



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA MECÁNICA – TERMOFLUIDOS

INTERACCIÓN DE ONDAS DE AGUA LARGAS LINEALES, CON UN  
DISPOSITIVO DE POTENCIA, COLUMNA DE AGUA OSCILANTE (OWC).

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
M. EN C. MORA ORTEGA AGUSTÍN

TUTOR  
DR. BAUTISTA GODÍNEZ ERIC GUSTAVO, IPN.

COMITÉ TUTOR  
DR. CERVANTES DE GORTARI JAIME GABRIEL, FI.  
DR. SOLORIO ORDAZ FRANCISCO JAVIER, FI.  
DR. MÉNDEZ LAVIELLE FEDERICO, FI.  
DR. ARCOS HERNÁNDEZ JOSÉ CARLOS, IPN.

MÉXICO, D. F. AGOSTO 2015

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: DR. CERVANTES DE GORTARI JAIME GABRIEL  
Secretario: DR. SOLORIO ORDAZ FRANCISCO JAVIER  
Vocal: DR. BAUTISTA GODÍNEZ ERIC GUSTAVO  
1<sup>er.</sup> Suplente: DR. MÉNDEZ LAVIELLE FEDERICO  
2<sup>d o.</sup> Suplente: DR. ARCOS HERNÁNDEZ JOSÉ CARLOS

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Azcapotzalco del Instituto Politécnico Nacional y Departamento de Termofluidos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

**TUTOR DE TESIS:**

DR. BAUTISTA GODÍNEZ ERIC GUSTAVO

  
-----  
FIRMA

# Dedicatorias

*Este trabajo está dedicado a*

**Mis padres** por su amor, esfuerzo y sacrificio, gracias a ustedes eh logrado alcanzar todas mis metas.

**Mi esposa** amada por su apoyo, impulso y amor incondicional, gracias por ser el pilar en esta etapa de mi vida.

**Mi abuelia Paulita y mi tía Ventura** por su amor y por siempre brindarme las puertas de su hogar.

**Mi familia** que es lo mejor que la vida me dio.

# Agradecimientos

Primero, me gustaría agradecer sinceramente a mi asesor, **Dr. Eric Gustavo Bautista Godínez**, su esfuerzo y dedicación.

Sus conocimientos, sus orientaciones, su manera de trabajar, su persistencia, su paciencia, su experiencia científica y su motivación han sido fundamentales para mi formación en esta etapa de mi vida. Ha hecho fácil lo difícil.

Gracias, al **Dr. Federico Méndez Lavielle**, por sus conocimientos, su paciencia y criterio.

Gracias, al **Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz**, por su paciencia y apoyo en todos los trámites académicos.

Gracias, a mi **comité tutorial** por participar en mi desarrollo profesional durante mis estudios de Doctorado y por todos sus conocimientos inculcados.

Gracias, a la **Universidad Nacional Autónoma de México**, por abrirme sus puertas y darme la oportunidad de escalar un peldaño más en el campo de conocimiento.

Gracias, a la **Sección de Estudios de Posgrado de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Azcapotzalco del Instituto Politécnico Nacional**, por haberme facilitado sus instalaciones, equipo de cómputo y material bibliográfico para realizar mis estudios de doctorado.

Gracias, al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología**, por otorgarme una beca para mis estudios de doctorado.

Gracias, a la **Coordinación de Estudios de Posgrado de la Universidad Nacional**

**Autónoma de México**, por otorgarme una beca para mis estudios de doctorado.

Gracias, al **Proyecto CONACyT-221116**, estudio de la respuesta dinámica e inestabilidad de un suelo marino poroelástico, inducidas por ondas de agua no-lineales.

Gracias, a mis **amigos de cubículo**, Laura, Armando, Manuel, Matías, Juan Carlos y Erick, por su invaluable amistad.

# Índice general

<b>Nomenclatura</b>	<b>VI</b>
<b>Abstract</b>	<b>XI</b>
<b>Resumen</b>	<b>XII</b>
<b>1. Motivación</b>	<b>1</b>
<b>2. Objetivos</b>	<b>1</b>
2.1. Objetivo general . . . . .	1
2.2. Objetivos particulares . . . . .	1
<b>3. Introducción</b>	<b>1</b>
3.1. Antecedentes . . . . .	1
3.1.1. Clasificación de dispositivos transformadores de energía del oleaje. .	1
<b>4. Hidrodinámica de ondas largas en un colector de ondas cónico y esbelto</b>	<b>8</b>
4.1. Solución analítica en el límite $\kappa_2 \ll 1$ . . . . .	15
4.1.1. Condiciones de frontera de acoplamiento . . . . .	17
4.1.2. Resultados de la hidrodinámica del oleaje en un colector de ondas cónico y esbelto . . . . .	20
4.1.2.1. Comparación con otros modelos . . . . .	20
4.1.2.2. Solución numérica . . . . .	20
4.1.2.3. Solución analítica en términos de funciones de Bessel . . .	21
<b>5. Modelo matemático del sistema acoplado OWC-colector de ondas</b>	<b>32</b>
5.1. Formulación . . . . .	32
5.2. Determinación de la presión manométrica adimensional $\bar{P}$ . . . . .	36
5.3. Condiciones de frontera de acoplamiento del sistema OWC-colector de ondas	40

5.4. Ecuación de gobierno del sistema acoplado OWC-colector de ondas . . . .	42
5.4.1. Solución analítica en el límite $\beta \ll 1$ . . . . .	43
<b>6. Resultados</b>	<b>44</b>
6.1. Deformación de ondas largas lineales en un colector de ondas esbelto y cónico con fondo constante con una barrera sumergida. . . . .	44
6.1.1. Movimiento forzado de la columna de agua oscilante por la propagación de ondas . . . . .	45
6.1.2. Efecto del orificio de descarga de la cámara de aire . . . . .	49
6.1.3. Efecto de la pared vertical sumergida . . . . .	49
6.1.4. Condición cercana a la resonancia . . . . .	52
6.1.5. Incremento de la potencia en la cámara de aire . . . . .	55
6.1.6. Eficiencia capturada de la OWC . . . . .	56
<b>7. Conclusiones</b>	<b>61</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>63</b>

# Índice de figuras

3.1. Dispositivos transformadores de energía del oleaje localizados en aguas profundas. . . . .	3
3.2. Dispositivos costeros transformadores de energía del oleaje. . . . .	5
4.1. Vista superior de un colector de ondas cónico convergente y con fondo constante, formado por tres regiones $R_1$ , $R_2$ y $R_3$ . . . . .	9
4.2. Comparación de la solución analítica de la superficie libre adimensional $\delta_2$ , derivada en el trabajo presente, contra las soluciones numérica y la correspondiente de funciones de Bessel, para valores constantes de $\kappa_2 = 0.032$ , $\Gamma = 0.25$ y $n = 1$ . . . . .	23
4.3. Solución analítica de la elevación de la superficie libre del oleaje $\delta_2$ como una función del eje adimensional $\chi_2$ , para valores constantes de $\kappa_2 = 0.15$ , $n = 2$ y valores diferentes de $\Gamma$ ( $= 0.25, 0.5, 0.75$ y $1$ ). . . . .	24
4.4. Solución analítica de la elevación de la superficie libre del oleaje $\delta_2$ como una función del eje adimensional $\chi_2$ , para valores constantes de $\kappa_2 = 0.15$ , $n = 3$ y valores diferentes de $\Gamma$ ( $= 0.25, 0.5, 0.75$ y $1$ ). . . . .	25
4.5. Solución analítica de la elevación de la superficie libre del oleaje $\delta_2$ como una función del eje adimensional $\chi_2$ , para valores constantes de $\kappa_2 = 0.15$ , $n = 4$ y valores diferentes de $\Gamma$ ( $= 0.25, 0.5, 0.75$ y $1$ ). . . . .	26
4.6. Solución analítica de la elevación de la superficie libre del oleaje $\delta_2$ para cinco valores de $n$ ( $= 2, 3, 3.5, 4$ y $5$ ) con valores constantes de $\kappa_2 = 0.05$ y $\Gamma = 0.25$ . . . . .	27
4.7. Solución analítica de la elevación de la superficie libre del oleaje $\delta_2$ para tres valores diferentes de $\kappa_2$ ( $= 0.032, 0.1$ y $0.15$ ), con valores constantes de $n = 2$ y $\Gamma = 0.25$ . . . . .	28



4.8. Coeficientes de Reflexión y de transmisión del oleaje como una función del parámetro adimensional  $\Gamma = 0.25$ , para ondas propagándose en colectores de ondas con transiciones  $n(= 1, 2 \text{ y } 3)$ . Los resultados presentados con el color sólido se calcularon con un valor de  $\kappa_2 = 0.15$  y los correspondientes al símbolo sin relleno se obtuvieron con  $\kappa_2 = 0.032$ . . . . . 30

4.9. Coeficientes de Reflexión y de transmisión del oleaje, como una función del parámetro cinemático adimensional  $\kappa_2$  con  $\Gamma = 0.25$  y tres valores de  $n(= 1, 2 \text{ y } 3)$ . . . . . 31

5.1. Vista en perfil del modelo físico en estudio. La OWC está conectada a un colector de ondas cónico y esbelto, el cual tiene una profundidad  $h$  y un ancho máximo de  $b_0$ . El colector de ondas está formado por dos regiones  $R_2$  y  $R_3$ . El oleaje se propaga de derecha a izquierda. . . . . 33

5.2. Vista superior del modelo físico en estudio. La OWC está conectada a un colector de ondas cónico y esbelto, el cual tiene una profundidad  $h$  y un ancho máximo de  $b_0$ . El colector de ondas está formado por dos regiones  $R_2$  y  $R_3$ . El oleaje se propaga de derecha a izquierda. . . . . 34

6.1. Elevación de la superficie libre adimensional  $\delta_2$  como una función del eje adimensional  $\chi_2$ , para valores diferentes del exponente  $n(= 1, 2, 3, 4)$  con valores fijos de los parámetros  $\Gamma = 0.25$  y  $\mu = 0.20$ . Las líneas sólidas y sin relleno corresponden a los valores del parámetro  $\kappa_2(= 0.09 \text{ y } 0.15)$ , respectivamente. . . . . 46

6.2. Elevación de la superficie libre adimensional  $\delta_2$  como una función del eje adimensional  $\chi_2$ , para un colector de ondas parabólico, ( $n = 2$ ), con valores constantes del parámetro  $\kappa_2 = 0.15$  y  $\Gamma = 0.25$ , y cuatro valores del parámetro  $\mu (= 0.20, 0.25, 0.334, 0.5)$ . . . . . 47

6.3. Comparación de amplitud adimensional  $\Delta_c$ , entre las soluciones numérica y analítica, para valores constantes de  $\mu = 0.2$ ,  $\Omega = 0.143$ ,  $\theta = 2$ ,  $\beta = 0.06$ ,  $\phi = 6$ ,  $K = 0.63$ ,  $\xi = 0.001$  y  $\Gamma = 0.5$ . . . . . 48

6.4. Evolución temporal de a) la elevación de la superficie libre  $\Delta_c(\tau)$ , b) presión  $\bar{P}(\tau)$  y c) velocidad de aire de descarga  $\bar{V}_d(\tau)$ , para cuatro valores del parámetro  $\Gamma(= 0.25, 0.50, 0.75, 1.0)$ , y valores fijos de los parámetros  $\mu = 0.2$ ,  $\Omega = 0.143$ ,  $\theta = 2$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\phi = 6$ ,  $\xi = 0.001$  y  $K = 0.63$ . . . . . 50

6.5. Evolución temporal para la velocidad del flujo de aire  $\bar{V}_d(\tau)$ , para tres valores del parámetro  $\theta(= 2.0, 4.0, 5.0)$ , y valores fijos de los parámetros  $\mu = 0.2$ ,  $\Omega = 0.143$ ,  $\Gamma = 0.25$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\phi = 6$ ,  $\xi = 0.001$  y  $K = 0.63$ . . . . . 51

6.6. Evolución temporal de a) elevación de la superficie libre  $\Delta_c(\tau)$ , b) presión  $\overline{P}(\tau)$  y c) velocidad de descarga  $\overline{V}(\tau)$ , para cuatro valores del parámetro  $\mu(= 0.2, 0.3, 0.4, 0.5)$  y valores fijos de los parámetros  $\Omega = 0.143$ ,  $\Gamma = 0.25$ ,  $\theta = 2$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\phi = 6$ ,  $\xi = 0.001$  y  $K = 0.63$ . . . . . 53

6.7. Amplitud de la OWC cerca de la resonancia como una función del tiempo adimensional  $\tau$ , para valores de los parámetros  $\Omega(= 0.143, 0.3, 0.5, 0.8)$  y valores fijos de los parámetros  $\mu = 0.2$ ,  $\Gamma = 0.25$ ,  $\theta = 2.0$ ,  $\beta = 0.02$ ,  $\phi = 6$ ,  $K = 0.63$  y  $\xi = 0.001$ . . . . . 54

6.8. Diagramas fase para cuatro valores del parámetro de esbeltez  $\Gamma (= 0.25, 0.50, 0.75, 1.0)$ , y valores fijos de los parámetros  $\mu = 0.2$ ,  $\Omega = 0.143$ ,  $\theta = 2$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\phi = 6$ ,  $\xi = 0.001$  y  $K = 0.63$ . . . . . 57

6.9. Diagramas fase para tres valores del parámetro  $\Omega(= 0.143, 0.2, 0.3)$ , y valores fijos de los parámetros  $\mu = 0.2$ ,  $\Gamma = 0.25$ ,  $\theta = 2$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\phi = 6$ ,  $\xi = 0.001$  y  $K = 0.63$ . . . . . 58

6.10. Evolución temporal de la potencia instantánea  $\wp(\tau)$ , derivada de la cámara de aire para valores diferentes del parámetro  $\Gamma(= 0.25, 0.50, 0.75, 1.0)$  y valores fijos de  $\Omega = 0.143$ ,  $\mu = 0.2$ ,  $\theta = 2$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\phi = 6$ ,  $K = 0.63$ ,  $\xi = 0.001$  y  $\tilde{\gamma} = 1.1 \times 10^{-5}$ . . . . . 59

6.11. Comparación de la captura de eficiencia  $\sigma$  de la OWC, para valores diferentes de el parámetro geométrico  $\Gamma(= 0.25, 0.5, 0.75$  y  $1)$  como una función del parámetro adimensional de resonancia  $\Omega$ , para valores fijos de los parámetros  $\mu = 0.2$ ,  $\theta = 2$ ,  $\beta = 0.02$ ,  $\phi = 6.0$ ,  $\psi = 1$ ,  $K = 0.63$ ,  $\xi = 0.001$  y  $\overline{\gamma} = 114.73$ . . . . . 60

# Nomenclatura

## Letras latinas

---

$2H$	ancho de la estructura de la columna de agua oscilante
$2l$	ancho de la descarga de la cámara de aire
$A_1$	constante de integración de la Ec. (4.64)
$A_I$	amplitud incidente
$A_R$	amplitud reflejada
$A_r$	amplitud radiada
$A_T$	amplitud transmitida
$A(x)$	sección transversal del colector de ondas
$a_0$	velocidad del sonido
$B_1$	constante de integración de la Ec. (4.64)
$b_0$	ancho del colector de ondas en $x = L_2$
$\tilde{b}_2$	parámetro adimensional dado en la Ec. (4.9)
$b_2(x)$	variación del estrechamiento del colector de ondas
$C$	constante de integración de la Ec. (4.43)
$C_R$	coeficiente de reflexión
$C_T$	coeficiente de transmisión
$c$	celeridad de la onda
$\tilde{c}$	constante de integración de la Ec. (4.40)
$\bar{c}$	constante de integración de la Ec. (4.42)
$c_r$	celeridad de la onda radiada
$D$	constante de integración de la Ec. (4.43)
$dA$	diferencial de área
$ds$	diferencial de longitud
$d\mathcal{V}$	diferencial de volumen
$E$	parámetro adimensional $E = [n(1 - \Gamma)]/2$
$E_I$	energía incidente

$E_R$	energía reflejada
$E_r$	energía radiada
$E_T$	energía transmitida
$e$	energía específica total por unidad de masa
$g$	aceleración de la gravedad
$h$	nivel medio del agua
$h_c$	altura de la estructura de la OWC
$i$	número imaginario $\sqrt{-1}$
$J_0$	función de Bessel del primer tipo de orden cero
$K$	coeficiente disipativo
$k$	número de onda
$k_r$	número de onda radiada
$L_1$	longitud del colector de ondas en la región $R_1$
$L_2$	longitud del colector de ondas en la región $R_2$
$L_3$	longitud medida desde el origen del sistema de referencia $x = 0$ a la entrada de la Región $R_3$
$L_v$	longitud virtual
$l$	longitud
Ma	número de Mach
$m$	masa
$n$	forma geometría del colector de onda en la región de $R_2$
$\hat{n}$	vector unitario
OWC	Oscillating Water Column
OWCS	Oscillating Water Column Structure
$P$	Presión manométrica
$\bar{P}$	Presión manométrica adimensional
$P_1$	presión en el punto uno de la línea de corriente
$P_2$	presión en el punto dos de la línea de corriente
$P_a$	presión atmosférica
$P_w$	presión hidrostática
$\tilde{P}_w$	presión hidrostática adimensional
$P_{OWC}(t)$	potencia útil instantánea de la cámara de aire
PVF	problema de valores en la frontera
$Q$	calor añadido al sistema
$q$	caudal instantáneo a través del orificio de la cámara de aire
$R_1$	región 1
$R_2$	región 2
$R_3$	región 3

$Re$	parte real de
$S$	espesor de la pared sumergida
$\bar{S}$	función de fase
$T$	periodo de la onda
$t$	tiempo
$t_c$	tiempo característico
$U$	velocidad promedio del agua en el eje longitudinal
$U_2$	velocidad promedio adimensional del agua en el eje longitudinal
$u$	componente de velocidad local en la dirección $x$
$\hat{u}$	energía interna
$\tilde{u}$	factor espacial de la velocidad del agua en la coordenada longitudinal $x$
$u_t$	velocidad transmitida
$u_c$	velocidad característica
$u_x$	componente de velocidad longitudinal
$u_y$	componente de velocidad transversal
$u_z$	componente de velocidad vertical
$V$	velocidad promedio en el eje transversal
$V_2$	velocidad promedio adimensional en el eje transversal
$v_1$	velocidad en el punto uno de la línea de corriente
$v_2$	velocidad en el punto dos de la línea de corriente
$v$	componente de velocidad local en la dirección $y$
$v_d$	velocidad de descarga
$\overline{V_d}$	velocidad de descarga adimensional
$W$	trabajo realizado por el sistema
$w_c$	longitud sumergida de la OWC por debajo del nivel medio del agua
$x$	coordenada longitudinal
$Y_2$	eje transversal adimensional en la región $R_2$
$Y_0$	función de Bessel de segundo tipo de orden cero
$y$	coordenada transversal
$z$	coordenada vertical

---

 Letras Griegas

$\tilde{\alpha}$	parámetro adimensional dado en la Ec. (4.54)
$\beta$	parámetro adimensional $\beta = A_I / (w_c + L_v)$

$\beta_R$	onda reflejada compleja adimensional
$\beta_T$	onda transmitida compleja adimensional
$\eta$	variación de la superficie libre del oleaje
$\bar{\eta}$	amplitud física del oleaje
$\eta_1$	variación de la superficie libre del oleaje en la región $R_1$
$\eta_2$	variación de la superficie libre del oleaje en la región $R_2$
$\eta_3$	variación de la superficie libre del oleaje en la región $R_3$
$\eta_I$	variación de la superficie libre del oleaje incidente
$\eta_R$	variación de la superficie libre del oleaje reflejada
$\eta_r$	variación de la superficie libre del oleaje radiada
$\eta_T$	amplitud del oleaje transmitido
$\eta_c$	variación de la superficie libre de la OWC
$\phi$	parámetro adimensional, $\phi = h_c/A_I$
$\lambda$	longitud de onda
$\lambda_r$	longitud de onda radiada
$\tilde{\mu}$	función evaluada en $\chi_2 = 0$ $\tilde{\mu} = \chi_2^{n-1}$
$\kappa_1$	parámetro cinemático para la región $R_1$ $\kappa_2 = 1/kL_1$
$\kappa_2$	parámetro cinemático para la región $R_2$ $\kappa_2 = 1/kL_2$
$\kappa_3$	parámetro cinemático para la región $R_3$ $\kappa_2 = 1/[k(L_3 - L_2)]$
$\rho$	densidad del agua
$\rho_a$	densidad del aire
$\epsilon$	parámetro pequeño adimensional, $\epsilon = A_I/h$
$\varepsilon$	parámetro pequeño
$\Gamma$	parámetro geométrico adimensional, $\Gamma = 2H/b_0$
$\tilde{\gamma}$	parámetro adimensional $\tilde{\gamma} = -L_1/L_2$
$\bar{\gamma}$	parámetro adimensional $\bar{\gamma} = L_2/(L_3 - L_2)$
$\tilde{\gamma}_c$	parámetro adimensional $\tilde{\gamma}_c = P_a/\rho g A_I$
$\bar{\gamma}_c$	parámetro adimensional $\bar{\gamma}_c = \rho_a g A_I/P_a$
$\xi$	parámetro adimensional $\xi = \rho_a/\rho$
$\mu$	parámetro adimensional $\mu = w_c/h$
$\tilde{\mu}$	$(\chi_2 = 0)^{n-1}$
$\Delta_1$	variación de la superficie libre del oleaje adimensional en la región $R_1$
$\Delta_2$	variación de la superficie libre del oleaje adimensional en la región $R_2$
$\Delta_3$	variación de la superficie libre del oleaje adimensional en la región $R_3$
$\Delta_c$	variación de la superficie libre del oleaje adimensional en la región $R_3$
$\delta_1$	amplitud del oleaje adimensional en la región $R_1$
$\delta_2$	amplitud del oleaje adimensional en la región $R_2$
$\delta_3$	amplitud del oleaje adimensional en la región $R_3$

$\Delta_c$	variación de la superficie libre de la OWC
$\tau$	tiempo adimensional de la OWC
$\tilde{\tau}$	tiempo adimensional del oleaje
$\theta$	parámetro adimensional $\theta = H/l$
$\vartheta$	parámetro adimensional $\vartheta = b_0/L_2$
$\phi$	parámetro adimensional $\phi = h_c/A_I$
$\varphi$	parámetro adimensional $\varphi = 1/\kappa_2$
$\chi_1$	eje longitudinal adimensional en la región $R_1$
$\chi_2$	eje longitudinal adimensional en la región $R_2$
$\chi_3$	eje longitudinal adimensional en la región $R_3$
$\Omega$	parámetro de resonancia adimensional, $\Omega = \omega/\omega_N$
$\omega$	frecuencia de oscilación del oleaje
$\omega_N$	frecuencia natural de oscilación de la OWC

#### Subíndices

---

1	referente a la región $R_1$ o al punto 1
2	referente a la región $R_2$ o al punto 2
3	referente a la región $R_3$
$CS$	superficie de control
$CV$	volumen de control
$I$	Incidente
$R$	reflejada
$r$	radiada
$T$	Transmitida

# Abstract

The objective of this work is to analyze by a numerical procedure, the contribution of a tapered and slender wave-collector, which follows a power law distribution, on the improvement of the efficiency of an oscillating water column wave energy converter. The governing equations are presented in their dimensionless version. The forced motion of the oscillating water column by linear long water waves, is modeled by applying the well-known non-linear energy equation. Applying the Reynolds transport theorem to the first law of thermodynamic, we derived a conjugated mathematical model between the gauge pressure in the open air chamber and the oscillating water column. A simple analytical solution for the elevation of the water waves in the wave-collector is obtained. Compared with a system without a tapered wave-collector, the results show that the tapered wave-collector improve the capture efficiency and increase the useful power of the oscillating water column. The results suggest that, near resonance, can be obtained large values of the oscillating water column, condition reached by the increment of the immersion of the front wall of the device for a fixed wave-length. To verify the correctness of the numerical solution, it is compared against the analytical solution of a linear oscillator.



# Resumen

El objetivo de este trabajo es analizar con un procedimiento numérico, el efecto de un colector de ondas esbelto y cónico, el cual tiene una distribución transversal que obedece una ley de potencia, sobre el mejoramiento de la eficiencia de un convertidor de energía conocido como columna de agua oscilante. Las ecuaciones de gobierno se presentan en su forma adimensional. El movimiento de la columna de agua oscilante forzado por la propagación de ondas largas lineales, se modela usando la ecuación de la energía. Aplicando el teorema de transporte de Reynolds a la primera ley de la Termodinámica, se derivó un modelo matemático conjugado entre la presión manométrica en la cámara de aire y la columna de agua oscilante. Se obtuvo una solución analítica de la elevación de la superficie libre del oleaje en el colector de ondas. Se verificó que una columna de agua oscilante conectada a un colector de ondas cónico, desarrolla valores de la eficiencia y la potencia más grandes que los correspondientes a los obtenidos al caso de una columna de agua conectada a un colector de ondas con ancho y fondo constante. Los resultados indican que, cerca de la resonancia, se obtienen valores grandes de la oscilación de la columna de agua, lo anterior puede alcanzarse incrementando la longitud de la pared sumergida del dispositivo para una longitud de onda fija. Para validar la solución numérica, ésta se compara contra la solución analítica de un oscilador lineal.

# Capítulo 1

## Motivación

En la actualidad existe gran demanda energética, esto ha generado que se hayan iniciado esfuerzos en la investigación de obtención de energía, a través de fuentes de energía renovables y limpias. Las tecnologías para derivar potencia eléctrica de los océanos incluyen el aprovechamiento de las mareas, oleaje, energía oceánica térmica, corrientes marinas, vientos oceánicos y gradientes de salinidad, de estos tipos los estudios más avanzados han estado enfocados en el aprovechamiento de la potencia mareomotriz y la del oleaje. Considerar la energía de las mareas implica desarrollar estudios muy puntuales, debido a que éstas desarrollan grandes amplitudes solo en algunas regiones, y los estudios que puedan realizarse pierden validez cuando éstos se aplican a otros sitios. El oleaje es un fenómeno que se presenta en cualquier región costera, variando su amplitud y periodo de oscilación, este fenómeno presenta el inconveniente de ser altamente aleatorio, no obstante, bajo ciertas condiciones éste puede ser medianamente controlado.

Los litorales de países como Noruega, Portugal, España, Japón e India, entre otros, desarrollan condiciones de oleaje naturales con una alta agitación, lo cual coadyuva a que sus estudios estén enfocados, en su mayoría, a determinar el diseño óptimo de la estructura oscilante, en función de las condiciones naturales de la agitación del mar, por el contrario el litoral mexicano no presenta dichas condiciones, lo que podría provocar que la operación de una estructura transformadora de energía construida en nuestro país, resultara ineficiente, dada la escasa amplitud que presenta el oleaje en nuestros litorales, sin embargo esto puede dejar de ser una limitante si se identifican y manipulan las condiciones geométricas de la proyección horizontal de la zona de propagación del oleaje, de tal forma que pueda aumentarse la amplitud de las ondas.

# Capítulo 2

## Objetivos

### 2.1. Objetivo general

Mejorar la eficiencia y maximizar la potencia de un dispositivo convertidor de energía, conocido como Columna de Agua Oscilante, mediante un colector de ondas esbelto y cónico.

### 2.2. Objetivos particulares

- Derivar un modelo matemático de la propagación del oleaje en un colector de ondas con sección transversal variable, utilizando teoría de ondas largas lineal.
- Plantear un modelo matemático conjugado de la cámara de aire con la columna de agua oscilante, usando la ecuación de la energía y aplicando el teorema de transporte de Reynolds a la primera ley de la Termodinámica.
- Acoplar el modelo matemático de propagación del oleaje con el de la hidrodinámica de la columna de agua oscilante.
- Incrementar la amplitud de la superficie libre de la columna de agua oscilante, mediante la generación del mecanismo de la resonancia.

# Capítulo 3

## Introducción

### 3.1. Antecedentes

Las investigaciones más intensas, sobre el aprovechamiento de la energía del oleaje, fueron en la década de los 70 y 80 bajo programas promovidos por distintos gobiernos e industrias, Falcão [13]. Para 1980, Cruz [10, p.2] se habían registrado más de mil patentes, siendo presentada la primera en Francia en 1799, durante la época de la Revolución Francesa, por un padre e hijo de apellido Girard, Ross [35].

La incursión en el desarrollo de tecnologías basadas en la energía marítima a estado fundamentada en el estudio y diseño de estructuras marítimas, cuya característica es la transformación de la energía del oleaje en mecánica y a su vez ésta en eléctrica, se clasifican esencialmente en dos tipos, costeras (shoreline) y de aguas profundas (offshore) [8, 13] cada estructura presenta ventajas y desventajas, las cuales se evalúan según sean las condiciones de factibilidad económica y de construcción, que presente una determinada región.

#### 3.1.1. Clasificación de dispositivos transformadores de energía del oleaje.

Los dispositivos transformadores del oleaje se clasifican de la forma siguiente:

1. Aguas profundas:

Estos dispositivos explotan los regímenes de oleaje más potentes, los cuales se encuentran disponibles en profundidades superiores a los 40 m., condición en la cual los efectos

disipativos del oleaje no son representativos. Estas estructuras flotan sobre la superficie del mar y requieren de grandes extensiones de cableado para transportar la energía eléctrica, por otra parte, su mantenimiento requiere de infraestructura sofisticada dadas las condiciones de su ubicación. Estas estructuras pueden sufrir daños como consecuencia de eventos meteorológicos extremos, con lo cual su vida útil puede quedar seriamente afectada, algunos ejemplos son el Wave Dragon Soerensen et al. [39], el cual es un convertidor de energía anclado en el fondo del mar y está diseñado para emplazarse en aguas profundas, este dispositivo se caracteriza por tener tres fases: absorción, almacenamiento y conversión. Este dispositivo puede instalarse en forma individual o en un arreglo de varias estructuras similares, ver Fig. 3.1a.

La Fig. 3.1b, muestra al convertidor de energía Pelamis, Henderson [20], fue desarrollado en el Reino Unido, está compuesto por cuatro secciones cilíndricas conectadas entre sí. El oleaje acciona a los cilindros hidráulicos, los cuales están conectados a generadores eléctricos. De estos sistemas se han realizado diferentes pruebas a escalas, uno de éstos tuvo lugar sobre la costa del norte de Portugal en el segundo semestre del 2008, siendo el primero conectado en red en el mundo.

El sistema Duck, Salter [36], probablemente es el dispositivo de alta mar, más conocido, éste fue desarrollado en la década de los 70's y principio de los 80's, básicamente consiste en una cámara flotante, que gira alrededor de su propio eje. Las primeras versiones consistieron en una serie de Ducks montados en un eje horizontal, alineados en la dirección del frente de onda, conectados con un sistema hidráulico. Más tarde Salter [36], propuso al Duck como una estructura independiente, el cual tiene la característica de contar con giroscopios, que le permiten una mejor estabilidad, ver Fig. 3.1c.

En un sistema de boyas, Budal [7], la oscilación del oleaje permite una oscilación vertical, condición que genera un movimiento relativo entre el fondo del mar y los sistemas hidroneumáticos de las boyas, Fig. 3.1d.

## 2. Costeros:

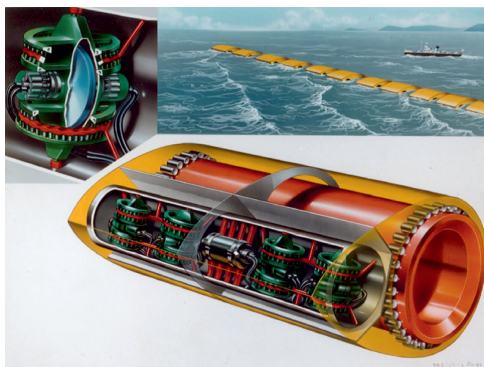
Estas estructuras se encuentran sobre la línea de costa y tienen la ventaja de una instalación y mantenimiento fácil. Debido a que se encuentran empotrados en el suelo, su estructura no requiere de anclajes, no es necesario grandes longitudes de cableado para transportar la energía eléctrica, sin embargo, por las condiciones de fricción en el fondo del mar y a efectos de rotura del oleaje, la estructura disminuye su eficiencia. Otras condiciones que deben tomarse en cuenta y que podrían ser contras de estas estructuras son los requerimientos geológicos de la línea de costa, preservación del escenario costero, rangos de marea, entre otras condiciones.



(a) Esquema del convertidor de energía Wave Dragon.



(b) Prototipo del convertidor de energía Pelamis, desarrollado en la costa norte de Portugal.



(c) Versión del Duck Salter 1979 equipado con giroscopios.



(d) Prototipo PowerBuoy en Santoño, España, en 2008.

Fig. 3.1: Dispositivos transformadores de energía del oleaje localizados en aguas profundas.

Algunos ejemplos de dispositivos transformadores de energía costeros son el sistema Tapchan (Tapered Channel), Fredriksen [17], el cual consiste en un canal esbelto que proporciona agua a un embalse que se encuentra en un nivel más alto que el nivel medio del mar, cuando el embalse se llena, éste transforma su energía potencial en cinética y acciona una turbina tipo Kaplan, ver Fig. 3.2a.

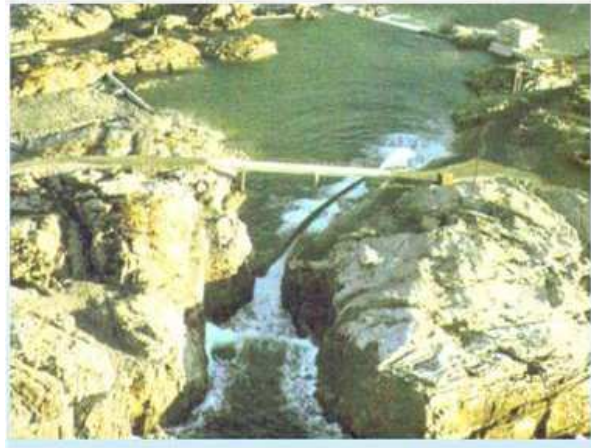
La estructura péndulo, Kraemer [23], consiste en una caja rectangular, que en uno de sus extremos consta de una aleta que es impulsada por el movimiento horizontal del oleaje. Varios prototipos se han construido en Japón, Fig. 3.2b.

Una de la estructuras que con mayor frecuencia se ha estudiado es la Columna de Agua Oscilante (OWC por sus siglas en ingles), debido a su sencillez geométrica, escaso impacto ambiental, mantenimiento económico y puede ser construida en cualquier región costera. La forma geométrica de ésta es cilíndrica y hueca con una sección transversal que puede tener cualquier forma, se encuentra parcialmente sumergida, permitiéndole tener una conexión directa con el mar; parte de su interior está ocupado por aire, el cual se comprime o expande según sea la oscilación de la columna de agua generada por las fluctuaciones del oleaje, el aire comprimido se expulsa a través de una tobera, que lo conduce hasta una turbina, ver Fig. 3.2c.

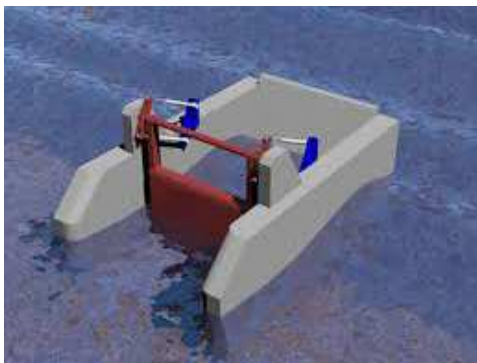
La OWC fue inicialmente estudiada por Masuda y McCormick [28], quienes fijaron los precedentes del uso comercial de la energía del oleaje. Una OWC puede construirse sobre la línea de costa (onshore), Clément et al. [8] o bien en aguas profundas (offshore), Falcão [13]. El primer tipo de OWC presenta ventajas sobre las segundas, debido a que éstas no requieren de cableado para transmitir la energía eléctrica y el costo de mantenimiento es inferior.

Whittaker y Stewart [47] realizaron experimentos para estudiar la hidrodinámica de la OWC en estructuras onshore y offshore, ellos concluyeron que si la forma de amortiguamiento del oleaje (fondo marino) es seleccionado adecuadamente, la cantidad de energía útil presenta un incremento del doble en estructuras onshore, si se compara con una estructura offshore. La eficiencia de conversión de estos dispositivos depende fuertemente de la geometría de la Estructura de Columna de Agua Oscilante (OWCS, por sus siglas en inglés) y el movimiento del oleaje. Durante muchos años, los científicos e ingenieros han explorado y desarrollado nuevas ideas para diseñar dispositivos eficaces para la utilización óptima de la energía del oleaje.

En un trabajo pionero, Evans [15] modeló teóricamente el movimiento de una columna de agua oscilante, obtuvo resultados de la potencia máxima del sistema. Evans [16], usando teoría de ondas lineal, obtuvo resultados generales de distintas configuraciones geométricas en dos y tres dimensiones. [4, 5], propusieron utilizar estructuras rompeolas



(a) Prototipo de un sistema Tapchan.



(b) Esquema de un sistema de bombeo péndulo.



(c) Prototipo de una OWC construida en Port Kembla en New South Wales, Australia.

Fig. 3.2: Dispositivos costeros transformadores de energía del oleaje.



de los puertos, con la finalidad de empotrar en ellas una OWCS, provocando un ahorro en su construcción. Ideas fundamentales relacionadas con diferentes aspectos hidrodinámicos de estos dispositivos convertidores de energía se pueden encontrar en las obras clásicas reportadas por [6, 7]. Algunos trabajos llevaron a cabo investigaciones de las OWCS orientadas a comprender los diferentes aspectos de sus mecanismos hidrodinámicos y termodinámicos como consecuencia de la interacción de la OWCS con el oleaje. Algunas investigaciones están orientadas a identificar las variaciones espaciales de la superficie libre de la OWC como la desarrollada por Martins-Rivas y Mei [27], quienes optimizaron la eficiencia de absorción de energía mediante la variación de la toma de potencia del sistema. Por otro lado, los estudios termodinámicos, han estado orientados a modelar las fluctuaciones de presión del aire dentro de la cámara de compresión de una OWC bajo la excitación monocromática del oleaje, Gkikas y Athanassoulis [18] y para optimizar el comportamiento mecánico de la corriente de aire generada por el movimiento de la OWC, se puede ver en [9, 14, 31].

Por otra parte Perdigo y Sarmiento [32] analizan la eficiencia desde la perspectiva de operación en la apertura y cierre de válvulas, las cuáles controlan la entrada y salida del aire a través del orificio que comunica la cámara de aire con la atmósfera, de tal forma que pueda lograrse la máxima presión en la cámara de compresión. En las investigaciones desarrolladas sobre las OWC, los autores se han enfocado, principalmente, en obtener la máxima energía del oleaje, como una función de la geometría de una OWCS, donde se asume que el oleaje es de gran intensidad tanto en frecuencia como en amplitud, [12, 42]. La interacción de la OWCS con el oleaje es un tema importante, que debe tomarse en cuenta, para identificar la energía disponible de éstas en la vecindad de la OWC; obras de interés relacionados con este tema, bajo diferentes configuraciones del fondo marino, fueron realizadas por Rezanejad et al. [34], quienes estudiaron el efecto de una OWCS colocada sobre un fondo marino escalonado sobre la eficiencia del sistema, implementando una doble tobera en la cámara de compresión. Pasquale y Camporeale [30] desarrollaron un modelo linealizado para estimar la hidrodinámica de una OWC sumergida, considerando oleaje aleatorio. Bautista et al. [2] mediante un análisis de escalas múltiples, estudiaron la frecuencia de resonancia de una OWC circular, Senturk y Ozdamar [37] analizaron a una OWC, sustituyendo a la pared frontal parcialmente sumergida, por una barrera completamente sumergida con una abertura; en este contexto, se han llevado a cabo muchas otras obras relevantes, véase por ejemplo Malara y Arena [26]. Otras ideas tecnológicas relevantes para aprovechar la energía del oleaje mediante diferentes dispositivos derivadores de energía pueden encontrarse en [1, 11, 38].

Los trabajos teóricos antes mencionados, permiten a la comunidad científica obtener importantes conocimientos físicos en los procesos hidrodinámicos y termodinámicos para diferentes configuraciones geométricas de una OWC, obteniendo mejores valores de su eficiencia.

En muchos casos, en condiciones naturales las amplitudes del oleaje son pequeñas y para producir valores grandes de la potencia útil derivada en la cámara de aire de una OWC, es necesario incrementar la amplitud de las ondas con estructuras artificiales.

Para resolver el problema anterior, en este trabajo se propone un sistema que, consiste en una OWC conectada con un colector de ondas cónico y esbelto el cual obedece a una distribución horizontal de ley de potencia. A través de un procedimiento numérico, se analiza la contribución del colector de ondas en la mejora de la eficiencia y el incremento de la potencia útil del convertidor de energía del oleaje, OWC. Se realiza un análisis de órdenes de magnitud para identificar las escalas características del problema, con el objetivo de obtener la versión adimensional de las ecuaciones de gobierno. Aplicando el teorema del transporte de Reynolds a la primera ley de la termodinámica y bajo la hipótesis, de que, el flujo de aire es incompresible y usando la ley de conservación de masa, derivamos un modelo matemático conjugado entre la presión manométrica de la cámara de aire y la hidrodinámica de la OWC.

El problema de la propagación de ondas es tratado usando la teoría de ondas largas lineales unidimensionales y se resuelve mediante la técnica de perturbación singular WKB (Wentzel - Kramers - Brillouin), se obtiene, una solución analítica simple pero precisa, para la deformación de la elevación de la superficie libre, de las ondas que se propagan a lo largo de un colector de ondas esbelto y convergente. La evidencia de los principales resultados indica que la elevación de la OWC, se amplifica significativamente por el efecto geométrico del colector de ondas. Se modela la condición de oscilación cercana a la resonancia, en la que se pueden provocar grandes amplitudes de la OWC. Se analizó el efecto del parámetro geométrico adimensional del colector de ondas sobre la eficiencia y la potencia útil de la OWC. Usando una técnica numérica estándar, la solución numérica del modelo matemático se compara contra la solución analítica de un oscilador lineal forzado. Se analizó la estabilidad de oscilación de la columna de agua a través de una serie de diagrama de fase.

## Capítulo 4

# Hidrodinámica de ondas largas en un colector de ondas cónico y esbelto

Con el fin de analizar la relevancia que tiene la geometría de un colector de ondas cónico, esbelto y con fondo constante, en la hidrodinámica del oleaje, en esta sección analizamos el efecto geométrico del colector de ondas en la deformación de ondas largas lineales. Para el estudio de la propagación de ondas largas lineales en canales con longitud del mismo orden de magnitud que la longitud de onda y caracterizar la hidrodinámica bajo diferentes condiciones geométricas, se obtiene una solución analítica de la elevación de la superficie libre junto con los coeficientes de reflexión y de transmisión del oleaje, generados por el efecto de la variación del ancho del colector de ondas, estos coeficientes caracterizan la hidrodinámica de la propagación de ondas largas lineales en un colector de ondas cónico y convergente.

Las ecuaciones de gobierno que modelan la propagación del oleaje en un colector cónico y convergente, se presentan en su versión adimensional. Debido a que la variación del ancho del colector de ondas es suave, el problema de valores en la frontera que se obtiene se resuelve mediante la implementación de la técnica de perturbación singular WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) Bender y Orzag [3, Chap. 10]. La solución analítica junto con los coeficientes de reflexión y de transmisión del oleaje, son función de un parámetro cinemático  $\kappa_2$ , que describe la competencia de las longitudes de onda contra la del colector de ondas; y de un parámetro geométrico  $\Gamma$ , que relaciona los anchos del colector de ondas a la entrada y salida de éste. Para validar la solución analítica los resultados son comparados con la solución en términos de las funciones de Bessel y con la solución numérica. Demostramos la influencia de los parámetros  $\kappa_2$  y  $\Gamma$  en la deformación de la elevación de la superficie libre y además se presentan los coeficientes de reflexión y

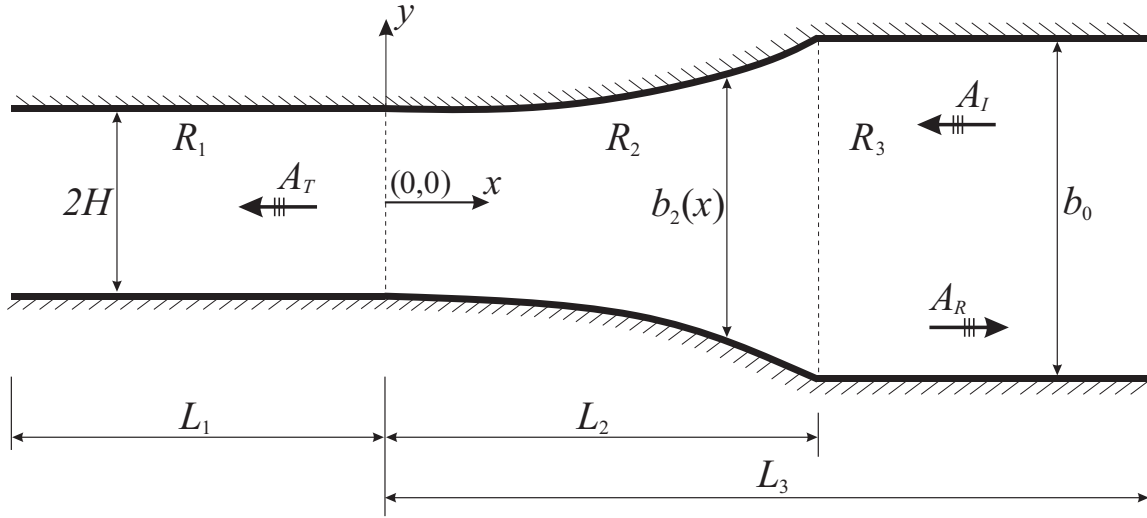


Fig. 4.1: Vista superior de un colector de ondas cónico convergente y con fondo constante, formado por tres regiones  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ .

transmisión para diferentes transiciones lineal y no-lineales, en la sección 4.1.1.

Consideramos una onda larga lineal que se propaga de derecha a izquierda en un colector de ondas cónico, esbelto y con fondo uniforme. Asumimos que el colector de ondas está formado por tres regiones  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  donde la región  $R_2$  define el carácter variable de la sección transversal, mientras que  $R_1$  y  $R_3$  tienen una sección transversal constante, ver Fig. 4.1. Para las tres regiones el fondo es constante. En el sistema de coordenadas cartesiano, el eje  $x$  es positivo hacia la derecha con origen ubicado en la intersección de las regiones  $R_1$  y  $R_2$ , el eje  $y$  señala hacia afuera en la dirección transversal del colector de ondas y el eje  $z$  señala hacia arriba en una dirección normal al nivel medio del agua. La longitud del colector para  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  es  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3 - L_2$  respectivamente. En el análisis presente asumimos que las paredes del colector son impermeables; sin embargo, las fronteras verticales en los lados derecho e izquierdo están completamente abiertos al paso de la suma del oleaje incidente y reflejado, en la derecha, y únicamente transmitido en la izquierda. Los anchos prescritos del colector de ondas están dados por las siguientes relaciones:

$$b(x) = \begin{cases} 2H & \text{para } -L_1 \leq x \leq 0 \\ b_2(x) = \left[ \frac{b_0 - 2H}{L_2^n} \right] x^n + 2H & \text{para } 0 \leq x \leq L_2 \\ b_0 & \text{para } L_2 \leq x \leq L_3 \end{cases}, \quad (4.1)$$

La forma geométrica del ancho del colector de ondas está dada por los valores de  $n \geq 1$

y  $n \sim O(1)$ . Los argumentos por los cuales  $n$  no puede ser menor a uno, se explican en la sección 4.1.1. Las funciones de ley de potencia dadas por la Ec. (4.1), se consideran representaciones o aproximaciones de colectores cónicos convergentes con  $2H \ll b_0$  el cual es un número real que describe la distribución del ancho del colector.

En la aproximación de ondas a flujo somero, el movimiento dominante es en un plano horizontal, debido a que la velocidad vertical es débil. El flujo del fluidos está gobernado por las ecuaciones de continuidad y de cantidad y movimiento siguientes, Svendsen [41, p.453]

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_h \cdot [\mathbf{V}(h + \eta)] = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla_h) U + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (4.3)$$

y

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla_h) V + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad (4.4)$$

donde  $\nabla_h = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ ,  $\eta = \eta(x, y, t)$  es la superficie libre del agua,  $\mathbf{V} = (U, V)$  con  $U = \int_{-h}^{\eta} u dz / (\eta + h)$  es la velocidad promedio en la dirección  $x$  y  $V = \int_{-h}^{\eta} v dz / (\eta + h)$  es la velocidad promedio en la dirección  $y$ ,  $u = u(x, y, z, t)$  y  $v = v(x, y, z, t)$  son las componentes de la velocidad local en las direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente;  $h$  es la profundidad del agua, la cual, para nuestro estudio es constante;  $t$  es el tiempo y  $g$  es la aceleración de la gravedad.

Integrando la ecuación de continuidad, Ec. (4.2), desde una orilla del colector de ondas  $y_1 = -b_2(x)/2$  hasta la otra  $y_2 = b_2(x)/2$  y utilizando la regla de Leibniz, obtenemos la siguiente ecuación:

$$b_2(x) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial [U(h + \eta) b_2(x)]}{\partial x} + (h + \eta) [V(b_2(x)/2) - V(-b_2(x)/2)] - \frac{1}{2} (h + \eta) U \frac{db_2(x)}{dx} - \frac{1}{2} (h + \eta) U \frac{db_2(x)}{dx} = 0. \quad (4.5)$$

Las paredes del colector de ondas se asumen impermeables, por lo tanto las velocidades transversales son,  $V(y_1 = -b_2(x)/2) = V(y_2 = b_2(x)/2) = 0$ . Para colectores de ondas esbeltos y largos la dimensión del ancho  $b_0$ , es más pequeña que la escala longitudinal  $L_2$ , esto implica que  $db_2(x)/dx \sim O(b_0/L_2) \ll 1$ ; tomando en cuenta estos últimos argumentos la Ec. (4.5) se reescribe como sigue

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{b_2(x)} \frac{\partial [U(h + \eta) b_2(x)]}{\partial x} = 0. \quad (4.6)$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones de gobierno no-lineales, que modelan la propagación de ondas largas bidimensionales en un colector de ondas cónico y esbelto, se pueden reducir a las Ecs. (4.3), (4.4) y (4.6).

Con el objetivo de reducir la combinación de las diferentes variables físicas de las ecuaciones de gobierno, se identifican las escalas características, que intervienen en las ecuaciones de gobierno, para la superficie libre la escala es la amplitud incidente  $A_I$ , para el tiempo es el periodo  $T$  y la escala característica longitudinal es  $L_2$ . Utilizando la Ec. (4.3) y haciendo un análisis de órdenes de magnitud entre los términos temporales y los efectos gravitacionales se obtiene la velocidad característica  $u_c$

$$\frac{u_c}{T} \sim g \frac{A_I}{L_2}. \quad (4.7)$$

La celeridad de ondas largas no dispersivas está dada por  $c = (\omega/k) = (gh)^{1/2}$ , donde  $k = 2\pi/\lambda$  es el número de onda,  $\lambda$  es la longitud de onda y  $\omega = 2\pi/T$  es la frecuencia del oleaje, sustituyendo estas expresiones en la Ec. (4.7), obtenemos la siguiente relación.

$$u_c \sim \frac{A_I (gh)^{1/2}}{h} \frac{\lambda}{L_2}. \quad (4.8)$$

Tomando en cuenta el análisis de órdenes de magnitud anterior, proponemos las variables adimensionales siguientes

$$\begin{aligned} \chi_2 &= \frac{x}{L_2}, & Y_2 &= \frac{y}{b_0}, & \tilde{\tau} &= k (gh)^{1/2} t, & \Delta_2(\chi_2, Y_2, \tilde{\tau}) &= \frac{\eta}{A_I}, \\ U_2(\chi_2, Y_2, \tilde{\tau}) &= \frac{hL_2}{A_I (gh)^{1/2} \lambda} U & \text{y} & & V_2(\chi_2, Y_2, \tilde{\tau}) &= \frac{hL_2}{A_I (gh)^{1/2} \lambda} V. \end{aligned}$$

Sustituyendo las variables adimensionales en las Ecs. (4.3), (4.4) y Ec. (4.6) obtenemos las siguientes expresiones

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial \tilde{\tau}} + \frac{2\pi\kappa_2^2}{\tilde{b}_2} \frac{\partial [U_2 (1 + \epsilon\Delta_2) \tilde{b}_2]}{\partial \chi_2} = 0, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \tilde{\tau}} + 2\pi\epsilon\kappa_2^2 U_2 \frac{\partial U_2}{\partial \chi_2} + 2\pi\epsilon\kappa_2^2 \frac{1}{\vartheta} V_2 \frac{\partial U_2}{\partial Y_2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Delta_2}{\partial \chi_2} \quad \text{y} \quad (4.10)$$

$$\vartheta \frac{\partial V_2}{\partial \tilde{\tau}} + 2\pi\epsilon\vartheta\kappa_2^2 U_2 \frac{\partial V_2}{\partial \chi_2} + 2\pi\epsilon\kappa_2^2 V_2 \frac{\partial V_2}{\partial Y_2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Delta_2}{\partial Y_2}, \quad (4.11)$$

$$\text{con } \tilde{b}_2 = 1 + [(1 - \Gamma) / \Gamma] \chi_2^n.$$

En las Ecs. (4.9)–(4.11), los parámetros adimensionales están definidos de la forma siguiente

$$\kappa_2 = \frac{1}{kL_2}, \quad \Gamma = \frac{2H}{b_0}, \quad \vartheta = \frac{b_0}{L_2} \quad \text{y} \quad \epsilon = \frac{A_I}{h}.$$

Desde un punto de vista físico el parámetro  $\epsilon \ll 1$  representa ondas de amplitud pequeña y  $\vartheta \ll 1$  representa a un colector de ondas esbelto. El parámetro  $\kappa_2 \ll 1$  es un parámetro cinemático y representa  $L_2 \sim O(\lambda)$ . Considerando los siguientes términos como  $\epsilon \ll 1$ ,  $\vartheta \ll 1$ , por lo tanto, los términos de orden  $\vartheta$ ,  $\epsilon\kappa_2^2$ ,  $\epsilon\kappa_2^2/\vartheta$  y  $\epsilon\vartheta\kappa_2^2$  pueden despreciarse, excepto el término de orden  $\kappa_2^2$  que se encuentra en la Ec. (4.9). Así, en una primera aproximación, las Ecs. (4.9)–(4.11), se escriben en forma simplificada como

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial \tilde{\tau}} + \frac{2\pi\kappa_2^2}{\tilde{b}_2} \frac{\partial (U_2 \tilde{b}_2)}{\partial \chi_2} = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \tilde{\tau}} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Delta_2}{\partial \chi_2} \quad (4.13)$$

y

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial Y_2} \approx 0. \quad (4.14)$$

Del análisis anterior, obtenemos las ecuaciones de gobierno que describen la hidrodinámica de la propagación de ondas largas lineales unidimensionales, en colectores de ondas con ancho variable, las cuales están dadas por las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento en forma adimensional, Ecs. (4.12) y (4.13), respectivamente; como se aprecia, estas ecuaciones son solo función de la abscisa adimensional  $\chi_2$  y del tiempo adimensional  $\tilde{\tau}$ . Por otro lado, las ecuaciones de gobierno para la hidrodinámica del oleaje en las regiones  $R_1$  y  $R_3$  se obtienen siguiendo el procedimiento anterior, las cuales se muestran en los párrafos siguientes.

Diferenciando la Ec. (4.12) respecto del tiempo  $\tau$  y sustituyendo la Ec. (4.13) en el resultado, obtenemos la siguiente ecuación

$$\tilde{b}_2 \frac{\partial^2 \Delta_2}{\partial \tilde{\tau}^2} + \kappa_2^2 \left[ \tilde{b}_2 \frac{\partial^2 \Delta_2}{\partial \chi_2^2} + \frac{\partial \tilde{b}_2}{\partial \chi_2} \frac{\partial \Delta_2}{\partial \chi_2} \right] = 0. \quad (4.15)$$

La solución de la Ec. (4.15) requiere de dos condiciones iniciales y dos condiciones de frontera, las cuales se obtienen de la siguiente manera. La linealidad del problema, nos permite expresar la variación de la superficie libre física  $\eta$  y a la velocidad física  $U$  como una función armónica en el tiempo.

$$\eta(x, t) = \text{Re} [\tilde{\eta}(x) \exp(-i\omega t)] \quad (4.16)$$

y

$$U(x, t) = \text{Re} [\tilde{u}(x) \exp(-i\omega t)] , \quad (4.17)$$

donde  $\tilde{\eta}(x)$  es la amplitud física del oleaje y  $\tilde{u}(x)$  es el factor espacial de la velocidad a lo largo de la coordenada longitudinal  $x$ ,  $i = \sqrt{-1}$  y  $\text{Re}$  “es la parte real de”. Para las tres regiones del colector, las Ecs. (4.16) y (4.17), expresadas en forma adimensional son

$$\Delta_j(\chi_j, \tilde{\tau}) = \text{Re} [\delta_j(\chi_j) \exp(-i\tilde{\tau})] \quad \text{para } j = 1, 2 \text{ y } 3 \quad (4.18)$$

y

$$U_j(\chi, \tilde{\tau}) = \text{Re} [\tilde{u}_j(\chi_j) \exp(-i\tilde{\tau})] \quad \text{para } j = 1, 2 \text{ y } 3 , \quad (4.19)$$

donde  $\delta_j(\chi_j) = \tilde{\eta}(x)/A_I$  y  $\tilde{u}_j(\chi_j) = \tilde{u}/u_c$ . La condición inicial para la Ec. (4.15) en  $\tilde{\tau} = 0$  se obtiene de la Ec. (4.18), la cual se reescribe como

$$\Delta_2(\chi_2, 0) = \text{Re} [\delta_2(\chi_2)] \quad (4.20)$$

y

$$\frac{\partial \Delta_2(\chi_2, 0)}{\partial \tilde{\tau}} = \text{Re} [-i\delta_2(\chi_2)] . \quad (4.21)$$

Las relaciones (4.20) y (4.21) son funciones de la amplitud adimensional  $\delta_2(\chi_2)$  para toda sección transversal a lo largo del eje  $\chi_2$ . En la fronteras  $\chi_2 = 0$  y  $\chi_2 = 1$  y para una longitud de orden  $l/\lambda \ll 1$ , donde  $l$  es una longitud pequeña a cada lado de estas posiciones, el movimiento de la onda será prácticamente uniforme sobre cada una de estas secciones. Por lo tanto, la perturbación hidrodinámica inducida en las conexiones de las regiones  $R_1 - R_2$  y  $R_2 - R_3$  pueden ignorarse, Lamb [25]. Considerando el último comentario y tomando en cuenta que para ondas largas lineales, la presión permanece todavía hidrostática, es decir,  $P_w(x, t) = \rho g(\eta - z)$ , las cuales en variables adimensionales se reescribe como  $\tilde{P}_w = (\Delta_j - \tilde{z})$ , donde  $\tilde{P}_w = P_w/(\rho g A_I)$  y  $\tilde{z} = z/A_I$ ; podemos considerar que la presión es la misma en ambos lados de la onda, en  $\chi_2 = 0$  y en  $\chi_2 = 1$ . Por lo tanto, las condiciones de frontera para la Ec. (4.15), pueden escribirse como

$$\Delta_2(0, \tilde{\tau}) = \Delta_1(0, \tilde{\tau}) \quad (4.22)$$

y

$$\Delta_2(1, \tilde{\tau}) = \Delta_3(0, \tilde{\tau}) . \quad (4.23)$$

En las condiciones de frontera (4.22) y (4.23),  $\Delta_1$  y  $\Delta_3$  son la elevación de la superficie libre adimensional para ondas largas lineales que se propagan en las regiones del colector de ondas con ancho constante.



Ahora, sustituyendo la Ec. (4.18) en la Ec. (4.15), obtenemos la siguiente ecuación

$$\kappa_2^2 \frac{d^2 \delta_2(\chi_2)}{d\chi_2^2} + \frac{\kappa_2^2}{\tilde{b}_2} \frac{d\tilde{b}_2}{d\chi_2} \frac{d\delta_2(\chi_2)}{d\chi_2} + \delta_2(\chi_2) = 0 \quad (4.24)$$

junto con las condiciones de frontera siguientes

$$\delta_2(0) = \delta_1(0) \quad (4.25)$$

y

$$\delta_2(1) = \delta_3(0) . \quad (4.26)$$

El problema de valores en la frontera dado por la Ec. (4.24) junto con las condiciones de frontera (4.25) y (4.26) constituyen el modelo matemático, que describe la elevación de la superficie libre adimensional de ondas largas lineales, que se propagan en la región de transición del colector de ondas  $R_2$ . Las variables  $\delta_1(0)$  y  $\delta_3(0)$  representan la elevación de la superficie libre para ondas largas lineales que se propagan en las regiones  $R_1$  y  $R_3$  en las posiciones  $\chi_1 = 0$  y  $\chi_3 = 0$ , respectivamente, las cuales se obtienen como sigue.

Las ecuaciones de onda que describen flujo no permanente en las regiones  $R_1$  y  $R_3$  del colector de ondas, se obtienen con un procedimiento similar al de la región  $R_2$ .

Introduciendo las siguientes variables adimensionales

$$\chi_1 = -\frac{x}{L_1} \quad \text{y} \quad \chi_3 = \frac{(x - L_2)}{(L_3 - L_2)} .$$

La ecuación diferencial que describe la hidrodinámica del oleaje en las regiones  $R_1$  y  $R_3$  está dada por

$$\frac{d^2 \delta_j(\chi_j)}{d\chi_j^2} + \kappa_j^2 \delta_j(\chi_j) = 0 \quad \text{para } j = 1 \text{ y } 3 , \quad (4.27)$$

donde  $\kappa_1 = 1/kL_1$  y  $\kappa_3 = 1/[k(L_3 - L_2)]$ . Las soluciones de la Ec. (4.27) son triviales y están dadas por las siguientes expresiones: para la región  $R_1$  se expresa como

$$\delta_1(\chi_1) = \beta_T \exp [i\kappa_1\chi_1] \quad (4.28)$$

y para la región  $R_3$  tenemos que

$$\delta_3(\chi_3) = \beta_R \exp [i\kappa_3\chi_3] + \exp [-i\kappa_3\chi_3] , \quad (4.29)$$

donde  $\beta_T = A_T/A_I$  y  $\beta_R = A_R/A_I$  son las ondas transmitida y reflejada adimensionales complejas y desconocidas.  $A_T$  y  $A_R$  son las amplitudes físicas transmitida y refleja del oleaje, respectivamente. Evaluando las Ecs. (4.28) y (4.29) en  $\chi_1 = 0$  y  $\chi_3 = 0$ , obtenemos que  $\delta_1(0) = \beta_T$  y  $\delta_3(0) = 1 + \beta_R$ , estas últimas ecuaciones son los valores de las condiciones de frontera (4.25) y (4.26).

## 4.1. Solución analítica en el límite $\kappa_2 \ll 1$

En esta sección se presenta la solución analítica para las ondas de agua largas y lineales que se propagan en un colector de ondas con  $L_2 \sim O(\lambda)$ , lo cual implica valores del parámetro  $\kappa_2 \ll 1$ . La Ec. (4.24) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y que su derivada de orden superior está afectada por el parámetro pequeño  $\kappa_2 \ll 1$ , en tales circunstancias, es posible determinar una solución analítica aproximada usando una técnica de perturbación singular WKB, Bender y Orzag [3, Chap. 10].

El parámetro  $\Gamma$  puede tomar cualquier valor en el intervalo  $0 < \Gamma < 1$ . Como un caso particular, la aproximación  $\Gamma \rightarrow 1$ , degenera, en una primera aproximación, en un colector de ondas con ancho uniforme y la Ec. (4.24), se reduce a la siguiente expresión

$$\kappa_2^2 \frac{d^2 \delta_2(\chi_2)}{d\chi_2^2} + \delta_2(\chi_2) = 0, \quad (4.30)$$

La solución de la ecuación diferencial ordinaria Ec. (4.24), se propone de la forma siguiente

$$\delta_2(\chi_2) \sim \exp \left[ \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \varepsilon^{\bar{n}} \bar{S}_{\bar{n}}(\chi_2) \right] \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad . \quad (4.31)$$

Con su primera y segunda derivada, dadas por

$$\delta'_2(\chi_2) \sim \left[ \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \varepsilon^{\bar{n}} \bar{S}'_{\bar{n}}(\chi_2) \right] \exp \left[ \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \varepsilon^{\bar{n}} \bar{S}_{\bar{n}}(\chi_2) \right] \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad . \quad (4.32)$$

y

$$\delta''_2(\chi_2) \sim \left\{ \left[ \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \varepsilon^{\bar{n}} \bar{S}'_{\bar{n}}(\chi_2) \right]^2 + \right. \quad (4.33)$$

$$\left. \left[ \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \varepsilon^{\bar{n}} \bar{S}''_{\bar{n}}(\chi_2) \right] \right\} \exp \left[ \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \varepsilon^{\bar{n}} \bar{S}_{\bar{n}}(\chi_2) \right] \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad ,$$

donde  $\varepsilon$  se conoce como la función de fase y es una variable adimensional desconocida, ésta puede obtenerse como una función del parámetro adimensional  $\kappa_2$ , donde  $\varepsilon \rightarrow \kappa_2$ .

Tomando en cuenta las Ecs. (4.31), (4.32) y la Ec. (4.33) y sustituyéndolas en la Ec. (4.24), se conduce a la siguiente expresión.

$$\left[ \frac{\kappa_2^2}{\varepsilon^2} (\bar{S}'_0)^2 + 2 \frac{\kappa_2^2}{\varepsilon} \bar{S}'_0 \bar{S}'_1 + \kappa_2^2 (\bar{S}'_1)^2 + \frac{\kappa_2^2}{\varepsilon} \bar{S}''_0 + \kappa_2^2 \bar{S}''_1 + \dots \right] + \quad (4.34)$$

$$\left[ \frac{1}{\tilde{b}_2(\chi_2)} \frac{d\tilde{b}_2(\chi_2)}{d\chi_2} \right] \left[ \frac{\kappa_2^2}{\varepsilon} \bar{S}'_0 + \kappa_2^2 \bar{S}'_1 + \dots \right] = -1; \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad .$$

De la Ec. (4.34),  $\varepsilon$  se supone pequeño y por lo tanto, requerimos que  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

El término de mayor orden del lado izquierdo de la Ec. (4.34) es  $(\kappa_2^2/\varepsilon^2)(\bar{S}'_0)^2$ , a través de un balance dominante entre este término y los términos de orden  $(\kappa_2^2/\varepsilon)$  y  $(\kappa_2^2)$  buscamos el orden de  $\varepsilon$  de la forma siguiente

$$\frac{\kappa_2^2}{\varepsilon^2} \sim \frac{\kappa_2^2}{\varepsilon}; \quad \frac{\kappa_2^2}{\kappa_2^2} \sim \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} \quad \therefore \quad \varepsilon \sim 1, \quad (4.35)$$

$$\frac{\kappa_2^2}{\varepsilon^2} \sim \kappa_2^2; \quad \frac{\kappa_2^2}{\kappa_2^2} \sim \varepsilon \quad \therefore \quad \varepsilon \sim 1, \quad (4.36)$$

se obtiene que  $\varepsilon \sim 1$ , sin embargo, esto viola la suposición de que  $\varepsilon \rightarrow 0$  por lo tanto, estos casos son incorrectos

Ahora balanceando el término dominante con el término del lado derecho de la Ec. (4.34), obtenemos que

$$\frac{\kappa_2^2}{\varepsilon^2} \sim 1 \quad \therefore \quad \varepsilon \sim \kappa_2, \quad (4.37)$$

del balance anterior determinamos que  $\varepsilon$  es proporcional a  $\kappa_2$  y por lo tanto por simplicidad elegimos  $\varepsilon = \kappa_2$ .

De esta forma, ahora podemos reescribir a la Ec. (4.34) como

$$\left[ (\bar{S}'_0)^2 + 2\kappa_2 \bar{S}'_0 \bar{S}'_1 + \kappa_2^2 (\bar{S}'_1)^2 + \kappa_2 \bar{S}''_0 + \kappa_2^2 \bar{S}''_1 + \dots \right] + \quad (4.38)$$

$$\left[ \frac{1}{\tilde{b}_2(\chi_2)} \frac{d\tilde{b}_2(\chi_2)}{d\chi_2} \right] \left[ \kappa_2 \bar{S}'_0 + \kappa_2^2 \bar{S}'_1 + \dots \right] = -1; \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Agrupamos a los términos de la Ec. (4.38) por órdenes de magnitud, para el orden  $\kappa_2^0$ , tenemos que:

$$(\bar{S}'_0)^2 = -1, \quad (4.39)$$

la cual tiene una solución

$$\bar{S}_0(\chi_2) = \pm i\chi_2 + \tilde{c} \quad (4.40)$$

de forma similar, para el orden  $\kappa_2^1$ , obtenemos que

$$2\bar{S}'_0 \bar{S}'_1 + \bar{S}''_0 + \left[ \frac{1}{\tilde{b}(\chi_2)} \frac{d\tilde{b}(\chi_2)}{d\chi_2} \right] \bar{S}'_0 = 0, \quad (4.41)$$

con

$$\bar{S}_1(\chi_2) = \ln \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{1-\Gamma}{\Gamma} \chi_2^n\right)} \right]^{1/2} + \bar{c} \quad (4.42)$$

y  $\bar{c}$  es la constante de integración.

Sustituyendo las Ecs. (4.40) y (4.42) en la Ec. (4.31), obtenemos la elevación de la superficie libre  $\delta_2(\chi_2)$ .

$$\delta_2(\chi_2) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{1-\Gamma}{\Gamma}\right) \chi_2^n\right]^{1/2}} \left[ C \exp\left(i\frac{1}{\kappa_2} \chi_2\right) + D \exp\left(-i\frac{1}{\kappa_2} \chi_2\right) \right]. \quad (4.43)$$

La Ec. (4.43) es la solución analítica para la elevación de la superficie libre adimensional  $\delta_2$ , que predice la amplitud de ondas largas lineales propagándose en colectores de ondas con variaciones suaves de la sección transversal y con fondo constante; esta ecuación permite modelar la elevación de la superficie libre a lo largo del eje longitudinal adimensional  $\chi_2$  para valores de  $0 < \kappa_2 \leq O(1/2\pi)$  y claramente es una función de la relación de esbeltez  $\Gamma = 2H/b_0$ . Las constantes  $C$  y  $D$  se pueden obtener aplicando condiciones de frontera de acoplamiento, las cuales se describen en la siguiente sección.

#### 4.1.1. Condiciones de frontera de acoplamiento

Con el objetivo de obtener los valores de los coeficientes  $C$ ,  $D$ ,  $\beta_R$  y  $\beta_T$ , requerimos dos condiciones de frontera adicionales, las cuales se obtienen a partir de la ley de conservación de masa, en la conexión de las regiones  $R_1 - R_2$  y  $R_2 - R_3$ . En  $x = 0$  y  $x = L_2$  el flujo de velocidad físico se obtiene de la ecuación de cantidad de movimiento lineal, dada por la siguiente expresión

$$\frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \quad (4.44)$$

Sustituyendo las Ecs. (4.16) y (4.17) con los correspondientes valores para  $j = 1$  y  $2$ , en las últimas ecuaciones, y evaluando los resultados en  $x = 0$  obtenemos que

$$\left. \frac{d\eta_-}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\eta_+}{dx} \right|_{x=0} \quad (4.45)$$

y para  $j = 2$  y  $3$  en  $x = L_2$ , se deduce lo siguiente

$$\left. \frac{d\eta_-}{dx} \right|_{x=L_2} = \left. \frac{d\eta_+}{dx} \right|_{x=L_2}. \quad (4.46)$$

Los símbolos  $(-)$  y  $(+)$ , representan el lado izquierdo y el lado derecho, respectivamente, en las posiciones  $x = 0$  y  $x = L_2$ .

Las relaciones (4.45) y (4.46) en su forma adimensional pueden escribirse como

$$\left. \frac{d\delta_1}{d\chi_1} \right|_{\chi_1=0} = \tilde{\gamma} \left. \frac{d\delta_2}{d\chi_2} \right|_{\chi_2=0} \quad \text{y} \quad \left. \frac{d\delta_2}{d\chi_2} \right|_{\chi_2=1} = \bar{\gamma} \left. \frac{d\delta_3}{d\chi_3} \right|_{\chi_3=0}, \quad (4.47)$$

donde  $\tilde{\gamma} = -(L_1/L_2)$  y  $\bar{\gamma} = [L_2/(L_3 - L_2)]$ . Las condiciones de frontera (4.25) y (4.26), junto con las condiciones de frontera (4.47) constituyen las condiciones de acoplamiento completas.

De las Ecs. (4.28), (4.29) y (4.43) junto con las condiciones de frontera (4.25), (4.26) y (4.47), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -\left(\frac{E\tilde{\mu}(\chi_2=0,n)}{\Gamma} - i\varphi\right) & -\left(\frac{E\tilde{\mu}(\chi_2=0,n)}{\Gamma} + i\varphi\right) & 0 & i\varphi \\ \Gamma^{\frac{1}{2}}\exp[i\varphi] & \Gamma^{\frac{1}{2}}\exp[-i\varphi] & -1 & 0 \\ -\Gamma^{\frac{1}{2}}\left(1+i\frac{\tilde{\mu}(\chi_2=0,n)}{\varphi}\right)\exp[i\varphi] & \Gamma^{\frac{1}{2}}\left(1-i\frac{\tilde{\mu}(\chi_2=0,n)}{\varphi}\right)\exp[-i\varphi] & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \\ \beta_R \\ \beta_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

donde

$$E = \frac{n(1-\Gamma)}{2} \quad \text{y} \quad \varphi = \frac{1}{\kappa_2}. \quad (4.49)$$

En el sistema de ecuaciones (4.48) la variable  $\tilde{\mu}(\chi_2, n) = \chi_2^{n-1}$ , está función para valores de  $n > 1$  y  $n \sim O(1)$ , es evaluada en  $\chi_2 = 0$  obteniendo que  $\mu(\chi_2 = 0, n) = 0$ , y para colectores de ondas con transición lineal ( $n = 1$ ), se reduce a  $\mu(\chi_2 = 0, n) = 1$ . Es importante notar que el exponente  $n$  puede tomar diferentes valores, dependiendo de su forma geométrica, es decir, (1, 1.5, 2.5, 3, 5). Con el fin de satisfacer la condición de esbeltez del colector de ondas dada por  $\vartheta \ll 1$ , los valores de  $n$  deben estar restringidos para ser de orden unidad. Colectores de ondas con  $n \gg 1$  degeneran en una abrupta transición cuando  $\chi_2 \rightarrow 1$ , y por lo tanto la condición de esbeltez no se satisface. En este modelo matemático los valores de  $n$  deben de ser iguales que la unidad o mayores, porque la distribución que obedece a la ley de potencia tiene su origen en  $\chi_2 = 0$ , solo en la intersección de las regiones  $R_1$  y  $R_2$  y para los casos de  $n < 1$  la función  $\mu(\chi_2, n)$  es divergente y por lo tanto la Ec. (4.43) está indefinida.

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior obtenemos

$$C = \frac{\tilde{\mu}(\chi_2 = 0, n) \exp[i\varphi]}{\bar{\alpha}\Gamma}, \quad (4.50)$$

$$D = -\frac{1}{\bar{\alpha}} \left( \frac{\tilde{\mu}(\chi_2 = 0, n)}{\Gamma} - i\frac{2\varphi}{a_1} \right) \exp [i\varphi] , \quad (4.51)$$

$$\beta_R = -\frac{\Gamma^{1/2}}{\bar{\alpha}} \left\{ 1 + \frac{\tilde{\mu}(\chi_2 = 0, n)}{\Gamma} \left[ i\frac{E}{2\varphi} (1 - \exp [2i\varphi]) - \exp [2i\varphi] \right] \right\} \quad (4.52)$$

y

$$\beta_T = i\frac{2\varphi \exp [i\varphi]}{E\bar{\alpha}} , \quad (4.53)$$

con

$$\bar{\alpha} = \Gamma^{1/2} \left( 1 + i\frac{2\varphi}{E} \right) + \frac{\tilde{\mu}(\chi_2 = 0, n)}{\Gamma^{1/2}} \left[ i\frac{E}{2\varphi} (1 - \exp [2i\varphi]) - 1 \right] . \quad (4.54)$$

En particular, precisamos que para colectores de ondas con transición lineal, es decir, con  $n = 1$ , las dos constantes  $C$  y  $D$  en la solución de la superficie libre adimensional, Ec. (4.43), prevalecen; sin embargo para colectores de ondas con transición no lineal,  $n > 1$ , la constante  $C$  toma el valor de  $C = 0$ .

Para obtener los coeficientes de reflexión y de transmisión del oleaje, desarrollamos un balance de flujo de energía. En la región  $R_1$  solo se presenta una onda transmitida y en la región  $R_3$  existe una superposición de una onda reflejada y una incidente, por lo que tenemos

$$cb_0 E_R + c2HE_T = cb_0 E_I , \quad (4.55)$$

donde  $E_R = \frac{1}{2}\rho g A_R^2$ ,  $E_T = \frac{1}{2}\rho g A_T^2$  y  $E_I = \frac{1}{2}\rho g A_I^2$ , son los flujos energía del oleaje reflejado, transmitido e incidente, respectivamente. En las relaciones anteriores  $c$  es la celeridad de la onda y es constante a lo largo de las tres regiones del colector de ondas. Por lo tanto la Ec. (4.55) puede expresarse en la forma simplificada siguiente:

$$C_R^2 + \Gamma C_T^2 = 1 . \quad (4.56)$$

Los coeficientes de reflexión y transmisión  $C_R$  y  $C_T$ , respectivamente, están definidos como

$$C_R = \left| \frac{A_R}{A_I} \right| = |\beta_R| \quad \text{y} \quad C_T = \left| \frac{A_T}{A_I} \right| = |\beta_T| . \quad (4.57)$$

El símbolo  $||$  representa el módulo de un número complejo.

Para el caso de los colectores de ondas con transición no-lineal, las Ecs. (4.52) y (4.53) junto con la Ec. (4.57) pueden simplificarse en la forma siguiente

$$C_R = \frac{n\kappa_2 \sqrt{1 - 2\Gamma + \Gamma^2}}{\sqrt{n^2 \kappa_2^2 (1 - \Gamma)^2 + 16}} \quad \text{y} \quad C_T = \frac{1}{\sqrt{\Gamma \left( 1 + \frac{\kappa_2^2 n^2 (1 - \Gamma)^2}{16} \right)}} . \quad (4.58)$$

Para el caso particular de  $\Gamma \rightarrow 1$  tenemos un colector de ondas con ancho y fondo constantes, así  $C_R \approx 0$  y  $C_T \approx 1$ , esto implica que para este tipo de colector la energía de la onda incidente es completamente transmitida de la región  $R_3$  a la región  $R_1$ . Por otro lado, en el límite de  $\kappa_2 \ll 1$ , la Ec. (4.58) se reduce a las siguientes relaciones

$$C_R = \frac{n\kappa_2\sqrt{1-2\Gamma+\Gamma^2}}{4} \quad \text{y} \quad C_T \approx \frac{1}{\Gamma^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.59)$$

De las ecuaciones anteriores, se deduce que para colectores de ondas muy largos, la condición de reflexión prácticamente no existe,  $C_R \approx 0$  y el  $C_T$  es solo una función del parámetro adimensional  $\Gamma = 2H/b_0$ .

### 4.1.2. Resultados de la hidrodinámica del oleaje en un colector de ondas cónico y esbelto

Para demostrar la versatilidad y la fácil aplicación de la solución analítica obtenida en el presente trabajo, consideramos los siguientes valores típicos de las variables físicas:  $L_2 = 3500$  m y una profundidad constante de  $h = 25$  m, Zwamborn y Grieve [49], con un ancho de  $b_0 = 300$  m y valores de  $2H (= 75, 150, 225, 300)$  m. Además se propone el valor de la amplitud incidente de  $A_I = 1.0$  m y tres valores de la longitud de onda  $\lambda (= 703.7, 2200.0, 3298.7)$  m, con estas dimensiones obtenemos los siguientes valores de los parámetros adimensionales:  $\kappa_2 (= 0.032, 0.10 \text{ y } 0.15)$  y  $\Gamma (= 0.25, 0.5, 0.75 \text{ y } 1)$ . Tomando en cuenta los valores de las variables físicas anteriores la aproximación de ondas largas y lineales  $A_I/h = 0.04 \ll 1$  y  $h/\lambda = 0.035 < 1/20$  se satisfacen, Kamphuis [22].

#### 4.1.2.1. Comparación con otros modelos

En las dos siguientes secciones, se describe la comparación entre la presente solución analítica contra la solución numérica y la solución analítica que se obtuvo en términos de funciones de Bessel.

#### 4.1.2.2. Solución numérica

La solución numérica realizada para el límite de  $C_R \rightarrow 0$ , implica que la condición de frontera (4.25) en  $\chi_2 = 1$ , junto con la Ec. (4.29), pueden reducirse a la siguiente expresión

$$\delta_2(1) \approx 1. \quad (4.60)$$

La condición de frontera en  $\chi_2 = 0$  se obtiene de la Ec. (4.56) en el límite de  $C_R \rightarrow 0$ , lo anterior implica que

$$\Gamma C_T^2 \approx 1. \quad (4.61)$$

De la Ec. (4.25) junto con la Ec.(4.28), obtenemos que  $\delta_1(0) = \beta_T$ , por lo tanto sustituyendo esta última relación en la Ec.(4.61), podemos deducir que

$$\delta_2(0) \simeq C_T = \Gamma^{-1/2} , \quad (4.62)$$

así el problema de valores en la frontera está dado por la Ec. (4.24), y las condiciones de frontera (4.60) y (4.62).

Para la solución numérica, utilizamos el método del disparo conocido como "Shooting method". La discretización del eje adimensional  $\chi_2$  se hizo con intervalos de  $\Delta\chi_2 = 0.0001$ .

#### 4.1.2.3. Solución analítica en términos de funciones de Bessel

Con el objetivo de comparar la solución analítica, derivada en este trabajo, con la solución clásica para ondas largas lineales, propagándose en un colector de ondas con una transición lineal ( $n = 1$ ), y fondo constante, la Ec. (4.24) se expresa como una ecuación tipo Bessel. Realizando un cambio de variable en términos del ancho del colector  $\tilde{b}_2 = 1 + [(1 - \Gamma) / \Gamma] \chi_2$ ; así la Ec. (4.24) se reescribe como

$$\frac{d^2\delta_2(\chi_2)}{d\tilde{b}_2^2} + \frac{1}{\tilde{b}_2} \frac{d\delta_2(\chi_2)}{d\tilde{b}_2} + \tilde{K}^2\delta_2(\chi_2) = 0 , \quad (4.63)$$

donde  $\tilde{K} = \Gamma / [(1 - \Gamma) \kappa_2]$ .

La solución analítica aproximada de la Ec. (4.63), en términos de funciones de Bessel está dada por

$$\delta_2 = A_1 J_0(\tilde{K}\tilde{b}_2) + B_1 Y_0(\tilde{K}\tilde{b}_2) , \quad (4.64)$$

donde  $J_0$  es una función de Bessel del primer tipo de orden cero y  $Y_0$  es una función de Bessel de segundo tipo de orden cero.

Tomando en cuenta las condiciones de frontera (4.25) y (4.26) junto con las Ecs. (4.28) y (4.29), las constantes  $A_1$  y  $B_1$  se expresan en la siguiente forma

$$A_1 = \frac{2 \left[ i\kappa_2 Y_1(\tilde{K}) - Y_0(\tilde{K}) \right]}{\theta} \quad (4.65)$$

y

$$B_1 = \frac{2 \left[ i\kappa_2 J_1(\tilde{K}) - J_0(\tilde{K}) \right]}{\theta} , \quad (4.66)$$



con

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} = & \left\{ J_0(\tilde{K}) Y_0(\tilde{K}/\Gamma) - J_0(\tilde{K}/\Gamma) Y_0(\tilde{K}) - \kappa_2^2 J_1(\tilde{K}/\Gamma) Y_1(\tilde{K}) + \right. \\ & \left. \kappa_2^2 J_1(\tilde{K}) Y_1(\tilde{K}/\Gamma) \right\} + i \left\{ J_1(\tilde{K}/\Gamma) Y_0(\tilde{K}) + \kappa_2 J_1(\tilde{K}) Y_0(\tilde{K}/\Gamma) \right. \\ & \left. - \kappa_2 J_0(\tilde{K}/\Gamma) Y_1(\tilde{K}) - \kappa_2 J_0(\tilde{K}) Y_1(\tilde{K}/\Gamma) \right\} . \end{aligned}$$

La Ec. (4.64) junto con las constantes  $A_1$  y  $B_1$ , constituyen la solución analítica aproximada para la propagación de ondas largas lineales en un colector de ondas con transición lineal y fondo constante.

En la Fig. 4.2, se muestra la comparación de la solución analítica de la elevación de la superficie libre adimensional  $\delta_2$ , derivada en el trabajo presente, contra la solución numérica y la solución analítica aproximada, expresada en términos de funciones de Bessel, en el límite de  $\kappa_2 \ll 1$ . Los resultados se obtuvieron para valores constantes de  $\kappa_2 = 0.032$ ,  $\Gamma = 0.25$  y  $n = 1$ . Podemos apreciar que las tres soluciones se ajustan apropiadamente; en particular, la presente solución analítica es idéntica a la expresada en términos de las funciones de Bessel. Por otro lado, la pequeña diferencia entre la solución numérica y las otras dos soluciones analíticas es debido a que la solución numérica se obtuvo en el límite de  $C_R \rightarrow 0$  y por lo tanto no toma en cuenta la reflexión del oleaje.

En las Figs. 4.3, 4.4 y 4.5 se muestran las elevaciones de la superficie libre adimensional  $\delta_2$  para colectores de ondas con diferentes proyecciones horizontales  $n$  ( $= 2, 3$  y  $4$ ), como una función de la variable  $\chi_2$  para valores diferentes de  $\Gamma$  ( $= 0.25, 0.50, 0.75$ , y  $1$ ), con un valor constante de  $\kappa_2 = 0.15$ , este valor del parámetro  $\kappa_2$  representa el caso de  $L_2 \rightarrow \lambda$ . En estas figuras podemos apreciar, que el parámetro  $\Gamma$  juega un rol importante en la amplificación de la onda: para valores más pequeños de  $\Gamma$  la amplitud crece, por ejemplo para el valor de  $\Gamma = 0.25$  encontramos el máximo valor de  $\delta_2 \approx 2$ , aproximadamente dos veces más grande que la altura en  $\chi_2 = 1$ .

Además, como un ejemplo de validación del presente modelo matemático, en las mismas figuras, incluimos el caso trivial de un colector de ondas con ancho y fondo constantes, el cual es representado por el valor de  $\Gamma = 1$ . En este caso particular, la amplitud  $\delta_2$  permanece constante a lo largo de la coordenada adimensional  $\chi_2$ . Para identificar la influencia de la geometría sobre la amplificación de las ondas, vemos en la Fig. 4.6 la altura de la elevación de la superficie libre  $\delta_2$ , que se obtuvo como una función de la variable adimensional  $\chi_2$  para valores diferentes de  $n$  ( $= 2, 3, 3.5, 4$  y  $5$ ), con valores constantes de los parámetros  $\kappa_2 = 0.05$  y  $\Gamma = 0.25$ . Claramente, podemos apreciar que para valores más altos del exponente  $n$ , a lo largo del colector de ondas, la amplitud alcanza una altura

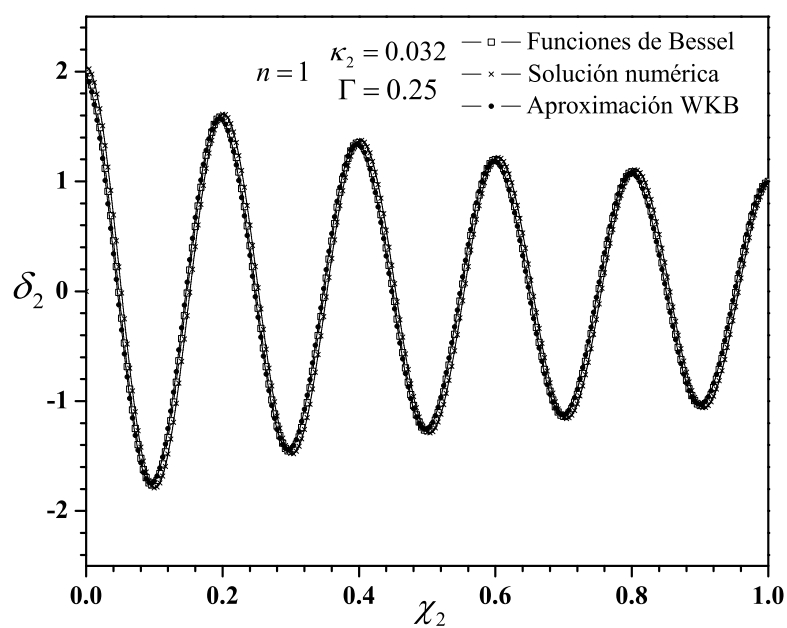


Fig. 4.2: Comparación de la solución analítica de la superficie libre adimensional  $\delta_2$ , derivada en el trabajo presente, contra las soluciones numérica y la correspondiente de funciones de Bessel, para valores constantes de  $\kappa_2 = 0.032$ ,  $\Gamma = 0.25$  y  $n = 1$ .

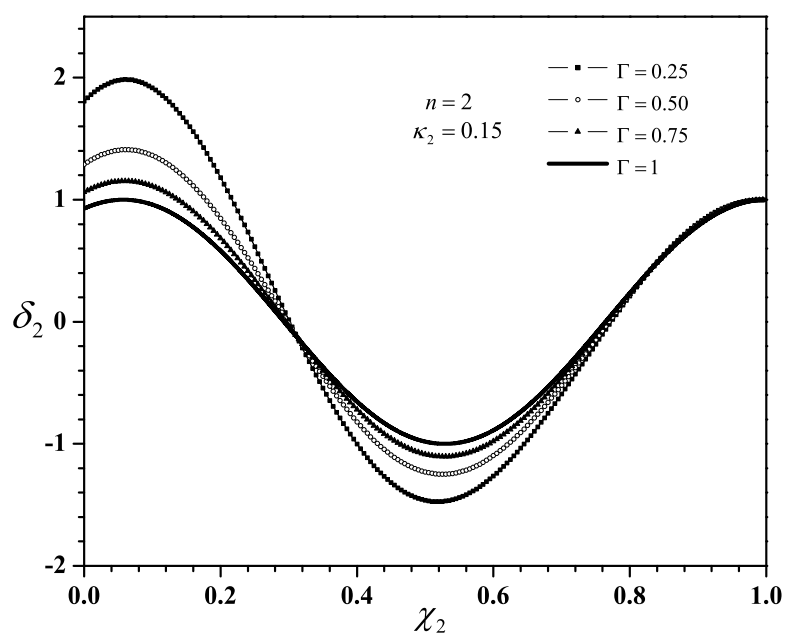


Fig. 4.3: Solución analítica de la elevación de la superficie libre del oleaje  $\delta_2$  como una función del eje adimensional  $\chi_2$ , para valores constantes de  $\kappa_2 = 0.15$ ,  $n = 2$  y valores diferentes de  $\Gamma$  ( $= 0.25, 0.5, 0.75$  y  $1$ ).

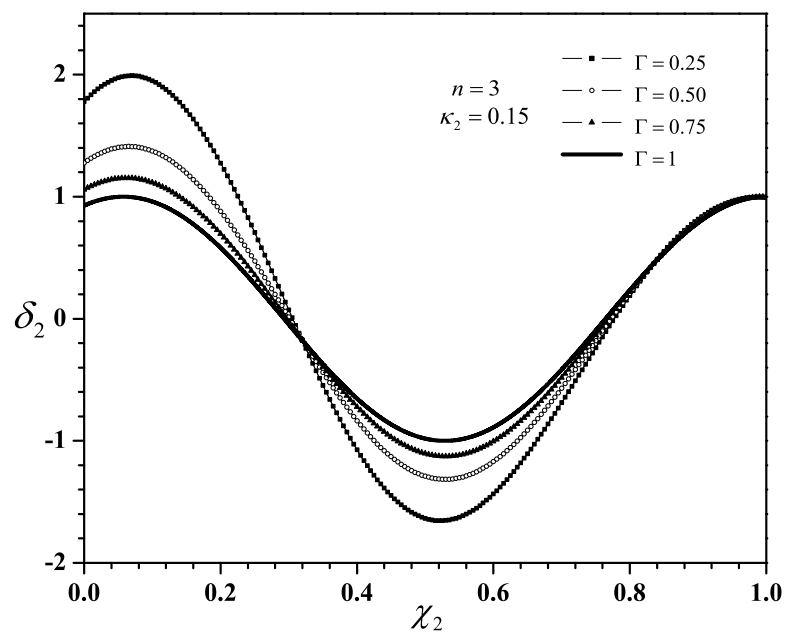


Fig. 4.4: Solución analítica de la elevación de la superficie libre del oleaje  $\delta_2$  como una función del eje adimensional  $\chi_2$ , para valores constantes de  $\kappa_2 = 0.15$ ,  $n = 3$  y valores diferentes de  $\Gamma$  ( $= 0.25, 0.5, 0.75$  y  $1$ ).

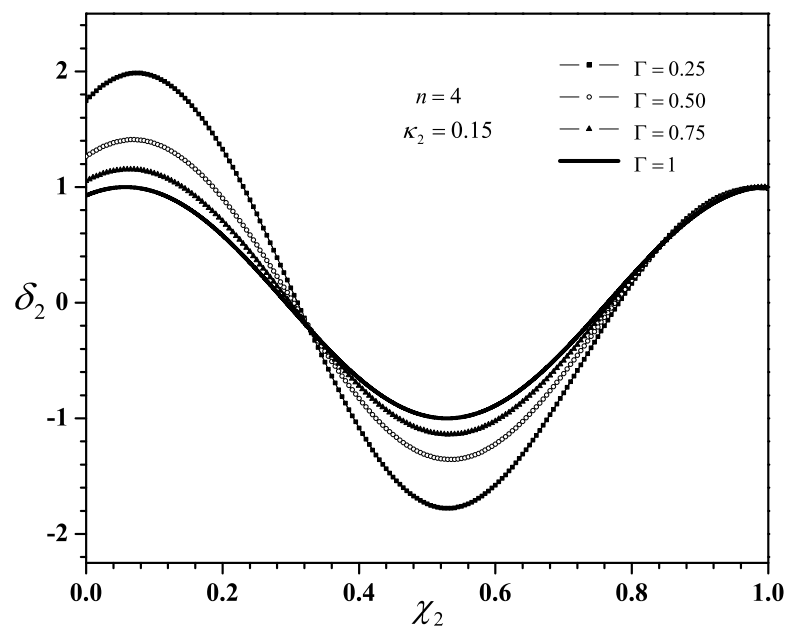


Fig. 4.5: Solución analítica de la elevación de la superficie libre del oleaje  $\delta_2$  como una función del eje adimensional  $\chi_2$ , para valores constantes de  $\kappa_2 = 0.15$ ,  $n = 4$  y valores diferentes de  $\Gamma$  ( $= 0.25, 0.5, 0.75$  y  $1$ ).

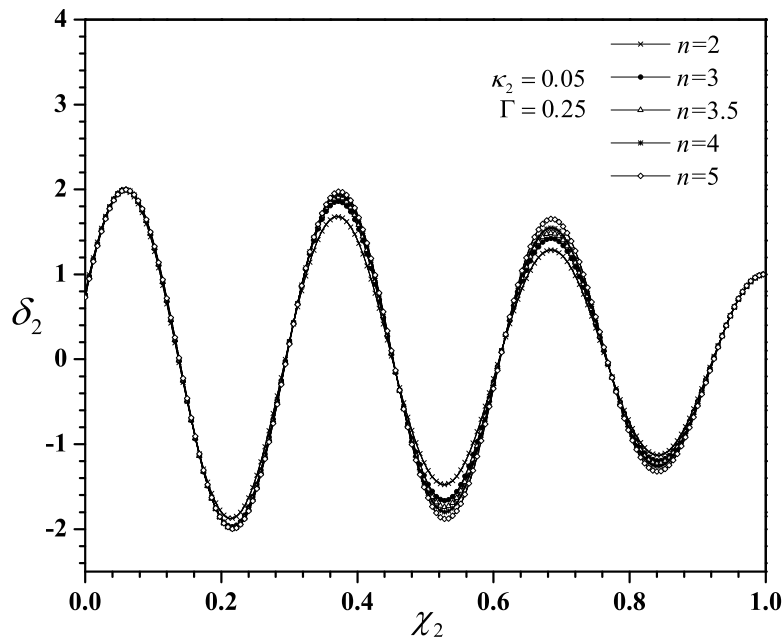


Fig. 4.6: Solución analítica de la elevación de la superficie libre del oleaje  $\delta_2$  para cinco valores de  $n$  ( $= 2, 3, 3.5, 4$  y  $5$ ) con valores constantes de  $\kappa_2 = 0.05$  y  $\Gamma = 0.25$ .

mayor; sin embargo, en la frontera  $\chi_2 = 0$  la altura de la onda es prácticamente la misma para todos los casos, así se satisface por completo el balance de energía dado por la Ec. (4.56).

La Fig. 4.7 muestra la elevación de la superficie libre adimensional  $\delta_2$  como una función del eje adimensional  $\chi_2$  para tres valores diferentes del parámetro  $\kappa_2$  ( $= 0.032, 0.10$  y  $0.15$ ), con valores constantes de  $\Gamma = 0.25$  y  $n = 2$ . De los resultados que se muestran en esta figura, podemos deducir que el parámetro  $\kappa_2$  solo tiene influencia en el número de longitudes de onda dentro del colector de ondas. Además, en la misma figura podemos apreciar que la amplitud máxima del oleaje para los tres valores del parámetro  $\kappa_2$  es  $\delta_2 \approx 2$ . Para ondas largas lineales no-dispersivas, propagándose en colectores de ondas con fondo constante y frecuencia constante, la longitud de onda permanece constante a lo largo del colector de ondas, esta condición se satisface y puede apreciarse en esta misma figura.

La Fig. 4.8 muestra los valores de los coeficientes de reflexión y transmisión del oleaje, como una función del parámetro  $\Gamma$  para tres valores de  $n$  ( $= 1, 2$  y  $3$ ) y dos valores

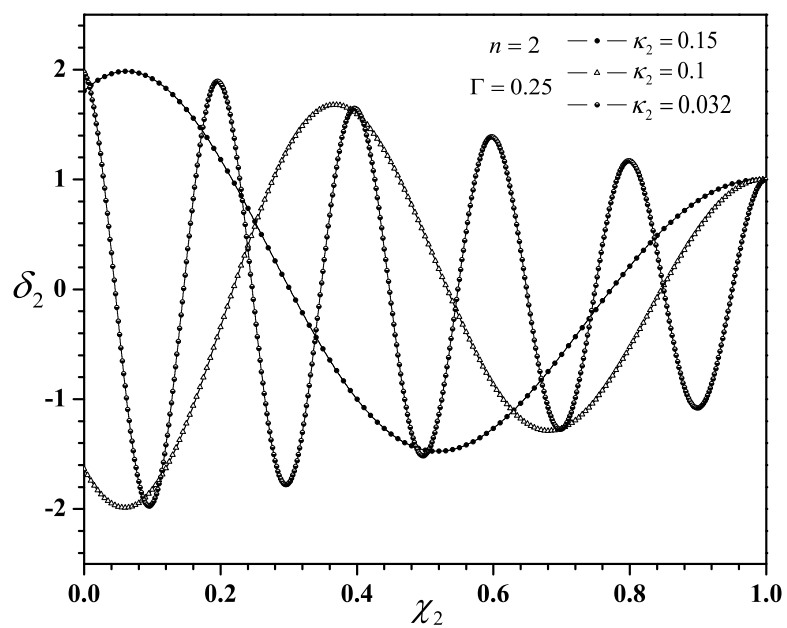


Fig. 4.7: Solución analítica de la elevación de la superficie libre del oleaje  $\delta_2$  para tres valores diferentes de  $\kappa_2$  ( $= 0.032, 0.1$  y  $0.15$ ), con valores constantes de  $n = 2$  y  $\Gamma = 0.25$ .

constantes del parámetro  $\kappa_2$  ( $= 0.032$  y  $0.15$ ). En general en esta figura podemos apreciar que para colectores de ondas con una longitud  $L_2 \gg \lambda$ , representada por el valor de  $\kappa_2 = 0.032$ , el colector es prácticamente no reflejante, por otro lado, si la longitud  $L_2 \sim O(\lambda)$ , representa un valor del parámetro  $\kappa_2 = 0.15$ , la influencia de la longitud del colector sobre la magnitud del coeficiente de reflexión comienza a ser significativa. Para el caso particular de  $n = 3$ , si  $\Gamma = 0.25$ , para el colector de ondas corto,  $C_R = 0.087$  y el correspondiente para el colector de ondas largo  $C_R = 0.021$ , entonces el colector corto es 4.14 veces más reflejante que el colector largo. En la misma figura, para el caso particular de  $\Gamma = 1$ , podemos apreciar que  $C_R = 0$  y  $C_T = 1$ . Cuando  $\Gamma \rightarrow 1$  la transición lineal es la menos reflejante comparada con los otros casos; sin embargo, cuando  $\Gamma \rightarrow 0$ , la transición parabólica ( $n = 2$ ) es la menos reflejante y la transición lineal crece exponencialmente. Los valores de los coeficientes transmisión se presentan en la parte superior de la Fig. 4.8, donde los valores de  $C_T$  crecen para valores pequeños del parámetro  $\Gamma$ , lo cual desde un punto de vista físico representa que la amplitud transmitida es más grande que la amplitud incidente.

En la Fig. 4.9 se reportan los valores de los coeficientes de reflexión y de transmisión del oleaje, como una función del parámetro adimensional  $\kappa_2$  para tres geometrías diferentes  $n (= 1, 2, 3)$  y con un valor constante de  $\Gamma = 0.25$ . Los valores de los coeficientes de reflexión para el colector de ondas con transición lineal se calculan a partir de las Ecs. (4.52), (4.53) y (4.57) y para las transiciones no lineales utilizamos las Ecs. (4.58).

Los resultados muestran que para valores de  $\kappa_2 \ll 1$ , es decir, para colectores de ondas muy largos, prácticamente no existe la reflexión de ondas. Por otro lado, para  $\kappa_2 \sim O(1)$  la reflexión crece significativamente comparado con el colector de ondas excesivamente largo.

En el caso particular de  $\kappa_2 = 0.15$  y para colectores de ondas con  $n (= 1, 2$  y  $3)$ , el coeficiente de reflexión toma valores de  $C_R (= 0.062, 0.055,$  y  $0.083)$ , respectivamente, lo cual implica que el colector parabólico  $n = 2$  es el menos reflejante. Además puede apreciarse para todos los casos, el valor máximo valor del coeficiente de transmisión  $C_T \rightarrow 2$ , siempre que  $\kappa_2 \rightarrow 0$ .

En la misma figura, puede apreciarse que en los colectores de ondas con transición no-lineal, no se presentan oscilaciones en los valores de los coeficientes  $C_R$  y  $C_T$ , condición que sí se presenta en los colectores con transición lineal, esta característica puede observarse en las Ecs. (4.58), las cuales no incluyen términos oscilantes, estos últimos términos solo se presentan en las fórmulas de  $C_R$  y  $C_T$  para el colector con transición lineal, Ecs. (4.52), (4.53) y (4.57).



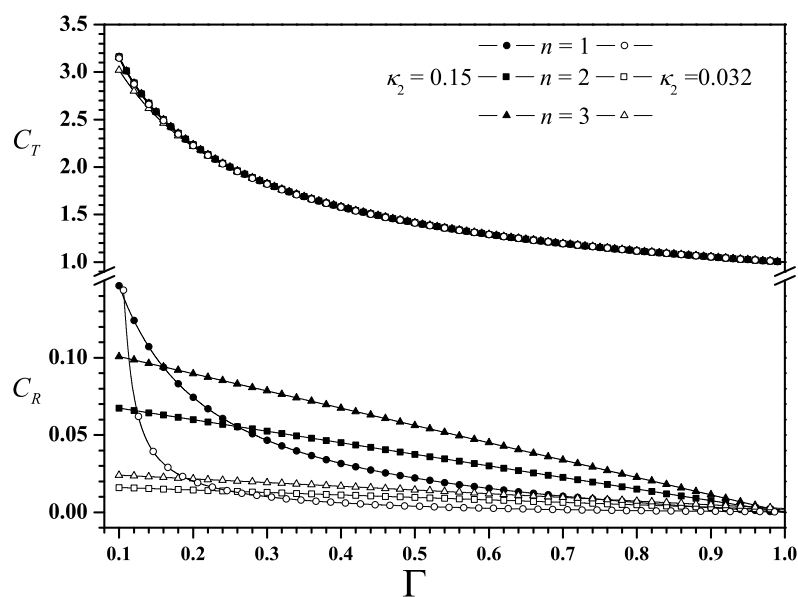


Fig. 4.8: Coeficientes de Reflexión y de transmisión del oleaje como una función del parámetro adimensional  $\Gamma = 0.25$ , para ondas propagándose en colectores de ondas con transiciones  $n(= 1, 2$  y  $3)$ . Los resultados presentados con el color sólido se calcularon con un valor de  $\kappa_2 = 0.15$  y los correspondientes al símbolo sin relleno se obtuvieron con  $\kappa_2 = 0.032$ .

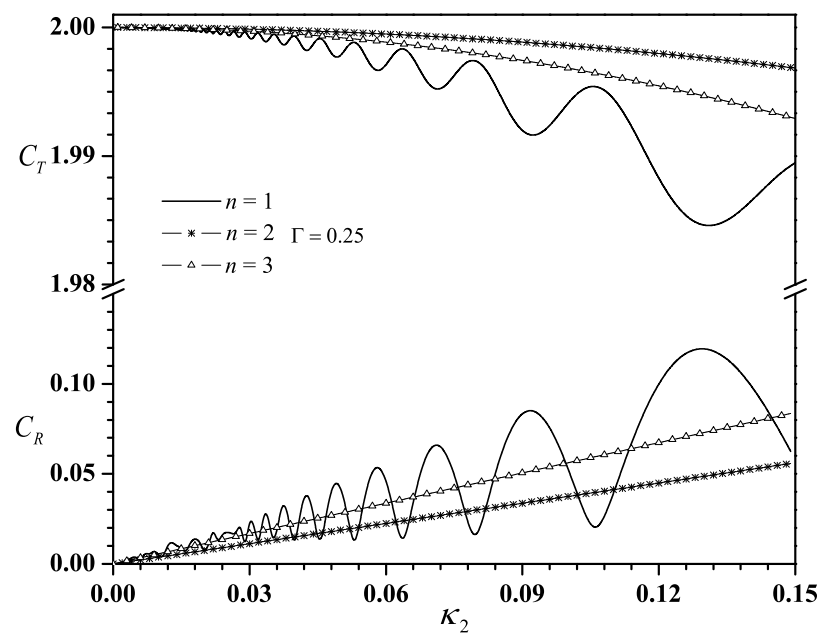


Fig. 4.9: Coeficientes de Reflexión y de transmisión del oleaje, como una función del parámetro cinemático adimensional  $\kappa_2$  con  $\Gamma = 0.25$  y tres valores de  $n$  ( $= 1, 2$  y  $3$ ).

# Capítulo 5

## Modelo matemático del sistema acoplado OWC-colector de ondas

### 5.1. Formulación

Para este trabajo proponemos un sistema acoplado, que consiste en un colector de ondas con sección transversal variable en el que se propagan ondas largas lineales y se encuentra conectado con una columna de agua oscilante (OWC). El colector se encuentra dividido en dos regiones  $R_2$  y  $R_3$ . En la Fig. 5.1 se muestra una vista en perfil del sistema en estudio, en ésta se considera un sistema de referencia cartesiano, donde el plano  $x-y$  se encuentra sobre el nivel medio del mar. El eje  $x$  es positivo hacia la derecha y el eje  $z$  es positivo hacia arriba. La estructura OWC tiene un ancho  $2H$  y una altura  $h_c$  y se encuentra parcialmente sumergida una profundidad  $w_c$  a partir del nivel medio del mar, la pared que separa al colector de la estructura OWC tiene un espesor delgado  $S$  y cumple la relación  $(S/2H) \ll 1$ . El aire que se encuentra en la cámara de aire fluye a través de un orificio cuadrangular que tiene por lado  $2l$ . El colector de ondas tiene una longitud en la región  $R_2$  de  $0 \leq x \leq L_2$  y la longitud para la región  $R_3$  está definida por  $L_2 \leq x \leq L_3$ , por otro lado la profundidad  $h$  es constante para todo el sistema. El oleaje se propaga de derecha a izquierda y paralelo al eje longitudinal  $x$ . La Fig. 5.2 representa la vista superior del modelo físico analizado, en ésta se aprecia que el colector de ondas sigue una distribución horizontal como una función de ley de potencia, la cual está dada por la ecuación (4.1), ver sección (4).

La forma geométrica del ancho del colector está dada por los valores de  $n \geq 1$  y  $n \sim O(1)$ .

La superficie libre de la OWC generalmente tiene una distribución espacial no unifor-

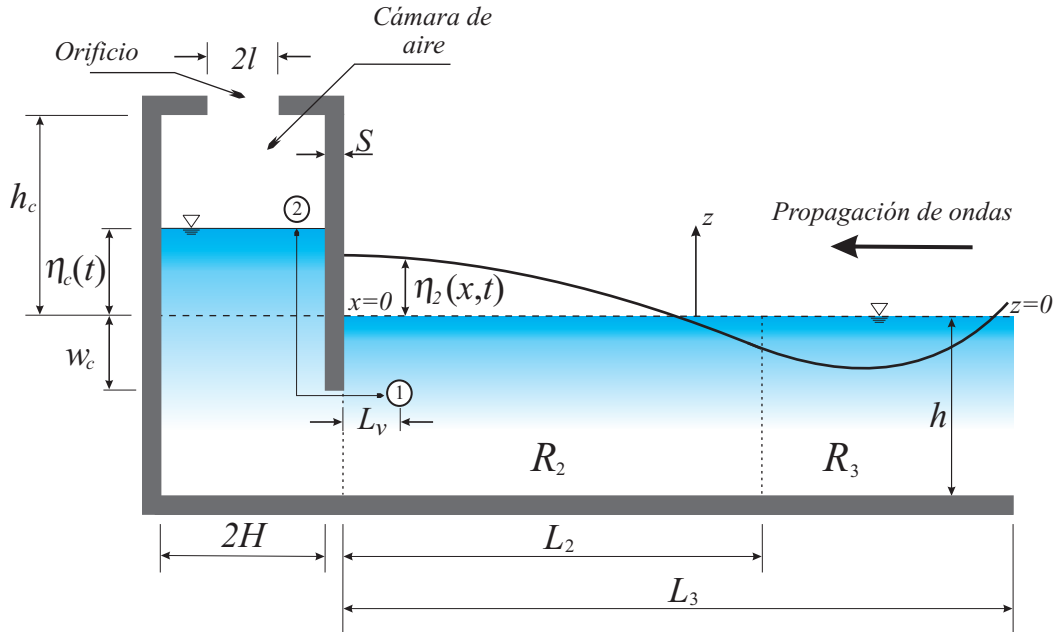


Fig. 5.1: Vista en perfil del modelo físico en estudio. La OWC está conectada a un colector de ondas cónico y esbelto, el cual tiene una profundidad  $h$  y un ancho máximo de  $b_0$ . El colector de ondas está formado por dos regiones  $R_2$  y  $R_3$ . El oleaje se propaga de derecha a izquierda.

me; sin embargo, en presencia de ondas largas, la elevación de la superficie libre se puede considerar como una distribución plana y por lo tanto el movimiento de la columna de agua será sólo una función del tiempo, He et al.[19].

La interacción del oleaje con la OWC, se modela mediante la implementación de la ecuación de la energía (5.1), integrándola a lo largo de la línea de corriente que conecta la posición  $z_1(L_v, 0, z_1)$ , con  $z_1 = -w_c$ , y  $z_2 = \eta_c(t)$ , identificados por el punto 1 y 2 respectivamente.

$$\int_1^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} ds + \frac{[P_2(t) - P_1(t)]}{\rho} + \frac{[v_2^2(t) - v_1^2(t)]}{2} + g[z_2(t) - z_1] + \frac{K}{2} v_2 |v_2| \quad (5.1)$$

donde  $P_2(t) = P_a + P(t)$  es la presión en la cámara de aire de la estructura OWC,  $P_a$  y  $P(t)$  son la presión atmosférica y manométrica, respectivamente,  $P_1(t) = P_a + \rho g(\eta_2(x = L_v, t) + w_c)$  es la presión total en el punto 1,  $\partial v / \partial t$  es la aceleración local,  $g$  es la gravedad,  $z(t)$  es la amplitud media del movimiento de la columna de agua,  $\eta(x, t)$  es la elevación de la superficie libre del agua,  $K$  es un coeficiente de disipación que podría incluir la fricción debida a los esfuerzos viscosos en las paredes y la generación de vórtices

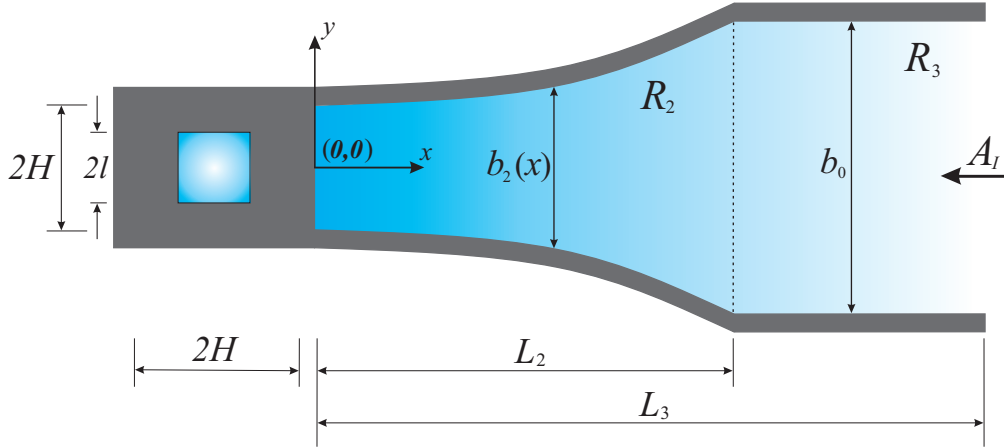


Fig. 5.2: Vista superior del modelo físico en estudio. La OWC está conectada a un colector de ondas cónico y esbelto, el cual tiene una profundidad  $h$  y un ancho máximo de  $b_0$ . El colector de ondas está formado por dos regiones  $R_2$  y  $R_3$ . El oleaje se propaga de derecha a izquierda.

en la frontera que comunica al colector de ondas y a la OWC, en particular este último fenómeno puede implicar que la pérdida de energía debido a la formación de vórtices puede ser del 15 – 18 %, ver Stiassnie et al. [40].

En la Ec. (5.1) las velocidades están definidas por:

$$v_1 = u_t(x, t) \quad \text{y} \quad v_2 = \frac{d^2 \eta_c(t)}{dt^2}, \quad (5.2)$$

donde  $u_t$  es la velocidad del agua en el punto (1)

Integrando la aceleración local obtenemos:

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds \approx \frac{d\eta_c(t)}{dt} (\eta_c(t) + w_c + L_v). \quad (5.3)$$

arreglando la Ec. (5.1) en función de las variables físicas tenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} & [\eta_c(t) + w_c + L_v] \frac{d^2 \eta_c(t)}{dt^2} + \frac{1}{\rho} \{P(t) - [\rho g (\eta_2(x = L_v, t) + w_c)]\} + \\ & \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\eta_c(t)}{dt} \right)^2 - u_t^2(x = L_v, t) \right] + g [\eta_c(t) + w_c] + \frac{K}{2} \frac{d\eta_c(t)}{dt} \left| \frac{d\eta_c(t)}{dt} \right| = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

con las siguientes condiciones iniciales

$$\eta_c(t = 0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\eta_c(t = 0)}{dt} = 0 \quad (5.5)$$

donde  $u_t(x = L_v, t)$  es la velocidad promedio unidimensional de la onda en el punto (1),  $L_v$  es la longitud “efectiva” debida a la masa añadida excitada por el movimiento de la columna de agua oscilante, McCormick [29].

Con el objetivo de reducir la combinación de las variables físicas, realizamos un análisis de órdenes de magnitud e identificamos las escalas características para la presión la escala característica del problema. Para obtener el tiempo característico del movimiento de la OWC realizamos un balance de orden de magnitud de la Ec. (5.4), considerando únicamente los términos lineales, obteniéndose la siguiente ecuación

$$\frac{d^2\eta_c}{dt^2} + \omega_N^2\eta_c = 0. \quad (5.6)$$

De la Ec. (5.6) podemos definir a la frecuencia de oscilación natural de la OWC como

$$\omega_N = \sqrt{\frac{g}{w_c + L_v}} \quad (5.7)$$

realizando el análisis de órdenes de magnitud en la Ec. (5.6)

$$\frac{A_I}{t_c^2} \sim \frac{gA_I}{w_c + L_v} \quad (5.8)$$

por lo tanto el tiempo característico es

$$t_c = \left( \frac{w_c + L_v}{g} \right)^{1/2} \quad (5.9)$$

Tomando en cuenta el análisis anterior y las escalas características utilizadas en el modelo matemático del colector de ondas, las variables adimensionales son

$$\bar{P} = \frac{P}{P_a}, \quad \Delta_c = \frac{\eta_c}{A_I}, \quad \tau = \frac{t}{t_c}, \quad \Delta_2 = \frac{\eta_2}{A_I}, \quad U_t(\chi_2, Y_2, \tilde{\tau}) = \frac{hL_2}{A_I(gh)^{1/2}\lambda} u_t.$$

Sustituyendo las variables adimensionales anteriores en las Ecs. (5.4) y (5.5), obtenemos su versión adimensional.

$$(1 + \beta\Delta_c) \frac{d^2\Delta_c}{d\tau^2} + \frac{\beta}{2} \left[ \left( \frac{d\Delta_c}{d\tau} \right)^2 + K \frac{d\Delta_c}{d\tau} \left| \frac{d\Delta_c}{d\tau} \right| \right] + \Delta_c = 2\epsilon\kappa_2^2\pi\tilde{U}_2^2 + \Delta_2 - \tilde{\gamma}_c\bar{P}. \quad (5.10)$$

Para la aproximación de ondas con amplitud pequeña se satisface que  $\epsilon \ll 1$  y por lo tanto el primer término del lado derecho de la Ec. (5.10) puede despreciarse. Con base en lo anterior, la Ec. (5.10) puede reescribirse en la forma siguiente

$$(1 + \beta\Delta_c) \frac{d^2\Delta_c}{d\tau^2} + \frac{\beta}{2} \left[ \left( \frac{d\Delta_c}{d\tau} \right)^2 + K \frac{d\Delta_c}{d\tau} \left| \frac{d\Delta_c}{d\tau} \right| \right] + \Delta_c = \Delta_2 - \tilde{\gamma}_c \bar{P} \quad (5.11)$$

la cual debe resolverse con las siguientes condiciones iniciales

$$\Delta_c(\tau = 0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\Delta_c(\tau = 0)}{d\tau} = 0. \quad (5.12)$$

Con los siguientes parámetros adimensionales

$$\beta = \frac{A_I}{w_c + L_v} \ll 1 \quad \text{y} \quad \tilde{\gamma}_c = \frac{P_a}{\rho g A_I} \gg 1.$$

Precisamos que en la Ec. (5.11), la presión adimensional  $\bar{P}$  es una función desconocida y es parte del problema por resolver. En la sección siguiente se explica su metodología para su obtención.

## 5.2. Determinación de la presión manométrica adimensional $\bar{P}$

Con el objetivo de obtener la presión manométrica dentro de la cámara de compresión utilizamos la ley de conservación de masa y aplicamos el teorema de transporte de Reynolds a la primera ley de la Termodinámica, White[45], obteniéndose la ecuación siguiente

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho_a d\mathcal{V} + \int_{CS} \rho_a (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA \quad (5.13)$$

y

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_{CV} e \rho_a d\mathcal{V} \right) + \int_{CS} e \rho_a (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA \quad (5.14)$$

donde  $dm/dt$  es la rapidez de emisión de masa que sale del volumen de control,  $\rho_a$  es la densidad del aire,  $e$  es la energía específica total por unidad de masa,  $\mathbf{V}$  es el vector velocidad del flujo del diferencial de área  $dA$ ,  $\hat{\mathbf{n}}$  es el vector unitario perpendicular a la superficie de control,  $d\mathcal{V}$  es el diferencial de volumen,  $CV$  y  $CS$  indican el volumen de control y la superficie de control de la cámara de aire respectivamente,  $dQ/dt$  es la rapidez de adición de calor al volumen de control desde su entorno,  $dW/dt$  es la rapidez de trabajo efectuado por el volumen de control sobre su entorno.

De la Ec. (5.13) la masa dentro del volumen de control es constante y por lo tanto  $dm/dt = 0$ , con base en esto obtenemos la siguiente ecuación

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho_a dV + \int_{CS} \rho_a (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA \quad (5.15)$$

Desarrollando el segundo término del lado derecho de la Ec. (5.15), se obtiene

$$\int_{CS} \rho_a (\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA = \rho_a [(0, v_d) \cdot (0, 1)] (2l)^2 \quad (5.16)$$

y la rapidez de acumulación de masa dentro del volumen de control se expresa como

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} \rho_a dV = \frac{d}{dt} [\rho_a (2H)^2 (h_c - \eta_c)] \quad (5.17)$$

Por lo tanto la expresión para el balance de masa en el volumen de control se transforma en

$$\frac{1}{\rho_a} \left( \frac{H}{l} \right)^2 (h_c - \eta_c) \frac{d\rho_a}{dt} - \left( \frac{H}{l} \right)^2 \left( \frac{d\eta_c}{dt} \right) + v_d = 0 \quad (5.18)$$

La Ec. (5.18) nos proporciona el balance de masa para nuestro sistema. Debido a que la velocidad de descarga del aire a través del orificio es  $v_d \sim O(A_I \omega)$ , se considera la condición de flujo incompresible White [46, p.82], con lo cual se obtiene que el valor del número de Mach sea  $Ma < 0.3$  y por lo tanto la  $d\rho_a/dt \approx 0$  Welty et al. [44, p.64]. Tomando en cuenta los argumentos anteriores, la velocidad de descarga del aire  $v_d$  se puede calcular con la siguiente ecuación

$$v_d = \left( \frac{H}{l} \right)^2 \left( \frac{d\eta_c}{dt} \right). \quad (5.19)$$

Proponiendo la variable adimensional

$$\bar{V}_d = \left( \frac{w_c + L_v}{g} \right)^{1/2} \frac{v_d}{A_I}$$

La versión adimensional de la Ec. (5.19) es de la forma siguiente

$$\bar{V}_d = \theta^2 \left( \frac{d\Delta_c}{d\tau} \right) \quad (5.20)$$

con  $\theta = H/l \sim O(1)$ .

Considerando como primera aproximación que únicamente existe trabajo de frontera y que el volumen de control es adiabático, la Ec. (5.14) puede reescribirse como sigue

$$-P(t)q(t) = \frac{d}{dt} \int_{cv} \left[ \hat{u} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\eta_c}{dt} \right)^2 + gz \right] \rho_a dV + \left( \hat{u} + \frac{1}{2} v_d^2 + gh_c \right) \rho_a q(t) \quad (5.21)$$



donde  $\hat{u}$  es la energía interna,  $d\mathcal{V} = (2H)^2 dz$  y  $q(t) = v_d(t)(2l)^2$ .

Ahora, integrando la rapidez de acumulación de energía del volumen de control, obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{CV} \left( \hat{u} + \frac{1}{2}v^2 + gz \right) \rho_a d\mathcal{V} = \\ 4H^2 \frac{1}{\rho_a} \frac{d}{dt} \left[ \left( \hat{u} + \frac{1}{2} \left( \frac{dn}{dt} \right)^2 \right) (h_c - \eta_c) + \frac{1}{2}g (h_c^2 - \eta_c^2) \right]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Adicionalmente, consideramos que la energía cinética por unidad de masa en la superficie de control, es mucho más grande que la energía potencial por unidad de masa. Lo anterior implica que  $\rho_a g h_c \ll \frac{\rho_a}{2} v_d^2$ , por lo tanto la Ec. (5.14) puede reescribirse como

$$-P(t) = \rho_a (h_c - \eta_c) \frac{d^2 \eta_c}{dt^2} + \frac{\rho_a}{2} \left[ \left( \frac{H}{l} \right)^4 - 1 \right] \left( \frac{d\eta_c}{dt} \right)^2 - \rho_a g \eta_c \quad (5.23)$$

Por otro lado, la potencia útil instantánea, que se puede extraer de la cámara de aire de la OWC, se define como

$$P_{OWC}(t) = |P(t) q(t)|. \quad (5.24)$$

La ecuación anterior debe tener en cuenta el valor absoluto de las variables  $P(t)$  y  $q(t)$ , debido a que, cuando la columna de agua oscilante se mueve hacia arriba o hacia abajo siempre se produce una potencia útil en la cámara de aire.

Por otra parte la captura de la eficiencia de la OWC se define como

$$\sigma = \frac{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |P(t) q(t)| dt}{\frac{1}{2} \rho g c \eta_2^2}, \quad (5.25)$$

donde el intervalo de integración es del tiempo  $t_1$  hasta el tiempo  $t_2$ .

Adimensionalizando y acomodando la Ec. (5.23), obtenemos la expresión para la presión adimensional en la cámara de compresión

$$\bar{P}(\tau) = \beta \bar{\gamma}_c \left[ (\Delta_c - \phi) \frac{d^2 \Delta_c}{d\tau^2} + \frac{1}{2} (1 - \theta^4) \left( \frac{d\Delta_c}{d\tau} \right)^2 \right] + \text{bar} \gamma_c \Delta_c \quad (5.26)$$

con los parámetros adimensionales

$$\phi = \frac{h_c}{A_I} \sim O(1) \quad \text{y} \quad \bar{\gamma}_c = \frac{\rho_a g A_I}{P_a} \ll 1$$

Sustituyendo la Ec. (5.26) en la Ec. (5.11) obtenemos el modelo matemático del sistema acoplado OWC-colector de ondas, el cual es descrito por la siguiente ecuación diferencial ordinaria no-lineal.

$$\begin{aligned} & [(1 + \beta\Delta_c) - (\phi - \Delta_c) \beta\xi] \frac{d^2\Delta_c}{d\tau^2} + \\ & \frac{\beta}{2} \left\{ [1 + (1 - \theta^4) \xi] \left( \frac{d\Delta_c}{d\tau} \right)^2 + K \frac{d\Delta_c}{d\tau} \left| \frac{d\Delta_c}{d\tau} \right| \right\} + (1 + \xi) \Delta_c = \Delta_2, \end{aligned} \quad (5.27)$$

junto con las siguientes condiciones iniciales

$$\Delta_c(\tau = 0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\Delta_c(\tau = 0)}{d\tau} = 0. \quad (5.28)$$

donde  $\xi = \rho_a/\rho$ .

La Ec. (5.27), representa el modelo matemático acoplado, que describe la oscilación de la amplitud adimensional  $\Delta_c(\tau)$ , forzada por el movimiento del oleaje, así mismo la Ec. (5.27) es un problema de valores iniciales y es función de los parámetros adimensionales  $\beta$ ,  $\phi$ ,  $\xi$ ,  $\theta$  y  $K$ .

### 5.3. Condiciones de frontera de acoplamiento del sistema OWC-colector de ondas

La solución de la Ec. (5.27) requiere conocimiento previo de la variable adimensional  $\Delta_2$  ( $\chi_2 \approx 0, \tilde{\tau}$ ) que es el término de forzamiento para producir la elevación de la superficie libre adimensional  $\Delta_c(\tau)$ . La ecuación de gobierno que describe la propagación del oleaje en el colector de ondas está descrito por la Ec. (4.15), que se obtuvo en el capítulo 4 y para acoplarla a la ecuación de gobierno que predice la oscilación de la OWC, se requieren conocer las condiciones de frontera apropiadas.

La primera condición de frontera para la Ec. (4.12), se puede derivar bajo el supuesto de que el equilibrio del flujo de energía debe mantenerse entre dos secciones transversales arbitrarias. En  $\chi_2 = 0$ , tenemos un flujo de energía transmitido y otro de energía radiada, que es inducido por el movimiento de la OWC, por otro lado en  $\chi_2 = 1$ , se presentan flujos de energía incidente y reflejado. Por lo tanto el balance de flujo de energía se puede expresar como

$$cb_0 E_R + c_r b_0 E_r + c2H(h - w_c) E_T = cb_0 E_I \quad (5.29)$$

donde  $E_R = \frac{1}{2}\rho g \eta_R^2$ ,  $E_r = \frac{1}{2}\rho g \eta_r^2$ ,  $E_T = \frac{1}{2}\rho g \eta_T^2$  y  $E_I = \frac{1}{2}\rho g \eta_I^2$  son las energías de las ondas reflejada, radiada, transmitida e incidente, respectivamente, donde  $c = \omega/\lambda$  es la celeridad de las ondas reflejada, transmitida e incidente, y es constante en las regiones  $R_1$  y  $R_2$ ;  $c_r = \omega_r/\lambda_r$  es la celeridad de la onda radiada, la cual se generada en el colector de ondas de propagación por la oscilación de la OWC. La frecuencia de la onda radiada está dada por  $\omega_r$  y su longitud de onda es  $\lambda_r$ , tomando en cuenta los comentarios anteriores, la Ec. (5.29) puede expresarse en la forma siguiente

$$\eta_R^2 + \left(\frac{c_r}{c}\right) \eta_r^2 + \Gamma(1 - \mu) \eta_T^2 = \eta_I^2. \quad (5.30)$$

Acomodando la Ec. (5.30) en términos de la longitud de onda y expresándola en su forma adimensional, obtenemos la ecuación siguiente

$$|\beta_R|^2 + \Gamma(1 - \mu) |\delta_2(\chi_2 = 0)|^2 + \frac{\omega_r \lambda_r A_r^2}{\omega \lambda A_I^2} = 1, \quad (5.31)$$

donde  $|\beta_R| = |A_R/A_I|$  y  $|\delta_2(\chi_2 = 0)|$  son los coeficientes de reflexión y transmisión, respectivamente. La relación entre la pared vertical sumergida  $w_c$  y la profundidad  $h$  está definida por el parámetro adimensional  $\mu = w_c/h$ .

El coeficiente de reflexión  $|\beta_R|$ , está formado por la suma de la onda reflejada debida a la geometría del colector de ondas y la generada por la pared vertical en  $\chi_2 = 0$ . Para

colectores de ondas esbeltos con su longitud horizontal característica del mismo orden que la longitud de onda, se demostro que la reflexión del oleaje es pequeña, ver Cap. (4), Secc. (4.1.2) y Figs. (4.8) y (4.9). Por otro lado, estudios fundamentales relacionados con la reflexión de onda por rompeolas de cajones contenidos en una estructura OWC, muestran que para  $w_c/\lambda \ll 1$  el coeficiente de reflexión es también muy pequeño, Yan et al. [48]. Por lo tanto a partir de los comentarios anteriores, consideramos que  $|\beta_R| \rightarrow 0$ . Además para el límite de  $(\omega_r/\omega) \sim O(1)$  implica que  $\lambda_r/\lambda \ll 1$  y así el tercer término del lado izquierdo de la Ec. (5.31) también desaparece. Con base en lo anterior la primer condición de frontera para la Ec. (4.12), puede expresarse como sigue

$$\delta_2|_{\chi_2=0} \approx \frac{1}{\Gamma^{1/2} (1 - \mu)^{1/2}} . \quad (5.32)$$

La Ec. (5.32) representa la condición de frontera de acoplamiento entre la OWC y el colector de ondas en  $\chi_2 = 0$ . Para la condición de frontera en  $\chi_2 = 1$ ,  $\chi_3 = 0$  usamos las Ecs. (4.26) y (4.29) evaluada en  $\chi_3 = 0$ , recordando que  $\beta_R \rightarrow 0$ , por lo tanto la segunda condición de frontera se puede escribir en la forma siguiente

$$\delta_2|_{\chi_2=1} \approx 1 . \quad (5.33)$$

A partir de las condiciones de frontera (5.32) y (5.33) obtenemos las constantes de integración  $C$  y  $D$  de la solución analítica aproximada dada por la Ec. (4.43)

$$C = \frac{1}{[\Gamma (1 - \mu)]^{1/2}} \left\{ 1 - \left[ \frac{\exp\left(\frac{i}{\kappa_2}\right) - \left(\frac{\Gamma - \frac{1-\Gamma}{\Gamma}}{[\Gamma(1-\mu)]^{1/2}}\right)}{\exp\left(\frac{-i}{\kappa_2}\right) - \exp\left(\frac{i}{\kappa_2}\right)} \right] \right\} \quad (5.34)$$

y

$$D = \frac{1}{[\Gamma (1 - \mu)]^{1/2}} \left[ \frac{\exp\left(\frac{i}{\kappa_2}\right) - \left(\frac{\Gamma - \frac{1-\Gamma}{\Gamma}}{[\Gamma(1-\mu)]^{1/2}}\right)}{\exp\left(\frac{-i}{\kappa_2}\right) - \exp\left(\frac{i}{\kappa_2}\right)} \right] , \quad (5.35)$$

la Ec. (4.43) junto con las constantes  $C$  y  $D$  forman la solución analítica de la propagación de ondas largas lineales en el colector de ondas con ancho variable y fondo constante, acoplado a la OWC. Ahora, sustituyendo la Ec. (4.43) en la Ec.(4.18) y evaluando el resultado en  $\chi_2 = 0$ , obtenemos la amplitud  $\Delta_2(\chi_2 = 0, \tilde{\tau})$  necesaria para forzar el movimiento de la OWC, y se reescribe como

$$\Delta_2(0, \tilde{\tau}) = \frac{1}{\Gamma^{1/2} (1 - \mu)^{1/2}} \cos(\tilde{\tau}) \quad (5.36)$$

La Ec. (5.36) es válida para ondas largas ( $h/\lambda \ll 1$ ), con amplitudes pequeñas ( $\epsilon \ll 1$ ), colectores de onda esbeltos ( $b_2/L_2 \ll 1$ ) y el coeficiente de reflexión  $|\beta_R| \rightarrow 0$ . Para valores del parámetro adimensional  $\Gamma \ll 1$ , amplitud adimensional del oleaje  $\Delta_2$  ( $\chi_2 \approx 0$ ,  $\tilde{\tau}$ ) crece significativamente. Para el caso particular de  $\Gamma = 1$  y  $\mu = 0$ , la onda no sufre cambios en amplitud y longitud de onda, recuperándose el caso de un colector de ondas con ancho y fondo constantes

$$\Delta_2(0, \tilde{\tau}) = \cos(\tilde{\tau}) . \quad (5.37)$$

## 5.4. Ecuación de gobierno del sistema acoplado OWC-colector de ondas

Tomando en cuenta la Ec. (5.36) y sustituyéndola en la Ec.(5.27) obtenemos la ecuación diferencial siguiente

$$\begin{aligned} & [(1 + \beta_c \Delta_c) - (\phi - \Delta_c) \beta_c \xi] \frac{d^2 \Delta_c}{d\tilde{\tau}^2} + \\ & \frac{\beta_c}{2} \left\{ [1 + (1 - \theta^4) \xi] \left( \frac{d\Delta_c}{d\tilde{\tau}} \right)^2 + K \frac{d\Delta_c}{d\tilde{\tau}} \left| \frac{d\Delta_c}{d\tilde{\tau}} \right| \right\} + \\ & (1 + \xi) \Delta_c = \frac{\cos(\tilde{\tau})}{\Gamma^{1/2}(1-\mu)^{1/2}} . \end{aligned} \quad (5.38)$$

En la Ec. (5.38), se definieron dos tiempos adimensionales:  $\tau$  y  $\tilde{\tau}$ , debido a que la OWC y el oleaje tienen tiempos característicos diferentes, los cuales pueden relacionarse considerando lo siguiente

$$t = \frac{\tau}{\omega_N}; \quad t = \frac{\tilde{\tau}}{\omega} \quad \therefore \quad \tilde{\tau} = \frac{\omega}{\omega_N} \tau. \quad (5.39)$$

Sustituyendo la última relación en la Ec. (5.38) obtenemos la ecuación diferencial ordinaria no-lineal del modelo acoplado entre la OWC y el colector de ondas, la cual se escribe como

$$\begin{aligned} & [(1 + \beta \Delta_c) - (\phi - \Delta_c) \beta \xi] \frac{d^2 \Delta_c}{d\tau^2} + \\ & \frac{\beta}{2} \left\{ [1 + (1 - \theta^4) \xi] \left( \frac{d\Delta_c}{d\tau} \right)^2 + K \frac{d\Delta_c}{d\tau} \left| \frac{d\Delta_c}{d\tau} \right| \right\} + \\ & (1 + \xi) \Delta_c = \frac{1}{\Gamma^{1/2}(1-\mu)^{1/2}} \cos(\Omega\tau) , \end{aligned} \quad (5.40)$$

con las siguientes condiciones iniciales.

$$\Delta_c(\tau = 0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\Delta_c(\tau = 0)}{d\tau} = 0. \quad (5.41)$$

donde  $\Omega = \omega/\omega_N$ .

La Ec. (5.40) es una función de la constante  $\xi$  y de los parámetros adimensionales  $\beta$ ,  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $K$ ,  $\Gamma$ ,  $\mu$  y  $\Omega$ .

#### 5.4.1. Solución analítica en el límite $\beta \ll 1$

Con el objetivo de validar la solución numérica de la Ec. (5.40), se obtiene una solución analítica en el límite de  $\beta \ll 1$ . En este límite y considerando que  $\xi \ll 1$ , la Ec. (5.40) se reescribe de la siguiente forma

$$\frac{d^2\Delta_c(\tau)}{d\tau^2} + \Delta_c(\tau) = \frac{1}{\Gamma^{1/2}(1-\mu)^{1/2}} \cos(\Omega\tau) \quad (5.42)$$

La solución analítica de la Ec. (5.42) tiene una solución trivial cuando  $\Omega \neq 1$  de la forma siguiente

$$\Delta_c(\tau) = \frac{1}{\Gamma^{1/2}(1-\mu)^{1/2}(1-\Omega^2)} [\cos(\Omega\tau) - \cos(\tau)] \quad (5.43)$$

la cual es una ecuación simple, que tiene en cuenta el efecto geométrico del colector de ondas sobre la amplificación del oleaje, dado por  $1/[\Gamma(1-\mu)]^{1/2}$ . La solución analítica (5.43) representa el movimiento de un oscilador lineal no amortiguado. Claramente, en la ecuación anterior se observa que para valores finitos de  $\Gamma$ , valores pequeños de  $\mu$  y  $\Omega \rightarrow 1$ , la magnitud de la elevación de la superficie libre  $\Delta_c(\tau)$  es indefinida, lo que representa justo la condición cercana a la resonancia.

# Capítulo 6

## Resultados

Los resultados numéricos se realizaron tomando en cuenta los siguientes valores físicos experimentales: el ancho y la profundidad de la pared vertical sumergida de la estructura OWC son  $2H = 0.64$  m y  $w_c = 0.15$  m, respectivamente, y la profundidad del colector de onda es constante  $h = 0.92$  m, Kamath et al. [21]; sin embargo, debido a que la presente formulación matemática se expresa en forma adimensional, se pueden utilizar otros valores representativos de las variables físicas. Además, proponemos las siguientes magnitudes físicas: la altura de la OWC es  $h_c = 0.54$  m, el ancho del orificio de descarga de la cámara de aire es  $2l = 0.32$  m, la longitud del colector de ondas es de  $L_2 = 50$  m y el ancho en su entrada toma los valores de  $b_2 (= 0.64, 0.85, 1.28, 2.56)$  m. El coeficiente de fricción global tiene un valor de  $K = 0.63$ , Vinje [43]. Los valores de las longitudes características de las ondas son: amplitud de la onda incidente  $A_I = 0.09$  m y longitudes de onda  $\lambda (= 28.3$  y  $47.1)$  m, los cuales satisfacen la aproximación de ondas largas lineales  $A_I/h \ll 1$  y  $h/\lambda \leq 1/20$ , Rahman [33].

Para el cálculo numérico de la ecuación. (5.40), junto con las condiciones iniciales dadas por la ecuación. (5.41), se usa la técnica numérica conocida como Runge-Kutta de cuarto orden, considerando un intervalo de tiempo de  $\Delta\tau = 0.6$ .

### 6.1. Deformación de ondas largas lineales en un colector de ondas esbelto y cónico con fondo constante con una barrera sumergida.

La Fig. 6.1 muestra la elevación de la superficie libre  $\delta_2$  como una función de la coordenada adimensional  $\chi_2$ , para diferentes formas geométricas de la distribución horizontal

$n$  ( $= 1, 2, 3$  y  $4$ ) con valores fijos de los parámetros  $\Gamma = 0.25$  y  $\mu = 0.20$ . Se consideran dos valores del parámetro  $\kappa_2$  ( $= 0.09$  y  $0.15$ ) son considerados. En esta figura se nota que para todos los valores de  $n$ , la elevación de la superficie libre  $\delta_2(\chi_2 = 0)$  es la misma, esto se debe a que todos los colectores de ondas tienen un ancho de  $2H$  en  $\chi_2 = 0$  y por lo tanto sus flujos de energía son iguales. Por otro lado, la altura de  $\delta_2(\chi_2 = 0)$  es 2.23 veces más grande que la amplitud de la onda incidente  $\delta_2(\chi_2 = 1)$ . Además, en la misma figura se reporta que el colector de onda con  $\lambda/L_2 \sim O(1)$ , representado por el valor del parámetro  $\kappa_2 = 0.15$ , genera el mismo valor máximo de la amplitud del oleaje, que los calculados para  $\lambda/L_2 \ll 1$  dado por  $\kappa_2 = 0.09$ . La relevancia de estos resultados es que la amplificación del oleaje en  $\chi_2 = 0$ , es debida al radio de esbeltez  $\Gamma$ , y no al parámetro  $\kappa_2$  y  $n$ .

En la Fig. 6.2 se muestran los valores de la elevación de la superficie libre adimensional  $\delta_2$  como una función del eje adimensional  $\chi$  para un colector de ondas con proyección horizontal parabólica, ( $n = 2$ ), con valores constantes de los parámetros  $\kappa_2 = 0.15$  y  $\Gamma = 0.25$ , y para cuatro valores del parámetro adimensional  $\mu$  ( $= 0.20, 0.25, 0.334, 0.5$ ). En esta figura, se muestran los efectos del incremento del parámetro  $\mu$  sobre la amplitud en  $\chi_2 = 0$ , como se puede apreciar si  $\mu$  crece, la amplitud del oleaje crece, la cual provee un incremento de la energía potencial de las ondas en la vecindad con la estructura OWC. Se espera que dicho efecto contribuya para la amplitud de la superficie libre de la OWC, esto se podrá corroborar en la sección 6.1.3.

### 6.1.1. Movimiento forzado de la columna de agua oscilante por la propagación de ondas

La Fig. 6.3 muestra la comparación de la solución analítica Ec. (5.43), contra la solución numérica de la Ec. (5.40). Para la solución numérica, se consideran valores constantes de los parámetros  $\mu = 0.2$ ,  $\Gamma = 0.5$ ,  $\beta = 0.06$ ,  $\phi = 6$ ,  $K = 0.63$ ,  $\xi = 0.001$ ,  $\theta = 2$  y  $\Omega = 0.143$ . Como se puede ver, ambas soluciones se ajustan apropiadamente.

En la Fig. 6.4 se reportan los valores adimensionales de la elevación de la superficie libre  $\Delta_c(\tau)$ , presión  $\bar{P}(\tau)$  y la velocidad de descarga  $\bar{V}_d(\tau)$ , como una función del tiempo adimensional  $\tau$ , para valores diferentes del parámetro de esbeltez  $\Gamma$  ( $= 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ ) y valores fijos de  $\mu = 0.2$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\phi = 6$ ,  $K = 0.63$ ,  $\xi = 0.001$  y  $\theta = 2$ . Los resultados indican que para valores de  $\Gamma < 1$ , la magnitud de la amplitud  $\Delta_c(\tau)$  crece significativamente. El último comentario se debe a que para  $\Gamma < 1$  la energía potencial del oleaje en  $\chi_2 = 0$  se incrementa. En esta figura, se aprecia que para valores de  $\Gamma$  ( $= 0.25$  y  $1$ ) la amplitud  $\Delta_c(\tau)$  ( $= 2.3$  y  $1.15$ ), respectivamente, lo que desde un punto de vista físico,



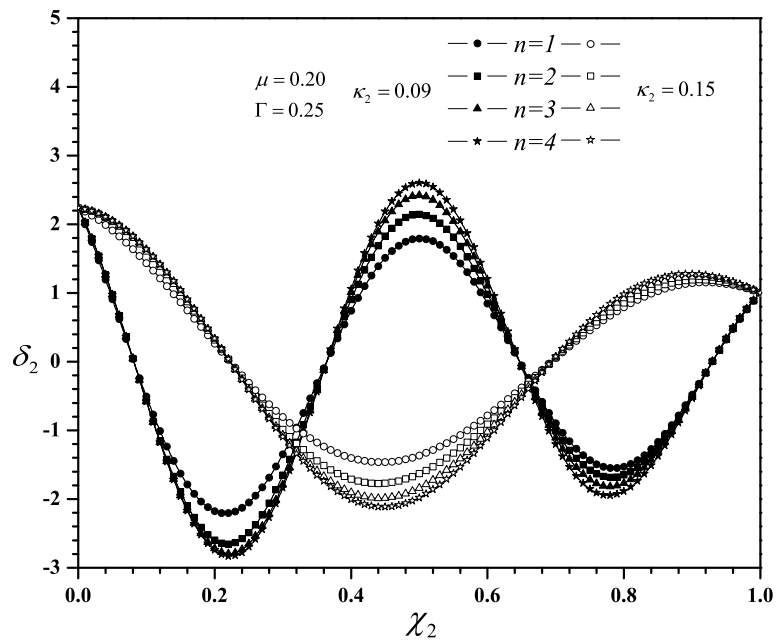


Fig. 6.1: Elevación de la superficie libre adimensional  $\delta_2$  como una función del eje adimensional  $\chi_2$ , para valores diferentes del exponente  $n(= 1, 2, 3, 4)$  con valores fijos de los parámetros  $\Gamma = 0.25$  y  $\mu = 0.20$ . Las líneas sólidas y sin relleno corresponden a los valores del parámetro  $\kappa_2(= 0.09$  y  $0.15)$ , respectivamente.

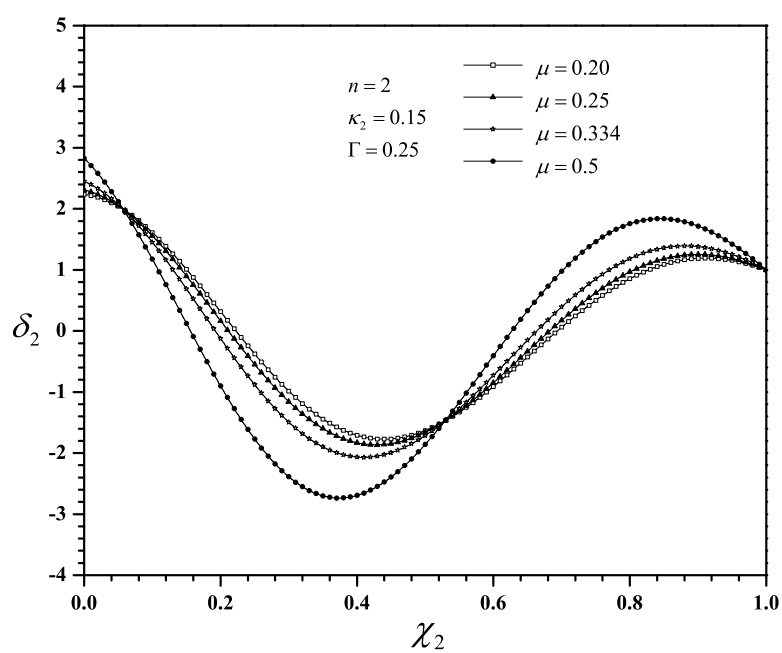


Fig. 6.2: Elevación de la superficie libre adimensional  $\delta_2$  como una función del eje adimensional  $\chi_2$ , para un colector de ondas parabólico, ( $n = 2$ ), con valores constantes del parámetro  $\kappa_2 = 0.15$  y  $\Gamma = 0.25$ , y cuatro valores del parámetro  $\mu$  ( $= 0.20, 0.25, 0.334, 0.5$ ).

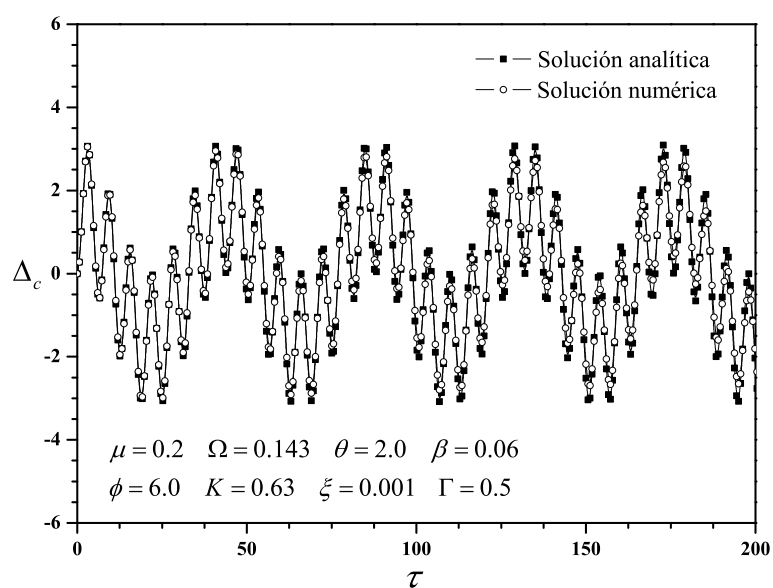


Fig. 6.3: Comparación de amplitud adimensional  $\Delta_c$ , entre las soluciones numérica y analítica, para valores constantes de  $\mu = 0.2$ ,  $\Omega = 0.143$ ,  $\theta = 2$ ,  $\beta = 0.06$ ,  $\phi = 6$ ,  $K = 0.63$ ,  $\xi = 0.001$  y  $\Gamma = 0.5$ .

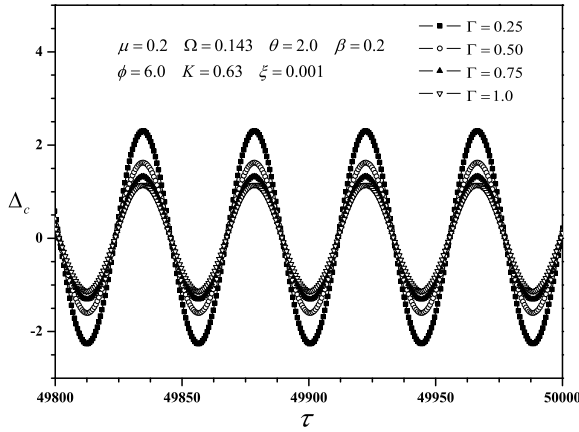
significa que para  $\Gamma = 1$  la columna de agua crece un 15% más que la onda incidente y que para  $\Gamma = 0.25$ , la amplitud  $\Delta_c(\tau)$  es 2.3 veces más grande que la amplitud incidente. Además, se observa que el comportamiento de  $\Delta_c(\tau)$  a lo largo del tiempo es periódico y está en fase con la presión adimensional  $\overline{P}(\tau)$ , ver Figs. 6.4a y 6.4b, respectivamente. Los valores de la presión manométrica adimensional  $\overline{P}$  alcanza un valor máximo  $\overline{P}(= 1.117 \times 10^{-5}$  y  $2.34 \times 10^{-5})$  para valores de  $\Gamma(= 1$  y  $0.25)$ , respectivamente. Además, en la Fig. 6.4b se observa que el parámetro  $\Gamma$  tiene una influencia sobre la magnitud de la presión, pero no en su periodo de oscilación. Por otro lado, la Fig. 6.4c revela que para un valor constante del parámetro  $\theta$ , la velocidad de descarga de aire crece en su magnitud, como una consecuencia de la variación del parámetro de esbeltez  $\Gamma$ . Si se comparan los valores de  $\overline{V}_d$  con  $\Gamma = 1$  contra los obtenidos con  $\Gamma = 0.25$ , este último caso es dos veces más grande que el primero. Como un ejemplo de validación, donde la amplitud de la OWC tiene un valor máximo o uno mínimo, la velocidad  $\overline{V}_d$  debe ser cero, esta condición se satisface y se puede verificar en la Ec. (5.20) y en la Fig. 6.4c.

### 6.1.2. Efecto del orificio de descarga de la cámara de aire

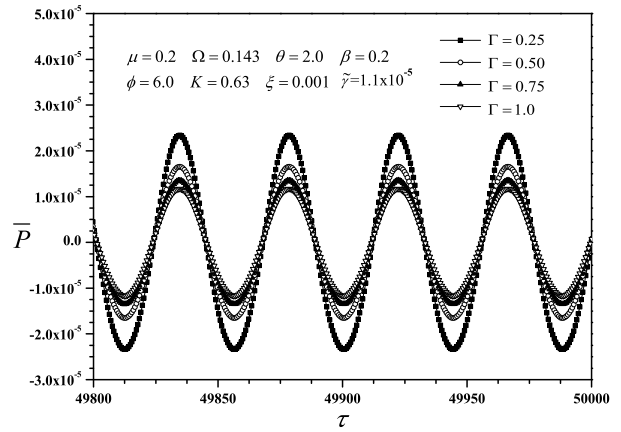
Los resultados para el flujo de la velocidad de descarga adimensional  $\overline{V}_d$ , a través del orificio como una función del tiempo adimensional  $\tau$  se ven en la Fig. 6.5. Los resultados se obtienen para tres valores del parámetro  $\theta(= 2.0, 4.0, 5.0)$ , y valores fijos de los parámetros  $\mu = 0.2$ ,  $\Omega = 0.143$ ,  $\Gamma = 0.25$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\phi = 6$ ,  $\xi = 0.001$  y  $K = 0.63$ . Como puede notarse, el parámetro  $\theta$  tiene una influencia importante sobre la velocidad de descarga del aire, la cual aumenta su magnitud en función de una potencia cuadrada, ver Ec.(5.20), es decir, la magnitud de la velocidad de descarga calculada con un valor de  $\theta = 5$  es aproximadamente 5.2 veces más grande que los obtenidos para el valor de  $\theta = 2$ ; sin embargo, debemos precisar que, la Ec. (5.20) usada para la obtención de la velocidad  $\overline{V}_d$ , solo es válida para valores de  $\theta \sim O(1)$  los cuales deben de satisfacer la aproximación de flujo incompresible, dada por el número de Mach  $Ma < 0.3$ , Kundu y Cohen [24].

### 6.1.3. Efecto de la pared vertical sumergida

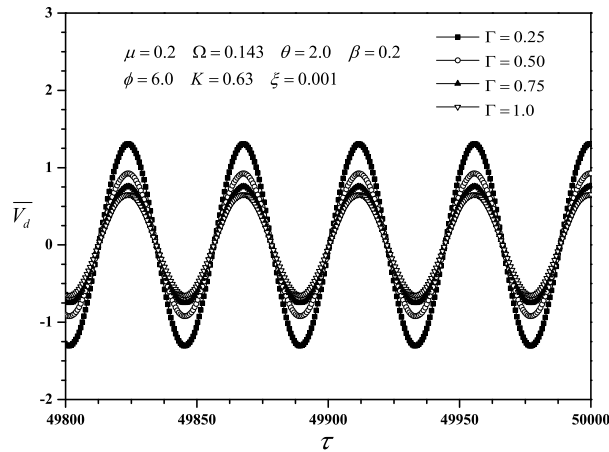
El efecto del parámetro  $\mu = w_c/h$  sobre las variables  $\Delta_c(\tau)$ ,  $\overline{P}(\tau)$  y la velocidad  $\overline{V}_d(\tau)$  está reportado en las Figs. 6.6. Se consideraron valores de  $\mu(= 0.2, 0.3, 0.4, 0.5)$  y valores constantes de  $\Omega = 0.143$ ,  $\Gamma = 0.25$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\phi = 6$ ,  $K = 0.63$ ,  $\xi = 0.001$  y  $\theta = 2.0$ . En general, en esta figura se aprecia la contribución del parámetro  $\mu$  en la amplificación de la elevación  $\Delta_c$ . Cuando crece  $\mu$ , la amplitud  $\delta_2$  también crece, ver Fig. (6.2) y por lo tanto la elevación  $\Delta_c$ , presión  $\overline{P}$  y velocidad  $\overline{V}_d$  también aumentan su magnitud teniendo un



(a) Evolución temporal de la elevación de la superficie libre  $\Delta_c(\tau)$



(b) Evolución temporal de la presión  $\bar{P}(\tau)$



(c) Evolución temporal de la  $\bar{V}_d(\tau)$  a través del orificio

Fig. 6.4: Evolución temporal de a) la elevación de la superficie libre  $\Delta_c(\tau)$ , b) presión  $\bar{P}(\tau)$  y c) velocidad de aire de descarga  $\bar{V}_d(\tau)$ , para cuatro valores del parámetro  $\Gamma$  ( $= 0.25, 0.50, 0.75, 1.0$ ), y valores fijos de los parámetros  $\mu = 0.2$ ,  $\Omega = 0.143$ ,  $\theta = 2$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\phi = 6$ ,  $\xi = 0.001$  y  $K = 0.63$ .

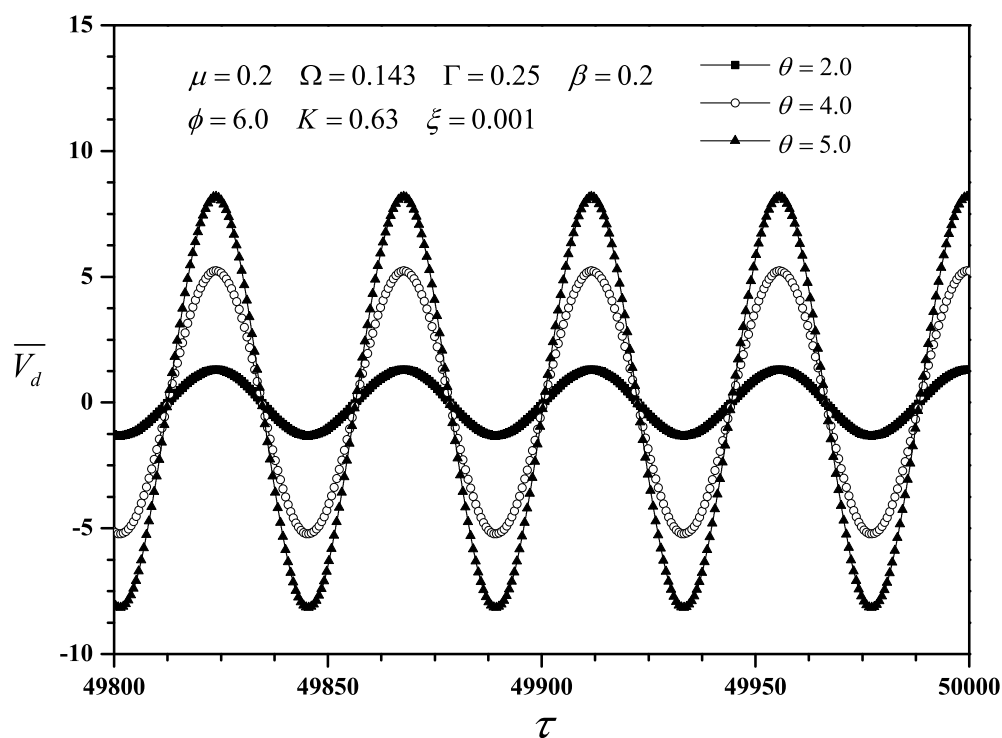


Fig. 6.5: Evolución temporal para la velocidad del flujo de aire  $\overline{V}_d(\tau)$ , para tres valores del parámetro  $\theta$  ( $= 2.0, 4.0, 5.0$ ), y valores fijos de los parámetros  $\mu = 0.2$ ,  $\Omega = 0.143$ ,  $\Gamma = 0.25$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\phi = 6$ ,  $\xi = 0.001$  y  $K = 0.63$ .

comportamiento similar que el reportado en la sección 6.1.1; sin embargo, el parámetro  $\mu$  tiene un menor impacto sobre la amplificación de las variables mencionadas que las obtenidas para los valores de  $\Gamma < 1$ .

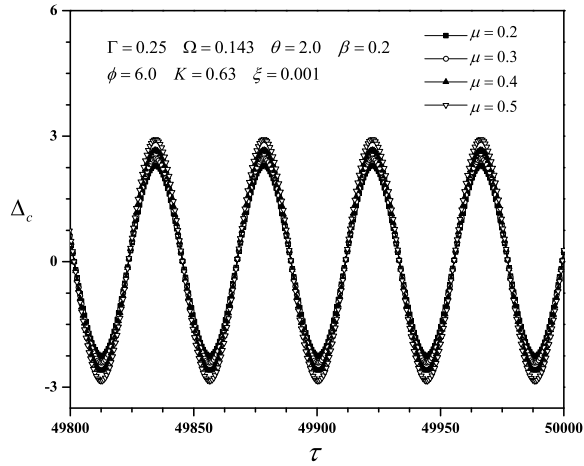
#### 6.1.4. Condición cercana a la resonancia

En la Fig. 6.7 se reporta la oscilación de la amplitud adimensional  $\Delta_c$  como una función del tiempo adimensional  $\tau$  para valores diferentes del parámetro  $\Omega (= 0.143, 0.3, 0.5, 0.8)$  y valores constantes de  $\mu = 0.2$ ,  $\beta = 0.02$ ,  $\phi = 6$ ,  $K = 0.63$ ,  $\xi = 0.001$  y  $\theta = 2$ . Como se mencionó en la sección 5.4, para valores de  $\Omega \rightarrow 1$  el comportamiento hidrodinámico de la amplitud  $\Delta_c(\tau)$  está cerca de la resonancia, este fenómeno puede verse en los resultados presentados en la Fig. 6.7. Los resultados sugieren que, para un valor fijo de la geometría del colector de ondas y un valor fijo de la frecuencia del oleaje  $\omega$ , de tal forma que  $\omega_N \rightarrow \omega$  se pueden obtener valores altos de la amplitud  $\Delta_c(\tau)$ , sin la necesidad de energía adicional para forzar el movimiento de la columna de agua. La condición para la cual  $\omega_N$  puede aproximarse a la frecuencia del oleaje  $\omega$ , incrementando la profundidad  $w_c$  en la Ec. (5.7).

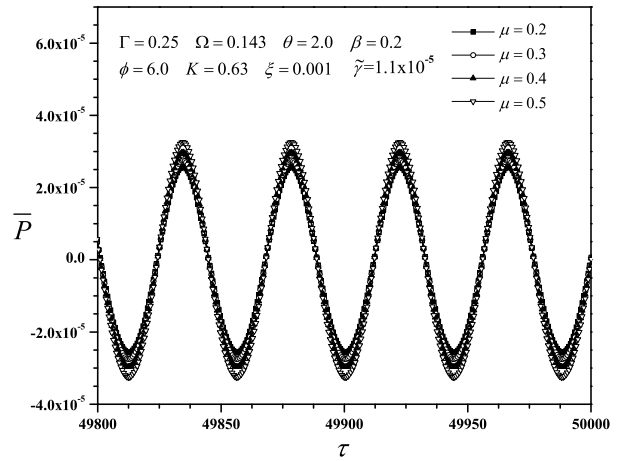
Con el fin de mostrar la respuesta causada por ondas de agua largas lineales, en términos de la trayectoria de un punto a través del tiempo, se presentan los diagramas fase, que muestran la variación de  $d\Delta_c/d\tau$  como una función de  $\Delta_c$ . Los resultados se obtienen para valores diferentes del parámetro  $\Gamma (= 0.25, 0.50, 0.75, 1.0)$ , y valores fijos de los parámetros  $\mu = 0.2$ ,  $\theta = 2$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\phi = 6$ ,  $\xi = 0.001$  y  $K = 0.63$ , ver Fig. 6.8. La intersección de la trayectoria con un valor de  $d\Delta_c/d\tau = 0$ , representa la amplitud máxima de la elevación de la superficie  $\Delta_c$ .

Para tiempos cortos, Fig. 6.8a, la columna de agua tiene amplitudes mayores que las obtenidas para tiempos largos, ver Fig. 6.8b. Además, para tiempos largos, la trayectoria de un punto a través del tiempo es simétrica y cerrada, que desde un punto de vista físico indica que la oscilación de la OWC no está amortiguada.

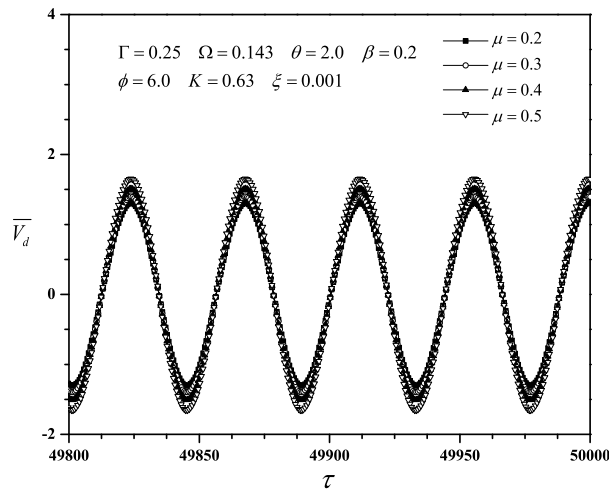
Resultados similares como en el caso anterior se obtienen mediante el aumento del parámetro  $\Omega (= 0.143, 0.2, 0.3)$ , y valores fijos de los parámetros  $\mu = 0.2$ ,  $\theta = 2$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\phi = 6$ ,  $\xi = 0.001$  y  $K = 0.63$ , con la diferencia que para  $\Omega \rightarrow 1$ , la trayectoria ya no es simétrica, ver Fig. 6.9b.



(a) Evolución temporal de la elevación de la superficie libre  $\Delta_c(\tau)$



(b) Evolución temporal de la presión  $\bar{P}(\tau)$



(c) Evolución temporal de la descarga de flujo de aire  $\bar{V}_d(\tau)$

Fig. 6.6: Evolución temporal de a) elevación de la superficie libre  $\Delta_c(\tau)$ , b) presión  $\bar{P}(\tau)$  y c) velocidad de descarga  $\bar{V}_d(\tau)$ , para cuatro valores del parámetro  $\mu (= 0.2, 0.3, 0.4, 0.5)$  y valores fijos de los parámetros  $\Omega = 0.143$ ,  $\Gamma = 0.25$ ,  $\theta = 2$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\phi = 6$ ,  $\xi = 0.001$  y  $K = 0.63$ .



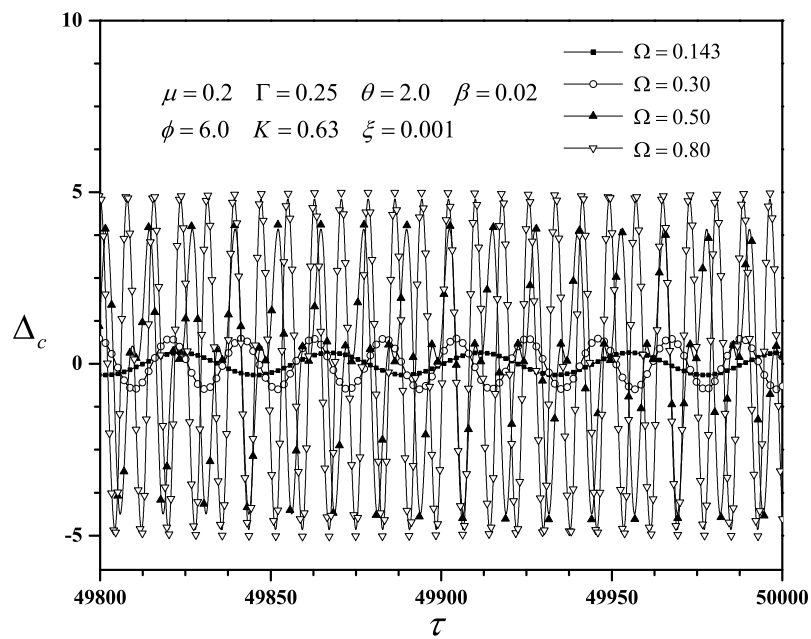


Fig. 6.7: Amplitud de la OWC cerca de la resonancia como una función del tiempo adimensional  $\tau$ , para valores de los parámetros  $\Omega (= 0.143, 0.3, 0.5, 0.8)$  y valores fijos de los parámetros  $\mu = 0.2$ ,  $\Gamma = 0.25$ ,  $\theta = 2.0$ ,  $\beta = 0.02$ ,  $\phi = 6$ ,  $K = 0.63$  y  $\xi = 0.001$ .

### 6.1.5. Incremento de la potencia en la cámara de aire

Introduciendo las siguientes variables adimensionales

$$\wp(\tau) = \frac{P_{OWC}}{(2H)^2 P_a A_I \omega_N}, \quad (6.1)$$

la versión adimensional de la Ec. (5.24) está dada por

$$\wp(\tau) = \left| \overline{P}(\tau) \frac{d\Delta_c(\tau)}{d\tau} \right|, \quad (6.2)$$

la cual se usa para calcular la potencia útil adimensional, derivada de la cámara de aire.

La potencia adimensional  $\wp(\tau)$ , se muestra en la Fig. 6.10. Los valores de la potencia instantánea se calcularon para cuatro valores del parámetro  $\Gamma (= 0.25, 0.50, 0.75, 1.0)$  y valores fijos de los parámetros  $\mu = 0.2$ ,  $\theta = 2.0$ ,  $\beta = 0.20$ ,  $\phi = 6$ ,  $\xi = 0.001$  y  $K = 0.63$ . Se observa que para valores de  $\Gamma < 1$ , la potencia tiene una importante amplificación, es decir, para un colector de ondas con ancho y fondo constante dado por  $\Gamma = 1$ , la potencia tiene un valor de  $\wp = 1.08 \times 10^{-6}$ , mientras tanto que para  $\Gamma = 0.25$  el valor de la potencia es de  $\wp = 8.28 \times 10^{-6}$ , el segundo caso es 7.66 veces más grande que el primero, lo que implica que el sistema propuesto aumenta significativamente la potencia. Cabe precisar que el presente estudio no tiene en cuenta el efecto de “sistema de absorción de potencia”, que por supuesto afecta a la potencia.

### 6.1.6. Eficiencia capturada de la OWC

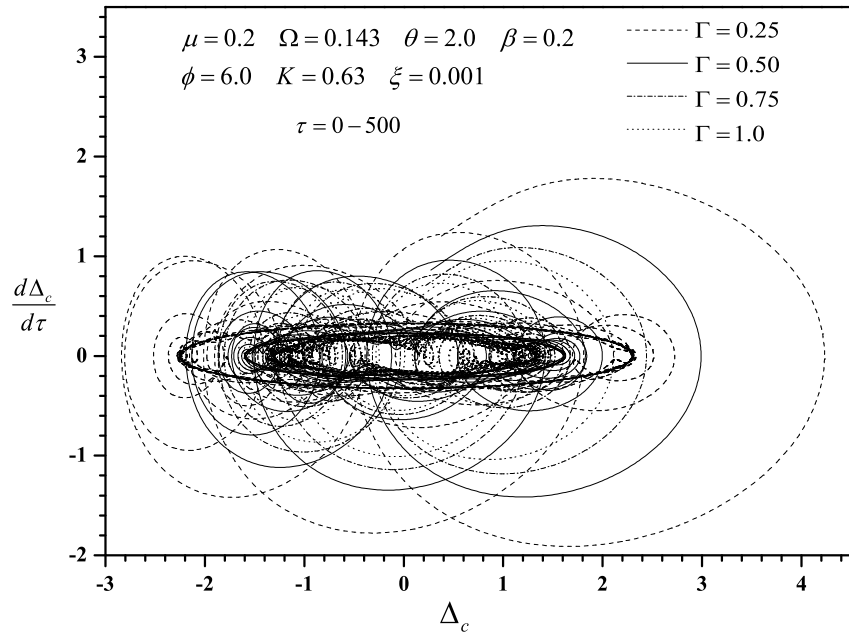
Tomando en cuenta las correspondiente variables adimensionales en la Ec. (5.25), se obtiene la siguiente ecuación

$$\sigma = \left( \frac{4\bar{\gamma}\Gamma(1-\mu)\psi}{\Omega} \right) \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left| \bar{P}(\tau) \frac{d\Delta_c(\tau)}{d\tau} \right| d\tau, \quad (6.3)$$

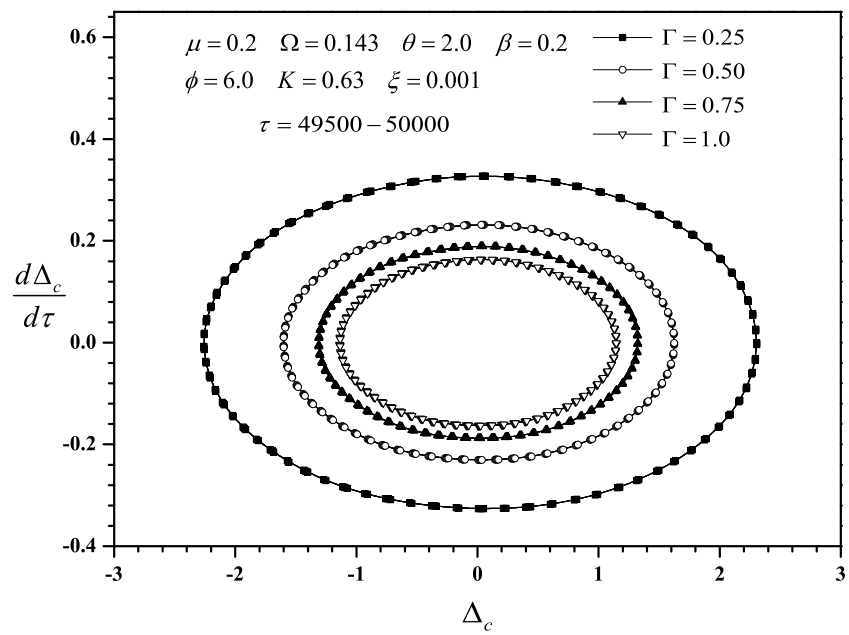
la cual se usa para evaluar la eficiencia capturada de la OWC. En la Ec. (6.3),  $\psi = Hk$  y el intervalo de la integración a partir del tiempo adimensional  $\tau_1$  al tiempo adimensional  $\tau_2$ .

En la Fig. 6.11 se reporta la captura de eficiencia de la OWC,  $\sigma$ , como una función del parámetro  $\Omega$ , para diferentes valores del parámetro geométrico  $\Gamma (= 0.25, 0.5, 0.75, 1.0)$ , y valores fijos de los parámetros  $\mu = 0.2$ ,  $\theta = 2$ ,  $\beta = 0.02$ ,  $\phi = 6$ ,  $K = 0.63$ ,  $\xi = 0.001$ ,  $\bar{\gamma} = 344.2$  y  $\psi = 0.1$ .

Los resultados muestran que cuando  $\Gamma < 1$ , la captura de eficiencia de la OWC mejora, es decir, para valores de  $\Omega = 0.9$  y valores de  $\Gamma (= 0.25$  y  $1)$  la captura de eficiencia toma valores de  $\sigma (= 0.093$  y  $0.068)$ , respectivamente, lo que representa que un colector cónico y esbelto es 36.7% más eficiente que un colector uniforme. Por otro lado, en la misma figura se nota que el convertidor de energía del oleaje, presenta mejora en su eficiencia para el valor de  $\Omega \approx 0.4$  con un incremento significativo cuando  $\Omega \rightarrow 1$ , caso contrario para los valores de  $\sigma \ll 1$ , obtenidos en el límite de  $\Omega \rightarrow 0$ . La mejora de la captura de la eficiencia  $\sigma$  se puede lograr para el límite de  $\omega_N \rightarrow \omega$ , condición que puede alcanzarse incrementando la longitud de la pared vertical sumergida  $w_c$ .

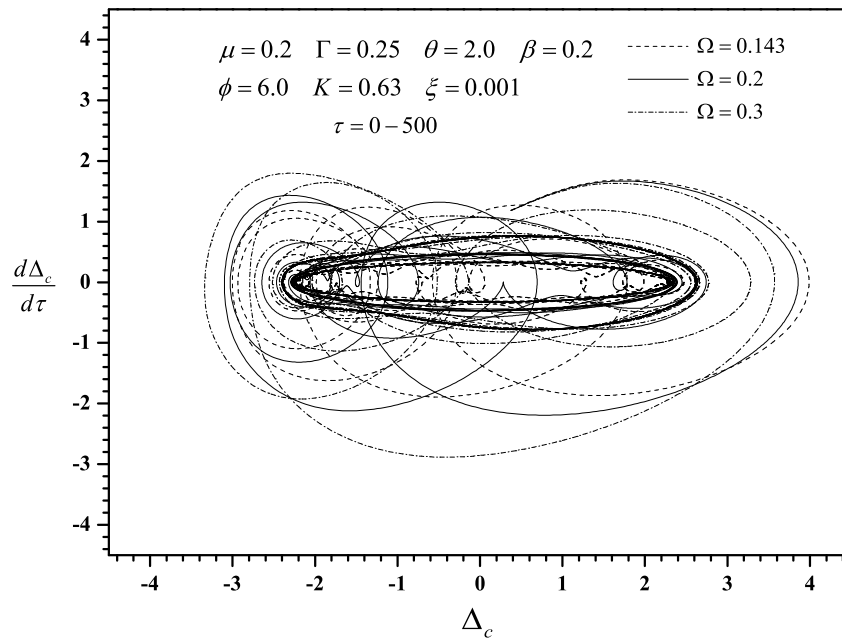


(a) Diagramas de fase para tiempos cortos  $\tau (= 0 - 500)$

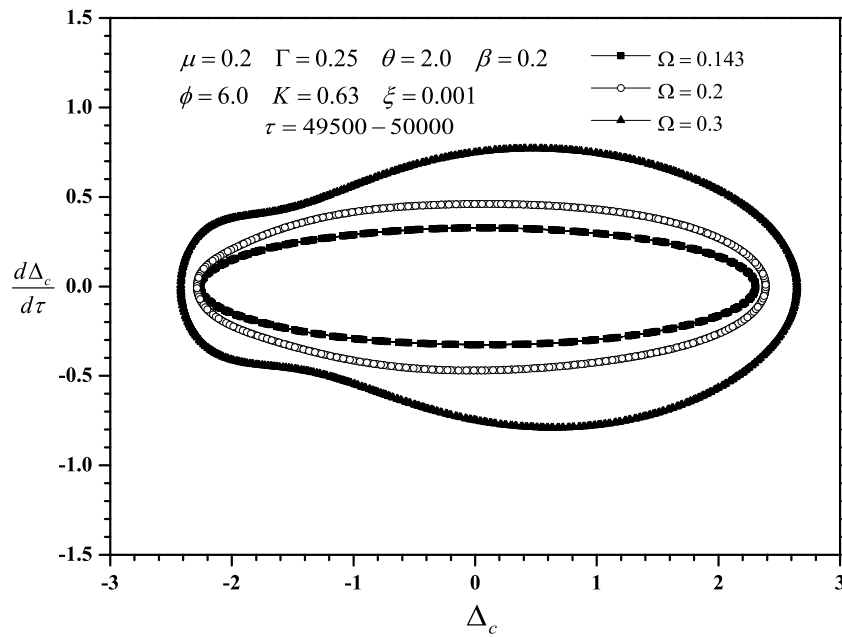


(b) Diagramas fase para tiempos largos  $\tau (= 49500 - 50000)$

Fig. 6.8: Diagramas fase para cuatro valores del parámetro de esbeltez  $\Gamma (= 0.25, 0.50, 0.75, 1.0)$ , y valores fijos de los parámetros  $\mu = 0.2$ ,  $\Omega = 0.143$ ,  $\theta = 2$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\phi = 6$ ,  $\xi = 0.001$  y  $K = 0.63$ .



(a) Diagramas fase para tiempos cortos  $\tau(= 0 - 500)$



(b) Diagramas fase para tiempos largos  $\tau(= 49500 - 50000)$

Fig. 6.9: Diagramas fase para tres valores del parámetro  $\Omega(= 0.143, 0.2, 0.3)$ , y valores fijos de los parámetros  $\mu = 0.2$ ,  $\Gamma = 0.25$ ,  $\theta = 2$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\phi = 6$ ,  $\xi = 0.001$  y  $K = 0.63$ .

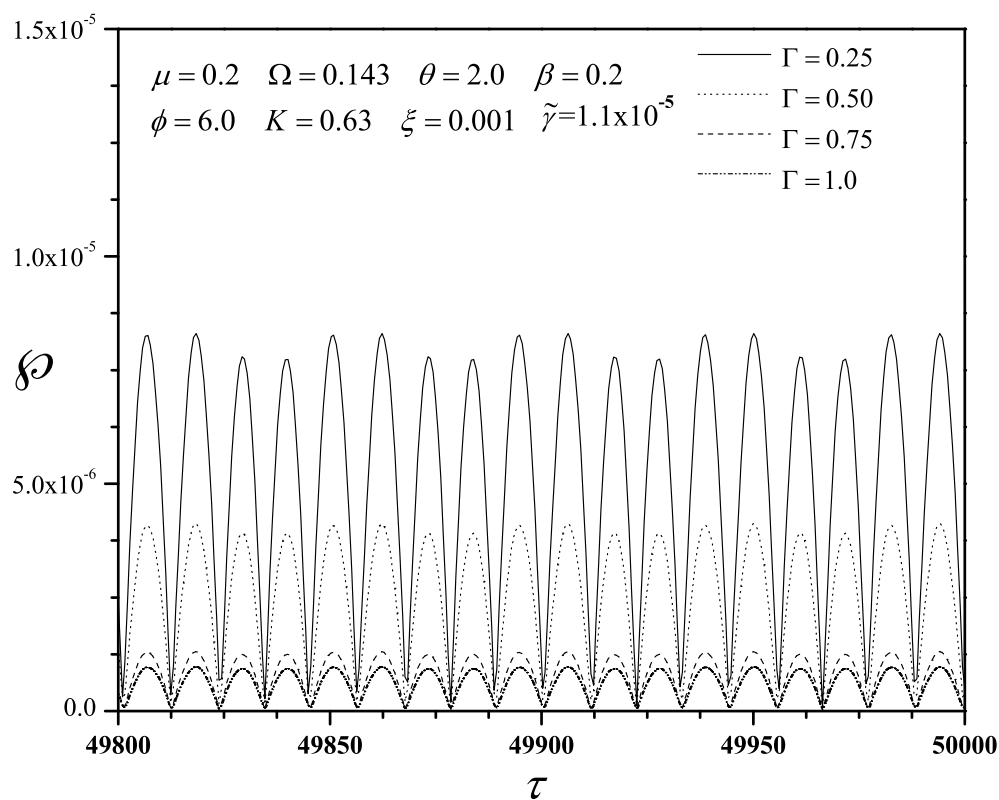


Fig. 6.10: Evolución temporal de la potencia instantánea  $\varphi(\tau)$ , derivada de la cámara de aire para valores diferentes del parámetro  $\Gamma (= 0.25, 0.50, 0.75, 1.0)$  y valores fijos de  $\Omega = 0.143$ ,  $\mu = 0.2$ ,  $\theta = 2$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\phi = 6$ ,  $K = 0.63$ ,  $\xi = 0.001$  y  $\tilde{\gamma} = 1.1 \times 10^{-5}$ .

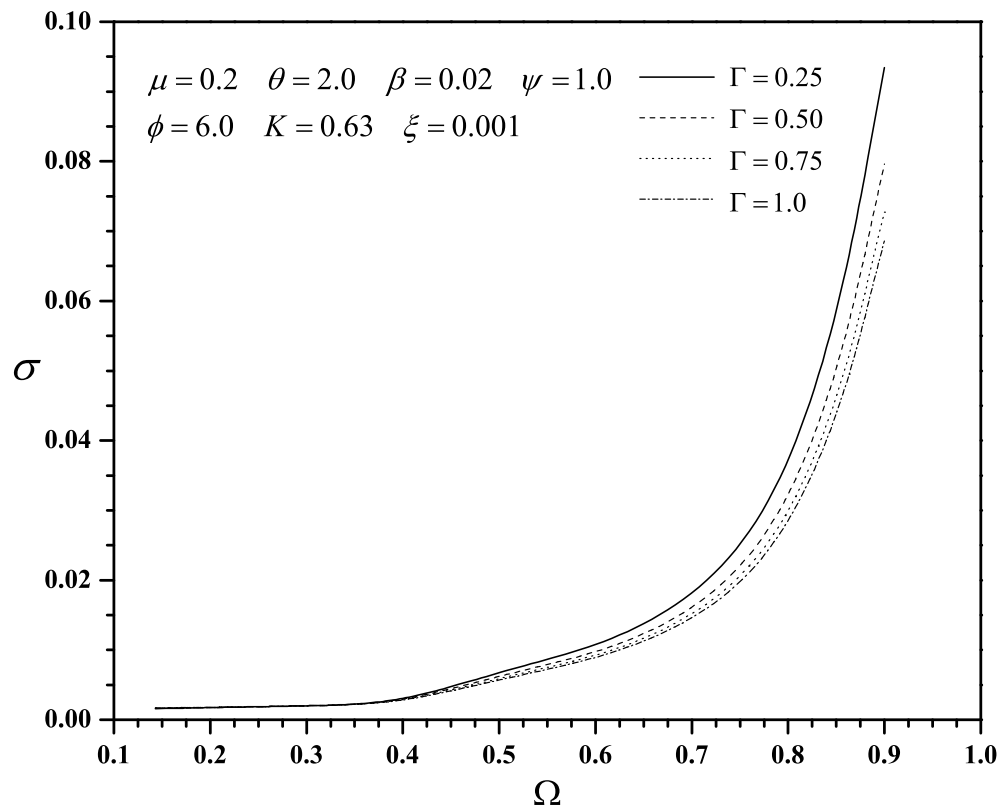


Fig. 6.11: Comparación de la captura de eficiencia  $\sigma$  de la OWC, para valores diferentes de el parámetro geométrico  $\Gamma$  ( $= 0.25, 0.5, 0.75$  y  $1$ ) como una función del parámetro adimensional de resonancia  $\Omega$ , para valores fijos de los parámetros  $\mu = 0.2$ ,  $\theta = 2$ ,  $\beta = 0.02$ ,  $\phi = 6.0$ ,  $\psi = 1$ ,  $K = 0.63$ ,  $\xi = 0.001$  y  $\bar{\gamma} = 114.73$ .

# Capítulo 7

## Conclusiones

En este trabajo, se analizó numéricamente, la mejora de la eficiencia de un dispositivo convertidor de energía columna de agua oscilante, junto con el incremento de la potencia útil originada en una cámara de aire abierta, debida a la amplificación de ondas largas lineales en un colector de ondas cónico y esbelto . El movimiento forzado de la columna de agua oscilante por el oleaje, se modeló mediante la aplicación de la ecuación de la energía. Aplicando el teorema del transporte de Reynolds a la primera ley de la termodinámica, derivamos un modelo matemático conjugado entre la cámara de aire y la columna de agua oscilante.

A continuación se resumen las conclusiones del presente trabajo:

1. Para el límite de  $|\beta_R| \rightarrow 0$  se obtiene una solución analítica, basada en la técnica de perturbación singular WKB, para la elevación de la superficie libre de ondas largas lineales en un colector de ondas cónico y esbelto, el cual tiene un ancho que sigue una distribución de ley de potencia. Los resultados muestran que para  $\Gamma < 1$ , el colector de ondas amplifica significativamente al oleaje y que el colector de ondas con  $\lambda \sim O(L_2)$  produce prácticamente la misma amplificación de las ondas que el caso cuando  $\lambda \ll L_2$ .
2. La solución analítica para el movimiento de la OWC, obtenida en el límite de  $\beta \ll 1$ , ajusta apropiadamente con la solución numérica.
3. Para el valor de  $\Gamma = 1$ , la amplitud de la OWC es 15 % más grande que la amplitud incidente; sin embargo para  $\Gamma = 0.25$ , la amplitud de la OWC es 2.3 veces más grande que la amplitud incidente del oleaje. Además para tiempos largos el movimiento de la OWC es periódico.



4. El flujo de aire que se descarga a través el orificio, aumenta su magnitud en función de una potencia cuadrada del parámetro  $\theta = H/l$ . Los valores del parámetro  $\theta$  pueden crecer hasta que la condición de flujo incompresible se satisfaga, lo cual está restringido por el número de Mach  $Ma < 0.3$ .
5. Para la condición de resonancia ( $\Omega \rightarrow 1$ ), se pueden obtener valores grandes de la amplitud de la OWC, sin la necesidad de energía adicional para forzar el movimiento de la columna de agua. Incrementando el valor de la pared frontal vertical  $w_c$ , la frecuencia natural de la OWC puede tender a la frecuencia de oscilación del oleaje.
6. La potencia útil de la cámara de aire se incrementa para valores pequeños del parámetro  $\Gamma$ , es decir, para  $\Gamma = 0.25$ , la potencia es 7.66 veces más grande que la calculada sin el colector de ondas ( $\Gamma = 1$ ).
7. Para los casos analizados, la OWC con un colector de ondas es 36.7% más eficiente que una OWC sin el colector de ondas. Además, el presente convertidor de energía mejora la captura de la eficiencia para valores de  $\Omega \approx 0.4$  con un importante incremento cuando  $\Omega \rightarrow 1$ .
8. Para tiempos cortos la OWC tiene amplitudes más grandes que las obtenidas para tiempos largos. El comportamiento hidrodinámico para tiempos cortos nos deja una pregunta interesante: ¿Cuáles son las condiciones físicas que permiten presentar un comportamiento transitorio y desarrollar grandes amplitudes de la OWC, para tiempos largos?.

# Bibliografía

- [1] A. Al-Habaibeh, D. Su, J. McCague, and A. Knight. An innovative approach for energy generation from waves.
- [2] E. G. Bautista, J. M. Reyes, O. Bautista, and J. C. Arcos. Deformation of water waves by geometric transitions with power law function distribution. *WASET*, 7:1416–1423, 2013.
- [3] C. Bender and S. Orzag. *Advanced mathematical methods for scientists and Engineers*. McGraw-Hill Company, 1978.
- [4] P. Boccotti. Caisson breakwaters embodying an owc with a small opening-part i: Theory. *Ocean Eng.*, 34:806–819, 2007.
- [5] P. Boccotti. Comparison between a u-owc and a conventional owc. *Ocean Eng.*, 34:799–805, 2007.
- [6] K. Budal and J. Falnes. *Power from sea waves*. Academic London, 1980.
- [7] K. Budal, J. Falnes, L. C. Iversen, P. Lillebekken, G. Oltedal, T. Hals, and T. Onshus. The norwegian wave-power buoy project. In *The Second International Symposium on Wave Energy Utilization*, pages 323–344, 1982.
- [8] A. Clément, P. McCullen, A. F. ao, A. Fiorentino, F. Gardner, K. Hammarlund, G. Lemonis, T. Lewis, K. Nielsen, S. Petroncini, M.-T. Pontes, P. Schild, B.-O. Sjostrom, H. Sorensen, and T. Thorpe. Wave energy in europe: current status and perspectives. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 6:405–431, 2002.
- [9] J. Conde and L. Gato. Numerical study of air-flow in an ocillating water column wave energy converter.
- [10] J. Cruz. *Ocean Wave Energy*, volume 1. Springer, 2008.

- [11] R. Curran, T. Whittaker, and T. Stewart. Aerodynamic conversion of ocean power from wave to wire.
- [12] A. F. d O. Falcão. Control of an oscillating-water-column wave power plant for maximum energy production. *Appl. Ocean Res.*, 24(2):72–82, 2002.
- [13] A. F. d O. Falcão. Wave energy utilization: review of the technologies. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 14:899–918, 2010.
- [14] A. F. d O. Falcão and P. Justino. Owc wave energy device with air flow control. *Ocean Eng.*, 26:1275–1295, 1999.
- [15] D. Evans. Wave-power absorption by systems of oscillating surface pressure distribution. *J. Fluid Mech.*, 114:481–499, 1982.
- [16] D. Evans. Wave-power absorption by systems of oscillating surface pressure distribution. *J. Fluid Mech.*, 114:481–499, 1982.
- [17] A. E. Fredriksen. Tapered channel wave power plants. In *Energy for Rural and Island Communities IV*, pages 179–182, 1985.
- [18] G. Gkikas and G. Athanassoulis. Development of a novel nonlinear system identification scheme for the pressure fluctuation inside an oscillating water column-wave energy converter part i: Theoretical background and harmonic excitation case. *Ocean Eng.*, 80:84–99, 2014.
- [19] F. He, Z. Huang, and A. W. Law. An experimental study of a floating breakwater with asymmetric pneumatic chambers for wave energy extraction. *Applied Energy*, 106:222–231, 2013.
- [20] R. Henderson. Design, simulation and testing of novel hydraulic power take-off system for the pelamis wave energy converter. *Renewable energy*, 31(2):271–283, 2006.
- [21] A. Kamath, H. Bihs, and O. ivind A Arntsen. Numerical modeling of power take-off damping in an oscillating water column device. *International Journal of Marine Energy*, 10:1–16, 2015.
- [22] J. W. Kamphuis. *Introduction to coastal engineering and management*, volume 16. World Scientific, 2000.
- [23] D. R. B. Kraemer, C. O. G. Ohl, and M. E. McCormick. Comparison of experimental and theoretical result of the motions of a mccabe wave pump. In *4th EWEC*, 2000.

- [24] P. Kundu and I. Cohen. *Fluid Mechanics*. Academic Press, 2008. 4th Edition.
- [25] H. Lamb. *Hydrodynamics sixth ed.* Cambridge University Press, 1932.
- [26] G. Malara and F. Arena. Analytical modelling of an u-oscillating water column and performance in random waves. *Renew. Energ.*, 60:116–126, 2013.
- [27] H. Martins-rivas and C. C. Mei. Wave power extraction from an oscillating water column along a straight coast. *Ocean Eng.*, 36:426–433, 2009.
- [28] Y. Masuda and M. E. McCormick. Experiences in pneumatic wave energy conversion in japan. In *Utilization of Ocean Waves-Wave to Energy Conversion*, pages 1–13. ASCE, 1987.
- [29] M. McCormick. *Ocean Wave Energy Conversion*. Dover Publications, 2007.
- [30] F. Pasquale and M. C. Camporeale. A linearized model for estimating the performance of submerged resonant wave energy converters. *Renewable Energy*, 33(4):631–641, 2008.
- [31] S. K. Patel, K. Ram, and M. R. Ahmed. Effect of turbine section orientation on the performance characteristics of an oscillating water column device. *Exp. Therm. Fluid. Sci.*, 44:642–648, 2013.
- [32] J. Perdigao and A. Sarmiento. Overall-efficiency optimization in owc devices. *Appl. Ocean Res.*, 25:157–166, 2003.
- [33] M. Rahman. *Water waves: Relating modern theory to advanced engineering applications*. Clarendon Press, 1995.
- [34] K. Rezanejad, J. Bhattacharjee, and C. G. Soares. Analytical and numerical study of dual-chamber oscillating water columns on stepped bottom. *Renew. Energ.*, 75:272–282, 2015.
- [35] D. Ross. *Power from sea waves*, volume 1. Oxford University Press, 1995.
- [36] S. H. Salter. Wave power. *Nature*, 249:720–724, 1974.
- [37] U. Senturk and A. Ozdamar. Wave energy extraction by an oscillating water column with a gap on the fully submerged front wall. *Appl. Ocean Res.*, 37:174–182, 2012.
- [38] T. Setoguchi and M. Takao. Current status of self rectifying air turbines for wave energy conversion.

- [39] H. C. Soerensen, R. Hasen, E. Friis-Madsen, W. Panhauser, G. Mackie, P. Frigaard, T. Hald, W. Knapp, J. Keller, E. Holmén, B. Holmes, and G. Tho. The wave dragon—now ready for test in real sea. In *4th EWEC*, 2000.
- [40] M. Stiassnie, E. Naheer, and I. Boguslavsky. Energy losses due to vortex shedding from the lower edge of a vertical plate attacked by surface wave. 1984.
- [41] I. A. Svendsen. *Introduction to nearshore hydrodynamics*, volume 24. World Scientific, 2006.
- [42] R. S. Tseng, R. H. Wu, and C. C. Huang. Model study of a shoreline wave-power system. *Ocean Eng.*, 27(8):801–821, 2000.
- [43] T. Vinje. An approach to the non-linear solution of the oscillating water column.
- [44] J. R. Welty, C. E. Wicks, and R. E. Wilson. *Fundamentos de Transferencia de Momento, Calor y Masa*, volume 2. Limusa Wiley, 2009.
- [45] F. White. *Fluid Mechanics*. Mc Graw Hill, 2003. 5th Edition.
- [46] F. M. White. *Viscous Fluid Flow*, volume 3. McGraw-Hill International Edition, 2006.
- [47] T. Whittaker and T. Stewart. An experimental study of nearshore and shoreline oscillating water columns with harbours. In *European Wave Energy Symposium*, pages 151–157, 1993.
- [48] H. Yan, S. Hongda, L. Defu, and L. Zhen. Study on the breakwater caisson as oscillating water column facility. *J Ocean Univ China*, 9:244–250, 2010.
- [49] J. Zwamborn and G. Grieve. Wave attenuation and concentration associated with harbour approach channels. In *Proceedings of the 14th international conference on coastal engineering*, pages 2068–2085. ASCE, 1974.