

22<sup>a</sup>  
1985

DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO:

FOTOGRAMETRIA CON ESTEREOSCOPIO DE ESPEJOS Y BARRA DE PARALAJES

1.

M. EN C. GUALTERIO LUTHE GARCIA (COORDINADOR)  
JEFE DEL DEPARTAMENTO DE  
FOTOGRAMETRIA  
FACULTAD DE INGENIERIA  
U N A M  
MEXICO, D.F.  
548 96 69

FOTOGRAMETRIA CON ESTEREOSCOPIO DE ESPEJOS Y BARRA DE DE PARALAJES MAYO DE 1 9 8 5 .

Fecha	Tema	Horario	Profesor
Del 13 al 18 de Mayo	ESTEREOSCOPIA	9 a 14 h y de 16 a 19 h c/día	M.EN C. GUALTERIO LUTHE GARCIA.
	ESTEREOSCOPIO DE ESPEJOS		
	EXAGERACION VERTICAL		
	PARALAJE		
	BARRA DE PARALAJES		
	ECUACIONES DE PARALAJE		
	CONTROL TERRESTRE		
	CALCULO DE LA BASE AEREA		
	CALCULO DE LA ALTURA DE VUELO		
	CALCULO DE LAS TRES COORDENADAS (X,Y, Z), DE CUALQUIER PUNTO DEL TERRENO		

# EVALUACION DEL PERSONAL DOCENTE

( )

**CURSO:** FOTOGRAMETRIA CON ESTEREOSCOPIO DE ESPEJOS Y BARRA DE PARALAJES

**FECHA:** Del 13 al 18 de mayo de 1985.

		DOMINIO DEL TEMA	EFICIENCIA EN EL USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES	MANTENIMIENTO DEL INTERES. (COMUNICACION CON LOS ASISTENTES, AMENIDAD, FACILIDAD DE EXPRESION).		PUNTUALIDAD
	<b>CONFERENCISTA</b>					
1.	M. EN C. GUALTERIO LUTHE GARCIA					
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						
8.						
9.						
	<b>ESCALA DE EVALUACION : 1 a 10</b>					

SU EVALUACION SINCERA NOS AYUDARA A MEJORAR LOS PROGRAMAS POSTERIORES QUE DISEÑAREMOS PARA USTED.

TEMA	ORGANIZACION Y DESARROLLO DEL TEMA	GRADO DE PROFUNDIDAD LOGRADO EN EL TEMA	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO EN EL TEMA	UTILIDAD PRACTICA DEL TEMA	
ESTEREOSCOPIA					
ESTEREOSCOPIO DE ESPEJOS					
EXAGERACION VERTICAL					
PARALAJE					
BARRA DE PARALAJES					
ECUACIONES DE PARALAJE					
CONTROL TERRESTRE					
CALCULO DE LA ALTURA DE VUELO					
CALCULO DE LA BASE AEREA					
CALCULO DE LAS TRES COORDENADAS (X, Y, Z), DE CUALQUIER PUNTO DEL TERRENO					

edcs.  
ESCALA DE EVALUACION: 1 a 10

## EVALUACION DEL CURSO

③

	CONCEPTO	EVALUACION
1.	APLICACION INMEDIATA DE LOS CONCEPTOS EXPUESTOS	
2.	CLARIDAD CON QUE SE EXPUSIERON LOS TEMAS	
3.	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO CON EL CURSO	
4.	CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO	
5.	CONTINUIDAD EN LOS TEMAS DEL CURSO	
6.	CALIDAD DE LAS NOTAS DEL CURSO	
7.	GRADO DE MOTIVACION LOGRADO CON EL CURSO	

ESCALA DE EVALUACION DE 1 A 10

1. ¿Qué le pareció el ambiente en la División de Educación Continua?

MUY AGRADABLE	AGRADABLE	DESAGRADABLE

2. Medio de comunicación por el que se enteró del curso:

PERIODICO EXCELSIOR ANUNCIO TITULADO DE VISION DE EDUCACION CONTINUA	PERIODICO NOVEDADES ANUNCIO TITULADO DE VISION DE EDUCACION CONTINUA	FOLLETO DEL CURSO

CARTEL MENSUAL	RADIO UNIVERSIDAD	COMUNICACION CARTA, TELEFONO, VERBAL, ETC.

REVISTAS TECNICAS	FOLLETO ANUAL	CARTELERA UNAM "LOS UNIVERSITARIOS HOY"	GACETA UNAM

3. Medio de transporte utilizado para venir al Palacio de Minería:

AUTOMOVIL PARTICULAR	METRO	OTRO MEDIO

4. ¿Qué cambios haría usted en el programa para tratar de perfeccionar el curso?

---



---



---

5. ¿Recomendaría el curso a otras personas?

SI	NO

6. ¿Qué cursos le gustaría que ofreciera la División de Educación Continua?

---



---

7. La coordinación académica fue:

EXCELENTE	BUENA	REGULAR	MALA

8. Si está interesado en tomar algún curso intensivo ¿Cuál es el horario más conveniente para usted?

LUNES A VIERNES DE 9 A 13 H. Y DE 14 A 18 H. (CON COMIDAS)	LUNES A VIERNES DE 17 A 21 H.	LUNES, MIÉRCOLES Y VIERNES DE 18 A 21 H.	MARTES Y JUEVES DE 18 A 21 H.

VIERNES DE 17 A 21 H. SABADOS DE 9 A 14 H.	VIERNES DE 17 A 21 H. SABADOS DE 9 A 13 Y DE 14 a 18 H.	O T R O

9. ¿Qué servicios adicionales desearía que tuviese la División de Educación Continua, para los asistentes?

---

10. Otras sugerencias:

---



---



---



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

FOTOGRAMETRIA CON ESTEREOSCOPIO DE ESPEJOS  
Y BARRA DE PARALAJES  
(TEORIA Y PRACTICA )

M.en C.Gualterio Luthe García

Mayo, 1985.

1. ESTEREOSCOPIA.

1.1 El ojo humano.

1.2 Visión estereoscópica natural.

1.3 Percepción de profundidad con un ojo.

1.4 Visión estereoscópica con fotografías.

1.5 Estereoscopio de bolsillo.

1.6 Ejercicios para observación con el estereoscopio de bolsillo.

1.7 Estereoscopio de epsjos.

1.8 Paralaje en y.

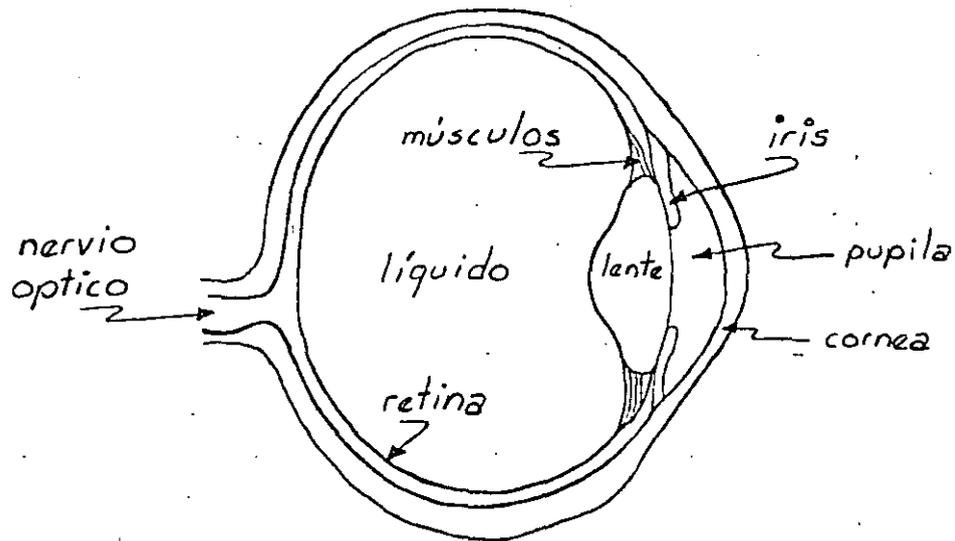
1.9 Causas que originan la paralaje en y.

1.10 Estereoscopía por colores complementarios.

1.11 Estereoscopía por luz polarizada.

1.12 Estereoscopía por fotos alternadas.

## 1.1 El ojo humano.



En el ojo existe un sistema óptico y un sistema receptor. El sistema óptico consiste de una lente cristalina y del iris. La lente puede cambiar su forma para enfocar objetos lejanos y cercanos, y el iris tiene la propiedad de dilatarse o encogerse, con lo que se amplía o reduce la apertura circular de la lente, regulando así la luz que pasa por la lente.

El sistema receptor está integrado por la retina que es donde se forma la imagen. En la retina existen células diminutas que son muy sensibles a la luz y que están unidas al cerebro al través del nervio óptico.

## 1.2 Visión estereoscópica natural.

Todos los humanos con vista normal (dos ojos sanos), captamos el ambiente que nos rodea en 3 dimensiones, o sea nos damos cuenta de la profundidad, lo que nos permite juzgar las distancias relativas entre

los objetos que nos rodean para determinar que objetos se encuentran más cerca de nosotros. Esto se debe a que al observar simultáneamente con los dos ojos (visión binocular) un cierto punto A (ver figura 1), hacemos que los ejes ópticos de nuestros ojos se intersecten en el punto A, formando el ángulo paraláctico  $\theta_A$ . Si observamos un punto B más alejado de nosotros que el punto A, el ángulo paraláctico  $\theta_B$ , será menor que  $\theta_A$ . Nuestro cerebro relaciona automáticamente la distancia  $d_A$ , con el ángulo  $\theta_A$  y la distancia  $d_B$  con el ángulo  $\theta_B$  y nosotros percibimos la distancia entre A y B como una diferencia entre los ángulos paralácticos.

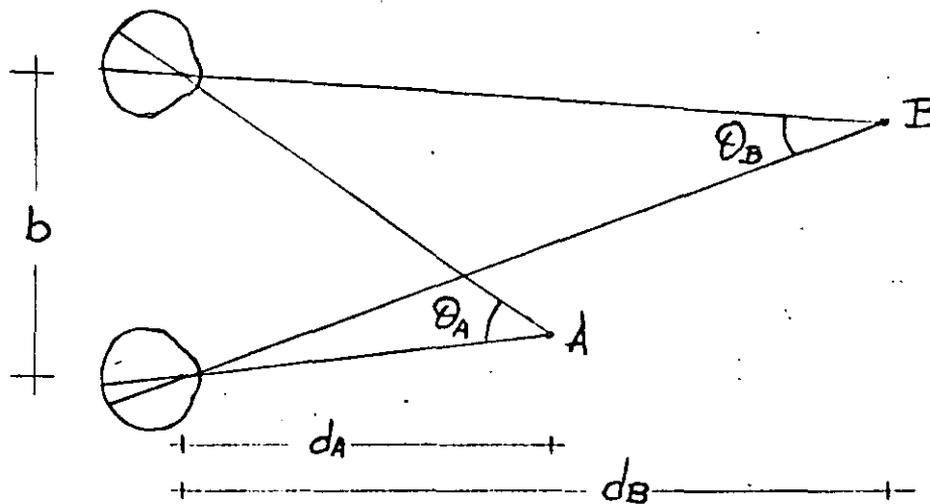


figura 1

La distancia entre los ojos derecho e izquierdo esta marcada en la figura 1 con la letra b y en la persona adulta promedio varía entre 63 y 69 mm. Esta distancia se denomina base ocular. En general las personas perciben la profundidad hasta una distancia máxima de 600m. En distancias mayores los ángulos paralácticos se vuelven muy pequeños y

nuestro cerebro no es capaz de discernir los cambios en los ángulos paralácticos, cuando estos son muy pequeños. Todo lo que se encuentre a una distancia mayor de 600 m. lo vemos en un solo plano. La mínima distancia a la que se percibe la profundidad es de 25 cm. aproximadamente. En distancias menores perdemos el enfoque de lo observado.

La condición para tener una visión estereoscópica es poder observar un mismo punto desde dos estaciones diferentes para que exista un ángulo paraláctico.

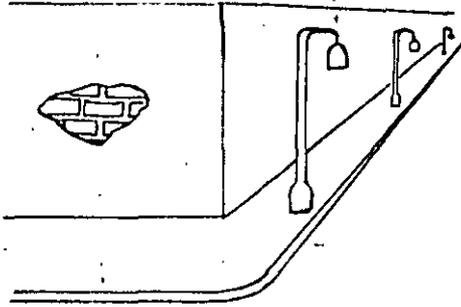
En los humanos las dos estaciones diferentes son los dos ojos, ya que en la retina de cada ojo se forma una imagen (independiente lá una de la otra) del mismo objeto.

De la condición anterior podemos concluir que una persona tuerta no puede ver en 3 dimensiones, sino en 2 dimensiones o sea en un plano. Sin embargo, aún mirando con un solo ojo podemos razonar la distancia entre los objetos, como sigue:

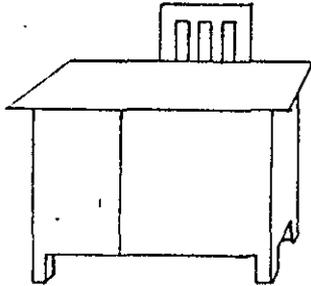
### 1.3 Percepción de profundidad con un ojo.

1. Relacionando tamaños de objetos conocidos o sea si sabemos que el objeto A es del mismo tamaño que el objeto B, pero el objeto A lo vemos más grande y claro que el objeto B, entonces concluimos que el objeto A se encuentra más cerca de nosotros que el objeto B, ya que debido a la perspectiva, a medida que se alejan los objetos de nosotros, parecen disminuir de tamaño y además pierden nitidez debido a la conta-

minación del aire.



2. Si un objeto A cubre parcialmente a un objeto B concluimos - que el objeto A esta más cerca de nosotros.

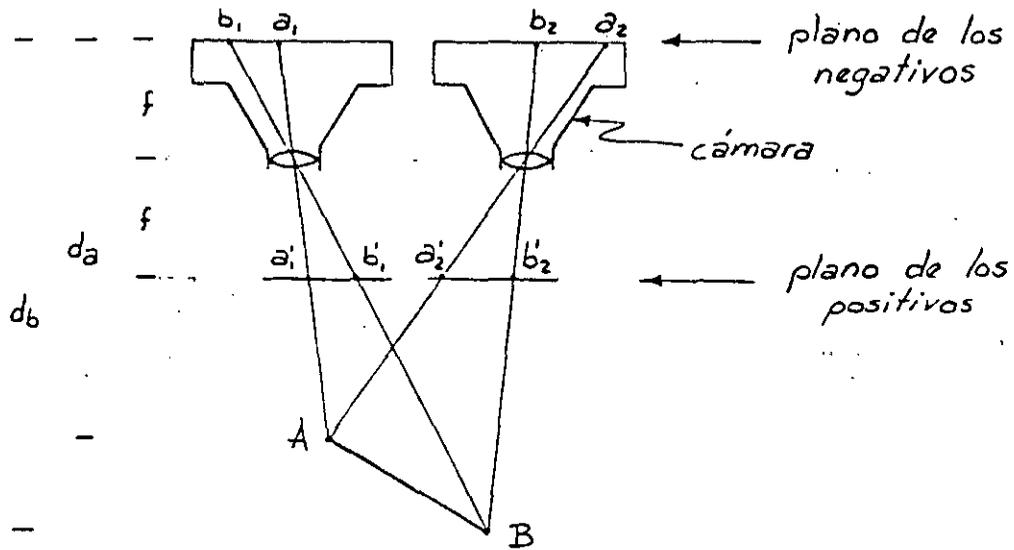


Razonamos que la silla esta detrás del escritorio porque el escritorio cubre a la silla parcialmente.

3. Mediante cambios de enfoque o sea: Si observamos dos objetos simultáneamente, estando uno de ellos más cerca de nosotros que el otro, al enfocar el objeto cercano (por ejemplo nuestro dedo), perdemos el enfoque del objeto lejano (por ejemplo un apagador) y viceversa, si enfocamos el objeto lejano perdemos el enfoque del objeto cercano.

### 1.4 Visión Estereoscópica con fotografías.

Si imprimimos dos fotografías de un mismo objeto pero desde estaciones separadas, la imagen del objeto aparecerá en ambas fotografías.



Los puntos  $b_1, b_2$ , son puntos homólogos, lo mismo que los puntos  $a_1, a_2$ .

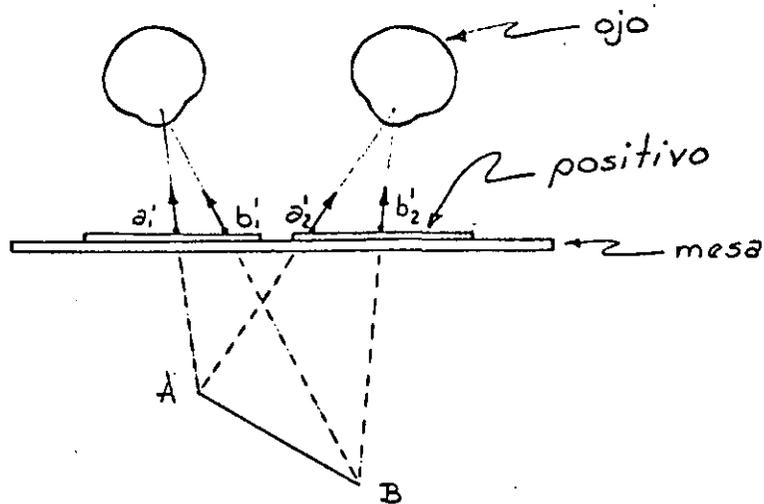
Nótese en la figura que la distancia  $\overline{b_1 a_1}$  y  $\overline{b_2 a_2}$  no son iguales. La diferencia de longitud se conoce como paralaje horizontal o paralaje en x o paralaje x (px)

$$Px = \overline{b_1 a_1} - \overline{b_2 a_2}$$

Esta paralaje, como se verá posteriormente, nos sirve para calcular las elevaciones de puntos del terreno con respecto a un plano de referencia, lo que nos permitirá conocer por ejemplo las alturas de edificios.

Si de los negativos obtenemos positivos y con el ojo izquierdo miramos exclusivamente el positivo izquierdo a la vez que con el ojo derecho miramos el positivo derecho, no vemos dos imágenes del objeto en un plano bidimensional, sino que vemos una sola imagen tridimensional que

ilusoriamente se forma debajo de las fotografías.



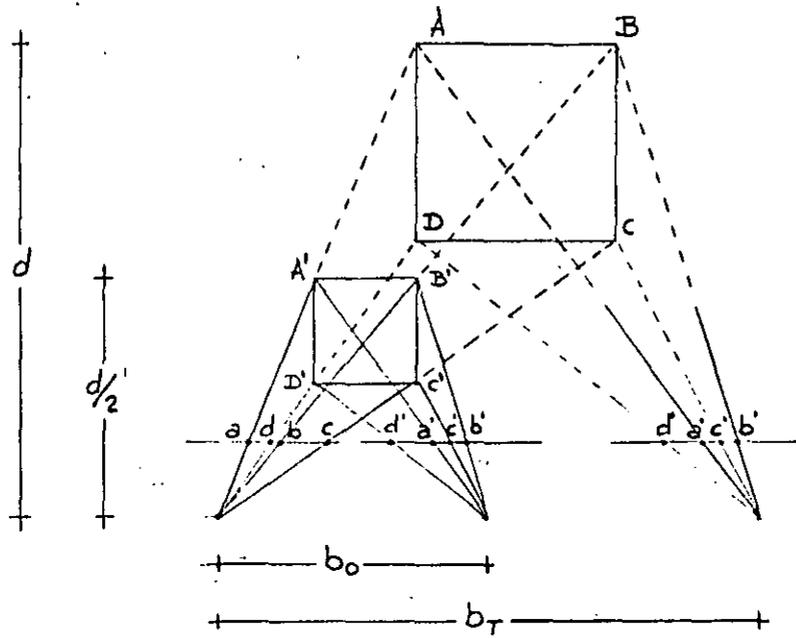
Esto se debe a que nuestro cerebro prolonga por costumbre los rayos que parten de puntos homólogos, hasta su intersección, lo que ocasiona que en vez de ver dos puntos bidimensionalmente veamos uno solo pero tridimensional.

Las condiciones para que la imagen este a la misma escala que el objeto son:

1. La separación de las cámaras al tomar las fotos (base de toma) debe ser igual a la separación interpupilar del observador (base ocular).

2. La distancia de observación ( $d_0$ ) debe ser igual a la distancia focal ( $f$ ) de la lente con que se tomaron las fotografías.

Si alteramos algunas de las dos o ambas condiciones sucede lo siguiente:



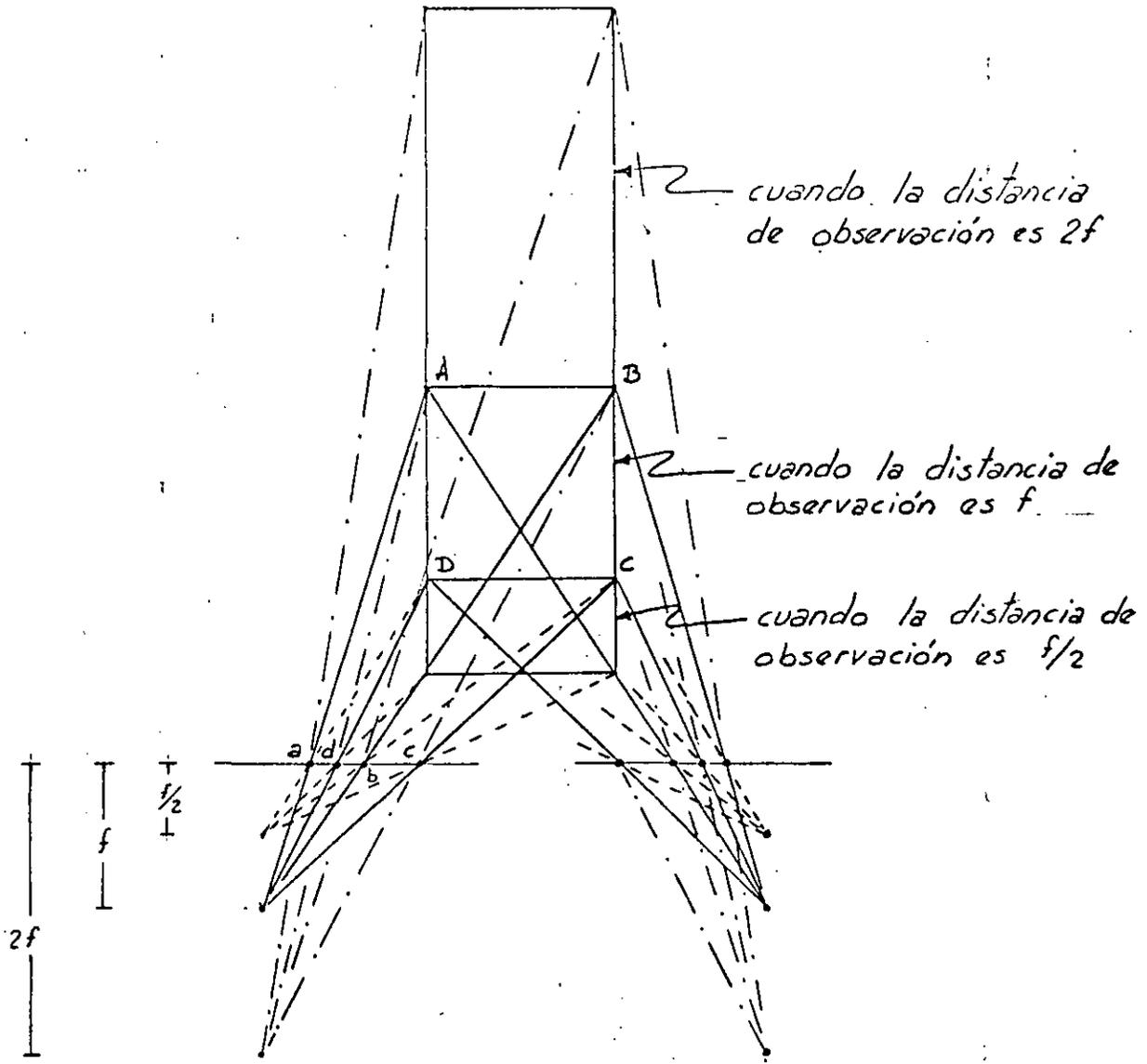
Supongamos que la base de toma es  $b_T$  y que la base de observación ( $b_o$ ), la reducimos a la mitad. Esto ocasiona que el modelo tenga la mitad del tamaño que el original, pero a su vez lo miramos más cerca y más nítido.

La reducción de la base esta dada por la siguiente relación:

$$\frac{b_o}{b_T} = \frac{1}{n}$$

Esta es la misma relación con que se acerca la imagen a la base.

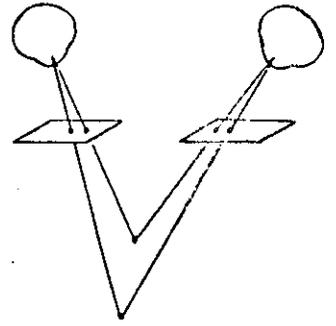
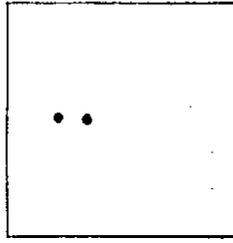
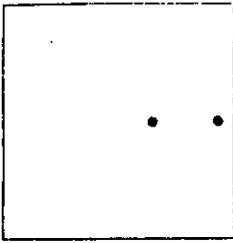
Al mirarlo más cerca podemos apreciar mejor las diferencias de profundidad.



En el dibujo se pueden apreciar las deformaciones de la imagen al duplicar o reducir a la mitad las distancias de observación con relación a la distancia focal de toma.

En la siguiente figura se muestran dos cuadros con dos puntos - cada uno. Si observamos el cuadro izquierdo con el ojo izquierdo y el cuadro derecho con el ojo derecho, veremos dos puntos tridimensionalmente estando uno de ellos más cerca de nosotros que el otro. Para lograr esto se requiere cierta práctica, ya que nuestra tendencia natural-

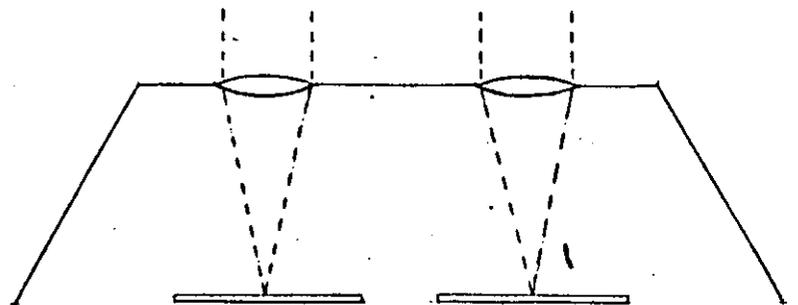
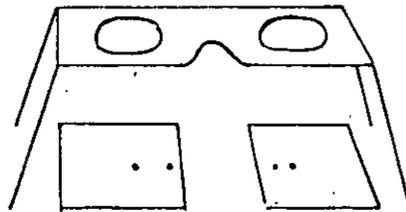
es ver los dos cuadros con cada ojo.



Existen aparatos que nos facilitan la observación tridimensional a partir de pares fotográficos, como es el estereoscopio de bolsillo que se explica a continuación.

#### 1.5 Estereoscopio de bolsillo.

El estereoscopio de bolsillo es esencialmente un armazón que -- sostiene 2 lentes convexas, como se puede apreciar en el siguiente dibujo.

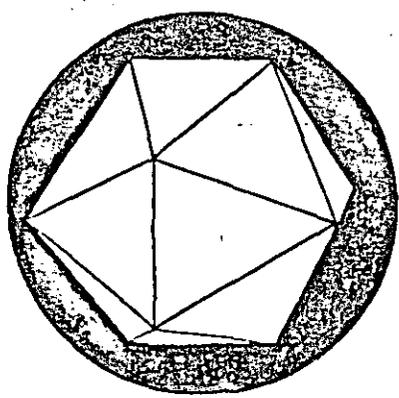
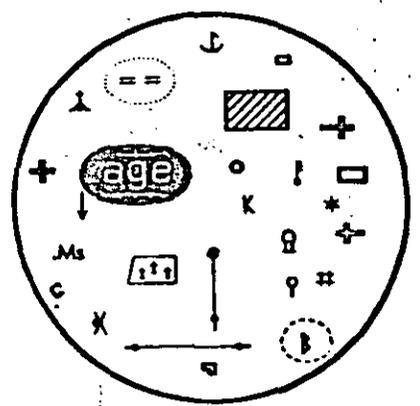
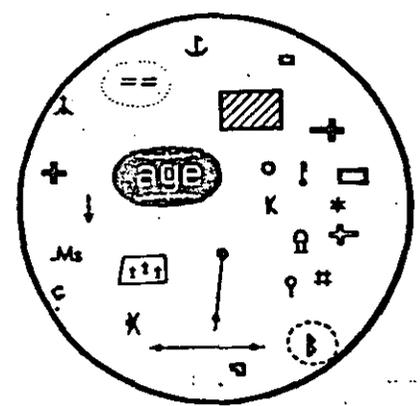
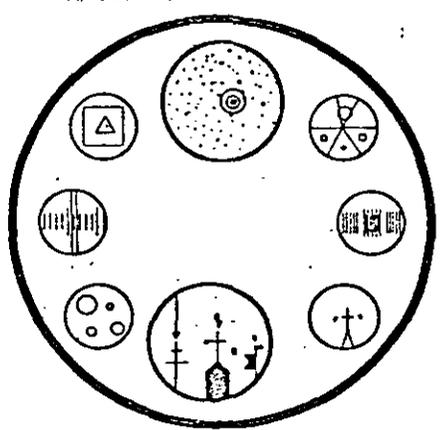
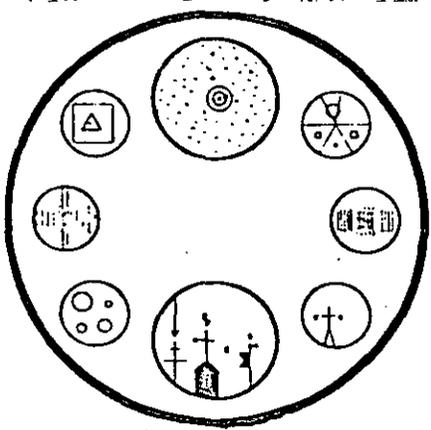
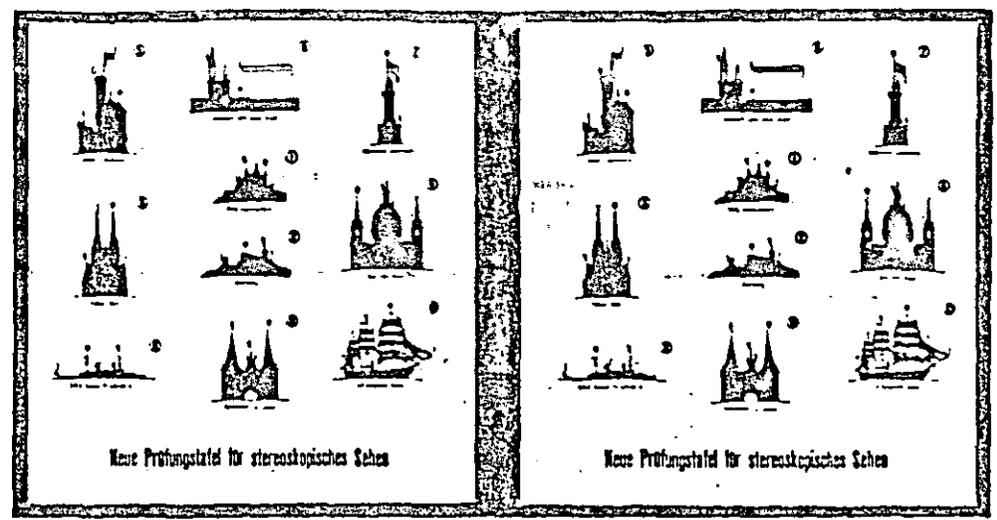


Este sencillo instrumento facilita la observación tridimensional al dirigir la visión de cada ojo hacia la respectiva fotografía del par. Además la imagen tridimensional es mas clara porque los lentes captan una mayor gama de rayos provenientes de cada punto de las fotografías y amplifican las imágenes. Se les denomina estereoscopios de bolsillo porque sus patas se pueden doblar de tal manera que se pueden llevar facilmente en los bolsillos. La distancia entre las lentes se puede ajustar a la separación interpupilar del observador. Son muy usados para fotointerpretación en el campo, sin embargo, tienen la desventaja de que los pares fotográficos deben de ser de un formato pequeño (los lados no pueden ser mayores que la base de observación), como se puede apreciar en los ejercicios del inciso 5.6.

Para observar fotografías aéreas con un formato de 23 cm por lado y un traslape frontal del 60% mediante el estereoscopio de espejos es necesario levantar la orilla de una de las fotos del par para hacer visibles los puntos homólogos por observar. Este inconveniente se puede superar ampliando la base de observación, lo cual es posible con el estereoscopio de espejos, el cual se describe en el inciso 5.7.

ESPBOEYVESOD  
 PSATBLPMGMID  
 FEMLENMSENTS  
 MTQHOGIPMMTF  
 YUESGJGAZGJP  
 BGSOPFSEFTFM  
 OTHPZPRPOFPV  
 JTCPPAPRGHGT  
 FLTSFLPTANTO  
 OGMROAPPHYM  
 FBERPFLAEYJL  
 GOECPHEAZGAZ

ESPBOEYVESOD  
 PSATRLPMGMID  
 FEMLENMSENTS  
 MTQHOGIPMMTF  
 YUESGJGAZGJP  
 BGSOPFSEFTFM  
 OTHPZPRPOFPV  
 JTCPPAPRGHGT  
 FLTSFLPTANTO  
 OGMROAPPHYM  
 FBERPFLAEYJL  
 GOECPHEAZGAZ



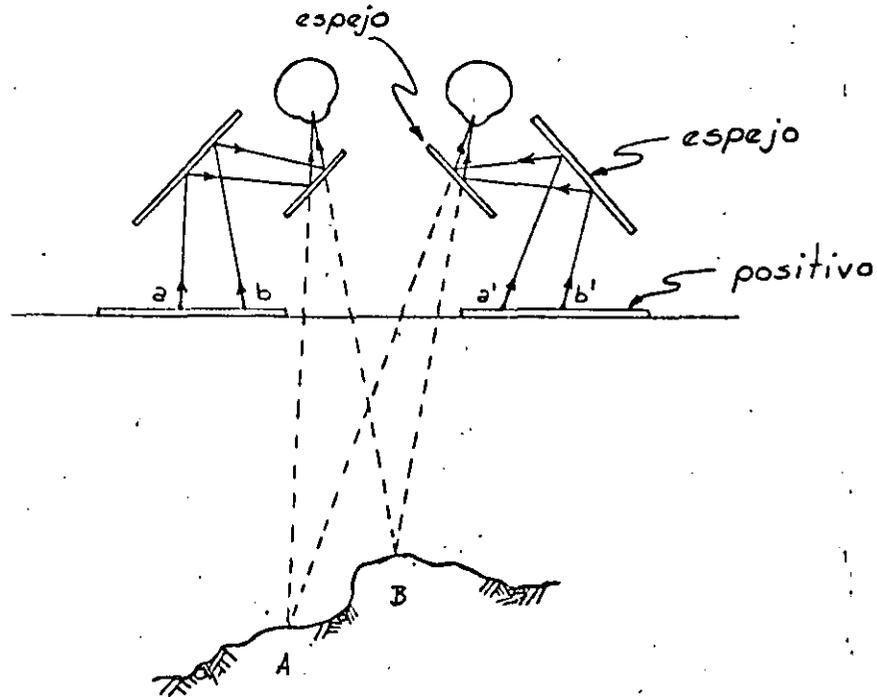
- 1 ○
- 2 X
- 3 ▽
- 4 K
- 5 —————→ H
- 6 + \* (b)
- 7 ↙
- 8 □

- 9 ————→ ↓
- 10 □
- 11 ▨ ▩ = = C
- 12 ▨ +
- 13 + Ms
- 14 (b)
- 15 ↙
- 16 λ

### 1.7 Estereoscopio de espejos.

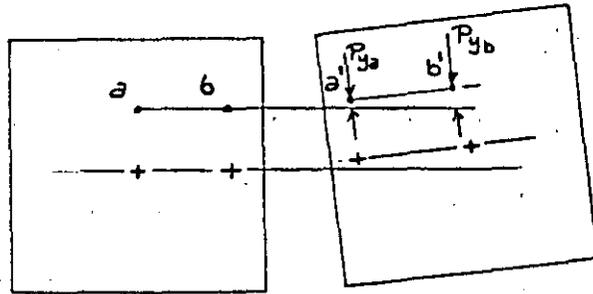
El que primero concibió la idea del estereoscopio de espejos fue Wheatstone en 1838, pero el que lo desarrollo en forma práctica fue -- Helmholtz en 1857.

El estereoscopio de espejos amplifica la base de observación, lo que nos permite separar las fotografías en observación, de tal manera que podemos observar todo el modelo simultáneamente. El principio básico de operación de este estereoscopio se ilustra en el siguiente diagrama:



Algunos estereoscopios de espejos vienen adaptados con binoculares, con los cuales se pueden amplificar las imágenes observadas varias veces. Naturalmente que al amplificar las imágenes no se puede ver todo el modelo simultáneamente.

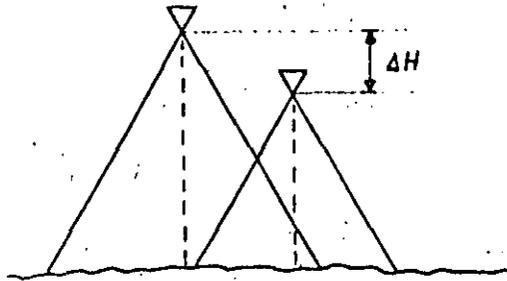
mos observando no esta alineado con respecto a la línea de vuelo (fig. 1)



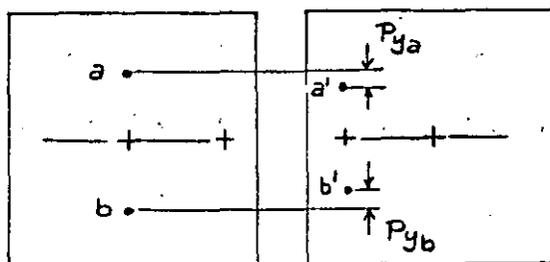
Esto se corrige marcando la línea de vuelo en cada fotografía y alineandolas mediante giro y desplazamiento de una de ellas.

Una paralaje en "y" similar se origina si la línea que une los centros de las lentes de observación del estereoscopio de espejos no es paralela a la línea de vuelo.

Si al tomar las fotografías la altura de vuelo fue diferente, (fig )

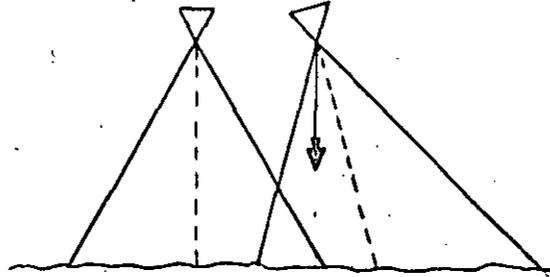


La escala en ambas fotografías es distinta y los puntos extremos (a, b) de una recta se verían en ambas fotografías como se muestra en la fig

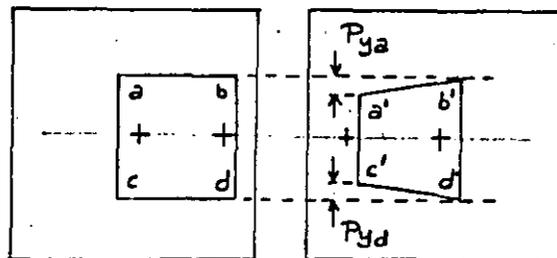


Las distancias  $P_{ya}$  y  $P_{yb}$  son las paralajes en y para los puntos extremos de la recta. Para eliminar la paralaje en el punto a es necesario mover la foto derecha hacia arriba ó la foto izquierda hacia abajo. Al hacer esto la paralaje "y" en el punto b se incrementa al doble y por lo tanto lo más probable es que se pierda la visión estereoscópica en esa zona. O sea que podemos ver estereoscópicamente la zona alrededor -- del punto a ó alrededor del punto b pero no las dos zonas simultáneamente.

La paralaje en "y" también se origina, si al tomar las fotografías alguna de ellas no fue vertical (fig. 2).



La paralaje en "y" que se origina se puede apreciar en la siguiente figura:



La paralaje no nada más existe para los puntos a, c marcados en la figura anterior, sino para todos los puntos a lo largo de las rectas  $\overline{ac}$   $\overline{ab}$  y  $\overline{cd}$ .

1.10 Estereoscopia por colores complementarios.

La estereoscopia artificial también se puede lograr mediante el uso de un filtro rojo y otro azul - verde, según los experimentos de -- Rollmann en 1853. El método consiste en imprimir una de las fotografías del par en rojo y sobreponerle la impresión de la otra fotografía del par en azul - verde, de tal manera que la fotografía resultante es una mezcla de ambas. Al observar esa fotografía resultante con unos anteojos llamados anaglifos (en los cuales una de las lentes es roja y la otra azul-verde) volvemos a separar los componentes de la fotografía mezcla por medios ópticos. Lo que sucede es que por la lente roja nada más se puede percibir la fotografía impresa en azul - verde y por la lente azul - verde nada más se percibe la fotografía impresa en rojo o sea que al ver con un ojo una sola fotografía y con el otro la otra fotografía nuestro cerebro percibe el modelo estereo que ilusoriamente se forma sobre las fotografías observadas.

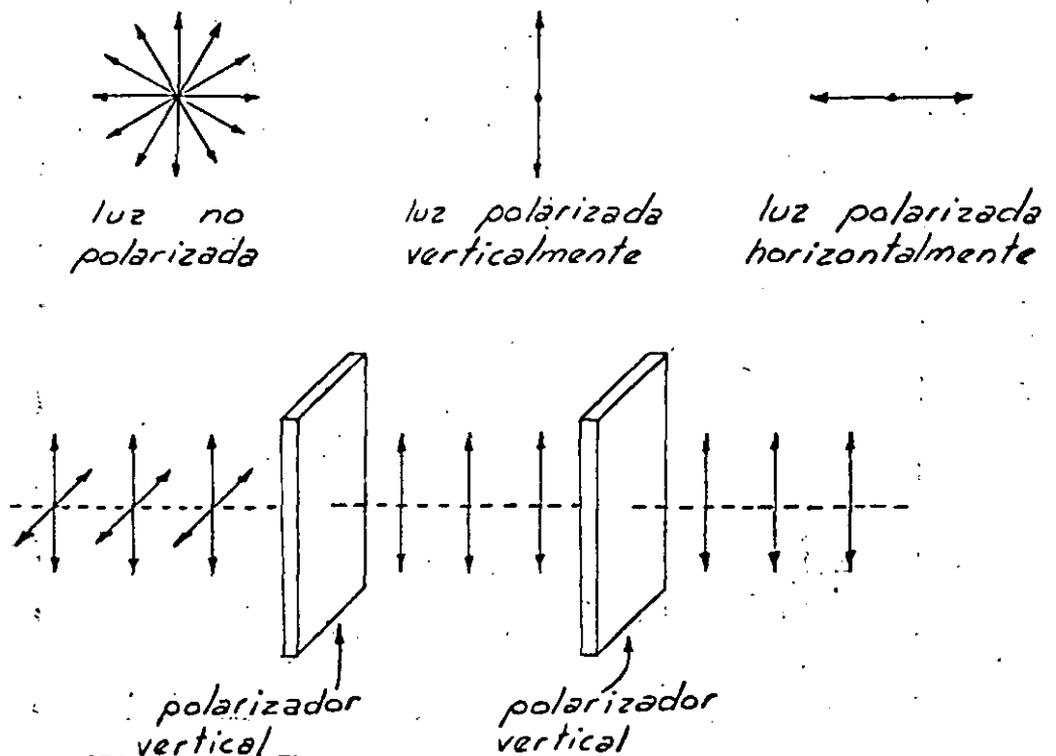
En 1858 d'Almeida demostró que se logra el mismo efecto si en vez de imprimir las fotografías, proyectamos las dos fotografías en blanco y negro sobreponiendo las proyecciones pero anteponiéndole a un proyector un filtro rojo y al otro un filtro azul-verde. Si las dos imágenes superpuestas las observamos con anaglifos también percibimos un modelo tridimensional.

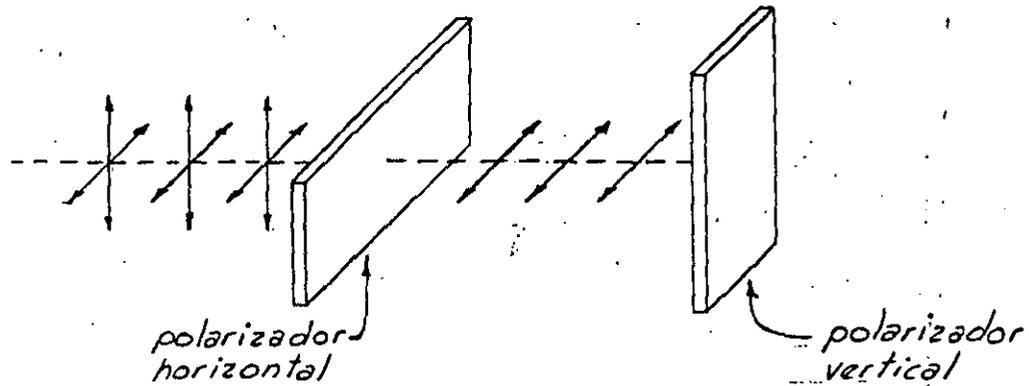
En ambos casos el modelo tridimensional formado es en blanco y negro debido a que los colores de los filtros de proyección o impresión y los colores usados en el anaglifo se complementan. Es importante --

que los tonos y colores de los filtros de proyección o impresión, sean -- iguales a los de observación porque si no, no se forma un modelo tridimensional nítido y esto ocasiona molestias al observar.

1.11 Estereoscopia por luz polarizada.

Una de las ventajas de este método es que se pueden observar modelos tridimensionales en blanco y negro o en color. El método consiste en proyectar las fotografías del par, con luz polarizada lineal de tal manera que la dirección de polarización de una fotografía sea vertical y la de la otra horizontal. La proyección-mezcla que se obtiene al sobreponer las proyecciones de ambas fotografías del par, se observa al través de los correspondientes filtros polarizados, con lo que se logra volver a separar las proyecciones de tal manera que, al mirar con cada ojo la correspondiente proyección, se forma un modelo tridimensional.





### 1.12 Estereoscopia por fotografías alternadas.

Este método permite la observación de modelos en blanco y negro o en colores, pero tiene la ventaja de que al no tener que proyectar y observar al través de filtros, no hay pérdidas de luz y por lo tanto el modelo se ve más luminoso y claro.

El método consiste en proyectar la fotografía izquierda de un par mientras se obstruye la proyección de la fotografía derecha y luego se proyecta la fotografía derecha y se obstruye la proyección de la fotografía izquierda. El alternado de las proyecciones se hace a gran velocidad, por medio de una placa giratorio o de persianas que se abren y cierran y estos movimientos están sincronizados con un sistema de observación que también tiene una placa giratoria, de tal manera que cuando se proyecta la foto izquierda la vemos con un solo ojo, y cuando se proyecta la foto derecha la vemos con el otro ojo.

El período de alternado es tan pequeño que antes de que se alcance a borrar la imagen en la retina de cada ojo volvemos a ver las fotografías o sea que aunque la foto izquierda y derecha se están proyectando alternadamente, nosotros no percibimos esas alternaciones y

vemos la foto izquierda con un ojo en forma continua y la foto derecha también en forma continua de tal manera que se forma un modelo tridi mensional.

2. PARALAJE ESTEREOSCOPICO.

2.1 Definición.

2.2 Métodos monoscópicos para medir paralajes.

2.3 Marca flotante y barra de paralajes.

2.4 Método estereoscópico para medir paralajes.

2.5 Ecuaciones de paralaje.

2.6 Cálculo de la base aérea.

2.7 Cálculo de la altura de vuelo.

## 2.1 Definición.

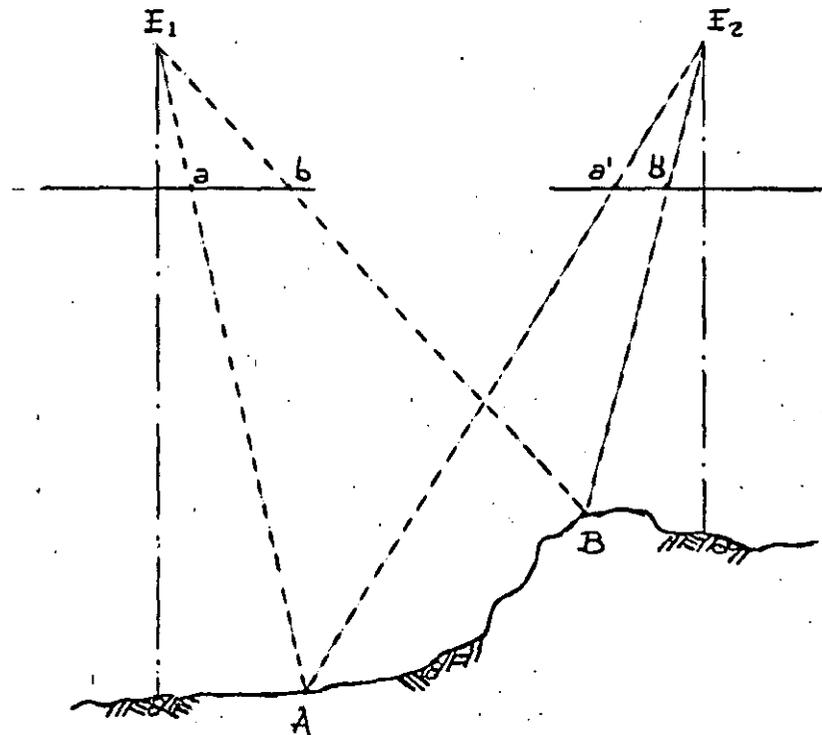
Paralaje es la diferencia entre las posiciones aparentes de un punto, según la posición desde donde se observa.

En otras palabras, es el desplazamiento aparente de un objeto con respecto a un marco de referencia cuando se cambia la posición de observación. Los conceptos anteriores los podemos entender mejor si sostenemos un lápiz frente a nuestros ojos y si a la vez que miramos el lápiz movemos nuestra cabeza, notamos un desplazamiento aparente del lápiz con respecto a los objetos que se encuentran detrás del lápiz como pueden ser el apagador o el marco de la puerta y ventana de la pared de enfrente. El desplazamiento aparente del lápiz se incrementa a medida que acercamos el lápiz a nuestros ojos y disminuye si lo alejamos de nuestra vista.

Otra ejemplificación de paralaje es si observamos por la ventana de un camión en movimiento, notamos un desplazamiento aparente de los árboles y postes con respecto al marco de la ventana. Los postes cercanos a la ventana desaparecen del marco de la ventana más rápidamente que los árboles que se encuentran a mayor distancia. Esto se debe a que entre más cerca estén los objetos del punto de observación mayor es su paralaje.

Al tomar fotografías aéreas en sucesión registramos la posición de los objetos fotografiados en cada fotografía. Si las fotografías las tomamos con traslape al analizar dos fotografías consecutivas nos damos cuenta que un punto A aparece en ambas fotografías pero en cada fotografía ocupa un lugar diferente con respecto al marco de cada fotografía. Ese desplazamiento aparente del punto a lo largo de la línea de vuelo se denomina para-

laje estereoscópico, paralaje  $x$  o simplemente paralaje.

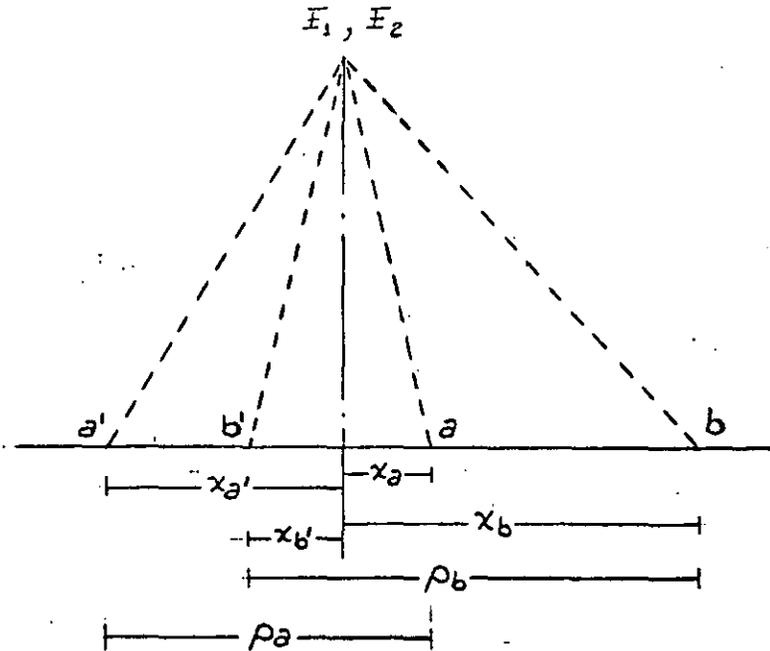


La magnitud de la paralaje para cualquier punto  $a$  la podemos determinar mediante la siguiente relación:

$$P_a = x_a - x_{a'}$$

Es importante recordar que las abscisas deben medirse en el sistema coordenado definido por la línea de vuelo y teniendo como origen el centro de la fotografía. En la fórmula anterior se tiene que tomar en cuenta el signo de las fotocoordenadas.

La magnitud de la paralaje de los puntos A y B en la figura se puede apreciar mejor si sobreponemos las fotografías. (ver fig. 2) Nótese que la paralaje de B ( $p_b$ ) es mayor que la paralaje de A ( $p_a$ ). Esto se debe a que el punto B está más cerca de la cámara que A. O sea que la magnitud de la paralaje de los puntos está directamente relacionada con



la distancia de los puntos a la cámara, de tal manera que con las diferencias de paralaje entre puntos podremos calcular las diferencias de elevación de los puntos como se verá en el inciso 1.6.

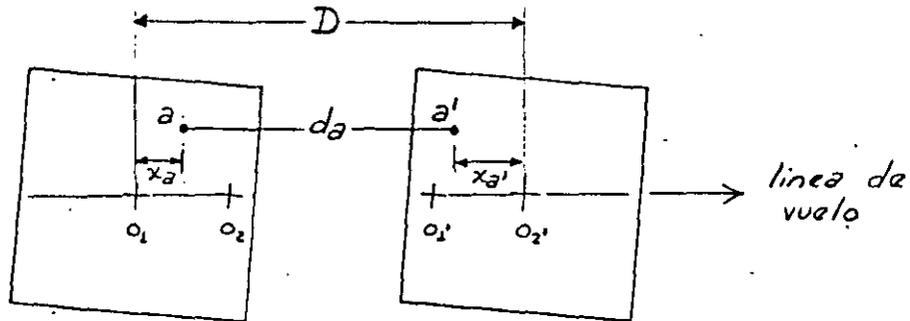
## 2.2 Métodos monoscópicos para medir paralajes.

El método más sencillo es marcar la línea de vuelo uniendo el punto principal y el punto conjugado en ambas fotografías. Trazando una perpendicular a la línea de vuelo que pase por el origen en cada fotografía. quedan definidos los sistemas coordenados sobre los cuales medimos directamente con un escalímetro las abscisas de los puntos cuyas paralajes se desean. Con este método se requieren dos mediciones para calcular la paralaje de cada punto.

Otro método monoscópico consiste en fijar las dos fotografías con cinta adhesiva en las esquinas, de tal manera que las líneas de vuelo quedan alineadas (ver fig). Se mide la distancia (D) entre los puntos principales de cada fotografía. También se mide la distancia (da) entre los puntos

homólogos  $a, a'$  y los valores medidos se substituyen en la fórmula

$$p_a = D - d_a$$



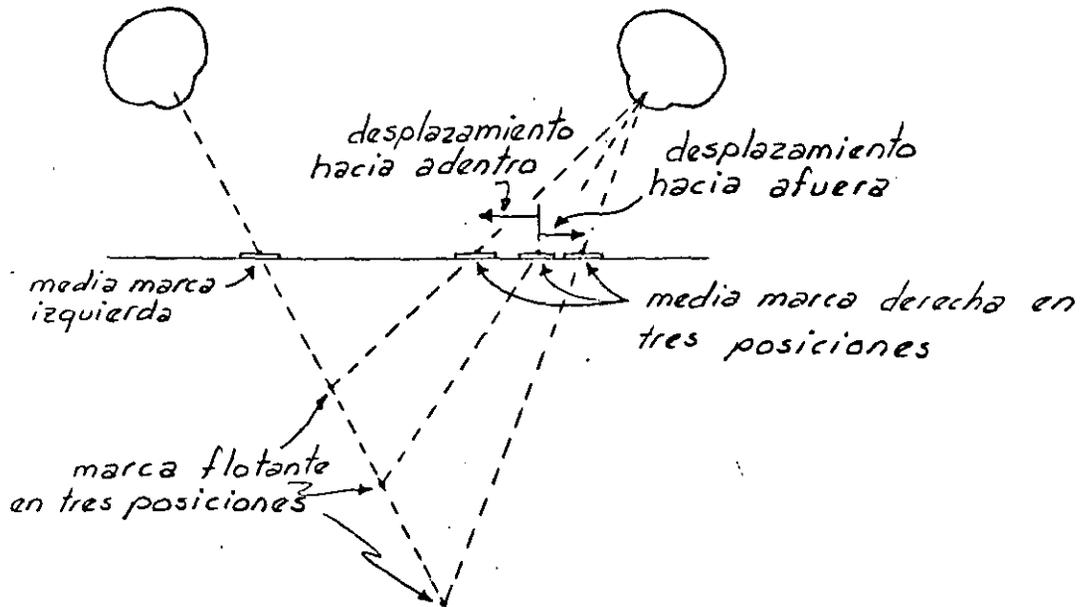
La ventaja de este método consiste en que nada más se requiere una medición por punto para calcular la paralaje.

### 2.3 Marca flotante y barra de paralajes.

Como ya se explicó en capítulos anteriores, si orientamos adecuadamente dos fotografías verticales con traslape, podemos observar un modelo tridimensional con la ayuda de un estereoscopio. Sin embargo, en el modelo ilusoriamente formado no podemos señalar detalles porque para ello necesitaríamos un índice que pudieramos mover tridimensionalmente en el modelo. Este índice o marca flotante se puede lograr de la siguiente manera. Si en una mesa colocamos dos pedazos de papel sobre los cuales previamente dibujamos un punto, al mirar con el ojo derecho uno de los puntos y con el ojo izquierdo el otro, no percibimos dos puntos sino un solo punto imaginario en el espacio tridimensional.

Si uno de los papeles sobre la mesa experimenta un pequeño despla

zamiento hacia afuera (ver fig), al estar nosotros observando con cada ojo uno de los puntos notaremos que el punto tridimensional se aleja de nosotros hacia abajo. En cambio si movemos ligeramente uno de los papeles hacia adentro (juntándolos) el punto tridimensional se acerca a nosotros.



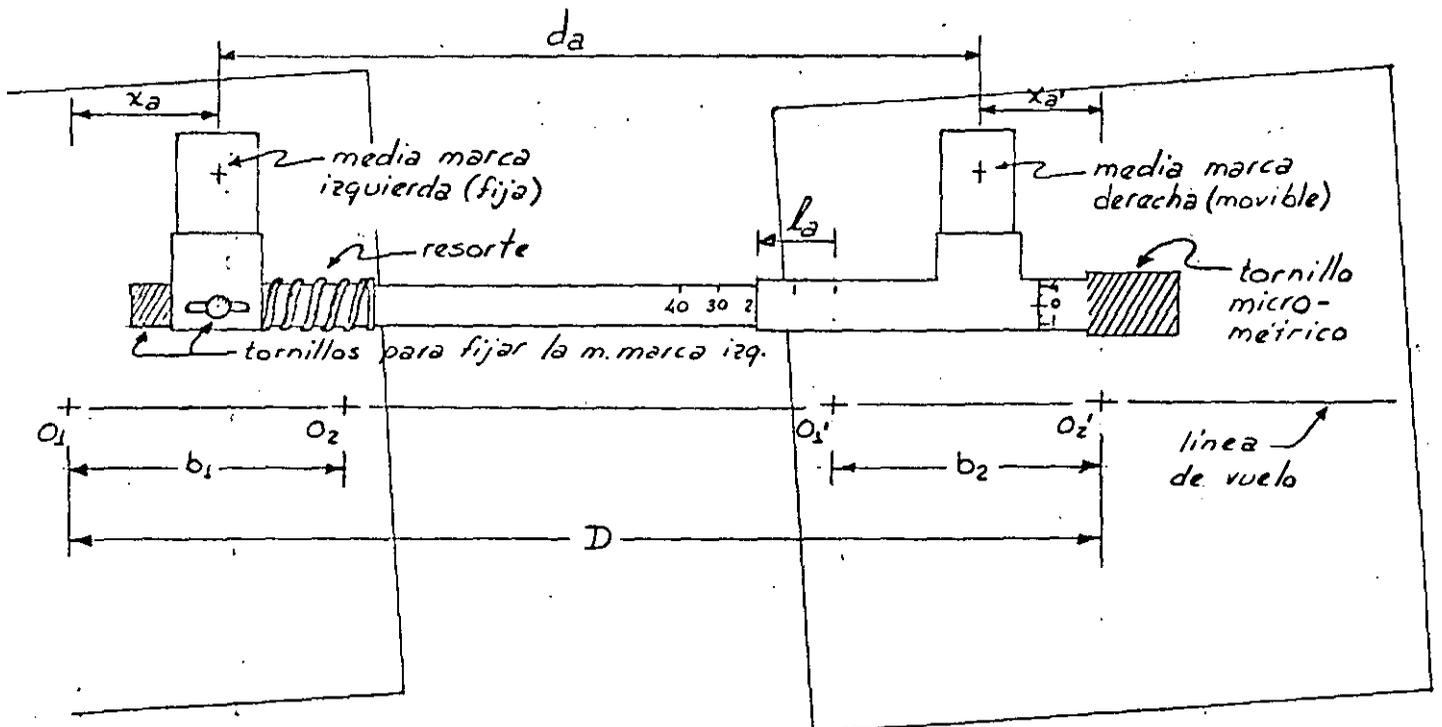
Si los puntos que marcamos en los dos pedazos de papel los marcamos en plástico transparente o sobre vidrio y los colocamos sobre las fotografías de un par orientado, al observar con un estereoscopio miramos simultáneamente el modelo y la marca flotante. Es necesario que los puntos sobre el material transparente estén alineados con respecto a la línea de vuelo o a una línea paralela a la línea de vuelo para que los puntos no tengan paralaje en y. Al juntar o separar los puntos sobre las fotografías veremos que la marca flotante, que originan esos puntos, sube o baja en el modelo debido a que la paralaje en x de la marca flotante la aumentamos o disminuimos al juntar o separar los puntos sobre las fotografías.

Si los vidrios sobre los que marcamos los puntos los fijamos a una

barra que mediante un tornillo permita juntar o separar los vidrios, tendremos lo que se llama una barra de paralajes. Esta barra de paralajes nos permite medir la paralaje de puntos estereoscópicamente como se explica a continuación.

#### 2.4 Método estereoscópico para medir paralajes.

Para medir paralajes estereoscópicamente primero se orienta el par fotográfico para poder observar el modelo tridimensional. Luego se coloca la barra de paralajes sobre las fotografías. Estando la lectura de la barra a la mitad de las graduaciones, la media marca fija (izquierda) de la barra se mueve hasta que el punto flotante se encuentre a una altura promedio en el terreno. Luego se fija la media marca izquierda, la cual permanecerá así para todas las mediciones en ese modelo. Con el tornillo micrométrico se pueden juntar o separar las medias marcas con lo que podemos posicionar la marca flotante en cualquier punto del modelo.



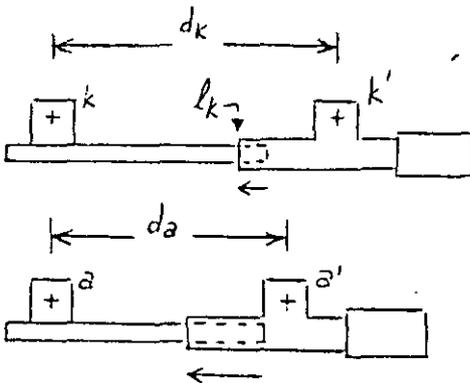
La fórmula para calcular la paralaje de un punto es:

$$p_a = x_a - x_a', \quad (1)$$

De acuerdo al dibujo esa fórmula la podemos expresar como:

$$p_a = D - d_a \quad (2)$$

La distancia  $D$  se mide directamente, sin embargo para poder conocer  $d_a$  en función a la lectura ( $l_a$ ) de la barra de paralajes, primero se mide la distancia ( $d_K$ ) entre las medias marcas estando el punto flotante sobre cualquier punto ( $K$ ) del modelo y se anota la lectura ( $l_K$ ) de la barra.



Al colocar el punto flotante sobre el punto (a) del modelo la distancia  $d_K$  se modifica al igual que la lectura ( $l_K$ ) de la barra.

La magnitud de la modificación en la distancia  $K$  se obtiene así:

$$\text{modificación en } d_K = d_K - d_a \quad (3)$$

Pero esa misma modificación la podemos calcular así:

$$\text{modificación en } K = -(l_K - l_a) = l_a - l_K \quad (4)$$

igualando la expresión (3) y (4)

$$d_K - d_a = l_a - l_K$$

despejando  $d_a$

$$d_a = d_K + l_K - l_a \quad (5)$$

substituyendo en (2)

$$p_a = D - d_K - l_K + l_a$$

$$p_a = (D - d_K - l_K) + l_a \quad (6)$$

En la fórmula anterior los 3 primeros valores son constantes y por lo tanto la fórmula 6 la podemos reescribir, como:

$$P_a = C + l_a \quad (7)$$

En donde  $p_a$  es la paralaje del punto a, C es la constante de la barra de paralajes para esa puesta y  $l_a$  es la lectura de la barra estando el punto flotante sobre el punto a del modelo. La constante C en realidad se conoce por mediciones monoscópicas.

Una vez conocida la constante C se puede calcular la paralaje de cualquier punto n con solo sumarle a la constante C la lectura de la barra para cada punto n.

$$P_n = C + l_n \quad (8)$$

La constante C es la misma para todos los puntos en ese modelo -- siempre y cuando no se muevan las fotografías.

La constante C se puede calcular con la expresión:

$$C = D - d_K - l_K \quad (9)$$

en donde D es la distancia entre puntos principales,  $d_K$  es la distancia entre las medias marcas estando el punto flotante en cualquier punto K del modelo y  $l_K$  es la lectura en la barra para esa distancia  $d_K$ .

La constante C también se puede calcular de la fórmula 8.

$$C = P_n - l_n \quad (10)$$

Para usar la fórmula anterior es necesario conocer la paralaje de un punto, La paralaje que se puede conocer es la de los puntos principales de cada foto del par, ya que la paralaje del punto principal de la primera foto es la distancia  $b_2$  (ver figura).

La fórmula 10 también es útil cuando se interrumpen las mediciones y al reanudarlas ya nada más colocamos la marca flotante en un punto cuya paralaje ya habían medido. Se lee la lectura para ese punto y se calcula la nueva C para esta puesta. Así ya no es necesario volver a hacer ninguna medición monoscópica.

$$P_{o1} = x_{o1} - x_{o1}'$$

$$P_{o1} = 0 - x_{o1}'$$

$$P_{o1} = b_2$$

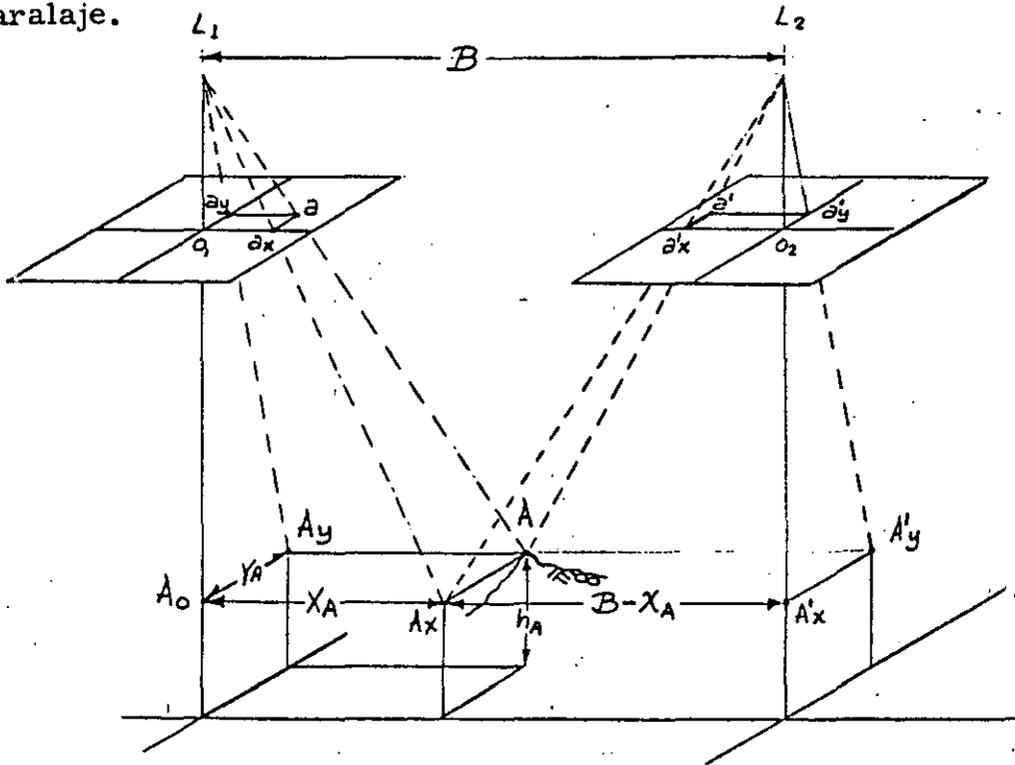
Esa distancia  $b_2$  se mide directamente de la fotografía y la lectura de la barra se obtiene después de poner la marca flotante en el punto  $o_1$  del modelo.

Estos valores se substituyen en la fórmula 10 obteniéndose así la constante de la barra. Si se sigue este procedimiento es recomendable calcular la constante usando la paralaje del punto principal de la la. foto  $C_1 = b_2 - l_{o1}$  y hacer los mismos cálculos con la paralaje del punto principal de la segunda fotografía  $C_2 = b_1 - l_{o2}$ . La constante que se obtiene en cada caso es ligeramente diferente la una de la otra y la constante que se use para calcular las paralajes de todos los demás puntos será el promedio de ambas.

$$C = \frac{C_1 + C_2}{2}$$

2.5 Ecuaciones de Paralaje.

La siguiente figura ilustra la geometría de un par de fotografías verticales con traslaje y la cual nos servirá para deducir las ecuaciones de paralaje.



De los triángulos semejantes  $L_1 o_1 y_a$  y  $L_1 A_o A_y$

$$\frac{Y_A}{H - h_A} = \frac{y_a}{f}$$

$$Y_A = \frac{y_a}{f} (H - h_A) \quad \dots (1)$$

De los triángulos semejantes  $L_1 o_1 x_a$  y  $L_1 A_o A_x$

$$\frac{X_A}{H - h_A} = \frac{x_a}{f}$$

$$X_A = \frac{x_a}{f} (H - h_A) \quad \text{--- (2)}$$

De los triángulos semejantes  $L_2$  o' a'x y  $L_2$  A'o Ax

$$\frac{B - X_A}{H - h_A} = \frac{-x_{a'}}{f}$$

$$X_A = B + \frac{x_{a'}}{f} (H - h_A) \quad \text{--- (3)}$$

Igualando las ecuaciones 2 y 3

$$\frac{x_a}{f} (H - h_A) = B + \frac{x_{a'}}{f} (H - h_A)$$

despejando  $h_A$

$$h_A = H - \frac{B_f}{x_a - x_{a'}}$$

Substituyendo  $p_a$  por  $x_a - x_{a'}$

$$h_A = H - \frac{B_f}{p_a} \quad \text{--- (4)}$$

Substituyendo 4 en 2 y despejando  $X_A$

$$X_A = B \frac{x_a}{p_a} \quad \text{--- (5)}$$

Substituyendo 4 en 1 y despejando  $Y_A$

$$Y_A = B \frac{y_a}{p_a} \quad \text{--- (6)}$$

Estas fórmulas son de las más importantes ya que la 4 nos dá la altimetría y la 5 y 6 nos dá la planimetría que es la información necesaria para elaborar mapas topográficos.

Las ecuaciones 4, 5 y 6 se conocen como ecuaciones de paralaje y son de suma utilidad. Sin embargo, para poder usarlas es necesario conocer la base aérea (B) y la altura de vuelo (H), las cuales se pueden calcular si se cuenta con el control terrestre necesario (un mínimo de dos puntos de control).

2.6 Cálculo de la base aérea.

Si se conocen dos puntos de control, se puede calcular la distancia horizontal entre dichos puntos mediante la siguiente fórmula:

$$\overline{AB} = \left[ (X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 \right]^{1/2} \quad \text{--- (7)}$$

Substituyendo las ecuaciones 5 y 6 en la ecuación 7

$$\overline{AB} = \left[ \left( \frac{Bx_b}{P_b} - \frac{Bx_a}{P_a} \right)^2 + \left( \frac{By_b}{P_b} - \frac{By_a}{P_a} \right)^2 \right]^{1/2}$$

despejando B

$$B = \frac{\overline{AB}}{\left[ \left( \frac{x_b}{P_b} - \frac{x_a}{P_a} \right)^2 + \left( \frac{y_b}{P_b} - \frac{y_a}{P_a} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad \text{--- (8)}$$

La  $x_a$   $y_a$   $x_b$   $y_b$  se miden en la foto izquierda. Para calcular la base con este método es indispensable medir una distancia en el terreno. Esta distancia debe estar dentro del modelo y ser lo más largo posible.

2.7 Cálculo de la altura de vuelo.

La altura de vuelo se puede calcular mediante la fórmula 4, siempre y cuando se conozca la base aérea y se cuente con un punto de control vertical.

Para cálculos poco precisos se puede usar la lectura del altímetro

que normalmente aparece en el margen de las fotografías.

Si en la fotografía aparece una distancia conocida horizontal, por ejemplo una cancha de fútbol, una alberca, etc. se puede usar la siguiente relación.

$$S = \frac{ab}{AB} = \frac{f}{H}$$

La altura de vuelo sería del terreno al centro de exposición. Sin embargo, si se conoce la elevación de uno de los puntos extremos se puede usar la relación

$$S = \frac{ab}{AB} = \frac{f}{H - h}$$

con lo cual se tendría la altura de vuelo sobre el plano de referencia.

Para usar las dos fórmulas anteriores es necesario que los puntos extremos de la recta considerada tengan la misma elevación, sin embargo, se pueden obtener resultados aceptables si los puntos extremos tienen diferentes elevaciones siempre y cuando los dos puntos sean equidistantes del punto principal.

Si se conocen dos puntos de control la distancia horizontal entre los mismos se puede calcular mediante la fórmula

$$\overline{AB}^2 = (X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 \quad (8)$$

Substituyendo en la fórmula anterior las ecuaciones deducidas en

el inciso 4. 5 y que son:

$$X_A = \frac{x_a}{f} (H - h_A) \quad ; \quad X_B = \frac{x_b}{f} (H - h_B)$$

$$Y_A = \frac{y_a}{f} (H - h_A) \quad ; \quad Y_B = \frac{y_b}{f} (H - h_B)$$

tendremos

$$\overline{AB}^2 = \left( \frac{x_b}{f} (H - h_B) - \frac{x_a}{f} (H - h_A) \right)^2 + \left( \frac{y_b}{f} (H - h_B) - \frac{y_a}{f} (H - h_A) \right)^2 \quad (9)$$

Simplificando llegamos a una ecuación de 2o. grado de la forma-

$aH^2 + bH + c = 0$ , en donde la única incógnita es H.

$$\left[ \left( \frac{x_b - x_a}{f} \right)^2 + \left( \frac{y_b - y_a}{f} \right)^2 \right] H^2 - \left[ 2 \left( \frac{x_b - x_a}{f} \right) \left( \frac{x_b h_B - x_a h_A}{f} \right) + 2 \left( \frac{y_b - y_a}{f} \right) \left( \frac{y_b h_B - y_a h_A}{f} \right) \right] H + \left( \frac{x_b h_B - x_a h_A}{f} \right)^2 + \left( \frac{y_b h_B - y_a h_A}{f} \right)^2 - \overline{AB}^2 = 0 \quad (10)$$

Aplicando la fórmula para ecuaciones de 2o. grado  $H = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

se obtiene la solución directa para H.

Sin embargo, substituir valores en la ecuación 10 y resolverla puede ser más tardado que, resolver la ecuación 9 por aproximaciones sucesivas.

En el método de aproximaciones sucesivas primero se calcula una altura aproximada substituyendo la distancia  $\overline{ab}$  medida en la foto y cuya distancia - terrestre también se conoce en la fórmula

$$\frac{f}{H \text{ aprox} - h_{AB}} = \frac{ab}{AB}$$

En donde  $h_{AB}$  es la altura promedio de los puntos A, B.

El valor aproximado de la altura (H aprox) que se obtiene se substituye en las fórmulas (considerando las alturas de cada punto)

$$X = \frac{H - h}{f} x$$

$$Y = \frac{H - h}{f} y$$

Para obtener las coordenadas  $X_A, Y_A, X_B, Y_B$  las cuales se substituyen en la fórmula 8, para obtener una distancia AB calculada, la cual se compara con la distancia AB medida. Si la diferencia entre la distancia AB medida y la distancia AB calculada no esta dentro de tolerancia se calcula una mejor aproximación de H con la siguiente relación

$$\frac{H - h_{AB}}{H \text{ aprox} - h_{AB}} = \frac{AB \text{ medida}}{AB \text{ calculada}}$$

$$H = \frac{AB \text{ m}}{AB \text{ c}} (H \text{ aprox} - h_{AB}) + h_{AB}$$

Con este nuevo valor de H se repite el proceso. Normalmente no se necesitan más de dos iteraciones para lograr una convergencia satisfactoria.



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

FOTOGRAMETRIA CON ESTEREOSCOPIO DE ESPEJOS  
Y BARRA DE PARALAJES  
(TEORIA Y PRACTICA )

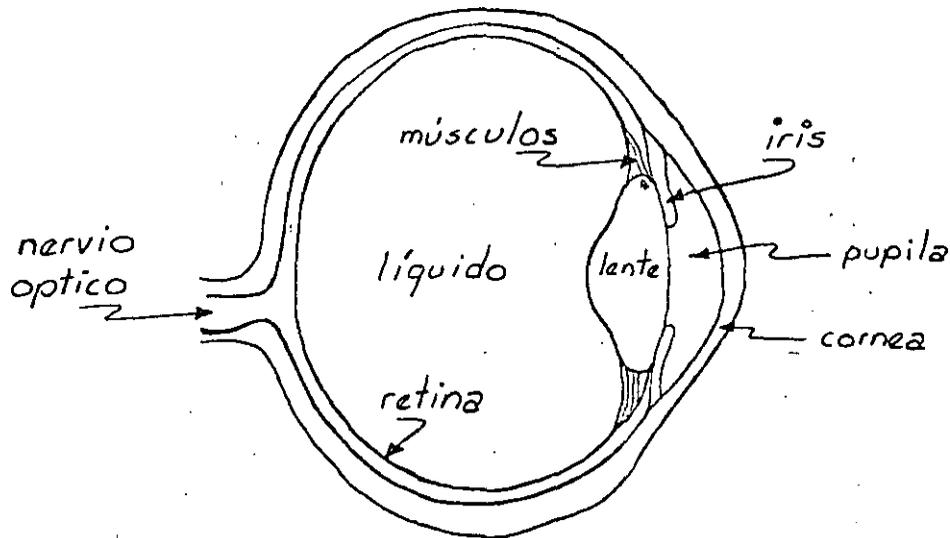
M.en C.Gualterio Luthe García

Mayo, 1985

1. ESTEREOSCOPIA.

- 1.1 El ojo humano.
- 1.2 Visión estereoscópica natural.
- 1.3 Percepción de profundidad con un ojo.
- 1.4 Visión estereoscópica con fotografías.
- 1.5 Estereoscopio de bolsillo.
- 1.6 Ejercicios para observación con el estereoscopio de bolsillo.
- 1.7 Estereoscopio de epsjos.
- 1.8 Paralaje en y.
- 1.9 Causas que originan la paralaje en y.
- 1.10 Estereoscopia por colores complementarios.
- 1.11 Estereoscopia por luz polarizada.
- 1.12 Estereoscopia por fotos alternadas.

### 1.1 El ojo humano.



En el ojo existe un sistema óptico y un sistema receptor. El sistema óptico consiste de una lente cristalina y del iris. La lente puede cambiar su forma para enfocar objetos lejanos y cercanos, y el iris tiene la propiedad de dilatarse o encogerse, con lo que se amplía o reduce la apertura circular de la lente, regulando así la luz que pasa por la lente.

El sistema receptor está integrado por la retina que es donde se forma la imagen. En la retina existen células diminutas que son muy sensibles a la luz y que están unidas al cerebro al través del nervio óptico.

### 1.2 Visión estereoscópica natural.

Todos los humanos con vista normal (dos ojos sanos), captamos el ambiente que nos rodea en 3 dimensiones, o sea nos damos cuenta de la profundidad, lo que nos permite juzgar las distancias relativas entre

los objetos que nos rodean para determinar que objetos se encuentran - más cerca de nosotros. Esto se debe a que al observar simultáneamente con los dos ojos (visión binocular) un cierto punto A (ver figura 1), hacemos que los ejes ópticos de nuestros ojos se intersecten en el punto A, formando el ángulo paraláctico  $\theta_A$ . Si observamos un punto B más alejado de nosotros que el punto A, el ángulo paraláctico  $\theta_B$ , será menor que  $\theta_A$ . Nuestro cerebro relaciona automáticamente la distancia  $d_A$ , con el ángulo  $\theta_A$  y la distancia  $d_B$  con el ángulo  $\theta_B$  y nosotros percibimos la distancia entre A y B como una diferencia entre los ángulos paralácticos.

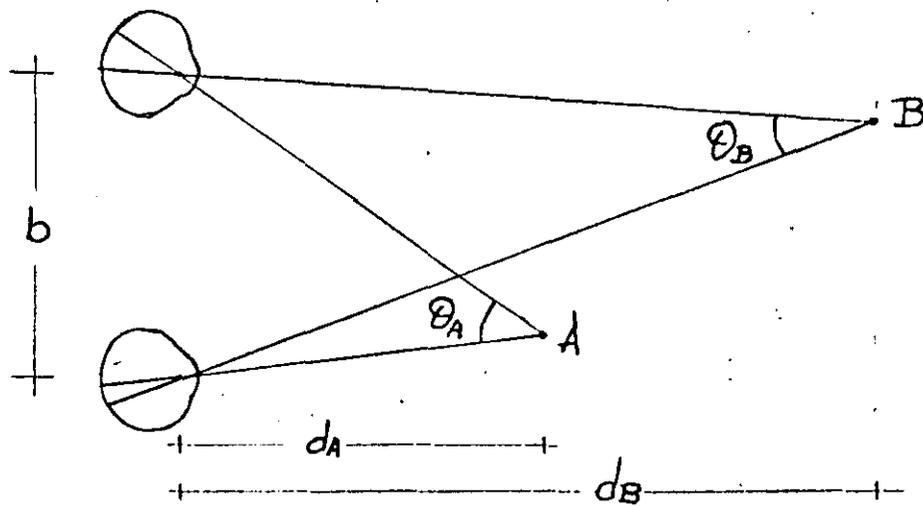


figura 1

La distancia entre los ojos derecho e izquierdo esta marcada en la figura 1 con la letra b y en la persona adulta promedio varía entre 63 y 69 mm. Esta distancia se denomina base ocular. En general las personas perciben la profundidad hasta una distancia máxima de 600m. En distancias mayores los ángulos paralácticos se vuelven muy pequeños y

nuestro cerebro no es capaz de discernir los cambios en los ángulos paralácticos, cuando estos son muy pequeños. Todo lo que se encuentre a una distancia mayor de 600 m. lo vemos en un solo plano. La mínima distancia a la que se percibe la profundidad es de 25 cm. aproximadamente. En distancias menores perdemos el enfoque de lo observado.

La condición para tener una visión estereoscópica es poder observar un mismo punto desde dos estaciones diferentes para que exista un ángulo paraláctico.

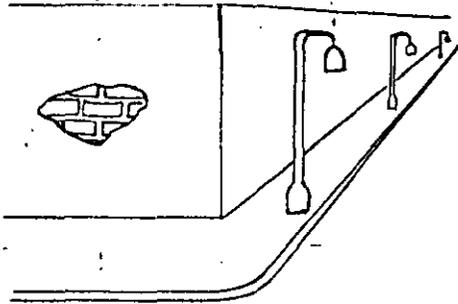
En los humanos las dos estaciones diferentes son los dos ojos, ya que en la retina de cada ojo se forma una imagen (independiente la una de la otra) del mismo objeto.

De la condición anterior podemos concluir que una persona tuerta no puede ver en 3 dimensiones, sino en 2 dimensiones o sea en un plano. Sin embargo, aún mirando con un solo ojo podemos razonar la distancia entre los objetos, como sigue:

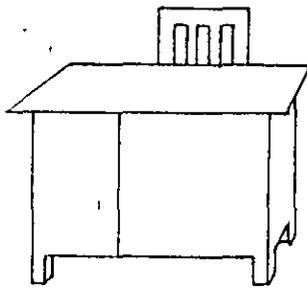
### 1.3 Percepción de profundidad con un ojo.

1. Relacionando tamaños de objetos conocidos o sea si sabemos que el objeto A es del mismo tamaño que el objeto B, pero el objeto A lo vemos más grande y claro que el objeto B, entonces concluimos que el objeto A se encuentra más cerca de nosotros que el objeto B, ya que debido a la perspectiva, a medida que se alejan los objetos de nosotros, parecen disminuir de tamaño y además pierden nitidez debido a la conta-

minación del aire.



2. Si un objeto A cubre parcialmente a un objeto B concluimos - que el objeto A esta más cerca de nosotros.

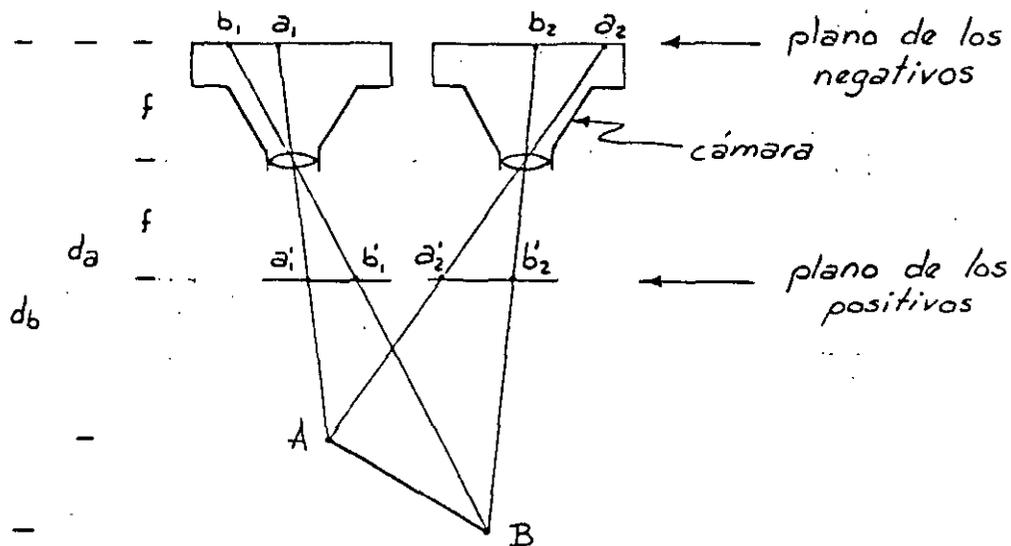


Razonamos que la silla esta detrás del escritorio porque el escritorio cubre a la silla parcialmente.

3. Mediante cambios de enfoque o sea: Si observamos dos objetos simultáneamente, estando uno de ellos más cerca de nosotros que el otro, al enfocar el objeto cercano (por ejemplo nuestro dedo), perdemos el enfoque del objeto lejano (por ejemplo un apagador) y viceversa, si enfocamos el objeto lejano perdemos el enfoque del objeto cercano.

#### 1.4 Visión Estereoscópica con fotografías.

Si imprimimos dos fotografías de un mismo objeto pero desde estaciones separadas, la imagen del objeto aparecerá en ambas fotografías.



Los puntos  $b_1, b_2$ , son puntos homólogos, lo mismo que los puntos  $a_1, a_2$ .

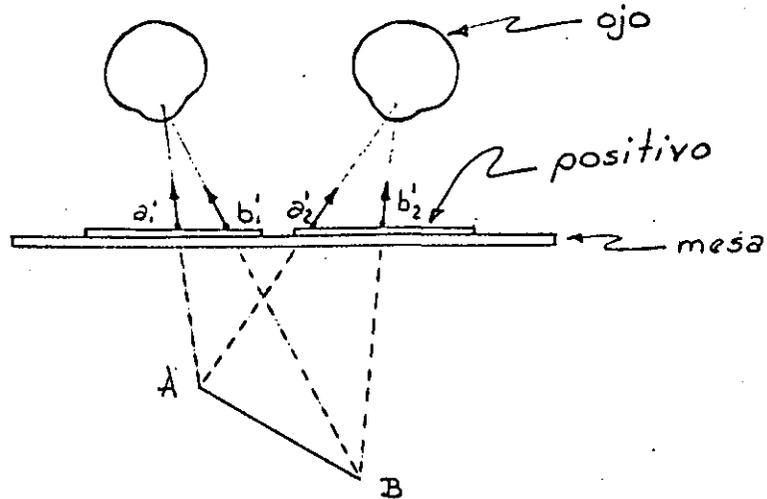
Nótese en la figura que la distancia  $\overline{b_1 a_1}$  y  $\overline{b_2 a_2}$  no son iguales. La diferencia de longitud se conoce como paralaje horizontal o paralaje en  $x$  o paralaje  $x$  ( $px$ )

$$Px = \overline{b_1 a_1} - \overline{b_2 a_2}$$

Esta paralaje, como se verá posteriormente, nos sirve para calcular las elevaciones de puntos del terreno con respecto a un plano de referencia, lo que nos permitirá conocer por ejemplo las alturas de edificios.

Si de los negativos obtenemos positivos y con el ojo izquierdo miramos exclusivamente el positivo izquierdo a la vez que con el ojo derecho miramos el positivo derecho, no vemos dos imágenes del objeto en un plano bidimensional, sino que vemos una sola imagen tridimensional que

ilusoriamente se forma debajo de las fotografías.



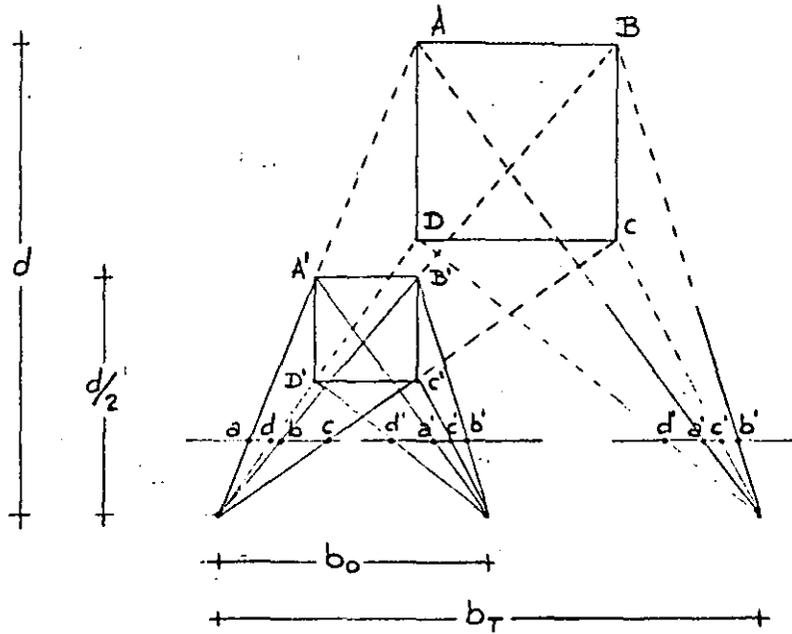
Esto se debe a que nuestro cerebro prolonga por costumbre los rayos que parten de puntos homólogos, hasta su intersección, lo que ocasiona que en vez de ver dos puntos bidimensionalmente veamos uno solo pero tridimensional.

Las condiciones para que la imagen este a la misma escala que el objeto son:

1. La separación de las cámaras al tomar las fotos (base de toma) debe ser igual a la separación interpupilar del observador (base ocular).

2. La distancia de observación ( $d_o$ ) debe ser igual a la distancia focal ( $f$ ) de la lente con que se tomaron las fotografías.

Si alteramos algunas de las dos o ambas condiciones sucede lo siguiente:



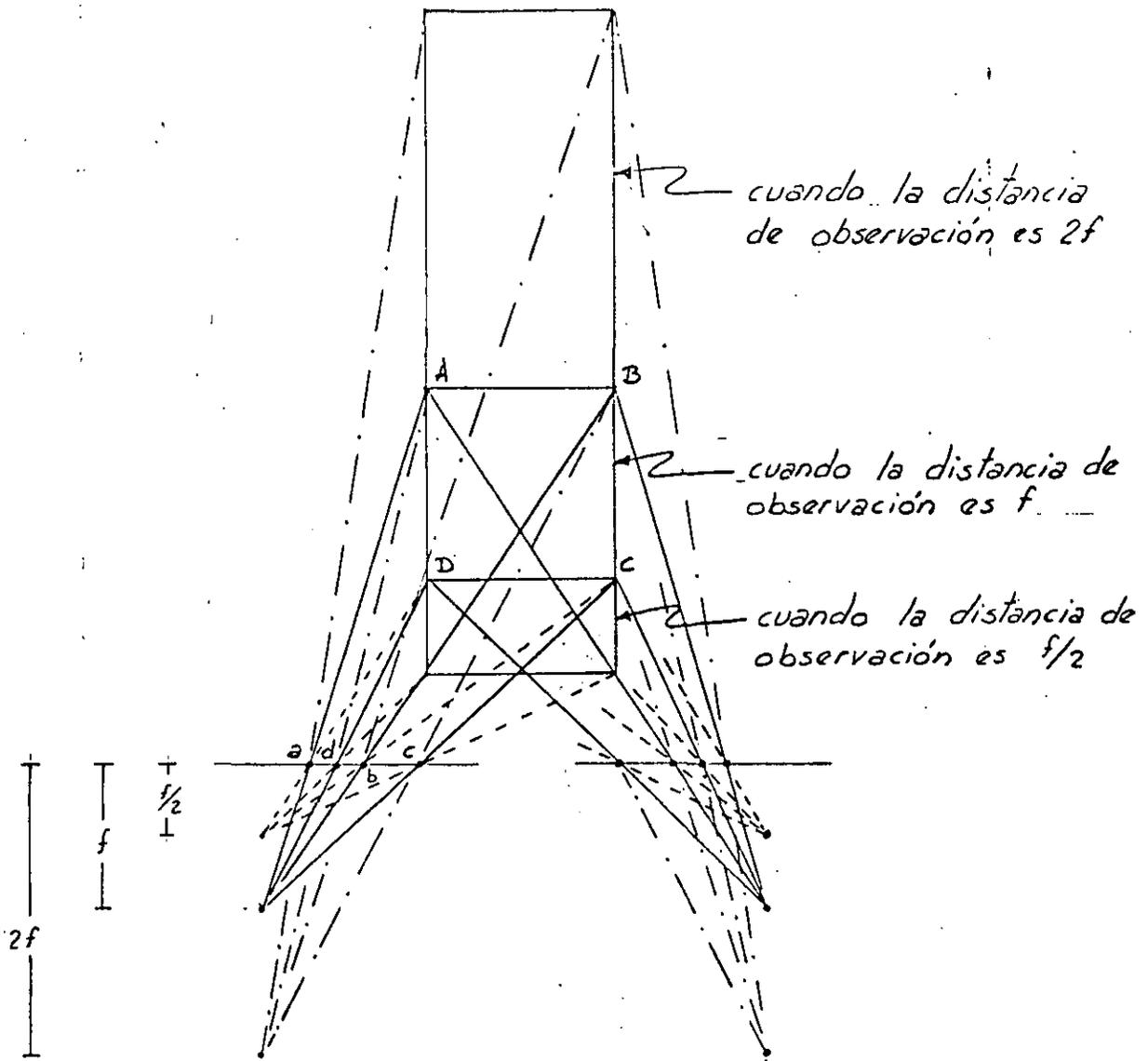
Supongamos que la base de toma es  $b_T$  y que la base de observación ( $b_o$ ), la reducimos a la mitad. Esto ocasiona que el modelo tenga la mitad del tamaño que el original, pero a su vez lo miramos más cerca y más nítido.

La reducción de la base esta dada por la siguiente relación:

$$\frac{b_o}{b_T} = \frac{1}{n}$$

Esta es la misma relación con que se acerca la imagen a la base.

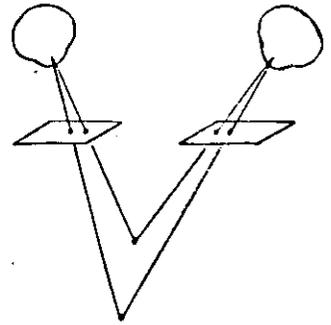
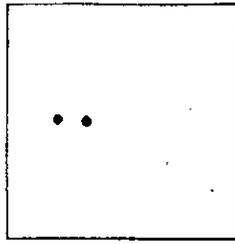
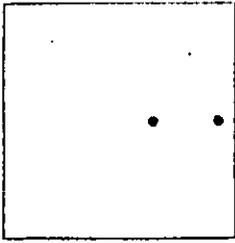
Al mirarlo más cerca podemos apreciar mejor las diferencias de profundidad.



En el dibujo se pueden apreciar las deformaciones de la imagen al duplicar o reducir a la mitad las distancias de observación con relación a la distancia focal de toma.

En la siguiente figura se muestran dos cuadros con dos puntos - cada uno. Si observamos el cuadro izquierdo con el ojo izquierdo y el cuadro derecho con el ojo derecho, veremos dos puntos tridimensionalmente estando uno de ellos más cerca de nosotros que el otro. Para lograr esto se requiere cierta práctica, ya que nuestra tendencia natural-

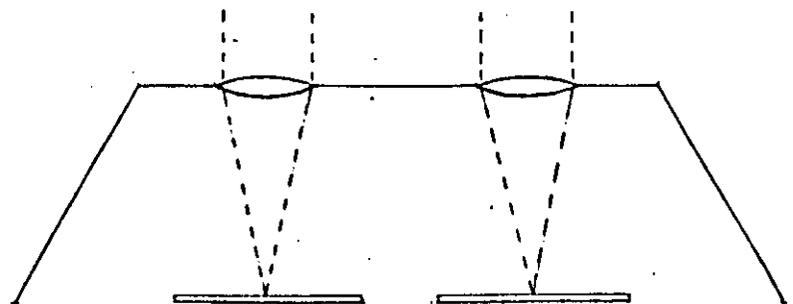
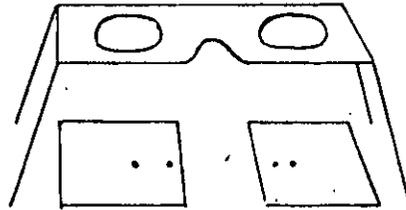
es ver los dos cuadros con cada ojo.



Existen aparatos que nos facilitan la observación tridimensional a partir de pares fotográficos, como es el estereoscopio de bolsillo que se explica a continuación.

#### 1.5 Estereoscopio de bolsillo.

El estereoscopio de bolsillo es esencialmente un armazón que -- sostiene 2 lentes convexas, como se puede apreciar en el siguiente dibujo.

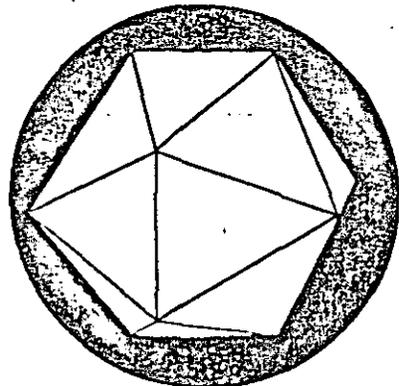
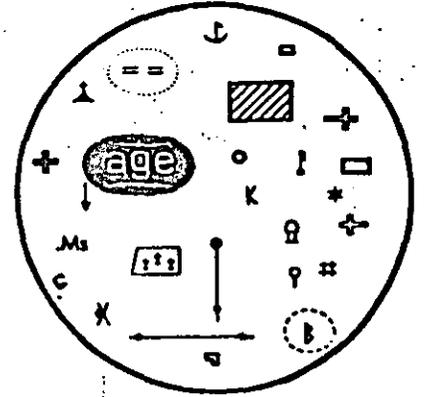
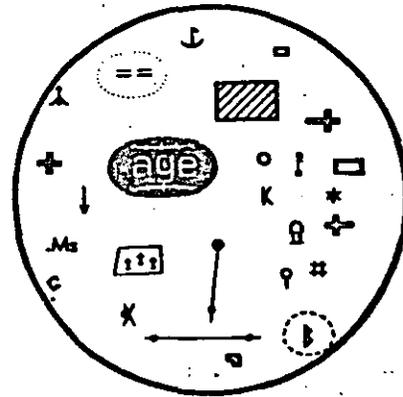
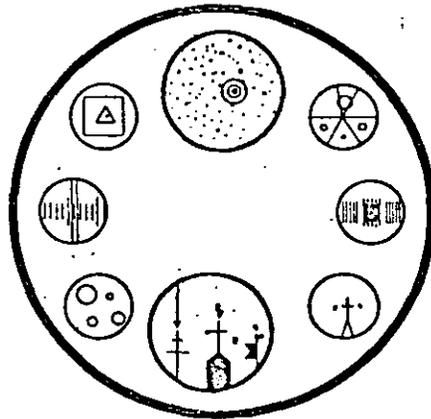
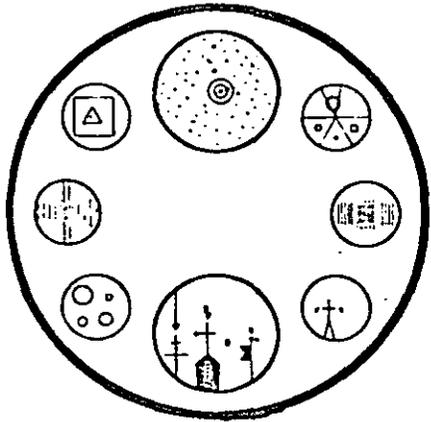
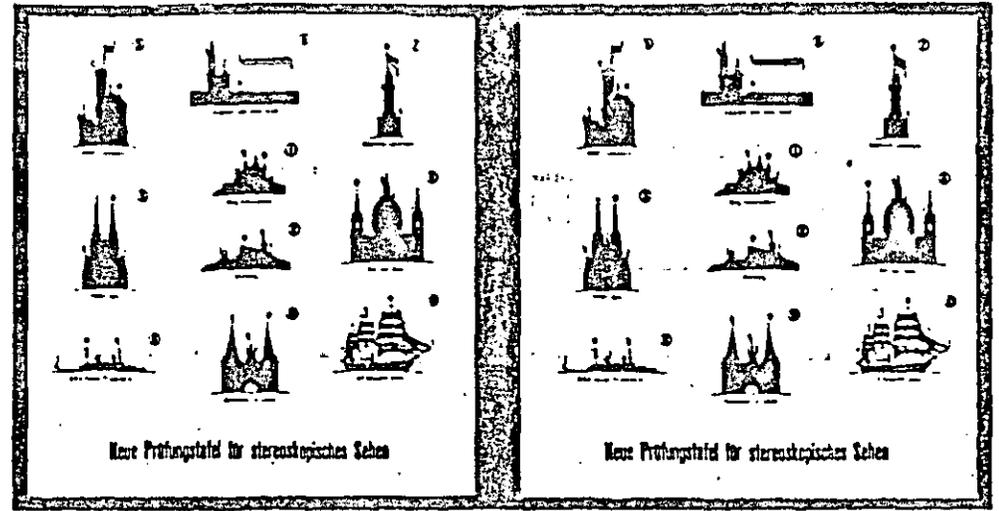


Este sencillo instrumento facilita la observación tridimensional - al dirigir la visión de cada ojo hacia la respectiva fotografía del par. Además la imagen tridimensional es mas clara porque los lentes captan una mayor gama de rayos provenientes de cada punto de las fotografías y amplifican las imágenes. Se les denomina estereoscopios de bolsillo por que sus patas se pueden doblar de tal manera que se pueden llevar facilmente en los bolsillos. La distancia entre las lentes se puede ajustar a la separación interpupilar del observador. Son muy usados para fotointerpretación en el campo, sin embargo, tienen la desventaja de que los pares fotográficos deben de ser de un formato pequeño (los lados no pueden ser mayores que la base de observación), como se puede apreciar en los ejercicios del inciso 5.6.

Para observar fotografías aéreas con un formato de 23 cm por lado y un traslape frontal del 60% mediante el estereoscopio de espejos es necesario levantar la orilla de una de las fotos del par para hacer visibles los puntos homólogos por observar. Este inconveniente se puede superar ampliando la base de observación, lo cual es posible con el estereoscopio de espejos, el cual se describe en el inciso 5.7.

ESPBOEYVESOD  
 PSATBLPMGMID  
 FEMLENMSENTS  
 MTQHOGIPMMTF  
 YUESGJGAZGJP  
 BGSOPFSEFTFM  
 OTHPZPRPOFPV  
 JTCPPFAPRGHGT  
 FLTSFLPTANTO  
 OGMRDAPPHYM  
 FBERPFLAEYJL  
 GOECPHEAZGAZ

ESPBOEYVESOD  
 PSATBLPMGMID  
 FEMLENMSENTS  
 MTQHOGIPMMTF  
 YUESGJGAZGJP  
 BGSOPFSEFTFM  
 OTHPZPRPOFPV  
 JTCPPFAPRGHGT  
 FLTSFLPTANTO  
 OGMRDAPPHYM  
 FBERPFLAEYJL  
 GOECPHEAZGAZ



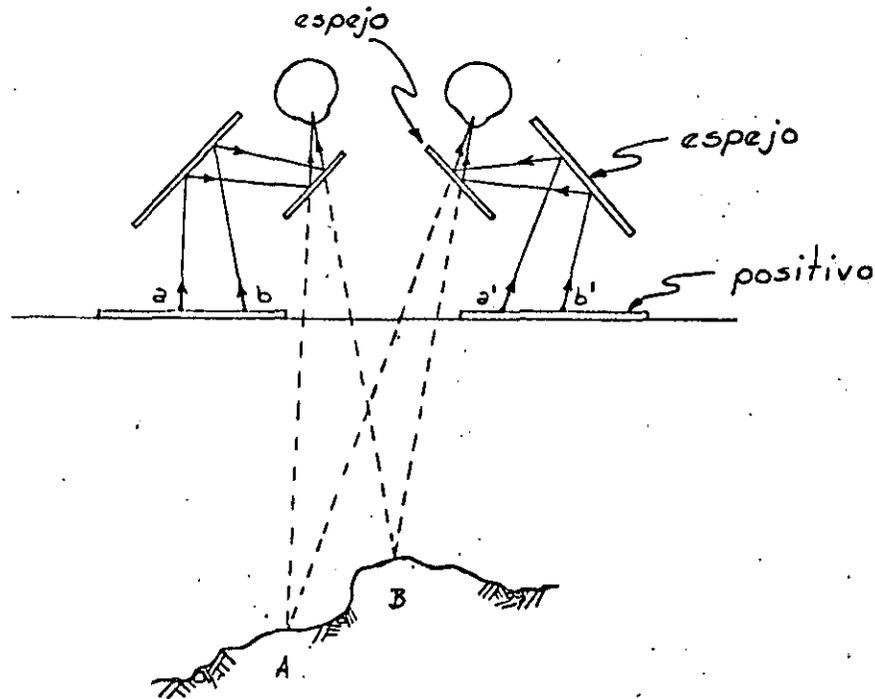
- 1 ○
- 2 X
- 3 □
- 4 K
- 5 →
- 6 + \* (b)
- 7 /
- 8 □

- 9 ↓
- 10 □
- 11 □ □ = =
- 12 ▨ +
- 13 ← Ms
- 14 (i)
- 15 ↓
- 16 X

1.7 Estereoscopio de espejos.

El que primero concibió la idea del estereoscopio de espejos fue Wheatstone en 1838, pero el que lo desarrollo en forma práctica fue -- Helmholtz en 1857.

El estereoscopio de espejos amplifica la base de observación, lo que nos permite separar las fotografías en observación, de tal manera que podemos observar todo el modelo simultáneamente. El principio básico de operación de este estereoscopio se ilustra en el siguiente diagrama:



Algunos estereoscopios de espejos vienen adaptados con binoculares, con los cuales se pueden amplificar las imágenes observadas varias veces. Naturalmente que al amplificar las imágenes no se puede ver todo el modelo simultáneamente.

Para poder observar un modelo estereoscópicamente mediante un estereoscopio de espejos, es necesario orientar las fotografías para eliminar un paralaje en *y* hasta donde sea posible.

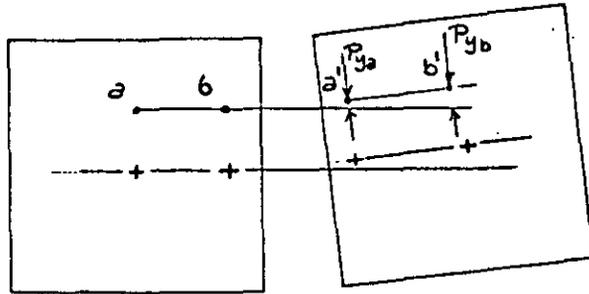
#### 1.8 Paralaje en "y".

La paralaje en *y* es un desplazamiento que sufren las imágenes - en una dirección perpendicular a la línea de vuelo. Es importante eliminar la paralaje en *y* en la zona del modelo que se está observando porque si la paralaje en "y" es extremadamente grande, no se ve estereoscopia; si no es muy grande, el modelo estereo no se ve nítido y después de observar durante algún tiempo duele la cabeza. Trabajando con el estereoscopio de espejos sobre una mesa no se puede eliminar la paralaje en "y" en todo el modelo, debido a que las fotografías las podemos girar, juntar o separar, pero siempre en el plano de la superficie de la mesa. Con esos movimientos sólo podemos eliminar la paralaje en "y" en zonas pequeñas del modelo cada vez, pero no podemos dejar libre de paralaje en "y" a todo el modelo simultaneamente, porque para ello sería necesario poder elevar o bajar una foto con respecto a la otra. Estos conceptos quedarán más claros después de conocer las causas que originan la paralaje en "y" y las cuales se explican a continuación.

#### 1.9 Causas que originan la paralaje en "y".

La paralaje en "y" se origina si el par de fotografías que esta--

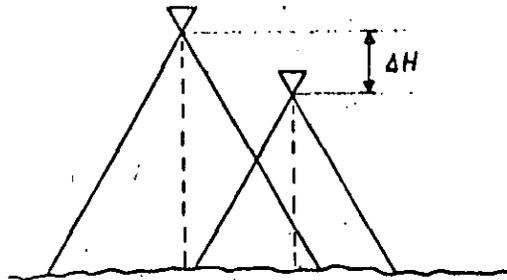
mos observando no esta alineado con respecto a la línea de vuelo (fig. 1)



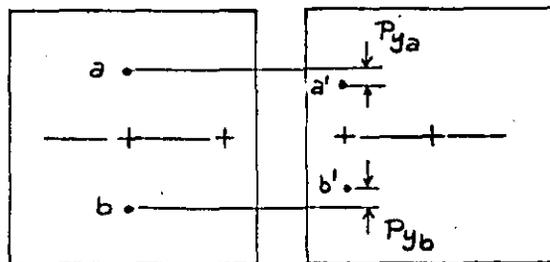
Esto se corrige marcando la línea de vuelo en cada fotografía y alineandolas mediante giro y desplazamiento de una de ellas.

Una paralaje en "y" similar se origina si la línea que une los centros de las lentes de observación del estereoscopio de espejos no es paralela a la línea de vuelo.

Si al tomar las fotografías la altura de vuelo fue diferente, (fig )

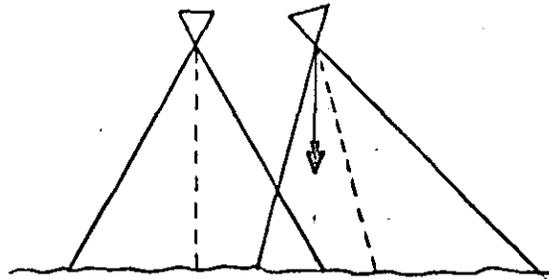


La escala en ambas fotografías es distinta y los puntos extremos (a, b) de una recta se verían en ambas fotografías como se muestra en la fig

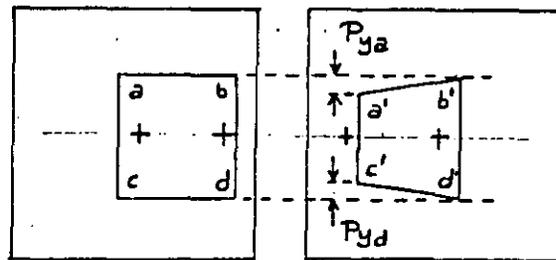


Las distancias  $P_{ya}$  y  $P_{yb}$  son las paralajes en y para los puntos extremos de la recta. Para eliminar la paralaje en el punto a es necesario mover la foto derecha hacia arriba ó la foto izquierda hacia abajo. Al hacer esto la paralaje "y" en el punto b se incrementa al doble y por lo tanto lo más probable es que se pierda la visión estereoscópica en esa zona. O sea que podemos ver estereoscópicamente la zona alrededor -- del punto a ó alrededor del punto b pero no las dos zonas simultáneamente.

La paralaje en "y" también se origina, si al tomar las fotografías alguna de ellas no fue vertical (fig. 2).



La paralaje en "y" que se origina se puede apreciar en la siguiente figura:



La paralaje no nada más existe para los puntos a, c marcados en la figura anterior, sino para todos los puntos a lo largo de las rectas  $\overline{ac}$   $\overline{ab}$  y  $\overline{cd}$ .

1.10 Estereoscopia por colores complementarios.

La estereoscopia artificial también se puede lograr mediante el uso de un filtro rojo y otro azul - verde, según los experimentos de Rollmann en 1853. El método consiste en imprimir una de las fotografías del par en rojo y sobreponerle la impresión de la otra fotografía del par en azul - verde, de tal manera que la fotografía resultante es una mezcla de ambas. Al observar esa fotografía resultante con unos anteojos llamados anaglifos (en los cuales una de las lentes es roja y la otra azul-verde) volvemos a separar los componentes de la fotografía mezcla por medios ópticos. Lo que sucede es que por la lente roja nada más se puede percibir la fotografía impresa en azul - verde y por la lente azul - verde nada más se percibe la fotografía impresa en rojo o sea que al ver con un ojo una sola fotografía y con el otro la otra fotografía nuestro cerebro percibe el modelo estereo que ilusoriamente se forma sobre las fotografías observadas.

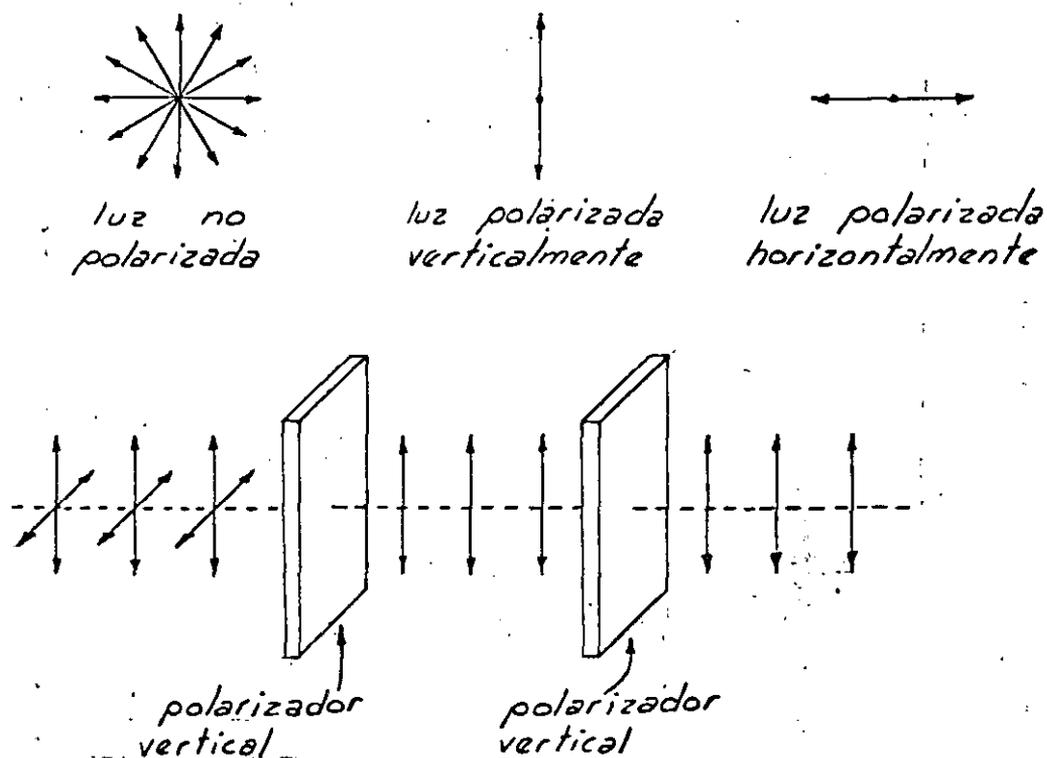
En 1858 d'Almeida demostró que se logra el mismo efecto si en vez de imprimir las fotografías, proyectamos las dos fotografías en blanco y negro sobreponiendo las proyecciones pero anteponiéndole a un proyector un filtro rojo y al otro un filtro azul-verde. Si las dos imágenes superpuestas las observamos con anaglifos también percibimos un modelo tridimensional.

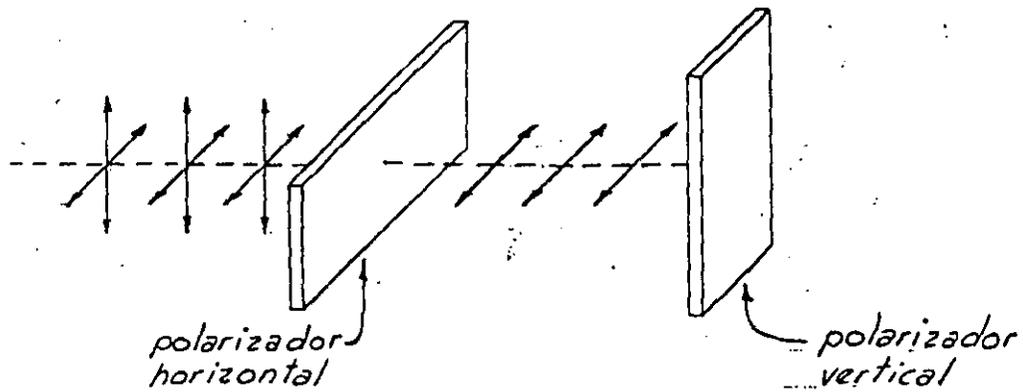
En ambos casos el modelo tridimensional formado es en blanco y negro debido a que los colores de los filtros de proyección o impresión y los colores usados en el anaglifo se complementan. Es importante --

que los tonos y colores de los filtros de proyección o impresión sean -- iguales a los de observación porque si no, no se forma un modelo tridimensional nítido y esto ocasiona molestias al observar.

### 1.11 Estereoscopia por luz polarizada.

Una de las ventajas de este método es que se pueden observar modelos tridimensionales en blanco y negro o en color. El método consiste en proyectar las fotografías del par, con luz polarizada lineal de tal manera que la dirección de polarización de una fotografía sea vertical y la de la otra horizontal. La proyección-mezcla que se obtiene al sobreponer las proyecciones de ambas fotografías del par, se observa al través de los correspondientes filtros polarizados, con lo que se logra volver a separar las proyecciones de tal manera que, al mirar con cada ojo la correspondiente proyección, se forma un modelo tridimensional.





1.12 Estereoscopia por fotografías alternadas.

Este método permite la observación de modelos en blanco y negro o en colores, pero tiene la ventaja de que al no tener que proyectar y observar al través de filtros, no hay pérdidas de luz y por lo tanto el modelo se ve más luminoso y claro.

El método consiste en proyectar la fotografía izquierda de un par mientras se obstruye la proyección de la fotografía derecha y luego se proyecta la fotografía derecha y se obstruye la proyección de la fotografía izquierda. El alternado de las proyecciones se hace a gran velocidad, por medio de una placa giratorio o de persianas que se abren y cierran y estos movimientos están sincronizados con un sistema de observación que también tiene una placa giratoria, de tal manera que cuando se proyecta la foto izquierda la vemos con un solo ojo y cuando se proyecta la foto derecha la vemos con el otro ojo.

El período de alternado es tan pequeño que antes de que se alcance a borrar la imagen en la retina de cada ojo volvemos a ver las fotografías o sea que aunque la foto izquierda y derecha se están proyectando alternadamente, nosotros no percibimos esas alternaciones y --

vemos la foto izquierda con un ojo en forma continua y la foto derecha también en forma continua de tal manera que se forma un modelo tridimensional.

2. PARALAJE ESTEREOSCOPICO.

- 2.1 Definición.
- 2.2 Métodos monoscópicos para medir paralajes.
- 2.3 Marca flotante y barra de paralajes.
- 2.4 Método estereoscópico para medir paralajes.
- 2.5 Ecuaciones de paralaje.
- 2.6 Cálculo de la base aérea.
- 2.7 Cálculo de la altura de vuelo.

## 2.1 Definición.

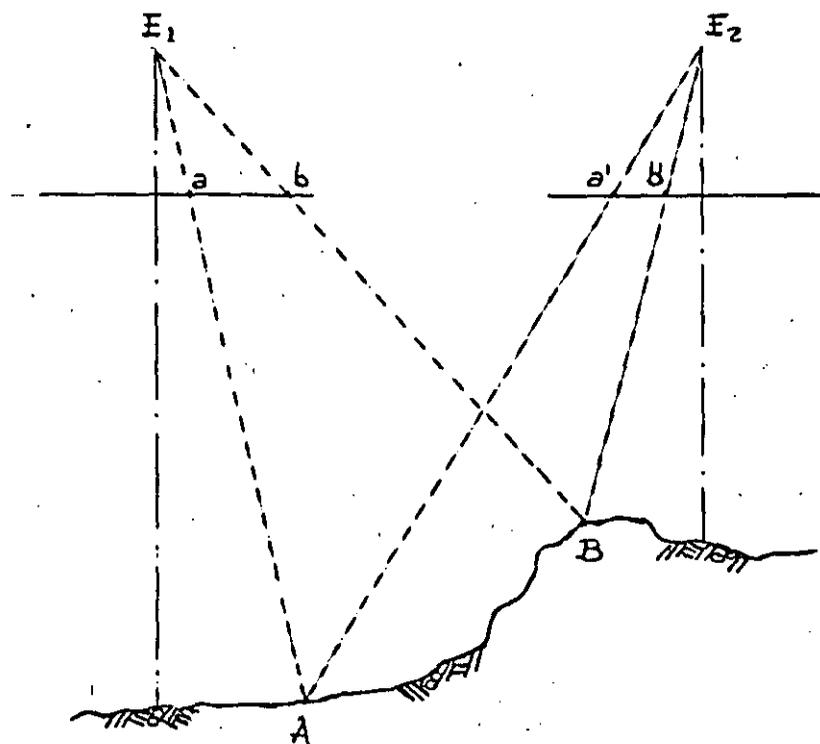
Paralaje es la diferencia entre las posiciones aparentes de un punto, según la posición desde donde se observa.

En otras palabras, es el desplazamiento aparente de un objeto con respecto a un marco de referencia cuando se cambia la posición de observación. Los conceptos anteriores los podemos entender mejor si sostenemos un lápiz frente a nuestros ojos y si a la vez que miramos el lápiz movemos nuestra cabeza, notamos un desplazamiento aparente del lápiz con respecto a los objetos que se encuentran detrás del lápiz como pueden ser el apagador o el marco de la puerta y ventana de la pared de enfrente. El desplazamiento aparente del lápiz se incrementa a medida que acercamos el lápiz a nuestros ojos y disminuye si lo alejamos de nuestra vista.

Otra ejemplificación de paralaje es si observamos por la ventana de un camión en movimiento, notamos un desplazamiento aparente de los árboles y postes con respecto al marco de la ventana. Los postes cercanos a la ventana desaparecen del marco de la ventana más rápidamente que los árboles que se encuentran a mayor distancia. Esto se debe a que entre más cerca estén los objetos del punto de observación mayor es su paralaje.

Al tomar fotografías aéreas en sucesión registramos la posición de los objetos fotografiados en cada fotografía. Si las fotografías las tomamos con traslape al analizar dos fotografías consecutivas nos damos cuenta que un punto A aparece en ambas fotografías pero en cada fotografía ocupa un lugar diferente con respecto al marco de cada fotografía. Ese desplazamiento aparente del punto a lo largo de la línea de vuelo se denomina para-

laje estereoscópico, paralaje x o simplemente paralaje.



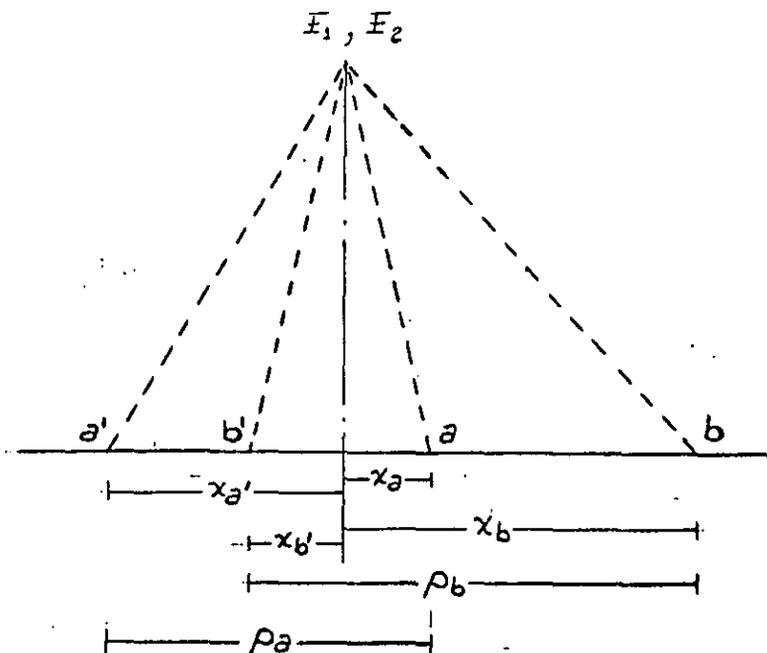
La magnitud de la paralaje para cualquier punto a la podemos determinar mediante la siguiente relación:

$$P_a = x_a - x_a'$$

Es importante recordar que las abscisas deben medirse en el sistema coordinado definido por la línea de vuelo y teniendo como origen el centro de la fotografía. En la fórmula anterior se tiene que tomar en cuenta el signo de las fotocoordenadas.

La magnitud de la paralaje de los puntos A y B en la figura se puede apreciar mejor si sobreponemos las fotografías. (ver fig. 2)

Nótese que la paralaje de B (pb) es mayor que la paralaje de A (pa). Esto se debe a que el punto B está más cerca de la cámara que A. O sea que la magnitud de la paralaje de los puntos está directamente relacionada con



la distancia de los puntos a la cámara, de tal manera que con las diferencias de paralaje entre puntos podremos calcular las diferencias de elevación de los puntos como se verá en el inciso 1.6.

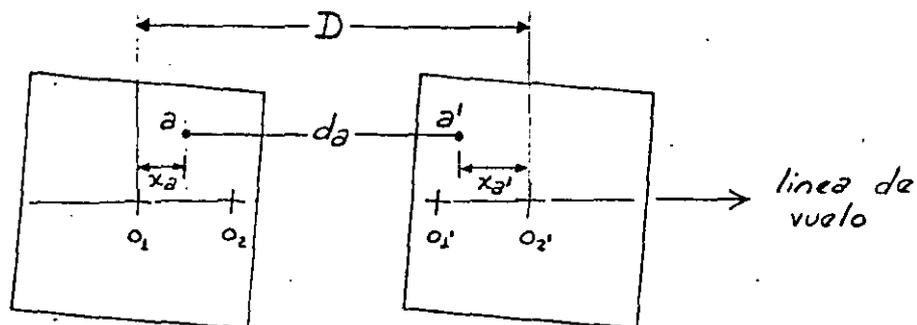
## 2.2 Métodos monoscópicos para medir paralajes.

El método más sencillo es marcar la línea de vuelo uniendo el punto principal y el punto conjugado en ambas fotografías. Trazando una perpendicular a la línea de vuelo que pase por el origen en cada fotografía. quedan definidos los sistemas coordenados sobre los cuales medimos directamente con un escalímetro las abscisas de los puntos cuyas paralajes se desean. Con este método se requieren dos mediciones para calcular la paralaje de cada punto.

Otro método monoscópico consiste en fijar las dos fotografías con cinta adhesiva en las esquinas, de tal manera que las líneas de vuelo quedan alineadas (ver fig). Se mide la distancia (D) entre los puntos principales de cada fotografía. También se mide la distancia ( $d_a$ ) entre los puntos

homólogos  $a, a'$  y los valores medidos se substituyen en la fórmula

$$p_a = D - d_a$$



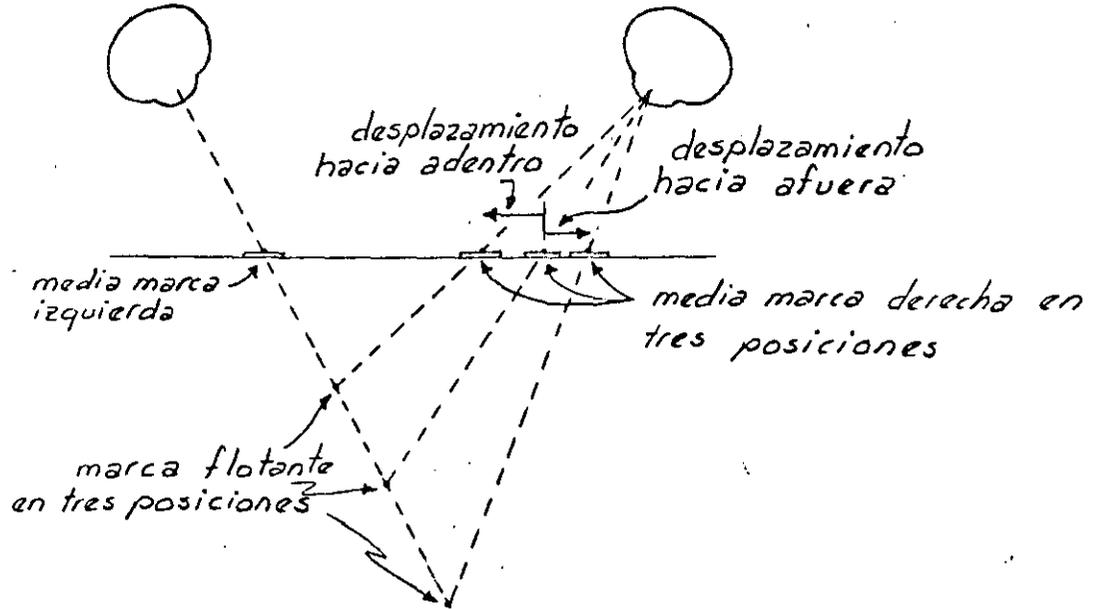
La ventaja de este método consiste en que nada más se requiere una medición por punto para calcular la paralaje.

### 2.3 Marca flotante y barra de paralajes.

Como ya se explicó en capítulos anteriores, si orientamos adecuadamente dos fotografías verticales con traslape, podemos observar un modelo tridimensional con la ayuda de un estereoscopio. Sin embargo, en el modelo ilusoriamente formado no podemos señalar detalles porque para ello necesitaríamos un índice que pudieramos mover tridimensionalmente en el modelo. Este índice o marca flotante se puede lograr de la siguiente manera. Si en una mesa colocamos dos pedazos de papel sobre los cuales previamente dibujamos un punto, al mirar con el ojo derecho uno de los puntos y con el ojo izquierdo el otro, no percibimos dos puntos sino un solo punto imaginario en el espacio tridimensional.

Si uno de los papeles sobre la mesa experimenta un pequeño despla

zamiento hacia afuera (ver fig), al estar nosotros observando con cada -  
ojo uno de los puntos notaremos que el punto tridimensional se aleja de -  
nosotros hacia abajo. En cambio si movemos ligeramente uno de los pa-  
peles hacia adentro (juntándolos) el punto tridimensional se acerca a noso  
tros.



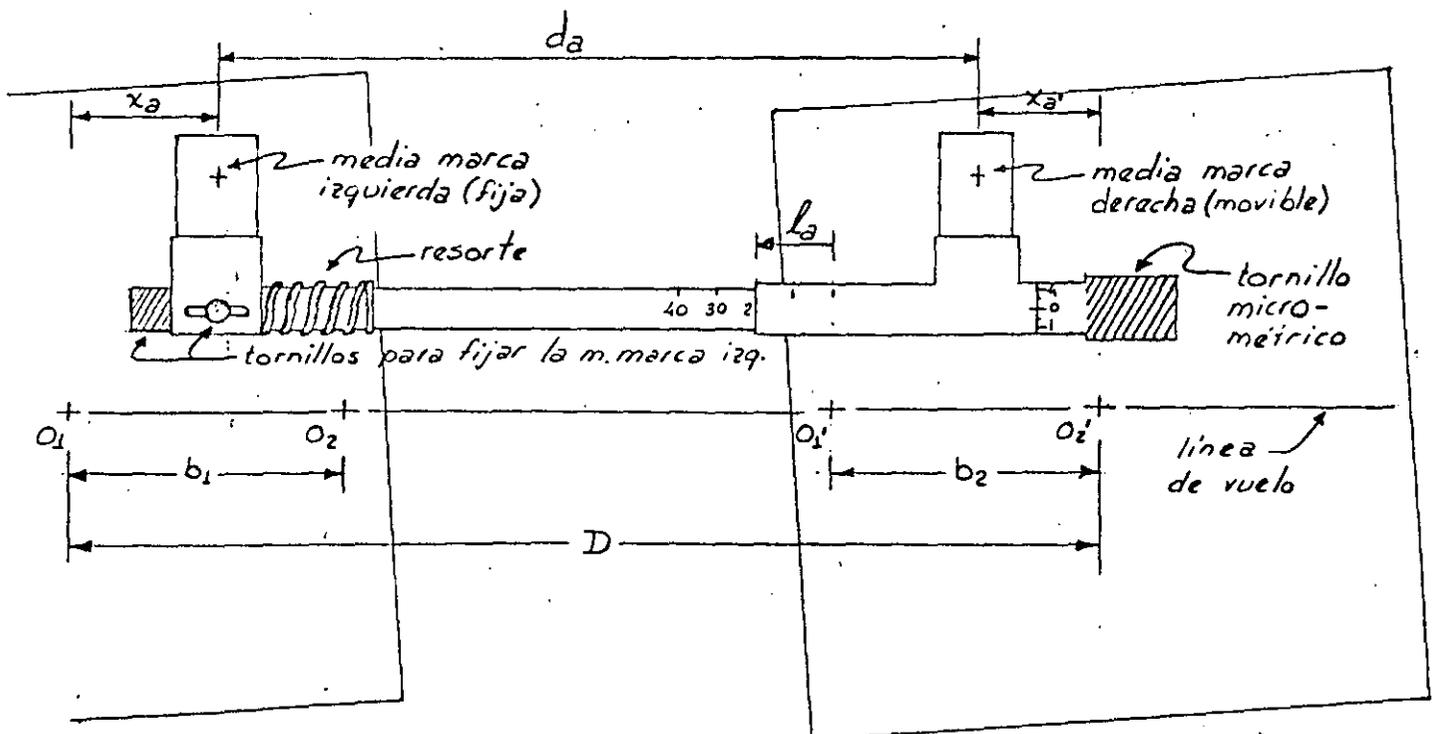
Si los puntos que marcamos en los dos pedazos de papel los marca  
mos en plástico transparente o sobre vidrio y los colocamos sobre las fo-  
tografías de un par orientado, al observar con un estereoscopio miramos  
simultáneamente el modelo y la marca flotante. Es necesario que los pun  
tos sobre el material transparente esten alineados con respecto a la línea  
de vuelo o a una línea paralela a la línea de vuelo para que los puntos no -  
tengan paralaje en y. Al juntar o separar los puntos sobre las fotografías  
veremos que la marca flotante, que originan esos puntos, sube o baja en -  
el modelo debido a que la paralaje en x de la marca flotante la aumentamos  
o disminuimos al juntar o separar los puntos sobre las fotografías.

Si los vidrios sobre los que marcamos los puntos los fijamos a una

barra que mediante un tornillo permita juntar o separar los vidrios, tendremos lo que se llama una barra de paralajes. Esta barra de paralajes nos permite medir la paralaje de puntos estereoscópicamente como se explica a continuación.

#### 2.4 Método estereoscópico para medir paralajes.

Para medir paralajes estereoscópicamente primero se orienta el par fotográfico para poder observar el modelo tridimensional. Luego se coloca la barra de paralajes sobre las fotografías. Estando la lectura de la barra a la mitad de las graduaciones, la media marca fija (izquierda) de la barra se mueve hasta que el punto flotante se encuentre a una altura promedio en el terreno. Luego se fija la media marca izquierda, la cual permanecerá así para todas las mediciones en ese modelo. Con el tornillo micrométrico se pueden juntar o separar las medias marcas con lo que podemos posicionar la marca flotante en cualquier punto del modelo.



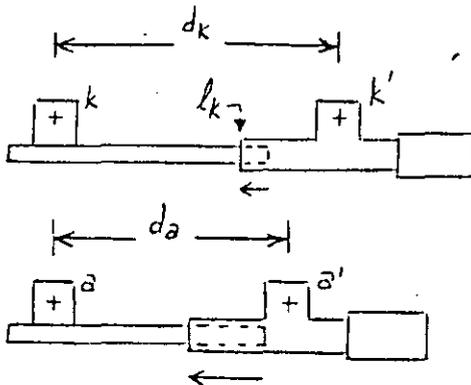
La fórmula para calcular la paralaje de un punto es:

$$p_a = x_a - x_{a'} \quad (1)$$

De acuerdo al dibujo esa fórmula la podemos expresar como:

$$p_a = D - d_a \quad (2)$$

La distancia  $D$  se mide directamente, sin embargo para poder conocer  $d_a$  en función a la lectura ( $l_a$ ) de la barra de paralajes, primero se mide la distancia ( $d_K$ ) entre las medias marcas estando el punto flotante sobre cualquier punto ( $K$ ) del modelo y se anota la lectura ( $l_K$ ) de la barra.



Al colocar el punto flotante sobre el punto ( $a$ ) del modelo la distancia  $d_K$  se modifica al igual que la lectura ( $l_K$ ) de la barra.

La magnitud de la modificación en la distancia  $K$  se obtiene así:

$$\text{modificación en } d_K = d_K - d_a \quad (3)$$

Pero esa misma modificación la podemos calcular así:

$$\text{modificación en } K = -(l_K - l_a) = l_a - l_K \quad (4)$$

igualando la expresión (3) y (4)

$$d_K - d_a = l_a - l_K$$

despejando  $d_a$

$$d_a = d_K + l_K - l_a \quad (5)$$

substituyendo en (2)

$$p_a = D - d_K - l_K + l_a$$

$$p_a = (D - d_K - l_K) + l_a \quad (6)$$

En la fórmula anterior los 3 primeros valores son constantes y por lo tanto la fórmula 6 la podemos reescribir, como:

$$P_a = C + l_a \quad (7)$$

En donde  $p_a$  es la paralaje del punto a, C es la constante de la barra de paralajes para esa puesta y  $l_a$  es la lectura de la barra estando el punto flotante sobre el punto a del modelo. La constante C en realidad se conoce por mediciones monoscópicas.

Una vez conocida la constante C se puede calcular la paralaje de cualquier punto n con solo sumarle a la constante C la lectura de la barra para cada punto n.

$$P_n = C + l_n \quad (8)$$

La constante C es la misma para todos los puntos en ese modelo -- siempre y cuando no se muevan las fotografías.

La constante C se puede calcular con la expresión:

$$C = D - d_K - l_K \quad (9)$$

en donde D es la distancia entre puntos principales,  $d_K$  es la distancia entre las medias marcas estando el punto flotante en cualquier punto K del modelo y  $l_K$  es la lectura en la barra para esa distancia  $d_K$ .

La constante C también se puede calcular de la fórmula 8.

$$C = p_n - l_n \quad (10)$$

Para usar la fórmula anterior es necesario conocer la paralaje de un punto, La paralaje que se puede conocer es la de los puntos principales de cada foto del par, ya que la paralaje del punto principal de la primera foto es la distancia  $b_2$  (ver figura).

La fórmula 10 también es útil cuando se interrumpen las mediciones y al reanudarlas ya nada más colocamos la marca flotante en un punto cuya paralaje ya habían medido. Se lee la lectura para ese punto y se calcula la nueva C para esta puesta. Así ya no es necesario volver a hacer ninguna medición monoscópica.

$$P_{o1} = x_{o1} - x_{o1}'$$

$$P_{o1} = 0 - x_{o1}'$$

$$P_{o1} = b_2$$

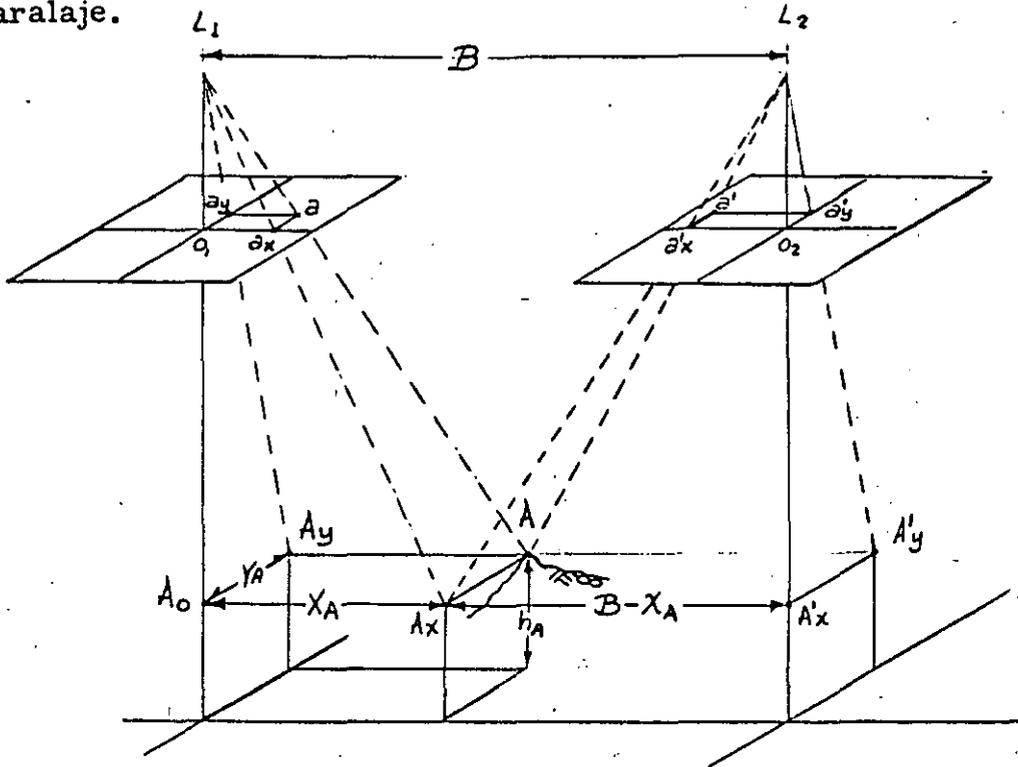
Esa distancia  $b_2$  se mide directamente de la fotografía y la lectura de la barra se obtiene después de poner la marca flotante en el punto  $o_1$  del modelo.

Estos valores se substituyen en la fórmula 10 obteniéndose así la constante de la barra. Si se sigue este procedimiento es recomendable calcular la constante usando la paralaje del punto principal de la fotografía  $C_1 = b_2 - l_{o1}$  y hacer los mismos cálculos con la paralaje del punto principal de la segunda fotografía  $C_2 = b_1 - l_{o2}$ . La constante que se obtiene en cada caso es ligeramente diferente la una de la otra y la constante que se use para calcular las paralajes de todos los demás puntos será el promedio de ambas.

$$C = \frac{C_1 + C_2}{2}$$

2.5 Ecuaciones de Paralaje.

La siguiente figura ilustra la geometría de un par de fotografías verticales con traslape y la cual nos servirá para deducir las ecuaciones de paralaje.



De los triángulos semejantes  $L_1 o a_y$  y  $L_1 A_o A_y$

$$\frac{Y_A}{H - h_A} = \frac{y_a}{f}$$

$$Y_A = \frac{y_a}{f} (H - h_A) \quad \dots (1)$$

De los triángulos semejantes  $L_1 o a_x$  y  $L_1 A_o A_x$

$$\frac{X_A}{H - h_A} = \frac{x_a}{f}$$

$$X_A = \frac{x_a}{f} (H - h_A) \quad \text{--- (2)}$$

De los triángulos semejantes  $L_2 o' a'x$  y  $L_2 A'o Ax$

$$\frac{B - X_A}{H - h_A} = \frac{-x_{a'}}{f}$$

$$X_A = B + \frac{x_{a'}}{f} (H - h_A) \quad \text{--- (3)}$$

Igualando las ecuaciones 2 y 3

$$\frac{x_a}{f} (H - h_A) = B + \frac{x_{a'}}{f} (H - h_A)$$

despejando  $h_A$

$$h_A = H - \frac{B_f}{x_a - x_{a'}}$$

Substituyendo  $p_a$  por  $x_a - x_{a'}$

$$h_A = H - \frac{B_f}{p_a} \quad \text{--- (4)}$$

Substituyendo 4 en 2 y despejando  $X_A$

$$X_A = B \frac{x_a}{p_a} \quad \text{--- (5)}$$

Substituyendo 4 en 1 y despejando  $Y_A$

$$Y_A = B \frac{y_a}{p_a} \quad \text{--- (6)}$$

Estas fórmulas son de las más importantes ya que la 4 nos dá la altimetría y la 5 y 6 nos dá la planimetría que es la información necesaria para elaborar mapas topográficos.

Las ecuaciones 4, 5 y 6 se conocen como ecuaciones de paralaje y son de suma utilidad. Sin embargo, para poder usarlas es necesario conocer la base aérea (B) y la altura de vuelo (H), las cuales se pueden calcular si se cuenta con el control terrestre necesario (un mínimo de dos puntos de control).

## 2.6 Cálculo de la base aérea.

Si se conocen dos puntos de control, se puede calcular la distancia horizontal entre dichos puntos mediante la siguiente fórmula:

$$\overline{AB} = \left[ (X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 \right]^{1/2} \quad (7)$$

Substituyendo las ecuaciones 5 y 6 en la ecuación 7

$$\overline{AB} = \left[ \left( \frac{Bx_b}{P_b} - \frac{Bx_a}{P_a} \right)^2 + \left( \frac{By_b}{P_b} - \frac{By_a}{P_a} \right)^2 \right]^{1/2}$$

despejando B

$$B = \frac{\overline{AB}}{\left[ \left( \frac{x_b}{P_b} - \frac{x_a}{P_a} \right)^2 + \left( \frac{y_b}{P_b} - \frac{y_a}{P_a} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (8)$$

La  $x_a$   $y_a$   $x_b$   $y_b$  se miden en la foto izquierda. Para calcular la base con este método es indispensable medir una distancia en el terreno. Esta distancia debe estar dentro del modelo y ser lo más largo posible.

## 2.7 Cálculo de la altura de vuelo.

La altura de vuelo se puede calcular mediante la fórmula 4, siempre y cuando se conozca la base aérea y se cuente con un punto de control vertical.

Para cálculos poco precisos se puede usar la lectura del altímetro

que normalmente aparece en el margen de las fotografías.

Si en la fotografía aparece una distancia conocida horizontal, por ejemplo una cancha de fútbol, una alberca, etc. se puede usar la siguiente relación.

$$S = \frac{ab}{AB} = \frac{f}{H}$$

La altura de vuelo sería del terreno al centro de exposición. Sin embargo, si se conoce la elevación de uno de los puntos extremos se puede usar la relación

$$S = \frac{ab}{AB} = \frac{f}{H - h}$$

con lo cual se tendría la altura de vuelo sobre el plano de referencia.

Para usar las dos fórmulas anteriores es necesario que los puntos extremos de la recta considerada tengan la misma elevación, sin embargo, se pueden obtener resultados aceptables si los puntos extremos tienen diferentes elevaciones siempre y cuando los dos puntos sean equidistantes del punto principal.

Si se conocen dos puntos de control la distancia horizontal entre los mismos se puede calcular mediante la fórmula

$$\overline{AB}^2 = (X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 \quad (8)$$

Substituyendo en la fórmula anterior las ecuaciones deducidas en

el inciso 4. 5 y que son:

$$X_A = \frac{x_a}{f} (H - h_A) \quad ; \quad X_B = \frac{x_b}{f} (H - h_B)$$

$$Y_A = \frac{y_a}{f} (H - h_A) \quad ; \quad Y_B = \frac{y_b}{f} (H - h_B)$$

tendremos

$$\overline{AB}^2 = \frac{x_b}{f} (H - h_B) - \frac{x_a}{f} (H - h_A) \quad ^2 + \frac{y_b}{f} (H - h_B) - \frac{y_a}{f} (H - h_A) \quad ^2 \quad (9)$$

Simplificando llegamos a una ecuación de 2o. grado de la forma-  
 $aH^2 + bH + c = 0$ , en donde la única incógnita es H.

$$\left[ \left( \frac{x_b - x_a}{f} \right)^2 + \left( \frac{y_b - y_a}{f} \right)^2 \right] H^2 - \left[ 2 \left( \frac{x_b - x_a}{f} \right) \left( \frac{x_b h_B - x_a h_A}{f} \right) + 2 \left( \frac{y_b - y_a}{f} \right) \left( \frac{y_b h_B - y_a h_A}{f} \right) \right] H + \left( \frac{x_b h_B - x_a h_A}{f} \right)^2 + \left( \frac{y_b h_B - y_a h_A}{f} \right)^2 - \overline{AB}^2 = 0 \quad (10)$$

Aplicando la fórmula para ecuaciones de 2o. grado  $H = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

se obtiene la solución directa para H.

Sin embargo, substituir valores en la ecuación 10 y resolverla puede ser más tardado que, resolver la ecuación 9 por aproximaciones sucesivas.

En el método de aproximaciones sucesivas primero se calcula una altura aproximada substituyendo la distancia  $\overline{ab}$  medida en la foto y cuya distancia terrestre también se conoce en la fórmula

$$\frac{f}{H \text{ aprox} - h_{AB}} = \frac{ab}{AB}$$

En donde  $h_{AB}$  es la altura promedio de los puntos A, B.

El valor aproximado de la altura (H aprox) que se obtiene se substituye en las fórmulas (considerando las alturas de cada punto)

$$X = \frac{H - h}{f} x$$

$$Y = \frac{H - h}{f} y$$

Para obtener las coordenadas  $X_A, Y_A, X_B, Y_B$  las cuales se substituyen en la fórmula 8, para obtener una distancia AB calculada, la cual se compara con la distancia AB medida. Si la diferencia entre la distancia AB medida y la distancia AB calculada no esta dentro de tolerancia se calcula una mejor aproximación de H con la siguiente relación

$$\frac{H - h_{AB}}{H \text{ aprox} - h_{AB}} = \frac{AB \text{ medida}}{AB \text{ calculada}}$$

$$H = \frac{AB \text{ m}}{AB \text{ c}} (H \text{ aprox} - h_{AB}) + h_{AB}$$

Con este nuevo valor de H se repite el proceso. Normalmente no se necesitan más de dos iteraciones para lograr una convergencia satisfactoria.

DIRECTORIO DE ALUMNOS DEL CURSO DE "FOTOGRAMETRIA CON ESTEREOSCOPIO DE  
ESPEJOS Y BARRA DE PARALAJES" IMPARTIDO EN ESTA DIVISION DEL 13 AL 18  
DE MAYO DEL PRESENTE AÑO.

- 1.- BRIONES CASTAÑEDA ISIDRO HIRAM  
FACULTAD DE ING. CIVIL  
MAESTRO  
CD. UNIVERSITARIA  
MONTERREY, N.L.
  
- 2.- PACHECO REYES SIMEON
  
- 3.- ROSALES AGUAYO MIGUEL ANGEL  
COMISION DE ESTUDIOS DE NAYARIT MEXICO No. 31-205  
FOTODETECTADOR  
AV. MEXICO No. 31-205 SUR  
TEPIC, NAYARIT
  
- 4.- CONTRERAS CASTRO MIGUEL ANGEL  
S. A. R. H. RINCONADA DE LAGO SUPERIOR No. 46-201  
JEFE DE SECCION DE ANALESISTAS DELEGACION MIGUEL HIDALGO  
INSURGENTES SUR No. 30-3er. PISO 11410 MEXICO, D.F.  
COL. JUAREZ 399-42-38  
DELEGACION CUAUHTEMOC  
06600 MEXICO, D.F.  
591-13-36
  
- 5.- MONTECRISTO ORTIZ HILARIO JUAN DE D.  
DEPTO. DEL DISTRITO FEDERAL ROSA DE ORO No. 7  
JEFE DEL DEPTO. TOPOGRAFIA RESIDENCIAL ERMITA  
DELEG. MILPA ALTA COL. LOS ANGELES  
DOMICILIO CONOCIDO DELEGACION IZTAPALAPA  
EDIF. MORELOS 09710 MEXICO, DF.
  
- 6.- ORTIZ HERRERA FRANCISCO  
DIREC. GRAL. AEROPUERTOS S. C.T. ANDADOR 42 ENT. 3 CASA 3  
JEFE SECCION HIDROLOGIA DELEGACION GUSTAVO A. MADERO  
CHIAPAS No. 121 ESQ. TONALA 71720 MEXICO, D.F.  
COL. ROMA 574-82-69  
DELEGACION CUAUHTEMOC  
574-82-00
  
- 7.- ALDAMA SALAS OSCAR  
DIR. GRAL. DE AEROPUERTOS

- 8.- ALMAZAN RODRIGUEZ JUAN  
DIREC. GRAL. PARQUES RESERVAS  
Y AREAS ECOLOGICAS PROTEGIDAS  
JEFE DE OFICIAN DE INVENTARIO  
EJE CENTRAL LAZARO CARDENAS No. 661  
1er. PISO  
COL. NARVARTE  
DELEGACION BENITO JUAREZ  
03020 MEXICO, D.F.  
590-76-94
- ZARAGOZA No. 72-3  
DELEGACION CUAUHTEMOC  
592-61-14
- 9.- BOCHM SANCHEZ MAURICIO  
COMPAÑIA MEXICANA AEROFOTO  
COORDINADOR PROYECTOS ESPECIALES  
11 DE ABRIL No. 338  
COL. ESCANDON  
DELEGACION MIGUEL HIDALGO  
11800 MEXICO, D.F.  
516-07-40
- MEDICIAN No. 65 DEPTO. 18  
DELEGACION COYOACAN
- 10.- BRITO PEÑA JOSE ALFONSO  
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE SINALOA  
MAESTRO TOPOGRAFO
- PACIFICO No. 642  
FRACC. CASABLANCA  
MAZATLAN SINALOA
- 11.- CAMACHO ALONSO VICTOR  
PARTICULAR  
INGENIERO TOPOGRAFO
- ICAROS No. 58-8  
COL. NARVARTE  
DELEGACION CUAUHTEMOC  
538-40-26
- 12.- CASTILLO CELESTINOS FCO. XAVIER  
PETROLEOS MEXICANOS  
INGENIERO GEOLOGO  
OFICINA DE PETROLEOS MEXICANOS  
4-02-07 ext. 310
- ROSSINI No. 46  
COL. EXHIPODROMO DE PERALVILLO  
DELEGACION CUAUHTEMOC  
06250 MEXICO, D.F.  
583-89-19
- 13.- CONTRERAS CASTRO MIGUEL A.  
S. A. R. H.
- 14.- GALVAN MENDOZA EVANGELINA  
UNION PROFESORES FAC. ING.
- 15.- GONZALEZ ROMERO UBERTINO  
S. A. R. H.
- 16.- HERNANDEZ LASCARES DELFINO  
UNION PROFESORES FAC. ING.

17.- HERNANDEZ OLIVARES CARLOS  
S. C. T.

18.- MARTINEZ LOPEZ RODRIGO MARIO  
INSTITUTO CIENCIAS  
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA  
GEOGRAFO  
4 SUR No. 104  
07200 PUEBLA, PUE.

37 OTE No. 2624  
COL. FRAC. STA. MONICA  
PUEBLA, PUE.  
41-30-21- ext. 31

19.- MONROY MARTINEZ RAFAEL  
SUBDIRECCION RELACIONES NACIONALES  
Y PROGRAMAS ESPECIALES

20.- MONTECRISTO ORTIZ H. JUAN DE DIOS  
DEPARTAMENTO DEL DISTRITO FEDERAL

21.- NAVA GUERRA CARLOS  
S. A. R. H.

22.- OSORIO GARCIA ALVARO  
S. C. T.

23.- OROZCO VALERIO MARTA DE JESUS  
FAC. DE GEOGRAFIA U. DE G.  
PROFESOR  
AV. ALCALDE Y AV. MAESTROS

GABRIEL D'ANNUNZIO No. 6140

24.- ORTIZ ALTAMIRANO JUAN IGNANCIO  
PATRIMONIO INDIGENA DEL VALLE  
DEL MEZQUITAL  
JEFE DE TOPOGRAFIA  
CARRETERA MEXICO LAREDO KM. 159  
IXMIQUILPAN, HGO.

AV. CORONA DEL ROSAL No. 312  
FRACC. P.R.I. CHACON  
42300 PACHUCA, HGO.

25.- PEÑA ALCALA BENJAMIN  
ENEP. ARAGON  
JEFE DE GABINETE DE TOPOGRAFIA  
RANCHO SECO S/N  
SAN JUAN DE ARAGON

PUENTE JUAN CARDONERO No. 33  
COL. CUCHILLA R. MILLAN  
DELEGACION IZTACALCO  
08030 MEXICO, D.F.