



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA CIVIL – HIDRÁULICA

SIMULACIÓN DE FLUJO EN TUBERÍAS  
APLICANDO UN MODELO DE FRICCIÓN TRANSITORIO

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
ING. EDWIN FERNANDO ZETINA ROBLEDA

TUTOR:  
DR. ARIOSTO AGUILAR CHÁVEZ  
INSTITUTO MEXICANO DE TECNOLOGÍA DEL AGUA

MÉXICO, D. F. SEPTIEMBRE 2015

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. NAHÚN HAMED GARCÍA VILLANUEVA

Secretario: DR. VÍCTOR HUGO ALCOCER YAMANAKA

Vocal: DR. ARIOSTO AGUILAR CHÁVEZ

1er. Suplente: DR. VÍCTOR MANUEL ARROYO CORREA

2do. Suplente: DR. SERGE LÉONARD TAMARI WAGNER

Lugar donde se realizó la tesis:

INSTITUTO MEXICANO DE TECNOLOGÍA DEL AGUA  
JIUTEPEC, MORELOS

**TUTOR DE TESIS:**

DR. ARIOSTO AGUILAR CHÁVEZ

---

**FIRMA**

Dedicado con mucho cariño a mis padres y mi hermano.  
Gracias por nunca dejar de confiar en mí.

Y por supuesto, para Betty.  
La mujer que me inspira a ser mejor día con día.

Un agradecimiento al Dr. Ariosto Aguilar Chávez por dirigir y sustentar este documento.  
Asimismo un respetuoso reconocimiento a mi comité de evaluación:

Dr. Nahún Hamed García Villanueva  
Dr. Victor Hugo Alcocer Yamanaka  
Dr. Victor Manuel Arroyo Correa  
Dr. Serge Léonard Tamari Wagner

Que con sus valiosos comentarios ayudaron a enriquecer y fortalecer esta obra.

Toda mi gratitud y respeto a:

La Universidad Nacional Autónoma de México  
El Instituto Mexicano de Tecnología del Agua  
El Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Por darme la oportunidad de cumplir mis metas profesionales y guiarme en el camino.

A mis familiares y amigos, a mis profesores, compañeros y colegas, a todas aquellas personas que de alguna u otra forma están presentes en mi vida y pueden leer o escuchar éstas palabras, a todos ustedes... GRACIAS.

# ÍNDICE DE CONTENIDO

---

<b>RESUMEN</b>	<b>1</b>
<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>2</b>
1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	2
1.1.1. PRIMEROS ESTUDIOS SOBRE EL FENÓMENO TRANSITORIO .....	3
1.1.2. ANÁLISIS DE LA FRICCIÓN EN FLUJO TRANSITORIO.....	5
1.1.3. MODELOS DE FRICCIÓN TRANSITORIA .....	6
1.1.3.1. MODELOS BASADOS EN ACELERACIÓN INSTANTÁNEA .....	8
1.1.3.2. MODELOS BASADOS EN LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN .....	9
1.1.3.3. MODELOS CUASI-2D .....	10
1.2. OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN .....	12
<b>2. ECUACIONES GOBERNANTES DEL FLUJO EN TUBERÍAS</b>	<b>13</b>
2.1. ECUACIONES FUNDAMENTALES.....	14
2.1.1. TEOREMA DE TRANSPORTE DE REYNOLDS .....	14
2.1.2. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD .....	17
2.1.3. ECUACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO.....	23
2.2. CARACTERÍSTICAS PARTICULARES DEL MODELO MATEMÁTICO.....	26
2.2.1. EVALUACIÓN DE LA CELERIDAD DE ONDA.....	26
2.2.2. EVALUACIÓN DEL TÉRMINO DE FRICCIÓN .....	29
2.2.2.1. TÉRMINO DE FRICCIÓN PERMANENTE .....	30
2.2.2.2. TÉRMINO DE FRICCIÓN TRANSITORIO.....	31
2.3. MODELOS DE FLUJO EN TUBERÍAS.....	36
2.3.1. VERSIÓN CONSERVATIVA .....	36
2.3.2. VERSIÓN NO CONSERVATIVA (FORMULACIÓN CLÁSICA) .....	38
<b>3. CONSTRUCCIÓN DEL MODELO NUMÉRICO</b>	<b>44</b>
3.1. MÉTODOS DE SOLUCIÓN NUMÉRICA.....	44
3.1.1. MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS .....	48
3.1.2. DIFERENCIAS FINITAS.....	53
3.2. ANÁLISIS DE CONVERGENCIA .....	60
3.2.1. LINEALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES .....	61
3.2.2. ANÁLISIS DE CONSISTENCIA.....	65
3.2.3. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE VON NEUMANN .....	69
3.2.3.1. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DEL SISTEMA CONTINUO .....	71
3.2.3.2. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DEL SISTEMA DISCRETO .....	75

3.3. RETRATOS DE AMPLITUD .....	80
3.4. RETRATOS DE FASE .....	88
<b>4. CONSTRUCCIÓN DEL CÓDIGO COMPUTACIONAL</b> .....	<b>92</b>
4.1. CONFIGURACIÓN Y SECUENCIA GENERAL .....	92
4.1.1. ADQUISICIÓN DE DATOS Y TOPOLOGÍA.....	93
4.1.2. CONDICIÓN INICIAL Y DE FRONTERA .....	96
4.1.3. SIMULACIÓN EN FLUJO TRANSITORIO .....	104
4.2. PRUEBAS NUMÉRICAS.....	107
4.2.1. EXPERIMENTOS DE BERGANT & SIMPSON (1995) .....	108
4.2.2. EXPERIMENTOS DE JONSSON (2011) .....	119
4.2.3. TUBERÍA CON DIÁMETRO VARIABLE.....	125
<b>5. CONCLUSIONES</b> .....	<b>127</b>
<b>REFERENCIAS</b> .....	<b>129</b>
<b>ANEXOS</b> .....	<b>136</b>
ANEXO A. PROPAGACIÓN DE SEGUNDO ORDEN DE LAS ECUACIONES DE FLUJO EN TUBERÍAS .....	136
ANEXO B. CÁLCULO DE LA RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO COMPLEJO EN FORMA RECTANGULAR .....	138

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

FIGURA 1.1. RESUMEN DE AUTORES QUE HAN CONTRIBUIDO AL DESARROLLO DE LA TEORÍA ACTUAL SOBRE TRANSITORIOS HIDRÁULICOS, BASADO EN CHAUDHRY (2014) .....	3
FIGURA 1.2. COMPARACIÓN DE LAS VARIACIONES DE PRESIÓN CON PÉRDIDAS POR FRICCIÓN PERMANENTE Y TRANSITORIA (RIASI, RAISEE, & NOURBAKSH, 2010) .....	5
FIGURA 1.3. VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL DE UN MODELO DE FRICCIÓN CB ( <i>CONVOLUTION-BASED</i> ) PARA DIFERENTES MANIOBRAS DE LA VÁLVULA (VITKOVSKÝ ET AL., 2006).....	6
FIGURA 1.4. CLASIFICACIÓN DE LOS MODELOS DE FRICCIÓN EMPLEADOS EN FLUJO TRANSITORIO, BASADO EN GHIDAOU ET AL. (2005).....	7
FIGURA 1.5. PERFILES DE VELOCIDAD DURANTE ALGUNAS ETAPAS DEL FLUJO TRANSITORIO EN UNA SECCIÓN DE LA TUBERÍA (BRUNONE ET AL., 2000) .....	11
FIGURA 2.1. RUPTURA DE UNA LÍNEA DE CONDUCCIÓN CAUSADO POR UN CIERRE INSTANTÁNEO EN FRANCIA (KUENY, COMBES, LOURENÇO, CLARY, & BALLESTER, 2014).....	13
FIGURA 2.2. SUPERPOSICIÓN DEL VOLUMEN DE CONTROL ARBITRARIO $\forall$ EN EL TIEMPO $t$ Y $\Delta t$ PARA ESTABLECER EL CAMBIO DE VOLUMEN $\Delta\forall$ , BASADO EN CURRIE (2012) .....	16
FIGURA 2.3. DIAGRAMA DEL VOLUMEN DE CONTROL PARA DEDUCIR LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD .....	17
FIGURA 2.4. CILINDRO DE PARED DELGADA SUJETO A PRESIÓN INTERNA $P$ QUE GENERA ESFUERZOS CIRCUNFERENCIALES $\sigma_\theta$ Y AXIALES $\sigma_z$ , BASADO EN HEARN (1997).....	20
FIGURA 2.5. DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DEL VOLUMEN DE CONTROL.....	24
FIGURA 2.6. RESULTADOS DEL EXPERIMENTO DE REYNOLDS (1883).....	31
FIGURA 2.7. COEFICIENTE $k_t$ EN FUNCIÓN DE LOS PARÁMETROS $y_o$ , $\epsilon/D$ Y $Re_o$ (PEZZINGA, 2000) .....	33
FIGURA 2.8. COEFICIENTE $k_t$ EN FUNCIÓN DEL NÚMERO DE REYNOLDS (VARDY & BROWN, 2003) .....	35
FIGURA 2.9. INTERPRETACIÓN DE LA LÍNEA DE CARGA PIEZOMÉTRICA .....	41
FIGURA 3.1. ELEMENTOS REPRESENTATIVOS DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES .....	45
FIGURA 3.2. REPRESENTACIÓN DEL PLANO CARACTERÍSTICO DE SOLUCIÓN.....	46
FIGURA 3.3. REPRESENTACIÓN DEL ESQUEMA DE PREISSMANN EN EL PLANO $x - t$ (AGUILAR, 2002) .....	47
FIGURA 3.4. LÍNEAS CARACTERÍSTICAS DEL MODELO CONSERVATIVO SIMPLIFICADO .....	50
FIGURA 3.5. MALLA REGULAR DISCRETA CON LAS LÍNEAS CARACTERÍSTICAS.....	53

---

FIGURA 3.6. MATRIZ PENTADIAGONAL DE SOLUCIÓN.....	59
FIGURA 3.7. RELACIÓN ENTRE CONSISTENCIA, ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA .....	60
FIGURA 3.8. REPRESENTACIÓN DEL NÚMERO IMAGINARIO EN EL PLANO COMPLEJO.....	74
FIGURA 3.9. RETRATO DE AMPLITUD DE LA PRUEBA 01: E.C.+F.T.....	81
FIGURA 3.10. RETRATO DE AMPLITUD DE LA PRUEBA 02: E.C.+F.T.....	82
FIGURA 3.11. RETRATO DE AMPLITUD DE LA PRUEBA 03: E.N.C.+F.P.....	82
FIGURA 3.12. RETRATO DE AMPLITUD DE LA PRUEBA 04: E.N.C.+F.P.....	83
FIGURA 3.13. RETRATO DE AMPLITUD DE LA PRUEBA 05: E.C.+F.T.....	84
FIGURA 3.14. RETRATO DE AMPLITUD DE LA PRUEBA 06: E.C.+F.T.....	84
FIGURA 3.15. RETRATO DE AMPLITUD DE LA PRUEBA 07: E.C.+F.T.....	85
FIGURA 3.16. RETRATO DE AMPLITUD DE LA PRUEBA 08: E.N.C.+F.P.....	85
FIGURA 3.17. RETRATO DE AMPLITUD DE LA PRUEBA 09: E.N.C.+F.P.....	86
FIGURA 3.18. RETRATO DE AMPLITUD DE LA PRUEBA 10: E.N.C.+F.P.....	86
FIGURA 3.19. RETRATO DE AMPLITUD PARA DIFERENTES NÚMEROS DE MACH.....	87
FIGURA 3.20. RETRATO DE AMPLITUD PARA NÚMEROS DE MACH BAJOS .....	88
FIGURA 3.21. RETRATOS DE FASE DEL SISTEMA CONTINUO Y DISCRETO PARA DIFERENTES VALORES DEL NÚMERO DE COURANT .....	90
FIGURA 3.22. RETRATOS DE FASE DEL SISTEMA DISCRETO (CONSERVATIVO Y NO CONSERVATIVO) PARA DIFERENTES VALORES DEL NÚMERO DE MACH.....	91
FIGURA 4.1. SECUENCIA GENERAL DEL CÓDIGO COMPUTACIONAL .....	92
FIGURA 4.2. CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL SISTEMA HIDRÁULICO .....	94
FIGURA 4.3. DIAGRAMA DE FLUJO PARA EL CÁLCULO DEL GASTO EN CONDICIÓN INICIAL.....	99
FIGURA 4.4. DIAGRAMA DE FLUJO PARA EL CÁLCULO DEL FACTOR DE FRICCIÓN DE DARCY-WEISBACH.....	100
FIGURA 4.5. CONDICIÓN INICIAL PARA UNA TUBERÍA CON DIÁMETRO CONSTANTE .....	101
FIGURA 4.6. CONDICIÓN INICIAL PARA UNA TUBERÍA CON DIÁMETRO VARIABLE.....	102
FIGURA 4.7. CONDICIÓN DE FRONTERA AGUAS ARRIBA PARA NIVEL CONSTANTE DEL EMBALSE.....	103
FIGURA 4.8. CONDICIÓN DE FRONTERA AGUAS ABAJO PARA EL CIERRE DE UNA VÁLVULA.....	103



---

FIGURA 4.9. GRÁFICO ADIMENSIONAL CON DIFERENTES LEYES DE CIERRE DE VÁLVULA.....	104
FIGURA 4.10. DIAGRAMA DE FLUJO DEL ALGORITMO EN DIFERENCIAS FINITAS .....	105
FIGURA 4.11. DIAGRAMA DE FLUJO PARA EL CÁLCULO DEL FACTOR DE DARCY-WEISBACH EN FLUJO TRANSITORIO .....	106
FIGURA 4.12. DIAGRAMA DE FLUJO PARA EL CÁLCULO DEL COEFICIENTE DE BRUNONE EN FLUJO TRANSITORIO .....	107
FIGURA 4.13. ESQUEMA GENERAL DEL APARATO EXPERIMENTAL DE BERGANT & SIMPSON (1995) .....	109
FIGURA 4.14. RESULTADOS DEL MODELO CUASI-PERMANENTE (MOC) PARA $V_o = 0.1 \text{ m/s}$ .....	110
FIGURA 4.15. RESULTADOS DEL MODELO CUASI-PERMANENTE (MOC) PARA $V_o = 0.2 \text{ m/s}$ .....	110
FIGURA 4.16. RESULTADOS DEL MODELO CUASI-PERMANENTE (MOC) PARA $V_o = 0.3 \text{ m/s}$ .....	110
FIGURA 4.17. RESULTADOS CON LA PROPUESTA DE BERGANT ET AL. (2001) PARA $V_o = 0.1 \text{ m/s}$ .....	111
FIGURA 4.18. RESULTADOS CON LA PROPUESTA DE BERGANT ET AL. (2001) PARA $V_o = 0.2 \text{ m/s}$ .....	111
FIGURA 4.19. RESULTADOS CON LA PROPUESTA DE BERGANT ET AL. (2001) PARA $V_o = 0.3 \text{ m/s}$ .....	111
FIGURA 4.20. RESULTADOS CON LA PROPUESTA DE VARDY & BROWN (1995) PARA $V_o = 0.1 \text{ m/s}$ .....	112
FIGURA 4.21. RESULTADOS CON LA PROPUESTA DE VARDY & BROWN (1995) PARA $V_o = 0.2 \text{ m/s}$ .....	112
FIGURA 4.22. RESULTADOS CON LA PROPUESTA DE VARDY & BROWN (1995) PARA $V_o = 0.3 \text{ m/s}$ .....	112
FIGURA 4.23. RESULTADOS CON LA PROPUESTA DE VARDY & BROWN (2003) PARA $V_o = 0.1 \text{ m/s}$ .....	113
FIGURA 4.24. RESULTADOS CON LA PROPUESTA DE VARDY & BROWN (2003) PARA $V_o = 0.2 \text{ m/s}$ .....	113
FIGURA 4.25. RESULTADOS CON LA PROPUESTA DE VARDY & BROWN (2003) PARA $V_o = 0.3 \text{ m/s}$ .....	113
FIGURA 4.26. COEFICIENTE DE BRUNONE EN FUNCIÓN DEL NÚMERO DE REYNOLDS.....	114
FIGURA 4.27. DETALLE DEL FINAL DEL TRANSITORIO PARA LA PRUEBA $V_o = 0.1 \text{ m/s}$ .....	115
FIGURA 4.28. FFT DE LAS MEDICIONES EN LA POSICIÓN PV PARA EL CASO $V_o = 0.1 \text{ m/s}$ .....	116
FIGURA 4.29. FFT DE LA SIMULACIÓN EN LA POSICIÓN PV PARA EL CASO $V_o = 0.1 \text{ m/s}$ Y $C_N = 1$ .....	116
FIGURA 4.30. FFT DE LA SIMULACIÓN EN LA POSICIÓN PV PARA EL CASO $V_o = 0.1 \text{ m/s}$ Y $C_N = 0.1$	117
FIGURA 4.31. FFT DE LA SIMULACIÓN EN LA POSICIÓN PV PARA EL CASO $V_o = 0.1 \text{ m/s}$ Y $C_N = 0.01$ .....	117
FIGURA 4.32. AJUSTE DE LA SIMULACIÓN CON LA CELERIDAD CARACTERÍSTICA DE LAS MEDICIONES .....	118

FIGURA 4.33. COMPARACIÓN DE LA PRIMERA Y ÚLTIMA CRESTA CON LA CELERIDAD CARACTERÍSTICA AJUSTADA .....	119
FIGURA 4.34. ESQUEMA GENERAL DEL BANCO DE PRUEBAS UTILIZADO POR JONSSON (2011).....	120
FIGURA 4.35. CURVA DE DESCARGA PARA CADA GASTO DE PRUEBA (JONSSON, 2011).....	121
FIGURA 4.36. RESULTADOS EXPERIMENTALES (IZQUIERDA) Y NUMÉRICOS (DERECHA) DE JONSSON (2011) .....	121
FIGURA 4.37. DIAGRAMA DE DIFERENCIA DE PRESIÓN SIMULADO CON $J = 100$ Y $C_N = 1$ .....	122
FIGURA 4.38. EFECTO DEL INCREMENTO DEL NÚMERO DE COURANT EN LOS RESULTADOS NUMÉRICOS ...	122
FIGURA 4.39. REGISTROS DE LA MÁXIMA SOBREPRESIÓN DEL TRANSITORIO .....	123
FIGURA 4.40. PRIMERAS OSCILACIONES DESPUÉS DEL CIERRE TOTAL DE LA VÁLVULA.....	123
FIGURA 4.41. RAPIDEZ DEL MODELO EN DF COMPARADA CON EL MODELO CLÁSICO MOC .....	124
FIGURA 4.42. DIAGRAMA ENVOLVENTE DE PRESIONES MÁXIMAS Y MÍNIMAS EN EL CONDUCTO .....	125
FIGURA 4.43. TRANSITORIOS HIDRÁULICOS EN TUBERÍAS DE DIÁMETRO VARIABLE Y CONSTANTE .....	126

# ÍNDICE DE TABLAS

---

TABLA 2.1. VALORES DEL PARÁMETRO $\psi c$ EN LA ECUACIÓN (2.4.2), BASADO EN TIJSSELING (1996).....	27
TABLA 2.2. VALORES DEL PARÁMETRO $\psi c$ EN LA ECUACIÓN (2.4.5) BASADO EN HALLIWELL (1963).....	28
TABLA 2.3. MODIFICACIONES EN EL CÁLCULO DE LA CELERIDAD EN TÚNELES, BASADO EN CHAUDHRY (2014) .....	29
TABLA 3.1. DESCRIPCIÓN DE LOS MODELOS A EVALUAR .....	48
TABLA 3.2. PARÁMETROS PARA LAS PRUEBAS DE CONVERGENCIA NUMÉRICA .....	80
TABLA 3.3. RETRATOS DE AMPLITUD PARA LAS PRUEBAS DEL FACTOR DE PESO TEMPORAL.....	81
TABLA 3.4. RETRATOS DE AMPLITUD PARA LAS PRUEBAS DEL FACTOR DE PESO TEMPORAL.....	83
TABLA 4.1. DATOS GENERALES PARA LA CONFIGURACIÓN DEL SISTEMA .....	93
TABLA 4.2. PARÁMETROS UTILIZADOS EN LA CALIBRACIÓN DEL MODELO DE BERGANT ET AL (2001).....	108
TABLA 4.3. PROPUESTAS DE CÁLCULO PARA EL FACTOR DE FRICCIÓN TRANSITORIO .....	109
TABLA 4.4. INFORMACIÓN DE LAS PRUEBAS DE JONSSON (2011) PARA LA MODELACIÓN NUMÉRICA .....	120

# RESUMEN

---

El estudio del fenómeno transitorio y su comportamiento en tuberías a presión, es un campo con interrogantes que aún no han sido aclaradas en su totalidad. La investigación enfocada a la propagación de las ondas de presión y su disipación en flujo transitorio, causada por el esfuerzo cortante entre el fluido y las paredes del conducto (también conocido como pérdida de energía por fricción), ha dado paso a nuevos modelos con resultados cada vez más cercanos a los que se determinan con técnicas experimentales.

El presente trabajo estudia a detalle las ecuaciones fundamentales de flujo en tuberías, tomando en cuenta la aceleración total del flujo (local y convectiva), y un modelo empírico global para evaluar el término de fricción que incluye la condición en estado permanente y transitorio. Para esto se aplican los principios de conservación de masa y cantidad de movimiento bajo la hipótesis del medio continuo y se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden de tipo hiperbólico no lineal.

El sistema de ecuaciones resultante no tiene una solución exacta, por lo que se construyó un modelo numérico en diferencias finitas conocido como '*esquema de caja*' o '*esquema de Preissmann*' y un algoritmo de convergencia sobre las iteraciones no lineales tipo Picard (Morton & Mayers, 2005; Szymkiewicz, 2010). El modelo numérico desarrollado permite evaluar las ecuaciones completas sin recurrir a las simplificaciones de los modelos clásicos y posee la capacidad de incluir condiciones de diámetro variable en la tubería. Para verificar la certidumbre del modelo numérico, los resultados se compararon con datos experimentales reportados en la literatura y como complemento, se determinaron los criterios de convergencia aplicando el Teorema de equivalencia de Lax, previo a un análisis de localización y escalas múltiples.

En las comparaciones con datos experimentales, se demostró que el modelo propuesto reproduce de forma adecuada la amplitud de las ondas. Para verificar la fase, se realizó un análisis espectral y se estableció que la condición CFL menor o igual a uno (Courant, Friedrichs, & Lewy, 1967) es necesaria para que la forma de los osciladores de presión presente un mejor ajuste con los resultados experimentales cuando se analizan periodos de tiempo después del cierre total de la válvula. Para la condición de presión máxima, el modelo propuesto determina con precisión este valor y la forma del transitorio; la condición CFL utilizada en este caso fue igual a la unidad y se aumentaron los valores hasta llegar a 100, los resultados muestran que es posible reducir significativamente el costo computacional sin sacrificar la confiabilidad de los resultados.

# CAPÍTULO 1

---

## INTRODUCCIÓN

La investigación relacionada a los transitorios hidráulicos en tuberías, estudia la variación de las condiciones de flujo (presión, velocidad y caudal) en el tiempo (Wylie & Streeter, 1978). Si bien es sencillo hablar de la naturaleza unidimensional del flujo en tuberías, su análisis no siempre fue tomado en cuenta de manera explícita en el diseño de obras (Karney & McInnis, 1992). En la actualidad, la descripción completa del fenómeno propone interesantes problemas para la dinámica de fluidos y sienta las bases teóricas que pueden ser aprovechadas en futuras aplicaciones (Ghidaoui, Zhao, Axworthy, & McInnis, 2005).

El estudio de las ecuaciones completas que gobiernan el flujo en tuberías y la introducción de los nuevos modelos que predicen la magnitud de las pérdidas durante el paso del transitorio, permiten representar a mayor detalle las ondas de presión del fenómeno. Para esto resulta indispensable conocer las diferencias que existen entre modelos y la influencia que tienen los términos sobre las soluciones.

### 1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Para conocer los cambios instantáneos del gasto y la presión en tuberías, las ecuaciones gobernantes de flujo se deducen a partir de los principios de continuidad y conservación de la cantidad de movimiento bajo el punto de vista de la columna elástica. De esta forma se toman en cuenta los efectos causados por la compresibilidad del fluido y la elasticidad del conducto (Parmakian, 1963).

La formulación completa de estas ecuaciones, presenta términos no lineales que suelen simplificarse en la aplicación de los problemas que involucran flujo transitorio en ingeniería (Chaudhry, 2014). Esta filosofía clásica logra describir adecuadamente las presiones máximas y mínimas en conductos a presión (Tijsseling & Bergant, 2007) y los autores que han analizado paquetes comerciales para simular transitorios, aseguran que los esquemas numéricos de solución, no incluyen todos los términos presentes en las ecuaciones (Bergant, Tijsseling, Vítkovský, Covas, Simpson, & Lambert, 2008).

Sin embargo, el flujo en tuberías está sujeto a la pérdida de energía debido al contacto entre el fluido y la pared sólida del conducto. La evidencia teórica y experimental, muestra la gran dependencia entre el cambio de velocidad y la fricción y su evaluación simplificada no reproduce el fenómeno correctamente en su totalidad. Aun sabiendo esto, por muchos años se aplicaron modelos que involucran términos de fricción en flujo permanente, pasando por alto la evidente atenuación de las ondas de presión (Zielke, 1966). En base a esto, el desarrollo de conocimiento referente a las pérdidas por fricción en flujo transitorio es un tema que ha llamado la atención de diversos investigadores (Szymkiewicz, 2002).

### 1.1.1. PRIMEROS ESTUDIOS SOBRE EL FENÓMENO TRANSITORIO

Los progresos actuales en la teoría de transitorios hidráulicos son el resultado en conjunto del trabajo de un gran número de investigadores que han hecho significantes contribuciones al área. Sus inicios van desde los primeros estudios de la propagación de las ondas de sonido en el aire y el agua, el comportamiento de las ondas en conductos a presión e incluso aportaciones relacionadas con el flujo de sangre en las arterias (Figura 1.1).

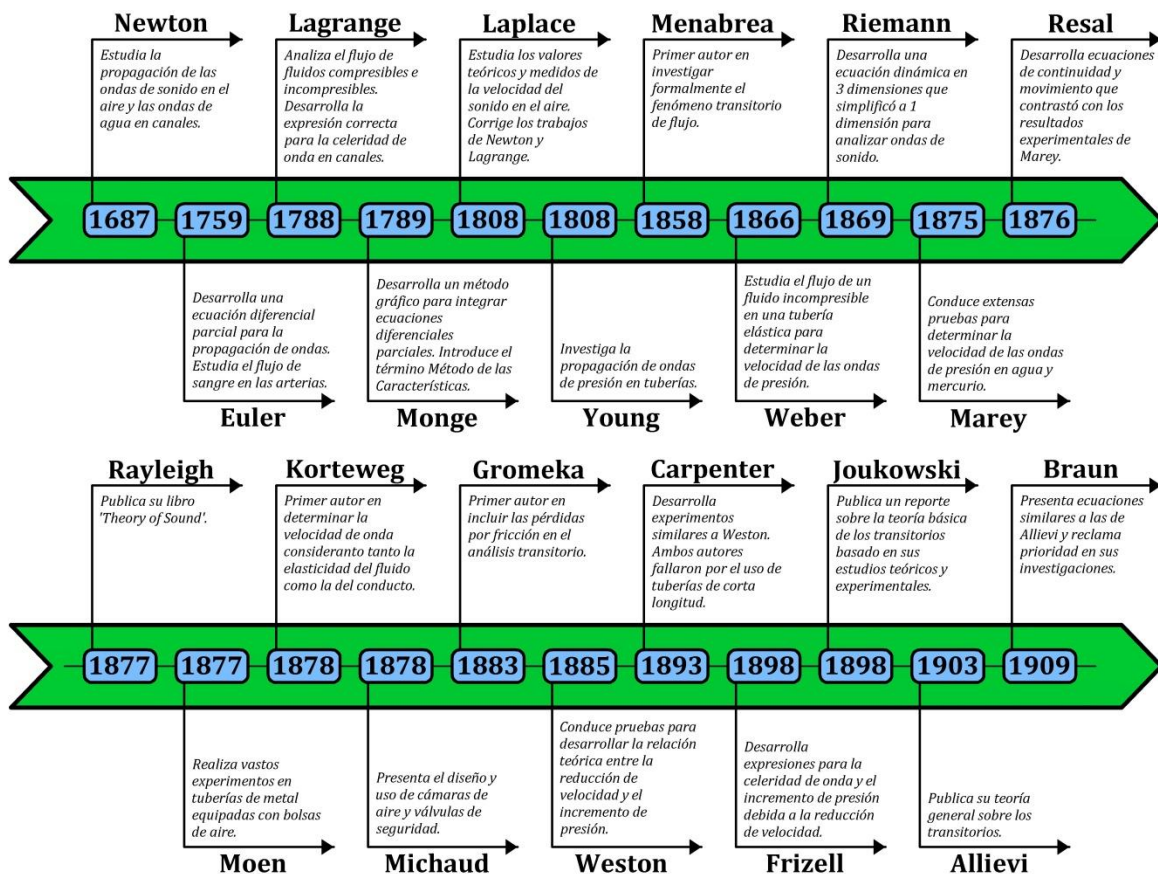


Figura 1.1. Resumen de autores que han contribuido al desarrollo de la teoría actual sobre transitorios hidráulicos, basado en Chaudhry (2014)

Atribuir los descubrimientos de manera específica y definir quien marcó un antes y después en la historia resulta difícil. Varias investigaciones sobre los inicios del fenómeno transitorio han sido realizadas y dependiendo del autor, la perspectiva de los hechos cambia, al punto que se pueden encontrar trabajos con importantes pero olvidadas contribuciones, no mencionadas en las exhaustivas revisiones bibliográficas hechas por la comunidad científica (Tijsseling & Anderson, 2007).

No obstante, el estudio moderno del fenómeno transitorio en conductos cerrados comenzó con los esfuerzos de N. E. Joukowski y L. A. Allievi (Asli, 2013). Estos autores son considerados pioneros en el desarrollo de la teoría de transitorios y ambos presentan en sus respectivos trabajos, la ecuación elemental para sobrepresiones instantáneas actualmente conocida como *pulso de Joukowski* o *fórmula de Allievi* (Tijsseling & Anderson, 2004):

$$\Delta p = \rho a \Delta v \quad (1.1.1)$$

Donde  $\Delta p$  es el cambio de la presión;  $\rho$  la densidad del fluido;  $a$  la celeridad de onda y  $\Delta v$  el cambio de la velocidad.

El estudio de Allievi (1925)<sup>1</sup> sobre los transitorios presenta las formulaciones básicas de las ecuaciones que rigen el comportamiento del flujo en tuberías y es el primer autor en considerar despreciable el término convectivo en la ecuación de cantidad de movimiento (Ghidaoui et al., 2005). A partir de este punto, la concepción moderna sobre flujo transitorio prosperó a pesar del retraso en las traducciones al inglés de las principales obras: aproximadamente seis años para el trabajo de Joukowski y casi veintiún años para el de Allievi; durante ese tiempo diversos autores continuaron realizando investigaciones que aportaron nuevo conocimiento teórico y práctico, estos trabajos fueron reunidos y presentados en el primer Simposio especializado en el tema y realizado en Chicago, Illinois durante la primera mitad del siglo XX, impulsando formalmente este campo de estudio (ASME & ASCE, 1933).

Una vez fundamentadas las bases del fenómeno, nuevas dificultades comenzaron a surgir: la complejidad del problema requería un tratamiento generalizado y en consecuencia las primeras soluciones fueron del tipo gráfico y no consideraban el efecto de la fricción. Dichas propuestas se fueron refinando con el paso del tiempo hasta añadir las pérdidas de carga (Hager, 2001).

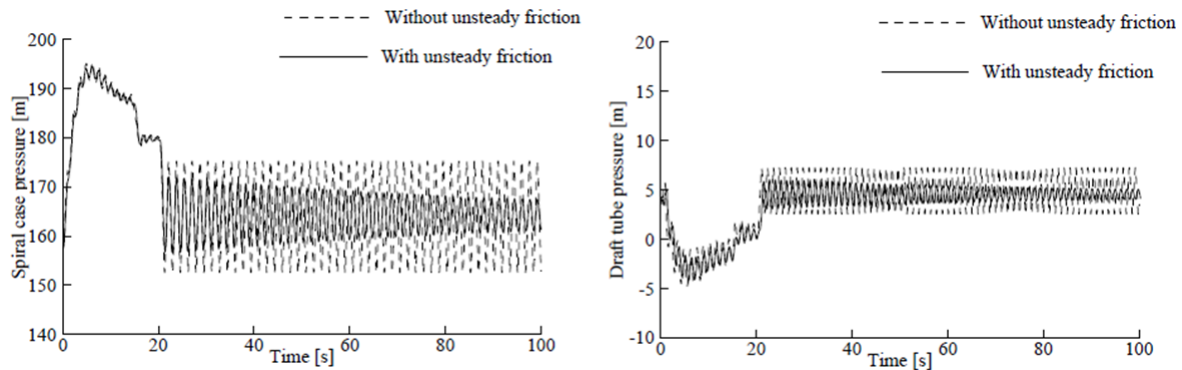
---

<sup>1</sup> El año de la referencia en el texto corresponde a la publicación del documento traducido al inglés, por tal motivo difiere del año presentado en la Figura 1.1, la cual corresponde a la publicación original del autor.

### 1.1.2. ANÁLISIS DE LA FRICCIÓN EN FLUJO TRANSITORIO

Los principales intereses en el estudio del fenómeno transitorio se basan en la discrepancia entre los resultados experimentales y numéricos para predecir las variaciones de presión en el tiempo y cómo el campo de velocidad influye sobre las oscilaciones en términos de amplitud, fase y forma de las ondas (Ramos & Covas, 2006).

Gibson (1920), basado en los trabajos de Joukowsky y Allievi, discute la importancia de considerar que las pérdidas por fricción no dependen linealmente de la velocidad de flujo durante el paso del transitorio, sin embargo, la teoría de la época se desarrolló suponiendo las pérdidas equivalentes a las que ocurren en flujo permanente. Dicha consideración permitió obtener buenas aproximaciones para describir oscilaciones máximas y mínimas en tuberías de acero y concreto, pero presentaba considerable imprecisión en tuberías plásticas y sobre todo para cambios rápidos en las condiciones de flujo o en frecuencias con osciladores altos (Figura 1.2). Los resultados empleando únicamente el modelo de fricción permanente no reproduce correctamente las amplitudes de las ondas mientras mayor sea el tiempo de simulación del fenómeno (Vitkovský, Lambert, Simpson, & Bergant, 2000).



**Figura 1.2. Comparación de las variaciones de presión con pérdidas por fricción permanente y transitoria (Riasi, Raisee, & Nourbakhsh, 2010)**

Por tales motivos, el fenómeno relacionado con las pérdidas de fricción durante el flujo transitorio ha sido estudiado en los últimos 60 años (Covas, Stoianov, Mano, Ramos, Graham, & Maksimovic, 2005). Como resultado, actualmente existen modelos de fricción que se implementan en las ecuaciones de flujo y describen de forma más adecuada el decaimiento de las ondas de presión (Vitkovský, Bergant, Simpson, & Lambert, 2006). Los resultados que se obtienen representan aproximaciones más confiables y se validan con resultados experimentales (Figura 1.3).



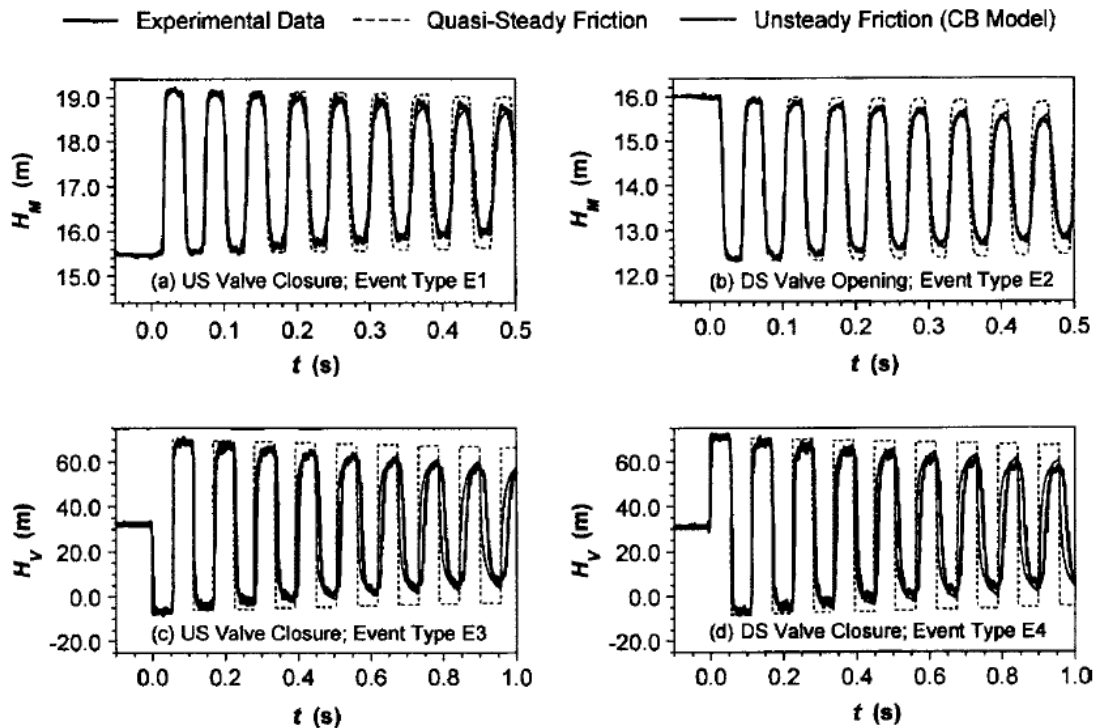


Figura 1.3. Verificación experimental de un modelo de fricción CB (*Convolution-Based*) para diferentes maniobras de la válvula (Vitkovský et al., 2006)

### 1.1.3. MODELOS DE FRICCIÓN TRANSITORIA

Las modelos para estimar las pérdidas de energía en flujo transitorio se basan en el análisis del esfuerzo cortante global  $\tau$  producido durante la ocurrencia del fenómeno. Su implementación y desarrollo es continuamente discutido con el fin de obtener mejores aproximaciones (Tiselj & Gale, 2008; Storli & Nielsen, 2011).

Los modelos que involucran términos de Fricción Transitoria (UF por sus siglas en inglés: *Unsteady Friction*) pueden ser clasificados en tres categorías (Figura 1.4): modelos basados en aceleración instantánea, modelos basados en la integral de convolución y modelos cuasi-2D (Prashanth Reddy, Silva-Araya, & Chaudhry, 2012).

En principio, el cálculo del esfuerzo cortante  $\tau$  en un análisis transitorio convencional en un punto específico  $x$  de la tubería suele considerarse igual al esfuerzo cortante en flujo permanente  $\tau_p$  (Wylie & Streeter, 1978; Chaudhry, 2014). Esta consideración para estimar las pérdidas da paso a la teoría clásica de los modelos de flujo transitorio:

$$\tau(t) = \tau_p(t) \quad (1.1.2)$$

Donde se establece una relación directa del esfuerzo cortante para cada instante de tiempo  $t$  con su respectivo valor en flujo permanente para la velocidad instantánea promedio del flujo transitorio (Silva-Araya & Chaudhry, 1997). Las suposiciones hechas en este tipo de modelos (permanentes y cuasi-permanentes) describen un comportamiento que resulta satisfactorio para transitorios lentos, pero que en la validación experimental para transitorios rápidos presentan grandes discrepancias en la atenuación y fase de las ondas de presión (Bergant et al., 2001).

<b>ANÁLISIS DE LA FRICCIÓN EN FLUJO TRANSITORIO</b>			
<b>Ecuaciones unidimensionales</b>			<b>Ecuaciones cuasi-2D</b>
<b>(Modelos basados en el esfuerzo cortante sobre las paredes)<sup>[1]</sup></b>			<b>(Modelos de turbulencia)<sup>[2]</sup></b>
$\tau(t) = \tau_p(t)$	$\tau(t) = \tau_p(t) + \tau_t(t)$		$\tau = \rho \nu \frac{\partial u}{\partial r} - \rho \overline{u'v'}$
<b>Análisis cuasi-permanente</b>	<b>Análisis transitorio corregido con bases empíricas</b>	<b>Análisis transitorio corregido con bases físicas</b>	<b>Estimaciones basadas en las Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS)</b>
<b>Teoría Clásica</b>	<b>Modelos Basados en Aceleración Instantánea</b>	<b>Modelos Basados en la Integral de Convolución</b>	<b>Modelos Cuasi-2D</b>

<sup>[1]</sup> Para flujo unidimensional  $t$  es el tiempo como variable independiente;  $\tau$  el esfuerzo cortante causado por el contacto de la pared y el fluido;  $\tau_p$  el esfuerzo cortante en condiciones permanentes;  $\tau_t$  el esfuerzo cortante en condiciones transitorias.

<sup>[2]</sup> Para flujo cuasi-2D  $r$  es la distancia al eje del conducto en dirección radial como variable independiente;  $\rho$  la densidad del fluido;  $\nu$  la viscosidad cinemática;  $u$  y  $v$  son las velocidades longitudinal y radial respectivamente y  $u'$  y  $v'$  son las perturbaciones turbulentas correspondientes a la velocidad longitudinal y radial respectivamente.

**Figura 1.4. Clasificación de los modelos de fricción empleados en flujo transitorio, basado en Ghidaoui et al. (2005)**

Para corregir lo anterior, se estudió el efecto que tiene el flujo transitorio sobre el movimiento inercial del fluido y como éste modifica al esfuerzo cortante generando componentes turbulentas que contribuyen a la pérdida instantánea de energía (Daily, Hankey, Olive, & Jordan, 1955).

Las formulaciones que estiman los efectos de fricción transitoria bajo la hipótesis anterior se pueden expresar matemáticamente como (Ghidaoui & Mansour, 2002; Vardy & Brown, 2004a):

$$\tau(x, t) = \tau_p(x, t) + \tau_t(x, t) \quad (1.1.3)$$

La ecuación (1.1.3) propone una nueva forma de modelación corrigiendo las limitaciones de la teoría cuasi-permanente, en donde además de calcular el esfuerzo cortante en estado permanente  $\tau_p$ , el nuevo término  $\tau_t$  adiciona la contribución debida a las características transitorias del fenómeno; su correcto uso en los modelos unidimensionales requiere el establecimiento de conjeturas apropiadas que lo relacionen con los parámetros característicos del flujo (Abreu & Betâmio de Almeida, 2004).

### 1.1.3.1. MODELOS BASADOS EN ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

Con el fin de representar de manera adecuada la influencia de  $\tau_t$  en el fenómeno, una primera consideración consiste en introducir los efectos provocados por las aceleraciones instantáneas locales y convectivas promedio de la sección transversal, sin tomar en cuenta la influencia de la distribución de velocidades (Prashanth Reddy et al., 2012). Este tipo de representaciones se conocen como modelos Basados en Aceleración Instantánea (IAB por sus siglas en inglés: *Instantaneous Acceleration-Based*).

Los modelos IAB se caracterizan por ser de carácter empírico y presentan resultados simples y eficientes; su fundamento teórico se respalda en la Termodinámica Irreversible Extendida (EIT por sus siglas en inglés: *Extended Irreversible Thermodynamics*) la cual se centra en problemas de flujo con altas frecuencias y pequeñas longitudes de onda (Axworthy, Ghidaoui, & McInnis, 2000).

Las bases de los modelos IAB se puede encontrar en el trabajo de Daily et al. (1955), quienes asumieron que análogo al flujo permanente turbulento unidimensional, para cada instante de tiempo del transitorio, el campo de velocidad  $U$  puede ser descrito por un valor medio de la velocidad  $\bar{u}$  en adición a un valor fluctuante  $u'$ . Al aplicar la conjetura a la ecuación de momento se obtiene una expresión que muestra de manera cualitativa como la

turbulencia, la uniformidad de flujo y la aceleración afectan al potencial total de la energía; y para simplificar el problema propusieron una expresión que conserve talas propiedades:

$$K_u = K_s + K_t \quad (1.1.4)$$

Donde  $K_u$  es el coeficiente de flujo transitorio causado por la resistencia de las fronteras y la velocidad local absoluta de flujo;  $K_s$  es el coeficiente de resistencia unidimensional en flujo permanente y  $K_t$  es el coeficiente de corrección debido a los efectos transitorios adicionales sobre las fronteras y la inercia de flujo de la velocidad local absoluta.

Ghidaoui et al., (2005) indican que los términos de la ecuación (1.1.4) se pueden expresar en función del esfuerzo cortante y tomar la forma de la ecuación (1.1.3).

Otra característica importante de estos modelos es el uso de coeficientes empíricos  $k$  cuya función es ajustar el decaimiento del armónico (Brunone, Karney, Mecarelli, & Ferrante, 2000) y que pueden ser calibrados experimentalmente o determinados analíticamente mediante el uso de otros modelos teóricos (Pezzinga, 2000). En los últimos años se han propuesto significantes cambios a los modelos IAB que van desde el uso de coeficientes de decaimiento constantes y variables en el tiempo (Vitkovský et al., 2000); nuevos modelos modificados denominados MIAB (*Modified Instantaneous Acceleration-Based* por sus siglas en inglés) que emplean coeficientes de decaimiento dobles (Vitkovský et al., 2006) y su estimación mediante el uso de algoritmos genéticos con el fin de tener mejores aproximaciones a los resultados experimentales.

### 1.1.3.2. MODELOS BASADOS EN LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

Zielke (1966) con el fin de obtener una expresión que relacione los esfuerzos cortantes y los cambios de la velocidad media instantánea con la velocidad anterior, aplicó la transformada de Laplace a las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo paralelo con simetría axial e ignoró la influencia de la compresibilidad en la distribución de velocidades. Como resultado demostró que el esfuerzo cortante transitorio es una integral de convolución de la aceleración temporal y propuso calcularla con una función de peso que actúe como '*memoria*' de los valores pasados en la aceleración del fluido (Axworthy et al., 2000).

El modelo desarrollado por Zielke también conocido como *frequency-dependent friction* (Silva-Araya & Chaudhry, 1997) es un método analíticamente correcto para flujo laminar y calcula la fricción transitoria como una función de la suma ponderada de las aceleraciones máximas locales ocurridas para cada nodo, lo que lo vuelve computacionalmente demandante (Storli & Nielsen, 2011). Su sólido fundamento teórico y las validaciones

experimentales han hecho que diversos investigadores continúen bajo la misma línea de trabajo y propongan modelos de este tipo para estimar la fricción (Adamkowski & Lewandowski, 2006), conformando una segunda categoría de análisis conocida como modelos Basados en Convolución (CB por sus siglas en inglés: *Convolution-Based*).

Los esfuerzos actuales de estos modelos están encaminados en la derivación de funciones de peso para materiales hidráulicamente lisos y rugosos (Vardy & Brown, 2004a); propuesta y validación de funciones de peso para flujo turbulento (Vardy & Brown, 2007) y su eficiente implementación en las ecuaciones unidimensionales para obtener resultados simples y precisos (Ghidaoui & Mansour, 2002; Vardy & Brown, 2004b).

Los avances en los modelos CB además de permitir su uso directo sobre análisis numéricos de flujo transitorio en tuberías también han ayudado a deducir numéricamente valores de coeficientes empíricos aplicables a los modelos IAB para cualquier valor del número de Reynolds (Vardy & Brown, 2003).

### 1.1.3.3. MODELOS CUASI-2D

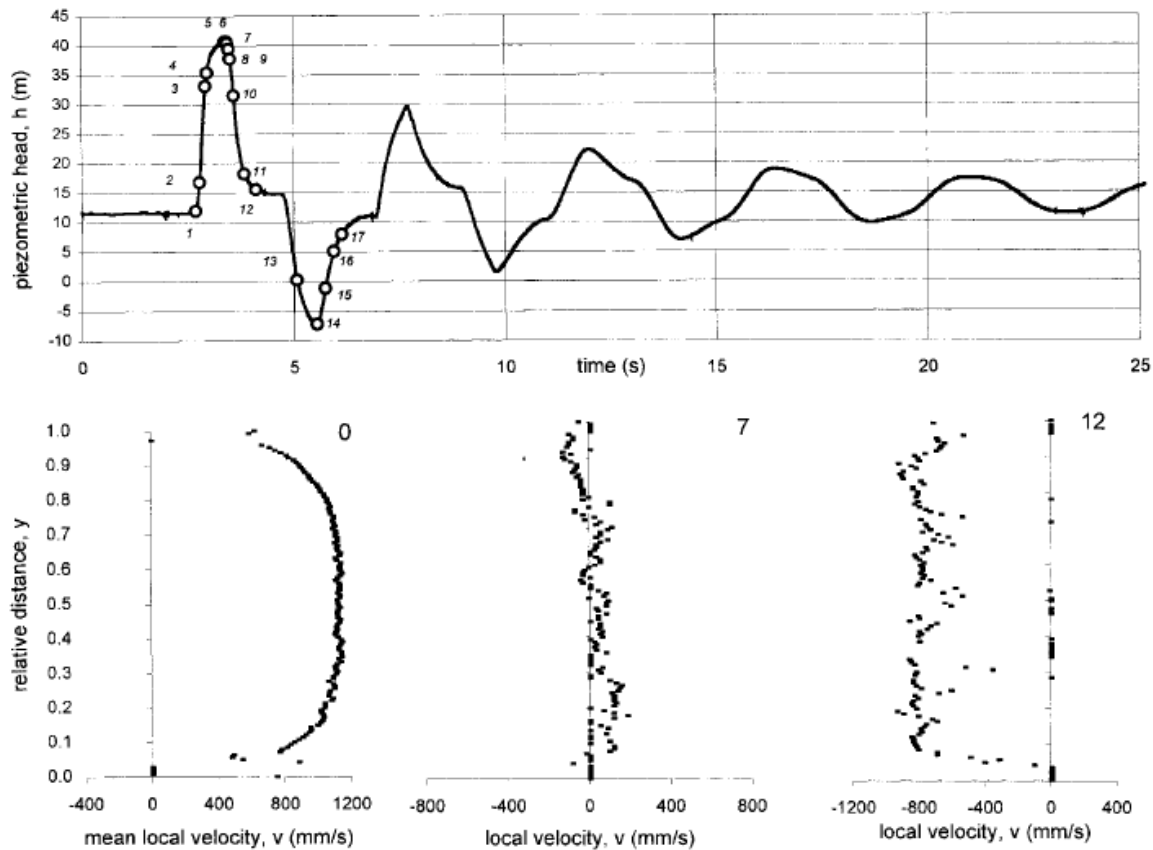
Los *modelos cuasi-2D*, los cuales justifican su aplicación en el análisis de los perfiles de velocidad en condiciones transitorias (Figura 1.5): estos muestran que durante el fenómeno, los valores del esfuerzo cortante son distintos a los asumidos como flujos promediados en condiciones permanentes, que incluso pueden ser mucho mayores para ciertos instantes de tiempo (Vardy & Hwang, 1991).

Este tipo de modelos sugiere corregir en base a los perfiles transitorios y modelos de turbulencia, la poca capacidad que tienen los modelos 1D para estimar las fuerzas de fricción y las oscilaciones (Pezzinga, 1999). El cálculo del perfil de velocidad y su correspondiente pérdida de energía se realiza de manera continua, por lo que exigen grandes requerimientos computacionales (Pezzinga, 2000; Bergant et al., 2001).

Los modelos cuasi-2D se pueden obtener de las ecuaciones completas de Navier-Stokes para flujos compresibles mediante un análisis de escalas (Ghidaoui, 2004) o analizando los principios de conservación de masa y cantidad de movimiento para los ejes longitudinal y radial (Vardy & Hwang, 1991), asumiendo simetría axial de flujo, que el campo de presiones es unidimensional<sup>1</sup> y sin términos convectivos (Korbar, Virag, & Šavar, 2014).

---

<sup>1</sup> Los modelos cuasi-2D consideran que la variación de la presión  $H$  sobre la dirección radial  $r$  es constante ( $\partial H/\partial r|_{r=0} = 0$ ), esto implica que la velocidad es  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, r; t)$  y  $H = H(x, t)$ , entonces existe un único valor de presión en cada instante de tiempo y en cada sección de la tubería (Pezzinga, 1999).



**Figura 1.5. Perfiles de velocidad durante algunas etapas del flujo transitorio en una sección de la tubería (Brunone et al., 2000)**

El análisis de esfuerzo cortante para los modelos cuasi-2D es (Zhao & Ghidaoui, 2006; Riasi, Nourbakhsh, & Raisee, 2013):

$$\tau = \rho \nu \frac{\partial u}{\partial r} - \rho \overline{u'v'} \quad (1.1.5)$$

En donde  $\overline{u'v'}$  es la covarianza de las fluctuaciones de velocidad en la dirección axial  $u'$  y en la dirección radial  $v'$  usualmente llamado *esfuerzos de Reynolds* (Silva-Araya & Chaudhry, 1997; Currie, 2012; Pantón, 2013).

Para solucionar la expresión (1.1.5) es necesario el uso de modelos de turbulencia dada la presencia del término de perturbación  $-\rho \overline{u'v'}$  (Ghidaoui et al., 2005). Estos modelos permiten mejorar el estado actual del conocimiento sobre la disipación de energía en flujo transitorio; proporcionar información detallada sobre el transporte y mezcla en flujo turbulento (información importante para la realización de modelos relacionados a la calidad

del agua en flujos transitorios) y proveer los datos necesarios para evaluar la validez de los modelos unidimensionales de flujo (Zhao & Ghidaoui, 2003).

En los últimos años, la investigación relacionada a los modelos cuasi-2D centra su aplicación sobre el estudio experimental detallado de los gradientes de velocidad cerca de las paredes del conducto con el fin de mejorar los modelos de turbulencia (Brunone & Berni, 2010), así como su correcta implementación a sistemas complejos (redes de tuberías) y el desarrollo de versiones que mejoren su eficiencia con el fin de convertirlos en potentes y viables herramientas para resolver problemas prácticos (Duan, Ghidaoui, & Tung, 2008).

## **1.2. OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN**

Deducir las ecuaciones fundamentales aplicando los principios básicos de conservación y la teoría de la columna elástica y definir detalladamente las características particulares del modelo matemático.

Resolver en forma discreta las ecuaciones unidimensionales que gobiernan el flujo en tuberías a presión, con un modelo de fricción transitorio basado en aceleración instantánea (IAB) y considerando todos los términos del fenómeno.

Realizar un estudio de convergencia para definir los criterios de convergencia de las ecuaciones, tanto para el sistema continuo como para el discreto.

Comparar los resultados obtenidos en la simulación numérica con resultados presentados en la literatura, con el fin de identificar las diferencias entre estos y establecer las condiciones que mejoren la precisión del modelo propuesto.

Finalmente, se tiene como meta futura desarrollar una herramienta computacional capaz de reproducir transitorios hidráulicos que ocurran en conducciones reales y estimar la evolución completa del fenómeno en el tiempo y el espacio para diversos escenarios y utilizando parámetros de simulación confiables para el modelo.

# CAPÍTULO 2

## ECUACIONES GOBERNANTES DEL FLUJO EN TUBERÍAS

Cuando la velocidad de flujo en una tubería cambia rápidamente (ya sea por la operación normal o accidental del sistema, arranque de bombas o durante maniobras de apertura o cierre de válvulas) la cinética se transforma en ondas de presión que se propagan a través del sistema con las características propias del fluido y en el caso del agua (a 20 °C) pueden alcanzar una velocidad de hasta 1482 m/s (Bilaniuk & Wong, 1993). Este fenómeno es conocido como *transitorio hidráulico* y la magnitud de la presión pueden causar la ruptura o colapso de la tubería (Axworthy et al, 2000).

Los principios básicos para describir el efecto de los transitorios hidráulicos de un flujo unidimensional sobre una tubería a presión, son el de conservación de masa y la segunda ley de Newton (Rich, 1951; Parmakian, 1963; Wylie & Streeter, 1978), su planteamiento da origen a un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico de valor inicial y valores en la frontera, conocidas de manera general como la '*ecuación de continuidad*' y la '*ecuación de cantidad de movimiento*' (Silva-Araya & Chaudhry, 1997; Ghidaoui & Mansour, 2002; Riasi et al., 2010).



**Figura 2.1. Ruptura de una línea de conducción causado por un cierre instantáneo en Francia (Kueny, Combes, Lourenço, Clary, & Ballester, 2014)**



## 2.1. ECUACIONES FUNDAMENTALES

La deducción de las ecuaciones gobernantes que se presenta, se fundamenta en el trabajo de Chaudhry (2014), tomando en cuenta las siguientes consideraciones:

- El flujo es unidimensional y recorre el eje longitudinal de la tubería.
- La distribución de las velocidades sobre la sección transversal del conducto es uniforme, es decir, siempre se estará analizando un flujo medio o promediado<sup>1</sup>.
- Las paredes del tubo y el fluido son linealmente elásticas, por lo tanto los efectos de la expansión y contracción radial son importantes. Lo anterior se aplica en la mayoría de los conductos como son: el metal, concreto, madera, plásticos o túneles no revestidos en rocas.

Para derivar las ecuaciones de conservación se considera el concepto del medio continuo y el seguimiento de las partículas dentro de un volumen de control de forma arbitraria, se realiza en un marco de referencia lagrangiano. Con esta combinación podemos determinar la derivada material del volumen integral (Currie, 2012). Con la derivada material, es posible formular en variables eulerianas, la derivada temporal que sigue a la partícula y las propiedades del fluido pueden ser evaluadas considerando la relación de sus cambios locales en el tiempo y el transporte convectivo. Este último concepto representa el gradiente de cambio en el espacio causado por la variación del campo de velocidad (Panton, 2013).

Entonces, para establecer las ecuaciones fundamentales aplicando las leyes de conservación se utiliza el teorema de transporte de Reynolds, el cual permite relacionar la derivada lagrangiana sobre un volumen de control y el cambio de la propiedad intensiva desde un punto de vista euleriano.

### 2.1.1. TEOREMA DE TRANSPORTE DE REYNOLDS

Considérese una masa específica de fluido a la cual se le sigue su trayectoria durante un corto intervalo de tiempo  $\Delta t$  y sea  $\alpha$  cualquier propiedad del fluido en alguna dirección (masa, momentum o energía).

---

<sup>1</sup> La velocidad media de flujo se define como  $V = T^{-1} \int_A \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS dt$ , donde  $T$  es el periodo de muestreo de un flujo fluctuante;  $A$  el área de la sección transversal;  $dt$  y  $dS$  los elementos diferenciales de tiempo y superficie respectivamente;  $\mathbf{q} = q_x \mathbf{i} + q_y \mathbf{j} + q_z \mathbf{k}$  es el vector velocidad con componentes  $(q_x, q_y, q_z)$  y cosenos directores  $[\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$  y  $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$  es el vector normal a la sección transversal con  $(n_x, n_y, n_z)$  como componentes.

Desde un punto de vista lagrangiano, el tiempo  $t$  y las variables del origen de referencia  $x_o, y_o, z_o$  son independientes y la cantidad  $\alpha$  estará en función del tiempo, solamente si el volumen de control se mueve junto con el fluido. Si  $\alpha = \alpha(t)$ , la relación de cambio de la integral de  $\alpha$  se puede establecer empleando la definición de derivada como un límite:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \alpha(t) d\mathcal{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{\mathcal{V}(t+\Delta t)} \alpha(t+\Delta t) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}(t)} \alpha(t) d\mathcal{V} \right] \quad (2.1.1)$$

Donde  $D/Dt$  es la derivada material<sup>1</sup> y  $\mathcal{V}(t)$  es el volumen de control que contiene la masa específica del fluido que cambia su tamaño y superficie con el flujo.

Si una cantidad  $\alpha(t + \Delta t)$  que se integra sobre  $\mathcal{V}(t)$  se adiciona y sustrae dentro de la integral, para diferenciar las escalas de variación temporal de la propiedad material y la variación del volumen de control sobre la misma propiedad, se obtiene lo siguiente:

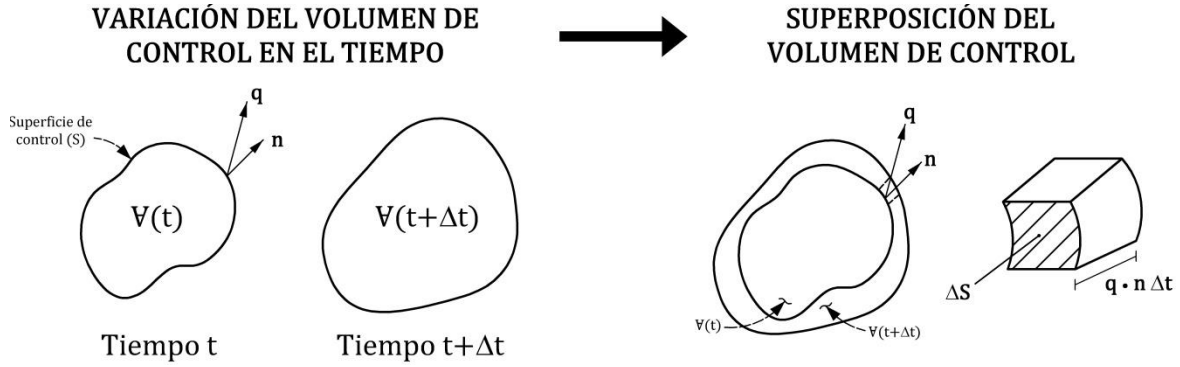
$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \alpha(t) d\mathcal{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{\mathcal{V}(t+\Delta t)} \alpha(t+\Delta t) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}(t)} \alpha(t+\Delta t) d\mathcal{V} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{\mathcal{V}(t)} \alpha(t+\Delta t) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}(t)} \alpha(t) d\mathcal{V} \right] \right\} \quad (2.1.2) \end{aligned}$$

En la ecuación (2.1.2), las primeras dos integrales dentro del límite corresponden a tomar el integrando  $\alpha$  fijo y variar el volumen de control  $\mathcal{V}(t)$ ; en las otras integrales el  $\mathcal{V}(t)$  queda fijo y el integrando  $\alpha$  es variable. El segundo término de la derecha indica la integral de la derivada euleriana y la ecuación puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \alpha(t) d\mathcal{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathcal{V}(t+\Delta t) - \mathcal{V}(t)} \alpha(t+\Delta t) d\mathcal{V} \right] + \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} d\mathcal{V} \quad (2.1.3)$$

Para establecer los cambios temporales del volumen, en la Figura 2.2 se muestra el volumen de control  $\mathcal{V}$  que encierra a una masa de fluido en el tiempo  $t$  y  $t + \Delta t$ , durante este intervalo  $\Delta t$ , el volumen de control se mueve cambiando su tamaño y forma. La superficie que rodea a  $\mathcal{V}$  es la superficie de control  $S$  y en cada punto de ésta existe un vector de velocidad  $\mathbf{q}$  acompañado de un vector normal a la superficie  $\mathbf{n}$ .

<sup>1</sup> El uso del símbolo especial  $\frac{D}{Dt}$  para representar a la derivada material fue establecido por Stokes al observar su frecuente uso en mecánica de fluidos (Panton, 2013). Se define como  $\frac{D\alpha}{Dt} \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial t} + (\mathbf{q} \cdot \nabla)\alpha$ , en donde  $\alpha$  es la propiedad del fluido;  $\mathbf{q}$  el vector velocidad y  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$  el operador Nabla.



**Figura 2.2. Superposición del volumen de control arbitrario  $\forall$  en el tiempo  $t$  y  $\Delta t$  para establecer el cambio de volumen  $\Delta\forall$ , basado en Currie (2012)**

Al sobreponer el volumen  $\forall(t + \Delta t)$  en  $\forall(t)$  se puede establecer un elemento diferencial de volumen  $\Delta\forall$ , cuya distancia perpendicular desde cualquier punto dentro del espacio interior hacia el espacio exterior es  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\Delta t$  donde  $\mathbf{n}$  es el vector a la superficie en el tiempo inicial y por tanto, a cada incremento diferencial de superficie  $\Delta S$  le corresponderá un  $\Delta\forall$  que se puede calcular como  $\Delta\forall = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\Delta t\Delta S$ .

Entonces, el volumen integral dentro del límite en la ecuación (2.1.3) se puede evaluar como una integral de superficie. Al aplicar el límite de la función y reemplazar  $d\forall$  por  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\Delta t dS$  se obtiene:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\forall} \alpha d\forall = \int_S \alpha \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\forall} \frac{\partial \alpha}{\partial t} d\forall \quad (2.1.4)$$

En la ecuación anterior, se aplica el teorema integral de Gauss para transformar la primera integral y evaluar los cambios de la propiedad material en un volumen integral (Currie, 2012; Panton, 2013):

$$\int_{\forall} \nabla \cdot \alpha \mathbf{q} d\forall = \int_S \alpha \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.1.5)$$

Donde  $\nabla$  es el operador nabla. Aplicando el teorema (2.1.5) a la ecuación (2.1.4) resulta:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\forall} \alpha d\forall = \int_{\forall} \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \mathbf{q}) \right] d\forall \quad (2.1.6)$$

La ecuación (2.1.6) es el teorema de transporte de Reynolds y será utilizado para definir las ecuaciones de conservación del flujo en tuberías.

### 2.1.2. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

La ley de conservación de masa nos permite derivar la primera de las ecuaciones gobernantes: la ecuación de continuidad. Este principio fundamental se puede enunciar como: *'La tasa de cambio de masa en el tiempo en el sistema es cero'* (Panton, 2013).

Para obtener la ecuación de continuidad se considera que el flujo es compresible y las paredes del conducto son elásticas (es decir, los cambios de presión acortan o alargan al volumen de control), por tanto existirán efectos radiales sobre el conducto a causa de las contracciones y expansiones que se produzcan; asimismo se considera que la distancia  $x$  sobre el eje longitudinal y la velocidad media de flujo  $V$  poseen signo positivo en la dirección aguas abajo, tal y como se muestra en la Figura 2.3.

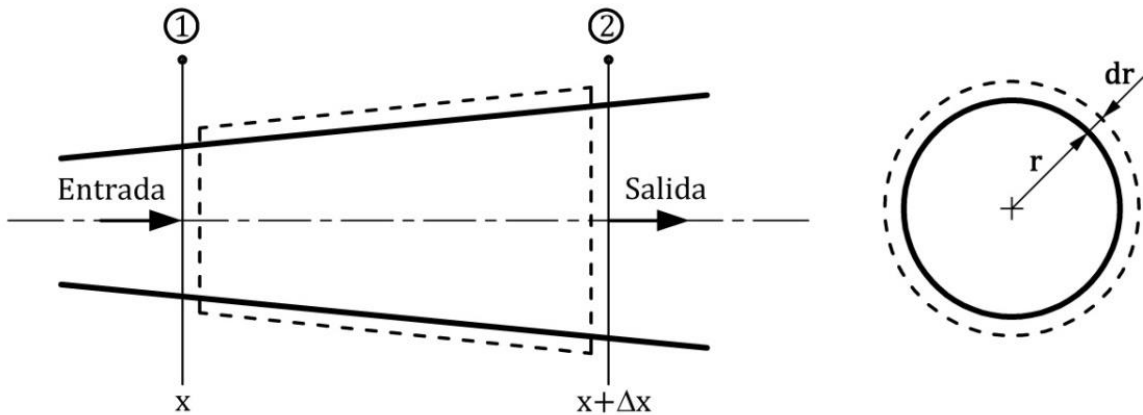


Figura 2.3. Diagrama del volumen de control para deducir la ecuación de continuidad

La equivalencia matemática del principio de conservación de masa se obtiene al integrar la densidad del volumen de control, considerando  $\alpha = \rho$ , por lo que su derivada en un marco de referencia lagrangiano es (Currie, 2012):

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = 0 \quad (2.1.7)$$

Y aplicando el teorema de transporte de Reynolds (2.1.6):

$$\int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) \right] d\mathcal{V} = 0 \quad (2.1.8)$$

Considerando una tubería con variación suave de diámetro, se puede decir que la velocidad media en sentido unidimensional es:

$$V(x, t) = \frac{1}{A} \int_{A(x,t)} \mathbf{q}_x(x, t) \cdot \hat{\mathbf{i}} dS \quad (2.1.9)$$

Aplicando la integral (2.1.9) en el modelo (2.1.8) y desarrollando, se tiene la siguiente ecuación de conservación sobre la línea unidimensional:

$$\int_{x(\xi)} \int_{A(x,t)} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \mathbf{q}_x(x, t) \cdot \hat{\mathbf{i}}) \right] dS d\xi = 0 \quad (2.1.10)$$

Para evaluar el área transversal, se considera la suma de los elementos diferenciales:

$$A(x, t) = \int_{A(x,t)} dS \quad (2.1.11)$$

En base a lo establecido en (2.1.11), la ecuación (2.1.10) puede ser escrita como:

$$\int_{x(\xi)} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho AV) \right] d\xi = 0 \quad (2.1.12)$$

La ecuación (2.1.12) tiene dos soluciones y aquella que cumple el principio de conservación de la propiedad material para cualquier región de integración arbitraria, es cuando el integrando es nulo (Currie, 2012; Panton, 2013), entonces se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho AV) = 0 \quad (2.1.13)$$

El desarrollo de las derivadas da como resultado:

$$A \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \rho \left( \frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \rho A \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2.1.14)$$

En la ecuación (2.1.14) se observa que los términos englobados en paréntesis se definen como las derivadas totales de las variables  $\rho$  y  $A$  que se obtienen al aplicar la regla de la cadena (Hildebrand, 1976):

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (2.1.15)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial x} \quad (2.1.16)$$

Sustituyendo (2.1.15) y (2.1.16) en (2.1.14) y dividiendo la ecuación entre el término  $\rho A$ :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2.1.17)$$

Se puede observar que la ecuación anterior no considera la presión  $p$ , variable que nos interesa en el estudio. Analizando los cambios del volumen de control en función de la compresibilidad del fluido y la flexibilidad de la tubería, es posible obtener la ecuación de conservación de masa en términos de  $V$  y  $p$ .

– *Compresibilidad del fluido:*

El módulo de compresibilidad  $K$  de un fluido es (Wylie & Streeter, 1978):

$$K = \frac{dp}{d\rho/\rho} \quad (2.1.18)$$

Separando las variables e introduciendo la tasa de cambio con respecto al tiempo en la ecuación (2.1.18) se obtiene:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho}{K} \frac{dp}{dt} \quad (2.1.19)$$

– *Elasticidad de la tubería:*

El área de un conducto circular en función del radio  $r$  se calcula como:

$$A = \pi r^2 \quad (2.1.20)$$

La derivada con respecto al tiempo de (2.1.20) es:

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \quad (2.1.21)$$

La deformación unitaria  $\epsilon$  se define como el cociente del alargamiento (deformación total) y la longitud en la que se ha producido (Pytel & Singer, 1994), para el caso de elongación radial en una longitud diferencial la expresión resulta:

$$d\epsilon = \frac{dr}{r} \quad (2.1.22)$$

Al introducir el término unitario  $r/r = 1$  y las ecuaciones (2.1.20) y (2.1.22) en (2.1.21), la igualdad se puede reescribir como:

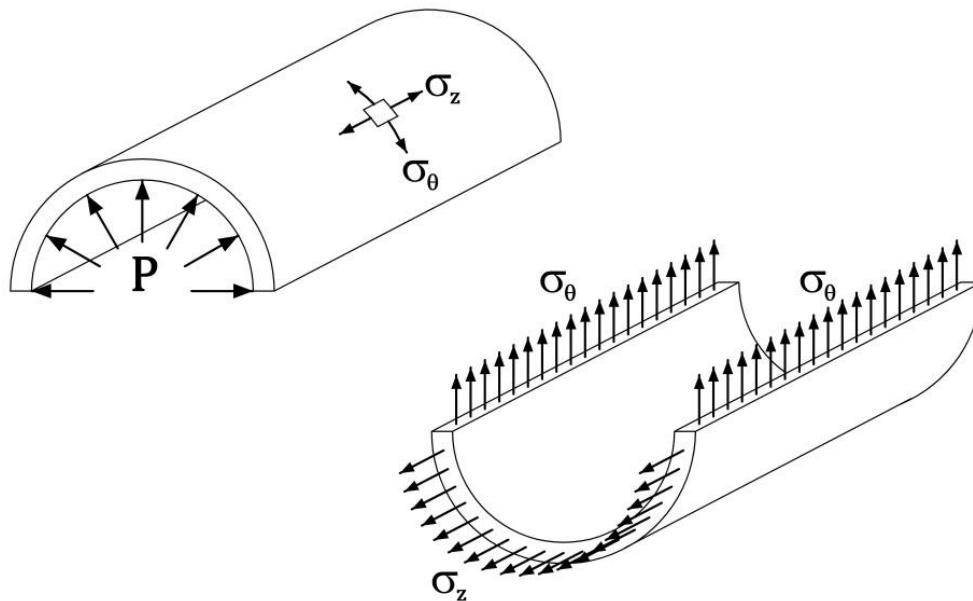
$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = 2 \frac{d\epsilon}{dt} \quad (2.1.23)$$

Una de las consideraciones establecida al inicio del capítulo señala que las paredes del conducto son linealmente elásticas, por tanto están sometidas a expansiones y contracciones en dirección radial. Este tipo de deformación se representa con la relación de Poisson, la cual generaliza la aplicación de la ley de Hooke<sup>1</sup> y determina la variación de dimensiones transversales que acompañan a los esfuerzos (Pytel & Singer, 1994).

Para cilindros de pared delgada sometidos a presión interna, los esfuerzos actuantes son circunferenciales y axiales (Figura 2.4), y la relación de Poisson es:

$$\epsilon = \frac{\sigma_{\theta} - \mu\sigma_z}{E} \quad (2.1.24)$$

Donde  $\sigma_{\theta}$  es el esfuerzo circunferencial;  $\sigma_z$  el esfuerzo axial y  $\mu$  el coeficiente de Poisson.



**Figura 2.4. Cilindro de pared delgada sujeto a presión interna  $P$  que genera esfuerzos circunferenciales  $\sigma_{\theta}$  y axiales  $\sigma_z$ , basado en Hearn (1997)**

<sup>1</sup> La ley de Hooke se suele escribir de la forma  $\sigma = E\epsilon$  y expresa que la pendiente de la recta en el diagrama esfuerzo-deformación de un material linealmente elástico es la relación entre el esfuerzo  $\sigma$  y la deformación unitaria  $\epsilon$ ; dicha pendiente es conocida como *módulo de elasticidad de Young* y se representa con la letra  $E$ .

Si se asume que las condiciones de sujeción de la tubería se aplican en toda su longitud y restringen el esfuerzo axial<sup>1</sup>, se tiene que  $\sigma_z = 0$ . La ecuación (2.1.24) se reduce a:

$$\epsilon = \frac{\sigma_\theta}{E} \quad (2.1.25)$$

Despejando el esfuerzo circunferencial  $\sigma_\theta$  en (2.1.25) y derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{d\sigma_\theta}{dt} = E \frac{d\epsilon}{dt} \quad (2.1.26)$$

El esfuerzo circunferencial para un conducto de pared delgada sometida a presión interna  $p = p(x, t)$  se expresan como (Hearn, 1997):

$$\sigma_\theta = \frac{pD}{2e} \quad (2.1.27)$$

En donde  $e$  es el espesor de la pared de la tubería y  $D$  el diámetro del conducto. Derivando (2.1.27) con respecto al tiempo se obtiene:

$$\frac{d\sigma_\theta}{dt} = \frac{1}{2e} \left( p \frac{dD}{dt} + D \frac{dp}{dt} \right) \quad (2.1.28)$$

Sustituyendo (2.1.26) en (2.1.28):

$$E \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{2e} \left( p \frac{dD}{dt} + D \frac{dp}{dt} \right) \quad (2.1.29)$$

Si  $d\epsilon = dD/D$ , entonces se tiene la siguiente relación paramétrica:

$$\frac{dD(\epsilon)}{dt} = \frac{dD}{d\epsilon} \frac{d\epsilon}{dt} \quad (2.1.30)$$

Por lo que la ecuación (2.1.29) se puede escribir como:

$$E \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{D}{2e} \left( p \frac{d\epsilon}{dt} + \frac{dp}{dt} \right) \quad (2.1.31)$$

---

<sup>1</sup> Esta suposición se hace con el fin de facilitar la deducción; para cada análisis es posible considerar condiciones de sujeción específicas e incluir sus efectos en los cálculos como se verá en el apartado 2.2.1



Factorizando el término  $d\epsilon/dt$  y despejando  $dp/dt$  en (2.1.31):

$$2 \left( \frac{Ee}{D} - \frac{p}{2} \right) \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{dp}{dt} \quad (2.1.32)$$

Dado que el orden de magnitud de  $p/2 \ll Ee/D$  (Chaudhry, 2014), entonces:

$$2 \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{D}{Ee} \frac{dp}{dt} \quad (2.1.33)$$

Y sustituyendo (2.1.23) en (2.1.33):

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{D}{Ee} \frac{dp}{dt} \quad (2.1.34)$$

Retomando la ecuación de continuidad deducida en (2.1.17), sustituimos las expresiones (2.1.19) y (2.1.34):

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\rho}{K} \frac{dp}{dt} \right) + \frac{D}{Ee} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2.1.35)$$

Y factorizando el término  $dp/dt$  en (2.1.35):

$$\left( \frac{1}{K} + \frac{D}{Ee} \right) \frac{dp}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2.1.36)$$

La definición de celeridad de onda  $a$  para un conducto cuya condición de sujeción restringe los esfuerzos axiales es (Chaudhry, 2014):

$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho \left( 1 + \frac{KD}{eE} \right)}} \quad (2.1.37)$$

E introduciendo (2.1.37) en (2.1.36) resulta:

$$\frac{1}{\rho a^2} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2.1.38)$$

Usando la notación  $p = \rho g H(x, t)$  para expresar la presión en metros de columna de agua:

$$\frac{g}{a^2} \frac{dH}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2.1.39)$$

Multiplicando la ecuación por el término  $a^2/g$  y desarrollando la derivada total aplicando la regla de la cadena, la ecuación de continuidad finalmente resulta:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + V \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2.1.40)$$

### 2.1.3. ECUACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La ecuación de cantidad de movimiento se basa en la segunda ley de Newton, este principio de conservación del momento lineal se puede expresar de la siguiente manera: *'La tasa de cambio de la cantidad de movimiento dentro de un medio continuo es igual a la suma de fuerzas que actúan sobre él'* (Panton, 2013).

La ecuación matemática que resulta al aplicar la conservación del momento se obtiene al integrar el producto del vector velocidad por la densidad del fluido contenido en el volumen de control e igualando el resultado con las fuerzas que actúan sobre éste (Currie, 2012):

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{q} d\mathcal{V} = \Sigma F \quad (2.1.41)$$

Aplicando el teorema de transporte de Reynolds (2.1.6) se tiene:

$$\int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{q}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) \right] d\mathcal{V} = \Sigma F \quad (2.1.42)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.1.9) y (2.1.11) y considerando que la propiedad material de la conservación de cantidad de movimiento se cumple en forma intensiva, entonces se obtiene la siguiente ecuación<sup>1</sup>.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho AV) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho AV^2) = \Sigma F \quad (2.1.43)$$

Por otra parte, para el análisis de fuerzas sobre el sistema (Wylie & Streeter, 1978; Ghidaoui et al., 2005; Chaudhry, 2014), la Figura 2.5 muestra el diagrama de cuerpo libre con la posición 1 aguas arriba y 2 aguas abajo en un conducto divergente e inclinado un ángulo  $\theta$  con respecto a la horizontal.

<sup>1</sup> Tal y como se hizo con la ecuación de masa, se toma en cuenta que la distancia  $x$  actúa sobre el eje longitudinal y la velocidad de flujo  $V$  son positivos en dirección aguas abajo.

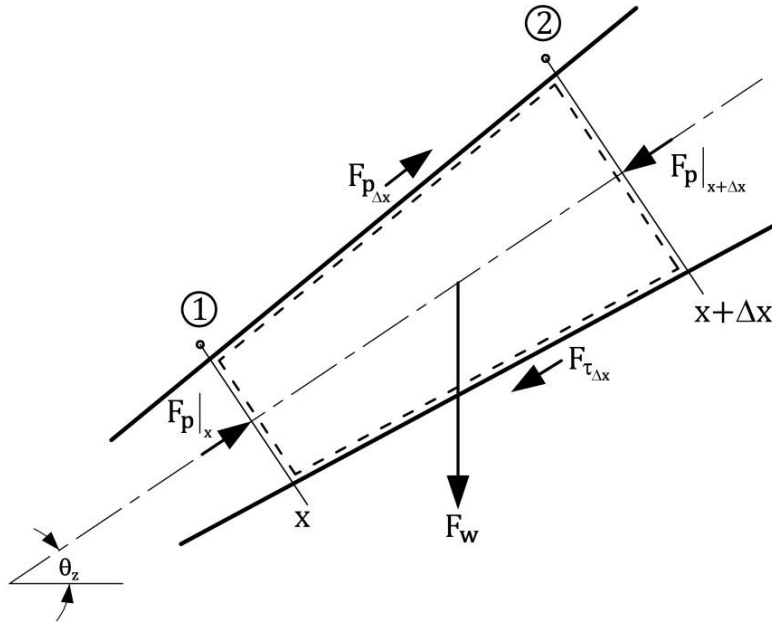


Figura 2.5. Diagrama de cuerpo libre del volumen de control

Las fuerzas de presión normales a las secciones transversales del volumen de control son:

$$F_p|_x = pA \quad (2.1.44)$$

$$F_p|_{x+\Delta x} = pA + \frac{\partial}{\partial x}(pA)\Delta x \quad (2.1.45)$$

La fuerza de presión hidrodinámica es causada por la divergencia de las paredes que aumenta el área de flujo y en consecuencia disminuye la velocidad causando un incremento en la energía de presión (Guaycochea, 1992), este cambio en las fuerzas de presión entre las secciones se representa como:

$$F_{p_{\Delta x}} = p \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x \quad (2.1.46)$$

Para las fuerzas de cuerpo se considera la componente del peso del fluido a lo largo del centro de gravedad (eje longitudinal del conducto). La amplitud del ángulo de inclinación con respecto a la horizontal se mide en el sentido contrario a las manecillas del reloj de modo que si  $0 < \theta_z < \pi$  la tubería se inclina hacia arriba y en consecuencia la componente de la fuerza de peso es adversa al sentido del flujo (de aguas abajo hacia aguas arriba); por otro lado si  $\pi < \theta_z < 2\pi$  la tubería se inclina hacia abajo y la componente de la fuerza de peso, va en el mismo sentido que el flujo (de aguas arriba hacia aguas abajo).

La componente de peso se calculan como:

$$F_{w_x} = -\rho g A \text{ sen } \theta_z \Delta x \quad (2.1.47)$$

La fuerza cortante se define como el esfuerzo cortante  $\tau$  que se produce por el contacto entre el fluido y las paredes del conducto durante el desplazamiento. Su dirección es contraria al sentido de flujo y se puede expresar como:

$$F_\tau = -\tau \pi D \Delta x \quad (2.1.48)$$

Obsérvese que durante la obtención de las fuerzas, se incluyó el signo adecuado para indicar el sentido en dirección longitudinal, en base al diagrama de cuerpo libre (Figura 2.5) y las consideraciones que describen su comportamiento en el sistema.

La sumatoria de fuerzas con las ecuaciones (2.1.44) – (2.1.48) resulta:

$$\Sigma F = -\frac{\partial}{\partial x}(pA) + p \frac{\partial A}{\partial x} - \rho g A \text{ sen } \theta_z - \tau \pi D \quad (2.1.49)$$

Sustituyendo (2.1.49) en (2.1.43):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho AV) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho AV^2) = -\frac{\partial}{\partial x}(pA) + p \frac{\partial A}{\partial x} - \rho g A \text{ sen } \theta_z - \tau \pi D \quad (2.1.50)$$

Igualando a cero y desarrollando las derivadas de los productos, la ecuación (2.1.50) se puede reescribir como:

$$\rho A \frac{\partial V}{\partial t} + V \left[ \frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho AV) \right] + \rho AV \frac{\partial V}{\partial x} + A \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g A \text{ sen } \theta_z + \tau \pi D = 0 \quad (2.1.51)$$

Sustituyendo (2.1.13) en (2.1.51):

$$\rho A \frac{\partial V}{\partial t} + \rho AV \frac{\partial V}{\partial x} + A \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g A \text{ sen } \theta_z + \tau \pi D = 0 \quad (2.1.52)$$

Empleando  $p = \rho g H$  para calcular la presión en metros de columna de agua y dividiendo la ecuación (2.1.52) entre el término  $\rho A$  la ecuación de cantidad de movimiento es:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g \text{ sen } \theta_z + \frac{\tau \pi D}{\rho A} = 0 \quad (2.1.53)$$

## 2.2. CARACTERÍSTICAS PARTICULARES DEL MODELO MATEMÁTICO

### 2.2.1. EVALUACIÓN DE LA CELERIDAD DE ONDA

Durante el siglo XIX los estudios relacionados a las ondas estacionarias en instrumentos musicales y en el flujo sanguíneo a través de las venas exigían la determinación precisa de la velocidad del sonido en los fluidos, como resultado se logró relacionar adecuadamente la propagación de ondas en líquidos confinados, en función de las propiedades elásticas del conducto y del fluido, así como de las restricciones externas de sujeción de los elementos del sistema (Tijsseling, 1993).

Las propiedades elásticas que intervienen están relacionadas con el tamaño del conducto, el espesor de la pared y el material del que está hecho, por otro lado las restricciones de sujeción incluyen el tipo de soporte y la libertad de movimiento de la tubería en la dirección longitudinal (Chaudhry, 2014). En su versión conservativa, la celeridad de onda  $a$  se expresa como (Ghidaoui et al., 2005):

$$\frac{1}{a^2} = \frac{d\rho}{d\rho} + \frac{\rho}{A} \frac{dA}{d\rho} \quad (2.2.1)$$

En la ecuación (2.2.1) el primer término del lado derecho representa el efecto de la compresibilidad del fluido y el segundo la flexibilidad del conducto; por tanto, si se estudia la celeridad de onda de un flujo compresible en una tubería rígida, se tiene que  $dA/d\rho = 0$ , en cambio si se trata de un flujo incompresible en una tubería elástica  $d\rho/d\rho = 0$ .

La fórmula de Résal-Moens-Korteweg es la primera expresión utilizada para determinar la celeridad de onda durante el fenómeno transitorio considerando los efectos causados por la elasticidad de la tubería, la compresibilidad del flujo y las restricciones de movimiento de la tubería (Tijsseling, 1993; Tijsseling & Anderson, 2012):

$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho \left(1 + \psi_c \frac{DK}{eE}\right)}} \quad (2.2.2)$$

En donde  $a$  es la celeridad de onda;  $\rho$  y  $K$  son la densidad y el módulo de compresibilidad del fluido respectivamente;  $D$  el diámetro de la tubería;  $e$  el espesor (del francés '*épaisseur*') y  $E$  el módulo de Young del material; además se propone el uso del coeficiente de restricción axial  $\psi_c$  cuyo valor está en función del coeficiente de Poisson  $\mu_P$  y puede ser modificado con el fin de contemplar hasta tres casos teóricos relacionados a las condiciones de sujeción del sistema (Tabla 2.1).

**Tabla 2.1. Valores del parámetro  $\psi_c$  en la ecuación (2.2.2), basado en Tijsseling (1996)**

Caso	Descripción
$\psi_c = 1$	Tubería anclada con juntas de expansión en toda su longitud.
$\psi_c = 1 - \mu_p^2$	Tubería anclada a lo largo restringiendo el movimiento axial.
$\psi_c = 1 - \frac{\mu_p}{2}$	Tubería anclada únicamente en su extremo aguas arriba.

Para derivar la fórmula (2.2.2) se considera que la tubería está conformada por una serie de anillos de masa despreciable que se expanden y contraen de acuerdo a la presión interna del fluido y donde intervienen el esfuerzo circunferencial y el desplazamiento radial.

El tipo de análisis presentado en este documento no toma en cuenta la interacción fluido-estructura (FSI por sus siglas en inglés '*Fluid-Structure Interaction*'), es decir, el esfuerzo axial sobre las paredes  $\sigma_z$ , la inercia del conducto y la densidad del material en las paredes de la tubería  $\rho_t$  son despreciables (Tijsseling, 1996):

$$\sigma_z = 0 \quad (2.2.3)$$

$$\rho_t = 0 \quad (2.2.4)$$

El estudio del FSI toma importancia en sistemas con pocas restricciones de movimiento en sus anclajes, haciendo que el comportamiento dinámico del líquido y la tubería deba ser tratado de manera simultánea al flujo transitorio (Tijsseling, 1993). La interacción del fluido y la estructura se manifiesta en forma de vibraciones sobre el conducto y generando perturbaciones en la presión y velocidad del líquido (Wiggert & Tijsseling, 2001).

Halliwell (1963) presentó una expresión generalizada para estimar la celeridad de onda  $a$  basándose en casos prácticos y examinando rigurosamente los valores de  $\psi_c$  para describir un mayor número de posibles condiciones (Tabla 2.2); su formulación será la empleada para el cálculo de la celeridad de onda:

$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho \left(1 + \psi_c \frac{K}{E}\right)}} \quad (2.2.5)$$

Con la ecuación (2.2.5), el autor concluye que la elasticidad de la tubería reduce la velocidad de viaje de la onda de manera significativa a diferencia de las restricciones de sujeción; sin embargo, este efecto en vez de ser ignorado debe ser detallado junto con las suposiciones que describen al sistema con el fin de mejorar la estimación del parámetro de celeridad  $a$  para su aplicación en la ecuación de conservación de masa (2.1.40).

Tabla 2.2. Valores del parámetro  $\psi_c$  en la ecuación (2.2.5) basado en Halliwell (1963)

Descripción	Valor
<i>Caso 1. Tubería rígida</i>	
– Tubería que no sufre deformaciones	$\psi_c = 0$
<i>Caso 2. Tubería elástica de pared gruesa<sup>†</sup></i>	
– Tubería anclada contra el movimiento longitudinal en toda su extensión	$\psi_c = 2(1 + \mu_p) \left[ \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} \right] - \left[ \frac{2\mu_p a^2}{b^2 - a^2} \right]$
– Tubería anclada contra el movimiento longitudinal en el extremo contrario a la válvula final	$\psi_c = 2 \left[ \frac{b^2 + 1.5a^2}{b^2 - a^2} + \frac{\mu_p(b^2 - 3a^2)}{b^2 - a^2} \right]$
– Tubería con juntas de expansión instaladas frecuentemente	$\psi_c = 2 \left[ \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \mu_p \right]$
<i>Caso 3. Tubería elástica de pared delgada</i>	
– Tubería anclada contra el movimiento longitudinal en toda su extensión	$\psi_c = \frac{D}{e} (1 - \mu_p^2)$
– Tubería anclada contra el movimiento longitudinal en el extremo contrario a la válvula final	$\psi_c = \frac{D}{e} \left( \frac{5}{4} - \mu_p \right)$
– Tubería con juntas de expansión instaladas frecuentemente	$\psi_c = \frac{D}{e}$
<sup>†</sup> En esta tabla las variables $a$ y $b$ corresponden a los radios interno y externo de la conducción respectivamente.	

Para el caso de túneles en roca sólida, Halliwell (1963) presenta expresiones extensas que resultan complicadas, éstas se simplifican al modificar parámetros específicos de su formulación que incluyan las características de la roca (Tabla 2.3). Se debe tener en cuenta que los cálculos se ven afectados por las condiciones no homogéneas de la roca, asimismo la presencia de fisuras restringe la precisión de los resultados.

Otros casos particulares como tuberías de madera, policloruro de vinilo (PVC), plásticos reforzados, conductos no circulares o el efecto que causa la inclusión de aire sobre la velocidad de onda no son presentados pero pueden ser consultados en Parmakian (1963), Watters (1980) o Chaudhry (2014).

**Tabla 2.3. Modificaciones en el cálculo de la celeridad en túneles, basado en Chaudhry (2014)**

Tipo de túnel	Especificaciones	Valor
Excavado en roca.	El valor de $E$ en la ecuación (2.2.5) debe remplazarse por el módulo elástico transversal $G$ de la roca.	$\psi_c = 0$ $E = G$
Con tubería de acero	El valor de $E$ le corresponde al módulo de elasticidad del acero y $e$ al espesor del conducto.	$\psi_c = \frac{DE}{GD + Ee}$
Con tubería de concreto reforzado.	Se emplea un espesor equivalente $e_e$ que se calcula con el radio del módulo de elasticidad del concreto reforzado <sup>†</sup> $E_r$ ; el espesor de la tubería de concreto $e_c$ ; el área de la sección transversal $A_s$ y el espaciamiento entre varillas de acero $l_s$ .	$\psi_c = \frac{DE}{GD + Ee_e}$ $e_e = E_r e_c + \frac{A_s}{l_s}$

<sup>†</sup> El valor de  $E_r$  varía de 0.06 a 0.1. En caso de considerar grietas se sugiere usar 0.05 (Parmakian, 1963).

### 2.2.2. EVALUACIÓN DEL TÉRMINO DE FRICCIÓN

Tal y como se mencionó en el apartado 1.1, el esfuerzo cortante durante el paso de un transitorio se puede expresar como (Ghidaoui & Mansour, 2002; Vardy & Brown, 2004a):

$$\tau(x, t) = \tau_p(x, t) + \tau_t(x, t) \quad (2.2.6)$$

En donde  $x$  es la posición espacial sobre el eje longitudinal de la tubería y  $t$  el tiempo como variables independientes;  $\tau$  el esfuerzo cortante global;  $\tau_p$  el esfuerzo cortante en estado permanente<sup>1</sup> y  $\tau_t$  la contribución debida a las características transitorias del flujo.

En base a este planteamiento, a continuación se detallan los modelos a usar para evaluar la fricción en las ecuaciones unidimensionales de flujo, tanto para el término permanente como para el transitorio.

<sup>1</sup> El término permanente hace referencia a la teoría donde se establecen los coeficientes de fricción para el modelo de pérdidas de Darcy-Weisbach (Nikuradse, 1950). De manera funcional en el modelo, el término  $\tau_p(x, t)$  es una variable dependiente con variación espacio-temporal.



### 2.2.2.1. TÉRMINO DE FRICCIÓN PERMANENTE

Para evaluar el esfuerzo cortante permanente  $\tau_p$  se empleará el modelo de pérdidas de Darcy-Weisbach<sup>1</sup> (Wylie & Streeter, 1978; Ghidaoui et al., 2005; Chaudhry, 2014):

$$\tau_p = f_p \frac{\rho |V|V}{8} \quad (2.2.7)$$

Donde  $f_p$  es el factor de fricción en estado permanente y mediante un análisis dimensional puede demostrarse que está en función del número de Reynolds  $Re$  y la rugosidad relativa  $\varepsilon/D$  de la tubería (Guaycochea, 1992).

El número de Reynolds es un número adimensional que permite clasificar el comportamiento del flujo en función de las fuerzas inerciales, las fuerzas viscosas y las propiedades geométricas de la conducción (Reynolds, 1883):

$$Re = \frac{VD}{\nu} \quad (2.2.8)$$

Donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática del agua, definido como el cociente de la viscosidad dinámica y la densidad del fluido.

Para analizar la naturaleza del flujo en tuberías, Reynolds (1883) inyectó colorante en agua mientras circulaba por una tubería transparente para poder identificar la velocidad a la cual la sustancia comenzaba a mezclarse con el líquido y se producían efectos turbulentos; con esto estableció un valor crítico de la ecuación (2.2.8) que separe los dos tipos de comportamiento actualmente conocidos como '*régimen laminar*' y '*régimen turbulento*'.

Este valor crítico del número de Reynolds resulta no ser fijo, algunos investigadores reportan que han logrado mantener el flujo laminar hasta valores de  $Re$  de 40000 y aún mayores, pero siempre bajo condiciones especiales de laboratorio tales como conservar el líquido en reposo durante mucho tiempo previo al experimento y evitar todo tipo de vibraciones; en la práctica ingenieril se considera que nunca es mayor que 4000 y que existe una '*zona de transición*' para la cual no es posible predecir con exactitud si el flujo será laminar o turbulento (Guaycochea, 1992). Diversos autores establecen que el valor mínimo del Reynolds crítico oscila entre 1800 y 2300 (Darbyshire & Mullin, 1995).

---

<sup>1</sup> Nótese que en lugar de escribir  $V^2$  se utilizó la notación  $|V|V$  en la ecuación (2.2.7), con este cambio se evalúa automáticamente la dirección de flujo durante el transitorio en base al signo de la variable dependiente.

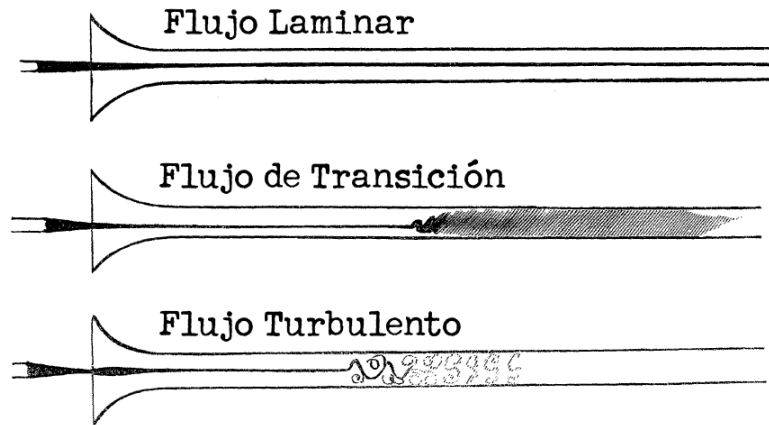


Figura 2.6. Resultados del experimento de Reynolds (1883)

Dado que el valor del factor de fricción en estado permanente está en función del número de Reynolds (y por tanto del régimen de flujo) se utilizarán expresiones analíticas para evaluar al término  $f_p$  sujetos a los siguientes intervalos (Sotelo, 1994):

$$Re \leq 2300 \quad f_p = \frac{64}{Re} \quad (2.2.9)$$

$$Re > 2300 \quad \frac{1}{\sqrt{f_p}} = -2 \log_{10} \left[ \frac{\varepsilon/D}{3.71} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f_p}} \right] \quad (2.2.10)$$

La ecuación (2.2.9) conocida como '*ley de Poiseuille*' (Sutera & Skalak, 1993) evalúa el factor de fricción en régimen laminar y es válido para tubos lisos o rugosos en los cuales el número de Reynolds no rebasa el valor crítico de 2300. La ecuación (2.2.10) corresponde a la '*fórmula general de Colebrook-White*' para flujo en la zona de transición entre régimen laminar y turbulento (Colebrook, 1939) y se ajusta a los resultados de Nikuradse (1950) para condiciones de flujo turbulento.

### 2.2.2.2. TÉRMINO DE FRICCIÓN TRANSITORIO

Para el término transitorio  $\tau_t$  se propone el uso de un modelo Basado en Aceleración Instantánea<sup>1</sup> con amplio reconocimiento internacional.

<sup>1</sup> El modelo seleccionado únicamente fue implementado en las ecuaciones gobernantes. Al ser un modelo n bastante aceptación internacional, no se realizaron desarrollos ni modificaciones adicionales durante el trabajo de investigación.

La formulación es conocida como '*la propuesta original de Brunone*' o simplemente '*modelo de Brunone*' y ha sido probada para casos de cierre en tuberías con válvulas en la frontera aguas abajo obteniendo resultados que se ajustan correctamente a los datos experimentales (Pezzinga, 2000; Bergant et al., 2001).

La ecuación que evalúa la aportación del esfuerzo cortante en flujo transitorio es (Abreu & Betâmio de Almeida, 2004; Ghidaoui et al., 2005):

$$\tau_t = \frac{k_t \rho D}{4} \left( \frac{\partial V}{\partial t} - a \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (2.2.11)$$

En donde  $k_t$  es llamado '*coeficiente de fricción de Brunone*' (Bergant et al., 2001) y actúa como factor de decaimiento sobre los términos de aceleración temporal y convectiva de la ecuación de cantidad de movimiento (Brunone, Golia, & Greco, 1995).

La aplicación del modelo de Brunone requiere una confiable estimación del parámetro  $k_t$  (Ghidaoui et al., 2005). En una primera aproximación determinada experimentalmente para su modelo, Brunone et al., (1995) sugiere que el valor del coeficiente varía en el intervalo de 0.03 a 0.1, asimismo señala que una mejor evaluación puede ser hecha usando datos generados en pruebas de laboratorio y aplicando la siguiente relación analítica:

$$h_n - h_{n-1} = \frac{1}{1 + k_t^2} \quad (2.2.12)$$

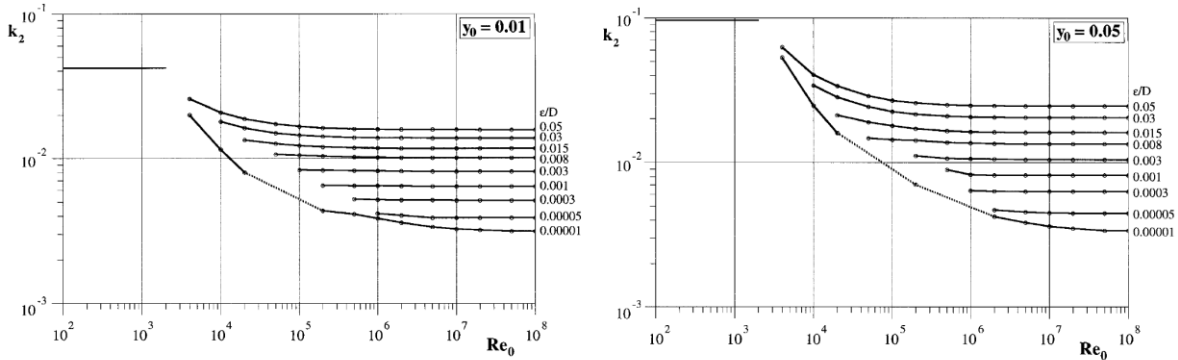
En donde  $h_n$  y  $h_{n-1}$  son las máximas alturas piezométricas en dos periodos consecutivos cualesquiera, tomados en algún instante posterior al fin del cierre total de la válvula (Brunone & Morelli, 1999).

Pezzinga (2000) para estudiar la relación del parámetro  $k_t$  con el resto de las variables presentes en el fenómeno, realizó un análisis dimensional considerando un cierre instantáneo en el extremo aguas abajo de una tubería en serie y con un tanque de nivel constante aguas arriba. En sus resultados obtuvo tres parámetros característicos: la rugosidad relativa de la tubería  $\varepsilon/D$ , el número de Reynolds relacionado a la velocidad media en la condición inicial  $R_o$  y un parámetro característico de la tubería  $y_o$ :

$$y_o = J_o \frac{g L}{a V_o} \quad (2.2.13)$$

En donde  $J_o$  es la pendiente de energía y  $V_o$  la velocidad media, ambos calculados en la condición inicial de flujo.

Con los parámetros definidos, Pezzinga (2000) evaluó el término transitorio mediante la comparación sistemática de los resultados obtenidos en el modelo unidimensional con un modelo cuasi-2D propuesto por él mismo (Pezzinga, 1999). Tomando como referencia los resultados de su modelo cuasi-2D, realizó la corrección del esfuerzo cortante y relacionó el término  $k_t$  al que llamó  $k_2$  con los parámetros adimensionales; sus resultados los presentó en gráficas logarítmicas (Figura 2.7) y concluyó que buscar reglas generales al fenómeno con este procedimiento, resulta difícil dada la dependencia de  $k_t$  con  $y_0$ .



**Figura 2.7. Coeficiente  $k_t$  en función de los parámetros  $y_0$ ,  $\epsilon/D$  y  $Re_o$  (Pezzinga, 2000)**

Por otra parte, Vardy & Brown (1995) estudiaron la contribución de la fricción transitoria en el modelo Basado en Convolución de Zielke (1966) para flujo laminar, el cual emplea una función de peso  $W$  que evalúa la integral de convolución para determinar los efectos transitorios del fenómeno; el objetivo de los autores era desarrollar una función válida para flujo turbulento en tuberías lisas.

Una vez desarrollado su modelo, analizaron el caso de aceleración uniforme e integraron su función de peso  $W$ ; como resultado obtuvieron un coeficiente de fricción transitorio  $f_{uL}$  al que llamaron  $k_3$  que estima el término  $k_t$  del modelo de Brunone bajo la siguiente relación (Szymkiewicz, 2002; Abreu & Betâmio de Almeida, 2009):

$$f_{uL} = k_t = 2\sqrt{C^*} \quad (2.2.14)$$

Donde  $C^*$  es un coeficiente de decaimiento que varía en función del número de Reynolds (Vitkovský et al., 2000; Tiselj & Gale, 2008):

$$Re \leq 2300 \quad C^* = 0.00476 \quad (2.2.15)$$

$$Re > 2300 \quad C^* = \frac{7.41}{Re^{\log_{10}(14.3/Re^{0.05})}} \quad (2.2.16)$$

Bergant et al. (2001) incorporó la propuesta de Vardy & Brown (1995) a su algoritmo numérico estableciendo lo siguiente:

$$k_t = \frac{\sqrt{C^*}}{2} \quad (2.2.17)$$

La estimación de  $k_t$  con la ecuación (2.2.17) fue usada junto con una variante modificada del modelo de Brunone desarrollada por Vitkovský<sup>1</sup>, que evalúa el signo del término convectivo y es válida para un mayor número de escenarios del fenómeno.

Después de analizar los ciclos de aceleración y desaceleración del término convectivo y el aumento y reducción del esfuerzo cortante del nuevo modelo empleado, concluyeron que al dividir la ecuación (2.2.14) entre cuatro, la atenuación de las ondas mejoraba, comparando sus resultados con mediciones experimentales (Szymkiewicz, 2002). El uso esta variante de  $k_t$  ha sido empleado en los trabajos desarrollados por otros autores como Landry, Nicolet, Bergant, Müller, & Avellan (2012), Jonsson, Ramdal, & Cervantes (2012) y Prashanth Reddy et al. (2012).

Vardy & Brown (2003) realizaron una revisión a las hipótesis de su modelo para aumentar la precisión de los resultados y encontraron que en su trabajo previo (Vardy & Brown, 1995), los valores de  $C^*$  sobreestimaban las tasas de decaimiento, especialmente para números de Reynolds altos. Para corregir las incompatibilidades encontradas, propusieron una nueva ecuación para evaluar el valor de  $C^*$ :

$$2000 < Re < 10^8 \quad C^* = \frac{12.86}{Re^{\log_{10}(15.29/Re^{0.0567})}} \quad (2.2.18)$$

Los valores calculados con (2.2.18) son mayores en comparación a su predecesor presentado en la ecuación (2.2.16) y la variación de  $k_t$  al contrastar ambas expresiones se puede apreciar en la Figura 2.8. Finalmente, cabe mencionar que no fue incluido un nuevo valor para régimen laminar (Prashanth Reddy et al. 2012) y se sigue usando la ecuación (2.2.15) modificando el rango del número de Reynolds:

$$Re \leq 2000 \quad C^* = 0.00476 \quad (2.2.19)$$

---

<sup>1</sup> Pezzinga (2000) propuso una modificación al modelo de Brunone idéntica a la formulación atribuida a Vitkovský; tiempo después, el autor expresó su asombro al ver que ambos habían llegado a resultados similares de manera independiente (Szymkiewicz, 2002).

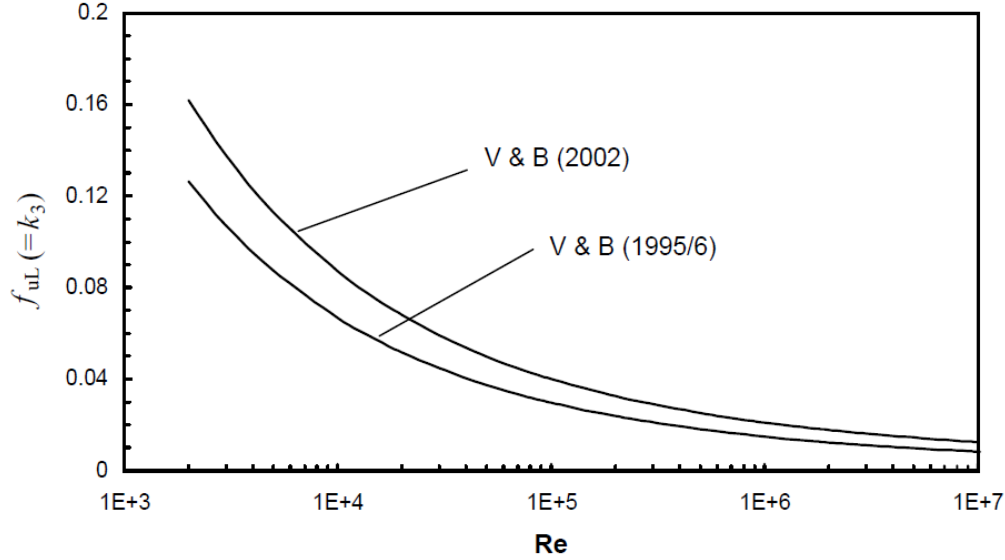


Figura 2.8. Coeficiente  $k_t$  en función del número de Reynolds (Vardy & Brown, 2003)

En resumen, el término de fricción de Brunone  $k_t$  queda en función del coeficiente de decaimiento  $C^*$  de Vardy & Brown y se tienen tres formas distintas para su cálculo.

Por último, el esfuerzo cortante global se obtiene al sustituir (2.2.7) y (2.2.11) en (2.2.6):

$$\tau = f_p \frac{\rho |V|V}{8} + \frac{k_t \rho D}{4} \left( \frac{\partial V}{\partial t} - a \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (2.2.20)$$

Incorporando el modelo de fricción transitorio (2.2.20) a la ecuación de cantidad de movimiento (2.1.53), resulta:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g \operatorname{sen} \theta_z + f_p \frac{|V|V}{2D} + k_t \left( \frac{\partial V}{\partial t} - a \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.2.21)$$

Y factorizando los términos de aceleración, la forma final de la ecuación de cantidad de movimiento a utilizar es:

$$(1 + k_t) \frac{\partial V}{\partial t} + (V - ak_t) \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g \operatorname{sen} \theta_z + f_p \frac{|V|V}{2D} = 0 \quad (2.2.22)$$

Obsérvese que si se emplea únicamente el modelo de pérdidas en estado permanente, es decir  $k_t = 0$ , la ecuación (2.2.22) pasa a ser:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g \operatorname{sen} \theta_z + f_p \frac{|V|V}{2D} = 0 \quad (2.2.23)$$

## 2.3. MODELOS DE FLUJO EN TUBERÍAS

Las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento detalladas anteriormente, representan un sistema dimensionalmente homogéneo que evalúa el fenómeno transitorio en tuberías. En función de las consideraciones y/o restricciones de flujo, las ecuaciones pueden ser modificadas para dar paso a diferentes modalidades de análisis.

En el apartado 2.3.1 se definirá la versión del sistema que se estudiará a lo largo del documento. Adicionalmente, se evaluarán aquellos aspectos que conforman la teoría clásica de los transitorios hidráulicos, con el fin de establecer las principales diferencias entre el modelo de estudio y las versión clásica, incluyendo los rangos de aplicación, limitaciones de uso, condiciones de frontera e inicial y las diferencias entre cada uno de ellos mediante la determinación de sus valores característicos.

### 2.3.1. VERSIÓN CONSERVATIVA

La ecuación de continuidad y de cantidad de movimiento, describen la evolución del fenómeno transitorio en un conducto a presión; dada la naturaleza de su deducción, de ahora en adelante se hará referencia a ellas como '*ecuaciones gobernantes en su versión conservativa*':

*Definición 1.* Sea el sistema de ecuaciones gobernantes del flujo en tuberías en su versión conservativa con fricción transitoria.

– *Ecuación de continuidad*

$$\mathcal{L}(H, V; x, t) = \frac{\partial H}{\partial t} + V \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{a^2(x)}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2.3.1)$$

– *Ecuación de cantidad de movimiento*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(H, V; x, t) = & [1 + k_t(V; x, t)] \frac{\partial V}{\partial t} + [V - a(x)k_t(V; x, t)] \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g \operatorname{sen} \theta_z \\ & + f_p(V; x, t) \frac{|V|V}{2D(x)} = 0 \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

En donde  $x$  es la coordenada en el sentido longitudinal y  $t$  el tiempo como variables independientes;  $H(x, t)$  y  $V(x, t)$  son la presión y la velocidad respectivamente como variables dependientes y  $x, t: \Omega \in [0, L] \times [0, T]$  que delimitan el espacio de solución

$\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $L$  es la longitud total de la conducción y  $T$  el tiempo final de solución;  $g$  es la aceleración de la gravedad;  $a(x)$  es la celeridad de onda;  $\theta_z$  es el ángulo de inclinación de la tubería con respecto a la horizontal y se mide en el sentido contrario a las manecillas del reloj;  $f_p(V; x, t)$  y  $k_t(V; x, t)$  los coeficientes de fricción en estado permanente y transitorio respectivamente y  $D(x)$  el diámetro de la sección transversal.

El sistema de ecuaciones (2.3.1) y (2.3.2) a resolver, constituye un problema bien planteado en el sentido de Hadamard (Drolet & Gray, 1988), de valor inicial y valores en las fronteras de tipo hiperbólico. La condición inicial se define para para el tiempo  $t = 0$  en condición permanente, con  $V(x, 0) = V_o(x)$  que es la velocidad media de flujo en cada punto y  $H(x, 0) = H_o(x)$  representa la carga de presión a lo largo de la tubería:

$$V(x, 0) = V_o(x) \quad ; \quad t = 0 \quad (2.3.3)$$

$$H(x, 0) = H_o(x) \quad ; \quad t = 0 \quad (2.3.4)$$

Para la condición de frontera aguas abajo ( $x = L$ ) se considera una ley de cierre en la válvula, esto es  $V(L, t) = g(t)$  y para la condición aguas arriba ( $x = 0$ ) se usa la carga de presión que suministra el embalse  $H(0, t) = h(t)$ , ambos evaluados para  $t \geq 0$ :

$$V(L, t) = g(t) \quad ; \quad t \geq 0 \quad (2.3.5)$$

$$H(0, t) = h(t) \quad ; \quad t \geq 0 \quad (2.3.6)$$

Al multiplicar la ecuación (2.3.2) por el término  $(1 + k_t)^{-1}$ , el sistema de ecuaciones gobernantes se puede expresar en forma matricial de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial t} + \mathbf{B}_1 \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial x} + \mathbf{G}_1 = \mathbf{0} \quad (2.3.7)$$

En donde:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} V & \frac{a^2}{g} \\ \frac{g}{1 + k_t} & \frac{V - ak_t}{1 + k_t} \end{bmatrix} \quad (2.3.8)$$

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{g \text{ sen } \theta_z}{1 + k_t} + \frac{f_p |V| V}{2D(1 + k_t)} \end{bmatrix} \quad (2.3.9)$$



$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} H \\ V \end{bmatrix} \quad (2.3.10)$$

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.11)$$

La matriz  $\mathbf{B}_1$  se define como la matriz de convección y con ella se define la función característica  $f(\lambda_c)$  y los eigenvalores  $\lambda_c$  de las ecuaciones a través de la siguiente relación:

$$f(\lambda_c) = \det(\mathbf{B}_1 - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

En donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad; entonces la función característica resulta:

$$f(\lambda_c) = \lambda_c^2 + \frac{ak_t - Vk_t - 2V}{1 + k_t} \lambda_c + \frac{(V^2 - Vak_t - a^2)}{1 + k_t} = 0 \quad (2.3.12)$$

Y los eigenvalores:

$$\lambda_{c1,2} = \frac{2V + Vk_t - ak_t}{2(1 + k_t)} \pm \frac{\sqrt{V^2k_t^2 + 2Vak_t^2 + a^2(k_t^2 + 4k_t + 4)}}{2(1 + k_t)} \quad (2.3.13)$$

### 2.3.2. VERSIÓN NO CONSERVATIVA (FORMULACIÓN CLÁSICA)

En muchas aplicaciones de ingeniería se acepta que los términos de aceleración convectiva  $V(\partial H/\partial x)$  y  $V(\partial V/\partial x)$  junto con la pendiente  $\theta_z$  son muy pequeños comparados con otros términos por lo que pueden ser despreciados para facilitar su solución (Wylie & Streeter, 1978; Chaudhry, 2014). Para evaluar la magnitud de cada uno de los términos de las ecuaciones gobernantes, se llevará a cabo un análisis de orden de magnitud.

Sea  $(x_o, t_o)$  un punto de referencia arbitrario en el espacio de solución, alejado de la frontera, en donde se cumplen las siguientes relaciones para las variables dependientes:

$$V_o = V(x_o, t_o) \quad (2.3.14)$$

$$H_o = H(x_o, t_o) \quad (2.3.15)$$

Además, sean  $X$  y  $T$  las escalas de espacio y tiempo respectivamente asociadas a las soluciones de referencia (2.3.14) y (2.3.15). Entonces se pueden definir las siguientes variables adimensionales de espacio y tiempo con sus respectivos órdenes de magnitud:

$$x^* = \frac{x}{X} = O(1) \quad (2.3.16)$$

$$t^* = \frac{t}{T} = O(1) \quad (2.3.17)$$

Y para las variables dependientes, se introducen los siguientes escalamientos:

$$V = V_o V^*(x^*, t^*) = O(1) \quad (2.3.18)$$

$$H = H_o H^*(x^*, t^*) = O(1) \quad (2.3.19)$$

En donde el superíndice \* indica que la variable es adimensional. Sustituyendo las ecuaciones (2.3.14) – (2.3.19) y desarrollando, la ecuación de conservación de masa (2.1.40) en forma adimensional pasa a ser:

$$\frac{\partial H^*}{\partial t^*} + \frac{TV_o}{X} V^* \frac{\partial H^*}{\partial x^*} + \frac{TV_o}{XH_o} \frac{a^2}{g} \frac{\partial V^*}{\partial x^*} = 0 \quad (2.3.20)$$

Y para la ecuación de cantidad de movimiento (2.2.21) se tiene:

$$\frac{\partial V^*}{\partial t^*} + \frac{TV_o}{X} V^* \frac{\partial V^*}{\partial x^*} + \frac{TH_o}{XV_o} g \frac{\partial H^*}{\partial x^*} + \frac{T}{V_o} g \sen \theta_z + T f_p \frac{V_o V^{*2}}{2D} + k_t \left( \frac{\partial V^*}{\partial t^*} - \frac{T}{X} a \frac{\partial V^*}{\partial x^*} \right) = 0 \quad (2.3.21)$$

Para determinar el orden de magnitud de cada término en las ecuaciones (2.3.20) y (2.3.21), se definen los parámetros característicos del fenómeno en las escalas.

Entonces, sean  $V_o$  y  $H_o$  las escalas de velocidad y presión respectivamente;  $X = L$  la escala espacial dada por la longitud del conducto y  $T = L/a$  la escala de tiempo del transitorio en función del viaje de la onda. Al sustituir las definiciones planteadas se obtiene:

$$\frac{\partial H^*}{\partial t^*} + \frac{V_o}{a} V^* \frac{\partial H^*}{\partial x^*} + \frac{V_o}{H_o} \frac{a}{g} \frac{\partial V^*}{\partial x^*} = 0 \quad (2.3.22)$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial t^*} + \frac{V_o}{a} V^* \frac{\partial V^*}{\partial x^*} + \frac{H_o}{V_o a} g \frac{\partial H^*}{\partial x^*} + \frac{L}{aV_o} g \sen \theta_z + \frac{V_o}{a} f_p \frac{V^{*2}}{2D} L + k_t \left( \frac{\partial V^*}{\partial t^*} - \frac{\partial V^*}{\partial x^*} \right) = 0 \quad (2.3.23)$$

Definiendo el número de Mach  $M_N = V_o/a$  como el cociente de la velocidad de flujo y la velocidad del sonido en el medio fluido (Graebel, 2001; Currie, 2012; Panton, 2013), las ecuaciones (2.3.22) y (2.3.23) se reescriben como:

$$\frac{\partial H^*}{\partial t^*} + M_N V^* \frac{\partial H^*}{\partial x^*} + \frac{V_o}{H_o} \frac{a}{g} \frac{\partial V^*}{\partial x^*} = 0 \quad (2.3.24)$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial t} + M_N V^* \frac{\partial V^*}{\partial x^*} + \frac{H_o}{V_o a} g \frac{\partial H^*}{\partial x^*} + \frac{L}{a V_o} g \sin \theta_z + M_N f_p \frac{V^{*2}}{2D} L + k_t \left( \frac{\partial V^*}{\partial t^*} - \frac{\partial V^*}{\partial x^*} \right) = 0 \quad (2.3.25)$$

En el estudio de los transitorios hidráulicos el valor de la celeridad de onda coincide con la velocidad de propagación del sonido y el número de Mach varía en un rango que va entre  $10^{-2}$  y  $10^{-3}$  (Ghidaoui et al., 2005). Para comprobar lo anterior, tómesese como ejemplo una tubería rígida que conduce agua con una velocidad de flujo  $V_o = 1$  m/s y  $a = 1482$  m/s; entonces el número de Mach es  $1/1482 = 6.74 \times 10^{-4} \ll 1$ .

Por tanto se puede decir, que en las ecuaciones (2.3.24) y (2.3.25), los términos asociados a  $M$  son de orden  $O(M_N)$ , en donde:

$$M_N \ll 1 \quad (2.3.26)$$

Cabe destacar que el término de fricción permanente en la ecuación (2.3.25) también es de orden  $O(M_N)^1$ , su evaluación cobra importancia en el fenómeno para tiempos largos de simulación (Ghidaoui et al., 2005) y cuando  $L$  es muy grande o  $D$  muy pequeña, por tanto:

$$M_N f_p \sim \frac{L}{2D} \quad (2.3.27)$$

Con la ecuación (2.3.26) se determina que los términos de transporte  $V(\partial H/\partial x)$  y  $V(\partial V/\partial x)$  en las ecuaciones son de una magnitud inferior a la escala de orden  $O(1)$  y pueden ser despreciados con el fin de simplificar el sistema:

$$\frac{\partial H^*}{\partial t^*} + \frac{V_o}{H_o} \frac{a}{g} \frac{\partial V^*}{\partial x^*} = 0 \quad (2.3.28)$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial t} + \frac{H_o}{V_o a} g \frac{\partial H^*}{\partial x^*} + \frac{L}{a V_o} g \sin \theta_z + M_N f_p \frac{V^{*2}}{2D} L + k_t \left( \frac{\partial V^*}{\partial t^*} - \frac{\partial V^*}{\partial x^*} \right) = 0 \quad (2.3.29)$$

---

<sup>1</sup> La magnitud de este término y su inclusión en las ecuaciones se revisará nuevamente en el siguiente capítulo, en un análisis de escalas múltiples.

Escribiendo las ecuaciones (2.3.28) y (2.3.29) en su forma dimensional se tiene:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2.3.30)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g \sin \theta_z + f_p \frac{V|V|}{2D} + k_t \left( \frac{\partial V}{\partial t} - a \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.3.31)$$

El término  $\sin \theta_z$  puede ser representado como  $dz/dx$ , donde  $z$  es la altura medida desde un nivel de referencia arbitrario al centro de gravedad (Figura 2.9). Se tiene entonces, la definición de carga piezométrica:

$$H_z(x, t) = H(x, t) + z(x) \quad (2.3.32)$$

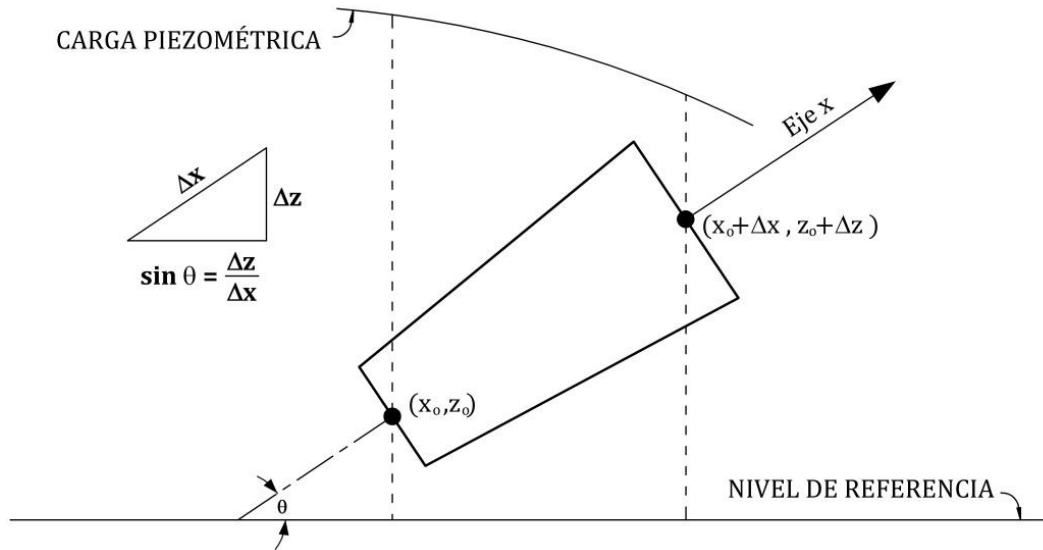


Figura 2.9. Interpretación de la línea de carga piezométrica

Al sustituir la ecuación (2.3.32) en (2.3.31) y desarrollando, la ecuación de cantidad de movimiento resulta:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H_z}{\partial x} + f_p \frac{V|V|}{2D} + k_t \left( \frac{\partial V}{\partial t} - a \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.3.33)$$

Finalmente, si en la ecuación (2.3.33) se evalúa la fricción únicamente con el modelo de pérdidas permanente y por tanto  $k_t = 0$ , se obtiene una versión simplificada de las ecuaciones gobernantes desde el enfoque clásico de estudio del fenómeno transitorio.

A este nuevo sistema se le denominará como '*ecuaciones gobernantes en su versión no conservativa simplificada*':

*Definición 2.* Sea el sistema de ecuaciones gobernantes del flujo en tuberías en su versión no conservativa simplificada.

– *Ecuación de continuidad*

$$\mathcal{L}(H_z, V; x, t) = \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{a^2(x)}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2.3.34)$$

– *Ecuación de cantidad de movimiento*

$$\mathcal{M}(H_z, V; x, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H_z}{\partial x} + f_p(V; x, t) \frac{V|V|}{2D(x)} = 0 \quad (2.3.35)$$

En donde  $x$  es la coordenada en el sentido longitudinal y  $t$  el tiempo como variables independientes;  $H_z(x, t)$  y  $V(x, t)$  son la carga piezométrica y la velocidad respectivamente como variables dependientes y  $x, t: \Omega \in [0, L] \times [0, T]$  que delimitan el espacio de solución  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $L$  es la longitud total de la conducción y  $T$  el tiempo final de solución;  $g$  es la aceleración de la gravedad;  $a(x)$  la celeridad de onda;  $D(x)$  el diámetro de la sección transversal y  $f_p(V; x, t)$  el factor de fricción de Darcy-Weisbach.

El sistema de ecuaciones (2.3.34) y (2.3.35), constituye un problema bien planteado en el sentido de Hadamard (Drolet & Gray, 1988), de valor inicial y valores en las fronteras de tipo hiperbólico. La condición inicial se define para el tiempo  $t = 0$  en condición permanente, con  $V(x, 0) = V_o(x)$  que es la velocidad media de flujo en cada punto y  $H_z(x, 0) = H_{z_o}(x)$ , la línea de carga piezométrica de la conducción:

$$V(x, 0) = V_o(x) \quad ; \quad t = 0 \quad (2.3.36)$$

$$H(x, 0) = H_{z_o}(x) \quad ; \quad t = 0 \quad (2.3.37)$$

Para la condición de frontera aguas abajo ( $x = L$ ) se considera una ley de cierre de válvula, esto es  $V(L, t) = g(t)$  y para la condición aguas arriba ( $x = 0$ ) se usa la carga piezométrica  $H_z(0, t) = h(t)$ , ambos evaluados para  $t \geq 0$ :

$$V(L, t) = g(t) \quad ; \quad t \geq 0 \quad (2.3.38)$$

$$H_z(0, t) = h(t) \quad ; \quad t \geq 0 \quad (2.3.39)$$

En forma matricial el sistema (2.3.34) y (2.3.35) resulta:

$$\frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial t} + \mathbf{B}_2 \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial x} + \mathbf{G}_2 = \mathbf{0} \quad (2.3.40)$$

En donde:

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a^2}{g} \\ g & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.41)$$

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ f_p \frac{V|V|}{2D} \end{bmatrix} \quad (2.3.42)$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} H_z \\ V \end{bmatrix} \quad (2.3.43)$$

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.44)$$

Y los eigenvalores de la matriz de convección  $\mathbf{B}_2$  son:

$$\lambda_{c1,2} = \pm a \quad (2.3.45)$$

Se puede decir que la definición anterior representa una versión específica del modelo general presentado en (2.3.1) y (2.3.2) ya que considera despreciables los términos convectivos que causan la no linealidad de la matriz de convección y facilita la tarea de solucionar las ecuaciones de flujo (Zielke, 1966; Wylie & Streeter, 1978; Chaudhry, 2014).

La aplicación de las ecuaciones en cualquiera de sus definiciones, permite representar el flujo unidimensional en conductos a presión y la complejidad de su solución depende de las hipótesis de simplificación; esto último se refleja en los eigenvalores, cuyo análisis ayuda a seleccionar el método de solución que mejor se adecúe al tipo de sistema a resolver.

# CAPÍTULO 3

---

## CONSTRUCCIÓN DEL MODELO NUMÉRICO

Para solucionar las ecuaciones de flujo en conductos a presión es posible aplicar diferentes técnicas numéricas como los esquemas en Diferencias Finitas, Elemento Finito o Volumen Finito (Ghidaoui et al., 2005). La necesidad de recurrir a este tipo de métodos es porque las ecuaciones diferenciales no pueden ser resueltas en forma exacta para los casos de interés general, las soluciones exactas suelen existir sólo en casos muy específicos o simplificados (Aguilar, 2002).

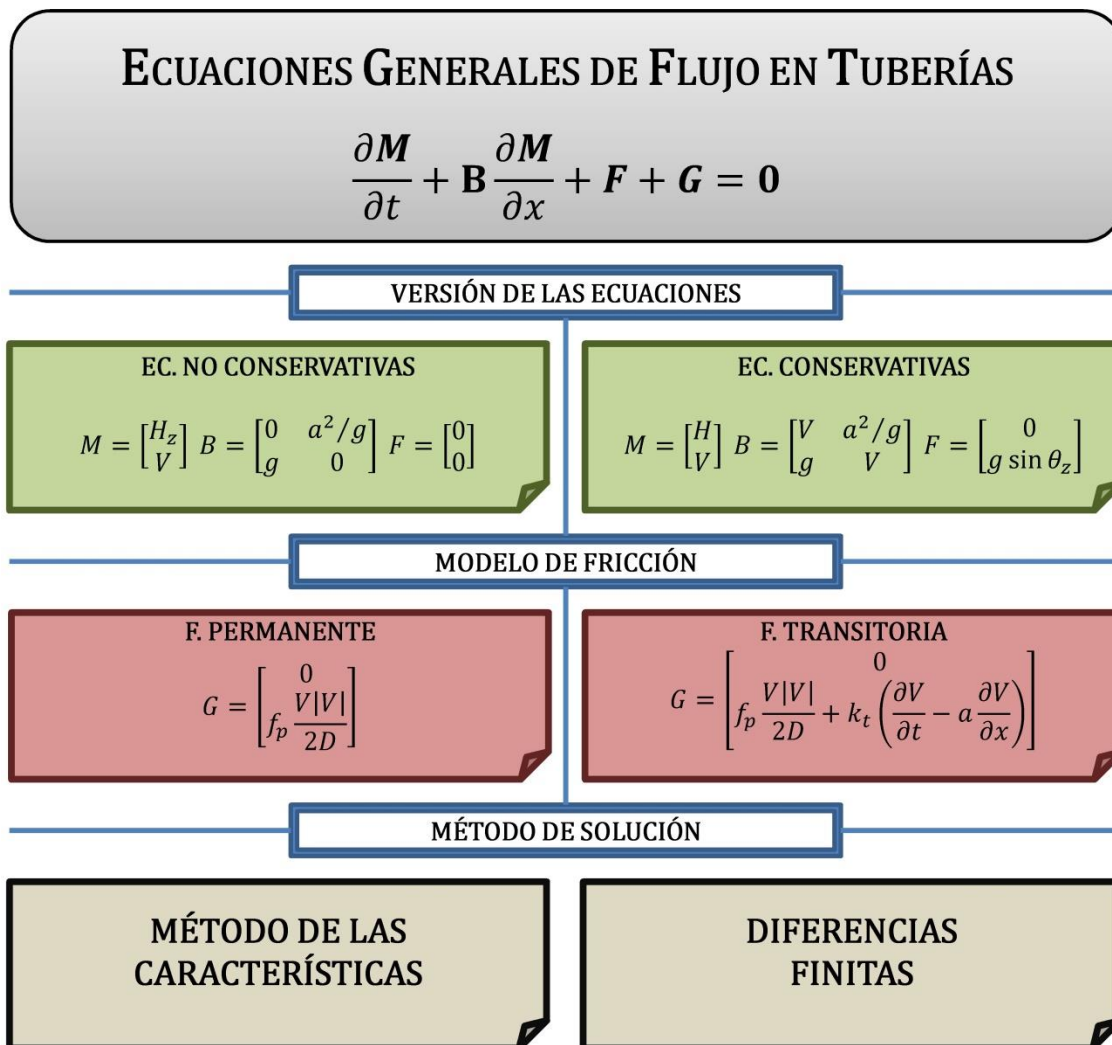
Entre las técnicas numéricas para el tratamiento del fenómeno transitorio en tuberías, el método de las características (MOC por sus siglas en inglés *Method Of Characteristics*) es la herramienta más usada por los investigadores (Goldberg & Wylie, 1983; Tijsseling & Bergant, 2007; Bergant et al., 2008).

El éxito del MOC en el campo de los transitorios hidráulicos, reside en su precisión y eficiencia computacional para problemas con celeridad de onda constante, alcanzando resultados con dispersión numérica prácticamente nula; sin embargo, si se consideran los términos no lineales, la complejidad de la simulación aumenta y el uso de esquemas en diferencias finitas plantea un tratamiento más adecuado (Tiselj & Gale, 2008).

### 3.1. MÉTODOS DE SOLUCIÓN NUMÉRICA

En el capítulo anterior se dedujeron las ecuaciones que gobiernan el flujo en tuberías y mediante un análisis adimensional se estableció la versión simplificada de las ecuaciones; de igual forma se discutieron e implementaron los modelos de fricción que complementan el análisis del fenómeno.

La combinación de estos elementos (versión de las ecuaciones y modelos de fricción) dan paso a diferentes sistemas de ecuaciones; para su resolución se proponen dos técnicas numéricas: el método de las características y un esquema en diferencias finitas.



**Figura 3.1. Elementos representativos de las ecuaciones diferenciales**

La aplicación del método de las características permite establecer una combinación lineal que transforme un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales, a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias. El sistema resultante puede ser representado en un plano de solución donde se describan las líneas de viaje de información, denominadas líneas características (Figura 3.2), y mediante un modelo discreto se calculan los valores de las variables dependientes (Wylie & Streeter, 1978; Watters, 1980; Chaudhry, 2014).

Las ecuaciones que se generan al emplear un esquema de tipo MOC son conocidas como ecuaciones de compatibilidad y su integración es válida únicamente a lo largo de las líneas características, que en conjunto, conforman un mallado de tipo espacio-temporal (Zielke, 1966; Bergant et al., 2001).



Este tipo de malla a su vez debe satisfacer la condición de convergencia dada por el número de Courant-Friedrichs-Lewy, definido como el cociente entre la velocidad de onda  $a$  y la velocidad numérica en la malla  $\Delta x/\Delta t$  (Chaudhry, 2014):

$$C_N = a \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (3.1.1)$$

La condición de Courant establece que para el caso de ecuaciones de valor inicial de tipo hiperbólico, la convergencia se obtiene solamente si se satisface un valor límite de  $C_N$  que relacione la posición de las líneas características y el espaciado de la malla (Courant, Friedrichs, & Lewy, 1967; Morton & Mayers, 2005).

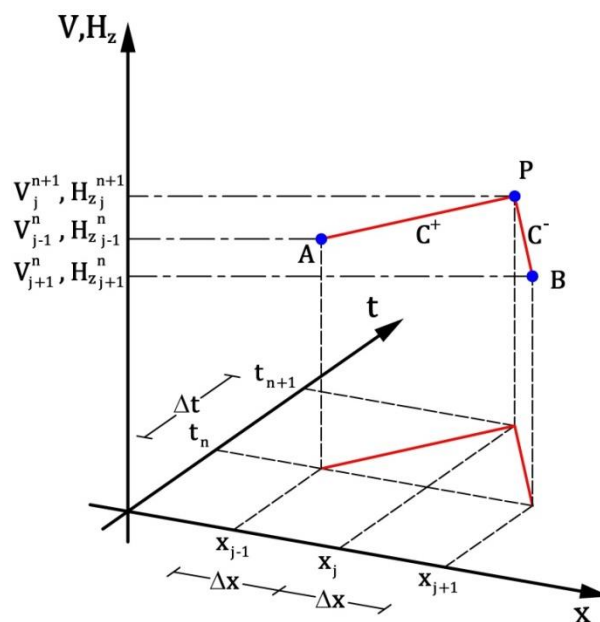


Figura 3.2. Representación del plano característico de solución

Para el caso del fenómeno transitorio en conductos a presión este valor es  $C_N \leq 1$ ; su imposición dificulta el uso de un intervalo temporal  $\Delta t$  general para todo el espacio de solución si existen diferentes longitudes, diámetros y/o celeridades de onda en cada tramo de análisis (Ghidaoui et al., 2005). En consecuencia, la facilidad de aplicar un modelo numérico basado en el método de las características se vuelve relativa según la complejidad del sistema; a pesar de que estos inconvenientes pueden ser solventados empleando ajustes geométricos o diferentes tipos de interpolación, su aplicación introduce errores en la solución (Goldberg & Wylie, 1983).

En contraste, los métodos basados en diferencias finitas permiten la evaluación del fenómeno para intervalos temporales más grandes sin volverse inestables (Ghidaoui et al., 2005; Chaudhry, 2014).

El método en diferencias seleccionado, conocido como ‘*esquema de caja*’ o ‘*esquema de cuatro puntos*’, es un esquema muy compacto que pondera el intervalo espacial y temporal usando cuatro puntos de la malla en dos niveles (Figura 3.3); este esquema es muy usado en la modelación de flujo a superficie libre donde comúnmente es llamado ‘*esquema de Preissmann*’ (Morton & Mayers, 2005; Szymkiewicz, 2010).

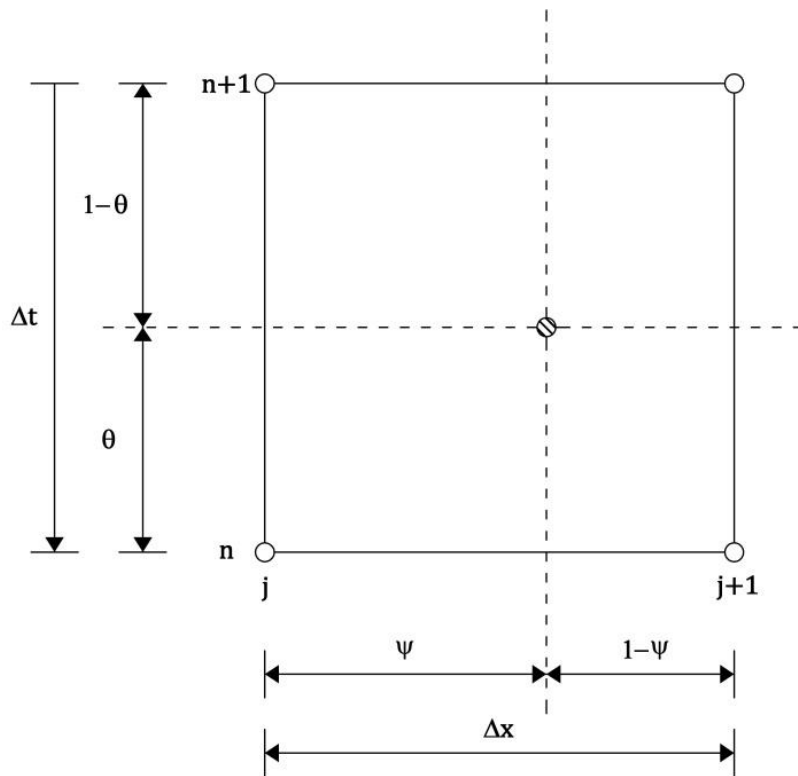


Figura 3.3. Representación del esquema de Preissmann en el plano  $x - t$  (Aguilar, 2002)

Si la discretización se aplica a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales (como es el caso de la versión conservativa), el problema pasa a ser un sistema algebraico que conserva su propiedad no lineal.

Entonces, para establecer una estrategia que solucione la no linealidad de las ecuaciones de flujo, se plantea la construcción de un algoritmo iterativo de tipo Picard (Paniconi, Aldama, & Wood, 1991; Szymkiewicz, 2010), que se acople al esquema en diferencias finitas de Preissmann (Aguilar, 2002). Cabe destacar que también se desarrolló una propuesta de solución no lineal de segundo orden tipo Newton-Raphson (Aguilar, 2002; Szymkiewicz, 2010), pero las magnitudes de la actualización son de escala muy pequeña. Esta demostración se puede consultar en el Anexo A.

El empleo de un esquema de este tipo, permite solucionar las ecuaciones considerando los términos convectivos independientemente del comportamiento de los valores característicos o de la condición de Courant; adicionalmente se pueden estudiar sistemas complejos que incluyan cambios de diámetro y variaciones en la celeridad de onda.

En base a las características de cada técnica numérica, la Tabla 3.1 presenta los casos de estudio y el método de solución que se empleará en éstas.

**Tabla 3.1. Descripción de los modelos a evaluar**

Definición	Caso de estudio	Tipo de ecuaciones	Modelo de fricción	Método de solución
1	Modelo clásico	No conservativas	Permanente	MOC
2	Modelo propuesto	Conservativas	Transitorio	DF

Se observa que los modelos a solucionar coinciden con los sistemas definidos en el apartado 2.3. La construcción de cada esquema se presenta a continuación.

### 3.1.1. MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS

Sea el sistema de ecuaciones que gobiernan el flujo en tuberías en su versión no conservativa simplificada:

$$\mathcal{L}_1(H_z, V; x, t) = \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (3.1.2)$$

$$\mathcal{L}_2(H_z, V; x, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H_z}{\partial x} + f_p(V; x, t) \frac{V|V|}{2D} = 0 \quad (3.1.3)$$

En donde  $x$  es la coordenada en el sentido longitudinal y  $t$  el tiempo como variables independientes;  $H_z(x, t)$  y  $V(x, t)$  son la carga piezométrica y la velocidad respectivamente como variables dependientes y  $x, t: \Omega \in [0, L] \times [0, T]$  que delimitan el espacio de solución  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $L$  es la longitud total de la conducción y  $T$  el tiempo final de solución;  $g$  es la aceleración de la gravedad;  $a$  la celeridad de onda;  $D$  el diámetro de la sección transversal y  $f_p(V; x, t)$  el factor de fricción de Darcy-Weisbach.

El sistema de ecuaciones (3.1.2) y (3.1.3), constituye un problema bien planteado en el sentido de Hadamard (Drolet & Gray, 1988), de valor inicial y valores en las fronteras de tipo hiperbólico, sujeto a las condiciones descritas en las ecuaciones (2.3.36) – (2.3.39).

Estableciendo una combinación lineal aditiva  $\mathcal{L}(H_z, V; x, t)$  que asocie a las ecuaciones (3.1.2) y (3.1.3), se tiene:

$$\mathcal{L}(H_z, V; x, t) = \mathcal{L}_2(H_z, V; x, t) + \lambda_c \mathcal{L}_1(H_z, V; x, t) = 0 \quad (3.1.4)$$

En donde  $\lambda_c$  es un factor lineal desconocido y su evaluación conduce a las ecuaciones de compatibilidad que simplifiquen el sistema (Wylie & Streeter, 1978; Chaudhry, 2014).

Sustituyendo los operadores (3.1.2) y (3.1.3) en (3.1.4) y agrupando los términos:

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \lambda_c \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \lambda_c \left( \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{g}{\lambda_c} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + f_p \frac{V|V|}{2D} = 0 \quad (3.1.5)$$

Para relacionar el comportamiento temporal de las variables dependientes  $H_z = H_z(x, t)$  y  $V = V(x, t)$  con su variación espacio-temporal, se aplica la regla de la cadena:

$$\frac{dH_z}{dt} = \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (3.1.6)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (3.1.7)$$

Por inspección, se puede establecer la correspondencia entre los términos en paréntesis de la ecuación (3.1.5) con las derivadas totales de las variables dependientes (3.1.6) y (3.1.7), de modo que se pueden definir las siguientes igualdades:

$$\frac{dH_z}{dt} = \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{g}{\lambda_c} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (3.1.8)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \lambda_c \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} \quad (3.1.9)$$

Para que las identidades construidas en (3.1.8) y (3.1.9) sean verdaderas, el término  $dx/dt$  debe cumplir la siguiente relación:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_c \frac{a^2}{g} = \frac{g}{\lambda_c} \quad (3.1.10)$$

Entonces, el valor del factor  $\lambda_c$  queda definido como:

$$\lambda_c = \pm \frac{g}{a} \quad (3.1.11)$$

Y sustituyendo (3.1.11) en (3.1.10) resulta:

$$\frac{dx}{dt} = \pm a \quad (3.1.12)$$

Para obtener las ecuaciones de compatibilidad de cada línea característica, se sustituye el factor  $\lambda_c$  (3.1.11) y las derivadas totales (3.1.8) y (3.1.9) en la combinación lineal (3.1.5):

– *Característica positiva  $C^+$*

$$\frac{dV}{dt} + \frac{g}{a} \frac{dH_z}{dt} + f_p \frac{V|V|}{2D} = 0 \quad (3.1.13)$$

$$\frac{dx}{dt} = a \quad (3.1.14)$$

– *Característica negativa  $C^-$*

$$\frac{dV}{dt} - \frac{g}{a} \frac{dH_z}{dt} + f_p \frac{V|V|}{2D} = 0 \quad (3.1.15)$$

$$\frac{dx}{dt} = -a \quad (3.1.16)$$

Con las ecuaciones (3.1.13) y (3.1.15), el sistema (3.1.2) y (3.1.3) clasificado como un sistema de ecuaciones diferenciales parciales con dos variables independientes ( $x, t$ ), pasa a ser un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con una variable independiente ( $t$ ).

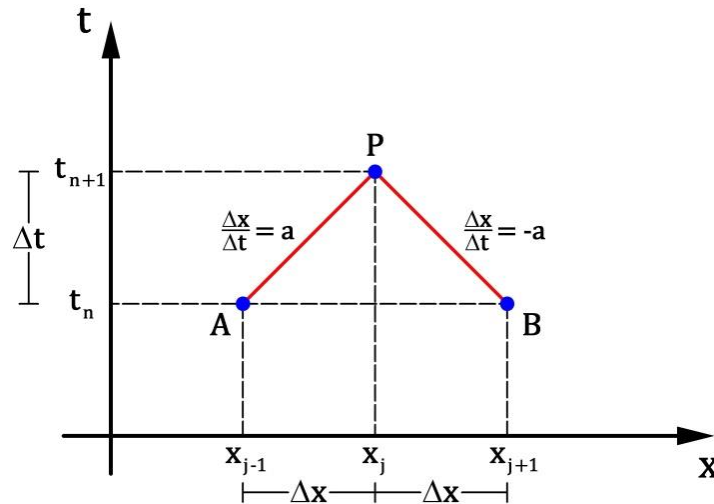


Figura 3.4. Líneas características del modelo conservativo simplificado

La validez de cada ecuación está ligada a su línea característica, las cuales coinciden con los eigenvalores del sistema continuo original (2.3.45) y representan el recorrido de las variaciones sobre las variables dependientes de un punto a otro del sistema conforme el fenómeno evoluciona en el tiempo, con esto, se puede generar una malla espacio temporal que representa el plano de solución de las ecuaciones (3.1.13) – (3.1.16).

Para evaluar las ecuaciones características (3.1.13) y (3.1.15) en el espacio de solución, se construye la malla en el plano  $x - t$ , para esto se divide la longitud total de la tubería  $L$  en  $J$  tramos iguales de longitud  $\Delta x$  y dado que las líneas características tienen una pendiente constante, se tiene una malla regular cuyo incremento temporal<sup>1</sup> puede ser calculado como  $\Delta t = \Delta x/a$ , en donde las variables dependientes pueden ser discretizadas de modo que  $V_j^n = V(j\Delta x, n\Delta t)$  y  $H_{z_j}^n(j\Delta x, n\Delta t)$ .

Considerando el siguiente operador de discretización para construir un esquema en diferencias finitas:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{F_j^{n+1} - F_o^n}{\Delta t} \quad (3.1.17)$$

En donde la posición  $F_o^n$  representa el punto de propagación de la característica y puede aplicarse tanto para la línea característica con pendiente positiva, como para la negativa.

Sustituyendo el operador (3.1.17) en el modelo continuo (3.1.13) y (3.1.15) y multiplicando por  $\Delta t$ , se obtiene:

$$V_j^{n+1} - V_{j-1}^n + \frac{g}{a} (H_{z_j}^{n+1} - H_{z_{j-1}}^n) + \frac{f_p \Delta t}{2D} (V_{j-1}^n |V_{j-1}^n|) = 0 \quad (3.1.18)$$

$$V_j^{n+1} - V_{j+1}^n - \frac{g}{a} (H_{z_j}^{n+1} - H_{z_{j+1}}^n) + \frac{f_p \Delta t}{2D} (V_{j+1}^n |V_{j+1}^n|) = 0 \quad (3.1.19)$$

En las ecuaciones (3.1.18) y (3.1.19) para evaluar el término de fricción y el factor de fricción  $f_p$  de manera lineal, se considera el valor de la variable dependiente en el punto de propagación que le corresponda, este criterio resulta satisfactorio cuando las soluciones del esquema se mantienen estables (Chaudhry, 2014).

---

<sup>1</sup> Para satisfacer la convergencia del método se debe cumplir la condición de Courant descrita en la ecuación (3.1.1), por tanto la resolución de la malla es suficiente si  $\Delta t = C_N \Delta x/a$ , donde  $C_N \leq 1$ .

Desarrollando las ecuaciones (3.1.18) y (3.1.19) y despejando el término  $V_j^{n+1}$ , se tiene:

$$V_j^{n+1} = V_{j-1}^n + \frac{g}{a} H_{z_{j-1}}^n - \frac{f_p \Delta t}{2D} (V_{j-1}^n |V_{j-1}^n|) - \frac{g}{a} H_{z_j}^{n+1} \quad (3.1.20)$$

$$V_j^{n+1} = V_{j+1}^n - \frac{g}{a} H_{z_{j+1}}^n - \frac{f_p \Delta t}{2D} (V_{j+1}^n |V_{j+1}^n|) + \frac{g}{a} H_{z_j}^{n+1} \quad (3.1.21)$$

Y considerando las siguientes variables de simplificación:

$$C_\alpha = \frac{g}{a} \quad (3.1.22)$$

$$C_{\beta_j}^n = V_{j-1}^n + C_\alpha H_{z_{j-1}}^n - \frac{f_p \Delta t}{2D} (V_{j-1}^n |V_{j-1}^n|) \quad (3.1.23)$$

$$C_{\gamma_j}^n = V_{j+1}^n - C_\alpha H_{z_{j+1}}^n - \frac{f_p \Delta t}{2D} (V_{j+1}^n |V_{j+1}^n|) \quad (3.1.24)$$

Al sustituir las relaciones (3.1.22) – (3.1.24) en (3.1.20) y (3.1.21), resulta:

$$V_j^{n+1} = C_{\beta_j}^n - C_\alpha H_{z_j}^{n+1} \quad (3.1.25)$$

$$V_j^{n+1} = C_{\gamma_j}^n + C_\alpha H_{z_j}^{n+1} \quad (3.1.26)$$

La solución aproximada del fenómeno transitorio aplicando la técnica MOC sobre las ecuaciones no conservativas de flujo con fricción cuasi-permanente (3.1.2) y (3.1.3) se obtiene al resolver las ecuaciones algebraicas (3.1.20) y (3.1.21) para las variables dependientes en el tiempo  $n + 1$ .

Asumiendo que se conocen los valores de la condición inicial definida en (2.3.36) y (2.3.37) para el tiempo  $n$  y las condiciones de frontera definidas en (2.3.38) y (2.3.39) para la carga piezométrica en función del nivel del embalse (primer nodo) y el valor de la velocidad dado por la ley de descarga de la válvula (último nodo), se tiene un sistema de ecuaciones cerrado a resolver.

Para conocer el valor de  $V_j^{n+1}$  se aplica el método de reducción al sistema de ecuaciones:

$$V_j^{n+1} = \frac{C_{\beta_j}^n + C_{\gamma_j}^n}{2} \quad (3.1.27)$$

Y conocido  $V_j^{n+1}$  se despeja en (3.1.25) o (3.1.26) el término  $H_{zj}^{n+1}$ :

$$H_{zj}^{n+1} = \frac{C_{\beta j}^n - V_j^{n+1}}{C_{\alpha}} = \frac{V_j^{n+1} - C_{\gamma j}^n}{C_{\alpha}} \quad (3.1.28)$$

El sistema resultante cuenta con  $J$  tramos de longitud  $\Delta x$  y por tanto,  $J + 1$  nodos de solución en cada instante de tiempo; considerando que en cada nodo se calcula el valor de las dos variables dependientes (exceptuando los valores de frontera) se tiene un total de  $2J$  incógnitas y dado que cada tramo  $\Delta x$  posee dos ecuaciones de compatibilidad, entonces la malla cuenta con  $2J$  ecuaciones para el cálculo. De manera esquemática la malla espacio temporal de solución se puede ver en la Figura 3.5.

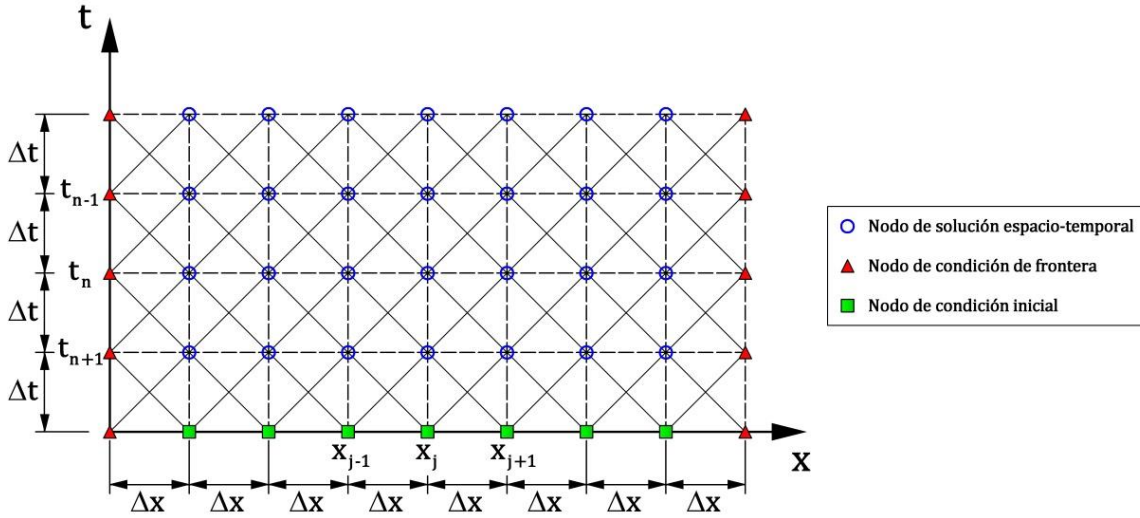


Figura 3.5. Malla regular discreta con las líneas características

### 3.1.2. DIFERENCIAS FINITAS

Tomando como punto de partida la definición del sistema de ecuaciones gobernantes en su versión conservativa:

$$\mathcal{L}(\tilde{H}, \tilde{V}; x, t) = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} + \frac{a^2(x)}{g} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} = 0 \quad (3.1.29)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\tilde{H}, \tilde{V}; x, t) &= [1 + k_t(\tilde{V}; x, t)] \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + [\tilde{V} - a(x)k_t(\tilde{V}; x, t)] \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + g \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} + g \text{sen } \theta_z \\ &+ f_p(\tilde{V}; x, t) \frac{|\tilde{V}| \tilde{V}}{2D(x)} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.30)$$



En donde  $x$  es la coordenada en el sentido longitudinal y  $t$  el tiempo como variables independientes;  $\tilde{H}(x, t)$  y  $\tilde{V}(x, t)$  son la presión y la velocidad respectivamente como variables dependientes y  $x, t: \Omega \in [0, L] \times [0, T]$  que delimitan el espacio de solución  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $L$  es la longitud total de la conducción y  $T$  el tiempo final de solución;  $g$  es la aceleración de la gravedad;  $a(x)$  es la celeridad de onda;  $\theta_z$  es el ángulo de inclinación de la tubería con respecto a la horizontal y se mide en el sentido contrario a las manecillas del reloj;  $f_p(V; x, t)$  y  $k_t(V; x, t)$  los coeficientes de fricción en estado permanente y transitorio respectivamente y  $D(x)$  el diámetro de la sección transversal.

El sistema de ecuaciones (3.1.29) y (3.1.30), constituye un problema bien planteado en el sentido de Hadamard (Drolet & Gray, 1988), de valor inicial y valores en las fronteras de tipo hiperbólico, sujeto a las condiciones descritas en las ecuaciones (2.3.3) – (2.3.6).

Para discretizar el sistema continuo en un esquema de Preissmann, se considera una función continua  $\tilde{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donde  $\Omega(x, t)$  es el espacio de solución y  $\mathbb{R}$  el conjunto de los números reales. A su vez se tiene una variable discreta  $F_j^n$  que se aproxima a  $\tilde{F}(x, t)$  en un punto  $(x_j, t_n)$  del espacio  $\Omega$ . Además, el espacio de solución  $\Omega(x, t)$ , es cubierto con una malla uniforme de espaciado  $\Delta x$  para cualquier intervalo  $\Delta t$ , donde  $\Delta x = L / J$ ,  $\Delta t = T / N$  y  $J$  y  $N$  son números enteros e indican la cantidad de intervalos computacionales de discretización espacial y temporal respectivamente, de forma que  $\Omega(x_j, t_n) = \Omega(j\Delta x, n\Delta t)$ .

La propuesta de discretización en diferencias finitas de Preissmann para la derivada espacial, temporal y términos independientes se describe a continuación (Abbott, 1979; Cunge, Holly, & Verney, 1980; Morton & Mayers, 2005; Szymkiewicz, 2010):

– *Discretización de las derivadas temporales*

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} \approx \frac{(1 - \psi)}{\Delta t} (F_j^{n+1} - F_j^n) + \frac{\psi}{\Delta t} (F_{j+1}^{n+1} - F_{j+1}^n) \quad (3.1.31)$$

– *Discretización de las derivadas espaciales*

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \approx \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (F_{j+1}^n - F_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (F_{j+1}^{n+1} - F_j^{n+1}) \quad (3.1.32)$$

– *Discretización de los términos adicionales*

$$\tilde{F}(x, t) \approx (1 - \theta)[(1 - \psi)F_j^n + \psi F_{j+1}^n] + \theta[(1 - \psi)F_j^{n+1} + \psi F_{j+1}^{n+1}] \quad (3.1.33)$$

– *Discretización de las variables invariantes en el tiempo*

$$\tilde{F}(x) \approx (1 - \psi)F_j + \psi F_{j+1} \quad (3.1.34)$$

Donde  $\psi$  y  $\theta$  son factores de peso espacial y temporal respectivamente; ambos pueden variar su valor desde 0 a 1.

Para aplicar el esquema de Picard de primer orden, se separan los términos que causan la no linealidad del sistema y se indica la iteración en que son resueltos haciendo uso del superíndice  $(\cdot)^m$  como identificador de actualización para los términos en el tiempo  $n + 1$ :

$$\Pi_i = \Pi_i(\delta V^n, \delta V^{n+1,m}) \quad \forall \quad i = 1,2,3,4 \quad (3.1.35)$$

En los operadores de discretización (3.1.31) – (3.1.33) se empleará el superíndice  $(\cdot)^{m+1}$  en el tiempo  $n + 1$  sobre las variables dependientes, indicando que serán las que se calcularán en la siguiente iteración.

Entonces, para construir el algoritmo que genere el código de programación, se procede a discretizar las derivadas espaciales y temporales de las ecuaciones (3.1.29) y (3.1.30):

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} \approx \frac{(1 - \psi)}{\Delta t} (H_j^{n+1,m+1} - H_j^n) + \frac{\psi}{\Delta t} (H_{j+1}^{n+1,m+1} - H_{j+1}^n) \quad (3.1.36)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \approx \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (H_{j+1}^n - H_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (H_{j+1}^{n+1,m+1} - H_j^{n+1,m+1}) \quad (3.1.37)$$

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} \approx \frac{(1 - \psi)}{\Delta t} (V_j^{n+1,m+1} - V_j^n) + \frac{\psi}{\Delta t} (V_{j+1}^{n+1,m+1} - V_{j+1}^n) \quad (3.1.38)$$

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \approx \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (V_{j+1}^n - V_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (V_{j+1}^{n+1,m+1} - V_j^{n+1,m+1}) \quad (3.1.39)$$

En la ecuación de cantidad de movimiento (3.1.30), la naturaleza del término de fricción es no lineal, por tal motivo se considera un valor de  $\tilde{V}$  como término principal y se discretiza:

$$\tilde{V}(x, t) \approx (1 - \theta)[(1 - \psi)V_j^n + \psi V_{j+1}^n] + \theta[(1 - \psi)V_j^{n+1,m+1} + \psi V_{j+1}^{n+1,m+1}] \quad (3.1.40)$$

Los términos de actualización son aquellos elementos en las ecuaciones (3.1.29) y (3.1.30) que contienen a las variables  $V(x, t)$ ,  $k_t(V; x, t)$  y  $f_p(V; x, t)$  y dada su dependencia con la variable temporal, provocan la no linealidad del sistema:

$$\Pi_1 = \tilde{V} \quad (3.1.41)$$

$$\Pi_2 = 1 + k_t(\tilde{V}; x, t) \quad (3.1.42)$$

$$\Pi_3 = \tilde{V} - a(x)k_t(\tilde{V}; x, t) \quad (3.1.43)$$

$$\Pi_4 = f_p(\tilde{V}; x, t) \frac{|\tilde{V}|}{2D(x)} \quad (3.1.44)$$

En la ecuación (3.1.44), para mantener la capacidad de definir la dirección de flujo en el término de fricción, el valor absoluto de la velocidad media  $|V|$  será sustituido por la función signo, de modo que:

$$|\tilde{V}| = \text{sgn}(\tilde{V}) \cdot \tilde{V} \quad (3.1.45)$$

En base a lo establecido en (3.1.35) para el método de Picard, la discretización de los términos de actualización (3.1.41) – (3.1.44), resulta:

$$\Pi_{1,j} \approx (1 - \theta)[(1 - \psi)V_j^n + \psi V_{j+1}^n] + \theta[(1 - \psi)V_j^{n+1,m} + \psi V_{j+1}^{n+1,m}] \quad (3.1.46)$$

$$\Pi_{2,j} \approx 1 + \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \psi)k_{tj}^n + \psi k_{tj+1}^n \right] + \theta \left[ (1 - \psi)k_{tj}^{n+1,m} + \psi k_{tj+1}^{n+1,m} \right] \right\} \quad (3.1.47)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{3,j} \approx \Pi_{1,j} - \{ & (1 - \theta) \left[ (1 - \psi)(ak_t)_j^n + \psi (ak_t)_{j+1}^n \right] \\ & + \theta \left[ (1 - \psi)(ak_t)_j^{n+1,m} + \psi (ak_t)_{j+1}^{n+1,m} \right] \} \end{aligned} \quad (3.1.48)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{4,j} \approx \frac{1}{2} \left[ & (1 - \theta) \left\{ (1 - \psi) \left[ f_p \text{sgn}(V) \frac{V}{D} \right]_j^n + \psi \left[ f_p \text{sgn}(V) \frac{V}{D} \right]_{j+1}^n \right\} \right. \\ & \left. + \theta \left\{ (1 - \psi) \left[ f_p \text{sgn}(V) \frac{V}{D} \right]_j^{n+1,m} + \psi \left[ f_p \text{sgn}(V) \frac{V}{D} \right]_{j+1}^{n+1,m} \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.1.49)$$

Se considera como términos constantes a aquellas variables invariantes en el tiempo, es decir aquellas que sólo cambian en el espacio (como es el caso de la celeridad de onda<sup>1</sup>):

$$\Theta_1 = \frac{a^2(x)}{g} \quad (3.1.50)$$

---

<sup>1</sup> La forma de evaluar la celeridad de onda se hace de manera espacial y se considera constante durante todo el tiempo de simulación, para mayor detalle consultar el apartado 2.2.1.

Aplicando el operador de discretización (3.1.34) se tiene:

$$\Theta_{1,j} \approx \frac{1}{g} [(1 - \psi)a_j^2 + \psi a_{j+1}^2] \quad (3.1.51)$$

Para el término que constituye la fuerza de cuerpo  $g \sen \theta_z$ , se emplea la siguiente notación para la discretización:

$$g \sen \theta_z \approx g \sen \theta_{zj} \quad (3.1.52)$$

En donde el término  $\sen \theta_{zj}$  representa una característica constante del intervalo y no se emplea la ponderación sobre los nodos de discretización con los factores de peso espacial.

Sustituyendo los términos discretizados en las ecuaciones (3.1.29) y (3.1.30) y desarrollando, el sistema en diferencias finitas a resolver es:

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \psi)}{\Delta t} (H_j^{n+1,m+1} - H_j^n) + \frac{\psi}{\Delta t} (H_{j+1}^{n+1,m+1} - H_{j+1}^n) \\ & + \Pi_{1,j} \left[ \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (H_{j+1}^n - H_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (H_{j+1}^{n+1,m+1} - H_j^{n+1,m+1}) \right] \\ & + \Theta_{1,j} \left[ \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (V_{j+1}^n - V_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (V_{j+1}^{n+1,m+1} - V_j^{n+1,m+1}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.1.53)$$

$$\begin{aligned} & \Pi_{2,j} \left[ \frac{(1 - \psi)}{\Delta t} (V_j^{n+1,m+1} - V_j^n) + \frac{\psi}{\Delta t} (V_{j+1}^{n+1,m+1} - V_{j+1}^n) \right] \\ & + \Pi_{3,j} \left[ \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (V_{j+1}^n - V_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (V_{j+1}^{n+1,m+1} - V_j^{n+1,m+1}) \right] \\ & + g \left[ \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (H_{j+1}^n - H_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (H_{j+1}^{n+1,m+1} - H_j^{n+1,m+1}) \right] + g \sen \theta_{zj} \\ & + \Pi_{4,j} \{ (1 - \theta) [(1 - \psi)V_j^n + \psi V_{j+1}^n] \\ & + \theta [(1 - \psi)V_j^{n+1,m+1} + \psi V_{j+1}^{n+1,m+1}] \} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.54)$$

Entonces el procedimiento de solución consiste en dar un valor a las variables dependientes para la iteración  $m$  y evaluar los términos  $\Pi_i$ . Para la primera iteración  $m = 0$  se proponen los valores en el instante  $n$  y en los casos subsecuentes, se usa el resultado obtenido en  $m + 1$  una vez conocidos los términos  $\Pi_i$ . Con esto, el sistema de ecuaciones a resolver se convierte en un problema lineal, lo cual permite determinar los valores de las variables dependientes en la iteración  $m + 1$ .

Una vez que se tiene el resultado de la iteración  $m + 1$ , se compara con el propuesto en la iteración  $m$  y si la diferencia o error de convergencia es menor a una tolerancia

preestablecida entonces se tiene una solución convergente para un error dado y en ese momento, se está en posibilidad de determinar la solución para el siguiente intervalo  $\Delta t$ .

La forma de evaluar el error en la convergencia no lineal en el dominio de solución es:

$$\|H^{n+1,m+1} - H^{n+1,m}\|_{\infty} \leq \varepsilon \quad (3.1.55)$$

$$\|V^{n+1,m+1} - V^{n+1,m}\| \leq \varepsilon \quad (3.1.56)$$

Donde  $H^{n+1,m+1}$  y  $H^{n+1,m}$  son los vectores de resultados para la presión;  $V^{n+1,m+1}$  y  $V^{n+1,m}$  los vectores de resultados para la velocidad;  $\varepsilon$  es una tolerancia arbitraria preestablecida y la evaluación se realiza sobre todo el espacio de solución.

Para facilitar la programación de las ecuaciones (3.1.53) y (3.1.54) se ordenan y factorizan las variables en la iteración  $n + 1, m + 1$  del lado derecho de la igualdad:

$$a_{1,j}H_j^{n+1,m+1} + b_{1,j}V_j^{n+1,m+1} + c_{1,j}H_{j+1}^{n+1,m+1} + d_{1,j}V_{j+1}^{n+1,m+1} = e_{1,j} \quad (3.1.57)$$

$$a_{2,j}H_j^{n+1,m+1} + b_{2,j}V_j^{n+1,m+1} + c_{2,j}H_{j+1}^{n+1,m+1} + d_{2,j}V_{j+1}^{n+1,m+1} = e_{2,j} \quad (3.1.58)$$

Los coeficientes en (3.1.57) y (3.1.58) son constantes en la iteración  $m$  y se evalúan como:

$$a_{1,j} = \frac{(1 - \psi)}{\Delta t} - \Pi_{1,j} \frac{\theta}{\Delta x} \quad (3.1.59)$$

$$b_{1,j} = -\Theta_{1,j} \frac{\theta}{\Delta x} \quad (3.1.60)$$

$$c_{1,j} = \frac{\psi}{\Delta t} + \Pi_{1,j} \frac{\theta}{\Delta x} \quad (3.1.61)$$

$$d_{1,j} = \Theta_{1,j} \frac{\theta}{\Delta x} \quad (3.1.62)$$

$$e_{1,j} = \frac{(1 - \psi)}{\Delta t} H_j^n + \frac{\psi}{\Delta t} H_{j+1}^n - \Pi_{1,j} \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (H_{j+1}^n - H_j^n) - \Theta_{1,j} \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (V_{j+1}^n - V_j^n) \quad (3.1.63)$$

$$a_{2,j} = -g \frac{\theta}{\Delta x} \quad (3.1.64)$$

$$b_{2,j} = \Pi_{2,j} \frac{(1 - \psi)}{\Delta t} - \Pi_{3,j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{4,j} \theta (1 - \psi) \quad (3.1.65)$$

$$c_{2,j} = g \frac{\theta}{\Delta x} \quad (3.1.66)$$

$$d_{2,j} = \Pi_{2,j} \frac{\psi}{\Delta t} + \Pi_{3,j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{4,j} \theta \psi \quad (3.1.67)$$

$$\begin{aligned} e_{2,j} = & \Pi_{2,j} \frac{(1-\psi)}{\Delta t} V_j^n + \Pi_{2,j} \frac{\psi}{\Delta t} V_{j+1}^n - \Pi_{3,j} \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (V_{j+1}^n - V_j^n) \\ & - g \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (H_{j+1}^n - H_j^n) - g \sen \theta_{zj} \\ & + -\Pi_{4,j}(1-\theta)[(1-\psi)V_j^n - \psi V_{j+1}^n] \end{aligned} \quad (3.1.68)$$

El sistema de ecuaciones (3.1.57) y (3.1.58) es aplicable en cualquier punto dentro del dominio de solución  $\Omega(x_j, t_n)$  y para definir la malla espacio-temporal, la longitud total de la tubería se divide en  $J$  intervalos de discretización espacial de longitud  $\Delta x$  y el tamaño de  $\Delta t$  se define aplicando el número de Courant  $C_N = a \Delta t / \Delta x$  de modo que:

$$\Delta t = C_N \frac{\Delta x}{a} \quad (3.1.69)$$

Como resultado de la discretización, las ecuaciones (3.1.57) y (3.1.58) se aplican sobre los  $J + 1$  nodos del dominio, generando  $2J$  ecuaciones con  $2J + 2$  incógnitas; con las condiciones de frontera definidas en (2.3.5) y (2.3.6), se conoce el valor de la carga de presión en función del nivel del embalse en el primer nodo y el valor de la velocidad en el último nodo, dado por la ley de descarga de la válvula.

Sustituyendo entonces  $H_1^{n+1}$  por  $h(t_{n+1})$  y  $V_{J+1}^{n+1}$  por  $g(t_{n+1})$ , el sistema de ecuaciones queda cerrado ( $2J$  ecuaciones con  $2J$  incógnitas) y puede ser expresado en una matriz pentadiagonal de coeficientes (Figura 3.6).

$$\begin{bmatrix} b_{1,1} & c_{1,1} & d_{1,1} & & & & & & & & 0 \\ b_{2,1} & c_{2,1} & d_{2,1} & & & & & & & & \\ & a_{1,2} & b_{1,2} & c_{1,2} & d_{1,2} & & & & & & \\ & a_{2,2} & b_{2,2} & c_{2,2} & d_{2,2} & & & & & & \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\ & & & & & \dots & \dots & & & & \\ & & & & & & & a_{1,J-1} & b_{1,J-1} & c_{1,J-1} & d_{1,J-1} \\ & & & & & & & a_{2,J-1} & b_{2,J-1} & c_{2,J-1} & d_{2,J-1} \\ & & & & & & & & a_{1,J} & b_{1,J} & c_{1,J} \\ 0 & & & & & & & & a_{2,J} & b_{2,J} & c_{2,J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ H_2 \\ V_2 \\ H_3 \\ \dots \\ \dots \\ V_{J-1} \\ H_J \\ V_J \\ H_{J+1} \end{bmatrix} \stackrel{n+1,m+1}{=} \begin{bmatrix} e_{1,1} - a_{1,1}h(t_{n+1}) \\ e_{2,1} - a_{2,1}h(t_{n+1}) \\ e_{1,2} \\ e_{2,2} \\ \dots \\ \dots \\ e_{1,J-1} \\ e_{2,J-1} \\ e_{1,J} - d_{1,J}g(t_{n+1}) \\ e_{2,J} - d_{2,J}g(t_{n+1}) \end{bmatrix}$$

Figura 3.6. Matriz pentadiagonal de solución

El sistema matricial se puede escribir como:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^{n+1,m+1} = \mathbf{B} \quad (3.1.70)$$

Por lo tanto, la solución para la iteración  $m + 1$  es:

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{X}^{n+1,m+1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad (3.1.71)$$

### 3.2. ANÁLISIS DE CONVERGENCIA

Durante la construcción de un sistema de ecuaciones discretas, es necesario satisfacer ciertas condiciones para que la solución obtenida se aproxime en forma precisa al sistema de ecuaciones diferenciales de partida; estas condiciones se asocian con la convergencia de la solución y con la necesidad de evitar el posible crecimiento de errores de redondeo, producidos por la aritmética de precisión finita con la que operan las computadoras durante los cálculos (Aguilar, 2002).

El estudio de la convergencia para esquemas numéricos aplicados a problemas no lineales resulta complicado y para estos casos, es conveniente recurrir al Teorema de Equivalencia de Lax (Morton & Mayers, 2005). De manera esquemática, dicho teorema se puede visualizar en la Figura 3.7 (Fletcher, 1991):

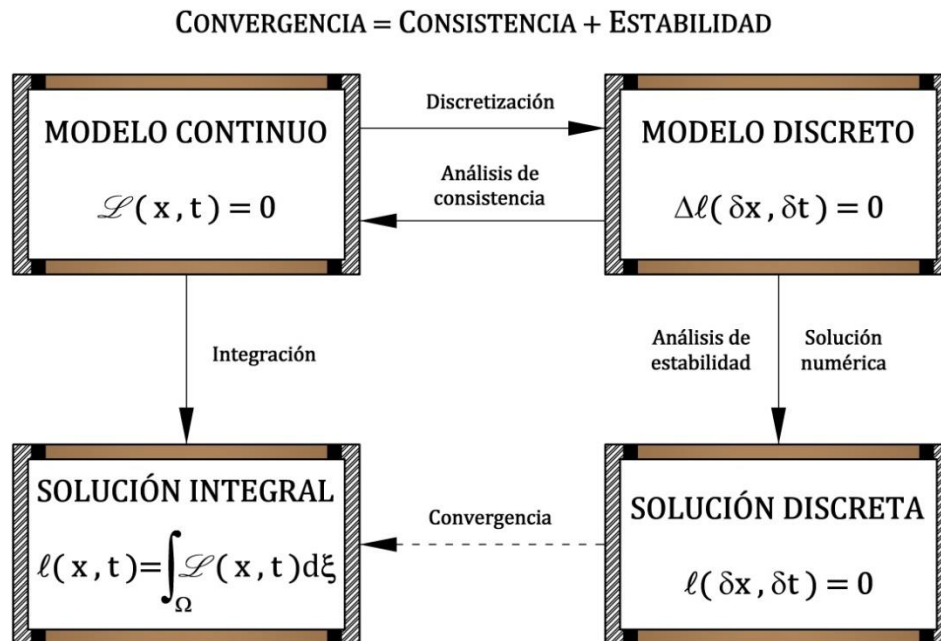


Figura 3.7. Relación entre consistencia, estabilidad y convergencia

La teoría de estabilidad en problemas discretos fue formulada por Lax en 1953, dando paso al teorema que lleva su nombre (Morton & Mayers, 2005):

*Teorema de Equivalencia de Lax. Teniendo una aproximación consistente en diferencias de un problema de evolución lineal, bien planteado, el cual puede ser resuelto en el sentido de las ecuaciones diferenciales de partida, la estabilidad del esquema es necesaria y suficiente para tener convergencia.*

Dado que el Teorema de Equivalencia de Lax no puede aplicarse directamente al caso de sistemas no lineales (como lo son las ecuaciones de flujo en tuberías), resulta necesario realizar una linealización de las ecuaciones de partida y en consecuencia, el teorema debe ser interpretado como una condición necesaria, pero no suficiente (Abbott, 1979).

### 3.2.1. LINEALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES

Para aplicar el teorema de Lax se requiere que el sistema de ecuaciones a evaluar sea lineal, el cual se puede obtener aplicando un análisis de escalas múltiples y localización (Nayfeh, 1981; Aguilar, 2002).

Para esto, se usa una técnica de perturbación sobre las ecuaciones conservativas definidas en (2.3.1) y (2.3.2); en donde se considerará la condición de tubería horizontal ( $\theta = 0$ ) y se asume que las variables de fricción transitoria  $k_t(V; x, t)$  y permanente  $f_p(V; x, t)$  son constantes en el análisis (esta suposición será justificada más adelante). Entonces, las ecuaciones de estudio son:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + V \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\alpha^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (3.2.1)$$

$$\alpha \frac{\partial V}{\partial t} + (V + \beta) \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \bar{f}_p \frac{|V|V}{2D} = 0 \quad (3.2.2)$$

En donde se definen los siguientes términos ‘transitorios’:

$$\alpha = 1 + \bar{k}_t \quad (3.2.3)$$

$$\beta = -a\bar{k}_t \quad (3.2.4)$$

Las ecuaciones (3.2.1) y (3.2.2) representan un problema bien planteado en el sentido de Hadamard (Drolet & Gray, 1988), de valor inicial y de valores en la frontera descritas en las ecuaciones (2.3.3) – (2.3.6).



Entonces, para conocer sus condiciones de propagación de perturbaciones, se introducen pequeñas variaciones sobre las variables dependientes, con las siguientes características:

$$H(x, t) = \bar{H}(x, t) + h(x, t) \quad ; \quad h \ll \bar{H} \quad (3.2.5)$$

$$V(x, t) = \bar{V}(x, t) + v(x, t) \quad ; \quad v \ll \bar{V} \quad (3.2.6)$$

Las variables  $\bar{H}(x, t)$  y  $\bar{V}(x, t)$  se consideran valores promediados, mientras que las variables  $h(x, t)$  y  $v(x, t)$  son pequeñas perturbaciones que indicarán el crecimiento o decaimiento sobre el sistema continuo y la relación de escalas es  $\varepsilon = h/\bar{H} = v/\bar{V} \ll 1$ .

Introduciendo (3.2.5) y (3.2.6) en (3.2.1) y (3.2.2) y desarrollando se tiene:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} + \bar{V} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3.2.7)$$

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \alpha \frac{\partial v}{\partial t} + (\bar{V} + \beta) \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + (\bar{V} + \beta) \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \bar{f}_p \frac{|\bar{V}|\bar{V}}{2D} \\ + \frac{f_p}{2D} (|\bar{V}|v + |v|\bar{V}) + f_p \frac{|v|v}{2D} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

En el sistema (3.2.7) y (3.2.8) se identifican tres escalas: la primera sólo depende de las variables promediadas y es de orden  $O(\varepsilon^0)$ ; en la segunda se tienen variables de perturbación solas y/o el producto de una variable promediada y una de perturbación y se considera de orden  $O(\varepsilon^1)$ ; en la tercera se tiene el producto de dos variables de perturbación y su orden es  $O(\varepsilon^2)$ . En resumen se pueden establecer los siguientes operadores:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \quad (3.2.9)$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \quad (3.2.10)$$

Donde  $\mathcal{L}_0$  y  $\mathcal{M}_0$  son los operadores de las variables de orden  $O(\varepsilon^0)$ ;  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{M}_1$  son los operadores de las variables de orden  $O(\varepsilon^1)$  y  $\mathcal{L}_2$  y  $\mathcal{M}_2$  son los operadores de las variables de orden  $O(\varepsilon^2)$  que constituyen a los operadores  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{M}$  del problema respectivamente<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> De manera general, la separación de escalas de perturbación adopta la forma siguiente:  $\mathcal{L} = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots$  en donde  $1 > \varepsilon > \varepsilon^2 > \dots$  (Nayfeh, 1981)

– Escala de  $O(\varepsilon^0)$

$$\mathcal{L}_0(\bar{H}, \bar{V}; x, t) = \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \bar{V} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} = 0 \quad (3.2.11)$$

$$\mathcal{M}_0(\bar{H}, \bar{V}; x, t) = \alpha \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} + \beta) \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + g \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \bar{f}_p \frac{|\bar{V}| \bar{V}}{2D} = 0 \quad (3.2.12)$$

– Escala de  $O(\varepsilon)$

$$\mathcal{L}_1(h, v; x, t) = \frac{\partial h}{\partial t} + \bar{V} \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3.2.13)$$

$$\mathcal{M}_1(h, v; x, t) = \alpha \frac{\partial v}{\partial t} + (\bar{V} + \beta) \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\bar{f}_p}{2D} (|\bar{V}|v + |v|\bar{V}) = 0 \quad (3.2.14)$$

En esta escala las derivadas espaciales sobre los valores promediados son  $\partial/\partial x \rightarrow 0$  dado que el operador se localiza en una escala pequeña, entonces:

$$\mathcal{L}_1(h, v; x, t) = \frac{\partial h}{\partial t} + \bar{V} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3.2.15)$$

$$\mathcal{M}_1(h, v; x, t) = \alpha \frac{\partial v}{\partial t} + (\bar{V} + \beta) \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\bar{f}_p}{2D} (|\bar{V}|v + |v|\bar{V}) = 0 \quad (3.2.16)$$

– Escala de  $O(\varepsilon^2)$

$$\mathcal{L}_2(h, v; x, t) = v \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (3.2.17)$$

$$\mathcal{M}_2(h, v; x, t) = v \frac{\partial v}{\partial x} + \bar{f}_p \frac{|v|v}{2D} = 0 \quad (3.2.18)$$

Se observa que la condición de orden  $O(\varepsilon^0)$  es el valor de referencia y no presenta variaciones en función de la perturbaciones (no tiene términos en función de la variables de perturbación). En los casos de orden  $O(\varepsilon)$  y  $O(\varepsilon^2)$  los operadores están influenciados por los términos de perturbación, pero en el caso de los operadores de orden  $O(\varepsilon)$  se tiene una característica lineal sobre las variables de perturbación, en consecuencia su propagación es más estricta en comparación con las de  $O(\varepsilon^2)$  dada la sensibilidad de los cambios en su orden de magnitud, a la cual están sujetas los términos de orden superior.

En lo subsecuente, se trabajará con la escala de orden  $O(\varepsilon)$ ; por tanto los términos de fricción permanente  $\bar{f}_p(V; x, t)$  y transitoria  $\bar{k}_t(V; x, t)$  al tener una variación suave determinada por la escala de  $O(\varepsilon^0)$ , en la escala de  $O(\varepsilon)$  dichos términos pueden ‘congelarse’, es decir, mantenerse invariantes para el valor que adopten y por ende considerarse constantes tal y como se indicó al inicio del análisis. En forma coloquial, se dice que las variables de referencia pueden ser localizadas, mientras que las variables de perturbación no (Aguilar, 2002).

Aplicando la función signo para sustituir el valor absoluto de las velocidades en el término de fricción de la ecuación (3.2.16), tal que  $|\bar{V}| = \text{sgn}(\bar{V}) \cdot \bar{V}$  y  $|v| = \text{sgn}(v) \cdot v$ , se tiene:

$$\frac{\bar{f}_p}{2D} (|\bar{V}|v + |v|\bar{V}) = \frac{\bar{f}_p}{2D} [\text{sgn}(\bar{V}) \bar{V}v + \text{sgn}(v) v\bar{V}] \quad (3.2.19)$$

O bien:

$$\frac{\bar{f}_p}{2D} (|\bar{V}|v + |v|\bar{V}) = \frac{\bar{f}_p}{2D} (\text{sgn}(\bar{V}) \bar{V} + \text{sgn}(v) \bar{V})v \quad (3.2.20)$$

Obsérvese que, en la ecuación de cantidad de movimiento, el valor absoluto del término de fricción es utilizado únicamente para identificar la dirección del flujo en movimiento sobre el eje longitudinal  $x$ , por tanto se puede establecer que el signo de la perturbación sea igual al de la velocidad media  $\text{sgn}(v) = \text{sgn}(\bar{V})$ , entonces la ecuación (3.2.20) resulta:

$$\frac{\bar{f}_p}{2D} (|\bar{V}|v + |v|\bar{V}) = \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} v \quad (3.2.21)$$

Y sustituyendo (3.2.21) en (3.2.16):

$$\mathcal{M}_1(h, v; x, t) = \alpha \frac{\partial v}{\partial t} + (\bar{V} + \beta) \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} v = 0 \quad (3.2.22)$$

El resultado de escalar y localizar el sistema de ecuaciones (3.2.1) y (3.2.2), es la transformación de un problema de valor inicial, no lineal y coeficientes variables, en un problema de valor inicial puro, lineal y de coeficientes constantes, cuya condición de estabilidad puede delimitarse aplicando el método de Von Neumann.

Entonces, para llevar a cabo el análisis de convergencia del sistema linealizado (3.2.15) y (3.2.22), se definirá la presentación de las ecuaciones, proponiendo una expresión generalizada que considere la versión conservativa y no conservativa del modelo continuo:

*Definición 3.* Sea el sistema de ecuaciones gobernantes del flujo en tuberías en su versión linealizada.

– *Ecuación de continuidad*

$$\mathcal{L}(h, v; x, t) = \frac{\partial h}{\partial t} + M\bar{V}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{a^2}{g}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3.2.23)$$

– *Ecuación de cantidad de movimiento*

$$\mathcal{M}(h, v; x, t) = \alpha\frac{\partial v}{\partial t} + (M\bar{V} + \beta)\frac{\partial v}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x} + \bar{f}_p\frac{\bar{V}}{D}v = 0 \quad (3.2.24)$$

En donde  $x$  es la coordenada en el sentido longitudinal y  $t$  el tiempo como variables independientes;  $h(x, t)$  y  $v(x, t)$  son la presión y la velocidad respectivamente como variables dependientes en una escala de perturbación de orden  $O(\varepsilon)$ , en donde  $\varepsilon \ll 1$  y  $x, t: \Omega \in [0, L] \times [0, T]$  que delimitan el espacio de solución  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $L$  es la longitud total de la conducción y  $T$  el tiempo final de solución;  $\bar{V}$  es la velocidad media de flujo para un punto arbitrario de referencia en el espacio de solución  $\Omega$ ;  $g$  es la aceleración de la gravedad;  $a$  es la celeridad de onda;  $D$  el diámetro de la sección transversal;  $\bar{f}_p$  el factor de fricción de Darcy-Weisbach para flujo permanente; las variables transitorias se definen como  $\alpha = 1 + k_t$  y  $\beta = -ak_t$ , en donde  $k_t$  es el coeficiente de Brunone para flujo transitorio y el término  $M$  es una variable de control que adopta los siguientes valores:

$$M = \begin{cases} 0 & \rightarrow \text{Sin términos convectivos} \\ 1 & \rightarrow \text{Con términos convectivos} \end{cases} \quad (3.2.25)$$

El sistema linealizado (3.2.23) y (3.2.24), constituye un problema bien planteado en el sentido de Hadamard (Drolet & Gray, 1988), de valor inicial puro de tipo hiperbólico.

### 3.2.2. ANÁLISIS DE CONSISTENCIA

Se dice que un sistema de ecuaciones discretas es consistente numéricamente, cuando dicho sistema tiende a la ecuación diferencial de partida bajo cualquier norma, al aplicar una condición de refinamiento que tienda a cero el espaciamiento de la malla numérica (Morton & Mayers, 2005; Aguilar, 2002).

En lo que respecta al esquema de Preissmann, se han realizado estudios del análisis de consistencia aplicado a las ecuaciones unidimensionales de Saint-Venant que describen el flujo a superficie libre (Abbott, 1979; Cunge et al., 1980).

Aguilar (2002) presenta un análisis general de consistencia del esquema de Preissmann, que se utilizará como base para establecer la consistencia numérica de las ecuaciones discretas de flujo en tuberías. El método seleccionado para ello, es un análisis de truncado, en el cual se construye una función polinomial de grado  $n$  que tome los valores de la función discreta en el espacio de solución, de modo tal que  $F(x_j, t_n) = F_j^n$ .

El polinomio a definir debe poseer las siguientes propiedades:

- Muestrea los valores de la función discreta  $F$  sobre los puntos definidos de la malla.
- Cumple los requisitos suficientes de continuidad, de manera que permita aplicar sobre ella una expansión en serie de Taylor de grado  $n$ .

Una vez generados los polinomios, se sustituyen en las ecuaciones discretas y se evalúan alrededor de un punto particular arbitrario. El resultado de la expansión debe ser la ecuación original con un remanente adicional conocido como *error de truncado* (Morton & Mayers, 2005; Szymkiewicz, 2010), el cual debe tender a cero a medida que el espaciamiento de la malla tiende a cero (Aguilar, 2002).

Definido lo anterior, se generan las funciones polinomiales que especifican los cuatro puntos en los que tiene influencia el esquema de Preissmann (Figura 3.3) y sobre ellas se aplica una expansión en serie de Taylor:

- *Esquina inferior izquierda*  $F(x_j, t_n)$

$$\begin{aligned}
 & F[x - \psi\Delta x, t - \theta\Delta t] \\
 &= F - \psi\Delta x F_x - \theta\Delta t F_t + \frac{\psi^2\Delta x^2}{2!} F_{xx} + \psi\theta\Delta x\Delta t F_{xt} + \frac{\theta^2\Delta t^2}{2!} F_{tt} \\
 & - \frac{\psi^3\Delta x^3}{3!} F_{xxx} - \frac{\psi^2\theta\Delta x^2\Delta t}{2} F_{xxt} - \frac{\psi\theta^2\Delta x\Delta t^2}{2} F_{xtt} - \frac{\theta^3\Delta t^3}{3!} F_{ttt} \\
 & + O(\Delta x^4, \Delta t^4)
 \end{aligned} \tag{3.2.26}$$

- *Esquina inferior derecha*  $F(x_{j+1}, t_n)$

$$\begin{aligned}
 & F[x + (1 - \psi)\Delta x, t - \theta\Delta t] \\
 &= F + (1 - \psi)\Delta x F_x - \theta\Delta t F_t + \frac{(1 - \psi)^2\Delta x^2}{2!} F_{xx} - (1 - \psi)\theta\Delta x\Delta t F_{xt} \\
 & + \frac{\theta^2\Delta t^2}{2!} F_{tt} + \frac{(1 - \psi)^3\Delta x^3}{3!} F_{xxx} - \frac{(1 - \psi)^2\theta\Delta x^2\Delta t}{2} F_{xxt} \\
 & + \frac{(1 - \psi)\theta^2\Delta x\Delta t^2}{2} F_{xtt} - \frac{\theta^3\Delta t^3}{3!} F_{ttt} + O(\Delta x^4, \Delta t^4)
 \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

– *Esquina superior izquierda*  $F(x_j, t_{n+1})$

$$\begin{aligned}
 & F[x - \psi\Delta x, t + (1 - \theta)\Delta t] \\
 &= F - \psi\Delta x F_x + (1 - \theta)\Delta t F_t + \frac{\psi^2 \Delta x^2}{2!} F_{xx} - \psi(1 - \theta)\Delta x \Delta t F_{xt} \\
 &+ \frac{(1 - \theta)^2 \Delta t^2}{2!} F_{tt} - \frac{\psi^3 \Delta x^3}{3!} F_{xxx} + \frac{\psi^2 (1 - \theta)\Delta x^2 \Delta t}{2} F_{xxt} \\
 &- \frac{\psi(1 - \theta)^2 \Delta x \Delta t^2}{2} F_{xtt} + \frac{(1 - \theta)^3 \Delta t^3}{3!} F_{ttt} + O(\Delta x^4, \Delta t^4)
 \end{aligned} \tag{3.2.28}$$

– *Esquina superior derecha*  $F(x_{j+1}, t_{n+1})$

$$\begin{aligned}
 & F[x + (1 - \psi)\Delta x, t + (1 - \theta)\Delta t] \\
 &= F + (1 - \psi)\Delta x F_x + (1 - \theta)\Delta t F_t + \frac{(1 - \psi)^2 \Delta x^2}{2!} F_{xx} \\
 &+ (1 - \psi)(1 - \theta)\Delta x \Delta t F_{xt} + \frac{(1 - \theta)^2 \Delta t^2}{2!} F_{tt} + \frac{(1 - \psi)^3 \Delta x^3}{3!} F_{xxx} \\
 &+ \frac{(1 - \psi)^2 (1 - \theta)\Delta x^2 \Delta t}{2} F_{xxt} + \frac{(1 - \psi)(1 - \theta)^2 \Delta x \Delta t^2}{2} F_{xtt} \\
 &+ \frac{(1 - \theta)^3 \Delta t^3}{3!} F_{ttt} + O(\Delta x^4, \Delta t^4)
 \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

Donde se usa la siguiente notación para identificar a las derivadas parciales:  $\partial F/\partial x = F_x$ ,  $\partial F/\partial t = F_t$ ,  $\partial^2 F/\partial x^2 = F_{xx}$ ,  $\partial^2 F/\partial x \partial t = F_{xt}$ ,  $\partial^2 F/\partial t^2 = F_{tt}$ ,  $\partial^3 F/\partial x^3 = F_{xxx}$ ,  $\partial^3 F/\partial x^2 \partial t = F_{xxt}$ ,  $\partial^3 F/\partial x \partial t^2 = F_{xtt}$  y  $\partial^3 F/\partial t^3 = F_{ttt}$ .

La consistencia numérica de los operadores de Preissman, tanto para la derivada temporal (3.1.31), la derivada espacial (3.1.32) y los términos independientes (3.1.33) se determina sustituyendo en ellas, las expansiones (3.2.26) – (3.2.29) y desarrollando:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = F_t + \frac{(1 - 2\theta)\Delta t}{2!} F_{tt} + \frac{(3\theta^2 - 3\theta + 1)\Delta t^2}{3!} F_{ttt} + \frac{\psi(1 - \psi)\Delta x^2}{2} F_{xxt} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \tag{3.2.30}$$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} = F_x + \frac{(1 - 2\psi)\Delta x}{2!} F_{xx} + \frac{(3\psi^2 - 3\psi + 1)\Delta x^2}{3!} F_{xxx} + \frac{\theta(1 - \theta)\Delta t^2}{2} F_{xtt} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \tag{3.2.31}$$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = F + \frac{\psi(1 - \psi)\Delta x^2}{2!} F_{xx} + \frac{\theta(1 - \theta)\Delta t^2}{2!} F_{tt} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \tag{3.2.32}$$

Sustituyendo los operadores (3.2.30) – (3.2.32) en las ecuaciones linealizadas de flujo en tuberías (3.2.23) y (3.2.24), se determina la consistencia numérica del esquema:

$$\begin{aligned}
 \ell(h, v; x, t) = & h_t + \frac{(1-2\theta)\Delta t}{2!} h_{tt} + \frac{(3\theta^2 - 3\theta + 1)\Delta t^2}{3!} h_{ttt} + \frac{\psi(1-\psi)\Delta x^2}{2} h_{xxt} \\
 & + M\bar{V} \left[ h_x + \frac{(1-2\psi)\Delta x}{2!} h_{xx} + \frac{(3\psi^2 - 3\psi + 1)\Delta x^2}{3!} h_{xxx} \right. \\
 & \left. + \frac{\theta(1-\theta)\Delta t^2}{2} h_{xtt} \right] \\
 & + \frac{a^2}{g} \left[ v_x + \frac{(1-2\psi)\Delta x}{2!} v_{xx} + \frac{(3\psi^2 - 3\psi + 1)\Delta x^2}{3!} v_{xxx} \right. \\
 & \left. + \frac{\theta(1-\theta)\Delta t^2}{2} v_{xtt} \right] + O(\Delta x^3, \Delta t^3)
 \end{aligned} \tag{3.2.33}$$

$$\begin{aligned}
 m(h, v; x, t) = & \alpha \left[ v_t + \frac{(1-2\theta)\Delta t}{2!} v_{tt} + \frac{(3\theta^2 - 3\theta + 1)\Delta t^2}{3!} v_{ttt} \right. \\
 & \left. + \frac{\psi(1-\psi)\Delta x^2}{2} v_{xxt} \right] \\
 & + (M\bar{V} + \beta) \left[ v_x + \frac{(1-2\psi)\Delta x}{2!} v_{xx} + \frac{(3\psi^2 - 3\psi + 1)\Delta x^2}{3!} v_{xxx} \right. \\
 & \left. + \frac{\theta(1-\theta)\Delta t^2}{2} v_{xtt} \right] \\
 & + g \left[ h_x + \frac{(1-2\psi)\Delta x}{2!} h_{xx} + \frac{(3\psi^2 - 3\psi + 1)\Delta x^2}{3!} h_{xxx} \right. \\
 & \left. + \frac{\theta(1-\theta)\Delta t^2}{2} h_{xtt} \right] + \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} \left[ v + \frac{\psi(1-\psi)\Delta x^2}{2!} v_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)\Delta t^2}{2!} v_{tt} \right] \\
 & + O(\Delta x^3, \Delta t^3)
 \end{aligned} \tag{3.2.34}$$

Con las ecuaciones (3.2.33) y (3.2.34) se puede evaluar el grado de aproximación numérica, el cual varía en función de los valores que adopten los factores de peso; de modo que si los factores se centran en la celda, es decir  $\psi = \theta = 1/2$ , el orden de aproximación resulta:

$$\ell(h, v; x, t) = \frac{\partial h}{\partial t} + M\bar{V} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + O(\Delta x^2, \Delta t^2) \tag{3.2.35}$$

$$m(h, v; x, t) = \alpha \frac{\partial v}{\partial t} + (M\bar{V} + \beta) \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} v + O(\Delta x^2, \Delta t^2) = 0 \tag{3.2.36}$$

Y en caso de que los factores de peso adopten valores diferentes al centro de la celda, tal que  $\psi \neq 1/2$  y  $\theta \neq 1/2$ , entonces el orden de consistencia es menor:

$$\ell(h, v; x, t) = \frac{\partial h}{\partial t} + M\bar{V} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + O(\Delta x, \Delta t) \quad (3.2.37)$$

$$m(h, v; x, t) = \alpha \frac{\partial v}{\partial t} + (M\bar{V} + \beta) \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} v + O(\Delta x, \Delta t) = 0 \quad (3.2.38)$$

Una vez definido el grado de aproximación del esquema, se puede enunciar el siguiente Teorema, cuya demostración cumple la primera parte del Teorema de Equivalencia de Lax:

**Teorema de Consistencia Numérica.** *El esquema de Preissmann (3.1.31) – (3.1.33) aplicado a las ecuaciones linealizadas de flujo en tuberías (3.2.23) y (3.2.24) es consistente numéricamente bajo cualquier norma, cuando se tiene un refinamiento de malla tal que,  $\Delta x$  y  $\Delta t$  tienden a cero.*

Entonces, se toman los operadores originales del problema continuo (3.2.23) y (3.2.24) y los operadores obtenidos del análisis de consistencia (3.2.33) y (3.2.34) y se refina la malla, de forma que se llega a la siguiente aproximación:

$$\|\mathcal{L}(h, v; x, t) - \ell(h, v; x, t)\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \Delta x, \Delta t \rightarrow 0 \quad (3.2.39)$$

$$\|\mathcal{M}(h, v; x, t) - m(h, v; x, t)\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \Delta x, \Delta t \rightarrow 0 \quad (3.2.40)$$

Y se concluye que el esquema de Preissmann aplicado a las ecuaciones de flujo en tuberías es consistente numéricamente.

### 3.2.3. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE VON NEUMANN

El concepto de estabilidad está relacionado con el crecimiento o decaimiento de los errores introducidos en cualquier etapa del proceso computacional; estos errores son causados por la imposibilidad de las computadoras de usar un número infinito de posiciones decimales en los cálculos (errores de redondeo) y no son el resultado de una incorrecta lógica del algoritmo (Fletcher, 1991).

El análisis de estabilidad de Von Neumann será el método empleado para determinar el comportamiento de los errores de redondeo basado en el análisis de series de Fourier; su uso permite estudiar las propiedades de propagación del esquema numérico asociados a cada número de onda (modo de Fourier) a través de su amplitud y fase y compararlas con las propiedades de propagación de la ecuación diferencial original (Aguilar, 2002; Morton & Mayers, 2005).



Para efectuar este análisis de estabilidad, considérese la expansión en serie de Fourier para una variable cualquiera con dependencia espacio-temporal  $c(x, t)$ :

$$c(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{c}(k_m) e^{i[k_m x - \omega_m(k_m)t]} \quad (3.2.41)$$

Donde  $m$  representa la  $m$ -ésima componente de Fourier;  $\hat{c}$  la amplitud de la variable dependiente;  $i \equiv \sqrt{-1}$  la unidad imaginaria;  $k_m$  y  $\omega_m$  el número de onda adimensional y la frecuencia respectivamente, ambos correspondientes al  $m$ -ésimo modo de la serie.

Tomando un modo arbitrario de la serie de Fourier para el análisis:

$$c(x, t) = \hat{c}(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} \quad (3.2.42)$$

Y dado que la frecuencia  $\omega(k)$  es una variable compleja, se puede separar en su parte real e imaginaria como:

$$\omega(k) = \omega_r(k) + i\omega_i(k) \quad (3.2.43)$$

En base a lo definido en (3.2.43), la componente de Fourier de la ecuación (3.2.42) se puede expresar de la forma siguiente:

$$c(x, t) = \hat{c}(k) e^{\omega_i(k)t} e^{i[kx - \omega_r(k)t]} \quad (3.2.44)$$

La relación obtenida en (3.2.44) indica que a medida que aumenta el valor de  $t > 0$ , la perturbación se amplificará solamente si  $\omega_i(k) > 0$ . En caso de tener  $\omega_i(k) = 0$ , entonces la perturbación permanecerá de igual magnitud y en el caso de que  $\omega_i(k) < 0$ , la perturbación decaerá en el tiempo.

Usando estas condiciones de crecimiento y disipación de la perturbación, se define la condición de estabilidad límite para sistemas continuos:

$$\omega_i(k) \leq 0 \quad (3.2.45)$$

Por otra parte, la representación de la función discreta de muestreo para cualquier punto del espacio de solución  $\Omega(x_j, t_n)$  se puede expresar como:

$$x_j = j\Delta x \quad (3.2.46)$$

$$t_n = n\Delta t \quad (3.2.47)$$

Al sustituir las variables discretas (3.2.46) y (3.2.47) en (3.2.42) se obtiene:

$$c(x_j, t_n) = \hat{c}(k)e^{-i\omega(k)n\Delta t}e^{ikj\Delta x} \quad (3.2.48)$$

El término  $e^{-i\omega(k)n\Delta t}$  se define como el factor de amplificación modificado  $\rho^n$  para un modo arbitrario de Fourier y se puede establecer lo siguiente:

$$C_j^n = c(x_j, t_n) = \hat{c}(k)\rho^n e^{ikj\Delta x} \quad (3.2.49)$$

En este caso  $C_j^n$  es el polinomio de muestreo discreto que mapea a la función continua en  $\Omega(x_j, t_n)$ , y además  $C_j^n \in C^0$ ; entonces la expansión en serie discreta de Fourier para un modo arbitrario se puede expresar de la siguiente manera:

$$C_j^n = \hat{C}(k)\rho^n e^{ikj\Delta x} \quad (3.2.50)$$

De manera similar a lo establecido en la ecuación (3.2.44), se observa que la relación (3.2.50) indica que a medida que aumenta el valor de  $t > 0$  la perturbación se amplificará solamente si  $|\rho| > 1$ ; en el caso de tener  $|\rho| = 1$  la perturbación permanecerá de igual magnitud y en el caso de que  $|\rho| < 1$  la perturbación decaerá en el tiempo.

Usando estas condiciones de crecimiento y dispersión de la perturbación, se define la condición de estabilidad límite para sistemas discretos:

$$|\rho| \leq 1 \quad (3.2.51)$$

Cabe destacar, que la aplicación de técnicas de estabilidad con expansiones en serie de Fourier (tanto para sistemas continuos y discretos) está limitado a problemas evolutivos lineales donde el principio de superposición es válido (Aguilar, 2002).

### 3.2.3.1. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DEL SISTEMA CONTINUO

En base a lo establecido en la ecuación (3.2.42) la aproximación en serie de Fourier continua sobre las variables dependientes es:

$$h = \hat{h}e^{i(kx-\omega t)} \quad (3.2.52)$$

$$v = \hat{v}e^{i(kx-\omega t)} \quad (3.2.53)$$

Sustituyendo (3.2.52) y (3.2.53) en el sistema de ecuaciones linealizado (3.2.23) y (3.2.24) y desarrollando, se tiene:

$$e^{i(kx-\omega t)} \left[ (\omega - M\bar{V}k)\hat{h} - \frac{a^2}{g}k\hat{v} \right] = 0 \quad (3.2.54)$$

$$e^{i(kx-\omega t)} \left\{ -gk\hat{h} + \left[ \alpha\omega - (M\bar{V} + \beta)k + i\bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} \right] \hat{v} \right\} = 0 \quad (3.2.55)$$

O en forma matricial:

$$e^{i(kx-\omega t)} \begin{bmatrix} \omega - M\bar{V}k & -\frac{a^2}{g}k \\ -gk & \alpha\omega - (M\bar{V} + \beta)k + i\bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.56)$$

Entonces, el sistema de ecuaciones (3.2.56) tendrá una solución diferente a la trivial, si y sólo si el determinante de su matriz de coeficientes es nulo, esto es:

$$\alpha\omega^2 + \left\{ i\bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} - [(1 + \alpha)M\bar{V} + \beta]k \right\} \omega + [M\bar{V}(M\bar{V} + \beta) - a^2]k^2 - i\bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} M\bar{V}k = 0 \quad (3.2.57)$$

Y considerando las siguientes variables de simplificación:

$$F_1 = -[(1 + \alpha)M\bar{V} + \beta] = -(M\bar{V} + \beta + \alpha M\bar{V}) \quad (3.2.58)$$

$$F_2 = M\bar{V}(M\bar{V} + \beta) - a^2 = (M\bar{V})^2 + M\bar{V}\beta - a^2 \quad (3.2.59)$$

La ecuación (3.2.57) pasa a ser:

$$\alpha\omega^2 + \left( i\bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} + F_1 k \right) \omega + F_2 k^2 - i\bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} M\bar{V}k = 0 \quad (3.2.60)$$

Entonces la relación de dispersión continua se obtiene al resolver la ecuación cuadrática (3.2.60) para la frecuencia  $\omega(k)$ :

$$\omega(k) = -\frac{F_1}{2\alpha}k - i\bar{f}_p \frac{\bar{V}}{2\alpha D} \pm \sqrt{\frac{F_1^2 - 4\alpha F_2}{4\alpha^2}k^2 - \bar{f}_p^2 \frac{\bar{V}^2}{4\alpha^2 D^2} + i\bar{f}_p \frac{\bar{V}(F_1 + 2\alpha M\bar{V})}{2\alpha^2 D}k} \quad (3.2.61)$$

Y al aplicar la condición de estabilidad límite  $\omega_i \leq 0$  a la relación de dispersión (3.2.61) se obtiene la condición de estabilidad del sistema continuo:

$$\omega_i = -\bar{f}_p \frac{\bar{V}}{2\alpha D} \pm \text{Im} \left[ \sqrt{\frac{F_1^2 - 4\alpha F_2}{4\alpha^2} k^2 - \bar{f}_p^2 \frac{\bar{V}^2}{4\alpha^2 D^2} + i\bar{f}_p \frac{\bar{V}(F_1 + 2\alpha M\bar{V})}{2\alpha^2 D} k} \right] \leq 0 \quad (3.2.62)$$

Dada la poca practicidad de solamente expresar la parte imaginaria (Im) del número complejo dentro del radical en la ecuación (3.2.62), resulta imperativo extraerla. Para esto, se utiliza la raíz cuadrada de un número complejo en forma rectangular (véase Anexo A):

$$\sqrt{x + iy} = \pm \left[ \sqrt{\frac{|x + iy| + x}{2}} + i \text{sgn}(y) \sqrt{\frac{|x + iy| - x}{2}} \right] \quad (3.2.63)$$

En donde el módulo del número complejo por definición es:

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.2.64)$$

Aplicando las relaciones (3.2.63) y (3.2.64) sobre (3.2.62) se obtiene:

$$-\bar{f}_p \frac{\bar{V}}{2\alpha D} \pm \text{sgn} \left[ \bar{f}_p \frac{\bar{V}(F_1 + 2\alpha M\bar{V})}{2\alpha^2 D} k \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[ \left( \frac{F_1^2 - 4\alpha F_2}{4\alpha^2} k^2 - \bar{f}_p^2 \frac{\bar{V}^2}{4\alpha^2 D^2} \right)^2 + \bar{f}_p^2 \frac{\bar{V}^2 (F_1 + 2\alpha M\bar{V})^2}{4\alpha^4 D^2} k^2 \right]^{1/2} - \frac{F_1^2 - 4\alpha F_2}{4\alpha^2} k^2 + \bar{f}_p^2 \frac{\bar{V}^2}{4\alpha^2 D^2} \right\} \leq 0 \quad (3.2.65)$$

Y de la ecuación (3.2.65), se puede establecer lo siguiente:

$$\bar{f}_p \frac{\bar{V}(F_1 + 2\alpha M\bar{V})}{2\alpha^2 D} k > 0 \quad (3.2.66)$$

La inecuación (3.2.66) se deduce al analizar cada variable del término (las cuales siempre son positivas en el análisis). Dicha afirmación es válida en caso de considerar o no los términos convectivos en las ecuaciones, por lo que se puede establecer que:

$$\text{sgn} \left[ \bar{f}_p \frac{\bar{V}(F_1 + 2\alpha M\bar{V})}{2\alpha^2 D} k \right] = 1 \quad (3.2.67)$$

En caso de que los términos  $k_t = 0$  (excluir la fricción transitoria) o  $f_p = 0$  (excluir la fricción permanente), la relación (3.2.66) cambia y se obtiene lo siguiente:

$$\operatorname{sgn} \left[ \bar{f}_p \frac{\bar{V}(F_1 + 2\alpha M\bar{V})}{2\alpha^2 D} k \right] = 0 \quad (3.2.68)$$

El resultado (3.2.68) reduce sustancialmente la ecuación (3.2.65) y su aplicación es válida, independientemente de usar o no los términos convectivos.

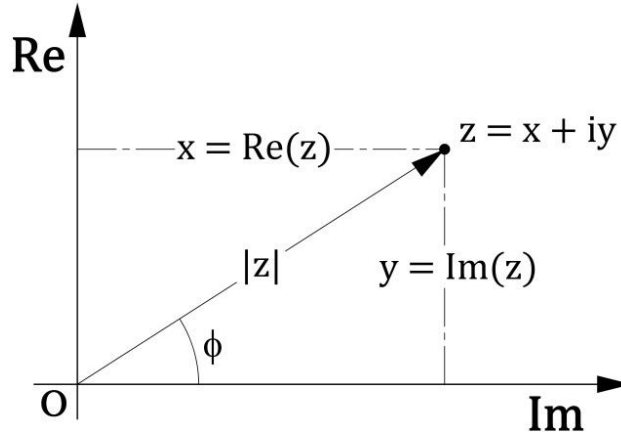


Figura 3.8. Representación del número imaginario en el plano complejo

Por otra parte, analizando el plano complejo en la Figura 3.8 se tiene que:

$$|z| > |x| \quad (3.2.69)$$

Al comparar la inecuación (3.2.69) con la definición (3.2.63) utilizada para extraer la parte imaginaria del radical, de la ecuación (3.2.65) se establece lo siguiente:

$$\left[ \left( \frac{F_1^2 - 4\alpha F_2}{4\alpha^2} k^2 - f_p^2 \frac{\bar{V}^2}{4\alpha^2 D^2} \right)^2 + f_p^2 \frac{\bar{V}^2 (F_1 - 2\alpha \bar{V})^2}{4\alpha^4 D^2} k^2 \right]^{1/2} > \frac{F_1^2 - 4\alpha F_2}{4\alpha^2} k^2 + f_p^2 \frac{\bar{V}^2}{4\alpha^2 D^2} \quad (3.2.70)$$

La inecuación (3.2.70) demuestra que el valor dentro del radical en la ecuación (3.2.65) siempre será positivo y por tanto deben considerarse en el análisis de estabilidad las dos ramas que el signo  $\pm$  establece.

Aplicando lo señalado en (3.2.67) y (3.2.70) la condición de estabilidad límite será:

$$\begin{aligned}
 -\bar{f}_p \frac{\bar{V}}{2\alpha D} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[ \left( \frac{F_1^2 - 4\alpha F_2}{4\alpha^2} k^2 - \bar{f}_p^2 \frac{\bar{V}^2}{4\alpha^2 D^2} \right)^2 + \bar{f}_p^2 \frac{\bar{V}^2 (F_1 + 2\alpha M\bar{V})^2}{4\alpha^4 D^2} k^2 \right]^{1/2} \right. \\
 \left. - \frac{F_1^2 - 4\alpha F_2}{4\alpha^2} k^2 + \bar{f}_p^2 \frac{\bar{V}^2}{4\alpha^2 D^2} \right\}^{1/2} \leq 0
 \end{aligned} \tag{3.2.71}$$

En caso de tomar el signo negativo se concluye que para el sistema continuo la ecuación es ‘*incondicionalmente estable*’ y para el caso más desfavorable (signo positivo), la condición límite de estabilidad está dado por:

$$\begin{aligned}
 \bar{V} \leq \frac{2\alpha D}{\sqrt{2}\bar{f}_p} \left\{ \left[ \left( \frac{F_1^2 - 4\alpha F_2}{4\alpha^2} k^2 - \bar{f}_p^2 \frac{\bar{V}^2}{4\alpha^2 D^2} \right)^2 + \bar{f}_p^2 \frac{\bar{V}^2 (F_1 + 2\alpha M\bar{V})^2}{4\alpha^4 D^2} k^2 \right]^{1/2} \right. \\
 \left. - \frac{F_1^2 - 4\alpha F_2}{4\alpha^2} k^2 + \bar{f}_p^2 \frac{\bar{V}^2}{4\alpha^2 D^2} \right\}^{1/2}
 \end{aligned} \tag{3.2.72}$$

Si se sustituye el caso indicado en (3.2.68) para fricción transitoria no considerada en el análisis ( $k_b = 0$ ) en la ecuación (3.2.65), la condición de estabilidad se reduce a:

$$-\bar{f}_p \frac{\bar{V}}{2D} \leq 0 \tag{3.2.73}$$

Entonces se dice que el sistema continuo evaluado con fricción en estado permanente es ‘*incondicionalmente estable*’. Finalmente si se considera la condición de fricción nula  $f_p = k_b = 0$ , la ecuación (3.2.65) resulta:

$$0 \leq 0 \tag{3.2.74}$$

Y se establece que el sistema tiene una condición ‘*neutralmente estable*’.

### 3.2.3.2. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DEL SISTEMA DISCRETO

Para solucionar el sistema linealizado (3.2.23) y (3.2.24) aplicando una expansión en serie discreta de Fourier, retomamos la propuesta de discretización de Preissmann y se sustituyen los operadores del esquema establecidos en las ecuaciones (3.1.31) – (3.1.33), para generar un sistema de ecuaciones discretas en diferencias finitas, lineal y de coeficientes constantes:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(1-\psi)}{\Delta t} (h_j^{n+1} - h_j^n) + \frac{\psi}{\Delta t} (h_{j+1}^{n+1} - h_{j+1}^n) \\
 & + M\bar{V} \left[ \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (h_{j+1}^n - h_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (h_{j+1}^{n+1} - h_j^{n+1}) \right] \\
 & + \frac{a^2}{g} \left[ \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (v_{j+1}^n - v_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}) \right] = 0
 \end{aligned} \tag{3.2.75}$$

$$\begin{aligned}
 & \alpha \left[ \frac{(1-\psi)}{\Delta t} (v_j^{n+1} - v_j^n) + \frac{\psi}{\Delta t} (v_{j+1}^{n+1} - v_{j+1}^n) \right] \\
 & + (M\bar{V} + \beta) \left[ \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (v_{j+1}^n - v_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}) \right] \\
 & + g \left[ \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (h_{j+1}^n - h_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (h_{j+1}^{n+1} - h_j^{n+1}) \right] \\
 & + \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} \{ (1-\theta)[(1-\psi)v_j^n + \psi v_{j+1}^n] + \theta[(1-\psi)v_j^{n+1} + \psi v_{j+1}^{n+1}] \} = 0
 \end{aligned} \tag{3.2.76}$$

En base a lo establecido en la ecuación (3.2.49) la aproximación en serie de Fourier discreta sobre las variables dependientes es:

$$h_j^n = \hat{h} \rho^n e^{ikj\Delta x} \tag{3.2.77}$$

$$v_j^n = \hat{v} \rho^n e^{ikj\Delta x} \tag{3.2.78}$$

Sustituyendo (3.2.77) y (3.2.78) en (3.2.75) y (3.2.76), multiplicando por  $\Delta t$  y factorizando el término  $\rho^n e^{ikj\Delta x}$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \rho^n e^{ikj\Delta x} \left[ \left\{ [1 + \psi(e^{ik\Delta x} - 1)](\rho - 1) + \frac{\Delta t}{\Delta x} M\bar{V}(e^{ik\Delta x} - 1)[1 + \theta(\rho - 1)] \right\} \hat{h} \right. \\
 & \left. + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{a^2}{g} (e^{ik\Delta x} - 1)[1 + \theta(\rho - 1)] \hat{v} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{3.2.79}$$

$$\begin{aligned}
 & \rho^n e^{ikj\Delta x} \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} g(e^{ik\Delta x} - 1)[1 + \theta(\rho - 1)] \hat{h} \right. \\
 & + \left\{ \alpha [1 + \psi(e^{ik\Delta x} - 1)](\rho - 1) \right. \\
 & + \frac{\Delta t}{\Delta x} (M\bar{V} + \beta)(e^{ik\Delta x} - 1)[1 + \theta(\rho - 1)] \\
 & \left. \left. + \Delta t \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} [1 + \psi(e^{ik\Delta x} - 1)][1 + \theta(\rho - 1)] \right\} \hat{v} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{3.2.80}$$

Considerando una forma alterna de representar los términos exponenciales en las ecuaciones (3.2.79) y (3.2.80) se realiza lo siguiente:

- Usando la función trigonométrica seno en términos de la función exponencial con  $x = k\Delta x/2$ , se puede definir que:

$$e^{ik\Delta x} - 1 = i2e^{ik\Delta x/2} \text{sen}(k\Delta x/2) \quad (3.2.81)$$

- Aplicando la fórmula de Euler con  $x = -k\Delta x/2$ :

$$e^{-ik\Delta x/2} = \cos(k\Delta x/2) - i \text{sen}(k\Delta x/2) \quad (3.2.82)$$

Al sustituir las igualdades (3.2.81) y (3.2.82) con  $c = \cos(k\Delta x/2)$ ,  $s = \text{sen}(k\Delta x/2)$  y  $\lambda = \Delta t/\Delta x$ , el sistema resulta:

$$\rho^n e^{ik(j+1/2)\Delta x} \left[ \left\{ [c + i(2\psi - 1)s](\rho - 1) + i2\lambda M\bar{V}[1 + \theta(\rho - 1)]s \right\} \hat{h} + i2\lambda \frac{a^2}{g} [1 + \theta(\rho - 1)]s \hat{v} \right] = 0 \quad (3.2.83)$$

$$\rho^n e^{ik(j+1/2)\Delta x} \left[ i2\lambda g [1 + \theta(\rho - 1)]s \hat{h} + \left\{ \alpha [c + i(2\psi - 1)s](\rho - 1) + i2\lambda (M\bar{V} + \beta) [1 + \theta(\rho - 1)]s + \Delta t \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} [c + i(2\psi - 1)s] [1 + \theta(\rho - 1)] \right\} \hat{v} \right] = 0 \quad (3.2.84)$$

Para que el esquema de Preissmann sea estable independientemente de las condiciones de flujo, se debe satisfacer que (Abbott, 1979; Lyn & Goodwin, 1987; Aldama & Aguilar, 1996; Aguilar, 2002):

$$\psi = 1/2 \quad (3.2.85)$$

$$\theta \geq 1/2 \quad (3.2.86)$$

Sustituyendo el valor establecido en (3.2.85) para el factor de peso espacial  $\psi$  sobre las ecuaciones (3.2.83) y (3.2.84):

$$\rho^n e^{ik(j+1/2)\Delta x} \left[ \left\{ (\rho - 1)c + i2\lambda M\bar{V}[1 + \theta(\rho - 1)]s \right\} \hat{h} + i2\lambda \frac{a^2}{g} [1 + \theta(\rho - 1)]s \hat{v} \right] = 0 \quad (3.2.87)$$



$$\begin{aligned}
 \rho^n e^{ik(j+1/2)\Delta x} & \left[ i2\lambda g[1 + \theta(\rho - 1)]s\hat{h} \right. \\
 & + \left\{ \alpha(\rho - 1)c + i2\lambda(M\bar{V} + \beta)[1 + \theta(\rho - 1)]s \right. \\
 & \left. \left. + \Delta t \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} [1 + \theta(\rho - 1)]c \right\} \hat{v} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{3.2.88}$$

Ordenando (3.2.87) y (3.2.88) en forma matricial:

$$\rho^n e^{ik(j+1/2)\Delta x} \begin{bmatrix} (\rho - 1)c + i2\lambda M\bar{V} & i2\lambda \frac{a^2}{g} [1 + \theta(\rho - 1)]s \\ [1 + \theta(\rho - 1)]s & \alpha(\rho - 1)c + i2\lambda(M\bar{V} + \beta) \\ i2\lambda g & [1 + \theta(\rho - 1)]s \\ [1 + \theta(\rho - 1)]s & + \Delta t \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} [1 + \theta(\rho - 1)]c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.2.89}$$

Entonces, el sistema de ecuaciones (3.2.89) tendrá una solución diferente a la trivial, si y sólo si el determinante de su matriz de coeficientes es nulo, esto es:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left( \alpha + \theta \Delta t \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} \right) c^2 - 4\theta^2 \lambda^2 [M\bar{V}(M\bar{V} + \beta) - a^2] s^2 \right. \\
 & \left. + i2\theta \lambda \left\{ \theta \Delta t \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} M\bar{V} + [(1 + \alpha)M\bar{V} + \beta] \right\} sc \right] \rho^2 \\
 & + \left[ \left[ (1 - 2\theta) \Delta t \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} - 2\alpha \right] c^2 - 4(2\theta - 2\theta^2) \lambda^2 [M\bar{V}(M\bar{V} + \beta) - a^2] s^2 \right. \\
 & \left. + i2\lambda \left\{ (2\theta - 2\theta^2) \Delta t \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} M\bar{V} + (1 - 2\theta) [(1 + \alpha)M\bar{V} + \beta] \right\} sc \right] \rho \\
 & + \left[ \alpha + (\theta - 1) \Delta t \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} \right] c^2 - 4(\theta - 1)^2 \lambda^2 [M\bar{V}(M\bar{V} + \beta) - a^2] s^2 \\
 & + i2(\theta - 1) \lambda \left\{ (\theta - 1) \Delta t \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} M\bar{V} + [(1 + \alpha)M\bar{V} + \beta] \right\} sc = 0
 \end{aligned} \tag{3.2.90}$$

En la ecuación (3.2.90), se pueden aplicar las variables de simplificación  $F_1$  y  $F_2$  definidas en (3.2.58) y (3.2.59) respectivamente:

$$F_1 = -[(1 + \alpha)M\bar{V} + \beta] = -(M\bar{V} + \beta + \alpha M\bar{V}) \tag{3.2.58}$$

$$F_2 = M\bar{V}(M\bar{V} + \beta) - a^2 = (M\bar{V})^2 + M\bar{V}\beta - a^2 \quad (3.2.59)$$

Por lo tanto, el sistema puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \alpha + \theta \Delta t \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} \right) c^2 - 4\theta^2 \lambda^2 F_2 s^2 + i2\theta\lambda \left( \theta \Delta t \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} M\bar{V} - F_1 \right) sc \right] \rho^2 \\ & + \left\{ \left[ (1 - 2\theta) \Delta t \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} - 2\alpha \right] c^2 - 4(2\theta - 2\theta^2) \lambda^2 F_2 s^2 \right. \\ & + i2\lambda \left[ (2\theta - 2\theta^2) \Delta t \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} M\bar{V} - (1 - 2\theta) F_1 \right] sc \left. \right\} \rho \\ & + \left[ \alpha + (\theta - 1) \Delta t \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} \right] c^2 - 4(\theta - 1)^2 \lambda^2 F_2 s^2 \\ & + i2(\theta - 1)\lambda \left[ (\theta - 1) \Delta t \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} M\bar{V} - F_1 \right] sc = 0 \end{aligned} \quad (3.2.91)$$

Extrayendo la relación de dispersión de (3.2.91):

$$\rho = -\frac{b_r + ib_i}{2(a_r + ia_i)} \pm \frac{1}{2(a_r + ia_i)} \sqrt{(b_r + ib_i)^2 - 4(a_r + ia_i)(c_r + ic_i)} \quad (3.2.92)$$

En donde los coeficientes se definen como:

$$a_r = \left( \alpha + \theta \Delta t \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} \right) c^2 - 4\theta^2 \lambda^2 F_2 s^2 \quad (3.2.93)$$

$$a_i = 2\theta\lambda \left( \theta \Delta t \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} M\bar{V} - F_1 \right) sc \quad (3.2.94)$$

$$b_r = \left[ (1 - 2\theta) \Delta t \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} - 2\alpha \right] c^2 - 4(2\theta - 2\theta^2) \lambda^2 F_2 s^2 \quad (3.2.95)$$

$$b_i = 2\lambda \left[ (2\theta - 2\theta^2) \Delta t \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} M\bar{V} - (1 - 2\theta) F_1 \right] sc \quad (3.2.96)$$

$$c_r = \left[ \alpha + (\theta - 1) \Delta t \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} \right] c^2 - 4(\theta - 1)^2 \lambda^2 F_2 s^2 \quad (3.2.97)$$

$$c_i = 2(\theta - 1)\lambda \left[ (\theta - 1) \Delta t \bar{f}_p \frac{\bar{V}}{D} M\bar{V} - F_1 \right] sc \quad (3.2.98)$$

Estableciendo la condición de estabilidad  $|\rho| \leq 1$  en la relación de dispersión discreta (3.2.92), se obtiene lo siguiente:

$$\left| -\frac{b_r + ib_i}{2(a_r + ia_i)} \pm \frac{1}{2(a_r + ia_i)} \sqrt{(b_r + ib_i)^2 - 4(a_r + ia_i)(c_r + ic_i)} \right| \leq 1 \quad \forall m \quad (3.2.99)$$

La inequación (3.2.99) indica la condición de estabilidad límite del esquema de Preissmann aplicado al sistema de ecuaciones linealizado de flujo en tuberías. Como resultado de aplicar el análisis de estabilidad sobre el sistema discreto, la condición de convergencia se puede enunciar en el siguiente teorema:

**Teorema de Convergencia.** *El esquema de Preissmann (3.1.31) – (3.1.33) aplicado a las ecuaciones linealizadas de flujo en tuberías (3.2.23) y (3.2.24), dado que se tiene una aproximación consistente en diferencias demostrado en las ecuaciones (3.2.39) y (3.2.40), este esquema es convergente en el sentido del Teorema de Equivalencia de Lax para la condición de estabilidad establecido en (3.2.99).*

Para ejemplificar la convergencia numérica del esquema y confirmar la validez de los resultados obtenidos, en los siguientes apartados se presentan los retratos de amplitud y fase para diferentes casos de estudio del fenómeno transitorio.

### 3.3. RETRATOS DE AMPLITUD

Las propiedades de disipación y dispersión de cualquier esquema numérico pueden ser expresadas mediante sus *retratos de amplitud y fase* (Szymkiewicz, 2010).

Los retratos de amplitud permiten examinar de manera visual la condición de estabilidad límite del esquema  $|\rho| \leq 1$  y se obtienen al graficar el módulo de la relación de dispersión discreta (3.2.92) en función de la longitud de onda  $k\Delta x$ . Los datos empleados para las pruebas se ajustan a los experimentos de Bergant et al. (2001) para un cierre instantáneo y se detallan en la Tabla 3.2.

**Tabla 3.2. Parámetros para las pruebas de convergencia numérica**

Descripción	Variable	Valor	Unidades
Longitud	$L$	37.23	m
Diámetro	$D$	0.0221	m
Espesor	$e$	0.0016	m
Viscosidad cinemática	$\nu$	$1.01 \times 10^{-6}$	m <sup>2</sup> /s
Celeridad de la onda	$a$	1319	m/s

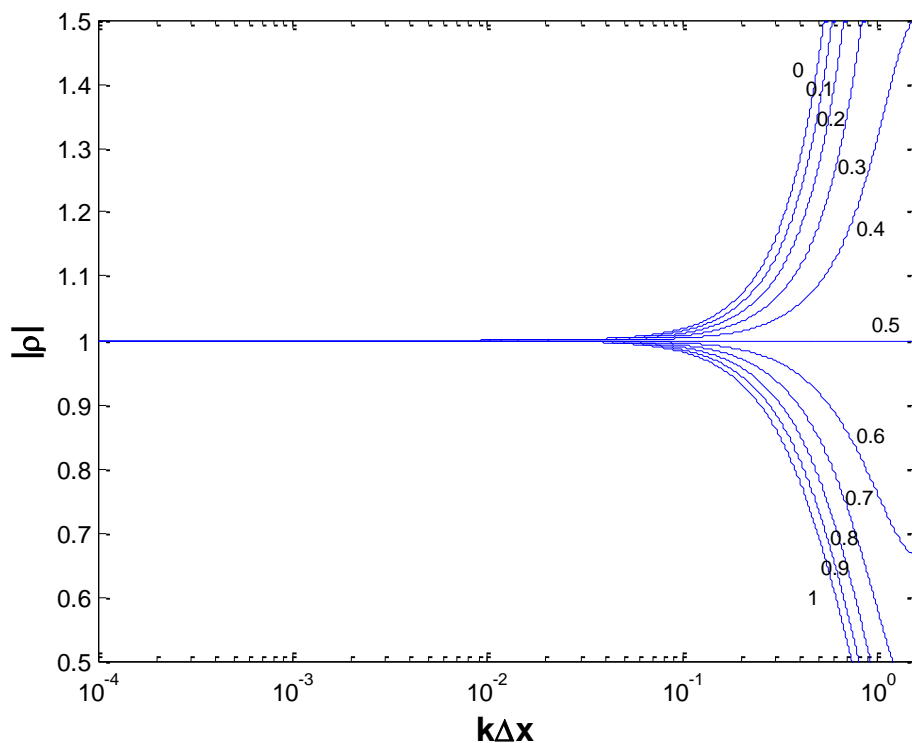
Las pruebas realizadas analizan el comportamiento de la estabilidad en función del factor de peso temporal  $\theta$ , el número de Courant  $C_N$  y el número de Mach  $M_N$  para diferentes versiones de las ecuaciones de flujo.

La primera serie de pruebas consiste en el análisis del factor de peso  $\theta$  y para cada retrato de amplitud se consideran los valores  $\theta = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$ ; la secuencia de presentación de los gráficos se detalla en la Tabla 3.3

**Tabla 3.3. Retratos de amplitud para las pruebas del factor de peso temporal**

Identificador del retrato de amplitud <sup>†</sup>	Velocidad (m/s)	Versión de las ecuaciones	Modelo de fricción
Prueba 01: E.C.+F.T.	0.3	Conservativas	Transitorio
Prueba 02: E.C.+F.T.	0.1	Conservativas	Transitorio
Prueba 03: E.N.C.+F.P.	0.3	No conservativas	Permanente
Prueba 04: E.N.C.+F.P.	0.1	No conservativas	Permanente

<sup>†</sup> Para todas las pruebas el valor del número de Courant es  $C_N = 1$  y para el intervalo de discretización se usa  $J = 100$ .



**Figura 3.9. Retrato de amplitud de la Prueba 01: E.C.+F.T.**

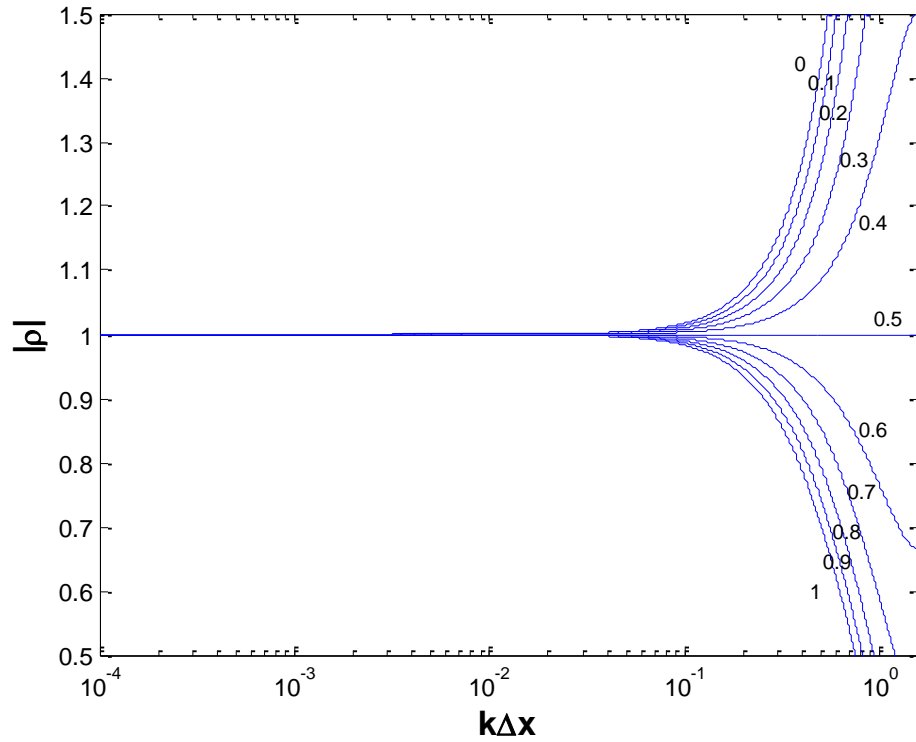


Figura 3.10. Retrato de amplitud de la Prueba 02: E.C.+F.T.

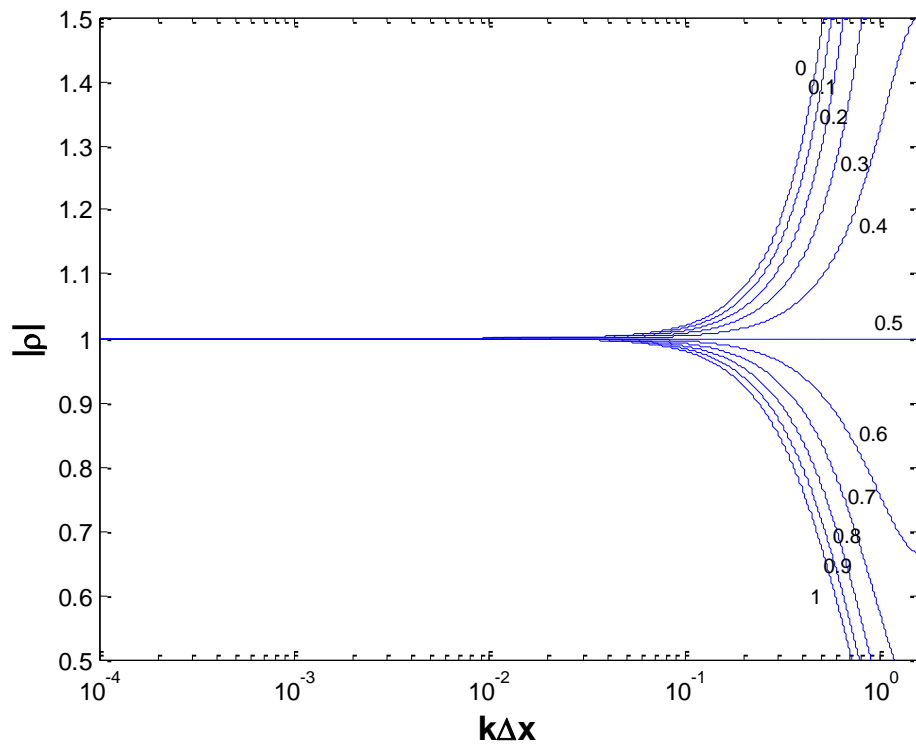
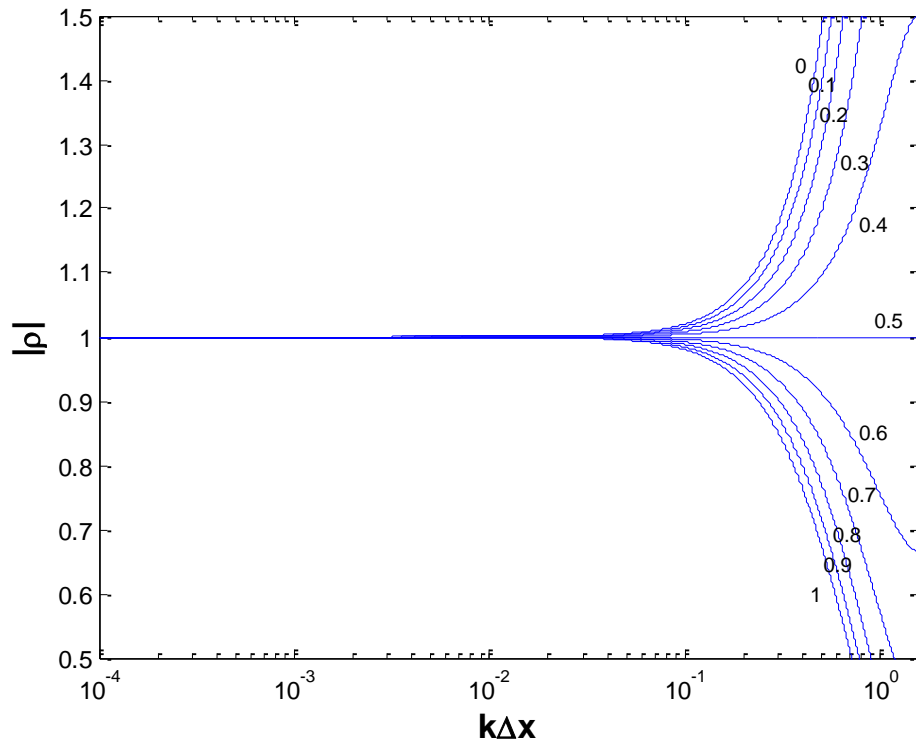


Figura 3.11. Retrato de amplitud de la Prueba 03: E.N.C.+F.P.



**Figura 3.12. Retrato de amplitud de la Prueba 04: E.N.C.+F.P.**

Como se puede observar, los límites de estabilidad numérica se acotan en la misma condición de la inecuación (3.2.99) para valores de  $\theta \geq 1/2$  independientemente de las condiciones de flujo, esto ya había sido establecida anteriormente en la ecuación (3.2.86).

En la segunda serie de pruebas se evalúa el número de Courant considerando los valores  $C_N = \{0.01, 0.1, 1, 2, 5, 10, 30, 50, 100\}$  y usando la condición límite del factor de peso temporal  $\theta = 0.5$ ; la secuencia de presentación de los gráficos se detalla en la Tabla 3.4

**Tabla 3.4. Retratos de amplitud para las pruebas del factor de peso temporal**

Identificador del retrato de amplitud <sup>†</sup>	Número de Courant	Versión de las ecuaciones	Modelo de fricción
Prueba 05: E.C.+F.T.	0.50	Conservativas	Transitorio
Prueba 06: E.C.+F.T.	0.75	Conservativas	Transitorio
Prueba 07: E.C.+F.T.	1.00	Conservativas	Transitorio
Prueba 08: E.N.C.+F.P.	0.50	No conservativas	Permanente
Prueba 09: E.N.C.+F.P.	0.75	No conservativas	Permanente
Prueba 10: E.N.C.+F.P.	1.00	No conservativas	Permanente

<sup>†</sup> Para todas las pruebas el número de intervalos de discretización es  $J = 100$  y la velocidad  $\bar{V} = 0.3$  m/s

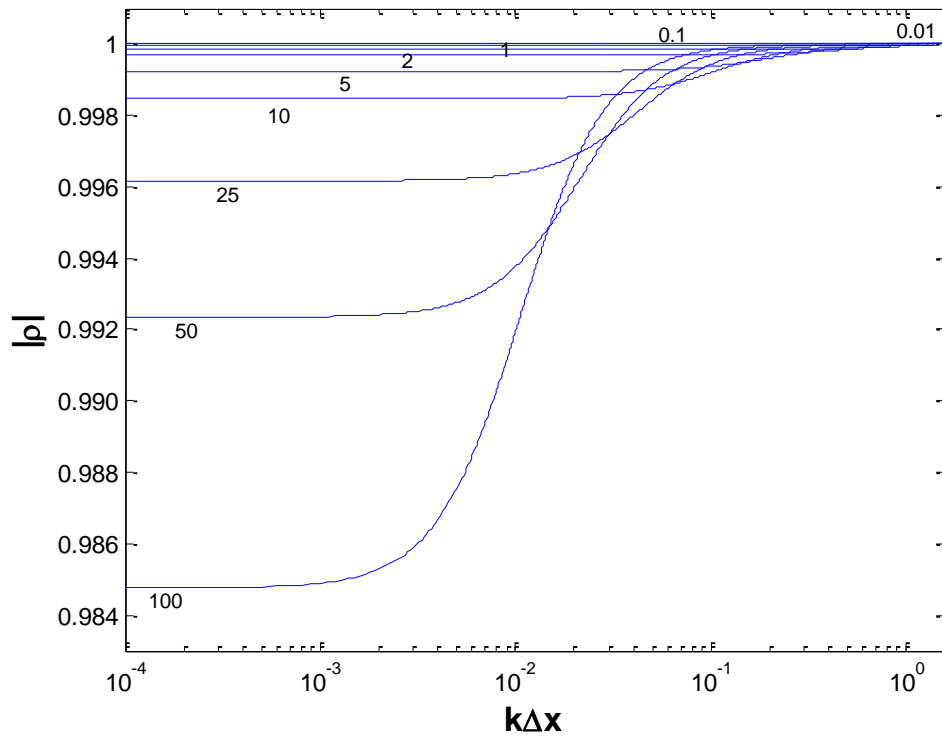


Figura 3.13. Retrato de amplitud de la Prueba 05: E.C.+F.T.

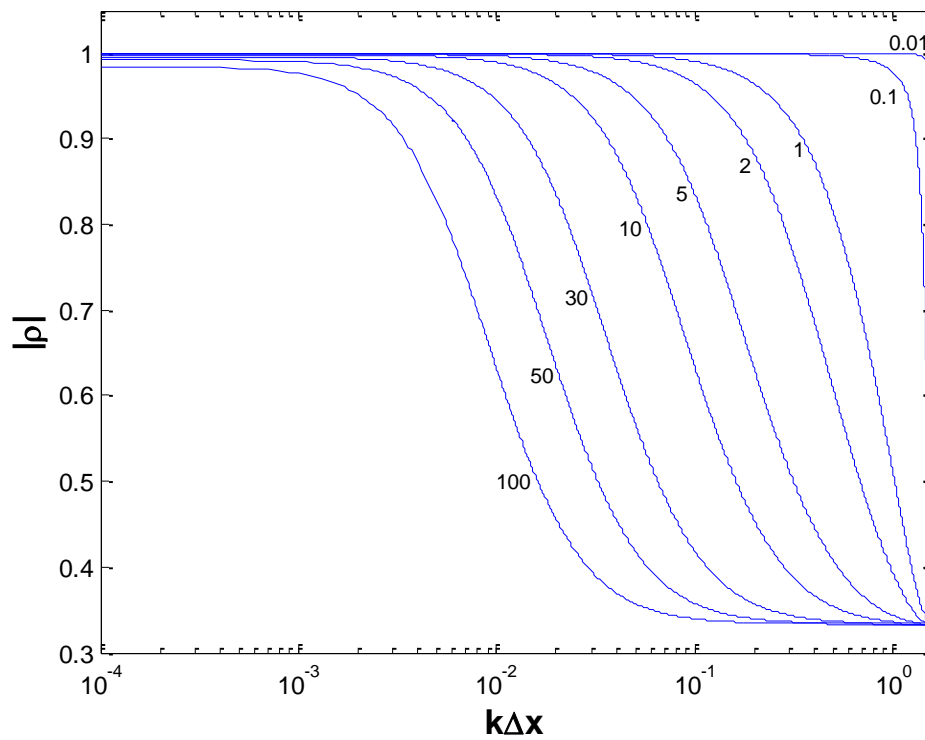


Figura 3.14. Retrato de amplitud de la Prueba 06: E.C.+F.T.

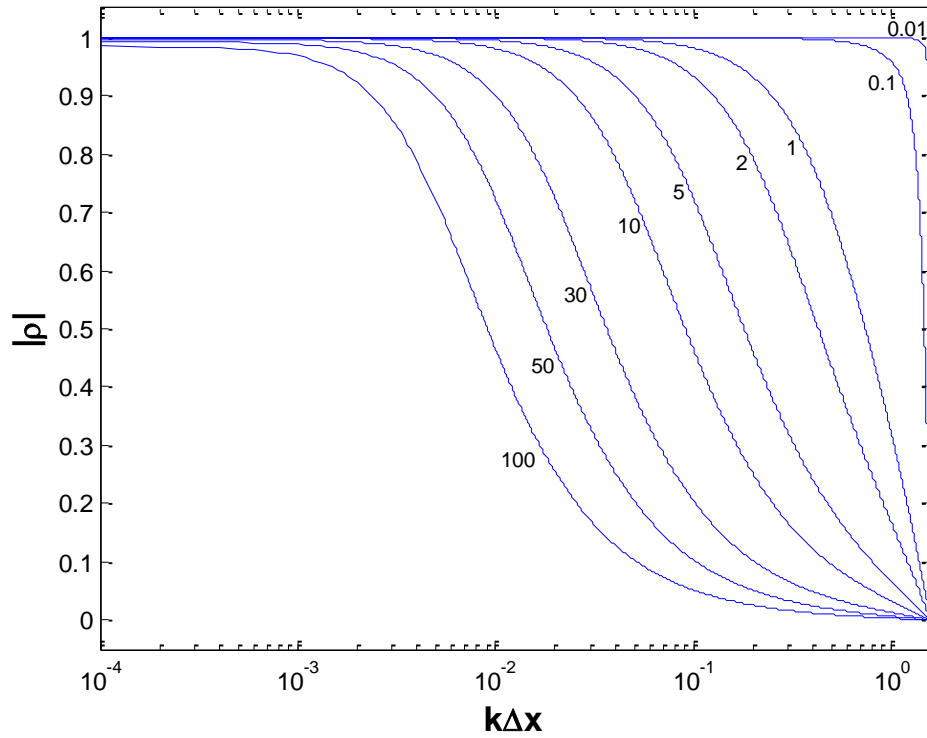


Figura 3.15. Retrato de amplitud de la Prueba 07: E.C.+F.T.

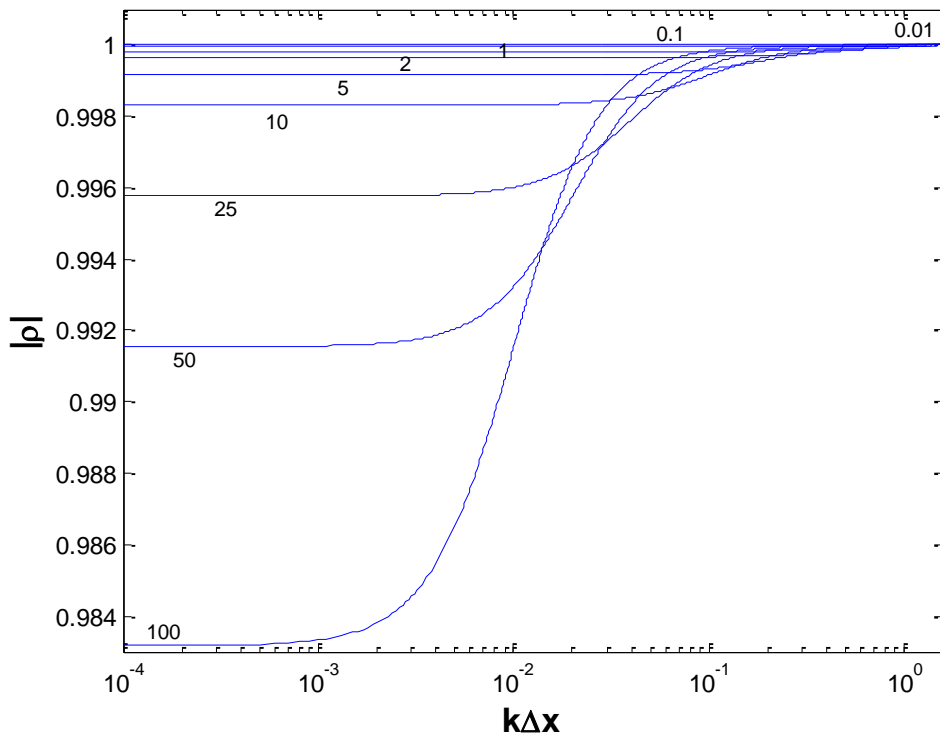


Figura 3.16. Retrato de amplitud de la Prueba 08: E.N.C.+F.P.



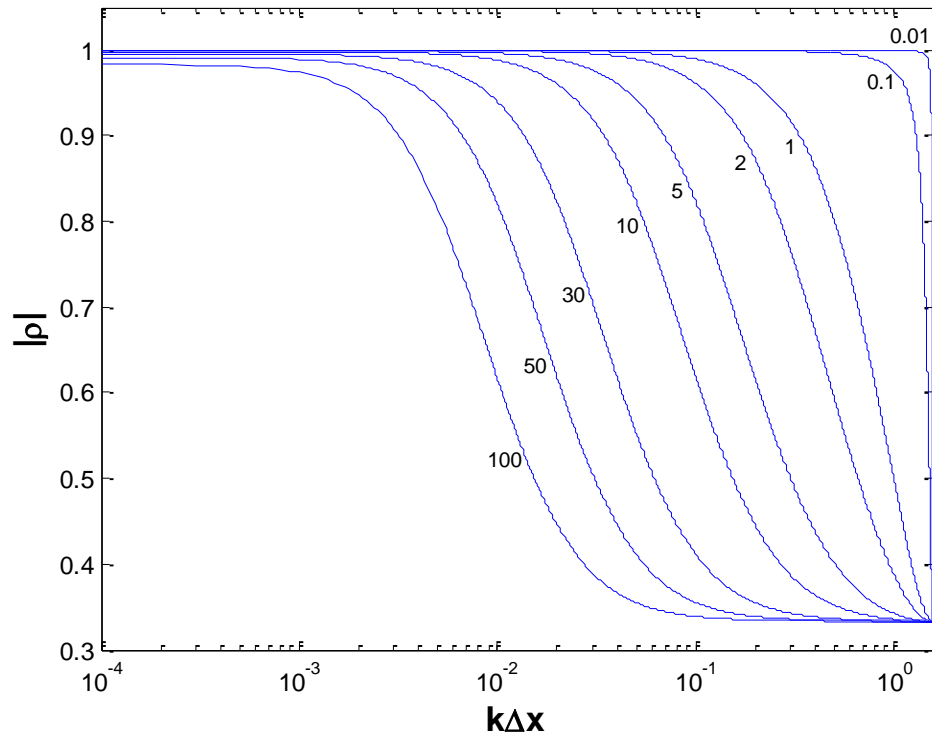


Figura 3.17. Retrato de amplitud de la Prueba 09: E.N.C.+F.P.

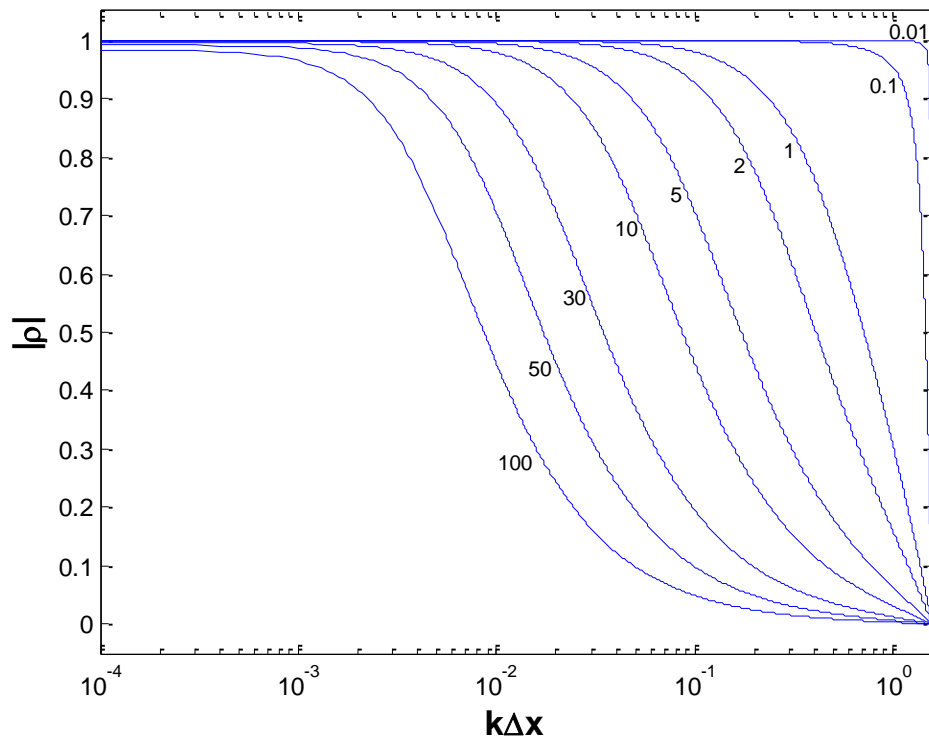


Figura 3.18. Retrato de amplitud de la Prueba 10: E.N.C.+F.P.

Para analizar las pruebas realizadas, se dice que el esquema numérico es libre de disipación para cualquier longitud de onda cuando el factor de amplificación es  $|\rho| = 1$ , para valores mayores la amplitud de las ondas incrementan en el tiempo (inestabilidad numérica), mientras que para valores menores las ondas se amortiguan (Szymkiewicz, 2010). De acuerdo a esto, el esquema de Preissmann resulta estable para cualquier valor del número de Courant siempre y cuando los factores de peso sean  $\psi = 0.5$  y  $\theta \geq 0.5$ ; conjuntamente se observa que las ondas de presión se atenúan (disipación numérica) cuando el factor de peso temporal tiende a la unidad y cuando se evalúan valores altos del número de Courant.

En base a lo anterior, resulta recomendable trabajar con valores del número de Courant cercanos a la unidad o menores ( $C_N \leq 1$ ) y con los factores de peso centrados en la celda ( $\psi = \theta = 1/2$ ), con el fin de obtener resultados aproximados aceptables, al momento de solucionar las ecuaciones discretas.

Por último se analiza la influencia del número de Mach en las ecuaciones conservativas con fricción transitoria. Para esto, la velocidad localizada de flujo estará en función del número de Mach y de la celeridad de onda ( $\bar{V} = aM_N$ ); asimismo se establecen los valores de  $\theta = 0.5$  y  $C_N = 1$  en las dos pruebas realizadas: la primera que corresponde a valores generales  $M_N = \{1, 0.75, 0.5, 0.25, 0\}$  y la segunda a valores bajos que se presentan normalmente en una tubería  $M_N = \{1, 0.75, 0.5, 0.25, 0\}$ .

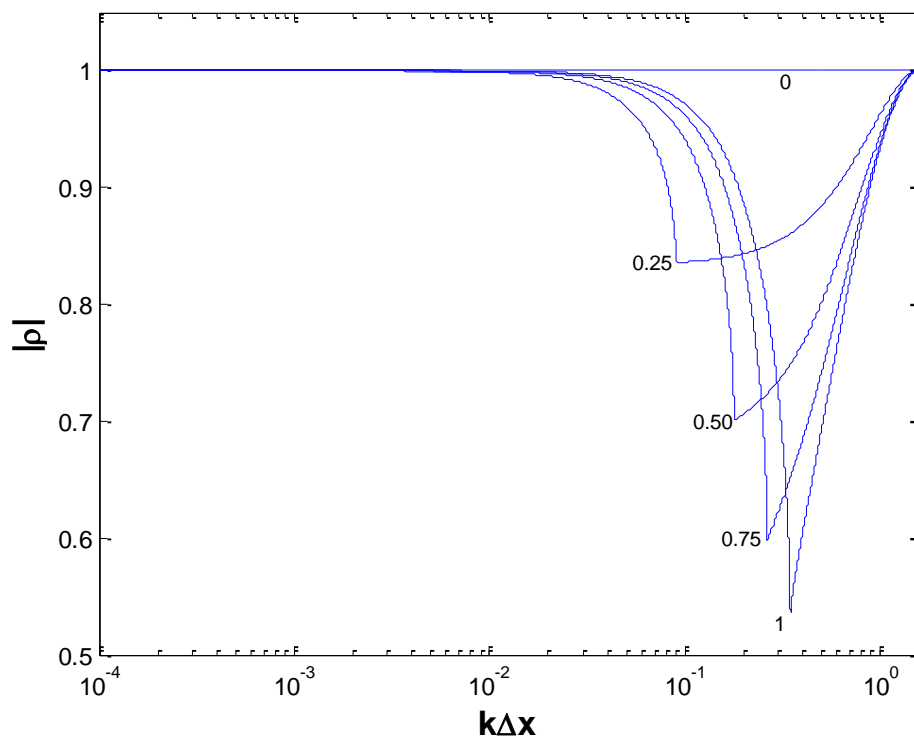


Figura 3.19. Retrato de amplitud para diferentes números de Mach

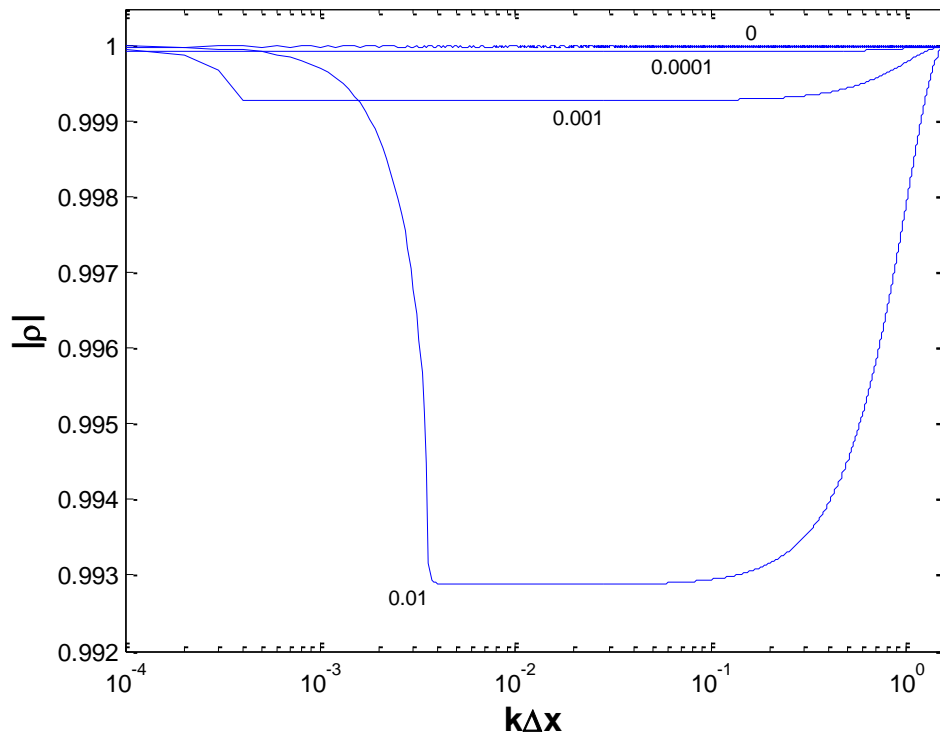


Figura 3.20. Retrato de amplitud para números de Mach bajos

Con la evaluación del número de Mach, se corrobora que el esquema es estable para valores por debajo del régimen sónico (esto es, para  $\bar{V} \leq a$ ) y que la dispersión numérica es mínima cuando la velocidad media de flujo es  $\bar{V} \approx 0$ , este último caso se presenta después del cierre total de la válvula y por tanto la amplitud de las ondas de presión son libres de disipación numérica.

### 3.4.RETRATOS DE FASE

Los retratos de fase representan el comportamiento de los sistemas de ecuaciones y se utilizan para determinar las propiedades dispersivas en los resultados, las cuales se asocian con la propagación de las ondas y las oscilaciones.

Para determinar la fase del sistema discreto se calcula el argumento de la relación de dispersión discreta obtenida en (3.2.92):

$$\phi_{disc} = \arg \left[ -\frac{b_r + ib_i}{2(a_r + ia_i)} \pm \frac{1}{2(a_r + ia_i)} \sqrt{(b_r + ib_i)^2 - 4(a_r + ia_i)(c_r + ic_i)} \right] \quad (3.4.1)$$

Se dice que el esquema numérico es libre de dispersión en la propagación de las ondas, si para cualquier componente de Fourier, el ángulo  $\phi_{disc}$  es constante, en caso contrario el esquema es dispersivo.

Entonces, para evaluar las propiedades dispersivas, la fase de propagación de las ondas del esquema se compara con la solución exacta. Para hacer esto se construye una expresión similar a la ecuación (3.4.1) a partir de la relación de dispersión continua (3.2.61) obtenida con el análisis de Fourier:

$$\omega(k) = -\frac{F_1}{2\alpha}k - i\bar{f}_p \frac{\bar{V}}{2\alpha D} \pm \sqrt{\frac{F_1^2 - 4\alpha F_2}{4\alpha^2}k^2 - \bar{f}_p^2 \frac{\bar{V}^2}{4\alpha^2 D^2} + i\bar{f}_p \frac{\bar{V}(F_1 + 2\alpha M\bar{V})}{2\alpha^2 D}k} \quad (3.2.61)$$

Retomando del apartado 3.2.3 la serie discreta de Fourier para un modo arbitrario:

$$c(x_j, t_n) = \hat{c}(k)e^{-i\omega(k)n\Delta t} e^{ikj\Delta x} \quad (3.2.48)$$

Definiendo el factor de amplificación modificado  $\rho^n = e^{-i\omega(k)n\Delta t}$  para un modo arbitrario, se puede establecer lo siguiente:

$$\rho = e^{-i\omega(k)\Delta t} \quad (3.4.2)$$

Sustituyendo la ecuación (3.2.61) en (3.4.2) la relación de amplitud del sistema continuo se puede escribir como:

$$\rho_{cont} = e^{-i \left[ -\frac{F_1}{2\alpha}k - i\bar{f}_p \frac{\bar{V}}{2\alpha D} \pm \sqrt{\frac{F_1^2 - 4\alpha F_2}{4\alpha^2}k^2 - \bar{f}_p^2 \frac{\bar{V}^2}{4\alpha^2 D^2} + i\bar{f}_p \frac{\bar{V}(F_1 + 2\alpha M\bar{V})}{2\alpha^2 D}k} \right] \Delta t} \quad (3.4.3)$$

Por tanto, la fase del sistema continuo resulta:

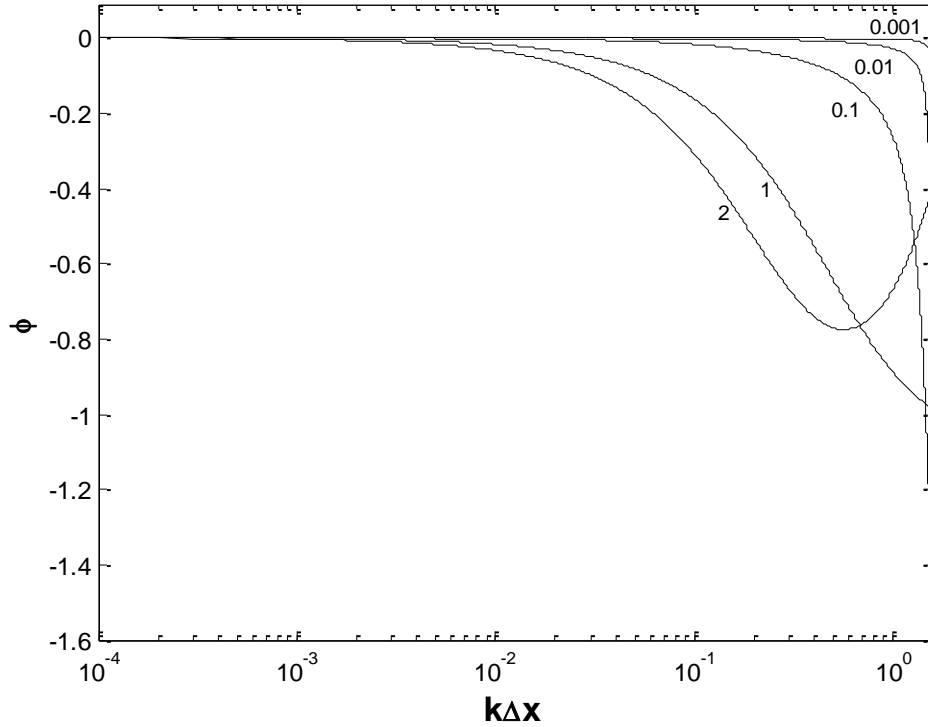
$$\phi_{cont} = \arg[\rho_{cont}] \quad (3.4.4)$$

Al comparar y graficar los resultados que se obtienen con las ecuaciones (3.4.1) y (3.4.4) en función de la longitud de onda para diferentes condiciones de flujo, se obtienen los retratos de fase mediante la siguiente relación:

$$\phi = |\phi_{cont}| - |\phi_{num}| \quad (3.4.5)$$

La información utilizada para generar los retratos de fase, coincide con los datos de los retratos de amplitud y se pueden consultar en la Tabla 3.2.

El primer retrato de fase (Figura 3.21) compara el sistema continuo y discreto con  $\theta = 0.5$ ,  $\bar{V} = 0.3$  m/s y evaluando los números de Courant  $C_N = \{0.001, 0.01, 0.1, 1, 2\}$ . Con esto se determina que el esquema de Preissmann sobre las ecuaciones de flujo en tuberías es libre de dispersión numérica cuando  $C_N \approx 0$



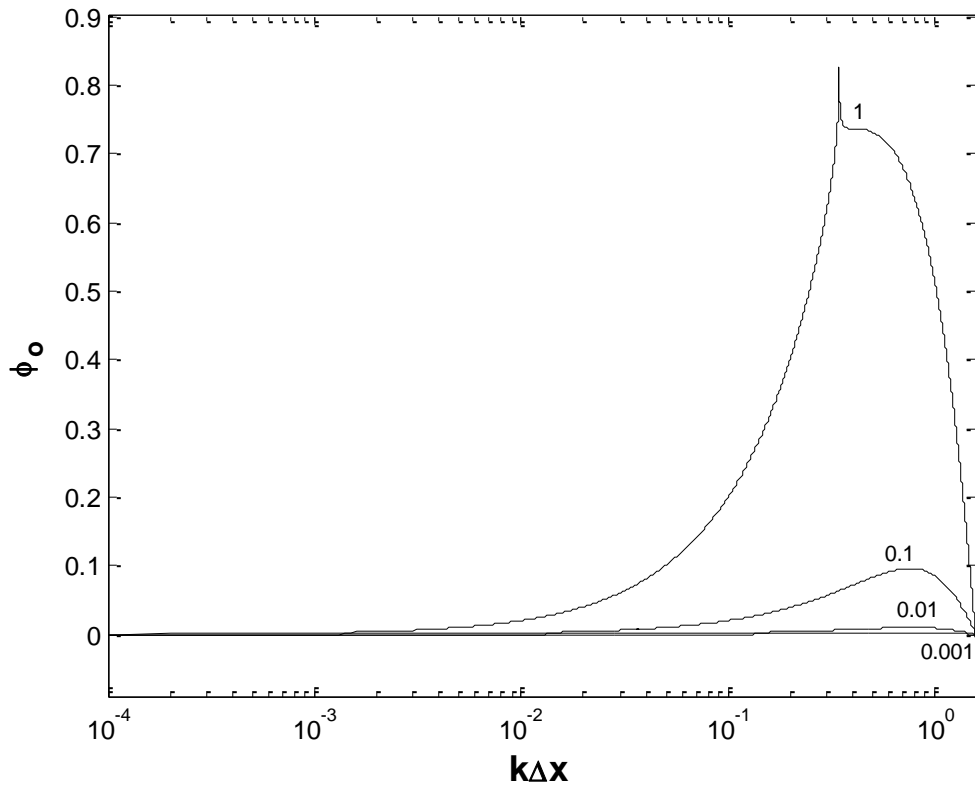
**Figura 3.21. Retratos de fase del sistema continuo y discreto para diferentes valores del número de Courant**

La información proporcionada por los retratos de fase y de amplitud representan las características generales de las propiedades de propagación del esquema numérico y son de carácter cualitativo (Szymkiewicz, 2010). Su análisis formaliza la discretización de las ecuaciones diferenciales y asegura un mejor resultado en las aproximaciones.

Por último, se evaluará la influencia de los términos convectivos en las soluciones aproximadas; para esto se calcula la fase discreta de las ecuaciones conservativas  $\phi_{E.C.}$  y no conservativas  $\phi_{E.N.C.}$  para diferentes números de Mach  $M_N = \{0.001, 0.01, 0.1, 1\}$  y considerando  $\theta = 0.5$  y  $C_N = 1$ .

Para su comparación (Figura 3.22), los retratos de fase se grafican como:

$$\phi_o = |\phi_{E.C.}| - |\phi_{E.N.C.}| \tag{3.4.6}$$



**Figura 3.22. Retratos de fase del sistema discreto (conservativo y no conservativo) para diferentes valores del número de Mach**

Los resultados mostrados en el último retrato de fase concuerdan con el análisis dimensional del apartado 2.3.2, en donde se muestra que la magnitud de los términos convectivos depende del número de Mach. Para valores bajos de  $M_N$  (condición que ocurre normalmente en los transitorios de tuberías), la fase de las ondas no presenta cambios significativos entre modelos.

# CAPÍTULO 4

## CONSTRUCCIÓN DEL CÓDIGO COMPUTACIONAL

### 4.1. CONFIGURACIÓN Y SECUENCIA GENERAL

A continuación se presenta la construcción de los algoritmos que permiten generar el código de programación del esquema numérico en diferencias finitas de Preissmann, es decir, para la versión conservativa de las ecuaciones de flujo<sup>1</sup>. El código se divide en tres módulos que actúan de manera secuencial y cada uno cuenta con instrucciones específicas (Figura 4.1).

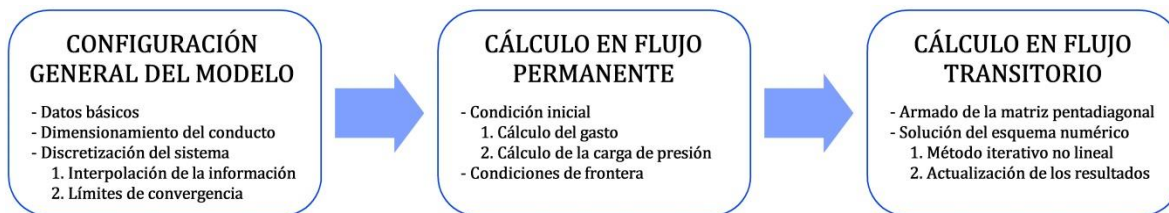


Figura 4.1. Secuencia general del código computacional

En el primer módulo se realiza la configuración general del modelo de simulación, éste se enfoca en la topología del sistema y la adquisición de información para generar la malla discreta y los cálculos preliminares. Con la información establecida en cada nodo, el siguiente módulo resuelve las ecuaciones que calculan la condición inicial y de frontera, en base a lo descrito en las ecuaciones (2.3.3) – (2.3.6) para el modelo conservativo. En el último modulo se solucionan las ecuaciones discretas del modelo en diferencias finitas.

<sup>1</sup> La existencia de paquetes comerciales que utilizan el MOC, así como el gran número de desarrollos matemáticos relacionados con esta técnica (Ghidaoui et al., 2005), son las razones por las que no se presenta a detalle el algoritmo para dicho método. En caso de requerir mayor información sobre programas de cómputo de este tipo, se recomienda consultar autores como Watters (1980) o Chaudhry (2014).

### 4.1.1. ADQUISICIÓN DE DATOS Y TOPOLOGÍA

Los datos de entrada que configuran el sistema se dividen en dos tipos: los generales y los de interpolación.

El primer tipo de datos se relaciona con la información que representa un valor único, como la densidad del fluido o el coeficiente de descarga de la válvula. En la Tabla 4.1 se enlistan cada parámetro junto con su notación y unidades.

**Tabla 4.1. Datos generales para la configuración del sistema**

Descripción	Notación	Unidades
<i>Características de la tubería</i>		
Espesor (diferencia de los radios externo e interno)	$e$	m
Rugosidad relativa del material	$\varepsilon$	m
Coefficiente de Poisson	$\mu$	–
Módulo de elasticidad de Young	$E$	Pa
<i>Información de los elementos del sistema</i>		
Coefficiente de pérdida local por entrada	$k_e$	–
Cota topográfica de la altura del embalse	$H_{emb}$	m
Cota topográfica de la altura de sumergencia	$H_{sum}$	m
Coefficiente de descarga de la válvula	$C_v$	–
<i>Propiedades del fluido</i>		
Módulo de compresibilidad del agua	$K$	Pa
Viscosidad cinemática del fluido	$\nu$	m <sup>2</sup> /s
Densidad del fluido	$\rho$	kg/m <sup>3</sup>
<i>Tiempos de simulación</i>		
Tiempo de inicio del cierre de la válvula	$t_o$	s
Tiempo total de simulación	$T$	s
Duración total del cierre de la válvula	$t_v$	s
<i>Valores de discretización y convergencia</i>		
Número de Courant	$C_N$	–
Número de intervalos de discretización mínimo	$J_{mín}$	–
Límite de convergencia de los cálculos iterativos	$tol$	–
Factor de peso espacial	$\psi$	–
Factor de peso temporal	$\theta$	–
<i>Otros</i>		
Aceleración de la gravedad	$g$	m/s <sup>2</sup>



Los datos de interpolación son variables con dependencia espacial y corresponden a la geometría de la tubería<sup>1</sup>; se caracteriza por ser un conjunto de datos calculados a partir de la información inicial proporcionada y establece la conectividad del sistema y el dimensionamiento del conducto. Este tipo de datos se asignan en sitios representativos denominados secciones de control (Figura 4.2).

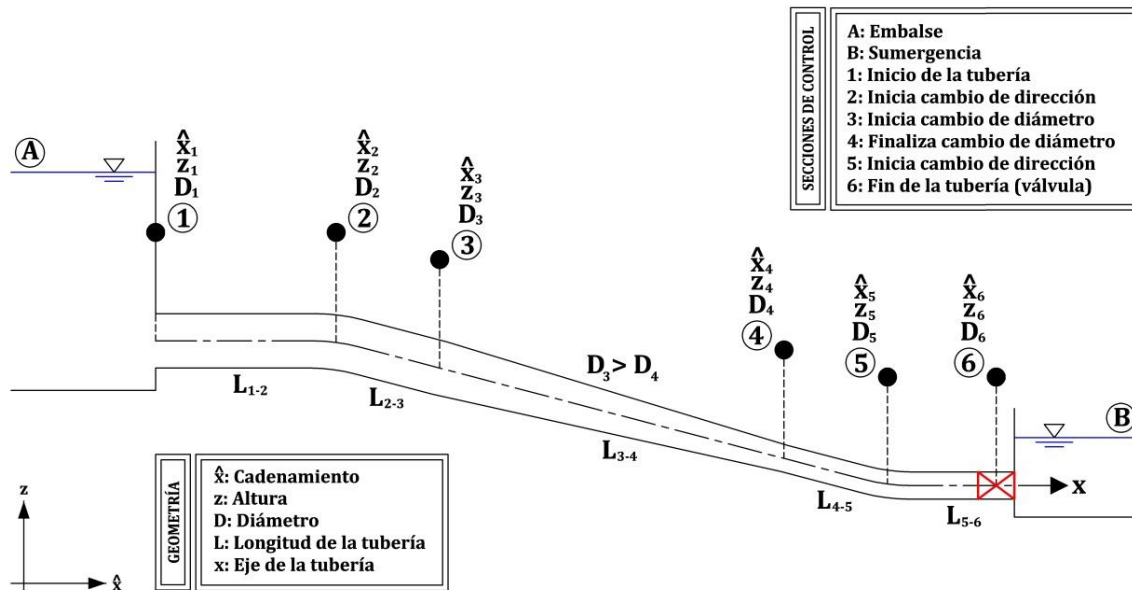


Figura 4.2. Características generales del sistema hidráulico

El objetivo de la interpolación es ajustar la información requerida en cada nodo de la malla de discretización a partir de las secciones de control. Los criterios para definir dichos puntos en el sistema son los siguientes:

- Inicio de la tubería: Este primer punto representa la posición  $x = 0$  y por tanto la frontera aguas arriba.
- Fin de la tubería: Último punto que representa la posición  $x = L$ , es decir, la frontera aguas abajo.
- Cambio de dirección: Se establece un punto de control cada vez que se presenta un cambio de dirección en la tubería.

<sup>1</sup> El alcance del presente trabajo se limita a la interpolación de la información geométrica, el resto de características en la tubería puede ser promediado si se considera que existen variaciones a lo largo del eje longitudinal (variable espacial). Ejemplo de lo anterior es el uso de diferentes materiales, donde la heterogeneidad de la tubería no permite usar un valor único del módulo de elasticidad o la rugosidad.

- Inicio y final de un cambio de diámetro: Se establecen estas secciones de control para delimitar tramos con ampliación o reducción de diámetro, estas variaciones deben ser lineales y graduales para evitar la separación de líneas de corriente<sup>1</sup>.

Una vez que se identifica el total de secciones de control en base a los criterios anteriores, se indica para cada uno de ellos la información correspondiente al cadenamiento en el sentido horizontal  $\hat{x}$ , la cota topográfica  $z$  y el diámetro  $D$ , todas en metros.

Dado que el eje de la variable independiente  $x$  en las ecuaciones es longitudinal y coincide con el centro de gravedad de la tubería, no debe confundirse con el eje  $\hat{x}$ , el cual junto con  $z$ , representan un sistema coordenado ortogonal que facilita la visualización del esquema y la entrada de datos que conforman la topología del modelo (Figura 4.2).

Con la información asignada en las  $i$  secciones de control, se tiene un total de  $i - 1$  tramos de tubería. La distancia  $L_i$  en cada tramo calcula aplicando al teorema de Pitágoras:

$$L_i = \sqrt{(z_{i+1} - z_i)^2 + (\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i)^2} \quad (4.1.1)$$

Conocidas las longitudes en cada tramo, se selecciona la menor y se divide entre el número de intervalos de discretización mínimo  $J_{\min}$ , el resultado será una separación  $\Delta x$  preliminar que servirá para determinar los intervalos de discretización  $J_i$  en cada tramo:

$$J_i = \frac{L_i}{\Delta x} \quad \text{donde: } J_i \in \mathbb{Z} \quad (4.1.2)$$

La suma de los  $J_i$  será el número total de intervalos  $J$  del sistema:

$$J = \sum J_i \quad (4.1.3)$$

Dado que los valores de  $J_i$  deben ser números enteros, se realiza una corrección que ajuste el valor del incremento espacial  $\Delta x$  para cada tramo:

$$\Delta x_i = \frac{L_i}{J_i} \quad (4.1.4)$$

---

<sup>1</sup> El flujo a través de conductos con diámetro variable es vulnerable a la separación del líquido de sus paredes. Este fenómeno produce altas pérdidas de energía a causa de la turbulencia y se relaciona directamente con el ángulo de apertura y el número de Reynolds. Las recomendaciones generales indican que para evitar que ocurra la separación, el ángulo oscile entre 7 y 15 grados (Sparrow, Abraham, & Minkowycz, 2009).

Asimismo, se calcula el incremento de alturas  $\Delta z_i$  como:

$$\Delta z_i = \frac{z_{i+1} - z_i}{J_i} \quad (4.1.5)$$

Conocidas las secciones de control que establecen el inicio y final de cada tramo y considerando que el sistema queda definido en  $J$  intervalos con  $J + 1$  nodos (en donde el primer nodo corresponde al inicio de la tubería en la posición  $x = 0$  del cadenamiento), se realiza la interpolación de la información por tramos como se muestra a continuación:

- El valor en  $x$  y  $z$  de cada nodo se calcula con la adición sucesiva del incremento  $\Delta x_i$  y  $\Delta z_i$  que corresponda en el tramo.
- Para el  $\text{sen } \theta_z$  se evalúa la inclinación entre secciones de control y el resultado se asigna a los nodos de su tramo correspondiente, entonces se tiene:

$$\text{sen } \theta_{zi} = \frac{z_{i+1} - z_i}{\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i} \quad (4.1.6)$$

- Finalmente, para las variaciones del diámetro  $D$  en el tramo se emplea la fórmula de interpolación lineal:

$$D_j = D_i + \frac{D_{i+1} - D_i}{x_{i+1} - x_i} (x_j - x_i) \quad (4.1.7)$$

Por último, se calcula el área de la sección transversal  $A_j$  y la celeridad de onda  $a_j$  para cada nodo en función del diámetro  $D_j$ . Con estos datos la topología del sistema queda definida y se procede a construir la condición inicial y de frontera para la simulación.

#### 4.1.2. CONDICIÓN INICIAL Y DE FRONTERA

La condición inicial (flujo en estado permanente) se obtiene aplicando la ecuación de continuidad y la ecuación de la energía sobre la línea de corriente que coincide con el centro de gravedad de la tubería:

- *Ecuación de continuidad.* Establece la invariabilidad del gasto  $Q_o$  en cualquier nodo  $j$  del conducto.

$$Q_o = A_j V_j \quad (4.1.8)$$

- *Ecuación de la energía.* Establece la constancia de la energía entre dos posiciones arbitrarias  $a$  y  $b$  en el sistema.

$$z_a + \frac{p_a}{\rho g} + \frac{V_a^2}{2g} = z_b + \frac{p_b}{\rho g} + \frac{V_b^2}{2g} + H_l + H_f \quad (4.1.9)$$

En la ecuación (4.1.9),  $z$  es la carga de posición medida desde un plano horizontal de referencia;  $p/\rho g$  la carga de presión;  $V^2/2g$  la carga de velocidad;  $H_l$  representa la suma de pérdidas locales y  $H_f$  la suma de pérdidas de fricción.

De acuerdo al sistema presentado en la Figura 4.2, se tiene un conducto sencillo alimentado por un embalse de carga constante aguas arriba (posición  $A$ ) y la descarga aguas abajo puede ser libre o hacia otro tanque en caso de sumergencia (posición  $B$ ). El resultado de aplicar la ecuación de la energía entre las secciones representadas con las letras  $A$  y  $B$  es:

$$H_{emb} = H_{sum} + \frac{V_{J+1}^2}{2g} + H_l + H_f \quad (4.1.10)$$

En donde  $V_{J+1}^2/2g$  es la carga de velocidad en la sección final del conducto, considerada como energía final en el caso de descarga libre o como pérdida en el caso de sumergencia.

Para el cálculo de las demás pérdidas locales se tiene lo siguiente:

1. Pérdida por entrada. Ubicada en el primer nodo del sistema  $j = 1$ , se emplea la fórmula general de pérdidas con un coeficiente global  $k_e$ :

$$h_e = k_e \frac{V_1^2}{2g} \quad (4.1.11)$$

2. Válvula al final de la tubería. La pérdida se calcula en el nodo final  $j = J + 1$ , con un modelo que utiliza el coeficiente de descarga  $C_v$  de la válvula<sup>1</sup>:

$$h_v = \frac{1}{C_v^2} \frac{V_{J+1}^2}{2g} \quad (4.1.12)$$

---

<sup>1</sup> La ecuación del modelo se obtiene de la fórmula para válvulas de control de gasto  $Q_o = C_v \sqrt{2gh_v}$ ; en donde  $h_v$  es la carga aguas arriba de la válvula.

La suma de pérdidas locales resulta:

$$H_l = k_e \frac{V_1^2}{2g} + \frac{1}{C_v^2} \frac{V_{j+1}^2}{2g} \quad (4.1.13)$$

Para las pérdidas por fricción permanente en cada tramo de tubería, se aplica la fórmula de Darcy-Weisbach:

$$\Delta h_f = f_p \frac{\Delta x}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (4.1.14)$$

Dado que la longitud total del conducto ha sido dividida en  $J + 1$  nodos, la ecuación (4.1.14) puede emplearse de manera sucesiva sobre los intervalos que estos conforman para calcular la pérdida total de fricción. Adicionalmente, se introduce el factor de peso espacial  $\theta \in [0,1]$  sobre los nodos, para definir de manera ponderada las propiedades de cada tramo:

$$H_f = \frac{1}{2g} \sum_{j=1}^J \left[ (1 - \theta) \left( f_p \frac{V^2}{D} \right)_j + \theta \left( f_p \frac{V^2}{D} \right)_{j+1} \right] (x_{j+1} + x_j) \quad (4.1.15)$$

Sustituyendo las pérdidas locales  $H_l$  (4.1.13) y las de fricción  $H_f$  (4.1.15) en (4.1.10):

$$H_{emb} = H_{sum} + \frac{V_{j+1}^2}{2g} + k_e \frac{V_1^2}{2g} + \frac{1}{C_v^2} \frac{V_{j+1}^2}{2g} + \frac{1}{2g} \sum_{j=1}^J \left[ (1 - \theta) \left( f_p \frac{V^2}{D} \right)_j + \theta \left( f_p \frac{V^2}{D} \right)_{j+1} \right] (x_{j+1} + x_j) \quad (4.1.16)$$

Finalmente, al aplicar la ecuación de continuidad (4.1.8) en (4.1.16), se obtiene una expresión para calcular el gasto en la condición inicial  $Q_o$ :

$$Q_o = \sqrt{\frac{2g(H_{emb} - H_{sum})}{\frac{k_e}{A_1^2} + \frac{1}{A_{j+1}^2} \left( 1 + \frac{1}{C_v^2} \right) + \sum_{j=1}^J \left[ (1 - \theta) \left( \frac{f_p}{DA^2} \right)_j + \theta \left( \frac{f_p}{DA^2} \right)_{j+1} \right] (x_{j+1} + x_j)}} \quad (4.1.17)$$

La ecuación (4.1.17) no puede resolverse de manera directa, pues el factor de fricción depende de la velocidad que no se conoce *a priori*.

En la Figura 4.3 se presenta el diagrama de flujo con un algoritmo para calcular el gasto de manera iterativa y se incluye un subproceso detallado en la Figura 4.4 que evalúa el

régimen de flujo en cada nodo del sistema para determinar el valor del coeficiente de fricción con los modelos presentados en las ecuaciones (2.2.9) y (2.2.10).

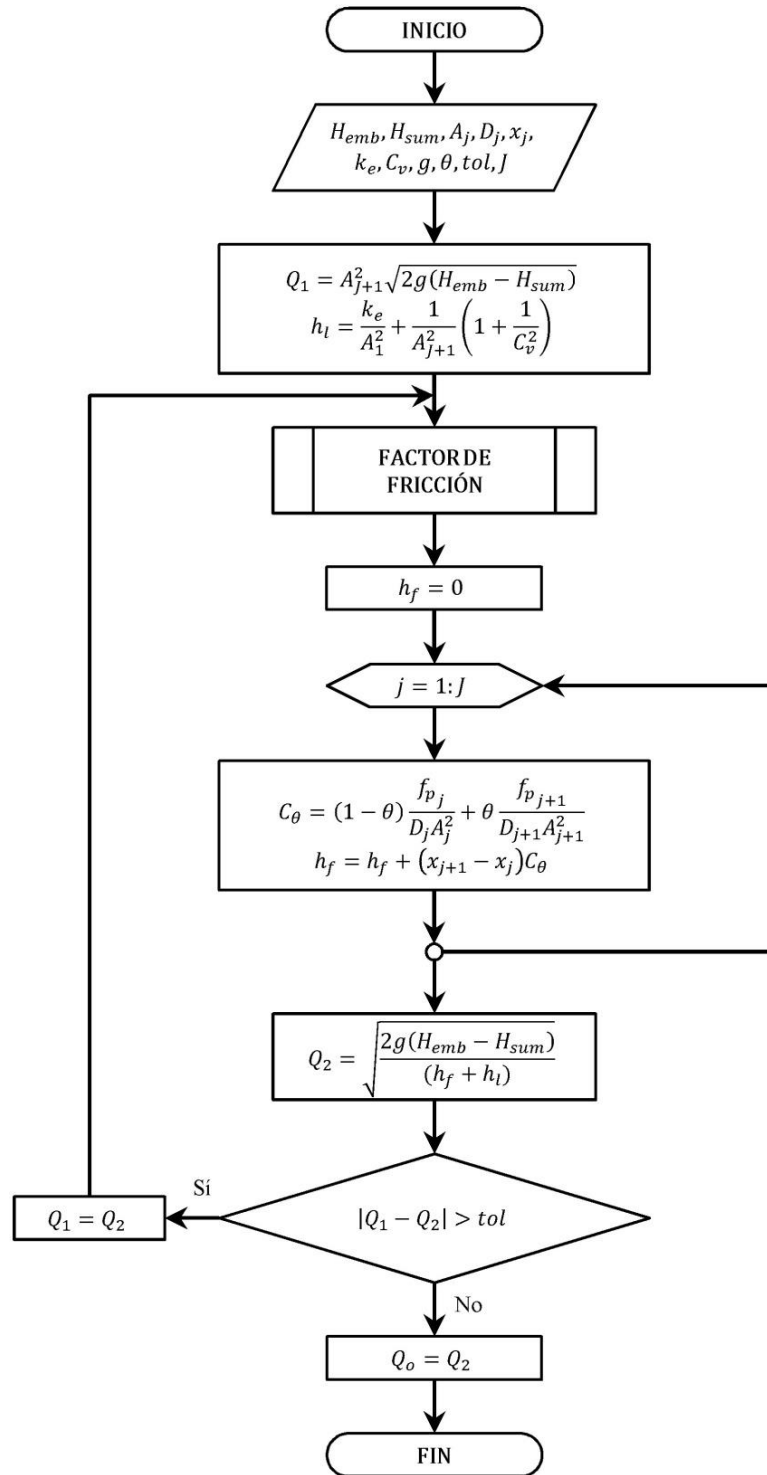


Figura 4.3. Diagrama de flujo para el cálculo del gasto en condición inicial

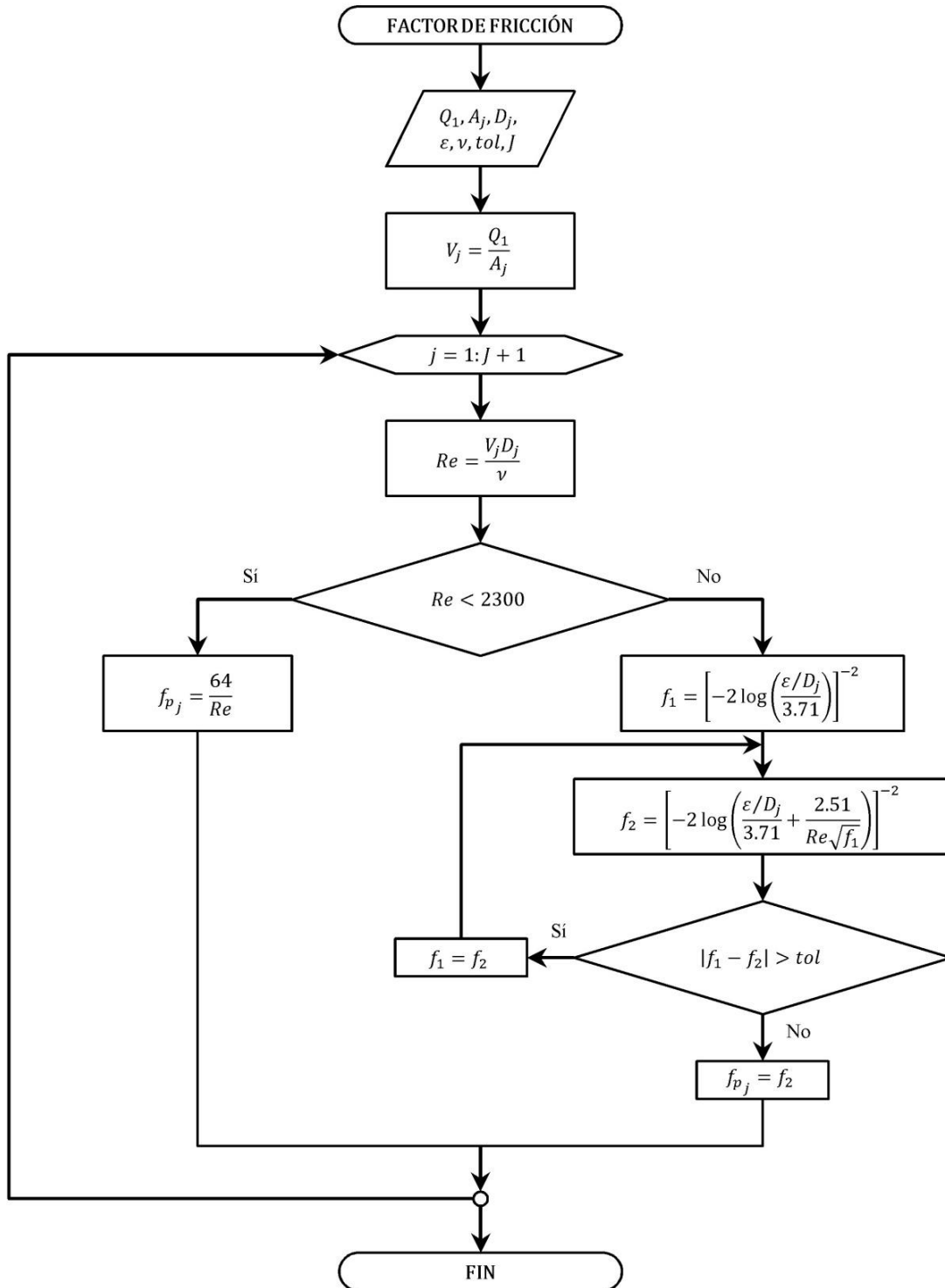


Figura 4.4. Diagrama de flujo para el cálculo del factor de fricción de Darcy-Weisbach

Una vez calculado el gasto  $Q_o$ , las velocidades  $V_j$  dejan de ser incógnitas del problema y la ecuación de la energía (4.1.9) puede aplicarse desde el embalse (posición A) a cada nodo  $j$  y así conocer la carga de presión  $H_j = p_j/\rho g$  a lo largo de la tubería.

Para el primer nodo, la ecuación resulta:

$$H_1 = H_{emb} - z_1 - (1 + k_e) \frac{V_1^2}{2g} \quad (4.1.18)$$

Y para los nodos restantes:

$$H_j = H_{emb} - z_j - \frac{V_j^2}{2g} - k_e \frac{V_1^2}{2g} - \frac{1}{2g} \sum_{m=1}^{j-1} \left[ (1 - \theta) \left( f_p \frac{V^2}{D} \right)_m + \theta \left( f_p \frac{V^2}{D} \right)_{m+1} \right] (x_{m+1} + x_m) \quad (4.1.19)$$

El uso de las ecuaciones (4.1.17) – (4.1.19) para generar la condición inicial del esquema numérico permiten evaluar una conducción sencilla de diámetro constante (Figura 4.5) o con diámetro variable (Figura 4.6).

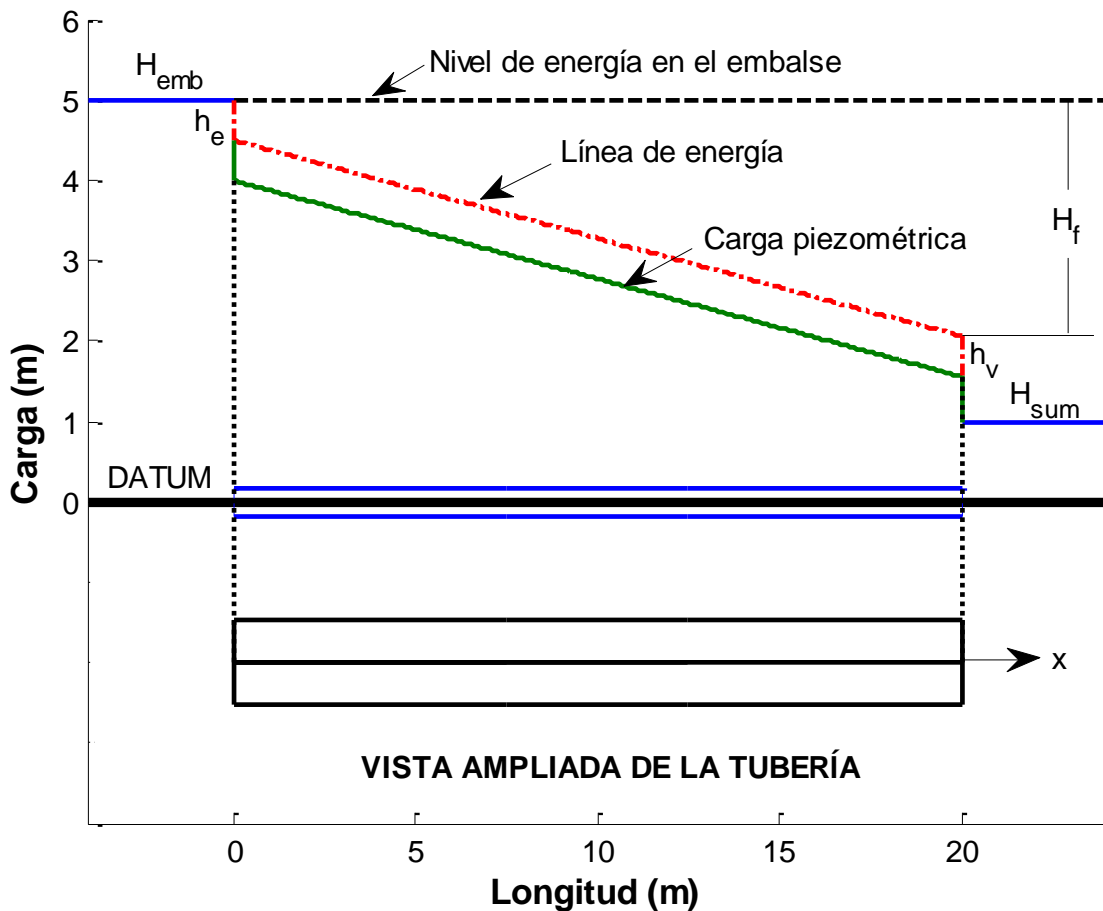


Figura 4.5. Condición inicial para una tubería con diámetro constante



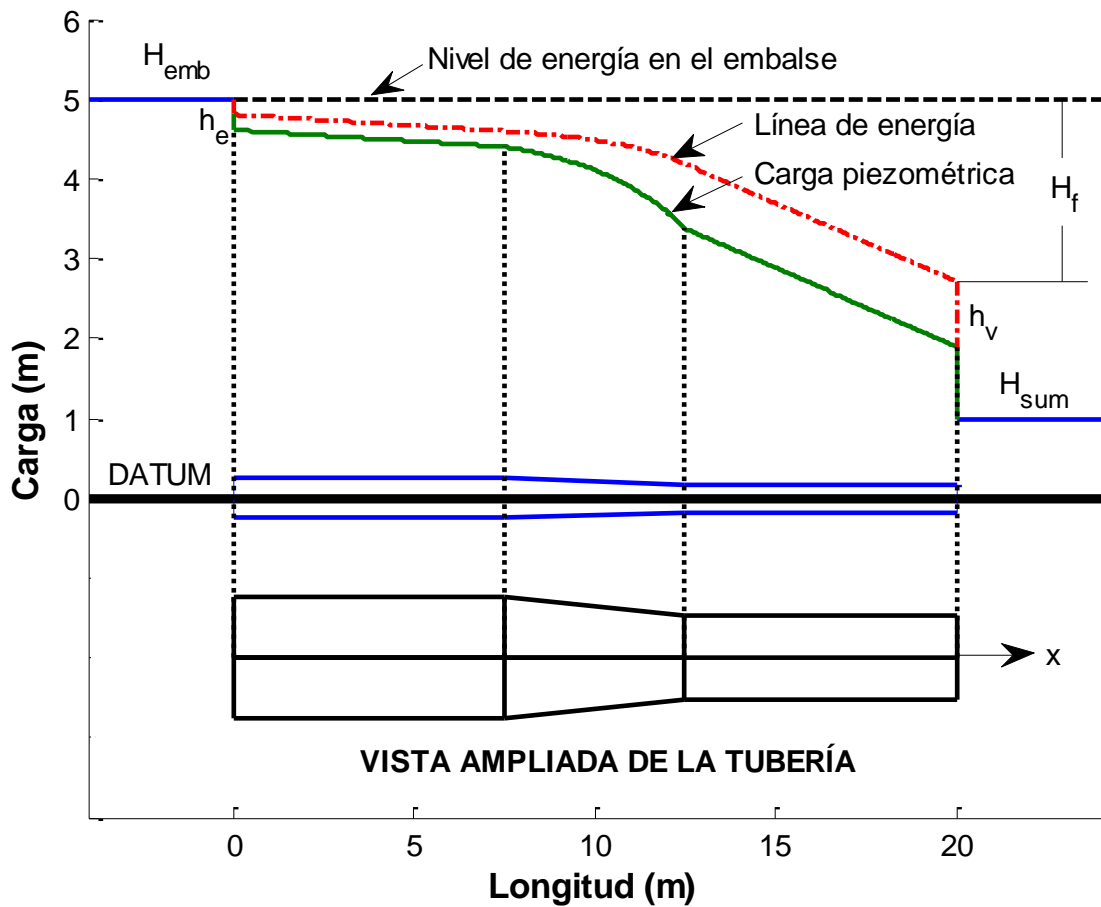


Figura 4.6. Condición inicial para una tubería con diámetro variable

Las condiciones en los nodos de frontera se definen para la presión al inicio de la tubería y la velocidad en la válvula final.

En la frontera aguas arriba se asume que el nivel del embalse permanece constante durante el paso del transitorio; de esta manera se puede asociar la energía del primer nodo con la del embalse para cualquier instante de tiempo y calcular la carga de presión en la frontera aplicando la ecuación de la energía:

$$H_1 = H_{emb} - z_1 - [1 + k_e \operatorname{sgn}(V_1)] \frac{V_1^2}{2g} \quad (4.1.20)$$

Para una correcta aplicación de las pérdidas locales, en la ecuación (4.1.20) se incluye la función signo para identificar la dirección del flujo transitorio, como se puede observar en la Figura 4.7.

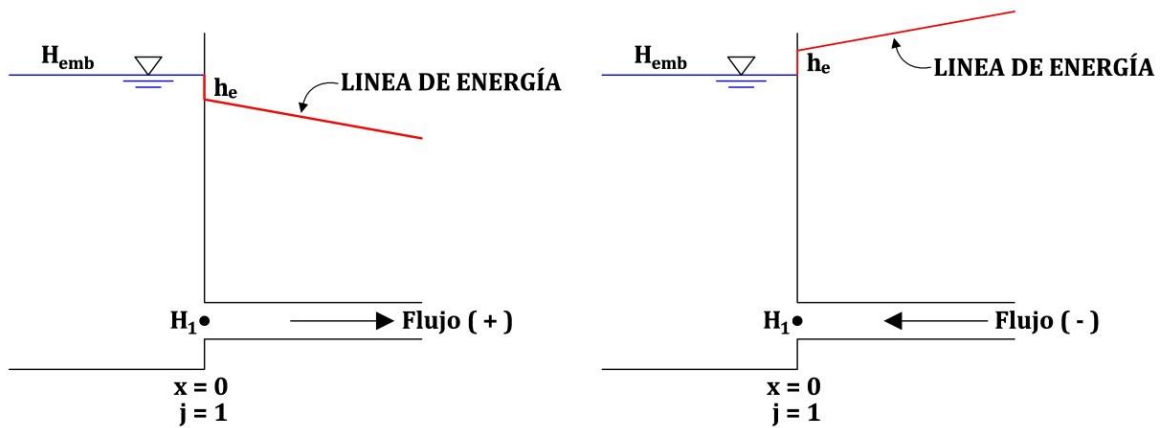


Figura 4.7. Condición de frontera aguas arriba para nivel constante del embalse

En la frontera aguas abajo se impone una ley de descarga que describa el funcionamiento de la válvula; para esto se construye una función en el último nodo que relacione la variación del gasto durante el tiempo de simulación (Figura 2.23). Aplicando la ecuación de continuidad, la velocidad en la frontera se calcula como:

$$V_{J+1} = \frac{Q_v(t)}{A_{J+1}} \quad (4.1.21)$$

En donde  $Q_v$  es la descarga de la válvula y  $t$  el tiempo de simulación.

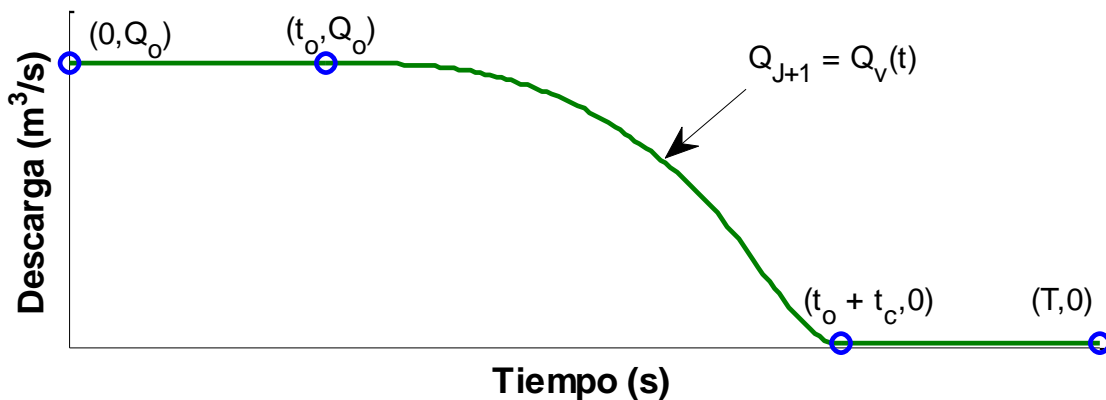


Figura 4.8. Condición de frontera aguas abajo para el cierre de una válvula

El empleo de una función de este tipo permite representar diferentes leyes de cierre en un mismo sistema (Figura 4.9) y su selección depende de las características de la válvula (Azoury, Baasiri, & Najm, 1986).

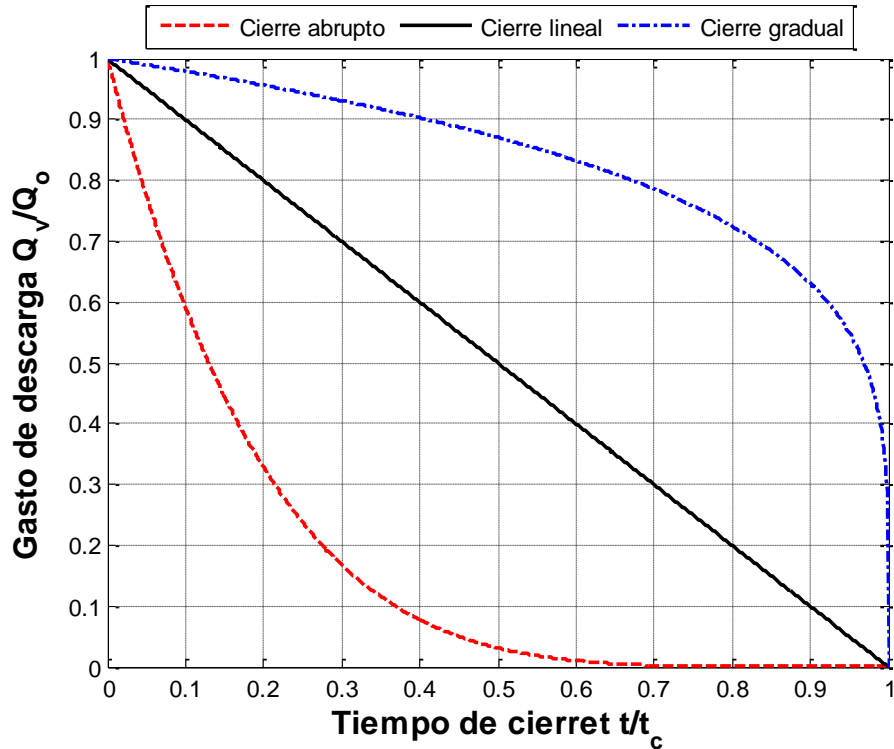


Figura 4.9. Gráfico adimensional con diferentes leyes de cierre de válvula

Con la condición inicial y de frontera construidas, el último paso es efectuar la simulación en flujo transitorio.

### 4.1.3. SIMULACIÓN EN FLUJO TRANSITORIO

En el apartado 3.1.2, durante la elaboración del esquema en diferencias finitas, se planteó de manera detallada el algoritmo de programación que soluciona el sistema de ecuaciones en flujo transitorio. Como complemento de lo anterior, en la Figura 4.10 se presenta el diagrama de flujo que ejemplifica el proceso y el orden de cálculo de las ecuaciones.

Para su ejecución, se considera que la información correspondiente a la configuración del sistema hidráulico y la condición inicial son datos de entrada; las condiciones de frontera se plantean con la información en flujo permanente, pero su cálculo e imposición ocurre durante el paso del transitorio. Por último, el valor del incremento temporal  $\Delta t$ , se calcula con la condición límite de Courant en el sistema, es decir, con el  $\Delta x$  más pequeño de todos los tramos y el máximo valor de la celeridad  $a$  en caso de existir variación del diámetro:

$$\Delta t = C_N \frac{\min(\Delta x_i)}{\max(a_j)} \quad (4.1.22)$$

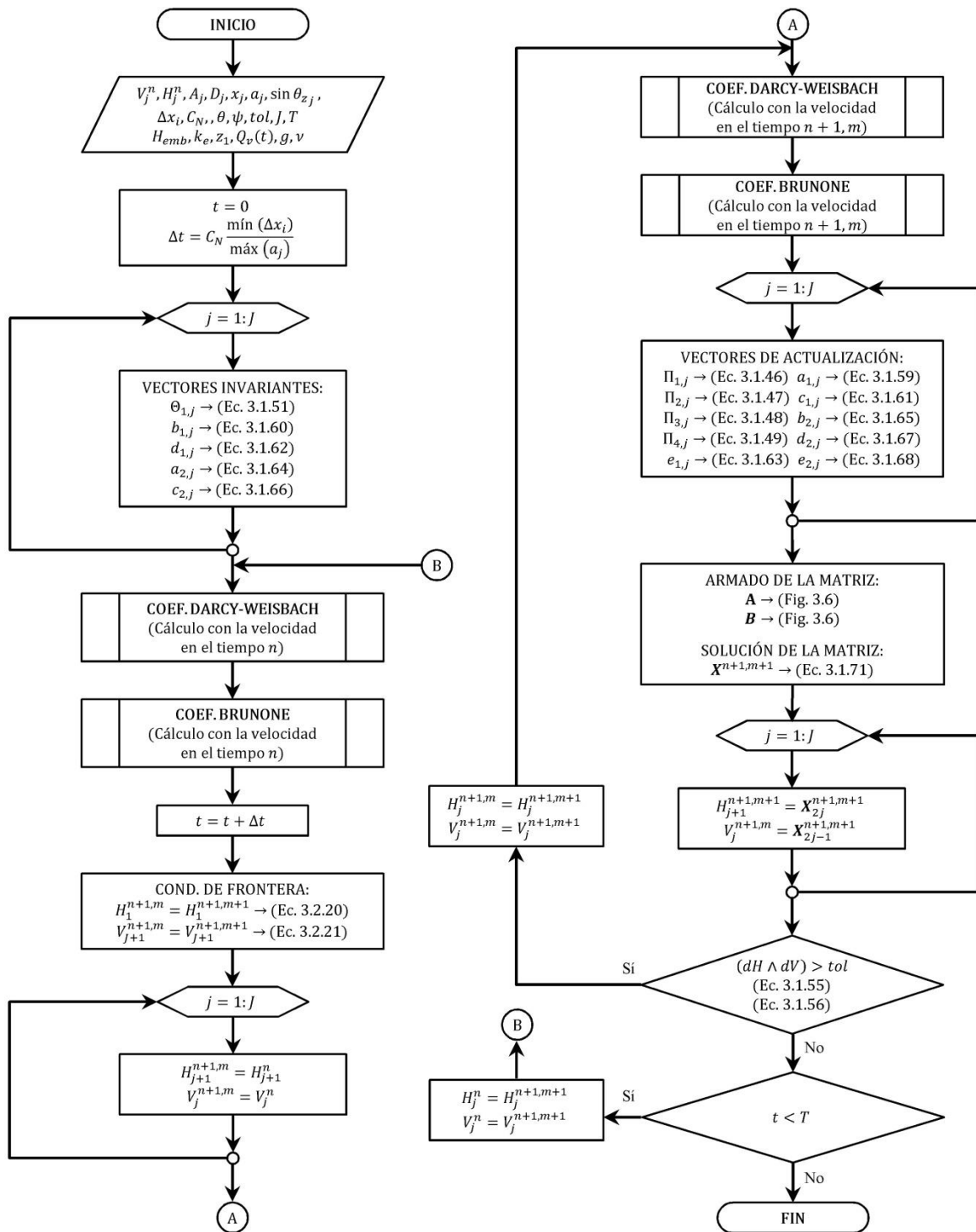


Figura 4.10. Diagrama de flujo del algoritmo en diferencias finitas

El algoritmo incluye dos subprocesos para calcular los factores de fricción. La aplicación de cada uno se realiza sobre el vector de velocidad en la iteración que corresponda en la secuencia de cálculo, ya sea para el tiempo  $n$  o para el  $n + 1, m$ .

Para determinar el coeficiente de Darcy-Weisbach (Figura 4.11), el cálculo es similar al hecho para el gasto en condición permanente; mientras que para el caso del coeficiente de Brunone (Figura 4.12), se presentan el proceso con la ecuación (2.2.14) para el cálculo de  $k_t$  y las ecuaciones (2.2.18) y (2.2.19) para  $C^*$ .

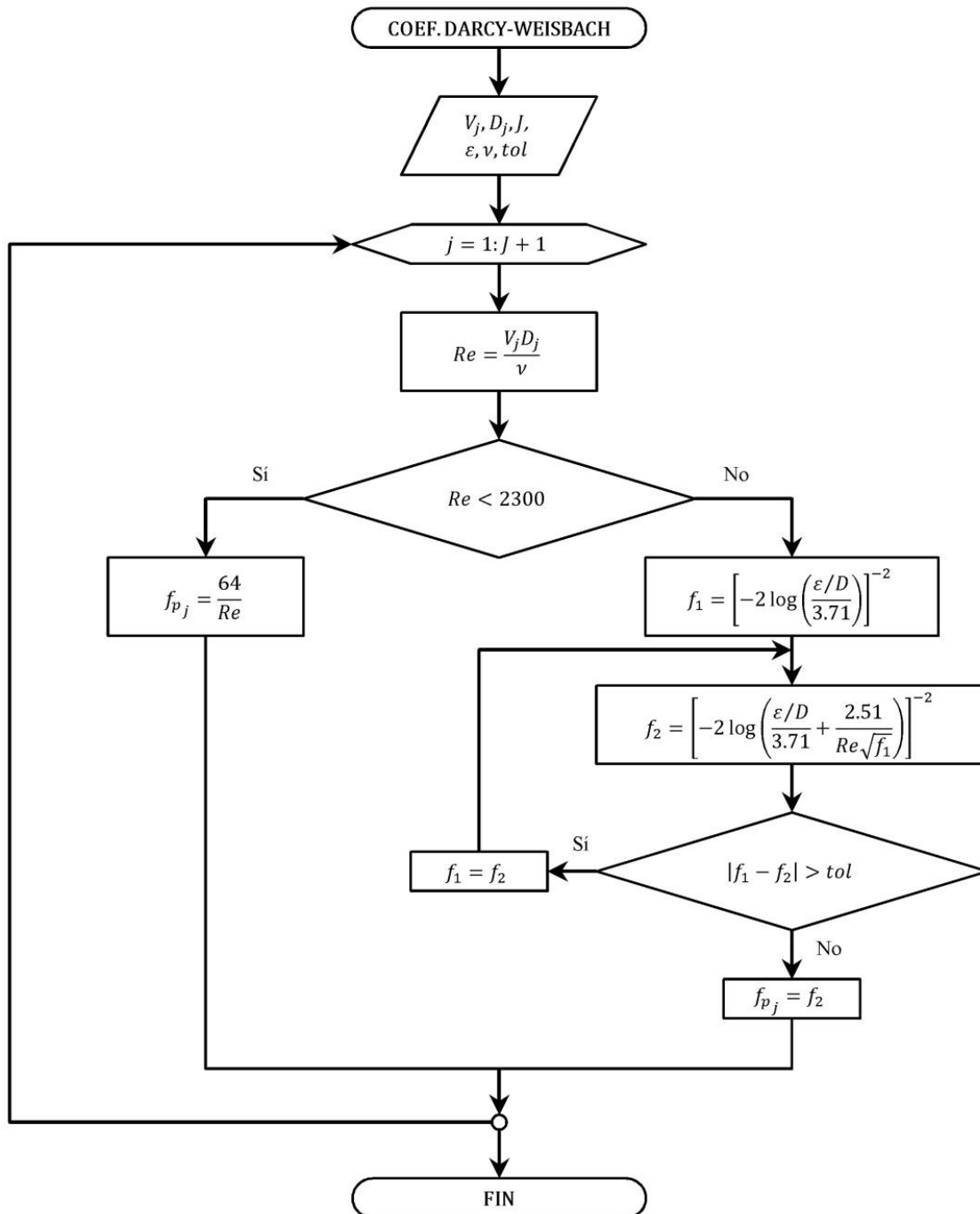


Figura 4.11. Diagrama de flujo para el cálculo del factor de Darcy-Weisbach en flujo transitorio

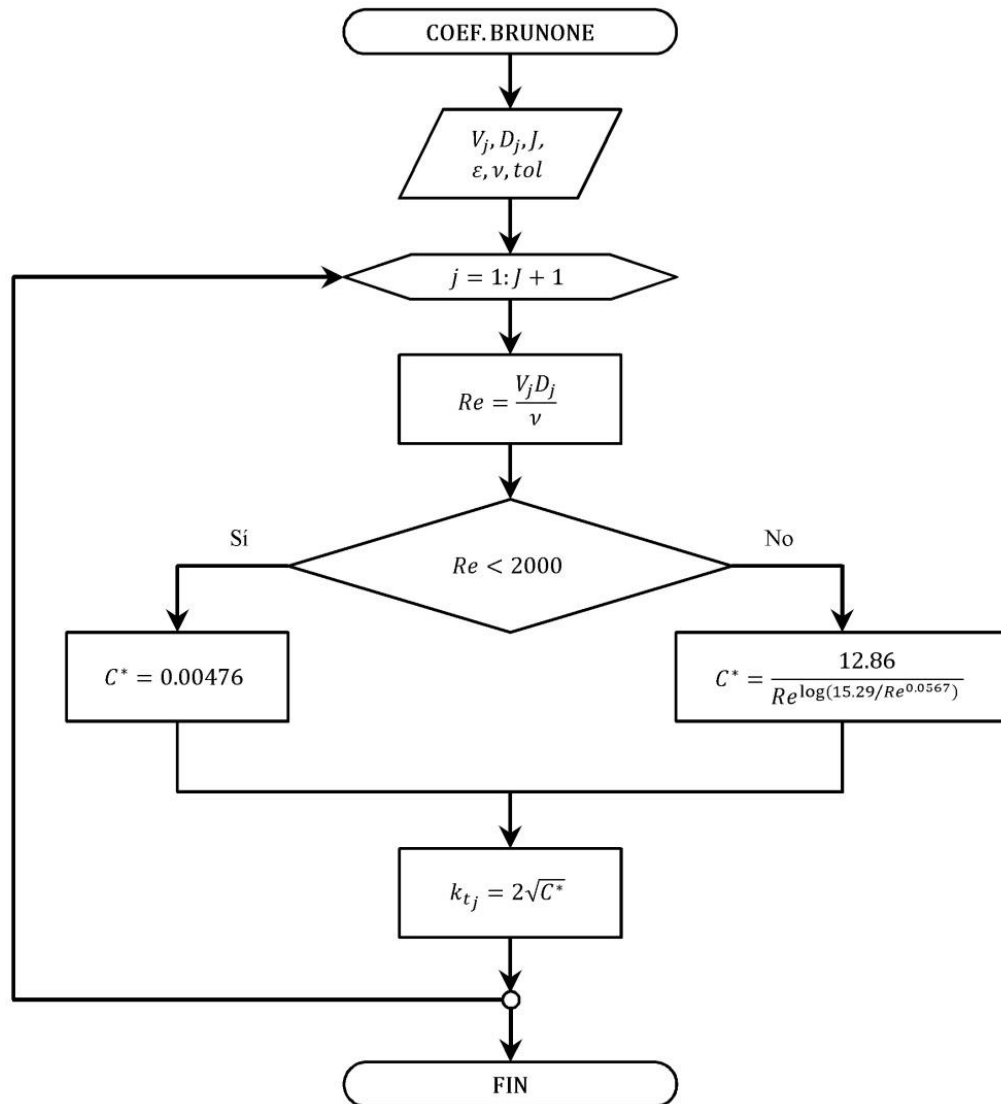


Figura 4.12. Diagrama de flujo para el cálculo del coeficiente de Brunone en flujo transitorio

A fin de evaluar la precisión del programa de cómputo desarrollado, a continuación se presenta una serie de pruebas numéricas.

## 4.2. PRUEBAS NUMÉRICAS

Para evaluar la capacidad del modelo numérico propuesto se compararán los resultados obtenidos en las simulaciones con resultados experimentales presentes en la literatura. Los casos de estudio analizados corresponden a los experimentos de Bergant et al. (2001) para un cierre instantáneo y Jonsson et al. (2012) para un cierre gradual. Como complemento, se presenta, la posibilidad de simular transitorios en tuberías de diámetro variable.

### 4.2.1. EXPERIMENTOS DE BERGANT & SIMPSON (1995)

Bergant & Simpson (1995) diseñaron y construyeron un aparato experimental para investigar el comportamiento de las sobrepresiones y la separación de columna durante eventos transitorios en la Universidad de Adelaida, Australia. En la Tabla 4.2 se resumen las características del sistema y las condiciones de flujo de las pruebas realizadas por Bergant et al. (2001).

**Tabla 4.2. Parámetros utilizados en la calibración del modelo de Bergant et al (2001)**

Descripción	Variable	Valor	Unidades
<i>Características de la Conducción<sup>†</sup></i>			
Longitud	$L$	37.23	m
Diámetro	$D$	0.0221	m
Espesor	$e$	0.0016	m
Pendiente	$\text{sen } \theta_z$	5.45	%
Coefficiente de Poisson	$\mu$	0.34	–
Módulo de Young	$E$	120	GPa
<i>Propiedades del Fluido</i>			
Densidad	$\rho$	998	kg/m <sup>3</sup>
Módulo de compresibilidad	$K$	2.19	GPa
Viscosidad cinemática	$\nu$	$1.01 \times 10^{-6}$	m <sup>2</sup> /s
<i>Condiciones de Flujo</i>			
Velocidad	$V$	[0.1; 0.2; 0.3]	m/s
Celeridad de la onda	$a$	1319	m/s
Carga del embalse	$H_{emb}$	32	m
Tiempo de cierre de la válvula	$t_v$	0.0009	s

<sup>†</sup> La tubería es de cobre y la condición de sujeción corresponde a una conducción anclada contra movimiento longitudinal.

Este aparato de pruebas tiene la capacidad de conducir el flujo en ambas direcciones mediante un sistema de control de presurización computarizado y la válvula de cerrado puede ser localizada en los extremos o la posición central de la tubería.

En la Figura 4.13 se presenta el esquema general del sistema, se puede observar que la dirección de flujo va del Tanque 2 al Tanque 1 y las mediciones de la carga piezométrica fueron tomadas en el punto medio de la tubería (P50) y en la posición aguas abajo, a un lado de la válvula (PV). La condición inicial de velocidad es de 0.1, 0.2 y 0.3 m/s para tres pruebas distintas.

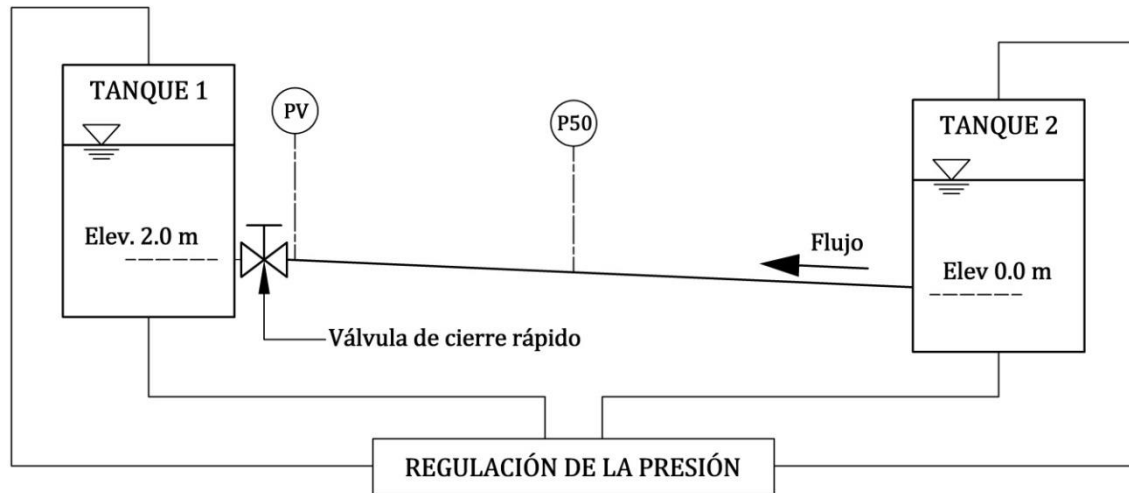


Figura 4.13. Esquema general del aparato experimental de Bergant & Simpson (1995)

Los resultados que a continuación se presentan, incluyen el modelo MOC con fricción cuasi-permanente (desarrollado en el apartado 3.1.1) y para el esquema en DF se analizan las diferentes propuestas de cálculo del coeficiente de Brunone<sup>1</sup> (Tabla 4.3).

Tabla 4.3. Propuestas de cálculo para el factor de fricción transitorio

Referencia	Cálculo de $C^*$		Cálculo de $k_t$
	$Re \leq 2300$	$Re > 2300$	
Bergant et al. (2001)	$C^* = 0.00476$	$C^* = \frac{7.41}{Re^{\log_{10}\left(\frac{14.3}{Re^{0.05}}\right)}}$	$k_t = \frac{\sqrt{C^*}}{2}$
Vardy & Brown (1995)	$C^* = 0.00476$	$C^* = \frac{7.41}{Re^{\log_{10}\left(\frac{14.3}{Re^{0.05}}\right)}}$	$k_t = 2\sqrt{C^*}$
Vardy & Brown (2003) <sup>†</sup>	$C^* = 0.00476$	$C^* = \frac{12.86}{Re^{\log_{10}\left(\frac{15.29}{Re^{0.0567}}\right)}}$	$k_t = 2\sqrt{C^*}$

<sup>†</sup> Para este caso, el rango del número de Reynolds se modifica a 2000 para el cálculo de  $C^*$

Para completar el estudio y definir qué modelo presenta el mejor ajuste, los resultados numéricos se comparan con los datos experimentales reportados por Bergant et al. (2001)<sup>2</sup>, los puntos de muestreo corresponden a las posiciones P50 y PV (Figura 4.13), considerando un cierre lineal instantáneo, 100 intervalos de separación espacial y el número de Courant igual a uno en todos los casos.

<sup>1</sup> La información a detalle de las propuesta expuestas por los diferentes autores para el cálculo de  $k_t$  se puede consultar en el apartado 2.2.2.2

<sup>2</sup> Las series de datos que reproducen las mediciones experimentales fueron proporcionadas por el Dr. Anton Bergant, mediante comunicación personal en 2014.



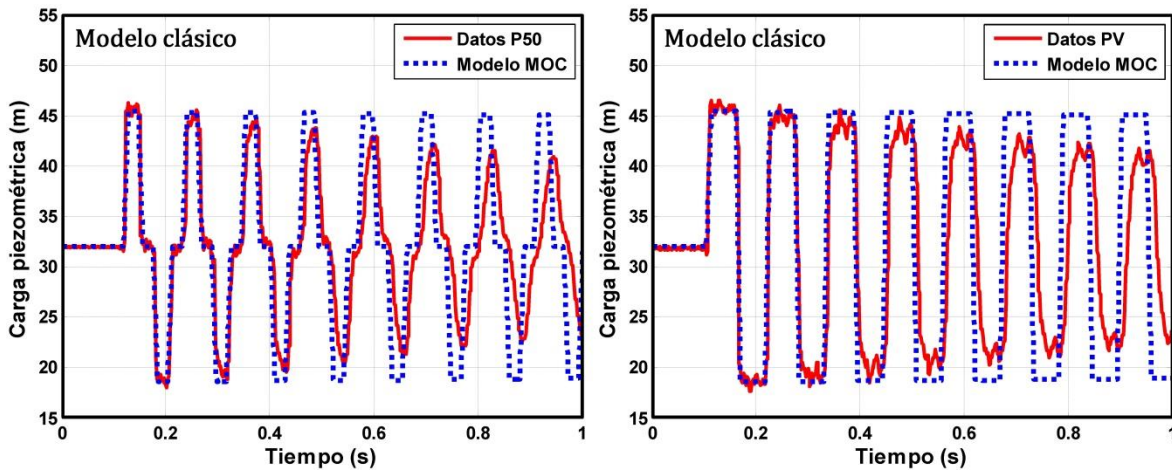


Figura 4.14. Resultados del modelo cuasi-permanente (MOC) para  $V_o = 0.1$  m/s

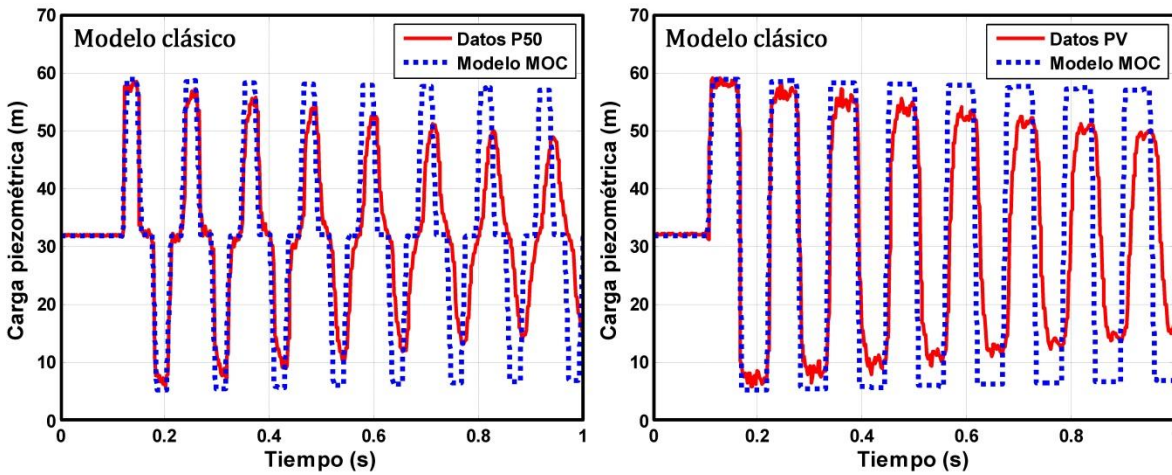


Figura 4.15. Resultados del modelo cuasi-permanente (MOC) para  $V_o = 0.2$  m/s

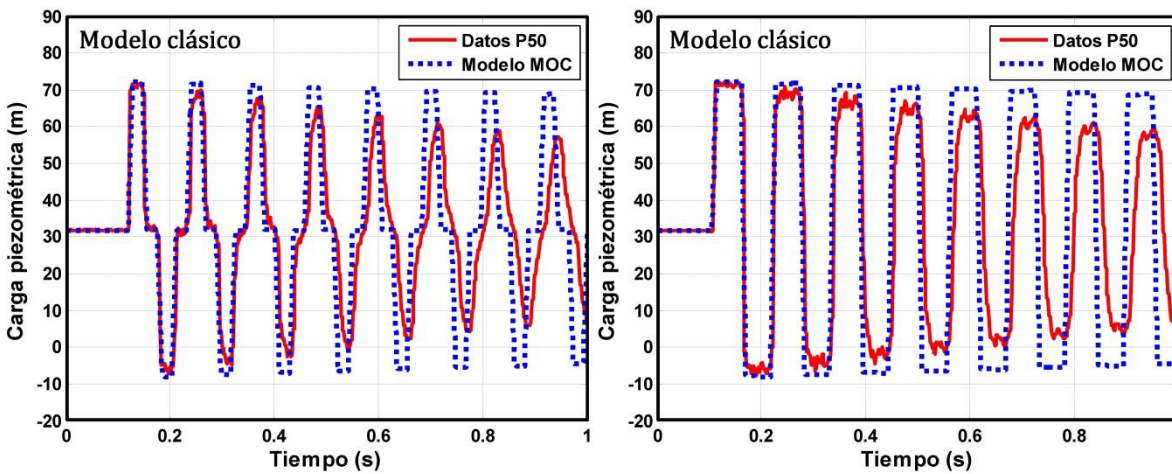


Figura 4.16. Resultados del modelo cuasi-permanente (MOC) para  $V_o = 0.3$  m/s

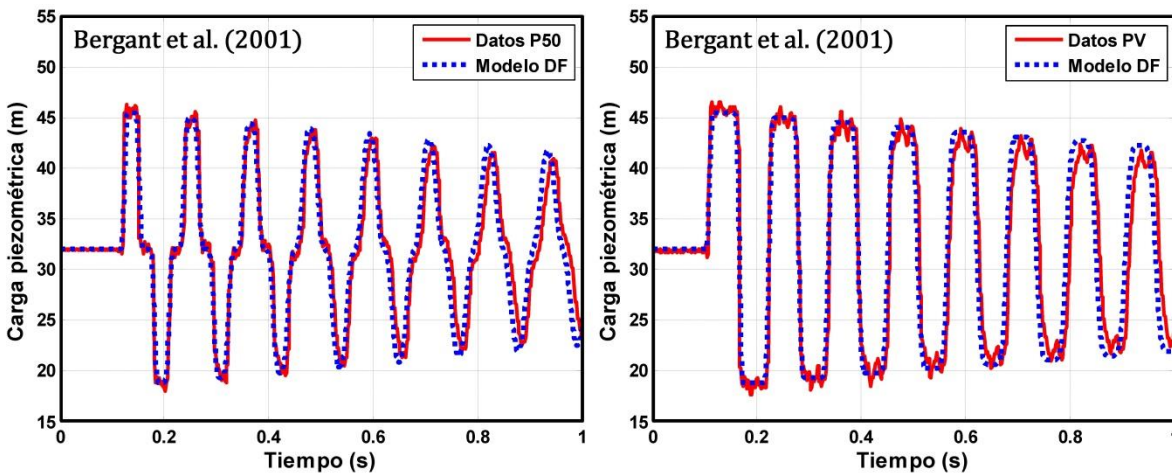


Figura 4.17. Resultados con la propuesta de Bergant et al. (2001) para  $V_o = 0.1$  m/s

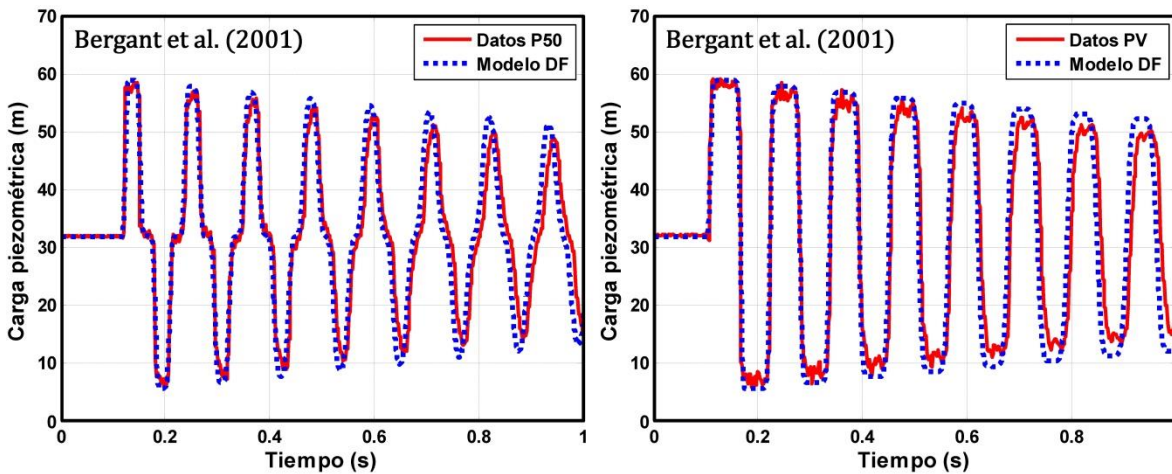


Figura 4.18. Resultados con la propuesta de Bergant et al. (2001) para  $V_o = 0.2$  m/s

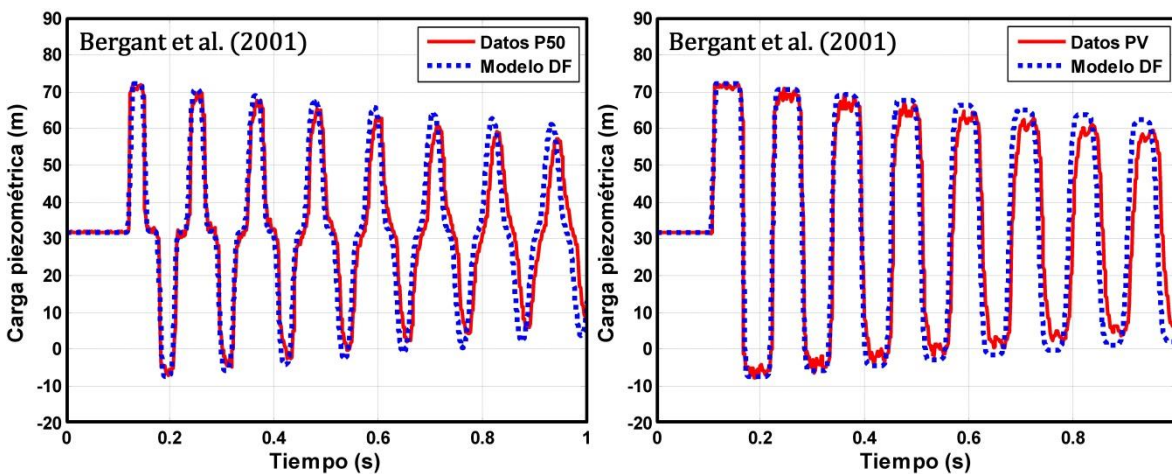


Figura 4.19. Resultados con la propuesta de Bergant et al. (2001) para  $V_o = 0.3$  m/s

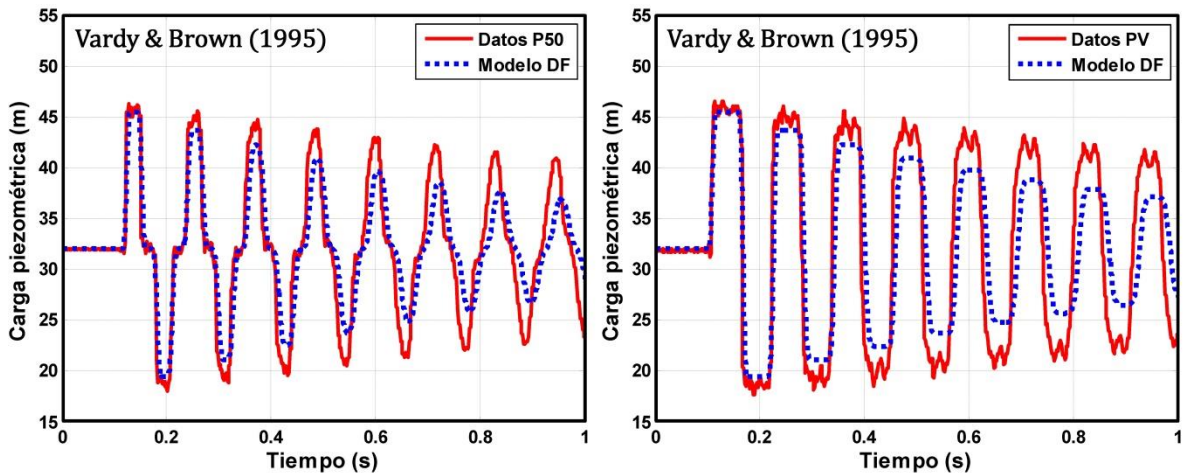


Figura 4.20. Resultados con la propuesta de Vardy & Brown (1995) para  $V_o = 0.1$  m/s

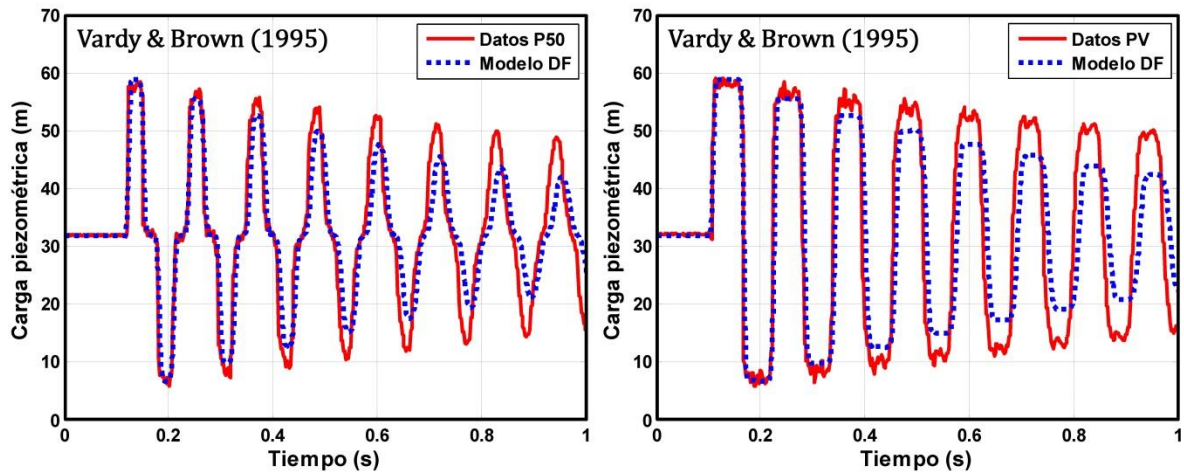


Figura 4.21. Resultados con la propuesta de Vardy & Brown (1995) para  $V_o = 0.2$  m/s

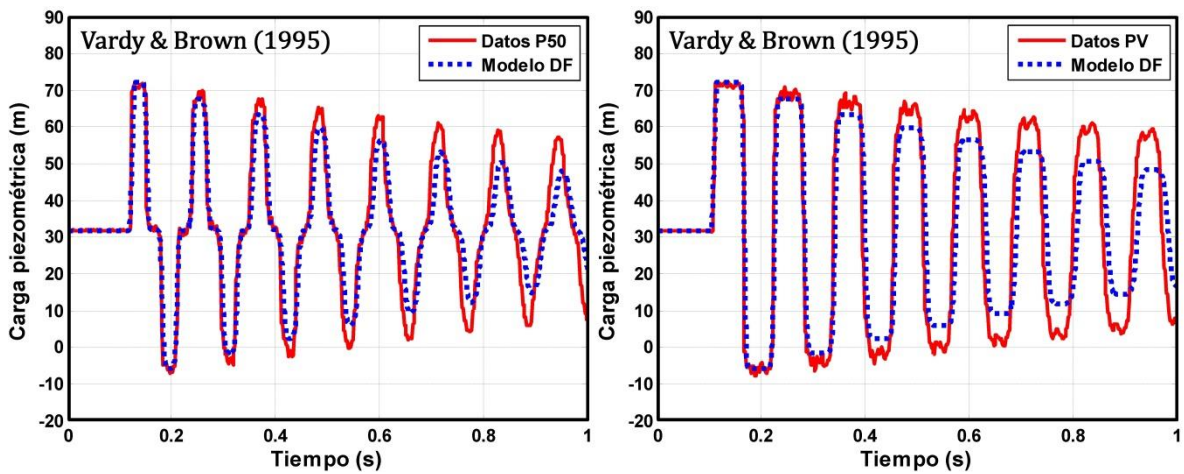


Figura 4.22. Resultados con la propuesta de Vardy & Brown (1995) para  $V_o = 0.3$  m/s

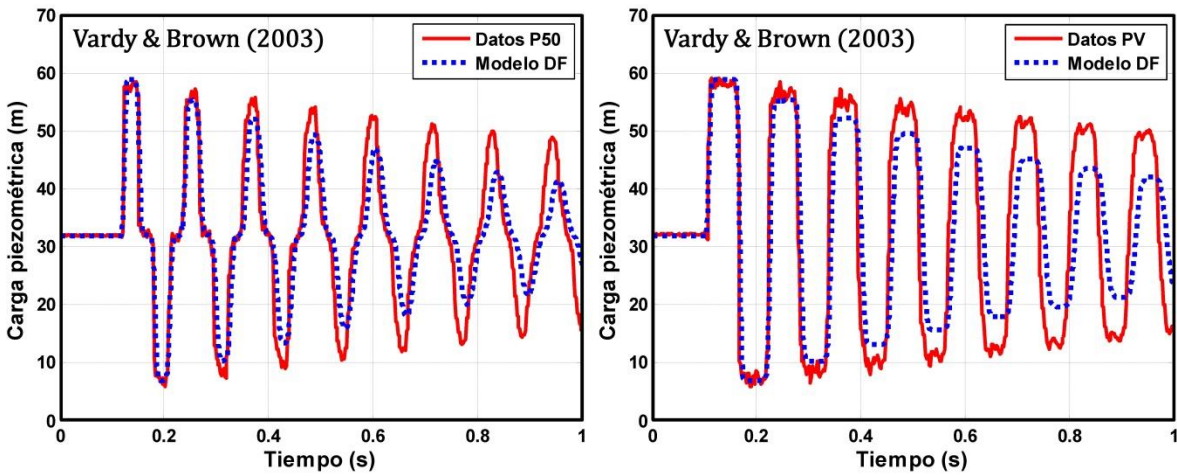


Figura 4.23. Resultados con la propuesta de Vardy & Brown (2003) para  $V_o = 0.1 \text{ m/s}$

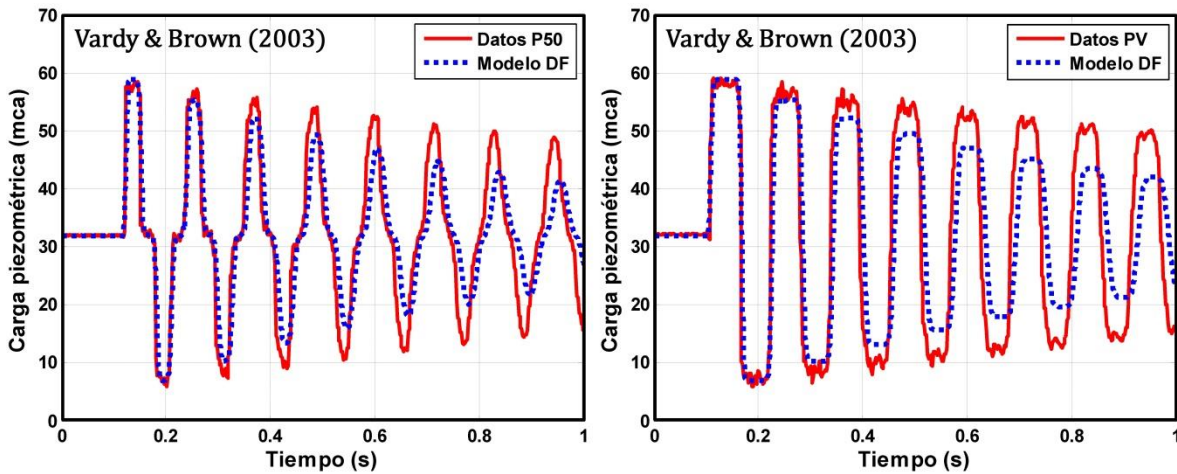


Figura 4.24. Resultados con la propuesta de Vardy & Brown (2003) para  $V_o = 0.2 \text{ m/s}$

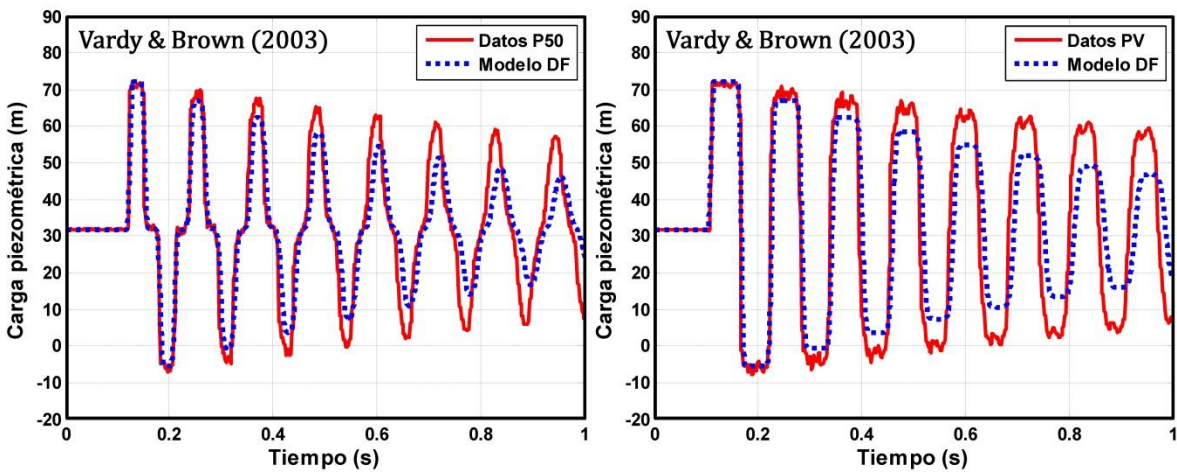


Figura 4.25. Resultados con la propuesta de Vardy & Brown (2003) para  $V_o = 0.3 \text{ m/s}$

En primer lugar, cabe destacar que los transitorios obtenidos con el modelo MOC para las ecuaciones no conservativas con fricción cuasi-permanente, a pesar de presentar un buen ajuste en la primera oscilación, las discrepancias con respecto a los resultados experimentales se vuelven más notorias mientras mayor es el tiempo de simulación en todas las pruebas realizadas.

En lo que respecta a la amplitud de las ondas de los modelos en DF, el mejor ajuste corresponde a la propuesta de Bergant et al. (2001), mientras que los resultados de Vardy & Brown (1995; 2003) presentan un mayor decaimiento en el tiempo con respecto a los resultados experimentales; esto se debe a la forma en que se calcula el coeficiente de fricción de Brunone, que para el caso de Bergant et al. (2001), resulta ser menor en comparación a las otras propuestas (Figura 4.26).

Con base en lo anterior, los análisis y resultados que se muestren de aquí en adelante corresponderán al modelo en DF, empleando la aproximación del coeficiente  $k_t$  propuesto por Bergant et al. (2001).

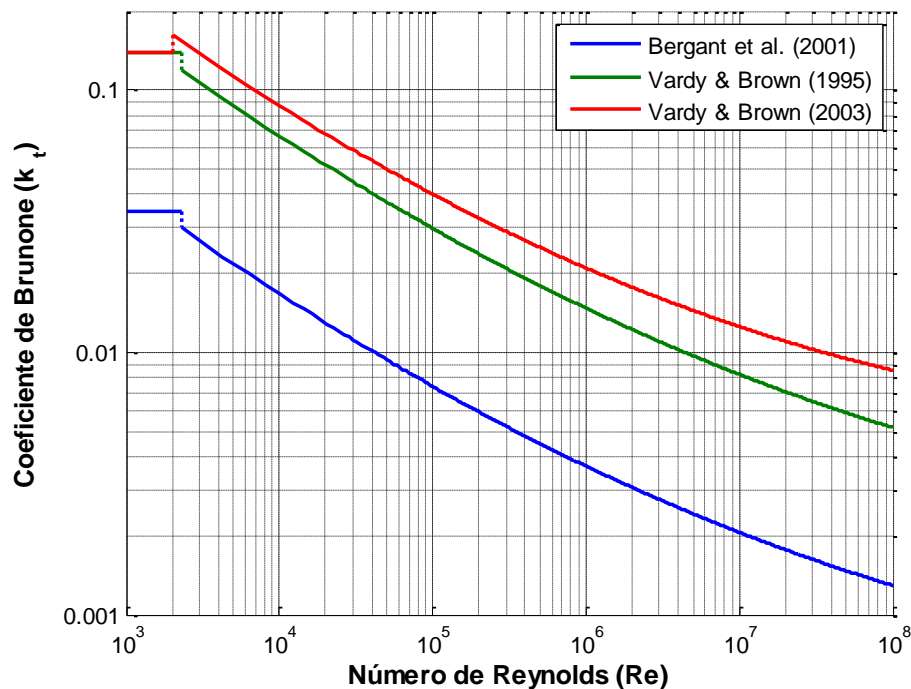


Figura 4.26. Coeficiente de Brunone en función del Número de Reynolds

Además de la amplitud y el decaimiento, existen diferencias en la fase y forma de las ondas; para ejemplificar esto, la Figura 4.27 muestra el caso de prueba  $V_0 = 0.1$  m/s en la parte final del diagrama para diversos refinamientos de malla (variando el número de Courant) y la medición experimental en la posición PV.

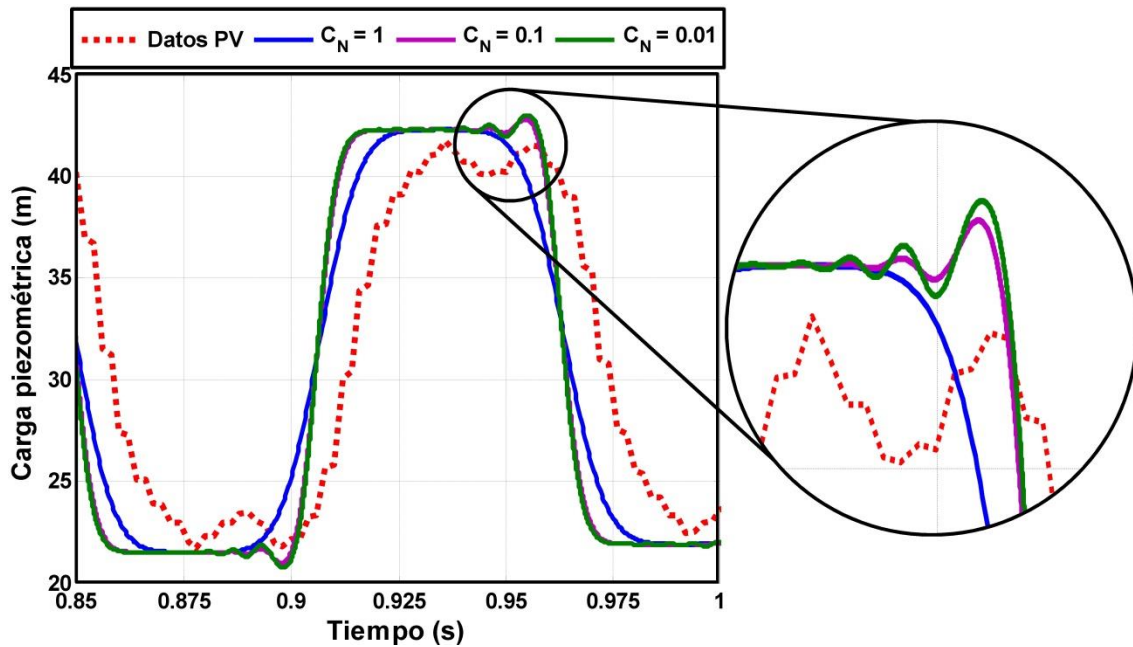


Figura 4.27. Detalle del final del transitorio para la prueba  $V_o = 0.1$  m/s

Con el fin de conocer el comportamiento de los transitorios medidos en las pruebas, se aplica la transformada rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés *Fast Fourier Transform*) para determinar la frecuencia característica  $f_c$  de cada señal. Conocido su valor, el periodo característico se calcula como:

$$T_c = \frac{1}{f_c} \tag{4.2.1}$$

Conocido  $T_c$  se compara con el ‘*periodo teórico*’ del transitorio (Chaudhry, 2014); éste se define como el tiempo  $T_o$  que ocurre entre dos puntos equivalentes de la onda después del cierre total de la válvula y está en función de la celeridad y la longitud total:

$$T_o = \frac{4L}{a} \tag{4.2.2}$$

Igualando el periodo teórico con el característico y despejando  $a$  en (4.2.2), la velocidad de propagación de la onda en el transitorio se estima como:

$$a = 4Lf_c \tag{4.2.3}$$

Los espectros de frecuencia, de los transitorios presentados en la Figura 4.27 al aplicar la FFT, se muestran a continuación.

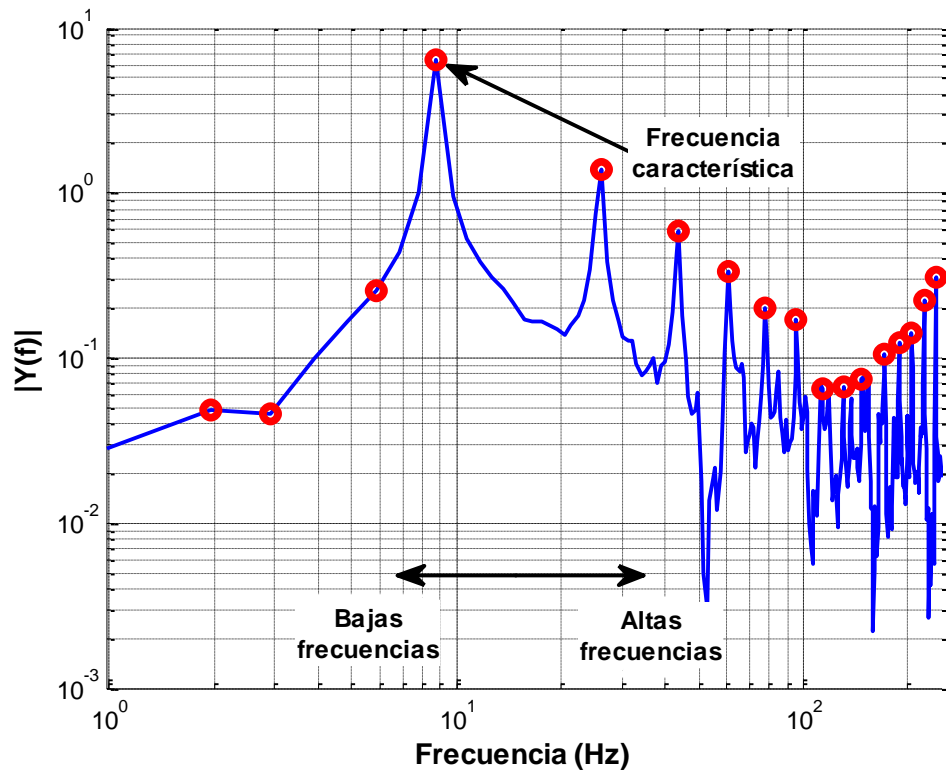


Figura 4.28. FFT de las mediciones en la posición PV para el caso  $V_o = 0.1$  m/s

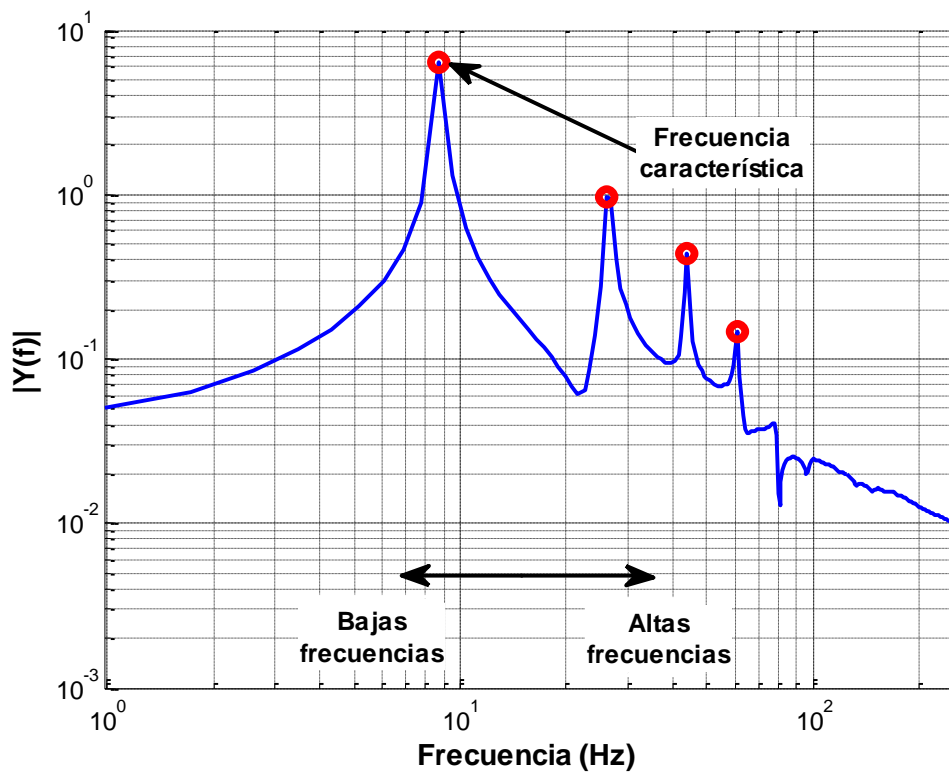


Figura 4.29. FFT de la simulación en la posición PV para el caso  $V_o = 0.1$  m/s y  $C_N = 1$

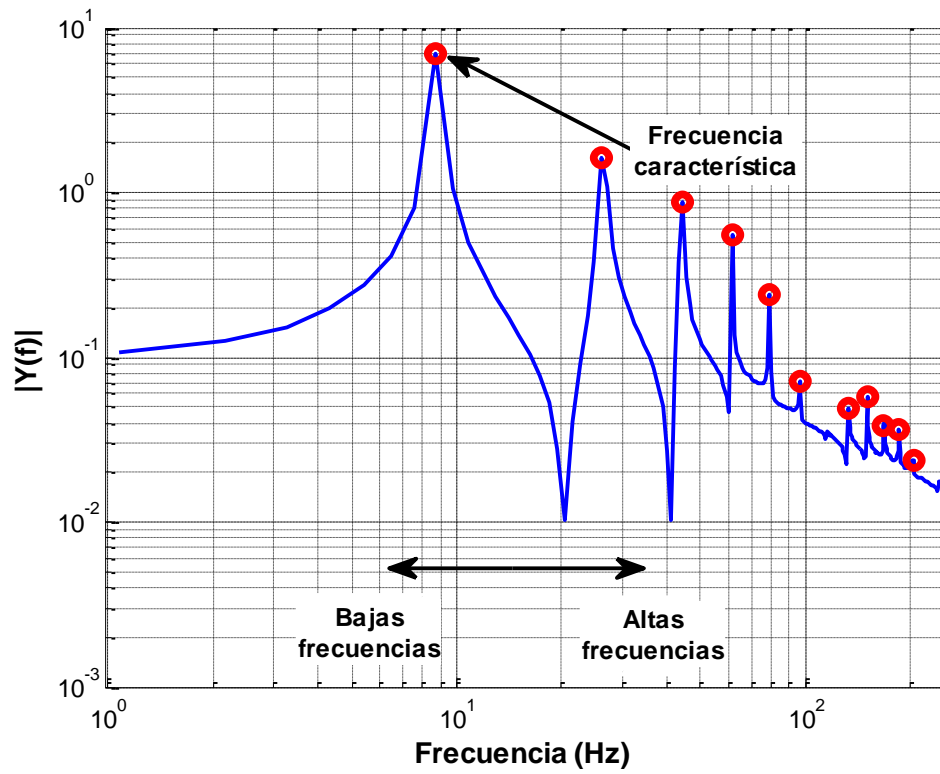


Figura 4.30. FFT de la simulación en la posición PV para el caso  $V_o = 0.1$  m/s y  $C_N = 0.1$

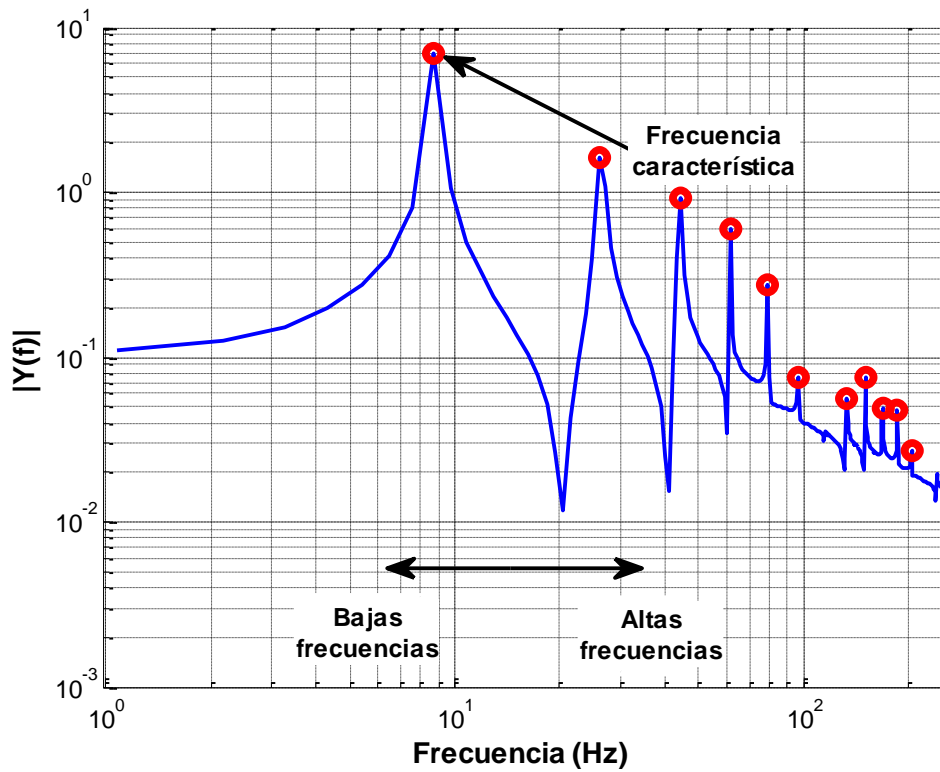


Figura 4.31. FFT de la simulación en la posición PV para el caso  $V_o = 0.1$  m/s y  $C_N = 0.01$



En la Figura 4.28 la frecuencia característica de las mediciones es  $f_c = 8.7891$  Hz y por tanto la velocidad de propagación es  $a = 1308.9$  m/s, este valor se aproxima al valor estimado para el modelo numérico ( $a = 1319$  m/s).

Al utilizar esta celeridad característica calculada con la FFT y realizar nuevamente la simulación, se obtiene un mayor ajuste en las fases de los transitorios (Figura 4.32).

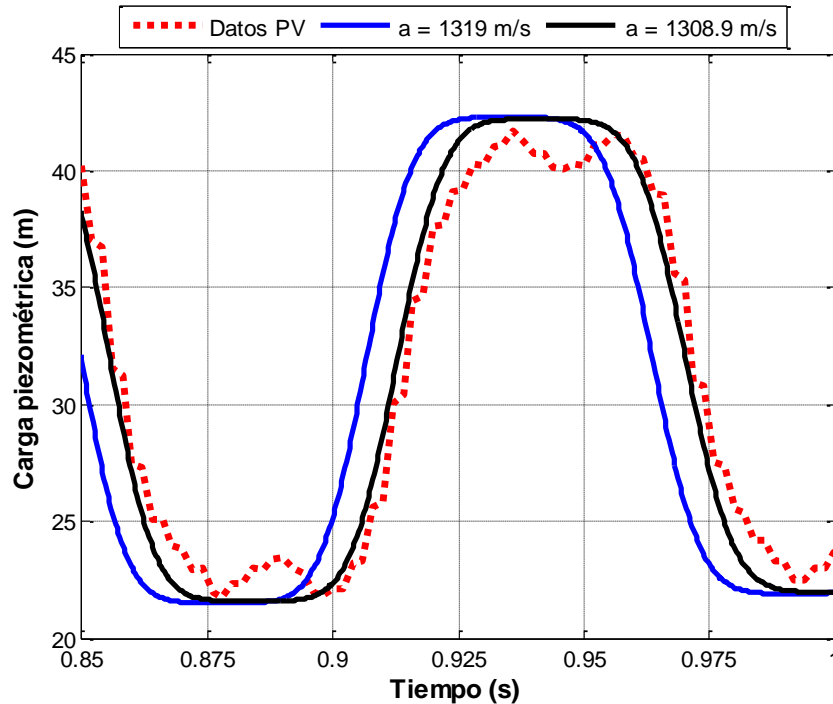
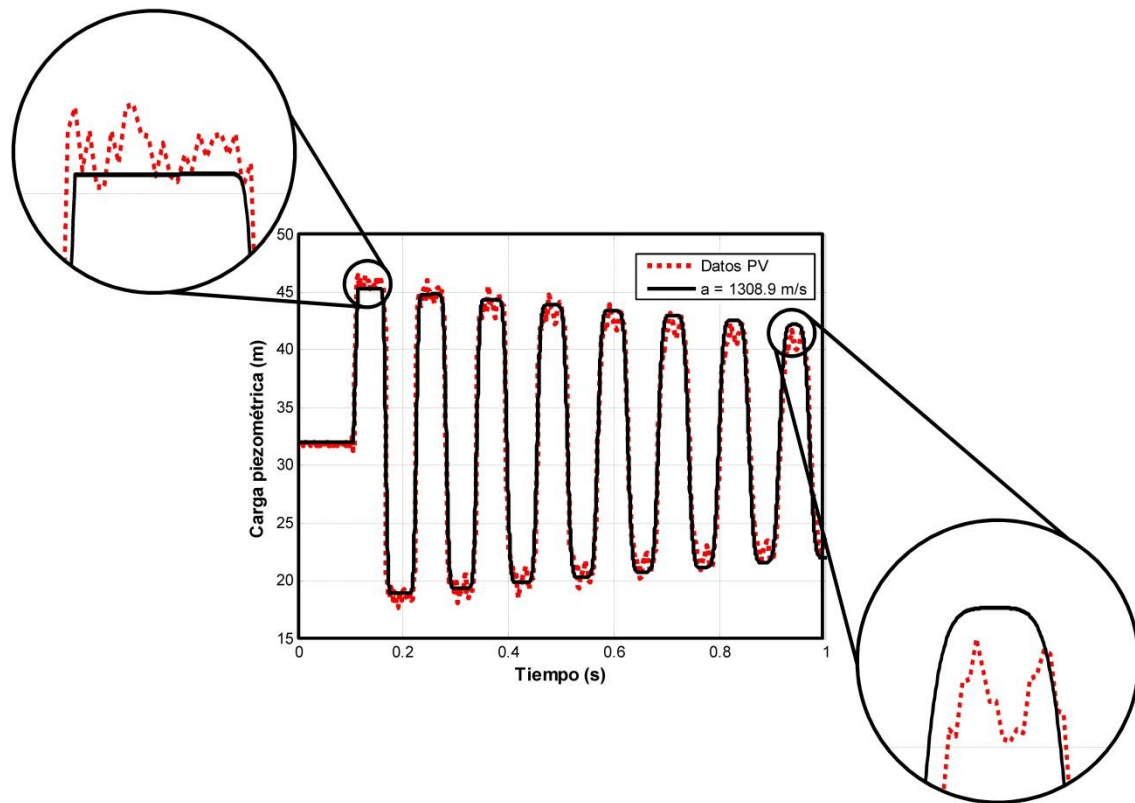


Figura 4.32. Ajuste de la simulación con la celeridad característica de las mediciones

A pesar de hacer este nuevo ajuste, si se analiza la primera y última cresta de la simulación con  $a = 1319$  m/s, se observa que el desfase nuevamente aparece cuando mayor es el tiempo de simulación (Figura 4.33), por tanto, para frecuencias bajas el comportamiento del transitorio resulta diferente.

Para constatar lo anterior, basta comparar los espectros de frecuencias de los datos experimentales y los resultados numéricos: para valores menores a la frecuencia característica se presentan frecuencias secundarias que el modelo numérico no es capaz de reproducir; para solventar lo anterior es necesario un modelo matemático que ajuste el valor de la celeridad de onda durante el transcurso del transitorio y así actualizar los periodos de las ondas de presión.



**Figura 4.33. Comparación de la primera y última cresta con la celeridad característica ajustada**

Finalmente, para las altas frecuencias se debe tomar en cuenta que junto con el fenómeno transitorio existen otros factores que alteran la señal, como la vibración de la tubería o la sensibilidad de los aparatos de medición, entre otros. En la Figura 4.27 se aprecia que al refinar el intervalo temporal  $\Delta t$  en las simulaciones al variar el número de Courant, comienzan a aparecer frecuencias secundarias altas que modifican la forma de la señal principal; no obstante, el uso de tiempos de muestreo más pequeños aumenta el costo computacional haciendo que el modelo sea poco práctico si se requieren resultados rápidos.

#### 4.2.2. EXPERIMENTOS DE JONSSON (2011)

Jonsson (2011) llevó a cabo una serie de experimentos para medir el flujo en tuberías en un banco de pruebas ubicado en el laboratorio de energía hidráulica de la Universidad Noruega de Ciencia y Tecnología (conocida por su acrónimo noruego NTNU); como parte de la investigación, el autor obtuvo diagramas de presión diferencial en flujo transitorio mediante mediciones de laboratorio y simulaciones numéricas para el cierre de una válvula en el extremo aguas abajo. En la solución de las ecuaciones utilizó la versión no conservativa e incorporó la propuesta original de Brunone en el cálculo de la fricción.

El banco experimental de la NTNU consiste en un sistema de tuberías alimentado por un tanque elevado de carga constante y gasto máximo de  $0.410 \text{ m}^3/\text{s}$ . Cuenta con una sección de pruebas en donde se ubican 11 puntos de medición separados a un metro de distancia cada uno, de los cuales el más cercano a la válvula se ubica a 3.7 m. Un esquema general del modelo se presenta en la Figura 4.34.

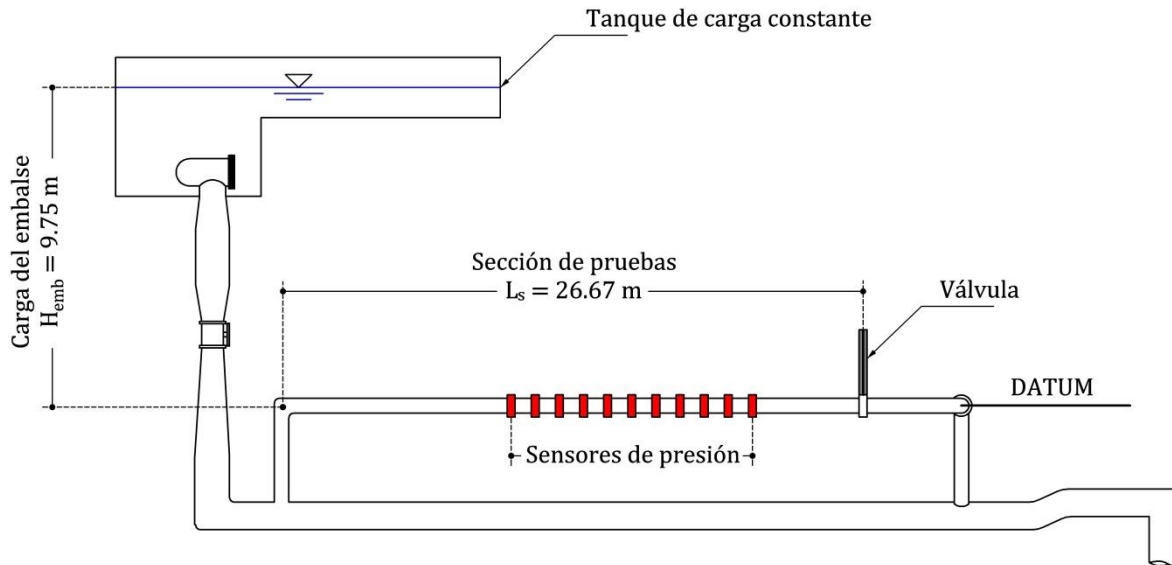


Figura 4.34. Esquema general del banco de pruebas utilizado por Jonsson (2011)

En la modelación numérica, Jonsson et al. (2012) empleó la técnica MOC para solucionar las ecuaciones y dada la compleja geometría del banco de pruebas, simplificó el sistema a una sola tubería con  $D = 0.3 \text{ m}$  y  $L = 40 \text{ m}$ . Otras características presentadas por el autor en la literatura y utilizadas para la simulación se enlistan en la Tabla 4.4.

Tabla 4.4. Información de las pruebas de Jonsson (2011) para la modelación numérica

Descripción	Variable	Valor	Unidades
<i>Características de la Conducción</i> <sup>†</sup>			
Longitud	$L$	40	m
Diámetro	$D$	0.3	m
Pendiente	$\text{sen } \theta_z$	0	%
<i>Condiciones de Flujo</i>			
Gasto inicial	$Q_o$	0.408	$\text{m}^3/\text{s}$
Celeridad de la onda	$a$	900	m/s
Carga del embalse	$H_{emb}$	9.75	m
Tiempo de cierre de la válvula	$t_v$	5.5	s

<sup>†</sup> La tubería en la sección de prueba es de acero inoxidable.

El cierre de la válvula durante el experimento fue controlado con un pistón hidráulico y describe un cierre gradual que varía entre 4 y 6.5 s, la curva de descarga de la válvula se presenta para tres diferentes condiciones de flujo (Figura 4.35); el experimento a reproducir corresponde al gasto en condición inicial  $Q_o = 0.408 \text{ m}^3/\text{s}$ .

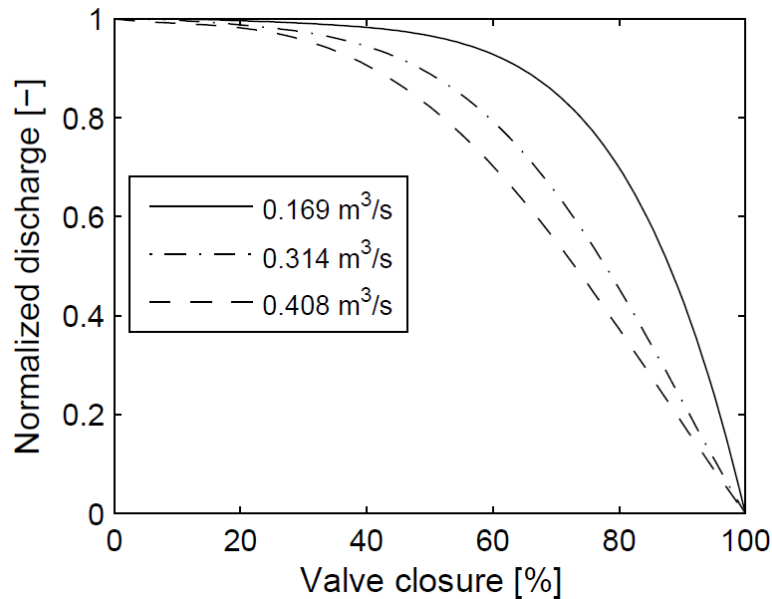


Figura 4.35. Curva de descarga para cada gasto de prueba (Jonsson, 2011)

Por último, para elaborar los diagramas de presión diferencial, Jonsson (2011) realizó pruebas para tres longitudes de separación entre sensores (sin indicar específicamente las posiciones de muestreo); de éstas se evalúa únicamente la longitud de separación de 9 m por ser el caso reportado en la literatura en forma gráfica (Figura 4.36)

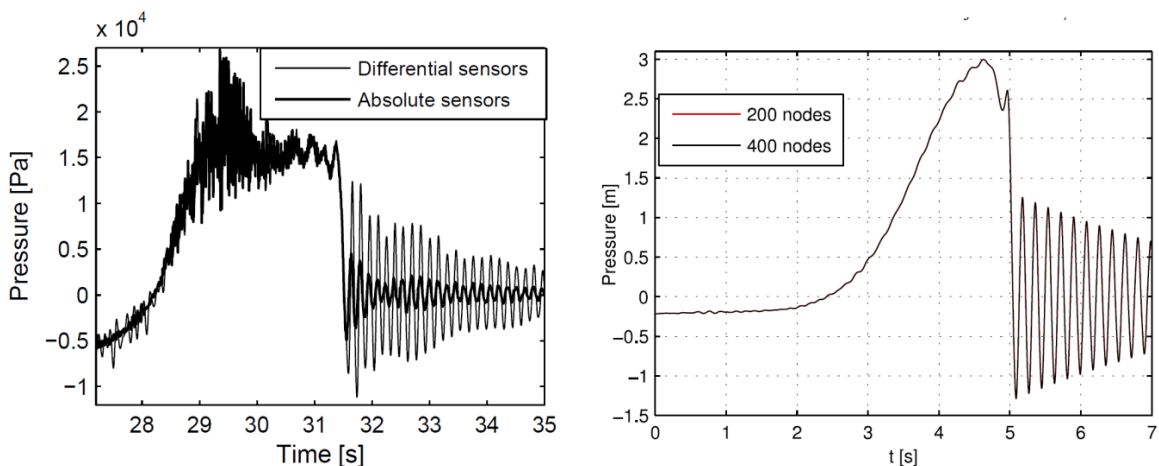


Figura 4.36. Resultados experimentales (izquierda) y numéricos (derecha) de Jonsson (2011)

Con la información recopilada, se efectúa la simulación con el código desarrollado para el esquema en diferencias finitas de Preissmann. La Figura 4.37 muestra los resultados del diagrama de presión diferencial obtenido, considerando dos puntos de muestreo ubicados en la sección de pruebas y separados aproximadamente 9 m.

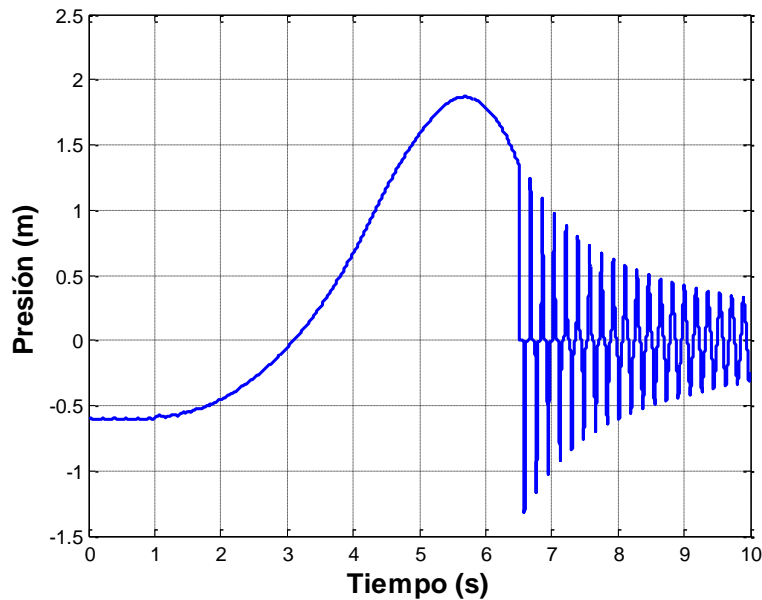


Figura 4.37. Diagrama de diferencia de presión simulado con  $J = 100$  y  $C_N = 1$

Al comparar el diagrama obtenido (Figura 4.37) con los del investigador (Figura 4.36), se puede decir que existe una semejanza visualmente aceptable entre estos; a pesar de que una inspección de este tipo es un criterio subjetivo, la aprobación de los resultados tiene como objetivo estudiar el comportamiento de las ondas de presión en un cierre gradual cuando los valores del número de Courant son  $C_N \geq 1$  (Figura 4.42).

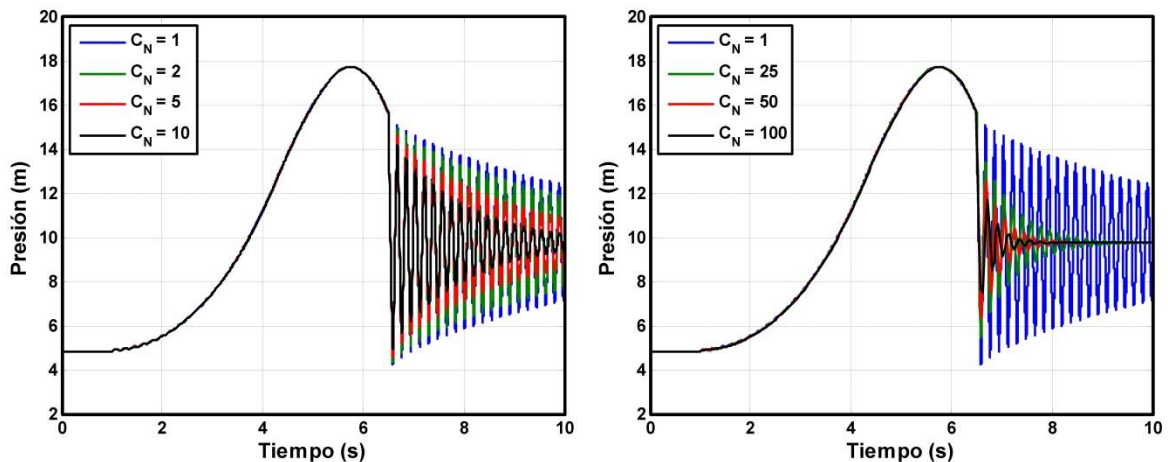


Figura 4.38. Efecto del incremento del número de Courant en los resultados numéricos

Tomando como ejemplo el nodo con mayor incremento de presión (posición de la válvula), el análisis de las ondas con números de Courant mayores a la unidad presenta dos comportamientos: en el primero el incremento de la presión durante el cierre así como la máxima sobrepresión muestra mínimas variaciones entre resultados (Figura 4.39), por otro lado, en el segundo la disipación y dispersión de las ondas es más evidente mientras mayor es el número de Courant (Figura 4.40).

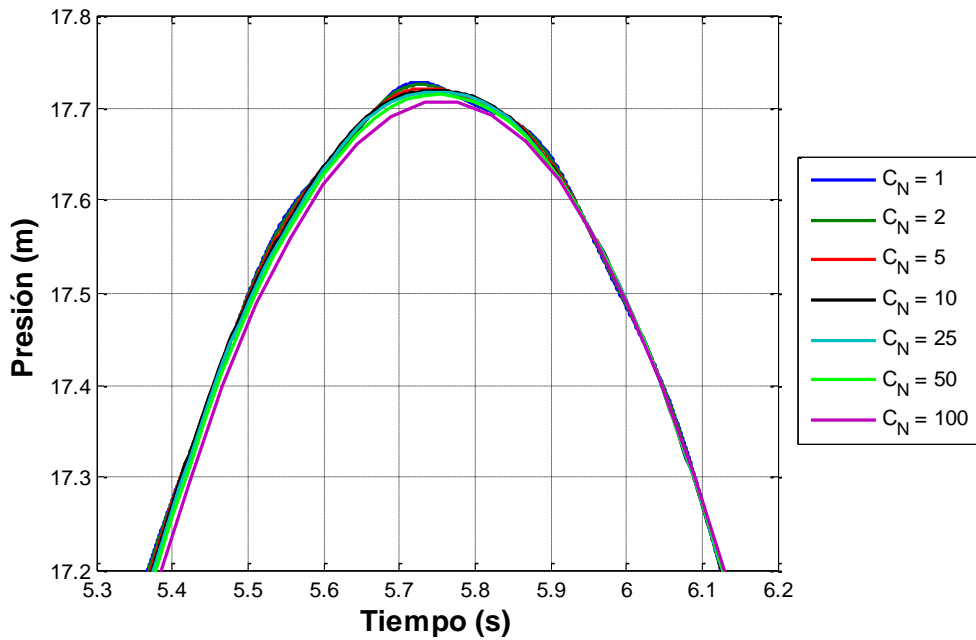


Figura 4.39. Registros de la máxima sobrepresión del transitorio

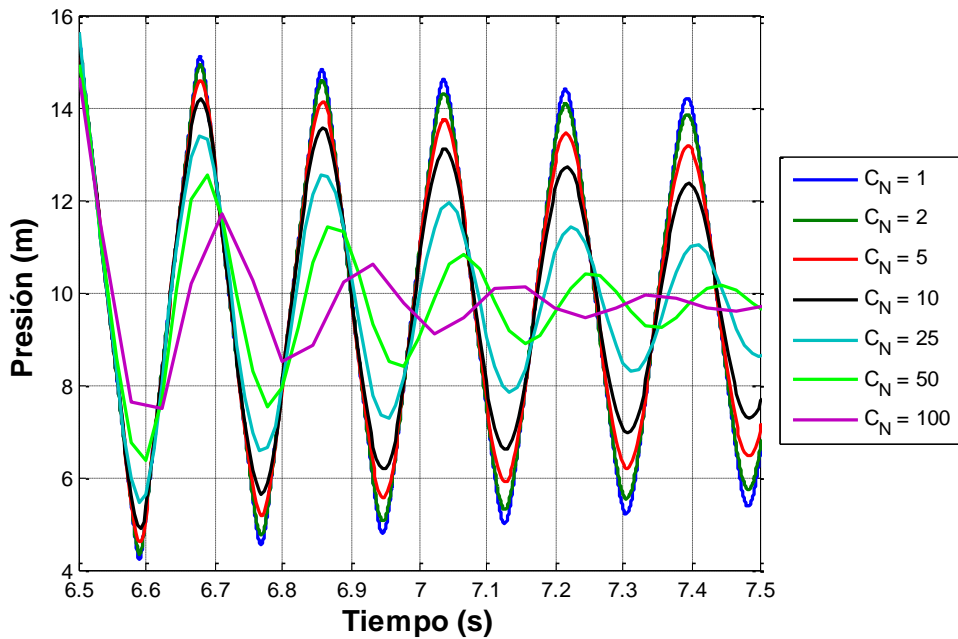


Figura 4.40. Primeras oscilaciones después del cierre total de la válvula

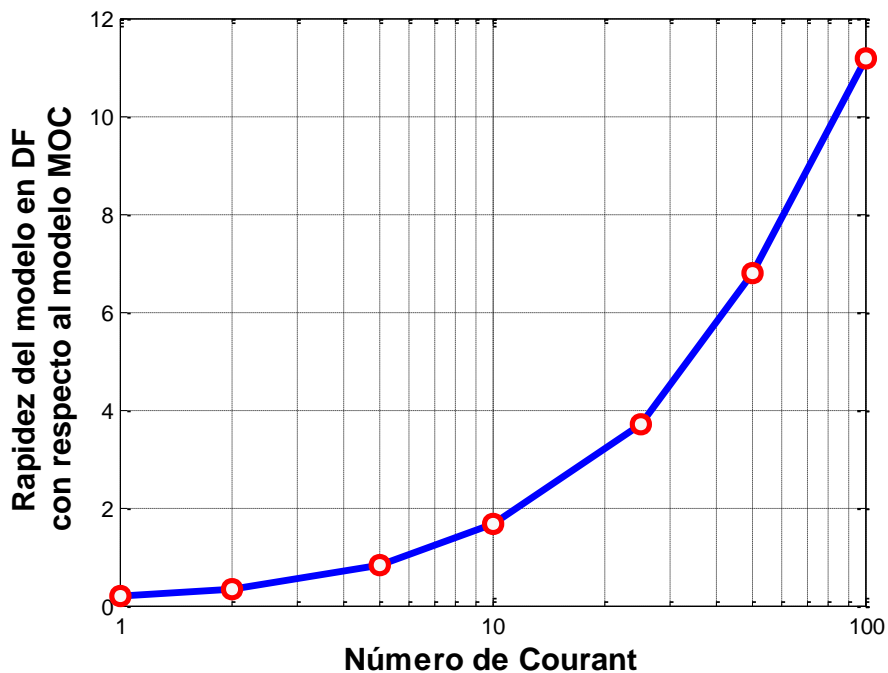
Teniendo en cuenta que el comportamiento de las ondas es análogo en cualquier punto de muestreo del dominio espacial, el esquema numérico en diferencias finitas puede ser usado con altos números de Courant para calcular el valor máximo de la sobrepresión hasta el cierre total y disminuir con esto el costo computacional de los cálculos; a diferencia de lo visto en el apartado anterior, en donde es recomendable utilizar valores de  $C_N \leq 1$  si se estudia el comportamiento del oscilador.

Para observar la capacidad del modelo, en la Tabla 4.5 se presenta el tiempo de ejecución ( $t_e$ ) de cada escenario para los diferentes números de Courant. Las pruebas se realizaron en una laptop con procesador de 2.0 GHz y 8 GB de memoria RAM a 1600 MHz.

**Tabla 4.5. Tiempo de ejecución para diferentes escenarios de simulación**

Método de solución	$C_N$	$\Delta t$ (s)	$\Delta x$ (m)	Tiempo de ejecución $t_e$ (s)
MOC	1	$4.44 \times 10^{-4}$	0.4	73.22
	1	$4.44 \times 10^{-4}$		388.92
	2	$8.88 \times 10^{-4}$		209.14
	5	$2.22 \times 10^{-3}$		88.40
DF	10	$4.44 \times 10^{-3}$	0.4	44.21
	25	$1.11 \times 10^{-2}$		19.83
	50	$2.22 \times 10^{-2}$		10.79
	100	$4.44 \times 10^{-2}$		6.55

El tiempo de simulación empleado es de 6.5 s y corresponde a la evolución de la sobrepresión máxima.



**Figura 4.41. Rapidez del modelo en DF comparada con el modelo clásico MOC**

La Figura 4.41 muestra como el modelo en diferencias finitas utilizando un número de Courant de 100 es hasta 11 veces más rápido que el modelo clásico (MOC) bajo las mismas condiciones de simulación.

Otra de las ventajas que distingue al modelo numérico propuesto reside en la estimación de la envolvente espacio-temporal de presiones máximas y mínimas, es decir el comportamiento del transitorio en toda la longitud del conducto y para cualquier tiempo de simulación; la precisión de ésta dependerá del grado de ajuste con los datos experimentales (en caso de existir) o la capacidad del usuario para determinar los parámetros de la simulación en función de las características del sistema. Para ejemplificar lo anterior, la Figura 4.42 muestra la envolvente espacio-temporal de los experimentos de Jonsson (2011).

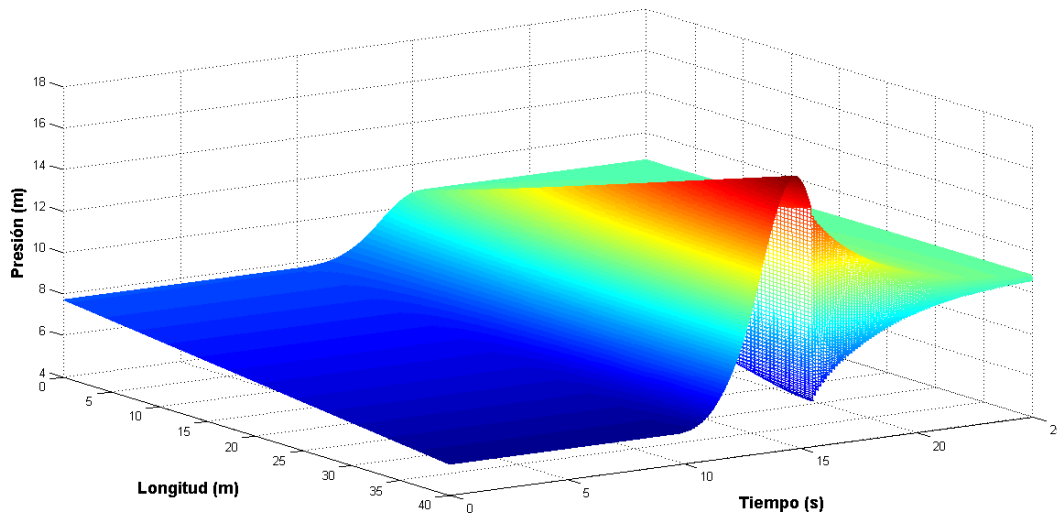


Figura 4.42. Diagrama envolvente de presiones máximas y mínimas en el conducto

### 4.2.3. TUBERÍA CON DIÁMETRO VARIABLE

Para finalizar el capítulo, se presentan la comparación entre las ondas de presión de un transitorio en un sistema con diámetro constante y otro con diámetro variable; para hacer esto se toman los datos de los experimentos de Bergant et al. (2001), presentados anteriormente en la Tabla 4.2.

Para la prueba con diámetro variable se considera una reducción del 50% del diámetro original en el nodo final del conducto, en otras palabras, los diámetros de la tubería serán 0.022 y 0.011 m en el primer y último nodo respectivamente, con una variación lineal a lo largo de toda la longitud. El ángulo de convergencia de la tubería resultante es  $0.017^\circ$  y el



gasto de la prueba se ajustará a  $2.85 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$  para que la velocidad en el último nodo sea de 0.3 m/s.

En la Figura 4.43 se muestran los transitorios que se generan en la posición de la válvula y los resultados corresponden a simulaciones numéricas realizadas con 100 intervalos de discretización y  $C_N = 1$ ; para el caso de la tubería de sección constante, la condición inicial de flujo es  $V_o = 0.3 \text{ m/s}$ .

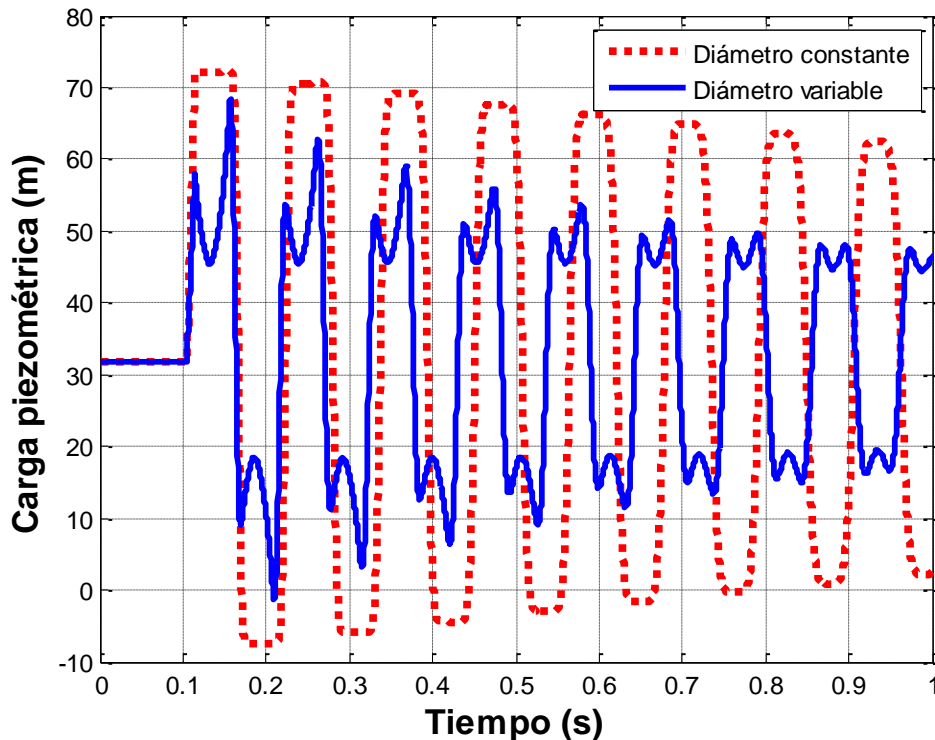


Figura 4.43. Transitorios hidráulicos en tuberías de diámetro variable y constante

Se puede observar como el transitorio con diámetro variable muestra cambios significativos en la amplitud, fase y forma de las ondas desde la primera oscilación; para la validación de los resultados no se cuenta con pruebas experimentales que comparen los patrones del perfil transitorio trazado, sin embargo queda de manifiesto la capacidad del modelo numérico para simular flujo en conductos con sección transversal gradualmente variable.

# CAPÍTULO 5

---

## CONCLUSIONES

Para estudiar las ondas de presión causadas por el cierre de una válvula en una tuberías, el presente trabajo muestra la deducción de las ecuaciones unidimensionales de conservación de masa y cantidad de movimiento bajo un enfoque conservativo e incorporando un modelo que evalúa la pérdida de energía, basado en la aceleración instantánea de flujo.

Con el fin de solucionar el sistema de ecuaciones resultante, se elaboró una formulación en diferencias finitas de tipo implícito junto con un algoritmo de convergencia no lineal. El resultado fue un esquema numérico que toma en cuenta la aceleración local y convectiva del flujo, la condición de diámetro variable y la fricción en condiciones transitorias.

Para precisar en forma explícita los límites de aplicación del modelo, se evaluó a detalle la condición de convergencia del sistema continuo y discreto aplicando el Teorema de equivalencia de Lax. Para esto se llevó a cabo un análisis de localización y escalas múltiples con el objeto de convertir el sistema de ecuaciones no lineales original en un sistema lineal de valor inicial puro y aplicar los análisis de consistencia y estabilidad correspondientes.

Con las ecuaciones localizadas y linealizadas, se determinó que el sistema continuo es incondicionalmente estable para diversas consideraciones; por otro lado en el análisis del sistema discreto se debe cumplir que los factores de peso espacial  $\psi$  y temporal  $\theta$  del esquema cumplan que  $\psi = 0.5$  y  $\theta \geq 0.5$ , esto asegura la convergencia numérica independientemente de las condiciones de flujo. Estos resultados se ejemplifican en los retratos de amplitud y fase, en donde se observa que para valores bajos de velocidad y del número de Courant, el modelo es libre de disipación y dispersión en las ondas.

Con los límites de convergencia establecidos, se complementa la literatura relacionada a la propagación de la amplitud y fase de las ondas aplicando modelos en diferencias finitas en las ecuaciones de flujo en tuberías, asimismo se mejoran los criterios de evaluación de las soluciones aproximadas, al permitir diferenciar si los resultados son producto del fenómeno o si son causados por errores del propio esquema.

Para evaluar la calidad del modelo numérico se realizaron pruebas que tuvieran como referencia datos experimentales reportados en la literatura, así como los proporcionados por el Dr. Anton Bergant. En estos escenarios el modelo reproduce en forma adecuada el decaimiento de las ondas si se utiliza el coeficiente  $k_t$  propuesto por Bergant et al. (2001).

En lo que se refiere a la fase de propagación de las ondas es recomendable realizar un análisis espectral si se cuentan con mediciones de laboratorio, con el fin de determinar la frecuencia característica del transitorio y usar dicho valor para aproximar el valor de la celeridad de onda.

Los resultados numéricos para el modelo propuesto muestran que la convergencia del esquema ocurre sin importar el refinamiento de malla que se utilice y se pueden establecer dos criterios de evaluación:

- Si el estudio del transitorio es a largo plazo y después del cierre de la válvula, es necesario usar números de Courant  $C_N \leq 1$  para que la amplitud, forma y fase de las ondas sean precisos.
- Si lo que se desea es conocer la presión máxima del golpe de ariete, el número de Courant puede adoptar valores de  $C_N \geq 1$  y con esto reducir el costo computacional sin incurrir en grandes errores (el máximo valor que se utilizó en la pruebas fue de  $C_N = 100$ ).

# REFERENCIAS

---

- Abbott, M. B. (1979). *Computational hydraulics: elements of the theory of free surface flows*. Londres: Pitman Publishing Limited.
- Abreu, J. M., & Betâmio de Almeida, A. (2004). Wall shear stress and flow behaviour under transient flow in a pipe. *Proceedings of the 9th International Conference on Pressure Surges* (págs. 457-476). Chester, UK: BHR Group.
- Abreu, J. M., & Betâmio de Almeida, A. (2009). Timescale Behavior of the Wall Shear Stress in Unsteady Laminar Pipe Flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 135(5), 415-424.
- Adamkowski, A., & Lewandowski, M. (2006). Experimental Examination of Unsteady Friction Models for Transient Pipe Flow Simulation. *Journal of Fluids Engineering*, 128(6), 1351-1363.
- Aguilar, A. (2002). *Propiedades de propagación de esquemas numéricos para la simulación de flujos a superficie libre*. Universidad Nacional Autónoma de México: Tesis doctoral.
- Aldama, A. A., & Aguilar, A. (1996). Stability Analysis of a general Preissmann scheme. En A. A. Aldama, J. Aparicio, C. A. Brebbia, W. G. Gray, I. Herrera, & G. F. Pinder (Ed.), *Computational Methods in Water Resources XI. Vol. 2: Computational Methods in Surface Flow and Transport Problems*, págs. 37-44. Computational Mechanics Publications.
- Allievi, L. (1925). *Theory of Water-Hammer*. (E. E. Halmos, Trad.) Rome: M. Am. Soc. C. E.
- Asli, K. H. (2013). *Water Hammer Research: Advances in Nonlinear Dynamics Modeling*. New Jersey: Apple Academic Press.
- ASME & ASCE. (1933). *Symposium on Water Hammer*. Chicago Illinois.
- Axworthy, D. H., Ghidaoui, M. S., & McInnis, D. A. (2000). Extended Thermodynamics Derivation of Energy Dissipation in Unsteady Pipe Flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 126(4), 276-287.
- Azoury, P. H., Baasiri, M., & Najm, H. (1986). Effect of valve-closure schedule on water hammer. *Journal of Hydraulic Engineering*, 112(10), 890-903.
- Bergant, A., & Simpson, A. R. (1995). *Water hammer and column separation measurements in an experimental apparatus*. Report n. R128, University of Adelaide, Dept. of Civil and Envir. Engrg., Adelaide, Australia.

- Bergant, A., Simpson, A. R., & Vítkovský, J. (2001). Developments in unsteady pipe flow friction modelling. *Journal of Hydraulic Research*, 39(3), 249-257.
- Bergant, A., Tijsseling, A. S., Vítkovský, J. P., Covas, D. I., Simpson, A. R., & Lambert, M. F. (2008). Parameters affecting water-hammer wave attenuation, shape and timing-Part 1: Mathematical tools. *Journal of Hydraulic Research*, 46(3), 373-381.
- Bilaniuk, N., & Wong, G. S. (1993). Speed of sound in pure water as a function of temperature. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 93(3), 1609-1612.
- Brunone, B., & Berni, A. (2010). Wall Shear Stress in Transient Turbulent Pipe Flow by Local Velocity Measurement. *Journal of Hydraulic Engineering*, 136(10), 716-726.
- Brunone, B., & Morelli, L. (1999). Automatic Control Valve-Induced Transients in Operative Valve System. *Journal of Hydraulic Engineering*, 125(5), 534-542.
- Brunone, B., Golia, U. M., & Greco, M. (1995). Effects of Two-Dimensionality on Pipe Transients Modeling. *Journal of Hydraulic Engineering*, 121(12), 906-912.
- Brunone, B., Karney, B. W., Mecarelli, M., & Ferrante, M. (2000). Velocity Profiles and Unsteady Pipe Friction in Transient Flow. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 126(4), 236-244.
- Chaudhry, M. H. (2014). *Applied Hydraulic Transients* (Third ed.). New York: Springer.
- Colebrook, C. F. (1939). Turbulent flow in pipes, with particular reference to the Transition Region between the Smooth and Rough Pipe Laws. *Journal of the ICE*, 11(4), 133-156.
- Courant, R., Friedrichs, K., & Lewy, H. (1967). On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics. *IBM Journal of Research and Development*, 11(2), 215-234.
- Covas, D., Stoianov, I., Mano, J. F., Ramos, H., Graham, N., & Maksimovic, C. (2005). The dynamic effect of pipe-wall viscoelasticity in hydraulic transients. Part II— model development, calibration and verification. *Journal of Hydraulic Research*, 43(1), 56-70.
- Cunge, J. A., Holly, F. M., & Verney, A. (1980). *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*. Londres: Pitman Publishing Limited.
- Currie, I. G. (2012). *Fundamental Mechanics of Fluids* (Fourth ed.). CRC Press: Taylor & Francis Group.
- Daily, J. W., Hankey, W. L., Olive, R. W., & Jordan, J. M. (1955). Resistance coefficients for accelerated and decelerated flows through smooth tubes and orifices. *The American Society of Mechanical Engineers*, No. 55-SA-78.
- Darbyshire, A. G., & Mullin, T. (1995). Transition to turbulence in constant-mass-flux pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 289, 83-114.

- Drolet, J., & Gray, W. (1988). On the well posedness of some wave formulations of shallow water equations. *Advances in Water Resources*, 11(2), 84-93.
- Duan, H., Ghidaoui, M. S., & Tung, Y.-K. (2008). Extension of the Efficient Quasi-2D Water Hammer Model to Complex Pipe System. *Proceedings of 16th IAHR-APD Congress and 3rd Symposium of IAHR-ISHS*. Hohai University, Nanjing, China: Springer.
- Fletcher, C. A. (1991). *Computational Techniques for Fluid Dynamics 1: Fundamental and general Techniques* (Segunda ed., Vol. I). (R. Glowinski, M. Holt, P. Hut, H. B. Keller, J. Killeen, S. A. Orszag, y otros, Edits.) Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Ghidaoui, M. S. (2004). On the fundamental equations of water hammer. *Urban Water Journal*, 1(2), 71-83.
- Ghidaoui, M. S., & Mansour, S. (2002). Efficient Treatment of the Vardy-Brown Unsteady Shear. *Journal of Hydraulic Engineering*, 128(1), 102-112.
- Ghidaoui, M. S., Zhao, M., Axworthy, D. H., & McInnis, D. A. (2005). A Review of Water Hammer Theory and Practice. *Applied Mechanics Review*, 58(1), 49-76.
- Gibson, N. R. (1920). Pressures in penstocks caused by the gradual closing of turbine gates. *Transactions: American Society of Civil Engineers*, 83, 707-775.
- Goldberg, D. E., & Wylie, E. B. (1983). Characteristics Method Using Time-Line Interpolations. *Journal of Hydraulic Engineering*, 109(5), 670-683.
- Graebel, W. (2001). *Engineering fluid mechanics*. CRC Press.
- Guaycochea, D. E. (1992). *Flujo en tubos a presión*. México: Universidad Autónoma Metropolitana.
- Hager, W. H. (2001). Swiss contribution to water hammer theory. *Journal of Hydraulic Research*, 39(1), 3-7.
- Halliwell, A. R. (1963). Velocity of a water-hammer wave in an elastic pipe. *Journal of the Hydraulics Division*, 89(HY4), 1-21.
- Hearn, E. J. (1997). *Mechanics of Materials: An Introduction to the Mechanics of Elastic and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials* (Vol. 2). Butterworth-Heinemann.
- Hildebrand, F. B. (1976). *Advanced calculus for applications* (Second ed.). New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Jonsson, P. P. (2011). *Flow and Pressure Measurements in Low-Head Hydraulic Turbines*. Luleå University of Technology: PhD Thesis.
- Jonsson, P. P., Ramdal, J., & Cervantes, M. J. (2012). Development of the Gibson method—Unsteady friction. *Flow Measurement and Instrumentation*, 23(1), 19-25.

- Karney, B. W., & McInnis, D. (1992). Efficient Calculation of Transient Flow in Simple Pipe Networks. *Journal of Hydraulic Engineering*, 118(7), 1014-1030.
- Korbar, R., Virag, Z., & Šavar, M. (2014). Efficient solution method for quasi two-dimensional model of water hammer. *Journal of Hydraulic Research*, 52(4), 575-579.
- Kueny, J. L., Combes, G., Lourenço, M., Clary, V., & Ballester, J. L. (2014). Linear pressure profile estimation along a penstock associated with transients due to severe defects. *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science*. 22. Montreal: IOP Publishing.
- Landry, C., Nicolet, C., Bergant, A., Müller, A., & Avellan, F. (2012). Modeling of unsteady friction and viscoelastic damping in piping systems. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 15. Beijing: IOP Publishing.
- Lyn, D. A., & Goodwin, P. (1987). Stability of a general Preissmann scheme. *Journal of Hydraulic Engineering*, 113(1), 16-28.
- Morton, K. W., & Mayers, D. F. (2005). *Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction* (Second ed.). Cambridge University Press.
- Nayfeh, A. H. (1981). *Introduction to Perturbation Techniques*. New York: John Wiley & Sons.
- Nikuradse, J. (1950). *Laws of flow in rough pipes*. Technical memorandum 1292, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington.
- Paniconi, C., Aldama, A. A., & Wood, E. F. (1991). Numerical Evaluation of Iterative and Noniterative Methods for the Solution of the Nonlinear Richards Equation. *Water Resources Research*, 27(6), 1147-1163.
- Panton, R. L. (2013). *Incompressible Flow* (Fourth ed.). John Wiley & Sons.
- Parmakian, J. (1963). *Waterhammer Analysis*. New York: Dover Publications, Inc.
- Pezzinga, G. (1999). Quasi-2D Model for Unsteady Flow in Pipe Networks. *Journal of Hydraulic Engineering*, 125(7), 676-685.
- Pezzinga, G. (2000). Evaluation of Unsteady Flow Resistances by Quasi-2D or 1D Models. *Journal of Hydraulic Engineering*, 126(10), 778-785.
- Prashanth Reddy, H., Silva-Araya, W. F., & Chaudhry, M. H. (2012). Estimation of Decay Coefficients for Unsteady Friction for Instantaneous, Acceleration-Based Models. *Journal of Hydraulic Engineering*, 138(3), 260-271.
- Pytel, A., & Singer, F. L. (1994). *Resistencia de materiales* (Cuarta ed.). (R. Gaspar Torrent, Á. Gutiérrez Vázquez, & F. Paniagua Bocanegra, Trads.) México: Oxford University Press.

- Ramos, H., & Covas, D. (2006). Practical Papers-Water Pipe system response under dynamic effects. *Journal of Water Supply: Research and Technology-AQUA*, 55(4), 269-282.
- Reynolds, O. (1883). An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Proceedings of the royal society of London*, 35(224-226), 84-99.
- Riasi, A., Nourbakhsh, A., & Raisee, M. (2013). Energy dissipation in unsteady turbulent pipe flows caused by water hammer. *Computers & Fluids*, 73, 124-133.
- Riasi, A., Raisee, M., & Nourbakhsh, A. (2010). Simulation of transient flow in hydroelectric power plants. *Journal of Mechanical Engineering*, 56(6), 377-384.
- Rich, G. R. (1951). *Hydraulic Transients* (First ed.). New York: McGraw-Hill Book Company Inc.
- Silva-Araya, W. F., & Chaudhry, M. H. (1997). Computation of Energy Dissipation in Transient Flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 123(2), 108-115.
- Sotelo, G. (1994). *Hidráulica General* (Vol. 1). México: Limusa.
- Sparrow, E. M., Abraham, J. P., & Minkowycz, W. J. (2009). Flow separation in a diverging conical duct: Effect of Reynolds number and divergence angle. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(13), 3079-3083.
- Storli, P.-T., & Nielsen, T. K. (2011). Transient Friction in Pressurized Pipes. I: Investigation of Zielke's Model. *Journal of Hydraulic Engineering*, 137(5), 577-584.
- Sutera, S. P., & Skalak, R. (1993). The history of Poiseuille's law. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 25(1), 1-20.
- Szymkiewicz, R. (2002). Developments in unsteady pipe flow friction modelling. *Journal of Hydraulic*, 40(5), 647-656.
- Szymkiewicz, R. (2010). *Numerical Modeling in Open Channel Hydraulics* (Vol. 83). Springer Science & Business Media.
- Tijsseling, A. S. (1993). *Fluid-structure interaction in case of waterhammer with cavitation*. Delft University of Technology: Ph. D. Thesis.
- Tijsseling, A. S. (1996). Fluid-Structure Interaction in Liquid-Filled Pipe Systems: A review. *Journal of Fluids and Structures*, 10(2), 109-146.
- Tijsseling, A. S., & Anderson, A. (2004). The Joukowski equation for fluids and solids. *Proceedings of the 9th International Conference on Pressure Surges* (págs. 739-751). Chester, UK: BHR Group.



- Tijsseling, A. S., & Anderson, A. (2007). Johannes von Kries and the History of Water Hammer. *Journal of Hydraulic Engineering*, 133(1), 1-8.
- Tijsseling, A. S., & Anderson, A. (2012). *A. Isebre Moens and D.J. Korteweg: on the speed of propagation of waves in elastic tubes*. Centre for Analysis, Scientific computing and Applications, Department of Mathematics and Computer Science. Eindhoven, The Netherlands: Eindhoven University of Technology.
- Tijsseling, A. S., & Bergant, A. (2007). Meshless computation of Water Hammer. En R. Susan-Resiga, S. Bernad, & S. Muntean (Ed.), *Proceedings of the 2nd IAHR International Meeting of the Workgroup on Cavitation and Dynamic Problems in Hydraulic Machinery and Systems*, (págs. 65-76). Timisoara, Romania.
- Tiselj, I., & Gale, J. (2008). Integration of unsteady friction models in pipe flow simulations. *Journal of Hydraulic Research*, 46(4), 526–535.
- Vardy, A. E., & Brown, J. M. (1995). Transient, turbulent, smooth pipe friction. *Journal of Hydraulic Research*, 33(4), 435-456.
- Vardy, A. E., & Brown, J. M. (2003). Transient Turbulent Friction in Smooth Pipe Flows. *Journal of Sound and Vibration*, 259(5), 1011-1036.
- Vardy, A. E., & Brown, J. M. (2004a). Transient turbulent friction in fully rough pipe flows. *Journal of Sound and Vibration*, 270(1), 233-257.
- Vardy, A. E., & Brown, J. M. (2004b). Efficient Approximation of Unsteady Friction Weighting Functions. *Journal of Hydraulic Engineering*, 130(11), 1097-1107.
- Vardy, A. E., & Brown, J. M. (2007). Approximation of Turbulent Wall Shear Stresses in Highly Transient Pipe Flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 133(11), 1219-1228.
- Vardy, A. E., & Hwang, K.-L. (1991). A characteristics model of transient friction in pipes. *Journal of Hydraulic Research*, 29(5), 669-685.
- Vitkovský, J. P., Bergant, A., Simpson, A. R., & Lambert, M. F. (2006). Systematic evaluation of one-dimensional unsteady friction. *Journal of Hydraulic Engineering*, 132(7), 696-708.
- Vitkovský, J. P., Lambert, M., Simpson, A., & Bergant, A. (2000). Advances in unsteady friction modelling in transient pipe flow. *The 8th International Conference on Pressure Surges*. BHR, The Hague, The Netherlands.
- Watters, G. Z. (1980). *Modern analysis and control of unsteady flow in pipelines*. Michigan: Ann Arbor Science Publishers.
- Wiggert, D. C., & Tijsseling, A. S. (2001). Fluid transients and fluid-structure interaction in flexible liquid-filled piping. *Applied Mechanics Reviews*, 54(5), 455-481.

- Wylie, E. B., & Streeter, V. L. (1978). *Fluid Transients*. McGraw-Hill International Book Company.
- Zhao, M., & Ghidaoui, M. S. (2003). Efficient Quasi-Two-Dimensional Model for Water Hammer Problems. *Journal of Hydraulic Engineering*, 129(12), 1007-1013.
- Zhao, M., & Ghidaoui, M. S. (2006). Investigation of turbulence behavior in pipe transient using a  $k-\epsilon$  model. *Journal of Hydraulic Research*, 44(5), 682-692.
- Zielke, W. (1966). *Frequency Dependent Friction in Transient Pipe Flow*. University of Michigan: Ph. D. Thesis.

# ANEXOS

---

## ANEXO A. PROPAGACIÓN DE SEGUNDO ORDEN DE LAS ECUACIONES DE FLUJO EN TUBERÍAS

Sea el siguiente problema de valor inicial y de valores en la frontera:

$$\mathcal{L}(H, V; x, t) = \frac{\partial H}{\partial t} + V \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{a^2(x)}{g} \frac{\partial V}{\partial x} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathcal{M}(H, V; x, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + f_p \frac{|V|V}{2D} \quad (\text{A.2})$$

En donde  $H, V: \Omega \in [0, L] \times [0, T]$  y  $g, a, D$  y  $f_p$ , son constantes del modelo e invariantes sobre las variables dependientes. Se propone un análisis de propagación de perturbaciones sobre las variables dependientes con las siguientes escalas:

$$H = \bar{H} + h; \quad \bar{H} \gg h \quad (\text{A.3})$$

$$V = \bar{V} + v; \quad \bar{V} \gg v \quad (\text{A.4})$$

Para evaluar las perturbaciones (A.3) y (A.4) en las ecuaciones (A.1) y (A.2), se aplicará una expansión en serie de Fréchet-Taylor (Milne, 1980), con la siguiente característica:

$$\mathbf{W}(H, V; x, t) = \mathbf{W}(\bar{H} + h, \bar{V} + v; x, t) \quad (\text{A.5})$$

O bien:

$$\mathbf{W}(H, V; x, t) = \mathbf{W}(\bar{H}, \bar{V}; x, t) + h \left. \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial H} \right|_{(\bar{H}, \bar{V})} + v \left. \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial V} \right|_{(\bar{H}, \bar{V})} + H.O.T \quad (\text{A.6})$$

Donde  $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \end{bmatrix}$  es el vector de operadores y  $H.O.T$  los términos de orden superior.

En el sistema anterior, para construir el método de actualización tipo Newton-Raphson (Szymkiewicz, 2010), se considera que  $h$  y  $v$  son las actualizaciones no lineales, por tanto  $\delta h = h$  y  $\delta v = v$  y constituyen el vector de actualización, entonces la ecuación (A.6) se puede escribir de la forma siguiente tomando en cuenta la expansión de Fréchet-Taylor con los términos de primer orden:

$$\mathbf{W}^{n+1} = \mathbf{W}^n + \delta \mathbf{w} \mathbf{J} \quad (\text{A.7})$$

Donde  $\mathbf{W}$  es el vector de ecuaciones por actualizar, que en este caso es el sistema de ecuaciones (A.1) y (A.2);  $\delta \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \delta h \\ \delta u \end{bmatrix}$  es el vector de actualización no lineal tipo Newton-Raphson y  $\mathbf{J}$  es el Jacobiano de transformación y sus coeficientes de sensibilidad se expresan por la siguiente matriz:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial H}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial V}{\partial x} + f_p \frac{|V|}{D} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Por tanto los términos de sensibilidad aplicados sobre la actualización producen un factor de corrección de orden muy pequeño, tal que  $\delta \mathbf{g} \mathbf{J} \sim O(M_N)^2$ , en donde  $M_N \ll 1$ .

## ANEXO B. CÁLCULO DE LA RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO COMPLEJO EN FORMA RECTANGULAR

Considérese la variable compleja  $z$ , como la raíz cuadrada de un número complejo:

$$z = \sqrt{x + iy} \quad (\text{B.1})$$

En donde  $x$  y  $y$  son números reales e  $i \equiv \sqrt{-1}$  es la unidad imaginaria. Por definición,  $z$  puede ser representado como la combinación de su parte real  $\text{Re}(z)$  y su parte imaginaria  $\text{Im}(z)$ , tal que se tiene:

$$z = \text{Re}(z) + i \text{Im}(z) \quad (\text{B.2})$$

Sustituyendo (B.2) en (B.1) y elevando al cuadrado ambas partes de la igualdad:

$$x + iy = \text{Re}^2(z) - \text{Im}^2(z) + 2i \text{Re}(z) \text{Im}(z) \quad (\text{B.3})$$

Se dice que dos números complejos son '*iguales*', si y sólo si su parte real e imaginaria son iguales respectivamente; entonces de la ecuación (B.3) se establece:

$$x = \text{Re}^2(z) - \text{Im}^2(z) \quad (\text{B.4})$$

$$y = 2 \text{Re}(z) \text{Im}(z) \quad (\text{B.5})$$

Las ecuaciones (B.4) y (B.5) representan un sistema de ecuaciones a resolver. Entonces, despejando la parte imaginaria  $\text{Im}(z)$  en (B.5) y sustituyéndola en (B.4) se obtiene la siguiente relación:

$$\text{Re}^4(z) - x \text{Re}^2(z) - \frac{y^2}{4} = 0 \quad (\text{B.6})$$

Haciendo el cambio de variable  $t = \text{Re}^2(z)$  en la ecuación bicuadrada (B.6):

$$t^2 - xt - \frac{y^2}{4} = 0 \quad (\text{B.7})$$

Las soluciones de la ecuación de segundo grado (B.7) son:

$$t = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \quad (\text{B.8})$$

Al deshacer el cambio de variable en (B.8) las soluciones del sistema resultan:

$$\operatorname{Re}(z) = \pm \left[ \frac{x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \right]^{1/2} \quad (\text{B.9})$$

Por definición, el módulo de un número complejo es:

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{B.10})$$

Al sustituir (B.10) en (B.9) se obtiene:

$$\operatorname{Re}(z) = \pm \sqrt{\frac{x \pm |x + iy|}{2}} \quad (\text{B.11})$$

Cuando  $x \neq 0$  y  $y \neq 0$ , se dice que el módulo del número complejo es mayor que cualquiera de sus componentes por separado, esto es  $|x + iy| > x$ ; por tanto se puede establecer lo siguiente:

$$\pm \sqrt{\frac{x - |x + iy|}{2}} \notin \mathbb{R} \quad (\text{B.12})$$

Dado que la ecuación (B.11) extrae la parte real  $\operatorname{Re}(z)$ , considerar la solución negativa señalada en (B.12) resultaría contradictorio. Entonces las soluciones válidas son:

$$\operatorname{Re}(z) = \pm \sqrt{\frac{|x + iy| + x}{2}} \quad (\text{B.13})$$

Sustituyendo las soluciones de (B.13) en (B.4) y despejando la parte imaginaria  $\operatorname{Im}(z)$ :

$$\operatorname{Im}(z) = \pm \sqrt{\frac{|x + iy| - x}{2}} \quad (\text{B.14})$$

Al sustituir (B.13) y (B.14) en (B.2) y (B.1) resulta:

$$\sqrt{x + iy} = \pm \sqrt{\frac{|x + iy| + x}{2}} \pm i \sqrt{\frac{|x + iy| - x}{2}} \quad (\text{B.15})$$

Analizando la ecuación (B.5), se observa que el signo de la componente  $y$  del número complejo depende del producto  $2 \operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z)$ ; entonces, al analizar las combinaciones de signo, se tiene que:

$$\text{Si } y > 0 \rightarrow (+) \quad \therefore \quad [\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)] \rightarrow \begin{matrix} (+, +) \\ (-, -) \end{matrix} \quad (\text{B.16})$$

$$\text{Si } y < 0 \rightarrow (-) \quad \therefore \quad [\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)] \rightarrow \begin{matrix} (+, -) \\ (-, +) \end{matrix} \quad (\text{B.17})$$

En base a (B.16) y (B.17) las posibles soluciones son:

$$\sqrt{x + iy} = \pm \sqrt{\frac{|x + iy| + x}{2}} \pm i \sqrt{\frac{|x + iy| - x}{2}} \quad (\text{B.18})$$

$$\sqrt{x - iy} = \pm \sqrt{\frac{|x + iy| + x}{2}} \mp i \sqrt{\frac{|x + iy| - x}{2}} \quad (\text{B.19})$$

Factorizando los signos (B.18) y (B.19)

$$\sqrt{x + iy} = \pm \left( \sqrt{\frac{|x + iy| + x}{2}} + i \sqrt{\frac{|x + iy| - x}{2}} \right) \quad (\text{B.20})$$

$$\sqrt{x - iy} = \pm \left( \sqrt{\frac{|x + iy| + x}{2}} - i \sqrt{\frac{|x + iy| - x}{2}} \right) \quad (\text{B.21})$$

En las ecuaciones (B.20) y (B.21) se observa que el signo de la parte imaginaria coincide con el de la parte real; por tanto, si se emplea la función signo para identificar el signo correspondiente, se obtiene una expresión generalizada para la raíz cuadrada de un número complejo en forma rectangular:

$$\sqrt{x \pm iy} = \pm \left( \sqrt{\frac{|x + iy| + x}{2}} + i \operatorname{sgn}(y) \sqrt{\frac{|x + iy| - x}{2}} \right) \quad (\text{B.22})$$

Con la ecuación (B.22) es posible separar e identificar tanto la parte real, como la imaginaria de un número complejo cuando se encuentra dentro de un radical.