

**APUNTES DE**

# **ANALISIS ESTRUCTURAL I**

**José Luis Camba C.  
Francisco Chacón G.  
Francisco Pérez A.**



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
FACULTAD DE INGENIERIA  
DIVISION DE INGENIERIA CIVIL, TOPOGRAFICA Y GEODESICA  
DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS**

G-600876

INDICE GENERAL

	Pag.
1. Conceptos Introdutorios	1
2. Métodos aproximados	8
3. Trabajo y Energía	17
4. Estabilidad y Grado de Indeterminación	49
5. Método de las Flexibilidades	55
6. Método de las Rigideces	79
7. Método de Cross	101
8. Método de Kani	117
9. Introducción al Análisis Plástico	129

## INTRODUCCION

Estos apuntes tienen por objeto ayudar a los alumnos que cursan la asignatura "Análisis Estructural I" en el aprendizaje de los temas incluidos en el programa vigente de esta materia; contienen tanto los aspectos teóricos de estos temas, como ejemplos de aplicación de los mismos.

Se pretende que estos apuntes sean revisados periódicamente con el objeto de adaptarlos a los cambios que presente el programa de la asignatura mencionada.

Estos apuntes fueron elaborados por los profesores:

Ing. José Luis Camba Castañeda

Ing. Francisco Chacón García

Ing. Francisco Pérez Arellano

México, D.F., abril de 1982

Ing. José Luis Camba Castañeda  
Coordinador de Análisis Estructural I

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE  
MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

APUNTES DE  
ANALISIS ESTRUCTURAL I

1982

## INDICE GENERAL

	Pag.
1. <i>Conceptos Introdutorios</i>	1
2. <i>Métodos Aproximados</i>	8
3. <i>Trabajo y Energía</i>	27
4. <i>Estabilidad y Grado de Indeterminación</i>	89
5. <i>Método de las Flexibilidades</i>	97
6. <i>Método de las Rigideces</i>	143
7. <i>Método de Cross</i>	185
8. <i>Método de Kani</i>	217
9. <i>Introducción al Análisis Plástico</i>	238

## CAPITULO I

### CONCEPTOS INTRODUCTORIOS EN ANALISIS ESTRUCTURAL

## CONCEPTOS INTRODUCTORIOS EN ANALISIS ESTRUCTURAL

El objetivo del análisis estructural consiste en calcular las fuerzas internas y las deflexiones en un punto cualquiera de una estructura.

En el análisis estructural deben tomarse en cuenta las siguientes condiciones:

- 1.- Equilibrio entre fuerzas internas y externas en todos los elementos de la estructura.
- 2.- Compatibilidad de deformaciones de todos los elementos estructurales.
- 3.- Relación fuerza-desplazamiento.

### 1.- EQUILIBRIO ENTRE FUERZAS INTERNAS Y EXTERNAS

Una estructura, sujeta a un sistema de acciones externas de finido, estará en equilibrio si las reacciones de la misma cumplen las condiciones de equilibrio, que se expresan como:

En el espacio:

$$\begin{array}{ll} \Sigma F_x = 0 & \Sigma M_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 & \Sigma M_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 & \Sigma M_z = 0 \end{array}$$

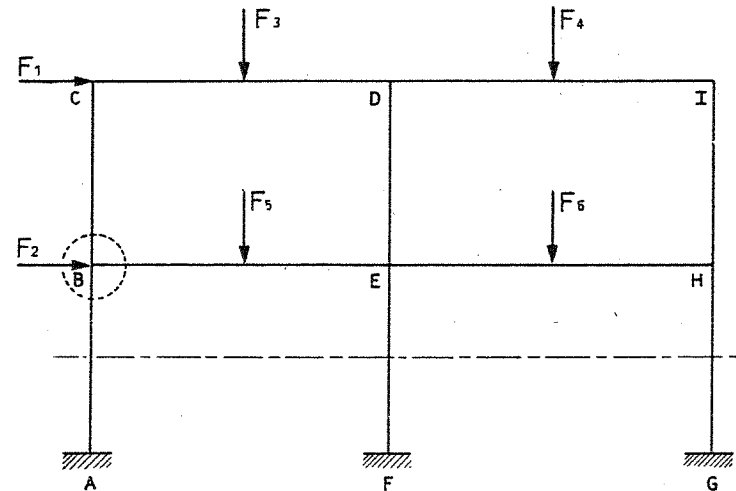
Cuando se trate de estructuras planas:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M = 0$$

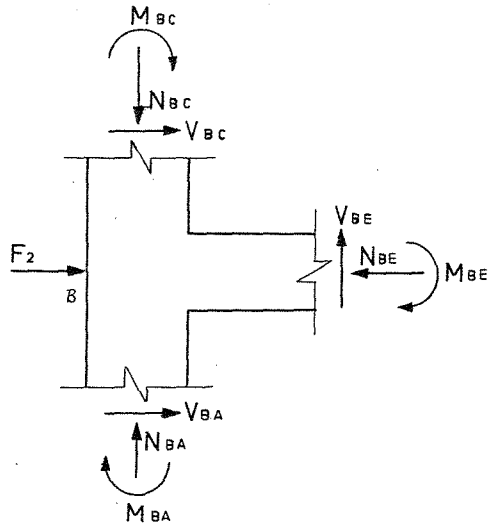
De esta forma, si se cumplen las condiciones mencionadas, bajo la acción del sistema de fuerzas externo y el sistema de reacciones, la estructura está en equilibrio. Los elementos que forman la estructura estarán sujetos a fuerzas internas que se desarrollen en ellos, provocadas por el sistema de fuerzas externo aplicado.

Si se hacen diagramas de cuerpos libres, al aislar una parte de la estructura haciendo uno o varios cortes, deberán estar también en equilibrio.

Si por ejemplo, en la estructura mostrada a continuación se aísla el nudo indicado, sobre el cual actúan las fuerzas externas  $F_2$  así como las

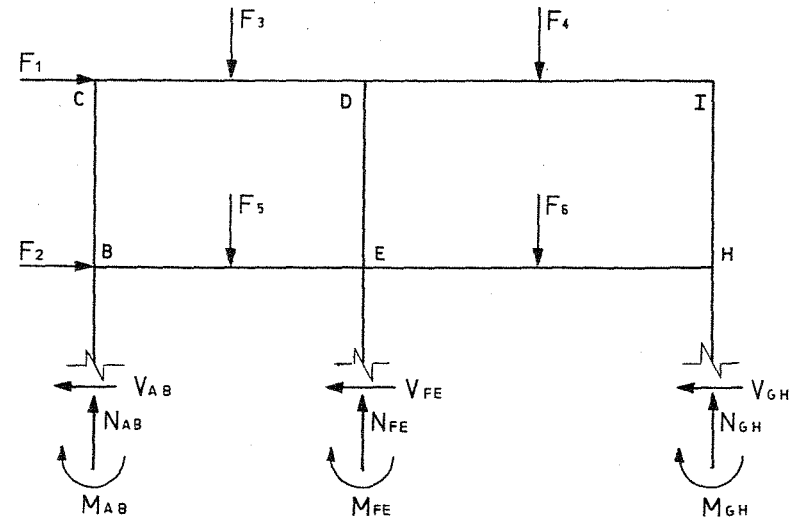


fuerzas internas desarrolladas en los planos de corte, éste nudo deberá estar en equilibrio, porque forma parte de una estructura en equilibrio, y por lo tanto, podrán aplicársele las ecuaciones generales de equilibrio; a este sistema en equilibrio, se le llamará equilibrio nodal.



Así mismo, al hacer un corte en un entrepiso, deberá estar en equilibrio la parte aislada por el corte, ya que pertenece a una estructura que está en equilibrio.

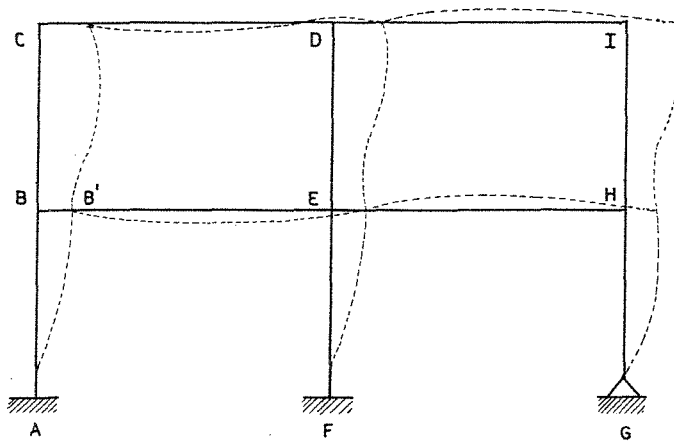
Así por ejemplo, si en la estructura anterior se corta en el plano indicado, la estructura aislada permanece en equilibrio; a este sistema se le llama equilibrio de entrepiso.



Por lo tanto, si una estructura está en equilibrio, cualquier elemento que se aisle también lo estará, siendo necesario para que esto se cumpla, que en los planos de corte se considere la o las acciones internas que la estructura ejerce sobre el elemento que se aisló.

## 2.- COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES

Al aplicar un sistema de fuerzas a una estructura, ésta se deforma, pero conserva las condiciones de continuidad iniciales. Así mismo, los desplazamientos finales en la estructura deberán ser compatibles con las condiciones de deformación de los diferentes tipos de apoyos.



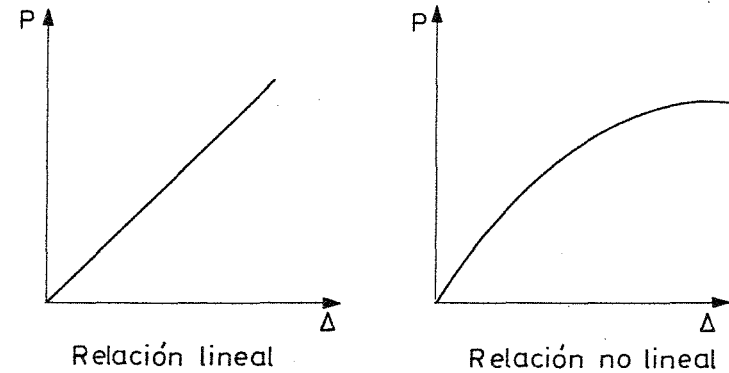
En la estructura de la figura, el nudo B al pasar a la posición B', - se desplaza y gira; si se trata de una estructura en el espacio, podrá tener tres componentes de desplazamiento lineal y tres giros. En el caso de un nudo en el plano, los desplazamientos serán: dos componentes de desplazamiento lineal y un giro.

La condición de compatibilidad con las condiciones de apoyo, serían por ejemplo, en el caso de la figura, que los apoyos A y F por ser empotramientos, impiden toda posibilidad de desplazamiento lineal y de giro; en cambio para el apoyo G, por ser un apoyo articulado, no permitirá desplazamientos lineales pero sí el giro del mismo.

### 3. - RELACION FUERZA-DESPLAZAMIENTO

De acuerdo con los objetivos mencionados del análisis estructural, es necesario conocer para una estructura de geometría definida, la relación que existe entre las fuerzas y los desplazamientos.

Si se observa la siguiente gráfica, se deduce que la relación entre fuerzas y desplazamientos puede ser lineal o no serlo.



En general, se supone la hipótesis de que la relación entre fuerzas y desplazamientos es lineal, por lo que se puede aplicar a las estructuras el principio de superposición.

Dicho principio establece, que los efectos que produce un sistema de fuerzas aplicado a una estructura, son equivalentes a la suma de los efectos producidos por cada una de las fuerzas del sistema actuando independientemente.



Las condiciones que debe cumplir una estructura para que se le aplique el principio de superposición son:

- a) Que exista proporcionalidad entre esfuerzo y deformaciones, es decir, que se cumpla la ley de Hooke.
- b) Que no haya interacción entre efectos debidos a fuerzas axiales y momentos flexionantes (efectos de esbeltez).
- c) Que las deformaciones en la estructura sean relativamente pequeñas, evitando así que se afecten en forma importante el sistema de fuerzas internas y de reacciones.

Si la estructura en estudio cumple con las tres condiciones mencionadas, se trata de una estructura con comportamiento elástico y lineal.

## C A P I T U L O 2

### MÉTODOS APROXIMADOS PARA DISEÑOS PRELIMINARES

- A. MÉTODO DE BOWMAN
- B. MÉTODO DEL VOLADIZO
- C. MÉTODO DEL PORTAL
- D. MÉTODO DEL FACTOR

## METODOS APROXIMADOS PARA DISEÑOS PRELIMINARES

## METODO DE BOWMAN

Después de estudiar un gran número de marcos resueltos por métodos exactos, se ha propuesto un método aproximado que se basa en las siguientes hipótesis:

a) Los puntos de inflexión en las vigas exteriores se encuentran a 0.55 de su claro, a partir de su extremo exterior. En las vigas interiores su punto de inflexión está al centro del claro, excepto en la crujía central cuando el número de éstos es impar, o en las dos centrales si es par. En ellos los puntos de inflexión de las vigas estará forzada por condiciones de simetría y de equilibrio.

b) En las columnas del primer entrepiso los puntos de inflexión están a 0.60 de su altura a partir de la base.

En marcos de dos o más, tres o más, cuatro o más entrepisos, respectivamente, los puntos de inflexión en las columnas de los entrepisos último, penúltimo y antepenúltimo, respectivamente, se encuentran a 0.65, 0.60 y 0.55 de la altura correspondiente a partir del extremo superior.

En edificios de cinco o más entrepisos, los puntos de inflexión en columnas para las cuales no se ha especificado la posición, se encuentran al centro de su altura. Esto se ilustra en la Fig. 1.

c) La fuerza cortante de cada entrepiso se distribuye en la forma siguiente.

En el primer entrepiso:

Una fuerza cortante igual a:

$$V_c = \frac{N-0.5}{N+1.0} V$$

Esta se distribuye entre las columnas proporcionalmente a sus rigideces.

La fuerza cortante  $V_t = V - V_c$  se distribuye entre las crujías proporcionalmente a la rigidez de la viga que la limita en la parte superior. La cortante de cada crujía se distribuye en partes iguales entre las dos columnas que la limitan.

En pisos superiores: La fuerza cortante  $V_c = \frac{N-2}{N+1} V$  se distribuye directamente entre las columnas.

La cortante  $V_t = V - V_c$  se distribuye entre las crujías como se hizo para la planta baja.

$V$  = fuerza cortante por entrepiso.

$N$  = crujías del marco en el entrepiso considerado.

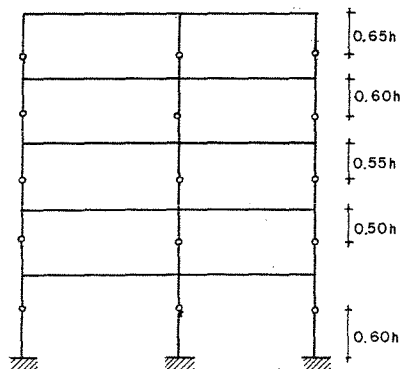
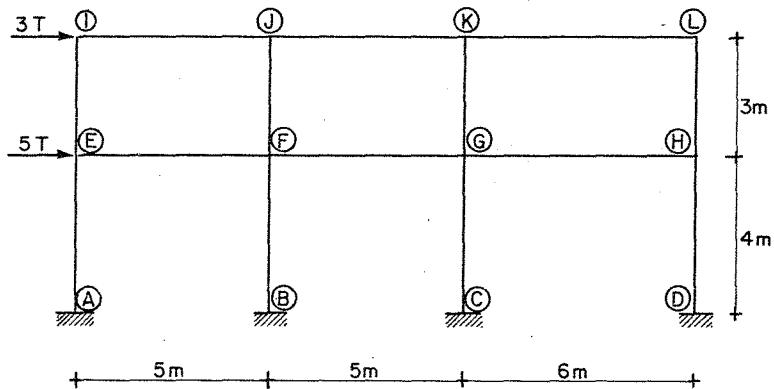


Figura 1  
Puntos de inflexión en los diferentes entrepisos

Enseguida se presenta un ejemplo numérico para mejor comprensión del método antes expuesto.

Se tiene un marco el cual consta de tres crujiás distribuídas como se muestra en la figura, dicho marco es de dos niveles y está sometido a dos cargas horizontales en el 1o. y 2o. nivel de 5T y 3T - respectivamente. Determinar los momentos que se generan en los nudos debidos a las fuerzas actuantes.

$EI = \text{constante.}$



Para el 1er. entrepiso el cortante.  $V=8$

y el cortante para las columnas es

$$V_c = \frac{N-0.5}{N+1} V = \frac{3-0.5}{3+1} 8=5$$

Para cada columna es  $\frac{5}{4} = 1.25$

Para el segundo entrepiso  $V=3$

Para esas columnas

$$V_c = \frac{N-2}{N+1} V = \frac{3-2}{4} (3) = 0.75$$

Y el cortante por columna es  $\frac{0.75}{4} = 0.1875$

Para el primer nivel el cortante en vigas es

$$V_x = 8 - 5 = 3$$

Y el cortante en cada viga es  $\frac{3}{3} = 1.0$

Esa fuerza se divide entre las dos columnas inferiores igualmente o -

$$\text{sea } \frac{1.0}{2} = 0.5$$

Lo mismo se hace para el segundo nivel

$$V_x = 3 - 0.75 = 2.25$$

Para cada viga  $\frac{2.25}{3} = 0.75$

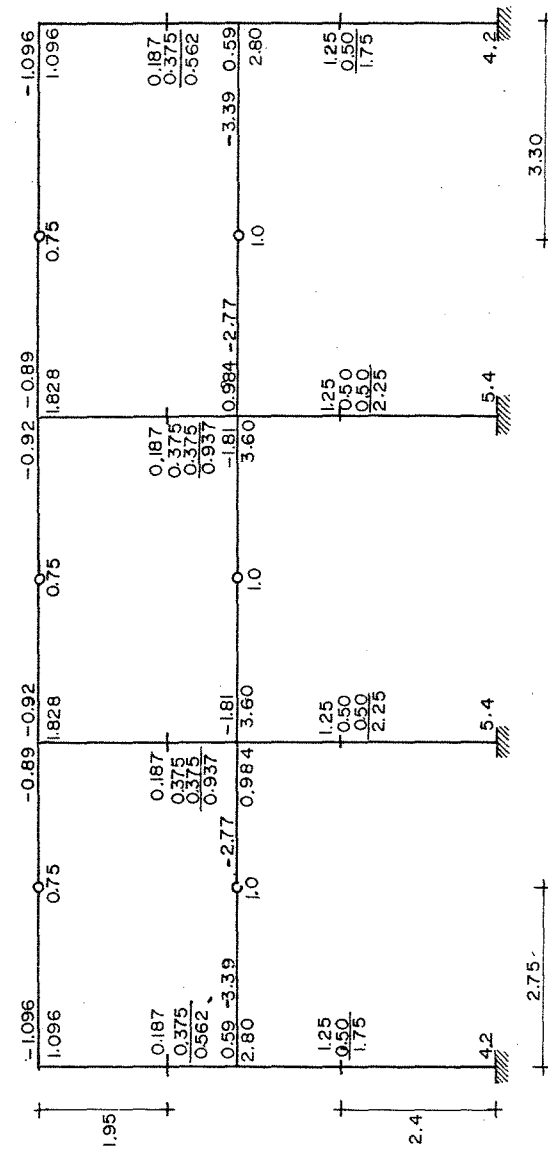
Se reparte entre las columnas inferiores vecinas

$$\frac{0.75}{2} = 0.375$$

Para encontrar los momentos se multiplicarán las fuerzas cortantes por sus respectivos brazos en las columnas

Por ejemplo  $1.75 (1.6) = 2.80$   
 $0.5625 (1.05) = 0.59$

Equilibramos los momentos en las columnas con los de las vigas valiéndonos de que conocemos los puntos de inflexión de las vigas.



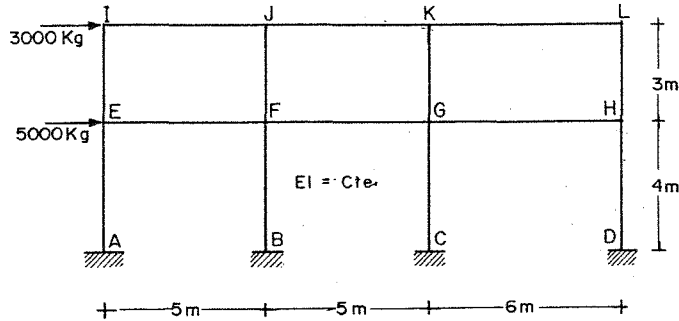
## METODO DEL VOLADIZO

Se hacen las siguientes hipótesis:

- Hay un punto de inflexión en el centro de cada viga.
- Hay un punto de inflexión en el centro de cada columna.
- La intensidad del esfuerzo axial en cada columna de un piso es

proporcional a la distancia horizontal desde esa columna al centro de gravedad de todas las columnas del piso que se considera.

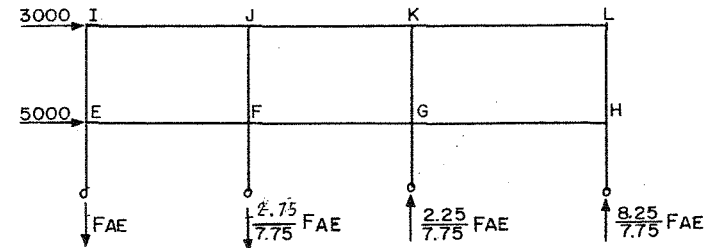
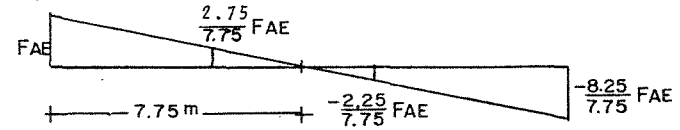
Apliquemos este método al siguiente ejemplo:



Cálculo de las fuerzas axiales en las columnas.

Como todas las columnas tienen la misma sección, el centro de gravedad de las columnas se determina.

$$4X = 5 + 10 + 16 \quad X = 31/4 = 7.75 \text{ m a partir de AEI}$$



Si tomamos momentos respecto al punto de inflexión de la columna DH.

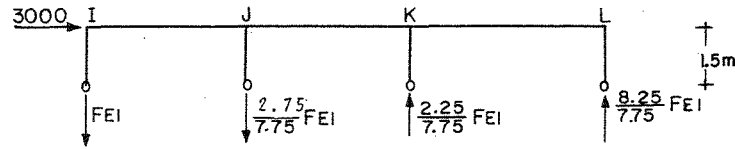
na DH.

$$\sum M = 0 \quad 5(3000) + 2(5000) - 16F_{AE} - \frac{2.75}{7.75} F_{AE} (11) + \frac{2.25}{7.75} F_{AE} (6) = 0$$

$$F_{AE} = 1376.55$$

$$F_{BF} = 488.45 \quad F_{CG} = 399.64 \quad F_{DH} = 1465.36$$

Para el siguiente nivel las fuerzas axiales están distribuidas de igual manera que para el primer nivel.



Tomando suma de momentos con respecto a la articulación en el eje L.

$$\sum M = 0$$

$$3000(1.5) - 16F_{AE} - \frac{2.75}{7.75} F_{AE}(11) + \frac{2.25}{7.75} F_{AE}(6) = 0$$

$$F_{EI} = 247.78 \quad F_{FJ} = 87.92 \quad F_{GK_1} = 71.93 \quad F_{HL} = 263.76$$

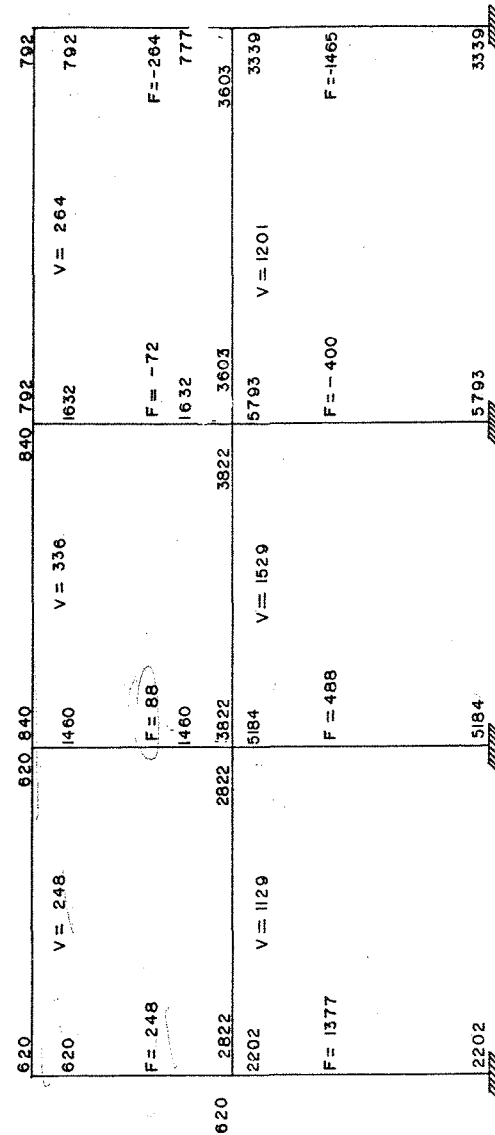
Las fuerzas cortantes en las vigas se obtienen a partir de las fuerzas axiales en las columnas de los diferentes nudos.

Por ejemplo en el nudo H.

$$V_{HG} = F_{DH} - F_{HL} = 1437.28 - 258.71 = 1178.57$$

Para el nudo E

$$V_{EF} = 1350.17 - 243.03 = 1107.14$$



Momentos en las vigas. - Como el momento en el centro de cada viga es nulo, el correspondiente a sus extremos será igual al cortante en la viga por la mitad de su longitud.

Momentos en las columnas. - Se determinan en las cabezas de éstas descendiendo hacia la base.

#### METODO DEL PORTAL

Esté método se basa en las siguientes hipótesis:

a) Los puntos de inflexión de vigas y de columnas se encuentran en sus puntos medios.

b) La fuerza cortante en cada una de las columnas exteriores de un piso es igual a la mitad de la que corresponde a cada columna interior.

De esta manera el problema se transforma en una isostática.

Resumen de la secuencia de cálculo:

1. Se determina la fuerza cortante en cada entrepiso.

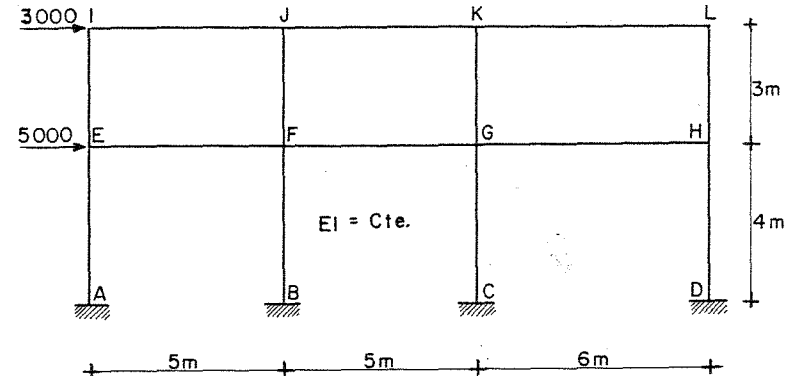
2. Usando la hipótesis (b) se determina la fuerza cortante en cada columna.

3. Considerando la hipótesis (a) se determinan los momentos flexionantes en los extremos de las columnas.

4. Determinéense los momentos en los extremos de todas las vigas equilibrando los momentos de las columnas en cada extremo. Se necesita empezar en nudos con una sola viga y considerar que los momentos en los extremos de una misma viga son iguales.

5. Obténganse las fuerzas cortantes en las vigas a partir de los momentos de sus extremos.

6. Determinéense las fuerzas axiales en las columnas a partir de las cortantes de las vigas.



El cortante en el primer entrepiso vale

$$V_c = 2666.6 \text{ columnas interiores}$$

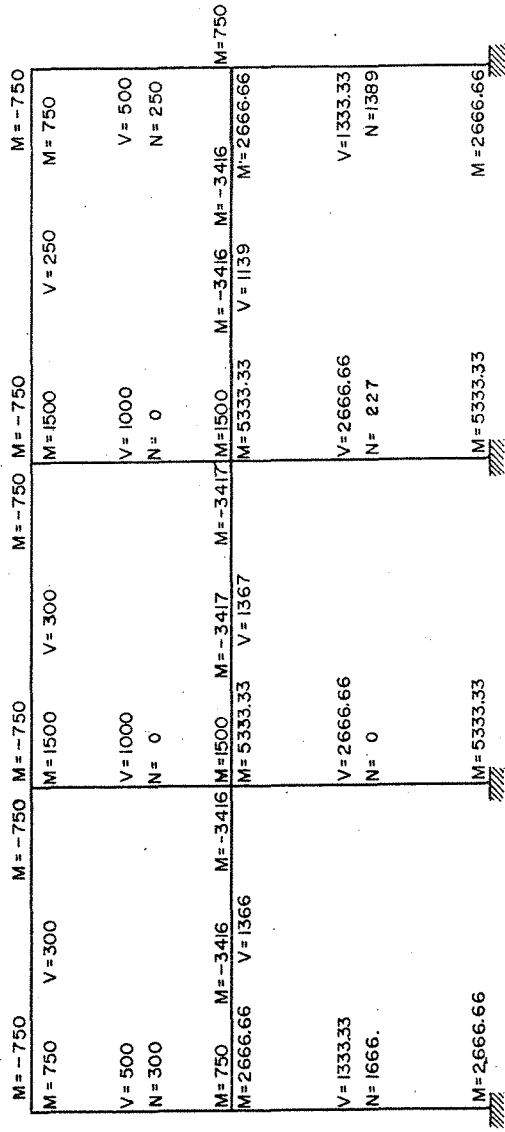
$$V_c = 1333.3 \text{ columnas exteriores}$$

El cortante en el segundo entrepiso vale  $V = 3000 \text{ kg}$

$$V_c = 1000 \text{ columnas interiores}$$

$$V_c = 500 \text{ columnas exteriores}$$

Con los valores anteriores se calculan los momentos en las columnas y por equilibrio el de las trabes.



## METODO DEL FACTOR

Se basa en las ecuaciones pendiente-deformación haciendo modificaciones bajo las siguientes hipótesis:

a). - Para el cálculo de los desplazamientos lineales y angulares en un piso, se considera que el valor  $\Psi$  en dos entrepisos consecutivos es igual.  $\Psi$  es la diferencia de desplazamiento laterales de dos niveles consecutivos dividida entre la altura del entrepiso.

b). - El giro de un nudo y de los extremos opuestos de todas las barras que concurren al mismo son iguales.

Este método se aplica siguiendo los seis pasos siguientes:

1. - En cada nudo se calcula el factor  $v$  de las vigas  $v = \frac{\sum K_c}{\sum K}$ ,  $\sum K_c$  es la suma de los valores  $K = I/L$  de las columnas que concurren al nudo, y  $\sum K$  es la suma de los valores  $K$  para todos los elementos del nudo.

2. - En cada nudo se calcula el factor  $C$  de las columnas  $C = 1 - v$ , siendo  $v$  el factor de viga del paso 1. En las bases de las columnas empotradas del primer piso se considera  $C = 1.0$

3. - Hay un número, obtenido en 1 y 2,  $v$  y  $C$  en cada extremo de todos los elementos del marco. A cada uno de dichos números se le suma la mitad del correspondiente al otro extremo del elemento.

4. - Se multiplica cada suma hallada en el paso 3 por el valor de  $K$  del elemento al que corresponde dicha suma. Para las columnas, a este producto se le llama factor de momento de columna,  $C$ ; para las vigas, factor de momento de viga  $V$ .

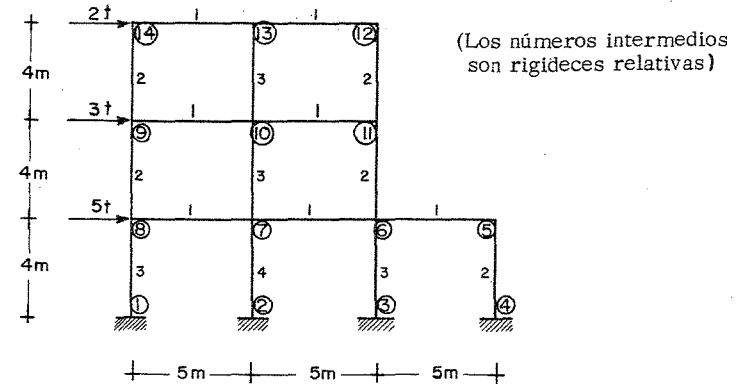


5. - Los factores de momento de columna C, hallados en el paso 4 son los valores relativos aproximados de los momentos en los extremos de la columna para el piso correspondiente.

Por la estática se ve que la suma de los momentos en los extremos de las columnas en un piso determinado, es igual al cortante horizontal total en ese piso multiplicado por la altura del piso. Por lo cual, los factores de momentos en los extremos de las columnas, por proporción directa, en cada piso.

6. - Los factores de momento de viga V, hallados en el paso 4 son los valores relativos aproximados de los momentos en los extremos de las vigas para cada nudo. La suma de los momentos en los extremos de las vigas en cada nudo es igual, por la estática, a la suma de los momentos en los extremos de las columnas en ese nudo, que pueden obtenerse en el paso 5. Por lo cual, los factores de momento de viga V se pueden transformar en momentos en los extremos de éstas, por proporción directa en cada nudo.

Veamos como ejemplo el siguiente marco:



Cálculo de los factores de viga de los nudos

Por ejemplo para el nudo (10)

$$v = \frac{\sum K_c}{\sum K} \quad \sum K_c = \text{suma de rigideces de las columnas}$$

$$\sum K_c = 3 + 3 = 6$$

$$v_{10} = 6/8 = 0.75$$

También para el nudo (7)

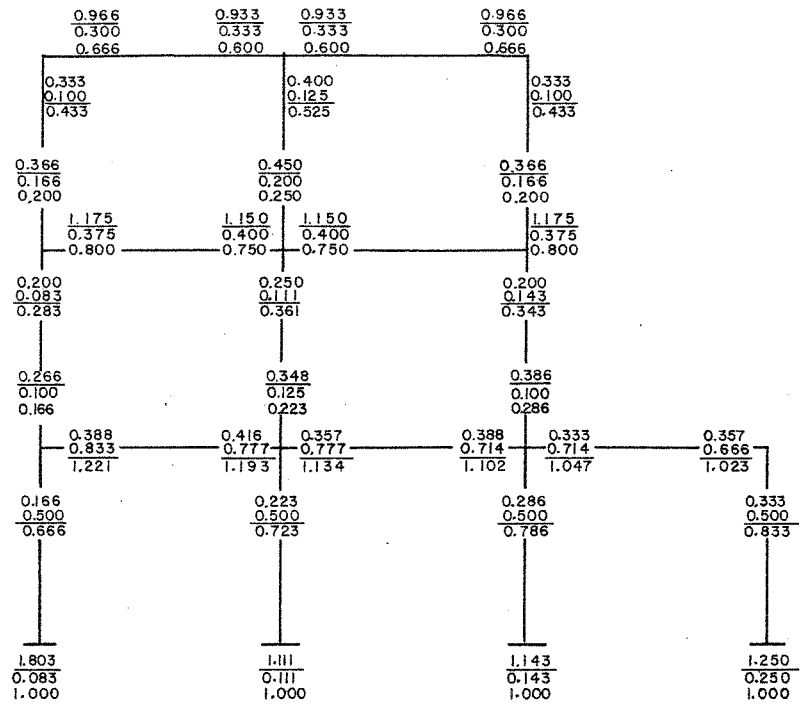
$$\sum K_c = 3 + 4 \quad \sum K = 9 \quad v_7 = 7/9 = 0.777$$

Cálculo de factores de columna por ejemplo nudos (7) y (10)

$$C = 1 - v$$

$$C = 1 - 0.777 = 0.223$$

$$C = 1 - 0.75 = 0.25$$



Se han anotado los factores de vigas y columnas y a cada uno de dichos números se le ha sumado la mitad del correspondiente al otro extremo del elemento.

Cálculo de Momentos

Por ejemplo primer entrepiso

$$M = Vh = 10(5) = 50 \text{ T-m.}$$

Este momento se distribuye en las columnas proporcionalmente a sus rigideces.

$$M_{ij} = \frac{M C}{\sum C}$$

$$22.536 = \sum C$$

En el primer entrepiso

$$22.536 = 3.249 + 4.444 + 3.429 + 2.50 + 1.666 + 2.358 + 2.892 + 1.998$$

$$M_{18} = \frac{3.249}{22.536} (50) = 7.208$$

$$M_{27} = \frac{4.444}{22.536} (50) = 9.859$$

$$M_{61} = \frac{1.998}{22.536} (50) = 4.430$$

$$M_{72} = 6.416$$

$$M_{36} = 7.607$$

$$M_{54} = 3.696$$

$$M_{63} = 5.231$$

$$M_{45} = 5.546$$

Para el nivel 2º

$$M = 5(4) = 20 \quad 4.683 = \sum C$$

Para el nivel 3º.

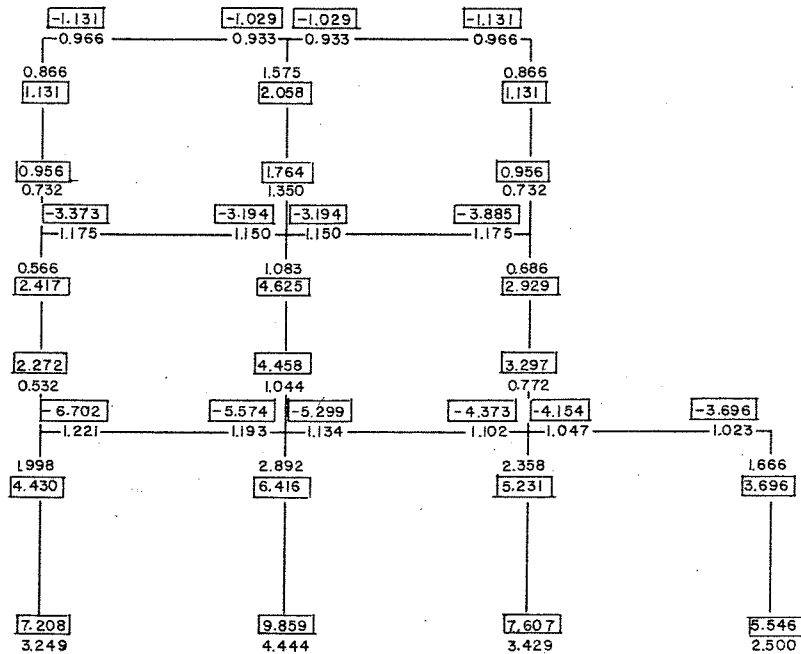
$$M = 2(4) = 8 \quad 6.121 = \sum C$$

Los momentos en las vigas serán proporcionales a sus rigideces

Se anotan los factores de Momentos de columnas y vigas

y los Momentos

$$C \text{ y } V \text{ y } M_{ij} = \left[ \frac{C}{\sum C} \right] M$$



### CAPITULO 3

### TRABAJO Y ENERGIA

- A. PRINCIPIO DE LOS DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES
- B. PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL

## 2.1 TRABAJO Y ENERGÍA

Si un sistema de fuerzas externas, se aplica a un cuerpo, este se deformará hasta que se presente el equilibrio entre las fuerzas externas aplicadas y las fuerzas internas del cuerpo. En consecuencia, el sistema de fuerzas externas realiza un trabajo. Este trabajo se almacena en el cuerpo y es a lo que se llama "energía de deformación del cuerpo".

El trabajo realizado por el sistema de fuerzas externas, se puede transformar en energía de deformación y/o energía cinética del cuerpo. Si las fuerzas se aplican gradual y lentamente, a un cuerpo elástico, el trabajo exterior se transforma completamente en energía de deformación.

La energía de deformación o energía interna de un cuerpo elástico es por lo tanto, la suma de todo el trabajo transmitido por el sistema para deformarlo con respecto a su estado natural. La energía de deformación almacenada se transforma en trabajo cuando el sistema de fuerzas es retirado. Si el cuerpo es perfectamente elástico - recuperará exactamente su forma inicial. En los sistemas elásticos - se despreciarán las pérdidas de energía por calor.

La energía de deformación depende de las características de la curva carga-deformación del cuerpo. Así, por ejemplo, en la Fig. 1 el área sombreada nos representa la energía de deformación de un cuerpo con comportamiento elástico lineal. El área sombreada en la Fig. 2 nos representa la energía de deformación de un cuerpo con com

portamiento elástico no lineal.

Para el caso de la Fig. 1 la carga P se aplica gradualmente - y por lo tanto la deformación aumenta gradualmente. El trabajo desarrollado por la fuerza P es:

$$W = \int p \cdot d\delta = \text{energía de deformación}$$

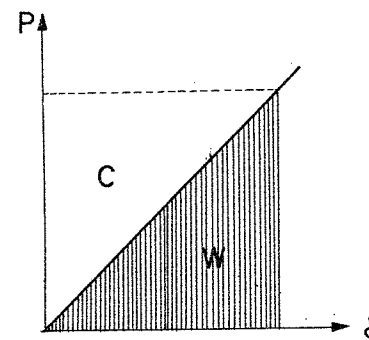


fig.1.- Energía de Deformación  
Caso Lineal

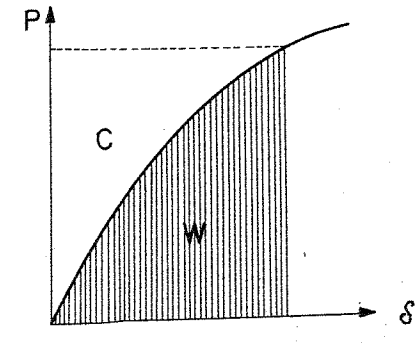


fig.2.- Energía de Deformación  
Caso no Lineal

El área no sombreada marcada con C en las Figs. 1 y 2, se denomina "energía complementaria de deformación" y se calcula con la integral

$$C = \int \delta \cdot dp = \text{energía complementaria de deformación}$$

La energía de deformación, puede aparecer debido a fuerzas axiales, de flexión, de cortante y de torsión. Estas fuerzas pueden presentarse aisladas o en determinadas combinaciones. En seguida se obtendrán las expresiones para la energía de deformación debido a los efectos antes mencionados, los cuales se consideran que actúan uno a la vez.

a) Efecto de Fuerza Normal.

Considérese la barra mostrada en la Fig. 3, la cual tiene su área transversal constante.

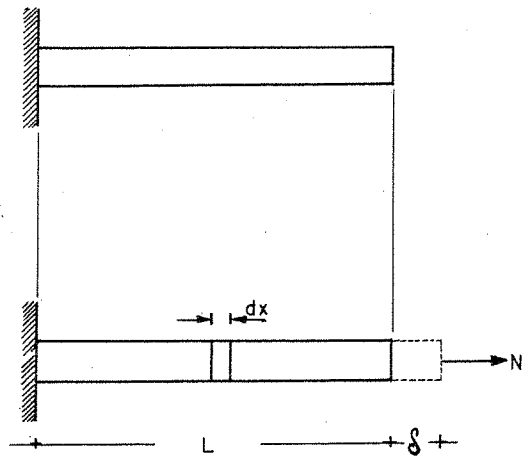


fig. 3

La aplicación gradual de la carga normal N produce la deformación  $\delta$ . En la longitud dx el trabajo interno efectuado es:

$$dw = \frac{N}{2} \epsilon dx$$

pero

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{AE}$$

entonces

$$dw = \frac{N}{2} \cdot \frac{N}{AE} dx$$

el trabajo total en la longitud L será

$$W = \int_0^L \frac{N^2}{2AE} dx$$

debido a que el trabajo efectuado es igual a la energía de deformación interna, entonces:

$$U_n = \int_0^L \frac{N^2}{2AE} dx$$

donde  $U_n$  es la energía de deformación interna debida a cargas axiales.

b) Efecto de Momento Flexionante.

Considérese que en el tramo de viga mostrado en la Fig. 4 - actúan fuerzas que producen flexión en él mismo.

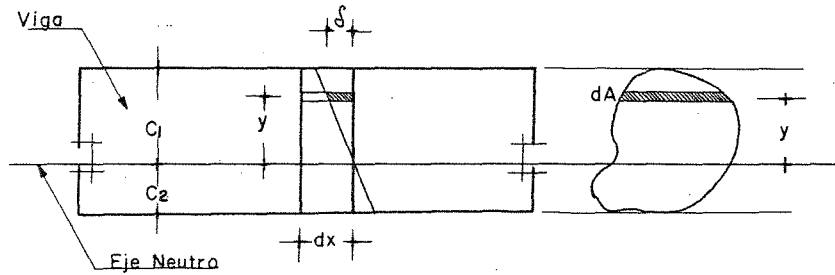


fig. 4

Una fibra situada a una distancia "y" del eje neutro tendrá como deformación en la longitud dx

$$\delta = \epsilon dx$$

pero

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{M \cdot y}{E I}$$

entonces

$$\delta = \frac{M y}{E I} dx$$

Debido a que las fuerzas que producen flexión se aplican gradualmente, el valor de la fuerza promedio que actúa en el área dA, es:

$$d F = \frac{1}{2} \sigma d A$$

entonces

$$d F = \frac{1}{2} \frac{M y}{I} d A$$

El trabajo efectuado en la fibra analizada es:

$$d w = \delta d F$$

o sea:

$$d w = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2 y^2}{E I^2} dx d A$$

y el trabajo para todas las fibras en la longitud dx será.

$$dw = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{EI^2} \cdot dx \int_{C_2}^{C_1} y^2 \cdot dA$$

$$dw = \frac{M^2}{2EI} dx$$

El trabajo total en toda la viga será:

$$W = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

por lo tanto

$$U_b = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

donde  $U_b$  es la energía de deformación interna debida a momento flexionante.

c) Efecto de Fuerza Cortante.

Considérese que en el tramo de viga mostrada en la Fig. 5 - actúan fuerzas que producen esfuerzos de cortante en él mismo. En la figura se exagera la deformación de la fibra mostrada.

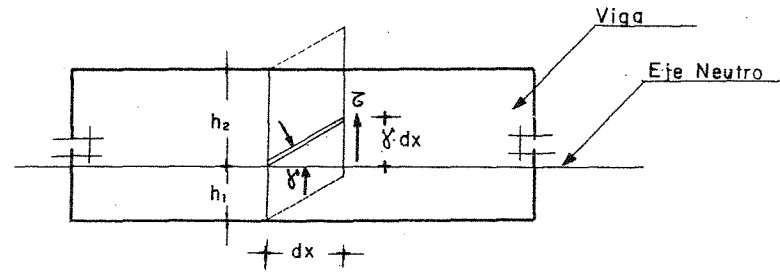


fig. 5

El trabajo debido a la fuerza cortante es:

$$dw = \frac{1}{2} (\tau dA) (\gamma dx)$$

pero

$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

y

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{VQ}{GIb}$$

donde  $Q$  es el momento estático con respecto al eje neutro y  $b$  es el ancho de la sección, entonces:

$$dw = \frac{V^2 Q^2}{2GJ^2 b^2} dx \cdot dA$$

El trabajo que se efectúa en la longitud  $dx$ , es:

$$dw = \frac{V^2 dx}{2GA} \cdot \frac{A}{I^2} \int_{-h_1}^{h_2} \frac{Q^2}{b^2} dA$$

si:

$$C = \frac{A}{I^2} \int_{-h_1}^{h_2} \frac{Q^2}{b^2} \cdot dA$$

entonces:

$$dw = \frac{CV^2}{2GA} dx$$

El trabajo efectuado en toda la viga será:

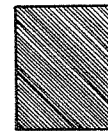
$$W = \int_0^L \frac{CV^2 dx}{2GA}$$

por lo tanto:

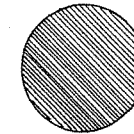
$$U_s = \int_0^L \frac{CV^2 dx}{2GA}$$

donde  $U_s$  es la energía de deformación interna debida a fuerzas cortantes.

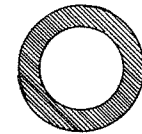
La constante  $C$  es el llamado factor de forma y depende de la forma de la sección transversal. Algunos valores de  $C$  se dan enseguida.



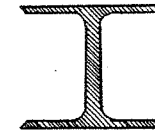
$$C \doteq 1.2$$



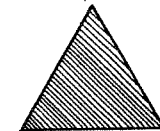
$$C \doteq 1.11$$



$$C \doteq 1.5$$



$$C = \frac{A_{sección}}{A_{alma}}$$



$$C \doteq 1.2$$

d) Efecto de Momento Torsionante.

La viga mostrada en la Fig. 6 está sujeta a un momento torsionante  $T$  aplicado en un extremo de la misma.



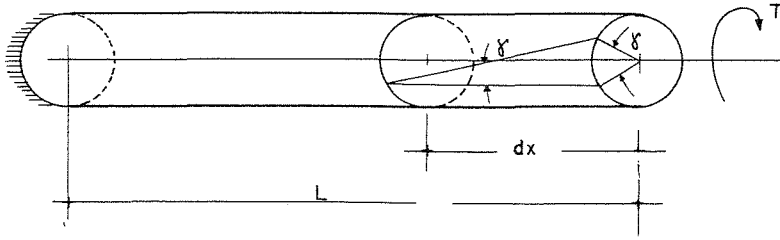


fig. 6

El trabajo efectuado en el segmento  $dx$  es:

$$dw = \frac{1}{2} \cdot T \cdot \gamma$$

pero

$$\gamma = \frac{T \, dx}{G \, J}$$

entonces

$$dw = \frac{T^2 \, dx}{2 \, G \, J}$$

para todo el elemento el trabajo será:

$$W = \int_0^L \frac{T^2 \, dx}{2 \, G \, J}$$

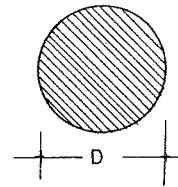
por lo tanto

$$U_t = \int_0^L \frac{T^2 \, dx}{2 \, G \, J}$$

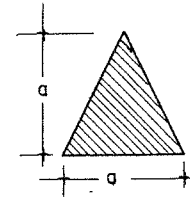
donde  $U_t$  es la energía de deformación interna debida a fuerzas de torsión y  $J$  es el momento polar de inercia para una sección circular.

Valores de  $J$  para diferentes secciones transversales se dan a continuación.

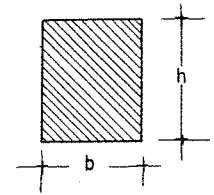
#### Secciones llenas



$$J = \frac{\pi D^4}{32}$$



$$J = 0,02 \, a^4$$

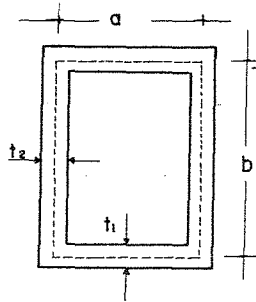


$$J = \frac{b^3 \cdot h^3}{3.6(h^2 + b^2)}$$

## Secciones Huecas

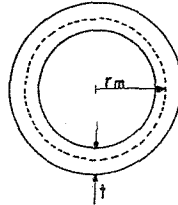
Expresión General:

$$J = \frac{4 A^2}{\int \frac{ds}{t}}$$



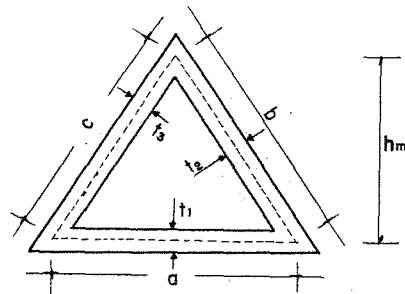
$$A = ab$$

$$\int \frac{ds}{t} = \left( \frac{a}{t_1} + \frac{b}{t_2} \right) 2$$



$$A = \pi r_m^2$$

$$\int \frac{ds}{t} = \frac{2\pi r_m}{t}$$



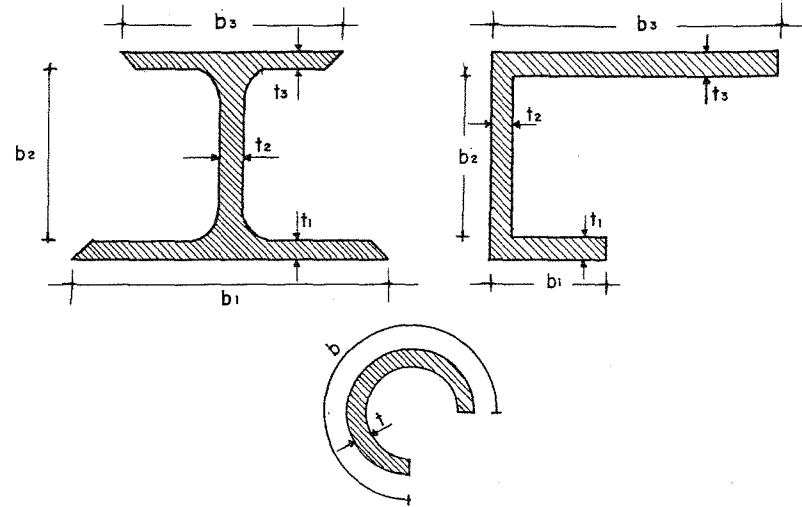
$$A = \frac{1}{2} a h_m$$

$$\int \frac{ds}{t} = \frac{a}{t_1} + \frac{b}{t_2} + \frac{c}{t_3}$$

## Secciones Abiertas

Expresión General:

$$J = \sum \frac{b t^3}{3}$$



En el caso general de un elemento sujeto a los elementos mecánicos citados anteriormente, se obtiene que la energía de deformación total es:

$$U = U_n + U_b + U_s + U_t$$

o sea:

$$U = \int_L \frac{N^2 dx}{2AE} + \int_L \frac{M^2 dx}{2EI} + \int_L \frac{CV^2 dx}{2GA} + \int_L \frac{T^2 dx}{2GJ}$$

La expresión anterior puede usarse también para vigas ligeramente curvas. La limitación para su uso se presenta cuando el radio de curvatura es menor que cinco veces la dimensión mayor de la sección transversal.

## 2.2 PRINCIPIO DE LOS DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES

Este principio constituye la base para la aplicación del principio de los trabajos virtuales que se verá en el siguiente inciso.

Se entenderá por desplazamiento virtual aquel desplazamiento hipotético de uno o varios puntos de un cuerpo rígido en equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de geometría del cuerpo no se alteran debido a dicho desplazamiento, el cual puede ser de magnitud pequeña o infinitesimal. Dichos desplazamientos son producidos por un sistema de cargas diferente al aplicado al cuerpo rígido en equilibrio. Por lo tanto, el sistema de cargas original se mueve cuando se produce el desplazamiento virtual. El producto de cada carga del sistema original por su desplazamiento virtual respectivo producirá entonces "un trabajo virtual".

Para demostrar el principio de los desplazamientos virtuales

se usará la Fig. 7, en la cual se muestra un cuerpo rígido en equilibrio bajo el sistema de cargas dado.

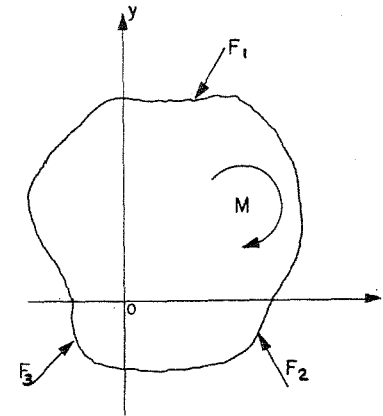


fig. 7

Si el cuerpo rígido está en equilibrio debe cumplirse que

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M + \sum F_x \cdot Y + \sum F_y \cdot X = 0$$

Si el cuerpo se traslada una distancia pequeña  $\delta$ , cuyas componentes son  $\delta x$  y  $\delta y$  se efectuará un trabajo que será (Fig. 8)

$$W = \sum F_x \cdot \delta x + \sum F_y \cdot \delta y$$

o sea

$$W = \delta x \sum F_x + \delta y \sum F_y$$

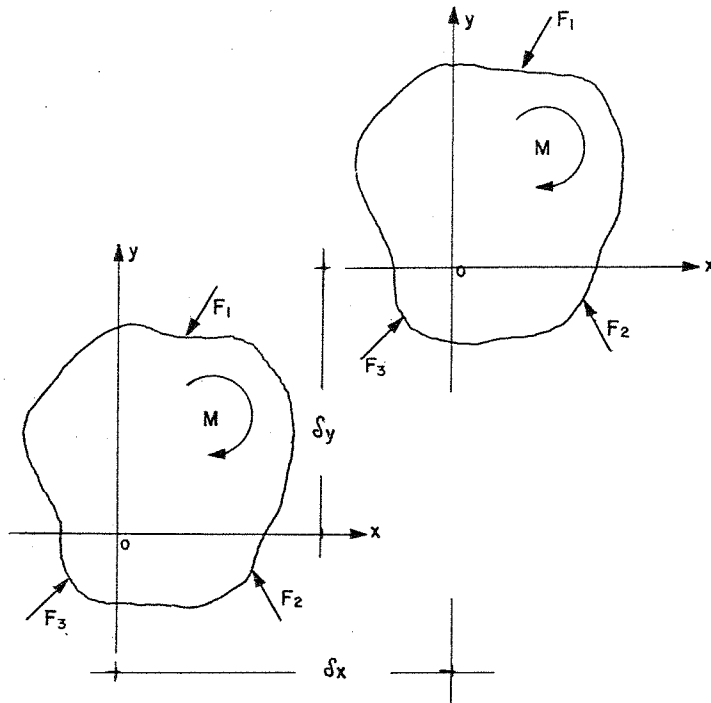


fig. 8

ya que  $\delta x$  y  $\delta y$  son constantes en todos los puntos del cuerpo.

Debido a las condiciones de equilibrio  $\sum F_x = 0$  y  $\sum F_y = 0$ , se tiene que:

$$W = \delta x \sum F_x + \delta y \sum F_y = 0$$

Si el cuerpo ya trasladado sufre una rotación pequeña  $\alpha$  con respecto al origen O, las componentes del desplazamiento de cualquier punto serán  $\alpha y$  paralela al eje 'x', y  $\alpha x$  paralela al eje 'y'. El trabajo efectuado por el sistema de cargas será:

$$W = \sum M \alpha + \sum F_x \cdot \alpha y + \sum F_y \cdot \alpha x$$

o sea:

$$W = \alpha (\sum M + \sum F_x \cdot Y + \sum F_y \cdot X)$$

ya que  $\alpha$  es constante en todos los puntos. Debido a las condiciones de equilibrio

$$\sum M + \sum F_x \cdot Y + \sum F_y \cdot X = 0$$

se tiene que

$$W = \alpha (\sum M + \sum F_x \cdot Y + \sum F_y \cdot X) = 0$$

Ya que cualquier movimiento de un cuerpo puede descomponerse en un giro y una traslación y se vió que en ambos casos el trabajo efectuado vale cero, se puede enunciar que:

"Si a un cuerpo rígido en equilibrio bajo un sistema de fuerzas dado se le desplaza virtualmente, el trabajo efectuado por este sistema durante el desplazamiento virtual es cero".

### 2.3 PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL

Considérese el cuerpo deformable que se muestra en la Fig. 9, el cual se encuentra en equilibrio bajo el sistema de fuerzas dado.

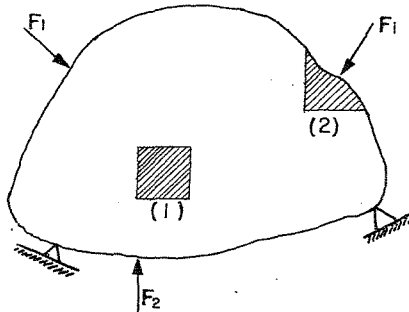
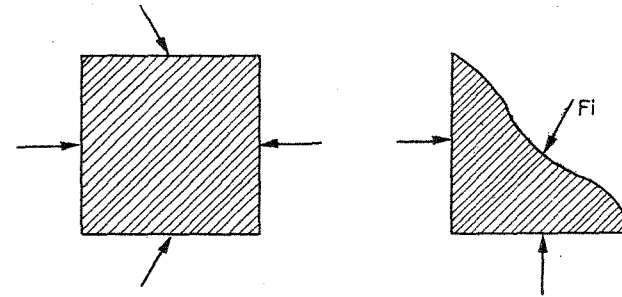


fig. 9

Los segmentos (1) y (2) de la figura anterior se muestran como cuerpos libres en la Fig. 10.



Segmento (1)

Segmento (2)

fig. 10

El segmento (1) es un segmento interno y está sujeto a fuerzas internas en todos sus lados. El segmento (2) es un segmento de borde y está sujeto a una fuerza externa  $F_i$  en uno de sus lados y a fuerzas internas en los otros.

Si se supone un desplazamiento virtual del cuerpo producido por una acción diferente al sistema de fuerzas dado, las fuerzas externas e internas se moverán y por lo mismo efectuarán un trabajo virtual. Por lo anterior, cualquier segmento del cuerpo deformable sufrirá un giro, una traslación y una deformación virtual. Si se representa por -

d We al trabajo desarrollado por las fuerzas externas en el segmento se tiene que:

$$dW_e = dW_{RT} + dW_i$$

donde:  $dW_{RT}$  es el trabajo virtual de rotación y traslación del segmento tratado como un cuerpo rígido y  $dW_i$  es el trabajo virtual de deformación del segmento.

Por el principio de los desplazamientos virtuales se sabe que:

$$dW_{RT} = 0$$

por lo tanto

$$dW_e = dW_i$$

El trabajo desarrollado en todo el cuerpo será:

$$W_e = W_i$$

donde  $W_i$  es la energía de deformación interna virtual del cuerpo y  $W_e$  representa el trabajo virtual total debido al sistema de fuerzas externas  $F$ , ya que el trabajo desarrollado por las fuerzas intersegmentales se anula.

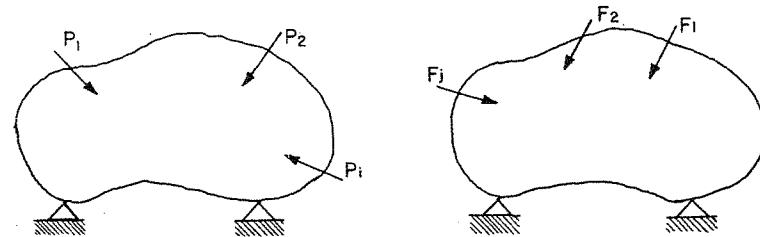
Por lo visto anteriormente se puede enunciar que:

"Si una estructura deformable en equilibrio bajo un sistema de fuerzas dado, se sujeta a un desplazamiento virtual debido a una --

fuerza adicional, el trabajo virtual producido por las fuerzas externas, es igual al trabajo de deformación de las fuerzas internas".

#### 2.4 TEOREMA DE BETTI

Considérese el cuerpo elástico mostrado en la Fig. 11 en el que se aplican dos sistemas de cargas a la vez, los cuales aparecen por separado.



Sistema de fuerzas A

Sistema de fuerzas B

fig. 11

Si se aplica el principio de la superposición de efectos se puede hacer el siguiente análisis:

Si se aplica gradualmente primero el sistema A y luego el sistema B, el trabajo efectuado por dichos sistemas de fuerza será:

$$W = \frac{1}{2} P_i \delta_i + \frac{1}{2} F_j \delta_j + P_i \delta_{ij}$$

donde

$\delta_i$  son los desplazamientos producidos por las fuerzas  $P_i$

$\delta_j$  son los desplazamientos producidos por las fuerzas  $F_j$

$\delta_{ij}$  son los desplazamientos en la dirección de las fuerzas  $P_i$  debidos a la aplicación de las fuerzas  $F_j$

Si ahora se aplica gradualmente el sistema B y luego el sistema A, el trabajo efectuado por dichos sistemas de fuerzas será:

$$W = \frac{1}{2} F_j \delta_j + \frac{1}{2} P_i \delta_i + F_j \delta_{ji}$$

donde

$\delta_{ji}$  son los desplazamientos en la dirección de las fuerzas  $F_j$  debido a la aplicación de las fuerzas  $P_i$

Debido a que el orden de aplicación de los sistemas de fuerzas no afecta al trabajo externo total, las expresiones obtenidas arriba se pueden igualar:

$$\frac{1}{2} P_i \delta_i + \frac{1}{2} F_j \delta_j + P_i \delta_{ij} = \frac{1}{2} F_j \delta_j + \frac{1}{2} P_i \delta_i + F_j \delta_{ji}$$

de donde:

$$P_i \delta_{ij} = F_j \delta_{ji}$$

que es el teorema de Betti, el cual puede enunciarse como sigue:

"El trabajo que realiza un sistema de fuerza A debido a los desplazamientos que en sus puntos de aplicación le produce un sistema de fuerzas B, es igual al trabajo que realiza el sistema de fuerzas B - debido a los desplazamientos que en sus puntos de aplicación le produce el sistema de fuerzas A".

Un enfoque más simple puede darse observando la viga mostrada en la Fig. 12, en la cual se aplican simultáneamente las fuerzas  $P_A$  y  $P_B$ .

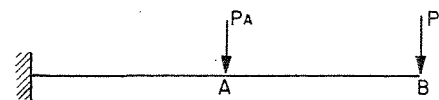


fig. 12

Considérese que se aplica gradualmente primero la fuerza  $P_A$  la cual produce los desplazamientos mostrados en la Fig. 13.

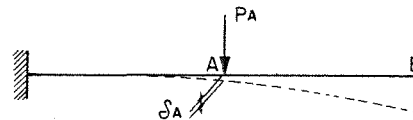


fig. 13

29A

Considérese ahora, que se aplica gradualmente la fuerza  $P_B$

con  $P_A$  en posición como se ve en la Fig. 14.

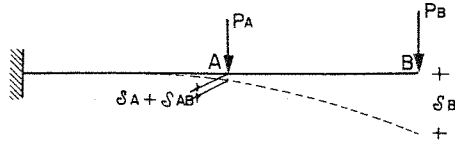


fig.14

El trabajo total de las fuerzas aplicadas es:

$$W = \frac{1}{2} P_A \delta_A + \frac{1}{2} P_B \delta_B + P_A \delta_{AB}$$

Si se invierte el orden de aplicación de las cargas, se tiene -

que:

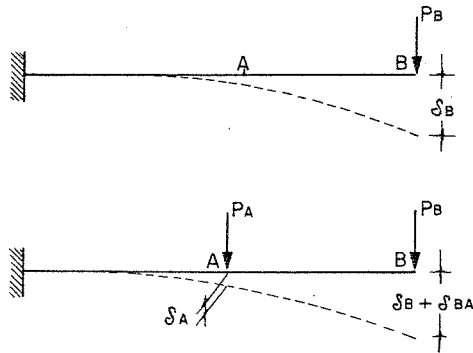


fig.15

El trabajo total de las fuerzas aplicadas es:

$$W = \frac{1}{2} P_B \delta_B + \frac{1}{2} P_A \delta_A + P_B \delta_{BA}$$

por lo tanto, igualando las expresiones del trabajo total, se tiene:

$$\frac{1}{2} P_A \delta_A + \frac{1}{2} P_B \delta_B + P_A \delta_{AB} = \frac{1}{2} P_B \delta_B + \frac{1}{2} P_A \delta_A + P_B \delta_{BA}$$

de donde:

$$P_A \delta_{AB} = P_B \delta_{BA}$$

## 2.5 TEOREMA DE MAXWEL

Considérese el marco mostrado en la Fig. 16 al cual se le aplica una carga  $P_A$  en el punto A y después, al mismo marco se le aplica una carga  $P_B$  en el punto B.

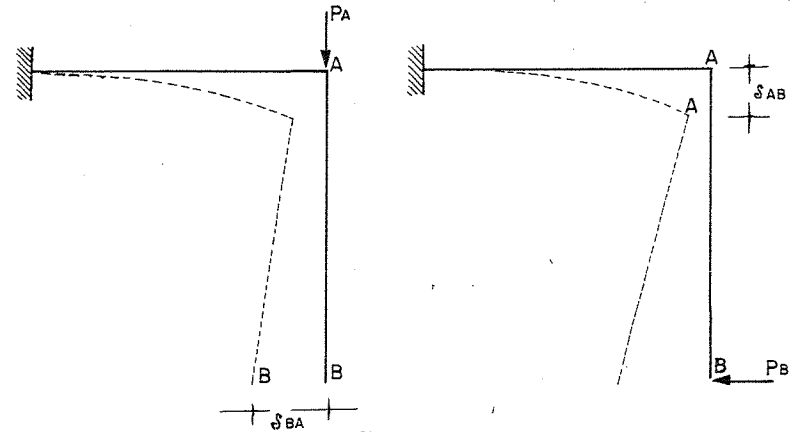


fig.16



según la Fig. 16  $\delta_{BA}$  es el desplazamiento producido por  $P_A$  y tiene la dirección de  $P_B$ .

Y  $\delta_{AB}$  es el desplazamiento producido por  $P_B$  y tiene la dirección de  $P_A$ .

Por el teorema de Betti se tiene:

$$P_A \delta_{AB} = P_B \delta_{BA}$$

Según Maxwell si  $P_A$  es igual a  $P_B$ , se tiene:

$$\delta_{AB} = \delta_{BA}$$

por lo tanto, puede enunciarse que:

"El desplazamiento en un punto A (en la dirección de la fuerza aplicada en A) debido a la aplicación de una fuerza  $P$  en un punto B, es igual al desplazamiento en el punto B (en la dirección de la fuerza aplicada en B) debido a la aplicación de una fuerza  $P$  en el punto A".

El teorema anterior también es válido para el caso de rotaciones o de combinaciones entre desplazamiento lineal y rotaciones. Un caso como el que se muestra en la Fig. 17 aclarará lo anterior.

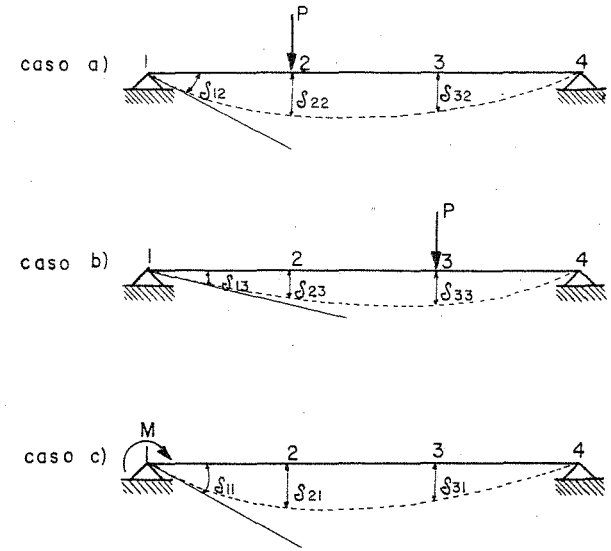


fig. 17

En los casos a) y b) se tiene

$$P \delta_{23} = P \delta_{32}$$

entonces

$$\delta_{23} = \delta_{32}$$

En los casos a) y c) se tiene

$$P \delta_{21} = M \delta_{12}$$

si P y M tienen la misma magnitud, entonces

$$\delta_{21} = \delta_{12}.$$

En los casos b) y c) se tiene

$$P\delta_{31} = M\delta_{13}$$

si P y M tienen la misma magnitud, entonces:

$$\delta_{31} = \delta_{13}$$

## 2.6 METODO DEL TRABAJO VIRTUAL

Es un método muy versátil para calcular desplazamientos en las estructuras. Estos desplazamientos pueden ser debidos a cargas - de cualquier tipo, cambios de temperatura, contracciones en el material estructural o errores de fabricación.

La expresión básica para el método del trabajo virtual ya se vió anteriormente y es:

$$\text{Trabajo virtual externo} = \text{Trabajo virtual interno}$$

$$W_e = W_i$$

En la ecuación anterior se puede expresar el primer término como el producto de una carga conocida por el desplazamiento buscado. El segundo término se puede expresar en función de los elementos mecánicos de la estructura, lo cual se hará enseguida.

Considérese la armadura mostrada en la Fig. 18 la cual está sujeta a un sistema de cargas P, y en la cual se desea calcular el desplazamiento vertical  $\delta_{VA}$  en el punto A.

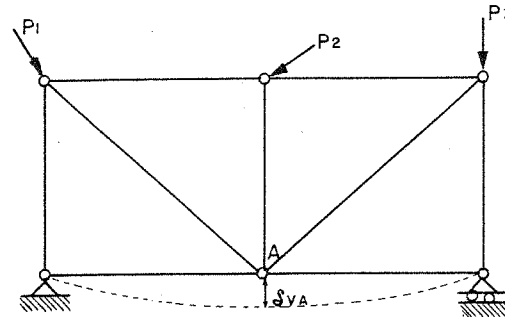


fig.18

Considérese ahora la misma armadura sujeta a una carga F en el punto A en la dirección de  $\delta_{VA}$ .

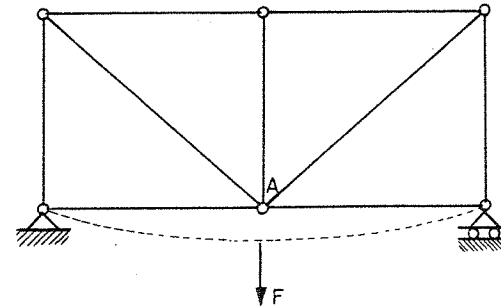


fig. 19

Si se denominan como  $N$  las fuerzas axiales en los elementos debidas al sistema de cargas  $P$ , y como  $n$  a las fuerzas axiales en los elementos debidas a la carga  $F$ , se tiene, según Betti que:

$$W_e = \frac{1}{2} F \delta_{VA}$$

$$W_i = \frac{1}{2} \sum N \left( \frac{nL}{AE} \right)$$

donde el término con paréntesis es el alargamiento o acortamiento de cada elemento de la estructura debido a la aplicación de la carga  $F$ . Por lo tanto

$$\frac{1}{2} F \delta_{VA} = \frac{1}{2} \sum \frac{NnL}{AE}$$

Si se da a  $F$  el valor unitario (puede ser cualquier valor) se tendrá que

$$\delta_{VA} = \sum \frac{NnL}{AE}$$

En forma semejante se pueden establecer las expresiones del trabajo virtual interno para los demás elementos mecánicos y se obtiene:

$$W_i = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx \quad (\text{flexión})$$

$$W_i = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{CVV}{GA} dx \quad (\text{cortante})$$

$$W_i = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{Tt}{GJ} dx \quad (\text{torsión})$$

## 2.7 PRIMER TEOREMA DE CASTIGLIANO

Este teorema sirve para determinar desplazamientos en cualquier dirección en una estructura.

Considérese la Fig. 20 mostrada en la cual las fuerzas  $P$  y  $Q$  se aplican gradual y simultáneamente.

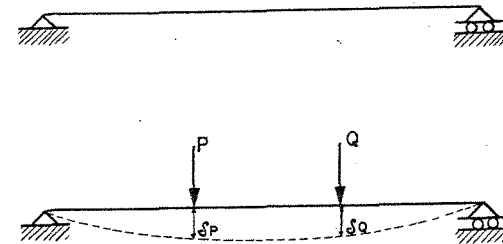


fig. 20

El trabajo efectuado por  $P$  y  $Q$  es:

$$W = \frac{P\delta_P}{2} + \frac{Q\delta_Q}{2} \quad \text{-----(a)}$$

Si se aumenta la fuerza  $P$  en  $dP$  (Fig. 21) con  $P$  y  $Q$  en posición, el incremento del trabajo o energía de deformación interna es:

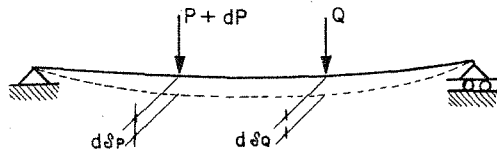


fig. 21

$$dW = \left[ \frac{P + (P + dP)}{2} \right] d\delta_P + Q d\delta_Q$$

Si se deprecian los productos diferenciales se tiene

$$dW = P d\delta_P + Q d\delta_Q \text{----- (b)}$$

También se puede valorar  $dW$  de la forma siguiente: considérese que se aplican  $P + dP$  y  $Q$  gradual y simultáneamente, entonces el trabajo total efectuado es:

$$W_T = \left( \frac{P + dP}{2} \right) (\delta_P + d\delta_P) + \frac{Q}{2} (\delta_Q + d\delta_Q)$$

despreciando los productos diferenciales

$$W_T = \frac{P\delta_P}{2} + \frac{Q\delta_Q}{2} + \frac{\delta_P dP}{2} + \frac{P d\delta_P}{2} + \frac{Q d\delta_Q}{2} \text{----- (c)}$$

pero

$$W_T = W + dW$$

o sea

$$dW = W_T - W$$

y de las ecuaciones (a) y (c) se obtiene

$$dW = \frac{\delta_P dP}{2} + \frac{P d\delta_P}{2} + \frac{Q d\delta_Q}{2}$$

si se sustituye (b) en la expresión anterior

$$dW = \frac{\delta_P dP}{2} + \frac{dW}{2}$$

o sea

$$dW = \int_P dP$$

de donde

$$\int_P = \frac{dW}{dP}$$

que puede escribirse como

$$\delta P = \frac{\partial W}{\partial P}$$

Por todo lo anterior puede enunciarse que:

"La derivada parcial de la energía total de deformación con respecto a una fuerza P, es igual al desplazamiento (producido por el sistema de fuerzas dado) medido en la dirección de la fuerza P"

El teorema anterior puede resumirse en las expresiones siguientes:

$$\delta P = \frac{\partial W_i}{\partial P} \quad (\text{lineal})$$

$$\delta M = \frac{\partial W_i}{\partial M} \quad (\text{rotación})$$

$$\delta P = \frac{\partial}{\partial P} \int \frac{N^2 dx}{2AE} = \int N \left( \frac{\partial N}{\partial P} \right) \frac{dx}{AE} \quad (\text{axial})$$

$$\delta P = \frac{\partial}{\partial P} \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \int M \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI} \quad (\text{flexión})$$

$$\delta P = \frac{\partial}{\partial P} \int \frac{CV^2 dx}{2GA} = \int CV \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right) \frac{dx}{GA} \quad (\text{cortante})$$

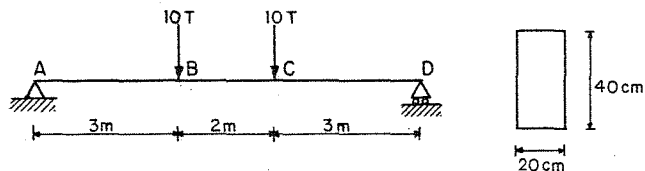
$$\delta P = \frac{\partial}{\partial P} \int \frac{T^2 dx}{2GJ} = \int T \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right) \frac{dx}{GJ} \quad (\text{torsión})$$

VALORES DE  $\int M_i M_k dL$

	1	2	3	4	5	6	7
1	$L$	$\frac{1}{2} L$	$\frac{1}{2} L$	$\frac{1}{3} L$	$\frac{2}{3} L$	$\frac{1}{3} L$	$\frac{1}{2} L$
2	$\frac{1}{2} L$	$\frac{1}{3} L$	$\frac{1}{6} L$	$\frac{1}{3} L$	$\frac{5}{12} L$	$\frac{1}{4} L$	$\frac{1}{6} L$
3	$\frac{1}{2} L$	$\frac{1}{6} L$	$\frac{1}{6} L$	$\frac{1}{3} L$	$\frac{1}{4} L$	$\frac{1}{12} L$	$\frac{1}{6} L$
4	$\frac{1}{2} L$	$\frac{1}{6} L$	$\frac{1}{6} L$	$\frac{1}{3} L$	$\frac{1}{3} L$	$\frac{1}{12} L$	$\frac{1}{6} L$
5	$\frac{2}{3} L$	$\frac{1}{3} L$	$\frac{1}{3} L$	$\frac{8}{15} L$	$\frac{7}{15} L$	$\frac{1}{5} L$	$\frac{1}{3} L$
6	$\frac{2}{3} L$	$\frac{1}{4} L$	$\frac{1}{12} L$	$\frac{7}{15} L$	$\frac{3}{10} L$	$\frac{1}{12} L$	$\frac{1}{12} L$
7	$\frac{2}{3} L$	$\frac{1}{4} L$	$\frac{1}{12} L$	$\frac{7}{15} L$	$\frac{2}{15} L$	$\frac{1}{15} L$	$\frac{1}{12} L$
8	$\frac{1}{3} L$	$\frac{1}{4} L$	$\frac{1}{12} L$	$\frac{1}{5} L$	$\frac{3}{10} L$	$\frac{1}{12} L$	$\frac{1}{12} L$
9	$\frac{1}{3} L$	$\frac{1}{12} L$	$\frac{1}{12} L$	$\frac{1}{5} L$	$\frac{2}{30} L$	$\frac{1}{30} L$	$\frac{1}{12} L$
10	$\frac{1}{2} L$	$\frac{1}{6} L$	$\frac{1}{6} L$	$\frac{1}{3} L$	$\frac{1}{12} L$	$\frac{1}{12} L$	$\frac{1}{3} L$

EJEMPLOS  
ENERGÍA DE DEFORMACION

Problema 1.- Obtener la energía de deformación debida a flexión y cortante de la siguiente viga, y calcular la relación  $u_b/u_s$



Por equilibrio se tiene:  $R_A = R_D = 10 \text{ Tn}$

La ecuación de momentos es

$$M = 10x \Big|_0^3 + 10(3+x) - 10x \Big|_0^2 + 10(5+x) - 10(2+x) - 10x \Big|_0^3$$

$$M = 10x \Big|_0^3 + 30 \Big|_0^2 + 30 - 10x \Big|_0^3$$

La ecuación de cortante es

$$V = 10 \Big|_0^3 + 0 \Big|_0^2 - 10 \Big|_0^3$$

La energía de deformación se valúa como

$$u_b = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx ; u_s = \frac{1}{2} C \int \frac{V^2}{GA} dx \quad \text{--- (A)}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(0.2)(0.4)^3}{12} = 0.00107 \text{ m}^4 ; A = 0.2(0.4) = 0.08 \text{ m}^2 ;$$

Sustituyendo en (A)

$$u_b = \frac{1}{2E(0.00107)} \left[ \int_0^3 (10x)^2 dx + \int_0^2 (30)^2 dx + \int_0^3 (30 - 10x)^2 dx \right]$$

$$u_b = \frac{16.82 \times 10^5}{E} \text{ T - m}$$

La energía de deformación por cortante es

$$u_s = \frac{1}{2} \frac{C}{G(0.08)} \left[ \int_0^3 (10)^2 dx + \int_0^2 (-10)^2 dx \right] ; C = 1.2$$

$$u_s = \frac{4500}{G} \text{ T - m}$$

Cálculo de la relación  $u_b/u_s$

Se tiene  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  ; tomando  $\nu = 0.15$

$$G = \frac{E}{2.3} ; \frac{G}{E} = \frac{1}{2.3}$$

o sea que:

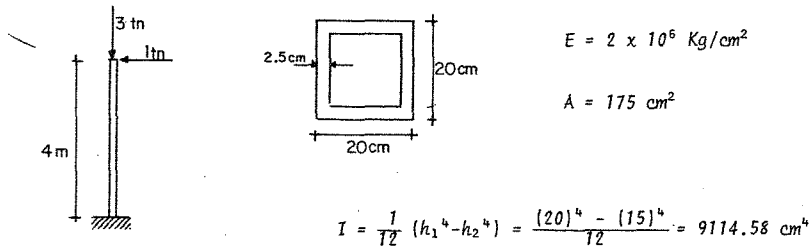
$$\frac{u_b}{u_s} = \frac{16.82 \times 10^5 \times (G)}{4500 \times (E)} = \frac{16.82}{4500} \left( \frac{1}{2.3} \right) \times 10^5$$

$$u_b/u_s = 162.512$$

Lo anterior indica, que la energía de deformación debida a flexión es 162.51 veces la energía de deformación debida a cortante. Por lo tanto, para fines de cálculo, se puede despreciar  $u_s$

Problema 2.- Una columna está sometida a una fuerza horizontal de 1 ton. y otra vertical de 3 ton. como se muestra en la figura.

Sin considerar peso propio, determine la energía de deformación de la estructura.



La energía total es  $u = u_n + u_b$

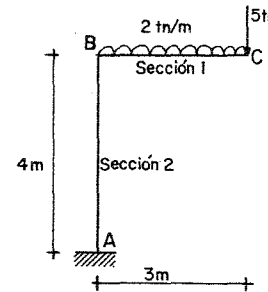
$$u_n = \frac{P\Delta}{2} ; \Delta = \frac{PL}{AE} ; u_n = \frac{P^2 L}{2AE}$$

$$u_n = \frac{(3000)^2 (400)}{2 \times 2 \times 10^6 \times 175} = 5.143 \text{ kg-cm}$$

$$u_b = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{2} \int_0^{400} \frac{(1000x)^2}{EI} dx = \frac{x^3 \times 10^6}{6EI} \Big|_0^{400} = 585.14 \text{ kg-cm}$$

$$u_b = 585.14 + 5.143 = 590.28 \text{ kg-cm}$$

Problema 3.- Determinar la energía de deformación de la siguiente estructura.



Sección 1 I12" Líviana

Sección 2 Cajón de 90x70x5 cm

$$E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$I_1 = 8582.9 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = 1692499.98 \text{ cm}^4$$

Cálculo de momentos

$$M_{CB} = \frac{wX^2}{2} + 5X = \frac{20X^2}{2} + 5000X$$

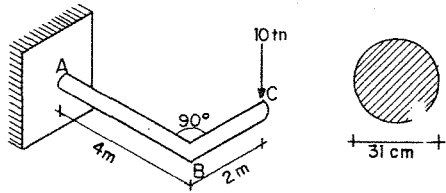
$$M_{BA} = 2.4 \times 10^6 \text{ kg-cm}$$

La energía de deformación es

$$u_b = \int_0^{300} \left( \frac{20X^2}{2} + 5000X \right)^2 \frac{dX}{2EI} + \int_0^{400} \frac{(2.4 \times 10^6)^2}{2EI} dx$$

$$u_b = 7320.52 + 340.32 = 7660.84 \text{ kg-cm}$$

Problema 4.- Calcular la energía de deformación para la siguiente figura.



$$u = 0.333$$

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$I = \frac{\pi R^4}{4} = 4.5333 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = 90666 \text{ cm}^4$$

La energía de deformación vale:  $u = u_b + u_T$

$$u = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx + \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx$$

Cálculo de M y T

$$M_{BA} = -10x \quad \text{origen en B}$$

$$M_{CB} = -10x \quad \text{origen en C}$$

$$u_b = \int_0^4 \frac{(-10x)^2 dx}{2EI} + \int_0^2 \frac{(-10x)^2 dx}{2EI} = \frac{10^2 \times 4^3}{6EI} + \frac{10^2 \times 2^3}{6EI} = \frac{1200}{EI}$$

$$u_T = \int_0^4 \frac{(20)^2}{2GJ} dx = \frac{800}{GJ}$$

$$\therefore u = \frac{1200}{EI} + \frac{800}{GJ} \quad \text{energía de deformación total}$$

$$EI = 2.1 \times 10^6 \times 45.333 \times 10^3 = 9520 \text{ ton-m}^2$$

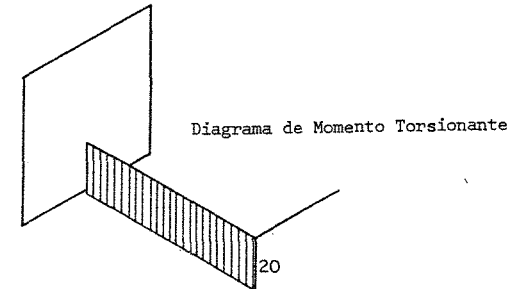
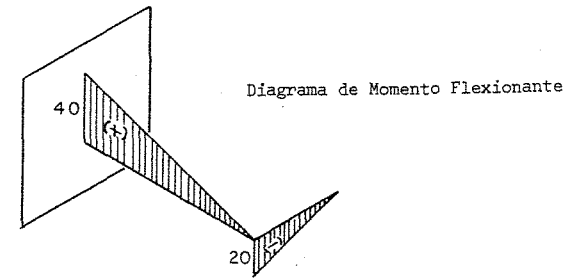
$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{2.1 \times 10^6}{2(1+0.333)} = 0.78 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$GJ = 0.78 \times 10^6 \times 90666 = 7080 \text{ ton-m}^2$$

Sustituyendo

$$u = \frac{1200}{9520} + \frac{800}{7080} = 0.24 \text{ tn-m}$$

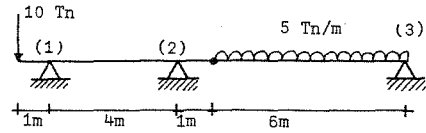
En las siguientes figuras se muestran los diagramas de momento flexionante y torsión.





PRINCIPIO DE LOS DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES AL CALCULO DE ELEMENTOS MECANICOS.

Problema 1.- Encontrar  $R_1, R_2, R_3$ , aplicando el principio de desplazamientos virtuales.



$\delta =$  desplazamiento virtual

Se supone que el apoyo (3) se desplaza  $\delta$ , entonces:

$$W = R_3 \delta - (5 \times 6) \delta / 2 = 0$$

$$R_3 = 15 \text{ ton.}$$

Si (2) se desplaza  $\delta$

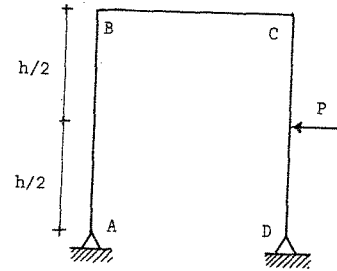
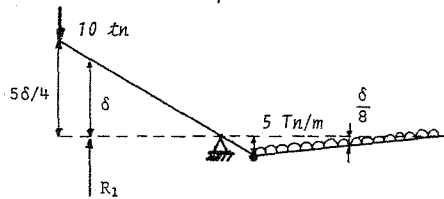
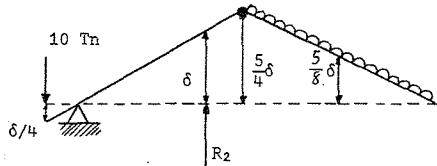
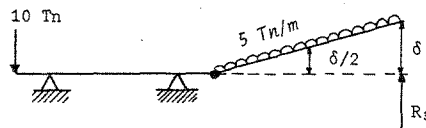
$$W = R_2 \delta + 10 \frac{\delta}{4} - \frac{150}{8} \delta = 0$$

$$R_2 = 16.25 \text{ ton.}$$

Si (1) se desplaza  $\delta$

$$W = R_1 \delta - 10 \times \frac{5}{4} \delta + (5 \times 6) \frac{\delta}{8} = 0$$

$$R_1 = 8.75 \text{ ton.}$$



Introduciendo una articulación en el punto de interés

$$W = M\alpha + (P) \delta / 2$$

$$\alpha = \delta / h$$

Sustituyendo en W

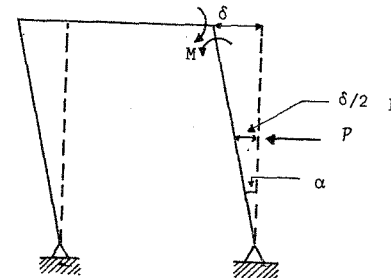
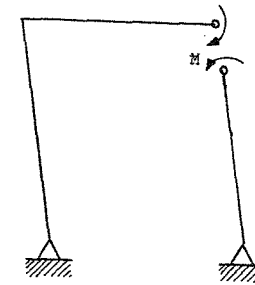
$$W = M \delta / h + P \delta / 2$$

Como debe existir equilibrio  $W=0$

$$M \delta / h + P \delta / 2 = 0$$

$$M = - Ph / 2$$

El signo negativo indica que el sentido del momento es contrario al supuesto

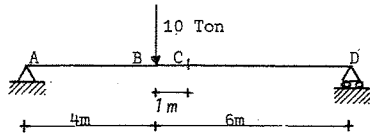


APLICACION DEL TEOREMA DE CASTIGLIANO AL CALCULO DE  
DESPLAZAMIENTOS.

"La derivada parcial de la Energía de Deformación, respecto a una carga P, es igual al valor del desplazamiento bajo el punto de aplicación y en la dirección de P".

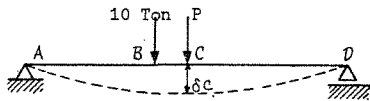
$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial M}{\partial P} \delta P \quad (1) \quad (\text{desplazamiento})$$

Problema 1.- Calcular la flecha del punto c en la viga mostrada.



$$\delta_c = \int \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

Se puede suponer



P es ficticia y sirve para hacer la derivación parcial y posteriormente se le da su valor nulo

Cálculo de momentos:

Tramo A-B

$$M = (6 + P/2)X = 6X + (P/2)X$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{X}{2}; \quad (M) \quad \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{PX^2}{4} + 2X^2$$

Tramo B-C (origen en A)

$$M = (6 + P/2)X - 10(X-4) = 6X + (P/2)X - 10X + 40$$

$$M = (P/2)X - 4X + 40$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{X}{2}; \quad (M) \quad \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{PX^2}{4} - 2X^2 + 20X$$

Tramo D-C (origen en D)

$$M = (4 + P/2)X = (P/2)X + 4X$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{X}{2}; \quad (M) \quad \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{PX^2}{4} + 2X^2$$

Integrando las ecuaciones de momentos y sabiendo que P = 0 se tiene

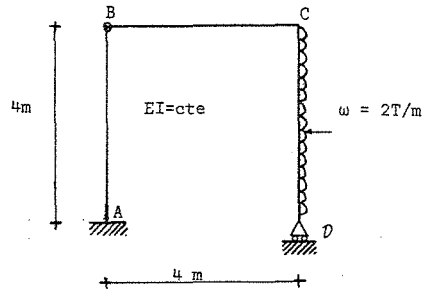
$$\delta = \int_0^4 \frac{3X^2}{EI} dx + \int_4^5 \frac{[-2X^2 + 20X]}{EI} dx + \int_0^5 \frac{2X^2}{EI} dx =$$

$$= \frac{X^3}{EI} \Big|_0^4 + \left[ \frac{-(2/3)X^3 + 10X^2}{EI} \right]_4^5 + \frac{2X^3}{3EI} \Big|_0^5 =$$

$$= \left[ 64 + \left[ \frac{-83.33 + 250 + 42.67 - 160}{EI} \right] + 83.33 \right] \frac{1}{EI}$$

$$\therefore \delta = \frac{196.67}{EI}$$

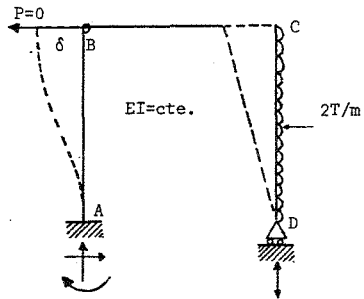
Problema 2.- Determinar el desplazamiento horizontal del nudo B de la estructura mostrada



Se considerará únicamente efectos de flexión

$$\delta_{HB} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

Supóngase la siguiente condición



El valor que se le a dado a P, es arbitrario y una vez que se ha de rivado respecto a P se le da dicho valor.

Cálculo de las reacciones y momentos en el marco.

$$\Sigma M_A = R_D (4) - P(4) - 2(4) (2); \quad R_D = P + 4 = A_y$$

$$\Sigma F_x = A_x - P - 2(4); \quad A_x = P + 8$$

$$\Sigma M_B = M_A - A_x(4); \quad M_A + 4(P+8) = \frac{4P + 32}{4} = M_A$$

Momentos

Tramo A-B (origen A)

$$M = 4P + 32 - (P+8)X = P(4-X) - 8X + 32$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = 4-x; \quad M \frac{\partial M}{\partial P} = 8X^2 - 64X + 128 + P(X^2 - 8X + 16)$$

Tramo B-C (origen B)

$$M = (P+4)X = PX + 4X; \quad \frac{\partial M}{\partial P} = X$$

$$M \frac{\partial M}{\partial P} = 4X^2 + PX^2$$

Tramo C-D (origen C)

$$M = (P+4)4 - PX - X^2 = P(4-X) - X^2 + 16$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = 4 - X; \quad M \frac{\partial M}{\partial P} = X^3 - 4X^2 - 16X + 64 + P(X^2 - 8X + 16)$$

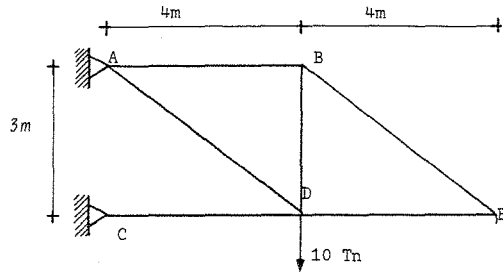
Integrando las ecuaciones de momentos y sabiendo que P = 0

$$(EI) \delta_{HB} = \int_0^4 \{8X^2 - 64X + 128\} dx + \int_0^4 4X^2 dx + \int_0^4 \{X^3 - 4X^2 - 16X + 64\} dx$$

$$= \frac{8X^3}{3} - \frac{64X^2}{2} + 128X + \frac{4}{3}X^3 + \frac{X^4}{4} - \frac{4}{3}X^3 - \frac{16X^2}{2} + 64X \Big|_0^4$$

$$= \frac{X^4}{4} + \frac{8}{3}X^3 - 40X^2 + 192X \Big|_0^4; \quad \delta_{HB} = \frac{362.67}{EI}$$

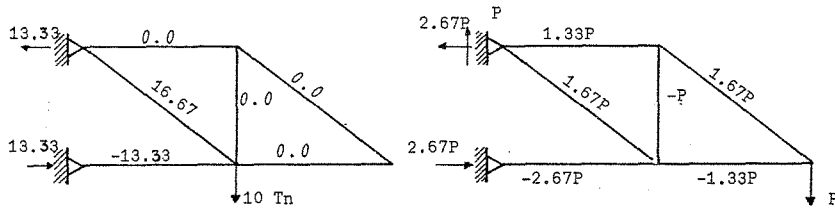
Problema 3.- Calcular el desplazamiento para la armadura mostrada en el punto "E"



Isostática

Se establecen las fuerzas axiales en las barras en función de una carga "P" aplicada en (E) y después derivar respecto a ella.

Se tendrán que resolver las 2 armaduras siguientes y después particularizar el valor de "P".



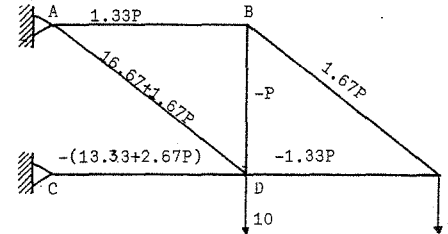
Para el caso de armaduras, las fuerzas axiales se consideran que son constantes para cada una de las barras, en ese caso la integral

$$\delta \dot{\epsilon} = \int \frac{N}{AE} \left( \frac{\partial N}{\partial P} \right) dx$$

se convierte en suma de integrales para cada barra, los cuales se pueden sumar como:

$$\delta \dot{\epsilon} = \sum \frac{N}{AE} \left( \frac{\partial N}{\partial P} \right) L \quad \dots (1)$$

Por superposición de efectos de las dos armaduras anteriores, se tiene



Para aplicar la expresión (1) es conveniente disponer de una tabla como sigue

1	2	3	4	5	6
Barra	L	N	$\frac{\partial N}{\partial P}$	$N \frac{\partial N}{\partial P}$	$N \frac{\partial N}{\partial P} L$
AB	4	1.33P	1.33	0.0	0.0
BE	5	1.67P	1.67	0.0	0.0
AD	5	16.67+1.67P	1.67	27.84	139.2
BD	3	-P	-1	0.0	0.0
CD	4	-13.33-2.67P	-2.67	35.59	142.36
DE	4	-1.33P	-1.33	0.0	0.0
				$\Sigma$	281.56

En la columna (5) se debe considerar el valor real de "P" que en este -

caso vale 0 tn.

Por lo tanto, el desplazamiento buscado será

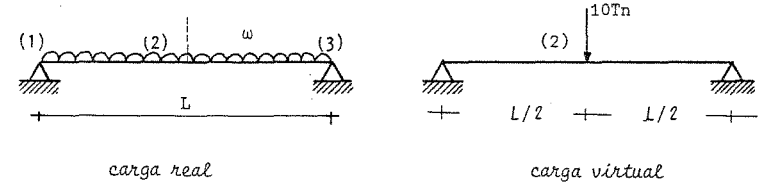
$$\delta_{VE} = \frac{281156}{AE} \text{ hacia abajo}$$

El signo de la sumatoria está asociado a la dirección en que se supuso

"P"

## PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL

Problema 1.- Encontrar  $\Delta v_2$  de la siguiente viga aplicando el principio del trabajo virtual.



Aplicando una fuerza virtual de 10 tn. en el punto de interés:

Cálculo de momentos en el punto de interés

$$M_R = \frac{wL}{2} x - \frac{wx^2}{2}; M_v = 5x; 0 \leq x \leq L/2$$

El trabajo externo desarrollado es:  $W_{ve} = \frac{1}{2}(10)\Delta v_2$

El trabajo virtual interno debido a flexión es:

$$W_{vi} = \int_0^L \frac{M_R M_v}{2EI} dx$$

$$W_{vi} = \int_0^{L/2} \frac{(1/2 WLx - 1/2 wx^2) 5x}{2EI} dx + \int_{L/2}^L \frac{(1/2 WLx - 1/2 wx^2) 5x}{2EI} dx$$

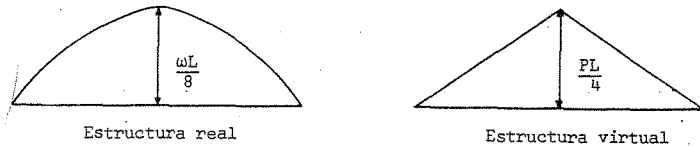
$$W_{vi} = \frac{12.5}{792} \frac{wL^4}{EI} \text{ Trabajo interno}$$

Aplicando el teorema de Betti se tiene

$$w_{vi} = w_{ve}; \quad 5\Delta v_2 = \frac{12.5}{192} \frac{WL^4}{EI}; \quad \Delta v_2 = \frac{5}{384} \frac{WL^4}{EI}$$

Otra forma de solución es usando las tablas de integración.

Los diagramas de momentos para cada una de las cargas son.



Usando la columna 7 y renglón 5 de la tabla de integración.

$$w_{vi} = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{3} L (1+\alpha\beta) \frac{WL^2}{8} \frac{PL}{4} \right]; \quad \alpha s = \beta s = 1/2 s; \quad \alpha = \beta = 1/2$$

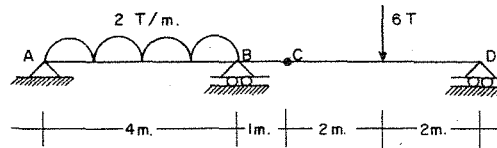
$$w_{vi} = \frac{1}{2EI} \left[ 0.333 L (1 + 0.25) 0.313 WL^3 \right] = \frac{1}{2EI} \times \frac{12.5}{96} WL^4$$

Según Betti  $w_{ve} = w_{vi}$

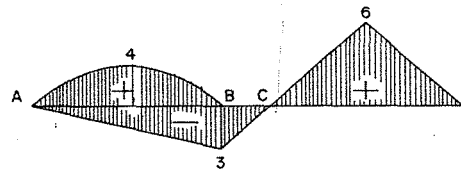
$$\frac{10}{2} \Delta v_2 = \frac{1}{2EI} \frac{12.5}{96} WL^4; \quad \Delta v_2 = \frac{5}{384} \frac{WL^4}{EI}$$

En los siguientes ejercicios se suprimirá el factor 1/2 que aparece en las expresiones de  $w_{vi}$  y  $w_{ve}$ .

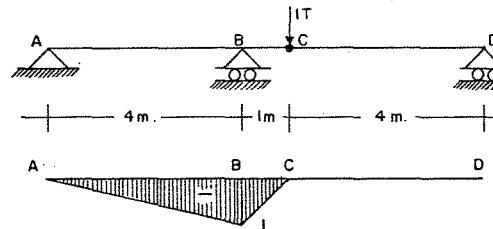
Problema 2.- Determina el giro relativo y el desplazamiento vertical en el punto C.



El diagrama de momentos es el siguiente



Aplicando una carga virtual en el punto C



$$w_{ve} = 1\Delta v_c$$

Usando las tablas para el cálculo de  $wv_i$

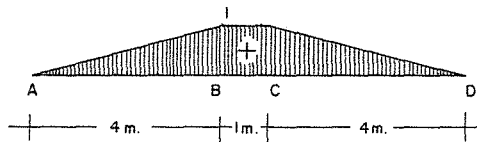
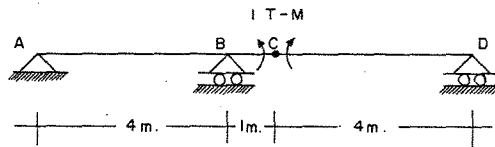
$$wv_i = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3} (1) (-3) (-1) + \frac{1}{3} (4) (-3) (-1) + \frac{1}{3} (4) (-1) (4) \right] = -\frac{0.33}{EI}$$

R2 \* C2      R2 \* C2      R2 \* C4

R2 = renglón 2      C2 = columna 2 ----- etc.

Como  $wv_e = wv_i$ ;  $\Delta v_e = -\frac{0.3}{EI} \uparrow$

Ahora se aplicará un momento virtual en el mismo punto



Usando las tablas de integración:

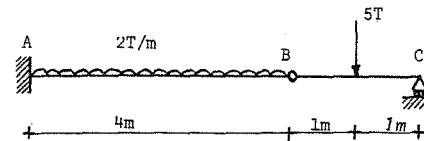
$$EI wv_i = \frac{1}{6} (4) (1+0.5) (1) (6) + \frac{1}{2} (1) (1) (-3) + \frac{1}{3} (4) (1) (-3) + \frac{1}{3} (4) (1) (4)$$

R3 \* C7      R3 \* C1      R2 \* C2      R2 \* C4

$$EI wv_i = 5.83; \theta_c = \frac{5.83}{EI}$$

Problema 3.- Para la viga que se muestra enseguida, determinar:

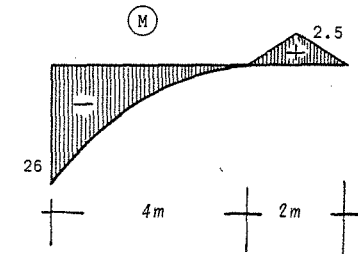
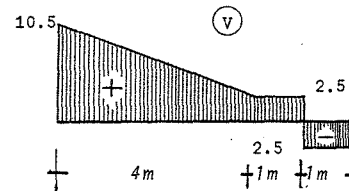
- El desplazamiento vertical del punto B tomando en cuenta únicamente flexión
- Desplazamiento vertical del punto B considerando los efectos de flexión y cortante
- Calcular el giro a la izquierda de la articulación considerando los efectos por flexión



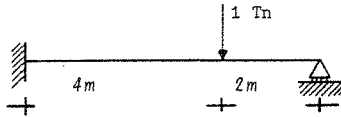
I 12" Liviana

$$EI = 179.64 \times 10^8 \text{ kg-cm}^2$$

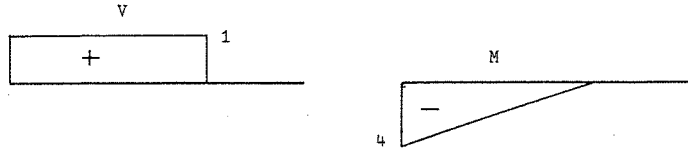
Los diagramas de fuerza cortante y momento son:



Aplicando una carga virtual en el punto B



Los diagramas de cortante y momento son:



a).- Integrando la ecuación de momentos

$$\Delta v_{B_1} = \int_0^4 \frac{M m}{EI} dx = \int_0^4 \frac{(2.5X + X^2)(1)}{EI} x dx$$

$$= \left[ \frac{2.5 X^3}{3} + \frac{X^4}{4} \right] \frac{1}{EI} = \frac{117.33 \times 10^9}{EI} \text{ kg.cm}^3;$$

$$EI = 179.64 \times 10^8 \text{ kg.cm}^2; \Delta v_B = \frac{117.33 \times 10^9}{179.64 \times 10^8} = 6.531 \text{ cm}$$

b).-  $\Delta v_{B_2} = \int_0^4 \frac{V v dx}{CAG} = \frac{C}{2} (4) (10.5 + 2.5) 1 = \frac{26}{AG} C$

$$R I^3 C$$

$$C = 2.7$$

$$A = 59.74 \text{ cm}^2$$

$$G = 770\,000 \text{ kg/cm}^2; AG = 46.0 (10)^3 \text{ ton}$$

$$\Delta v_{B_2} = 0.152 \text{ cm}$$

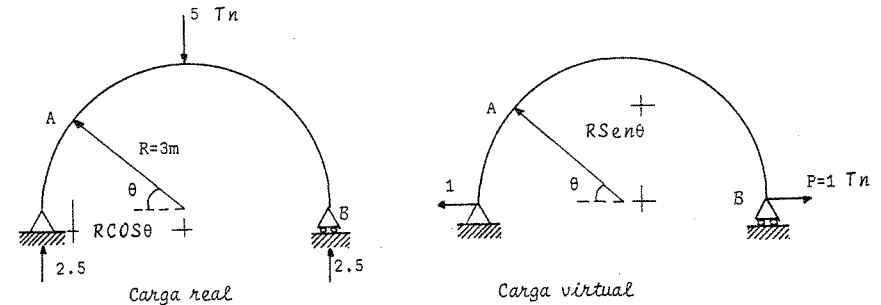
El desplazamiento total es  $\Delta v_{B_1} + \Delta v_{B_2} = 6.68 \text{ cm}$

c).- Suponiendo un momento unitario en B

$$\alpha = \int_0^4 \frac{(2.5X + X^2)(1)}{EI} dx = \frac{41.33}{EI} = 0.023 \text{ rad}$$

$$\alpha = 1.318^\circ$$

Problema 4.- Obtener el desplazamiento horizontal del nudo B



Tomando momentos en el punto A

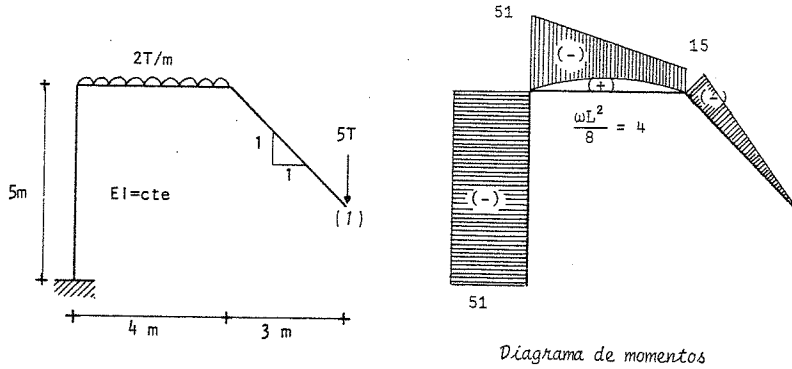
$$M_A = 2.5 (R - R \cos \theta); \quad m_A = 1 \sin \theta (R); \quad dx = R d\theta$$

$$\Delta_{HB} = 2 \cdot \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} M_A m_A dx = \frac{2}{EI} \int_0^{\pi/2} 2.5 R^3 (1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta$$

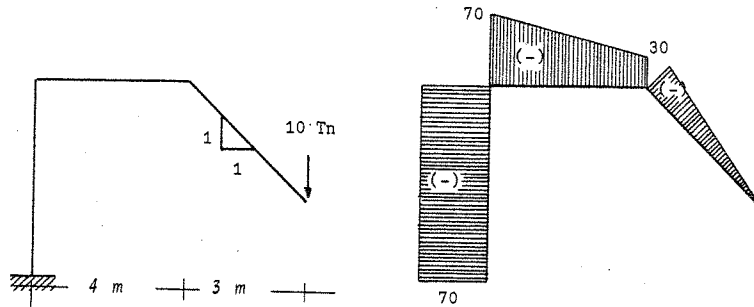


$$\Delta_{HB} = \frac{5 R^3}{EI} \int_0^{\pi/2} (\sin\theta - \sin\theta\cos\theta) d\theta = \frac{67.5}{EI}$$

Problema 5.- Determine el desplazamiento vertical en el punto (1) del siguiente marco



Aplicando una carga virtual de 10 t en (1);  $W_{ve} = 10\Delta v_1$



$$EI \omega v_1 = \frac{1}{3}(4.24)(30)(15) + \frac{4}{6} \left[ (2)(15)(30) + 15(70) + 2(51)(70) + (51)(30) \right]$$

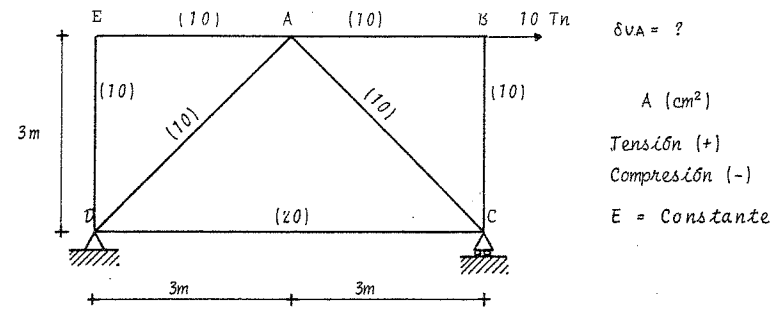
$R2 \cdot C2 \qquad R4 \cdot C3$

$$-(1/3) 4 (30+70)(4) + 5(51)(70) = 25032$$

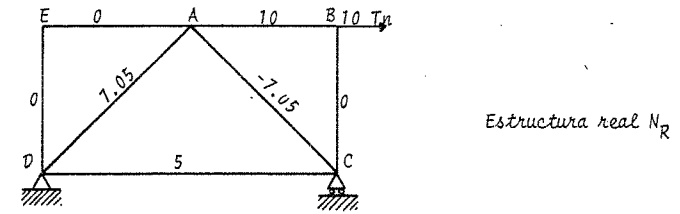
$R4 \cdot C4 \qquad R1 \cdot C1$

Cómo  $W_{ve} = \omega v_1$ ;  $\Delta v_1 = \frac{2502.5}{EI}$

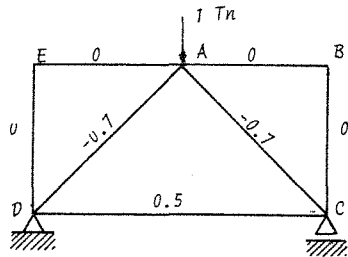
Problema 6.- Calcular el desplazamiento vertical en la siguiente armadura. Las áreas de cada barra aparecen entre paréntesis.



Se calculan las fuerzas en todas las barras en la estructura real.



Se aplica una carga virtual en el punto de interés y se calculan las fuerzas en las barras.



Estructura virtual  $N_v$

El trabajo interno desarrollado en cada barra es

$$w_{vi} = \int \frac{N_R N_v}{AE} dx = \Sigma \frac{N_R N_v}{AE} L$$

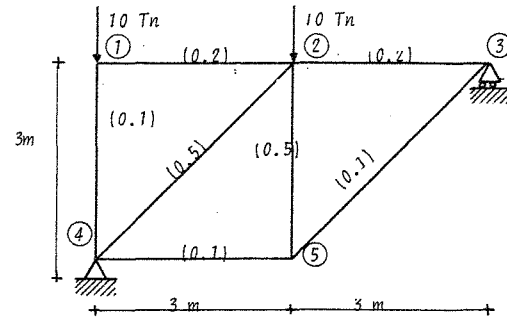
Para facilitar el cálculo se elabora la siguiente tabla

Barra	A	L	$N_R$	$N_v$	$\frac{N_R N_v}{A} L$
AB	10	300	10	0	0
BC	10	300	0	0	0
AE	10	300	0	0	0
ED	10	300	0	0	0
AD	10	424	-7.05	-0.7	-2092
AC	10	424	-7.05	-0.7	2092
CD	20	600	5	0.5	75

$$\Sigma = 75.0$$

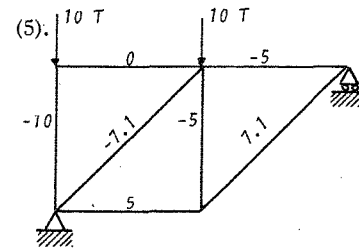
Como  $w_{ve} = w_{vi}$  ;  $\Delta v_A = \frac{75.0}{E}$

Problema 7.- Calcular el desplazamiento vertical del nudo 5 en la siguiente armadura. El área, en  $m^2$ , de cada barra aparecen entre paréntesis.

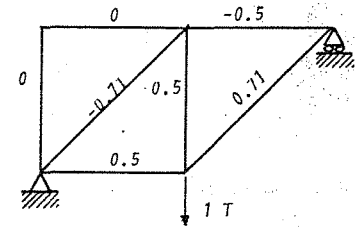


$E = \text{constante}$

Se calculan las fuerzas en las barras que componen la armadura, tanto para condiciones reales como para la carga virtual aplicada en el nudo 5



Estructura Real  $N_R$



Estructura Virtual  $N_v$

El trabajo interno desarrollado  $w_{vi}$  es igual a

$$w_{vi} = \Sigma \frac{N_R N_v}{AE} L ; w_{ve} = 1 \times \Delta v_5$$

se forma la siguiente tabla para el cálculo de  $\omega v_i$

Barra	A	L	$N_R$	$N_v$	$\frac{N_R N_v}{A} L$
1-2	0.2	3	0	0	0.0
2-3	0.2	3	-5	-0.5	37.5
4-5	0.1	3	5	0.5	75.0
4-1	0.1	3	-10	0	0.0
5-2	0.5	3	-5	0.5	-15.0
4-2	0.5	4.23	-7.1	-0.71	42.6
5-3	0.1	4.23	7.1	0.71	213.0

$\Sigma$  353.10

$$\text{Si } \omega v_e = \omega v_i ; \Delta v_s = \frac{353.1}{E}$$

## C A P I T U L O 4

### ESTABILIDAD Y GRADO DE INDETERMINACION DE ESTRUCTURAS

## ESTABILIDAD Y GRADO DE INDETERMINACION DE ESTRUCTURAS

La estabilidad y el grado de indeterminación de las estructuras se determina por el número y la disposición de sus apoyos, elementos y uniones. Puede hacerse por simple observación o por medio de fórmulas.

Las estructuras estables para casos particulares de carga, pero inestables para condiciones generales de carga son desde luego inestables (fig. 1).

Si las incógnitas de reacción son menores a 3 no se satisface el equilibrio y el sistema es inestable.

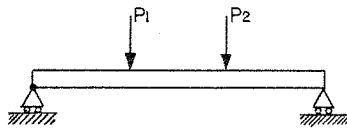


fig. 1

En la fig. 1 no se cumple equilibrio -- horizontal para un sistema cualquiera de cargas. También las incógnitas de reacciones son menores que tres.

Para que haya equilibrio estable en un cuerpo, como mínimo se requieren tres elementos de reacción. fig. 2.

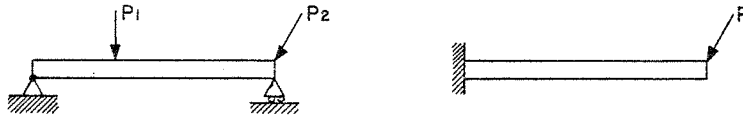


fig. 2

Se puede concluir que una estructura estáticamente determinada, es aquella cuyas reacciones se pueden calcular a partir de las ecuaciones de equili-

brio estático.

Se puede tener una estructura geoméricamente inestable, o sea aquella que tenga el número suficiente de reacciones para lograr la estabilidad pero colocadas incorrectamente. fig. 3.

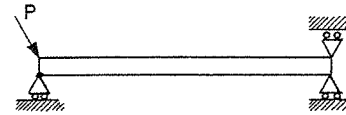


fig. 3

Por último, si el número de incógnitas de reacción es mayor que tres el sistema es estáticamente indeterminado. Será estable si no hay inestabilidad geométrica, siendo el exceso de incógnitas el grado de indeterminación (fig. 4).

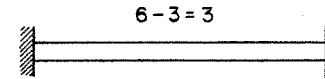


fig. 4

### Vigas

Si en una viga estable y estáticamente determinada se coloca un dispositivo de unión (articulación interna), ésta se hará inestable. Como la articulación colocada no tiene capacidad de resistir un momento esto implica imponer una condición al sistema actuante de fuerzas, esto es que el momento será nulo en la articulación,  $M = 0$  (fig. 5).

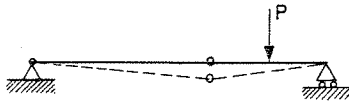


fig. 5

Para hacer estable una de estas estructuras, será necesario colocar por lo menos un elemento adicional de reacción (fig. 6).

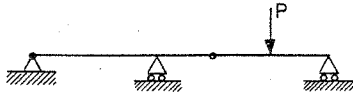


fig. 6

Establezcamos un criterio para calcular el grado de indeterminación y estabilidad de las vigas.

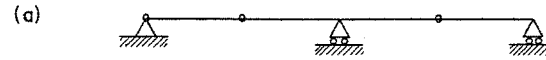
- a)- sí  $r < C + 3$ , la viga es inestable
- b)- sí  $r = C + 3$ , la viga es estáticamente determinada siempre y cuando no exista, inestabilidad geométrica.
- c)- sí  $r > C + 3$ , la viga es estáticamente indeterminada.

donde:

$r$  = número de elementos de reacción

$C$  = número de condiciones adicionales.

Ejemplos:



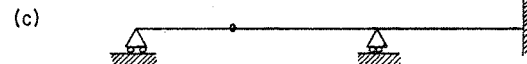
$$2 + 3 > 4$$

inestable



$$2 + 3 = 5$$

estáticamente determinada



$$1 + 3 < 5$$

estáticamente indeterminada

### Armaduras

En una armadura el número total de incógnitas será el número de barras más el número de elementos de reacción. Cada nudo tiene dos ecuaciones de equilibrio

Establezcamos un criterio para determinar la estabilidad y grado de indeterminación.

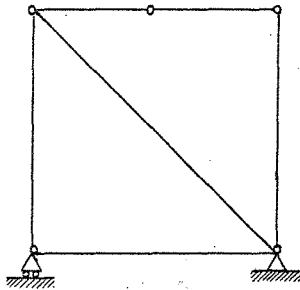
a). - si  $b + r < 2j$ , el sistema es inestable

b). - si  $b + r = 2j$ , el sistema es estáticamente determinado siempre y cuando sea estable

c). - si  $b + r > 2j$ , el sistema es estáticamente indeterminado--

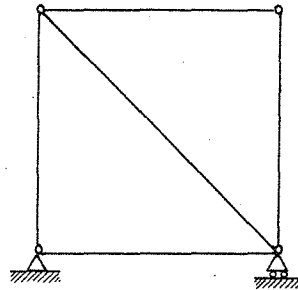
donde:  $b$  = número de barras;  $r$  = reacciones;  $j$  = nudos

Ejemplos:



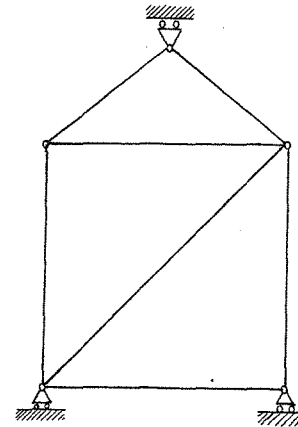
$$6 + 3 < 10$$

inestable



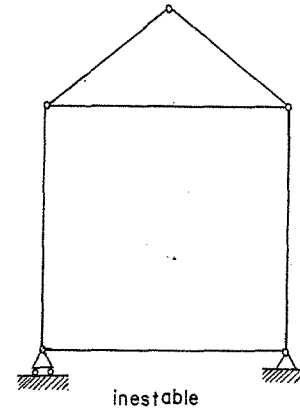
$$5 + 3 = 8$$

estáticamente determinada  
y estable



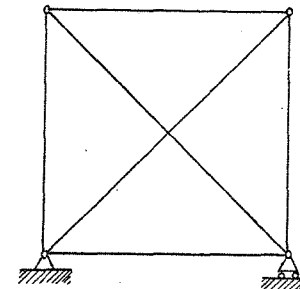
$$7 + 3 = 10$$

inestable  
no hay equilibrio  
horizontal



$$6 + 3 < 10$$

inestable



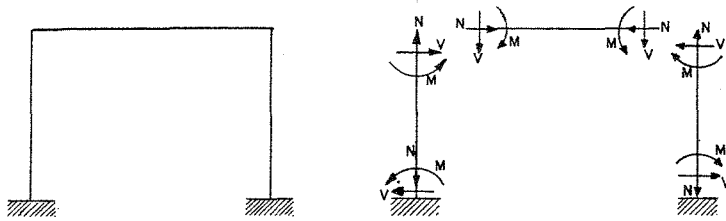
$$6 + 3 > 8$$

estable e indeterminada  
de 1º grado

Marcos

Un marco puede separarse en varios elementos.

(columnas y vigas).



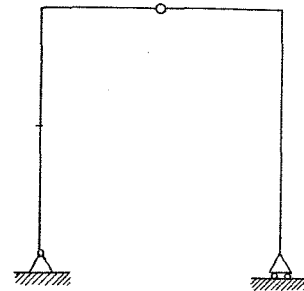
En una sección de un elemento existen tres magnitudes desconocidas ( N, V y M). Si se conocen estas cantidades en una sección pueden determinarse las correspondientes a otra sección cualquiera.

Si se considera: b = número total de elementos r = el número de elemento de reacciones, entonces el número total, de incógnitas independientes en un marco será  $(3b + r)$

Se puede establecer que:

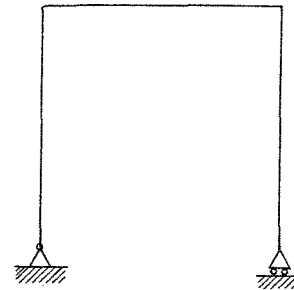
- a). - si  $3b + r < 3j + C$ , el marco es inestable
- b). - si  $3b + r = 3j + C$ , el marco es estáticamente determinado siempre que sea a la vez estable.
- c). - si  $3b + r > 3j + C$  el marco es estáticamente indeterminado

Ejemplos:



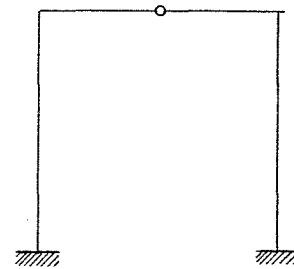
$$3(4) + 3 < 15 + 1$$

inestable



$$3(3) + 3 = 3(4)$$

estáticamente determinado



$$3(4) + 6 > 5(3) + 1$$

indeterminado de 2º grado

## METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

## 1.- INTRODUCCION,

El método de las flexibilidades (llamado también de las fuerzas) es básicamente la superposición de desplazamientos en términos de estructuras estáticamente determinadas. Las fuerzas o momentos que son las incógnitas, se determinan a partir de desplazamientos conocidos con base en las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones, que son - - aquellas ecuaciones que garantizan los desplazamientos finales como compatibles con las condiciones de apoyo originales de la estructura.

La viga mostrada en la figura 1, es hiperestática en primer grado, ya que hay 3 reacciones verticales y sólo se pueden usar dos ecuaciones de estática para resolverla.

## CAPITULO 5

## METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

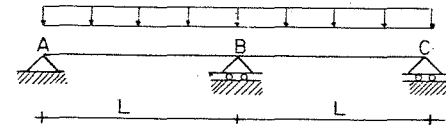


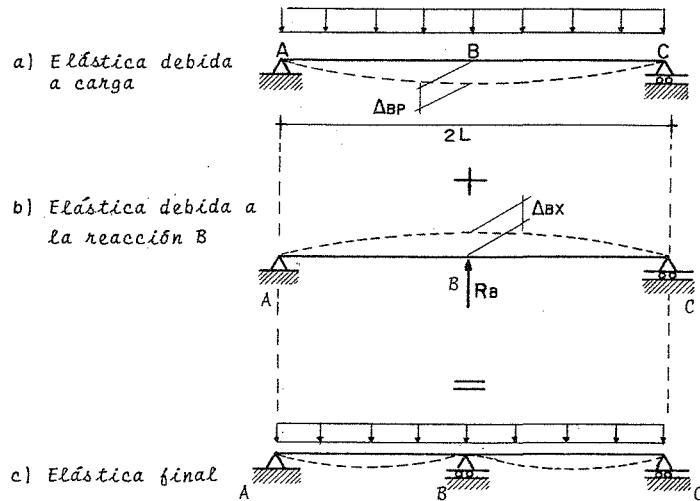
Fig. 1

Aplicando la definición del método de las flexibilidades para resolverlas, se escogerá como incógnita la reacción vertical en el apoyo central, lo cual nos lleva a considerar una estructura isostática que llamaremos estructura primaria (fig. 2).

Dado que en la viga original la flecha en el apoyo central debe ser nula, lo cual implica considerar que la flecha debida a las



cargas en ese punto deberá ser igual y de sentido contrario a la flecha debida a la reacción:



La ecuación  $\Delta BP + \Delta BX = 0$ , es una ecuación de compatibilidad de desplazamientos, porque garantiza el desplazamiento final como compatible con las condiciones de apoyo originales de la estructura.

De la ecuación de compatibilidad se calcula el valor de la incógnita y el resto de la estructura podrá resolverse aplicando las ecuaciones de Estática.

Para una estructura con  $n$  redundantes, los desplazamientos deberán ser calculados para  $(n + 1)$  sistemas de cargas:

- Un análisis para el sistema de cargas y
- $n$  análisis para efectos de cada redundante.

La satisfacción de compatibilidad involucra un conjunto de  $n$  ecuaciones lineales, donde cada ecuación expresa una condición del desplazamiento final de la estructura cargada.

Cualquiera de las componentes de los desplazamientos para la estructura primaria son medida de la flexibilidad de la estructura, es decir, que la estructura es más flexible cuanto mayores sean los valores de los desplazamientos.

## II.- SOLUCION PARTICULAR Y COMPLEMENTARIA

Como se mencionó en la Introducción, en el método de las flexibilidades, la solución de una estructura hiperestática se logra mediante la superposición de desplazamientos de estructuras isostáticas, que se les puede llamar estructuras primarias.

La estructura primaria no es única ya que depende de la selección que se haga de las incógnitas o redundantes y la mejor de ellas será la que involucre el mínimo de trabajo numérico. Para obtener la estructura primaria, se hace la supresión de apoyos, o la transformación de un tipo de apoyo en otro más simple, o por una ruptura de la elástica de la estructura, que puede ser angular, lateral o longitudinal.

Para aclarar lo anterior, veamos la estructura siguiente. (fig. 3)

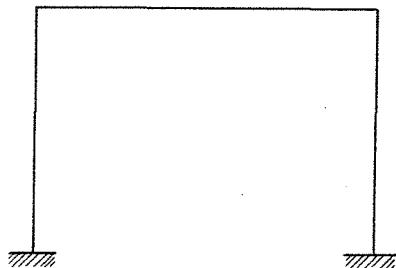


Fig. 3

Es una estructura hiperestática en tercer grado y dependiendo de la selección de incógnitas, podría haber entre otras, las siguientes estructuras primarias:

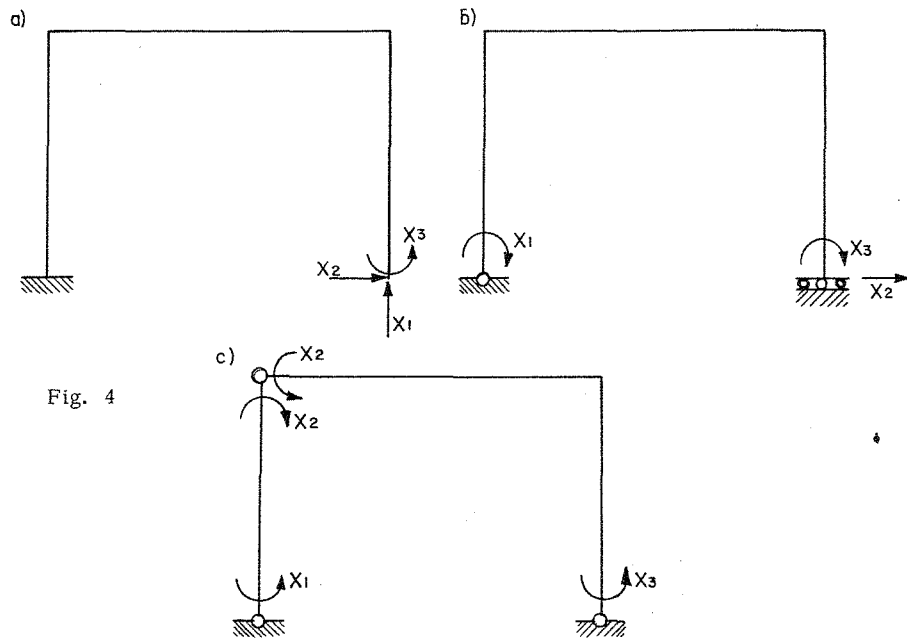


Fig. 4

Se hace notar que las condiciones que tienen estas estructuras primarias o cualesquiera otras deben ser estabilidad e isostaticidad.

Se le llamará solución particular a la estructura primaria sobre la que actúan las fuerzas externas y solución complementaria a la estructura primaria sobre la cual actúan cada una de las redundantes o incógnitas.

III. CALCULO DE LAS FLEXIBILIDADES

Para ilustrar el cálculo de las flexibilidades y la formulación de las ecuaciones de compatibilidad, se resolverá la estructura siguiente:

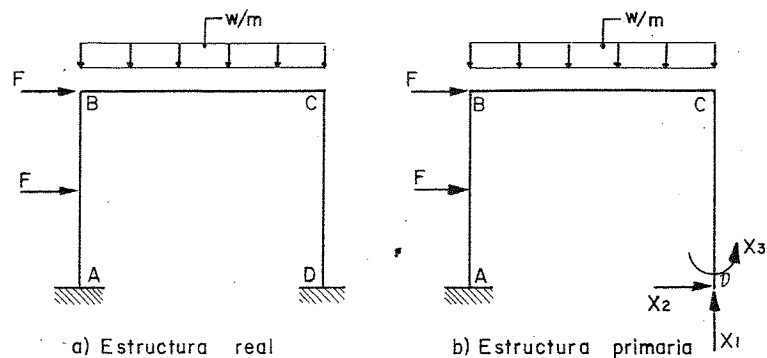


Fig. 5

De acuerdo con la estructura primaria, las incógnitas serán las reacciones vertical y horizontal en D y el momento en D.

Por lo tanto, la estructura real se podrá descomponer en la suma de las siguientes estructuras primarias con los efectos indicados en la fig. 6.

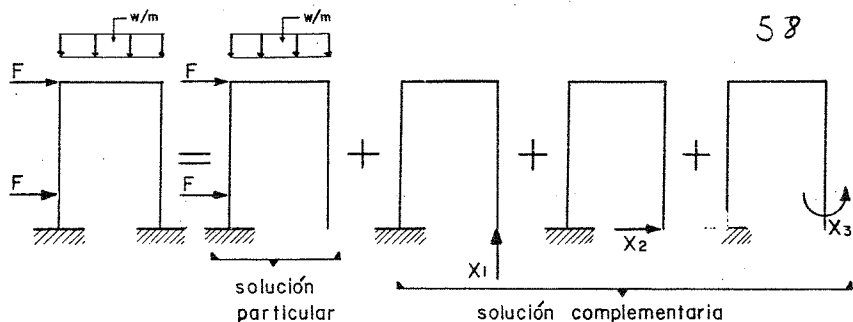


Fig. 6

La base de la compatibilidad en la estructura real será que el desplazamiento vertical, horizontal y el giro en D son nulos.

La representación gráfica de dichos desplazamientos se muestra a continuación Fig. 7:

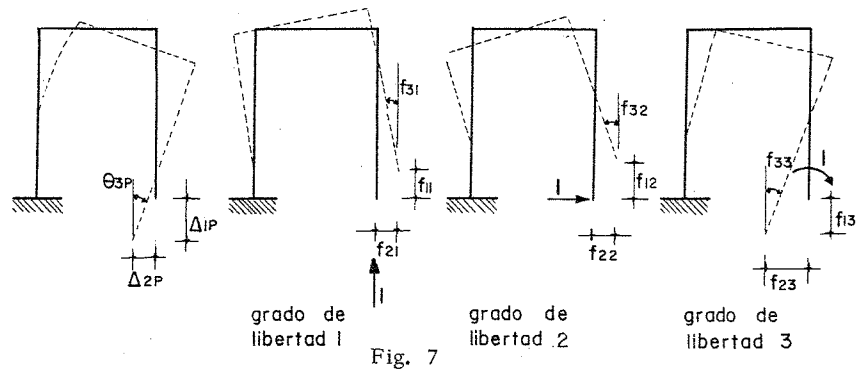


Fig. 7

El primer subíndice indica la correspondencia con el grado de libertad y el segundo la causa que provoca el desplazamiento. Por ejemplo,  $f_{23}$  indica el desplazamiento horizontal debido al momento que es la causa 3.

Las ecuaciones de compatibilidad se escribirán como sigue:

a) El desplazamiento vertical en D es nulo:

$$\Delta_{1P} + f_{11} X_1 + f_{12} X_2 + f_{13} X_3 = 0$$

b) El desplazamiento horizontal en D es nulo:

$$\Delta_{2P} + f_{21} X_1 + f_{22} X_2 + f_{23} X_3 = 0$$

c) El giro en D es nulo:

$$\Theta_{3P} + f_{31} X_1 + f_{32} X_2 + f_{33} X_3 = 0$$

Del sistema anterior de ecuaciones lineales, se obtendrá el valor de las incógnitas  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$ . Si alguno de los valores obtenidos resulta con signo negativo, significa que actúa en dirección contraria a la su puesta.

Es conveniente definir el efecto de las fuerzas redundantes de la estructura primaria en términos de los desplazamientos producidos por fuerzas (o causas) unitarias correspondientes a las redundantes.

Por ejemplo,  $f_{ij}$  corresponde al grado de libertad  $i$  debido a una causa (fuerza o momento) unitaria aplicada en  $j$ . A este valor  $f_{ij}$  se le llama coeficiente de flexibilidad.

Los coeficientes de flexibilidad, son entonces desplazamientos debidos a causas unitarias y dependen de la geometría y propiedades elásticas de la estructura primaria y son independientes del sistema de cargas real de la estructura real.

Así, por ejemplo, en la estructura anterior  $f_{11}$  y  $f_{12}$  son coeficientes de flexibilidad lineales y  $f_{13}$  es un coeficiente de flexibilidad angular. (fig. 7)

Expresando el sistema de ecuaciones del ejemplo resuelto en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \\ \Theta_{3P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0$$

Los coeficientes de flexibilidad así arreglados forman la matriz de flexibilidades, la cual es siempre simétrica, debido al teorema recíproco de Maxwell-Betti y es una matriz cuadrada cuya diagonal principal es siempre positiva.

Los coeficientes de flexibilidad pueden obtenerse por cualquier método; sin embargo el más recomendable es el de trabajos virtuales.

Por ejemplo, para obtener el valor de  $f_{23}$  sería: (Fig. 8) el desplazamiento horizontal debido al momento unitario.

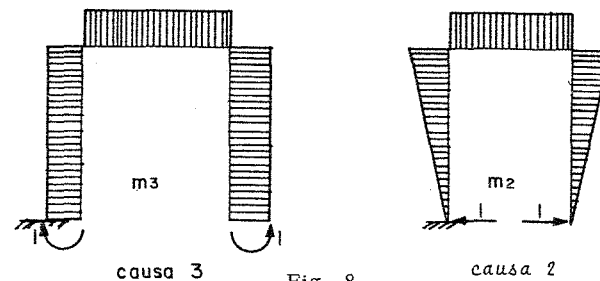


Fig. 8

$$f_{23} = \int \frac{m_3 m_2}{EI} dx$$

en forma general ;  $f_{ij} = \int \frac{m_i m_j}{EI} dx$  ;

La integral anterior se resuelve rápidamente para los casos más comunes mediante el uso de tablas.

La secuela de cálculo, para la aplicación del método de las flexibilidades, puede resumirse como sigue:

- 1) Determinar el grado de hiperestaticidad  $n$  de la estructura.
- 2) Seleccionar las  $n$  incógnitas o redundantes y por lo tanto la estructura primaria correspondiente.
- 3) Resolver las  $n + 1$  estructuras, calculando los desplazamientos debidos a las cargas y a cada una de las redundantes.
- 4) Plantear las  $n$  ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos y resolver el sistema, obteniendo así el valor de cada una de las incógnitas.
- 5) Obtención de los diagramas de elementos mecánicos.

#### IV. ARMADURAS

En el análisis de armaduras hiperestáticas, al aplicar el método de las flexibilidades para el cálculo de las fuerzas en las barras, el problema se puede presentar según que el grado de hiperestaticidad sea externo, interno o ambos.

Por ejemplo en la armadura de la figura 9, el grado de hiperestaticidad es uno y proviene de un apoyo, o sea externo:

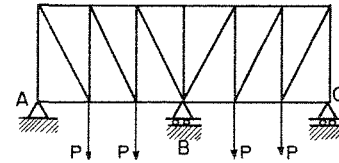
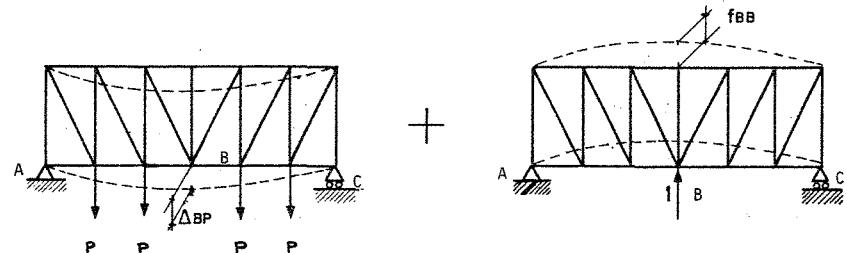


Fig. 9

La ecuación de compatibilidad sería, suponiendo como incógnita, la reacción central, que la deformación vertical en ese punto es nula. Las fuerzas en las barras se obtendrían, una vez calculado el valor de la incógnita, sumando algebraicamente las fuerzas debidas a la estructura primaria sometida a las cargas externas y al efecto de la redundante. Fig. 10



$$\Delta_{BP} + f_{BB} X_B = 0$$

Fig. 10

Los coeficientes de flexibilidad debidos a efectos axiales, se determinan mediante la expresión:

$$f_{ij} = \frac{\sum n_i n_j L_i}{AE}$$

Cuando la hiperestaticidad en las armaduras es de origen interno como en el caso de la Fig. (11)

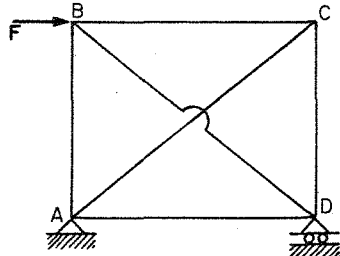


Fig. 11

la estructura primaria se formará "cortando" una de las barras y el problema se reduce a aplicar una ecuación de compatibilidad del miembro liberado o sea:

$$\Delta_{IP} + f_{II} X_I = 0$$

61

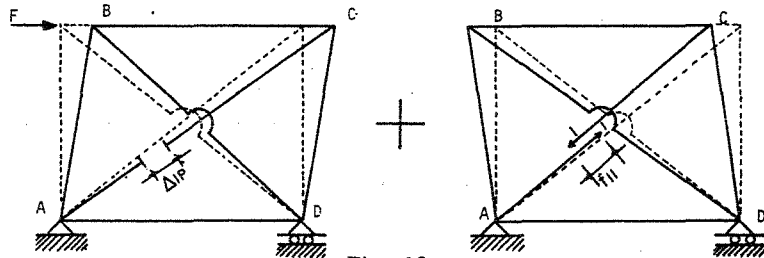


Fig. 12

Para la obtención de los valores de  $\Delta_{IP}$  y  $f_{II}$ , lo más conveniente es el uso de tablas semejantes a las que se utilizaron para calcular desplazamientos por el método de trabajos virtuales en armaduras.

Barra	P	p	L	A	$\sum \frac{P \cdot p L}{AE}$	$\sum \frac{p \cdot p L}{AE}$	$F = P + p X_I$
AB							
BC							
CD							
DA							
DB							
AC							
$\Sigma$					$\Delta_{IP}$	$f_{II}$	

Las fuerzas en las barras serán la suma de efectos de la estructura primaria bajo las cargas y bajo cada una de las redundantes, en este caso solamente una.

Cuando se presente el caso de hiperestaticidad interna y externa simultáneamente se superpondrán los efectos de ambas.

Es importante señalar que el grado de hiperestaticidad, que interesa es el total de ambos: externo e interno. Sin embargo, se hizo hincapié en la distinción entre ambos para proceder al análisis.

### V. ESTRUCTURAS CON ASENTAMIENTOS DE APOYOS

Cuando las estructuras presentan hundimientos diferenciales debidos a asentamientos de sus apoyos, la resolución de las mismas mediante

el método de las flexibilidades, se hace escogiendo como redundantes las fuerzas existentes en los puntos en que se presentan los asentamientos, debido a que de esta forma, bastará con igualar en la ecuación de compatibilidad el valor del desplazamiento vertical al valor del asentamiento, en lugar de igualar a cero (fig. 13).

El signo que deberá darse al desplazamiento del segundo miembro de la ecuación de compatibilidad y que corresponde al valor del asentamiento diferencial quedará definido por el sentido con el que fue supuesto la fuerza en el apoyo; si coincide con el sentido de la fuerza será positivo y en caso contrario negativo.

En la Fig. 13 es evidente que en la ecuación de compatibilidad de desplazamientos verticales, deberá igualarse a  $-\Delta$ :

$$f_{11}X_1 + f_{12}X_2 + f_{13}X_3 = -\Delta$$

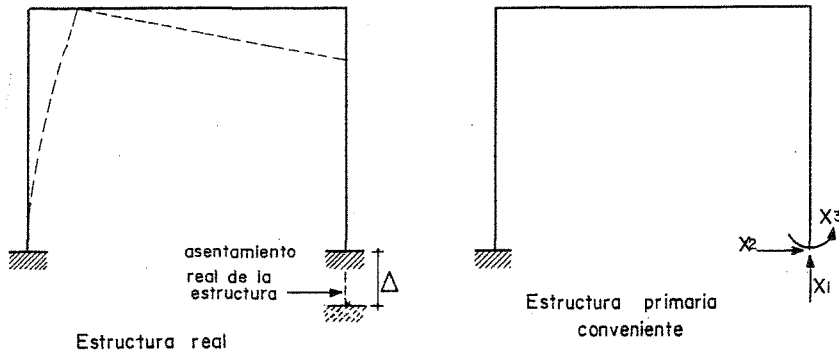


Fig. 13

El caso de rotaciones de los apoyos, deberá tratarse en forma semejante, planteando la ecuación de compatibilidad con base en que el giro en el apoyo es igual a la rotación del mismo, aplicando la misma regla que se dió para los signos.

## VI. ESTRUCTURAS SOBRE APOYOS ELASTICOS

Cuando las estructuras están apoyadas en tal forma que no se limita totalmente el desplazamiento, pero que si presentan oposición al desplazamiento libre en esos puntos, se les llama apoyos elásticos.

La restricción que tienen es proporcional al desplazamiento provocado y su valor es:

$$F = K \cdot \Delta \quad (\text{Ley de Hooke})$$

en la cual  $K$  se le llama constante de proporcionalidad del apoyo. Dichas constantes, tienen unidades de fuerza entre desplazamiento.

Los apoyos elásticos se representan como sigue:

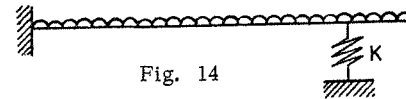
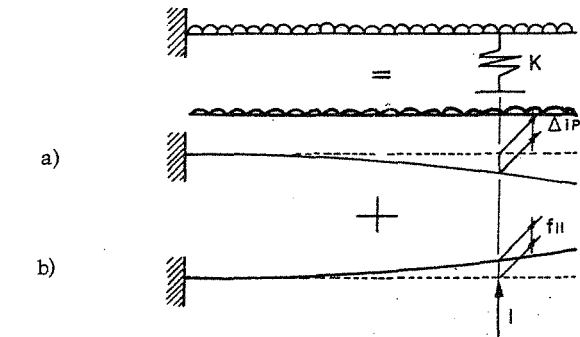


Fig. 14

Cuando las estructuras están sobre apoyos elásticos, es conveniente que las redundantes sean las fuerzas en los resortes, en tal forma que al plantear las ecuaciones de compatibilidad, los desplazamientos en los resortes sean iguales a la fuerza en el resorte dividido entre la constante de rigidez del mismo. El signo de este segundo miembro será negativo, ya que la fuerza aplicada del resorte a la estructura es de sentido contrario a su desplazamiento, provocando un trabajo negativo.

En la figura 14, la ecuación de compatibilidad se escribiría de acuerdo con la figura 15.



Donde

$K = \text{constante del resorte}$

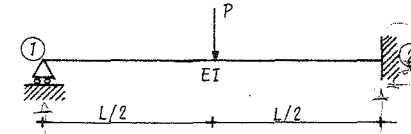
$$\Delta_{IP} + f_{II} X_I = - \frac{X_I}{K}$$

Fig. 15

## EJEMPLOS

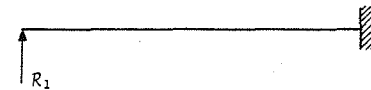
### METODO DE FLEXIBILIDADES.

Problema No. 1. Obtener el diagrama de momentos de la siguiente viga.

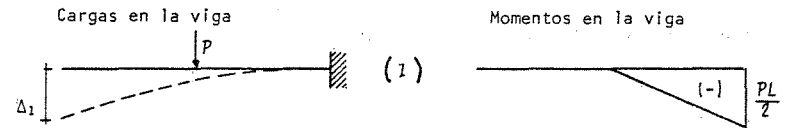


La estructura es de un grado de indeterminación, por lo que se tomará el apoyo en (1) como redundante.

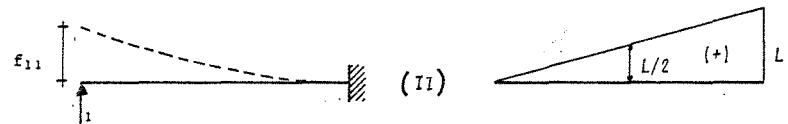
Estructura primaria.



Solución particular.



Solución complementaria.





Ecuación de compatibilidad.

$$\Delta_1 + f_{11}R_1 = 0$$

Cálculo de  $\Delta_1$  y  $f_{11}$  (por tablas)

Cálculo de  $\Delta_1$ : (I) real con (II) virtual

R2 . C3 (renglón 2, columna 3)

$$EI (J)\Delta_1 = \frac{1}{6} \omega_i (K_1 + 2K_2) = -\frac{1}{6} \frac{L}{2} \frac{PL}{2} \left(\frac{L}{2} + 2L\right)$$

$$\Delta_1 = -\frac{5PL^3}{48EI}$$

Cálculo de  $f_{11}$ : (II) real con (II) virtual

R2 . C2 (renglón 2, columna 2)

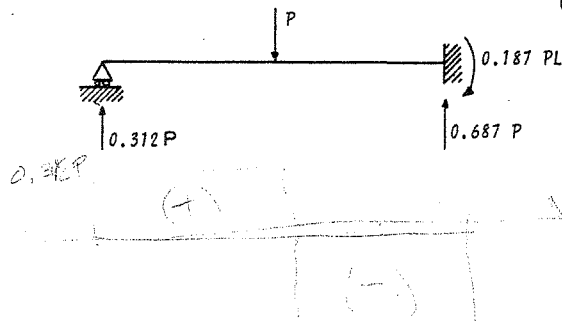
$$EI (I) \cdot f_{11} = \frac{1}{3} S \omega K = \frac{1}{3} L (L) L$$

$$f_{11} = \frac{1}{3} \frac{L^3}{EI}$$

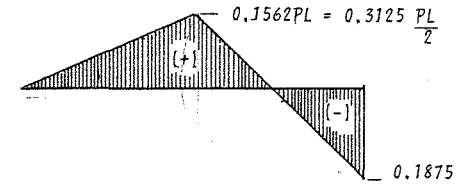
Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad se obtiene:

$$-\frac{5PL^3}{48EI} + \frac{L^3}{3EI} R_1 = 0 ; \quad R_1 = 0.3125P$$

Las reacciones en la viga son

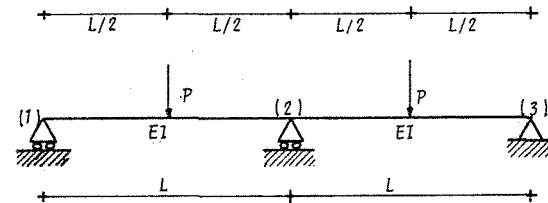


El diagrama de momentos es el siguiente:



En los ejemplos siguientes únicamente se anotará para el cálculo de desplazamientos el número de renglón y columna correspondiente a la tabla.

Problema No. 2. Determinar en la viga siguiente el diagrama de momentos flexionantes.



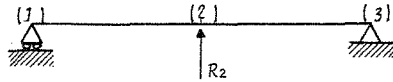
Su grado de indeterminación es uno.

$$r > C + 3$$

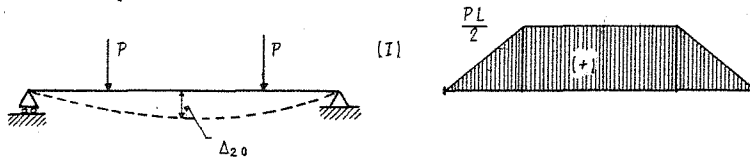
$$4 > 3$$

Eligiremos como redundante el apoyo (2)

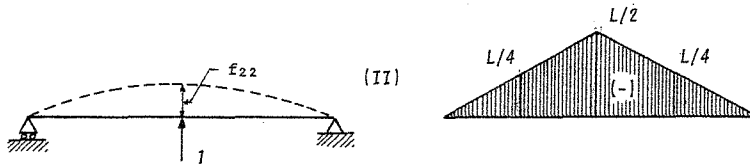
Estructura primaria



Solución particular.



Solución complementaria



$$\text{Ecuación de compatibilidad} = \Delta_{20} + f_{22} R_2 = 0$$

Cálculo de deformaciones  $\Delta_{20}$  y  $f_{22}$  (por tablas)

Cálculo de  $\Delta_{20}$ , (I) real con (II) virtual

$$(EI)\Delta_{20} [I] = 2(R_2 \cdot C_2) + (R_1 \cdot C_3)2 = \left(\frac{1}{3} \text{ s.c.k} \right)2 + \frac{1}{2} \text{ s.c.} (k_1 + k_2)2$$

$$(EI)\Delta_{20} = 2 \left[ -\frac{1}{3} \frac{L}{2} \frac{L}{4} \frac{PL}{2} - \frac{1}{2} \frac{L}{2} \frac{PL}{2} \left( \frac{L}{4} + \frac{L}{2} \right) \right]$$

$$\Delta_{20} = -0,2292 PL^3/EI$$

Cálculo de  $f_{22}$ . (II) real con (II) virtual

$$R_2 \cdot C_7 ; (EI)f_{22} = \frac{1}{3} \text{ s.c.k} = \frac{1}{3} 2L \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2}$$

$$f_{22} = L^3/6EI$$

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad.

$$-0,2292 PL^3 + L^3/6(R_2) = 0 ; \underline{R_2 = 1,375P}$$

Reacciones en la viga.

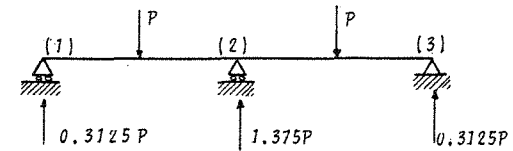
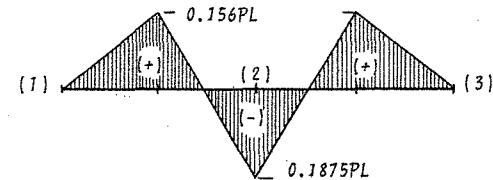
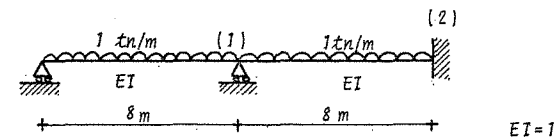


Diagrama de momentos flexionantes

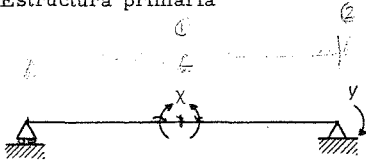


Problema 3.- Determinar las reacciones y el diagrama de fuerza cortante y momentos de la viga mostrada, la cual esta sujeta a una carga uniformemente distribuida.



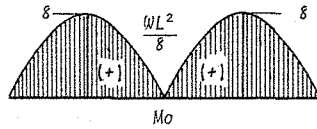
El grado de hiperestaticidad es = 2

Estructura primaria

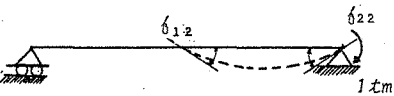
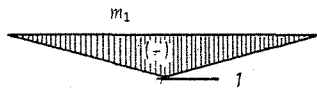
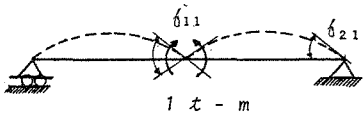


X, Y son momentos unitarios para producir los giros  $f_1$  y  $f_2$

Solución particular



Solución complementaria



Ecuaciones de compatibilidad

$$f_{01} + f_{11} X + f_{12} Y = 0$$

$$f_{02} + f_{21} X + f_{22} Y = 0$$

Cálculo de los giros  $f_{01}, f_{02}, f_{11}, f_{21} = f_{12}, f_{22}$

$$f_{01} = M_0 m_1 = 2(R5 \cdot C2) = 2\left(\frac{1}{3} \text{Sim}k\right) = \frac{2}{3}(8 \cdot 8(-1)) = -42.667$$

$$f_{02} = M_0 m_2 = (R5 \cdot C2) = \frac{1}{3} \text{Sim}k = \frac{1}{3} 8 \cdot 8 \cdot 1 = 21.333$$

$$f_{11} = m_1 m_1 = (R10 \cdot C7) = \frac{1}{3} \text{Si}k = \frac{1}{3} 16 \cdot (-1)(-1) = 5.333$$

$$f_{21} = f_{12} = m_1 m_2 = (R3 \cdot C2) = \frac{1}{6} \text{Si}k = \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot (-1)(1) = -1.333$$

$$f_{22} = m_2 m_2 = (R2 \cdot C2) = \frac{1}{3} \text{Si}k = \frac{1}{3} 8(JL)(J) = 2.666$$

Sustituyendo en las ecuaciones de compatibilidad

$$-42.667 + 5.333X - 1.333Y = 0$$

$$21.333 - 1.333X + 2.666Y = 0$$

Resolviendo el sistema anterior

$$X = 6.85 \text{ t-m}; Y = -4.57 \text{ t-m};$$

Reacciones en la viga

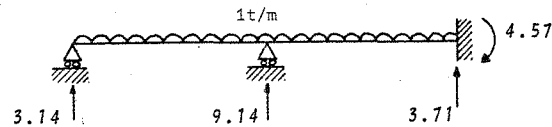
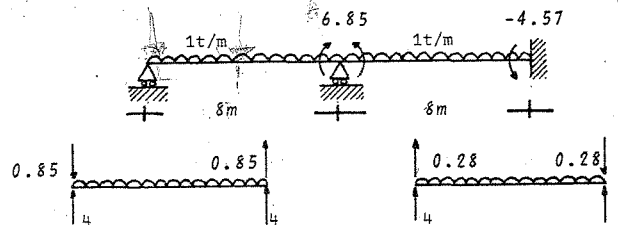


Diagrama de fuerza cortante

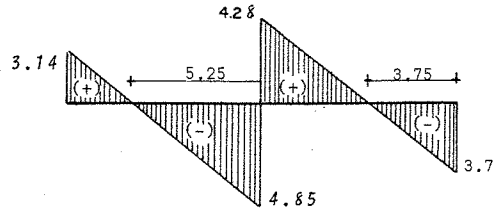
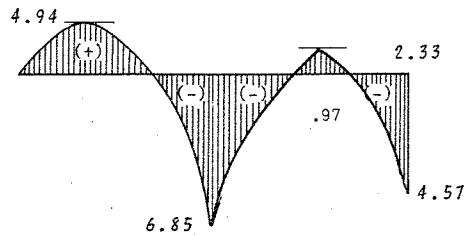
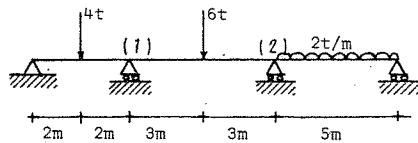


Diagrama de momentos



Problema 4. Obtener las reacciones y diagramas de fuerza cortante y momentos para la viga continua que se muestra.



$EI = J$

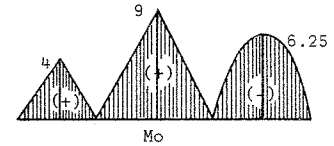
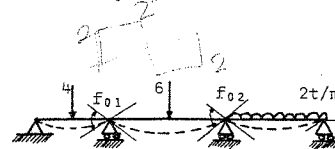
El grado de hiperestaticidad es  $n = 2 (R_1, R_2)$

Se aplicarán momentos unitarios en los apoyos (1) y (2)

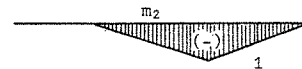
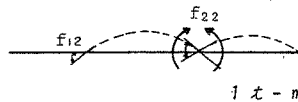
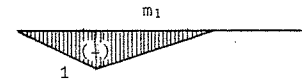
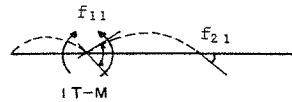
Estructura primaria



Solución particular



Solución complementaria



Ecuaciones de compatibilidad

$$f_{01} + f_{11} X + f_{12} Y = 0$$

$$f_{02} + f_{21} X + f_{22} Y = 0$$

Cálculo de los giros  $f_{01}$ ,  $f_{02}$ ,  $f_{11}$ ,  $f_{21}=f_{12}$ ,  $f_{22}$ .

$$f_{01} = M_{01} m_1 = R2.C7 + R3.C7 = \frac{1}{6} S(1 + \alpha) i K + \frac{1}{6} S(1 + \beta) i K$$

$$f_{01} = \frac{1}{6} (4) (1+0.5) (-1) (4) + \frac{1}{6} (6) (1+0.5) (-1) (9) = -17.50$$

$$f_{02} = M_{02} m_2 = R10.C2 + R3.C4 = \frac{1}{6} S(1+\alpha) K i + \frac{1}{3} S i K m$$

$$f_{02} = \frac{1}{6} \times 6 (1+0.5) (-1) (9) + \frac{1}{3} 5 (-1) 6.25 = -23.92$$

$$f_{11} = m_1 \cdot w_1 = R10.C7 = \frac{1}{3} S i K = \frac{1}{3} 10 \times (-1) (-1) = 3.33$$

$$f_{21} = f_{12} = m_1 m_2 = R3.C2 = \frac{1}{6} S i K = \frac{1}{6} \times 6 (-1) (-1) = 1$$

$$f_{22} = m_2 m_2 = R10.C7 = \frac{1}{3} S i K = \frac{1}{3} (11) (-1) (-1) = 3.67$$

Sustituyendo en las ecuaciones de compatibilidad.

$$-17.50 + 3.33X + Y = 0$$

$$-23.92 + X + 3.67Y = 0$$

Resolviendo el sistema anterior

$$X = 3.587 \text{ tn-m}, Y = 5.544 \text{ tn-m}$$

Reacciones en la viga

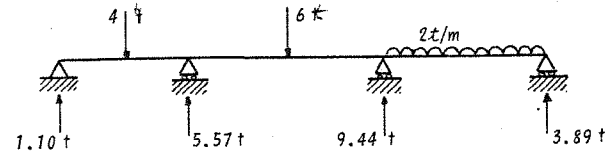
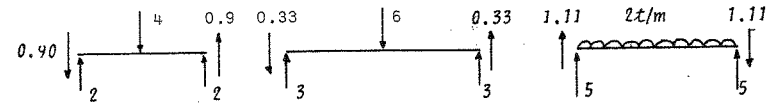
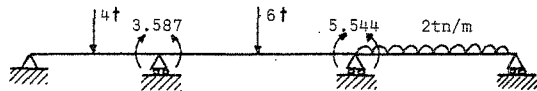


Diagrama de fuerza cortante

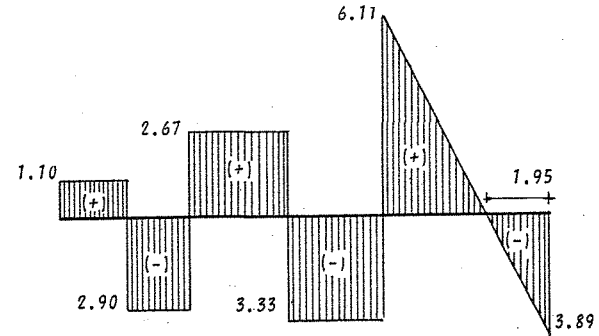
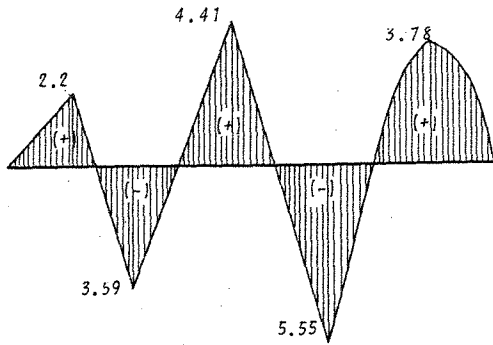
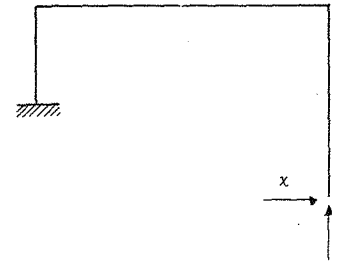


Diagrama de Momentos



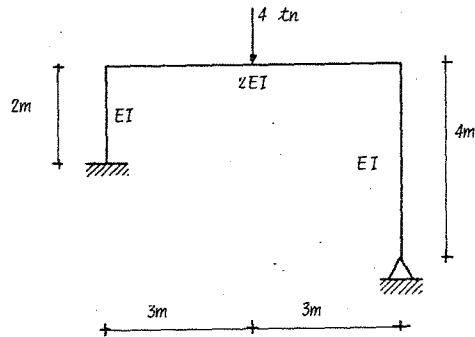
El número de redundantes en el marco es  $n = 2$

Se elegirán como redundantes las reacciones en la articulación; por lo tanto la estructura equivalente es como se muestra enseguida

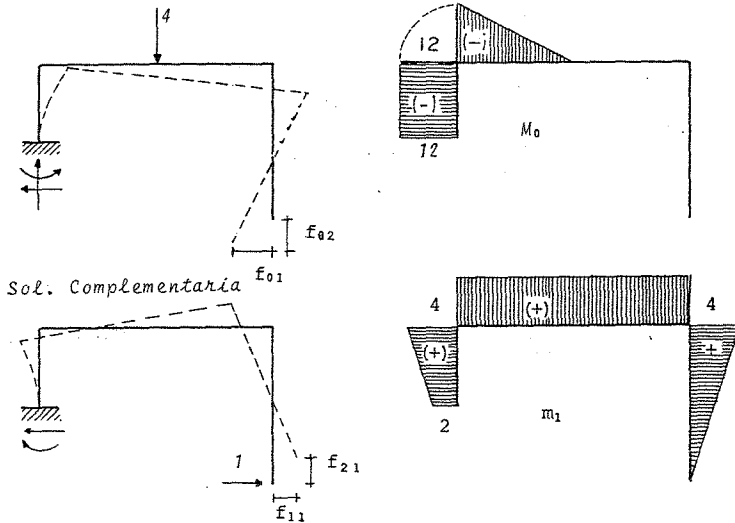


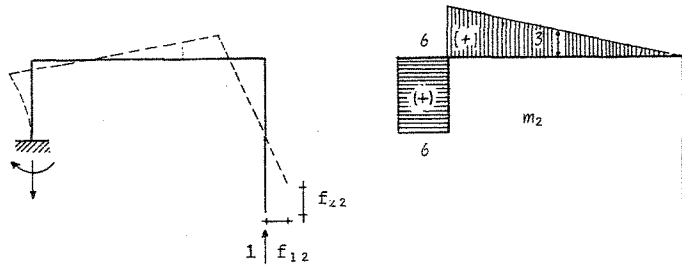
Estructura Primaria

Problema 5. Obtener las reacciones y diagramas de fuerza cortante y momento flexionante del siguiente marco.



Solución particular





Ecuaciones de compatibilidad

$$f_{01} + f_{11}X + f_{12}Y = 0$$

$$f_{02} + f_{21}X + f_{22}Y = 0$$

Cálculo de los desplazamientos  $f_{01}, f_{02}, f_{11}, f_{22}, f_{12}, = f_{21}$

Por producto de diagramas

$$f_{01} = \frac{M_0 m_1}{EI} = R1.C3 + R3.C1 = \frac{1}{2} \text{ si } (K_1 + K_2) + \frac{1}{2} \text{ si } K$$

$$f_{01} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \times 2(-12)(2+4) - \frac{1}{2EI} \left( \frac{1}{2} \times 3 \times 12 \times 4 \right) \right) = -\frac{108}{EI}$$

$$f_{02} = \frac{M_0 m_2}{EI} = R1.C1 + R2.C3 = s.i.K + \frac{1}{6} s.i. (K_1 + 2K_2)$$

$$f_{02} = \frac{2(6)(-12)}{EI} - \frac{1}{2EI} \left( \frac{1}{6} \times 3(12)(12+3) \right) = -\frac{189}{EI}$$

$$f_{11} = \frac{m_1 \cdot m_1}{EI} = R4.C3 + R1.C1 + R2.C2 = \frac{1}{6} S(2i_1K_1 + 2i_2K_2 + i_1K_2 + i_2K_1) + s.i.K + \frac{1}{3} s.i.K$$

$$f_{11} = \frac{2}{6EI} (2(2)(2) + 2(4)(4) + (2)(4) + 4(2)) + \frac{6(4)(4)}{2EI} + \frac{4}{3} \frac{(4)(4)}{EI} = \frac{88}{EI}$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{m_2 \cdot m_1}{EI} = R1.C3 + R3.C1 = \frac{1}{2} s.i. (K_1 + K_2) + \frac{1}{2} s.i.K$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{2}{2} \frac{(6)(2+4)}{EI} + \frac{6}{2} \frac{(6)(4)}{2EI} = \frac{72}{EI}$$

$$f_{22} = \frac{m_2 \cdot m_2}{EI} = R1.C1 + R2.C2 = s.i.K + \frac{1}{3} s.i.K$$

$$f_{22} = \frac{2}{EI} (6)(6) + \frac{6}{3} \frac{(6)(6)}{2EI} = \frac{108}{EI}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de compatibilidad

$$-\frac{108}{EI} + \frac{88}{EI} X + \frac{72}{EI} Y = 0$$

$$-\frac{189}{EI} + \frac{72}{EI} X + \frac{108}{EI} Y = 0$$

Resolviendo el sistema anterior

$$X = -0.45 \text{ ton.} \quad Y = 2.05 \text{ ton.}$$

Reacciones en el marco

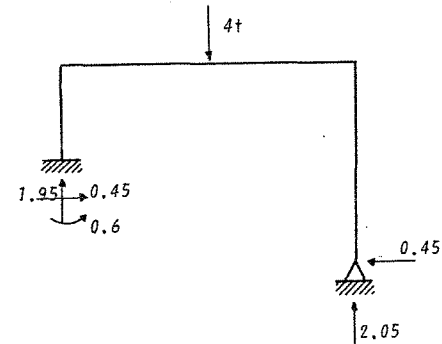


Diagrama de fuerza cortante

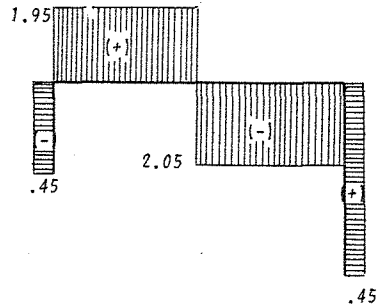
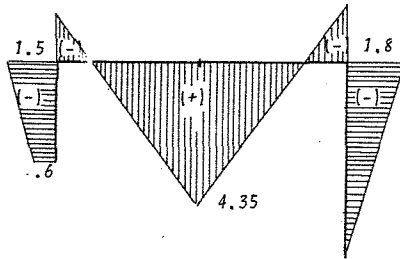
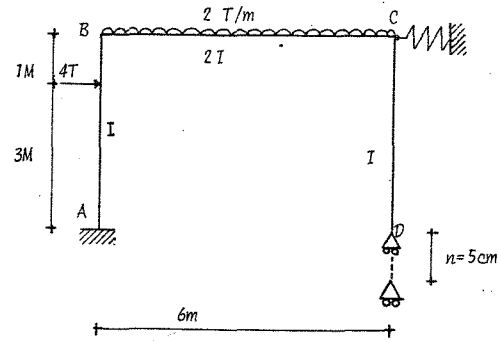


Diagrama de momentos



Problema 6. Calcular las reacciones y dibujar los diagramas de fuerza cortante y momentos flexionantes del marco mostrado en la figura, el cual está restringido lateralmente por un resorte en el nudo C; a su vez el apoyo D tiene un desplazamiento vertical de  $n = 5 \text{ cm}$ . Las dimensiones están indicadas en la misma figura.



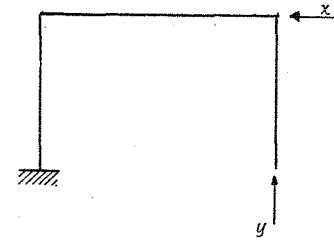
$$K = 1 \text{ tn/cm (del resorte)}$$

$$E = 2.10 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$I = 10^4 \text{ cm}^4$$

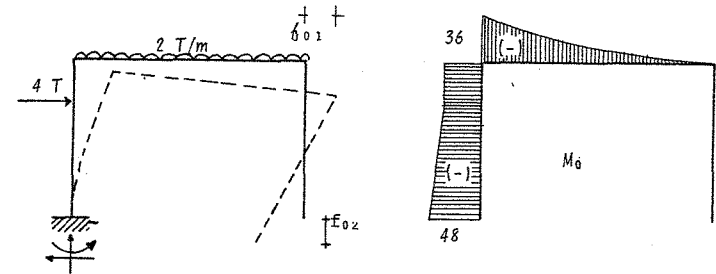
El grado de indeterminación del marco es  $n=2$ ; se toman los nudos C y D como redundantes por existir movimientos en ellos.

Estructura primaria



X y Y son las redundantes elegidas en los nudos C y D respectivamente.

Solución particular





$$EI f_{21} = f_{12} = m_1 m_2 = R1 \cdot C2 = \frac{1}{2} s \cdot \dot{\alpha} k = \frac{4}{2} (6)(4) = 48$$

Sustituyendo en las ecuaciones de compatibilidad

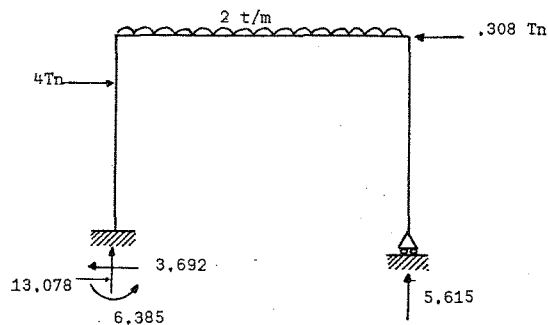
$$-\frac{342}{EI} + \frac{21.333}{EI} X + \frac{48}{EI} Y = -X(10^{-2}); \quad EI = (2.1 \times 10^6 \frac{kg}{cm^2}) (10^4 cm^4)$$

$$-\frac{1134}{EI} + \frac{48}{EI} X + \frac{180}{EI} Y = -5(10^{-2}); \quad EI = 2.1 \times 10^{10} kg \cdot cm^2 = 2100 t \cdot m^2$$

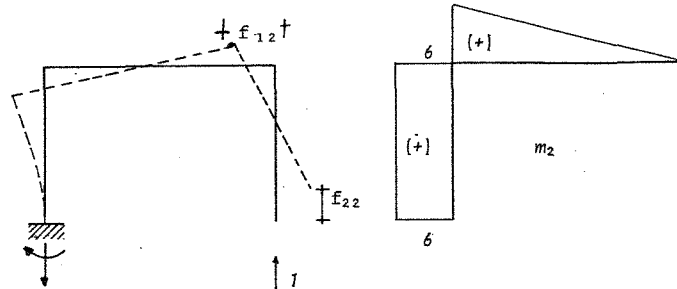
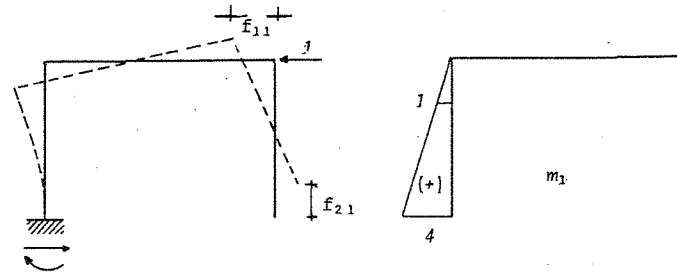
Resolviendo el sistema anterior

$$X = 0.308 \text{ tn} \quad Y = 5.615 \text{ tn}$$

Cálculo de reacciones



Solución complementaria.



Ecuaciones de compatibilidad

$$f_{01} + f_{11}X + f_{12}Y = -X/1 (10^{-2})m$$

$$f_{02} + f_{21}X + f_{22}Y = -5 (10^{-2}) m$$

Cálculo de los desplazamientos  $f_{01}, f_{02}, f_{11}, f_{22}, f_{12} = f_{21}$  (por tablas)

$$f_{01} = M_{01} = R4 \cdot C3 + R3 \cdot C1 = \frac{1}{6} S [2i_1 k_1 + 2i_2 k_2 + i_1 K_2 + i_2 K_1] + \frac{1}{2} S \dot{\alpha} K$$

$$EI f_{01} = \frac{1}{6} [3(2(1)(-36) + 2(4)(-48) + (1)(-48) + (4)(-36))] + \frac{1}{2} (1)(1)(-36) = -342$$

$$f_{02} = M_{02} = R4 \cdot C1 + R1 \cdot C1 + R8 \cdot C2 = \frac{1}{2} S (i_1 + i_2) K + s \dot{\alpha} k + \frac{1}{4} S \dot{\alpha} K$$

$$EI f_{02} = \frac{3}{2} [-48 - 36]6 + 1(6)(-36) + \frac{6}{4} \frac{(-36)(6)}{2} = -1134$$

$$EI f_{11} = m_1 \cdot m_1 = R2 \cdot C2 = \frac{1}{3} s \dot{\alpha} k = \frac{4}{3} (4)(4) = 21.333$$

$$EI f_{22} = m_2 m_2 = R1 \cdot C1 + R2 \cdot C2 = s \dot{\alpha} k + \frac{1}{3} s \dot{\alpha} k = 4(6)(6) + \frac{6}{3} \frac{(6)(6)}{2} = 180$$

Diagrama de fuerza cortante

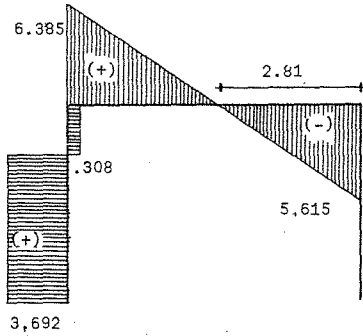
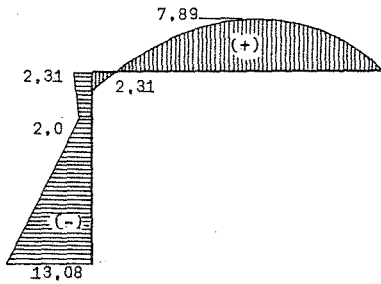
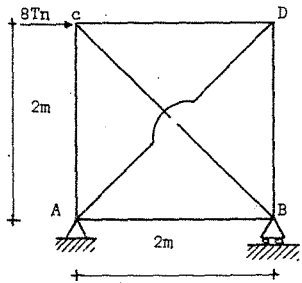


Diagrama de momentos



Problema 7. Calcular las fuerzas axiales de la armadura siguiente.



Las reacciones en los apoyos son  
 $A_x = 8tn (+)$ ;  $A_y = 8tn (+)$ ,  $B_y = 8tn (+)$

Grado de indeterminación

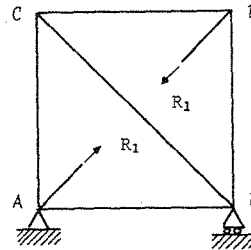
$$6 + 3 > 2(4) \quad 9 > 8$$

Por lo tanto hay una redundante

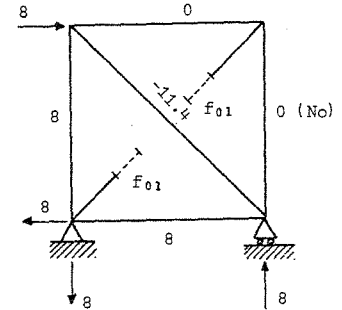
Convención de signos

Tensión (+) ; Compresión (-)

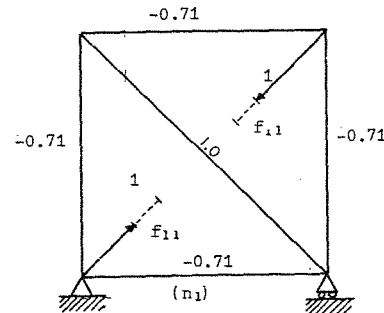
Estructura primaria



Solución particular



Solución complementaria



Nota: Las fuerzas internas en la armadura para cada una de las condiciones de carga, pueden obtenerse por algún método analítico (por nudos o secciones) o gráfico.

A continuación se construye una tabla de cálculo

Barra	N	n	L	NnL	nnL	nR	F=N + n R
AB	8	-0.7	2	-11.2	0.98	-4	4
CD	0	-0.7	2	0	0.98	-4	-4
AC	8	-0.7	2	-11.2	0.98	-4	4
BD	0	-0.7	2	0	0.98	-4	-4
AD	—	1	2.85	0	2.85	5.7	5.7
CB	-11.4	1	2.85	-32.5	2.85	5.7	-5.7
			Σ	-54.9	9.62		

La ecuación de compatibilidad es

$$f_{01} + f_{11}R = 0$$

$$f_{01} = \sum \frac{N_0 n_1}{AE} L_i ; \quad f_{11} = \sum \frac{n_1 n_1}{AE} L_i$$

$$\text{Estado final } F = N + nR$$

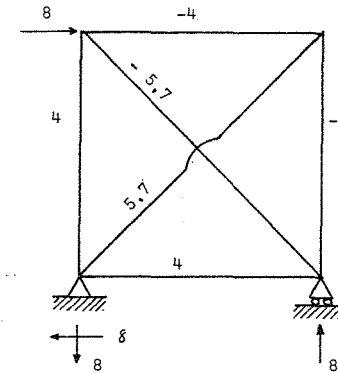
De la tabla se tiene

$$f_{01} = -\frac{54.9}{AE} ; \quad f_{11} = \frac{9.62}{AE}$$

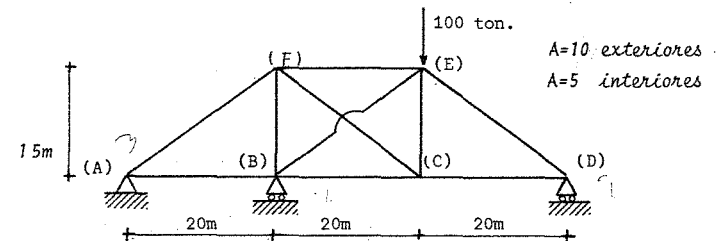
Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad

$$-\frac{54.9}{AE} + \frac{9.62}{AE} R = 0 ; \quad R = 5.7 \text{ tn.}$$

Reacciones en la armadura .-



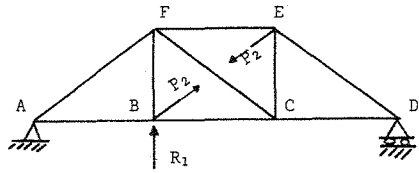
Problema 8. La armadura que se muestra a continuación, está sujeta a una carga vertical de 100 ton. Determine por el método de flexibilidades, las reacciones y fuerzas internas que actúan en las barras.



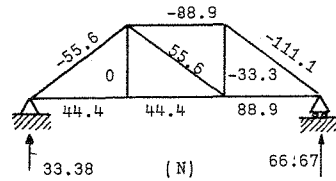
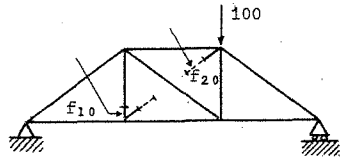
$$\text{Grado de indeterminación } = 10 + 4 > 2(6) \quad 14 > 12$$

Por lo tanto existen 2 redundantes.

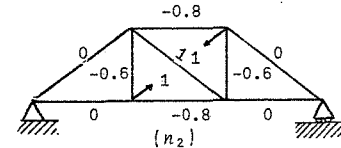
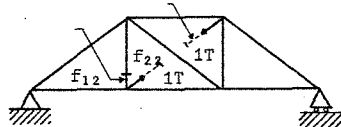
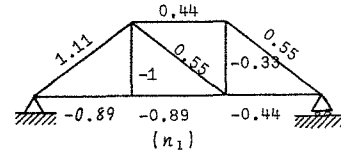
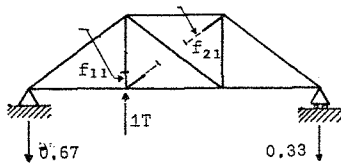
Estructura Primaria



Solución particular



Solución Complementaria



Se eligieron como redundante las reacciones de la barra BE y el apoyo B

Ecuaciones de Compatibilidad

$$f_{10} + f_{11}R_1 + f_{12}P_2 = 0$$

$$f_{20} + f_{21}R_1 + f_{22}P_2 = 0$$

Calculo de los desplazamientos  $f_{10}, f_{20}, f_{11}, f_{22}, f_{21} = f_{12}$

$$f_{10} = \sum \frac{Nn_1}{AE} L \quad f_{22} = \sum \frac{n_2 n_2}{AE} L$$

$$f_{20} = \sum \frac{Nn_2}{AE} L \quad f_{12} = f_{21} = \sum \frac{n_1 n_2}{AE} L$$

$$f_{11} = \sum \frac{n_1 n_1}{AE} L$$

Los cálculos como las áreas y longitudes de las barras se muestran en la tabla siguiente:

Barras	N	n <sub>1</sub>	n <sub>2</sub>	L	A	$\frac{Nn_1}{A}$	$\frac{Nn_2}{A}$	$\frac{n_1 n_1}{A}$	$\frac{n_2 n_2}{A}$	$\frac{n_1 n_2}{A}$
AB	44,4	-0.89	0	20	10	-79,0	0	1.6	0	0
BC	44,4	-0.89	-0.8	20	10	-79,0	-71,0	1.6	1.28	1.4
CD	88,9	-0.44	0	20	10	-78,2	0	0.4	0	0
EF	-88,9	0.44	-0.8	20	10	-78,2	142,2	0.4	1.28	-0.7
BF	0	-1.0	-0.6	15	5	0	0	3.0	1.08	1.8
CE	-33,3	-0.33	-0.6	15	5	33,3	59,9	0.3	1.08	0.6
AF	-55,6	1.11	0	25	10	-154,3	0	3,1	0	0
CF	55,6	0,55	1	25	5	154,3	278,0	1,5	5	2,8
DE	-111,1	0,55	0	25	10	-154,3	0	0,8	0	0
EB	0	0	1	25	5	0	0	0	5	0
$\Sigma$						-435,4	409,1	12,7	47,2	5,9

Sustituyendo los valores de los desplazamientos en las ecuaciones de compatibilidad, tenemos:

$$-435.4 + 12.7R_1 + 5.9P_2 = 0$$

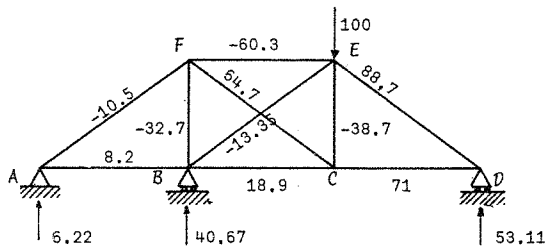
$$409.1 + 5.9R_1 + 47.2P_2 = 0$$

Cuya solución es:  $R_1 = 40.67 \text{ ton.}$ ,  $P_2 = -13.35 \text{ ton.}$

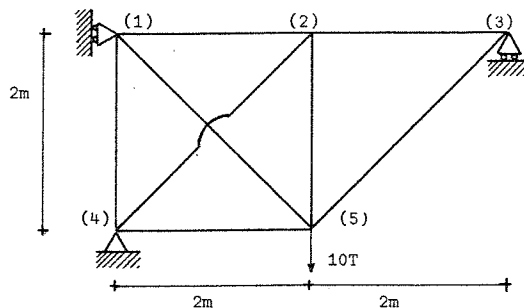
Multiplicando las fuerzas en las barras para los diferentes estados de carga  $n_1$  y  $n_2$  por las reacciones calculadas  $R_1$  y  $P_2$  respectivamente, se obtiene la siguiente tabla.

Barra	$n_1 R_1$	$n_2 P_2$	$F=N+n_1 R_1+n_2 P_2$
AB	-36.2	0	8.2
BC	-36.2	10.7	18.9
CD	-17.9	0	71.0
EF	17.9	10.7	-60.3
BF	40.67	8.0	-32.7
CE	-13.4	8.0	-38.7
AF	45.1	0	-10.5
CF	22.4	-13.35	64.7
DE	22.4	0	-88.7
EB	0	-13.35	-13.35

Las reacciones finales en la armadura son las anotadas en la figura

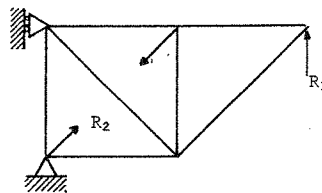


Problema 9. Calcular las reacciones en los apoyos y determinar el desplazamiento del nudo 5 ( $\delta_{v5}$ ).

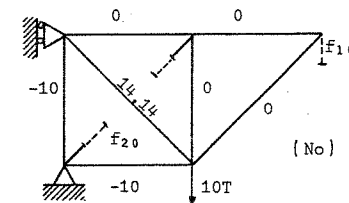


Grado de indeterminación = 2       $8 + 4 > 2(5)$        $12 > 10$

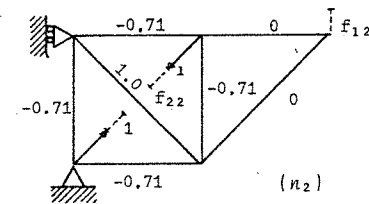
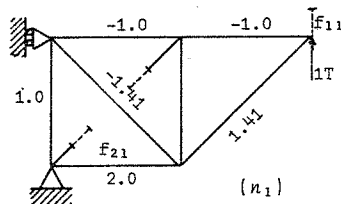
Estructura primaria



Solución particular



Solución complementaria



Ecuación

$f_{10} + f_{11}$

$f_{20} + f_{21}$

Los de

BARRA
1-2
2-3
4-5
1-4
2-5
1-5
2-4
3-5

De la

$f_{10} =$

$f_{20} =$

$f_{11} = \Sigma$

aciones de compatibilidad

$$f_{11}R_1 + f_{12}R_2 = 0$$

$$f_{21}R_1 + f_{22}R_2 = 0$$

desplazamientos se calculan en la siguiente tabla

BARRA	N <sub>0</sub>	n <sub>1</sub>	n <sub>2</sub>	L	N <sub>0</sub> n <sub>1</sub> L	N <sub>0</sub> n <sub>2</sub> L	n <sub>1</sub> n <sub>1</sub> L	n <sub>2</sub> n <sub>1</sub> L	n <sub>2</sub> n <sub>2</sub> L
2	0	-1	-0.71	2	0	0	2	1.41	1
3	0	-1	0	2	0	0	2	0	0
5	-10	2	-0.71	2	-40	14.14	8	-2.84	1
4	-10	1	-0.71	2	-20	14.14	2	-1.41	1
5	0	0	-0.71	2	0	0	0	0	1
5	14.14	-1.41	1	2.8	-56	40	5.6	-4.0	2.82
4	0	0	1	2.8	0	0	0	0	2.82
5	0	1.41	0	2.8	0	0	5.6	0	0
Σ					-116	68.28	25.2	-6.84	9.64

la tabla anterior se tiene

$$\Sigma \frac{N_0 n_1}{AE} L = -\frac{116}{AE}$$

$$f_{21} = \Sigma \frac{n_1 n_2}{AE} L = -\frac{6.84}{AE}$$

$$\Sigma \frac{N_0 n_2}{AE} L = \frac{68.28}{AE}$$

$$f_{22} = \Sigma \frac{n_2 n_2}{AE} L = \frac{9.64}{AE}$$

$$\Sigma \frac{n_1 n_1}{AE} L = \frac{25.2}{AE}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de compatibilidad

$$-116 + 25.2R_1 - 6.84R_2 = 0$$

$$68.28 - 6.84R_1 + 9.64R_2 = 0$$

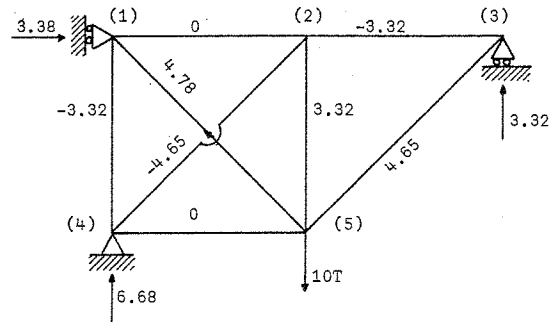
Resolviendo el sistema: R<sub>1</sub> = 3,32T; R<sub>2</sub> = -4,65 T

Las fuerzas finales que actúan en cada barra se obtiene por superposición de efectos, dada por la ecuacion F = N<sub>0</sub> + n<sub>1</sub>R<sub>1</sub> + n<sub>2</sub>R<sub>2</sub>

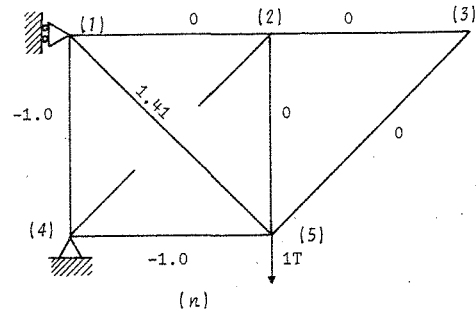
Así, para las reacciones finales tenemos

BARRA	n <sub>1</sub> R <sub>1</sub>	n <sub>2</sub> R <sub>2</sub>	N <sub>0</sub>	F
1-2	-3.32	3.32	0	0
2-3	-3.32	0	0	-3.32
4-5	6.64	3.32	-10	0
1-4	3.32	3.32	-10	-3.32
2-5	0	3.32	0	3.32
1-5	-4.65	-4.65	14.14	4.78
2-4	0	-4.65	0	-4.65
3-5	-4.65	0	0	4.65

Estado final



Para calcular  $\delta v_s$  se integra la armadura original (F) con la armadura virtual que resulta de aplicar una fuerza virtual en el punto de interés a la estructura primaria.



BARRA	F	n	L	FnL
1-2	0	0	2	0
2-3	-3.32	0	2	0
4-5	0	-1	2	0
1-4	-3.32	-1	2	6.64
2-5	3.32	0	2	0
1-5	4.78	1.41	2.8	19.12
2-4	-4.65	0	2.8	0
3-5	4.65	0	2.8	0
$\Sigma$				25.76

Como  $W_{ve} = W_{vi}$

$$1 \delta v_s = \Sigma \frac{Fn}{AE} L$$

$$\delta v_s = \frac{25.76}{AE}$$

G-600876



FACULTAD DE INGENIERIA

CAPITULO 6  
METODO DE LAS RIGIDECES

Las incógnitas en este método son los desplazamientos de los nudos (los nudos son los apoyos, extremos libres en voladizos o en los puntos donde concurren dos o más miembros).

Los desplazamientos de los nudos son el número de grados de libertad o el grado de indeterminación cinemática de la estructura; por ejemplo, la Fig. 1 muestra un marco que tiene 7 grados de libertad si se consideran acortamientos o alargamientos de los miembros, o sólo 4 si no se consideran acortamientos o alargamientos.

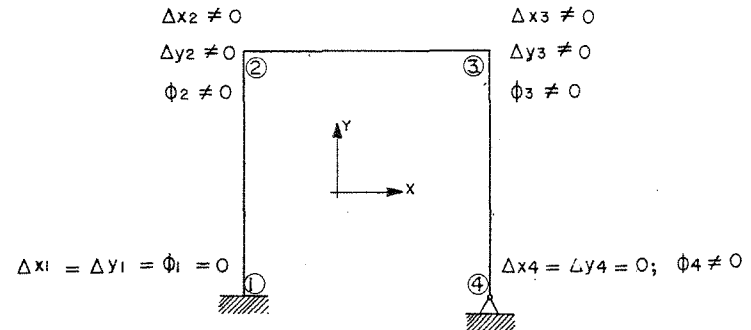


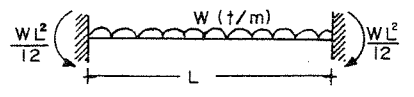
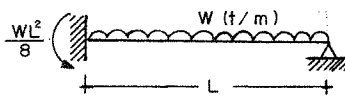
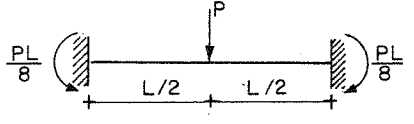
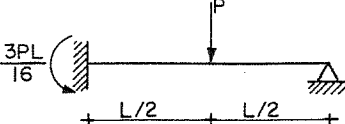
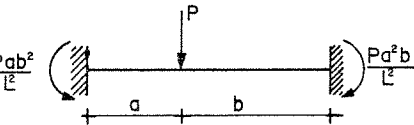
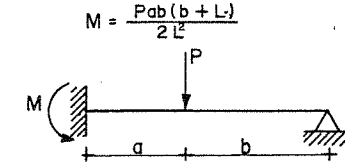
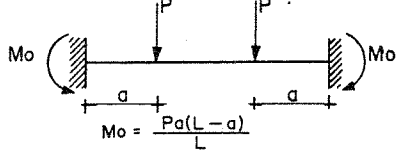
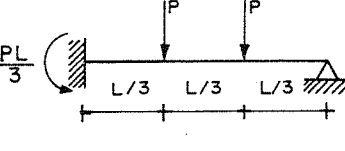
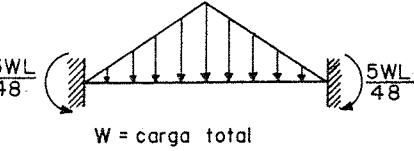
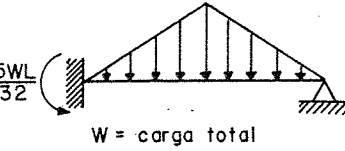
fig. 1

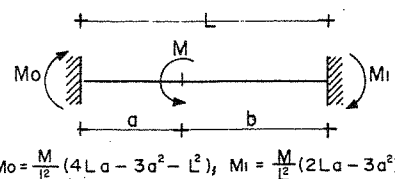
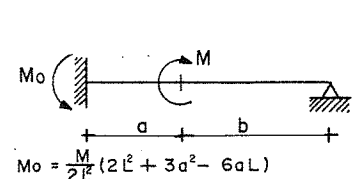
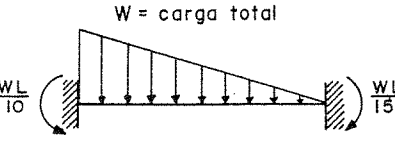
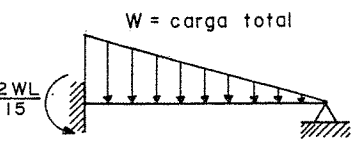
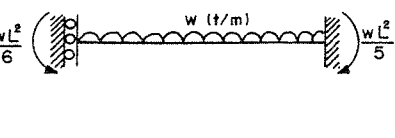
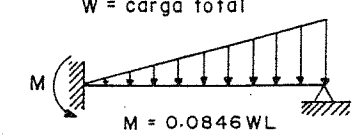
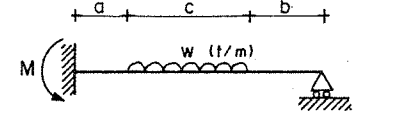
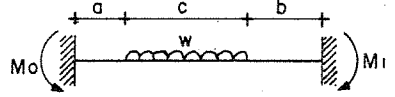
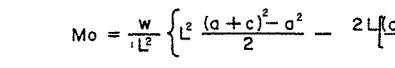
Al no considerarse los acortamientos o alargamientos de los miembros

$$\Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta, \quad \phi_4 \neq 0, \quad \phi_3 \neq 0, \quad \phi_2 \neq 0, \quad \Delta y_2 = \Delta y_3 = 0$$



El método requiere de las acciones de empotramiento, por lo cual consideremos algunos casos.

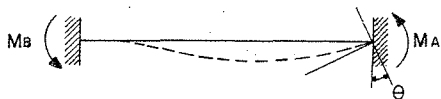
	
	
	
	$M = \frac{w}{8L^2} \{a^4 - (b+c)^4 + 2L^2c(2b+c)\}$
	$M_i = \frac{w}{L^2} \left\{ \frac{(a+c)^3 - a^3}{3} - \frac{(a+c)^4 - a^4}{4} \right\}$
	$M_o = \frac{w}{L^2} \left\{ L^2 \frac{(a+c)^2 - a^2}{2} - 2L \left[ \frac{(a+c)^3 - a^3}{3} \right] + \frac{(a+c)^4 - a^4}{4} \right\}$

El primer paso del método es restringir todos los desplazamientos de junta desconocidos. Esto nos conduce a vigas doblemente empotradas por lo cual hay que conocer las reacciones en vigas doblemente empotradas.

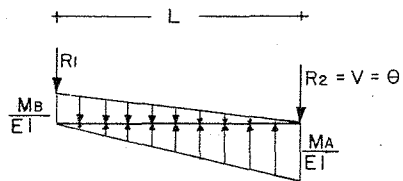
En este método se utilizan acciones producidas por desplazamientos unitarios, estas son translaciones o rotaciones unitarias, y las acciones serán fuerzas o momentos.

Las acciones causadas por desplazamientos unitarios se conocen como "rigideces".

Rigidez de un elemento doblemente empotrado:



Por el método de la viga conjugada:



$$\sum M_A = 0$$

$$-\frac{M_B L}{2EI} \frac{2}{3}L + \frac{M_A L}{2EI} \frac{1}{3}L = 0$$

$$M_B = \frac{M_A}{2}; \quad \boxed{M_A = 2M_B}$$

Al provocar un giro unitario en el extremo A con  $M_A$  se genera

$$M_B = \frac{M_A}{2}, \text{ es decir existe un factor de transporte de } 1/2.$$

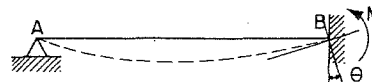
El cortante en A es el valor del giro en ese punto:  $R_2 = \theta$

$$\sum M_B = 0 \quad L \frac{M_B}{2EI} \frac{L}{3} - L \frac{M_A}{2EI} \frac{2}{3}L + LR_2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{M_A}{2EI} \frac{L^2}{3} - \frac{M_A}{2EI} \frac{2}{3}L^2 + R_2 L = 0 \rightarrow -\frac{M_A L^2}{4EI} + R_2 L = 0$$

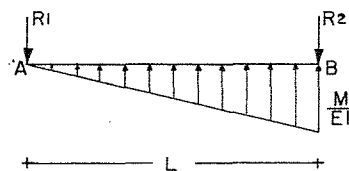
$$R_2 = \frac{M_A L}{4EI}; \quad M_A = \frac{4EI}{L} \theta; \quad \text{Si } \theta = 1 \quad M_A = \frac{4EI}{L}; \quad M_B = \frac{2EI}{L}$$

Veamos la rigidez del siguiente elemento:



$M = \text{rigidez angular}$

Nuevamente por viga conjugada:



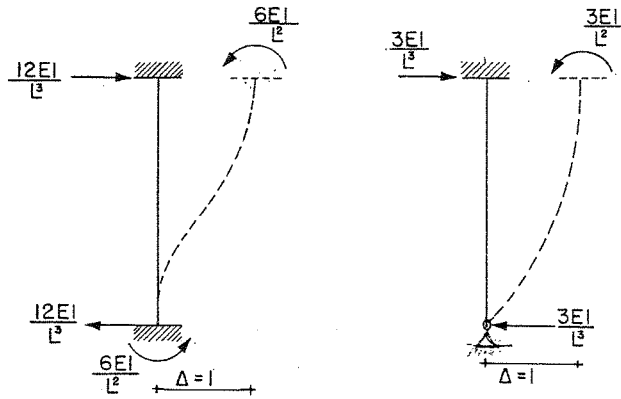
$R_2 = \theta$

$$\sum M_A = 0 \quad LR_2 - \frac{ML}{2EI} \frac{2}{3}L = 0$$

$$R_2 = \frac{ML}{3EI}; \quad M = \frac{3EI\theta}{L}$$

$$\text{Si } \theta = 1, \quad M = \frac{3EI}{L}$$

Y para las translaciones:

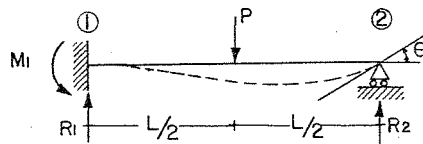


A estos elementos se les conoce como rigideces lineales.

Basándonos en los conceptos anteriores analicemos una estructura por este método: El método es aplicable a estructuras linealmente elásticas con pequeños desplazamientos.

Las incógnitas son los desplazamientos, por lo cual éstas coinciden con el grado de libertad.

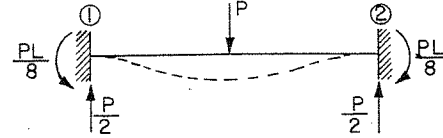
Para expresar claramente los conceptos consideremos la estructura siguiente:



Su grado de libertad es 1, ya que el extremo

2 gira un ángulo  $\theta$ ; la translación horizontal no se considera ya que se desprecian los alargamientos o acortamientos axiales.

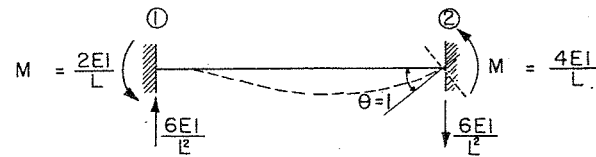
1) Se obtiene una estructura cinemáticamente determinada, o sea - que se eliminan los desplazamientos.



A esta etapa se le conoce como solución particular

2) El extremo 2 en el cual se ha restringido la rotación sí gira, como ocurre realmente, por lo tanto habrá que suponer una condición de carga que considere el giro real del nudo 2.

Por comodidad se da un valor unitario al desplazamiento desconocido.



M es la rigidez angular

A esta etapa se le conoce como solución complementaria

3).— Ahora planteamos la ecuación de equilibrio (superposición de etapas).

$$\frac{PL}{8} - \frac{4EI}{L} \theta = 0 \quad \theta = \frac{PL^2}{32EI}$$

$$R_1 = \frac{P}{2} + \frac{6EI}{L^2} \theta$$

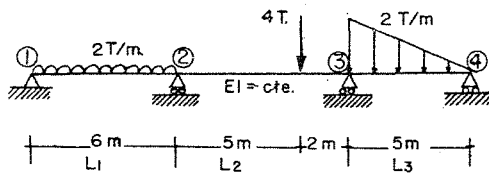
$$R_1 = \frac{P}{2} + \frac{6EI}{L^2} \frac{PL^2}{32EI} = \frac{P}{2} + \frac{6}{32}P = 0.6875P$$

$$R_1 = 0.6875P = \frac{11}{16}P$$

$$M_1 = -\frac{PL}{8} - \frac{2EI}{L} \frac{PL^2}{32EI} = -0.1875PL$$

$$M_1 = -0.1875PL$$

Consideremos la siguiente estructura

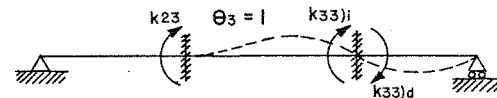
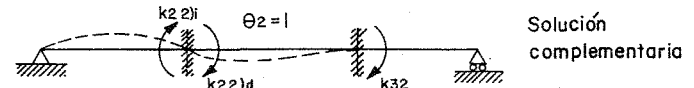
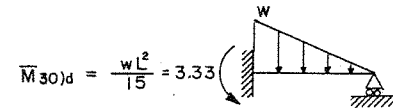
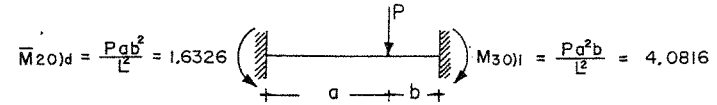
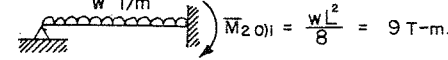
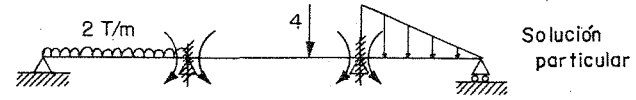


Tiene cuatro grados de libertad, pero si no fijamos

los nudos 1 y 4 encontramos las incógnitas  $\theta_2$  y  $\theta_3$ , con las cuales es

suficiente para determinar los momentos en los nudos 2 y 3.

Se deberán considerar para las barras 1-2 y 3-4 los momentos de empotramiento y las rigideces correspondientes



$$k_{22)i} = \frac{3EI}{L_1} = 0.5EI$$

$$k_{22)d} = \frac{4EI}{L_2} = 0.5714EI$$

$$k_{22} = 1.071EI$$

$$k_{32} = \frac{2EI}{L_2} = 0.2857EI$$

$$k_{23} = \frac{2EI}{L_2} = 0.2857EI$$

$$k_{33)i} = \frac{4EI}{L_2} = 0.5714EI$$

$$k_{33)d} = \frac{3EI}{L_3} = 0.6EI$$

$$k_{33} = 1.171EI$$

Hagamos la superposición o ecuación de equilibrio:

$$\bar{M}_{20} + k_{22}\theta_2 + k_{23}\theta_3 = 0$$

$$\bar{M}_{30} + k_{32}\theta_2 + k_{33}\theta_3 = 0$$

$$7.3674 + 1.0714EI\theta_2 + 0.2857EI\theta_3 = 0$$

$$0.7486 + 0.2857EI\theta_2 + 1.1714EI\theta_3 = 0$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones tenemos:

$$\theta_2 = -\frac{7.17249}{EI} \quad \text{y} \quad \theta_3 = \frac{1.11027}{EI}$$

El signo (-) de  $\theta_2$  significa que el sentido del giro es contrario al supuesto.

Momentos reales:

$$M_{21} = \bar{M}_{20} + k_{22}\theta_2$$

$$M_{21} = 9 + 0.5(-7.17249) = 5.41375$$

$$M_{23} = \bar{M}_{20} + k_{22}\theta_2 + k_{23}\theta_3$$

$$M_{23} = -1.6326 + 0.5714(-7.17249) + 0.2857(1.11027) = -5.41375$$

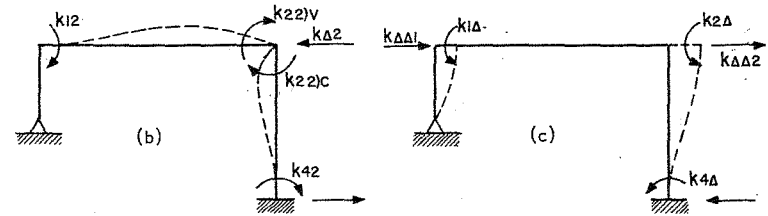
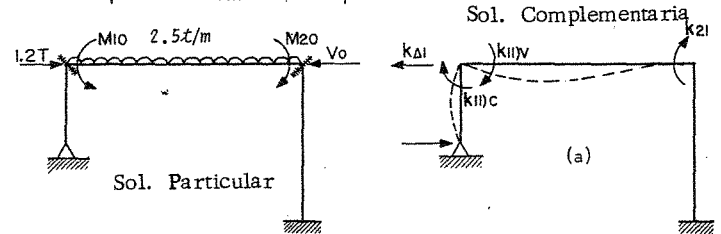
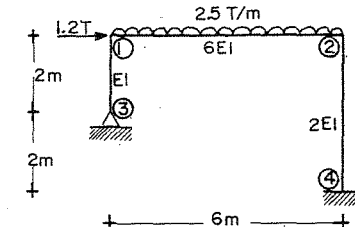
$$M_{32} = \bar{M}_{30} + k_{32}\theta_2 + k_{33}\theta_3$$

$$M_{32} = 4.0816 + 0.2857(-7.17249) + 0.5714(1.11027) = 2.6668$$

$$M_{34} = \bar{M}_{30} + k_{33}\theta_3$$

$$M_{34} = -3.333 + 0.6(1.11027) = -2.667$$

Considerando ahora el siguiente marco:



$$M_{10} = -\frac{\omega L^2}{12} = -7.5 \quad M_{20} = 7.5$$

$$K_{11}C = \frac{3EI}{2} = 1.5EI \quad K_{11}V = \frac{4EI}{6}(6) = 4EI \quad K_{11} = 5.5EI$$

$$K_{22}V = \frac{4EI(6)}{6} = 4EI \quad K_{22}C = \frac{4EI(2)}{4} = 2EI \quad K_{22} = 6EI$$

$$K_{\Delta 1} = -\frac{3EI}{2^2} = -0.75EI$$

$$K_{\Delta 2} = -\frac{6EI(2)}{4^2} = -0.75EI$$

$$K_{1\Delta} = -\frac{3EI}{2^2} = -0.75EI$$

$$K_{2\Delta} = K_{4\Delta} = -\frac{6EI(2)}{4^2} = -0.75EI$$

$$K_{\Delta\Delta_1} = \frac{3EI}{4^3} = 0.0469EI$$

$$K_{\Delta\Delta_2} = \frac{12EI(2)}{4^3} = 0.375EI$$

$$K_{i2} = K_{21} = \frac{2EI(6)}{6} = \frac{2EI}{3}$$

$$K_{\Delta\Delta} = 0.4219 EI$$

$$M_{12} = M_{10} + K_{11} \nu_{\theta_1} + K_{12} \theta_1 = -1.82 \text{ Tm}$$

$$M_{21} = M_{20} + K_{21} \theta_1 + K_{22} \nu_{\theta_2} = -5.04 \text{ Tm}$$

$$M_{24} = K_{22} \nu_{\theta_2} + K_{2\Delta\Delta} = -5.09 \text{ Tm}$$

$$M_{42} = K_{42} \theta_2 + K_{4\Delta\Delta} = -3.35 \text{ Tm}$$

Ecuaciones de equilibrio

$$\bar{M}_{10} + K_{11} \theta_1 + K_{12} \theta_2 + K_{1\Delta} \Delta = 0$$

$$\bar{M}_{20} + K_{21} \theta_1 + K_{22} \theta_2 + K_{2\Delta} \Delta = 0$$

$$\bar{V}_0 + K_{\Delta 1} \theta_1 + K_{\Delta 2} \theta_2 + K_{\Delta\Delta} \Delta = 0$$

Sustituyendo valores

$$5.50EI\theta_1 + 2EI\theta_2 - 0.75EI\Delta = 7.5$$

$$2EI\theta_1 + 6EI\theta_2 - 0.75EI\Delta = -7.5$$

$$-0.75EI\theta_1 - 0.75EI\theta_2 + 0.4219EI\Delta = 1.2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

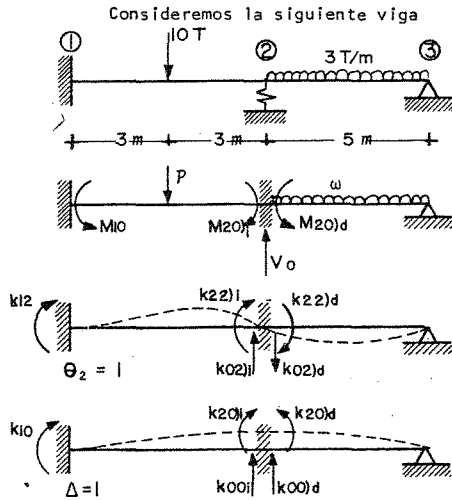
$$\theta_1 = 2.290908/EI$$

$$\theta_2 = -1.745456/EI$$

$$\Delta = 2.145456/EI$$

Momentos reales en el marco

$$M_{13} = K_{11} \nu_{\theta_1} + K_{1\Delta} \Delta = 1.82 \text{ Tm}$$



$$EI = \text{cte.}$$

$$k_s = 0.3EI$$

$$M_{10} = -\frac{PL}{8} = \frac{10 \times 6}{8} = -7.5$$

$$M_{20} \text{ i} = 7.5$$

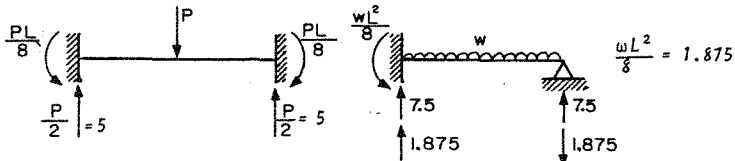
$$M_{20} \text{ d} = -\frac{wL^2}{8} = -\frac{3 \times 5^2}{8}$$

$$= -9.375$$

Ecuaciones de Equilibrio (superposición)

$$\bar{M}_{20} + k_{22}\theta_2 + k_{20}\Delta = 0$$

$$V_0 + k_{02}\theta_2 + (k_{00} + k_s)\Delta = 0$$



$$V_0 = 5 + 7.5 + 1.875 = 14.375$$

$$k_{22} \text{ i} = \frac{4EI}{L} = 0.666EI$$

$$k_{12} = \frac{2EI}{L} = 0.333EI$$

$$k_{22} \text{ d} = \frac{3EI}{L} = 0.6EI$$

$$k_{02} \text{ i} = \frac{k_{12} + k_{22} \text{ i}}{L} = \frac{6EI}{L^2} = 0.1666EI$$

$$k_{02} \text{ d} = -\frac{k_{22} \text{ d}}{L^2} = -0.12EI$$

$$k_{10} = k_{20} \text{ i} = \frac{6EI}{L^2} = 0.1666EI$$

$$K_{20} \text{ d} = -\frac{3EI}{L^2} = -0.12EI$$

$$K_{00} \text{ i} = \frac{12EI}{L^3} = 0.0555EI \quad K_{00} \text{ d} = \frac{3EI}{L^3} = 0.024EI$$

$$-1.875 + 1.2666\theta_2 + 0.04666EI\Delta = 0$$

$$14.375 + 0.04666\theta_2 + 0.37955\Delta = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1.2666 & 0.04666 \\ 0.04666 & 0.37955 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.875 \\ -14.375 \end{bmatrix}$$

$$\theta_2 = 2.88865104/EI; \Delta = -38.22895871/EI$$

$$M_{12} = M_{10} + K_{12}\theta_2 + K_{10}\Delta = -7.5 + 0.333(2.888651) + 0.1666(-38.2289)$$

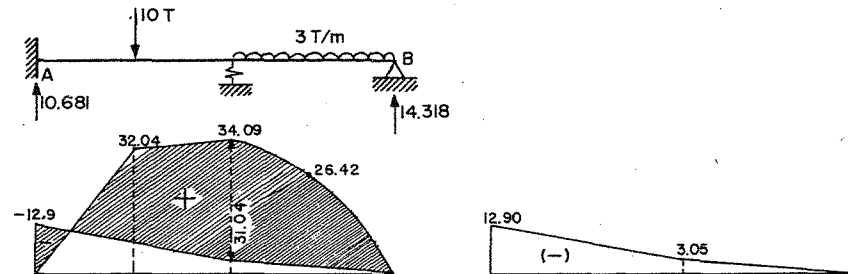
$$M_{12} = -12.9084 \text{ T-M}$$

$$M_{21} = M_{20} \text{ i} + K_{22}\theta_2 + K_{20}\Delta = 7.5 + 0.666(2.888651) + 0.1666(-38.22895) = 3.0543 \text{ T-M}$$

$$M_{23} = M_{20} \text{ d} + K_{22}\text{d}\theta_2 + K_{20}\text{d}\Delta = -9.375 + 0.6(2.888651) - 0.12(-38.2289)$$

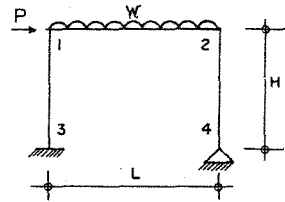
$$M_{23} = -3.0543 \text{ T-M}$$

El diagrama de momentos será

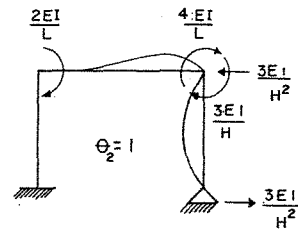
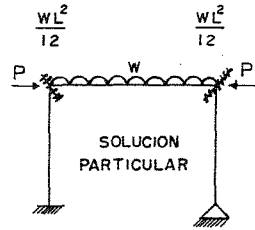
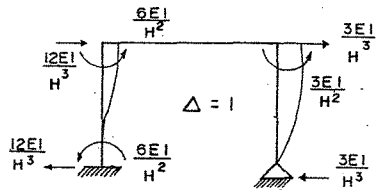
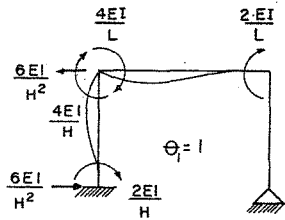


Se pueden expresar matricialmente las ecuaciones de equilibrio.

Por ejemplo



SOLUCION COMPLEMENTARIA



$$K_{11} = \frac{4EI}{H} + \frac{4EI}{L}$$

$$K_{12} = \frac{2EI}{L}$$

$$K_{1\Delta} = -\frac{6EI}{H^2}$$

$$K_{22} = \frac{4EI}{L} + \frac{3EI}{H}$$

$$K_{21} = \frac{2EI}{L}$$

$$K_{2\Delta} = -\frac{3EI}{H^2}$$

$$K_{\Delta\Delta} = \frac{12EI}{H^3} + \frac{3EI}{H^3}$$

$$K_{\Delta 1} = -\frac{6EI}{H^2}$$

$$K_{\Delta 2} = -\frac{3EI}{H^2}$$

$$M_1 + K_{11}\theta_1 + K_{12}\theta_2 + K_{1\Delta}\Delta = 0$$

$$M_2 + K_{21}\theta_1 + K_{22}\theta_2 + K_{2\Delta}\Delta = 0$$

$$P + K_{\Delta 1}\theta_1 + K_{\Delta 2}\theta_2 + K_{\Delta\Delta}\Delta = 0$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{1\Delta} \\ K_{21} & K_{22} & K_{2\Delta} \\ K_{\Delta 1} & K_{\Delta 2} & K_{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_1 \\ -M_2 \\ -P \end{bmatrix}$$

$$K d = F$$

$K$  = Matriz de rigidez

$$K_{ij} = K_{ji}$$

{ cuadrada  
simétrica  
diagonal positiva

La matriz de rigidez,  $[k]$  es aquella que multiplicada por el vector de desplazamientos  $\{d\}$  proporcionará el vector de fuerzas  $\{F\}$ .

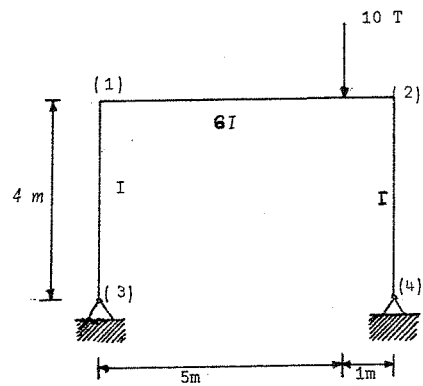


## EJEMPLOS

## METODO DE LAS RIGIDEZES.

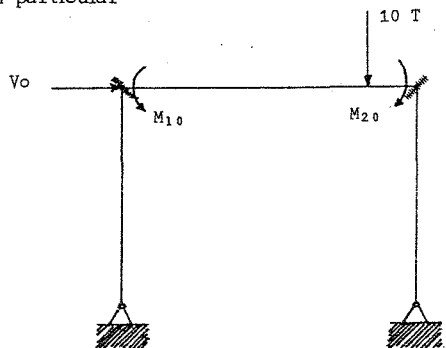
## Problema 1.

Resolver el siguiente marco por el método de rigideces

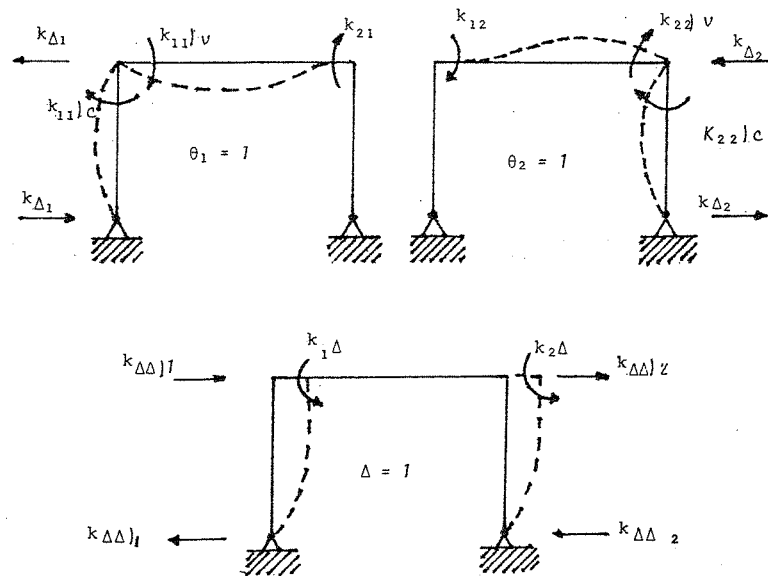


Incógnitas:  
 $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\Delta$

## Solución particular



## Solución complementaria



Los momentos de empotramiento en los nudos 1 y 2 son:

$$M_{10} = -\frac{P \alpha b^2}{L^2} = -\frac{10(5)(1)^2}{6^2} = -1,388 \text{ T-m}$$

$$M_{20} = \frac{P \alpha^2 b}{L^2} = \frac{10(5)^2(1)}{6^2} = 6,944 \text{ T-m}$$

Los valores de las rigideces en los nudos para los diferentes estados de deformación supuestos, son:

$$k_{11} \downarrow v = \frac{4EI}{6} (6) = 4EI;$$

$$k_{11} \downarrow c = \frac{3EI}{4} = 0,75 EI$$

$$k_{21} = \frac{2EI}{6} (6) = 2EI;$$

$$k_{\Delta 1} = -\frac{3EI}{4^2} = -0,188 EI$$

$$k_{12} = \frac{2EI}{6} (6) = 2EI;$$

$$k_{\Delta 2} = -\frac{3EI}{4^2} = -0,188 EI$$

$$k_{22} \downarrow v = \frac{4EI}{6} (6) = 4EI;$$

$$k_{22} \downarrow c = \frac{3EI}{4} = 0,75 EI$$

$$k_{1\Delta} = -\frac{3EI}{4^2} = -0,188 EI;$$

$$k_{2\Delta} = -\frac{3EI}{4^2} = -0,188 EI$$

$$k_{\Delta\Delta} \downarrow 1 = \frac{3EI}{4^3} = 0,047 EI;$$

$$k_{\Delta\Delta} \downarrow 2 = \frac{3EI}{4^3} = 0,047 EI$$

$$V_0 = 0$$

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$M_{10} + k_{11} \Theta_1 + k_{12} \Theta_2 + k_{1\Delta} \Delta = 0$$

$$M_{20} + k_{21} \Theta_1 + k_{22} \Theta_2 + k_{2\Delta} \Delta = 0$$

$$V_0 + k_{\Delta 1} \Theta_1 + k_{\Delta 2} \Theta_2 + k_{\Delta\Delta} \Delta = 0$$

Sustituyendo valores

$$-1,388 + (4 + 0,75) EI \Theta_1 + 2EI \Theta_2 - 0,188 EI \Delta = 0$$

$$6,944 + 2EI \Theta_1 + (4 + 0,75) EI \Theta_2 - 0,188 EI \Delta = 0$$

$$0 - 0,188 EI \Theta_1 - 0,188 EI \Theta_2 + (0,047) 2EI \Delta = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior.

$$\theta_1 = 1,052/EI ; \theta_2 = -1,978/EI ; \Delta = -1,872/EI$$

Una vez determinados los giros y desplazamientos en el marco, se calcularán los momentos reales en dicho marco.

$$M_{13} = k_{11}\theta_1 + k_{1\Delta}\Delta = 0,75 EI \frac{1,052}{EI} - \frac{0,188EI}{EI}(-1,872) = 1,136$$

$$M_{12} = M_{10} + k_{11}\theta_1 + k_{12}\theta_2 = -1,388 + 4EI \frac{1,052}{EI} + 2EI \frac{-1,978}{EI} = -1,136$$

$$M_{21} = M_{20} + k_{21}\theta_1 + k_{22}\theta_2 = 6,944 + 2EI \frac{1,052}{EI} + 4EI \frac{-1,978}{EI} = 1,136$$

$$M_{24} = k_{22}\theta_2 + k_{2\Delta}\Delta = 0,75 EI \frac{-1,978}{EI} - 0,188 EI \frac{-1,872}{EI} = -1,136$$

Las reacciones y diagramas de momento, fuerza cortante y normal se determinan como sigue.

Reacciones en el marco

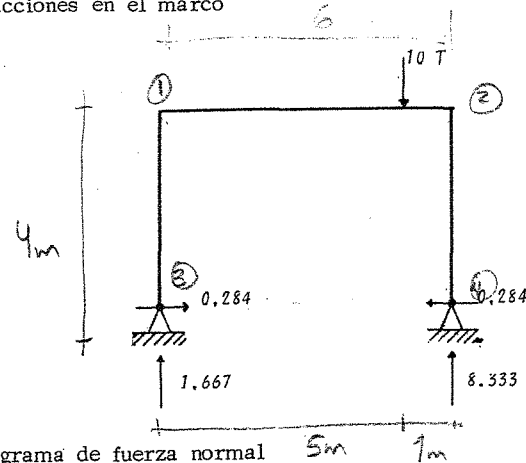


Diagrama de fuerza normal

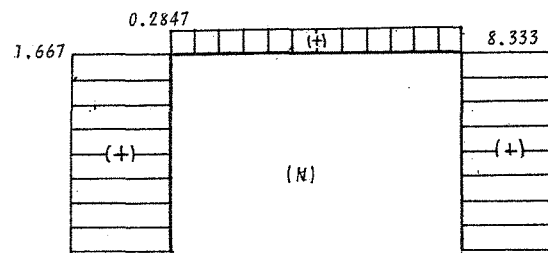


Diagrama de Fuerza Cortante

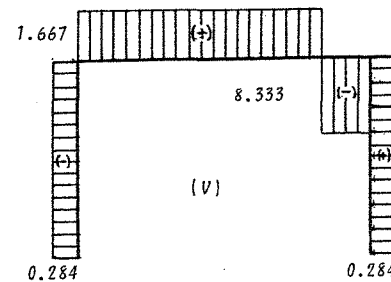
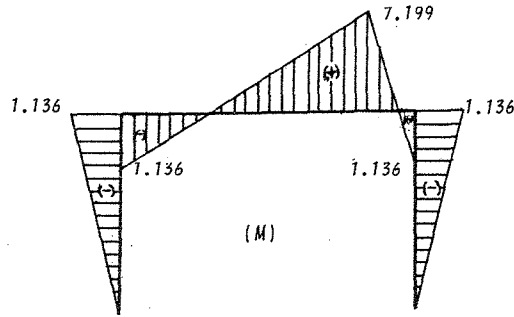
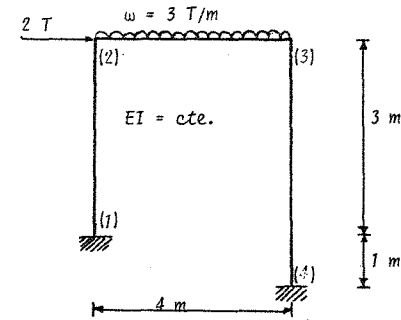


Diagrama de Momentos.

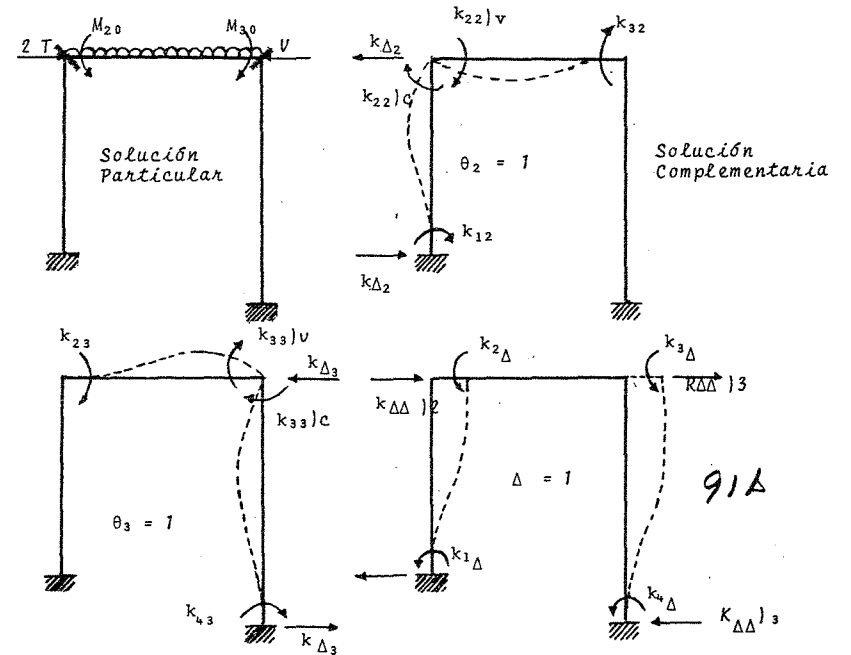


Problema 2.

Utilizando el método de las rigideces, resolver el siguiente marco el cual está sujeto a una carga lateral de  $2T$  y carga distribuida de  $3T/m$  como se muestra en la figura.



El grado de indeterminación cinemática es  $G = 3 (\theta_2, \theta_3, \Delta)$



Los momentos de empotramiento en los nudos 2 y 3 son:

$$M_{20} = \frac{\omega L^2}{12} = -\frac{3(4)^2}{12} = -4 \text{ T-m}; \quad M_{30} = 4 \text{ T-m} \quad V = -2.0 \text{ T}$$

Las rigideces en los nudos para los diferentes estados de deformación supuestos, son:

$$k_{22} \setminus v = \frac{4EI}{4} = EI;$$

$$k_{22} \setminus c = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$k_{32} = \frac{2EI}{4} = 0.5EI;$$

$$k_{12} = \frac{2EI}{3} = 0.667EI$$

$$k_{33} \setminus v = \frac{4EI}{4} = EI;$$

$$k_{33} \setminus c = \frac{4EI}{4} = EI$$

$$k_{23} = \frac{2EI}{4} = 0.5EI;$$

$$k_{43} = \frac{2EI}{4} = 0.5EI$$

$$k_{2\Delta} = -\frac{6EI}{(3)^2} = -0.667EI;$$

$$k_{3\Delta} = -\frac{6EI}{(4)^2} = -0.375EI$$

$$k_{1\Delta} = -\frac{6EI}{(3)^2} = -0.667EI;$$

$$k_{4\Delta} = -\frac{6EI}{(4)^2} = -0.375EI$$

Las fuerzas  $K_{\Delta 2}$  y  $K_{\Delta 3}$  son pares de fuerzas equilibrantes las cuales se valúan de la siguiente manera

$$K_{\Delta 2} = -\frac{k_{22} \setminus c + k_{12}}{L} = -\frac{4EI/3 + 2EI/3}{3} = -\frac{6EI}{9} = -0.667EI$$

$$K_{\Delta 3} = -\frac{k_{33} \setminus c + k_{43}}{L} = -\frac{4EI/4 + 2EI/4}{4} = -0.375EI$$

$$K_{\Delta 2} = \frac{12EI}{(3)^3} = 0.444EI; \quad K_{\Delta 3} = \frac{12EI}{(4)^3} = 0.188EI$$

Las ecuaciones de equilibrio son

$$M_{20} + k_{22}\theta_2 + k_{23}\theta_3 + k_{2\Delta}\Delta = 0$$

$$M_{30} + k_{32}\theta_2 + k_{33}\theta_3 + k_{3\Delta}\Delta = 0$$

$$V + k_{\Delta 2}\theta_2 + k_{\Delta 3}\theta_3 + k_{\Delta\Delta}\Delta = 0$$

Sustituyendo valores

$$-4 + (1+1.333)EI\theta_2 + 0.5EI\theta_3 - 0.667EI\Delta = 0$$

$$4 + 0.5EI\theta_2 + (1+1)EI\theta_3 - 0.375EI\Delta = 0$$

$$-2 - 0.667\theta_2 = 0.375EI\theta_3 + (0.444 + 0.188)EI\Delta = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior

$$\theta_2 = 3.861/EI; \quad \theta_3 = -1.810/EI; \quad \Delta = 6.159/EI$$

Cálculo de los momentos reales en el marco

$$M_{12} = k_{12}\theta_2 - k_{1\Delta}\Delta = 0.667EI \frac{(3.861)}{EI} - 0.667EI \frac{(6.159)}{EI} = -1.533$$

$$M_{21} = k_{22}\theta_2 - k_{2\Delta}\Delta = 1.333EI \frac{(3.861)}{EI} - 0.667EI \frac{(6.159)}{EI} = 1.039$$

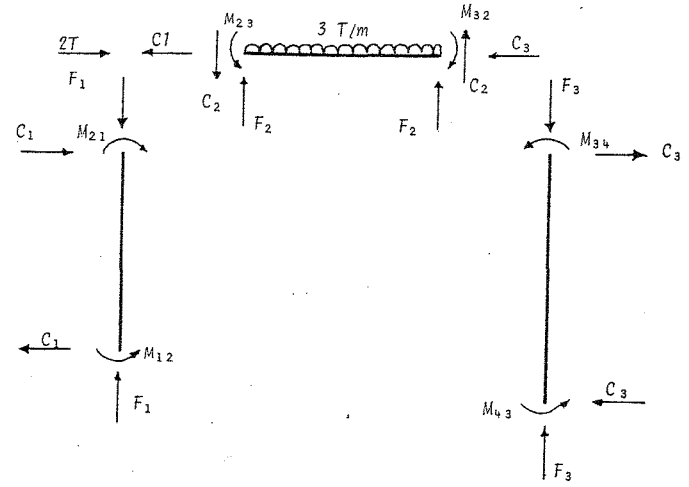
$$M_{23} = -M_{20} + k_{22}\theta_2 + k_{23}\theta_3 = -4 + EI \frac{(3.861)}{EI} + 0.5EI \frac{(-1.81)}{EI} = -1.039$$

$$M_{32} = M_{30} + k_{32}\theta_2 + (k_{33})V\theta_3 = 4 + 0.5EI \frac{(3.861)}{EI} + EI \frac{(-1.81)}{EI} = 4.121$$

$$M_{34} = k_{33}\theta_3 - k_{3\Delta}\Delta = EI \frac{(-1.81)}{EI} - 0.375 \frac{(6.159)EI}{EI} = -4.121$$

$$M_{43} = k_{43}\theta_3 - k_{4\Delta}\Delta = 0.5EI \frac{(-1.81)}{EI} - 0.375EI \frac{(6.159)}{EI} = -3.215$$

Las reacciones y diagramas de momentos, fuerza cortante y normal son como se muestra a continuación



Reacciones en el marco

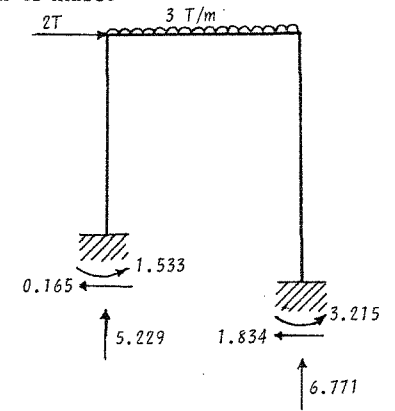
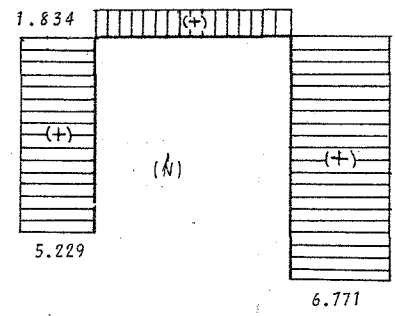


Diagrama de Fuerza Normal



Donde.

$$C_1 = \frac{M_{21} + M_{12}}{L} = \frac{1,039 - 1,533}{3} = -0,165 \quad (\text{Par equilibrante})$$

$$C_2 = \frac{M_{23} + M_{32}}{L} = \frac{1,039 - 4,121}{4} = -0,771$$

$$C_3 = \frac{M_{34} + M_{43}}{L} = \frac{-4,121 + 3,212}{4} = -1,834$$

$$F = \frac{\omega L}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6 \text{ Ton}$$

$$F_1 = F_2 - C_2 = 6 - 0,771 = 5,229 \text{ Ton.}$$

$$F_3 = F_2 + C_2 = 6 + 0,771 = 6,771 \text{ Ton.}$$

Diagrama de Fuerza Cortante

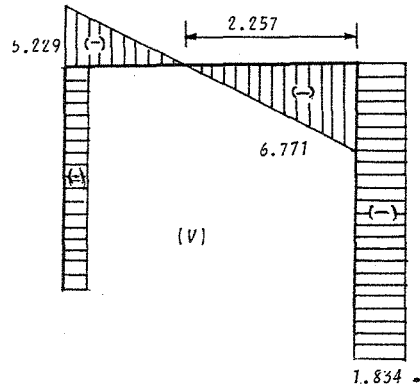
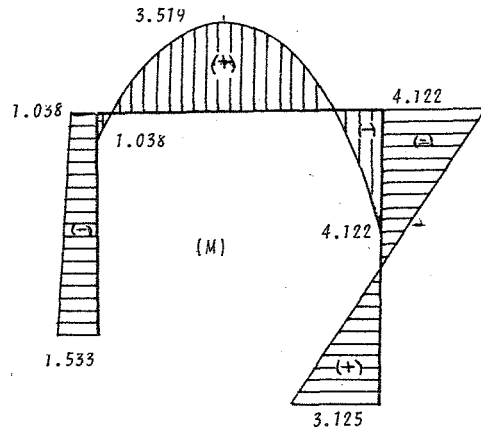
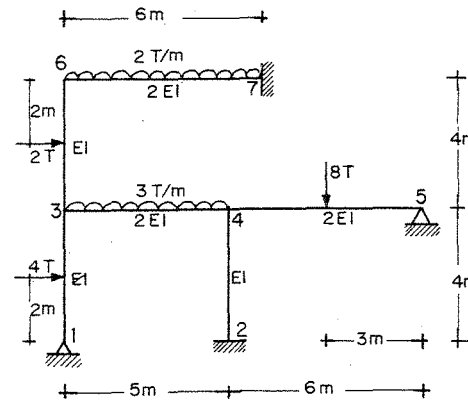


Diagrama de Momentos

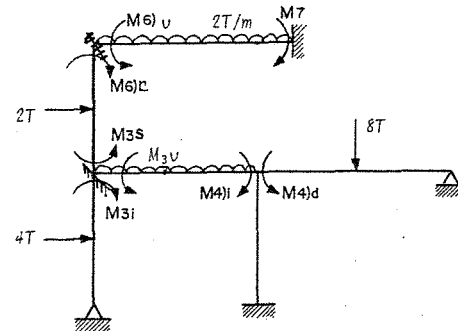


Problema 3.

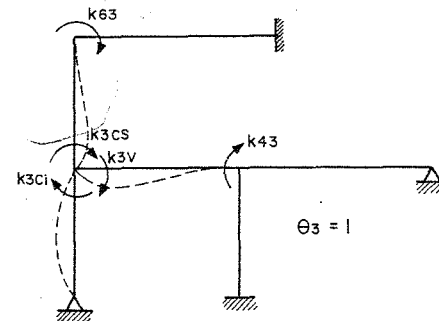
Resolver el siguiente marco



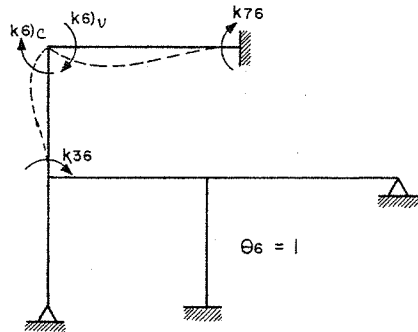
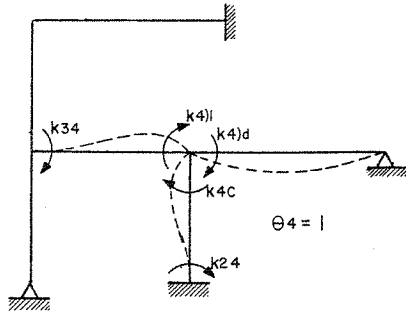
Incognitas  $\theta_3, \theta_4$  y  $\theta_6$



Solución particular



Solución complementaria



El grado de indeterminación cinemática es  $G = 3 \{ \theta_3, \theta_4 \text{ y } \theta_6 \}$

Los momentos de empotramiento en los nudos son:

$$M_7 = \frac{\omega L^2}{12} = \frac{2(6)^2}{12} = 6 \quad ; \quad M_6)v = -6$$

$$M_6)c = \frac{PL}{8} = \frac{2(4)}{8} = 1 \quad ; \quad M_3)s = -1$$

$$M_3)v = \frac{\omega L^2}{12} = -\frac{3(5)^2}{12} = -6.25 \quad ; \quad M_4)i = +6.25$$

$$M_3)s = \frac{3PL}{16} = \frac{3(4)(4)}{16} = 3 \quad ; \quad M_4)d = -\frac{3PL}{16} = -\frac{3(8)6}{16} = -9$$

Las rigideces en los nudos son los siguientes

$$k_{63} = \frac{2EI}{4} = 0.5EI \quad ; \quad k_{33}cs = \frac{4EI}{4} = EI$$

$$k_{33}ci = \frac{3EI}{4} = 0.75EI \quad ; \quad k_{33}v = \frac{4EI(2)}{5} = 1.6EI$$

$$k_{43} = \frac{2EI(2)}{2} = 0.8EI \quad ; \quad k_{34} = \frac{2EI(2)}{5} = 0.8EI$$

$$k_{44}i = \frac{4EI(2)}{5} = 1.6EI \quad ; \quad k_{44}d = \frac{3EI(2)}{6} = EI$$

$$k_{44}c = \frac{4EI}{4} = EI \quad ; \quad k_{24} = \frac{2EI}{2} = 0.5EI$$

$$k_{66}c = \frac{4EI}{4} = EI \quad ; \quad k_{66}v = \frac{4EI}{6}(2) = 1.333EI$$

$$k_{36} = \frac{2EI}{4} = 0.5EI \quad ; \quad k_{76} = \frac{2EI}{6}(2) = 0.666EI$$

Ecuaciones de Equilibrio (superposición)

$$M_6 + k_{63}\theta_3 + 0 + k_{66}\theta_6 = 0$$

$$M_3 + k_{33}\theta_3 + k_{34}\theta_4 + k_{36}\theta_6 = 0$$

$$M_4 + k_{43}\theta_3 + k_{44}\theta_4 + 0 = 0$$

Sustituyendo valores

$$(1-6) + 0.5EI\theta_3 + 0 + (1 + 1.333)EI\theta_6 = 0$$

$$(-1-6.25 + 3) + (1 + 0.75 + 1.6)EI\theta_3 + 0.8EI\theta_4 + 0.5EI\theta_6 = 0$$

$$(6.25 - 9) + 0.8EI\theta_3 + (1.6 + 1 + 1)EI\theta_4 + 0 = 0$$



Resolviendo el sistema anterior

$$\theta_6 = 1.964/EI ; \theta_3 = 0.838/EI ; \theta_4 = 0.578/EI$$

Momentos reales en el marco

$$M_{31} = M_3 \lambda + k_3 c \theta_3 = 3.638$$

$$M_{34} = M_3 v + k_3 v \theta_3 + k_{34} \theta_4 = -4.447$$

$$M_{36} = M_3 s + k_3 c s \theta_3 + k_{36} \theta_6 = 0.819$$

$$M_{63} = M_6 c'' + k_{63} \theta_3 + k_{66} c \theta_6 = 3.382$$

$$M_{67} = M_6 v + k_{66} v \theta_6 = 3.382$$

$$M_{43} = M_4 \lambda + k_{43} \theta_3 + k_{44} \lambda \theta_4 = 7.844$$

$$M_{45} = M_4 d + k_{44} d \theta_4 = 8.422$$

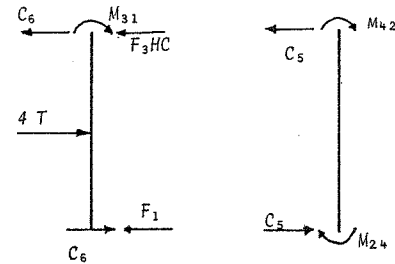
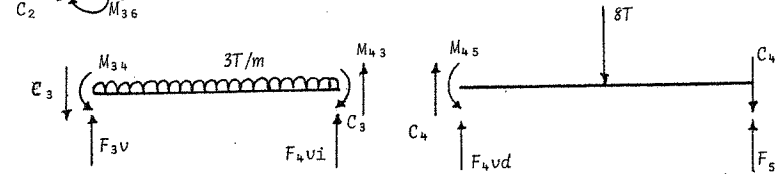
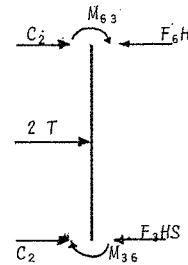
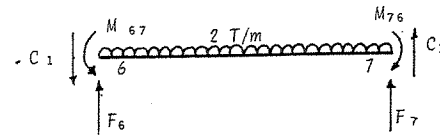
$$M_{42} = k_{42} c \theta_4 = 0.578$$

$$M_{76} = M_7 + k_{76} \theta_6 = 7.309$$

$$M_{24} = k_{24} \theta_4 = 0.289$$

Las reacciones y diagramas de momentos, fuerza cortante y normal son las mostradas a continuación.

El procedimiento para determinar las reacciones, es similar al seguido en los ejemplos anteriores.



De la figura anterior se tiene

$$C_1 = \frac{M_{67} + M_{76}}{6} = \frac{-3.382 + 7.309}{6} = 0.655 T$$

$$C_2 = \frac{M_{63} + M_{36}}{4} = \frac{3.382 + 0.819}{4} = 1.051$$

$$C_3 = \frac{M_{34} + M_{43}}{5} = \frac{-4.447 + 7.844}{5} = 0.679$$

$$C_4 = \frac{M_{45} + 0}{6} = -\frac{8.422}{6} = -1.404$$

$$C_5 = \frac{M_{42} + M_{24}}{4} = \frac{0.578 + 0.289}{4} = 0.217$$

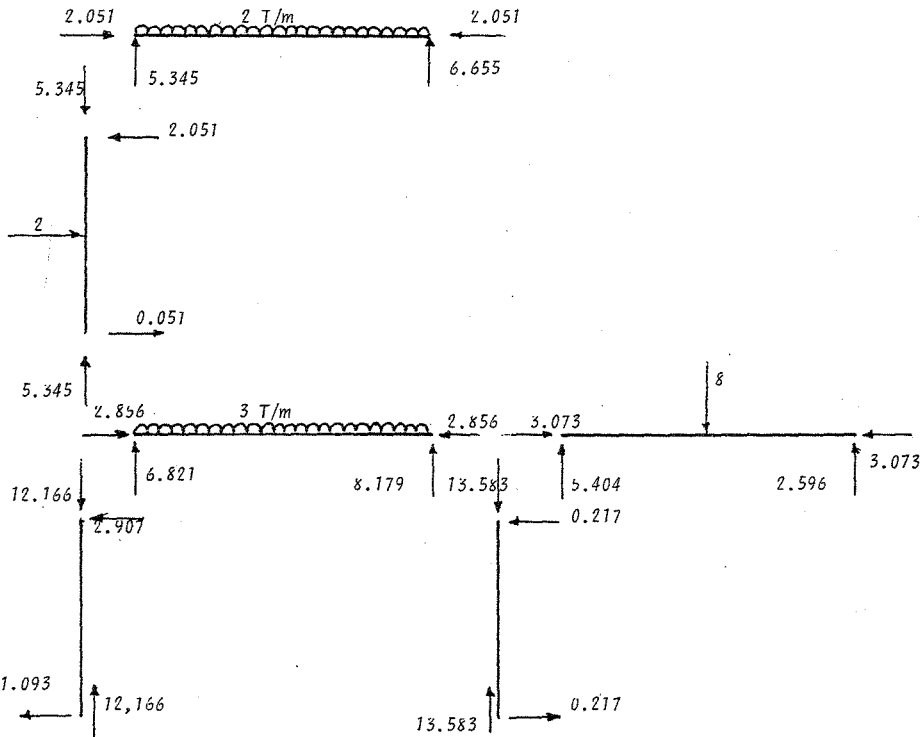
$$C_6 = \frac{M_{31} + 0}{4} = \frac{3.628}{4} = .907$$

$$F_{6V} = F_7 = \frac{\omega L}{2} = \frac{2(6)}{2} = 6 \text{ t}$$

$$F_{6H} = F_3H_s = \frac{2}{2} = 1; \quad F_{3V} = F_4V_i = \frac{3(5)}{2} = 7.5$$

$$F_{4Vd} = F_5 = \frac{8}{2} = 4; \quad F_{3Hc} = F_1 = \frac{4}{2} = 2$$

Del equilibrio de las fuerzas actuantes en cada uno de los miembros - de la estructura se obtiene.



Reacciones

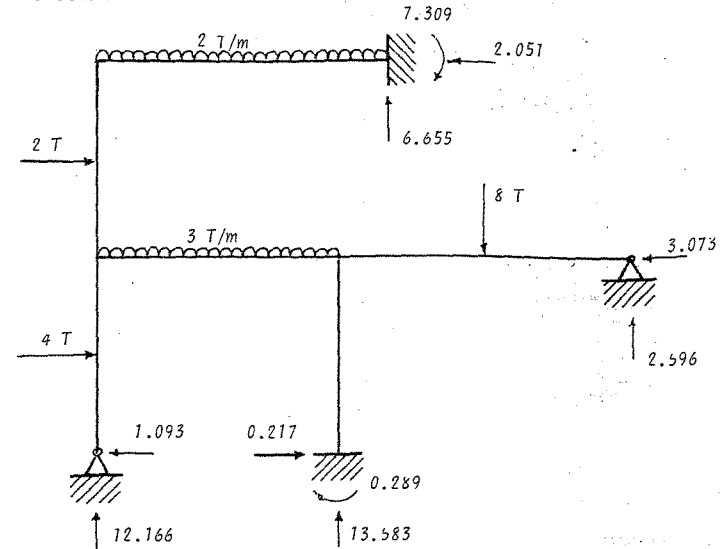


Diagrama de Fuerza Normal

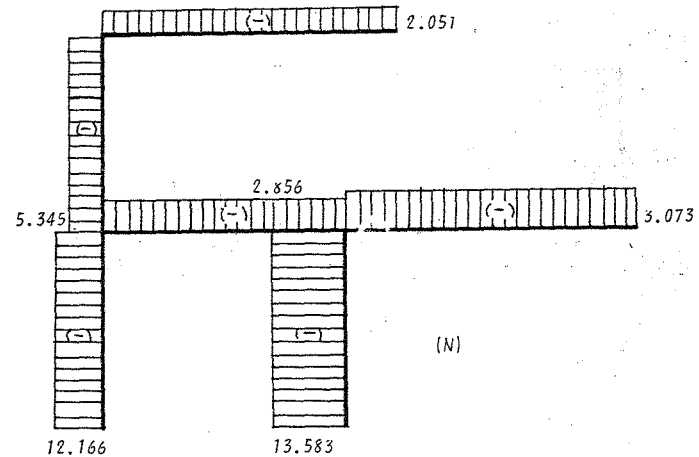


Diagrama de cortante

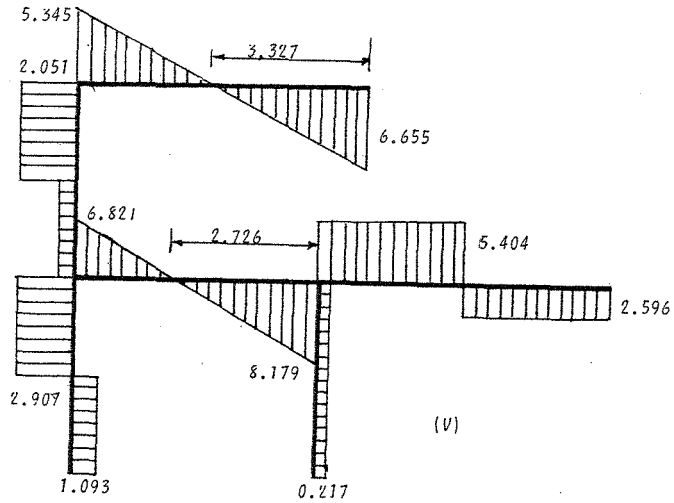
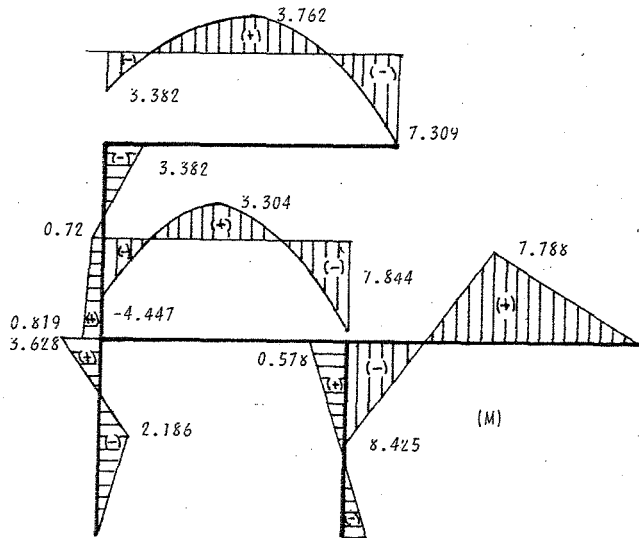
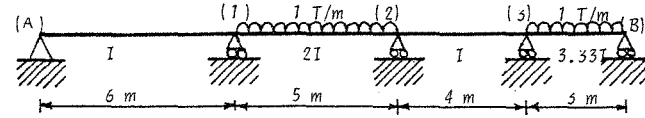


Diagrama de momentos



Problema 4.

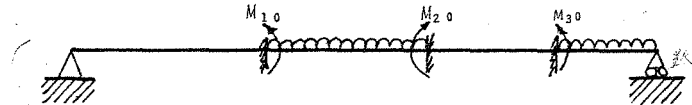
Determinar las reacciones y diagramas de momentos y fuerza cortante de la viga continua mostrada



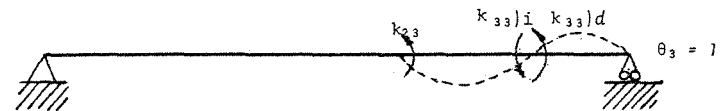
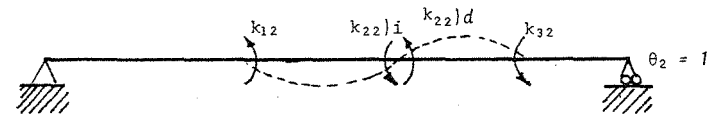
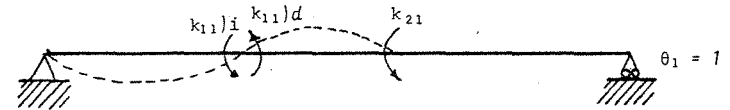
Notación (+) giros y desplazamientos

El grado de indeterminación es 3 ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ )

Solución particular



Solución complementaria



Los momentos de empotramiento valen

$$M_{10} = \frac{\omega L^2}{12} = \frac{1(5)^2}{12} = 2.08 \text{ t-m} ; \quad M_{20} = -2.08 \text{ t-m}$$

$$M_{30} = \frac{\omega L^2}{8} = \frac{1(3)^2}{8} = 1.125 \text{ t-m}$$

$$k_{11}i = \frac{3EI}{6} = 0.5EI ; \quad k_{11}d = \frac{4EI(2)}{5} = 1.6EI$$

$$k_{21} = \frac{4EI}{5} = 0.8EI ; \quad k_{12} = \frac{4}{5} EI = 0.8EI$$

$$k_{22}i = \frac{8EI}{5} = 1.6EI ; \quad k_{22}d = \frac{AEI}{4} = EI$$

$$k_{32} = \frac{2EI}{4} = 0.5EI ; \quad k_{23} = \frac{2EI}{4} = 0.5EI$$

$$k_{33}i = \frac{4EI}{4} = EI ; \quad k_{33}d = \frac{3 \times 3.33EI}{3} = 3.33EI$$

Ecuaciones de equilibrio

$$M_{10} + k_{11}\theta_1 + k_{12}\theta_2 = 0$$

$$M_{20} + k_{21}\theta_1 + k_{22}\theta_2 + k_{23}\theta_3 = 0$$

$$M_{30} + k_{32}\theta_2 + k_{33}\theta_3 = 0$$

Sustituyendo valores

$$2.08 + (0.5 + 1.6)EI\theta_1 + 0.8EI\theta_2 = 0$$

$$-2.08 + 0.8EI\theta_1 + (1.6 + 1)EI\theta_2 + 0.5EI\theta_3 = 0$$

$$1.125 + 0.5EI\theta_2 + (1 + 3.33)EI\theta_3 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\theta_1 = -\frac{1.502}{EI} ; \quad \theta_2 = \frac{1.342}{EI} ; \quad \theta_3 = \frac{-0.415}{EI}$$

Cálculo de momentos reales en la viga.

$$M_{1A} = k_{11}i\theta_1 = 0.5EI \frac{(-1.502)}{EI} = -0.751 \text{ t-m}$$

$$M_{12} = M_{10} + k_{11}d\theta_1 + k_{12}\theta_2 = 2.08 + (1.6EI) \frac{(-1.502)}{EI} + 0.8EI \frac{(1.342)}{EI}$$

$$M_{12} = 0.751$$

$$M_{21} = M_{20} + k_{21}\theta_1 + k_{22}i\theta_2 = -2.08 + 0.8EI \frac{(-1.502)}{EI} + 1.6EI \frac{(1.342)}{EI} = 1.134$$

$$M_{23} = k_{22}d\theta_2 + k_{23}\theta_3 = EI \frac{(1.342)}{EI} + 0.5EI \frac{(-0.415)}{EI} = 1.134$$

$$M_{32} = k_{32}\theta_2 + k_{33}i\theta_3 = 0.5EI \frac{(1.342)}{EI} + EI \frac{(-0.415)}{EI} = 0.256$$

$$M_{3B} = M_{30} + k_{33}d\theta_3 = 1.125 + 3.33EI \frac{(-0.415)}{EI} = -0.256$$

Fuerza y momentos resultantes en la viga

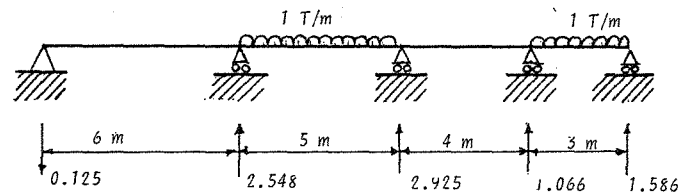
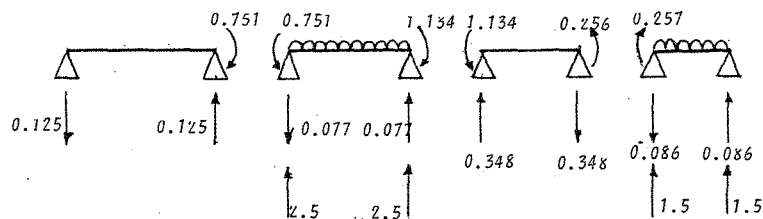


Diagrama de fuerza cortante

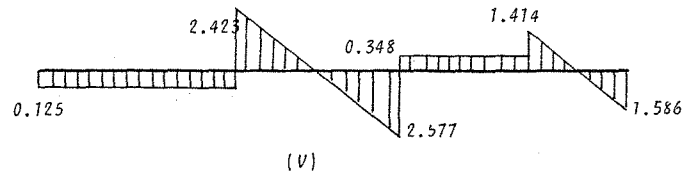
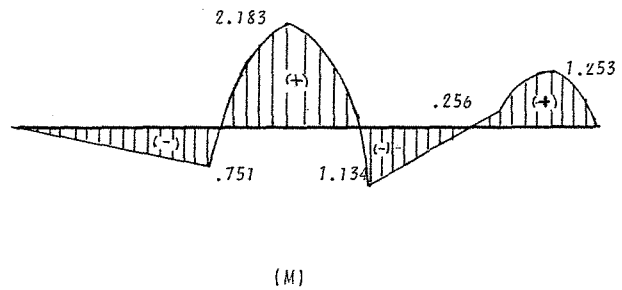


Diagrama de momentos



## METODO DE CROSS

Este es un método de relajaciones y fue ideado por Hardy Cross en 1932. También se llama "Método de distribución de momentos". No es un método de los llamados aproximados, sino un proceso de aproximaciones sucesivas que nos permite determinar las incógnitas hiperestáticas con la precisión deseada.

En estructuras impedidas al desplazamiento lateral el método de Cross evita el tener que efectuar la solución de un sistema de ecuaciones. Si la estructura puede desplazarse, el método de Cross también conduce a un sistema de ecuaciones, pero el número de dichas ecuaciones es muy inferior al que se obtendría utilizando por ejemplo, el método de las flexibilidades o el método general de las rigideces.

El método de Cross puede aplicarse en estructuras con elementos de sección constante o variable, así como a estructuras con elementos de eje recto o curvo.

Para comprender este método es necesario comprender perfectamente ciertos términos básicos, los cuales se estudiarán enseguida.

## CONVENCION DE SIGNOS

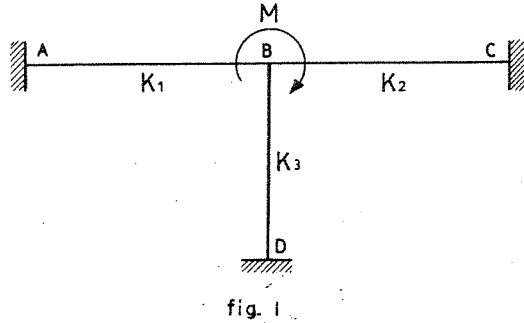
Para designar el signo de los momentos la convención será la siguiente: Si el momento de flexión tiende a hacer girar al apoyo en el sentido de las manecillas del reloj, el momento de flexión se considerará positivo.

## CAPITULO 7

## METODO DE CROSS

## FACTQR DE DISTRIBUCION

Considérese la Fig. 1 mostrada, en la cual la estructura está sujeta a la aplicación externa de un momento  $M$ .



La estructura soportará el momento  $M$  por medio de los elementos BA, BC y BD. La contribución de cada elemento para resistir el momento  $M$  estará en función de las rigideces  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  de cada elemento respectivamente. Se puede decir entonces que la contribución de cada elemento es:

$$M_{BA} = \frac{K_1}{\Sigma K} M$$

$$M_{BC} = \frac{K_2}{\Sigma K} M$$

$$M_{BD} = \frac{K_3}{\Sigma K} M$$

donde  $\Sigma K = K_1 + K_2 + K_3$

Por lo tanto se puede enunciar que:

"El factor de distribución para un elemento de un nudo en una estructura, es igual a la rigidez del elemento dividida por la suma de las rigideces de todos los elementos que llegan a dicho nudo"

En si, el factor de distribución representa la rigidez proporcional del elemento con respecto a la rigidez del nudo.

Para el caso analizado arriba se tiene:

$$\frac{K_1}{\Sigma K} \text{ es el factor de distribución para el elemento BA}$$

$$\frac{K_2}{\Sigma K} \text{ es el factor de distribución para el elemento BC}$$

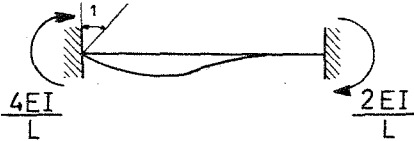
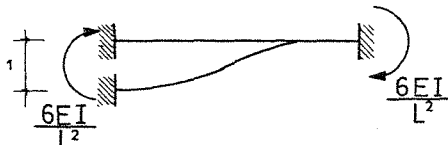
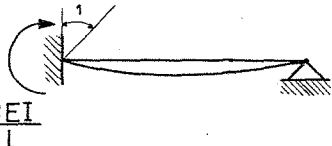
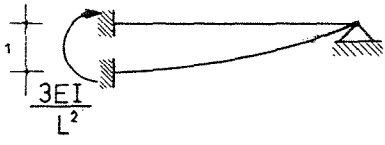
$$\frac{K_3}{\Sigma K} \text{ es el factor de distribución para el elemento BD}$$

## FACTOR DE TRANSPORTE

Se ha visto anteriormente que cuando se desarrolla un momento resistente en el extremo de un elemento, se induce un momento en el extremo opuesto de dicho elemento. El momento inducido en el extremo opuesto tiene siempre una relación con el momento resistente desarrollado en el extremo que gira o que se desplace. Por lo tanto, se puede definir que:

"El factor de transporte es el valor por el cual debe multiplicarse el momento que se desarrolla en el extremo girado o desplazado de un elemento (siendo el otro extremo empotrado) para obtener el valor del momento inducido en el extremo opuesto".

En la siguiente tabla se analizan algunos casos comunes.

ESTRUCTURA	F. T. *
	1/2
	1
	0
	0

\* F.T. "Factor de transporte"

METODO DE CROSS

a) Estructuras sin desplazamientos.

En la Fig. 2 se muestra un marco sujeto a un sistema de cargas dado. Para resolver dicho marco se puede usar el principio de superposición indicado en la figura.

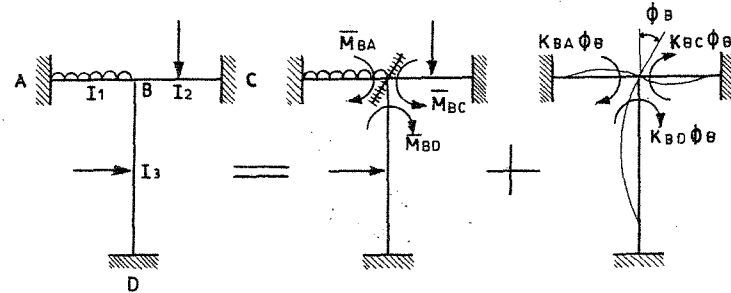


fig. 2

Los momentos de los elementos que llegan al nudo B son:

$$M_{BA} = \bar{M}_{BA} + K_{BA}\phi_B$$

$$M_{BC} = \bar{M}_{BC} + K_{BC}\phi_B \quad \text{--- (a)}$$

$$M_{BD} = \bar{M}_{BD} + K_{BD}\phi_B$$



Por condiciones de equilibrio  $\sum M_B = 0$  por lo tanto

$$M_{BA} + M_{BC} + M_{BD} = 0$$

o sea

$$\bar{M}_B + K_{BB} \phi_B = 0$$

y

$$\phi_B = -\frac{\bar{M}_B}{K_{BB}} \quad \text{———— (b)}$$

donde

$\bar{M}_B = \bar{M}_{BA} + \bar{M}_{BC} + \bar{M}_{BD}$  es el momento de desequilibrio del nudo B.

$K_{BB} = K_{BA} + K_{BC} + K_{BD}$  es la rigidez angular del nudo B.

sustituyendo (b) en (a) se tiene que

$$M_{BA} = \bar{M}_{BA} - \frac{K_{BA}}{K_{BB}} \bar{M}_B$$

$$M_{BC} = \bar{M}_{BC} - \frac{K_{BC}}{K_{BB}} \bar{M}_B \quad \text{———— (c)}$$

$$M_{BD} = \bar{M}_{BD} - \frac{K_{BD}}{K_{BB}} \bar{M}_B$$

si

$$d_{BA} = -\frac{K_{BA}}{K_{BB}}$$

$$d_{BC} = -\frac{K_{BC}}{K_{BB}}$$

$$d_{BD} = -\frac{K_{BD}}{K_{BB}}$$

que son los factores de distribución de cada elemento que llega al nudo B

se sustituyen en (C), se tiene que

$$M_{BA} = \bar{M}_{BA} + d_{BA} \bar{M}_B$$

$$M_{BC} = \bar{M}_{BC} + d_{BC} \bar{M}_B$$

$$M_{BD} = \bar{M}_{BD} + d_{BD} \bar{M}_B$$

Las expresiones anteriores indican que los momentos finales en los elementos, es la suma del momento de empotramiento respectivo - más la parte proporcional (factor de distribución) que le corresponde del momento de desequilibrio del nudo.

Los momentos en los extremos opuestos al nudo B serían:

$$M_{AB} = \bar{M}_{AB} + t_{BA} d_{BA} \bar{M}_B$$

$$M_{CB} = \bar{M}_{CB} + t_{BC} d_{BC} \bar{M}_B$$

$$M_{DB} = \bar{M}_{DB} + t_{BD} d_{BD} \bar{M}_B$$

donde  $t_{BA}$ ,  $t_{BC}$  y  $t_{BD}$  son los factores de transporte de los elementos - que llegan al nudo B.

Puede establecerse entonces el siguiente procedimiento para la - aplicación del método de Cross.

1. Se obtienen los momentos de empotramiento de la estructura.
2. Se calculan los factores de distribución y de transporte para - todos los elementos de la estructura.
3. Se distribuyen los momentos de desequilibrio de cada nudo en todos los elementos que concurren a dicho nudo, según su factor de distribución correspondiente. Debe tenerse en cuenta que después de distribuir se debe transportar al extremo opuesto según el factor de transporte correspondiente.
4. El proceso de ir equilibrando los nudos puede terminarse según la aproximación deseada.

En el desarrollo de los ejercicios siguientes puede verse en mejor forma el procedimiento del método.

#### EJERCICIO

Considérese la viga mostrada en la Fig. 3 sujeta al sistema de - carga dado.

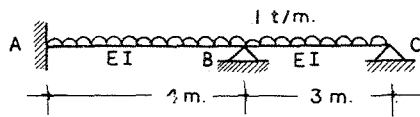


fig. 3

Los momentos de empotramiento y los factores de distribución y transporte serán.

$$\bar{M}_{AB} = -\frac{WL^2}{12} = -\frac{1(4)^2}{12} = -1.333 \text{ t-m}$$

$$\bar{M}_{BA} = -\bar{M}_{AB} = 1.333 \text{ t-m}$$

$$\bar{M}_{BC} = -\frac{WL^2}{8} = -\frac{1(3)^2}{8} = -1.125 \text{ t-m}$$

$$K_{BA} = \frac{4EI}{L} = EI$$

$$K_{BC} = \frac{3EI}{L} = EI$$

$$\Sigma K_B = 2EI$$

$$d_{BA} = \frac{K_{BA}}{\Sigma K} = \frac{EI}{2EI} = 0.5$$

$$d_{BC} = \frac{K_{BC}}{\Sigma K} = \frac{EI}{2EI} = 0.5$$

$$t_{BA} = \frac{1}{2}$$

$$t_{BC} = 0$$

Se puede entonces hacer la siguiente representación de los datos obtenidos

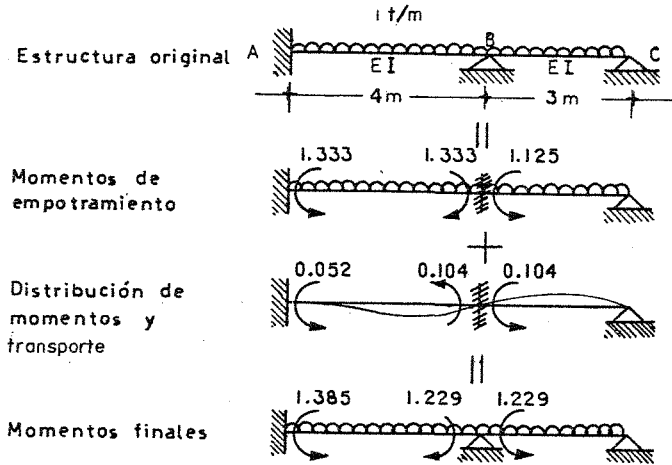


fig. 4

La distribución de momentos se efectuó distribuyendo el momento de desequilibrio en los elementos BA y BC para establecer el equilibrio en el nudo B, o sea

$$\bar{M}_B = \bar{M}_{BA} + \bar{M}_{BC} = 1.333 - 1.125 = 0.208$$

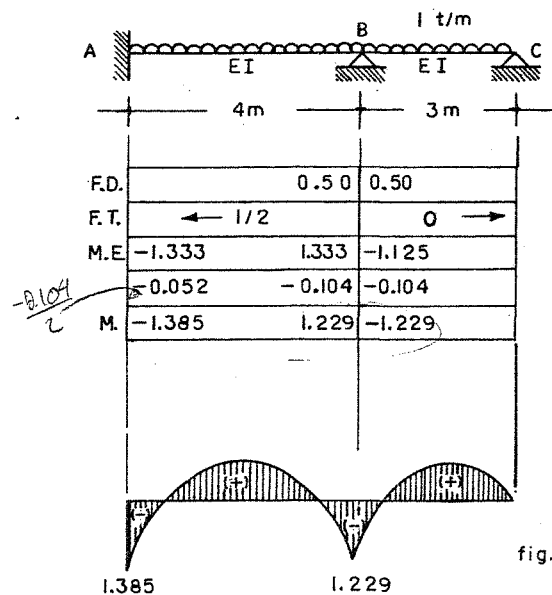
$$d_{BA} \bar{M}_B = -0.5(0.208) = -0.104$$

$$d_{BC} \bar{M}_B = -0.5(0.208) = -0.104$$

Los momentos finales se obtienen sumando los momentos de empotramiento con los momentos distribuidos y/o transportados en B.

El ejercicio anterior puede también presentarse en la forma siguiente:

BARRA	Momento de empotramie.	RIGIDEZ	FACTOR DE DISTRIBUC.	FACTOR DE TRANSPORTE
BA	1.333	$\frac{4EI}{L} = EI$	0.50	0.50
BC	-1.125	$\frac{3EI}{L} = EI$	0.50	0.00
$\Sigma$	0.208	$2EI$	1.00	



Dist y transporte  
 $M_B = 1.333 - 1.125$   
 $= 0.208(0.5) = 0.104$   
 40.

- Factor de distribución
- Factor de transporte
- Momentos de empotramiento
- Distribución y transporte
- Momentos finales

Diagrama de momentos

fig. 5

## b) Estructuras con desplazamientos.

Para resolver este tipo de estructuras por medio del método de Cross se puede emplear el principio de la superposición. Considérese, por ejemplo, el marco mostrado en la Fig. 6, el cual puede desplazarse lateralmente.

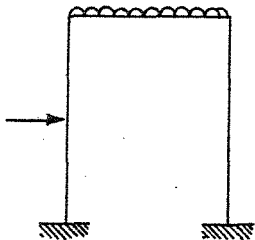
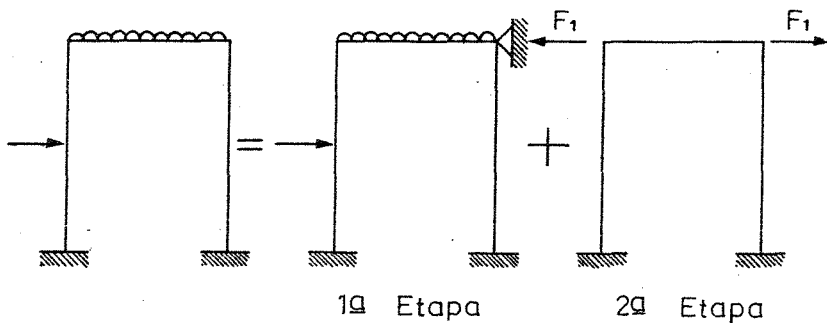


fig. 6

Por superposición se puede establecer que:



Lo cual quiere decir, que en la primera etapa se resuelve el marco considerando que este no se desplaza. Se calcula la fuerza  $F_1$  que impide el desplazamiento y se aplica al marco (segunda etapa). Puede establecerse entonces el siguiente procedimiento para resolver estructuras de este tipo:

1. Resolver la estructura considerando que esta no se puede desplazar. Determinar la fuerza  $F_1$  que impide el desplazamiento.

2. Suponer en la estructura un desplazamiento  $\Delta$  cualquiera impidiendo que los nudos giren. Con la estructura desplazada se permiten los giros en los nudos y se resuelve la estructura. Se calcula ahora la fuerza  $F_2$  que produce el desplazamiento  $\Delta$  dado.

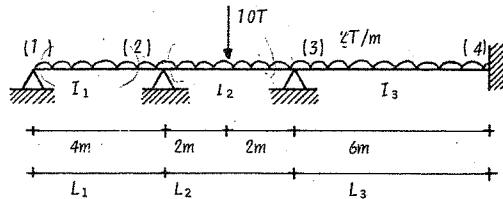
3. Como la fuerza  $F_1$  que impidió el desplazamiento en (1) será diferente que la fuerza  $F_2$  calculada en (2), los resultados del paso (2) se deben multiplicar por el factor de corrección  $F_1/F_2$ .

4. Se suman los resultados obtenidos en (1) con los obtenidos en (3) y ésta será la solución final.

## EJEMPLOS

## METODO DE CROSS

Problema 1.- Encontrar el diagrama de fuerza cortante y momento flexionante de la viga continua que se muestra enseguida, la cual está sometida a una carga uniformemente repartida de 2 tn/m y una carga de 10 tn. como se ilustra en la figura.



$$I_1 = 150; I_2 = 200; I_3 = 100; E = \text{cte.}$$

Solución: Considere que los nudos (2) y (3) están empotrados.

1.- Cálculo de los momentos de empotramiento

$$\bar{M}_{21} = \frac{\omega L_1^2}{8} = \frac{2(4)^2}{8} = 4;$$

$$\bar{M}_{23} = -\frac{\omega L_2^2}{12} = \frac{PL_2}{8} = -\frac{2(4)^2}{12} = -7.66; \bar{M}_{32} = 7.66$$

$$\bar{M}_{34} = -\frac{\omega L_3^2}{12} = \frac{-2(6)^2}{12} = -6; \bar{M}_{43} = 6$$

2.- Factores de distribución y transporte.

Nudo 2

$$K_{21} = \frac{3EI_1}{L_1} = \frac{3(150)E}{4} = 112.5E; K_{23} = \frac{4EI_2}{L_2} = \frac{4(200)E}{2} = 200E$$

$$\Sigma K_2 = (112.5 + 200)E = 312.5E$$

$$F.D._{21} = \frac{K_{12}}{\Sigma K_2} = \frac{112.5}{312.5} = 0.36; F.D._{23} = \frac{K_{23}}{\Sigma K_2} = \frac{200}{312.5} = 0.64$$

$$FT_{21} = 0.0; FT_{23} = 0.5;$$

Nudo 3

$$K_{32} = \frac{4EI_2}{L_2} = \frac{4(200)E}{2} = 200E$$

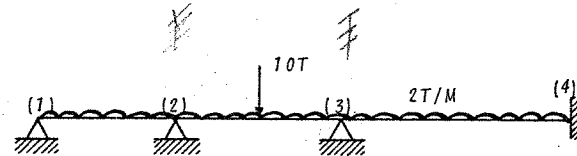
$$K_{34} = \frac{4EI_3}{L_3} = \frac{4(100)E}{6} = 66.67E$$

$$\Sigma K_3 = (200 + 66.67)E = 266.67E$$

$$F.D._{32} = \frac{K_{32}}{\Sigma K_3} = \frac{200}{266.67} = -0.75; F.D._{34} = \frac{K_{34}}{\Sigma K_3} = \frac{66.67}{266.67} = 0.25$$

$$F.T._{32} = 0.5; F.T._{34} = 0.5$$

El arreglo tabulado de la solución es el siguiente



	(1)	(2)	(3)	(4)
Fact.Distr.	-0.36	-0.64	-0.75	-0.25
Fact.Trans.	+ 0	+ 0.5 +		0.5 →
M.emptr.	4.0	-7.66	7.66	- 6
1 M0	1.32	2.34		
2 F.T.ij M0			1.17	
3 M0			-2.12	-0.71
4 F.T.ij M0		-1.06		-0.36
M0	0.38	0.68		
F.T.ij M0			0.34	
M0			-0.26	-0.09
F.T.ij M0		-0.13		-0.05
	0.05	0.08		
ΣM	5.75	-5.75	6.79	-6.79

En la tabla anterior se ha ilustrado como se distribuyen los momentos de desequilibrio de cada nudo en los elementos que concurren a dicho nudo, según su factor de distribución correspondiente, teniendo en cuenta, que se deben transportar dichos momentos al extremo opuesto según su factor de transporte.

Con el fin de hacer más claro el método, se anotarán algunas operaciones en forma detallada de los valores obtenidos en la tabla.

Reglón 1.- Distribución de momentos (equilibrio del nudo 2)

$$\bar{M}_2 = \bar{M}_{21} + \bar{M}_{23} = 4 - 7.66 = - 3.66$$

$$(d_{21})\bar{M}_2 = - 0.36(-3.66) = 1.32; \quad (d_{23})\bar{M}_2 = - 0.64(-3.66) = 2.34$$

Reglón 2.- Momento transportado

$$F.T._{23} (d_{23})\bar{M}_2 = 0.5(2.34) = 1.17$$

Reglón 3.- Distribución de momentos (equilibrio del nudo 3)

$$\bar{M}_3 = \bar{M}_{32} + \bar{M}_{34} + F.T._{23}(d_{23})\bar{M}_2 = 7.66 - 6 + 1.17 = 2.83$$

$$(d_{32})\bar{M}_3 = - 0.75(2.83) = - 2.12; \quad (d_{34})\bar{M}_3 = - 0.25(2.83) = - 0.71$$

Reglón 4.- Momentos transportados

$$F.T._{32}(d_{32})\bar{M}_3 = 0.5(-2.12) = - 1.06; \quad F.T._{34}(d_{34})\bar{M}_3 = 0.5(-0.71) = - 0.36$$

El procedimiento se repite iterativamente hasta obtener la precisión deseada.

Una vez que se han distribuido y transportado los momentos de desequilibrio se procede a determinar los momentos finales, que de acuerdo con la tabla anterior, basta con sumar algebraicamente los valores que aparecen en cada columna.

Cálculo de reacciones en la viga

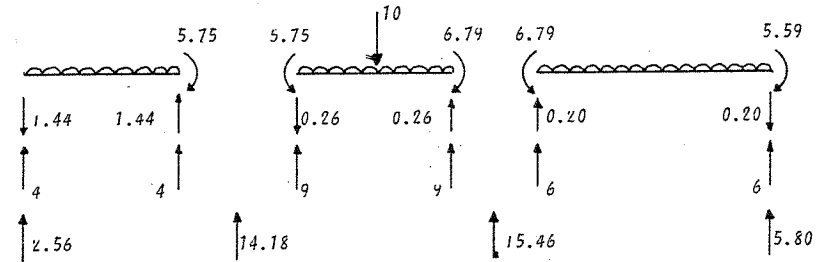


Diagrama de cortante.

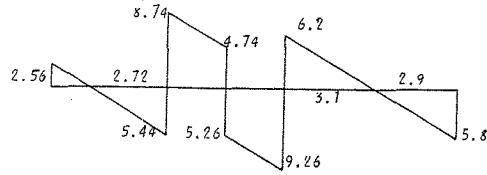
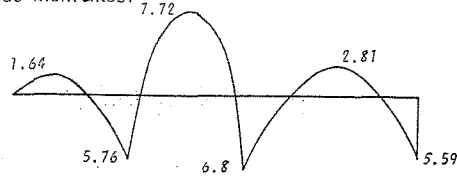
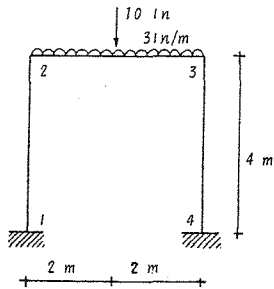


Diagrama de momentos.



Problema 2.- Determinar el diagrama de fuerza cortante y momento flexionante del marco mostrado.



E.I. = constante

Por simetría geométrica y de carga no hay desplazamiento lateral

1.- Momentos de empotramiento

$$\bar{M}_{23} = -\frac{\omega L^2}{12} - \frac{PL}{8} = -\frac{3(16)}{12} - \frac{10(4)}{8} = -9.0 ; \bar{M}_{21} = 0$$

$$\bar{M}_{32} = \frac{\omega L^2}{12} + \frac{PL}{8} = \frac{3(16)}{12} + \frac{10(4)}{8} = 9.0 ; \bar{M}_{34} = 0$$

2.- Cálculo de los factores de distribución.

Nudo 2

$$K_{21} = \frac{4EI}{4} = EI ; K_{23} = \frac{4EI}{4} = EI ; \sum K_2 = 2EI$$

$$d_{21} = \frac{1}{2} = 0.5 ; d_{23} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Nudo 3

$$K_{32} = \frac{4EI}{4} = EI ; K_{34} = \frac{4EI}{4} = EI ; \sum K_3 = 2EI$$

$$d_{32} = \frac{1}{2} = 0.5 ; d_{34} = \frac{1}{2} = 0.5$$

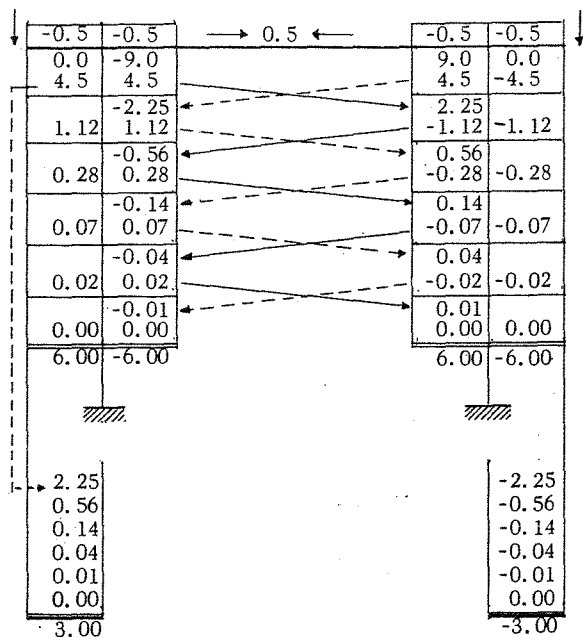
Dado que los factores de distribución son de vital importancia en el método de Cross en el cálculo de momentos, debe verificarse siempre que la suma de dichos factores en cada uno de los nudos, sea igual a la unidad.

Para este problema, puede observarse que la suma del valor de los factores de distribución en los nudos 2 y 3, es correcta.

Los factores de transporte son para todos los casos igual a 0.5

En este ejemplo se considera una variante del método que consiste en equilibrar todos los nudos y después efectuar los transportes correspondientes a los empotramientos 1 y 4.

El arreglo tabulado se presenta a continuación y no importa el orden de equilibrio de los nudos, ya que primero se equilibran todos ellos y después se procede al transporte de momentos.



La secuencia que se ha seguido en el cálculo anterior es como lo indican las flechas y que a continuación se expone brevemente.

De acuerdo con las ecuaciones utilizadas en este método y refiriendo la notación a la expuesta en la parte teórica de estos apuntes, se seguirá la secuencia indicada con líneas continuas.

El momento de desequilibrio del nudo 2 es:

$$\bar{M}_2 = \bar{M}_{23} + \bar{M}_{21} = -9 + 0 = -9$$

El momento distribuido vale  $M_{\theta 2} = d_{23} \bar{M}_2 = -0.5(-9.0) = 4.5$

El momento transportado es  $M_{T_3} = t_{23} d_{23} \bar{M}_2 = 0.5(4.5) = 2.25$

Por lo tanto los momentos distribuidos con el nudo 3 son

$$M_{\theta 3} = d_{32} M_{T_3} = -0.5(2.25) = -1.12$$

$$y \quad M_{\theta 3} = d_{34} M_{T_3} = -0.5(2.25) = -1.12$$

El momento transportado del nudo 2 al 3 calculado antes, pasa a ocupar el momento de desequilibrio en el nudo 3, por lo que se procedió a la distribución del mismo.

Volviendo al problema se transporta el momento distribuido de -1.12 al nudo 2:

$$M_{T_2} = t_{32} d_{32} M_{T_3} = 0.5(-1.12) = -0.56$$

Este momento se distribuye en los miembros que concurren al nudo 2 repitiendo nuevamente el procedimiento.



Una vez equilibrados los nudos, se procede a transportar los momentos distribuidos hacia los empotramientos. Así por ejemplo para el apoyo 1 se tiene.

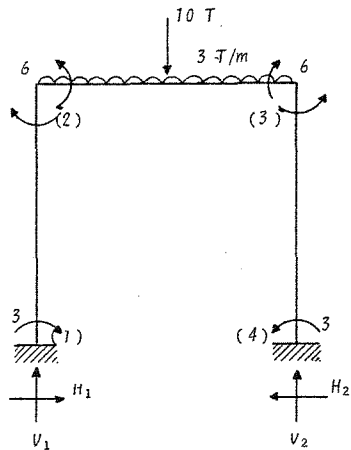
$$M_{T1} = t_{21} d_{21} \bar{M}_2 = \text{Momento transportado a "1"}$$

$$M_{T1} = 0.5(-0.5)(-9,0) = 2.25 \text{ -[Línea punteada del nudo 2 al 1]}$$

$$M_{T1} = 0.5(1.12) = 0.56 ; M_{T1} = 0.5(0.28) = 0.14$$

etc.

Cálculo de reacciones en el marco



$$\Sigma M_2, \text{ izq.} = 0$$

$$6 = -3 + H_1(4) \rightarrow H_1 = \frac{9}{4} = 2.25 \text{ tn}$$

$$\Sigma M_3, \text{ izq.} = 0$$

$$6 = -3 + 10(2) + 12(2) - V_1(4) + 2.25(4)$$

$$V_1 = 11.0 \text{ tn.}$$

Por simetría de cargas tenemos

$$V_1 = V_2 = 11.0 \text{ tn} ; H_1 = H_2 = 2.25 \text{ tn.}$$

Diagrama de fuerza cortante

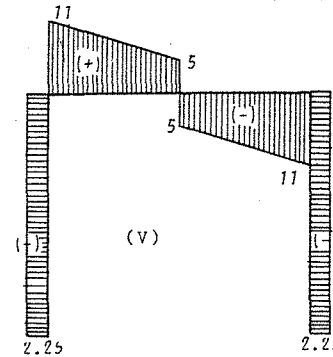
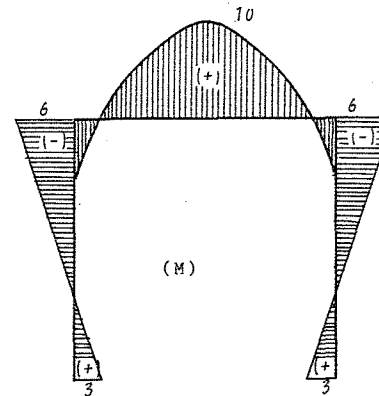
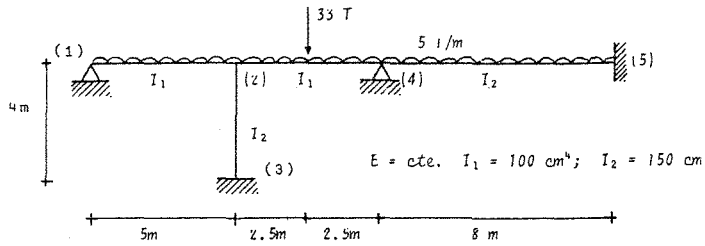


Diagrama de momento flexionante



Problema 3.- Encontrar el diagrama de momento flexionante de la siguiente estructura.



Solución.

1. Cálculo de momentos de empotramiento.

$$\bar{M}_{21} = \frac{\omega L^2}{8} = 15.625; \quad M_{24} = -\frac{\omega L^2}{12} - \frac{PL}{8} = -31.04$$

$$M_{42} = 31.04; \quad M_{45} = -\frac{\omega L^2}{12} = -26.66$$

2. Cálculo de rigideces relativas

Nudo 2

$$K_{21} = \frac{3I_1}{L} = 60; \quad K_{24} = \frac{4I_2}{L} = 80; \quad K_{23} = \frac{4I_2}{L} = 150$$

$$\Sigma K_2 = 290$$

Nudo 4

$$K_{42} = \frac{4I_1}{L} = 80; \quad K_{45} = \frac{4I_2}{L} = 75; \quad \Sigma K_4 = 155$$

3. Cálculo de factores de distribución y transporte

Nudo 2

$$d_{21} = \frac{K_{21}}{\Sigma K_2} = 0.207; \quad d_{24} = \frac{K_{24}}{\Sigma K_2} = 0.277; \quad d_{23} = \frac{K_{23}}{\Sigma K_2} = 0.516$$

$$t_{21} = 0; \quad t_{24} = 0.5; \quad t_{23} = 0.5$$

Nudo 4

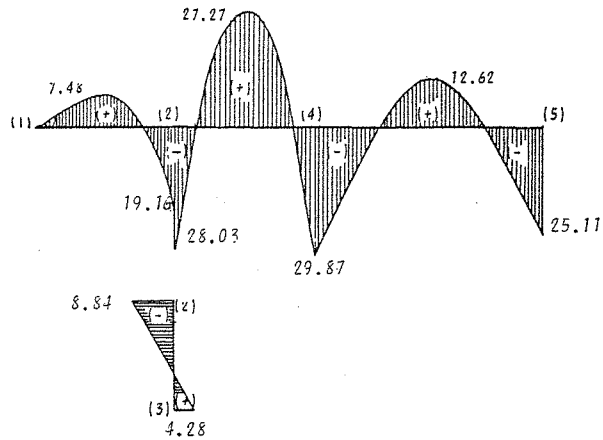
$$d_{42} = \frac{K_{42}}{\Sigma K_4} = 0.517; \quad d_{45} = \frac{K_{45}}{\Sigma K_4} = 0.483$$

$$t_{42} = 0.5; \quad t_{45} = 0.5$$

4. Distribución de momentos de empotramiento

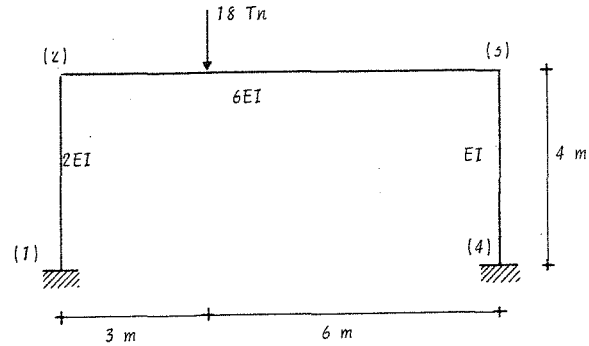
19.164	-28.032	29.874	-29.874	25.111
0.113	0.151	-0.081	-0.076	
0.235	-0.546	0.157		
	0.313	-1.092	-1.02	-0.51
	-1.133	2.113		
3.191	4.255	-2.265	-2.117	-1.059
15.625	-31.042	31.042	-26.66	26.66
0.207	0.276	0.517	0.483	
0.517				
-7.970				
-0.586				
0.282				
8.838				
3.985				
0.293				
4.278				

Diagrama de Momentos



Nota. La secuela de cálculo en la distribución de momentos, es la misma que se utilizó en los problemas 1 y 2.

Problema 4.- Resolver la estructura siguiente



Cálculo de momentos de empotramiento

$$\bar{M}_{23} = \frac{18(3)(36)}{81} = 24 \text{ tñ-m} ; \bar{M}_{32} = -\frac{18(6)9}{81} = -12 \text{ tñ-m}$$

Cálculo de los factores de distribución

Nudo 2

$$K_{21} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI ; K_{23} = \frac{4(6EI)}{9} = 2.67EI ; \Sigma K_2 = 4.67EI$$

$$d_{21} = 2/4.67 = 0.428 ; d_{23} = 2.67/4.67 = 0.572$$

Nudo 3

$$K_{32} = \frac{4(6EI)}{9} = 2.67EI ; K_{34} = \frac{4EI}{4} = 1EI ; \Sigma K_3 = 3.67EI$$

$$d_{32} = 2.67/3.67 = 0.728 ; d_{34} = 1/3.67 = 0.272$$

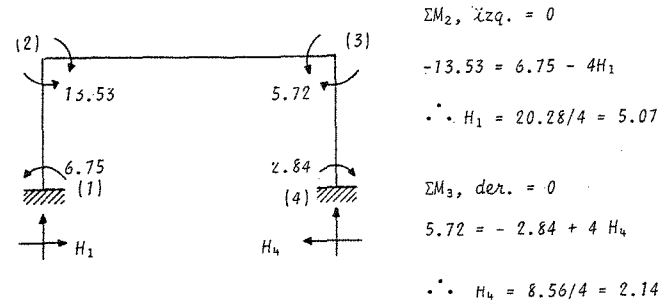
El arreglo tabulado es el que se presenta a continuación. En el cálculo se han equilibrado primero los nudos y después se hicieron los transportes correspondientes.

0.488	0.572		0.728	0.272
	24.00		-12.00	
-10.28	-13.72		8.73	3.27
	4.36		-6.86	
-1.86	-2.50		4.99	1.87
	2.49		-1.25	
-1.06	-1.43		0.91	0.34
	0.45		-0.71	
-0.19	0.26		0.52	0.19
	0.26		-0.13	
-0.11	-0.15		0.10	0.03
	0.05		-0.07	
-0.02	-0.03		0.05	0.02
	0.03		-0.01	
-0.01	-0.01		0.01	0.01
-13.53	13.53		-5.72	5.72
-5.14			1.63	
-0.93			0.93	
-0.53			0.17	
-0.09			0.09	
-0.05			0.01	
-0.01			0.01	
-6.75			2.84	

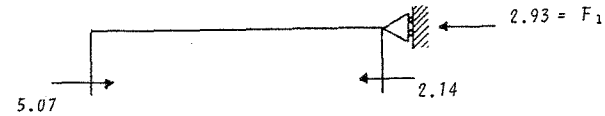
Cálculo de la fuerza que ha impedido el desplazamiento del cabezal.  
(Del paso 1).

De acuerdo con los valores de los momentos obtenidos en el cálculo

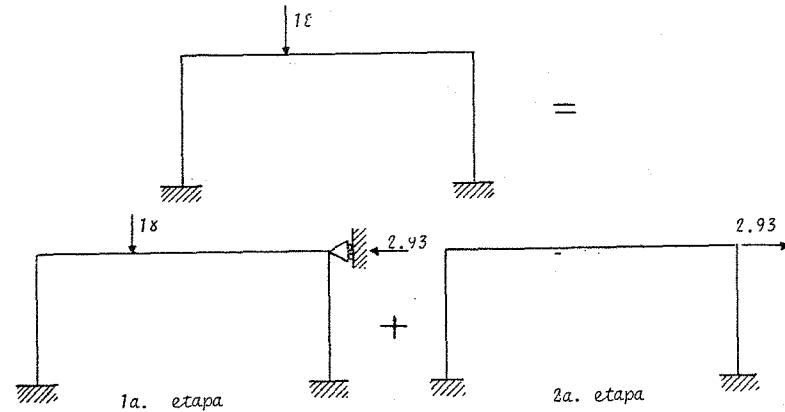
anterior (distribución y transporte de momentos), se tiene el marco siguiente.



Aislando el cabezal, se tiene

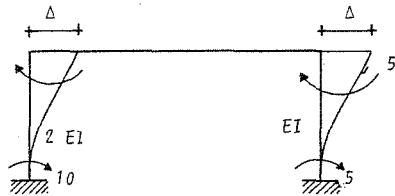


La solución de la estructura requiere el análisis de los marcos.



2o. PASO.- Como se mencionó anteriormente, se supone un desplazamiento  $\Delta$  del cabezal y se calculan los momentos que lo producen con los cuales se obtiene la fuerza en el cabezal que causa dicho desplazamiento. Así mismo puede suponerse el valor de los momentos y calcular la fuerza en el cabezal.

Por lo tanto supóngase momentos de 10 tn.m. en la columna de la izquierda. Los momentos en la columna derecha no tendrán el mismo valor, dado que las rigideces en ellas son distintas.



De la fórmula de rigidez lineal se tiene

$$M = \frac{6EI\Delta}{L^2}; 10 = \frac{6(2EI)}{16} \Delta$$

$$\Delta = 40/3 EI$$

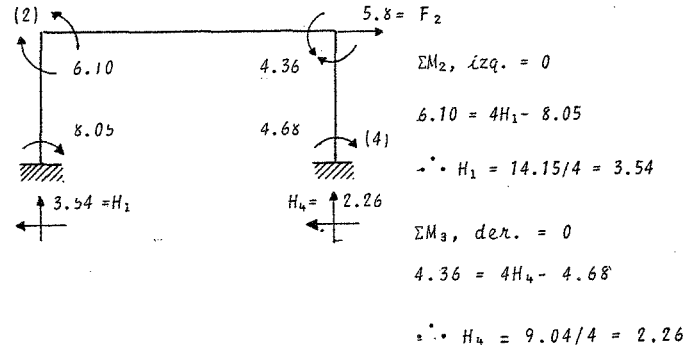
$$M_{3,4} = \frac{6EI}{L^2} \Delta = \frac{6EI}{16} \times \frac{40}{3EI} = 5.0 \text{ tn.m.}$$

La distribución de momentos se realiza de igual manera como se hizo en la primera etapa.

El orden del tabulado en esta etapa es el que se presenta enseguida.

0.428	0.572	0.728	0.272
10.00			5.00
-4.28	-5.72	-3.64	-1.36
	-1.82	-2.86	
0.78	1.04	2.08	0.78
	1.04	0.52	
-0.44	-0.60	-0.38	-0.14
	-0.19	-0.30	
0.08	0.11	0.22	0.08
	0.11	0.05	
-0.05	-0.06	-0.04	-0.01
	-0.02	-0.03	
0.01	0.01	0.02	0.01
6.10	-6.10	-4.36	4.36
-----		-----	
10.00		5.00	
-2.14		-0.68	
0.39		0.39	
-0.22		-0.07	
0.04		0.04	
-0.02			
8.05		4.68	

Cálculo de la fuerza  $F_2$  que ha producido el desplazamiento del cabezal.

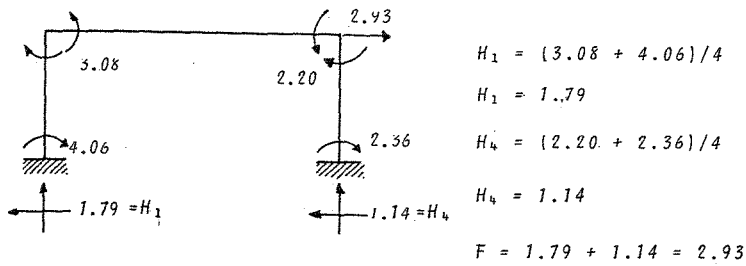


Se tiene  $F_2 = 3.54 + 2.26 = 5.80$

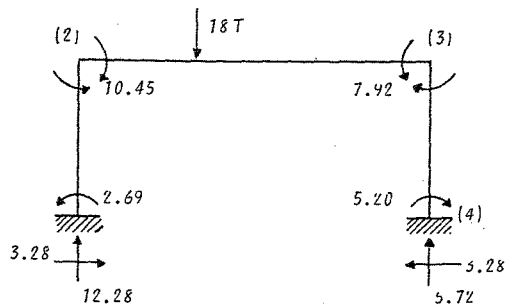
3er. PASO.- Como en el primer paso se obtuvo una fuerza de - 2.93 ton. y en el segundo paso una fuerza  $F_2 = 5.80$ , se multiplicarán los resultados por el factor de corrección  $F_1/F_2$  que vale

$$C = 2.93/5.80 = 0.505$$

Se obtienen los momentos siguientes y como comprobación se calcula la fuerza en el cabezal

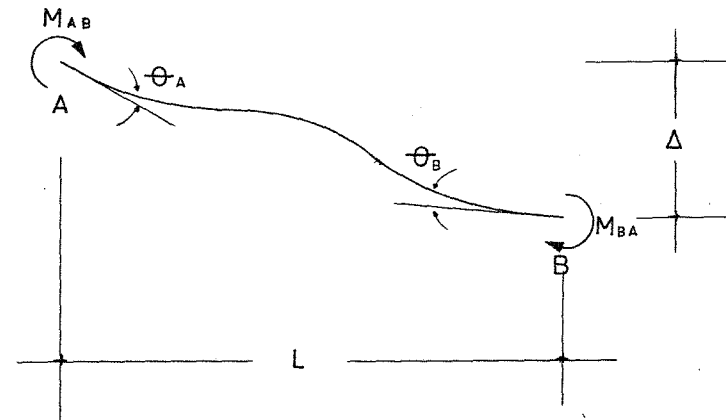


4o. PASO.- Sumando algebraicamente los resultados de esta - etapa con los de la primera etapa, se obtiene finalmente

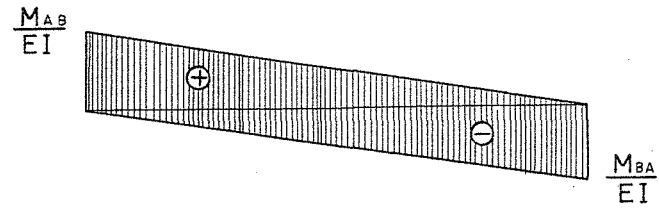


El método de Kani es un proceso iterativo, siendo el punto de partida del mismo las ecuaciones de pendiente deformación que a continuación se describen.

La relación entre los momentos aplicados en los extremos de una viga con los desplazamientos que producen, son:



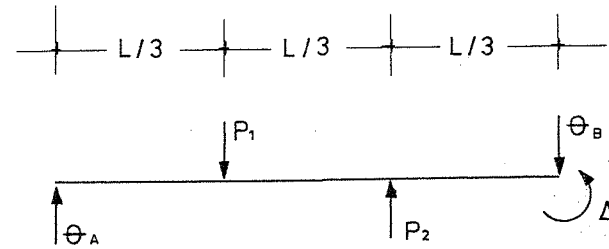
Los diagramas de momentos divididos entre  $EI$ , serán:



## CAPITULO 8

### METODO DE KANI

Resolviendo por viga conjugada:



$$P_1 = \frac{M_{AB} L}{2EI}$$

$$P_2 = \frac{M_{BA} L}{2EI}$$

Haciendo  $\Sigma M$  en  $P_2$ :

$$\theta_A \frac{2L}{3} + \theta_B \frac{1L}{3} - \Delta - \frac{M_{AB} L}{2EI} \frac{1}{3} L = 0 \quad \text{--- (1)}$$

Haciendo ahora  $\Sigma M$  en  $P_1$ :

$$\theta_A \frac{1L}{3} + \theta_B \frac{2L}{3} - \Delta - \frac{M_{BA} L}{2EI} \frac{1}{3} L = 0 \quad \text{--- (2)}$$

Si hacemos  $K = EI/L$  :

$$M_{AB} = 2EK \left( 2\theta_A + \theta_B - \frac{3\Delta}{L} \right) \quad \text{--- (3)}$$

$$M_{BA} = 2EK \left( 2\theta_B + \theta_A - \frac{3\Delta}{L} \right) \quad \text{--- (4)}$$

Las ecuaciones 3 y 4 se les llama ecuaciones del método pendiente deformación.

El método de Kani es una resolución gráfica de las ecuaciones mencionadas.

La demostración del método de Kani, se expresa a continuación:

Si en las ecuaciones 3 y 4 se substituye:

$$K = \frac{EI}{L}$$

$$\Phi = 2\theta$$

$$\psi = \frac{6\Delta}{L}$$

Se obtendrá

$$M_{12} = \overbrace{2K_{12}\Phi_1}^{m_{12}} + \overbrace{K_{12}\Phi_2}^{m_{21}} + \overbrace{K_{12}\psi}^{m'_{12}} \quad \text{--- (5)}$$

$$M_{21} = \overbrace{2K_{21}\Phi_2}^{m_{21}} + \overbrace{K_{21}\Phi_1}^{m_{12}} + \overbrace{K_{21}\psi}^{m'_{21}} \quad \text{--- (6)}$$

o en forma general:

$$M_{ij} = 2m_i + m_j + m'_{ij} + \mu_0 \quad \text{--- (7)}$$

en la cual:

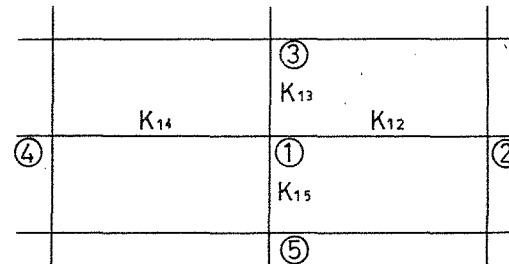
$m_i$  = contribución por giro de la barra  $ij$ , en el extremo estudiado.  $\left[ \frac{4EI}{L} \theta_i \right]$

$m_j$  = contribución por giro de la barra  $ij$ , en el extremo opuesto.  $\left[ \frac{2EI}{L} \theta_j \right]$

$m'_{ij}$  = contribución por desplazamiento lineal entre dos extremos de la barra  $\left[ \frac{6EI\Delta}{L^2} \right]$

$\mu_0$  = momentos de empotramiento en los extremos de la barra, producido por el sistema de cargas.

Aplicando la ecuación de equilibrio de momentos a un nudo cualquiera en una estructura, se obtendrá:





$$\sum M_1 = 0$$

$$K_{12}(2\phi_1 + \phi_2) + K_{14}(2\phi_1 + \phi_4) + K_{15}(2\phi_1 + \phi_5) + K_{13}(2\phi_1 + \phi_3) + K_{15}\psi_I + K_{13}\psi_{II} + M_D = 0 \quad (8)$$

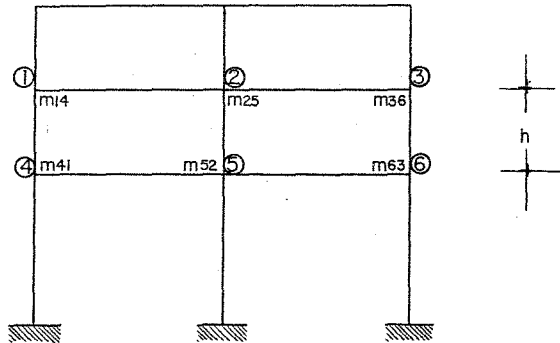
( $M_D$  = momento de desequilibrio en el nudo)

de donde:

$$\phi_1 = -\frac{1}{2(K_{12} + K_{13} + K_{14} + K_{15})} \left[ M_D + \overbrace{K_{12}\phi_2}^{m_{21}} + \overbrace{K_{14}\phi_4}^{m_{41}} + \overbrace{K_{15}\phi_5}^{m_{51}} + \underbrace{K_{13}\phi_3}_{m_{31}} + \underbrace{K_{15}\psi_I}_{m'_{15}} + \underbrace{K_{13}\psi_{II}}_{m'_{13}} \right] \quad (9)$$

Aplicando ahora la ecuación de equilibrio de fuerzas de entrepiso

se tendrá:



$$\sum F = 0 = \sum F - \sum V = 0$$

Siendo  $\sum F$  = Fuerzas exteriores

$\sum V$  = Fuerzas cortantes

$$Fh = \left. \begin{aligned} & \overbrace{K_{14}(2\phi_1 + \phi_4)}^{m_{14}} + \overbrace{K_{41}(2\phi_4 + \phi_1)}^{m_{41}} + \overbrace{K_{14}\psi_I}^{m'_{14}} \\ & + K_{25}(2\phi_2 + \phi_5) + K_{52}(2\phi_5 + \phi_2) + K_{25}\psi_I \\ & + K_{36}(2\phi_3 + \phi_6) + K_{63}(2\phi_6 + \phi_3) + K_{36}\psi_I \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

desarrollando la ecuación anterior, tenemos

$$Fh = 3(K_{14}\phi_1 + K_{14}\phi_4 + K_{25}\phi_2 + K_{25}\phi_5 + K_{36}\phi_3 + K_{36}\phi_6) + 2\psi_I(K_{14} + K_{25} + K_{36}) \quad (11)$$

de donde:

$$\psi_I = -\frac{3}{2(K_{14} + K_{25} + K_{36})} \left[ \overbrace{K_{14}\phi_1}^{m_{14}} + \overbrace{K_{14}\phi_4}^{m_{41}} + \overbrace{K_{25}\phi_2}^{m_{25}} + \overbrace{K_{25}\phi_5}^{m_{52}} + \underbrace{K_{36}\phi_3}_{m_{36}} + \underbrace{K_{36}\phi_6}_{m_{63}} - \frac{Fh}{3} \right] \quad (12)$$

De la ecuación (9), se obtiene que:

$$m_{12} = K_{12} \phi_1 = - \frac{K_{12}}{2(K_{12} + K_{13} + K_{14} + K_{15})} \left[ \text{mismo paréntesis que (9)} \right] \quad (13)$$

$$m_{13} = K_{13} \phi_1 = - \frac{K_{13}}{2(K_{12} + K_{13} + K_{14} + K_{15})} \left[ \text{mismo paréntesis que (9)} \right] \quad (14)$$

y en forma general:

$$m_{ij} = K_{ij} \phi_i = - \frac{K_{ij}}{2 \sum K_{ij}} \left[ \text{mismo paréntesis que (9)} \right] \quad (15)$$

A la expresión fuera del paréntesis se le llama coeficiente de rotación angular.

De la ecuación (12), se obtiene que:

$$m'_{14} = K_{14} \psi_1 = - \frac{3K_{14}}{2(K_{14} + K_{25} + K_{36})} \left[ \text{mismo paréntesis que (12)} \right] \quad (16)$$

$$m'_{25} = K_{25} \psi_1 = - \frac{3K_{25}}{2(K_{14} + K_{25} + K_{36})} \left[ \text{mismo paréntesis que (12)} \right] \quad (17)$$

y en forma general:

$$m'_{ij} = K_{ij} \psi_i = - \frac{3K_{ij}}{2 \sum K_{\text{cols. entrepiso}}} \left[ \text{mismo paréntesis que (12)} \right] \quad (18)$$

A la expresión fuera del paréntesis se le llama coeficiente de distribución lineal.

Las ecuaciones (13) y (18) son la base para la aplicación del método de Kani.

De acuerdo con lo mencionado, la secuela de cálculo para la obtención del método de Kani será la siguiente:

1. Obtener los coeficientes de rotación angular en todos los nudos de la estructura y los coeficientes de distribución lineal de todas las columnas de la misma:

$$\text{coeficiente de rotación angular} = - \frac{1}{2} \frac{K_i}{\sum K_i}$$

$$\text{coeficiente de distribución lineal} = - \frac{3}{2} \frac{K_{\text{col.}}}{\sum K_{\text{cols.}}}$$

2. Calcular los momentos de empotramiento en vigas y posteriormente del momento de desequilibrio en cada nudo.

3. Si existen fuerzas horizontales, calcular la fuerza cortante en cada entrepiso y el valor correspondiente a  $Vh/3$

4. Recorrer todos los nudos de la estructura aplicando las ecuaciones (13) y (18), haciendo las iteraciones suficientes hasta lograr que la última iteración sea igual a la precedente. El orden para recorrer la estructura es arbitrario; pero es conveniente que una vez seleccionado algún orden, se repita en la misma forma. El método de Kani es autocorrectivo, es decir, si se cometió algún error numérico, éste se corri-

rá en la siguiente iteración.

Los momentos finales en las barras, se obtendrán como sigue:

$$M_{ij} = \mathcal{U} + 2m_i + m_j + m_{ij}$$

### METODO DE KANI

Las siguientes ecuaciones constituyen la base del llamado Método de Kani

$$m_{ij} = -\frac{K}{2\Sigma K} ( \bar{M}_{io} + \Sigma m_{ji} + \Sigma \mu_{ij} ) \quad \text{--- (1)}$$

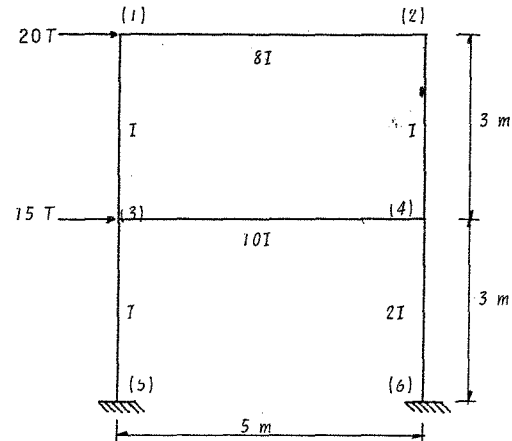
$$\mu_{ij} = -\frac{3K}{2\Sigma K} \left( \frac{V_h}{3} + \Sigma (m_{ij} + m_{ji}) \right) \quad \text{--- (2)}$$

El momento real en el extremo de una barra será igual a:

$$M_{ij} = M_{io} + \frac{2EI}{L} (2\theta_i + \theta_j - 3\psi_{ij})$$

$$M_{ij} = M_{io} + 2m_{ij} + m_{ji} + \mu_{ij} \quad \text{--- (3)}$$

Problema 1.- Resolver por Kani la estructura siguiente



1er. PASO.- Cálculo de los factores de distribución

Sabemos que. F.D.A. =  $\frac{K}{\sum K}$ ; F.D.L. =  $\frac{3}{2} \frac{K}{\sum K}$

Angulares

Lineales

BARRA	Rigidez Relativa	F.D.
1-2	8/5 = 1,6	0,415
1-3	1/3 = 0,33	0,085
Suma = 1,93 2 x 1,93 = 3,86		
2-1	8/5 = 1,6	0,415
2-4	1/3 = 0,33	0,085
Suma = 1,93 2 x 1,93 = 3,86		
3-1	1/3 = 0,33	0,062
3-4	10/5 = 2,00	0,376
3-5	1/3 = 0,33	0,062
Suma = 2,66 2 x 2,66 = 5,32		
4-2	1/3 = 0,33	0,055
4-3	10/5 = 2,00	0,335
4-6	2/3 = 0,66	0,110
Suma = 3,00 2 x 3 = 6,00		

Entrepiso 1	Rigidez Relativa	F.D.
3-5	1/3 = 0,33	0,5
4-6	2/3 = 0,66	1,0
Suma = 1,00 (2/3) 1 = 0,666		
Entrepiso 2		
1-3	1/3 = 0,33	0,75
2-4	1/3 = 0,33	0,75
Suma = 0,66 (2/3) 0,66 = 0,443		

2o. PASO.- Cálculo de momentos de empotramiento.

Como las cargas están aplicadas en los cabezales de la estructura, los momentos de empotramiento valen cero.

3er. PASO.- Obtención de momentos de entrepiso

Este momento es igual a

Entrepiso	Momento = $1/3 v h$
2	0,333 (20 x 3) = 20
1	0,333 (35 x 3) = 35

4o. PASO.- Se sigue el siguiente orden:

a).- Se distribuye el valor de  $vh/3$  entre las columnas de cada entrepiso.  
so.

Columna	- $\mu_{ij}$
3-5	-35(0,5) = -17,5
4-6	-35(1,0) = -35
1-3	-20(0,75) = -15
2-4	-20(0,75) = -15

b).- Se calcula la contribución angular en cada nudo

$$\text{Nudo 1 } m_{ij} = -(F.D.A.) (\bar{M}_{i0} + \sum m_{ji} + \sum \mu_{ij}) \quad (1)$$

Donde  $\bar{M}_{i0} = 0$ , del paso 2

Como primera interacción puede suponerse que

Del paso 4-a, se obtuvo  $\Sigma \mu_{ij} = -15$

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$1-2 \text{ ————— } m_{12} = -0,415(-15) = 6,22$$

$$1-3 \text{ ————— } m_{13} = -0,085(-15) = 1,27$$

Nudo 2  $\Sigma m_{j\bar{i}} = 6,22$ ;  $\Sigma \mu_{ij} = -15$  (Pasos 4.b y 4.a)

$$2-1 \text{ ————— } m_{21} = -0,415(6,22 - 15) = 3,64$$

$$2-4 \text{ ————— } m_{24} = -0,085(6,22 - 15) = 0,74$$

Nudo 3  $\Sigma m_{j\bar{i}} = 1,27$ ;  $\Sigma \mu_{ij} = -15 - 17,5 = -32,5$

$$3-1 \text{ ————— } m_{31} = -0,062(1,27 - 32,5) = 1,93$$

$$3-4 \text{ ————— } m_{34} = -0,376(1,27 - 32,5) = 11,74$$

$$3-5 \text{ ————— } m_{35} = -0,062(1,27 - 32,5) = 1,93$$

Nudo 4  $\Sigma m_{j\bar{i}} = (11,74 + 0,74) = 12,48$ ;  $\Sigma \mu_{ij} = -15 - 35 = -50$

$$4-2 \text{ ————— } m_{42} = -0,055(12,48 - 50) = 2,06$$

$$4-3 \text{ ————— } m_{43} = -0,335(12,48 - 50) = 12,56$$

$$4-6 \text{ ————— } m_{46} = -0,110(12,48 - 50) = 4,12$$

c) Se calcula la contribución lineal transversal.

Entrepiso 1  $\mu_{ij} = (F, D, L, l)(Vh/3 + \Sigma (m_{ij} + m_{j\bar{i}})) \dots (2)$

$$\Sigma m_{ij} = m_{35} + m_{46} = 1,93 + 4,12 = 6,05 ;$$

$\Sigma m_{j\bar{i}} = 0$  por ser el primer entrepiso

$$Vh/3 = 35 \quad (\text{del paso 3})$$

Sustituyendo en la ecuación (2)

$$3-5 \text{ ————— } \mu_{35} = 0,5(35 + 6,05) = 20,52$$

$$4-6 \text{ ————— } \mu_{46} = 1,0(35 + 6,05) = 41,05$$

Entrepiso 2  $Vh/3 = 20$  (del paso 3)

$$\Sigma m_{ij} = m_{13} + m_{24} = 1,27 + 0,74 = 2,01$$

$$\Sigma m_{j\bar{i}} = m_{31} + m_{42} = 1,93 + 2,06 = 3,99$$

$$1-3 \text{ ————— } \mu_{13} = -0,75(20 + 2,01 + 3,99) = -19,50$$

$$2-4 \text{ ————— } \mu_{24} = -0,75(20 + 2,01 + 3,99) = -19,50$$

Después de este paso, se regresa a calcular las  $m_{ij}$  siguiendo nuevamente toda la secuela de cálculo antes expuesta.

Los momentos finales se calculan aplicando la fórmula (3); por ejemplo:

$$M_{12} = 0 + 2(5,68) + 4,64 + 0 = 15,90$$

$$M_{13} = 0 + 2(1,16) + 1,36 - 19,77 = - 16,00$$

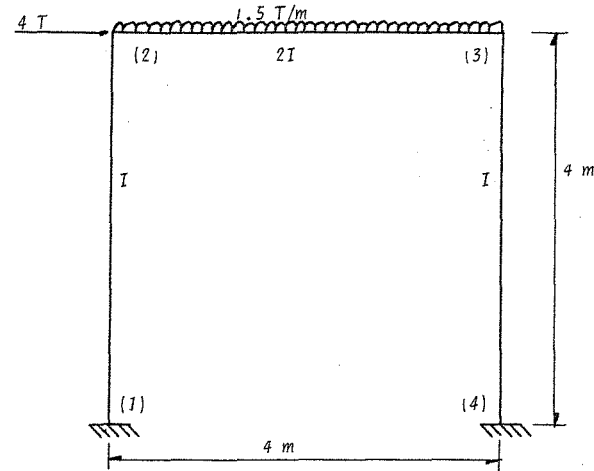
$$M_{21} = 0 + 2(4,64) + 5,68 + 0 = 14,96$$

$$M_{24} = 0 + 2(0,95) + 2,89 - 19,77 = - 14,98$$

etc.

Problema 2.

Resolver por Kani el siguiente marco



Factores de distribución.

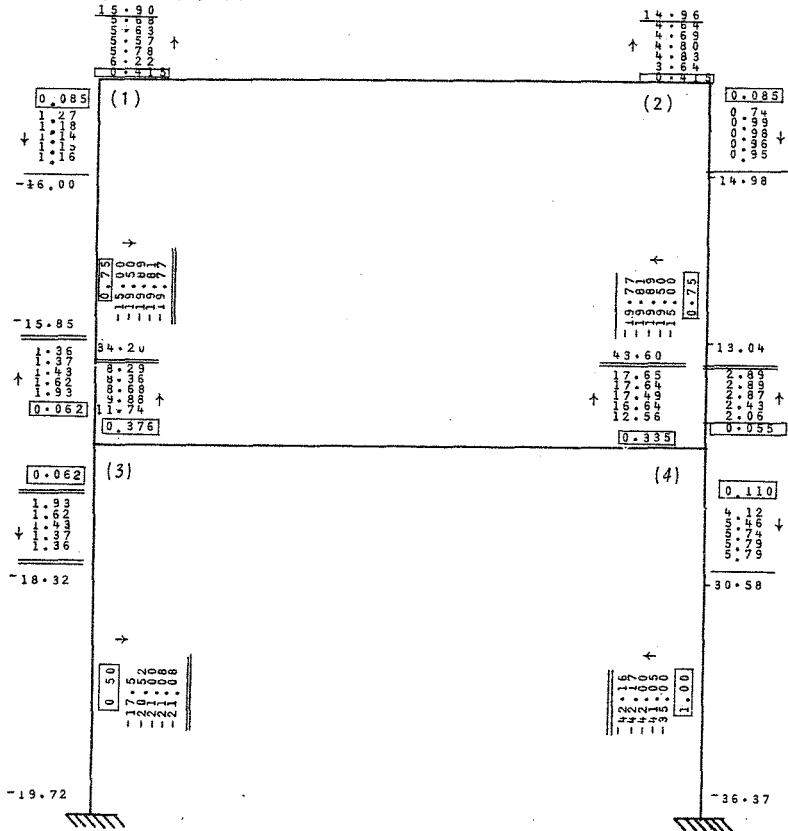
Angulares

BARRA	Rigidez Relativa	F.D.
2-1	$1/4 = 0,25$	0,166
2-3	$2/4 = 0,50$	0,333
Suma = 0,75		$2 \times 0,75 = 1,50$
3-2	$2/4 = 0,50$	0,333
3-4	$1/4 = 0,25$	0,166
Suma = 0,75		$2 \times 0,75 = 1,50$

Lineales

BARRA	Rigidez Relativa	F.D.
2-1	$1/4 = 0,25$	0,75
3-4	$1/4 = 0,25$	0,75
Suma = 0,50		$(2/3)0,5 = 0,333$

En la figura que se muestra a continuación, se encuentran anotados los resultados obtenidos de la aplicación en forma interactiva de las ecuaciones (1) y (2); básicas del método de Kani.



Momentos de Empotramiento

$$M_{20} = -\frac{\omega L^2}{J^2} = -2; \quad M_{30} = +2$$

Momento de Entrepiso  $\frac{Vh}{3} = \frac{4(4)}{3} = 5.33$

Distribución del valor de  $Vh/3$  entre las columnas

Columna	- $\mu_{ij}$
2-1	$-5.33(0.75) = -4.0$
3-4	$-5.33(0.75) = -4.0$

Contribución angular de cada nudo

Nudo 2  $\bar{M}_{20} = -2; \quad \Sigma \mu_{ij} = -4$

2-1  $m_{21} = -0.166(-2-4) = 1.000$

2-3  $m_{23} = -0.333(-2-4) = 2.000$

Nudo 3  $\bar{M}_{30} = 2; \quad \Sigma \mu_{ij} = -4$

3-2  $m_{32} = -0.333(2+2-4) = 0.00$

3-4  $m_{34} = -0.166(2+2-4) = 0.00$

Contribución lineal transversal

$$\Sigma m_{ij} = m_{21} + m_{34} = 1.000 + 0.00 = 1.00$$

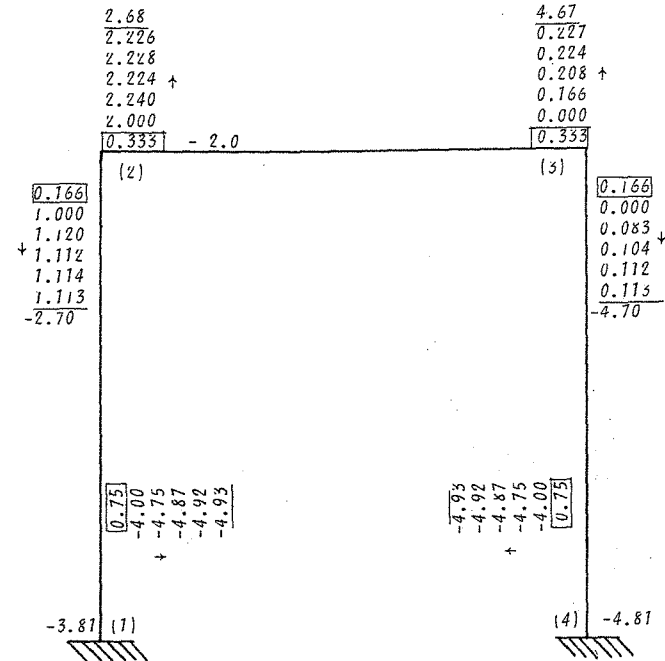
$$\Sigma m_{ji} = 0; \quad Vh/3 = 5.33$$

2-1  $\mu_{21} = -0.75(5.33 + 1.00) = 4.75$

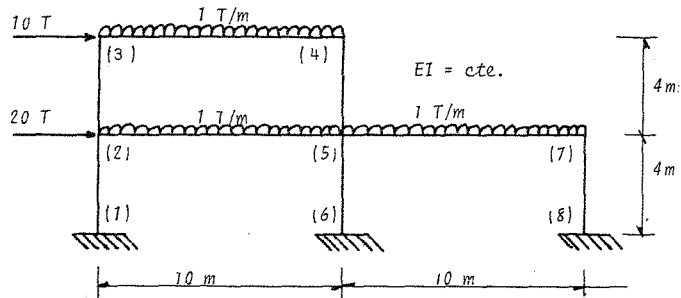
3-4  $\mu_{34} = -0.75(5.33 + 1.328) = -4.75$

Se vuelven a calcular las  $m_{ij}$ , los  $\mu_{ij}$  y así sucesivamente.

Los resultados se muestran en la figura siguiente.



Problema 3.- Resolver por Kani el marco siguiente.



Factores de distribución

Angular

BARRA	Rigidez Relativa	F.D.
2-1	$1/4 = 0.25$	0.208
2-3	$1/4 = 0.25$	0.208
2-5	$1/10 = 0.10$	0.084
Suma = 0.60 $2 \times 0.60 = 1.2$		
3-2	$1/4 = 0.25$	0.357
3-4	$1/10 = 0.10$	0.143
Suma = 0.35 $2 \times 0.35 = 0.70$		
4-3	$1/10 = 0.10$	0.143
4-5	$1/4 = 0.25$	0.357
Suma = 0.35 $2 \times 0.35 = 0.70$		
5-2	$1/10 = 0.10$	0.0715
5-7	$1/10 = 0.10$	0.0715
5-4	$1/4 = 0.25$	0.179
5-6	$1/4 = 0.25$	0.179
Suma = 0.70 $2 \times 0.70 = 1.40$		
7-5	$1/10 = 0.10$	0.143
7-8	$1/4 = 0.25$	0.357
Suma = 0.35 $2 \times 0.35 = 0.70$		

Lineal

BARRA	Rigidez Relativa	F.D.
2-1	$1/4 = 0.25$	0.5
5-6	$1/4 = 0.25$	0.5
7-8	$1/4 = 0.25$	0.5
Suma = 0.75 $(2/3)0.75 = 0.50$		
3-2	$1/4 = 0.25$	0.75
4-5	$1/4 = 0.25$	0.75
Suma = 0.50 $(2/3)0.5 = 0.333$		

Momentos de empotramiento

$$M_{20} = M_{50} | d = -M_{30} = -\frac{\omega L^2}{12} = -8.33$$

$$M_{50} | \dot{\lambda} = M_{70} = M_{40} = \frac{\omega L^2}{12} = 8.33$$

Momentos de entrepiso

$$\frac{Vh}{3} = \frac{10 \times 4}{3} = 13.33 ; \quad \frac{Vh}{3} = \frac{30 \times 4}{3} = 40.00$$

En este problema se inició la distribución, con las contribuciones angulares siguiendo la secuencia (3)(4)(2)(5)(7)

Así tenemos, por ejemplo, para el nudo 3

$$\sum m_j \dot{\lambda} = \sum \mu_j \dot{\lambda} = 0 ; \quad \bar{M}_{30} = -8.33$$

Nudo 3 (utilizamos la ecuación 1)

$$3-2 \quad m_{32} = -0.357 (-8.33) = 2.97$$

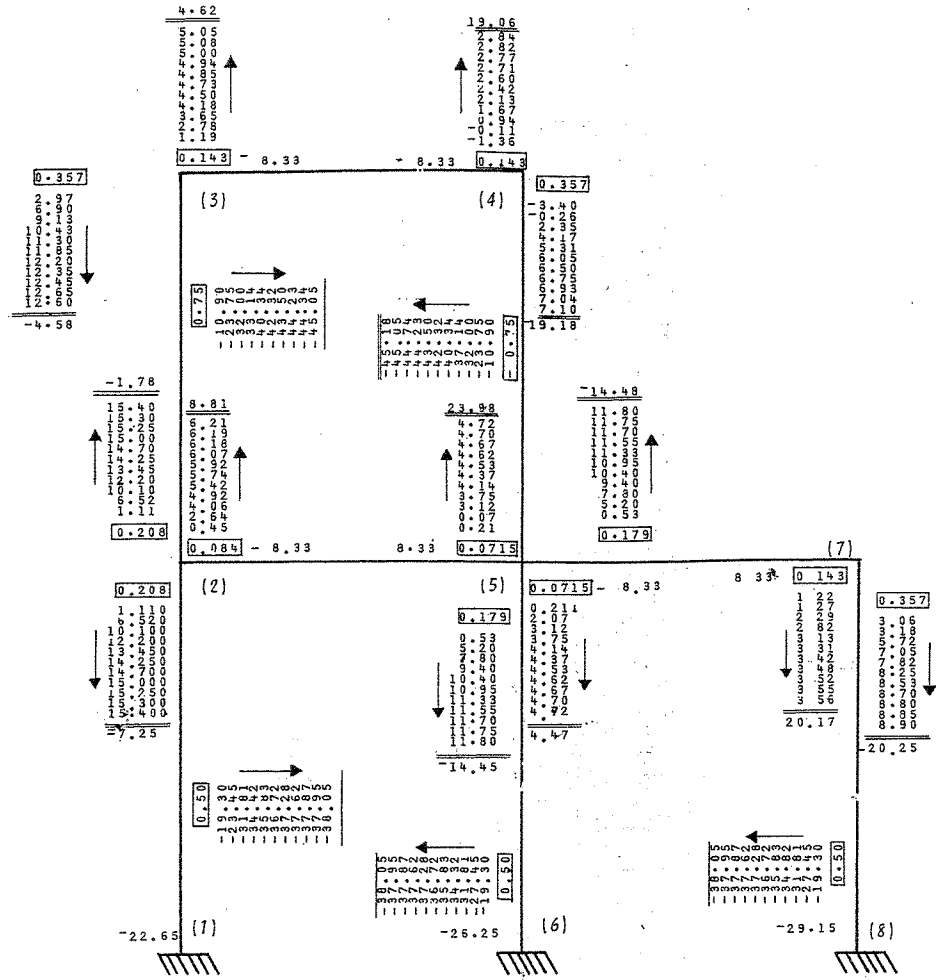
$$3-4 \quad m_{34} = -0.143 (-8.33) = 1.19$$

Los valores anteriores se encuentran anotados en el nudo 3 de la estructura, en primer orden. Una vez calculados los  $m_{ij}$  se procede al cálculo de los  $\mu_j \dot{\lambda}$  y así sucesivamente.

En la figura siguiente, se muestra la estructura con los valores calculados en cada interacción.

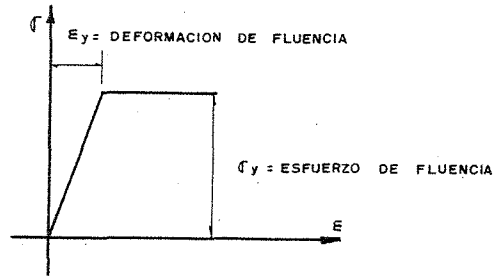


CAPITULO 9  
 INTRODUCCION  
 AL ANALISIS PLASTICO



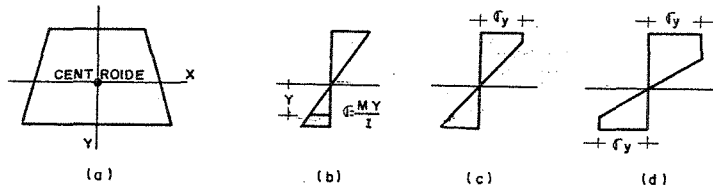
INTRODUCCION AL ANALISIS PLASTICO

Se supone que el material se deforma de una manera idealizada como se ve en la gráfica



Momento último.

Considérese una viga con la sección transversal que se indica con un eje de simetría (a)

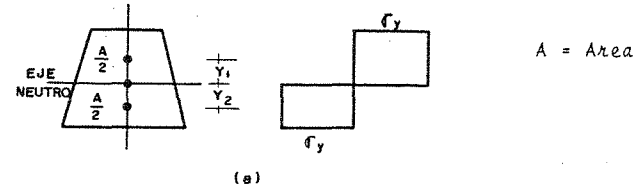


La viga, está sujeta a flexión en el plano de simetría.

Si el momento es, pequeño el esfuerzo y la deformación varían linealmente (b).

Cuando el momento aumenta el esfuerzo alcanza la fluencia, en la parte

superior (c); si sigue incrementándose el momento también se alcanza la fluencia en la parte inferior (d).



Si el momento sigue aumentando se llega al estado plástico total.

Se puede calcular el valor del momento último en esta condición. El eje neutro divide a la sección en dos áreas iguales, las resultantes de tensión y compresión son  $\frac{A}{2} \sigma_y$  y el momento

$$M_p = \frac{A}{2} \sigma_y (y_1 + y_2)$$

donde  $y_1$  y  $y_2$  son las distancias a los centroides de las áreas de compresión y de tensión a partir del eje neutro.

El momento máximo que se presenta sin exceder el esfuerzo de fluencia es  $M_y = \sigma_y z$ ,  $z$  es el módulo de la sección.

La relación  $\frac{M_p}{M_y} = \alpha$  depende de la forma por lo cual  $\alpha$  se llama factor de forma y es siempre mayor que la unidad.

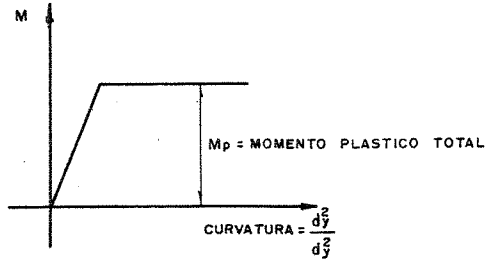
Para un rectángulo de base  $b$  y altura  $h$   $z = \frac{bh^2}{6}$

$$M_p = \sigma_y \frac{bh^2}{4} \quad \frac{M_p}{M_y} = \frac{\sigma_y \frac{bh^2}{4}}{\sigma_y \frac{bh^2}{6}} = \alpha = 1.5$$

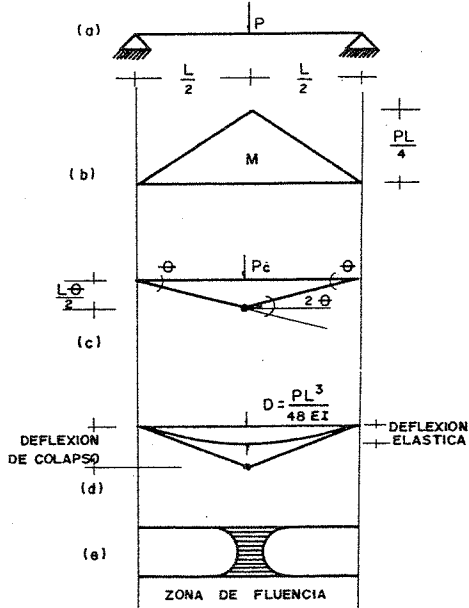
Para una sección circular sólida  $\alpha=1.7$ , para vigas de sección I varía - de 1.15 a 1.17.

Comportamiento plástico de una viga simple.

Considérese la relación entre Momento y Curvatura idealizada.



Veamos la siguiente viga:



Si se incrementa el valor de P hasta que se alcance el valor del momento  $M_p$

$$M_p = \frac{P_c L}{4}$$

$$P_c = \frac{4M_p}{L}$$

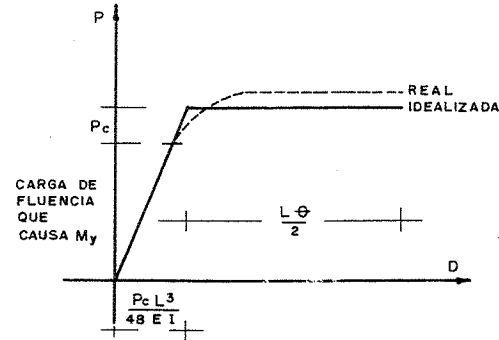
Entonces se presenta una articulación plástica y por lo tanto el colapso.

Si igualamos el trabajo con el interno en (c).

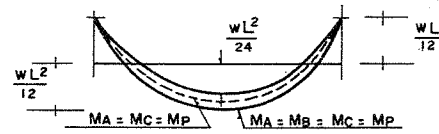
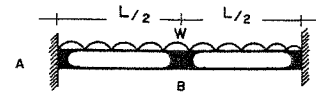
$$P_c \frac{L}{2} \theta = M_p 2\theta$$

$$P_c = \frac{4M_p}{L}$$

Grafiquemos la relación Carga-deflexión.



Consideremos una viga hiperestática:



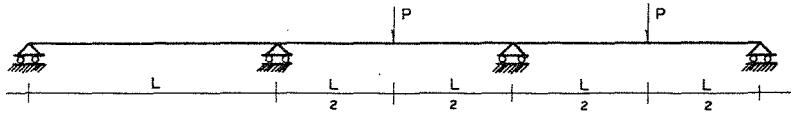
Iguando trabajo externo con interno.

$$M_p(\theta + 2\theta + \theta) = 2 \left( \frac{W_c L}{2} \right) \frac{\theta L}{4}$$

$$4M_p \theta = \frac{W_c L^2}{4} \theta$$

$$w_c = \frac{16Mp}{L^2} = \text{Carga de colapso}$$

Estudiemus la siguiente viga continúa:



MECANISMOS DE COLAPSO

$$Mp\theta + 2Mp\theta + Mp\theta = \frac{PL}{2}\theta \quad P_c = \frac{8Mp}{L}$$

$$Mp\theta + 2Mp\theta = P_c \frac{L}{2}\theta \quad P_c = \frac{6Mp}{L}$$

El más pequeño de los valores calculados de  $P_c$  es la carga real colapso

$$P_c = \frac{6Mp}{L}$$

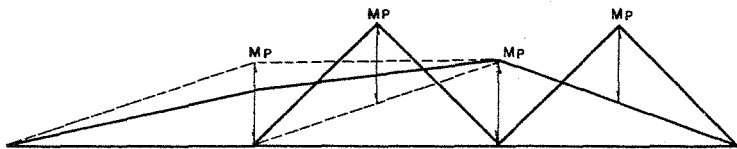
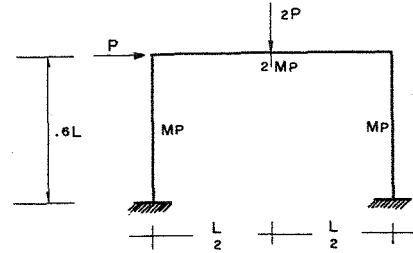
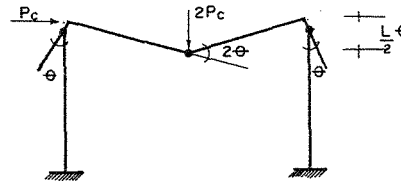


Diagrama de Momentos

Estudiemus un marco

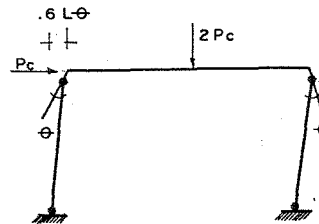


Mecanismos probables de colapso



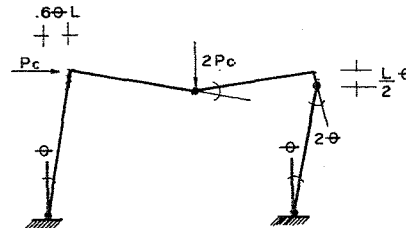
$$2Pc \frac{L}{2}\theta = Mp\theta + Mp\theta + 2Mp2\theta$$

$$P_c = \frac{6Mp}{L}$$



$$Mp(\theta + \theta + \theta) = P_c(.6\theta L)$$

$$P_c = \frac{6.67Mp}{L}$$



$$2Mp2\theta + Mp(\theta + \theta + 2\theta) = 2Pc \frac{L}{2}\theta + (.6\theta L)Pc$$

$$P_c = \frac{5Mp}{L}$$

132 A

La carga de colapso es la más pequeña

$$P_c = \frac{5M_p}{L}$$

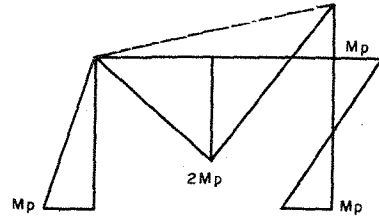


DIAGRAMA DE MOMENTOS

## BIBLIOGRAFIA

- 1.- White, Gergely y Smith "Ingeniería Estructural" Vol. 2 LIMUSA 1977
2. Michalos y Wilson "Structural Mechanics and Analysis" Macmillan Company 1965
3. Norris, Benson y Utky "Análisis Elemental de Estructuras" Mc Graw-Hill Inc. 1973
4. P. Charon "El método de Cross" Editorial Aguilar 1968
5. Yuan-Yu-Hsieh "Teoría Elemental de Estructuras" Prentice Hall, 1973
6. J. S. Kinney "Análisis de Estructuras Indeterminadas" CECSA 1960
7. Rodolfo Luthe "Análisis Estructural" Representaciones y Servicios de Ingeniería 1971

Esta obra se terminó de imprimir  
en noviembre de 1994  
en el taller de imprenta del  
Departamento de Publicaciones  
de la Facultad de Ingeniería  
Ciudad Universitaria, México, D.F.  
C.P. 04510

**Secretaría de Servicios Académicos**

**El tiraje consta de 1,000 ejemplares  
más sobrantes de reposición.**