DISEÑO DE EXPERIMENTOS TECNICAS DE ESTREO Y ANALISIS ESTADISTICO

1 9 9 2

FECHA	TEMA	PROFESOR
Lunes: Abril 27	Introducción	M. en I. Rubén Téllez
Miércoles: Abril 29	Técnicas Básicas de Muestreo	M. en I. Rubén Téllez
Lunes: Mayo 4	Técnicas Básicas de Muestreo	M. en I. Rubén Téllez
Miércoles: Mayo 6	Técnicas Básicas de Muestreo	M. en I. Rubén Téllez
Viernes: Mayo 8	Técnicas Básicas de Muestreo	M. en I. Rubén Téllez
Lunes: Mayo 11	Diseño y Análisis de Experimentos para comparar dos tratamientos. Introducción a los paquetes para Computadora.	M. en I. Rafael Brito
Miércoles: Mayo 13	Diseño y Análisis de Experimentos para comparar K Tratamientos	M. en I. Augusto Villareal
Viernes: Mayo 15	Diseño y Análisis de Experimentos para comparar K Tratamientos.	M. en I. Augusto Villareal
Lunes: Mayo 18	Diseño y Análisis de Experimentos con bloques aleatorizados.	M. en I. Rubén Téllez
Miércoles: Mayo 20	Diseño y Análisis de Experimentos con bloques aleatorizados.	M. en I. Rubén Téllez
Viernes: Mayo 22	Diseño y Análisis de Experimentos factoriales	M. en I. Rafael Brito
Lunes: Mayo 25	Diseño y Análisis de Experimentos factoriales	M. en I. Rafael Brito
Miércoles: Mayo 27	Diseño que usan cuadros	Dr. Octavio Rascón
Viernes: Mayo 29	Diseño y Análisis de Experimentos factoriales	M. en I. Rubén Téllez M. en I. Bernardo Frontana

DISEÑO DE EXPERIMENTOS TECNICAS DE MUESTREO Y ANALISIS ESTADISTICO

1 9 9 2

FECHA	*TEMA*	*PROFESOR*
Lunes: Junio 1º	*Análisis de Variancia en regresión lineal*	*M. en I. Rubén Téllez,* *M. en I. Bernardo Frontana*
Miércoles: Junio 3	*Análisis de Variancia en regresión lineal*	*M. en I. Rubén Téllez,* *M. en I. Bernardo Frontana*
Viernes: Junio 5	*Aplicaciones de paquetes para computadora.*	*M. en I. Rubén Téllez,* *M. en I. Bernardo Frontana* *M. en I. Rafael Brito.*

EVALUACION DEL PERSONAL DOCENTE

CURSO: DISEÑO DE EXPERIMENTOS: TECNICAS DE MUESTREO Y ANALISIS ESTADISTICO

FECHA: Del 27 de Abril al 5 de Junio de 1992.

	CONFERENCISTA	DOMINIO DEL TEMA	EFICIENCIA EN EL USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES	MANTENIMIENTO DEL INTERES. (COMUNICACION CON LOS ASISTENTES, AMENIDAD, FACILIDAD DE EXPRESION).	PUNTUALIDAD	
10	M. en I. Rubén Téllez					
11	M. en I. Rafael Brito					
12	M. en I. Augusto Villareal					
13	M. en I. Dr. Octavio Rascón					
14	M.en I. Bernardo Frontana					
15						
16						
17						
18						
	ESCALA DE EVALUACION: 1 a 10					

DISEÑO DE EXPERIMENTOS TECNICAS DE MUESTREO Y ANALISIS ESTADISTICO.

EVALUACION DE LA ENSEÑANZA

2

SU EVALUACION SINCERA NOS AYUDARA A MEJORAR LOS PROGRAMAS POSTERIORES QUE DISEÑAREMOS PARA USTED.

Fecha: Del 27 de Abril al 5 de Junio de 1992.

TEMA	ORGANIZACION Y DESARROLLO DEL TEMA	GRADO DE PROFUNDIDAD LOGRADO EN EL TEMA	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO EN EL TEMA	UTILIDAD PRACTICA DEL TEMA	
Técnicas Básicas de Muestreo					
Diseño y Análisis de Experimentos para comparar dos tratamientos.					
Introducción a los paquetes para computadora.					
Diseño y Análisis de Experimentos para comparar K Tratamientos.					
Diseño y Análisis de Experimentos con bloques aleatorizados.					
Diseño y Análisis de Experimentos factoriales.					
Aplicaciones de paquetes para computadora.					
ESCALA DE EVALUACION: 1 a 10					

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

CURSOS ABIERTOS

DISEÑO DE EXPERIMENTOS: TECNICAS DE MUESTREO Y ANALISIS ESTADISTICO

INTRODUCCION

M. EN I. RUBEN TELLEZ SANCHEZ

ABRIL-JUNIO 1992.

5. REPRODUCCION

Repetición del experimento porque:

- Proporciona una estimación del error experimental
- Permite obtener una estimación más precisa del efecto medio de cualquier factor

UNIDAD EXPERIMENTAL

Unidad a la cual se le aplica un solo tratamiento (que puede ser una combinación de muchos fatores) en una reproducción del experimento

ERROR EXPERIMENTAL

Describe la situación de no llegar a resultados idénticos con dos unidades experimentales tratadas identicamente y refleja:

- Errores de experimentación
- Errores de observación
- Errores de medición
- Variación del material experimental (esto es, entre unidades experimentales)
- Efectos combinados de factores extraños que pudieran influir las características en estudio, pero respecto a los cuales no se ha llamado atención en la investigación

El error experimental puede reducirse:

- Usando material experimental más homogéneo o por estratificación cuidadosa del material disponible
- Utilizando información proporcionada pro variables aleatorias relacionadas
- Teniendo más cuidado al dirigir y desarrollar el experimento
- Usando un diseño experimental muy eficiente

CONFUSION

Dos o más efectos se confunden en un experimento si es imposible separar sus efectos, cuando se lleva a cabo el subsecuente análisis estadístico.

6. ALEATORIZACION.

Asignación al azar de tratamientos delas unidades experimentales.

Una suposición frecuente en los modelos estadísticos de diseño de experimentos en que las observaciones o los errores en ellas estan distribuidos independientemente. La aleatorización hace valida esta suposición.

La reproducción y aleatorización hacen válida una prueba de significancia.

7. CONTROL LOCAL

Cantidad de balanceo, bloque y agrupamiento de las unidades experimentales que se emplean en el diseño estadístico adaptado.

El objetivo del control local es hacer un diseño experimental mas eficiente.

AGRUPAMIENTO

Colocación de un conjunto de unidades experimentales homogéneas en grupos, de modo que los diferentes grupos puedan sujetarse a distintos tratamientos.

BLOQUEO

Distribución de las unidades experimentales en bloques, de manera que las unidades dentro de un bloque sean relativamente homogénas, de esta manera, la mayor parte de la variación predecible entre las unidades queda confundida con el efecto de los bloques.

BALANCEO

Obtención de las unidades experimentales, el agrupamiento, el bloqueo y la asignación de los tratamientos a las unidades experimentales de manera que resulte una configuración balanceada.

8. TRATAMIENTO O COMBINACION DE TRATAMIENTOS.

Conjunto particular de condiciones experimentales que deben imponerse a una unidad experimental dentro de los confines del diseño seleccionado.

9. FACTOR

Una variable independiente. En la mayoría de las investigaciones, se trata con mas de una variable independiente y con los cambios que ocurren en la variable dependiente, cuando varia una o mas de las variables independientes.

10. ETAPAS DE UN DISEÑO DE EXPERIMENTOS.

-Enunciado o planteamiento del problema.

-Formulación de hipótesis.

-Proposición de la técnica experimental y el diseño.

-Examen de sucesos posibles y referencias en que se basan las razones para la indagación que asegure que el experimento proporcionará la información requerida y en la extensión adecuada.

-Consideración de los posibles resultados desde el punto de vista de los procedimientos estadísticos que se aplicaran y para asegurar que se satisfagan las condiciones necesarias para que sean válidos estos procedimientos.

-Ejecución del experimento.

-Aplicación de las técnicas estadísticas a los resultados experimentales.

-Extracción de conclusiones con medidas de la confiabilidad de las estimaciones generadas. Debera darse cuidadosa consideración a la validez de las conclusiones para la población de objetos o eventos a la cual se van aplicar.

-Valoración de la investigación completa y contrastación con otras investigaciones del mismo problema o similares.

RTS'rzb.

11. LISTA DE COMPROBACION PARA PLANEAR PROGRAMAS DE PRUEBA.

A. Obtenga un enunciado claro del problema.

1. Identifique la nueva e importante área del problema.
2. Subraye el problema específico dentro de sus limitaciones usuales
3. Defina el propósito exacto del programa de prueba.
4. Determine la relación del problema particular con la investigación total o desarrollo del programa.

B. Reúna la información básica disponible.

1. Investigue todas las fuentes de información disponibles.
2. Tabule los datos pertinentes para planear el nuevo programa.

C. Diseñe el programa de prueba.

1. Sostenga una conferencia respecto a todas las partes concernientes.
   a. Enuncie las proposiciones por probar
   b. Especifique respecto a la magnitud de las diferencias que usted considere que valen la pena.
   c. Esboce las alternativas posibles de los sucesos.
   d. Escoja los factores por estudiar.
   e. Determine el rango práctico de estos factores y los niveles específicos a los que se harán las pruebas.
   f. Escoja las mediciones finales que van a hacerse.
   g. Considere el efecto de variabilidad de muestreo y de la precisión de métodos de prueba.
   h. Considere las posibles interrelaciones (o "interacciones") de los factores.
   i. Determine las limitaciones de tiempo, costo, materiales, potencia humana, instrumentación y otros factores y de condiciones extrañas tales como condiciones metereológicas.
   j. Considere los aspectos de las relaciones humanas del programa.
2. Diseñe el programa en forma preliminar.
   a. Prepare una cédula sistemática y completa.
   b. Proporcione las etapas de ejecución o adaptación de la cédula, si es necesario.

c. Elimine los efectos de las variables que no están en estudio, mediante control, balanceo o aleatorización de las mismas.
d. Reduzca al mínimo el número de ejecuciones del experimento.
e. Elija el método de análisis estadístico.
f. Haga las indicaciones prudentes para una acumulación ordenada de datos.

3. Revise el diseño con todo lo concerniente.
   a. Ajuste el programa de acuerdo con los comentarios
   b. Desglose en términos precisos los pasos a seguir.

D. Planee y lleve a cabo el trabajo experimental.

1. Desarrolle métodos, materiales y equipo
2. Aplique los métodos o técnicas
3. Supervise y cheque los detalles; modificando los métodos si es necesario.
4. Registre cualquier modificación al diseño del programa
5. Sea cuidadoso en la colección de datos.
6. Registre el avance del programa.

E. Analice los datos.

1. Reduzca los datos registrados a forma numérica, si es necesario.
2. Aplique las técnicas adecuadas de la Estadística Matemática.

F. Interprete los resultados.

1. Considere todos los datos observados.
2. Limite las conclusiones a deducciones estrictas a partir de la evidencia obtenida.
3. Pruebe, mediante experimentos independientes, las controlversias que susciten los datos.
4. Llegue a conclusiones, tanto respecto al significado técnico de resultados como respecto a significancia estadística.
5. Especifique lo que implican los resultados para su aplicación y para trabajos posteriores.
6. Tome en cuenta todas las limitaciones impuestas por los métodos usados.

7. Enuncie los resultados en términos de probabilidades verificables.

G. Prepare el reporte.

1. Describa claramente el trabajo dando antecedentes, aclaraciones pertinentes del problema y del significado de los resultados.
2. Use métodos gráficos y tabulares para la presentación de los datos en forma eficiente para usos futuros.
3. Suministre información suficiente para que el lector pueda verificar resultados y sacar sus propias conclusiones.
4. Limite las conclusiones a un resumen objetivo, tal que el trabajo evidencie su uso para consideraciones rápidas y acciones decisivas.

12. VENTAJAS DE LOS EXPERIMENTOS DISEÑADOS ESTADISTICAMENTE.

1. Se requiere una estrecha colaboración entre los estadísticos y el investigador o cientificos con las consiguientes ventajas en el análisis e interpretación de las etapas del programa.
2. Se enfatiza respecto a las alternativas anticipadas y respecto a la preplaneación sistemática, permitiendo aun la ejecución por etapas y la producción única de datos útiles para el análisis en combinaciones posteriores.
3. Debe enfocarse la atención a las interrelaciones y a la estimación y cuantificación de fuentes de variabilidad en los resultados.
4. El número de pruebas requerido puede terminarse con certeza y a menudo puede reducirse.
5. La comparación de los efectos de los cambios es más precisa debido a la agrupación de resultados.
6. La exactitud de las conclusiones se conoce con una precisión matemáticamente[9] definida.

13. DESVENTAJAS DE LOS EXPERIMENTOS DISEÑADOS ESTADISTICAMENTE.

1. Tales diseño y sus análisis, usualmente están acompañados de enunciados basados en el lenguaje técnico del estadístico. Sería significativos a la generalidad de la gente, además, el estadístico no debería subestimar el valor de presentarnos los resultados en forma gráfica. De hecho, siempre debería considerar a la representación gráfica como un paso preliminar de un procedimiento más analítico.
2. Muchos diseños estadístico, especialmente cuando fueron formulados por primera vez, se han criticado como demasiado caros, complicados y que requieren mucho tiempo. Tales críticas, cuando son válidas, deben aceptarse de buena fe y debe hacerse un intento honesto para mejorar la situación, siempre que no sea en detrimento de la solución del problema.

---

9. Charles A. Bicking "Some uses o Statistics in the planning of experiments" Industrial Quality Control, Vol. 10, No. 4, enero 1954, pp. 22.

BIBLIOGRAFIA

1. Kempthorne O. "The Design and Analysis of Experiments". John Wiley and Sons, Inc., New York, 1952, p. 10.

2. Bicking A. C. "Some uses of Statistics in the planning of experiments", Industrial Quality Control, Vol. 10, No. 4, enero 1954, p. 23.

3. Cox D.R. "Planning of Experiments". John Wiley and Sons, Inc., New York, 1978.

4. Ostle B. "Estadística Aplicada". Limusa-Wiley, México, 1975. cap. 10.

5. Méndez I. "Lineamientos Generales para la planeación de Experimentos". Monografia No. 15, Vol. 15, IIMAS. 1980.

RTS'rrb.

ETAPAS DE UNA ENCUESTA POR MUESTREO

1. PLANEACION

   . ESPECIFICACION DE FINES: OBJETIVOS Y METAS
   . DEFINICION DE LA POBLACION A MUESTREAR: POBLACION MUESTREADA=POBLACION OBJETO
   . ESPECIFICACION DE DATOS A SER COLECTADOS Y DE LA UNIDAD DE MUESTREO
   . ESPECIFICACION DE REFERENCIA DE TIEMPO Y PERIODO DE REFERENCIA
   . SELECCION Y ESPECIFICACION DE METODOS DE MEDICION Y METODO DE INSPECCION DE LA POBLACION
   . DISEÑO Y VALIDACION DE FORMAS DE REGISTRO O CUESTIONARIO (=> REALIZACION DE ENCUESTAS PILOTO)
   . DETERMINACION DEL MARCO MUESTRAL O ESPECIFICACION DE LA LISTA DE UNIDADES DE MUESTREO
   . SELECCION DEL METODO MUESTREO
   . DETERMINACION DEL TAMAÑO DE LA MUESTRA
   . ORGANIZACION DEL TRABAJO DE CAMPO

2. REALIZACION FISICA DE LA ENCUESTA
3. RESUMEN Y ANALISIS DE DATOS : INSPECCION DE LA INFORMACION CAPTADA
4. ANALISIS DE LA NO RESPUESTA
5. PROCESAMIENTO DE LA INFORMACION
6. ANALISIS E INTERPRETACION DE INFORMACION
7. EVALUACION DE LA INVESTIGACION MUESTRAL

13

METODOS DE MUESTREO

- **PROBABILISTICOS**
  - IRRESTRICTO ALEATORIO: IGUAL PROBABILIDAD DE QUEDAR INCLUIDA EN LA MUESTRA PARA TODOS LOS ELEMENTOS DE LA POBLACION
  - ESTRATIFICADO: COMBINACION DE MUESTREO IRRESTRICTO ALEATORIO EN CADA ESTRATO O SUBGRUPO DE LA POBLACION
  - DE CONGLOMERADOS: MUESTREO ALEATORIO, EN DONDE LAS UNIDADES MUESTRALES SON EN SI MISMAS POBLACIONES O CONGLOMERADOS
  - POLIETAPICO: MUESTREO ALEATORIO RECURSIVO DONDE LAS UNIDADES DE PRIMERA ETAPA CONTIENEN A LAS DE SEGUNDA ETAPA Y ASI SUCESIVAMENTE.
  - MONTECARLO O SIMULADO: MUESTREO ALEATORIO DONDE LA POBLACION REAL SE SUSTITUYE POR UNA QUE LA REPRESENTA: LA FUNCION DE DISTRIBUCION DE LA VARIABLE QUE DESCRIBE EL COMPORTAMIENTO PROBABILISTICO DE LA POBLACION.
- **DETERMINISTICOS**
  - SISTEMATICO: CAPTACION SISTEMATICA O SECUENCIAL DE LAS UNIDADES MUESTRALES CON RELACION AL TIEMPO O A SU UBICACION EN LA POBLACION
  - DE CUOTAS: EN BASE A LA ESTRUCTURA DE LA POBLACION EN UN PERIODO PASADO SE HACE LA DISTRIBUCION O AFIJACION DE LA MUESTRA EN LAS PARTES DE LA POBLACION.
  - DE TRAZOS O INTENCIONADO: DE REGISTROS DE LA POBLACION (DIRECTORIOS, NOMINAS, ETC.) SE SELECCIONA EN FORMA ARBITRARIA PARA CONSTRUIR LA MUESTRA PARTES DE LA POBLACION
  - CAOTICO: DE MANERA SUBJETIVA O ARBITRARIA SE SELECCIONA LA MUESTRA; VALIDO UNICAMENTE PARA POBLACIONES CON UN NIVEL DE HOMOGENIDAD ELEVADA.

MUESTREO: ES EL PROCESO DE ADQUISICION DE UNA MUESTRA

MUESTREO

- *CON REEMPLAZO.-* CUANDO CADA ELEMENTO OBSERVADO SE REINTEGRA AL LOTE DEL CUAL FUE EXTRAIDO, ANTES DE EXTRAER EL SIGUIENTE.
- *SIN REEMPLAZO.-* CUANDO CADA ELEMENTO OBSERVADO NO SE REINTEGRA AL LOTE.

POBLACION: COLECCION DE DATOS QUE SE PUEDEN OBTENER AL REALIZAR UNA SECUENCIA EXHAUSTIVA DE EXPERIMENTOS.

POBLACION

- *DISCRETA.-* TIENE UN NUMERO FINITO O UN NUMERO INFINITO NUMERABLE DE DATOS POSIBLES
- *CONTINUA.-* TIENE UN NUMERO INFINITO NO NUMERABLE DE DATOS POSIBLES

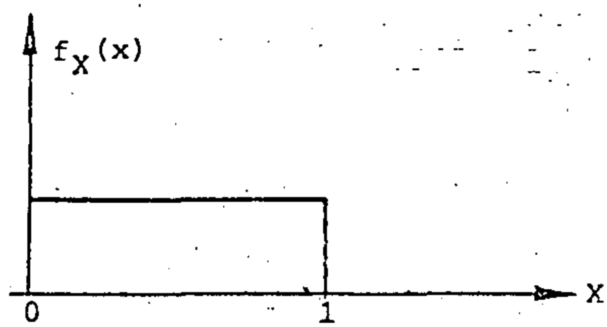
EJEMPLOS

1. EXPERIMENTO: LANZAMIENTO DE UNA MONEDA DIEZ VECES
   POBLACION: SUCESION INFINITA NUMERABLE DE "CARAS" Y "CRUCES" (DISCRETA)
   MUESTRA: GRUPO DE 10 OBSERVACIONES

2. EXPERIMENTO: MEDICION DE LA PRECIPITACION PLUVIAL DIARIA EN LA CIUDAD DE MEXICO DURANTE DIEZ AÑOS
   POBLACION: SUCESION INFINITA NO NUMERABLE DE VALORES (CONTINUA)
   MUESTRA: GRUPO DE 3652 OBSERVACIONES (TOMANDO DOS AÑOS BISIESTOS DE 29 DIAS EN FEBRERO)

MUESTRA ALEATORIA: ES UNA MUESTRA OBTENIDA DE TAL MANERA QUE *TODOS* LOS ELEMENTOS DE LA POBLACION TIENEN LA *MISMA* PROBABILIDAD DE SER OBSERVADOS Y, ADEMAS, LA OBSERVACION DE UN ELEMENTO *NO AFECTA* LA PROBABILIDAD DE OBSERVAR CUALQUIER OTRO, ES DECIR, SI SON INDEPENDIENTES.

TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS: ES UNA TABLA QUE CONTIENE NUMEROS QUE CONSTITUYEN UNA MUESTRA ALEATORIA OBTENIDA DE UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES UNIFORME, QUE GENERALMENTE CORRESPONDE A UNA VARIABLE ALEATORIA QUE PUEDE ASUMIR VALORES ENTRE 0 Y 1, MULTIPLICADOS POR 10^r, EN DONDE r ES EL NUMERO DE DIGITOS QUE SE DESEA TENGAN LOS NUMEROS.



LAS TABLAS QUE SE USEN PARA OBTENER UNA MUESTRA ALEATORIA DEBEN CONTENER NUMEROS CON MAYOR NUMERO DE DIGITOS QUE LOS QUE TIENE EL TOTAL DE ELEMENTOS DE LA POBLACION QUE SE VA A MUESTREAR. POR EJEMPLO, SI SE VA A OBTENER UNA MUESTRA ALEATORIA DE UN LOTE DE LENTES PARA MICROSCOPIO QUE TIENE 10,000 ELEMENTOS, LA TABLA QUE SE USE DEBERA TENER NUMEROS ALEATORIOS CON 5 O MAS DIGITOS.

METODO DE MUESTREO ALEATORIO

1. SE ENUMERAN LOS ELEMENTOS DE LA POBLACION.
2. SE FIJA EL CRITERIO DE SELECCION DE LOS NUMEROS ALEATORIOS (POR EJEMPLO, SE DEFINE QUE RENGLONES Y QUE COLUMNAS SE VAN A LEER).
3. SE INDICA QUE DIGITOS SE VAN A ELIMINAR EN CASO DE QUE LOS NUMEROS DE LA TABLA TENGAN MAS DIGITOS QUE LOS NECESARIOS
4. SE LEEN LOS NUMEROS, DE ACUERDO CON LO FIJADO EN LOS PUNTOS 2 Y 3, Y SE EXTRAEN DEL LOTL LOS ELEMENTOS QUE TIENEN LOS NUMEROS LEIDOS. ESTOS CONSTITUYEN LA MUESTRA FISICA CON LA CUAL REALIZAR LOS EXPERIMENTOS. LAS OBSERVACIONES CONSTITUIRAN LA MUESTRA ALEATORIA DESEADA.

NOTA: TODOS LOS NUMEROS QUE SE REPITAN SE CONSIDERAN SOLO UNA VEZ. TAMBIEN SE ELIMINAN LOS NUMEROS MAYORES DEL TAMAÑO DEL LOTE.

EJEMPLO

SE TIENE UN LOTE DE 1,000 TRANSISTORES NUMERADOS DEL UNO AL MIL, CUYA CALIDAD SE VA A VERIFICAR ESTADISTICAMENTE, PARA LO CUAL SE DECIDE TOMAR UNA MUESTRA DE 40 ELEMENTOS Y MEDIR SU AMPLIFICACION, USANDO LA TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS ANEXA, CON EL CRITERIO DE TOMAR TODOS LOS RENGLONES IMPARES ELIMINANDO EL ULTIMO DIGITO. LA MUESTRA FISICA SERIAN LOS TRANSISTORES CORRESPONDIENTES A LOS NUMEROS 0415, 0006, 0394, 0998, 0530, 0394, 0160, ETC.

TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS

Renglón \ Columna	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	16408	81899	04153	53381	79401	21438	83035	92350	36693	31238	59649
2	18629	81953	05520	91962	04739	13092	37662	94822	94730	06496	35090
3	73115	47498	47498	87637	99016	00060	88824	71013	18735	20286	23153
4	57491	16703	23167	49323	45021	33132	12544	41035	80780	45393	44812
5	30405	03946	23792	14422	15059	45799	22716	19792	09983	74353	68668
6	16631	35006	85900	32388	52390	52390	16815	69298	38732	38480	73817
7	96773	20206	42559	78985	05300	22164	24369	54224	35083	19687	11052
8	38935	64202	14349	82674	66523	44133	00697	35552	35970	19124	63318
9	31624	76384	17403	03941	44167	64486	64758	75366	76554	01601	12614
10	78919	19474	23632	27889	47914	02584	37680	20801	72152	39339	34806

REFERENCIAS

1. Fisher, R. A. y Yates, F., "Statistical tables", Ed. Oliver and Boyd Ltd, Londres
2. Owen, B., "Handbook of statistical tables", Addisson-Wesley Co., 1962.

Tabla
Estimadores Aplicables a Muestreo Aleatorio Simple

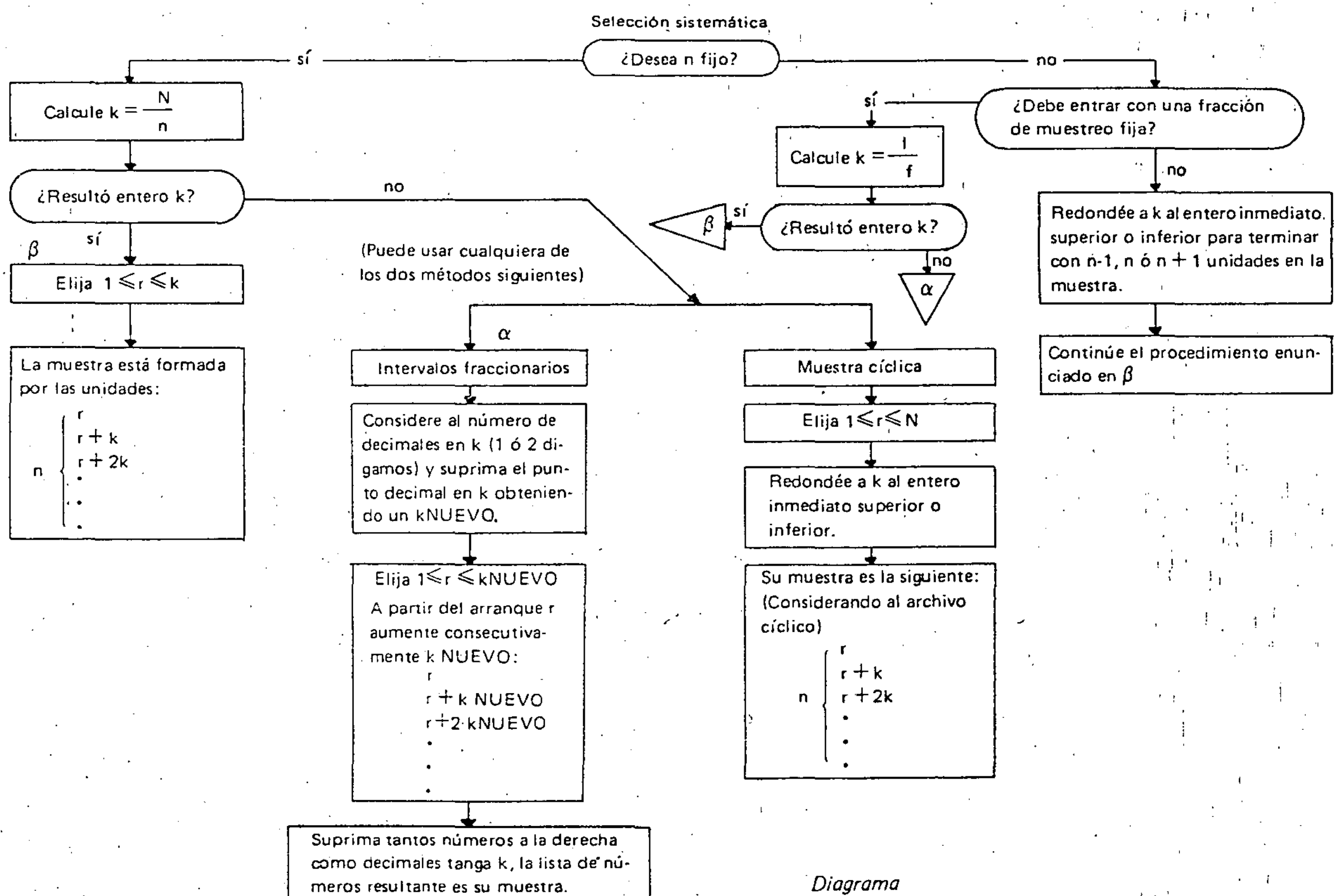
Parámetro	*Estimador del Parámetro*	*Variancia del estimador*	*Estimador de la Variancia*	*Intervalos de confianza* *
Media	$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$	$V(\bar{y}) = (1\text{-}f) \frac{S^2}{n}$	$\hat{V}(\bar{y}) = (1\text{-}f) \frac{s^2}{n}$	$\bar{y} \mp t(\hat{V}(\bar{y}))^{1/2}$
Total	$N\bar{y} = \frac{N}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$	$V(N\bar{y}) = (1\text{-}f) \frac{N^2 S^2}{n}$	$\hat{V}(N\bar{y}) = (1\text{-}f) \frac{N^2 s^2}{n}$	$N\bar{y} \mp t(\hat{V}(N\bar{y}))^{1/2}$
Porcentaje	$p = \frac{a}{n}\, 100$ $\hat{A} = N \frac{a}{n}$	$V(p) = \frac{NPQ\ (1\text{-}f)}{(N-1)\ n}$ $V(\hat{A}) = \frac{N^3 PQ}{N-1} \frac{(1\text{-}f)}{n}$	$\hat{V}(p) = \frac{N\text{-}n}{(n\text{-}1)N}\ pq$ $\hat{V}(A) = \frac{N(N\text{-}n)}{n-1}\ pq$	$p \mp t(\hat{V}(p))^{1/2}$ $\hat{A} \mp t(\hat{V}(\hat{A}))^{1/2}$
Razones	$\hat{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$	$V(\hat{R}) = \frac{1\text{-}f}{n\bar{X}^2} \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i\text{-}Rx_i)^2}{N-1}$	$\hat{V}(\hat{R}) = \frac{1\text{-}f}{n\bar{X}^2} \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i\text{-}\hat{R}x_i)^2}{n-1}$ Nota: Cuando se desconoce $\bar{X}$ puede ser usado $\bar{x}$ en su lugar.	$\hat{R} \mp t(\hat{V}(\hat{R}))^{1/2}$

* Para obtener intervalos de confianza del 95% use $t = 2$.

Tabla

Estimadores aplicables a muestreo estratificado, con afijación proporcional y muestreo aleatorio simple en cada estrato.

	ESTRATO		*POBLACION*	
Media	$\bar{y}_h = \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}$	$\hat{V}(\bar{y}_h) = (1 - f_h)\frac{s_h^2}{n_h}$	$\bar{y}_{est} = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{L} \sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}$	$\hat{V}(\bar{y}_{est}) = \frac{1 - f}{nN} \sum_{h=1}^{L} N_h s_h^2$
Total	$N_h\bar{y}_h = \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}$	$\hat{V}(N_h\bar{y}_h) = N(N\text{-}n) \frac{s_h^2}{n_h}$	$N\bar{y}_{est} = \frac{N}{n} \sum_{h=1}^{L} \sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}$	$\hat{V}(N\bar{y}_{est}) = \frac{N(1 - f)}{n} \sum_{h=1}^{L} N_h s_h^2$
Porcentaje	$p_h = \frac{a_h}{n_h} 100$	$\hat{V}(p_h) = \frac{N_h - n_h}{N_h(n_h - 1)} p_h q_h$	$p_{est} = \left[\frac{1}{n} \sum_{h=1}^{L} a_h\right] 100$	$\hat{V}(p_{est}) = \frac{1 - f}{N} \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h^2}{nN_h - N} p_h q_h$


Selección sistemática
¿Desea n fijo?
sí
no
Calcule k = N/n
¿Resultó entero k?
sí
no
β
Elija 1 ≤ r ≤ k
La muestra está formada por las unidades:
n
r
r + k
r + 2k
(Puede usar cualquiera de los dos métodos siguientes)
α
Intervalos fraccionarios
Considere al número de decimales en k (1 ó 2 digamos) y suprima el punto decimal en k obteniendo un kNUEVO.
Elija 1 ≤ r ≤ kNUEVO
A partir del arranque r aumente consecutivamente k NUEVO:
r
r + k NUEVO
r + 2 kNUEVO
Suprima tantos números a la derecha como decimales tanga k, la lista de números resultante es su muestra.
Muestra cíclica
Elija 1 ≤ r ≤ N
Redondée a k al entero inmediato superior o inferior.
Su muestra es la siguiente: (Considerando al archivo cíclico)
n
r
r + k
r + 2k
¿Debe entrar con una fracción de muestreo fija?
sí
no
Calcule k = 1/f
¿Resultó entero k?
sí
β
no
α
Redondée a k al entero inmediato superior o inferior para terminar con n-1, n ó n + 1 unidades en la muestra.
Continúe el procedimiento enunciado en β

Diagrama

FACTORES EN LA DETERMINACION DEL TAMAÑO DE LA MUESTRA

- TAMAÑO DE LA POBLACION
- HETEROGENIDAD DE LA POBLACION
- NIVEL DE ERROR: $\hat{\theta} - \theta$, donde:

  $\hat{\theta}$, estimación en base a información muestral

  θ , valor verdadero de la población desconocido
- NIVEL DE SIGNIFICANCIA: $\alpha = Pr\ |Error\ I|$
- DISPONIBILIDAD DE RECURSOS

  - ECONOMICOS
  - HUMANOS
  - DE TIEMPO

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

CURSOS ABIERTOS

DISEÑO DE EXPERIMENTOS:

TECNICAS DE MUESTREO Y ANALISIS ESTADISTICO

IDEAS BASICAS EN MUESTREO

M. EN I. TELLEZ SANCHEZ

ABRIL-JUNIO 1992.

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

IDEAS BASICAS EN MUESTREO

MÉTODO DE MUESTREO

UN METODO DE MUESTREO ES UN METODO DE SELECCIONAR DE TAL MANERA UNA FRACCION DE LA POBLACION QUE LA MUESTRA SELECCIONADA REPRESENTE A LA POBLACION ENTERA. UN METODO DE MUESTREO, SI VA A PROPORCIONAR UNA MUESTRA REPRESENTATIVA DE LA POBLACION, DEBE SER TAL QUE TODAS LAS CARACTERISTICAS DE LA POBLACION, INCLUYENDO LA DE VARIABILIDAD ENTRE SUS UNIDADES, SE REFLEJEN EN LA MUESTRA TAN APROXIMADAMENTE COMO EL TAMAÑO DE LA MUESTRA LO PERMITA, PARA QUE SE PUEDA FORMAR, A PARTIR DE LA MUESTRA, ESTIMACIONES DIGNAS DE CONFIANZA DE LOS CARACTERES DE LA POBLACION.

ERROR ESTÁNDAR

CUALQUIERA QUE SEA EL METODO DE SELECCION, UNA ESTIMADA POR MUESTRA DIFERIRA INEVITABLEMENTE DE LA QUE SE OBTENDRIA ENUMERANDO, CON IGUAL CUIDADO, A LA POBLACION COMPLETA. ESTA DIFERENCIA ENTRE LA ESTIMADA DE LA MUESTRA Y EL VALOR DE LA POBLACION SE LLAMA EL ERROR DE MUESTREO. UN METODO DE MUESTREO, SI HA DE SER UTIL, DEBE PROPORCIONAR ALGUNA IDEA SOBRE EL ERROR DE MUESTREO EN LA ESTIMACION DE UN PROMEDIO. PARA ESTE PROPOSITO HAY VARIAS MEDIDAS DISPONIBLES. UNA DE ELLAS, QUE PROPORCIONA LA MAGNITUD MEDIA DEL ERROR DE MUESTREO, SE LLAMA EL ERROR ESTANDAR DE LA ESTIMADA Y DA UNA MEDIDA DE LA SEGURIDAD DE LA ESTIMADA DE LA MUESTRA. ES LA MAGNITUD DEL ERROR ESTANDAR LA QUE DETERMINARA SI UNA ESTIMADA POR MUESTREO ES UTIL PARA UN PROPOSITO DADO.

PRINCIPIO DE SELECCIÓN ENTRE MÉTODOS ALTERNATIVOS DE MUESTREO

DEBEN TAMBIEN TOMARSE EN CUENTA LAS CONSIDERACIONES PRACTICAS

MUESTREO PROBABILISTICO

TODOS LOS PROCEDIMIENTOS DE MUESTREO, PARA LOS CUALES HA SIDO DESARROLLADA UNA TEORIA, TIENEN EN COMUN LAS SIGUIENTES PROPIEDADES MATEMATICAS.

1. ES POSIBLE DEFINIR INEQUIVOCAMENTE UN CONJUNTO DE MUESTRAS S_1, S_2, ... S_T, MEDIANTE LA APLICACION DEL PROCEDIMIENTO A UNA POBLACION ESPECIFICA QUE CONDUZCA A LA SELECCION DE ESTAS MUESTRAS. ESTO QUIERE DECIR QUE PODEMOS INDICAR CON PRECISION CUALES UNIDADES DE MUESTREO PERTENECEN A S_1, S_2, Y ASI, SUCESIVAMENTE.

2. A CADA POSIBLE MUESTRA S_i, LE HA SIDO ASIGNADA UNA PROBABILIDAD CONOCIDA DE SELECCION π_i .

3. SELECCIONAMOS UNA DE LAS S_i POR UN PROCESO MEDIANTE EL CUAL CADA S_i TIENE UNA PROBABILIDAD π_i DE SER SELECCIONADA

4. EL METODO PARA CALCULAR EL ESTIMADOR DE LA MUESTRA DEBE SER ESTABLECIDO Y DEBE CONDUCIR A UN ESTIMADOR UNICO PARA CUALQUIER MUESTRA ESPECIFICA.

VENTAJAS DEL MUESTREO PROBABILISTICO

- COSTO REDUCIDO
- MAYOR RAPIDEZ
- MAYOR ALCANCE Y FLEXIBILIDAD DE ACUERDO AL TIPO DE INFORMACION A OBTENERSE
- MAYOR EXACTITUD
- ESTIMACION Y CONTROL DEL ERROR
- SON BASE DE ESTIMACIONES INSESGADAS DE LAS CARACTERISTICAS DE LA POBLACION

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL DISEÑO DE LA MUESTRA

A TODO PROCEDIMIENTO DE MUESTREO Y ESTIMACION SE ASOCIA EL COSTO DE LA ENCUESTA Y LA PRECISION DE LAS ESTIMADAS HECHAS (MEDIDA, DIGAMOS, EN TERMINOS DEL ERROR CUADRATICO MEDIO). SOLO SE CONSIDERAN LOS PROCEDIMIENTOS DE LOS QUE PUEDE HACERSE UNA ESTIMADA OBJETIVA DE LA PRECISION ALCANZADA A PARTIR DE LA MISMA MUESTRA. ADEMAS, LOS PROCEDIMIENTOS DEBEN DE SER PRACTICOS EN EL SENTIDO DE QUE SEA POSIBLE DESARROLLARLOS DE ACUERDO CON LAS ESPECIFICACIONES DESEADAS. DE TODOS LOS PROCEDIMIENTOS DE SELECCION DE LA MUESTRA Y ESTIMACION (LLAMADOS DISEÑO DE LA MUESTRA), SE PREFERIRA EL QUE DE MAYOR PRECISION POR UN COSTO DETERMINADO DE LA ENCUESTA, O EL QUE TENGA EL COSTO MINIMO Y NOS DA EL NIVEL DE PRECISION ESPECIFICADO. ESTE ES EL PRINCIPIO RECTOR DEL DISEÑO DE LA MUESTRA.

EN EL USO DE UN METODO DE MUESTREO.

MAS AUN, UN METODO DE MUESTREO, SI HA DE ACEPTARSE EN LA PRACTICA, DEBE SER SENCILLO, ACOMODARSE A LA EXPERIENCIA ADMINISTRATIVA Y A LAS CONDICIONES LOCALES Y ASEGURAR QUE SE VA A HACER EL USO MAS EFECTIVO DE LOS RECURSOS DISPONIBLES PARA EL QUE MUESTREA. EL PRINCIPIO A SEGUIR EN LA SELECCION DE UN METODO DE MUESTREO ES, EN REALIDAD, EL DE OBTENER EL RESULTADO DESEADO CON LA SEGURIDAD REQUERIDA A COSTO MINIMO, O CON LA MAXIMA SEGURIDAD A COSTO DADO, HACIENDO EL USO MAS EFICAZ DE LOS RECURSOS DISPONIBLES.

MUESTREO PROBABILÍSTICO

PARA LLENAR LOS REQUISITOS ANTERIORES ES NECESARIO QUE EL METODO DE MUESTREO SEA OBJETIVO, BASADO EN LEYES DEL AZAR. EL METODO SE LLAMA DE MUESTREO PROBABILISTICO. EN ESTE METODO LA MUESTRA SE OBTIENE EN SELECCIONES SUCESIVAS DE UNA UNIDAD, CADA UNA CON UNA CONOCIDA PROBABILIDAD DE SELECCION ASIGNADA EN LA PRIMERA SELECCION A CADA UNIDAD DE LA POBLACION. EN CUALQUIER SELECCION SUBSECUENTE, LA PROBABILIDAD DE SELECCIONAR CUALQUIER UNIDAD DE ENTRE LAS UNIDADES DISPONIBLES PARA ESA SELECCION PUEDE SER PROPORCIONAL A LA PROBABILIDAD DE SELECCIONARLA EN LA PRIMERA SELECCION O COMPLETAMENTE INDEPENDIENTE DE ELLA.

LAS SELECCIONES SUCESIVAS DE UNA MUESTRA PROBABILISTICA PUEDEN HACERSE CON O SIN REEMPLAZO DE LAS UNIDADES OBTENIDAS EN LAS SELECCIONES PREVIAS. EL PRIMER PROCEDIMIENTO ES EL DE MUESTREAR CON REEMPLAZO, EL SEGUNDO ES EL PROCEDIMIENTO LLAMADO SIN REEMPLAZO.

LA APLICACION DEL METODO SUPONE QUE LA POBLACION PUEDE SUBDIVIDIRSE EN UNIDADES DISTINTAS E IDENTIFICABLES LLAMADAS UNIDADES DE MUESTREO. ESTAS PUEDEN SER UNIDADES NATURALES, TALES COMO INDIVIDUOS EN UNA POBLACION HUMANA, O TERRENOS EN UNA ESTIMACION DE CULTIVO, O CONJUNTOS NATURALES DE ESAS UNIDADES COMO FAMILIAS O PUEBLOS; O PUEDEN

EL MUESTREO ALEATORIO IMPLICA QUE CADA UNO DE ESTOS POSIBLES CONGLOMERADOS TENGA UNA PROBABILIDAD IGUAL, A SABER,

$$\frac{1}{\binom{N}{n}} \quad \text{CON} \quad \frac{N!}{(N-n)!n!}$$

DE SER SELECCIONADO COMO MUESTRA.

LA PALABRA "ALEATORIO" SE REFIERE AL METODO DE SELECCIONAR UNA MUESTRA MAS BIEN QUE A LA MUESTRA PARTICULAR ESCOGIDA. CUALQUIER MUESTRA POSIBLE PUEDE SER UNA MUESTRA IRRESTRICTA ALEATORIA, POR MUY POCO REPRESENTATIVA QUE PUEDA APARECER, CON TAL DE QUE HAYA SIDO OBTENIDA SIGUIENDO LA REGLA DE DAR UNA PROBABILIDAD IGUAL A CADA UNA DE LAS MUESTRAS POSIBLES.

Procedimiento de Seleccionar una Muestra Aleatoria

EL PROCEDIMIENTO ES EN LA SIGUIENTE FORMA: (A) IDENTIFICAR N UNIDADES EN LA POBLACION CON LOS NUMEROS DEL 1 AL N, O LO QUE ES LA MISMA COSA, PREPARAR UNA LISTA DE UNIDADES EN LA POBLACION Y NUMERARLAS SERIADAMENTE: (B) SELECCIONAR DE MANERA SISTEMATICA NUMEROS *DIFERENTES* DE LA TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS, Y (C) TOMAR PARA LA MUESTRA LAS n UNIDADES CUYOS NUMEROS CORRESPONDEN A AQUELLOS OBTENIDOS DE LA TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS.

UNA MANERA USADA COMUNMENTE PARA EVITAR EL RECHAZO DE TANTOS NUMEROS ES DIVIDIR UN NUMERO ALEATORIO ENTRE N Y TOMAR EL RESIDUO COMO EQUIVALENTE AL NUMERO SERIADO CORRESPONDIENTE ENTRE 1 Y N-1, CORRESPONDIENDO EL RESIDUO CERO AL N .

Métodos no Aleatorios de Muestreo

LOS METODOS DE MUESTREO QUE NO ESTAN BASADOS EN LAS LEYES DE

PROBABILIDAD, SINO QUE EL JUICIO PERSONAL DEL ENUMERADOR DETERMINA CUALES UNIDADES DEBEN SER INCLUIDAS EN LA MUESTRA, SE LLAMAN METODOS NO ALEATORIOS O INTENCIONALES. SI QUEREMOS TENER ESTIMADAS INSESGADAS DEL CARACTER DE LA POBLACION CUYA EXACTITUD PUEDA SER CALCULADA DE LAS MISMAS MUESTRAS, SOLAMENTE DEBERA USARSE EL MUESTREO PROBABILISTICO.

ERRORES NO DE MUESTREO

LA EXACTITUD DE UN RESULTADO SE AFECTA NO SOLO POR LOS ERRORES DE MUESTREO QUE SURGEN DE LA VARIACION POR AZAR EN LA SELECCION DE LA MUESTRA, SINO TAMBIEN POR: A) FALTA DE PRECISION AL REPORTAR OBSERVACIONES; B) SELECCION INCOMPLETA O DEFECTUOSA DE UNA MUESTRA ALEATORIA, Y C) METODOS DEFECTUOSOS DE ESTIMACION. ESTOS ERRORES, PARTICULARMENTE AQUELLOS DE A) Y B), SE AGRUPAN USUALMENTE BAJO EL ENCABEZADO DE "ERRORES NO DE MUESTREO".

GENERACION DE NÚMEROS ALEATORIOS

COMO SE MENCIONO EN LA SECCION 5.1, EN LOS PROCESOS DE SIMULACION SE UTILIZAN FRECUENTEMENTE NUMEROS ALEATORIOS. ESTOS NUMEROS O VALORES DE VARIABLES ALEATORIAS CON DISTINTAS FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD. EN ESTA PARTE SE CONSIDERAN LAS FORMAS DE OBTENER DICHOS NUMEROS ALEATORIOS.

MÉTODOS MANUALES

LA MANERA MAS SENCILLA, Y LA PRIMERA EN QUE SE PIENSA CUANDO SE TRATA DE GENERAR NUMEROS ALEATORIOS, ES MEDIANTE EL EMPLEO DE ALGUN DISPOSITIVO MECANICO (POR EJEMPLO, UN DADO O UNA MONEDA).

DISPOSITIVOS USADOS COMUNMENTE PARA GENERAR NUMEROS ALEATORIOS POR METODOS MANUALES SON: LOS DADOS, LAS MONEDAS Y COMBINACIONES DE ESTAS, O SEA CONJUNTOS DE DADOS Y DE MONEDAS. EXISTEN TAMBIEN DADOS ESPECIALES CON 10 CARAS PARA GENERAR DIRECTAMENTE NUMEROS DECIMALES.

LOS METODOS MANUALES DE GENERACION DE NUMEROS ALEATORIOS, TIENEN LA VENTAJA DE SER FACILMENTE COMPRENDIDOS EN FORMA INTUITIVA Y GENERAN NUMEROS ALEATORIOS Y SECUENCIAS DE ESTOS DE BUENA CALIDAD. SIN EMBARGO, SON SUMAMENTE LENTOS Y LABORIOSOS Y NO PUEDEN REPETIRSE SECUENCIAS DE NUMEROS EN CASO DE QUE SE NECESITEN.

TABLAS DE NÚMEROS ALEATORIOS

EXISTE UN GRAN NUMERO DE PUBLICACIONES DE *TABLAS DE NUMEROS*, ENTRE LAS MAS FAMOSAS SE CUENTA: RAND CORPORATION. A MILLION RANDOM DIGITS WITH 100 000 NORMAL DEVIATES.

CASI TODOS LOS LIBROS DE PROBABILIDAD CUENTAN CON ESTAS TABLAS.

EL UTILIZAR TABLAS DE NUMEROS ALEATORIOS PERMITE REPETIR UNA SECUENCIA ALEATORIA TANTAS VECES COMO SEA NECESARIO.

MÉTODOS DE COMPUTACIÓN ANALÓGICA

ESTOS METODOS SON, EN ESENCIA, SIMILARES A LOS METODOS MANUALES. POR LO TANTO, TIENEN COMO ESTOS LA DESVENTAJA DE QUE NO SE PUEDE REPRODUCIR SECUENCIAS CUANDO ES NECESARIO.

UNO DE LOS METODOS UTILIZADOS PARA GENERAR NUMEROS CON UNA COMPUTADORA ANALOGICA, CONSISTE EN INTEGRAR UN RUIDO (COMO LA ESTATICA DEL RADIO) DURANTE UN CIERTO PERIODO DE TIEMPO Y CONSIDERAR EL VALOR DE LA INTEGRAL COMO NUMERO ALEATORIO.

MÉTODOS DE COMPUTACIÓN DIGITAL

ESTOS METODOS SON LOS MAS COMUNMENTE UTILIZADOS EN LA SIMULACION. EN PARTICULAR SE VERAN AQUELLOS METODOS DE COMPUTACION DIGITAL EN LOS QUE LAS SECUENCIAS DE NUMEROS SE GENERAN MEDIANTE RELACIONES DE RECURRENCIA.

UNA *RELACION DE RECURRENCIA* ES AQUELLA QUE PERMITE OBTENER CUALQUIER NUMERO DE UNA SUCESION A PARTIR DEL NUMERO ANTERIOR.

LOS METODOS MAS COMUNES PARA GENERAR NUMEROS ALEATORIOS EN UNA COMPUTADORA DIGITAL SON METODOS RECURRENTES, ENTRE ESTOS, LOS MAS CONOCIDOS Y EXITOSOS SON LOS *METODOS CONGRUENCIALES*, QUE SON LOS QUE SE CONSIDERAN A CONTINUACION.

PRIMERAMENTE SE ELIGEN CUATRO NUMEROS O PARAMETROS DE LA FUNCION DE RECURRENCIA CONGRUENCIAL:

x_o	VALOR INICIAL	$x_o \geq o$
a	EL MULTIPLICADOR	$a \geq o$
c	EL INCREMENTO	$c \geq o$
m	EL MODULO	$m > x_o$ $m > a$ $m > o$

CUALES SON LAS CONSECUENCIAS DE:

- NO RECOLECTAR DATOS

- RECOLECTAR DATOS INADECUADOS

* TOMA DE DECISIONES INCORRECTAS

* ACCIONES TOMADAS SON INEFECTIVAS

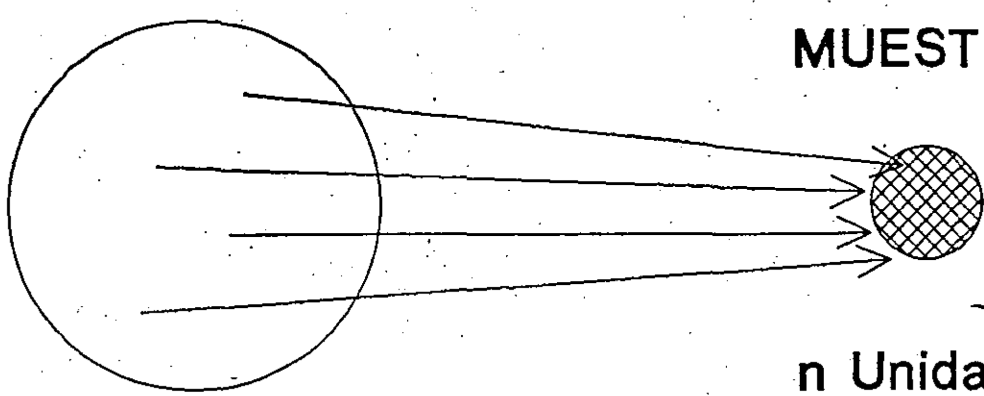
* DESPERDICIO DE TIEMPO, RECURSOS Y/O DINERO

* LAS PRIORIDADES NO PUEDEN SER ASIGNADAS EN FORMA APROPIADA

TOC

MUESTRA

UNA MUESTRA ES UN CONJUNTO DE ELEMENTOS SELECCIONADOS DE UNA POBLACION.



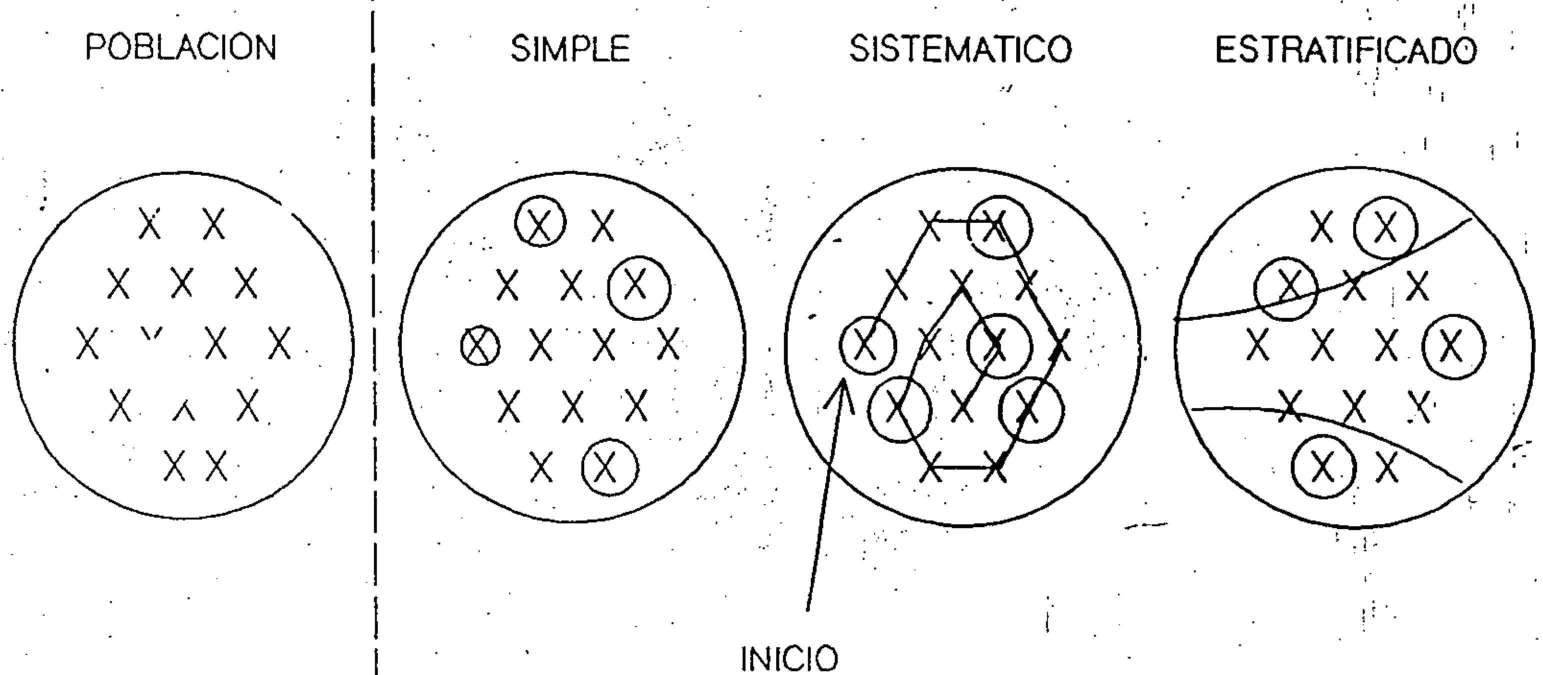
TQC041

POR QUE HACER MUESTREO?

* POBLACION DE GRANDES DIMENSIONES
* DISPONIBILIDAD DE TIEMPO
* DISPONIBILIDAD DE RECURSOS (DINERO, PERSONAL, ETC.)
* PRUEBAS DESTRUCTIVAS
* CALIDAD DE LA INFORMACION

TQCT41

TIPOS DE MUESTREO RANDOM



TQCT44

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

CURSOS ABIERTOS

DISEÑO DE EXPERIMENTOS:
TECNICAS DE MUESTREO Y ANALISIS ESTADISTICO

TAMAÑO DE LA MUESTRA

ELABORO:

M. EN I. RUBEN TELLEZ SANCHEZ.

ABRIL-JUNIO, 1992.

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

ya que cuanto más dispersos estén los valores de la variable asociada a ella más arriesgado será el utilizar una muestra de tamaño pequeño.

A continuación se expondrá el procedimiento para seleccionar el tamaño de muestra más adecuado en el caso del muestreo aleatorio simple o irrestrictamente aleatorio (sin remplazo). Más adelante se estudiarán los métodos para calcular el tamaño de la muestra para otros procedimientos de muestreo.

4.1 Tamaño de una muestra aleatoria simple (Medias)

En este caso se trata de estimar la media μ de una población con variable aleatoria asociada X mediante el empleo del promedio aritmético $\overline{X}$, obtenido de una muestra aleatoria de tamaño n con un error máximo admisible absoluto e y un nivel de confianza P_K. Es natural que a la probabilidad P_K le corresponderá un cierto valor de desviación K, obtenido a partir de la desigualdad de Chebyshev, o bien considerando a K como el número de desviaciones estándar para una distribución normal o para una t de Student.

El procedimiento para obtener el tamaño de la muestra se fundamenta en el hecho de que

$$P\{\overline{X} - K\sigma_{\overline{X}} \leq \mu \leq \overline{X} + K\sigma_{\overline{X}}\} = P_K = 1 - \alpha$$

o sea que con probabilidad o nivel de confianza P_K se puede asegurar que el valor de μ de una población se encuentra dentro del

$(1-\alpha)$ % de los intervalos formados a partir de muestras de tamaño n, de la forma siguiente

$$(\bar{X} - K\sigma_{\bar{X}} \ , \ \bar{X} + K\sigma_{\bar{X}})$$

Lo anterior implica que los límites de confianza del P_K % para estimar a μ son

$$\bar{X} \pm K\sigma_{\bar{X}}$$

es decir, que el error en la estimación del valor de μ es, en valor absoluto,

$$|\text{error en la estimación de } \mu| = K\sigma_{\bar{X}} \qquad (4.1)$$

Por lo tanto, es posible escribir

$$|\text{error máximo admisible}| = |\text{error en la estimación de } \mu| = e$$

4.1.1 Muestreo de una población finita

De la inferencia estadística, el valor de $\sigma_{\bar{X}}$, la desviación estándar de la distribución muestral de $\bar{X}$ (o error estándar de $\bar{X}$) cuando la población es finita es

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1} \ \frac{\sigma_X^2}{n}}$$

pudiéndose escribir entonces

$$e = K\sigma_{\bar{X}} = K\sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1} \ \frac{\sigma_X^2}{n}}$$

siendo K la desviación correspondiente al nivel de confianza P_K, N_p el tamaño de la población, σ_x^2 la variancia de esta última y n el tamaño de la muestra.

Puesto que se desea conocer el tamaño de la muestra, éste se puede obtener despejando de la ecuación anterior el valor de n. Para ello, se requiere elevar al cuadrado ambos miembros, es decir

$$e^2 = K^2 \frac{N_p - n}{N_p - 1} \frac{\sigma_x^2}{n}$$

$$e^2 = \frac{K^2 \sigma_x^2 N_p - K^2 \sigma_x^2 n}{(N_p - 1) n}$$

despejando a n:

$$ne^2 (N_p - 1) = K^2\sigma_x^2 N_p - K^2\sigma_x^2 n$$

$$ne^2 N_p - ne^2 = K^2\sigma_x^2 N_p - K^2\sigma_x^2 n$$

$$ne^2 N_p - ne^2 + K^2\sigma_x^2 n = K^2\sigma_x^2 N_p$$

$$n(e^2 N_p - e^2 + K^2\sigma_x^2) = K^2\sigma_x^2 N_p$$

$$\therefore\ n = \frac{K^2\sigma_x^2 N_p}{e^2 N_p - e^2 + K^2\sigma_x^2} \qquad (4.2)$$

La fórmula anterior permite obtener el tamaño de la muestra considerando conocidos K, e, N_p y σ_X^2. Puesto que el valor de σ_X^2 de la población usualmente se desconoce, se debe estimar previamente en forma adecuada considerando la información disponible de poblaciones semejantes a la que deberá muestrearse, o tomando una muestra preliminar suficientemente grande de dicha población.

Puesto que el tamaño de la muestra debe corresponder a un número entero positivo, se deberá asignar a n el valor entero más próximo por exceso al obtenido mediante la fórmula 4.2.

4.1.2 Muestreo de una población infinita

Cuando el muestreo se realiza a partir de una población infinita, el valor de $\sigma_{\bar{X}}$, la desviación estándar de la distribución muestral de $\bar{X}$, es

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

en donde σ_X es la desviación estándar de la población y n el tamaño de la muestra.

considerando la ecuación 4.1, se puede escribir en este caso

$$|\text{error en la estimación de } \mu| = e = K\sigma_{\bar{X}} = K\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

Para obtener el valor de n, se elevan al cuadrado ambos miembros de la expresión anterior, es decir,

$$e^2 = \frac{K^2\,\sigma_X^2}{n}$$

Por lo cual

$$n = \frac{K^2 \ \sigma_X^2}{e^2}$$

Para resaltar el hecho de que en este caso el tamaño de la muestra se obtiene a partir de una población infinita, en lugar de emplear n se puede emplear n_∞ , es decir

$$n_\infty = \frac{K^2 \ \sigma_X^2}{e^2} \qquad (4.3)$$

Al igual que en el caso de una población finita, el tamaño de la muestra dado por la ec 4.3 debe corresponder a un número natural, por lo cual se debe aproximar por exceso al valor entero más cercano.

4.1.3 Comparación entre n y n_∞

Si se divide entre $N_p e^2$ el numerador y el denominador del miembro izquierdo de la ecuación 4.2, se obtiene

$$n = \frac{\dfrac{K^2\sigma_X^2 N_p}{N_p e^2}}{\dfrac{e^2 N_p - e^2 + K^2\sigma_X^2}{N_p e^2}} = \frac{\dfrac{K^2\sigma_X^2}{e^2}}{1 - \dfrac{1}{N_p} + \dfrac{K^2\sigma_X^2}{N_p e^2}}$$

$$n = \frac{\dfrac{K^2\sigma_X^2}{e^2}}{1 + \dfrac{1}{N_p}\left(\dfrac{K^2\sigma_X^2}{e^2} - 1\right)}$$

y, considerando el valor de n_∞ dado por la ec 4.3, se obtiene finalmente

$$n = \frac{n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p}\ (n_\infty - 1)} \qquad (4.4)$$

Como se puede apreciar de la ec 4.4, el valor de n es menor que el de n_∞ , a menos que $N_p = \infty$.

4.1.4 Empleo adecuado de n y n_∞

Para una población finita, se definirá la <u>fracción de muestreo</u> como

$$\text{fracción de muestreo} = fm = \frac{n_\infty}{N_p}$$

siendo n_∞ el tamaño de la muestra calculada con la ec 4.3, y N_p el tamaño de la población.

Al obtener el tamaño de la muestra cuando se trata de una población finita, usualmente se acostumbra emplear la fórmula 4.3, que proporciona dicho tamaño para población infinita, y considerar como bueno dicho valor siempre que se cumpla la condición

$$fm \leq 0.05$$

Lo anterior quiere decir que en la práctica se calcula el valor de n_∞ , y si n_∞ / N_p cumple con la condición mencionada, entonces se considera que n_∞ es una aproximación satisfactoria de n. Si la condición no se cumple, entonces se emplea la ec 4.4 para obtener el valor de n.

Es claro que tomando como tamaño de la muestra a n_∞ siempre se estará del lado más prudente, en el sentido de que se toma una muestra igual o mayor que la necesaria. Sin embargo, la eficiencia del diseño exige que el gasto y el tiempo de muestreo no sean superiores a los que haya que efectuar.

Ejemplo 4.1

Sea una población normal finita con variancia aproximadamente igual a 500. Se desea obtener una muestra aleatoria para estimar mediante $\bar{X}$ a la media poblacional μ_X, con error en la estimación no mayor de 10 y nivel de confianza igual a 90%. Obténgase el valor de n considerando que el tamaño de la población es igual a

a. 1000

b. 100

Solución

a. Puesto que $\sigma_X^2 = 500$, $e = 10$ y $1 - \alpha = 0.90$, tratándose de una población normal se tiene que

$$K = Z_{0.45} = 1.645$$

por lo cual

$$n_\infty = \frac{K^2\sigma_X^2}{e^2} = \frac{(1.645)^2 \cdot (500)}{10^2}$$

$$= (2.706)\ (5) = 13.53$$

$$\therefore n_{\infty} = 14$$

En virtud de que en este caso

$$fm = \frac{n_{\infty}}{N_p} = \frac{14}{1000} = 0.014 < 0.05$$

se considera que n = 14.

b. En este caso

$$fm = \frac{14}{100} = 0.14 > 0.05$$

por lo cual se emplea la ec 4.4 para obtener el valor de n, es decir,

$$n = \frac{n_{\infty}}{1 + \frac{1}{N_p}\ (n_{\infty} - 1)} = \frac{14}{1 + \frac{1}{100}\ (14 - 1)}$$

$$= \frac{14}{1 + \frac{13}{100}} = \frac{14}{1.13} = 12.389$$

$$\therefore n = 13$$

Ejemplo 4.2

Cierta universidad cuenta con 4726 estudiantes, y se desea conocer el rendimiento académico medio de todos ellos, en términos de una escala de calificación que va de cero a cien puntos. En estudios semejantes en otras universidades, se obtuvo que la desviación estándar de las calificaciones es aproximadamente igual a 7 puntos. Si el error en la estimación de la media de calificaciones no debe ser mayor de un punto en valor absoluto, y el nivel de confianza es igual a 99%, ¿cuál debe ser el tamaño de la muestra para realiaar la estimación?

Solución

En este caso, aproximando la distribución muestral de $\bar{X}$ mediante la distribución normal, se debe considerar que

$$P_K = 1 - \alpha = 0.99 \quad \therefore \quad K = Z_{0.495} = 2.58$$

$$\sigma_X^2 = (7)^2 = 49 \quad ; \quad e = 1 \text{ punto}$$

Por lo tanto,

$$n_\infty = \frac{Z_C^2\ \sigma_X^2}{e^2} = \frac{(2.58)^2\ (49)}{(1)^2}$$

$$= \frac{(6.656)\ (49)}{1} = 326.144$$

O sea $\quad n_\infty = 327$

Puesto que

$$fm = \frac{n_\infty}{N_p} = \frac{327}{4726} = 0.0692 > 0.05$$

se procede a calcular n, es decir,

$$n = \frac{n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p}(n_\infty - 1)} = \frac{327}{1 + \frac{1}{4726}(327 - 1)}$$

$$= \frac{327}{1 + \frac{326}{4726}} = \frac{327}{1.069} = 305.89$$

$$\therefore n = 306$$

Ejemplo 4.3

Una muestra aleatoria de 14 observaciones de la altura alcanzada por cierto tipo de planta arrojó los siguientes datos:

Nº de elemento	Altura, X, en pulgadas
1	52.3
2	48.1
3	55.7
4	56.8
5	50.1
6	49.2
7	47.7
8	50.8
9	57.9
10	52.5
11	54.7
12	49.6
13	53.9
14	56.0

Obténgase el tamaño de muestra necesario para asegurar, con una probabilidad igual a 0.95, que el error en la estimación de la media de alturas de esta variedad de planta no sea mayor del 2.86%.

Solución

Se deben obtener primero los valores de $\bar{X}$ y S_X^2 de la muestra, con los cuales se estimarán los de μ_X y σ_X^2 de la población. Para ello, se dispone la información en la forma siguiente:

[illegible]

[illegible]

[illegible]
[illegible]
[illegible]

[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

[illegible]

[illegible]
[illegible]
[illegible]

[illegible]

[illegible]

rior, se obtiene

$$Y = \frac{N_p}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} y_i = N_p \mu_Y$$

Es decir, el total de una población es igual al tamaño de la misma multiplicado por la media correspondiente.

Cono estimador puntual del total de la población se puede tomar el de la estadística

$$\hat{Y} = N_p \bar{Y}$$

en donde $\bar{Y}$ es el promedio aritmético de la muestra, y $\hat{Y}$ un estimador insesgado en virtud de que

$$E(\hat{Y}) = E(N_p \bar{Y}) = N_p E(\bar{Y}) = N_p \mu_Y = Y$$

Por otra parte, la variancia de la distribución muestral de $\hat{Y}$ es

$$\sigma^2_{\hat{Y}} = \sigma^2_{N_p \bar{Y}} = \mathrm{Var}(N_p \bar{Y}) = N_p^2 \mathrm{Var}(\bar{Y}) = N_p^2 \sigma^2_{\bar{Y}}$$

y la desviación estándar es

$$\sigma_{\hat{Y}} = \sigma_{N_p \bar{Y}} = N_p \sigma_{\bar{Y}} = N_p \frac{\sigma_{Y.}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

De igual manera a como se hizo para las medias, el valor del tamaño de muestra para estimar el total con un nivel de confianza y un error absoluto dados, se obtiene en la forma siguiente

$$e = K\,\sigma_{\hat{Y}} = K\,N_p\,\frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

Elevando al cuadrado y realizando operaciones algebraicas

$$e^2 = K^2\,N_p^2\,\frac{\sigma_Y^2}{n}\,\frac{N_p - n}{N_p - 1}$$

$$e^2 = \frac{K^2\,N_p^3\,\sigma_Y^2 - K^2\,N_p^2\,\sigma_Y^2\,n}{n(N_p - 1)}$$

$$n\left(1 + \frac{K^2\,N_p^2\,\sigma_Y^2}{e^2(N_p - 1)}\right) = \frac{K^2\,N_p^3\,\sigma_Y^2}{e^2(N_p - 1)}$$

O sea

$$n = \frac{K^2\,N_p^3\,\sigma_Y^2}{e^2(N_p - 1) + K^2\,N_p^2\,\sigma_Y^2}$$

Dividiendo el numerador y denominador de la expresión anterior entre $N_p e^2$, se obtiene

$$n = \frac{\dfrac{K^2 N_p^3\,\sigma_Y^2}{N_p e^2}}{\dfrac{e^2 N_p - e^2 + K^2 N_p^2\,\sigma_Y^2}{N_p e^2}}$$

$$= \frac{N_p^2\,\dfrac{K^2\sigma_Y^2}{e^2}}{1 - \dfrac{1}{N_p} + \dfrac{N_p^2}{N_p}\,\dfrac{K^2\,\sigma_Y^2}{e^2}}$$

Considerando la ec 4.3, queda finalmente

$$n = \frac{N_p^2\,n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p}\,(N_p^2\,n_\infty - 1)} \qquad (4.6)$$

Ejemplo 4.4

Con el fin de hacer una solicitud al Gobierno, se recogieron firmas de habitantes de una ciudad en 676 hojas. Cada hoja tenía espacio suficiente para 42 firmas, pero en varias hojas se recolectó un número menor de ellas. Para obtener una estimación del total de firmas, se contó el número de firmas por hoja en una muestra aleatoria de 50 hojas, obteniéndose los datos que aparecen en la tabla siguiente:

Número de firmas, y_i	Número de hojas, f_i
42	23
41	4
36	1
32	1
29	1
27	2
23	1
19	1
16	2
15	2
14	1
11	1
10	1
9	1
7	1
6	3
5	2
4	1
3	1

Obtener el tamaño de muestra necesario para estimar el valor del total de firmas con un error absoluto igual al 5%, considerando un nivel de confianza igual a 95%.

Solución : Por conveniencia para realizar los cálculos, se dispone la información en la forma siguiente:

y_i	f_i	y_i^2	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$
42	23	1764	966	40572
41	4	1681	164	6724
36	1	1296	36	1296
32	1	1024	32	1024
29	1	841	29	841
27	2	729	54	1458
23	1	529	23	529
19	1	361	19	361
16	2	256	32	512
15	2	225	30	450
14	1	196	14	196
11	1	121	11	121
10	1	100	10	100
9	1	81	9	81
7	1	49	7	49
6	3	36	18	108
5	2	25	10	50
4	1	16	4	16
3	1	9	3	9
Σ	50		1471	54497

$$\bar{Y} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{19} f_i\, y_i = \frac{1471}{50} = 29.42$$

$$S_Y^2 = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{19} f_i\, y_i^2 - (\bar{Y})^2 = \frac{54497}{50} - (29.42)^2 =$$

$$= 1089.94 - 865.44 = 224.5$$

Entonces

$$\hat{Y} = N_p\, \bar{Y} = 676 \times 29.42 = 19888 \text{ firmas}$$

y, puesto que el error absoluto debe ser igual al 5%, se tendría

$$e = (0.05)\ (19888) = 995$$

Por otra parte, el tamaño inicial de muestra igual a 50 permite suponer que la estimación de σ_Y^2 de la población es suficientemente buena con S_Y^2, y que la distribución muestral de totales puede aproximarse mediante la normal. Por lo tanto,

$$K = Z_{0.475} = 1.96$$

$$N_p = 676$$

$$\sigma_Y^2 \doteq S_Y^2 = 224.5$$

$$N_p^2 n_\infty = N_p^2 \frac{K^2 \sigma_Y^2}{e^2} = \frac{(676)^2\ (1.96)^2\ (224.5)}{(995)^2} = 397.9$$

$$n = \frac{N_p^2 n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p}(N_p^2 n_\infty - 1)} = \frac{397.9}{1 + \frac{1}{676}(397.9 - 1)}$$

$$= \frac{397.9}{1 + 0.58} = \frac{397.9}{1.58} = 251.83$$

$$\therefore \quad n = 252 \text{ hojas}$$

4.3 Tamaño de una muestra aleatoria simple (Proporciones)

4.3.1 Antecedentes

Supóngase una población binomial de tamaño N_p tal que cada uno de sus elementos únicamente puede estar en una de dos clases: A o B (buenos o malos, negros o blancos, grandes o chicos, etc). La proporción de elementos de la población que están en la clase A es

$$P = \frac{A}{N_p}$$

y la proporción de elemtos que están en B es

$$Q = \frac{B}{N_p}$$

por lo cual

$$P + Q = \frac{A}{N_p} + \frac{B}{N_p} = 1 \quad ; \quad (A + B = N_p)$$

Si a todos los elementos X_i de la población que están en A se les asigna el valor 1 y a los de B el 0, se obtiene

$$P = \frac{A}{N_p} = \frac{\sum_{i=1}^{N_p} X_i}{N_p} = \mu_X$$

Es decir, la proporción puede considerarse un caso particular de la media cuando los elementos de la población son unos y ceros.

La variancia es

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} (X_i - P)^2$$

o sea

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} X_i^2 - P^2$$

Sin embargo, como X_i sólo puede ser igual a uno o cero, se tiene que $X_i = X_i^2$, por lo cual

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} X_i - P^2 = P - P^2 = P(1 - P) = PQ$$

En virtud de lo anterior, si se muestrea sin remplazo y con tamaño n de una población binomial finita, para estimar la proporción de elementos con cierta característica, se obtienen, considerando que la proporción se puede calcular como una media, los siguientes parámetros de la distribución muestral de proporciones

$$\mu_p = P$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}} = \sqrt{\frac{PQ}{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

Si la población es infinita, se obtiene

$$\mu_p = P$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{PQ}{n}}$$

estimándose P en ambos casos con el valor de p de la muestra, si se desconoce P de la población.

En la práctica se considera que la distribución muestral de proporciones es aproximadamente igual a la normal para tamaños de muestra mayores o iguales a 30 elementos.

4.3.2 Obtención del tamaño de la muestra

Aprovechando el hecho de que la proporción se puede calcular como una media simple, las ecs 4.3 y 4.4 se pueden emplear en este caso para obtener el tamaño de la muestra haciendo $\sigma_x^2 = PQ$. Entonces,

$$n_\infty = \frac{K^2 \; PQ}{e^2} \tag{4.7}$$

para muestreo de población infinita, y

$$n = \frac{n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p}(n_\infty - 1)}$$

para muestreo de población finita con tamaño N_p.

Usualmente se calcula primero el valor de n_∞, y si la fracción de muestreo es mayor de 0.05, se calcula a continuación el valor de n.

Ejemplo 4.5

En una colonia con 4000 casas se desea estimar el porcentaje de inquilinos que son a la vez propietarios de su casa, con un error estándar en la estimación no mayor del 1%. Se supone, de estudios semejantes, que el porcentaje real de inquilinos-propietarios se acerca al 10%. ¿Cuántas casas se deben muestrear para que se satisfaga la condición establecida?

Solución

El error estándar en la estimación de P de la población es

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{PQ}{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

y no debe ser mayor en este caso del 1%. Por lo tanto, siendo $N_p = 4000$, $P = 0.1$ y $Q = 1 - P = 0.9$, se obtiene

$$0.01 = \sqrt{\frac{(0.1)\ (0.9)}{n}} \sqrt{\frac{4000 - n}{4000 - 1}}$$

Elevando al cuadrado y realizando operaciones algebraicas

$$0.0001 = \frac{0.09}{n} \ \frac{4000 - n}{3999}$$

$$0.0001 = \frac{360 - 0.09\ n}{3999\ n}$$

$$0.3999\ n = 360 - 0.09\ n$$

$$n(0.3999 + 0.09) = 360$$

$$n = \frac{360}{0.4899} = 734.84$$

$$\therefore \quad n = 735 \text{ casas}$$

Ejemplo 4.6

En un estudio antropológico para estimar el porcentaje de habitantes de una isla con sangre del grupo O, se obtuvo una muestra aleatoria de 50 isleños, en la cual 22 de ellos pertenecen al grupo sanguíneo mencionado. Si en la isla habitan 3208 gentes, ¿cuál debe ser el tamaño de muestra mínimo para estimar con un error absoluto del 5% el valor real de P, suponiendo que el nivel de confianza es del 95%?

Solución

En este caso la proporción de la muestra es

$$p = \frac{22}{50} = 0.44$$

o sea

$$q = 1 - p = 1 - 0.44 = 0.56$$

Considerando que la muestra inicial es suficientemente grande, se aproxima mediante la distribución normal, obteniéndose

$$K = Z_{0.475} = 1.96$$

por lo cual

$$n_{\infty} = \frac{K^2\ PQ}{e^2} = \frac{K^2\ pq}{e^2} = \frac{(1.96)^2\ (0.44)\ (0.56)}{(0.05\ )^2}$$

$$= \frac{0.84515}{0.0025} = 338.06$$

$$\therefore\ n_{\infty} = 339$$

Como

$$fm = \frac{n_{\infty}}{N_P} = \frac{339}{3208} = 0.106 > 0.05$$

se corrige el valor anterior, obteniéndose finalmente

$$n = \frac{n_{\infty}}{1 + \frac{1}{N_P}\ (n_{\infty} - 1)} = \frac{339}{1 + \frac{1}{3208}\ (339-1)}$$

$$= \frac{339}{1.105} = 306.787$$

$\therefore$ n = 307 habitantes

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

CURSOS ABIERTOS

DISEÑO DE EXPERIMENTOS:

TECNICAS DE MUESTREO Y ANALISIS ESTADISTICO

EJERCICIOS DE MUESTREO

Obtenidos del libro:
Introducción al Muestreo
Adela Abad y
Luis A. Servín
Ed. LIMUSA

EXPOSITOR:
M. EN I. RUBEN TELLEZ SANCHEZ

ABRIL-JUNIO, 1992.

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

iv) Ambigüedad, posiblemente derivada a partir de homónimos.

Ejemplo 1.3 Al observar los salarios diarios de un conjunto de 10 personas se encontró lo siguiente: 175, 300, 125, 100, 100, 275, 150, 150, 200, 200.

i) El salario mínimo observado fue de 100 pesos al día, el máximo de 300, la diferencia entre el máximo y el mínimo o rango de las observaciones es de 300 − 100 = 200.

ii) El salario medio es de: 175 + 300 + 125 + 100 + 100 + 275 + 150 + 150 + 200 + 200 dividido entre 10, es decir, $\frac{1775}{10} =$ 177.5 pesos al día.

iii) La varianza de las observaciones es de (Apartado 3.6):

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\left(\Sigma\, y_i^2 - \frac{(\Sigma\, y_i)^2}{N}\right)$$

$$= \frac{1}{10-1}\left(175^2 + 300^2 + 125^2 + 100^2 + 100^2 + 275^2 + 150^2 + 150^2 + 200^2 + 200^2 - \frac{(1775)^2}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\,(356\,875 - 315\,062.5) = 4\,645.83 \text{ pesos al cuadrado.}$$

1.8 EJERCICIOS

1.1. *i.* Describa dos ejemplos de poblaciones a estudiar. *ii.* Especifique sus unidades o elementos. *iii.* Enuncie dos ejemplos de características de interés en cada una de ellas. *iv.* ¿Cuántos elementos tiene cada una de sus poblaciones? *v.* ¿Puede definir algunas subpoblaciones en ellas? , ¿cuáles?

1.2. El número de miembros y de beneficiarios asociados a un organismo público en cada una de las 20 familias de una manzana fueron los de la tabla 1.1.

Tabla 1.1

Familia	*No. de miembros*	*No. de beneficiarios*	*Familia*	*No. de miembros*	*No. de beneficiarios*
1	2	0	11	11	5
2	5	5	12	6	0
3	3	1	13	6	0
4	6	0	14	3	1
5	9	0	15	7	0
6	7	0	16	6	0
7	5	0	17	6	0
8	5	1	18	4	0
9	6	3	19	9	2
10	4	0	20	8	0

Determine:

i. El número total de miembros en las 20 familias.

ii. El número medio de miembros por familia.

iii. El porcentaje de familias con al menos un beneficiario.

iv. El cociente del total de beneficiarios al total de habitantes en la manzana.

v. El número medio de beneficiarios por familia, para las familias con al menos un beneficiario.

1.3 Enuncie una situación en la cual un censo fuera preferible a un muestreo.

1.4 En una encuesta sobre la salud de las personas en una ciudad, se parte de un mapa de ella, se dibujan las manzanas, se numeran, se efectúa una selección de manzanas, y para aquellas manzanas seleccionadas se contruye un listado de las viviendas que las conforman. Así se tiene un listado de viviendas para cada manzana en la muestra. A partir de esos listados se hace una nueva selección ahora de viviendas dentro de manzana, y para cada vivienda seleccionada, el entrevistador ocurre a ella y llena un cuestionario por cada persona o miembro de la vivienda. I) ¿Cuáles son los elementos en esta encuesta?, II) ¿Cuáles son las unidades?, III) Proporcione seis ejemplos de características a estudiar. IV) En base a sus características elegidas en (III), defina cuatro parámetros poblacionales, V) ¿Qué método de medición emplearía para cada uno de ellos?, VI) ¿Cuál fué el marco de referencia?.

2.7 EJERCICIOS

2.1 Véase el ejercicido *2* del capítulo *1*. Marcamos una canica por familia con el número de ésta y de sus miembros; las ponemos en una urna, las mezclamos y elegimos aleatoriamente a cinco de ellas, obteniendo los resultados siguientes:

Canica	1	2	3	4	5
No. de miembros	5	5	3	6	7

i) ¿Cómo estimaría el número medio de miembros por familia?

ii) ¿Qué estimador utilizó?

iii) ¿Cuál es su valor particular para esta muestra?

iv) ¿La muestra fue buena?

2.2 En el ejercicio anterior, y con el propósito de evaluar los resultados del muestreo, es decir, de saber qué tan buena es nuestra estimación, usamos la ecuación siguiente:

$$\left(1-\frac{5}{20}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\frac{\sum_{i=1}^{i=5}(y_i-\bar{y})^2}{5-1}=\left(1-\frac{5}{20}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\frac{1}{5-1}\left(\sum_{i=1}^{5}y_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{5}y_i\right)^2}{5}\right)$$

llamada "estimador de la variancia";

i) ¿Cuál es su valor particular para la muestra elegida?

ii) ¿En qué unidades de medida está el resultado obtenido?

iii) A la raíz cuadrada de ella se le llama *error estándar*, ¿cuál es su valor en este caso?

iv) Haga un bosquejo de una distribución normal, con media igual al número medio de miembros por familia encontrado en el ejercicio 1.2 y con la desviación estándar calculada anteriormente.

v) Según su dibujo, ¿le parece que está muy dispersa esa distribución?, es decir, ¿su variancia es grande o pequeña?

2.3 En una encuesta de opinión desarrollada sobre los obreros de una fábrica, se encontró el porcentaje de obreros favorables a cierta regla. Este porcentaje fué de 38%. Como había información suficiente para obtener dos estimaciones, se hizo esto y se obtuvo, para la segunda, nuevamente 38%, aunque no así para sus errores estándar. En el primer caso se encontró 0.07 y en el segundo 0.05. ¿Cuál de las dos estimaciones es mejor?, dé sus razones.

Este ejemplo, envuelve al concepto de muestreo multietápico en el cual se eligen unidades grandes (salones) y dentro de ellos se efectúa un nuevo sorteo (estudiantes). Realmente el número de etapas puede ser cualquiera: ciudad, colonia, manzana, vivienda y persona. A los conglomerados más grandes se les denomina unidades primarias, a las siguientes secundarias, terciarias, etc.

3.8 EJERCICIOS

3.1 Una población consta de 1 050 unidades numeradas del 1 al 1 050. Es necesario seleccionar una muestra aleatoria simple sin remplazo de tamaño 13. ¿Cómo lo haría usted?

3.2 Suponga que las unidades en la población anterior están numeradas como se indica a continuación:

1 001	9 811
1 002	9 813
•	9 910
1 317	9 911
1 318	9 912
1 319	9 913
•	•
•	•
•	•
2 040	9 918

¿Cómo seleccionaría una muestra aleatoria simple sin remplazo de tamaño 10?

3.3 En una encuesta desarrollada sobre una población de 10 000 familias, se tomó una muestra aleatoria de 40 de ellas, de manera que la fracción de muestreo fue de $\frac{40}{10\,000} = \frac{1}{250}$ es decir se entrevistó a una familia de cada 250. El número de personas que trabajan y el número total de miembros en cada familia de la muestra aparecen en la tabla 3.5.
Estime: *a*) El número medio de personas que trabajan por familia y encuentre intervalos de confianza del 95%.
b) El total de personas que trabajan y dé una estimación del error estándar.

3.4 Usando la información del ejercicio 3.3 estime el porcentaje de familias con más de cinco miembros y encuentre el error estándar de su estimación.

3.5 Sobre el mismo ejercicio 3.3, estime el número de miembros por persona que trabajan y el error estándar de su estimación.

3.6 Sobre la definición de muestreo aleatorio simple en el apartado 3.1, muestre que si a cada muestra posible se le elige con probabilidad igual, esto es equivalente a que la muestra elegida haya sido obtenida mediante la selección de n números aleatorios diferentes entre 1 y N.

3.7 En el ejemplo 3.1 derive intervalos de confianza del 95% para el porcentaje de empresas que fabrican y venden su producto al menudeo.

3.8 En el ejemplo 3.1, estime las variancias de la media y del total de empleados y calcule intervalos de confianza del 95% para cada uno de ellos.

3.9 Un grupo asesor de una escuela técnica piensa que los planes de estudio del plantel están un poco desactualizados y, mediante una encuesta sobre los egresados de ella, piensa derivar resultados que le ayuden en su reestructuración. Las preguntas que se deben formular, van dirigidas para aquellos egresados que estén trabajando como investigadores. El listado muestra 638 nombres cada uno con su dirección, de ellos se elige una muestra aleatoria de tamaño 20. Al hacer el trabajo de campo, los entrevistadores preguntan al egresado si es o no investigador. Si responde afirmativamente le hacen la entrevista y en caso contrario no la hacen. Al devolver los cuestionarios, el grupo asesor encuentra que 18 de los egresados en la muestra se calificaron como investigadores. Y así, emite instrucciones para que en el procesamiento de la información, en el cálculo de porcentajes y medias se use como tamaño de muestra 20.

i) ¿Cree usted que está bien definida la población objetivo? Indique sus razones.

ii) En el supuesto de que la población estuviera bien definida, ¿sería correcto usar el tamaño de muestra de 20 que indica el grupo asesor?

3.10 En cada cuestionario de un conjunto de 800 provenientes de una encuesta agrícola existe un dato de un porcentaje referente a una cualidad de la parcela agrícola. Los cuestionarios no han sido procesados aún, y se desea tener alguna idea del valor de ese porcentaje en los diferentes cuestionarios. Para ello, aprovechando su numeración consecutiva se elige aleatoriamente a 60 de ellos y se estima el porcentaje teniendo éste como valor 32%. Otra persona dice que la muestra fue muy pequeña y decide aumentarla a 120, calcula el porcentaje y obtiene como valor 33.4%. Una tercera persona aumenta el tamaño de muestra hasta 250 y encuentra como valor estimado a 32.9%.

¿Qué comentarios puede usted hacer respecto a los valores obtenidos en las diferentes muestras?

Tabla 3.5

No. de familia	*No. de personas que trabajan* y_i	*No. de miembros* x_i
1	1	3
2	3	7
3	1	5
4	1	1
5	1	9
6	2	8
7	1	8
8	2	5
9	3	7
10	1	3
11	1	4
12	1	4
13	1	8
14	1	11
15	4	4
16	1	7
17	3	3
18	2	3
19	1	3
20	2	2
21	2	5
22	2	4
23	1	9
24	1	6
25	1	6
26	1	7
27	2	6
28	3	6
29	1	5
30	1	5
31	1	9
32	1	8
33	1	4
34	3	6
35	1	1
36	7	7
37	1	3
38	1	3
39	6	6
40	3	9
$\sum_{i=1}^{40} y_i = 73$	$\Sigma\, y_i x_i = 413$	$\sum_{i=1}^{i=40} x_i = 220$
$\Sigma\, y_i^2 = 207$		$\Sigma\, x_i^2 = 1436$

Tamaño de muestra	77	98	334	300	200	200	370

Se concluye que el tamaño de muestra a usar es de 370, superior en 293 unidades al tamaño de muestra que se requeriría para obtener exclusivamente la estimación que pretendía el economista.

En este ejemplo se ha tratado de ilustrar la situación usual en muchas encuestas, acerca de que cuando se va a desarrollar una de ellas, los interesados tienden a introducir más y más preguntas en los cuestionarios con la salvaguarda de que "ya que van a visitar a tales personas, pregunten de paso tales y cuales cosas".

Sin tocar de momento los fuertes problemas a que da lugar un cuestionario extenso, se trata de ilustrar la habilidad de que debe hacer gala el estadístico para detectar cuáles preguntas son introducidas sin tener una importancia capital, y cuándo la tienen verdaderamente. El hecho es que cuando se interroga sobre la pregunta importante, los interesados contestan que todas lo son, y que de no ser así, "no se hubieran formulado". En realidad, algunas de ellas son debidas a simple curiosidad y, en otras, el uso que se les va a dar no es de tal importancia como para que ellas gobiernen a la encuesta. No es raro ver encuestas con cuestionarios formados por varias decenas de hojas. Y desde el punto de vista de la entrevista o, en general, del método que se emplee para recabar la información es deseable que sea lo más reducido posible.

4.7 EJERCICIOS

4.1 Obtenga la expresión 4.3 para el tamaño de la muestra en el caso de la estimación de totales.

4.2 Obtenga la expresión 4.4 para el tamaño de la muestra en el caso de la estimación de porcentajes

4.3 En el ejemplo 4.1 se encontró un tamaño de muestra de 24 para estimar el número medio de hojas por expediente, con un error que no excede al 20% y a una confianza del 95%.

Usando las tablas de números aleatorios (tabla 3.1) podemos materializar una muestra. Comenzando en la esquina superior izquierda y continuando posteriormente hacia abajo tenemos la tabla 4.3:

3.11 En una urna existen B canicas blancas y A canicas azules. Se extrae a n de ellas aleatoriamente y con reposición. Se desea determinar la probabilidad de que b canicas de entre las n extraídas ($b \leqslant n$) sean blancas. ¿Cuál es la distribución del número b de canicas blancas en cada muestra de tamaño n? , ¿cuál es la media y la variancia de esta distribución?

3.12 En la urna del ejercicio 3.11 la muestra aleatoria es extraída sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de que b canicas ($b \leqslant n \leqslant A + B$) sean blancas? ¿Cuál es la distribución del número b de canicas blancas en cada muestra de tamaño n? ¿Cuál es la media y la variancia de esta distribución?

3.13 En el apartado 3.5 se derivó la esperanza de la media muestral y al hacerlo se afirma que: "la probabilidad de que no sea elegida en las primeras $j - 1$ *extracciones*" *es* $\frac{N-j+1}{N}$, ¿está usted de acuerdo?

3.14 Una escuela tiene 20 salones en la planta baja numerados del 1 al 20 y 16 en la planta alta numerados del 1 al 16.

i) Indique brevemente cómo numeraría o identificaría a los salones para seleccionar una muestra aleatoria simple de tamaño 5.

ii) Utilizando los números aleatorios siguientes y avanzando de arriba hacia abajo, obtenga los 5 salones en la muestra.

Números aleatorios

74	50
90	98
25	46
01	81
41	11
31	39
25	04

Tabla 4.3

Expediente	No. hojas	Expediente	No. hojas	Expediente	No. hojas
1	5	9	5	17	3
2	4	10	2	18	6
3	2	11	1	19	2
4	3	12	2	20	1
5	2	13	2	21	5
6	3	14	1	22	3
7	2	15	1	23	5
8	9	16	1	24	3

Estime el número medio de hojas por expediente y obtenga intervalos de confianza del 95%.

4.4 En el ejemplo 4.2, para la estimación del total de hojas en los 60 expedientes con un error del 20% y una confianza del 80% se llegó a $n = 13$.

Continuando en las tablas de números aleatorios, a partir del último número usado en el ejercicio 1: *i*) Obtenga una muestra; *ii*) estime el total de hojas, y *iii*) dé una estimación del error estándar.

4.5 La producción, en un día, de tarjetas perforadas de una persona se encuentra en una gaveta; siendo el total de ellas 2 000. Se quiere estimar el porcentaje de tarjetas que tienen al menos un error, mediante una muestra aleatoria. ¿Qué tamaño de muestra es necesario si se piensa que el porcentaje está entre 68 y 80%, y se acepta un error estándar de 3%?

4.6 En un archivo de 10 000 000 de nombres de habitantes del país se desea estimar el porcentaje de ellos cuyo apellido empieza con la letra *K*. El archivo no está ordenado alfabéticamente.

Considerando que el porcentaje es de aproximadamente 0.5 por ciento se pide encontrar el tamaño de muestra requerido bajo muestreo aleatorio simple si se acepta un error estándar no mayor de 0.05%.*

4.7 Para efectos de una planeación económica en la región occidental de México, es necesario estimar de entre 10 000 establos: *a*) el número medio de vacas lecheras por establo con un error del 10% y una confianza del 95%; y *b*) el rendimiento medio de leche por establo con un error del 10% y una confianza del 95%.

Una muestra aleatoria piloto de tamaño 20 arrojó las siguientes estimaciones:

* Cuando el atributo buscado es raro, un esquema de muestreo de tipo general como es el aleatorio ya no es eficiente, requiere tamaños de muestra muy grandes y es necesario recurrir a otros métodos.

Número medio de vacas por establo igual a 40,
s^2 igual a 1 000.
Rendimiento medio de leche por establo igual a 300 litros y s^2 igual a 1 600.

¿Qué tamaño de muestra se necesita?

4.8 Si en el ejercicio 4.7 se deseara estimar el número total de vacas lecheras en los 10 000 establos con un error de 30 000 vacas y una confianza del 95%, ¿qué tamaño de muestra se requeriría?

4.9 Una compañía manufacturera de juguetes infantiles desea introducir un nuevo tipo de caballitos, los cuales puede fabricar con uno de dos materiales distintos al mismo costo. Ambos tienen prácticamente, la misma duración y aparentemente el mismo atractivo. Se desea usar una sola clase de material y para tomar una decisión se considera conveniente realizar una pequeña encuesta sobre la zona residencial que es considerada como su mayor cliente y de la cual se tiene un listado reciente de 10 000 familias. Por lo tanto, se trata de una encuesta de opinión, en la cual se entrevistará a la madre en cada familia. ¿Puede indicar algún valor razonable para el porcentaje que se busca, y en función de él, proponer alguna precisión?

[illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$= \left[\frac{\partial g\,(\bar{x},\,\bar{y})}{\partial \bar{x}}\bigg|_{\substack{\bar{x}=\bar{X}\\ \bar{y}=\bar{Y}}}\right]^2 \cdot \mathrm{Var}\,\bar{x} + \left[\frac{\partial g\,(\bar{x},\,\bar{y})}{\partial \bar{y}}\bigg|_{\substack{\bar{x}=\bar{X}\\ \bar{y}=\bar{Y}}}\right]^2 \cdot \mathrm{Var}\,\bar{y} +$$

$$+\, 2 \left(\frac{\partial g\,(\bar{x},\,\bar{y})}{\partial \bar{x}}\bigg|_{\substack{\bar{x}=\bar{X}\\ \bar{y}=\bar{Y}}}\right) \left(\frac{\partial g(\bar{x},\,\bar{y})}{\partial \bar{y}}\bigg|_{\substack{\bar{x}=\bar{X}\\ \bar{y}=\bar{Y}}}\right) \cdot \mathrm{Cov}\,(\bar{x},\,\bar{y})$$

Si ahora, hacemos $g(\bar{x},\,\bar{y}) = \dfrac{\bar{y}}{\bar{x}} = \hat{R}$, demuestre que

$$\mathrm{V}(\hat{R}) = \frac{1-f}{n\bar{X}^2}\,\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - Rx_i)^2}{N-1}$$

5.5 En el caso de dominio de estudio demuestre que con muestreo aleatorio simple $\mathrm{E}\,\left(\dfrac{n_d}{N_d}\right) = \dfrac{n}{N}$

5.6 En referencia al ejemplo 5.2, calcule intervalos de confianza del 95% para el peso medio de piedras por saco, así como para el total en los 1 000 sacos.

5.7 En referencia al ejemplo 5.2, estime el error estándar del estimador del cociente entre el peso total de la piedra y el peso total de la semilla usando la aproximación normal y considerando como válida la expresión 5.3.

5.8 En referencia al ejemplo 5.3, estime la variancia del número medio de turistas por hotel para aquellos hoteles que cuentan con teléfono y estacionamiento.

5.9 En una encuesta sobre el personal de una empresa, se quiere estimar el porcentaje de empleados que se enteran regularmente de los cambios introducidos al reglamento de seguridad interno, así como el porcentaje de ellos que regularmente fuman cigarrillos. Para la encuesta se usan los listados de pago correspondientes a la última quincena. De ella se elige aleatoriamente a 40 empleados de entre un total de 5 000, obteniéndose los resultados de la tabla 5.7.

Calcule las estimaciones solicitadas, así como intervalos de confianza del 95% para el porcentaje de empleados que se enteran regularmente de los cambios introducidos al reglamento interno de seguridad.

Considere las expresiones obtenidas para las variancias de la media muestral en los esquemas de selección con y sin reemplazo. ¿Cuál es la magnitud de su diferencia?

Con referencia al ejemplo de los gaveteros del apartado 5.2, ¿por qué es necesario que las familias generalmente tengan más de dos hijos?

Tabla 5.7

No. del empleado	*Conocen los cambios al reglamento*	*Fuman cigarrillos*
1	no	sí
2	no	no
3	no	sí
4	no	sí
5	no	no
6	sí	no
7	no	no
8	sí	no
9	sí	no
10	no	no
11	sí	no
12	sí	no
13	sí	no
14	sí	no
15	renunció	—
16	sí	no
17	sí	sí
18	sí	no
19	no	sí
20	sí	sí
21	sí	sí
22	sí	no
23	tiene permiso por 6 meses	
24	renunció	—
25	no	sí
26	no	no
27	sí	no
28	no	no
29	sí	no
30	sí	no
31	sí	no
32	no	no
33	no	no
34	no	sí
35	sí	sí
36	no	no
37	no	no
38	no	no
39	no	no
40	no	no

Para el caso de camiones:

$$\hat{\bar{Y}}_d = \frac{13 + 4 + 55 + 0}{62 + 33 + 67 + 124} = \frac{72}{286} =$$

$$= 0.25 \quad \begin{array}{l}\text{Camiones por predio ejidal}\\ \text{tenga o no el vehículo.}\end{array}$$

Para efectos del cálculo de la variancia, debe ser usada la expresión 6.34, su cálculo lo dejamos al lector. En este ejercicio hemos empleado las expresiones más simplificadas de los estimadores que son las correspondientes a la afijación proporcional, aunque formalmente por efecto del redondeo al calcular los tamaños de muestra no lo sea, pero su efecto es despreciable.

6.12 EJERCICIOS

6.10 Obtenga las expresiones 6.20, para calcular el tamaño de la muestra en el caso de totales.

6.11 Obtenga las expresiones 6.21, para calcular el tamaño de la muestra en el caso de porcentajes.

6.12 Obtenga la expresión 6.27, de la variancia del estimador de razón combinado en muestreo estratificado.

6.13 Usando una variable auxiliar que tome como valores uno o cero según que la unidad se encuentre o no en el dominio d-ésimo, muestre que la ecuación 6.31 es un cociente de medias estratificadas, y que, por lo tanto, es de la forma del estimador de razón combinado en la ecuación 6.26.

6.14 Suponga que en el ejemplo 6.8 hay 7 estados y que el número de gaveteros y datos de la muestra son los siguientes: (tabla 6.10).

Donde

$$Q_h = \sum_{i=1}^{n_h} ((y_{hi} - \hat{R}x_{hi}) - (\bar{y}_h - \hat{R}\bar{x}_h))^2$$

Usando la media estratificada estime el número total de tarjetas asociadas a los hijos y calcule una estimación del error estándar.

6.15 En el ejercicio anterior, 6.14, y usando el estimador de razón combinado, estime el número total de tarjetas asociadas a los hijos y calcule una estimación del error estándar. El peso total de las tarjetas en todos los

Se hace el sorteo sobre los listados de cada zona, se llevan a cabo las visitas y se obtiene la tabla 6.9

Tabla 6.9

Zona 1. Tractores:

1	0	0	0	1	0	0	1	1	3	1	0	0	0	1
PP	3	1	5	PP	1	1	2	0	0	1	0	0	0	0
0	0	7	1	3	1	1	1	1	2	0	3	1	1	2
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	PP										

Zona 1. Camiones:

0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
PP	1	0	2	PP	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	PP										

En donde PP significa propiedad privada. El resto de los datos aparecen resumidos en la tabla siguiente:

Zona	*2*	*3*	*4*
No. de tractores	8	100	4
No. de camiones	4	55	0
No. de predios privados	1	7	3

Como en las zonas aparecieron algunos predios que son de propiedad privada, y éstos no deben formar parte del estudio, éste debe hacerse con el concepto de dominios de estudio. Para el caso de tractores de acuerdo a la ecuación 6.33 tenemos:

$$\hat{Y}_d = \frac{\sum_h^4 \sum_i^{n_{hd}} y_{hdi}}{\sum_h n_{hd}} = \frac{51 + 8 + 100 + 4}{62 + 33 + 67 + 124}$$

$$= \frac{163}{286} = 0.57 \quad \text{Tractores por predio ejidal tenga o no tenga el vehículo.}$$

gaveteros es de 725 kilogramos. Considerando a los estimadores usados en el ejercicio 6.14 y en el actual, ¿cuál es mejor?

Tabla 6.10

Estado	N_h	n_h	$\bar{y}_h$	$\bar{x}_h$ *	Q_h		$(\Sigma\, y_{hi})^2$
1	400	10	710	464	87 002	5 390 000	50 410 000
2	100	6	500	334	22 500	1 680 000	9 000 000
3	200	7	829	545	20 804	4 920 000	33 640 000
4	100	6	817	547	7 151	4 110 000	24 010 000
5	150	7	786	496	2 595	4 490 000	30 250 000
6	300	8	650	402	4 916	3 640 000	27 040 000
7	200	7	815	490	5 366	4 770 000	32 490 000

6.16 Se cuenta con tres listados de establecimientos en los cuales aparecen mezclados y sin distinción alguna tortillerías y molinos-tortillerías. Estos últimos producen tanto masa como tortillas. Se hace una estratificación por listado y se toman muestras aleatorias con los resultados de la tabla 6.11.

Tabla 6.11

	No. de establecimientos	*Establecimientos en la muestra*		*No. de empleados en la muestra*	
		Molinos	*Molinos-tortillerías*	*Molinos*	*Molinos-tortillerías*
Estrato 1	48	2	3	6	5
Estrato 2	127	3	7	9	8
Estrato 3	390	4	6	9	6

Estime el número medio de empleados por tipo de establecimiento.

6.17 En el ejercicio 6.16 calcule el número de establecimientos que deben muestrearse si se desea estimar el número medio de empleados, sin distinción de establecimiento. La estimación se desea para los tres listados en conjunto con un error no mayor del 5% y una confianza del 95%. Use $d = 0.05(1.6) = 0.08$, $s_1^2 = 0.2$; $s_2^2 = 0.233$ y $s_3^2 = 0.5$ (ejercicio 6.8; notar que en este ejercicio a cualquier tipo de establecimiento se le denomina "tortillería").

* Peso medio en gramos.

6.18 Hace 10 años se estimó el número medio de familias por manzana en las 400 manzanas de un poblado. Se pensó que este número dependía del nivel socioeconómico de cada una de ellas y, así, las manzanas fueron estratificadas en dos estratos de tamaños 60 y 340 respectivamente. Se tomó una muestra aleatoria de manzanas en cada estrato y se obtuvo como resultado:

$$\bar{y}_1 = 25 \, , \bar{y}_2 = 55$$

$$s_1^2 = 50 \, , s_2^2 = 170$$

Ahora en la actualidad, se desea repetir la encuesta usando el mismo marco muestral, es decir, las mismas manzanas en los estratos previamente definidos. Pero ahora se desea que la estimación en el estrato 1, tenga un error no mayor a 3 familias por manzana, y en el 2 no mayor a 2 familias por manzana; ambos casos a una confianza del 95%. ¿Qué tamaño de muestra por estrato es necesario? Suponga que las medias actuales son 10% mayores que las de hace 10 años, y que las variancias aumentaron en 20%.

elegirse para la muestra a pocas unidades primarias. Si por el contrario, los conglomerados primarios resultan ser muy homogéneos, se hace necesario aumentar la fracción de muestreo de las primarias o, en otras palabras, aumentar el tamaño de muestra de ellas, para percatarse y tomar en consideración la alta variabilidad entre primarias. En esta situación, dentro de las unidades primarias muestrales se elegirán pocas unidades secundarias, ya que los elementos en la misma primaria tenderán a parecerse.

8.8 EJERCICIOS

8.1 En el ejemplo 8.1 sobre los comercios en un estado se definió a la unidad primaria como cada zona y como cada una de las diez poblaciones cercanas a la capital. ¿Qué comentarios puede hacer respecto a la variabilidad dentro de primarias? En un muestreo a dos etapas, en el cual interesa estimar la media por comercio a nivel estatal, y si los comercios aparecieran en listas por población sin más información que su nombre y su dirección, ¿cómo definiría usted a la unidad de primera etapa? Indique sus razones.

8.2 Si en el ejercicio 8.1 pudiera emplear muestreo estratificado, ¿cómo definiría a los estratos? Indique los pros y los contras de su definición.

8.3 Suponga que en el ejercicio 8.1 se definieron dos estratos; en uno se encuentran todos los comercios de la capital y en el otro el resto de comercios ¿Tendría alguna ventaja esta estratificación? La definición de unidades primarias se mantiene como en el ejemplo 8.1. De las zonas comerciales de la capital se elige aleatoriamente a 4 de ellas, siendo éstas las primarias 1, 3, 4 y 6 de la tabla 8.1 y las dos restantes son del otro estrato (2 y 5). Si en la capital existen 7 000 comercios, estime el número medio de empleados por comercio para cada uno de los estratos, así como a nivel estatal, e indique intervalos del 95% para su estimación.

8.4 Los estimadores 8.1 y 8.4 se vuelven autoponderados cuando $f_{2i} = f_2$ una constante; en este caso, encuentre la estructura de ellos y de sus respectivos estimadores de variancia.

8.5 Suponga que todos los conglomerados son de tamaño igual M, y que la fracción de muestreo de las secundarias es constante, $f_2 = m/M$. ¿Qué estructura adquieren 8.1 y 8.2?

8.6 Un organismo público desea llevar a cabo una encuesta de opinión sobre sus 130 000 empleados. Ellos se encuentran repartidos en 30 delegaciones regionales dispersas en los estados de la República Mexicana incluyendo a la capital del país. La nómina es elaborada de manera independiente en la capital y en cuatro delegaciones diferentes. Una vez que ésta ha sido elaborada se reparte a los diferentes estados y de esa manera se les paga a los empleados.

Cada una de las delegaciones que elaboran las nóminas regionales cubren a 7, 9, 4 y 9 delegaciones foráneas respectivamente. Quince días después de que la nómina ha sido pagada, se envía una copia de ella a las oficinas centrales en la capital.

Las estimaciones deseadas son de porcentajes definidos sobre los empleados, y se desean obtener para los empleados en la capital de la república y para todo el país, incluyendo a la capital. Suponiendo que se tiene acceso a los listados de empleados en las diferentes etapas del pago de la nómina, enuncie tres esquemas de muestreo diferentes que pudieran ser empleados para esta encuesta e identifique lo necesario en cada esquema.

8.7 Indique los estimadores que deberían ser empleados en cada uno de los esquemas de muestreo propuestos para el caso del ejercicio anterior, 8.6.

8.8 En una escuela con 30 salones se desea hacer una selección sistemática de 2 salones y dentro de cada salón, elegir pupitres con fracción de muestreo 1 de cada 20. Los salones y el número de pupitres por salón son como sigue:

Salón	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
No. de pupitres	20	25	20	27	26	25	48	30	25	40	21	20	27	35	38

Salón	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
No. de pupitres	30	40	43	48	40	21	21	25	27	29	35	40	42	42	45

i) Usando los números aleatorios siguientes y avanzando de arriba hacia abajo obtenga la selección deseada de salones y anótelos

39
48
30
07

ii) Dentro de los salones antes seleccionados y utilizando los siguientes números aleatorios, haga las selecciones de pupitres dentro de salón en la muestra con fracción de muestreo de 1 en 20. Anote el método usado y los pupitres que están en la muestra en cada salón.

Números aleatorios para el:

Primer salón de la muestra	*Segundo salón de la muestra*
75	09
19	48
15	07
30	16
03	

8.9 En una farmacia existen 50 muebles (a manera de libreros) de seis tableros cada uno de ellos. En cada mueble y sobre los tableros están los medicamentos que ahí se expenden. Se desea estimar el total de dinero invertido en los medicamentos y para esto se obtiene una selección sistemática de cinco muebles y de cada uno de ellos en la muestra se hace una selección sistemática de dos tableros en cada mueble después de lo cual, se determina el valor de la mercancía en cada tablero en la muestra con los resultados siguientes:

Mueble	*No. de tableros en cada mueble*	*No. de tableros en la muestra*	*Valor de la mercancía en cada tablero*
1	6	2	1000 1000
2	6	2	2000, 1000
3	6	2	1000, 2000
4	6	2	3000, 2000
5	6	2	3000, 1000

i) Estime el valor total de la mercancía en la farmacia.

ii) Encuentre intervalos del 95% para el total de la mercancía.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

CURSOS ABIERTOS

DISEÑO DE EXPERIMENTOS: TECNICAS DE MUESTREO Y ANALISIS ESTADISTICO

DISEÑO Y ANALISIS DE EXPERIMENTOS PARA COMPARAR DOS TRATAMIENTOS

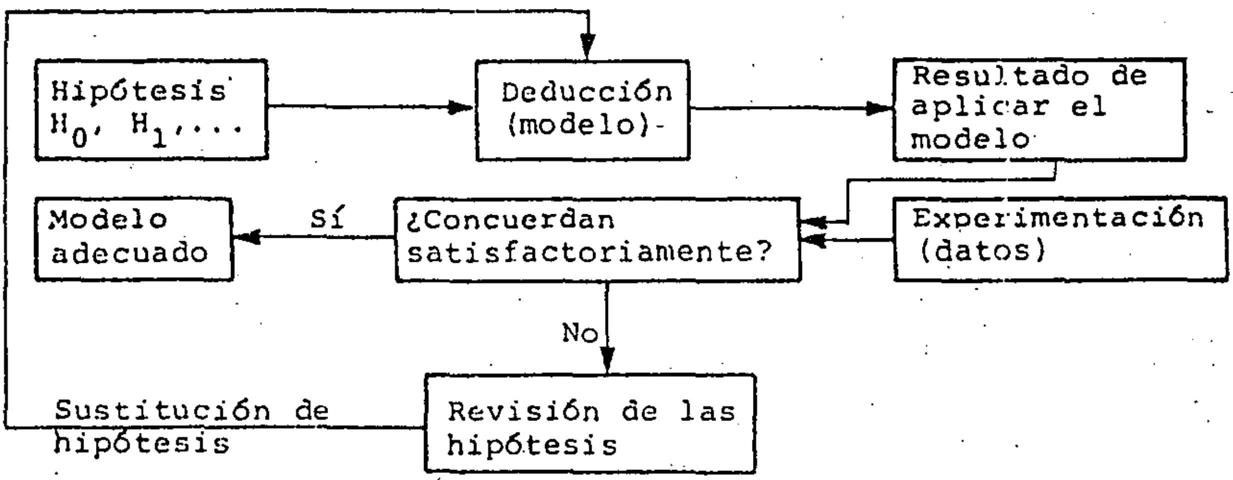
M. EN I. RAFAEL BRITO RAMIREZ

ABRIL-JUNIO 1992.

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

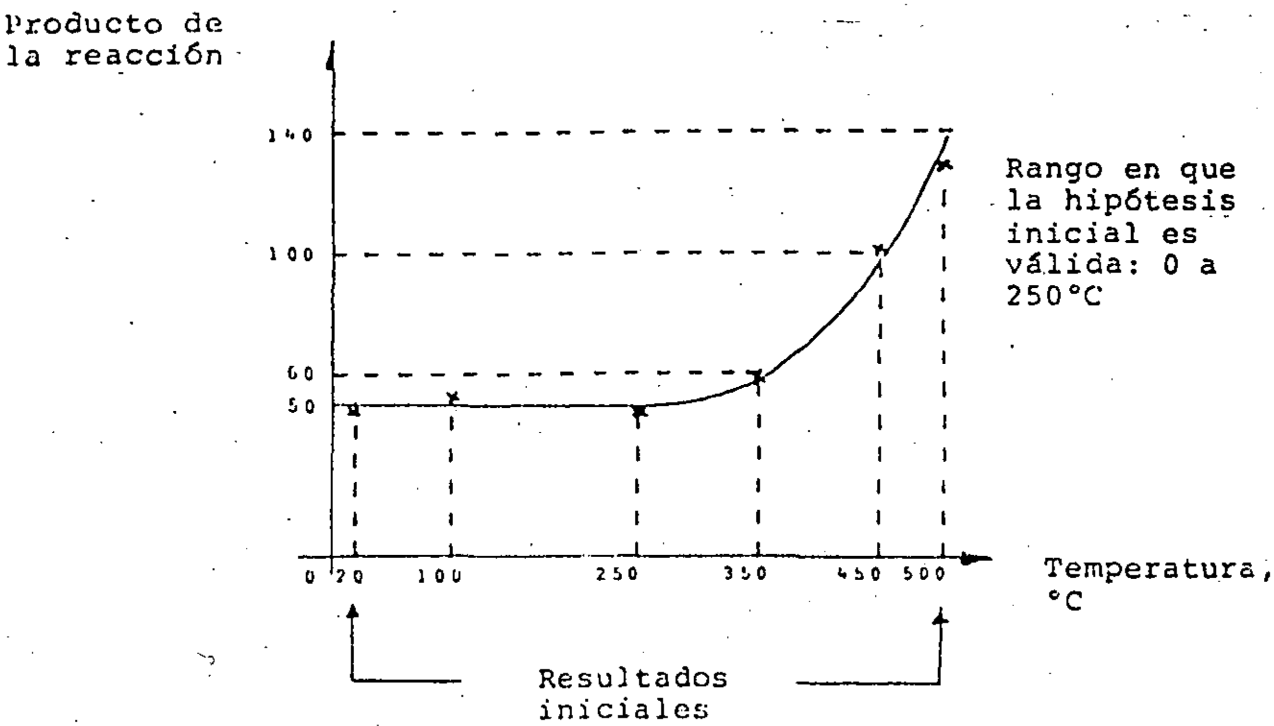
El papel de la experimentación

El proceso de investigación requiere que en algún momento se confirme si los resultados obtenidos con base en un modelo formulado bajo ciertas hipótesis son congruentes con la realidad; esto conduce a diseñar y llevar a cabo experimentos que permitan recolectar información que sirva para verificar la validez del modelo y, en su caso, modificar sus hipótesis. Este proceso de retroalimentación se muestra en el siguiente esquema



La deducción que se realiza después de la experimentación no necesariamente implica el formular un nuevo modelo, sino que puede limitarse a señalar en qué rangos de valores de los parámetros involucrados en las hipótesis el modelo es válido.

Por ejemplo, una hipótesis podría ser que cierta reacción química es independiente de la temperatura; si al realizar el experimento con dos temperaturas (20 y 500°C) para verificarla, se encuentra que no es así, se podría proceder a formular un nuevo modelo cambiando la hipótesis por la que señala que la reacción sí depende de la temperatura, o a ejecutar una serie de experimentos con otras temperaturas (por ejemplo 0, 100, 250, 350 y 450°C), para determinar en qué rangos de temperatura la hipótesis inicial es correcta, si ese fuera el caso; esto se ilustra en la siguiente figura:



Es usual que al diseñar un experimento se procure que se puedan estudiar a la vez todos los parámetros involucrados en las hipótesis, ya que pudiera suceder que dos de ellos, considerados por separado, no tuvieran efectos que condujeran a rechazar la hipótesis inicial, pero que al combinarse sí se detectarán efectos negativos.

Para tener éxito en un proceso de verificación de hipótesis, es necesario conjugar dos factores:

1. Tener un método eficiente para diseñar un experimento que conduzca a resultados que permitan obtener las respuestas a las preguntas que se plantean, y que sean afectados lo menos posible por alguna fuente de error.

2. Contar con algún método para analizar los resultados y sacar conclusiones.

De estos factores el más importante es el primero, ya que si el experimento no se diseña adecuadamente no se podrá obtener la información necesaria para extraer las conclusiones deseadas, aun cuando se cuenta con métodos de análisis sofisticados.

Dificultades confrontadas por los investigadores

Las dificultades usuales que tiene que vencer un investigador son:

a. Error experimental
b. Confusión de correlación con causalidad
c. Complejidad de los efectos estudiados

a. Error experimental. Toda variación en los resultados ocasionada por factores disturbantes, conocidos o no, se llama error experimental.

La confusión que ocasiona el error experimental se puede reducir grandemente mediante un diseño adecuado del experimento y mediante el uso de métodos estadísticos de análisis.

//

estadístico de prueba; y

d) se tengan acuerdos preliminares con las partes interesadas sobre las acciones a tomar en caso de que no se cumplan los objetivos.

En lo que sigue se entederá por <u>espécimen o unidad experimental</u> a la persona, animal u objeto sobre el cual se hace la medición de la propiedad o característica bajo estudio.

Por su parte, se entenderá por <u>tratamiento</u> a un nivel o valor de un factor o a una combinación de niveles de factores.

Por ejemplo, al comparar el rendimiento (en km/lt) que se tiene con cuatro aditivos para gasolina y dos marcas diferentes de automóvil:

- se tendrán dos <u>factores</u>, aditivo y marca, el primero con cuatro <u>niveles</u> y el segundo con dos
- cada <u>tratamiento</u> será una de las combinaciones aditivo-marca
- las <u>unidades experimentales</u> serán los vehículos a los cuales se les "apliquen" los tratamientos
- el rendimiento es la característica o <u>variable</u> en estudio
- los resultados de cada medición (km/lt) serán los <u>datos u observaciones</u>
- el conjunto de datos para cada tratamiento conforma la

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

EJEMPLO ANTERIOR SE TRATARIA DE VERIFICAR SI LA MUERTE POR CANCER PULMONAR DEPENDE O NO DE SI LA PERSONA ES O NO FUMADORA.

EN INFERENCIA ESTADISTICA SE DEMUESTRA QUE LA ESTADISTICA

$$V = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\chi_i - nP_i)^2}{nP_i} \qquad (1)$$

TIENDE A UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES χ^2 CON k-r-1 GRADOS DE LIBERTAD CONFORME CRECE n, EN DONDE n ES EL TAMAÑO DE LA MUESTRA, χ_i ES LA FRECUENCIA CON QUE SE OBSERVO EL EVENTO i y P_i ES LA PROBABILIDAD DE OBSERVARLO EN UNA REALIZACION DEL EXPERIMENTO.

EN NUESTRO CASO, SI P_{ij} ES LA PROBABILIDAD DE QUE UN RESULTADO TENGA EL VALOR i DE LA CARACTERISTICA 1 Y EL VALOR j DE LA 2, Y SI LOS DOS METODOS DE CLASIFICACION SON REALMENTE INDEPENDIENTES, ENTONCES.

$$P_{ij} = \omega_i\, S_j,\ i = 1, 2, \ldots r;\ j = 1, 2, \ldots, c$$

DONDE ω_i ES LA PROBABILIDAD DE QUE EL ELEMENTO OBSERVADO CAIGA EN EL I-ESIMO NIVEL DE LA CLASIFICACION 1, Y S_j ES LA PROBABILIDAD DE QUE CAIGA EN EL J-ESIMO NIVEL DE LA CLASIFICACION 2,

POR OTRA PARTE, LOS ESTIMADORES DE MAXIMA VEROSIMILITUD DE ω_i y S_i SON

$$\hat{\omega}_i = \frac{\chi_{i.}}{n}\ ,\quad \hat{S}_j = \frac{\chi_{.j}}{n}$$

17

POR LO TANTO, CON LA EC.(1) SE OBTIENE QUE

$$V = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(X_{ij} - n\hat{\omega}_i \hat{S}_j)^2}{n\hat{\omega}_i \hat{S}_j} \qquad (2)$$

TIENE DISTRIBUCION χ^2 CON $(r-1)(c-1)$ GRADOS DE LIBERTAD PARA n GRANDE. ESTE NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD SE JUSTIFICA DE LA SIGUIENTE MANERA: SE TIENEN $K = rc$ CLASES Y PARA ESTIMAR LAS P_{ij} SE REQUIERE ESTIMAR $r-1$ VALORES DE ω Y $c-1$ VALORES DE S, ES DECIR, SE ESTIMAN $(r-1) + (c-1)$ PARAMETROS; POR LO TANTO LOS GRADOS DE LIBERTAD SON

$$rc-(r-1)-(c-1)-1 = (r-1)(c-1)$$

EJEMPLO

CON EL FIN DE VERIFICAR SI EL FUMAR Y EL MORIR POR CANCER PULMONAR SON INDEPENDIENTES, SE DISEÑO UN EXPERIMENTO ESTADISTICO QUE CONSISTIO EN SACAR UNA MUESTRA ALEATORIA DE 5000 EXPEDIENTES CLINICOS DE PERSONAS FALLECIDAS EN UNA CADENA DE HOSPITALES, Y CLASIFICARLA EN UNA TABLA DE CONTINGENCIA. EL RESULTADO FUE EL SIGUIENTE:

	MUERTE POR CANCER PULMONAR	MUERTE POR OTRAS CAUSAS	TOTAL $X_{i.}$	$\hat{\omega}_i$
FUMADORES	348	3152	3500	0.7
NO FUMADORES	82	1418	1500	0.3
TOTAL : $X_{.j}$	430	4570	5000	1.0
$\hat{S}_j$	0.086	0.914	1.000	

PARA REALIZAR LA PRUEBA DE INDEPENDENCIA SE UTILIZA LA EC (2), Y SE DETERMINA EL VALOR CRITICO DE χ^2 QUE CORRESPONDA A UN NIVEL DE CONFIANZA PRESTABLECIDO, $1-\alpha$, USANDO $(2-1)\times(2-1) = 1$ GRADOS DE LIBERTAD, YA QUE $r = c = 2$.

$$\hat{\omega}_1 = \frac{3500}{5000} = 0.7, \quad \hat{\omega}_2 = \frac{1500}{5000} = 0.3$$

$$\hat{S}_1 = \frac{430}{5000} = 0.086, \quad \hat{S}_2 = \frac{4570}{5000} = 0.914$$

$$v = \frac{[348-5000\ (0.7)(0.086)]^2}{5000\ (0.7)(0.086)} + \frac{[3152-5000\ (0.7)(0.914)]^2}{5000\ (0.7)(0.914)} + \frac{[82-5000\ (0.3)(0.086)]^2}{5000\ (0.086)(0.3)} + \frac{[1418-5000\ (0.3)(0.914)]^2}{5000\ (0.3)(0.914)}$$

$$v = \frac{2209}{301.00} + \frac{2209}{3199.00} + \frac{2209}{129.00} + \frac{2209}{1371.00} =$$

$$= 7.34 + 0.69 + 17.12 + 1.61 = 26.76$$

SI $1-\alpha = 0.99$, ENTONCES

$$(\chi^2_c)_{0.99,1} = 6.63 < 26.76$$

POR LO QUE SE RECHAZA LA HIPOTESIS DE INDEPENDENCIA.

EJEMPLO

UN CLUB DE PESCA DEPORTIVA ESTA INTERESADO EN SABER SI SE PESCA CADA TIPO DE PESCADO CON LA MISMA FRECUENCIA EN LOS MESES DE JUNIO A SEPTIEMBRE. PARA ELLO SE DISEÑO UN EXPERIMENTO CONSISTENTE EN REGISTRAR LA PESCA MENSUAL EN UNO DE LOS BARCOS DE LOS TRES TIPOS DE PECES DE LA ZONA: ABADEJO, PEZ AZUL Y COLA AMARILLA.

LA TABLA DE CONTINGENCIA QUE SE FORMULO FUE LA SIGUIENTE:

	ABADEJOS	PECES AZULES	COLAS AMARILLAS	TOTAL	$\hat{\omega}$
JUNIO	315	1347	620	2282	0.2611
JULIO	270	1250	514	2034	0.2327
AGOSTO	295	1480	710	2485	0.2843
SEPTIEMBRE	246	1200	494	1940	0.2219
TOTAL	1126	5277	2338	8741	1.0000
$\hat{S}$	0.1288	0.6037	0.2675	1.0000	

PARA LA PRUEBA DE INDEPENDENCIA CON CONFIABILIDAD $1-\alpha = 0.95$ Y $(4-1)(3-1) = 6$ GRADOS DE LIBERTAD, SE TIENE QUE $(\chi^2_c)_{0.95,6} =$ $= 12.6$.

EL VALOR DE LA ESTADISTICA V SE OBTIENE EN LA EC (2)

$$V = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} \frac{(\chi_{ij} - 8741\ \hat{\omega}_i\ \hat{S}_j)^2}{8741\ \hat{\omega}_i\ \hat{S}_j}$$

CON $\hat{\omega}_1 = \frac{2782}{8741} = 0.2611$, $\hat{\omega}_2 = \frac{2034}{8741} = 0.2327$

$\hat{\omega}_3 = \frac{2485}{8741} = 0.2843$, $\hat{\omega}_4 = \frac{1940}{8741} = 0.2219$

$\hat{S}_1 = \frac{1126}{8741} = 0.1288$, $\hat{S}_2 = \frac{5277}{8741} = 0.6037$

$\hat{S}_3 = \frac{2338}{8741} = 0.2675$

$$8741\ \hat{\omega}_1\ \hat{S}_1 = 8741\ (0.2611)\ (0.1288) = 293.957$$
$$8741\ \hat{\omega}_1\ \hat{S}_2 = 8741\ (0.2611)\ (0.6037) = 1377.809$$
$$8741\ \hat{\omega}_1\ \hat{S}_3 = 8741\ (0.2611)\ (0.2675) = 610.509$$
$$8741\ \hat{\omega}_2\ \hat{S}_1 = 8741\ (0.2327)\ (0.1288) = 261.983$$
$$8741\ \hat{\omega}_2\ \hat{S}_2 = 8741\ (0.2327)\ (0.6037) = 1227.944$$
$$8741\ \hat{\omega}_2\ \hat{S}_3 = 8741\ (0.2327)\ (0.2675) = 544.103$$
$$8741\ \hat{\omega}_3\ \hat{S}_1 = 8741\ (0.2843)\ (0.1288) = 320.077$$
$$8741\ \hat{\omega}_3\ \hat{S}_2 = 8741\ (0.2843)\ (0.6037) = 1500.235$$
$$8741\ \hat{\omega}_3\ \hat{S}_3 = 8741\ (0.2843)\ (0.2675) = 664.755$$
$$8741\ \hat{\omega}_4\ \hat{S}_1 = 8741\ (0.2219)\ (0.1288) = 249.824$$
$$8741\ \hat{\omega}_4\ \hat{S}_2 = 8741\ (0.2219)\ (0.6037) = 1170.953$$
$$8741\ \hat{\omega}_4\ \hat{S}_3 = 8741\ (0.2219)\ (0.2675) = 518.850$$

$$v = \frac{(315-293.957)^2}{293.957} + \frac{(1347-1377.809)^2}{1377.809} + \frac{(620-610.509)^2}{610.509} +$$
$$\frac{(270-261.983)^2}{261.983} + \frac{(1250-1227.944)^2}{1227.944} + \frac{(514-544.103)^2}{544.103} +$$
$$\frac{(295-320.077)^2}{320.077} + \frac{(1480-1500.235)^2}{1500.235} + \frac{(710-664.755)^2}{664.755} +$$
$$\frac{(246-249.824)^2}{249.824} + \frac{(1200-1170.953)^2}{1170.953} + \frac{(494-518.850)^2}{518.850}$$

$$v = 1.506+0.689+0.148+0.245+0.396+1.665+1.965+0.273+3.079$$
$$0.059+0.721+1.190$$

$$v = 11.936 < 12.6$$

POR LO TANTO SE ACEPTA LA HIPOTESIS DE QUE LA CANTIDAD DE PECES ES INDEPENDIENTE DEL MES EN EL PERIODO DE JUNIO A SEPTIEMBRE, CON UN 95% DE NIVEL DE CONFIANZA.

EJEMPLO

CON EL FIN DE VERIFICAR SI LAS VARIABLES REGION GEOGRAFICA, PARTIDO DE AFILIACION Y SEXO SON INDEPENDIENTES, SE DISEÑO UN EXPERIMENTO ESTADISTICO QUE CONSISTIO EN SACAR UNA MUESTRA ALEATORIA DE 1500 PERSONAS Y CLASIFICAR A CADA UNA DE ACUERDO CON ESAS VARIABLES; CON ESTO SE OBTUVO LA SIGUIENTE TABLA DE CONTINGENCIA:

	ESTE		OESTE			
PARTIDO	MASCULINO	FEMENINO	MASCULINO	FEMENINO	TOTAL	$\hat{w}_i$
DEMOCRATA	183	217	223	227	850	0.5667
REPUBLICANO	196	154	137	113	600	0.4000
OTRO	12	8	14	16	50	0.0333
	391 +	379	374 +	356	1500	
TOTAL	=770		=730			
$\hat{s}_j$	770/1500 = 0.5133		730/1500 = 0.4867			

391 + 374 = 765, 379 + 356 = 735, $\hat{r}_1$ = 765/1500=0.51

$\hat{r}_2$ = 735/1500=0.49, r = 3, c = 2, m = 2

LA ESTADISTICA $V = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \frac{(x_{ijk} - 1500\hat{w}_i\hat{s}_j\hat{r}_k)^2}{1500\hat{w}_i\hat{s}_j\hat{r}_k} = 30.88$

TIENE DISTRIBUCION χ^2 CON rcm-(r+c+m)+2=7 GRADOS DE LIBERTAD.

SI 1-α = 95%, ENTONCES

$$\chi^2_{0.95,7} = 14.1 < 30.88$$

POR LO QUE SE RECHAZA LA HIPOTESIS DE QUE LAS TRES VARIABLES SON INDEPENDIENTES.

FORMULA CORTA PARA TABLAS DE CONTINGENCIA DE 2 x 2

SI DENOTAMOS A LAS FRECUENCIAS DE LA TABLA CON a, b, c Y d, O SEA $x_{11} = a$, $x_{12} = b$, $x_{21} = c$ Y $x_{22} = d$, SE PUEDE DEMOSTRAR QUE EL VALOR DE LA ESTADISTICA V SE CALCULA CON LA FORMULA

$$V = \frac{(ad - bc)^2 n}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

EJEMPLO

CON EL FIN DE VERIFICAR SI DOS FABRICANTES DE TELEVISORES DE COLOR TIENEN IGUAL NIVEL DE CALIDAD SE DISEÑO UN EXPERIMENTO CONSISTENTE EN PREGUNTAR A 412 COMPRADORES DE LAS MISMAS SI SE REQUIRIO DE SERVICIO DE GARANTIA EN LOS DOS PRIMEROS AÑOS DE FUNCIONAMIENTO, CON LO CUAL SE INTEGRO LA SIGUIENTE TABLA DE CONTINGENCIA:

FABRICA	REQUIRIO SERVICIO	NO REQUIRIO SERVICIO	TOTAL
A	111 = a	152 = b	273
B	85 = c	54 = d	139
TOTAL	196	216	412

$$V = \frac{[(111)(54) - (152)(85)]^2\, 412}{(273)(139(196)(216)} = 15.51$$

$$\chi^2_{0.95,1} = 3.84 < 15.51$$

POR LO QUE SE RECHAZA LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE CALIDAD, A UN 95% DE NIVEL DE CONFIANZA.

CORRECCION DE YATES

CON EL FIN DE MEJORAR LA APROXIMACION DE LA DISTRIBUCION χ^2 COMO DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE LA ESTADISTICA V, CUANDO SE TIENEN POCAS CELDAS EN LA TABLA DE CONTINGENCIA, SE HA PROPUESTO INTRODUCIR UNA CORRECCION A LAS DIFERENCIAS DE LAS FRECUENCIAS OBSERVADAS MENOS LAS ESPERADAS, CONSISTENTE EN SUSTRAERLE 0.5 AL VALOR ABSOLUTO DE CADA DIFERENCIA, ES DECIR,

$$V = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(|x_{ij} - n\hat{w}_i\hat{s}_j| - 0.5)^2}{n\hat{w}_i\hat{s}_j}$$

CON ESTA CORRECCION LA FORMULA CORTA PARA TABLAS DE 2 x 2 QUEDA EN LA FORMA

$$V = \frac{(|ad - bc| - 0.5n)^2 n}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

EN EL EJEMPLO INMEDIATO ANTERIOR, AL APLICAR ESTA CORRECCION SE OBTIENE:

$$V = \frac{[|(111)(54) - (162)(85)| - 0.5(412)]^2\, 412}{(273)(139)(196)(216)} = \frac{(7570)^2\, 412}{(273)(139)(196)(216)} = 14.69$$

EJEMPLO

CON EL FIN DE VERIFICAR SI EL GRADO DE MEJORIA EN EL FUNCIONAMIENTO DE UN TIPO DE PROTESIS ES INDEPENDIENTE DEL HOSPITAL DONDE SE COLOCA, SE DISEÑO UN EXPERIMENTO CONSISTENTE EN FORMULAR UNA TABLA DE CONTINGENCIA; PARA ELLO SE OBTUVO UNA MUESTRA ALEATORIA DE PACIENTES DE 5 HOSPITALES CON ESTE TIPO DE PROTESIS, Y A CADA UNO SE LE CALIFICO COMO: FUNCIONAMIENTO NORMAL, PARCIAL O NULO. LOS RESULTADOS FUERON

	HOSPITAL				
FUNCIONAMIENTO	A	B	C	D	E
NULO	13	5	8	21	43
PARCIAL	18	10	36	56	29
NORMAL	16	16	35	51	10

a. PROBAR LA HIPOTESIS DE INDEPENDENCIA

b. ¿SON LOS RESULTADOS DE LOS HOSPITALES A, B, C Y D INDEPENDIENTES DEL FUNCIONAMIENTO?

c. ¿SI SE JUNTAN LOS RESULTADOS DE LOS HOSPITALES A, B, C Y D, ¿RESULTAN INDEPENDIENTES DE LOS DEL HOSPITAL E?

USAR 95% DE NIVEL DE CONFIANZA.

SOLUCION

a)

FUNCIONAMIENTO	HOSPITAL					TOTALES	$\hat{w}_i$
	A	B	C	D	E		
NULO	13	5	8	21	43	90	0.245
PARCIAL	18	10	36	56	29	149	0.406
NORMAL	16	16	35	51	10	128	0.349
TOTALES	47	31	79	128	82	367	
$\hat{S}_j$	0.128	0.0845	0.215	0.349	0.223		

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(x_{ij} - n\,\hat{w}_i\,\hat{S}_j)^2}{n\,\hat{w}_i\,\hat{S}_j}$$

$$V = \frac{(13 - (367)(0.245)(0.128))^2}{367 \times 0.245 \times 0.128} + \frac{(5 - (367)(0.245)(0.0845))^2}{367 \times 0.245 \times 0.0845} +$$

$$\frac{(8 - (367)(0.245)(0.215))^2}{367 \times 0.245 \times 0.215} + \frac{(21 - (367)(0.245)(0.349))^2}{367 \times 0.245 \times 0.349} +$$

$$\frac{(43 - (367)(0.245)(0.223))^2}{367 \times 0.245 \times 0.223} + \frac{(18 - (367)(0.406)(0.128))^2}{367 \times 0.406 \times 0.128} +$$

$$\frac{(10 - (367)(0.406)(0.0845))^2}{367 \times 0.406 \times 0.0845} + \frac{(36 - (367)(0.406)(0.215))^2}{367 \times 0.406 \times 0.215} +$$

$$\frac{(56 - (367)(0.406)(0.349))^2}{367 \times 0.406 \times 0.349} + \frac{(29 - (367)(0.406)(0.223))^2}{367 \times 0.406 \times 0.223} +$$

$$\frac{(16 - (367)(0.349)(0.128))^2}{367 \times 0.340 \times 0.128} + \frac{(16 - (367)(0.349)(0.0845))^2}{367 \times 0.349 \times 0.0845} +$$

$$\frac{(35 - (367)(0.349)(0.215))^2}{367 \times 0.349 \times 0.215} + \frac{(51 - (367)(0.349)(0.349))^2}{367 \times 0.349 \times 0.349}$$

$$\frac{(10 - (367)(0.349)(0.223))^2}{367 \times 0.349 \times 0.223}$$

$$v = \frac{2.2227232}{11.50912} + \frac{6.7486558}{7.5978175} + \frac{128.40799}{19.331725} + \frac{107.75135}{31.380335} +$$

$$\frac{526.65454}{20.051045} + \frac{1.1497329}{19.0722566} + \frac{6.745659}{12.590669} + \frac{15.717815}{32.03543} +$$

$$\frac{15.986419}{52.001698} + \frac{17.8713}{33.227446} + \frac{0.1557281}{16.394624} + \frac{26.801189}{10.823014} +$$

$$\frac{55.683757}{27.537845} + \frac{39.677817}{44.700967} + \frac{344.56674}{28.562509}$$

$$v = 0.1931271 + 0.8882361 + 6.6423452 + 3.4337233 +$$

$$26.26569 + 0.060283 + 0.5330587 + 0.4906385 +$$

$$0.3074211 + 0.5378475 + 0.0094987 + 2.4763149 +$$

$$2.0220811 + 0.8876277 + 12.063602 = 56.811495$$

$v = 56.81$

GRADOS DE LIBERTAD: $\nu = (r-1)(c-1) = (3-1)(5-1) = 2 \times 4 = 8$

DE LAS TABLAS DE LA DISTRIBUCION χ^2, PARA 95% DE NIVEL DE CONFIANZA Y 8 GRADOS DE LIBERTAD, SE TIENE:

$\chi^2_c = \chi^2_{0.95,8} = 15.5$

$v = 56.81 > \chi^2_c = 15.5$

POR TANTO SE RECHAZA LA HIPOTESIS DE INDEPENDENCIA A UN 95% DE NIVEL DE CONFIANZA, O SEA QUE SI HAY RELACION ENTRE EL FUNCIONAMIENTO DE LA PROTESIS Y EL HOSPITAL.

b)

FUNCIONAMIENTO	HOSPITAL				TOTALES	
	A	B	C	D	$X_{i.}$	$\hat{w}_i$
NULO	13	5	8	21	47	0.165
PARCIAL	18	10	36	56	120	0.421
NORMAL	16	16	35	51	118	0.414
TOTALES: $X_{.j}$	47	31	79	128	285	
$\hat{S}_j$	0.165	0.109	0.277	0.449		1.000

$$V = \frac{(13 - (285)(0.165)(0.165))^2}{285 \times 0.165 \times 0.165} + \frac{(5 - (285)(0.165)(0.109))^2}{285 \times 0.165 \times 0.109} +$$

$$\frac{(8 - (285)(0.165)(0.277))^2}{285 \times 0.165 \times 0.277} + \frac{(21 - (285)(0.165)(0.449))^2}{285 \times 0.165 \times 0.449} +$$

$$\frac{(18 - (285)(0.421)(0.165))^2}{285 \times 0.421 \times 0.165} + \frac{(10 - (285)(0.421)(0.109))^2}{285 \times 0.421 \times 0.109} +$$

$$\frac{(36 - (285)(0.421)(0.277))^2}{285 \times 0.421 \times 0.277} + \frac{(56 - (285)(0.421)(0.449))^2}{285 \times 0.421 \times 0.449} +$$

$$\frac{(16 - (285)(0.414)(0.165))^2}{285 \times 0.414 \times 0.165} + \frac{(16 - (285)(0.414)(0.109))^2}{285 \times 0.414 \times 0.109} +$$

$$\frac{(35 - (285)(0.414)(0.277))^2}{285 \times 0.414 \times 0.277} + \frac{(51 - (285)(0.414)(0.449))^2}{285 \times 0.414 \times 0.449} +$$

$$v = \frac{27.466771}{7.759125} + \frac{0.0158068}{5.125725} + \frac{25.259922}{13.025925} + \frac{0.0130474}{21.114225} +$$

$$\frac{3.2310961}{19.797525} + \frac{9.4763311}{13.078365} + \frac{7.6405529}{33.235845} + \frac{4.5230018}{53.873265} +$$

$$\frac{12.029452}{19.46835} + \frac{9.853886}{12.86091} + \frac{5.3674232}{32.68323} + \frac{3.9105458}{52.97751} +$$

$$v = 3.5399315 + 0.0030838 + 1.9392037 + 0.0006179 +$$

$$0.1632071 + 0.7245807 + 0.2298889 + 0.0839563 +$$

$$0.6178979 + 0.7661889 + 0.1642256 + 0.0738152$$

$$v = 8.3065975 = 8.31$$

GRADOS DE LIBERTAD: $\nu = (r-1)(c-1) = (3-1)(4-1) = 2 \times 3 = 6$

DE LAS TABLAS, PARA 95% DE CONFIANZA Y 6 GRADOS DE LIBERTAD, SE TIENE:

$$\chi_c^2 = \chi^2_{0.95,6} = 12.6$$

$$v = 8.31 < \chi_c^2 = 12.6$$

POR LO TANTO SE ACEPTA LA HIPOTESIS. SE CONCLUYE QUE LAS VARIABLES SON INDEPENDIENTES, O SEA EL FUNCIONAMIENTO DE LAS PROTESIS ES INDEPENDIENTE DEL HOSPITAL.

c)

FUNCIONAMIENTO	HOSPITAL		TOTALES $X_{i.}$	$\hat{w}_i$
	(A+B+C+D)	E		
NULO	47	43	90	0.245
PARCIAL	120	29	149	0.406
NORMAL	118	10	128	0.349
TOTALES: $X_{.j}$	285	82	367	
$\hat{S}_j$	0.777	0.223		1.000

$$v = \frac{(47 - (367)(0.245)(0.777))^2}{367 \times 0.245 \times 0.777} + \frac{(43 - (367)(0.245)(0.223))^2}{367 \times 0.245 \times 0.223} +$$

$$\frac{(120 - (367)(0.406)(0.777))^2}{367 \times 0.406 \times 0.777} + \frac{(29 - (367)(0.406)(0.223))^2}{367 \times 0.406 \times 0.223} +$$

$$\frac{(118 - (367)(0.349)(0.777))^2}{367 \times 0.349 \times 0.777} + \frac{(10 - (367)(0.349)(0.223))^2}{367 \times 0.349 \times 0.223} +$$

$$v = \frac{522.76044}{69.863955} + \frac{526.65454}{20.051045} + \frac{17.854394}{115.77455} + \frac{17.8713}{33.227446} +$$

$$\frac{341.49225}{99.520491} + \frac{344.56674}{28.562509}$$

$$v = 7.4825486 + 26.26569 + 0.1542169 + 0.5378475 +$$

$$3.4313763 + 12.063602 = 49.935281 \approx 49.94$$

GRADOS DE LIBERTAD: $v = (r-1)(c-1) = (3-1)(2-1) = 2 \times 1 = 2$

DE LAS TABLAS, PARA UN 95% DE NIVEL DE CONFIANZA Y 2 GRADOS DE LIBERTAD, SE TIENE:

$$\chi_c^2 = \chi^2_{0.95,2} = 5.99$$

$$v = 49.94 > \chi_c^2 = 5.99$$

30

POR LO TANTO SE RECHAZA LA HIPOTESIS. SE CONCLUYE QUE CON 95% DE CONFIANZA LOS RESULTADOS DE LOS HOSPITALES A + B + C + D (JUNTOS) Y LOS DE E NO SON INDEPENDIENTES DEL FUNCIONAMIENTO DE LAS PROTESIS. EN GENERAL, SE PUEDE DECIR QUE LOS RESULTADOS DEL HOSPITAL E SON LOS QUE DAN LA DEPENDENCIA DE ESTE EXPERIMENTO.

3. EXPERIMENTOS PARA COMPARAR DOS TRATAMIENTOS

CUANDO INTERESA VERIFICAR SI DOS PROCEDIMIENTOS DISTINTOS PARA LOGRAR UN MISMO OBJETIVO CONDUCEN A RESULTADOS IGUALES, SE DISEÑA UN EXPERIMENTO QUE CONSISTE EN OBTENER UNA MUESTRA ALEATORIA DE LOS RESULTADOS LOGRADOS CON CADA TRATAMIENTO, Y COMPARAR ENTRE SI LAS MEDIAS Y VARIANCIAS CORRESPONDIENTES.

CUANDO LAS OBSERVACIONES SON INDEPENDIENTES, ESTO SE LOGRA MEDIANTE LAS PRUEBAS DE HIPOTESIS DE IGUALDAD DE MEDIAS Y DE VARIANCIAS. CUANDO NO LO SON, LA COMPARACION SE HACE EN TERMINOS DE LAS DIFERENCIAS INDIVIDUALES DE CADA PAREJA DE RESULTADOS.

AL DISEÑAR EL EXPERIMENTO SE DEBEN CONSIDERAR DOS ALTERNATIVAS:

a. ASIGNAR AL AZAR A CADA ESPECIMEN EL TRATAMIENTO QUE LE SERA APLICADO; A ESTE PROCESO SE LE LLAMA DE ALEATORIZACION.

EJEMPLO

POR EJEMPLO, SI SE TRATARA DE VERIFICAR SI UN FERTILIZANTE ES MAS EFICIENTE QUE OTRO, UNA VEZ DEFINIDOS LOS LOTES PARA SIEMBRA NOMINALMENTE IGUALES, HABRIA QUE ASIGNAR AL AZAR CADA LOTE A CADA FERTILIZANTE. SUPONGAMOS QUE SE DISPONE DE 11 LOTES Y QUE 5 SE TRATARAN CON EL FERTILIZANTE A Y 6 CON EL B. EL EXPERIMENTO ALEATORIZADO SERIA

LOTE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
FERTILIZANTE	A	A	B	B	A	B	B	B	A	A	B
COSECHA DE TOMATE	29.9	11.4	26.6	23.7	25.3	28.5	14.2	17.9	16.5	21.1	24.3

COSECHA CON FERTILIZANTE A	COSECHA CON FERTILIZANTE B
29.9	26.6
11.4	23.7
25.3	28.5
16.5	14.2
21.1	17.9
104.2	24.3
	135.2

$\overline{y}_A = \frac{104.2}{5} = 20.84, \quad \overline{y}_B = \frac{135.2}{6} = 22.53$

$\overline{y}_B - \overline{y}_A = 22.53 - 20.84 = 1.69$

LAS VARIANCIAS INSESGADAS VALEN

$S_A^2 = 52.50, \quad S_B^2 = 29.51$

PRUEBA DE HIPOTESIS PARA LA VARIANCIA:

$H_o: \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \; ; \quad H_1: \sigma_A^2 > \sigma_B^2; \; 1-\alpha = 0.99$

$F = \frac{S_A^2}{S_B^2} = \frac{52.50}{29.51} = 1.78, \quad F_{0.01,4,5} = 11.4 > 1.78$

POR LO QUE SE ACEPTA H_o CON UN NIVEL DE CONFIANZA DEL 99%.

PRUEBA DE HIPOTESIS PARA LAS MEDIAS:

$H_o: \mu_A = \mu_B, \quad H_1: \mu_A \neq \mu_B, \quad 1-\alpha = 99\%$

$$T = \frac{\bar{y}_B - \bar{y}_A}{\varepsilon\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \quad , \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{\nu_A S_A^2 + \nu_B S_B^2}{\nu_A + \nu_B}}$$ (CON VARIANCIAS INSESGADAS)

$$\nu_A = n_A - 1 = 4, \qquad \nu_B = n_B - 1 = 6 - 1 = 5$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{4 \times 52.50 + 5 \times 29.51}{4 + 5}} = \sqrt{39.73} = 6.30$$

$$t = \frac{1.69}{6.30\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}} = 0.44 < t_{0.01,9} = 3.25$$

POR LO QUE SE ACEPTA LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE MEDIAS, O SEA, QUE CON 99% DE PROBABILIDAD EL RENDIMIENTO DE LAS TIERRAS CON AMBOS FERTILIZANTES ES EL MISMO.

b. APLICAR CADA TRATAMIENTO A GRUPOS O BLOQUES DE ESPECIMENES, EN ESTE CASO EN PAREJAS, QUE PERMITAN REDUCIR LA VARIANCIA O DISPERSION ALEATORIA DE LOS RESULTADOS, INVOLUCRANDO, A LA VEZ, UN PROCESO DE ALEATORIZACION EN LA ASIGNACION DE LOS BLOQUES; A ESTE PROCESO SE LA LLAMA DE <u>AGRUPAMIENTO EN BLOQUES</u>.

<u>EJEMPLO</u>

EN EL EJEMPLO INMEDIATO ANTERIOR LA INCERTIDUMBRE EN LOS RESULTADOS POR LOS EFECTOS ALEATORIOS INVOLUCRADOS SE PUEDE REDUCIR SI EN VEZ DE SORTEARSE LOS LOTES PARA CADA FERTILIZANTE, CADA

LOTE SE DIVIDE EN DOS PARTES IGUALES Y SE SORTEA QUE MITAD SE TRATARA CON CADA UNO DE ELLOS. CON ESTO LOS RESULTADOS QUEDAN AGRUPADOS POR PAREJAS (y_A, y_B), UNA PARA CADA LOTE, TENIENDOSE QUE y_B Y y_A NO SON INDEPENDIENTES. CON ESTO SE TIENE UN EXPERIMENTO CON AGRUPAMIENTO POR BLOQUES.

SOPONGAMOS QUE LAS PAREJAS DE DATOS QUEDARON DE LA SIGUIENTE MANERA PARA 5 LOTES:

y_A	y_B	$y_B-y_A=d$	d^2
29.9	26.6	-3.3	10.89
11.4	23.7	12.3	151.29
25.3	28.5	3.2	10.24
16.5	14.2	-2.3	5.29
21.1	17.9	-3.2	10.24
		6.7	187.95

$H_0: \mu_d = 0;\ H_1: \mu_d \neq 0;\ 1-\alpha = 0.99$

$\bar{d} = 6.7/5 = 1.34,\ \bar{d}^2 = 1.80$

$\overline{d^2} = 187.95/5 = 37.59$

$S_d^2 = 37.59-1.80 = 35.79$

$S_d = 5.98,\ t = \frac{\bar{d}}{S_d}\sqrt{n-1} = 0.448$

$t_{0.005,4} = 4.60 > 0.448;$ POR LO TANTO SE ACEPTA H_o.

EN ESTE CASO SE MANEJA LA ESTADISTICA $\bar{d}$ CON DISTRIBUCION t DE STUDENT.

EJEMPLO

CON EL FIN DE VERIFICAR SI DOS MATERIALES PARA FABRICAR SUELA DE ZAPATO SE DISEÑO UN EXPERIMENTO CON AGRUPAMIENTO POR BLOQUES Y ALEATORIZACION. EL AGRUPAMIENTO SE HIZO AL USAR EL ZAPATO DEL PIE IZQUIERDO CON UN MATERIAL Y EL DEL DERECHO CON EL OTRO; LA ALEATORIZACION SE HIZO AL ASIGNAR AL AZAR CUAL MATERIAL ESTARIA EN EL IZQUIERDO Y CUAL EN EL DERECHO, PARA CADA

NIÑO QUE USARIA LOS ZAPATOS DE PRUEBA.

LAS DURACIONES DE LOS ZAPATOS, EN MESES, FUERON:

NIÑO	MATERIAL A	MATERIAL B	DIFERENCIA = d	d^2
1	13.2 (I)	14.0 (D)	0.8	0.64
2	8.2 (I)	8.8 (D)	0.6	0.36
3	10.9 (D)	11.2 (I)	0.3	0.09
4	14.3 (I)	14.2 (D)	-0.1	0.01
5	10.7 (D)	11.8 (I)	1.1	1.21
6	6.6 (I)	6.4 (D)	-0.2	0.04
7	9.5 (I)	9.8 (D)	0.3	0.09
8	10.8 (I)	11.3 (D)	0.5	0.25
9	8.8 (D)	9.3 (I)	0.5	0.25
10	13.3 (I)	13.6 (D)	0.3	0.09
			4.1	3.03

$H_0: \mu_{\bar{d}} = 0; \; H_1: \mu_d \neq 0; \; 1-\alpha = 0.99$

$\bar{d} = 4.1/10 = 0.41, \quad s_d^2 = \overline{d^2} - \bar{d}^2 = \frac{3.03}{10} - 0.41^2 = 0.1349$

$s_d = 0.367, \quad t = \frac{0.41}{0.367}\sqrt{9} = 3.35 > t_{0.005,9} = 3.25$

POR LO TANTO SE RECHAZA LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE DURACION DE LAS SUELAS HECHAS CON AMBOS MATERIALES, CON UN 99% DE NIVEL DE CONFIANZA.

RESUMEN

1. LOS EXPERIMENTOS DEBEN SER COMPARABLES Y REPRODUCIBLES. CUANDO SE COMPARAN TRATAMIENTOS DEBE PROCURARSE QUE LOS

EXPERIMENTOS PARA CADA UN CORRAN EN PARALELO.

2. DEBE HABER REPLICAS DE CADA TRATAMIENTO.- LAS VARIACIONES ENTRE LOS RESULTADOS DEBE PERMITIR ESTIMAR LOS "ERRORES" DEBIDOS AL AZAR

3. SIEMPRE QUE SEA POSIBLE SE DEBEN AGRUPAR LOS RESULTADOS EN BLOQUES PARA REDUCIR EL ERROR, AL HOMOGENIZAR LOS RESULTADOS DE CADA REPLICA.

①

6.12 DECISIONES ESTADISTICAS PARTICULARES

Habiendo desarrollado el procedimiento general para probar decisiones estadísticas, se establecerán a continuación los estadísticos, y sus distribuciones de probabilidad, adecuados para realizar pruebas de hipótesis sobre los parámetros poblacionales. Excepto en un caso, el establecimiento está íntegramente basado en los casos estudiados en los intervalos de confianza.

Para probar estadísticamente la media μ_x de una población de valores de la variable aleatoria x, como puede ser

$$H_0 : \mu_x = a \tag{6.38}$$

en base a los valores conocidos de la media $\bar{x}$ y la desviación estándar S_x de una muestra aleatoria de tamaño n de la población, se pueden distinguir dos casos: el que el tamaño n de la muestra sea grande ($n>30$) y el que sea pequeña ($n<30$). El primer caso asegura que la distribución de medias de la muestra sea normal, y que la desviación estándar muestral sea un buen estimador de la desviación estándar de la población. El segundo, para poderlo resolver, requiere que la población sea normal, o aproximadamente normal.

En el primer caso, y de acuerdo a la teoría del muestreo, se sabe que la variable

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_x / \sqrt{n}}$$

es aproximadamente normal estándar. Si se admite como verdadera la hipótesis (6.38), entonces

$$z = \frac{\bar{x} - a}{\sigma_x / \sqrt{n}} \tag{6.39}$$

también se aproxima a la distribución normal estándar. En base a este conocimiento se puede afirmar, con cierto grado de confianza, que los valores de z varían entre los valores críticos dados en la tabla 6.6, con lo que se puede establecer la regla de decisión del problema.

Si n es suficientemente grande, en (6.39) se puede sustituir la desviación estándar de la población por la de la muestra. Obsérvese que al establecer esa expresión se supuso implícitamente que la población es infinita o el muestreo se realiza con reemplazo.

Para el segundo caso, cuando n no es grande, no se puede admitir que z sea normal (sólo que también la población lo sea) ni sustituir σ_x por su estimador S_x en (6.39). En este caso, y aceptando que la población es normal, o aproximadamente normal, se tiene de (6.23) que la variable

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_x}{S_x/\sqrt{n-1}} = \frac{\bar{x} - a}{S_x/\sqrt{n-1}} \qquad (6.40)$$

tiene distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad. Al saberlo, se puede establecer la regla de decisión del problema considerando los valores críticos de la distribución t de Student. Estos se obtienen de la tabla A.5 del Apéndice del capítulo 3.

Los dos casos analizados se presentan resumidos en los dos primeros renglones de la tabla 6.7. Los otros renglones, excepto el último, se obtienen en forma semejante a los estudiados, tomando en cuenta siempre los resultados contenidos en el capítulo 4 y en la primera parte de éste. Además, en este resumen sólo se consignan los casos en que la población es infinita o el muestreo es con reemplazo.

En el último renglón de la tabla 6.7 se presenta el estadístico que debe usarse para probar la homogeneidad de variancias de dos poblaciones independientes, lo cual debe verificarse antes de determinar el intervalo de confianza de la suma y diferen

Parámetro (s) que se prueba (n)	Hipótesis nula H_0	Distribución de la (s) población (es)	Tamaño de la(s) muestra(s)	Estadístico	Distribución del estadístico
Media	$\mu_x = a$	Cualquiera	Grande	$z = \dfrac{\bar{x} - \mu_x}{S_x/\sqrt{n}}$	Normal estándar
		Aproximadamente normal	Cualquiera	$t = \dfrac{\bar{x} - \mu_x}{S_x/\sqrt{n-1}}$	t de Student con $n-1$ grados de libertad
Igualdad de medias	$\mu_1 = \mu_2$	Cualquiera	Grande	$z = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$	Normal estándar
		Aproximadamente normal	Cualquiera	$t = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}} \sqrt{\dfrac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$ (se supone que $\sigma_1 = \sigma_2$)	t de Student con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad
Proporción de éxitos	$p = a$	Binomial	Grande	$z = \dfrac{\dfrac{x}{n} - p}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{n}\right)\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)}}$	Normal estándar

Tabla 6.7 Estadísticos para hacer pruebas de hipótesis (continúa)

Parámetro(s) que se prueba(n)	Hipótesis nula H_0	Distribución de la(s) población(es)	Tamaño de la(s) muestra(s)	Estadístico	Distribución del estadístico
Igualdad de proporciones	$p_1 = p_2$	Binomial	Grande	$z = \dfrac{\left(\dfrac{x_1}{n_1} - \dfrac{x_2}{n_2}\right) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1}\left(\dfrac{x_1}{n_1}\right)\left(1-\dfrac{x_1}{n_1}\right) + \dfrac{1}{n_2}\left(\dfrac{x_2}{n_2}\right)\left(1-\dfrac{x_2}{n_2}\right)}}$	Normal estándar
Variancia	$\sigma_x^2 = a$	Aproximadamente normal	Cualquiera	$\chi^2 = \dfrac{n S_x^2}{\sigma_x^2}$	χ^2 con $n-1$ grados de libertad
			Grande	$\chi^2 = \dfrac{n S_x^2}{\sigma_x^2}$ en donde los valores críticos de χ^2 se determinan con $\chi^2 = \dfrac{1}{2}\left(z + \sqrt{2n-3}\right)^2$ y z es	Normal estándar
Igualdad de variancias	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	Aproximadamente normal	Cualquiera	$F = \dfrac{n_1(n_2-1)}{n_2(n_1-1)} \; \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \; \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$	F de Fisher con n_1-1 y n_2-1 grados de libertad

Tabla 6.7 Estadísticos para hacer pruebas de hipótesis (concluye)

cia de las medias de dos poblaciones (expresión 6.32), o antes de probar si existen diferencias significativas entre las medias de dos poblaciones (cuarto renglón de la tabla 6.7), en base a muestras pequeñas en ambos casos. En la sección 6.4 se obtuvo que si una población es normal, o aproximadamente normal, de desviación estándar σ_x, la variable v^2 definida en (6.22) tiene distribución χ^2 de $n-1$ grados de libertad. De esta manera, si se tienen dos poblaciones normales e independientes de desviaciones estándar σ_1 y σ_2, respectivamente, de donde se obtengan muestras de tamaño n_1 y n_2, y desviaciones estándar S_1 y S_2, también respectivamente, entonces las variables

$$v_1^2 = \frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2} \tag{6.41}$$

y

$$v_2^2 = \frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2} \tag{6.42}$$

tendrán distribuciones χ^2 con n_1-1 y n_2-1 grados de libertad respectivamente a cada población.

Por otra parte, en el capítulo 3 se estableció que si las variables aleatorias v_1^2 y v_2^2 eran independientes con distribuciones χ^2 con ν_1 y ν_2 grados de libertad, respectivamente, entonces la variable

$$F = \frac{v_1^2/\nu_1}{v_2^2/\nu_2} \tag{6.43}$$

tiene distribución F de Fisher con ν_1 y ν_2 grados de libertad. Sustituyendo en (6.43) las variables v_1^2 y v_2^2 definidas en (6.41) y (6.42), que tienen $\nu_1 = n_1-1$ y $\nu_2 = n_2-1$ grados de libertad, respectivamente, se obtiene que

$$F = \frac{\dfrac{n_1}{n_1-1}\,\dfrac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{n_2}{n_2-1}\,\dfrac{S_2^2}{\sigma_2^2}}$$

$$F = \frac{n_1(n_2-1)}{n_2(n_1-1)}\,\frac{S_1^2}{S_2^2}\,\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \qquad (6.44)$$

tiene distribución F de Fisher con n_1-1 y n_2-1 grados de libertad. Admitiendo la hipótesis de que

$$\sigma_1 = \sigma_2$$

se obtiene el estadístico

$$F = \frac{n_1(n_2-1)}{n_2(n_1-1)}\,\frac{S_1^2}{S_2^2} \qquad (6.45)$$

cuyos valores deben estar contenidos dentro de ciertos valores críticos definidos por la propia distribución F con n_1-1 y n_2-1 grados de libertad. Esto permite establecer la regla de decisión para probar la hipótesis de homogeneidad de variancias de dos poblaciones. El resultado (6.44) es el que se presenta en el último renglón de la mencionada tabla 6.7.

Ejemplo 6.21 Una empresa produce cables con resistencia media a la ruptura de 200 kg y desviación estándar de 20 kg. Se piensa que con un nuevo proceso productivo la resistencia media a la ruptura se puede incrementar.

a) Diseñar una regla de decisión para aceptar el nuevo proceso productivo con un nivel de significación del 1% al probar 50 cables.

b) Bajo la regla de decisión adoptada en el inciso anterior, calcular la probabilidad de rechazar el nuevo proceso cuando en realidad está produciendo cables con resistencia media a la ruptura de 210 kg.

c) Dibujar la curva característica de operación de la regla de decisión.

a) Si μ_x es la resistencia media a la ruptura de los cables producidos con el proceso actual, se trata de decidir entre las hipótesis:

H_0 : $\mu_x = 200$ kg (el proceso nuevo es igual al actual)

H_1 : $\mu_x > 200$ kg (el proceso nuevo es mejor que el actual)

Como el tamaño de la muestra es grande, el estadístico que se usará para diseñar la regla de decisión es

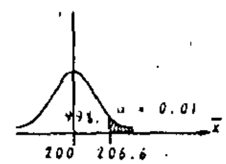
$$z = \frac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_x/\sqrt{n}}$$

en donde el valor crítico de z al 1% de nivel de significación en una prueba de hipótesis de una cola vale 2.33. Despejando $\bar{x}$ de la expresión anterior, y sustituyendo en la resultante los datos del problema y el de la hipótesis nula, se obtiene:

$$\bar{x} = \mu_x + z\,\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

$$= 200 + 2.33\,\frac{20}{\sqrt{50}}$$

$$= 206.6 \text{ kg}$$



Obsérvese que se tiene un problema de decisión de una cola debido a que la hipótesis nula establece que se rechace H_0 siempre que el valor de la media sea *mayor* (no diferente) de 200 kg. Ahora, si $z > 2.33$ (rechazo de H_0) $\bar{x} > 206.6$ y la regla de decisión queda como:

1. Aceptar el nuevo proceso productivo si la resistencia media de 50 cables escogidos al azar es mayor de 206.6 kg
2. Rechazarlo en caso contrario

b) Se consideran ahora las hipótesis:

$$H_0 : \mu_{\bar{x}} = 200 \text{ kg}$$

$$H_1 : \mu_{\bar{x}} = 210 \text{ kg}$$

en donde las distribuciones de las resistencias medias a la ruptura están representadas por las curvas normales de la figura 6.5. De ésta se ve que la probabilidad de rechazar el nuevo proceso productivo, cuando en realidad produce cables con resistencia media de 210 kg, está dada por el área rayada bajo la curva normal de la derecha. Luego, aceptando la hipótesis de que $\mu_{\bar{x}} = 210$ y que la desviación estándar conserva su valor, se tiene:

$$\beta = P[\bar{x} < 206.7]$$

$$= P\left[z < \frac{206.7-210}{20/\sqrt{50}}\right]$$

$$= P[z < -1.17]$$

$$= 0.1210$$

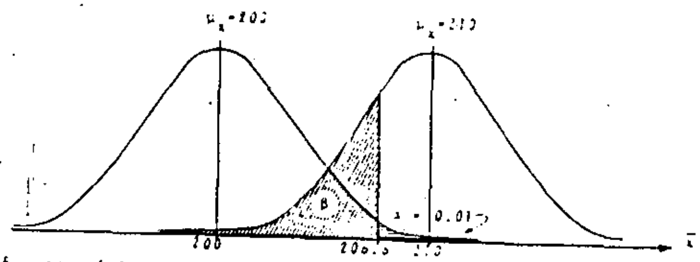


Figura 6.5 Error tipo II de la regla de decisión del ejemplo 6.21

c) Procediendo en forma idéntica al inciso anterior, aceptando que es cierto que $\mu_{\bar{x}}=202.5$, 205.0, 207.5, 212.5, 215.0 y otros, además de que $\sigma_x=20$ siempre, se obtiene la tabla 6.8. Los valores de ésta están graficados en la figura 6.6.

$\mu_{\bar{x}}$	202.5	205.0	207.5	210.0	212.5	215.0
β	0.9306	0.7258	0.3897	0.1210	0.0202	0.0017

R. Brito R.

Tabla 6.8 Errores tipo II de la regla de decisión del ejemplo 6.21

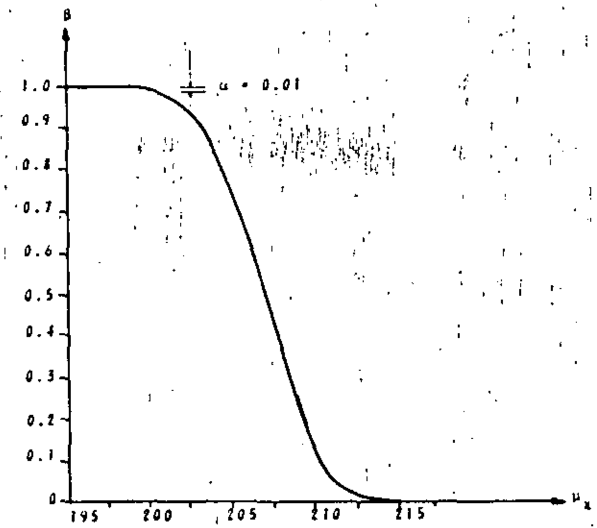


Figura 6.6 Curva característica de operación de la regla de decisión del ejemplo 6.21

Ejemplo 6.22 Con respecto al ejemplo anterior, calcular el tamaño de la muestra de manera que la probabilidad de rechazar la hipótesis $\mu_x = 200$ kg, cuando debería aceptarse, sea cuando más 0.05; y la probabilidad de aceptar que $\mu_x = 200$ kg, cuando la media se incrementó a 205 kg sea cuando más 0.02.

El enunciado del ejemplo establece limitaciones a la regla de decisión que se formule de manera que los errores tipos I y II tengan probabilidades de 0.05 y 0.02, respectivamente. Así, la regla de decisión hablará de una muestra de tamaño n y de los límites

$$\alpha = P(\text{error tipo I}) \leq 0.05$$

$$\beta = P(\text{error tipo II}) \leq 0.02$$

en donde el error del tipo II se refiere al caso de que $\mu_x = 205$ kg. Esta situación se ilustra gráficamente en la figura 6.7

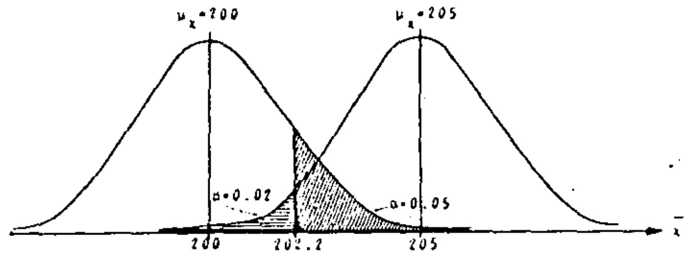


Figura 6.7 Errores tipo I y tipo II de la regla de decisión del ejemplo 6.22

Para que se cumpla que $\alpha = 0.05$, bajo la hipótesis de que $\mu_x = 200$, se debe tener

$$\alpha = P\left(\frac{\bar{x} - 200}{20/\sqrt{n}} \geq z_c\right) \leq 0.05$$

en donde el valor crítico de z_c al 5% de nivel de significación es 1.645. Luego

$$\frac{\bar{x} - 200}{20/\sqrt{n}} \geq 1.645$$

La restricción de que $\beta = 0.02$, cuando $\mu_x = 205$ y se conserva σ_x en 20, se cumple si

$$\beta = P\left(\frac{\bar{x} - 205}{20/\sqrt{n}} \leq z_c\right) \leq 0.02$$

en donde z_c vale -2.055 al 2% de nivel de significación. Obsérvese que el valor crítico del estadístico es negativo porque la cola de rechazo está a la izquierda; el valor 2.055 se obtiene de la tabla de la distribución normal. De la última expresión se obtiene

$$\frac{\bar{x} - 205}{20/\sqrt{n}} \leq -2.055$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas, se llega a que

$$\bar{x} = 202.2 \quad y \quad n = 219.0$$

Por lo que el tamaño de la muestra debe ser de 219 cables y la regla de decisión dirá:

1. Aceptar el nuevo proceso productivo si la resistencia media de 219 cables escogidos al azar es mayor a 202.2 kg
2. Rechazarlo en caso contrario

De acuerdo a esta regla de decisión, si se seleccionan esos 219 cables al azar producidos con la técnica nueva, se prueban, y su media $\bar{x}$ resulta ser por ejemplo de:

1) 208 kg, se aceptará el nuevo proceso como mejor. En este caso se rechaza $\mu_x = 200$, aunque cabe tener un error má

ximo del 5% en rechazar algo que es cierto.

2) 195 kg , se rechaza el nuevo proceso productivo. Aquí se estará aceptando que $\mu_x = 200$, aunque cabe tener un error máximo del 2% de aceptar algo que es falso.

Ejemplo 6.23 Un fabricante de balines de rodamiento asegura que sus balines tienen un diámetro medio de 1.905 cm de diámetro. Un ensamblador usa estos balines para producir baleros y, para aceptar un pedido, mide el diámetro de 10 balines del lote recibido. Si la media de la muestra de los 10 diámetros es de 1.931 cm y su desviación estándar es 0.023 cm, ¿deberá aceptar el ensamblador el lote?

En este ejemplo se trata de decidir entre las hipótesis

$H_0 : \mu_x = 1.905$ cm (aceptar el lote)

$H_1 : \mu_x \neq 1.905$ cm (rechazar el lote)

en donde x es una variable aleatoria que representa el diámetro de los balines recibidos. Para probar la hipótesis nula, y dado que la muestra es pequeña, se usará el estadístico

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_x}{S_x/\sqrt{n-1}}$$

para lo cual se aceptará que la distribución de los diámetros de los balines es aproximadamente normal. En esta expresión $\mu_x = 1.905$ por hipótesis, $\bar{x} = 1.931$ y $S_x = 0.023$ de acuerdo a los datos del problema, y t tiene distribución t de Student con $n-1 = 9$ grados de libertad. Luego

$$t = \frac{1.931 - 1.905}{0.023/\sqrt{10-1}} = 3.39$$

Los valores críticos de t en problemas de decisión de dos colas, por prever la hipótesis alterna el rechazo de la nula porque la media de la población es menor o mayor que 1.905, con 9 grados de libertad y a niveles de significación del 5 y 1% son, respectivamente, $\pm$ 2.26 y $\pm$ 3.25. Como se observa en la figura 6.8, el valor observado de t cae en las regiones de rechazo de la hipótesis probada. Por lo tanto, la media de la población de diámetros es significativamente diferente de 1.905 m, y deberá rechazarse el lote de balines

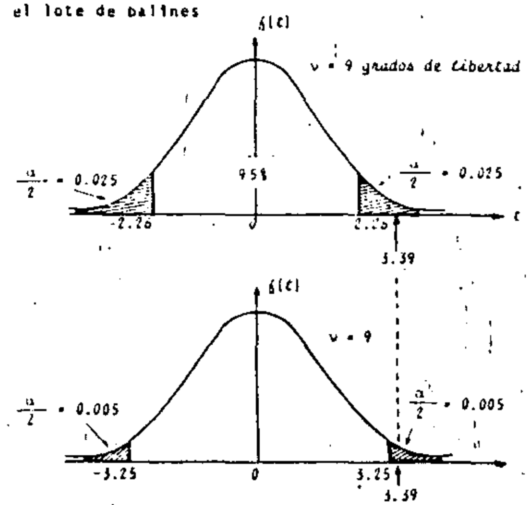


Figura 6.8 Prueba de hipótesis del ejemplo 6.23.

Ejemplo 6.24 En relación al ejemplo anterior, establecer un procedimiento para controlar la aceptación de los lotes de balines.

Del ejemplo anterior se tiene que los valores críticos de

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_x}{S_x/\sqrt{n-1}} = \frac{\bar{x} - 1.905}{0.023/\sqrt{10-1}}$$

son $\pm$ 2.26 y $\pm$ 3.25, al 5 y 1% de niveles de significación. Des pejando $\bar{x}$ de la expresión anterior, se obtienen sus valores críticos a los niveles de significación considerados. Estos son 1.888 y 1.922 al 5%, y 1.880 y 1.930 al 1%.

De acuerdo a estos valores, el procedimiento de aceptación de lotes de balines diría:

1. De cada lote de balines recibidos, calcular la media $\bar{x}$ de los diámetros de 10 balines seleccionados al azar.
2. Si $\bar{x}$ está entre los valores 1.888 y 1.922, aceptar el lote.
3. Si $\bar{x}$ está fuera del intervalo que va de 1.880 a 1.930, rechazar el lote.
4. Si $\bar{x}$ está contenido en los intervalos (1.880, 1.888) o (1.922, 1.930), repetir el proceso con otros balines.

El procedimiento anterior se ilustra gráficamente en la figura 6.9. El registro de las medias de las muestras de los lotes se representan por medio de puntos en la gráfica, la cual recibe el nombre de *carta de control de calidad*. Dependiendo que el punto trazado caiga en las zonas de aceptación, rechazo o duda, se actuará en consecuencia.

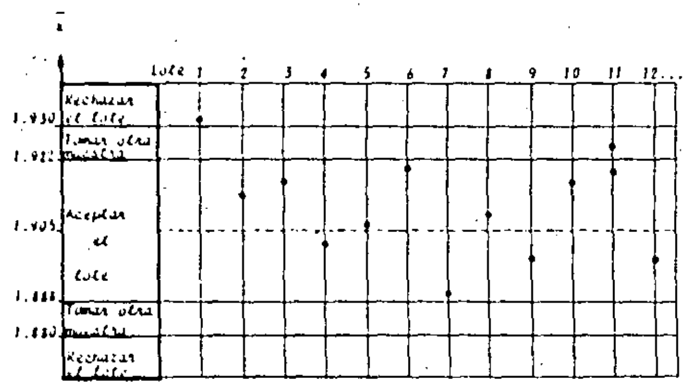


Figura 6.9 Carta de control de calidad.

Ejemplo 6.25 Para ir de México a Cuernavaca se tienen dos carreteras, la autopista y la federal. En el primer renglón de la tabla de frecuencias 6.9 se tienen los tiempos en minutos empleados por diferentes tipos de automóviles; en los otros dos renglones aparecen los números de automóviles que emplearon los tiempos de traslado indicados siguiendo una u otra carretera. Probar si existe algún ahorro de tiempo al usar la autopista. En caso afirmativo, ¿cuánto tiempo cabe esperar tener de ahorro?

Tiempo de viaje	40	45	50	55	60	65	70	75
Autopista	1	5	10	12	9	5	3	0
Federal	0	0	3	9	16	8	5	4

Tabla 6.9 Tabla de frecuencias del tiempo empleado entre México y Cuernavaca

Si x_1 y x_2 son variables aleatorias que representan los tiempos que usan los automóviles para recorrer la autopista y la carretera federal, respectivamente, entonces, en la primera parte del ejemplo se trata de decidir entre las hipótesis:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ (no existen diferencias entre los tiempos de recorrido)

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$ (es más rápido el recorrido por la autopista)

Para probar la hipótesis H_0 se considerará la distribución de la diferencia de medias de las muestras, la que es normal por ser grandes las muestras. Los valores de los estadísticos de las muestras se obtienen de la tabla 6.9 y son:

$n_1 = 45$ $\qquad n_2 = 45$

$\bar{x}_1 = 55.56$ $\qquad \bar{x}_2 = 61.67$

$S_1^2 = 52.47$ $\qquad S_2^2 = 44.44$

Sustituyendo estos valores, y la hipótesis H_0, en el estadístico mencionado en el tercer renglón de la tabla 6.7, se obtiene:

$$z = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2) - (\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$= \frac{(55.56-61.67) - 0}{\sqrt{\frac{52.47}{45} + \frac{44.44}{45}}}$$

$$= -4.16$$

Los valores críticos del estadístico z, en problemas de decisión de una cola, con niveles de significación del 5 y 1%, son -1.645 y -2.33, respectivamente. Comparando el valor observado del estadístico z con los críticos, se concluye que debe rechazarse la hipótesis nula, como se observa en la figura 6.10.

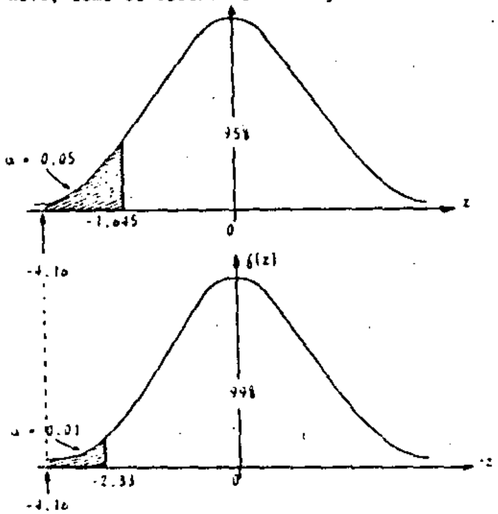


Figura 6.10 Prueba de hipótesis del ejemplo 6.25

Habiendo aceptado que se ahorra tiempo al usar la autopista, ahora se determinará el intervalo de confianza de $\mu_2-\mu_1$ para obtener el ahorro en tiempo esperado al usar esta carretera. Usando (6.29) con z_c para el 95% de nivel de confianza, se obtiene:

$$\mu_2-\mu_1 = (\bar{x}_2-\bar{x}_1) \pm z_c \sqrt{\frac{S_2^2}{n_2} + \frac{S_1^2}{n_1}}$$

$$= (61.67-55.56) \pm 1.96 \sqrt{\frac{44.44}{45} + \frac{52.47}{45}}$$

$$= 6.11 \pm 2.88$$

Luego

$$3.23 \le \mu_2-\mu_1 \le 8.99 \quad \text{al } 95\%$$

Esto significa que, en el 95% de los casos, al usar la autopista se ahorrará por lo menos 3.23 minutos.

Ejemplo 6.26 En la tabla 6.10 se tiene el rendimiento en km/litro de cuatro automóviles que usan gasolina normal y gasolina activada con un aditivo. ¿Puede decirse que el aditivo mejora el rendimiento del automóvil?

Gasolina normal	12	10	11	11
Gasolina activada	13	12	13	14

Tabla 6.10 Rendimiento de cuatro automóviles que usan gasolina normal y activada

Sean x_1 y x_2 variables aleatorias que representan el rendimiento de un automóvil que usa gasolina normal y gasolina activada, respectivamente. Se trata de decidir entre las hipótesis

$H_a : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$

En base a las muestras de los estadísticos, se obtiene:

$$n_1 = 4$$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{4}(12+10+11+11) = 11$$

$$S_1^2 = \frac{1}{4}\left[(12-11)^2+(10-11)^2+(11-11)^2+(11-11)^2\right] = 0.5$$

$$n_2 = 4$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{4}(13+12+13+14) = 13$$

$$S_2^2 = \frac{1}{4}\left[(13-13)^2+(12-13)^2+(13-13)^2+(14-13)^2\right] = 0.5$$

Como las muestras son pequeñas, debe usarse el estadístico t establecido en el cuarto renglón de la tabla 6.7 para hacer la prueba estadística. Pero la deducción de este estadístico supone la igualdad de las desviaciones estándar de las dos poblaciones, por lo que deberá resolverse previamente el problema de decisión dado por:

$H_a' : \sigma_1 = \sigma_2$

$H_1' : \sigma_1 \neq \sigma_2$

Aceptando la hipótesis nula H_a', se tiene de (6.44) que

$$F = \frac{n_1(n_2-1)}{n_2(n_1-1)} \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

$$= \frac{4(4-1)}{4(4-1)} \frac{0.5}{0.5} = 1$$

Este estadístico tiene distribución F de Fisher con $\nu_1 = n_1 - 1 = 3$ y $\nu_2 = n_2 - 1 = 3$ grados de libertad. En la figura 6.11 se presentan los valores críticos del estadístico F al 5% comparado con el observado. De la comparación se concluye que debe aceptarse la hipótesis de que las desviaciones estándar de las poblaciones son iguales. Obsérvese que no se hace la prueba al 1% de nivel de significación ya que, al aceptar la hipótesis que se prueba al 5%, automáticamente queda aceptada al 1%.

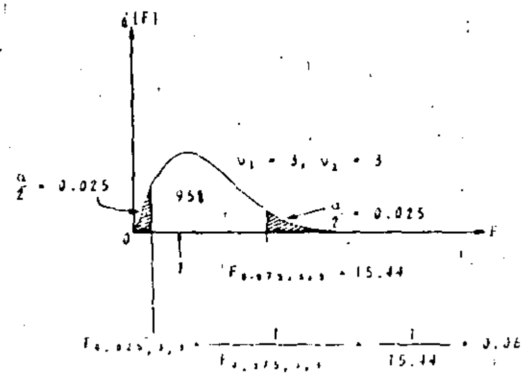


Figura 6.11 Prueba de la hipótesis de igualdad de desviaciones estándar

Habiendo probado la homogeneidad de variancias, o igualdad de desviaciones estándar, se volverá al problema de decisión original. Aceptando que $\mu_1 = \mu_2$ se tiene del cuarto estadístico de la tabla 6.7:

$$t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2) - (\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}$$

$$= \frac{(11-13) - 0}{\sqrt{4(0.5) + 4(0.5)}} \sqrt{\frac{4(4)(4+4-2)}{4+4}}$$

$$= -3.46$$

Este valor se compara con el crítico de la distribución t con $\nu = n_1 + n_2 - 2 = 6$ grados de libertad. En la figura 6.12 se muestran los valores críticos al 5 y 1% de niveles de significación. De la misma figura se desprende que hay que rechazar la hipótesis nula y aceptar que el aditivo mejora el rendimiento de los automóviles

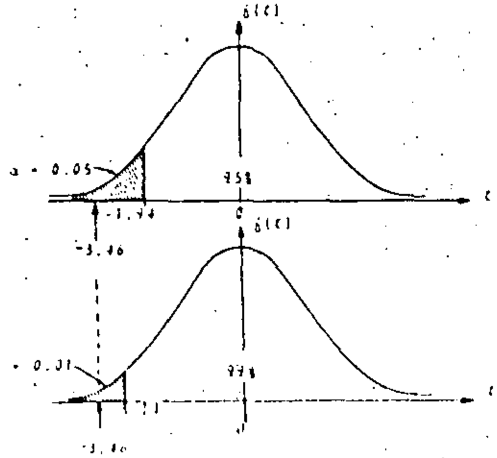


Figura 6.12 Prueba de hipótesis del ejemplo 6.26.

Ejemplo 6.27 En una fábrica se tienen dos máquinas iguales para producir remaches, los que pueden salir o no defectuosos. A fin de determinar si las proporciones de remaches defectuosos que se obtienen de las dos máquinas son iguales, se obtienen muestras aleatorias de tamaño 100 de las producciones de remaches en un día. Si se obtienen 18 remaches defectuosos de la primera máquina y 8 de la segunda, investigar si existe evidencia de un funcionamiento diferente de las máquinas.

Sean p_1 y p_2 las proporciones de remaches defectuosos producidos por las máquinas. Se trata de decidir entre las hipótesis

$H_0 : p_1 = p_2$ (las máquinas funcionan igual)

$H_1 : p_1 \neq p_2$ (las máquinas funcionan diferente)

De las muestras extraídas de las dos poblaciones se tienen los datos:

$n_1 = 100$

$\dfrac{x_1}{n_1} = \dfrac{18}{100} = 0.18$ (proporción de éxitos en la muestra de la primera máquina, es decir, de remaches defectuosos)

$n_2 = 100$

$\dfrac{x_2}{n_2} = \dfrac{8}{100} = 0.08$

En base a estos valores, y como las muestras son grandes, se tiene del sexto estadístico de la tabla 6.7 que:

$$z = \frac{\left(\dfrac{x_1}{n_1} - \dfrac{x_2}{n_2}\right) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1}\left(\dfrac{x_1}{n_1}\right)\left(1 - \dfrac{x_1}{n_1}\right) + \dfrac{1}{n_2}\left(\dfrac{x_2}{n_2}\right)\left(1 - \dfrac{x_2}{n_2}\right)}}$$

$$= \frac{(0.18 - 0.08) - 0}{\sqrt{\dfrac{1}{100}(0.18)(1-0.18) + \dfrac{1}{100}(0.08)(1-0.08)}}$$

$$= 2.13$$

Comparando este valor del estadístico con los críticos al 5 y 1% de niveles de confianza, que son ± 1.96 y ± 2.58 respectivamente, se obtiene que probablemente sí existan diferencias significativas en el funcionamiento de las máquinas. Otras muestras pueden permitir llegar a tomar una decisión definitiva.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

CURSOS ABIERTOS

DISEÑO DE EXPERIMENTOS: TECNICAS DE MUESTREO Y ANALISIS ESTADISTICO

DISEÑO Y ANALISIS DE EXPERIMENTOS PARA COMPARAR K TRATAMIENTOS

M. EN I. AUGUSTO VILLAREAL ARANDA

ABRIL-JUNIO-1992.

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

COMPARACION DE K MEDIAS.- ANALISIS DE VARIANCIA (ANVA)

1. COMPORTAMIENTO DE POBLACIONES CON DISPERSION SIMILAR

Considérense las tres poblaciones

A	B	C
1	1	1
2	2	2
3	3	3

N= Tamaño de la población=3 $= N_A = N_B = N_C$

Las medias y variancias poblacionales son iguales, puesto que

$$\mu_A = \frac{1+2+3}{3} = 2 = \mu_B = \mu_C = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$\sigma_A^2 = \frac{(1-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2}{3} = \frac{2}{3} = \sigma_B^2 = \sigma_C^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu)^2$$

$$= \frac{\text{SUMA DE CUADRADOS}}{N} = \frac{SS}{N}$$

Por otra parte, si se engloban los datos de las tres poblaciones en una sola, se obtiene

$$\mu_{TOTAL} = \mu_T = \frac{3(1)+3(2)+3(3)}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$\sigma^2_{TOTAL} = \sigma_T^2 = \frac{3(1-2)^2+3(2-2)^2+3(3-2)^2}{9} = 2/3 = 6/9 \quad (SS_T = 6)$$

Si se cobinan ahora las variancias que internamente posee cada población, se obtiene la llamada variancia dentro de las poblaciones, σ_D^2, de la manera siguiente

$$\sigma^2_{\text{DENTRO DE POBLACIONES}} = \sigma_D^2 = \frac{N_A\sigma_A^2 + N_B\sigma_B^2 + N_C\sigma_C^2}{N_A+N_B+N_C}$$

$$= \frac{3(2/3)+3(2/3)+3(2/3)}{3+3+3} = 2/3 = 6/9 \quad (SS_D = 6)$$

También es posible calcular la variancia para las diferencias de las medias de cada población respecto de la media total. Dicha variancia se llama <u>variancia entre</u> las poblaciones, σ_E^2 , y su valor se determina en la forma

$$\sigma^2_{\text{ENTRE LAS POBLACIONES}} = \sigma^2_E = \frac{N_A(\mu_A-\mu_T)^2+N_B(\mu_B-\mu_T)^2+N_C(\mu_C-\mu_T)^2}{N_A+N_B+N_C}$$

$$= \frac{3(2-2)^2+3(2-2)^2+3(2-2)^2}{3+3+3} = \frac{0}{9} = 0 \qquad (SS_E = 0)$$

El resultado anterior se explica al tener en cuenta que las tres poblaciones son de igual media, por lo que no puede existir diferencia <u>entre</u> ellas. Sin embargo, σ^2_D es igual con σ^2_A, σ^2_B y σ^2_C , es decir, equivale a la variancia <u>común</u> para las tres poblaciones.

A la diferencia que existe entre la media de cada población y la media total se le llama <u>efecto de la población</u>. Para el ejemplo que se trata, los efectos son

$$\gamma_A = \mu_A - \mu_T = 2-2=0, \; \gamma_B = \mu_B - \mu_T = 2-2=0, \; \gamma_C = \mu_C - \mu_T = 2-2=0$$

y, puesto que corresponden a desviaciones simples acerca de una media,

$$\gamma_A + \gamma_B + \gamma_C = 0 + 0 + 0 = 0 = \Sigma\gamma_i \quad ; \; i = A,B,C$$

De la definición de efecto poblacional, se puede concluir que σ^2_E, la variancia entre las poblaciones, corresponde a la variancia para los efectos γ_A , γ_B y γ_C. También resulta ser cierto que

$$\sigma^2_T = 6/9 = \sigma^2_D + \sigma^2_E = 6/9+0$$

$$SS_T = 6 = SS_D + SS_E = 6 + 0$$

Es decir, la variancia total de la población en la cual se englobaron las poblaciones A,B y C es igual con la combinación de las variancias particulares de ellas, σ^2_D , <u>más</u> la variancia de los efectos (o entre ellas), σ^2_E . Lo anterior también ocurre con las sumas de cuadrados correspondientes. El primer resultado ocurre <u>únicamente</u> con poblaciones, pero el segundo lo hace <u>también</u> con muestras aleatorias de esas poblaciones, como se mostrará más adelante, y se le llama <u>partición de la suma de cuadrados</u>.

Dicho resultado constituye la base primordial del método estadístico conocido como ANALISIS DE VARIANCIA, que se emplea para probar la igualdad de las medias para dos o más poblaciones normales con dispersión similar, tomando como base muestras aleatorias extraídas de ellas.

Si ahora se juzga a las poblaciones

A	B	C
2	1	1
3	2	2
4	3	3

es factible determinar que son de dispersión semejante, pero sus valores medios no pueden considerarse iguales. En efecto,

$$\mu_A = \frac{2+3+4}{3} = 3$$

$$\mu_B = \mu_C = \frac{1+2+3}{3} = 2 \qquad \therefore\ \mu_A \neq \mu_B = \mu_C$$

$$\sigma_A^2 = \frac{(2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2}{3} = 2/3$$

$$\sigma_B^2 = \sigma_C^2 = \frac{(1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2}{3} = 2/3 \qquad \therefore\ \sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma_C^2$$

Al considerar a las tres poblaciones como una sola, se obtiene

$$\mu_T = \frac{2(1) + 3(2) + 3(3) + 4}{9} = 21/9 = 7/3$$

$$\sigma_T^2 = \frac{2(1-7/3)^2 + 3(2-7/3)^2 + 3(3-7/3)^2 + 4(4-7/3)}{9} = 8/9 \qquad (SS_T = 8)$$

Las variancias dentro y entre poblaciones son

$$\sigma_D^2 = \frac{3(2/3) + 3(2/3) + 3(2/3)}{9} = 2/3 = 6/9 \qquad (SS_D = 6)$$

$$\sigma_E^2 = \frac{3(3-7/3)^2 + 3(2-7/3)^2 + 3(2-7/3)^2}{9} = 2/9 \qquad (SS_E = 2)$$

Los efectos de las poblaciones resultan

$\gamma_A = 3-7/3=2/3$, $\gamma_B = 2-7/3= -1/3$, $\gamma_C = 2-7/3= -1/3$

y su suma es

$$\gamma_A + \gamma_B + \gamma_C = 2/3 + (-1/3) + (-1/3) = 0$$

Obsérvese que la suma de variancias entre y dentro es igual a la variancia total, ya que

$$\sigma_T^2 = 8/9 = \sigma_D^2 + \sigma_E^2 = 6/9 + 2/9$$

Finalmente, la partición de la suma de cuadrados total SS_T equivale a la suma de los términos SS_D y SS_E.

$$SS_T = 8 = SS_D + SS_E = 6 + 2$$

Es importante tener en cuenta que las tres poblaciones son de igual dispersión y medias no equivalentes y, por tanto, distintas entre sí. A ello se debe que existan efectos poblacionales no nulos, cuya suma de cualquier manera es cero. Sin embargo, se cumple también para esta clase de poblaciones no iguales entre sí la fórmula de la variancia total, así como la partición de la suma de cuadrados.

De acuerdo con lo anterior, conviene establecer la regla siguiente:

AUSENCIA ABSOLUTA DE EFECTOS = IGUALDAD ABSOLUTA DE POBLACIONES

2. COMPARACION DE DOS POBLACIONES. PRUEBA CON ESTADISTICO t

Supóngase que se desea probar la hipótesis de que la media μ_I de cierta población normal I es igual a la de otra población II también normal, μ_{II}. Supóngase de igual manera que las <u>variancias</u> de esas poblaciones son <u>iguales</u>, aunque desconocidas. En este caso, para probar la hipótesis nula

$$H_0 : \mu_I = \mu_{II} \qquad (\mu_I - \mu_{II} = 0)$$

con cierta significancia α, es factible emplear el estadístico

$$t = \frac{\bar{X}_I - \bar{X}_{II}}{\sqrt{\frac{(n_I-1)S_I^2 + (n_{II}-1)S_{II}^2}{n_I + n_{II} - 2}}\sqrt{\frac{1}{n_I} + \frac{1}{n_{II}}}}$$

en donde

S_I^2 = variancia insesgada obtenida de una muestra aleatoria de tamaño n_I extraída de la población I, con promedio $\bar{X}_I$

S_{II}^2 = variancia insesgada obtenida de una muestra aleatoria de tamaño n_{II} extraída de la población II, con promedio $\bar{X}_{II}$

Ejemplo 1 Muestras al azar de tamaño 12 para dos poblaciones aproximadamente normales, con dispersión similar, arrojaron los valores siguientes:

Población I	Población II
$n_I = 12$	$n_{II} = 12$
$\bar{X}_I = 5.30$	$\bar{X}_{II} = 5.00$
$S_I = 0.42$	$S_{II} = 0.38$

Para probar con $\alpha = 0.05$ la hipótesis de igualdad de medias para las dos poblaciones, se considera que

$$H_0 : \mu_I = \mu_{II}$$
$$H_1 : \mu_I > \mu_{II}$$

y,

$$t = \frac{5.3 - 5.0}{\sqrt{\frac{(12-1)(0.42)^2+(12-1)(0.38)^2}{12+12-2}}\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{12}}} = 1.84$$

El valor para t de tablas, considerando $\alpha = 0.05$ y $\nu = n_I + n_{II} - 2 = 12 + 12 - 2 = 22$ grados de libertad, es igual con 1.72. Entonces, ya que

$$t_{muestra} = 1.84 > t_{tablas} = 1.72$$

se rechaza la hipótesis de igualdad de medias, concluyéndose que es significativamente mayor la media de la población I que la otra.

3. COMPARACION DE K POBLACIONES NORMALES DE VARIANCIA SIMILAR

Supóngase ahora que se tienen tres poblaciones normales con variancias semejantes y desconocidas. Si ahora se desea probar la hipótesis nula de que las tres medias poblacionales son iguales, es decir,

$$H_0 : \mu_{I} = \mu_{II} = \mu_{III}$$

dichas pruebas no pueden efectuarse de manera simultánea para las poblaciones involucradas, ya que el estadístico t permite realizar únicamente pruebas para parejas de medias. Sin embargo, existe una prueba estadística que permite analizar, todas a la vez, las medias de las poblaciones participantes en el problema, que se llama ANALISIS DE VARIANCIA (ANVA).

Dicha prueba provee de un método para aceptar o rechazar hipótesis que se planteen acerca de la igualdad de las medias, para dos o más poblaciones normales de variancia semejante. El ANVA hace uso de un estadístico que corresponde al cociente de dos variancias muestrales independientes, esto es, del estadístico F y de su distribución de probabilidad correspondiente.

A continuación se explicará de dónde provienen el numerador y el denominador en el cociente F, y de qué manera se deben interpretar. Para hacerlo, considérese el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2 Suponga que se emplean tres métodos diferentes para enseñar Química a tres grupos de estudiantes, y se desea comprobar si estos distintos métodos han tenido algún efecto sobre las calificaciones obtenidas. Se decide extraer una muestra aleatoria de cinco estudiantes de cada grupo, y sus calificaciones, sobre la base de 10 puntos máximo, se presentan en la tabla siguiente:

GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 3
$Y_{11} = 3$	$Y_{21} = 4$	$Y_{31} = 7$
$Y_{12} = 6$	$Y_{22} = 7$	$Y_{32} = 6$
$Y_{13} = 5$	$Y_{23} = 7$	$Y_{33} = 7$
$Y_{14} = 4$	$Y_{24} = 4$	$Y_{34} = 7$
$Y_{15} = 7$	$Y_{25} = 8$	$Y_{35} = 8$
25	30	35
$n_1 = 5$	$n_2 = 5$	$n_3 = 5$

$$\bar{Y}_{1.} = \sum_{j=1}^{5} Y_{1j}/5 = \frac{Y_{1.}}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\bar{Y}_{2.} = \sum_{j=1}^{5} Y_{2j}/5 = \frac{Y_{2.}}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\bar{Y}_{3.} = \sum_{j=1}^{5} Y_{3j}/5 = \frac{Y_{3.}}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

$$\bar{Y}_{..} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} Y_{ij}/n = \frac{90}{15} = 6$$

$$n = n_1 + n_2 + n_3 = 15$$

Se supondrá también que las calificaciones se distribuyen normalmente con medias μ_1, μ_2 y μ_3, respectivamente, y que las variancias de las notas para las poblaciones de las cuales provienen las muestras anteriores son iguales entre sí, y corresponden al valor común σ^2. Esta última suposición implica que aun cuando los distintos métodos de enseñanza pueden tener efecto sobre la nota media, no afectan a la dispersión de las calificaciones.

Tomando en cuenta lo anterior, si las poblaciones no difieren por dispersión, podrían hacerlo porque sus medias fuesen estadísticamente diferentes. Entonces, la hipótesis nula a probar es

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$ (No hay diferencia entre métodos)

en contra de la hipótesis alternativa

H_1 : Al menos una media es distinta (Hay diferencia entre métodos)

Para probar la hipótesis nula se procede inicialmente a encontrar estimadores de σ^2, la variancia común, de la manera siguiente:

3.1 Variancia total, S_T^2, como estimador de σ^2

Si H_0 resulta ser cierta, las tres poblaciones de calificaciones serán iguales, pudiéndose considerar las tres muestras juntas como una gran muestra de tamaño $n = n_1+n_2+n_3 = 15$, de una única población con media μ estimable por $\bar{Y}_{..}$, y variancia σ^2 que se puede estimar de manera insesgada por

$$\hat{\sigma}^2 = S_T^2 = \text{VARIANCIA TOTAL} = \frac{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}(Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2}{n-1} = \frac{SS_T}{n-1}$$

En el cociente anterior, $SS_D = 26$ corresponde a la suma de cuadrados dentro de las muestras, cuyo número de grados de libertad es $\nu_D = n-3 = 12$, el número total de observaciones menos el número de muestras, y es igual con el denominador del cociente.

3.3 Variancia entre, S_E^2, como estimador de σ^2

Suponiendo de nueva cuenta que H_0 sea cierta, las tres poblaciones de las cuales se ha muestreado se pueden confundir en una sola, con media μ y variancia σ^2. De ella se han extraído tres muestras de tamaño cinco, cuyos promedios son, respectivamente, $\bar{Y}_{1.}$, $\bar{Y}_{2.}$ y $\bar{Y}_{3.}$ Si idealmente el proceso de muestreo se continuara hasta obtener todas las muestras distintas posibles de tamaño cinco, y se calculara para todas ellas el promedio aritmético correspondiente, $\sigma^2_{\bar{Y}}$ sería el valor de la variancia para esos promedios. Para nuestro ejemplo, puesto que únicamente hay tres promedios disponibles, un estimador insesgado para $\sigma^2_{\bar{Y}}$ es

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{Y}} = \frac{(\bar{Y}_{1.} - \bar{Y}_{..})^2 + (\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{..})^2 + (\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{..})^2}{3-1} = \frac{1}{3-1}\sum_{i=1}^{3}(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$$

Sin embargo, en inferencia estadística se demuestra que la relación de $\sigma^2_{\bar{Y}}$ con σ^2, la variancia de la población muestreada con tamaño cinco, es

$$\sigma^2_{\bar{Y}} = \frac{\sigma^2}{5} \quad \text{ó} \quad \sigma^2 = 5\,\sigma^2_{\bar{Y}}$$

En nuestro caso, un estimador insesgado de σ^2 es, entonces,

$$\hat{\sigma}^2 = S_E^2 = \text{VARIANCIA ENTRE} = 5\,\hat{\sigma}^2_{\bar{Y}} = \frac{1}{3-1}\sum_{i=1}^{3}5(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$$

$$= \frac{SS_E}{3-1} = \frac{1}{2}\left[5(5-6)^2+5(6-6)^2+5(7-6)^2\right] = \frac{10}{2} = 5$$

Para el resultado anterior, $SS_E = 10$ equivale a la suma de cuadrados entre las muestras, puesto que se forma con las diferencias entre cada promedio particular $\bar{Y}_{i.}$ de una muestra con cinco elementos, y el promedio $\bar{Y}_{..}$ de la muestra global con los 15 elementos. El número de grados de libertad para SS_E es $\nu_E = 3-1=2$, el denominador del cociente.

3.4 Partición de la Suma de Cuadrados Total, SS_T

Al analizar las sumas de cuadrados total, dentro y entre muestras, así como sus grados de libertad correspondientes, se halla que

$$SS_T = 36 = SS_D + SS_E = 26+10$$
$$\nu_T = 14 = \nu_D + \nu_E = 12+2$$

Es decir, tal como sucede con las poblaciones (Capítulo 1), la suma de cuadrados total es igual con la suma de cuadrados dentro más la de cuadrados entre. Algo similar ocurre con los grados de libertad para SS_T, cuyo valor equivale a la suma de ν_D y ν_E para SS_D y SS_E, respectivamente. Sin embargo, conviene destacar que

$$S_T^2 = 2.57 \neq S_D^2 + S_E^2 = 2.17 + 5 = 7.17$$

Lo anterior sí es cierto para poblaciones, según lo demostrado en el capítulo 1, pero para muestras no ocurre, ya que se emplean para estimar insesgadamente, bajo la suposición de que H_0 es cierta, a los estadísticos SS_T, SS_D y SS_E divididos entre sus grados de libertad correspondientes.

De acuerdo con los resultados anteriores, para el ejemplo de las calificaciones se puede escribir

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 + \sum_{i=1}^{3} 5(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \quad \text{(SUMAS DE CUADRADOS)}$$
$$n-1 = (n-3) + (3-1) \quad \text{(GRADOS DE LIBERTAD)}$$

y, si en general se comparan K poblaciones normales con variancia similar, cada una de ellas representada a través de una muestra con n_i ($i= 1,\ldots,K$) elementos, las expresiones anteriores se generalizan para quedar como

$$\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\bar{Y}_{..})^2=\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\bar{Y}_{i.})^2+\sum_{i=1}^{K}n_i(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})^2 \qquad (SS_T = SS_D+SS_E)$$

$$n-1=(n-K)+(K-1) \qquad (\nu_T=\nu_D+\nu_E\ ,\ \text{con } n=\sum_{i=1}^{K}n_i)$$

Al resultado anterior se le llama PARTICION DE LA SUMA DE CUADRADOS total, y su significado para nuestro ejemplo es el siguiente: Las diferencias entre las calificaciones Y_{ij} se pueden deber, si las observaciones se encuentran en muestras de métodos distintos de enseñanza, al efecto particular de cada método, o a variación al azar, o a ambos. El valor de SS_E refleja la contribución que hacen los diferentes métodos y el azar a la diferencia entre los resultados. Por otra parte, si existe diferencia entre observaciones de un mismo método, ella se debe únicamente al azar, puesto que todos los valores Y_{ij} dentro de una muestra deben poseer exactamente la misma componente de efecto del método de enseñanza correspondiente. Entonces, SS_D refleja la contribución que hace únicamente el azar a las diferencias entre los valores Y_{ij} que se encuentran en la misma muestra.

3.5 Estimación de los Efectos Poblacionales

El efecto del método de enseñanza 1 se puede obtener, según lo visto en el capítulo 1, en la forma

$$\gamma_1=\mu_1-\mu$$

Sin embargo, puesto que se desconocen los valores de μ_1 (media de calificación para el método 1) y μ (media de calificación para los tres métodos conjuntados en uno solo), el efecto puede ser estimado de manera insesgada por

$$\hat{\gamma}_1=\bar{Y}_{1.}-\bar{Y}_{..}=5-6=-1$$

De manera semejante, se obtienen los efectos estimados para los métodos 2 y 3 en la forma

$$\hat{\gamma}_2 = \bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{..} = 6-6 = 0$$
$$\hat{\gamma}_3 = \bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{..} = 7-6 = 1$$

y, tal como sucede para poblaciones,

$$\sum_{i=1}^{3} \hat{\gamma}_i = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_3 = -1 + 0 + 1 = 0$$

puesto que se trata de la suma de desviaciones simples respecto de $\bar{Y}_{..}$.

3.6 Naturaleza de los Estimadores de σ^2

Al observar la partición en la suma de cuadrados se puede concluir que el valor de SS_T, al ser igual con la suma de SS_D y SS_E, no se puede considerar como independiente de estas últimas. Sin embargo, SS_D y SS_E sí son independientes entre sí, puesto que fueron obtenidas empleando procedimientos estadísticos diferentes. Más aún, las tres sumas de cuadrados son <u>estadísticos</u> (variables aleatorias de muestreo), puesto que sus valores estarían cambiando conforme hipotéticamente se extrajeran otras muestras de las poblaciones (métodos de enseñanza para el ejemplo). Se puede demostrar que las esperanzas o valores medios de esos estadísticos para K muestras (una de cada población) con tamaños respectivos $n_i (i = 1,2,\ldots,K)$, son

$$E(SS_T) = \sum_{i=1}^{K} n_i \gamma_i^2 + (n-1)\sigma^2 \qquad (\nu_T = n-1)$$
$$E(SS_D) = (n-K)\sigma^2 \qquad (\nu_D = n-K)$$
$$E(SS_E) = \sum_{i=1}^{K} n_i \gamma_i^2 + (K-1)\sigma^2 \qquad (\nu_E = K-1)$$

en donde, por definición, el multiplicador de la variancia σ^2 que se estima corresponde al número de grados de libertad para cada suma de cuadrados, confirmando los valores ν_T, ν_D y ν_E obtenidos previamente.

Puesto que los estimadores de σ^2 son

$$s_T^2 = \frac{SS_T}{n-1} = \frac{SS_T}{\nu_T} \; ; \quad s_D^2 = \frac{SS_D}{n-K} = \frac{SS_D}{\nu_D} \; ; \quad s_E^2 = \frac{SS_E}{K-1} = \frac{SS_E}{\nu_E}$$

entonces sus esperanzas corresponden a

$$E(S_T^2) = E(\frac{SS_T}{n-1}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{K} n_i \gamma_i^2 + \sigma^2$$

$$E(S_D^2) = E(\frac{SS_D}{n-K}) = \sigma^2$$

$$E(S_E^2) = E(\frac{SS_E}{K-1}) = \frac{1}{K-1}\sum_{i=1}^{K} n_i \gamma_i^2 + \sigma^2$$

Considerando que, por definición, un estimador insesgado para σ^2 debe ser aquél cuyo valor medio equivalga exactamente con σ^2, se puede concluir al analizar las esperanzas anteriores que, existan o no efectos poblacionales o, equivalentemente, sean o no iguales las medias de las K poblaciones en estudio, S_D^2 siempre estimará de manera insesgada a σ^2. Sin embargo, S_T^2 y S_E^2 estimarán a σ^2 insesgadamente sólo si no hay efectos poblacionales o, en forma equivalente, si las medias son iguales, ya que en ese caso

$$E(S_T^2) = \sigma^2 \qquad (\gamma_i = 0, \text{ para } i=1,\ldots,K)$$

$$E(S_E^2) = \sigma^2 \qquad (\gamma_i = 0, \text{ para } i=1,\ldots,K)$$

Por otra parte, tomando en cuenta que las poblaciones involucradas en el estudio se consideran normales con dispersión semejante, el estadístico S_D^2 se juzga como una variable aleatoria que posee distribución de probabilidad $\chi^2/(n-K)$ [Ji cuadrada/(n-K)] con n-K grados de libertad. Asimismo, si H_0 es cierta, S_T^2 y S_E^2 también son variables aleatorias $\chi^2/(n-1)$ y $\chi^2/(K-1)$, con n-1 y K-1 grados de libertad, respectivamente. Además, ya que SS_D y SS_E suman SS_T, se demuestra con métodos avanzados de la estadística que SS_D y SS_E son variables aleatorias Ji cuadrada independientes entre sí, puesto que sus grados de libertad sumados equivalen a los de SS_T, lo cual confirma lo dicho anteriormente acerca de su independencia.

3.7 Prueba de la Hipótesis H_0 Empleando el Estadístico F

La relación de dos variables aleatorias Ji cuadrada independientes, cada una de ellas dividida entre sus grados de libertad corres pondientes, se denomina en estadística razón de la variancia, y la distribución de esa razón se llama distribución F. Lo anterior equivale a decir que dos variancias independientes con distribución Ji cuadrada forman un estadístico F, al dividir una entre otra.

Regresando al ejemplo de los métodos de enseñanza, de los tres estimadores de σ^2 encontrados, los únicos que son independientes son S_D^2 y S_E^2, cuyos valores, si H_0 es cierta, no deben diferir en mucho. Es decir, si los efectos de los métodos de enseñanza son inexistentes, se espera que el cociente

$$F = \frac{S_E^2}{S_D^2} = \frac{\frac{1}{3-1}\sum_{i=1}^{3} 5(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2}{\frac{1}{15-3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2}$$

posea un valor cercano a la unidad.

En efecto, si la hipótesis nula es cierta, los valores muestrales $\bar{Y}_{1.}$, $\bar{Y}_{2.}$ y $\bar{Y}_{3.}$, que estiman en forma insesgada a μ_1, μ_2 y μ_3, respectivamente, no deben variar significativamente entre sí, y tampoco de $\bar{Y}_{..}$, el estimador insesgado de μ, la media común.

Ello supone que si la hipótesis $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$ no es cierta, se puede esperar que los promedios muestrales $\bar{Y}_{1.}$, $\bar{Y}_{2.}$ y $\bar{Y}_{3.}$ difieran entre sí y de $\bar{Y}_{..}$ en más de lo que se puede atribuir al azar. Esto, a su vez, implica que el estimador S_E^2 de σ^2, la variancia común, será grande porque incluye la desviación $(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$. Además, conviene recordar que si H_0 no es cierta S_E^2 no se puede considerar como estimador insesgado de σ^2, ya que su esperanza

$$E(S_E^2) = \frac{1}{3-1}\sum_{i=1}^{3} 5\,\tau_i^2 + \sigma^2 \qquad (K=3,\ n_i=5,\ i=1,2,3)$$

incluye los efectos τ_i particulares para cada método de enseñanza.

Sin embargo, el estimador S_D^2 de σ^2, no se verá afectado por las diferencias entre $\bar{Y}_{1.}$, $\bar{Y}_{2.}$ y $\bar{Y}_{3.}$, porque únicamente incluye las desviaciones $(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$ de cada dato en una muestra respecto de su propio promedio muestral, y se sabe de la partición en la suma de cuadrados que ellas se deben únicamente al azar. De acuerdo con ésto, S_D^2 será siempre estimador insesgado de σ^2.

Por lo tanto, S_D^2 , que mide variación en los valores de los datos por la presencia del azar, no resultará afectado cuando H_0 no sea cierta, mientras que S_E^2 , que mide variación en los valores de los datos por la presencia del azar y también por los efectos de los métodos de enseñanza, resultará con un valor mayor. Ello implica entonces que el cociente F será mayor que la unidad, y se puede decir que cuanto más la exceda mayor será la variación entre los promedios muestrales $\bar{Y}_{i.}$ y, por tanto, entre las medias de calificaciones μ_1, μ_2 y μ_3 para los métodos de enseñanza 1,2 y 3, respectivamente.

Si H_0 es cierta, el valor de F debe ser entonces menor o igual que el valor teórico

$$F_{K-1,n-K,\alpha}$$

leído en las tablas para la distribución F con un nivel de significancia α . - Dicho valor se hallará en el extremo derecho de la distribución de probabilidad para F, ya que son viables los valores mayores que la unidad para el cociente S_E^2/S_D^2 cuando la hipótesis sea falsa. Cabe decir que el valor teórico $F_{K-1,n-K,\alpha}$ corresponde al valor máximo que, únicamente por presencia del azar, podría tomar el cociente S_E^2/S_D^2. Cualquier cociente mayor en valor que $F_{K-1,n-K,\alpha}$ ya no puede ocurrir por azar, se debe a la existencia de efectos poblacionales γ_i, y se rechazaría H_0 .

Si se considera que, en general, se fueran a comparar las medias de K poblaciones normales con dispersión similar, empleando una muestra con n_i elementos para cada una (i=1,...,K) , el valor del estadístico F se obtendría de esas muestras con la fórmula

$$F = \frac{S_E^2}{S_D^2} = \frac{\frac{1}{K-1} \sum_{i=1}^{K} n_i \, (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2}{\frac{1}{n-K} \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2}$$

Para el ejemplo que se trata, el valor de F resulta ser

$$F = \frac{S_E^2}{S_D^2} = \frac{5}{2.17} = 2.3$$

y, si la prueba de la hipótesis H_0 se efectúa con una significancia α igual con 0.05, el valor leído en tablas es

$$F_{K-1,n-K,0.05} = F_{2,12,0.05} = 3.88$$

Comparando los valores de F muestral y teórico de tablas, se halla que

$$F = 2.3 < F_{2,12,0.05} = 3.8$$

aceptándose entonces la hipótesis nula, para concluir que, además,

a. la diferencia entre S_D^2 y S_E^2 se debe al azar

b. las muestras provienen de poblaciones iguales entre sí

c. los efectos γ_1, γ_2 y γ_3 son inexistentes; esto es, los tres métodos para la enseñanza de la Química conducen a los estudiantes a la obtención de calificaciones semejantes.

A. MODELO CON UN SOLO FACTOR. ANALISIS DE VARIANCIA

Supóngase que un experimentador está interesado en comparar la resistencia de cierta fibra elaborada a través de cinco métodos diferentes de producción. Cada método produce fibra con una media de resistencia particular, por lo que el experimentador decide probar estadísticamente la igualdad de las cinco medias.

Aparentemente el problema podría resolverse realizando la prueba t correspondiente para cada pareja posible de diferencia de medias, es decir, realizando $5!/2!\times3!$ pruebas de diferencia de medias al nivel de significancia α seleccionado. Habiendo entonces 10 pruebas por realizar, y suponiendo que $1-\alpha = 0.95$, la probabilidad de aceptar correctamente la hipótesis nula para todas las pruebas previstas es de $(0.95)^{10} = 0.60$, siempre que dichas pruebas sean independientes.

De acuerdo con lo anterior, si el valor α inicial era de 0.05, al término de las 10 pruebas de diferencia de medias dicha cantidad habría quedado como 0.40, incrementando en consecuencia el error de tipo I.

Se puede concluir entonces que el procedimiento anterior es inadecuado para probar la igualdad de varias medias, puesto que modifica los valores de error α supuestos inicialmente.

Si para el ejemplo anterior se supone que los cinco métodos diferentes de producción corresponden a cinco niveles distintos (o tratamientos distintos) del factor "método de producción", el problema de probar estadísticamente la igualdad de las medias se puede resolver empleando la técnica que en inferencia estadística se conoce como análisis de variancia, sin modificar las suposiciones que se hagan acerca del valor de α inicialmente. Dicha técnica y sus implicaciones más importantes se presentan a continuación.

A.1. EFECTOS FIJOS. MODELO LINEAL

Supóngase que se tienen K tratamientos o niveles distintos de un factor que se desean comparar. Si el experimento de aplicación de los K tratamientos se realiza completamente al azar sobre las unidades experimentales, el diseño resultante se llama <u>completamente aleatorizado</u>, y los valores observados de respuesta para cada tratamiento corresponderán a valores de una variable aleatoria. Dichos valores o datos y_{ij} pueden presentarse en una tabla como la siguiente:

		OBSERVACIONES			
	1	y_{11}	y_{12}	....	y_{1n}
	2	y_{21}	y_{22}	....	y_{2n}
	.	.	.	....	.
TRATAMIENTOS	.	.	.	....	.
	.	.	.	....	.
	K	y_{k1}	y_{k2}	....	y_{kn}

$\downarrow i = 1, 2, \ldots, K$
$\rightarrow j = 1, 2, \ldots, n$

En donde, como ejemplo, y_{21} representa el primer resultado u observación (j=1) tomado bajo el tratamiento dos (i=2). Se observa que en este caso el número de datos para cada tratamiento es el mismo (n).

Si en este caso los K tratamientos o niveles del factor fueron escogidos específicamente por el experimentador, las conclusiones a que se llegue después de realizada la prueba de hipótesis que se describirá más adelante, <u>no</u> podrán extenderse a otros tratamientos del mismo factor no considerados en forma explícita en el análisis. Por ello, al modelo que aquí se presenta se le llama de <u>efectos fijos</u>, conociéndole también como modelo paramétrico o modelo I.

El modelo que describirá los valores de los datos u observaciones es el siguiente:

$$y_{ij} = \mu + \gamma_i + e_{ij} \quad ; \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, k \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}$$

En el modelo lineal anterior y_{ij} representa la j-ésima observación tomada para el i-ésimo tratamiento, y μ es un parámetro común para todos los tratamientos, tal que

$$\mu = \frac{\sum_i n\,\mu_i}{\sum_i n} = \frac{n\sum_i \mu_i}{N} = \frac{n\sum_i \mu_i}{Kn} = \frac{\sum_i \mu_i}{K}$$

Siendo $\sum_i n = Kn = N$ el número total de observaciones tomadas para los K tratamientos, o tamaño de la muestra global, y μ_i la media particular del tratamiento i.

El término γ_i representa en el modelo lineal un parámetro propio únicamente del iésimo tratamiento, que se denomina efecto del tratamiento i, definido como la desviación de la media μ_i de dicho tratamiento respecto de la media común, μ, es decir,

$$\gamma_i = \mu_i - \mu \qquad ; \; i = 1, 2, \ldots, K$$

tal que

$$\sum_i \gamma_i = \sum_i (\mu_i - \mu) = \sum_i \mu_i - \sum_i \mu = K\mu - K\mu = 0$$

Si no existe efecto asociado con un tratamiento i entonces $\gamma_i = 0$. Si no existen efectos provocados por cualquiera de los tratamientos entonces

$$\gamma_i = 0 \quad \text{para} \qquad i = 1, 2, \ldots, K$$

y, siendo $\mu_i = \mu + \gamma_i$, se puede concluir que

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k = \mu$$

Lo anterior quiere decir que la ausencia absoluta de efectos debidos a los tratamientos es equivalente a la igualdad absoluta de todas las medias de dichos tratamientos.

Finalmente, el término e_{ij} en el modelo lineal representa la componente de error aleatorio que en general posee todo valor y_{ij}.

Dicho error e_{ij} es una variable aleatoria con esperanza nula, puesto que para algún tratamiento fijo i se obtendría

$$E(Y_{ij}) = \mu_i = E(\mu + \gamma_i + e_{ij}) = E(\mu) + E(\gamma_i) + E(e_{ij})$$

$$= \mu + \gamma_i + E(e_{ij}) = \mu + \mu_i - \mu + E(e_{ij})$$

$$\therefore \quad E(e_{ij}) = 0$$

A.2 SUPOSICIONES PARA EL MODELO

Para poder realizar la prueba de hipótesis sobre igualdad de medias que se propondrá más adelante, es necesario hacer las siguientes suposiciones:

A.2.1. El error aleatorio e_{ij} representa una variable aleatoria normal con parámetros $E(e_{ij}) = 0$ y $VAR(e_{ij}) = \sigma_e^2$.

A.2.2. El error aleatorio e_{ij} es independiente de cualquier otro error e_{ij} .

A.2.3. La variancia σ_e^2 es la misma para cualquier tratamiento i.

Equivalentemente, la primera suposición implica que Y_{ij} es una variable aleatoria con distribución normal, y parámetros $E(Y_{ij}) = \mu$ y $VAR(Y_{ij}) = \sigma_y^2$, es decir,

$$VAR(Y_{ij}) = VAR(\mu + \gamma_i + e_{ij}) = VAR(\mu) + VAR(\gamma_i) + VAR(e_{ij})$$

$$\therefore \quad \sigma_y^2 = 0 + \sigma_{\gamma_i}^2 + \sigma_e^2$$

De acuerdo con lo anterior, si $\gamma_i = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, K$, entonces $\sigma_{\gamma_i}^2 = 0$ y $\sigma_y^2 = \sigma_e^2$

A.3 ESTIMADORES DE μ, μ_i, γ_i y e_{ij}

Ya que en la práctica se desconocen los valores de la media común, la media de cada tratamiento, el efecto de cada tratamiento y la componente de error, ellos pueden estimarse a través de los valores de datos que se presentan en la muestra de resultados obtenida para los K tratamientos.

Considérese que $Y_{i.}$ representa la suma total de valores de las observaciones obtenidas para el iésimo tratamiento, y que $\bar{Y}_{i.}$ representa el promedio de dichos valores. De manera semejante, $Y_{..}$ representa el gran total de valores de todas las observaciones, y $\bar{Y}_{..}$ el promedio global correspondiente. Entonces,

$$Y_{i.} = \sum_j y_{ij} \qquad \begin{pmatrix} i = 1,2,\ldots,K \\ j = 1,2,\ldots,n \end{pmatrix}$$

$$\bar{y}_{i.} = \frac{\sum_j y_{ij}}{n} = \frac{y_{i.}}{n}$$

$$y_{..} = \sum_i\sum_j y_{ij}$$

$$\bar{y}_{..} = \frac{\sum_i \sum_j y_{ij}}{Kn} \quad \frac{\sum_i \sum_j y_{ij}}{N} = \frac{y_{..}}{N}$$

en donde N = Kn es el número total de observaciones o tamaño de la muestra global, y se observa que la notación "subíndice punto" implica la suma sobre los valores del subíndice al que remplaza el punto.

De acuerdo con lo anterior, para un tratamiento i.

$$E(\bar{y}_{i.}) = E\left(\frac{\sum_j y_{ij}}{n}\right) = \frac{\sum_j E(y_{ij})}{n} = \frac{n\,\mu_i}{n} = \mu_{i.}$$

por lo que $\hat{\mu}_i = \bar{y}_{i.}$ es un estimador puntual insesgado de μ_i; la media poblacional del tratamiento i.

De igual manera,

$$E(\bar{Y}..) = E\left(\frac{\sum\sum_{ij} Y_{ij}}{Kn}\right) = \frac{\sum\sum_{ij} E(Y_{ij})}{Kn} = \frac{Kn\mu}{Kn} = \mu$$

por lo cual $\hat{\mu} = \bar{Y}..$ es un estimador puntual insesgado de μ, la media común de todos los tratamientos.

Combinando los estimadores anteriores, se obtiene un estimador de γ_i, ya que, como $\gamma_i = \mu_i - \mu$, entonces

$$\hat{\gamma}_i = \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}..$$

el cual es también insesgado, puesto que

$$E(\hat{\gamma}_i) = E(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}..) = E(\bar{Y}_{i.}) - E(\bar{Y}..) = \mu_i - \mu = \gamma_i$$

Ya que $Y_{ij} = \mu + \gamma_i + e_{ij}$, entonces se puede escribir

$$Y_{ij} - \mu = \gamma_i + e_{ij}$$

empleando estimadores, la expresión anterior se escribe como

$$Y_{ij} - \bar{Y}.. = \hat{\gamma}_i + \hat{e}_{ij}$$

pero $\hat{\gamma}_i = \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}..$, por lo que

$$Y_{ij} - \bar{Y}.. = \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}.. + \hat{e}_{ij}$$

de donde

$$\hat{e}_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}.. - \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}.. = Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}$$

De acuerdo con lo anterior, es válido escribir la identidad siguiente:

$$Y_{ij} - \bar{Y}.. = (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}..) + (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})$$

la cual se empleará en forma importante para el desarrollo del modelo estadístico de análisis.

A.4 *Ejemplo*

Considérese que se desea comparar el rendimiento de combustible en millas de tres marcas distintas de automóviles: A,B y C. Se seleccionan al azar tres vehiculos de cada marca, y cada uno de ellos se conduce durante 100 millas, bajo exactamente las mismas condiciones experimentales.

CASO 1: Se supone que cada una de las marcas posee un rendimiento medio de 20 millas por galón, y que no existe variabilidad en rendimiento para vehículos de la misma marca. En este caso n=3 y K=3, por lo que N=3x3=9 y, si $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=0$ y $e_{ij}=0$ para $\forall_{i,j}$, entonces los resultados quedarán de la manera siguiente:

			OBSERVACION		
$i=1$	MARCAS (TRATAMIENTOS)	A	20	20	20
$i=2$		B	20	20	20
$i=3$		C	20	20	20
			$j=1$	$j=2$	$j=3$

En este caso el modelo lineal es

$$y_{ij} = \mu + 0 + 0 = \mu$$

puesto que $\gamma_i = 0$ y $e_{ij} = 0$, $\forall_{i,j}$. Este modelo resulta ser poco realista, ya que supone que no existen efectos debidos a los tratamientos (marcas), ni errores aleatorios e_{ij}.

CASO 2: Supóngase el mismo ejemplo anterior, pero en este caso existen efectos de los tratamientos tales que $\gamma_1=1$, $\gamma_2=4$ y $\gamma_3=-5$ ($\sum_i \gamma_i=0$). La disposición de los resultados es entonces

OBSERVACIONES

TRATAMIENTOS	A	20+1=21	20+1=21	20+1=21
	B	20+4=24	20+4=24	20+4=24
	C	20-5=15	20-5=15	20-5=15

En este caso, $y_{ij} = \mu + \gamma_i + 0 = \mu + \gamma_i$

Este modelo tampoco resulta ser muy realista, pues aun cuando supone valores $\gamma_i \neq 0$, en la práctica es muy poco posible evitar el error aleatorio e_{ij} en el muestreo.

CASO 3: Si para el ejemplo anterior se agrega la componente e_{ij} de error aleatorio con valores

$$
\begin{array}{lll}
e_{11} = 3 & e_{12} = -2 & e_{13} = 1 \\
e_{21} = 0 & e_{22} = 1 & e_{23} = -3 \\
e_{31} = -4 & e_{32} = -1 & e_{33} = 2
\end{array}
$$

los valores y_{ij} quedan

OBSERVACIONES

TRATAMIENTOS	A	20+1+3=24	20+1-2=19	20+1+1=22	$Y_{1.}$ =65
	B	20+4+0=24	20+4+1=25	20+4-3=21	$Y_{2.}$ =70
	C	20-5-4=11	20-5-1=14	20-5+2=17	$Y_{3.}$ =42

$\bar{Y}_{1.} = \frac{65}{3} = 21.67$; $\bar{Y}_{2.} = \frac{70}{3} = 23.33$; $\bar{Y}_{3.} = \frac{42}{3} = 14.00$

$$\bar{Y}_{..} = \frac{\sum\sum y_{ij}}{N} = \frac{\sum y_{i.}}{N} = \frac{65+70+42}{9} = 19.67$$

Para este modelo existen diferencias de rendimiento <u>entre</u> las tres distintas marcas o tratamientos, así como entre diferentes vehículos de la misma marca, es decir, diferencias <u>dentro</u> de las muestras de tres vehículos de cada marca. Esto se debe a que para este modelo en general $e_{ij} \neq 0$, quedando el mismo como

$$y_{ij} = \mu + \gamma_i + e_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,3 \\ j = 1,2,3 \end{array}$$

También,

$$\hat{e}_{ij} \begin{cases} \hat{e}_{11} = 24-21.67 = 2.33; & \hat{e}_{12} = 19-21.67 = -2.67\ ; & \hat{e}_{13} = 22-21.67 = 0.33 \\ \hat{e}_{21} = 24-23.33 = 0.67; & \hat{e}_{22} = 25-23.33 = 1.67\ ; & \hat{e}_{23} = 21-23.33 = -2.33 \\ \hat{e}_{31} = 11-14 = -3.00; & \hat{e}_{32} = 14-14 = 0\ ; & \hat{e}_{33} = 17-14 = 3.00 \end{cases}$$

$$\hat{\gamma}_i \begin{cases} \hat{\gamma}_1 = 21.67 - 19.67 = 2.00 \\ \hat{\gamma}_2 = 23.33 - 19.67 = 3.66 \\ \hat{\gamma}_3 = 14.00 - 19.67 = -5.67 \end{cases} \qquad (\sum_i \hat{\gamma}_i = 0)$$

$$\hat{\mu}_i \begin{cases} \hat{\mu}_1 = 21.67 \\ \hat{\mu}_2 = 23.33 \\ \hat{\mu}_3 = 14.00 \end{cases}$$

$$\hat{\mu} = 19.67$$

A.5 DESLINDE DE LA VARIACION EN UN EXPERIMENTO

El ejemplo anterior sugiere que la evidencia acerca de efectos experimentales tiene que ver con las diferencias entre los tratamientos, y las diferencias dentro de los mismos. Ahora se separará la variabilidad de las observaciones en una parte que refleje errores aleatorios y efectos experimentales por un lado, y en otra que implique únicamente errores aleatorios. Para ello recuérdese que

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = (y_{i.} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.})$$

Elevando al cuadrado las desviaciones de cada observación y_{ij}, respecto del promedio global $\bar{Y}..$, y sumando sobre $\forall_{i,j}$, queda

$$\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}..)^2 = \sum_i \sum_j \left[(y_{ij} - \bar{y}_{i.}) + (\bar{y}_{i.} - \bar{y}..)\right]^2$$
$$= \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 + 2\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})(\bar{y}_{i.} - \bar{y}..) + \sum_i \sum_j (\bar{y}_{i.} - \bar{y}..)^2$$

Pero

$$2\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})(\bar{y}_{i.} - \bar{y}..) = 2\sum_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}..)\sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})$$
$$= 2\sum_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}..)\left[\sum_j y_{ij} - \sum_j \bar{y}_{i.}\right] = 2\sum_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}..)\left[y_{i.} - n\bar{y}_{i.}\right] = 0$$

y

$$\sum_i \sum_j (\bar{y}_{i.} - \bar{y}..)^2 = \sum_i n(\bar{y}_{i.} - \bar{y}..)^2$$

por lo que

$$\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}..)^2 = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 + \sum_i n(\bar{y}_{i.} - \bar{y}..)^2$$

A la igualdad anterior se le llama PARTICION DE LA SUMA DE CUADRADOS, y es válida para cualquier conjunto de K muestras distintas, e implica que la suma total de las desviaciones elevadas al cuadrado respecto del promedio global se puede "partir" en dos: la suma total de las desviaciones elevadas al cuadrado de cada resultado respecto del promedio de su propia muestra, es decir, DENTRO de las muestras, y la suma total de las desviaciones elevadas al cuadrado de cada promedio de muestra respecto del promedio global de los N resultados, es decir ENTRE las muestras. A través de símbolos,

$$SS_W = SS_{DENTRO} = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$$

$$SS_B = SS_{ENTRE} = \sum_i n(\bar{y}_{i.} - \bar{y}..)^2$$

$$SS_T = SS_{TOTAL} = SS_W + SS_B = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}..)^2$$

en donde

SS = SUM OF SQUARES = SUMA DE CUADRADOS

W = WITHIN = DENTRO

B = BETWEEN = ENTRE

El significado de la partición es el siguiente: Las diferencias entre los valores y_{ij} se pueden deber, si las observaciones se encuentran en muestras (tratamientos) distintos, al efecto particular de cada tratamiento, o a variación al azar, o a ambos. El valor de SS_B refleja la contribución que hacen los distintos tratamientos y el azar a la diferencia entre los resultados. Por otra parte, si existe diferencia entre observaciones de un mismo tratamiento, ella se debe únicamente al azar, puesto que todos esos valores y_{ij} deben poseer exactamente la misma componente de efecto del tratamiento correspondiente. Entonces, SS_W refleja la contribución que hace únicamente el azar a las diferencias de los valores y_{ij} que se encuentran en la misma muestra.

A.6 ANALISIS DE SS_W

Empleando el operador esperanza

$$E(SS_W) = E\left[\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2\right]$$

pero

$$y_{ij} = \mu + \gamma_i + e_{ij} \text{ , } y$$

$$\bar{y}_{i.} = \frac{\sum_j y_{ij}}{n} = \frac{\sum_j}{n}(\mu + \gamma_i + e_{ij}) = \frac{n\mu}{n} + \frac{n\gamma_i}{n} + \frac{\sum_j e_{ij}}{n}$$

$$= \mu + \gamma_i + \bar{e}_{i.}$$

en donde $\bar{e}_{i.} = \dfrac{\sum_j e_{ij}}{n}$. *Entonces,*

$$E(SS_W) = E\left[\sum_i\sum_j (\mu + \gamma_i + e_{ij} - \mu - \gamma_i - \bar{e}_{i.})^2\right]$$

$$= E\left[\sum_i\sum_j (e_{ij} - \bar{e}_{i.})^2\right] = E\left[\sum_i\sum_j (e_{ij}^2 - 2e_{ij}\bar{e}_{i.} + \bar{e}_{i.}^2)\right]$$

$$= E(\sum_i\sum_j e_{ij}^2) - 2E(\sum_i\sum_j e_{ij}\,\bar{e}_{i.}) + E(\sum_i\sum_j \bar{e}_{i.}^2)$$

$$= \sum_i\sum_j E(e_{ij}^2) - 2E(\sum_i n\bar{e}_{i.}\,\bar{e}_{i.}) + \sum_i\sum_j E(\bar{e}_{i.}^2)$$

$$= \sum_i\sum_j E(e_{ij}^2) - 2E(Kn\,\bar{e}_{i.}^2) + Kn(\bar{e}_{i.}^2)$$

$$= \sum_i\sum_j E(e_{ij}^2) - KnE(\bar{e}_{i.}^2)$$

Pero $VAR(e_{ij}) = E(e_{ij}^2) - E^2(e_{ij}) = E(e_{ij}^2) = \sigma_e^2$, ya que $E(e_{ij}) = 0$. Por otro lado,

$$VAR(\bar{e}_{i.}) = VAR\left(\frac{\sum_j e_{ij}}{n}\right) = \sum_j \frac{VAR(e_{ij})}{n^2} = \frac{n}{n^2}\sigma_e^2 = \frac{\sigma_e^2}{n} = E(\bar{e}_{i.}^2)$$

puesto que $E(\bar{e}_{i.}) = E(\frac{\sum_j e_{ij}}{n}) = \frac{n}{n}E(e_{ij}) = 0$. Por ello,

$$E(SS_W) = \sum_i\sum_j \sigma_e^2 - Kn\frac{\sigma_e^2}{n} = Kn\,\sigma_e^2 - K\,\sigma_e^2 = (N-K)\sigma_e^2$$

Si ahora se hace $MS_W = \frac{SS_W}{N-K}$, entonces

$$E(MS_W) = E(\frac{SS_W}{N-K}) = \frac{E(SS_W)}{N-K} = \frac{(N-K)\sigma^2}{N-K} = \sigma_e^2$$

lo cual implica que MS_W es un estimador puntual insesgado de σ_e^2 , la variancia del error aleatorio, igual para cualquiera de los K tratamientos. A MS_W se le llama <u>valor medio cuadrático dentro de las muestras</u>, y al coeficiente de σ_e^2 en el valor de $E(SS_W)$ se le denomina <u>número de grados de libertad de SS_W</u>, en este caso N-K.

Por otra parte, SS_W se puede escribir como

$$SS_W = \sum_i\sum_j(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 = \sum_i\left[\sum_j(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2\right]$$

pudiéndose apreciar que la sumatoria dentro de los corchetes, si se divide entre n-1 , es igual a la variancia de la muestra del iésimo tratamiento; es decir

$$S_i^2 = \frac{\sum(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2}{n - 1} \qquad ; \qquad i = 1,2,\ldots,K$$

La variancia anterior es un estadístico con n-1 grados de libertad, que es a su vez un estimador puntual insesgado de σ_e^2 ya que

$$E(S_i^2) = E\left[\frac{\sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2}{n-1}\right] = E\left[\frac{\sum_j (\mu + \gamma_i + e_{ij} - \mu - \gamma_i - \bar{e}_{i.})^2}{n-1}\right] = E\left[\frac{\sum_j (e_{ij} - \bar{e}_{i.})^2}{n-1}\right]$$

$$= \frac{\sum_j E(e_{ij}^2) - 2E\sum_j (e_{ij}\,\bar{e}_{i.}) + \sum_j (\bar{e}_{i.}^2)}{n-1} = \frac{\sum_j E(e_{ij}^2) - 2nE(\bar{e}_{i.}^2) + nE(\bar{e}_{i.}^2)}{n-1}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[nE(e_{ij}^2) - nE(\bar{e}_{i.}^2)\right] = \frac{1}{n-1}\left[n\sigma_e^2 - n\frac{\sigma_e^2}{n}\right] = \frac{n-1}{n-1}\,\sigma_e^2 = \sigma_e^2$$

Sin embargo, como de hecho existen K muestras que corresponden, respectivamente, a cada uno de los K tratamientos o niveles del factor de interés, se pueden combinar K variancias del tipo S_i^2 anterior con el fin de obtener un estimador de σ_e^2 de la manera siguiente:

$$\frac{(n-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2 + \ldots + (n-1)S_K^2}{(n-1) + (n-1) + \ldots + (n-1)} = \frac{\sum_i\left[\sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2\right]}{\sum_i (n-1)} = \frac{\sum_i\sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2}{\sum_i n - \sum_i (1)}$$

$$= \frac{SS_W}{Kn-K} = \frac{SS_W}{N-K} = MS_W$$

El resultado anterior confirma que el estadístico MS_W, obtenido a través de la combinación de las variancias de las muestras de los K tratamientos, permite estimar en forma insesgada el valor de σ_e^2. Asimismo, implica que SS_W posee N-K grados de libertad, lo cual checa con el resultado obtenido anteriormente para $E(SS_W)$, es decir,

$$E(SS_W) = (N - K)\sigma_e^2$$

ya que, por definición el multiplicador de σ_e^2 al calcular la esperanza de SS_W debe ser el número de grados de libertad correspondiente.

A.7 ANALISIS DE SS_B

La esperanza de SS_B es $E(SS_B) = E\left[\sum_i n(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2\right]$

pero, de A.6, $\bar{y}_{i.} = \mu + \gamma_i + \bar{e}_{i.}$. *Por otro lado,*

$$\bar{y}_{..} = \frac{\sum_i\sum_j y_{ij}}{Kn} = \frac{\sum_i\sum_j \mu}{Kn} + \frac{\sum_j\sum_i \gamma_i}{Kn} + \frac{\sum_i\sum_j e_{ij}}{Kn} = \frac{Kn\mu}{Kn} + 0 + \frac{\sum_i\sum_j e_{ij}}{Kn} = \mu + \bar{e}_{..}$$

en donde $\bar{e}_{..} = \dfrac{\sum_i\sum_j e_{ij}}{Kn} = \dfrac{\sum_i \bar{e}_{i.}}{K}$

$$E(SS_B) = E\left[\sum_i n(\mu + \gamma_i + \bar{e}_{i.} - \mu - \bar{e}_{..})^2\right] = E\left[\sum_i n\{\gamma_i + (\bar{e}_{i.} - \bar{e}_{..})\}^2\right]$$

$$= E\left[\sum_i n\{\gamma_i^2 + 2\gamma_i(\bar{e}_{i.} - \bar{e}_{..}) + (\bar{e}_{i.} - e_{..})^2\}\right] = E(\sum_i n\gamma_i^2) + 2E(\sum_i n\gamma_i\bar{e}_{i.}) -$$

$$-2E(\sum_i n\gamma_i \bar{e}_{..}) + E(\sum_i n\bar{e}_{i.}^2) - 2E(\sum_i n\bar{e}_{i.}\bar{e}_{..}) + E(\sum_i n\bar{e}_{..}^2)$$

$$= \sum_i nE(\gamma_i^2) + 2\sum_i nE(\gamma_i\bar{e}_{i.}) - 2ne_{..}E(\sum_i \gamma_i) + n\sum_i E(\bar{e}_{i.}^2) - 2nE(\bar{e}_{..}K\bar{e}_{..}) + nKE(\bar{e}_{..}^2)$$

Tomando en cuenta que $\sum_i \gamma_i = 0$, y que $E(\gamma_i\bar{e}_{i.})$ es cero ya que $E(\gamma_i\bar{e}_{i.}) = \gamma_i E(\bar{e}_{i.}) = \gamma_i(0)$, se anulan el segundo y tercer términos, quedando

$$E(SS_B) = \sum_i n\gamma_i^2 + n\sum_i E(\bar{e}_{i.}^2) - 2KnE(\bar{e}_{..}^2) + KnE(\bar{e}_{..}^2) = \sum_i n\gamma_i^2 + n\sum_i E(\bar{e}_{i.}^2) - KnE(e_{..}^2)$$

Pero, de A.6, $E(\bar{e}_{i.}^2) = \dfrac{\sigma_e^2}{n}$, *y*

$$VAR(\bar{e}_{..}) = E(\bar{e}_{..}^2) - E^2(\bar{e}_{..}) = E(\bar{e}_{..}^2) - 0 = E(\bar{e}_{..}^2)$$

$$= VAR\left(\frac{\sum_i\sum_j e_{ij}}{Kn}\right) = \frac{\sum_i\sum_j VAR(e_{ij})}{K^2n^2} = \frac{Kn}{K^2n^2}\sigma_e^2 = \frac{\sigma_e^2}{Kn}$$

por lo que

$$E(SS_B) = \sum_i n\gamma_i^2 + n\sum_i \frac{\sigma_e^2}{n} - Kn\frac{\sigma_e^2}{Kn} = \sum_i n\gamma_i^2 + K\sigma_e^2 - \sigma_e^2 = \sum_i n\gamma_i^2 + (K-1)\sigma_e^2$$

Si se hace ahora $MS_B = \dfrac{SS_B}{K-1}$, entonces

$$E(MS_B) = E\left(\frac{SS_B}{K-1}\right) = \frac{E(SS_B)}{K-1} = \frac{\sum_i n\gamma_i^2 + (K-1)\sigma_e^2}{K-1} = \frac{\sum_i n\gamma_i^2}{K-1} + \sigma_e^2$$

De acuerdo con lo anterior,

$E(MS_B) = \sigma_e^2$, siempre que $\gamma_i = 0$, $\forall_i$ (no hay efectos de tratamientos)

$E(MS_B) > \sigma_e^2$, siempre que $\gamma_i \neq 0$ para alguna(s) i, existiendo al menos algún efecto de tratamiento.

En el primer caso, MS_B es un estimador puntual insesgado de σ_e^2, la variancia común del error aleatorio. En el segundo caso la estimación que hace MS_B de σ_e^2 no es insesgada, debido al efecto de los tratamientos. A MS_B se le denomina valor medio cuadrático entre las muestras, y al coeficiente de σ_e^2 en el valor de $E(SS_B)$ número de grados de libertad de SS_B, en este caso K-1.

Si $\gamma_i = 0$, $\forall_i$, es decir, si las medias de los K tratamientos son iguales, entonces el estadístico con K-1 grados de libertad

$$\frac{\sum_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}{K-1}$$

es un estimador puntual insesgado de σ_e^2/n, la variancia de la distribución de muestreo para los promedios de los n valores Y_{ij} obtenidos bajo los tratamientos i ($i=1,2,...,K,...$). En efecto,

$$E\left[\frac{\sum_i(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}{K-1}\right] = \frac{1}{K-1}\, E\left[\sum_i(\mu + \overset{\gamma_i}{\downarrow}\!\!\!\!0 + \bar{e}_{i.} - \mu - \bar{e}_{..})^2\right] = \frac{1}{K-1}\, E\left[\sum_i(\bar{e}_{i.} - \bar{e}_{..})^2\right]$$

$$= \frac{1}{K-1}\left[E(\sum_i \bar{e}_{i.}^2) - 2E(\sum_i \bar{e}_{i.}\, e_{..}) + E(\sum_i e_{..}^2)\right] = \frac{1}{K-1}\left[\sum_i E(\bar{e}_{i.}^2) - 2KE(e_{..}^2) + KE(e_{..}^2)\right]$$

$$= \frac{1}{K-1}\left[\sum_i \frac{\sigma_e^2}{n} - K\frac{\sigma_e^2}{Kn}\right] = \frac{1}{K-1}\left[K\frac{\sigma_e^2}{n} - \frac{\sigma_e^2}{n}\right] = \frac{K-1}{K-1}\,\frac{\sigma_e^2}{n} = \frac{\sigma_e^2}{n}$$

De igual manera, y considerando el resultado anterior, se obtiene:

$$E\left[\frac{n\sum_i(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})^2}{K-1}\right] = E\left(\frac{SS_B}{K-1}\right) = E(MS_B) = n\frac{\sigma_e^2}{n} = \sigma_e^2$$

lo cual confirma que el estadístico MS_B permite estimar en forma insesgada el valor de σ_e^2, siempre que no existan efectos de los tratamientos. Asimismo, implica que SS_B posee K-1 grados de libertad, checando con el resultado

$$E(SS_B) = \sum_i n\,\gamma_i^2 + (K-1)\sigma_e^2$$

para el cual el multiplicador de σ_e^2 es K-1, el número de grados de libertad de SS_B.

A.8 ANALISIS DE SS_T

La esperanza de SS_T es

$$E(SS_T) = E\left[\sum_i\sum_j (Y_{ij}-\bar{Y}_{..})^2\right] = E\left[\sum_i\sum_j (\mu + \gamma_i + e_{ij} - \mu - \bar{e}_{..})^2\right]$$

$$= E\left[\sum_i\sum_j (\gamma_i + \{e_{ij} - \bar{e}_{..}\})^2\right] = E\left[\sum_i\sum_j\{\gamma_i^2 + 2\gamma_i(e_{ij}-\bar{e}_{..}) + (e_{ij}-\bar{e}_{..})^2\}\right]$$

$$= E\left(\sum_i\sum_j \gamma_i^2\right) + 2E\left(\sum_i\sum_j \gamma_i e_{ij}\right) - 2E\left(\sum_i\sum_j \gamma_i \bar{e}_{..}\right) + E\left(\sum_i\sum_j e_{ij}^2\right) - 2E\left(\sum\sum e_{ij}\bar{e}_{..}\right) +$$

$$+ E\left(\sum_i\sum_j \bar{e}_{..}^2\right) = \sum_j\sum_i E(\gamma_i^2) + 2\sum_i\sum_j E(\gamma_i e_{ij}) - 2\sum_i\sum_j E(\gamma_i \bar{e}_{..}) +$$

$$+ \sum_i\sum_j E(e_{ij}^2) - 2Kn\,E(\bar{e}_{..}^2) + Kn\,E(\bar{e}_{..}^2)$$

$$= \sum_i n\,\gamma_i^2 + 0 - 0 + \sum_i\sum_j E(e_{ij}^2) - Kn\,E(\bar{e}_{..}^2)$$

$$= \sum_i n\,\gamma_i^2 + Kn\,\sigma_e^2 - Kn\frac{\sigma_e^2}{Kn} = \sum_i n\,\gamma_i^2 + (Kn-1)\sigma_e^2$$

$$= \sum_i n\,\gamma_i^2 + (N-1)\sigma_e^2$$

Si se hace $MS_T = \dfrac{SS_T}{N-1}$, entonces

$$E(MS_T) = E\left(\frac{SS_T}{N-1}\right) = \frac{E(SS_T)}{N-1} = \frac{\sum_i n\gamma_i^2 + (N-1)\sigma_e^2}{N-1} = \frac{\sum_i n\gamma_i^2}{N-1} + \sigma_e^2$$

De acuerdo con lo anterior,

$E(MS_T) = \sigma_e^2$, siempre que no haya efectos de tratamientos

$E(MS_T) > \sigma_e^2$, siempre que exista al menos un efecto de tratamiento.

En el primer caso, MS_T es un estimador puntual insesgado de σ_e^2, y en el segundo no es así debido al efecto de los tratamientos. A MS_T se le llama valor medio cuadrático total, y a N-1, el coeficiente de σ_e^2 en el valor de $E(SS_T)$, el número de grados de libertad de SS_T.

Conviene observar que

SS_T	=	SS_w	+	SS_B
(N-1 grados de libertad)		(N-K grados de libertad)		(K-1 grados de libertad)

es decir,

$$N-1 = N-K + K-1 = N-1$$

y el número de grados de libertad de SS_T es igual a la suma de los grados de libertad asociados a SS_w y SS_B.

A.9 DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE ESTIMADORES PARA σ_e^2

Se sabe de la inferencia estadística que

$$\frac{(n-1)s_x^2}{\sigma_x^2} = \frac{\frac{n-1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} = \frac{\text{Suma de Cuadrados}}{\sigma_x^2} = \chi^2_{n-1}$$

en donde χ^2_{n-1} representa la variable aleatoria ji cuadrada con n-1 grados de libertad, y S_x^2 la variancia insesgada para las muestras de tamaño n extraídas de una población normal con variancia σ_x^2.

También,

$$\frac{s_x^2}{\sigma_x^2} = \frac{\dfrac{\text{Suma de cuadrados}}{n-1}}{\sigma_x^2} = \frac{\dfrac{SS}{n-1}}{\sigma_x^2} = \frac{\dfrac{SS}{\text{grados de libertad SS}}}{\sigma_x^2}$$

$$= \frac{\text{Estimador de } \sigma_x^2}{\sigma_x^2} = \frac{\chi^2_{n-1}}{n-1} = \frac{\chi^2_\nu}{\nu}$$

siendo ν = número de grados de libertad. El resultado anterior es válido siempre que las observaciones en la muestra, X_i, correspondan a variables aleatorias normales e independientes, con media μ_x y variancia σ_x^2. Por otra parte, si χ_1^2, y χ_2^2 representan a dos variables aleatorias Ji cuadrada independientes con ν_1 y ν_2 grados de libertad, respectivamente, entonces el cociente

$$F_{\nu_1,\nu_2} = \frac{\chi_1^2/\nu_1}{\chi_2^2/\nu_2}$$

corresponde a una variable F con ν_1 grados de libertad en el numerador y ν_2 en el denominador. Por ejemplo, si dos estimadores de σ_x^2 son independientes y poseen ν_1 y ν_2 grados de libertad, respectivamente, entonces

$$\frac{\dfrac{\text{Estimador 1 de } \sigma_x^2}{\sigma_x^2}}{\dfrac{\text{Estimador 2 de } \sigma_x^2}{\sigma_x^2}} = \frac{\text{Estimador 1 de } \sigma_x^2}{\text{Estimador 2 de } \sigma_x^2} = \frac{\chi_1^2/\nu_1}{\chi_2^2/\nu_2} = F_{\nu_1,\nu_2}$$

De acuerdo con lo anterior, y bajo las suposiciones hechas en A.2 para el modelo lineal $Y_{ij} = \mu + \gamma_i + e_{ij}$, se puede juzgar que

$$\frac{SS_w}{\sigma_e^2} = \chi^2_{N-K}; \quad \frac{\dfrac{SS_w}{N-K}}{\sigma_e^2} = \frac{MS_w}{\sigma_e^2} = \frac{\chi^2_{N-K}}{N-K}$$

y, si $\gamma_i = 0$, $\forall_i$, entonces

$$\frac{SS_B}{\sigma_e^2} = \chi^2_{k-1}; \quad \frac{\frac{SS_B}{k-1}}{\sigma_e^2} = \frac{MS_B}{\sigma_e^2} = \frac{\chi^2_{k-1}}{k-1}$$

$$\frac{SS_T}{\sigma_e^2} = \chi^2_{N-1}; \quad \frac{\frac{SS_T}{N-1}}{\sigma_e^2} = \frac{MS_T}{\sigma_e^2} = \frac{\chi^2_{N-1}}{N-1}$$

Conviene hacer notar que los tres estimadores obtenidos para σ_e^2 no son independientes, ya que $SS_T = SS_w + SS_B$. Sin embargo, SS_w y SS_B sí lo son en virtud del Teorema de Cochran (Ref. 1, pág 50), que establece que si una variable aleatoria Ji cuadrada con ν grados de libertad es igual a la suma aritmética de n variables aleatorias Ji cuadrada con ν_1, ν_2, ..., ν_n, grados de libertad, respectivamente, estas n variables serán independientes si, y solo si,

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n \qquad (n \leq \nu)$$

En A.8 se concluyó que el número de grados de libertad de SS_T era igual a la suma de los grados de libertad de SS_w y SS_B, por lo cual, atendiendo al criterio de Cochran, SS_w y SS_B son independientes.

A.10 PRUEBA DE HIPOTESIS DE IGUALDAD DE MEDIAS

En general, existan o no efectos de los tratamientos, MS_w estima en forma insesgada el valor de σ_e^2, pero MS_B únicamente lo hace cuando $\gamma_i = 0$, $\forall_i$, es decir, cuando no existen efectos y las medias de los tratamientos son iguales.

Si se establecen entonces las hipótesis

$$H_o : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, k)$$

(o, equivalentemente, $H_0 : \gamma_i = 0, \; \forall_i$)

H_1 : al menos una media es distinta de las otras

(o, equivalentemente, $H_1 : \gamma_i \neq 0$, para alguna(s) i)

se podrá probar la primera en contra de la segunda a través del empleo del valor de la estadística de prueba

$$F_0 = \frac{\dfrac{MS_B}{\sigma_e^2}}{\dfrac{MS_W}{\sigma_e^2}} = \frac{MS_B}{MS_W} = \frac{\dfrac{SS_B}{K-1}}{\dfrac{SS_W}{N-K}} = \frac{\dfrac{\sum_i n(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}{K-1}}{\dfrac{\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2}{N-K}}$$

que corresponde a una variable F con K-1 y N-K grados de libertad en numerador y denominador, respectivamente. El cociente que define a esa variable es el de dos variables aleatorias independientes con distribución χ^2, de acuerdo con la definición de F, y el razonamiento para su empleo es el siguiente: SS_T no es independiente de SS_W y SS_B y, por tanto, no puede usarse para generar una variable de prueba F_0. Ahora bien, al observar los valores de $E(SS_W)$ y $E(SS_B)$ se puede concluir que si H_0 es cierta el cociente de MS_B a MS_W debe ser cercano a la unidad. Sin embargo, si H_0 resultara falsa, es decir, si existieran efectos de los tratamientos, entonces MS_B tomará un valor mayor que el de MS_W, implicando que la F_0 de prueba será mayor que la unidad.

Lo anterior sugiere que la prueba de hipótesis se debe realizar, al nivel de significancia α seleccionado por el investigador, en la cola derecha de la distribución teórica de F.

A.11 Ejemplo

Considérese el caso 3 del ejemplo sobre el rendimiento de combustible para tres marcas distintas de automóviles, presentado en la sección A.4. La tabla de valores de y_{ij} es la siguiente:

		OBSERVACIONES		
MARCAS	A	24	19	22
	B	24	25	21
	C	11	14	17

$\bar{Y}_{1.} = 21.67$, $\bar{Y}_{2.} = 23.33$, $\bar{Y}_{3.} = 14.00$, $\bar{Y}_{..} = 19.67$, $n=3$, $K=3$, $N=9$

$$SS_w = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 = (24-21.67)^2+(19-21.67)^2+(22-21.67)^2 +(24-23.33)^2+(25-23.33)^2+(21-23.33)^2 +(11-14)^2+(14-14)^2+(17-14)^2 = 39.33$$

$$SS_B = \sum_i n(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2 = 3(21.67-19.67)^2+ 3(23.33-19.67)^2+ + 3(14-19.67)^2 = 148.67$$

$$SS_T = \sum_i \sum_j (y_{ij}-\bar{y}_{..})^2 = (24-19.67)^2+(19-19.67)^2+(22-19.67)^2 +(24-19.67)^2+(25-19.67)^2+(21-19.67)^2 +(11-19.67)^2+(14-19.67)^2+(17-19.67)^2 = 188.00$$

y se verifica que $SS_T = SS_w + SS_B = 39.33+ 148.67 = 188.00$

Los valores de MS_w y MS_B son

$$MS_w = \frac{SS_w}{N-k} = \frac{39.33}{9-3} = 6.55$$

$$MS_B = \frac{SS_B}{k-1} = \frac{148.67}{3-1} = 74.33$$

por lo cual

$$F_0 = \frac{MS_B}{MS_w} = \frac{74.33}{6.55} = 11.35$$

para $K-1 = 3-1 = 2$ y $N-K = 9-3 = 6$ grados de libertad

El valor teórico para $F_{2,6}$ obtenido de la tabla correspondiente, considerando un nivel de significancia α igual con 0.01 (1%), es igual con 10.92, por lo que

$$F_0 = 11.35 > F_{2,6} = 10.92$$

y se debe rechazar $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, resultado que sugiere la existencia de efectos debidos a los tratamientos. En el caso del ejemplo, el rendimiento de combustible para un automóvil depende de si éste es de marca A, B o C.

A.12 COMENTARIOS

A.12.1 Cuando en el análisis de variancia se obtiene un valor de F_0 mucho menor que la unidad, ello indica que, siendo o no cierta la hipótesis H_0, MS_W adquiere un valor muy grande, lo cual a su vez generalmente implica el efecto presente de algún factor sistemático no aleatorio dentro de los valores de los datos en las muestras, que impide que MS_W refleje únicamente la variación al azar de los y_{ij}. La existencia de tal efecto no controlado supone fallas en las suposiciones iniciales para la generación del modelo, y generalmente también, que el diseño del experimento es inadecuado. Más adelante se propondrán técnicas distintas a la ya presentada para procurar evitar la presencia de dichas componentes sistemáticas en el diseño correspondiente.

A.12.2 Una de las suposiciones iniciales especifica que la distribución de los errores e_{ij} es normal $\eta(0,\sigma_e^2)$ para cada tratamiento i, y equivalentemente, que y_{ij} es una variable aleatoria distribuída como $\eta(\mu_y, \sigma_y^2)$. Esta suposición es indispensable para determinar a MS_B/σ_e^2 y MS_W/σ_e^2 como variables con distribución χ^2, y así poder emplear el cociente $F_0 = MS_B/MS_W$ como estadístico de prueba para la hipótesis de igualdad de medias. Es posible demostrar, si se emplea el teorema del límite central, que las inferencias que se hacen para medias en el caso de poblaciones normales son válidas también para aquellas que no lo sean, siempre que el tamaño n(o n_i , en el caso del diseño desbalanceado que se presentará más adelante) de las muestras sea suficientemente grande. En virtud de ésto, si no es posible soportar los supuestos de normalidad para el modelo aquí desarrollado, es indispensable el manejo de muestras más grandes que permitan aproximaciones adecuadas a la distribución normal.

A.12.3 Otra de las suposiciones establece que σ_e^2 debe tener el mismo valor para todos los tratamientos. Esta suposición de homogeneidad de variancias, u homoscedasticidad, puede pasarse por alto sin consecuencias muy graves siempre que el número de valores y_{ij} en cada muestra de tratamiento sea el mismo para todos los casos. Si, por el contrario, el valor de n es distinto para las muestras, y σ_e^2 no tiene el mismo valor para cada tratamiento, la inferencia final puede verse seriamente afectada.

A.12.4 Es extremadamente importante que los datos a los que se aplique el modelo expuesto se basen en observaciones independientes entre y dentro de las muestras, es decir, que cada observación no se relacione con las restantes, con el fin de soportar debidamente la suposición inicial de que los errores e_{ij} son independientes. Esta suposición es indispensable para justificar el empleo de la prueba F al realizar el análisis de variancia, y si no se cumple se pueden cometer errores muy graves que podrían desviar los resultados del análisis e invalidar la inferencia final.

A.12.5 Se recomienda al lector el estudio de los métodos de verificación analítica para los supuestos del modelo aquí expuesto, que se presentan en la referencia 1, págs. _ _

A.13 FORMULAS SIMPLIFICADAS DE CALCULO

Con el objeto de realizar los cálculos de SS_W, SS_B y SS_T en forma más cómoda, se pueden realizar las simplificaciones siguientes:

$$SS_T = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_i \sum_j (y_{ij}^2 - 2\bar{y}_{..}y_{ij} + \bar{y}_{..}^2)$$

$$= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - 2\bar{y}_{..} \sum_i \sum_j y_{ij} + \sum_i \sum_j \bar{y}_{..}^2$$

y, como $\bar{y}_{..} = \dfrac{\sum_i \sum_j y_{ij}}{N}$ *y* $\sum_i \sum_j \bar{y}_{..}^2 = N\bar{y}_{..}^2$, *entonces*

$$SS_T = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - 2\bar{y}_{..}(N\bar{y}_{..}) + N\bar{y}_{..}^2 = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - N\bar{y}_{..}^2$$

Por otro lado,

$$SS_B = \sum_i n(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_i n(\bar{y}_{i.}^2 - 2\bar{y}_{i.}\bar{y}_{..} + \bar{y}_{..}^2)$$

$$= \sum_i n\bar{y}_{i.}^2 - 2n\bar{y}_{..} \sum_i \bar{y}_{i.} + n \sum_i \bar{y}_{..}^2$$

y, ya que

$$\bar{y}_{..} = \frac{n\sum_i \bar{y}_{i.}}{N} \quad y \quad \bar{y}_{i.} = \frac{y_{i.}}{n}, \text{ entonces}$$

$$SS_B = \sum_i n\frac{y_{i.}^2}{N} - 2N\bar{y}_{..}^2 + N\bar{y}_{..}^2 = \sum_i \frac{y_{i.}^2}{n} - N\bar{y}_{..}^2$$

Finalmente, ya que $SS_T = SS_W + SS_B$, entonces

$$SS_W = SS_T - SS_B = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - N\bar{y}_{..}^2 - \sum_i \frac{y_{i.}^2}{n} + N\bar{y}_{..}^2$$

$$= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \sum_i \frac{y_{i.}^2}{n}$$

Se acostumbra presentar los resultados en la forma que sigue:

FUENTE DE VARIABILIDAD	SUMA DE CUADRADOS SS	GRADOS DE LIBERTAD	MS	F_o
ENTRE MUESTRAS (Tratamientos)	$SS_B = \sum_i \frac{y_{i.}}{n} - N\bar{y}_{..}^2$	K-1	$MS_B = \frac{SS_B}{K-1}$	$\frac{MS_B}{MS_W}$
DENTRO DE MUESTRAS (Error)	$SS_W = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \sum_i \frac{y_{i.}^2}{n}$	N-K	$MS_W = \frac{SS_W}{N-K}$	
TOTAL	$SS_T = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - N\bar{y}_{..}^2$	N-1		

A.14 EJEMPLO

Un fabricante de fibras sintéticas para telas sospecha que la resistencia de la fibra se ve afectada por el contenido de algodón en la misma. Para probar con $\alpha=0.01$ la hipótesis de ausencia de efectos debidos al porcentaje de algodón en la fibra, determina los niveles 15%, 20%, 25%, 30% y 35% (contenido de algodón en por ciento) y decide emplear cinco observaciones de resistencia de la fibra (en lb/in^2) para cada nivel del factor de interés. La asignación de los tratamientos se hace completamente al azar a las unidades experimentales, obteniéndose los resultados siguientes:

OBSERVACIONES

		1	2	3	4	5	$Y_{i.}$
% de Algodón (Tratamientos)	15	7	7	15	11	9	49
	20	12	17	12	18	18	77
	25	14	18	18	19	19	88
	30	19	25	22	19	23	108
	35	7	10	11	15	11	54

$i=1,2,3,4,5$

$j=1,2,3,4,5$

$\bar{Y}_{1.} = \frac{Y_{1.}}{5} = \frac{49}{5} = 9.8$; $\bar{Y}_{2.} = \frac{77}{5} = 15.4$; $\bar{Y}_{3.} = \frac{88}{5} = 17.6$; $\bar{Y}_{4.} = \frac{108}{5} = 21.6$

$\bar{Y}_{5.} = \frac{54}{5} = 10.8$

$$Y_{..} = \sum_i \sum_j Y_{ij} = \sum_i Y_{i.} = 49+77+88+108+54 = 376$$

$$\bar{Y}_{..} = \frac{Y_{..}}{N} = \frac{376}{25} = 15.04$$

$$SS_T = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - N\bar{Y}_{..}^2 = (7)^2+(7)^2+(15)^2+(11)^2+(9)^2+\ldots+(15)^2+(11)^2-25(15.04)^2$$

$$= 6292 - 5655.04 = 636.96$$

$$SS_B = \sum_i \frac{Y_{i.}^2}{n} - N\bar{Y}_{..}^2 = \frac{(49)^2+(77)^2+(88)^2+(108)^2+(54)^2}{5} - 25(15.04)^2$$

$$= 6130.80 - 5655.04 = 475.76$$

$$SS_W = SS_T - SS_B = 636.96 - 475.76 = 161.20$$

$$MS_B = \frac{SS_B}{k-1} = \frac{475.76}{5-1} = 118.94$$

$$MS_W = \frac{SS_W}{N-k} = \frac{161.20}{25-5} = 8.06$$

$$F_o = \frac{MS_B}{MS_W} = \frac{118.94}{8.06} = 14.76$$

La tabla de concentración de resultados para el análisis de varianza es la siguiente:

FUENTE DE VARIABILIDAD	SUMA DE CUADRADOS	G. L.	MS	F_0
Tratamientos	475.76	4	118.94	14.76
ERROR	161.20	20	8.06	
TOTAL	636.96	24		

Al nivel de significancia de 1%, la F teórica con cuatro grados de libertad en el numerador y veinte en el denominador corresponde al valor 4.43, por lo que

$$F_o = 14.76 > F_{4,20} = 4.43$$

y se rechaza la hipótesis nula $H_o : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$ (o, equivalentemente, $H_o : \gamma_i = 0,\ i=1,2,3,4,5$), concluyéndose que las medias de los tratamientos difieren, es decir, que el porcentaje de algodón en la fibra afecta significativamente a la resistencia de la misma, para los niveles del factor empleados.

A.15 DISEÑO DESBALANCEADO

En algunas ocasiones el número de observaciones que se hacen para cada tratamiento puede no ser el mismo, es decir, el tamaño de la muestra puede variar entre los varios tratamientos. Se dice que el diseño correspondiente es desbalanceado, pero el análisis de varianza propuesto puede emplearse haciendo modificaciones ligeras en las fórmulas para las sumas de cuadrados.

Supóngase que se toman n_i observaciones bajo cada tratamiento i $(i = 1,2,\ldots,K)$. Entonces,

$$N = \sum_{i=1}^{K} n_i$$

y ahora se emplea la restricción $\sum_{i=1}^{K} n_i \gamma_i = 0$, ya que

$$\mu = \frac{\sum_i n_i \mu_i}{\sum_i n_i} = \frac{\sum_i n_i \mu_i}{N}$$

$$y \quad \sum_i n_i \gamma_i = \sum_i n_i(\mu_i - \mu) = \sum_i n_i \mu_i - \mu \sum_i n_i = N\mu - N\mu = 0$$

En este caso, las fórmulas de cálculo para las sumas de cuadrados se convierten en

$$SS_T = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - N\bar{y}^2_{..}$$

$$SS_B = \sum_{i=1}^{K} \frac{y_{i.}^2}{n_i} - N\bar{y}^2_{..}$$

$$SS_W = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{K} \frac{y_{i.}^2}{n_i}$$

Por supuesto este diseño desbalanceado presenta desventajas en su uso comparándolo con el balanceado. Basta recordar que la suposición de homogeneidad de variancias para todos los tratamientos puede soportarse adecuadamente cuando los tamaños de muestra son iguales, lo que no sucede en el diseño desbalanceado.

A.16 EJEMPLO

Con el fin de comparar las propiedades reflectivas de cuatro tipos diferentes de pintura: A, B, C y D, se diseñó un experimento completamente aleatorizado cuyos resultados, obtenidos mediante el empleo de un instrumento óptico especial, fueron los siguientes:

		OBSERVACIONES						n_i	$Y_{i.}$
PINTURA (Tratamientos)	A	195	150	205	120	60		5	830
	B	45	40	195	65	145	195	6	685
	C	230	115	235	225			4	805
	D	110	55	120	50	80		5	415

$$N = \sum_{i=1}^{4} n_i = 5 + 6 + 4 + 5 = 20$$

$$Y_{..} = \sum_i \sum_j Y_{ij} = \sum_i Y_{i.} = 830+685+805+415 = 2735$$

$$\bar{Y}_{..} = \frac{2735}{20} = 136.75$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - N\bar{Y}_{..}^2 = (195)^2+(150)^2+(205)^2+\ldots+(50)^2+(80)^2-20(136.75)^2$$
$$= 457,865 - 374,011.25 = 83,863.75$$

$$SS_B = \sum_{i=1}^{4}\frac{y_{i.}^2}{n_i} - N\bar{Y}_{..}^2 = \frac{(830)^2}{5} + \frac{(685)^2}{6} + \frac{(805)^2}{4} + \frac{(415)^2}{5} - 20(136.75)^2$$
$$= 412,435.42 - 374,011.25 = 38,424.17$$

$$SS_w = SS_T - SS_B = 83,863.75 - 38,424.17 = 45,439.58$$

$$MS_B = \frac{SS_B}{K-1} = \frac{38,424.17}{4-1} = 12,808.05$$

$$MS_w = \frac{SS_w}{N-K} = \frac{45,439.58}{20 - 4} = 2839.97$$

$$F_o = \frac{MS_B}{MS_w} = \frac{12808.05}{2839.97} = 4.51$$

Con los datos anteriores se formula la tabla de análisis de variancia siguiente:

FUENTE DE VARIABILIDAD	SS	G.L.	MS	F_o
TRATAMIENTOS	38,424.17	3	12,808.05	4.51
ERROR	45,439.58	16	2,839.97	
TOTAL	83,863.75	19		

El valor teórico de $F_{3,16}$ considerando un nivel de significancia de 1% es, de tablas, igual con 5.29, por lo cual

$$F_0 = 4.51 < F_{3,16} = 5.29$$

implicando lo anterior que la hipótesis nula

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

(o, equivalentemente, $H_o : \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$)
puede aceptarse al nivel de significancia empleado, resultado que supone la inexistencia de efectos en los valores de las reflectancias debidas a los cuatro tipos de pintura empleados en el experimento.

Conviene observar que, en este caso,

$$\hat{\gamma}_1 = \bar{Y}_{1.} - \bar{Y}_{..} = 830/5 - 136.75 = 29.25; \quad \hat{\gamma}_2 = 685/6 - 136.75 = -22.58$$
$$\hat{\gamma}_3 = 805/4 - 136.75 = 64.5; \quad \hat{\gamma}_4 = 415/5 - 136.75 = -53.75$$

y que $\sum_{i=1}^{4} n_i \hat{\gamma}_i = 5(29.25) + 6(-22.58) + 4(64.5) + 5(-53.75)$

$$= 146.25 - 135.48 + 258 - 268.75 \doteq 0$$

C. PRUEBA DE IGUALDAD DE DOS MEDIAS, Y ANALISIS DE VARIANCIA.

Es factible establecer la conexión que existe entre una prueba de igualdad de dos medias, a través del empleo de la estadística t, y la prueba correspondiente con la F, que implica un análisis de variancia. Para ello, hay que recordar que la estadística t se define como el cociente que se forma de una variable aleatoria normal estándar a la raíz cuadrada de otra variable independiente Ji cuadrada dividida entre su número de grados de libertad, es decir,

$$t_\nu = \frac{z}{\sqrt{\chi^2/\nu}}$$

Si la expresión para t se eleva al cuadrado, se obtiene

$$t_\nu^2 = \frac{z^2}{\chi^2/\nu} = \frac{z^2/1}{\chi^2/\nu} = F_{1,\nu}$$

siendo $Z^2/1$ una variable aleatoria Ji cuadrada con un grado de libertad, dividida entre dicho número. Por lo tanto, el valor de t obtenido de las muestras con las que se realice la prueba de igualdad de medias para dos poblaciones, debe ser igual, después de elevarlo al cuadrado, con el valor de F calculado en la prueba correspondiente que se efectúe por análisis de variancia.

Para aclarar este concepto, supóngase que se desea probar la hipótesis de igualdad de medias para dos poblaciones normales e independientes, I y II, a través de muestras aleatorias de tres elementos en cada caso, con los valores de datos

I	II
15	12
10	9
21	7

y un nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

C.1 Solución a través de t

En este caso

$$H_o : \mu_I = \mu_{II}$$

$$H_1 : \mu_I \neq \mu_{II}$$

con $n_I = n_{II} = 3$; $\bar{x}_I = 15.33$ y $\bar{x}_{II} = 12.67$

Al calcular las variancias insesgadas de las muestras a través de la fórmula

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

se obtiene

$$s_{x_I}^2 = \frac{1}{3-1} \sum_{i=1}^{3} (x_{i_I} - \bar{x}_I)^2 = \frac{0.1089+28.4089+32.1489}{2} = 30.33$$

$$s_{x_{II}}^2 = \frac{1}{3-1} \sum_{i=1}^{3} (x_{i_{II}} - \bar{x}_{II})^2 = \frac{0.4489+40.0689+32.1489}{2} = 36.33$$

y

$$t = \frac{\bar{x}_I - \bar{x}_{II}}{\sqrt{\frac{(n_I-1)s_{x_I}^2 + (n_{II}-1)s_{x_{II}}^2}{(n_I-1)+(n_{II}-1)}}\sqrt{\frac{1}{n_I} + \frac{1}{n_{II}}}} = \frac{15.33 - 12.67}{\sqrt{\frac{2(30.33)+2(36.33)}{2+2}}\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{15.33 - 12.67}{5.773(0.816)} = \frac{2.66}{4.71} = 0.565$$

con $\nu = (n_I - 1) + (n_{II} - 1) = n_I + n_{II} - 2 = 3+3-2 = 4$ grados de libertad.

De tablas, el valor $|t_4|$ es 2.776, con $\alpha = 0.05$ para prueba de dos extremos, y como

$$-t_4 = -2.776 < t = 0.565 < t_4 = 2.776$$

se acepta la hipótesis H_o de igualdad de las medias.

Los valores de t de prueba y de tablas elevados al cuadrado son

$$t^2 = (0.565)^2 = 0.319$$

$$t_4^2 = (2.776)^2 = 7.71$$

C.2 Solución a través de análisis de variancia

Para este caso, la tabla de resultados es

TRATAMIENTOS (POBLACIONES)	OBSERVACIONES			$Y_{i.}$
I	15	10	21	46
II	12	9	7	38

$j=1,2,3\,(n=3)$

$i=1,2 \quad (K=2)$

$N=nK=6$

como $Y_{..} = \sum_i Y_{i.} = 46+38=84$, entonces $\bar{Y}_{..} = \frac{Y_{..}}{N} = \frac{84}{6} = 14$, y

$$N\bar{Y}_{..}^2 = 6(14)^2 = 1176 \; ; \quad \sum_{i=1}^{2} \frac{Y_{i.}^2}{n} = \frac{46^2 + 38^2}{6} = 1186.66$$

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} Y_{ij}^2 = 15^2 + 10^2 + 21^2 + 12^2 + 9^2 + 7^2 = 1320$$

por lo que

$$SS_T = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - N\bar{Y}_{..}^2 = 1320 - 1176 = 144$$

$$SS_B = \sum_i \frac{Y_{i.}}{n} - N\bar{Y}_{..}^2 = 1186.66 - 1176 = 10.66$$

$$SS_W = SS_T - SS_B = 144 - 10.66 = 133.34$$

y los valores medios cuadráticos resultan ser

$$MS_B = \frac{SS_B}{K-1} = \frac{10.66}{1} = 10.66$$

$$MS_W = \frac{SS_W}{N-K} = \frac{133.34}{4} = 33.335$$

A.13 METODO DE DUNCAN

La llamada prueba del rango múltiple de DUNCAN, es un método muy extendido para realizar pruebas de comparación entre todas las parejas de medias de tratamientos. El procedimiento es muy efectivo para detectar diferencias entre medias cuando existen realmente tales diferencias, y por ello se ha convertido en el método más popular para efectuar comparaciones por parejas.

Para aplicar la prueba del rango múltiple, se ordenan de menor a mayor los K promedios de tratamientos, y se forma un primer grupo conteniendo a los K. A continuación, se forma un segundo grupo de K-1 promedios, eliminando del grupo anterior al promedio de mayor valor. Este procedimiento se continúa hasta llegar al último grupo de <u>dos</u> promedios. Por ejemplo, si los promedios, ya ordenados, obtenidos de muestras para K=4 tratamientos son

$$\bar{Y}_{1.}=52 \quad , \quad \bar{Y}_{4.}=60 \; , \quad \bar{Y}_{2.}=67 \quad , \quad \bar{Y}_{3.}=71$$

el primer grupo de K promedios es

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{1.} &= 52 \\ \bar{Y}_{4.} &= 60 \\ \bar{Y}_{2.} &= 67 \\ \bar{Y}_{3.} &= 71 \end{aligned} \qquad \text{GRUPO 1}$$

Al eliminar el promedio de mayor valor ($\bar{Y}_{3.}=71$), el segundo grupo con K-1=3 promedios queda como

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{1.} &= 52 \\ \bar{Y}_{4.} &= 60 \\ \bar{Y}_{2.} &= 67 \end{aligned} \qquad \text{GRUPO 2}$$

Eliminando el valor $\bar{Y}_{2.}=67$ del grupo anterior, el tercer grupo con K-2 =2 promedios corresponde a

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{1.} &= 52 \\ \bar{Y}_{4.} &= 60 \end{aligned} \qquad \text{GRUPO 3}$$

Una vez que se han formado todos los grupos de promedios, se procede a calcular las diferencias entre el promedio de mayor valor en cada grupo y cada uno de los promedios restantes incluidos en el mismo. Para el grupo 1, la primera diferencia es $\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{1.} = 71-52$, siendo su valor igual con el rango (71-52) de los promedios 52, 60, 67 y 71. Para el mismo grupo, la segunda diferencia es $\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{4.} = 71-60$, igual con el rango de los promedios 60, 67 y 71. La tercera y última diferencia es $\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{2.} = 71-67$, y este valor equivale al rango para los promedios 67 y 71. Es decir, calcular las diferencias entre los promedios en la forma indicada es, para el primer grupo, equivalente a calcular los rangos para cuatro, tres y dos promedios, respectivamente.

Entonces, las diferencias entre promedios para cada uno de los grupos son

GRUPO 1

$\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{1.} = 71-52$ (Rango de <u>4</u> promedios: 52,60,67 y 71)
$\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{4.} = 71-60$ (Rango de <u>3</u> promedios: 60,67 y 71)
$\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{2.} = 71-67$ (Rango de <u>2</u> promedios: 67 y 71)

GRUPO 2

$\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{1.} = 67-52$ (Rango de <u>3</u> promedios: 52,60 y 67)
$\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{4.} = 67-60$ (Rango de <u>2</u> promedios: 60 y 67)

GRUPO 3

$\bar{Y}_{4.} - \bar{Y}_{1.} = 60-52$ (Rango de <u>2</u> promedios: 52 y 60)

Obsérvese que al calcular las seis diferencias anteriores, se plantearon los $K(K-1)/2=4(4-1)/2$ contrastes que se requieren para efectuar todas las comparaciones de medias por parejas para los K tratamientos.

A continuación, se deben obtener los k-1 <u>rangos mínimos significativos</u>

$$R_p = r_\alpha(p,f)\sqrt{\frac{MS_w}{n_H}} \qquad ; \; p = 2,3,\ldots,K$$

en donde α es la significancia para el análisis de variancia original, MS_w el valor medio cuadrático del error obtenido en el mismo análisis, $\underline{f}$ el número de grados de libertad para SS_w, en este caso N-K, $r_\alpha(p,f)$ para $p=2,3,\ldots,K$, el valor leído en la tabla de rangos significativos de DUNCAN que se anexa a continuación, y

$$n_H = n \qquad \text{(diseño balanceado)}$$

$$n_H = \frac{K}{\sum_i \frac{1}{n_i}} \qquad \text{(diseño desbalanceado)}$$

Para realizar la prueba de significancia de alguna diferencia de promedios, que equivalga a un rango de $\underline{p}$ promedios, se compara dicha diferencia con el valor R_p del rango mínimo significativo correspondiente, y si la diferencia es mayor que R_p se concluye que la pareja de medias en cuestión es significativamente diferente, repitiéndose el proceso hasta que las $K(K-1)/2$ parejas de promedios se hayan probado. Como ejemplo, para los cuatro promedios que se han manejado, las pruebas se efectuarían considerando que

$\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{1.}$ se debe comparar con R_4
$\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{4.}$ se debe comparar con R_3
$\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{2.}$ se debe comparar con R_2
$\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{1.}$ se debe comparar con R_3
$\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{4.}$ se debe comparar con R_2
$\bar{Y}_{4.} - \bar{Y}_{1.}$ se debe comparar con R_2

Para evitar contradicciones, no se deben considerar como significativas las diferencias en parejas de medias, cuando las medias involucradas se encuentran entre otra pareja que no difiere significativamente.

A.14 EJEMPLO

Para el problema tratado en A.5, los promedios ordenados son

$$\bar{Y}_{3.} = \frac{42}{3} = 14.00 \quad , \quad \bar{Y}_{1.} = \frac{65}{3} = 21.67 \quad , \quad \bar{Y}_{2.} = \frac{70}{3} = 23.33$$

RANGOS SIGNIFICATIVOS DE DUNCAN

$r_{.01}(p, f)$

f	p = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100
1	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0
2	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0
3	8.26	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	8.9	9.0	9.0	9.3	9.3	9.3
4	6.51	6.8	6.9	7.0	7.1	7.1	7.2	7.2	7.3	7.5	7.5	7.5
5	5.70	5.96	6.11	6.18	6.26	6.33	6.40	6.44	6.5	6.8	6.8	6.8
6	5.24	5.51	5.65	5.73	5.81	5.88	5.95	6.00	6.0	6.3	6.3	6.3
7	4.95	5.22	5.37	5.45	5.53	5.61	5.69	5.73	5.8	6.0	6.0	6.0
8	4.74	5.00	5.14	5.23	5.32	5.40	5.47	5.51	5.5	5.8	5.8	5.8
9	4.60	4.86	4.99	5.08	5.17	5.25	5.32	5.36	5.4	5.7	5.7	5.7
10	4.48	4.73	4.88	4.96	5.06	5.13	5.20	5.24	5.28	5.55	5.55	5.55
11	4.39	4.63	4.77	4.86	4.94	5.01	5.06	5.12	5.15	5.39	5.39	5.39
12	4.32	4.55	4.68	4.76	4.84	4.92	4.96	5.02	5.07	5.26	5.26	5.26
13	4.26	4.48	4.62	4.69	4.74	4.84	4.88	4.94	4.98	5.15	5.15	5.15
14	4.21	4.42	4.55	4.63	4.70	4.78	4.83	4.87	4.91	5.07	5.07	5.07
15	4.17	4.37	4.50	4.58	4.64	4.72	4.77	4.81	4.84	5.00	5.00	5.00
16	4.13	4.34	4.45	4.54	4.60	4.67	4.72	4.76	4.79	4.94	4.94	4.94
17	4.10	4.30	4.41	4.50	4.56	4.63	4.68	4.73	4.75	4.89	4.89	4.89
18	4.07	4.27	4.38	4.46	4.53	4.59	4.64	4.68	4.71	4.85	4.85	4.85
19	4.05	4.24	4.35	4.43	4.50	4.56	4.61	4.64	4.67	4.82	4.82	4.82
20	4.02	4.22	4.33	4.40	4.47	4.53	4.58	4.61	4.65	4.79	4.79	4.79
30	3.89	4.06	4.16	4.22	4.32	4.36	4.41	4.45	4.48	4.65	4.71	4.71
40	3.82	3.99	4.10	4.17	4.24	4.30	4.34	4.37	4.41	4.59	4.69	4.69
60	3.76	3.92	4.03	4.12	4.17	4.23	4.27	4.31	4.34	4.53	4.66	4.66
100	3.71	3.86	3.98	4.06	4.11	4.17	4.21	4.25	4.29	4.48	4.64	4.65
∞	3.64	3.80	3.90	3.98	4.04	4.09	4.14	4.17	4.20	4.41	4.60	4.68

f – degrees of freedom.
*Reproduced with permission from "Multiple Range and Multiple F Tests," by D. B. Duncan, *Biometrics*, Vol. 1, No. 1, pp. 1–42, 1955.

$r_{.05}(p, f)$

f	p = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100
1	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0
2	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09
3	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50
4	3.93	4.01	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02
5	3.64	3.74	3.79	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83
6	3.46	3.58	3.64	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68
7	3.35	3.47	3.54	3.58	3.60	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61
8	3.26	3.39	3.47	3.52	3.55	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56
9	3.20	3.34	3.41	3.47	3.50	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52
10	3.15	3.30	3.37	3.43	3.46	3.47	3.47	3.47	3.47	3.48	3.48	3.48
11	3.11	3.27	3.35	3.39	3.43	3.44	3.45	3.46	3.46	3.48	3.48	3.48
12	3.08	3.23	3.33	3.36	3.40	3.42	3.44	3.44	3.46	3.48	3.48	3.48
13	3.06	3.21	3.30	3.35	3.38	3.41	3.42	3.44	3.45	3.47	3.47	3.47
14	3.03	3.18	3.27	3.33	3.37	3.39	3.41	3.42	3.44	3.47	3.47	3.47
15	3.01	3.16	3.25	3.31	3.36	3.38	3.40	3.42	3.43	3.47	3.47	3.47
16	3.00	3.15	3.23	3.30	3.34	3.37	3.39	3.41	3.43	3.47	3.47	3.47
17	2.98	3.13	3.22	3.28	3.33	3.36	3.38	3.40	3.42	3.47	3.47	3.47
18	2.97	3.12	3.21	3.27	3.32	3.35	3.37	3.39	3.41	3.47	3.47	3.47
19	2.96	3.11	3.19	3.26	3.31	3.35	3.37	3.39	3.41	3.47	3.47	3.47
20	2.95	3.10	3.18	3.25	3.30	3.34	3.36	3.38	3.40	3.47	3.47	3.47
30	2.89	3.04	3.12	3.20	3.25	3.29	3.32	3.35	3.37	3.47	3.47	3.47
40	2.86	3.01	3.10	3.17	3.22	3.27	3.30	3.33	3.35	3.47	3.47	3.47
60	2.83	2.98	3.08	3.14	3.20	3.24	3.28	3.31	3.33	3.47	3.48	3.48
100	2.80	2.95	3.05	3.12	3.18	3.22	3.26	3.29	3.32	3.47	3.53	3.53
∞	2.77	2.92	3.02	3.09	3.15	3.19	3.23	3.26	3.29	3.47	3.61	3.67

f – degrees of freedom

y los grupos de promedios quedan

$$\bar{Y}_{3.} = 14$$
$$\bar{Y}_{1.} = 21.67 \qquad \text{GRUPO 1}$$
$$\bar{Y}_{2.} = 23.33$$

$$\bar{Y}_{3.} = 14$$
$$\bar{Y}_{1.} = 21.67 \qquad \text{GRUPO 2}$$

Entonces, las diferencias entre promedios previstos para cada uno de los grupos son

GRUPO 1

$$\bar{Y}_{2.}-\bar{Y}_{3.} = 23.33-14.00 = 9.33 \quad \text{(Rango para \underline{3} promedios)}$$
$$\bar{Y}_{2.}-\bar{Y}_{1.} = 23.33-21.67 = 1.66 \quad \text{(Rango para \underline{2} promedios)}$$

GRUPO 2

$$\bar{Y}_{1.}-\bar{Y}_{3.} = 21.67-14.00 = 7.67 \quad \text{(Rango para \underline{2} promedios)}$$

Puesto que se requieren rangos mínimos significativos para dos y tres promedios, siendo $\alpha = 1\%$ y $MS_w = 6.55$, con f=6 grados de libertad, los valores de $r_\alpha(p,f)$ para p igual con 2 y 3 resultan

$$r_{0.01}(2,6) = 5.24$$
$$r_{0.01}(3,6) = 5.51$$

Por lo tanto, con n=3,

$$R_2 = r_{0.01}(2,6)\sqrt{\frac{MS_w}{n}} = 5.24(1.478) = 7.74$$
$$R_3 = r_{0.01}(3,6)\sqrt{\frac{MS_w}{n}} = 5.51(1.478) = 8.14$$

y las comparaciones finales resultan

$$\bar{Y}_{2.}-\bar{Y}_{3.} = 9.33 > R_3 = 8.14 \qquad \text{(Rechazo)}$$
$$\bar{Y}_{2.}-\bar{Y}_{1.} = 1.66 < R_2 = 7.74 \qquad \text{(Aceptación)}$$
$$\bar{Y}_{1.}-\bar{Y}_{3.} = 7.67 < R_2 = 7.74 \qquad \text{(Aceptación con duda)}$$

A.15 EJEMPLO

Para el problema de las fibras sintéticas visto en A.6, los promedios ya ordenados son

$$\bar{Y}_{1.} = 9.8 , \bar{Y}_{5.} = 10.8 , \bar{Y}_{2.} = 15.4 , \bar{Y}_{3.} = 17.6 , \bar{Y}_{4.} = 21.6$$

y se forman los grupos

$\bar{Y}_{1.} = 9.8$
$\bar{Y}_{5.} = 10.8$
$\bar{Y}_{2.} = 15.4$ GRUPO 1
$\bar{Y}_{3.} = 17.6$
$\bar{Y}_{4.} = 21.6$

$\bar{Y}_{1.} = 9.8$
$\bar{Y}_{5.} = 10.8$
$\bar{Y}_{2.} = 15.4$ GRUPO 2
$\bar{Y}_{3.} = 17.6$

$\bar{Y}_{1.} = 9.8$
$\bar{Y}_{5.} = 10.8$ GRUPO 3
$\bar{Y}_{2.} = 15.4$

$\bar{Y}_{1.} = 9.8$
$\bar{Y}_{5.} = 10.8$ GRUPO 4

cuyas diferencias de promedios son

GRUPO 1

$\bar{Y}_{4.} - \bar{Y}_{1.} = 21.6 - 9.8 = 11.8$ (Rango de 5 promedios)
$\bar{Y}_{4.} - \bar{Y}_{5.} = 21.6 - 10.8 = 10.8$ (Rango de 4 promedios)
$\bar{Y}_{4.} - \bar{Y}_{2.} = 21.6 - 15.4 = 6.2$ (Rango de 3 promedios)
$\bar{Y}_{4.} - \bar{Y}_{3.} = 21.6 - 17.6 = 4.0$ (Rango de 2 promedios)

y las comparaciones finales son

$\bar{Y}_{4.} - \bar{Y}_{1.} = 11.8$	$>$	$R_5 = 5.59$	(Rechazo)
$\bar{Y}_{4.} - \bar{Y}_{5.} = 10.8$	$>$	$R_4 = 5.50$	(Rechazo)
$\bar{Y}_{4.} - \bar{Y}_{2.} = 6.2$	$>$	$R_3 = 5.56$	(Rechazo)
$\bar{Y}_{4.} - \bar{Y}_{3.} = 4.0$	$<$	$R_2 = 5.10$	(Aceptación)
$\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{1.} = 7.8$	$>$	$R_4 = 5.50$	(Rechazo)
$\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{5.} = 6.8$	$>$	$R_3 = 5.36$	(Rechazo)
$\bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{2.} = 2.2$	$<$	$R_2' = 5.10$	(Aceptación)
$\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{1.} = 5.6$	$>$	$R_3 = 5.36$	(Rechazo)
$\bar{Y}_{2.} - \bar{Y}_{5.} = 4.6$	$<$	$R_2' = 5.10$	(Aceptación)
$\bar{Y}_{5.} - \bar{Y}_{1.} = 1.0$	$<$	$R_2 = 5.10$	(Aceptación)

Conviene hacer mención de que el método de rangos múltiples de DUNCAN, por considerarse tal vez el más sensible de todos los procedimientos para comparaciones por parejas, se encuentra disponible en gran número de paquetes de programación en computadoras para el análisis de variancia.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

CURSOS ABIERTOS

DISEÑO DE EXPERIMENTOS: TECNICAS DE MUESTREO Y ANALISIS ESTADISTICO

MODELOS BASICOS DE DISEÑO DE EXPERIMENTOS

AUTORES:
IRWIN MILLER
JOHN E. FREUND

EXPOSITOR:
M. EN. I. RUBEN TELLEZ SANCHEZ

ABRIL-JUNIO-1992.

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_i-\bar{y}_.)^2=n\cdot\sum_{i=1}^{k}(\bar{y}_i-\bar{y}_.)^2$$

Se acostumbra denotar la suma total de cuadrados, el miembro izquierdo de la identidad del teorema 12.1 por SST. El primer término del lado derecho es $\hat{\sigma}_W^2$ veces sus grados de libertad; y a esta suma la llamaremos **suma de cuadrados del error,** SSE. El término "suma de cuadrados del error" expresa la idea de que la cantidad estima errores aleatorios (o al azar). El segundo término del lado derecho de la identidad del teorema 12.1 es $\hat{\sigma}_B^2$ veces sus grados de libertad, y a esto lo llamaremos **suma de cuadrados entre muestras o suma de cuadrados entre tratamientos,** $SS(Tr)$. (La mayoría de las primeras aplicaciones de este tipo de análisis se hicieron en la agricultura, donde k poblaciones representaban distintos tratamientos, tales como fertilizantes, aplicados a parcelas agrícolas.) Obsérvese que con esta notación la razón F de la página 370 puede escribirse así

Razón F para tratamientos

$$F=\frac{SS(Tr)/(k-1)}{SSE/k(n-1)}$$

Las sumas requeridas para calcular esta última fórmula suelen obtenerse por medio de las siguientes expresiones que ahorran bastante trabajo, las cuales se le pedirá al lector verificar en el ejercicio 12.14 de la página 380. En primer término calculamos SST y $SS(Tr)$ por medio de las fórmulas

Suma de cuadrados en muestras de igual tamaño

$$SST=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}^2-C$$

$$SS(Tr)=\frac{\sum_{i=1}^{k}T_i^2}{n}-C$$

donde C, denominado término de corrección, está dado por

$$C=\frac{T^2}{kn}$$

En estas expresiones, T_i es el número total de n observaciones en la i-ésima muestra mientras que T es el gran total de las kn observaciones. La suma de cuadrados del error, SSE, se obtiene entonces por sustracción; de acuerdo con el teorema 12.1 podemos escribir

Suma de cuadrados del error

$$SSE=SST-SS(Tr)$$

Los resultados obtenidos al analizar la suma total de cuadrados en sus componentes son resumidos de manera conveniente por medio de la siguiente **tabla de análisis de variancia:**

Fuente de variación	*Grados de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Media cuadrada*	*F*
Tratamientos	$k-1$	$SS(Tr)$	$MS(Tr) = SS(Tr)/(k-1)$	$\frac{MS(Tr)}{MSE}$
Error	$k(n-1)$	SSE	$MSE = SSE/k(n-1)$	
Total	$nk-1$	SST		

Nótese que cada **cuadrado medio** (MS) (media cuadrada) se obtuvo dividiendo la suma de cuadrados correspondiente entre su número de grados de libertad.

EJEMPLO A fin de ilustrar el análisis de variancia (nombre que apropiadamente se da a esta técnica) para un criterio de clasificación, supongamos que según el esquema de la página 366 cada laboratorio mide los pesos de los revestimientos de estaño de 12 discos y que los resultados son los siguientes:

Laboratorio A	*Laboratorio B*	*Laboratorio C*	*Laboratorio D*
0.25	0.18	0.19	0.23
0.27	0.28	0.25	0.30
0.22	0.21	0.27	0.28
0.30	0.23	0.24	0.28
0.27	0.25	0.18	0.24
0.28	0.20	0.26	0.34
0.32	0.27	0.28	0.20
0.24	0.19	0.24	0.18
0.31	0.24	0.25	0.24
0.26	0.22	0.20	0.28
0.21	0.29	0.21	0.22
0.28	0.16	0.19	0.21

Construye una tabla de análisis de variancia.

Solución Los totales para las cuatro muestras son, respectivamente, 3.21, 2.72, 2.76 y 3.00, el gran total es 11.69, y los cálculos con que se obtienen las sumas necesarias son los siguientes:

$$C = \frac{(11.69)^2}{48} = 2.8470$$

$$SST = (0.25)^2 + (0.27)^2 + \ldots + (0.21)^2 - 2.8470 = 0.0809$$

$$SS(Tr) = \frac{(3.21)^2 + (2.72)^2 + (2.76)^2 + (3.00)^2}{12} - 2.8470 = 0.0130$$

$$SSE = 0.0809 - 0.0130 = 0.0679$$

En esta forma, obtenemos la siguiente tabla de análisis de variancia:

Fuente de variación	*Grados de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Cuadrado medio*	*F*
Laboratorios	3	0.0130	0.0043	2.87
Error	44	0.0679	0.0015	
Total	47	0.0809		

Puesto que el valor obtenido para F excede 2.82, que corresponde al valor de $F_{.05}$ con 3 y 44 grados de libertad, la hipótesis nula puede rechazarse con nivel de significancia de 0.05; concluimos que los laboratorios *no* están logrando resultados consistentes.

Para estimar los parámetros $\mu, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4 o (μ_1, μ_2, μ_3 y μ_4), podemos emplear el método de mínimos cuadrados, minimizando

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2$$

con respecto a μ y a las α_i, sujetas a la restricción de que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$. Esto puede realizarse eliminando una de las α o, mejor aún, utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, que se expone en la mayoría de los libros de cálculo avanzado. En cualquier caso obtenemos las estimaciones "intuitivamente obvias" $\hat{\mu} = \bar{y}$ y $\hat{\alpha}_i = \bar{y}_i - \bar{y}$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, y las estimaciones correspondientes para las μ_i dadas por $\hat{\mu}_i = \bar{y}_i$.

EJEMPLO Estima los parámentros del modelo con un criterio de clasificación para los pesos de los revestimientos de estaño del ejemplo anterior.

Solución Para los datos de los cuatro laboratorios obtenemos

$$\hat{\mu} = \frac{11.69}{48} = 0.244, \qquad \hat{\alpha}_1 = \frac{3.21}{12} - 0.244 = 0.024$$

En consecuencia,

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{2.72}{12} - 0.244 = -0.017, \qquad \hat{\alpha}_3 = \frac{2.76}{12} - 0.244 = -0.014,$$

y, por tanto,

$$\hat{\alpha}_4 = \frac{3.00}{12} - 0.244 = 0.006.$$

El análisis de variancia descrito en esta sección se aplica a criterios de clasificación en que cada muestra tiene el mismo número de observaciones. En caso contrario y si los tamaños muestrales son $n_1, n_2, \ldots$ y n_k sólo tenemos que sustituir $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ por nk en todo lo anterior y escribir las expresiones para calcular SST y $SS(Tr)$ en la forma

Suma de cuadrados para muestras de tamaños distintos

$$SST = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - C$$

$$SS(Tr) = \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - C$$

En lo demás, el procedimiento es el mismo que antes. (Véase también el ejercicio 12.15 de la página 380.)

EJEMPLO Como parte de la investigación del derrumbe del techo de un edificio, un laboratorio prueba todos los pernos disponibles que conectaban la estructura de acero en tres distintas posiciones del techo. Las fuerzas requeridas para "cortar" cada uno de los pernos (valores codificados) son las siguientes:

Posición 1: 90, 82, 79, 98, 83, 91
Posición 2: 105, 89, 93, 104, 89, 95, 86
Posición 3: 83, 89, 80, 94

Efectúa un análisis de variancia para probar con un nivel de significancia de 0.05 si las diferencias entre las medias muestrales en las tres posiciones son significastivas.

Solución Ut... ando las mismas etapas para pruebas de hipótesis que en capítulos previos, obtenemos

1. *Hipótesis nula:* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
   Hipótesis alterna: Las μ no son iguales.
2. *Nivel significancia:* $\alpha = 0.05$
3. *Criteri :* Se rechaza la hipótesis nula si $F > 3.74$, el valor de $F_{0.05}$ para $k-1 = 3-1 = 2$ y $N-K = 17-3$ grados de libertad, donde F es determinado por un análisis de variancia; de lo contrario, lo aceptamos.
4. *Cálculos:* Sustituyendo $n_1 = 6, n_2 = 7, n_3 = 4, N = 17, T_1 = 523$, $T_2 = 661$, $T_3 = 346$, $T_{\cdot} = 1530$, y $\sum\sum y_{ij}^2 = 138{,}638$ en las expresiones para calcular las sumas de cuadrados, obtenemos

$$SST = 138{,}638 - \frac{1530^2}{17} = 938$$

$$SS(Tr) = \frac{523^2}{6} + \frac{661^2}{7} + \frac{346^2}{4} - \frac{1530^2}{17}$$
$$= 234$$

y también

$$SSE = 938 - 234 = 704$$

El rest del trabajo se advierte en la siguiente tabla de análisis de var ncia:

Fuente de variancia	Grados de libertad	Media de cuadrados	Media de cuadrados	F
Posiciones	2	234	117	2.33
Error	14	704	50.3	
Total	16	938		

5. *Decisió :* Dado que $F = 2.33$ no sobrepasa 3.74, o sea el valor de $F_{0.05}$ para 2 y 14 grados de libertad, la hipótesis nula no puede rechazarse; en otras palabras, no podemos concluir que existe una diferencia en las resistencias medias a los esfuerzos deslizantes de los pernos en las tres posiciones sobre el techo.

EJERCICIOS

12.1 Se efectúa un experimento para comparar la acción limpiadora de dos detergentes: el detergente *A* y el detergente *B*. Veinte muestras de ropa se manchan con mugre y grasa, cada una se lava con uno de los detergentes en una lavadora automática y se mide después la "blancura". Critica los siguientes aspectos del experimento:

(a) Todo el experimento se realiza con agua suave.
(b) Quince muestras se lavan con el detergente *A* y cinco con el detergente *B*.
(c) Para acelerar la prueba, se emplean en el experimento agua muy caliente y tiempos de lavado de 30 segundos.
(d) Las mediciones de "blancura" de todas las muestras lavadas con el detergente *A* se hacen primero.

12.2 Un bebedor desea averiguar la causa de sus frecuentes malestares después de las borracheras, y realiza el siguiente experimento. La primera noche sólo ingiere whiskey y agua; la segunda toma vodka y agua; la tercera ginebra y agua, y en la cuarta, ron y agua. Cada una de las mañanas siguientes sentía el malestar, y concluyó que el factor común, el agua, era la causa de sus malestares.

(a) Esta conclusión obviamente carece de fundamentos, ¿pero puedes citar qué principios de un diseño experimental firme se han violado?
(b) Da un ejemplo menos obvio de un experimento que tenga el mismo inconveniente.
(c) Supón que nuestro amigo modificó su experimento de tal forma que ingirió cada una de las cuatro bebidas alcohólicas con agua y sin ella; así que el experimento duro ocho noches. ¿Podrían servir los resultados de este experimento modificado para apoyar o refutar la hipótesis de que el agua fue la causa de los malestares? Explica tu respuesta.

12.3 Para comparar la eficiencia de tres métodos de enseñanza de programación de cierta computadora (el método *A* consiste en instrucción directa con la computadora, el método *B* requiere la intervención de un instructor y de algunas prácticas directas con la computadora y el método *C* que tan sólo exige atención personal de un instructor), se extraen de grandes grupos de personas instruidas por los tres métodos muestras de tamaño cuatro. Las calificaciones que obtuvieron en una prueba de aprovechamiento adecuada son las siguientes:

Método A	Método B	Método C
73	91	72
77	81	77
67	87	76
71	85	79

12.11 Se realizan dos pruebas de la resistencia a la compresión en seis muestras de concreto. La fuerza que fractura cada muestra de forma cilíndrica, medida en kilogramos, está dada en la siguiente tabla:

	Muestra A	B	C	D	E	F
Prueba 1	110	125	98	95	104	115
Prueba 2	105	130	107	92	96	121

Prueba con un nivel de significancia de 0.05 si estas muestras difieren en su resistencia a la compresión.

12.12 Refiriéndonos a la exposición de la página 365, supón que las desviaciones estándar de los pesos de los revestimientos de estaño determinados por cada uno de los laboratorios tienen el valor común $\sigma = 0.012$, supón también que se desea detectar con una confianza del 95% alguna diferencia en las medias entre dos de los laboratorios en más de 0.01 libras en el fondo de la lata. Demuestra que estas suposiciones llevan a la decisión de enviar una muestra de 12 discos a cada laboratorio.

12.13 Demuestra que, si $\mu_i = \mu + \alpha_i$, y μ es la media de las μ_i, se sigue que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$.

12.14 Verifica las fórmulas para calcular SST y $SS(Tr)$ dadas en la página 372.

12.15 Establece y prueba un resultado análogo al teorema 12.1 para el caso de que el tamaño de la i-ésima muestra sea n_i, esto es, donde los tamaños muestrales no necesariamente son iguales.

12.16 El contenido de aflatoxina de algunas muestras de crema de cacahuate se prueba y se consiguen los siguientes resultados:

Contenido de aflatoxina (ppb)

Marca A	*Marca B*
0.5	4.7
0.0	6.2
3.2	0.0
1.4	10.5
0.0	2.1
1.0	0.8
8.6	
2.9	

(a) Emplea el análisis de variancia para probar si las dos marcas difieren en contenido de aflatoxina.
(b) Prueba la misma hipótesis usando una prueba t bimuestral.
(c) Puede comprobarse que el estadístico t con ν grados de libertad y el estadístico F con 1 y ν grados de libertad están relacionados por la fórmula

$$F(1, \nu) = t^2(\nu)$$

donde ν = grados de libertad. Con este resultado prueba que los métodos de análisis de variancia y la prueba t bimuestral son equivalentes en este caso.

12.3 DISEÑOS EN BLOQUES ALEATORIOS

Como observamos en la sección 12.1, la estimación de la variación aleatoria (el error experimental) a menudo puede reducirse, esto es, liberarse de la variabilidad debida a causas extrañas, dividiendo las observaciones de cada clasificación en bloques. Esto se logra cuando fuentes conocidas de variabilidad (es decir, variables extrañas) se mantienen fijas dentro de cada bloque, pero varían de bloque en bloque.

En la presente sección supondremos que el experimentador tiene a su disposición mediciones relativas a a tratamientos distribuidos sobre b bloques. En primer término, consideraremos el caso en que hay exactamente una observación de cada tratamiento en cada bloque; en relación con la ilustración de la página 368, este caso aparecería si cada laboratorio probara un disco de cada tira. Conviniendo en que y_{ij} denote la observación relativa el i-ésimo tratamiento y al j-ésimo bloque, $\bar{y}_{i.}$ la media de las b observaciones para el i-ésimo tratamiento, $\bar{y}_{.j}$ la media de las a observaciones en el j-ésimo bloque y $\bar{y}_{..}$ la gran media de las b observaciones, empleamos el siguiente esquema en esta clase de **clasificación con dos criterios:**

	Bloques							
	B_1	B_2	...	B_j	...	B_b		*Medias*
Tratamiento 1:	y_{11},	y_{12},	...,	y_{1j},	...,	y_{1b}		$\bar{y}_{1.}$
Tratamiento 2:	y_{21},	y_{22},	...,	y_{2j},	...,	y_{2b}		$\bar{y}_{2.}$
·	·	·	·	·	·	·		·
Tratamiento i:	y_{i1},	y_{i2},	...,	y_{ij},	...,	y_{ib}		$\bar{y}_{i.}$
·	·	·	·	·	·	·		·
Tratamiento a:	y_{a1},	y_{a2},	...,	y_{aj},	...,	y_{ab}		$\bar{y}_{a.}$
Medias	$\bar{y}_{.1}$	$\bar{y}_{.2}$	...	$\bar{y}_{.j}$	...	$\bar{y}_{.b}$		$\bar{y}_{..}$

Este tipo de esquema se denomina también diseño en bloques aleatorios, siempre que los tratamientos sean asignados al azar *dentro* de cada bloque. Nótese que, cuando un punto se usa en lugar de un subíndice, esto significa que la media se obtiene sumando sobre él.

El modelo fundamental que supondremos para el análisis de esta clase de experimento con una observación por "celda" (esto es, existe una observación correspondiente a cada tratamiento dentro de cada bloque) está dado por

Ecuación modelo para diseño de bloques aleatorios

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, a;\ j = 1, 2, \ldots, b$$

Aquí μ es la gran media, α_i es el efecto del i-ésimo tratamiento, β_j es el efecto del j-ésimo bloque y los ϵ_{ij} son valores de variables aleatorias *independientes normalmente distribuidas* que tienen *medias cero* y la *variancia común* σ^2. En forma semejante a lo que hicimos en el modelo para un criterio de clasificación, restringimos los parámetros imponiendo las condiciones de que $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$ y que $\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$ (véase el ejercicio 12.28 de la página 394).

En el análisis de clasificación con dos criterios cada tratamiento es representado una vez dentro de cada bloque, el objetivo principal consiste en probar la significancia de las diferencias entre las $\bar{y}_{i.}$, o sea probar la hipótesis nula

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_a = 0$$

Más aún, quizá convenga probar si la división en bloques ha sido eficaz, esto es, si la hipótesis es nula

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_b = 0$$

puede rechazarse. En cualquier caso, la hipótesis alterna establece que al menos uno de los efectos no es cero.

Como en el análisis de variancia con un criterio de clasificación, fundamentaremos esta prueba de significancia mediante comparaciones de σ^2 (una basada en la variación entre tratamientos, otra basada en la variación entre bloques y la última que mide el error experimental). Nótese que sólo el último es una estimación de σ^2 cuando cualquiera (o ambas) de las hipótesis nulas no son válidas. Las sumas de cuadrados requeridas son dadas por las tres componentes en que la suma de cuadrados total se divide por medio del siguiente teorema:

Identidad para análisis de una clasificación con dos criterios

Teorema 12.2

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij}-\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{.j}+\bar{y}_{..})^2 + b\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2 + a\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..})^2$$

El lado izquierdo de está identidad representa la suma de cuadrados total, *SST*, y los términos del lado derecho son, respectivamente, la suma de cuadrados del error, *SSE*, la suma de cuadrados entre tratamientos, *SS(Tr)* y la suma de cuadrados en bloque *SS(Bl)*. Para probar este teorema, empleamos la identidad

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})$$

y seguimos en esencia el mismo argumento de la demostración del teorema 12.1.

En la práctica, calculamos las sumas necesarias por medio de fórmulas que ahorran trabajo y que son análogas a las de la página 372, en lugar de usar las expresiones que definen estas sumas de cuadrados en el teorema 12.2. Inicialmente calcularemos *SST*, *SS(Tr)* y *SS(Bl)* por medio de las fórmulas

Sumas de cuadrados para el análisis de variancia de una clasificación con dos criterios

$$SST = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}^2 - C$$

$$SS(Tr) = \frac{\sum_{i=1}^{a} T_{i.}^2}{b} - C$$

$$SS(Bl) = \frac{\sum_{j=1}^{b} T_{.j}^2}{a} - C$$

donde C, que es el término de corrección, está dado por

$$C = \frac{T^2}{ab}$$

En estas fórmulas $T_{i.}$ es la suma de las b observaciones para el i-ésimo tratamiento, $T_{.j}$ es la suma de las a observaciones en el j-ésimo bloque y $T_{..}$ es el gran total de todas las observaciones. Notemos que los divisores de *SS(Tr)* y de *SS(Bl)* son el número de observaciones en los totales respectivos, $T_{i.}$ y $T_{.j}$. La suma de cuadrados del error se obtiene entonces por sustracción; de acuerdo con el teorema 12.2 podemos escribir

Suma de cuadrados del error

$$SSE = SST - SS(Tr) - SS(Bl)$$

En el ejercicio 12.29 de la página 294, se le pedirá al lector verificar que todas estas fórmulas sean, en realidad, equivalentes a los términos correspondientes de la identidad del teorema 12.2.

Empleando estas sumas de cuadrados, podemos rechazar la hipótesis nula de que las α_i son todas iguales a cero, con un nivel de significancia α si la

Razón F para tratamientos

$$F_{Tr} = \frac{MS(Tr)}{MSE} = \frac{SS(Tr)/(a-1)}{SSE/(a-1)(b-1)}$$

excede F_α con $a-1$ y $(a-1)(b-1)$ grados de libertad. La hipótesis nula de que todas las β_j son iguales a cero puede rechazarse con un nivel de significancia α si

Razón F para bloques

$$F_{Bl} = \frac{MS(Bl)}{MSE} = \frac{SS(Bl)/(b-1)}{SSE/(a-1)(b-1)}$$

excede a F_α con $b-1$ y $(a-1)(b-1)$ grados de libertad. Nótese que las medias de los cuadrados $MS(Tr)$, $MS(Bl)$ y MSE se definen otra vez como las correspondientes sumas de cuadrados divididas entre sus grados de libertad.

Los resultados de este análisis se resumen en la siguiente tabla de análisis de variancia:

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	F
Tratamientos	$a-1$	$SS(Tr)$	$MS(Tr) = \frac{SS(Tr)}{(a-1)}$	$F_{Tr} = \frac{MS(Tr)}{MSE}$
Bloques	$b-1$	$SS(Bl)$	$MS(Bl) = \frac{SS(Bl)}{(b-1)}$	$F_{Bl} = \frac{MS(Bl)}{MSE}$
Error	$(a-1)(b-1)$	SSE	$MSE = \frac{SSE}{(a-1)(b-1)}$	
Total	$ab-1$	SST		

EJEMPLO Se diseñó un experimento para estudiar el rendimiento de cuatro detergentes diferentes. Las siguientes lecturas de "blancura" se obtuvieron con un equipo especialmente deseñado para 12 cargas de lavado distribuidas en tres modelos de lavadoras:

	Lavadora 1	Lavadora 2	Lavadora 3	Totales
Detergente A	45	43	51	139
Detergente B	47	46	52	145
Detergente C	48	50	55	153
Detergente D	42	37	49	128
Totales	182	176	207	565

Considerando los detergentes como tratamientos y las lavadoras como bloques, obtenemos la tabla de análisis de variancia adecuada y probamos con un nivel de significancia de 0.01 si existen diferencias entre los detergentes o entre las lavadoras.

Solución

1. *Hipótesis nula:* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$; $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$
   Hipótesis alterna: No todas las α son iguales a cero; tampoco todas las β.
2. *Nivel de significancia:* $\alpha = 0.01$
3. *Criterio*: Para tratamientos, rechazamos la hipótesis nula si $F > 9.78$, el valor de $F_{0.01}$ con $a-1 = 4-1 = 3$ y $(a-1)(b-1) = (4-1)(3-1) = 6$ grados de libertad; para bloques, rechazamos la hipótesis nula si $F > 10.9$, el valor de $F_{0.01}$ para $b-1 = 3-1 = 2$ y $(a-1)(b-1) = (4-1)(3-1) = 6$ grados de libertad.
4. *Cálculos:* Sustituyendo $a = 4$, $b = 3$, $T_{1.} = 139$, $T_{2.} = 145$, $T_{3.} = 153$, $T_{4.} = 128$, $T_{.1} = 182$, $T_{.2} = 176$, $T_{.3} = 207$, $T_{..} = 565$ y $\sum\sum y_{ij}^2 = 26{,}867$ en las fórmulas para las sumas de cuadrados, obtenemos

$$C = \frac{(565)^2}{12} = 26{,}602$$

$$SST = 45^2 + 43^2 + \ldots + 49^2 = 26{,}867 - 26{,}602 = 265$$

$$SS(Tr) = \frac{139^2 + 145^2 + 153^2 + 128^2}{3} - 26{,}602 = 111$$

$$SS(Bl) = \frac{182^2 + 176^2 + 207^2}{4} - 26{,}602 = 135$$

$$SSE = 265 - 111 - 135 = 19$$

Después dividimos las sumas de cuadrados entre sus respectivos grados de libertad para obtener las sumas de cuadrados adecuadas, los resultados finales se indican en la siguiente tabla de análisis de variancia:

Fuente de variancia	*Grados de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Cuadrado medio*	*F*
Detergentes	3	111	37.0	11.6
Lavadoras	2	135	67.5	21.1
Error	6	19	3.2	
Total	11	265		

5. *Decisiones*: Dado que $F_{Tr} = 11.6$ sobrepasa 9.78, el valor de $F_{0.01}$ con 3 y 6 grados de libertad, concluimos que existen diferencias en la eficacia de los cuatro detergentes. También, puesto que $F_{Bl} = 21.1$ excede a 10.9, el valor de $F_{0.01}$ con 2 y 6 grados de libertad, concluimos que las diferencias entre los resultados obtenidos por las tres lavadoras son significativos, es decir, que la división en bloques fue eficaz. Con el fin de hacer resaltar aún mas el efecto de estos bloques, se le pedirá al lector verificar en el ejercicio 12.24 de la página 393 que la prueba de las diferencias entre los detergentes *no* produzca resultados significativos si consideramos los datos con un criterio de clasificación.

El efecto del *i*-ésimo detergente puede estimarse por medio de la fórmula $\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$, que se obtuvo por el método de mínimos cuadrados. Las estimaciones resultantes son:

$$\hat{\alpha}_1 = 46.3 - 47.1 = -0.8, \qquad \hat{\alpha}_2 = 48.3 - 47.1 = 1.2;$$
$$\hat{\alpha}_3 = 51.0 - 47.1 = 3.9, \qquad \hat{\alpha}_4 = 42.7 - 47.1 = -4.4$$

Cálculos similares nos llevan a que $\hat{\beta}_1 = -1.6$, $\hat{\beta}_2 = -3.1$, ya que $\hat{\beta}_3 = 4.7$ para los efectos estimados de las lavadoras.

Debería observarse que la clasificación con dos criterios de manera automática nos permite repetir las condiciones experimentales; por ejemplo, en el experimento anterior cada detergente fue probado tres veces. Un número mayor de repeticiones pueden manejarse en varias formas, y debemos tener presente que el modelo debe describir de manera aproximada la situación considerada. Una forma de considerar más repeticiones en la clasificación con dos criterios es incluir un número mayor de bloques (por ejemplo, probar cada detergente usando más lavadoras, aleatorizando el orden de prueba de cada máquina). Obsérvese que el modelo en esencia es el mismo que antes; la única diferencia es que se ha aumentado b, y un correspondiente incremento en los grados de libertad de los bloques y del error. Este último detalle es importante, debido a que un incremento en los grados de libertad del error hace que la prueba de la hipótesis nula $\alpha_i = 0$ para cada *i sea mas sensible* a pequeñas diferencias entre las medias de los tratamientos. En realidad, el objetivo real de esta clase de repetición es aumentar los grados de libertad del error, y por ende incrementar la sensibilidad de las pruebas F (véase el ejercicio 12.27 de la página 394).

Un segundo método consiste en repetir el experimento por completo, empleando un nuevo patrón de aleatorización para obtener $a \cdot b$ nuevas observaciones. Esto es posible sólo si los bloques son *identificables*, esto es, si las condiciones que definen a cada bloque pueden repetirse. Por ejemplo, en el experimento descrito en la sección 12.1, en que se pesaba el recubrimiento de estaño, los bloques son tiras transversales a la dirección en que una lámina de hojalata se desplaza hacia los rodillos; y, dada una nueva lámina es posible reconocer que se trata de la tira 1, de la tira 2, etc. En el ejemplo de esta sección, este tipo de repetición (denominado por lo general **duplicación**) requeriría que la operación de las lavadoras sea exactamente duplicada. Este tipo de repetición será usado en relación con los diseños de cuadros latinos de la sección 12.5; véase también los ejercicios 12.25 y 12.26 de la página 393.

Un tercer método de repetición es incluir n observaciones para cada tratamiento en cada bloque. Cuando se diseña un experimento en esta forma, las n observaciones en cada "celda" se condideran como duplicados y se espera que su variabilidad sea algo menor que el error experimental. Para ilustrar este punto, supongamos que los pesos de los recubrimientos de estaño de los tres discos de posiciones adyacentes en una tira se miden sucesivamente en uno de los laboratorios, empleando las mismas soluciones químicas. La variabilidad de estas mediciones probablemente sea considerada menor que la de tres discos de la misma tira medidos en esos laboratorios en distintas ocasiones, usando diferentes soluciones químicas y quizás distintos laboratoristas. El análisis de variancia adecuado para este tipo de repetición se reduce en esencia a un análisis de variancia con dos criterios aplicado a las *medias* de los n duplicados en las $a \cdot b$ celdas; así, *no habría* *ganancia en los grados de libertad del error*, y, en consecuencia, *ninguna ganancia en la sensibilidad de las pruebas F.* Puede esperarse, sin embargo, que halla alguna reducción en el error de la media cuadrada, dado que ahora mide la variancia residual de las *medias* de varias observaciones.

12.4 COMPARACIONES MÚLTIPLES

Las pruebas F utilizadas hasta ahora en este capítulo han indicado si las diferencias entre varias medias son significativas, pero no nos informaron si una media dada (o grupo de medias) diferieren en forma significativa de otra media considerada (o grupo de medias). En la práctica, esto último es la clase de información que un investigador en realidad desea; por ejemplo, habiendo determinado en la página 374 que las medias de los pesos de los recubrimientos de estaño obtenidos por los cuatro laboratoristas difieren de manera significativa, puede ser importante determinar qué laboratorio (o laboratoristas) difieren de los otros.

Si un experimentador tiene ante sí k medias, parece razonable en primer término probar diferencias significativas entre todos los pares posibles, esto es, efectuar

$$\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$$

pruebas t bimuestrales como se describen en la página 373. Aparte de que esto requeriría un gran número de pruebas aun cuando k sea relativamente pequeño, estas pruebas no serían independientes y sería casi imposible asignar un nivel de significancia global a este procedimiento.

Se han propuesto varias **pruebas de comparaciones múltiples** para salvar estas dificultades, entre ellas la **prueba del rango múltiple de Duncan**, que se estudiará en esta sección. (Referencias a otras pruebas de comparaciones múltiples aparecen en el libro de W. T. Federer citado en la bibliografía.) Las suposiciones básicas de las pruebas del rango múltiple de Duncan son, en esencia, las del análisis de variancia en una dimensión para tamaños muestrales iguales. La prueba compara el rango de cualquier conjunto de p medias con un apropiado **rango de mínima significancia**, R_p, dado por

Rango de mínima significancia

$$\boxed{R_p = s_{\bar{x}} \cdot r_p}$$

Aquí $s_{\bar{x}}$ es una estimación de $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$, y puede calcularse mediante la fórmula

Error estándar de la media

$$\boxed{s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{MSE}{n}}}$$

donde MSE es la media de los cuadrados del error en el análisis de variancia. El valor de r_p depende del nivel deseado de significancia y del número de grados de libertad correspondientes a la MSE, que se obtienen de las tablas 12(a) y (b) para $\alpha = 0.05$ y 0.01, para $p = 2, 3, \ldots, 10$, y para varios grados de libertad entre 1 y 120.

EJEMPLO Con respecto a los datos de los pesos del recubrimiento de estaño de la página 373, aplica una prueba de rango múltiple de Duncan para probar cuáles medias de los laboratorios difieren de las otras empleando un nivel de significancia de 0.05.

Solución En primer término ordenamos en un orden creciente de magnitud las cuatro medias muestrales como sigue:

Laboratorio	B	C	D	A
Media	0.227	0.230	0.250	0.268

A continuación calculamos $s_{\bar{x}}$, usando la media del error cuadrado 0.0015 que se obtuvo en el análisis de variancia de la página 373, y tenemos así

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{0.0015}{12}} = 0.011$$

Entonces, obtenemos (por interpolación lineal) de la tabla 12(a) los siguientes valores de r_p para $\alpha = 0.05$ y 44 grados de libertad:

p	2	3	4
r_p	2.85	3.00	3.09

Multiplicando cada valor de r_p por $s_{\bar{x}} = 0.011$, obtenemos finalmente

p	2	3	4
R_p	0.031	0.033	0.034

El rango de *las cuatro medias* es $0.268 - 0.227 = 0.041$, que excede a $R_4 = 0.034$, que es el rango significativo mínimo. Este resultado era de esperarse, dado que la prueba F de la página 374 indicó que las diferencias entre las cuatro medias eran significativas con $\alpha = 0.05$. Para probar si hay diferencias significativas entre *tres medias adyacentes*, obtenemos rangos de 0.038 y 0.023, respectivamente, para 0.230, 0.250, 0.268 y 0.227, 0.230, 0.250. Puesto que el primero de estos valores sobrepasa $R_3 = 0.033$, las diferencias observadas en el primer conjunto son significativas y dado que el segundo valor no sobrepasa 0.033, las diferencias correspondientes no son significativas. Por último en el caso de *parejas adyacentes* de medias encontramos que ningún par adyacente tiene un rango mayor que el rango significativo mínimo $R_2 = 0.031$. Todos estos resultados pueden resumirse escribiendo

$$\underline{0.227 \quad \underline{0.230 \quad 0.250} \quad 0.268}$$

donde se ha *dibujado una línea bajo cualquier conjunto de medias adyacentes para las cuales el rango es menor que un valor correspondiente de R_p, esto es, bajo cualquier conjunto de medias adyacentes para las cuales las diferencias no son significativas.* Concluimos así en nuestro ejemplo que el laboratorio A obtiene pesos medios del recubrimiento de estaño más altos que los laboratorios B y C.

Si aplicamos el mismo método al ejemplo de la sección 12.3, donde comparábamos los cuatro detergentes, obtenemos (véase también el ejercicio 12.30 de la página 394).

Detergente			
D	*A*	*B*	*C*
42.7	46.3	48.3	51.0

En otras palabras, entre las ternas de medias adyacentes ambos conjuntos de diferencias son significativos. Hasta ahora, por lo que a parejas de medias respecta, encontramos que sólo la diferencia entre 42.7 y 46.3 es significativa. Interpretando estos resultados, concluimos que el detergente D es significativamente inferior a cualquiera de los otros y que el detergente A es evidentemente inferior al detergente C.

EJERCICIOS

12.17 Un técnico laboratorista mide la resistencia a la ruptura de cinco clases de fibras textiles por medio de cuatro distintos instrumentos, y obtiene los siguientes resultados (en onzas):

	Instrumento de medición I_1	I_2	I_3	I_4
Fibra 1	20.6	20.7	20.0	21.4
Fibra 2	24.7	26.5	27.1	24.3
Fibra 3	25.2	23.4	21.6	23.9
Fibra 4	24.5	21.5	23.6	25.2
Fibra 5	19.3	21.5	22.2	20.6

Considerando las fibras como tratamientos y los instrumentos como bloques, realiza un análisis de varianza con un nivel de significancia de $\alpha = 0.01$.

12.18 Considerando a los días (renglones) como bloques, resuelve de nuevo el ejercicio 12.5 de la página 378 por el método de la sección 12.3.

12.19 Cuatro formas diferentes, y a pesar de ello supuestamente equivalentes, de un material estandarizado de una prueba vocacional fue aplicado a cinco estudiantes, los cuales obtuvieron las siguientes calificaciones:

	Estud. 1	Estud. 2	Estud. 3	Estud. 4	Estud. 5
Forma A	75	73	59	69	84
Forma B	83	72	56	70	92
Forma C	86	61	53	72	88
Forma D	73	67	62	79	95

Efectúa un análisis de varianza en dos dimensiones para probar con un nivel de significancia $\alpha = 0.01$ si es razonable manejar las cuatro formas como equivalentes.

12.20 Se desarrolló un experimento para juzgar el efecto que cuatro diferentes combustibles y dos tipos de lanzacohetes tienen sobre el alcance de cierto proyectil. Prueba, con base en los siguientes datos (en millas naúticas), si existen diferencias significativas (a) entre las medias obtenidas para los combustibles y (b) entre las medias obtenidas para los lanzacohetes:

	Combustible I	Combustible II	Combustible III	Combustible IV
Lanzacohetes X	62.5	49.3	33.8	43.6
Lanzacohetes Y	40.4	39.7	47.4	59.8

Emplea un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$.

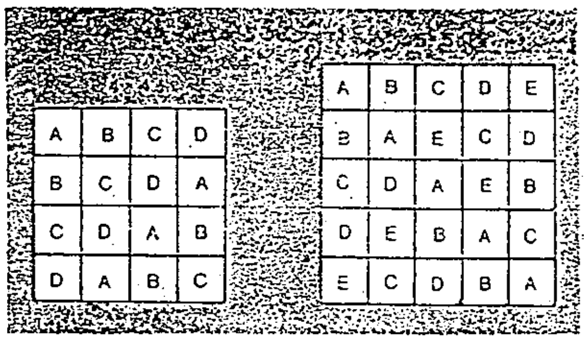


Figura 12.2 Cuadros latinos

experimental. Así, tales experimentos son efectuados en contadas ocasiones sin repetición cuando n es pequeña, esto es, sin repetir el patrón completo de cuadro latino varias veces. Si existe un total de r repeticiones, el análisis de los datos presupone el siguiente modelo, donde $y_{ij(k)l}$ es la observación en el i-ésimo renglón en la j-ésima columna de la l-ésima repetición, y el subíndice k, entre paréntesis, indica que corresponde al k-ésimo tratamiento:

Ecuación del modelo para cuadro latino

$$y_{ij(k)l} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \rho_l + \epsilon_{ij(k)l}$$

para $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ y $l = 1, 2, \ldots, r$, sujeta a las restricciones de que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0, \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 0, \sum_{k=1}^{n} \gamma_k = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{l=1}^{r} \rho_l = 0$$

Aquí μ es la gran media, α_i es el efecto del i-ésimo renglon, β_j es el efecto de la j-ésima columna, γ_k es el efecto del k-ésimo tratamiento, ρ_l es el efecto de la l-ésima repetición y los $\epsilon_{ij(k)l}$ son valores de variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con medias cero y la varianza común σ^2. Obsérvese que por "los efectos de los renglones" y "los efectos de las columnas" entenderemos los efectos de las dos variables extrañas, y que estamos incluyendo los efectos de repetición pues como veremos la repetición puede introducir una tercera variable extraña. Nótese también que el subíndice k está entre paréntesis en $y_{ij(k)l}$, debido a que, para un diseño de cuadro latino dado, k es automáticamente determinado cuando i y j se conocen.

La hipótesis principal que desearemos probar es la hipótesis nula $\gamma_k = 0$, para toda k, es decir, la hipótesis nula de que no existe diferencia en la eficacia de los n tratamientos. Sin embargo, podemos probar también si el "bloqueo cruzado" del diseño en cuadro latino ha sido eficaz; esto es, podemos probar las dos hipótesis nulas $\alpha_i = 0$ para toda i y $\beta_j = 0$ para toda j (contra las alternativas adecuadas), con el fin de comprobar si las dos variables extrañas en realidad tienen algún efecto sobre el fenómeno que se está considerando. Más aún, podemos probar la hipótesis nula $\rho_l = 0$ para toda l contra la alternativa de que no todas las ρ_l son iguales a cero, y esta prueba de los efectos de las repeticiones puede ser importante si las partes del experimento que representan los cuadros latinos individuales fueron realizadas en distintos días, por varios técnicos, a diferentes temperaturas, etc.

Las sumas de cuadrados requeridas para efectuar estas pruebas suelen obtenerse por medio de las siguientes fórmulas abreviadas, donde $T_{i..}$ es el total de las $r \cdot n$ observaciones en todos los i-ésimos renglones, $T_{.j.}$ es el total de las $r \cdot n$ observaciones en todas las j-ésimas columnas, $T_{..l}$ es el total de las n^2 observaciones en la l-ésima repetición, $T_{(k)}$ es el total de todas $r \cdot n$ observaciones relativas al k-ésimo tratamiento y $T_{...}$ es el gran total de todas las $r \cdot n^2$ observaciones:

Suma de cuadrados — cuadro latino

$$C = \frac{(T_{...})^2}{r \cdot n^2}$$

$$SS(Tr) = \frac{1}{r \cdot n} \sum_{k=1}^{n} T_{(k)}^2 - C$$

$$SSR = \frac{1}{r \cdot n} \sum_{i=1}^{n} T_{i..}^2 - C \qquad \text{(para renglones)}$$

$$SSC = \frac{1}{r \cdot n} \sum_{j=1}^{n} T_{.j.}^2 - C \qquad \text{(para columnas)}$$

$$SS(Rep) = \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^{r} T_{..l}^2 - C \qquad \text{(para repeticiones)}$$

$$SST = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} y_{ij(k)l}^2 - C$$

$$SSE = SST - SS(Tr) - SSR - SSC - SS(Rep)$$

Obsérvese de nuevo que cada divisor es igual al número de observaciones en los correspondientes totales cuadrados. Por último, los resultados del análisis son los que aparecen en la siguiente tabla de análisis de varianza:

$$SS(Rep) = \tfrac{1}{9}[(119.5)^2 + (120.5)^2] - 3200.0 = 0.1$$
$$SST = (14.0)^2 + (16.5)^2 + \ldots + (11.5)^2 - 3200. = 104.5$$
$$SSE = 104.5 - 49.1 - 41.3 - 0.2 - 0.1 = 13.8$$

y los resultados son como se indica en la tabla siguiente de análisis de variancia:

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	F
Tratamientos (métodos)	2	49.1	24.6	17.6
Renglones (operador)	2	0.2	0.1	0.1
Columnas (fundentes)	2	41.3	20.6	14.7
Repeticiones	1	0.1	0.1	0.1
Error	10	13.8	1.4	
Total	17	104.5		

5. *Decisión*: Por lo que respecta a tratamientos (métodos) y a columnas (fundentes), dado que $F = 17.6$ y 14.7 sobrepasan 7.56, las hipótesis nulas correspondientes deben rechazarse; para renglones (operadores), dado que $F = 0.1$ no excede 7.56, y para repeticiones, dado que $F = 0.1$ no excede a 10.00, la hipótesis nula correspondiente no puede rechazarse. En otras palabras, concluimos que las diferencias en los métodos y los fundentes, pero no en los operadores ni en las repeticiones, afectan a la resistencia de la soldadura de las terminales eléctricas. Más aún, la prueba de rango múltiple de Duncan de la sección 12.4 da el siguiente *patrón de decisión* con un nivel de significancia de 0.01.

	Método C	Método B	Método A
Media	11.0	14.4	14.6

En consecuencia, concluimos que el método C produce uniones con soldadura más débiles que los métodos A o B.

La eliminación de *tres* fuentes extrañas de variabilidad puede lograrse por medio de un diseño denominado **cuadro grecolatino**. Este diseño es un arreglo cuadrado de n letras latinas y n letras griegas, formando con ellas un cuadro latino; más exactamente cada letra latina aparece sólo una vez al lado de cada letra griega. A continuación se da un ejemplo de un cuadro grecolatino de 4 × 4:

$A\alpha$	$B\beta$	$C\gamma$	$D\delta$
$B\delta$	$A\gamma$	$D\beta$	$C\alpha$
$C\beta$	$D\alpha$	$A\delta$	$B\gamma$
$D\gamma$	$C\delta$	$B\alpha$	$A\beta$

La construcción de cuadros grecolatinos, también denominados **cuadros latinos ortogonales**, da lugar a interesantes problemas matemáticos, algunos de los cuales se mencionan en el libro de H. B. Mann citado en la bibliografía.

Con el objeto de dar un ejemplo en el cual podría ser adecuado el uso de un cuadro latino, supóngase que en el ejemplo de la soldadura la temperatura de ésta es otra fuente de variabilidad. Si tres temperaturas de soldado, denotadas por α, β y γ, se utilizan junto con los tres métodos, tres operadores (renglones) y tres fundentes (columnas), la repetición de un experimento apropiado de cuadro grecolatino puede establecerse de la siguiente manera:

	Fund. 1	Fund. 2	Fund. 3
Operador 1	$A\alpha$	$B\gamma$	$C\beta$
Operador 2	$C\gamma$	$A\beta$	$B\alpha$
Operador 3	$B\beta$	$C\alpha$	$A\gamma$

Así pues, el método A sería utilizado por el operador 1 usando fundente 1 a temperatura α, por el operador 2 con fundente 2 a temperatura β y por el operador 3 empleando fundente 3 a temperatura γ. En forma similar, el método B lo aplicaría el operador 1 usando fundente 2 y temperatura γ, etc.

En un cuadro grecolatino, cada variable (representada por renglones, columnas, letras latinas o letras griegas) está "distribuida equitativamente" respecto a las otras variables. Así, al comparar las medias obtenidas de una

		Operador				
		O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
Plástico	P_1	A 3.0	B 2.4	C 1.9	D 2.2	E 1.7
	P_2	B 2.1	C 2.7	D 2.3	E 2.5	A 3.1
	P_3	C 2.1	D 2.6	E 2.5	A 2.9	B 2.1
	P_4	D 2.0	E 2.5	A 3.2	B 2.5	C 2.2
	P_5	E 2.1	A 3.6	B 2.4	C 2.4	D 2.1

punto de partida al punto en que cayó la bola se midieron en yardas, como se indica a continuación:

Primera parte

	D_1	D_2	D_3
P_1	B 265	A 311	C 249
P_2	A 350	C 284	B 330
P_3	C 258	B 305	A 351

Segunda parte

	D_1	D_2	D_3
P_1	B 220	A 276	C 189
P_2	A 319	C 232	B 264
P_3	C 175	B 254	A 307

Tercera parte

	D_1	D_2	D_3
P_1	B 159	A 205	C 142
P_2	A 262	C 168	B 246
P_3	C 198	B 237	A 283

¿Es cualquiera de los diseños de bolas de golf superior a los otros con respecto a la distancia?

12.41 Con el fin de estudiar la eficacia de cinco clases de sistemas para fijar el asiento delantero de los automóviles, A, B, C, D y E, se realiza el siguiente experimento en cuadro latino. Los renglones representan diferentes tipos de automóviles (del subcompacto a los automóviles de tamaño más grande), las columnas representan diferentes velocidades de choque y las letras griegas $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ y ϵ indican diferentes ángulos de impacto. Los resultados del experimento están dados en términos de un índice de fuerzas en puntos críticos de la prueba simulada que están relacionados con la probabilidad de un accidente fatal.

$A\alpha$ 0.50	$B\beta$ 0.21	$C\gamma$ 0.43	$D\delta$ 0.35	$E\epsilon$ 0.46
$B\gamma$ 0.51	$C\delta$ 0.20	$D\epsilon$ 0.40	$E\alpha$ 0.25	$A\beta$ 0.39
$C\epsilon$ 0.45	$D\alpha$ 0.07	$E\beta$ 0.29	$A\gamma$ 0.20	$B\delta$ 0.31
$D\beta$ 0.39	$E\gamma$ 0.10	$A\delta$ 0.31	$B\epsilon$ 0.24	$C\alpha$ 0.27
$E\delta$ 0.43	$A\epsilon$ 0.17	$B\alpha$ 0.31	$C\beta$ 0.22	$D\gamma$ 0.32

Analiza este experimento.

12.42 Un fabricante de ropa necesita determinar cuál de cuatro diferentes diseños de aguja es mejor para sus máquinas de coser. Las fuentes de variabilidad que deben eliminarse para efectuar esta comparación son las máquinas que se utilizan, la operadora y el tipo de hilo. Con el diseño indicado (los renglones representan las operadoras, las columnas a las máquinas, las letras latinas a las agujas y las letras griegas indican los tipos de hilo), el fabricante anotó el número de prendas rechazadas al término de cada una de dos semanas, consiguiendo los siguientes resultados:

Primera semana

$D\gamma$ 47	$B\alpha$ 40	$A\beta$ 23	$C\delta$ 72
$C\beta$ 74	$A\delta$ 37	$B\gamma$ 28	$D\alpha$ 75
$A\alpha$ 52	$C\gamma$ 95	$D\delta$ 57	$B\beta$ 15
$B\delta$ 10	$D\beta$ 45	$C\alpha$ 93	$A\gamma$ 52

Segunda semana

$C\alpha$ 105	$A\gamma$ 38	$B\delta$ 15	$D\beta$ 60
$D\delta$ 70	$B\beta$ 20	$A\alpha$ 60	$C\gamma$ 85
$B\gamma$ 13	$D\alpha$ 82	$C\beta$ 90	$A\delta$ 28
$A\beta$ 33	$C\delta$ 75	$D\gamma$ 53	$B\alpha$ 31

Sumas de

Empleando un nivel de significancia de 0.05 determina si existe alguna diferencia en la eficacia de las agujas. También, investiga si existen diferencias significativas atribuibles a los operadores, a las máquinas y a los tipos de hilo.

12.43 Da un ejemplo de un diseño balanceado en bloques incompletos en el cual
(a) $n = 3$ y $k = 2$;
(b) $n = 4$ y $k = 3$;
(c) $n = 6$ y $k = 4$.
¿Cuál es el número mínimo de veces que cada tratamiento debe repetirse en cada uno de estos diseños?

12.6 ANÁLISIS DE COVARIANCIA

El objetivo de los métodos de las secciones 12.3 y 12.5 fue librar al error experimental de la variabilidad debida a causas extrañas identificables y controlables. En esta sección abordamos un método, denominado **análisis de covariancia**, que se aplica cuando esas variables extrañas, o **concomitantes**, no pueden mantenerse fijas pero pueden medirse. Esto sucedería, por ejemplo, si necesitamos comparar la eficacia de varios programas de capacitación industrial y los resultados que dependen del CI de los aprendices; si deseamos comparar la durabilidad de varios tipos de suelas de cuero y los resultados dependen del peso de las personas que utilizan los zapatos; si queremos comparar las cualidades de varios agentes limpiadores y los resultados dependen de las condiciones originales de las superficies que se pretende limpiar.

El método mediante el cual analizamos los datos de este tipo es una combinación del método de regresión lineal de la sección 11.1 y del análisis de variancia de la sección 12.2. El modelo fundamental está dado por

Ecuación modelo para el análisis de covariancia

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \delta x_{ij} + \epsilon_{ij}$$

para $i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Como en el modelo de la página 369, μ es la gran media, α_i es el efecto i-ésimo y las ϵ_{ij} son valores de variables aleatorias independientes distribuidas normalmente con medias cero y la variancia común σ^2; como en el modelo de la página 324 donde la llamamos β, δ es la pendiente de la ecuación de regresión lineal.

En el análisis de tales datos, los valores de la variable concomitante x_{ij}, son eliminados por métodos de regresión, es decir, estimando δ con el método de mínimos cuadrados, y después efectuando un análisis de variancia sobre las y ajustadas, esto es, las cantidades $y'_{ij} = y_{ij} - \hat{\delta} x_{ij}$. Este procedimiento recibe el nombre de análisis de covariancia, cuando requiere una partición de la suma de productos

$$SPT = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y})(x_{ij} - \bar{x})$$

en la misma forma que un análisis de variancia ordinario requiere la partición de la suma total de cuadrados. En la práctica, los cálculos se realizan de la siguiente manera:

1. El total, el tratamiento y la suma de cuadrados del error se calculan para las x por medio de las fórmulas de un criterio de clasificación mencionado en la página 372; serán denotados por SST_x, $SS(Tr)_x$, y SSE_x.
2. El total, el tratamiento y la suma de cuadrados del error se calculan para las y mediante las fórmulas de un criterio de clasificación mencionado en la página 372; serán denotados por SST_y, $SS(Tr)_y$, y SSE_y.
3. El total, el tratamiento y la suma de productos del error se calculan por medio de las fórmulas

Suma de productos—análisis de covariancia

$$SPT = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \cdot y_{ij} - C$$

$$SP(Tr) = \frac{\sum_{i=1}^{k} T_{x_i} \cdot T_{y_i}}{n} - C$$

$$SPE = SPT - SP(Tr)$$

donde el término de corrección, C, está dado

$$C = \frac{T_x \cdot T_y}{k \cdot n}$$

y donde T_{x_i} es el total de las x para el i-ésimo tratamiento, T_{y_i} es el total de las y para el i-ésimo tratamiento, T_x es el total de todas las x y T_y es el total de todas las y.

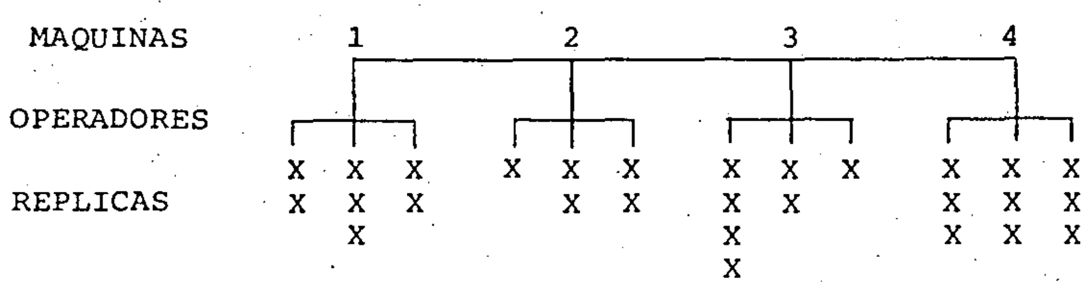
4. El total, el error y las sumas de cuadrados de tratamientos se calculan para las y ajustadas mediante las fórmulas

8. EXPERIMENTOS CON CLASIFICACION DE DOS FACTORES

EN OCASIONES NO INTERESA RELACIONAR AL FACTOR PRINCIPAL CON TODOS LOS NIVELES DEL FACTOR SECUNDARIO, POR LO CUAL A CADA NIVEL DEL FACTOR PRINCIPAL SE LE ASOCIA UN DIFERENTE CONJUNTO DE NIVELES DEL SECUNDARIO. EN TAL CASO SE TIENE UN EXPERIMENTO DE DOS FACTORES NO CRUZADO.

EN CAMBIO, CUANDO CADA NIVEL DEL FACTOR PRINCIPAL SE COMBINA CON TODOS LOS NIVELES DEL SECUNDARIO SE DICE QUE EL EXPERIMENTO ES DE DOS FACTORES CRUZADOS.

POR EJEMPLO, SI SE TIENE QUE EN UNA FABRICA SE DISPONE DE CUATRO MAQUINAS Y SE QUIERE ESTIMAR SU RENDIMIENTO, SE PUEDE DISEÑAR UN EXPERIMENTO EN EL QUE A CADA UNA SE LE ASIGNEN AL AZAR TRES OPERADORES. SI NO SE IDENTIFICA ALGUNA CARACTERISTICA DE LOS OPERADORES QUE SEÑALE LA CONVENIENCIA DE DISTINGUIRLOS EN TERMINOS DE ELLA, EL EXPERIMENTO CONSISTIRA EN REGISTRAR LOS RENDIMIENTOS INDIVIDUALES DE CADA PERSONA EN CADA VEZ QUE LA OPERE; ESTE EXPERIMENTO DE FACTORES NO CRUZADOS SE ILUSTRA EN LA SIGUIENTE FIGURA:



SI POR EL CONTRARIO, SE SABE QUE LOS OPERADORES TIENEN DI

FERENTE EXPERIENCIA EN EL USO DE MAQUINAS IGUALES A LAS DEL ESTUDIO, SERA NECESARIO DISEÑAR UN EXPERIMENTO CLASIFICANDOLOS EN TERMINOS DEL NIVEL DE EXPERIENCIA. SUPONGAMOS QUE ESTOS NIVELES SON 2, 4 Y 6 AÑOS DE EXPERIENCIA, Y QUE A CADA MAQUINA SE LE ASIGNEN AL AZAR. EL EXPERIMENTO RESULTANTE SERA DE DOS FACTORES CRUZADOS, EL CUAL SE PUEDE REPRESENTAR EN UNA TABLA COMO LA SIGUIENTE:

EXPERIENCIA	MAQUINAS			
	I	II	III	IV
2 AÑOS	X X	X	X X X X	X X X
4 AÑOS	X X X	X X	X X	X X X
6 AÑOS	X X	X X	X	X X X

EN ESTE EJEMPLO EL NUMERO DE REPLICAS ES DIFERENTE PARA CADA NIVEL DE COMBINACION MAQUINA-EXPERIENCIA. EL ANALISIS DE ESTOS EXPERIMENTOS SE SIMPLIFICA GRANDEMENTE SI PARA CADA CELDA SE OBTIENE IGUAL NUMERO DE REPLICAS, n

EXPERIMENTO CON DOS FACTORES NO CRUZADOS O JERARQUIZADO

MODELO PARAMETRICO (I)

EL MODELO PARAMETRICO PARA ANALIZAR ESTE TIPO DE EXPERIMENTOS ES

$$X_{tij} = \xi + \gamma_t + \delta_{ti} + Z_{tij} \qquad (1)$$

DONDE $j = 1, 2, \ldots, n_{ti}$, ES EL NUMERO DE OBSERVACIONES (REPLICAS) DEL t-ESIMO GRUPO

PRINCIPAL Y DEL i-ESIMO GRUPO SECUNDARIO (SUBGRUPO)

$i = 1, 2, \ldots, m_t$, ES EL NUMERO DE SUBGRUPOS EN EL t-ESIMO NIVEL PRINCIPAL

$t = 1, 2, \ldots, k$, ES EL NUMERO DE GRUPOS EN EL FACTOR PRINCIPAL

ξ MEDIA GLOBAL

γ_t ES EL EFECTO MEDIO DEL TRATAMIENTO t

δ_{ti} ES EL EFECTO MEDIO DEL i-ESIMO SUBGRUPO EN EL t-ESIMO GRUPO PRINCIPAL

z_{tij} ES EL RESIDUO O ERROR ALEATORIO CON VARIANCIA σ^2 Y MEDIA CERO

AL IGUAL QUE EN EL MODELO DE CLASIFICACION EN UNA DIRECCION, A ESTOS EFECTOS SE LES IMPONEN LAS SIGUIENTES CONDICIONES:

$$\sum_{t=1}^{k} N_{t.}\gamma_t = 0, \quad \sum_{i=1}^{m_t} n_{ti}\delta_{ti} = 0, \text{ PARA TODA } t \quad (N_{t.} = \sum_{i=1}^{m_t} n_{ti})$$

LOS PROMEDIOS ARITMETICOS QUE RESULTAN DE ESTE MODELO SON:

PARA LOS SUBGRUPOS: $\bar{X}_{ti.} = \xi + \gamma_t + \delta_{ti} + \bar{z}_{ti.}$ (2)

PARA LOS GRUPOS PRINCIPALES: $\bar{X}_{t..} = \xi + \gamma_t + \bar{z}_{t..}$ (3)

PARA LA MEDIA GLOBAL: $\bar{X}_{...} = \xi + \bar{z}_{...}$ (4)

AL DEDUCIR ESTAS DOS ULTIMAS ECUACIONES SE HACE USO DE LAS DOS CONDICIONES ANTERIORES IMPUESTAS A γ_t Y δ_{ti}.

A PARTIR DE LAS ECS (2), (3) Y (4) SE OBTIENEN LAS SIGUIENTES DESVIACIONES:

$$\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...} = \gamma_t + \bar{Z}_{t..} - \bar{Z}_{...}; \quad E(\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...}) = \gamma_t \qquad (5)$$

$$\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} = \delta_{ti} + \bar{Z}_{ti.} - \bar{Z}_{t..}; \quad E(\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..}) = \delta_{ti} \qquad (6)$$

$$X_{tij} - \bar{X}_{ti.} = Z_{tij} - \bar{Z}_{ti.}$$

POR LO ANTERIOR γ_t Y δ_{ti} SE PUEDEN ESTIMAR MEDIANTE LAS ESTADISTICAS:

$$\hat{\gamma}_t = \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...} \quad \text{Y} \qquad (8)$$

$$\hat{\delta}_{ti} = \bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} \quad \text{RESPECTIVAMENTE} \qquad (9)$$

LAS ESTADISTICAS PARA ANALIZAR LA INFORMACION DE UN EXPERIMENTO DE ESTE TIPO SE DEDUCEN DE LA SIGUIENTE PARTICION DE LA SUMA DE CUADRADOS:

$$\sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{...})^2 = SSP + SSPW + SSR = \sum_t N_{t.} (\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...})^2 +$$

$$+ \sum_t \sum_i n_{ti} (\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..})^2 +$$

$$+ \sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti.})2 \qquad (10)$$

LOS TERMINOS DEL MIEMBRO DERECHO SE DENOMINAN: SUMA DE CUADRADOS ENTRE GRUPOS PRINCIPALES, SUMA DE CUADRADOS ENTRE SUBGRUPOS DENTRO DE LOS GRUPOS PRINCIPALES, Y SUMA DE CUADRADOS RESIDUAL, RESPECTIVAMENTE.

LAS ESPERANZAS RESPECTIVAS SON:

ENTRE GRUPOS PRINCIPALES: $E(SSP) = (k-1)\sigma^2 + \sum_t N_{t.}\gamma_t^2$

ENTRE SUBGRUPOS DENTRO DE LOS GRUPOS PRINCIPALES:

$E(SSPW) = (\sum_t m_t - k)\sigma^2 + \sum_t \sum_i n_{ti}\delta_{ti}^2$

RESIDUAL: $E(SSR) = (N_{..} - \sum_t m_t)\sigma^2$; $(N_{..} = \sum_t \sum_i n_{ti})$

AL DIVIDIR ENTRE LOS NUMEROS CORRESPONDIENTES DE GRADOS DE LIBERTAD: $k-1$, $\sum_t m_t - k$ Y $N_{..} - \sum_t m_t$, SE OBTIENEN LOS RESPECTIVOS VALORES MEDIOS CUADRATICOS, A SABER

ENTRE GRUPOS PRINCIPALES: $E(MSP) = \sigma^2 + \frac{1}{k-1}\sum_t N_{t.}\gamma_t^2$ (11)

ENTRE SUBGRUPOS DENTRO DE LOS GRUPOS PRINCIPALES:

$$E(MSPW) = \sigma^2 + \frac{1}{\sum_t m_t - k}\sum_t \sum_i n_{ti}\delta_{ti}^2 \qquad (12)$$

RESIDUAL: $E(MSR) = \sigma^2$ (13)

COMPARANDO MSP CON MSR SE PUEDE PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_t = 0$ PARA TODA t. COMPARANDO MSPW CON MSR SE PUEDE PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE $\delta_{ti} = 0$ PARA TODA t e i. AMBAS COMPARACIONES SE HACEN MEDIANTE LA ESTADISTICA F:

$$F_P = MSP/MSR \qquad (14)$$

CON $k-1$ Y $N_{..} - \sum_t m_t$ GRADOS DE LIBERTAD.

$$F_{PW} = MSPW/MSR \tag{15}$$

CON $\sum_t m_t - k$ Y $N_{..} - \sum_t m_t$ GRADOS DE LIBERTAD.

SI SE DESEA PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE $\delta_{ti} = 0$ PARA $i = 1, 2, \ldots, m_t$, Y CADA t POR SEPARADO, SE USA LA VARIANCIA

$$S_t^2 = \frac{1}{m_t - 1} \sum_i n_{ti} (\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..})^2 \tag{16}$$

QUE TIENE COMO ESPERANZA A

$$\sigma^2 + (m_t - 1)^{-1} \sum_i n_{ti} \delta_{ti}^2 \tag{17}$$

POR LO QUE SE PUEDE COMPARAR, PARA CADA t, CON MSR MEDIANTE LA ESTADISTICA

$$F_t = S_t^2/MSR \tag{18}$$

CON $m_t - 1$ y $N_{..} - \sum_t m_t$ GRADOS DE LIBERTAD

TODO ESTO SE PUEDE RESUMIR EN UNA TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA.

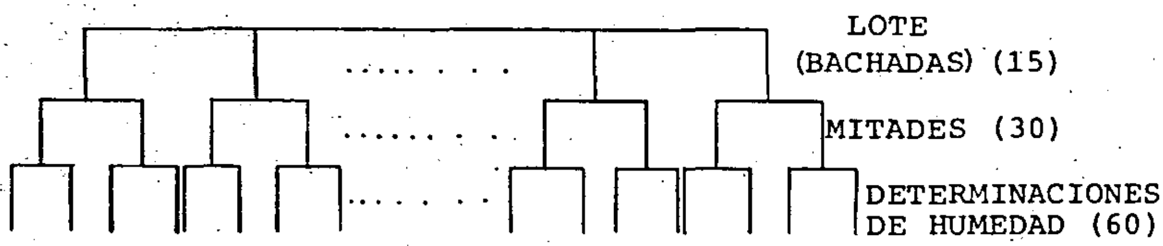
EN CASO DE QUE TODOS LOS SUBGRUPOS TENGAN IGUAL NUMERO DE OBSERVACIONES $n_{ti}=n$, Y DE QUE TODOS LOS GRUPOS PRINCIPALES TENGAN IGUAL NUMERO DE SUBGRUPOS $m_t=m$, DOS DE LOS GRADOS DE LIBERTAD SE PUEDEN ESCRIBIR DE LA SIGUIENTE MANERA

$$N_{..} - \sum_{t=1}^{k} m_t = kmn - km = km\,(n-1) \tag{19}$$

$$\sum_{t=1}^{k} m_t - k = km - k = k(m-1) \qquad (20)$$

EJEMPLO

EN EL PROCESO DE FABRICACION DE UN COLORANTE INTERVIENE COMO VARIABLE IMPORTANTE EL CONTENIDO DE HUMEDAD DEL PRODUCTO. SE QUIERE VERIFICAR SI EL METODO DE PRUEBA PARA MEDIR LA HUMEDAD INTRODUCE UNA VARIACION APRECIABLE EN LOS RESULTADOS QUE SE REPORTAN. PARA ESTO SE DISEÑO UN EXPERIMENTO NO CURZADO EN QUE EL FACTOR PRINCIPAL ES EL LOTE Y EL SECUNDARIO ES PARTE DEL LOTE; SE DISPUSO DE $k=15$ LOTES, CON DOS MITADES CADA UNO ($m_t=m=2$) Y SE HICIERON $n_{ti}=n=2$ DETERMINACIONES DE HUMEDAD DE CADA MUESTRA. HACER EL ANALISIS DE VARIANCIA DE ESTE EXPERIMENTO.



BACHADA	MUESTRA	HUMEDAD
1	1	40, 39
	2	30, 30
2	3	26, 28
	4	25, 26
3	5	29, 28
	6	14, 15
4	7	30, 31

BACHADA	MUESTRA	HUMEDAD
	8	24, 24
5	9	19, 20
	10	17, 17
6	11	33, 32
	12	26, 24
7	13	23, 24
	14	32, 33
8	15	34, 34
	16	29, 29
9	17	27, 27
	18	31, 31
10	19	13, 16
	20	27, 24
11	21	25, 23
	22	25, 27
12	23	29, 29
	24	31, 32
13	25	19, 20
	26	29, 30
14	27	23, 24
	28	25, 25
15	29	39, 37
	30	26, 28

t	i			$\overline{X}_{ti.}$	$\overline{X}_{t..}$
1	1	40	39	39.5	34.75
	2	30	30	30	
2	1	26	28	27	26.25
	2	25	26	25.5	
3	1	28	29	28.5	21.5
	2	14	15	14.5	
4	1	30	31	30.5	27.25
	2	24	24	24	
5	1	19	20	19.5	18.25
	2	17	17	17.0	
6	1	33	32	32.5	28.75
	2	26	24	25.0	
7	1	23	24	23.5	28
	2	32	33	32.5	
8	1	34	34	34.0	31.5
	2	29	29	29.0	
9	1	27	27	27	29
	2	31	31	31	
10	1	13	16	14.5	20
	2	27	24	25.5	
11	1	25	23	24	25
	2	25	27	26	
12	1	29	29	29	30.25
	2	31	32	31.5	
13	1	19	20	19.5	24.5
	2	29	30	29.5	
14	1	23	24	23.5	24.25
	2	25	25	25	
15	1	39	37	38.0	32.5
	2	26	28	27	

Donde $$\overline{X}_{ti.} = \frac{\sum_{j=1}^{2} X_{tij}}{n_{ti}} = \frac{\sum_{j=1}^{2} X_{tij}}{2}$$

$$\overline{X}_{t..} = \frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} X_{tij}}{N_{t.}} = \frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} X_{tij}}{4}$$

$$N_{..} = \sum_{t=1}^{15}\sum_{i=1}^{2} n_{ti} = \sum_{t=1}^{15}\sum_{i=1}^{2} 2 = 15x2x2=60$$

$$\sum_{t=1}^{15}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} X_{tij} = 40+39+30+30+26+28+\ldots+25+25+39+37+26+28=1607$$

$$\overline{X}_{...} = \frac{1607}{60} = 26.783$$

$$N_{t.} = \sum_{i=1}^{2} n_{ti} = 4$$

$$SSP = \sum_{t=1}^{15} N_{t.}(\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...})^2 = 4 \sum_{t=1}^{15} (\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...})^2$$

$$= 4\left[(34.75-26.783)^2 + (26.25-26.783)^2 + (21.5-26.783)^2 + \ldots + (32.5-26.783)^2\right]$$

$$= 4(63.47 + 0.28 + 27.91 + \ldots + 32.684) = 1211.0$$

$$SSPW = \sum_t \sum_i n_{ti}(\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..})^2 = 2 \sum_{t=1}^{15} \sum_{i=1}^{2} (\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..})^2$$

$$= 2\left[(39.5-34.75)^2 + (30-34.75)^2 + (27-26.25)^2 + (25.5-26.25)^2 + \ldots + (27-32.5)^2\right]$$

$$= 2\left[22.56 + 22.56 + \ldots\right]$$

$$= 2x424.88 = 869.7$$

$$\sum_{t=1}^{15} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} X_{tij}^2 = 40^2 + 39^2 + 30^2 + 30^2 + \ldots + 39^2 + 37^2 + 26^2 + 28^2$$

$$= 45149$$

$$kmn\bar{X}^2_{...} = 15x2x2x26.783^2 = 43040.82$$

$$SST = \sum_{t=1}^{15} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} X_{tij}^2 - kmn\bar{X}^2_{...} = 45149-43040.8 = 2108.2$$

$$SSR = SST-SSP-SSPW = 2108.2 - 1211.0 - 869.7 = 27.5$$

G. de L.: $k - 1 = 15 - 1 = 14$

$$\sum_{t=1}^{15} m_t - k = 15 \times 2 - 15 = 15$$

$$N_{..} - \sum_{t=1}^{15} m_t = 60 - 30 = 30$$

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA DE ESTE EXPERIMENTO ES:

FUENTE DE VARIACION	SUMA DE CUADRADOS	GRADOS DE LIBERTAD	MS	F
ENTRE BACHADAS	1211.0	14	86.6	92.2
ENTRE MITADES DE LOS GRUPOS PRINCIPALES	869.7	15	58.0	64.4
RESIDUO (ENTRE PRUEBAS)	27.5	30	0.9	
TOTAL	2108.2	59		

$$F_{0.01,14,30} = 2.75 < 92.2$$

$$F_{0.01,15,30} = 2.70 < 64.4$$

POR LO QUE SE RECHAZAN LAS HIPOTESIS DE QUE NO HAY EFECTOS DE BACHADAS Y DE MITADES A UN 99% DE NIVEL DE CONFIANZA. ADEMAS, AL COMPARAR LOS VALORES MEDIOS CUADRATICOS SE CONFIRMA QUE NO ES EL METODO DE PRUEBA, SINO LAS BACHADAS Y LAS MITADES LAS QUE INTRODUCEN LA MAYOR VARIABILIDAD DE LOS RESULTADOS, PUESTO QUE EL MS DEL RESIDUO ES MUY PEQUEÑO EN COMPARACION CON LOS OTROS DOS.

MODELO CON DOS FACTORES NO CRUZADOS. MODELO CON FACTORES ALEATORIOS (II)

SI TANTO EL FACTOR PRINCIPAL COMO EL SECUNDARIO SON VARIABLES ALEATORIAS Y EN EL EXPERIMENTO SOLO SE INCLUYEN ALGUNOS NIVELES (O VALORES) DE LAS MISMAS, ENTONCES EL MODELO ES DE FACTORES ALEATORIOS O MODELO II. EN ESTE CASO EL MODELO MATEMATICO PARA REPRESENTAR A CADA OBSERVACION, X_{tij}, ES:

$$X_{tij} = \xi + U_t + V_{ti} + Z_{tij} \tag{21}$$

DONDE U_t ES UNA VARIABLE ALEATORIA QUE REPRESENTA EL EFECTO MEDIO DEL FACTOR PRINCIPAL, V_{ti} ES OTRA VARIABLE ALEATORIA QUE REPRESENTA AL EFECTO MEDIO DEL I-ESIMO SUBGRUPO EN EL T-ESIMO GRUPO PRINCIPAL. ξ Y Z_{tij} TIENEN EL MISMO SIGNIFICADO QUE EN EL SUBCAPITULO ANTERIOR. SE SUPONE QUE U_t, V_{ti} Y Z_{tij} SON INDEPENDIENTES ENTRE SI, CON DISTRIBUCION NORMAL Y QUE $E(U_t) = 0$, $E(V_{ti}) = 0$ Y $E(Z_{tij} = 0)$; PARA LAS VARIANCIAS USAREMOS LOS SIGUIENTES SIMBOLOS:

$$\text{Var } (U_t) = \sigma_u^2; \quad \text{Var } (V_{ti}) = \sigma_v^2$$

CON ESTE MODELO SE TIENE QUE:

$$\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...} = U_t - \bar{U} + \bar{V}_{t.} - \bar{V}_{..} + \bar{Z}_{t..} - \bar{Z}_{...} \tag{22}$$

$$\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} = V_{ti} - \bar{V}_{t.} + \bar{Z}_{ti.} - \bar{Z}_{t..} \tag{23}$$

$$X_{tij} - \bar{X}_{ti.} = Z_{tij} - \bar{Z}_{ti.} \tag{24}$$

DONDE

$$\bar{U} = \sum_{t=1}^{k} N_{t.} U_t / N_{..}\,, \quad \bar{V}_{t.} = \sum_{i=1}^{m_t} n_{ti} V_{ti} / N_{t.}\,, \quad \bar{V}_{..} = \sum_{t=1}^{k} N_t \bar{V}_{t.} \tag{25}$$

EN ESTE CASO LA DESCOMPOSICION DE CUADRADOS CONDUCE A LOS SIGUIENTES VALORES MEDIOS CUADRATICOS:

$$E\left\{\frac{\sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti.})^2}{N_{..} - \sum_t m_t}\right\} = E(MSR) = \sigma^2 \tag{26}$$

$$E\left\{\frac{\sum_t N_{t.} (\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...})^2}{k-1}\right\} = E(MSP) = \sigma^2 + \frac{\sum_t (N_{t.}^{-1} - N_{..}^{-1}) \sum_i n_{ti}^2}{k-1} \sigma_v^2 + \frac{N_{..} - \sum_t N_{t.}^2 / N_{..}}{k-1} \sigma_u^2 \tag{27}$$

$$E\left\{\frac{\sum_t \sum_i n_{ti} (\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..})^2}{\sum_t m_t - k}\right\} = E(MSPW) = \sigma^2 + \frac{N_{..} - \sum_t N_{t.}^{-1} \sum_i n_{ti}^2}{\sum_t m_t - k} \sigma_v^2 \tag{28}$$

EN ESTAS ECUACIONES SE OBSERVA QUE SI $\sigma_v^2 = 0$, ENTONCES E(MSR) = E(MSPW), POR LO QUE PARA PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE $\sigma_v^2 = 0$ BASTA FORMULAR LA ESTADISTICA

$$F_{PW} = MSPW/MSR \tag{29}$$

QUE TIENE DISTRIBUCION F CON $(\sum m_t - k)$ Y $(N_{..} - \sum_t m_t)$ GRADOS DE LIBERTAD.

POR SU PARTE LA HIPOTESIS DE QUE $\sigma_u^2 = 0$ NO SE PUEDE PROBAR COM

PARANDO MSP CON MSR, YA QUE EN E(MSP) INTERVIENEN TANTO σ_u^2 COMO σ_v^2. EN EL CASO PARTICULAR DE QUE $n_{ti}=n$ PARA TODO t E i, ENTONCES $N_{t.}=m_t n$ Y:

$$E(MSP) = \sigma^2 + n^2\sigma_v^2 + \frac{(\sum_t m_t)^2 - \sum_t m_t^2}{(k-1) \sum_t m_t} n\sigma_u^2 \qquad (30)$$

$$E(MSPW) = \sigma^2 + n\sigma_v^2 \qquad (31)$$

POR LO QUE LA HIPOTESIS DE QUE $\sigma_u^2=0$ SE PUEDE PROBAR COMPARANDO MSP CON MSPW MEDIANTE LA ESTADISTICA

$$F_P = MSP/MSPW \qquad (32)$$

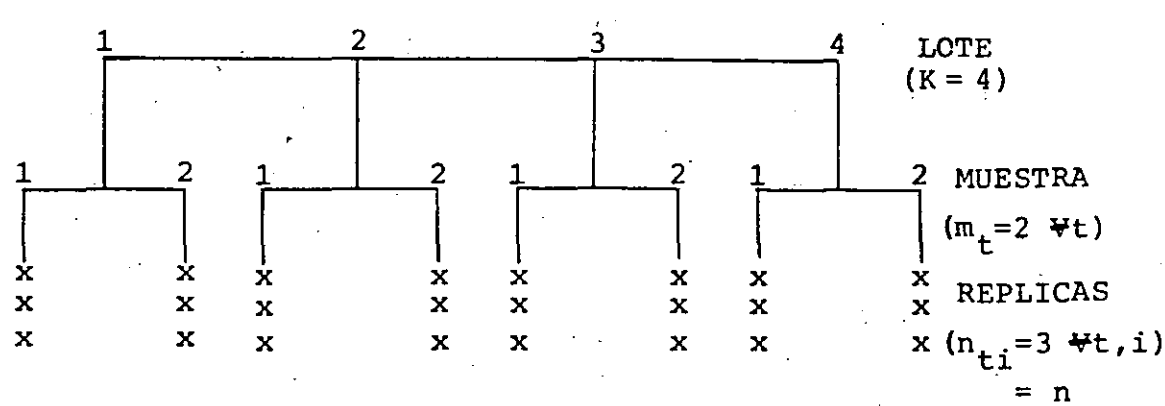
QUE TIENE DISTRIBUCION F CON $(k-1)$ y $(\sum_t m_t - k)$ GRADOS DE LIBERTAD.

EJEMPLO

SE MUESTREARON CUATRO LOTES DE HULE CRUDO. DE CADA LOTE SE TOMARON DOS MUESTRAS. TRES PRUEBAS INDEPENDIENTES DE ESPECIMENES SE PREPARARON Y ANALIZARON PARA CADA UNO. ABAJO SE MUESTRAN LOS DATOS QUE DAN EL MODULO DE ELASTICIDAD OBTENIDO EN PORCENTAJE. CONSIDERE QUE SE APLICA EL MODELO DE VARIANCIA DE UNA COMPONENTE, CONSTRUYA LA TABLA ANOVA (ANALISIS DE VARIANCIA). USANDO LA TABLA OBTENGA ESTIMACIONES DE LA VARIANCIA DE CADA COMPONENTE.

LOTE O BACHADA	MODULO DE ELASTICIDAD (%) 1	2	3	4
MUESTRA 1	560	600	600	680
	580	640	610	700
	600	620	640	730
MUESTRA 2	660	580	580	720
	610	630	660	770
	600	670	620	740

SOLUCION



SE TRATA DE UN EXPERIMENTO CON DOS FACTORES NO CRUZADOS.

LAS ECUACIONES A EMPLEAR SON

$$SST = \sum_{tij}\sum\sum (X_{tij} - \overline{X}_{...})^2 = \sum_{tij}\sum\sum X_{tij}^2 - kmn\,\overline{X}^2_{...}$$

$$SSP = \sum_{t} N_{t.} (\overline{X}_{t..} - \overline{X}_{...})^2$$

$$SSPW = \sum_{ti}\sum n_{ti} (\overline{X}_{ti.} - \overline{X}_{t..})^2$$

$$SSR = \sum_{tij}\sum\sum (X_{tij} - \overline{X}_{ti})^2 = SST - SSP - SSPW$$

APLICANDO LAS ECUACIONES TENEMOS

k = 4

m = 2

n = 3

LOTE O BACHADA	MUESTRA	MODULO DE ELASTICIDAD X_{tij}	X^2_{tij}	$\bar{X}_{ti.}$	$\bar{X}_{t..}$	$(\bar{X}_{ti.}-\bar{X}_{t..})^2$	$(X_{t..}-\bar{X}_{...})^2$
1	1	560	313600	580.0	601.6667	469.444	1599.99
		580	336400				
		600	360000				
	2	660	435600	623.333		469.444	
		610	372100				
		600	360000				
2	1	600	360000	620.0	623.333	11.1111	336.11
		640	409600				
		620	384400				
	2	580	336400	626.667		11.1111	
		630	396900				
		670	448900				
3	1	600	360000	616.667	618.333	2.7778	560.11
		610	372100				
		640	409600				
	2	580	336400	620.0		2.7778	
		660	435600				
		620	384400				
4	1	680	462400	703.333	723.333	400.0001	6615.11
		700	490000				
		730	532900				
	2	720	518400	743.333		400.0001	
		770	592900				
		740	547600				
TOTALES		15,400	9956200			1766.667	9111.33

$\overline{X}_{...} = 15400/24 = 641.6667$

$kmn = 4 \times 2 \times 3 = 24$

$SST = \sum_{tij}\sum\sum X^2_{tij} - kmn\,\overline{X}^2_{...}$

$\sum_{tij}\sum\sum X^2_{tij} = 560^2+580^2+600^2+660^2+610^2+600^2+600^2+640^2+620^2+580^2+630^2+670^2+$

$600^2+610^2+640^2+580^2+660^2+620^2+680^2+700^2+730^2+720^2+770^2+740^2 =$

$2{,}177{,}700+2{,}336{,}200+2{,}298{,}100+3{,}144{,}200 = 9{,}956{,}200$

$SST = 9{,}956{,}200 - 24(641.667)^2 = 74{,}533.33$

$SSP = 6(9111.33) = 54{,}667.98$

$SSPW = 3(1766.667) = 5{,}300.00$

$SSR = SST - SSP - SSPW = 74{,}533.33 - 54{,}667.98 - 5{,}300.00 = 14{,}565.35$

$MSP = \frac{SSP}{k-1} = \frac{54{,}667.98}{4-1} = 18{,}222.66$

$MSPW = \frac{SSPW}{k(m-1)} = \frac{5300.00}{4(2-1)} = 1{,}325.00$

$MSR = \frac{SSR}{km(n-1)} = \frac{14{,}565.35}{4x2(3-1)} = 910.33$

DE TABLAS PARA UN 99% DE

NIVEL DE CONFIANZA

$F_{PW} = \frac{MSPW}{MSR} = \frac{1{,}325.00}{910.33} = 1.46 \quad < \quad F_{0.01,4,16} = 4.77$

$F_{P} = \frac{MSP}{MSPW}\ \frac{18{,}222.66}{1{,}325.00} = 13.75 \quad < \quad F_{0.01,3,4} = 16.69$

POR LO TANTO, PARA LOS SUBGRUPOS SE ACEPTA LA HIPOTESIS, O SEA NO HAY DIFERENCIA SIGNIFICATIVA ENTRE LAS MUESTRAS A UN NIVEL DE CONFIANZA DE 99%. PARA LOS LOTES SE ACEPTA LA HIPOTESIS, O SEA NO HAY DIFERENCIA SIGNIFICATIVA ENTRE LOTES A UN NIVEL DE CONFIANZA DE 99%.

ANOVA

FUENTE DE VARIACION	SS	GRADOS DE LIBERTAD	MS	F (CALC)	F (DE TABLAS) (α = 0.01)
ENTRE LOTES O BACHADAS	SSP=54,667.98	k - 1 3	MSP=18,222.66	F_p=13.75<	16.69
ENTRE PARTES DE LAS BACHADAS	SSPW=5,300.00	k(m-1) 4	MSPW=1,325.00	F_{PW}=1.46<	4.77
RESIDUAL (ENTRE PRUEBAS)	SSR=14,565.35	km(n-1) 16	MSR=910.33		
TOTAL	74,533.33	23			

$F_{3,4,0.99} = 16.69, \quad F_{4,16,0.99} = 4.77$

ESTIMACIONES DE LAS VARIANCIAS DE CADA COMPONENTE

PUESTO QUE $E(MSR) = \sigma^2$, SE TIENE

$\hat{\sigma}^2 = MSR = 910.33$

DE LA EC 31, $\sigma_V^2 = (E(MSPW) - \sigma^2)/n$, POR LO QUE

$\hat{\sigma}_V^2 = (MSPW - MSR)/n = (1325.00 - 910.33)/3 = 138.22$

RESTANDO LA EC. 31 A LA EC. 30:

$$E(MSP) - E(MSPW) = \frac{(\underset{t}{\Sigma} m_t)^2 - \Sigma m_t^2}{(k-1)\Sigma m_t} n\sigma_u^2 = sn\sigma_u^2$$

POR LO QUE

$$\sigma_u^2 = \{E(MSP) - E(MSPW)\}/sn$$

Y

$$\hat{\sigma}_u^2 = (MSP - MSPW)/sn$$

EN NUESTRO PROBLEMA

$$S = \frac{8^2 - 4 \times 4}{3 \times 8} = 2$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = (18,222.66 - 1325.00)/6 = 2816.28$$

9. EXPERIMENTO CON DOS FACTORES CRUZADOS. MODELO PARAMETRICO

EL MODELO PARA REPRESENTAR LA j-ESIMA OBSERVACION, X_{tij}, CORRESPONDIENTE AL NIVEL t DEL PRIMER FACTOR Y AL NIVEL i DEL SEGUNDO FACTOR ES

$$X_{tij} = \xi + \rho_t + \kappa_i + (\rho\kappa)_{ti} + Z_{tij} \tag{1}$$

DONDE ρ_t Y κ_i SON EL EFECTO DEL t-ESIMO NIVEL (RENGLON) DEL PRIMER FACTOR Y DEL i-ESIMO NIVEL (COLUMNA) DEL SEGUNDO FACTOR, RESPECTIVAMENTE, $(\rho\kappa)_{ti}$ ES EL EFECTO DE INTERACCION DE LOS DOS FACTORES EN SUS NIVELES t E i, Y Z_{tij} ES EL RESIDUO, ERROR O EFECTO NO EXPLICABLE POR LOS FACTORES; LAS Z_{tij} SON VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES CON DISTRIBUCION NORMAL DE MEDIA CERO E IDENTICA VARIANCIA, σ^2.

SI $t = 1, 2, \ldots, r$, E $i = 1, 2, \ldots, c$, SE DICE QUE SE TIENE UN EXPERIMENTO CRUZADO rxc; SE DICE QUE ESTE ES ORTOGONAL SI TIENE IGUAL NUMERO DE DATOS EN CADA CELDA (t, i), Y SI TODOS ESTOS SON RESULTADO DE OBSERVACIONES INDEPENDIENTES DE UNA POBLACION CON DISTRIBUCION NORMAL.

PUESTO QUE EL TOTAL DE PARAMETROS INVOLUCRADOS EN LA EC (1) PARA PRESENTAR A rc VALORES ESPERADOS ES 1 + r + c + rc, ES NECESARIO IMPONER OTRAS r + c + 1 CONDICIONES; ELLAS SON:

$$\sum_{t=1}^{r} \rho_t = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{c} \kappa_i = 0 \tag{3}$$

$$\sum_{t=1}^{r} (\rho\kappa)_{ti} = 0 \quad \text{PARA TODA } i \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{c} (\rho\kappa)_{ti} = 0 \quad \text{PARA TODA } t \tag{5}$$

EN DONDE HAY $r + c + 2$ CONDICIONES, PERO UNA DE LAS DE LA EC (5) ES REDUNDANTE ($\sum_{i=1}^{c} (\rho\kappa)_{ri}$), YA QUE QUEDA OBLIGADA EN TERMINOS DE LAS $r + c - 1$ CONDICIONES RESTANTES IMPUESTAS POR LAS ECS (4) y (5).

DE ACUERDO CON ESTE MODELO SE OBTIENEN LOS SIGUIENTES PROMEDIOS:

PROMEDIO POR RENGLONES: $\bar{X}_{t..} = \xi + \rho_t + \bar{Z}_{t..}$ (6)

PROMEDIO POR COLUMNAS: $\bar{X}_{.i.} = \xi + \kappa_i + \bar{Z}_{.i.}$ (7)

PROMEDIO POR CELDAS: $\bar{X}_{ti.} + \xi + \rho_t + \kappa_i + (\rho\kappa)_{ti} + \bar{Z}_{ti}$ (8)

PROMEDIO GLOBAL: $\bar{X}_{...} = \xi + \bar{Z}_{...}$ (9)

LOS EFECTOS DE CADA PARAMETRO SE PUEDEN SEPARAR MEDIANTE LAS ESTADISTICAS, QUE SE OBTIENEN CON LAS ECUACIONES (6) A (9):

$$\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...} = \rho_t + \bar{Z}_{t..} - \bar{Z}_{...};\ E(\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...}) = \rho_t \tag{10}$$

$$\bar{X}_{.i.} - \bar{X}_{...} = \kappa_i + \bar{Z}_{.i.} - \bar{Z}_{...};\ E(\bar{X}_{.i.} - \bar{X}_{...}) = \kappa_i \tag{11}$$

$$\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{.i.} + \bar{X}_{...} = (\rho\kappa)_{ti} + \bar{Z}_{ti.} - \bar{Z}_{t..} - \bar{Z}_{.i.} + \bar{Z}_{...}$$

$$E(\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{.i.} + \bar{X}_{...}) = (\rho\kappa)_{ti} \tag{12}$$

$$X_{tij} - \bar{X}_{ti.} = Z_{tij} - \bar{Z}_{ti.};\ E(X_{tij} - \bar{X}_{ti.}) = 0 \tag{13}$$

PARA ANALIZAR LAS FUENTES DE VARIABILIDAD DE LOS DATOS, LA SUMA DE CUADRADOS SE PUEDE DIVIDIR, EN UNA PRIMERA ETAPA, EN LA SUMA DE CUADRADOS ENTRE CELDAS Y DENTRO DE LAS CELDAS:

$$\sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{...})^2 = \underbrace{\sum_t \sum_i n_{ti}(\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{...})^2}_{\text{ENTRE CELDAS}} + \underbrace{\sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti.})^2}_{\text{DENTRO DE LAS CELDAS}} \quad (14)$$

UTILIZANDO LA EC (13) SE DEMUESTRA QUE

$$E\{\text{SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE LAS CELDAS}\} = E\{\sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti.})^2\} =$$

$$= (N_{..} - rc)\sigma^2 \quad (15)$$

POR LO QUE EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD DE LA SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE LAS CELDAS ES $(N_{..} - rc)$ Y, POR LO TANTO, LA ESTADISTICA VALOR MEDIO CUADRATICO DENTRO DE LAS CELDAS O RESIDUAL:

$$MSR = \sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti.})^2/(N_{..} - rc) \quad (16)$$

ES UN ESTIMADOR INSESGADO DE σ^2.

LA SUMA DE CUADRADOS ENTRE CELDAS SE PUEDE DIVIDIR EN TRES PARTES SOLO SI LAS n_{ti} SON IGUALES PARA TODA CELDA $(n_{ti}=n)$, O SI SE SATISFACEN CIERTAS CONDICIONES DE PROPORCIONALIDAD*; AQUI SOLO TRATAREMOS EL PRIMERO DE ESTOS CASOS, EN EL QUE SE OBTIENE:

$$n \sum_t \sum_i (\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{...})^2 = \underbrace{nc \sum_t (\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...})^2}_{\text{ENTRE RENGLONES = SSBR}} +$$

*BANCROFT, T. A., "TOPICS IN INTERMEDIATE STATISTICAL METHODS", IOWA UNIVERSITY PRESS, 1968.

$$+\underbrace{nr\sum_{i}(\bar{X}_{.i.}-\bar{X}_{...})^2}_{\text{ENTRE COLUMNAS} = SSBC}+\underbrace{n\sum_{t}\sum_{i}(\bar{X}_{ti.}-\bar{X}_{t..}-\bar{X}_{.i.}+\bar{X}_{...})^2}_{\text{INTERACCION} = SSI} \quad (17)$$

LAS ESPERANZAS DE LOS TERMINOS DEL MIEMBRO DERECHO DE LA EC (17) SON:

ENTRE RENGLONES: $E(SSBR) = (r-1)\sigma^2 + nc\sum_{t}\rho_t^2$ (18)

ENTRE COLUMNAS: $E(SSBC) = (c-1)\sigma^2 + nr\sum_{i}\kappa_i^2$ (19)

INTERACCION: $E(SSI) = (r-1)(c-1)\sigma^2 + n\sum_{t}\sum_{i}(\rho\kappa)_{ti}^2$ (20)

POR LO QUE LOS GRADOS DE LIBERTAD RESPECTIVOS SON $(r-1)$, $(c-1)$ Y $(r-1)(c-1)$; EN ESTAS CONDICIONES LOS <u>VALORES MEDIOS CUADRATICOS</u> SON:

ENTRE RENGLONES: $E(MSBR) = \sigma^2 + (r-1)^{-1}\, nc\sum_{t}\rho_t^2$ (21)

ENTRE COLUMNAS: $E(MSBC) = \sigma^2 + (c-1)^{-1}\, nr\sum_{i}\kappa_i^2$ (22)

INTERACCION: $E(MSI) = \sigma^2 + (r-1)^{-1}(c-1)^{-1}\, n\sum_{t}\sum_{i}(\rho\kappa)_{ti}^2$ (23)

POR LO ANTERIOR, LA PRUEBA DE HIPOTESIS DE QUE $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_r = 0$ SE PUEDE HACER <u>PROBANDO LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE VARIANCIAS ENTRE RENGLONES Y RESIDUAL</u>, PARA LO CUAL SE UTILIZA LA ESTADISTICA

$$F = MSBR/MSR \quad (24)$$

QUE TIENE DISTRIBUCION F CON (r-1) Y ($N_{\cdot\cdot}$ -rc) = rc(n-1) GRADOS DE LIBERTAD.

ASIMISMO, LA PRUEBA DE HIPOTESIS DE QUE $\kappa_1 = \kappa_2 = \ldots \kappa_c = 0$ SE PUEDE HACER PROBANDO LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE VARIANCIAS ENTRE COLUMNAS Y RESIDUAL, CON LA ESTADISTICA

$$F = MSBC/MSR \tag{25}$$

QUE TIENE DISTRIBUCION F CON (c-1) Y rc(n-1) GRADOS DE LIBERTAD.

LA PRUEBA DE HIPOTESIS DE INTERACCION NULA, O SEA, DE QUE $(\rho\kappa)_{ti} = 0$ PARA TODA t E i SE PRUEBA CON

$$F = MSI/MSR \tag{26}$$

QUE TIENE DISTRIBUCION F CON (r-1)(c-1) Y rc(n-1) GRADOS DE LIBERTAD.

EN EL CASO PARTICULAR DE UNA OBSERVACION POR CELDA (n=1), NO SE REQUIERE EL TERCER INDICE (j) Y EL MODELO ES

$$X_{ti} = \xi + \rho_t + \kappa_i + (\rho\kappa)_{ti} + Z_{ti} \tag{27}$$

EN ESTAS CONDICIONES NO SE OBTIENE NINGUNA SUMA DE CUADRADOS RESIDUAL Y NO ES POSIBLE ESTIMAR A σ^2 DE MANERA SEPARADA DE ρ_t, κ_i Y $(\rho\kappa)_{ti}$ Y, EN CONSECUENCIA, NO SE PUEDEN HACER LAS COMPARACIONES DE VARIANCIAS DADAS POR LAS ECS (24), (25) Y (26). PARA SALVAR ESTE OBSTACULO EL MODELO DE LA EC (27) SE REDUCE A

$$X_{ti} = \xi + \rho_t + \kappa_i + Z_{ti} \tag{28}$$

EL CUAL IMPLICA QUE $(\rho\kappa)_{ti} = 0$ PARA TODA t E i, ES DECIR, QUE NO HAY INTERACCION ENTRE LOS PARAMETROS; EN ESTE CASO LA ESTADISTICA

$$\sum_t \sum_i (X_{ti} - \bar{X}_{t.} - \bar{X}_{.i} + \bar{X}_{..})^2/(r-1)(c-1) \tag{29}$$

ES EL VALOR MEDIO CUADRATICO RESIDUAL, MSR.

EL EXPERIMENTO DE BLOQUES ALEATORIZADOS VISTO ANTERIORMENTE ES, COMO PUEDE VERSE, EL CASO PARTICULAR DE UN EXPERIMENTO DE DOS FACTORES CRUZADOS CON n=1.

FORMULAS SIMPLIFICADAS PARA LAS SUMAS DE CUADRADOS (SS)

TOTAL: $$SST = \sum_t \sum_i \sum_j X^2_{tij} - nrc\bar{X}^2_{...} \tag{30}$$

ENTRE RENGLONES: $$SSBR = nc\sum_t \bar{X}^2_{t..} - nrc\bar{X}^2_{...} \tag{31}$$

ENTRE COLUMNAS: $$SSBC = nr\sum_i \bar{X}^2_{.i.} - nrc\bar{X}^2_{...} \tag{32}$$

DENTRO CELDAS (RESIDUAL): $$SSR = \sum_t \sum_i \sum_j X^2_{tij} - n\sum_t \sum_i \bar{X}^2_{ti.} \tag{33}$$

INTERACCION: $$SSI = SST - SSBR - SSBC - SSR \tag{34}$$

SI $n = 1$, $SSR = SST - SSBR - SSBC$.

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA EN DOS DIRECCIONES CON FACTORES CRUZADOS QUEDA EN LA FORMA:

FUENTE DE VARIACION	G. DE L.	SS	MS	F
ENTRE RENGLONES	r-1	SSBR	MSBR	MSBR/MSR
ENTRE COLUMNAS	c-1	SSBC	MSBC	MSBC/MSR
INTERACCION	(r-1)(c-1)	SSI	MSI	MSI/MSR
RESIDUAL (DENTRO DE LAS CELDAS)	rc(n-1)	SSR	MSR	
TOTAL	rcn-1	SST		

EJEMPLO

EN UN EXPERIMENTO PARA DETERMINAR EL COEFICIENTE DE EXPANSION DE ALGUNAS ALEACIONES DE TITANIO, FABRICADAS CON DOS PROCEDIMIENTOS DIFERENTES, SE ELABORARON 16 ESPECIMENES A LOS CUALES SE LES MIDIO EL COEFICIENTE DE EXPANSION TERMICA. SE DESEA SABER SI LAS <u>ALEACIONES</u> Y <u>PROCEDIMIENTOS</u> INFLUYEN EN DICHO COEFICIENTE.

LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES SE PRESENTAN EN LA TABLA SIGUIENTE, EN LA CUAL CADA CELDA TIENE LAS SIGUIENTES ANOTACIONES:

X_{ti1}

X_{ti2} $\bar{X}_{ti.}$ $\bar{X}_{ti.}^2$

COEFICIENTES DE EXPANSION

PROCEDIMIENTOS	ALEACIONES					
	A	B	C	D	$\bar{X}_{t..}$	$\bar{X}^2_{t..}$
1	4.78 4.28 4.53 20.5209	3.84 5.28 4.56 20.7936	5.82 5.77 5.795 33.5820	4.57 5.44 5.005 25.0500	4.9725	24.7258
2	4.46 4.79 4.625 21.3906	4.73 3.36 4.045 16.3620	4.76 3.31 4.035 16.2812	4.30 3.86 4.08 16.6464	4.1963	17.6085
TOTALES	18.31	17.21	19.66	18.17		42.3343
$\bar{X}_{.i.}$	4.5775	4.3025	4.915	4.5425		
$.i.$	20.9535	18.5115	24.1572	20.6343		

EL MODELO AQUI ES

$$X_{tij} = \xi + \rho_t + \kappa_i + (\rho\kappa)_{ti} + Z_{tij}$$

$$t = 1,2; \quad i = 1,2,3,4, \quad j = 1,2$$

POR LO TANTO: $r = 2$, $c = 4$, $n = 2$, $\bar{X}_{...} = 73.35/16 = 4.5844$

$$\bar{X}^2_{...} = 21.0164, \; nrc\,\bar{X}^2_{...} = 336.2639$$

$$SSBR = 2 \times 4\ (24.7258 + 17.6085) - 336.2639$$

$$= 338.6741 - 336.2639 = 2.4102$$

SSBC = 2 x 2 (20.9535 + 18.5115 + 24.1572 + 20.6343)-

- 336.2639

SSBC = 337.0260 -336.2639 = 0.7621

TABLA DE CUADRADOS

X^2_{tij}

	A	B	C	D
1	22.8484 18.3184	14.7456 27.8784	33.8724 33.2929	20.8849 29.5936
2	19.8916 22.9441	22.3729 11.2896	22.6576 10.9561	18.4900 14.8996
TOTAL	84.0025	76.2865	100.7790	83.8681

$\sum\sum\sum_{tij} X^2_{tij} = 344.9361$

SSR = 344.9361 - 2(20.5209 + 20.7936 + 33.5820 + 25.0500 +

+ 21.3906 + 16.3620 + 16.2812 + 16.6464) = 344.9361 -

- 341.2534 = 3.6827

SST = 344.9361 - 336.2639 = 8.6722

SSI = 8.6722 - 0.7621 - 2.4102 - 3.6827 = 1.8172

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA RESULTA SER:

FUENTE DE VARIACION	SS	G. DE L.	MS	F
ENTRE RENGLONES (PROCEDIMIENTOS)	2.4102	1	2.4102	5.236
ENTRE COLUMNAS (ALEACIONES)	0.7621	3	0.2541	0.552
INTERACCION	1.8172	3	0.6057	1.316
RESIDUAL	3.6827	8	0.4603	
TOTAL	8.6722			

$F_{0.95,1,8} = 5.32 > 5.236$ SE ACEPTA $H_0: \rho_t = 0 \; \forall t$

$F_{0.95,3,8} = 4.07 > 0.552$ SE ACEPTA $H_0: \kappa_i = 0 \; \forall i$

$F_{0.95,3,8} = 4.07 > 1.316$ SE ACEPTA $H_0: (\rho\kappa)_{ti} = 0 \; \forall t,i$

EJEMPLO

PARA DETERMINAR EL EFECTO DE CUATRO DIFERENTES PESTICIDAS EN LA PRODUCCION DE TRES TIPOS DE FRUTA CITRICA, SE DISEÑO UN EXPERIMENTO DE DOS FACTORES CRUZADOS EN EL QUE SE ASIGNARON AL AZAR DOS ARBOLES FRUTALES DE CADA TIPO PARA SER FUMIGADOS POR CADA PESTICIDA. LAS PRODUCCIONES DE FRUTA EN KG/ARBOL SE MUESTRAN EN LA TABLA SIGUIENTE:

VARIEDAD	PESTICIDA			
DE FRUTA	1	2	3	4
1	49 39	50 55	43 38	53 48
2	55 41	67 58	53 42	85 73
3	66 68	85 92	69 62	85 99

REALIZAR EL ANALISIS DE VARIANCIA Y HACER ESTIMACIONES PUNTUALES DE LOS EFECTOS, DE LAS INTERACCIONES Y DE σ^2.

LAS HIPOTESIS A PROBAR SON:

LOS EFECTOS DE LAS FRUTAS SON NULOS: H_o: $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$

H_1: NO TODOS LOS EFECTOS DE LAS FRUTAS SON IGUALES A CERO

LA CUAL PUEDE HACERCE PROBANDO LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE VARIANCIAS ENTRE VARIEDADES DE FRUTAS (RENGLONES) Y RESIDUAL, MEDIANTE LA ESTADISTICA:

$$F_R = MSBR/MSR \quad \text{VERSUS} \quad F_{0.01,2,12} = F_{CR}$$

b) LA PRUEBA DE LA HIPOTESIS DE QUE LOS EFECTOS ENTRE LOS PESTICIDAS SON NULOS: H_o: $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa_4 = 0$

CONTRA LA HIPOTESIS DE QUE LOS EFECTOS NO SON TODOS NULOS,

LA CUAL PUEDE HACERSE PROBANDO LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE VARIANCIAS ENTRE PESTICIDAS Y RESIDUAL:

$$F_c = MSBC/MSR \quad \text{VERSUS} \quad F_{0.01,3,12}$$

c) FINALMENTE LA PRUEBA DE HIPOTESIS DE INTERACCION NULA H_o: $(\rho K)_{ti} = 0 \forall t, \forall i$, CONTRA LA HIPOTESIS H_1 DE QUE NO TODAS LAS INTERACCIONES SON NULAS, PUEDE HACERSE PROBANDO LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE VARIANCIA ENTRE LAS INTERACCIONES Y LA RESIDUAL, CON LA ESTADISTICA:

$$F_I = MSI/MSR \quad \text{VERSUS} \quad F_{0.01,6,12}$$

DESARROLLEMOS LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA EN 2 DIRECCIONES CON FACTORES CRUZADOS.

VARIEDAD DE FRUTA	PESTICIDA 1		2		3		4		TOTALES	$\bar{X}_{t..}$	$\bar{X}^2_{t..}$
1	49 39	44 1936	50 55	52.5 2756.25	43 38	40.5 1640.25	53 48	50.5 2550.25	375	46.88	2197.27
2	55 41	48 2304	67 58	62.5 3906.25	53 42	47.5 2256.25	85 73	79 6241	474	59.25	3510.56
3	66 68	67 4489	85 92	88.5 7832.25	69 62	65.5 4290.25	85 99	92 8464	626	78.25	6123.06
TOTALES	318		407		307		443		N.. = 1475		11830.89
$\bar{X}_{.i.}$	53		67.83		51.17		73.83			$\bar{X}_{...}$ = 61.46	
$\bar{X}^2_{.i.}$	2809		4601.36		2618.03		5451.36		15479.75		$\bar{X}^2_{...}$ = 3777.23

	$\bar{X}_{ti.}$
$\bar{X}_{ti1}$ X_{ti2}	$\bar{X}^2_{ti.}$

$$\sum_{t}\sum_{i} \bar{X}^2_{ti} = 48,667.75$$

TOTAL: $SST = \sum_t \sum_i \sum_j X^2_{tij} - nrc\bar{X}^2_{...} = 49^2+39^2+55^2+41^2+...+73^2+85^2+55^2-2x3x4x$

$= 97839 - 90,655.92$

$= 7183.04$

ENTRE RENGLONES:

$SSBR = nc\sum_t \bar{X}^2_{t..} - nrc\bar{X}^2_{...} = 2 \times 4 \times 11830.89 - 90,655.92$

$= 94647.12 - 90,655.92$

$= 3991.20$

ENTRE COLUMNAS:

$SSBC = nr\sum_i \bar{X}^2_{.i.} - nrc\bar{X}^2_{...} = 2 \times 3 \times 15479.75 - 90,655.92$

$= 92878.50 - 90655.92$

$= 2222.58$

ENTRE CELDAS:

$SSR = \sum_t \sum_i \sum_j X^2_{tij} - n\sum_t \sum_i \bar{X}^2_{ti.} = 97839 - 2 \times 48667.75$

$= 507.5$

INTERACCION:

$SSI = SST - SSBR - SSBC - SSR$

$= 7183.04 - 3991.20 - 2222.58 - 507.5$

$= 461.76$

PUDIENDO CON LO ANTERIOR COMPLETAR LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANZA:

FUENTE DE VARIACION	G.DE L	SS	MS	F_E	F_C
ENTRE VARIEDADES DE FRUTA	r-1=3-1=2	SSBR = 3991.20	SSBR/(r-1)= 1995.60	MSBR/MSR= = 47.19 >	$F_{CR}=F_{0.01,2,12}$ = 6.93
ENTRE PESTICIDA	c-1=4-1=3	SSBC = 2222.58	SSBC/(c-1)= 740.86	MSBC/MSR= = 17.52 >	$F_{CC}=F_{0.01,3,12}$ = 5.95
INTERACCION	(r-1)(c-1) = 6	SSI = 461.76	SSI/(r-1)(c-1)= 76.96	MSI/MSR = = 1.82 <	$F_{CI}=F_{0.01,6,12}$ = 4.82
RESIDUAL (DENTRO DE CELDAS)	rc(n-1)=12	SSR = 507.5	SSR/rc(n-1) 42.29		
TOTAL	rcn-1=23	SST = 7183.04			

COMO PUEDE OBSERVARSE EN LAS F_E (F ESTIMADA) Y LAS F_C (F CRITICAS) SE TENDRAN LAS SIGUIENTES CONCLUSIONES DEL ANALISIS DE VARIANCIA (VER LAS 2 ULTIMAS COLUMNAS)

1. DADO QUE $F_{ER} > F_{CR} \Rightarrow$ SE RECHAZA LA HIPOTESIS H_0 $\therefore$ SI HAY EFECTO ENTRE VARIEDADES DE FRUTAS
2. DADO QUE $F_{EC} > F_{CC} \Rightarrow$ SE RECHAZA LA HIPOTESIS H_0 $\therefore$ SI HAY EFECTO ENTRE LOS DIFERENTES TIPOS DE PESTICIDAS.
3. DADO QUE $F_{EI} < F_{CI} \Rightarrow$ SE APLICA LA HIPOTESIS H_0 $\therefore$ NO HAY EFECTO DE INTERACCION

CALCULO DE LOS ESTIMADORES DE LOS EFECTOS:

EFECTO DE LA VARIEDAD DE FRUTAS

DADO QUE $E\{\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...}\} = \rho_t \Rightarrow \hat{\rho}_t = \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...}$

$\hat{\rho}_1 = 46.88 - 61.46 = -14.58$

$\hat{\rho}_2 = 59.25 - 61.46 = -2.21$

$\hat{\rho}_3 = 78.25 - 61.46 = 16.79$

EFECTOS DE LA VARIEDAD DE PESTICIDAS

DADO QUE $E\{\bar{X}_{.i.} - \bar{X}_{...}\} = k_i \Rightarrow \hat{k}_i = \bar{X}_{.i.} - \bar{X}_{...}$

$\hat{k}_1 = 53 - 61.46 = -8.46$

$\hat{k}_2 = 67.83 - 61.46 = 6.37$

$\hat{k}_3 = 51.17 - 61.46 = -10.29$

$\hat{k}_4 = 73.83 - 61.46 = 12.37$

ESTIMACIONES PUNTUALES DE LAS INTERACCIONES:

DADO QUE $E\{\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{.i.} + \bar{X}_{...}\} = (\rho k)_{ti} \Rightarrow$

TENDREMOS:

$$\widehat{(\rho k)}_{ti} = \bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{.i.} + \bar{X}_{...}$$

$$(\hat{\rho k})_{1,1} = 44 - 46.88 - 53 + 61.46 = 5.58$$

$$(\hat{\rho k})_{1,2} = 52.5 - 46.88 - 67.83 + 61.46 = -0.75$$

$$(\hat{\rho k})_{1,3} = 40.5 - 46.88 - 51.17 + 61.46 = 3.91$$

$$(\hat{\rho k})_{1,4} = 50.5 - 46.88 - 73.83 + 61.46 = -8.75$$

$$(\hat{\rho k})_{2,1} = 48 - 59.25 - 53 + 61.46 = -2.79$$

$$(\hat{\rho k})_{2,2} = 62.5 - 59.25 - 67.83 + 61.46 = -3.12$$

$$(\hat{\rho k})_{2,3} = 47.5 - 59.25 - 51.17 + 61.46 = -1.46$$

$$(\hat{\rho k})_{2,4} = 79 - 59.25 - 73.83 + 61.46 = 7.38$$

$$(\hat{\rho k})_{3,1} = 67 - 78.25 - 53 + 61.46 = -2.79$$

$$(\hat{\rho k})_{3,2} = 88.5 - 78.25 - 67.83 + 61.46 = 3.88$$

$$(\hat{\rho k})_{3,3} = 67.5 - 78.25 - 51.17 + 61.46 = -2.46$$

$$(\hat{\rho k})_{3,4} = 92 - 78.25 - 73.83 + 61.46 = 1.38$$

FINALMENTE, DADO QUE EL VALOR DE MSW (O MSR) ES UN ESTIMADOR INSESGADO DE $\sigma^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = 42.29$ (VER TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA

CABE OBSERVAR QUE TODOS LOS ESTIMADORES $\hat{\rho}_t$, $\hat{k}_i$, $(\hat{\rho k})_{ti}$ Y $\hat{\sigma}^2$ SON INSESGADOS.

MODELO CON DIFERENTES TAMAÑOS DE MUESTRA

SE DESARROLLA LA SUMA DE CUADRADOS:

$$\sum_{t=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_{ti}}(X_{tij}-\bar{X}_{...})^2 = \sum_{t=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_{ti}}(\bar{X}_{t..}-\bar{X}_{...})^2 +$$

$$+\sum_{t=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_{ti}}(\bar{X}_{.i.}-\bar{X}_{...})^2 +$$

$$+\sum_{t=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_{ti}}(X_{tij}-\bar{X}_{ti.})^2 +$$

$$+\sum_{t=1}^{r}\sum_{r=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_{ti}}(\bar{X}_{ti.}-\bar{X}_{t..}-\bar{X}_{.i.}+\bar{X}_{...})^2$$

SST = SSBR + SSBC + SSI + SSR

$$n_{t.} = \frac{\sum_{i=1}^{c} n_{ti}}{c} ; \quad n_{.i} = \frac{\sum_{t=1}^{r} n_{ti}}{r} ; \quad n_{..} = \frac{\sum_{t=1}^{r}\sum_{i=1}^{c} n_{ti}}{cr}$$

ASI:

$$SSBR = \sum_{t=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_{ti}}(\bar{X}_{t..}^2 - 2\bar{X}_{t..}\bar{X}_{...} + \bar{X}_{...}^2)$$

$$= c\sum_{t=1}^{r} n_{t.}\bar{X}_{t..}^2 - 2c\bar{X}_{...}\sum_{t}^{r} n_{t.}\bar{X}_{t..} + n_{..}cr\bar{X}_{...}^2$$

$$= c \sum_{t=1}^{r} n_{t.} \bar{X}^2_{t..} - rcn_{..} \bar{X}^2_{...}$$

$$SSBC = \sum_{t=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n_{ti}} (\bar{X}_{.i.}^2 - 2\bar{X}_{.i.} \bar{X}_{...} + \bar{X}_{...}^2)$$

$$= r \sum_{i=1}^{c} n_{.i} \bar{X}^2_{.i.} - rcn_{..} \bar{X}^2_{...}$$

$$SSR = \sum_{t=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n_{ti}} (X_{tij}^2 - 2X_{tij} \bar{X}_{ti.}^2)$$

$$= \sum_{t=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n_{ti}} X_{tij}^2 - \sum_{t=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} n_{ti} \bar{X}_{ti.}^2$$

$$SST = \sum_{t=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n_{ti}} (X_{tij}^2 - 2X_{tij} \bar{X}_{...} + \bar{X}^2_{...})$$

$$= \sum_{t=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n_{ti}} X_{tij}^2 - rcn_{..} \bar{X}^2_{...}$$

$$SSI = SST - SSBR - SSBC - SSR$$

EJEMPLO:

$t = 1, r; \quad r = 2$

$i = 1, c; \quad c = 3$

$j = 1, n_{ti}$

TRATAMIENTOS	BLOQUES		
	1	2	3
1	10 15 8	12 9	5 18
2	7 12	13 11 10	9

$$n_{ti} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \qquad n_{t.} = \begin{bmatrix} 2.33 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$n_{.i} = [2.5,\ 2.5,\ 1.5]; \quad n_{..} = 2.165$$

CALCULOS NECESARIOS:

$$\bar{X}_{...} = 10.692; \quad \bar{X}^2_{...} = 114.325$$

$$\sum_t \sum_i \sum_j X^2_{ijk} = 1627$$

$$\bar{X}_{ti.} = \begin{bmatrix} 11 & 10.5 & 11.5 \\ 9.5 & 11.33 & 9 \end{bmatrix}; \qquad \bar{X}_{t..} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10.33 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_{.i.} = [10.4,\ 11,\ 10.66\ ];$$

$$\sum_t \sum_i n_{ti} \bar{x}_{ti.}^2 = 1494.606$$

$$\sum_t n_{t.} \bar{x}_{t..}^2 = 495.711$$

$$\sum_i n_{.i} \bar{x}_{.i.}^2 = 743.353$$

SST = 1627 - (2)(3)(2166)(114.325) = 140.775

SSBR = (3)(495.711) - (2)(3)(2.166)(114.325) = 1.366

SSBC = (2)(743.353) - (2)(3)(2.166)(114.325) = 0.939

SSR = 1627 - 1494.606 = 132.394

SSI = 140.775 - 1.366 - 0.939 - 132.394 = 6.076

ANALISIS DE VARIANZA:

FUENTE:	SS	G.L.	MS	F	α =0.05
RENGLONES (BR)	1.366	r - 1 = 1	1.366	0.0722	5.59
COLUMNAS (BC)	.939	c - 1 = 2	0.4695	0.0248	4.74
INTERACCION (I)	6.076	(r-1)(c-1) = 2	3.038	0.1606	4.74
RESIDUAL (R)	132.394	rc(n.. -1) = 6.996 ≅ 7	18.913		
TOTAL (T)	140.775				

∴ NO HAY EFECTO POR RENGLONES (TRATAMIENTOS).

NO HAY EFECTO POR COLUMNAS (BLOQUES).

NO HAY EFECTO POR LA INTERELACION ENTRE RENGLONES Y COLUMNAS

MODELO CON NIVELES CRUZADOS ALEATORIOS

ESTE MODELO SE OBTIENE A PARTIR DEL PARAMETRICO REEMPLAZADO ρ_t, k_i $(\rho k)_{ti}$ POR U_t, V_i, W_{ti}, RESPECTIVAMENTE DONDE LAS U's V's Y W's SON VARIABLES ALEATORIAS NORMALES, MUTUAMENTE INDEPENDIENTES CADA UNA CON VALOR ESPERADO CERO Y:

1) $\mathrm{Var}(U_t) = \sigma_u^2 \; \forall t$

2) $\mathrm{Var}(V_i) = \sigma_v^2 \; \forall i$

3) $\mathrm{Var}(W_{ti}) = \sigma_w^2 \; \forall t,i$

CONSIDERAMOS SOLAMENTE EL CASO $n_{ti} = n \; \forall t,i$ O SEA IGUAL NUMERO DE ELEMENTOS EN CADA CELDA ti, CON LO CUAL EL MODELO SERA:

4) $$X_{tij} = \xi + U_t + V_i + W_{ti} + Z_{tij}$$

DE DONDE:

5) $$\bar{X}_{...} = \xi + \bar{U} + \bar{V} + \bar{W}_{..} + \bar{Z}_{...}$$

6) $$\bar{X}_{t..} = \xi + U_t + \bar{V} + \bar{W}_{t.} + \bar{Z}_{t..}$$

7) $$\bar{X}_{.i.} = \xi + \bar{U} + V_i + \bar{W}_{.i} + \bar{Z}_{.i.}$$

8) $$\bar{X}_{ti.} = \xi + U_t + V_i + W_{ti} + \bar{Z}_{ti.}$$

6) -5):

9) $$\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...} = (U_t - \bar{U}) + (\bar{W}_{t.} - \bar{W}_{..}) + (\bar{Z}_{t..} - \bar{Z}_{...})$$

7) -5):

$$10)\qquad \bar{X}_{.i.} - \bar{X}_{...} = (V_i - \bar{V}) + (\bar{W}_{.i} - \bar{W}_{..}) + (\bar{Z}_{.i.} - \bar{Z}_{...})$$

8) - 6) - 7) + 5)

$$11)\qquad \bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{.i.} + \bar{X}_{...} = (W_{ti} - \bar{W}_{t.} - \bar{W}_{.i} + \bar{W}_{..}) +$$

$$+ (\bar{Z}_{ti.} - \bar{Z}_{t..} - \bar{Z}_{.i.} + \bar{Z}_{...})$$

DONDE:

$$12)\qquad \bar{U} = \sum_{t=1}^{r} U_t/r \qquad 13)\ldots\ \bar{V} = \sum_{i=1}^{c} V_i/c$$

$$14)\qquad \bar{W}_{t.} = \sum_{i=1}^{c} W_{ti}/c \qquad 15)\ldots\ \bar{W}_{.i} = \sum_{t=1}^{r} W_{ti}/r$$

$$16)\qquad \bar{W}_{..} = \sum_{t=1}^{r}\ \sum_{i=1}^{c} W_{ti}/rc$$

4) - 8):

$$17)\qquad X_{tij} - \bar{X}_{ti.} = Z_{tij} - \bar{Z}_{ti.}$$

NUEVAMENTE, PARA ANALIZAR LA FUENTE DE VARIABILIDAD DE LOS DATOS, LA SUMA DE CUADRADOS SE PUEDE DIVIDIR EN 2 PARTES:

$$18).\qquad \sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{...})^2 = \underbrace{\sum_t \sum_i n_{ti} (\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{...})^2}_{\text{ENTRE CELDAS}} + \underbrace{\sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti.})^2}_{\text{DENTRO DE LAS CELDAS}}$$

DE AQUI QUE:

E{SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE LAS CELDAS} =

$$E\{\sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti.})^2\} = (N_{..} - rc)\sigma^2$$

POR LO CUAL LA ESTADISTICA VALOR MEDIO CUADRATICO DENTRO DE CELDAS O RESIDUAL (MSW O MSR)

$$19)\quad E(MSR) = \sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti.})^2/(N_{..} - rc) = \sigma^2$$

SE USA NUEVAMENTE PARA ESTIMAR σ^2 O SEA LA VARIANZA DE CADA Z_{tij}.

DE LAS ECS. 9), 10) y 11) ENCONTRAMOS LOS SIGUIENTES VALORES ESPERADOS DE LOS VALORES MEDIOS CUADRATICOS:

ENTRE RENGLONES: $E\{MSBR\} = \sigma^2 + n\sigma_w^2 + nc\sigma_u^2$

ENTRE COLUMNAS: $E\{MSBC\} = \sigma^2 + n\sigma_w^2 + nr\sigma_v^2$

INTERACCION: $E\{MSI\} = \sigma^2 + n\sigma_w^2$

LA SITUACION ES SIMILAR A LA DE LA CLASIFICACION DE DOS FACTORES NO CRUZADOS CUANDO UN MODELO ALEATORIO ES APROPIADO.

LA HIPOTESIS H_o: $\sigma_w^2 = 0$ PUEDE PROBARSE COMPARANDO EL VALOR MEDIO CUADRATICO DE LAS INTERACCIONES CON EL RESIDUAL; ESTO ES:

$$F = MSI/MSR$$

POR OTRO LADO PARA PROBAR LA HIPOTESIS H_o: $\sigma_u^2 = 0$ DE IGUALDAD DE VARIANCIAS ENTRE RENGLONES DEBERA HACERSE LA COMPARACION DE:

$$F = MSBR/MSI$$

Y FINALMENTE; PARA PROBAR LA HIPOTESIS $H_o: \sigma_v^2 = 0$, DE IGUALDAD DE VARIANCIAS ENTRE COLUMNAS, DEBERA HACERSE LA COMPARACION DE:

$$F = MSBC/MSI$$

JUSTAMENTE, COMO EN EL CASO DE LA CLASIFICACION NO CRUZADA, TAMBIEN ES LA ALEATORIEDAD DEL TERMINO QUE REPRESENTA LA INTERACCION EN EL MODELO EL QUE TOMA LA DIFERENCIA ESENCIAL EN EL ANALISIS. EL PROCEDIMIENTO FORMAL DE PRUEBA NO SE AFECTA SI LOS EFECTOS ENTRE RENGLONES O COLUMNAS SE CAMBIAN DE PARAMETRICOS A TERMINOS ALEATORIOS O VICEVERSA (DANDO UN MODELO MEZCLADO).

ES UTIL RECORDAR QUE SI EL MSBR O MSBC SE COMPARA CON EL MSR CUANDO EL MODELO ALEATORIO ES APROPIADO, EL POSIBLE EFECTO DE UNA VARIANCIA $\sigma_w^2 \neq 0$ DE INTERACCION PUEDE DEBERSE SOLAMENTE AL INCREMENTO DEL TAMAÑO MEDIO DE LA RELACION CON EL MSR.

EJEMPLO

SUPONGAMOS QUE UNA COMPAÑIA DISPONE DE n FUENTES DIFERENTES DE MATERIAS PRIMAS A_n Y m MAQUINAS DE DISTINTAS MARCAS B_m PARA PRODUCIR UN NUEVO PRODUCTO. SE SABE QUE LAS MARCAS DE MAQUINAS SON IGUALMENTE PRODUCTIVAS EN TERMINOS DE VELOCIDAD - EL NUMERO DE TIRADAS PRODUCIDAS POR HORA - PERO NO SE SABE SI TRABAJAN IGUALMENTE BIEN EN TERMINOS DEL NUMERO DE UNIDADES DEFECTUOSAS ELABORADAS ENTRE LAS PRODUCCIONES POR HORA.

ADEMAS, LA FIRMA DESCONOCE SI HAY DIFERENCIAS EN LA CALIDAD DE LAS MATERIAS PRIMAS PROVENIENTES DE LAS FUENTES. POR ULTIMO SE SOSPECHA QUE LA MATERIA PRIMA DE UNA FUENTE PUEDE PRESENTAR UN EFECTO ESPECIAL EN UNA MAQUINA PARTICULAR O VICEVERSA. POR CONSIGUIENTE, SE DESEA ESTABLECER SI LOS A_n SON DIFERENTES, SI LOS B_m SON DIFERENTES Y SI EXISTE ALGUN EFECTO CONJUNTO A x B. PARA RESPONDER A ESTAS PREGUNTAS SE SELECCIONARON AL AZAR 4 FUENTES: A_1, A_2, A_3 Y A_4 Y 3 MARCAS DE MAQUINAS B_1, B_2 Y B_3, Y SE HIZO OPERAR CADA MARCA DE MAQUINA EN IDENTICAS CONDICIONES CON CADA FUENTE DE MATERIAL DURANTE DOS HORAS Y SE REGISTRO EL NUMERO DE UNIDADES DEFECTUOSAS POR CADA HORA COMO SE INDICA EN LA TABLA. CON ESTOS DATOS, ¿A QUE CONCLUSION SE PUEDE LLEGAR?

MAQUINA	FUENTES DE MAT. PRIMA 1		2		3		4		TOTALES	$\bar{X}_{t..}$	$\bar{X}^2_{t..}$
1	9 5	7 49	6 6	6 36	8 4	6 36	5 7	6 36	50	6.5	39.06
2	4 2	3 9	5 3	4 16	2 6	4 16	1 5	3 9	28	3.5	12.5
3	10 6	8 64	8 9	8.5 72.5	7 8	7.5 56.25	9 5	7 49	62	7.75	60.06
TOTALES	36		37		35		32		140		111.62
$\bar{X}_{.i.}$	6		6.17		5.83		5.33			$\bar{X}_{...}$ = 5.83	
$\bar{X}^2_{.i.}$	36		38.03		34.03		28.44		136.5		$\bar{X}^2_{...}$ = 33.99

= 3, $c = 4$, $n = 2$

$$\sum_t \sum_i \sum_j X_{tij}^2 = 9^2 + 5^2 + 4^2 + 2^2 + \ldots\ldots 5^2 + 9^2 + 5^2 = 952$$

TOTAL: $SST = \sum_t \sum_i \sum_j X_{tij}^2 - ncr\bar{X}_{...}^2 = 952 - 2 \times 3 \times 4 \times 33.99 =$

$$= 952 - 815.73 = 136.27$$

ENTRE RENGLONES:

$$SSBR = nc\sum_t \bar{X}_{t..}^2 - ncr\bar{X}_{...}^2 = 892.96 - 815.73 = 77.23$$

ENTRE COLUMNAS:

$$SSBC = nr\sum_i \bar{X}_{.i.}^2 - nrc\bar{X}_{...}^2 = 819 - 815.73 = 3.27$$

ENTRE CELDAS:

$$SSR = \sum_t \sum_i \sum_j X_{tij}^2 - n\sum_t \sum_i \bar{X}_{ti.}^2 = 952 - 2 \times 448.75 = 54.50$$

INTERACCION: $SSI = SST - SSBR - SSBC - SSR$

$$= 136.27 - 77.23 - 3.27 - 54.50$$

$$= 1.27$$

LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANZA SERA:

FUENTE DE VARIACION:

	G. de l.	SS	MS	F estimada.		F crítica.
ENTRE MAQUINAS	r-1=3-1=2	SSBR = 77.23	SSBR/(R-1) = 38.62	F_{ER} = 38.62/0.21 183.90	>	$F_{ER} = F_{0.01,2,6}$ = 10.92
ENTRE FUENTES	c-1=4-1=3	SSBC = 3.27	MSBC = SSBC/(c-1) = 1.09	F_{EC} = 1.09/0.21 5.19	<	$F_{CC} = F_{0.01,3,6}$ = 9.78
INTERACCION	(r-1)(c-1) = 6	SSI = 1.27	MSI = SSI/(r-1)(c-1) = 0.21	F_{EI}=0.21/4.54 = 0.05	<	$F_{CI} = F_{0.01,6,12}$ = 4.82
RESIDUAL	rc(n-1)=12	SSR = 54.50	MSR = SSR/rc(n-1) = 4.54			
TOTAL	rcn-1 = 23	SST = 136.27				

DE LO ANTERIOR CONCLUIMOS QUE:

DADO, QUE $F_{CR} < F_{ER} \Rightarrow$ SI HAY VARIABILIDAD ENTRE LAS DIFERENTES MARCAS DE MAQUINA.

COMO $F_{CC} > F_{EC} \Rightarrow$ NO HAY EFECTO ENTRE LAS DIFERENTES FUENTES DE MATERIA PRIMA

Y FINALMENTE COMO:

$F_{CI} > F_{EI} \Rightarrow$ NO HAY EFECTO ENTRE LAS INTERACCIONES DE LAS MAQUINAS Y LAS FUENTES DE MATERIA PRIMA.

EJEMPLO

EN UNA INVESTIGACION SOBRE LA ACUMULACION DE UNA SUSTANCIA EN LOS DIENTES DE LAS JOVENES DE 18 A 20 AÑOS DE EDAD EN UNA LOCALIDAD, SE DISEÑO UN EXPERIMENTO COMPLETAMENTE ALEATORIZADO EN EL QUE SE SELECCIONARON AL AZAR TRES JOVENES, A CADA UNA DE LAS CUALES SE LES RASPO EL SARRO DE LA DENTADURA; EL SARRO DE CADA UNA SE DIVIDIO EN SEIS PARTES IGUALES Y SE LES ENTREGARON DOS PARTES A CADA UNO DE TRES ANALISTAS TOMADOS TAMBIEN AL AZAR, CON EL FIN DE QUE HICIERAN EL ANALISIS QUIMICO PARA DETERMINAR LA CANTIDAD DE LA SUSTANCIA DE INTERES CONTENIDA EN CADA PARTE. LAS CONCENTRACIONES, EN MICROGRAMOS OBTENIDAS SE PRESENTAN EN LA SIGUIENTE TABLA:

	MUJER		
ANALISTA	A	B	C
1	13.2	10.6	8.5
	12.3	9.8	8.9
2	12.5	9.6	7.9
	12.9	10.7	8.4
3	13.0	9.9	8.3
	12.4	10.3	8.6

SOLUCION

a) HACER EL ANALISIS DE VARIANCIA Y LAS ESTIMACIONES DE TODOS LOS PARAMETROS DE INTERES; TOME $\alpha = 0.05$. ESBOCE SUS CONCLUSIONES.

SE TRATA DE UN PROBLEMA DE NIVELES ALEATORIOS. PARA OBTENER LOS PARAMETROS NECESARIOS PARA EL CALCULO DE LAS ESTADISTICAS F, SE USARA LA SIGUIENTE TABLA.

ANALISTA	MUJER A		MUJER B		MUJER C		TOTALES	$\bar{X}_{t..}$	$\bar{X}^2_{t..}$
1	13.2 12.3	12.75 162.563	10.6 9.8	10.2 104.04	8.5 8.9	8.7 75.69	63.3	10.55	111.3025
2	12.5 12.9	12.7 161.29	9.6 10.7	10.15 103.023	7.9 8.4	8.15 66.422	62	10.333	106.7778
3	13.0 12.4	12.7 161.29	9.9 10.3	10.1 102.01	8.3 8.6	8.45 71.403	62.5	10.41667	108.5069
TOTALES	76.3		60.9		50.6		187.8		326.5872
$\bar{X}_{.i.}$	12.71667		10.15		8.433				r = 3
$\bar{X}^2_{.i.}$	161.71361		103.0225		71.1211		Σ=335.85722		c = 3 n = 2

EN CADA CELDA SE INDICA:

X_{ti1}	$\bar{X}_{ti.}$
X_{ti2}	$\bar{X}^2_{ti.}$

DE LOS DATOS:

$$\Sigma\Sigma\Sigma\ X^2_{tij} = 13.2^2+12.3^2+12.5^2+12.9^2+13^2+12.4^2+10.6^2+9.8^2+9.6^2+10.7^2+9.9^2+$$
$$+10.3^2+8.5^2+8.9^2+7.9^2+8.4^2+8.3^2+8.6^2 = 2017.38$$

DE LA TABLA:

$$\Sigma\Sigma\Sigma\ \bar{X}^2_{ti.} = 162.563+161.29+161.29+104.4+103.023+102.01+75.69+66.422+71.403 =$$
$$= 1007.73$$

$\bar{X}_{...} = \frac{187.8}{18} = 10.433$, $\bar{X}^2_{...} = 108.854$, $nrc\bar{X}^2_{...} = 2(3)(3)(108.854) = 1959.38$

$\sum_t \bar{X}^2_{t..} = 326.5872$, $\sum_i \bar{X}^2_{.i.} = 335.85722$

POR LO TANTO LAS SUMAS DE CUADRADOS VALDRAN:

$SST = \sum\sum\sum X^2_{tij} - nrc\bar{X}^2_{...} = 2017.38 - 1959.38 = 58$

$SSBR = nc\sum_t \bar{X}^2_{t..} - nrc\bar{X}^2_{...} = (2)(3)(326.58722) - 1959.38 = 0.14333$, CON $(r-1)$ G DE L.

$SSBC = nr\sum_i \bar{X}^2_{.i.} - nrc\bar{X}^2_{...} = (2)(3)(335.85722) - 1959.38 = 55.76332$, CON $(c-1)$ G. DE L.

$SSR = \sum\sum\sum X^2_{tij} - n\sum_{ti}\sum \bar{X}^2_{ti.} = 2017.38 - (2)(1007.731) = 1.918$, CON $rc(n-1)$ G. DE L.

$SSI+SST-SSBR-SSBC-SSR=58-0.1433-55.76332-1.918=0.1753467$, con $(r-1)(c-1)$ G. DE L.

EN LA SIGUIENTE TABLA SE RESUMEN LOS RESULTADOS DEL ANALISIS DE VARIANCIA; COMO SE TRATA DE UN MODELO DE NIVELES ALEATORIOS, LAS ESTADISTICAS F SE CALCULARAN COMO:

EFECTOS DE INTERACCION: $F = \frac{MSI}{MSR}$

EFECTOS "DEL ANALISTA" $F = \frac{MSBR}{MSI}$

EFECTOS DE "LA MUJER" $F = \frac{MSBC}{MSI}$

TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA

ORIGEN DE VARIACION	SS	G. DE L.	MS	F
ANALISTA	0.14333	2	0.071665	1.6347
MUJER	55.76332	2	27.88166	635.998
INTERACCION	0.1753467	4	0.0438392	0.2057
RESIDUO	1.918	9	0.213	
TOTAL	58			

LOS VALORES CRITICOS PARA LAS ESTADISTICAS ANTERIORES, CON $\alpha = 0.05$ SON:

ANALISTA: $F_{0.05,2,4} = 6.94$

MUJER $F_{0.05,2,4} = 6.94$

INTERACION $F_{0.05,4,9} = 3.63$

COMO: $6.94 > 1.6347$ EL EFECTO DEL ANALISTA NO ES SIGNIFICATIVO

$6.94 < 635.998$ EL EFECTO DE LA MUJER ES SIGNIFICATIVO

$3.63 > 0.2057$ EL EFECTO DE INTERACCION ANALISTA-MUJER NO ES SIGNIFICATIVO

COMO PUEDE VERSE DE LOS RESULTADOS ANTERIORES, EL UNICO EFECTO SIGNIFICATIVO ES EL DE LA MUJER; ES DECIR QUE LA CONCENTRACION DE LA SUSTANCIA DE INTERES SI DEPENDE DE LA MUJER DE QUE SE TRATE.

b) REALIZAR LO PEDIDO EN EL INCISO ANTERIOR CONSIDERANDO AHORA EL PROBLEMA COMO SI SE TRATARA DE PARAMETROS FIJOS. COMPARE Y COMENTE LOS RESULTADOS DE AMBOS INCISOS

EN ESTE CASO LAS ESTADISTICAS F ESTAN DADAS POR:

-ANALISTA: $F = \frac{MSBR}{MSR}$

-MUJER: $F = \frac{MSBC}{MSR}$

-INTERACCION: $F = \frac{MSI}{MSR}$

POR LO TANTO, LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA QUEDARIA:

ORIGEN DE VARIACION	SS	G. DE L.	MS	F
ANALISTA	0.14333	2	0.071665	0.33645
MUJER	55.76332	2	27.88166	131.236
INTERACCION	0.1753467	4	0.0438392	0.2058
RESIDUO	1.918	9	0.213	
TOTAL	58			

LOS VALORES CRITICOS, EN TABLAS, SON:

ANALISTA: $F_{0.05,2,\ 9} = 4.26$

MUJER: $F_{0.05,2,\ 9} = 4.26$

INTERACCION: $F_{0.05,4,9} = 3.63$

COMO:

$4.26 > 0.33645$ EL EFECTO DEL ANALISTA NO ES SIGNIFICATIVO

$4.26 < 131.236$ EL EFECTO DE LA MUJER ES SIGNIFICATIVO

$3.63 > 0.2058$ EL EFECTO DE INTERACCION NO ES SIGNIFICATIVO

COMPARANDO LOS RESULTADOS DE AMBOS MODELOS PODEMOS OBSERVAR QUE LOS RESULTADOS HAN SIDO IGUALES EN CUANTO A CONCLUSIONES; NO OBSTANTE LOS RANGOS DE LAS ZONAS DE ACEPTACION HAN SIDO ALTERADAS, ASI COMO LAS ESTADISTICAS F CALCULADAS, POR LO QUE CABRIA LA POSIBILIDAD DE QUE EN UN CASO CERCA DE LOS LIMITES DE ACEPTACION (VALORES CRITICOS), LA APLICACION DE UN MODELO U OTRO DERIVARA EN CONCLUSIONES DIFERENTES.

c) CALCULAR EL INTERVALO DE CONFIANZA DE LA DIFERENCIA DE LAS CONCENTRACIONES MEDIAS OBTENIDAS POR LOS ANALISTAS 2 Y 3.

	ANALISTA		ANALISTA
	2	3	1
	12.5	13.0	13.2
	12.9	12.4	12.3
	9.6	9.9	10.6
	10.7	10.3	9.8
	7.9	8.3	8.5
	8.4	8.6	8.9
PROMEDIO	10.333	10.417	10.55

EL INTERVALO DE CONFIANZA ESTA DADO POR:

$$\overline{X}_i - \overline{X}_j \pm t_{\nu;\,\alpha/2}\; S\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}$$

LA SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE GRUPOS, CONSIDERANDO LA TOTALIDAD DE LOS DATOS SERA:

$$(12.5-10.33)^2+(12.9-10.33)^2+(9.6-10.33)^2+(10.7-10.33)^2+(7.9-10.33)^2+(8.4-10.33)^2+$$

$$+\ (13-10.417)^2+(12.4-10.417)^2+(9.9-10.417)^2+(10.3-10.417)^2+(8.3-10.417)^2+(8.6-10.417)^2$$

$$+\ (13.2-10.55)^2+12.3-10.55)^2+(12.5-10.55)^2+(12.9-10.55)^2+(13-10.55)^2+(12.4+10.55)^2$$

$$=\ 57.8567$$

ENTONCES $S^2 = \frac{57.8567}{N-k} = \frac{57.8567}{18-3} = 3.857$, $S = 1.9639$

EN TABLAS: $t_{15,0.025} = 2.132$

POR TANTO, EL INTERVALO DE CONFIANZA VALE:

$$10.417 - 10.333 \pm 2.132(1.9639)\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = 0.084 \pm 2.417$$

d) APLIQUE EL METODO DE TUKEY PARA REALIZAR LAS COMPARACIONES MULTIPLES DE LAS MEDIAS DE LOS RESULTADOS DE LAS MUJERES. DESSARROLLE Y APLIQUE A ESTE PROBLEMA LOS METODOS DE FISHER Y DE DUNCAN PARA COMPARACIONES MULTIPLES.

METODO DE TUKEY

EL MARGEN, DE ACUERDO AL METODO DE TUKEY, ESTA DADO POR LA ECUACION:

$$\frac{q_{k,\nu,\alpha/2}}{\sqrt{2}} \, S\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}$$

EN ESTE CASO: $n_i = n_j = cte = n = 6$

EL VALOR DE S SE OBTENDRA DE LA TOTALIDAD DE LOS DATOS, COMO $MSW = S^2$, PARA ESTO SE OBTENDRA MSW:

	MUJER		
	A	B	C
	13.2	10.6	8.5
	12.3	9.8	8.9
	12.5	9.6	7.9
	12.9	10.7	8.4
	13.0	9.9	8.3
	12.4	10.3	8.6
PROMEDIOS :	12.717	10.15	8.433

LA SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE GRUPOS SERA:

$$(13.2-12.717)^2+(12.3-12.717)^2+(12.5-12.717)^2+(12.9-12.717)^2+(13-12.717)^2+$$
$$+(12.4-12.717)^2+(10.6-10.15)^2+(9.8-10.15)^2+(9.6-10.15)^2+(10.7-10.15)+$$
$$+(9.9-10.15)^2+(10.3-10.15)^2(8.5-8.433)^2+(8.9-8.433)^2+(7.9-8.433)^2+(8.4-8.433)^2$$
$$+(8.3-8.433)^2+(8.6-8.433)^2 = 2.23667$$

$$MSW = \frac{2.23667}{18-3} = 0.149, \quad S = 0.386$$

DE TABLAS, EL RANGO ESTUDENTIZADO ES; CON $k = 3$ Y $\nu = 15$: $q_{3,15,.025} = 3.67$

POR LO TANTO, EL MARGEN VALE: $\frac{3.67}{\sqrt{2}}\, 0.386\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}} = 0.578$

LAS DIFERENCIAS ENTRE MEDIAS SON LAS SIGUIENTES, INDICANDO LAS SIGNIFICATIVAS CON UN MARCO:

MUJER	A	B	C
MEDIA	12.717	10.15	8.433
DIFERENCIAS	*	$\boxed{2.567}$	$\boxed{4.284}$
		*	$\boxed{1.717}$
			*

TODAS LAS DIFERENCIAS SON SIGNIFICATIVAS

METODO DE DUNCAN

EL METODO DE DUNCAN, COMO EL DE TUKEY, SIRVE PARA EFECTUAR COMPARACIONES DE MEDIAS, NO OBSTANTE ESTE ES MAS CONSERVADOR QUE EL PRIMERO.

EL ERROR ESTANDAR DE CUALQUIER MEDIA ES: $S = \sqrt{\frac{MSW}{n}}$

DE LA TABLA DE DUNCAN PARA RANGOS SIGNIFICANTES OBTENEMOS $r_\alpha(p, f)$, DONDE α ES EL NIVEL DE SIGNIFICANCIA, $p = 2, 3, \ldots k$ SON LOS TRATAMIENTOS, CUYAS MEDIAS SE ORDENAN DE MENOR A MAYOR, f SON LOS GRADOS DE LIBERTAD DE SSW: (N-k). EL RANGO SE CALCULA COMO: $R_p = r_\alpha(p, f)S$, PARA $p = 2, 3, \ldots k$

PARA PROBAR LAS DIFERENCIAS, SE PRUEBA LA MAYOR CON LA MENOR, COMPARANDO CON EL MAYOR R_α, ASI SE CONTINUA COMPARANDO EL MAYOR CON LOS RESTANTES, EN ORDEN CRECIENTE ESTOS ULTIMOS. SE PROCEDE IGUALMENTE EN EL DE SEGUNDA IMPORTANCIA, ETC.

EN ESTE CASO, ORDENANDO LAS MEDIAS EN ORDEN CRECIENTE:

$$\overline{y}_C = 8.433, \ \overline{y}_B = 10.15, \ \overline{y}_A = 12.717$$

EL VALOR DE MSW ES = 0.149, POR LO QUE, EN CUALQUIER CASO:
$S = \sqrt{\frac{0.149}{6}} = 0.1576$

EN TABLAS DEL METODO DE DUNCAN (DESIGN AND ANALYSIS OF EXPERIMENTS.-MONTGOMERY.-WILLEY INTERNATIONAL, 1976), CON $\alpha = 0.05$, $f = N-k=18-3=15$:

$$r_{0.05}(2,15) = 3.01, \ r_{.05}(3,15) = 3.16$$

POR LO TANTO, LOS MARGENES SERAN:

$R_2 = 3.01(0.1576) = 0.474$, $R_3 = 3.16(0.1576) = 0.498$

Y LAS COMPARACIONES DE MEDIAS SERAN:

VALORES CRITICOS EN LA PRUEBA DE DUNCAN DE RANGO MULTIPLE

Error df	α	p = NUMERO DE MEDIAS ADYACENTES 2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20
1	.05	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0
	.01	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0
2	.05	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09
	.01	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0
3	.05	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50
	.01	8.26	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	8.9	9.0	9.0	9.0	9.1	9.2	9.3	9.3
4	.05	3.93	4.01	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02
	.01	6.51	6.8	6.9	7.0	7.1	7.1	7.2	7.2	7.3	7.3	7.4	7.4	7.5	7.5
5	.05	3.64	3.74	3.79	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83
	.01	5.70	5.96	6.11	6.18	6.26	6.33	6.40	6.44	6.5	6.6	6.6	6.7	6.7	6.8
6	.05	3.46	3.58	3.64	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68
	.01	5.24	5.51	5.65	5.73	5.81	5.88	5.95	6.00	6.0	6.1	6.2	6.2	6.3	6.3
7	.05	3.35	3.47	3.54	3.58	3.60	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61
	.01	4.95	5.22	5.37	5.45	5.53	5.61	5.69	5.73	5.8	5.8	5.9	5.9	6.0	6.0
8	.05	3.26	3.39	3.47	3.52	3.55	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56
	.01	4.74	5.00	5.14	5.23	5.32	5.40	5.47	5.51	5.5	5.6	5.7	5.7	5.8	5.8
9	.05	3.20	3.34	3.41	3.47	3.50	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52
	.01	4.60	4.86	4.99	5.08	5.17	5.25	5.32	5.36	5.4	5.5	5.5	5.6	5.7	5.7
10	.05	3.15	3.30	3.37	3.43	3.46	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.48
	.01	4.48	4.73	4.88	4.96	5.06	5.13	5.20	5.24	5.28	5.36	5.42	5.48	5.54	5.55
11	.05	3.11	3.27	3.35	3.39	3.43	3.44	3.45	3.46	3.46	3.46	3.46	3.46	3.47	3.48
	.01	4.39	4.63	4.77	4.86	4.94	5.01	5.06	5.12	5.15	5.24	5.28	5.34	5.38	5.39
12	.05	3.08	3.23	3.33	3.36	3.40	3.42	3.44	3.44	3.46	3.46	3.46	3.46	3.47	3.48
	.01	4.32	4.55	4.65	4.76	4.84	4.92	4.96	5.02	5.07	5.13	5.17	5.22	5.23	5.26
13	.05	3.06	3.21	3.30	3.35	3.38	3.41	3.42	3.44	3.45	3.45	3.46	3.46	3.47	3.47
	.01	4.26	4.45	4.62	4.69	4.74	4.84	4.88	4.94	4.98	5.04	5.08	5.13	5.14	5.15
14	.05	3.03	3.18	3.27	3.33	3.37	3.39	3.41	3.42	3.44	3.45	3.46	3.46	3.47	3.47
	.01	4.21	4.42	4.55	4.63	4.70	4.78	4.83	4.87	4.91	4.96	5.00	5.04	5.06	5.07
15	.05	3.01	3.16	3.25	3.31	3.36	3.38	3.40	3.42	3.43	3.44	3.45	3.46	3.47	3.47
	.01	4.17	4.37	4.50	4.58	4.64	4.72	4.77	4.81	4.84	4.90	4.94	4.97	4.99	5.00
16	.05	3.00	3.15	3.23	3.30	3.34	3.37	3.39	3.41	3.43	3.44	3.45	3.46	3.47	3.47
	.01	4.13	4.34	4.45	4.54	4.60	4.67	4.72	4.76	4.79	4.84	4.88	4.91	4.93	4.94
17	.05	2.98	3.13	3.22	3.28	3.33	3.36	3.38	3.40	3.42	3.44	3.45	3.46	3.47	3.47
	.01	4.10	4.30	4.41	4.50	4.56	4.63	4.68	4.72	4.75	4.80	4.83	4.86	4.88	4.89
18	.05	2.97	3.12	3.21	3.27	3.32	3.35	3.37	3.39	3.41	3.43	3.45	3.46	3.47	3.47
	.01	4.07	4.27	4.38	4.46	4.53	4.59	4.64	4.68	4.71	4.76	4.79	4.82	4.84	4.85
19	.05	2.96	3.11	3.19	3.26	3.31	3.35	3.37	3.39	3.41	3.43	3.44	3.46	3.47	3.47
	.01	4.05	4.24	4.35	4.43	4.50	4.56	4.61	4.64	4.67	4.72	4.76	4.79	4.81	4.82
20	.05	2.95	3.10	3.18	3.25	3.30	3.34	3.36	3.38	3.40	3.43	3.44	3.46	3.46	3.47
	.01	4.02	4.22	4.33	4.40	4.47	4.53	4.58	4.61	4.65	4.69	4.73	4.76	4.78	4.79
22	.05	2.93	3.08	3.17	3.24	3.29	3.32	3.35	3.37	3.39	3.42	3.44	3.45	3.46	3.47
	.01	3.99	4.17	4.25	4.36	4.42	4.48	4.53	4.57	4.60	4.65	4.68	4.71	4.74	4.75
24	.05	2.92	3.07	3.15	3.22	3.28	3.31	3.34	3.37	3.38	3.41	3.44	3.45	3.46	3.47
	.01	3.96	4.14	4.24	4.33	4.39	4.44	4.49	4.53	4.57	4.62	4.64	4.67	4.70	4.72
26	.05	2.91	3.06	3.14	3.21	3.27	3.30	3.34	3.36	3.38	3.41	3.43	3.45	3.46	3.47
	.01	3.93	4.11	4.21	4.30	4.35	4.41	4.46	4.50	4.53	4.58	4.62	4.65	4.67	4.69
28	.05	2.90	3.04	3.13	3.20	3.25	3.30	3.33	3.35	3.37	3.40	3.43	3.45	3.46	3.47
	.01	3.91	3.08	4.18	4.28	4.34	4.39	4.43	4.47	4.51	4.56	4.60	4.62	4.65	4.67
30	.05	2.89	3.04	3.12	3.20	3.25	3.29	3.32	3.35	3.37	3.40	3.43	3.44	3.46	3.47
	.01	3.89	4.06	4.16	4.22	4.32	4.36	4.41	4.45	4.48	4.54	4.58	4.61	4.63	4.65
40	.05	2.86	3.01	3.10	3.17	3.22	3.27	3.30	3.33	3.35	3.39	3.42	3.44	3.46	3.47
	.01	3.82	3.99	4.10	4.17	4.24	4.30	4.34	4.37	4.41	4.46	4.51	4.54	4.57	4.59
60	.05	2.83	2.98	3.08	3.14	3.20	3.24	3.28	3.31	3.33	3.37	3.40	3.43	3.45	3.47
	.01	3.76	3.92	4.03	4.12	4.17	4.23	4.27	4.31	4.34	4.39	4.44	4.47	4.50	4.53
100	.05	2.80	2.95	3.05	3.12	3.18	3.22	3.26	3.29	3.32	3.36	3.40	3.42	3.45	3.47
	.01	3.71	3.66	3.93	4.06	4.11	4.17	4.21	4.25	4.29	4.35	4.38	4.42	4.45	4.48
∞	.05	2.77	2.92	3.02	3.09	3.15	3.19	3.23	3.26	3.29	3.34	3.38	3.41	3.44	3.47
	.01	3.64	3.80	3.90	3.98	4.04	4.09	4.14	4.17	4.20	4.26	4.31	4.34	4.38	4.41

A VS. C: 12.717 - 8.433 = 4.284 > 0.498 (SIGNIFICATIVA)

A VS. B: 12.717 - 10.15 = 2.567 > 0.474 (SIGNIFICATIVA)

B VS. C: 10.15 - 8.433 = 1.717 > 0.474 (SIGNIFICATIVA)

COMO EN EL METODO DE TUKEY, TODAS LAS DIFERENCIAS SON SIGNIFICATIVAS.

METODO DE FISHER

PARA REALIZAR COMPARACIONES MULTIPLES ENTRE LAS MEDIAS DE DIVERSOS TRATAMIENTOS SE PUEDE USAR LA ESTADISTICA DE FISHER (ESTE METODO EN REALIDAD ES UNA MODIFICACION DE LA COMPARACION ENTRE MEDIAS CON LA t DE STUDENT).

LA DISTRIBUCION t SE DEFINE COMO:

$$t = \frac{y}{\sqrt{\frac{\mu}{\phi}}} \qquad \text{(a)}$$

DONDE y ES N(0,1) Y μ TIENE DISTRIBUCION χ^2 CON ϕ G. DE L.

SI QUEREMOS COMPARAR DOS MEDIAS:

$$y = \frac{(X_{1.} - X_{2.}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad \text{(b)}$$

SI SE SUPONE $\sigma_1 = \sigma_2$:

$$y = \frac{(\overline{X}_{1.} - \overline{X}_{2.}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{(\overline{X}_{1.} - \overline{X}_{2.}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}}$$

Y

$$\mu = \sum^{n_1} \left(\frac{X_{1j} - \bar{X}_{1.}}{\sigma_1}\right)^2 + \sum^{n_2} \left(\frac{X_{2j} - \bar{X}_{2.}}{\sigma_2}\right)^2 + \ldots = \frac{1}{\sigma^2} \sum_i^k \sum_j^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2$$

QUE TIENE DISTRIBUCION χ^2 CON N-k G. DE L.

COMO $SW = \sum^k \sum^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2$ CON N-k G. DE L.

$$E(MSW) = \sigma^2$$

SW ES LA VARIANCIA COMBINADA, ESTIMADOR INSESGADO DE σ^2, POR LO TANTO, EL DENOMINADOR DE (a) ES:

$$\frac{\mu}{\phi} = \frac{1}{\sigma^2} MSW \qquad \text{(c)}$$

SUSTITUYENDO (b) y (c) EN (a) SE OBTIENE, BAJO LA HIPOTESIS $\mu_1 = \mu_2$:

$$t = \frac{(\bar{X}_{1.} - \bar{X}_{2.}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{MSW}} \sqrt{\frac{n_1 \, n_2}{n_1 + n_2}}$$

Y COMO $F = t^2$ SE OBTIENE:

$$F_0 = \frac{(\bar{X}_{1.} - \bar{X}_{2.})^2}{MSW} \, \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}$$

QUE COMPARADA CON F_c, CON 1 Y N-K G. DE L., NOS PERMITE SABER SI EXISTE DIFERENCIA SIGNIFICATIVA EN LAS MEDIAS.

PARA EFECTUAR CON MAYOR FACILIDAD COMPARACIONES MULTIPLES SE ACOSTUMBRA CALCULAR:

$$(\bar{X}_{1.} - \bar{X}_{2.})^2 = \frac{n_1 + n_2}{n_1 \, n_2} \, MSW \, F_0$$

Y COMPARAR CON EL TEORICO: $\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}$ MSW $F_{\alpha,1,N-K}$ (MARGEN)

CUANDO $(\bar{X}_{1.} - \bar{X}_{2.})^2$ ES MAYOR QUE EL MARGEN EXISTE UNA DIFERENCIA SIGNIFICATIVA.

EJEMPLO

EN EL EJEMPLO ANTERIOR, EL MARGEN EN CUALQUIER CASO VALE, CON $F_{0.05,1,15} = 4.54$

$$\frac{6 + 6}{6(6)} (0.149)(4.54) = 0.225$$

LAS DIFERENCIAS ENTRE MEDIAS SON LAS SIGUIENTES (AL CUADRADO), INDICANDO LAS SIGNIFICATIVAS CON UN MARCO

MUJER	A	B	C
$\bar{X}$	12.717	10.15	8.433
$(\text{DIFERENCIAS})^2$	*	$\boxed{6.59}$	$\boxed{18.35}$
		*	$\boxed{2.95}$
			*

TODAS LAS DIFERENCIAS SON SIGNIFICATIVAS.

10. EXPERIMENTO DE CUADRADOS LATINOS

SUPONGAMOS QUE EL ENSAYO QUE SE LLEVA A CABO PARA DETERMINAR EL VALOR QUE TOMA CIERTA VARIABLE EN UNA UNIDAD DE EXPERIMENTACION (ESPECIMEN) TOMA UN TIEMPO RELATIVAMENTE LARGO, DIGAMOS UNA SEMANA, Y QUE CADA ANALISTA (EXPERIMENTADOR) SOLO PUEDE REALIZAR UN ENSAYO A LA VEZ.

SI SE USARA, POR EJEMPLO, UN EXPERIMENTO POR BLOQUES COMPLETAMENTE ALEATORIZADO CON TRES ANALISTAS Y TRES SEMANAS, PODRIA PRESENTARSE LA SIGUIENTE DISTRIBUCION DE LOS ENSAYES PARA LOS ESPECIMENES TIPOS A, B Y C:

SEMANA	ANALISTA		
	1	2	3
1	A	B	A
2	C	A	B
3	B	C	C

SI SE PROBARA LA HIPOTESIS NULA $H_0: \mu_A - \mu_B = 0$, EN CONTRA DE LA ALTERNATIVA $H_1: \mu_A \neq \mu_B$, Y SE RECHAZARA H_0, QUEDARIA LA DUDA DE SI EN ESTE RESULTADO INFLUIRIA EL HECHO DE QUE LA PRIMER SEMANA SE PROBARON DOS ESPECIMENES DE A Y SOLO UNO DE B, EN LA SEGUNDA UNO DE A Y UNO DE B Y, EN LA TERCERA, SOLO UNO DE B.

SI ESTA DUDA FUERA LEGITIMA, SERIA NECESARIO ELIMINAR (FILTRAR)

EL EFECTO DEL FACTOR "SEMANA". ADICIONALMENTE AL FILTRADO, ES NECESARIO RESTRINGIR NUESTRO PROCESO DE ALEATORIZACION DE TAL MANERA QUE QUEDE UN SOLO ESPECIMEN DE CADA TIPO EN CADA SEMANA, QUEDANDO UNA DISTRIBUCION DE LOS ENSAYES COMO LA SIGUIENTE

SEMANA	ANALISTA		
	1	2	3
1	A	B	C
2	B	C	A
3	C	A	B

EN ESTE CASO LA ALEATORIZACION CONSISTIRIA EN ASIGNAR AL AZAR CADA ESPECIMEN TIPO A, B O C A CADA PAREJA (SEMANA, ANALISTA) DE NIVELES DE LOS FACTORES.

A UN DISEÑO EXPERIMENTAL COMO ESTE SE LE DENOMINA "DISEÑO DE CUADRADOS LATINOS". SE USA CUANDO SE QUIEREN COMPARAR t MEDIAS DE TRATAMIENTOS, EN PRESENCIA DE DOS FUENTES EXTRAÑAS DE VARIABILIDAD, LAS CUALES SE BLOQUEAN EN t RENGLONES Y EN t COLUMNAS.

<u>DEFINICION</u>: UN DISEÑO EXPERIMENTAL DE CUADRADOS LATINOS $t x t$, ES TAL QUE LOS t TRATAMIENTOS QUE SE DESEAN COMPARAR SE ASIGNAN AL AZAR ENTRE t RENGLONES Y t COLUMNAS, DE TAL FORMA QUE CADA TRATAMIENTO APARECE EN CADA RENGLON Y EN CADA COLUMNA.

... MODELO PARA REPRESENTAR A CADA UNO DE LOS RESULTADOS,

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + Z_{ijk} \qquad (1)$$

DONDE Z_{ijk} SON VARIABLES ALEATORIAS NORMALES INDEPENDIENTES ENTRE SI CON MEDIA CERO Y VARIANCIA DESCONOCIDA, σ^2, CADA UNA. LOS TERMINOS α_i, β_j Y γ_k SON LOS EFECTOS DEL TRATAMIENTO i, EL RENGLON j Y LA COLUMNA k, RESPECTIVAMENTE, CON

$\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = \sum_k \gamma_k = 0$, Y μ ES LA MEDIA GLOBAL.

EN TAL CASO

$$E(X_{ijk}) = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k \qquad (2)$$

$$Var(X_{ijk}) = \sigma^2$$

LA DESCOMPOSICION DE LA SUMA DE CUADRADOS QUEDA EN LA FORMA SIGUIENTE:

$$TSS = SST + SSR + SSC + SSE \qquad (3)$$

DONDE TSS ES LA SUMA DE CUADRADOS TOTAL, SST LA DE LOS TRATAMIENTOS, SSC LA DE COLUMNAS, SSR LA DE RENGLONES Y SSE LA DEL ERROR. LAS ECUACIONES PARA CALCULAR A CADA UNA DE ELLAS SON:

$$TSS = \sum_i \sum_j (X_{ijk} - \overline{X}_{...})^2 = \sum_i \sum_j X^2_{ijk} - n\,\overline{X}^2_{...} \qquad (4)$$

$$SST = t \sum_i (\overline{X}_{i..} - \overline{X}_{...})^2 = t \sum_i \overline{X}^2_{i..} - n\,\overline{X}^2_{...} \qquad (5)$$

$$SSR = t \sum_j (\overline{X}_{.j.} - \overline{X}_{...})^2 = t \sum_j \overline{X}^2_{.j.} - n\,\overline{X}^2_{...} \qquad (6)$$

MODELO PARA REPRESENTAR A CADA UNO DE LOS RESULTADOS,

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + Z_{ijk} \tag{1}$$

DONDE Z_{ijk} SON VARIABLES ALEATORIAS NORMALES INDEPENDIENTES ENTRE SI CON MEDIA CERO Y VARIANCIA DESCONOCIDA, σ^2, CADA UNA. LOS TERMINOS α_i, β_j Y γ_k SON LOS EFECTOS DEL TRATAMIENTO i, EL RENGLON j Y LA COLUMNA k, RESPECTIVAMENTE, CON

$\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = \sum_k \gamma_k = 0$, Y μ ES LA MEDIA GLOBAL.

EN TAL CASO

$$E(X_{ijk}) = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k \tag{2}$$

$$Var(X_{ijk}) = \sigma^2$$

LA DESCOMPOSICION DE LA SUMA DE CUADRADOS QUEDA EN LA FORMA SIGUIENTE:

$$TSS = SST + SSR + SSC + SSE \tag{3}$$

DONDE TSS ES LA SUMA DE CUADRADOS TOTAL, SST LA DE LOS TRATAMIENTOS, SSC LA DE COLUMNAS, SSR LA DE RENGLONES Y SSE LA DEL ERROR. LAS ECUACIONES PARA CALCULAR A CADA UNA DE ELLAS SON:

$$TSS = \sum_i \sum_j (X_{ijk} - \overline{X}_{...})^2 = \sum_i \sum_j X_{ijk}^2 - n\,\overline{X}^2_{...} \tag{4}$$

$$SST = t \sum_i (\overline{X}_{i..} - \overline{X}_{...})^2 = t \sum_i \overline{X}^2_{i..} - n\,\overline{X}^2_{...} \tag{5}$$

$$SSR = t \sum_j (\overline{X}_{.j.} - \overline{X}_{...})^2 = t \sum_j \overline{X}^2_{.j.} - n\,\overline{X}^2_{...} \tag{5}$$

$$SSC = t \sum_k (\bar{X}_{..k} - \bar{X}_{...})^2 = t \sum_k \bar{X}^2_{..k} - n \bar{X}^2_{...} \quad (7)$$

$$SSE = TSS - SST - SSR - SSC \quad (8)$$

$$n = t^2$$

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA DE ESTE EXPERIMENTO ES

FUENTE	SS	G. DE L.	MS	F
TRATAMIENTOS	SST	t-1	MST=SST/(t-1)	MST/MSE
RENGLONES	SSR	t-1	MSR=SSR/(t-1)	MSR/MSE
COLUMNAS	SSC	t-1	MSC=SSC/(t-1)	MSC/MSE
ERROR	SSE	(t-1)(t-2)	MSE=SSE/(t-1)(t-2)	
TOTALES	TSS	t^2-1		

CON ESTAS ESTADISTICAS F SE PRUEBAN, RESPECTIVAMENTE, LAS HIPOTESIS:

a) $H_0: \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n$

H_1: AL MENOS UNA α_i NO ES CERO

b) $H_0: \beta_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, t$

H_1: AL MENOS UNA β_j NO ES CERO

c) $H_0: \gamma_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, t$

H_1: AL MENOS UNA γ_k NO ES CERO

ESTAS PRUEBAS DE HIPOTESIS SON TAMBIEN PARA EL CASO DE NIVELES

ALEATORIOS.

EJEMPLO

EN UN PROBLEMA DE INGENIERIA DE TRANSITO SE DESEAN COMPARAR LOS TIEMPOS EN QUE NO SE APROVECHA LA LUZ VERDE DEL SEMAFORO POR NO PASAR NINGUN VEHICULO, PARA 4 DISPOSITIVOS DE CONTROL AUTOMATICO DE SEMAFOROS EN 4 CRUCEROS DIFERENTES DE LA CIUDAD, LO SUFICIENTEMENTE DISTANTES ENTRE SI COMO PARA CONSIDERARSE INDEPENDIENTES. PARA ESTO, SE DISEÑO UN EXPERIMENTO EN EL QUE SE MIDIERON LOS TIEMPOS DE DESPERDICIO, EN MINUTOS, QUE SE TUVIERON EN CUATRO HORAS DIFERENTES DEL DIA, DOS HORAS "PICO", Y DOS HORAS "VALLE" DEL DIA, CON LO CUAL SE INTEGRO EL SIGUIENTE EXPERIMENTO DE CUADRADOS LATINOS 4x4:

INTERSECCION	HORA DEL DIA				TOTALES	$\bar{X}_{.j.}$
	A. M. PICO	A. M. VALLE	P. M. VALLE	P. M. PICO		
1	D(15.5)	B(33.9)	C(13.2)	A(29.1)	91.7	22.92
2	B(16.3)	C(26.6)	A(19.4)	D(22.8)	85.1	21.27
3	C(10.8)	A(31.1)	D(17.1)	B(30.3)	89.3	22.32
4	A(14.7)	D(34.0)	B(19.7)	C(21.6)	90.0	22.50
TOTALES	57.3	125.6	69.4	103.8	356.1	
$\bar{X}_{..k}$	14.33	31.40	17.35	25.95		

EN ESTA TABLA LAS CIFRAS ENTRE PARENTESIS SON MINUTOS DE DESPERDICIO POR HORA PARA LOS DISPOSITIVOS A, B, C Y D.

LOS PROMEDIOS PARA CADA DISPOSITIVO SON:

$\bar{X}_{A..} = 94.3/4 = 23.58$; $\bar{X}_{C..} = 72.2/4 = 18.05$

$\bar{X}_{B..} = 100.2/4 = 25.05$; $\bar{X}_{D..} = 89.4/4 = 22.35$

$\bar{X}_{...} = 356.1/16 = 22.26$; $16\bar{X}^2_{...} = 7925.45$

$\bar{X}_{.1.} = 91.7/4=22.92$; $\bar{X}_{.2.} = 85.1/4;21.27$; $\bar{X}_{.3.} =89.3/4=22.32$;

$\bar{X}_{.4.} =90.0/4=22.50$; $\bar{X}_{..1}=57.3/4=14.33$; $\bar{X}_{..2}=125.6/4=31.40$;

$\bar{X}_{..3}=69.4/4=17.35$; $\bar{X}_{..4}=103.8/4=25.95$.

$SST=4(23.58^2+25.05^2+18.05^2+22.35^2)-7925.45=$

$=4(555.78+627.50+325.80+499.52)-7925.45=8034.41-7925.45=108.96$

$SSR=4(22.92^2+21.27^2+22.32^2+22.5^2)-7925.45=$

$=4(525.56+452.63+498.41+506.25)-7925.45=7931.40-7925.45=5.95$

$SSC=4(205.21+985.96+301.02+673.40)-7925.45=8662.36-7925.45=736.91$

$TSS=15.5^2+16.3^2+10.8^2+14.7^2+33.9^2+\ldots+21.6^2-7925.45=8801.05-7925.45=875.6$

$SSE=875.6-108.96-5.95-736.91=23.78$

FUENTE	SS	G. DE L.	MS	F
DISPOSITIVOS (TRATAMIENTOS)	108.96	3	36.32	9.17 > 4.76
RENGLONES (INTERSECCIONES)	5.95	3	1.98	0.50 < 4.76
COLUMNAS (HORAS DEL DIA)	736.91	3	245.64	61.87 > 4.76
ERROR	23.78	6	3.96	
TOTALES	875.60	15		

$F_{0.95,3,6}=4.76$

DE LO ANTERIOR SE CONCLUYE QUE SI HAY DIFERENCIAS SIGNIFICATIVAS ENTRE LOS DISPOSITIVOS Y ENTRE LAS HORAS DEL DIA, A UN 95 POR CIENTO DE NIVEL DE CONFIANZA.

EXPERIMENTOS DE
CUADRADOS LATINOS
CON REPLICAS

CON FRECUENCIA SE DISPONE DE TIEMPO Y RECURSOS PARA TENER VARIAS REPLICAS DE UN EXPERIMENTO DE CUADRADOS LATINOS, PRINCIPALMENTE CUANDO t ES PEQUEÑO. SUPONGAMOS QUE SE EJECUTAN r REPLICAS, EL MODELO MATEMATICO SERA, EN ESTE CASO:

$$X_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \rho_l + Z_{ijkl} \qquad (1)$$

EN DONDE ρ_l ES EL EFECTO DE LA L-ESIMA REPLICA, i, j y k = 1, 2, ..., t, Y l = 1, 2, ..., r; LOS DEMAS TERMINOS TIENEN EL MISMO SIGNIFICADO QUE EN EL EXPERIMENTO SIN REPLICAS. LAS RESTRICCIONES DE LOS PARAMETROS SON

$$\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = \sum_k \gamma_k = \sum_l \rho_l = 0 \qquad (2)$$

LA SUMA TOTAL DE CUADRADOS, EN ESTE CASO, SE DESCOMPONE DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$TSS = SST + SSR + SSC + SSRe + SSE \qquad (3)$$

EN DONDE

$$TSS = \sum_i \sum_j \sum_l X^2_{ijkl} - N\bar{X}^2_{....} \; ; \; N = t^2 r \qquad (4)$$

$$SST = rt \sum_i \bar{X}^2_{i...} - N\bar{X}^2_{....} \qquad (5)$$

$$SSR = rt \sum_j \bar{X}^2_{.j..} - N\bar{X}^2_{....} \qquad (6)$$

$$SSC = rt \sum_{k} \bar{X}^2_{..k.} - N\bar{X}^2_{....} \qquad (7)$$

$$SSRe = t^2 \sum_{l} \bar{X}^2_{...l} - N\bar{X}^2_{....} \qquad (8)$$

$$SSE = TSS - SST - SSR - SSC - SSRe \qquad (9)$$

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA CORRESPONDIENTE A ESTE EXPERIMENTO ES:

FUENTE DE VARIABILIDAD	G. de l	SS	MS	F
TRATAMIENTOS	t - 1	SST	MST=SST/(t-1)	MST/MSE
RENGLONES	t - 1	SSR	MSR=SSR/(t-1)	MSR/MSE
COLUMNAS	t - 1	SSC	MSC=SSC/(t-1)	MSC/MSE
REPLICAS	r - 1	SSRe	MSRe=SSRe/(r-1)	MSRe/MSE
ERROR	g=(t-1)(rt+r-3)	SSE	MSE=SSE/g	
TOTAL	$rt^2 - 1$	TSS		

EJEMPLO

SE TIENE UN PROCESO DE FABRICACION EN EL CUAL SE RECUBRE UNA LAMINA CON UN CIERTO METAL. EXISTE LA DUDA DE SI EL ESPESOR DE ESE RECUBRIMIENTO CAMBIA EN LAS DIRECCIONES DEL ROLADO Y TRANSVERSAL A EL. PARA ESTUDIAR ESTO SE TOMO COMO VARIABLE AL PESO POR UNIDAD DE AREA QUE SE TENGA DE DICHO RECUBRIMIENTO. PARA ELIMINAR ESTAS DOS FUENTES DE VARIACION, CADA UNA DE 2 PLACAS FABRICADAS SE DIVIDIO EN 16 PARTES REPRESENTANDO 4 POSICIONES EN DIRECCION LONGITUDINAL Y 4 TRANSVERSALES AL ROLADO, Y LUEGO SE TOMARON 4 MUESTRAS DE CADA UNA Y SE MANDARON A LOS LABORATORIOS A, B, C Y D PARA DETERMINAR EL PESO DEL RECUBRIMIENTO, TENIENDOSE LOS SIGUIENTES RESULTADOS:

	TRANSVERSAL										
	FACTOR	2.1	2.2	2.3	2.4	2.1	2.2	2.3	2.4	TOTALES	$\bar{X}_{.j..}$
LONGITUDINAL	1.1	$^{B}0.29$	$^{A}0.25$	$^{C}0.18$	$^{D}0.28$	$^{C}0.20$	$^{A}0.24$	$^{D}0.20$	$^{B}0.27$	1.91	0.239
	1.2	$^{D}0.28$	$^{B}0.18$	$^{A}0.21$	$^{C}0.25$	$^{B}0.28$	$^{C}0.19$	$^{A}0.22$	$^{D}0.28$	1.89	0.236
	1.3	$^{C}0.28$	$^{D}0.23$	$^{B}0.20$	$^{A}0.28$	$^{D}0.34$	$^{B}0.23$	$^{C}0.21$	$^{A}0.28$	2.05	0.256
	1.4	$^{A}0.30$	$^{C}0.19$	$^{D}0.24$	$^{B}0.25$	$^{A}0.32$	$^{D}0.22$	$^{B}0.16$	$^{C}0.27$	1.95	0.244
										7.80	

1.1	$^{C}0.20$	$^{A}0.24$	$^{D}0.20$	$^{B}0.27$
1.2	$^{B}0.28$	$^{C}0.19$	$^{A}0.22$	$^{D}0.28$
1.3	$^{D}0.34$	$^{B}0.23$	$^{C}0.21$	$^{A}0.28$
1.4	$^{A}0.32$	$^{D}0.22$	$^{B}0.16$	$^{C}0.27$
TOTALES	2.29	1.730	1.620	2.160
	0.286	0.216	0.203	0.27

VERIFICAR LAS HIPOTESIS DE EFECTOS NULOS Y SI HAY ALGUNA QUE NO LA CUMPLA, HACER LA PRUEBA DE COMPARACIONES MULTIPLES.

<u>SOLUCION</u>

a) ANALISIS DE VARIANCIA

$$\bar{X}_{...1} = (0.29 + 0.28 + \ldots + 0.28 + 0.25)/16 = 0.243$$

$$\bar{X}_{...2} = (0.20 + 0.28 + \ldots + 0.28 + 0.27)/16 = 0.244$$

$$\bar{X}_{A...} = (0.25 + 0.21 + \ldots + 0.28 + 0.32)/8 = 0.263$$

$$\bar{X}_{B...} = (0.29 + 0.18 + \ldots + 0.23 + 0.16)/8 = 0.233$$

$$\bar{X}_{C...} = (0.18 + 0.25 + \ldots + 0.21 + 0.27)/8 = 0.221$$

$$\bar{X}_{D...} = (0.28 + 0.28 + \ldots + 0.34 + 0.22)/8 = 0.259$$

$$\bar{X}_{....} = \frac{0.29 + 0.28 + 0.28 + \ldots + 0.28 + 0.28 + 0.27}{32} = 0.244$$

TOTALES: $TSS = \sum_j \sum_k \sum_\ell X^2_{ijk\ell} - N\bar{X}^2_{....} = 1.9628 - 32 \times 0.244^2 =$

$= 1.9628 - 1.905 = 0.058$

RENGLONES: $SSR = rt \sum_j \bar{X}^2_{.j..} - N\bar{X}^2_{....} = 2 \times 4 \times (0.239^2 + 0.236^2 +$

$+ 0.256^2 + 0.244^2) - 1.905 = 0.002$

COLUMNAS: $SSC = rt \sum_k \bar{X}^2_{..k.} - N\bar{X}^2_{....} = 8(0.286^2 + 0.216^2 + 0.203^2 +$

$+ 0.27^2) - 1.905 = 0.035$

REPLICA: $SSRe = t^2 \sum_l \bar{X}^2_{...l} - N\bar{X}^2_{....} = 16(0.243^2 + 0.244^2) - 1.905 =$

$= 0.008$

TRATAMIENTOS: $SST = rt \sum \bar{X}^2_{i...} - N\bar{X}^2_{....} = 8(0.263^2 + 0.233^2 +$

$+ 0.221^2 + 0.259^2) - 1.905 = 0.010$

ERROR: $SSE = TSS - SST - SSC - SSR - SSRe = 0.058 - 0.002 - 0.035 - 0.008 - 0.01 = 0.003$

TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA

FUENTE	g. de l.	SS	MS	F_E		$F_{c(\alpha=0.05)}$
LONG. AL ROLADO	3	SSR=0.002	0.0007	5.00	>	3.07
TRANSV. AL ROLADO	3	SSC=0.035	0.0117	83.57	>	3.07
LABORATORIOS	3	SST=0.010	0.0033	23.57	>	3.07
REPLICAS	1	SSRe=0.008	0.008	57.14	>	4.32
ERROR	3(7)=21	SSE=0.003	0.00014			
TOTAL	31	TSS=0.058				

DE LO ANTERIOR SE CONCLUYE QUE:

1. SI HAY EFECTOS EN LA LONGITUD AL ROLADO
2. SI HAY EFECTOS ENTRE REPLICAS
3. SI HAY EFECTOS ENTRE LOS DIFERENTES LABORATORIOS
4. SI HAY EFECTOS EN LA DIRECCION TRANSVERSAL AL ROLADO

b) PRUEBA DE COMPARACIONES MULTIPLES

b-1) ENTRE LOS DIFERENTES LABORATORIOS:

LABORATORIO	C	B	D	A
MEDIA	0.221	0.233	0.259	0.263

DE LAS TABLAS PARA $\alpha = 0.05$, 21 G de L. y P = 2,3,4, TENEMOS (INTERPOLANDO)

p	2	3	4
r_p	2.9425	3.0925	3.1825

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{MSE}{n}} = \sqrt{\frac{0.00014}{8}} = 0.00418$$

p	2	3	4
$R_p = r_p S_{\bar{x}}$	0.01231	0.01293	0.01330

EL RANGO PARA LAS 4 MEDIAS ES $R_4 = 0.042 > R_{4c}(0.01330)$, LO CUAL ERA DE ESPERARSE YA QUE LA PRUEBA F MOSTRO QUE SI HABIA EFECTO ENTRE LOS 4 TRATAMIENTOS.

LOS RANGOS PARA 3 MEDIAS ADYACENTES SON:

$$CBD = 0.259 - 0.221 = 0.038 > 0.01293$$

$$BDA = 0.263 - 0.233 = 0.030 > 0.01293$$

LOS RANGOS PARA PARES DE MEDIAS ADYACENTES SON:

$$CB = 0.233 - 0.221 = 0.012 < 0.01231$$

$$BD = 0.259 - 0.233 = 0.026 > 0.01231$$

$$DA = 0.263 - 0.259 = 0.0040 < 0.01231$$

POR LO TANTO TENDREMOS: $\underline{C \quad B} \quad \underline{D \quad A}$

DE DONDE CONCLUIMOS QUE LOS LABORATORIOS C Y B, ASI COMO D Y A TUVIERON RESULTADOS CONSISTENTES, MIENTRAS LOS LABORATORIOS

B Y D PRESENTARON RESULTADOS DIFERENTES ESTADISTICAMENTE Y, POR ENDE, NO HABRA CONSISTENCIA ENTRE B Y A Y C Y D

b-2) EN LOS NIVELES DE LA DIRECCION TRANSVERSAL AL ROLADO:

NIVELES	3	2	4	1
MEDIAS	0.203	0.216	0.270	0.286

DE LAS TABLAS PARA $\alpha = 0.05$; 21 G. de L., p = 2,3,4 Y $S\bar{x} = 0.00418$ TENEMOS:

p	2	3	4
r_p	2.945	3.0925	3.1825
$R_p = r_p \times S_{\bar{x}}$	0.01231	0.01293	0.01330

EL RANGO PARA LAS 4 MEDIAS ES R4 = 0.286 - 0.203 = 0.0830 > Rcrítico (0.01330), LO CUAL RATIFICA EL RESULTADO DE LA PRUEBA F DE QUE SI HAY EFECTO ENTRE LOS 4 NIVELES DEL ROLADO TRANSVERSAL.

PARA LOS CONJUNTOS DE 3 MEDIAS ADYACENTES:

$$R_{324} = 0.27 - 0.203 = 0.0670 > 0.01293$$

$$R_{241} = 0.286 - 0.216 = 0.07 > 0.01293$$

POR LO QUE TAMBIEN HAY EFECTO SIGNIFICATIVO ENTRE LAS TRIPLETAS DE MEDIAS ADYACENTES. PARA LOS CONJUNTOS DE 2 MEDIAS ADYACENTES:

$R_{32} = 0.216 - 0.203 = 0.0130 > 0.01231$

$R_{24} = 0.27 - 0.216 = 0.0540 > 0.01231$

$R_{41} = 0.286 - 0.27 = 0.0160 > 0.01231$

DE DONDE CONCLUIMOS QUE:

- FACTOR 2: N3 N2 N4 N1

EN LA DIRECCION TRANSVERSAL DEL ROLADO NINGUNA PAREJA DE NIVELES DIO RESULTADOS CONSISTENTES.

b-3) APLICANDO EL METODO DE FISHER DE COMPARACIONES MULTIPLES TENEMOS:

b-3.1) TRATAMIENTOS: $LSD = t_{21,\alpha/2} \sqrt{\frac{2MSE}{n}} = t_{21,0.025} \sqrt{\frac{2 \times 0.00014}{8}}$

$= 2.080 \times 0.0059 = 0.01231$

LABORATORIOS	C	B	D	A
MEDIAS	0.221	0.233	0.259	0.263
	*	0.0120	$\boxed{0.038}$	$\boxed{0.042}$
		*	$\boxed{0.026}$	$\boxed{0.03}$
			*	0.004

<u>C B</u> <u>D A</u>, QUE COINCIDE CON EL RESULTADO ANTERIOR

b-3.2) A NIVELES DEL ROLADO TRANSVERSAL:

3 2 4 1, QUE COINCIDE CON EL RESULTADO ANTERIOR

NIVELES	3	2	4	1
MEDIAS	0.203	0.216	0.27	0.286
	*	$\boxed{0.013}$	$\boxed{0.067}$	$\boxed{0.083}$
		*	$\boxed{0.054}$	$\boxed{0.07}$
			*	$\boxed{0.016}$

EJEMPLO

PARA EL EJERCICIO QUE SE DESARROLLO EN LA CLASE SOBRE FUNDENTES TENEMOS:

a) APLICANDO DUNCAN:

PARA LOS METODOS:

METODO	C	B	A
MEDIA	11.0	14.4	14.6

PARA $\alpha = 0.01$, $\nu = 10$; $p = 2,3$ TENEMOS

p	2	3
r_p	4.48	4.67
$R_p = r_p \times S_{\bar{x}} =$	2.1485	2.2397

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{MSE}{n}} = \sqrt{\frac{1.38}{6}} = 0.4795$$

EL RANGO PARA 3 MEDIAS ADYACENTES = $\bar{X}_A - \bar{X}_C = 14.6 - 11 =$ 3.6 > 2.397 LO QUE SE VERIFICO EN LA PRUEBA F.

LOS RANGOS PARA LOS CONJUNTOS DE 2 MEDIAS ADYACENTES SON

$\bar{X}_B - \bar{X}_C = 14.4 - 11 = 3.40 > 2.1485$ $\therefore$ SIGNIFICATIVO

$\bar{X}_A - \bar{X}_B = 14.6 - 14.4 = 0.2 < 2.1485$ $\therefore$ NO SIGNIFICATIVO

LO CUAL IMPLICA QUE C $\underline{B\ A}$; EL METODO C ES EL QUE PRODUCE EFECTOS ESTADISTICAMENTE SIGNIFICATIVOS.

b) PARA LAS FUNDENTES:

FUNDENTE	1	3	2
MEDIA	11.6	13	15.33

EL RANGO PARA LAS TRES MEDIAS ADYACENTES: $R_{132} = 15.33 - 11.6 =$ $= 3.73 > 2.2397$ O SEA QUE SI HAY EFECTO ENTRE LOS 3 FUNDENTES COMO SE HABIA VISTO EN LA PRUEBA F. PARA LOS CONJUNTOS DE 2 MEDIAS:

$$\bar{X}_3 - \bar{X}_1 = 1.40 < 2.1485 \therefore \text{ NO SIGNIFICATIVO}$$

$$\bar{X}_2 - \bar{X}_3 = 2.33 > 2.1485 \therefore \text{ SI SIGNIFICATIVO}$$

ENTONCES: FUNDENTES $\underline{1\ 3}\ 2$, POR LO QUE EL FUNDENTE 2 PRODUCE EFECTOS DIFERENTES ESTADISTICAMENTE SIGNIFICATIVOS.

APLICANDO FISHER:

a) PARA LOS METODOS

$$LSD = t_{0.005,10} \sqrt{\frac{2 \times 1.38}{6}} = 3.169 \times 0.6782 = 2.1493$$

METODOS	C	B	A
MEDIAS	11.0	14.4	14.6
	*	$\boxed{3.4}$	$\boxed{3.60}$
		*	0.20

C $\underline{B\ A}$

PARA LOS FUNDENTES

FUNDENTES	1	3	2
MEDIAS	11.6	B	15.33
	*	1.4	$\boxed{3.73}$
		*	$\boxed{2.33}$

1 3 2

11. EXPERIMENTO DE CUADRADOS GRECO-LATINOS

EN OCASIONES SE CONSIDERA QUE EXISTEN NO SOLO DOS SINO TRES FACTORES EXTRAÑOS QUE PUEDEN INFLUIR EN LOS RESULTADOS DE UN TRATAMIENTO, COMO SUCEDE EN EL EXPERIMENTO DE CUADRADOS LATINOS; CUANDO ESTO SUCEDE, SE PUEDE FILTRAR O AISLAR EL EFECTO DEL TERCER FACTOR MEDIANTE EL EMPLEO DE UN EXPERIMENTO DE CUADRADOS GRECO-LATINOS $t \times t$.

EN ESTE TIPO DE EXPERIMENTO LOS t NIVELES DEL TERCER FACTOR SE REPRESENTAN USUALMENTE CON LETRAS GRIEGAS, LAS CUALES SE COMBINAN CON LAS LATINAS QUE REPRESENTAN LOS t NIVELES DEL TRATAMIENTO, DE TAL MANERA QUE CADA LETRA LATINA APARECE SOLO UNA VEZ EN CONJUNCION CON UNA GRIEGA EN CADA COLUMNA Y EN CADA RENGLON.

POR EJEMPLO, EN UN EXPERIMENTO DE CUADRADOS GRECO-LATINOS DE 4x4 LAS LETRAS SE COMBINAN DE LA SIGUIENTE MANERA:

FACTOR 1	FACTOR 2			
	1	2	3	4
1	$A\alpha$	$B\beta$	$C\gamma$	$D\delta$
2	$B\delta$	$A\gamma$	$D\beta$	$C\alpha$
3	$C\beta$	$D\alpha$	$A\delta$	$B\gamma$
4	$D\gamma$	$C\delta$	$B\alpha$	$A\beta$

UN EJEMPLO EN EL QUE SE USARIA UN EXPERIMENTO DE ESTE TIPO SERIA EL CASO DEL PROBLEMA MENCIONADO EN LOS CUADRADOS LATINOS

SI ADEMAS DE LOS FACTORES "OPERARIO" Y "FUNDENTE", SE AGREGARA EL DE "TEMPERATURA" DE LA SOLDADURA.

EL MODELO MATEMATICO PARA REPRESENTAR A CADA RESULTADO DEL EXPERIMENTO ES UNA EXTENSION NATURAL DEL DE CUADRADOS LATINOS:

$$X_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \lambda_k + \gamma_l + Z_{ijkl} \qquad (1)$$

DONDE λ_k Y γ_l REPRESENTAN AHORA LOS EFECTOS DE LOS FACTORES REPRESENTADOS POR LAS LETRAS LATINAS Y GRIEGAS, RESPECTIVAMENTE.

POR SU PARTE, LA SEPARACION DE LA SUMA DE CUADRADOS QUEDA EN LA FORMA

$$TSS = SSR + SSC + SSL + SSG + SSE \qquad (2)$$

EN DONDE

$$TSS = \sum_i \sum_j X^2_{ijkl} - t^2\, \bar{X}^2_{....} \qquad (3)$$

$$SSR = t \sum_i \bar{X}^2_{i...} - t^2\, \bar{X}^2_{....} \qquad (4)$$

$$SSC = t \sum_j \bar{X}^2_{.j..} - t^2\, \bar{X}^2_{....} \qquad (5)$$

$$SSL = t \sum_k \bar{X}^2_{..k.} - t^2\, \bar{X}^2_{....} \qquad (6)$$

$$SSG = t \sum_l \bar{X}^2_{...l} - t^2\, \bar{X}^2_{....} \qquad (7)$$

$$SSE = TSS - SSR - SSC - SSL - SSG \tag{8}$$

DE ESTA MANERA LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA CORRESPONDIENTE ES:

FUENTE	G. DE L.	SS	MS	F
FACTOR I (RENGLONES	t-1	SSR	MSR=SSR/(t-1)	MSR/MSE
FACTOR II (COLUMNAS)	t-1	SSC	MSC=SSC/(t-1)	MSC/MSE
FACTOR III (LETRAS LATINAS)	t-1	SSL	MSL=SSL/(t-1)	MSl/MSE
FACTOR IV (LETRAS GRIEGAS)	t-1	SSG	MSG=SSG/(t-1)	MSG/MSE
ERROR O RESIDUAL	(t-1)(t-3)	SSE	MSE=SSE/(t-1)(t-3)	
TOTAL	t^2-1			

EN ESTE EXPERIMENTO LAS ESTADISTICAS F TIENEN t-1 Y (t-1)(t-3) GRADOS DE LIBERTAD EN EL NUMERADOR Y EN EL DENOMINADOR, RESPECTIVAMENTE.

PUESTO QUE EL ERROR TIENE (t-1)(t-3) GRADOS DE LIBERTAD, PARA t=3 SE TIENE G. DE L.=0, POR LO CUAL NO SE PUEDE HACER EL ANALISIS DE VARIANCIA.

<u>EJEMPLO</u>

EN UN PROBLEMA DE LA INDUSTRIA QUIMICA SE SOSPECHO QUE EN LOS RESULTADOS DE UN ENSAYE INFLUIAN CUATRO FACTORES: CONCENTRACION

DE LA SUBSTANCIA, VOLUMEN USADO, TAMAÑO DE ESPECIMEN Y TIEMPO DE LA REACCION, POR LO QUE SE DISEÑO UN EXPERIMENTO DE CUADRADOS GRECO-LATINOS PARA VERIFICAR ESTADISTICAMENTE CUALES DE ELLOS EFECTIVAMENTE INFLUIAN DE MANERA DIFERENTE AL CAMBIAR SUS RESPECTIVOS NIVELES. LOS RESULTADOS QUE SE OBTUVIERON TOMANDO 5 NIVELES DE LOS FACTORES FUERON LOS SEÑALADOS EN LA TABLA SIGUIENTE (LAS LETRAS LATINAS SON LOS NIVELES DEL FACTOR TAMAÑO):

FACTOR I (CONCENTRACION)	FACTOR II (VOLUMEN)					TOTALES	$\bar{X}_{i...}$
	1	2	3	4	5		
1	$A\alpha$ 65	$B\gamma$ 82	$C\varepsilon$ 108	$D\beta$ 101	$E\delta$ 126	482	96.4
2	$B\beta$ 84	$C\delta$ 109	$D\alpha$ 73	$E\gamma$ 97	$A\varepsilon$ 83	446	89.2
3	$C\gamma$ 105	$D\varepsilon$ 129	$E\beta$ 89	$A\delta$ 89	$B\alpha$ 52	464	92.8
4	$D\delta$ 119	$E\alpha$ 72	$A\gamma$ 76	$B\varepsilon$ 117	$C\beta$ 84	468	93.8
5	$E\varepsilon$ 97	$A\beta$ 59	$B\delta$ 94	$C\alpha$ 78	$D\gamma$ 106	434	86.8
TOTALES	470	451	440	482	451	2294	
$\bar{X}_{.j..}$	94.0	90.2	88.0	96.4	90.2	$\bar{X}_{....}=\frac{2294}{25}=91.76$	

$\Sigma X_{..A.} = 372,\ \Sigma X_{..B.} = 429,\ \Sigma X_{..C.} = 484,\ \Sigma X_{..D.} = 528,\ \Sigma X_{..E.} = 481$

$\bar{X}_{..A.} = \frac{372}{5} = 74.4,\ \bar{X}_{..B.} = \frac{429}{5} = 85.8,\ \bar{X}_{..C.} = \frac{484}{5} = 96.8,$

$\bar{X}_{..D.} = \frac{528}{5} = 105.6,\ \bar{X}_{..E.} = \frac{481}{5} = 96.2$

$\Sigma X_{...\alpha} = 377$, $\Sigma X_{...\beta} = 398$, $\Sigma X_{...\gamma} = 466$, $\Sigma X_{...\delta} = 537$, $\Sigma X_{...\varepsilon} = 534$

$\bar{X}_{...\alpha} = \frac{377}{5} = 75.4$, $\bar{X}_{...\beta} = \frac{398}{5} = 79.6$, $\bar{X}_{...\gamma} = \frac{466}{5} = 93.2$,

$\bar{X}_{...\delta} = \frac{537}{5} = 107.4$, $\bar{X}_{...\varepsilon} = \frac{534}{5} = 106.8$, $t^2\,\bar{X}^2_{....} = 25x91.76^2 = 210{,}497.44$

$SSR = 5(96.4^2+89.2^2+92.8^2+93.6^2+86.8^2)-210{,}497.44 = 227.76$

$SSC = 5(94.0^2+90.2^2+88.0^2+96.4^2+90.2^2)-210{,}497.44 = 285.76$

$TSS = 65^2+82^2+108^2+\ldots+106^2-210{,}497.44 = 9880.56$

$SSL = 5(74.4^2+85.8^2+96.8^2+105.6^2+96.2^2)-210{,}497.44 = 2867.76$

$SSG = 5(75.4^2+79.6^2+93.2^2+107.4^2+106.8^2)-210{,}497.44 = 5536.56$

$SSE = 9880.56-227.76-285.76-2867.76-5536.76 = 962.72$

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA RESULTANTE ES:

FUENTE	SS	G. DE L.	MS	F
CONCENTRACION	227.76	4	56.94	0.47 < 3.84
VOLUMEN	285.76	4	71.44	0.59 < 3.84
TAMAÑO	2867.76	4	716.94	5.96 > 3.84
TIEMPO	5536.76	4	1384.14	11.50 > 3.84
ERROR	962.72	8	120.34	
TOTAL	9880.56	24		

$F_{0.95,4,8} = 3.84$ (PARA $\alpha = 0.05$)

DEL ANALISIS DEL EXPERIMENTO ANTERIOR SE CONCLUYE QUE LOS FACTORES "CONCENTRACION" Y "VOLUMEN" NO INFLUYEN SIGNIFICATIVA-TE EN LOS RESULTADOS A UN 95 POR CIENTO DE NIVEL DE CONFIANZA. Y, EN CAMBIO, LOS FACTORES "TAMAÑO" Y "TIEMPO" SI INFLUYEN.

EJEMPLO

LOS FOCOS DE UNAS CAMARAS FOTOGRAFICAS FUERON COMPARADAS CON 5 CAMARAS, 5 TIPOS DE PELICULA Y 5 TIPOS DE FILTROS (DENOTADOS $\alpha, \ldots, \varepsilon$). DOS DUPLICADOS FUERON TOMADOS PARA CADA COMBINACION DE LOS 4 FACTORES OBTENIENDOSE LOS SIGUIENTES DATOS:

PELICULA	CAMARA 1	2	3	4	5	$\bar{X}_{i....}$
1	(Aα) 0.64, 0.66, $\bar{X}_{ij..}$ = 0.65	(Bγ) 0.70, 0.74, 0.72	(Cε) 0.73, 0.69, 0.71	(Dβ) 0.66, 0.66, 0.66	(Eδ) 0.66, 0.64, 0.65	0.6780
2	(Bβ) 0.62, 0.64, 0.63	(Cδ) 0.63, 0.61, 0.62	(Dα) 0.69, 0.67, 0.68	(Eγ) 0.70, 0.72, 0.71	(Aε) 0.78, 0.76, 0.77	0.6820
3	(Cγ) 0.65, 0.64, 0.645	(Dε) 0.72, 0.73, 0.725	(Eβ) 0.68, 0.68, 0.68	(Aδ) 0.64, 0.65, 0.645	(Bα) 0.74, 0.70, 0.72	0.6830
4	(Dδ) 0.64, 0.63, 0.635	(Eα) 0.73, 0.72, 0.725	(Aγ) 0.68, 0.70, 0.69	(Bε) 0.74, 0.74, 0.74	(Cβ) 0.72, 0.75, 0.735	0.7050
5	(Eε) 0.74, 0.74, 0.74	(Aβ) 0.73, 0.71, 0.725	(Bδ) 0.67, 0.66, 0.665	(Cα) 0.74, 0.75, 0.745	(Dγ) 0.78, 0.78, 0.78	0.73
$\bar{X}_{.j...}$	0.66	0.702	0.685	0.70	0.731	

a) DETERMINE LA VARIANCIA RESIDUAL

b) QUE EFECTOS SON SIGNIFICANTES? (NOTA: LOS DUPLICADOS SE CORRIERON AL MISMO TIEMPO. ENTONCES ESTOS PUEDEN NO SER UNA MEDICION VERDADERA DEL ERROR).

c) DETERMINE UN INTERVALO DE CONFIANZA DEL 95% PARA LA DENSIDAD MEDIA DE LA CAMARA # 5

SOLUCION

$\bar{X}_{.....} = 34.78/50 = 0.6956; \quad \bar{X}^2_{.....} = 0.483859$

TOTALES: $TSS = \sum\limits_{ijklr}\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma X^2_{ijklr} - t^2 r \bar{X}^2_{.....} = (0.64^2 + 0.66^2 + 0.62^2 +$

$+ 0.64^2 + ... + 0.72^2 + 0.75^2 + 0.78^2 + 0.78^2) -$

$- 5^2 \times 2 \times 0.483859 = 24.298400 - 2 \times 25 \ (34.78/50)^2$

$= 24.298400 - 12.096484 \times 2 = 0.105432$

FACTOR I (PELICULAS): $SSR = (t \sum\limits_i \bar{X}^2_{i....} - t^2 \bar{X}^2_{.....})r$

$= [5(0.459684 + 0.465124 + 0.466489 +$

$0.497025 + 0.532900) - 12.096484 \times 2$

$= 5 \times 2.421222 - 12.096484] \times 2 =$

$= (0.009626) \times 2 = 0.019252$

FACTOR II (CAMARAS): $SSC = (t \sum\limits_j \bar{X}^2_{.j...} - t^2 \bar{X}^2_{.....})r$

$SSC = [5(0.4356+0.492804+0.469225+0.49+0.534361) -$

$- 12.096484] \times 2 = 2(5 \times 2.421990-12.096484) =$

$= (12.109950-12.096484) \times 2 = (0.013466) \times 2$

$= 0.026932$

FACTOR III (LETRAS LATINAS (FOCOS))

$SSL = (5 \sum\limits_k \bar{X}^2_{..k..} - t^2 \bar{X}^2_{.....})r$

$= [5(0.483025+0.483025+0.477481$

$\bar{X}_{..A..} = 0.695000$

$\bar{X}_{..B..} = 0.695000$

$\bar{X}_{..C..} = 0.691000$

$\bar{X}_{..D..} = 0.696000$

$$= \quad + 0.484416 + 0.491401)$$

$$- 12.096484 \,]\, x\ 2$$

$$= (5 \times 2.419348 - 12.096484) \times 2$$

$$= (12.096740 - 12.096484) \times 2 = 0.000256 \times 2 = 0.000512$$

$\bar{X}_{..E..} = 0.701000$

FACTOR IV (LETRAS GRIEGAS (FILTROS)):

$$SSG = (t\sum_{l}\bar{X}^2_{...l.} - t^2\bar{X}^2_{.....})r$$

$$= [\,5(0.495816+0.469225+0.502681+$$

$$0.413449+0.543169) -$$

$$12.096484\,]\ x\ 2$$

$$= (5 \times 2.424140 - 12.096484) \times 2$$

$$= (12.1207 - 12.096484) \times 2$$

$$= 0.024216 \times 2 = 0.048432$$

$\bar{X}_{...\alpha.} = 0.704$

$\bar{X}_{...\beta.} = 0.685$

$\bar{X}_{...\gamma.} = 0.709$

$\bar{X}_{...\delta.} = 0.643$

$\bar{X}_{...\varepsilon.} = 0.737$

RESIDUAL (DUPLICADOS):

$$SSRes = \sum_{ijklr}\sum\sum\sum\sum X^2_{ijklr} - r\sum_{ij}\sum\bar{X}^2_{ij...}$$

$$= 24.2984 - 2(0.65^2 + 0.72^2 + 0.71^2 + \ldots + 0.665^2 + 0.745^2$$

$$+ 0.78^2)$$

$$= 24.2984 - 2 \times 12.1467 = 0.005000$$

INTERACCIONES: $SSI = TSS - SSR - SSC - SSL - SSG - SSRes$

$$= 0.105432 - 0.019252 - 0.026932 - 0.000512 - 0.048432 -$$

$$0.0050 = 0.005304$$

CON LO ANTERIOR PODEMOS FORMULAR LA SIGUIENTE TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA:

FUENTE DE VARIACION	GRADOS DE LIBERTAD	SUMA DE CUADRADOS	MEDIOS CUADRATICOS	F_{CALC}	$F_c = F_{\alpha,\nu_1\nu_2}$
FACTOR I (PELICULAS)	$t-1=5-1=4$	SSR 0.019252	MSR=0.019252/4 =0.004813	F_I=MSR/MSRe =24.065	$F_I = F_{0,99,4,25}$ 4.18
FACTOR II (CAMARAS)	$t-1=5-1=4$	SSC 0.026932	MSC=$\frac{0.026932}{4}$ =0.006733	F_{II}=MSC/MSRe = 33.665	$F_{II} = F_{0,99,4,25}$ 4.18
FACTOR III (BULBOS)	$t-1=4$	SSL 0.000512	MSL=0.000512/4 =0.000128	F_{III} =MSL/MSRe = 0.64	$F_{III} = F_{0.99,4,25}$ 4.18
FACTOR IV (FILTROS)	$t-1=4$	SSG 0.048432	MSG=$\frac{0.048432}{4}$ =0.012108	F_{IV}=MSG/MSRe =60.54	$F_{IV} = F_{0.99,4,25}$ 4.18
INTERACCIONES	$(t-1)(t-3)= 4\times 2=8$	SSI 0.005304	MSI=0.005304/8 =0.000663	F_{IN}=MSI/MSRe =3.3150	$F = F_{0,99,8,25}$ 3.32
RESIDUAL (DUPLICADOS)	$=49-16-8 = 25$	SSRe 0.0050	MSRe=0.0050/25 =0.00020		
TOTAL	rt^2-1 $2\times 25-1$ $= 49$	0.105432			

a) EL ESTIMADOR INSESGADO DE LA VARIANCIA RESIDUAL σ^2 ES $\hat{\sigma}^2$ = MSRes = 0.00020

b) DE LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA SE OBSERVA QUE LAS PELICULAS, LAS CAMARAS Y LOS TIPOS DE FILTROS PRODUCEN EFECTOS SIGNIFICATIVOS.

c) EL INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA CAMARA # 5 SERA ($\alpha = 0.05$):

$$\bar{X}_{.5...} \pm t_{.025,25}\sqrt{\frac{MSRes}{5}} = 0.731 \pm 2.060\sqrt{\frac{0.00020}{5}} =$$

$$= 0.731 \pm 2.060 \times 0.006325 = 0.731 \pm 0.013029 = (0.717971, 0.744029)$$

d) COMPARACIONES MULTIPLES:

d.1) ENTRE LAS PELICULAS:

ICULA	1	2	3	4	5
....	0.6780	0.682	0.683	0.705	0.73
	*	0.0040	0.0050	0.0270	0.0520
		*	0.001	0.023	0.048
			*	0.022	0.047
				*	0.025

DUNCAN: 1 2 3 4 5

p	2	3	4	5
q'	2.915	3.065	3.145	3.215
W_p	0.013	0.0137	0.014	0.0144

DONDE

$$W_p = q' \sqrt{\frac{0.00020}{10}}$$

$$q' = q'_{0.05,(r,25)}$$

$$\text{FISHER: LSD} = t_{\alpha/2,\nu}\sqrt{\frac{2MSR_{es}}{rt}} = t_{0.01/2,25}\sqrt{\frac{2x6.00020}{2x5}} =$$

$$= 2.060 \times 0.0063 = 0.013$$

DE LA TABLA OBSERVAMOS QUE LAS PELICULAS 4 Y 5 PRESENTAN EFECTOS SIGNIFICATIVOS

METODO DE TUKEY:

$$W = q_{\alpha(t,v)}\sqrt{\frac{MSR_{es}}{rt}} = q_{0.05,}(5,25)\sqrt{\frac{0.00020}{10}} = 4.1583 \times 0.0045 = 0.0186$$

OBSERVANDO LOS RESULTADOS DE FISHER SE LLEGA A LA MISMA CONCLUSION (VER TABLA).

d.2) ENTRE CAMARAS

CAMARAS	1	3	4	2	5
$\bar{X}_{.j...}$	0.66	0.685	0.70	0.702	0.731
	*	0.0250	0.04	0.042	0.071
		*	0.015	0.017	0.0450
			*	0.002	0.031
				*	0.029

<u>FISHER</u>: LSD = 2.060x0.0063

= 0.013

<u>TUCKEY</u>: W = 0.0186

DUNCAN:

p	2	3	4	5
q'	2.915	3.065	3.145	3.215
W_p	0.013	0.0137	0.014	0.0144

OBSERVAMOS EN ESTE CASO QUE FISHER Y DUNCAN COINCIDEN EN RESULTADOS: μ_1, μ_3 Y μ_5 SON SIGNIFICATIVAMENTE DIFERENTES MIENTRAS μ_4 Y μ_2 SON MENOS SIGNIFICATIVOS; EL METODO DE TUCKEY DIFIERE EN LO REFERENTE A μ_3 DE DONDE SE INFIERE QUE LAS CAMARAS 1 Y 5 SON LAS QUE DIFIEREN.

d.3) PARA LOS FILTROS:

FILTROS	δ	β	α	γ	ε
$\bar{X}_{....i}$	0.643	0.685	0.704	0.709	0.737
	*	0.042	0.0610	0.066	0.094
		*	0.019	0.024	0.052
			*	0.005	0.033
				*	0.028

<u>FISHER</u>: LSD = 0.013

<u>TUCKEY</u>: W = 0.0186

<u>DUNCAN</u>:

p	2	3	4	5
W_p	0.013	0.0137	0.014	0.0144

EN ESTE CASO LOS FILTROS α Y γ SON MENOS SIGNIFICATIVOS EN LOS EFECTOS QUE LOS FILTROS RESTANTES δ, β Y ε (OBSERVESE LA COINCIDENCIA DE RESULTADOS POR LOS 3 METODOS.

12. BLOQUES ALEATORIZADOS INCOMPLETOS

ES USUAL QUE AL PLANEAR UN EXPERIMENTO SE PRESENTA LA SITUACION DE QUE LOS BLOQUES NO SON LO SUFICIENTEMENTE GRANDES COMO PARA ACOMODAR UNA REPLICA COMPLETA.

POR EJEMPLO, SI EN UN DIA SOLO SE PUEDEN REALIZAR 3 ENSAYES Y SI HAY 4 NIVELES DEL "TRATAMIENTO", ENTONCES EN UN SOLO DIA NO SE PUEDEN REALIZAR LOS ENSAYES PARA OBSERVAR LOS CUATRO NIVELES EN UN SOLO BLOQUE (DIA). EN ESTE CASO EL DISEÑO EXPERIMENTAL QUEDARIA CON 4 BLOQUES CON TRES RESULTADOS SOLAMENTE CADA UNO, DE LA SIGUIENTE MANERA:

BLOQUES			
I	II	III	IV
B	A	C	B
A	B	A	D
C	D	D	C

EN EL QUE EL ORDEN DE APARICION DE CADA TRATAMIENTO EN CADA BLOQUE HA SIDO ALEATORIZADO.

UN DISEÑO EXPERIMENTAL COMO ESTE SE DENOMINA DE BLOQUES ALEATORIZADOS INCOMPLETOS O BLOQUES INCOMPLETOS BALANCEADOS (BIB). EL TERMINO BALANCEADO NO SOLO SIGNIFICA QUE TODOS LOS BLOQUES SON DEL MISMO TAMAÑO Y QUE CADA NIVEL DEL TRATAMIENTO APARECE EL MISMO NUMERO DE VECES, SINO TAMBIEN QUE CADA PAREJA DE NIVELES DEL TRATAMIENTO APARECE JUNTA (EN EL MISMO BLOQUE) EL

MISMO NUMERO DE VECES; EN EL EJEMPLO ANTERIOR ESTO SUCEDE 2 VECES.

PARA DESCRIBIR UN EXPERIMENTO BIB SE UTILIZAN LOS SIGUIENTES TERMINOS:

t = NUMERO DE NIVELES DEL TRATAMIENTO

b = NUMERO DE BLOQUES

k = NUMERO DE NIVELES DEL TRATAMIENTO EN CADA BLOQUE

r = NUMERO DE REPLICAS DE CADA NIVEL DEL TRATAMIENTO

λ = NUMERO DE BLOQUES EN LOS CUALES APARECE CADA PAREJA DE NIVELES DEL TRATAMIENTO

UNA FORMA ALTERNATIVA DE EXPRESAR EL EXPERIMENTO ANTERIOR ES MEDIANTE LA SIGUIENTE TABLA:

TRATAMIENTOS	BLOQUES			
	I	II	III	IV
A	X	X	X	
B	X	X		X
C	X		X	X
D		X	X	X

$t=4$

$b=4$

$k=3$

$r=3$

$\lambda=2$

OTRO EJEMPLO ES EL SIGUIENTE:

TRATAMIENTOS	BLOQUES I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
A	X				X	X	X		X	X	
B		X				X	X	X		X	X
C	X		X				X	X	X		X
D	X	X		X				X	X	X	
E		X	X		X				X	X	X
F	X		X	X		X				X	X
G	X	X		X	X		X				X
H	X	X	X		X	X		X			
I		X	X	X		X	X		X		
J			X	X	X		X	X		X	
K				X	X	X		X	X		X

EN ESTE EJEMPLO: $t = 11$, $b = 11$, $k = 6$, $r = 6$ y $\lambda = 3$.

EN EL LIBRO DE COCHRAN Y COX, "EXPERIMENTAL DESIGNS", SE PRESENTAN UNA LISTA DE DISEÑOS BIB.

EL MODELO MATEMATICO PARA REPRESENTAR AL DISEÑO BIB ES

$$X_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + Z_{ij} \qquad (1)$$

DONDE LAS β_i SON LOS EFECTOS DE LOS BLOQUES, Y LAS τ_j LOS EFECTOS DE LOS TRATAMIENTOS, CON $\sum_{i=1}^{b} \beta_i = \sum_{j=1}^{t} \tau_j = 0$.

EN ESTOS EXPERIMENTOS SE PRESUME QUE NO HAY INTERACCION ENTRE LOS DOS FACTORES.

LA DIFERENCIA DEL EXPERIMENTO BIB Y EL DE BLOQUES COMPLETOS ALEATORIZADOS, ES QUE EN EL PRIMERO NO ESTÁN PRESENTES TODAS LAS POSIBLES COMBINACIONES DE i Y j.

CONSIDEREMOS UN NIVEL PARTICULAR DEL TRATAMIENTO, q; LA SUMA DE TODAS LAS OBSERVACIONES DE ESTE NIVEL ES, UTILIZANDO LA EC (1):

$$X_{.q} = \sum_{i(q)} X_{iq} = r\mu + \sum_{i(q)} \beta_i + r\tau_q + \sum_{i(q)} Z_{iq} \qquad (2)$$

DONDE $\sum_{i(q)}$ DENOTA LA SUMATORIA SOBRE TODOS LOS BLOQUES (r) QUE CONTIENEN EL q-ESIMO TRATAMIENTO. SIMILARMENTE:

$$X_{i.} = \sum_{j(i)} X_{ij} = k\mu + k\beta_i + \sum_{j(i)} \tau_j + \sum_{j(i)} Z_{ij} \qquad (3)$$

DONDE $\sum_{j(i)}$ DENOTA LA SUMATORIA SOBRE TODOS LOS TRATAMIENTOS INCLUIDOS EN EL i-ESIMO BLOQUE.

SUMANDO LA EC (3) SOBRE TODOS LOS BLOQUES QUE CONTIENEN EL q-ESIMO TRATAMIENTO SE OBTIENE:

$$\sum_{i(q)} \sum_{j(i)} X_{ij} = rk\mu + k \sum_{i(q)} \beta_i + \sum_{i(q)} \sum_{j(i)} \tau_j + \sum_{i(q)} \sum_{j(i)} Z_{ij} \qquad (4)$$

EL TERCER TERMINO DEL MIEMBRO DERECHO DE ESTA ECUACION VALE:

$$\sum_{i(q)} \sum_{j(i)} \tau_j = r\tau_q + \lambda \sum_{j \neq q} \tau_j = (r - \lambda)\tau_q \tag{5}$$

YA QUE $\sum_{j=1}^{t} \tau_j = 0 = \tau_q + \sum_{j \neq q} \tau_j$, POR LO QUE $\sum_{j \neq q} \tau_j = -\tau_q$

SUSTRAYENDO EL RESULTADO DE LA EC (4) PREVIA SUSTITUCION DE LA EC (5) AL DE LA EC (2) MULTIPLICADO POR k SE OBTIENE

$$k \sum_{i(q)} X_{iq} - \sum_{i(q)} \sum_{j(i)} X_{ij} = (kr - r + \lambda)\tau_q + k \sum_{i(q)} Z_{iq} - \sum_{i(q)} \sum_{j(i)} Z_{ij} \tag{6}$$

POR TANTO, Y CONSIDERANDO QUE $E(Z_{ij}) = 0$ Y QUE LA RELACION $\lambda = r(k - 1)/(t - 1)$ ES VALIDA, DE LA EC (6) SE OBTIENE QUE UN ESTIMADOR INSESGADO DE τ_q ES

$$\hat{\tau}_q = \frac{1}{\lambda t} \{k \sum_{i(q)} X_{iq} - \sum_{i(q)} \sum_{j(i)} X_{ij}\} \tag{7}$$

O

$$\hat{\tau}_q = \frac{k}{\lambda t} \{ \sum_{i(q)} X_{iq} - \bar{X}_{i.} \} = \frac{k}{\lambda t} \{X_{.q} - \sum_{i(q)} \bar{X}_{i.} \} \tag{8}$$

DONDE $\bar{X}_{i.} = \sum_j X_{ij}/k$ = PROMEDIO ARITMETICO MARGINAL DE LAS OBSERVACIONES DEL BLOQUE i

$X_{.q}$ = SUMA DE TODAS LAS OBSERVACIONES DEL q-ESIMO TRATAMIENTO

SUMANDO LA EC (1) SOBRE TODAS LAS OBSERVACIONES SE ENCUENTRA QUE EL PROMEDIO GLOBAL

$$\bar{X}_{..} = \sum_i \sum_j X_{ij}/(kb) \tag{9}$$

ES UN ESTIMADOR INSESGADO DE μ, POR TANTO, UN ESTIMADOR INSESGADO DEL EFECTO DEL q-ESIMO TRATAMIENTO ES $\bar{X}_{..} + \hat{\tau}_q$, EL CUAL TIENE COMO VARIANCIA A

$$\text{Var}\ (\bar{X}_{..} + \hat{\tau}_q) = \frac{\sigma^2}{r} \{\frac{1}{t} + \frac{k(t - 1)^2}{(k - 1)t^2}\} \tag{10}$$

DE IGUAL MANERA, LA DIFERENCIA DE EFECTOS ENTRE LOS TRATAMIENTOS q Y q' SE ESTIMA CON $\hat{\tau}_q - \hat{\tau}_{q'}$, CON LO CUAL SE TIENE UNA VARIANCIA DE LA ESTIMACION

$$\text{Var}(\hat{\tau}_q - \hat{\tau}_{q'}) = \sigma^2 \frac{2k}{\lambda t} \tag{11}$$

LA TABLA PARA EL ANALISIS DE VARIANCIA DE ESTE EXPERIMENTO ES

FUENTE	G. DE L.	SS	MS	F
BLOQUES (SIN AJUSTAR)	b - 1	SSB	MSB = SSB/(b - 1)	
TRATAMIENTOS (AJUSTADO)	t - 1	SST	MST = SST/(t - 1)	MST/MSE
ERROR O RESIDUAL	bk-t-b+1	SSE	MSE=SSE/(bk-t-b-1)	
TOTAL	bk - 1	TSS		

DONDE

$$SSB = \sum_{i=1}^{b} X_{i.}^2/k - bk\,\overline{X}_{..}^2 \tag{12}$$

$$SST = \frac{1}{k\lambda t}\sum_{j=1}^{t}\{kX_{.j} - \sum_{i(j)} X_{i.}\}^2 \tag{13}$$

$$TSS = \sum_i \sum_j X_{ij}^2 - bk\,\overline{X}_{..}^2 \tag{14}$$

$$SSE = TSS - SSB - SST \tag{15}$$

ES NECESARIO MENCIONAR QUE EL SSB CALCULADO CON LA EC (12) SOLO SIRVE EN ESTE CASO COMO AUXILIAR PARA CALCULAR SSE CON LA EC (15), PERO NO PARA HACER LA PRUEBA DE HIPOTESIS DE EFECTOS DE LOS BLOQUES; LA RAZON DE ESTO ES QUE EN ESTE CASO, AL USAR LA EC (1) PARA CALCULAR SSB SE ENCUENTRA QUE DEPENDE DE β_i Y DE τ_j; PARA QUE SE PUEDA HACER PRUEBA DE EFECTOS DE BLOQUES SE REQUIERE DISEÑAR UN EXPERIMENTO DE BLOQUES INCOMPLETOS BALANCEADO Y SIMETRICO, EL CUAL SE ESTUDIARA MAS ADELANTE.

EJEMPLO

EN LA PRODUCCION DE UN COMPONENTE DE UNA MAQUINA, SE TIENE QUE EL DIAMETRO INTERIOR DE UN TUBO ES UNA DIMENSION CRITICA. ESTOS COMPONENTES SE FABRICAN CON 7 MAQUINAS Y 7 ALEACIONES DIFERENTES.

PARA DETERMINAR LOS EFECTOS DE LAS ALEACIONES SE DISEÑO UN EXPERIMENTO BIB, EN EL QUE LOS BLOQUES FUERON LAS MAQUINAS Y

LOS TRATAMIENTOS FUERON LAS ALEACIONES, Y SE TOMARON MUESTRAS DE 10 DIAMETROS EN CADA CASO. EN LA SIGUIENTE TABLA SE PRESENTAN LAS DIFERENCIAS DEL PROMEDIO DE LOS DIEZ DATOS Y LA DIMENSION NOMINAL, EN MM.

TRATAMIENTOS (ALEACIONES)	MAQUINAS (BLOQUES)							TOTALES ($X_{.j}$)
	1	2	3	4	5	6	7	
A	5	4	9					18
B			12	9	9			30
C	7			6		8		21
D			7			5	3	15
E	4				6		5	15
F		10			12	9		31
G		4		4			3	11
TOTALES ($X_{i.}$)	16	18	28	19	27	22	11	141
$\overline{X}_{i.}$	5.33	6.00	9.33	6.33	9.00	7.33	3.67	

EN ESTE CASO SE TIENE QUE b=t=7, k=r=3, λ=1, $\overline{X}_{..} = \frac{141}{21} = 6.7143$

$$SSB = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{7} X_{i.}^2 - 7x3x\,\overline{X}_{..}^2 = \frac{1}{3}(16^2+18^2+28^2+19^2+27^2+22^2+11^2) - 946.7143 = 72.96$$

$$SST = \frac{1}{3x1x7}\sum_{j=1}^{7}\left(3X_{.j} - \sum_{i(j)} X_{i.}\right)^2 = \frac{1}{21}\Big[\{3x18 - (16+18+28)\}^2 +$$

$$+ \{3x30 - (28+19+27)\}^2 + \{3x21 - (16+19+22)\}^2 +$$

$$+ \{3x15 - (28+22+11)\}^2 + \{3x15 - (16+27+11)\}^2 +$$

$$+ \{3x31 - (18+27+22)\}^2 + \{3x11 - (18+19+11)\}^2\Big] = 75.90$$

$$TTS = \sum_i \sum_j X_{ij}^2 - bk\,\overline{X}_{..}^2 = 5^2+4^2+9^2+12^2+\ldots+3^2 - 946.7143 = 156.29$$

$SSE = 156.29 - 72.96 - 75.90 = 7.43$

$MST = 75.90/6 = 12.65$, $MSE = 7.43/8 = 0.929$, $F_T = \frac{12.65}{0.929} = 13.62$

$F_{0.99,6,8} = 6.37 < 13.62$, POR LO QUE SE CONCLUYE QUE CON UN 99% DE NIVEL DE CONFIANZA SI HAY EFECTO DEBIDO A LA ALEACION QUE SE UTILIZA PARA FABRICAR EL COMPONENTE.

TAREA: ESTIMAR LOS τ_i

PARA EL EJEMPLO DE LOS DIAMETROS INTERNOS DE LOS TUBOS, CALCULAR LOS VALORES ESTIMADOS DE τ_j'S Y HACER COMPARACIONES MULTIPLES:

PARA ESTIMAR LOS EFECTOS DE CADA TRATAMIENTO PODEMOS USAR LA FORMULA ALTERNATIVA:

$$\hat{\tau}_q = \frac{k}{\lambda t}\left[\sum_{i(q)} X_{iq} - \sum_{i(q)} \overline{X}_{i.}\right]$$

$\hat{\tau}_A = \frac{3}{1x7}[18 - 20.66] = -1.143$ $\qquad\hat{\tau}_E = -1.287$

$\hat{\tau}_B = 0.429[30 - 24.66] = 2.288$ $\qquad\hat{\tau}_F = 3.718$

$\hat{\tau}_C = 0.429[21 - 19] = 0.858$ $\qquad\hat{\tau}_G = -2.145$

$\hat{\tau}_D = 0.429[15 - 20.33] = -2.288$

COMPARACIONES MULTIPLES:

TRATAMIENTO	D	G	E	A	C	B	F
$\overline{X}_{..} + \hat{\tau}_q$	4.4263	4.5693	5.4273	5.5713	7.5723	9.0023	10.4323
	*	0.143	1.0010	1.1450	3.146	4.576	6.006
		*	0.858	1.002	3.003	4.433	5.863
			*	0.144	2.145	3.575	5.005
				*	2.001	3.431	4.861
					*	1.43	2.86
						*	1.43

<u>FISHER</u>: $LSD = t_{\alpha/2,\nu}\sqrt{\frac{2k\ MSE}{\lambda t}} = t_{0.05,8}\sqrt{\frac{2x3x0.929}{1x7}} = 0.061$

TUCKEY: $W = q_{0.05}\ (7,8)\ \frac{MSE}{t} = 5.4\ \frac{0.929}{7} = 1.967$

DUNCAN:

p	2	3	4	5	6	7
q'	3.26	3.39	3.47	3.52	3.55	3.56
W_p	1.88	1.235	1.264	1.282	1.293	1.297

DONDE $W_p = q'_{0.05},\ (p,8)\ \frac{0.929}{7}$

DE DONDE CONCLUIMOS QUE LOS TRATAMIENTOS D, G, E Y A SON SIGNIFICATIVAMENTE MENORES QUE C, B Y F.

EJEMPLO

UNA FABRICA DESEA COMPARAR LA COMODIDAD QUE OFRECEN 8 TIPOS NUEVOS DE ALMOHADAS Y UNO QUE YA ESTA EN EL MERCADO. PARA ESTO SE DISEÑO EL SIGUIENTE EXPERIMENTO DE BLOQUES INCOMPLETOS BALANCEADO:

PARA REDUCIR EL PROBLEMA QUE TENDRIA UNA PERSONA AL ASIGNAR UNA CALIFICACION AL GRADO DE COMODIDAD SI SE TUVIERAN LOS 9 TIPOS DE ALMOHADA JUNTOS, SE DECIDIO AGRUPAPLAS EN 12 BLOQUES DE 3, Y A CADA BLOQUE SE LE ASIGNARON AL AZAR LOS TIPOS DE ALMOHADA LOS CUALES, A SU VEZ, SE IDENTIFICARON CON LAS LETRAS DE LA A A LA I (LAS LETRAS NO SE PUSIERON VISIBLES). LA PRUEBA CONSISTIO EN SELECCIONAR AL AZAR A 20 PERSONAS PARA QUE CALIFICARAN CON NUMEROS DEL 1 AL 5 EL GRADO DE COMODIDAD; EL DATO QUE SE ANOTO EN CADA CASO FUE LA SUMA DE LAS CALIFICACIONES DE LAS 20 PERSONAS, HABIENDOSE OBTENIDO LOS SIGUIENTES RESULTADOS:

BLOQUE	TRATAMIENTO (TIPO DE ALMOHADA)			TOTAL
1	A59	B26	C38	123
2	D85	E92	F69	246
3	G74	H52	I27	153
4	A62	D70	G68	200
5	B27	E98	H59	184
6	C31	F60	I35	126
7	A63	E85	I30	178
8	B22	F73	G75	170
9	C45	D74	H51	170
10	A52	F76	H43	171
11	B18	D79	I41	178
12	C41	E84	G81	206
				2065

$t = 9,\ b = 12,\ k = 3,\ r = 4,\ \lambda = 1.$

OTRA FORMA DE PRESENTAR LOS DATOS ANTERIORES ES:

TRATAMIENTO (TIPO DE ALMOHADA)	BLOQUE												TOTALES ($X_{.j}$)
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
A	59			62			63			52			236
B	26				27			22			18		93
C	38					31			45			41	155
D		85		70					74		79		308
E		92			98		85					84	359
F		69				60		73		76			278
G			74	68				75				81	298
H			52		59				51	43			205
I			27			35	30				41		133
TOTALES ($X_{i.}$)	123	246	153	200	184	126	178	170	170	171	138	206	2065

$\overline{X}_{..} = 2065/(4x9) = 57.361111,\ 36\ \overline{X}^2_{..} = 36x57.3611^2 = 118{,}450.69$

$$SSB = \frac{1}{3}(123^2+246^2+153^2+200^2+184^2+126^2+178^2+170^2+170^2+$$

$$+171^2+178^2+206^2) - 118{,}450.69 =$$

$$= \frac{368{,}991.00}{3} - 118{,}450.69 = 4{,}546.31$$

$$SST = \frac{1}{3x1x9}\ \{(3x236-(123+200+178+171))^2+$$

$$+(3x93-(123+184+170+138))^2+$$

$$+(3x155-(123+126+170+206))^2+$$

$$+(3x308-(246+200+170+138))^2+$$

$$+(3x359-(246+184+178+206))^2+$$

$$+(3x278-(246+126+170+171))^2+$$

$$+(3x298-(153+200+170+206))^2+(3x205-(153+$$

$$+184+170+171))^2+(3x133-(153+126+178+138))^2\} =$$

$$= 322{,}122.00/27 = 11{,}930.07$$

$$TSS = 59^2+62^2+63^2+52^2+26^2+27^2+ \ldots + 41^2-118,450.69 =$$

$$= 135,435.00-118,450.69 = 16,984.31$$

$$SSE = 16,984.31-4,546.31-11,930.07 = 507.93$$

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA ES:

FUENTE	G. DE L.	SS	MS	F
BLOQUES	11	4,546.31	—	
TRATAMIENTOS	8	11,930.07	1491.26	46.97 > 2.59
ERROR	16	507.93	31.75	
TOTAL	35	16,984.31		

PUESTO QUE $F_{0.95,8,16} = 2.59 < 46.97$, SE CONCLUYE QUE SI HAY DIFERENCIA SIGNIFICATIVA ENTRE LOS NUEVE TIPOS DE ALMOHADA. VEAMOS, POR TANTO, CUALES TIPOS SON LOS QUE DIFIEREN DE LOS DEMAS, PARA LO CUAL ESTIMAREMOS LOS EFECTOS, τ_q, DE CADA NIVEL.

$$\hat{\tau}_q = \frac{k}{\lambda t}\{X_{.q} - \sum_{i(q)} \bar{X}_{i.}\}$$

$$\hat{\tau}_1 = \frac{3}{9}(236 - \frac{123+200+178+171}{3}) = \frac{1}{3}(236 - 224.00) = 4$$

$$\hat{\tau}_2 = \frac{1}{3}(93 - \frac{123+184+170+138}{3}) = \frac{1}{3}(93 - 205) = -37.33$$

$$\hat{\tau}_3 = \frac{1}{3}(155 - \frac{123+126+170+206}{3}) = \frac{1}{3}(155 - 208.33) = -17.78$$

$$\hat{\tau}_4 = \frac{1}{3}(308 - \frac{246+200+170+138}{3}) = 18.89$$

$$\hat{\tau}_5 = \frac{1}{3}(359 - \frac{246+184+178+206}{3}) = 29.22$$

$$\hat{\tau}_6 = \frac{1}{3}\left(278 - \frac{246 + 126 + 170 + 171}{3}\right) = 13.44$$

$$\hat{\tau}_7 = \frac{1}{3}\left(298 - \frac{153 + 200 + 170 + 106}{3}\right) = 18.33$$

$$\hat{\tau}_8 = \frac{1}{3}\left(205 - \frac{153 + 184 + 170 + 171}{3}\right) = -7.00$$

$$\hat{\tau}_9 = \frac{1}{3}\left(133 - \frac{153 + 126 + 178 + 138}{3}\right) = -21.78$$

LA TABLA DE ESTIMACIONES DE LOS EFECTOS DE LOS NIVELES DEL TRATAMIENTO SON:

TRATAMIENTO	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$\bar{y}_{..} + \hat{\tau}_q$	61.36	20.03	39.58	76.25	86.58	70.80	75.69	50.36	35.58

USANDO MSW = MSE = 31.75, CON 16 GRADOS DE LIBERTAD, LA MINIMA DIFERENCIA SIGNIFICATIVA ENTRE DOS MEDIAS ES, CON $\alpha = 0.05$:

$$LSD = t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{2k(MSE)}{\lambda t}} = 2.12\sqrt{\frac{2 \times 3 \times 31.75}{1 \times 9}} = 9.75$$

LAS ESTIMACIONES $\hat{\tau}_q$ ORDENADAS EN FORMA CRECIENTE SON LAS QUE SE MUESTRAN EN LA TABLA SIGUIENTE, EN LA CUAL SE HAN ANOTADO TAMBIEN LAS DIFERENCIAS QUE HAY ENTRE ELLAS:

B	I	C	H	A	F	G	D	E
20.3	35.58	39.58	50.36	61.36	70.80	75.69	76.25	86.58
*	15.28							
	*	$\boxed{4.00}$	14.78					
		*	10.78					
			*	11.00				
				*	$\boxed{9.44}$	14.33		
					*	$\boxed{4.89}$	$\boxed{5.45}$	15.78
						*	$\boxed{0.56}$	10.89
							*	10.33

LAS MEDIAS QUE RESULTARON SER ESTADISTICAMENTE IGUALES SON LAS SUBRAYADAS A CONTINUACION CON LINEA COMUN:

B	I	C	H	A	F	G	D	E
20.3	35.58	39.58	50.36	61.36	70.80	75.69	76.25	86.58

BLOQUES INCOMPLETOS

BALANCEADOS SIMETRICOS

SI EL NUMERO DE BLOQUES ES IGUAL AL DE TRATAMIENTOS ($b = t$), ENTONCES $r = k$. EN ESTE CASO SE DICE QUE EL EXPERIMENTO ES DE BLOQUES INCOMPLETOS BALANCEADOS SIMETRICOS (SBIB), Y ES POSIBLE HACER PRUEBA DE HIPOTESIS PARA LOS EFECTOS DE LOS BLOQUES EN UNA MANERA SIMILAR QUE PARA LOS TRATAMIENTOS, MEDIAN

TE LA SIGUIENTE TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA, EN LA CUAL SE NOTA QUE HAY SUMAS DE CUADRADOS AJUSTADOS PARA CADA UNO DE LOS DOS FACTORES.

FUENTE	SS	G. de L.	MS	F
BLOQUES	SSB			
TRATAMIENTOS (AJUSTADA)	$\tilde{SST}$	t - 1	$MST=\tilde{SST}/(t-1)$	MST/MSE
TRATAMIENTOS	SST			
BLOQUES (AJUSTADA)	$\tilde{SSB}$	b - 1	$MSB=\tilde{SSB}/(b-1)$	MSB/MSE
ERROR	SSE	bk-b-t-1		
TOTAL	TSS	bk - 1		

EN ESTA TABLA SSB, $\tilde{SST}$, SSE Y TSS SE CALCULAN CON LAS MISMAS FORMULAS QUE EN EL EXPERIMENTO BIB; LAS OTRAS SE CALCULAN CON LAS SIGUIENTES EXPRESIONES:

$$SST = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{t} X_{.j}^2 - bk\bar{X}_{..}^2$$

$$\tilde{SSB} = \frac{1}{kt\lambda} \sum_{i=1}^{b} (rX_{i.} - \sum_{j(i)} X_{.j})^2$$

EJEMPLO

EL PROBLEMA PRESENTADO ANTERIORMENTE, DE LAS MAQUINAS Y ALEACIONES, ES UN EXPERIMENTO SBIB, YA QUE EN EL t = b = 7. PRO-BAR LA HIPOTESIS DE QUE β_i = 0 PARA TODA i, A UN 95% DE NIVEL

DE CONFIANZA.

$$SST = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{7} X_{.j}^2 - bk\bar{X}_{..}^2 = \frac{1}{3}(18^2 + 30^2 + 21^2 + 15^2 + 15^2 + 31^2 + 11^2) -$$

$$- 946.71 = 118.96$$

$$SSB = \frac{1}{3 \times 7 \times 1}\sum_{i=1}^{7}(3X_{i.} - \sum_{j(i)} X_{.j})^2 = \frac{1}{21}[(3 \times 16 - (18 + 21 + 15))^2 +$$

$$+ (3 \times 18 - (18 + 31 + 11))^2 + (3 \times 28 - (18 + 30 + 15))^2 +$$

$$+ (3 \times 19 - (30 + 21 + 11))^2 + (3 \times 27 - (30 + 15 + 31))^2 +$$

$$+ (3 \times 22 - (21 + 15 + 31))^2 + (3 \times 11 - (15 + 15 + 11))^2] = 29.90$$

PARA VERIFICAR, CALCULEMOS SSE = TSS - SST - $\tilde{S}$SB =

156.29 - 118.96 - 29.90 = 7.43 = TSS - S$\tilde{S}$T - SSB

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA ES:

FUENTE	G. de L.	SS	MS	F
MAQUINAS		72.96		
ALEACIONES (AJUSTADA)	6	75.90	12.65	13.62>3.58
MAQUINAS (AJUSTADA)	6	29.90	4.98	5.36>3.58
ALEACIONES		118.96		
ERROR	9	7.43	0.929	
TOTAL	20	156.29		

$F_{0.95,6,8} = 3.58$

POR LO ANTERIOR SE CONCLUYE QUE SI HAY DIFERENCIAS SIGNIFICATIVAS ENTRE LOS NIVELES TANTO DE LAS ALEACIONES COMO DE LAS MAQUINAS.

TAREA: ESTIMAR LAS MEDIAS PARA CADA NIVEL DE BLOQUES Y TRATAMIENTOS

EJEMPLO

DIEZ ESPECIMENES DE HULE SE ENVIARON A UN LABORATORIO PARA UNA PRUEBA DE RESISTENCIA A LA FLEXION. HAY CINCO TIEMPOS DE CURADO. SIN EMBARGO CADA ESPECIMEN ES SUFICIENTE SOLAMENTE PARA DOS MUESTRAS. ENTONCES SE PROPUSO UN DISEÑO BIB. LOS ESPECIMENES SE CONSIDERARON COMO BLOCKS Y LOS TIEMPOS DE CURADO COMO TRATAMIENTOS. INVESTIGUE EL EFECTO DEL TIEMPO DE CURADO SOBRE LA RESISTENCIA A LA FLEXION, USANDO LOS DATOS CODIFICADOS DE ABAJO.

(BLOQUES)	TIEMPOS DE CURADO				(TRAT)	TOTALES	
ESPECIMENES	1	2	3	4	5	$X_{i.}$	$\bar{X}_{i.}$
1	25				6	31	15.5
2	10		3			13	6.5
3	3			16		19	9.5
4	15	11				26	13
5			0		6	6	3
6				14	11	25	12.5
7		6			17	23	11.5
8			10	27		37	18.5
9		10	5			15	7.5
10		7		21		28	14
TOTALES $X_{.j}$	53	34	18	78	40	223	
$\bar{X}_{.j}$	13.25	8.5	4.5	19.5	10	$\bar{X}_{..}$	= 11.15

EN ESTE CASO TENEMOS: b = # BLOQUES = 10; t = # TRATAMIENTOS = 5; r = # REPLICAS = 4; k = # NIV. DE TRAT/BLOQUE = 2; λ = # BLOQUES C/PAREJAS IGUALES = 1

PARA LOS BLOQUES: $SSB = k^{-1}\sum_{i=1}^{b} X_{i.}^2 - (bk)^{-1} X_{..}^2$

$$= \frac{1}{2}(31^2 + 13^2 + \dots + 15^2 + 28^2) - \frac{1}{10 \times 2}\, 223^2$$

$$= 2867.5 - 2486.45 = 381.05$$

PARA LOS TRATAMIENTOS:

$$SST = \frac{t-1}{Nk(k-1)} \sum_{j=1}^{t} \left[kX_{.j} - \sum_{i(j)} X_{i.}\right]^2$$

$$SST = \frac{5-1}{20 \times 2(1)} \{[2 \times 53 - (31+13+19+26)]^2 + [2 \times 34 - (26+23+15+28)]^2 + [2 \times 18 - (13+6+37+15)]^2 + [2 \times 78 - (19+25+37+28)]^2 + [2 \times 40 - (31+6+25+23)]^2\} = \frac{1}{10}\{(17)^2 + (-24)^2 + (-35)^2 + (47)^2 + (-5)^2\} = \frac{1}{10}(289 + 576 + 1225 + 2209 + 25) = 432.4$$

TOTALES: $TSS = \sum_i \sum_j X_{ij}^2 - \frac{X_{..}^2}{bk}$

$$= 25^2 + 10^2 + 3^2 + 15^2 + \dots + 6^2 + 6^2 + 11^2 + 17^2 - 2486.45$$

$$= 3503 - 2486.45 = 1016.55$$

ERROR: $SSE = TSS - SST - SSB$

$$= 1016.55 - 432.4 - 381.05 = 203.10$$

E DONDE:

FUENTE	g. de l.	SS	MS	F	$F_c = F_{0.05,4,6}$
ESPECIMENES (BLOQUES S/AJUST)	b - 1 = 10 - 1 = 9	SSB=381.05	MSB=SSB/(b-1) = 42.34	NO SE PUEDE	
TIEMPO DE CURADO (AJUSTADOS)	t - 1 = 5 - 1 = 4	SST=432.4	MST=SST/(t-1) =108.10	MST/MSE =108.10/33.85 = 3.19	< 4.53
ERROR	bk-t-b+1= 20-5-10+1= 6	SSE=203.10	MSE=SSE/bk-t-b+1 = 33.85		
TOTAL	bk - 1 = 10 x 2-1=19	TSS=1016.55			

DADO QUE F CALCULADA (3.19) < F CRITICA ($F_{0.05,4,6}$ = 4.53) ENTONCES CONCLUIMOS QUE LAS RESISTENCIAS A LA FLEXION DE LOS ESPECIMENES DE HULE NO SE AFECTAN POR LOS TIEMPOS DE CURADO, O SEA, POR LOS TRATAMIENTOS.

b) ESTIMACION DE LOS EFECTOS DE LOS TRATAMIENTOS:

$$\hat{\tau}_q = \frac{kr}{\lambda t}\left(\bar{x}_{.q} - r^{-1}\sum_{i(q)} \bar{x}_{i.}\right)$$

$$\hat{\tau}_1 = \frac{2 \times 4}{1 \times 5}\left[13.25 - \frac{15.5 + 6.5 + 9.5 + 13}{4}\right] = 3.40$$

$$\hat{\tau}_2 = \frac{8}{5}\left[8.5 - \frac{13 + 11.5 + 7.5 + 14}{4}\right] = -4.80$$

$$\hat{\tau}_3 = \frac{8}{5}\left[4.5 - \frac{6.5 + 3 + 18.5 + 7.5}{4}\right] = -7.00$$

$$\hat{\tau}_4 = \frac{8}{5}\left[19.5 - \frac{9.5 + 12.5 + 18.5 + 14}{4}\right] = 9.40$$

$$\hat{\tau}_5 = \frac{8}{5}\left[10 - \frac{15.5 + 3 + 12.5 + 11.5}{4}\right] = -1.00$$

c) AUNQUE EN ESTE CASO LA PRUEBA DE ANALISIS DE VARIANCIA INDICO

INDEPENDENCIA ENTRE LOS TIEMPOS DE CURADO (TRATAMIENTOS) HAREMOS LA PRUEBA DE COMPARACIONES MULTIPLES PARA VERIFICAR QUE NO DIFIEREN DICHOS TRATAMIENTOS.

USANDO EL CRITERIO $LSD = t_{\alpha/2,\nu}\sqrt{\frac{2k(MSE)}{\lambda t}} =$

$t_{0.05/2,6}\sqrt{\frac{2 \times 2 \times 33.85}{5}} = 2.447\sqrt{27.08} = 12.73$

TIEMPOS DE CURADO	3	2	5	1	4
$\bar{X}_{..} + \hat{\tau}_g$	4.15	6.35	10.15	14.55	20.55
	*	2.2	6.0	10.4	16.4
		*	3.8	8.20	14.20
			*	4.4	10.40
				*	6.0

13 CUADRADOS DE YUDEN

EL EXPERIMENTO DE CUADRADOS DE YUDEN ES UN TIPO DE CUADRADOS LATINOS INCOMPLETO. SI EL FACTOR I ES EL DE LOS RENGLONES, EL II EL DE LAS COLUMNAS, Y EL III EL DE LAS LETRAS LATINAS, Y SI SE CUMPLE QUE LOS FACTORES I Y III TIENEN EL MISMO NUMERO DE NIVELES ($t = b$), ENTONCES LOS CUADRADOS DE YUDEN QUEDAN EN FORMA SEMEJANTE A LOS DOS SIGUIENTES EJEMPLOS 7 x 3 Y 7 x 4:

FACTOR I	FACTOR II		
	1	2	3
1	G	A	C
2	A	B	D
3	B	C	E
4	C	D	F
5	D	E	G
6	E	F	A
7	F	G	B

FACTOR I	FACTOR II			
	1	2	3	4
1	D	F	G	A
2	E	G	A	B
3	F	A	B	C
4	G	B	C	D
5	A	C	D	E
6	B	D	E	F
7	C	E	F	G

ESTE DISEÑO EXPERIMENTAL SE PUEDE VER TAMBIEN COMO UN BIB CON UN FACTOR ADICIONAL (EL II), EN CUYO CASO LA TABLA DE DATOS TENDRIA LA SIGUIENTE PRESENTACION, QUE EJEMPLIFICA EL CASO 7 x 4 ANTERIOR:

TRATAMIENTOS (FACTOR III)	FACTOR I						
	1	2	3	4	5	6	7
A	(4)	(3)	(2)		(1)		
B		(4)	(3)	(2)		(1)	
C			(4)	(3)	(2)		(1)
D	(1)			(4)	(3)	(2)	
E		(1)			(4)	(3)	(2)
F	(2)		(1)			(4)	(3)
G	(3)	(2)		(1)			(4)

EN ESTA TABLA LOS NUMEROS EN PARENTESIS SON LOS NIVELES DEL FACTOR II; EN ELLA: $t=7$, $b=7$, $r=4$, $k=4$ y $\lambda=2$.

EL MODELO MATEMATICO PARA ESTUDIAR ESTE EXPERIMENTO ES

$$X_{ijl} = \mu + \beta_i + \tau_j + \gamma_l + Z_{ijl} \tag{1}$$

DONDE $i = 1,2,\ldots, b$; $j = 1, 2,\ldots, t = b$; $l = 1, 2,\ldots, k(<t)$, Y $\Sigma\beta_i = \Sigma\tau_j = \Sigma\gamma_l = 0$.

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA DE ESTE EXPERIMENTO ES LA SIGUIENTE:

FUENTE	G. DE L.	SS	MS	F
BLOQUES		SSB		
TRATAMIENTOS (AJUSTADA)	$t-1$	$\tilde{SST}$	$MST=\tilde{SST}/(t-1)$	MST/MSE
TRATAMIENTOS		SST		
BLOQUES (AJUSTADA)	$b-1$	$\tilde{SSB}$	$MSB=\tilde{SSB}/(b-1)$	MSB/MSE
FACTOR II	$k-1$	SS2	$MS2=SS2/(k-1)$	MS2/MSE
ERROR	$bk-2b-k+2$	SSE	$MSE=SSE/(bk-2b-k+2)$	
TOTAL	$bk-1$	TSS		

EN ESTA TABLA:

$$SSB = k^{-1} \sum_{i=1}^{b} X_{i..}^2 - bk\,\overline{X}_{...}^2 \tag{2}$$

$$\tilde{SST} = (k\lambda t)^{-1} \sum_{j=1}^{t} (kX_{.j.} - \sum_{i(j)} X_{i..})^2 \tag{3}$$

$$SST = k^{-1} \sum_{j=1}^{t} X_{.j.}^2 - bk\,\overline{X}_{...}^2 \tag{4}$$

$$\tilde{SSB} = (k\lambda t)^{-1} \sum_{i=1}^{b} (rX_{i..} - \sum_{j(i)} X_{.j.})^2 \tag{5}$$

$$SS2 = b^{-1} \sum_{l=1}^{k} X_{..l}^2 - bk\,\overline{X}_{...}^2 \tag{6}$$

$$TSS = \sum \sum X_{ijl}^2 - bk\,\overline{X}_{...}^2 \tag{7}$$

$$SSE = TSS - SSB - \tilde{SST} - SS2 \tag{8}$$

EJEMPLO

EN LA DETERMINACION DEL NUMERO DE OCTANOS DE UNA GASOLINA, UN METODO USA UNA GASOLINA BASE Y SE TIENEN 6 ADITIVOS COMO CANDITATOS PARA FORMAR UNA NUEVA MARCA. EL EXPERIMENTO ES UNO DE CUADRADOS DE YUDEN 7x3: A CADA COMBUSTIBLE SE LE DAN 2 MINUTOS EN EL MOTOR Y EL RESULTADO SE REGISTRA EN UN INSTRUMENTO ESPECIAL,EL CUAL SE LEE A LOS 60, 90 Y 120 SEG PARA VERIFICAR LA ESTABILIDAD; UNA MARCADA DIFERENCIA EN LA LECTURA A LOS 90 Y 120 SEG ES CAUSA DE ALARMA; LOS BLOQUES SON GRUPOS DE 3 LECTURAS DE 2 MINUTOS. LOS RESULTADOS FUERON:

FACTOR III (TRATAMIENTOS O GASOLINAS)	FACTOR I (BLOQUES) 1	2	3	4	5	6	7	TOTAL ($X_{.j.}$)
A	(1) 43				(3) 44		(2) 41	128
B	(2) 34	(1) 36				(3) 32		102
C		(2) 32	(1) 33				(3) 27	92
D	(3) 47		(2) 47	(1) 44				138
E		(3) 46		(2) 40	(1) 41			127
F			(3) 43		(2) 35	(1) 36		114
G				(3) 33		(2) 32	(1) 33	98
TOTAL ($X_{i..}$)	124	114	123	117	120	100	101	799

$\bar{X}_{...} = 799/3x7 = 38.0476;\ 3x7x38.0476^2 = 30,400.05$

$$SSB = \frac{1}{3}(124^2+114^2+123^2+117^2+120^2+100^2+101^2)-30,400.05 =$$

$$= 30,597-30,400.05 = 196.95$$

$$\tilde{SST} = \frac{1}{3x1x7}[\{3x128-(124+120+101)\}^2+\{3x102-(124+114+100)\}^2+$$

$$+\{3x92-(114+123+101)\}^2+\{3x138-(124+123+117)\}^2+$$

$$+\{3x127-(114+117+120)\}^2+\{3x114-(123+120+100)\}^2+$$

$$+\{3x98-(117+100+101)\}^2] = 493.62$$

$$SST = \frac{1}{3}(128^2+102^2+92^2+138^2+127^2+114^2+98^2)-30,400.05 = 608.29$$

$$\tilde{SSB} = \frac{1}{3x1x7}[\{3x124-(128+102+138)\}^2+\{3x114-(102+92+127)\}^2+$$

$$+\{3x123-(92+138+114)\}^2+\{3x117-(138+127+98)\}^2+$$

$$+\{3x120-(128+127+114)\}^2+\{3x100-(102+114+98)\}^2+$$

$$+\{3x101-(128+92+98)\}^2] = \frac{1}{21}\{4^2+21^2+\ldots+(-15)^2\} = 82.29$$

$$X_{..1} = 43 + 36 + 33 + 44 + 41 + 36 + 33 = 266$$

$$X_{..2} = 34 + 32 + 47 + 40 + 35 + 32 + 41 = 261$$

$$X_{..3} = 44 + 32 + 27 + 47 + 46 + 43 + 33 = 272$$

$$SS2 = \frac{1}{7}(266^2 + 261^2 + 272^2) - 30{,}400.05 =$$

$$= \frac{1}{7}(70{,}756 + 68{,}121 + 73{,}984) - 30{,}400.05 =$$

$$= 30{,}408.71 - 30{,}400.05 = 8.66$$

$$TSS = 43^2 + 44^2 + 41^2 + 34^2 + \ldots + 33^2 - 30{,}400.05 = 706.95$$

$$SSE = TSS - SSB - S\tilde{S}T - SS2 = 7.72$$

$$F_{0.01,6,6} = 8.47, \; F_{0.01,2,6} = 10.90$$

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA ES:

FUENTE	G. de L.	SS	MS	F
ORDEN (BLOQUES)		196.95		
GASOLINA (AJUSTADA)	6	493.62	82.27	64.27 > 8.47
GASOLINA		608.29		
TIEM. (AJUSTADA)	6	82.29	13.72	10.72 > 8.47
	2	8.66	4.33	3.39 < 10.90
ERROR	6	7.72	1.28	
TOTAL	20	706.95		

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

C U R S O S   A B I E R T O S

DISEÑO DE EXPERIMENTOS: TECNICAS DE MUESTREO Y ANALISIS ESTADISTICO

DISEÑOS FACTORIALES

M. EN I. BERNARDO FRONTANA DE LA CRUZ

ABRIL-JUNIO- 1992.

INDICE

DISEÑOS FACTORIALES

1. Principios básicos y definiciones

Los Diseños Factoriales se caracterizan porque pretenden probar los efectos de varios factores a diferentes niveles, e interacciones entre ellos, simultáneamente. El **nivel** de un factor es un valor del mismo: p ejem, si en el experimento uno de los factores es la temperatura, dos de sus niveles pueden ser 30° (nivel bajo) y 60° (nivel alto).

Un **Diseño factorial completo** es aquel en el que participan **todas** las posibles combinaciones de los niveles de los factores de manera simultánea en el experimento. Una combinación particular de los niveles de los factores se llama **tratamiento**.

Los **efectos** son los resultados que se obtienen después de correr el experimento. Cuando ellos aluden a un factor se les llama **efectos principales**, mientras que si se refieren a una combinación de ellos se les denomina **efectos de interacción**.

Los factores del experimento pueden ser **cuantitativos**: p ejem, temperatura, cantidad de ingrediente en una substancia química, voltaje aplicado a un sistema eléctrico; o **cualitativos**: p ejem, operadores de máquinas, provedores de materia prima, dispositivos de prueba de equipo, etc.

Las interacciones entre factores suelen enmascarar los efectos principales de los factores; es decir, generalmente, cuando una interacción es grande, los efectos principales correspondientes tienen poca significación práctica.

1.2 Ventajas de los diseños factoriales

Las principales ventajas que tienen estos diseños son:
a) **eficiencia**, puesto que permite probar simultáneamente efectos principales e interacciones entre factores; b) **eficacia**, puesto que si en el experimento existen interacciones, entonces evita conclusiones erroneas en comparación con otros en los que se prueba un factor a la vez sin permitir descubrir dichas interacciones; c) **completez** ya que se pueden estimar los efectos de un factor, a varios niveles de los otros involucrados en el experimento.

1.3 Diseños factoriales de dos factores

Los diseños factoriales más sencillos involucran solamente dos factores. En ellos hay **a** niveles del factor A y b del B, el arreglo factorial implica que en cada réplica del experimento existan **ab** combinaciones de los tratamientos.

Considerando que se corren **n réplicas** en el experimento y que cada observación puede representarse como y_{ijk} donde **i** representa el nivel del factor **A**, j el de B, y **k** la réplica; entonces:

TABLA 1 Datos Arreglados de un Diseño Factorial de 2 Factores

		Factor B			
		1	2		b
Factor A	1	$y_{111}, y_{112}, \dots y_{11n}$	$y_{121}, y_{122}, \dots y_{12n}$	. . . .	$y_{1b1}, y_{1b2} \dots y_{1bn}$
	2	$y_{211}, y_{212} \dots, y_{21n}$	$y_{221}, y_{222} \dots, y_{22n}$		$y_{2b1}, y_{2b2} \dots y_{2bn}$
	.				
	a	$y_{a11}, y_{a12} \dots, y_{a1n}$	$y_{a21}, y_{a22} \dots, y_{a2n}$		$y_{ab1}, y_{ab2} \dots y_{abn}$

donde las observaciones, que en total son abn, pueden describirse por el modelo estadistico lineal:

$$y_{ijk} = \mu + \zeta_i + \beta_j + (\zeta\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\dots,a \\ j = 1,2,\dots,b \\ k = 1,2,\dots,n \end{array}$$

donde μ es el efecto medio global, ζ_i es el efecto del nivel i del factor A, β_j es el efecto del nivel j del factor B, $(\zeta\beta)_{ij}$ es el efecto de la interaccion entre ζ_i y β_j, y ε_{ijk} es la componente del error aleatorio.

Puesto que ambos factores se consideran fijos, y los efectos de los tratamientos se definen como desviaciones de la media global:

$$\sum_{i=1}^{a} \zeta_i = \sum_{j=1}^{b} \beta_j = \sum_{i=1}^{a} (\zeta\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^{b} = (\zeta\beta)_{ij} = 0$$

En el diseño bifactorial ambos factores A y B, además de las interacciones, son de interés; por ello, las pruebas de hipótesis respecto a dicho interes son:

a) no hay efectos entre los tratamientos de A:

H_0: $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \dots = \zeta_a = 0$
H_1: al menos un ζ_i es diferente de cero

b) no hay efectos entre los tratamientos de B:

H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_b = 0$
H_1: al menos un β_i es diferente de cero

c) no hay efectos entre interacciones de A con B:

H_0: $(\zeta\beta)_{ij} = 0$ para todo ij
H_1: al menos un $(\zeta\beta)_i$ es diferente de cero

Puede demostrarse (Montgomery, 1984) que la Suma de Cuadrados Total (SS_T) puede descomponerse en: debida a los tratamientos del factor A (SS_A), a los del factor B (SS_B), a los de las interacciones entre A y B (SS_{AB}) y al error (SS_E); más aun, para poder obtener la SS_E se requieren, al menos, **dos** réplicas:

$$SS_T = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_E$$

Los grados de libertad asociados a cada suma anterior son: a) **a-1** para A, **b-1** para B, **(a-1)(b-1)** para AB, **ab(n -1)** para el error, y **abn -1** para el total.

Cada suma de cuadrados dividida por sus grados de libertad es un **valor medio cuadrático** cuyos valores esperados son:

$$E\,(MSA) = E\,\left(\frac{SSA}{a-1}\right) = \sigma^2 + \frac{bn\,\Sigma_{i=1}^{a}\,\zeta_i^2}{a-1}$$

$$E\,(MSB) = E\,\left(\frac{SSB}{b-1}\right) = \sigma^2 + \frac{an\,\Sigma_{j=1}^{b}\,\beta_j^2}{b-1}$$

$$E\,(MS_{AB}) = E\,\left(\frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)}\right) = \sigma^2 + \frac{n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\zeta\beta)_{ij}^2}{(a-1)\,(b-1)}$$

$$E(MSE) = E\,\left(\frac{SSE}{ab(n-1)}\right) = \sigma^2$$

Las pruebas de significancia para los efectos principales e interaccion, se encuentran dividiendo los valores medios cuadraticos correspondientes entre el del error; como se indica en la Tabla 1. Valores grandes de estas relaciones no soportan la hipotesis nula correspondiente.

Las formulas para calcular las sumas de cuadrados son:

a) para SS_T:
$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

b) para los efectos principales SS_A y SS_B:

$$SS_A = \sum_{i=1}^{a}\frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y_{...}^2}{abn};$$

$$SS_B = \sum_{j=1}^{b}\frac{y_{.j.}^2}{an} - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

TABLA 2 Análisis de Varianza (ANOVA) para la clasificación en dos direcciones, modelo de efectos fijos

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Valores medios cuadráticos	F_0
Tratamientos de A	SS_A	$a - b$	$MS_A = \dfrac{SS_A}{a - 1}$	$F_0 = \dfrac{MS_A}{MS_E}$
Tratamientos de B	SS_B	$b - 1$	$MS_B = \dfrac{SS_B}{b - 1}$	$F_0 = \dfrac{MS_B}{MS_E}$
Interacción de AB	SS_{AB}	$(a-1)(b-1)$	$MS_{AB} = \dfrac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)}$	$F_0 = \dfrac{MS_{AB}}{MS_E}$
Error	SS_E	$ab(n - 1)$	$MS_E = \dfrac{SS_E}{ab(n-1)}$	
Total	SS_T	$abn - 1$		

a: número de tratamientos del factor A
b: número de tratamientos del factor B
n: número de réplicas
F_0: Estadísticas F calculadas que se comparan con los teóricos a un nivel de significación α para probar las hipótesis pertinentes.

c) para la interaccion SS_{AB} primero calculamos la suma de cuadrados entre totales de las celdas **ab**, llamada suma de cuadrados debida a **subtotales**:

$$SS_{subtotales} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{y_{ij.}^2}{n} - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

puesto que ella contiene a SS_A y SS_B, entonces se le restan:

$$SS_{AB} = SS_{subtotales} - SS_A - SS_B$$

La SS_E puede calcularse por substracción:

$$SS_E = SS_T - SS_{subtotales}$$

1.3.1 Ejemplo

Al parecer, el voltaje de salida de las baterias que integran los sistemas de alimentación de los acelerografos de campo del Instituto de Ingenieria de la UNAM.se afecta por el material de las placas y por la temperatura del sitio en donde se colocan los acelerografos. Un experimento factorial de cuatro replicas, tres tipos de material de las placas y tres temperaturas: se corre en el Laboratorio de Instrumentacion del I de I. Los resultados se muestran en la Tabla 3. en la cual los números entre parentesis son los totales de las celdas.analice los datos y derive conclusiones.

Tabla **3** Voltaje de salida de las baterias bajo prueba

tipo de material	temperatura (°F) 50	65	80	$y_{i..}$
1	130 155 (539) 74 180	34 40 (229) 80 75	20 70 (230) 82 58	998
2	150 188 (623) 159 126	136 122 (479) 106 115	25 70 (198) 58 45	1300
3	138 110 (576) 168 160	174 120 (583) 150 139	96 104 (342) 82 60	1501
$y_{.j.}$	1738	1291	770	$3799 = y_{...}$

Las sumas de cuadrados se calculan como sigue:

$$SS_T = 130^2 + 155^2 + \ldots + 60^2 - 3799^2/36 = 77,646.96$$

$$SS_{material} = \frac{998^2 + 1300^2 + 1501^2}{(3)(4)} - \frac{3799^2}{36} = 10,683.72$$

$$SS_{temperatura} = \frac{1738^2 + 1291^2 + 770^2}{(3)(4)} - \frac{3799^2}{36} = 39,118.72$$

$$SS_{interacción} = \frac{539^2 + 229^2 + \ldots + 342^2}{4} - \frac{3799^2}{36}$$

$$- 10,683.72 - 39,118.72 = 9,613.77$$

$$SS_E = SS_T - SS_{material} - SS_{temperatura} - SS_{interacción}$$

$$= 77,646.96 - 10,683.72 - 39,118.72 - 9,613.77 = 18,230.75$$

cuya tabal de Analisis de Varianza es:

Tabla 4 Analisis de Varianza para los voltajes de las baterias

Fuente de variacion	Suma de cuadrados	Grados de libertad	MS	F_o
Tipos de material	10,683.72	2	5,341.86	7.91
Temperaturas	39,118.72	2	19,558.36	28.97
Interaccion	9,613.78	4	2,403.44	3.56
Error	18,230.75	27	675.21	
Total	77,646.97	35		

De la tabla, para $F_{0.05,2,27} = 3.35$ y $F_{0.05,4,27} = 2.73$ (de las tablas de la distribución F), se desprende que tanto los efectos principales como los de interacción entre tipos de material y temperaturas son estadisticamente significativos al nivel 0.05.

La interpretación de los resultados puede auxiliarse con la grafica de las respuestas promedio de cada combinación de tratamientos como la mostrada en la fig 1 en la que la interaccion significativa se indica por la falta de paralelismo entre las lineas. Además, se observa que independientemente del tipo de material de las placas, los voltajes altos aparecen a bajas temperaturas; mientras que a temperaturas intermedias aumenta el voltaje en las baterias fabricadas con el material tipo 3 y disminuye las de los tipos restantes; finalmente, a altas temperaturasdecrecen los de los tipos 2 y 3, y el voltáje del material tipo 1 permanece prácticamente sin cambio.

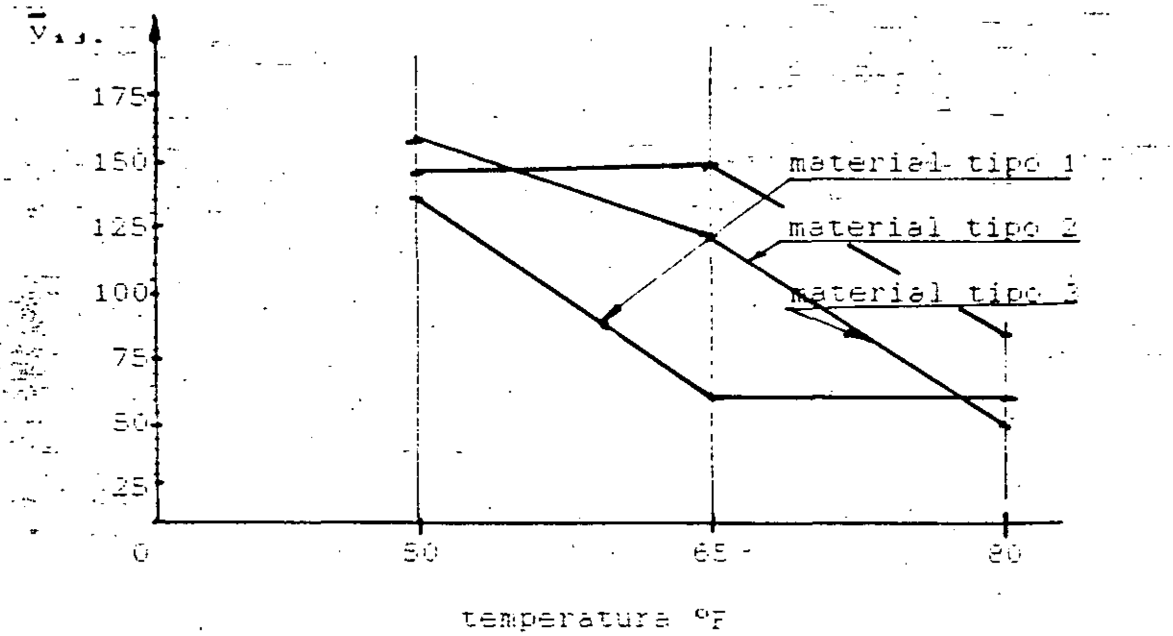


Fig 1 Curvas de respuesta Tipo de Material - temperatura

1.3.2 Comparaciones multiples

Cuando los efectos resultan significativos, es practica comun efectuar comparaciones multiples a fin de descubrir las diferencias especificas; para tal efecto se utiliza alguno de los metodos vistos previamente.

Para ilustrar la prueba de rangos multiples de Duncan al ejercicio anterior, conviene recordar que cuando las interacciones resultan significativas (como en el ejemplo), los efectos de los factores resultan obscurecidos; por tal razon, lo conveniente es comparar todas las medias de las celdas para determinar cuales difieren significativamente. En este analisis las diferencias entre las medias de las celdas incluyen los efectos de interaccion, asi como los de los efectos principales. Otro enfoque consiste en fijar el nivel de algun factor y aplicar la prueba a las medias de los niveles del factor restante.

Elijamos el nivel medio de la temperatura (65°F) como fijo; y hagamos las comparaciones de medias de los tipos de material, cuyas medias, al nivel de temperatura elegido, son:

para el material tipo 1: $\bar{y}_{12.}$ = 57.25
para el material tipo 2: $\bar{y}_{22.}$ = 119.75
para el material tipo 3: $\bar{y}_{32.}$ = 145.75

considerando a MS_E como el mejos estimados de la varianza del error, el error estandar de las medias de esos tratamientos es:

$$S_{y_{i2.}} = \sqrt{\frac{MS_E}{n}} = \sqrt{\frac{675.21}{4}} = 12.99$$

$$R_2 = r_{.05}(2,27)S_{\bar{y}_{ij.}} = (2.91)(12.99) = 37.80$$
$$R_3 = r_{.05}(3,27)S_{\bar{y}_{ij.}} = (3.06)(12.99) = 39.75$$

las comparaciones son:

3 contra 1: 145.75 - 57.25 = 88.50 > 39.75 (con R_3)
3 contra 2: 145.75 - 119.75 = 26.00 < 37.80 (con R_2)
2 contra 1: 119.75 - 57.25 = 62.50 > 37.80 (con R_2)

De donde se desprende que para la temperatura media de 65 grados el voltaje medio de salida es el mismo para los materiales tipo 2 y 3, mientras que el del material tipo 1 es significativamente menor en comparacion con los voltajes medios de los materiales 2 y 3.

1.3.3 Estimacion de los parametros del modelo

Los parametros del modelo del análisis de variancia con clasificacion en dos direcciones pueden estimarse por minimos cuadrados. Puesto que el modelo tiene 1 + a + b + ab parametros, correspondientes a la media global, los niveles de A, de B, y de las interacciones AB, respectivamente; entonces debe haber el mismo numero de ecuaciones normales, de cuya solucion se obtiene:

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{...}$$

$$\hat{\zeta} = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...} \qquad i = 1,2...,a$$

$$\hat{\beta} = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...} \qquad j = 1,2...,b$$

$$(\zeta\beta)_{ij} = \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}$$

Debe destacar el considerable interes intuitivo de esta solución de las ecuaciones normales: los efectos de los tratamientos de los renglones se estiman mediante el promedio del renglón correspondiente menos el promedio global; los efectos de los tratamientos de las columnas mediante el promedio de la columna en cuestion menos la media global; de las interacciones restando al promedio de la celda el de la columna y el renglon y sumandole el promedio global; finalmente, la estimacion de la k_{esima} observacion de la celda ij se estima por el promedio de las n observaciones de dicha celda.

$$\hat{y}_{ijk} = \bar{y}_{ij.}$$

1.3.4 *Elección del tamaño de la muestra*

Las curvas características de operación pueden usarse para auxiliar al analista en la determinación del tamaño de muestra apropiado (número de réplicas: n). La tabla 4 muestra los valores de Φ^2 y de los grados de libertad a determinar para entrar a las curvas.

TABLA 4 Parámetros de la Curva Característica de Operación, para el modelo de efectos fijos, clasificación en dos direcciones

Factor	Φ^2	Número de grados del numerador	denominador
A	$\dfrac{bn \sum_{i=1}^{a} \zeta^2}{a\sigma^2}$	a - 1	ab(n - 1)
B	$\dfrac{an \sum_{j=1}^{b} \beta_j^2}{b\sigma^2}$	b - 1	ab(n - 1)
AB	$\dfrac{n \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (\zeta\beta)_{ij}^2}{\sigma^2 \left[(a-1)(b-1)+1\right]}$	(a-1)(b-1)	ab(n - 1)

Sin embargo, una manera práctica de usar las Curvas de Operación consiste en calcular los valores de Φ^2, correspondientes a diferencias (D) y desviaciones estandar (σ) *supuestas* por el experimentador; así:

si la diferencia entre medios de dos renglones cualesquiera se supone como D:

$$\phi^2 = \frac{nbD^2}{2a\sigma^2}$$

si la diferencia supuestas entre dos columnas es D:

$$\phi^2 = \frac{naD^2}{2b\sigma^2}$$

si la diferencia entre dos efectos de alguna interacción cualesquiera es D, el mínimo valor de ϕ^2 es:

$$\phi^2 = \frac{nD^2}{2\sigma^2\left[(a-1)(b-1)+1\right]}$$

P. ejem, súpongase que *antes* de correr el experimento correspondiente al ejercicio anterior, el analista decide que rechazará la hipótesis nula con alta probabilidad, si la diferencia en el voltaje medio de salida entre dos temperaturas cualesquiera supera los 40 volts.

En este caso D = 40 y, suponiendo que la desviación estandar del voltaje de salida es 25, entonces:

$$\phi^2 = \frac{naD^2}{2b\sigma^2} = \frac{n(3)(40)^2}{2(3)(25)^2} = 1.28n \qquad (\text{mínimo valor de } \phi^2)$$

Ecuación que dependen de n para calcular ϕ^2 e indirectamente β:

De las curvas características de operación:

n	Φ^2	Φ	Grados de libertad ν_1:numerador	ν_2:denom(error)	β
2	2.56	1.60	2	9	0.45
3	3.84	1.96	2	18	0.15
4	5.12	2.26	2	27	0.06

NOTA: en las curvas α se entra con α, Φ, ν_1 y ν_2; para obtener β.

Obsérvese que para n = 4 réplicas β es aproximadamente 0.06, lo que equivale al 94% de oportunidad de rechazar la hipótesis nula si la diferencia en el voltaje medio de salida a dos niveles de temperatura cualesquiera excede 40 volts.

1.3.5 *El caso de una observación por celda*

En algunas situaciones, uno puede encontrarse un experimento bifactorial con una sola observación por celda; es decir con una sola réplica. En tales casos, el modelo estadístico lineal es:

$$y_{ij} = \mu + \zeta_i + \beta_j + (\zeta\beta)_{ij} + \varepsilon_{ij}; \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots, a \\ j = 1,2,\ldots, b \end{array}$$

Para el caso de ambos factores fijos, la tabla ANOVA a usar es la 5. Del examen de los valores medios cuadráticos (MS_E) se observa que la varianza del error no puede estimarse, significando con ello que el efecto de interacción $(\zeta\beta)_{ij}$ y el error experimental no pueden separarse de manera fácil; por ello, *a menos que el efecto de interacción* sea cero, no se pueden probar los efectos principales. Si $(\zeta\beta)_{ij} = 0 \; \forall_{i,j}$, el modelo estadístico se reduce a:

$$y_{ij} = \mu + \zeta_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}; \qquad \begin{array}{l} i = 1,2\ldots, a \\ j = 1,2\ldots, b \end{array}$$

TABLA 5 Análisis de Varianza del Modelo Bifactorial, para el caso de una observación por celda.

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	MS	E(MS)
Renglones (a)	$\sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i.}^2}{b} - \frac{y_{..}^2}{ab}$	a - 1	MS_A	$\sigma^2 + \frac{b\Sigma\zeta_i^2}{a-1}$
Columnas (B)	$\sum_{j=1}^{a} \frac{y_{.j}^2}{a} - \frac{y_{..}^2}{ab}$	b - 1	MS_B	$\sigma^2 + \frac{a\Sigma\beta_j^2}{b-1}$
Residual ó A B	diferencia	(a-1)(b-1)	$MS_{Residual}$	$\sigma^2 + \frac{\Sigma\Sigma(\zeta\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$
Total	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{ab}$	ab - 1		

Si el modelo es apropiado, entonces $MS_{Residual}$ es un estimador insesgado de σ^2, y los efectos principales pueden probarse comparando MS_A y MS_B con $MS_{Residual}$.

1.3.6 *Detección de la presencia de interacción*

Este procedimiento desarrollado por Tukey, considera que la interacción es de la forma:

$$(\zeta\beta)_{ij} = \gamma\, \zeta_i\, \beta_j \qquad \gamma\text{: constante desconocida}$$

Esta prueba parte la $SS_{Residual}$ en:

$$SS_{Residual} = SS_E + SS_N$$

donde SS_E es la suma de cuadrados del error, con (a-1)(b-1)-1 grados de libertad; y SS_N es la componente de la suma de cuadrados debida a NO.

ACTIVIDAD (interacción), y se calcula mediante:

$$SS_N = \frac{\left[\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} y_{ij} y_{i.} y_{.j} - y_{..} \left(SS_A + SS_B + \frac{y_{..}^2}{ab}\right) \right]^2}{ab\, SS_A\, SS_B}$$

con 1 grado de libertad; con la cual:

$$SS_E = SS_R - SS_N \qquad \text{con } (a-1)(b-1) - 1 \text{ g de } \ell.$$

Para probar la presencia de interacción:

$$F_0 = \frac{SS_N}{SS_E \,/\, [(a-1)(b-1)-1]}$$

Si $F_0 > F_{\alpha,\, 1,\, (a-1)(b-1)-1}$, entonces se rechazará la hipótesis de <u>NO</u> interacción entre los factores A y B.

1.3.7 *Ejemplo*

Se presupone que la impureza que se presenta en un producto químico se afecta por la presión y la temperatura. Los resultados obtenidos de un experimento corrido con una sola réplica se muestran en la tabla 6.

TABLA 6 Datos de la impureza obtenidos

Temperatura (OF)	Presión 25	30	35	40	45	$y_{i.}$
100	5	4	6	3	5	23
125	3	1	4	2	3	13
150	1	1	3	1	2	8
$y_{.j}$	9	6	13	6	10	44: $y_{..}$

De las relaciones dadas en la tabla 5, para este modelo:

$$SS_A = \frac{23^2 + 13^2 + 8^2}{5} - \frac{44^2}{(3)(5)} = 23.33$$

$$SS_B = \frac{9^2 + 6^2 + 13^2 + 6^2 + 10^2}{3} - \frac{44^2}{(3)(5)} = 11.60$$

$$SS_T = 166 - 129.07 = 36.93$$

$$SS_{Residuales} = SS_T - SS_A - SS_B$$

$$= 36.93 - 23.33 - 11.60 = 2.00$$

Para el cálculo de SS_N:

$$\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} y_{ij}\, y_{i.}\, y_{j.} = (5)(23)(9)+(4)(23)(6)+..+(2X8)(10) = 7236$$

con lo cual:

$$SS_N = \frac{7236 - (44)(23.33 + 11.60 + 129.07)^2}{(3)(5)(23.33)(11.90)} = 0.0985$$

Finalmente: $SS_E = SS_{Residual} - SS_N = 2.00 - 0.0985 = 1.9015$

con, cuyos valores se puede integrar la tabla de análisis de varianza (tabla 7).

TABLA 7 Análisis de Varianza para la impureza

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	MS	F_0
Temperatura	23.33	2	11.67	42.97*
Presión	11.60	4	2.90	10.68*
No adetividad	0.0985	1	0.0985	0.36
error	1.9015	7	0.2716	
Total	36.93	14		

1.3.8 *El modelo de efectos aleatorios*

Existen situaciones en las que ambos niveles de los factores A y B se eligen aleatoriamente de grandes poblaciones; por lo que en tales casos el experimento se conoce como de *efectos* *aleatorios o de varianza en las componentes*; y las condiciones que se obtengan serán válidas para *todos* los niveles de las poblaciones de donde se sacaron los *a* niveles de A y los *b* de B.

En estos casos el modelo lineal para cualquier observación es:

$$y_{ijk} = \mu + \zeta_i + \beta_j + (\zeta\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}; \quad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots a \\ j = 1,2,\ldots b \\ k = 1,2,\ldots n \end{array}$$

donde, al haber muestrado los niveles *a* y *b*, los parametros ζ_i, β_j, $(\zeta\beta)_{ij}$ y ε_{ijk} son variables aleatorias con distribuciones $N(0, \sigma_\zeta^2)$; $N(0, \sigma_\beta^2)$; $N(0, \sigma_{\zeta\beta}^2)$ y $(0, \sigma^2)$; respectivamente.

Al aplicar el operador varianza al modelo se tendrá:

$$V(y_{ijk}) = \sigma_\zeta^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\zeta\beta}^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

donde las σ^2 se llaman *las componentes de varianza de* la observación y_{ijk}; y las hipótesis bajo prueba son:

$$H_0: \sigma_\zeta^2 = 0$$

$$H_0: \sigma_\beta^2 = 0$$

$$H_0: \sigma_{\zeta\beta}^2 = 0$$

Más aún, el análisis de varianza permanece sin cambio respecto al modelo de efectos fijos, no obstante, para formar la prueba estadística deben examinarse los (EMS's) que son:

$$E(MS_A) = \sigma^2 + n\sigma_{\zeta\beta}^2 + bn\sigma_\zeta^2$$

$$E(MS_B) = \sigma^2 + n\sigma_{\zeta\beta}^2 + an\sigma_\beta^2$$

$$E(MS_{AB}) = \sigma^2 + n\sigma^2_{\zeta\beta}$$

$$E(MS_E) = \sigma^2$$

De donde se observa que el estadístico apropiado para probar la hipótesis $H_0: \sigma^2_{\zeta\beta} = 0$ debe ser:

$$F_0 = \frac{MS_{AB}}{MS_E} \sim F_{(a-1)(b-1),\ ab(n-1)}$$

mientras que para $H_0: \sigma^2_{\zeta} = 0$

$$F_0 = \frac{MS_A}{MS_{AB}} \sim F_{a-1,\ (a-1)(b-1)}$$

y para $H_0: \sigma^2_{\beta} = 0$:

$$F_0 = \frac{MS_B}{MS_{AB}} \sim F_{b-1,\ (a-1)(b-1)}$$

Todas ellas son prueba de una cola (la cola superior) y muestran la importancia que juegan los E(MS) para la construcción del estadístico de prueba. Más aún, de estos mismos valores esperados pueden *estimarse* las componentes de la varianza:

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$$\hat{\sigma}^2_{\zeta\beta} = \frac{MS_{AB} - MS_B}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\beta} = \frac{MS_B - MS_{AB}}{an}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\zeta} = \frac{MS_A - MS_{AB}}{bn}$$

1.3.9 *Ejemplo*

Con relación al ejercicio del voltaje de salida de las baterías, cabe suponer que se pueden elegir un número de considerable de tipos de material para las celdas, así como diferentes temperaturas; y que algunas de las elegidas aleatoriamente son las que se mostraron en la tabla de resultados (tabla 3). La tabla 8 muestra el análisis de varianza para el replanteamiento del ejemplo al caso de efectos aleatorios, en ella puede observarse que la única diferencia con respecto al análisis de varianza de efectos fijos (tabla 4) se presenta en la última columna, donde los valores de F_0 se calculan por las relaciones dadas arriba.

TABLA 9 Análisis de varianza, modelo de efectos aleatorios

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	MS	F_0
Tipos de material	10,683.72	2	5,341.86	2.22
temperatura	39,118.72	2	19,558.36	8.13*
interacción	9,613.77	4	2,403.44	3.56*
error	18,230.75	27	675.21	
Total	77,646.96	35		

De las relaciones anteriores pueden *estimarse* las componentes de varianza:

$$\hat{\sigma}^2_{\zeta} = \frac{5341.86 - 2403.44}{(3)(4)} = 244.87$$

$$\hat{\sigma}^2_{\beta} = \frac{19,558.36 - 2,403.44}{(3)(4)} = 1,429.58$$

$$\hat{\sigma}^2_{\zeta\beta} = \frac{2,403.44 - 675.21}{4} = 432.06$$

$$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon} = 675.21$$

1.3.10 *Modelo Mixto*

En un experimento bifactorial puede ocurrir también el caso en que los niveles de un factor estén fijos, p ejem, A; mientras los del otro, digamos B, se elijan aleatoriamente; en tales situaciones se dice que el análisis de varianza corresponde a un *modelo mixto*.

Puede demostrarse que los estadísticos a calcular para efectuar las pruebas de hipótesis son las siguientes:

para $H_0: \zeta_i = 0: \quad F_0 = \dfrac{MS_A}{MS_{AB}} \sim F_{a-1,\ (a-1)(b-1)}$

$H_0: \sigma^2_\beta = 0: \quad F_0 = \dfrac{MS_B}{MS_E} \sim F_{b-1,\ ab(n-1)}$

$H_0: \sigma^2_{\zeta\beta} = 0: \quad F_0 = \dfrac{MS_{AB}}{MS_E} \sim F_{(a-1)(b-1),\ ab(n-1)}$

Los *estimadores* de los efectos del factor fijo son:

$$\hat{\mu} = \bar{y}...$$

$$\hat{\zeta}_i = \bar{y}_i... - \bar{y}... \qquad i = 1,2..,a$$

y los estimadores correspondientes a los componentes de varianza

$$\hat{\sigma}^2_\beta = \frac{MS_B - MS_E}{an}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\zeta\beta} = \frac{MS_{AB} - MS_E}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

La tabla 10 muestra el análisis de varianza.

TABLA 10 Análisis de Varianza para el modelo bifactorial mixto, estandar.

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	E (MS)
Renglones (A)	SS_A	$a - 1$	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\zeta\beta} + bn\zeta\Sigma/(a-1)$
Columnas (B)	SS_B	$b - 1$	$\sigma^2 + an\sigma^2_{\beta}$
Interacción (AB)	SS_{AB}	$(a-1)(b-1)$	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\zeta\beta}$
Error	SS_E	$ab(n - 1)$	σ^2
Total	SS_T	$abn - 1$	

1.4 *El diseño factorial general*

Los resultados obtenidos para el caso de los diseños fibactoriales pueden generalizarse para la situación en que se tengan a niveles del factor A, b del B, c del C, etc. En tal caso habrá $abc..n$ observaciones, donde n es el número de réplicas del experimento; debiendo haber al menos dos de ellas para poder determinar SS_E y analizar la significancia estadística.

Si los factores son fijos, se pueden formular y probar hipótesis respecto a los efectos principales y las interacciones dividiendo los correspondientes MS entre el MS_E. Las pruebas F serán pruebas de una cola, y el número de grados de libertad para cualquier efecto principal será el número de niveles del factor menos uno, mientras el número de grados de libertad de cualquier interacción será el producto del número de grados de libertad asociado con los componentes de la interacción.

El modelo del análisis de varianza para un experimento trifactorial será:

$$y_{ijk\ell} = \mu + \zeta_i + \beta_j + \gamma_k + (\zeta\beta)_{ij} + (\zeta\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\zeta\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijk\ell};$$

$$\text{donde } \begin{aligned} i &= 1,2,3,\ldots, a \\ j &= 1,2,3,\ldots, b \\ k &= 1,2,3,\ldots, c \\ \ell &= 1,2,3,\ldots, n \end{aligned}$$

La tabla del análisis de varianza, para el caso de factores fijos, se muestra adelante (tabla 11). Las pruebas F para los efectos principales e interacciones se siguen directamente de los MS's.

Las fórmulas para calcular las sumas de cuadrados son:

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{c} \sum_{\ell=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{\ldots}^2}{abcn}$$

$$SS_A = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i\ldots}^2}{bcn} - \frac{y_{\ldots}^2}{abcn}$$

$$SS_B = \sum_{j=1}^{a} \frac{y_{.j..}^2}{acn} - \frac{y_{....}^2}{abcn}$$

TABLA 11 Análisis de varianza para el modelo tri-factorial de efectos fijos

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	MS	E(MS)	F_0
A	SS_A	a - 1	MS_A	$\sigma^2 + \frac{bcn\Sigma\zeta_i^2}{a-1}$	$\frac{MS_A}{MS_E}$
B	SS_B	b - 1	MS_B	$\sigma^2 + \frac{acn\Sigma\beta_i^2}{b-1}$	$\frac{MS_B}{MS_E}$
C	SS_C	c - 1	MS_C	$\sigma^2 + \frac{abn\Sigma\gamma_k^2}{c-1}$	$\frac{MS_C}{MS_E}$
AB	SS_{AB}	(a-1)(b-1)	MS_{AB}	$\sigma^2 + \frac{cn\Sigma\Sigma(\zeta\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$	$\frac{MS_{AB}}{MS_E}$
AC	SS_{AC}	(a-1)(c-1)	MS_{AC}	$\sigma^2 + \frac{bn\Sigma\Sigma(\zeta\gamma)_k^2}{(a-1)(c-1)}$	$\frac{MS_{AC}}{MS_E}$
BC	SS_{BC}	(b-1)(c-1)	MS_{BC}	$\sigma^2 + \frac{an\Sigma\Sigma(\beta\gamma)_{ik}^2}{(b-1)(c-1)}$	$\frac{MS_{BC}}{MS_E}$
ABC	SS_{ABC}	(a-1)(b-1)(c-1)	MS_{ABC}	$\sigma^2 + \frac{n\Sigma\Sigma\Sigma(\zeta\beta\gamma)_{ijk}^2}{(a-1)(b-1)(c-1)}$	$\frac{MS_{ABC}}{MS_E}$
Error	SS_E	abc (n - 1)	MS_E	σ^2	
Total	SS_T	abcn - 1			

$$SS_C = \sum_{k=1}^{c} \frac{y^2_{..k.}}{abn} - \frac{y^2_{....}}{abcn}$$

$$SS_{AB} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{y^2_{ij..}}{cn} - \frac{y^2_{...}}{} - SS_A - SS_B$$

$$SS_{AC} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{k=1}^{c} \frac{y^2_{i.k.}}{bn} - \frac{y^2_{....}}{abcn} - SS_A - SS_C$$

$$SS_{BC} = \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{c} \frac{y^2_{.jk.}}{an} - \frac{y^2_{....}}{abcn} - SS_B - SS_C$$

$$SS_{ABC} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{c} \frac{y^2_{ijk.}}{n} - \frac{y^2_{....}}{abcn} - SS_A - SS_B - SS_C$$

$$- SS_{AB} - SS_{AC} - SS_{BC}$$

$$= SS_{subtotales(ABC)} - SS_A - SS_B - SS_C - SS_{AB} - SS_{AC} - SS_{BC}$$

$$SS_E = SS_T - SS_{subtotales(ABC)}$$

1.4.1 *Ejemplo*

Un ingeniero industrial estudia el efecto del porcentaje de carbonatación (A), la presión de llenado (B) y la velocidad de línea (C) sobre el volúmen de llenado en cada recipiente de una embotelladora. Selecciona tres niveles de carbonatación, y dos de presión y velocidad. Los datos codificados que resultaron del experimento con dos réplicas se muestran en la tabla 12, donde los totales por celda aparecen entre paréntesis.

Aplicando las fórmulas anteriores para establecer el análisis de varianza se tiene:

$$SS_T = 571 - \frac{(75)^2}{24} = 336.625$$

TABLA 12 Datos codificados

Porcentaje de carbonato (A)	Presión de operación (B) 25 psi, Veloc. de línea (c) 200	25 psi, 250	30 psi, Veloc. de línea (c) 200	30 psi, 250	$y_{i..}$
10	-3, -1 (-4)	-1, 0 (-1)	-1, 0 (-1)	1, 1 (2)	-4
12	0, 1 (1)	2, 1 (3)	2, 3 (5)	6, 5 (11)	20
14	5, 4 (9)	7, 6 (13)	7, 9 (16)	10, 11 (21)	59
Totales (BxC): $y_{.jk.}$	6	15	20	34	75: $y_{...}$
$y_{.j..}$	21		54		

Totales A x B: $y_{ij..}$ A x C: $y_{i.k.}$

A	B 25	30
10	-5	1
12	4	16
14	22	37

A	C 200	250
10	-5	1
12	6	14
14	25	34

$$SS_A = \frac{(-4)^2 + (20)^2 + (59)^2}{8} + \frac{(75)^2}{24} = 252.750$$

$$SS_B = \frac{(21)^2 + (54)^2}{12} + \frac{(75)^2}{24} = 45.375$$

$$SS_C = \frac{(26)^2 + (49)^2}{12} + \frac{(75)^2}{24} = 22.042$$

$$SS_{AB} = \frac{(-5)^2 + (1)^2 + (4)^2 + (16)^2 + (22)^2 + (37)^2}{4} - \frac{(75)^2}{24}$$
$$- \; 252.750 \; - \; 45.375 \; = \; 5.250$$

$$SS_{BC} = \frac{(6)^2 + (15)^2 + (20)^2 + (34)^2}{6} - \frac{(75)^2}{24} - 45.375$$
$$- \; 22.042 \; = \; 1.042$$

$$SS_{AC} = \frac{(-5)^2 + (1)^2 + (6)^2 + (4)^2 + (25)^2 + (34)^2}{4} - \frac{(75)^2}{24}$$
$$- \; 252.750 \; - \; 22.042 \; = \; 0.583$$

$$SS_{ABC} = \frac{1}{2} \; (-4)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + \ldots + (13)^2 + (16)^2 + (21)^2$$
$$- \; \frac{(75)^2}{24} = -252.750 - 45.375 - 22.042 - 5.250 - 0.583$$
$$- \; 1.042 \; = \; 1.083$$

$$SS_{\text{subtotales (ABC)}} = 328.125$$

$$SS_E = 336.625 - 328.125 = 8.5$$

Con estos valores podemos construir la tabla de análisis de varianza (tabla 13).

TABLA 13 Análisis de Varianza para el experimento del llenado de las botellas.

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	MS	F_0
% carbonatación (A)	252.750	2	126.375	178.412*
presión de operac. (B)	45.375	1	45.375	64.059*
Veloc. de línea (C)	22.042	1	22.042	31.118*
AB	5.250	2	2.625	3.706*
AC	0.583	2	0.292	0.412
BC	1.042	1	1.042	1.471
ABC	1.083	2	0.542	0.765
Error	8.500	12	0.708	
Total	336.625	23		

* Significativos al 10%

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

CURSOS ABIERTOS

DISEÑO DE EXPERIMENTOS: TECNICAS DE MUESTREO Y ANALISIS ESTADISTICO

I FUNDAMENTOS DE INFERENCIA ESTADISTICA
II METODOLOGIA DEL DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS
III GENERALIDADES DE LOS DISEÑOS EXPERIMENTALES

M. en I. BERNARDO FRONTANA DE LA CRUZ
INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM.

ABRIL - JUNIO - 1992

I. FUNDAMENTOS DE INFERENCIA ESTADISTICA

I.1 Par metros Poblacionales, Estad/sticas Muestrales y Distribuciones Muestrales

Recuùrdese que una poblaci"n puede definirse como un conjunto de elementos de donde se toma una muestra para observar, en cada uno de sus elementos, uno o varios valores correspondientes a la o las variables que interesan al experimentador. En el primer caso tratamos con la estad/stica univariable y en el segundo con la estad/stica multivariable.

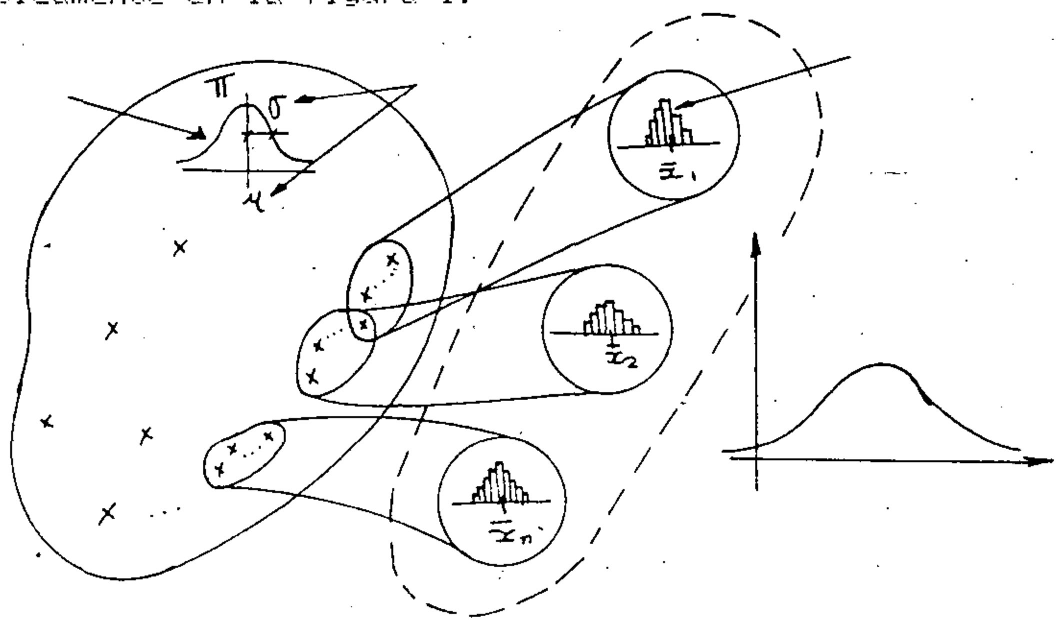
Antes de sacar la muestra, cada valor correspondiente a una unidad experimental corresponde al de una variable aleatoria cuya distribuci"n se conoce como la DISTRIBUCION POBLACIONAL o DE LA POBLACION.

En rigor una distribuci"n poblacional es una distribuci"n de frecuencia basado en un námero grande pero finito de casos; no obstante, tales distribuciones comÂnmente son discutidas como distribuciones te"ricas del tipo descrito al inicio del presente cap/tulo, donde el proceso de muestreo aleatorio de las unidades experimentales con remplazo asegura que, a largo plazo, la frecuencia relativa de algÂn valor de la V.A. la misma que la probabilidad de aquel valor.

Los valores permiten caracterizar la distribuci"n de la poblaci"n se llaman PARAMETROS DE LA POBLACION y suelen demostrarse con letras griegas minÂsculas etc; al igual que como se distinguen en la teor/a de Probabilidades. Estrictamente hablando, un par metro es una cantidad que entra como constante arbitraria en una funci"n particular de una distribuci"n de probabilidad; sin embargo, el tùrmino par metro usualmente se utiliza para significar alguna caracter/stica de la distribuci"n de la poblaci"n.

Por otro lado, como puede recordarse de la estad/stica descriptiva,, cuando una muestra es pasada se puede obtener su DISTRIBUCION DE FRECUENCIA o biùn sus valores correspondientes de tendencia control (m, $\bar{x}$, m_e, m_o, etc) de dispersi"n (S^2, S, etc) etc, a los que comÂnmente se les conoce como estad/stico (o estad/sticas); sin embargo, ANTES, de sacar la muestra tales valores se comportan como variables aleatorias por lo que un ESTADISTICO puede definirse apropiadamente como una variable aleatoria que representa los posibles valores que puede adquirir alguna medida central, de dispersi"n, su rango o aplanamiento de una distribuci"n de frecuencia.

As/ pues, sacada la muestra se tiene un valor o una estimaci"n del estad/stico en cuesti"n o de la variable aleatoria correspondiente cuya distribuci"n te"rica de probabilidades se conoce con el nombre de DISTRIBUCION MUESTRAL, y que es el fundamento de la inferencia estad/stica por ser el v/nculo entre la teor/a de probabilidades y la estad/stica. Lo anterior puede representarse esquem ticamente en la figura 1.



Obsùrvese que la distribuci"n muestral como concepto te"rico requiere mantener fijo el n&mero de elementos n de todas las posibles muestras que pueden extraerse de la poblaci"n en cuesti"n.

As/ pues, cuando la muestra se ha sacado es posible estimar valores particulares del estad/stico, pero ANTES DE SACAR LA MUESTRA, CUALQUIER ESTADISTICO DE UNA MUESTRA ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD PARTICULAR QUE MUESTRA LA RELACION FUNCIONAL ENTRE LOS POSIBLES VALORES DE UN ESTADISTICO MUESTRAL Y LA (DENSIDAD DE) PROBABILIDAD ASOCIADA CON CADA VALOR DEL ESTADISTICO SOBRE TODAS LAS POSIBLES MUESTRAS DE UN TAMA%O Y UNA POBLACION PARTICULARES.

En general, la distribuci"n de la poblaci"n NO es la misma que la distribuci"n muestral; sin embargo ùsta siempre depende de alguna manera de aquella.

Resumiendo, cuando se trata con la inferencia estad/stica, es importante tener en mente las diferencias que existen entre la distribuci"n poblacional (para la poblaci"n estudiada), la distribuci"n de frecuencias (para una muestra espec/fica que ha sido sacada) y la distribuci"n muestral (para el conjunto de valores posibles que un estad/stico puede tomar sobre todas las posibles muestras que pueden sacarse aleatoriamente de la poblaci"n en cuesti"n).

II. METODOLOGIA DEL DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS

II.1 EL PAPEL DEL DEE EN LA ACTIVIDAD PROFESIONAL

Para comprender el papel del Diseño Estadístico de Experimentos: DEE en el desarrollo de la actividad profesional, conviene definir aún en primera aproximación lo que se entiende por DEE.

El DEE es el proceso de planeación, desarrollo y análisis de un experimento mediante el uso de procedimientos y técnicas estadísticos. Con ésto en mente y entendiendo como actividad profesional de una persona la práctica de la ciencia que profesa para resolver o ayudar a solucionar problemas concretos de utilidad social; entonces, por el producto de dicha actividad suele distinguirse el profesionista, que aplica la ciencia que profesa para resolver problemas de ur gencia inmediata, del científico cuya pretensión es contribuir a la ciencia, lo que generalmente se logra al mediano o largo plazo.

En cualquier caso,eventualmente es necesario desarrollar investigación para probar hipótesis que emergen de los problemas que se enfrentan.
De las dos ramas en que se divide la investigación,básica y aplicada, aquí trataremos únicamente con la segunda, o sea, con la investigación aplicada entendida como el proceso por el cual se predice o explica el comportamiento del sistema o fenómeno bajo estudio con la finalidad de auxiliar a los decisores.
Es precisamente en la metodología de la investigación donde se ubica, como parte orgánica de ella,la experimentación la cual puede definirse como la prueba fáctica de una hipótesis con el objeto de confirmar o explorar el efecto de nuevas condiciones sobre el fenómeno estudiado.

Ejemplo 1. En Ingeniería industrial cuando se desea cambiar la producción ya sea mediante una nueva conbinación de insumos, por inovaciones tecnológicas en el proceso, etc; se requiere dela experimentación con objeto de medir si el efecto de los cambios propuestos es positivo, en cuyo caso podrá argumentarse factualmente las ventajas de tales cambios y así decidir o auxiliar en la decisión.

Ejemplo 2. En agricultura, si se sospecha que algún cambio tecnológico mejora el rendimiento; p ejem a partir de la siembra de "semilla mejorada", de añadir fertilizantes al cultivo en determinadas proporciones previamente estimadas, en depositar la semilla a una profundidad predeterminada, etc; se requieren experimentos para probar si dichas hipótesis son confirmadas por el mejoramiento de los rendimientos; todo ello para tomar o auxiliar en decisiones pertinentes.

Ejemplo 3. Un método para determinar la potencia de una droga por comparación directa con un estandar preestablecido consiste en eplicar la droga a una tasa constante a un animal experimental y la dosis a la cual se muere o cuando manifiesta algunos trastornos significativos es anotada. Esta dosis crítica se le llama tolerancia o umbral. Este experimento se realiza con determinado número de animales aplicando la droga bajo estudio,a diferentes niveles, y el estandar. Las tolerancias varían de animal a animal pero, por comparación entre las tolerancias medias para las dosis y el estandar, se obtiene una medida de la potencia de la droga.

Con relación a éstos,o cualquier otro experimento, es válido preguntarse por cuestiones como:

- ¿ Existen algunos otros factores que puedan afectar el resultado del experimento que deban investigarse o controlarse durante el desarrollode éste?
- ¿Cuantas unidades experimentales deben probarse en cada tratamiento que se esté ensayando?
- ¿Tiene alguna importancia la manera en que se asignan los tratamientos a las unidades experimentales? y en caso positivo ¿cual es la mejor forma?
- ¿Como es más conveniente diseñar el experimento para los efec- a fin de capturar los efectos significativos que resulten de los tratamientos de interés?
- ¿Existe una técnica apropida a cada diseño posible?
- etc.

Estas son algunas de las preguntas que deben aclararse ANTES de desarrollar el experimento, lo que nos conduce a tratar la planeación del experimento.

En todo experimento, los efectos que se investigan tienden a ocultarse o mezclarse con los efectos secundarios ocasionados por las fluctuaciones de los factores que están fuera de control del experimentador; p ejem los ocasionados por la heterogeneidad de los insumos (ejemplo 1), las desproporciones de fertilizante o profundidades (ejemplo 2), las edades o sexos de los animales experimentales (ejemplo 3), etc.

Así pues, puesto que siempre existen variaciónes en los factores incontrolables por el experimentador:

EL OBJETIVO ULTIMO DE LOS DISEÑOS ESTADISTICOS EXPERIMENTALES ES LOGRAR ESTIMAR LOS EFECTOS DE LOS TRATAMIENTOS Y FACTORES DE INTERES MEDIANTE EL DISEÑO DEL EXPERIMENTO QUE REDUZCA AL MAXIMO LOS EFECTOS OCASIONADOS POR FACTORES NO CONTROLABLES POR EL INVESTIGADOR, DE MANERA EFICAZ Y EFICIENTE.

Por otro lado, de los ejemplos anteriores,es claro que los DEE son esencialmente de tipo comparativo; es decir se proponen comparar las medias de los efectos producidos por diferentes tratamientos para determinar si éstas cambian y en que proporción para poder relacionar este cambio con el o los factores que distinguen a los tratamientos.

Aunque hasta aquí ya se han introducido algunos de los conceptos y categorias utilizadas en los diseños experimentales, conviene esbozar grosso modo el desarrollo histórico de los diseños experimentales con el fin de comprenderlos mejor y definirlos en la siguiente sección del presente capítulo.

II.2. DESARROLLO HISTORICO DE LOS DISEÑOS EXPERIMENTALES

Ahasta ahora se ha dejado claro que los diseños experimentales juegan un papel relevanta en la investigación científica y tecnológica actual. Sin embargo, hasta donde se sabe, fue en el siglo XI cuando se registró a Avicenna relacionado con la experimentación médica practicada sobre seres humanos. En efecto, Avicenna formuló, entre otras cosas, recomendaciones para la obtención de réplicas, la utilización de controles, los peligros inherentes a la confusión de variables.

Los trabajos de Bacon (1627) registran su interés por los estudios comparativos y la conducción de ciertos experimentos sencillos.

Young (1771) muestra en su obra los resultados y conclusiones de sus experimentos agrícolas que practicó en su granja entre los que destacan la comparabilidad de los experimentos para su validación, la experimentación con réplicas por desconfiar de los resultados que arrojaban un ensayo individual, la necesidad de mediciones rigurosas, cuidar que las conclusiones vayan más allá de los resultados experimentales.

Por su parte Johnston (1849), que al igual que Young enfocaron sus experimentos a la agricultura, destaca en su obra, entre otras cosas, la importancia de realizar bién los experimentos, evitar los efectos espureos, la ventaja de estudiar varios factores a un tiem po, contar con una teoría que permitiera cuantificar la variabilidad, etc.

Los trabajos de Gosset (1908), conocido como Student, a cerca de la inferencia estadística son de particular importancia para la cuantificación de los resultados experimentales impulsándose de esta forma la aplicación de la probabilidad y estadística en la planeación, y análisis de la experimentación agrícola ocasionándose los resultados de Stratton (1910) y Hall (1911) quienes pretendieron determinar el tamaño, forma y número de parcelas óptimos para los experimentos de campo.
Ficher es considerado como el padre de los diseños experimentales como reconocimiento a las aportaciones que hizo en este campo entre las que destacan los pasos iniciales del análisis de varianza, la introducción de la aleatorización, el rechazo a los arreglos sistemáticos, expone el valor de los experimentos más complejos introduciendo las ideas de los diseños factoriales y el concepto de confusión, la realización de ajustes mediante el análisis de covarianza; etc.

Así pues,los principales conceptos en la planeación de experimentos habián sido introducidos en 1932: aleatorización, confusión, bloqueo, diseños factoriales, analisis de varianza, de covarianza, tratamietnos, unidades experimentales,etc.;categorías que se proponen a establecer en el siguiente apartado con la finalidad de establecer un lenguaje familiar que se utilizará a lo largo del curso.

3. TERMINOLOGIA UTILIZADA EN EL DEE

Como se mencionó, este apartado está dedicado a precisar los conceptos comunmente utilizados en los análisis experimentales con las que el alumno debe familiarizarse para comprender el contenido y los desarrollos de los capítulos siguientes.

UNIDAD EXPERIMENTAL: o más brevemente UNIDAD, es la cantidad más pequeña de material experimental, el elemento o persona a la que se le aplica un solo tratamiento;

FACTOR: son las variables que están bajo el control del experimentador;

NIVELES: son los valores de las variables controladas por el experimentador, de interés en el experimento (nominales y numéricas).

TRATAMIENTOS: son las posibles conbinaciones entre los factores y los niveles;

POBLACIONES: son el conjunto de observaciones o mediciones que se podrían efectuar estudiando el proceso un número infinito de veces en 'condiciones constantes' para todos los posibles tratamientos.

Debe observarse que 'las condiciones constantes' no son claras puesto que en cualquier proceso es imposible tener todas las consiciones constantes; por lo cual, al definir una población se especifican ciertas condiciones constantes.
Por otro lado, una población queda definida por el universo de las observaciones posibles de un tratamiento.

MUESTRA: es el conjunto de datos que se obtiene de cada tratamiento;

DISEÑO: es la determinación del número de factores a estudiar, a que niveles veriarán durante el experimento, que tratamientos se ensayarán y como se asignarán a las unidades experimentales;

Como se verá, a cada diseño corresponde un modelo y éste a su vez determina el análisis estadístico.

BLOQUE: es un grupo de unidades experimentales más o menos homogeneo, de modo que la asignación de los tratamientos a las unidades produzcan en las observaciones un efecto más fácil de distinguir de otros factores aleatorios;

BLOQUEO: es una técnica experimental usada para incrementar la precisión de un experimento. El bloqueo implica hacer

co

comparaciones entre las condicioens de interés del experimento dentro de cada bloque

REPLICA: es una repetición del experimento básico. Sus propiedades son permitir al experimentador obtener una estimación del error experimental que es una unidad básica de medición para determinar cuando las diferencias observadas en los datos son estadísticamente incependientes y; además, permite al experimentador obtener una estimación más precisa de la media de la muestra como indicador del efecto de un factor.

ALEATORIZACIÓN: es la asignación aleatoria de las unidades experimentales a los tratamientos del experimento, puesto que todo método estadístico requiere que las observaciones y errores sean aleatorios con distribuciones independientes. Una aleatorización apropiada permite promediar los efectos de los factores extraños que están presentes;

VARIABLE: es la característica bajo estudio, por tanto la medición que se hace para conocer el efecto de los tratamientos

CONTROL O TESTIGO: es un tratamiento ciego o sea que no contiene ningún nivel de ningún factor;

BLOQUE COMPLETO: es un bloque que contiene todos los tratamientos del experimento;

BLOQUE INCOMPLETO: es un bloque que solamente contiene algunos de los tratamientos;

CONFUSION: es un arreglo experimental que se propone contrarrestar algún factor de interés secundario.

II.4. FUNDAMENTOS Y METODOLOGIA DEL DEE

En general, los diseños que se estudiarán y modelarán serán aquellos donde se tiene un determinado número de tratamientos que se aplican uno a cada unidad experimental y, pasado el proceso, se hace una o varias observaciones a cada unidad para analizar los efectos de los tratamientos o de los factores intervinientes.

El interés se centra entonces en separar e identificar las diferencias entre los tratamientos de las variaciones espurias producidas por los factores que se consideran están presentes en el experimento pero cuyos efectos no pueden controlarse o, si se pudiese, resulta muy costoso.

Suponiendo que se va a desarrollar un experimento en el cual ya se tienen definidos los tratamietnos, las unidades experimentales y la naturaleza de las observaciones requeridas para analizar el fenómeno; entonces es deseable tener presente; entre otros, los siguientes principios básicos que permiten desarrollar un <u>buen experimento</u>:

- los especímenes que recibirán los diferentes tratamientos no deben diferir de manera sistemática;
- los errores aleatorios implícitos en las mediciones sean lo más pequeños posible;
- las conclusiones que se deriven del experimento tengan amplio rango de validez;
- el diseño y análisis del experimento sean lo más sencillo posible;
- en el análisis estadístico de los resultados se eviten las consideraciones artificiales;

- se debe estar conciente que no puede lograrse la perfección a partir de un número limitado de observaciones (muestras).

A continuación se discute de manera suscinta cada uno de estos principios:

A) Ausencia del error sistemático

Significa que si se desarrolla un experimento con un número determinado de especímenes, se debería tener casi con certeza una estimación correcta de cada tratamiento involucrado; o sea, debe asegurarse que las unidades experimentales que reciban un tratamiento no difieran sistemáticamente de otras unidades que reciban otros tratamientos diferentes

El seguro contra el error sistemático se logra a través de la aleatorización en la asignación de tratamientos a unidades con lo cual, las unidades que reciben un tratamiento supuestamente debieran mostrar solamente los efectos de éste y el error aleatorio producido por los factores espurios e incontrolables.

Cuando es imposible o imprráctico lograr esto, cualquier consideración en torno a la presencia o ausencia de diferencias sistématicas deberá ponerse en evidencia explícitamente.

B) Precisión

Aislado el error sistemático vía la aleatorización, cabe suponer que las estimaciones de los efectos de los tratamientos obtenidos en el experimento variarán de su verdadero valor solamente por los errores alearorios inherentes a la experimentación misma.

Como se verá posteriormente, la magnitud probable de los errores aleatorios implícitos en las estimaciones de los tratamientos se mide usualmente por el error estandar de éstas, cuyo valor depende, entre otras cosas:

- del número de unidades experimentales y/o del número de observaciones repetidas de cada tratamiento (réplicas);
- de la exactitud con que se efectúe el trabajo experimental;
- de la homogeneidad del material experimental;
- del diseño del experimento y el método de análisis.

Como se observa, puesto que el diseño experimental incrementa la exactitud del experimento o, lo que es lo mismo, pretende reducir el error estandar a un punto tal que puedan derivarse conclusiones convincentes; entonces se corrobora el objetivo de los DEE propuesto al principio del presente capítulo.

Conviene tener presente que si el error estandar es grande, el experimento es menos útil; pero tratar de reducirlo por otras vías indicadas arriba, diferentes del diseño experimental, acarrea necesariamente incremento en los costos (más material,equipo de precisión, etc.).

c) RANGO DE VALIDEZ

Es claro que al estimar las diferencias entre tratamientos las conclusiones obtenidas estarán referidas al conjunto de las unidades experimentales utilizadas y a las condiciones investigadas en el experimento; por lo cual, cuando se desea aplicar las conclusiones a nuevas unidades o condiciones se incorporará incertidumbre adicional al error estandar original.

Así pues, cuando se amplía el rango de condiciones investigadas en el experimento, se tendrá una mayor confianza en las extrapolaciones sobre las conclusiones; sin embargo, al incluir más factores se pierde precisión en en el experimento por la falta de control y; además, cuando el proceso es complejo puede ser dificil organizar el propio experimento, lo que puede originar la imposibilidad de sacar concluciones válidas y claras sobre un solo factor.

D) SENCILLEZ

Es deseable tener en cuenta la flexibilidad y sencillez en la experientación, sobre todo en la etapa preliminar de una investigación. Modelos y diseños experimentales muy elaborados generalmente confunden al investigador; auque ello no implica que existen casos donde los arreglos verdaderamente complicados son requeridos para el estudio de un fenómeno.

E) ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE

Si se observa, éste último es un principio de naturaleza estadística que demanda el cálculo de la incertidumbre en las estimaciones de los diferentes tratamientos para calcular los límites del error de los verdadero efectos a diferentes niveles de probabilidad para medir la significancia estadística de las diferencias entre tratamientos.

Debe tenerse en cuenta que cuando se trabaja con un número pequeño de unidades experimentales, generalmente no es posible obtener un valor efectivo de la desviación estandar de las observaciones mismas.

Por otro lado, un esbozo de la metodología adoptada en los diseños y análisis experimentales es la siguiente:

- Establecer los objetivos del experimento, definiendo con precisión que es lo que se espera lograr.
  En general, los objetivos de los diseños experimentales son de tipo comparativo entre parámetros de diferentes poblaciones (tratamientos) para determinar si, como y en que cantidad cambian y justificar tales cambios con base en los factores intervinientes en los tratamientos que caracterizan a las poblaciones.

- Definir los tratamientos a aplicar, identificando y estableciendo los factores y sus niveles que caracterizan de manera relevante a los objetivos del experimento.
  Cabe destacar la importancia de los factores que se mantendrán constantes en todas las poblaciones o tratamientos bajo estudio y, si se utilizará o no el tratamiento testigo
  Es igualmente importante tener presente el principio de validez.

- Definir la unidad experimental, tomando en cuenta el principio de precisión.

- Definir las observaciónes que se levantarán, teniendo en cuenta que además de las de interés primario o sustitutos de éstas cuando las primarias no pueden levantarse directamente (pero se sabe que están fuertemente correlacionadas); generalmente se requiere de una serie de observaciones complementarias o contextuales para vigilar las condiciones externas al experimento, verificar la aplicación de los tratamientos a las unidades,etc.

- elegir el diseño experimental, que involucra la asignación de tratamientos a unidades,el bloqueo, la confusión, etc.
  Aquí conviene que se recuerde que el bloqueo permite incluir algunos factores que aunque no son de interés primario se reconoce que pueden afectar significativamente a algunas unidades; es decir, el bloqueo pretende controlar explícitamente los fac-

tores de interés secundario en el modelo, logrando con ello mayor precisión.

- Definir el número de réplicas, cuando el experimento lo permite y los objetivos de la investigación lo reclaman.

- Modelar el experimento formalmente, a fin de verificar si los resultados esperados están en concordancia con los objetivos planteados y guiar el proceso estadístico de análisis de las observaciones.

- Realizar el experimento y levantar los datos, especificando los pasos a segu r y utilizando las formas pertinentes para el levantamiento de la información;

- Desarrollar el análisis estadístico

- Obtener conclusiones, teniendo presente el principio de validez.

- Evaluación del experimento, con base en los objetivos y verificando el cumplimiento de los principios básicos de los diseños epérimentales. Someterlo a crítica, divulgarlo, etc.

III GENERALIDADES DE LOS DISENOS EXPERIMENTALES

Con el propósito de familiarizarse con la terminologia utilizada en el análisis estadistico de los diseños experimentales, en este apartado se discuten brevemente algunos de ellos en sus aspectos generales y se dan algunos ejemplos.

Ante todo conviene destacar que para el caso de experimentos unifactoriales o multifactoriales se pueden tener los siguientes casos:

Modelos Balanceados: que corresponden a áquellos en los que hay igual número de observaciones de la variable de respuesta (efectos) dentro de cada tratamiento.

Modelos Desbalanceados: se caracterizan por NO tener el mismo número de observaciones en cada nivel del factor o tratamiento.

Más aún, cuando el resultado del análisis de varianza para comparar k tratamientos obtenidos por la combinación de los niveles de uno o varios factores sugieren el rechazo de la igualdad de medias; pero interesa profundizar el estudio para detectar cuales tratamientos difieren significativamente, entonces se utilizan las tecnicas conocidas como Comparaciones Múltiples.

III.1 Diseños Unifactoriales

Como su nombre lo indica, en este tipo de diseños solamente participa un factor a vario niveles o tratamientos.

III.1.1 Experimentos Comparativos Simples

Se llaman asi a los experimentos en los ue se comparan sólo DOS tratamientos: DOS niveles de un factor, para ver si la variable de respuesta es la misma; es decir, si los tratamientos son euivalentes.

Ejemplo: Un ingeniero está interesado en comparar la resistencia del mortero con una formulación modificada con emulsiones de latex vertida durante el mezclado, con la resistencia de un mortero sin modificar.

III.1.2 Experimentos para comparar k tratamientos

Son aquellos en los que los k tratamientos o niveles del factor bajo estudio se asignan aleatoriamente a los especimenes o unidades experimentales. Este modelo se llama comunmente de clasificación en una dirección porque solamente un factor es investigado.

Es deseable que este experimento se desarrolle en un medio ambiente tal que los tratamientos a utilizarse sean tan uniformes como sea posible.

Ejemplo: Existe interés en comparar la resistencia a la tensión de fibras producidas por varios procesos. Cada método produce fibra con una resistencia media particular, y el experimentador desea probar la igualdad de estas medias.

Cabe aclarar que se distinguen dos situaciones con respecto a los efectos de los tratamientos: efectos fijos y efectos aleatorios.

III.1.2.1 Modelo de Efectos Fijos

Este experimento también se llama Paramétrico o Tipo I, y se caracteriza porque los k tratamientos se eligen específicamente por el investigador quien desea probar la hipótesis respecto a las medias de los tratamientos. Las conclusiones se plican solamente a los niveles del factor considerado en el análisis (los tratamientos) y NO podrán extenderse a tratamientos similares que no fueron considerados explícitamente en el análisis.

Ejemplo: La resistencia a la tansión de la fibra sintética utilizada para la fabricación de calcetines es de interés al fabricante. Se sabe que dicha resistencia se ve afectada por el porcentaje de algodón en la fibra, por lo que se desea estudiar 5 niveles del porcentaje: 20, 22.5, 25, 27.5 y 30%. Se elijen 5 observaciones por nivel requiriéndose un total de 25 observaciones a correrse en orden aleatorio.

III.1.2.2 Modelo Aleatorio

A este experiemtno también se le conoce como de Componentes de Varianza o Tipo II. A diferencia del caso anterior, aquí el factor bajo estudio tiene un gran número de niveles, de los cuales el investigador selecciona solamente aleatoriamente k de la población de niveles del factor; por ello se dice que el factor es aleatorio.

Puesto que los k niveles del factor se selecionaron aleatoriamente para correr el experimento, entonces sus conclusionesse podrán inferir a la población completa de los niveles (tratamientos) del factor.

Ejemplo: Podría ser el anterior, pero en el que los porcentajes de algodón se hayan elegido aleatoriamente de la población infinita de niveles posibles

III.1.3 Diseños en Bloques Completos

Estos diseños tienen como objetivo controlar sistemáticamente la variabilidad que emerge de fuentes extrañas.

La configuración en bloques significa agrupar las unidades experimentales y los tratamientos a ellos aplicados de alguna manera preestablecida.

III.1.3.1 Diseño en Bloques Completos Aleatorizados

El término completo en estos diseños significa que cada bloque contiene todos los tratamientos.

El uso de este diseño permite que los bloques formen una unidad expermiental más homogenea sobre la cual hacer las comparaciones. En efecto, la estrategia de este diseño mejora la exactitud de las comparaciones entre los tratamientos o niveles del factor eliminando la variabilidad entre entre las unidades experimentales. Dentro de un bloque, el orden en que los tratamientos son probados se determina aleatoriamente.

El diseño en bloques completos aleatorizados es, tal vez, el más ampliamente usado en la experimentación debido a la gran cantidad de situacionesen las que estos diseños son apropiados y a la facilidad de detectarse con la práctica.

Las unidades de equipo de prueba, la maquinaria, instrumentos de medición, etc; frecuentemente difieren en suscaracteristicas de operación y pueden ser el factor de bloqueo típico. Asimismo, bachadas de materia prima, operadores y tiempo, son también fuentes comunes de variabilidad en la experimentación de manera tal quepueden controlarse sistemáticamente a través del bloqueo.

Ejemplo: Supóngase se desea determinar si 4 diferentes puntas producen diferentes lecturas sobre una máquina para probar la dureza de los materiales. La máquina opera presionando la punta sobre el material experimental y la dureza queda determinada por la profundidad resultante. El investigador decide obtener 4 observaciones de cada punta.
En este experimento hay solamente un factor: el tipo de punta o punzón y un diseño de un solo factor completamente aleatorizado debe consistir de asignar cada una de las 4x4 corridas a una unidad experimental del material bajo prueba y observar la dureza leyendo los resultados. Así, 16 diferentes especímenes de material se requieren en este experimento: uno para cada corrida en el diseño.

Sin embargo, en esta situación de diseño hay un problema serio potencial: si los especímenes del material difieren ligeramente en su dureza, tal como sucedería si ellos vinieran de diferentes hornadas, entonces las unidades experimentales contribuirían a la variabilidad observada en los datos de la dureza dando como resultado que el error experimental reflejara tanto el error aleatorio y la variabilidad entre especímines.

Para remover la variabilidad entre especimenes de la del error experimental se practica un diseño en bloques completos aleatorizadosen el cual el investigador prueba cada punzón sobre uno de los 4 especimenes, en vez de los 16 requeridos originalmente.

III.1.3.2 El Diseño de Cuadrados Latinos

Como se vió en apartado precedente, los diseños en bloques son utilizados para remover la variabilidad de fuentes extrañas tales como la que acompaña a las unidades experimentales. Existen otros tipos de diseño que utilizan el principio de bloqueo, tal es el caso de los Cuadrados Latinos que comunmente se utilizan para eliminar 2 fuentes extrañas de variabilidad; esto es, para permitir sistemáticamente el bloqueo en dos direcciones. Así, los renglones y las columnas realmente representan dosa restricciones sobre la aleatorización.

Ejemplo: Un investigador está probando el efecto de 5 diferentes formulaciones de una mezcla explosiva usada en la fabricación de dinamita sobre la fuerza explosiva observada. Cada formulación es mezclada de una bachada de materia prima que solo alcanza para las 5 formulaciones a ser probadas. Más aún, las formulaciones son preparadas por varios operadores y puede haber diferencias substanciales en la destreza y experiencia de cada uno de ellos.

Así, parece que hay dos factores extraños en el diseño: las bachadas de materia prima y los operadores; por ello, el diseño apropiado de este problema consiste en probar cada formulación (niveles del factor único o tratamientos) una vez en cada bachada de materia prima y con cada formulación preparada exactamente una vez por cada uno de los 5 operadores. Este diseño resulta en un cuadrado latino 5x5.

III.1.3.3 El Diseño de Cuadrados Greco-Latinos

Este diseño puede usarse para controlar sistemáticamente 3 fuentes extrañas de variabilidad o sea para bloquear en tres direcciones. El diseño permite ,la investigación de hasta cuatro factores: renglones, columnas, letras griegas y letras latinas, cada uno a p niveles y pxp corridas.

Ejemplo: Supóngase que en ejemplo anterior un factor adicional: prueba de ensamblado, puede ser de importancia

III.1.4 Diseños en Bloques Incompletos

En cierots experimentos que usan diseños en bloques aleatorizados, puede ser posible no poder correr todas las combinaciones de los tratamientos de cada bloque. Tales situaciones ocurren usualmente debido a la escaces de la instrumentación o al tamaño pequeño de la infraestructura requerida para el estudio, al tamaño físico del bloque, etc.

Por ejemplo, en el experimento de la prueba de dureza citado arriba, supóngase que debido a su tamaño, cada especimen puede ser usado solamente para probar 3 punzones; por tanto, cada punzón no puede ser probado sobre cada especimen.

Para este tipo de problemas, es posible usar un diseño en bloques aleatorizados en el que todos los tratamientos no esten presentes en cada bloque; por lo que a estos diseños se les conoce como Diseños en Bloques Incompletos Aleatorizados.

III.1.4.1 Diseños en Bloques Incompletos Balanceados (BIB)

Cuando todas las comparaciones de los tratamientos son igualmente importantes, las combinaciones de los tratamientos usados en cada bloque deben selecionarse de manera balanceada; esto es, de tal forma que ningún par de tratamientos ocurran conjuntamente el mismo número de veces con cualquier otro par. Así, un diseño en bloques incompletos balanceados es un diseño en bloques incompletos en el que dos cualesquiera de los tratamientos aparecen conjuntamente el mismo número de veces.

Ejemplo: Un ingeniero químico piensa que el tiempo de reacción de un proceso es funsión del tipo de catalizador empleado. 4 catalizadores se están investigando. El procedimiento experimental consiste en seleccionar una bachada de materia prima, cargar la planta piloto, aplicar cada catalizador en una corrida separada de la plantra piloto, y observar el tiempo de reacción. Puesto que la variación de las bachadas de materia prima pueden afectar el funcionamiento del catalizador, el ingeniero decide usar las bachadas como bloques. Sin embargo, cada bachada es de tamaño suficiente para permitir que 3 catalizadores sean corridos; por lo tanto, un diseño en bloques incompletos balanceados en el que el orden en que los catalizadores sean corridos en el bloque es aleatorizado, debe ser utilizado.

III.1.4.2 Cuadrados de Youden

Estos son diseños de cuadrados latinos incompletos en los que el números de columnas no es igual al de renglones y tratamientos. En genral, un Cuadrado de Youden es un Bloque Incompleto Balanceado Simértico (SBIB) en el que los renglones corresponden a los bloques y cada tratamiento ocurre una vez en cada columna o posición del bloque; por ello es posible construir cuadrados de Youden para todos los diseños SBIB.

Ejemplo: Un ingeniero industrial está estudiando el efecto de 5 niveles de iluminación sobre la ocurrencia de defectos en una operación de ensamblado. Puesto que el tiempo puede ser un factor en el experimento, decide correr el experimento en 5 bloques donde cada bloque es un día de la semana; sin embargo, el departamento en donde el experimentop es conducido tiene cuatro estaciones de trabajo y ellas representan una fuente potencial de variabilidad. El ingeniero decide correr un cuadrado de Youden con 5 renglones:dias o bloques, 4 columnas: estaciones de trabajo y 5 tratamientos:los 5 niveles del factor iluminación.

III.2 Diseños Bifactoriales

Muchos experimentos involucran el estudio de los efectos de dos o más factores. Puede demostrarse que, en general, los diseños factoriales son más eficientes para este tipo de experimentos.

Por un diseño factorial se entiende que en cada ensayo o replicación del experimento completo todas las posibles combinaciones de los niveles de los factores son investigadas; p ejem, si hay a niveles del factor A y b niveles del factor B, entonces cada réplica contiene todas alas axb combinaciones de los tratamientos. Cuando los factores son arreglados en un diseño factorial se dice que dichos diseños son cruzados.

El efecto de un factor se define como el cambio en la respuesta producida por un cambio en el nivel del factor. Este es frecuentemente llamado el efecto principal porque se refiere a los factores primarios de interés en el experiemento.

Entre otras, las principales ventajas de los diseños factoriales son: mayor eficiencia que los diseños unifactoriales; un diseño factorial es necesario cuando pueden estar presentes las interacciones para evitar conclusiones erroneas; los diseños factoriales permiten estimar los efectos de un factor a los varios niveles de los otros factores, generando así conclusiones válidas sobre un rango de condiciones experimentales.

Los tipos más sencilos de diseños factoriales involucran solamente dos factores o conjuntos de tratamientos. Hay a niveles del factor A y b niveles del factor B, y cada réplica del experimento contiene ab combinaciones de tratamientos.

Estos modelos pueden ser Cruzados: cuando se estima que hay interacción entre los 2 factores, a los que comunmente se les llama el factor principal y el secundario según el caso, y no cruzados o jerárquicos; pudiéndose tener para cada uno de ellos: el caso paramétrico o tipo I, con factores aleatorios o tipo II, o mixto. Debe quedar claro que, cada uno de los 6 casos posibles requiere un tratamiento de análisis ligeramente diferentes del análisis básico.

Cabe destacar que los diseños bifactoriales con una observación por celda son exactamente similares a los diseños de bloques completos aleatorizados; sin embargo, la situación experimental que lleva a seleccionar diseños factoriales o de bloques aleatorizados es completamente diferente: en el diseño factorial todas las axb corridas
deben hacerse de manera aleatoria, mientras en los bloques aleatorizados la aleatorización solo ocurre dentro de bloques. Los bloques son restricciones a la aleatorización, poe ello, la

manera en que los datos se coleccionan y los datos se interpretan en los dos diseños es muy diferente.

III.2.1 Modelos Tipo I, Cruzados y No Cruzados.

Ellos consideran que ambos factores A y B estan fijos; es decir, que el experimentador ha elegido especificamente analizar a niveles del factor A y b del B en el diseño. Consecuentemente, las inferencias sacadas del análisis de varianza son aplicables solamente a los niveles de A y B realmente usados.

Ejemplo: La máxima salida de voltaje de un tipo particular de bateria se estima que depende del material usado en las placas y la temperatura ambiente del lugar donde se instala. Cuatro réplicas de un diseño bifactorial son corridas en el laboratorio para tres tipos de materiales y tres temperaturas preestablecidas. Se desea estudiar el efecto de interacción entre el material de las placas y las temperatura sobre la salida de voltaje.

Puesto que no se explora el universo de posibilidades de la temperatura ni de los materiales, entonces este diseño es bifactorial (temperatura y material de las placas) de tipo I y cruzado (se analizan las interacciones entre los dos factores).

Ejemplo: en el experiemnto anterior puede suceder que el investigador no vislumbre o no desee estudiar la interacción entre el tipo de material y la temperatura; por lo cual el tipo de modelo será no cruzado.

III.2.2 Modelos Tipo II, Cruzados y no Cruzados

En estos casos, los niveles de A y B se seleccionan aleatoriamente de las poblaciones correspondientes. Las inferencias que se obtengan del análisis de varianza serán aplicables a dichas poblaciones.

Ejemplo: Regresando al experimento de las baterias, cabe suponer que un gran número de tipos de material y de temperaturas diferentes pueden elegirse y que algunas de ellas se seleccionan aleatoriamente de las poblaciones respectivas para ser analizadas.

En este estudio cabe analizar la interacción tipo de material-temperatura, con el modelo cruzado, o no, con el modelo no cruzado o jerarquizado.

III.2.3 Modelos Mixtos

Son aquellos en los que uno de los factores está fijo y el otro aleatorio.

Ejemplo: Nuevamente con el ejemplo de las baterías, puede fijarse el tipo de material y elegir aleatoriamente los niveles de temperatura; o a la inversa.

Al igual que con los diseños unifactoriales, en los bifactoriales pueden tenerse los casos de balanceo y desbalanceo.

III.3 Diseños Multifactoriales

Los diseños factoriales son ampliamente usados en experimentos que involucran varios factores donde es necesario estudiar el efecto conjunto de esos factores sobre una variable de respuesta. Hay varios casos especiales en los diseños factoriales que son importantes porque son ampliamente usados como base para correr otros diseños de considerable valor práctico.

III.3.1 Diseños factoriales 2^k

El primer caso especial es aquel de k factores a dos niveles solamente. Estos niveles pueden ser cuantitativos; p ejem 2 niveles de temperatura, de intensidad de iluminación, de tiempo, etc; o bien cualitativos, p ejem, 2 máquinas, 2 operadores, los niveles alto y bajo de un factor, o tal vez la presencia y ausencia de un factor.

Una réplica completa de tales diseños requieren $2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^k$ observaciones, de allí el nombre del experimento.

Este diseño es particularmente útil en las etapas iniciales del trabajo experimental cuando muchos factores se requieren investigar. Requiere el menor número de combinaciones de tratamientos que pueden ser estudiados en un arreglo factorial completo. Puesto que hay solamente dos niveles de cada factor puede consoderarse que la respuesta es aproximadamente lineal sobre el rango de los niveles elegidos de los factores.

Ejemplo: Interesados en los efectos del volumen de llenado en el embotellado de una bebida(variable de respuesta), causados por el porcentaje de carbonatación (factor 1), presión de operación del proceso de llenado (factor 2) y la velocidad de la linea del proceso (factor 3); se decide correr un experimento con valores 10 y 12 del factor 1, 25 y 40 del factor 2, y 150 y 200 para el factor 3. Así, este experimento es uno 2^3.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

CURSOS ABIERTOS

DISEÑO DE EXPERIMENTOS: TECNICAS DE MUESTREO Y ANALISIS ESTADISTICO

ANALISIS DE EXPERIMENTOS FACTORIALES 2k
PRUEBAS DE HIPOTESIS E INTERVALOS DE CONFIANZA EN REGRESION LINEAL.
ANALISIS DE VARIANZA EN REGRESION LINEAL
CLASIFICACION EN UNA DIRECCION. OBSERVACION DE DOS VARIABLES.
ANALISIS DE COVARIANZA EN UNA DIRECCION

M. EN I. BERNARDO FRONTANA DE LA CRUZ

ABRIL- MAYO- 1992.

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

I. ANALISIS DE EXPERIMENTOS FACTORIALES 2^k

El experimento 2^k es un experimento de k factores con dos niveles cada uno.

Considérese un experimento con 2 factores A y B, cada uno con 2 niveles, a los cuales llamaremos "alto" y "bajo".

Por ejemplo, las cuatro combinaciones para establecer los tratamientos para un experimento 2^2 son las que se muestran en la tabla siguiente. El método de designar estos tratamientos es incluyendo la letra minúscula si el factor está al nivel alto y excluyéndola en caso contrario, si todos los factores están al nivel "bajo" se usa el símbolo (1). Por conveniencia A_0 = nivel inferior y A_1 = nivel superior de A (de manera similar para los otros factores). Los símbolos a, b, ab y (1) representan las observaciones (o su suma si hay replicas), para las combinaciones nivel-tratamiento correspondientes.

Combinaciones nivel-tratamiento
en un experimento 2^2

	A_0	A_1
B_0	(1)	a
B_1	b	ab

El efecto promedio de a para este experimento 2^2 puede estimarse como: $A = \frac{1}{2} \{ (ab-b) + [a-(1)] \}$, siendo esta la diferencia promedio del nivel superior e inferior de A, tomando primero el nivel superior de B y después el inferior. Ocasionalmente se omite el coeficiente 1/2, con lo cual se estima el efecto total de A.

De manera similar, al efecto promedio de B será:

$$B = \frac{1}{2} \{ (ab-a) + [b-(1)] \}$$

La interacción AB se define como la diferencia promedio: esto es, el efecto de A al nivel superior de B menos el efecto de A al nivel inferior de B:

$$AB = \frac{1}{2} \{ (ab-b) - [a-(1)] \}$$

Estas relaciones pueden generarse como sigue (considerando los efectos totales y reemplazando (1) por 1)

$$A: \quad (a-1)(b+1) = ab - b + a - (1)$$

$$B: \quad (a+1)(b-1) = ab - a + b - (1)$$

$$AB: \quad (a-1)(b-1) = ab - a - b + (1)$$

Para determinar cuando el rendimiento de un factor particular se suma o se resta, se forma el producto de binomios formados por cada una de las letras menos 1 si el factor esta incluido en la interacciòn (o efecto), o mas 1 si el factor no esta incluido.

Ejemplo

En un problema de tres factores A, B y C (2^3), las expresiones para los efectos e interacciones totales, (sin considerar el factor multiplicativo) son:

$$A: \quad (a-1)(b+1)(c+1) = abc + ab + ac - bc + a - b - c - (1)$$

$$B: \quad (a+1)(b-1)(c+1) = abc + ab - ac + bc - a + b - c - (1)$$

$$C: \quad (a+1)(b+1)(c-1) = abc - ab + ac + bc - a - b + c - (1)$$

$$AB: \quad (a-1)(b-1)(c+1) = abc + ab - ac - bc - a - b + c + (1)$$

$$AC: \quad (a-1)(b+1)(c-1) = abc - ab + ac - bc - a + b - c + (1)$$

$$BC: \quad (a+1)(b-1)(c-1) = abc - ab - ac + bc + a - b - c + (1)$$

$$ABC: \quad (a-1)(b-1)(c-1) = abc - ab - ac - bc + a + b + c - (1)$$

Combinaciones de tratamientos
de un experimento 2^3

	A_0		A_1	
	B_0	B_1	B_0	B_1
c_0	(1)	b	a	ab
c_1	c	bc	ac	abc

Notación para calcular los efectos

La tabla que se representa mas adelante sirve para calcular los efectos de cada factor, en las columnas se tienen los efectos principales y las interacciones (I indica el total producido por el experimento para cada tratamiento); los renglones tienen las combinaciones de los tratamientos.

El cuerpo de la tabla se hace con signos + y -. Para cada efecto los signos indican como se combina cada tratamiento; por ejemplo, abajo de I hay puros "+", el cual establece que el gran total es la suma de todos los rendimientos. El efecto A tiene en sus 8 renglones un signo "+" donde el tratamiento incluye la letra "a" (o sea el nivel superior), y "-" donde la "a" no esta incluida.

Cuando los signos de los efectos principales se han incluido en la tabla, los signos de las columnas restantes se obtienen mediante la multiplicación álgebraica de algunas de las columnas precedentes. Por ejemplo, los signos de AB son el producto de los signos de A y B, renglón por renglón.

SIGNOS ALGEBRAICOS PARA CALCULAR LOS EFECTOS

	Efecto							
Tratamiento	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
(1)	+	-	-	+	-	+	+	-
a	+	+	-	-	-	-	+	+
b	+	-	+	-	-	+	-	+
ab	+	+	+	+	-	-	-	-
c	+	-	-	+	+	-	-	+
ac	+	+	-	-	+	+	-	-
bc	+	-	+	-	+	-	+	-
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

Propiedades de la tabla

1. A excepción de la columna I, el número de signos "+" y "-" es el mismo en cada columna.

2. La suma de productos de signos de dos columnas cualesquiera es cero; entonces, el producto tiene igual número de signos más y menos.

3. El producto de dos columnas cualesquiera genera una columna incluida en la tabla. Por ejemplo, AB × B = A; ABC × AB = C, etc.

Estas propiedades están implicadas por la ortogonalidad (que indica que si una interacción es nula entonces los efectos son independientes).

Nótese que los productos $AB \times B + AB^2 = A$

$$ABC \times BC = AB^2C^2 = A, \text{ etc.}$$

Teniéndose productos modulo 2, o sea, el exponente puede ser solamente 0 o 1; si pasa de 2 se hace 0.

Algoritmos de Yates

Los cálculos y las pruebas para obtener los efectos totales y las interacciones entre los factores, se pueden hacer con un procedimiento desarrollado por Frank Yates; este será ilustrado mediante un ejemplo.

Ejemplo

La siguiente tabla muestra las cosechas obtenidas (en kgs), en parcelas experimentales para el cultivo de paja, los cuales recibieron tres tipos de fertilizantes mezclados con nitrato (n), fosfato (p) y potasio (k). En el experimento se tomaron 3 réplicas de las 8 combinaciones posibles de los fertilizantes, dando un total de 24 parcelas en total.

PLAN EXPERIMENTAL Y GENERACIONES OBTENIDAS

				totales/bloque
pk	k	nk	n	
36.9	31.4	43.6	33.8	
np	(1)	p	npk	
43.3	28.1	31.9	41.8	290.8
npk	(1)	pk	p	
41.0	31.8	36.5	33.0	
nk	np	k	n	291.6
42.8	35.2	35.9	35.4	
np	k	pk	nk	
35.0	29.6	38.0	36.5	
p	n	(1)	npk	285.2
32.1	38.3	34.2	41.5	
		GRAN TOTAL		867.6

Los totales por tratamiento se dan en la siguiente tabla:

Generaciones de Paja

	N_0		N_1	
	P_0	P_1	P_0	P_1
k_0	94.1	97.0	107.5	113.5
k_1	96.9	111.4	122.9	124.3

El primer paso es estimar los efectos de los tratamientos a partir de las producciones. En la siguiente tabla se han arreglado las producciones totales (columna 1) por tratamiento. El orden de las combinaciones de los tratamientos debe mantenerse siempre de manera que cada factor introducido se sigue con todas las combinaciones de él y de los factores previamente introducidos.

ALGORITMO DE YATES PARA UN EXPERIMENTO 2^3

TRATAMIENTO	PRODUCCION	(1)	(2)	(3)	EFECTO	MEDIA	SS
(1)	94.1	201.6	412.1	867.6	TOTAL		
n	107.5	210.5	455.5	68.8	N	5.73	197.2
p	97.0	219.8	29.9	24.8	P	2.07	25.6
np	113.5	235.7	38.9	-10.0	NP	-0.83	4.2
k	96.9	13.4	8.9	43.4	K	3.62	78.5
nk	122.9	16.5	15.9	9.0	NK	0.75	3.4
pk	111.4	26.0	3.1	7.0	PK	0.58	2.0
npk	124.3	12.9	-13.1	-16.2	NPK	-1.35	10.9
					TOTAL	=	321.8

La columna de producción se usa para calcular la columna (1), ésta a su vez para calcular la (2), y así sucesivamente. Los cuatro primeros términos de (1) se encuentran <u>sumando</u> por parejas, de arriba a abajo, las producciones. Por ejemplo, 201.6 = 94.1 + 107.5 los cuatro últimos términos de la misma columna se encuentran calculando la <u>diferencia</u> por parejas de las generaciones, restando el número superior del inferior en cada caso; por ejemplo, 107.5 - 94.1 = 13.4, etc., de manera idéntica se encuentran los valores de las columnas (2) y (3). deberán desarrollarse tantas columnas de estas como número de factores hay en el experimento (3 en nuestro ejemplo). La columna (3) da el efecto total del factor (o interacción) designado con la letra minúscula. Para obtener el efecto promedio dividimos los elementos de (3) entre el número de diferencias que hay en cada efecto total (4 en este caso) por el número de replicas $2^{k-1}r$ (3 en este caso), o sea 3 x 4 = 12 (que es equivalente a la mitad del número de parcelas). Estos valores se muestran en la cuarta columna.

Hay verificaciones para los cálculos:

a) La suma de la columna (i) es igual a 2^i veces la generación total de los tratamientos que tengan los primeros i factores al nivel "alto"; por ejemplo, la suma de la columna (3) es 8 veces el total generado de npk, es decir, 8x 124.3 = 994.4; la suma de la columna (2) es 4 veces el total generado por np y npk, o sea, 951.2 = (113.5 + 124.3) x 4, etc.

b) El término que encabeza la columna (3) es el gran total.

c) La suma de cuadrados de los otros términos de la columna (3) dividida entre el número de parcelas (24) da la suma de cuadrados de los tratamientos:

$$SST = (68.8^2 + 24.8^2 + \ldots + 7.0^2 + 16.2^2)/24 = 321.9$$

De los resultados anteriores pueden derivarse las siguientes conclusiones:

1. Los efectos N, P y K son todos positivos.

2. Los efectos NK y PK son positivos, indicando que la aplicación de potasio tiene a incrementar los efectos del nitrato y del fosfato.

3. El efecto NP es negativo, mostrando que la presencia de nitrato reduce el efecto del fosfato. De hecho, en presencia de nitrato el efecto medio del fosfato se reduce a 2.07 - 0.83 = 1.24

4. La interacción NPK es negativa, indicando que cuando el potasio esta presente la interacción NP se reduce y que el efecto medio del fosfato se reduce aún más. El efecto medio del fosfato en presencia de nitrato y potasio es 2.07 - 0.83 + 0.58 - 1.35 = 0.47

5. La conclusión sobre todo esto es que el nitrato y el potasio dan efectos beneficos, especialmente cuando se aplican juntos; poco se gana aplicando fosfato si el

nitrato esta presente y especialmente si el nitrato esta también presente.

6. Posiblemente se hubiera llegado a estas mismas conclusiones inspeccionando las producciones medias, pero para mas de tres ffactores esta conclusión es más difícil, aún cuando la inspección de los efectos e interacciones medias sea aún posible.

Es importante conocer cuales de los efectos e interacciones medios son significativos; es decir, que tan confiables son esas características del experimento. Para esto se requiere calcular errores estandar (a pesar de que la magnitud relativa de los efectos e interacciones casi siempre da una buena guía de su confiabilidad), y la tabla de análisis de variancia. Este es un tipo de análisis de bloques aleatorios cuya tabla anova es la siguiente:

TABLA DEL ANALISIS DE VARIANZA

Fuente	G. de L.	SS	MS
Bloques	2	3.0	
Tratamientos	7	321.9	
Error	14	124.6	8.90
TOTAL	23	449.5	

Los errores estandar de los efectos de los tratamientos pueden calcularse como sigue: si S^2 es la variancia residual por unidad, entonces los errores estandar para los efectos totales y medios se definen así:

Para los efectos totales: $S_t = \sqrt{2^k rS^2}$

Para los efectos medios: $S_m = \sqrt{\dfrac{S^2}{2^{k-2} r}}$

Donde k = número de factores (3 en nuestro caso) y
r = número de replicas (3 en nuestro caso).

Para el ejemplo anterior:

$$S_m = \sqrt{\frac{8.90}{2^{3-2} \times 3}} = \pm 1.22$$

Usando la distribución t con 14 G. de L. para niveles de significancia de 5 y 1%

$t_\alpha = 0.05 = 2.14 \Rightarrow N.S_1 = 1.22 \times 2.14 = \pm 2.61$

$t_\alpha = 0.01 = 2.98 \Rightarrow N.S_2 = 1.22 \times 2.98 = \pm 3.64$

Comparando èstos valores con los efectos medios, se observa que para $\alpha = 0.05$ N y K son significativos, mientras que para $\alpha = 0.01$ N es significativo y K lo es ligeramente; ningún otro efecto es significativo.

Otra forma de llegar a estas conclusiones es calculando la suma de cuadrados para cada efecto separadamente. Esto se logra elevando al cuadrado cada componente de la columna (3) de la tabla del algoritmo de yates y dividiendo entre el total de observaciones; por ejemplo, para N tenemos $68.8^2/24 = 197.2$, etc. estos valores estan anotados en la última columna de esa tabla.

Con esto se tiene partición de la suma de cuadrados de los tratamientos. Con estos valores se puede integrar la tabla anova siguiente para hacer el análisis de significancia.

TABLA ANOVA

Fuènte	G. de L.	SS	MS	F Calculadas
Bloques	2	3.0	1.5	0.17
n	1	157.2	197.2	22.16
p	1	25.6	25.6	2.88
np	1	4.2	4.2	0.47
k	1	78.5	78.5	8.82
nk	1	3.4	3.4	0.38
pk	1	2.0	2.0	0.22
npk	1	10.9	10.9	1.22
error	14	124.6	8.9	
TOTAL	23	449.5		

$F_{\alpha = 0.05} = 4.60$, $F_{\alpha = 0.05} = 3.74$

$F_{\alpha = 0.01} = 8.86$, $F_{\alpha = 0.01}$ 6.51

Comparando las F teóricas con las calculadas se llega a las mismas conclusiones anteriores.

Como paso final para la presentación de resultados deberán prepararse tablas de medias y errores estandar. Las tablas de medias pueden construirse de las producciones directamente o de los efectos calculados, prefiriéndose esto último cuando hay muchos factores involucrados.

En el ejemplo que se viene desarrollando la producción media total es:

$$\bar{x} = \frac{867.6}{24} = 36.15$$

Con esto se tiene:

Producción media con Nitrato (n) = $\bar{x}$ + 1/2 N = 36.15 + 1/2(5.73) = 39.02

Producción media sin Nitrato = $\bar{x}$ - 1/2 N = 33.28

De manera similar, para construir una tabla de dos direcciones que muestre la interacción del nitrato y potasio se tiene:

Producción media con n y k = $\bar{x}$ + 1/2 (N + K + NK) = 41.20

Producción media con n y sin k = $\bar{x}$ + 1/2 (N-K-NK) = 36.83

Producción media sin n y con k = $\bar{x}$ + 1/2 (-N+K-NK) = 34.72

Producción media sin n o k = $\bar{x}$ + 1/2 (-N - K + NK) = 31.85

TABLA DE MEDIAS PARA EL NITRATO Y POTASIO

	sin n	con n	media
sin k	31.85	36.83	34.34
con k	34.72	41.20	37.96
media	33.29	39.20	36.15

Resumen

El diseño factorial 2^k prueba k factores a dos niveles cada uno, tiene 2^k combinaciones de posibles tratamientos y pueden hacerse $2^k - 1$ comparaciones en forma de efectos principales e interacciones: por ejemplo, con cinco factores A; B, C, D, E; se requieren $2^5 = 32$ combinaciones de tratamientos y pueden hacerse 31 comparaciones como sigue:

Efectos principales, A, B, C, D, E	5
Interacciones de primer orden AB, AC, ETC.	10
Interacciones de segundo orden ABC, ABD, ETC.	10
Interacciones de tercer orden, ABCD, ABCE, ETC.	5
Interacciones de cuarto orden, ABCDE	1
TOTAL	31

Es importante señalar que la interpretación de las interacciones de tercero y mayor orden es complicada y necesita considerarse cuidadosamente a la luz de las otras interacciones que parezcan importantes. Usualmente tales interacciones no reflejan efectos reales.

Resulta tambien importante el comentario de yates (1937) al respecto: "el experimentador... debe evitar dar énfasis exagerado a algunas interacciones aisladas de alto orden estadísticamente significativas que no tengan significado fisico aparente. Si se esta usando un nivel de significancia de 1 en 20 (0.05), uno de cada veinte efectos principales e interacciones será en promedio estadisticamente significante, aún cuando los tratamientos no produzcan efecto en todos. Tales resultados anómalos junto con los efectos no significativos deberán anotarse y reservarse el juicio hasta que se acumule más información".

El análisis del experimento factorial 2^k sigue las lineas indicadas en el ejemplo anterior siendo los pasos principales:

a) El algoritmo de yates se desarrolla hasta k pasos, los valores finales divididos entre la mitad del número de observaciones (N/2) dan los efectos de los tratamientos y las interacciones. Estos pueden examinarse directamente.

b) El error estandar de los efectos y las interacciones se calcula con $4S^2/N$, donde S^2 se obtiene del análisis de variancia del experimento. Esto puede usarse para probar la significancia de los efectos. Si se desea un procedimiento alternativo, la suma de cuadrados de los tratamientos puede partirse entre los componentes correspondientes a los efectos principales e interacciones.

c) El análisis termina construyendo las tablas de medias para los efectos significativos, las cuales pueden construirse directamente o usando los efectos estimados.

Ejemplo

El desarrollo de un proceso de fermentación industrial usualmente comienza con un estudiO de laboratorio de los requerimientos fisiológicos de los microorganismos inmiscuidos. En uno de tales estudios se encontró que una sustancia útil la segrega una especie de moho cuando crece en un medio de cultivo liquido por lo que se deseo incrementar la producción. Para la formación de la sustancia se sabía que dependía principalmente de los niveles de dos ingredientes en el medio de cultivo, y de la temperatura, la aereación, el PH; y la edad en que el cultivo era logrado.

Se sospechó que cuatro de esos seis factores podián ser independientes. Para probar esto se desarrolló un experimento factorial 2^4 con dos ingredientes en el medio de cultivo (X_4, X_3); para cada tratamiento se prepararon duplicados. Los datos presentados en la siguiente tabla están codificados. Los efectos se reportaron como unidades producidas (UP) por unidad de diseño (UD). Hay 2 réplicas para cada una de las combinaciones de los factores.

EXPERIMENTO DE FERMENTACION 2^4

		X^1	- 1		+ 1	
X_4	X_3	X_2	- 1	+ 1	- 1	+ 1
- 1	-1		32.7 19.3	50.4 89.8	70.6 84.5	115 108.6
	+1		20.2 29.9	94.1 96.5	76.1 73.3	133.6 131.6
+ 1	-1		50.0 52.1	72.6 76.9	104.2 103.4	81.3 88.2
	+1		50.5 49.1	91.8 86.9	78.6 74.1	108.3 108.3

ALGORITMO DE YATES PARA EL PROBLEMA DE LA FERMENTACION

TRATAMIENTO	GENERACION					EFECTO MEDIO		G. DE L.		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7) = (6)/16	$(6)^2/32$ = (8)		F CAL.	***
(1)	52	207.1	610.9	1239.6	2542.5					
X_1	155.1	403.8	628.7	1302.9	536.9	33.56	9008.2	1	448.17	***
X_2	180.2	309.7	655.3	272.0	605.3	37.83	11449.6	1	569.63	***
X_1X_2	223.6	319.0	647.6	264.9	-185.1	-11.57	1070.7	1	53.27	***
X_4	102.1	199.5	146.5	206.0	10.1	0.63	3.2	1	0.16	
X_1X_4	207.6	455.8	125.5	399.3	-103.9	-6.49	337.4	1	16.79	***
X_2X_4	149.5	252.3	173.9	-145.2	-300.7	-18.79	2825.6	1	140.58	***
$X_1X_2X_4$	169.5	395.3	91.0	-39.9	-16.3	-1.02	8.3	1	0.41	
X_5	50.1	103.1	196.7	17.8	63.3	3.96	125.2	1	6.23	*
X_1X_5	149.4	43.4	9.3	-7.7	-7.1	-0.44	1.6	1	0.08	
X_2X_5	190.6	105.5	256.3	-21.0	193.3	12.08	1167.7	1	58.9	***
$X_1X_2X_5$	265.2	20.0	143.0	-82.9	105.3	6.58	346.5	1	17.22	***
X_4X_5	99.6	99.3	-59.7	-187.4	-25.5	-1.59	20.3	1	1.01	
$X_1X_4X_5$	152.7	74.6	-85.5	-113.3	-61.9	-3.87	119.7	1	5.96	**
$X_2X_4X_5$	178.7	53.1	-24.7	- 25.8	74.1	4.63	171.6	1	8.54	++
$X_1X_4X_2X_5$	216.6	37.9	-15.2	9.5	35.3	2.21	38.9	1	1.94	
RESIDUAL							20.10	16		

ANALISIS DE VARIANCIA

FUENTE	G. DE L.	S.S	MS	F_c	$F_{0.05,15,16}$
BLOQUES	$\cancel{1} \Rightarrow 0$	0.20			
TRATAMIENTOS	15	26694.50	1779.63	88.28* >	2.35
RESIDUAL	16	321.58	20.10		
TOTAL	31	27016.08			

DE TABLAS:

$F_{0.95,1,16} = 4.49$; $F_{0.99,1,16} = 8.53$; $F_{0.999,1,16} = 16.12$

$$\text{ERRORES STANDAR} = \sqrt{\frac{20.10}{4 \times 2}} = \pm 1.59$$

$t_{16,0.95} = 2.12$, $t_{16,0.99} = 2.92$, $t_{16,0.999} = 4.01$, de donde –

$N.S_{0.95} = 2.12 \times 1.59 = \pm 3.37$

$N.S_{0.99} = 2.92 \times 1.59 = \pm 4.64$

$N.S_{0.999} = 4.01 \times 1.59 = \pm 6.38$

Comparando los efectos medios con estos niveles de significancia y las estadistifas F caculadas con las F teóricas, se observa la coincidencia de resultados para los efectos significativos indicados para los asteriscos situados en la última columna de la tabla.

Las conclusiones a las que se llega son:

a) Los dos ingredientes en el medio de cultivo (x_1 y x_2) actuando separadamente favorecen la reproducción de la substancia; sin embargo, uno en presencia del otro la reducen.

b) Se observa que los efectos principales de x_1 y x_2 se toman en cuenta en la mayoría de las diferencias entre las preparaciones.

c) La interacción más negativa es posible, ciertos requerimientos nutricionales del Moho pueden alimentarse por cualquiera de los ingredientes.

d) Es sorprendente encontrar que los factores ambientales x_4 y x_5 tienen poco efecto directo, pero ejercen su influencia a través de su interacción con x_2 de manera inversa.

e) Idem que d) pero en menos grado con x_1

f) Ninguno de los cuatro factores es independiente de los otros, en el sentido de afectar la generación de manera puramente aditiva.

EJEMPLO

EN UNA PLANTA PILOTO SE OBTUVIERON LOS SIGUIENTES DATOS:

PRUEBA No.	TEMPERATURA °C	CONCENTRACION %	CATALIZADOR A o B	RESULTADO gramos
1	160	20	A	60
2	180	20	A	72
3	160	40	A	54
4	180	40	A	68
5	160	20	B	52
6	180	20	B	83
7	160	40	B	45
8	180	40	B	80

A. CALCULAR LOS EFECTOS PRINCIPALES Y LAS INTERACCIONES

B. REALICE EL ANALISIS DE VARIANCIA

LOS DATOS ANTERIORES SE PUEDEN REESCRIBIR EN LA SIGUIENTE TABLA:

	FACTOR A			
FACTOR C	CATALIZADOR A		CATALIZADOR B	
TEMPERATURA	FACTOR B		FACTOR B	
	CONC.=20%	CONC.=40%	CONC.=20%	CONC.=40%
160°	60 (1)	54 b	52 a	45 ab
180°	72 c	68 bc	83 ac	80 abc

Por lo tanto, se tiene un experimento factorial 2^3. Aplicando la ecuación general, los efectos principales e interacciones estan dadas por:

Efecto A: $(a-1)(b+1)(c+1) = abc + ab + ac - bc + a - b - c - (1)$

B: $(a+1)(b-1)(c+1) = abc + ab - ac + bc - a + b - c - (1)$

C: $(a+1)(b+1)(c-1) = abc - ab + ac + bc - a - b + c - (1)$

AB: $(a-1)(b-1)(c+1) = abc + ab - ac - bc - a - b + c + (1)$

AC: $(a-1)(b+1)(c-1) = abc - ab + ac - bc - a + b - c + (1)$

BC: $(a+1)(b-1)(c-1) = abc - ab - ac + bc + a - b - c + (1)$

ABC: $(a-1)(b-1)(c-1) = abc - ab - ac - bc + a + b + c - (1)$

Donde las combinaciones de tratamientos se indican en la misma tabla anterior. Sustituyendo se tiene que:

Efecto A: $80 + 45 + 83 - 68 + 52 - 54 - 72 - 60 = 6$

B: $80 + 45 - 83 + 68 - 52 + 54 - 72 - 60 = -20$

C: $80 - 45 + 83 + 68 - 52 - 54 + 72 - 60 = 92$

AB: $80 + 45 - 83 - 68 - 52 - 54 + 72 + 60 = 0$

AC: $80 - 45 + 83 - 68 - 52 + 54 - 72 + 60 = 40$

BC: $80 - 45 - 83 + 68 + 52 - 54 - 72 + 60 = 6$

ABC: $80 - 45 - 83 - 68 + 52 + 54 + 72 - 60 = 2$

y, por lo tanto, las sumas de cuadrados correspondientes serán:

$$SSX = \frac{(\text{efecto } X)^2}{n2^k}$$

Es decir:

$$SSA = \frac{6^2}{8} = 4.5$$

$$SSB = \frac{(-20)^2}{8} = 50$$

$$SSC = \frac{92^2}{8} = 1058$$

De acuerdo a lo anterior el análisis de varianza sería:

$$SSE = SSAB + SSBC + SSABC = 0 + 4.5 + 0.5 = 5$$

La tabla de análisis de varianza quedaría:

Fuente de variación	SS	G. de L.	MS	F
A	4.5	1	4.5	2.7
B	50	1	50	30
C	1058	1	1058	634.8
AC	200	1	200	120
Residual	5	3	1.6667	
T O T A L	1317.5			

Como $F_{0.05,1,3} = 10.13$, resultan significativos, con $\alpha = 5\%$, los efectos del factor B(concentración), los del C(temperamentura) y la interacción AC.

Comprobación con el algoritmo de yates.

Aplicando el algoritmo de yates se obtiene la siguiente tabla:

Combinación tratamientos	Datos (1)	(2)	(3)	(4)	Efecto promedio (4) / 4	Suma cuadrados $(4)^2$ / 8
(1)	60	112	211	514	I:128.5	____
a	52	99	303	6	A:1.5	4.5
b	54	155	-17	-20	B:-5	50
ab	45	148	23	0	AB:0	0
c	72	-8	-13	92	C:23	1058
ac	83	-9	-7	40	AC:10	200
bc	68	11	-1	6	BC:1.5	4.5
abc	80	12	1	2	ABC:0.5	0.5
TOTAL	514					

Observando las sumas de cuadrados se comprueban las obtenidas con el procedimiento normal; el resto de los cálculos se efectuaría igual.

Ejemplo

Consideremos el experimento 2^4, con una sola replica, indicado en la siguiente tabla:

	A_0				A_1			
	B_0		B_1		B_0		B_1	
	C_0	C_1	C_0	C_1	C_0	C_1	C_0	C_1
D_0	45 (1)	68 c	48 b	80 bc	71 a	60 ac	65 ab	65 abc
D_1	43 d	75 dc	45 db	70 dcb	100 ad	86 adc	104 dab	96 dacb

Solución

De acuerdo a las expresiones generales; los efectos principales estarán dados por:

$$SSA = \frac{1}{n2^4} \left[(a - 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) \right]^2$$

$$= \frac{1}{16} \left[abcd - cbd + acd - cd - d + ad - bd + abd + abc - cb + ab - \ldots - c - 1 + a - b + ab \right]^2$$

Sustituyendo valores:

$$SSA = \frac{1}{16} \left[96 - 70 + 86 - 75 - 43 + 100 - 45 + 104 + 65 - 80 + 60 - 68 - 45 + 71 - 48 + 65 \right]^2/16 = 1870.56$$

Similarmente se obtienen:

$$SSB = 39.06, \quad SSC = 390,06, \quad SSD = 855.56$$

Para las interacciones de 2o. orden:

$$SSAB = \frac{1}{16} \left[(a - 1)(b - 1)(c + 1)(d + 1) \right]^2$$

$$= |abcd-bcd-acd+cd+abd-bd-ad+d+abc-bc-bc-ac+c+ab-b-a+1|^2/16$$

$$= |96-70-86+75+104-45-100+43+65-80-60+68+65-48-71+45|^2/16$$

$SSAB = (1)^2/16 = 0.06$

Similarmente:

$SSAB=0.06$, $SSAC=1314.06$, $SSAD=1105.56$, $SSBC=22.56$, $SSCD=5.06$

Se despreciarán en este caso efectos de orden mayor.

Por otra parte, el promedio global vale:

$$\bar{x}_{...} = \frac{\Sigma\Sigma\Sigma Xijk}{n2^k} = \frac{1}{16} [45+68+48+...+104+96] = 1121/16 = 70.06$$

Por tanto: $n2^k\bar{x}_{...}^2 = 78534.458$

$SST = (45^2 + 68^2 + 48^2 +...+ 104^2 + 96^2) - 78534.458 = 5730.94$

$SSE = 5730.94 - 1870.56 - 39.06 - 390.06 - 855.56 - 0.06 -$

$1314.06 - 1105.56 - 22.56 - 0.56 - 5.06 - 5.06 = 127.84$

Los grados de libertad totales son: $n2^k - 1 = 16 - 1 = 15$ como se consideran 4 efectos principales y 6 interacciones, el error debe tener 15-10 = 5 g. de l. (ver tablas pág's 22 y 23)

EXPERIMENTOS FACTORIALES 2^k CON EFECTOS CONFUNDIDOS.

Supongase que se tienen dos tipos de pintura, A y B, se dispone de dos métodos, 1 y 2, para determinar su reflectividad después de ser aplicada en ciertos paneles. Si la pintura A se calificara mediante el método 1 y la B mediante el 2, cualquier diferencia podría imputarse al método, la pintura o a ambos, por lo que los efectos del método y la pintura quedarían confundidos; es decir, no se podría distinguir la causa de las diferencias que se encontraron.

En ocasiones no es posible tener la serie completa de resultados dentro de un solo bloque; esto obliga a integrar bloques de datos. Supóngase que un experimento 2^3 se diseño con los siguientes bloques:

LA TABLA RESUMEN DE ANALISIS DE VARIANCIA ES:

FUENTE DE VARIACION	SS	G. DE L.	MS	F
A	1870.56	1	1870.56	73.15
B	39.06	1	39.06	1.53
C	390.06	1	390.06	15.25
D	855.56	1	855.56	33.46
AB	0.06	1	0.06	0.002
AC	1314.06	1	1314.06	51.39
AD	1105.56	1	1105.56	43.24
BC	22.56	1	22.56	0.88
BD	0.56	1	0.56	0.02
CD	5.06	1	5.06	0.198
ERROR	127.84	5	25.57	
TOTAL	5730.94	15		

CALCULO USANDO EL ALGORITMO DE YATES.

COMBINACION DE TRATAM.	DATOS (1)	(2)	(3)	(4)	(5)	EFECTO	(6) EFECTO PROMEDIO (5) ÷ 8	(7) SS $(6)^2 \div 16$
(1)	45	116	229	502	1127	1		
a	71	113	273	619	169	A	21.125	1785.06
b	48	128	292	16	25	B	3.125	39.06
ab	65	145	327	153	1	AB	0.125	0.0625
c	68	143	43	14	79	C	9.875	390.06
ac	60	149	-23	11	-145	AC	-18.125	1314.06
bc	80	161	116	-16	19	BC	2.375	22.563
abc	65	166	37	17	15	ABC	1.875	14.062
d	43	26	-3	44	117	D	14.625	855.56
ad	100	17	17	35	137	AD	17.125	1173.06
bd	45	-8	6	-66	-3	BD	0.375	0.5625
abd	104	-15	5	-79	33	ABD	4.125	68.06
cd	75	57	-9	20	-9	CD	1.125	5.063
acd	86	59	-7	-1	-13	ACD	1.625	10.563
bcd	70	11	2	2	-21	BCD	2.625	27.563
abcd	96	26	15	13	11	ABCD	1.375	7.5625

Bloque 1	Bloque 2
(1)	c
a	ac
b	bc
ab	abc

La diferencia de los términos de ambos bloques es

$$(c - (1)) + (ac - a) + (bc - b) + (abc - ab)$$

Que coincide con el efecto del factor C, por lo que el efecto de este queda confundido con el de los bloques. Si los bloques se formarán de alguna de las formas 1 y 2 siguientes, entonces quedarían confundidas las interacciones AB y ABC, respectivamente.

FORMA 1		FORMA 2	
Bloque 1	Bloque 2	Bloque 1	Bloque 2
(1)	a	(1)	a
ab	b	ab	b
c	ac	ac	c
abc	bc	bc	abc

Para demostrar esto, basta encontrar los efectos de dichas interacciones y compararlos con las diferencias de ambos bloques: así, para la forma 1:

$$AB = (a - 1)(b - 1)(c + 1) = abc + ab + c + (1) - a - b - ac - bc$$

Por lo general debe evitarse que algún efecto principal quede confundido y, en ocasiones, alguna interacción predefinida; por este motivo, se debe seleccionar anticipadamente la interacción que quedará confundida (por lo general una de orden alto, que se presuponga no tiene efecto importante).

El bloque que contiene el (1) se denomina <u>bloque principal</u>; los otros bloques se formulan a partir de este, de la siguiente manera (si hay dos bloques): se incluyen en el principal a los tratamientos con un número <u>par</u> o <u>cero</u> de letras en común con el efecto que se trata de confundir. Así, en la forma 1 anterior el efecto a confundir es AB; este tiene cero letras en común con (1) y c, y dos con ab y abc. El otro bloque se integra con los tratamientos no incluidos en el principal; si hay más de dos bloques, para cada uno se selecciona un tratamiento no incluido en el bloque principal, y se generan los demás mediante productos modulo 2 de este tratamiento con los del bloque principal; para el ejemplo en cuestión esto sería, tomando a A como tratamiento: $a \times (1) = a$, $a \times ab = a^2b = b$, $a \times c = ac$ y $a \times abc = a^2bc = bc$.

Ejemplo

Diseñar un experimento 2^4 con 2 bloques de 8 tratamientos cada uno, confundiendo la interacción acd.

Bloque 1: (1), ac, cd, ad, b, abc, abd, bcd

Bloque 2: $c \times 1 = c$, $c \times ac = a$, $c \times cd = d$,

$c \times ad = acd$, $c \times b = bc$, $c \times abc$

$= ab$, $c \times abd = abcd$, $c \times bcd = bd$

Supóngase ahora que se requiere formar 4 bloques de 4 tratamientos cada uno. En tal caso 3 efectos quedarán confundidos con los bloques; pero estos no son independientes. Por tanto, se escogen 2 de los efectos y el otro queda obligado por el producto modulo 2. Por ejemplo, si se confunden abcd y abc, el tercer efecto será $abcd \times abc = a^2b^2c^2d = d$, que es un efecto principal (para evitar esto se deben seleccionar cuidadosamente los efectos a confundir).

Así, si se confundieran ab y bcd el tercer efecto a confundir sería $ab \times bcd = ab^2cd = acd$. Para generar el bloque principal se procede como antes, con el requisito adicional que cada tratamiento que quede en él tenga un número par o cero de letras en común con todos los efectos que se confunden; así:

Bloque 1: (1), cd, abc, abd

Bloque 2: $a \times (1) = a$, $a \times cd = acd$, $a \times abc = bc$, $a \times abd = bd$

Bloque 3: $b \times (1) = b$, $b \times cd = bcd$, $b \times abc = ac$, $b \times abd = ad$

Bloque 4: $c \times (1) = c$, $c \times cd = d$, $c \times abc = ab$, $c \times abd = abcd$

En general, en un experimento 2^k en 2^r bloques, quedan confundidos $2^r - 1$ efectos, de los cuales solo r son independientes. Asimismo, en el bloque principal se tienen solamente k - r tratamientos independientes (aparte del (1)); los demás se pueden generar a partir de estos.

Ejemplo

Se pretende probar la eficacia de un rifle nuevo; se piensa que pueden influir los siguientes factores:

A: cantidad de pólvora en el proyectil
B: peso del proyectil
C: geometría de la aguja disparadora
D: marca del proyectil

La variable de interés es la velocidad del proyectil. Por limitaciones de tiempo y del equipo de prueba, solo se pueden hacer 8 pruebas cada día, por lo que se considera lógico integrar bloques (uno por cada día): el experimento es 2^4 en 2 bloques de 8 tratamientos cada uno; se escogió confundir la interacción abcd (se supone que es cero). La velocidad registrada (codificada) en cada prueba se presenta en la siguiente tabla (las subrayadas corresponden a un día); después estan las tablas del algoritmo de yates y del análisis de variancia:

Cantidad de pólvora		A^0		A^1	
Peso del proyectil		B^0	B^1	B^0	B^1
Aguja	Marca				
C^0	D^0	$\underline{97}$	68	151	$\underline{150}$
	D_1	75	$\underline{53}$	$\underline{145}$	141
C_1	D_0	39	$\underline{15}$	$\underline{100}$	66
	D_1	26	-16	97	$\underline{54}$

Bloque (día) 1: (1), ab, ac, ad, bc, db, cd, abcd

Bloque (día) 2: a, b, c, d, abc, abd, acd, bcd

En la tabla del análisis de variancia se aprecia que los efectos principales son significativos y que ninguna interacción lo es, a los niveles de confianza del 95 y 99 por ciento (la bc parece serlo, por lo que no debe descartarse); para estas pruebas se tomó como suma de cuadrados residual a la suma de cuadrados correspondientes a las interacciones de tres factores.

Confusión parcial

Si un experimento se puede realizar con varias replicas completas, no es necesario confundir en cada una al mismo

ALGORITMO DE YATES

Tratamiento	(1) Velocidad	(2)	(3)	(4)	(5)		(6) (5) ÷ 8	(7) $(5)^2 \div 16$
(1)	97	248	466	686	1261	*I*		
a	151	218	220	575	547	*A*	68.375	18700.5625
b	68	139	414	248	−199	*B*	−24.875	2475.0625
ab	150	81	161	299	35	*AB*	4.375	76.5625
c	39	220	136	−88	−499	*C*	−62.375	15562.5625
ac	100	194	112	−111	−41	*AC*	−5.125	105.0625
bc	15	123	158	18	−87	*BC*	−10.875	473.0625
abc	66	38	141	17	−57	*ABC*	−7.125	203.0625†
d	75	54	−30	−246	−111	*D*	−13.875	770.0625
ad	145	82	−58	−253	51	*AD*	6.375	162.5625
bd	53	61	−26	−24	−23	*BD*	−2.875	33.0625
abd	141	51	−85	−17	−1	*ABD*	−0.125	0.0625†
cd	26	20	28	−28	−7	*CD*	−0.875	3.0625
acd	97	68	−10	−59	+7	*ACD*	0.875	3.0625†
bcd	−16	71	18	−38	−31	*BCD*	−3.875	60.0625†
abcd	54	70	−1	−19	+19	Days	2.375	(22.5625)
Total	1261							

ANALISIS DE VARIANCIA

Fuente		SS	G de L		MS	F
A		18700.56	1			280.96***
B		2475.06	1			37.19**
C		15562.56	1			233.81***
D		770.06	1			11.57*
Días		22.56	1			0.34
AB		76.56	1			1.15
AC		105.06	1			1.58
AD		162.56	1			2.44
BC		473.06	1			7.11
BD		33.06	1			0.50
CD		3.06	1			0.05
ABC	266.24	203.06	1	4	66.56	
ABD		0.06	1			
ACD		3.06	1			
BCD		60.06	1			
Total		38650.40†	15			

Valores Críticos $\begin{cases} F_{1,4,0.05} = 7.71 \\ F_{1,4,0.01} = 21.20 \end{cases}$

efecto. Si se confunden varios, se dice que el experimento tiene confusión parcial.

Por ejemplo, si se tiene un experimento 2^3 con 4 replicas, cada una arreglada en dos bloques de 4 elementos cada uno, podrian confundirse las interacciones abc, bc, ac y ab de la siguiente manera:

Replica	1		2		3		4	
	(1)	a	(1)	b	(1)	a	(1)	a
	bc	b	bc	c	b	ab	ab	b
	ac	c	a	ab	ac	c	c	ac
	ab	abc	abc	ac	abc	bc	abc	bc
Efecto confundido	abc		bc		ac		ab	

Si todas las interacciones de un mismo orden están confundidas, se dice que el experimento esta balanceado. Tal es el caso del ejemplo anterior; si en él no apareciera la replica 1, seguiria siendo balanceado, pero si desapareciera cualquiera de las otras dejaria de serlo.

La ventaja de la confusión parcial radica en que se dispone de alguna información acerca de las interacciones que se confunden. Al analizar los resultados del experimento, la suma de cuadrados de cada interacción confundida parcialmente se basa solo en las réplicas en que no está confundida. Por tanto, al aplicar el algoritmo de yates las sumas de cuadrados asociados a las interacciones confundidas deben corregirse sustrayéndole la cantidad que corresponde a la réplica en que está confundida, y como divisor para calcular el efecto medio se toma el número de elementos que tienen los bloques en que no está confundida: asi, en el ejemplo anterior, el divisor asociado a las interacciones abc, bc, ac y ab seria 24 en vez de 32.

Ejemplo

En un estudio sobre fertilizantes se tomaron en consideración tres factores: a: tiempo de aplicación, b: temperatura ambiente y c: dosificación de componentes; como etapa preliminar se toman dos niveles de cada factor, por lo que se tiene un experimento 2^3. Se dispone de dos áreas de sembrado (se tienen dos bloques) y se siembran dos veces (se obtienen dos replicas). En la primera se confundió abc, y en la segunda ab. Los resultados de las cosechas (codificados) son los siguientes:

REPLICA 1 (ABC)		REPLICA 2 (AB)	
Bloque 1	Bloque 2	Bloque 1	Bloque 2
(1) = 9	a = 8	(1) = 10	a = 9
bc = 13	b = 3	ab = 8	b = 2
ac = 5	c = 15	c = 14	ac = 10
ab = 11	abc = 11	abc = 13	bc = 12
TOTALES 38	37	35	33
	PROM = 37.5		PROM = 34

$SSB = \{ (38-37.5)^2 + (37-37.5)^2 + (35-34)^2 + (33-34)^2 \}/4 = 0.625$

Promedio entre replicas = (37.5 + 34)/2 = 35.75

$SSR_{ep} = \{(37.5 - 35.75)^2 + (34 - 35.75)^2\}/2 = 3.065$

$\overline{X}^2_{\cdots} = (38 + 37 + 35 + 33)/16 = 8.94$

$$SST = \sum_{ijk}\sum\sum X^2_{ijk} - 16\overline{X}^2_{\cdots} = 1573 - 1278.0625 = 294.9375$$

EN LA SIGUIENTE TABLA DE YATES SE UTILIZAN LOS TOTALES CORRESPONDIENTES A CADA TRATAMIENTO

TRATAMIENTO (1)	COSECHA (2)	(3)	(4)	(5)	EFECTO (6)	EFECTO PROMEDIO (5)/8	PROMEDIO CUADRATICO $(5)^2/16$
(1)	9	26	50	143	I		
a	17	24	93	7	A	0.875	3.0625
b	5	44	22	3	B	0.375	0.5625
ab	19	49	-15	19	AB		
c	29	8	- 2	43	C	5.375	115.5625
ac	15	14	5	-37	AC	-4.625	85.5625
bc	25	-14	6	7	BC	0.875	3.0625
abc	24	1	13	7	ABC		

TABLA ANOVA:

FUENTE	SS	G. DE L.	MS	F
A	3.0625	1		
B	0.5625	1		
C	115.5625	1	115.5625	$14.7 > F_{1,5,0.95}$
AB*	36.1250	1	36.1250	4.59
AC	85.5625	1	85.5625	$10.9 > F_{1,5,0.95}$
BC	3.0625	1		
ABC**	8.0000	1	8.0000	1.02
REPLICAS	3.0625	1		
BLOQUES	0.6250	2		
RESIDUAL***	39.3125	5	7.8625	
TOTAL	294.9375	15		

$F_{1,5,0.95} = 6.61$; $F_{1,5,0.99} = 16.26$

* $SS_{AB} = 19 - (35 - 33)^2/8 = 36.125$

** $SS_{ABC} = 7 - (37 - 38)^2/8 = 8.000$

*** $SS_R = 294.9375 - 255.6250 = 39.3125$

(255.6250 es la suma de cuadrados hasta bloques, inclusive)

Se aprecia que el efecto del factor c (dosificación) es significativo al 95% de nivel de confianza, así como la interacción de él con a (tiempo de aplicación).

Como elemento auxiliar para definir los signos de los términos que aparecen al calcular los efectos, se puede utilizar la tabla mostrada en la siguiente página (tomada de la ref. 1). Esta es útil para experimentos 2^k con $2 \leq k \leq 5$.

Esa tabla sirve también para determinar los tratamientos que se incluyen en el bloque principal, siendo estos los que tienen el mismo signo que (1) en la columna del efecto que se desea confundir. Así por ejemplo, en un experimento 2^4 con la interacción abcd confundida, el signo de (1) bajo la columna abcd es +, por lo que todos los tratamientos que tengan este signo en dicha columna integrarán el bloque principal: ab, ac, bc, bd, cd y abcd.

Réplicas fraccionadas

En ocasiones por falta de recursos o tiempo no se puede diseñar un experimento que tenga al menos una réplica completa. Considérese, por ejemplo, un experimento 2^4 en el que solo se pueden realizar 8 observaciones y, por tanto, se tienen solo 7 grados de libertad: esto es, se tienen 7 pares de efectos inseparables más uno que no se puede estimar.

Fraccionamiento a 1/2

Por ejemplo, considerese el experimento 2^4 fraccionado a la mitad, indicando en la tabla siguiente:

		A_0		A_1	
		B_0	B_1	B_0	B_1
C_0	D_0	(1)			ab
	D_1		bd	ad	
C_1	D_0		bc	ac	
	D_1	cd			abcd

EFECTOS PRINCIPALES E INTERACCIONES EN DISEÑOS FACTORIALES 2^2, 2^3, 2^4 Y 2^5

Efectos

TRATAMIENTOS	2^2				2^3				2^4								2^5															
	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD	E	AE	BE	ABE	CE	ACE	BCE	ABCE	DE	ADE	BDE	ABDE	CDE	ACDE	BCDE	ABCDE
(1)	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−
a	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+
b	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+
ab	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−
c	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+
ac	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−
bc	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−
abc	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+
d	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+
ad	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−
bd	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−
abd	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+
cd	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−
acd	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+
bcd	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+
abcd	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
e	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+
ae	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−
be	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−
abe	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+
ce	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−
ace	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+
bce	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+
abce	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−
de	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−
ade	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+
bde	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+
abde	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−
cde	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+
acde	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−
bcde	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
abcde	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

El efecto de A en este caso es

$$ab + ad + ac + abcd - (1) - bd - bc - cd$$

y el de BCD es

$$ab + ad - (1) - bd + ac + abcd - bc - cd$$

Que coincide con el de A y, por tanto, no se pueden separar los efectos de cada tratamiento. De manera análoga se encuentra que cada uno de los siguientes pares de efectos quedan dados por la misma ecuación:

$$(A, BCD), \quad (B, ACD), \quad (C, ABD), \quad (D, ABC)$$

$$(AB, CD), \quad (AC, BD), \quad (AD, BC), \quad (I, ABCD)$$

Se aprecia que la interacción abcd está confundida con el total I (esto se puede detectar también al observar que abcd es la interacción confundida al integrar un bloque con los ocho tratamientos de la tabla anterior).

A los pares de efectos que no pueden separarse se les denomina <u>pares aliados</u> (en el anterior hay 7, porque el que contiene a I no se considera par aliado).

Por lo anterior un experimento $2^k/2$ contiene a los tratamientos de un bloque de un experimento 2^k confundido en dos bloques; el efecto confundido en el último es el <u>contraste definidor</u> en el primero.

El aliado de cada efecto se puede encontrar mediante su interacción generalizada con el contrastre definidor, mediante su multiplicación modulo 2. En el ejemplo anterior, el contraste definidor es $ABCD$, por lo que A está aliada con $A \times ABCD = BCD$, AB con $AB \times ABCD = CD$, B con $B \times ABCD = ACD$, etc.

El procedimiento para seleccionar una mitad de réplica es:

1. Seleccione el contraste definidor
2. Use este contraste para dividir el experimento completo en dos bloques.
3. Escoja cualquiera de los dos bloques para definir los tratamientos a emplear.

Al calcular cualquier efecto con uno de los dos bloques del paso 2 anterior, los términos aparecerán con signo contrario al que se tiene al calcular dicho efecto con el otro bloque. Así, en el ejemplo que se viene planteando, el otro bloque tendría a los tratamientos a, b, c, d, abc, acd, abd y bcd; con este el efecto de **A** es a − b − c − d + abc + acd + abd − bcd, que tiene signo opuesto al calculado con el otro bloque.

<u>Ejemplo</u>

En una investigación sobre la eficacia de fertilizantes, se tienen 5 factores (**A**, **B**, **C**, **D**, **E**), con dos niveles cada uno, pero por razones presupuestales solo se pueden realizar 16 observaciones. Por tanto, se diseña un experimento 2^5 con una réplica fraccionada a la mitad ($2^5/2$).

Por considerar que la interacción abcde es nula, se decide considerarla como contraste definidor. Por consiguiente los pares aliados resultan ser:

con **A**: **A** × **ABCDE** = **BCDE**

con **B**: **B** × **ABCDE** = **ACDE**

Etcétera. El resumen de los pares aliados es (**A**, **BCDE**), (**B**, **ACDE**), (**C**, **ABDE**), (**D**, **ABCE**), (**E**, **ABCD**), (**AB**, **CDE**), (**AC**, **BDE**), (**AD**, **BCE**), (**AE**, **BCD**), (**BC**, **ADE**), (**BD**, **ACE**), (**BE**, **ACD**), (**CD**, **ABE**), (**CE**, **ABD**), (**DE**, **ABC**).

Se tienen como selecciones posibles para integrar el experimento a cualquiera de los dos bloques que se forman al confundir a **ABCDE**. Si se escoge el bloque principal, los tratamientos correspondientes son: (1), ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de, abcd, abce, abde, acde y bcde.

Si se sospecha que los interacciones de tres y cuatro factores son nulas, con este experimento se pueden estimar los efectos principales y las interacciones de dos factores.

<u>Fraccionamiento A 2^{-r}</u>

Supóngase ahora que es necesario fraccionar un experimento para usar solo una fracción 2^{-r}. Por ejemplo, si uno 2^5 se fracciona a uno 2^3, se tendrá $r = 2$ y $2^{-r} = 1/4$; en el que se tendrán solo ocho resultados, asociados a uno de los 4 bloques que se pueden formar con ocho tratamientos cada uno, lo cual hace ver que cada efecto tiene tres aliados y solo se dispone de 7 grados de libertad.

En este caso se tienen dos efectos confundidos que son independientes; el tercero resulta del producto modulo dos entre ellos. Supóngase que se toman **ABE** y **CDE**, el tercero será ABC × CDE = ABDE. Los aliados se obtienen multiplicando el efecto (modulo 2) por ABC, CDE y ABDE; así resulta lo siguiente (se procura tomar como efectos a los principales y a los de menor orden que se sospeche son importantes):

EFECTO	ALIADOS		
I	ABC	CDE	ABDE
A	BC	ACDE	BDE
B	AC	BCDE	ADE
C	AB	DE	ABCDE
D	ABCD	CE	ABE
E	ABCE	CD	ABD
AD	BCD	ACE	BE
AE	BCE	ACD	BD

Para definir los tratamientos a emplear se escoge uno de los cuatro bloques que se forman confundiendo ABC, CDE y ABDE. Si se escoge el principal, se tendrán los tratamientos (1), de, acd, ace, ab, abde, bcd y bce, de la siguiente manera

		A_0				A_1			
		B_0		B_1		B_0		B_1	
		C_0	C_1	C_0	C_1	C_0	C_1	C_0	C_1
D_0	E_0	(1)						ab	
	E_1				bce		ace		
D_1	E_0				bcd		acd		
	E_1	de						abde	

<u>Fraccionamiento A 2^{k-r} en bloques 2^b</u>

Los experimentos fraccionados pueden también diseñarse con bloques; si se toman 2^b bloques, cada uno tendrá 2^{k-b-r} tratamientos. Para hacer esto se procede de la siguiente manera:

1. Se escogen r contrastes (efectos) independientes. Los restantes $2^r - r - 1$ se generan a partir de estos.

2. Se seleccionan los efectos que se confundirán con los bloques cuidando de no tomar los efectos principales, sus aliados o los contrastes definidores.

3. Formular el bloque principal, que tenga un número cero o par de letras en común con los contrastes definidores independientes y las interacciones definidoras independientes. Se usa este bloque u otro generado con el.

Ejemplo

Se tiene un experimento 2^6 que es necesario fraccionar a 16 tratamientos arreglados en 2 bloques (k = 6, r = 2 y b = 2).

Si se toman como contrastes independientes a las interacciones **ABCD** y **ABEF**; el tercero será **ABCD** x **ABEF** = **CDEF**. Los grupos de efectos aliados que resultan se presentan en la siguiente tabla:

EFECTOS	ALIADOS		
I	ABCD	ABEF	CDEF
A	BCD	BEF	ACDEF
B	ACD	AEF	BCDEF
C	ABD	ABCEF	DEF
D	ABC	ABDEF	CEF
E	ABCDE	ABF	CDF
F	ABCDF	ABE	CDE
AB	CD	EF	ABCDEF
AC	BD	BCEF	ADEF
AD	BC	BDEF	ACEF
AE	BCDE	BF	ACDF
AF	BCDF	BE	ACDE
CE	ABDE	ABCF	DF
CF	ABDF	ABCE	DE
ACE	BDE	BCF	ADF
ACF	BDF	BCE	ADE

Para formular el bloque principal se emplean los tres contrastes definidos: con ello se obtienen (1), ab, cd, abcd, bce, ace, bde, ade, abef, ef, abcdef, cdef, acf, bcf, adf y bdf.

Los bloques se formarán confundiendo **AD** (sus aliados **BC**, **BDEF** y **ACEF** quedan confundidos también). Estos resultan ser

Bloque 1		Bloque 2	
(1)	ef	ab	abef
abcd	abcdef	cd	cdef
bce	bcf	ace	acf
ade	adf	ade	bdf

Si en vez de 2 bloques se formaran 4 con 4 tratamientos cada uno, la interacción que habría que confundir no debería estar aliada con **AD**. Si esta fuera **AF** (sus aliados **BCDF**, **BE** y **ACDE** también quedan confundidos), entonces **AD** × **AF** = **DF** y sus aliados (**CE**, **ABDE** y **ABCF**) también quedan confundidos. Los bloques que resultan son:

Bloque 1	Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4
(1)	cd	ab	ef
bce	bde	ace	bcf
abcdef	abef	cdef	abcd
adf	acf	bdf	ade

Análisis de un experimento fraccionado, con el algoritmo de yates

Con el fin de ilustrar la aplicación del algoritmo de yates, para hacer el análisis estadístico de un experimento fraccionado, considérese el caso de uno 2^5 con media replica (k = 5, r = 1). Si se escoge a **ABCDE** como contraste definidor, el bloque principal contendrá los tratamientos (1), ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de, abcd, abce, acde, abde y bcde.

Para empezar, se forma la primera columna de la tabla de yates correspondiente a un experimento con 4 factores (**A**, **B**, **C**, **D**): (1), a, b, ab, c, ac, bc, abc, d, ad, bd, abd, cd, acd, bcd y abcd. Al comparar los términos de esta con los del bloque antes formado, se nota que si se agrega la letra e a los tratamientos con 1 y 3 letras se obtienen los de dicho bloque; dicha letra está agregada entre paréntesis en la siguiente tabla. Luego se procede de la manera usual del algoritmo haciendo las sumas y restas tres veces (k - 1 = 3) y se anotan los efectos aliados correspondientes (columnas (6) y (7)).

TRATAMIENTOS

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
(1)	(1)+a(e)	(1)+a(e)+b(e)+ ab	-	-	I	ABCDE
a(e)	b(e) + ab	-	-	-	A	BCDE
b(e)	-	-	-	-	B	ACDE
ab	-	-	-	-	AB	CDE
c(e)	-	-	-	-	C	ABDE
ac	-	-	-	-	AC	BDE
bc	-	-	-	-	BC	ADE
abc(e)	-	-	-	-	ABC	DE
d(e)	a(e)-(1)	b(e)+ab-(1)-a(e)	-	-	D	ABCE
ad	ab - b(e)	-	-	-	AD	BCE
bd	-	-	-	-	BD	ACE
abd(e)	-	-	-	-	ABD	CE
cd	-	-	-	-	CD	ABE
acd(e)	-	-	-	-	ACD	BE
bcd(e)	-	-	-	-	BCD	AE
abcd	-	-	-	-	ABCD	E

Ejemplo

En una etapa preliminar de una investigación sobre fertilizantes se decidió verificar si los siguientes factores, con dos niveles cada uno, tenían efecto significativo: A = fábrica, B = máquina mezcladora, C = dosificación de nitrato, D = tipo de tierra del sembrado. Los resultados fueron los rendimientos, en kilos por hectarea sembrada.

Por considerar que la interacción abcd es nula, se tomo esta como contraste definidor en una replica fraccionada a 1/2.

El bloque principal resulta ser: (1), ab, ac, ad, bc, bd, cd y abcd.

Al realizar las mediciones correspondientes a estos tratamientos se obtuvieron los siguientes resultados:

		A_0		A_1	
		B_0	B_1	B_0	B_1
C_0	D_0	(1): 6800			ab: 5700
	D_1		bd: 6700	ad: 6400	
C_0	D_0		bc: 6300	ac: 6100	
	D_1	cd: 6500			abcd: 6400

Para simplificar el análisis numérico estos valores se codificaron restándole 6000 a cada uno y dividiendo entre 100. Los resultados son:

		A_0		A_1	
		B_0	B_1	B_0	B_1
C_0	D_0	(1): 8			ab: -3
	D_1		bd: 7	ad: 4	
C_1	D_0		bc: 3	ac: 1	abcd: 4
	D_1	cd: 5			

En un experimento 2^3 ($k - 1 = 4 - 1 = 3$) los tratamientos serían (1), a, b, ab, c, ac, bc y abc. Al comparar estos con los del bloque principal se observa que a los de 1 y 3 letras les falta una d para igualar a las del bloque, por lo que la tabla de yates queda de la siguiente manera:

TRATAMIENTOS (1)	RESULTADOS (2)	(3)	(4)	(5)	EFECTOS	ALIADOS	EFECTO MEDIO (5) 4	S S $(5)^2/8$
(1)	8	12	16	29	1	ABCD		
a(d)	4	4	13	-17	A	BCD	-4.25	36.125
b(d)	7	6	-14	-7	B	ACD	-1.75	6.125
ab	-3	7	-3	-1	AB	CD	-0.25	0.125+
c(d)	5	-4	-8	-3	C	ABD	-0.75	1.125
ac	1	-10	1	11	AC	BD	2.75	15.125+
bc	3	-4	-6	9	BC	AD	2.25	10.125+
abc(d)	4	1	5	11	ABC	D	2.75	15.125
Totales	29							83.875

Al observar las sumas de cuadrados se aprecia que el efecto principal a (aliado con bcd) es el mas importante, luego le siguen el d (aliado con abc), ac (aliado con bd) y bc (aliado con ad). De estos dos últimos probablemente los importantes son bd y ad ya que involucran a los dos efectos principales que influyen de manera relevante, en cambio sus respectivos aliados ac y bc involucran al efecto principal c que no influye de manera importante.

Conviene destacar que el hecho de que a haya sido importante implica que existe gran variabilidad de resultados de una fábrica a otra, lo cual puede significar que estan siguiendo procedimientos de producción distintos.

METODO DE LA SUMA MODULO 2 PARA DENOTAR TRATAMIENTOS

Una manera alternativa a la de letras para denotar los tratamientos es la de usar los números 0 y 1: el cero se usa para indicar que el factor esta en su nivel inferior, y el 1 para el superior. Por ejemplo, en un experimento 2^3 la equivalencia de notaciones seria:

	A B C		A B C
(1) =	0 0 0	c =	0 0 1
a =	1 0 0	ac =	1 0 1
b =	0 1 0	bc =	0 1 1
ab =	1 1 0	abc =	1 1 1

Al generar dos bloques de un experimento 2^4 con la integración abcd confundida el bloque principal se integra de manera análoga que antes: se incluirán los tratamientos que tengan un número par o cero de unos en común con abcd; el otro bloque se obtiene mediante la suma modulo 2 del tratamiento que se escoja de pivote (que no este en el bloque principal).

Por ejemplo un experimento 2^4 con dos bloques y abcd como interacción confundida será:

BLOQUE 1		BLOQUE 2	
A B C D	A B C D	A B C D	A B C D
0 0 0 0	1 0 0 1	1 0 0 0	0 0 0 1
1 1 0 0	0 1 0 1	0 1 0 0	1 1 0 1
0 0 1 1	0 0 1 1	1 0 1 1	1 0 1 1
1 0 1 0	1 1 1 1	0 0 1 0	0 1 1 1

1000 + 1100 = 0100; 1000 + 0011 = 1011; 1000 + 1010 = 0010; 1000 + 1001 = 0001; 1000 + 0101 = 1101; 1000 + 0011 = 1011; 1000 + 1111 = 0111

Otra manera de formular los bloques consiste en formular familias de ecuaciones como las dos siguientes, que corresponden a un experimento 2^4 con 2 bloques; si un tratamiento satisface la primera ecuación, entonces corresponde al bloque principal, pero si satisface la segunda, al otro bloque.

Las ecuaciones tienen la siguiente forma:

$$K_A X_1 + K_B X_2 + K_C X_3 + K_D X_4 = 0 \ (\text{MOD } 2)$$

$$K_A X_1 + K_B X_2 + K_C X_3 + K_D X_4 = 1 \ (\text{MOD } 2)$$

Donde k_i son 0 o 1, dependiendo de que las letras a, b, c, d esten en la interacción confundida; si esta es abcd, entonces las cuatro letras estan en ella y, por consiguiente, $k_A = k_B = k_C = k_D = 1$, por lo que las ecuaciones anteriores quedan de la siguiente manera:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0 \ (\text{MOD } 2)$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1 \ (\text{MOD } 2)$$

Así, el tratamiento 1100 dará

$$1 + 1 + 0 + 0 = 2 \text{ (MOD 2)} = 0$$

Que cumple con la primera ecuación, por lo que corresponde al bloque principal, el tratamiento 0100 da 0 + 1 + 0 + 0 = 1 (MOD 2), que cumple con la segunda ecuación por lo que corresponde al bloque secundario.

Ejemplo

Se desea formular un experimento $\frac{1}{4} \times 2^{6}$ con dos bloques de 8 tratamientos cada uno, tomando abcd, abef y cdef como contrastes definidores, y ad como interacción confundida. Los tratamientos deben primero satisfacer las ecuaciones:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0 \text{ (MOD 2)}$$

$$X_1 + X_2 + X_5 + X_6 = 1 \text{ (MOD 2)}$$

Luego los 16 tratamientos se dividen en dos bloques, debiendo satisfacer

$X_1 + X_4 = 0$ (MOD 2) para el bloque principal

$X_1 + X_4 = 1$ (MOD 2) para el otro bloque

Se puede proceder de la manera siguiente: se escogen 000000, 111100 y 011010 que satisfacen las primeras dos ecuaciones; la adición modulo 2 de las dos ultimas da 111100 + 011010 = 122110 = 100110; luego se toma 000011 que sumada a los anteriores da 111111, 011001 y 100101; luego se toma 110000 y se adiciona a los anteriores, etc. Una vez que se tienen los 16 se separan en grupos que cumplan con las últimas dos ecuaciones; así, 000000 da 0 + 0 = 0 (corresponde al bloque principal), 111100 da 1 + 1 = 2 = 0 (al principal), 110000 da 1 + 0 = 1 (al secundario); etc.

Experimento 3^k

En el desarrollo de esta sección se usará la notación con 0, 1 y 2 para identificar a los tratamientos. Los tres niveles del factor serán 0, 1 y 2; las multiplicaciones y adiciones serán modulo 3. El primer número del tratamiento corresponde al factor a, el segundo al b, etc.

Un experimento 3^p se denota así:

	A_0			A_1			A_2		
	B_0	B_1	B_2	B_0	B_1	B_2	B_0	B_1	B_2
C_0	000	010	020	100	110	120	200	210	220
C_1	001	011	021	101	111	121	201	211	221
C_2	002	012	022	102	112	122	202	212	222

Algoritmo de yates

La extensión del algoritmo de yates a un experimento 3^k se ilustrará con el siguiente ejemplo.

Se diseñó un experimento para determinar la cantidad de fertilizante producido bajo tres temperaturas (50°, 60° y 70°), en tres fábricas (1, 2 y 3); el primero es el factor **A**, y el segundo el **B**. Los resultados codificados son

	TEMPERATURA (A)		
Laboratorios	50 (A_0)	60 (A_1)	70 (A_2)
1 (B_0)	9	2	1
2 (B_1)	12	3	-3
3 (B_2)	3	10	5

La tabla de yates es

				EFECTOS	DIVISÓR	S S
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
00	9	12	42			
10	2	12	-21	A_L	$2^1 \times 3^{2-1} \times 1 = 6$	73.5
20	1	18	-3	A_Q	$2^1 \times 3^{2-0} \times 1 = 18$	0.5
01	12	-8	6	B_L	$2^1 \times 3^{2-1} \times 1 = 6$	6.0
11	3	-15	10	$A_L B_L$	$2^2 \times 3^{2-2} \times 1 = 4$	25.0
21	-3	2	-18	$A_Q B_L$	$2^2 \times 3^{2-1} \times 1 = 12$	27.0
02	3	6	6	B_Q	$2^1 \times 3^{2-0} \times 1 = 18$	2.0
12	10	3	24	$A_L B_Q$	$2^2 \times 3^{2-1} \times 1 = 12$	48.0
22	5	-12	-12	$A_Q B_Q$	$2^2 \times 3^{2-0} \times 1 = 36$	4.0

El primer tercio de la columna 3 se forma sumando los resultados de tres en tres (9 + 2 + 1) = 12, 12 + 3 - 3 = 12, 3 + 10 + 5 = 18); el segundo tercio se calcula restándole el primero término al tercero de cada tercia (1 - 9 = -8, -3 - 12 = -15, 5 - 3 = 2); (esto estima la componente lineal) el tercer tercio se obtiene sumando el primero y el tercero de cada tercia y restándole el doble del segundo) (esto estima la componente cuadrática) (9 + 1 - 2 × 2 = 6, 12 - 3 - 2 × 3 = 3, 3 + 5 - 2 × 10 = -12).

Luego la columna (4) se calcula con la (3) de igual manera que esta se obtuvo con la 2 (12 + 12 + 18 = 42, -8 -15 + 2 = -21, 6 + 3 - 12 = -3, 18 - 12 = 6, 2 - (-8) = 6, 12 - 6 = 6, 12 + 18 - 2 × 12 = 6, -8 + 2)-15) = 24, 6 - 12 - 2(3) = -12). En la columna (5) se anotan los efectos (el indice L denota efecto lineal, y el Q, cuadrático).

La suma de cuadrados (columna 6) de cada efecto (cada una con un grado de libertad) se calcula usando un divisor dado por la siguiente formula).

$$\text{divisor} = 2^p 3^q n$$

Donde p es el número de factores en la interacción considerada, q es el número de factores que tiene el experimento menos el número de términos lineales de la interacción, y n es el número de réplicas.

Por ejemplo el efecto lineal, A_L, de A, tiene como divisor a $2^1 * 3^{2-1} \times 1 = 6$, en tanto que $A_Q B_Q$ tiene a $2^2 \times 3^{2-0} \times 1 = 36$.

PRUEBAS DE HIPOTESIS E INTERVALOS DE CONFIANZA EN REGRESION LINEAL

Si el modelo que relaciona a y con x es lineal, entonces

$$Y = \beta X + \alpha$$

Si no se conoce β y α, es necesario estimarlos con base en una muestra, con lo cual se obtiene

$$\tilde{Y} = \mathbf{b}X + \mathbf{a}$$

En donde $\mathbf{a}$ es el estimador de α, y b, el de β. Sea $\sigma^2_{y|x}$ la variancia de la estimación de y con base en x.

Se puede demostrar que, si se conoce $\sigma^2_{y|x}$, entonces:

$$\mathrm{Var}(\mathbf{b}) = \sigma^2_{\mathbf{b}} = \sigma^2_{y|x} / \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sigma^2_{y|x}/ns^2_x$$

$$\mathrm{Var}(\mathbf{a}) = \sigma^2_{\mathbf{a}} = \sigma^2_{y/x}/n + \frac{\bar{x}^2\sigma^2_{y|x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sigma^2_{y|x}\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{nS^2_x}\right)$$

$$\mathrm{Var}(\mathbf{b}X + \mathbf{a}) = \sigma^2_{y|x}/n + \frac{\sigma^2_{y|x}\ (x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sigma^2_{\tilde{y}} = \sigma^2_{y|x}\left(\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{nS^2_x}\right)$$

Si $\sigma^2_{y|x}$ no se conoce, se puede obtener una <u>estimación insesgada</u> de ella mediante la ecuación

$$S^2_{y|x} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \tilde{y}_i)^2$$

<u>Intervalos de confianza: $\sigma_{y|x}$ conocida</u>

a. para la ordenada en el origen, α,

$$\mathbf{a} \pm z_c\, \sigma_{\mathbf{a}}$$

donde $z_c = p(Z < z_c) = 1 - \alpha/2$; α = nivel de significancia

b. para la pendiente, β:

$$\mathbf{b} \pm z_c\, \sigma_{\mathbf{b}}$$

c. para la predicción, Y_i:

$$\tilde{Y}_i \pm z_c \, \sigma_{\tilde{y}}$$

En caso de que $\sigma_{y|x}$ sea desconocida (es lo usual), debe estimarse a partir de la muestra mediante $S_{y|x}$ En tal caso los intervalos de confianza cambian a:

a. para la ordenada en el origen, α: $a \pm t_c \; \tilde{\sigma}_a$

$$a \pm t_c \, S_{y|x} \sqrt{\frac{\overline{x^2}}{nS_x^2}}$$

donde t_c es el valor critico de un nivel de significancia α , correspondiente a una distribución t de student con $\nu = n - 2$ grados de libertad, y S_x^2 es la varianza (sesgada) de la muestra de x.

b. para la pendiente, β: $b \pm t_c \, \tilde{\sigma}_b$

$$b \pm t_c \, S_{y|x} / \sqrt{nS_x^2} \quad \text{ó} \quad b \pm t_c \, \frac{S_{y|x}}{S_x \sqrt{n}}$$

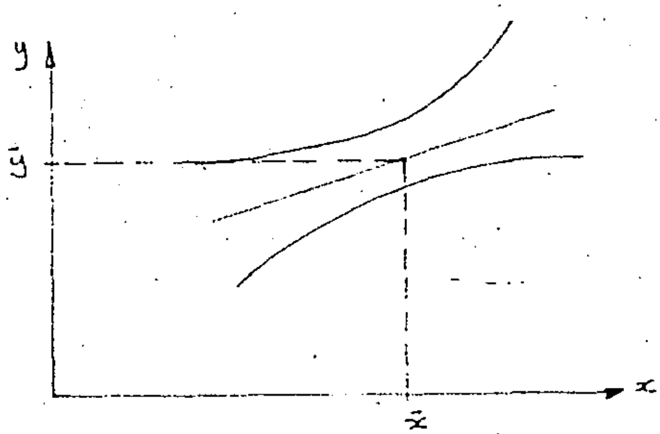
c. para la predicción, Y_i: $\tilde{Y}_i \pm t_c \tilde{\sigma}_{\tilde{y}}$

$$\tilde{Y}_i \pm t_c \, S_{y|x} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{nS_x^2}}$$

Si x_i esta dentro del rango de la muestra, ó

$$\tilde{Y}_i \pm t_c \, S_{y|x} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{nS_x^2}}$$

Si x_i esta fuera del rango.



Ejemplo

La formación del alcohol en un proceso de fermentación se relaciona con la temperatura. En una serie de seis mediciones a distintas temperaturas se obtuvo lo siguiente:

Temperatura, x, °C	35	40	45	50	55	60
Alcohol, lt	20.2	23.1	23.2	23.6	25.8	26.3

Si se ajusta una recta por mínimos cuadrados se obtiene

$$\tilde{Y} = 0.225\,X + 13.01$$

$(\overline{X} = 47.5,\ \overline{y} = 23.7)$

1. Intervalos de confianza con $\sigma_{y|x} = 0.8$ (conocida); $\alpha = 0.05$

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{0.8}{6} + \frac{0.8 \times 47.5^2}{437.5}} = 1.845$$

donde $\sum_{i=1}^{6} (x_i - \overline{x})^2 = 437.5$

$a \pm z_c\,\sigma_a = 13.01 \pm 1.96 \times 1.845 = (9.39,\ 16.\ 63)$

$$\sigma_b = \frac{0.8}{\sqrt{437.5}} = \frac{0.8}{20.92} = 0.0382$$

$b \pm z_c\,\sigma_b = 0.225 \pm 1.96 \times 0.0382 = 0.225 \pm 0.075 =$

$= (0.150,\ 0.300)$

Intervalos de confianza con $\sigma_{y|x}$ desconocida.

En este caso $S^2_{y|x} = \dfrac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{6} (y_i - 0.225x_i - 13.01)^2 =$

$$\sum_{i=1}^{6} (y_i - \tilde{y}_i)^2/(n-2)$$

TEMP, x, °C	ALCOHOL, y, lts	$\tilde{y}_i$	$y_i-\tilde{y}_i$	$(y_i-\tilde{y}_i)^2$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$
35	20.2	20.9	0.7	0.49	-12.5	156.2
40	23.1	22.0	1.1	1.21	- 7.5	56.2
45	23.2	23.1	0.1	0.01	- 2.5	6.2
50	23.6	24.3	-0.7	0.49	2.5	6.2
55	25.8	25.4	0.4	0.16	7.5	46.2
60	26.3	26.5	-0.2	0.04	12.5	156.2
Σ=285				Σ=2.40		Σ=437.4

$$\bar{x} = \frac{285}{6} = 47.5; \quad S_x^2 = \frac{437.4}{6} = 72.9$$

Sabemos que $\tilde{y} = 0.225\,x + 13.01$; por tanto:

$\tilde{y}(35) = 0.225(35) + 13.01 = 20.9,$

$y(40) = 0.225(40) + 13.01 = 22.0,$ etc.

Intervalos de confianza:

a) Para α: $\quad 13.01 \pm t_c\, S_{y|x} \quad \frac{x^2}{nS_x^2} + \frac{1}{n}$

$t_c = t_{0.975,4} = 2.776, \quad S_{y|x}^2 = \frac{1}{n-2} \quad \Sigma(y_i-\tilde{y}_i)^2 = \frac{1}{4}\,2.4 = 0.6,$

$S_{y|x} = \sqrt{0.6} = 0.77$

$13.01 \pm 2.776 \times 0.77 \quad \frac{47.5^2}{6(72.9)} + \frac{1}{6} = 13.01 \pm 4.93 = (8.08, 17.94)$

b) Para β: $\quad 0.225 \pm t_c \frac{S_{y|x}}{\sqrt{nS_x^2}} = 0.25 \pm 2.776 \frac{0.77}{\sqrt{6(72.9}} =$

$= 0.225 \pm 0.102 = (0.123,\ 0.327)$

c) para y_i $(x = 50)$: $y_i(50) = 24.3$

$$24.3 \pm t_c\, S_{y|x} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_i-\bar{x})^2}{n\,S_x^2}} = 24.3 \pm 2.776 \times 0.77 \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{(50-47.5)^2}{6(72.9)}} =$$

$= 24.3 \pm 0.9 = (23.4,\ 25.2)$

Pruebas de hipótesis

a. Para la ordenada en el origen

Se demuestra que
$$\frac{\alpha - a_0}{S_{y|x}\sqrt{\dfrac{\overline{x^2}}{nS_x^2}}} = \frac{\alpha - a_0}{\dfrac{S_{y|x}}{S_x}\sqrt{\dfrac{\overline{x^2}}{n}}} = T$$

Tiene distribución t de student con $\nu = n - 2$ grados de libertad.

Si se desea probar la hipótesis

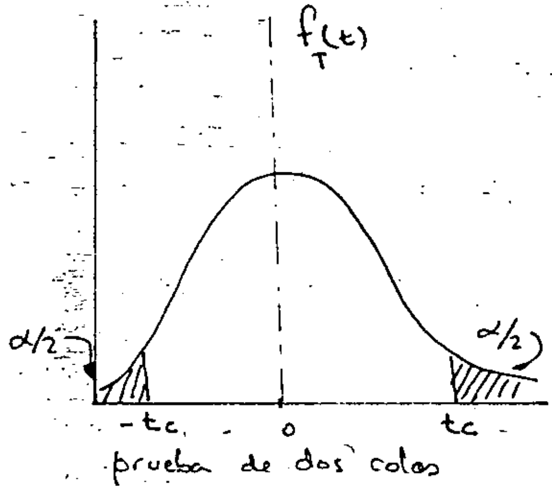
$$H_0 : \alpha = a_0$$

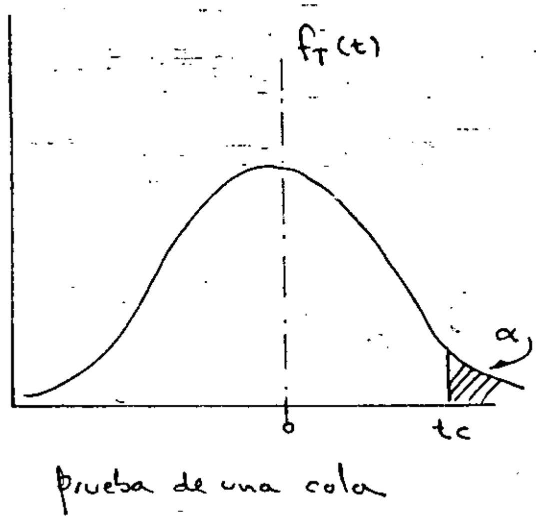
$$H_1 : \alpha \neq a_0$$

Basta sustituir a $\alpha = a_0$ en la ecuación anterior y evaluar $T = t$, es decir,

$$t = \frac{a - a_0}{\dfrac{S_{y|x}}{S_x}\sqrt{\dfrac{\overline{x^2}}{n}}}$$

Se aceptará H_0 si $|t| < |t_c|$; en caso contrario se rechazará (prueba de dos colas). Si H_1 fuera $B > b_0$, se aceptará si $t < t_c$, y se rechazará en caso contrario (prueba de una cola)





B. Para la pendiente, β

Analogamente, para β, la estadística

$$\frac{\beta - b_0}{S_{y\,x}/\sqrt{nS_x^2}} = \frac{\beta - b_0}{\dfrac{S_{y\,x}}{S_x\sqrt{n}}} = T,$$ Donde b_0 = valor de m bajo la hipótesis nula H_0: $\beta = b_0$,

También tiene distribución t de student con $\nu = n - 2$ grados de libertad:

$$t = \frac{b - b_0}{\dfrac{S_{y|x}}{S_x\sqrt{n}}}$$

Ejemplo

Considerese los datos siguientes:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0.16	0.09	0.08	0.23	0.60	0.39	0.55	0.75	0.81	0.85

$b = 0.093$, $a = 0.032$, $S^2_{y|x} = 0.01258$

$S_x^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = 82.50/10 = 8.25$; $\Sigma x_i^2 = 2.85$, $\overline{x^2} = \frac{285}{10} = 28.5$

a. Probar la hipótesis de que $\alpha = 0$

b. probar la hipótesis de que $\beta = 0.1$

con $\alpha = 0.01$ y $S_{y|x}$ desconocida.

a. $H_0 : \alpha = 0$; $H_1 : \alpha \neq 0$

$$t = \frac{a - a_0}{S_{y|x}\sqrt{\frac{x^2}{nS_x^2}}} = \frac{0.032 - 0}{\sqrt{0.01258}\sqrt{\frac{28.5}{10 \times 8.25}}} = 0.486$$

$t_c = t_{0.995,8} = 3.355 > 0.486$ se acepta H_0.

b. $H_0 : \beta = 0.1$; $H_1 : \beta \neq 0.1$

$$t = \frac{b - b_0}{\frac{S_{y|x}}{S_x\sqrt{n}}} = \frac{0.093 - 0.1}{\frac{\sqrt{0.01258}}{\sqrt{8.25 \times 10}}} = 0.567 < 3.355$$

Se acepta H_0 con 99% de nivel de confianza.

Prueba de hipótesis para el coeficiente de correlación.

Prueba

$$H_0: \rho_{xy} = 0; \quad H_1: \rho_{xy} \gtrless 0$$

Se demuestra que en caso de que x y y son independientes ($\rho = 0$), la estadística

$$T = r_{xy}\sqrt{\frac{n - 2}{1 - r_{xy}^2}}$$

Tiene distribución t de student con n - 2 grados de libertad.

Ejemplo

En base a una muestra aleatoria de 30 datos sobre la temperatura media durante un mes, x, y el peso medio de los tomates piscados, y, se obtuvo un coeficiente de correlación $r_{xy} = 0.931$.

Probar la hipótesis de que $\rho_{xy} = 0$, usar $\alpha = 0.05$

$$H_0: \rho_{xy} = 0; \quad H_1: \rho_{xy} \neq 0$$

$$t = r_{xy}\sqrt{\frac{n-2}{1-r_{xy}^2}} = 0.931\sqrt{\frac{30-2}{1-0.931^2}} = 13.448$$

$t_c = t_{0.975,\ 28} = 2.048 \quad 13.448$

Se rechaza H_o a un nivel de confianza del 95%

ANALISIS DE VARIANCIA EN REGRESION LINEAL

En el capitulo de regresión lineal se tenia que la ecuación $y = mX + b$ estimaba a la ecuación entre las variables Y y X, siendo m un estimador de la pendiente, β, de la recta, y b un estimador de la ordenada en el origen, α. Asimismo, se tenia que la variancia sesgada total era

$$S^2(Y) = S^2_{y|x} + m^2S^2(X) \tag{1}$$

Por lo que la suma total de cuadrados seria

$$\Sigma(y_i - \bar{y})^2 = \Sigma(y_i - \tilde{y}_i)^2 + m^2\Sigma(x_i - \bar{x})^2 \tag{2}$$

La primera suma de cuadrados del miembro derecho de esta ecuación es la inexplicada, aleatoria o residual y, la segunda, es la explicada.

El modelo lineal es $y_i = \alpha + \beta X_i + Z_i$ donde Z_i son variables aleatorias que satisfacen las condiciones del análisis de variancia. En tal caso, $E(m) = \beta$, $E(b) = \alpha$, $Var(\bar{Y}) = \sigma^2/n$,

$Var(m) = \sigma^2/\Sigma(x_i - \bar{x})^2$ y $cov(\bar{y}, m) = 0$

Puesto que $E(m) = \beta$, se obtiene que la esperanza de la suma de cuadrados explicada es

$$E\left[m^2\Sigma(x_i-\bar{x})^2\right] = \sigma^2 + \beta^2\Sigma(x_i-\bar{x})^2 \tag{3}$$

Se observa que esta suma de cuadrados tiene un grado de libertad.

Por otra parte la esperanza de la suma de cuadrados residual es

$$E\left[(y_i-\tilde{y}_i)^2\right] = (n-2)\sigma^2 \tag{4}$$

Para lo que este tiene n-2 grados de libertad.

Observando las ecs (2) y (4) se concluye que la prueba de hipótesis de independencia de Y y X, o sea de $\beta = 0$, se puede hacer formulando una estadistica con el cociente de las sumas de los cuadrados (4) entre (3) con $\beta = 0$:

$$F = \frac{(n-2)m^2\Sigma(x_i-\overline{x})^2}{\Sigma(y_i-mx_i-b)^2} \tag{5}$$

Esta estadistica tiene distribución F con 1 y n-2 grados de libertad.

Para probar la hipótesis de que $\beta=\beta_0$ se remplaza en la ec (5) A m por $m-\beta_0$.

La tabla del análisis de variancia resultante es:

FUENTE	GRADOS DE LIBERTAD	SUMA DE CUADRADOS	VALOR MEDIO CUADRATICO
EXPLICADA	1	$m^2\Sigma(x_i-\overline{x})^2$	$m^2\Sigma(x_i-\overline{x})^2$
RESIDUAL	n-2	$\Sigma(y_i-mx_i-b)^2$	$\frac{\Sigma(y_i-mx_i-b)^2}{n-2}$
TOTAL	n-1	$\Sigma(y_i-\overline{y})^2$	

CLASIFICACION EN UNA DIRECCION. OBSERVACION DE DOS VARIABLES

Si se miden dos características, X y Y, en cada sujeto de experimentación en un experimento con clasificación en una dirección, necesitamos considerar tanto la relación que hay entre ellas como la posible variación de esta de grupo a grupo.

Si se tiene que es aceptable una relación lineal de Y con base en X pero que pudiera variar de un grupo a otro, un modelo apropiado sería:

$$Y_{ti} = \alpha_t + \beta_t X_{ti} + Z_{ti}; \quad t = 1,2,\ldots,k; \quad i = 1, 2,\ldots, nt \qquad (1)$$

Un problema natural sería verificar si es posible usar un solo modelo $y = \alpha + \beta x$ para cada uno de los grupos. Esto implicaría probar la hipótesis de que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k$ y de que $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k$.

Para probar esta hipótesis conviene separar el problema en tres partes, cada una de las cuales puede probarse por separado:

a. $H_0^{(1)}$: las líneas de regresión son paralelas, esto es,

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k$$

b. $H_0^{(2)}$: las medidas de los grupos caen en una línea recta, esto es, los puntos $(\overline{x}_{t.}, \alpha_t + \beta_t \overline{x}_{t.})$ se alinean en una recta.

c. $H_0^{(3)}$: la pendiente de la línea anterior es igual al común, β_c, de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$

Para hacer lo anterior se calculan primero las rectas de regresión para cada grupo por separado, con lo cual se obtienen las estimaciones

$$E\{Y|X\} = A_t + B_t X; \quad t = 1,2,\ldots,k \qquad (2)$$

La esperanza de B_t es β_t y su variancia es

$$\mathrm{Var}\{B_t\} = \sigma^2 / \sum_{i=1}^{n_t} (x_{ti} - \overline{x}_{t.})^2 = \sigma^2 / w_t \qquad (3)$$

donde

$$w_t = \sum_{i=1}^{n_t} (x_{ti} - \overline{x}_{t.})^2 \qquad (4)$$

Los análisis de variancia de la regresión lineal en cada grupo se basan en las identidades algebraicas.

$$\sum_{i=1}^{n_t} (y_{ti}-\overline{Y}_{t.})^2 = w_t B_t^2 + \sum_{i=1}^{n_t} \{Y_{ti}-\overline{Y}_{t.}-B_t(x_{ti}-\overline{x}_{t.})\}^2; \; t = 1,2,\ldots,k \tag{5}$$

Si sumamos estas k identidades se obtiene:

$$\sum_{t=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_t} (Y_{ti}-\overline{Y}_{t.})^2 = \sum_{t=1}^{k} w_t B_t^2 + \sum_{t=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_t} \{Y_{ti}-\overline{Y}_{y.}-B_t(x_{ti}-x_{t.})\}^2$$

$$= \sum_{t=1}^{k} w_t B_t^2 + S_R \tag{6}$$

Donde S_R es la suma de cuadrados residual con $\sum_{t=1}^{k} (n_t - 2) = N-2k$ Grados de libertad, donde $N = \Sigma n_t$, es decir,

$$E(S_R) = (N - 2k)\sigma^2 \tag{7}$$

Si $B_c = \sum_{t=1}^{k} w_t B_t / w_c$, donde $w_c = \sum_{t=1}^{k} w_t$ es un promedio pesado de las B_t, entonces la desviación cuadrática total de las B_t respecto a B_c es

$$S_w = \sum_{t=1}^{k} w_t (B_t - B_c)^2 \quad \sum_{t=1}^{k} w_t B_t^2 - w_c B_c^2 \tag{8}$$

Despejando de esta ecuación a $\Sigma w_t B_t^2$ se obtiene

$$\Sigma w_t B_t^2 = w_c B_c^2 + S_w \tag{9}$$

La esperanza de S_w es

$$E\{S_w\} = (k - 1)\sigma^2 + \sum_{t=1}^{k} w_t (\beta_t - \beta_c)^2 \tag{10}$$

Donde

$$\beta_c = \sum_{t=1}^{k} w_t \beta_t / w_c$$

y

$$w_m = \Sigma n_t(\overline{x}_{t.} - \overline{x}_{..})^2 \tag{16}$$

La variancia de B_m y la esperanza de S_G son:

$$Var(B_m) = \sigma^2/w_m \tag{17}$$

$$E(S_G) = (k-2)\sigma^2 + \sum_{t=1}^{k} n_t(\alpha_t - \alpha_m - \beta_m \overline{x}_{...})^2 \tag{18}$$

donde

$$\alpha_m = \Sigma n_t \alpha_t / N \tag{19}$$

$$\beta_m = \Sigma n_t (\overline{x}_{t.} - \overline{x}_{..})(\alpha_t + \beta_t \overline{x}_{t.})/w_m \tag{20}$$

Por consiguiente, la hipótesis $H_o^{(2)}$ se puede probar formulando la estadística

$$F = \frac{S_G/(k-2)}{S_R/(N-2k)} \tag{21}$$

Que tiene distribución F con (k-2) y (N-2k) grados de libertad.

Finalmente, para probar $H_o^{(3)}$ usaremos la suma de los dos términos $w_c B_c^2$ y $w_m B_m^2$:

$$w_c B_c^2 + w_m B_m^2 = w_o B_o^2 + \frac{w_c w_m}{w} (B_c - B_m)^2 = w_o B_o^2 + S_{WG} \tag{22}$$

donde

$$w_o = w_c + w_m = \sum_t \sum_i (x_{ti} - \overline{x}_{..})^2 \tag{23}$$

$$B_o = \frac{w_c B_c + w_m B_m}{W_o} \tag{24}$$

Fuente	G. de L.	Suma de cuadrados SS	Esperanzas de MS
Pendiente global	1	$S_o = w_o B_o^2$	$\sigma^2 + w_o \beta_o^2$
Pendiente de las medias de los grupos vs promedio de las pendientes dentro de grupos	1	$S_{WG} = \frac{w_c w_m}{w_o}(B_c - B_m)^2$	$\sigma^2 + \frac{w_c w_m}{w_o}(\beta_c - \beta_m)^2$
Acerca de la línea de regresión de las medias de los grupos	$k-2$	$S_G = \sum_{i=1}^{k} n_i\left[\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot} - B_m(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot})\right]^2$	$\sigma^2 + (k-2)^{-1} \sum_{i=1}^{k} n_i(\alpha_i - \alpha_m - \beta_m \bar{x}_i)^2$
Pendientes entre grupos	$k-1$	$S_{W} = \sum_{i=1}^{k} w_i(B_i - B_c)^2$	$\sigma^2 + (k-1)^{-1} \sum_{i=1}^{k} w_i(\beta_i - \beta_c)^2$
Residual	$N-2k$	$S_R = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i}\left[Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot} - B_i(x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot})\right]^2$	σ^2
Total	$N-1$	$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2$	

Donde B es la pendiente global que se obtendría si todos los puntos se ajustarán a una sola recta, sin distinción de grupos. La esperanza de S_{WG} es

$$E(S_{WG}) = \sigma^2 + \frac{w_c w_m}{w_o} (\beta_o - \beta_m)^2 \qquad (25)$$

Por lo tanto, la hipótesis $H^{(3)}$ se puede probar con la estadística

$$F = \frac{S_{WG}}{S_R/(N-2K)} \qquad (26)$$

Que tiene distribución F con 1 y N-2k grados de libertad.

Las pruebas anteriores se puede resumir en la tabla de análisis de varianza siguiente: (pag 57)

ANALISIS DE COVARIANCIA

EN UNA DIRECCION

El análisis de covariancia se utiliza para probar si las diferencias en la respuesta media de un grupo a otro pueden ser explicadas por una regresión lineal con una variable de control. El planteamiento del análisis de covariancia depende del modelo que se utilice; para clasificación de grupos en una dirección se pueden usar los siguientes modelos:

$$\text{I.} \quad Y_{ti} = \alpha_t + \beta(X_{ti} - \overline{X}_{..}) + Z_{ti} \qquad (1)$$

$$\text{II.} \quad Y_{ti} = \alpha_t + \beta_t(X_{ti} - \overline{X}_{..}) + Z_{ti} \qquad (2)$$

Para ambos modelos se pretende probar la hipótesis

$$H_o: \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k \qquad (3)$$

Contra H_1: no todas las α_t son iguales

Las tablas del análisis son:

MODELO	FUENTE	G. de L.	SS
I	GRUPOS (AJUSTADA)	k - 1	SWG + SG
	RESIDUAL	N - k - 1	SR = SW
II	GRUPOS (AJUSTADA)	k - 1	$S_o+SWG+SG+SW-w_o \sum_{t=1}^{k} B'^2_t$
	RESIDUAL	N - 2k	SR

Donde SWG, SG, SR, SW, S_o Y w_o se calculan con las formulas del capítulo de observación de dos variables, y

$$B'_t = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} (X_{ti} - \overline{X}_{..}) \ (\overline{Y}_{ti} - \overline{Y}_{..})}{\sum_{i=1}^{N_t} (X_{ti} - X_{..})^2} \qquad (4)$$

Los valores estimados de las ${}_{t}$ son

$$\text{Modelo I:} \quad Y_{t.} - B_c(\overline{X}_{t.} - \overline{X}_{..}) \qquad (5)$$

$$\text{Modelo II:} \quad Y_{t.} - B_t(\overline{X}_{t.} - \overline{X}_{..}) \qquad (6)$$

Si uno esta bastante seguro de que $\beta_1 = \beta_2 = \ldots \beta_k$, entonces el modelo I es mejor, ya que da más grados de libertad en el residuo.

TAREA

En un experimento, a 40 señores se les sujeto a una prueba (tratamiento) para determinar que tan cerca podían caminar hacia un objeto peligroso (en este caso una vibora), antes de sentirse ansiosos; para esto, cada sujeto se situó aleatoriamente en uno de cuatro grupos, cada uno con diez sujetos; con cada grupo se empleó diferente tipo de víbora. Después del tratamiento a cada señor se le sujeto de nuevo al mismo tratamiento (postratamiento). Los resultados del tratamiento son las X_{ti} y los del postratamiento son las Y_{ti}, los cuales se presentan en la tabla siguiente:

SUJETO	GRUPOS (X_{ti}, Y_{ti})			
	1	2	3	4
1	25,25	17,22	32,24	10,8
2	13,25	9,9	30,18	29,17
3	10,12	19,16	12,2	7,8
4	25,30	25,17	30,24	17,12
5	10,37	6,1	10,2	8,7
6	17,25	23,12	8,0	30,26
7	9,31	7,4	5,0	5,8
8	18,26	5,3	11,1	29,29
9	27,28	30,26	5,1	5,29
10	17,29	19,20	25,10	13,0

a) Calcular las rectas de regresión para cada grupo, para los promedios y para todos los puntos juntos. En una misma gráfica dibujar los puntos y las rectas calculadas.

b) Estimar los efectos

c) Probar la hipótesis de igualdad de pendientes

d) Probar la hipótesis de igualdad de medias de las Y_{ti} de los cuatro grupos, después de ajustar por la regresión con X_{ti}, o sea, probar H_o: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$

SOLUCION

Cálculo de las rectas de regresión para cada grupo:

$$\tilde{Y}_t = a_t + b_t X$$

donde

$$b_t = \left(\frac{n \sum_i x_i y_i - (\sum_i x_i)(\sum_i y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \right)_t ; \quad a_t = (\bar{y} - b\,\bar{x})_t$$

Se tiene para cada grupo:

	1	2	3	4
$\Sigma X_i =$	171	160	168	153
$\Sigma Y_i =$	268	119	82	144
$\Sigma X_i Y_i =$	4,611	2,482	2,338	2,695
ΣX_i^2	3,331	3,256	3,928	3,303
$\bar{X}_{t\cdot}$	17.1	16.0	16.8	15.3
$\bar{Y}_{t\cdot}$	26.8	11.9	8.2	14.4

Por lo tanto:

$$b_1 = \frac{10(4611) - (171)(268)}{10(3,331) - (171)^2} = 0.0693; \quad a_1 = 26.8-0.9693(17.1)=25.61$$

$$b_2 = \frac{10(2,482) - (160)(119)}{10(3,256) - (160)^2} = 0.8305; \quad a_2 = 11.9-0.8305(16)=-1.39$$

$$b_3 = \frac{10(2,338) - (168)(82)}{10(3,982) - (168)^2} = 0.8687; \quad a_3 = 8.2-0.8687(16.8)=-6.39$$

$$b_4 = \frac{10(2,695) - (153)(144)}{10(3,303) - (153)^2} = 0.5112; \quad a_4 = 14.4-0.5112(15.3)=6.58$$

Por lo que las rectas de regresión son, para cada uno de los grupos:

$$\hat{Y}_1 = 25.61 + 0.07X$$

$$\tilde{Y}_2 = -1.39 + 0.83X$$

$$\tilde{Y}_3 = -6.39 + 0.87X$$

$$\tilde{Y}_4 = 6.58 + 0.51X$$

Cálculo de la recta que se ajusta a los promedios:

(17.1, 26.8), (16.0, 11.9), (16.8, 8.2) (15.3, 14.4)

$\Sigma X_i = 65.2$, $\Sigma Y_i = 61.3$, $\Sigma X_i\ Y_i = 1,006.76$, $\Sigma X_i^2 = 1,064.74$

$\overline{x} = 16.3$, $\overline{y} = 15.325$

$$b_p = \frac{4(1,006.76) - (65.2)\ (61.3)}{4(1,064.74) - (165.2)} = 3.8232$$

$$a_p = 15.325 - (3.8232)\ 16.3 = -46.9937$$

La recta de regresión para los promedios es:

$$\tilde{Y}_p = -46.99 + 3.82X$$

Cálculo de la recta para todos los puntos juntos:

$\Sigma X_i = 171 + 160 + 168 + 153 = 652$, $\overline{x}.. = 16.3$

$\Sigma Y_i = 268 + 119 + 82 + 144 = 613$, $\overline{y}.. = 15.325$

$\Sigma X_i Y_i = 4,611 + 2,482 + 2,338 + 2,695 = 12,126$

$\Sigma X_i^2 = 3,331 + 3,256 + 3,928 + 3,303 = 13,818$

La recta de regresión resultante es:

$$b_r = \frac{40(12,126) - (652)(613)}{40(13,818) - (652)} = 0.6689, \quad a_r = 15.325-(0.6689)\ 16.3$$

$$= 4.4217$$

$$\tilde{Y}_r = 4.42 + 0.67X$$

b) estimar los efectos α_e

Como

$E(a_t) = \alpha_t$: a_t es un estimador insesgado de α_t y:

$\hat{\alpha}_1 = 25.61$; $\hat{\alpha}_2 = 1.39$; $\hat{\alpha}_3 = -6.39$; $\hat{\alpha}_4 = 6.58$

c) Probar la hipótesis de igualdad de pendientes

H_o: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$; H_1: No todas las β_i son iguales

$$W_t = \sum_{i=1}^{n_t} (x_{ti} - \bar{x}_{t.}) = \sum_{i=1}^{n_t} x_{ti}^2 - n_t \bar{x}_t^2$$

$W_1 = 3,331 - 10(17.1)^2 = 406.9,$ $B_1 = 0.0693$

$W_2 = 3,256 - 10(16.0)^2 = 696,$ $B_2 = 0.8305$

$W_3 = 3,928 - 10(16.8)^2 = 1,105.6,$ $B_3 = 0.8687$

$W_4 = 3,303 - 10(15.3)^2 = 962.1,$ $B_4 = 0.5112$

3,170.6

$$S_w = \sum_{t=1}^{n_t} W_t B_t^2 - W_c B_c^2$$

$$W_c = \sum_{t=1}^{n_t} W_t = 3,170.6$$

$$B_c = \frac{1}{W_c} \sum_{t=1}^{n_t} W_t B_t = \frac{1}{3,170.6} (2058.4864) = 0.6492$$

S_w 1,567.7572 - (3,170.6) $(0.6492)^2$ = 231.30

Ahora, de la ecuación (12) de los apuntes:

$$S_R = \sum_{t=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_t}(Y_{ti} - \bar{y}_{..})^2 - \sum_{t=1}^{k} n_t(\bar{Y}_{t.} - \bar{y}_{..})^2 - (W_c B_c^2 + S_w)$$

$$= (\sum_{t=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_t} y_{ti}^2 - N\bar{y}_{..}^2) - (\sum_{t=i}^{k} n_t \bar{y}_{t.}^2 - N\bar{y}^2) - (W_c B_c^2 + S_w)$$

Con $\bar{y}_{..} = 15.325$ se obtiene

$S_R = 14,161 - 11,344.5 - 1,567.7572 = 1,248.74$

En consecuencia $F = \dfrac{S_w/(k-1)}{S_R/(N-2k)} = \dfrac{231.30/3}{1,248.74/32} = 1.98 < F_{0.05,32} = 2.0$

Por lo que se acepta la hipótesis de que las pendientes son iguales, con 5% de nivel de significancia.

d) Probar la hipótesis H_0: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$

De los resultados del inciso anterior es razonable suponer que todas las β_i son iguales, por lo que el modelo correspondiente es:

$$y_{ti} = \alpha_t + \beta(x_{ti} - \bar{x}_{..}) + Z_{ti}$$

Entonces:

$S_R + S_w = 1248.74 + 231.30 = 1,480.04$

$$W_m = \sum_{t=1}^{k} n_t(\bar{x}_{t.} - \bar{x}_{..})^2 = n_t \Sigma\bar{x}_{t..}^2 = 10(1,064.74) - (40)(16.3)^2$$

$= 19.8$

$$B_m = \sum_{t=1}^{4} \frac{10(x_{t.} - 16.3)(y_{t.} - 15.325)}{19.8} = \frac{10(9.18+1.0275-3.5625+0.9250)}{19.8}$$

$= 3.8232$

$$S_{\bar{G}} = \sum_{t=1}^{k} n_t \bar{y}_{t.}^{2} - N\bar{y}_{..}^{2} - w_m B_m^2 = 11,344.5-40(15.325)^2 + 19.8$$

$$(3.8232)^2 = 2,239.68$$

$$S_{WG} = \frac{w_c w_m}{w_o} = (B_c - B_m)^2 = \frac{(3,170.6)(19.8)}{3170.6+19.8}(0.6492-3.8232)^2$$

$$= 198.23$$

$$S_{WG} + S_G = 2437.91$$

Por tanto:

$$F = \frac{2437.91/3}{1480.04/35} = 19.22 > 2.81 = F_{0.05,3,35}$$

Por lo que se rechaza la hipótesis H_o de que todas las α_t son iguales entre si.

B I B L I O G R A F I A

1. Johnson, N.L. y Leone, F.C., "Statistics and experimental design in ingineering and the physical sciences", Vol II, 2a ed., J. Wiley (1977).

2. Lee, W., "Experimental design and analysis", Freeman (1975).

3. Ogawa; J., "Statistical theory of the analysis of experimental designs", Ed. Dakker (1974).

4. Biles, W.E. y Swain, J.J., "Optimization and industrial experimentation", J. Wiley (1978).

5. Box, G.E.P., Hunter N.G. y Hunter, J.S. "Statics for experimenters", J. Wiley (1978).

6. Cochran, W. G. y Cox, G.M., "Experimental designs", J. Wiley.

7. Kirk, R., "Experimental design: procedures for the behavioral sciences".

8. Winer, B.J., "Statistical principles in experimental design".

9. Afifi, A. A y Asen, S.P., "Statistical Analysis", 2a Ed., Academic Press.

8.3 Ejemplo 1 Un fabricante de soldaduras de puntos de aluminio de alta resistencia al esfuerzo cortante desea predecir la resistencia al esfuerzo cortante por los diámetros de la soldadura de punto en lugar de destruir el producto con ese propósito. Una muestra de diez soldaduras, escogidas para establecer la relación entre las dos variables dio los siguientes resultados:

Diámetro de la soldadura (cm)	Resistencia al esfuerzo cortante (1000 Kg)
2.4	7.0
1.8	5.3
1.6	4.2
1.0	3.3
1.2	3.8
1.1	6.6
2.8	8.5
1.6	6.6
1.5	4.5
2.3	8.8

La estimación de la ecuación de regresión poblacional resultó ser

$$Yc = 1.481 + 2.531\ X$$

Par probar la independencia entre las variables X y Y de la población establecemos la hipótesis:

$$Ho:\ \hat{b} = 0$$

$$Hi:\ \hat{b} \neq 0$$

Para probar dicha hipótesis construyamos nuestra tabla de análisis de variancia:

$$\bar{x} = \frac{2.4 + 1.8 + \ldots + 1.5 + 23}{10} = 1.73$$

$$\Sigma\ (X_j - \bar{x})^2 = (2.4 - 1.73)^2 + (1.8 - 1.73)^2 + \ldots + (1.5 - 1.73)^2 + $$
$$+ (2.3 - 1.63)^2 = 3.22$$

$$B^2\ \Sigma (X_j - \bar{x})^2 = 2.531^2 X\ 3.22 = 20.6272$$

Ejemplo 14.4 Debe escogerse un grupo de empleados de fabricación para adiestrarlos como inspectores. La base para su selección eran sus calificaciones en una prueba de aptitud que iba a aplicárseles. A fin de determinar la relación entre las calificaciones en la prueba y su éxito en el trabajo, se escogieron diez empleados en forma aleatoria y se les hizo pasar la prueba. A continuación, se les adiestró y se les puso a trabajar como inspectores. Al cabo de una semana, su eficiencia en el empleo se midió por su producción por turno de trabajo. La tabla 14.2 muestra la calificación X de la prueba y una medida de la producción por turno de trabajo, Y, para cada uno de los diez empleados. Las otras columnas proporcionan los datos necesarios para calcular lo que sigue:

1. Coeficiente de correlación.
2. Línea de regresión.
3. Error estándar de la estimación.
4. Coeficiente de determinación.

A partir de los datos, $\bar{x} = 605/10 = 60.5$ y $\bar{y} = 397/10 = 39.7$. El coeficiente de correlación es, a partir de la ecuación (14.3),

$$r = \frac{n \sum xy - \sum xy}{\sqrt{[n \sum x^2 - (\sum x)^2][n \sum y^2 - (\sum y)^2]}}$$

$$= \frac{(10)(26\,890) - (605)(397)}{\sqrt{[(10)(42\,875) - (605)^2][(10)(18\,195) - (397)^2]}}$$

$$= \frac{28{,}715}{\sqrt{(62\,725)(24\,341)}}$$

$$= \frac{28\,715}{39\,000}$$

$$\doteq 0.74$$

Tabla 14.2

X	Y	XY	X^2	Y^2
80	70	5 600	6 400	4 900
80	60	4 800	6 400	3 600
45	24	1 080	2 025	576
70	38	2 660	4 900	1 444
95	45	4 275	9 025	2 025
20	30	600	400	900
50	35	1 750	2 500	1 225
90	50	4 500	8 100	2 500
25	25	625	625	625
50	20	1 000	2 500	400
605	397	26 890	42 875	18 195

Los coeficientes de regresión se obtienen de

$$b = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2} = \frac{26\,890 - 24\,018}{42\,875 - 36\,603} = 0.46$$

$a = \bar{y} - b\bar{x} = 39.7 - (0.46)(60.5) = 11.9$ y la ecuación de la línea de regresión es $y = 11.9 + 0.46x$.

El error estándar de la estimación se encuentra a partir de los valores muestrales, por medio de

$$s_{Y \cdot X} = \sqrt{\frac{\sum y - a \sum y - b \sum xy}{n - 2}}$$

$$= \sqrt{\frac{18\,195 - (11.9)(397) - (0.46)(26\,890)}{10 - 2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1{,}111}{8}}$$

$$= \sqrt{138}$$

$$= 11.7$$

La suma de cuadrados en torno a la línea de regresión es simplemente $ss_{Y \cdot X} = 1\,111$.

Con el fin de calcular el coeficiente de determinación, debemos determinar la suma de cuadrados en torno al valor medio de Y, o sea,

$$ss_Y = \sum y^2 - n\bar{y}^2 = 2\,434$$

El coeficiente de determinación es simplemente $r^2 = 1 - 1\,111/2\,434 = 1 - 0.46 = 0.54$, lo que indica que aproximadamente el 54% de la variabilidad en la producción parece justificarse por la aptitud, medida en la prueba.

El coeficiente de correlación es $r = \sqrt{r^2} = \sqrt{0.54} \doteq 0.74$, como se calculó previamente.

observamos que $\Sigma(Y_j - A - Bx_j)^2 = \Sigma(Y_j - Y_C)^2$ donde Y_C se obtiene para los valores de X por la recta de regresión. Con esto:

valores observados diámetro X	res. al cortante Y	resistencia calculada Y_C	$Y-Y_C$	$(Y-Y_C)^2$
2.4	7.0	7.56	-0.56	0.3136
1.8	5.3	6.04	-0.74	0.5476
1.6	4.2	5.53	-1.33	1.7689
1.0	3.3	4.01	-0.71	0.5041
1.2	3.8	4.52	-0.72	0.5184
1.1	6.6	4.26	+2.34	5.4756
2.8	8.5	8.57	-0.07	0.0049
1.6	6.6	5.53	+1.07	1.1449
1.5	4.5	5.28	-0.78	0.6084
2.3	8.6	7.30	+1.50	2.2500
17.3	58.6	58.60	0	13.1364

$n = 10$

La tabla ANOVA será:

Tabla 2. ANOVA para la regresión lineal de resistencias al cortante sobre los diámetros de soldadura

F u e n t e	G. de l.	S.S.	MS	F_C
regresión lineal	1	20.6272	20.6272	12.5619
residual (alrededor de la regresión)	8	13.1364	1.6421	
T o t a l	9	33.7636		

Para un nivel de significancia $\infty = 0.05$, $F_{0.05,\ 1,8} = 3.46$

Como F teórica < F calculada (3.46 < 12.5619) entonces rechazamos Ho implicando que si hay dependencia entre los diámetros de la soldadura y la resistencia al esfuezo cortante con una significancia estadística del 95%. Dicha dependencia se explica con la relación funcional $Y = 1.481 + 2.531\ X$.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

C U R S O S A B I E R T O S

DISEÑO DE EXPERIMENTOS: TECNICAS DE MUESTREO Y ANALISIS ESTADISTICO

BIBLIOGRAFIA

M. en I. RUBEN TELLEZ SANCHEZ

BIBLIOGRAFIA

1. G. Taguchi & Y. Wu; Introduction to Off-line Quality Control, Central Japan Quality Control Association (No. 2 Toyota Building, West 4-10-27 Meieki, Nakamura-ku, Nagoya 450 (JAPAN)

2. G. Taguchi; Design and Design of Experiments, 1981, Japanese Standard Association.

3. G. Taguchi; Design of Experiments, 3rd ed. (in Japanese) Vol. I (1976), Vol. II (1977) Maruzen.

4. G. Taguchi; On-line Quality Control During Production. Japanese Stadard Association, 1981.

5. G. Taguchi; Ingeniería de Calidad, INFOTEC, 1987.

6. MIller y Freund; Probabilidad y Estadística para Ingenieros, Prentice-Hall, 1988.

7. Walpule y Myers; Probabilidad y Estadística para Ingenieros, Interamericana, 1987.

8. Montgomery; Diseño de Experimentos, Wiley, 1988.

9. Abad y Servin; Introducción al Muestreo, Trillas, 1986.

10. Raj; Métodos de Muestreo, FCE, 1985.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

C U R S O S   A B I E R T O S

DISEÑO DE EXPERIMENTOS: TECNICAS DE MUESTREO Y ANALISIS ESTADISTICO

M U E S T R E O   B I E T A D I C O

M. EN. I. AUGUSTO VILLAREAL ARANDA.

ABRIL-JUNIO 1992.

MUESTREO BIETÁPICO

M_i : Tamaño del i-ésimo conglomerado primario

$M = \sum^N M_i$: Total de elementos de conglomerados primarios

N : conglomerados de primera etapa

n : tamaño de muestra de conglomerados de primera etapa

m_i : tamaño de submuestra en i-ésima unidad primaria

y_{ij} : valor de característica en j-ésimo elemento de conglomerado i

$y_i = \sum^{m_i} y_{ij}$; $\bar{y}_i = y_i / m_i$: Total y media muestrales

- VALOR DE MEDIA POR UNIDAD PRIMARIA O CONGLOMERADO:

$$\bar{Y} = \sum^N \sum^{M_i} y_{ij} / N = \sum^N y_i / N$$

- VALOR DE LA MEDIA POR ELEMENTO:

$$\bar{\bar{Y}} = \sum^N \sum^{M_i} y_{ij} / \sum^N M_i = \sum^N y_i / \sum^N M_i = \sum^N y_i / N$$

- VALOR DEL TOTAL POBLACIONAL:

$$Y = \sum^N \sum^{M_i} y_{ij} = \sum^N Y_i$$

- ESTIMADORES INSESGADOS DE LA MEDIA POR ELEMENTO Y DEL TOTAL:

$$\hat{\bar{\bar{Y}}} = \bar{\bar{y}} = \frac{1}{n\bar{M}} \sum^n M_i \bar{y}_i \quad , \quad \hat{Y} = M\bar{\bar{y}}$$

con varianzas estimadas:

$$\hat{V}(\bar{\bar{y}}) = \frac{1-f_1}{n\bar{M}^2} s_1^2 + \frac{1}{nN\bar{M}^2} \sum^n M_i^2 (1-f_{2i}) \frac{s_{2i}^2}{m_i} \quad , \quad \hat{V}(\hat{Y}) = M^2 \hat{V}(\bar{\bar{y}})$$

$$f_1 = n/N \ , \ f_{2i} = m_i/N_i \ , \ s_1^2 = \frac{\sum^n (M_i\bar{y}_i - \bar{M}\bar{\bar{y}})^2}{n-1} \ ; \ s_{2i}^2 = \frac{\sum^{m_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{m_i - 1}$$

- ESTIMADORES DE RAZON DE LA MEDIA POR ELEMENTO Y DEL TOTAL:

$$\hat{\bar{\bar{Y}}} = \bar{\bar{y}}_R = \sum^n M_i \bar{y}_i / \sum^n M_i \quad , \quad \hat{Y}_R = \bar{\bar{y}}_R \sum^N M_i = \bar{\bar{y}}_R \, M$$

con varianzas estimadas:

$$\hat{V}(\bar{\bar{y}}_R) = \frac{1-f_1}{nM^2} s_1^2 + \frac{1}{nN\bar{M}^2} \sum^n M_i^2 (1-f_{2i}) \frac{s_{2i}^2}{m_i} \quad , \quad \hat{V}(\hat{Y}_R) = \left(\sum^N M_i\right)^2 \hat{V}(\bar{\bar{y}}_R)$$

con $s_1^2 = \sum^n M_i^2 (\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}_R)^2/(n-1)$, $s_{2i}^2 = \sum^{m_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2/(m_i - 1)$

- ESTIMADOR ESTRATIFICADO DEL VALOR MEDIO POR ELEMENTO:

$$\hat{\bar{\bar{Y}}}_{est} = \sum^L M_h \bar{\bar{y}}_h / \sum^L M_h$$

con varianza estimada: $\hat{V}(\bar{\bar{y}}_{est}) = \sum_h \left[\frac{M_h}{\sum^L M_h} \right]^2 \hat{V}(\bar{\bar{y}}_h)$

EJEMPLOS

1. En una entidad, existen 9000 comercios, concentrados en 20 zonas de la capital y 10 poblaciones cercanas. Se elige aleatoriamente 6 de ellas y usando listados de los comercios de estas zonas, se elige aleatoriamente el 5% de estos comercios listados. Los datos son:

i	1	2	3	4	5	6
M_i	400	200	650	300	100	350
m_i	20	10	33	15	5	18
y_i	480	90	785	114	23	137
$M_i\bar{y}_i$	9600	1800	15462	2280	460	2663
f_{2i}	.05	.05	.051	.05	.05	.051
$M_i^2(1-f_{2i})$	152000	38000	400952	85500	9500	116252
s_{2i}^2	512	36	1329	62	3	77
$(\bar{y}_i-\bar{y}_R)^2$	61.93	50.83	58.52	72.76	132.94	72.59

ESTIMADORES INSESGADOS:

- $\bar{\bar{y}} = \left(\frac{1}{n\bar{M}}\right)\sum^{n} M_i\bar{y}_i = \frac{30}{6(9000)}(32\,265) = 17.92$ empleados/comercio

con $\hat{V}(\bar{\bar{y}}) = \frac{1-6/30}{6(300)^2}(34\,693\,997) + \frac{21\,031\,830}{6(30)(300)^2} = 52.68$, $EE(\bar{\bar{y}}) = 7.26$

$\bar{\bar{y}} \pm 2\,EE(\bar{\bar{y}})$; $17.92 \pm 2(7.26) \Rightarrow \quad 3.4 < \bar{\bar{y}} < 32.44$

ESTIMADORES DE RAZON:

- $\bar{\bar{y}}_R = \frac{\sum^{n} M_i\bar{y}_i}{\sum^{n} M_i} = \frac{32\,265}{2\,000} = 16.13$ empleados/comercio

con $\hat{V}(\bar{\bar{y}}_R) = \frac{1-6/30}{6(300)}(10\,696\,389) + 1.29 = 17.14$, $EE(\bar{\bar{y}}) = 4.14$

$\bar{\bar{y}} \pm 2\,EE(\bar{\bar{y}})$; $16.13 \pm 2(4.14) \Rightarrow \quad 7.85 < \bar{\bar{y}} < 24.41$

2. De diez listas de agricultores, se eligen tres listas al azar para a su vez muestrear aleatoriamente la centésima parte de cada una de estas tres listas:

$\bar{M} = \sum^{N} M_i / N = \sum^{10} M_i/10 = 14\,278/10 = 1428$

$\bar{\bar{y}} = \frac{1}{n\bar{M}} \sum M_i\bar{y}_i = \frac{22\,100}{3(1428)} = 5.16$ h/a , $EE(\bar{\bar{y}}) = 1.51 \Rightarrow [2.14, 8.18]$

$\bar{\bar{y}}_R = \frac{\sum M_i\bar{y}_i}{\sum M_i} = \frac{22\,100}{3400} = 6.5$ h/a, $EE(\bar{\bar{y}}_R) = 0.364 \Rightarrow [5.77, 7.23]$

MUESTREO POR CONGLOMERADOS

N: Número de Conglomerados
n: Tamaño de Muestra de conglomerados
M_i: Tamaño de Conglomerado i
$M = \sum_{i=1}^{N} M_i$ Total de elementos en toda la población

Estimador del Valor Medio por Conglomerado:

$$\hat{\bar{y}} = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{M_i} y_{ij}$$

Estimador del Valor Total en conglomerados y elementos:

$$\hat{y} = N\bar{y} = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Estimador de la Media por Elemento:

$$\hat{\bar{\bar{y}}} = \bar{\bar{y}} = \frac{\hat{y}}{M} = \frac{1}{M}\frac{1}{n}\sum y_i$$

Varianzas Estimadas de estos estimadores:

$$\hat{V}(\bar{y}) = \frac{1-f}{n}\frac{\sum^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n-1}, \quad \hat{V}(N\bar{y}) = \frac{N^2(1-f)}{n}\frac{\sum^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n-1}, \quad \hat{V}(\bar{\bar{y}}) = \frac{1-f}{n\bar{M}^2}\frac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{n-1}$$

Estimador de Razón para Total Poblacional:

$$\hat{y}_R = \frac{\sum^{n} y_i}{\sum^{n} M_i} M$$

con $\hat{V}(\hat{y}_R) = \frac{N^2(1-f)}{n}\frac{\sum^{n}(y_i - \bar{\bar{y}}_R M_i)^2}{n-1}$

Estimador de Razón para la Media Poblacional:

$$\hat{\bar{\bar{y}}}_R = \bar{\bar{y}}_R = \frac{\hat{y}_R}{M} = \frac{\sum^{n} y_i}{\sum^{n} M_i}$$

con $\hat{V}(\hat{\bar{\bar{y}}}_R) = \frac{1-f}{n\bar{M}^2}\frac{\sum^{n}(y_i - \bar{\bar{y}}_R M_i)^2}{n-1}$

Estimador de Razón de Porcentaje:

$$\hat{P}_R = P_r = \frac{\sum^{n} a_i}{\sum^{n} M_i} 100$$

con $\hat{V}(P_R) = \frac{1-f}{n\bar{M}^2}\frac{\sum^{n} a_i^2 - 2P_R\sum^{n} a_i M_i + P_R^2 \sum^{n} M_i^2}{n-1}$

EJEMPLO

Compañía con 10000 empleados en 600 oficinas. Se elige muestra de 20 oficinas y se identifica el número de hijos menores de cuatro años por empleado:

O	E	H	O	E	H
1	15	30	11	20	30
2	18	54	12	30	30
3	12	12	13	22	42
4	15	15	14	15	30
5	10	10	15	20	40
6	20	80	16	18	24
7	15	30	17	18	45
8	16	32	18	20	40
9	18	54	19	25	25
10	18	36	20	25	75

$\sum^{20} M_i = 368$, $\sum^{20} y_i = \sum\sum y_{ij} = 734$, $\sum y_i^2 = 33\,336$

$\sum M_i y_i = 14\,241$, $\sum M_i^2 = 7\,186$

ESTIMADORES INSESGADOS

- $\bar{\bar{y}} = \frac{600}{20(10000)} 734 = 2.202$ niños/empleado
  con error estándar de 0.25 niños/empleado
- $\bar{y} = 734/20 = 36.7$ niños/oficina
- $\hat{y} = N\bar{y} = 600(36.7) = 22\,020$ niños
  con error estándar de 2 402 niños

ESTIMADORES DE RAZON

- $\bar{\bar{y}}_R = 734/368 = 1.99$ niños/empleado
  con error estándar de 0.22 niños/empleado
- $\hat{y}_R = 1.99(10000) = 19\,900$ niños
  con error estándar de 2200 niños

Tabla

Conglomerado primario	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Suma
No. de agricultores por unidad primaria M_i	78	1000	400	2200	700	1400	500	2000	3000	3000	14278
Unidades primarias en la muestra		•	•					•			

de cada 100 unidades secundarias. Las observaciones correspondientes y otros cálculos necesarios aparecen en la tabla 8.3.

a) Usando el estimador insesgado de la expresión 8.1 tenemos:

$$\bar{\bar{y}} = \frac{1}{n\bar{M}} \sum_{i=1}^{i=n} M_i\bar{y}_i = \frac{22\,100}{3(1\,428)} = \frac{22\,100}{4\,284}$$

$$= 5.16 \text{ hijos por agricultor}$$

5.16 es el número medio estimado de hijos por agricultor. Para la estimación de su variancia, según la expresión 8.2 tenemos:

$$s_1^2 = \frac{\sum^{i=3} (M_i\bar{y}_i - \bar{M}\bar{\bar{y}})^2}{n-1} = \frac{1}{3-1}(39\,046\,672) = 19\,523\,336$$

$$\sum_{i=1}^{i=3} M_i^2(1-f_{2i})\frac{s_{2i}^2}{m_i} = 2\,771\,208$$

Por lo cual $\hat{V}(\bar{\bar{y}})$ vale:

$$\hat{V}(\bar{\bar{y}}) = \frac{1-\frac{3}{10}}{3(1\,428)^2}(19\,523\,336) + \frac{2\,771\,208}{3(10)(1\,428)^2}$$

$$= 2.23 + 0.0453 = 2.28$$

Tabla

Primaria	*1*	*2*	*3*	
No. de agricultores por unidad primaria en la muestra M_i	1 000	400	2 000	$\sum_{i=1}^{i=3} M_i = 3\,400$
Fracción de muestreo en las secundarias f_{2i}	0.01	0.01	0.01	
No. de agricultores submuestreados m_i	10	4	20	
No. de hijos por agricultor en la submuestra y_{ij}	6,2,11,8, 6,7,6,5, 8,10.	9,9,10, 4.	1,3,3,1,9,14, 7,10,4,5,7,7, 6,5,6,8,4,6,7,7.	
No. de hijos en la muestra por unidad primaria $y_i = \sum_{j=1}^{j=m_i} y_{ij}$	69	32	120	
No. medio estimado de hijos por unidad primaria en la muestra $\bar{y}_i = \frac{y_i}{m_i}$	6.9	8	6	
No. total estimado de hijos por unidad primaria en la muestra $M_i\bar{y}_i$	6 900	3 200	12 000	$\sum_{i=1}^{i=3} M_i\bar{y}_i = 22\,100$
$(1-f_{2i})$	0.99	0.99	0.99	
$M_i^2(1-f_{2i})$	990 000	158 400	3 960 000	
s_{2i}^2	6.54	7.33	9.26	
$(\bar{y}_i - \bar{y}_R)^2$	0.16	2.25	0.25	

8.9 En una farmacia existen 50 muebles (a manera de libreros) de seis tableros cada uno de ellos. En cada mueble y sobre los tableros están los medicamentos que ahí se expenden. Se desea estimar el total de dinero invertido en los medicamentos y para esto se obtiene una selección sistemática de cinco muebles y de cada uno de ellos en la muestra se hace una selección sistemática de dos tableros en cada mueble después de lo cual, se determina el valor de la mercancía en cada tablero en la muestra con los resultados siguientes:

Mueble	*No. de tableros en cada mueble*	*No. de tableros en la muestra*	*Valor de la mercancía en cada tablero*
1	6	2	1000 1000
2	6	2	2000, 1000
3	6	2	1000, 2000
4	6	2	3000, 2000
5	6	2	3000, 1000

i) Estime el valor total de la mercancía en la farmacia.

ii) Encuentre intervalos del 95% para el total de la mercancía.

BIBLIOGRAFIA

Azorín Poch. 1969 *Curso de muestreo y aplicaciones.* Aguilar, España.

Babbie E. R. 1973. *Survey Research Methods.* Wadsworth Publishing Company, Inc. Belmont, California.

Chevry G. R. 1967 *Práctica de las encuestas estadísticas.* Ariel. España.

Cochran W. G. 1963 *Sampling techniques* John Wiley & Sons N. Y. Segunda edición.

Kish L. 1965 *Survey sampling.* John Wiley & Sons, N. Y.

Naylor T. H. Balintfy J. L. Burdich D. S. Chuk. 1977 *Experimentos de Simulación en Computadoras con Modelos de Sistemas Económicos* Editorial Limusa, S. A. México, D. F.

Raj Des. 1968. *Sampling theory.* McGraw-Hill. N. Y.

Sudman S. 1976. *Applied Sampling.* Academic Press. N. Y.

DIRECTORIO DE ALUMNOS DE CURSO
DISEÑO DE ESPERIMENTOS: TECNICAS DE MUESTREO Y
ANALISIS ESTADISTICO
DEL 27 DE ABRIL AL 5 DE JUNIO DE 1992

1.- ALDANA VELAZQUEZ OLGA
CATEDRATICO
CENTRO DE ESTUDIOS TECNOLOGICOS No. 141,
UNIVERSIDAD AUTONOMA EDO. DE MEXICO
BELISARIO DOMINGUEZ S/N, ZUMPANGO, EDO. DE MEXICO
TEL. 702 37 OFNA.

2.- CERVANTES NARANJO MA. DE LOURDES
INVESTIGADOR "A"
INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGACIONES NUCLEARES
SIERRA MOJADA No. 447, 2o. PISO, COL. LOMAS DE BARRILACO
DELEG. MIGUEL HIDALGO, C.P. 11010
TEL. 518 23 60 EXT. 391 OFNA., 598 63 32 DOM.

3.- CORNEJO NIETO JUAN ANTONIO
ANALISTA AUXILIAR
BANCO DE MEXICO (DIRECCION DE EMISION)
AV. LEGARIA 691, COL. IRRIGACION, DELEG. CUAUHTEMOC
TEL. 227 83 73 OFNA.

4.- DE LA ROSA MATA DANIEL
SUBCOORDINADOR DE ESTUDIOS ECONOMICOS
FERROCARRILES NACIONALES DE MEXICO
AV. JESUS GARCIA No. 140, COL. BUENAVISTA, DELEG.
CUAUHTEMOC, C.P. 06358
TEL. 547 44 97 OFNA., 547 44 87 DOM.

5.- ESPINOSA HERNANDEZ MARIO
AYUDANTE DE PROFESOR "A"
F.E.S. CUAUTITLAN (U.N.A.M.)
AV. QUETZALCOATL S/N, CUAUTITLAN IZCALLI
TEL. 756 43 44 DOM.

6.- FERNANDEZ ROQUE TIBURCIO
PROFESOR ASOCIADO C
ESIME-TICOMAN / IPN
AV. TICOMAN No. 600, COL. SN. JOSE TICOMAN, DELEG. G.A.
MADERO, C.P. 07340, TEL. 586 10 03 OFNA., 796 41 61 DOM.

7.- GUERRERO ROMERO JOSE
SUPERVISOR DE ORGANIZACION Y PROCEDIMIENTOS
AVON COSMETICS S.A. DE C.V
AV. UNIVERSIDAD 1778, COL. OXTOPULCO UNIVERSIDAD, DELEG.
COYOACAN, C.P. 04318, TEL. 658 65 59 EXT. 1604 OFNA. Y
391 37 45

8.- MARTINEZ MARTINEZ VICTOR EMIGDIO
INVESTIGADOR DEL DEPARTAMENTO DE QUIMICA DEL SUELO
INSTITUTO MEXICANO DEL PETROLEO
EJE CENTRAL LAZARO CARDENAS No. 152, COL. SAN BARTOLO
-ATEPEHUACAN, DELEG. GUSTAVO A. MADERO, C.P. 07730
TEL. 368 59 11 OFNA., 300 81 66 DOM.

9.- PARDO SAAVEDRA RUBEN MAURICIO
JEFE DEL DEPTO. DE TITULACION/PROFESOR INVESTIGADOR
ESIME UNIDAD TICOMAN - IPN
AV. TICOMAN No. 600, SAN JOSE TICOMAN, DELEG. G.A.
MADERO, C.P. 07340, TEL. 586 10 03 OFNA., 537 10 10 DOM.

10. PEREZ MENDEZ ALFONSO
JEFE DE CONTROL DE CALIDAD AUDITORIA
PHILIPS MEXICANA, S.A.
CALLE NORTE 45 No. 669, COL. IND. VALLEJO, DELEG.
AZCAPOTZALCO, C.P. 02330, TEL. 567 21 11/310 OFNA.

11. PONCE SANCHEZ ALEJANDRO ROBERTO
AYUDANTE DE PROFESOR "A"
FES- CUAUTITLAN (UNAM)
AV. QUETZALCOATL S/N CUAUTITLAN IZCALLI.

12. SILVA GUARNEROS FRANCISCO
JEFE DE CONTROL DE CALIDAD DE PLANTA
PHILIPS MEXICANA S.A.
CALLE NORTE 45 No. 669, COL. IND. VALLEJO, DELEG.
AZCAPOTZALCO, C.P. 02330,
TEL. 567 21 11 EXT. 310 OFNA., 776 55 55 DOM.