular foundations stem from the much greater sensitivity of the vertical and swaying oscillation of a strip to variations in H/B . Even for $H/B = 8$, relatively high amplitude peaks are observed in the two compliance functions of the strip, for the case $\xi = 0.05$; their difference from the halfspace

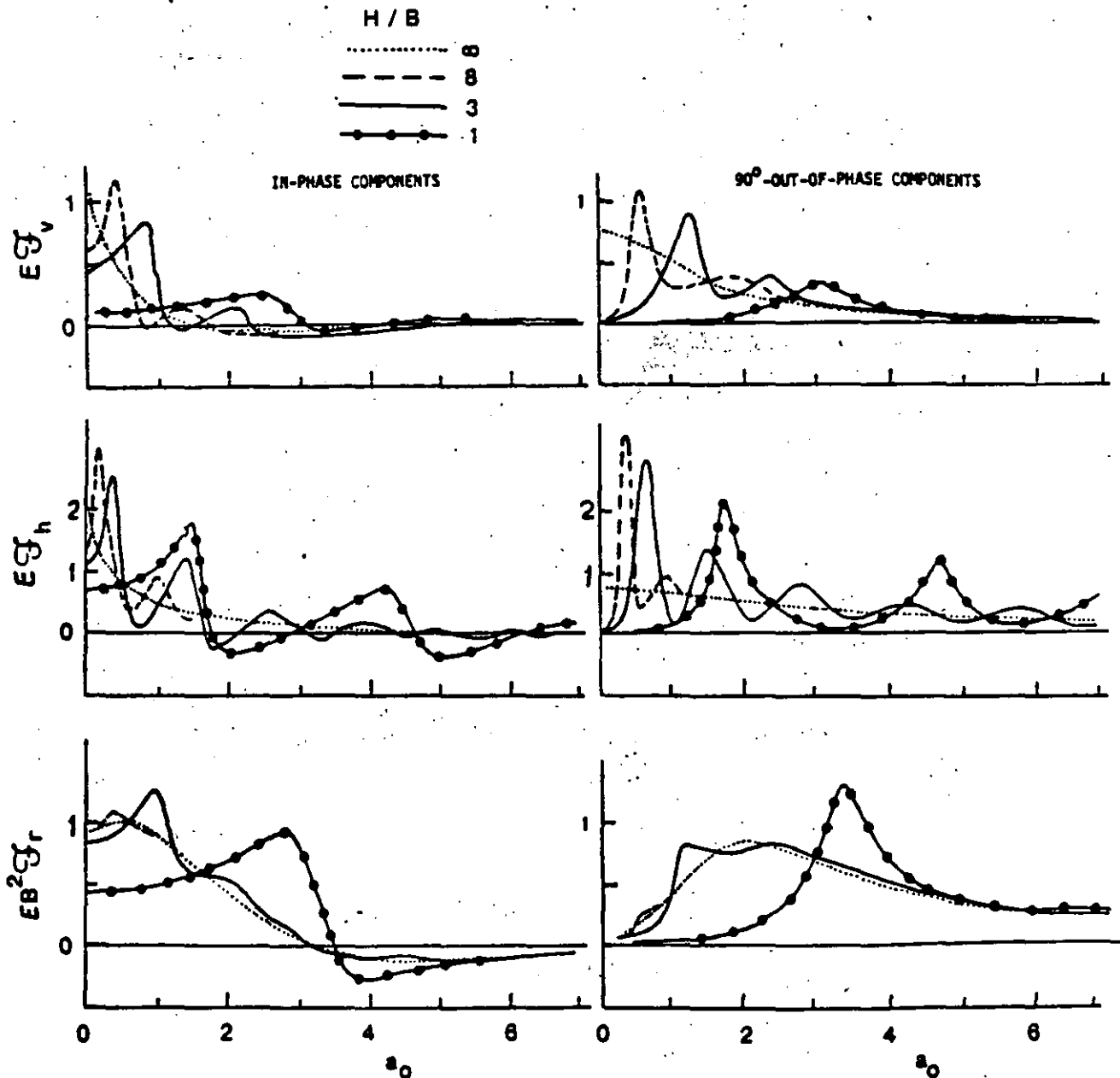


Figure 10. Compliance functions of rigid strip footing on stratum-over-bedrock; effect of H/B ratio ($\nu = 0.49$, $\xi = 0.05$)

compliances is substantial. On the other hand, rocking vibrations of a strip exhibit very similar trends with rocking of a circular plate; beyond $H/R = 3$ the presence of bedrock is hardly noticeable.

In the case of vertical loading, the resonant peaks are not as sharp as those of the horizontal displacements. In fact, on very shallow deposits ($H/B = 1$) only a single flat resonance takes place, which is characteristic of a highly damped system. A possible explanation of such a behavior has been suggested by Gazetas and Roesset³⁹: at frequencies below the first resonance some 'leakage' of energy occurs in the form of laterally propagating P -, S - and R -waves. Evidence in favor of this explanation comes from the fact that the first resonant frequency, a_{or} , lies in between the fundamental natural frequencies of the stratum in vertical S -waves, $a_{0s,1}$, and in vertical P -waves, $a_{0p,1}$. For example, Fig. 11 shows that, for $H/B = 2$ and $\nu = 0.40$, $a_{or} \approx 1.30$ compared to $a_{0s,1} = 0.785$ and $a_{0p,1} = 1.90$. Recall that for the circular foundation a_{or} was much closer to $a_{0p,1}$.

No extensive numerical results for rigid rectangular foundations supported by a soil-stratum have been found in the literature.

Foundation on stratum over a halfspace

The homogeneous halfspace and the stratum-over-rigid-base are two idealizations of extreme soil profiles. A more general soil model, the stratum-over-halfspace, is studied in this subsection. Besides the H/R or H/B ratio, the moduli ratio G_1/G_2 is needed to describe such a soil model. When G_1/G_2 tends to 0, the stratum-on-rigid base is recovered; when it becomes equal to 1, the model reduces to a homogeneous halfspace. Thus, the results presented in this section help in bridging the gap between 'halfspace' and 'stratum' solutions to which we have restricted our attention until now (Figs. 5-11).

Numerical solutions for a uniform layer over a halfspace have been published by Hadjian and Luco³⁷ who studied the dynamic of circular foundations, and by Gazetas and Roesset^{34,39} who studied the response of strip footings.

Based on the results provided by Hadjian and Luco,³⁷ the author has derived simple but reasonably accurate formulae for the static stiffnesses of a rigid circular disk, in terms of H/R and G_1/G_2 . Table 5 displays these formulae, which are valid for the usual case in which $G_1 \ll G_2$, i.e. a halfspace stiffer than the layer. At the lower limit, $G_1/G_2 \rightarrow 0$, these expressions reduce to those of Table 3 for a layer-on-rigid-base; at the upper limit, $G_1/G_2 = 1$, the halfspace expressions of Fig. 5 are recovered. At intermediate values, as the rigidity of the supporting halfspace decreases, the static stiffnesses of the foundation decrease, apparently due to increasing magnitude of strains in the halfspace. The results are intuitively obvious and need no further explanation.

For circular footings, no results are presented here on dynamic stiffness and damping coefficients, but reference is made to the original publication by Hadjian and Luco.³⁷

The variation of the dynamic compliances of a strip footing with a_0 and G_1/G_2 is portrayed in Fig. 12 for a layer with $H = 2B$, $\nu = 0.40$ and $\xi = 0.05$. Shallower as well as deeper layers have been examined by Gazetas and Roesset.^{34,39}

An inspection of Fig. 12 indicates that the effects of layering increase with increasing contrast between G_1 and G_2 ; these effects are extreme for a layer on rigid bedrock ($G_1/G_2 = 0$) and, naturally, disappear in the case of a homogeneous halfspace ($G_1/G_2 = 1$). There are two main effects of increasing the softness of the halfspace. First, even for small positive values of G_1/G_2 , i.e. as long as we do not deal with an infinitely rigid bedrock, the static translational displacement tends to infinity, although as

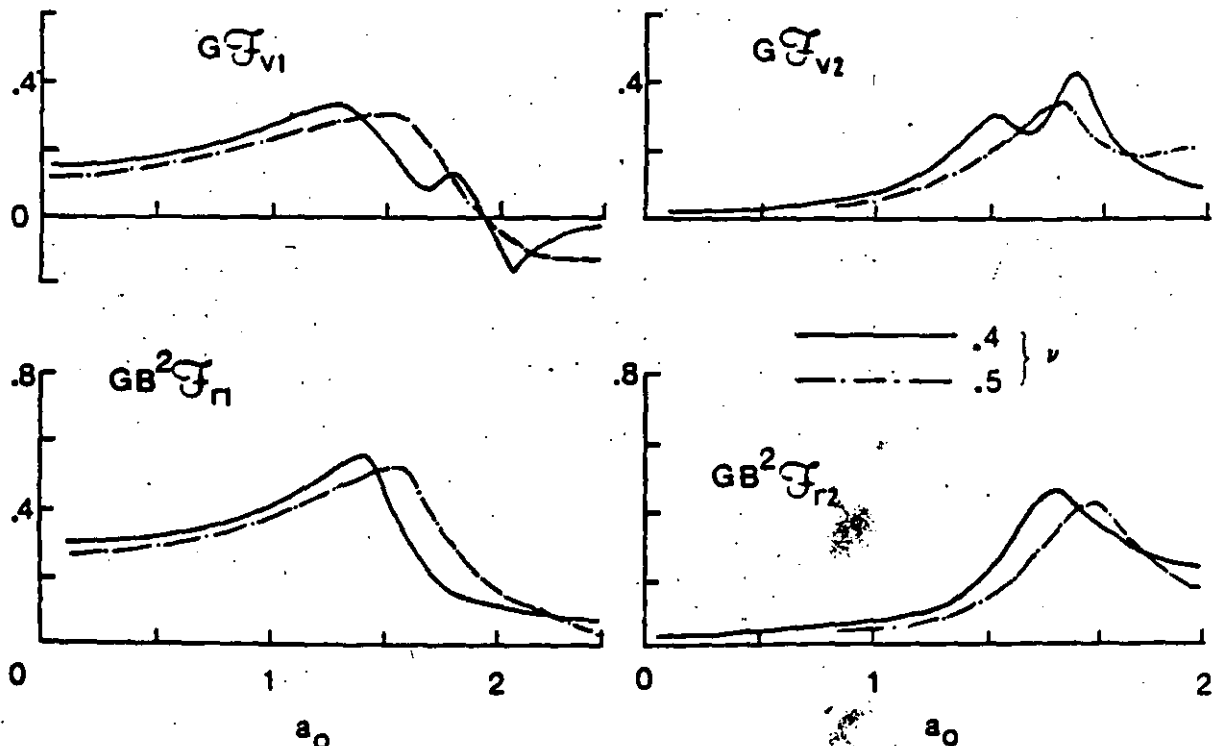


Figure 11. Compliance functions of rigid strip footing on stratum-over-bedrock: effect of ν ($H/B = 2$, $\xi = 0.05$)

Table 5. *Static stiffnesses of circular foundations on a stratum-over-halfspace**

Type of loading	Static stiffness ^a	Range of validity	Profile
Vertical:	$\frac{4G_1 R}{1-\nu_1} \cdot \frac{1+1.28 \frac{R}{H}}{1+1.28 \frac{R G_1}{H G_2}}$	$1 < \frac{H}{R} < 3$	
Horizontal:	$\frac{8G_1 R}{2-\nu_1} \cdot \frac{1+\frac{1}{2} \frac{R}{H}}{1+\frac{1}{2} \frac{R G_1}{H G_2}}$	$1 < \frac{H}{R} < 4$	
Rocking:	$\frac{8G_1 R^3}{3(1-\nu_1)} \cdot \frac{1+\frac{1}{6} \frac{R}{H}}{1+\frac{1}{6} \frac{R G_1}{H G_2}}$	$0.75 < \frac{H}{R} < 2$	

* Derived by the author on the basis of results provided by Hadjian and Luco²⁷

much slower rate compared to the halfspace displacements. Thus, in the very low frequency range the in-phase (real) components of the displacements (compliances) are larger than in the case of rigid bedrock.

On the other hand, at any specific frequency, the radiation damping of the system increases due to partial transmission of body-waves in the halfspace and the existence of surface waves at all frequencies. Consequently, the resulting variation of displacements with ω_0 is smoother than in the rigid rock case.

The effects of decreasing stiffness and increasing radiation damping are of major importance at frequencies equal to or lower than the first resonant frequencies of the system. With G_1/G_2 ascending from 0 (rigid bedrock) towards 1 (homogeneous halfspace), the aforementioned resonant peaks become shorter and flatter and the corresponding resonant frequencies shift to lower values.

Higher resonant peaks also decrease substantially and may in some cases be completely suppressed. An example: the third resonant peak in swaying (which, we recall, occurs at the second natural frequency of the stratum in S-waves) disappears as soon as G_1/G_2 exceeds 0.10.

Finally, it is hardly surprising that the vertical dynamic compliances are most sensitive to variations in G_1/G_2 , while rocking compliances are least sensitive. The concept of a 'dynamic pressure bulb' proves again very convenient in explaining these differences. The depth of the 'bulb' attains relatively large values in case of vertical vibrations, somewhat smaller values for swaying and very small values for rocking.

SOME RESULTS FOR RIGID SURFACE FOUNDATIONS OF 'ARBITRARY' SHAPE

Only a few numerical results are available for foundations having 'arbitrary' geometries, i.e. plan shapes other than strip, circular or rectangular. One reason for the lack of interest is that foundations of such 'arbitrary' shape are not constructed very frequently. Moreover, substantial computational effort must be expended to obtain dynamic solutions for such foundation geometries. The following presentation is divided into two parts: one dealing with vertically loaded footings of various 'solid' shapes and one with the complete response of annular footings.

Vertically loaded foundations of various 'solid' shapes

Analytical expressions for the static stiffnesses of rigid foundations supported to an elastic halfspace and having several different shapes (but without internal holes) can be derived from the results of Borodachev²⁴ (see also Selvadurai⁹). It is convenient to cast these expressions into our familiar form:

$$K_v = \frac{4GR_0}{1-\nu} \cdot J_v \quad (55)$$

in which: $R_0 = \sqrt{A/\pi}$ is the radius of the 'equivalent' circular foundation, A being the area of the soil-footing contact surface; J_v is a shape-dependent correction factor, numerical values of which have been tabulated in Table 6 for numerous plan shapes.

Table 6 in conjunction with Table 2 (part 1) can be used for determining the vertical static stiffnesses of a variety of foundations with very good accuracy. Moreover, the following trends are worthy of note:

1. The circular disk yields the smallest stiffness of all footings with a given contact area.
2. Of all rigid footings with an n -sided polygon-shaped plan of a given area, the regular n -sided polygon yields the smallest stiffness.
3. The correction factor depends primarily on the 'aspect' ratio of the foundation, being surprisingly insensitive to the details of each particular shape. By 'aspect' ratio we somewhat loosely mean the ratio between largest and smallest critical foundation dimensions. Thus, for example, a rhombus, a rectangle and an ellipse having the same aspect ratio, equal to 4, yield very similar correction factors of about 1.12.

In conclusion it seems that, by means of equation (55) and Tables 2 and 6, very good estimates can be routinely made of the vertical static stiffnesses of arbitrary-shaped rigid foundations on homogeneous halfspace.

No information is available regarding the variation with frequency of the dynamic stiffness coefficient k_v . However, inspection of Figs. 5 and 7 reveals that the 'equivalent' circular footing can successfully predict the actual k_v of rectangular footings with aspect ratios up to 4, at least in the low and medium frequency range ($\omega_0 \leq 1.5$). Hence, and in view of the observed insensitivity of the static stiff-

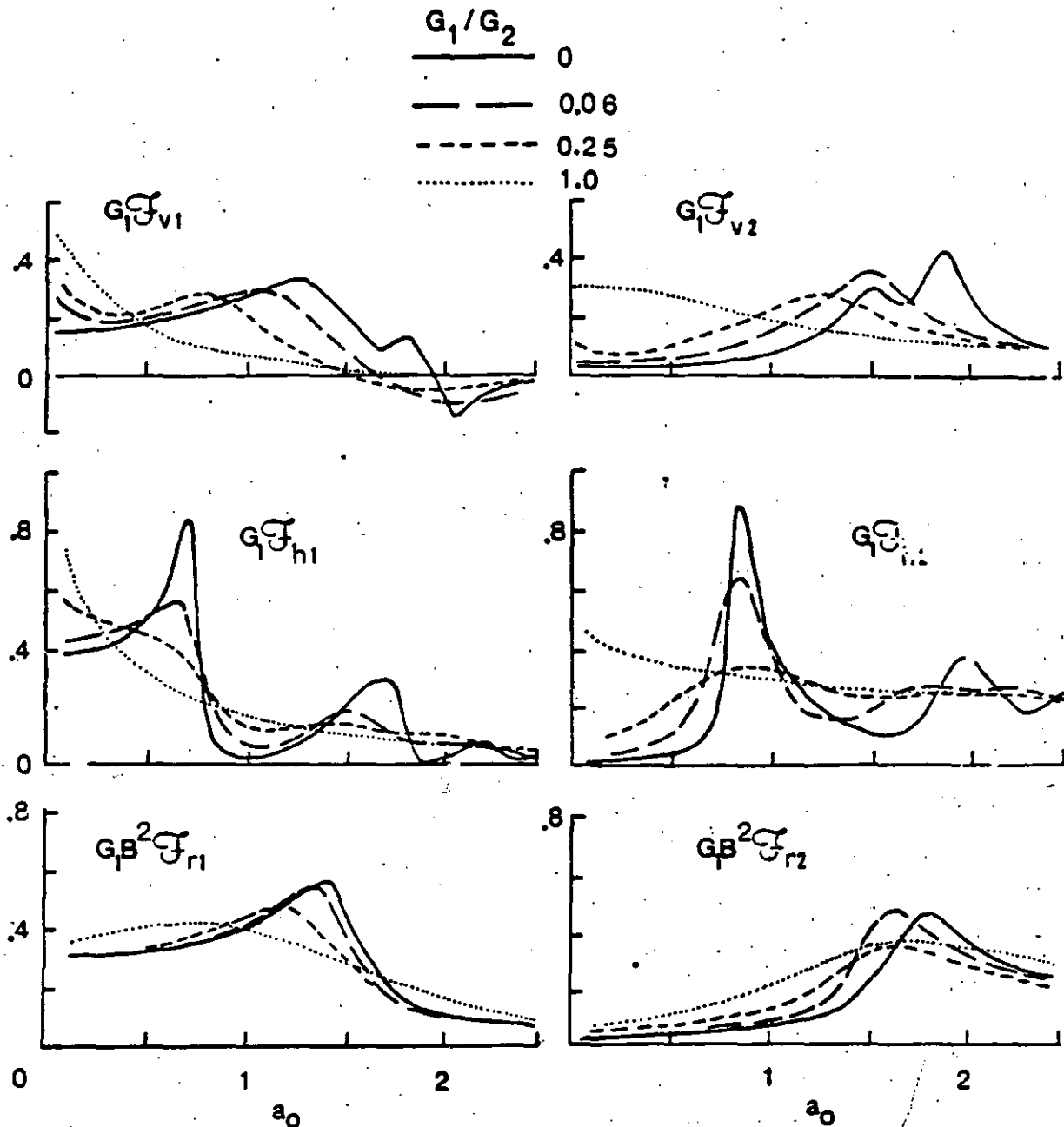


Figure 12. Effect of G_1/G_2 ratio on compliance functions of rigid strip footings on soil layer-over-halfspace ($H/R = 2$, $\nu = 0.40$, $\xi = 0.05$)

ness to the details of the foundation shape, it is proposed that the variation of k_v with a_0 for an 'arbitrary'-shaped foundation be estimated from Fig. 5 using the 'equivalent' radius, $R_0 = \sqrt{A/\pi}$.

On the other hand, the damping coefficient c_v is practically independent of frequency, as it is evident from Figs. 5 and 7. For an arbitrary-shaped foundation, moreover, Dobry *et al.*⁹⁵ have recently derived expressions for the (radiation) damping coefficients in vertical and swaying vibrations, based on simple but realistic physical approximations. For the vertical damping coefficient of a surface foundation their expression reduces to:

$$c_v = \frac{0.85}{J_v} \quad (56)$$

in which J_v = the shape correction factor to be read from Table 6 or Table 2. Consequently, the vertical dynamic impedance of an arbitrary-shaped rigid foundation on a homogeneous halfspace can be directly and reliably estimated using the provided information.

For the other translational and rotational modes of vibration of arbitrary-shaped rigid foundations, much less information is presently available. The 'equivalent-circle' approximation appears to be a simple and reasonable choice.

Rigid annular foundation on soil stratum

It appears that the conclusions of the preceding subsection cannot be extended to foundations containing internal holes, like annular and crossed-beam foundations.

Table 6. Values of shape-dependent correction factor for vertical static stiffnesses^a

Shape of foundation plan	J_v
Circle	1.00
Regular hexagon	1.01
Semicircle	1.05
Equilateral triangle	1.07
Triangle with angles, 45°, 45°, 90°	1.10
Triangle with angles, 30°, 60°, 90°	1.12
Ellipse with $a/b = 2$ †	1.03
Ellipse with $a/b = 3$	1.07
Ellipse with $a/b = 4$	1.13
Ellipse with $a/b = 6$	1.21
Rhombus with an angle of 60°	1.07
Rhombus with an angle of 45°	1.14
Rhombus with an angle of 30°	1.27
Rectangle with $L/B = 2$	1.03
Rectangle with $L/B = 4$	1.13
Rectangle with $L/B = 8$	1.23

^a Based on Borodachev⁹⁶.

† a, b are the major, minor axes of the ellipse

For example, the vertical static stiffness of such foundations does not increase in proportion to the square-root of the contact area, A , as equation (55) implies. In other words, the 'equivalent-circle' approximation is no longer valid.

Results for the static displacements of a rigid circular ring on a halfspace have been published: by Egorov⁹⁶ and Dhawan⁹⁷ for vertical loading; by Dhawan⁹⁸ for moment loading; and by Dhawan⁹⁹ for torsional loading. Wong and Luco⁴⁴ studied the dynamic vertical response of a rigid square foundation with a square internal hole. Recently, Tassoulas⁸⁸ presented a comprehensive parametric investigation of the dynamic behavior of rigid circular-ring foundations on a homogeneous stratum-over-rigid-base. All modes of vibration were considered and the effect of the dimensionless parameters R_i/R , H/R and $a_0 = \omega R/V_s$ was graphically illustrated. The following discussion is based primarily on the results of Tassoulas,⁸⁸ although some results from Dhawan,⁹⁷⁻⁹⁹ are also included for comparison.

Figure 13 plots the variation of all static stiffnesses of a circular ring versus R_i/R , where R_i is the internal radius. As expected, all stiffnesses invariably decrease as the size of the hole increases, while the radius R remains constant. In the limit, when R_i becomes equal to R , the stiffnesses vanish (concentrated ring load). However, the sensitivity of stiffnesses to increases in the R_i/R ratio is surprisingly small. Particularly insensitive are the rocking and torsional stiffnesses. For values of R_i/R up to 0.50, they are practically equal to the corresponding stiffnesses of the circular foundation with radius R ; for $R_i/R = 0.95$, K_r and K_t are respectively equal to 86% and 83%, of the circular stiffnesses in torsion and rocking (while the contact area has been reduced to only 10% of the original circle). The explanation is rather obvious: the large shear or normal stresses which develop near the outside edge of the footing, i.e. at large distances from the center, contribute substantially to equilibrating the applied torsion or rocking moments. In other words, the central foundation 'core' is 'underutilized' and, hence, its 'removal' is of little consequence. Notice also that the variation of K_r and K_t with R_i/R is independent of H/R - a result consistent with the shallow 'pressure bulb' of moment loading discussed in preceding sections (e.g. Table 3).

The horizontal stiffness is only slightly more sensitive to R_i/R . In contrast, the vertical stiffness is relatively

sensitive not only to R_i/R but to H/R as well. An example: increasing R_i from 0 to 0.95 R reduces K_v to 70% of its original value for $H/R = 2$; for a halfspace the corresponding value is 77%. But, again, for values of R_i/R up to 0.5, K_v remains practically equal to its original value, $4GR(1+1.28R/H)/(1-\nu)$.

Figure 14 depicts the variation with a_0 of the dynamic stiffness and damping coefficients, k and c . Four values of R_i/R are considered, 0, 0.5, 0.8 and 0.90, with the first value corresponding to a solid circular foundation. It is clear that: (1) there is little change in k and c with R_i/R ; (2) the effect of R_i/R is largest for vertical vibrations; and (3) the differences in the four sets of curves occur in the high frequency range ($a_0 > 1.5$).

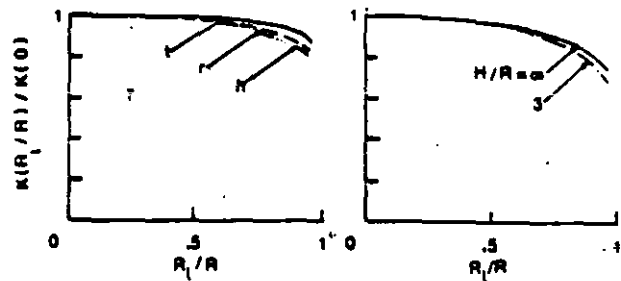


Figure 13. Static stiffnesses of a rigid annular foundation (R_i = internal radius)^{88, 97}

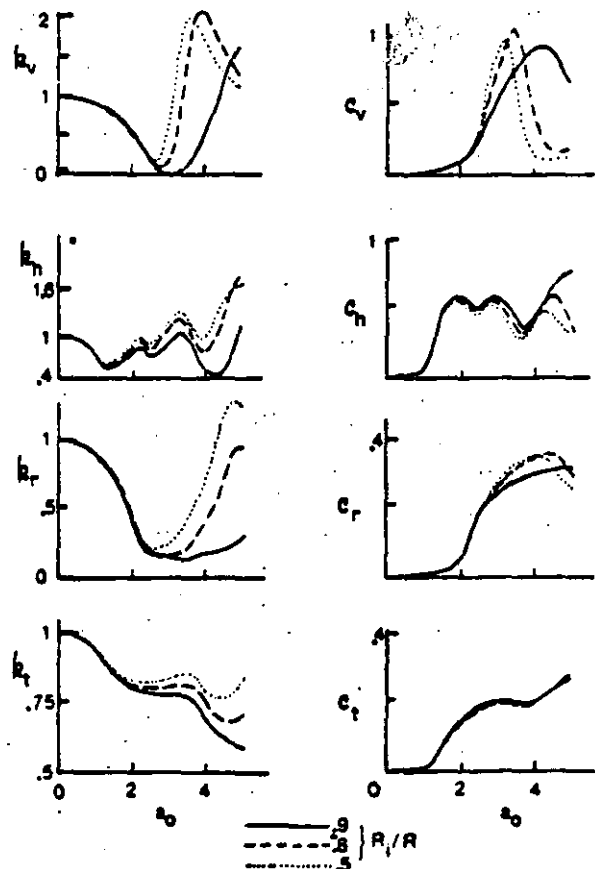


Figure 14. Dynamic coefficients of a rigid annular foundation⁸⁸.

THE INFLUENCE OF INHOMOGENEITY, ANISOTROPY AND NONLINEARITY OF SOIL

The results presented so far have been based on the simplifying assumption that the soil can be modeled as a homogeneous, isotropic and linearly visco-elastic stratum or halfspace. However, real soil strata frequently increase in rigidity with depth as a reflection of the increase in overburden pressure, while in some other cases weathered crusts, in which rigidity decreases with depth, overlay deposits of softer clay. Furthermore, laboratory tests show that soils deform differently in the vertical and horizontal directions – a manifestation of anisotropic fabric acquired during natural formation and subsequent loading. Finally, when subjected to large enough stresses, soils respond as nonlinear and inelastic materials.

This section of the paper presents characteristic results and important conclusions from a number of recent studies aimed at assessing the influence of soil inhomogeneity, anisotropy and nonlinearity on the behavior of dynamically loaded surface foundations.

Effect of soil inhomogeneity

Existing dynamic finite-element formulations can easily, albeit approximately, simulate a continuous variation of soil properties, by dividing the deposit into a number of homogeneous layers of increasing or decreasing stiffness. Yet, such formulations have not been adequately exploited to parametrically study the dynamic behavior of foundations. Thus, most of the available solutions have been derived using analytical and semi-analytical methods.

Numerous studies have been published for the vertical static problem. Prominent among them is the work of Gibson and his co-workers,^{13, 100, 101} who studied the response to arbitrary surface loads of a halfspace or stratum whose moduli increase linearly with depth, i.e. in the form $G = G_0 + \bar{m}(z/R)$, where G_0 and \bar{m} are the moduli at the surface and at a one-radius (or one-semiwidth) depth. These studies revealed that for an incompressible medium, i.e. with Poisson's ratio of 0.50, the stress distribution is hardly influenced by the degree of inhomogeneity; in the particular case of zero surface modulus ($G_0 = 0$) this distribution is identical with the distribution in a homogeneous

halfspace, regardless of foundation geometry. The surface settlement, on the other hand, being quite sensitive to the assumed soil profile, becomes directly proportional to the applied normal pressure when $G_0 = 0$, independent of the size and shape of the loaded area and of the thickness, H , of the soil layer on a rigid but frictionless (smooth) base. Thus, such a soil behaves like a Winkler medium rather than a homogeneous halfspace, its spring constant being simply equal to $2\bar{m}/R$. Expressions for the vertical static stiffnesses of surface foundations of several shapes supported by such a soil deposit (frequently referred to as 'Gibson soil') are shown in Table 7.

This behavior remains only qualitatively true when drained soil behavior is taking place (i.e. $\nu < 0.50$). Thus, with increasing degree of inhomogeneity (e.g. increasing \bar{m}) normal and shear stresses affect the soil at greater vertical and lesser horizontal distances, in agreement with intuition that expects stiffer material to attract larger stresses. On the other hand, surface displacements, being moderately sensitive to ν , do tend to become proportional to the applied local pressures as m increases. It is, thus, generally concluded that an inhomogeneous deposit leads to more uniform distribution of stresses under rigid foundations than the simple elastic theory (homogeneous halfspace) predicts.

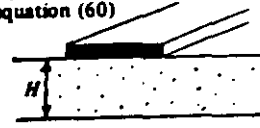
This general behavior of vertically loaded surface foundations on an inhomogeneous soil deposit has been recently shown to be applicable to torsionally loaded circular footings.⁹³

The static and dynamic vertical, horizontal and rocking behavior of a rigid strip foundation supported by a halfspace or a stratum whose wave velocities increase linearly with depth, has been studied by the author.³³ Some results of that study are presented here for a halfspace consisting of soil with a constant mass density, a constant Poisson's ratio, $\nu = 0.25$, and a constant hysteretic damping, $\xi = 0.05$, and an S-wave velocity varying with depth according to:

$$V_s = V_0 \left(1 + \lambda \frac{z}{B} \right) \quad (57)$$

in which: V_0 = surface velocity; $2B$ = foundation width; and λ = the dimensionless rate of inhomogeneity.

Table 7. Static stiffnesses of rigid foundations on inhomogeneous and cross-anisotropic soils*

Type of loading	Static stiffness	Range of validity	Soil profile
Vertical, on foundation of any shape	$2 \frac{\bar{m}}{B} A$ $A = \text{contact area}$	Undrained loading conditions	Cross-anisotropic 'Gibson' halfspace obeying equation (60), with a modulus $G_{VH} = \bar{m}(z/B)$
	$\frac{\bar{m}}{B} A \left(1 + \frac{E\nu/G_{VH}}{4-\nu} \right)$ $A = \text{contact area}$		General cross-anisotropic 'Gibson' halfspace (i.e. not obeying equation (60)) with a modulus $G_{VH} = \bar{m}(z/B)$
Vertical, on rigid strip	$\frac{45 E \nu}{\left(1 + 3.5 \frac{H}{B} \right) [4 - \nu]^{(1/6)} (H/B)}$	$1 < \frac{H}{B} < 4$ $0.5 < \nu < 2.5$	Shallow cross-anisotropic undrained layer; soil properties are uniform throughout the layer and they satisfy equation (60)
Horizontal, on rigid strip	$\frac{8}{5} E \nu \frac{1 + \frac{5}{3} \frac{B}{H}}{4.10 - \nu(H/B)^{0.25}}$	$1 < \frac{H}{B} < 6$ $0.5 < \nu < 2.5$	

* Based on results by Gibson¹³ and Gazetas³³

Figure 15 portrays the dependence of λ of the normalized vertical, horizontal and rocking stiffnesses. As one might expect, the vertical stiffness exhibits the largest sensitivity to λ and the rocking stiffness the smallest—another manifestation of the difference in the 'pressure bulbs' of the three types of loading.

The effect of soil inhomogeneity on the three dynamic compliance functions is shown in Fig. 16. Two values of the parameter λ are considered: 0 and 1.5. The former value corresponds to a homogeneous halfspace, the wave velocity of which, V_{eff} , was selected to be the same with the wave velocity of the inhomogeneous halfspace at a depth equal to the foundation halfwidth, B , i.e.:

$$V_{eff} = V_0(1 + \lambda) \quad (58)$$

The choice of such a homogeneous halfspace for the comparison has been motivated by the frequent use in practice of solutions developed for homogeneous soils, with an effective modulus equal to the actual modulus at a depth equal to B or R , to approximate the actual response.

It is evident from the comparison of Fig. 16 that, in the low frequency range examined, the inhomogeneous medium yields vertical and horizontal displacements (both in-phase and 90°-out-of-phase components) which are, indeed, of about the same average level with those of the 'equivalent' homogeneous halfspace. However, the rocking motions on the inhomogeneous deposit are seriously underpredicted by the chosen homogeneous halfspace

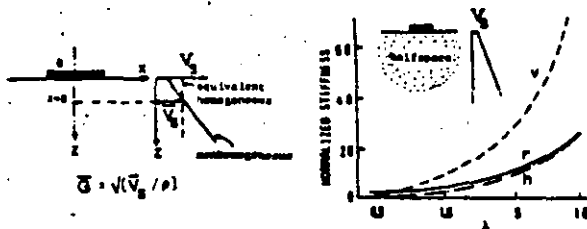


Figure 15. Static stiffnesses of a rigid strip foundation on an inhomogeneous halfspace ($\nu = 0.25$)³³

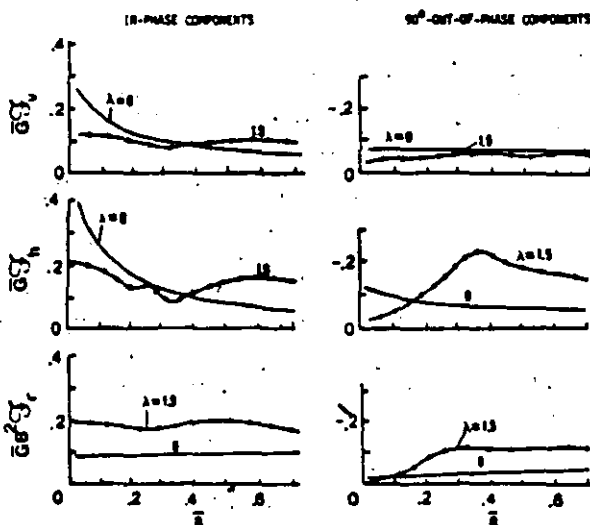


Figure 16. Compliance functions of a rigid strip foundation on an inhomogeneous halfspace ($\nu = 0.25$, $\xi = 0.05$)³³

model; to yield comparable rotation levels the two media must have the same moduli at a depth of about $B/2$, or somewhat less.

Furthermore, a substantial difference between the ' $\lambda = 1.5$ ' and ' $\lambda = 0$ ' compliance functions may be noted. Namely, the former are not smoothly varying functions of ω_0 , as are the latter, but exhibit peaks and valleys which are apparently the result of resonance phenomena. In the very low frequency range the imaginary components of the ' $\lambda = 1.5$ ' compliances attain quite small values, increasing almost linearly with ω_0 .

These phenomena are reminiscent of the dynamic behavior of foundations supported by a stratum-over-a-rigid-base (Figs. 10-11). In this case, total reflection of the downward propagating waves is possible due to the increasing soil velocity with depth. A discontinuity in velocity is not necessary for such a reflection, since the wave rays in inhomogeneous media with linear velocity profiles are not straight lines but circular arcs. As a result, however, the resonant peaks on inhomogeneous soils are very flat and the radiation damping is never zero. In contrast, the presence of stiff rock-like material at some depth beneath the surface leads to very sharp and pronounced displacement peaks, occurring at well separated frequencies (see Fig. 8-11).

Deposits with a weathered crust. The dynamics of a rigid strip foundation on an idealized soil deposit consisting of a homogeneous stratum or halfspace overlain by a top stiffer layer in which the shear modulus decreases as a second-degree parabola (Fig. 17) has been recently studied by the author.³⁵ Also recently, Rowe and Booker,¹⁰² presented comprehensive parametric results pertaining to vertical static uniform loading, both plane-strain and axisymmetric, on several realistic inhomogeneous deposits, including a homogeneous layer with a weathered crust.

Figure 17³⁵ illustrates the effect of the reduced crust thickness D_{cr}/B on the three normalized dynamic impedance functions of a rigid strip. The soil profiles are characterized by a shear modulus ratio, G_{cr}/G , equal to 4, and realistic values of the Poisson's ratios, ν_{cr} and ν , equal to 0.25 and 0.45, respectively. Note that the ratios G_{cr}/B and D_{cr}/B may be considered as indexes of the degree and depth of weathering.

It is evident that the presence of the crust has a pronounced effect on all impedances. Especially sensitive to changes in D_{cr}/B are the horizontal impedances, whereas the vertical and rocking ones are somewhat less affected. Variations in the assumed moduli ratio (not depicted in Fig. 17) have been shown to have a similar effect.

Furthermore, the weathering effects exhibit a strong dependence on frequency. For example, at low frequency factors vertical impedances are relatively indifferent to variations (within realistic limits) in either stiffness or depth of the crust. This is understandable in view of the fact that vertical surface strip loading affects the soil at great depths, of the order of $8B$, as discussed previously; thus, a stiff crust with $D_{cr} < B$ can only be of secondary importance. This picture, however, changes at higher frequency factors, i.e. lower wavelength-thickness ratios, as may be seen in Fig. 17. Greater participation of surface (Rayleigh) waves in the motion and stronger reflection of the body waves emanating from the foundation by the soft layer interface, may be part of the explanation.

It may also be noticed that rocking impedances show about the same sensitivity to weathering throughout the

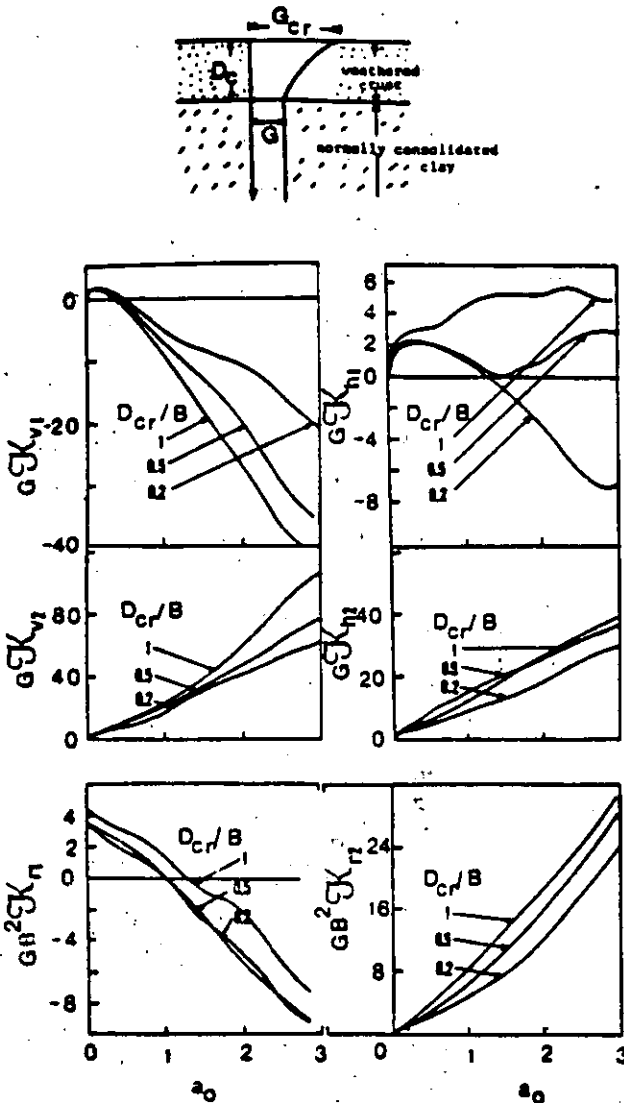


Figure 17. Impedance functions of a rigid strip foundation on deep soil deposit with a weathered crust ($G_{cr}/G = 4$, $\nu_{cr} = 0.25$, $\nu = 0.45$, $\xi = 0.05$)⁵⁵

frequency range examined, and that, in general, the imaginary parts of all three impedance functions exhibit only a small dependence on either D_{cr}/B or G_{cr}/G .

Reference is made to the original publication by the author for a more complete parametric assessment of the dynamic effects of 'weathering' on strip foundations. The author sees a definite need to extend these studies to dynamically loaded circular foundations.

Effect of soil anisotropy

Numerous experimental studies have shown that most natural soils and rocks possess anisotropic deformational characteristics.^{13, 103-106} This anisotropy stems from the fact that soil fabric is intimately related to the mechanical processes occurring during formation, which involves anisotropic stress systems. Thus, for example, natural clay deposits formed by sedimentation and, subsequently, one-dimensional consolidation over long periods of time acquire a fabric that is characterized by particles or particle clusters oriented in a horizontal arrangement. This preferred orientation

makes the clay a cross-anisotropic material with a vertical axis of symmetry. Similarly, fabric anisotropy in sands arises from the influence of gravity forces and particle shape on the deposition process, while in rocks the anisotropy may result from the anisotropy of forming minerals and micro- or macro-fabric features.

While an isotropic elastic material is characterized by only two independent elastic constants (e.g. shear modulus and Poisson's ratio), five parameters are needed to describe the stress-strain relationships of an elastic cross-anisotropic material: a Young's modulus E_V in the vertical direction; a Young's modulus E_H in the horizontal direction ($E_H = nE_V$); a Poisson's ratio ν_{VH} for the effect of vertical on horizontal strain; a Poisson's ratio ν_{HH} for the effect of horizontal on complementary horizontal strain; and a shear modulus $G_{VH} = G_{HV}$ for distortion in any vertical plane, i.e. any plane parallel to the vertical axis of material symmetry. Note that isotropic materials are just a particular class (subset) of cross-anisotropic materials characterized by $n = 1$ (i.e. $E_H = E_V \equiv E$, $\nu_{VH} = \nu_{HH} \equiv \nu$ and $G_{VH} \equiv G = E/2(1 + \nu)$).

The condition of incompressibility, appropriate for undrained loading conditions, requires that:

$$\nu_{VH} = 0.50, \quad \nu_{HH} = 1 - \frac{n}{2} \quad (59)$$

and, thus, reduces the number of independent material constants to three. Moreover, utilizing the results of several experimental investigations, the author has recently shown⁵⁴ that, in many clays, the shear modulus G_{VH} is closely related to the other four material constants. Under undrained conditions, for example, with a reasonable accuracy:

$$G_{VH} = \frac{E_V}{4 - n} \quad (60)$$

Thus, the number of independent material constants reduces to two, under undrained conditions, and to four, under drained conditions.

Results for statically loaded rigid foundations on cross-anisotropic soils have been presented by Gerrard and Harrison,^{92, 107} Gibson¹³ and Gazetas.⁵⁴ Solutions for dynamically loaded foundations on cross-anisotropic homogeneous soil deposits whose elastic constants satisfy equation (60) (or its 'drained' counterpart, not given here) have been presented by Kirkner⁶⁷ for circular foundations on halfspace and by the author^{54, 108, 109} for strip foundations on homogeneous stratum or on halfspace. Table 7 and Fig. 18 offer some characteristic results from the mentioned publications.

Specifically, Table 7 displays simple but fairly accurate formulae for the vertical static stiffness of arbitrary-shape foundations on a cross-anisotropic, incompressible and inhomogeneous halfspace ('Gibson' soil), and for the vertical and horizontal static stiffnesses on a homogeneous and incompressible cross-anisotropic shallow soil stratum-on-rigid base. Notice that on an anisotropic 'Gibson' halfspace obeying equation (60), the degree of anisotropy has no influence on the vertical stiffness. In all other cases, however, the stiffnesses increase substantially with $n = E_H/E_V$. In fact, for $n \rightarrow 4$ all stiffnesses tend to infinity, since the strain energy of such a material is zero for all possible applied stress systems.^{13, 107}

Regarding the sensitivity of the dynamic response to variations in the degree of anisotropy, n , under undrained conditions, the main conclusions of the aforementioned studies are summarized as follows.

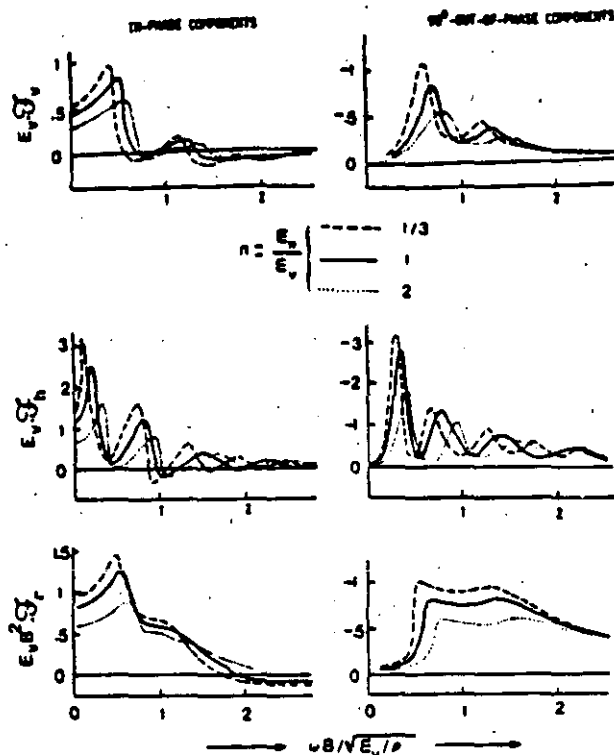


Figure 18. Effect of soil anisotropy on compliance functions of a rigid strip foundation on stratum-over-bedrock (undrained conditions, $H/B = 3$, $\xi = 0.05$)⁵⁴

For the two compressional modes of vibration, i.e. vertical and rocking, the influence of anisotropy is appreciable but seems to decrease as the thickness of the stratum-on-bedrock decreases, with the shear modulus G_{VH} remaining constant. The effect of anisotropy on the shearing mode of vibration, i.e. swaying, is similar with the effect of anisotropy on G_{VH} and independent of the layer thickness; in other words, two soils with identical G_{VH} and H but with different Young's moduli and n , will yield very similar undrained dynamic displacements.

Figure 18 portrays the dependence on n of the three compliance functions of frequency, for a layer with $H = 3B$ and constant E_p . It is concluded that, in the low and medium frequency range, by increasing n the dynamic displacements decrease and the resonant frequencies shift to the right, roughly in proportion to $(4 - n)^{-1/2}$. Obviously, the corresponding decrease in the static stiffness may be held responsible for this effect. At certain higher frequencies, however, rocking and vertical displacements increase, instead of decreasing, with n . Nonetheless, the practical significance of such a reversal will probably be small, in view of the small displacement amplitudes at such frequencies.

In conclusion, anisotropy exerts its main effect through the static stiffnesses of the soil-foundation system.

Effect of soil nonlinearity

In current soil-structure interaction practice the nonlinear plastic soil behavior is usually approximated through a series of iterative linear analyses, using soil properties (moduli and damping ratios) that are consistent with the level of shearing strains resulting from the previous analysis.^{54, 110} These analyses may utilize a wealth of available experimental soil data relating the decrease in (secant)

shear modulus and the increase in (effective) damping ratio with increasing amplitude of shear strain.

Soil nonlinearities are not usually of a significant magnitude in machine foundation problems, for the reasons mentioned in the introduction. (In contrast, the response of soil-foundation systems to strong earthquakes is very sensitive to deviations from linear-elastic soil behavior.) Nonetheless, even with small amplitudes of vibration, it is almost certain that some soil elements will undergo plastic deformations. For instance, under the edges of rocking shallow foundations, large concentration of stresses and low confining pressures will invariably lead to yielding of soil.⁹

An interesting parametric investigation of the effects of soil nonlinearities on the dynamic impedance functions of a rigid strip foundation has been conducted by Jakub and Roeset.⁵⁶ In their studies the soil was modeled as a homogeneous or inhomogeneous stratum-over-rigid-base with reduced thicknesses $H/B = 1, 2$ and 4 . A Ramberg-Osgood model was used to simulate the nonlinear constitutive relation of soil, and iterative linear analyses were performed. One of the two parameters of the Ramberg-Osgood model, r , was kept constant equal to 2, while the second one, α , was varied so as to cover a wide range of typical soil stress-strain relations. For such a model the variation of secant modulus and effective damping ratio with stress amplitude is given by:

$$\frac{G}{G_0} = \frac{1}{1 + \alpha(\tau/G_0\gamma_y)} \quad (61)$$

and

$$\xi = \frac{2}{3\pi} \frac{G}{G_0} \frac{\tau}{G_0\gamma_y} \quad (62)$$

in which: G_0 = the initial shear modulus for low levels of strain; γ_y = a characteristic shear strain, typically ranging from 0.0001% to 0.01%, and τ = the amplitude of the induced shear stress.

From these studies Jakub and Roeset^{56, 65} concluded that a reasonable approximation to the swaying and rocking impedances of a rigid strip may be obtained from the available linear visco-elastic solutions (e.g. Table 4 and Figs. 10-11), provided that 'effective' values of G and ξ are estimated from equations (61)-(62) with:

$$\tau = \tau_c \quad (63)$$

where τ_c is the statically induced shear stress at a depth equal to $0.30B$, immediately below the foundation edge.

While more studies would be necessary to improve the reliability of this simple rule, its use in machine foundation analyses can be safely recommended, in view of the small local nonlinearities that usually develop.

RIGID EMBEDDED FOUNDATIONS

The response of embedded foundations to static and dynamic loads has received considerable attention. As a result, several finite-element as well as approximate continuum-type formulations have been developed, while parametric studies have explored the relative significance of the depth and 'type' of embedment. Reference is made to the work of Lysmer *et al.*,⁸³ Novak *et al.*,¹¹¹ Beredugo

⁹ Evidence of such yielding has been presented by Richar: *et al.* (Figs. 10 and 26), while recent experimental work at the University of Michigan revealed a similar phenomenon under torsionally excited footings.¹¹⁰

et al.,⁷¹ Waas et al.,³¹ Kausel et al.,⁸⁹ Chang-Liang,⁸⁷ Johnson et al.,¹¹² Luco,⁶⁶ Dominguez et al.,⁴⁷ Harada et al.⁷⁶ and Tassoulas,⁸⁸ among several others.

Results have been presented for circular, strip and rectangular foundations and a variety of idealized soil profiles, including the halfspace, stratum-over-bedrock and stratum-over-halfspace. In each case, the new key dimensionless problem parameter, in addition to the parameters controlling the response of surface foundations, is the relative embedment, D/B or D/R . Moreover, the assumed interface behavior at the contact between vertical sidewalls and backfill is of crucial importance. Most of the aforementioned studies assume that walls and soil remain in full contact during vibrations, as if they were welded at their interface. In reality, however, no tensile stresses can be sustained between the two media, while the magnitude of developing shear tractions cannot violate Coulomb's friction law. Hence, separation and sliding are likely to occur between sidewalls and backfill, depending primarily on the mode of vibration and the nature and method of placement of the soil. Field evidence, documented by Stokoe and Richart,¹¹³ seems to indicate that separation and sliding are more likely with clayey than with sandy soils, in accord with intuition. Furthermore, it is expected that separation will be more significant with the two antisymmetric modes of vibration (swaying and rocking), whereas sliding will be of greater importance in the two symmetric modes (vertical and torsional). Ideally 'welded' foundations are studied first.

'Welded' cylindrical foundations in a homogeneous stratum

The results to be presented are based on the work of Kausel³³ and are strictly applicable to foundations having infinitely rigid sidewalls and mat, which are all in perfect contact with the soil. Moreover, the backfill must be of very good quality and have the same properties with the soil beneath the mat. These are rather extreme conditions and, thus, yield an upper bound of the possible effect of embedment.

Table 8 displays five simple and sufficiently accurate formulae for the static stiffnesses of cylindrical foundations, perfectly embedded in a homogeneous soil layer overlying bedrock. It is evident that embedment increases the values of the static stiffnesses substantially. The increase in D/R is especially beneficial to the two rotational modes, rocking and torsion; the two translational modes, vertical and horizontal, are considerably less affected (factors of

1/2 and 2/3 for vertical and horizontal loading, as compared to 2 and 2.67 for rocking and torsion).

In contrast, the effect of D/H is more visible in the vertical and horizontal modes, appreciably less important in rocking, and negligible in torsion; this is consistent with the expected depths of the corresponding 'pressure bulbs', discussed in the preceding sections.

Note that with embedded foundations the cross-coupling stiffness, K_{hp} , can no longer be neglected, being approximately equal to $0.4K_h D$.

The effect of embedment on the frequency variation of the dynamic stiffness and damping coefficients is demonstrated in Fig. 19. We notice that k is not very sensitive to D/R . In fact, Elsabee et al.¹¹⁴ recommended that the actual frequency variation of k of an embedded foundation be approximated by the variation of the corresponding surface foundation. This seems to be very reasonable for all vibration modes at low frequencies. For rocking and torsion, in particular, the approximation will for all practical purposes be good throughout the frequency range examined; in other words, the beneficial effect of increasing D/R on the static rotational stiffnesses is preserved even at higher values of a_0 , at least for not very large D/R ratios. However, beyond the first resonant frequency, vertical and swaying vibrations exhibit undulations in k which cannot be well reproduced with the results of surface foundations.

All damping coefficients increase substantially with increasing embedment, although below the first resonance, a_{0r} , they remain small. It has been recommended^{90, 114} that for $a_0 > a_{0r}$, c be taken equal to a constant value, corresponding to the average value of c of a foundation embedded in a halfspace. To estimate this latter value of c , use may be made of the simple expressions derived by Dobry et al.⁹⁵ on the basis of simple but realistic physical approximations. For the two translational modes, the frequency-independent damping coefficients for cylindrical foundations embedded in a halfspace are approximated by:

$$c_h \approx \frac{\pi(2-\nu)}{8} \cdot \frac{1+1.3(D/R)[1+(3.6/\pi(1-\nu))]}{1+\frac{1}{2}(D/R)} \quad (64)$$

and

$$c_v \approx 0.85 \frac{1+1.85(1-\nu)(D/R)}{1+\frac{1}{2}(D/R)} \quad (65)$$

The increase of the two damping coefficients with D/R is reflected in the much larger coefficients they are multi-

Table 8. Static stiffnesses of rigid embedded cylindrical foundations 'welded' into a homogeneous soil stratum-over-bedrock*

Type of loading	Static stiffness	Profile
Vertical	$\frac{4GR}{1-\nu} \left(1 + 1.28 \frac{R}{H}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{D}{R}\right) \left(1 + \left[0.85 - 0.28 \frac{D}{R}\right] \frac{D/H}{1-D/B}\right)$	<p>Range of validity: $\frac{D}{R} < 2$ $\frac{D}{H} < 0.5$</p>
Horizontal	$\frac{8GR}{2-\nu} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R}{H}\right) \left(1 + \frac{2}{3} \frac{D}{R}\right) \left(1 + \frac{5}{4} \frac{D}{H}\right)$	
Rocking	$\frac{8GR^2}{3(1-\nu)} \left(1 + \frac{1}{6} \frac{R}{H}\right) \left(1 + 2 \frac{D}{R}\right) \left(1 + 0.7 \frac{D}{H}\right)$	
Coupled horizontal-rocking	$0.40K_h D$	
Torsion	$\frac{16}{3} GR^2 \left(1 + 2.67 \frac{D}{R}\right)$	

* From Elsabee et al.¹¹⁴ and Kausel et al.³³

† For foundation with deeper embedment the formulae underpredict the 'actual' increase in the stiffnesses

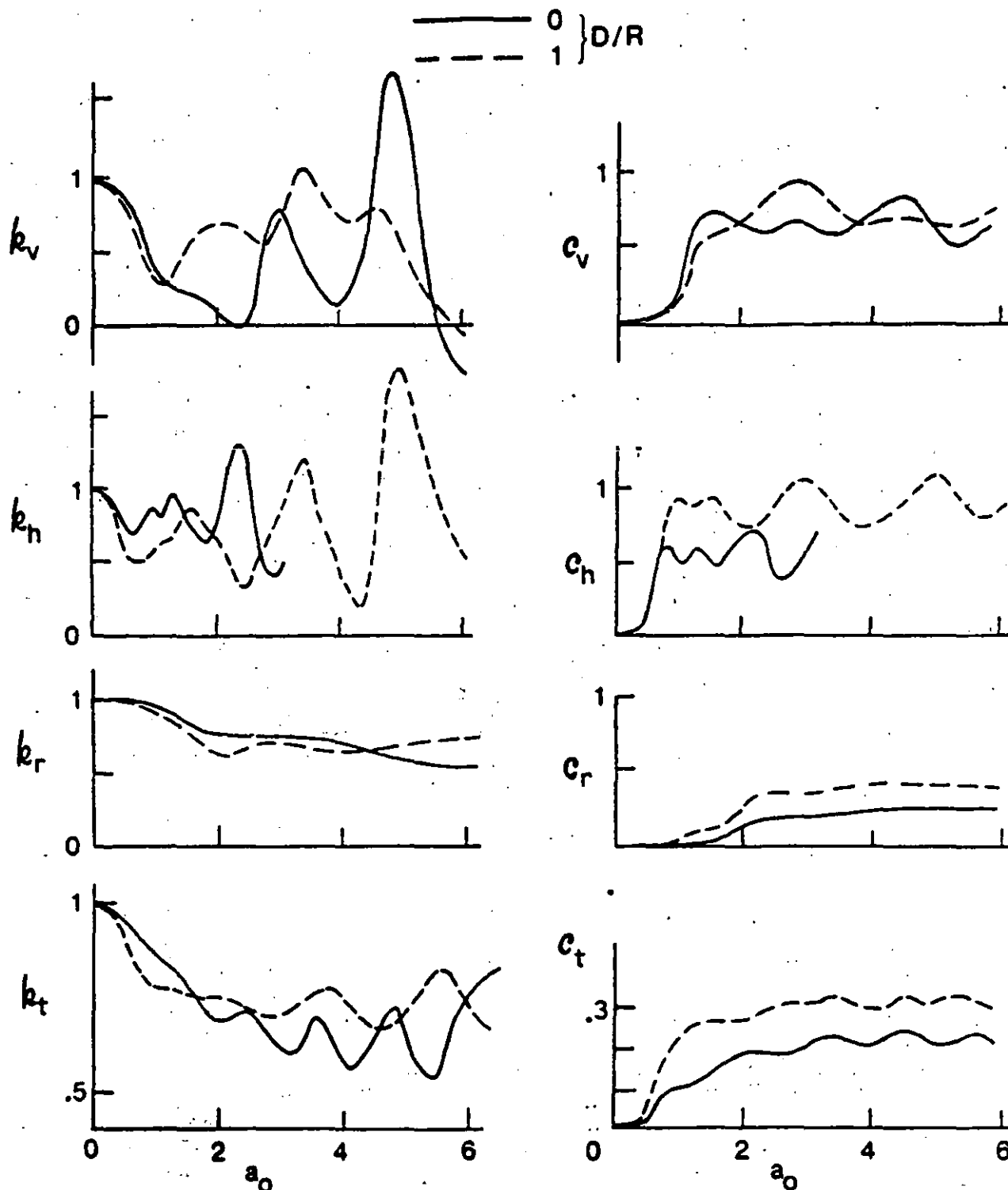


Figure 19. Effect of embedment on dynamic coefficients of a rigid cylindrical foundation on stratum-over-bedrock ($H/R = 3, \nu = 1/3, \xi = 0.05$)^{33, 88, 90}

plied with in the numerator than in the denominator: e.g. for $\nu = 0.40$, c_h is proportional to $(1 + 3.8D/R)/(1 + 0.67D/R)$ and c_v is proportional to $(1 + 1.1D/R)/(1 + 0.5D/R)$. Expressions similar to those of equations (64)-(65) have not been developed for rocking and torsion.

It is finally noted that, with very good accuracy, one may set for the cross-coupling impedance:

$$k_{hr} = 1; \quad c_{hr} = 0 \quad (66)$$

Imperfect contact between sidewall and backfill

Two recent studies have addressed the question of the dynamic response of embedded foundations, the sidewalls of which are not perfectly bonded to the backfill.^{88, 115} In both studies, the nonlinear contact phenomena associated with separation and sliding are modeled in an approximate way. Thus, Tassoulas assumes that no contact exists between sidewall and backfill near the ground surface but

that a perfect contact is effective over a height equal to d above the basement. By allowing d to vary between 0 and D all cases between the extremes of 'no-contact' and 'welded-contact' could be studied. On the other hand, Novak *et al.* considers the sidewalls to be in contact not with the undisturbed soil but with a cylindrical zone consisting of softer material. By allowing the shear modulus of this zone to take values between the shear modulus of the backfill and zero, various qualities of contact could be considered. Note that a similar parametric study for statically loaded foundations, the sidewalls of which are surrounded by a soft cylindrical zone, has been presented by Johnson *et al.*¹¹⁶ Only results from Tassoulas⁸⁸ are shown herein.

The sensitivity of the static stiffnesses to variation in the contact-height over embedment ratio, d/D , is graphically displayed in Fig. 20. The effect is essentially independent of H/R and D/R ; hence only one curve is plotted for each mode. Consistent with the observations made in the previous subsection, the effects of d/D are very significant for rocking and torsional loading, substantial for horizontal loading and secondary for vertical loading. For instance, the 'welded-contact' stiffnesses ($d/D = 1$) are 2.74, 2.33, 1.60 and 1.30 times larger than the 'no-contact' stiffnesses ($d/D = 0$) for rocking, torsional, horizontal and vertical loading, respectively.

Figure 21 portrays the effect of d/D on the variation of k and c versus a_0 . The stiffness coefficients are only slightly affected by d/D at low frequencies; at higher frequencies, however, the sharpness of the resonant valleys decreases as d/D increases. On the other hand, the damping coefficients show a substantial decline as the 'welded-contact' height, d , between sidewalls and backfill, decreases. Exception: c_v , which is less affected by d/D as well as by D/R (see equation (65) and Fig. 19). Notice also that the influence of d/D on c_r depends strongly on the particular frequency of oscillation.

Embedded strip foundations

Dynamic compliance functions of rigid strip foundations embedded in a homogeneous soil stratum overlying bedrock have been obtained by Chang-Liang.⁸⁷ Perfect contact is assumed between the two sidewalls and the backfill, and the results are cast in the form of equation (20) (i.e. dynamic compliances normalized with the static stiffnesses).

Jakub and Roesset,^{86,85} by utilizing the results of an extensive parametric study, developed simple expressions for the static horizontal and rocking stiffnesses, which are displayed in Table 9. It is evident that the influence of embedment is much smaller for strip than it is for circular foundations. In fact, the two coefficients multiplying D/B in Table 9 (1/3 and 1) are exactly one-half of those multiplying D/H in Table 8 (2/3 and 2, respectively). Intuitively, these results appear to be very reasonable since a strip foundation has sidewalls along two sides only. Thus, per unit length, the ratio of sidewall area to basement area is equal to $2D/2B = D/B$. Whereas, for a circular foundation the ratio of the two areas is $2\pi RD/\pi R^2 = 2(D/R)$. This seems to imply that the influence of D/R or D/B is proportional to the sidewall-over-basemat area ratio.

The two normalized compliance functions, $f_{h1} + if_{h2}$ and $f_{r1} + if_{r2}$, show practically no sensitivity to the D/B ratio and hence are not reproduced herein. Reference is made to the original publication⁸⁷ for more detailed information.

Rectangular foundations embedded in halfspace

Dominguez and Roesset⁸⁷ developed a boundary element formulation on the basis of which they derived unique results for embedded rectangular foundations perfectly bonded into a homogeneous halfspace. Figure 22 presents a few of their results for a foundation with an aspect ratio $L/B = 2$ and three embedment ratios, $D/B = 0, 2/3$ and $4/3$. Only the stiffness and damping coefficients are plotted in Fig. 22 versus a_0 .

Results for the static stiffnesses are not shown here. It appears, however, that the sensitivity of most stiffnesses on D/B is not as strong as in the case of circular foundations, but is quite stronger than that of a strip footing. Note that the sidewall-basemat area ratio in this case becomes equal to $4(B+L)D/(2B \cdot 2L) = 1.5(D/B)$, which is in between the 1 and 2 times the embedment ratio of the previous two cases!

The dependence on D/B of the k and c versus a_0 curves, shown in Fig. 2, reveals the following trends.

1. In the frequency range examined the sensitivity of the stiffness coefficients to large variations in D/B is quite small. For all modes, the decline of k with a_0 at low frequencies becomes sharper as the level of embedment increases.

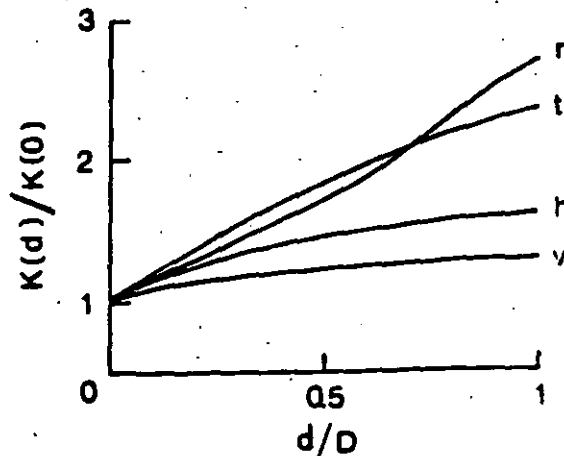
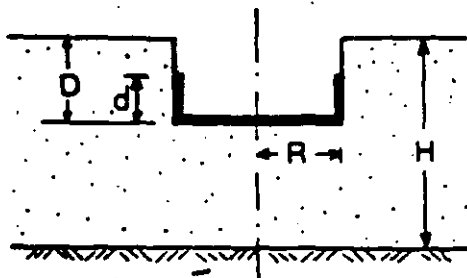


Figure 20. Static stiffnesses of cylindrical foundations with different d/D ratios ($H/R = 3, D/R = 1, \nu = 1/3$)⁸⁸

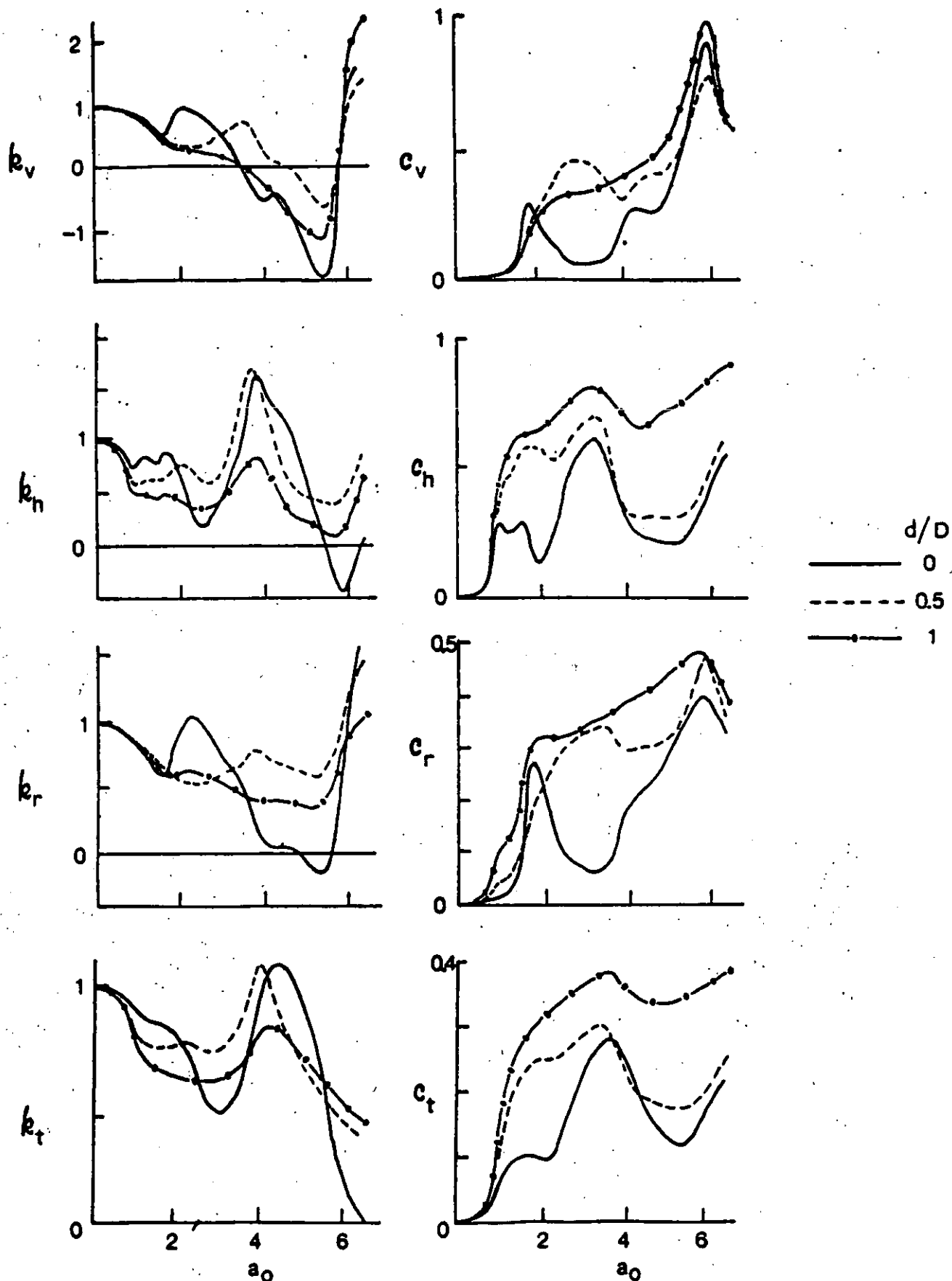


Figure 21. Dependence of dynamic coefficients of cylindrical foundations on height of sidewall-backfill contact ($H/R = 3$, $D/R = 1$, $\nu = 1/3$, $\xi = 0.05$)²⁰

Table 9. Static stiffnesses of rigid embedded strip foundations 'welded' into a homogeneous stratum-over-bedrock*

Type of loading	Static stiffness	Profile
Horizontal	$\frac{2.1G}{2-\nu} \left(1 + 2\frac{B}{H}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\frac{L}{B}\right) \left(1 + \frac{4}{3}\frac{D}{H}\right)$	
Rocking	$\frac{\pi GB^3}{2(1-\nu)} \left(1 + \frac{1}{5}\frac{B}{H}\right) \left(1 + \frac{D}{B}\right) \left(1 + \frac{2}{3}\frac{D}{H}\right)$	

* From Jakub and Roesset^{14,15}

2. All the damping coefficients increase substantially with increasing D/B . The effect is particularly important for the rotational modes. Indeed, for rocking and torsion c does not tend to zero in the low frequency range when the foundation is embedded. The practical significance of this phenomenon is obvious, especially in cases involving small amounts of hysteretic damping in the soil.

SYNTHESIS: COMPARATIVE STUDY AND PRACTICAL RECOMMENDATIONS

The previous sections have studied the effects of crucial problem parameters, related to the soil profile and the foundation geometry, on the dynamic response of massless rigid foundation plates. It is interesting, however, to also investigate the influence of these parameters on the response of a massive foundation, and thus develop a better perspective of the role of some of these parameters. We note that, in such a study, equations (39)-(46) can be directly utilized to obtain amplitudes of steady-state motion, once the dynamic impedance functions have been evaluated.

The goal of the comparative study described here is to investigate the sensitivity of the response of massive foundations to the exact variation with frequency of the dynamic stiffness and damping coefficients, k and c . To this end, two different foundations, both circular in plan, are considered. Foundation A is a relatively heavy one, having a radius $R = 2$ m, a mass $m = 40\rho R^3$ and a central mass moment of inertia $I_{ox} = m(0.75R)^2$. Foundation B is a relatively light one, having $R = 1$ m, $m = 5\rho R^3$ and $I_{ox} = mR^2$. The center of gravity of the machine-foundation system is located in both cases at a distance $z_c = 1.10R$ above the base. Both foundations support a machine with an unbalanced mass m_0 rotating with an eccentricity d_0 at frequencies ω ; the center of rotation is located at a distance $z_0 = R$ above the center of gravity of the system, in each case. Thus, the excitation forces, referred to the center of gravity, are:

$$Q_v = m_0 d_0 \omega^2 \exp[i(\omega t + 90^\circ)] \quad (67)$$

$$Q_h = m_0 d_0 \omega^2 \exp[i\omega t] \quad (68)$$

$$M_r = Q_h \cdot z_0 \quad (69)$$

and the solution can be derived from equations (39), (41) and (42) by substituting: $Q_v = m_0 d_0 \omega^2$, $\phi_v = 90^\circ$, $Q_h = m_0 d_0 \omega^2$, $\phi_h = 0$, $M_r = z_0 Q_h$ and $\phi_r = 0$.

Four different sets (1, 2, 3 and 4) of dynamic impedance functions, K expressed in the form of equation (17), are considered. Set 1 corresponds to a surface foundation on a halfspace (Fig. 5). Set 2 corresponds to a surface foundation on a stratum-over-bedrock with $H/R = 2$ (Fig. 8). Sets 3 and 4 correspond to a foundation embedded in a stratum with $H/R = 3$ and $D/R = 1$; 'welded' sidewall.

backfill contact is assumed for set 3, no contact for set 4 (Fig. 21). Material (hysteretic) damping is invariably taken equal to 0.05.

In our desire to isolate the effects of the dynamic parts of the impedance, $k + i\alpha_0 c$, from the effects of the static stiffnesses, K , the latter are assumed to be the same in all four sets. Thus, the four cases differ only in the corresponding k and c values. In reality, of course, the static stiffnesses of each set differ substantially from the corresponding stiffnesses of the other sets. For instance, the horizontal stiffnesses corresponding to sets 1, 2, 3 and 4, are in the ratio of 1:1.25:2.76:1.725, respectively. The appreciable influence of these static stiffnesses on the foundation response is well known, however, and requires no further demonstration. After all, the profession can determine static displacements with sufficient confidence, and the numerous closed-form expressions offered in this paper make very simple the task of reliably estimating the static stiffnesses of essentially arbitrary foundations on/in a variety of soil profiles.

The question then which we try to answer in this section is the following: After having properly determined the static stiffnesses of a foundation, how important is it to also accurately determine the dynamic stiffness and damping coefficients at the frequency range of interest?

Figure 22 compares the four response spectra of foundations A and B, corresponding to the aforementioned cases 1, 2, 3 and 4. Plotted in this figure is the variation with a_0 of the normalized amplitude of the horizontal displacement, $|u_r|$, experienced by the highest point of each foundation, at a distance $z_r = 1.2R$ above the center of gravity. The following trends are worthy of note in Fig. 22.

1. For frequency factors $a_0 > 1$, no differences exist between the four response curves, of either the heavy or the light foundation. In fact, the four displacement curves attain a nearly constant value which is apparently controlled by the static stiffnesses of each foundation. (Remember that in our study these stiffnesses do not change from case to case.) Such a behavior is consistent with the high-frequency response of a 1-dof oscillator under a rotating-mass-type excitation.⁷ The implication is clear: at relatively high frequency factors, the motion of a rigid massive foundation is controlled by its static stiffnesses and it is not influenced by the exact variation of k and c with a_0 ; therefore, one can safely use for k and c the values obtained for surface foundations on halfspace, regardless of the actual soil profile and depth of embedment!

2. In the low frequency range $a_0 < 1$, the response curves depend on the assumed dynamic coefficients as well as the inertia characteristics of the foundation.

The 'heavy' foundation experiences two resonant peaks. The first occurs at a frequency $a_0 \approx 0.15$ regardless of the exact values of k and c . The only difference from case to case is in the maximum displacement amplitude, which is

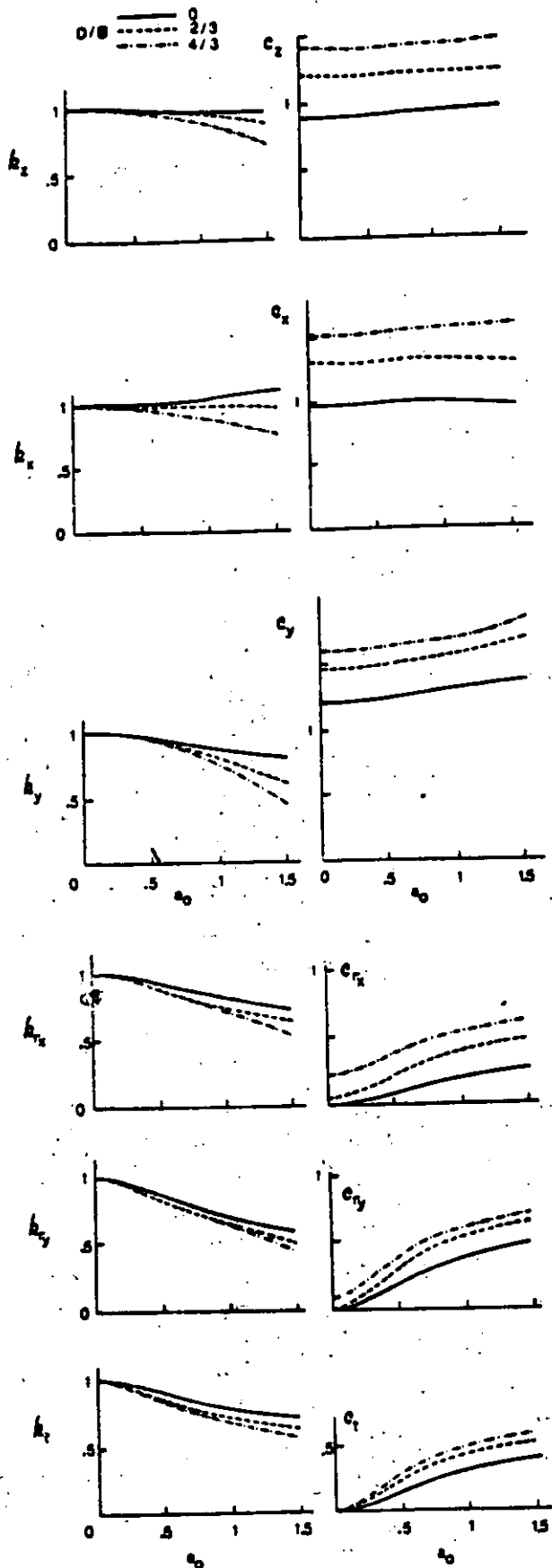


Figure 22. Dynamic coefficients of embedded rigid rectangular foundations on halfspace ($L/B = 2$, $\nu = 1/3$)²

apparently controlled by the inertia characteristics and the radiation damping of each system. (At such frequencies $k = 1$, while the hysteretic damping is invariably equal to 0.05.) As a result, use of the available halfspace curves for c leads to an underprediction of the peak response.

The second resonant frequency and resonant peak are both sensitive to the assumed values of k and c . It appears that these peaks are the result of resonance phenomena due to standing waves in the soil stratum, and, hence, they are very little influenced by the foundation inertia. Notice that for the halfspace (case 1) the resonance is very flat since no standing waves can be generated in the soil. Thus, once more, the halfspace assumption proves unconservative.

The 'light' foundation, on the other hand, experiences only one resonance which reflects the characteristics of both the foundation inertia and the system dynamic coefficients. The main influence of k and c is seen on the peak amplitudes. Notice again that the halfspace values lead to the flattest peak; a consequence of the high radiation damping in a boundless medium.

On the basis of these observations and the results of some other case studies not presented herein, the following practical recommendation can be made: At relatively low frequency factors, the motion of a rigid massive foundation is controlled by its static stiffnesses, K , as well as its

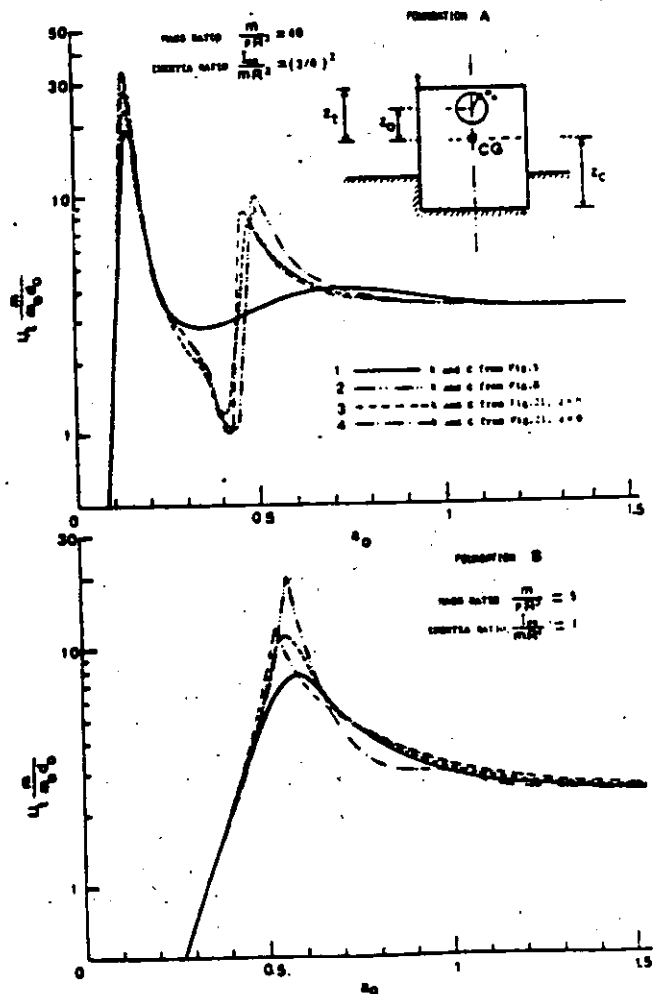


Figure 23. Sensitivity of the response of two massive foundations on the exact variation of k and c with a_0 ($\xi = 0.05$)

dynamic stiffness and damping coefficients, k and c ; c can be assumed to be equal to:

$$c = \begin{cases} 0 & \text{for } f < f_1 \\ c_{\text{halfspace}} & \text{for } f > f_1 \end{cases} \quad (70)$$

where $f_1 = V/4H$ is the first resonant frequency of the soil-foundation system for each particular mode; k can be approximated with the values obtained for surface foundations on a stratum-on-rigid-base; if, however, such solutions are not available, use can be made of the halfspace values of k provided that the latter are approximately corrected at and near the fundamental natural frequencies of the actual stratum, using as a guide the results of Fig. 8.

The above conclusions and recommendations are strictly applicable to rigid massive foundations carrying rotating-mass-type machines. For constant-force-type excitations the recommendations are still reasonably accurate. Frame-foundations, however, may be quite sensitive to the exact variation of k and c at frequencies around the fundamental frequency of the superstructure.

SOME OTHER TOPICS

The dynamic behavior of pile foundations, the effects of a finite flexural mat rigidity, and the dynamic interaction between adjacent foundations, are three topics that have received considerable attention in recent years. However, present knowledge and understanding of the phenomena related to these problems is more limited than for (single) rigid shallow foundations. Research is currently underway in several institutions, aimed at filling the existing gaps of knowledge in these three areas. This section is restricted to a brief general discussion of these topics and a listing of pertinent references for a more detailed study.

Dynamic impedances of piles

Results have been presented by numerous authors for end-bearing and floating single piles subjected to vertical, horizontal, rocking and torsional loading. One may broadly classify the developed formulations within three categories: (a) dynamic Winkler-foundation type formulations, which neglect the coupling between forces and displacements at various points along the pile-soil interface;^{41-43, 57, 116, 118} (b) analytical continuum-type formulations, which neglect the secondary components of deformation and enforce the boundary conditions at the soil-pile interface by expand-

ing the contact pressure distribution to an infinite series in terms of the natural modes of vibration of the soil layer;^{73-76, 78} and (c) finite-element formulations.¹¹⁹⁻¹²¹

Figure 24 presents a typical variation of the horizontal impedance K_h versus a_0 , for an end-bearing pile with length-over-diameter ratio, H/D , equal to 15. The soil-stratum consists of material with moduli increasing linearly with depth and a constant Poisson's ratio of 0.40, which is typical for normally consolidated clays. The pile is of circular cross-section and has a Young's modulus $E_p = 8000E_s$, where E_s is the soil modulus at a depth $z = H/4$. This figure has been adapted from a recent study by Velez *et al.*,¹²² who utilized the finite-element formulation of Blaney *et al.*¹¹⁹ The dynamic impedance is expressed in the form:

$$K_h = K_h(k_h + 2i\beta_h) \quad (71)$$

where K_h = static horizontal stiffness, k_h = dynamic stiffness coefficient, and β_h = equivalent critical damping ratio.

It is evident from this figure, that the general characteristics of the pile behavior are similar to those of a shallow foundation on a soil stratum. The first resonance occurs almost precisely at the fundamental frequency of the inhomogeneous stratum in vertical shear waves, and no radiation damping occurs below this frequency. At higher frequencies, k_h attains an essentially constant value; the second resonance is barely noticeable, and hence of minor importance, despite the relatively small amount of assumed hysteretic damping (0.05).

Reference is made to the aforementioned publications for detailed studies of the influence of the main problem parameters on the response of single piles.

In the last few years, interest has switched to the dynamics of groups of piles, a substantially more complex problem than that of a single pile. The first results, based on a rigorous formulation,¹²³ indicate that the dynamic stiffness and damping coefficients of a large group of closely-spaced piles may be drastically different from the coefficients obtained by a simple superposition of the results for a single pile. More extensive parametric studies are, however, needed before definitive conclusions can be drawn and before simple formulae and dimensionless graphs of direct applicability are developed for practical use.

Effects of finite foundation rigidity

The in-plane (membrane) rigidity of mat foundations is practically infinitely large, when compared to the deformability of soils; hence, for horizontal and torsional loading most foundations clearly qualify as 'rigid', and the results of the preceding sections of this paper are thus pertinent. However, in many practical situations, the foundation response to vertical and rocking loading cannot be properly predicted without accounting for the finite out-of-plane (flexural) rigidity of the mat.

A few studies have appeared lately on the dynamic behavior of flexible circular and rectangular plates resting on a homogeneous halfspace.⁴⁹⁻⁵¹ The additional dimensionless parameter which in this case controls the foundation response is the relative flexural rigidity factor $RF = (E_f/E_s) \cdot (1-\nu_f^2) \cdot (t/B)^3$, where E_f , ν_f and t are, respectively, the Young's modulus, Poisson's ratio and thickness of the foundation raft. In addition, moreover, the exact distribution of the applied loading influences appreciably the behavior, especially of very flexible foundations.

The results of the aforementioned studies indicate a reduction in the vertical and rocking damping coefficients

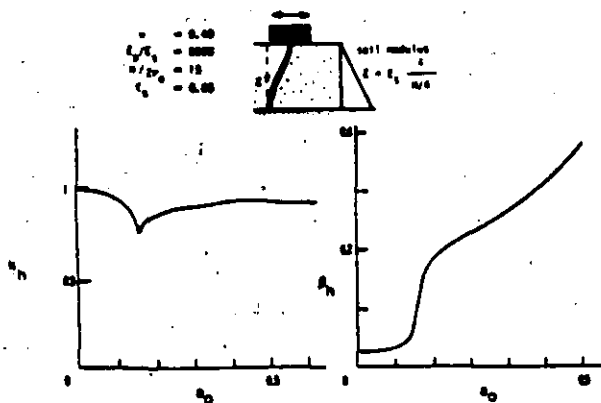


Figure 24. Lateral dynamic coefficients of single pile in an inhomogeneous stratum¹²²

C_p and C_r as the relative rigidity of the plate decreases. On the other hand, for small RF values, the stiffness coefficients k_p and k_r do not exhibit as steep a decay with a_0 as the one observed with rigid foundations (Fig. 5, for $\nu > 1/3$). Although additional parameter studies are needed to draw definitive conclusions, the author believes that the main influence of a decreasing RF on the response of a machine foundation materializes through the corresponding decrease of the static stiffnesses; in other words, the effect of the changes in k and c can be neglected, at least for realistic values of the RF factor. The results of the comparative study offered in the preceding section clearly support such a recommendation.

An idea of how sensitive the static stiffnesses, K_p and K_r , are to changes in the relative rigidity factor, RF , can be obtained from the results of Table 10. The vertical static stiffness of a circular mat supported by a homogeneous halfspace and loaded by either a uniformly or a parabolically distributed load, are expressed in the form of equation (55). The 'correction' factor J_p , which accounts for the mat flexural rigidity, is given as a function of RF . The J_p versus RF relationship was computed on the basis of some recent results by the author;¹²⁴ the average of the center and edge settlements were used in deriving the stiffness of the flexible mat.

Dynamic interaction between adjacent foundations

The vibration of a machine foundation may sometimes appreciably affect a nearby structure; conversely, the presence of such a structure may influence the response of the machine foundation itself. This 'coupling' in the motion of two adjacent structures through the soil is referred to as 'structure-soil-structure' interaction, and was first studied analytically by Warburton *et al.*,¹⁷⁵ in connection with cylindrical rigid foundations on a halfspace. More recently, comprehensive studies have been presented by Chang-Liang⁸⁷ who considered two rigid strip foundations on a stratum-over-bedrock and by Roesset *et al.*¹²⁶ for two rigid rectangular massive foundations or two structures idealized as simple 1-dof systems and also resting on the surface of a homogeneous stratum. The following conclusions may be drawn from the results of these studies.

1. The presence of a nearby ('passive') mass has a rather small overall influence on the motion of the foundation carrying the machine ('active'). Perhaps the most important effect from a design point of view is the appearance of rocking motions, even under vertical excitation; this is apparently the result of waves that are reflected by the 'passive' foundation. These effects increase when the masses of the two foundations increase, when the distance between them decreases, and when the thickness of the soil stratum

increases. But even for distances as small as $5B$ (or $5R$) the presence of the second mass will in most cases be of secondary importance, in view of the many other uncertainties of the problem. It is noted, however, that the natural frequencies of the soil-foundation system may also change due to the interaction.

2. The motions induced in the 'passive' foundation are larger than the motion changes due to interaction effects on the 'active' foundation. This is a quite logical result since waves emanating from the 'active' foundation excite the 'passive' foundation before they are 'reflected' back to the 'active' one. Typically, one may expect the motions in the second foundation to be about 20% of those experienced by the excited mass, for distances of the order of $5R$ and hysteretic damping ratio in the soil of 5%. However, for strip foundations (plane-strain problem) on deep soil deposits, the above value may increase to about 50%.

To protect sensitive structures from the vibrations induced by a nearby machine foundation, 'active' and/or 'passive' isolation measures may frequently be necessary. Results of experimental and theoretical investigations on the effectiveness of several isolation schemes have been published by Barkan,¹⁰ Richart *et al.*⁷ and Haupt.¹²⁷

CONCLUSION

The state-of-the-art of analysing the forced oscillations of shallow and deep foundations has advanced remarkably in the last 15 years and has reached a mature stage of development. Several formulations and computer programs have been developed to determine in a rational way the response of foundations having various shapes and supported on/ in any kind of soil deposit. Numerous studies have been published exploring the nature of associated phenomena and shedding light on the role of the key parameters influencing the response. This paper has reviewed these developments and presented results in the form of simple formulae and dimensionless graphs for the dynamic impedance functions of circular, strip, rectangular and arbitrary-plan-shape foundations. The various results have been synthesized in a case study referring to two massive foundations, and practical recommendations have been made on how to inexpensively predict the response of foundations in practice.

This progress in developing new methods of analysis for machine foundations has been paralleled by an equally impressive progress in our understanding of the dynamic behavior of soils and the development of excellent *in situ* and laboratory procedures to obtain representative values of dynamic soil parameters.

The author believes that, at present, there is a great need to calibrate our analytical procedures by means of actual case histories. Systematic post-construction observations of actual foundation performances are the key to this so important task. After all, confidence in advanced methods of analysis can only be gained if these are proved capable of predicting the field behavior of actual foundations.

Analytical work is also needed to improve the present knowledge and understanding of, among other topics, the dynamic behavior of groups of piles, including the influence of the pile-cap; the response of flexible mats founded on a soil stratum; the dynamic characteristics of foundations consisting of multiple isolated footings; and the effects of the non-uniform initial distribution of static stresses in the soil, arising from the weight of the structure.

Table 10. Static vertical stiffness of flexible circular mat on halfspace†

General expression	RF	$J_p(RF)$	
		Uniform load	Parabolic load*
$K_p = \frac{4GR}{1-\nu} J_p(RF)$	0.01	0.95	0.80
	0.1	0.98	0.86
	1	0.99	0.96
	10	1.00	0.98
	100	1.00	1.00

* $p = 2p_0(1-r^2/R^2)$

† Based on results by Gazetas¹²⁴

ACKNOWLEDGEMENTS

I would like to acknowledge financial support by the US National Science Foundation (Grant CEE-82-00955) and by the Rensselaer Polytechnic Institute (BUILD program). I am also pleased to express my gratitude to my mentor Jose M. Roesset, who encouraged my interest in the subject of dynamic soil-foundation interaction. During the course of this work I had fruitful discussions with Ricardo Dobry who, also, read a draft of the paper and offered valuable comments. Professor Frank E. Richart, Jr., reviewed the paper and offered many useful suggestions. Finally, my thanks are extended to the Organizing Committee of the International Conference on Soil Dynamics and Earthquake Engineering for the invitation to prepare and present this state-of-the-art paper.

REFERENCES

- 1 Whitman, R. V. and Richart, F. E. Design procedures for dynamically loaded foundations, *J. Soil Mech. Fdn. Engrg.*, ASCE, 1967, 93, SM6, 169
- 2 McNeil, R. L. Machine Foundations: The State-of-the-Art. *Proc. Soil Dyn. Spec. Sess. 7th ICSMFE*, pp. 67-100, 1969
- 3 Woods, R. D. Measurement of Dynamic Soil Properties. *Proc. Earthq. Engrg. Soil Dyn.*, ASCE, Pasadena, 1978, 1, 91
- 4 Ozaydin, K., Richart, F. E., Dobry, R., Ishihara, K. and Marcuson, W. F. III. Dynamic Properties and Behavior of Soils. *Proc. 7th WCEE*, State-of-the-Art Volume, Istanbul, 1980
- 5 Woods, R. D. Parameters affecting elastic properties, *Dyn. Meth. Soil Rock Mech.*, 1977, 1, 37
- 6 Richart, F. E. Field and laboratory measurements of dynamic soil properties, *Dyn. Meth. Soil Rock Mech.*, 1977, 1, 3
- 7 Richart, F. E., Woods, R. D. and Hall, J. R. *Vibrations of Soils and Foundations*. Prentice-Hall, 1970
- 8 Tschebotarioff, G. P. and Ward, E. R. The Response of Machine Foundations and the Soil Coefficients Which Affect It, *Proc. 2nd ICSMFE*, 1948, 1, 309
- 9 Selvadurai, A. P. S. *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*, Elsevier Scientific Publishing Co., 1979
- 10 Barkan, D. D. *Dynamics of Bases and Foundations*, McGraw-Hill (translated), 1962
- 11 Prakash, S. *Soil Dynamics*. McGraw-Hill, 1981, pp. 361-7
- 12 Barkan, D. D. and Ilyichev, V. A. Dynamics of Bases and Foundations, *Proc. 9th ICSMFE*, Tokyo, 1977, 2, 630
- 13 Gibson, R. E. The analytical method in soil mechanics, *Geotechnique*, 1974, 24, No. 2, 115
- 14 Reissner, E. Stationäre, axialsymmetrische, durch eine schut-teinde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes, *Ing. Arch.*, 1936, 7, 381
- 15 Sung, T. Y. Vibration in Semi-infinite Solids Due to Periodic Surface Loading, *Sc.D. thesis*, Harvard University, 1953
- 16 Quinlan, P. M. The Elastic Theory of Soil Dynamics, *Symp. on Dyn. Test. of Soils*, 1953, ASTM STP No. 156, 1953, 3-34
- 17 Arnold, R. N. Bycroft, G. N. and Warburton, G. B. Forced vibrations of a body on an infinite elastic solid, *J. Appl. Mech. ASME*, 1955, 22, 391
- 18 Bycroft, G. N. Forced vibration of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic space and an elastic stratum, *Phil. Trans. Royal Soc. Lond.*, 1956, A248, 327
- 19 Awojobi, A. D. and Grootenhuys, P. Vibration of Rigid Bodies on Elastic Media, *Proc. Royal Soc. Lond.*, 1965, A287, 27
- 20 Lysmer, J. Vertical Motions of Rigid Footings, *Ph.D. thesis*, University of Michigan, Ann Arbor, 1965
- 21 Elorduy, J., Nieto, J. A. and Szekely, E. M. Dynamic Response of Bases of Arbitrary Shape Subjected to Periodical Vertical Loading, *Proc. Int. Symp. Wave Prop. & Dyn. Rep. Earth Met.*, University of New Mexico, Albuquerque, 1967, 105-21.
- 22 Hsieh, T. K. Foundation Vibrations, *Proc. Inst. Civil Engrs.*, 1962, 22, 211
- 23 Richart, F. E. and Whitman, R. V. Comparison of footing vibration tests with theory, *J. Soil Mech. Fdn. Engrg. Div.*, 1967
- 24 Whitman, R. V. Soil-platform Interaction, *Proc. Conf. on Behav. of Offshore Struct.*, NGI, Oslo, 1976, 1, 817
- 25 Luco, J. E. and Westmann, R. A. Dynamic response of a rigid footing bonded to an elastic halfspace, *J. Appl. Mech. ASME*, 1968, 35E, 697
- 26 Karasudhi, P., Keer, L. M. and Lee, S. L. Vibratory motion of a body on an elastic half plane, *J. Appl. Mech. ASME*, 1968, 35E, 697
- 27 Luco, J. E. and Westmann, R. A. Dynamic response of circular footings, *J. Engrg. Mech. Div.*, ASCE, 1971, 97, EM5, 1381
- 28 Veletos, A. S. and Wei, Y. T. Lateral and rocking vibrations of footings, *J. Soil Mech. Found. Div.*, ASCE, 1971, 97, SM9, 1227
- 29 Veletos, A. S. and Verbit, B. Vibration of viscoelastic foundations, *Int. J. Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, 1973, 2, 87
- 30 Kuhlemeyer, R. Vertical Vibrations of Footings Embedded in Layered Media, *Ph.D. thesis*, University of California, Berkeley, 1969
- 31 Waas, G. Analysis Method for Footing Vibrations Through Layered Media, *Ph.D. thesis*, University of California, Berkeley, 1972
- 32 Chang-Liang, V. Dynamic Response of Structure in Layered Soils, *Ph.D. thesis*, MIT, 1974
- 33 Kausel, E. Forced Vibrations of Circular Foundations on Layered Media, *Research Rep. R74-11*, MIT, 1974
- 34 Lysmer, J., Udaka, T., Seed, H. B. and Hwang, R. LUSH - A Computer Program for Complex Response Analysis of Soil-Structure Systems, Report No. EERC 74-4, University of California, Berkeley, 1974
- 35 Luco, J. E. Impedance functions for a rigid foundation on a layered medium, *Nucl. Engrg. Des.*, 1974, 31, 204
- 36 Gazetas, G. Dynamic Stiffness Functions of Strip and Rectangular Footings on Layered Soil, *S.M. Thesis*, MIT, 1975
- 37 Hadjian, A. H. and Luco, J. E. On the Importance of Layering on Impedance Functions, *Proc. 6th WCEE*, New Delhi, 1977
- 38 Gazetas, G. and Roesset, J. M. Forced vibrations of strip footings on layered soils, *Meth. Struct. Anal.*, ASCE, 1976, 1, 115
- 39 Gazetas, G. and Roesset, J. M. Vertical vibration of machine foundations, *J. Geotech. Engrg. Div.*, ASCE, 1979, 105, GT12, 1435
- 40 Novak, M. Vibrations of Embedded Footings and Structures, *ASCE Natl. Struct. Engrg. Meet.*, 1973, Reprint 2029
- 41 Novak, M. Dynamic stiffness and damping of piles, *Canad. Geotech. J.*, 1974, 11, 574
- 42 Novak, M., Nogami, T. and Aboul-Ella, F. Dynamic Soil Reactions for Plane Strain Case, *Res. Rep. BLWT-1-77*, University of Western Ontario, 1977
- 43 Novak, M. and Aboul-Ella, F. Impedance functions for piles in layered media, *J. Engrg. Mech. Div. ASCE*, 1978
- 44 Wong, H. L. and Luco, J. E. Dynamic response of rigid foundations of arbitrary shape, *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, 1976, 4, 579
- 45 Awojobi, A. O. and Tabiowo, P. H. Vertical vibration of rigid bodies with rectangular bases on elastic media, *Earth. Engrg. Struct. Dyn.*, 1976, 4, 439
- 46 Kitamura, Y. and Sakurai, S. Dynamic stiffness for rectangular rigid foundations on a semi-infinite elastic medium, *Int. J. Anal. Num. Meth. Geomech.*, 1979
- 47 Dominguez, J. and Roesset, J. M. Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations, *Research Report R78-20*, MIT, 1978
- 48 Savidis, S. A. Analytical methods for the computation of wavefields, *Dyn. Meth. Soil Rock Mech.*, 1977, 1, 225
- 49 Lin, Y. J. Dynamic response of circular plates on viscoelastic halfspace, *J. Appl. Mech.*, ASME, 1978, 45E, 379
- 50 Whittaker, W. L. and Christiano, P. Dynamic response of plate on elastic halfspace, *J. Engrg. Mech. Div.*, ASCE, 1982, 108, EM1, 133
- 51 Iguchi, M. and Luco, J. E. Dynamic response of flexible rectangular foundations on an elastic halfspace, *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, 1981, 9, 239
- 52 Awojobi, A. O. Vibration of a rigid circular foundation on Gibson soil, *Geotechnique*, 1972, 22, No. 2, 333
- 53 Gazetas, G. Static and dynamic displacements of foundations on heterogeneous multilayered soils, *Geotechnique*, 1980, 30, No. 2, 159
- 54 Gazetas, G. Strip foundations on cross-anisotropic soil layer subjected to static and dynamic loading, *Geotechnique*, 1981a, 31, No. 2, 161

- 35 Gazetas, G. Machine foundations on deposits of soft clay overlain by a weathered crust, *Geotechnique*, 1981d, 31, No. 3, 387
- 36 Jakub, M. and Roesset, J. M. Nonlinear Stiffness of Foundations, *Research Report R77-35*, MIT, 1977a
- 37 Dobry, R., Vicents, E., O'Rourke, M. and Roesset, J. M. Horizontal stiffness and damping of single piles, *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 1982a, 108, GT3, 439
- 38 Kagawa, T. and Kraft, L. M. Lateral load-deflection relationships of piles subjected to dynamic loadings, *Soils & Foundations*, 1980, 20, No. 4, 19
- 39 Novak, M. Vertical vibration of floating piles, *J. Engrg. Mech. Div., ASCE*, 1977, 103, EM1, 153
- 40 Roesset, J. M. Stiffness and damping coefficients of foundations, *Dyn. Resp. Pile Fdn. ASCE*, 1980a, 1-30 (O'Neil and Dobry, eds.)
- 41 Bland, D. R. *The Theory of Linear Viscoelasticity*, Pergamon Press, 1960
- 42 Veltsos, A. S. and Verbic, B. Basic response functions for elastic foundations, *J. Engrg. Mech. Div., ASCE*, 1974, 100, EM2, 189
- 43 Lysmer, J. Foundation vibrations with soil damping, *Civ. Engrg. & Nucl. Power, ASCE*, 1980, 11, 10/4/1-18
- 44 Hadjian, A. H., Luco, J. E. and Tsai, N. C. Soil-structure interaction: continuum or finite-element?, *Nuclear Engrg. Des.*, 1974, 31, 151
- 45 Jakub, M. and Roesset, J. M. Dynamic Stiffness of Foundations: 2-D vs 3-D Solutions, *Research Report R77-36*, 1977b, MIT
- 46 Luco, J. E. Vibrations of a rigid disc on a layered viscoelastic medium, *Nucl. Engrg. Des.*, 1976, 36, 325
- 47 Kirkner, D. J. Steady-state Response of a Circular Foundation on a Transversely Isotropic Half-space, *PhD thesis*, Case Western Reserve University, 1979
- 48 Wong, H. L. Dynamic Soil-Structure Interaction, *Rep. No. EERL 75-01*, California Institute of Technology, 1975
- 49 Cruse, T. A. and Rizzo, F. J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem, *J. J. Math. Anal. & Appl.*, 1968, 22
- 50 Gazetas, G. and Roesset, J. M. Plane-strain Soil-Structure Interaction for Seismic Response, *Proc. 6th Symp. Earthq. Engrg.*, Roorkee, India, 1978, 1, 259
- 51 Kobori, T., Minai, R., Suzuki, T. and Kusakabe, K. Dynamical Ground Compliance of Rectangular Foundations, *Proc. 16th Natl. Cong. for Appl. Mech.*, 1966
- 52 Beredugo, Y. O. and Novak, M. Coupled horizontal and rocking vibration of embedded footings, *Canad. Geotech. J.*, 1972, 9, 477
- 53 Tajimi, H. Dynamic Analysis of a Structure Embedded in an Elastic Stratum, *Proc. 4th WCEE*, Chile, 1969
- 54 Nogami, T. and Novak, M. Soil-pile interaction in vertical vibration, *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, 1976, 4, 277
- 55 Nogami, T. and Novak, M. Resistance of soil to a horizontally vibrating pile, *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, 1977, 5, 249
- 56 Harada, T., Kubo, K. and Katayama, T. Dynamic Soil-structure Interaction by Continuum Formulation Method, *Inst. Indus. Sc.*, University of Tokyo, 1981, 29, No. 5
- 57 Takemiya, H. and Yamada, Y. Layered soil-pile-structure dynamic interaction, *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, 1981, 9, 437
- 58 Akiyoshi, T. Soil-pile interaction in vertical vibration induced through a frictional interface, *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, 1982, 10, 135
- 59 Ang, A. H-S. and Harper, G. N. Analysis of contained plastic flow in plane solids, *Engrg. Mech. Div., ASCE*, 1964, 90, EM5, 397
- 60 Agabain, M. E., Parmelee, R. A. and Lee, S. L. A Model for the Study of Soil-structure Interaction, *Proc. 8th Conf. Int. Assoc. Bridge & Struct. Engrg.*, New York, 1968
- 61 Krizek, R. J., Gupta, D. C. and Parmelee, R. A. Coupled sliding and rocking of embedded foundations, *J. Soil Mech. Fdn. Engrg., ASCE*, 1972, 98, 1347
- 62 Tseng, N. M. and Robinson, A. R. A Transmitting Boundary for Finite Difference Analysis of Wave Propagation in Solids, *Civ. Engrg. Report No. 240*, University of Illinois, Urbana-Champaign, 1975
- 63 Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R. L. Finite dynamic model for infinite media, *J. Engrg. Mech. Div., ASCE*, 1969, 95, EM4, 895
- 64 Valliappan, S., White, W. and Lee, I. K. Energy absorbing boundary for anisotropic material, *Nucl. Mech. Geomech., ASCE*, 1975, 2, 1013
- 65 Lysmer, J., Udaka, T., Tsai, C-F. and Seed, H. B. FLUSH - A Computer Program for Approximate 3-D Analysis of Soil-Structure Interaction Problems, *Report No. EERC 75-30*, University of California, Berkeley, 1975
- 66 Luco, J. E. and Hadjian, A. H. Two-dimensional approximations to the three-dimensional soil-structure interaction problem, *Nucl. Engrg. Des.*, 1974, 31, 193
- 67 Chang-Liang, V. Dynamic Response of Structure in Layered Soils, *Ph.D. thesis*, MIT, 1974
- 68 Tsoulas, J. L. Elements for the Numerical Analysis of Wave Motion in Layered Media, *Research Rep. R81-2*, MIT, 1981
- 69 Kausel, E. and Roesset, J. M. Dynamic stiffness of circular foundations, *J. Engrg. Mech. Div., ASCE*, 1975, 101, EM12, 771
- 70 Kausel, E. and Ushijima, R. Vertical and Torsional Stiffness of Cylindrical Footings, *Research Rep. R76-6*, MIT, 1979
- 71 Roesset, J. M. The use of simple models in soil-structure interaction, *Civ. Engrg. & Nucl. Power, ASCE*, 1980b, 11, 10/3/1-25
- 72 Gerrard, C. M. and Harrison, W. J. *Circular Loads Applied to a Cross-Anisotropic Halfspace*. Paper 8. Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization: Div. Appl. Mech., Australia, 1970a
- 73 Gazetas, G. Torsional displacements and stresses in non-homogeneous soil, *Geotechnique*, 1981e, 31, No. 4, 487
- 74 Borodachev, N. M. Determination of the settlement on rigid plates, *Soil Mech. Fdn. Engrg. (USSR)*, 1964, 1, 210
- 75 Dobry, R. and Gazetas, G. Stiffness and Damping of Arbitrary-shaped Embedded Foundations, *Research Rep. CE-82-04*, RPI, 1982
- 76 Egorov, K. E. Calculation of Bed for Foundation with Ring Footing, *Proc. 6th ICSMFE*, 1965, 2, 41
- 77 Dhawan, G. K. A transversely-isotropic halfspace indented by a flat annular rigid stamp, *Acta Mechanica*, 1979, 31, 291
- 78 Dhawan, G. K. An asymmetric mixed boundary value problem of a transversely-isotropic halfspace subjected to moment by an annular rigid punch, *Acta Mechanica*, 1981a, 38, 257
- 79 Dhawan, G. K. A mixed boundary value problem of a transversely-isotropic halfspace under torsion by a flat annular rigid stamp, *Acta Mechanica*, 1981b, 41, 289
- 80 Brown, P. T. and Gibson, R. E. Surface settlement of a deep elastic stratum whose modulus increases linearly with depth, *Can. Geotech. J.*, 1972, 9, 467
- 81 Gibson, R. E. and Kalsi, G. S. The surface settlement of a linearly inhomogeneous cross-anisotropic elastic halfspace, *Z. Angew. Math. Phys.*, 1974, 24, 843
- 82 Rowe, R. K. and Booker, J. R. The behavior of footings resting on a non-homogeneous soil mass with a crust. I. Strip footings. II. Circular footings, *Can. Geotech. J.*, 1981a,b, 18, 250
- 83 Oda, M. Initial fabrics and their relations to the mechanical properties of granular material, *Soils & Foundations*, 1972, 12, 17
- 84 Barden, L. Influence of structure on deformation and failure in clay soil, *Geotechnique*, 1972, 22, No. 1, 159
- 85 Yamada, Y. and Ishihara, K. Anisotropic deformation characteristics of sand under three-dimensional stress conditions, *Soils & Foundations*, 1979, 19, 79
- 86 Gazetas, G. Deformational Soil-Cross-Anisotropy: Experimental Evaluation and Mathematical Modelling, *Research Rep. CE-8102*, Case Western Reserve University, 1981b
- 87 Gerrard, C. M. and Harrison, W. J. *Stresses and Displacements in a Loaded Orthorhombic Halfspace*. Paper 9. Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization: Div. Appl. Mech., Australia, 1970b
- 88 Gazetas, G. Importance of soil anisotropy on foundation displacement functions, *Advances in Geotech. Earthq. Engrg. Soil Dyn.*, 1981c, 3, 1039
- 89 Gazetas, G. Dynamic compliance matrix of rigid strip footing bonded to a viscoelastic cross-anisotropic halfspace, *Int. J. Mech. Sc.*, 1981f, 23, No. 9, 547
- 90 Kausel, E., Roesset, J. M. and Christian, J. T. Nonlinear behavior in soil-structure interaction, *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 1976, 102, GT12, 1159
- 91 Novak, M. and Beredugo, Y. O. Vertical vibration of embedded footings, *J. Soil Mech. Fdn. Engrg. Div., ASCE*, 1972, 98, SM12, 000

- 2 Johnson, G. R., Christiano, P. and Epstein, H. I. Stiffness coefficients for embedded footings. *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 1975, 101, GT8, 789
- 113 Stokda, K. H. and Richart, F. E. Dynamic response of embedded machine foundations. *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 1974, 100, GT4, 427
- 114 Elsasbe, F. and Murray, J. P. Dynamic Behavior of Embedded Foundations. *Research Rep. R77-33*, MIT, 1977
- 115 Novak, M. and Sheta, M. Approximate approach to contact effects of piles. *Dyn. Resp. Pile Fdnz.*, ASCE, 1980 (O'Neil and Dobry, eds.)
- 116 Johnson, G. R. and Epstein, H. I. Backfill effects on circular foundation stiffnesses. *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 1977, 103, GT8, 899
- 117 Kagawa, T. and Kraft, L. M. Lateral pile response during earthquakes. *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 1981, 107, GT12, 1713
- 118 Liou, D. D. and Penzien, J. Seismic Analysis of an Offshore Structure Supported on Pile Foundations. *Report No. EERC77-25*, University of California, Berkeley, 1977
- 119 Blansy, G. W., Kausel, E. and Roesset, J. M. Dynamic Stiffness of Piles. *Proc. 2nd Int. Conf. Num. Meth. Geomech.*, Blacksburg, Virginia, 1976
- 120 Kuhlmeier, R. Static and Dynamic Laterally Loaded Piles. *Research Rep. CE76-9*, University of Calgary, 1976
- 121 Angelides, D. C. and Roesset, J. M. Nonlinear lateral dynamic stiffness of piles. *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 1981, 107, GT11, 1443
- 122 Velez, A., Gazetas, G. and Krishnan, R. Lateral Stiffness and Damping of Piles in Non-homogeneous Soil. *Research Rep. CE-82-04*, RPI, 1982
- 123 Wolf, J. P. and von Arx, G. A. Impedance function of a group of vertical piles. *Earthq. Engrg. & Soil Dyn.*, ASCE, 1978, II, 1024
- 124 Gazetas, G. Variational estimations of raft settlement on cross-anisotropic soil. *Soils and Foundations*, 1981g, 21, No. 4, 109
- 125 Warburton, G. B., Richardson, J. D. and Webster, J. J. Forced vibrations of two masses on an elastic half space. *J. Appl. Mech.*, ASME, 1971, 38, E
- 126 Roesset, J. M. and Gonzalez, J. J. Dynamic interaction between adjacent structures. *Dyn. Meth. Soil Rock Mech.*, 1977, 1, 127
- 127 Haupt, W. A. Surface waves in non-homogeneous halfspace. *Dyn. Meth. Soil Rock Mech.*, 1977, 1, 335
- 128 Richart, F. E., Jr., personal communication, 1982

NOTATION

The following symbols are frequently used in the paper:

Related to geometry

- B** = half-width of a strip footing or the shortest half-width of a rectangular footing
- D** = depth of embedment
- d** = height of perfect sidewall-backfill contact above the foundation base

- H** = thickness of soil stratum
- L** = one-half of the longest side of a rectangular foundation
- R** = radius of a cylindrical foundation
- R₀** = radius of 'equivalent' circular foundation (equations (47)-(50))
- z_c** = distance of center of gravity of a machine-foundation system above the base.

Related to material properties

- G** = shear modulus of soil
- m̄** = increase of shear modulus from the surface to a depth equal to **R** or **B** (applicable to inhomogeneous soil deposits)
- n** = E_H/E_V , where E_H and E_V are the horizontal and vertical Young's moduli of a cross-anisotropic soil
- ν** = Poisson's ratio of soil
- ξ** = hysteretic critical damping ratio of soil

Related to foundation impedances

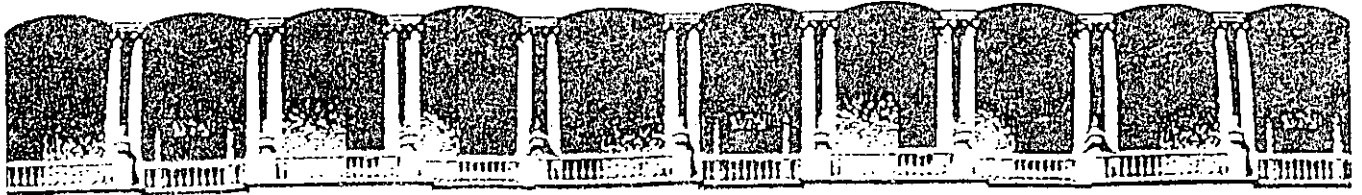
- K** = static stiffness referred to the base of the foundation (Fig. 1)
- K** = dynamic impedance function of frequency; it may be expressed in one of the following alternative forms:
 - = $K_1(\omega) + iK_2(\omega)$
 - = $K(k + ia_0c)(1 + 2i\xi)$
 - = $K(k + ia_0c)$

Calligraphic characters are used on the figures in place of the bold **K**, **k** and **c**.

- k** and **k** = (dynamic) stiffness coefficients, functions of ω
- c** and **c** = (dynamic) damping coefficients, functions of ω
- a₀** = $\omega B/V_s$ or $\omega R/V_s$, (dimensionless frequency factor)
- F** = dynamic compliance function of ω ; it may be expressed in one of the following alternative forms:
 - = $F_1(\omega) + iF_2(\omega)$
 - = $\frac{1}{K} [f_1(\omega) + if_2(\omega)]$

Subscripts

- v** = vertical (also designated by **z**)
- h** = horizontal (also **x**, **y**)
- r** = rocking (also r_x , r_y)
- t** = torsion (also r_z)
- hr** = coupled horizontal-rocking (also xr_y , yr_x)



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

CURSOS ABIERTOS

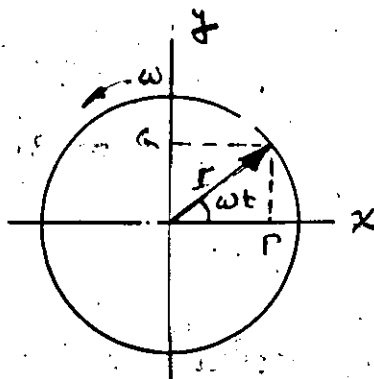
*CURSO: CIMENTACION DE MAQUINARIA
DEL 17 AL 21 DE FEBRERO*

SOLICITACIONES INDUCIDAS POR MAQUINAS

DR. ANGEL ROJAS SALGADO

PALACIO DE MINERIA

Representación Vectorial de movimientos armónicos



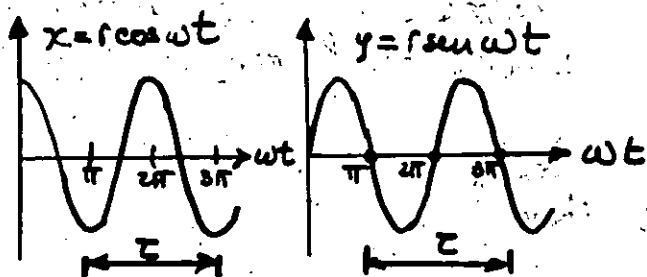
El \vec{r} tiene magnitud constante

$$\vec{r} = r \cos \omega t \hat{i} + r \sin \omega t \hat{j}$$

$$r = r \cos \omega t + i r \sin \omega t$$

el vector \vec{r} gira con vel. ω

existe una relación uno a uno entre el plano cartesiano y los números complejos



$T = \text{período}$ (tiempo que tarda en repetirse el fenómeno)

Para un resorte, dentro del rango elástico, la fuerza es proporcional a su desplazamiento

$$F = kx$$

La segunda ley de Newton establece que

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{r}) \quad m\vec{r} = \text{momentum lineal}$$

$$= m\ddot{\vec{r}} \quad \text{para un cuerpo rígido.}$$

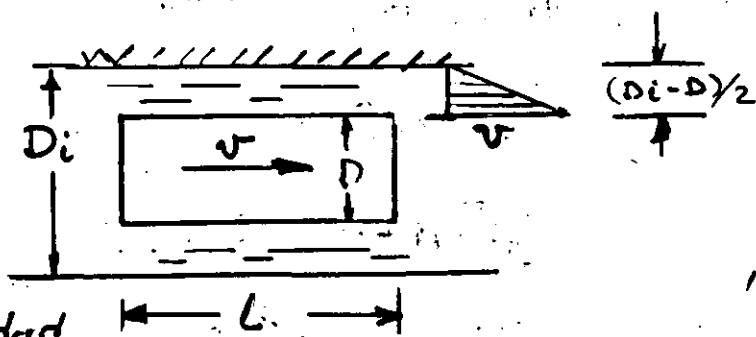
Para un amortiguador se sigue la siguiente expresión

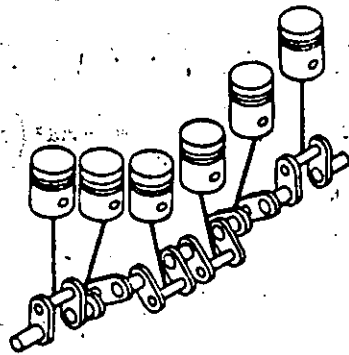
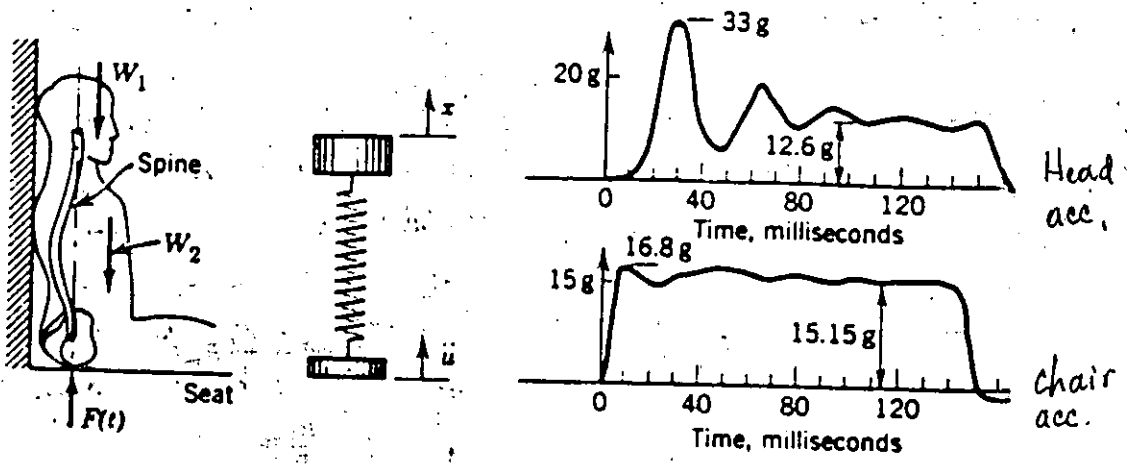
$$\vec{F} = c\vec{v}$$

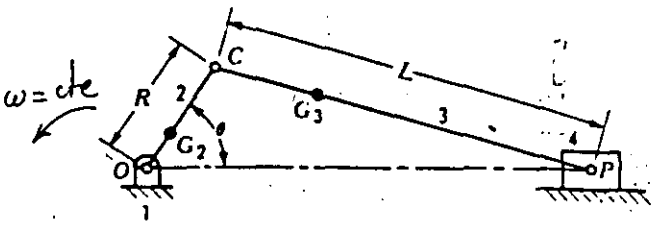
obtenida en forma simple de:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = \mu \frac{3v}{D_1 - D_2}$$

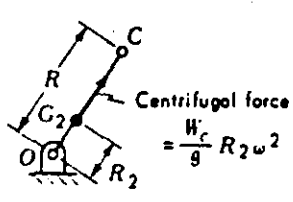
ec. de Newton para viscosidad



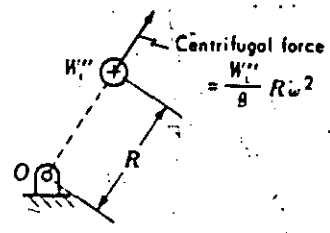




(a)



(b)



(c)

$$\frac{W_c''}{g} R \omega^2 = \frac{W_c}{g} R \omega^2$$

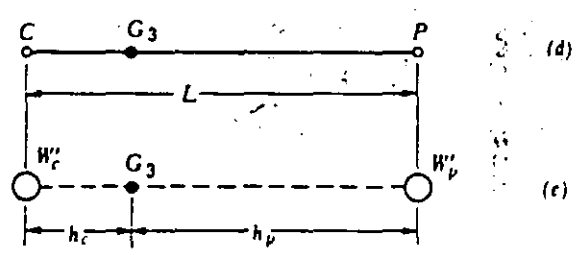
or

$$W_c'' = \frac{R_2}{R} W_c$$

dynamically equivalent system

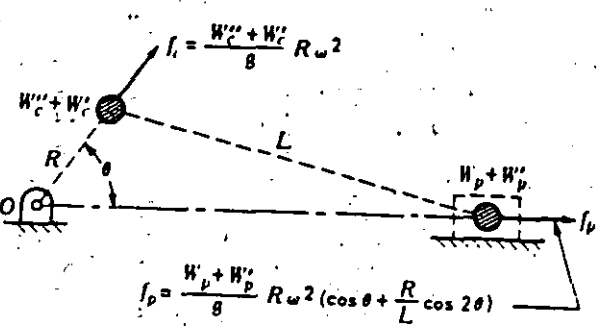
$$W_c' + W_p' = W$$

$$W_c' h_c = W_p' h_p$$



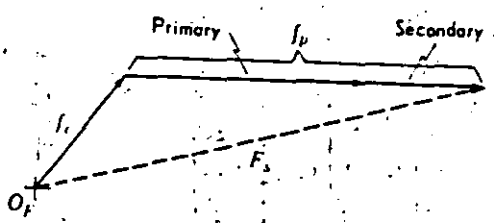
(d)

(e)



(a)

$$A = -R \omega^2 \left(\cos \theta + \frac{R}{L} \cos 2\theta \right)$$



(b)

$$f_p = \underbrace{\frac{W_p + W_p'}{g} R \omega^2 \cos \theta}_{\text{Primary}} + \underbrace{\frac{W_p + W_p'}{g} R \omega^2 \frac{R}{L} \cos 2\theta}_{\text{Secondary}}$$

10
10

10

10

10

10

10

10

DIRECTORIO DE ALUMNOS
CURSO: CIMENTACION DE MAQUINARIA
DEL 17 AL 21 DE FEBRERO DE 1992

1. CUAXILOA SERRANO JAIME
INGENIERIA ESTRUCTURAL Y DE SISTEMAS S.A.
GERENTE
RIO BRAVO 6103, PUEBLA, PUE.
SAN MANUEL, C.P. 72570
TEL. 45 03 03 OFNA.
DOM.
2. FLORES MARTINEZ RODOLFO
CEMENTOS APASCO
DISEÑADOR
CAMPOS ELISEOS 345, 11560
POLANCO, M. HIDALGO
LUCIO BLANCO 461
EDIF. 7, DEPTO. 104
SAN JUAN TLIHUACA
AZCAPOTZALCO, 02400
TEL. 596 79 88 OFNA.
352 52 16 DOM.
3. GARCIA ESPINO ESTANISLAO
CEMENTOS APASCO
INGENIERO CALCULISTA
CAMPOS ELISEOS 345-16 PISO
POLANCO, M. HIDALGO, 11560
GREGORIO LOPEZ Y FUENTES #263-3
VILLA DE CORTEZ, B. JUAREZ
C.P. 03530
TEL. 596 79 88 OFNA.
696 50 93 DOM.
4. GARCIA MERODIO JUAN ALFONSO
TECNOCONCRETO, S.A. DE C.V.
REPRESENTANTE TECNICO DE VENTAS
BLVD. M. AVILA CAMACHO # 80
EL PARQUE, NAUCALPAN
FCO. ALONSO PINZON # 91 (COLON)
COLON ECHEGARAY, NAUCALPAN
C.P. 53300
TEL. 557 10 15 OFNA.
373 16 61 DOM.
5. HERNANDEZ ACERO LUIS MANUEL
CEMENTOS APASCO S.A. DE C.V.
INGENIERO CIVIL
CAMPOS ELISEOS 345
POLANCO, M. HIDALGO, 11560
CANADA 46-403, PARQUE SAN ANDRES
COYOACAN, 04040
TEL. 596 79 88 OFNA.
689 20 74 DOM.
6. IBARRA SANDOVAL JOSE MERCED
INSTITUTO MEXICANO DEL PETROLEO
INGENIERO CALCULISTA
AV. DE LOS 100 METROS # 152
SAN LORENZO ATEPEHUACAN
COD. DE NAHUATLECAS, M 150 L 9
LA CANDELARIA, COYOACAN, 04380
TEL. 368 59 11 OFNA.
689 54 47 DOM.
7. LUGO VEGA ENRIQUE
INDEPENDIENTE
CALLE 673 # 86
ARAGON, G.A. MADERO,
C.P. 07920
TEL. 796 71 03
341 92 82
8. NERI JUAREZ LUIS ENRIQUE
CEMENTOS APASCO
INGENIERO CIVIL
CAMPOS ELISEOS #345 PISO 16
POLANCO, M. HIDALGO, 011560
NARBONA 59 COL. LOMAS ESTRELLA
IZTAPALAPA, C.P. 09890
TEL. 596 79 88 EXT. 325 OFNA.
656 54 91 DOM.
9. MARTINEZ GERMAN ILDEFONSO
LINDE DE MEXICO, S.A. DE C.V.
BLVD. MANUEL AVILA CAMACHO # 32
LOMAS DE CHAPULTEPEC, 11000
16 DE SEPTIEMBRE # 29 EDIF. A1-5
COL. AMPL. NTE. SAN JUAN IXTACALA
C.P. 54160, TLALNEPANITLA
TEL. 202 90 00 OFNA.
388 02 24 DOM.
10. RODRIGUEZ NUÑEZ POLICIANO
INDEPENDIENTE
ARQUITECTO
5a. CDA, CTO. BAHAMAS #16
LOMAS ESTRELLA, IZTAPALAPA, 09890
TEL. 656 08 24 DOM.

