DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO: DISEÑO ESTADISTICO

DE EXPERIMENTOS MAYO _ JUNIO 1985.

1. DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ
DIRECTOR
FACULTAD DE INGENIERIA
UNAM
MEXICO, D.F.
548 33 54

2. M. EN I. AUGUSTO VILLARREAL ARANDA
PROFESOR
DEPFI
UNAM
MEXICO, D.F.
554 45 31

3. ING. BERNARDO FRONTANA DE LA CRUZ
INVESTIGADOR
COORDINACION DE INGENIERIA DE SISTEMAS
INSTITUTO DE INGENIERIA
UNAM
MEXICO, D.F.
548 97 93 y 550 52 15 EXT. 3653

edcs.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA DE LA UNAM
DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS
1985

DIA	TEMAS	PROFESORES
3 de mayo	1. INTRODUCCION	M en I Rubén Téllez Sánchez
	1.1 Unidad de Experimentación. Factores. Variable aleatoria	
	1.2 Etapas en el diseño de un experimento	
6 de mayo	2. DISEÑO Y ANALISIS DE EXPERIMENTOS CON UNA SOLA VARIABLE (REPASO)	
	2.1 Distribución de probabilidades. Distribuciones bionominal, de Poisson, multinomial y normal.	
	2.2 Estadísticas. Estimación puntual de -- parámetros	
	2.3 Distribuciones muestrales t, χ^2 y F	
8 de mayo	2.4 Estimación de parámetros por intervalos de confianza	
	2.5 Pruebas de hipótesis	
13 y 17 de mayo	3. DISEÑO Y ANALISIS DE EXPERIMENTOS CON DOS VARIABLES	M en I Augusto Villarreal A.
	3.1 Comparación de dos valores medios: variables independientes y variables dependientes	
	3.2 Comparación de medidas de dispersión - (de dos variancias)	
	3.3 Prueba de independencia de dos variables nominales. Tablas de contingencia	
	4. DISEÑO Y ANALISIS DE EXPERIMENTOS PARA COMPARAR K TRATAMIENTOS.	

4.1 Comparación de valores medios. Análisis de variancia: niveles fijos y niveles aleatorios. Comparaciones múltiples: métodos de Tukey, Dunnett y Duncan.

4.2 Comparación de variancias

20,22,24,27 y 29 de mayo

5. DISEÑO Y ANALISIS DE EXPERIMENTOS CON BLOQUES ALEATORIZADOS

Dr. Octavio A. Rascón Ch.

5.1 Análisis de variancia

5.2 Estimación de efectos y residuos

6. DISEÑO Y ANALISIS DE EXPERIMENTOS CON CLASIFICACION DE DOS FACTORES

6.1 Factores no cruzados: niveles fijos y niveles aleatorios

6.2 Factores cruzados: niveles fijos y niveles aleatorios

7. ANALISIS DEL EXPERIMENTO DE CUADROS LATINOS

8. ANALISIS DEL EXPERIMENTO DE CUADROS GRECO-LATINOS

9. ANALISIS DE EXPERIMENTOS DE BLOQUES ALEATORIZADOS INCOMPLETOS Y DE CUADROS DE YUDEN

31 de mayo, 3,5 y 7 de junio

10. ANALISIS DE EXPERIMENTOS FACTORIALES 2^k

M en I Bernardo Frontana de la Cruz

11. ANALISIS DE VARIANCIA EN REGRESION LINEAL

11.1 Regresión lineal. Cálculo de la recta de regresión. Prueba de independencia de las dos variables. Error de la predicción.

11.2 Análisis de covariancia.

EVALUACION DEL PERSONAL DOCENTE

(1)

CURSO: DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS

FECHA: Del 3 de mayo al 7 de junio 1985.

CONFERENCISTA	DOMINIO DEL TEMA	EFICIENCIA EN EL USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES	MANTENIMIENTO DEL INTERES. (COMUNICACION CON LOS ASISTENTES, AMENIDAD, FACILIDAD DE EXPRESION).	PUNTUALIDAD	
1. M. EN I. RUBEN TELLEZ SANCHEZ					
2. M. EN I. AUGUSTO VILLARREAL A.					
3. DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ					
4. M. EN I. BERNARDO FRONTANA DE LA CRUZ					
5.					
6.					
7.					
8.					
9.					

ESCALA DE EVALUACION: 1 a 10

EVALUACION DE LA ENSENANZA

SU EVALUACION SINCERA NOS AYUDARA A MEJORAR LOS PROGRAMAS POSTERIORES QUE DISEÑAREMOS PARA USTED.

TEMA	ORGANIZACION Y DESARROLLO DEL TEMA	GRADO DE PROFUNDIDAD LOGRADO EN EL TEMA	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO EN EL TEMA	UTILIDAD PRACTICA DEL TEMA	
INTRODUCCION					
DISEÑO Y ANA. DE EXPERIMENTOS CON UNA..					
DISEÑO Y ANALISIS DE EXPERIMENTOS..					
DISEÑO Y ANALISIS DE EXPERIMENTOS PARA..					
ISEÑO Y ANA. DE EXPERIMENTOS CON BLO..					
DISEÑO Y ANA. DE EXP. CON CLASIFICACION..					
ANA. DEL EXP. DE CUADROS LATINOS					
ANA. DEL EXP. DE CUADROS GRECO-LATINOS					
ANA. DE EXP. DE BLOQUES ALEATORIOS..					
ANA. DE EXPERIMENTOS FACTORIALES 2^k					

ESCALA DE EVALUACION: 1 a 10

EVALUACION DE LA ENSENANZA

SU EVALUACION SINCERA NOS AYUDARA A MEJORAR LOS PROGRAMAS POSTERIORES QUE DISEÑAREMOS PARA USTED.

TEMA	ORGANIZACION Y DESARROLLO DEL TEMA	GRADO DE PROFUNDIDAD LOGRADO EN EL TEMA	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO EN EL TEMA	UTILIDAD PRACTICA DEL TEMA	
ANA. DE VARIANCIA EN REGRESION LINEAL					

ESCALA DE EVALUACION: 1 a 10

EVALUACION DEL CURSO

	CONCEPTO	EVALUACION
1.	APLICACION INMEDIATA DE LOS CONCEPTOS EXPUESTOS	
2.	CLARIDAD CON QUE SE EXPUSIERON LOS TEMAS	
3.	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO CON EL CURSO	
4.	CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO	
5.	CONTINUIDAD EN LOS TEMAS DEL CURSO	
6.	CALIDAD DE LAS NOTAS DEL CURSO	
7.	GRADO DE MOTIVACION LOGRADO CON EL CURSO	

ESCALA DE EVALUACION DE 1 A 10

1. ¿Qué le pareció el ambiente en la División de Educación Continua?

MUY AGRADABLE	AGRADABLE	DESAGRADABLE

2. Medio de comunicación por el que se enteró del curso:

PERIODICO EXCELSIOR ANUNCIO TITULADO DIVISION DE EDUCACION CONTINUA	PERIODICO NOVEDADES ANUNCIO TITULADO DIVISION DE EDUCACION CONTINUA	FOLLETO DEL CURSO

CARTEL MENSUAL	RADIO UNIVERSIDAD	COMUNICACION CARTA, TELEFONO, VERBAL, ETC.

REVISTAS TECNICAS	FOLLETO ANUAL	CARTELERA UNAM "LOS UNIVERSITARIOS HOY"	GACETA UNAM

3. Medio de transporte utilizado para venir al Palacio de Minería:

AUTOMOVIL PARTICULAR	METRO	OTRO MEDIO

4. ¿Qué cambios haría usted en el programa para tratar de perfeccionar el curso?

____

____

____

5. ¿Recomendaría el curso a otras personas?

SI	NO

6. ¿Qué cursos le gustaría que ofreciera la División de Educación Continua?

7. La coordinación académica fue:

EXCELENTE	BUENA	REGULAR	MALA

8. Si está interesado en tomar algún curso intensivo ¿Cuál es el horario más conveniente para usted?

LUNES A VIERNES DE 9 A 13 H. Y DE 14 A 18 H. (CON COMIDAS)	LUNES A VIERNES DE 17 A 21 H.	LUNES, MIERCOLES Y VIERNES DE 18 A 21 H.	MARTES Y JUEVES DE 18 A 21 H.

VIERNES DE 17 A 21 H. SABADOS DE 9 A 14 H.	VIERNES DE 17 A 21 H. SABADOS DE 9 A 13 Y DE 14 a 18 H.	O T R O

9. ¿Qué servicios adicionales desearía que tuviese la División de Educación Continua, para los asistentes?

10. Otras sugerencias:

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS

I N T R O D U C C I O N

MAYO, 1985

INTRODUCCION

(1)

1. ¿QUE SE ENTIENDE POR "EL DISEÑO DE UN EXPERIMENTO"?

- Diseñar un experimento significa planear un experimento de modo que reúna la información pertinte al problema bajo investigación.
- El diseño de un experimento es la secuencia completa de pasos tomados de antemano para asegurar que los datos apropiados se obtendrán de modo que permitan un análisis objetivo que conduzca a deducciones válidas con respecto al problema establecido.

2. LA NECESIDAD DE UN DISEÑO DE EXPERIMENTOS

Surge de lanecesidad de responder a preguntas como:

- ¿Como se va a medir el efecto? o ¿Cuales son las características a analizar?
- ¿Que factores afectan las caracteristicas que se van a analizar?
- ¿Cuales son los factores que se estudiaran en esta investigación?
- ¿Cuantas veces deberá ejecutarse el experimento?
- ¿Cual será la forma de análisis?
- ¿A partir de que valores se considera importante el efecto?

3. OBJETIVOS DE UN DISEÑO DE EXPERIMENTOS

- Proporcionar la máxima cantidad de información pertinente al problema bajo investigación
- El diseño, plan o programa debe ser tan simple como sea posible
- La investigación debe efectuarse lo más eficientemente posible; ahorrar tiempo, dinero, personal y material experimental
  "Proporcionar la máxima cantidad de información al mínimo costo"

4. PRINCIPIOS BASICOS DEL DISEÑO DE EXPERIMENTOS

- REPRODUCCION
- ALEATORIZACION
- Control Local

5. REPRODUCCION

Repetición del experimento porque:

- Proporciona una estimación del error experimental
- Permite obtener una estimación más precisa del efecto medio de cualquier factor

UNIDAD EXPERIMENTAL

Unidad a la cual se le aplica un solo tratamiento (que puede ser una combinación de muchos fatores) en una reproducción del experimento

ERROR EXPERIMENTAL

Describe la situación de no llegar a resultados idénticos con dos unidades experimentales tratadas identicamente y refleja:

- Errores de experimentación
- Errores de observación
- Errores de medición
- Variación del material experimental (esto es, entre unidades experimentales)
- Efectos combinados de factores extraños que pudieran influir las características en estudio, pero respecto a los cuales no se ha llamado atención en la investigación

El error experimental puede reducirse:

- Usando material experimental más homogéneo o por estratificación cuidadosa del material disponible
- Utilizando información proporcionada pro variables aleatorias relacionadas
- Teniendo más cuidado al dirigir y desarrollar el experimento
- Usando un diseño experimental muy eficiente

CONFUSION

Dos o más efectos se confunden en un experimento si es imposible separar sus efectos, cuando se lleva a cabo el subsecuente análisis estadístico.

11. LISTA DE COMPROBACION PARA PLANEAR PROGRAMAS DE PRUEBA.

A. Obtenga un enunciado claro del problema.

1. Identifique la nueva e importante área del problema.
2. Subraye el problema específico dentro de sus limitaciones usuales
3. Defina el propósito exacto del programa de prueba.
4. Determine la relación del problema particular con la investigación total o desarrollo del programa.

B. Reúna la información básica disponible.

1. Investigue todas las fuentes de información disponibles.
2. Tabule los datos pertinentes para planear el nuevo programa.

C. Diseñe el programa de prueba.

1. Sostenga una conferencia respecto a todas las partes concernientes.
   a. Enuncie las proposiciones por probar
   b. Especifique respecto a la magnitud de las diferencias que usted considere que valen la pena.
   c. Esboce las alternativas posibles de los sucesos.
   d. Escoja los factores por estudiar.
   e. Determine el rango práctico de estos factores y los niveles específicos a los que se harán las pruebas.
   f. Escoja las mediciones finales que van a hacerse.
   g. Considere el efecto de variabilidad de muestreo y de la precisión de métodos de prueba.
   h. Considere las posibles interrelaciones (o "interacciones") de los factores.
   i. Determine las limitaciones de tiempo, costo, materiales, potencia humana, instrumentación y otros factores y de condiciones extrañas tales como condiciones metereológicas.
   j. Considere los aspectos de las relaciones humanas del programa.
2. Diseñe el programa en forma preliminar.
   a. Prepare una cédula sistemática y completa.
   b. Proporcione las etapas de ejecución o adaptación de la cédula, si es necesario.

c. Elimine los efectos de las variables que no están en estudio, mediante control, balanceo o aleatorización de las mismas.
d. Reduzca al mínimo el número de ejecuciones del experimento.
e. Elija el método de análisis estadístico.
f. Haga las indicaciones prudentes para una acumulación ordenada de datos.

3. Revise el diseño con todo lo concerniente.
   a. Ajuste el programa de acuerdo con los comentarios
   b. Desglose en términos precisos los pasos a seguir.

D. Planee y lleve a cabo el trabajo experimental.

1. Desarrolle métodos, materiales y equipo
2. Aplique los métodos o técnicas
3. Supervise y cheque los detalles; modificando los métodos si es necesario.
4. Registre cualquier modificación al diseño del programa
5. Sea cuidadoso en la colección de datos.
6. Registre el avance del programa.

E. Analice los datos.

1. Reduzca los datos registrados a forma numérica, si es necesario.
2. Aplique las técnicas adecuadas de la Estadística Matemática.

F. Interprete los resultados.

1. Considere todos los datos observados.
2. Limite las conclusiones a deducciones estrictas a partir de la evidencia obtenida.
3. Pruebe, mediante experimentos independientes, las controlversias que susciten los datos.
4. Llegue a conclusiones, tanto respecto al significado técnico de resultados como respecto a significancia estadística.
5. Especifique lo que implican los resultados para su aplicación y para trabajos posteriores.
6. Tome en cuenta todas las limitaciones impuestas por los métodos usados.

7. Enuncie los resultados en términos de probabilidades verificables.

G. Prepare el reporte.

1. Describa claramente el trabajo dando antecedentes, aclaraciones pertinentes del problema y del significado de los resultados.
2. Use métodos gráficos y tabulares para la presentación de los datos en forma eficiente para usos futuros.
3. Suministre información suficiente para que el lector pueda verificar resultados y sacar sus propias conclusiones.
4. Limite las conclusiones a un resumen objetivo, tal que el trabajo evidencie su uso para consideraciones rápidas y acciones decisivas.

12. VENTAJAS DE LOS EXPERIMENTOS DISEÑADOS ESTADISTICAMENTE.

1. Se requiere una estrecha colaboración entre los estadísticos y el investigador o cientificos con las consiguientes ventajas en el análisis e interpretación de las etapas del programa.
2. Se enfatiza respecto a las alternativas anticipadas y respecto a la preplaneación sistemática, permitiendo aun la ejecución por etapas y la producción única de datos útiles para el análisis en combinaciones posteriores.
3. Debe enfocarse la atención a las interrelaciones y a la estimación y cuantificación de fuentes de variabilidad en los resultados.
4. El número de pruebas requerido puede terminarse con certeza y a menudo puede reducirse.
5. La comparación de los efectos de los cambios es más precisa debido a la agrupación de resultados.
6. La exactitud de las conclusiones se conoce con una precisión matemáticamente[9] definida.

13. DESVENTAJAS DE LOS EXPERIMENTOS DISEÑADOS ESTADISTICAMENTE.

1. Tales diseño y sus análisis, usualmente están acompañados de enunciados basados en el lenguaje técnico del estadístico. Sería significativos a la generalidad de la gente, además, el estadístico no debería subestimar el valor de presentarnos los resultados en forma gráfica. De hecho, siempre debería considerar a la representación gráfica como un paso preliminar de un procedimiento más analítico.
2. Muchos diseños estadístico, especialmente cuando fueron formulados por primera vez, se han criticado como demasiado caros, complicados y que requieren mucho tiempo. Tales críticas, cuando son válidas, deben aceptarse de buena fe y debe hacerse un intento honesto para mejorar la situación, siempre que no sea en detrimento de la solución del problema.

---

9. Charles A. Bicking "Some uses o Statistics in the planning of experiments" Industrial Quality Control, Vol. 10, No. 4, enero 1954, pp. 22.

BIBLIOGRAFIA

1. Kempthorne O. "The Design and Analysis of Experiments". John Wiley and Sons, Inc., New York, 1952, p. 10.

2. Bicking A. C. "Some uses of Statistics in the planning of experiments", Industrial Quality Control, Vol. 10, No. 4, enero 1954, p. 23.

3. Cox D.R. "Planning of Experiments". John Wiley and Sons, Inc., New York, 1978.

4. Ostle B. "Estadística Aplicada". Limusa-Wiley, México, 1975. cap. 10.

5. Méndez I. "Lineamientos Generales para la planeación de Experimentos". Monografia No. 15, Vol. 15, IIMAS. 1980.

RTS'rrb.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS

ANALISIS DE EXPERIMENTOS 2^k

Ing. Bernardo Frontana de la Cruz

MAYO, 1985

7.- ANALISIS DE EXPERIMENTOS FACTORIALES 2^k

7.1.- Principios involucrados en la experimentación.

(a) El primer paso importante en la planeación de un experimento es estar-conciente de que no puede lograrse la perfección a partir de un número-limitado de observaciones (muestras) y por ende deberán emplearse di—seños y métodos que permitan la reproducibilidad de los resultados que-desean determinarse.

(b) Las conclusiones derivadas de un experimento deben tener validez.- Para asegurar la ausencia de errores sistemáticos es necesario asignar aleatoriamente los tratamientos a los especímenes o material experimental. Con esto las estimaciones encontradas de los efectos de los tratamientos en un gran número de repeticiones del experimento tenderán a un promedio resultante de los verdaderos efectos de los tratamientos. Esto es, la aleatorización asegura la obtención de estimadores inses - gados de los efectos de los tratamientos. El experimento válido será-aquel que está planeado de manera tal que las conclusiones estén libres de sesgos o parcialidades, sea conciente o inconcientemente del experimentador. La aleatorización es un seguro para el experimentador.

(c) Las conclusiones derivadas de un experimento deben tener PRECISION.-Si los errores sistemáticos se evitan mediante la aleatorización entonces la estimación de los efectos de los tratamientos deferirá de sus valores verdaderos solamente por la variación aleatoria. Un experimento verdadero es aquel que proporciona una medida de esta variación. Una de tales medidas será mediante la replicación o repetición de algunos o todos los tratamientos, de manera tal que un estimador de un error experimental pueda obtenerse por una comparación de unidades experimentales similares; es decir, unidades similares con respecto a los efectos controlados concientemente. En suma, la replicación permite - la reproductibilidad de los resultados a determinarse.

(d) Los resultados de las conclusiones experimentales deben tener ancho rango de aplicación.- La precisión del experimento no solamente depende del tamaño del mismo como se refleja con el número de réplicas sino también en la variabilidad inherente de las unidades experimenta'.s. El error experimental será más pequeño si las unidades (especímenes) son más homogeneas; sin embargo, para lograr una ancha cobertura de los resultados se tendrá que usar unidades heterogeneas en el experimento. Existen algunas técnicas disponibles para lograr un equilibrio; es decir, incrementar la precisión sin un excesivo sacrificio de cobertura.

7.2.- El problema del diseño de experimentos: Elegir un diseño para estimar los - efectos de los tratamientos tan precisamente como sea posible.

7.3.- Primeros pasos en la planeación de un experimento.- El primer. y [illegible] importante paso en la planeación de un experimento es decir, qué experimento se propone uno a realizar. Esto no es tan fácil como parace ya que además de establecer lo que se va a probar también se necesita especificar c[illegible]mente la población a la cual se aplicarán las conclusiones del experimento. Resulta evidente que la población total posible consiste de todas las [illegible]dades de especimenes y rangos de condiciones bajo las cuales serán tratados, también deben considerarse las limitaciones puestas al experimento.

El experimentador deberá elegir a que ancho de la población se referirán - su conclusiones.

El segundo paso en su experimento es medir la exactitud probable de los - - resultados que se obtendrán. Para esto es necesario medir la variabilidad-de las observaciones individuales del experimento y determinar el número de réplicas necesarias para una diferencia de magnitud dada y tener límite de-confianza predeterminados conforme a la rigurosidad del experimento. En - resumen, para determinar cuando un experimento ha de ser bastante largo se-requiere :

(a) La estimación del porcentaje de variación en las observaciones que no -- puede asignarse a ninguno de los factores del experimento. Esta cantidad -- se llama COEFICIENTE DE VARIACION.

(b) El valor de la exactitud deseada en el efecto del tratamiento expresada como un porcentaje de la media global. Por ejemplo puede desearse medir -- el efecto de un tratamiento al 5% porque efectos más pequeños ya no tiene-importancia práctica.

(c) La probabilidad de que los valores verdaderos de las diferencias caigan dentro de límites asignados. El nivel de probabilidad que se usa depende - de las consecuencias posibles que se derivan de las concluciones. Aún si - aquellas llevan a acciones costosas e irrevocables, entonces se requiere un-un nivel de probabilidad tal que haga las pruebas más rigoristas.

7.4.- Métodos para mejorar la exactitud de un experimento.-

(a) Limitar la población a la cual serán aplicable las conclusiones del — experimento.

(b) Usando material uniforme se mejora la exactitud del experimento.

(c) Mejorando los métodos de aplicación de los tratamientos y de medición de los efectos.

(d) Utilizando métodos estadísticos:

(d-1) Estratificando los tratamientos de bloques (lo más homogéneo posible) generando así una variedad de diseños experimentales. Estos eliminan automáticamente muchas de las variaciones en las observaciones de las comparaciones de los tratamientos.

(d-2) Si pueden tomarse series de observaciones para explicar algo de las variabilidades en las mediciones finales puede efectuarse un análisis de COVARIANCIA para eliminar variabilidad. Por ejemplo, los pesos finales de animales después de terminar un experimento pueden ajustarse usando sus pesos iniciales antes de comenzar el experimento. De esta manera se elimina la variabilidad debida a las diferencias iniciales de tamaño y posiblemente a la habilidad inherente al crecimiento. Debe notarse que las observaciones usadas de esta manera pueden no reflejar los efectos del tratamiento.

7.5 Elección del Diseño.- Los tres pasos principales para la elección de un diseño experimental son:

(1) Cuando se ha decidido si el diseño es unifactor o factorial

(2) Cuando se ha decidido que agrupando las observaciones se eliminan 1,2 ó más causas de variación; por ejemplo, si se desea eliminar simultaneamente los efectos de tiempo y días de tomar las observaciones, un diseño de cuadrados latinos puede ayudar.

(3) Cuando se ha visto que el número de tratamientos o combinaciones de tratamientos es lo bastante grande para tener una réplica total ajustada convenientemente en un bloque, teniendo así un diseño por "bloque incompleto".

La tabla 1 indica los tipos de diseño que pueden usarse para experimentos unifactoriales o factoriales, en bloques completos e incompletos, eliminando una o dos causas de variación. Estos mismos diseños aparecen en la tabla 2 listando sus propiedades relevantes para su selección o rechazo.

7.6 El propósito de los experimentos factoriales.- La principal característica de los experimentos factoriales consiste en que se pueden obtener amplios resultados variando las condiciones básicas o tratamientos dentro del experimento. Por ejemplo, en el estudio del incremento en peso de los animales logrado por diferentes dietas, podemos usar diseños factoriales en donde :

TABLA 1.- CLASIFICACION DE LOS PRINCIPALES DISEÑOS

Bloques		Unifactor	Factorial
Completos	Una agrupación dos agrupaciones	Bloque aleatorizados cuadrados latinos	
Incompletos	Una agrupación	-Bloque incompletos balanceados -Diseños cíclicos -Diseños parcialmente balanceados	-Diseños perturbados. -Replicaciones fraccionales
	Dos agrupaciones	-Cuadros de Youden -Cuadros Lattice	-Cuadros Cuasi-latinos

TABLA 2.- PROPIEDADES DE LOS PRINCIPALES DISEÑOS

20

DISEÑOS	PROPIEDADES
1.- Bloques aleatorizados	Fácil de desarrollar, fácil de ajustarse por observaciones perdidas y otras complicaciones experimentales, pueden usarse cualquier número de tratamientos y réplicas.
2.- Cuadrados latinos	Relativamente fácil desarrollar, pequeña dificultad en correcciones por observaciones perdidas, el número de réplicas debe ser un multiplo del número de tratamientos; es decir con 8 tratamientos tendrán que usarse 8, 16, 24... réplicas, es desventajoso si el número de tratamientos es grande, útil para trabajar con hasta 10 tratamientos.

3.- Bloques incompletos balanceados	Más difícil de desarrollar, difícil de ajustarse por observaciones perdidas y otras complicaciones experimentales, el número de réplica necesita ser bastante grande; sin embargo existen algunos diseños que requieren pocas réplicas.
4.- Diseños cíclicos y parcialmente balanceados.	Se usan cuando no existen bloques balanceados incompletos o cuando ciertas comparaciones entre tratamientos son de especial interés, difícil de desarrollar y de ajustar por observaciones perdidas y otras complicaciones experimentales, permite una considerable flexibilidad en la elección del número de tratamientos y de bloques, muchos de estos diseños pueden usarse cuando hay dos agrupaciones.
5.- Diseños perturbados confounded)	Pueden usarse para cualquier arreglo factorial pero es más útil para diseños 2^k, 3^k o 4^k, se necesita cuidado en la aplicación de las combinaciones de los tratamientos y si se usa una sola réplica, el número es muy difícil para ajustarse por observaciones perdidas, pueden usarse cualquier número de réplica.
6.- Réplica fraccional	La mitad, tercera o cuarta parte de las réplicas son comúnmente usadas, permite al experimentador planear su investigación como una secuencia de pequeños experimentos, difícil de ajustarse por observación perdida.
7.- Diseño Split-Plot	Permite que algunos efectos e interacciones sean estimados con más exactitud a expensas de la exactitud de otros, particularmente útil donde algunos de los factores en el experimento requiere grandes cantidades de material experimental mientras otros factores pueden usarse económicamente en pequeñas cantidades de material.
8.- Cuadrados de Youden	Más útil para menos de 40 tratamientos, más difícil de desarrollar, difícil de ajustar por observaciones perdidas y otras complicaciones experimentales, el número de réplicas debe ser igual al número de tratamientos por bloque, el número de tratamientos debe ser igual al número de bloques.
9.- Cuadrados Celosía (Lattice square)	Util para tratar con 16-49 tratamientos, más difícil de desarrollar, difícil de ajustar por complicaciones experimentales y observaciones perdidas. El número de tratamientos debe ser P^2 donde el número de réplicas es $P + 1$, o si P es par posiblemente $\frac{1}{2}(P + 1)$
10.- Cuadrados - - Cuasi-Latinos	Más útil para diseños 2^5, 2^6, 3^3, 3^4, 4^3, más difícil de desarrollar, difícil de ajustar por observación y otras complicaciones experimentales, el número de observaciones debe ser un cuadrado perfecto o múltiplo de un cuadrado perfecto, el número de réplica es usualmente pequeño, se necesita cuidados en la aleatorización de éste diseño.

hagamos intervenir animales de ambos sexos y de diferentes razas, alimentándolos con diferentes métodos. Usando cada método de alimentación y cada dieta a ambos sexos y razas, esto es un diseño factorial, se pueden determinar los mejores métodos, dietas y razas. Además, tal vez ⟶ lo más característico de este tipo de diseños, es posible estudiar cuando el mejor método de alimentación varía de dieta a dieta o cuando el método y la dieta dependen del sexo o raza del animal.

Consecuentemente con un diseño factorial podemos estudiar la manera en que pueden variar los efectos con los cambios en otros factores experimentales; es decir, LA INTERACCION de los factores experimentales. El diseño factorial, por el uso de cada combinación de una serie de tratamientos y condiciones experimentales, proporciona los efectos medios, y sus interacciones con algún otro pueden estimarse simultáneamente. Si no hay interacción entre los factores, pueden usarse todas las observaciones para hacer comparaciones entre tratamientos; si embargo, cuando las hay deberá restringirse la atención a las combinaciones particulares. La existencia de interacciones puede verificarse solamente por el uso de un experimento factorial y la determinación simultánea de interacciones significantes se facilita grandemente. El reconocimiento de qué interacciones son relevantes permite enfocar la atención sobre éstas. Por ejemplo, si encontramos que el mejor método de alimentación depende de la dieta pero no del sexo o raza del animal, podemos considerar métodos diferentes de alimentación para cada dieta separadamente pero promediados sobre todos los sexos y razas.

En resumen, el diseño factorial está interesado con el análisis simultáneo de un número básico de tratamientos o factores, cada uno de los cuales toma un número posible de formas o niveles. Una combinación particular de los niveles de los factores determina un tratamiento.

El término "factor" se usa aquí para indicar cualquier característica que está bajo el control del experimentador y que puede ser variado de prueba a prueba.

7.7. El análisis de experimentos factoriales 2^k

En este punto discutiremos el experimento 2^k que es un experimento de k factores cada uno con dos niveles.

Considérese un experimento con 2 factores A y B, cada uno con 2 niveles. Designamos con mayúsculas a "los efectos" y con minúsculas a las combinaciones de los niveles de los tratamientos posibles. "A" se referirá entonces al efecto del factor A y "a" al nivel "alto" de A que aparece en algunas combinaciones de un tratamiento. Arbitrariamente nos referimos a los dos niveles de cada factor como los niveles "alto" y "bajo" (pudiendo ser alto y bajo sobre alguna escala).

Las cuatro combinaciones para establecer los correspondientes tratamientos para este experimento 2^2 son como se muestra en la Tabla III: (1), a, b, ab. El método de designar estos tratamientos es incluyendo la letra minúscula si el factor está al nivel alto y excluyéndola en caso contrario.

Tabla III Combinaciones nivel-tratamiento en un experimento 2^2

	A_0	A_1
B_0	(1)	a
B_1	b	ab

Como se observa, si todos los factores están al nivel "bajo" se usa el símbolo (1). Por conveniencia A_0 = nivel inferior y A_1 = nivel superior de A (de manera similar para los otros factores). Los subíndices 0 y 1 serán ventajosos en discusiones posteriores. [los símbolos a,b, ab y (1)

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS

ANALISIS DE VARIANCIA EN REGISTRO LINEAL

ING. BERNARDO FRONTANA DE LA CRUZ

MAYO, 1985

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

8. ANALISIS DE VARIANCIA EN REGRESION LINEAL

8.1 Asociación entre variable

En el análisis estadístico se pueden tener datos UNIVARIANTES y MULTIVARIANTES. Los primeros corresponden a una única observación de cada unidad elemental de una muestra de la población (una sola variable). Las estadísticas muestrales calculadas con estos datos se utilizan para hacer inferencias acerca de los parámetros correspondientes a la población univariante relacionada. Cuando cada unidad elemental de una población puede dar dos o más medidas, referidas a una caracterización específica tenemos una población MULTIVARIANTE; por ejemplo, los gastos de consumo medio se pueden asociar con una variedad de factores tales como el ingreso disponible, tamaño y distribución de efectivo, edades, etc. En particular, una POBLACION BIVARIANTE es la que contiene dos medidas en cada unidad elemental; por ejemplo, podemos observar la altura y el peso de cada individuo de una población adulta.

La técnica de estimación por asociación es, en realidad, un método de predicción, siendo la predicción la función central de las ciencias. La tarea principal de cualquier estudio científico es descubrir las relaciones generales entre las variables observadas y expresar la naturaleza de tales relaciones en forma matemáticamente precisa de manera que pueda predecirse el valor de una con base en otra (u otras). La toma de decisiones por asociación en estadística comercial y económica permite, entre otras cosas:

a) reducir los costos en la toma de decisiones

b) encontrar una variable de explicación suficientemente consistente cuando restringimos nuestra investigación al análisis bivariante

c) Aumentar la precisión

Existen dos aspectos distintos pero complementarios en el estudio de la asociación entre variables. El primero llamado ANALISIS DE REGRESION trata de establecer "la naturaleza de la relación entre las varaibles"; esto es, se estudia la relación funcional entre las variables a fin de predecir el valor de una con base en las otras. Convencionalmente la predicha se llama VARIABLE DEPENDIENTE y las variables básicas de la predicción son las VARIABLES INDEPENDIENTES.

El segundo aspecto del análisis por asociación se conoce como ANALISIS DE CORRELACION y trata de determinar "el grado de relación entre las variables".

De lo anterior puede observarse que el análisis de asociación puede sclasificarse en ANALISIS DE ASOCIACION SIMPLE para cuando hay una sola variable independiente y ANALISIS DE ASOCIACION MULTIPLE para cuando hay más de una variable independiente. Además conforme a la relación funcional entre las variables, el análisis de asociación puede diferenciarse entre LINEAL y NO LINEAL.

2 Variancia explicada e inexplicada

Los cálculos necesarios para ajustar ecuaciones de regresión lineal ya han sido discutidos con algún detalle. Aquí consideraremos como tratar estos problemas vía los métodos de análisis de variancia.

Recordemos que si ajustamos una regresión de la forma $E\,[y/x] =$ $a + b\,x$ usando n parejas de valores $(X_j\ Y_j)$ $(j= 1,2,\ldots n)$ el estimador de b es;

$$B = \frac{\Sigma\,(X_j - \bar{X})\,(Y_j - \bar{Y})}{\Sigma\,(X_j - \bar{X})^2}$$

y el de a: $A = \bar{y} - B\,\bar{x}$

El modelo de regresión puede escribirse como $Y_j = a + b\,x_j + z_j$ donde z_j satisfacen las condiciones del análisis de variancia.

En la figura 1 la línea de regresión ajustada $E\,[y/x] = A + Bx$ pasa, como se explicó, por el punto G $(\bar{x}, \bar{y})$ que es "el centro de gravedad" del conjunto de puntos observados, de los cuales $P_j\,(X_j, X_j)$ es uno

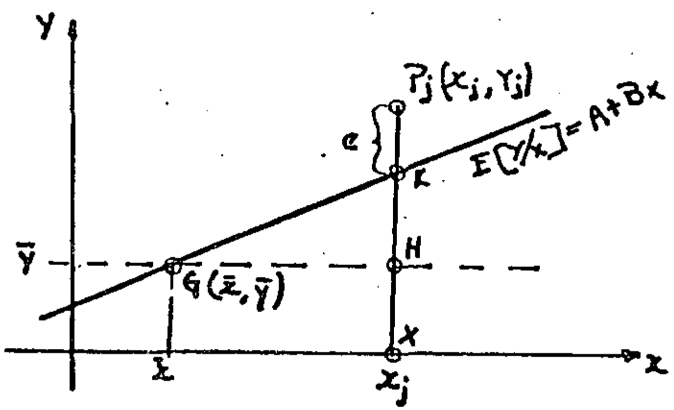


Fig. 1 Una recta de regresión ajustada

Obsérvese que la perpendicular al eje x desde P_j establece los puntos K en la intersección con la recta de regresión, H en la intersección con la recta $\bar{y}$ y X al intersectarse con el eje x; donde k y h tienen por coordenadas K $(X_j, A{+}B\,X_j)$ y $H(X_j, \bar{y})$.

El segmento P_jx puede dividirse en P_jK, KH y HX o bien en términos algebráicos:

1)... $Y_j = \bar{y} + (A{+}Bx_j - \bar{y}) + (y_j - A{-}Bx_j)$

Como 2)... $\bar{y} = A + B\bar{x}$, sustituyendo en el primer paréntesis de 1) tenemos: 3)... $Y_j = \bar{y} + B\,(X_j - \bar{x}) + (Y_j - A - B\,x_j)$

De aquí podemos calcular la suma total de cuadrados como:

$$\Sigma(Y_j - \bar{y})^2 = \Sigma\,[B\,(X_j - \bar{x}) + (Y_j - A - B\,X_j)]^2$$

$$4)\ldots\quad \underline{\Sigma(Y_j - \bar{y})^2 = B^2\,\Sigma(X_j - \bar{x})^2 + \Sigma(Y_j - A - BX_j)^2}$$

ya que:

$$2\,B\,\Sigma(X_j - \bar{X})\,(Y_j - A - Bx_j) = 2B\,\Sigma(X_j - \bar{X})\,[(Y_j - \bar{y}) - B\,(X_j - \bar{x})]$$

$$= 2B\,[\Sigma(X_j - \bar{X})\,(Y_j - \bar{y}) - B\Sigma(X_j - \bar{X})^2] = 2B\,[\Sigma(X_j - \bar{X})\,(Y_j - \bar{y}) - (X_j - \bar{X})\,(Y_j - \bar{y})]$$

$$= 0$$

La expresión 4) muestra que la suma total de cuadrados $\Sigma(Y_j - \bar{y})^2$ está dividida en dos partes; la primera:

$$B^2\,\Sigma(X_j - \bar{X})^2 = \Sigma(Yc - \bar{y}) = \Sigma(A + Bx_j - A - B\bar{X}) = B^2\,\Sigma(X_j - \bar{x})^2$$

Es entonces proporcional a KH y mide la cantidad de variación de las Y's "explicada" por la recta de regresión ajustada; por lo tanto, se le llama "la suma de cuadrados debida a la regresión lineal de Y sobre X o más brevemente "suma de cuadrados debida a la regresión".

como sabemos $\sigma^2 = E(\hat{u}^2) - E^2\{\hat{u}\}$ entonces:

5)... $E\left[B^2\ \Sigma(X_j-\bar{X})^2\right] = \sigma^2 + b^2\ \Sigma(X_j-\bar{x})^2$

y el número de grados de libertad de esta suma de cuadrados es 1 (el coeficiente de σ^2).

La segunda suma de cuadrados 4) si observamos la figura, corresponde a la de las desviaciones de los valores observados Y_j respecto a los valores predichos para la regresión. En otras palabras, es la suma de los cuadrados de los errores "no explicados" debidos a la aleatorización. Por tanto a esta suma de cuadrados se le llama "alrededor de la regresión" o suma de cuadrados "residual". En efecto

$$Y_j - A - Bx_j = a + bx_j + Z_j - A - Bx_j$$

$$= Z_j - (A - a) - (B - b)\ X_j$$

Dado que $E(A) = a$ y $E(B) = b$ y A y B no dependen en otro sentido a y b, se sigue que

$$\Sigma\ (Y_j - A - Bx_j)^2 = f(Z^2) \text{ y su valor esperado}$$

es un múltiplo de σ^2 o sea:

$E\left[\Sigma(Y_j - A - BX_j)^2\right] = \lambda\sigma^2$ podemos encontrar λ calculando el valor esperado de 4):

$$E\left[\Sigma(Y_j - \bar{y})^2\right] = E\left[B^2\Sigma(Xi - \bar{x})^2\right] + E\left[\Sigma(Y_j - A - Bx_j)^2\right]$$

como λ no depende de b podemos hacer $b = 0$

$$(n-1)\ \sigma^2 = \sigma^2 + \lambda\ \sigma^2$$

de donde

$$\lambda = n-2$$

luego entonces la suma de cuadrados residual tiene n-2 grados de libertad. Podemos resumir los resultados obtenidos en la tabla de análisis de variancia siguiente:

TABLA I. Análisis de variancia de la regresión lineal

Fuente	G. de l.	S.S.	MS
regresión lineal	1	$B^2\Sigma(X_j - \bar{X})^2$	$B^2\Sigma(X_j - \bar{x})^2$
residual (alrededor de la regresión)	n-2	$\Sigma(Y_j - A - Bx_j)^2$	$\left[\Sigma(Y_j - A - Bx_j)^2\right]/(n-2)$
Total	n-1	$\Sigma(Y_j - \bar{y})^2$	

la estadística $F = \dfrac{MSR}{MSE} = \dfrac{(n-2)\ B^2\ \Sigma(X_j - \bar{x})^2}{(Y_j - A - Bx_j)^2}$

Se compara con la distribución $F_{1,n-2}$ para probar la hipótesis Ho: $b=0$ contra la alternativa H1: $b \neq 0$ (independencia entre X y Y en la población).

3.3 Ejemplo 1 Un fabricante de soldaduras de puntos de aluminio de alta resistencia al esfuerzo cortante desea predecir la resistencia al esfuerzo cortante por los diámetros de la soldadura de punto en lugar de destruir el producto con ese propósito. Una muestra de diez soldaduras, escogidas para establecer **la relación** entre las dos variables dio los siguientes resultados:

Diámetro de la soldadura (cm)	Resistencia al esfuerzo cortante (1000 Kg)
2.4	7.0
1.8	5.3
1.6	4.2
1.0	3.3
1.2	3.8
1.1	6.6
2.8	8.5
1.6	6.6
1.5	4.5
2.3	8.8

La estimación de la ecuación de regresión poblacional resultó ser

$$Y_c = 1.481 + 2.531\,X$$

Par probar la independencia entre las variables X y Y de la población establecemos la hipótesis:

$$Ho: b = 0$$

$$Hi: b \neq 0$$

Para probar dicha hipótesis construyamos nuestra tabla de análisis de variancia:

$$\bar{x} = \frac{2.4 + 1.8 + \ldots + 1.5 + 23}{10} = 1.73$$

$$\Sigma(X_j - \bar{X})^2 = (2.4 - 1.73)^2 + (1.8 - 1.73)^2 + \ldots + (1.5 - 1.73)^2 + (2.3 - 1.63)^2 = 3.22$$

$$B^2\ \Sigma(X_j - \bar{X})^2 = 2.531^2 \times 3.22 = 20.6272$$

observamos que $\Sigma(Y_j - A - BX_j)^2 = \Sigma(Y_j - Y_C)^2$ donde Y_C se obtiene para los valores de X por la recta de regresión. Con esto:

valores observados diámetro X	res. al cortante Y	resistencia calculada Y_C	$Y-Y_C$	$(Y-Y_C)^2$
2.4	7.0	7.56	−0.56	0.3136
1.8	5.3	6.04	−0.74	0.5476
1.6	4.2	5.53	−1.33	1.7689
1.0	3.3	4.01	−0.71	0.5041
1.2	3.8	4.52	−0.72	0.5184
1.1	6.6	4.26	+2.34	5.4756
2.8	8.5	8.57	−0.07	0.0049
1.6	6.6	5.53	+1.07	1.1449
1.5	4.5	5.28	−0.78	0.6084
2.3	8.6	7.30	+1.50	2.2500
17.3	58.6	58.60	0	13.1364

n = 10

La tabla ANOVA será:

Tabla 2. ANOVA para la regresión lineal de resistencias al cortante sobre los diámetros de soldadura

Fuente	G. de l.	S.S.	MS	F_C
regresión lineal	1	20.6272	20.6272	12.5619
residual (alrededor de la regresión)	8	13.1364	1.6421	
Total	9	33.7636		

Para un nivel de significancia $\alpha = 0.05$, $F_{0.05,\,1,8} = 3.46$

Como F teórica < F calculada (3.46 < 12.5619) entonces rechazamos Ho implicando que si hay dependencia entre los diámetros de la soldadura y **la resistencia** al esfuezo cortante con una significancia estadística del **95%. Dicha dependencia se explica** con la relación funcional $Y = 1.481 + 2.531\,X$.

8.3 Análisis de variancia en regresión lineal múltiple. Recordemos que para encontrar los coeficientes de regresión lineal con dos variables independientes habrá que resolver el sistema normal

$$na\ 1.23 + b\ 12.3\ \Sigma X_2 + b\ 13.2\ \Sigma X_3 = \Sigma y$$

1)... $a\ 1.23\ \Sigma X_2 + b\ 12.3\ \Sigma X_2^2 + b\ 13.2\ \Sigma X_2X_3 = \Sigma yx_2$

$a\ 1.23\ \Sigma X_3 + b\ 12.3\ \Sigma X_2X_3 + b\ 13.2\ \Sigma X_3^2 = \Sigma X_3 y$

puesto que:

$$\Sigma(y - \bar{y}) = \Sigma(X_2 - \bar{x}_2) = \Sigma(X_3 - \bar{x}_3) = 0$$

si hacemos la transformación:

$$y' = y - \bar{y}\ ;\ X_2' = X_2 - \bar{x}\ \ y\ \ X_3' = X_3 - \bar{x}$$

cambiamos el origen de las ecuaciones normales de (0,0,0) a $(\bar{y}, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ reduciendo 1) a 2 ecuaciones en términos de las desviaciones alrededor de las medias:

$b\ 12.3\ \Sigma x_2'^2 + b\ 13.2\ \Sigma x_2' x_3' = y'\ x_2'$

2)...

$b\ 12.3\ \ x_2' x_3' + b\ 13.2\ \ x_3'^2 = y' x_3'$

que resolviendo obtenemos los coeficientes de regresión parciales b 12.3 y b 13.2 y al tercero lo encontramos de

3)... $a\ 1.23 = \bar{y} - b\ 12.3\ \bar{x}_2 - b\ 13.2\ \bar{x}_3$

Para comentar el análisis de variancia para este caso consideremos el siguiente ejemplo:

La compañía de cigarros PIPA comenzará su XI año de operaciones y se considera una empresa próspera en la industria. A fin de programar su producción requiere un pronóstico de las ventas totales. Se sospecha

que éstas dependen, entre otros factores, de la publicidad de su producto y del índice comparativo de precios (el precio de su producto comparado con el precio medio de otras marcas similares en porciento). Se dispone de datos históricos de la década pasada para estos factores, los cuales se muestran junto con los porcentajes correspondientes:

Tabla III Datos históricos de la compañía PIPA

	Datos originales			Datos originales expresados como porcentaje		
Año	Y	X_2	X_3	Y	X_2	X_3
1	24	4	80	6.80	6.06	8.25
2	27	4	80	7.65	6.06	8.25
3	31	5	90	8.78	7.58	9.28
4	29	5	100	8.22	7.58	10.31
5	33	6	100	9.35	9.09	10.31
6	38	7	110	10.76	10.61	11.34
7	37	8	120	10.48	12.12	12.37
8	40	8	100	11.33	12.12	10.31
9	45	9	90	12.75	13.64	9.28
10	49	10	100	13.38	15.15	10.31
Total	353	66	970	100	100	100

En la tabla: y = ventas anuales en millones de pesos

X_2 = gastos anuales de publicidad en millones de pesos

X_3 = P ó índice comparativo de precios

Con los datos tenemos lo siguiente:

$$\bar{Y} = \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = 100/10 = 10$$

$\Sigma y^2 = 1046.03$ $\Sigma X_2^2 = 1092.91$ $\Sigma X_3^2 = 1015.18$

$\Sigma X_2 y = 1064.11$ $\Sigma yX_3 = 1011.73$ $\Sigma X_2X_3 = 1020.28$

con lo cual tenemos:

$$\Sigma y'^2 = \Sigma(y-\bar{y})^2 = \Sigma y^2 - n(\bar{y})^2 = 1046.03 - 10(10)^2 = 46.03$$

$$\Sigma x_2'^2 = 1092.91 - 10(10)^2 = 92.91$$

$$\Sigma x_3'^2 = 1015.18 - 10(10)^2 = 15.18$$

$\Sigma\, y'\, x_3' = y\, X_2 - n(\bar{y})\ (\bar{x}_2) = 1054.11 - 10(10) = 64.11$

$\Sigma\, y'\, x_3' = 1011.73 - 10(10)(10) = 11.73$

$\Sigma\, X_2'\, X_3' = 1020.28 - 10(10)(10) = 20.28$

sustituyendo en 2) y 3) obtenemos los coeficientes de regresión y la ecuación de regresión estimada es:

$$\bar{y}\ 1.23 = 4.7452 + 0.73595\, X_2 - 0.21047\, X_3$$

Este resultado indica que la publicidad incrementa las ventas y que los aumentos en los precios relativos las disminuyen. Esto es, el valor 0.73595 indica que si los gastos en publicidad aumentan en 1% las ventas aumentarán en 0.74% mientras que -0.21047 revela que al aumentar el precio relativo en 1% las ventas caerán en 0.21%.

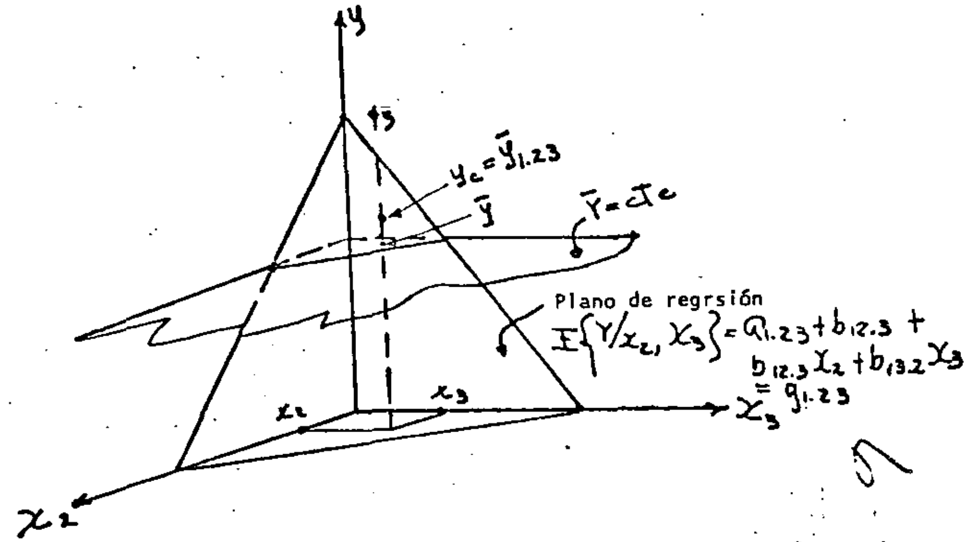
8.3.1 Significado de los coeficientes de regresión parciales. Nuestro principal interés en esta parte del curso se centra en saber:

a) ¿Qué tan significativos son los valores de los coeficientes de regresión parciales? O sea, si encontramos como en nuestro ejemplo que b 12.3 $\neq$ 0 y b 13.2 $\neq$ 0 ¿podemos considerar también que los correspondientes coeficientes de la población toman valores distintos de cero?

b) ¿Hay diferencia relativa entre los efectos de las variables independientes y el valor de la variable dependiente? Dicho en otras palabras, estamos interesados en determinar la contribución neta de cada variable independiente a la dependiente.

Estas preguntas se contestan con pruebas estadísticas basadas en el análisis de la variancia; veamos como.

Dada la ecuación de regresión muestral y por tanto, para este caso, el plano de regresión, podemos pensar en las desviaciones totales de los valores Y con relación a la media estimada como las desviaciones verticales con relación al plano de regresión ajustado.



Dividiendo esta variación, como en el caso bivariante en dos partes independientes: una parte mide la variación en Y que ha sido "explicada" por la regresión $(Y_C - \bar{y})$ y la otra mide la variación "no explicada" debida a la aleatoriedad, siendo por tanto la residual $(Y-Y_C)$

Lo anterior en términos algebraicos será:

$$(Y-\bar{y}) = (y-Y_C) + (Y_C-\bar{y})$$

cuya suma cuadrada es:

$$4)\ldots \quad \Sigma(Y-\bar{y})^2 = \Sigma(Y-Y_C)^2 + \Sigma(Y_C-\bar{y})^2$$

recordemos que el doble producto $(Y-Y_C)\cdot(Y_C-Y) = 0$

en 4) se tiene

SST = suma de cuadrados totales = $\Sigma(Y-\bar{Y})^2 = \Sigma Y^2 - n(\bar{Y})^2 = \Sigma Y'^2$

SSR = sma de cuadrados de la regresión = $\Sigma(Y_C-\bar{Y})^2 = b12.3\ \Sigma X_2'\, y' +$ $+ b13.2\ \Sigma X_3'\, y'$

con k grados de libertad (k = número de coeficiente de regresión parcial en la ecuación de regresión muestral. Finalmente

SSE = suma de cuadrados del error = $SST - SSR = \Sigma(Y_C)^2$ con $n-k-1$ grados de libertad.

Resumimos lo anterior en el cuadro ANOVA USUAL

Tabla IV Tabla ANOVA para la regresión trivariante

Fuente	G. de l.	S.S.	MS
regresión	$k = 2$	SSR	$MSR = SSR/k$
residual	$n-k-1$	SSE	$MSE = SSE/(n-k-1)$
Total	$n-1$	SST	

donde el error medio cuadrático $MSE = \frac{SSE}{n-k-1} = \frac{(y-y_c)}{n-k-1} = \hat{\sigma}^2_{1.23}$

es la variancia muestral del plano de regresión ajustado y es una estimación insesgada de la variancia de la población $\sigma^2_{1.23}$

si las subpoblaciones de Y están normalmente distribuidas MSE mide la precisión del ajuste

La estadística $F = \frac{MSR}{MSE}$ se distribuye como $F_{k,\,n-k-1}$ y puede emplearse para efectuar una prueba general de hipótesis:

$H_0 : B_2 = B_3 = 0$ $\quad H_1 : B_2 \neq 0, \; B_3 \neq 0$ (B_i = coefs. poblacionales)

si la hipótesis nula es falsa o sea que sí existe regresión significativa los valores Y_c diferirán significativamente de $\bar{y}$ y SSR será grande. Como resultado los residuos tenderán a ser pequeños. Esto supone que el valor de F será grande indicando una regresión importante. Cuando los residuos son relativamente grandes o la mejora provocada por el plano de regresión es pequeña entonces F será pequeño aceptando en consecuencia Ho. Con esto contestamos la

la primera pregunta planteada al inicio de este punto.

Para nuestro ejemplo tenemos:

$SST = \Sigma y'^2 = 46.03$

$SSR = b_{12.3}\,\Sigma X_2^1 y + b_{13.2}\,\Sigma X_3^1 y^1 = (0.7359)(64.11)+(0.21047)(11.73)$

$= 44.71$

y $SSE = SST - SSR = 46.03 - 44.71 = 1.32$

nuestra tabla ANOVA será:

Tabla V ANOVA para el problema de la Cía. PIPA

Fuente	SS	G. de l.	MS
regresión X_2, X_3	44.71	2	$MSR = 44.71/2 = 22.355$
residual	1.32	7	$MSE = 1.32/7 = 0.1886$
Total	46.02	9	

para la prueba de hipótesis $H_0 : B_2 = B_3 = 0$; $H_1 : B_2 \neq 0$; $B_3 \neq 0$

$F = \frac{22.355}{0.1886} = 118.50$; $F_\infty = 0.01,2,7 = 9.55$

como observamos hay una alta asociación significativa o regresión entre las ventas, la publicidad y el índice relativo de precios.

Para contestar la segunda pregunta planteada primero calculemos los coeficientes de regresión simple (con (2)):

b_{12} = coeficiente de X_2 en regresión simple de Y sobre X_2

$= \frac{X_2^1 Y^1}{\Sigma X_2^{1^2}} = \frac{64.11}{92.91} = 0.690$

de manera similar

$b_{13} = \frac{\Sigma X_3^1 Y^1}{\Sigma X_3^{1^2}} = \frac{11.73}{15.18} = 0.773$

Las sumas de cuadrados explicadas debidas a X_2 y X_3 solas son:

$SSR\ (X_2) = b_{12}\ \Sigma X_2^1\ Y^1 = (0.690)(64.11) = 44.24$

$SSR\ (X_3) = b_{13}\ \Sigma X_3^1\ Y^1 = (0.773)(11.73) = 9.07$ teniendo

Tabla VI ANOVA para la aportación de X_2

F u e n t e	S S	G. de l.	MS
regresión X_2	44.24	1	44.24
adición de X_3	0.47	1	0.47
X_2 y X_3	44.71	2	
residuo	1.32	7	0.1886
T o t a l	46.02	3	

para probar la significancia de X_2 sola calculamos la SSE (X_2)

como $SSE\ (X_2) = SCT - SSR\ (X_2) = 46.03 - 44.24 = 1.79$

con G. de l. = 10-1-1 = 8 ; por tanto

$$MSE(X_2) = \frac{1.79}{8} = 0.224$$

El estadístico F será $F(X_2) = \frac{MSR\ (X_2)}{MSE\ (X_2)} = \frac{44.24}{0.224} = 197.5$

que es altamente significativo, por lo tanto rechazamos la hipótesis

$Ho : B_2 = 0.$

El efecto adicional de X_3 sobre Y puede comprobarse con la estadística

$$F = \frac{MSR(X_3)}{MSE} = \frac{0.47}{0.1886} = 2.492$$ que comparado

con $F_{0.05, 1, 7} = 3.59$ resulta no significativo.

Alternativamente podemos elaborar el cuadro VII con SSR (X_3).

Como debemos esperar de resultados anteriores, el efecto directo de X_3 es estadísticamente insignificante mientras que el de X_2 es altamente significativo. Finalmente los resultados de estas pruebas concuerdan apreciablemente con la interpretación hecha de los mismos coeficientes de regresión parciales.

Tabla VII

F u e n t e	SS	G. de l.	MS
regresión X_3	9.07	1	9.07
adición de X_2	35.64	1	35.64
X_2 y X_3	44.71	2	
residual	1.32	7	0.1886
T o t a l	46.02	9	

Problema No. 1

SUJETO	GRUPOS (X_{ti}, Y_{ti})			
	1	2	3	4
1	25,25	17,11	32,24	10,8
2	13,25	9,9	30,18	29,17
3	10,12	19,16	12,2	7,8
4	25,30	25,17	30,24	17,12
5	10,37	6,1	10,2	8,7
6	17,25	23,12	8,0	30,26
7	9,31	7,4	5,0	5,8
8	18,26	5,3	11,1	29,29
9	27,28	30,26	5,1	5,29
10	17,29	19,20	25,10	13,0

a) calcular las rectas de regresión para cada grupo:

$$Y = a_t + b_t X \qquad \text{donde} \quad \begin{cases} b = \dfrac{n \sum_i x_i y_i - (\sum_i x_i)(\sum_i y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\ a = \bar{y} - b\,\bar{x} \end{cases}$$

Tenemos entonces para cada grupo:

		1	2	3	4
$\sum_i x_i$	=	171	160	168	153
$\sum_i y_i$	=	268	119	82	144
$\sum_i x_i y_i$	=	4,611	2,482	2,338	2,695
$\sum_i x_i^2$	=	3,331	3,256	3,928	3,303
$\bar{x}$	=	17.1	16.0	16.8	15.3
$\bar{y}$	=	26.8	11.9	8.2	14.4

De donde:

$$b_1 = \frac{10(4611)-(171)(268)}{10(3,331)-(171)^2} = \underline{0.9693}\ ; \quad a_1 = 26.8 - 0.0693(17.1) = \underline{25.6149}$$

$$b_2 = \frac{10(2,482)-(160)(119)}{10(3,256)-(160)^2} = \underline{0.8305}\ ; \quad a_2 = 11.9 - 0.8305(16) = \underline{1.3874}$$

$$b_3 = \frac{10(2,338)-(168)(82)}{10(3,982)-(168)^2} = \underline{0.8687}\ ; \quad a_3 = 8.2 - 0.8687(16.8) = \underline{6.3936}$$

$$b_4 = \frac{10(2,695)-(153)(144)}{10(3,303)-(153)^2} = \underline{0.5112}\ ; \quad a_4 = 14.4 - 0.5112(15.3) = \underline{6.5790}$$

por lo que las rectas de regresión son, para cada uno de los grupos:

1) $\underline{y = 25.61 + (0.07)\ X}$

2) $\underline{y = 1.39 + (0.83)\ X}$

3) $\underline{y = 6.39 + (0.87)\ X}$

4) $\underline{y = 6.58 + (0.51)\ X}$

- para los promedios:

$$\begin{cases} (17.1,\ 26.8) \\ (16.0,\ 11.9) \\ (16.8,\ 8.2) \\ (15.3,\ 14.4) \end{cases} \qquad \begin{aligned} \Sigma\, X_i &= 65.2 \\ \Sigma\, Y_i &= 61.3 \\ \Sigma\, X_i Y_i &= 1,006.76 \\ \Sigma\, X_i^2 &= 1,064.74 \\ \bar{X} &= 16.3 \\ \bar{y} &= 15.325 \end{aligned}$$

$$b_p = \frac{4(1,006.76)-(65.2)(61.3)}{4(1,064.74)-(165.2)} = \underline{3.8232}$$

$$a_p = 15.325 - (3.8232)\ 16.3 = \underline{46.9937}$$

y la recta de regresión para los promedios es:

5) $\underline{y = -46.99 + (3.82)\ X}$

para todos los puntos juntos: $\Sigma X_i = 171 + 160 + 166 + 153 = 652$, $\bar{X} = 16.3$

$\Sigma Y_i = 268 + 119 + 82 + 144 = 613$, $\bar{Y} = 15.325$

$\Sigma X_iY_i = 4,611+2,482+2,338+2,695 = 12,126$

$\Sigma X_i^2 = 3,331+3,256+3,928+3,303 = 13,818$

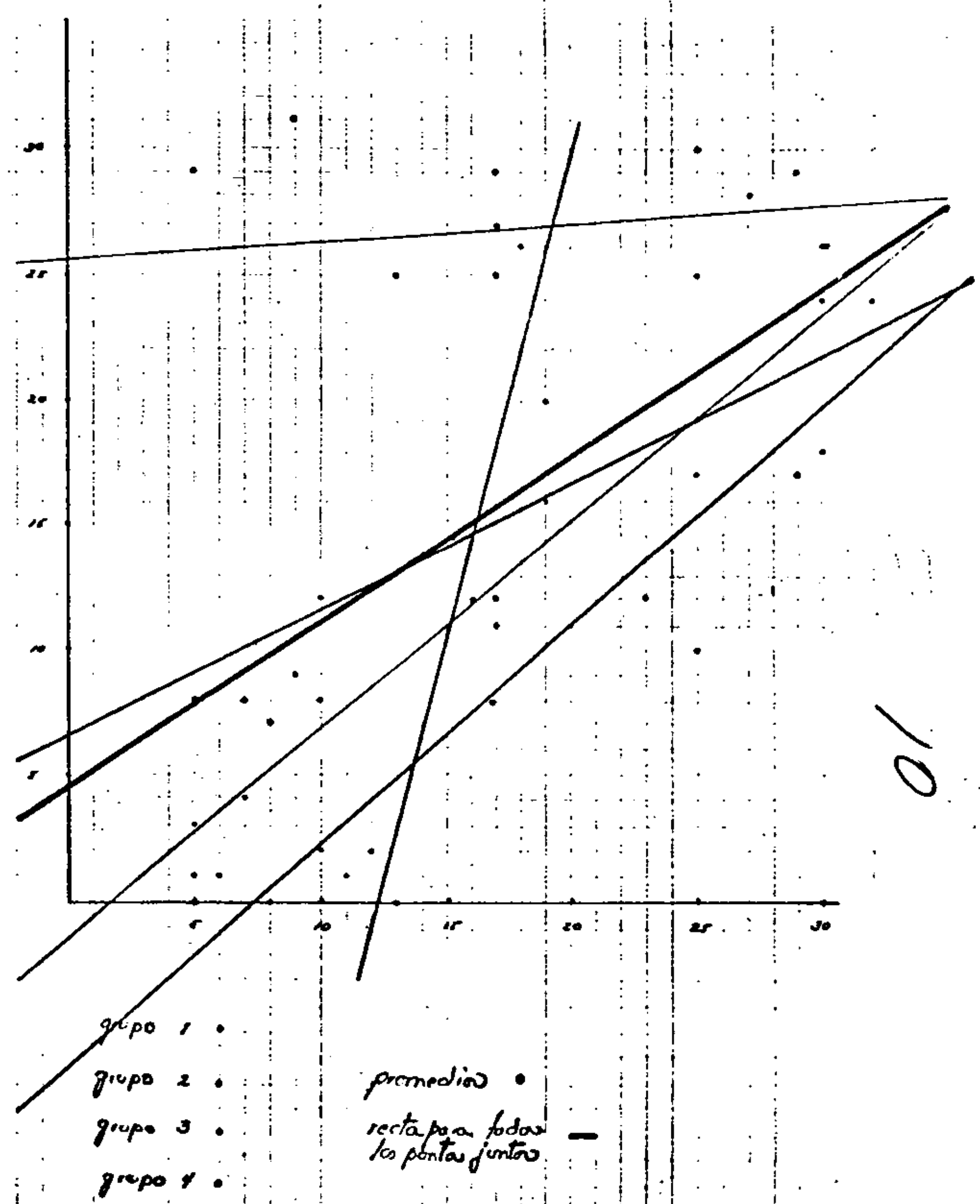
y la recta de regresión:

6) $\underline{y = 4.42 + (0.67)\ X}$

$$b_r = \frac{40(12,126)-(652)(613)}{40(13,818) - (652)^2} = \underline{0.6689}$$

$$a_r = 15.325 - (0.6689)\ 16.3 = \underline{4.4217}$$

a) Gráfica de los puntos y las rectas calculadas



b) Estimar los efectos α_t

como

$E(a_t) = \alpha_t$; a_t es un estimador insesgado de α_t y :

$\hat{\alpha}_1 = 25.61$; $\hat{\alpha}_2 = -1.39$; $\hat{\alpha}_3 = -6.39$; $\hat{\alpha}_4 = 6.58$

c) probar la hipótesis de igualdad de pendientes

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$

$$W_t = \sum_{i=1}^{n_t} (X_{ti} - \bar{X}_{t.}) = \sum_{i=1}^{n_t} X_{ti}^2 - n_t \bar{X}_{t.}^2$$

$W_1 = 3{,}331 - 10(17.1)^2 = 406.9$ $\qquad B_1 = 0.0693$

$W_2 = 3{,}256 - 10(16.0)^2 = 696$ $\qquad B_2 = 0.6305$

$W_3 = 3{,}928 - 10(16.8)^2 = 1{,}105.6$ $\qquad B_3 = 0.8687$

$W_4 = 3{,}303 - 10(15.3)^2 = 962.1$ $\qquad B_4 = 0.5112$

$$S_W = \sum_{t=1}^{n_t} W_t B_t^2 - W_c B_c^2$$

$$W_c = \sum_{t=1}^{n_t} W_t = \underline{3170.6} \quad , \quad B_c = \frac{1}{W_c} \sum_{t=1}^{n_t} W_t B_t = \frac{1}{3170.6}(2058.4814) = \underline{0.6492}$$

$$\therefore S_W = 1567.7572 - (3170.6)(0.6492)^2 = 231.30$$

Ahora, de la ecuación (12): $\qquad \bar{Y}_{..} = 15.325$

$$S_R = \sum_{t=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_t} (y_{ti} - \bar{y}_{..})^2 - \sum_{t=1}^{k} n_t (\bar{y}_{t.} - \bar{y}_{..})^2 - (W_c B_c^2 + S_W)$$

$$= \left(\sum_{t=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_t} y_{ti}^2 - \cancel{N \bar{Y}_{..}^2} \right) - \left(\sum_{t=1}^{k} n_t \bar{y}_{t.}^2 - \cancel{N \bar{Y}^2} \right) - (W_c B_c^2 + S_W)$$

$$S_R = 14{,}161 - 11{,}344.5 - 1{,}567.7572 = \underline{1{,}248.74}$$

En consecuencia $\quad F = \dfrac{S_W/k-1}{S_R/N-2k} = \dfrac{231.30/3}{1{,}248.74/32} = 1.98 < 2.90$ $\quad F_{.05,3,32}$

Por lo que se acepta que las pendientes son iguales con 5% de nivel de significancia: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$

d) Probar la hipótesis $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$

De los resultados del inciso anterior, es razonable asumir que las B_s' son iguales; por lo que usamos el modelo I:

$$y_{ti} = \alpha_t + \beta(x_{ti} - \bar{X}_{..}) + \varepsilon_{ti}$$

tenemos entonces:

$$S_R + S_W = 1{,}248.74 + 231.30 = \underline{1{,}480.04}$$

$$W_m = 10(1{,}064.74) - (40)(16.3)^2 = 19.8$$

$$B_m = \sum_{t=1}^{4} 10 \frac{(\bar{X}_{t.} - 16.3)(\bar{y}_{t.} - 15.325)}{19.8} = \frac{10(9.18 + 1.0275 - 11.125 + 0.525)}{19.8} =$$

$$\frac{-0.925}{19.8} = -0.0467 \; ; \; W_m B_m^2 = 0.0432$$

$$S_G = \sum_{t=1}^{4} n_t \bar{y}_{t.}^2 - N \bar{Y}_{..}^2 - W_m B_m^2 = 11{,}344.5 - 40(15.325)^2 + 0.0432 = 1950.32$$

$$S_{WG} = \frac{W_c W_m}{W_0} (B_c - B_m)^2 = \frac{(3{,}170.6)(19.8)}{3170.6 + 19.8} (0.6492 + 0.0467) = 13.69$$

$$\therefore S_{WG} + S_G = \underline{1964.01}$$

En consecuencia: $\quad F = \dfrac{1964.01/3}{1480.04/35} = 15.48 > 2.88 \quad (F_{.05,3,35})$

y se rechaza la hipótesis $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ con un nivel de confianza del 5%

ANALISIS DE COVARIANCIA EN UNA DIRECCION

EL ANALISIS DE COVARIANCIA SE UTILIZA PARA PROBAR SI LAS DIFERENCIAS EN LA RESPUESTA MEDIA DE UN GRUPO A OTRO PUEDEN SER EXPLICADAS POR UNA REGRESION LINEAL CON UNA VARIABLE DE CONTROL. EL PLANTEAMIENTO DEL ANALISIS DE COVARIANCIA DEPENDE DEL MODELO QUE SE UTILICE; PARA CLASIFICACION DE GRUPOS EN UNA DIRECCION SE PUEDEN USAR LOS SIGUIENTES MODELOS:

$$\text{I.} \quad Y_{ti} = \alpha_t + \beta(X_{ti} - \bar{X}_{..}) + Z_{ti} \qquad (1)$$

$$\text{II.} \quad Y_{ti} = \alpha_t + \beta_t(X_{ti} - \bar{X}_{..}) + Z_{ti} \qquad (2)$$

PARA AMBOS MODELOS SE PRETENDE PROBAR LA HIPOTESIS

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k \qquad (3)$$

CONTRA H_1: NO TODAS LAS α_t SON IGUALES

LAS TABLAS DEL ANALISIS SON:

MODELO	FUENTE	G. de L.	SS
I	GRUPOS (AJUSTADA)	$k - 1$	$SWG + SG$
	RESIDUAL	$N - k - 1$	$SR + SW$
II	GRUPOS (AJUSTADA)	$k - 1$	$S_0 + SWG + SG + SW - w_0 \sum_{t=1}^{k} B_t'^2$
	RESIDUAL	$N - 2k$	SR

Fuente	G. de L.	Suma de cuadrados SS	Esperanzas de MS
Pendiente global	1	$S_0 = w_0 B_0^2$	$\sigma^2 + w_0 \beta_0^2$
Pendiente de las medias de los grupos vs promedio de las pendientes dentro de grupos	1	$S_{WG} = \frac{w_1 w_m}{w_0}(B_1 - B_m)^2$	$\sigma^2 + \frac{w_1 w_m}{w_0}(\beta_1 - \beta_m)^2$
Acerca de la línea de regresión de las medias de los grupos	$k-2$	$S_G = \sum_{t=1}^{k} n_t[\bar{Y}_t - \bar{Y}_{..} - B_m(\bar{X}_t - \bar{X}_{..})]^2$	$\sigma^2 + (k-2)^{-1} \sum_{t=1}^{k} n_t[\alpha_t - \alpha_m - \beta_m \bar{X}_t]^2$
Pendientes entre grupos	$k-1$	$S_W = \sum_{t=1}^{k} w_t(B_t - B_l)^2$	$\sigma^2 + (k-1)^{-1} \sum_{t=1}^{k} w_t(\beta_t - \beta_l)^2$
Residual	$N-2k$	$S_R = \sum_{t=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} [Y_{ti} - \bar{Y}_t - B_t(X_{ti} - \bar{X}_t)]^2$	σ^2
Total	$N-1$	$\sum_{t=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} (Y_{ti} - \bar{Y}_{..})^2$	

DONDE SWG, SG, SR, SW, S_0 Y W_0 SE CALCULAN CON LAS FORMULAS DEL CAPITULO DE OBSERVACION DE DOS VARIABLES, Y

$$B_t' = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} (X_{ti} - \bar{X}_{..})(\bar{Y}_{ti} - \bar{Y}_{..})}{\sum_{i=1}^{N_t} (X_{ti} - \bar{X}_{..})^2} \qquad (4)$$

LOS VALORES ESTIMADOS DE LAS α_t SON

$$\text{MODELO I: } \bar{Y}_{t.} - B_c(\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..}) \qquad (5)$$

$$\text{MODELO II: } \bar{Y}_{t.} - B_t(\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..}) \qquad (6)$$

SI UNO ESTA BASTANTE SEGURO DE QUE $\beta_1 = \beta_2 = \dots \beta_k$, ENTONCES EL MODELO I ES MEJOR, YA QUE DA MAS GRADOS DE LIBERTAD EN EL RESIDUO.

TAREA

EN UN EXPERIMENTO, A 40 SEÑORES SE LES SUJETO A UNA PRUEBA (TRATAMIENTO) PARA DETERMINAR QUE TAN CERCA PODIAN CAMINAR HACIA UN OBJETO PELIGROSO (EN ESTE CASO UNA VIBORA), ANTES DE SENTIRSE ANSIOSOS; PARA ESTO, CADA SUJETO SE SITUO ALEATORIAMENTE EN UNO DE CUATRO GRUPOS, CADA UNO CON DIEZ SUJETOS; CON CADA GRUPO SE EMPLEO DIFERENTE TIPO DE VIBORA. DESPUES DEL TRATAMIENTO A CADA SEÑOR SE LE SUJETO DE NUEVO AL MISMO TRATAMIENTO (POSTRATAMIENTO). LOS RESULTADOS DEL TRATAMIENTO SON LAS X_{ti} Y LOS DEL POSTRATAMIENTO SON LAS Y_{ti}, LOS CUALES SE PRESENTAN EN LA TABLA SIGUIENTE

SUJETO	GRUPOS (X_{ti}, Y_{ti})			
	1	2	3	4
1	25,25	17,11	32,24	10,8
2	13,25	9,9	30,18	29,17
3	10,12	19,16	12,2	7,8
4	25,30	25,17	30,24	17,12
5	10,37	6,1	10,2	8,7
6	17,25	23,12	8,0	30,26
7	9,31	7,4	5,0	5,8
8	18,26	5,3	11,1	29,29
9	27,28	30,26	5,1	5,29
10	17,29	19,20	25,10	13,0

a) CALCULAR LAS RECTAS DE REGRESION PARA CADA GRUPO, PARA LOS PROMEDIOS Y PARA TODOS LOS PUNTOS JUNTOS. EN UNA MISMA GRAFICA DIBUJAR LOS PUNTOS Y LAS RECTAS CALCULADAS.

b) ESTIMAR LOS EFECTOS α_t

c) PROBAR LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE PENDIENTES $H_0: \beta_1 = \beta_2 \dots = \beta_k$

d) PROBAR LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE MEDIAS DE LAS Y_{ti} DE LOS CUATRO GRUPOS, DESPUES DE AJUSTAR POR LA REGRESION CON X_{ti}, O SEA, PROBAR $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS

FUNDAMENTOS DEL DISEÑO Y ANALISIS ESTADISTICO DE E X P E R I M E N T O S

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

MAYO, 1985

(1)

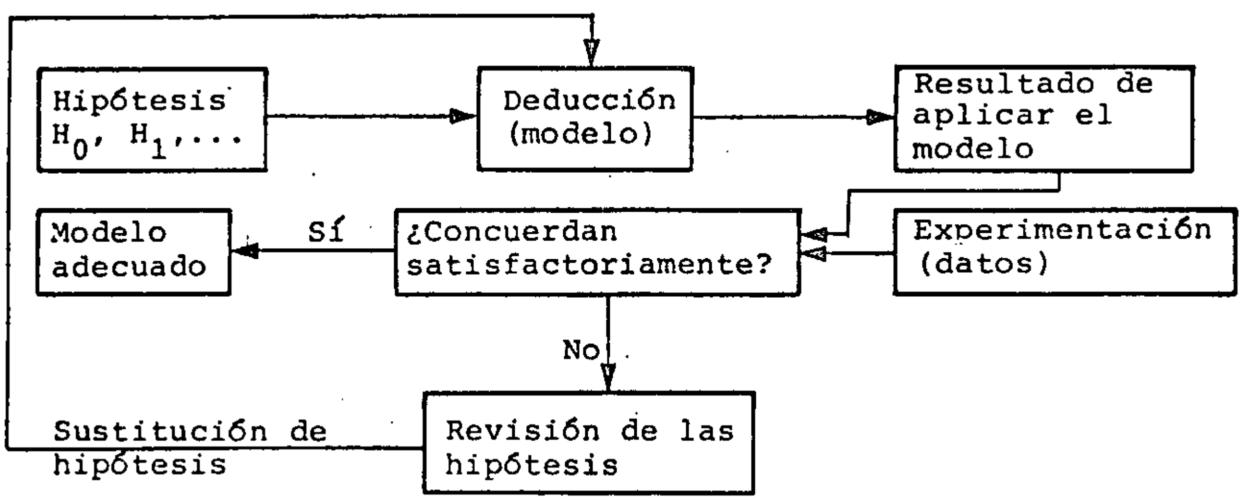
INDICE

(5)

1. INTRODUCCION

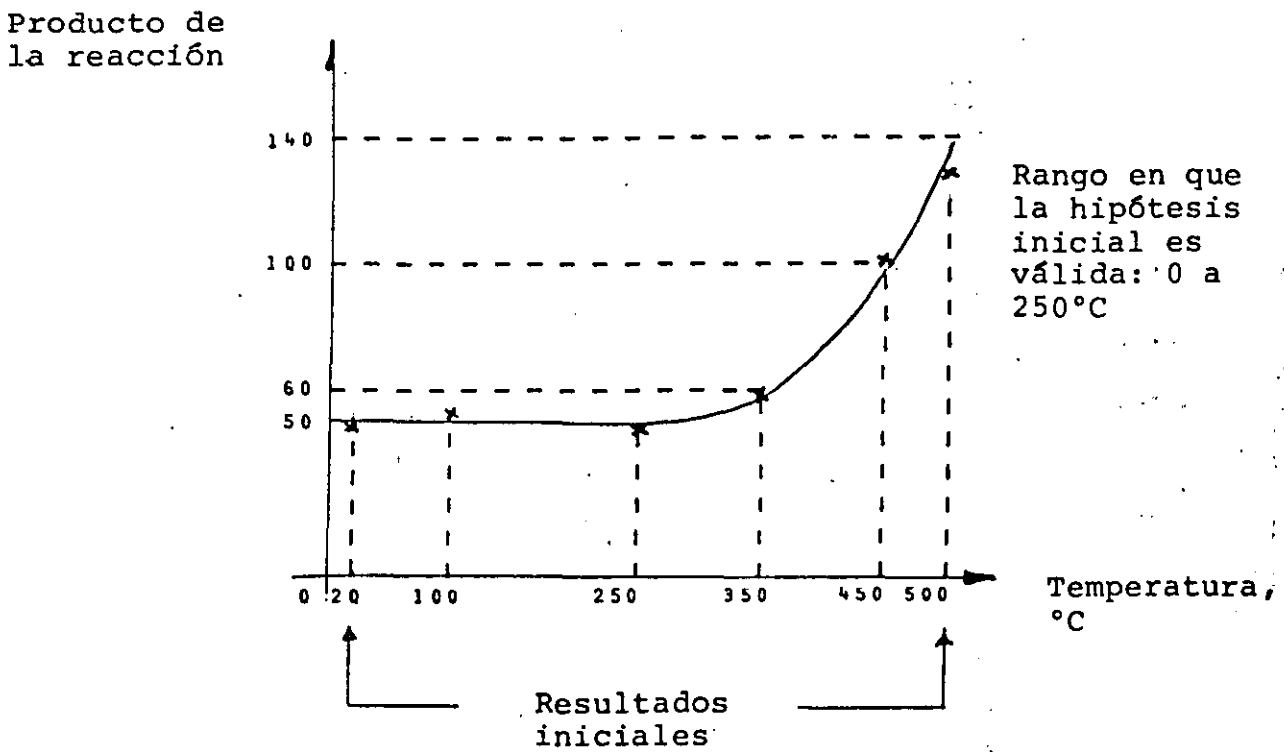
El papel de la experimentación

El proceso de investigación requiere que en algún momento se confirme si los resultados obtenidos con base en un modelo formulado bajo ciertas hipótesis son congruentes con la realidad; esto conduce a diseñar y llevar a cabo experimentos que permitan recolectar información que sirva para verificar la validez del modelo y, en su caso, modificar sus hipótesis. Este proceso de retroalimentación se muestra en el siguiente esquema



La deducción que se realiza después de la experimentación no necesariamente implica el formular un nuevo modelo, sino que puede limitarse a señalar en qué rangos de valores de los parámetros involucrados en las hipótesis el modelo es válido.

Por ejemplo, una hipótesis podría ser que cierta reacción química es independiente de la temperatura; si al realizar el experimento con dos temperaturas (20 y 500°C) para verificarla, se encuentra que no es así, se podría proceder a formular un nuevo modelo cambiando la hipótesis por la que señala que la reacción sí depende de la temperatura, o a ejecutar una serie de experimentos con otras temperaturas (por ejemplo 0, 100, 250, 350 y 450°C), para determinar en qué rangos de temperatura la hipótesis inicial es correcta, si ese fuera el caso; esto se ilustra en la siguiente figura:



Es usual que al diseñar un experimento se procure que se puedan estudiar a la vez todos los parámetros involucrados en las hipótesis, ya que pudiera suceder que dos de ellos, considerados por separado, no tuvieran efectos que condujeran a rechazar la hipótesis inicial, pero que al combinarse sí se detectarán efectos negativos.

Para tener éxito en un proceso de verificación de hipótesis, es necesario conjugar dos factores:

1. Tener un método eficiente para diseñar un experimento que conduzca a resultados que permitan obtener las respuestas a las preguntas que se plantean, y que sean afectados lo menos posible por alguna fuente de error.

2. Contar con algún método para analizar los resultados y sacar conclusiones.

De estos factores el más importante es el primero, ya que si el experimento no se diseña adecuadamente no se podrá obtener la información necesaria para extraer las conclusiones deseadas, aun cuando se cuenta con métodos de análisis sofisticados.

Dificultades confrontadas por los investigadores

Las dificultades usuales que tiene que vencer un investigador son:

a. Error experimental
b. Confusión de correlación con causalidad
c. Complejidad de los efectos estudiados

a. Error experimental. Toda variación en los resultados ocasionada por factores disturbantes, conocidos o no, se llama error experimental.

La confusión que ocasiona el error experimental se puede reducir grandemente mediante un diseño adecuado del experimento y mediante el uso de métodos estadísticos de análisis.

b. Confusión de correlación con causalidad. Es necesario saber disernir cuándo una correlación aparente entre dos parámetros es casual o causal; en el primer caso ésta aparecerá por casualidad; en el segundo, se tendrá cuando en realidad la variación de un parámetro se puede explicar por la variación del otro, es decir, que un cambio en uno causa un cambio en el otro.

c. Complejidad de los efectos estudiados. No siempre es fácil detectar si un parámetro influye en los resultados experimentales, y si sí, en qué rangos de valores lo hace, y de qué manera interactúa con otros parámetros para influir junto con ellos (efectos cruzados).

Por ejemplo, los parámetros vino y café pueden influir en el tiempo de reacción de un individuo ante cierto estímulo; los efectos pueden ser de manera individual (debido sólo al café o sólo al vino) o combinada (debido a ambos a la vez). Asimismo, los efectos pueden cambiar en función del número de tazas de café o de copas de vino.

Es muy importante que en cualquier investigación experimental:

a) se definan claramente los objetivos que se persiguen
b) se asegure de que todas las partes interesadas estén de acuerdo con ellos
c) se defina el criterio bajo el cual se probará si se cumplieron los objetivos, es decir, se seleccionan el diseño experimental que se considere adecuado y el método

estadístico de prueba; y

d) se tengan acuerdos preliminares con las partes interesadas sobre las acciones a tomar en caso de que no se cumplan los objetivos.

En lo que sigue se entederá por espécimen o unidad experimental a la persona, animal u objeto sobre el cual se hace la medición de la propiedad o característica bajo estudio.

Por su parte, se entenderá por tratamiento a un nivel o valor de un factor o a una combinación de niveles de factores.

Por ejemplo, al comparar el rendimiento (en km/lt) que se tiene con cuatro aditivos para gasolina y dos marcas diferentes de automóvil:

- se tendrán dos factores, aditivo y marca, el primero con cuatro niveles y el segundo con dos
- cada tratamiento será una de las combinaciones aditivo-marca
- las unidades experimentales serán los vehículos a los cuales se les "apliquen" los tratamientos
- el rendimiento es la característica o variable en estudio
- los resultados de cada medición (km/lt) serán los datos u observaciones
- el conjunto de datos para cada tratamiento conforma la

muestra correspondiente.

En este ejemplo cada muestra debe ser representativa de la respectiva población; las poblaciones son las colecciones de resultados (rendimientos) que se tendrían si todo el aditivo disponible de cada tipo se usara en todos los automóviles de ambas marcas; obviamente sería no sólo antieconómico sino improcedente el usar todo el volumen fabricado de cada aditivo para hacer la comparación de rendimientos, puesto que no quedaría nada para usarse con el fin previsto (en este caso, escoger el mejor aditivo para los vehículos de una empresa), y la verificación teóricamente no terminaría nunca ya que las fábricas de aditivos y vehículos pueden producir continua e indefinidamente (se trataría de poblaciones teóricamente infinitas).

2. TABLAS DE CONTINGENCIA

CON FRECUENCIA SE DESEA DETERMINAR SI LA CLASIFICACION DE UNA MUESTRA EN TERMINOS DE 2 O MAS CRITERIOS ES TAL QUE PERMITA INFERIR SI ESOS CRITERIOS SON INDEPENDIENTES ENTRE SI.

POR EJEMPLO, UNA MUESTRA DE PERSONAS QUE HAN FALLECIDO SE PUEDE CLASIFICAR DE LA SIGUIENTE MANERA:

	MUERTE POR CANCER DEL PULMON	MUERTE POR OTRAS CAUSAS
FUMADORES	348	3152
NO FUMADORES	82	1418

EN UN CASO COMO ESTE SE PRETENDERIA PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE FUMAR Y MORIR POR CANCER DEL PULMON SON CARACTERISTICAS INDEPENDIENTES.

CUANDO LOS DATOS SE CATEGORIZAN DE ESTA MANERA, SE DICE QUE SE FORMA UNA TABLA DE CONTINGENCIA.

SEA UNA MUESTRA DE TAMAÑO n Y QUE EL EXPERIMENTO SE HA DISEÑADO PARA CLASIFICARLA EN DOS CATEGORIAS, UNA CON r NIVELES Y LA OTRA CON c NIVELES.

SEA x_{ij} EL NUMERO (LA FRECUENCIA) DE ELEMENTOS DE LA MUESTRA QUE QUEDAN EN LA CELDA (i,j).

LA TABLA DE CONTINGENCIA SERÍA

CLASIFICACION 1	CLASIFICACION 2: 1	2	3	. . . .	c	TOTAL
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}		x_{1c}	$x_{1.}$
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}		x_{2c}	$x_{2.}$
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}		x_{3c}	$x_{3.}$
.						
.						
.						
r	x_{r1}	x_{r2}	x_{r3}		x_{rc}	$x_{r.}$
TOTAL	$x_{.1}$	$x_{.2}$	$x_{.3}$		$x_{.c}$	n

LOS TOTALES POR RENGLON SE DENOTAN CON $x_{i.}$, ES DECIR

$$x_{i.} = \sum_{j=1}^{c} x_{ij}$$

LOS TOTALES POR COLUMNA SE DENOTAN

$$x_{.j} = \sum_{i=1}^{r} x_{ij}$$

LA SUMA DE LOS TOTALES POR COLUMNA O POR RENGLON DEBE SER EL TAMAÑO DE LA MUESTRA, ES DECIR

$$\sum_{i=1}^{r} x_{i.} = \sum_{j=1}^{c} x_{.j} = n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} x_{ij}$$

EL PROBLEMA DE VERIFICAR SI LAS CATEGORIAS SON INDEPENDIENTES EQUIVALE AL DE VERIFICAR SI LA PROBABILIDAD DE QUE EL ESPÉCIMEN CUMPLA CON ALGÚN NIVEL DE LA CATEGORIA 1 DEPENDE DE EN QUÉ NIVEL DE LA CATEGORIA 2 SE ENCUENTRA. ASÍ, EN EL

EJEMPLO ANTERIOR SE TRATARIA DE VERIFICAR SI LA MUERTE POR CANCER PULMONAR DEPENDE O NO DE SI LA PERSONA ES O NO FUMADORA.

EN INFERENCIA ESTADISTICA SE DEMUESTRA QUE LA ESTADISTICA

$$V = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\chi_i - nP_i)^2}{nP_i} \tag{1}$$

TIENDE A UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES χ^2 CON k-r-1 GRADOS DE LIBERTAD CONFORME CRECE n, EN DONDE n ES EL TAMAÑO DE LA MUESTRA, χ_i ES LA FRECUENCIA CON QUE SE OBSERVO EL EVENTO i y P_i ES LA PROBABILIDAD DE OBSERVARLO EN UNA REALIZACION DEL EXPERIMENTO.

EN NUESTRO CASO, SI P_{ij} ES LA PROBABILIDAD DE QUE UN RESULTADO TENGA EL VALOR i DE LA CARACTERISTICA 1 Y EL VALOR j DE LA 2, Y SI LOS DOS METODOS DE CLASIFICACION SON REALMENTE INDEPENDIENTES, ENTONCES.

$$P_{ij} = \omega_i S_j, \; i = 1, 2, \ldots r; \; j = 1, 2, \ldots, c$$

DONDE ω_i ES LA PROBABILIDAD DE QUE EL ELEMENTO OBSERVADO CAIGA EN EL I-ESIMO NIVEL DE LA CLASIFICACION 1, Y S_j ES LA PROBABILIDAD DE QUE CAIGA EN EL J-ESIMO NIVEL DE LA CLASIFICACION 2,

POR OTRA PARTE, LOS ESTIMADORES DE MAXIMA VEROSIMILITUD DE ω_i Y S_i SON

$$\hat{\omega}_i = \frac{\chi_{i.}}{n} \quad , \quad \hat{S}_j = \frac{\chi_{.j}}{n}$$

POR LO TANTO, CON LA EC.(1) SE OBTIENE QUE

$$V = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(\chi_{ij} - n\hat{\omega}_i \hat{S}_j)^2}{n \hat{\omega}_i \hat{S}_j} \qquad (2)$$

TIENE DISTRIBUCION χ^2 CON $(r-1)(c-1)$ GRADOS DE LIBERTAD PARA n GRANDE. ESTE NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD SE JUSTIFICA DE LA SIGUIENTE MANERA: SE TIENEN $K = rc$ CLASES Y PARA ESTIMAR LAS P_{ij} SE REQUIERE ESTIMAR $r-1$ VALORES DE ω Y $c-1$ VALORES DE S, ES DECIR, SE ESTIMAN $(r-1) + (c-1)$ PARAMETROS; POR LO TANTO LOS GRADOS DE LIBERTAD SON

$$rc-(r-1)-(c-1)-1 = (r-1)(c-1)$$

EJEMPLO

CON EL FIN DE VERIFICAR SI EL FUMAR Y EL MORIR POR CANCER PULMONAR SON INDEPENDIENTES, SE DISEÑO UN EXPERIMENTO ESTADISTICO QUE CONSISTIO EN SACAR UNA MUESTRA ALEATORIA DE 5000 EXPEDIENTES CLINICOS DE PERSONAS FALLECIDAS EN UNA CADENA DE HOSPITALES, Y CLASIFICARLA EN UNA TABLA DE CONTINGENCIA. EL RESULTADO FUE EL SIGUIENTE:

	MUERTE POR CANCER PULMONAR	MUERTE POR OTRAS CAUSAS	TOTAL $X_{i.}$	$\hat{\omega}_i$
FUMADORES	348	3152	3500	0.7
NO FUMADORES	82	1418	1500	0.3
TOTAL : $X_{.j}$	430	4570	5000	1.0
$\hat{S}_j$	0.086	0.914	1.000	

PARA REALIZAR LA PRUEBA DE INDEPENDENCIA SE UTILIZA LA EC (2), Y SE DETERMINA EL VALOR CRITICO DE χ^2 QUE CORRESPONDA A UN NIVEL DE CONFIANZA PRESTABLECIDO, $1-\alpha$, USANDO $(2-1)\times(2-1) = 1$ GRADOS DE LIBERTAD, YA QUE $r = c = 2$.

$$\hat{\omega}_1 = \frac{3500}{5000} = 0.7, \quad \hat{\omega}_2 = \frac{1500}{5000} = 0.3$$

$$\hat{S}_1 = \frac{430}{5000} = 0.086, \quad \hat{S}_2 = \frac{4570}{5000} = 0.914$$

$$v = \frac{[348-5000\ (0.7)(0.086)]^2}{5000\ (0.7)(0.086)} + \frac{[3152-5000\ (0.7)(0.914)]^2}{5000\ (0.7)(0.914)} + $$

$$+ \frac{[82-5000\ (0.3)(0.086)]^2}{5000\ (0.086)(0.3)} + \frac{[1418-5000\ (0.3)(0.914)]^2}{5000\ (0.3)(0.914)}$$

$$v = \frac{2209}{301.00} + \frac{2209}{3199.00} + \frac{2209}{129.00} + \frac{2209}{1371.00} =$$

$$= 7.34 + 0.69 + 17.12 + 1.61 = 26.76$$

SI $1-\alpha = 0.99$, ENTONCES

$$(\chi^2_c)_{0.99,1} = 6.63 < 26.76$$

POR LO QUE SE RECHAZA LA HIPOTESIS DE INDEPENDENCIA.

EJEMPLO

UN CLUB DE PESCA DEPORTIVA ESTA INTERESADO EN SABER SI SE PESCA CADA TIPO DE PESCADO CON LA MISMA FRECUENCIA EN LOS MESES DE JUNIO A SEPTIEMBRE. PARA ELLO SE DISEÑO UN EXPERIMENTO CONSISTENTE EN REGISTRAR LA PESCA MENSUAL EN UNO DE LOS BARCOS DE LOS TRES TIPOS DE PECES DE LA ZONA: ABADEJO, PEZ AZUL Y COLA AMARILLA.

LA TABLA DE CONTINGENCIA QUE SE FORMULO FUE LA SIGUIENTE:

	ABADEJOS	PECES AZULES	COLAS AMARILLAS	TOTAL	$\hat{\omega}$
JUNIO	315	1347	620	2282	0.2611
JULIO	270	1250	514	2034	0.2327
AGOSTO	295	1480	710	2485	0.2843
SEPTIEMBRE	246	1200	494	1940	0.2219
TOTAL	1126	5277	2338	8741	1.0000
$\hat{S}$	0.1288	0.6037	0.2675	1.0000	

PARA LA PRUEBA DE INDEPENDENCIA CON CONFIABILIDAD $1-\alpha = 0.95$ Y $(4-1)(3-1) = 6$ GRADOS DE LIBERTAD, SE TIENE QUE $(\chi^2_c)_{0.95,6} =$ $= 12.6$.

EL VALOR DE LA ESTADISTICA V SE OBTIENE EN LA EC (2)

$$V = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} \frac{(x_{ij} - 8741\ \hat{\omega}_i\ \hat{S}_j)^2}{8741\ \hat{\omega}_i\ \hat{S}_j}$$

CON $\hat{\omega}_1 = \frac{2782}{8741} = 0.2611, \quad \hat{\omega}_2 = \frac{2034}{8741} = 0.2327$

$$\hat{\omega}_3 = \frac{2485}{8741} = 0.2843, \quad \hat{\omega}_4 = \frac{1940}{8741} = 0.2219$$

$$\hat{S}_1 = \frac{1126}{8741} = 0.1288, \quad \hat{S}_2 = \frac{5277}{8741} = 0.6037$$

$$\hat{S}_3 = \frac{2338}{8741} = 0.2675$$

$$8741\ \hat{\omega}_1\ \hat{S}_1 = 8741\ (0.2611)\ (0.1288) = 293.957$$
$$8741\ \hat{\omega}_1\ \hat{S}_2 = 8741\ (0.2611)\ (0.6037) = 1377.809$$
$$8741\ \hat{\omega}_1\ \hat{S}_3 = 8741\ (0.2611)\ (0.2675) = 610.509$$
$$8741\ \hat{\omega}_2\ \hat{S}_1 = 8741\ (0.2327)\ (0.1288) = 261.983$$
$$8741\ \hat{\omega}_2\ \hat{S}_2 = 8741\ (0.2327)\ (0.6037) = 1227.944$$
$$8741\ \hat{\omega}_2\ \hat{S}_3 = 8741\ (0.2327)\ (0.2675) = 544.103$$
$$8741\ \hat{\omega}_3\ \hat{S}_1 = 8741\ (0.2843)\ (0.1288) = 320.077$$
$$8741\ \hat{\omega}_3\ \hat{S}_2 = 8741\ (0.2843)\ (0.6037) = 1500.235$$
$$8741\ \hat{\omega}_3\ \hat{S}_3 = 8741\ (0.2843)\ (0.2675) = 664.755$$
$$8741\ \hat{\omega}_4\ \hat{S}_1 = 8741\ (0.2219)\ (0.1288) = 249.824$$
$$8741\ \hat{\omega}_4\ \hat{S}_2 = 8741\ (0.2219)\ (0.6037) = 1170.953$$
$$8741\ \hat{\omega}_4\ \hat{S}_3 = 8741\ (0.2219)\ (0.2675) = 518.850$$

$$v = \frac{(315-293.957)^2}{293.957} + \frac{(1347-1377.809)^2}{1377.809} + \frac{(620-610.509)^2}{610.509} +$$
$$\frac{(270-261.983)^2}{261.983} + \frac{(1250-1227.944)^2}{1227.944} + \frac{(514-544.103)^2}{544.103} +$$
$$\frac{(295-320.077)^2}{320.077} + \frac{(1480-1500.235)^2}{1500.235} + \frac{(710-664.755)^2}{664.755} +$$
$$\frac{(246-249.824)^2}{249.824} + \frac{(1200-1170.953)^2}{1170.953} + \frac{(494-518.850)^2}{518.850}$$

$$v = 1.506+0.689+0.148+0.245+0.396+1.665+1.965+0.273+3.079$$
$$0.059+0.721+1.190$$

$$v = 11.936 < 12.6$$

POR LO TANTO SE ACEPTA LA HIPOTESIS DE QUE LA CANTIDAD DE PECES ES INDEPENDIENTE DEL MES EN EL PERIODO DE JUNIO A SEPTIEMBRE, CON UN 95% DE NIVEL DE CONFIANZA.

EJEMPLO

CON EL FIN DE VERIFICAR SI LAS VARIABLES REGION GEOGRAFICA, PARTIDO DE AFILIACION Y SEXO SON INDEPENDIENTES, SE DISEÑO UN EXPERIMENTO ESTADISTICO QUE CONSISTIO EN SACAR UNA MUESTRA ALEATORIA DE 1500 PERSONAS Y CLASIFICAR A CADA UNA DE ACUERDO CON ESAS VARIABLES; CON ESTO SE OBTUVO LA SIGUIENTE TABLA DE CONTINGENCIA:

	ESTE		OESTE			
PARTIDO	MASCULINO	FEMENINO	MASCULINO	FEMENINO	TOTAL	$\hat{w}_i$
DEMOCRATA	183	217	223	227	850	0.5667
REPUBLICANO	196	154	137	113	600	0.4000
OTRO	12	8	14	16	50	0.0333
	391 +	379	374 +	356	1500	
TOTAL	=770		=730			
$\hat{s}_j$	770/1500 = 0.5133		730/1500 = 0.4867			

391 + 374 = 765, 379 + 356 = 735, $\hat{r}_1 = 765/1500=0.51$

$\hat{r}_2 = 735/1500=0.49$, $r = 3$, $c = 2$, $m = 2$

LA ESTADISTICA $V = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{(x_{ijk} - 1500\hat{w}_i\hat{s}_j\hat{r}_k)^2}{1500\hat{w}_i\hat{s}_j\hat{r}_k} = 30.88$

TIENE DISTRIBUCION χ^2 CON $rcm-(r+c+m)+2=7$ GRADOS DE LIBERTAD.

SI $1-\alpha = 95\%$, ENTONCES

$$\chi^2_{0.95,7} = 14.1 < 30.88$$

POR LO QUE SE RECHAZA LA HIPOTESIS DE QUE LAS TRES VARIABLES SON INDEPENDIENTES.

FORMULA CORTA PARA TABLAS DE CONTINGENCIA DE 2 x 2

SI DENOTAMOS A LAS FRECUENCIAS DE LA TABLA CON a, b, c Y d, O SEA $x_{11} = a$, $x_{12} = b$, $x_{21} = c$ Y $x_{22} = d$, SE PUEDE DEMOSTRAR QUE EL VALOR DE LA ESTADISTICA V SE CALCULA CON LA FORMULA

$$V = \frac{(ad - bc)^2 n}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

EJEMPLO

CON EL FIN DE VERIFICAR SI DOS FABRICANTES DE TELEVISORES DE COLOR TIENEN IGUAL NIVEL DE CALIDAD SE DISEÑO UN EXPERIMENTO CONSISTENTE EN PREGUNTAR A 412 COMPRADORES DE LAS MISMAS SI SE REQUIRIO DE SERVICIO DE GARANTIA EN LOS DOS PRIMEROS AÑOS DE FUNCIONAMIENTO, CON LO CUAL SE INTEGRO LA SIGUIENTE TABLA DE CONTINGENCIA:

FABRICA	REQUIRIO SERVICIO	NO REQUIRIO SERVICIO	TOTAL
A	111 = a	152 = b	273
B	85 = c	54 = d	139
TOTAL	196	216	412

$$v = \frac{[(111)(54) - (152)(85)]^2\, 412}{(273)(139(196)(216)} = 15.51$$

$$\chi^2_{0.95,1} = 3.84 < 15.51$$

POR LO QUE SE RECHAZA LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE CALIDAD, A UN 95% DE NIVEL DE CONFIANZA.

CORRECCION DE YATES

CON EL FIN DE MEJORAR LA APROXIMACION DE LA DISTRIBUCION χ^2 COMO DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE LA ESTADISTICA V, CUANDO SE TIENEN POCAS CELDAS EN LA TABLA DE CONTINGENCIA, SE HA PROPUESTO INTRODUCIR UNA CORRECCION A LAS DIFERENCIAS DE LAS FRECUENCIAS OBSERVADAS MENOS LAS ESPERADAS, CONSISTENTE EN SUSTRAERLE 0.5 AL VALOR ABSOLUTO DE CADA DIFERENCIA, ES DECIR,

$$V = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(|x_{ij} - n\hat{w}_i\hat{s}_j|-0.5)^2}{n\hat{w}_i\hat{s}_j}$$

CON ESTA CORRECCION LA FORMULA CORTA PARA TABLAS DE 2 x 2 QUEDA EN LA FORMA

$$V = \frac{(|ad - bc|-0.5n)^2 n}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

EN EL EJEMPLO INMEDIATO ANTERIOR, AL APLICAR ESTA CORRECCION SE OBTIENE:

$$v = \frac{[|(111)(54)-(162)(85)|-0.5(412)]^2 412}{(273)(139)(196)(216)} = \frac{(7570)^2 412}{(273)(139)(196)(216)} = 14.69$$

EJEMPLO

CON EL FIN DE VERIFICAR SI EL GRADO DE MEJORIA EN EL FUNCIONAMIENTO DE UN TIPO DE PROTESIS ES INDEPENDIENTE DEL HOSPITAL DONDE SE COLOCA, SE DISEÑO UN EXPERIMENTO CONSISTENTE EN FORMULAR UNA TABLA DE CONTINGENCIA; PARA ELLO SE OBTUVO UNA MUESTRA ALEATORIA DE PACIENTES DE 5 HOSPITALES CON ESTE TIPO DE PROTESIS, Y A CADA UNO SE LE CALIFICO COMO: FUNCIONAMIENTO NORMAL, PARCIAL O NULO. LOS RESULTADOS FUERON

	HOSPITAL				
FUNCIONAMIENTO	A	B	C	D	E
NULO	13	5	8	21	43
PARCIAL	18	10	36	56	29
NORMAL	16	16	35	51	10

a. PROBAR LA HIPOTESIS DE INDEPENDENCIA

b. ¿SON LOS RESULTADOS DE LOS HOSPITALES A, B, C Y D INDEPENDIENTES DEL FUNCIONAMIENTO?

c. ¿SI SE JUNTAN LOS RESULTADOS DE LOS HOSPITALES A, B, C Y D, ¿RESULTAN INDEPENDIENTES DE LOS DEL HOSPITAL E?

USAR 95% DE NIVEL DE CONFIANZA.

SOLUCION

a)

FUNCIONAMIENTO	HOSPITAL					TOTALES	$\hat{w}_i$
	A	B	C	D	E		
NULO	13	5	8	21	43	90	0.245
PARCIAL	18	10	36	56	29	149	0.406
NORMAL	16	16	35	51	10	128	0.349
TOTALES	47	31	79	128	82	367	
$\hat{S}_j$	0.128	0.0845	0.215	0.349	0.223		

$$v = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(x_{ij} - n\,\hat{w}_i\,\hat{S}_j)^2}{n\,\hat{w}_i\,\hat{S}_j}$$

$$v = \frac{(13 - (367)(0.245)(0.128))^2}{367 \times 0.245 \times 0.128} + \frac{(5 - (367)(0.245)(0.0845))^2}{367 \times 0.245 \times 0.0845} +$$

$$\frac{(8 - (367)(0.245)(0.215))^2}{367 \times 0.245 \times 0.215} + \frac{(21 - (367)(0.245)(0.349))^2}{367 \times 0.245 \times 0.349} +$$

$$\frac{(43 - (367)(0.245)(0.223))^2}{367 \times 0.245 \times 0.223} + \frac{(18 - (367)(0.406)(0.128))^2}{367 \times 0.406 \times 0.128} +$$

$$\frac{(10 - (367)(0.406)(0.0845))^2}{367 \times 0.406 \times 0.0845} + \frac{(36 - (367)(0.406)(0.215))^2}{367 \times 0.406 \times 0.215} +$$

$$\frac{(56 - (367)(0.406)(0.349))^2}{367 \times 0.406 \times 0.349} + \frac{(29 - (367)(0.406)(0.223))^2}{367 \times 0.406 \times 0.223} +$$

$$\frac{(16 - (367)(0.349)(0.128))^2}{367 \times 0.340 \times 0.128} + \frac{(16 - (367)(0.349)(0.0845))^2}{367 \times 0.349 \times 0.0845} +$$

$$\frac{(35 - (367)(0.349)(0.215))^2}{367 \times 0.349 \times 0.215} + \frac{(51 - (367)(0.349)(0.349))^2}{367 \times 0.349 \times 0.349}$$

$$\frac{(10 - (367)(0.349)(0.223))^2}{367 \times 0.349 \times 0.223}$$

$$v = \frac{2.2227232}{11.50912} + \frac{6.7486558}{7.5978175} + \frac{128.40799}{19.331725} + \frac{107.75135}{31.380335} +$$

$$\frac{526.65454}{20.051045} + \frac{1.1497329}{19.0722566} + \frac{6.745659}{12.590669} + \frac{15.717815}{32.03543} +$$

$$\frac{15.986419}{52.001698} + \frac{17.8713}{33.227446} + \frac{0.1557281}{16.394624} + \frac{26.801189}{10.823014} +$$

$$\frac{55.683757}{27.537845} + \frac{39.677817}{44.700967} + \frac{344.56674}{28.562509}$$

$$v = 0.1931271 + 0.8882361 + 6.6423452 + 3.4337233 +$$

$$26.26569 + 0.060283 + 0.5330587 + 0.4906385 +$$

$$0.3074211 + 0.5378475 + 0.0094987 + 2.4763149 +$$

$$2.0220811 + 0.8876277 + 12.063602 = 56.811495$$

$v = 56.81$

GRADOS DE LIBERTAD: $\nu = (r-1)(c-1) = (3-1)(5-1) = 2 \times 4 = 8$

DE LAS TABLAS DE LA DISTRIBUCION χ^2, PARA 95% DE NIVEL DE CONFIANZA Y 8 GRADOS DE LIBERTAD, SE TIENE:

$\chi_c^2 = \chi^2_{0.95,8} = 15.5$

$v = 56.81 > \chi_c^2 = 15.5$

POR TANTO SE RECHAZA LA HIPOTESIS DE INDEPENDENCIA A UN 95% DE NIVEL DE CONFIANZA, O SEA QUE SI HAY RELACION ENTRE EL FUNCIONAMIENTO DE LA PROTESIS Y EL HOSPITAL.

b)

FUNCIONAMIENTO	HOSPITAL				TOTALES $X_{i.}$	$\hat{w}_i$
	A	B	C	D		
NULO	13	5	8	21	47	0.165
PARCIAL	18	10	36	56	120	0.421
NORMAL	16	16	35	51	118	0.414
TOTALES: $X_{.j}$	47	31	79	128	285	
$\hat{S}_j$	0.165	0.109	0.277	0.449		1.000

$$V = \frac{(13 - (285)(0.165)(0.165))^2}{285 \times 0.165 \times 0.165} + \frac{(5 - (285)(0.165)(0.109))^2}{285 \times 0.165 \times 0.109} +$$

$$\frac{(8 - (285)(0.165)(0.277))^2}{285 \times 0.165 \times 0.277} + \frac{(21 - (285)(0.165)(0.449))^2}{285 \times 0.165 \times 0.449} +$$

$$\frac{(18 - (285)(0.421)(0.165))^2}{285 \times 0.421 \times 0.165} + \frac{(10 - (285)(0.421)(0.109))^2}{285 \times 0.421 \times 0.109} +$$

$$\frac{(36 - (285)(0.421)(0.277))^2}{285 \times 0.421 \times 0.277} + \frac{(56 - (285)(0.421)(0.449))^2}{285 \times 0.421 \times 0.449} +$$

$$\frac{(16 - (285)(0.414)(0.165))^2}{285 \times 0.414 \times 0.165} + \frac{(16 - (285)(0.414)(0.109))^2}{285 \times 0.414 \times 0.109} +$$

$$\frac{(35 - (285)(0.414)(0.277))^2}{285 \times 0.414 \times 0.277} + \frac{(51 - (285)(0.414)(0.449))^2}{285 \times 0.414 \times 0.449} +$$

$$v = \frac{27.466771}{7.759125} + \frac{0.0158068}{5.125725} + \frac{25.259922}{13.025925} + \frac{0.0130474}{21.114225} +$$

$$\frac{3.2310961}{19.797525} + \frac{9.4763311}{13.078365} + \frac{7.6405529}{33.235845} + \frac{4.5230018}{53.873265} +$$

$$\frac{12.029452}{19.46835} + \frac{9.853886}{12.86091} + \frac{5.3674232}{32.68323} + \frac{3.9105458}{52.97751} +$$

$$v = 3.5399315 + 0.0030838 + 1.9392037 + 0.0006179 +$$

$$0.1632071 + 0.7245807 + 0.2298889 + 0.0839563 +$$

$$0.6178979 + 0.7661889 + 0.1642256 + 0.0738152$$

$$v = 8.3065975 \approx 8.31$$

GRADOS DE LIBERTAD: $\nu = (r-1)(c-1) = (3-1)(4-1) = 2 \times 3 = 6$

DE LAS TABLAS, PARA 95% DE CONFIANZA Y 6 GRADOS DE LIBERTAD, SE TIENE:

$$\chi_c^2 = \chi^2_{0.95,6} = 12.6$$

$$v = 8.31 < \chi_c^2 = 12.6$$

POR LO TANTO SE ACEPTA LA HIPOTESIS. SE CONCLUYE QUE LAS VARIABLES SON INDEPENDIENTES, O SEA EL FUNCIONAMIENTO DE LAS PROTESIS ES INDEPENDIENTE DEL HOSPITAL.

c)

FUNCIONAMIENTO	HOSPITAL		TOTALES $X_{i.}$	$\hat{w}_i$
	(A+B+C+D)	E		
NULO	47	43	90	0.245
PARCIAL	120	29	149	0.406
NORMAL	118	10	128	0.349
TOTALES: $X_{.j}$	285	82	367	
$\hat{S}_j$	0.777	0.223		1.000

$$v = \frac{(47 - (367)(0.245)(0.777))^2}{367 \times 0.245 \times 0.777} + \frac{(43 - (367)(0.245)(0.223))^2}{367 \times 0.245 \times 0.223} +$$

$$\frac{(120 - (367)(0.406)(0.777))^2}{367 \times 0.406 \times 0.777} + \frac{(29 - (367)(0.406)(0.223))^2}{367 \times 0.406 \times 0.223} +$$

$$\frac{(118 - (367)(0.349)(0.777))^2}{367 \times 0.349 \times 0.777} + \frac{(10 - (367)(0.349)(0.223))^2}{367 \times 0.349 \times 0.223} +$$

$$v = \frac{522.76044}{69.863955} + \frac{526.65454}{20.051045} + \frac{17.854394}{115.77455} + \frac{17.8713}{33.227446} +$$

$$\frac{341.49225}{99.520491} + \frac{344.56674}{28.562509}$$

$$v = 7.4825486 + 26.26569 + 0.1542169 + 0.5378475 +$$

$$3.4313763 + 12.063602 = 49.935281 = 49.94$$

GRADOS DE LIBERTAD: $\nu = (r-1)(c-1) = (3-1)(2-1) = 2 \times 1 = 2$

DE LAS TABLAS, PARA UN 95% DE NIVEL DE CONFIANZA Y 2 GRADOS DE LIBERTAD, SE TIENE:

$$\chi_c^2 = \chi^2_{0.95,2} = 5.99$$

$$v = 49.94 > \chi_c^2 = 5.99$$

POR LO TANTO SE RECHAZA LA HIPOTESIS. SE CONCLUYE QUE CON 95% DE CONFIANZA LOS RESULTADOS DE LOS HOSPITALES A + B + C + D (JUNTOS) Y LOS DE E NO SON INDEPENDIENTES DEL FUNCIONAMIENTO DE LAS PROTESIS. EN GENERAL, SE PUEDE DECIR QUE LOS RESULTADOS DEL HOSPITAL E SON LOS QUE DAN LA DEPENDENCIA DE ESTE EXPERIMENTO.

3. EXPERIMENTOS PARA COMPARAR DOS TRATAMIENTOS

CUANDO INTERESA VERIFICAR SI DOS PROCEDIMIENTOS DISTINTOS PARA LOGRAR UN MISMO OBJETIVO CONDUCEN A RESULTADOS IGUALES, SE DISEÑA UN EXPERIMENTO QUE CONSISTE EN OBTENER UNA MUESTRA ALEATORIA DE LOS RESULTADOS LOGRADOS CON CADA TRATAMIENTO, Y COMPARAR ENTRE SI LAS MEDIAS Y VARIANCIAS CORRESPONDIENTES.

CUANDO LAS OBSERVACIONES SON INDEPENDIENTES, ESTO SE LOGRA MEDIANTE LAS PRUEBAS DE HIPOTESIS DE IGUALDAD DE MEDIAS Y DE VARIANCIAS. CUANDO NO LO SON, LA COMPARACION SE HACE EN TERMINOS DE LAS DIFERENCIAS INDIVIDUALES DE CADA PAREJA DE RESULTADOS.

AL DISEÑAR EL EXPERIMENTO SE DEBEN CONSIDERAR DOS ALTERNATIVAS:

a. ASIGNAR AL AZAR A CADA ESPECIMEN EL TRATAMIENTO QUE LE SERA APLICADO; A ESTE PROCESO SE LE LLAMA DE ALEATORIZACION.

EJEMPLO

POR EJEMPLO, SI SE TRATARA DE VERIFICAR SI UN FERTILIZANTE ES MAS EFICIENTE QUE OTRO, UNA VEZ DEFINIDOS LOS LOTES PARA SIEMBRA NOMINALMENTE IGUALES, HABRIA QUE ASIGNAR AL AZAR CADA LOTE A CADA FERTILIZANTE. SUPONGAMOS QUE SE DISPONE DE 11 LOTES Y QUE 5 SE TRATARAN CON EL FERTILIZANTE A Y 6 CON EL B. EL EXPERIMENTO ALEATORIZADO SERIA

LOTE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
FERTILIZANTE	A	A	B	B	A	B	B	B	A	A	B
COSECHA DE TOMATE	29.9	11.4	26.6	23.7	25.3	28.5	14.2	17.9	16.5	21.1	24.3

COSECHA CON FERTILIZANTE A	COSECHA CON FERTILIZANTE B
29.9	26.6
11.4	23.7
25.3	28.5
16.5	14.2
21.1	17.9
104.2	24.3
	135.2

$$\bar{y}_A = \frac{104.2}{5} = 20.84, \quad \bar{y}_B = \frac{135.2}{6} = 22.53$$

$$\bar{y}_B - \bar{y}_A = 22.53 - 20.84 = 1.69$$

LAS VARIANCIAS INSESGADAS VALEN

$$S_A^2 = 52.50, \quad S_B^2 = 29.51$$

PRUEBA DE HIPOTESIS PARA LA VARIANCIA:

$$H_o : \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \ ; \quad H_1 : \sigma_A^2 > \sigma_B^2 ; \ 1-\alpha = 0.99$$

$$F = \frac{S_A^2}{S_B^2} = \frac{52.50}{29.51} = 1.78, \quad F_{0.01,4,5} = 11.4 > 1.78$$

POR LO QUE SE ACEPTA H_o CON UN NIVEL DE CONFIANZA DEL 99%.

PRUEBA DE HIPOTESIS PARA LAS MEDIAS:

$$H_o : \mu_A = \mu_B, \quad H_1 : \mu_A \neq \mu_B, \quad 1-\alpha = 99\%$$

$$T = \frac{\bar{y}_B - \bar{y}_A}{\varepsilon\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \quad , \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{\nu_A S_A^2 + \nu_B S_B^2}{\nu_A + \nu_B}}$$ (CON VARIANCIAS INSESGADAS)

$$\nu_A = n_A - 1 = 4, \qquad \nu_B = n_B - 1 = 6 - 1 = 5$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{4\text{x}52.50 + 5\text{x}29.51}{4 + 5}} = \sqrt{39.73} = 6.30$$

$$t = \frac{1.69}{6.30\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}} = 0.44 < t_{0.01,9} = 3.25$$

POR LO QUE SE ACEPTA LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE MEDIAS, O SEA, QUE CON 99% DE PROBABILIDAD EL RENDIMIENTO DE LAS TIERRAS CON AMBOS FERTILIZANTES ES EL MISMO.

b. APLICAR CADA TRATAMIENTO A GRUPOS O BLOQUES DE ESPECIMENES, EN ESTE CASO EN PAREJAS, QUE PERMITAN REDUCIR LA VARIANCIA O DISPERSION ALEATORIA DE LOS RESULTADOS, INVOLUCRANDO, A LA VEZ, UN PROCESO DE ALEATORIZACION EN LA ASIGNACION DE LOS BLOQUES; A ESTE PROCESO SE LA LLAMA DE <u>AGRUPAMIENTO EN BLOQUES</u>.

<u>EJEMPLO</u>

EN EL EJEMPLO INMEDIATO ANTERIOR LA INCERTIDUMBRE EN LOS RESULTADOS POR LOS EFECTOS ALEATORIOS INVOLUCRADOS SE PUEDE REDUCIR SI EN VEZ DE SORTEARSE LOS LOTES PARA CADA FERTILIZANTE, CADA

LOTE SE DIVIDE EN DOS PARTES IGUALES Y SE SORTEA QUE MITAD SE TRATARA CON CADA UNO DE ELLOS. CON ESTO LOS RESULTADOS QUEDAN AGRUPADOS POR PAREJAS (y_A, y_B), UNA PARA CADA LOTE, TENIENDOSE QUE y_B Y y_A NO SON INDEPENDIENTES. CON ESTO SE TIENE UN EXPERIMENTO CON AGRUPAMIENTO POR BLOQUES.

SOPONGAMOS QUE LAS PAREJAS DE DATOS QUEDARON DE LA SIGUIENTE MANERA PARA 5 LOTES:

y_A	y_B	$y_B - y_A = d$	d^2
29.9	26.6	-3.3	10.89
11.4	23.7	12.3	151.29
25.3	28.5	3.2	10.24
16.5	14.2	-2.3	5.29
21.1	17.9	-3.2	10.24
		6.7	187.95

$H_0: \mu_d = 0$; $H_1: \mu_d \neq 0$; $1-\alpha = 0.99$

$\bar{d} = 6.7/5 = 1.34$, $\bar{d}^2 = 1.80$

$\overline{d^2} = 187.95/5 = 37.59$

$s_d^2 = 37.59 - 1.80 = 35.79$

$s_d = 5.98$, $t = \frac{\bar{d}}{s_d}\sqrt{n-1} = 0.448$

$t_{0.005,4} = 4.60 > 0.448$; POR LO TANTO SE ACEPTA H_o.

EN ESTE CASO SE MANEJA LA ESTADISTICA d CON DISTRIBUCION t DE STUDENT.

EJEMPLO

CON EL FIN DE VERIFICAR SI DOS MATERIALES PARA FABRICAR SUELA DE ZAPATO SE DISEÑO UN EXPERIMENTO CON AGRUPAMIENTO POR BLOQUES Y ALEATORIZACION. EL AGRUPAMIENTO SE HIZO AL USAR EL ZAPATO DEL PIE IZQUIERDO CON UN MATERIAL Y EL DEL DERECHO CON EL OTRO; LA ALEATORIZACION SE HIZO AL ASIGNAR AL AZAR CUAL MATERIAL ESTARIA EN EL IZQUIERDO Y CUAL EN EL DERECHO, PARA CADA

NIÑO QUE USARIA LOS ZAPATOS DE PRUEBA.

LAS DURACIONES DE LOS ZAPATOS, EN MESES, FUERON:

NIÑO	MATERIAL A	MATERIAL B	DIFERENCIA = d	d^2
1	13.2 (I)	14.0 (D)	0.8	0.64
2	8.2 (I)	8.8 (D)	0.6	0.36
3	10.9 (D)	11.2 (I)	0.3	0.09
4	14.3 (I)	14.2 (D)	-0.1	0.01
5	10.7 (D)	11.8 (I)	1.1	1.21
6	6.6 (I)	6.4 (D)	-0.2	0.04
7	9.5 (I)	9.8 (D)	0.3	0.09
8	10.8 (I)	11.3 (D)	0.5	0.25
9	8.8 (D)	9.3 (I)	0.5	0.25
10	13.3 (I)	13.6 (D)	0.3	0.09
			4.1	3.03

$H_0: \mu_{\bar{d}} = 0; \; H_1: \mu_d \neq 0; \; 1-\alpha = 0.99$

$\bar{d} = 4.1/10 = 0.41, \quad S_d^2 = \overline{d^2} - \bar{d}^2 = \frac{3.03}{10} - 0.41^2 = 0.1349$

$S_d = 0.367, \quad t = \frac{0.41}{0.367}\sqrt{9} = 3.35 > t_{0.005,9} = 3.25$

POR LO TANTO SE RECHAZA LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE DURACION DE LAS SUELAS HECHAS CON AMBOS MATERIALES, CON UN 99% DE NIVEL DE CONFIANZA.

<u>RESUMEN</u>

1. LOS EXPERIMENTOS DEBEN SER COMPARABLES Y REPRODUCIBLES.

   CUANDO SE COMPARAN TRATAMIENTOS DEBE PROCURARSE QUE LOS

EXPERIMENTOS PARA CADA UN CORRAN EN PARALELO.

2. DEBE HABER REPLICAS DE CADA TRATAMIENTO. LAS VARIACIONES ENTRE LOS RESULTADOS DEBE PERMITIR ESTIMAR LOS "ERRORES" DEBIDOS AL AZAR

3. SIEMPRE QUE SEA POSIBLE SE DEBEN AGRUPAR LOS RESULTADOS EN BLOQUES PARA REDUCIR EL ERROR, AL HOMOGENIZAR LOS RESULTADOS DE CADA REPLICA.

4. EXPERIMENTOS PARA COMPARAR k TRATAMIENTOS

CON FRECUENCIA ES NECESARIO VERIFICAR SI MAS DE DOS "TRATAMIENTOS" CONDUCEN A RESULTADOS CON VALORES MEDIOS IGUALES. PARA HACER ESTO SE DISEÑA UN EXPERIMENTO EN EL QUE LOS ESPECIMENES (EL MATERIAL EXPERIMENTAL) SE ASIGNAN AL AZAR A CADA TRATAMIENTO.

SI LAS MEDIAS POBLACIONALES DE LOS TRATAMIENTOS SON η_A, η_B, η_C, ETC., INTERESA PROBAR LA HIPOTESIS NULA DE QUE $\eta_A = \eta_B = \eta_C \ldots$, EN CONTRA DE LA HIPOTESIS ALTERNATIVA DE QUE NO TODAS LA MEDIAS SON IGUALES. ESTA PRUEBA SE REALIZA MEDIANTE LA TECNICA ESTADISTICA CONOCIDA COMO ANALISIS DE VARIANCIA.

SUPONGAMOS, POR EJEMPLO, QUE SE TRATA DE VERIFICAR SI CUATRO MEDICINAS DIFERENTES CONDUCEN A TIEMPOS IGUALES DE COAGULACION DE LA SANGRE DE LOS PACIENTES. PARA ESTO SE OBTIENE UNA MUESTRA ALEATORIA DE 24 INDIVIDUOS, A LOS CUALES SE LES ASIGNAN AL AZAR LAS CUATRO MEDICINAS, SE LES APLICA EL TRATAMIENTO DURANTE EL TIEMPO PRESTABLECIDO Y SE LES SACA UNA MUESTRA DE SANGRE A CADA UNO PARA MEDIR LOS TIEMPOS INDIVIDUALES DE COAGULACION. EL NUMERO DE ESPECIMENES (INDIVIDUOS) NO NECESITA SER EL MISMO PARA CADA TRATAMIENTO.

SUPONGAMOS AHORA QUE LAS MUESTRAS DE TIEMPOS DE COAGULACION ASOCIADOS A CADA UNO DE LOS CUATRO TRATAMIENTOS SON LOS PRESENTADOS EN LA SIGUIENTE TABLA:

	MEDICINA			
	A	B	C	D
	62 seg	63 seg	68 seg	56 seg
	60	67	66	62
	63	71	71	60
	59	64	67	61
		65	68	63
		66	68	64
				63
				59
PROMEDIOS	61	66	68	61
PROMEDIO GLOBAL: 64 seg				

EL ANALISIS DE VARIANCIA, EN ESTE CASO, SERVIRIA PARA DISCRIMINAR SI LA VARIABILIDAD DE LOS RESULTADOS QUE SE TIENEN ENTRE LOS DIVERSOS TRATAMIENTOS ES IGUAL A LA QUE SE TIENE DENTRO DE CADA TRATAMIENTO Y, POR LO TANTO, PODER AFIRMAR QUE ESTA SE DEBE AL AZAR Y NO A DIFERENCIAS REALES ENTRE LOS RESULTADOS DE LOS TRATAMIENTOS.

EL ANALISIS DE VARIANCIA PARTE DE LA CONSIDERACION DE QUE CADA RESULTADO EXPERIMENTAL ES CONSECUENCIA DE LOS EFECTOS DEBIDOS A FACTORES O VARIABLES ALEATORIAS QUE SE SUJETAN A CONTROL, Y DE OTRAS QUE NO SE CONTROLAN; A ESTAS ULTIMAS SE LES LLAMA VARIABLES RESIDUALES, Y A SUS EFECTOS SE LES DENOMINA

<u>EFECTOS RESIDUALES</u> O <u>ERROR</u>. A MAYOR NUMERO DE VARIABLES BAJO CONTROL, CORRESPONDE UN MENOR EFECTO RESIDUAL.

BAJO ESTA PREMISA, EL ANALISIS DE VARIANCIA SE FUNDAMENTA EN LAS SIGUIENTES HIPOTESIS:

1. EL VALOR MEDIO DE CADA VARIABLE RESIDUAL ES CERO.
2. LAS VARIABLES RESIDUALES SON INDEPENDIENTES.
3. LAS VARIABLES RESIDUALES TIENEN IGUAL VARIANCIA.
4. LAS VARIABLES RESIDUALES TIENEN DISTRIBUCION NORMAL.

DE ESTAS HIPOTESIS LA QUE REQUIERE MAYOR ANALISIS, EN CUANTO A SU VERIFICACION, ES LA NUMERO 3. SI ESTA HIPOTESIS NO SE CUMPLE, SE RECOMIENDA OBTENER <u>MUESTRAS IGUALES</u> PARA CADA TRATAMIENTO, YA QUE EN ESE CASO EL EFECTO DE LA DIFERENCIA DE VARIANCIAS NO ES IMPORTANTE.

<u>FACTORES</u>. EN TERMINOS GENERALES, LLAMAREMOS <u>FACTORES</u> A LAS CUALIDADES O PROPIEDADES DE ACUERDO A LAS CUALES SE HACE LA CLASIFICACION DE LOS DATOS. POR EJEMPLO, SI UN PRODUCTO SE ELABORA CON DIFERENTES TIPOS DE MAQUINAS Y VARIOS OPERARIOS DURANTE LOS DIVERSOS DIAS, ENTONCES SE PUEDEN CONSIDERAR EN EL ANALISIS AL MENOS TRES FACTORES: MAQUINA, OPERARIO Y DIA. CADA UNO DE ESTOS FACTORES TENDRA SUS PROPIOS <u>NIVELES</u>; POR EJEMPLO, HABRA LAS MAQUINAS A, B Y C (3 NIVELES), LOS OPERARIOS JUAN Y JORGE (2 NIVELES) Y LOS DIAS DE LUNES A VIERNES (5 NIVELES).

CLASIFICACION EN UNA DIRECCION

SE TIENE UNA CLASIFICACION EN UNA DIRECCION CUANDO SE COMPARAN LOS RESULTADOS EN TERMINOS DE LOS DIVERSOS NIVELES QUE TIENE UN SOLO FACTOR. EN EL CASO DEL EJEMPLO DE LAS MEDICINAS DESCRITO ANTERIORMENTE, EL FACTOR UNICO ES MEDICINA Y TIENE CUATRO NIVELES; SE TRATA DE COMPARAR LOS RESULTADOS DE LA VARIABLE "TIEMPOS DE COAGULACION" QUE SE OBTIENEN CON CADA UNO DE LOS NIVELES, TRATAMIENTOS O GRUPOS.

LA FORMULACION DEL MODELO PUEDE TENER DOS VARIEDADES:

1. LOS NIVELES O TRATAMIENTOS SON FIJOS Y SE TOMAN TODOS EN EL EXPERIMENTO. A ESTE MODELO SE LE DENOMINA DE NIVELES FIJOS, PARAMETRICO O MODELO I.

2. LOS NIVELES QUE SE INCLUYEN EN EL EXPERIMENTO SON SOLO ALGUNOS DE LOS POSIBLES, Y SE SELECCIONAN AL AZAR; EN ESTE CASO EL FACTOR ES EN SI UNA VARIABLE ALEATORIA. A ESTE MODELO SE LE DENOMINA DE NIVELES ALEATORIOS O MODELO II.

SEA X_{ti} EL i-ESIMO RESULTADO DE APLICAR EL TRATAMIENTO t, $t = 1, 2, \ldots, k$; $i = 1, 2, \ldots, n_t$.

CADA RESULTADO ESTARA COMPUESTO DE UN TERMINO QUE REPRESENTA EL EFECTO DEL TRATAMIENTO RESPECTIVO, Y OTRO TERMINO QUE ES EL EFECTO RESIDUAL O ERROR.

SI DENOTAMOS CON Z_{ti} A DICHO EFECTO RESIDUAL, LAS HIPOTESIS

1 A 4 ANTERIORES SERIAN EN ESTE CASO:

1) $E(Z_{ti}) = 0$ PARA TODO t E i

2) LAS Z_{ti} SON MUTUAMENTE INDEPENDIENTES

3) $\sigma^2(Z_{ti}) = \sigma^2$ PARA TODO t E i

4) LAS Z_{ti} TIENEN DISTRIBUCION NORMAL

EN EL CASO DE QUE SE TUVIERAN FACTORES FIJOS, EL MODELO I CONSISTE EN DESCOMPONER CADA OBSERVACION EN DOS TERMINOS: UNO DEBIDO AL TRATAMIENTO, ξ_t, Y EL OTRO DEBIDO AL AZAR O RESIDUAL, Z_{ti}, ES DECIR

$$X_{ti} = \xi_t + Z_{ti}$$

POR CONVENIENCIA, REPRESENTEMOS A ξ_t EN LA FORMA

$$\xi_t = \xi + \gamma_t$$

DONDE ξ ES EL EFECTO MEDIO DE TODOS LOS TRATAMIENTOS Y γ_t ES LA DESVIACION RESPECTO A ξ QUE TIENE EL TRATAMIENTO t. AL HACER ESTO TENDREMOS k+1 TERMINOS, ξ, γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$, PARA REPRESENTAR A LOS k PARAMETROS, ξ_1, $\xi_2, \ldots \xi_k$, POR LO QUE SE LE DEBE IMPONER ALGUNA CONDICION A LAS γ_t; DICHA CONDICION SERA QUE

$$\sum_{t=1}^{k} n_t \gamma_t = 0 \qquad \text{(A)}$$

LO CUAL SIGNIFICA QUE LA MEDIA ξ ES UN PROMEDIO PESADO DE LAS ξ_t, ES DECIR

$$\xi = \sum_{t=1}^{k} n_t \xi_t / N; \quad N = \sum_{t=1}^{k} n_t$$

EN EL CASO DE LOS NIVELES ALEATORIOS EL MODELO II SERIA

$$X_{ti} = \xi + U_t + Z_{ti}$$

EN DONDE LAS U_t SON VARIABLES ALEATORIAS MUTUAMENTE INDEPENDIENTES CON MEDIA CERO Y VARIANCIA σ_U^2, CON DISTRIBUCION NORMAL E INDEPENDIENTES DE LA Z_{ti}.

MODELO PARAMETRICO

SI LOS NIVELES O TRATAMIENTOS SON FIJOS, EL MODELO I O PARAMETRICO SERA

$$X_{ti} = \xi + \gamma_t + Z_{ti} \tag{1}$$

EL PROMEDIO ARITMETICO DE LOS DATOS DE CADA GRUPO O TRATAMIENTO SERA

$$\bar{X}_{t.} = \sum_{i=1}^{n_t} X_{ti}/n_t, \quad t = 1, 2, \ldots, k \tag{2}$$

SUSTITUYENDO LA EC (1) EN LA EC (2):

$$\bar{X}_{t.} = \xi + \gamma_t + \bar{Z}_{t.} \tag{3}$$

DONDE

$$\bar{Z}_{t.} = \sum_{i=1}^{n_t} Z_{ti}/n_t \qquad (4)$$

LA MEDIA GLOBAL DE LAS OBSERVACIONES ES

$$\bar{X}_{..} = \sum_{t=1}^{k} n_t\bar{X}_{t.}/N \qquad (5)$$

SUSTITUYENDO LA EC (3) EN LA (5) Y CONSIDERANDO LA CONDICION (A):

$$\bar{X}_{..} = \xi + \bar{Z}_{..} \qquad (6)$$

DONDE $\bar{Z}_{..} = \sum_{t=1}^{k} n_t\bar{Z}_{t.}/N$, PUESTO QUE

$$\sum_{t=1}^{k} n_t\gamma_t = 0.$$

EL PROBLEMA QUE NOS OCUPA ES EL PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_k = 0$; ES NATURAL, POR LO TANTO, QUE CALCULEMOS LAS DIFERENCIAS DEL PROMEDIO DE CADA TRATAMIENTO MENOS EL PROMEDIO GLOBAL

$$\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..} = \xi + \gamma_t + \bar{Z}_{t.} - \xi - \bar{Z}_{..} = \gamma_t + \bar{Z}_{t.} - \bar{Z}_{..} \qquad (7)$$

CUYA ESPERANZA ES PRECISAMENTE γ_t.

PARA CADA GRUPO, LA VARIANCIA DE LAS OBSERVACIONES SE OBTIENE EN TERMINOS DE LAS DIFERENCIAS

$$X_{ti} - \bar{X}_{t.} = \xi + \gamma_t + Z_{ti} - (\xi + \gamma_t + \bar{Z}_{t.}) = Z_{ti} - \bar{Z}_{t.} \qquad (8)$$

AHORA, SUMANDO Y RESTANDO $\bar{X}_{t.}$ a $X_{ti} - \bar{X}_{..}$ OBTENEMOS

$$X_{ti} - \bar{X}_{..} = (\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..}) + (X_{ti} - \bar{X}_{t.}) \qquad (9)$$

LA SUMA TOTAL DE LOS CUADRADOS DE ESTAS DIFERENCIAS PARA TODA LA MUESTRA SERA

$$\sum_{t=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_t}(X_{ti} - \bar{X}_{..})^2 = \sum_{t=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_t}(\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..})^2 + \sum_{t=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_t}(X_{ti} - \bar{X}_{t.})^2$$

$$+ \sum_{t=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_t} 2(\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..})(X_{ti} - \bar{X}_{t.})$$

$$= \sum_{t=1}^{k} n_t(\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..})^2 + \sum_{t=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_t}(X_{ti} - \bar{X}_{t.})^2 \qquad (10)$$

YA QUE LA SUMATORIA DEL DOBLE PRODUCTO VALE CERO PORQUE

$$\sum_{i=1}^{n_t}(X_{ti} - \bar{X}_{t.}) = 0.$$

DE ESTA MANERA SE TIENE QUE:

[SUMA TOTAL DE CUADRADOS] = [SUMA DE CUADRADOS ENTRE GRUPOS] + [SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE GRUPOS]

TOMANDO EN CUENTA LA EC (7), <u>LA ESPERANZA DE LA SUMA DE LOS CUADRADOS ENTRE GRUPOS ES</u>

$$E\{\sum_{t=1}^{k} n_t(\gamma_t + \bar{Z}_{t.} - \bar{Z}_{..})^2\} = \sum_{t=1}^{k} n_t\gamma_t^2 + E\{\sum_{t=1}^{k} n_t(\bar{Z}_{t.} - \bar{Z}_{..})^2\} \tag{11}$$

YA QUE

$$E\{\sum_{t=1}^{k} 2n_t\gamma_t\ (\bar{Z}_{t.} - \bar{Z}_{..})\} = 0$$

EN VIRTUD DE LA HIPOTESIS 1 DE QUE $E(Z_{ti} = 0)$.

ADEMAS

$$E\{\sum_{t=1}^{k} n_t(\bar{Z}_{t.} - \bar{Z}_{..})^2\} = E\{\sum_{t=1}^{k} n_t\ \bar{Z}_{t.}^2 + \sum_{t=1}^{k} n_t\bar{Z}_{..}^2 -$$

$$- 2\sum_{t=1}^{k} n_t\ \bar{Z}_{t.}\bar{Z}_{..}\} = E\{\sum_{t=1}^{k} n_t\bar{Z}_{t.}^2 + N\bar{Z}_{..}^2 - 2\bar{Z}_{..}(N\bar{Z}_{..})\}$$

PUESTO QUE $\sum_{t=1}^{k} n_t\ \bar{Z}_{t.} = N\bar{Z}_{..}$

$$E\{\sum_{t=1}^{k} n_t\ (\bar{Z}_{t.} - \bar{Z}_{..})^2\} = E\{\sum_{t=1}^{k} n_t\ \bar{Z}_{t.}^2 - N\bar{Z}_{..}^2\} =$$

$$= \sum_{t=1}^{k} n_t\ E(\bar{Z}_{t.}^2) - NE(\bar{Z}_{..}^2)$$

$$= \sum_{t=1}^{k} n_t\frac{\sigma^2}{n_t} - N\ \frac{\sigma^2}{N} = k\sigma^2 - \sigma^2 = (k-1)\sigma^2 \tag{12}$$

PUESTO QUE $E(\bar{Z}_{t.}) = E(\bar{Z}_{..}) = 0$, DEBIDO A QUE $E(Z_{ti}) = 0$.

AQUI σ^2 ES LA VARIANCIA DEL ERROR O RESIDUAL.

SUSTITUYENDO LA EC (12) EN LA EC (11) LA SUMA DE LOS

CUADRADOS ENTRE GRUPOS QUEDA EN LA FORMA

$$\sum_{t=1}^{k} n_t(\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..})^2 = \sum_{t=1}^{k} n_t \gamma_t^2 + (k-1)\sigma^2 \qquad (13)$$

POR SU PARTE, LA ESPERANZA DE LA SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE GRUPOS, TOMANDO EN CUENTA LA EC 8, ES

$$E\{\sum_{t=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_t}(X_{ti} - \bar{X}_{t.})^2\} = E\{\sum_{t=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_t}(Z_{ti} - \bar{Z}_{t.})^2\} =$$

$$= \sum_{t=1}^{k} E\{\sum_{i=1}^{n_t}(Z_{ti} - \bar{Z}_{t.})^2\} = \sum_{t=1}^{k}(n_t - 1)\sigma^2 = (N-k)\sigma^2 \qquad (14)$$

DIVIDIENDO LAS SUMAS DE LOS CUADRADOS DADAS EN LAS ECS (13) y (14), ENTRE LOS GRADOS DE LIBERTAD (k-1) y (N-k), RESPECTIVAMENTE, RESULTAN LOS VALORES MEDIOS CUADRATICOS ENTRE Y DENTRO DE LOS GRUPOS DADOS POR LOS TERMINOS

$$\frac{\sum_{t=1}^{k} n_t \gamma_t^2}{k-1} + \sigma^2 \text{ y } \sigma^2,$$ RESPECTIVAMENTE.

BAJO LA HIPOTESIS NULA DE QUE TODAS LAS γ_t SON CERO, EL VALOR MEDIO CUADRATICO ENTRE GRUPOS VALE σ^2, YA QUE EN TAL CASO $\sum_{t=1}^{k} n_t \gamma_t^2/(k-1) = 0$.

DE ESTA MANERA, BAJO LA HIPOTESIS NULA, LOS VALORES MEDIOS CUADRATICOS DENTRO Y ENTRE GRUPOS SON ESTIMADORES INSESGADOS DE LA VARIANCIA DEL ERROR O RESIDUAL, σ^2.

POR LO TANTO, PARA PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_k = 0$,

BASTA PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE LOS VALORES MEDIOS CUADRATICOS DENTRO Y ENTRE GRUPOS SON IGUALES, LO CUAL SE PUEDE HACER MEDIANTE UNA PRUEBA F, AL TOMAR EN CUENTA LA HIPOTESIS 4, DE QUE LOS ERRORES TIENEN DISTRIBUCION NORMAL. LA ESTADISTICA F ES, ENTONCES

$$F = \frac{\text{VALOR MEDIO CUADRATICO ENTRE GRUPOS}}{\text{VALOR MEDIO CUADRATICO DENTRO DE GRUPOS}} = \frac{MSB}{MSW}$$

QUE TIENE DISTRIBUCION F CON k-1 Y N-k GRADOS DE LIBERTAD.

EJEMPLO

EN EL EJEMPLO DE LAS MEDICINAS DESCRITO ANTERIORMENTE, SE TIENE UN CASO DE UN SOLO FACTOR CON 4 NIVELES. LA SUMA DE CUADRADOS ENTRE GRUPOS ES

$$\sum_{t=1}^{k} n_t(\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..})^2 = 4(61-64)^2 + 6(66-64)^2 + 6(68-64)^2 + 8(61-64)^2 = 228$$

LA SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE GRUPOS ES

$$[(62-61)^2 + (60-61)^2 + (63-61)^2 + (59-61)^2] + [(63-66)^2 + (67-66)^2 + (71-66)^2 + (64-66)^2 + (65-66)^2 + (66-66)^2] + [(68-68)^2 + (66-68)^2 + (71-68)^2 + (67-68)^2 + (68-68)^2 + (68-68)^2] + [(56-61)^2 + (62-61)^2 + (60-61)^2 + (61-61)^2 + (63-61)^2 + (64-61)^2 + (63-61)^2 + (59-61)^2] = 10 + 40 + 14 + 48 = 112$$

EN TAL CASO: H_0: $E(MSB) = E(MSW)$; H_1: $E(MSB) > E(MSW)$; $1-\alpha = 0.05$

$$F = \frac{228/3}{112/20} = \frac{76}{5.6} = 13.6 > F_{0.95,\ 3,20} = 3.10$$

POR LO QUE SE RECHAZA LA HIPOTESIS NULA DE IGUALDAD DE TIEMPOS DE COAGULACION PARA LAS CUATRO MEDICINAS, A UN 95% DE NIVEL DE CONFIANZA.

FORMULAS SIMPLIFICADAS PARA EL ANALISIS DE VARIANCIA EN UNA DIRECCION

SUMA TOTAL DE CUADRADOS = SST = $\sum_{t}\sum_{i}(X_{ti} - \bar{X}_{..})^2$

$$SST = \sum_{t}\sum_{i} X_{ti}^2 - N\bar{X}_{..}^2$$

SUMA DE CUADRADOS ENTRE TRATAMIENTOS = SSB = $\sum_{t}(\bar{X}_{t.} - \bar{X}^2_{..})$

$$SSB = \sum_{t}\frac{(\sum_{i}X_{ti})^2}{n_t} - \frac{(\sum_{t}\sum_{i}X_{ti})^2}{N} = \sum_{t}\frac{(\sum_{i}X_{ti})^2}{n_t} - N\bar{X}_{..}^2$$

SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE GRUPOS SSW = SST - SSB

$$SSW = \sum_{t}\sum_{i} X_{ti}^2 - \sum \frac{(\sum_{i}X_{ti})^2}{n_t} = SST - SSB$$

EL RESUMEN DEL ANALISIS DE VARIANCIA SE PUEDE HACER EN LA SIGUIENTE TABLA

FUENTES DE VARIABILIDAD	SS	g. DE l.	MS	F
TRATAMIENTOS (ENTRE GRUPOS)	SSB	k-1	$\frac{SSB}{k-1} = MSB$	$\frac{MSB}{MSW}$
ERROR (DENTRO DE GRUPOS)	SSW	N-k	$\frac{SSW}{N-k} = MSW$	
TOTALES	SST	N-1		

EJEMPLO

CON EL FIN DE VERIFICAR SI CIERTO TIPO DE LESION CEREBRAL AFECTA LA CAPACIDAD DE APRENDIZAJE, SI ESTA APARECE EN EL LADO IZQUIERDO, DERECHO O EN AMBOS, SE DISEÑO UN EXPERIMENTO CONSISTENTE EN OCASIONAR DICHO TIPO DE LESION A UNAS MUESTRAS ALEATORIAS DE RATAS Y TOMAR COMO COMPARACION A OTRO GRUPO DE RATAS SIN DICHO TIPO DE LESION (GRUPO DE CONTROL, I).

LOS INTENTOS DE APRENDIZAJE DE CIERTA RUTINA SE PRESENTAN EN LA SIGUIENTE TABLA.

	GRUPOS I	II	III	IV	
	20	24	20	27	
	18	22	22	35	
	26	25	30	18	
	19	25	27	24	
	26	20	22	28	
	24	21	24	32	
	26	34	28	16	
		18	21	18	
		32	23	25	
		23	25		
		22	18		
			30		
			32		
$\sum_{i=1}^{n_t} X_{ti} =$ TOTALES	159	266	322	223	970, $\overline{X}_{..} = 970/40 = 24.25$
n_t	7	11	13	9	N = 40
$\overline{X}_{t.}$	22.71	24.18	24.77	24.78	
γ_t	-1.54	-0.07	0.52	0.53	

$\sum_{ti}\sum X_{ti}^2 = 20^2 + 18^2 + \ldots + 18^2 + 25^2 = 24,424; \; N\bar{X}_{..}^2 = 40(24.25)^2 = 23,522.5$

SST = 24, 424 - 23, 522.5 = 901.5

$$\sum_t \frac{(\sum_i X_{ti})^2}{n_t} = \frac{159^2}{7} + \frac{266^2}{11} + \frac{322^2}{13} + \frac{223^2}{9} = 23,545.1$$

SSB = 23, 545.1 - 23, 522.5 = 22.6

SSW = SST - SSB = 901.5 - 22.6 = 878.9

FUENTE DE VARIABILIDAD	SS	g. DE l.	MS	F
ENTRE GRUPOS	SSB = 22.6	3	$\frac{22.6}{3} = 7.5$	$\frac{7.5}{24.4}$
DENTRO DE GRUPOS	SSW = 878.9	36	$\frac{878.9}{36} = 24.4$	
TOTALES	SST = 901.5	39		

$$F = \frac{7.5}{24.4} < F_{0.95,3,36} = 2.8$$

POR LO TANTO SE ACEPTA LA HIPOTESIS DE QUE EL NUMERO MEDIO DE INTENTOS PARA APRENDER CIERTA RUTINA ES IGUAL EN LOS CUATRO TRATAMIENTOS O GRUPOS, CON UN 95% DE NIVEL DE CONFIANZA.

ESTIMACION DE LOS EFECTOS

SI SE OBTIENE LA ESPERANZA DE LA DIFERENCIA $\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..}$, DE LA EC (7) SE OBTIENE

$$E(\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..}) = E(\gamma_t)$$

O SEA QUE $\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..}$ ES UN ESTIMADOR PUNTUAL INSESGADO DE LA MAGNITUD DE LOS EFECTOS.

EJEMPLO

LOS SIGUIENTES DATOS SE OBTUVIERON DE UN EXPERIMENTO COMPLETAMENTE ALEATORIZADO PARA COMPARAR LAS PROPIEDADES REFLECTIVAS DE CUATRO TIPOS DE PINTURA. LOS RESULTADOS FUERON OBTENIDOS MEDIANTE UN INSTRUMENTO OPTICO SIENDO LOS SIGUIENTES:

	PINTURA #1	PINTURA #2	PINTURA #3	PINTURA #4	
	195	45	230	110	
	150	40	115	55	
	205	195	235	120	
	120	65	225	50	
	160	145		80	
		195			
					TOTALES
n_t	5	6	4	5	$N = 20$
$\bar{X}_{t.}$	166	114.167	201.25	83.0	$\bar{X}_{..} = 136.75$
TOTALES: $\Sigma X_{t.}$	830	685	805	415	2735

a) ELABORAR LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA (MEDIANTE LOS PROCEDIMIENTOS ORIGINALES Y SIMPLIFICADOS).

$$\bar{X}_{1.} = \frac{195+150+205+120+160}{5} = 166; \quad \bar{X}_{2.} = \frac{45+40+195+65+145+195}{6} = 114.167$$

$$\bar{X}_{3.} = \frac{230+115+235+225}{4} = 201.25; \quad \bar{X}_{4.} = \frac{110+55+120+50+80}{5} = 83.0$$

$$\bar{X}_{..} = \frac{166 \times 5 + 114.167 \times 6 + 201.25 \times 4 + 5 \times 83}{20} = 136.75$$

SUMA DE CUADRADOS ENTRE GRUPOS:

$$SSB = \sum_{t=1}^{k} n_t(\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..})^2 = 5(166 - 136.75)^2 + 6(114.167 - 136.75)^2$$

$$+ 4(201.25 - 136.75)^2 + 5(83 - 136.75)^2$$

$$= 5 \times 855.56 + 6 \times 509.99 + 4 \times 4160.25 + 5 \times 2889.06$$

$$= 4277.81 + 3059.95 + 16641 + 14445.31 = \underline{38424.08}$$

SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE GRUPOS:

$$SSW = \sum_{t=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_t} (X_{ti} - \bar{X}_{t.})^2$$

$$= \left[(195 - 166)^2 + (150 - 166)^2 + (205 - 166)^2 + (120 - 166)^2 + (160 - 166)^2\right]$$

$$+ \left[(45 - 114.167)^2 + (40 - 114.167)^2 + (195 - 114.167)^2 + (65 - 114.167)^2\right.$$

$$\left. + (145 - 114.167)^2 + (195 - 114.167)^2\right] + \left[(230 - 201.25)^2 +\right.$$

$$\left. + (115 - 201.25)^2 + (235 - 201.25)^2 + (225 - 201.25)^2\right] + \left[(110 - 83)^2\right.$$

$$\left. + (55 - 83)^2 + (120 - 83)^2 + (50 - 83)^2 + (80 - 83)^2\right]$$

$$= 4770 + 26720.833 + 9968.75 + 3980$$

$$SSW = \underline{45439.583}$$

CON ESTOS DATOS PODEMOS FORMULAR LA TABLA DE ANALISIS DE VA_
RIANCIA COMO SIGUE:

FUENTES DE VARIABILIDAD	SS	GRADOS DE LIBERTAD	MS	$\hat{F}$
TIPOS DE PINTURA (ENTRE GRUPOS)	SSB = 38424.08	#TIPOS DE PINT-1 = K - 1 = 4 - 1 = 3	MSB = SSB/(k-1) = $\frac{38424.08}{3}$ = 12808.03	$\hat{F} = \frac{MSB}{MSW}$ = 4.51
ERRAR (DENTRO DE GRUPOS)	SSW = 45439.583	#ELEM. DE LA M. -#TIPOS DE PINT. N - K = 20-4 = 16	MSW = SSW/(N-k) = $\frac{45439.583}{16}$ = 2839.974	
TOTALES	SST = SSB + SSW = 83863.66			

EL VALOR DE F TEORICO PARA UN NIVEL DE CONFIANZA DEL 95% ES:

$$F_{0.95,3,16} = 3.24$$

CONCLUSION:

DADO QUE $F_{0.95,3,16} < \hat{F}$ $(3.24 < 4.51)$, ENTONCES $\hat{F}$ CAE EN LA REGION DEL RECHAZO, POR LO CUAL NOSE ACEPTA LA HIPOTESIS DE QUE LOS VALORES MEDIOS DE LAS REFLECTANCIAS DE LOS 4 TIPOS DE PINTURA ES IGUAL EN TODOS LOS TIPOS DE PINTURA, CON UN NIVEL DE CONFIANZA DEL 95%.

CALCULO DE LAS SUMAS DE CUADRADOS POR EL METODO SIMPLIFICADO

$$SSB = \sum_{t=1}^{k} \frac{(\sum_i X_{ti})^2}{n_t} - N\bar{X}_{..}^2 = \frac{(195 + 150 + 205 + 120 + 160)^2}{5} +$$

$$\frac{(45 + 40 + 195 + 65 + 145 + 195)^2}{6} + \frac{(230 + 115 + 235 + 225)^2}{4} +$$

$$+ \frac{(110 + 55 + 120 + 50 + 80)^2}{5} - 20 \times 136.75^2$$

$$SSB = \frac{830^2}{5} + \frac{685^2}{6} + \frac{805^2}{4} + \frac{415^2}{5} - 20 \times 136.75^2$$

$$= 412435.42 - 374011.25 = \underline{38424.17}$$

$$SST = \sum_t \sum_i X_{ti}^2 - N\bar{X}_{..}^2 -$$

$$= 195^2 + 150^2 + 205^2 + \ldots + 45^2 + 40^2 + \ldots +$$

$$+ 230^2 + 115^2 + \ldots + 50^2 + 80^2$$

$$- 20 \times 136.75^2$$

$$SST = 457875 - 374011.25 = 83863.75$$

$$SST = SSB + SSW \Rightarrow \quad SSW = SST - SSB = 83863.75 - 38424.17$$

$$SSW = 45439.58$$

MEDIDA DE ASOCIACION ENTRE EL FACTOR Y LA VARIABLE

UNA MEDIDA DESCRIPTIVA DEL GRADO DE ASOCIACION O CORRELACION QUE EXISTE ENTRE LA VARIABLE DEPENDIENTE Y EL FACTOR (O VARIABLE INDEPENDIENTE), ES

$$\eta^2 = \frac{SSB}{SST} = \frac{SST - SSW}{SST} \tag{20}$$

QUE CORRESPONDE A LA PROPORCION DE LA SUMA DE CUADRADOS QUE SE EXPLICA POR LA RELACION ENTRE AMBAS VARIABLES.

SE OBSERVA QUE η^2 VALE UNO CUANDO TODA LA VARIACION SE EXPLICA POR LA RELACION, ES DECIR, QUE SE TIENE UNA RELACION PERFECTA, Y VALE CERO CUANDO SSB = 0, O SEA, CUANDO NO HAY NINGUNA RELACION.

MODELO DE NIVELES ALEATORIOS

ES EL ANALISIS DE VARIANCIA CON UN SOLO FACTOR EN EL QUE LOS NIVELES DEL MISMO NO CUBREN TODOS LOS VALORES POSIBLES DE ESTE, SINO SOLO ALGUNOS DE ELLOS, CADA OBSERVACION QUEDA EN LA FORMA

$$X_{ti} = \xi + U_t + Z_{ti} \tag{21}$$

EN ESTE CASO, LA ESPERANZA DE LA SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE GRUPOS ES IGUAL QUE EN EL MODELO FACTORIAL, ES DECIR, $(N - k)\ \sigma^2$.

POR SU PARTE LA SUMA DE CUADRADOS ENTRE GRUPOS ES:

$$\sum_t n_t \; (\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..})^2 = \sum_k n_t \; [(U_t - \bar{U}) + (\bar{Z}_{t.} - \bar{Z}_{..})]^2 \tag{22}$$

DONDE $\bar{U} = \sum_t n_t \; U_t/N$

AL ELEVAR AL CUADRADO EL BINOMIO DE LA EC (22) Y OBTENER LA ESPERANZA CORRESPONDIENTE APARECERA EL TERMINO

$$E[\sum_t 2n_t (U_t - \bar{U})(\bar{Z}_{t.} - \bar{Z}_{..})] = 0$$

DEBIDO A QUE SE CONSIDERO LA HIPOTESIS DE QUE LAS U Y LAS Z SON VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES.

LOS OTROS DOS TERMINOS SON:

$$E[\sum_t n_t (\bar{Z}_{t.} - \bar{Z}_{..})^2] = (k - 1) \; \sigma^2 \tag{23}$$

y

$$E[\sum_t n_t (U_t - \bar{U})^2] = E[\sum_t n_t \; U_t^2 - N\bar{U}^2] \tag{24}$$

PUESTO QUE $E(U_t) = 0$ y $VAR(U_t) = \sigma_u^2$

SE TIENE QUE $E(U_t^2) = \sigma_u^2$ y $E(\bar{U}^2) = \sigma_u^2 \sum_t (n_t/N)^2$

(25)

POR LO TANTO, LA ESPERANZA DE LA SUMA DE CUADRADOS ENTRE GRUPOS ES

$$E(SSB) = (k-1)\sigma^2 + \sigma_u^2 \{\sum_t n_t - N\sum_t (n_t/N)^2\} = (k-1)\sigma^2 + \sigma_u^2 \{N - \frac{1}{N} \sum_t n_t^2\} \tag{26}$$

DIVIDIENDO ENTRE LOS GRADOS DE LIBERTAD RESPECTIVOS SE OBTIENEN

$$E(MSW) = \sigma^2 \qquad (27)$$

$$E(MSB) = \sigma^2 + \sigma_u^2 \{N - \frac{1}{N} \sum_t n_t^2\}/(k-1) \qquad (28)$$

PUESTO QUE EL COEFICIENTE DE σ_u^2 ES POSITIVO, UNA DIFERENCIA EXCESIVA DE MSB SOBRE MSW PUEDE DEBERSE A QUE σ_u^2 NO ES CERO, ESTO ES, A UNA VARIACION REAL ENTRE LOS GRUPOS O TRATAMIENTOS.

BAJO LA HIPOTESIS NULA DE QUE $\sigma_u^2=0$, TANTO MSB COMO MSW SON ESTIMADORES INSESGADOS DE σ^2, POR LO QUE LA PRUEBA DE HIPOTESIS SE REALIZA CON LA ESTADISTICA F

$$F = MSB/MSW \qquad (29)$$

CON DISTRIBUCION F CON k-1 Y N-k GRADOS DE LIBERTAD.

EN EL CASO PARTICULAR DE QUE TODAS LAS MUESTRAS DE LOS TRATAMIENTOS SEAN DE IGUAL TAMAÑO, ES DECIR, SI $n_t = n$, ENTONCES LA EC (28) SE REDUCE A

$$MSB = \sigma^2 + n\sigma_u^2 \qquad (30)$$

UNA ESTIMACION PUNTUAL DE σ_u^2 SE PUEDE OBTENER SI A LA EC (28) SE LE RESTA, MIEMBRO A MIEMBRO, LA EC (27) Y DEL RESULTADO SE DESPEJA A σ_u^2; EN TAL CASO

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{(MSB - MSW)(k - 1)}{N - \frac{1}{N} \sum_t n_t^2} \tag{31}$$

EN EL CASO EN QUE TODAS LAS n_t SEAN IGUALES, LA ESTIMACION DE $\hat{\sigma}_u^2$, EMPLEANDO LAS ECS (30) y (28), SERA

$$\hat{\sigma}_u^2 = (MSB - MSW)/n \tag{32}$$

EJEMPLO

SE TIENE UN PROBLEMA DE APLICACION DE UN TEST PSICOLOGICO EN EL QUE SE TRATA DE VERIFICAR SI SE OBTIENEN LOS MISMOS RESULTADOS AL SER APLICADO POR DIFERENTES PERSONAS. PARA ESTO SE DISEÑO UN EXPERIMENTO CONSISTENTE EN SELECCIONAR AL AZAR A 5 PERSONAS, QUIENES APLICARON EL TEST A 8 SUJETOS ASIGNADOS AL AZAR A CADA UNA. LAS CALIFICACIONES QUE OBTUVIERON SE PRESENTAN EN LA SIGUIENTE TABLA

	EXPERIMENTADOR				
	1	2	3	4	5
	5.8	6.0	6.3	6.4	5.7
	5.1	6.1	5.5	6.4	5.9
	5.7	6.6	5.7	6.5	6.5
	5.9	6.5	6.0	6.1	6.3
	5.6	5.9	6.1	6.6	6.2
	5.4	5.9	6.2	5.9	6.4
	5.3	6.4	5.8	6.7	6.0
	5.2	6.3	5.6	6.0	6.3
Total	44.0	49.7	47.2	50.6	49.3
$\sum_t \sum_i X_{ti} = 240.8$					

EN LA SIGUIENTE TABLA SE RESUMEN LOS RESULTADOS DEL ANALISIS DE VARIANCIA REALIZADO CON ESTOS DATOS:

Fuente	SS	g. de l.	MS	E(MS)	F
Entre experimentadores	3.47	4	0.868	$8\hat{\sigma}_u^2+\hat{\sigma}^2$	10.72
Dentro de experimentadores	2.85	35	0.081	$\hat{\sigma}^2$	
Total	6.32	39			

$$F_{0.99,4,35} = 4.12 < 10.72$$

POR LO TANTO SE RECHAZA LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE RESULTADOS A UN 99% DE NIVEL DE CONFIANZA.

LA ESTIMACION DE LA VARIANCIA ENTRE EXPERIMENTADORES VALE, DE ACUERDO CON LA EC (32):

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{0.868 - 0.081}{8} = 0.098$$

LA ESTIMACION DE LA VARIANCIA TOTAL ES

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_u^2 + \hat{\sigma}^2 = 0.098 + 0.081 = 0.179$$

LA ESTIMACION DE LA PROPORCION DE LA VARIANCIA EXPLICADA POR LAS DIFERENCIAS ENTRE LOS EXPERIMENTADORES RESULTA SER

$$\hat{\sigma}_u^2 / \hat{\sigma}_x^2 = 0.098/0.179 = 0.55$$

5. COMPARACIONES MULTIPLES

COMPARACION DE DOS MEDIAS

CON LOS RESULTADOS DEL ANALISIS DE VARIANCIA SE PUEDEN DETERMINAR INTERVALOS DE CONFIANZA PARA LA DIFERENCIA DE DOS MEDIAS CUALESQUIERA DE LA SIGUIENTE MANERA.

SEAN LAS MEDIAS DE LOS GRUPOS i Y j, $\bar{X}_{i.}$ Y $\bar{X}_{j.}$; LA DIFERENCIA $\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{j.}$ ES UNA ESTADISTICA CON VARIANCIA $\sigma^2(1/n_i - 1/n_j)$, EN DONDE σ^2 SE ESTIMA CON MSW = S^2. EN TAL CASO, EL INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA DIFERENCIA DE LAS MEDIAS PRESELECCIONADAS ES

$$\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{j.} \pm (t_{\nu,\ \alpha/2})\ S\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}} \qquad (33)$$

DONDE $\nu = \nu_R$ ES EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD ASOCIADO CON S^2, Y α ES EL NIVEL DE SIGNIFICANCIA DEL INTERVALO $(\nu_R = N-k)$.

EJEMPLO

PARA EL PROBLEMA ANALIZADO ANTERIORMENTE DE LOS TIEMPOS DE COAGULACION DE LA SANGRE ASOCIADOS A DIFERENTES MEDICINAS, CALCULEMOS EL INTERVALO DE CONFIANZA DE LA DIFERENCIA DE LAS MEDIAS DE LOS TRATAMIENTOS A Y B.

PARA ESTE PROBLEMA SE OBTUVO:

$$\bar{X}_{A.} = 61,\ \bar{X}_{B.} = 66,\ n_A=4,\quad n_B=6,$$

$$S^2 = 5.6, \ \nu = 20.$$

POR LO TANTO $\bar{X}_{B.} - \bar{X}_{A.} = 66 - 61 = 5$ Y $(t_{20,0.025}) = 2.09$

EL INTERVALO DE CONFIANZA RESULTA SER

$$5 \pm 2.09 \sqrt{5.6} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = 5 \pm 3.2 = (1.8, 8.2)$$

COMPARACION DE PARES DE MEDIAS

SI SE DESEA COMPARAR LAS DIFERENCIAS DE LAS MEDIAS DE k TRATAMIENTOS, SE TENDRAN k(k-1)/2 PAREJAS DIFERENTES DE COMPARACIONES POR HACER. EN CASO DE QUE SE TENGAN MUESTRAS DE IGUAL TAMAÑO PARA CADA TRATAMIENTO, LA SIGUIENTE FORMULA DEBIDA A TUKEY PARA CALCULAR LOS INTERVALOS DE CONFIANZA ES EXACTA; EN CASO CONTRARIO SERA SOLO APROXIMADA:

$$\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{j.} \pm \frac{q_{k,\nu,\alpha/2} S}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}} \qquad (34)$$

DONDE $q_{k,\ \nu,\ \alpha/2}$ ES EL RANGO STUDENTIZADO PARA k MEDIAS Y ν GRADOS DE LIBERTAD. LOS VALORES DEL RANGO STUDENTIZADO SE HAN TABULADO EN ALGUNAS PUBLICACIONES, TALES COMO: PEARSON, E.S. Y HARTLEY, H.O., "BIOMETRIKA TABLES FOR STATISTICIANS", TABLA 29, VOL. 1, 3a. ED., 1966, CAMBRIDGE UNIV. PRESS.

EJEMPLO

SUPONGAMOS QUE EN UN EXPERIMENTO CON 7 TRATAMIENTOS SE OB

Table 11 Percentage points of the studentized range

Error df	α	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		t = number of treatment means									
5	.05	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17
	.01	5.70	6.98	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24	10.48
6	.05	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	6.65
	.01	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30
7	.05	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30
	.01	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37	8.55
8	.05	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05
	.01	4.75	5.64	6.20	6.62	6.96	7.24	7.47	7.68	7.86	8.03
9	.05	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	5.87
	.01	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.33	7.49	7.65
10	.05	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72
	.01	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36
11	.05	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.30	5.35	5.49	5.61
	.01	4.39	5.15	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.13
12	.05	3.08	3.77	4.20	4.52	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	5.51
	.01	4.32	5.05	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94
13	.05	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43
	.01	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	6.79
14	.05	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36
	.01	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66
15	.05	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31
	.01	4.17	4.84	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	6.55
16	.05	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26
	.01	4.13	4.79	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46
17	.05	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21
	.01	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	6.38
18	.05	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17
	.01	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	6.31
19	.05	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.14
	.01	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14	6.25
20	.05	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11
	.01	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.19
24	.05	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	3.92	5.01
	.01	3.96	4.55	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	6.02
30	.05	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82	4.92
	.01	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76	5.85
40	.05	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73	4.82
	.01	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.26	5.39	5.50	5.60	5.69
60	.05	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73
	.01	3.76	4.28	4.59	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	5.53
120	.05	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.64
	.01	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30	5.37
∞	.05	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55
	.01	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	5.23

Table 11 *(continued)*

t = number of treatment means										
12	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	α	*Error df*
7.32	7.47	7.60	7.72	7.83	7.93	8.03	8.12	8.21	.05	5
10.70	10.89	11.08	11.24	11.40	11.55	11.68	11.81	11.93	.01	
6.79	6.92	7.03	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59	.05	6
9.48	9.65	9.81	9.95	10.08	10.21	10.32	10.43	10.54	.01	
6.43	6.55	6.66	6.76	6.85	6.94	7.02	7.10	7.17	.05	7
8.71	8.86	9.00	9.12	9.24	9.35	9.46	9.55	9.65	.01	
6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87	.05	8
8.18	8.31	8.44	8.55	8.66	8.76	8.85	8.94	9.03	.01	
5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.64	.05	9
7.78	7.91	8.03	8.13	8.23	8.33	8.41	8.49	8.57	.01	
5.83	5.93	6.03	6.11	6.19	6.27	6.34	6.40	6.47	.05	10
7.49	7.60	7.71	7.81	7.91	7.99	8.08	8.15	8.23	.01	
5.71	5.81	5.90	5.98	6.06	6.13	6.20	6.27	6.33	.05	11
7.25	7.36	7.46	7.56	7.65	7.73	7.81	7.88	7.95	.01	
5.61	5.71	5.80	5.88	5.95	6.02	6.09	6.15	6.21	.05	12
7.06	7.17	7.26	7.36	7.44	7.52	7.59	7.66	7.73	.01	
5.53	5.63	5.71	5.79	5.86	5.93	5.99	6.05	6.11	.05	13
6.90	7.01	7.10	7.19	7.27	7.35	7.42	7.48	7.55	.01	
5.46	5.55	5.64	5.71	5.79	5.85	5.91	5.97	6.03	.05	14
6.77	6.87	6.96	7.05	7.13	7.20	7.27	7.33	7.39	.01	
5.40	5.49	5.57	5.65	5.72	5.78	5.85	5.90	5.96	.05	15
6.66	6.76	6.84	6.93	7.00	7.07	7.14	7.20	7.26	.01	
5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.73	5.79	5.84	5.90	.05	16
6.56	6.66	6.74	6.82	6.90	6.97	7.03	7.09	7.15	.01	
5.31	5.39	5.47	5.54	5.61	5.67	5.73	5.79	5.84	.05	17
6.48	6.57	6.66	6.73	6.81	6.87	6.94	7.00	7.05	.01	
5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79	.05	18
6.41	6.50	6.58	6.65	6.73	6.79	6.85	6.91	6.97	.01	
5.23	5.31	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75	.05	19
6.34	6.43	6.51	6.58	6.65	6.72	6.78	6.84	6.89	.01	
5.20	5.28	5.36	5.43	5.49	5.55	5.61	5.66	5.71	.05	20
6.28	6.37	6.45	6.52	6.59	6.65	6.71	6.77	6.82	.01	
5.10	5.18	5.25	5.32	5.38	5.44	5.49	5.55	5.59	.05	24
6.11	6.19	6.26	6.33	6.39	6.45	6.51	6.56	6.61	.01	
5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.47	.05	30
5.93	6.01	6.08	6.14	6.20	6.26	6.31	6.36	6.41	.01	
4.90	4.98	5.04	5.11	5.16	5.22	5.27	5.31	5.36	.05	40
5.76	5.83	5.90	5.96	6.02	6.07	6.12	6.16	6.21	.01	
4.81	4.58	4.94	5.00	5.06	5.11	5.15	5.20	5.24	.05	60
5.60	5.67	5.73	5.78	5.84	5.89	5.93	5.97	6.01	.01	
4.71	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.04	5.09	5.13	.05	120
5.44	5.50	5.56	5.61	5.66	5.71	5.75	5.79	5.83	.01	
4.62	4.68	4.74	4.80	4.85	4.89	4.93	4.97	5.01	.05	∞
5.29	5.35	5.40	5.45	5.49	5.54	5.57	5.61	5.65	.01	

TUVIERON LOS SIGUIENTES RESULTADOS DEL ANALISIS DE VARIANCIA CORRESPONDIENTE:

TRATAMIENTOS							
	A	B	C	D	E	F	G
$\bar{X}_{i.}$	63	62	67	65	65	70	60

MSW = $S^2 = 9.0$, $k = 7$, $n_i = n = 4$, $\nu = 28-7 = 21$. PARA

$\alpha = 0.05$, SE OBTIENE DE LA TABLA DE LOS RANGOS STUDENTIZADOS $(q_{7,21,0.025})/\sqrt{2} = 3.26$.

CON ESTOS VALORES LOS MARGENES QUE DEFINEN LOS LIMITES DE CONFIANZA PARA LA DIFERENCIA DE LAS MEDIAS DE CUALQUIER PAR DE TRATAMIENTOS SON:

$$\pm \frac{q_{k,\nu,\alpha/2}}{\sqrt{2}} S \sqrt{\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} = \pm\, 3.26 \times 3\sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)} = \pm\, 6.91$$

DE ESTA MANERA CUALQUIER DIFERENCIA DE PROMEDIOS QUE EN VALOR ABSOLUTO EXCEDA DE 6.91 PUEDE CONSIDERARSE ESTADISTICAMENTE SIGNIFICATIVA AL 95% DE NIVEL DE CONFIANZA. TODAS LAS DIFERENCIAS POSIBLES ($7 \times 6/2 = 21$) SE ENCUENTRAN EN LA SIGUIENTE TABLA, Y SE HAN ENMARCADO LAS QUE RESULTARON SIGNIFICATIVAS.

TRATAMIENTO	A	B	C	D	E	F	G
PROMEDIO,	63	62	67	65	65	70	60
$\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{j.}$	*	1	-4	-2	-2	$\boxed{-7}$	3
		*	-5	-3	-3	$\boxed{-8}$	2
			*	2	2	3	$\boxed{7}$
				*	0	-5	5
					*	-5	5
						*	$\boxed{10}$

EN ESTA TABLA SE OBSERVA QUE LAS PAREJAS CUYAS MEDIAS TUVIERON DIFERENCIAS SIGNIFICATIVAS SON: A Y F, B Y F, C Y G, Y F Y G.

METODO DE DUNNETT PARA COMPARACION DE VARIOS TRATAMIENTOS CON UNO ESTANDAR

SI SE DESEA COMPARAR LAS MEDIAS DE VARIOS TRATAMIENTOS CON LA DE UN TRATAMIENTO ESTANDAR, A, SE TIENEN QUE HACER k-1 COMPARACIONES POR PARES. LOS INTERVALOS DE CONFIANZA DE LAS DIFERENCIAS RESULTAN SER

$$\bar{x}_{A.} - \bar{x}_{i.} \pm (t_{k,\nu,\alpha/2}) \; S\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_i}} \qquad (35)$$

EN DONDE $t_{k,\nu,\alpha/2}$ ES LA t DE DUNNETT*.

SI EN EL EJEMPLO ANTERIOR EL TRATAMIENTO A ES EL ESTANDAR, ENTONCES $t_{7,21,0.025} = 2.80$, Y EL MARGEN DE LOS INTERVALOS RESULTA SER

$$\pm\, 2.80 \times 3 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \pm\, 5.94$$

POR LO TANTO, CUALQUIER DIFERENCIA DE PROMEDIOS QUE SEA SUPERIOR A 5.94 RESULTA SIGNIFICATIVAMENTE DIFERENTE CON $\alpha = 0.05$.

---

* DUNNETT, C.W., "NEW TABLES FOR MULTIPLE COMPARISONS WITH A CONTROL", BIOMETRICS, VOL 20, P 482.

TRATAMIENTO	A (CONTROL)	B	C	D	E	F	G
PROMEDIO	63	62	67	65	65	70	60
$\bar{X}_A - \bar{X}_{i.}$	*	1	-4	-2	-2	$\boxed{-7}$	3

COMO RECOMENDACION, CUANDO SE USE UN TRATAMIENTO O GRUPO DE CONTROL, SE DEBE PROCURAR QUE EL TAMAÑO DE LA MUESTRA DE ESTE SEA $\sqrt{k}$ VECES MAYOR QUE EL DE LOS DEMAS.

Table A.9A Table of t for one-sided comparisons between p treatment means and a control for a joint confidence coefficient of P = .95 and P = .99

Error df	P	p = number of treatment means, excluding control: 1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	.95	2.02	2.44	2.68	2.85	2.98	3.08	3.16	3.24	3.30
	.99	3.37	3.90	4.21	4.43	4.60	4.73	4.85	4.94	5.03
6	.95	1.94	2.34	2.56	2.71	2.83	2.92	3.00	3.07	3.12
	.99	3.14	3.61	3.88	4.07	4.21	4.33	4.43	4.51	4.59
7	.95	1.89	2.27	2.48	2.62	2.73	2.82	2.89	2.95	3.01
	.99	3.00	3.42	3.66	3.83	3.96	4.07	4.15	4.23	4.30
8	.95	1.86	2.22	2.42	2.55	2.66	2.74	2.81	2.87	2.92
	.99	2.90	3.29	3.51	3.67	3.79	3.88	3.96	4.03	4.09
9	.95	1.83	2.18	2.37	2.50	2.60	2.68	2.75	2.81	2.86
	.99	2.82	3.19	3.40	3.55	3.66	3.75	3.82	3.89	3.94
10	.95	1.81	2.15	2.34	2.47	2.56	2.64	2.70	2.76	2.81
	.99	2.76	3.11	3.31	3.45	3.56	3.64	3.71	3.78	3.83
11	.95	1.80	2.13	2.31	2.44	2.53	2.60	2.67	2.72	2.77
	.99	2.72	3.06	3.25	3.38	3.48	3.56	3.63	3.69	3.74
12	.95	1.78	2.11	2.29	2.41	2.50	2.58	2.64	2.69	2.74
	.99	2.68	3.01	3.19	3.32	3.42	3.50	3.56	3.62	3.67
13	.95	1.77	2.09	2.27	2.39	2.48	2.55	2.61	2.66	2.71
	.99	2.65	2.97	3.15	3.27	3.37	3.44	3.51	3.56	3.61
14	.95	1.76	2.08	2.25	2.37	2.46	2.53	2.59	2.64	2.69
	.99	2.62	2.94	3.11	3.23	3.32	3.40	3.46	3.51	3.56
15	.95	1.75	2.07	2.24	2.36	2.44	2.51	2.57	2.62	2.67
	.99	2.60	2.91	3.08	3.20	3.29	3.36	3.42	3.47	3.52
16	.95	1.75	2.06	2.23	2.34	2.43	2.50	2.56	2.61	2.65
	.99	2.58	2.88	3.05	3.17	3.26	3.33	3.39	3.44	3.48
17	.95	1.74	2.05	2.22	2.33	2.42	2.49	2.54	2.59	2.64
	.99	2.57	2.86	3.03	3.14	3.23	3.30	3.36	3.41	3.45
18	.95	1.73	2.04	2.21	2.32	2.41	2.48	2.53	2.58	2.62
	.99	2.55	2.84	3.01	3.12	3.21	3.27	3.33	3.38	3.42
19	.95	1.73	2.03	2.20	2.31	2.40	2.47	2.52	2.57	2.61
	.99	2.54	2.83	2.99	3.10	3.18	3.25	3.31	3.36	3.40
20	.95	1.72	2.03	2.19	2.30	2.39	2.46	2.51	2.56	2.60
	.99	2.53	2.81	2.97	3.08	3.17	3.23	3.29	3.34	3.38
24	.95	1.71	2.01	2.17	2.28	2.36	2.43	2.48	2.53	2.57
	.99	2.49	2.77	2.92	3.03	3.11	3.17	3.22	3.27	3.31
30	.95	1.70	1.99	2.15	2.25	2.33	2.40	2.45	2.50	2.54
	.99	2.46	2.72	2.87	2.97	3.05	3.11	3.16	3.21	3.24
40	.95	1.68	1.97	2.13	2.23	2.31	2.37	2.42	2.47	2.51
	.99	2.42	2.68	2.82	2.92	2.99	3.05	3.10	3.14	3.18
60	.95	1.67	1.95	2.10	2.21	2.28	2.35	2.39	2.44	2.48
	.99	2.39	2.64	2.78	2.87	2.94	3.00	3.04	3.08	3.12
120	.95	1.66	1.93	2.08	2.18	2.26	2.32	2.37	2.41	2.45
	.99	2.36	2.60	2.73	2.82	2.89	2.94	2.99	3.03	3.06
∞	.95	1.64	1.92	2.06	2.16	2.23	2.29	2.34	2.38	2.42
	.99	2.33	2.56	2.68	2.77	2.84	2.89	2.93	2.97	3.00

SOURCE: This table is reproduced from "A multiple comparison procedure for comparing several treatments with a control," *J. Am. Stat. Assn.*, 50: 1096–1121 (1955), with permission of the author, C. W. Dunnett, and the editor.

Table A.9B Table of t for two-sided comparisons between p treatment means and a control for a joint confidence coefficient of P = .95 and P = .99

Error df	P	p = number of treatment means, excluding control: 1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	.95	2.57	3.03	3.39	3.66	3.88	4.06	4.22	4.36	4.49
	.99	4.03	4.63	5.09	5.44	5.73	5.97	6.18	6.36	6.53
6	.95	2.45	2.86	3.18	3.41	3.60	3.75	3.88	4.00	4.11
	.99	3.71	4.22	4.60	4.88	5.11	5.30	5.47	5.61	5.74
7	.95	2.36	2.75	3.04	3.24	3.41	3.54	3.66	3.76	3.86
	.99	3.50	3.95	4.28	4.52	4.71	4.87	5.01	5.13	5.24
8	.95	2.31	2.67	2.94	3.13	3.28	3.40	3.51	3.60	3.68
	.99	3.36	3.77	4.06	4.27	4.44	4.58	4.70	4.81	4.90
9	.95	2.26	2.61	2.86	3.04	3.18	3.29	3.39	3.48	3.55
	.99	3.25	3.63	3.90	4.09	4.24	4.37	4.48	4.57	4.65
10	.95	2.23	2.57	2.81	2.97	3.11	3.21	3.31	3.39	3.46
	.99	3.17	3.53	3.78	3.95	4.10	4.21	4.31	4.40	4.47
11	.95	2.20	2.53	2.76	2.92	3.05	3.15	3.24	3.31	3.38
	.99	3.11	3.45	3.68	3.85	3.98	4.09	4.18	4.26	4.33
12	.95	2.18	2.50	2.72	2.88	3.00	3.10	3.18	3.25	3.32
	.99	3.05	3.39	3.61	3.76	3.89	3.99	4.08	4.15	4.22
13	.95	2.16	2.48	2.69	2.84	2.96	3.06	3.14	3.21	3.27
	.99	3.01	3.33	3.54	3.69	3.81	3.91	3.99	4.06	4.13
14	.95	2.14	2.46	2.67	2.81	2.93	3.02	3.10	3.17	3.23
	.99	2.98	3.29	3.49	3.64	3.75	3.84	3.92	3.99	4.05
15	.95	2.13	2.44	2.64	2.79	2.90	2.99	3.07	3.13	3.19
	.99	2.95	3.25	3.45	3.59	3.70	3.79	3.86	3.93	3.99
16	.95	2.12	2.42	2.63	2.77	2.88	2.96	3.04	3.10	3.16
	.99	2.92	3.22	3.41	3.55	3.65	3.74	3.82	3.88	3.93
17	.95	2.11	2.41	2.61	2.75	2.85	2.94	3.01	3.08	3.13
	.99	2.90	3.19	3.38	3.51	3.62	3.70	3.77	3.83	3.89
18	.95	2.10	2.40	2.59	2.73	2.84	2.92	2.99	3.05	3.11
	.99	2.88	3.17	3.35	3.48	3.58	3.67	3.74	3.80	3.85
19	.95	2.09	2.39	2.58	2.72	2.82	2.90	2.97	3.04	3.09
	.99	2.86	3.15	3.33	3.46	3.55	3.64	3.70	3.76	3.81
20	.95	2.09	2.38	2.57	2.70	2.81	2.89	2.96	3.02	3.07
	.99	2.85	3.13	3.31	3.43	3.53	3.61	3.67	3.73	3.78
24	.95	2.06	2.35	2.53	2.66	2.76	2.84	2.91	2.96	3.01
	.99	2.80	3.07	3.24	3.36	3.45	3.52	3.58	3.64	3.69
30	.95	2.04	2.32	2.50	2.62	2.72	2.79	2.86	2.91	2.96
	.99	2.75	3.01	3.17	3.28	3.37	3.44	3.50	3.55	3.59
40	.95	2.02	2.29	2.47	2.58	2.67	2.75	2.81	2.86	2.90
	.99	2.70	2.95	3.10	3.21	3.29	3.36	3.41	3.46	3.50
60	.95	2.00	2.27	2.43	2.55	2.63	2.70	2.76	2.81	2.85
	.99	2.66	2.90	3.04	3.14	3.22	3.28	3.33	3.38	3.42
120	.95	1.98	2.24	2.40	2.51	2.59	2.66	2.71	2.76	2.80
	.99	2.62	2.84	2.98	3.08	3.15	3.21	3.25	3.30	3.33
∞	.95	1.96	2.21	2.37	2.47	2.55	2.62	2.67	2.71	2.75
	.99	2.58	2.79	2.92	3.01	3.08	3.14	3.18	3.22	3.25

SOURCE: This table is reproduced from "A multiple comparison procedure for comparing several treatments with a control," *J. Am. Stat. Assn.*, 50: 1096–1121 (1955), with permission of the author, C. W. Dunnett, and the editor.

EJEMPLO

PARA EL PROBLEMA DE LOS TIEMPOS DE COAGULACION CON DIVERSAS MEDICINAS , TRATADO EN CLASE, HACER, CONSIDERANDO UNICAMENTE LOS DATOS DE LOS TRATAMIENTOS A Y B, LA SIGUIENTE PRUEBA DE HIPOTESIS PARA LAS MEDIAS: $\mu_A - \mu_B = 0$; $\mu_A \neq \mu_B$. ESTIMAR, EN LAS MISMAS CONDICIONES, EL INTERVALO DE CONFIANZA DE LA DIFERENCIA DE MEDIAS.

DATOS:

	TRATAMIENTOS A	B	C	D
	62	63	68	56
	60	67	66	62
	63	71	71	60
	59	64	67	61
	244	65	68	63
		66	68	64
		396		63
				59
PROMEDIOS	61	66	68	61
VARIANZAS INSESGADAS	2.5	6.67	2.33	6

PROMEDIO GLOBAL = 64 seg.

a) INTERVALO DE CONFIANZA

SI SE CONSIDERAN SOLAMENTE LOS DATOS DE LOS TRATAMIENTOS A Y B, LA ECUACION PARA OBTENER EL INTERVALO DE CONFIANZA SERA:

$$\overline{X}_i - \overline{X}_j \pm t_{\nu,\alpha/2} S\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}$$

DONDE S^2 ES LA VARIANCIA OBTENIDA DEL ANALISIS DE VARIANCIA DE LOS TRATAMIENTOS A Y B, EXCLUSIVAMENTE.

UTILIZANDO LAS FORMULAS SIMPLIFICADAS PARA EL ANALISIS DE VARIANCIA :

$$SST = \sum_{ti}\sum X_{ti}^2 - N\overline{X}_{..}$$

CON N = 10, $\overline{X}_{..} = (61)0.4 + 66(0.6) = 64$, Y $N\overline{X}_{..}^2 = 10(64)^2 = 40{,}960$

POR OTRA PARTE:

$$\sum_{ti}\sum X_{ti}^2 = 62^2+60^2+63^2+59^2+63^2+67^2+71^2+64^2+65^2+66^2 = 41{,}070$$

ENTONCES, SUSTITUYENDO:

$$SST = \sum_{ti}\sum X_{ti}^2 - N\overline{X}_{..} = 41{,}070 - 40{,}960 = 110$$

LA SUMA DE CUADRADOS ENTRE TRATAMIENTOS VALE:

$$SSB = \sum_t \frac{(\sum_i X_{ti})^2}{n_t} - N\overline{X}_{..}^2$$

HACIENDO OPERACIONES

$$\sum_i X_{Ai} = 62+60+63+59 = 244$$

$$\sum_i X_{Bi} = 63+67+71+64+65+66 = 396$$

POR TANTO

$$\sum_t \frac{(\sum_i X_{ti})^2}{n_t} = \frac{244^2}{4} + \frac{396^2}{6} = 41{,}020$$

SUSTITUYENDO EN LA ECUACION:

$$SSB = 41{,}020 - 40{,}960 = 60$$

LA SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE GRUPOS VALE:

$$SSW = SST - SSB = 110 - 60 = 50$$

CON $N - k = 10 - 2 = 8$ GRADOS DE LIBERTAD

POR LO TANTO: $MSW = 50/8 = 6.25 = S^2$

PARA UN NIVEL DE CONFIANZA $\alpha = 0.05$ Y 8 GRADOS DE LIBERTAD, $t_{8,0.025} = 2.31$

SUSTITUYENDO LOS VALORES OBTENIDOS EN LA ECUACION PARA EL INTERVALO DE CONFIANZA SE OBTIENE:

$$66 - 61 \pm 2.31\sqrt{6.25}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = 5 \pm 3.73$$

CONSIDERANDO TODOS LOS DATOS DEL ANALISIS DE VARIANCIA SE OBTUVO 5 ± 3.2

b) <u>PRUEBA DE HIPOTESIS (CON EL ANALISIS DE VARIANCIA DE A Y B)</u>

CONTINUANDO EL ANALISIS DE VARIANCIA PARA LOS TRATAMIENTOS A Y B:

$$MSB = \frac{SSB}{k-1} = \frac{60}{2-1} = 60$$

$$MSW = \frac{SSW}{N-k} = \frac{50}{8} = 6.25$$

ENTONCES LA ESTADISTICA F VALDRA:

$$F = \frac{MSB}{MSW} = \frac{60}{6.75} = 9.6$$

EN TABLAS, CON UN NIVEL DE CONFIANZA DE 95%, $F_{.05,1.8} = 5.32$

COMO 9.6 > 5.32 SE RECHAZA LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE MEDIAS.

c) PRUEBAS DE HIPOTESIS

SE TRATA DE PROBAR LA HIPOTESIS NULA H_0: $\mu_1 = \mu_2$ CONTRA LAS HIPOTESIS ALTERNATIVAS:

a) $\mu_1 \neq \mu_2$ b) $\mu_1 > \mu_2$ c) $\mu_1 < \mu_2$, PARA LOS TRATAMIENTOS A Y B.

c.1) SE PROBARA: HIPOTESIS NULA H_0: $\mu_1 = \mu_2$

HIPOTESIS ALTERNATIVA H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

EN PRIMER TERMINO DEBEMOS ASEGURARNOS QUE LAS VARIANCIAS CUMPLAN LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE VARIANCIAS:

H_0: $S_A^2 = S_B^2$; H_1: $S_A^2 \neq S_B^2$

DE LA TABLA DE DATOS OBTENEMOS:

$S_A^2 = 10/3 = 3.33$ CON 4-1 = 3 GRADOS DE LIBERTAD

$S_B^2 = 40/5 = 8$ CON 6-1 = 5 GRADOS DE LIBERTAD

ENTONCES LA ESTADISTICA F VALE:

$$F = \frac{8}{3.33} = 2.40$$

SE TRATA DE UNA PRUEBA DE DOS COLAS, POR LO QUE EL VALOR EMPIRICO CALCULADO F_0, DEBE CUMPLIR, RESPECTO AL TEORICO F_1:

$$F_0 < F_{\alpha/2,\nu_1,\nu_2}$$

O

$$F_0 > F_{1-\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2}$$

EN ESTE CASO:

$$F_{\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2} = F_{0.025,3,5} = 7.76$$

$$F_{1-\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2} = F_{1-0.025,3,5} = F_{0.975,3,5} = \frac{1}{F_{0.025,5,3}} = \frac{1}{14.88} = 0.0672$$

ENTONCES, COMPARANDO CON EL RESULTADO EMPIRICO: $0.0672 < 2.40 < 7.76$

POR LO TANTO ESTAMOS EN LA REGION DE ACEPTACION Y SE ADMITE QUE, CON UN NIVEL DE CONFIANZA DEL 95%, $S_A^2 = S_B^2$.

CON LO ANTERIOR, PODEMOS PROCEDER A EFECTUAR LA PRUEBA DE IGUALDAD DE MEDIAS:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$; H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

PARA EFECTUARLA, SE CALCULARA LA ESTADISTICA T COMO:

$$T = \frac{\overline{Y}_B - \overline{Y}_A}{\varepsilon\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}}$$

DONDE

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\nu_A S_A^2 + \nu_B S_B^2}{\nu_A + \nu_B}}$$

DE LA TABLA DE DATOS:

$$S_A^2 = 3.33,\ \overline{Y}_A = 61,\ n_A = 4,\ \nu_A = 4-1 = 3$$

$$S_B^2 = 8,\ \overline{Y}_B = 66,\ n_B = 6,\ \nu_B = 6-1 = 5$$

SUSTITUYENDO

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{3(3.33)+(5(8)}{5+3}} = \sqrt{\frac{10 + 40}{8}} = \sqrt{6.25} = 2.5$$

$$t = \frac{66-61}{2.5\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}} = 3.1$$

COMO SE TRATA DE UNA PRUEBA DE DOS COLAS, LA ESTADISTICA TEORICA SERA:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2},\nu_A+\nu_B} = t_{0.975,8} = 2.31$$

COMO 3.1 > 2.31 <u>SE RECHAZA</u> LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE MEDIAS, PARA UN NIVEL DE CONFIANZA DE 95%, EN CONTRA DE LA HIPOTESIS $\mu_1 \neq \mu_2$.

POR OTRA PARTE

$$T^2 = 3.1^2 = 9.6 = F$$

POR LO QUE SE VERIFICA QUE SI K=2, SE OBTIENE EL MISMO RESULTADO SI SE HACE LA PRUEBA CON LA DISTRIBUCION t O CON EL ANALISIS DE VARIANCIA.

c.2) PARA ESTE CASO SE PROBARA LA HIPOTESIS H_0: $\mu_1 = \mu_2$

CONTRA H_1: $\mu_1 > \mu_2$

SE HABIA CALCULADO EL VALOR EMPIRICO $T_0 = 3.1$

COMO SE TRATA DE UNA PRUEBA DE UNA COLA, ENTONCES:

$$t_{\alpha,\ \nu_1 + \nu_2} = t_{0.05,8} = 1.86 < 3.1$$

POR LO QUE SE RECHAZA LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE MEDIAS, CONTRA LA HIPOTESIS ALTERNATIVA $\mu_1 > \mu_2$

c.3) SE PROBARA FINALMENTE H_0: $\mu_1 = \mu_2$; H_1: $\mu_1 < \mu_2$

PARA LA PRUEBA DE MEDIAS SE HABIA OBTENIDO $T_0 = 3.1$ Y $t_{0.05,8} = 1.86$; COMO $3.1 > 1.86$, SE ACEPTA LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE MEDIAS, CONTRA LA ALTERNATIVA $\mu_1 < \mu_2$

6. PRUEBA DE IGUALDAD DE VARIANCIAS

PARA APLICAR EL METODO DE ANALISIS DE VARIANCIA SE TIENE QUE CUMPLIR CON LA CONDICION DE QUE LAS VARIANCIAS DE LA PARTE ALEATORIA, Z_{ti}, DEL MODELO SEAN IGUALES, ES DECIR, QUE $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$.

PARA HACER ESTO, SI $k = 2$, SE PUEDE UTILIZAR LA PRUEBA USUAL DE IGUALDAD DE DOS VARIANCIAS. SI $k > 2$ SE PUEDE USAR CUALQUIERA DE LOS DOS METODOS SIGUIENTES, LOS CUALES SON APLICABLES SI SE TIENE QUE TODAS LAS MUESTRAS, n_i, SON DE IGUAL TAMAÑO:

a. PRUEBA DE COCHRAN, QUE USA COMO CRITERIO AL COCIENTE $SSW_{máx} / \sum_{t=1}^{k} SSW_t$

b. PRUEBA QUE USA COMO CRITERIO AL COCIENTE $SSW_{máx}/SSW_{mín}$

EN LA PUBLICACION BIOMETRIKA TABLES, REFERIDA ANTERIORMENTE, SE TIENEN TABLAS DE LOS VALORES CRITICOS DE LAS ESTADISTICAS ANTERIORES, SEMEJANTES A LA TABLA QUE SE PRESENTA A CONTINUACION PARA $\alpha = 0.01$.

Table 18 Percentage points of $F_{max} = s^2_{max}/s^2_{min}$

Upper 5% points

df_2 \ t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	39.0	87.5	142	202	266	333	403	475	550	626	704
3	15.4	27.8	39.2	50.7	62.0	72.9	83.5	93.9	104	114	124
4	9.60	15.5	20.6	25.2	29.5	33.6	37.5	41.1	44.6	48.0	51.4
5	7.15	10.8	13.7	16.3	18.7	20.8	22.9	24.7	26.5	28.2	29.9
6	5.82	8.38	10.4	12.1	13.7	15.0	16.3	17.5	18.6	19.7	20.7
7	4.99	6.94	8.44	9.70	10.8	11.8	12.7	13.5	14.3	15.1	15.8
8	4.43	6.00	7.18	8.12	9.03	9.78	10.5	11.1	11.7	12.2	12.7
9	4.03	5.34	6.31	7.11	7.80	8.41	8.95	9.45	9.91	10.3	10.7
10	3.72	4.85	5.67	6.34	6.92	7.42	7.87	8.28	8.66	9.01	9.34
12	3.28	4.16	4.79	5.30	5.72	6.09	6.42	6.72	7.00	7.25	7.48
15	2.86	3.54	4.01	4.37	4.68	4.95	5.19	5.40	5.59	5.77	5.93
20	2.46	2.95	3.29	3.54	3.76	3.94	4.10	4.24	4.37	4.49	4.59
30	2.07	2.40	2.61	2.78	2.91	3.02	3.12	3.21	3.29	3.36	3.39
60	1.67	1.85	1.96	2.04	2.11	2.17	2.22	2.26	2.30	2.33	2.36
∞	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Upper 1% points

df_2 \ t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	199	448	729	1036	1362	1705	2063	2432	2813	3204	3605
3	47.5	85	120	151	184	21(6)	24(9)	28(1)	31(0)	33(7)	36(1)
4	23.2	37	49	59	69	79	89	97	106	113	120
5	14.9	22	28	33	38	42	46	50	54	57	60
6	11.1	15.5	19.1	22	25	27	30	32	34	36	37
7	8.89	12.1	14.5	16.5	18.4	20	22	23	24	26	27
8	7.50	9.9	11.7	13.2	14.5	15.8	16.9	17.9	18.9	19.8	21
9	6.54	8.5	9.9	11.1	12.1	13.1	13.9	14.7	15.3	16.0	16.6
10	5.85	7.4	8.6	9.6	10.4	11.1	11.8	12.4	12.9	13.4	13.9
12	4.91	6.1	6.9	7.6	8.2	8.7	9.1	9.5	9.9	10.2	10.6
15	4.07	4.9	5.5	6.0	6.4	6.7	7.1	7.3	7.5	7.8	8.0
20	3.32	3.8	4.3	4.6	4.9	5.1	5.3	5.5	5.6	5.8	5.9
30	2.63	3.0	3.3	3.4	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2
60	1.96	2.2	2.3	2.4	2.4	2.5	2.5	2.6	2.6	2.7	2.7
∞	1.00	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

s^2_{max} is the largest and s^2_{min} the smallest in a set of t independent mean squares, each based on $df_2 = n - 1$ degrees of freedom.

Values in the column $t = 2$ and in the rows $df_2 = 2$ and ∞ are exact. Elsewhere the third digit may be in error by a few units for the 5% points and several units for the 1% points. The third digit figures in brackets for $df_2 = 3$ are the most uncertain.

From *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol I, edited by E.S. Pearson and H.O. Hartley (New York: Cambridge University Press, 1966) Table, p. 202. Reproduced by permission of the *Biometrika* Trustees.

VALORES CRITICOS PARA LA PRUEBA DE
IGUALDAD DE VARIANCIAS (α = 0.01)

	ν	4	5	6	7	8	9	10
		NUMERO DE VARIANCIAS						
PRUEBA DE COCHRAN	2	0.864	0.788	0.722	0.664	0.615	0.573	0.536
	3	0.781	0.696	0.626	0.568	0.521	0.481	0.447
	4	0.721	0.633	0.564	0.508	0.463	0.425	0.393
	6	0.641	0.553	0.487	0.435	0.393	0.359	0.331
	8	0.590	0.504	0.440	0.391	0.352	0.321	0.294
	10	0.554	0.470	0.408	0.362	0.325	0.295	0.270
PRUEBA DE $\frac{SSW_{máx}}{SSW_{mín}}$	2	729	1036	1362	1705	2063	2432	2813
	3	120	151	184	216	249	281	310
	4	49	59	69	79	89	97	106
	6	19.1	22	25	27	30	32	34
	8	11.7	13.2	14.5	15.8	16.9	17.9	18.9
	10	8.6	9.6	10.4	11.1	11.8	12.4	12.9

EJEMPLO

SE DESEA PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE LAS VARIANCIAS DE LOS DATOS DE SIETE DIFERENTES NIVELES DE UN FACTOR SON IGUALES; LAS MUESTRAS FUERON DE NUEVE ELEMENTOS CADA UNA. LOS VALORES DE SSW FUERON: 6.24, 5.16, 6.34, 8.26, 5.93, y 5.74 y 5.86. SE TOMARÁ α = 0.01.

PRUEBA DE COCHRAN: $SSW_{máx} / \sum_{t=1}^{9} SSW_t = 8.26/45.53 = 0.190$

VALOR CRITICO = 0.391 > 0.190

POR LO QUE SE ACEPTA LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE LAS VARIANCIAS

PRUEBA b) $SSW_{máx}/SSW_{mín} = 8.26/5.16 = 1.60$

VALOR CRITICO = 15.8 > 1.60

POR LO QUE SE ACEPTA LA HIPOTESIS BAJO PRUEBA.

7. DISEÑO DE EXPERIMENTOS CON BLOQUES ALEATORIZADOS

CONSIDEREMOS, COMO EJEMPLO, QUE INTERESA EL PROCESO DE MANUFACTURA DE PENICILINA, PARA LO CUAL HAY CUATRO METODOS O "TRATAMIENTOS". ADEMAS, SUPONGAMOS QUE UNA DE LAS MATERIAS PRIMAS PROVIENE DE CINCO FUENTES DIFERENTES, A LAS QUE LLAMAREMOS BLOQUES. EL PRINCIPAL INTERES ESTA EN VERIFICAR SI LOS CUATRO TRATAMIENTOS DAN RESULTADOS ESTADISTICAMENTE DIFERENTES; EL INTERES SECUNDARIO ES VERIFICAR SI LAS FUENTES DE MATERIAS PRIMAS INFLUYEN EN LOS RESULTADOS.

EN ESTE CASO SE ALEATORIZA UNA MUESTRA ASIGNANDOLE A CADA TRATAMIENTO UNA DE LAS MATERIAS PRIMAS, QUEDANDO UNA TABLA DE RESULTADOS COMO LA SIGUIENTE:

BLOQUE (MATERIA PRIMA)	TRATAMIENTO				PROMEDIO DE LOS BLOQUES
	A	B	C	D	
1	89	88	97	94	92
2	84	77	92	79	83
3	81	87	87	85	85
4	87	92	89	84	88
5	79	81	80	88	82
PROMEDIO DE LOS TRATAMIENTOS	84	85	89	86	

PROMEDIO GLOBAL = $\bar{X}_{..} = 86$

EL DISEÑO DE UN EXPERIMENTO MEDIANTE BLOQUES ALEATORIZADOS TIENE LAS SIGUIENTES VENTAJAS:

1. SE PUEDEN ELIMINAR LAS VARIACIONES DE LOS BLOQUES AL HACER LA COMPARACION DE LOS TRATAMIENTOS
2. SE PUEDE ESTUDIAR EL EFECTO DE LOS BLOQUES EN LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES, CUANDO ESTOS SON PREVISIBLES

EL MODELO MATEMATICO QUE EMPLEAREMOS PARA ESTUDIAR ESTE EXPERIMENTO ES EL DE ADITIVIDAD DE EFECTOS

$$X_{ti} = \eta + \beta_i + \tau_t + \varepsilon_{ti} \qquad (1)$$

DONDE X_{ti} ES LA OBSERVACION CORRESPONDIENTE AL TRATAMIENTO t Y AL BLOQUE i, η ES LA MEDIA GLOBAL, β_i ES EL EFECTO DEL BLOQUE i, τ_t ES EL EFECTO DEL TRATAMIENTO t, Y ε_{ti} ES EL ERROR.

DE ACUERDO CON ESTE MODELO LAS OBSERVACIONES SE PUEDEN DESCOMPONER EN LA SIGUIENTE FORMA:

$$X_{ti} = \bar{X}_{..} + (\bar{X}_{.i} - \bar{X}_{..}) + (\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..}) + (X_{ti} - \bar{X}_{.i} - \bar{X}_{t.} + \bar{X}_{..}) \qquad (2)$$

AL ULTIMO DE LOS TERMINOS DE ESTA ECUACION SE LE LLAMA EL <u>RESIDUO</u>, POR SER LO QUE RESULTA AL QUITARLE A LA MEDIA GLOBAL LOS EFECTOS DE LOS BLOQUES $(\bar{X}_{.i} - \bar{X}_{..})$ Y EL DE LOS TRATAMIENTOS $(\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..})$.

EL CASO GENERAL DE UN DISEÑO CON BLOQUES ALEATORIZADOS QUEDA EN UNA TABLA COMO LA SIGUIENTE:

BLOQUES	TRATAMIENTOS 1	2	3	...	k	PROMEDIOS $\bar{X}_{.i}$
1	X_{11}	X_{21}	X_{31}	...	X_{k1}	$\bar{X}_{.1}$
2	X_{12}	X_{22}	X_{32}	...	X_{k2}	$\bar{X}_{.2}$
3	.	.	.		.	.
.	.					.
.	.					.
.	.					
n	X_{1n}	X_{2n}	X_{3n}	...	X_{kn}	$\bar{X}_{.n}$
PROMEDIOS $\bar{X}_{t.}$	$\bar{X}_{1.}$	$\bar{X}_{2.}$	$\bar{X}_{3.}$	...	$\bar{X}_{k.}$	$\bar{X}_{..}$ = PROMEDIO GLOBAL

SE PUEDE DEMOSTRAR QUE LA SUMA DE CUADRADOS DE LAS OBSERVACIONES SE PUEDE DESCOMPONER EN LA FORMA:

$$SS = SS\bar{X}_{..} + SSb + SSt + SSr \qquad (3)$$

EN DONDE $SS\bar{X}_{..}$ = SUMA DE CUADRADOS DE LA MEDIA GLOBAL = $nk\bar{X}^2_{..}$, Y TIENE 1 GRADO DE LIBERTAD

SSb = SUMA DE CUADRADOS ENTRE BLOQUES = $= k\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}_{.i} - \bar{X}_{..})^2$, Y TIENE n-1 GRADOS DE LIBERTAD

SSt = SUMA DE CUADRADOS ENTRE TRATAMIENTOS =

$$= n \sum_{t=1}^{k} (\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..})^2, \text{ Y TIENE k-1 GRADOS DE}$$

LIBERTAD

SSr = SUMA DE CUADRADOS RESIDUAL

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{k} (X_{ti} - \bar{X}_{.i} - \bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..})^2 = SS - SSb - SSt$$

Y TIENE (n-1)(k-1) GRADOS DE LIBERTAD

LA MEJOR ESTIMACION DEL RESULTADO X_{ti} ES

$$\hat{X}_{ti} = \bar{X}_{..} + (\bar{X}_{.i} - \bar{X}_{..}) + (\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..}) \qquad (4)$$

LOS RESIDUOS SERAN $\varepsilon_{ti} = X_{ti} - \hat{X}_{ti}$

EJEMPLO

EN EL EJEMPLO DE LA PENICILINA TRATADO ANTERIORMENTE SE TENDRA:

$SS = 89^2 + 84^2 + 81^2 + 87^2 + 79^2 + 88^2 + \ldots + 84^2 + 88^2 = 148,480$

$SS\bar{X}_{..} = 5 \times 4 \times 86^2 = 147,920$

$SSb = 4\left[(92-86)^2 + (83-86)^2 + (85-86)^2 + (88-86)^2 + (82-86)^2\right] =$

$= 4 \times 66 = 264$

$SSt = 5\left[(84-86)^2 + (85-86)^2 + (89-86)^2 + (86-86)^2\right] = 5 \times 14 = 70$

$SSr = 148,480 - 147,920 - 264 - 70 = 226$

ESTOS CALCULOS Y LAS ESTIMACIONES $\hat{X}_{ti}$ SE PUEDEN FACILITAR MEDIANTE LA SIGUIENTE TABULACION, EN LA CUAL SE ENCUENTRAN ANOTADAS TAMBIEN LAS ESTIMACIONES $\hat{X}_{ti}$.

RESIDUOS Y ESTIMACIONES

BLOQUES	A	B	C	D	$\bar{X}_{.i}$	$\bar{X}_{.i}-\bar{X}_{..}$	$(\bar{X}_{.i}-\bar{X}_{..})$
1	-1	-3	2	2	92	92-86=6	36
	(90)	(91)	(95)	(92)			
2	3	-5	6	-4	83	83-86=-3	9
	(81)	(82)	(86)	(83)			
3	-2	3	-1	0	85	85-86=-1	1
	(83)	(84)	(88)	(85)			
4	1	5	-2	-4	88	88-86=2	4
	(86)	(87)	(91)	(88)			
5	-1	0	-5	6	82	82-86=-4	16
	(80)	(81)	(85)	(82)			66
	84	85	89	86			
$\bar{X}_{t.}-\bar{X}_{..}$	84-86=-2	85-86=-1	89-86=3	86-86=0			
$\Sigma(\bar{X}_{t.}-\bar{X}_{..})^2$	4 +	1 +	9 +	0	= 14		

RESIDUOS: $\varepsilon_{ti} = X_{ti} - \hat{X}_{ti} = X_{ti} - \bar{X}_{.i} - \bar{X}_{t.} + \bar{X}_{..}$

$\varepsilon_{11} = 89 - 92 - 84 + 86 = -1$

$\varepsilon_{12} = 84 - 83 - 84 + 86 = 3$

$\varepsilon_{13} = 81 - 85 - 84 + 86 = -2$

ETC.

ESTIMACIONES: $\hat{X}_{ti} = \bar{X}_{..} + (\bar{X}_{.i} - \bar{X}_{..}) + (\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..})$

$\hat{X}_{11} = 86 + 6 + (-2) = 90$

$\hat{X}_{21} = 86 + 6 + (-1) = 91$

$\hat{X}_{31} = 86 + 6 + 3 = 95$

$\hat{X}_{41} = 86 + 6 + 0 = 92$

$\hat{X}_{12} = 86 + (-3) + (-2) = 81$, ETC.

ESTOS VALORES ESTIMADOS ESTAN ANOTADOS EN LA TABLA ANTERIOR ENTRE LOS PARENTESIS.

BAJO LA HIPOTESIS DE QUE LOS RESIDUOS O ERRORES ε_{ti} SON VARIABLES ALEATORIAS CON DISTRIBUCION NORMAL DE MEDIA CERO Y VARIANCIA σ^2, LAS ESPERANZAS DE LOS VALORES MEDIOS CUADRATICOS

$$\begin{aligned} MSb &= SSb/(n-1) \\ MSt &= SSt/(k-1) \\ MSr &= SSr/(n-1)(k-1) \end{aligned} \tag{5}$$

SON

$$\begin{aligned} E\{MSb\} &= \sigma^2 + k \sum_i \beta_i^2/(n-1) \\ E\{MSt\} &= \sigma^2 + n \sum_t \tau_t^2/(k-1) \\ E\{MSr\} &= \sigma^2 \end{aligned} \tag{6}$$

BAJO LA HIPOTESIS NULA DE QUE TODAS LAS τ_t SON NULAS, ES DECIR, QUE NO HAY EFECTOS DEBIDOS A LOS TRATAMIENTOS, LA ESTADISTICA

$$F_t = MSt/MSr \tag{7}$$

TIENE LA DISTRIBUCION F CON (k-1) Y (n-1)(k-1) GRADOS DE LIBERTAD.

DE IGUAL MANERA, BAJO LA HIPOTESIS NULA DE QUE TODAS LAS β_i SON NULAS, ES DECIR, QUE NO HAY EFECTOS DEBIDOS A LOS

BLOQUES, LA ESTADISTICA

$$F_b = MSb/MSr \tag{8}$$

TIENE DISTRIBUCION F CON (n-1) Y (n-1)(k-1) GRADOS DE LIBERTAD.

PARA EL EJEMPLO DE LA PENICILINA SI $\alpha = 0.05$, SE TIENEN

$MSb = 264/4 = 66$

$MSt = 70/3 = 23.3$

$MSr = 226/(4x3) = 18.8$

$F_{4,12,0.05} = 3.26$

$F_{3,12,0.05} = 3.49$

$F_b = 66/18.8 = 3.51 > 3.26$: SE RECHAZA LA HIPOTESIS DE QUE NO HAY EFECTOS DE BLOQUES

$F_t = 23.3/18.8 = 1.24 < 3.49$: SE ACEPTA LA HIPOTESIS DE QUE NO HAY EFECTOS DE TRATAMIENTOS

EJEMPLO

SE HIZO UN EXPERIMENTO ALEATORIZADO Y SE ENCONTRARON LOS SIGUIENTES RESULTADOS:

BLOQUES	TRATAMIENTOS		
	A	B	C
1	6.5	7.4	7.4
2	6.8	7.3	6.9
3	6.4	7.2	8.0
4	6.7	6.9	6.5

PROBAR SI LOS EFECTOS DE LOS BLOQUES Y TRATAMIENTOS SON NULOS

SOLUCION

LOS CALCULOS SE RESUMEN EN LA SIGUIENTE TABLA:

BLOQUES	TRATAMIENTOS A	B	C	$\bar{X}_{.i}$	$\bar{X}_{.i} - \bar{X}_{..}$	$(\bar{X}_{.i} - \bar{X}_{..})^2$
1	6.5 42.25 6.56 -0.06	7.4 54.76 7.7 -0.3	7.4 54.76 7.7 -0.3	7.1	0.1	0.01
2	6.8 46.24 6.76 -0.04	7.3 53.29 7.5 -0.2	6.9 47.61 7.1 -0.2	7	0	0
3	6.4 40.96 6.56 -0.16	7.2 51.84 7.6 -0.4	8.0 6 4 8.4 -0.4	7.2	0.2	0.04
4	6.7 44.89 7.04 -0.34	6.9 47.61 6.8 0.1	6.5 42.25 6.4 0.1	6.7	-0.3	0.09
						$\Sigma = 0.14$
$\bar{X}_{t.}$	6.6	7.2	7.2			
$\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..}$	-0.04	0.2	0.2			
$(\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..})^2$	0.16	0.04	0.04	$\Sigma = 0.24$		

DONDE EN CADA CELDA SE INDICA:

$$\boxed{\begin{array}{c} X_{ti} \\ (X_{ti})^2 \\ \hat{X}_{ti} \\ \hat{\varepsilon}_{ti} \end{array}}$$

SUMANDO TODOS LOS VALORES DE $(X_{ti})^2$ INDICADOS EN LAS CELDAS OBTENEMOS:

$$SS = \sum_{it}\sum (X_{ti})^2 = 6.5^2 + 7.4^2 + \ldots + 6.9^2 + 6.5^2 = 590.46 \qquad \underline{SS = 590.46}$$

LAS SUMAS DE CUADRADOS DE LAS DESVIACIONES SON:

$$SS\bar{X}_{..} = nk(\bar{X}_{..})^2 = 4(3)(7)^2 = 588 \qquad \underline{SS\bar{X}_{..} = 588}$$

$$SSb = K\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}_{.i} - \bar{X}_{..})^2 = 3(0.14) = 0.42 \qquad \underline{SSb = 0.42}$$

$$SSt = n\sum_{t=1}^{k}(\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..})^2 = 4(0.24) = 0.96 \qquad \underline{SSt = 0.96}$$

$$SSr = SS - SSb - SSt - SS\bar{X}_{..} = 590.46 - 588 - 0.42 - 0.96 = 1.08$$

$$\underline{SSr = 1.08}$$

SSb TIENE n - 1 = 4 - 1 = 3 GRADOS DE LIBERTAD

SSt TIENE k - 1 = 3 - 1 = 2 GRADOS DE LIBERTAD

SSr TIENE (n-1)(k-1) = 2 x 3 = 6 GRADOS DE LIBERTAD

LOS VALORES MEDIOS CUADRATICOS ENTRE BLOQUES, TRATAMIENTOS Y ERRORES, SON:

$$MSb = \frac{SSb}{n-1} = \frac{0.42}{3} = 0.14 \qquad \underline{MSb = 0.14}$$

$$MSt = \frac{SSt}{k-1} = \frac{0.96}{2} = 0.48 \qquad \underline{MSt = 0.48}$$

$$MSr = \frac{SSr}{(k-1)(n-1)} = \frac{1.08}{6} = 0.18 \qquad \underline{MSr = 0.18}$$

ENTONCES SE PUEDEN HACER LAS PRUEBAS DE HIPOTESIS PEDIDAS UTILIZANDO LA ESTADISTICA F.

- TRATAMIENTOS

$$F_t = \frac{MSt}{MSr} = \frac{0.48}{0.18} = \underline{2.667}$$

CON UN NIVEL DE CONFIANZA DEL 95%; EN TABLAS:

$$F_{0.05,2,6} = \underline{5.14}$$

COMO $2.667 < 5.14$

* SE ACEPTA LA HIPOTESIS DE QUE LOS EFECTOS DE LOS TRATAMIENTOS SON NULOS.

BLOQUES

$$F_b = \frac{MSb}{MSr} = \frac{0.14}{0.18} = \underline{0.778}$$

LA F, EN TABLAS:

$$F_{0.05,3,6} = \underline{4.76}$$

COMO $0.778 < 4.76$ SE ACEPTA LA HIPOTESIS DE QUE LOS EFECTOS DE LOS BLOQUES SON NULOS

EN LA TABLA SE INCLUYEN TAMBIEN, EN CADA CELDA, LOS VALORES DE LA MEJOR ESTIMACION Y DEL ERROR; QUE FUERON CALCULADOS CON LAS ECUACIONES:

MEJOR ESTIMACION: $\hat{X}_{ti} = \bar{X}_{..} + (\bar{X}_{.i} - \bar{X}_{..}) + (\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..})$

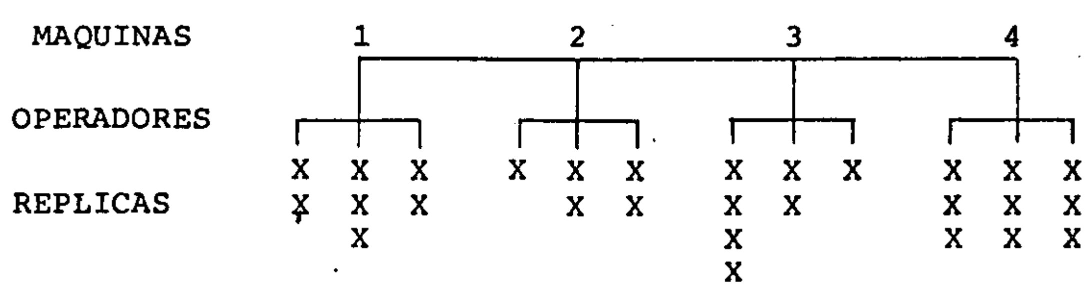
ERROR $\hat{\varepsilon}_{ti} = X_{ti} - \hat{X}_{ti}$

8. EXPERIMENTOS CON CLASIFICACION DE DOS FACTORES

EN OCASIONES NO INTERESA RELACIONAR AL FACTOR PRINCIPAL CON TODOS LOS NIVELES DEL FACTOR SECUNDARIO, POR LO CUAL A CADA NIVEL DEL FACTOR PRINCIPAL SE LE ASOCIA UN DIFERENTE CONJUNTO DE NIVELES DEL SECUNDARIO. EN TAL CASO SE TIENE UN EXPERIMENTO DE DOS FACTORES NO CRUZADO.

EN CAMBIO, CUANDO CADA NIVEL DEL FACTOR PRINCIPAL SE COMBINA CON TODOS LOS NIVELES DEL SECUNDARIO SE DICE QUE EL EXPERIMENTO ES DE DOS FACTORES CRUZADOS.

POR EJEMPLO, SI SE TIENE QUE EN UNA FABRICA SE DISPONE DE CUATRO MAQUINAS Y SE QUIERE ESTIMAR SU RENDIMIENTO, SE PUEDE DISEÑAR UN EXPERIMENTO EN EL QUE A CADA UNA SE LE ASIGNEN AL AZAR TRES OPERADORES. SI NO SE IDENTIFICA ALGUNA CARACTERISTICA DE LOS OPERADORES QUE SEÑALE LA CONVENIENCIA DE DISTINGUIRLOS EN TERMINOS DE ELLA, EL EXPERIMENTO CONSISTIRA EN REGISTRAR LOS RENDIMIENTOS INDIVIDUALES DE CADA PERSONA EN CADA VEZ QUE LA OPERE; ESTE EXPERIMENTO DE FACTORES NO CRUZADOS SE ILUSTRA EN LA SIGUIENTE FIGURA:



SI POR EL CONTRARIO, SE SABE QUE LOS OPERADORES TIENEN DI

FERENTE EXPERIENCIA EN EL USO DE MAQUINAS IGUALES A LAS DEL ESTUDIO, SERA NECESARIO DISEÑAR UN EXPERIMENTO CLASIFICANDOLOS EN TERMINOS DEL NIVEL DE EXPERIENCIA. SUPONGAMOS QUE ESTOS NIVELES SON 2, 4 Y 6 AÑOS DE EXPERIENCIA, Y QUE A CADA MAQUINA SE LE ASIGNEN AL AZAR. EL EXPERIMENTO RESULTANTE SERA DE DOS FACTORES CRUZADOS, EL CUAL SE PUEDE REPRESENTAR EN UNA TABLA COMO LA SIGUIENTE:

EXPERIENCIA	MAQUINAS			
	I	II	III	IV
2 AÑOS	X X	X	X X X X	X X X
4 AÑOS	X X X	X X	X X	X X X
6 AÑOS	X X	X X	X	X X X

EN ESTE EJEMPLO EL NUMERO DE REPLICAS ES DIFERENTE PARA CADA NIVEL DE COMBINACION MAQUINA-EXPERIENCIA. EL ANALISIS DE ESTOS EXPERIMENTOS SE SIMPLIFICA GRANDEMENTE SI PARA CADA CELDA SE OBTIENE IGUAL NUMERO DE REPLICAS, n

EXPERIMENTO CON DOS FACTORES NO CRUZADOS O JERARQUIZADO

MODELO PARAMETRICO (I)

EL MODELO PARAMETRICO PARA ANALIZAR ESTE TIPO DE EXPERIMENTOS ES

$$X_{tij} = \xi + \gamma_t + \delta_{ti} + Z_{tij} \qquad (1)$$

DONDE $j = 1, 2, \ldots, n_{ti}$, ES EL NUMERO DE OBSERVACIONES (REPLICAS) DEL t-ESIMO GRUPO

PRINCIPAL Y DEL i-ESIMO GRUPO SECUNDARIO (SUBGRUPO)

$i = 1, 2, \ldots, m_t$, ES EL NUMERO DE SUBGRUPOS EN EL t-ESIMO NIVEL PRINCIPAL

$t = 1, 2, \ldots, k$, ES EL NUMERO DE GRUPOS EN EL FACTOR PRINCIPAL

ξ MEDIA GLOBAL

γ_t ES EL EFECTO MEDIO DEL TRATAMIENTO t

δ_{ti} ES EL EFECTO MEDIO DEL i-ESIMO SUBGRUPO EN EL t-ESIMO GRUPO PRINCIPAL

Z_{tij} ES EL RESIDUO O ERROR ALEATORIO CON VARIANCIA σ^2 Y MEDIA CERO

AL IGUAL QUE EN EL MODELO DE CLASIFICACION EN UNA DIRECCION, A ESTOS EFECTOS SE LES IMPONEN LAS SIGUIENTES CONDICIONES:

$$\sum_{t=1}^{k} N_{t.}\gamma_t = 0, \quad \sum_{i=1}^{m_t} n_{ti}\delta_{ti} = 0, \text{ PARA TODA } t \quad \left(N_{t.} = \sum_{i=1}^{m_t} n_{ti}\right)$$

LOS PROMEDIOS ARITMETICOS QUE RESULTAN DE ESTE MODELO SON:

PARA LOS SUBGRUPOS: $\bar{X}_{ti.} = \xi + \gamma_t + \delta_{ti} + \bar{Z}_{ti.}$ (2)

PARA LOS GRUPOS PRINCIPALES: $\bar{X}_{t..} = \xi + \gamma_t + \bar{Z}_{t..}$ (3)

PARA LA MEDIA GLOBAL: $\bar{X}_{...} = \xi + \bar{Z}_{...}$ (4)

AL DEDUCIR ESTAS DOS ULTIMAS ECUACIONES SE HACE USO DE LAS DOS CONDICIONES ANTERIORES IMPUESTAS A γ_t Y δ_{ti}.

A PARTIR DE LAS ECS (2), (3) Y (4) SE OBTIENEN LAS SIGUIENTES DESVIACIONES:

$$\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...} = \gamma_t + \bar{Z}_{t..} - \bar{Z}_{...}; \quad E(\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...}) = \gamma_t \qquad (5)$$

$$\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} = \delta_{ti} + \bar{Z}_{ti.} - \bar{Z}_{t..}; \quad E(\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..}) = \delta_{ti} \qquad (6)$$

$$X_{tij} - \bar{X}_{ti.} = Z_{tij} - \bar{Z}_{ti.}$$

POR LO ANTERIOR γ_t Y δ_{ti} SE PUEDEN ESTIMAR MEDIANTE LAS ESTADISTICAS:

$$\hat{\gamma}_t = \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...} \quad \text{Y} \qquad (8)$$

$$\hat{\delta}_{ti} = \bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} \quad \text{RESPECTIVAMENTE} \qquad (9)$$

LAS ESTADISTICAS PARA ANALIZAR LA INFORMACION DE UN EXPERIMENTO DE ESTE TIPO SE DEDUCEN DE LA SIGUIENTE PARTICION DE LA SUMA DE CUADRADOS:

$$\sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{...})^2 = SSP + SSPW + SSR = \sum_t N_{t.} (\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...})^2 +$$

$$+ \sum_t \sum_i n_{ti} (\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..})^2 +$$

$$+ \sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti.})2 \qquad (10)$$

LOS TERMINOS DEL MIEMBRO DERECHO SE DENOMINAN: SUMA DE CUADRADOS ENTRE GRUPOS PRINCIPALES, SUMA DE CUADRADOS ENTRE SUBGRUPOS DENTRO DE LOS GRUPOS PRINCIPALES, Y SUMA DE CUADRADOS RESIDUAL, RESPECTIVAMENTE.

<u>LAS ESPERANZAS</u> RESPECTIVAS SON:

ENTRE GRUPOS PRINCIPALES: $E(SSP) = (k-1)\sigma^2 + \sum_t N_{t.} \gamma_t^2$

ENTRE SUBGRUPOS DENTRO DE LOS GRUPOS PRINCIPALES:

$E(SSPW) = (\sum_t m_t - k)\sigma^2 + \sum_t \sum_i n_{ti} \delta_{ti}^2$

RESIDUAL: $E(SSR) = (N_{..} - \sum_t m_t)\sigma^2$; $(N_{..} = \sum_t \sum_i n_{ti})$

AL DIVIDIR ENTRE LOS NUMEROS CORRESPONDIENTES DE GRADOS DE LIBERTAD: $k-1$, $\sum_t m_t - k$ Y $N_{..} - \sum_t m_t$, SE OBTIENEN LOS RESPECTIVOS <u>VALORES MEDIOS CUADRATICOS</u>, A SABER

ENTRE GRUPOS PRINCIPALES: $E(MSP) = \sigma^2 + \frac{1}{k-1} \sum_t N_{t.} \gamma_t^2$ (11)

ENTRE SUBGRUPOS DENTRO DE LOS GRUPOS PRINCIPALES:

$$E(MSPW) = \sigma^2 + \frac{1}{\sum_t m_t - k} \sum_t \sum_i n_{ti} \delta_{ti}^2 \qquad (12)$$

RESIDUAL: $E(MSR) = \sigma^2$ (13)

COMPARANDO MSP CON MSR SE PUEDE PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_t = 0$ PARA TODA t. COMPARANDO MSPW CON MSR SE PUEDE PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE $\delta_{ti} = 0$ PARA TODA t e i. AMBAS COMPARACIONES SE HACEN MEDIANTE LA ESTADISTICA F:

$$F_p = MSP/MSR \qquad (14)$$

CON $k-1$ Y $N_{..} - \sum_t m_t$ GRADOS DE LIBERTAD.

$$F_{PW} = MSPW/MSR \tag{15}$$

CON $\sum_t m_t - k$ Y $N_{..} - \sum_t m_t$ GRADOS DE LIBERTAD.

SI SE DESEA PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE $\delta_{ti} = 0$ PARA $i = 1, 2, \ldots, m_t$, Y CADA t POR SEPARADO, SE USA LA VARIANCIA

$$s_t^2 = \frac{1}{m_t - 1} \sum_i n_{ti} (\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..})^2 \tag{16}$$

QUE TIENE COMO ESPERANZA A

$$\sigma^2 + (m_t - 1)^{-1} \sum_i n_{ti} \delta_{ti}^2 \tag{17}$$

POR LO QUE SE PUEDE COMPARAR, PARA CADA t, CON MSR MEDIANTE LA ESTADISTICA

$$F_t = s_t^2/MSR \tag{18}$$

CON $m_t - 1$ y $N_{..} - \sum_t m_t$ GRADOS DE LIBERTAD

TODO ESTO SE PUEDE RESUMIR EN UNA TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA.

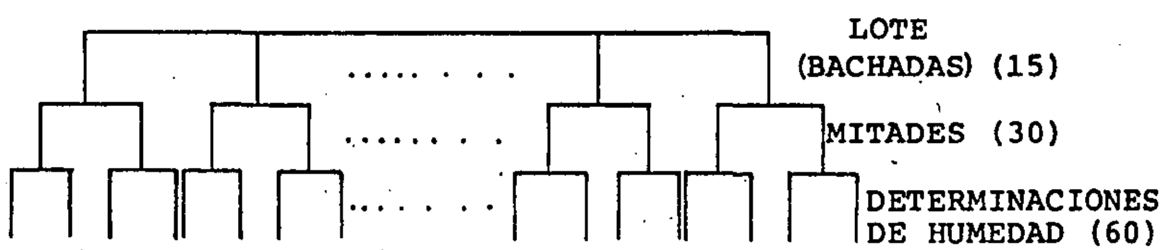
EN CASO DE QUE TODOS LOS SUBGRUPOS TENGAN IGUAL NUMERO DE OBSERVACIONES $n_{ti}=n$, Y DE QUE TODOS LOS GRUPOS PRINCIPALES TENGAN IGUAL NUMERO DE SUBGRUPOS $m_t=m$, DOS DE LOS GRADOS DE LIBERTAD SE PUEDEN ESCRIBIR DE LA SIGUIENTE MANERA

$$N_{..} - \sum_{t=1}^{k} m_t = kmn - km = km\ (n-1) \tag{19}$$

$$\sum_{t=1}^{k} m_t - k = km - k = k(m-1) \tag{20}$$

EJEMPLO

EN EL PROCESO DE FABRICACION DE UN COLORANTE INTERVIENE COMO VARIABLE IMPORTANTE EL CONTENIDO DE HUMEDAD DEL PRODUCTO. SE QUIERE VERIFICAR SI EL METODO DE PRUEBA PARA MEDIR LA HUMEDAD INTRODUCE UNA VARIACION APRECIABLE EN LOS RESULTADOS QUE SE REPORTAN. PARA ESTO SE DISEÑO UN EXPERIMENTO NO CURZADO EN QUE EL FACTOR PRINCIPAL ES EL LOTE Y EL SECUNDARIO ES PARTE DEL LOTE; SE DISPUSO DE k=15 LOTES, CON DOS MITADES CADA UNO (m_t=m=2) Y SE HICIERON n_{ti}=n=2 DETERMINACIONES DE HUMEDAD DE CADA MUESTRA. HACER EL ANALISIS DE VARIANCIA DE ESTE EXPERIMENTO.



BACHADA	MUESTRA	HUMEDAD
1	1	40, 39
	2	30, 30
2	3	26, 28
	4	25, 26
3	5	29, 28
	6	14, 15
4	7	30, 31

BACHADA	MUESTRA	HUMEDAD
	8	24, 24
5	9	19, 20
	10	17, 17
6	11	33, 32
	12	26, 24
7	13	23, 24
	14	32, 33
8	15	34, 34
	16	29, 29
9	17	27, 27
	18	31, 31
10	19	13, 16
	20	27, 24
11	21	25, 23
	22	25, 27
12	23	29, 29
	24	31, 32
13	25	19, 20
	26	29, 30
14	27	23, 24
	28	25, 25
15	29	39, 37
	30	26, 28

t	1		2		3		4		5		6		7		8	
i	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
	40	30	26	25	28	14	30	24	19	17	33	26	23	32	34	29
	39	30	28	26	29	15	31	24	20	17	32	24	24	33	34	29
$\bar{X}_{ti.}$	39.5	30	27	25.5	28.5	14.5	30.5	24	19.5	17.0	32.5	25.0	23.5	32.5	34.0	29.0
$\bar{X}_{t..}$	34.75		26.25		21.5		27.25		18.25		28.75		28		31.5	

t	9		10		11		12		13		14		15	
i	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
	27	31	13	27	25	25	29	31	19	29	23	25	39	26
	27	31	16	24	23	27	29	32	20	30	24	25	37	28
$\bar{X}_{ti.}$	27	31	14.5	25.5	24	26	29	31.5	19.5	29.5	23,5	25	38.0	27
$\bar{X}_{t..}$	29		20		25		30.25		24.5		24.25		32.5	

Donde $$\bar{X}_{ti.} = \frac{\sum_{j=1}^{2} X_{tij}}{n_{ti}} = \frac{\sum_{j=1}^{2} X_{tij}}{2}$$

$$\bar{X}_{t..} = \frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} X_{tij}}{N_{t.}} = \frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} X_{tij}}{4}$$

$$N_{..} = \sum_{t=1}^{15}\sum_{i=1}^{2} n_{ti} = \sum_{t=1}^{15}\sum_{i=1}^{2} 2 = 15x2x2=60$$

$$\sum_{t=1}^{15}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} X_{tij} = 40+39+30+30+26+28+\ldots+25+25+39+37+26+28=1607$$

$$\bar{X}_{...} = \frac{1607}{60} = 26.783$$

$$N_{t.} = \sum_{i=1}^{2} n_{ti} = 4$$

$$SSP = \sum_{t=1}^{15} N_{t.}(\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...})^2 = 4 \sum_{t=1}^{15} (\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...})^2$$

$$= 4\left[(34.75-26.783)^2 + (26.25-26.783)^2 + (21.5-26.783)^2 + \ldots + (32.5-26.783)^2\right]$$

$$= 4(63.47 + 0.28 + 27.91 + \ldots + 32.684) = 1211.0$$

$$SSPW = \sum_t \sum_i n_{ti}(\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..})^2 = 2 \sum_{t=1}^{15} \sum_{i=1}^{2} (\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..})^2$$

$$= 2\left[(39.5-34.75)^2 + (30-34.75)^2 + (27-26.25)^2 + (25.5-26.25)^2 + \ldots + (27-32.5)^2\right]$$

$$= 2\left[22.56 + 22.56 + \ldots\right]$$

$$= 2x424.88 = 869.7$$

$$\sum_{t=1}^{15} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} X_{tij}^2 = 40^2 + 39^2 + 30^2 + 30^2 + \ldots + 39^2 + 37^2 + 26^2 + 28^2$$

$$= 45149$$

$$kmn\bar{X}_{...}^2 = 15x2x2x26.783^2 = 43040.82$$

$$SST = \sum_{t=1}^{15} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} X_{tij}^2 - kmn\bar{X}_{...}^2 = 45149-43040.8 = 2108.2$$

$$SSR = SST-SSP-SSPW = 2108.2 - 1211.0 - 869.7 = 27.5$$

G. de L.: $k - 1 = 15 - 1 = 14$

$$\sum_{t=1}^{15} m_t - k = 15 \times 2 - 15 = 15$$

$$N_{..} - \sum_{t=1}^{15} m_t = 60 - 30 = 30$$

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA DE ESTE EXPERIMENTO ES:

FUENTE DE VARIACION	SUMA DE CUADRADOS	GRADOS DE LIBERTAD	MS	F
ENTRE BACHADAS	1211.0	14	86.6	92.2
ENTRE MITADES DE LOS GRUPOS PRINCIPALES	869.7	15	58.0	64.4
RESIDUO (ENTRE PRUEBAS)	27.5	30	0.9	
TOTAL	2108.2	59		

$$F_{0.01,14,30} = 2.75 < 92.2$$

$$F_{0.01,15,30} = 2.70 < 64.4$$

POR LO QUE SE RECHAZAN LAS HIPOTESIS DE QUE NO HAY EFECTOS DE BACHADAS Y DE MITADES A UN 99% DE NIVEL DE CONFIANZA. ADEMAS, AL COMPARAR LOS VALORES MEDIOS CUADRATICOS SE CONFIRMA QUE NO ES EL METODO DE PRUEBA, SINO LAS BACHADAS Y LAS MITADES LAS QUE INTRODUCEN LA MAYOR VARIABILIDAD DE LOS RESULTADOS, PUESTO QUE EL MS DEL RESIDUO ES MUY PEQUEÑO EN COMPARACION CON LOS OTROS DOS.

MODELO CON DOS FACTORES NO CRUZADOS. MODELO CON FACTORES ALEATORIOS (II)

SI TANTO EL FACTOR PRINCIPAL COMO EL SECUNDARIO SON VARIABLES ALEATORIAS Y EN EL EXPERIMENTO SOLO SE INCLUYEN ALGUNOS NIVELES (O VALORES) DE LAS MISMAS, ENTONCES EL MODELO ES DE FACTORES ALEATORIOS O MODELO II. EN ESTE CASO EL MODELO MATEMATICO PARA REPRESENTAR A CADA OBSERVACION, X_{tij}, ES:

$$X_{tij} = \xi + U_t + V_{ti} + Z_{tij} \tag{21}$$

DONDE U_t ES UNA VARIABLE ALEATORIA QUE REPRESENTA EL EFECTO MEDIO DEL FACTOR PRINCIPAL, V_{ti} ES OTRA VARIABLE ALEATORIA QUE REPRESENTA AL EFECTO MEDIO DEL I-ESIMO SUBGRUPO EN EL T-ESIMO GRUPO PRINCIPAL. ξ Y Z_{tij} TIENEN EL MISMO SIGNIFICADO QUE EN EL SUBCAPITULO ANTERIOR. SE SUPONE QUE U_t, V_{ti} Y Z_{tij} SON INDEPENDIENTES ENTRE SI, CON DISTRIBUCION NORMAL Y QUE $E(U_t) = 0$, $E(V_{ti}) = 0$ Y $E(Z_{tij} = 0)$; PARA LAS VARIANCIAS USAREMOS LOS SIGUIENTES SIMBOLOS:

$$\text{Var } (U_t) = \sigma_u^2; \quad \text{Var } (V_{ti}) = \sigma_v^2$$

CON ESTE MODELO SE TIENE QUE:

$$\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...} = U_t - \bar{U} + \bar{V}_{t.} - \bar{V}_{..} + \bar{Z}_{t..} - \bar{Z}_{...} \tag{22}$$

$$\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} = V_{ti} - \bar{V}_{t.} + \bar{Z}_{ti.} - \bar{Z}_{t..} \tag{23}$$

$$X_{tij} - \bar{X}_{ti.} = Z_{tij} - \bar{Z}_{ti.} \tag{24}$$

DONDE

$$\bar{U} = \sum_{t=1}^{k} N_{t.}U_t/N_{..},\ \bar{V}_{t.} = \sum_{i=1}^{m_t} n_{ti}V_{ti}/N_{t.},\ \bar{V}_{..} = \sum_{t=1}^{k} N_t\bar{V}_{t.} \qquad (25)$$

EN ESTE CASO LA DESCOMPOSICION DE CUADRADOS CONDUCE A LOS SIGUIENTES VALORES MEDIOS CUADRATICOS:

$$E\{\frac{\sum_t\sum_i\sum_j(X_{tij} - \bar{X}_{ti.})^2}{N_{..} - \sum_t m_t}\} = E(MSR) = \sigma^2 \qquad (26)$$

$$E\{\frac{\sum_t N_{t.}(\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...})^2}{k-1}\} = E(MSP) = \sigma^2 + \frac{\sum_t(N_{t.}^{-1} - N_{..}^{-1})\sum_i n_{ti}^2}{k-1}\sigma_v^2 + $$

$$+ \frac{N_{..} - \sum_t N_{t.}^2/N_{..}}{k-1}\sigma_u^2 \qquad (27)$$

$$E\{\frac{\sum_t\sum_i n_{ti}(\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..})^2}{\sum_t m_t - k}\} = E(MSPW) = \sigma^2 + \frac{N_{..} - \sum_t N_{t.}^{-1}\sum_i n_{ti}^2}{\sum_t m_t - k}\sigma_v^2 \qquad (28)$$

EN ESTAS ECUACIONES SE OBSERVA QUE SI $\sigma_v^2 = 0$, ENTONCES $E(MSR) = E(MSPW)$, POR LO QUE PARA PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE $\sigma_v^2 = 0$ BASTA FORMULAR LA ESTADISTICA

$$F_{PW} = MSPW/MSR \qquad (29)$$

QUE TIENE DISTRIBUCION F CON $(\sum m_t - k)$ Y $(N_{..} - \sum_t m_t)$ GRADOS DE LIBERTAD.

POR SU PARTE LA HIPOTESIS DE QUE $\sigma_u^2 = 0$ NO SE PUEDE PROBAR COM

PARANDO MSP CON MSR, YA QUE EN E(MSP) INTERVIENEN TANTO σ_u^2 COMO σ_v^2. EN EL CASO PARTICULAR DE QUE $n_{ti}=n$ PARA TODO t E i, ENTONCES $N_{t.}=m_t n$ Y:

$$E(MSP) = \sigma^2 + n^2\sigma_v^2 + \frac{(\sum_t m_t)^2 - \sum_t m_t^2}{(k-1)\ \sum_t m_t} n\sigma_u^2 \qquad (30)$$

$$E(MSPW) = \sigma^2 + n\sigma_v^2 \qquad (31)$$

POR LO QUE LA HIPOTESIS DE QUE $\sigma_u^2=0$ SE PUEDE PROBAR COMPARANDO MSP CON MSPW MEDIANTE LA ESTADISTICA

$$F_P = MSP/MSPW \qquad (32)$$

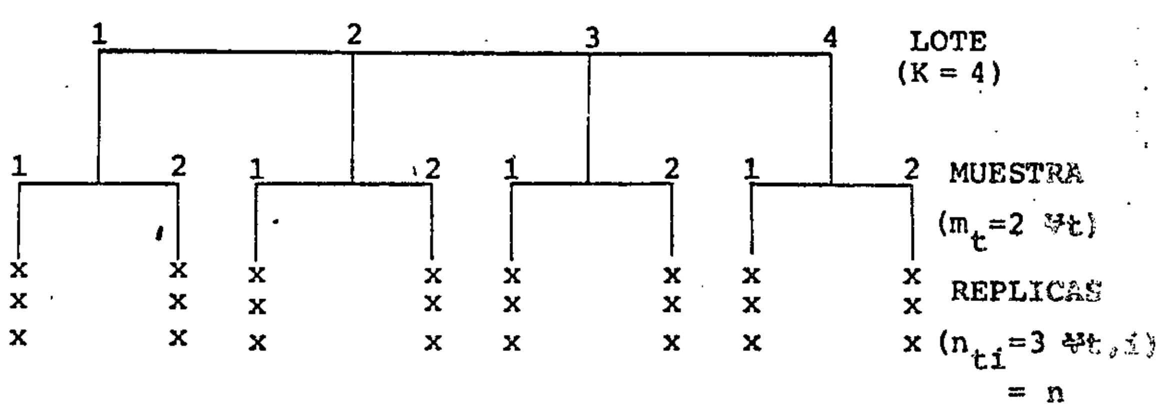
QUE TIENE DISTRIBUCION F CON (k-1) y $(\sum_t m_t - k)$ GRADOS DE LIBERTAD.

EJEMPLO

SE MUESTREARON CUATRO LOTES DE HULE CRUDO. DE CADA LOTE SE TOMARON DOS MUESTRAS. TRES PRUEBAS INDEPENDIENTES DE ESPECIMENES SE PREPARARON Y ANALIZARON PARA CADA UNO. ABAJO SE MUESTRAN LOS DATOS QUE DAN EL MODULO DE ELASTICIDAD OBTENIDO EN PORCENTAJE. CONSIDERE QUE SE APLICA EL MODELO DE VARIANCIA DE UNA COMPONENTE, CONSTRUYA LA TABLA ANOVA (ANALISIS DE VARIANCIA). USANDO LA TABLA OBTENGA ESTIMACIONES DE LA VARIANCIA DE CADA COMPONENTE.

LOTE O BACHADA	MODULO DE ELASTICIDAD (%)			
	1	2	3	4
MUESTRA 1	560	600	600	680
	580	640	610	700
	600	620	640	730
MUESTRA 2	660	580	580	720
	610	630	660	770
	600	670	620	740

SOLUCION



SE TRATA DE UN EXPERIMENTO CON DOS FACTORES NO CRUZADOS.

LAS ECUACIONES A EMPLEAR SON

$$SST = \sum_{tij}\sum\sum (X_{tij} - \overline{X}_{...})^2 = \sum_{tij}\sum\sum X_{tij}^2 - kmn\,\overline{X}^2_{...}$$

$$SSP = \sum_{t} N_{t.}(\overline{X}_{t..} - \overline{X}_{...})^2$$

$$SSPW = \sum_{ti}\sum n_{ti}(\overline{X}_{ti.} - \overline{X}_{t..})^2$$

$$SSR = \sum_{tij}\sum\sum (X_{tij} - \overline{X}_{ti})^2 = SST - SSP - SSPW$$

APLICANDO LAS ECUACIONES TENEMOS

k = 4

m = 2

n = 3

LOTE O BACHADA	MUESTRA	MODULO DE ELASTICIDAD x_{tij}	x^2_{tij}	$\overline{x}_{ti.}$	$\overline{x}_{t..}$	$(\overline{x}_{ti.}-\overline{x}_{t..})^2$	$(x_{t..}-\overline{x}_{...})^2$
1	1	560	313600	580.0	601.6667	469.444	1599.99
		580	336400				
		600	360000				
	2	660	435600	623.333		469.444	
		610	372100				
		600	360000				
2	1	600	360000	620.0	623.333	11.1111	336.11
		640	409600				
		620	384400				
	2	580	336400	626.667		11.1111	
		630	396900				
		670	448900				
3	1	600	360000	616.667	618.333	2.7778	560.11
		610	372100				
		640	409600				
	2	580	336400	620.0		2.7778	
		660	435600				
		620	384400				
4	1	680	462400	703.333	723.333	400.0001	6615.11
		700	490000				
		730	532900				
	2	720	518400	743.333		400.0001	
		770	592900				
		740	547600				
TOTALES		15,400	9956200			1766.667	9111.33

$\overline{X}_{...} = 15400/24 = 641.6667$

$kmn = 4 \times 2 \times 3 = 24$

$$SST = \sum_{tij}\sum\sum X^2_{tij} - kmn\,\overline{X}^2_{...}$$

$$\sum_{tij}\sum\sum X^2_{tij} = 560^2+580^2+600^2+660^2+610^2+600^2+600^2+640^2+620^2+580^2+630^2+670^2+$$

$$600^2+610^2+640^2+580^2+660^2+620^2+680^2+700^2+730^2+720^2+770^2+740^2 =$$

$$2,177,700+2,336,200+2,298,100+3,144,200 = 9,956,200$$

$SST = 9,956,200 - 24(641.667)^2 = 74,533.33$

$SSP = 6(9111.33) = 54,667.98$

$SSPW = 3(1766.667) = 5,300.00$

$SSR = SST - SSP - SSPW = 74,533.33 - 54,667.98 - 5,300.00 = 14,565.35$

$$MSP = \frac{SSP}{k-1} = \frac{54,667.98}{4-1} = 18,222.66$$

$$MSPW = \frac{SSPW}{k(m-1)} = \frac{5300.00}{4(2-1)} = 1,325.00$$

$$MSR = \frac{SSR}{km(n-1)} = \frac{14,565.35}{4x2(3-1)} = 910.33$$

DE TABLAS PARA UN 99% DE

NIVEL DE CONFIANZA

$$F_{PW} = \frac{MSPW}{MSR} = \frac{1,325.00}{910.33} = 1.46 \quad < \quad F_{0.01,4,16} = 4.77$$

$$F_P = \frac{MSP}{MSPW}\ \frac{18,222.66}{1,325.00} = 13.75 \quad < \quad F_{0.01,3,4} = 16.69$$

POR LO TANTO, PARA LOS SUBGRUPOS SE ACEPTA LA HIPOTESIS, O SEA NO HAY DIFERENCIA SIGNIFICATIVA ENTRE LAS MUESTRAS A UN NIVEL DE CONFIANZA DE 99%. PARA LOS LOTES SE ACEPTA LA HIPOTESIS, O SEA NO HAY DIFERENCIA SIGNIFICATIVA ENTRE LOTES A UN NIVEL DE CONFIANZA DE 99%.

ANOVA

FUENTE DE VARIACION	SS	GRADOS DE LIBERTAD	MS	F (CALC)	F (DE TABLAS) (α = 0.01)
ENTRE LOTES O BACHADAS	SSP=54,667.98	k - 1 3	MSP=18,222.66	F_p=13.75<	16.69
ENTRE PARTES DE LAS BACHADAS	SSPW=5,300.00	k(m-1) 4	MSPW=1,325.00	F_{PW}=1.46<	4.77
RESIDUAL (ENTRE PRUEBAS)	SSR=14,565.35	km(n-1) 16	MSR=910.33		
TOTAL	74,533.33	23			

$F_{3,4,0.99} = 16.69$, $F_{4,16,0.99} = 4.77$

ESTIMACIONES DE LAS VARIANCIAS DE CADA COMPONENTE

PUESTO QUE $E(MSR) = \sigma^2$, SE TIENE

$\hat{\sigma}^2 = MSR = 910.33$

DE LA EC 31, $\sigma_V^2 = (E(MSPW) - \sigma^2)/n$, POR LO QUE

$\hat{\sigma}_V^2 = (MSPW - MSR)/n = (1325.00 - 910.33)/3 = 138.22$

RESTANDO LA EC. 31 A LA EC. 30:

$$E(MSP) - E(MSPW) = \frac{(\Sigma m_t)^2 - \Sigma m_t^2}{(k-1)\Sigma m_t} n\sigma_u^2 = sn\sigma_u^2$$

POR LO QUE

$$\sigma_u^2 = \{E(MSP) - E(MSPW)\}/sn$$

Y

$$\hat{\sigma}_u^2 = (MSP - MSPW)/sn$$

EN NUESTRO PROBLEMA

$$S = \frac{8^2 - 4 \times 4}{3 \times 8} = 2$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = (18{,}222.66 - 1325.00)/6 = 2816.28$$

9. EXPERIMENTO CON DOS FACTORES CRUZADOS. MODELO PARAMETRICO

EL MODELO PARA REPRESENTAR LA j-ESIMA OBSERVACION, X_{tij}, CORRESPONDIENTE AL NIVEL t DEL PRIMER FACTOR Y AL NIVEL i DEL SEGUNDO FACTOR ES

$$X_{tij} = \xi + \rho_t + \kappa_i + (\rho\kappa)_{ti} + Z_{tij} \tag{1}$$

DONDE ρ_t Y κ_i SON EL EFECTO DEL t-ESIMO NIVEL (RENGLON) DEL PRIMER FACTOR Y DEL i-ESIMO NIVEL (COLUMNA) DEL SEGUNDO FACTOR, RESPECTIVAMENTE, $(\rho\kappa)_{ti}$ ES EL EFECTO DE INTERACCION DE LOS DOS FACTORES EN SUS NIVELES t E i, Y Z_{tij} ES EL RESIDUO, ERROR O EFECTO NO EXPLICABLE POR LOS FACTORES; LAS Z_{tij} SON VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES CON DISTRIBUCION NORMAL DE MEDIA CERO E IDENTICA VARIANCIA, σ^2.

SI $t = 1, 2, \ldots, r$, E $i = 1, 2, \ldots, c$, SE DICE QUE SE TIENE UN EXPERIMENTO CRUZADO rxc; SE DICE QUE ESTE ES ORTOGONAL SI TIENE IGUAL NUMERO DE DATOS EN CADA CELDA (t, i), Y SI TODOS ESTOS SON RESULTADO DE OBSERVACIONES INDEPENDIENTES DE UNA POBLACION CON DISTRIBUCION NORMAL.

PUESTO QUE EL TOTAL DE PARAMETROS INVOLUCRADOS EN LA EC (1) PARA PRESENTAR A rc VALORES ESPERADOS ES $1 + r + c + rc$, ES NECESARIO IMPONER OTRAS $r + c + 1$ CONDICIONES; ELLAS SON:

$$\sum_{t=1}^{r} \rho_t = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{c} \kappa_i = 0 \tag{3}$$

$$\sum_{t=1}^{r} (\rho\kappa)_{ti} = 0 \quad \text{PARA TODA } i \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{c} (\rho\kappa)_{ti} = 0 \quad \text{PARA TODA } t \tag{5}$$

EN DONDE HAY r + c + 2 CONDICIONES, PERO UNA DE LAS DE LA EC (5) ES REDUNDANTE ($\sum_{i=1}^{c} (\rho\kappa)_{ri}$), YA QUE QUEDA OBLIGADA EN TERMINOS DE LAS r + c - 1 CONDICIONES RESTANTES IMPUESTAS POR LAS ECS (4) y (5).

DE ACUERDO CON ESTE MODELO SE OBTIENEN LOS SIGUIENTES PROMEDIOS:

PROMEDIO POR RENGLONES: $\bar{X}_{t..} = \xi + \rho_t + \bar{Z}_{t..}$ (6)

PROMEDIO POR COLUMNAS: $\bar{X}_{.i.} = \xi + \kappa_i + \bar{Z}_{.i.}$ (7)

PROMEDIO POR CELDAS: $\bar{X}_{ti.} + \xi + \rho_t + \kappa_i + (\rho\kappa)_{ti} + \bar{Z}_{ti}$ (8)

PROMEDIO GLOBAL: $\bar{X}_{...} = \xi + \bar{Z}_{...}$ (9)

LOS EFECTOS DE CADA PARAMETRO SE PUEDEN SEPARAR MEDIANTE LAS ESTADISTICAS, QUE SE OBTIENEN CON LAS ECUACIONES (6) A (9):

$$\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...} = \rho_t + \bar{Z}_{t..} - \bar{Z}_{...}; \; E(\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...}) = \rho_t \tag{10}$$

$$\bar{X}_{.i.} - \bar{X}_{...} = \kappa_i + \bar{Z}_{.i.} - \bar{Z}_{...}; \; E(\bar{X}_{.i.} - \bar{X}_{...}) = \kappa_i \tag{11}$$

$$\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{.i.} + \bar{X}_{...} = (\rho\kappa)_{ti} + \bar{Z}_{ti.} - \bar{Z}_{t..} - \bar{Z}_{.i.} + \bar{Z}_{...}$$

$$E(\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{.i.} + \bar{X}_{...}) = (\rho\kappa)_{ti} \tag{12}$$

$$X_{tij} - \bar{X}_{ti.} = Z_{tij} - \bar{Z}_{ti.}; \; E(X_{tij} - \bar{X}_{ti.}) = 0 \tag{13}$$

PARA ANALIZAR LAS FUENTES DE VARIABILIDAD DE LOS DATOS, LA SUMA DE CUADRADOS SE PUEDE DIVIDIR, EN UNA PRIMERA ETAPA, EN LA SUMA DE CUADRADOS ENTRE CELDAS Y DENTRO DE LAS CELDAS:

$$\sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{...})^2 = \underbrace{\sum_t \sum_i n_{ti}(\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{...})^2}_{\text{ENTRE CELDAS}} + \underbrace{\sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti.})^2}_{\text{DENTRO DE LAS CELDAS}} \qquad (14)$$

UTILIZANDO LA EC (13) SE DEMUESTRA QUE

$$E\{\text{SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE LAS CELDAS}\} = E\{\sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti.})^2\} =$$

$$= (N_{..} - rc)\sigma^2 \qquad (15)$$

POR LO QUE EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD DE LA SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE LAS CELDAS ES $(N_{..} - rc)$ Y, POR LO TANTO, LA ESTADISTICA VALOR MEDIO CUADRATICO DENTRO DE LAS CELDAS O RESIDUAL:

$$MSR = \sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti.})^2/(N_{..} - rc) \qquad (16)$$

ES UN ESTIMADOR INSESGADO DE σ^2.

LA SUMA DE CUADRADOS ENTRE CELDAS SE PUEDE DIVIDIR EN TRES PARTES SOLO SI LAS n_{ti} SON IGUALES PARA TODA CELDA $(n_{ti}=n)$, O SI SE SATISFACEN CIERTAS CONDICIONES DE PROPORCIONALIDAD*; AQUI SOLO TRATAREMOS EL PRIMERO DE ESTOS CASOS, EN EL QUE SE OBTIENE:

$$n \sum_t \sum_i (\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{...})^2 = \underbrace{nc \sum_t (\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...})^2}_{\text{ENTRE RENGLONES = SSBR}} +$$

*BANCROFT, T. A., "TOPICS IN INTERMEDIATE STATISTICAL METHODS", IOWA UNIVERSITY PRESS, 1968.

$$+ \underbrace{nr\sum_{i}(\bar{X}_{.i.} - \bar{X}_{...})^2}_{\text{ENTRE COLUMNAS} = SSBC} + \underbrace{n\sum_{t}\sum_{i}(\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{.i.} + \bar{X}_{...})^2}_{\text{INTERACCION} = SSI} \quad (17)$$

LAS ESPERANZAS DE LOS TERMINOS DEL MIEMBRO DERECHO DE LA EC (17) SON:

ENTRE RENGLONES: $E(SSBR) = (r-1)\sigma^2 + nc\sum_{t}\rho_t^2$ (18)

ENTRE COLUMNAS: $E(SSBC) = (c-1)\sigma^2 + nr\sum_{i}\kappa_i^2$ (19)

INTERACCION: $E(SSI) = (r-1)(c-1)\sigma^2 + n\sum_{t}\sum_{i}(\rho\kappa)_{ti}^2$ (20)

POR LO QUE LOS GRADOS DE LIBERTAD RESPECTIVOS SON $(r-1)$, $(c-1)$ Y $(r-1)(c-1)$; EN ESTAS CONDICIONES LOS <u>VALORES MEDIOS CUADRATICOS</u> SON:

ENTRE RENGLONES: $E(MSBR) = \sigma^2 + (r-1)^{-1} nc\sum_{t}\rho_t^2$ (21)

ENTRE COLUMNAS: $E(MSBC) = \sigma^2 + (c-1)^{-1} nr\sum_{i}\kappa_i^2$ (22)

INTERACCION: $E(MSI) = \sigma^2 + (r-1)^{-1}(c-1)^{-1} n\sum_{t}\sum_{i}(\rho\kappa)_{ti}^2$ (23)

POR LO ANTERIOR, LA PRUEBA DE HIPOTESIS DE QUE $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_r = 0$ SE PUEDE HACER <u>PROBANDO LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE VARIANCIAS ENTRE RENGLONES Y RESIDUAL</u>, PARA LO CUAL SE UTILIZA LA ESTADISTICA

$$F = MSBR/MSR \quad (24)$$

QUE TIENE DISTRIBUCION F CON $(r-1)$ Y $(N_{..}-rc) = rc(n-1)$ GRADOS DE LIBERTAD.

ASIMISMO, LA PRUEBA DE HIPOTESIS DE QUE $\kappa_1 = \kappa_2 = \ldots \kappa_c = 0$ SE PUEDE HACER PROBANDO LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE VARIANCIAS ENTRE COLUMNAS Y RESIDUAL, CON LA ESTADISTICA

$$F = MSBC/MSR \tag{25}$$

QUE TIENE DISTRIBUCION F CON $(c-1)$ Y $rc(n-1)$ GRADOS DE LIBERTAD.

LA PRUEBA DE HIPOTESIS DE INTERACCION NULA, O SEA, DE QUE $(\rho\kappa)_{ti} = 0$ PARA TODA t E i SE PRUEBA CON

$$F = MSI/MSR \tag{26}$$

QUE TIENE DISTRIBUCION F CON $(r-1)(c-1)$ Y $rc(n-1)$ GRADOS DE LIBERTAD.

EN EL CASO PARTICULAR DE UNA OBSERVACION POR CELDA $(n=1)$, NO SE REQUIERE EL TERCER INDICE (j) Y EL MODELO ES

$$X_{ti} = \xi + \rho_t + \kappa_i + (\rho\kappa)_{ti} + Z_{ti} \tag{27}$$

EN ESTAS CONDICIONES NO SE OBTIENE NINGUNA SUMA DE CUADRADOS RESIDUAL Y NO ES POSIBLE ESTIMAR A σ^2 DE MANERA SEPARADA DE ρ_t, κ_i Y $(\rho\kappa)_{ti}$ Y, EN CONSECUENCIA, NO SE PUEDEN HACER LAS COMPARACIONES DE VARIANCIAS DADAS POR LAS ECS (24), (25) Y (26). PARA SALVAR ESTE OBSTACULO EL MODELO DE LA EC (27) SE REDUCE A

$$X_{ti} = \xi + \rho_t + \kappa_i + Z_{ti} \tag{28}$$

EL CUAL IMPLICA QUE $(\rho\kappa)_{ti} = 0$ PARA TODA t E i, ES DECIR, QUE NO HAY INTERACCION ENTRE LOS PARAMETROS; EN ESTE CASO LA ESTADISTICA

$$\sum_t \sum_i (X_{ti} - \bar{X}_{t.} - \bar{X}_{.i} + \bar{X}_{..})^2/(r-1)(c-1) \tag{29}$$

ES EL VALOR MEDIO CUADRATICO RESIDUAL, MSR.

EL EXPERIMENTO DE BLOQUES ALEATORIZADOS VISTO ANTERIORMENTE ES, COMO PUEDE VERSE, EL CASO PARTICULAR DE UN EXPERIMENTO DE DOS FACTORES CRUZADOS CON n=1.

FORMULAS SIMPLIFICADAS PARA LAS SUMAS DE CUADRADOS (SS)

TOTAL: $$SST = \sum_t \sum_i \sum_j X^2_{tij} - nrc\bar{X}^2_{...} \tag{30}$$

ENTRE RENGLONES: $$SSBR = nc\sum_t \bar{X}^2_{t..} - nrc\bar{X}^2_{...} \tag{31}$$

ENTRE COLUMNAS: $$SSBC = nr\sum_i \bar{X}^2_{.i.} - nrc\bar{X}^2_{...} \tag{32}$$

DENTRO CELDAS (RESIDUAL): $$SSR = \sum_t \sum_i \sum_j X^2_{tij} - n\sum_t \sum_i \bar{X}^2_{ti.} \tag{33}$$

INTERACCION: $$SSI = SST - SSBR - SSBC - SSR \tag{34}$$

SI $n = 1$, $SSR = SST - SSBR - SSBC$.

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA EN DOS DIRECCIONES CON FACTORES CRUZADOS QUEDA EN LA FORMA:

FUENTE DE VARIACION	G. DE L.	SS	MS	F
ENTRE RENGLONES	r-1	SSBR	MSBR	MSBR/MSR
ENTRE COLUMNAS	c-1	SSBC	MSBC	MSBC/MSR
INTERACCION	(r-1)(c-1)	SSI	MSI	MSI/MSR
RESIDUAL (DENTRO DE LAS CELDAS)	rc(n-1)	SSR	MSR	
TOTAL	rcn-1	SST		

EJEMPLO

EN UN EXPERIMENTO PARA DETERMINAR EL COEFICIENTE DE EXPANSION DE ALGUNAS ALEACIONES DE TITANIO, FABRICADAS CON DOS PROCEDIMIENTOS DIFERENTES, SE ELABORARON 16 ESPECIMENES A LOS CUALES SE LES MIDIO EL COEFICIENTE DE EXPANSION TERMICA. SE DESEA SABER SI LAS ALEACIONES Y PROCEDIMIENTOS INFLUYEN EN DICHO COEFICIENTE.

LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES SE PRESENTAN EN LA TABLA SIGUIENTE, EN LA CUAL CADA CELDA TIENE LAS SIGUIENTES ANOTACIONES:

X_{ti1}

X_{ti2} $\bar{x}_{ti.}$ $\bar{x}^2_{ti.}$

COEFICIENTES DE EXPANSION						
PROCEDIMIENTOS	ALEACIONES					
	A	B	C	D	$\bar{X}_{t..}$	$\bar{X}^2_{t..}$
1	4.78 4.28 4.53 20.5209	3.84 5.28 4.56 20.7936	5.82 5.77 5.795 33.5820	4.57 5.44 5.005 25.0500	4.9725	24.7258
2	4.46 4.79 4.625 21.3906	4.73 3.36 4.045 16.3620	4.76 3.31 4.035 16.2812	4.30 3.86 4.08 16.6464	4.1963	17.6085
TOTALES	18.31	17.21	19.66	18.17		42.3343
$\bar{X}_{.i.}$	4.5775	4.3025	4.915	4.5425		
$\bar{X}^2_{.i.}$	20.9535	18.5115	24.1572	20.6343		

EL MODELO AQUI ES

$$X_{tij} = \xi + \rho_t + \kappa_i + (\rho\kappa)_{ti} + Z_{tij}$$

$$t = 1,2; \quad i = 1,2,3,4; \quad j = 1,2$$

POR LO TANTO: $r = 2$, $c = 4$, $n = 2$, $\bar{X}_{...} = 73.35/16 = 4.5844$

$$\bar{X}^2_{...} = 21.0164, \; nrc\, \bar{X}^2_{...} = 336.2639$$

$$SSBR = 2 \times 4\ (24.7258 + 17.6085) - 336.2639$$

$$= 338.6741 - 336.2639 = 2.4102$$

$$SSBC = 2 \times 2\ (20.9535 + 18.5115 + 24.1572 + 20.6343) - 336.2639$$

$$SSBC = 337.0260 - 336.2639 = 0.7621$$

TABLA DE CUADRADOS

X^2_{tij}

	A	B	C	D
1	22.8484 18.3184	14.7456 27.8784	33.8724 33.2929	20.8849 29.5936
2	19.8916 22.9441	22.3729 11.2896	22.6576 10.9561	18.4900 14.8996
TOTAL	84.0025	76.2865	100.7790	83.8681

$$\sum_{t}\sum_{i}\sum_{j} X^2_{tij} = 344.9361$$

$$SSR = 344.9361 - 2(20.5209 + 20.7936 + 33.5820 + 25.0500 + 21.3906 + 16.3620 + 16.2812 + 16.6464) = 344.9361 - 341.2534 = 3.6827$$

$$SST = 344.9361 - 336.2639 = 8.6722$$

$$SSI = 8.6722 - 0.7621 - 2.4102 - 3.6827 = 1.8172$$

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA RESULTA SER:

FUENTE DE VARIACION	SS	G. DE L.	MS	F
ENTRE RENGLONES (PROCEDIMIENTOS)	2.4102	1	2.4102	5.236
ENTRE COLUMNAS (ALEACIONES)	0.7621	3	0.2541	0.552
INTERACCION	1.8172	3	0.6057	1.316
RESIDUAL	3.6827	8	0.4603	
TOTAL	8.6722			

$F_{0.95,1,8} = 5.32 > 5.236$ SE ACEPTA $H_0: \rho_t = 0 \ \forall t$

$F_{0.95,3,8} = 4.07 > 0.552$ SE ACEPTA $H_0: \kappa_i = 0 \ \forall i$

$F_{0.95,3,8} = 4.07 > 1.316$ SE ACEPTA $H_0: (\rho\kappa)_{ti} = 0 \ \forall t,i$

EJEMPLO

PARA DETERMINAR EL EFECTO DE CUATRO DIFERENTES PESTICIDAS EN LA PRODUCCION DE TRES TIPOS DE FRUTA CITRICA, SE DISEÑO UN EXPERIMENTO DE DOS FACTORES CRUZADOS EN EL QUE SE ASIGNARON AL AZAR DOS ARBOLES FRUTALES DE CADA TIPO PARA SER FUMIGADOS POR CADA PESTICIDA. LAS PRODUCCIONES DE FRUTA EN KG/ARBOL SE MUESTRAN EN LA TABLA SIGUIENTE:

VARIEDAD	PESTICIDA			
DE FRUTA	1	2	3	4
1	49 39	50 55	43 38	53 48
2	55 41	67 58	53 42	85 73
3	66 68	85 92	69 62	85 99

REALIZAR EL ANALISIS DE VARIANCIA Y HACER ESTIMACIONES PUNTUALES DE LOS EFECTOS, DE LAS INTERACCIONES Y DE σ^2.

LAS HIPOTESIS A PROBAR SON:

LOS EFECTOS DE LAS FRUTAS SON NULOS: H_o: $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$

H_1: NO TODOS LOS EFECTOS DE LAS FRUTAS SON IGUALES A CERO

LA CUAL PUEDE HACERCE PROBANDO LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE VARIANCIAS ENTRE VARIEDADES DE FRUTAS (RENGLONES) Y RESIDUAL, MEDIANTE LA ESTADISTICA:

$$F_R = MSBR/MSR \quad \text{VERSUS} \quad F_{0.01,2,12} = F_{CR}$$

b) LA PRUEBA DE LA HIPOTESIS DE QUE LOS EFECTOS ENTRE LOS PESTICIDAS SON NULOS: $H_o: \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa_4 = 0$

CONTRA LA HIPOTESIS DE QUE LOS EFECTOS NO SON TODOS NULOS,

LA CUAL PUEDE HACERSE PROBANDO LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE VARIANCIAS ENTRE PESTICIDAS Y RESIDUAL:

$$F_C = MSBC/MSR \quad \text{VERSUS} \quad F_{0.01,3,12}$$

c) FINALMENTE LA PRUEBA DE HIPOTESIS DE INTERACCION NULA H_o: $(\rho K)_{ti} = 0 \forall t, \forall i$, CONTRA LA HIPOTESIS H_1 DE QUE NO TODAS LAS INTERACCIONES SON NULAS, PUEDE HACERSE PROBANDO LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE VARIANCIA ENTRE LAS INTERACCIONES Y LA RESIDUAL, CON LA ESTADISTICA:

$$F_I = MSI/MSR \quad \text{VERSUS} \quad F_{0.01,6,12}$$

DESARROLLEMOS LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA EN 2 DIRECCIONES CON FACTORES CRUZADOS.

VARIEDAD DE FRUTA	PESTICIDA								TOTALES	$\bar{X}_{t..}$	$\bar{X}^2_{t..}$
	1		2		3		4				
		44		52.5		40.5		50.5			
1	49		50		43		53		375	46.88	2197.27
	39	1936	55	2756.25	38	1640.25	48	2550.25			
		48		62.5		47.5		79			
2	55		67		53		85		474	59.25	3510.56
	41	2304	58	3906.25	42	2256.25	73	6241			
		67		88.5		65.5		92			
3	66		85		69		85		626	78.25	6123.06
	68	4489	92	7832.25	62	4290.25	99	8464			
TOTALES	318		407		307		443		$N_{..} = 1475$		11830.89
$\bar{X}_{.i.}$	53		67.83		51.17		73.83			$\bar{X}_{...} = 61.46$	
$\bar{X}^2_{.i.}$	2809		4601.36		2618.03		5451.36		15479.75		$\bar{X}^2_{...} = 3777.23$

	$\bar{X}_{ti.}$
X_{ti1}	
X_{ti2}	$\bar{X}^2_{ti.}$

$$\sum_t \sum_i \bar{X}^2_{ti} = 48{,}667.75$$

TOTAL: $SST = \sum_t \sum_i \sum_j X_{tij}^2 - nrc\bar{X}_{...}^2 = 49^2+39^2+55^2+41^2+...+73^2+85^2+55^2-2x3x4x$

$= 97839 - 90,655.92$

$= 7183.04$

ENTRE RENGLONES:

$SSBR = nc\sum_t \bar{X}_{t..}^2 - nrc\bar{X}_{...}^2 = 2 \times 4 \times 11830.89 - 90,655.92$

$= 94647.12 - 90,655.92$

$= 3991.20$

ENTRE COLUMNAS:

$SSBC = nr\sum_i \bar{X}_{.i.}^2 - nrc\bar{X}_{...}^2 = 2 \times 3 \times 15479.75 - 90,655.92$

$= 92878.50 - 90655.92$

$= 2222.58$

ENTRE CELDAS:

$SSR = \sum_t \sum_i \sum_j X_{tij}^2 - n\sum_t \sum_i \bar{X}_{ti.}^2 = 97839 - 2 \times 48667.75$

$= 507.5$

INTERACCION:

$SSI = SST - SSBR - SSBC - SSR$

$= 7183.04 - 3991.20 - 2222.58 - 507.5$

$= 461.76$

PUDIENDO CON LO ANTERIOR COMPLETAR LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANZA:

FU. : DE VARIACION	G.DE L	SS	MS	F_E	F_C
ENTRE VARIEDADES DE FRUTA	r-1=3-1=2	SSBR = 3991.20	SSBR/(r-1)= 1995.60	MSBR/MSR= = 47.19 >	$F_{CR}=F_{0.01,2,12}$ = 6.93
ENTRE PESTICIDA	c-1=4-1=3	SSBC = 2222.58	SSBC/(c-1)= 740.86	MSBC/MSR= = 17.52 >	$F_{CC}=F_{0.01,3,12}$ = 5.95
INTERACCION	(r-1)(c-1) = 6	SSI = 461.76	SSI/(r-1)(c-1)= 76.96	MSI/MSR = = 1.82 <	$F_{CI}=F_{0.01,6,12}$ = 4.82
RESIDUAL (DENTRO DE CELDAS)	rc(n-1)=12	SSR = 507.5	SSR/rc(n-1) 42.29		
TOTAL	rcn-1=23	SST = 7183.04			

COMO PUEDE OBSERVARSE EN LAS F_E (F ESTIMADA) Y LAS F_C (F CRITICAS) SE TENDRAN LAS SIGUIENTES CONCLUSIONES DEL ANALISIS DE VARIANCIA (VER LAS 2 ULTIMAS COLUMNAS)

1. DADO QUE $F_{ER} > F_{CR} \Rightarrow$ SE RECHAZA LA HIPOTESIS H_0 $\therefore$ SI HAY EFECTO ENTRE VARIEDADES DE FRUTAS
2. DADO QUE $F_{EC} > F_{CC} \Rightarrow$ SE RECHAZA LA HIPOTESIS H_0 $\therefore$ SI HAY EFECTO ENTRE LOS DIFERENTES TIPOS DE PESTICIDAS.
3. DADO QUE $F_{EI} < F_{CI} \Rightarrow$ SE APLICA LA HIPOTESIS H_0 $\therefore$ NO HAY EFECTO DE INTERACCION

CALCULO DE LOS ESTIMADORES DE LOS EFECTOS:

EFECTO DE LA VARIEDAD DE FRUTAS

DADO QUE $E\{\bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...}\} = \rho_t \Rightarrow \hat{\rho}_t = \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...}$

$\hat{\rho}_1 = 46.88 - 61.46 = -14.58$

$\hat{\rho}_2 = 59.25 - 61.46 = -2.21$

$\hat{\rho}_3 = 78.25 - 61.46 = 16.79$

EFECTOS DE LA VARIEDAD DE PESTICIDAS

DADO QUE $E\{\bar{X}_{.i.} - \bar{X}_{...}\} = k_i \Rightarrow \hat{k}_i = \bar{X}_{.i.} - \bar{X}_{...}$

$\hat{k}_1 = 53 - 61.46 = -8.46$

$\hat{k}_2 = 67.83 - 61.46 = 6.37$

$\hat{k}_3 = 51.17 - 61.46 = -10.29$

$\hat{k}_4 = 73.83 - 61.46 = 12.37$

ESTIMACIONES PUNTUALES DE LAS INTERACCIONES:

DADO QUE $E\{\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{.i.} + \bar{X}_{...}\} = (\rho k)_{ti} \Rightarrow$

TENDREMOS:

$\widehat{(\rho k)}_{ti} = \bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{.i.} + \bar{X}_{...}$

$$(\hat{\rho k})_{1,1} = 44 - 46.88 - 53 + 61.46 = 5.58$$

$$(\hat{\rho k})_{1,2} = 52.5 - 46.88 - 67.83 + 61.46 = -0.75$$

$$(\hat{\rho k})_{1,3} = 40.5 - 46.88 - 51.17 + 61.46 = 3.91$$

$$(\hat{\rho k})_{1,4} = 50.5 - 46.88 - 73.83 + 61.46 = -8.75$$

$$(\hat{\rho k})_{2,1} = 48 - 59.25 - 53 + 61.46 = -2.79$$

$$(\hat{\rho k})_{2,2} = 62.5 - 59.25 - 67.83 + 61.46 = -3.12$$

$$(\hat{\rho k})_{2,3} = 47.5 - 59.25 - 51.17 + 61.46 = -1.46$$

$$(\hat{\rho k})_{2,4} = 79 - 59.25 - 73.83 + 61.46 = 7.38$$

$$(\hat{\rho k})_{3,1} = 67 - 78.25 - 53 + 61.46 = -2.79$$

$$(\hat{\rho k})_{3,2} = 88.5 - 78.25 - 67.83 + 61.46 = 3.88$$

$$(\hat{\rho k})_{3,3} = 67.5 - 78.25 - 51.17 + 61.46 = -2.46$$

$$(\hat{\rho k})_{3,4} = 92 - 78.25 - 73.83 + 61.46 = 1.38$$

FINALMENTE, DADO QUE EL VALOR DE MSW (O MSR) <u>ES UN ESTIMADOR INSESGADO DE $\sigma^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = 42.29$ (VER TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA</u>

<u>CABE OBSERVAR QUE TODOS LOS ESTIMADORES $\hat{\rho}_t$, $\hat{k}_i$, $(\hat{\rho k})_{ti}$ Y $\hat{\sigma}^2$ SON INSESGADOS</u>.

MODELO CON DIFERENTES TAMAÑOS DE MUESTRA

SE DESARROLLA LA SUMA DE CUADRADOS:

$$\sum_{t=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_{ti}}(X_{tij}-\bar{X}_{...})^2 = \sum_{t=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_{ti}}(\bar{X}_{t..}-\bar{X}_{...})^2 +$$

$$+\sum_{t=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_{ti}}(\bar{X}_{.i.}-\bar{X}_{...})^2 +$$

$$+\sum_{t=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_{ti}}(X_{tij}-\bar{X}_{ti.})^2 +$$

$$+\sum_{t=1}^{r}\sum_{r=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_{ti}}(\bar{X}_{ti.}-\bar{X}_{t..}-\bar{X}_{.i.}+\bar{X}_{...})^2$$

SST = SSBR + SSBC + SSI + SSR

$$n_{t.} = \frac{\sum_{i=1}^{c} n_{ti}}{c} \; ; \quad n_{.i} = \frac{\sum_{t=1}^{r} n_{ti}}{r} \; ; \quad n_{..} = \frac{\sum_{t=1}^{r}\sum_{i=1}^{c} n_{ti}}{cr}$$

ASI:

$$SSBR = \sum_{t=1}^{r}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n_{ti}}(\bar{X}_{t..}^2 - 2\bar{X}_{t..}\bar{X}_{...} + \bar{X}_{...}^2)$$

$$= c\sum_{t=1}^{r} n_{t.}\bar{X}_{t..}^2 - 2c\bar{X}_{...}\sum_{t}^{r} n_{t.}\bar{X}_{t..} + n_{..}cr\bar{X}_{...}^2$$

$$= c \sum_{t=1}^{r} n_{t.} \bar{X}^2_{t..} - rcn_{..} \bar{X}^2_{...}$$

$$SSBC = \sum_{t=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n_{ti}} (\bar{X}^2_{.i.} - 2\bar{X}_{.i.} \bar{X}_{...} + \bar{X}^2_{...})$$

$$= r \sum_{i=1}^{c} n_{.i} \bar{X}^2_{.i.} - rcn_{..} \bar{X}^2_{...}$$

$$SSR = \sum_{t=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n_{ti}} (X^2_{tij} - 2X_{tij} \bar{X}^2_{ti.})$$

$$= \sum_{t=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n_{ti}} X^2_{tij} - \sum_{t=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} n_{ti} \bar{X}^2_{ti.}$$

$$SST = \sum_{t=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n_{ti}} (X^2_{tij} - 2X_{tij} \bar{X}_{...} + \bar{X}^2_{...})$$

$$= \sum_{t=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n_{ti}} X^2_{tij} - rcn_{..} \bar{X}^2_{...}$$

$$SSI = SST - SSBR - SSBC - SSR$$

EJEMPLO:

TRATAMIENTOS	BLOQUES		
	1	2	3
1	10 15 8	12 9	5 18
2	7 12	13 11 10	9

$t = 1, r; \quad r = 2$

$i = 1, c; \quad c = 3$

$j = 1, n_{ti}$

$$n_{ti} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \qquad n_{t.} = \begin{bmatrix} 2.33 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$n_{.i} = [2.5,\ 2.5,\ 1.5]; \quad n_{..} = 2.165$$

CALCULOS NECESARIOS:

$$\bar{X}_{...} = 10.692; \quad \bar{X}^2_{...} = 114.325$$

$$\sum_t \sum_i \sum_j X_{ijk}^2 = 1627$$

$$\bar{X}_{ti.} = \begin{bmatrix} 11 & 10.5 & 11.5 \\ 9.5 & 11.33 & 9 \end{bmatrix}; \qquad \bar{X}_{t..} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10.33 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_{.i.} = [10.4,\ 11,\ 10.66];$$

$$\sum_t \sum_i n_{ti}\, \bar{X}_{ti.}^2 = 1494.606$$

$$\sum_t n_{t.}\, \bar{X}_{t..}^2 = 495.711$$

$$\sum_i n_{.i}\, \bar{X}_{.i.}^2 = 743.353$$

$$SST = 1627 - (2)(3)(2.166)(114.325) = 140.775$$

$$SSBR = (3)(495.711) - (2)(3)(2.166)(114.325) = 1.366$$

$$SSBC = (2)(743.353) - (2)(3)(2.166)(114.325) = 0.939$$

$$SSR = 1627 - 1494.606 = 132.394$$

$$SSI = 140.775 - 1.366 - 0.939 - 132.394 = 6.076$$

ANALISIS DE VARIANZA:

FUENTE:	SS	G.L.	MS	F	α =0.05
RENGLONES (BR)	1.366	$r - 1 = 1$	1.366	0.0722	5.59
COLUMNAS (BC)	.939	$c - 1 = 2$	0.4695	0.0248	4.74
INTERACCION (I)	6.076	$(r-1)(c-1) = 2$	3.038	0.1606	4.74
RESIDUAL (R)	132.394	$rc(n_{..}-1) = 6.996 \cong 7$	18.913		
TOTAL (T)	140.775				

∴ NO HAY EFECTO POR RENGLONES (TRATAMIENTOS).

NO HAY EFECTO POR COLUMNAS (BLOQUES).

NO HAY EFECTO POR LA INTERELACION ENTRE RENGLONES Y COLUMNAS

MODELO CON NIVELES CRUZADOS ALEATORIOS

ESTE MODELO SE OBTIENE A PARTIR DEL PARAMETRICO REEMPLAZADO ρ_t, k_i $(\rho k)_{ti}$ POR U_t, V_i, W_{ti}, RESPECTIVAMENTE DONDE LAS U's V's Y W's SON VARIABLES ALEATORIAS NORMALES, MUTUAMENTE INDEPENDIENTES CADA UNA CON VALOR ESPERADO CERO Y:

$$1) \qquad Var(U_t) = \sigma_u^2 \; \forall t$$

$$2) \qquad Var(V_i) = \sigma_v^2 \; \forall i$$

$$3) \qquad Var(W_{ti}) = \sigma_w^2 \; \forall t,i$$

CONSIDERAMOS SOLAMENTE EL CASO $n_{ti} = n \; \forall t,i$ O SEA IGUAL NUMERO DE ELEMENTOS EN CADA CELDA ti, CON LO CUAL EL MODELO SERA:

$$4) \qquad X_{tij} = \xi + U_t + V_i + W_{ti} + Z_{tij}$$

DE DONDE:

$$5) \qquad \bar{X}_{...} = \xi + \bar{U} + \bar{V} + \bar{W}_{..} + \bar{Z}_{...}$$

$$6) \qquad \bar{X}_{t..} = \xi + U_t + \bar{V} + \bar{W}_{t.} + \bar{Z}_{t..}$$

$$7) \qquad \bar{X}_{.i.} = \xi + \bar{U} + V_i + \bar{W}_{.i} + \bar{Z}_{.i.}$$

$$8) \qquad \bar{X}_{ti.} = \xi + U_t + V_i + W_{ti} + \bar{Z}_{ti.}$$

6) -5):

$$9) \qquad \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{...} = (U_t - \bar{U}) + (\bar{W}_{t.} - \bar{W}_{..}) + (\bar{Z}_{t..} - \bar{Z}_{...})$$

7) -5):

$$10) \quad \bar{X}_{.i.} - \bar{X}_{...} = (V_i - \bar{V}) + (\bar{W}_{.i} - \bar{W}_{..}) + (\bar{Z}_{.i.} - \bar{Z}_{...})$$

8) - 6) - 7) + 5)

$$11) \quad \bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{t..} - \bar{X}_{.i.} + \bar{X}_{...} = (W_{ti} - \bar{W}_{t.} - \bar{W}_{.i} + \bar{W}_{..}) + $$

$$+ (\bar{Z}_{ti.} - \bar{Z}_{t..} - \bar{Z}_{.i.} + \bar{Z}_{...})$$

DONDE:

$$12) \quad \bar{U} = \sum_{t=1}^{r} U_t/r \qquad 13)\ldots \quad \bar{V} = \sum_{i=1}^{c} V_i/c$$

$$14) \quad \bar{W}_{t.} = \sum_{i=1}^{c} W_{ti}/c \qquad 15)\ldots \quad \bar{W}_{.i} = \sum_{t=1}^{r} W_{ti}/r$$

$$16) \quad \bar{W}_{..} = \sum_{t=1}^{r} \sum_{i=1}^{c} W_{ti}/rc$$

4) - 8):

$$17) \quad X_{tij} - \bar{X}_{ti.} = Z_{tij} - \bar{Z}_{ti.}$$

NUEVAMENTE, PARA ANALIZAR LA FUENTE DE VARIABILIDAD DE LOS DATOS, LA SUMA DE CUADRADOS SE PUEDE DIVIDIR EN 2 PARTES:

$$18). \quad \sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{...})^2 = \underbrace{\sum_t \sum_i n_{ti} (\bar{X}_{ti.} - \bar{X}_{...})^2}_{\text{ENTRE CELDAS}} + \underbrace{\sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti.})^2}_{\text{DENTRO DE LAS CELDAS}}$$

DE AQUI QUE:

E{SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE LAS CELDAS} =

$$E\{\sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti.})^2\} = (N_{..} - rc)\sigma^2$$

POR LO CUAL LA ESTADISTICA VALOR MEDIO CUADRATICO DENTRO DE CELDAS O RESIDUAL (MSW O MSR)

$$19)\quad E(MSR) = \sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti.})^2/(N_{..} - rc) = \sigma^2$$

SE USA NUEVAMENTE PARA ESTIMAR σ^2 O SEA LA VARIANZA DE CADA Z_{tij}.

DE LAS ECS. 9), 10) y 11) ENCONTRAMOS LOS SIGUIENTES VALORES ESPERADOS DE LOS VALORES MEDIOS CUADRATICOS:

ENTRE RENGLONES: $E\{MSBR\} = \sigma^2 + n\sigma_w^2 + nc\sigma_u^2$

ENTRE COLUMNAS: $E\{MSBC\} = \sigma^2 + n\sigma_w^2 + nr\sigma_v^2$

INTERACCION: $E\{MSI\} = \sigma^2 + n\sigma_w^2$.

LA SITUACION ES SIMILAR A LA DE LA CLASIFICACION DE DOS FACTORES NO CRUZADOS CUANDO UN MODELO ALEATORIO ES APROPIADO.

LA HIPOTESIS H_o: $\sigma_w^2 = 0$ PUEDE PROBARSE COMPARANDO EL VALOR MEDIO CUADRATICO DE LAS INTERACCIONES CON EL RESIDUAL; ESTO ES:

$$F = MSI/MSR$$

POR OTRO LADO PARA PROBAR LA HIPOTESIS H_o: $\sigma_u^2 = 0$ DE IGUALDAD DE VARIANCIAS ENTRE RENGLONES DEBERA HACERSE LA COMPARACION DE:

$$F = MSBR/MSI$$

Y FINALMENTE; PARA PROBAR LA HIPOTESIS H_o: $\sigma_v^2 = 0$, DE IGUALDAD DE VARIANCIAS ENTRE COLUMNAS, DEBERA HACERSE LA COMPARACION DE:

$$F = MSBC/MSI$$

JUSTAMENTE, COMO EN EL CASO DE LA CLASIFICACION NO CRUZADA, TAMBIEN ES LA ALEATORIEDAD DEL TERMINO QUE REPRESENTA LA INTERACCION EN EL MODELO EL QUE TOMA LA DIFERENCIA ESENCIAL EN EL ANALISIS. EL PROCEDIMIENTO FORMAL DE PRUEBA NO SE AFECTA SI LOS EFECTOS ENTRE RENGLONES O COLUMNAS SE CAMBIAN DE PARAMETRICOS A TERMINOS ALEATORIOS O VICEVERSA (DANDO UN MODELO MEZCLADO).

ES UTIL RECORDAR QUE SI EL MSBR O MSBC SE COMPARA CON EL MSR CUANDO EL MODELO ALEATORIO ES APROPIADO, EL POSIBLE EFECTO DE UNA VARIANCIA $\sigma_w^2 \neq 0$ DE INTERACCION PUEDE DEBERSE SOLAMENTE AL INCREMENTO DEL TAMAÑO MEDIO DE LA RELACION CON EL MSR.

EJEMPLO

SUPONGAMOS QUE UNA COMPAÑIA DISPONE DE n FUENTES DIFERENTES DE MATERIAS PRIMAS A_n Y m MAQUINAS DE DISTINTAS MARCAS B_m PARA PRODUCIR UN NUEVO PRODUCTO. SE SABE QUE LAS MARCAS DE MAQUINAS SON IGUALMENTE PRODUCTIVAS EN TERMINOS DE VELOCIDAD - EL NUMERO DE TIRADAS PRODUCIDAS POR HORA - PERO NO SE SABE SI TRABAJAN IGUALMENTE BIEN EN TERMINOS DEL NUMERO DE UNIDADES DEFECTUOSAS ELABORADAS ENTRE LAS PRODUCCIONES POR HORA.

ADEMAS, LA FIRMA DESCONOCE SI HAY DIFERENCIAS EN LA CALIDAD DE LAS MATERIAS PRIMAS PROVENIENTES DE LAS FUENTES. POR ULTIMO SE SOSPECHA QUE LA MATERIA PRIMA DE UNA FUENTE PUEDE PRESENTAR UN EFECTO ESPECIAL EN UNA MAQUINA PARTICULAR O VICEVERSA. POR CONSIGUIENTE, SE DESEA ESTABLECER SI LOS A_n SON DIFERENTES, SI LOS B_m SON DIFERENTES Y SI EXISTE ALGUN EFECTO CONJUNTO A x B. PARA RESPONDER A ESTAS PREGUNTAS SE SELECCIONARON AL AZAR 4 FUENTES: A_1, A_2, A_3 Y A_4 Y 3 MARCAS DE MAQUINAS B_1, B_2 Y B_3, Y SE HIZO OPERAR CADA MARCA DE MAQUINA EN IDENTICAS CONDICIONES CON CADA FUENTE DE MATERIAL DURANTE DOS HORAS Y SE REGISTRO EL NUMERO DE UNIDADES DEFECTUOSAS POR CADA HORA COMO SE INDICA EN LA TABLA. CON ESTOS DATOS, ¿A QUE CONCLUSION SE PUEDE LLEGAR?

MAQUINA	FUENTES DE MAT. PRIMA 1		2		3		4		TOTALES	$\bar{X}_{t..}$	$\bar{X}^2_{t..}$
		7		6		6		6			
1	9	49	6	36	8	36	5	36	50	6.5	39.06
	5		6		4		7				
		3		4		4		3			
2	4	9	5	16	2	16	1	9			
	2		3		6		5		28	3.5	12.5
		8		8.5		7.5		7			
3	10	64	8	72.5	7	56.25	9	49			
	6		9		8		5		62	7.75	60.06
TOTALES	36		37		35		32		140		111.62
$\bar{X}_{.i.}$	6		6.17		5.83		5.33			$\bar{X}_{...}$ = 5.83	
$\bar{X}^2_{.i.}$	36		38.03		34.03		28.44		136.5		$\bar{X}^2_{...}$ = 33.99

$r = 3, \quad c = 4, \quad n = 2$

$$\sum_t \sum_i \sum_j X_{tij}^2 = 9^2 + 5^2 + 4^2 + 2^2 + \ldots . 5^2 + 9^2 + 5^2 = 952$$

TOTAL: $SST = \sum_t \sum_i \sum_j X_{tij}^2 - ncr\bar{X}_{...}^2 = 952 - 2 \times 3 \times 4 \times 33.99 =$

$= 952 - 815.73 = 136.27$

ENTRE RENGLONES:

$$SSBR = nc\sum_t \bar{X}_{t..}^2 - ncr\bar{X}_{...}^2 = 892.96 - 815.73 = 77.23$$

ENTRE COLUMNAS:

$$SSBC = nr\sum_i \bar{X}_{.i.}^2 - nrc\bar{X}_{...}^2 = 819 - 815.73 = 3.27$$

ENTRE CELDAS:

$$SSR = \sum_t \sum_i \sum_j X_{tij}^2 - n\sum_t \sum_i \bar{X}_{ti.}^2 = 952 - 2 \times 448.75 = 54.50$$

INTERACCION: $SSI = SST - SSBR - SSBC - SSR$

$= 136.27 - 77.23 - 3.27 - 54.50$

$= 1.27$

LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANZA SERA:

FUENTE DE VARIACION:

	G. de l.	SS	MS	F estimada.		F crítica.
ENTRE MAQUINAS	r-1=3-1=2	SSBR = 77.23	SSBR/(R-1) = 38.62	F_{ER} = 38.62/0.21 183.90	>	$F_{ER} = F_{0.01,2,6}$ = 10.92
ENTRE FUENTES	c-1=4-1=3	SSBC = 3.27	MSBC = SSBC/(c-1) = 1.09	F_{EC} = 1.09/0.21 5.19	<	$F_{CC} = F_{0.01,3,6}$ = 9.78
INTERACCION	(r-1)(c-1) = 6	SSI = 1.27	MSI = SSI/ (r-1)(c-1) = 0.21	F_{EI}=0.21/4.54 = 0.05	<	$F_{CI} = F_{0.01,6,12}$ = 4.82
RESIDUAL	rc(n-1)=12	SSR = 54.50	MSR = SSR/ rc(n-1) = 4.54			
TOTAL	rcn-1 = 23	SST = 136.27				

DE LO ANTERIOR CONCLUIMOS QUE:

DADO, QUE $F_{CR} < F_{ER}$ ⇒ SI HAY VARIABILIDAD ENTRE LAS DIFERENTES MARCAS DE MAQUINA.

COMO $F_{CC} > F_{EC}$ ⇒ NO HAY EFECTO ENTRE LAS DIFERENTES FUENTES DE MATERIA PRIMA

Y FINALMENTE COMO:

$F_{CI} > F_{EI}$ ⇒ NO HAY EFECTO ENTRE LAS INTERACCIONES DE LAS MAQUINAS Y LAS FUENTES DE MATERIA PRIMA.

EJEMPLO

EN UNA INVESTIGACION SOBRE LA ACUMULACION DE UNA SUSTANCIA EN LOS DIENTES DE LAS JOVENES DE 18 A 20 AÑOS DE EDAD EN UNA LOCALIDAD, SE DISEÑO UN EXPERIMENTO COMPLETAMENTE ALEATORIZADO EN EL QUE SE SELECCIONARON AL AZAR TRES JOVENES, A CADA UNA DE LAS CUALES SE LES RASPO EL SARRO DE LA DENTADURA; EL SARRO DE CADA UNA SE DIVIDIO EN SEIS PARTES IGUALES Y SE LES ENTREGARON DOS PARTES A CADA UNO DE TRES ANALISTAS TOMADOS TAMBIEN AL AZAR, CON EL FIN DE QUE HICIERAN EL ANALISIS QUIMICO PARA DETERMINAR LA CANTIDAD DE LA SUSTANCIA DE INTERES CONTENIDA EN CADA PARTE. LAS CONCENTRACIONES, EN MICROGRAMOS OBTENIDAS SE PRESENTAN EN LA SIGUIENTE TABLA:

	MUJER		
ANALISTA	A	B	C
1	13.2	10.6	8.5
	12.3	9.8	8.9
2	12.5	9.6	7.9
	12.9	10.7	8.4
3	13.0	9.9	8.3
	12.4	10.3	8.6

SOLUCION

a) HACER EL ANALISIS DE VARIANCIA Y LAS ESTIMACIONES DE TODOS LOS PARAMETROS DE INTERES; TOME $\alpha = 0.05$. ESBOCE SUS CONCLUSIONES.

SE TRATA DE UN PROBLEMA DE NIVELES ALEATORIOS. PARA OBTENER LOS PARAMETROS NECESARIOS PARA EL CALCULO DE LAS ESTADISTICAS F, SE USARA LA SIGUIENTE TABLA.

ANALIS- TA	MUJER A		B		C		TOTA- LES	$\bar{X}_{t..}$	$\bar{X}^2_{t..}$
1	13.2 12.3	12.75 162.563	10.6 9.8	10.2 104.04	8.5 8.9	8.7 75.69	63.3	10.55	111.3025
2	12.5 12.9	12.7 161.29	9.6 10.7	10.15 103.023	7.9 8.4	8.15 66.422	62	10.333	106.7778
3	13.0 12.4	12.7 161.29	9.9 10.3	10.1 102.01	8.3 8.6	8.45 71.403	62.5	10.41667	108.506
TOTALES	76.3		60.9		50.6		187.8		326.5872
$\bar{X}_{.i.}$	12.71667		10.15		8.433				r = 3
$\bar{X}^2_{.i.}$	161.71361		103.0225		71.1211		Σ=335.85722		c = 3 n = 2

EN CADA CELDA SE INDICA:

x_{ti1}	$\bar{x}_{ti.}$
x_{ti2}	$\bar{x}^2_{ti.}$

DE LOS DATOS:

$$\Sigma\Sigma\Sigma\ x^2_{tij} = 13.2^2+12.3^2+12.5^2+12.9^2+13^2+12.4^2+10.6^2+9.8^2+9.6^2+10.7^2+9.9^2+ +10.3^2+8.5^2+8.9^2+7.9^2+8.4^2+8.3^2+8.6^2 = 2017.38$$

DE LA TABLA:

$$\Sigma\Sigma\Sigma\ \bar{x}^2_{ti.} = 162.563+161.29+161.29+104.4+103.023+102.01+75.69+66.422+71.403 =$$

$\bar{X}_{...} = \frac{187.8}{18} = 10.433$, $\bar{X}^2_{...} = 108.854$, $nrc\bar{X}^2_{...} = 2(3)(3)(108.854) = 1959.38$

$\sum_t \bar{X}^2_{t..} = 326.5872$, $\sum_i \bar{X}^2_{.i.} = 335.85722$

POR LO TANTO LAS SUMAS DE CUADRADOS VALDRAN:

$SST = \sum\sum\sum X^2_{tij} - nrc\bar{X}^2_{...} = 2017.38 - 1959.38 = 58$

$SSBR = nc\sum_t \bar{X}^2_{t..} - nrc\bar{X}^2_{...} = (2)(3)(326.58722) - 1959.38 = 0.14333$, CON $(r-1)$ G DE L.

$SSBC = nr\sum_i \bar{X}^2_{.i.} - nrc\bar{X}^2_{...} = (2)(3)(335.85722) - 1959.38 = 55.76332$, CON $(c-1)$ G. DE L.

$SSR = \sum\sum\sum X^2_{tij} - n\sum_{ti}\sum \bar{X}^2_{ti.} = 2017.38 - (2)(1007.731) = 1.918$, CON $rc(n-1)$ G. DE L.

$SSI + SST - SSBR - SSBC - SSR = 58 - 0.1433 - 55.76332 - 1.918 = 0.1753467$, con $(r-1)(c-1)$ G. DE L.

EN LA SIGUIENTE TABLA SE RESUMEN LOS RESULTADOS DEL ANALISIS DE VARIANCIA; COMO SE TRATA DE UN MODELO DE NIVELES ALEATORIOS, LAS ESTADISTICAS F SE CALCULARAN COMO:

EFECTOS DE INTERACCION: $F = \frac{MSI}{MSR}$

EFECTOS "DEL ANALISTA" $F = \frac{MSBR}{MSI}$

EFECTOS DE "LA MUJER" $F = \frac{MSBC}{MSI}$

TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA

ORIGEN DE VARIACION	SS	G. DE L.	MS	F
ANALISTA	0.14333	2	0.071665	1.6347
MUJER	55.76332	2	27.88166	635.998
INTERACCION	0.1753467	4	0.0438392	0.2057
RESIDUO	1.918	9	0.213	
TOTAL	58			

LOS VALORES CRITICOS PARA LAS ESTADISTICAS ANTERIORES, CON $\alpha = 0.05$ SON:

ANALISTA: $F_{0.05,2,4} = 6.94$

MUJER $F_{0.05,2,4} = 6.94$

INTERACION $F_{0.05,4,9} = 3.63$

COMO: $6.94 > 1.6347$ EL EFECTO DEL ANALISTA NO ES SIGNIFICATIVO

$6.94 < 635.998$ EL EFECTO DE LA MUJER ES SIGNIFICATIVO

$3.63 > 0.2057$ EL EFECTO DE INTERACCION ANALISTA-MUJER NO ES SIGNIFICATIVO

COMO PUEDE VERSE DE LOS RESULTADOS ANTERIORES, EL UNICO EFECTO SIGNIFICATIVO ES EL DE LA MUJER; ES DECIR QUE LA CONCENTRACION DE LA SUSTANCIA DE INTERES SI DEPENDE DE LA MUJER DE QUE SE TRATE.

b) REALIZAR LO PEDIDO EN EL INCISO ANTERIOR CONSIDERANDO AHORA EL PROBLEMA COMO SI SE TRATARA DE PARAMETROS FIJOS. COMPARE Y COMENTE LOS RESULTADOS DE AMBOS INCISOS

EN ESTE CASO LAS ESTADISTICAS F ESTAN DADAS POR:

-ANALISTA: $F = \frac{MSBR}{MSR}$

-MUJER: $F = \frac{MSBC}{MSR}$

-INTERACCION: $F = \frac{MSI}{MSR}$

POR LO TANTO, LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA QUEDARIA:

ORIGEN DE VARIACION	SS	G. DE L.	MS	F
ANALISTA	0.14333	2	0.071665	0.33645
MUJER	55.76332	2	27.88166	131.236
INTERACCION	0.1753467	4	0.0438392	0.2058
RESIDUO	1.918	9	0.213	
TOTAL	58			

LOS VALORES CRITICOS, EN TABLAS, SON:

ANALISTA: $F_{0.05,2,9} = 4.26$

MUJER: $F_{0.05,2,9} = 4.26$

INTERACCION: $F_{0.05,4,9} = 3.63$

COMO:

$4.26 > 0.33645$ EL EFECTO DEL ANALISTA NO ES SIGNIFICATIVO

$4.26 < 131.236$ EL EFECTO DE LA MUJER ES SIGNIFICATIVO

$3.63 > 0.2058$ EL EFECTO DE INTERACCION NO ES SIGNIFICATIVO

COMPARANDO LOS RESULTADOS DE AMBOS MODELOS PODEMOS OBSERVAR QUE LOS RESULTADOS HAN SIDO IGUALES EN CUANTO A CONCLUSIONES; NO OBSTANTE LOS RANGOS DE LAS ZONAS DE ACEPTACION HAN SIDO ALTERADAS, ASI COMO LAS ESTADISTICAS F CALCULADAS, POR LO QUE CABRIA LA POSIBILIDAD DE QUE EN UN CASO CERCA DE LOS LIMITES DE ACEPTACION (VALORES CRITICOS), LA APLICACION DE UN MODELO U OTRO DERIVARA EN CONCLUSIONES DIFERENTES.

c) CALCULAR EL INTERVALO DE CONFIANZA DE LA DIFERENCIA DE LAS CONCENTRACIONES MEDIAS OBTENIDAS POR LOS ANALISTAS 2 Y 3.

	ANALISTA		ANALISTA
	2	3	1
	12.5	13.0	13.2
	12.9	12.4	12.3
	9.6	9.9	10.6
	10.7	10.3	9.8
	7.9	8.3	8.5
	8.4	8.6	8.9
PROMEDIO	10.333	10.417	10.55

EL INTERVALO DE CONFIANZA ESTA DADO POR:

$$\overline{X}_i - \overline{X}_j \pm t_{\nu;\, \alpha/2} \; S\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}$$

LA SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE GRUPOS, CONSIDERANDO LA TOTALIDAD DE LOS DATOS SERA:

$$(12.5-10.33)^2+(12.9-10.33)^2+(9.6-10.33)^2+(10.7-10.33)^2+(7.9-10.33)^2+(8.4-10.33)^2+$$

$$+\quad (13-10.417)^2+(12.4-10.417)^2+(9.9-10.417)^2+(10.3-10.417)^2+(8.3-10.417)^2+(8.6-10.417)^2+$$

$$+\quad (13.2-10.55)^2+12.3-10.55)^2+(12.5-10.55)^2+(12.9-10.55)^2+(13-10.55)^2+(12.4+10.55)^2$$

$$= \quad 57.8567$$

ENTONCES $S^2 = \frac{57.8567}{N-k} = \frac{57.8567}{18-3} = 3.857, \; S = 1.9639$

EN TABLAS: $t_{15,0.025} = 2.132$

POR TANTO, EL INTERVALO DE CONFIANZA VALE:

$$10.417 - 10.333 \pm 2.132(1.9639)\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = 0.084 \pm 2.417$$

d) APLIQUE EL METODO DE TUKEY PARA REALIZAR LAS COMPARACIONES MULTIPLES DE LAS MEDIAS DE LOS RESULTADOS DE LAS MUJERES. DESSARROLLE Y APLIQUE A ESTE PROBLEMA LOS METODOS DE FISHER Y DE DUNCAN PARA COMPARACIONES MULTIPLES.

METODO DE TUKEY

EL MARGEN, DE ACUERDO AL METODO DE TUKEY, ESTA DADO POR LA ECUACION:

$$\frac{q_{k,\nu,\alpha/2}}{\sqrt{2}}\, s\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}$$

EN ESTE CASO: $n_i = n_j = cte = n = 6$

EL VALOR DE S SE OBTENDRA DE LA TOTALIDAD DE LOS DATOS, COMO $MSW = s^2$, PARA ESTO SE OBTENDRA MSW:

	M U J E R		
	A	B	C
	13.2	10.6	8.5
	12.3	9.8	8.9
	12.5	9.6	7.9
	12.9	10.7	8.4
	13.0	9.9	8.3
	12.4	10.3	8.6
PROMEDIOS :	12.717	10.15	8.433

LA SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE GRUPOS SERA:

$$(13.2-12.717)^2+(12.3-12.717)^2+(12.5-12.717)^2+(12.9-12.717)^2+(13-12.717)^2+$$
$$+(12.4-12.717)^2+(10.6-10.15)^2+(9.8-10.15)^2+(9.6-10.15)^2+(10.7-10.15)+$$
$$+(9.9-10.15)^2+(10.3-10.15)^2(8.5-8.433)^2+(8.9-8.433)^2+(7.9-8.433)^2+(8.4-8.433)^2$$
$$+(8.3-8.433)^2+(8.6-8.433)^2 = 2.23667$$

$$MSW = \frac{2.23667}{18-3} = 0.149, \quad S = 0.386$$

DE TABLAS, EL RANGO ESTUDENTIZADO ES; CON $k = 3$ Y $\nu = 15$: $q_{3,15,.025} = 3.67$

POR LO TANTO, EL MARGEN VALE: $\dfrac{3.67}{\sqrt{2}}\, 0.386\sqrt{\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}} = 0.578$

LAS DIFERENCIAS ENTRE MEDIAS SON LAS SIGUIENTES, INDICANDO LAS SIGNIFICATIVAS CON UN MARCO:

MUJER	A	B	C
MEDIA	12.717	10.15	8.433
DIFERENCIAS	*	$\boxed{2.567}$	$\boxed{4.284}$
		*	$\boxed{1.717}$
			*

TODAS LAS DIFERENCIAS SON SIGNIFICATIVAS

METODO DE DUNCAN

EL METODO DE DUNCAN, COMO EL DE TUKEY, SIRVE PARA EFECTUAR COMPARACIONES DE MEDIAS, NO OBSTANTE ESTE ES MAS CONSERVADOR QUE EL PRIMERO.

EL ERROR ESTANDAR DE CUALQUIER MEDIA ES: $S = \sqrt{\dfrac{MSW}{n}}$

DE LA TABLA DE DUNCAN PARA RANGOS SIGNIFICANTES OBTENEMOS $r_\alpha(p, f)$, DONDE α ES EL NIVEL DE SIGNIFICANCIA, $p = 2, 3, \ldots k$ SON LOS TRATAMIENTOS, CUYAS MEDIAS SE ORDENAN DE MENOR A MAYOR, f SON LOS GRADOS DE LIBERTAD DE SSW: (N-k). EL RANGO SE CALCU LA COMO: $R_p = r_\alpha(p, f)S$, PARA $p = 2, 3, \ldots k$

PARA PROBAR LAS DIFERENCIAS, SE PRUEBA LA MAYOR CON LA MENOR, COMPARANDO CON EL MAYOR R_α, ASI SE CONTINUA COMPARANDO EL MAYOR CON LOS RESTANTES, EN ORDEN CRECIENTE ESTOS ULTIMOS. SE PROCEDE IGUALMENTE EN EL DE SEGUNDA IMPORTANCIA, ETC.

EN ESTE CASO, ORDENANDO LAS MEDIAS EN ORDEN CRECIENTE:

$$\bar{y}_C = 8.433, \ \bar{y}_B = 10.15, \ \bar{y}_A = 12.717$$

EL VALOR DE MSW ES = 0.149, POR LO QUE, EN CUALQUIER CASO:
$S = \sqrt{\frac{0.149}{6}} = 0.1576$

EN TABLAS DEL METODO DE DUNCAN (DESIGN AND ANALYSIS OF EXPERIMENTS.-MONTGOMERY.-WILLEY INTERNATIONAL, 1976), CON $\alpha = 0.05$, $f = N-k=18-3=15$:

$$r_{0.05}(2,15) = 3.01, \ r_{.05}(3,15) = 3.16$$

POR LO TANTO, LOS MARGENES SERAN:

$R_2 = 3.01(0.1576) = 0.474$, $R_3 = 3.16(0.1576) = 0.498$

Y LAS COMPARACIONES DE MEDIAS SERAN:

VALORES CRITICOS EN LA PRUEBA DE DUNCAN DE RANGO MULTIPLE

Error df	α	p = NUMERO DE MEDIAS ADYACENTES 2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20
1	.05	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0
	.01	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0
2	.05	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09
	.01	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0
3	.05	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50
	.01	8.26	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	8.9	9.0	9.0	9.0	9.1	9.2	9.3	9.3
4	.05	3.93	4.01	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02
	.01	6.51	6.8	6.9	7.0	7.1	7.1	7.2	7.2	7.3	7.3	7.4	7.4	7.5	7.5
5	.05	3.64	3.74	3.79	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83
	.01	5.70	5.96	6.11	6.18	6.26	6.33	6.40	6.44	6.5	6.6	6.6	6.7	6.7	6.8
6	.05	3.46	3.58	3.64	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68
	.01	5.74	5.51	5.65	5.73	5.81	5.88	5.95	6.00	6.0	6.1	6.2	6.2	6.3	6.3
7	.05	3.35	3.47	3.54	3.58	3.60	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61
	.01	4.95	5.22	5.37	5.45	5.53	5.61	5.69	5.73	5.8	5.8	5.9	5.9	6.0	6.0
8	.05	3.26	3.39	3.47	3.52	3.55	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56
	.01	4.74	5.00	5.14	5.23	5.32	5.40	5.47	5.51	5.5	5.6	5.7	5.7	5.8	5.8
9	.05	3.20	3.34	3.41	3.47	3.50	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52
	.01	4.60	4.86	4.99	5.08	5.17	5.25	5.32	5.36	5.4	5.5	5.5	5.6	5.7	5.7
10	.05	3.15	3.30	3.37	3.43	3.46	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.48
	.01	4.48	4.73	4.88	4.96	5.06	5.13	5.20	5.24	5.28	5.36	5.42	5.48	5.54	5.55
11	.05	3.11	3.27	3.35	3.39	3.43	3.44	3.45	3.46	3.46	3.46	3.46	3.46	3.47	3.48
	.01	4.39	4.63	4.77	4.86	4.94	5.01	5.06	5.12	5.15	5.24	5.28	5.34	5.38	5.39
12	.05	3.08	3.23	3.33	3.36	3.40	3.42	3.44	3.44	3.46	3.46	3.46	3.46	3.47	3.48
	.01	4.32	4.55	4.65	4.76	4.84	4.92	4.96	5.02	5.07	5.13	5.17	5.22	5.23	5.26
13	.05	3.06	3.21	3.30	3.35	3.38	3.41	3.42	3.44	3.45	3.45	3.46	3.46	3.47	3.47
	.01	4.26	4.45	4.62	4.69	4.74	4.84	4.88	4.94	4.98	5.04	5.08	5.13	5.14	5.15
14	.05	3.03	3.18	3.27	3.33	3.37	3.39	3.41	3.42	3.44	3.45	3.46	3.46	3.47	3.47
	.01	4.21	4.42	4.55	4.63	4.70	4.78	4.83	4.87	4.91	4.96	5.00	5.04	5.06	5.07
15	.05	3.01	3.16	3.25	3.31	3.36	3.38	3.40	3.42	3.43	3.44	3.45	3.46	3.47	3.47
	.01	4.17	4.37	4.50	4.58	4.64	4.72	4.77	4.81	4.84	4.90	4.94	4.97	4.99	5.00
16	.05	3.00	3.15	3.23	3.30	3.34	3.37	3.39	3.41	3.43	3.44	3.45	3.46	3.47	3.47
	.01	4.13	4.34	4.45	4.54	4.60	4.67	4.72	4.76	4.79	4.84	4.88	4.91	4.93	4.94
17	.05	2.98	3.13	3.22	3.28	3.33	3.36	3.38	3.40	3.42	3.44	3.45	3.46	3.47	3.47
	.01	4.10	4.30	4.41	4.50	4.56	4.63	4.68	4.72	4.75	4.80	4.83	4.86	4.88	4.89
18	.05	2.97	3.12	3.21	3.27	3.32	3.35	3.37	3.39	3.41	3.43	3.45	3.46	3.47	3.47
	.01	4.07	4.27	4.38	4.46	4.53	4.59	4.64	4.68	4.71	4.76	4.79	4.82	4.84	4.85
19	.05	2.96	3.11	3.19	3.26	3.31	3.35	3.37	3.39	3.41	3.43	3.44	3.46	3.47	3.47
	.01	4.05	4.24	4.35	4.43	4.50	4.56	4.61	4.64	4.67	4.72	4.76	4.79	4.81	4.82
20	.05	2.95	3.10	3.18	3.25	3.30	3.34	3.36	3.38	3.40	3.43	3.44	3.46	3.46	3.47
	.01	4.02	4.22	4.33	4.40	4.47	4.53	4.58	4.61	4.65	4.69	4.73	4.76	4.78	4.79
22	.05	2.93	3.08	3.17	3.24	3.29	3.32	3.35	3.37	3.39	3.42	3.44	3.45	3.46	3.47
	.01	3.99	4.17	4.28	4.36	4.42	4.48	4.53	4.57	4.60	4.65	4.68	4.71	4.74	4.75
24	.05	2.92	3.07	3.15	3.22	3.28	3.31	3.34	3.37	3.38	3.41	3.44	3.45	3.46	3.47
	.01	3.96	4.14	4.24	4.33	4.39	4.44	4.49	4.53	4.57	4.62	4.64	4.67	4.70	4.72
26	.05	2.91	3.06	3.14	3.21	3.27	3.30	3.34	3.36	3.38	3.41	3.43	3.45	3.46	3.47
	.01	3.93	4.11	4.21	4.30	4.36	4.41	4.46	4.50	4.53	4.58	4.62	4.65	4.67	4.69
28	.05	2.90	3.04	3.13	3.20	3.26	3.30	3.33	3.35	3.37	3.40	3.43	3.45	3.46	3.47
	.01	3.91	3.08	4.18	4.28	4.34	4.39	4.43	4.47	4.51	4.56	4.60	4.62	4.65	4.67
30	.05	2.89	3.04	3.12	3.20	3.25	3.29	3.32	3.35	3.37	3.40	3.43	3.44	3.46	3.47
	.01	3.89	4.06	4.16	4.22	4.32	4.36	4.41	4.45	4.48	4.54	4.58	4.61	4.63	4.65
40	.05	2.86	3.01	3.10	3.17	3.22	3.27	3.30	3.33	3.35	3.39	3.42	3.44	3.46	3.47
	.01	3.82	3.99	4.10	4.17	4.24	4.30	4.34	4.37	4.41	4.46	4.51	4.54	4.57	4.59
60	.05	2.83	2.95	3.05	3.14	3.20	3.24	3.28	3.31	3.33	3.37	3.40	3.43	3.45	3.47
	.01	3.76	3.92	4.03	4.12	4.17	4.23	4.27	4.31	4.34	4.39	4.44	4.47	4.50	4.53
100	.05	2.80	2.95	3.05	3.12	3.18	3.22	3.26	3.29	3.32	3.36	3.40	3.42	3.45	3.47
	.01	3.71	3.86	3.93	4.06	4.11	4.17	4.21	4.25	4.29	4.35	4.38	4.42	4.45	4.48
∞	.05	2.77	2.92	3.02	3.09	3.15	3.19	3.23	3.26	3.29	3.34	3.38	3.41	3.44	3.47
	.01	3.64	3.80	3.90	3.98	4.04	4.09	4.14	4.17	4.20	4.26	4.31	4.34	4.38	4.41

Reproduced from: D.B. Duncan, Multiple Range and Multiple F Tests, *Biometrics*, 11: 1-42, 1955. With permission from the Biometric Society and the author

A VS. C: 12.717 - 8.433 = 4.284 > 0.498 (SIGNIFICATIVA)

A VS. B: 12.717 - 10.15 = 2.567 > 0.474 (SIGNIFICATIVA)

B VS. C: 10.15 - 8.433 = 1.717 > 0.474 (SIGNIFICATIVA)

COMO EN EL METODO DE TUKEY, TODAS LAS DIFERENCIAS SON SIGNIFICATIVAS.

METODO DE FISHER

PARA REALIZAR COMPARACIONES MULTIPLES ENTRE LAS MEDIAS DE DIVERSOS TRATAMIENTOS SE PUEDE USAR LA ESTADISTICA DE FISHER (ESTE METODO EN REALIDAD ES UNA MODIFICACION DE LA COMPARACION ENTRE MEDIAS CON LA t DE STUDENT).

LA DISTRIBUCION t SE DEFINE COMO:

$$t = \frac{y}{\sqrt{\frac{\mu}{\phi}}} \tag{a}$$

DONDE y ES $N(0,1)$ Y μ TIENE DISTRIBUCION χ^2 CON ϕ G. DE L.
SI QUEREMOS COMPARAR DOS MEDIAS:

$$y = \frac{(X_{1.} - X_{2.}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \tag{b}$$

SI SE SUPONE $\sigma_1 = \sigma_2$:

$$y = \frac{(\overline{X}_{1.} - \overline{X}_{2.}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{(\overline{X}_{1.} - \overline{X}_{2.}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

Y

$$\mu = \sum^{n_1} \left(\frac{X_{1j} - \bar{X}_{1.}}{\sigma_1}\right)^2 + \sum^{n_2} \left(\frac{X_{2j} - \bar{X}_{2.}}{\sigma_2}\right)^2 + \ldots = \frac{1}{\sigma^2} \sum_i^k \sum_j^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2$$

QUE TIENE DISTRIBUCION χ^2 CON N-k G. DE L.

COMO $\quad SW = \sum^k \sum^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2$ CON N-k G. DE L.

$$E(MSW) = \sigma^2$$

SW ES LA VARIANCIA COMBINADA, ESTIMADOR INSESGADO DE σ^2, POR LO TANTO, EL DENOMINADOR DE (a) ES:

$$\frac{\mu}{\phi} = \frac{1}{\sigma^2} MSW \qquad \text{(c)}$$

SUSTITUYENDO (b) y (c) EN (a) SE OBTIENE, BAJO LA HIPOTESIS $\mu_1 = \mu_2$

$$t = \frac{(\bar{X}_{1.} - \bar{X}_{2.}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{MSW}} \sqrt{\frac{n_1 \, n_2}{n_1 + n_2}}$$

Y COMO $F = t^2$ SE OBTIENE:

$$F_0 = \frac{(\bar{X}_{1.} - \bar{X}_{2.})^2}{MSW} \, \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}$$

QUE COMPARADA CON F_c, CON 1 Y N-K G. DE L., NOS PERMITE SABER SI EXISTE DIFERENCIA SIGNIFICATIVA EN LAS MEDIAS.

PARA EFECTUAR CON MAYOR FACILIDAD COMPARACIONES MULTIPLES SE ACOSTUMBRA CALCULAR:

$$(\bar{X}_{1.} - \bar{X}_{2.})^2 = \frac{n_1 + n_2}{n_1 \, n_2} \, MSW \, F_0$$

Y COMPARAR CON EL TEORICO: $\frac{n_1 + n_2}{n_1\ n_2}$ MSW $F_{\alpha,1,N-K}$ (MARGEN)

CUANDO $(\bar{X}_{1.} - \bar{X}_{2.})^2$ ES MAYOR QUE EL MARGEN EXISTE UNA DIFERENCIA SIGNIFICATIVA.

EJEMPLO

EN EL EJEMPLO ANTERIOR, EL MARGEN EN CUALQUIER CASO VALE, CON $F_{0.05,1,15} = 4.54$

$$\frac{6 + 6}{6(6)} (0.149)(4.54) = 0.225$$

LAS DIFERENCIAS ENTRE MEDIAS SON LAS SIGUIENTES (AL CUADRADO), INDICANDO LAS SIGNIFICATIVAS CON UN MARCO

MUJER	A	B	C
$\bar{X}$	12.717	10.15	8.433
$(\text{DIFERENCIAS})^2$	*	$\boxed{6.59}$	$\boxed{18.35}$
		*	$\boxed{2.95}$
			*

TODAS LAS DIFERENCIAS SON SIGNIFICATIVAS.

10. EXPERIMENTO DE CUADRADOS LATINOS

SUPONGAMOS QUE EL ENSAYO QUE SE LLEVA A CABO PARA DETERMINAR EL VALOR QUE TOMA CIERTA VARIABLE EN UNA UNIDAD DE EXPERIMENTACION (ESPECIMEN) TOMA UN TIEMPO RELATIVAMENTE LARGO, DIGAMOS UNA SEMANA, Y QUE CADA ANALISTA (EXPERIMENTADOR) SOLO PUEDE REALIZAR UN ENSAYO A LA VEZ.

SI SE USARA, POR EJEMPLO, UN EXPERIMENTO POR BLOQUES COMPLETAMENTE ALEATORIZADO CON TRES ANALISTAS Y TRES SEMANAS, PODRIA PRESENTARSE LA SIGUIENTE DISTRIBUCION DE LOS ENSAYES PARA LOS ESPECIMENES TIPOS A, B Y C:

SEMANA	ANALISTA		
	1	2	3
1	A	B	A
2	C	A	B
3	B	C	C

SI SE PROBARA LA HIPOTESIS NULA $H_0 : \mu_A - \mu_B = 0$, EN CONTRA DE LA ALTERNATIVA $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$, Y SE RECHAZARA H_0, QUEDARIA LA DUDA DE SI EN ESTE RESULTADO INFLUIRIA EL HECHO DE QUE LA PRIMER SEMANA SE PROBARON DOS ESPECIMENES DE A Y SOLO UNO DE B, EN LA SEGUNDA UNO DE A Y UNO DE B Y, EN LA TERCERA, SOLO UNO DE B.

SI ESTA DUDA FUERA LEGITIMA, SERIA NECESARIO ELIMINAR (FILTRAR)

EL EFECTO DEL FACTOR "SEMANA". ADICIONALMENTE AL FILTRADO, ES NECESARIO RESTRINGIR NUESTRO PROCESO DE ALEATORIZACION DE TAL MANERA QUE QUEDE UN SOLO ESPECIMEN DE CADA TIPO EN CADA SEMANA, QUEDANDO UNA DISTRIBUCION DE LOS ENSAYES COMO LA SIGUIENTE

SEMANA	ANALISTA		
	1	2	3
1	A	B	C
2	B	C	A
3	C	A	B

EN ESTE CASO LA ALEATORIZACION CONSISTIRIA EN ASIGNAR AL AZAR CADA ESPECIMEN TIPO A, B O C A CADA PAREJA (SEMANA, ANALISTA) DE NIVELES DE LOS FACTORES.

A UN DISEÑO EXPERIMENTAL COMO ESTE SE LE DENOMINA "DISEÑO DE CUADRADOS LATINOS". SE USA CUANDO SE QUIEREN COMPARAR t MEDIAS DE TRATAMIENTOS, EN PRESENCIA DE DOS FUENTES EXTRAÑAS DE VARIABILIDAD, LAS CUALES SE BLOQUEAN EN t RENGLONES Y EN t COLUMNAS.

DEFINICION: UN DISEÑO EXPERIMENTAL DE CUADRADOS LATINOS txt, ES TAL QUE LOS t TRATAMIENTOS QUE SE DESEAN COMPARAR SE ASIGNAN AL AZAR ENTRE t RENGLONES Y t COLUMNAS, DE TAL FORMA QUE CADA TRATAMIENTO APARECE EN CADA RENGLON Y EN CADA COLUMNA.

EL MODELO PARA REPRESENTAR A CADA UNO DE LOS RESULTADOS,

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + Z_{ijk} \qquad (1)$$

DONDE Z_{ijk} SON VARIABLES ALEATORIAS NORMALES INDEPENDIENTES ENTRE SI CON MEDIA CERO Y VARIANCIA DESCONOCIDA, σ^2, CADA UNA. LOS TERMINOS α_i, β_j Y γ_k SON LOS EFECTOS DEL TRATAMIENTO i, EL RENGLON j Y LA COLUMNA k, RESPECTIVAMENTE, CON

$\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = \sum_k \gamma_k = 0$, Y μ ES LA MEDIA GLOBAL.

EN TAL CASO

$$E(X_{ijk}) = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k \qquad (2)$$

$$\mathrm{Var}(X_{ijk}) = \sigma^2$$

LA DESCOMPOSICION DE LA SUMA DE CUADRADOS QUEDA EN LA FORMA SIGUIENTE:

$$TSS = SST + SSR + SSC + SSE \qquad (3)$$

DONDE TSS ES LA SUMA DE CUADRADOS TOTAL, SST LA DE LOS TRATAMIENTOS, SSC LA DE COLUMNAS, SSR LA DE RENGLONES Y SSE LA DEL ERROR. LAS ECUACIONES PARA CALCULAR A CADA UNA DE ELLAS SON:

$$TSS = \sum_i \sum_j (X_{ijk} - \overline{X}_{...})^2 = \sum_i \sum_j X_{ijk}^2 - n\,\overline{X}_{...}^2 \qquad (4)$$

$$SST = t \sum_i (\overline{X}_{i..} - \overline{X}_{...})^2 = t \sum_i \overline{X}_{i..}^2 - n\,\overline{X}_{...}^2 \qquad (5)$$

$$SSR = t \sum_j (\overline{X}_{.j.} - \overline{X}_{...})^2 = t \sum_j \overline{X}_{.j.}^2 - n\,\overline{X}_{...}^2 \qquad (6)$$

$$SSC = t \sum_k (\overline{X}_{..k} - \overline{X}_{...})^2 = t \sum_k \overline{X}^2_{..k} - n\,\overline{X}^2_{...} \qquad (7)$$

$$SSE = TSS - SST - SSR - SSC \qquad (8)$$

$$n = t^2$$

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA DE ESTE EXPERIMENTO ES

FUENTE	SS	G. DE L.	MS	F
TRATAMIENTOS	SST	t-1	MST=SST/(t-1)	MST/MSE
RENGLONES	SSR	t-1	MSR=SSR/(t-1)	MSR/MSE
COLUMNAS	SSC	t-1	MSC=SSC/(t-1)	MSC/MSE
ERROR	SSE	(t-1)(t-2)	MSE=SSE/(t-1)(t-2)	
TOTALES	TSS	t^2-1		

CON ESTAS ESTADISTICAS F SE PRUEBAN, RESPECTIVAMENTE, LAS HIPOTESIS:

a) $H_0: \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n$

H_1: AL MENOS UNA α_i NO ES CERO

b) $H_0: \beta_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, t$

H_1: AL MENOS UNA β_j NO ES CERO

c) $H_0: \gamma_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, t$

H_1: AL MENOS UNA γ_k NO ES CERO

ESTAS PRUEBAS DE HIPOTESIS SON TAMBIEN PARA EL CASO DE NIVELES

ALEATORIOS.

EJEMPLO

EN UN PROBLEMA DE INGENIERIA DE TRANSITO SE DESEAN COMPARAR LOS TIEMPOS EN QUE NO SE APROVECHA LA LUZ VERDE DEL SEMAFORO POR NO PASAR NINGUN VEHICULO, PARA 4 DISPOSITIVOS DE CONTROL AUTOMATICO DE SEMAFOROS EN 4 CRUCEROS DIFERENTES DE LA CIUDAD, LO SUFICIENTEMENTE DISTANTES ENTRE SI COMO PARA CONSIDERARSE INDEPENDIENTES. PARA ESTO, SE DISEÑO UN EXPERIMENTO EN EL QUE SE MIDIERON LOS TIEMPOS DE DESPERDICIO, EN MINUTOS, QUE SE TUVIERON EN CUATRO HORAS DIFERENTES DEL DIA, DOS HORAS "PICO", Y DOS HORAS "VALLE" DEL DIA, CON LO CUAL SE INTEGRO EL SIGUIENTE EXPERIMENTO DE CUADRADOS LATINOS 4x4:

INTERSECCION	HORA DEL DIA				TOTALES	$\bar{X}_{.j.}$
	A. M. PICO	A. M. VALLE	P. M. VALLE	P. M. PICO		
1	D(15.5)	B(33.9)	C(13.2)	A(29.1)	91.7	22.92
2	B(16.3)	C(26.6)	A(19.4)	D(22.8)	85.1	21.27
3	C(10.8)	A(31.1)	D(17.1)	B(30.3)	89.3	22.32
4	A(14.7)	D(34.0)	B(19.7)	C(21.6)	90.0	22.50
TOTALES	57.3	125.6	69.4	103.8	356.1	
$\bar{X}_{..k}$	14.33	31.40	17.35	25.95		

EN ESTA TABLA LAS CIFRAS ENTRE PARENTESIS SON MINUTOS DE DESPERDICIO POR HORA PARA LOS DISPOSITIVOS A, B, C Y D.

LOS PROMEDIOS PARA CADA DISPOSITIVO SON:

$\overline{X}_{A..} = 94.3/4 = 23.58$; $\overline{X}_{C..} = 72.2/4 = 18.05$

$\overline{X}_{B..} = 100.2/4 = 25.05$; $\overline{X}_{D..} = 89.4/4 = 22.35$

$\overline{X}_{...} = 356.1/16 = 22.26$; $16\overline{X}^2_{...} = 7925.45$

$\overline{X}_{.1.} = 91.7/4 = 22.92$; $\overline{X}_{.2.} = 85.1/4;21.27$; $\overline{X}_{.3.} = 89.3/4 = 22.32$;

$\overline{X}_{.4.} = 90.0/4 = 22.50$; $\overline{X}_{..1} = 57.3/4 = 14.33$; $\overline{X}_{..2} = 125.6/4 = 31.40$;

$\overline{X}_{..3} = 69.4/4 = 17.35$; $\overline{X}_{..4} = 103.8/4 = 25.95$.

$SST = 4(23.58^2 + 25.05^2 + 18.05^2 + 22.35^2) - 7925.45 =$

$= 4(555.78 + 627.50 + 325.80 + 499.52) - 7925.45 = 8034.41 - 7925.45 = 108.96$

$SSR = 4(22.92^2 + 21.27^2 + 22.32^2 + 22.5^2) - 7925.45 =$

$= 4(525.56 + 452.63 + 498.41 + 506.25) - 7925.45 = 7931.40 - 7925.45 = 5.95$

$SSC = 4(205.21 + 985.96 + 301.02 + 673.40) - 7925.45 = 8662.36 - 7925.45 = 736.91$

$TSS = 15.5^2 + 16.3^2 + 10.8^2 + 14.7^2 + 33.9^2 + \ldots + 21.6^2 - 7925.45 = 8801.05 - 7925.45 = 875.6$

$SSE = 875.6 - 108.96 - 5.95 - 736.91 = 23.78$

FUENTE	SS	G. DE L.	MS	F
DISPOSITIVOS (TRATAMIENTOS)	108.96	3	36.32	9.17 > 4.76
RENGLONES (INTERSECCIONES)	5.95	3	1.98	0.50 < 4.76
COLUMNAS (HORAS DEL DIA)	736.91	3	245.64	61.87 > 4.76
ERROR	23.78	6	3.96	
TOTALES	875.60	15		

$F_{0.95,3,6} = 4.76$

DE LO ANTERIOR SE CONCLUYE QUE SI HAY DIFERENCIAS SIGNIFICATIVAS ENTRE LOS DISPOSITIVOS Y ENTRE LAS HORAS DEL DIA, A UN 95 POR CIENTO DE NIVEL DE CONFIANZA.

EXPERIMENTOS DE CUADRADOS LATINOS CON REPLICAS

CON FRECUENCIA SE DISPONE DE TIEMPO Y RECURSOS PARA TENER VARIAS REPLICAS DE UN EXPERIMENTO DE CUADRADOS LATINOS, PRINCIPALMENTE CUANDO t ES PEQUEÑO. SUPONGAMOS QUE SE EJECUTAN r REPLICAS, EL MODELO MATEMATICO SERA, EN ESTE CASO:

$$X_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \rho_l + Z_{ijkl} \qquad (1)$$

EN DONDE ρ_l ES EL EFECTO DE LA L-ESIMA REPLICA, i, j y k = 1, 2, ..., t, Y l = 1, 2, ..., r; LOS DEMAS TERMINOS TIENEN EL MISMO SIGNIFICADO QUE EN EL EXPERIMENTO SIN REPLICAS. LAS RESTRICCIONES DE LOS PARAMETROS SON

$$\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = \sum_k \gamma_k = \sum_l \rho_l = 0 \qquad (2)$$

LA SUMA TOTAL DE CUADRADOS, EN ESTE CASO, SE DESCOMPONE DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$TSS = SST + SSR + SSC + SSRe + SSE \qquad (3)$$

EN DONDE

$$TSS = \sum_i \sum_j \sum_l X^2_{ijkl} - N\bar{X}^2_{....}; \; N = t^2 r \qquad (4)$$

$$SST = rt \sum_i \bar{X}^2_{i...} - N\bar{X}^2_{....} \qquad (5)$$

$$SSR = rt \sum_j \bar{X}^2_{.j..} - N\bar{X}^2_{....} \qquad (6)$$

$$SSC = rt \sum_{k} \bar{X}^2_{..k.} - N\bar{X}^2_{....} \quad (7)$$

$$SSRe = t^2 \sum_{l} \bar{X}^2_{...l} - N\bar{X}^2_{....} \quad (8)$$

$$SSE = TSS - SST - SSR - SSC - SSRe \quad (9)$$

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA CORRESPONDIENTE A ESTE EXPERIMENTO ES:

FUENTE DE VARIABILIDAD	G. de l	SS	MS	F
TRATAMIENTOS	$t - 1$	SST	MST=SST/(t-1)	MST/MSE
RENGLONES	$t - 1$	SSR	MSR=SSR/(t-1)	MSR/MSE
COLUMNAS	$t - 1$	SSC	MSC=SSC/(t-1)	MSC/MSE
REPLICAS	$r - 1$	SSRe	MSRe=SSRe/(r-1)	MSRe/MSE
ERROR	$g=(t-1)(rt+r-3)$	SSE	MSE=SSE/g	
TOTAL	$rt^2 - 1$	TSS		

EJEMPLO

SE TIENE UN PROCESO DE FABRICACION EN EL CUAL SE RECUBRE UNA LAMINA CON UN CIERTO METAL. EXISTE LA DUDA DE SI EL ESPESOR DE ESE RECUBRIMIENTO CAMBIA EN LAS DIRECCIONES DEL ROLADO Y TRANSVERSAL A EL. PARA ESTUDIAR ESTO SE TOMO COMO VARIABLE AL PESO POR UNIDAD DE AREA QUE SE TENGA DE DICHO RECUBRIMIENTO. PARA ELIMINAR ESTAS DOS FUENTES DE VARIACION, CADA UNA DE 2 PLACAS FABRICADAS SE DIVIDIO EN 16 PARTES REPRESENTANDO 4 POSICIONES EN DIRECCION LONGITUDINAL Y 4 TRANSVERSALES AL ROLADO, Y LUEGO SE TOMARON 4 MUESTRAS DE CADA UNA Y SE MANDARON A LOS LABORATORIOS A, B, C Y D PARA DETERMINAR EL PESO DEL RECUBRIMIENTO, TENIENDOSE LOS SIGUIENTES RESULTADOS:

TRANSVERSAL

	FACTOR	2.1	2.2	2.3	2.4	2.1	2.2	2.3	2.4	TOTALES	$\bar{X}_{.j..}$
LONGITUDINAL	1.1	^{B}0.29	^{A}0.25	^{C}0.18	^{D}0.28	^{C}0.20	^{A}0.24	^{D}0.20	^{B}0.27	1.91	0.239
	1.2	^{D}0.28	^{B}0.18	^{A}0.21	^{C}0.25	^{B}0.28	^{C}0.19	^{A}0.22	^{D}0.28	1.89	0.236
	1.3	^{C}0.28	^{D}0.23	^{B}0.20	^{A}0.28	^{D}0.34	^{B}0.23	^{C}0.21	^{A}0.28	2.05	0.256
	1.4	^{A}0.30	^{C}0.19	^{D}0.24	^{B}0.25	^{A}0.32	^{D}0.22	^{B}0.16	^{C}0.27	1.95	0.244
										7.80	

1.1	^{C}0.20	^{A}0.24	^{D}0.20	^{B}0.27
1.2	^{B}0.28	^{C}0.19	^{A}0.22	^{D}0.28
1.3	^{D}0.34	^{B}0.23	^{C}0.21	^{A}0.28
1.4	^{A}0.32	^{D}0.22	^{B}0.16	^{C}0.27
TOTALES	2.29	1.730	1.620	2.160
$\bar{X}_{..k.}$	0.286	0.216	0.203	0.27

VERIFICAR LAS HIPOTESIS DE EFECTOS NULOS Y SI HAY ALGUNA QUE NO LA CUMPLA, HACER LA PRUEBA DE COMPARACIONES MULTIPLES.

SOLUCION

a) ANALISIS DE VARIANCIA

$$\bar{X}_{...1} = (0.29 + 0.28 + \ldots + 0.28 + 0.25)/16 = 0.243$$

$$\bar{X}_{...2} = (0.20 + 0.28 + \ldots + 0.28 + 0.27)/16 = 0.244$$

$$\bar{X}_{A...} = (0.25 + 0.21 + \ldots + 0.28 + 0.32)/8 = 0.263$$

$$\bar{X}_{B...} = (0.29 + 0.18 + \ldots + 0.23 + 0.16)/8 = 0.233$$

$$\bar{X}_{C...} = (0.18 + 0.25 + \ldots + 0.21 + 0.27)/8 = 0.221$$

$$\bar{X}_{D...} = (0.28 + 0.28 + \ldots + 0.34 + 0.22)/8 = 0.259$$

$$\bar{X}_{....} = \frac{0.29 + 0.28 + 0.28 + \ldots + 0.28 + 0.28 + 0.27}{32} = 0.244$$

TOTALES: $TSS = \sum_j \sum_k \sum_\ell X^2_{ijk\ell} - N\bar{X}^2_{....} = 1.9628 - 32 \times 0.244^2 =$

$= 1.9628 - 1.905 = 0.058$

RENGLONES: $SSR = rt \sum_j \bar{X}^2_{.j..} - N\bar{X}^2_{....} = 2 \times 4 \times (0.239^2 + 0.236^2 +$

$+ 0.256^2 + 0.244^2) - 1.905 = 0.002$

COLUMNAS: $SSC = rt \sum_k \bar{X}^2_{..k.} - N\bar{X}^2_{....} = 8(0.286^2 + 0.216^2 + 0.203^2 +$

$+ 0.27^2) - 1.905 = 0.035$

REPLICA: $SSRe = t^2 \sum_l \bar{X}^2_{...l} - N\bar{X}^2_{....} = 16(0.243^2 + 0.244^2) - 1.905 =$

$= 0.008$

TRATAMIENTOS: $SST = rt \sum \bar{X}^2_{i...} - N\bar{X}^2_{....} = 8(0.263^2 + 0.233^2 +$

$+ 0.221^2 + 0.259^2) - 1.905 = 0.010$

ERROR: SSE = TSS - SST - SSC - SSR - SSRe = 0.058 - 0.002 - 0.035 - 0.008 - 0.01 = 0.003

TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA

FUENTE	g. de l.	SS	MS	F_E		$F_{c(\alpha=0.05)}$
LONG. AL ROLADO	3	SSR=0.002	0.0007	5.00	>	3.07
TRANSV. AL ROLADO	3	SSC=0.035	0.0117	83.57	>	3.07
LABORATORIOS	3	SST=0.010	0.0033	23.57	>	3.07
REPLICAS	1	SSRe=0.008	0.008	57.14	>	4.32
ERROR	3(7)=21	SSE=0.003	0.00014			
TOTAL	31	TSS=0.058				

DE LO ANTERIOR SE CONCLUYE QUE:

1. SI HAY EFECTOS EN LA LONGITUD AL ROLADO
2. SI HAY EFECTOS ENTRE REPLICAS
3. SI HAY EFECTOS ENTRE LOS DIFERENTES LABORATORIOS
4. SI HAY EFECTOS EN LA DIRECCION TRANSVERSAL AL ROLADO

b) PRUEBA DE COMPARACIONES MULTIPLES

b-1) ENTRE LOS DIFERENTES LABORATORIOS:

LABORATORIO	C	B	D	A
MEDIA	0.221	0.233	0.259	0.263

DE LAS TABLAS PARA α = 0.05, 21 G de L. y P = 2,3,4, TENEMOS (INTERPOLANDO)

p	2	3	4
r_p	2.9425	3.0925	3.1825

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{MSE}{n}} = \sqrt{\frac{0.00014}{8}} = 0.00418$$

p	2	3	4
$R_p = r_p S_{\bar{x}}$	0.01231	0.01293	0.01330

EL RANGO PARA LAS 4 MEDIAS ES $R_4 = 0.042 > R_{4c}(0.01330)$, LO CUAL ERA DE ESPERARSE YA QUE LA PRUEBA F MOSTRO QUE SI HABIA EFECTO ENTRE LOS 4 TRATAMIENTOS.

LOS RANGOS PARA 3 MEDIAS ADYACENTES SON:

CBD = 0.259 - 0.221 = 0.038 > 0.01293

BDA = 0.263 - 0.233 = 0.030 > 0.01293

LOS RANGOS PARA PARES DE MEDIAS ADYACENTES SON:

CB = 0.233 - 0.221 = 0.012 < 0.01231

BD = 0.259 - 0.233 = 0.026 > 0.01231

DA = 0.263 - 0.259 = 0.0040 < 0.01231

POR LO TANTO TENDREMOS: $\underline{C \quad B} \quad \underline{D \quad A}$

DE DONDE CONCLUIMOS QUE LOS LABORATORIOS C Y B, ASI COMO D Y A TUVIERON RESULTADOS CONSISTENTES, MIENTRAS LOS LABORATORIOS

B Y D PRESENTARON RESULTADOS DIFERENTES ESTADISTICAMENTE Y, POR ENDE, NO HABRA CONSISTENCIA ENTRE B Y A Y C Y D

b-2) EN LOS NIVELES DE LA DIRECCION TRANSVERSAL AL ROLADO:

NIVELES	3	2	4	1
MEDIAS	0.203	0.216	0.270	0.286

DE LAS TABLAS PARA $\alpha = 0.05$; 21 G. de L., p = 2,3,4 Y $S\bar{x} = 0.00418$ TENEMOS:

p	2	3	4
r_p	2.945	3.0925	3.1825
$R_p = r_p \times S_{\bar{x}}$	0.01231	0.01293	0.01330

EL RANGO PARA LAS 4 MEDIAS ES R4 = 0.286 - 0.203 = 0.0830 > Rcrítico (0.01330), LO CUAL RATIFICA EL RESULTADO DE LA PRUEBA F DE QUE SI HAY EFECTO ENTRE LOS 4 NIVELES DEL ROLADO TRANSVERSAL.

PARA LOS CONJUNTOS DE 3 MEDIAS ADYACENTES:

$$R_{324} = 0.27 - 0.203 = 0.0670 > 0.01293$$

$$R_{241} = 0.286 - 0.216 = 0.07 > 0.01293$$

POR LO QUE TAMBIEN HAY EFECTO SIGNIFICATIVO ENTRE LAS TRIPLETAS DE MEDIAS ADYACENTES. PARA LOS CONJUNTOS DE 2 MEDIAS ADYACENTES:

$$R_{32} = 0.216 - 0.203 = 0.0130 > 0.01231$$

$$R_{24} = 0.27 - 0.216 = 0.0540 > 0.01231$$

$$R_{41} = 0.286 - 0.27 = 0.0160 > 0.01231$$

DE DONDE CONCLUIMOS QUE:

FACTOR 2: N3 N2 N4 N1

EN LA DIRECCION TRANSVERSAL DEL ROLADO NINGUNA PAREJA DE NIVELES DIO RESULTADOS CONSISTENTES.

b-3) APLICANDO EL METODO DE FISHER DE COMPARACIONES MULTIPLES TENEMOS:

b-3.1) TRATAMIENTOS: $LSD = t_{21,\alpha/2} \sqrt{\frac{2MSE}{n}} = t_{21,0.025} \sqrt{\frac{2 \times 0.00014}{8}}$

$$= 2.080 \times 0.0059 = 0.01231$$

LABORATORIOS	C	B	D	A
MEDIAS	0.221	0.233	0.259	0.263
	*	0.0120	$\boxed{0.038}$	$\boxed{0.042}$
		*	$\boxed{0.026}$	$\boxed{0.03}$
			*	0.004

C B D A, QUE COINCIDE CON EL RESÚLTADO ANTERIOR b-3.2) A NIVELES DEL ROLADO TRANSVERSAL: 3 2 4 1, QUE COINCIDE CON EL RESULTADO ANTERIOR

NIVELES	3	2	4	1
MEDIAS	0.203	0.216	0.27	0.286
	*	$\boxed{0.013}$	$\boxed{0.067}$	$\boxed{0.083}$
		*	$\boxed{0.054}$	$\boxed{0.07}$
			*	$\boxed{0.016}$

EJEMPLO

PARA EL EJERCICIO QUE SE DESARROLLO EN LA CLASE SOBRE FUNDENTES TENEMOS:

a) APLICANDO DUNCAN:

PARA LOS METODOS:

METODO	C	B	A
MEDIA	11.0	14.4	14.6

PARA $\alpha = 0.01$, $\nu = 10$; $p = 2,3$ TENEMOS

p	2	3
r_p	4.48	4.67
$R_p = r_p \times S_{\bar{x}} =$	2.1485	2.2397

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{MSE}{n}} = \sqrt{\frac{1.38}{6}} = 0.4795$$

EL RANGO PARA 3 MEDIAS ADYACENTES $= \bar{X}_A - \bar{X}_C = 14.6 - 11 =$

$3.6 > 2.397$ LO QUE SE VERIFICO EN LA PRUEBA F.

LOS RANGOS PARA LOS CONJUNTOS DE 2 MEDIAS ADYACENTES SON

$\bar{X}_B - \bar{X}_C = 14.4 - 11 = 3.40 > 2.1485 \therefore$ SIGNIFICATIVO

$\bar{X}_A - \bar{X}_B = 14.6 - 14.4 = 0.2 < 2.1485 \therefore$ NO SIGNIFICATIVO

LO CUAL IMPLICA QUE C $\underline{B\ A}$; EL METODO C ES EL QUE PRODUCE EFECTOS ESTADISTICAMENTE SIGNIFICATIVOS.

b) PARA LAS FUNDENTES:

FUNDENTE	1	3	2
MEDIA	11.6	13	15.33

EL RANGO PARA LAS TRES MEDIAS ADYACENTES: $R_{132} = 15.33 - 11.6 = 3.73 > 2.2397$ O SEA QUE SI HAY EFECTO ENTRE LOS 3 FUNDENTES COMO SE HABIA VISTO EN LA PRUEBA F. PARA LOS CONJUNTOS DE 2 MEDIAS:

$$\bar{X}_3 - \bar{X}_1 = 1.40 < 2.1485 \therefore \text{ NO SIGNIFICATIVO}$$

$$\bar{X}_2 - \bar{X}_3 = 2.33 > 2.1485 \therefore \text{ SI SIGNIFICATIVO}$$

ENTONCES: FUNDENTES $\underline{1\ 3}$ 2, POR LO QUE EL FUNDENTE 2 PRODUCE EFECTOS DIFERENTES ESTADISTICAMENTE SIGNIFICATIVOS.

APLICANDO FISHER:

a) PARA LOS METODOS

$$LSD = t_{0.005,10} \sqrt{\frac{2 \times 1.38}{6}} = 3.169 \times 0.6782 = 2.1493$$

METODOS	C	B	A
MEDIAS	11.0	14.4	14.6
	*	$\boxed{3.4}$	$\boxed{3.60}$
		*	0.20

C $\underline{B\ A}$

PARA LOS FUNDENTES

FUNDENTES	1	3	2
MEDIAS	11.6	B	15.33
	*	1.4	$\boxed{3.73}$
		*	$\boxed{2.33}$

1 3 2

11. EXPERIMENTO DE CUADRADOS GRECO-LATINOS

EN OCASIONES SE CONSIDERA QUE EXISTEN NO SOLO DOS SINO TRES FACTORES EXTRAÑOS QUE PUEDEN INFLUIR EN LOS RESULTADOS DE UN TRATAMIENTO, COMO SUCEDE EN EL EXPERIMENTO DE CUADRADOS LATINOS; CUANDO ESTO SUCEDE, SE PUEDE FILTRAR O AISLAR EL EFECTO DEL TERCER FACTOR MEDIANTE EL EMPLEO DE UN EXPERIMENTO DE CUADRADOS GRECO-LATINOS t x t.

EN ESTE TIPO DE EXPERIMENTO LOS t NIVELES DEL TERCER FACTOR SE REPRESENTAN USUALMENTE CON LETRAS GRIEGAS, LAS CUALES SE COMBINAN CON LAS LATINAS QUE REPRESENTAN LOS t NIVELES DEL TRATAMIENTO, DE TAL MANERA QUE CADA LETRA LATINA APARECE SOLO UNA VEZ EN CONJUNCION CON UNA GRIEGA EN CADA COLUMNA Y EN CADA RENGLON.

POR EJEMPLO, EN UN EXPERIMENTO DE CUADRADOS GRECO-LATINOS DE 4x4 LAS LETRAS SE COMBINAN DE LA SIGUIENTE MANERA:

FACTOR 1	FACTOR 2			
	1	2	3	4
1	Aα	Bβ	Cγ	Dδ
2	Bδ	Aγ	Dβ	Cα
3	Cβ	Dα	Aδ	Bγ
4	Dγ	Cδ	Bα	Aβ

UN EJEMPLO EN EL QUE SE USARIA UN EXPERIMENTO DE ESTE TIPO SERIA EL CASO DEL PROBLEMA MENCIONADO EN LOS CUADRADOS LATINOS

SI ADEMAS DE LOS FACTORES "OPERARIO" Y "FUNDENTE", SE AGREGARA EL DE "TEMPERATURA" DE LA SOLDADURA.

EL MODELO MATEMATICO PARA REPRESENTAR A CADA RESULTADO DEL EXPERIMENTO ES UNA EXTENSION NATURAL DEL DE CUADRADOS LATINOS:

$$X_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \lambda_k + \gamma_l + Z_{ijkl} \tag{1}$$

DONDE λ_k Y γ_l REPRESENTAN AHORA LOS EFECTOS DE LOS FACTORES REPRESENTADOS POR LAS LETRAS LATINAS Y GRIEGAS, RESPECTIVAMENTE.

POR SU PARTE, LA SEPARACION DE LA SUMA DE CUADRADOS QUEDA EN LA FORMA

$$TSS = SSR + SSC + SSL + SSG + SSE \tag{2}$$

EN DONDE

$$TSS = \sum_i \sum_j X^2_{ijkl} - t^2 \bar{X}^2_{....} \tag{3}$$

$$SSR = t \sum_i \bar{X}^2_{i...} - t^2 \bar{X}^2_{....} \tag{4}$$

$$SSC = t \sum_j \bar{X}^2_{.j..} - t^2 \bar{X}^2_{....} \tag{5}$$

$$SSL = t \sum_k \bar{X}^2_{..k.} - t^2 \bar{X}^2_{....} \tag{6}$$

$$SSG = t \sum_l \bar{X}^2_{...l} - t^2 \bar{X}^2_{....} \tag{7}$$

$$SSE = TSS - SSR - SSC - SSL - SSG \quad (8)$$

DE ESTA MANERA LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA CORRESPONDIENTE ES:

FUENTE	G. DE L.	SS	MS	F
FACTOR I (RENGLONES	t-1	SSR	MSR=SSR/(t-1)	MSR/MSE
FACTOR II (COLUMNAS)	t-1	SSC	MSC=SSC/(t-1)	MSC/MSE
FACTOR III (LETRAS LATINAS)	t-1	SSL	MSL=SSL/(t-1)	MS1/MSE
FACTOR IV (LETRAS GRIEGAS)	t-1	SSG	MSG=SSG/(t-1)	MSG/MSE
ERROR O RESIDUAL	(t-1)(t-3)	SSE	MSE=SSE/(t-1)(t-3)	
TOTAL	t^2-1			

EN ESTE EXPERIMENTO LAS ESTADISTICAS F TIENEN t-1 Y (t-1)(t-3) GRADOS DE LIBERTAD EN EL NUMERADOR Y EN EL DENOMINADOR, RESPECTIVAMENTE.

PUESTO QUE EL ERROR TIENE (t-1)(t-3) GRADOS DE LIBERTAD, PARA t=3 SE TIENE G. DE L.=0, POR LO CUAL NO SE PUEDE HACER EL ANALISIS DE VARIANCIA.

EJEMPLO

EN UN PROBLEMA DE LA INDUSTRIA QUIMICA SE SOSPECHO QUE EN LOS RESULTADOS DE UN ENSAYE INFLUIAN CUATRO FACTORES: CONCENTRACION

DE LA SUBSTANCIA, VOLUMEN USADO, TAMAÑO DE ESPECIMEN Y TIEMPO DE LA REACCION, POR LO QUE SE DISEÑO UN EXPERIMENTO DE CUADRADOS GRECO-LATINOS PARA VERIFICAR ESTADISTICAMENTE CUALES DE ELLOS EFECTIVAMENTE INFLUIAN DE MANERA DIFERENTE AL CAMBIAR SUS RESPECTIVOS NIVELES. LOS RESULTADOS QUE SE OBTUVIERON TOMANDO 5 NIVELES DE LOS FACTORES FUERON LOS SEÑALADOS EN LA TABLA SIGUIENTE (LAS LETRAS LATINAS SON LOS NIVELES DEL FACTOR TAMAÑO):

FACTOR I (CONCENTRACION)	FACTOR II (VOLUMEN)					TOTALES	$\bar{X}_{i\ldots}$
	1	2	3	4	5		
1	Aα 65	Bγ 82	Cε 108	Dβ 101	Eδ 126	482	96.4
2	Bβ 84	Cδ 109	Dα 73	Eγ 97	Aε 83	446	89.2
3	Cγ 105	Dε 129	Eβ 89	Aδ 89	Bα 52	464	92.8
4	Dδ 119	Eα 72	Aγ 76	Bε 117	Cβ 84	468	93.8
5	Eε 97	Aβ 59	Bδ 94	Cα 78	Dγ 106	434	86.8
TOTALES	470	451	440	482	451	2294	
$\bar{X}_{.j..}$	94.0	90.2	88.0	96.4	90.2	$\bar{X}_{\ldots\ldots} = \frac{2294}{25} = 91.76$	

$\Sigma X_{..A.} = 372$, $\Sigma X_{..B.} = 429$, $\Sigma X_{..C.} = 484$, $\Sigma X_{..D.} = 528$, $\Sigma X_{..E.} = 481$

$\bar{X}_{..A.} = \frac{372}{5} = 74.4$, $\bar{X}_{..B.} = \frac{429}{5} = 85.8$, $\bar{X}_{..C.} = \frac{484}{5} = 96.8$,

$\bar{X}_{..D.} = \frac{528}{5} = 105.6$, $\bar{X}_{..E.} = \frac{481}{5} = 96.2$

$\Sigma X_{...\alpha} = 377,\ \Sigma X_{...\beta} = 398,\ \Sigma X_{...\gamma} = 466,\ \Sigma X_{...\delta} = 537,\ \Sigma X_{...\epsilon} = 534$

$\bar{X}_{...\alpha} = \frac{377}{5} = 75.4,\ \bar{X}_{...\beta} = \frac{398}{5} = 79.6,\ \bar{X}_{...\gamma} = \frac{466}{5} = 93.2,$

$\bar{X}_{...\delta} = \frac{537}{5} = 107.4,\ \bar{X}_{...\epsilon} = \frac{534}{5} = 106.8,\ t^2\,\bar{X}^2_{....} = 25x91.76^2 = 210{,}497.44$

$SSR = 5(96.4^2+89.2^2+92.8^2+93.6^2+86.8^2)-210{,}497.44 = 227.76$

$SSC = 5(94.0^2+90.2^2+88.0^2+96.4^2+90.2^2)-210{,}497.44 = 285.76$

$TSS = 65^2+82^2+108^2+...+106^2-210{,}497.44 = 9880.56$

$SSL = 5(74.4^2+85.8^2+96.8^2+105.6^2+96.2^2)-210{,}497.44 = 2867.76$

$SSG = 5(75.4^2+79.6^2+93.2^2+107.4^2+106.8^2)-210{,}497.44 = 5536.56$

$SSE = 9880.56-227.76-285.76-2867.76-5536.76 = 962.72$

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA RESULTANTE ES:

FUENTE	SS	G. DE L.	MS	F
CONCENTRACION	227.76	4	56.94	0.47 < 3.84
VOLUMEN	285.76	4	71.44	0.59 < 3.84
TAMAÑO	2867.76	4	716.94	5.96 > 3.84
TIEMPO	5536.76	4	1384.14	11.50 > 3.84
ERROR	962.72	8	120.34	
TOTAL	9880.56	24		

$F_{0.95,4,8} = 3.84$ (PARA $\alpha = 0.05$)

DEL ANALISIS DEL EXPERIMENTO ANTERIOR SE CONCLUYE QUE LOS FACTORES "CONCENTRACION" Y "VOLUMEN" NO INFLUYEN SIGNIFICATIVAMENTE EN LOS RESULTADOS A UN 95 POR CIENTO DE NIVEL DE CONFIANZA Y, EN CAMBIO, LOS FACTORES "TAMAÑO" Y "TIEMPO" SI INFLUYEN.

EJEMPLO

LOS FOCOS DE UNAS CAMARAS FOTOGRAFICAS FUERON COMPARADAS CON 5 CAMARAS, 5 TIPOS DE PELICULA Y 5 TIPOS DE FILTROS (DENOTADOS $\alpha, \ldots, \varepsilon$). DOS DUPLICADOS FUERON TOMADOS PARA CADA COMBINACION DE LOS 4 FACTORES OBTENIENDOSE LOS SIGUIENTES DATOS:

PELICULA	CAMARA 1	2	3	4	5	$\bar{X}_{i....}$
1	0.64 ($A\alpha$) 0.66 $\bar{X}_{ij...}$ = 0.65	0.70 ($B\gamma$) 0.74 0.72	0.73 ($C\varepsilon$) 0.69 0.71	0.66 ($D\beta$) 0.66 0.66	0.66 ($E\delta$) 0.64 0.65	0.6780
2	0.62 ($B\beta$) 0.64 0.63	0.63 ($C\delta$) 0.61 0.62	0.69 ($D\alpha$) 0.67 0.68	0.70 ($E\gamma$) 0.72 0.71	0.78 ($A\varepsilon$) 0.76 0.77	0.6820
3	0.65 ($C\gamma$) 0.64 0.645	0.72 ($D\varepsilon$) 0.73 0.725	0.68 ($E\beta$) 0.68 0.68	0.64 ($A\delta$) 0.65 0.645	0.74 ($B\alpha$) 0.70 0.72	0.6830
4	0.64 ($D\delta$) 0.63 0.635	0.73 ($E\alpha$) 0.72 0.725	0.68 ($A\gamma$) 0.70 0.69	0.74 ($B\varepsilon$) 0.74 0.74	0.72 ($C\beta$) 0.75 0.735	0.7050
5	0.74 ($E\varepsilon$) 0.74 0.74	0.73 ($A\beta$) 0.71 0.725	0.67 ($B\delta$) 0.66 0.665	0.74 ($C\alpha$) 0.75 0.745	0.78 ($D\gamma$) 0.78 0.78	0.73
$\bar{X}_{.j...}$	0.66	0.702	0.685	0.70	0.731	

a) DETERMINE LA VARIANCIA RESIDUAL

b) QUE EFECTOS SON SIGNIFICANTES? (NOTA: LOS DUPLICADOS SE CORRIERON AL MISMO TIEMPO. ENTONCES ESTOS PUEDEN NO SER UNA MEDICION VERDADERA DEL ERROR).

c) DETERMINE UN INTERVALO DE CONFIANZA DEL 95% PARA LA DENSIDAD MEDIA DE LA CAMARA # 5

SOLUCION

$\bar{X}_{.....} = 34.78/50 = 0.6956; \quad \bar{X}^2_{.....} = 0.483859$

TOTALES: $TSS = \sum_{ijklr}\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma X^2_{ijklr} - t^2 r \bar{X}^2_{.....} = (0.64^2 + 0.66^2 + 0.62^2 +$

$+ 0.64^2 + ... + 0.72^2 + 0.75^2 + 0.78^2 + 0.78^2) -$

$- 5^2 \times 2 \times 0.483859 = 24.298400 - 2 \times 25\ (34.78/50)^2$

$= 24.298400 - 12.096484 \times 2 = 0.105432$

FACTOR I (PELICULAS): $SSR = (t \sum_i \bar{X}_{i...}^2 - t^2 \bar{X}^2_{.....})r$

$= [5(0.459684 + 0.465124 + 0.466489 +$

$0.497025 + 0.532900) - 12.096484 \times 2$

$= 5 \times 2.421222 - 12.096484] \times 2 =$

$= (0.009626) \times 2 = 0.019252$

FACTOR II (CAMARAS): $SSC = (t \sum_j \bar{X}^2_{.j...} - t^2 \bar{X}^2_{.....})r$

$SSC = [5(0.4356+0.492804+0.469225+0.49+0.534361) -$

$- 12.096484] \times 2 = 2(5 \times 2.421990 - 12.096484) =$

$= (12.109950 - 12.096484) \times 2 = (0.013466) \times 2$

$= 0.026932$

FACTOR III (LETRAS LATINAS (FOCOS))

$SSL = (5 \sum_k \bar{X}^2_{..k..} - t^2 \bar{X}^2_{.....})r$

$= [5(0.483025+0.483025+0.477481$

$\bar{X}_{..A..} = 0.695000$

$\bar{X}_{..B..} = 0.695000$

$\bar{X}_{..C..} = 0.691000$

$\bar{X}_{..D..} = 0.696000$

$= \quad + 0.484416 + 0.491401) -$	$\bar{X}_{..E..} = 0.701000$
$- 12.096484] \times 2$	
$= (5 \times 2.419348 - 12.096484) \times 2$	

$= (12.096740 - 12.096484) \times 2 = 0.000256 \times 2 = 0.000512$

FACTOR IV (LETRAS GRIEGAS (FILTROS)):

$SSG = (t\sum_{l}\bar{X}^2_{...l.} - t^2\bar{X}^2_{.....})r$	$\bar{X}_{...\alpha.} = 0.704$
$= [5(0.495816 + 0.469225 + 0.502681 +$	$\bar{X}_{...\beta.} = 0.685$
$0.413449 + 0.543169) -$	$\bar{X}_{...\gamma.} = 0.709$
$12.096484] \times 2$	$\bar{X}_{...\delta.} = 0.643$
$= (5 \times 2.424140 - 12.096484) \times 2$	$\bar{X}_{...\varepsilon.} = 0.737$
$= (12.1207 - 12.096484) \times 2$	
$= 0.024216 \times 2 = 0.048432$	

RESIDUAL (DUPLICADOS):

$$SSRes = \sum_{ijklr}\sum\sum\sum\sum X^2_{ijklr} - r\sum_{ij}\sum\bar{X}^2_{ij...}$$

$$= 24.2984 - 2(0.65^2 + 0.72^2 + 0.71^2 + ... + 0.665^2 + 0.745^2 + 0.78^2)$$

$$= 24.2984 - 2 \times 12.1467 = 0,005000$$

INTERACCIONES: $SSI = TSS - SSR - SSC - SSL - SSG - SSRes$

$$= 0.105432 - 0.019252 - 0.026932 - 0.000512 - 0.048432 - 0.0050 = 0.005304$$

CON LO ANTERIOR PODEMOS FORMULAR LA SIGUIENTE TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA:

FUENTE DE VARIACION	GRADOS DE LIBERTAD	SUMA DE CUADRADOS	MEDIOS CUADRATICOS	F_{CALC}	$F_c = F_{\alpha,\nu_1\nu_2}$
FACTOR I (PELICULAS)	$t-1=5-1$ $=4$	SSR 0.019252	MSR=0.019252/4 =0.004813	F_I=MSR/MSRe =24.065	$F_I = F_{0,99,4,25}$ 4.18
FACTOR II (CAMARAS)	$t-1=5-1$ $=4$	SSC 0.026932	MSC=$\frac{0.026932}{4}$ =0.006733	F_{II}=MSC/MSRe = 33.665	$F_{II} = F_{0,99,4,25}$ 4.18
FACTOR III (BULBOS)	$t-1=4$	SSL 0.000512	MSL=0.000512/4 =0.000128	F_{III} =MSL/MSRe = 0.64	$F_{III} = F_{0.99,4,25}$ 4.18
FACTOR IV (FILTROS)	$t-1=4$	SSG 0.048432	MSG=$\frac{0.048432}{4}$ =0.012108	F_{IV}=MSG/MSRe =60.54	$F_{IV} = F_{0.99,4,25}$ 4.18
INTERACCIONES	$(t-1)(t-3)=$ $4\times 2=8$	SSI 0.005304	MSI=0.005304/8 =0.000663	F_{IN}=MSI/MSRe =3.3150	$F = F_{0.99,8,25}$ 3.32
RESIDUAL (DUPLICADOS)	$=49-16-8$ $=25$	SSRe 0.0050	MSRe=0.0050/25 =0.00020		
TOTAL	rt^2-1 $2\times 25-1$ $=49$	0.105432			

a) EL ESTIMADOR INSESGADO DE LA VARIANCIA RESIDUAL σ^2 ES $\hat{\sigma}^2$ = MSRes = 0.00020

b) DE LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA SE OBSERVA QUE LAS PELICULAS, LAS CAMARAS Y LOS TIPOS DE FILTROS PRODUCEN EFECTOS SIGNIFICATIVOS.

c) EL INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA CAMARA # 5 SERA ($\alpha = 0.05$):

$$\bar{X}_{.5...} \pm t_{.025,25}\sqrt{\frac{MSRes}{5}} = 0.731 \pm 2.060\sqrt{\frac{0.00020}{5}} =$$

$$= 0.731 \pm 2.060 \times 0.006325 = 0.731 \pm 0.013029 = (0.717971, 0.744029)$$

d) COMPARACIONES MULTIPLES:

d.1) ENTRE LAS PELICULAS:

PELICULA	1	2	3	4	5
$\bar{X}_{i....}$	0.6780	0.682	0.683	0.705	0.73
	*	0.0040	0.0050	0.0270	0.0520
		*	0.001	0.023	0.048
			*	0.022	0.047
				*	0.025

DUNCAN: 1 2 3 4 5

p	2	3	4	5
q'	2.915	3.065	3.145	3.215
W_p	0.013	0.0137	0.014	0.0144

DONDE

$$W_p = q' \sqrt{\frac{0.00020}{10}}$$

$$q' = q'_{0.05,(r,25)}$$

$$\text{FISHER: LSD} = t_{\alpha/2,\nu}\sqrt{\frac{2MSR_{es}}{rt}} = t_{0.01/2,25}\sqrt{\frac{2x6.00020}{2x5}} =$$

$$= 2.060 \times 0.0063 = 0.013$$

DE LA TABLA OBSERVAMOS QUE LAS PELICULAS 4 Y 5 PRESENTAN EFECTOS SIGNIFICATIVOS

METODO DE TUKEY:

$$W = q_{\alpha(t,v)}\sqrt{\frac{MSR_{es}}{rt}} = q_{0.05,(5,25)}\sqrt{\frac{0.00020}{10}} = 4.1583x0.0045 = 0.0186$$

OBSERVANDO LOS RESULTADOS DE FISHER SE LLEGA A LA MISMA CONCLUSION (VER TABLA).

d.2) ENTRE CAMARAS

CAMARAS	1	3	4	2	5
$\overline{X}_{.j..}$	0.66	0.685	0.70	0.702	0.731
	*	0.0250	0.04	0.042	0.071
		*	0.015	0.017	0.0450
			*	0.002	0.031
				*	0.029

FISHER: LSD = 2.060x0.0063

= 0.013

TUCKEY: W = 0.0186

DUNCAN:

p	2	3	4	5
q'	2.915	3.065	3.145	3.215
W_p	0.013	0.0137	0.014	0.0144

OBSERVAMOS EN ESTE CASO QUE FISHER Y DUNCAN COINCIDEN EN RESULTADOS: μ_1, μ_3 Y μ_5 SON SIGNIFICATIVAMENTE DIFERENTES MIENTRAS μ_4 Y μ_2 SON MENOS SIGNIFICATIVOS; EL METODO DE TUCKEY DIFIERE EN LO REFERENTE A μ_3 DE DONDE SE INFIERE QUE LAS CAMARAS 1 Y 5 SON LAS QUE DIFIEREN.

d.3) PARA LOS FILTROS:

FILTROS	δ	β	α	γ	ε
$\overline{X}_{....i}$	0.643	0.685	0.704	0.709	0.737
	*	0.042	0.0610	0.066	0.094
		*	0.019	0.024	0.052
			*	0.005	0.033
				*	0.028

FISHER: LSD = 0.013

TUCKEY: W = 0.0186

DUNCAN:

p	2	3	4	5
W_p	0.013	0.0137	0.014	0.0144

EN ESTE CASO LOS FILTROS α Y γ SON MENOS SIGNIFICATIVOS EN LOS EFECTOS QUE LOS FILTROS RESTANTES δ, β Y ε (OBSERVESE LA COINCIDENCIA DE RESULTADOS POR LOS 3 METODOS.

12. BLOQUES ALEATORIZADOS INCOMPLETOS

ES USUAL QUE AL PLANEAR UN EXPERIMENTO SE PRESENTA LA SITUACION DE QUE LOS BLOQUES NO SON LO SUFICIENTEMENTE GRANDES COMO PARA ACOMODAR UNA REPLICA COMPLETA.

POR EJEMPLO, SI EN UN DIA SOLO SE PUEDEN REALIZAR 3 ENSAYES Y SI HAY 4 NIVELES DEL "TRATAMIENTO", ENTONCES EN UN SOLO DIA NO SE PUEDEN REALIZAR LOS ENSAYES PARA OBSERVAR LOS CUATRO NIVELES EN UN SOLO BLOQUE (DIA). EN ESTE CASO EL DISEÑO EXPERIMENTAL QUEDARIA CON 4 BLOQUES CON TRES RESULTADOS SOLAMENTE CADA UNO, DE LA SIGUIENTE MANERA:

BLOQUES			
I	II	III	IV
B	A	C	B
A	B	A	D
C	D	D	C

EN EL QUE EL ORDEN DE APARICION DE CADA TRATAMIENTO EN CADA BLOQUE HA SIDO ALEATORIZADO.

UN DISEÑO EXPERIMENTAL COMO ESTE SE DENOMINA DE <u>BLOQUES ALEATORIZADOS INCOMPLETOS</u> O <u>BLOQUES INCOMPLETOS BALANCEADOS</u> (BIB). EL TERMINO <u>BALANCEADO</u> NO SOLO SIGNIFICA QUE TODOS LOS BLOQUES SON DEL MISMO TAMAÑO Y QUE CADA NIVEL DEL TRATAMIENTO APARECE EL MISMO NUMERO DE VECES, SINO TAMBIEN QUE CADA PAREJA DE NIVELES DEL TRATAMIENTO APARECE JUNTA (EN EL MISMO BLOQUE) EL

MISMO NUMERO DE VECES; EN EL EJEMPLO ANTERIOR ESTO SUCEDE 2 VECES.

PARA DESCRIBIR UN EXPERIMENTO BIB SE UTILIZAN LOS SIGUIENTES TERMINOS:

t = NUMERO DE NIVELES DEL TRATAMIENTO

b = NUMERO DE BLOQUES

k = NUMERO DE NIVELES DEL TRATAMIENTO EN CADA BLOQUE

r = NUMERO DE REPLICAS DE CADA NIVEL DEL TRATAMIENTO

λ = NUMERO DE BLOQUES EN LOS CUALES APARECE CADA PAREJA DE NIVELES DEL TRATAMIENTO

UNA FORMA ALTERNATIVA DE EXPRESAR EL EXPERIMENTO ANTERIOR ES MEDIANTE LA SIGUIENTE TABLA:

TRATAMIENTOS	BLOQUES			
	I	II	III	IV
A	X	X	X	
B	X	X		X
C	X		X	X
D		X	X	X

$t=4$

$b=4$

$k=3$

$r=3$

$\lambda=2$

OTRO EJEMPLO ES EL SIGUIENTE:

TRATA-					BLOQUES						
MIENTOS	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
A	X				X	X	X		X	X	
B		X				X	X	X		X	X
C	X		X				X	X	X		X
D	X	X		X				X	X	X	
E		X	X		X				X	X	X
F	X		X	X		X				X	X
G	X	X		X	X		X				X
H	X	X	X		X	X		X			
I		X	X	X		X	X		X		
J			X	X	X		X	X		X	
K				X	X	X		X	X		X

EN ESTE EJEMPLO: $t = 11$, $b = 11$, $k = 6$, $r = 6$ y $\lambda = 3$.

EN EL LIBRO DE COCHRAN Y COX, "EXPERIMENTAL DESIGNS", SE PRESENTAN UNA LISTA DE DISEÑOS BIB.

EL MODELO MATEMATICO PARA REPRESENTAR AL DISEÑO BIB ES

$$X_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + Z_{ij} \qquad (1)$$

DONDE LAS β_i SON LOS EFECTOS DE LOS BLOQUES, Y LAS τ_j LOS EFECTOS DE LOS TRATAMIENTOS, CON $\sum_{i=1}^{b} \beta_i = \sum_{j=1}^{t} \tau_j = 0$.

EN ESTOS EXPERIMENTOS SE PRESUME QUE NO HAY INTERACCION ENTRE LOS DOS FACTORES.

LA DIFERENCIA DEL EXPERIMENTO BIB Y EL DE BLOQUES COMPLETOS A-LEATORIZADOS, ES QUE EN EL PRIMERO NO ESTÁN PRESENTES TODAS LAS POSIBLES COMBINACIONES DE i Y j.

CONSIDEREMOS UN NIVEL PARTICULAR DEL TRATAMIENTO, q; LA SUMA DE TODAS LAS OBSERVACIONES DE ESTE NIVEL ES, UTILIZANDO LA EC (1):

$$X_{.q} = \sum_{i(q)} X_{iq} = r\mu + \sum_{i(q)} \beta_i + r\tau_q + \sum_{i(q)} Z_{iq} \qquad (2)$$

DONDE $\sum_{i(q)}$ DENOTA LA SUMATORIA SOBRE TODOS LOS BLOQUES (r) QUE CONTIENEN EL q-ESIMO TRATAMIENTO. SIMILARMENTE:

$$X_{i.} = \sum_{j(i)} X_{ij} = k\mu + k\beta_i + \sum_{j(i)} \tau_j + \sum_{j(i)} Z_{ij} \qquad (3)$$

DONDE $\sum_{j(i)}$ DENOTA LA SUMATORIA SOBRE TODOS LOS TRATAMIENTOS INCLUIDOS EN EL i-ESIMO BLOQUE.

SUMANDO LA EC (3) SOBRE TODOS LOS BLOQUES QUE CONTIENEN EL q-ESIMO TRATAMIENTO SE OBTIENE:

$$\sum_{i(q)} \sum_{j(i)} X_{ij} = rk\mu + k \sum_{i(q)} \beta_i + \sum_{i(q)} \sum_{j(i)} \tau_j + \sum_{i(q)} \sum_{j(i)} Z_{ij} \qquad (4)$$

EL TERCER TERMINO DEL MIEMBRO DERECHO DE ESTA ECUACION VALE:

$$\sum_{i(q)}\sum_{j(i)}\tau_j = r\tau_q + \lambda \sum_{j\neq q}\tau_j = (r-\lambda)\tau_q \qquad (5)$$

YA QUE $\sum_{j=1}^{t}\tau_j = 0 = \tau_q + \sum_{j\neq q}\tau_j$, POR LO QUE $\sum_{j\neq q}\tau_j = -\tau_q$

SUSTRAYENDO EL RESULTADO DE LA EC (4) PREVIA SUSTITUCION DE LA EC (5) AL DE LA EC (2) MULTIPLICADO POR k SE OBTIENE

$$k\sum_{i(q)} X_{iq} - \sum_{i(q)}\sum_{j(i)} X_{ij} = (kr - r + \lambda)\tau_q + k\sum_{i(q)} Z_{iq} - \sum_{i(q)}\sum_{j(i)} Z_{ij} \qquad (6)$$

POR TANTO, Y CONSIDERANDO QUE $E(Z_{ij}) = 0$ Y QUE LA RELACION $\lambda = r(k-1)/(t-1)$ ES VALIDA, DE LA EC (6) SE OBTIENE QUE UN ESTIMADOR INSESGADO DE τ_q ES

$$\hat{\tau}_q = \frac{1}{\lambda t}\{k\sum_{i(q)} X_{iq} - \sum_{i(q)}\sum_{j(i)} X_{ij}\} \qquad (7)$$

O

$$\hat{\tau}_q = \frac{k}{\lambda t}\{\sum_{i(q)} X_{iq} - \bar{X}_{i.}\} = \frac{k}{\lambda t}\{X_{.q} - \sum_{i(q)} \bar{X}_{i.}\} \qquad (8)$$

DONDE $\bar{X}_{i.} = \sum_j X_{ij}/k$ = PROMEDIO ARITMETICO MARGINAL DE LAS OBSERVACIONES DEL BLOQUE i

$X_{.q}$ = SUMA DE TODAS LAS OBSERVACIONES DEL q-ESIMO TRATAMIENTO

SUMANDO LA EC (1) SOBRE TODAS LAS OBSERVACIONES SE ENCUENTRA QUE EL PROMEDIO GLOBAL

$$\bar{X}_{..} = \sum_i \sum_j X_{ij}/(kb) \tag{9}$$

ES UN ESTIMADOR INSESGADO DE μ. POR TANTO, UN ESTIMADOR INSESGADO DEL EFECTO DEL q-ESIMO TRATAMIENTO ES $\bar{X}_{..} + \hat{\tau}_q$, EL CUAL TIENE COMO VARIANCIA A

$$\mathrm{Var}\,(\bar{X}_{..} + \hat{\tau}_q) = \frac{\sigma^2}{r}\left\{\frac{1}{t} + \frac{k(t-1)^2}{(k-1)t^2}\right\} \tag{10}$$

DE IGUAL MANERA, LA DIFERENCIA DE EFECTOS ENTRE LOS TRATAMIENTOS q Y q' SE ESTIMA CON $\hat{\tau}_q - \hat{\tau}_{q'}$, CON LO CUAL SE TIENE UNA VARIANCIA DE LA ESTIMACION

$$\mathrm{Var}(\hat{\tau}_q - \hat{\tau}_{q'}) = \sigma^2 \frac{2k}{\lambda t} \tag{11}$$

LA TABLA PARA EL ANALISIS DE VARIANCIA DE ESTE EXPERIMENTO ES

FUENTE	G. DE L.	SS	MS	F
BLOQUES (SIN AJUSTAR)	b - 1	SSB	MSB = SSB/(b - 1)	
TRATAMIENTOS (AJUSTADO)	t - 1	SST	MST = SST/(t - 1)	MST/MSE
ERROR O RESIDUAL	bk-t-b+1	SSE	MSE=SSE/(bk-t-b+1)	
TOTAL	bk - 1	TSS		

DONDE

$$SSB = \sum_{i=1}^{b} X_{i.}^2/k - bk\,\overline{X}_{..}^2 \tag{12}$$

$$SST = \frac{1}{k\lambda t} \sum_{j=1}^{t} \{kX_{.j} - \sum_{i(j)} X_{i.}\}^2 \tag{13}$$

$$TSS = \sum_{i} \sum_{j} X_{ij}^2 - bk\,\overline{X}_{..}^2 \tag{14}$$

$$SSE = TSS - SSB - SST \tag{15}$$

ES NECESARIO MENCIONAR QUE EL SSB CALCULADO CON LA EC (12) SOLO SIRVE EN ESTE CASO COMO AUXILIAR PARA CALCULAR SSE CON LA EC (15), PERO NO PARA HACER LA PRUEBA DE HIPOTESIS DE EFECTOS DE LOS BLOQUES; LA RAZON DE ESTO ES QUE EN ESTE CASO, AL USAR LA EC (1) PARA CALCULAR SSB SE ENCUENTRA QUE DEPENDE DE β_i Y DE τ_j; PARA QUE SE PUEDA HACER PRUEBA DE EFECTOS DE BLOQUES SE REQUIERE DISEÑAR UN EXPERIMENTO DE BLOQUES INCOMPLETOS BALANCEADO Y SIMETRICO, EL CUAL SE ESTUDIARA MAS ADELANTE.

EJEMPLO

EN LA PRODUCCION DE UN COMPONENTE DE UNA MAQUINA, SE TIENE QUE EL DIAMETRO INTERIOR DE UN TUBO ES UNA DIMENSION CRITICA. ESTOS COMPONENTES SE FABRICAN CON 7 MAQUINAS Y 7 ALEACIONES DIFERENTES.

PARA DETERMINAR LOS EFECTOS DE LAS ALEACIONES SE DISEÑO UN EXPERIMENTO BIB, EN EL QUE LOS BLOQUES FUERON LAS MAQUINAS Y

LOS TRATAMIENTOS FUERON LAS ALEACIONES, Y SE TOMARON MUESTRAS DE 10 DIAMETROS EN CADA CASO. EN LA SIGUIENTE TABLA SE PRESENTAN LAS DIFERENCIAS DEL PROMEDIO DE LOS DIEZ DATOS Y LA DIMENSION NOMINAL, EN MM.

TRATAMIENTOS (ALEACIONES)	MAQUINAS (BLOQUES)							TOTALES ($X_{.j}$)
	1	2	3	4	5	6	7	
A	5	4	9					18
B			12	9	9			30
C	7			6		8		21
D			7			5	3	15
E	4				6		5	15
F		10			12	9		31
G		4		4			3	11
TOTALES ($X_{i.}$)	16	18	28	19	27	22	11	141
$\overline{X}_{i.}$	5.33	6.00	9.33	6.33	9.00	7.33	3.67	

EN ESTE CASO SE TIENE QUE $b=t=7$, $k=r=3$, $\lambda=1$, $\overline{X}_{..}=\frac{141}{21}=6.7143$

$$SSB=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{7} X_{i.}^2 - 7x3x\,\overline{X}_{..}^2 = \frac{1}{3}(16^2+18^2+28^2+19^2+27^2+22^2+11^2)-946.7143=72.96$$

$$SST = \frac{1}{3x1x7}\sum_{j=1}^{7}(3X_{.j} - \sum_{i(j)} X_{i.})^2 = \frac{1}{21}\left[\{3x18 - (16+18+28)\}^2 + \right.$$

$$+ \{3x30 - (28+19+27)\}^2 + \{3x21 - (16+19+22)\}^2 +$$

$$+ \{3x15 - (28+22+11)\}^2 + \{3x15 - (16+27+11)\}^2 +$$

$$\left. + \{3x31 - (18+27+22)\}^2 + \{3x11 - (18+19+11)\}^2 \right] = 75.90$$

$$TTS = \sum_i \sum_j X_{ij}^2 - bk\,\overline{X}_{..}^2 = 5^2+4^2+9^2+12^2+\ldots+3^2 - 946.7143 = 156.29$$

$SSE = 156.29 - 72.96 - 75.90 = 7.43$

$MST = 75.90/6 = 12.65$, $MSE = 7.43/8 = 0.929$, $F_T = \frac{12.65}{0.929} = 13.62$

$F_{0.99,6,8} = 6.37 < 13.62$, POR LO QUE SE CONCLUYE QUE CON UN 99% DE NIVEL DE CONFIANZA SI HAY EFECTO DEBIDO A LA ALEACION QUE SE UTILIZA PARA FABRICAR EL COMPONENTE.

TAREA: ESTIMAR LOS τ_i

PARA EL EJEMPLO DE LOS DIAMETROS INTERNOS DE LOS TUBOS, CALCULAR LOS VALORES ESTIMADOS DE τ_j'5 Y HACER COMPARACIONES MULTIPLES:

PARA ESTIMAR LOS EFECTOS DE CADA TRATAMIENTO PODEMOS USAR LA FORMULA ALTERNATIVA:

$$\hat{\tau}_q = \frac{k}{\lambda t}\left[\sum_{i(q)} X_{iq} - \sum_{i(q)} \overline{X}_{i.}\right]$$

$\hat{\tau}_A = \frac{3}{1x7}[18 - 20.66] = -1.143$ $\qquad \hat{\tau}_E = -1.287$

$\hat{\tau}_B = 0.429[30 - 24.66] = 2.288$ $\qquad \hat{\tau}_F = 3.718$

$\hat{\tau}_C = 0.429[21 - 19] = 0.858$ $\qquad \hat{\tau}_G = -2.145$

$\hat{\tau}_D = 0.429[15 - 20.33] = -2.288$

COMPARACIONES MULTIPLES:

TRATAMIENTO	D	G	E	A	C	B	F
$\overline{X}_{..} + \hat{\tau}_q$	4.4263	4.5693	5.4273	5.5713	7.5723	9.0023	10.4323
	*	0.143	1.0010	1.1450	3.146	4.576	6.006
		*	0.858	1.002	3.003	4.433	5.863
			*	0.144	2.145	3.575	5.005
				*	2.001	3.431	4.861
					*	1.43	2.86
						*	1.43

<u>FISHER</u>: $LSD = t_{\alpha/2,\nu}\sqrt{\frac{2k\ MSE}{\lambda t}} = t_{0.05,8}\sqrt{\frac{2x3x0.929}{1x7}} = 0.061$

TUCKEY: $W = q_{0.05}\ (7,8)\ \frac{MSE}{t} = 5.4\ \frac{0.929}{7} = 1.967$

DUNCAN:

p	2	3	4	5	6	7
q'	3.26	3.39	3.47	3.52	3.55	3.56
W_p	1.88	1.235	1.264	1.282	1.293	1.297

DONDE $W_p = q'_{0.05},\ (p,8)\ \frac{0.929}{7}$

DE DONDE CONCLUIMOS QUE LOS TRATAMIENTOS D, G, E Y A SON SIGNIFICATIVAMENTE MENORES QUE C, B Y F.

EJEMPLO

UNA FABRICA DESEA COMPARAR LA COMODIDAD QUE OFRECEN 8 TIPOS NUEVOS DE ALMOHADAS Y UNO QUE YA ESTA EN EL MERCADO. PARA ESTO SE DISEÑO EL SIGUIENTE EXPERIMENTO DE BLOQUES INCOMPLETOS BALANCEADO:

PARA REDUCIR EL PROBLEMA QUE TENDRIA UNA PERSONA AL ASIGNAR UNA CALIFICACION AL GRADO DE COMODIDAD SI SE TUVIERAN LOS 9 TIPOS DE ALMOHADA JUNTOS, SE DECIDIO AGRUPARLAS EN 12 BLOQUES DE 3, Y A CADA BLOQUE SE LE ASIGNARON AL AZAR LOS TIPOS DE ALMOHADA LOS CUALES, A SU VEZ, SE IDENTIFICARON CON LAS LETRAS DE LA A A LA I (LAS LETRAS NO SE PUSIERON VISIBLES). LA PRUEBA CONSISTIO EN SELECCIONAR AL AZAR A 20 PERSONAS PARA QUE CALIFICARAN CON NUMEROS DEL 1 AL 5 EL GRADO DE COMODIDAD; EL DATO QUE SE ANOTO EN CADA CASO FUE LA SUMA DE LAS CALIFICACIONES DE LAS 20 PERSONAS, HABIENDOSE OBTENIDO LOS SIGUIENTES RESULTADOS:

BLOQUE	TRATAMIENTO (TIPO DE ALMOHADA)			TOTAL
1	A59	B26	C38	123
2	D85	E92	F69	246
3	G74	H52	I27	153
4	A62	D70	G68	200
5	B27	E98	H59	184
6	C31	F60	I35	126
7	A63	E85	I30	178
8	B22	F73	G75	170
9	C45	D74	H51	170
10	A52	F76	H43	171
11	B18	D79	I41	178
12	C41	E84	G81	206
				2065

$t = 9,\ b = 12,\ k = 3,\ r = 4,\ \lambda = 1.$

OTRA FORMA DE PRESENTAR LOS DATOS ANTERIORES ES:

TRATAMIENTO (TIPO DE AL-MOHADA)	BLOQUE												TOTALES ($X_{.j}$)
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
A	59			62			63			52			**236**
B	26				27			22			**18**		93
C	38					31			45			**41**	155
D		85		70					74		**79**		308
E		92			98		85					**84**	359
F		69				60		73		76			278
G			74	68				75				**81**	298
H			52		59				51	43			205
I			27			35	30				**41**		133
TOTALES ($X_{i.}$)	123	246	153	200	184	126	178	170	170	171	138	206	**2065**

$\overline{X}_{..} = 2065/(4x9) = 57.361111,\ 36\ \overline{X}^2_{..} = 36x57.3611^2 = \mathbf{118{,}450.69}$

$SSB = \frac{1}{3}(123^2+246^2+153^2+200^2+184^2+126^2+178^2+170^2+170^2+$

$+171^2+178^2+206^2) - 118{,}450.69 =$

$= \frac{368{,}991.00}{3} - 118{,}450.69 = 4{,}546.31$

$SST = \frac{1}{3x1x9}\ \{(3x236-(123+200+178+171))^2+$

$+(3x93-(123+184+170+138))^2+$

$+(3x155-(123+126+170+206))^2+$

$+(3x308-(246+200+170+138))^2+$

$+(3x359-(246+184+178+206))^2+$

$+(3x278-(246+126+170+171))^2+$

$+(3x298-(153+200+170+206))^2+(3x205-(153+$

$+ 184+170+171))^2+(3x133-(153+126+178+138))^2\} =$

$= 322{,}122.00/27 = 11{,}930.07$

$TSS = 59^2+62^2+63^2+52^2+26^2+27^2+ \ . \ . \ . + 41^2-118,450.69 =$

$= 135,435.00-118,450.69 = 16,984.31$

$SSE = 16,984.31-4,546.31-11,930.07 = 507.93$

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA ES:

FUENTE	G. DE L.	SS	MS	F
BLOQUES	11	4,546.31	—	
TRATAMIENTOS	8	11,930.07	1491.26	46.97 > 2.59
ERROR	16	507.93	31.75	
TOTAL	35	16,984.31		

PUESTO QUE $F_{0.95,8,16} = 2.59 < 46.97$, SE CONCLUYE QUE SI HAY DIFERENCIA SIGNIFICATIVA ENTRE LOS NUEVE TIPOS DE ALMOHADA. VEAMOS, POR TANTO, CUALES TIPOS SON LOS QUE DIFIEREN DE LOS DEMAS, PARA LO CUAL ESTIMAREMOS LOS EFECTOS, τ_q, DE CADA NIVEL.

$$\hat{\tau}_q = \frac{k}{\lambda t}\{X_{.q} - \sum_{i(q)} \bar{X}_{i.}\}$$

$$\hat{\tau}_1 = \frac{3}{9}(236 - \frac{123+200+178+171}{3}) = \frac{1}{3}(236 - 224.00) = 4$$

$$\hat{\tau}_2 = \frac{1}{3}(93 - \frac{123+184+170+138}{3}) = \frac{1}{3}(93 - 205) = -37.33$$

$$\hat{\tau}_3 = \frac{1}{3}(155 - \frac{123+126+170+206}{3}) = \frac{1}{3}(155 - 208.33) = -17.78$$

$$\hat{\tau}_4 = \frac{1}{3}(308 - \frac{246+200+170+138}{3}) = 18.89$$

$$\hat{\tau}_5 = \frac{1}{3}(359 - \frac{246+184+178+206}{3}) = 29.22$$

$$\hat{\tau}_6 = \frac{1}{3}\left(278 - \frac{246 + 126 + 170 + 171}{3}\right) = 13.44$$

$$\hat{\tau}_7 = \frac{1}{3}\left(298 - \frac{153 + 200 + 170 + 106}{3}\right) = 18.33$$

$$\hat{\tau}_8 = \frac{1}{3}\left(205 - \frac{153 + 184 + 170 + 171}{3}\right) = -7.00$$

$$\hat{\tau}_9 = \frac{1}{3}\left(133 - \frac{153 + 126 + 178 + 138}{3}\right) = -21.78$$

LA TABLA DE ESTIMACIONES DE LOS EFECTOS DE LOS NIVELES DEL TRATAMIENTO SON:

TRATAMIENTO	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$\bar{X}_{..} + \hat{\tau}_q$	61.36	20.03	39.58	76.25	86.58	70.80	75.69	50.36	35.58

USANDO MSW = MSE = 31.75, CON 16 GRADOS DE LIBERTAD, LA MINIMA DIFERENCIA SIGNIFICATIVA ENTRE DOS MEDIAS ES, CON $\alpha = 0.05$:

$$LSD = t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{2k(MSE)}{\lambda t}} = 2.12\sqrt{\frac{2 \times 3 \times 31.75}{1 \times 9}} = 9.75$$

LAS ESTIMACIONES $\hat{\tau}_q$ ORDENADAS EN FORMA CRECIENTE SON LAS QUE SE MUESTRAN EN LA TABLA SIGUIENTE, EN LA CUAL SE HAN ANOTADO TAMBIEN LAS DIFERENCIAS QUE HAY ENTRE ELLAS:

B	I	C	H	A	F	G	D	E
20.3	35.58	39.58	50.36	61,36	70.80	75.69	76,25	86.58
*	15.28							
	*	$\boxed{4.00}$	14,78					
		*	10.78					
			*	11.00				
				*	$\boxed{9,44}$	14.33		
					*	$\boxed{4.89}$	$\boxed{5.45}$	15.78
						*	$\boxed{0.56}$	10.89
							*	10.33

LAS MEDIAS QUE RESULTARON SER ESTADISTICAMENTE IGUALES SON LAS SUBRAYADAS A CONTINUACION CON LINEA COMUN:

B	I	C	H	A	F	G	D	E
20.3	35.58	39.58	50.36	61.36	70.80	75.69	76.25	86.58

BLOQUES INCOMPLETOS BALANCEADOS SIMETRICOS

SI EL NUMERO DE BLOQUES ES IGUAL AL DE TRATAMIENTOS (b = t), ENTONCES r = k. EN ESTE CASO SE DICE QUE EL EXPERIMENTO ES DE BLOQUES INCOMPLETOS BALANCEADOS SIMETRICOS (SBIB), Y ES POSIBLE HACER PRUEBA DE HIPOTESIS PARA LOS EFECTOS DE LOS BLOQUES EN UNA MANERA SIMILAR QUE PARA LOS TRATAMIENTOS, MEDIAN

TE LA SIGUIENTE TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA, EN LA CUAL SE NOTA QUE HAY SUMAS DE CUADRADOS AJUSTADOS PARA CADA UNO DE LOS DOS FACTORES.

FUENTE	SS	G. de L.	MS	F
BLOQUES	SSB			
TRATAMIENTOS (AJUSTADA)	$\tilde{SST}$	t - 1	$MST = \tilde{SST}/(t-1)$	MST/MSE
TRATAMIENTOS	SST			
BLOQUES (AJUSTADA)	$\tilde{SSB}$	b - 1	$MSB = \tilde{SSB}/(b-1)$	MSB/MSE
ERROR	SSE	bk-b-t-1		
TOTAL	TSS	bk - 1		

EN ESTA TABLA SSB, $\tilde{SST}$, SSE Y TSS SE CALCULAN CON LAS MISMAS FORMULAS QUE EN EL EXPERIMENTO BIB; LAS OTRAS SE CALCULAN CON LAS SIGUIENTES EXPRESIONES:

$$SST = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{t} X_{.j}^2 - bk\bar{X}_{..}^2$$

$$\tilde{SSB} = \frac{1}{kt\lambda} \sum_{i=1}^{b} (rX_{i.} - \sum_{j(i)} X_{.j})^2$$

EJEMPLO

EL PROBLEMA PRESENTADO ANTERIORMENTE, DE LAS MAQUINAS Y ALEACIONES, ES UN EXPERIMENTO SBIB, YA QUE EN EL t = b = 7. PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE $\beta_i = 0$ PARA TODA i, A UN 95% DE NIVEL

DE CONFIANZA.

$$SST = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{7} X_{.j}^2 - bk\bar{X}_{..}^2 = \frac{1}{3}(18^2 + 30^2 + 21^2 + 15^2 + 15^2 + 31^2 + 11^2) -$$

$$- 946.71 = 118.96$$

$$\tilde{SSB} = \frac{1}{3 \times 7 \times 1}\sum_{i=1}^{7}(3X_{i.} - \sum_{\bar{j}(i)} X_{.j})^2 = \frac{1}{21}\left[\{3 \times 16 - (18 + 21 + 15)\}^2 + \right.$$

$$+ \{3 \times 18 - (18 + 31 + 11)\}^2 + \{3 \times 28 - (18 + 30 + 15)\}^2 +$$

$$+ \{3 \times 19 - (30 + 21 + 11)\}^2 + \{3 \times 27 - (30 + 15 + 31)\}^2 +$$

$$\left. + \{3 \times 22 - (21 + 15 + 31)\}^2 + \{3 \times 11 - (15 + 15 + 11)\}^2\right] = 29.90$$

PARA VERIFICAR, CALCULEMOS SSE = TSS - SST - $\tilde{SSB}$ =

156.29 - 118.96 - 29.90 = 7.43 = TSS - $\tilde{SST}$ - SSB

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA ES:

FUENTE	G. de L.	SS	MS	F
MAQUINAS		72.96		
ALEACIONES (AJUSTADA)	6	75.90	12.65	13.62>3.58
MAQUINAS (AJUSTADA)	6	29.90	4.98	5.36>3.58
ALEACIONES		118.96		
ERROR	8	7.43	0.929	
TOTAL	20	156.29		

$F_{0.95,6,8} = 3.58$

POR LO ANTERIOR SE CONCLUYE QUE SI HAY DIFERENCIAS SIGNIFICATIVAS ENTRE LOS NIVELES TANTO DE LAS ALEACIONES COMO DE LAS MAQUINAS.

TAREA: ESTIMAR LAS MEDIAS PARA CADA NIVEL DE BLOQUES Y TRATAMIENTOS

EJEMPLO

DIEZ ESPECIMENES DE HULE SE ENVIARON A UN LABORATORIO PARA UNA PRUEBA DE RESISTENCIA A LA FLEXION. HAY CINCO TIEMPOS DE CURADO. SIN EMBARGO CADA ESPECIMEN ES SUFICIENTE SOLAMENTE PARA DOS MUESTRAS. ENTONCES SE PROPUSO UN DISEÑO BIB. LOS ESPECIMENES SE CONSIDERARON COMO BLOCKS Y LOS TIEMPOS DE CURADO COMO TRATAMIENTOS. INVESTIGUE EL EFECTO DEL TIEMPO DE CURADO SOBRE LA RESISTENCIA A LA FLEXION, USANDO LOS DATOS CODIFICADOS DE ABAJO.

(BLOQUES) ESPECIMENES	TIEMPOS DE CURADO 1	2	3	4	(TRAT) 5	TOTALES $X_{i.}$	$\bar{X}_{i.}$
1	25				6	31	15.5
2	10		3			13	6.5
3	3			16		19	9.5
4	15	11				26	13
5			0		6	6	3
6				14	11	25	12.5
7		6			17	23	11.5
8			10	27		37	18.5
9		10	5			15	7.5
10		7		21		28	14
TOTALES $X_{.j}$	53	34	18	78	40	223	
$\bar{X}_{.j}$	13.25	8.5	4.5	19.5	10		$\bar{X}_{..} = 11.15$

EN ESTE CASO TENEMOS: b = # BLOQUES = 10; t = # TRATAMIENTOS = 5; r = # REPLICAS = 4; k = # NIV. DE TRAT/BLOQUE = 2; λ = # BLOQUES C/PAREJAS IGUALES = 1

PARA LOS BLOQUES: $SSB = k^{-1} \sum_{i=1}^{b} X_{i.}^2 - (bk)^{-1} X_{..}^2$

$$= \frac{1}{2} (31^2 + 13^2 + \dots + 15^2 + 28^2) - \frac{1}{10 \times 2} 223^2$$

$$= 2867.5 - 2486.45 = 381.05$$

PARA LOS TRATAMIENTOS:

$$SST = \frac{t-1}{Nk(k-1)} \sum_{j=1}^{t} \left[kX_{.j} - \sum_{i(j)} X_{i.} \right]^2$$

$$SST = \frac{5-1}{20 \times 2(1)} \{ [2 \times 53 - (31+13+19+26)]^2 + [2 \times 34 - (26+23+ 15+28)]^2 + [2 \times 18 - (13+6+37+15)]^2 + [2 \times 78 - (19+25+ 37+28)]^2 + [2 \times 40 - (31+6+25+23)]^2 \} = \frac{1}{10} \{ (17)^2 + (-24)^2 + (-35)^2 + (47)^2 + (-5)^2 \} = \frac{1}{10} (289+576+1225+2209+25) = 432.4$$

TOTALES: $TSS = \sum_i \sum_j X_{ij}^2 - \frac{X_{..}^2}{bk}$

$$= 25^2 + 10^2 + 3^2 + 15^2 + \dots + 6^2 + 6^2 + 11^2 + 17^2 - 2486.45$$

$$= 3503 - 2486.45 = 1016.55$$

ERROR: $SSE = TSS - SST - SSB$

$$= 1016.55 - 432.4 - 381.05 = 203.10$$

DONDE:

FUENTE	g. de l.	SS	MS	F	$F_c = F_{0.05,4,6}$
ESPECIMENES (BLOQUES S/AJUST)	b - 1 = 10 - 1 = 9	SSB=381.05	MSB=SSB/(b-1) = 42.34	NO SE PUEDE	
TIEMPO DE CURADO (AJUSTADOS)	t - 1 = 5 - 1 = 4	SST=432.4	MST=SST/(t-1) =108.10	MST/MSE =108.10/33.85 = 3.19	< 4.53
ERROR	bk-t-b+1= 20-5-10+1= 6	SSE=203.10	MSE=SSE/bk-t-b+1 = 33.85		
TOTAL	bk - 1 = 10 x 2-1=19	TSS=1016.55			

DADO QUE F CALCULADA (3.19) < F CRITICA ($F_{0.05,4,6}$ = 4.53) ENTONCES CONCLUIMOS QUE LAS RESISTENCIAS A LA FLEXION DE LOS ESPECIMENES DE HULE NO SE AFECTAN POR LOS TIEMPOS DE CURADO, O SEA, POR LOS TRATAMIENTOS.

b) ESTIMACION DE LOS EFECTOS DE LOS TRATAMIENTOS:

$$\hat{\tau}_q = \frac{kr}{\lambda t}\left[\bar{x}_{.q} - r^{-1}\sum_{i(q)} \bar{x}_{i.}\right]$$

$$\hat{\tau}_1 = \frac{2 \times 4}{1 \times 5}\left[13.25 - \frac{15.5 + 6.5 + 9.5 + 13}{4}\right] = 3.40$$

$$\hat{\tau}_2 = \frac{8}{5}\left[8.5 - \frac{13 + 11.5 + 7.5 + 14}{4}\right] = -4.80$$

$$\hat{\tau}_3 = \frac{8}{5}\left[4.5 - \frac{6.5 + 3 + 18.5 + 7.5}{4}\right] = -7.00$$

$$\hat{\tau}_4 = \frac{8}{5}\left[19.5 - \frac{9.5 + 12.5 + 18.5 + 14}{4}\right] = 9.40$$

$$\hat{\tau}_5 = \frac{8}{5}\left[10 - \frac{15.5 + 3 + 12.5 + 11.5}{4}\right] = -1.00$$

c) AUNQUE EN ESTE CASO LA PRUEBA DE ANALISIS DE VARIANCIA INDICO

INDEPENDENCIA ENTRE LOS TIEMPOS DE CURADO (TRATAMIENTOS) HAREMOS LA PRUEBA DE COMPARACIONES MULTIPLES PARA VERIFICAR QUE NO DIFIEREN DICHOS TRATAMIENTOS.

USANDO EL CRITERIO LSD = $t_{\alpha/2,\nu}\sqrt{\frac{2k(MSE)}{\lambda t}}$ =

$$t_{0.05/2,6}\sqrt{\frac{2 \times 2 \times 33.85}{5}} = 2.447\sqrt{27.08} = 12.73$$

TIEMPOS DE CURADO	3	2	5	1	4
$\bar{X}_{..} + \hat{\tau}_g$	4.15	6.35	10.15	14.55	20.55
	*	2.2	6.0	10.4	16.4
		*	3.8	8.20	14.20
			*	4.4	10.40
				*	6.0

13.CUADRADOS DE YUDEN

EL EXPERIMENTO DE CUADRADOS DE YUDEN ES UN TIPO DE CUADRADOS LATINOS INCOMPLETO. SI EL FACTOR I ES EL DE LOS RENGLONES, EL II EL DE LAS COLUMNAS, Y EL III EL DE LAS LETRAS LATINAS, Y SI SE CUMPLE QUE LOS FACTORES I Y III TIENEN EL MISMO NUMERO DE NIVELES (t = b), ENTONCES LOS CUADRADOS DE YUDEN QUEDAN EN FORMA SEMEJANTE A LOS DOS SIGUIENTES EJEMPLOS 7 x 3 Y 7 x 4:

FACTOR I	FACTOR II		
	1	2	3
1	G	A	C
2	A	B	D
3	B	C	E
4	C	D	F
5	D	E	G
6	E	F	A
7	F	G	B

FACTOR I	FACTOR II			
	1	2	3	4
1	D	F	G	A
2	E	G	A	B
3	F	A	B	C
4	G	B	C	D
5	A	C	D	E
6	B	D	E	F
7	C	E	F	G

ESTE DISEÑO EXPERIMENTAL SE PUEDE VER TAMBIEN COMO UN BIB CON UN FACTOR ADICIONAL (EL II), EN CUYO CASO LA TABLA DE DATOS TENDRIA LA SIGUIENTE PRESENTACION, QUE EJEMPLIFICA EL CASO 7 x 4 ANTERIOR:

TRATAMIENTOS (FACTOR III)	FACTOR I						
	1	2	3	4	5	6	7
A	(4)	(3)	(2)		(1)		
B		(4)	(3)	(2)		(1)	
C			(4)	(3)	(2)		(1)
D	(1)			(4)	(3)	(2)	
E		(1)			(4)	(3)	(2)
F	(2)		(1)			(4)	(3)
G	(3)	(2)		(1)			(4)

EN ESTA TABLA LOS NUMEROS EN PARENTESIS SON LOS NIVELES DEL FACTOR II; EN ELLA: $t=7$, $b=7$, $r=4$, $k=4$ y $\lambda=2$.

EL MODELO MATEMATICO PARA ESTUDIAR ESTE EXPERIMENTO ES

$$X_{ijl} = \mu + \beta_i + \tau_j + \gamma_l + Z_{ijl} \qquad (1)$$

DONDE $i = 1,2,\ldots, b$; $j = 1, 2,\ldots, t = b$; $l = 1, 2,\ldots, k(<t)$, Y $\Sigma\beta_i = \Sigma\tau_j = \Sigma\gamma_l = 0$.

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA DE ESTE EXPERIMENTO ES LA SIGUIENTE:

FUENTE	G. DE L.	SS	MS	F
BLOQUES		SSB		
TRATAMIENTOS (AJUSTADA)	t-1	$\tilde{SST}$	MST=$\tilde{SST}$/(t-1)	MST/MSE
TRATAMIENTOS		SST		
BLOQUES (AJUSTADA)	b-1	$\tilde{SSB}$	MSB=$\tilde{SSB}$/(b-1)	MSB/MSE
FACTOR II	k-1	SS2	MS2=SS2/(k-1)	MS2/MSE
ERROR	bk-2b-k+2	SSE	MSE=SSE/(bk-2b-k+2)	
TOTAL	bk-1	TSS		

EN ESTA TABLA:

$$SSB = k^{-1} \sum_{i=1}^{b} X_{i..}^2 - bk\,\overline{X}_{...}^2 \tag{2}$$

$$\tilde{SST} = (k\lambda t)^{-1} \sum_{j=1}^{t} (kX_{.j.} - \sum_{i(j)} X_{i..})^2 \tag{3}$$

$$SST = k^{-1} \sum_{j=1}^{t} X_{.j.}^2 - bk\,\overline{X}_{...}^2 \tag{4}$$

$$\tilde{SSB} = (k\lambda t)^{-1} \sum_{i=1}^{b} (rX_{i..} - \sum_{j(i)} X_{.j.})^2 \tag{5}$$

$$SS2 = b^{-1} \sum_{l=1}^{k} X_{..l}^2 - bk\,\overline{X}_{...}^2 \tag{6}$$

$$TSS = \Sigma\,\Sigma X_{ijl}^2 - bk\,\overline{X}_{...}^2 \tag{7}$$

$$SSE = TSS - SSB - \tilde{SST} - SS2 \tag{8}$$

EJEMPLO

EN LA DETERMINACION DEL NUMERO DE OCTANOS DE UNA GASOLINA, UN METODO USA UNA GASOLINA BASE Y SE TIENEN 6 ADITIVOS COMO CANDITATOS PARA FORMAR UNA NUEVA MARCA. EL EXPERIMENTO ES UNO DE CUADRADOS DE YUDEN 7x3: A CADA COMBUSTIBLE SE LE DAN 2 MINUTOS EN EL MOTOR Y EL RESULTADO SE REGISTRA EN UN INSTRUMENTO ESPECIAL, EL CUAL SE LEE A LOS 60, 90 Y 120 SEG PARA VERIFICAR LA ESTABILIDAD; UNA MARCADA DIFERENCIA EN LA LECTURA A LOS 90 Y 120 SEG ES CAUSA DE ALARMA; LOS BLOQUES SON GRUPOS DE 3 LECTURAS DE 2 MINUTOS. LOS RESULTADOS FUERON:

FACTOR III (TRATAMIENTOS O GASOLINAS)	FACTOR I (BLOQUES) 1	2	3	4	5	6	7	TOTAL ($X_{.j.}$)
A	(1) 43				(3) 44		(2) 41	128
B	(2) 34	(1) 36				(3) 32		102
C		(2) 32	(1) 33				(3) 27	92
D	(3) 47		(2) 47	(1) 44				138
E		(3) 46		(2) 40	(1) 41			127
F			(3) 43		(2) 35	(1) 36		114
G				(3) 33		(2) 32	(1) 33	98
TOTAL ($X_{i..}$)	124	114	123	117	120	100	101	799

$$\overline{X}_{...} = 799/3x7 = 38.0476;\ 3x7x38.0476^2 = 30,400.05$$

$$SSB = \frac{1}{3}(124^2+114^2+123^2+117^2+120^2+100^2+101^2)-30,400.05 =$$

$$= 30,597-30,400.05 = 196.95$$

$$S\tilde{S}T = \frac{1}{3x1x7}[\{3x128-(124+120+101)\}^2+\{3x102-(124+114+100)\}^2+$$

$$+\{3x92-(114+123+101)\}^2+\{3x138-(124+123+117)\}^2+$$

$$+\{3x127-(114+117+120)\}^2+\{3x114-(123+120+100)\}^2+$$

$$+\{3x98-(117+100+101)\}^2] = 493.62$$

$$SST = \frac{1}{3}(128^2+102^2+92^2+138^2+127^2+114^2+98^2)-30,400.05 = 608.29$$

$$\tilde{S}SB = \frac{1}{3x1x7}[\{3x124-(128+102+138)\}^2+\{3x114-(102+92+127)\}^2+$$

$$+\{3x123-(92+138+114)\}^2+\{3x117-(138+127+98)\}^2+$$

$$+\{3x120-(128+127+114)\}^2+\{3x100-(102+114+98)\}^2+$$

$$+\{3x101-(128+92+98)\}^2] = \frac{1}{21}\{4^2+21^2+\ldots+(-15)^2\} = 82.29$$

$X_{..1} = 43 + 36 + 33 + 44 + 41 + 36 + 33 = 266$

$X_{..2} = 34 + 32 + 47 + 40 + 35 + 32 + 41 = 261$

$X_{..3} = 44 + 32 + 27 + 47 + 46 + 43 + 33 = 272$

$$SS2 = \frac{1}{7}(266^2 + 261^2 + 272^2) - 30,400.05 =$$

$$= \frac{1}{7}(70,756 + 68,121 + 73,984) - 30,400.05 =$$

$$= 30,408.71 - 30,400.05 = 8.66$$

$$TSS = 43^2 + 44^2 + 41^2 + 34^2 + \ldots + 33^2 - 30,400.05 = 706.95$$

$$SSE = TSS - SSB - S\tilde{S}T - SS2 = 7.72$$

$F_{0.01,6,6} = 8.47$, $F_{0.01,2,6} = 10.90$

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA ES:

FUENTE	G. de L.	SS	MS	F
ORDEN (BLOQUES)		196.95		
GASOLINA (AJUSTADA)	6	493.62	82.27	64.27 > 8.47
GASOLINA		608.29		
ORDEN (AJUSTADA)	6	82.29	13.72	10.72 > 8.47
TIEMPO	2	8.66	4.33	3.39 < 10.90
ERROR	6	7.72	1.28	
TOTAL	20	706.95		

14. ANALISIS DE EXPERIMENTOS FACTORIALES 2^k

EL EXPERIMENTO 2^k ES UN EXPERIMENTO DE k FACTORES CON DOS NIVELES CADA UNO.

CONSIDERESE UN EXPERIMENTO CON 2 FACTORES A Y B, CADA UNO CON 2 NIVELES, A LOS CUALES LLAMAREMOS "ALTO" Y "BAJO". DESIGNEMOS CON MAYUSCULAS A "LOS EFECTOS" Y CON MINUSCULAS A LAS COMBINACIONES DE LOS NIVELES DE LOS TRATAMIENTOS POSIBLES.

POR EJEMPLO, LAS CUATRO COMBINACIONES PARA ESTABLECER LOS TRATAMIENTOS PARA UN EXPERIMENTO 2^2 SON LAS QUE SE MUESTRAN EN LA TABLA SIGUIENTE. EL METODO DE DESIGNAR ESTOS TRATAMIENTOS ES INCLUYENDO LA LETRA MINUSCULA SI EL FACTOR ESTA AL NIVEL ALTO Y EXCLUYENDOLA EN CASO CONTRARIO, SI TODOS LOS FACTORES ESTAN AL NIVEL "BAJO" SE USA EL SIBOLO (1). POR CONVENIENCIA A_0 = NIVEL INFERIOR Y A_1 = NIVEL SUPERIOR DE A (DE MANERA SIMILAR PARA LOS OTROS FACTORES). LOS SIMBOLOS a, b, ab Y (1) REPRESENTAN LAS OBSERVACIONES (O SU SUMA SI HAY REPLICAS), PARA LAS COMBINACIONES NIVEL-TRATAMIENTO CORRESPONDIENTES.

COMBINACIONES NIVEL-TRATAMIENTO
EN UN EXPERIMENTO 2^2

	A_0	A_1
B_0	(1)	a
B_1	b	ab

EL EFECTO PROMEDIO DE A PARA ESTE EXPERIMENTO 2^2 PUEDE ESTIMARSE COMO: $A = \frac{1}{2}\{(ab-b) + [a-(1)]\}$, SIENDO ESTA LA DIFERENCIA PROMEDIO DEL NIVEL SUPERIOR E INFERIOR DE A, TOMANDO PRIMERO EL NIVEL SUPERIOR DE B Y DESPUES EL INFERIOR. OCASIONALMENTE SE OMITE EL COEFICIENTE 1/2, CON LO CUAL SE ESTIMA EL EFECTO TOTAL DE A.

DE MANERA SIMILAR, AL EFECTO PROMEDIO DE B SERA:

$$B = \frac{1}{2}\{(ab-a) + [b-(1)]\}$$

LA INTERACCION AB SE DEFINE COMO LA DIFERENCIA PROMEDIO; ESTO ES, EL EFECTO DE A AL NIVEL SUPERIOR DE B MENOS EL EFECTO DE A AL NIVEL INFERIOR DE B:

$$AB = \frac{1}{2}\{(ab-b) - [a-(1)]\}$$

ESTAS RELACIONES PUEDEN GENERARSE COMO SIGUE (CONSIDERANDO LOS EFECTOS TOTALES Y REEMPLAZANDO (1) POR 1)

$$A : (a-1)(b+1) = ab - b + a - (1)$$
$$B : (a+1)(b-1) = ab - a + b - (1)$$
$$AB : (a-1)(b-1) = ab - a - b + (1)$$

PARA DETERMINAR CUANDO EL RENDIMIENTO DE UN FACTOR PARTICULAR SE SUMA O SE RESTA, SE FORMA EL PRODUCTO DE BINOMIOS FORMADOS POR CADA UNA DE LAS LETRAS MENOS 1 SI EL FACTOR ESTA INCLUIDO EN LA INTERACCION (O EFECTO), O MAS 1 SI EL FACTOR NO ESTA INCLUIDO.

EJEMPLO

EN UN PROBLEMA DE TRES FACTORES A, B Y C (2^3), LAS EXPRESIONES PARA LOS EFECTOS E INTERACCIONES TOTALES, (SIN CONSIDERAR EL FACTOR MULTIPLICATIVO) SON:

$$A : (a-1)\ (b+1)\ (c+1) = abc + ab + ac - bc + a - b - c - (1)$$
$$B : (a+1)\ (b-1)\ (c+1) = abc + ab - ac + bc - a + b - c - (1)$$
$$C : (a+1)\ (b+1)\ (c-1) = abc - ab + ac + bc - a - b + c - (1)$$

$$AB : (a-1)\ (b-1)\ (c+1) = abc + ab - ac - bc - a - b + c + (1)$$
$$AC : (a-1)\ (b+1)\ (c-1) = abc - ab + ac - bc - a + b - c + (1)$$
$$BC : (a+1)\ (b-1)\ (c-1) = abc - ab - ac + bc + a - b - c + (1)$$
$$ABC : (a-1)\ (b-1)\ (c-1) = abc - ab - ac - bc + a + b + c - (1)$$

COMBINACIONES DE TRATAMIENTOS
DE UN EXPERIMENTO 2^3

	A_o		A_1	
	B_o	B_1	B_o	B_1
c_o	(1)	b	a	ab
c_1	c	bc	ac	abc

NOTACION PARA CALCULAR LOS EFECTOS

LA TABLA QUE SE REPRESENTA MAS ADELANTE SIRVE PARA CALCULAR LOS EFECTOS DE CADA FACTOR, EN LAS COLUMNAS SE TIENEN LOS EFECTOS PRINCIPALES Y LAS INTERACCIONES (I INDICA EL TOTAL PRODUCIDO POR EL EXPERIMENTO PARA CADA TRATAMIENTO); LOS

RENGLONES TIENEN LAS COMBINACIONES DE LOS TRATAMIENTOS.

EL CUERPO DE LA TABLA SE HACE CON SIGNOS + Y -. PARA CADA EFECTO LOS SIGNOS INDICAN COMO SE COMBINA CADA TRATAMIENTO. POR EJEMPLO, ABAJO DE I HAY PUROS "+", EL CUAL ESTABLECE QUE EL GRAN TOTAL ES LA SUMA DE TODOS LOS RENDIMIENTOS. EL EFECTO A TIENE EN SUS 8 RENGLONES UN SIGNO "+" DONDE EL TRATAMIENTO INCLUYE LA LETRA "a" (O SEA EL NIVEL SUPERIOR), Y "-" DONDE LA "a" NO ESTA INCLUIDA.

CUANDO LOS SIGNOS DE LOS EFECTOS PRINCIPALES SE HAN INCLUIDO EN LA TABLA, LOS SIGNOS DE LAS COLUMNAS RESTANTES SE OBTIENEN MEDIANTE LA MULTIPLICACION ALGEBRAICA DE ALGUNAS DE LAS COLUMNAS PRECEDENTES. POR EJEMPLO, LOS SIGNOS DE AB SON EL PRODUCTO DE LOS SIGNOS DE A Y B, RENGLON POR RENGLON.

SIGNOS ALGEBRAICOS PARA CALCULAR LOS EFECTOS

	EFECTO							
TRATAMIENTO	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
(1)	+	-	-	+	-	+	+	-
a	+	+	-	-	-	-	+	+
b	+	-	+	-	-	+	-	+
ab	+	+	+	+	-	-	-	-
c	+	-	-	+	+	-	-	+
ac	+	+	-	-	+	+	-	-
bc	+	-	+	-	+	-	+	-
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

PROPIEDADES DE LA TABLA

1. A EXCEPCION DE LA COLUMNA I, EL NUMERO DE SIGNOS "+" Y "-" ES EL MISMO EN CADA COLUMNA.

2. LA SUMA DE PRODUCTOS DE SIGNOS DE DOS COLUMNAS CUALESQUIERA ES CERO; ENTONCES, EL PRODUCTO TIENE IGUAL NUMERO DE SIGNOS MAS Y MENOS.

3. EL PRODUCTO DE DOS COLUMNAS CUALESQUIERA GENERA UNA COLUMNA INCLUIDA EN LA TABLA. POR EJEMPLO, AB X B = A; ABC X AB = C, ETC.

ESTAS PROPIEDADES ESTAN IMPLICADAS POR LA ORTOGONALIDAD (QUE INDICA QUE SI UNA INTERACCION ES NULA ENTONCES LOS EFECTOS SON INDEPENDIENTES).

NOTESE QUE LOS PRODUCTOS $AB \times B + AB^2 = A$

$$ABC \times BC = AB^2C^2 = A, \text{ ETC.}$$

TENIENDOSE PRODUCTOS MODULO 2, O SEA, EL EXPONENTE PUEDE SER SOLAMENTE 0 O 1; SI PASA DE 2 SE HACE 0.

ALGORITMO DE YATES

LOS CALCULOS Y LAS PRUEBAS PARA OBTENER LOS EFECTOS TOTALES Y LAS INTERACCIONES ENTRE LOS FACTORES, SE PUEDEN HACER CON UN PROCEDIMIENTO DESARROLLADO POR FRANK YATES; ESTE SERA ILUSTRADO MEDIANTE UN EJEMPLO

EJEMPLO

LA SIGUIENTE TABLA MUESTRA LAS COSECHAS OBTENIDAS (EN KGS), EN PARCELAS EXPERIMENTALES PARA EL CULTIVO DE PAJA, LOS CUALES RECIBIERON TRES TIPOS DE FERTILIZANTES MEZCLADOS CON NITRATO (n), FOSFATO (p) Y POTASIO (k). EN EL EXPERIMENTO SE TOMARON 3 REPLICAS DE LAS 8 COMBINACIONES POSIBLES DE LOS FERTILIZANTES, DANDO UN TOTAL DE 24 PARCELAS EN TOTAL.

PLAN EXPERIMENTAL Y GENERACIONES OBTENIDAS

				TOTALES/BLOQUE
pk 36.9	k 31.4	nk 43.6	n 33.8	
np 43.3	(1) 28.1	p 31.9	npk 41.8	290.8
npk 41.0	(1) 31.8	pk 36.5	p 33.0	
nk 42.8	np 35.2	k 35.9	n 35.4	291.6
np 35.0	k 29.6	pk 38.0	nk 36.5	
p 32.1	n 38.3	(1) 34.2	npk 41.5	285.2
			GRAN TOTAL	867.6

LOS TOTALES POR TRATAMIENTO SE DAN EN LA SIGUIENTE TABLA

GENERACIONES DE PAJA

	N_0		N_1	
	P_o	P_1	P_o	P_1
K_o	94.1	97.0	107.5	113.5
K_1	96.9	111.4	122.9	124.3

EL PRIMER PASO ES ESTIMAR LOS EFECTOS DE LOS TRATAMIENTO A PARTIR DE LAS PRODUCCIONES. EN LA SIGUIENTE TABLA SE HAN ARREGLADO LAS PRODUCCIONES TOTALES (COLUMNA 1) POR TRATAMIENTO. EL ORDEN DE LAS COMBINACIONES DE LOS TRATAMIENTOS DEBE MANTENERSE SIEMPRE DE MANERA QUE CADA FACTOR INTRODUCIDO SE SIGUE CON TODAS LAS COMBINACIONES DE ÉL Y DE LOS FACTORES PREVIAMENTE INTRODUCIDOS.

ALGORITMO DE YATES PARA UN EXPERIMENTO 2^3

TRATAMIENTO	PRODUCCION	(1)	(2)	(3)	EFECTO	MEDIA	SS
(1)	94.1	201.6	412.1	867.6	TOTAL		
n	107.5	210.5	455.5	68.8	N	5.73	197.2
p	97.0	219.8	29.9	24.8	P	2.07	25.6
np	113.5	235.7	38.9	-10.0	NP	-0.83	4.2
k	96.9	13.4	8.9	43.4	K	3.62	78.5
nk	122.9	16.5	15.9	9.0	NK	0.75	3.4
pk	111.4	26.0	3.1	7.0	PK	0.58	2.0
npk	124.3	12.9	-13.1	-16.2	NPK	-1.35	10.9
						TOTAL =	321.8

LA COLUMNA DE PRODUCCIONES SE USA PARA CALCULAR LA COLUMNA (1), ESTA A SU VEZ PARA CALCULAR LA (2), Y ASI SUCESIVAMENTE. LOS CUATRO PRIMEROS TÉRMINOS DE (1) SE ENCUENTRAN SUMANDO POR PAREJAS, DE ARRIBA A ABAJO, LAS PRODUCCIONES. POR EJEMPLO, 201.6 = 94.1 + 107.5. LOS CUATRO ULTIMOS TERMINOS DE LA MISMA

COLUMNA SE ENCUENTRAN CALCULANDO LA DIFERENCIA POR PAREJAS DE LAS GENERACIONES, RESTANDO EL NUMERO SUPERIOR DEL INFERIOR EN CADA CASO; POR EJEMPLO, 107.5 - 94.1 = 13.4, ETC. DE MANERA IDENTICA SE ENCUENTRAN LOS VALORES DE LAS COLUMNAS (2) Y (3). DEBERAN DESARROLLARSE TANTAS COLUMNAS DE ESTAS COMO NUMERO DE FACTORES HAY EN EL EXPERIMENTO (3 EN NUESTRO EJEMPLO). LA COLUMNA (3) DA EL EFECTO TOTAL DEL FACTOR (O INTERACCION DESIGNADO CON LA LETRA MINUSCULA. PARA OBTENER EL EFECTO PROMEDIO DIVIDIMOS LOS ELEMENTOS DE (3) ENTRE EL NUMERO DE DIFERENCIAS QUE HAY EN CADA EFECTO TOTAL (4 EN ESTE CASO) POR EL NUMERO DE REPLICAS $2^{n-1}r$ (3 EN ESTE CASO), O SEA 3 x 4 = 12 (QUE ES EQUIVALENTE A LA MITAD DEL NUMERO DE PARCELAS). ESTOS VALORES SE MUESTRAN EN LA CUARTA COLUMNA.

HAY VERIFICACIONES PARA LOS CALCULOS:

a) LA SUMA DE LA COLUMNA (i) ES IGUAL A 2^i VECES LA GENERACION TOTAL DE LOS TRATAMIENTOS QUE TENGAN LOS PRIMEROS i FACTORES AL NIVEL "ALTO"; POR EJEMPLO, LA SUMA DE LA COLUMNA (3) ES 8 VECES EL TOTAL GENERADO DE npk, ES DECIR, 8 x 124.3 = 994.4; LA SUMA DE LA COLUMNA (2) ES 4 VECES EL TOTAL GENERADO POR np Y npk, O SEA, 951.2 = (113.5 + 124.3) x 4, ETC.

b) EL TERMINO QUE ENCABEZA LA COLUMNA (3) ES EL GRAN TOTAL

c) LA SUMA DE CUADRADOS DE LOS OTROS TERMINOS DE LA COLUMNA (3) DIVIDIDA ENTRE EL NUMERO DE PARCELAS (24) DA LA SUMA DE CUADRADOS DE LOS TRATAMIENTOS:

$$SST = (68.8^2 + 24.8^2 + \ldots + 7.0^2 + 16.2^2)/24 = 321.9$$

DE LOS RESULTADOS ANTERIORES PUEDEN DERIVARSE LAS SIGUIENTES CONCLUSIONES:

1. LOS EFECTOS N, P Y K SON TODOS POSITIVOS.

2. LOS EFECTOS NK Y PK SON POSITIVOS, INDICANDO QUE LA APLICACION DE POTASIO TIENDE A INCREMENTAR LOS EFECTOS DEL NITRATO Y DEL FOSFATO.

3. EL EFECTO NP ES NEGATIVO, MOSTRANDO QUE LA PRESENCIA DE NITRATO REDUCE EL EFECTO DEL FOSFATO. DE HECHO, EN PRESENCIA DE NITRATO EL EFECTO MEDIO DEL FOSFATO SE REDUCE A $2.07 - 0.83 = 1.24$.

4. LA INTERACCION NPK ES NEGATIVA, INDICANDO QUE CUANDO EL POTASIO ESTA PRESENTE LA INTERACCION NP SE REDUCE Y QUE EL EFECTO MEDIO DEL FOSFATO SE REDUCE AUN MAS. EL EFECTO MEDIO DEL FOSFATO EN PRESENCIA DE NITRATO Y POTASIO ES $2.07 - 0.83 + 0.58 - 1.35 = 0.47$.

5. LA CONCLUSION SOBRE TODO ESTO ES QUE EL NITRATO Y EL POTASIO DAN EFECTOS BENEFICOS, ESPECIALMENTE CUANDO SE APLICAN JUNTOS; POCO SE GANA APLICANDO FOSFATO SI EL NITRATO ESTA PRESENTE Y ESPECIALMENTE SI EL NITRATO ESTA TAMBIEN PRESENTE.

6. POSIBLEMENTE SE HUBIERA LLEGADO A ESTAS MISMAS CONCLUSIONES

- INSPECCIONANDO LAS PRODUCCIONES MEDIAS, PERO PARA MAS DE TRES FACTORES ESTA CONCLUSION ES MAS DIFICIL, AUN CUANDO LA INSPECCION DE LOS EFECTOS E INTERACCIONES MEDIAS SEA AUN PO SIBLE.

ES IMPORTANTE CONOCER CUALES DE LOS EFECTOS E INTERACCIONES ME DIOS SON SIGNIFICATIVOS; ES DECIR, QUE TAN CONFIABLES SON ESAS CARACTERISTICAS DEL EXPERIMENTO. PARA ESTO SE REQUIERE CALCU- LAR ERRORES ESTANDAR (A PESAR DE QUE LA MAGNITUD RELATIVA DE LOS EFECTOS E INTERACCIONES CASI SIEMPRE DA UNA BUENA GUIA DE SU CONFIABILIDAD), Y LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA. ESTE ES UN TIPO DE ANALISIS DE BLOQUES ALEATORIZADOS CUYA TABLA ANOVA ES LA SIGUIENTE

TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA

FUENTE	G. DE L.	SS	MS
BLOQUES	2	3.0	
TRATAMIENTOS	7	321.9	
ERROR	14	124.6	8.90
TOTAL	23	449.5	

LOS ERRORES ESTANDAR DE LOS EFECTOS DE LOS TRATAMIENTOS PUE- DEN CALCULARSE COMO SIGUE: SI S^2 ES LA VARIANCIA RESIDUAL POR UNIDAD, ENTONCES LOS ERRORES ESTANDAR PARA LOS EFECTOS TOTA- LES Y MEDIOS SE DEFINEN ASI:

PARA LOS EFECTOS TOTALES: $S_t = \sqrt{2^n r S^2}$

PARA LOS EFECTOS MEDIOS: $S_m = \sqrt{\dfrac{S^2}{2^{n-2} r}}$

DONDE n = NUMERO DE FACTORES (3 EN NUESTRO CASO) Y

r = NUMERO DE REPLICAS (3 EN NUESTRO CASO).

PARA EL EJEMPLO ANTERIOR:

$$S_m = \sqrt{\frac{8.90}{2^{3-2} \times 3}} = \pm 1.22$$

USANDO LA DISTRIBUCION t CON 14 G. DE L. PARA NIVELES DE SIGNIFICANCIA DE 5 Y 1%.

$$t_{\alpha=0.05} = 2.14 \Rightarrow N.S_1 = 1.22 \times 2.14 = \pm 2.61$$

$$t_{\alpha=0.01} = 2.98 \Rightarrow N.S_2 = 1.22 \times 2.98 = \pm 3.64$$

COMPARANDO ESTOS VALORES CON LOS EFECTOS MEDIOS, SE OBSERVA QUE PARA $\alpha = 0.05$ N Y K SON SIGNIFICATIVOS, MIENTRAS QUE PARA $\alpha = 0.01$ N ES SIGNIFICATIVO Y K LO ES LIGERAMENTE; NINGUN OTRO EFECTO ES SIGNIFICATIVO.

OTRA FORMA DE LLEGAR A ESTAS CONCLUSIONES ES CALCULANDO LA SUMA DE CUADRADOS PARA CADA EFECTO SEPARADAMENTE. ESTO SE LOGRA ELEVANDO AL CUADRADO CADA COMPONENTE DE LA COLUMNA (3) DE LA TABLA DEL ALGORITMO DE YATES Y DIVIDIENDO ENTRE EL TOTAL DE OBSERVACIONES; POR EJEMPLO, PARA N TENEMOS $68.8^2/24 = 197.2$,

ETC. ESTOS VALORES ESTAN ANOTADOS EN LA ULTIMA COLUMNA DE ESA TABLA.

CON ESTO SE TIENE PARTICION DE LA SUMA DE CUADRADOS DE LOS TRATAMIENTOS. CON ESTOS VALORES SE PUEDE INTEGRAR LA TABLA ANOVA SIGUIENTE PARA HACER EL ANALISIS DE SIGNIFICANCIA.

TABLA ANOVA

FUENTE	G. DE L.	SS	MS	F CALCULADAS
BLOQUES	2	3.0	1.5	0.17
n	1	157.2	197.2	22.16
p	1	25.6	25.6	2.88
np	1	4.2	4.2	0.47
k	1	78.5	78.5	8.82
nk	1	3.4	3.4	0.38
pk	1	2.0	2.0	0.22
npk	1	10.9	10.9	1.22
ERROR	14	124.6	8.9	
TOTAL	23	449.5		

$F_{\alpha=0.05} = 4.60$, $F_{\alpha=0.05} = 3.74$

$F_{\alpha=0.01} = 8.86$, $F_{\alpha=0.01} = 6.51$

COMPARANDO LAS F TEORICAS CON LAS CALCULADAS SE LLEGA A LAS MISMAS CONCLUSIONES ANTERIORES.

COMO PASO FINAL PARA LA PRESENTACION DE RESULTADOS DEBERAN PREPARARSE TABLAS DE MEDIAS Y ERRORES ESTANDAR. LAS TABLAS DE MEDIAS PUEDEN CONSTRUIRSE DE LAS PRODUCCIONES DIRECTAMENTE O DE LOS EFECTOS CALCULADOS, PREFIRIENDOSE ESTO ULTIMO CUANDO HAY MUCHOS FACTORES INVOLUCRADOS.

EN EL EJEMPLO QUE SE VIENE DESARROLLANDO LA PRODUCCION MEDIA TOTAL ES

$$\bar{x} = \frac{867.6}{24} = 36.15$$

CON ESTO SE TIENE:

PRODUCCION MEDIA CON NITRATO (n) $= \bar{x} + 1/2\ N = 36.15 + 1/2(5.73) = 39.02$

PRODUCCION MEDIA SIN NITRATO $= \bar{x} - 1/2\ N = 33.28$

DE MANERA SIMILAR, PARA CONSTRUIR UNA TABLA DE DOS DIRECCIONES QUE MUESTRE LA INTERACCION DEL NITRATO Y POTASIO SE TIENE:

PRODUCCION MEDIA CON n Y k $= \bar{x} + 1/2\ (N + K + NK) = 41.20$

PRODUCCION MEDIA CON n Y SIN k $= \bar{x} + 1/2\ (N - K - NK) = 36.83$

PRODUCCION MEDIA SIN n Y CON k $= \bar{x} + 1/2\ (-N + K - NK) = 34.72$

PRODUCCION MEDIA SIN n O k $= \bar{x} + 1/2\ (-N - K + NK) = 31.85$

TABLA DE MEDIAS PARA EL NITRATO Y POTASIO

	SIN n	CON n	MEDIA
SIN k	31.85	36.83	34.34
CON k	34.72	41.20	37.96
MEDIA	33.29	39.20	36.15

RESUMEN

EL DISEÑO FACTORIAL 2^k PRUEBA k FACTORES A DOS NIVELES CADA UNO, TIENE 2^k COMBINACIONES DE POSIBLES TRATAMIENTOS Y PUEDEN HACERSE $2^k -1$ COMPARACIONES EN FORMA DE EFECTOS PRINCIPALES E INTERACCIONES; POR EJEMPLO, CON CINCO FACTORES A, B, C, D, E; SE REQUIEREN $2^5 = 32$ COMBINACIONES DE TRATAMIENTOS Y PUEDEN HACERSE 31 COMPARACIONES COMO SIGUE:

EFECTOS PRINCIPALES, A, B, C, D, E	5
INTERACCIONES DE PRIMER ORDEN AB, AC, ETC.	10
INTERACCIONES DE SEGUNDO ORDEN ABC, ABD, ETC.	10
INTERACCIONES DE TERCER ORDEN, ABCD, ABCE, ETC.	5
INTERACCIONES DE CUARTO ORDEN, ABCDE	1
TOTAL	31

ES IMPORTANTE SEÑALAR QUE LA INTERPRETACION DE LAS INTERACCIONES DE TERCERO Y MAYOR ORDEN ES COMPLICADA Y NECESITA CONSIDERARSE CUIDADOSAMENTE A LA LUZ DE LAS OTRAS INTERACCIONES QUE PAREZCAN IMPORTANTES. USUALMENTE TALES INTERACCIONES NO REFLEJAN EFECTOS REALES.

RESULTA TAMBIEN IMPORTANTE EL COMENTARIO DE YATES (1937) AL RESPECTO: "EL EXPERIMENTADOR... DEBE EVITAR DAR ENFASIS EXAGERADO A ALGUNAS INTERACCIONES AISLADAS DE ALTO ORDEN ESTADISTICAMENTE SIGNIFICATIVAS QUE NO TENGAN SIGNIFICADO FISICO APARENTE. SI SE ESTA USANDO UN NIVEL DE SIGNIFICANCIA DE 1 EN 20 (0.05), UNO DE CADA VEINTE EFECTOS PRINCIPALES E INTERACCIONES SERA EN PROMEDIO ESTADISTICAMENTE SIGNIFICANTE, AUN CUANDO LOS TRATAMIEN-

TOS NO PRODUZCAN EFECTOS EN TODOS. TALES RESULTADOS ANOMALOS JUNTO CON LOS EFECTOS NO SIGNIFICATIVOS DEBERAN ANOTARSE Y RESERVARSE EL JUICIO HASTA QUE SE ACUMULE MAS INFORMACION".

EL ANALISIS DEL EXPERIMENTO FACTORIAL 2^k SIGUE LAS LINEAS INDICADAS EN EL EJEMPLO ANTERIOR SIENDO LOS PASOS PRINCIPALES:

a) EL ALGORITMO DE YATES SE DESARROLLA HASTA k PASOS, LOS VALORES FINALES DIVIDIDOS ENTRE LA MITAD DEL NUMERO DE OBSERVACIONES (N/2) DAN LOS EFECTOS DE LOS TRATAMIENTOS Y LAS INTERACCIONES. ESTOS PUEDEN EXAMINARSE DIRECTAMENTE.

b) EL ERROR ESTANDAR DE LOS EFECTOS Y LAS INTERACCIONES SE CALCULA CON $4S^2/N$, DONDE S^2 SE OBTIENE DEL ANALISIS DE VARIANCIA DEL EXPERIMENTO. ESTE PUEDE USARSE PARA PROBAR LA SIGNIFICANCIA DE LOS EFECTOS. SI SE DESEA UN PROCEDIMIENTO ALTERNATIVO, LA SUMA DE CUADRADOS DE LOS TRATAMIENTOS PUEDE PARTIRSE ENTRE LOS COMPONENTES CORRESPONDIENTES A LOS EFECTOS PRINCIPALES E INTERACCIONES.

c) EL ANALISIS TERMINA CONSTRUYENDO LAS TABLAS DE MEDIAS PARA LOS EFECTOS SIGNIFICATIVOS, LAS CUALES PUEDEN CONSTRUIRSE DIRECTAMENTE O USANDO LOS EFECTOS ESTIMADOS.

EJEMPLO

EL DESARROLLO DE UN PROCESO DE FERMENTACION INDUSTRIAL USUALMENTE COMIENZA CON UN ESTUDIO DE LABORATORIO DE LOS REQUERIMIENTOS FISIOLOGICOS DE LOS MICROORGANISMOS INMISCUIDOS. EN UNO DE TALES ESTUDIOS SE ENCONTRO QUE UNA SUSTANCIA UTIL LA SEGREGA UNA

ESPECIE DE MOHO CUANDO CRECE EN UN MEDIO DE CULTIVO LIQUIDO POR LO QUE SE DESEO INCREMENTAR LA PRODUCCION. PARA LA FORMACION DE LA SUSTANCIA SE SABIA QUE DEPENDIA PRINCIPALMENTE DE LOS NIVELES DE DOS INGREDIENTES EN EL MEDIO DE CULTIVO, Y DE LA TEMPERATURA, LA AEREACION, EL PH, Y LA EDAD EN QUE EL CULTIVO ERA LOGRADO.

SE SOSPECHO QUE CUATRO DE ESOS SEIS FACTORES PODIAN SER INDEPENDIENTES. PARA PROBAR ESTO SE DESARROLLO UN EXPERIMENTO FACTORIAL 2^4 CON DOS INGREDIENTES EN EL MEDIO DE CULTIVO (X_1, X_2) Y DOS FACTORES AMBIENTALES (X_4, X_5); PARA CADA TRATAMIENTO SE PREPARARON DUPLICADOS. LOS DATOS PRESENTADOS EN LA SIGUIENTE TABLA ESTAN CODIFICADOS. LOS EFECTOS SE REPORTARON COMO UNIDADES PRODUCIDAS (UP) POR UNIDAD DE DISEÑO (UD). HAY 2 REPLICAS PARA CADA UNA DE LAS COMBINACIONES DE LOS FACTORES.

EXPERIMENTO DE FERMENTACION 2^4

		X_1	- 1		+ 1	
X_4	X_5	X_2	- 1	+ 1	- 1	+ 1
- 1	- 1		32.7	50.4	70.6	115
			19.3	89.8	84.5	108.6
	+ 1		20.2	94.1	76.1	133.6
			29.9	96.5	73.3	131.6
+ 1	- 1		50.0	72.6	104.2	81.3
			52.1	76.9	103.4	88.2
	+ 1		50.5	91.8	78.6	108.3
			49.1	86.9	74.1	108.3

ALGORITMO DE YATES PARA EL PROBLEMA DE LA FERMENTACION

TRATAMIENTO GENERACION						EFECTO MEDIO		G. DE L.		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7) = (6)/16	$(6)^2/32$ = (8)		F CAL.	***
(1)	52	207.1	610.9	1239.6	2542.5					
X_1	155.1	403.8	628.7	1302.9	536.9	33.56	9008.2	1	448.17	***
X_2	180.2	309.7	655.3	272.0	605.3	37.83	11449.6	1	569.63	***
X_1X_2	223.6	319.0	647.6	264.9	-185.1	-11.57	1070.7	1	53.27	***
X_4	102.1	199.5	146.5	206.0	10.1	0.63	3.2	1	0.16	
X_1X_4	207.6	455.8	125.5	399.3	-103.9	-6.49	337.4	1	16.79	***
X_2X_4	149.5	252.3	173.9	-145.2	-300.7	-18.79	2825.6	1	140.58	***
$X_1X_2X_4$	169.5	395.3	91.0	-39.9	-16.3	-1.02	8.3	1	0.41	
X_5	50.1	103.1	196.7	17.8	63.3	3.96	125.2	1	6.23	*
X_1X_5	149.4	43.4	9.3	-7.7	-7.1	-0.44	1.6	1	0.08	
X_2X_5	190.6	105.5	256.3	-21.0	193.3	12.08	1167.7	1	58.9	***
$X_1X_2X_5$	265.2	20.0	143.0	-82.9	105.3	6.58	346.5	1	17.22	***
X_4X_5	99.6	99.3	-59.7	-187.4	-25.5	-1.59	20.3	1	1.01	***
$X_1X_4X_5$	152.7	74.6	-85.5	-113.3	-61.9	-3.87	119.7	1	5.96	**
$X_2X_4X_5$	178.7	53.1	-24.7	- 25.8	74.1	4.63	171.6	1	8.54	
$X_1X_4X_2X_5$	216.6	37.9	-15.2	9.5	35.3	2.21	38.9	1	1.94	
RESIDUAL							20.10	16		

ANALISIS DE VARIANCIA

FUENTE	G. DE L.	S.S	MS	F_c	$F_{0.05,15,16}$
BLOQUES	$\cancel{1} \Rightarrow 0$	0.20			
TRATAMIENTOS	15	26694.50	1779.63	88.28* >	2.35
RESIDUAL	16	321.58	20.10		
TOTAL	31	27016.08			

DE TABLAS:

$F_{0.95,1,16} = 4.49$; $F_{0.99,1,16} = 8.53$; $F_{0.999,1,16} = 16.12$

$$\text{ERROR ESTANDAR} = \sqrt{\frac{20.10}{4 \times 2}} = \pm 1.59$$

$t_{16,0.95} = 2.12$, $t_{16,0.99} = 2.92$, $t_{16,0.999} = 4.01$, DE DONDE

$N.S_{0.95} = 2.12 \times 1.59 = \pm 3.37$

$N.S_{0.99} = 2.92 \times 1.59 = \pm 4.64$

$N.S_{0.999} = 4.01 \times 1.59 = \pm 6.38$

COMPARANDO LOS EFECTOS MEDIOS CON ESTOS NIVELES DE SIGNIFICANCIA Y LAS ESTADISTICAS F CALCULADAS CON LAS F TEORICAS, SE OBSERVA LA COINCIDENCIA DE RESULTADOS PARA LOS EFECTOS SIGNIFICATIVOS INDICADOS PARA LOS ASTERISCOS SITUADOS EN LA ULTIMA COLUMNA DE LA TABLA.

LAS CONCLUSIONES A LAS QUE SE LLEGA SON:

a) LOS DOS INGREDIENTES EN EL MEDIO DE CULTIVO (x_1 Y x_2) ACTUANDO SEPARADAMENTE FAVORECEN LA REPRODUCCION DE LA SUBSTANCIA; SIN EMBARGO, UNO EN PRESENCIA DEL OTRO LA REDUCEN.

b) SE OBSERVA QUE LOS EFECTOS PRINCIPALES DE x_1 Y x_2 SE TOMAN EN CUENTA EN LA MAYORIA DE LAS DIFERENCIAS ENTRE LAS PREPARACIONES.

c) LA INTERACCION MAS NEGATIVA ES POSIBLE, CIERTOS REQUERIMIENTOS NUTRICIONALES DEL MOHO PUEDEN ALIMENTARSE POR CUALQUIERA DE LOS INGREDIENTES.

d) ES SORPRENDENTE ENCONTRAR QUE LOS FACTORES AMBIENTALES x_4 Y x_5 TIENEN POCO EFECTO DIRECTO, PERO EJERCEN SU INFLUENCIA A TRAVES DE SU INTERACCION CON X_2 DE MANERA INVERSA.

e) IDEM QUE d) PERO EN MENOS GRADO CON X_1

f) NINGUNO DE LOS CUATRO FACTORES ES INDEPENDIENTE DE LOS OTROS, EN EL SENTIDO DE AFECTAR LA GENERACION DE MANERA PURAMENTE ADITIVA.

EJEMPLO

EN UNA PLANTA PILOTO SE OBTUVIERON LOS SIGUIENTES DATOS:

PRUEBA No.	TEMPERATURA °C	CONCENTRACION %	CATALIZADOR A o B	RESULTADO gramos
1	160	20	A	60
2	180	20	A	72
3	160	40	A	54
4	180	40	A	68
5	160	20	B	52
6	180	20	B	83
7	160	40	B	45
8	180	40	B	80

A. CALCULAR LOS EFECTOS PRINCIPALES Y LAS INTERACCIONES

B. REALICE EL ANALISIS DE VARIANCIA

LOS DATOS ANTERIORES SE PUEDEN REESCRIBIR EN LA SIGUIENTE TABLA:

FACTOR C	FACTOR A			
	CATALIZADOR A		CATALIZADOR B	
TEMPERATURA	FACTOR B		FACTOR B	
	CONC.=20%	CONC.=40%	CONC.=20%	CONC.=40%
160°	60 (1)	54 b	52 a	45 ab
180°	72 c	68 bc	83 ac	80 abc

POR LO TANTO, SE TIENE UN EXPERIMENTO FACTORIAL 2^3. APLICANDO LA ECUACION GENERAL, LOS EFECTOS PRINCIPALES E INTERACCIONES ESTAN DADAS POR:

EFECTO A: (a-1)(b+1)(c+1) = abc+ab+ac-bc+a-b-c-(1)

B: (a+1)(b-1)(c+1) = abc+ab-ac+bc-a+b-c-(1)

C: (a+1)(b+1)(c-1) = abc-ab+ac+bc-a-b+c-(1)

AB: (a-1)(b-1)(c+1) = abc+ab-ac-bc-a-b+c+(1)

AC: (a-1)(b+1)(c-1) = abc-ab+ac-bc-a+b-c+(1)

BC: (a+1)(b-1)(c-1) = abc-ab-ac+bc+a-b-c+(1)

ABC: (a-1)(b-1)(c-1) = abc-ab-ac-bc+a+b+c-(1)

DONDE LAS COMBINACIONES DE TRATAMIENTOS SE INDICAN EN LA MISMA TABLA ANTERIOR. SUSTITUYENDO SE TIENE QUE:

EFECTO A: 80+45+83-68+52-54-72-60 = 6

B: 80+45-83+68-52+54-72-60 = -20

C: 80-45+83+68-52-54+72-60 = 92

AB: 80+45-83-68-52-54+72+60 = 0

AC: 80-45+83-68-52+54-72+60 = 40

BC: 80-45-83+68+52-54-72+60 = 6

ABC: 80-45-83-68+52+54+72-60 = 2

Y, POR LO TANTO, LAS SUMAS DE CUADRADOS CORRESPONDIENTES SERAN:

$$SSX = \frac{(\text{efecto X})^2}{n2^k}$$

ES DECIR:

$$SSA = \frac{6^2}{8} = 4.5$$

$$SSB = \frac{(-20)^2}{8} = 50$$

$$SSC = \frac{92^2}{8} = 1058$$

$$SSAB = \frac{0}{8} = 0$$

$$SSAC = \frac{40^2}{8} = 200$$

$$SSBC = \frac{6^2}{8} = 4.5$$

$$SSABC = \frac{2^2}{8} = 0.5$$

POR OTRA PARTE, LA SUMA DE CUADRADOS TOTAL SERA:

$$SST = \Sigma\Sigma\Sigma\ X_{ijk}^2 - \frac{(\Sigma\Sigma\Sigma X_{ijk})^2}{n2^k}$$

$$\Sigma\Sigma\Sigma\ X_{ijk} = 60+54+52+45+72+68+83+80 = 514$$

$$n2^k = 8;\ (\Sigma\Sigma\Sigma\ X_{ijk})^2/nk = 514^2/8 = 33,024.50$$

$$\Sigma\Sigma\Sigma(X_{ijk})^2 = 60^2+54^2+52^2+45^2+72^2+68^2+83^2+80^2 = 34,342$$

POR TANTO:

$$SST = 34,342 - 33,024.50 = 1,317.5$$

Y:

$SSE = SST-SSA-SSB-SSC-SSAB-SSAC-SSBC-SSABC$

$SSE = 1,317.5-4.5-50-1,058-0-200-4.5-0.5 = 0$

LO CUAL COMPRUEBA LOS RESULTADOS ANTERIORES, PUESTO QUE EN UN EXPERMIENTO 2^k CON UNA SOLA REPLICA ES IMPOSIBLE CALCULAR UN VALOR DE MSE (YA QUE SSE = 0 Y LOS GRADOS DE LIBERTAD $n2^k(n-1) = 2^k(1-1) = 0$).

SE ACOSTUMBRA, EN ESTE CASO, CONSIDERAR LA SUMA DE CUADRADOS RESIDUAL COMO LA SUMA DE LAS INTERACCIONES; PARA UN EXPERIMENTO 2^3 COMO ESTE, DONDE LOS EFECTOS DE ESTAS PUEDEN CONSIDERARSE NO SIGNIFICATIVOS, SE TOMAN TODAS LA INTERACCIONES, SI SUS SUMAS DE CUADRADOS NO SON MUY GRANDES.

DE LA INSPECCION DE LAS SUMAS DE CUADRADOS DE LAS INTERACCIONES, RESULTA CLARO QUE LA SSAC ES UN ORDEN DE MAGNITUD COMPARABLE A LOS DE LOS EFECTOS PRINCIPALES, POR LO QUE SE CONSIDERA CONVENIENTE NO INCLUIRLA EN LA SUMA DE CUADRADOS RESIDUAL.

DE ACUERDO A LO ANTERIOR EL ANALISIS DE VARIANCIA SERIA:

$SSE = SSAB+SSBC+SSABC = 0+4.5+0.5 = 5$

LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA QUEDARIA:

FUENTE DE VARIACION	SS	G. DE L.	MS	F
A	4.5	1	4.5	2.7
B	50	1	50	30
C	1058	1	1058	634.8
AC	200	1	200	120
RESIDUAL	5	3	1.6667	
TOTAL	1317.5			

COMO $F_{0.05,1,3} = 10.13$, RESULTAN SIGNIFICATIVOS, CON $\alpha = 5\%$, LOS EFECTOS DEL FACTOR B(CONCENTRACION), LOS DEL C(TEMPERATURA) Y LA INTERACCION AC.

COMPROBACION CON EL ALGORITMO DE YATES.

APLICANDO EL ALGORITMO DE YATES SE OBTIENE LA SIGUIENTE TABLA:

COMBINACION TRATAMIENTOS	DATOS (1)	(2)	(3)	(4)	EFECTO PROMEDIO (4)÷4	SUMA CUADRADOS $(4)^2 \div 8$
(1)	60	112	211	514	I:128.5	—
a	52	99	303	6	A:1.5	4.5
b	54	155	-17	-20	B:-5	50
ab	45	148	23	0	AB:0	0
c	72	-8	-13	92	C:23	1058
ac	83	-9	-7	40	AC:10	200
bc	68	11	-1	6	BC:1.5	4.5
abc	80	12	1	2	ABC:0.5	0.5
TOTAL	514					

OBSERVANDO LAS SUMAS DE CUADRADOS SE COMPRUEBAN LAS OBTENIDAS CON EL PROCEDIMIENTO NORMAL; EL RESTO DE LOS CALCULOS SE EFECTUARIA IGUAL.

EJEMPLO

CONSIDEREMOS EL EXPERIMENTO 2^4, CON UNA SOLA REPLICA, INDICADO EN LA SIGUIENTE TABLA:

	A_o				A_1			
	B_o		B_1		B_o		B_1	
	C_o	C_1	C_o	C_1	C_o	C_1	C_o	C_1
D_o	45 (1)	68 c	48 b	80 bc	71 a	60 ac	65 ab	65 abc
D_1	43 d	75 dc	45 db	70 dcb	100 ad	86 adc	104 dab	96 dacb

SOLUCION

DE ACUERDO A LAS EXPRESIONES GENERALES; LOS EFECTOS PRINCIPALES ESTARAN DADOS POR:

$$SSA = \frac{1}{n2^4}\left[(a-1)(b+1)(c+1)(d+1)\right]^2$$

$$= \frac{1}{16}\left[abcd - cbd + acd - cd - d + ad - bd + abd + abc - cb + ac - \ldots\right.$$
$$\left.\ldots - c - 1 + a - b + ab\right]^2$$

SUSTITUYENDO VALORES:

$$SSA = \frac{1}{16}\left[96 - 70 + 86 - 75 - 43 + 100 - 45 + 104 + 65 - 80 + 60 - 68 - 45 + \ldots\right.$$
$$\left. + 71 - 48 + 65\right]^2 = (173)^2/16 = 1870.56$$

SIMILARMENTE SE OBTIENEN:

$SSB = 39.06,\ SSC = 390.06,\ SSD = 855.56$

PARA LAS INTERACCIONES DE 2° ORDEN:

$$SSAB = \frac{1}{16}\left[(a-1)(b-1)(c+1)(d+1)\right]^2$$

$$= \left[abcd-bcd-acd+cd+abd-bd-ad+d+abc-bc-ac+c+ab-b-a+1\right]^2/16$$

$$= \left[96-70-86+75+104-45-100+43+65-80-60+68+65-48-71+45\right]^2/16$$

$$SSAB = (1)^2/16 = 0.06$$

SIMILARMENTE:

$SSAB=0.06, SSAC=1314.06, SSAD=1105.56, SSBC=22.56, SSBD=0.56, SSCD=5.06$

SE DESPRECIARAN EN ESTE CASO EFECTOS DE ORDEN MAYOR.

POR OTRA PARTE, EL PROMEDIO GLOBAL VALE:

$$\bar{X}_{...} = \frac{\Sigma\Sigma\Sigma X_{ijk}}{n2^k} = \frac{1}{16}\left[45+68+48+\ldots+104+96\right] = 1121/16 = 70.06$$

$$n2^k\bar{X}_{...}^{\,2} = 78534.458$$

POR TANTO:

$$SST = (45^2+68^2+48^2+\ldots+104^2+96^2) - 78534.458 = 5730.94$$

$$SSE = 5730.94 - 1870.56 - 39.06 - 390.06 - 855.56 - 0.06 - 1314.06 -$$

$$- 1105.56 - 22.56 - 0.56 - 5.06 = 127.84$$

LOS GRADOS DE LIBERTAD TOTALES SON: $n2^k - 1 = 16 - 1 = 15$

COMO SE CONSIDERAN 4 EFECTOS PRINCIPALES Y 6 INTERACCIONES, EL ERROR DEBE TENER $15 - 10 = 5$ g. DE l.

LA TABLA RESUMEN DE ANALISIS DE VARIANCIA ES:

FUENTE DE VARIACION	SS	G. DE L.	MS	F
A	1870.56	1	1870.56	73.15
B	39.06	1	39.06	1.53
C	390.06	1	390.06	15.25
D	855.56	1	855.56	33.46
AB	0.06	1	0.06	0.002
AC	1314.06	1	1314.06	51.39
AD	1105.56	1	1105.56	43.24
BC	22.56	1	22.56	0.88
BD	0.56	1	0.56	0.02
CD	5.06	1	5.06	0.198
ERROR	127.84	5	25.57	
TOTAL	5730.94	15		

CALCULO USANDO EL ALGORITMO DE YATES.

COMBINACION DE TRATAM.	DATOS (1)	(2)	(3)	(4)	(5)	EFECTO	(6) EFECTO PROMEDIO (5) ÷ 8	(7) SS $(6)^2 \div 16$
(1)	45	116	229	502	1127	1		
a	71	113	273	619	169	A	21.125	1785.06
b	48	128	292	16	25	B	3.125	39.06
ab	65	145	327	153	1	AB	0.125	0.0625
c	68	143	43	14	79	C	9.875	390.06
ac	60	149	-23	11	-145	AC	-18.125	1314.06
bc	80	161	116	-16	19	BC	2.375	22.563
abc	65	166	37	17	15	ABC	1.875	14.062
d	43	26	-3	44	117	D	14.625	855.56
ad	100	17	17	35	137	AD	17.125	1173.06
bd	45	-8	6	-66	-3	BD	0.375	0.5625
abd	104	-15	5	-79	33	ABD	4.125	68.06
cd	75	57	-9	20	-9	CD	1.125	5.063
acd	86	59	-7	-1	-13	ACD	1.625	10.563
bcd	70	11	2	2	-21	BCD	2.625	27.563
abcd	96	26	15	13	11	ABCD	1.375	7.5625

EXPERIMENTOS FACTORIALES 2^k CON EFECTOS CONFUNDIDOS

SUPONGASE QUE SE TIENEN DOS TIPOS DE PINTURA, A Y B, Y SE DISPONE DE DOS METODOS, 1 Y 2, PARA DETERMINAR SU REFLECTIVIDAD DESPUES DE SER APLICADA EN CIERTOS PANELES. SI LA PINTURA SE CALIFICARA MEDIANTE EL METODO 1 Y LA B MEDIANTE EL 2, CUALQUIER DIFERENCIA PODRIA IMPUTARSE AL METODO, LA PINTURA O A AMBOS, POR LO QUE LOS EFECTOS DEL METODO Y LA PINTURA QUEDARIAN CONFUNDIDOS; ES DECIR, NO SE PODRIA DISTINGUIR LA CAUSA DE LAS DIFERENCIAS QUE SE ENCONTRARON.

EN OCASIONES NO ES POSIBLE TENER LA SERIE COMPLETA DE RESULTADOS DENTRO DE UN SOLO BLOQUE; ESTO OBLIGA A INTEGRAR BLOQUES DE DATOS. SUPONGASE QUE UN EXPERIMENTO 2^3 SE DISEÑO CON LOS SIGUIENTES BLOQUES:

BLOQUE 1	BLOQUE 2
(1)	c
a	ac
b	bc
ab	abc

LA DIFERENCIA DE LOS TERMINOS DE AMBOS BLOQUES ES

$$(c - (1)) + (ac - a) + (bc - b) + (abc - ab)$$

QUE COINCIDE CON EL EFECTO DEL FACTOR C, POR LO QUE EL EFECTO DE ESTE QUEDA CONFUNDIDO CON EL DE LOS BLOQUES. SI LOS BLOQUES SE FORMARAN DE ALGUNA DE LAS FORMAS 1 Y 2 SIGUIENTES, ENTONCES QUEDARIAN CONFUNDIDAS LAS INTERACCIONES AB Y ABC, RESPECTIVAMENTE

FORMA 1		FORMA 2	
BLOQUE 1	BLOQUE 2	BLOQUE 1	BLOQUE 2
(1)	a	(1)	a
ab	b	ab	b
c	ac	ac	c
abc	bc	bc	abc

PARA DEMOSTRAR ESTO, BASTA ENCONTRAR LOS EFECTOS DE DICHAS INTERACCIONES Y COMPARARLOS CON LAS DIFERENCIAS DE AMBOS BLOQUES; ASI, PARA LA FORMA 1:

$$AB = (a - 1)(b - 1)(c + 1) = abc + ab + c + (1) - a - b - ac - bc$$

POR LO GENERAL DEBE EVITARSE QUE ALGUN EFECTO PRINCIPAL QUEDE CONFUNDIDO Y, EN OCASIONES, ALGUNA INTERACCION PREDEFINIDA; POR ESTE MOTIVO, SE DEBE SELECCIONAR ANTICIPADAMENTE LA INTERACCION QUE QUEDARA CONFUNDADA (POR LO GENERAL UNA DE ORDEN ALTO, QUE SE PRESUPONGA NO TIENE EFECTO IMPORTANTE).

EL BLOQUE QUE CONTIENE EL (1) SE DENOMINA <u>BLOQUE PRINCIPAL</u>; LOS OTROS BLOQUES SE FORMULAN A PARTIR DE ESTE, DE LA SIGUIENTE MANERA (SI HAY DOS BLOQUES): SE INCLUYEN EN EL PRINCIPAL A LOS TRATAMIENTOS CON UN NUMERO <u>PAR</u> O <u>CERO</u> DE LETRAS EN COMUN CON EL EFECTO QUE SE TRATA DE CONFUNDIR. ASI, EN LA FORMA 1 ANTERIOR EL EFECTO A CONFUNDIR ES AB; ESTE TIENE CERO LETRAS EN COMUN CON (1) Y c, Y DOS CON ab Y abc. EL OTRO BLOQUE SE INTEGRA CON LOS TRATAMIENTOS NO INCLUIDOS EN EL PRINCIPAL; SI HAY MAS DE DOS BLOQUES, PARA CADA UNO SE SELECCIONA UN TRATAMIENTO <u>NO INCLUIDO</u> EN EL BLOQUE PRINCIPAL, Y SE GENERAN LOS DEMAS MEDIANTE PRODUCTOS MODULO 2 DE ESTE TRATAMIENTO CON LOS DEL BLOQUE PRINCIPAL; PARA EL EJEMPLO EN CUESTION ESTO SERIA, TOMANDO A a COMO TRATAMIENTO: $a \times (1) = a$, $a \times ab = a^2b = b$, $a \times c = ac$ Y $a \times abc = a^2bc = bc$.

EJEMPLO

DISEÑAR UN EXPERIMENTO 2^4 CON 2 BLOQUES DE 8 TRATAMIENTOS CADA UNO, CONFUNDIENDO LA INTERACCION ACD

BLOQUE 1: (1), ac, cd, ad, b, abc, abd, bcd

BLOQUE 2: c x 1 = c, c x ac = a, c x cd = d, c x ad = acd,
c x b = bc, c x abc = ab, c x abd = abcd, c x bcd = bd

SUPONGASE AHORA QUE SE REQUIERE FORMAR 4 BLOQUES DE 4 TRATAMIENTOS CADA UNO. EN TAL CASO 3 EFECTOS QUEDARAN CONFUNDIDOS CON LOS BLOQUES; PERO ESTOS NO SON INDEPENDIENTES. POR TANTO, SE ESCOGEN 2 DE LOS EFECTOS Y EL OTRO QUEDA OBLIGADO POR EL PRODUCTO MODULO 2. POR EJEMPO, SI SE CONFUNDEN ABCD Y ABC, EL TERCER EFECTO SERA ABCD x ABC = $A^2B^2C^2D$ = D, QUE ES UN EFECTO PRINCIPAL (PARA EVITAR ESTO SE DEBEN SELECCIONAR CUIDADOSAMENTE LOS EFECTOS A CONFUNDIR).

ASI, SI SE CONFUNDIERAN AB Y BCD, EL TERCER EFECTO A CONFUNDIR SERIA AB x BCD = AB^2CD = ACD. PARA GENERAR EL BLOQUE PRINCIPAL SE PROCEDE COMO ANTES, CON EL REQUISITO ADICIONAL QUE CADA TRATAMIENTO QUE QUEDE EN EL TENGA UN NUMERO PAR O CERO DE LETRAS EN COMUN CON TODOS LOS EFECTOS QUE SE CONFUNDEN; ASI:

BLOQUE 1: (1), cd, abc, abd

BLOQUE 2: a x (1) = a, a x cd = acd, a x abc = bc, a x abd = bd

BLOQUE 3: b x (1) = b, b x cd = bcd, b x abc = ac, b x abd = ad

BLOQUE 4: c x (1) = c, c x cd = d, c x abc = ab, c x abd = abcd

EN GENERAL, EN UN EXPERIMENTO 2^k EN 2^r BLOQUES, QUEDAN CONFUNDIDOS $2^r - 1$ EFECTOS, DE LOS CUALES SOLO r SON INDPENDIENTES. ASIMISMO, EN EL BLOQUE PRINCIPAL SE TIENEN SOLAMENTE k - r

TRATAMIENTOS INDEPENDIENTES (APARTE DEL (1)); LOS DEMAS SE PUEDEN GENERAR A PARTIR DE ESTOS.

EJEMPLO

SE PRETENDE PROBAR LA EFICACIA DE UN RIFLE NUEVO; SE PIENSA QUE PUEDEN INFLUIR LOS SIGUIENTES FACTORES:

A: CANTIDAD DE POLVORA EN EL PROYECTIL
B: PESO DEL PROYECTIL
C: GEOMETRIA DE LA AGUJA DISPARADORA
D: MARCA DEL PROYECTIL

LA VARIABLE DE INTERES ES LA VELOCIDAD DEL PROYECTIL. POR LIMITACIONES DE TIEMPO Y DEL EQUIPO DE PRUEBA, SOLO SE PUEDEN HACER 8 PRUEBAS CADA DIA, POR LO QUE SE CONSIDERA LOGICO INTEGRAR BLOQUES (UNO POR CADA DIA): EL EXPERIMENTO ES 2^4 EN 2 BLOQUES DE 8 TRATAMIENTOS CADA UNO; SE ESCOGIO CONFUNDIR LA INTERACCION ABCD (SE SUPONE QUE ES CERO). LA VELOCIDAD REGISTRADA (CODIFICADA) EN CADA PRUEBA SE PRESENTA EN LA SIGUIENTE TABLA (LAS SUBRAYADAS CORRESPONDEN A UN DIA); DESPUES ESTAN LAS TABLAS DEL ALGORITMO DE YATES Y DEL ANALISIS DE VARIANCIA:

CANTIDAD DE POLVORA		A_0		A_1	
PESO DEL PROYECTIL		B_0	B_1	B_0	B_1
AGUJA	MARCA				
C_0	D_0	97	68	151	150
	D_1	75	53	145	141
C_1	D_0	39	15	100	66
	D_1	26	-16	97	54

BLOQUE (DIA) 1: (1), ab, ac, ad, bc, bd, cd, abcd
BLOQUE (DIA) 2: a, b, c, d, abc, abd, acd, bcd

ALGORITMO DE YATES

Tratamiento	Velocidad (1)	(2)	(3)	(4)	(5)		(6) $(5) \div 8$	(7) $(5)^2 \div 16$
(1)	97	248	466	686	1261	*I*		
a	151	218	220	575	547	*A*	68.375	18700.5625
b	68	139	414	248	−199	*B*	−24.875	2475.0625
ab	150	81	161	299	35	*AB*	4.375	76.5625
c	39	220	136	−88	−499	*C*	−62.375	15562.5625
ac	100	194	112	−111	−41	*AC*	−5.125	105.0625
bc	15	123	158	18	−87	*BC*	−10.875	473.0625
abc	66	38	141	17	−57	*ABC*	−7.125	203.0625†
d	75	54	−30	−246	−111	*D*	−13.875	770.0625
ad	145	82	−58	−253	51	*AD*	6.375	162.5625
bd	53	61	−26	−24	−23	*BD*	−2.875	33.0625
abd	141	51	−85	−17	−1	*ABD*	−0.125	0.0625†
cd	26	70	28	−28	−7	*CD*	−0.875	3.0625
acd	97	58	−10	−59	+7	*ACD*	0.875	3.0625†
bcd	−16	71	18	−38	−31	*BCD*	−3.875	60.0625†
abcd	54	70	−1	−19	+19	Days	2.375	(22.5625)
Total	1261							

ANALISIS DE VARIANCIA

Fuente	SS		G de L		MS	F
A		18700.56	1			280.96***
B		2475.06	1			37.19**
C		15562.56	1			233.81***
D		770.06	1			11.57*
Días		22.56	1			0.34
AB		76.56	1			1.15
AC		105.06	1			1.58
AD		162.56	1			2.44
BC		473.06	1			7.11
BD		33.06	1			0.50
CD		3.06	1			0.05
ABC	266.24	203.06	1	4	66.56	
ABD		0.06	1			
ACD		3.06	1			
BCD		60.06	1			
Total		38650.40†	15			

Valores Críticos $\begin{cases} F_{1,4,0.95} = 7.71 \\ F_{1,4,0.99} = 21.20 \end{cases}$

EN LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA SE APRECIA QUE LOS EFECTOS PRINCIPALES SON SIGNIFICATIVOS Y QUE NINGUNA INTERACCION LO ES, A LOS NIVELES DE CONFIANZA DEL 95 Y 99 POR CIENTO (LA BC PARECE SERLO, POR LO QUE NO DEBE DESCARTARSE); PARA ESTAS PRUEBAS SE TOMO COMO SUMA DE CUADRADOS RESIDUAL A LA SUMA DE CUADRADOS CORRESPONDIENTES A LAS INTERACCIONES DE TRES FACTORES.

CONFUSION PARCIAL

SI UN EXPERIMENTO SE PUEDE REALIZAR CON VARIAS REPLICAS COMPLETAS, NO ES NECESARIO CONFUNDIR EN CADA UNA AL MISMO EFECTO. SI SE CONFUNDEN VARIOS, SE DICE QUE EL EXPERIMENTO TIENE CONFUSION PARCIAL.

POR EJEMPLO, SI SE TIENE UN EXPERIMENTO 2^3 CON 4 REPLICAS, CADA UNA ARREGLADA EN DOS BLOQUES DE 4 ELEMENTOS CADA UNO, PODRIAN CONFUNDIRSE LAS INTERACCIONES ABC, BC, AC Y AB DE LA SIGUIENTE MANERA:

REPLICA	1		2		3		4	
	(1)	a	(1)	b	(1)	a	(1)	a
	bc	b	bc	c	b	ab	ab	b
	ac	c	c	ab	ac	c	c	ac
	ab	abc	abc	ac	abc	bc	abc	bc
EFECTO CONFUNDIDO	ABC		BC		AC		AB	

SI TODAS LAS INTERACCIONES DE UN MISMO ORDEN ESTAN CONFUNDIDAS, SE DICE QUE EL EXPERIMENTO ESTA BALANCEADO. TAL ES EL CASO DEL EJEMPLO ANTERIOR; SI EN EL NO APARECIERA LA REPLICA 1, SEGUIRIA SIENDO BALANCEADO, PERO SI DESAPARECIERA CUALQUIERA DE LAS OTRAS DEJARIA DE SERLO.

LA VENTAJA DE LA CONFUSION PARCIAL RADICA EN QUE SE DISPONE DE ALGUNA INFORMACION ACERCA DE LAS INTERACCIONES QUE SE

CONFUNDEN. AL ANALIZAR LOS RESULTADOS DEL EXPERIMENTO, LA SUMA DE CUADRADOS DE CADA INTERACCION CONFUNDIDA PARCIALMENTE SE BASA SOLO EN LAS REPLICAS EN QUE NO ESTA CONFUNDIDA. POR TANTO, AL APLICAR EL ALGORTIMO DE YATES LAS SUMAS DE CUADRADOS ASOCIADOS LAS INTERACCIONES CONFUNDIDAS DEBEN CORREGIRSE SUSTRAYENDOLE LA CANTIDAD QUE CORRESPONDE A LA REPLICA EN QUE ESTA CONFUNDIDA, Y COMO DIVISOR PARA CALCULAR EL EFECTO MEDIO SE TOMA EL NUMERO DE ELEMENTOS QUE TIENEN LOS BLOQUES EN QUE NO ESTA CONFUNDIDA; ASI, EN EL EJEMPLO ANTERIOR, EL DIVISOR ASOCIADO A LAS INTERACCIONES ABC, BC, AC Y AB SERIA 24 EN VEZ DE 32.

EJEMPLO

EN UN ESTUDIO SOBRE FERTILIZANTES SE TOMARON EN CONSIDERACION TRES FACTORES: A TIEMPO DE APLICACION, B TEMPERATURA AMBIENTE Y C DOSIFICACION DE COMPONENTES; COMO ETAPA PRELIMINAR SE TOMAN DOS NIVELES DE CADA FACTOR, POR LO QUE SE TIENE UN EXPERIMENTO 2^3. SE DISPONE DE DOS AREAS DE SEMBRADO (SE TIENEN DOS BLOQUES) Y SE SIEMBRAN DOS VECES (SE OBTIENEN DOS REPLICAS). EN LA PRIMERA SE CONFUNDIO ABC, Y EN LA SEGUNDA AB. LOS RESULTADOS DE LAS COSECHAS (CODIFICADOS) SON LOS SIGUIENTES:

	REPLICA 1		REPLICA 2	
	BLOQUE 1	BLOQUE 2	BLOQUE 1	BLOQUE 2
	(1) = 9	a = 8	(1) = 0	a = 9
	bc 13	b = 3	ab = 8	b = 2
	bc = 5	c = 15	c = 14	ac = 10
	ab = 11	abc = 11	abc = 13	bc = 12
TOTALES:	38	37	35	33
	PROM = 37.5		PROM = 34	

$$SSB = \{(38 - 37.5)^2 + (37 - 37.5)^2 + (35 - 34)^2 + (33 - 34)^2\}/4 = 0.625$$

PROMEDIO ENTRE REPLICAS = (37.5 + 34)/2 = 35.75

$SSR = \{(37.5 - 35.75)^2 + (34 - 35.75)^2\}/2 = 3.065$

$\bar{X}^2_{...} = (38 + 37 + 35 + 33)/16 = 8.94$

$\sum\sum\sum_{ijk} X^2_{ijk} - 16\bar{X}^2_{...} = 1573 - 1278.0625 = 294.9375$

EN LA SIGUIENTE TABLA DE YATES SE UTILIZAN LOS TOTALES CORRESPONDIENTES A CADA TRATAMIENTO

TRATAMIENTO (1)	COSECHA (2)	(3)	(4)	(5)	EFECTO (6)	EFECTO PROMEDIO (5)/8	PROMEDIO CUADRATICO $(5)^2/16$
(1)	9	26	50	143	I		
a	17	24	93	7	A	0.875	3.0625
b	5	44	22	3	B	0.375	0.5625
ab	19	49	-15	19	AB		
c	29	8	- 2	.43	C	5.375	115.5625
ac	15	14	5	-37	AC	-4.625	85.5625
bc	25	-14	6	7	BC	0.875	3.0625
abc	24	1	13	7	ABC		

TABLA ANOVA:

FUENTE	SS	G. DE L.	MS	F
A	3.0625	1		
B	0.5625	1		
C	115.5625	1	115.5625	14.7 > $F_{1,5,0.95}$
AB*	36.1250	1	36.1250	4.59
AC	85.5625	1	85.5625	10.9 > $F_{1,5,0.95}$
BC	3.0625	1		
ABC**	8.0000	1	8.0000	1.02
REPLICAS	3.0625	1		
BLOQUES	0.6250	2.		
RESIDUAL***	39.3125	5	7.8625	
TOTAL	294.9375	15		

$F_{1,5,0.95} = 6.61$; $F_{1,5,0.99} = 16.26$

* $SS_{AB} = \{19 - (35 - 33)\}^2/8 = 36.125$

** $SS_{ABC} = \{7 - (37 - 38)\}^2/8 = 8.0000$

*** $SS_R = 294.9375 - 255.6250 = 39.3125$

(255.6250 ES LA SUMA DE CUADRADOS HASTA BLOQUES, INCLUSIVE)

SE APRECIA QUE EL EFECTO DEL FACTOR C (DOSIFICACION) ES SIGNIFICATIVO AL 95% DE NIVEL DE CONFIANZA, ASI COMO LA INTERACCION DE EL CON A (TIEMPO DE APLICACION).

COMO ELEMENTO AUXILIAR PARA DEFINIR LOS SIGNOS DE LOS TERMINOS QUE APARECEN AL CALCULAR LOS EFECTOS, SE PUEDE UTILIZAR LA TABLA MOSTRADA EN LA SIGUIENTE PAGINA (TOMADA DE LA REF 1). ESTA ES UTIL PARA EXPERIMENTOS 2^k CON $2 \leq k \leq 5$.

ESA TABLA SIRVE TAMBIEN PARA DETERMINAR LOS TRATAMIENTOS QUE SE INCLUYEN EN EL BLOQUE PRINCIPAL, SIENDO ESTOS LOS QUE TIENEN EL MISMO SIGNO QUE (1) EN LA COLUMNA DEL EFECTO QUE SE DESEA CONFUNDIR. ASI POR EJEMPLO, EN UN EXPERIMENTO 2^4 CON LA INTERACCION ABCD CONFUNDIDA, EL SIGNO DE (1) BAJO LA COLUMNA ABCD ES +, POR LO QUE TODOS LOS TRATAMIENTOS QUE TENGAN ESTE SIGNO EN DICHA COLUMNA INTEGRARAN EL BLOQUE PRINCIPAL: ab, ac, bc, ad, bd, cd Y abcd.

REPLICAS FRACCIONADAS

EN OCASIONES POR FALTA DE RECURSOS O TIEMPO NO SE PUEDE DISEÑAR UN EXPERIMENTO QUE TENGA AL MENOS UNA REPLICA COMPLETA. CONSIDERESE, POR EJEMPLO, UN EXPERIMENTO 2^4 EN EL QUE SOLO SE PUEDEN REALIZAR 8 OBSERVACIONES Y , POR TANTO, SE TIENEN SOLO 7 GRADOS DE LIBERTAD; ESTO ES, SE TIENEN 7 PARES DE EFECTOS INSEPARABLES MAS UNO QUE NO SE PUEDE ESTIMAR.

FRACCIONAMIENTO A 1/2

POR EJEMPLO, CONSIDERESE EL EXPERIMENTO 2^4 FRACCIONADO O LA

EFECTOS PRINCIPALES E INTERACCIONES EN DISEÑOS FACTORIALES 2^2, 2^3, 2^4 Y 2^5

Efectos

TRATA-MIENTOS	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD	E	AE	BE	ABE	CE	ACE	BCE	ABCE	DE	ADE	BDE	ABDE	CDE	ACDE	BCDE	ABCDE
	2^2				2^3				2^4								2^5															
(1)	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−
a	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+
b	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+
ab	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−
c	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+
ac	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−
bc	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−
abc	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+
d	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+
ad	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−
bd	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−
abd	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+
cd	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−
acd	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+
bcd	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+
abcd	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
e	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+
ae	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−
be	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−
abe	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+
ce	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−
ace	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+
bce	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+
abce	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−
de	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−
ade	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+
bde	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+
abde	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−
cde	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+
acde	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−
bcde	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
abcde	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

MITAD, INDICADO EN LA TABLA SIGUIENTE:

		A_0		A_1	
		B_0	B_1	B_0	B_1
C_0	D_0	(1)			ab
	D_1		bd	ad	
C_1	D_0		bc	ac	
	D_1	cd			abcd

EL EFECTO DE A EN ESTE CASO ES

$$ab + ad + ac + abcd - (1) - bd - bc - cd$$

Y EL DE BCD ES

$$ab + ad - (1) - bd + ac + abcd - bc - cd$$

QUE COINCIDE CON EL DE A Y, POR TANTO, NO SE PUEDEN SEPARAR LOS EFECTOS DE CADA TRATAMIENTO. DE MANERA ANALOGA SE ENCUENTRA QUE CADA UNO DE LOS SIGUIENTES PARES DE EFECTOS QUEDAN DADOS POR LA MISMA ECUACION:

(A, BCD), (B, ACD), (C, ABD), (D, ABC)

(AB, CD), (AC, BD), (AD, BC), (I, ABCD)

SE APRECIA QUE LA INTERACCION ABCD ESTA CONFUNDIDA CON EL TOTAL I (ESTO SE PUEDE DETECTAR TAMBIEN AL OBSERVAR QUE ABCD ES LA INTERACCION CONFUNDIDA AL INTEGRAR UN BLOQUE CON LOS OCHO TRATAMIENTOS DE LA TABLA ANTERIOR).

A LOS PARES DE EFECTOS QUE NO PUEDEN SEPARARSE SE LES DENOMINA

PARES ALIADOS (EN EL EJEMPLO ANTERIOR HAY 7, PORQUE EL QUE CONTIENE A I NO SE CONSIDERA POR ALIADO).

POR LO ANTERIOR UN EXPERIMENTO $2^k/2$ CONTIENE A LOS TRATAMIENTOS DE UN BLOQUE DE UN EXPERIMENTO 2^k CONFUNDIDO EN DOS BLOQUES; EL EFECTO CONFUNDIDO EN EL ULTIMO ES EL CONTRASTE DEFINIDOR EN EL PRIMERO.

EL ALIADO DE CADA EFECTO SE PUEDE ENCONTRAR MEDIANTE SU INTERACCION GENERALIZADA CON EL CONTRASTE DEFINIDOR, MEDIANTE SU MULTIPLICACION MODULO 2. EN EL EJEMPLO ANTERIOR, EL CONTRASTE DEFINIDOR ES ABCD, POR LO QUE A ESTA ALIADA CON A x ABCD=BCD, AB CON AB x ABCD = CD, B CON B x ABCD = ACD, ETC.

EL PROCEDIMIENTO PARA SELECCIONAR UNA MITAD DE REPLICA ES:

1. SELECCIONE EL CONTRASTE DEFINIDOR
2. USE ESTE CONTRASTE PARA DIVIDIR EL EXPERIMENTO COMPLETO EN DOS BLOQUES
3. ESCOJA CUALQUIERA DE LOS DOS BLOQUES PARA DEFINIR LOS TRATAMIENTOS A EMPLEAR

AL CALCULAR CUALQUIER EFECTO CON UNO DE LOS DOS BLOQUES DEL PASO 2 ANTERIOR, LOS TERMINOS APARECERAN CON SIGNO CONTRARIO AL QUE SE TIENE AL CALCULAR DICHO EFECTO CON EL OTRO BLOQUE. ASI, EN EL EJEMPLO QUE SE VIENE PLANTEANDO, EL OTRO BLOQUE TENDRIA A LOS TRATAMIENTOS a, b, c, d, abc, acd, abd Y bcd; CON ESTE EL EFECTO DE A ES a - b - c - d + abc + acd + abd - bcd, QUE TIENE SIGNO OPUESTO AL CALCULADO CON EL OTRO BLOQUE.

EJEMPLO

EN UNA INVESTIGACION SOBRE LA EFICACIA DE FERTILIZANTES, SE TIENEN 5 FACTORES (A, B, C, D, E), CON DOS NIVELES CADA UNO, PERO POR RAZONES PRESUPUESTALES SOLO SE PUEDEN REALIZAR 16 OBSERVACIONES. POR TANTO, SE DISEÑA UN EXPERIMENTO 2^5 CON UNA REPLICA FRACCIONADA A LA MITAD $(2^5/2)$.

POR CONSIDERAR QUE LA INTERACCION ABCDE ES NULA, SE DECIDE CONSIDERARLA COMO CONTRASTE DEFINIDOR. POR CONSIGUIENTE LOS PARES ALIDADOS RESULTAN SER :

CON A : A x ABCDE = BCDE

CON B : B x ABCDE = ACDE

ETCETERA. EL RESUMEN DE LOS PARES ALIADOS ES (A, BCDE), (B, ACDE), (C, ABDE), (D, ABCE), (E, ABCD), (AB, CDE), (AC, BDE), (AD, BCE), (AE, BCD), (BC, ADE), (BD, ACE), (BE, ACD), (CD, ABE), (CE, ABD), (DE, ABC).

SE TIENEN COMO SELECCIONES POSIBLES PARA INTEGRAR EL EXPERIMENTO A CUALQUIERA DE LOS DOS BLOQUES QUE SE FORMAN AL CONFUNDIR A ABCDE. SI SE ESCOGE EL BLOQUE PRINCIPAL, LOS TRATAMIENTOS CORRESPONDIENTES SON : (1), ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de, abcd, abce, abde, acde y bcde.

SI SE SOSPECHA QUE LOS INTERACCIONES DE TRES Y CUATRO FACTORES SON NULAS, CON ESTE EXPERIMENTO SE PUEDEN ESTIMAR LOS EFECTOS PRINCIPALES Y LAS INTERACCIONES DE DOS FACTORES.

FRACCIONAMIENTO A 2^{-r}

SUPONGASE AHORA QUE ES NECESARIO FRACCIONAR UN EXPERIMENTO PARA USAR SOLO UNA FRACCION 2^{-r}. POR EJEMPLO, SI UNO 2^5 SE FRACCIONA A UNO 2^3, SE TENDRA $r = 2$ Y $2^{-r} = 1/4$; EN EL SE TENDRAN SOLO OCHO RESULTADOS, ASOCIADOS A UNO DE LOS 4 BLOQUES QUE SE PUEDEN FORMAR CON OCHO TRATAMIENTOS CADA UNO, LO CUAL HACE VER QUE CADA EFECTO TIENE TRES ALIADOS Y SOLO SE DISPONE DE 7 GRADOS DE LIBERTAD.

EN ESTE CASO SE TIENEN DOS EFECTOS CONFUNDIDOS QUE SON INDEPENDIENTES; EL TERCERO RESULTA DEL PRODUCTO MODULO DOS ENTRE ELLOS. SUPONGASE QUE SE TOMAN ABC Y CDE, EL TERCERO SERA ABC x CDE = ABDE. LOS ALIADOS SE OBTIENEN MULTIPLICANDO EL EFECTO (MODULO 2) POR ABC, CDE Y ABDE; ASI RESULTA LO

SIGUIENTE (SE PROCURA TOMAR COMO EFECTOS A LOS PRINCIPALES Y A LOS DE MENOR ORDEN QUE SE SOSPECHE SON IMPORTANTES):

EFECTO	ALIADOS		
I	ABC	CDE	ABDE
A	BC	ACDE	BDE
B	AC	BCDE	ADE
C	AB	DE	ABCDE
D	ABCD	CE	ABE
E	ABCE	CD	ABD
AD	BCD	ACE	BE
AE	BCE	ACD	BD

PARA DEFINIR LOS TRATAMIENTOS A EMPLEAR SE ESCOGE UNO DE LOS CUATRO BLOQUES QUE SE FORMAN CONFUNDIENDO ABC, CDE Y ABDE. SI SE ESCOGE EL PRINCIPAL, SE TENDRAN LOS TRATAMIENTOS (1), de, acd, ace, ab, abde, bcd Y bce, DE LA SIGUIENTE MANERA

		A_0				A_1			
		B_0		B_1		B_0		B_1	
		C_0	C_1	C_0	C_1	C_0	C_1	C_0	C_1
D_0	E_0	(1)						*ab*	
	E_1				*bce*		*ace*		
D_1	E_0				*bcd*		*acd*		
	E_1	*de*						*abde*	

FRACCIONAMIENTO A 2^{-r} EN BLOQUES 2^b

LOS EXPERIMENTOS FRACCIONADOS PUEDEN TAMBIEN DISEÑARSE CON BLOQUES; SI SE TOMAN 2^b BLOQUES, CADA UNO TENDRA 2^{k-b-r} TRATAMIENTOS. PARA HACER ESTO SE PROCEDE DE LA SIGUIENTE MANERA:

1. SE ESCOGEN r CONTRASTES (EFECTOS) INDEPENDIENTES. LOS RESTANTES $2^r - r - 1$ SE GENERAN A PARTIR DE ESTOS.

2. SE SELECCIONAN LOS EFECTOS QUE SE CONFUNDIRAN CON LOS BLOQUES CUIDANDO DE NO TOMAR LOS EFECTOS PRINCIPALES, SUS ALIADOS O LOS CONTRASTES DEFINIDORES.

3. FORMULAR EL BLOQUE PRINCIPAL, QUE TENGA UN NUMERO CERO O PAR DE LETRAS EN COMUN CON LOS CONTRASTES DEFINIDORES INDEPENDIENTES Y LAS INTERACCIONES DEFINIDORAS INDEPENDIENTES. SE USA ESTE BLOQUE U OTRO GENERADO CON EL.

EJEMPLO

SE TIENE UN EXPERIMENTO 2^6 QUE ES NECESARIO FRACCIONAR A 16 TRATAMIENTOS ARREGLADOS EN 2 BLOQUES ($k = 6$, $r = 2$ Y $b = 2$).

SI SE TOMAN COMO CONTRASTES INDEPENDIENTES A LAS INTERACCIONES ABCD Y ABEF; EL TERCERO SERA ABCD x ABEF = CDEF. LOS GRUPOS DE EFECTOS ALIADOS QUE RESULTAN SE PRESENTAN EN LA SIGUIENTE TABLA:

EFECTOS	ALIADOS		
I	*ABCD*	*ABEF*	*CDEF*
A	*BCD*	*BEF*	*ACDEF*
B	*ACD*	*AEF*	*BCDEF*
C	*ABD*	*ABCEF*	*DEF*
D	*ABC*	*ABDEF*	*CEF*
E	*ABCDE*	*ABF*	*CDF*
F	*ABCDF*	*ABE*	*CDE*
AB	*CD*	*EF*	*ABCDEF*
AC	*BD*	*BCEF*	*ADEF*
AD	*BC*	*BDEF*	*ACEF*
AE	*BCDE*	*BF*	*ACDF*
AF	*BCDF*	*BE*	*ACDE*
CE	*ABDE*	*ABCF*	*DF*
CF	*ABDF*	*ABCE*	*DE*
ACE	*BDE*	*BCF*	*ADF*
ACF	*BDF*	*BCE*	*ADE*

PARA FORMULAR EL BLOQUE PRINCIPAL SE EMPLEAN LOS TRES CONTRASTES DEFINIDOS; CON ELLO SE OBTIENEN (1), ab, cd, abcd, bce, ace, bde, ade, abef, ef, abcdef, cdef, acf, bcf, adf y bdf.

LOS BLOQUES SE FORMARAN CONFUNDIENDO AD (SUS ALIADOS BC, BDEF Y ACEF QUEDAN CONFUNDIDOS TAMBIEN). ESTOS RESULTAN SER

BLOQUE 1		BLOQUE 2	
(1)	ef	ab	abef
abcd	abcdef	cd	cdef
bce	bcf	ace	acf
ade	adf	ade	bdf

SI EN VEZ DE 2 BLOQUES SE FORMARAN 4 CON 4 TRATAMIENTOS CADA UNO, LA INTERACCION QUE HABRIA QUE CONFUNDIR NO DEBERIA ESTAR ALIADA CON AD. SI ESTA FUERA AF (SUS ALIADOS BCDF, BE Y ACDE TAMBIEN QUEDAN CONFUNDIDOS), ENTONCES AD x AF = DF Y SUS

ALIDADOS (CE, ABDE Y ABCF) TAMBIEN QUEDAN CONFUNDIDOS. LOS BLOQUES QUE RESULTAN SON

BLOQUE 1	BLOQUE 2	BLOQUE 3	BLOQUE 4
(1)	cd	ab	ef
bce	bde	ace	bcf
abcdef	abef	cdef	abcd
adf	acf	bdf	ade

ANALISIS DE UN EXPERIMENTO FRACCIONADO, CON EL ALGORITMO DE YATES

CON EL FIN DE ILUSTRAR LA APLICACION DEL ALGORITMO DE YATES, PARA HACER EL ANALISIS ESTADISTICO DE UN EXPERIMENTO FRACCIONADO, CONSIDERESE EL CASO DE UNO 2^5 CON MEDIA REPLICA ($k = 5$, $r = 1$). SI SE ESCOGE A ABCDE COMO CONTRASTE DEFINIDOR, EL BLOQUE PRINCIPAL CONTENDRA LOS TRATAMIENTOS (1), ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de, abcd, abce, acde, abde Y bcde.

PARA EMPEZAR, SE FORMA LA PRIMERA COLUMNA DE LA TABLA DE YATES CORRESPONDIENTE A UN EXPERIMENTO CON 4 FACTORES (A, B, C, D): (1), a, b, ab, c, ac, bc, abc, d, ad, bd, abd, cd, acd, bcd Y abcd. AL COMPARAR LOS TERMINOS DE ESTA CON LOS DEL BLOQUE ANTES FORMADO, SE NOTA QUE SI SE AGREGA LA LETRA e A LOS TRATAMIENTOS CON 1 Y 3 LETRAS SE OBTIENEN LOS DE DICHO BLOQUE; DICHA LETRA ESTA AGREGADA ENTRE PARENTESIS EN LA SIGUIENTE TABLA. LUEGO SE PROCEDE DE LA MANERA USUAL DEL ALGORITMO HACIENDO LAS SUMAS Y RESTAS TRES VECES ($k - 1 = 3$) Y SE ANOTAN LOS EFECTOS ALIADOS CORRESPONDIENTES (COLUMNAS (6) Y (7)).

TRATAMIENTOS

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
(1)	(1) + a(e)	(1) + a(e) + b(e) + ab	—	—	I	ABCDE
a(e)	b(e) + ab	—	—	—	A	BCDE
b(e)	—	—	—	—	B	ACDE
ab	—	—	—	—	AB	CDE
c(e)	—	—	—	—	C	ABDE
ac	—	—	—	—	AC	BDE
bc	—	—	—	—	BC	ADE
abc(e)	—	—	—	—	ABC	DE
d(e)	a(e) − (1)	b(e) + ab − (1) − a(e)	—	—	D	ABCE
ad	ab − b(e)	—	—	—	AD	BCE
bd	—	—	—	—	BD	ACE
abd(e)	—	—	—	—	ABD	CE
cd	—	—	—	—	CD	ABE
acd(e)	—	—	—	—	ACD	BE
bcd(e)	—	—	—	—	BCD	AE
abcd	—	—	—	—	ABCD	E

EJEMPLO

EN UNA ETAPA PRELIMINAR DE UNA INVESTIGACION SOBRE FERTILIZANTES SE DECIDIO VERIFICAR SI LOS SIGUIENTES FACTORES,CON

DOS NIVELES CADA UNO, TENIAN EFECTO SIGNIFICATIVO: A = FABRICA, B = MAQUINA MEZCLADORA, C = DOSIFICACION DE NITRATO, D = TIPO DE TIERRA DEL SEMBRADO. LOS RESULTADOS FUERON LOS RENDIMIENTOS, EN KILOS POR HECTARIA SEMBRADA.

POR CONSIDERAR QUE LA INTERACCION ABCD ES NULA, SE TOMO ESTA COMO CONTRASTE DEFINIDOR EN UNA REPLICA FRACCIONADA A 1/2.

EL BLOQUE PRINCIPAL RESULTA SER: (1), ab, ac, ad, bc, bd, cd Y abcd.

AL REALIZAR LAS MEDICIONES CORRESPONDIENTES A ESTOS TRATAMIENTOS SE OBTUVIERON LOS SIGUIENTES RESULTADOS:

		A_0		A_1	
		B_0	B_1	B_0	B_1
C_0	D_0	(1): 6600			ab: 5700
	D_1		bd: 6700	ad: 6400	
C_1	D_0		bc: 6300	ac: 6100	
	D_1	cd: 6500			abcd: 6400

PARA SIMPLIFICAR EL ANALISIS NUMERICO ESTOS VALORES SE CODIFICARON RESTANDOLE 6000 A CADA UNO Y DIVIDIENDO ENTRE 100. LOS RESULTADOS SON

		A_0		A_1	
		B_0	B_1	B_0	B_1
C_0	D_0	(1): 8			ab: -3
	D_1		bd: 7	ad: 4	
C_1	D_0		bc: 3	ac: 1	abcd: 4
	D_1	cd: 5			

EN UN EXPERIMENTO 2^3 $(k - 1 = 4 - 1 = 3)$ LOS TRATAMIENTOS SERIAN (1), a, b, ab, c, ac, bc Y abc. AL COMPARAR ESTOS CON LOS DEL BLOQUE PRINCIPAL SE OBSERVA QUE A LOS DE 1 Y 3 LETRAS LES FALTA UNA d PARA IGUALAR A LAS DEL BLOQUE, POR LO QUE LA TABLA DE YATES QUEDA DE LA SIGUIENTE MANERA:

TRATAMIENTOS (1)	RESULTADOS (2)	(3)	(4)	(5)	EFECTOS	ALIADOS	EFECTO MEDIO $(5) \div 4$	S S $(5)^2 \div 8$
(1)	8	12	16	29	*I*	*ABCD*		
a(d)	4	4	13	−17	*A*	*BCD*	−4.25	36.125
b(d)	7	6	−14	−7	*B*	*ACD*	−1.75	6.125
ab	−3	7	−3	−1	*AB*	*CD*	−0.25	0.125*
c(d)	5	−4	−8	−3	*C*	*ABD*	−0.75	1.125
ac	1	−10	1	11	*AC*	*BD*	2.75	15.125†
bc	3	−4	−6	9	*BC*	*AD*	2.25	10.125†
abc(d)	4	1	5	11	*ABC*	*D*	2.75	15.125
Totals	29							83.875

AL OBSERVAR LAS SUMAS DE CUADRADOS SE APRECIA QUE EL EFECTO PRINCIPAL A (ALIADO CON BCD) ES EL MAS IMPORTANTE, LUEGO LE SIGUIEN EL D (ALIADO CON ABC), AC (ALIADO CON BD) Y BC (ALIADO CON AD). DE ESTOS DOS ULTIMOS PROBABLEMENTE LOS IMPORTANTES SON BD Y AD YA QUE INVOLUCRAN A LOS DOS EFECTOS PRINCIPALES QUE INFLUYEN DE MANERA RELEVANTE, EN CAMBIO SUS RESPECTIVOS ALIADOS AC Y BC INVOLUCRAN AL EFECTO PRINCIPAL C QUE NO INFLUYE DE MANERA IMPORTANTE.

CONVIENE DESTACAR QUE EL HECHO DE QUE A HAYA SIDO IMPORTANTE IMPLICA QUE EXISTE GRAN VARIABILIDAD DE RESULTADOS DE UNA FABRICA A OTRA, LO CUAL PUEDE SIGNIFICAR QUE ESTAN SIGUIENDO PROCEDIMIENTOS DE PRODUCCION DISTINTOS.

METODO DE LA SUMA MODULO 2 PARA DENOTAR TRATAMIENTOS

UNA MANERA ALTERNATIVA A LA DE LETRAS PARA DENOTAR LOS TRATAMIENTOS ES LA DE USAR LOS NUMEROS 0 Y 1: EL CERO SE USA PARA INDICAR QUE EL FACTOR ESTA EN SU NIVEL INFERIOR, Y EL 2 PARA EL SUPERIOR. POR EJEMPLO, EN UN EXPERIMENTO 2^3 LA EQUIVALENCIA DE NOTACIONES SERIA

A B C	A B C
(1) = 0 0 0	c = 0 0 1
a = 1 0 0	ac = 1 0 1
b = 0 1 0	bc = 0 1 1
ab = 1 1 0	abc = 1 1 1

AL GENERAR DOS BLOQUES DE UN EXPERIMENTO 2^4 CON LA INTERACCION ABCD CONFUNDIDA EL BLOQUE PRINCIPAL SE INTEGRA DE MANERA ANALOGA QUE ANTES: SE INCLUIRAN LOS TRATAMIENTOS QUE TENGAN UN NUMERO PAR O CERO DE UNOS EN COMUN CON ABCD; EL OTRO BLOQUE SE OBTIENE MEDIANTE LA SUMA MODULO 2 DEL TRATAMIENTO QUE SE ESCOJA DE PIVOTE (QUE NO ESTE EN EL BLOQUE PRINCIPAL).

POR EJEMPLO UN EXPERIMENTO 2^4 CON DOS BLOQUES Y ABCD COMO INTERACCION CONFUNDIDA SERA :

BLOQUE 1		BLOQUE 2	
A B C D	A B C D	A B C D	A B C D
0 0 0 0	1 0 0 1	1 0 0 0	0 0 0 1
1 1 0 0	0 1 0 1	0 1 0 0	1 1 0 1
0 0 1 1	0 0 1 1	1 0 1 1	1 0 1 1
1 0 1 0	1 1 1 1	0 0 1 0	0 1 1 1

1000 + 1100 = 0100; 1000 + 0011 = 1011; 1000 + 1010 = 0010; 1000 + 1001 = 0001; 1000 + 0101 = 1101; 1000 + 0011 = 1011; 1000 + 1111 = 0111

OTRA MANERA DE FORMULAR LOS BLOQUES CONSISTE EN FORMULAR FAMILIAS DE ECUACIONES COMO LAS DOS SIGUIENTES, QUE CORRESPONDEN A UN EXPERIMENTO 2^4 CON 2 BLOQUES; SI UN TRATAMIENTO SATISFACE LA PRIMERA ECUACION, ENTONCES CORRESPONDE AL BLOQUE PRINCIPAL, PERO SI SATISFACE LA SEGUNDA, AL OTRO BLOQUE.

LAS ECUACIONES TIENEN LA SIGUIENTE FORMA :

$$k_A X_1 + k_B X_2 + k_C X_3 + k_D X_4 = 0 \pmod 2$$

$$k_A X_1 + k_B X_2 + k_C X_3 + k_D X_4 = 1 \pmod 2$$

DONDE k_i SON 0 O 1, DEPENDIENDO DE QUE LAS LETRAS A, B, C, D ESTEN EN LA INTERACCION CONFUNDIDA; SI ESTA ES ABCD, ENTONCES LAS CUATRO LETRAS ESTAN EN ELLA Y, POR CONSIGUIENTE, $k_A = k_B = k_C = K_D = 1$, POR LO QUE LAS ECUACIONES ANTERIORES QUEDAN DE LA SIGUIENTE MANERA :

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0 \pmod 2$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1 \pmod 2$$

ASI, EL TRATAMIENTO 1100 DARA

$$1 + 1 + 0 + 0 = 2 \pmod 2 = 0$$

QUE CUMPLE CON LA PRIMERA ECUACION, POR LO QUE CORRESPONDE AL BLOQUE PRINCIPAL, EL TRATAMIENTO 0100 DA 0 + 1 + 0 + 0 = 1 (MOD 2), QUE CUMPLE CON LA SEGUNDA ECUACION POR LO QUE CORRESPONDE AL BLOQUE SECUNDARIO.

EJEMPLO

SE DESEA FORMULAR UN EXPERIMENTO $\frac{1}{4} \times 2^6$ CON DOS BLOQUES DE 8

TRATAMIENTOS CADA UNO, TOMANDO ABCD, ABEF Y CDEF COMO CONTRASTES DEFINIDORES, Y AD COMO INTERACCION CONFUNDIDA. LOS TRATAMIENTOS DEBEN PRIMERO SATISFACER LAS ECUACIONES

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0 \pmod{2}$$

$$X_1 + X_2 + X_5 + X_6 = 0 \pmod{2}$$

LUEGO LOS 16 TRATAMIENTOS SE DIVIDEN EN DOS BLOQUES, DEBIENDO SATISFACER

$$X_1 + X_4 = 0 \pmod{2} \quad \text{PARA EL BLOQUE PRINCIPAL}$$

$$X_1 + X_4 = 1 \pmod{2} \quad \text{PARA EL OTRO BLOQUE}$$

SE PUEDE PROCEDER DE LA MANERA SIGUIENTE: SE ESCOGEN 000000, 111100 y 011010 QUE SATISFACEN LAS PRIMERAS DOS ECUACIONES; LA ADICION MODULO 2 DE LAS DOS ULTIMAS DA 111100 + 011010 = = 122110 = 100110; LUEGO SE TOMA 000011 QUE SUMADA A LOS ANTERIORES DA 111111, 011001 Y 100101; LUEGO SE TOMA 110000 Y SE ADICIONA A LOS ANTERIORES, ETC. UNA VEZ QUE SE TIENEN LOS 16 SE SEPARAN EN GRUPOS QUE CUMPLAN CON LAS ULTIMAS DOS ECUACIONES; ASI, 000000 DA 0 + 0 = 0 (CORRESPONDE AL BLOQUE PRINCIPAL), 111100 DA 1 + 1 = 2 = 0 (AL PRINCIPAL), 110000 DA 1 + 0 = 1 (AL SECUNDARIO); ETC.

EXPERIMENTO 3^k

EN EL DESARROLLO DE ESTA SECCION SE USARA LA NOTACION CON 0 Y 1 PARA IDENTIFICAR A LOS TRATAMIENTOS. LOS TRES NIVELES DEL FACTOR SERAN 0, 1 Y 2; LAS MULTIPLICACIONES Y ADICIONES SERAN MODULO 3. EL PRIMER NUMERO DEL TRATAMIENTO CORRESPONDE AL FACTOR A, EL SEGUNDO AL B, ETC.

UN EXPERIMENTO 3^3 SE DENOTA ASI:

	A_0			A_1			A_2		
	B_0	B_1	B_2	B_0	B_1	B_2	B_0	B_1	B_2
C_0	000	010	020	100	110	120	200	210	220
C_1	001	011	021	101	111	121	201	211	221
C_2	002	012	022	102	112	122	202	212	222

ALGORITMO DE YATES

LA EXTENSION DEL ALGORITMO DE YATES A UN EXPERIMENTO 3^k SE ILUSTRARA CON EL SIGUIENTE EJEMPLO.

SE DISEÑO UN EXPERIMENTO PARA DETERMINAR LA CANTIDAD DE FERTILIZANTE PRODUCIDO BAJO TRES TEMPERATURAS (50°, 60° Y 70°), EN TRES FABRICAS (1, 2 Y 3); EL PRIMERO ES EL FACTOR A, Y EL SEGUNDO EL B. LOS RESULTADOS CODIFICADOS SON

	TEMPERATURA (A)		
LABORATORIOS	50° (A_0)	60° (A_1)	70° (A_2)
1 (B_0)	9	2	1
2 (B_1)	12	3	-3
3 (B_2)	3	10	5

LA TABLA DE YATES ES

				EFECTOS	DIVISOR	S S
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
00	9	12	42			
10	2	12	-21	A_L	$2^1 x 3^{2-1} x 1 = 6$	73.5
20	1	18	-3	A_Q	$2^1 x 3^{2-0} x 1 = 18$	0.5
01	12	-8	6	B_L	$2^1 x 3^{2-1} x 1 = 6$	6.0
11	3	-15	10	$A_L B_L$	$2^2 x 3^{2-2} x 1 = 4$	25.0
21	-3	2	-18	$A_Q B_L$	$2^2 x 3^{2-1} x 1 = 12$	27.0
02	3	6	6	B_Q	$2^1 x 3^{2-0} x 1 = 18$	2.0
12	10	3	24	$A_L B_Q$	$2^2 x 3^{2-1} x 1 = 12$	48.0
22	5	-12	-12	$A_Q B_Q$	$2^2 x 3^{2-0} x 1 = 36$	4.0

EL PRIMER TERCIO DE LA COLUMNA 3 SE FORMA SUMANDO LOS RESULTADOS DE TRES EN TRES (9 + 2 + 1 = 12, 12 + 3 - 3 = 12, 3 + 10 + 5 = 18); EL SEGUNDO TERCIO SE CALCULA RESTANDOLE EL PRIMER TERMINO AL TERCERO DE CADA TERCIA (1 - 9 = -8, -3 -12 = -15, 5 - 3 = 2); (ESTO ESTIMA LA COMPONENTE LINEAL) EL TERCER TERCIO SE OBTIENE SUMANDO EL PRIMERO Y EL TERCERO DE CADA TERCIA Y RESTANDOLE EL DOBLE DEL SUGUNDO) (ESTO ESTIMA LA COMPONENTE CUADRATICA) (9 + 1 - 2 x 2 = 6, 12 - 3 - 2 x 3 = 3, 3 + 5 - 2 x 10 = -12).

LUEGO LA COLUMNA (4) SE CALCULA CON LA (3) DE IGUAL MANERA QUE ESTA SE OBTUVO CON LA 2 (12 + 12 + 18 = 42, -8 -15 + 2 =-21, 6 + 3 - 12 = -3, 18 - 12 = 6, 2 - (-8) = 6, 12 - 6 = 6, 12 + 18 - 2 x 12 = 6, -8 + 2 - 2 (-15) = 24, 6 - 12 - 2(3) = -12). EN LA COLUMNA (5) SE ANOTAN LOS EFECTOS (EL INDICE L DENOTA EFECTO LINEAL, Y EL Q, CUADRATICO).

LA SUMA DE CUADRADOS (COLUMNA 6) DE CADA EFECTO (CADA UNA CON UN GRADO DE LIBERTAD) SE CALCULA USANDO UN DIVISOR DADO POR LA SIGUIENTE FORMULA

$$\text{DIVISOR} = 2^p 3^q n$$

DONDE p ES EL NUMERO DE FACTORES EN LA INTERACCION CONSIDERADA, q ES EL NUMERO DE FACTORES QUE TIENE EL EXPERIMENTO MENOS EL NUMERO DE TERMINOS LINEALES DE LA INTERACCION, Y n ES EL NUMERO DE REPLICAS.

POR EJEMPLO EL EFECTO LINEAL, A_L, DE A, TIENE COMO DIVISOR A $2^1 \times 3^{2-1} \times 1 = 6$, EN TANTO QUE A_2B_2 TIENE A $2^2 \times 3^{2-0} \times 1 = 36$.

15. PRUEBAS DE HIPOTESIS E INTERVALOS DE CONFIANZA EN REGRESION LINEAL

SI EL MODELO QUE RELACIONA A Y CON X ES LINEAL, ENTONCES

$$Y = \beta X + \alpha$$

SI NO SE CONOCEN β Y α, ES NECESARIO ESTIMARLOS CON BASE EN UNA MUESTRA, CON LO CUAL SE OBTIENE

$$\tilde{Y} = mX + b$$

EN DONDE m ES EL ESTIMADOR DE M, Y b, EL DE B. SEA $\sigma^2_{y|x}$ LA VARIANCIA DE LA ESTIMACION DE Y CON BASE EN X.

SE PUEDE DEMOSTRAR QUE, SI SE CONOCE $\sigma^2_{y|x}$, ENTONCES:

$$\mathrm{Var}(m) = \sigma^2_m = \sigma^2_{y|x} / \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sigma^2_{y|x} / nS^2_x$$

$$\mathrm{Var}(b) = \sigma^2_b = \sigma^2_{y|x}/n + \frac{\bar{x}^2 \sigma^2_{y|x}}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \sigma^2_{y|x}\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{nS^2_x}\right)$$

$$\mathrm{Var}(mX + b) = \sigma^2_{y|x}/n + \frac{\sigma^2_{y|x}(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \sigma^2_{\tilde{y}} = \sigma^2_{y|x}\left(\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{nS^2_x}\right)$$

SI $\sigma^2_{y|x}$ NO SE CONOCE, SE PUEDE OBTENER UNA <u>ESTIMACION INSESGADA</u> DE ELLA MEDIANTE LA ECUACION

$$S^2_{y|x} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \tilde{y}_i)^2$$

INTERVALOS DE CONFIANZA: $\sigma_{y|x}$ CONOCIDA

a. PARA LA ORDENADA EN EL ORIGEN, α,

$$b \pm z_c \sigma_b$$

DONDE $z_c = P(Z < z_c) = 1 - \alpha/2$; α = NIVEL DE SIGNIFICANCIA

b. PARA LA PENDIENTE, M:

$$m \pm z_c \sigma_m$$

c. PARA LA PREDICCION, Y_i;

$$\tilde{Y}_i \pm z_c \sigma_{\tilde{y}}$$

EN CASO DE QUE $\sigma_{y|x}$ SEA DESCONOCIDA (ES LO USUAL), DEBE ESTIMARSE A PARTIR DE LA MUESTRA MEDIANTE $S_{y|x}$. EN TAL CASO LOS INTERVALOS DE CONFIANZA CAMBIAN A:

a. PARA LA ORDENADA EN EL ORIGEN, α: $b \pm t_c \sigma_b$

$$b \pm t_c S_{y|x}\sqrt{\frac{\overline{x^2}}{nS_x^2}}$$

DONDE t_c ES EL VALOR CRITICO DE UN NIVEL DE SIGNIFICANCIA α, CORRESPONDIENTE A UNA DISTRIBUCION t DE STUDENT CON $\nu = n - 2$ GRADOS DE LIBERTAD, Y S_x^2 ES LA VARIANCIA (SESGADA) DE LA MUESTRA DE x.

b. PARA LA PENDIENTE, β: $m \pm t_c \sigma_m$

$$m \pm t_c S_{y|x}/\sqrt{nS_x^2} \qquad \text{O} \qquad m \pm t_c \frac{S_{y|x}}{S_x\sqrt{n}}$$

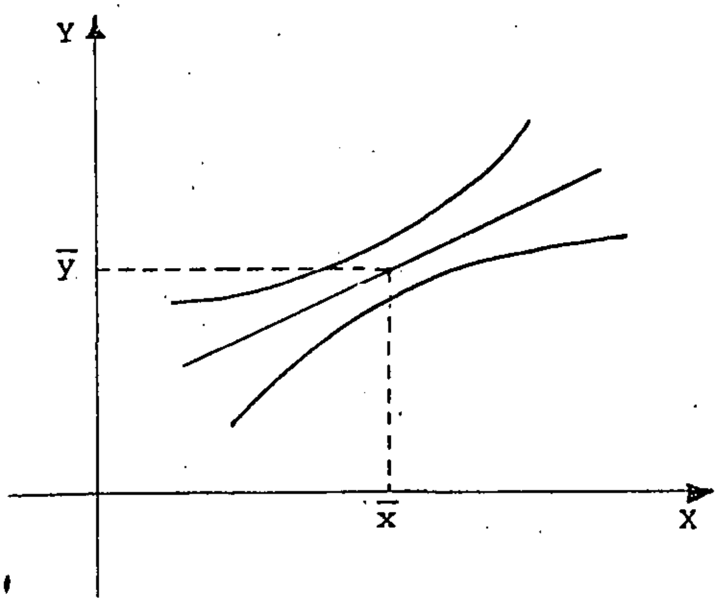
c. PARA LA PREDICCION, Y_i: $\tilde{Y}_i \pm t_c \sigma_{\tilde{y}}$

$$\tilde{Y}_i \pm t_c \, S_{y|x} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \overline{x})^2}{nS_x^2}}$$

SI x_i ESTA DENTRO DEL RANGO DE LA MUESTRA, O

$$\tilde{Y}_i \pm t_c \, S_{y|x} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \overline{x})^2}{nS_x^2}}$$

SI x_i ESTA FUERA DEL RANGO.



EJEMPLO

LA FORMACION DEL ALCOHOL EN UN PROCESO DE FERMENTACION SE RELACIONA CON LA TEMPERATURA. EN UNA SERIE DE SEIS MEDICIONES A DISTINTAS TEMPERATURAS SE OBTUVO LO SIGUIENTE:

TEMPERATURA, x, °C	35	40	45	50	55	60
ALCOHOL, lt	20.2	23.1	23.2	23.6	25.8	26.3

SI SE AJUSTA UNA RECTA POR MINIMOS CUADRADOS SE OBTIENE

$$\tilde{Y} = 0.225\ X + 13.01$$

$(\bar{x} = 47.5,\ \bar{y} = 23.7)$

1. INTERVALOS DE CONFIANZA CON $\sigma_{y|x} = 0.8$ (CONOCIDA); $\alpha = 0.05$.

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{0.8}{6} + \frac{0.8 \times 47.5^2}{437.5}} = 1.845$$

DONDE $\sum_{i=1}^{6} (x_i - \bar{x})^2 = 437.5$

$$b \pm z_c\, \sigma_b = 13.01 \pm 1.96 \times 1.845 = (9.39,\ 16.63)$$

$$\sigma_m = \frac{0.8}{\sqrt{437.5}} = \frac{0.8}{20.92} = 0.0382$$

$$m \pm z_c\, \sigma_m = 0.225 \pm 1.96 \times 0.0382 = 0.225 \pm 0.075 =$$

$$= (0.150,\ 0.300)$$

INTERVALOS DE CONFIANZA CON $\sigma_{y|x}$ DESCONOCIDA.

EN ESTE CASO $S^2_{y|x} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{6} (y_i - 0.225x_i - 13.01)^2 = \sum_{i=1}^{6} (y_i - \tilde{y}_i)^2/(n-2)$

TEMP, x, °C	ALCOHOL, y, lts	$\tilde{y}_i$	$y_i - \tilde{y}_i$	$(y_i - \tilde{y}_i)^2$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
35	20.2	20.9	0.7	0.49	-12.5	156.2
40	23.1	22.0	1.1	1.21	- 7.5	56.2
45	23.2	23.1	0.1	0.01	- 2.5	6.2
50	23.6	24.3	-0.7	0.49	2.5	6.2
55	25.8	25.4	0.4	0.16	7.5	46.2
60	26.3	26.5	-0.2	0.04	12.5	156.2
Σ=285				Σ=2.40		Σ=437.4

$\bar{x} = \frac{285}{6} = 47.5;\quad S^2_x = \frac{437.4}{6} = 72.9$

SABEMOS QUE $\tilde{y} = 0.225\,x + 13.01$; POR TANTO:

$\tilde{y}(35) = 0.225(35) + 13.01 = 20.9,$

$y(40) = 0.225(40) + 13.01 = 22.0,$ etc.

INTERVALOS DE CONFIANZA:

a) PARA α : $\quad 13.01 \pm t_c\, S_{y|x} \sqrt{\frac{\bar{x}^2}{nS^2_x} + \frac{1}{n}}$

$t_c = t_{0.975,4} = 2.776, \quad S^2_{y|x} = \frac{1}{n-2} \Sigma (y_i - \tilde{y}_i)^2 = \frac{1}{4}\, 2.4 = 0.6,$

$S_{y|x} = \sqrt{0.6} = 0.77$

$$13.01 \pm 2.776 \times 0.77\sqrt{\frac{47.5^2}{6(72.9)} + \frac{1}{6}} = 13.01 \pm 4.93 = (8.08, 17.94)$$

b) <u>PARA β</u>: $$0.225 \pm t_c \frac{S_{y|x}}{\sqrt{nS_x^2}} = 0.25 \pm 2.776 \frac{0.77}{\sqrt{6(72.9)}} =$$

$$= 0.225 \pm 0.102 = (0.123, 0.327)$$

c) PARA y_i $(x=50)$: $y_i(50)=24.3$

$$24.3 \pm t_c S_{y|x}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_i-\bar{x})^2}{n\ S_x^2}} = 24.3 \pm 2.776 \times 0.77\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{(50-47.5)^2}{6(72.9)}} =$$

$$= 24.3 \pm 0.9 = (23.4, 25.2)$$

PRUEBAS DE HIPOTESIS

a. PARA LA ORDENADA EN EL ORIGEN

SE DEMUESTRA QUE
$$\frac{\alpha - b_0}{S_{y|x}\sqrt{\frac{\overline{x^2}}{nS_x^2}}} = \frac{\alpha - b_0}{\frac{S_{y|x}}{S_x}\sqrt{\frac{\overline{x^2}}{n}}} = T$$

TIENE DISTRIBUCION t DE STUDENT CON $\nu = n - 2$ GRADOS DE LIBERTAD.

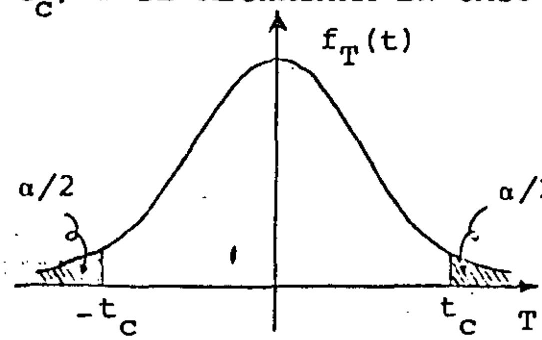
SI SE DESA PROBAR LA HIPOTESIS

$$H_0 : \alpha = b_0$$
$$H_1 : \alpha \neq b_0$$

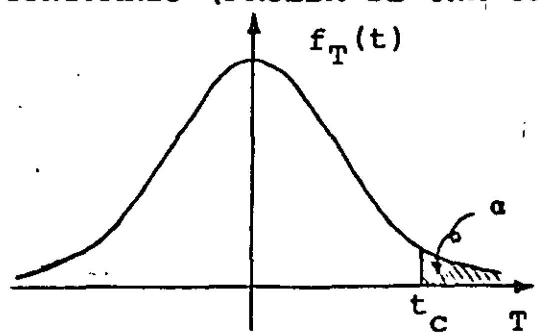
BASTA SUSTITUIR A $\alpha = b_0$ EN LA ECUACION ANTERIOR Y EVALUAR $T = t$, ES DECIR,

$$t = \frac{b - b_0}{\frac{S_{y|x}}{S_x}\sqrt{\frac{\overline{x^2}}{n}}}$$

SE ACEPTARA H_0 SI $|t| < |t_c|$; EN CASO CONTRARIO SE RECHAZARA (PRUEBA DE DOS COLAS). SI H_1 FUERA $B > b_0$, SE ACEPTARA SI $t < t_c$, Y SE RECHAZARA EN CASO CONTRARIO (PRUEBA DE UNA COLA)



PRUEBA DE DOS COLAS



PRUEBA DE UNA COLA

b. PARA LA PENDIENTE, β

ANALOGAMENTE, PARA β, LA ESTADISTICA

$$\frac{\beta - m_0}{S_{y|x}/\sqrt{nS_x^2}} = \frac{\beta - m_0}{\frac{S_{y|x}}{S_x\sqrt{n}}} = T,$$

DONDE m_0 = VALOR DE M BAJO LA HIPOTESIS NULA $H_0 : \beta = m_0$,

TAMBIEN TIENE DISTRIBUCION t DE STUDENT CON $\nu = n - 2$ GRADOS DE LIBERTAD: $t = \dfrac{m - m_0}{\frac{S_{y|x}}{S_x\sqrt{n}}}$

EJEMPLO

CONSIDERE LOS DATOS SIGUIENTES:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0.16	0.09	0.08	0.23	0.60	0.39	0.55	0.75	0.81	0.85

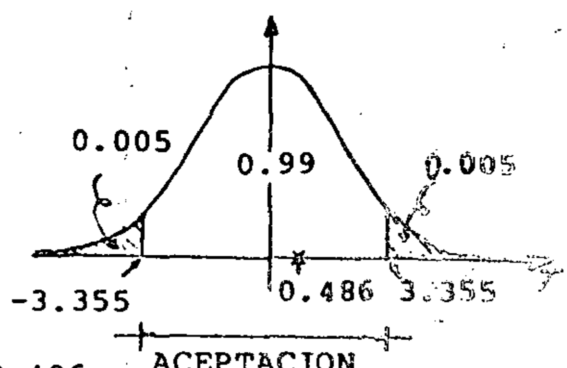
$m = 0.093$, $b = 0.032$, $S^2_{y|x} = 0.01258$

$$S_x^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = 82.50/10 = 8.25; \ \Sigma x_i^2 = 285, \ \overline{x^2} = \frac{285}{10} = 28.5$$

a. PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE $\alpha = 0$

b. PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE $\beta = 0.1$

CON $\alpha = 0.01$ Y $S_{y|x}$ DESCONOCIDA.



a. $H_0 : \alpha = 0; \quad H_1 : \alpha \neq 0$

$$t = \frac{b - b_0}{S_{y|x}\sqrt{\frac{\overline{x^2}}{nS_x^2}}} = \frac{0.032 - 0}{\sqrt{0.01258}\sqrt{\frac{28.5}{10 \times 8.25}}} = 0.486$$

$t_c = t_{0.995,\ 8} = 3.355 > 0.486 \therefore$ SE ACEPTA H_0.

b. H_0 : $\beta = 0.1$; H_1 : $\beta \neq 0.1$

$$t = \frac{m - m_0}{\frac{S_{y|x}}{S_x\sqrt{n}}} = \frac{0.093 - 0.1}{\frac{\sqrt{0.01258}}{\sqrt{8.25 \times 10}}} = 0.567 < 3.355$$

SE ACEPTA H_0 CON 99% DE NIVEL DE CONFIANZA.

PRUEBA DE HIPOTESIS PARA EL COEFICIENTE DE CORRELACION, ρ_{xy}

PRUEBA

$H_0 : \rho_{xy} = 0 ; \qquad H_1 : \rho_{xy} \gtrless 0$

SE DEMUESTRA QUE EN CASO DE QUE X Y Y SON INDEPENDIENTES ($\rho = 0$), LA ESTADISTICA

$$T = r_{xy}\sqrt{\frac{n-2}{1-r_{xy}^2}}$$

TIENE DISTRIBUCION t DE STUDENT CON n − 2 GRADOS DE LIBERTAD.

EJEMPLO

EN BASE A UNA MUESTRA ALEATORIA DE 30 DATOS SOBRE LA TEMPERATURA MEDIA DURANTE UN MES, X, Y EL PESO MEDIO DE LOS TOMATES PISCADOS, Y, SE OBTUVO UN COEFICIENTE DE CORRELACION $r_{xy} = 0.931$.

PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE $\rho_{xy} = 0$. USAR $\alpha = 0.05$.

$H_0 : \rho_{xy} = 0 ; \qquad H_1 : \rho_{xy} \neq 0$

$$t = r_{xy}\sqrt{\frac{n-2}{1-r_{xy}^2}} = 0.931\sqrt{\frac{30-2}{1-0.931^2}} = 13.448$$

$$t_c = t_{0.975,\ 28} = 2.048 < 13.448$$

$\therefore$ SE RECHAZA H_0 A UN NIVEL DE CONFIANZA DEL 95%.

16. ANALISIS DE VARIANCIA EN REGRESION LINEAL

EN EL CAPITULO DE REGRESION LINEAL SE TENIA QUE LA ECUACION $\tilde{Y} = mX + b$ ESTIMABA A LA ECUACION ENTRE LAS VARIABLES Y Y X, SIENDO m UN ESTIMADOR DE LA PENDIENTE, β, DE LA RECTA, Y b UN ESTIMADOR DE LA ORDENADA EN EL ORIGEN, α. ASIMISMO, SE TENIA QUE LA VARIANCIA SESGADA TOTAL ERA

$$S^2(Y) = S^2_{Y|X} + m^2 S^2(X) \qquad (1)$$

POR LO QUE LA SUMA TOTAL DE CUADRADOS SERIA

$$\Sigma(y_i - \bar{y})^2 = \Sigma(y_i - \tilde{y}_i)^2 + m^2 \Sigma(x_i - \bar{x})^2 \qquad (2)$$

LA PRIMERA SUMA DE CUADRADOS DEL MIEMBRO DERECHO DE ESTA ECUACION ES LA <u>INEXPLICADA</u>, <u>ALEATORIA</u> O <u>RESIDUAL</u> Y, LA SEGUNDA, ES LA <u>EXPLICADA</u>.

EL MODELO LINEAL ES $Y_i = \alpha + \beta X_i + Z_i$ DONDE Z_i SON VARIA-

BLES ALEATORIAS QUE SATISFACEN LAS CONDICIONES DEL ANALISIS DE VARIANCIA. EN TAL CASO, $E(m) = \beta$, $E(b) = \alpha$, $Var(\bar{Y}) = \sigma^2/n$, $Var(m) = \sigma^2/\Sigma_i(x_i - \bar{x})^2$ Y $cov(\bar{y},m) = 0$

PUESTO QUE $E(m) = \beta$, SE OBTIENE QUE LA ESPERANZA DE LA SUMA DE CUADRADOS EXPLICADA ES

$$E[m^2\Sigma(x_i-\bar{x})^2] = \sigma^2 + \beta^2\Sigma(x_i-\bar{x})^2 \qquad (3)$$

SE OBSERVA QUE ESTA SUMA DE CUADRADOS TIENE UN GRADO DE LIBERTAD.

POR OTRA PARTE LA ESPERANZA DE LA SUMA DE CUADRADOS RESIDUAL ES

$$E[(y_i-\tilde{y}_i)^2] = (n-2)\sigma^2 \qquad (4)$$

PARA LO QUE ESTE TIENE n-2 GRADOS DE LIBERTAD.

OBSERVANDO LAS ECS (3) y (4) SE CONCLUYE QUE LA PRUEBA DE HIPOTESIS DE INDEPENDENCIA DE Y y X, O SEA DE $\beta = 0$, SE PUEDE HACER FORMULANDO UNA ESTADISTICA CON EL COCIENTE DE LAS SUMAS DE LOS CUADRADOS (4) ENTRE (3) CON $\beta = 0$:

$$F=\frac{(n-2)m^2\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{\Sigma(y_i-mx_i-b)^2} \qquad (5)$$

ESTA ESTADISTICA TIENE DISTRIBUCION F CON 1 Y n-2 GRADOS DE LIBERTAD.

PARA PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE $\beta=\beta_o$ SE REMPLAZA EN LA EC (5) A m POR $m-\beta_o$.

LA TABLA DEL ANALISIS DE VARIANCIA RESULTANTE ES:

FUENTE	GRADOS DE LIBERTAD	SUMA DE CUADRADOS	VALOR MEDIO CUADRATICO
EXPLICADA	1	$m^2\Sigma(x_i-\bar{x})^2$	$m^2\Sigma(x_i-\bar{x})^2$
RESIDUAL	n-2	$\Sigma(y_i-mx_i-b)^2$	$\frac{\Sigma(y_i-mx_i-b)^2}{n-2}$
TOTAL	n-1	$\Sigma(y_i-\bar{y})^2$	

17. CLASIFICACION EN UNA DIRECCION. OBSERVACION DE DOS VARIABLES

SI SE MIDEN DOS CARACTERISTICAS, X Y Y, EN CADA SUJETO DE EXPERIMENTACION EN UN EXPERIMENTO CON CLASIFICACION EN UNA DIRECCION, NECESITAMOS CONSIDERAR TANTO LA RELACION QUE HAY ENTRE ELLAS COMO LA POSIBLE VARIACION DE ESTA DE GRUPO A GRUPO.

SI SE TIENE QUE ES ACEPTABLE UNA RELACION LINEAL DE Y CON BASE EN X PERO QUE PUDIERA VARIAR DE UN GRUPO A OTRO, UN MODELO APROPIADO SERIA:

$$Y_{ti} = \alpha_t + \beta_t X_{ti} + Z_{ti}; \quad t = 1,2,\ldots,k; \quad i = 1,2,\ldots,n_t \tag{1}$$

UN PROBLEMA NATURAL SERIA VERIFICAR SI ES POSIBLE USAR UN SOLO MODELO $Y = \alpha + \beta X$ PARA CADA UNO DE LOS GRUPOS. ESTO IMPLICARIA PROBAR LA HIPOTESIS DE QUE $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k$ Y DE QUE $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k$.

PARA PROBAR ESTA HIPOTESIS CONVIENE SEPARAR EL PROBLEMA EN TRES PARTES, CADA UNA DE LAS CUALES PUEDE PROBARSE POR SEPARADO:

a. $H_o^{(1)}$: LAS LINEAS DE REGRESION SON PARALELAS, ESTO ES, $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k$.

b. $H_o^{(2)}$: LAS MEDIAS DE LOS GRUPOS CAEN EN UNA LINEA RECTA, ESTO ES, LOS PUNTOS $(\bar{x}_{t.}, \alpha_t + \beta_t \bar{x}_{t.})$ SE ALINEAN EN UNA RECTA.

c. $H_o^{(3)}$: LA PENDIENTE DE LA LINEA ANTERIOR ES IGUAL AL COMUN, β_c, DE $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$

PARA HACER LO ANTERIOR SE CALCULAN PRIMERO LAS RECTAS DE REGRESION PARA CADA GRUPO POR SEPARADO, CON LO CUAL SE OBTIENEN LAS ESTIMACIONES

$$E\{Y|X\} = A_t + B_t X; \quad t = 1,2,\ldots,k \tag{2}$$

LA ESPERANZA DE B_t ES β_t Y SU VARIANCIA ES

$$\text{Var}\{B_t\} = \sigma^2 / \sum_{i=1}^{n_t} (x_{ti} - \bar{x}_{t.})^2 = \sigma^2 / w_t \tag{3}$$

DONDE

$$w_t = \sum_{i=1}^{n_t} (x_{ti} - \bar{x}_{t.})^2 \tag{4}$$

LOS ANALISIS DE VARIANCIA DE LA REGRESION LINEAL EN CADA GRUPO SE BASAN EN LAS IDENTIDADES ALGEBRAICAS

$$\sum_{i=1}^{n_t} (Y_{ti} - \bar{Y}_{t.})^2 = w_t B_t^2 + \sum_{i=1}^{n_t} \{Y_{ti} - \bar{Y}_{t.} - B_t(x_{ti} - \bar{x}_{t.})\}^2; \; t = 1,2,\ldots,k \tag{5}$$

SI SUMAMOS ESTAS k IDENTIDADES SE OBTIENE:

$$\sum_{t=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_t}(Y_{ti} - \bar{Y}_{t.})^2 = \sum_{t=1}^{k} w_t B_t^2 + \sum_{t=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_t}\{Y_{ti} - \bar{Y}_{t.} - B_t(x_{ti} - \bar{x}_{t.})\}^2$$

$$= \sum_{t=1}^{k} w_t B_t^2 + S_R \qquad (6)$$

DONDE S_R ES LA SUMA DE CUADRADOS RESIDUAL CON $\sum_{t=1}^{k}(n_t - 2) = N - 2k$

GRADOS DE LIBERTAD, DONDE $N = \Sigma n_t$, ES DECIR,

$$E(S_R) = (N - 2k)\sigma^2 \qquad (7)$$

SI $B_c = \sum_{t=1}^{k} w_t B_t / w_c$, DONDE $w_c = \sum_{t=1}^{k} w_t$ ES UN PROMEDIO PESADO

DE LAS B_t, ENTONCES LA DESVIACION CUADRATICA TOTAL DE LAS B_t

RESPECTO A B_c ES

$$S_w = \sum_{t=1}^{k} w_t (B_t - B_c)^2 = \sum_{t=1}^{k} w_t B_t^2 - w_c B_c^2 \qquad (8)$$

DESPEJANDO DE ESTA ECUACION A $\Sigma w_t B_t^2$ SE OBTIENE

$$\Sigma w_t B_t^2 = w_c B_c^2 + S_w \qquad (9)$$

LA ESPERANZA DE S_w ES

$$E\{S_w\} = (k - 1)\sigma^2 + \sum_{t=1}^{k} w_t (\beta_t - \beta_c)^2 \qquad (10)$$

DONDE $\beta_c = \sum_{t=1}^{k} w_t \beta_t / w_c$

ES LA PENDIENTE COMUN (PROMEDIO) DENTRO DE LOS GRUPOS.

POR SU PARTE, LA VARIANCIA DE B_c ES

$$\mathrm{Var}(B_c) = \sigma^2/w_c \tag{11}$$

CON LO ANTERIOR LA SUMA DE CUADRADOS TOTAL SERA:

$$\sum_{t=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_t}(Y_{ti} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{t=1}^{k} n_t(\bar{Y}_{t.} - \bar{Y}_{..})^2 + \sum_{t=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_t}(Y_{ti} - \bar{Y}_{t.})^2$$

$$= \Sigma n_t(\bar{Y}_{t.} - \bar{Y}_{..})^2 + w_c B_c^2 + S_R + S_W \tag{12}$$

DONDE S_W SE DENOMINA LA SUMA DE CUADRADOS DE LAS PENDIENTES ENTRE GRUPOS.

ANALIZANDO LAS ECS. (7) y (10) SE PUEDE VER QUE LA HIPOTESIS $H_o^{(1)}$: $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k$ SE PUEDE PROBAR MEDIANTE LA ESTADISTICA

$$F = \frac{S_W/(k-1)}{S_R/(N-2k)} \tag{13}$$

QUE TIENE DISTRIBUCION F CON (k-1) Y (N-2k) GRADOS DE LIBERTAD, YA QUE BAJO LA HIPOTESIS NULA EL SEGUNDO TERMINO DEL MIEMBRO DERECHO DE LA EC. (10) ES CERO.

PARA REALIZAR LA PRUEBA $H_o^{(2)}$ PRIMERO AJUSTAMOS LA RECTA QUE PASA POR LOS PROMEDIOS $(\bar{X}_{t.}, \bar{Y}_{t.})$ CON FACTORES DE PESO n_t. CON ESTO SE OBTIENE LA SUMA DE CUADRADOS ENTRE GRUPOS:

$$\sum_{t=1}^{k} n_t(\bar{Y}_{t.} - \bar{Y}_{..})^2 = w_m B_m^2 + \sum_{t=1}^{k} n_t\{\bar{Y}_{t.} - \bar{Y}_{..} - B_m(\bar{x}_{t.} - \bar{x}_{..})\}^2$$

$$= w_m B_m^2 + S_G \qquad (14)$$

DONDE

$$B_m = \frac{\sum_{t=1}^{k} n_t(\bar{x}_{t.} - \bar{x}_{..})(\bar{Y}_{t.} - \bar{Y}_{..})}{\Sigma n_t(\bar{x}_{t.} - \bar{x}_{..})^2} \qquad (15)$$

Y

$$w_m = \Sigma n_t(\bar{x}_{t.} - \bar{x}_{..})^2 \qquad (16)$$

LA VARIANCIA DE B_m Y LA ESPERANZA DE S_G SON:

$$\mathrm{Var}(B_m) = \sigma^2/w_m \qquad (17)$$

$$E(S_G) = (k-2)\sigma^2 + \sum_{t=1}^{k} n_t(\alpha_t - \alpha_m - \beta_m \bar{x}_{...})^2 \qquad (18)$$

DONDE

$$\alpha_m = \Sigma n_t \alpha_t/N \qquad (19)$$

$$\beta_m = \Sigma n_t(\bar{x}_{t.} - \bar{x}_{..})(\alpha_t + \beta_t \bar{x}_{t.})/w_m \qquad (20)$$

POR CONSIGUIENTE, LA HIPOTESIS $H_o^{(2)}$ SE PUEDE PROBAR FORMULANDO LA ESTADISTICA

$$F = \frac{S_G/(k-2)}{S_R/(N-2k)} \qquad (21)$$

QUE TIENE DISTRIBUCION F CON (k-2) Y (N-k) GRADOS DE LIBERTAD.

FINALMENTE, PARA PROBAR $H_o^{(3)}$ USAREMOS LA SUMA DE LOS DOS TERMINOS $w_c B_c^2$ Y $w_m B_m^2$:

$$w_c B_c^2 + w_m B_m^2 = w_o B_o^2 + \frac{w_c w_m}{w_o} (B_c - B_m)^2 = w_o B_o^2 + S_{WG} \qquad (22)$$

DONDE

$$w_o = w_c + w_m = \sum_t \sum_i (x_{ti} - \bar{x}_{..})^2 \qquad (23)$$

$$B_o = \frac{w_c B_c + w_m B_m}{w_o} \qquad (24)$$

DONDE B_o ES LA PENDIENTE GLOBAL QUE SE OBTENDRIA SI TODOS LOS PUNTOS SE AJUSTARAN A UNA SOLA RECTA, SIN DISTINCION DE GRUPOS. LA ESPERANZA DE S_{WG} ES

$$E(S_{WG}) = \sigma^2 + \frac{w_c w_m}{w_o} (\beta_o - \beta_m)^2 \qquad (25)$$

POR LO TANTO, LA HIPOTESIS $H_o^{(3)}$ SE PUEDE PROBAR CON LA ESTADISTICA

$$F = \frac{S_{WG}}{S_R/(N-2k)} \qquad (26)$$

QUE TIENE DISTRIBUCION F CON 1 Y N-2k GRADOS DE LIBERTAD

LAS PRUEBAS ANTERIORES SE PUEDE RESUMIR EN LA TABLA DE ANALISIS DE VARIANCIA SIGUIENTE:

Fuente	G. de L.	Suma de cuadrados SS	Esperanzas de MS
Pendiente global	1	$S_o = w_o B_o^2$	$\sigma^2 + w_o \beta_o^2$
Pendiente de las medias de los grupos vs promedio de las pendientes dentro de grupos	1	$S_{WG} = \frac{w_c w_m}{w_o}(B_c - B_m)^2$	$\sigma^2 + \frac{w_c w_m}{w_o}(\beta_o - \beta_m)^2$
Acerca de la línea de regresión de las medias de los grupos	$k-2$	$S_G = \sum_{i=1}^{k} n_i\left[\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot} - B_m(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot})\right]^2$	$\sigma^2 + (k-2)^{-1} \sum_{i=1}^{k} n_i[\alpha_i - \alpha_m - \beta_m \bar{x}_{i\cdot}]^2$
Pendientes entre grupos	$k-1$	$S_W = \sum_{i=1}^{k} w_i(B_i - B_c)^2$	$\sigma^2 + (k-1)^{-1} \sum_{i=1}^{k} w_i(\beta_i - \beta_c)^2$
Residual	$N-2k$	$S_R = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left[Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot} - B_i(x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot})\right]^2$	σ^2
Total	$N-1$	$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2$	

ANALISIS DE COVARIANCIA EN UNA DIRECCION

EL ANALISIS DE COVARIANCIA SE UTILIZA PARA PROBAR SI LAS DIFERENCIAS EN LA RESPUESTA MEDIA DE UN GRUPO A OTRO PUEDEN SER EXPLICADAS POR UNA REGRESION LINEAL CON UNA VARIABLE DE CONTROL. EL PLANTEAMIENTO DEL ANALISIS DE COVARIANCIA DEPENDE DEL MODELO QUE SE UTILICE; PARA CLASIFICACION DE GRUPOS EN UNA DIRECCION SE PUEDEN USAR LOS SIGUIENTES MODELOS:

$$\text{I.} \quad Y_{ti} = \alpha_t + \beta(X_{ti} - \bar{X}_{..}) + Z_{ti} \tag{1}$$

$$\text{II.} \quad Y_{ti} = \alpha_t + \beta_t(X_{ti} - \bar{X}_{..}) + Z_{ti} \tag{2}$$

PARA AMBOS MODELOS SE PRETENDE PROBAR LA HIPOTESIS

$$H_0\text{:}\ \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k \tag{3}$$

CONTRA H_1: NO TODAS LAS α_t SON IGUALES

LAS TABLAS DEL ANALISIS SON:

MODELO	FUENTE	G. de L.	SS
I	GRUPOS (AJUSTADA)	$k - 1$	SWG + SG
	RESIDUAL	$N - k - 1$	SR + SW
II	GRUPOS (AJUSTADA)	$k - 1$	$S_0 + SWG + SG + SW - w_0 \sum_{t=1}^{k} B_t^2$
	RESIDUAL	$N - 2k$	SR

DONDE SWG, SG, SR, SW, S_0 Y w_0 SE CALCULAN CON LAS FORMULAS DEL CAPITULO DE OBSERVACION DE DOS VARIABLES, Y

$$B'_t = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} (X_{ti} - \bar{X}_{..})(\bar{Y}_{ti} - \bar{Y}_{..})}{\sum_{i=1}^{N_t} (X_{ti} - \bar{X}_{..})^2} \tag{4}$$

LOS VALORES ESTIMADOS DE LAS α_t SON

MODELO I: $\bar{Y}_{t.} - B_c(\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..})$ (5)

MODELO II: $\bar{Y}_{t.} - B_t(\bar{X}_{t.} - \bar{X}_{..})$ (6)

SI UNO ESTA BASTANTE SEGURO DE QUE $\beta_1 = \beta_2 = \dots \beta_k$, ENTONCES EL MODELO I ES MEJOR, YA QUE DA MAS GRADOS DE LIBERTAD EN EL RESIDUO.

TAREA

EN UN EXPERIMENTO, A 40 SEÑORES SE LES SUJETO A UNA PRUEBA (TRATAMIENTO) PARA DETERMINAR QUE TAN CERCA PODIAN CAMINAR HACIA UN OBJETO PELIGROSO (EN ESTE CASO UNA VIBORA), ANTES DE SENTIRSE ANSIOSOS; PARA ESTO, CADA SUJETO SE SITUO ALEATORIAMENTE EN UNO DE CUATRO GRUPOS, CADA UNO CON DIEZ SUJETOS; CON CADA GRUPO SE EMPLEO DIFERENTE TIPO DE VIBORA. DESPUES DEL TRATAMIENTO A CADA SEÑOR SE LE SUJETO DE NUEVO AL MISMO TRATAMIENTO (POSTRATAMIENTO). LOS RESULTADOS DEL TRATAMIENTO SON LAS X_{ti} Y LOS DEL POSTRATAMIENTO SON LAS Y_{ti}, LOS CUALES SE PRESENTAN EN LA TABLA SIGUIENTE

SUJETO	GRUPOS (X_{ti}, Y_{ti})			
	1	2	3	4
1	25,25	17,11	32,24	10,8
2	13,25	9,9	30,18	29,17
3	10,12	19,16	12,2	7,8
4	25,30	25,17	30,24	17,12
5	10,37	6,1	10,2	8,7
6	17,25	23,12	8,0	30,26
7	9,31	7,4	5,0	5,8
8	18,26	5,3	11,1	29,29
9	27,28	30,26	5,1	5,29
10	17,29	19,20	25,10	13,0

a) CALCULAR LAS RECTAS DE REGRESION PARA CADA GRUPO, PARA LOS PROMEDIOS Y PARA TODOS LOS PUNTOS JUNTOS. EN UNA MISMA GRAFICA DIBUJAR LOS PUNTOS Y LAS RECTAS CALCULADAS.

b) ESTIMAR LOS EFECTOS α_t

c) PROBAR LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE PENDIENTES H_0: $\beta_1 = \beta_2 \cdots = \beta_k$

d) PROBAR LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE MEDIAS DE LAS Y_{ti} DE LOS CUATRO GRUPOS, DESPUES DE AJUSTAR POR LA REGRESION CON X_{ti}, O SEA, PROBAR H_0: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$.

SOLUCION

CALCULO DE LAS RECTAS DE REGRESION PARA CADA GRUPO:

$$\tilde{Y}_t = a_t + b_t X$$

DONDE

$$b_t = \left(\frac{n \sum_i x_i y_i - (\sum_i x_i)(\sum_i y_i)}{n \Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}\right)_t ; \quad a_t = (\bar{y} - b\,\bar{x})_t$$

SE TIENE PARA CADA GRUPO:

	1	2	3	4
$\sum_i x_i =$	171	160	168	153
$\sum_i y_i =$	268	119	82	144
$\sum_i x_i y_i =$	4,611	2,482	2,338	2,695
$\sum_i x_i^2 =$	3,331	3,256	3,928	3,303
$\bar{x}_{t.} =$	17.1	16.0	16.8	15.3
$\bar{y}_{t.} =$	26.8	11.9	8.2	14.4

POR LO TANTO:

$$b_1 = \frac{10(4611) - (171)(268)}{10(3,331) - (171)^2} = 0.0693; \quad a_1 = 26.8 - 0.0693(17.1) = 25.61$$

$$b_2 = \frac{10(2,482) - (160)(119)}{10(3,256) - (160)^2} = 0.8305; \quad a_2 = 11.9 - 0.8305(16) = -1.39$$

$$b_3 = \frac{10(2,338) - (168)(82)}{10(3,982) - (168)^2} = 0.8687; \quad a_3 = 8.2 - 0.8687(16.8) = -6.39$$

$$b_4 = \frac{10(2,695) - (153)(144)}{10(3,303) - (153)^2} = 0.5112; \quad a_4 = 14.4 - 0.5112(15.3) = 6.58$$

POR LO QUE LAS RECTAS DE REGRESION SON, PARA CADA UNO DE LOS GRUPOS:

$\tilde{Y}_1 = 25.61 + 0.07X$

$\tilde{Y}_2 = -1.39 + 0.83X$

$\tilde{Y}_3 = -6.39 + 0.87X$

$\tilde{Y}_4 = 6.58 + 0.51X$

CALCULO DE LA RECTA QUE SE AJUSTA A LOS PROMEDIOS:

(17.1, 26.8), (16.0, 11.9), (16.8, 8.2) (15.3, 14.4)

$\Sigma X_i = 65.2, \Sigma Y_i = 61.3, \Sigma X_i Y_i = 1,006.76, \Sigma X_i^2 = 1,064.74$

$\bar{x} = 16.3, \bar{y} = 15.325$

$$b_p = \frac{4(1,006.76) - (65.2)(61.3)}{4(1,064.74) - (165.2)} = 3.8232$$

$a_p = 15.325 - (3.8232)\ 16.3 = -46.9937$

LA RECTA DE REGRESION PARA LOS PROMEDIOS ES:

$$\tilde{y}_p = -46.99 + 3.82X$$

CALCULO DE LA RECTA PARA TODOS LOS PUNTOS JUNTOS:

$\Sigma X_i = 171 + 160 + 168 + 153 = 652;\ \bar{x} = 16.3$

$\Sigma Y_i = 268 + 119 + 82 + 144 = 613,\ \bar{y} = 15.325$

$\Sigma X_i Y_i = 4,611 + 2,482 + 2,338 + 2,695 = 12,126$

$\Sigma X_i^2 = 3,331 + 3,256 + 3,928 + 3,303 = 13,818$

LA RECTA DE REGRESION RESULTANTE ES

$$b_r = \frac{40(12,126) - (652)(613)}{40(13,818) - (652)^2} = 0.6689, \quad a_r = 15.325 - (0.6689)\ 16.3 = 4.4217$$

$$\tilde{y}_r = 4.42 + 0.67X$$

b) ESTIMAR LOS EFECTOS α_t

COMO

$E(a_t) = \alpha_t;$ a_t ES UN ESTIMADOR INSESGADO DE α_t Y :

$\hat{\alpha}_1 = 25.61;\ \hat{\alpha}_2 = -1.39;\ \hat{\alpha}_3 = -6.39;\ \hat{\alpha}_4 = 6.58$

c) PROBAR LA HIPOTESIS DE IGUALDAD DE PENDIENTES

$H_o: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4;$ H_1: NO TODAS LAS β_i SON IGUALES

$$W_t = \sum_{i=1}^{n_t} (x_{ti} - \bar{x}_{t.}) = \sum_{i=1}^{n_t} x_{ti}^2 - n_t \bar{x}_{t.}^2$$

$$W_1 = 3{,}331 - 10(17.1)^2 = 406.9, \qquad B_1 = 0.0693$$
$$W_2 = 3{,}256 - 10(16.0)^2 = 696, \qquad B_2 = 0.8305$$
$$W_3 = 3{,}928 - 10(16.8)^2 = 1{,}105.6, \qquad B_3 = 0.8687$$
$$W_4 = 3{,}303 - 10(15.3)^2 = \underline{962.1,} \qquad B_4 = 0.5112$$
$$3{,}170.6$$

$$S_w = \sum_{t=1}^{n_t} W_t \, B_t^2 - W_c \, B_c^2 -$$

$$W_c = \sum_{t=1}^{n_t} W_t = 3{,}170.6$$

$$B_c = \frac{1}{W_c} \sum_{t=1}^{n_t} W_t \, B_t = \frac{1}{3{,}170.6} (2058.4864) = 0.6492$$

$$S_w = 1{,}567.7572 - (3{,}170.6)(0.6492)^2 = 231.30$$

AHORA, DE LA ECUACION (12) DE LOS APUNTES:

$$S_R = \sum_{t=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_t} (y_{ti} - \bar{y}_{..})^2 - \sum_{t=1}^{k} n_t (\bar{y}_{t.} - \bar{y}_{..})^2 - (W_c \, B_c^2 + S_w)$$

$$= \left(\sum_{t=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_t} y_{ti}^2 - N\bar{y}_{..}^2 \right) - \left(\sum_{t=i}^{k} n_t \, \bar{y}_{t.}^2 - N\bar{y}^2 \right) - (W_c \, B_c^2 + S_w)$$

CON $\bar{y}_{..} = 15.325$ SE OBTIENE

$$S_R = 14{,}161 - 11{,}344.5 - 1{,}567.7572 = 1{,}248.74$$

EN CONSECUENCIA $\quad F = \dfrac{S_w/(k-1)}{S_R/(N-2k)} = \dfrac{231.30/3}{1{,}248.74/32} = 1.98 < F_{0.05,3,32} = 2.9$

POR LO QUE SE ACEPTA LA HIPOTESIS DE QUE LAS PENDIENTES SON I-GUALES, CON 5% DE NIVEL DE SIGNIFICANCIA.

d) PROBAR LA HIPOTESIS $H_o : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$

DE LOS RESULTADOS DEL INCISO ANTERIOR ES RAZONABLE SUPONER QUE TODAS LAS β_i SON IGUALES, POR LO QUE EL MODELO CORRESPONDIENTE ES:

$$y_{ti} = \alpha_t + \beta(x_{ti} - \bar{x}_{..}) + Z_{ti}$$

ENTONCES:

$$S_R + S_W = 1248.74 + 231.30 = 1,480.04$$

$$w_m = \sum_{t=1}^{k} n_t(\bar{x}_{t.} - \bar{x}_{..})^2 = n_t\Sigma\bar{x}_t^2 - kn_t\bar{x}_{..}^2 = 10(1,064.74) - (40)(16.3)^2$$

$$= 19.8$$

$$B_m = \sum_{t=1}^{4} \frac{10(\bar{x}_{t.} - 16.3)(\bar{y}_{t.} - 15.325)}{19.8} = \frac{10(9.18 + 1.0275 - 3.5625 + 0.9250)}{19.8}$$

$$= 3.8232$$

$$S_G = \sum_{t=1}^{k} n_t\bar{y}_{t.}^2 - N\bar{y}_{..}^2 - w_m B_m^2 = 11,344.5 - 40(15.325)^2 + 19.8(3.8232)^2 = 2,239.68$$

$$S_{WG} = \frac{w_c w_m}{w_o}(B_c - B_m)^2 = \frac{(3,170.6)(19.8)}{3170.6 + 19.8}(0.6492 - 3.8232)^2 = 198.23$$

$$S_{WG} + S_G = 2437.91$$

POR TANTO :

$$F = \frac{2437.91/3}{1480.04/35} = 19.22 > 2.81 = F_{0.05,3,35}$$

POR LO QUE SE RECHAZA LA HIPOTESIS H_o DE QUE TODAS LAS α_t SON IGUALES ENTRE SI.

18. BIBLIOGRAFIA

1. Johnson, N.L. y Leone, F.C.,"Statistics and experimental design in ingineering and the physical sciences", Vol II, 2a ed., J. Wiley (1977)

2. Lee, W., "Experimental design and analysis", Freeman (1975)

3. Ogawa, J., "Statistical theory of the analysis of experimental designs", Ed. Dakker (1974)

4. Biles, W.E. y Swain, J.J., "Optimization and insdustrial experimentation", J. Wiley (1978)

5. Box, G.E.P., Hunter N.G. y Hunter, J.S. "Statistics for experimenters", J. Wiley (1978)

6. Cochran, W. G. y Cox, G.M., "Experimental designs", J. Wiley

7. Kirk, R., "Experimental design: procedures for the behavioral sciences"

8. Winer, B. J., "Statistical principles in experimental design"

9. Afifi, A.A y Asen, S. P., "Statistical Analysis", 2a Ed., Academic Press.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS

REGRESION Y CORRELACION

Ing. Bernardo Frontana de la Cruz

MAYO, 1985

REGRESION Y CORRELACION

Este capítulo trata con problemas que involucran interrelaciones con variables y su uso en problemas de predicción.

Ejemplos: – En estudios médicos se pueden interesar por enfermedades cancerosas y el número promedio de cigarrillos fumados por día.
– En estudios educativos puede interesar la interrelación entre el aprovechamiento promedio reflejado en las calificaciones y el tiempo que se dedica a estudiar, o los antecedentes de los alumnos al iniciar el curso, ó los recursos que se utilizan en clase
– Un analista de seguros puede interesarse por la interrelación entre el cambio de precios de una parte y variables tales como el comportamiento del mercado de esa parte, los ingresos de los compradores, los precios de la competencia, el nivel de publicidad, etc.

En algunos casos las interrelaciones entre las variables son de interés en y por sí mismo p.ejm en propósitos científicos donde interesa dar explicación de la demanda de la transportación de pasajeros en términos de la calidad de servicio que ofrecen los diferentes modos (tales como el costo, confort, rapidez, etc), y en otros casos la interrelación interesa por su utilidad en la predicción de una variable particular dados los valores de otras ciertas variables.

Entonces, LOS PROBLEMAS DE INTERES EN ESTE CAPITULO ES LA INVESTIGACION DE RELACIONES ENTRE 2 ó MAS VARIABLES Y EL USO DE ESTAS RELACIONES PARA TOMAR DECISIONES. ESTOS PROBLEMAS SE LLAMAN LOS PROBLEMAS DE CORRELACION Y REGRESION E INVOLUCRAN CUESTIONES TALES COMO

1.– ¿Existe alguna relación estadística que dé algún grado de predicción entre las variables aleatorias de interés?

2. ¿Que tan potente es el grado aparente de la relación estadística en el sentido que la posible predicción habilite la relación proporcionada?

3.– ¿Puede formularse una regla simple para predecir una variable a partir de otra u otras, y si es así, que tan buena es esta regla?

En lo que sigue contestaremos primeramente las 2 preguntas iniciales mediante el estudio de la correlación y la tercera pregunta mediante la regresión. El estudio se hará para el caso de 2 ó más variables por lo que conviene repasar la parte de la distribuciones conjuntas vistas en el capítulo 2 (rico en generalidades).

CORRELACION:

En el capítulo 2 revisamos dos categorías que involucran la interrelación entre dos variables:

COVARIANZA: $COV(X,Y) = E\{(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\} = E\{XY\} - E\{X\}E\{Y\}$

donde se dijo que el signo de la covarianza da alguna idea de la DIRECCION de la interrelación entre X y Y.

Como la covarianza se afecta por la variabilidad de X y Y tomadas individualmente, nos dice poco sobre la fuerza de la interrelación o potencia de asociación de dichas variables; así que una mejor medida de esta potencia es:

$$\text{EL COEFICIENTE DE CORRELACION (POBLACIONAL)} = \rho_{xy} = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

ρ_{xy} ES UNA MEDIDA DE LA INTERRELACION LINEAL ENTRE LAS VARIABLES X y Y.

Desde luego que es posible tener relaciones NO LINEALES entre las variables p. ejm.

- si X puede tomar solo valores positivos entonces X y $Y = X^2$ están perfectamente relacionadas y por ser no lineal, ρ_{xy} no refleja la perfecta relación funcional entre las 2 variables.

Generalmente los coeficientes de correlación no son conocidos, pero se dispone de una muestra de una población bivariable y así como la media de la muestra se usa para estimar la media de la población, el coeficiente de correlación de la muestra puede usarse para estimar ρ_{xy}.

EL COEFICIENTE DE CORRELACION DE LA MUESTRA (LLAMADO EL COEFICIENTE DE CORRELACION MOMENTO PRODUCTO DE PEARSON) SE DEFINE COMO

$$r_{xy} = \frac{\Sigma (x_i - m_x)(y_i - m_y)}{n\, s_x\, s_y}$$ (COEFFICIENTE DE CORRELACION DE LA MUESTRA)

DONDE LOS n PARES DE VALORES (x_i, y_i) REPRESENTAN UNA MUESTRA DE TAMAÑO n DE LA POBLACION BIVARIABLE y m_x, m_y; s_x y s_y REPRESENTAN LAS MEDIAS Y LAS DESVIACIONES ESTANDAR DE LAS DOS VARIABLES, RESPECTIVAMENTE.

obsérvese que

$$\text{est } \sigma_x = s_x; \quad \text{est } \sigma_y = s_y; \quad \text{est } COV(x,y) = \frac{\Sigma (x_i - m_x)(y_i - m_y)}{n}$$

lo que da la justificación teórica de que el

$$\text{est } \rho_{xy} = r_{xy}$$

Esta estimación considera que la distribución conjunta de X y Y es una Normal bivariada lo que implica que r_{xy} es el estimador de máxima verosimilitud de ρ_{xy}.

Una manera fácil de calcular r_{xy} involucra las siguientes transformaciones:

1) $\sum(x_i-m_x)(y_i-m_y) = \sum(x_iy_i - x_im_y - y_im_x + m_xm_y)$

$$= \sum x_iy_i - m_y\sum x_i - m_x\sum y_i + n\,m_xm_y$$

$$= \sum x_iy_i - \frac{\sum x_i\sum y_i}{n} - \cancel{\frac{\sum x_i\sum y_i}{n}} + \cancel{\frac{\sum x_i\sum y_i}{n}}$$

$$= \frac{n\sum x_iy_i - \sum x_i\sum y_i}{n}$$

por otro lado:

2) $$S_x = \sqrt{\frac{n\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{n\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}$$

similarmente

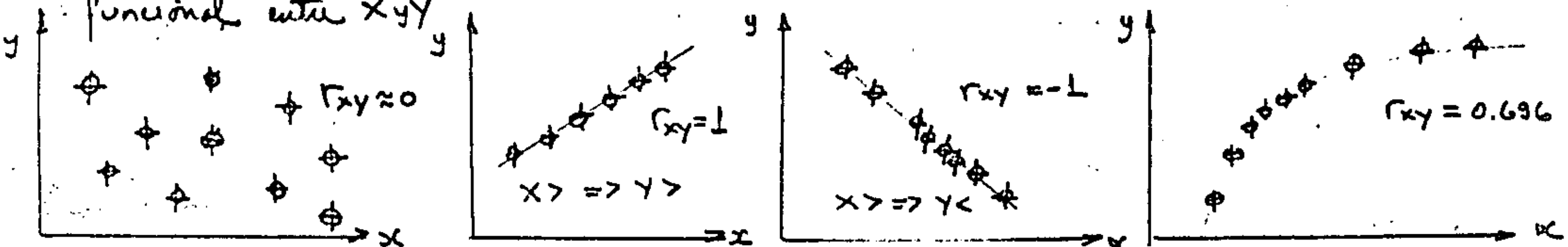
3) $$S_y = \frac{1}{n}\sqrt{n\sum y_i^2-(\sum y_i)^2}$$

sustituyendo 1), 2) y 3) en r_{xy}:

$$\boxed{r_{xy} = \frac{n\sum x_iy_i - \sum x_i\sum y_i}{\sqrt{n\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}\sqrt{n\sum y_i^2-(\sum y_i)^2}}}$$

esta relación es más fácil de aplicar desde el punto de vista computacional

DIAGRAMAS DE DISPERSION. estos diagramas muestran en el espacio de dos dimensiones, los pares de valores (x_i, y_i) de una muestra de tamaño n, y su utilidad está en que muestran alguna idea de la forma de la relación funcional entre X y Y



sin relación lineal — relación lineal positiva — relación lineal negativa — relación no lineal

obsérvese que en la fig 4 se observa una perfecta relación funcional entre las 2 variables, sin embargo $r_{xy} < 1$ porque dicha relación NO es lineal. Esto enfatiza claramente que r_{xy} mide la potencia de la RELACION LINEAL entre los valores muestrales X y Y.

Debe notarse, además, que el coeficiente correlación de la muestra ES ADIMENSIONAL; esto es, si

$$U = cX + g$$
$$V = dY + h$$

donde c y d son constantes positivas y g y h son constantes cualquiera entonces

$\underline{r_{UV} = r_{xy}}$. Demostrar de tarea (a partir de la definición de r_{xy}).

Esto indica que si U y V son funciones LINEALES positivas de X y Y, respectivamente, entonces la correlación de la muestra, entre U y V es la misma que la de X y Y.

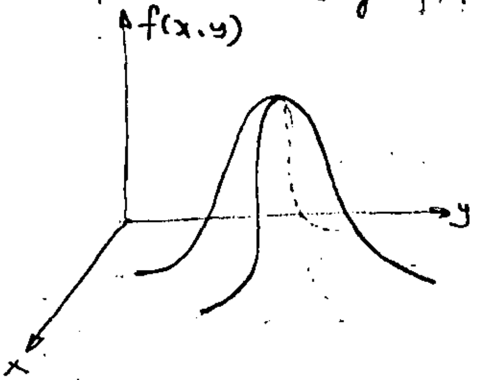
Finalmente, debe mencionarse que el coeficiente de correlación de Pearson momen producto, denotado por r_{xy}, se usa apropiadamente SOLO cuando los datos se miden sobre UNA ESCALA INTERVALAR o DE RELACION (escala numérica) como ya se dijo. Si los datos son nominales u ordinales (por categorías u ordenados) entonces se aplican otras técnicas disponibles para el estudio de la asociación entre dos variables

DISTRIBUCION NORMAL BIVARIABLE.

Para poder hacer inferencias sobre ρ_{xy} o alguna otra medida que involucre la interrelación entre dos variables se requiere tomar algunas consideraciones en torno a su distribución conjunta.

Como se vio en el cap 2, una distribución conjunta puede representarse por una función masa conjunta $P(X=x, Y=y)$ en el caso discreto o por una función de densidad conjunta $f(x,y)$ para el caso continuo. Las distribuciones de esta naturaleza se llaman BIVARIABLES.

De las múltiples distribuciones teóricas bivariables, interesa destacar a la DISTRIBUCION NORMAL BIVARIABLE cuya forma es la de una campana tridimensional y cuya función de densidad es:



$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_x\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}\exp\left\{-\frac{Z_x^2+Z_y^2-2\rho_{xy}Z_xZ_y}{2(1-\rho_{xy}^2)}\right\}$$

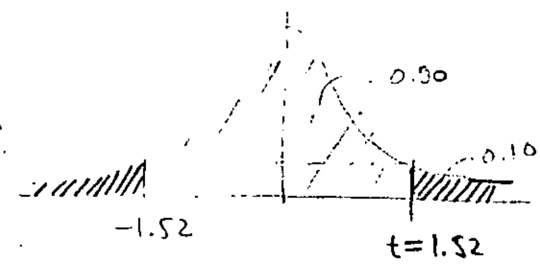
donde $Z_x=\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}$; $Z_y=\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}$

con parámetros: $\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y$ y ρ_{xy} (5 en total) que la especifican correctamente

Algunas propiedades matemáticas que la hacen atractiva son:

- $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$ es una distribución normal
- si $f(x)$ y $f(y)$ son normales no forzosamente implica que $f(x,y)$ sea normal bivariable.
- dado algún valor de x : $f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f(y)}$ es una dist. normal
- Dado que X y Y tienen una distribución normal bivariable, entonces X y Y son independientes si y solo si $\rho_{xy}=0$ lo que

$p \doteq 0.90$ que se interpreta para caso de las pruebas de hipótesis como sigue: si ρ_{xy} fuera realmente igual a cero (H_0) debemos esperar observar un valor r_{xy} mayor que 0.563 o menor que −0.563 en una muestra de tamaño 7 cerca del 20% de las veces.



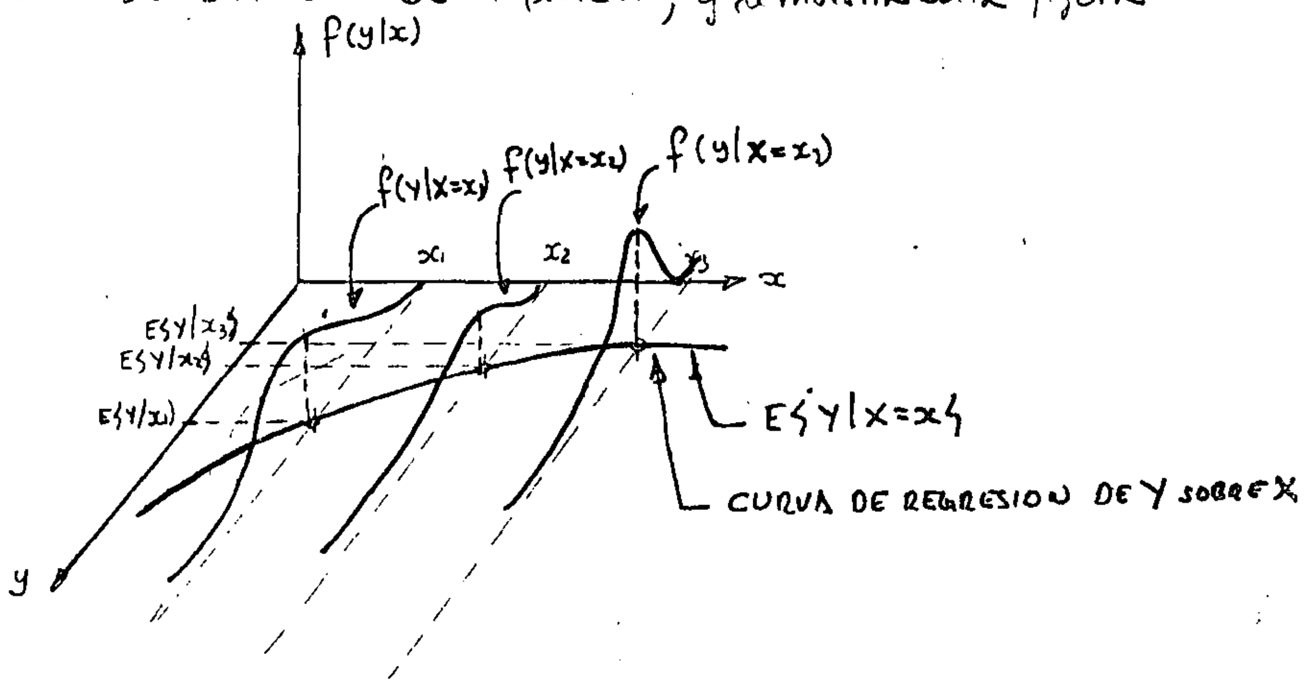
LA CURVA DE REGRESION

En el problema de correlación nuestro interés se centró en medir la potencia de la relación estadística entre 2 variables X y Y. En los problemas de REGRESION se desea predecir el valor de una de las variables aleatorias dado un valor de la otra variable p.ejm

– predecir las ventas (Y) de un producto dado su precio (X).

si se conoce la distribución marginal de Y puede usarse la media de la distribución E{Y} para conocer Y pero ignora la información concerniente de X. Dado que x, el valor de X, se conoce, la distribución de interés es la distribución condicional de Y dado $X=x$. Esta distribución se representa por $P(Y|X=x)$ ó $f(y/x)$ para los casos discreto y continuo, respectivamente como se vió en el cap 2 (ver generalidades). Un estimador razonable intuitivamente (o predictor) es la media de dicha distribución condicional de Y dado $X=x$.

LA MEDIA CONDICIONAL $E\{Y|X=x\}$, PUEDE VARIAR PARA DIFERENTES VALORES DE x; EN OTRAS PALABRAS, DICHA MEDIA ES UNA FUNCION DE x; Y ESTA FUNCION SE LLAMA LA CURVA DE REGRESION DE Y sobre X; y se muestra en la figura



significa que cualquier interrelación entre dos variables con distribución normal bivariable es estrictamente una relación LINEAL.

- La mayoría de las técnicas inferenciales que involucran correlación se desarrollan en términos de esta distribución Normal bivariable, en cuyo caso las inferencias sobre la correlación son equivalentes a las inferencias sobre la dependencia o independencia entre las dos V.A's.

INFERENCIAS EN PROBLEMAS DE CORRELACION:

Si se considera que la población de interés es normal bivariable, entonces la relación entre las variables X y Y es estrictamente LINEAL y puede resumirse por el parámetro ρ_{xy}. Queda claro que r_{xy} puede usarse para estimar ρ_{xy}. A pesar de que r_{xy} es un estimador suficiente y consistente de ρ_{xy}, el coeficiente de correlación de la muestra (r_{xy}) es ligeramente sesgado que involucra sesgo del orden $1/n$ que para propósitos prácticos puede ignorarse.

Desafortunadamente, la distribución muestral de r_{xy} no presenta una forma conveniente; así, para grandes muestras r_{xy} puede verse como aproximadamente normal donde $\rho_{xy}=0$. Aún para muestras relativamente pequeñas ($n>4$) la distribución muestral es unimodal y simétrica. Sin embargo, cuando $\rho_{xy}\neq 0$, la distribución de r_{xy} tiende a ser muy sesgada, así si $\rho_{xy}>0$ el sesgo tiende hacia la izquierda con intervalos de altos valores de r_{xy} relativamente más probables para intervalos similares negativos. Cuando $\rho_{xy}<0$, dicha situación se invierte.

Casi siempre estamos interesados en analizar cuando o no dos variables son independientes. Bajo la consideración de una dist. normal bivariable, la independencia es equivalente a la correlación cero de tal manera que la hipótesis de interés puede ser:

$$H_0: \rho_{xy}=0 \quad \text{contra la alternativa} \quad H_1: \rho_{xy}\neq 0$$

Aún para muestras n relativamente pequeñas la prueba estadística

$$t=\frac{r_{xy}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}}$$

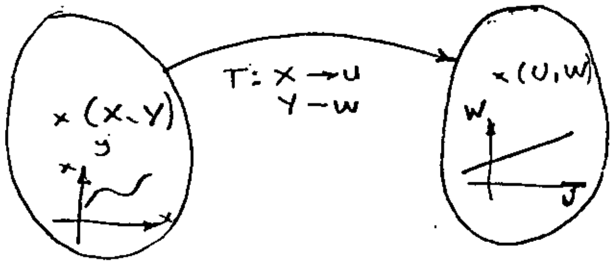
con $n-2$ grados de libertad puede usarse para probar Ho contra H1

Ejemplo: si $n=7$ y $r_{xy}=0.563$

$$t=\frac{0.563\times\sqrt{5}}{\sqrt{1-0.563^2}}=1.52 \qquad \text{con } n-2=5 \text{ g. de l.}$$

de las tablas T observamos que para $\nu=5$; $t=1.52$ entonces corresponde a una

Más aún, si la curva de regresión no es lineal en x puede ser posible transformar X y Y en dos nuevas variables U y W, tal que $E\{U/W\}$ sea lineal. Esta clase de transformaciones que caen en la discusión de la regresión NO lineal salen de la esfera del presente curso. Lo que aquí interesa es tratar a la regresión lineal que tiene una amplia aplicabilidad.



Si la curva de regresión tiene la forma (1) entonces los valores de β_1 y β_2, a los que llamaremos coeficientes de la regresión lineal o más simplemente COEFICIENTES DE REGRESION, pueden expresarse en términos de las medias y desviaciones estandar de X y Y y del coeficiente de correlación ρ_{XY} :

$$2)\ldots \quad \beta_1 = \mu_Y - \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\mu_X \quad ; \quad 3)\ldots \ \beta_2 = \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

en efecto:

tomando los valores esperados respecto a X de 1):

$$4)\ldots \quad \mu_Y = \beta_1 + \beta_2\mu_X$$

multiplicando ambos miembros de 1) por x e integrando respecto a x

$$5)\ldots \quad E\{XY\} = \beta_1\mu_X + \beta_2 E\{X^2\}$$

resolviendo simultáneamente 4) y 5) para β_1 y β_2 se obtienen 2) y 3)..

Cuando β_1 y β_2 se expresan en términos de $\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y$ y ρ_{XY} entonces 1) se transforma en:

$$E\{Y/x\} = \beta_1 + \beta_2 x = \mu_Y - \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\mu_X + \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}x$$

ó

$$6)\ldots \quad E\{Y/x\} = \mu_Y + \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$$

Nótese el papel de ρ_{XY} en 6): si $\rho_{XY} = 0$, la línea de regresión es simplemente

$E\{Y/x\} = \mu_Y$ $\therefore$ no hay relación lineal entre X y Y lo que

Obsérvese que para cada valor de x hay una distribución condicional $f(y|X=x)$ tres de las cuales se muestran en la figura (Dado que X se considera aquí continua, hay un número infinito de tales distribuciones: una para cada posible valor de X). Más aún, y no menos importante: para cada distribución condicional $f(y|X=x)$, la media $E\{Y|X=x\}$ puede determinarse y el conjunto de estos valores de las medias condicionales constituye la CURVA DE REGRESION de Y SOBRE X. Recuérdese que X es la variable independiente y Y la dependiente.

TAREA: Supóngase que el mercado compartido de la marca A de un producto particular es actualmente de 2/3. El fabricante de la marca A está preocupado porque la firma de la marca que compite y que lidera el mercado del producto está a punto de incrementar sus inversiones anunciadas de 2 millones. La interrelación de interés está entre X, el incremento en millones de pesos de la inversión anunciada por la competencia y Y; la parte del mercado de la marca A.

$$\text{si } f(x,y)=\begin{cases}(3x+y)/7 & \text{para } 0<x<2\ ;\ 0<y<1\\ 0 & \text{en otros casos.}\end{cases}$$

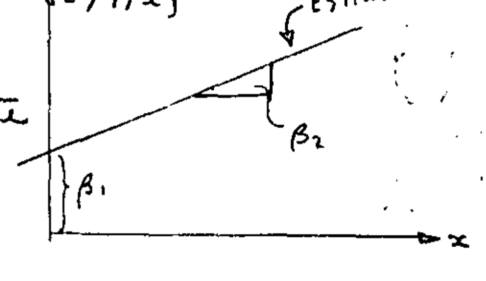
a) grafique $f(x,y)$
b) obtenga $f(x)$; c) calcule $f(y/x)$
d) calcule la curva de regresión y grafíquela $E\{Y/x\}$.
e) si la inversión de la competencia es de 2 cómo espera ver afectada la parte del mercado que le corresponde?

REGRESION LINAL:

La curva de regresión $E\{Y/x\}$ depende de la forma de la función de densidad conjunta $f(x,y)$ y en algunos casos $E\{Y/x\}$ puede presentar una función matemática complicada; pero en otros presenta una forma muy simple. P.ejm. si la distribución conjunta de X y Y es Normal bivariante entonces la curva de regresión es LINEAL:

$$1)\ldots \quad E\{Y/x\}=\beta_1+\beta_2 x$$

donde β_1 es la ordenada al origen y β_2 es la pendiente



La curva de regresión $E\{Y|x\}$ puede ser lineal o cercanamente lineal para otras distribuciones conjuntas.

Como el ejemplo indica, el conocimiento de $X=x$ no siempre permite predecir perfectamente Y a menos que ρ_{XY} sea igual a $+1$ ó -1. Al usar la curva de regresión para predecir Y, podemos considerar la diferencia entre el verdadero valor de Y y el valor predicho por la regresión como EL ERROR DE LA PREDICCION (e):

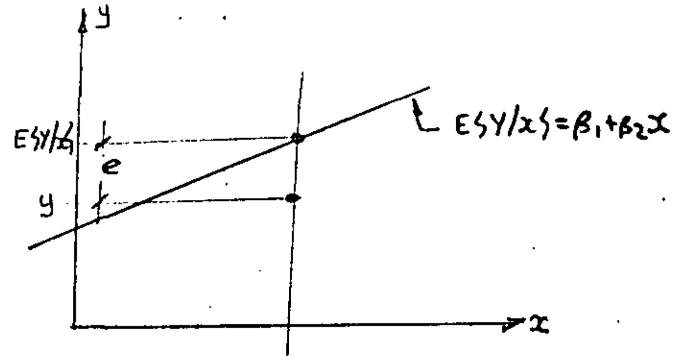
9)... $$e = Y - E\{Y/x\}$$

de donde:

10)... $$Y = e + E\{Y/x\}$$

si $E\{Y/x\}$ es lineal en x:

11)... $$Y = \beta_1 + \beta_2 x + e$$



obsérvese que $X=x$; Y es una V.A $\Rightarrow$ e = VARIABLE ALEATORIA = TERMINO ERROR-ALEATORIO

El término aleatorio e incluye la variabilidad que tiene $\beta_1+\beta_2 x$ de ser un PREDICTOR PERFECTO DE Y. Con $X=x$ los primeros dos términos de 11) son constantes, entonces aplicándole el operador "Esperanza":

$$E\{Y/x\} = E\{\beta_1+\beta_2 x + e|x\} = \beta_1+\beta_2 x + E\{e/x\}$$

por 1):

$$E\{Y/x\} = E\{Y/x\} + E\{e/x\} \Rightarrow \underline{\underline{E\{e/x\}=0}} \quad \ldots (12$$

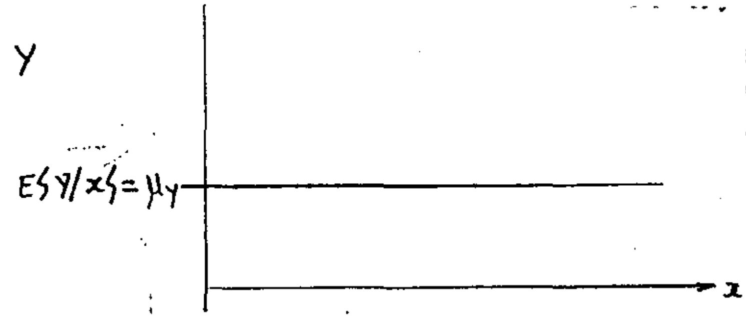
también $V\{Y/x\} = V\{\beta_1+\beta_2 x + e/x\} = V\{e/x\}$ 13

lo que indica que la varianza condicional del término error, dado $X=x$, es idéntica a la varianza de la regresión $\sigma^2_{Y\cdot X}$

$$\sigma^2_{Y\cdot X} = V\{e|X\}.$$

Para hacer inferencias sobre los parámetros de la regresión se requieren mayores consideraciones en torno a la distribución de e. Primero estimaremos los parámetros de regresión sin invocar tal consideración distribucional.

implica que ningún valor de X predice Y vía la regresión lineal. Al acercarse ρ_{xy} a +1 ó -1, el efecto adicional del término que involucra a $(x-\mu_x)$ tiene sobre la predicción de Y.



Para determinar el efecto preciso que tiene el coeficiente de correlación en la predicción de Y es útil considerar la varianza condicional de Y dado x, que para el caso de la DNB (distribución Normal bivariable) vale:

$$7)\ldots \quad \sigma_{Y.X}^2 = V(Y/x) = \sigma_Y^2(1-\rho_{XY}^2) \qquad \text{VARIANZA DE Y DADO UN VALOR DE X}$$

Si no se tiene conocimiento respecto a X, la varianza de Y vale justamente σ_Y^2. El conocimiento de X reduce la varianza de σ_Y^2 a $\sigma_Y^2(1-\rho_{XY}^2)$

De 7) el cuadrado del coeficiente de correlación se llama COEFICIENTE DE DETERMINACION y puede escribirse como:

$$8)\ldots \quad \rho_{XY}^2 = \frac{-\sigma_{Y.X}^2 + \sigma_Y^2}{\sigma_Y^2}$$

LA INTERPRETACION DE ESTA ECUACION ES QUE EL CUADRADO DEL COEFICIENTE DE CORRELACION ES LA PROPORCION DE LA VARIANZA EXPLICADA POR LA REGRESION LINEAL.

La varianza original es σ_Y^2, y la varianza residual, esto es la varianza no explicada por la regresión lineal es $\sigma_{Y.X}^2$

- Ejemplo: si $\sigma_Y^2 = 100$ y $\rho_{XY}=0$, el conocimiento de X no mejora la predicción de Y y $\sigma_{Y.X}^2 = 100$; Nada de la varianza es explicada por la regresión lineal. En el otro extremo si $\rho_{XY} = +1$ ó -1, entonces

$$\sigma_{Y.X}^2 = \sigma_Y^2(1-1) = 0$$

y el conocimiento de X nos permite predecir Y PERFECTAMENTE y por lo tanto toda la varianza es explicada por la regresión lineal. Si $\rho_{XY}^q = 0.5$; entonces $\sigma_{Y.X}^2 = 100(1-0.25) = 75$ y el 25 porciento de la varianza es explicada por la regresión lineal y el 75% de la varianza no es explicada. Obsérvese que es la magnitud absoluta de ρ_{XY}, y no el signo, lo que determina la proporción de la varianza que se explica por la regresión lineal. Si $\rho_{XY} = -0.5$ p.ejm, el 25% de la varianza se explica por la regresión lineal, igual que cuando $\rho_{XY} = +0.5$

La varianza de la muestra del valor de Y que es predicha por la ecuación 8) es igual a la varianza de la muestra del término error:

$$9)\ldots \quad S_{Y\cdot X}^2 = \frac{\Sigma(\hat{e}_i - m_{\hat{e}})^2}{n} \qquad \text{(compárese con la ec 13 anterior).}$$

$$10)\ldots \quad S_{Y\cdot X}^2 = \frac{\Sigma\left[y_i - (b_1 + b_2 x_i)\right]^2}{n}$$

o en términos de S_Y y r_{XY}

$$S_{Y\cdot X}^2 = S_Y^2 (1 - r_{XY}^2) \qquad \text{(compárese con la ec. 7 anterior).}$$

Este es un estimador de $\sigma_{Y\cdot X}^2$ sesgado; para tener un estimador insesgado

$$\hat{S}_{Y\cdot X}^2 = \hat{S}_{Y\cdot X}^2 \frac{(n)}{(n-2)}$$

Al igual que como ρ_{XY}^2 es igual a la proporción de la varianza poblacional de Y que es explicada por la regresión lineal teórica; r_{XY}^2 es igual a la proporción de la varianza de la muestra de Y que es explicada por la recta de regresión explicada.

Se deja constancia de la necesidad de hacer inferencias sobre la recta de regresión. Finalmente como de hacer pruebas sobre "la bondad de ajuste" y de la regresión no lineal"; de las "bandas de confianza"

ESTIMACION DE LA RECTA DE REGRESION

En la mayoría de los casos se desconoce la distribución conjunta de X y Y lo que imposibilita encontrar la curva de regresión teórica E{Y/X}. Supongan que se dispone de una muestra de tamaño n : (x_i, y_i) $i=1..n$, luego entonces el problema es uno de ESTIMACION DE LA CURVA DE REGRESION o de ajustar una curva a los datos. En términos del apartado anterior, el problema consiste en ESTIMAR los coeficientes de regresión β_1 y β_2, a los que denotaremos por b_1 y b_2, respectivamente; de tal forma que la recta de regresión ESTIMADA es:

$$1)\quad \hat{y} = b_1 + b_2 x$$

es obvio que $\hat{y} \neq y$;
si $\hat{e}$ denota el error dado por 11) del apartado anterior, entonces

$$2)\ldots\quad y = b_1 + b_2 x + \hat{e} \quad (\text{el verdadero valor de } y \text{ de la población})$$

Bastantes criterios pueden elegirse para calcular los estimadores de β_1 y β_2, de los cuales destaca el CRITERIO DE LOS MINIMOS CUADRADOS formulado por los matemáticos Legendre y Gauss: SELECCIONAR b_1 y b_2 de TAL FORMA QUE LA SUMA DE LOS ERRORES CUADRADOS SEA LO MAS PEQUEÑA POSIBLE

Entonces: de 2); dados n pares de valores (x_i, y_i)

$$3)\ldots\quad \hat{e}_i = y_i - (b_1 + b_2 x_i)$$

y conforme al criterio seleccionado:

$$\text{Minimizar } \sum e_i^2 = \sum [y_i - (b_1 + b_2 x_i)]^2$$

Para minimizar esta función, tomamos las derivadas parciales de $\sum e_i^2$ con respecto a b_1 y b_2 y calculando estos valores tenemos: (TAREA demostrar b_1 y b_2 son)

$$4) \text{ y } 5)\ldots\quad b_1 = \frac{\sum y_i - b_2 \sum x_i}{n} \quad ; \quad b_2 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$\text{est } \beta_1 = b_1 \quad ; \quad \text{est } \beta_2 = b_2 .$$

trayendo a escena los otros estimadores de los parámetros: s_x, s_y, m_x; m_y y r_{xy} se puede plantear:

$$6)\ldots\quad b_2 = r_{xy}\frac{s_y}{s_x}$$ (compárese con 3 del apartado anterior; se deriva de b_2 y r_{xy})

$$7)\ldots\quad b_1 = m_y - b_2 m_x$$ (compárese con 2 del apartado anterior)

∴ la recta de regresión estimada puede entonces escribirse como:

$$\hat{y} = b_1 + b_2 x = m_y - b_2 m_x + b_2 x = m_y + b_2(x - m_x)$$

o

$$8)\ldots\quad \hat{y} = m_y + r_{xy}\frac{s_y}{s_x}(x - m_x)$$ (compárese con la ec. 6 del apartado anterior)

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS

V A R I O S

M. en I. Rubén Téllez Sánchez

MAYO, 1985

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

ESTIMACION

- PUNTUAL
  - PROBLEMA: Estimar el valor de un conjunto de parametros a partir de una muestra aleatoria
  - METODOS
    - MOMENTOS: Igualar momentos muestrales y poblacionales y resolver el sistema correspondiente
    - MAXIMAVEROSIMILITUD: Maximinar la función de verosimilitud o el logaritmo de esta.
    - BAYES: Minimizar es riesgo esperado.
  - PROPIEDADES
    - INSESGAMIENTO: $E(\hat{\theta}) = \theta$
    - CONSISTENCIA: $P\{|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon\} \to 0$ si $n \to \infty$
    - CONSISTENCIA EN ERROR CUADRATICO: $\lim_{n\to\infty} E|\hat{\theta}_n - \theta| = 0$
    - EFICIENCIA: $\mathrm{Var}\,\hat{\theta}_n < \mathrm{Var}\,\tilde{\theta}_n$ $\forall\, \tilde{\theta}_n$ estimador de θ
    - SUFICIENCIA: Toda la información contenida en la muestra aleatoria en lo que se refiere al parametro, la contiene el estimador.
    - CONSISTENCIA EN ERROR CUADRATICO
- INTERVALOS Y REGIONES DE CONFIANZA.
  - PROBLEMA: Especificar un intervalo o región en donde se espera que este contenido el valor del parametro.
  - METODOS
    - Apoyandose en estadísticas conocidas: A partir de una variable aleatoria y una relación de probabilidad despejar al parámetro.
    - BAYES: A partir de una relación de probabilidad sobre la función de densidad condicional de $f(\theta|x_1,\ldots,x_n)$ se despeja θ.
    - GENERAL: De una relación de probabilidad del estimador de maximaverosimilitud del parámetro, se despeja a este.
  - PROPIEDADES
    - Longitud o medida del intervalo o región.
    - Facilidad de construcción del intervalo o región.

6. ALEATORIZACION.

Asignación al azar de tratamientos a las unidades experimentales.

Una suposición frecuente en los modelos estadísticos de diseño de experimentos en que las observaciones o los errores en ellas estan distribuidos independientemente. La aleatorización hace valida esta suposición.

La reproducción y aleatorización hacen válida una prueba de significancia.

7. CONTROL LOCAL

Cantidad de <u>balanceo</u>, <u>bloqueo</u> y <u>agrupamiento</u> de las unidades experimentales que se emplean en el diseño estadístico adaptado.

El objetivo del control local es hacer un diseño experimental mas eficiente.

AGRUPAMIENTO

Colocación de un conjunto de unidades experimentales homogéneas en grupos, de modo que los diferentes grupos puedan sujetarse a distintos tratamientos.

BLOQUEO

Distribución de las unidades experimentales en bloques, de manera que las unidades dentro de un bloque sean relativamente homogénas, de esta manera, la mayor parte de la variación predecible entre las unidades queda confundida con el efecto de los bloques.

BALANCEO

Obtención de las unidades experimentales, el agrupamiento, el bloqueo y la asignación de los tratamientos a las unidades experimentales de manera que resulte una configuración balanceada.

8. TRATAMIENTO O COMBINACION DE TRATAMIENTOS.

Conjunto particular de condiciones experimentales que deben imponerse a una unidad experimental dentro de los confines del diseño seleccionado.

3

9. FACTOR

Una variable independiente. En la mayoría de las investigaciones, se trata con mas de una variable independiente y con los cambios que ocurren en la variable dependiente, cuando varia una o mas de las variables independientes.

10. ETAPAS DE UN DISEÑO DE EXPERIMENTOS.

- Enunciado o planteamiento del problema.
- Formulación de hipótesis.
- Proposición de la técnica experimental y el diseño.
- Examen de suscesos posibles y referencias en que se basan las razones para la indagación que asegure que el experimento proporcionará la información requerida y en la extensión adecuada.
- Consideración de los posibles resultados desde el punto de vista de los procedimientos estadísticos que se aplicaran y para asegurar que se satisfagan las condiciones necesarias para que sean válidos estos procedimientos.
- Ejecución del experimento.
- Aplicación de las técnicas estadísticas a los resultados experimentales.
- Extracción de conclusiones con medidas de la confiabilidad de las estimaciones generadas. Debera darse cuidadosa consideración a la validez de las conclusiones para la población de objetos o eventos a la cual se van aplicar.
- Valoración de lainvestigación completa y contrastación con otras investigaciones del mismo problema o similares.

la página 244, cada laboratorio mide los pesos de recubrimiento de 12 discos y que los resultados son los siguientes:

Laboratorio A:	0.25, 0.27, 0.22, 0.30, 0.27, 0.28, 0.32, 0.24, 0.31, 0.26, 0.21, 0.28
Laboratorio B:	0.18, 0.28, 0.21, 0.23, 0.25, 0.20, 0.27, 0.19, 0.24, 0.22, 0.29, 0.16
Laboratorio C:	0.19, 0.25, 0.27, 0.24, 0.18, 0.26, 0.28, 0.24, 0.25, 0.20, 0.21, 0.19
Laboratorio D:	0.23, 0.30, 0.28, 0.28, 0.24, 0.34, 0.20, 0.18, 0.24, 0.28, 0.22, 0.21

Los totales para las cuatro muestras son, respectivamente, 3.21, 2.72, 2.76, y 3.00, el total mayor es 11.69, y los cálculos para obtener las sumas de cuadrados necesarias son los siguientes:

$$C = (11.69)^2/48 = 2.8470$$

$$SST = (.25)^2 + (.27)^2 + \ldots + (.21)^2 - 2.8470 = 0.0809$$

$$SS(Tr) = \frac{(3.21)^2 + (2.72)^2 + (2.76)^2 + (3.00)^2}{12} - 2.8470 = 0.0130$$

$$SSE = 0.0809 - 0.0130 = 0.0679$$

Así, obtenemos la siguiente *tabla de análisis* de la varianza:

Origen de variación	*Grado de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Cuadrado medio*	*F*
Laboratorios	3	0.0130	0.0043	2.87
Error	44	0.0679	0.0015	
Total	47	0.0809		

Como el valor obtenido para F excede de 2.82, al valor de $F_{.05}$ con 3 y 44 grados de libertad, la hipótesis nula se puede rechazar al nivel de significado de 0.05; llegamos a la conclusión de que los laboratorios *no* están obteniendo resultados concordantes.

Para estimar los parámetros μ, α_1, α_2, α_3, y α_4 (ó μ_1, μ_2, μ_3, y μ_4), podemos emplear el método de mínimos cuadrados, haciendo mínima la expresión

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{12} (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2$$

con respecto μ y las α_i, con la restricción de que $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 0$. Esto se puede hacer eliminando una de las α, o mejor aún, utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange que se puede encontrar en la mayoría de los libros de Cálculo superior. En cada caso, obtenemos las estimaciones "intuitivamente obvias".

$$\hat{\mu} = \bar{y}. \quad = \quad 0.244$$

$$\hat{\alpha}_1 = \bar{y}_1 - \bar{y}. = \quad 0.024$$

$$\hat{\alpha}_2 = \bar{y}_2 - \bar{y}. = -0.017$$

$$\hat{\alpha}_3 = \bar{y}_3 - \bar{y}. = -0.014$$

$$\hat{\alpha}_4 = \bar{y}_4 - \bar{y}. = \quad 0.006$$

y las estimaciones correspondientes de las μ_i están dados por $\hat{\mu}_i = \bar{y}_i$.

El análisis de la varianza descrito en esta sección se aplica a clasificaciones en una sola dirección en las que cada muestra tiene el mismo número de observaciones. Si no es éste el caso, y los tamaños de las muestras son $n_1, n_2, \ldots n_k$, sólo tenemos que substituir $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ en lugar de nk y escribir las expresiones de cálculo de SST y $SS(Tr)$ en la forma

$$SST = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - C$$

$$SS(Tr) = \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - C$$

En lo demás, el procedimiento es el mismo. (Ver problema 13 de la página 254.)

EJERCICIOS

1. Se hace un experimento para comparar la acción limpiadora de dos detergentes, A y B. Se ensucian 20 piezas de tela con grasa y mugre, y cada una se lava con uno de los detergentes en una máquina de tipo agitador, midiéndose después la blancura de las piezas. Criticar los aspectos siguientes del experimento:
   (a) El experimento completo se hizo con agua suave.
   (b) Quince piezas se lavaron con el detergente A y cinco con el B.
   (c) Para acelerar la prueba, se empleó agua muy caliente y un tiempo de lavado de 30 segundos.
   (d) Las medidas de blancura de todas las piezas lavadas con el detergente A se hicieron primero.
2. Un *bon vivant*, deseaba saber la causa de sus frecuentes malestares, después de beber hizo el siguiente experimento. La primera noche sólo bebió whiskey con agua; la segunda, vodka y agua; la tercera, ginebra y agua, y en la cuarta, ron y agua. En cada de las siguientes mañanas tuvo malestares y llegó a la conclusión de que era el factor común, o sea el agua, lo que le hacía daño.
   (a) Esta conclusión, obviamente, es incorrecta, pero, ¿puede usted decir qué principios del proyecto experimental han sido violados?
   (b) Dé un ejemplo menos obvio de un experimento que tenga las mismas conclusiones.
   (c) Suponga que nuestro amigo ha modificado su experimento de tal forma que cada una de las bebidas alcohólicas se ha empleado con, y sin, agua, de tal forma que el experimento duró 8 noches. ¿Pueden los resultados de este otro experimento servir para confirmar o refutar la hipótesis de que el agua es la causa de los malestares? Explique por qué.

tenemos

$$SST = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} y_{ij}^2 - C$$

$$SS(Tr) = \frac{\sum_{i=1}^{a} T_{i.}^2}{b} - C$$

$$SS(Bl) = \frac{\sum_{j=1}^{b} T_{.j}^2}{a} - C$$

$$SSE = SST - SS(Tr) - SS(Bl)$$

Nótese que los divisores de $SS(Tr)$ y $SS(Bl)$ son el número de observaciones de los totales respectivos, $T_{i.}$ y $T_{.j}$. En el problema 11 de la página 263, el lector deberá verificar que éstas fórmulas son equivalentes a los términos correspondientes de la identidad del teorema 13.2.

Empleando estas sumas de cuadrados, podemos rechazar la hipótesis nula de que las α_i son todas igual a cero con un nivel de significación α si

$$F_{Tr} = \frac{MS(Tr)}{MSE} = \frac{SS(Tr)/(a-1)}{SSE/(a-1)(b-1)}$$

excede a F_α con $a-1$ y $(a-1)(b-1)$ grados de libertad. La hipótesis nula de que las β_j son todas igual a cero se puede rechazar con un nivel de significación α, si

$$F_{Bl} = \frac{MS(Bl)}{MSE} = \frac{SS(Bl)/(b-1)}{SSE/(a-1)(b-1)}$$

excede a F_α con $b-1$ y $(a-1)(b-1)$ grados de libertad. Notemos que las medias de cuadrados, $MS(Tr)$, $MS(Bl)$, y MSE, se definen nuevamente como las sumas de cuadrados correspondientes divididas por sus grados de libertad.

Los resultados obtenidos en este análisis, se pueden resumir en la siguiente *tabla de análisis de la varianza:*

Origen de variación	*Grado de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Cuadrado medio*	*F*
Tratamiento	$a-1$	$SS(Tr)$	$MS(Tr) = SS(Tr)/(a-1)$	$F_{Tr} = \frac{MS(Tr)}{MSE}$
Bloc	$b-1$	$SS(Bl)$	$MS(Bl) = SS(Bl)/(b-1)$	$F_{Bl} = \frac{MS(Bl)}{MSE}$
Error	$(a-1)(b-1)$	SSE	$MSE = SSE/(a-1)(b-1)$	
Total	$ab-1$	SST		

Ilustraremos el análisis de una clasificación en dos direcciones con una observación de cada tratamiento en cada bloque, considerando un experimento para comparar varios proyectos de cascos de lanchas de motor. Como las condiciones del aire y del agua pueden afectar la velocidad máxima de una lancha, posiblemente en un grado mayor que las diferencias en los proyectos de los cascos, cada uno de los cuatro cascos se probó en tres días diferentes, correspondientes a condiciones de calma, moderado, y picado. En cada día las cuatro lanchas se corrieron en una ruta marcada a la velocidad máxima, habiendo sido su orden de salida al azar, y los tiempos (en minutos) necesarios para cubrir la trayectoria se muestran en la tabla siguiente:

	Día 1	*Día 2*	*Día 3*	*Total*
Proyecto A	45	46	51	142
Proyecto B	42	44	50	136
Proyecto C	36	41	48	125
Proyecto D	49	47	54	150
Total	172	178	203	553

Considerando los proyectos como tratamientos y los días como bloques, obtenemos las sumas de cuadrados necesarias en la forma siguiente:

$$C = \frac{(553)^2}{12} = 25{,}484$$

$$SST = (45)^2 + (46)^2 + \ldots + (54)^2 - 25{,}484 = 265$$

$$SS(Tr) = \frac{(142)^2 + (136)^2 + (125)^2 + (150)^2}{3} - 25{,}484 = 111$$

$$SS(Bl) = \frac{(172)^2 + (178)^2 + (203)^2}{4} - 25{,}484 = 135$$

$$SSE = 265 - 111 - 135 = 19$$

Dividiendo las sumas de cuadrados por sus respectivos grados de libertad para obtener las medias de cuadrados adecuadas, obtenemos los resultados mostrados en la siguiente tabla de análisis de la varianza:

Origen de variación	*Grado de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Cuadrado medio*	*F*
Proyecto del casco	3	111	37.0	11.6
Días	2	135	67.5	21.1
Error	6	19	3.2	
Total	11	265		

8

Tabla X(b)

VALORES DE r_p PARA $\alpha = 0.01$*

d.f. \ p	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	90.02								
2	14.04	14.04							
3	8.26	8.32	8.32						
4	6.51	6.68	6.74	6.76					
5	5.70	5.90	5.99	6.04	6.07				
6	5.24	5.44	5.55	5.62	5.66	5.68			
7	4.95	5.15	5.26	5.33	5.38	5.42	5.44		
8	4.74	4.94	5.06	5.13	5.19	5.23	5.26	5.28	
9	4.60	4.79	4.91	4.99	5.04	5.09	5.12	5.14	5.16
10	4.48	4.67	4.79	4.88	4.93	4.98	5.01	5.04	5.06
11	4.39	4.58	4.70	4.78	4.84	4.89	4.92	4.95	4.97
12	4.32	4.50	4.62	4.71	4.77	4.81	4.85	4.88	4.91
13	4.26	4.44	4.56	4.64	4.71	4.75	4.79	4.82	4.85
14	4.21	4.39	4.51	4.59	4.66	4.70	4.74	4.77	4.80
15	4.17	4.34	4.46	4.55	4.61	4.66	4.70	4.73	4.76
16	4.13	4.31	4.43	4.51	4.57	4.62	4.66	4.70	4.72
17	4.10	4.27	4.39	4.47	4.54	4.59	4.63	4.66	4.69
18	4.07	4.25	4.36	4.45	4.51	4.56	4.60	4.64	4.66
19	4.05	4.22	4.33	4.42	4.48	4.53	4.57	4.61	4.64
20	4.02	4.20	4.31	4.40	4.46	4.51	4.55	4.59	4.62
24	3.96	4.13	4.24	4.32	4.39	4.44	4.48	4.52	4.55
30	3.89	4.06	4.17	4.25	4.31	4.36	4.41	4.45	4.48
40	3.82	3.99	4.10	4.18	4.24	4.29	4.33	4.38	4.41
60	3.76	3.92	4.03	4.11	4.18	4.23	4.27	4.31	4.34
120	3.70	3.86	3.97	4.04	4.11	4.16	4.20	4.24	4.27
∞	3.64	3.80	3.90	3.98	4.04	4.09	4.13	4.17	4.21

* Esta tabla se reproduce de "Critical values for Duncan's new multiple range test", por H. L. Harter. Contiene algunos valores corregidos para reemplazar a los dados por D. B. Duncan en su "Multiple Range and Multiple *F* Tests", *Biometrics*, Vol. II (1955). La tabla anterior se reproduce con permiso del autor y el editor de *Biometrics*.

7

Tabla X(a)

VALORES DE r_p PARA $\alpha = 0.05$*

d.f. \ p	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	17.97								
2	6.09	6.09							
3	4.50	4.52	4.52						
4	3.93	4.01	4.03	4.03					
5	3.64	3.75	3.80	3.81	3.81				
6	3.46	3.59	3.65	3.68	3.69	3.70			
7	3.34	3.48	3.55	3.59	3.61	3.62	3.63		
8	3.26	3.40	3.48	3.52	3.55	3.57	3.57	3.58	
9	3.20	3.34	3.42	3.47	3.50	3.52	3.54	3.54	3.55
10	3.15	3.29	3.38	3.43	3.47	3.49	3.51	3.52	3.52
11	3.11	3.26	3.34	3.40	3.44	3.46	3.48	3.49	3.50
12	3.08	3.23	3.31	3.37	3.41	3.44	3.46	3.47	3.48
13	3.06	3.20	3.29	3.35	3.39	3.42	3.44	3.46	3.47
14	3.03	3.18	3.27	3.33	3.37	3.40	3.43	3.44	3.46
15	3.01	3.16	3.25	3.31	3.36	3.39	3.41	3.43	3.45
16	3.00	3.14	3.23	3.30	3.34	3.38	3.40	3.42	3.44
17	2.98	3.13	3.22	3.28	3.33	3.37	3.39	3.41	3.43
18	2.97	3.12	3.21	3.27	3.32	3.36	3.38	3.40	3.42
19	2.96	3.11	3.20	3.26	3.31	3.35	3.38	3.40	3.41
20	2.95	3.10	3.19	3.25	3.30	3.34	3.37	3.39	3.41
24	2.92	3.07	3.16	3.23	3.28	3.31	3.35	3.37	3.39
30	2.89	3.03	3.13	3.20	3.25	3.29	3.32	3.35	3.37
40	2.86	3.01	3.10	3.17	3.22	3.27	3.30	3.33	3.35
60	2.83	2.98	3.07	3.14	3.20	3.24	3.28	3.31	3.33
120	2.80	2.95	3.04	3.12	3.17	3.22	3.25	3.29	3.31
∞	2.77	2.92	3.02	3.09	3.15	3.19	3.23	3.27	3.29

* Esta tabla se reproduce de "Critical values for Duncan's new multiple range test", por H. L. Harter. Contiene algunos valores corregidos para reemplazar a los dados por D. B. Duncan en su "Multiple Range and Multiple *F* Tests", *Biometrics*, Vol. II (1955). La tabla anterior se reproduce con permiso del autor y el editor de *Biometrics*.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS

EXPERIMENTACION FACTORIAL

EXPOSITOR

M. EN C. RUBEN TELLEZ SANCHEZ

29 MAYO 1985

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

14 EXPERIMENTACION FACTORIAL

14.1 Experimentación de dos factores

En el capítulo 13, nos interesamos principalmente en los efectos de una variable cuyos valores los considerábamos como "tratamientos". Las variables extrañas se acomodaron para evitar su influencia en bloques, réplicas, filas o columnas de cuadrados latinos y en formas más complicadas de diseños. En este capítulo trataremos de los efectos individuales y en conjunto de varias variables, y de las combinaciones de los valores, o *niveles*, de esas variables que harán ahora el papel de diferentes tratamientos. Las variables extrañas, si las hay, se tratarán como antes.

Para considerar un experimento simple de *dos factores* (dos variables), supongamos que se desea determinar los efectos de la temperatura de la caldera y el espesor del horno en el tiempo necesario para hacer coque. Las condiciones experimentales utilizadas son

Ancho del hogar	*Temperatura de gases (grados F)*
4	1600
4	1900
8	1600
8	1900
12	1600
12	1900

y si se hacen varios bloques (o réplicas) consistente cada uno en estos seis "tratamientos", será posible analizar los datos como una clasificación en dos direcciones y contrastar las diferencias significativas entre las medias de los seis tratamientos. Sin embargo, en este caso el experimentador está interesado en conocer algo más que esto: desea saber si las variaciones en el espesor del horno o en su temperatura afectan al tiempo para hacer el coque, y posiblemente también si cualquier cambio en este tiempo atribuible a variaciones del espesor..es el mismo a diferentes temperaturas.

Contestar preguntas de este tipo será posible si las condiciones del experimento, los tratamientos, consisten en combinaciones adecuadas de los *niveles* (o valores) de los distintos *factores*. Los factores, en este caso, son el espesor y la temperatura; el espesor tiene los *tres niveles* 4, 8 u 12 pulgadas, mientras que la temperatura tiene los *dos niveles* 1600 y 1900 grados Fahrenheit. Nótese que los seis tratamientos se escogieron de tal forma que cada nivel del espesor del horno se asocia una vez a cada nivel de la temperatura. En general, si dos factores A y B se investigan en a niveles y b niveles, respectivamente, y si hay $a \cdot b$ condiciones experimentales (tratamientos) correspondientes a todas las combinacions posibles de los niveles de los dos factores, el experimento resultante se denomina ***experimento factorial*** $a \times b$ ***completo.*** Nótese que, si una o más de las $a \cdot b$ condiciones experimentales se omite, aun así se podrá analizar el experimento como una clasificación en dos direcciones, pero no se podrá analizar como un experimento factorial. Es costumbre omitir la palabra "completo", ya que el experimento *factorial* $a \times b$ debe contener condiciones experimentales correspondientes a todas las combinaciones posibles de los niveles de los dos factores.

Para obtener una estimación del error experimental en un experimento de dos factores, es necesario hacer réplicas, esto es, repetir el conjunto completo de las $a \cdot b$ condiciones experimentales, tal como un total de r veces, tomando al azar el orden de aplicación de las condiciones en cada réplica. Si y_{ijk} es la observación de la k-ésima réplica, tomada con el i-ésimo nivel del factor A y el j-ésimo nivel del factor B, el modelo necesario para el análisis de esta clase de experimentos se escribe corrientemente de la siguiente forma

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \rho_k + \epsilon_{ijk}$$

para $i = 1, 2, \ldots a$; $j = 1, 2, \ldots b$; y $k = 1, 2, \ldots r$. En este caso μ es la media mayor, α_i es el efecto del i-ésimo nivel del factor A, β_j es el efecto del j-ésimo nivel del factor B; $(\alpha\beta)_{ij}$ es la *interacción*, o efecto conjunto, del i-ésimo nivel del factor A y el j-ésimo nivel del factor B, y ρ_k es el efecto de la k-ésima réplica. Igual que en los modelos empleados en el capítulo 13, supondremos que las ϵ_{ijk} son valores de variables aleatorias independientes que tienen distribuciones normales con medias cero y varianza común σ^2. También, en forma análoga a las restricciones impuestas a los modelos de las páginas 266 y 275, supondremos que

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = \sum_{j=1}^{b} \beta_j = \sum_{i=1}^{a} (\alpha\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \rho_k = 0$$

Se puede demostrar que estas restricciones aseguran estimaciones únicas para los parámetros μ, α_i, β_j, $(\alpha\beta)_{ij}$ y ρ_k.

Para ilustrar el modelo utilizado en un experimento de dos factores, consideremos un experimento con dos réplicas en las que el factor A se presenta en dos niveles y el factor B en otros dos niveles y los efectos de la réplica son 0, esto es, $\rho_1 = \rho_2 = 0$. En vista de las restricciones impuestas a los parámetros, tendremos

$$\alpha_2 = -\alpha_1, \quad \beta_2 = -\beta_1 \quad \text{y} \quad (\alpha\beta)_{21} = (\alpha\beta)_{12} = -(\alpha\beta)_{22} = -(\alpha\beta)_{11}$$

y las medias de las poblaciones correspondientes a las cuatro condiciones experimentales definidas por los dos niveles del factor A, y los dos niveles del factor B se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\mu_{111} &= \mu_{112} = \mu + \alpha_1 + \beta_1 + (\alpha\beta)_{11}\\
\mu_{121} &= \mu_{122} = \mu + \alpha_1 - \beta_1 - (\alpha\beta)_{11}\\
\mu_{211} &= \mu_{212} = \mu - \alpha_1 + \beta_1 - (\alpha\beta)_{11}\\
\mu_{221} &= \mu_{222} = \mu - \alpha_1 - \beta_1 + (\alpha\beta)_{11}
\end{aligned}$$

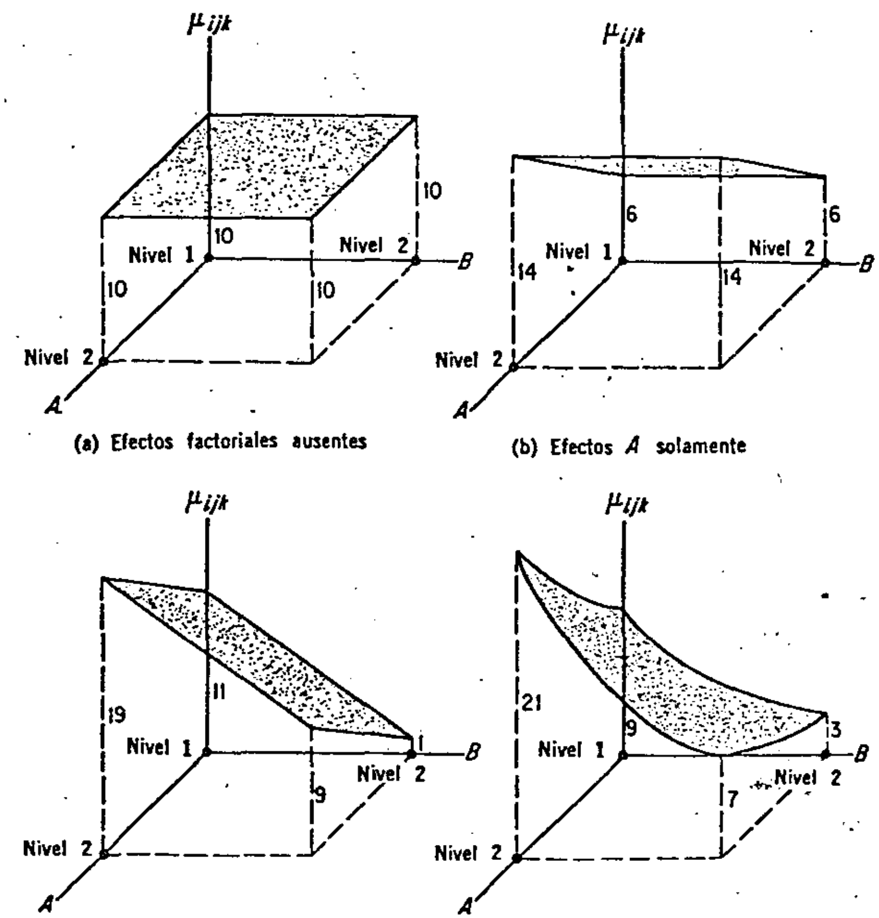
Sustituyendo $\mu_{ij1} = \mu_{ij2}$ por la media de todas las observaciones obtenidas para el i-ésimo nivel del factor A y el j-ésimo nivel del factor B encontramos cuatro ecuaciones lineales simultáneas que se pueden resolver para los parámetros μ, α_1, β_1 y $(\alpha\beta)_{11}$ (problema 7 de la página 290).

Para continuar con nuestra ilustración, supondremos ahora que $\mu = 10$. Si todos los demás efectos son nulos, cada una de las μ_{ijk} será igual a 10, y la superficie de respuesta será un plano horizontal, como el mostrado en la figura 14.1 (a). Si añadimos ahora un efecto del factor A, con $\alpha_1 = -4$, la superficie de respuesta se convierte en el plano inclinado mostrado en la figura 14.1 (b), y si añadimos a esto un efecto del factor B, con $\beta_1 = 5$, obtenemos el plano mostrado en la figura 14.1 (c). Nótese que los efectos de los factores A y B son *aditivos*, esto es, el cambio en la media de cualquier factor al ir del nivel 1 al nivel 2 no depende del nivel del otro factor, y la superficie de respuesta es un plano. Si ahora incluimos una *interacción*, con $(\alpha\beta)_{11} = -2$, el plano se curva como se muestra en la figura 14.1 (d), los efectos ya no son aditivos y la superficie de respuesta ya no es un plano. Nótese, también, que, si los efectos de las réplicas no fueran igual a cero, habríamos obtenido una superficie diferente para cada réplica; la superficie de la figura 14.1 (d) para cada réplica se habría inclinado cierto número de unidades hacia arriba o hacia abajo.

El análisis de un *experimento factorial* $a \times b$ se basa en la siguiente descomposición de la suma total de cuadrados. Primero, subdividimos SST en componentes atribuidas a los tratamientos, las réplicas (o bloques), y error, por medio de la identidad

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(y_{ijk}-\bar{y}_{...})^2 &= r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{...})^2\\
&\quad + ab\sum_{k=1}^{r}(\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})^2\\
&\quad + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{..k}+\bar{y}_{...})^2
\end{aligned}$$

Excepto en la notación, esta identidad es equivalente a la del teorema 13.2. La suma total de cuadrados en el primer miembro de la identidad tiene $abr - 1$ grados de libertad. Los términos del segundo miembro son, respectivamente, la suma de cuadrados de los tratamientos, con $ab - 1$ grados de libertad, la suma de cuadrados de las réplicas (o bloques), con $r - 1$ grados de libertad, y la suma de cuadrados de error, con $(ab - 1)(r - 1)$ grados de libertad. (Nótese que los va-



(a) Efectos factoriales ausentes

(b) Efectos A solamente

(c) Efectos de B suplementario

(d) Efecto suplementario de interacción

FIG. 14.1 Efectos factoriales

rios grados de libertad son los mismos que los del análisis de varianzas de la tabla de la página 256 si sustituimos *ab* por *a* y *r* por *b*.)

No hay nada nuevo en este análisis de los datos; se trata de el análisis de una clasificación en dos direcciones, *pero el hecho que distingue a un experimento factorial es que la suma de cuadrados de los tratamientos se puede continuar subdividiendo en componentes correspondientes a los distintos efectos factoriales.* Así, para un experimento de dos factores, tenemos la siguiente subdivisión, o descomposición, de la suma de cuadrados de los tratamientos:

$$r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{...})^2 = rb\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2 + ra\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2 + r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})^2$$

El primer término del segundo miembro mide la variabilidad de las medias correspondiente a los diferentes niveles del factor *A*, y llamamos a esta *suma de cuadrados del factor A, SSA*. Similarmente, el segundo término es la suma de cuadrados del factor *B*, *SSB*, y el tercer término es la *suma de cuadrados de las interacciones, SS(AB)*, que mide la variabilidad de las medias $\bar{y}_{ij.}$ que no es atribuible a los efectos individuales (o separados) de los factores *A* y *B*. Los $ab-1$ grados de libertad de los tratamientos se subdividen, análogamente, en $a-1$ grados de libertad para el efecto del factor *A*, $b-1$ para el efecto del factor *B*, y

$$ab-1-(a-1)-(b-1)=(a-1)(b-1)$$

grados de libertad para la interacción.

Para ilustrar el análisis de un experimento de dos factores, nos referiremos nuevamente al experimento del coque descrito en la página 274 y supondremos que tres réplicas dieron los siguientes tiempos (en horas):

Factor A Ancho del hogar	Factor B Temperatura de los gases	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Total
4	1600	3.5	3.0	2.7	9.2
4	1900	2.2	2.3	2.4	6.9
8	1600	7.1	6.9	7.5	21.5
8	1900	5.2	4.6	6.8	16.6
12	1600	10.8	10.6	11.0	32.4
12	1900	7.6	7.1	7.3	22.0
	Total	36.4	34.5	37.7	108.6

Siguiendo el procedimiento utilizado para analizar una clasificación en dos direcciones, calculamos primero el término de corrección

$$C=\frac{(108.6)^2}{18}=655.22$$

Luego, la suma total de cuadrados está dada por

$$SST=(3.5)^2+(2.2)^2+\ldots+(7.3)^2-655.22=149.38$$

y las sumas de cuadrados de los tratamientos y las réplicas (en lugar de bloques) están dados por

$$SS(Tr)=\frac{1}{3}[(9.2)^2+(6.9)^2+\ldots+(22.0)^2]-655.22=146.05$$

$$SSR=\frac{1}{6}[(36.4)^2+(34.5)^2+(37.7)^2]-655.22=0.86$$

Finalmente, por substracción, obtenemos

$$SSE=149.38-146.05-0.86=2.47$$

Se puede facilitar la subdivisión de la suma de cuadrados de los tratamientos en componentes para los factores *A* y *B* y para la interacción, construyendo la siguiente tabla en dos direcciones, en que las entradas son los totales de la columna derecha de la tabla que da los datos originales:

Factor A Ancho del hogar	Factor B Temperatura de los gases 1600	1900	
4	9.2	6.9	16.1
8	21.5	16.6	38.1
12	32.4	22.0	54.4
	63.1	45.5	108.6

Empleando fórmulas semejantes a las que utilizamos para calcular las sumas de cuadrados de varios efectos en el capítulo 13, tenemos ahora los dos *efectos principales*

$$SSA=\frac{1}{b\cdot r}\sum_{i=1}^{a}T_{i..}^2-C$$

$$=\frac{1}{6}[(16.1)^2+(38.1)^2+(54.4)^2]-655.22=123.14$$

$$SSB=\frac{1}{a\cdot r}\sum_{j=1}^{b}T_{.j.}^2-C$$

$$=\frac{1}{9}[(63.1)^2+(45.5)^2]-655.22=17.21$$

y para la *interacción*

$$SS(AB)=SS(Tr)-SSA-SSB$$

$$=146.05-123.14-17.21=5.70$$

Finalmente, dividiendo las diferentes sumas de cuadrados por sus grados de libertad y dividiendo los medios cuadrados por el error medio cuadrado, obtenemos los resultados mostrados en la siguiente tabla de análisis de la varianza:

Origen de la variación	*Grados de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Cuadrado medio*	*F*
Replicación	2	0.86	0.43	1.72
Efecto principal				
A	2	123.14	61.57	246
B	1	17.21	17.21	68.8
Interacción	2	5.70	2.85	11.4
Error	10	2.47	0.25	
Total	17	149.38		

La prueba F para réplicas no es significativa ni en el nivel 0.05 ni en el 0.01, pero las otras 3 pruebas F son significativas en el nivel 0.01. En consecuencia, rechazamos la hipótesis nula de que las α_i son todas igual a cero, la de que las β_j son todas igual a cero, y la de que las $(\alpha\beta)_{ij}$ son todas igual a cero. Estos resultados se ilustran en la figura 14.2, en la que se ve la tendencia de los tiempos de coquización medios a variar el espesor de horno para cada una de las temperaturas. En esta figura se ve claramente que el aumento en el tiempo al cambiar el espesor es *mayor* a la temperatura más baja. En vista de esta interacción, se debe tener mucho cuidado al establecer los resultados de este experimento. Por ejemplo, sería muy erróneo establecer que el efecto de aumentar la temperatura de

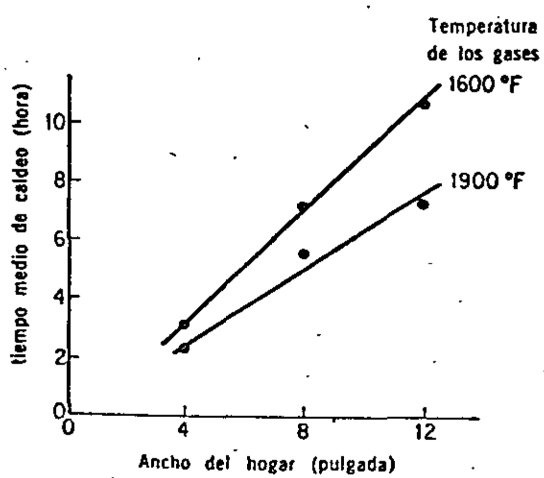


Fig. 14.2 Resultados del experimento de la coquificación

1600° a 1900° F serviría para disminuir el tiempo de coquización en (63.1/9) — (45.5/9) = 1.96 horas. De hecho, este tiempo se disminuye en promedio sólo una cantidad tan pequeña como 0.77 horas cuando el espesor de las paredes del horno es de 4 pulgadas y en tanto como en 3.47 horas cuando el espesor es de 12 pulgadas.

14.2 Experimentos de varios factores

Una gran parte de la investigación y experimentación industrial está dirigida a descubrir los efectos individuales y de conjunto de algunos factores en variables que son las más importantes en los fenómenos investigados. El tipo de clasificación en dos direcciones o el de bloques simples al azar son los tipos de diseños de experimentos más usados, pero la característica distintiva de la mayoría de ellos es la disposición factorial de los tratamientos, o de las condiciones experimentales. Como observamos en la sección precedente, se pueden analizar r conjuntos de datos pertenecientes a $a \cdot b$ condiciones experimentales, como un experimento factorial con r réplicas si las condiciones experimentales representan todas las combinaciones posibles de los niveles de dos factores A y B. En esta sección, extenderemos el análisis de los experimentos factoriales al caso de más de dos factores, esto es, a experimentos donde las condiciones representan todas las combinaciones posibles de los niveles de tres, o más, factores.

Para ilustrar el análisis de un experimento de muchos factores consideraremos la situación siguiente. Se emplea un baño de solución sulfúrica caliente para quitar los óxidos de la superficie de un metal antes de someterlo a un recubrimiento electrolítico, y se desea determinar qué factores, además de la concentración de ácido sulfúrico, pueden afectar la conductividad eléctrica del baño. Como se sabe que la concentración de la sal y la temperatura del baño afectan también la conductividad, se planea un experimento para determinar los efectos individuales y en conjunto de estas tres variables sobre la conductividad eléctrica del baño. Para cubrir los recorridos de concentraciones y temperaturas que se encuentran normalmente, se decide emplear los niveles siguientes para los tres factores:

Factor	*Nivel 1*	*Nivel 2*	*Nivel 3*	*Nivel 4*
A. concentración de ácido %	0	6	12	18
B. Concentración de sal %	0	10	20	
C. Temperatura del baño	80	100		

El experimento factorial resultante necesitará $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ condiciones experimentales en cada réplica, donde cada condición experimental es un baño, hecho de acuerdo con las especificaciones. El orden en que se deben tomar estos baños serán al azar. Supongamos que efectivamente se han completado dos réplicas del

RESULTADOS DE LOS EXPERIMENTOS DE BAÑO-ACIDO

Nivel del factor A	B	C	Conductividad (mhos/cm³) Rep. 1	Rep. 2	Total
1	1	1	0.99	0.93	1.92
1	1	2	1.15	0.99	2.14
1	2	1	0.97	0.91	1.88
1	2	2	0.87	0.86	1.73
1	3	1	0.95	0.86	1.81
1	3	2	0.91	0.85	1.76
2	1	1	1.00	1.17	2.17
2	1	2	1.12	1.13	2.25
2	2	1	0.99	1.04	2.03
2	2	2	0.96	0.98	1.94
2	3	1	0.97	0.95	1.92
2	3	2	0.94	0.99	1.93
3	1	1	1.24	1.22	2.46
3	1	2	1.12	1.15	2.27
3	2	1	1.15	0.95	2.10
3	2	2	1.11	0.95	2.06
3	3	1	1.03	1.01	2.04
3	3	2	1.12	0.96	2.08
4	1	1	1.24	1.20	2.44
4	1	2	1.32	1.24	2.56
4	2	1	1.14	1.10	2.24
4	2	2	1.20	1.19	2.39
4	3	1	1.02	1.01	2.03
4	3	2	1.02	1.00	2.02
		Total	25.53	24.64	50.17

experimento, esto es, se han medido las conductividades de los diferentes baños. y los resultados son los mostrados en la tabla de la página 303.

El modelo que supondremos para el análisis de este experimento (o cualquier experimento similar de tres factores) es una extensión inmediata del usado en la sección 14.1. Si y_{ijkl} es la medida de conductividad obtenida en el i-ésimo nivel de concentración de ácido, el j-ésimo nivel de concentración de sal, el k-ésimo nivel de temperatura del baño de la l-ésima réplica, tendremos

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \rho_l + \epsilon_{ijkl}$$

para $i = 1, 2, \ldots, a$; $j = 1, 2, \ldots, b$; $k = 1, 2, \ldots c$; y $l = 1, 2, \ldots r$. Suponemos, también, que las sumas de los efectos principales (α, β y γ) y la suma de los efectos de las réplicas son igual a cero, que las sumas de los efectos de la interacción en dos direcciones sumadas respecto de cualquier subíndice son igual a cero para cualquier valor de los otros subíndices, y que la suma de los efectos de la interacción en tres direcciones sumadas respecto de uno cualquiera de los subíndices, vale cero para cualesquiera valores de los otros dos subíndices. Como antes, se supone que las ϵ_{ijkl} son valores de variables aleatorias independientes que tienen medias cero y varianza común σ^2.

Comenzamos el análisis de los datos tratando el experimento como una clasificación en dos direcciones con $a \cdot b \cdot c$ tratamientos y r réplicas (bloques) y utilizando las fórmulas abreviadas de la página 256, obtenemos

$$C = \frac{(50.17)^2}{48} = 52.4381$$

$$SST = (0.99)^2 + (1.15)^2 + \ldots + (1.00)^2 - 52.4381 = 0.6624$$

$$SS(Tr) = \frac{1}{2}[(1.92)^2 + (2.14)^2 + \ldots + (2.02)^2] - 52.4381 = 0.5712$$

$$SSR = \frac{1}{24}[(25.53)^2 + (24.64)^2] - 52.4381 = 0.0165$$

$$SSE = 0.6624 - 0.5712 - 0.0165 = 0.0747$$

Los grados de libertad para estas sumas de cuadrados son, respectivamente, 47, 23, 1 y 23.

A continuación, deseamos subdividir las sumas de cuadrados de los tratamientos en las tres *sumas de cuadrados de los efectos principales* SSA, SSB, SSC, las tres *sumas de cuadrados de la interacción en dos direcciones* $SS(AB)$, $SS(AC)$ y $SS(BC)$, y la *suma de cuadrados de interacciones en tres direcciones* $SS(ABC)$. Para facilitar el cálculo de estas sumas, construiremos primero las tres tablas siguientes análogas a la de la página 279:

A \ B	1	2	3	
1	4.06	3.61	3.57	11.24
2	4.42	3.97	3.85	12.24
3	4.73	4.16	4.12	13.01
4	5.00	4.63	4.05	13.68
	18.21	16.37	15.59	50.17

A \ C	1	2	
1	5.61	5.63	11.24
2	6.12	6.12	12.24
3	6.60	6.41	13.01
4	6.71	6.97	13.68
	25.04	25.13	50.17

C \ B	1	2	3	
1	8.99	8.25	7.80	25.04
2	9.22	8.12	7.79	25.13
	18.21	16.37	15.59	50.17

Las entradas de estas tablas son los totales de todas las medidas obtenidas en los niveles respectivos de las dos variables. Nótese la "autocomprobación" de estas tablas; los mismos totales marginales aparecen varias veces, dándonos una comprobación rápida y efectiva de los cálculos.

Para calcular SSA, SSB y $SS(AB)$ nos referimos a la primera tabla y utilizamos una identidad semejante a la de la página 278. Estos cálculos son paralelos a los que se necesitan para SSA, SSB y $SS(AB)$ en el experimento de dos factores. Para hacer la suma de cuadrados de los tratamientos, calculamos primero

$$rc \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (\bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{....})^2 = \frac{1}{r \cdot c} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} T_{ij..}^2 - C$$

$$= \frac{1}{4} [(4.06)^2 + (4.42)^2 + \ldots + (4.05)^2] - 52.4381$$

$$= 0.5301$$

y luego obtenemos

$$SSA = \frac{1}{bcr} \sum_{i=1}^{a} T_{i...}^2 - C$$

$$= \frac{1}{12} [(11.24)^2 + \ldots + (13.68)^2] - 52.4381$$

$$= 0.2750$$

$$SSB = \frac{1}{acr} \sum_{j=1}^{b} T_{.j..}^2 - C$$

$$= \frac{1}{16} [(18.21)^2 + (16.37)^2 + (15.59)^2] - 52.4381$$

$$= 0.2262$$

y

$$SS(AB) = 0.5301 - 0.2750 - 0.2262 = 0.0289$$

Haciendo los mismos cálculos para las tablas segunda y tercera de la página 284, obtenemos, similarmente,

$$SSC = 0.0002 \quad \text{y} \quad SS(AC) = 0.0085$$

y el análisis de la tercera tabla nos da

$$SS(BC) = 0.0042$$

Para la suma de cuadrados de la interacción en tres direcciones, obtenemos, por substracción,

$$SS(ABC)$$
$$= SS(Tr) - SSA - SSB - SSC - SS(AB) - SS(AC) - SS(BC)$$
$$= 0.5712 - 0.2750 - 0.2262 - 0.0002 - 0.0289 - 0.0085 - 0.0042$$
$$= 0.0282$$

Nótese que los grados de libertad para cada efecto principal son uno menos que el número de niveles del factor correspondiente. Los grados de libertad para cada interacción son el *producto* de los grados de libertad de los factores que aparecen en la interacción. Así, los grados de libertad de los tres efectos principales son 3, 2 y 1 en este ejemplo, mientras que los grados de libertad de las interacciones en dos direcciones son 6, 3 y 2, y los grados de libertad de la interacción en tres direcciones es 6.

La tabla de la página siguiente muestra el análisis de la varianza completo para el experimento del baño ácido.

Obteniendo los valores adecuados de $F_{.05}$ y $F_{.01}$ en la tabla VI, vemos que el test para las réplicas es significativo en el nivel 0.05 (tal vez las dos réplicas se hicieron bajo diferentes condiciones atmosféricas o el termómetro empleado para medir las temperaturas de los baños se descalibró, etc.), las pruebas para el factor A y el factor B (efectos principales) son significativas al nivel 0.01 y ninguna de las otras pruebas F son significativas en ningún nivel. De este análisis concluimos que variaciones en la concentración de ácido y en la concentración de sal, afectan la conductividad eléctrica, las variaciones en la temperatura del baño no la afectan y que no hay interacciones. Daremos un paso más, investigando las *magnitudes* de los efectos, estudiando las gráficas de las medias como las mostradas en las figuras 14.3 y 14.4. En ellas vemos que la conductividad aumenta a medida que se añade ácido y disminuye a medida que se añade sal; utilizando los

Origen de variación	*Grados de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Cuadrado medio*	*F*
Réplicas	1	0.0165	0.0165	5.16
Efecto principal				
A	3	0.2750	0.0917	28.66
B	2	0.2262	0.1131	35.34
C	1	0.0002	0.0002	< 1
Interacción de dos factores				
AB	6	0.0289	0.0048	1.50
AC	3	0.0085	0.0028	< 1
BC	2	0.0042	0.0021	< 1
Interacción de tres factores				
ABC	6	0.0282	0.0047	1.47
Error	23	0.0747	0.0032	
Total	47	0.6624		

métodos del capítulo 12, podemos ajustar rectas, curvas o superficies para describir la superficie de respuesta que relaciona la conductividad con las variables consideradas.

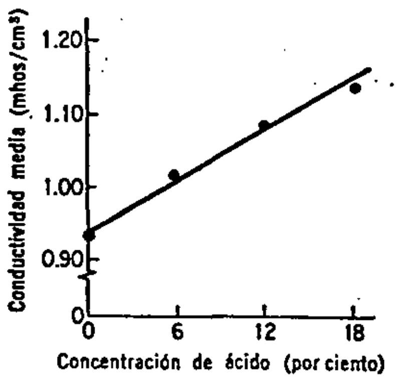


Fig. 14.3 Efecto de la concentración de ácido

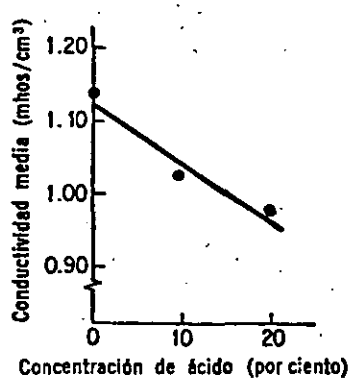


Fig. 14.4 Efecto de la concentración de sal

El procedimiento general de cálculo para un experimento de muchos factores es semejante al método ilustrado aquí para un experimento factorial de $4 \times 3 \times 2$. En primer lugar, analizamos los datos como una clasificación en dos direcciones (o cualquier otro diseño que se utilice) y después analizamos la suma de cuadrados de los tratamientos, descomponiéndola en las componentes atribuidas a los diversos efectos principales y las interacciones. En general, la suma de cuadrados

para cada efecto principal se obtiene sumando los cuadrados de los totales correspondientes a los diferentes niveles de dicho factor, dividiendo por el número de observaciones que comprende cada uno de estos totales y restando después el término de corrección. La suma de cuadrados de cualquier interacción se obtiene sumando los cuadrados de todos los totales obtenidos sumando respecto de los subíndices pertenecientes a los factores no incluidos en la interacción, dividiendo por el número de observaciones que comprende cada uno de estos totales y restando después el término de corrección y todas las sumas de cuadrados correspondientes a los efectos principales y a las interacciones de los menos factores que incluyen los factores que intervienen en aquella interacción.

EJERCICIOS

1. Los datos siguientes son los tiempos de vida (en horas) de cuatro alas de aeroplanos sujetas a tres clases diferentes de vibraciones (a frecuencia constante, corriéndose adelante y atrás con una velocidad constante en una banda de un ancho determinado, y generadas con un generador de ruidos al azar). El experimento es factorial de 3×4 con dos réplicas, siendo el primer número en cada casilla el de la primera réplica y el segundo número, el de la segunda.

	Proyecto 1	*Proyecto 2*	*Proyecto 3*	*Proyecto 4*
Vibración *1*	876, 913	1156, 1219	1234, 1181	825, 797
Vibración *2*	1412, 1290	1876, 1710	1591, 1649	1083, 1161
Vibración *3*	1291, 1412	2115, 1963	1650, 1712	1148, 1262

(a) Analizar los datos como una clasificación de dos direcciones con 12 tratamientos y 2 bloques (réplicas).
(b) Calcular las sumas de cuadrados correspondientes a los efectos principales y a la interacción y presentar los resultados en una tabla de análisis de la varianza.
(c) Interpretar los resultados del experimento.

2. Para determinar las condiciones óptimas en un baño de plateado, se estudian en un experimento factorial de 2×5 los efectos de la concentración de compuestos sulfonados y la temperatura del baño, en la reflexividad del metal plateado. Los resultados de las tres réplicas son los siguientes.

Concentración (g./litro)	*Temperatura F°*	*Rep. 1*	*Reflectivity* *Rep. 2*	*Rep. 3*
4	80	33	37	34
4	100	30	36	35
4	120	31	32	34
4	140	29	21	24
4	160	17	16	20
8	80	37	45	40
8	100	36	44	39
8	120	37	31	36
8	140	34	46	39
8	160	31	39	32

Analizar estos resultados y determinar la condición o condiciones que producen la máxima reflexividad. Construir, además, un intervalo de confianza a un nivel de 0.95 de la reflexividad del metal correspondiente a estas condiciones óptimas.

3. Supongamos que en el experimento descrito en la página 257 se desea determinar si hay alguna interacción entre los cascos de las lanchas y las condiciones del tiempo, esto es, si un casco dará mejores características en condiciones de calma, otro en mar picado, etc. Combínense los datos de la página 257 con la réplica del experimento dada a continuación, y contrástese una interacción significativa y discútanse los resultados.

	Dia 1	*Dia 2*	*Dia 3*
Proyecto A	39	42	58
Proyecto B	44	46	48
Proyecto C	34	47	45
Proyecto D	47	45	57

4. Las tablas siguientes dan los pesos (en gramos) de comida ingerida por dos tipos diferentes de ratas después de haber estado sin comer el número de horas indicadas y habiéndoseles dado después las cantidades indicadas de cierta droga:

		Réplica 1		*Réplica 2*	
		Tipo A	*Tipo B*	*Tipo A*	*Tipo B*
Dosage 0.1 mg/kg	*1 hora*	9.07	6.02	8.77	7.59
	5 horas	9.16	7.05	11.82	9.21
	9 horas	16.08	12.01	14.65	15.35
Dosis 0.3 mg/kg	*1 hora*	5.63	5.87	8.76	6.13
	5 horas	11.57	9.56	11.53	8.30
	9 horas	10.30	10.13	14.46	9.26
Dosis 0.5 mg/kg	*1 hour*	4.42	4.35	3.01	3.81
	5 horas	5.22	8.01	9.21	10.10
	9 horas	7.27	8.17	6.10	11.16

Hacer un análisis adecuado de la varianza e interpretar los resultados.

5. Para estudiar las características de tres detergentes con diferentes tiempos de lavado y diferentes temperaturas, un laboratorio hizo un experimento factorial de $2 \times 2 \times 3$ con tres réplicas. Los resultados se indican a continuación; las entradas son las lecturas de blancura obtenidas con un equipo especialmente preparado.

Detergente	*Tiempo de lavado (min)*	*Temperatura del agua*	*Blancura Rep. 1*	*Rep. 2*	*Rep. 3*
A	10	*caliente*	76	72	73
A	10	*tibio*	51	48	50
A	20	*caliente*	77	74	79
A	20	*tibio*	61	62	62
B	10	*caliente*	63	62	60
B	10	*tibio*	45	48	43
B	20	*caliente*	63	64	59
B	20	*tibio*	55	53	58
C	10	*caliente*	64	60	63
C	10	*tibio*	47	42	49
C	20	*caliente*	65	66	62
C	20	*tibio*	56	54	54

(a) Analizar este experimento como una clasificación de dos direcciones con 12 tratamientos y 3 réplicas (bloques).
(b) Completar el análisis, computando las sumas de cuadrados correspondientes a los diferentes efectos principales y a las interacciones.
(c) Presentar los resultados en una tabla de análisis de la varianza e interpretar el experimento.

6. Para estudiar los efectos de la posición en el lingote (A), la posición en la plancha (B), la preparación de la probeta (C), y la temperatura del ensayo (D) sobre el número de vueltas requerido para romper una probeta de acero por torsión, se hicieron las siguientes anotaciones:

A	*B*	*C*	*D*	*No. de vueltas Rep. 1*	*Rep. 2*
arriba	1	*torno*	2100° F	24	22
arriba	1	*torno*	2200	25	28
arriba	1	*torno*	2300	41	39
arriba	1	*piedra*	2100	18	18
arriba	1	*piedra*	2200	33	27
arriba	1	*piedra*	2300	35	41
arriba	2	*torno*	2100	22	19
arriba	2	*torno*	2200	26	31
arriba	2	*torno*	2300	37	43
arriba	2	*piedra*	2100	23	7
arriba	2	*piedra*	2200	30	26
arriba	2	*piedra*	2300	34	30
medio	1	*torno*	2100	26	19
medio	1	*torno*	2200	30	31
medio	1	*torno*	2300	39	42
medio	1	*piedra*	2100	19	19
medio	1	*piedra*	2200	31	31
medio	1	*piedra*	2300	26	35
medio	2	*torno*	2100	30	26
medio	2	*torno*	2200	31	34

A	B	C	D	No. de vueltas Rep. 1	Rep. 2
medio	2	*torno*	2300° F	39	42
medio	2	*piedra*	2100	22	20
medio	2	*piedra*	2200	32	26
medio	2	*piedra*	2300	38	22
abajo	1	*torno*	2100	18	21
abajo	1	*torno*	2200	35	32
abajo	1	*torno*	2300	34	37
abajo	1	*piedra*	2100	21	19
abajo	1	*piedra*	2200	20	29
abajo	1	*piedra*	2300	44	31
abajo	2	*torno*	2100	23	22
abajo	2	*torno*	2200	31	26
abajo	2	*torno*	2300	38	41
abajo	2	*piedra*	2100	18	19
abajo	2	*piedra*	2200	31	24
abajo	2	*piedra*	2300	35	41

Analizar el experimento.

7. Resolver las cuatro ecuaciones de la página 276 para μ, α_1, β_1, y $(\alpha\beta)_{11}$ en función de las medias de población μ_{ij1} correspondientes a las cuatro condiciones experimentales de la primera réplica. Nótese que estas ecuaciones sirven como una guía para estimar los parámetros en función de las *medias muestrales* correspondientes a las diversas condiciones experimentales.

14.3 Experimentos factoriales 2^n

Hay varias razones por las que se emplean frecuentemente los experimentos factoriales con cada factor tomado sólo en dos niveles. En primer lugar, el número de condiciones experimentales en un experimento factorial crece multiplicativamente con el número de niveles de cada factor; por lo que, si hay que investigar simultáneamente muchos factores, se hará económicamente imposible incluir más de dos niveles por cada factor. Otra importante razón para tratar por separado los experimentos factoriales 2^n es que existen métodos cortos de cálculo que sólo se aplican en este caso. De hecho, el resto de esta sección se dedicará a esos métodos abreviados, mientras que el estudio de otras ventajas, tales como la facilidad de mezclar las interacciones de orden superior y la adaptabilidad de los factoriales 2^n a los experimentos con réplicas fraccionales, se hará en secciones posteriores.

Antes de introducir algunas notaciones especiales que se emplean en los experimentos factoriales 2^n vamos a apuntar que tales experimentos tienen algunos inconvenientes. Como cada factor se mide sólo en dos niveles, es imposible juzgar si los efectos producidos por las variaciones en un factor son lineales o de otra forma (por ejemplo, parabólicos o exponenciales). Por esta razón, los experimentos factoriales 2^n se emplean frecuentemente en "experimentos de filtrado", que se continúan con otros experimentos con pocos factores (ordinariamente, los que re-

sultaron "significativos" individualmente o en conjunto en el experimento de filtrado) tomados con más de dos niveles.

En el análisis de un experimento factorial 2^n es conveniente denotar los dos niveles por 0 y 1 (en lugar de 1 y 2). En consecuencia, los modelos usados para el análisis de estos experimentos difieren de los de la sección 14.2 solamente en que ahora tenemos $i = 0, 1$, en lugar de $i = 1, 2, \ldots a$, $j = 0, 1$, en lugar de $j = 1, 2, \ldots b$; y así por el estilo. Por ejemplo, en un experimento factorial 2^3 el modelo de la página 281 será:

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \rho_l + \epsilon_{ijkl}$$

con $i = 0, 1$, $j = 0, 1$, $k = 0, 1$, y $l = 1, 2, \ldots r$. Las ϵ_{ijkl} se definen como antes, y los parámetros se encuentran ahora sujetos a las restricciones

$$\alpha_1 = -\alpha_0, \quad \beta_1 = -\beta_0, \quad \gamma_1 = -\gamma_0, \quad (\alpha\beta)_{10} = (\alpha\beta)_{01} = -(\alpha\beta)_{11} = -(\alpha\beta)_{00}, \ldots,$$
$$\sum_{l=1}^{r} \rho_l = 0.$$

Nótese que, aparte de los parámetros para réplicas, sólo es necesario *un parámetro de cada tipo;* es decir, aparte de los parámetros para réplicas, podemos expresar el modelo completo en función de los parámetros μ, α_0, β_0, γ_0, $(\alpha\beta)_{00}$, $(\alpha\gamma)_{00}$, $(\beta\gamma)_{00}$, y $(\alpha\beta\gamma)_{000}$.

Un experimento factorial 2^n requiere 2^n condiciones experimentales; como su número puede ser bastante grande, será conveniente representar las condiciones del experimento por medio de una notación especial y enlistarlas en el llamado "orden normal". La notación consiste en representar cada condición experimental por el producto de las letras minúsculas correspondientes a los factores tomados en el nivel 1, llamados de "nivel alto". Si se elimina una letra minúscula correspondiente a un factor, esto significa que el factor se ha tomado en el nivel 0, llamado "nivel bajo". Entonces, en un experimento de tres factores, *ac* representa las condiciones experimentales en que los factores A y C se toman en el nivel alto y el factor B en el bajo; c representa la condición experimental en que se toma el factor C en el nivel alto y los factores A y B en el bajo; etc. El símbolo "1" se usa para denotar la condición experimental en que todos los factores se toman en el nivel bajo.

Aunque las condiciones experimentales se aplican en un orden al azar durante el experimento, para los propósitos de análisis de los resultados es conveniente ordenarlos en el *orden normal.* Para $n = 2$, este orden es 1, a, b, ab; y para $n = 3$ el orden es el mostrado en la tabla de la pág. siguiente:
Nótese que los símbolos de los cuatro primeros experimentos son como los de un experimento de dos factores, y los segundos cuatro se obtienen multiplicando cada uno de los cuatro primeros símbolos por c. De modo semejante, el orden para $n = 4$ de la página 294 se obtiene enlistando los ocho símbolos del experimento de tres factores y repitiendo el conjunto con cada símbolo multiplicado por d.

Condición experimental	Nivel del factor A	B	C
1	0	0	0
a	1	0	0
b	0	1	0
ab	1	1	0
c	0	0	1
ac	1	0	1
bc	0	1	1
abc	1	1	1

En este capítulo y en el anterior nos referimos al total de todas las observaciones correspondientes a una condición experimental dada como al tratamiento total y representamos estos totales por medio de símbolos tales como $T_{i.}$, $T_{ij..}$ y así, sucesivamente. Habiendo introducido una notación especial para las condiciones experimentales del experimento factorial 2^n podemos extender esta notación haciendo que (1), (*a*), (*b*), (*ab*), (*c*), . . ., representen los totales de los tratamientos correspondientes a las condiciones 1, *a*, *b*, *ab*, *c*, . . . Así, en un experimento de tres factores es

$$(1) = \sum_{l=1}^{r} y_{000l} \qquad (a) = \sum_{l=1}^{r} y_{100l}$$

$$(bc) = \sum_{l=1}^{r} y_{011l} \qquad (abc) = \sum_{l=1}^{r} y_{111l}$$

. . . .

Los métodos de cálculo abreviado citados en la página 290, consisten, esencialmente, en expresar las estimaciones de varios efectos principales e interacciones, así como sus sumas de cuadrados correspondientes, en función de *combinaciones lineales* de los totales de los tratamientos. Para ilustrar esto, consideremos la cantidad

$$-(1) + (a) - (b) + (ab) - (c) + (ac) - (bc) + (abc)$$

que es una combinación lineal, con coeficientes +1 y —1, de los totales de los tratamientos correspondientes a las ocho condiciones experimentales. Refiriéndonos al modelo de la página 291 y empleando las relaciones entre los parámetros (pero dejando todos los detalles al lector en los problemas 5, 6 y 7 de la página 300) se puede demostrar que

$$-(1) + (a) - (b) + (ab) - (c) + (ac) - (bc) + (abc) = -8r\alpha_0 + \epsilon_A$$

donde ϵ_A es una correspondiente combinación lineal de sumas de las ϵ_{ijkl}. Del teorema 8.1 de la página 155, se deduce que ϵ_A es un valor de una variable aleatoria cuya distribución tiene media cero; de hecho, se puede demostrar que ϵ_A es un valor de una variable aleatoria que tiene distribución normal con media cero y varianza $8r\sigma^2$. Llamando a la combinación lineal anterior *efecto total* $[A]$ del factor *A*, encontramos que $-[A]/8r$ nos da una estimación de α_0, efecto principal del factor *A*, y se puede demostrar que $[A]^2/8r$ es igual a *SSA*, suma de cuadrados del efecto principal del factor *A*.

Analizando de una manera semejante la combinación lineal

$$(1) + (a) - (b) - (ab) - (c) - (ac) + (bc) + (abc)$$

el lector deberá demostrar, en el problema 7 de la página 300, que es igual a $8r(\beta\gamma)_{00} + \epsilon_{BC}$, donde ϵ_{BC} es una combinación lineal correspondiente a las sumas de las ϵ_{ijkl}. Designando a esta combinación lineal de los totales de los tratamientos como *efecto total* $[BC]$ de la interacción en dos direcciones de los factores *B* y *C*, vemos que $[BC]/8r$ nos da una estimación de $(\beta\gamma)_{00}$, efecto de la interacción *BC*, y también se puede demostrar que $[BC]^2/8r$ es igual a $SS(BC)$, suma de los cuadrados de la interacción *BC*. Procediendo de esta forma, podemos presentar combinaciones lineales de los totales de los tratamientos que nos den estimaciones de los demás efectos principales e interacciones, cuyos cuadrados, divididos entre 8*r*, nos den las correspondientes sumas de cuadrados. Estas combinaciones lineales, o *efectos totales*, se pueden obtener fácilmente, utilizando la siguiente *tabla de signos:*

(*I*)	(*a*)	(*b*)	(*ab*)	(*c*)	(*ac*)	(*bc*)	(*abc*)	Efecto Total
1	1	1	1	1	1	1	1	$[I]$
−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	$[A]$
−1	−1	1	1	−1	−1	1	1	$[B]$
1	−1	−1	1	1	−1	−1	1	$[AB]$
−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	$[C]$
1	−1	1	−1	−1	1	−1	1	$[AC]$
1	1	−1	−1	−1	−1	1	1	$[BC]$
−1	1	1	−1	1	−1	−1	1	$[ABC]$

Las entradas de esta tabla son los coeficientes de las combinaciones lineales de los totales de los tratamientos para los distintos efectos principales e interacciones. Como una ayuda para construir tablas similares para $n = 4$, $n = 5$, etc., notemos que, para cada efecto principal, hay un signo "+1" cuando el factor está en el nivel alto, y un "—1" cuando está en el bajo. Los signos para un efecto de interacción se obtienen multiplicando los coeficientes correspondientes de *todos* los factores contenidos en la interacción. Entonces, para $[AB]$ multiplicamos cada signo de $[A]$ por el correspondiente de $[B]$, dándonos

$$(-1)(-1) \quad (1)(-1) \quad (-1)(1) \quad (1)(1) \quad (-1)(-1) \quad (1)(-1) \quad (-1)(1) \quad (1)(1)$$

$$\text{ó} \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1$$

Notemos, también, que en la tabla anterior $[I]$ es el total mayor de todas las observaciones, de tal modo que $[I]^2/8r$ nos da el término de corrección para calcular *SST*, *SSE*, *SSR* y $SS(Tr)$.

Aunque hemos ilustrado el método abreviado anterior para obtener los diferentes efectos principales e interacciones con respecto a un experimento factorial

2^3, la única diferencia en un experimento factorial 2^n con $n > 3$ es que necesitamos una tabla más extensa de signos y que las sumas de cuadrados respectivas se obtienen dividiendo los cuadrados de los efectos totales por $r \cdot 2^n$. Para ilustrar esta técnica e introducir una mayor simplificación, consideraremos el siguiente experimento factorial 2^4, proyectado para determinar los efectos de ciertas variables en la exactitud de un interruptor giratorio que actúa a intervalos. Los factores estudiados fueron los siguientes:

Factor	*Nivel bajo*	*Nivel alto*
A. Lubricación	seco	lubricado
B. Protección polvo	no protegido	cubierto
C. Sin chispas	no	si
D. Corriente	0	0.5 amp.

Cada interruptor se operó continuamente hasta que se presentó un fallo en el funcionamiento y el número de horas de operación se anotó en la lista siguiente. El experimento entero se realizó dos veces, con los siguientes resultados:

Condición experimental	*Horas de operación* *Rep. 1*	*Rep. 2*	*Total*
1	828	797	1625
a	997	948	1945
b	735	776	1511
ab	807	1003	1810
c	994	949	1943
ac	1069	1094	2163
bc	989	1215	2204
abc	889	1010	1899
d	593	813	1406
ad	773	1026	1799
bd	740	922	1662
abd	936	1138	2074
cd	748	970	1718
acd	1202	1182	2384
bcd	1103	966	2069
abcd	985	1154	2139
Total	14,388	15,963	30,351

Analizando estos datos como una clasificación de dos direcciones, con 16 tratamientos y 2 réplicas (bloques), obtenemos

$$C = \frac{(30{,}351)^2}{32} = 28{,}786{,}975$$

$$SST = (828)^2 + (997)^2 + \ldots + (1154)^2 - 28{,}786{,}975$$
$$= 744{,}876$$

$$SS(Tr) = \frac{1}{2}[(1625)^2 + (1945)^2 + \ldots + (2139)^2] - 28{,}786{,}975$$
$$= 547{,}288$$
$$SSR = \frac{1}{16}[(14{,}388)^2 + (15{,}963)^2] - 28{,}786{,}975$$
$$= 77{,}520$$
$$SSE = 744{,}876 - 547{,}288 - 77{,}520 = 120{,}068$$

Para subdividir las sumas de cuadrados del tratamiento en *SSA*, *SSB*, ... y *SS(ABCD)*, podemos construir una tabla de signos como la de la página 293, calcular los efectos totales y, después, dividir los cuadrados de los efectos totales por $r \cdot 2^n = 2 \cdot 2^4 = 32$. Para el efecto principal del factor *A*, tendremos

$$[A] = -1625 + 1945 - 1511 + 1810 - 1943 + 2163 - 2204 + 1899$$
$$-1406 + 1799 - 1662 + 2074 - 1718 + 2384 - 2069 + 2139$$
$$= 2075$$

y
$$SSA = \frac{(2075)^2}{32} = 134{,}551$$

Estos cálculos son bastante tediosos, pero se pueden simplificar considerablemente utilizando un método aún más corto, llamado *método de* Yates. Este método de calcular los efectos totales se ilustra en la página 296. Las condiciones experimentales y los totales correspondientes se anotan en *orden normal*. En la columna (1), la mitad superior se obtuvo sumando pares sucesivos de totales de tratamientos y la mitad inferior se obtuvo restando pares sucesivos. Luego, en la columna (1) obtenemos

$$1625 + 1945 = 3570$$
$$1511 + 1810 = 3321$$
$$\cdots\cdots$$
$$2069 + 2139 = 4208$$
$$1945 - 1625 = 320$$
$$1810 - 1511 = 299$$
$$\cdots\cdots$$
$$2139 - 2069 = 70$$

Nótese que el pri[illegible] total de cada par se resta del segundo. La columna (2) se obtiene después, haciendo operaciones idénticas a las entradas de la columna (1), y las columnas (3) y (4) se obtienen del mismo modo de las entradas en las columnas (2) y (3), respectivamente. La columna (4) y, en general la columna (n), da los efectos totales en orden normal. Cada suma de cuadrados se obtiene como antes, elevando al cuadrado el efecto total correspondiente y dividiendo posteriormente el resultado por $r \cdot 2^n = 2 \cdot 2^4 = 32$.

Condición experimental	*Tratamiento totales*	*(1)*	*(2)*	*(3)*	*(4)*	*Identificación*	*Suma de cuadrados*
1	1,625	3,570	6,891	15,100	30,351	[*I*]	28,786,975
a	1,945	3,321	8,209	15,251	2,075	[*A*]	134,551
b	1,511	4,106	6,941	534	385	[*B*]	4,632
ab	1,810	4,103	8,310	1,541	−1,123	[*AB*]	39,410
c	1,943	3,205	619	−252	2,687	[*C*]	225,624
ac	2,163	3,736	−85	637	−773	[*AC*]	18,673
bc	2,204	4,102	805	−546	−179	[*BC*]	1,001
abc	1,899	4,208	736	−577	−1,119	[*ABC*]	39,130
d	1,406	320	−249	1,318	151	[*D*]	713
ad	1,799	299	−3	1,369	1,007	[*AD*]	31,689
bd	1,662	220	531	−704	889	[*BD*]	24,698
abd	2,074	−305	106	−69	−31	[*ABD*]	30
cd	1,718	393	−21	246	51	[*CD*]	81
acd	2,384	412	−525	−425	635	[*ACD*]	12,601
bcd	2,069	666	19	−504	−671	[*BCD*]	14,070
abcd	2,139	70	−596	−615	−111	[*ABCD*]	385

Dividiendo las sumas de cuadrados por sus grados de libertad para obtener [illegible]os cuadrados medios, y dividiendo los diferentes cuadrados medios por el medio [illegible]uadrado de error, obtenemos la siguiente tabla de análisis de varianza para el [illegible]xperimento factorial 2^4:

Origen de variación	*Grado de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Cuadrado medio*	*F*
Réplicas	1	77,520	77,520	9.68
Efecto principal				
A	1	134,551	134,551	16.81
B	1	4,632	4,632	< 1
C	1	225,624	225,624	28.19
D	1	713	713	< 1
Interacción de dos factores				
AB	1	39,410	39,410	4.92
AC	1	18,673	18,673	2.33
AD	1	31,689	31,689	3.96
BC	1	1,001	1,001	< 1
BD	1	24,698	24,698	3.09
CD	1	81	81	< 1
Interacción de tres factores				
ABC	1	39,130	39,130	4.89
ABD	1	30	30	< 1
ACD	1	12,601	12,601	1.57
BCD	1	14,070	14,070	1.76
Interacción de cuatro factores				
ABCD	1	385	385	< 1
Error	15	120,068	8,005	
Total	31	744,876		

Como $F_{.05} = 4.54$ y $F_{.01} = 8.68$ para 1 y 15 grados de libertad, encontramos que los efectos de las réplicas, lo mismo que los efectos de la lubricación y la supresión de chispas, son significativos con un nivel de 0.01, y que hay interacciones significativas con un nivel de 0.05 entre la lubricación, la protección contra el polvo y la supresión de chispas. El lector deberá interpretar estos resultados y estimar la magnitud de algunos de los efectos en el ejercicio 8 de la página 300.

EJERCICIOS

1. Un experimento de prueba de sabores se realizó para descubrir qué efecto, si alguno, producen las propiedades físicas de cierto comestible sobre su sabor. Los resultados, expresados por una puntuación de un experto en una escala del 1 al 10 aparecen en la tabla que sigue:

A Color	*B* Consistencia	*C* Textura	*Clasificación* Rep. 1	Rep. 2
ligero	ligero	fina	8	6
ligero	ligero	gruesa	7	8
ligero	pesada	fina	9	9
ligero	pesada	gruesa	2	1
oscuro	ligero	fina	7	6
oscuro	ligero	gruesa	8	6
oscuro	pesada	fina	8	9
oscuro	pesada	gruesa	3	2

(a) Analizar los resultados como una clasificación de dos direcciones, con 7 grados de libertad para los tratamientos, y 1 grado de libertad para los bloques (réplicas).
(b) Usar una tabla adecuada de signos para calcular los efectos totales de [*A*], [*B*], [*C*], [*AB*], [*AC*], [*BC*], [*ABC*].
(c) Utilizando los resultados obtenidos en la parte (b), hallar las sumas de los cuadrados correspondientes a los efectos principales y las interacciones y verificar sus totales frente a la suma de cuadrados de los tratamientos de la parte (a).
(d) Ordenar los datos con combinaciones de tratamientos en orden normal y usar el método de Yates para encontrar los efectos totales. Comparar con los resultados obtenidos en (b).
(e) Construir una tabla de análisis de la varianza y analizar el experimento.

2. Se realizó un experimento para determinar los efectos de ciertos elementos aleados sobre la ductilidad de un metal y se obtuvieron los resultados que a continuación se indican:

Carbono	Manganeso	Níquel	*Resistencia a la rotura (pies/lb.)* Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
0.2%	0.5%	0.0%	34.6	37.5	36.1
0.2	0.5	3.0	46.4	42.4	44.8
0.2	1.0	0.0	41.8	38.0	37.2
0.2	1.0	3.0	40.0	44.7	45.3
0.5	0.5	0.0	37.8	32.7	31.6
0.5	0.5	3.0	33.2	36.2	35.5
0.5	1.0	0.0	38.2	40.4	36.8
0.5	1.0	3.0	46.2	43.5	49.2

Hacer un análisis de la varianza adecuado e interpretar los resultados.

3. Se hizo un experimento para determinar los efectos de los siguientes factores sobre el rendimiento de un semiconductor:

Factor	*Nivel 0*	*Nivel 1*
A. Localización del conjunto	Laboratorio	Línea de producción
B. Presión parcial del material control	10^{-11}	10^{-4}
C. Humedad relativa	1%	30%
D. Tiempo de envejecimiento	72 horas	144 horas

Los resultados fueron los siguientes:

Condición experimental	*Ganancias* Rep. 1	Rep. 2
1	39.0	43.2
a	31.8	43.7
b	47.0	51.4
ab	40.9	40.3
c	43.8	40.5
ac	29.3	52.9
bc	34.8	48.2
abc	45.6	58.2
d	40.1	41.9
ad	42.0	40.5
bd	54.9	53.0
abd	39.9	40.2
cd	43.1	40.2
acd	30.1	39.9
bcd	35.6	53.7
abcd	41.4	49.5

Hacer un análisis adecuado de la varianza e interpretar los resultados.

Un experimento de filtración se realizó para determinar qué factores influían en el control del contenido final de fósforo de un acero producido en un convertidor. Los niveles de los factores estudiados y los resultados experimentales están contenidos en la tabla que sigue:

E Vaciado temp. (°F)	*D* Cal	*C* Oxígeno	*B* Fósforo original	*A* Manganeso original	Fósforo Rep. 1	Final Rep. 2
2400	3	5%	0.15%	1%	0.003%	0.001%
2400	3	5	0.15	3	0.004	0.009
2400	3	5	0.30	1	0.002	0.008
2400	3	5	0.30	3	0.015	0.007
2400	3	15	0.15	1	0.002	0.005
2400	3	15	0.15	3	0.011	0.006
2400	3	15	0.30	1	0.004	0.001
2400	3	15	0.30	3	0.002	0.004
2400	4	5	0.15	1	0.000	0.003
2400	4	5	0.15	3	0.008	0.002
2400	4	5	0.30	1	0.003	0.007
2400	4	5	0.30	3	0.005	0.012
2400	4	15	0.15	1	0.010	0.006
2400	4	15	0.15	3	0.006	0.001
2400	4	15	0.30	1	0.006	0.014
2400	4	15	0.30	3	0.011	0.015
2600	3	5	0.15	1	0.003	0.007
2600	3	5	0.15	3	0.007	0.004
2600	3	5	0.30	1	0.011	0.005

E Vaciado temp. (°F)	*D* Cal	*C* Oxigeno	*B* Fósforo original	*A* Manganeso original	Fósforo Final Rep. 1	Rep. 2
2600	3	5	0.30	3	0.010	0.017
2600	3	15	0.15	1	0.004	0.008
2600	3	15	0.15	3	0.019	0.013
2600	3	15	0.30	1	0.004	0.008
2600	3	15	0.30	3	0.017	0.023
2600	4	5	0.15	1	0.007	0.004
2600	4	5	0.15	3	0.015	0.009
2600	4	5	0.30	1	0.004	0.011
2600	4	5	0.30	3	0.010	0.006
2600	4	15	0.15	1	0.017	0.011
2600	4	15	0.15	3	0.005	0.010
2600	4	15	0.30	1	0.014	0.009
2600	4	15	0.30	3	0.016	0.011

Analizar los resultados de este experimento.

5. Escribiendo el total del tratamiento (a) como la suma de las observaciones y_{100l} correspondientes y substituyendo para estas observaciones las expresiones dadas por la ecuación modelo de la página 291, se puede demostrar que

$$(a) = r[\mu + \alpha_1 + \beta_0 + \gamma_0 + (\alpha\beta)_{10} + (\alpha\gamma)_{10} + (\beta\gamma)_{00} + (\alpha\beta\gamma)_{100}] + \sum_{l=1}^{r} \epsilon_{100l}$$

Haciendo uso de las restricciones impuestas a los parámetros, escribir de nuevo la expresión de (a) en función de los parámetros $\mu, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0, (\alpha\beta)_{00}, (\alpha\gamma)_{00}, (\beta\gamma)_{00}, (\alpha\beta\gamma)_{000}$.

6. Repetir el trabajo del problema 5, escribiendo (1), (b), (ab), (c), (ac), (bc) y (abc) en función de los parámetros $\mu, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0, (\alpha\beta)_{00}, (\alpha\gamma)_{00}, (\beta\gamma)_{00}$, y $(\alpha\beta\gamma)_{000}$.

7. Empleando los resultados de los problemas 5 y 6, verificar las expresiones de $[A]$ y $[BC]$ obtenidas en la página 293. Expresar también, ϵ_A en función de las cantidades ϵ_{ijkl}.

8. Interpretar los resultados del análisis de la varianza dado en la tabla de la página 318, y estimar la magnitud de los efectos significativos.

9. Una forma de comprobar, por cálculo, las sumas de los cuadrados obtenidas para los diversos efectos principales y las interacciones, es que la *suma* debe ser igual a la suma de los cuadrados de los tratamientos, obtenida analizando los datos como una clasificación de dos direcciones Hacer esta comprobación en las sumas de cuadrados de la tabla de la página 297.

10. Si se desea una expresión para un efecto total, sin construir una tabla de signos completa, se puede emplear el método que indicamos a continuación, ilustrado para encontrar $[ABC]$ en un experimento factorial 2^4. Tomamos la expresión: $(a \pm 1)(b \pm 1)(c \pm 1)(d \pm 1)$ con signo "+" si las letras correspondientes *no* aparecen en el símbolo para el efecto principal o en la interacción para la que se está calculando un efecto total, y "—" si la letra correspondiente aparece. Así, para encontrar $[ABC]$ escribimos

$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)(c-1)(d+1) = {} & abcd + abc - abd - acd - bcd - ab \\ & - ac + ad - bc + bd + cd + a + b \\ & + c - d - 1\end{aligned}$$

y después de ordenar los términos en orden normal y sumar los paréntesis, obtenemos, finalmente,

$$\begin{aligned}[ABC] = {} & -(1) + (a) + (b) - (ab) + (c) - (ac) - (bc) + (abc) - (d) \\ & + (ad) + (bd) - (abd) + (cd) - (acd) - (bcd) + (abcd)\end{aligned}$$

(i) Utilizar este método para expresar $[B]$, $[AC]$, y $[ABC]$ en función de los totales de tratamiento en un experimento factorial 2^3.

(ii) Utilizar este método para expresar $[AC]$ y $[BCD]$ en función de los totales de tratamiento en un experimento factorial 2^4

14.4 El mezclado en un experimento factorial 2^n

En algunos experimentos es imposible realizar todas las condiciones experimentales requeridas en un bloque. Por ejemplo, si se hace un experimento factorial 2^3 combinando ocho pigmentos de pintura que se aplicarán a una superficie para después cocerla en un horno y sólo caben cuatro muestras en el horno, se hace necesario dividir los ocho tratamientos en dos bloques (hornadas) en cada réplica. Como hemos indicado anteriormente, si el tamaño del bloque es demasiado pequeño para incluir todos los tratamientos. será necesario hacer diseños especiales denominados *de bloques incompletos.*

Cuando las condiciones experimentales se distribuyen en varios bloques, uno o más de los efectos pueden quedar confundidos o mezclados con posibles efectos de bloque, es decir, diferencias entre bloques. Por ejemplo, si en un experimento factorial 2^3, como el del párrafo anterior, se incluyen las condiciones a, ab, ac y abc en una hornada (bloque 1) y las condiciones experimentales 1, b, c y bc en la segunda hornada (bloque 2), entonces el "efecto de bloque", diferencia entre los totales de los dos bloques, está dado por

$$[(a) + (ab) + (ac) + (abc)] - [(1) + (b) + (c) + (bc)]$$

Teniendo presente la tabla de signos de la página 293, observamos que esta cantidad es, de hecho, el efecto total [A], así que la estimación del efecto principal del factor A está *mezclada (o confundida) con los bloques.* Notemos que todos los demás efectos factoriales permanecen sin mezclar; para cada otro efecto total hay dos coeficientes +1 y dos —1 en cada bloque, ya que los efectos de bloque se eliminan. Esta clase de argumentación se puede emplear para decidir, también, qué condiciones experimentales se deben poner en cada bloque para mezclar un efecto principal o una interacción dados. Por ejemplo, queremos mezclar la interacción ABC con los bloques del ejemplo anterior; para ello, podemos poner las condiciones experimentales a, b, c y abc, cuyos totales tienen coeficientes +1 en $[ABC]$, en un bloque, y las condiciones experimentales 1, ab, ac y bc, cuyos totales tienen coeficientes —1, en el otro bloque.

En general, mezclar en un experimento factorial 2^n puede resultar mucho más complicado que en el ejemplo que acabamos de dar. Para evitar serias dificultades, supondremos que el número de bloques usados sea una potencia de 2, tal como 2^p. Esto nos indica que el precio pagado por hacer un experimento factorial 2^n en 2^p bloques, es que $2^p - 1$ efectos se mezclen con los bloques. Para aclarar exactamente qué efectos se mezclan, y para indicar un método que se pue- emplear para mezclar sólo determinados efectos, y no otr esulta útil definir el término "interacción generalizada" en la forma siguiente. *a interacción ge-*

neralizada de dos efectos es el "producto" de esos efectos, con supresión de letras iguales. Así, la interacción generalizada de AB y CD es $ABCD$, y la interacción generalizada de ABC y BCD es $A\cancel{B}\cancel{C}\cancel{B}\cancel{C}D$, o AD. Para mezclar un experimento factorial 2^n en 2^p bloques, se puede emplear el método siguiente: se seleccionan p efectos para mezclarlos, asegurándose de que ninguno sea la interacción generalizada de algunos de los seleccionados. Entonces, podemos demostrar que $2^p - (p + 1)$ efectos quedan mezclados automáticamente con los bloques; junto con los p efectos escogidos originalmente, esto nos da un total de $2^p - 1$ efectos mezclados en el experimento. Los otros efectos mezclados son, de hecho, las interacciones generalizadas de los p efectos escogidos originalmente.

Para ilustrar la construcción de un diseño mezclado, vamos a dividir un experimento factorial 2^4 en 4 bloques, de tal forma que efectos deseados se confundan con bloques. En la práctica se mezclan solamente las interacciones de orden superior (con la esperanza de que sean no existentes). Como hemos decidido entre 4 bloques, tenemos $2^p = 4$ y $p = 2$ y podemos seleccionar arbitrariamente dos interacciones de orden superior para mezclarlas. Si seleccionamos $ABCD$ y BCD, la interacción generalizada, A, se puede mezclar también. Luego, para evitar la mezcla de cualquier efecto principal y para mezclar el menor número posible de interacciones de dos factores, seleccionaremos ABD y ACD, notando que la BC en consecuencia se mezcla. (Observemos que es imposible evitar que se mezcle cuando menos un efecto principal o una interacción de dos factores en este experimento.)

Para repartir las 16 condiciones experimentales en los cuatro bloques, distribuimos primero en dos bloques, de tal forma que la interacción ABD se mezcle con los bloques. Ahora, ponemos en una tabla de signos adecuada todos los tratamientos cuyos totales tengan un "+1" en la fila de $[ABD]$ en un bloque, y todos los que tengan "—1" en un segundo bloque, con lo que tendremos los bloques que se indican a continuación:

Primer bloque:	*b*	*ac*	*bc*	*d*	*abd*	*cd*	*abcd*
Segundo bloque:	*ab*	*c*	*abc*	*ad*	*bd*	*acd*	*bcd*

Notemos que cada condición experimental en el primer bloque tiene un *número impar* de letras en común con ABD, mientras que las condiciones experimentales del segundo bloque tienen un *número par* de letras en común con ABD. Esta regla de pares-impares nos da una forma alternativa de distribuir las condiciones experimentales en dos bloques para mezclar un efecto dado y tiene la ventaja de que no es necesaria la construcción de una tabla de signos completa.

Una vez que hemos mezclado la interacción ABD dividiendo las 16 condiciones experimentales en dos bloques, vamos a mezclar la interacción ACD dividiendo cada uno de estos bloques en dos bloques de cuatro condiciones cada uno. Utilizando la regla de pares-impares que acabamos de describir (o una tabla de signos) obtenemos los cuatro bloques siguientes:

Bloque 1:	*a*	*bc*	*d*	*abcd*
Bloque 2:	*b*	*ac*	*abd*	*cd*
Bloque 3:	*ab*	*c*	*bd*	*acd*
Bloque 4:	1	*abc*	*ad*	*bcd*

Comparando estos bloques con una tabla de signos, o lo que es equivalente, aplicando la regla de pares-impares, el lector deberá verificar, en el problema 8 de la página 310, que la interacción BC también está mezclada con los bloques, mientras que todos los demás efectos no lo están.

El análisis de un experimento factorial 2^n mezclado es semejante al del experimento sin mezclas, con la excepción de que las sumas de cuadrados de los efectos mezclados no se calcula y, en cambio, calculamos una suma de cuadrados del bloque como si el experimento consistiera en br bloques y no en b bloques en cada una de las r réplicas. Con respecto a nuestro ejemplo del experimento factorial 2^4 en el que se mezclan las interacciones ABD, ACD y BC, y empleamos dos réplicas, tenemos la siguiente tabla del análisis *simulado* de la varianza

Origen de variación	*Grados de libertad*
Bloques	7
Efectos principales	4
Interacciones de dos factores	5
Interacciones de tres factores	2
Interacción de cuatro factores	1
Error interior de los bloques	12
Total	31

La suma de cuadrados de los bloques se obtiene, como siempre, sumando los cuadrados de los ocho totales de bloques, dividiendo el resultado por 4 (el número de observaciones en cada bloque), y restando el término de corrección. La suma total de cuadrados y las sumas de cuadrados de los efectos factoriales no mezclados, se obtienen en la forma habitual, y la suma de cuadrados del *error dentro de los bloques*, una medida de la variabilidad en el *interior* de los bloques, se obtiene por resta.

Para ilustrar el análisis de experimentos factoriales 2^n mezclados, supongamos que cada réplica del experimento con el interruptor por pasos descrito en la sección anterior, se hace en cuatro bloques, porque sólo se tienen cuatro posibilidades de montar los 16 interruptores. (El orden para probar los bloques se toma al azar dentro de cada réplica, y la manera de asignar cada interruptor dentro de cada bloque es también al azar.) Suponiendo, además, que las interacciones *ABD*, *ACD* y *BC* se mezclan con los bloques, como se muestra en la página 303 (ref. *324-2*), obtenemos los siguientes totales de bloques, a partir de los datos de la página 315:

	Bloque 1	*Bloque 2*	*Bloque 3*	*Bloque 4*
Réplica 1	3564	3488	3743	3593
Réplica 2	4130	3978	4056	3799

Entonces, la suma de cuadrados para los bloques está dada por

$$SS(Bl) = \frac{(3564)^2 + (3488)^2 + \ldots + (3799)^2}{4} - 28{,}786{,}975$$

$$= 101{,}240$$

dónde el factor de corrección es el mismo que en la página 295.

Origen de variación	*Grados de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Cuadrado medio*	*F*
Bloques	7	101,240	14,463	1.58
Efecto principal				
A	1	134,551	134,551	14.68
B	1	4,632	4,632	< 1
C	1	225,624	225,624	24.62
D	1	713	713	< 1
Interacciones de dos factores				
AB	1	39,410	39,410	4.30
AC	1	18,673	18,673	2.04
AD	1	31,689	31,689	3.46
BD	1	24,698	24,698	2.69
CD	1	81	81	< 1
Interacciones de tres factores				
ABC	1	39,130	39,130	4.27
BCD	1	14,070	14,070	1.54
Interacciones de cuatro factores *ABCD*	1	385	385	< 1
Error interior de los bloques	12	109,980	9,165	
Total	31	744,876		

Copiando la suma total de cuadrados y las sumas de cuadrados de los diversos efectos no mezclados de la tabla de la página 297, obtenemos la tabla de análisis de la varianza del experimento factorial mezclado, mostrada *(parte inferior de la página 304)*. En este análisis, los efectos principales *A* y *C* son significativos a un nivel de 0.01, pero ninguno de los restantes efectos principales o de las interacciones son significativos.

Si hay réplicas, alguna de la información perdida sobre los efectos mezclados, se puede recobrar por una descomposición más amplia de la suma de cuadrados de los bloques. Este análisis consiste en dividir la suma de cuadrados de los bloques en una componente para cada uno de los efectos mezclados, una componente para las réplicas, y una componente residual llamada "error entre bloques", que es una medida de la variabilidad *entre bloques.* Copiando la suma de cuadrados de las réplicas y las sumas de *BC, ABD* y *ACD,* del análisis de la varianza de la tabla 297, y copiando las sumas de cuadrados de los bloques del análisis de varianzas *internas* del bloque de la tabla anterior, obtenemos el siguiente análisis de la varianza *entre bloques:*

Origen de variación	*Grado de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Cuadrado medio*	*F*
Réplicas	1	77,520	77,520	23.05
Efectos conjuntos				
BC	1	1,001	1,001	< 1
ABD	1	30	30	< 1
ACD	1	12,601	12,601	3.75
Error interbloque	3	10,088	3,363	
Total (Bloques)	7	101,240		

Nótese que el error entre bloques se obtiene por resta y que las razones *F* se obtienen dividiendo los cuadrados medios de los efectos mezclados y el cuadrado medio de las réplicas por el cuadrado medio del error entre bloques. Sólo el test *F* para las réplicas es significativo (al nivel 0.05). El pequeño número de grados de libertad del error entre bloques implica que la sensibilidad de estos tests de significación es *muy pobre;* de hecho, raramente tiene objeto esta clase de análisis entre bloques, a menos que el número de réplicas sea relativamente grande.

14.5 Réplicas fraccionales

En los estudios sobre líneas complejas de producción, procesos químicos como los del petróleo, plásticos o metales, procesos físicoquímicos, tales como los que aparecen en las industrias electrónicas y de tecnología espacial, y muchos otros estudios de ingeniería, el experimentador se encuentra ante un conjunto muy grande y enredado de variables interrelacionadas. Los principios de la experimentación factorial tratados en este capítulo le ayudan a "recortar" estas variables, para descubrir cuáles de ellas tienen mayor influencia en el proceso considerado y qué interrelaciones importantes pueden existir.

Sin embargo, hay algunas serias limitaciones al estudio simultáneo de un gran número de factores. Aun cuando a cada factor se le den solamente dos niveles, una réplica de un experimento de 6 factores requiere 64 observaciones; en un experimento de 7 factores hay 128 observaciones en una réplica, y en una réplica de un experimento de 10 factores hay 1024 observaciones. Las limitaciones económicas y prácticas de estos grandes números hacen necesario buscar métodos en los que el tamaño de los experimentos factoriales se mantengan dentro de límites manejables. Por supuesto, se debe insistir que no hay ningún substituto para un planeamiento cuidadoso preliminar que, unido a la perspicacia de un buen ingeniero, puede dar la eliminación de muchos factores innecesarios.

A pesar de un planeamiento preliminar muy cuidadoso, es difícil muchas veces evitar que sean necesarios 6 ó 10 (o más) factores en un experimento. Una forma de reducir el tamaño de un experimento de este tipo es descomponerlo en varias partes, incluyendo en cada parte la variación deliberada de un factor, mientras que los otros permanecen fijos. Esto puede traer la consecuencia indeseable de que no se pudieran estudiar algunas de las interacciones. Aún si incluyéramos la mitad de los factores en una parte, y la otra mitad en otra, con lo que cambiaríamos un experimento de 10 factores (que necesita 1024 observaciones) por dos experimentos de 5 factores (que necesita cada uno 32 observaciones), se perdería irremediablemente cualquier interacción entre factores de la primera parte y factores de la segunda. Es posible corregir algunas de estas dificultades observando que la mayoría de las veces no estamos interesados en *todas* las interacciones. Por ejemplo, es posible desarrollar sólo una fracción de un factorial 2^n y aún así obtener la mayor parte de la información deseada, tal como la que se refiere a los efectos principales y las interacciones de dos factores (pero no las interacciones mayores).

Los principios de las *réplicas fraccionales*, en las que sólo se desarrolla una fracción de un experimento factorial 2^n completo, son semejantes a los usados en las mezclas. Para obtener una *media réplica*, seleccionamos únicamente uno de los dos bloques en que se han dividido las condiciones experimentales, mezclando un efecto; para obtener un *cuarto de réplica* seleccionamos sólo uno de los cuatro bloques en que las condiciones experimentales se han dividido al mezclar dos efectos, etc. En contraste con un experimento de mezcla como los discutidos en la sección 14.4, vemos que, en una réplica fraccional *los efectos están mezclados, no con bloques, sino entre sí*. Como ilustración, supongamos que sólo se incluyen las condiciones experimentales *a*, *b*, *c* y *abc* en una media réplica de un experimento factorial 2^3 (Este es un bloque de un experimento factorial 2^3 con la interacción *ABC* mezclada.) Considerando la tabla de signos de la página 293

prescindiendo de todas las columnas, excepto las correspondientes a *a*, *b*, *c* y *abc*, vemos que el efecto total del factor *A* está dado ahora por

$$[A] = (a) - (b) - (c) + (abc)$$

Si escribimos $$(a) = \sum_{l=1}^{r} y_{100l}, \quad (b) = \sum_{l=1}^{r} y_{010l}, \ldots,$$

y substituimos las y_{ijkl} por las expresiones dadas por la ecuación modelo de la página 291, obtenemos

$$[A] = -4r[\alpha_0 - (\beta\gamma)_{00}] + \epsilon$$

donde ϵ es el valor de una variable aleatoria con media 0 (ejercicio 16 de la página 312). Así encontramos que $[A]$ mide el efecto principal del factor *A*, así como la interacción *BC*, por lo que estos dos efectos se han hecho inseparables, o mezclados. Notemos, también, que en la tabla de signos reducida (con las columnas que corresponden solamente a *a*, *b*, *c* y *abc*), los signos para $[A]$ y $[BC]$ son idénticos y, por lo tanto, $[A] = [BC]$. En el problema 17 de la página 321, el lector deberá demostrar que, para la réplica fraccional dada, el efecto principal del factor *B* está igualmente mezclado o *aleado* con la interacción *AC*, mientras que el efecto principal del factor *C* está mezclado, o aleado, con la interacción *AB*. La interacción *ABC* no se puede estimar.

Con un diseño cuidadoso, en general será posible mezclar todos los efectos principales y las interacciones de dos factores *sólo* con interacciones de orden superior. Esto se ilustra en el ejemplo siguiente, en el que construiremos una media réplica de un experimento factorial 2^5 Primero, seleccionamos un efecto (usualmente una interacción de orden superior) para dividir el experimento en dos bloques, como lo hicimos en el caso de las mezclas. El efecto escogido se llama *contraste de definición*, y no se puede calcular de ninguna manera por la réplica fraccional. Todos los demás efectos se alean con otros efectos, a saber, sus interacciones generalizadas (ver página 302) con el contraste de definición. Así, si el contraste de definiciones es *ABCDE*, el efecto principal para el factor *A* tiene la interacción de cuatro factores *BCDE* como aleada, *BC* y *ADE* son un par aleado, y así sucesivamente. Como hemos visto, sólo se puede estimar en el experimento el efecto combinado (la suma o la resta de los efectos aleados). Sin embargo, si se puede suponer que no hay interacciones de un orden superior, podemos atribuir el efecto del par aleado *BC* y *ADE* completamente a la interacción de dos factores *BC*, el efecto del par aleado *A* y *BCDE* completamente al efecto principal del factor *A*, etc. Una lista completa de los pares aleados en una media réplica de un experimento factorial 2^5 que tiene el contraste de definición *ABCDE* es la que sigue:

A y *BCDE*,	*B* y *ACDE*,	*C* y *ABDE*,	*D* y *ABCE*,
E y *ABCD*,	*AB* y *CDE*,	*AC* y *BDE*,	*AD* y *BCE*,
AE y *BCD*,	*BC* y *ADE*,	*BD* y *ACE*,	*BE* y *ACD*,
CD y *ABE*,	*CE* y *ABD*,	*DE* y *ABC*,	

Nótese que ningún efecto principal ni ninguna interacción de dos factores están aleados con otro efecto principal u otra interacción de dos factores.

Las 16 condiciones experimentales que se deben incluir en la media réplica, están dadas por aquellas de cualquiera de los dos bloques obtenidos mezclando el contraste de definición. Escogiendo "pares" en la regla de pares-impares, o sea, aquellas condiciones que tienen un número par de letras en común con el contraste de definición *ABCDE*, obtenemos la siguiente media réplica:

1	*ad*	*ae*	*de*
ab	*bd*	*be*	*abde*
ac	*cd*	*ce*	*acde*
bc	*abcd*	*abce*	*bcde*

Para dar un paso más, ilustraremos cómo construir un cuarto de réplica para el experimento factorial 2^5 dado. Haremos esto dividiendo la media réplica anterior a la mitad, mezclando la interacción de tres factores *ABC*. Una vez más, utilizando "pares", obtenemos las ocho condiciones experimentales que siguen:

1	*de*	*ab*	*abde*
ac	*acde*	*bc*	*bcde*

Como la interacción generalizada *DE* de los dos efectos mezclados está también mezclada, tenemos ahora los tres contrastes de definición *ABCDE*, *ABC* y *DE*. Ninguno de estos efectos se puede calcular en el cuarto de réplica y cada uno de los otros efectos está aleado con sus interacciones generalizadas con los tres contrastes de definición. La aleación completa es la siguiente:

Aleación de conjuntos

A,	*BCDE*,	*BC*,	*ADE*
B,	*ACDE*,	*AC*,	*BDE*
C,	*ABDE*,	*AB*,	*CDE*
D,	*ABCE*,	*ABCD*,	*E*
AD,	*BCE*,	*BCD*,	*AE*
BD,	*ACE*,	*ACD*,	*BE*
CD,	*ABE*,	*ABD*,	*CE*

Hemos presentado este cuarto de réplica únicamente como una ilustración; en la práctica, sería difícil que resultara útil, debido a la aleación de los efectos principales con las interacciones de dos factores. Sin embargo, los cuartos de réplica de experimentos con 6 ó 7 factores (y aún los octavos de réplica de experimentos con 7 y 8 factores) pueden dar mucha información útil.

El análisis de un experimento factorial fraccional es prácticamente el mismo que el de un experimento factorial con réplicas completas. Dada la fracción $1/2^p$ de un factorial 2^n, hay 2^{n-p} condiciones experimentales, y se puede emplear el

método de Yates como si el experimento fuese un factorial 2^{n-p} Se deben tomar ciertas precauciones para ordenar las condiciones experimentales en un "orden normal" modificado, como se indica en el problema 14 de la página 311.

Al tratar con factoriales fraccionales, existe el problema de obtener una estimación del error experimental. Por ejemplo, en la media réplica del factorial 2^5 descrita en la página 307, la descomposición de la suma total de cuadrados tiene 15 grados de libertad y, por lo tanto, da sumas de cuadrados de los efectos principales (5 grados de libertad), sumas de cuadrados de interacciones de dos factores (10 grados de libertad), pero no da ninguna componente (0 grados de libertad) para el error experimental. En una situación como ésta, y en todos los demás casos en que el número de grados de libertad del error es pequeño, es mejor incluir una cantidad limitada de réplicas. Esto se puede lograr seleccionando al azar varias condiciones experimentales y haciendo observaciones adicionales correspondientes a esas condiciones. Además, si se puede suponer que no hay interacciones de orden superior, el total de las sumas de cuadrados correspondientes a las interacciones de orden superior *que no están aleadas con efectos principales o interacciones de orden inferior* se pueden atribuir a "error", y se pueden usar en el denominador del test *F* (problema 15). De esta forma, se puede utilizar la "réplica oculta" inherente en la mayoría de los experimentos factoriales grandes.

En resumen, la réplica fraccional es útil siempre que el número de factores incluidos en un experimento es grande y si no es económicamente factible incluir todas las condiciones experimentales posibles. La reducción de tamaño (y, por consiguiente, de costo) de una réplica fraccional origina la descompensación de una pérdida en información causada por la aleación y las dificultades inherentes a la estimación del error experimental. En el libro de W. G. Cochran y G. M. Cox, citado en la bibliografía, se puede encontrar un análisis más detallado de la réplica fraccional, incluyendo réplicas fraccionales de experimentos 3^n y una gran variedad de otros diseños.

EJERCICIOS

1. Hacer una lista de las condiciones experimentales incluidas en cada bloque al mezclar un experimento factorial 2^4,
   (a) en 2 bloques en *ABCD*,
   (b) en 4 bloques en *ABCD* y *AB*.
   ¿Qué otra interacción se mezcla en el inciso (b)?
2. Se va a hacer en varios bloques un experimento factorial 2^5 que tiene los factores *A, B, C, D* y *E*. Indicar qué tratamientos se deben asignar a cada bloque si:
   (a) hay dos bloques con la interacción *ABCD* mezclada,
   (b) hay 4 bloques con las interacciones *ABDE* y *CDE* mezcladas. ¿Cuál otro efecto factorial (o efectos) se mezclará?
3. Hacer una lista de las condiciones experimentales incluidas en cada bloque si se mezcla un experimento factorial 2^6 en *ABDE*, *BCDF* y *ABC*, formando 8 bloques. ¿Qué otros efectos factoriales se mezclan?

4. ¿Cuál es el mayor número de bloques en que se puede desarrollar un experimento factorial 2^6 sin mezclar ningún efecto principal?
5. Supongamos que, en el problema 1 de la página 297, los comestibles se juzgan en conjuntos de cuatro, con un periodo de descanso intermedio, y que el experimento se hace de tal forma que cada réplica consiste en dos bloques con ABC mezclado. Hacer un análisis interno de bloques.
6. Se van a investigar cuatro medicinas nuevas para determinar su eficacia como tranquilizadores, aisladamente y combinadas unas con otras. A cada paciente se le dan dosis regulares de uno de los 16 tranquilizantes formados con estas drogas (incluyendo un excipiente correspondiente al nivel 0 de cada droga) y, después de un periodo de dos semanas, el efecto de estos tranquilizadores en la estabilidad emocional de cada paciente se juzgó (en una escala de 1 a 5) por cinco psiquiatras. Para mantener el trabajo dentro de límites razonables, se usaron dos hospitales para este experimento, y se seleccionaron ocho pacientes de cada hospital para cada ensayo (réplica); luego, el experimento está formado por dos réplicas de dos bloques cada una, con la interacción $ABCD$ mezclada. Los resultados de los ensayos en las dos semanas se muestran a continuación:

1er. Hospital			*2do. Hospital*		
Combinación de tratamientos	*Clasificación media* Ensayo 1	Ensayo 2	*Combinación de tratamientos*	*Clasificación media* Ensayo 1	Ensayo 2
1	2.0	2.6	*a*	2.8	2.6
ab	3.8	3.4	*b*	3.6	2.0
ac	4.2	4.8	*c*	2.4	1.8
bc	4.8	4.0	*abc*	4.0	3.8
ad	1.8	2.4	*d*	1.8	2.2
bd	3.4	3.8	*abd*	1.6	2.0
cd	4.6	2.8	*acd*	3.6	2.4
abcd	4.2	4.6	*bcd*	3.4	3.8

Si una alta clasificación indica progresos satisfactorios, ¿qué droga parece ser la mejor? (Combinación o combinaciones de los medicamentos.) Hacer un análisis de las varianzas interiores de los bloques para contrastar los efectos significativos.

7. Supongamos que, en el ejercicio 4 de la página 299, sólo se pudieron probar 8 muestras de una sola vez, y que ahora el experimento se ha desarrollado de tal forma que cada réplica consta de cuatro bloques con ABC, ADE y $BCDE$ mezcladas.
   (a) Si, para cada factor, los niveles 0 y 1 son, respectivamente, los valores menor y mayor, construir una tabla que indique las condiciones experimentales que van en cada uno de los cuatro bloques.
   (b) Hacer un análisis interior de bloques del experimento.
8. Verificar que, en el ejemplo de la página 303, los totales de todos los tratamientos que tienen coeficiente $+1$ en $[BC]$ se encuentran en los bloques 1 y 4, que todos los totales de tratamientos que tienen coeficiente -1 en $[BC]$ están en los bloques 2 y 3 y, por lo tanto, que la interacción BC está mezclada con los bloques.
9. Demostrar que la regla "pares-impares" para repartir los tratamientos en los bloques, dada en la página 303, es equivalente al método descrito en el problema 10 de la página 321.
10. Con respecto al ejercicio 2, supongamos que, en cada caso, el bloque que contiene la combinación de tratamiento 1 se escogió como una réplica fraccional de un factorial 2^5.
    (a) Mostrar los pares aleados en la media réplica resultante.
    (b) Mostrar los conjuntos aleados en el cuarto de réplica resultante.

(En la práctica, la selección al azar debería usarse para escoger el bloque que se debiera incluir en una réplica fraccional.)

11. Hacer la lista de conjuntos aleados en el ejercicio 1 si un experimento consiste en
    (a) Una media réplica de un experimento factorial 2^4 con $ABCD$ mezclado.
    (b) Un cuarto de réplica de un experimento factorial 2^4 con $ABCD$ y AB mezclados.
12. Hacer una media réplica de un experimento factorial 2^6 que tiene el contraste de definición $ABCDEF$. Hacer la lista de los 32 tratamientos en el bloque que contiene la condición experimental 1, y mostrar los pares aleados.
13. Diseñar un experimento consistente en cuarto de réplica de un factorial 2^7, con $ABCDE$, $ABCFG$ y $DEFG$ mezcladas, si la condición experimental con cada factor en el nivel 0 debe quedar incluida. Mostrar, además, todos los conjuntos aleados.
14. En el ejercicio 12, podemos definir un *orden normal modificado* para las 32 combinaciones de tratamientos de la media réplica en la forma siguiente. Primero, hacemos la lista de las 32 combinaciones de tratamientos correspondientes a los cinco factores A, B, C, D y E, en orden normal. Después, añadimos la letra f a 16 de estas combinaciones de tratamientos, de tal modo que la lista contenga las mismas que el bloque escogido para la media réplica.
    (a) Utilizar este método para hacer una lista de las combinaciones de tratamientos obtenidas en el ejercicio 12.
    (b) Generalizar la regla anterior para ordenar las combinaciones de tratamientos en un orden normal modificado que se pueda aplicar a una media réplica de un experimento factorial 2^n. (Para una réplica fraccional $1/2^p$ de un experimento factorial 2^n, un orden normal modificado se obtiene notando que cualquier bloque escogido contiene un subconjunto de $n-p$ letras que forman una réplica completa de un factorial 2^{n-p}. El orden normal modificado se obtiene, entonces, empleando estas letras solamente y después añadiendo las restantes p letras para obtener las combinaciones de tratamientos necesarias.)
15. Los factores siguientes se van a estudiar en una media réplica de un experimento factorial 2^6 (contraste de definición $ABCDEF$), proyectado para evaluar diversas substancias químicas como insecticidas:

Factor	*Nivel 0*	*Nivel 1*
A. BMC	0%	5%
B. Malathion	3%	6%
C. Tedion	1%	2%
D. Chlordano	2%	5%
E. Lindano	1%	4%
F. Pyrethro	2%	4%

Cada unidad experimental consta de 10 insectos, y los tiempos de vida medios (en segundos) después de cada aplicación de los insecticidas respectivos son los siguientes, en el orden de azar en que fueron obtenidos:

ce	181	*acdf*	162	*bd*	135	*abdf*	131
ae	172	1	182	*df*	171	*ab*	136
abef	140	*bf*	171	*acef*	159	*bcde*	105
bcdf	165	*cf*	176	*bc*	179	*abcdef*	109
acde	139	*be*	187	*ac*	165	*af*	176
ef	186	*abce*	131	*bcef*	181	*ad*	150
de	164	*abcf*	125	*cdef*	163	*abde*	115
abcd	112	*adef*	158	*bdef*	128	*cd*	166

(a) Hacer una lista de los pares aleados.

(b) Ordenar los resultados en orden normal modificado (ver ejercicio 14) y utilizar el método de Yates para encontrar los efectos totales.

(c) Identificar los efectos totales como sigue: En la última columna de la tabla de Yates, escribir las 32 combinaciones $[I]$, $[A]$, $[B]$, $[AB]$, ..., $[ABCDE]$ en orden normal. Cada una de ésta está aleada con otra; identifique los pares aleados, empleando el efecto principal o la interacción de orden inferior. (Por ejemplo, $ABCDE$ está aleada con E, identificar el efecto total $[ABCDE]$ como el del efecto principal E). Notar que 10 de los pares aleados son interacciones de tres factores aleadas con interacciones de tres factores; se califican como "error".

(d) Obtener los cuadrados medios y completar el análisis de la varianza. Notar que el cuadrado medio de error, que tiene 10 grados de libertad, es el promedio de los cuadrados medios de los 10 efectos clasificados como "error".

16. Verificar la expresión obtenida para $[A]$ en la página 307.

17. Duplicando los pasos indicados en la página 307, demostrar que, en el diseño dado, el efecto principal del factor B está mezclado con la interacción AC. Sugerencia: expresar $[B]$ y $[AC]$ en función de los parámetros del modelo.

DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS

ANALISIS DE LA VARIANZA

EXPOSITOR

M. EN C. RUBEN TELLEZ SANCHEZ

MAYO 1985

13 ANALISIS DE LA VARIANZA

13.1 Introducción

Algunos de los ejemplos del capítulo 12 nos han enseñado que con un planeamiento previo del experimento se puede lograr considerable economía en el cálculo. Lo que es más importante, un planeamiento experimental adecuado puede dar una seguridad razonable de que los resultados de un experimento den respuestas claras a las preguntas que se investigan. Como es imposible dar en este capítulo una discusión completa *del diseño de experimentos*, incluyendo los muchos fallos a los que está expuesto un experimentador, comenzaremos por presentar en esta sección algunos de los principios generales del diseño de experimentos. Muchos de estos diseños se aplican frecuentemente en ingeniería y otras investigaciones aplicadas se tratarán en secciones subsecuentes.

Para ilustrar algunos de los aspectos más importantes del diseño de experimentos, consideramos la situación siguiente. Una laminadora surte de hojalata a tres fabricantes, de envases, existiendo la especificación más importante de que el recubrimiento del fondo del envase pese al menos 0.25 libras por envase tipo. La laminadora y cada uno de los fabricantes de envases tienen laboratorios donde se hacen

medidas de los pesos de recubrimiento de muestras tomadas de cada envío. Supongamos también que hay cierta discrepancia sobre los pesos de los recubrimientos efectivos, y se decide planear un experimento para saber cuál de los cuatro laboratorios ha hecho medidas correctas. Un factor de complicación radica en el hecho de que parte del proceso de medida consiste en la remoción química del recubrimiento de la superficie del metal de la base; luego, es imposible tener la misma muestra medida por cada laboratorio para determinar con qué exactitud corresponden las medidas a la muestra.

Una posibilidad es mandar varias muestras (en forma de discos circulares de áreas iguales) a cada uno de los laboratorios. Aunque esos discos no tengan en realidad pesos idénticos de recubrimiento, es de esperarse que tales diferencias sean pequeñas y que, más o menos, den el mismo promedio. En otras palabras, se supondrá que cualesquiera diferencias que puedan existir entre las medias de las cuatro muestras podrán ser atribuidas a causas debidas únicamente a las diferencias sistemáticas en las técnicas de medida y a variaciones aleatorias.

Ahora queda el problema de decidir cuántos discos se deben mandar a cada laboratorio y cómo se deben seleccionar estos discos. La cuestión del tamaño de la muestra se puede resolver de muchas formas diferentes, una de las cuales es usar la fórmula de la página 154 para la desviación típica de la distribución muestral de la diferencia entre dos medias. Substituyendo los valores conocidos de σ_1 y σ_2, y especificando qué diferencias entre las medias verdaderas de cada dos laboratorios se han de detectar con una probabilidad de al menos 0.95 (ó 0.98, ó 0.99), es posible determinar $n_1 = n_2 = n$ (problema 10 de la página 253.) Supongamos que este método y quizás, también las consideraciones de costo y obtención de las muestras necesarias, nos conducen a la decisión de enviar una muestra de 12 discos a cada laboratorio.

El problema de seleccionar los 48 discos y distribuir 12 a cada laboratorio no es tan sencillo como puede parecer a primera vista. Para empezar, supongamos que una hoja del material, suficientemente larga y suficientemente ancha, se selecciona y que los 48 discos que se cortan son los mostrados en la figura 13-1. Los doce discos de la tira 1 se envían al laboratorio primero, los doce de la tira 2 al segundo, y así sucesivamente. Si encontramos que las cuatro medias de los pesos de recubrimiento difieren considerablemente, ¿nos permite esto llegar a la conclusión de que las diferencias se pueden atribuir a fallas en las técnicas de medida? Supongamos, por ejemplo, que una investigación adicional muestra que la cantidad de estaño depositado electrolíticamente en una hoja de acero larga sigue en proceso no uniforme y que se repite de variación perpendicular a la dirección en que se lamina. (Este proceso de depósito puede deberse a la posición de los electrodos, a "efectos de bordes", etc.) Luego, si los cuatro laboratorios midieron correctamente los recubrimientos, hay una causa para que existan diferencias en las medidas. El envío de una tira entera a cada laboratorio nos lleva a que las diferencias entre las técnicas de medida en los laboratorios son inseparables (o se confunden con) de cualquier diferencia que haya en realidad en la cantidad de estaño depositado perpendicularmente a la dirección de laminado.

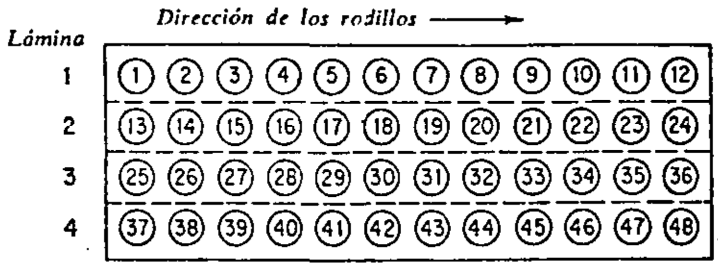


Fig. 13.1 Numeración de las muestras de hojalata

Un medio de evitar esta clase de confusión es numerar los discos y enviar *al azar* doce de ellos a cada laboratorio, como en la selección siguiente, que se obtuvo con la ayuda de una tabla de números de azar:

Laboratorio A:	3, 38, 17, 32, 24, 30, 48, 19, 11, 31, 22, 41
Laboratorio B:	44, 20, 15, 25, 45, 4, 14, 5, 39, 7, 40, 34
Laboratorio C:	12, 21, 42, 8, 27, 16, 47, 46, 18, 43, 35, 26
Laboratorio D:	9, 2, 28, 23, 37, 1, 10, 6, 29, 36, 33, 13

Si hubiera algún proceso sistemático en la distribución del espesor del recubrimiento de la lámina, se "rompería" al tomar las muestras al azar.

Aunque hemos identificado y eliminado una posible ley de variación, no tenemos seguridad de que no puedan existir otros. Por ejemplo, puede haber una diferencia sistemática en las áreas de los discos causada por desgaste progresivo de la herramienta de corte, o puede haber grietas u otras imperfecciones en una parte de la lámina, de tal modo que afecten a las medidas. Entonces, siempre hay la posibilidad de que las diferencias entre las medias atribuidas a fallos técnicos en los laboratorios se deban, en realidad, a otros factores no controlados, y el propósito de tomar las muestras al azar es el de evitar que se pueda confundir la variable en investigación con otras variables del tipo de las descritas.

Al distribuir los 48 discos enteramente al azar entre los cuatro laboratorios, no nos queda ya, otra alternativa que incluir cualquiera variación atribuible a causas extrañas como una "variación aleatoria". Es posible que esto nos lleve a una estimación excesivamente amplia de lo que hemos designado como variación aleatoria, lo que, a su vez, hará difícil detectar diferencias entre las medias verdaderas de los distintos laboratorios. Para evitar esto, tal vez podríamos emplear sólo discos cortados de la misma hoja y de la misma tira (o de alguna otra región homogénea). Desgraciadamente, este tipo de experimento controlado nos presenta nuevas complicaciones. Por ejemplo, ¿qué utilidad tiene hacer un experimento que nos permite concluir que los laboratorios coinciden (o no) en sus medidas, *si tal conclusión se limita a las medidas hechas a una distancia fija del borde de la lámina?* Para considerar un ejemplo en el que se presentan tales complicaciones con agudeza, supongamos que un fabricante de materiales de fontanería desea comparar las características de diversas clases de materiales para emplearlos en tubería que van a estar sumergidas en agua. Si vamos a fijar condiciones tales como la acidez del suelo, profundidad del tubo y el contenido mineral del agua, las conclusiones sobre qué tipo de material es mejor, sólo serán válidas para las condiciones fijadas. Lo que, en realidad, desea conocer el fabricante, es cuál material es mejor en una amplia variedad de condiciones, y al diseñar un experimento adecuado será conveniente (de hecho, necesario) especificar que tubo de cada material ha de ser enterrado en cada una de las distintas profundidades, en cada uno de los distintos tipos de suelo, y en lugares donde el agua varía de dureza.

Todo lo expuesto sirve para ilustrar que raramente es deseable mantener fijos todos, o la mayoría de, los factores extraños de la circunstancia de un experimento, cuando se trata de obtener una estimación de la variación aleatoria que no esté "inflada" por variaciones a otras causas. (De hecho, es muy difícil, si no imposible, ejercer un control tan extricto que mantenga constantes *todas* las variables extrañas). En la práctica, se planean los experimentos de tal forma que se varían deliberadamente las fuentes conocidas de variabilidad en un rango tan amplio como sea necesario; aun más, deben ser variadas en tal forma que su variabilidad quede eliminada en la estimación de la variación aleatoria. Una forma de conseguir esto, es repetir el experimento en varios *bloques*, manteniendo fijas en cada bloque determinadas fuentes de variabilidad (esto es, variables extrañas), pero variándolas de bloque a bloque.

Volviendo a nuestro ejemplo del estañado de la lámina de acero, podemos medir las variaciones a lo largo de la hoja, tomando al azar tres discos de cada tira para cada laboratorio, como se muestra en la selección siguiente:

	tira 1	*tira 2*	*tira 3*	*tira 4*
Laboratorio A:	8, 4, 10	23, 24, 19	26, 29, 35	37, 44, 48
Laboratorio B:	2, 6, 12	21, 15, 22	34, 33, 32	45, 43, 46
Laboratorio C:	1, 5, 11	16, 20, 13	36, 29, 30	41, 38, 47
Laboratorio D:	7, 3, 9	17, 18, 14	28, 31, 25	39, 40, 42

En este experimento, las tiras forman los bloques, y, si basamos nuestra estimación de variación aleatoria en la variabilidad *entre* cada uno de los 16 conjuntos de tres discos, esta estimación no estará inflada por las variables extrañas, esto es, las diferencias entre tiras. (Notemos, además, que, con esta selección, las diferencias entre las medias obtenidas en los cuatro laboratorios no se puedan atribuir a diferencias entre las tiras. Esto no se puede afirmar para la selección de la página 244).

El análisis de los experimentos en que se utilizan bloques para eliminar una fuente de variabilidad se discutirá en la sección 13.3. El análisis de los experimentos en que se deben eliminar dos o tres fuentes de variabilidad se encuentra en la sección 13.5.

13.2 Clasificaciones en una sola dirección

En esta sección consideraremos el análisis estadístico del diseño hecho completamente al azar, o de *clasificación en una sola dirección*. Supondremos que el experimentador cuenta con los resultados de k muestras de azar independientes, cada una de tamaño n, provinientes de k poblaciones diferentes (esto es, datos sobre k tratamientos, k grupos, k métodos de producción etc.); y debe contrastar la hipótesis de que las medias de esas k poblaciones son todas iguales. Un ejemplo de tal experimentos, con $k = 4$, es el expuesto en la página 245. Si denotamos la j-ésima observación en la i-ésima muestra por y_{ij} el esquema general de la clasificación en una sola dirección es el siguiente:

		Media
Muestra 1:	$y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1j}, \ldots, y_{1n}$	$\bar{y}_1$
Muestra 2:	$y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2j}, \ldots, y_{2n}$	$\bar{y}_2$
.	. . . . . .	.
Muestra i:	$y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{ij}, \ldots, y_{in}$	$\bar{y}_i$
.	. . . . . .	.
Muestra k:	$y_{k1}, y_{k2}, \ldots, y_{kj}, \ldots, y_{kn}$	$\bar{y}_k$
		$\bar{y}.$

Con respecto al experimento de la página 263, y_{ij} $(i = 1, 2, 3, 4;\ j = 1, 2, \ldots 12)$ es el j-ésimo peso de recubrimiento medido por el i-ésimo laboratorio, $\bar{y}_i$ es la media de las medias obtenidas por el i-ésimo laboratorio, e $\bar{y}$ es la media general (o *media mayor)* de las 48 observaciones.

Para poder contrastar la hipótesis de que las muestras obtuvieron de k poblaciones con medias iguales, haremos varias suposiciones. Concretamente, se supondrá que tratamos con *poblaciones normales* que tienen *varianzas iguales.* Existen métodos para contrastar en qué grado es razonable es esta última suposición (ver el libro de A. M. Mood y F. A Graybill, citado en la bibliografía), pero los métodos que desarrollaremos en este capítulo son bastante "robustos"; es decir, son relativamente insensibles a las violaciones de la hipótesis de la normalidad y de la igualdad de las varianzas.

Si μ_i denota la media de la i-ésima población y σ^2 denota la varianza común de las k poblaciones, podemos expresar cada observación y_{ij} por μ_i, más el valor de una componente aleatoria, esto es, podemos escribir.

$$y_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, k; j = 1, 2, \ldots, n$$

De acuerdo con las suposiciones anteriores las ϵ_{ij} son valores de variables aleatorias independientes con distribuciones normales de medias cero y varianza común σ^2. (Nótese que esta ecuación, o *modelo, se* puede considerar como una ecuación de regresión múltiple; introduciendo las variables x_{il} que sean igual a 0 ó 1, dependiendo de que los dos subíndices sean desiguales o iguales, podemos escribir.

$$y_{ij} = \mu_1 x_{i1} + \mu_2 x_{i2} + \ldots + \mu_k x_{ik} + \epsilon_{ij}$$

Los parámetros μ_i se pueden interpretar ahora como coeficientes de regresión, y se pueden estimar por los métodos de mínimos cuadrados del capítulo 12.)

Para lograr uniformidad con las ecuaciones correspondientes para clases más complicadas de diseño, es costumbre reemplazar μ_i por $\mu + \alpha_i$, donde μ es la media de las μ_i y, por lo tanto, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$ (ver problema 11 de la página 254). Utilizando estos nuevos parámetros, podemos escribir la ecuación modelo para la clasificación en una sola dirección, en la forma

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, k; j = 1, 2, \ldots, n$$

y la hipótesis nula de que las k medias de poblaciones sean todas iguales se puede cambiar por la hipótesis nula de que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. La hipótesis alternativa de que, al menos, dos de las medias de población sean diferentes, es equivalente a la hipótesis altenativa de que $\alpha_i \neq 0$ para alguna i.

Para contrastar la hipótesis nula de que las k medias de población sean todas iguales, compararemos dos estimaciones de σ^2—uno basado en la varianza entre las medias muestrales, y otra basada en la variación dentro de la muestras. Como, por hipótesis, cada muestra proviene de una población de varianza σ^2, esta varianza se puede estimar por cualquiera de las varianzas muestrales

$$s_i^2 = \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2/(n - 1)$$

y, por consiguiente, también por sus medias

$$\hat{\sigma}_W^2 = \sum_{i=1}^{k} s_i^2/k = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2/k(n - 1)$$

Nótese que cada una de las varianzas muestrales s_i^2 está basada en $n - 1$ grados de libertad $(n - 1$ desviaciones independientes de $\bar{y}_i)$ y, por lo tanto, $\hat{\sigma}_W^2$ está basada en $k(n - 1)$ grados de libertad. Ahora, la varianza de la media k muestral está dada por

$$s_{\bar{x}}^2 = \sum_{i=1}^{k} (\bar{y}_i - \bar{y}.)^2/(k - 1)$$

y, *si la hipótesis nula es cierta,* nos da una estimación de σ^2/n. Luego,

$$\hat{\sigma}_B^2 = n \cdot s_{\bar{x}}^2 = n \cdot \sum_{i=1}^{k} (\bar{y}_i - \bar{y}.)^2/(k - 1)$$

nos da una estimación de σ^2 basada en las diferencias entre las medias muestrales, y está basada en $k - 1$ grados de libertad.

Si la hipótesis nula es cierta, podemos demostrar que $\hat{\sigma}_W^2$ y $\hat{\sigma}_B^2$ son estimaciones independientes de σ^2, y de aquí que

$$F = \frac{\hat{\sigma}_B^2}{\hat{\sigma}_W^2}$$

es un valor de una variable aleatoria que tiene distribución F, con $k - 1$ y $k(n - 1)$ grados de libertad. Como la *varianza intermuestral,* $\hat{\sigma}_B^2$, (puede esperarse que exceda a la varianza muestral interior, $\hat{\sigma}_W^2$, cuando la hipótesis nula *es falsa,* ésta deberá rec... ...arse si F excede de F_α, donde F_α se obtiene de la tabla VI, co... $k-1$ y $k(n-1)$ grados de libertad.

El argumento precedente ha demostrado cómo se puede basar en la comparación de dos estimaciones de varianzas el test de la igualdad de k medios. Quizá más interesante resulta el hecho de que las dos estimaciones consideradas (excepto para los divisores $k-1$ y $k(n-1)$) se pueden obtener por "ruptura" o análisis de la varianza total de todas las nk observaciones en dos partes. La varianza muestral de las nk observaciones está dada por

$$s^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2/(nk-1)$$

y con respecto a su numerador, llamado *suma total de cuadrados*, probaremos ahora el siguiente teorema

TEOREMA 13.1

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2 + n\cdot\sum_{i=1}^{k}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2$$

La prueba de este teorema está basada en la identidad

$$y_{ij}-\bar{y}_{..} = (y_{ij}-\bar{y}_{i.}) + (\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})$$

Elevando ambos miembros al cuadrado y haciendo la suma respecto de i y de j, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2 + 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})$$

A continuación, observamos que

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}) = \sum_{i=1}^{k}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i.}) = 0$$

como $\bar{y}_{i.}$ es la media de la i-ésima muestra, por lo tanto, $\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i.}) = 0$ para todas las i. Para completar la prueba del teorema 13.1, sólo tenemos que observar que el sumatorio de la segunda suma del segundo miembro de la identidad original no contiene el subíndice j y que, en consecuencia,

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2 = n\cdot\sum_{i=1}^{k}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2$$

Es costumbre denotar la *suma total de cuadrados*, primer miembro de la identidad del teorema 13.1 por SST. El primer término del segundo miembro es $\hat{\sigma}^2_W$ veces sus grados de libertad y nos referimos a esta suma como la *suma de cuadrados de error*, SSE. El término "suma de error de cuadrados" expresa la idea de que la cantidad estima el *error aleatorio* (o *de azar*). El segundo término del segundo miembro de la identidad del teorema 13.1 es $\hat{\sigma}^2_B$ veces sus grados de libertad y lo llamamos

...*ma intermuestral de cuadrado so suma de tratamiento, de cuadrados* $SS(Tr)$. (La mayoría de las primeras aplicaciones de esta clase de análisis se hicieron en el campo de la agricultura, donde las k poblaciones representaban diferentes tratamientos, tales como fertilizantes, aplicados a campos agrícolas.) Notemos que con esta notación la razón F de la página 248 se puede escribir.

$$F = \frac{SS(Tr)/(k-1)}{SSE/k(n-1)}$$

Las sumas de cuadrados necesarios para substituir en esta última fórmula, se obtienen generalmente por medio de las fórmulas abreviadas siguientes, que el lector deberá verificar en el problema 12 de la página 254. Primero calculamos SST y $SS(Tr)$ por medio de las fórmulas

$$SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - C$$

$$SS(Tr) = \frac{\sum_{i=1}^{k} T_i^2}{n} - C$$

donde C, llamada *término de corrección*, está dada por

$$C = \frac{T^2}{kn}$$

y donde T_i es el total de las n observaciones de la i-ésima muestra, mientras que T^2 es el total mayor de las kn observaciones. La suma de error de cuadrados, SSE, se obtiene, entonces, por substracción; de acuerdo con el teorema 13.1 podemos escribir

$$SSE = SST - SS(Tr)$$

Los resultados obtenidos al analizar la suma total de cuadrados por sus componentes, se puede resumir en la siguiente *tabla de análisis de la varianza:*

Origen de variación	*Grado de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Cuadrado medio*	*F*
Tratamiento	$k-1$	$SS(Tr)$	$MS(Tr) = SS(Tr)/(k-1)$	$\frac{MS(Tr)}{MSE}$
Error	$k(n-1)$	SSE	$MSE = SSE/k(n-1)$	
Total	$nk-1$	SST		

Nótese que cada *cuadrado medio* se obtiene dividiendo la suma de cuadrados correspondiente por sus grados de libertad .

Para ilustrar el análisis de la varianza (como se llama esta técnica) para la clasificación en una sola dirección, supongamos que, de acuerdo con lo establecido en la página 244, cada laboratorio mide los pesos de recubrimiento de 12 discos y que los resultados son los siguientes:

Laboratorio A:	0.25, 0.27, 0.22, 0.30, 0.27, 0.28, 0.32, 0.24, 0.31, 0.26, 0.21, 0.28
Laboratorio B:	0.18, 0.28, 0.21, 0.23, 0.25, 0.20, 0.27, 0.19, 0.24, 0.22, 0.29, 0.16
Laboratorio C:	0.19, 0.25, 0.27, 0.24, 0.18, 0.26, 0.28, 0.24, 0.25, 0.20, 0.21, 0.19
Laboratorio D:	0.23, 0.30, 0.28, 0.28, 0.24, 0.34, 0.20, 0.18, 0.24, 0.28, 0.22, 0.21

Los totales para las cuatro muestras son, respectivamente, 3.21, 2.72, 2.76, y 3.00, el total mayor es 11.69, y los cálculos para obtener las sumas de cuadrados necesarias son los siguientes:

$$C = (11.69)^2/48 = 2.8470$$

$$SST = (.25)^2 + (.27)^2 + \dots + (.21)^2 - 2.8470 = 0.0809$$

$$SS(Tr) = \frac{(3.21)^2 + (2.72)^2 + (2.76)^2 + (3.00)^2}{12} - 2.8470 = 0.0130$$

$$SSE = 0.0809 - 0.0130 = 0.0679$$

Así, obtenemos la siguiente *tabla de análisis* de la varianza:

Origen de variación	*Grado de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Cuadrado medio*	*F*
Laboratorios	3	0.0130	0.0043	2.87
Error	44	0.0679	0.0015	
Total	47	0.0809		

Como el valor obtenido para F excede de 2.82, al valor de $F_{.05}$ con 3 y 44 grados de libertad, la hipótesis nula se puede rechazar al nivel de significado de 0.05; llegamos a la conclusión de que los laboratorios *no* están obteniendo resultados concordantes.

Para estimar los parámetros μ, α_1, α_2, α_3, y α_4 (ó μ_1, μ_2, μ_3, y μ_4), podemos emplear el método de mínimos cuadrados, haciendo mínima la expresión

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{12}(y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2$$

con respecto μ y las α_i, con la restricción de que $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 0$. Esto se puede hacer eliminando una de las α, o mejor aún, utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange que se puede encontrar en la mayoría de los libros de Cálculo superior. En cada caso, obtenemos las estimaciones "intuitivamente "obvias".

$$\hat{\mu} = \bar{y}. \quad = \quad 0.244$$
$$\hat{\alpha}_1 = \bar{y}_1 - \bar{y}. = \quad 0.024$$
$$\hat{\alpha}_2 = \bar{y}_2 - \bar{y}. = -0.017$$
$$\hat{\alpha}_3 = \bar{y}_3 - \bar{y}. = -0.014$$
$$\hat{\alpha}_4 = \bar{y}_4 - \bar{y}. = \quad 0.006$$

y las estimaciones correspondientes de las $\hat{\mu}_i$ están dados por $\hat{\mu}_i = \bar{y}_i$.

El análisis de la varianza descrito en esta sección se aplica a clasificaciones en una sola dirección en las que cada muestra tiene el mismo número de observaciones. Si no es éste el caso, y los tamaños de las muestras son $n_1, n_2, \dots n_k$, sólo tenemos que substituir $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ en lugar de nk y escribir las expresiones de cálculo de SST y $SS(Tr)$ en la forma

$$SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - C$$

$$SS(Tr) = \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - C$$

En lo demás, el procedimiento es el mismo. (Ver problema 13 de la página 254.)

EJERCICIOS

1. Se hace un experimento para comparar la acción limpiadora de dos detergentes, A y B. Se ensucian 20 piezas de tela con grasa y mugre, y cada una se lava con uno de los detergentes en una máquina de tipo agitador, midiéndose después la blancura de las piezas. Criticar los aspectos siguientes del experimento:
   (a) El experimento completo se hizo con agua suave.
   (b) Quince piezas se lavaron con el detergente A y cinco con el B.
   (c) Para acelerar la prueba, se empleó agua muy caliente y un tiempo de lavado de 30 segundos.
   (d) Las medidas de blancura de todas las piezas lavadas con el detergente A se hicieron primero.
2. Un *bon vivant*, deseaba saber la causa de sus frecuentes malestares, después de beber hizo el siguiente experimento. La primera noche sólo bebió whiskey con agua; la segunda, vodka y agua; la tercera, ginebra y agua, y en la cuarta, ron y agua. En cada de las siguientes mañanas tuvo malestares y llegó a la conclusión de que era el factor común, o sea el agua, lo que le hacía daño.
   (a) Esta conclusión, obviamente, es incorrecta, pero, ¿puede usted decir qué principios del proyecto experimental han sido violados?
   (b) Dé un ejemplo menos obvio de un experimento que tenga las mismas conclusiones.
   (c) Suponga que nuestro amigo ha modificado su experimento de tal forma que cada una de las bebidas alcohólicas se ha empleado con, y sin, agua, de tal forma que el experimento duró 8 noches. ¿Pueden los resultados de este otro experimento servir para confirmar o refutar la hipótesis de que el agua es la causa de los malestares? Explique por qué.

3. Muestras, . .adas al azar, de 4 marcas cubiertas, necesitaron las siguientes dista. de frenado a 30 millas por hora:

Marca A	Marca B	Marca C	Marca D
27	25	27	26
30	20	31	26
25	22	30	25
26	21	32	23

(a) Sin emplear fórmulas abreviadas, calcular $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{\cdot})^2$, $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i})^2$, y $n\cdot\sum_{i=1}^{k}(\bar{y}_{i}-\bar{y}_{\cdot})^2$, y verificar la identidad del teorema 13.1.

(b) Verificar los resultados obtenidos para las tres sumas de cuadrados, utilizando las fórmulas abreviadas de la página 249.

4. Para determinar el efecto en la salida de polvos de un precipitador, se hicieron las siguientes medidas:

Corriente total (pie³/hora)	Con carga de polvo gramos por yarda cúbica en el gasto de gas		
200	1.2	1.0	1.6
300	2.0	1.8	2.5
400	2.4	3.0	3.5
500	3.1	3.8	4.4

(a) Comprobar si el gasto en la salida a través del precipitador tiene algún efecto en la carga de polvo de salida.

(b) Estimar los efectos α_i correspondientes a las diferentes velocidades del gasto.

5. Utilizando las sumas de cuadrados obtenidas en el ejercicio 3, probar con un nivel de significación de 0.05, si las diferencias entre las distancias medias de frenado obtenidas para las 4 marcas de cubiertas tienen algún significado.

6. Tres probetas de cada uno de los cinco diferentes metales que se indican a continuación, fueron sumergidas en una solución altamente corrosiva y se midieron sus velocidades de corrosión con los siguientes resultados:

Metal	Velocidad de corrosión		
Aluminio	0.5	0.4	0.6
Acero inoxidable	0.6	0.7	0.6
Acero al carbono	6.5	7.0	7.3
Acero esmaltado	0.8	0.6	0.8
Aleación de niquel	4.1	3.5	3.0

(a) Contrastar la hipótesis nula de que los cinco metales tienen la misma velocidad de corrosión.

(b) Estimar la diferencia de velocidad de corrosión entre el acero inoxidable y el acero al carbono y dar un intervalo de confianza a un nivel de 0.95 para esta diferencia.

7. Para comparar la efectividad de tres tipos diferentes de pinturas fosforescentes para cuadrantes indicadores de instrumentos de aviones, se pintan 8 cuadrantes con cada una de las pinturas. Luego se iluminan los cuadrantes con luz ultravioleta, y los siguientes son los números que indican los minutos que dieron luz, después que la ultravioleta fue apagada:

Tipo A	Tipo B	Tipo C
46.3	48.7	62.3
48.2	53.6	64.7
42.0	49.3	56.2
41.8	47.3	60.2
48.9	51.4	53.6
51.0	53.9	55.5
49.7	43.6	61.8
50.1	48.8	54.5

(a) Calcular F y (suponiendo que se obtienen las condiciones necesarias) contrastar, con un nivel de 0.01, si las diferencias observadas entre las medias de las muestras se pueden atribuir al azar.

(b) Estimar los parámetros del modelo usado en el análisis de este experimento.

8. Un fabricante de planchas eléctricas, deseando probar la exactitud de los termostatos de tres proveedores diferentes, comprobó los hierros a 500° F. Las temperaturas se midieron con un par termoeléctrico y dieron los resultados siguientes:

Proveedor A: 494, 516, 487, 491
Proveedor B: 512, 528
Proveedor C: 480, 515, 510

¿Se puede llegar a la conclusión de que hay una diferencia en la exactitud en los termostatos de los tres proveedores?

9. Teniendo 20 pruebas disponibles para comparar el crecimiento de tres variedades de maíz, un investigador agrícola planta 7 con cada una de las variedades A y B, y 6 con la variedad C. Los siguientes son los crecimientos obtenidos en bushels por acre:

Variedad A	Variedad B	Variedad C
81.6	73.5	89.6
66.7	77.3	86.1
72.9	57.5	72.4
86.7	69.0	78.4
73.5	62.4	85.2
63.8	77.7	70.5
69.2	71.5	

Estimar el crecimiento promedio verdadero de cada variedad y probar si hay diferencias significativas entre las medias de las muestras con $\alpha = 0.05$.

10. Con respecto a la discusión de la página 243, supongamos que las desviaciones típicas de los pesos de recubrimiento determinados por cada uno de los tres laboratorios tienen el valor común $\sigma = 0.012$, y que se desea una confianza de 95% para determinar una diferencia entre las medias de dos laboratorios cualesquiera en más de 0.01 libras por envase. Demostrar que estas suposiciones nos conducen a la decisión de enviar una muestra de 12 discos a cada laboratorio.

11. Demostrar que, si $\mu_i = \mu + \alpha_i$, y μ es la media de las μ_i, entonces $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$.
12. Verificar las fórmulas abreviadas para calcular SST y $SS(Tr)$ dadas en la página 249.
13. Establecer y probar un teorema análogo al teorema 13-1, para el caso en que el tamaño de la i-ésima muestra sea n_i, esto es, cuando los tamaños de las muestras no son necesariamente iguales.

13.3 Clasificaciones en dos direcciones

Como hicimos notar en la sección 13.1, el valor estimado de la variación aleatoria (el error experimental) puede frecuentemente ser reducido, es decir, liberado de la variabilidad debida a causas extrañas, dividiendo las observaciones en cada clasificación en *bloques.* Esto se logra cuando fuentes de variabilidad conocidas (o sea, variables extrañas) se mantienen fijas en cada bloque, pero varían de un bloque a otro.

En esta sección supondremos que el experimentador tiene a mano medidas pertenecientes a a tratamientos distribuidas en b bloques. Primero consideraremos el caso en que hay exactamente una observación procedente de cada tratamiento en cada bloque; en la ilustración de la página 245, este caso se presentaría si cada laboratorio comprobara un disco de cada tira. Indicando con y_{ij} la observación perteneciente al i-ésimo tratamiento y al j-ésimo bloque, con $\bar{y}_{i.}$ la media de las b observaciones del i-ésimo tratamiento, con $\bar{y}_{.j}$ la media de las a observaciones del bloque j, y con $\bar{y}_{..}$ la media mayor de todas las ab observaciones podemos utilizar el siguiente esquema para este tipo de *clasificación en dos direcciones:*

	Bloque $B_1\ B_2 \ldots B_j \ldots B_b$	*Media*
Tratamiento 1:	$y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1j}, \ldots, y_{1b}$	$\bar{y}_{1.}$
Tratamiento 2:	$y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2j}, \ldots, y_{2b}$	$\bar{y}_{2.}$
.	. . . . . .	.
Tratamiento i:	$y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{ij}, \ldots, y_{ib}$	$\bar{y}_{i.}$
.	. . . . . .	.
Tratamiento a:	$y_{a1}, y_{a2}, \ldots, y_{aj}, \ldots, y_{ab}$	$\bar{y}_{a.}$
Media	$\bar{y}_{.1}\ \bar{y}_{.2} \ldots \bar{y}_{.j} \ldots \bar{y}_{.b}$	$\bar{y}_{..}$

Nótese que, cuando empleamos un punto en lugar de un subíndice, esto significa que la media se obtiene sumando respecto a ese subíndice.

El modelo subyacente que aceptaremos para el análisis de este tipo de clasificación de dos direcciones con una observación por "casilla" está dada por

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, a; j = 1, 2, \ldots, b$$

Donde μ es la media mayor, α_i el *efecto* del i-ésimo tratamiento, β_j el *efecto* del j-ésimo bloque, y las ϵ_{ij} son valores de variables aleatorias *con distribución normal, independientes y con medias cero y varianza común* σ^2. Igual que en el modelo para la clasificación en una sola dirección, restringimos los parámetros imponiendo las condiciones $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$ y $\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$ (problema 10 de la página 263).

En el análisis de una clasificación de dos direcciones en el que cada tratamiento está representado una vez en cada bloque, el objetivo principal es probar si la diferencia entre las $\bar{y}_{i.}$, es significativa, esto es, contrastar la hipótesis nula

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_a = 0$$

Además, siempre será conveniente comprobar si la agrupación de los bloques ha sido efectiva, es decir, si se puede rechazar la hipótesis nula

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_b = 0$$

En cada caso, la hipótesis alternativa es que, al menos, uno de los efectos sea diferente de cero.

Como en el análisis de la varianza de una sola dirección, basaremos estos tests de significación en comparaciones de las estimaciones de σ^2; una basada en la variación entre tratamientos, otra basada en la variación entre bloques, y otra que mida el error experimental. Notemos que solo la última es una estimación de σ^2 cuando alguna (o ambas) de las hipótesis nulas no es válida. Las sumas de cuadrados necesarias están dadas por las tres componentes en que se "rompe" la suma total de cuadrados, por medio del siguiente teorema:

TEOREMA 13.2

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2 + b\sum_{i=1}^{a} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + a\sum_{j=1}^{b} (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2$$

El primer miembro de esta identidad representa la suma total de cuadrados, SST, y los términos del segundo miembro son, respectivamente, la suma de cuadrados de error SSE, la suma de cuadrados de tratamientos, $SS(Tr)$, y la suma de cuadrados de bloque $SS(Bl)$. Para probar este teorema, empleamos la identidad

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})$$

y seguimos, esencialmente, la misma argumentación que en la prueba del teorema 13.1.

En la práctica, calculamos las sumas de cuadrados necesarias por medio de fórmulas abreviadas análogas a las de la página 248, mejor que las expresiones que definan estas sumas de cuadrados, tales como las definidas en el teorema 13.2. En lo que sigue, $T_{i.}$ es la suma de las b observaciones del i-ésimo tratamiento, $T_{.j}$ es la suma de las a observaciones del j-ésimo bloque, y $T_{..}$ es el gran total de todas las observaciones. Usando el *término de corrección*

$$C = \frac{T_{..}^2}{ab}$$

tenemos

$$SST = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} y_{ij}^2 - C$$

$$SS(Tr) = \frac{\sum_{i=1}^{a} T_{i.}^2}{b} - C$$

$$SS(Bl) = \frac{\sum_{j=1}^{b} T_{.j}^2}{a} - C$$

$$SSE = SST - SS(Tr) - SS(Bl)$$

Nótese que los divisores de $SS(Tr)$ y $SS(Bl)$ son el número de observaciones de los totales respectivos, $T_{i.}$ y $T_{.j}$. En el problema 11 de la página 263, el lector deberá verificar que estas fórmulas son equivalentes a los términos correspondientes de la identidad del teorema 13.2.

Empleando estas sumas de cuadrados, podemos rechazar la hipótesis nula de que las α_i son todas igual a cero con un nivel de significación α si

$$F_{Tr} = \frac{MS(Tr)}{MSE} = \frac{SS(Tr)/(a-1)}{SSE/(a-1)(b-1)}$$

excede a F_α con $a-1$ y $(a-1)(b-1)$ grados de libertad. La hipótesis nula de que las β_j son todas igual a cero se puede rechazar con un nivel de significación α, si

$$F_{Bl} = \frac{MS(Bl)}{MSE} = \frac{SS(Bl)/(b-1)}{SSE/(a-1)(b-1)}$$

excede a F_α, con $b-1$ y $(a-1)(b-1)$ grados de libertad. Notemos que las medias de cuadrados, $MS(Tr)$, $MS(Bl)$, y MSE, se definen nuevamente como las sumas de cuadrados correspondientes divididas por sus grados de libertad.

Los resultados obtenidos en este análisis, se pueden resumir en la siguiente *tabla de análisis de la varianza:*

Origen de variación	*Grado de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Cuadrado medio*	*F*
Tratamiento	$a-1$	$SS(Tr)$	$MS(Tr) = SS(Tr)/(a-1)$	$F_{Tr} = \frac{MS(Tr)}{MSE}$
Bloc	$b-1$	$SS(Bl)$	$MS(Bl) = SS(Bl)/(b-1)$	$F_{Bl} = \frac{MS(Bl)}{MSE}$
Error	$(a-1)(b-1)$	SSE	$MSE = SSE/(a-1)(b-1)$	
Total	$ab-1$	SST		

Ilustraremos el análisis de una clasificación en dos direcciones con una observación de cada tratamiento en cada bloque, considerando un experimento para comparar varios proyectos de cascos de lanchas de motor. Como las condiciones del aire y del agua pueden afectar la velocidad máxima de una lancha, posiblemente en un grado mayor que las diferencias en los proyectos de los cascos, cada uno de los cuatro cascos se probó en tres días diferentes, correspondientes a condiciones de calma, moderado, y picado. En cada día las cuatro lanchas se corrieron en una ruta marcada a la velocidad máxima, habiendo sido su orden de salida al azar, y los tiempos (en minutos) necesarios para cubrir la trayectoria se muestran en la tabla siguiente:

	Día 1	*Día 2*	*Día 3*	*Total*
Proyecto A	45	46	51	142
Proyecto B	42	44	50	136
Proyecto C	36	41	48	125
Proyecto D	49	47	54	150
Total	172	178	203	553

Considerando los proyectos como tratamientos y los días como bloques, obtenemos las sumas de cuadrados necesarias en la forma siguiente:

$$C = \frac{(553)^2}{12} = 25{,}484$$

$$SST = (45)^2 + (46)^2 + \ldots + (54)^2 - 25{,}484 = 265$$

$$SS(Tr) = \frac{(142)^2 + (136)^2 + (125)^2 + (150)^2}{3} - 25{,}484 = 111$$

$$SS(Bl) = \frac{(172)^2 + (178)^2 + (203)^2}{4} - 25{,}484 = 135$$

$$SSE = 265 - 111 - 135 = 19$$

Dividiendo las sumas de cuadrados por sus respectivos grados de libertad para obtener las medias de cuadrados adecuadas, obtenemos los resultados mostrados en la siguiente tabla de análisis de la varianza:

Origen de variación	*Grado de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Cuadrado medio*	*F*
Proyecto del casco	3	111	37.0	11.6
Días	2	135	67.5	21.1
Error	6	19	3.2	
Total	11	265		

Como $F_{Tr} = 11.6$ excede de 9.78, valor de $F_{.01}$ con 3 y 6 grados de libertad, llegamos a la conclusión de que las diferencias en los proyectos de los cascos afectan la velocidad máxima de las lanchas. Además, como $F_{Bl} = 21.1$ excede de 10.9, valor de $F_{.01}$, con dos y seis grados de libertad, concluimos que las diferencias en la velocidad máxima se deben también a las condiciones del tiempo, es decir, que la distribución en bloques ha sido efectiva. (Para hacer más evidente el efecto de estos bloques, el lector deberá verificar, en el problema 6 de la página 262, que el test de diferencias entre proyectos no da resultados significativos si consideramos los datos como una clasificación en una sola dirección.)

El efecto α_i del i-ésimo casco se puede estimar por medio de la fórmula $\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$, que se puede obtener por el método de mínimos cuadrados. Las estimaciones resultantes son

$$\hat{\alpha}_1 = 47.3 - 46.1 = 1.2, \quad \hat{\alpha}_2 = 45.3 - 46.1 = -0.8$$

$$\hat{\alpha}_3 = 41.7 - 46.1 = -4.4, \quad \hat{\alpha}_4 = 50.0 - 46.1 = 3.9$$

Debemos observar que una clasificación en dos direcciones nos conduce automáticamente a repeticiones de las condiciones del experimento; por ejemplo, en el caso anterior, cada casco se probó tres veces. Las repeticiones se pueden tratar de diferentes maneras, y debemos tener cuidado de que el modelo empleado describa convenientemente la situación. Una forma de obtener repeticiones adicionales en una clasificación de dos direcciones es incluir bloques adicionales, por ejemplo, probar cada casco en mayor número de días, haciendo al azar el orden de prueba en cada día. Nótese que el modelo permanece, esencialmente, igual que antes, habiendo cambiado únicamente por un incremento en b y un incremento correspondiente en los grados de libertad por bloques y por error. Lo último es importante porque un aumento en los grados de libertad por error hace *más sensible* el test de la hipótesis nula $\alpha_i = 0$ para todo i, para pequeñas diferencias entre las medias de los tratamientos. De hecho, el propósito real de esta clase de repeticiones es aumentar los grados de libertad por error, y por lo tanto incrementando la sensibilidad de los tests F (problema 9 de la página 263).

Un segundo método es repetir el experimento completo, usando un nuevo método de selección al azar para obtener $a \cdot b$ observaciones adicionales. Esto sólo es posible si los bloques son *identificables*, esto es, si las condiciones que definen cada bloque se pueden repetir. Por ejemplo, en el experimento de los pesos de recubrimiento descrito en la sección 13.1, los bloques son tiras tomadas a lo largo de la dirección de laminado de una hoja de acero galvanizado y, dando una nueva hoja, es posible identificar cuál es la tira uno, cuál es la dos, etc. En el ejemplo de esta sección, esta clase de repetición (llamada generalmente *réplica*) es difícil de conseguir porque sería necesario que las condiciones del tiempo se repitieran exactamente en los tres días. Esta clase de repetición se usará en los diseños de cuadrado latino de la sección 13.5. Véanse también los problemas 7 y 8 de la página 262.

Un tercer método de repetición es incluir n observaciones para cada tratamiento en cada bloque. Cuando se desarrolla un experimento en esta forma, las n observaciones de cada "casilla" se consideran como *duplicados*, y es de esperar que su variabilidad sea algo menor que el error experimental. Para ilustrar este punto, supongamos que los pesos de los recubrimientos de tres discos de posiciones contiguas en una tira se midieron consecutivamente por uno de los laboratorios, utilizando las mismas soluciones químicas. La variabilidad de estas medidas será probablemente mucho menor que la de tres discos de la misma tira medidos en tiempos diferentes en dicho laboratorio, utilizando soluciones químicas diferentes y, quizá, técnicos diferentes. El análisis de la varianza apropiado para esta clase de repetición se reduce esencialmente a un análisis de la varianza de dos direcciones aplicado a las *medias* de los n duplicados en las $a \cdot b$ casillas; luego, *no habrá aumento en los grados de libertad por error* y, en consecuencia, *no habrá aumento en la sensibilidad de los tests F.*

13.4 Comparaciones múltiples

Los tests F usados en este capítulo muestran si hay diferencias entre varias medias y si éstas son significativas, pero no nos dicen si una media dada (o un grupo de medias) difiere significativamente de otra media dada (o grupo de medias). En la práctica esta última es la clase de información que le interesa a un investigador; por ejemplo, habiendo determinado en la página 251 que las medias de los pesos de recubrimientos obtenidos por los cuatro laboratorios difieren de una manera significativa, será importante encontrar qué laboratorio (o laboratorios) difiere de cuáles otros.

Si un experimentador se encuentra ante k medias, es razonable, en primer lugar, hacer tests para contrastar las diferencias significativas entre todos los posibles pares, esto es, hacer $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ test t de dos muestras, como los descritos en la página 156. Además del hecho de que esto requiere un gran número de pruebas, aún siendo k relativamente pequeño, estas pruebas no serían independientes y sería virtualmente imposible asignar a todo este proceso un nivel de significado general.

Se han propuesto varios *tests de comparaciones múltiples* para superar estas dificultades; entre ellas, el *test del recorrido múltiple de Duncan*, que estudiaremos en esta sección (en el libro de W. T. Federer, citado en la bibliografía, se hace referencia a otros tests de comparaciones múltiples). Las suposiciones en que se basa el test del recorrido múltiple de Duncan, son, esencialmente, las del análisis de la varianza en una sola dirección, con tamaños de muestras iguales. El test compara el *recorrido* de cualquier conjunto de p medias con un adecuado *mínimo recorrido de significación*, R_p, dado por

$$R_p = s_{\bar{x}} \cdot r_p$$

Aquí $s_{\bar{x}}$ es una estimación de $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$, y se calcula por medio de la fórmula

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{MSE}{n}}$$

donde MSE es el error cuadrado medio del análisis de la varianza. El valor de r_p depende del nivel de significación deseado y del número de grados de libertad correspondiente a MSE, y se puede obtener de las tablas $X(a)$ y (b) para $\alpha = 0.05$ y 0.01, para $p = 2, 3, \ldots 10$, y para varios grados de libertad entre 1 y 120.

Para ilustrar este proceso de comparaciones múltiples, nos referiremos a los datos de la página 250 y ordenaremos las cuatro medias de las muestras en un orden de magnitud creciente:

Laboratorio	*B*	*C*	*D*	*A*
Media	0.227	0.230	0.250	0.268

A continuación calcularemos $s_{\bar{x}}$, utilizando el error cuadrado medio de 0.0015 en el análisis de la varianza de la página 250, y obtendremos

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{0.0015}{12}} = 0.011$$

Luego, obtenemos (por interpolación lineal) de la tabla $X(a)$ los valores siguientes de r_p para $\alpha = 0.05$ y 44 grados de libertad:

p	2	3	4
r_p	2.85	3.00	3.09

Multiplicando cada valor de r_p por $s_{\bar{x}} = 0.011$, obtenemos, finalmente,

p	2	3	4
R_p	0.031	0.033	0.034

El recorrido del *conjunto de las cuatro medias* es $0.268 - 0.227 = 0.041$, que excede a $R_4 = 0.034$, mínimo recorrido de significación. Se podía esperar este resultado, puesto que el test F de la página 270 demostró que las diferencias entre las cuatro medias eran significativas, para un nivel $\alpha = 0.05$. Para contrastar las diferencias significativas entre *tres medias continuas*, obtenemos los recorridos 0.038 y 0.023, para los conjuntos de tres medias 0.230, 0.250, 0.268 y 0.227, 0.230, 0.250 respectivamente. Como el primero de estos valores excede a $R_3 = 0.033$, las diferencias observadas en el primer conjunto son significativas; como el segundo valor no excede a 0.033, las diferencias correspondientes no son significativas. Finalmente, para *pares contiguos* de medias encontramos que no hay ningún par adyacente que tenga un recorrido menor que el mínimo recorrido de significación $R_2 = 0.031$. Todos estos resultados se pueden condensar escribiendo

$$\underline{0.227 \quad 0.230 \quad 0.250} \quad 0.268$$

donde *se ha dibujado una línea debajo de cualquier conjunto de medias contiguas para las qu*[illegible] *recorrido es menor que el valor adecuado de R_p, esto es, deb*[illegible] *de cualqui*[illegible]*njunto de medias contiguas para las cuales las diferencias no significativas.* Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que, en nuestro experimento, el laboratorio A promedia pesos de recubrimiento mayores que los otros tres laboratorios.

Si aplicamos este mismo método al ejemplo de la sección 13.3, en el que comparamos los cuatro cascos de lanchas, obtenemos (véase también el problema 12 de la página 262)

Proyecto de casco

C	*B*	*A*	*D*
41.7	45.3	47.3	50.0

En otras palabras, entre ternas de medias contiguas, ambos conjuntos de diferencias son significativos. En lo que respecta a pares de medias contiguas, encontramos que solo la diferencia entre 41.7 y 45.3 es significativa. Interpretando estos significados, concluimos que el casco C es significativamente mejor que cualquiera de los otros.

EJERCICIOS

1. Para hallar la mejor disposición de instrumentos en un tablero de control, cuatro disposiciones diferentes se sometieron a un test simulando una emergencia y observando el tiempo de reacción necesario para corregirla. Los tiempos de reacción (en décimas de segundos) de tres personas diferentes fueron los siguientes:

	Sujeto 1	*Sujeto 2*	*Sujeto 3*
Disposición A	8	14	10
Disposición B	11	15	11
Disposición C	5	11	6
Disposición D	12	18	15

Utilizar el análisis de la varianza de dos direcciones adecuado, para contrastar si hay diferencias significativas entre las diversas disposiciones.

2. Supongamos que, en el experimento del problema 3 de la página 252 la primera medida para cada marca se obtuvo con un Chevrolet, la segunda con un Ford, la tercera con un Plymouth, y la cuarta con un Rambler. Analizar los datos como una clasificación de dos direcciones y contrastar si hay diferencias entre las cubiertas, con un nivel de significación de 0.05.
3. La tabla siguiente da la productividad (medida por el número de piezas aceptables por trabajador y por hora) de tres turnos en una fábrica durante un periodo de una semana.

	Lun.	*Mar.*	*Miér.*	*Jue.*	*Vier.*
Turno primero	5.6	6.1	5.9	6.5	5.8
Turno segundo	4.8	6.5	6.0	5.8	5.0
Turno tercero	3.9	5.8	4.2	5.9	5.1

¿Hay diferencias significativas de turno a turno o de día a día?

4. Los siguientes son los números de piezas defectuosas producidas por cuatro trabajadores que operan, por turno, en tres máquinas diferentes:

		Trabajador			
		B_1	B_2	B_3	B_4
Máquina	A_1	22	23	30	21
	A_2	14	15	22	15
	A_3	20	18	27	22

considerando las máquinas como "tratamientos" y los trabajadores como "bloques", analizar los datos como una clasificación de dos direcciones. Estimar también cuántas piezas defectuosas se puede esperar que haga un trabajador operando la máquina A_2.

5. En el ejercicio 4 de la página 252, supongamos que los datos en cada una de las tres columnas se obtuvieron de precipitadores diferentes. Repetir el análisis de la varianza, tratando el experimento como una clasificación de dos direcciones, y observar qué cambios se presentan en el error cuadrado medio.
6. Para hacer resaltar la importancia de la distribución en bloques, volver a analizar los datos de la página 257 pertenecientes a los proyectos de cascos de lanchas como una clasificación de una sola dirección.
7. Si, en una clasificación de dos direcciones, se repite el experimento completo r veces, el modelo se transforma en

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \rho_k + \epsilon_{ijk}$$

para $i = 1, 2, \ldots a$, $j = 1, 2, \ldots b$, y $k = 1, 2, \ldots r$, siendo la suma de las α, la suma de las β y la suma de las ρ igual a cero. Las ϵ_{ijk} son de nuevo valores de variables aleatorias indepedientes con distribuciones normales de medias cero y variancía común σ^2.

(a) Escribir (pero no probar) una identidad análoga a la del teorema 13.2, que subdivida la suma total de cuadrados en componentes atribuibles a tratamientos, bloques, réplicas y error.

(b) Generalizar las fórmulas de cálculo de la página 256, de tal forma que se puedan aplicar a un diseño de bloques al azar con réplicas. Nótese que el divisor en cada caso es igual al número de observaciones en los totales respectivos.

(c) Si el número de grados de libertad para la suma de cuadrados de réplicas es $r - 1$, ¿cuántos grados de libertad hay para la suma de cuadrados de error?

8. Supongamos, en el ejercicio 3, que las medidas de productividad se repitieron en una segunda semana con los resultados adicionales siguientes:

	Segunda semana				
	Lun.	*Mar.*	*Miér.*	*Jue.*	*Vier.*
Turno primero	5.4	6.5	5.9	7.1	6.2
Turno segundo	4.8	6.7	5.8	6.2	5.9
Turno tercero	4.3	6.4	4.6	5.9	5.8

utilizar la teoría desarrollada en el ejercicio 7 para analizar los resultados combinados de las dos semanas como una clasificación de dos direcciones con réplica.

9. Como se indicó en la página 258, dos métodos para aumentar el tamaño de una clasificación de dos direcciones son (a) doblar el número de bloques, y (b) hacer una réplica del experimento completo. Discutir y comparar la ganancia en grados de libertad para la suma de cuadrados de error por los dos métodos.

10. Demostrar que, si $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$, la media de las μ_{ij} (sumadas respecto de j) es igual a $\mu + \alpha_i$, y la media de las μ_{ij} sumadas respecto de i y j es igual a μ, de esto se deduce que $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$.
11. Verificar que las fórmulas de cálculo de SST, $SS(Tr)$, $SS(Bl)$ y SSE, dadas en la página 256, son equivalentes a los términos correspondientes de la identidad del teorema 13.2.
12. Verificar los resultados del test de Duncan para la comparación de los cuatro cascos de lancha, dada en la página 261.
13. Utilizar el test de Duncan con un nivel de $\alpha = 0.05$ para analizar las medias obtenidas para las cuatro marcas de cubiertas del ejercicio 3 de la página 252.
14. Utilizar el test de Duncan, con un nivel de $\alpha = 0.05$, para comparar los efectos de las pinturas fosforescentes del ejercicio 7 de la página 252.
15. Utilizar el test de Duncan, con un nivel de $\alpha = 0.01$, para comparar las cuatro disposiciones de instrumentos del ejercicio 1. ¿Qué disposición o disposiciones son mejores?
16. Utilizar el test del recorrido múltiple de Duncan, con un nivel de $\alpha = 0.01$ para analizar:

(a) Las medias obtenidas para las tres máquinas.

(b) Las medias obtenidas para los cuatro trabajadores del ejercicio 4.

13.5 Otros diseños de experimentos

Los diseños de bloques al azar, o las clasificaciones en dos direcciones, son apropiados cuando una fuente extraña de variabilidad se debe eliminar al comparar un conjunto de medias de muestras. Una característica importante de esa clase de diseños es su *equilibrio,* logrado dando el mismo número de observaciones, para cada tratamiento en cada bloque. (En este sentido, véase también el comentario de la página 246, en el que indicamos que las diferencias debidas a bloques no afectarían las medias obtenidas para los diferentes tratamientos.) La misma clase de equilibrio se puede obtener en tipos más complicados de diseños cuando se desea eliminar el efecto de varias fuentes de variabilidad extrañas. En esta sección introduciremos dos diseños equilibrados más generales, el diseño de cuadro latino y el diseño de cuadrado grecolatino, que se utilizan para eliminar los efectos de dos y tres fuentes extrañas de variabilidad, respectivamente.

Para introducir el diseño de cuadrado latino, supongamos que se desean comparar tres tratamientos A, B y C, en la presencia de otras dos fuentes de variabilidad. Por ejemplo, los tres tratamientos pueden ser tres métodos para soldar terminales eléctricas de cobre y las dos fuentes extrañas de variabilidad pueden ser (1) diferentes operadores haciendo la soldadura, y (2) el empleo de fundentes diferentes. Si tres operadores emplean tres fundentes, el experimento se puede presentar en el siguiente esquema:

	Fundente 1	*Fundente 2*	*Fundente 3*
Operador 1	*A*	*B*	*C*
Operador 2	*C*	*A*	*B*
Operador 3	*B*	*C*	*A*

En este caso, cada método de soldadura se aplica una vez por cada operador, junto con cada fundente y, si hay efectos sistemáticos debidos a diferencias entre operadores o entre fundentes, estos efectos se presentan igualmente en cada tratamiento, es decir, para cada método de soldadura.

Una presentación experimental, tal como la descrita anteriormente, se llama *cuadrado latino*. Un cuadrado latino de $n \times n$ es una disposición en forma de cuadrado de n letras distintas, en el que cada letra aparece una vez y sólo una en

4 × 4

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

5 × 5

A	B	C	D	E
B	A	E	C	D
C	D	A	E	B
D	E	B	A	C
E	C	D	B	A

Fig. 13.2 Cuadrados latinos

cada fila y en cada columna. En la figura 13.2 se ven ejemplos de cuadrados latinos con $n = 4$ y $n = 5$, y se pueden obtener ejemplos mayores en el libro de W. G. Cochran y G. M. Cox, citado en la bibliografía. Nótese que un cuadrado latino incluye n tratamientos, y es necesario incluir n^2 observaciones, correspondiendo n a cada tratamiento.

Como veremos en la página 286, un experimento de cuadrado latino sin réplicas da solamente $(n-1)(n-2)$ grados de libertad para estimar el error experimental. Por lo tanto, tales experimentos se hacen raramente sin *réplica* si n es pequeña, esto es, sin repetir el cuadrado latino completo varias veces. Si hay un total de r réplicas, el análisis de los datos presupone el siguiente modelo, en el que $y_{ij(k)l}$ es la observación de la i-ésima fila y la j-ésima columna de la l-ésima réplica, y el subíndice k, entre paréntesis, indica que pertenece al k-ésimo tratamiento:

$$y_{ij(k)l} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \rho_l + \epsilon_{ij(k)l}$$

para $i, j, k = 1, 2, \ldots n$, y $l = 1, 2, \ldots r$, con las restricciones de que:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0, \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 0, \sum_{k=1}^{n} \gamma_k = 0, \text{ y } \sum_{l=1}^{r} \rho_l = 0.$$

En este caso μ es la media mayor, α_i es el *efecto de la i-ésima fila*, β_j es el *efecto de la j-ésima columna*, γ_k es el *efecto del k-ésimo tratamiento*, ρ_l es el *efecto de la l-ésima réplica*, y las $\epsilon_{ij(k)l}$ son valores de variables aleatorias independientes con distribución normal de medias cero y varianza común σ^2. Nótese que, por "efectos de fila" y "efectos de columna", entendemos los efectos de las dos variables extrañas, y que incluimos los efectos de las réplicas, puesto que, como veremos, las réplicas pueden introducir una tercera variable extraña. Nótese, también, que el subíndice k se encuentra entre paréntesis en $y_{ij(k)l}$, porque, para un diseño de cuadrado latino dado, k queda determinado automáticamente cuando se conocen i y j.

La hipótesis principal que queremos contrastar es la hipótesis nula $\gamma_k = 0$ para todas las k, es decir, la hipótesis nula de que no hay diferencia en la efectividad de los n tratamientos. Sin embargo, podemos contrastar también si la distribución de "bloqueado cruzado" del cuadrado latino es efectiva; es decir, podemos contrastar la hipótesis nula $\alpha_i = 0$ para todas las i y $\beta_j = 0$ para todas las j (contra alternativas convenientes) para ver si las dos variables extrañas tienen algún efecto sobre los fenómenos considerados. Además, podemos contrastar la hipótesis nula $\rho_l = 0$ para todas las l frente a la alternativa de que no todas las ρ_l sean igual a cero, y este test para los *efectos de la réplica* puede ser importante si las partes del experimento que representan los cuadrados latinos individuales se realizaran en diferentes días por técnicos diferentes, a temperaturas diferentes, etc.

Las sumas de cuadrados necesarias para desarrollar estos tests se obtienen generalmente por medio de las fórmulas abreviadas siguientes, en las que $T_{i..}$ es el total de las $r \cdot n$ observaciones en toda la fila i, $T_{.j.}$ es el total de las $r \cdot n$ observaciones en toda la columna j, $T_{..l}$ es el total de las n^2 obsrevaciones en la réplica l, $T_{(k)}$ es el total de todas las $r \cdot n$ observaciones pertenecientes al k-ésimo tratamiento y $T_{...}$ es el total mayor de todas las $r \cdot n^2$ observaciones:

$$C = \frac{(T_{...})^2}{r \cdot n^2}$$

$$SS(Tr) = \frac{1}{r \cdot n} \sum_{k=1}^{n} T_{(k)}^2 - C$$

$$SSR = \frac{1}{r \cdot n} \sum_{i=1}^{n} T_{i..}^2 - C \qquad \textit{(efecto de fila)}$$

$$SSC = \frac{1}{r \cdot n} \sum_{j=1}^{n} T_{.j.}^2 - C \qquad \textit{(efectos de columna)}$$

$$SS(Rep) = \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^{r} T_{..l}^2 - C \qquad \textit{(efectos de la réplica)}$$

$$SST = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} y_{ij(k)l}^2 - C$$

$$SSE = SST - SS(Tr) - SSR - SSC - SS(R$$

Nótese que, una vez más, cada divisor es igual al número de observaciones en los totales cuadrados correspondientes. Finalmente, los resultados del análisis quedan como se muestra en la siguiente tabla de análisis de la varianza:

Origen de variación	Grado de libertad	Suma de cuadrados	Cudrado medio	F
Tratamiento	$n-1$	$SS(Tr)$	$MS(Tr) = \frac{SS(Tr)}{n-1}$	$\frac{MS(Tr)}{MSE}$
Filas	$n-1$	SSR	$MSR = \frac{SSR}{n-1}$	$\frac{MSR}{MSE}$
Columnas	$n-1$	SSC	$MSC = \frac{SSC}{n-1}$	$\frac{MSC}{MSE}$
Réplicas	$r-1$	$SS(Rep)$	$MS(Rep) = \frac{SS(Rep)}{r-1}$	$\frac{MS(Rep)}{MSE}$
Error	$(n-1)(rn+r-3)$	SSE	$MSE = \frac{SSE}{(n-1)(rn+r-3)}$	
Total	rn^2-1	SST		

Como en los casos anteriores, los grados de libertad para la suma total de cuadrados es igual a la *suma* de los grados de libertad de las componentes individuales; luego, los grados de libertad para error se encuentran, generalmente, al final por substracción.

Para ilustrar el análisis de un experimento de cuadrado latino con réplica, supongamos que se hacen dos réplicas del experimento de soldadura, empleando las disposiciones siguientes:

	Réplica I Fundente 1	2	3	Réplica II Fundente 1	2	3
Operador 1	A	B	C	C	B	A
Operador 2	C	A	B	A	C	B
Operador 3	B	C	A	B	A	C

Los resultados, mostrando la fuerza de tensión en libras necesaria para separar las terminales soldadas, fueron los siguientes:

Réplica I			Réplica II		
14.0	16.5	11.0	10.0	16.5	13.0
9.5	17.0	15.0	12.0	12.0	14.0
11.0	12.0	13.5	13.5	18.0	11.5

El total para el primer tratamiento (método A) es

$$14.0 + 17.0 + 13.5 + 13.0 + 12.0 + 18.0 = 87.5$$

mientras que los totales para los otros dos tratamientos (métodos B y C) son

$$16.5 + 15.0 + 11.0 + 16.5 + 14.0 + 13.5 = 86.5$$

y

$$11.0 + 9.5 + 12.0 + 10.0 + 12.0 + 11.5 = 66.0$$

respectivamente. Además, los totales para las tres filas son 81.0, 79.5 y 79.5; los de las tres columnas son 70.0, 92.0 y 78.0; los totales de las dos réplicas son 119.5 y 120.5, y el total mayor es 240. Entonces, obtenemos

$$C = \frac{(240)^2}{18} = 3200.0$$

$$SS(Tr) = \frac{1}{6}[(87.5)^2 + (86.5)^2 + (66.0)^2] - 3200.0 = 49.1$$

$$SSR = \frac{1}{6}[(81.0)^2 + (79.5)^2 + (79.5)^2] - 3200.0 = 0.2$$

$$SSC = \frac{1}{6}[(70.0)^2 + (92.0)^2 + (78.0)^2] - 3200.0 = 41.3$$

$$SS(Rep) = \frac{1}{9}[(119.5)^2 + (120.5)^2] - 3200.0 = 0.1$$

$$SST = (14.0)^2 + (16.5)^2 + \ldots + (11.5)^2 - 3200.0 = 104.5$$

$$SSE = 104.5 - 49.1 - 41.3 - 0.2 - 0.1 = 13.8$$

y los resultados se muestran en la siguiente tabla de análisis de la varianza:

Origen de variación	*Grado de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Cuadrado medio*	*F*
Método	2	49.1	24.6	17.6
Operador	2	0.2	0.1	0.1
Fundente	2	41.3	20.6	14.7
Réplica	1	0.1	0.1	0.1
Error	10	13.8	1.4	
Total	17	104.5		

Como las razones F para los métodos y los fundentes exceden ambas, a 7.56, valor de $F_{.01}$ para 2 y 10 grados de libertad, las diferencias, tanto las debidas a los métodos como las debidas a los fundentes, son significativas. Como se puede ver por inspección, las diferencias debidas a las otras dos fuentes de variación (operadores y réplicas) no son significativas. Para dar un paso más, la prueba de recorrido múltiple de Duncan de la sección 13.4, nos da el siguiente *esquema de decisión* con un nivel de significación de 0.01:

	Método C	*Método B*	*Método A*
Media	11.0	14.4	14.6

Entonces, llegamos a la conclusión de que el método C nos da, definitivamente, soldaduras más débiles que los métodos A y B.

La eliminación de tres fuentes extrañas de variabilidad se puede hacer por medio de un diseño denominado "cuadrado greco-latino". Este diseño es una disposición en cuadro de n letras latinas y n letras griegas, en el que tanto las letras latinas como las griegas forman, cada una, un cuadrado latino; además, cada letra latina aparece una vez y sólo una junto con cada letra griega. El siguiente es un ejemplo de un cuadrado greco-latino de 4 × 4:

$A\alpha$	$B\beta$	$C\gamma$	$D\delta$
$B\delta$	$A\gamma$	$D\beta$	$C\alpha$
$C\beta$	$D\alpha$	$A\delta$	$B\gamma$
$D\gamma$	$C\delta$	$B\alpha$	$A\beta$

La construcción de cuadrados greco-latinos, llamados también cuadrados latinos *ortogonales*, plantea varios problemas matemáticos interesantes, algunos de los cuales se mencionan en el libro de H. B. Mann, citado en la bibliografía.

Para dar un ejemplo en el que es conveniente utilizar un cuadrado greco-latino, supongamos que, en el ejemplo de las soldaduras, se considera la temperatura de soldadura como una fuente adicional de variabilidad. Si se emplean tres soldaduras a temperaturas diferentes α, β y γ, junto con los tres métodos, los tres operadores (filas) y los tres fundentes (columnas), se puede presentar una réplica de un experimento de cuadrado greco-latino, en la forma siguiente:

	Fundente 1	*Fundente 2*	*Fundente 3*
Operador 1	$A\alpha$	$B\gamma$	$C\beta$
Operador 2	$C\gamma$	$A\beta$	$B\alpha$
Operador 3	$B\beta$	$C\alpha$	$A\gamma$

Entonces, el método A se empleará con el operador 1, usando el fundente 1 y la temperatura α; con el operador 2, el fundente 2 y la temperatura β: y con el operador 3, el fundente 3 y la temperatura γ. Similarmente, el método B se usará con el operador 1, el fundente 2 y la temperatura γ, etc.

En un cuadrado greco-latino, cada variable (representada por filas, columnas, letras latinas, o letras griegas) está "igualmente distribuida" sobre las otras variables. Luego, al comparar las medias obtenidas por una variable, todos los efectos de las otras variables quedan promediados. El análisis de un cuadrado greco-latino es semejante al de un cuadrado latino, con la adición de una fuente extra de variabilidad correspondiente a las letras griegas.

Existe una gran variedad de diseños experimentales además de los discutidos en este capítulo que son útiles para diversos fines. Entre los más corrientemente utilizados están los *diseños de bloques incompletos*, que se caracterizan por que cada tratamiento no está representado en cada bloque. Si el número de tratamientos investigados en un experimento es grande, sucede frecuentemente que es imposible encontrar bloques homogéneos, de tal forma que cada uno de los tratamientos se pueda acomodar en un bloque. Por ejemplo, si se van a comparar n pinturas, aplicando cada una a una hoja de acero y después calentándola en un horno, será imposible poner todas las hojas en el horno al mismo tiempo. En consecuencia, será necesario utilizar un proyecto experimental en el que $k < n$ tratamientos (pinturas) se incluyan en cada bloque (calentamiento en el horno). Una forma de lograr esto, es asignar los tratamientos a cada hornada en tal modo que cada tratamiento se presente junto con cada otro tratamiento en el mismo número de bloques. Esta clase de proyecto se llama *proyecto de bloques incompletos equilibrados,* y podemos utilizar el siguiente esquema para $n = 4$ y $k = 2$:

Hornada	*Pinturas*
1	1 y 2
2	3 y 4
3	1 y 3
4	2 y 4
5	1 y 4
6	2 y 3

Los proyectos de bloques incompletos equilibrados tienen la ventaja de que se pueden hacer con igual precisión las comparaciones entre dos cualesquiera de los tratamientos.

Como los proyectos de bloques incompletos equilibrados requieren demasiados bloques, se han desarrollado muchos otros modelos. La mayoría de estos diseños experimentales surgieron para cubrir las necesidades específicas de algún investigador, especialmente en el campo de la agricultura. Como hemos indicado anteriormente, el lenguaje empleado en estos diseños, incluyendo términos como "tratamiento", "bloques", etc., provienen de la agricultura. Sólo en los años recientes se han aplicado estos métodos a la experimentación industrial y de ingeniería y, con una aplicación más amplia, es de esperarse que se desarrollen muchos nuevos diseños para cubrir las necesidades de estos campos.

EJERCICIOS

1. Se empleó un cuadrado latino con tres réplicas para comparar tres combustibles experimentales. Los números representan los minutos que los motores E_1, E_2 y E_3 estuvieron trabajando, operados por los mecánicos M_1, M_2 y M_3, teniendo 1 galón de los combustibles A, B o C. Las réplicas pertenecen a duplicados del experimento completo hecho (con orden al azar) en tres días consecutivos.

	E_1	E_2	E_3
M_1	A 16	B 21	C 14
M_2	B 25	C 18	A 23
M_3	C 16	A 21	B 26

	E_1	E_2	E_3
M_1	A 17	B 23	C 13
M_2	B 28	C 19	A 21
M_3	C 12	A 20	B 25

	E_1	E_2	E_3
M_1	A 15	B 20	C 14
M_2	B 26	C 16	A 24
M_3	C 19	A 24	B 28

Analizar estos datos y, si la hipótesis nula referente al efecto de los combustibles se puede rechazar, aplicar el test del recorrido múltiple de Duncan para analizar las medias correspondientes.

2. En el problema en el que se distribuyen muestras de recubrimiento de estaño entre cuatro laboratorios (Sección 13.1), supongamos que se encuentran diferencias sistemáticas en el peso del recubrimiento, tanto en la dirección del laminado como en la transversal. Para eliminar esas dos fuentes de variabilidad, cada una de dos láminas de

hojalata se divide en 16 partes, que representan cuatro posiciones a lo largo y cuatro a lo ancho de la dirección de laminado. Luego, se mandan cuatro muestras de cada lámina a cada uno de los laboratorios A, B, C y D, como se muestra, y los pesos de recubrimiento determinados son:

Réplica I

B .29	A .25	C .18	D .28
D .28	B .18	A .21	C .25
C .28	D .23	B .20	A .28
A .30	C .19	D .24	B .25

Dirección de laminado ↓

Réplica II

C .20	A .24	D .20	B .27
B .28	C .19	A .22	D .28
D .34	B .23	C .21	A .28
A .32	D .22	B .16	C .27

A partir de estos datos, determinar si los laboratorios están obteniendo resultados correctos. Determinar también si hay diferencias en los pesos reales de recubrimiento a lo largo y a lo ancho de la dirección de laminado. (Emplear un nivel de significación de 0.05.)

3. Las siguientes son las medidas de la resistencia a la rotura (en onzas) de los hilos de lino A, B, C, D y E, obtenidos por 5 técnicos de laboratorios en 5 días diferentes:

		Técnicos T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
Días	D_1	A 30.2	B 24.3	C 19.6	D 21.5	E 17.3
	D_2	B 21.4	C 27.1	D 23.4	E 24.5	A 31.0
	D_3	C 20.7	D 26.5	E 25.2	A 29.1	B 20.6
	D_4	D 20.7	E 24.7	A 32.3	B 25.2	C 22.2
	D_5	E 20.6	A 35.8	B 23.9	C 23.6	D 21.5

Analizar este experimento de cuadrado latino y aplicar la prueba del recorrido múltiple de Duncan, con $\alpha = 0.01$, a las medias de las resistencias a la rotura de los cinco hilos de lino.

4. Un fabricante de telas desea determinar cuál, de cuatro agujas diferentes, es mejor para su máquina de coser. Las fuentes de variabilidad que deberán ser eliminadas para hacer esta comparación son: la máquina empleada actualmente, el operador y el tipo de hilo. Utilizando el diseño de cuadrado greco-latino mostrado a continuación (las filas representan operadores; las columnas representan máquinas; las letras latinas, agujas; y las letras griegas, tipos de hilo), el fabricante anotó los números de prendas rechazadas al cabo de dos días, con los siguientes resultados:

Primer día

$C\alpha$ 42	$A\gamma$ 15	$B\delta$ 6	$D\beta$ 24
[illegible]	$B\beta$ 8	$A\alpha$ 24	$C\gamma$ 34
$B\gamma$ 5	$D\alpha$ 33	$C\beta$ 36	$A\delta$ 11
$A\beta$ 13	$C\delta$ 30	$D\gamma$ 21	$B\alpha$ 12

Segundo día

$D\gamma$ 18	$B\alpha$ 16	$A\beta$ 9	$C\delta$ 27
$C\beta$ 29	$A\delta$ 15	$B\gamma$ 7	$D\alpha$ 30
$A\alpha$ 21	$C\gamma$ 38	$D\delta$ 23	$B\beta$ 6
$B\delta$ 4	$D\beta$ 18	$C\alpha$ 37	$A\gamma$ 21

Usando un nivel de significado de 0.05, determinar si hay alguna diferencia entre las agujas. Determinar también si hay diferencias significativas entre los operarios, las máquinas y los tipos de hilos.

5. Para estudiar la eficacia de diferentes clases de envases, un fabricante de desayunos hizo el siguiente experimento de cuadrado greco-latino, donde A, B, C, D y E representan tipos diferentes de envases, α, β, γ, δ, y ϵ representan (en orden creciente de magnitud) las cantidades de dinero gastadas en anuncios del producto el día anterior al experimento, y las filas representan localizaciones diferentes en supermercados proyectados idénticamente, los cuales, a su vez, están representados por las cinco columnas. Los números representan las ventas de desayunos de 9 A.M. a 11 A.M.

$A\alpha$ 50	$B\beta$ 51	$C\gamma$ 53	$D\delta$ 55	$E\epsilon$ 56
$B\gamma$ 51	$C\delta$ 50	$D\epsilon$ 50	$E\alpha$ 45	$A\beta$ 49
$C\epsilon$ 45	$D\alpha$ 37	$E\beta$ 39	$A\gamma$ 40	$B\delta$ 41
$D\beta$ 39	$E\gamma$ 40	$A\delta$ 41	$B\epsilon$ 44	$C\alpha$ 37
$E\delta$ 43	$A\epsilon$ 47	$B\alpha$ 41	$C\beta$ 42	$D\gamma$ 42

Analizar este experimento.

6. La siguiente es un modo sencillo de construir cuadrados greco-latinos cuyo lado es un número primo impar p. Comenzamos por construir *dos* cuadrados latinos. En el primero, ponemos el número $i + j - 2$ en la casilla correspondiente a la i-ésima fila y la j-ésima columna, restando p si una entrada excede de $p - 1$. En el segundo cuadrado ponemos el número $2i + j - 3$ en la casilla correspondiente a la i-ésima fila y la j-ésima columna, restando p ó $2p$, de tal forma que ninguna entrada exceda de $p - 1$. Si entonces substituimos por $A, B, C, \ldots$ los números $0, 1, \ldots p - 1$ en el primer cuadrado, y por $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ los números $0, 1, \ldots p - 1$ en el segundo cuadrado, los cuadrados superpuestos constituyen un cuadrado greco-latino.
   (a) Verificar que este método se utilizó para construir el cuadrado greco-latino del problema 5.

   (b) Utilizar este método para construir un cuadrado greco-latino de 3×3 y otro de 7×7.
   (c) Comprobar que este método da un cuadrado greco-latino para cualquier número primo impar p. [Sugerencia: probar primero que cada uno de los dos cuadrados es un cuadrado latino y probar después que cada par de letras latina y griega se presenta una vez y sólo una.]

DISENO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS

ANALISIS DE VARIANCIA
-MODELO CON UN SOLO FACTOR-

M. en I. Augusto Villarreal Aranda

17 MAYO, 1985

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_x)^2 = \frac{\text{Suma de cuadrados}}{N} = \frac{SS}{N} \quad ; \quad \text{EFECTO POBLACION} = EP = \mu_P - \mu_T$$

CASO 1

POBLACIONES

A	B	C
1	1	1
2	2	2
3	3	3

$$\mu_A = \mu_B = \mu_C = 2$$

$$\mu_T = \frac{3(\mu_A)+3(\mu_B)+3(\mu_C)}{9} = 2$$

$$\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma_C^2 = \frac{(1-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2}{3} = 2/3$$

$$\sigma^2_{DENTRO} = \frac{\sum N_i\sigma_i^2}{\sum N_i} = \frac{3(2/3)+3(2/3)+3(2/3)}{9} = 6/9 = 2/3$$

$$\sigma^2_{ENTRE} = \frac{3(2-2)^2+3(2-2)^2+3(2-2)^2}{9} = 0$$

$$\sigma^2_{TOTAL} = \frac{3(1-2)^2+3(2-2)^2+3(3-2)^2}{9} = 6/9 = 2/3$$

$$EP_A = \mu_A - \mu_T = 2-2=0 \; ; \; EP_B = \mu_B-\mu_T = 2-2=0 \; ; \; EP_C = 2-2=0$$

$$\sum_{i=1}^{3} EP_i = 0 \; ; \; \sigma^2_{TOTAL} = \sigma^2_{ENTRE} + \sigma^2_{DENTRO} = 0 + 2/3 = 2/3$$

$$SS_{TOTAL} = 2 = SS_{ENTRE} + SS_{DENTRO} = 0+2 = 2$$

CASO 2

POBLACIONES

A	B	C
2	1	1
3	2	2
4	3	3

$$\mu_A = 3$$

$$\mu_B = \mu_C = 2$$

$$\mu_T = \frac{3(3)+3(2)+3(2)}{9} = 7/3$$

$$\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma_C^2 = \frac{(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2}{3} = 2/3$$

$$\sigma^2_{DENTRO} = \frac{3(2/3)+3(2/3)+3(2/3)}{9} = 6/9 = 2/3$$

$$\sigma^2_{ENTRE} = \frac{3(9/3-7/3)^2+3(6/3-7/3)^2+3(6/3-7/3)^2}{9} = 2/9$$

$$\sigma^2_{TOTAL} = \frac{2(3/3-7/3)^2+3(6/3-7/3)^2+3(9/3-7/3)^2+(12/3-7/3)^2}{9} = 8/9$$

$$EP_A = \mu_A-\mu_T = 3-7/3 = 2/3 \; ; \; EP_B = \mu_B - \mu_T = 2-7/3 = -1/3 \; ; \; EP_C = \mu_C-\mu_T = 2-7/3 = -1/3$$

$$\sum_{i=1}^{3} EP_i = 2/3-1/3-1/3 = 0 \; ; \; \sigma^2_{TOTAL} = \sigma^2_{ENTRE} + \sigma^2_{DENTRO} = 2/9 + 6/9 = 8/9$$

$$SS_{TOTAL} = 8 = SS_{ENTRE} + SS_{DENTRO} = 2+6 = 8$$

CONCLUSIONES

1. AUSENCIA ABSOLUTA DE EFECTOS = IGUALDAD ABSOLUTA DE POBLACIONES *
2. $\sigma^2_{TOTAL} = \sigma^2_{ENTRE} + \sigma^2_{DENTRO}$
3. $SS_{TOTAL} = SS_{ENTRE} + SS_{DENTRO}$ *
4. $SS_{ENTRE} = SS_{EFECTOS}$ *
5. $\sum_{i}^{\text{No. POBL.}} \text{EFECTO } i = 0$ *

A. MODELO CON UN SOLO FACTOR ANALISIS DE VARIANCIA

Supóngase que un experimentador está interesado en comparar la resistencia de cierta fibra elaborada a través de cinco métodos diferentes de producción. Cada método produce fibra con una media de resistencia particular, por lo que el experimentador decide probar estadísticamente la igualdad de las cinco medias.

Aparentemente el problema podría resolverse realizando la prueba t correspondiente para cada pareja posible de diferencia de medias, es decir, realizando $5!/2!\times 3!$ pruebas de diferencia de medias al nivel de significancia α seleccionado. Habiendo entonces 10 pruebas por realizar, y suponiendo que $1-\alpha = 0.95$, la probabilidad de aceptar correctamente la hipótesis nula para todas las pruebas previstas es $(0.95)^{10} = 0.60$, siempre que dichas pruebas sean independientes.

De acuerdo con lo anterior, si el valor de α inicial era de 0.05, al término de las 10 pruebas de diferencias de medias dicha cantidad habría quedado como 0.40, incrementando en consecuencia el error de tipo I.

Se puede concluir entonces que el procedimiento anterior es inadecuado para probar la igualdad de varias medias puesto que modifica los valores de error α supuestos inicialmente.

Si para el ejemplo anterior se supone que los cinco métodos diferentes de producción corresponden a cinco niveles distintos (o tratamientos distintos) del factor "método de producción" el problema de probar estadísticamente la igualdad de las medias se puede resolver empleando la técnica que en inferencia estadística se conoce como análisis de variancia sin modificar las suposiciones que se hagan acerca del valor de α inicialmente. Dicha técnica y sus implicaciones más importantes se presentan a continuación.

A.1 EFECTOS FIJOS. MODELO LINEAL

Supóngase que se tienen K tratamientos o niveles distintos de un factor que se desean comparar. Si el experimento de aplicación de los K tratamientos se realiza completamente al azar sobre las unidades experimentales, el diseño resultante se llama completamente aleatorizado, y los valores observados de respuesta para cada tratamiento corresponderán a valores de una variable aleatoria. Dichos valores o datos y_{ij} pueden presentarse en una tabla como la siguiente:

OBSERVACIONES

TRATAMIENTOS					
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1n}	$\downarrow i=1,2,\ldots,K$
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2n}	$\rightarrow j=1,2,\ldots,n$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
K	y_{K1}	y_{K2}	...	y_{Kn}	

En donde, como ejemplo, y_{21} representa el primer resultado u observación ($j=1$) tomado bajo el tratamiento dos ($i=2$). Se observa que en este caso el número de datos para cada tratamiento es el mismo (n).

Si en este caso los K tratamientos o niveles del factor fueron escogidos específicamente por el experimentador, las conclusiones a que se llegue después de realizada la prueba de hipótesis que se describirá más adelante, no podrán extenderse a otros tratamientos del mismo factor no considerados en forma explícita en el análisis. Por ello, al modelo que aquí se presenta se le llama de efectos fijos, conociéndosele también como modelo paramétrico o modelo I.

El modelo que describirá los valores de los datos u observaciones es el siguiente:

$$y_{ij} = \mu + \gamma_i + e_{ij} \quad ; \quad \begin{array}{l} i=1,2,\ldots,K \\ j=1,2,\ldots,n \end{array}$$

En el modelo lineal anterior y_{ij} representa la j-ésima observación tomada para el i-ésimo tratamiento, y μ es un parámetro común para todos los tratamientos, tal que

$$\mu = \frac{\sum_i n\mu_i}{\sum_i n} = \frac{n\sum_i \mu_i}{N} = \frac{n\sum_i \mu_i}{Kn} = \frac{\sum_i \mu_i}{K}$$

Siendo $\sum_i n = Kn = N$, el número total de observaciones tomadas para los K tratamientos, o tamaño de la muestra global, y μ_i la media particular del tratamiento i.

El término γ_i representa en el modelo lineal un parámetro propio únicamente del i-ésimo tratamiento, que se denomina efecto del tratamiento i, definido como la desviación de la media μ_i de dicho tratamiento respecto de la media común, μ, es decir,

$$\gamma_i = \mu_i - \mu \qquad ; \quad i = 1, 2, \ldots, K$$

tal que

$$\sum_i \gamma_i = \sum_i (\mu_i - \mu) = \sum_i \mu_i - \sum_i \mu = K\mu - K\mu = 0$$

Si no existe efecto asociado con un tratamiento i entonces $\gamma_i = 0$. Si no existen efectos provocados por cualquiera de los tratamientos entonces

$$\gamma_i = 0 \qquad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, K$$

y, siendo $\mu_i = \mu + \gamma_i$, se puede concluir que

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \cdots = \mu_K = \mu$$

Lo anterior quiere decir que la ausencia absoluta de efectos debidos a los tratamientos es equivalente a la igualdad absoluta de todas las medias de dichos tratamientos.

Finalmente el término e_{ij} en el modelo lineal representa la componente de error aleatorio que en general posee todo valor y_{ij}. Dicho error e_{ij} es una variable aleatoria con esperanza nula puesto que para algún tratamiento fijo i se obtendría

$$E(y_{ij}) = \mu_i = E(\mu + \gamma_i + e_{ij}) = E(\mu) + E(\gamma_i) + E(e_{ij})$$
$$= \mu + \gamma_i + E(e_{ij}) = \mu + \mu_i - \mu + E(e_{ij})$$
$$\therefore \; E(e_{ij}) = 0$$

A.2 Suposiciones para el modelo

Para poder realizar la prueba de hipótesis sobre igualdad de medias que se propondrá más adelante es necesario hacer las siguientes suposiciones:

A.2.1 El error aleatorio e_{ij} representa una variable aleatoria normal con parámetros $E(e_{ij}) = 0$ y $VAR(e_{ij}) = \sigma_e^2$.

A.2.2. El error aleatorio e_{ij} es independiente de cualquier otro error e_{ij}.

A.2.3. La varianza σ_e^2 es la misma para cualquier tratamiento i.

Equivalentemente, la primera suposición implica que y_{ij} es una variable aleatoria con distribución normal y parámetros $E(y_{ij}) = \mu$ y $VAR(y_{ij}) = \sigma_Y^2$, es decir,

$$VAR(y_{ij}) = VAR(\mu + \gamma_i + e_{ij}) = VAR(\mu) + VAR(\gamma_i) + VAR(e_{ij})$$
$$\therefore \; \sigma_Y^2 = 0 + \sigma_{\gamma_i}^2 + \sigma_e^2$$

De acuerdo con lo anterior, si $\gamma_i = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces $\sigma_{\gamma_i}^2 = 0$ y $\sigma_Y^2 = \sigma_e^2$.

A.3 Estimadores de μ, μ_i, γ_i y e_{ij}

Ya que en la práctica se desconocen los valores de la media común, la media de cada tratamiento, el efecto de cada tratamiento y la componente de error, ellos pueden estimarse a través de los valores de datos que se presentan en la muestra de resultados obtenida para los k tratamientos.

...nsidérese que $y_{i.}$ representa la suma total de ...s de las observaciones obtenidas para el iésimo ...miento, y que $\bar{y}_{i.}$ representa el promedio de dichos ...os. De manera semejante, $y_{..}$ representa el total de valores de todas las observaciones, y el promedio global correspondiente. Entonces,

$$y_{i.} = \sum_j y_{ij}$$

$$\bar{y}_{i.} = \frac{\sum_j y_{ij}}{n} = \frac{y_{i.}}{n} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, k \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

$$y_{..} = \sum_i \sum_j y_{ij}$$

$$\bar{y}_{..} = \frac{\sum_i \sum_j y_{ij}}{kn} = \frac{\sum_i \sum_j y_{ij}}{N} = \frac{y_{..}}{N}$$

donde $N = kn$ es el número total de observaciones, tamaño de la muestra global, y se observa que notación de "subíndice punto" implica la suma ...e los valores del subíndice al que remplaza el ...unto.

De acuerdo con lo anterior, para un tratamiento i

$$E(\bar{y}_{i.}) = E\left(\frac{\sum_j y_{ij}}{n}\right) = \frac{\sum_j E(y_{ij})}{n} = \frac{n\mu_i}{n} = \mu_i$$

...or lo que $\hat{\mu}_i = \bar{y}_{i.}$ es un estimador puntual ...sesgado de μ_i, la media poblacional del tratamiento i.

De igual manera,

$$(\bar{y}_{..}) = E\left(\frac{\sum_i \sum_j y_{ij}}{kn}\right) = \frac{\sum_i \sum_j E(y_{ij})}{kn} = \frac{kn\mu}{kn} = \mu$$

...or lo cual $\hat{\mu} = \bar{y}_{..}$ es un estimador puntual ...sesgado de μ, la media común de todos los tratamientos.

Combinando los estimadores anteriores, se obtiene ...un estimador de γ_i, ya que, como $\gamma_i = \mu_i - \mu$, ...entonces

$$\hat{\gamma}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$$

el cual es también insesgado, puesto que

$$(\hat{\gamma}_i) = E(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) = E(\bar{y}_{i.}) - E(\bar{y}_{..}) = \mu_i - \mu = \gamma_i$$

Ya que $y_{ij} = \mu + \gamma_i + e_{ij}$, entonces se puede escribir

$$y_{ij} - \mu = \gamma_i + e_{ij}$$

Empleando estimadores, la expresión anterior se escribe como

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = \hat{\gamma}_i + \hat{e}_{ij}$$

pero $\hat{\gamma}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$, por lo que

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..} + \hat{e}_{ij}$$

de donde

$$\hat{e}_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{..} - \bar{y}_{i.} + \bar{y}_{..} = y_{ij} - \bar{y}_{i.}$$

De acuerdo con lo anterior, es válido escribir la identidad siguiente:

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.})$$

la cual se empleará en forma importante para el desarrollo del modelo estadístico de análisis.

A.4 Ejemplo

Considérese que se desea comparar el rendimiento de combustible en millas de tres marcas distintas de automóviles: A, B y C. Se seleccionan al azar tres vehículos de cada marca, y cada uno de ellos se conduce durante 100 millas, bajo exactamente las mismas condiciones experimentales.

<u>CASO 1</u>: Se supone que cada una de las marcas posee un rendimiento medio de 20 millas por galón, y que no existe variabilidad en rendimiento para vehículos de la misma marca. En este caso $n = 3$ y $K = 3$, por lo que $N = 3 \times 3 = 9$, y si $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ y $e_{ij} = 0$ para $\forall\, i, j$, entonces los resultados quedarían de la manera siguiente:

			OBSERVACION		
$i=1$		A	20	20	20
$i=2$	MARCAS (TRATAMIENTOS)	B	20	20	20
$i=3$		C	20	20	20
			$j=1$	$j=2$	$j=3$

En este caso el modelo lineal es

$$y_{ij} = \mu + 0 + 0 = \mu$$

puesto que $\gamma_i = 0$ y $e_{ij} = 0, \forall i, j$. Este modelo resulta ser poco realista, ya que supone que no existen efectos debidos a los tratamientos (marcas), ni errores aleatorios e_{ij}.

CASO 2 : Supóngase el mismo ejemplo anterior, pero en este caso existen efectos de los tratamientos tales que $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 4$ y $\gamma_3 = -5$ $\left(\sum_i \gamma_i = 0\right)$. La disposición de los resultados es entonces

		OBSERVACIONES		
TRATAMIENTOS	A	20+1=21	20+1=21	20+1=21
	B	20+4=24	20+4=24	20+4=24
	C	20-5=15	20-5=15	20-5=15

En este caso, $y_{ij} = \mu + \gamma_i + 0 = \mu + \gamma_i$

Este modelo tampoco resulta ser muy realista pues aun cuando supone valores $\gamma_i \neq 0$, en la práctica es muy poco posible evitar el error aleatorio e_{ij} en el muestreo.

CASO 3 : Si para el ejemplo anterior se agrega la componente e_{ij} de error aleatorio con valores

$$e_{11} = 3 \qquad e_{12} = -2 \qquad e_{13} = 1$$
$$e_{21} = 0 \qquad e_{22} = 1 \qquad e_{23} = -3$$
$$e_{31} = -4 \qquad e_{32} = -1 \qquad e_{33} = 2$$

los valores y_{ij} quedan

		OBSERVACIONES			
TRATAMIENTOS	A	20+1+3=24	20+1-2=19	20+1+1=22	$y_{1.} = 65$
	B	20+4+0=24	20+4+1=25	20+4-3=21	$y_{2.} = 70$
	C	20-5-4=11	20-5-1=14	20-5+2=17	$y_{3.} = 42$

$$\bar{y}_{1.} = \frac{65}{3} = 21.67 \quad ; \quad \bar{y}_{2.} = \frac{70}{3} = 23.33 \quad ; \quad \bar{y}_{3.} = \frac{42}{3} = 14.00$$

$$\bar{y}_{..} = \frac{\sum_i \sum_j y_{ij}}{N} = \frac{\sum_i y_{i.}}{N} = \frac{65+70+42}{9} = 19.67$$

Para este modelo existen diferencias de rendimiento <u>entre</u> las tres distintas marcas o tratamientos, así como entre diferentes vehículos de la misma marca, es decir, diferencias <u>dentro</u> de las muestras de tres vehículos de cada marca. Esto se debe a que para este modelo en general $e_{ij} \neq 0$, quedando el mismo como

$$y_{ij} = \mu + \gamma_i + e_{ij} \qquad \begin{matrix} i = 1,2,3 \\ j = 1,2,3 \end{matrix}$$

También,

$$\hat{e}_{ij} \begin{cases} \hat{e}_{11} = 24 - 21.67 = 2.33 \;;\; \hat{e}_{12} = 19 - 21.67 = -2.67 \;;\; \hat{e}_{13} = 22 - 21.67 = 0.33 \\ \hat{e}_{21} = 24 - 23.33 = 0.67 \;;\; \hat{e}_{22} = 25 - 23.33 = 1.67 \;;\; \hat{e}_{23} = 21 - 23.33 = -2.33 \\ \hat{e}_{31} = 11 - 14 = -3.00 \;;\; \hat{e}_{32} = 14 - 14 = 0 \;;\; \hat{e}_{33} = 17 - 14 = 3.00 \end{cases}$$

$$\hat{\gamma}_i \begin{cases} \hat{\gamma}_1 = 21.67 - 19.67 = 2.00 \\ \hat{\gamma}_2 = 23.33 - 19.67 = 3.66 \\ \hat{\gamma}_3 = 14.00 - 19.67 = -5.67 \end{cases} \qquad \left(\sum_i \hat{\gamma}_i \doteq 0 \right)$$

$$\hat{\mu}_i \begin{cases} \hat{\mu}_1 = 21.67 \\ \hat{\mu}_2 = 23.33 \\ \hat{\mu}_3 = 14.00 \end{cases}$$

$$\hat{\mu} = 19.67$$

A.5 Deslinde de la variación en un experimento

El ejemplo anterior sugiere que la evidencia acerca de efectos experimentales tiene que ver con las diferencias <u>entre</u> los tratamientos y las diferencias <u>dentro</u> de los mismos. Ahora se separará la variabilidad de las observaciones en una parte que refleje errores aleatorios y efectos experimentales por un lado, y en otra que implique únicamente errores aleatorios. Para ello, recuérdese que

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = (y_{i.} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.})$$

Elevando al cuadrado las desviaciones de cada observación y_{ij} respecto del promedio global $\bar{y}_{..}$, y sumando sobre $\forall i,j$, queda

$$\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_i \sum_j \left[(y_{ij} - \bar{y}_{i.}) + (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) \right]^2$$

$$= \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 + 2 \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + \sum_i \sum_j (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$$

Pero

$$2\sum_i\sum_j (y_{ij}-\bar{y}_{i.})(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}) = 2\sum_i (\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})\sum_j (y_{ij}-\bar{y}_{i.})$$
$$= 2\sum_i(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})\left[\sum_j y_{ij} - \sum_j \bar{y}_{i.}\right] = 2\sum_i (\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})\left[y_{i.}-n\bar{y}_{i.}\right] = 0$$

y

$$\sum_i\sum_j (\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2 = \sum_i n(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2$$

por lo que

$$\sum_i\sum_j (y_{ij}-\bar{y}_{..})^2 = \sum_i\sum_j (y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2 + \sum_i n(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2$$

A la igualdad anterior se le llama PARTICION DE LA SUMA DE CUADRADOS, y es válida para cualquier conjunto de K muestras distintas, e implica que la suma total de las desviaciones elevadas al cuadrado respecto del promedio global se puede "partir" en dos: la suma total de las desviaciones elevadas al cuadrado de cada resultado respecto del promedio de su propia muestra, es decir, DENTRO de las muestras, y la suma total de las desviaciones elevadas al cuadrado de cada promedio de muestra respecto del promedio global de los N resultados, es decir, ENTRE las muestras. A través de símbolos,

$$SS_W = SS_{DENTRO} = \sum_i\sum_j (y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2$$
$$SS_B = SS_{ENTRE} = \sum_i n(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2$$
$$SS_T = SS_{TOTAL} = SS_W + SS_B = \sum_i\sum_j (y_{ij}-\bar{y}_{..})^2$$

en donde

SS = SUM OF SQUARES = SUMA DE CUADRADOS
W = WITHIN = DENTRO
B = BETWEEN = ENTRE

El significado de la partición es el siguiente: Las diferencias entre los valores y_{ij} se pueden deber, si las observaciones se encuentran en muestras (tratamientos) distintos, al efecto particular de cada tratamiento, a la variación al azar, o a ambos. El valor de SS_B refleja la contribución que hacen los distintos tratamientos y el azar a la diferencia entre los resultados. Por otra parte, si existe diferencia entre observaciones de un mismo tratamiento, ella se debe únicamente al azar, puesto que todos esos valores y_{ij} deben poseer exactamente la misma componente de efecto del tratamiento correspondiente. Entonces, SS_W refleja la contribución que hace únicamente el azar a las diferencias de los valores y_{ij} que se encuentran en la misma muestra.

A.6 Análisis de SS_W

Empleando el operador esperanza

$$E(SS_W) = E\left[\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2\right]$$

pero $y_{ij} = \mu + \gamma_i + e_{ij}$, y

$$\bar{y}_{i.} = \frac{\sum_j y_{ij}}{n} = \frac{\sum_j}{n}(\mu + \gamma_i + e_{ij}) = \frac{n\mu}{n} + \frac{n\gamma_i}{n} + \frac{\sum_j e_{ij}}{n}$$
$$= \mu + \gamma_i + \bar{e}_{i.}$$

en donde $\bar{e}_{i.} = \frac{\sum_j e_{ij}}{n}$. Entonces,

$$E(SS_W) = E\left[\sum_i \sum_j (\mu + \gamma_i + e_{ij} - \mu - \gamma_i - \bar{e}_{i.})^2\right]$$
$$= E\left[\sum_i \sum_j (e_{ij} - \bar{e}_{i.})^2\right] = E\left[\sum_i \sum_j (e_{ij}^2 - 2e_{ij}\bar{e}_{i.} + \bar{e}_{i.}^2)\right]$$
$$= E\left(\sum_i \sum_j e_{ij}^2\right) - 2E\left(\sum_i \sum_j e_{ij}\bar{e}_{i.}\right) + E\left(\sum_i \sum_j \bar{e}_{i.}^2\right)$$
$$= \sum_i \sum_j E(e_{ij}^2) - 2E\left(\sum_i n\bar{e}_{i.}\bar{e}_{i.}\right) + \sum_i \sum_j E(\bar{e}_{i.}^2)$$
$$= \sum_i \sum_j E(e_{ij}^2) - 2E(kn\bar{e}_{i.}^2) + kn\,E(\bar{e}_{i.}^2)$$
$$= \sum_i \sum_j E(e_{ij}^2) - kn\,E(\bar{e}_{i.}^2)$$

Pero $VAR(e_{ij}) = E(e_{ij}^2) - E^2(e_{ij}) = E(e_{ij}^2) = \sigma_e^2$ ya que $E(e_{ij}) = 0$. Por otro lado,

$$VAR(\bar{e}_{i.}) = VAR\left(\frac{\sum_j e_{ij}}{n}\right) = \sum_j \frac{VAR(e_{ij})}{n^2} = \frac{n}{n^2}\sigma_e^2 = \frac{\sigma_e^2}{n} = E(\bar{e}_{i.}^2)$$

puesto que $E(\bar{e}_{i.}) = E\left(\frac{\sum_j e_{ij}}{n}\right) = \frac{n}{n}E(e_{ij}) = 0$. Por ello,

$$E(SS_W) = \sum_i \sum_j \sigma_e^2 - kn\frac{\sigma_e^2}{n} = kn\sigma_e^2 - k\sigma_e^2 = (N-k)\sigma_e^2$$

Si ahora se hace $MS_W = \frac{SS_W}{N-k}$, entonces

$$E(MS_W) = E\left(\frac{SS_W}{N-k}\right) = \frac{E(SS_W)}{N-k} = \frac{(N-k)\sigma_e^2}{N-k} = \sigma_e^2$$

lo cual implica que MS_W es un estimador puntual insesgado de σ_e^2, la varianza del error aleatorio, igual para cualquiera de los K tratamientos. A MS_W se le llama <u>valor medio cuadrático dentro de las muestras</u>, y al coeficiente de σ_e^2 en el valor de $E(SS_W)$ se le denomina <u>número de grados de libertad de SS_W</u>, en este caso $N-K$.

Por otra parte, SS_W se puede escribir como

$$SS_w = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 = \sum_i \left[\sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 \right]$$

pudiéndose apreciar que la sumatoria dentro de los corchetes, si se divide entre $n-1$, es igual a la varianza de la muestra del iésimo tratamiento, es decir

$$S_i^2 = \frac{\sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2}{n-1} \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

La varianza anterior es un estadístico con $n-1$ grados de libertad, que es a su vez un estimador puntual insesgado de σ_e^2 ya que

$$E(S_i^2) = E\left[\frac{\sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2}{n-1}\right] = E\left[\frac{\sum_j (\mu + \tau_i + e_{ij} - \mu - \tau_i - \bar{e}_{i.})^2}{n-1}\right] = E\left[\frac{\sum_j (e_{ij} - \bar{e}_{i.})^2}{n-1}\right]$$

$$= \frac{\sum_j E(e_{ij}^2) - 2E\sum_j (e_{ij}\bar{e}_{i.}) + \sum_j E(\bar{e}_{i.}^2)}{n-1} = \frac{\sum_j E(e_{ij}^2) - 2n\,E(\bar{e}_{i.}^2) + n\,E(\bar{e}_{i.}^2)}{n-1}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[n E(e_{ij}^2) - n E(\bar{e}_{i.}^2) \right] = \frac{1}{n-1}\left[n\sigma_e^2 - n\frac{\sigma_e^2}{n} \right] = \frac{n-1}{n-1}\sigma_e^2 = \sigma_e^2$$

Sin embargo, como de hecho existen k muestras que corresponden, respectivamente, a cada uno de los k tratamientos o niveles del factor de interés, se pueden combinar k varianzas del tipo S_i^2 anterior con el fin de obtener un estimador de σ_e^2 de la manera siguiente:

$$\frac{(n-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2 + \cdots + (n-1)S_k^2}{(n-1) + (n-1) + \cdots + (n-1)} = \frac{\sum_i \left[\sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 \right]}{\sum_i (n-1)} = \frac{\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2}{\sum_i n - \sum_i (1)}$$

$$= \frac{SS_w}{kn - k} = \frac{SS_w}{N - k} = MS_w$$

El resultado anterior confirma que el estadístico MS_W obtenido a través de la combinación de las varianzas de las muestras de los k tratamientos, permite estimar en forma insesgada el valor de σ_e^2. Asimismo, implica que SS_W posee $N-k$ grados de libertad, lo cual checa con el resultado obtenido anteriormente para $E(SS_W)$, es decir,

$$E(SS_w) = (N-K)\sigma_e^2$$

ya que, por definición, el multiplicador de σ_e^2 al calcular la esperanza de SS_W debe ser el número de grados de libertad correspondiente.

A.7 Análisis de SS_B

La esperanza de SS_B es

$$E(SS_B) = E\left[\sum_i n(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2\right]$$

pero, de A.6, $\bar{y}_{i.} = \mu + \gamma_i + \bar{e}_{i.}$. Por otro lado

$$\bar{y}_{..} = \frac{\sum\sum y_{ij}}{kn} = \frac{\sum_i\sum_j \mu}{kn} + \frac{\sum_j\sum_i \gamma_i}{kn} + \frac{\sum_i\sum_j e_{ij}}{kn} = \frac{kn\mu}{kn} + 0 + \frac{\sum_i\sum_j e_{ij}}{kn} = \mu + \bar{e}_{..},$$

en donde $\bar{e}_{..} = \frac{\sum_i\sum_j e_{ij}}{kn} = \frac{\sum_i \bar{e}_{i.}}{k}$

$$E(SS_B) = E\left[\sum_i n(\mu + \gamma_i + \bar{e}_{i.} - \mu - \bar{e}_{..})^2\right] = E\left[\sum_i n\{\gamma_i + (\bar{e}_{i.} - \bar{e}_{..})\}^2\right]$$

$$= E\left[\sum_i n\{\gamma_i^2 + 2\gamma_i(\bar{e}_{i.} - \bar{e}_{..}) + (\bar{e}_{i.} - \bar{e}_{..})^2\}\right] = E\left(\sum_i n\gamma_i^2\right) + 2E\left(\sum_i n\gamma_i\bar{e}_{i.}\right) -$$

$$- 2E\left(\sum_i n\gamma_i\bar{e}_{..}\right) + E\left(\sum_i n\bar{e}_{i.}^2\right) - 2E\left(\sum_i n\bar{e}_{i.}\bar{e}_{..}\right) + E\left(\sum_i n\bar{e}_{..}^2\right)$$

$$= \sum_i nE(\gamma_i^2) + 2\sum_i nE(\gamma_i\bar{e}_{i.}) - 2ne_{..}E\left(\sum_i \gamma_i\right) + n\sum_i E(\bar{e}_{i.}^2) - 2nE(\bar{e}_{..}k\bar{e}_{..}) + nkE(\bar{e}_{..}^2)$$

Tomando en cuenta que $\sum_i \gamma_i = 0$ y que $E(\gamma_i\bar{e}_{i.})$ es cero ya que $E(\gamma_i\bar{e}_{i.}) = \gamma_i E(\bar{e}_{i.}) = \gamma_i(0)$, se anulan el segundo y tercer términos, quedando

$$E(SS_B) = \sum_i n\gamma_i^2 + n\sum_i E(\bar{e}_{i.}^2) - 2knE(\bar{e}_{..}^2) + knE(\bar{e}_{..}^2) = \sum_i n\gamma_i^2 + n\sum_i E(\bar{e}_{i.}^2) - knE(\bar{e}_{..}^2)$$

Pero, de A.6, $E(\bar{e}_{i.}^2) = \frac{\sigma_e^2}{n}$, y

$$VAR(\bar{e}_{..}) = E(\bar{e}_{..}^2) - E^2(\bar{e}_{..}) = E(\bar{e}_{..}^2) - 0 = E(\bar{e}_{..}^2)$$

$$= VAR\left(\frac{\sum_i\sum_j e_{ij}}{kn}\right) = \frac{\sum_i\sum_j}{k^2n^2} VAR(e_{ij}) = \frac{kn}{k^2n^2}\sigma_e^2 = \frac{\sigma_e^2}{kn}$$

por lo que

$$E(SS_B) = \sum_i n\gamma_i^2 + n\sum_i \frac{\sigma_e^2}{n} - kn\frac{\sigma_e^2}{kn} = \sum_i n\gamma_i^2 + k\sigma_e^2 - \sigma_e^2 = \sum_i n\gamma_i^2 + (k-1)\sigma_e^2$$

Si se hace ahora $MS_B = \frac{SS_B}{k-1}$, entonces

$$E(MS_B) = E\left(\frac{SS_B}{k-1}\right) = \frac{E(SS_B)}{k-1} = \frac{\sum_i n\gamma_i^2 + (k-1)\sigma_e^2}{k-1} = \frac{\sum_i n\gamma_i^2}{k-1} + \sigma_e^2$$

De acuerdo con lo anterior,

$E(MS_B) = \sigma_e^2$, siempre que $\gamma_i = 0$, $\forall i$ (no hay efectos de tratamientos)

$E(MS_B) > \sigma_e^2$, siempre que $\gamma_i \neq 0$ para alguna(s) i, existiendo al menos algún efecto de tratamiento.

En el primer caso, MS_B es un estimador puntual insesgado de σ_e^2, la varianza común del error aleatorio. En el segundo caso, la estimación que hace MS_B de σ_e^2 no es insesgada, debido al efecto de los tratamientos. A MS_B se le denomina <u>valor medio cuadrático entre las muestras</u>, y al coeficiente de σ_e^2 en el valor de $E(SS_B)$ <u>número de grados de libertad de SS_B</u>, en este caso $k-1$.

Si $\gamma_i = 0$, $\forall i$, es decir, si las medias de los K tratamientos son iguales, entonces el estadístico con K-1 grados de libertad

$$\frac{\sum_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}{K-1}$$

es un estimador puntual insesgado de $\frac{\sigma_e^2}{n}$, la varianza de la distribución de muestreo para los promedios de los n valores y_{ij} obtenidos bajo los tratamientos i $(i=1,2,\ldots,K,\ldots)$. En efecto,

$$E\left[\frac{\sum_i(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2}{K-1}\right] = \frac{1}{K-1} E\left[\sum_i (\mu + \overset{\gamma_i}{\overset{\downarrow}{0}} + \bar{e}_{i.} - \mu - \bar{e}_{..})^2\right] = \frac{1}{K-1} E\left[\sum_i (\bar{e}_{i.} - \bar{e}_{..})^2\right]$$

$$= \frac{1}{K-1}\left[E\left(\sum_i \bar{e}_{i.}^2\right) - 2E\left(\sum_i \bar{e}_{i.} e_{..}\right) + E\left(\sum_i e_{..}^2\right)\right] = \frac{1}{K-1}\left[\sum_i E(\bar{e}_{i.}^2) - 2K E(e_{..}^2) + K E(e_{..}^2)\right]$$

$$= \frac{1}{K-1}\left[\sum_i \frac{\sigma_e^2}{n} - K\frac{\sigma_e^2}{Kn}\right] = \frac{1}{K-1}\left[\frac{K\sigma_e^2}{n} - \frac{\sigma_e^2}{n}\right] = \frac{K-1}{K-1}\,\frac{\sigma_e^2}{n} = \frac{\sigma_e^2}{n}$$

De igual manera, y considerando el resultado anterior, se obtiene

$$E\left[\frac{n\sum_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}{K-1}\right] = E\left(\frac{SS_B}{K-1}\right) = E(MS_B) = n\,\frac{\sigma_e^2}{n} = \sigma_e^2$$

lo cual confirma que el estadístico MS_B permite estimar en forma insesgada el valor de σ_e^2, siempre que no existan efectos de los tratamientos. Asimismo, implica que SS_B posee K-1 grados de libertad, chequeando con el resultado

$$E(SS_B) = \sum_i n\gamma_i^2 + (K-1)\sigma_e^2$$

para el cual el multiplicador de σ_e^2 es K-1, el número de grados de libertad de SS_B.

A.8. Análisis de SS_T

La esperanza de SS_T es

$$E(SS_T) = E\left[\sum_i\sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2\right] = E\left[\sum_i\sum_j (\mu + \gamma_i + e_{ij} - \mu - \bar{e}_{..})^2\right]$$

$$= E\left[\sum_i\sum_j (\gamma_i + \{e_{ij} - \bar{e}_{..}\})^2\right] = E\left[\sum_i\sum_j \{\gamma_i^2 + 2\gamma_i(e_{ij} - \bar{e}_{..}) + (e_{ij} - \bar{e}_{..})^2\}\right]$$

$$= E\left(\sum_i\sum_j \gamma_i^2\right) + 2E\left(\sum_i\sum_j \gamma_i e_{ij}\right) - 2E\left(\sum_i\sum_j \gamma_i \bar{e}_{..}\right) + E\left(\sum_i\sum_j e_{ij}^2\right)$$

$$- 2E\left(\sum_i\sum_j e_{ij}\bar{e}_{..}\right) + E\left(\sum_i\sum_j \bar{e}_{..}^2\right) = \sum_j\sum_i E(\gamma_i^2) + 2\sum_i\sum_j E(\gamma_i e_{ij})$$

$$- 2\sum_i\sum_j E(\gamma_i \bar{e}_{..}) + \sum_i\sum_j E(e_{ij}^2) - 2Kn\,E(\bar{e}_{..}^2) + Kn\,E(\bar{e}_{..}^2)$$

$$= \sum_i n\gamma_i^2 + 0 - 0 + \sum_i\sum_j E(e_{ij}^2) - Kn\,E(\bar{e}_{..}^2)$$

$$= \sum_i n\gamma_i^2 + Kn\sigma_e^2 - Kn\frac{\sigma_e^2}{Kn} = \sum_i n\gamma_i^2 + (Kn-1)\sigma_e^2$$

$$= \sum_i n\gamma_i^2 + (N-1)\sigma_e^2$$

Si se hace $MS_T = \frac{SS_T}{N-1}$, entonces

$$E(MS_T) = E\left(\frac{SS_T}{N-1}\right) = \frac{E(SS_T)}{N-1} = \frac{\sum_i n\gamma_i^2 + (N-1)\sigma_e^2}{N-1} = \frac{\sum_i n\gamma_i^2}{N-1} + \sigma_e^2$$

De acuerdo con lo anterior,

$E(MS_T) = \sigma_e^2$, siempre que no haya efectos de tratamientos

$E(MS_T) > \sigma_e^2$, siempre que exista al menos un efecto de tratamiento.

En el primer caso, MS_T es estimador puntual insesgado de σ_e^2, y en el segundo no es así debido al efecto de los tratamientos. A MS_T se le llama valor medio cuadrático total, y a $N-1$, el coeficiente de σ_e^2 en el valor de $E(SS_T)$, el número de grados de libertad de SS_T.

Conviene observar que

$$\underset{(N-1 \text{ grados de libertad})}{SST} = \underset{(N-K \text{ grados de libertad})}{SS_W} + \underset{(K-1 \text{ grados de libertad})}{SS_B}$$

es decir,

$$N-1 = N-k+k-1 = N-1$$

y el número de grados de libertad de SS_T es igual a la suma de los grados de libertad asociados a SS_W y SS_E.

A.7 Distribuciones de probabilidad de estimadores para σ_e^2

Se sabe de la inferencia estadística que

$$\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_x^2} = \frac{\frac{n-1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} = \frac{\text{Suma de cuadrados}}{\sigma_x^2} = \chi^2_{n-1}$$

en donde χ^2_{n-1} representa la variable aleatoria ji cuadrada con $n-1$ grados de libertad, y S_x^2 la varianza insesgada para las muestras de tamaño n extraídas de una población normal con varianza σ_x^2. También,

$$\frac{S_x^2}{\sigma_x^2} = \frac{\frac{\text{Suma de cuadrados}}{n-1}}{\sigma_x^2} = \frac{\frac{SS}{n-1}}{\sigma_x^2} = \frac{\frac{SS}{\text{grados de libertad } SS}}{\sigma_x^2}$$

$$= \frac{\text{Estimador de } \sigma_x^2}{\sigma_x^2} = \frac{\chi^2_{n-1}}{n-1} = \frac{\chi^2_\nu}{\nu}$$

siendo ν = número de grados de libertad. El resultado anterior es válido siempre que las observaciones en la muestra, x_i, correspondan a variables aleatorias normales e independientes, con media μ_x y varianza σ_x^2. Por otra parte, si χ_1^2 y χ_2^2 representan a dos variables aleatorias ji cuadrada independientes, con ν_1 y ν_2 grados de libertad, respectivamente, entonces el cociente

$$F_{\nu_1,\nu_2} = \frac{\chi_1^2/\nu_1}{\chi_2^2/\nu_2}$$

corresponde a una variable aleatoria F con ν_1 grados de libertad en el numerador y ν_2 en el denominador. Por ejemplo, si dos estimadores de σ_x^2 son independientes y poseen ν_1 y ν_2 grados de libertad respectivamente, entonces

$$\frac{\dfrac{\text{Estimador 1 de } \sigma_x^2}{\sigma_x^2}}{\dfrac{\text{Estimador 2 de } \sigma_x^2}{\sigma_x^2}} = \frac{\text{Estimador 1 de } \sigma_x^2}{\text{Estimador 2 de } \sigma_x^2} = \frac{\chi_1^2/\nu_1}{\chi_2^2/\nu_2} = F_{\nu_1,\nu_2}$$

De acuerdo con lo anterior, y bajo las suposiciones hechas en A.2 para el modelo lineal $y_{ij} = \mu + \gamma_i + e_{ij}$, se puede juzgar que

$$\frac{SS_W}{\sigma_e^2} = \chi^2_{N-K} \quad \therefore \quad \frac{\frac{SS_W}{N-K}}{\sigma_e^2} = \frac{MS_W}{\sigma_e^2} = \frac{\chi^2_{N-K}}{N-K}$$

y, si $\gamma_i = 0, \forall i$, entonces

$$\frac{SS_B}{\sigma_e^2} = \chi^2_{K-1} \quad \therefore \quad \frac{\frac{SS_B}{K-1}}{\sigma_e^2} = \frac{MS_B}{\sigma_e^2} = \frac{\chi^2_{K-1}}{K-1}$$

$$\frac{SS_T}{\sigma_e^2} = \chi^2_{N-1} \quad \therefore \quad \frac{\frac{SS_T}{N-1}}{\sigma_e^2} = \frac{MS_T}{\sigma_e^2} = \frac{\chi^2_{N-1}}{N-1}$$

Conviene hacer notar que los tres estimadores obtenidos para σ_e^2 no son independientes, ya que $SS_T = SS_W + SS_B$. Sin embargo, SS_W y SS_B sí lo son en virtud del Teorema de Cochran (REF. 1, pág. 50), que establece que si una variable aleatoria ji cuadrada con ν grados de libertad es igual a la suma aritmética de n variables aleatorias ji cuadrada con $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ grados de libertad, respectivamente, estas n variables serán independientes si, y sólo si,

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n \qquad (n \leq \nu)$$

En A.8 se concluyó que el número de grados de libertad de SS_T era igual a la suma de los grados de libertad de SS_W y SS_B por lo cual, atendiendo al criterio de Cochran, SS_W y SS_B son independientes.

A.10 Prueba de hipótesis de igualdad de medias

En general, existan o no efectos de los tratamientos, MS_W estima en forma insesgada el valor de σ_e^2, pero MS_B únicamente lo hace cuando $\gamma_i = 0, \forall i$, es decir, cuando no existen efectos y las medias de los tratamientos son iguales.

Si se establecen entonces las hipótesis

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_K \qquad (i = 1, 2, 3, \dots, k)$$

(o, equivalentemente, $H_0: \gamma_i = 0, \ \forall i$)

H_1: al menos una media es distinta de las otras

(o, equivalentemente, $H_1: \gamma_i \neq 0$, para alguna(s) i)

se podrá probar la primera en contra de la segunda a través del empleo del valor de la estadística de prueba

$$F_0 = \frac{\frac{MS_B}{\sigma_e^2}}{\frac{MS_W}{\sigma_e^2}} = \frac{MS_B}{MS_W} = \frac{\frac{SS_B}{K-1}}{\frac{SS_W}{N-K}} = \frac{\frac{\sum_i n(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}{K-1}}{\frac{\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2}{N-K}}$$

que corresponde a una variable F con $K-1$ y $N-K$ grados de libertad en numerador y denominador, respectivamente. El cociente que define a esa variable es el de dos variables aleatorias independientes con distribución χ^2, de acuerdo con la definición de F, y el razonamiento para su empleo es el siguiente: SS_T no es independiente de SS_W y SS_B y, por tanto, no puede usarse para generar una variable de prueba F_0. Ahora bien, al observar los valores de $E(SS_W)$ y $E(SS_B)$ se puede concluir que si H_0 es cierta el cociente de MS_B a MS_W debe ser cercano a la unidad. Sin embargo, si H_0 resultara falsa, es decir, si existieran efectos de los tratamientos, entonces MS_B tomará un valor mayor que el de MS_W, implicando que la F_0 de prueba será mayor que la unidad.

Lo anterior sugiere que la prueba de hipótesis se debe realizar, al nivel de significancia α seleccionado por el investigador, en la cola derecha de la distribución teórica de F.

A.11 EJEMPLO

Considérese el caso 3 del ejemplo sobre el rendimiento de combustible para tres marcas distintas de automóviles, presentado en la sección A.4. La tabla de valores de y_{ij} es la siguiente:

		OBSERVACIONES	
MARCAS A	24	19	22
B	24	25	21
C	11	14	17

$\bar{y}_{1.} = 21.67$, $\bar{y}_{2.} = 23.33$, $\bar{y}_{3.} = 14.00$, $\bar{y}_{..} = 19.67$, $n = 3$, $K = 3$, $N = 9$

$$SS_W = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 = (24-21.67)^2 + (19-21.67)^2 + (22-21.67)^2 + (24-23.33)^2 + (25-23.33)^2 + (21-23.33)^2 + (11-14)^2 + (14-14)^2 + (17-14)^2 = 39.33$$

$$SS_B = \sum_i n(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 = 3(21.67-19.67)^2 + 3(23.33-19.67)^2 + 3(14-19.67)^2 = 148.67$$

$$SS_T = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = (24-19.67)^2 + (19-19.67)^2 + (22-19.67)^2 + (24-19.67)^2 + (25-19.67)^2 + (21-19.67)^2 + (11-19.67)^2 + (14-19.67)^2 + (17-19.67)^2 = 188.00$$

y se verifica que $SS_T = SS_W + SS_B = 39.33 + 148.67 = 188.00$

Los valores de MS_W y MS_B son

$$MS_W = \frac{SS_W}{N-K} = \frac{39.33}{9-3} = 6.55$$

$$MS_B = \frac{SS_B}{K-1} = \frac{148.67}{3-1} = 74.33$$

por lo cual

$$F_0 = \frac{MS_B}{MS_W} = \frac{74.33}{6.55} = 11.35$$

para $K-1 = 3-1 = 2$ y $N-K = 9-3 = 6$ grados de libertad.

El valor teórico para $F_{2,6}$ obtenido de la tabla correspondiente, considerando un nivel de significancia α igual con 0.01 (1%), es igual con 10.92, por lo que

$$F_0 = 11.35 > F_{2,6} = 10.92$$

y se debe rechazar $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, resultado que sugiere la existencia de efectos debidos a los tratamientos. En el caso del ejemplo, el rendimiento de combustible para un automóvil depende de si éste es de marca A, B o C.

A.12 COMENTARIOS

A.12.1 Cuando en el análisis de varianza se obtiene un valor de F_0 mucho menor que la unidad, ello indica que, siendo o no cierta la hipótesis H_0, MS_W adquiere un valor muy grande, lo cual a su vez generalmente implica el efecto presente de algún factor sistemático no aleatorio dentro de los valores de los datos en las muestras, que impide que MS_W refleje únicamente la variación al azar de los y_{ij}. La existencia de tal efecto no controlado supone fallas en las suposiciones iniciales para la generación del modelo, y generalmente también, que el diseño del experimento es inadecuado. Más adelante se propondrán técnicas distintas a la ya presentada para procurar evitar la presencia de dichas componentes sistemáticas en el diseño correspondiente.

A.12.2 Una de las suposiciones iniciales especifica que la distribución de los errores e_{ij} es normal $\eta(0, \sigma_e^2)$ para cada tratamiento i, y equivalentemente, que y_{ij} es una variable aleatoria distribuida como $\eta(\mu_y, \sigma_y^2)$. Esta suposición es indispensable para determinar a MS_B/σ_e^2 y MS_W/σ_e^2 como variables con distribución χ^2, y así poder emplear al cociente $F_0 = MS_B/MS_W$ como estadístico de prueba para la hipótesis de igualdad de medias. Es posible demostrar, si se emplea el teorema del límite central, que las inferencias que se hacen para medias en el caso de poblaciones normales son válidas también para aquellas que no lo sean, siempre que el tamaño n (o n_i, en el caso del diseño desbalanceado que se presentará más adelante) de las muestras sea suficientemente grande. En virtud de ésto, si no es posible soportar los supuestos de normalidad para el modelo aquí desarrollado, es indispensable el manejo de muestras más grandes que permitan aproximaciones adecuadas a la distribución normal.

A.12.3 Otra de las suposiciones establece que σ_e^2 debe tener el mismo valor para todos los tratamientos. Esta suposición de homogeneidad de varianzas, u <u>homoscedasticidad</u>, puede pasarse por alto sin consecuencias muy graves siempre que el número de valores y_{ij} en cada muestra de tratamiento sea el mismo para todos los casos. Si, por el contrario, el valor de n es distinto para las muestras, y σ_e^2 no tiene el mismo valor para cada tratamiento, la inferencia final puede verse seriamente afectada.

A.12.4 Es extremadamente importante que los datos a los que se aplique el modelo expuesto se basen en observaciones independientes entre y dentro de las muestras, es decir, que cada observación no se relacione con las restantes, con el fin de soportar debidamente la suposición inicial de que los errores e_{ij} son independientes. Esta suposición es indispensable para justificar el empleo de la prueba F al realizar el análisis de varianza, y si no se cumple se pueden cometer errores muy graves que podrían desvirtuar los resultados del análisis e invalidar la inferencia final.

A.12.5 Se recomienda al lector el estudio de los métodos de verificación analítica para los

supuestos del modelo aquí expuesto, que se presentan en la Referencia 2, páginas 85 a 104.

A.13 Fórmulas simplificadas de cálculo

Con el objeto de realizar los cálculos de SS_W, SS_B y SS_T en forma más cómoda, se pueden realizar las simplificaciones siguientes:

$$SS_T = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_i \sum_j (y_{ij}^2 - 2\bar{y}_{..} y_{ij} + \bar{y}_{..}^2)$$
$$= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - 2\bar{y}_{..} \sum_i \sum_j y_{ij} + \sum_i \sum_j \bar{y}_{..}^2$$

y, como $\bar{y}_{..} = \dfrac{\sum_i \sum_j y_{ij}}{N}$ y $\sum_i \sum_j \bar{y}_{..}^2 = N\bar{y}_{..}^2$, entonces

$$SS_T = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - 2\bar{y}_{..}(N\bar{y}_{..}) + N\bar{y}_{..}^2 = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - N\bar{y}_{..}^2$$

Por otro lado,

$$SS_B = \sum_i n(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_i n(\bar{y}_{i.}^2 - 2\bar{y}_{i.}\bar{y}_{..} + \bar{y}_{..}^2)$$
$$= \sum_i n\bar{y}_{i.}^2 - 2n\bar{y}_{..} \sum_i \bar{y}_{i.} + n\sum_i \bar{y}_{..}^2$$

y, ya que $\bar{y}_{..} = \dfrac{n\sum_i \bar{y}_{i.}}{N}$ y $\bar{y}_{i.} = \dfrac{y_{i.}}{n}$, entonces

$$SS_B = \sum_i n\frac{y_{i.}^2}{n^2} - 2N\bar{y}_{..}^2 + N\bar{y}_{..}^2 = \sum_i \frac{y_{i.}^2}{n} - N\bar{y}_{..}^2$$

Finalmente, ya que $SS_T = SS_W + SS_B$, entonces

$$SS_W = SS_T - SS_B = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - N\bar{y}_{..}^2 - \sum_i \frac{y_{i.}^2}{n} + N\bar{y}_{..}^2$$
$$= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \sum_i \frac{y_{i.}^2}{n}$$

Se acostumbra presentar los resultados en la forma que sigue:

Fuente de variabilidad	Suma de Cuadrados SS	Grados de Libertad	MS	F_0
ENTRE MUESTRAS (Tratamientos)	$SS_B = \sum_i \frac{y_{i.}^2}{n} - N\bar{y}_{..}^2$	$K-1$	$MS_B = \frac{SS_B}{K-1}$	$\frac{MS_B}{MS_W}$
DENTRO DE MUESTRAS (Error)	$SS_W = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \sum_i \frac{y_{i.}^2}{n}$	$N-K$	$MS_W = \frac{SS_W}{N-K}$	
TOTAL	$SS_T = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - N\bar{y}_{..}^2$	$N-1$		

A.14 EJEMPLO

Un fabricante de fibra sintética para telas sospecha que la resistencia de la fibra se ve afectada por el contenido de algodón en la misma. Para probar con $\alpha = 0.01$ la hipótesis de ausencia de efectos debidos al porcentaje de algodón en la fibra, determina los niveles 15%, 20%, 25%, 30% y 35% (contenido de algodón en por ciento), y decide emplear cinco observaciones de resistencia de la fibra (en lb/in^2) para cada nivel del factor de interés. La asignación de los tratamientos se hace completamente al azar a las unidades experimentales, obteniendose los resultados siguientes:

% de ALGODON (TRATAMIENTOS)	OBSERVACIONES 1	2	3	4	5	$y_{i.}$
15	7	7	15	11	9	49
20	12	17	12	18	18	77
25	14	18	18	19	19	88
30	19	25	22	19	23	108
35	7	10	11	15	11	54

$i = 1,2,3,4,5 \downarrow$

$\overrightarrow{j = 1,2,3,4,5}$

$$\bar{y}_{1.} = \frac{y_{1.}}{5} = \frac{49}{5} = 9.8 \;;\; \bar{y}_{2.} = \frac{77}{5} = 15.4 \;;\; \bar{y}_{3.} = \frac{88}{5} = 17.6 \;;\; \bar{y}_{4.} = \frac{108}{5} = 21.6 \;;\; \bar{y}_{5.} = \frac{54}{5} = 10.8$$

$$y_{..} = \sum_i \sum_j y_{ij} = \sum_i y_{i.} = 49 + 77 + 88 + 108 + 54 = 376$$

$$\bar{y}_{..} = \frac{y_{..}}{N} = \frac{376}{25} = 15.04$$

$$SS_T = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - N\bar{y}_{..}^2 = (7)^2 + (7)^2 + (15)^2 + (11)^2 + (9)^2 + (12)^2 + \dots + (15)^2 + (11)^2 - 25(15.04)^2$$

$$= 6292 - 5655.04 = 636.96$$

$$SS_B = \sum_i \frac{y_{i.}^2}{n} - N\bar{y}_{..}^2 = \frac{(49)^2 + (77)^2 + (88)^2 + (108)^2 + (54)^2}{5} - 25(15.04)^2$$

$$= 6130.80 - 5655.04 = 475.76$$

$$SS_W = SS_T - SS_B = 636.96 - 475.76 = 161.20$$

$$MS_B = \frac{SS_B}{k-1} = \frac{475.76}{5-1} = 118.94$$

$$MS_W = \frac{SS_W}{N-k} = \frac{161.20}{25-5} = 8.06$$

$$F_0 = \frac{MS_B}{MS_W} = \frac{118.94}{8.06} = 14.76$$

La tabla de concentración de resultados para el análisis de varianza es la siguiente:

Fuente de Variabilidad	Suma de Cuadrados	G.L.	MS	F_0
TRATAMIENTOS	475.76	4	118.94	14.76
ERROR	161.20	20	8.06	
TOTAL	636.96	24		

Al nivel de significancia de 1%, la F teórica con cuatro grados de libertad en el numerador y veinte en el denominador. Corresponde al valor 4.43, por lo que

$$F_0 = 14.76 > F_{4,20} = 4.43$$

y se rechaza la hipótesis nula $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$ (o, equivalentemente, $H_0 : \gamma_i = 0,\ i = 1,2,3,4,5$) concluyéndose que las medias de los tratamientos difieren, es decir, que el porcentaje de algodón en la fibra afecta significativamente a la resistencia de la misma, para los niveles del factor empleados.

A.15 Diseño desbalanceado

En algunas ocasiones el número de observaciones que se hacen para cada tratamiento puede no ser el mismo, es decir, el tamaño de la muestra puede variar entre los varios tratamientos. Se dice que el diseño correspondiente es desbalanceado, pero el análisis de varianza propuesto puede emplearse haciendo modificaciones ligeras en las fórmulas para las sumas de cuadrados.

Supóngase que se toman n_i observaciones bajo cada tratamiento i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Entonces,

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

y ahora se emplea la restricción $\sum_{i=1}^{k} n_i \gamma_i = 0$, ya que

$$\mu = \frac{\sum_i n_i \mu_i}{\sum_i n_i} = \frac{\sum_i n_i \mu_i}{N}$$

y $\sum_i n_i \gamma_i = \sum_i n_i(\mu_i - \mu) = \sum_i n_i \mu_i - \mu \sum_i n_i = N\mu - N\mu = 0$

En este caso, las fórmulas de cálculo para las sumas de cuadrados se convierten en

$$SS_T = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - N\bar{y}_{..}^2$$

$$SS_B = \sum_{i=1}^{k} \frac{y_{i.}^2}{n_i} - N\bar{y}_{..}^2$$

$$SS_W = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{k} \frac{y_{i.}^2}{n_i}$$

Por supuesto este diseño desbalanceado presenta desventajas en su uso comparándolo con el balanceado. Basta recordar que la suposición de homogeneidad de varianzas para todos los tratamientos puede soportarse adecuadamente cuando los tamaños de muestra son iguales, lo que no sucede en el diseño desbalanceado.

A.16 EJEMPLO

Con el fin de comparar las propiedades reflectivas de cuatro tipos diferentes de pintura: A, B, C y D, se diseñó un experimento completamente aleatorizado cuyos resultados, obtenidos mediante el empleo de un instrumento óptico especial, fueron los siguientes:

		OBSERVACIONES						n_i	$y_{i.}$
PINTURAS (Tratamientos)	A	195	150	205	120	60		5	830
	B	45	40	195	65	145	195	6	685
	C	230	115	235	205			4	805
	D	110	55	120	50	80		5	415

$$N = \sum_{i=1}^{4} n_i = 5+6+4+5 = 20$$

$$y_{..} = \sum_i \sum_j y_{ij} = \sum_i y_{i.} = 830 + 685 + 805 + 415 = 2735$$

$$\bar{y}_{..} = \frac{2735}{20} = 136.75$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - N\bar{y}_{..}^2 = (195)^2+(150)^2+(205)^2+\dots+(50)^2+(80)^2 - 20(136.75)^2$$

$$= 457,865 - 374,011.25 = 83,863.75$$

$$SS_B = \sum_{i=1}^{4} \frac{y_{i.}^2}{n_i} - N\bar{y}_{..}^2 = \frac{(830)^2}{5} + \frac{(685)^2}{6} + \frac{(805)^2}{4} + \frac{(415)^2}{5} - 20(136.75)^2$$

$$= 412,435.42 - 374,011.25 = 38,424.17$$

$$SS_W = SS_T - SS_B = 83,863.75 - 38,424.17 = 45,439.58$$

$$MS_B = \frac{SS_B}{K-1} = \frac{38,424.17}{4-1} = 12,808.05$$

$$MS_W = \frac{SS_W}{N-K} = \frac{45,439.58}{20-4} = 2839.97$$

$$F_0 = \frac{MS_B}{MS_W} = \frac{12808.05}{2839.97} = 4.51$$

Con los datos anteriores se formula la tabla de análisis de varianza siguiente:

Fuente de Variabilidad	SS	G. de L.	MS	F_0
TRATAMIENTOS	38,424.17	3	12,808.05	4.51
ERROR	45 439.58	16	2,839.97	
TOTAL	83,863.75	19		

El valor teórico de $F_{3,16}$ considerando un nivel de significancia de 1% es, de tablas, igual con 5.29, por lo cual

$$F_0 = 4.51 < F_{3,16} = 5.29$$

implicando lo anterior que la hipótesis nula

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

$$(\text{O, equivalentemente, } H_0: \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0)$$

puede aceptarse al nivel de significancia empleado, resultado que supone la inexistencia de efectos en los valores de las reflectancias debidos a los cuatro tipos de pintura empleados en el experimento.

Conviene observar que, en este caso,

$$\hat{\gamma}_1 = \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{..} = \frac{830}{5} - 136.75 = 29.25 \quad ; \quad \hat{\gamma}_2 = \frac{685}{6} - 136.75 = -22.58$$

$$\hat{\gamma}_3 = \frac{805}{4} - 136.75 = 64.5 \quad ; \quad \hat{\gamma}_4 = \frac{415}{5} - 136.75 = -53.75$$

y que $\sum_{i=1}^{4} n_i \hat{\gamma}_i = 5(29.25) + 6(-22.58) + 4(64.5) + 5(-53.75)$

$$= 146.25 - 135.48 + 258 - 268.75 \doteq 0$$

C. PRUEBA DE IGUALDAD DE DOS MEDIAS, Y ANALISIS DE VARIANCIA

Es factible establecer la conexión que existe entre una prueba de igualdad de dos medias, a través del empleo de la estadística t, y la prueba correspondiente con la F, que implica un análisis de variancia. Para ello, hay que recordar que la estadística t se define como el cociente que se forma de una variable aleatoria normal estándar a la raíz cuadrada de otra variable independiente ji cuadrada dividida entre su número de grados de libertad, es decir,

$$t_\nu = \frac{z}{\sqrt{\chi^2/\nu}}$$

Si la expresión para t se eleva al cuadrado, se obtiene

$$t_\nu^2 = \frac{z^2}{\chi^2/\nu} = \frac{\chi^2/1}{\chi^2/\nu} = F_{1,\nu}$$

siendo $z^2/1$ una variable aleatoria ji cuadrada con un grado de libertad, dividida entre dicho número. Por lo tanto, el valor de t obtenido de las muestras con las que se realice la prueba de igualdad de medias para dos poblaciones, debe ser igual, después de elevarlo al cuadrado, con el valor de F calculado en la prueba correspondiente que se efectúe por análisis de variancia.

Para aclarar este concepto, supóngase que se desea probar la hipótesis de igualdad de medias para dos poblaciones normales e independientes, I y II, a través de muestras aleatorias de tres elementos en cada caso, con los valores de datos

I	II
15	12
10	9
21	7

y un nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

C.1 Solución a través de t

En este caso

$$H_0: \mu_I = \mu_{II}$$
$$H_1: \mu_I \neq \mu_{II}$$

con $n_I = n_{II} = 3$, $\bar{x}_I = 15.33$ y $\bar{x}_{II} = 12.67$.

Al calcular las variancias insesgadas de las muestras a través de la fórmula

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

se obtiene

$$S^2_{x_I} = \frac{1}{3-1}\sum_{i=1}^{3}(x_{i_I}-\bar{x}_I)^2 = \frac{0.1089+28.4089+32.1489}{2} = 30.33$$

$$S^2_{x_{II}} = \frac{1}{3-1}\sum_{i=1}^{3}(x_{i_{II}}-\bar{x}_{II})^2 = \frac{0.4489+40.0689+32.1489}{2} = 36.33$$

y

$$t = \frac{\bar{X}_I - \bar{X}_{II}}{\sqrt{\frac{(n_I-1)S^2_{x_I}+(n_{II}-1)S^2_{x_{II}}}{(n_I-1)+(n_{II}-1)}}\sqrt{\frac{1}{n_I}+\frac{1}{n_{II}}}} = \frac{15.33-12.67}{\sqrt{\frac{2(30.33)+2(36.33)}{2+2}}\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{15.33-12.67}{5.773(0.816)} = \frac{2.66}{4.71} = 0.565$$

con $\nu = (n_I-1)+(n_{II}-1) = n_I+n_{II}-2 = 3+3-2 = 4$ grados de libertad.

De tablas, el valor $|t_4|$ es 2.776, con $\alpha = 0.05$ para prueba de dos extremos, y como

$-t_4 = -2.776 < t = 0.565 < t_4 = 2.776$

se acepta la hipótesis H_0 de igualdad de las medias.

Los valores de t de prueba y de tablas elevados al cuadrado son

$$t^2 = (0.565)^2 = 0.319$$
$$t_4^2 = (2.776)^2 = 7.71$$

C.2 Solución a través de análisis de varianza

Para este caso, la tabla de resultados es

		OBSERVACIONES			$y_{i.}$
TRATAMIENTOS (POBLACIONES)	I	15	10	21	46
	II	12	9	7	38

$\longrightarrow j = 1,2,3 \ (n=3)$

$\downarrow i = 1,2 \ (k=2)$

$N = nk = 6$

Como $y_{..} = \sum_i y_{i.} = 46+38 = 84$, entonces $\bar{y}_{..} = \frac{y_{..}}{N} = \frac{84}{6} = 14$, y

$$N\bar{y}_{..}^2 = 6(14)^2 = 1176 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{2}\frac{y_{i.}^2}{n} = \frac{46^2+38^2}{3} = 1186.66$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} y_{ij}^2 = 15^2+10^2+21^2+12^2+9^2+7^2 = 1320$$

por lo que

$$SS_T = \sum_i\sum_j y_{ij}^2 - N\bar{y}_{..}^2 = 1320-1176 = 144$$

$$SS_B = \sum_i \frac{y_{i.}^2}{n} - N\bar{y}_{..}^2 = 1186.66-1176 = 10.66$$

$$SS_W = SS_T - SS_B = 144-10.66 = 133.34$$

y los valores medios cuadráticos resultan ser

$$MS_B = \frac{SS_B}{K-1} = \frac{10.66}{1} = 10.66$$

$$MS_W = \frac{SS_W}{N-K} = \frac{133.34}{4} = 33.335$$

El valor de la estadística de prueba es

$$F_0 = \frac{MS_B}{MS_W} = \frac{10.66}{33.335} = 0.319$$

Al 5% de significancia $F_{1,4} = 7.71$, y como

$$F_0 = 0.319 < F_{1,4} = 7.71$$

se acepta la hipótesis $H_0 : \mu_I = \mu_{II}$, que es la misma conclusión a que se llegó a través del empleo de la estadística t.

También se verifica que

$$t^2 = F_0 = 0.319$$

$$t_4^2 = F_{1,4} = 7.71$$

implicando ello que la prueba de igualdad de medias para dos poblaciones empleando a t conduce a los mismos resultados que el análisis de varianza correspondiente.

De acuerdo con las comparaciones anteriores, las únicas parejas de medias que no difieren significativamente son 1 y 5, 2 y 3, 2 y 5 y finalmente 3 y 4.

A.13 METODO DE DUNCAN

La llamada prueba del rango múltiple de DUNCAN, es un método muy extendido para realizar pruebas de comparación entre todas las parejas de medias de tratamientos. El procedimiento es muy efectivo para detectar diferencias entre medias cuando existen realmente tales diferencias, y por ello se ha convertido en el método más popular para efectuar comparaciones por parejas.

Para aplicar la prueba del rango múltiple, se ordenan de menor a mayor los K promedios de tratamientos, y se forma un primer grupo conteniendo a los K. A continuación, se forma un segundo grupo de K-1 promedios, eliminando del grupo anterior al promedio de mayor valor. Este procedimiento se continúa hasta llegar al último grupo de dos promedios. Por ejemplo, si los promedios, ya ordenados, obtenidos de muestras para K=4 tratamientos son

$$\bar{y}_{1.} = 52 \;,\; \bar{y}_{4.} = 60 \;,\; \bar{y}_{2.} = 67 \;,\; \bar{y}_{3.} = 71$$

el primer grupo de K promedios es

$$\left.\begin{array}{l} \bar{y}_{1.} = 52 \\ \bar{y}_{4.} = 60 \\ \bar{y}_{2.} = 67 \\ \bar{y}_{3.} = 71 \end{array}\right. \qquad \text{GRUPO 1}$$

Al eliminar el promedio de mayor valor ($\bar{y}_{3.} = 71$) el segundo grupo con $K-1 = 3$ promedios queda como

$$\left.\begin{array}{l} \bar{y}_{1.} = 52 \\ \bar{y}_{4.} = 60 \\ \bar{y}_{2.} = 67 \end{array}\right. \qquad \text{GRUPO 2}$$

Eliminando el valor $\bar{y}_{2.} = 67$ del grupo anterior, el tercer grupo con $K-2 = 2$ promedios corresponde a

$$\left.\begin{array}{l} \bar{y}_{1.} = 52 \\ \bar{y}_{4.} = 60 \end{array}\right. \qquad \text{GRUPO 3}$$

Una vez que se han formado todos los grupos de promedios, se procede a calcular las diferencias entre el promedio de mayor valor en cada grupo y cada uno de los promedios restantes incluidos en el mismo. Para el grupo 1, la primera diferencia es $\bar{y}_{3.} - \bar{y}_{1.} = 71-52$, siendo su valor igual con el rango (71-52) de los promedios 52, 60, 67 y 71. Para el mismo grupo, la segunda diferencia es $\bar{y}_{3.} - \bar{y}_{4.} = 71-60$, igual con el rango de los promedios 60, 67 y 71. La tercera y última diferencia es $\bar{y}_{3.} - \bar{y}_{2.} = 71-67$, y este valor equivale al rango para los promedios 67 y 71. Es decir, calcular las diferencias entre los promedios en la forma indicada es, para el primer grupo, equivalente a calcular los rangos para cuatro, tres y dos promedios, respectivamente.

Entonces, las diferencias entre promedios para cada uno de los grupos son

GRUPO 1

$\bar{y}_{3.} - \bar{y}_{1.} = 71-52$ (Rango de $\underline{4}$ promedios: 52, 60, 67 y 71)

$\bar{y}_{3.} - \bar{y}_{4.} = 71-60$ (Rango de $\underline{3}$ promedios: 60, 67 y 71)

$\bar{y}_{3.} - \bar{y}_{2.} = 71-67$ (Rango de $\underline{2}$ promedios: 67 y 71)

GRUPO 2

$\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{1.} = 67-52$ (Rango de $\underline{3}$ promedios: 52, 60 y 67)

$\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{4.} = 67-60$ (Rango de $\underline{2}$ promedios: 60 y 67)

GRUPO 3

$\bar{y}_{4.} - \bar{y}_{1.} = 60-52$ (Rango de $\underline{2}$ promedios: 52 y 60)

Obsérvese que al calcular las seis diferencias anteriores, se plantearon las $K(K-1)/2 = 4(4-1)/2$ contrastes que se requieren para efectuar todas las comparaciones de medias por parejas para los K tratamientos.

A continuación, se deben obtener los $K-1$ <u>rangos mínimos significativos</u>

$$R_p = r_\alpha(p,f)\sqrt{\frac{MS_W}{n_H}} \quad ; \; p = 2, 3, \ldots, K$$

en donde α es la significancia para el análisis de varianza original, MS_W el valor medio cuadrático del error obtenido en el mismo análisis, f el número de grados de libertad para SS_W, en este caso $N-K$, $r_\alpha(p,f)$ para $p = 2, 3, \ldots, K$, el valor leído en la tabla de rangos significativos de DUNCAN que se anexa a continuación, y

$$n_H = n \qquad \text{(diseño balanceado)}$$

$$n_H = \frac{K}{\sum_i \frac{1}{n_i}} \qquad \text{(diseño desbalanceado)}$$

CH-19

RANGOS SIGNIFICATIVOS DE DUNCAN

$r_{.01}(p, f)$

f	p = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100
1	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0
2	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0
3	8.26	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	8.9	9.0	9.0	9.3	9.3	9.3
4	6.51	6.8	6.9	7.0	7.1	7.1	7.2	7.2	7.3	7.5	7.5	7.5
5	5.70	5.96	6.11	6.18	6.26	6.33	6.40	6.44	6.5	6.8	6.8	6.8
6	5.24	5.51	5.65	5.73	5.81	5.88	5.95	6.00	6.0	6.3	6.3	6.3
7	4.95	5.22	5.37	5.45	5.53	5.61	5.69	5.73	5.8	6.0	6.0	6.0
8	4.74	5.00	5.14	5.23	5.32	5.40	5.47	5.51	5.5	5.8	5.8	5.8
9	4.60	4.86	4.99	5.08	5.17	5.25	5.32	5.36	5.4	5.7	5.7	5.7
10	4.48	4.73	4.88	4.96	5.06	5.13	5.20	5.24	5.28	5.55	5.55	5.55
11	4.39	4.63	4.77	4.86	4.94	5.01	5.06	5.12	5.15	5.39	5.39	5.39
12	4.32	4.55	4.68	4.76	4.84	4.92	4.96	5.02	5.07	5.26	5.26	5.26
13	4.26	4.48	4.62	4.69	4.74	4.84	4.88	4.94	4.98	5.15	5.15	5.15
14	4.21	4.42	4.55	4.63	4.70	4.78	4.83	4.87	4.91	5.07	5.07	5.07
15	4.17	4.37	4.50	4.58	4.64	4.72	4.77	4.81	4.84	5.00	5.00	5.00
16	4.13	4.34	4.45	4.54	4.60	4.67	4.72	4.76	4.79	4.94	4.94	4.94
17	4.10	4.30	4.41	4.50	4.56	4.63	4.68	4.73	4.75	4.89	4.89	4.89
18	4.07	4.27	4.38	4.46	4.53	4.59	4.64	4.68	4.71	4.85	4.85	4.85
19	4.05	4.24	4.35	4.43	4.50	4.56	4.61	4.64	4.67	4.82	4.82	4.82
20	4.02	4.22	4.33	4.40	4.47	4.53	4.58	4.61	4.65	4.79	4.79	4.79
30	3.89	4.06	4.16	4.22	4.32	4.36	4.41	4.45	4.48	4.65	4.71	4.71
40	3.82	3.99	4.10	4.17	4.24	4.30	4.34	4.37	4.41	4.59	4.69	4.69
60	3.76	3.92	4.03	4.12	4.17	4.23	4.27	4.31	4.34	4.53	4.66	4.66
100	3.71	3.86	3.98	4.06	4.11	4.17	4.21	4.25	4.29	4.48	4.64	4.65
∞	3.64	3.80	3.90	3.98	4.04	4.09	4.14	4.17	4.20	4.41	4.60	4.68

f = degrees of freedom.

[a] Reproduced with permission from "Multiple Range and Multiple F Tests," by D. B. Duncan, *Biometrics*, Vol. 1, No. 1, pp. 1–42, 1955.

$r_{.05}(p, f)$

f	p = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100
1	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0
2	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09
3	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50
4	3.93	4.01	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02
5	3.64	3.74	3.79	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83
6	3.46	3.58	3.64	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68
7	3.35	3.47	3.54	3.58	3.60	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61
8	3.26	3.39	3.47	3.52	3.55	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56
9	3.20	3.34	3.41	3.47	3.50	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52
10	3.15	3.30	3.37	3.43	3.46	3.47	3.47	3.47	3.47	3.48	3.48	3.48
11	3.11	3.27	3.35	3.39	3.43	3.44	3.45	3.46	3.46	3.48	3.48	3.48
12	3.08	3.23	3.33	3.36	3.40	3.42	3.44	3.44	3.46	3.48	3.48	3.48
13	3.06	3.21	3.30	3.35	3.38	3.41	3.42	3.44	3.45	3.47	3.47	3.47
14	3.03	3.18	3.27	3.33	3.37	3.39	3.41	3.42	3.44	3.47	3.47	3.47
15	3.01	3.16	3.25	3.31	3.36	3.38	3.40	3.42	3.43	3.47	3.47	3.47
16	3.00	3.15	3.23	3.30	3.34	3.37	3.39	3.41	3.43	3.47	3.47	3.47
17	2.98	3.13	3.22	3.28	3.33	3.36	3.38	3.40	3.42	3.47	3.47	3.47
18	2.97	3.12	3.21	3.27	3.32	3.35	3.37	3.39	3.41	3.47	3.47	3.47
19	2.96	3.11	3.19	3.26	3.31	3.35	3.37	3.39	3.41	3.47	3.47	3.47
20	2.95	3.10	3.18	3.25	3.30	3.34	3.36	3.38	3.40	3.47	3.47	3.47
30	2.89	3.04	3.12	3.20	3.25	3.29	3.32	3.35	3.37	3.47	3.47	3.47
40	2.86	3.01	3.10	3.17	3.22	3.27	3.30	3.33	3.35	3.47	3.47	3.47
60	2.83	2.98	3.08	3.14	3.20	3.24	3.28	3.31	3.33	3.47	3.48	3.48
100	2.80	2.95	3.05	3.12	3.18	3.22	3.26	3.29	3.32	3.47	3.53	3.53
∞	2.77	2.92	3.02	3.09	3.15	3.19	3.23	3.26	3.29	3.47	3.61	3.67

f = degrees of freedom.

Para realizar la prueba de significancia de alguna diferencia de promedios, que equivalga a un rango de p promedios, se compara dicha diferencia con el valor R_p del rango mínimo significativo correspondiente, y si la diferencia es mayor que R_p se concluye que la pareja de medias en cuestión es significativamente diferente, repitiéndose el proceso hasta que las $k(k-1)/2$ parejas de promedios se hayan probado. Como ejemplo, para los cuatro promedios que se han manejado, las pruebas se efectuarán considerando que

$\bar{y}_{3.} - \bar{y}_{1.}$ se debe comparar con R_4

$\bar{y}_{3.} - \bar{y}_{4.}$ se debe comparar con R_3

$\bar{y}_{3.} - \bar{y}_{2.}$ se debe comparar con R_2

$\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{1.}$ se debe comparar con R_3

$\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{4.}$ se debe comparar con R_2

$\bar{y}_{4.} - \bar{y}_{1.}$ se debe comparar con R_2

Para evitar contradicciones, no se deben considerar como significativas las diferencias en parejas de medias, cuando las medias involucradas se encuentran entre otra pareja que no difiere significativamente.

A.14 EJEMPLO

Para el problema tratado en A.5, los promedios ordenados son

$$\bar{y}_{3.} = \frac{42}{3} = 14.00, \quad \bar{y}_{1.} = \frac{65}{3} = 21.67, \quad \bar{y}_{2.} = \frac{70}{3} = 23.33$$

y los grupos de promedios quedan

$\bar{y}_{3.} = 14$
$\bar{y}_{1.} = 21.67$ GRUPO 1
$\bar{y}_{2.} = 23.33$

$\bar{y}_{3.} = 14$ GRUPO 2
$\bar{y}_{1.} = 21.67$

Entonces, las diferencias entre promedios previstas para cada uno de los grupos son

GRUPO 1

$\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{3.} = 23.33 - 14.00 = 9.33$ (Rango para 3 promedios)

$\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{1.} = 23.33 - 21.67 = 1.66$ (Rango para 2 promedios)

GRUPO 2

$\bar{y}_{1.} - \bar{y}_{3.} = 21.67 - 14.00 = 7.67$ (Rango para 2 promedios)

Puesto que se requieren rangos mínimos significativos para dos y tres promedios, siendo $\alpha = 1\%$ y $MS_W = 6.55$, con $f = 6$ grados de libertad, los valores de $r_\alpha(p, f)$ para p igual con 2 y 3 resultan

$$r_{0.01}(2,6) = 5.24$$

$$r_{0.01}(3,6) = 5.51$$

Por lo tanto, con $n = 3$,

$$R_2 = r_{0.01}(2,6)\sqrt{\frac{MS_W}{n}} = 5.24(1.478) = 7.74$$

$$R_3 = r_{0.01}(3,6)\sqrt{\frac{MS_W}{n}} = 5.51(1.478) = 8.14$$

y las comparaciones finales resultan

$\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{3.} = 9.33 > R_3 = 8.14$ (Rechazo)

$\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{1.} = 1.66 < R_2 = 7.74$ (Aceptación)

$\bar{y}_{1.} - \bar{y}_{3.} = 7.67 < R_2 = 7.74$ (Aceptación con duda)

Obsérvese que las conclusiones son, en este caso, idénticas a las obtenidas a través del método de la DMS.

A.15 EJEMPLO

Para el problema de las fibras sintéticas visto en A.6, los promedios ya ordenados son

$$\bar{y}_{1.} = 9.8,\quad \bar{y}_{5.} = 10.8,\quad \bar{y}_{2.} = 15.4,\quad \bar{y}_{3.} = 17.6,\quad \bar{y}_{4.} = 21.6$$

y se forman los grupos

$\bar{y}_{1.} = 9.8$

$\bar{y}_{5.} = 10.8$

$\bar{y}_{2.} = 15.4$ GRUPO 1

$\bar{y}_{3.} = 17.6$

$\bar{y}_{4.} = 21.6$

$\bar{y}_{1.} = 9.8$
$\bar{y}_{5.} = 10.8$
$\bar{y}_{2.} = 15.4$
$\bar{y}_{3.} = 17.6$

GRUPO 2

$\bar{y}_{1.} = 9.8$
$\bar{y}_{5.} = 10.8$
$\bar{y}_{2.} = 15.4$

GRUPO 3

$\bar{y}_{1.} = 9.8$
$\bar{y}_{5.} = 10.8$

GRUPO 4

cuyas diferencias de promedios son

GRUPO 1

$\bar{y}_{4.} - \bar{y}_{1.} = 21.6 - 9.8 = 11.8$ (Rango de 5 promedios)
$\bar{y}_{4.} - \bar{y}_{5.} = 21.6 - 10.8 = 10.8$ (Rango de 4 promedios)
$\bar{y}_{4.} - \bar{y}_{2.} = 21.6 - 15.4 = 6.2$ (Rango de 3 promedios)
$\bar{y}_{4.} - \bar{y}_{3.} = 21.6 - 17.6 = 4.0$ (Rango de 2 promedios)

GRUPO 2

$\bar{y}_{3.} - \bar{y}_{1.} = 17.6 - 9.8 = 7.8$ (Rango de 4 promedios)
$\bar{y}_{3.} - \bar{y}_{5.} = 17.6 - 10.8 = 6.8$ (Rango de 3 promedios)
$\bar{y}_{3.} - \bar{y}_{2.} = 17.6 - 15.4 = 2.2$ (Rango de 2 promedios)

GRUPO 3

$\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{1.} = 15.4 - 9.8 = 5.6$ (Rango de 3 promedios)
$\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{5.} = 15.4 - 10.8 = 4.6$ (Rango de 2 promedios)

GRUPO 4

$\bar{y}_{5.} - \bar{y}_{1.} = 10.8 - 9.8 = 1.0$ (Rango de 2 promedios)

Los rangos mínimos significativos requeridos para realizar las comparaciones son, tomando en cuenta que $\alpha = 0.01$, $MS_W = 8.06$, con $f = N - K = 25 - 5 = 20$ grados de libertad y $n = 5$, los siguientes:

$r_{0.01}(2, 20) = 4.02$
$r_{0.01}(3, 20) = 4.22$

$r_{0.01}(4,20) = 4.33$

$r_{0.01}(5,20) = 4.40$

Por lo tanto,

$$R_2 = r_{0.01}(2,20)\sqrt{\frac{8.06}{5}} = (4.02)(1.27) = 5.10$$

$$R_3 = r_{0.01}(3,20)\sqrt{\frac{8.06}{5}} = (4.22)(1.27) = 5.36$$

$$R_4 = r_{0.01}(4,20)\sqrt{\frac{8.06}{5}} = (4.33)(1.27) = 5.50$$

$$R_5 = r_{0.01}(5,20)\sqrt{\frac{8.06}{5}} = (4.40)(1.27) = 5.59$$

y las comparaciones finales son

$\bar{y}_{4.} - \bar{y}_{1.} = 11.8 > R_5 = 5.59$ (Rechazo)

$\bar{y}_{4.} - \bar{y}_{5.} = 10.8 > R_4 = 5.50$ (Rechazo)

$\bar{y}_{4.} - \bar{y}_{2.} = 6.2 > R_3 = 5.56$ (Rechazo)

$\bar{y}_{4.} - \bar{y}_{3.} = 4.0 < R_2 = 5.10$ (Aceptación)

$\bar{y}_{3.} - \bar{y}_{1.} = 7.8 > R_4 = 5.50$ (Rechazo)

$\bar{y}_{3.} - \bar{y}_{5.} = 6.8 > R_3 = 5.36$ (Rechazo)

$\bar{y}_{3.} - \bar{y}_{2.} = 2.2 < R_2 = 5.10$ (Aceptación)

$\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{1.} = 5.6 > R_3 = 5.36$ (Rechazo)

$\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{5.} = 4.6 < R_2 = 5.10$ (Aceptación)

$\bar{y}_{5.} - \bar{y}_{1.} = 1.0 < R_2 = 5.10$ (Aceptación)

En este caso, también se confirman las conclusiones hechas para todas las parejas de medias cuando se aplicó el criterio de la DMS.

Conviene hacer mención de que el método de rangos múltiples de DUNCAN, por considerarse tal vez el más sensible de todos los procedimientos para comparaciones por parejas, se encuentra disponible en gran número de paquetes de programación en computadoras para el análisis de varianza.

A.16 COMPARACIONES DE TRATAMIENTOS CON UN CONTROL. METODO DE DUNNETT

En ocasiones uno de los tratamientos que intervienen en el experimento se considera como tratamiento estándar o de control, y el experimentador muestra interés en comparar cada una de las $k-1$ medias de los tratamientos restantes con la del control. Esas $k-1$ comparaciones por parejas se pueden efectuar aplicando el procedimiento desarrollado por DUNNETT, que es una variante de la prueba t para dos medias común. Dicho método se explica a continuación.

Supóngase que se tienen los tratamientos $1, 2, \ldots, k$, y que el tratamiento de control es k. Entonces, las hipótesis que se desean probar son

$$H_0: \mu_i = \mu_k$$
$$H_1: \mu_i \neq \mu_k \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1$$

Para hacerlo, se deben obtener los valores absolutos de los $k-1$ contrastes correspondientes, es decir,

$$|\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{k.}| \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1$$

Entonces, la hipótesis nula H_0 se rechaza al nivel α si, para diseños desbalanceados,

$$|\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{k.}| > d_\alpha(k-1, f)\sqrt{MS_W\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_k}\right)}$$

en donde el valor $d_\alpha(k-1, f)$, llamado en ocasiones t de DUNNETT, se puede leer en la tabla que se presenta a continuación, en función del nivel α, el número $k-1$ de tratamientos que se comparan con el control y el valor de f, que es el número de grados de libertad para SS_W en el análisis de varianza original.

<u>NOTA</u>. Cuando el experimentador sabe de antemano que uno de los tratamientos va a representar un control, es recomendable, para hacer más sensibles las comparaciones explicadas, que emplee un tamaño de muestra para el tratamiento de control lo más próximo a

$$n_k = n\sqrt{k}$$

suponiendo que los $k-1$ tratamientos restantes sean muestreados con n elementos en cada caso.

CH-25

VALORES CRITICOS PARA PRUEBA DE DUNNETT

$d_{.01}(a-1, f)$

Two-Sided Comparisons

f	$a - 1$ = number of treatment means (excluding control)								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	4.03	4.63	4.98	5.22	5.41	5.56	5.69	5.80	5.89
6	3.71	4.21	4.51	4.71	4.87	5.00	5.10	5.20	5.28
7	3.50	3.95	4.21	4.39	4.53	4.64	4.74	4.82	4.89
8	3.36	3.77	4.00	4.17	4.29	4.40	4.48	4.56	4.62
9	3.25	3.63	3.85	4.01	4.12	4.22	4.30	4.37	4.43
10	3.17	3.53	3.74	3.88	3.99	4.08	4.16	4.22	4.28
11	3.11	3.45	3.65	3.79	3.89	3.98	4.05	4.11	4.16
12	3.05	3.39	3.58	3.71	3.81	3.89	3.96	4.02	4.07
13	3.01	3.33	3.52	3.65	3.74	3.82	3.89	3.94	3.99
14	2.98	3.29	3.47	3.59	3.69	3.76	3.83	3.88	3.93
15	2.95	3.25	3.43	3.55	3.64	3.71	3.78	3.83	3.88
16	2.92	3.22	3.39	3.51	3.60	3.67	3.73	3.78	3.83
17	2.90	3.19	3.36	3.47	3.56	3.63	3.69	3.74	3.79
18	2.88	3.17	3.33	3.44	3.53	3.60	3.66	3.71	3.75
19	2.86	3.15	3.31	3.42	3.50	3.57	3.63	3.68	3.72
20	2.85	3.13	3.29	3.40	3.48	3.55	3.60	3.65	3.69
24	2.80	3.07	3.22	3.32	3.40	3.47	3.52	3.57	3.61
30	2.75	3.01	3.15	3.25	3.33	3.39	3.44	3.49	3.52
40	2.70	2.95	3.09	3.19	3.26	3.32	3.37	3.41	3.44
60	2.66	2.90	3.03	3.12	3.19	3.25	3.29	3.33	3.37
120	2.62	2.85	2.97	3.06	3.12	3.18	3.22	3.26	3.29
∞	2.58	2.79	2.92	3.00	3.06	3.11	3.15	3.19	3.22

$d_{.05}(a-1, f)$

Two-Sided Comparisons

f	$a - 1$ = Number of treatment means (excluding control)								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	2.57	3.03	3.29	3.48	3.62	3.73	3.82	3.90	3.97
6	2.45	2.86	3.10	3.26	3.39	3.49	3.57	3.64	3.71
7	2.36	2.75	2.97	3.12	3.24	3.33	3.41	3.47	3.53
8	2.31	2.67	2.88	3.02	3.13	3.22	3.29	3.35	3.41
9	2.26	2.61	2.81	2.95	3.05	3.14	3.20	3.26	3.32
10	2.23	2.57	2.76	2.89	2.99	3.07	3.14	3.19	3.24
11	2.20	2.53	2.72	2.84	2.94	3.02	3.08	3.14	3.19
12	2.18	2.50	2.68	2.81	2.90	2.98	3.04	3.09	3.14
13	2.16	2.48	2.65	2.78	2.87	2.94	3.00	3.06	3.10
14	2.14	2.46	2.63	2.75	2.84	2.91	2.97	3.02	3.07
15	2.13	2.44	2.61	2.73	2.82	2.89	2.95	3.00	3.04
16	2.12	2.42	2.59	2.71	2.80	2.87	2.92	2.97	3.02
17	2.11	2.41	2.58	2.69	2.78	2.85	2.90	2.95	3.00
18	2.10	2.40	2.56	2.68	2.76	2.83	2.89	2.94	2.98
19	2.09	2.39	2.55	2.66	2.75	2.81	2.87	2.92	2.96
20	2.09	2.38	2.54	2.65	2.73	2.80	2.86	2.90	2.95
24	2.06	2.35	2.51	2.61	2.70	2.76	2.81	2.86	2.90
30	2.04	2.32	2.47	2.58	2.66	2.72	2.77	2.82	2.86
40	2.02	2.29	2.44	2.54	2.62	2.68	2.73	2.77	2.81
60	2.00	2.27	2.41	2.51	2.58	2.64	2.69	2.73	2.77
120	1.98	2.24	2.38	2.47	2.55	2.60	2.65	2.69	2.73
∞	1.96	2.21	2.35	2.44	2.51	2.57	2.61	2.65	2.69

f = degrees of freedom.

*Reproduced with permission from C. W. Dunnett, "New Tables for Multiple Comparison with a Control," *Biometrics*, Vol. 20, No. 3, 1964, and from C. W. Dunnett, "A Multiple Comparison Procedure for Comparing Several Treatments with a Control," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 50, 1955.

Finalmente, si el diseño es balanceado ($n_i = n, \forall i$), la hipótesis nula H_0 se rechaza al nivel α siempre que

$$|\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{k.}| > d_\alpha(k-1, f)\sqrt{\frac{2MS_W}{n}}$$

A.17 EJEMPLO

Para el problema de las fibras sintéticas tratado en A.6, supóngase que el tratamiento 2 es el estándar o de control. Sabiendo que $\alpha = 0.01$, $k = 5$, $k-1 = 4$, $n = 5$ y $MS_W = 8.06$ con $f = 20$ grados de libertad, en la tabla anexa se encuentra que

$$d_{0.01}(4, 20) = 3.40$$

Por lo tanto, ya que se trata de un diseño balanceado,

$$\sqrt{\frac{2MS_W}{n}} = \sqrt{\frac{2(8.06)}{5}} = 1.795$$

y

$$d_{0.01}(4,20)\sqrt{\frac{2MS_W}{5}} = 3.40(1.795) = 6.105$$

Las comparaciones correspondientes son

$|\bar{y}_{1.} - \bar{y}_{2.}| = |9.8 - 15.4| = 5.6 < 6.105$ (Aceptación)

$|y_{3.} - y_{2.}| = |17.6 - 15.4| = 2.2 < 6.105$ (Aceptación)

$|\bar{y}_{4.} - \bar{y}_{2.}| = |21.6 - 15.4| = 6.2 > 6.105$ (Rechazo)

$|\bar{y}_{5.} - \bar{y}_{2.}| = |10.8 - 15.4| = 4.6 < 6.105$ (Aceptación)

Entonces, únicamente la diferencia $|y_{4.} - y_{2.}|$ indica valor significativo al realizar la comparación, por lo cual se concluye que

$$\mu_4 \neq \mu_2$$

A.18 INTERVALOS DE CONFIANZA PARA MEDIAS DE TRATAMIENTOS

Después de haber realizado un análisis de varianza, es común generar intervalos de confianza al $1-\alpha$ %, en donde α es el nivel de significancia con que se efectuó la prueba F correspondiente, para las medias de los tratamientos de interés. Para hacerlo, téngase en cuenta que, para alguna i,

$$VAR(\bar{y}_{i.}) = VAR\left(\sum_j \frac{y_{ij}}{n_i}\right) = \frac{\sum_j VAR(y_{ij})}{n_i^2} = \frac{n_i\sigma_e^2}{n_i^2} = \frac{\sigma_e^2}{n_i}$$

De acuerdo con el resultado anterior, se puede establecer el intervalo de confianza para μ_i siguiente:

$$P\left\{\bar{y}_{i.} - t_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma_e^2/n_i} \le \mu_i \le \bar{y}_{i.} + t_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma_e^2/n_i}\right\} = 1-\alpha$$

y, al recordar que MS_W es un estimador insesgado de σ_e^2, los límites de confianza del $1-\alpha$ % para μ_i resultan

$$\bar{y}_{i.} \pm t_{1-\alpha/2}\sqrt{MS_W/n_i}$$

y los grados de libertad para t son los correspondientes a SS_W.

A.19 EJEMPLO

Para el problema de A.5, $\alpha = 0.01$, $n_1 = n_2 = n_3 = n = 3$ y $MS_W = 6.55$ con 6 grados de libertad. Por lo tanto,

$$\sqrt{\frac{MS_W}{n_i}} = \sqrt{\frac{6.55}{3}} = 1.478 \quad , \quad t_{1-\alpha/2} = t_{0.995} = 3.71 \quad (\nu = 6)$$

y

$$t_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{MS_W}{n_i}} = 3.71(1.478) = 5.483$$

Entonces, siendo $\bar{y}_{1.} = 21.67$, $\bar{y}_{2.} = 23.33$ y $\bar{y}_{3.} = 14.00$, se obtienen los límites de confianza

$\mu_1: 21.67 \pm 5.483$; $\mu_2: 23.33 \pm 5.483$; $\mu_3: 14.00 \pm 5.483$

por lo que

$$P\{16.187 \le \mu_1 \le 27.153\} = 0.99$$

$$P\{17.847 \le \mu_2 \le 28.813\} = 0.99$$

$$P\{8.517 \le \mu_3 \le 19.483\} = 0.99$$

CLASIFICACION EN UNA DIRECCION: observación de dos variables

	t				
	1	2	3	$\ldots$	k
	X_{11}, Y_{11}	X_{21}, Y_{21}	X_{31}, Y_{31}		X_{k1}, Y_{k1}
	X_{12}, Y_{12}	X_{22}, Y_{22}	X_{32}, Y_{32}		X_{k2}, Y_{k2}
i	X_{13}, Y_{13}	X_{23}, Y_{23}	X_{33}, Y_{33}		X_{k3}, Y_{k3}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	X_{1n_1}, Y_{1n_1}	X_{2n_2}, Y_{2n_2}	X_{3n_3}, Y_{3n_3}		X_{kn_k}, Y_{k,n_k}

Si se tiene que es aceptable una relación lineal de Y con base en X pero que pudiera variar de uno a otro "tratamiento" o grupo, un modelo apropiado será:

$$Y_{ti} = \alpha_t + \beta_t X_{ti} + z_{ti}$$

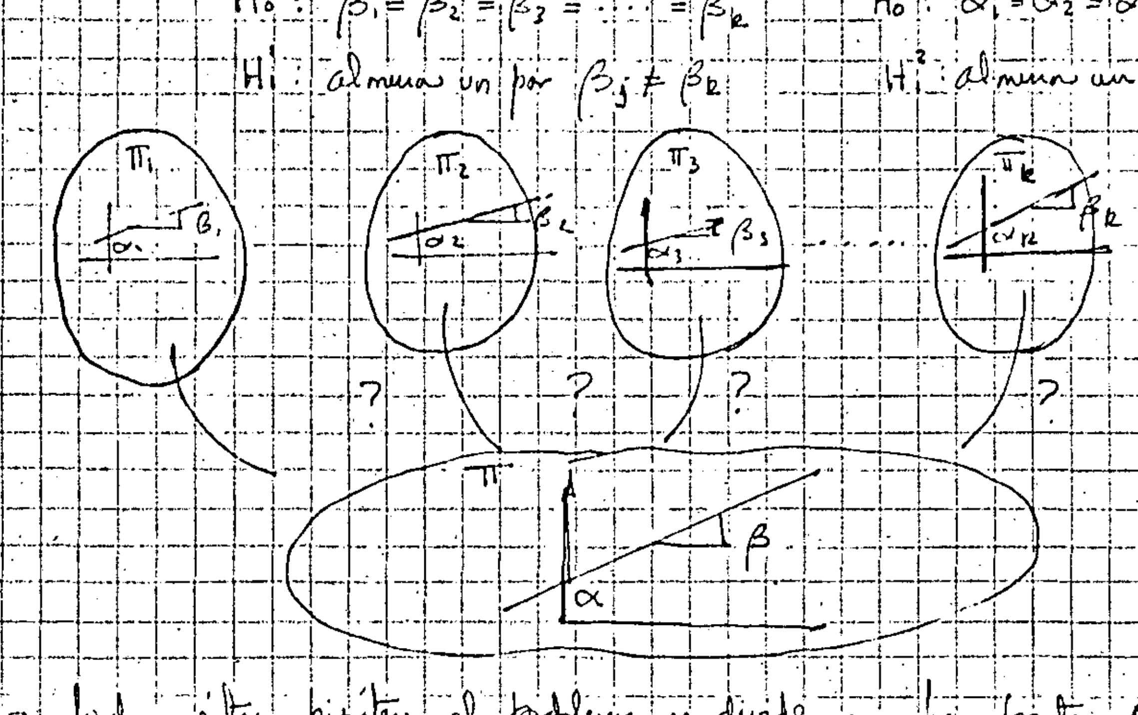
$$i = 1, 2, 3 \ldots n_t \; ; \; t = 1, 2, 3, \ldots k$$

¿Puede usarse un solo modelo para todos los grupos? $Y = \alpha + \beta X$

para contestar la pregunta deben plantearse las hipótesis:

$H_0^1: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_k$ $\qquad$ $H_0^2: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_k$

H_1^1: al menos un par $\beta_j \neq \beta_k$ $\qquad$ H_1^2: al menos un $\alpha_i \neq \alpha_j$



Para probar estas hipótesis el problema se divide en tres partes o pruebas:

a) $H_0^{(1)}$: las líneas de regresión son paralelas: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_k$.
$H_1^{(1)}$: al menos dos líneas no son paralelas: $\beta_r \neq \beta_s$.

b) $H_0^{(2)}$: las medias de los grupos caen en una línea recta; o sea, los puntos $(\bar{X}_{t\cdot}, \alpha_t + \beta_t \bar{X}_{t\cdot})$ se alinean en una línea recta

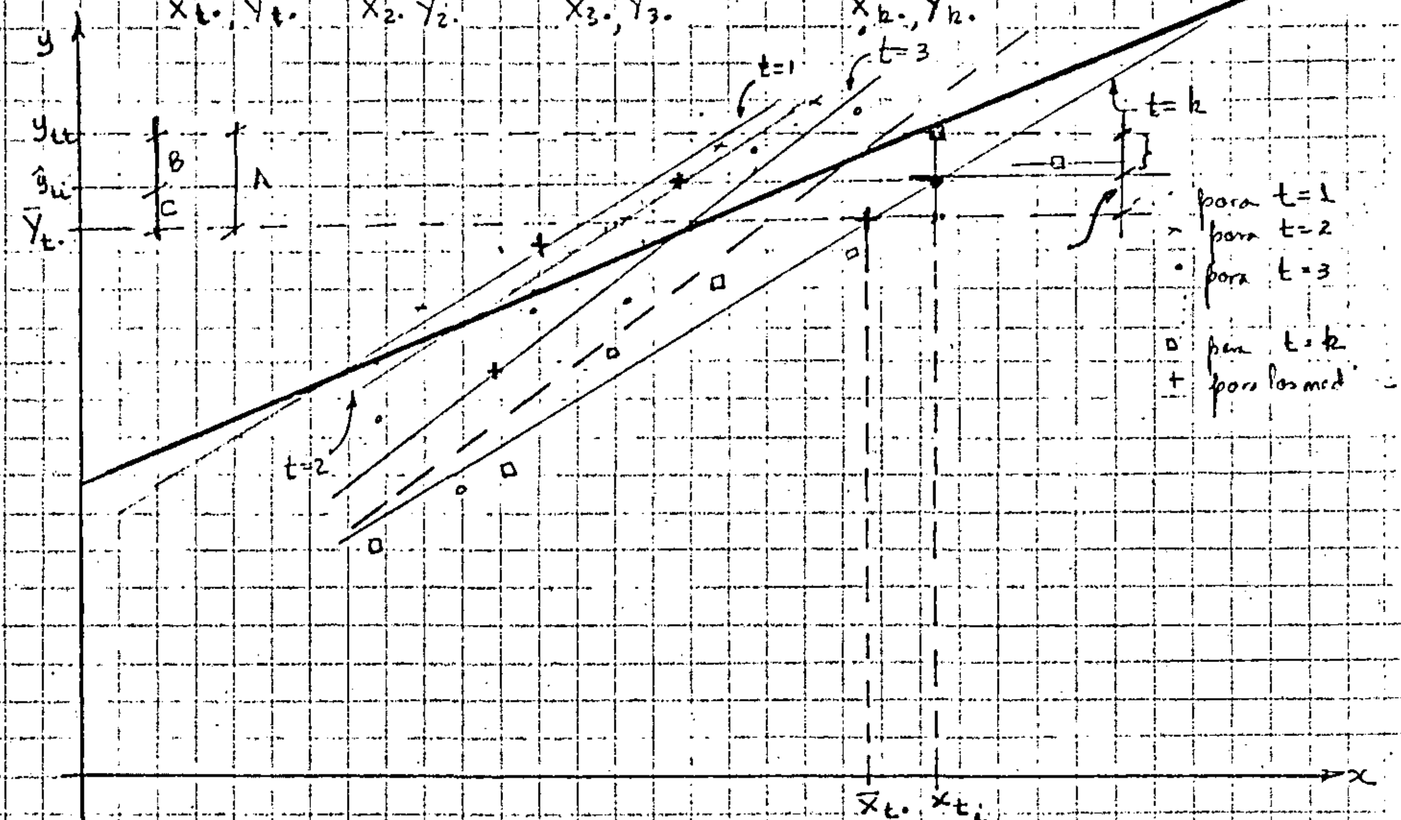
$H_1^{(2)}$: las medias de los grupos o "tratamientos" no caen en una misma línea recta.

y.

c) $H_0^{(3)}$: la pendiente de la linea anterior es igual al común, β_c, de $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_k$.

$H_1^{(3)}$: no es igual al común de $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots \beta_k$.

t = 1	2	3	...	k
X_{11}, Y_{11}	X_{21}, Y_{21}	X_{31}, Y_{31}		X_{k1}, Y_{k1}
X_{12}, Y_{12}	X_{22}, Y_{22}	X_{32}, Y_{32}		X_{k2}, Y_{k2}
X_{13}, Y_{13}	X_{23}, Y_{23}	X_{33}, Y_{33}		X_{k3}, Y_{k3}
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$X_{1n_{t_1}}, Y_{1,n_{t_1}}$	$X_{2,n_{t_2}}, Y_{2,n_{t_2}}$	$X_{3,n_{t_3}}, Y_{3,n_{t_3}}$		X_{k,n_k}, Y_{k,n_k}
$\bar{X}_{1\cdot}, \bar{Y}_{1\cdot}$	$\bar{X}_{2\cdot}, \bar{Y}_{2\cdot}$	$\bar{X}_{3\cdot}, \bar{Y}_{3\cdot}$		$\bar{X}_{k\cdot}, \bar{Y}_{k\cdot}$



a) Prueba de las pendientes entre grupos:

a.1) lo primero que hay que hacer es estimar las rectas de regresión para cada grupo por separado:

1) $E\{Y/x\} = A_t + B_t X$; $t = 1, 2, 3 \ldots k$; A y B: variables aleatorias

de la fig. para el grupo t: $A = C + B$ donde C es la diferencia explicada por la regresión
B es la diferencia NO explicada por la regresión o error o residuo
A es la diferencia total:

$A = y_{ti} - \bar{Y}_{t\cdot}$
$B = y_{ti} - \hat{y}_{ti}$
$C = \hat{y}_{ti} - \bar{Y}_{t\cdot}$

$\therefore$ 2) $y_{ti} - \bar{y}_{t\cdot} = (\hat{y}_{ti} - \bar{Y}_{t\cdot}) + (y_{ti} - \hat{y}_{ti})$

a.2) Calculamos la suma de cuadrados de los errores (S_r) "global" de 1): 1') $\hat{y}_{ti} = A_t + B_t x_{ti}$

1'') $\bar{y}_{t.} = A_t + B_t \bar{x}_{t.}$

$\therefore \hat{y}_{ti} - \bar{y}_{t.} = \cancel{A_t} + B_t x_{ti} - \cancel{A_t} - B_t \bar{x}_{t.} = B_t(x_{ti} - \bar{x}_{t.}) \quad \ldots (3)$

3) en 2):

4) ... $y_{ti} - \bar{y}_{t.} = B_t(x_{ti} - \bar{x}_{t.}) + (y_{ti} - \hat{y}_{ti})$

1') en 4): $= \quad y_{ti} - A_t + B_t x_{ti} \quad \ldots (5$

de 1'') $A_t = \bar{y}_{t.} - B_t \bar{x}_{t.} \quad \ldots (1'''$

1''') en 5): $y_{ti} - \bar{y}_{t.} = B_t(x_{ti} - \bar{x}_{t.}) + y_{ti} - \bar{y}_{t.} + B_t \bar{x}_{t.} - B_t x_{ti}$

$- B_t(x_{ti} - \bar{x}_{t.})$

$\therefore$

6) $y_{ti} - \bar{y}_{t.} = B_t(x_{ti} - \bar{x}_{t.}) + (y_{ti} - \bar{y}_{t.} - B_t(x_{ti} - \bar{x}_{t.}))$

elevando 6) al cuadrado en el lado derecho se tiene un binomio al cuadrado cuyo doble producto del primero por el segundo miembro vale; aplicando el operador Σ

$\Sigma B_t(x_{ti} - \bar{x}_{t.})(y_{ti} - \bar{y}_{t.} - B_t(x_{ti} - \bar{x}_{t.}))$

$= \Sigma(B_t x_{ti} - B_t \bar{x}_{t.})(y_{ti} - \bar{y}_{t.} - B_t x_{ti} + B_t \bar{x}_{t.})$

$= \Sigma[B_t x_{ti} y_{ti} - B_t x_{ti} \bar{y}_{t.} - B_t^2 x_{ti}^2 + B_t^2 x_{ti} \bar{x}_{t.} - B_t \bar{x}_{t.} y_{ti} + B_t \bar{x}_{t.} \bar{y}_{t.} + B_t^2 \bar{x}_{t.}^2 + B_t^2 x_{ti} \bar{x}_{t.}$

$B_t n \cancel{\bar{x}_{t.}} \bar{y}_{t.} - n B_t \cancel{\bar{x}_{t.}} \bar{y}_{t.} - B^2 \cancel{\Sigma x_{ti}^2} + 2B^2 n \cancel{\bar{x}_{t.}} \bar{x}_{t.} - B_t n \cancel{\bar{x}_{t.}} \bar{y}_{t.} + n B_t \cancel{\bar{x}_{t.}} \bar{y}_{t.} + n B_t^2 \cancel{\bar{x}_{t.}^2}$

$= 0$

por lo cual es válido elevar al cuadrado y sumar la aplicar el operador Σ a (6) y tener

7) ... $\sum_{i=1}^{n_t} (y_{ti} - \bar{y}_{t.})^2 = \sum_i B_t^2 (x_{ti} - \bar{x}_{t.})^2 + \sum_i (y_{ti} - \bar{y}_{t.} - B_t(x_{ti} - \bar{x}_{t.}))^2$

expresión que se aplica para $t = 1, 2, \ldots k$.

sumando 7) para todos los tratamientos

8) $\sum_{t=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_t} (y_{ti} - \bar{y}_{t.})^2 = \sum_t B_t^2 \underbrace{\sum_i (x_{ti} - \bar{x}_{t.})^2}_{w_t} + \underbrace{\sum_t \sum_i (y_{ti} - \bar{y}_{t.} - B_t(x_{ti} - \bar{x}_{t.}))^2}_{S_R^2}$

8') ... $\sum_{t=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_t} (y_{ti} - \bar{y}_{t.})^2 = \sum_t B_t w_t + S_e$ ~~suma de cuadrados totales~~

la suma de cuadrados residual tendrá

$$\begin{array}{l} n_1 - 2 \\ + \; n_2 - 2 \\ \quad \vdots \\ + \; n_k - 2 \\ \hline \underbrace{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}_{N} - k \cdot 2 = N - 2k \end{array}$$

grados de libertad

de 1): $1')\ \hat{y}_{ti} = A_t + B_t x_{ti}$; $1'')\ \bar{y}_{t\cdot} = A_t + B_t \bar{x}_{t\cdot}$ $\therefore\ \hat{y}_{ti} - \bar{y}_{t\cdot} = \cancel{A_t} + B_t x_{ti} - \cancel{A_t} - B_t \bar{x}_{t\cdot}$

$= B_t(x_{ti} - \bar{x}_{t\cdot}) \quad \ldots \ldots (3)$

3) en 2):

4) ... $y_{ti} - \bar{y}_{t\cdot} = B_t(x_{ti} - \bar{x}_{t\cdot}) + (y_{ti} - \hat{y}_{ti})$

1') en 4): $= \qquad y_{ti} - A_t + B_t x_{ti} \quad \ldots (5$

de 1'') $\quad A_t = \bar{y}_{t\cdot} - B_t \bar{x}_{t\cdot} \quad \ldots (1'''$

1''') en 5):

$$y_{ti} - \bar{y}_{t\cdot} = B_t(x_{ti} - \bar{x}_{t\cdot}) + y_{ti} - \bar{y}_{t\cdot} + B_t \bar{x}_{t\cdot} - B_t x_{ti}$$

$$- B_t(\bar{x}_{ti} - \bar{x}_{t\cdot})$$

$\therefore$

6) $\quad y_{ti} - \bar{y}_{t\cdot} = B_t(x_{ti} - \bar{x}_{t\cdot}) + (y_{ti} - \bar{y}_{t\cdot} - B_t(x_{ti} - \bar{x}_{t\cdot}))$

elevando 6) al cuadrado en el lado derecho se tiene un binomio al cuadrado cuyo doble producto del primero por el segundo miembro vale; aplicando el operador Σ

$$\Sigma B_t(x_{ti} - \bar{x}_{t\cdot})(y_{ti} - \bar{y}_{t\cdot} - B_t(x_{ti} - \bar{x}_{t\cdot}))$$

$$= \Sigma(B_t x_{ti} - B_t \bar{x}_{t\cdot})(y_{ti} - \bar{y}_{t\cdot} - B_t x_{ti} + B_t \bar{x}_{t\cdot})$$

$$= \Sigma[B_t x_{ti} y_{ti} - B_t x_{ti} \bar{y}_{t\cdot} - B_t^2 x_{ti}^2 + B_t^2 x_{ti}\bar{x}_{t\cdot} - B_t \bar{x}_{t\cdot} y_{ti} + B_t \bar{x}_{t\cdot}\bar{y}_{t} \quad - \bar{x}_{t\cdot}^2$$

$$+ B_t^2 x_{ti}\bar{x}_{t\cdot} +$$

$$B_t n \cancel{\bar{x}_{t\cdot}} \bar{y}_{t\cdot} - n B_t \cancel{\bar{x}_{t\cdot}} \bar{y}_{t\cdot} - B^2 \cancel{n} x_{ti}^2 + 2B^2 n \cancel{\bar{x}_{t\cdot}} \bar{x}_{t\cdot} - B_t n \cancel{\bar{x}_{t\cdot}} \bar{y}_{t\cdot} + n B_t \cancel{\bar{x}_{t\cdot}} \bar{y}_{t\cdot}$$

$$+ n B_t^2 \cancel{\bar{x}_{t\cdot}^2}$$

$$= 0$$

por lo cual es válido elevar al cuadrado y ~~sumar la~~ aplicar el operador Σ a (6) y tener:

7) ... $\displaystyle\sum_{i=1}^{n_t} (y_{ti} - \bar{y}_{t\cdot})^2 = \sum_i B_t^2 (x_{ti} - \bar{x}_{t\cdot})^2 + \sum_i (y_{ti} - \bar{y}_{t\cdot} - B_t(x_{ti} - \bar{x}_{t\cdot}))^2$

expresión que se aplica para $t = 1, 2, \ldots k$.

Sumando 7) para todos los tratamientos

8) $\displaystyle\sum_{t=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_t} (y_{ti} - \bar{y}_{t\cdot})^2 = \sum_t B_t^2 \underbrace{\sum_i (x_{ti} - \bar{x}_{t\cdot})^2}_{w_t} + \underbrace{\sum_t \sum_i (y_{ti} - \bar{y}_{t\cdot} - B_t(x_{ti} - \bar{x}_{t\cdot}))^2}_{S_R^2}$

8') ... $\displaystyle\sum_{t=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_t} (y_{ti} - \bar{y}_{t\cdot})^2 = \sum_t B_t w_t + S_R$ ~~Suma de cuadrados totales~~

la suma de cuadrados residual tendrá

$$\begin{array}{r} n_1 - 2 \\ + \ n_2 - 2 \\ \vdots \\ + \ n_k - 2 \\ \hline \end{array}$$

$\underbrace{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}_{N} - k \cdot 2 = N - 2k$ grados de libertad

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS

TABLAS - ANEXAS

MAYO, 1985

Tabla 7-1. Pruebas de medias y variancias

H_0	*Estadística de prueba*	H_1	*Región crítica*
$\mu = \mu_0$	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$; σ conocida	$\mu < \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$Z < -z_\alpha$ $Z > z_\alpha$ $Z < -z_{\alpha/2}$ o $Z > z_{\alpha/2}$
$\mu = \mu_0$	$T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$; $v = n - 1$, σ desconocida	$\mu < \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$T < -t_\alpha$ $T > t_\alpha$ $T < -t_{\alpha/2}$ o $T > t_{\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$Z = \dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - d_0}{\sqrt{(\sigma_1^2/n_1) + (\sigma_2^2/n_2)}}$; σ_1 y σ_2 conocida	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$Z < -z_\alpha$ $Z > z_\alpha$ $Z < -z_{\alpha/2}$ o $Z > z_{\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$T = \dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - d_0}{S_p\sqrt{(1/n_1) + (1/n_2)}}$; $v = n_1 + n_2 - 2$, $\sigma_1 = \sigma_2$ pero desconocida $S_p^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$T < -t_\alpha$ $T > t_\alpha$ $T < -t_{\alpha/2}$ o $T > t_{\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$T' = \dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - d_0}{\sqrt{(S_1^2/n_1) + (S_2^2/n_2)}}$; $v = \dfrac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\dfrac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$; $\sigma_1 \neq \sigma_2$ pero desconocida	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$T' < -t_\alpha$ $T' > t_\alpha$ $T' < -t_{\alpha/2}$ o $T' > t_{\alpha/2}$
$\mu_D = d_0$	$T = \dfrac{\bar{D} - d_0}{S_d/\sqrt{n}}$; $v = n - 1$, observaciones pareadas	$\mu_D < d_0$ $\mu_D > d_0$ $\mu_D \neq d_0$	$T < -t_\alpha$ $T > t_\alpha$ $T < -t_{\alpha/2}$ o $T > t_{\alpha/2}$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$X^2 = \dfrac{(n - 1)S^2}{\sigma_0^2}$; $v = n - 1$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$X^2 < \chi^2_{1-\alpha}$ $X^2 > \chi^2_\alpha$ $X^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}$ o $X^2 > \chi^2_{\alpha/2}$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$F = S_1^2/S_2^2$; $v_1 = n_1 - 1$ y $v_2 = n_2 - 1$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F < f_{1-\alpha}(v_1, v_2)$ $F > f_\alpha(v_1, v_2)$ $F < f_{1-\alpha/2}(v_1, v_2)$ y $F > f_{\alpha/2}(v_1, v_2)$

Tabla 3.3
Estimadores Aplicables a Muestreo Aleatorio Simple

Parámetro	*Estimador del Parámetro*	*Variancia del estimador*	*Estimador de la Variancia*	*Intervalos de confianza* *
Media	$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$	$V(\bar{y}) = (1-f) \frac{S^2}{n}$	$\hat{V}(\bar{y}) = (1-f) \frac{s^2}{n}$	$\bar{y} \mp t(\hat{V}(\bar{y}))^{1/2}$
Total	$N\bar{y} = \frac{N}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$	$V(N\bar{y}) = (1-f) \frac{N^2 S^2}{n}$	$\hat{V}(N\bar{y}) = (1-f) \frac{N^2 s^2}{n}$	$N\bar{y} \mp t(\hat{V}(N\bar{y}))^{1/2}$
Porcentaje	$p = \frac{a}{n} 100$ $\hat{A} = N\frac{a}{n}$	$V(p) = \frac{NPQ\ (1-f)}{(N-1)\ n}$ $V(\hat{A}) = \frac{N^3 PQ}{N-1} \frac{(1-f)}{n}$	$\hat{V}(p) = \frac{N-n}{(n-1)N}\ pq$ $\hat{V}(A) = \frac{N(N-n)}{n-1}\ pq$	$p \mp t(\hat{V}(p))^{1/2}$ $\hat{A} \mp t(\hat{V}(\hat{A}))^{1/2}$
Razones	$\hat{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$	$V(\hat{R}) = \frac{1-f}{n\bar{X}^2} \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - Rx_i)^2}{N-1}$	$\hat{V}(\hat{R}) = \frac{1-f}{n\bar{X}^2} \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{R}x_i)^2}{n-1}$ Nota: Cuando se desconoce $\bar{X}$ puede ser usado $\bar{x}$ en su lugar.	$\hat{R} \mp t(\hat{V}(\hat{R}))^{1/2}$

* Para obtener intervalos de confianza del 95% use $t = 2$.

TABLA 3.4
Fórmulas para el cálculo de varianzas estimadas (m. a. s.)

Parámetro	*Estimador*	*Se requiere*
Media	$\frac{1-f}{n} \frac{1}{n-1} (\sum y_i^2 - \frac{(\sum^n y_i)^2}{n})$	*i)* La suma de cuadrados de cada observación. *ii)* La suma de las observaciones elevada al cuadrado.
Total	$\frac{N^2(1-f)}{n} \frac{1}{n-1} (\sum^n y_i^2 - \frac{(\sum^n y_i)^2}{n})$	Misma información que para la media.
Razón	$\frac{1-f}{n\bar{X}^2} \frac{1}{n-1} (\sum^n y_i^2 - 2\hat{R}\sum^n y_i x_i + \hat{R}^2 \sum x_i^2)$ Donde $\hat{R} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$	*i)* La suma de cuadrados de cada observación de la variable en el numerador. *ii)* La suma de cuadrados de cada observación de la variable en el denominador. *iii)* La suma de productos mixtos de las observaciones de una variable por la otra.
Proporción	$\frac{a}{n}$	*i)* El número total de unidades muestrales con la característica de interés.

DIRECTORIO DE ALUMNOS DEL CURSO "DISEÑO ESTADISTICO DE EXPERIMENTOS" IMPARTIDO EN ESTA DIVISION DEL 3 DE MAYO AL 7 DE JUNIO DEL PRESENTE AÑO.

1.- RODRIGUEZ SAENZ RICARDO
SCHERAMEX, S.A. DE C.V.
QUIMICO DESARROLLO ANALITICO
AV. 16 DE SEPTIEMBRE No. 301
COL. XOCHIMILCO
DELEGACION XOCHIMILCO
16090 MEXICO, D.F.
676-30-11 ext. 134

MANUELA SAENZ ANDADOR 22 No. 233
DELEGACION COYOACAN
04480 MEXICO, D.F.

2.- VIESCA MURIEL RICARDO
LABORATORIOS SCHERAMEX, S.A. DE C.V.
QUIMICO INVESTIGADOR
AV. 16 DE SEPTIEMBRE No. 301
COL. XALTOCAN
DELEGACION XOCHIMILCO
16090 MEXICO, D.F.
676-30-11 ext. 134

AV. CASTELLANOS QUIRBO No. 20
COL. EL CENTINELA
DELEGACION COYOACAN
04450 MEXICO, D.F.
549-26-82

3.- MENESES GARCIA MANUEL
S. C. T.
ANALISTA
PROVIDENCIA No. 807
COL. DEL VALLE
687-76-80

PAPACOTEPELT No. 64
COL. LA PRADERA
DELEGACION GUSTAVO A. MADERO
07500 MEXICO, DF.
687-76-80

4.- RANGEL GUTIERREZ RAYMUNDO HUGO
U. N. A. M.
PROFESOR Y COORDINADOR DE MATERIA
550-52-15 ext. 4346

CALZADA ACUEDUCTO No. 161
TLALPAN
14380 MEXICO, D.F.

5.- GUTIERREZ ACEVES MA. GUADALUPE
LAB. SCHERAMEX, S.A. DE C.V.
GERENTE AREA ESTABILIDADES Y LEGISTICA
16 DE SEPTIEMBRE No. 301
COL. XALTOCAN
16090 MEXICO, D.F.
676-30-11

CALLE PAPALETA 3 No. 12
01140 MEXICO, D.F.
515-72-36

6.- TORREBLANCA CORTES SERGIO
BANCO DE MEXICO
INVESTIGADOR INDUSTRIAL
LEGARIA No. 691
COL. IRRIGACION
11500 MEXICO, D.F.
557-21-00 ext. 134

FUNDIDORA DE MONTERREY No. 377
COL. INDUSTRIAL
DELEGACION GUSTAVO A. MADERO
07800 MEXICO, D.F.
781-16-14

7.- ZAMUDIO JIMENEZ CARLOS
INSTITUTO MEXICANO DEL PETROLEO
INGENIERO DE PROYECTO
EJE CENTRAL LAZARO CARDENAS No. 152
COL. SAN BARTOLO ATEPEHUACAN
DELEGACION GUSTAVO A. MADERO
07730 MEXICO, D.F.
567-91-00 ext. 20504 y 20339

ALEJANDRO DUMAS No. 230
DELEGACION MIGUEL HIDALGO
11330 MEXICO, D.F.
345-17-65

8.- LOPEZ JIMENEZ MATIAS
DIREC. GRAL. AEROPUERTOS S. C.T.
JEFE DE OFICINA
CHIAPAS No. 181
COL. ROMA
574-83-20

CALLE SUR 111-A No. 328
COL. HEROES DE CHURUBUSCO
DELEGACION IZTAPALAPA
09090 MEXICO, D.F.
582-97-15

9.- JARAMILLO BLANCAS CARLOS
S. C. T.
PASANTE DE INGENIERIA CIVIL
JALAPA No. 147-3er. PISO
COL. ROMA
574-82-67

PRIV. A. DEL MAZO NZA 4 B LOTE 32-1
VILLA LAS MANZANAS
COACALCO
55700 EDO. DE MEXICO

10.- SOTO PORTILLA ALFREDO
UNIVERSIDAD VERACRUZANA
CATEDRATICO
LOMAS EL ESTADIO
XALAPA, VER.

AV. ADALBERTO TEJEDA No. 32-3
XALAPA, VER.

11.- ARANA ERRASQUIN RAMON
ESCUELA NACIONAL DE CIENCIAS BIOLOGICAS
PROFESOR
CARPIO Y PLAN DE AYALA
COL. STO. TOMAS
541-00-87

T. DE MIXCOAC A-6-401
DELEGACION ALVARO OBREGON
01490 MEXICO, D.F.
593-14-86

12.- CARDENAS SUAREZ JOSE T.
DIREC. REFERENCIA S.A.R.H.
JEFE DE PROYECTO
DR. MORA No. 6
COL. JUAREZ
DELEGACION CUAUHTEMOC

SUR 111 No. 1215
COL. AERONAUTICA MILITAR
DELEGACION VENUSTIANO CARRANZA
552-15-22

13.- DAVILA MENESES JULIETA
TESORERIA DEL D. D. F.
JEFE DE ECONOMISTAS
ANALISSI ECONOMICO Y FISCAL
NIÑOS HEROES No. 114
COL. DOCTORES
588-11-24

PLAYA COQUETA No. 168
COL. REFORMA IZTACCIHUATL
DELEGACION IZTACALCO
08840 MEXICO, D.F.
579-20-07

14.- JIMENEZ FUENTES LUIS GUILLERMO
PREPARATORIA MIXCOAS VALLE
PROFESOR DE LOGICA
SAN FRANCISCO
COL. DEL VALLE

UNIDAD HABITACIONAL SANTA FE
MANZANA 4 GRUPO 45 ENT. "E" APART. 12
01170 MEXICO, D.F.
277-59-46

15.- JUAREZ MONTOÑO MA. ESTHER
INDUSTRIAS RESISTOL, S.A.
INGENIERO DE INVESTIGACION
AZCAPOTZALCO LA VILLA No. 705
COL. INDUSTRIAL VALLEJO
DELEGACION AZCAPOTZALCO
02300 MEXICO, D.F.
587-01-00

TEPEYAC No. 187
COL. INDUSTRIAL
DELEGACION GUSTAVO A. MADERO
07800 MEXICO, D.F.
517-50-92

16.- LOPEZ JIMENEZ MATIAS
DIREC. GRAL. DE AEROPUERTOS

17.- MALDONADO GARRIDO NAPOLEON
INDUSTRIAS RESISTOL, S.A.
INVESTIGADOR
CALZADA AZCAPOTZALCO LA VILLA No. 705
COL. INDUSTRIAL VALLEJO
DELEGACION AZCAPOTZALCO
02300 MEXICO, D.F.
587-01-00

INSURGENTES NORTE No. 677
COL. SAN SIMON TOLNAHUAC
DELEGACION CUAUHTEMOC
06920 MEXICO, D.F.
583-30-74

18.- MASSE ZENDEJAS MARIO ALBERTO
FAC. EST. SUP. CUAUTITLAN
AYUDANTE DE PROFESOR "B"
CARRETERA CUAUTITLAN TEOLOYUCAN
KM. 36.5 IZCALLI CUAUTITLAN
872-32-09 ext. 125

DIAGONAL No. 7
COL. SANTA CLARA
55640 ECATEPEC DE MORELOS
569-38-03

19.- NAMBO CARO HECTOR
S. C. T.

20.- RANGEL GUTIERREZ REYMUNDO HUGO
FAC. ING.
PROFESOR
CIUDAD UNIVERSITARIA

ACUEDUCTO No. 161 E B-34
COL. LA PIEDAD
DELEGACION TLALPAN
14350 MEXICO, D.F.

21.- RODRIGUEZ SAENZ RICARDO
SCHERAMEX, S.A. DE C.V.