

Capítulo 2

Modelado Matemático

En este capítulo se presentarán los modelos matemáticos que serán utilizados para analizar el sistema eólico que se describe de forma general en la figura 2.1. En ella se muestra de forma simple cada uno de los componentes: la turbina eólica, la caja de engranes la cual incrementa las revoluciones de la flecha, la transmisión de variación continua que busca mejorar el desempeño ubicando a la velocidad del rotor en el rango adecuado para el generador eléctrico.

2.1. Turbina eólica

De acuerdo a su estructura las turbinas eólicas están clasificadas en dos diferentes grupos: las de eje vertical y las de eje horizontal (ver figuras 2.2 y 2.3). La de eje horizontal es la más vieja de ambas. Para este trabajo se ha considerado una turbina de este tipo, por las ventajas que ofrece en tamaño y costo sobre las turbinas de eje vertical.

2.1.1. Potencia generada por una turbina

La parte más importante de una turbina eólica son los álabes, pues la potencia extraída del viento se obtiene de estos. El modelo matemático que describe la potencia que el rotor absorbe del viento es complejo debido a la cantidad de variables

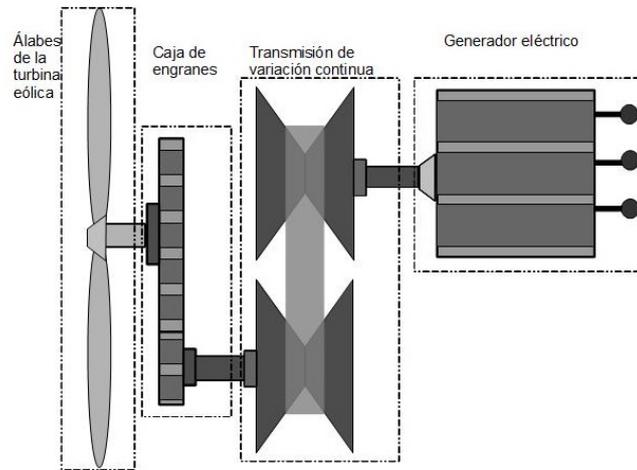


Figura 2.1. Esquema representativo del sistema

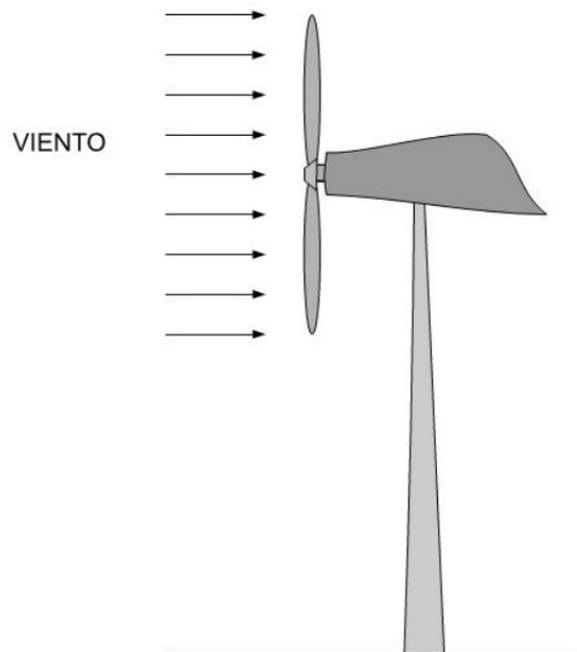


Figura 2.2. Turbina de eje horizontal

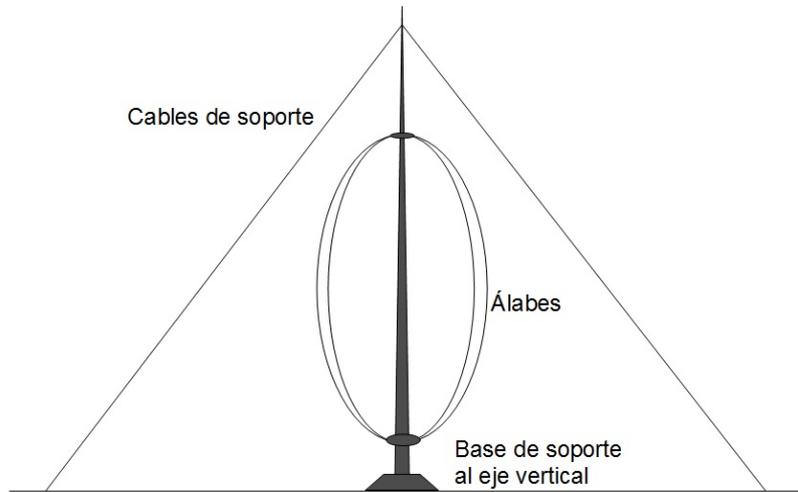


Figura 2.3. Turbina de eje vertical

que se tienen que considerar; sumado a esto se tiene el cambio de las propiedades del aire como lo son la densidad, y la humedad.

Considerando una masa de aire m_a que se desplaza a una velocidad V_v a lo largo de un cilindro de radio R y una densidad ρ como se muestra en la figura 2.4, la energía cinética de esta masa se transmite directamente a los álabes de la turbina y puede expresarse como

$$E_c = \frac{1}{2} m_a V_v^2 \quad (2.1)$$

La potencia es el cambio de la energía con respecto del tiempo, es decir, su derivada. De la ecuación (2.1) suponiendo una velocidad del viento constante se obtiene

$$\frac{d(E_c)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dm_a}{dt} V_v^2 = P_e \quad (2.2)$$

tomando el cambio de masa respecto del tiempo de la ecuación (2.2) esta se puede expresar como

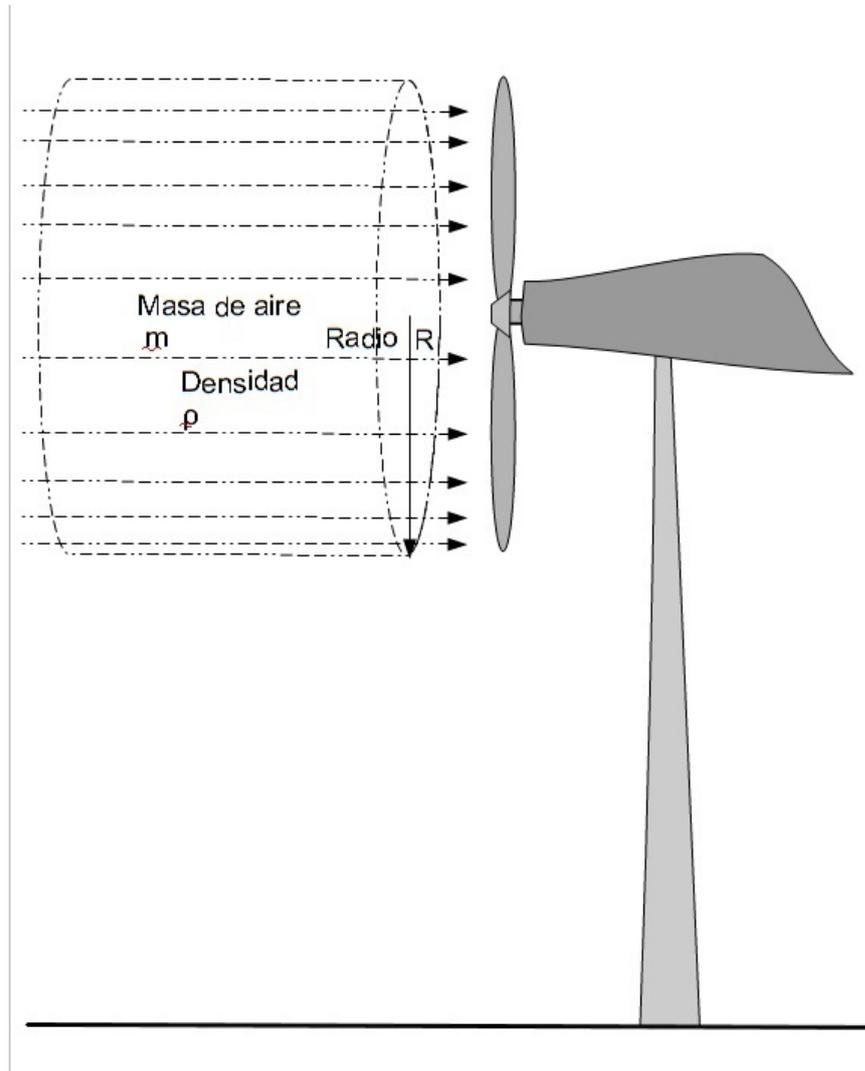


Figura 2.4. Esquema del desplazamiento de una masa de aire m sobre el área que cubren los álabes

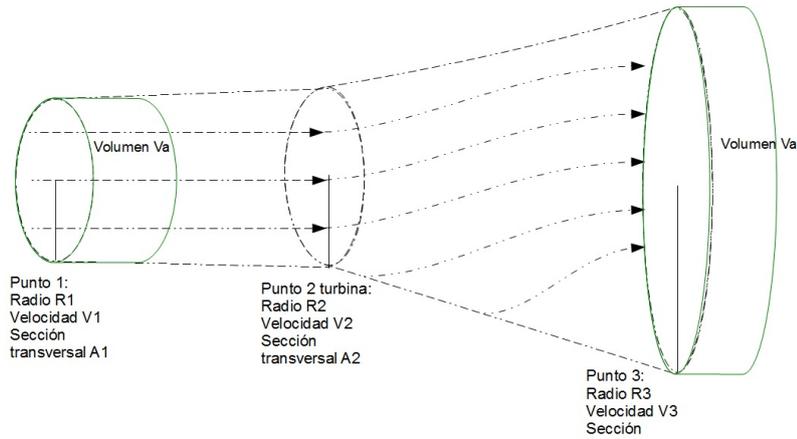


Figura 2.5. Desplazamiento de un masa de aire con volumen V_a , que pasa desde un punto lejos de la turbina hasta atravesar la sección transversal que cubren los álabes de la turbina

$$\dot{m} = \rho AV \quad (2.3)$$

donde

A : área de la sección trasversal que cubren los álabes [m^2]

sustituyendo en la ecuación (2.2) resulta

$$P_e = \frac{1}{2} \rho A V V_v^2 = \frac{1}{2} \rho A V_v^3 \quad (2.4)$$

esta ecuación describe la potencia que tiene el viento en el rotor si se considera que V , es la velocidad del viento en el rotor de la turbina, véase [13]. En [10] se analiza un modelo que describe la potencia extraída del viento por medio de los álabes el cual se describe a continuación. Si se considera una masa de aire que como la mostrada en la figura 2.5, viaja del punto 1, hacia el punto 3 pasando por donde se encuentra el rotor de la turbina, para aprovechar la energía cinética

que se tiene para el punto 1. La energía de esta masa de aire se puede obtener como una diferencia de energías cinéticas desde el punto 1 hasta el punto 3. Para el punto 1 se obtiene

$$W_1 = V_a \frac{\rho}{2} v_1^2 \quad (2.5)$$

para el punto 3 la ecuación es la misma solo que en este punto la velocidad ha cambiado

$$W_3 = V_a \frac{\rho}{2} v_3^2 \quad (2.6)$$

La energía de la masa de aire aprovechada por la turbina se puede escribir como

$$W_1 - W_3 = [V_a \frac{\rho}{2} v_1^2] - [V_a \frac{\rho}{2} v_3^2] \quad (2.7)$$

reduciendo la ecuación anterior se obtiene

$$W_1 - W_3 = V_a \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_3^2) = W_t \quad (2.8)$$

De la ecuación (2.8) se obtiene la potencia que el rotor absorbe del viento, y se determina por la ecuación

$$P_t = \frac{d(W_t)}{dt} = \frac{d(V_a \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_3^2))}{dt} \quad (2.9)$$

suponiendo una velocidad del viento v_1 y v_3 constantes, en el área que ocupa el rotor de la turbina ($A_R = A_2$), resulta que el cambio del volumen de aire que pasa por este punto se obtiene de la ecuación

$$\frac{d(V_a)}{dt} = A_R v_2 \quad (2.10)$$

y al sustituir en la ecuación (2.9) se tiene como resultado la ecuación (2.11) que describe la potencia que absorbe el rotor en un estado casi estable de operación, en el cual las velocidades v_1 y v_3 permanecen constantes [10]

$$P_t = A_R \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_3^2) v_2 \quad (2.11)$$

En esta ecuación se observa como la potencia es una función de la densidad y la velocidad del aire, así como del área de barrido de los álabes de la turbina. Sin embargo, son muchas las consideraciones que se deben de tomar sobre las propiedades del aire, por lo cual se considera un modelo idealizado.

2.1.2. Coeficiente de desempeño

Utilizando las ecuaciones obtenidas anteriormente para describir la potencia que se genera por una masa de aire en el rotor de una turbina y la potencia total aprovechada, se puede empezar a analizar la eficiencia de la turbina, para ello es indispensable conocer la eficiencia máxima de una turbina.

De la ecuación (2.11) se puede sustituir en la velocidad v_2 como un promedio de la velocidad v_1 y v_3 se tiene como resultado

$$P_t = A_R \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_3^2) \left(\frac{v_1 + v_3}{2} \right) \quad (2.12)$$

El coeficiente de desempeño de una turbina se puede expresar como [10]

$$C_P = \frac{P_t}{P_e} \quad (2.13)$$

donde:

P_t : es la potencia en aprovechada por la turbina.

P_e : es la potencia de la masa de aire.

C_P : Coeficiente de desempeño.

Sustituyendo la ecuación (2.4) y la ecuación (2.11), en (2.12) se tiene

$$C_P = \frac{A_R \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_3^2) \left(\frac{v_1 + v_3}{2} \right)}{\frac{1}{2} \rho A_R v_1^3} \quad (2.14)$$

$$C_P = \frac{A_R \frac{\rho}{2} v_1^3 \left[\frac{(1 - \frac{v_2^2}{v_1^2}) + (1 + \frac{v_2}{v_1})}{2} \right]}{\frac{1}{2} \rho A_R v_1^3} \quad (2.15)$$

$$C_P = \frac{(1 - \frac{v_2^2}{v_1^2}) + (1 + \frac{v_2}{v_1})}{2} \quad (2.16)$$

De acuerdo con Betz [9] la potencia máxima que se puede obtener del viento por medio de la turbina es

$$P_{max} = \frac{16}{27} A_R \frac{\rho}{2} v_1^3 \quad (2.17)$$

En la ecuación anterior se tiene un coeficiente $\frac{16}{27}$. Para este modelo este es el coeficiente de desempeño y es el máximo de la función descrita en la ecuación (2.16) [13].

Tomando las ecuaciones (2.4), (2.11), y (2.13), es posible llegar a un modelo para determinar la potencia que genera una turbina de viento, con una ecuación similar a la que se observa en la ecuación (2.17), sin embargo en esta el coeficiente de desempeño no es una constante, y se obtiene la siguiente expresión

$$P_t = C_P(\lambda, \alpha) A_R \frac{\rho}{2} v_1^3 \quad (2.18)$$

donde

α : es el ángulo de ataque de los álabes.

λ : es una relación de velocidades determinada por

$$\lambda = \frac{R\omega_R}{v_1} \quad (2.19)$$

donde

ω_R : es la velocidad del rotor.
 v_1 : es la velocidad del viento.
 R : radio del rotor.

Sumado a todo lo anterior se llega a una expresión para determinar el par que puede desarrollar la turbina eólica para mover un generador eléctrico, la cual se muestra a continuación

$$T_t = \frac{P_t}{\omega_R} \quad (2.20)$$

2.1.3. Modelos matemáticos del coeficiente de potencia

Para el análisis del sistema descrito en la figura 2.1, es necesario considerar un modelo de la potencia de la turbina la cual se tiene en la ecuación (2.18) y con esta es posible determinar el par por medio de la ecuación (2.20), sin embargo, el coeficiente de desempeño utilizado en el análisis es una aproximación por medio de funciones *heurísticas*[10]. Con esto podemos resumir el grupo de ecuaciones utilizadas para analizar el sistema completo.

$$P_t = C_P(\lambda, \alpha) A_R \frac{\rho}{2} v_1^3 \quad (2.21)$$

$$C_P = c_1(c_2 - c_3\alpha - c_4)e^{-c_5(\lambda, \alpha)} \quad (2.22)$$

donde los coeficientes c_i son:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0,5 \\ c_2 &= \frac{116}{\lambda_i} \\ c_3 &= 0,4 \\ c_4 &= 5 \\ c_5 &= \frac{21}{\lambda_i} \end{aligned}$$

donde:

$$\frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{\lambda + 0,08\alpha} - \frac{0,035}{\alpha_3 + 1} \quad (2.23)$$

$$\lambda = \frac{R\omega_R}{v_1} \quad (2.24)$$

Por ultimo el par desarrollado está dado por

$$T_t = \frac{P_t}{\omega_R} \quad (2.25)$$

2.2. Transmisión mecánica

Uno de los elementos más importantes en el sistema descrito en la figura 2.1 es la transmisión mecánica utilizada en el arreglo junto a una caja de engranes para incrementar las revoluciones de la turbina hasta el rango de operación del generador. Aquí se discutirá el modelo utilizado en el análisis del sistema mencionado. Para ello es conveniente considerar una transmisión de variación continua como la mostrada en la figura 2.6.

2.2.1. Caja de engranes

La velocidad angular del rotor de la turbina es muy pequeña comparada con la velocidad síncrona del generador eléctrico, debido a esto es indispensable aumentar la velocidad angular del rotor hasta una velocidad que entre en el rango de operación de la transmisión por medio de una caja multiplicadora de revoluciones, de la cual se muestra un esquema representativo en la figura 2.7, en donde el engrane de entrada o primario recibe el par directamente del rotor y este a su vez lo trasmite al engrane secundario el cual tiene una velocidad angular mayor y un par inversamente proporcional al primario.

Retomando lo mencionado sobre el sistema al inicio del capítulo, es decir, si la velocidad angular promedio de operación de la turbina de 240 RPM, es necesario incrementar esta revoluciones hasta llegar a la velocidad síncrona del generador eléctrico, y una vez alcanzado este valor poder manipular la relación de velocidad con la transmisión de variación continua. Debido a que la masa de los engranes es pequeña el momento de inercia generado por estos puede considerarse despreciable, por lo cual la caja de engranes solo será descrita como una constante directamente

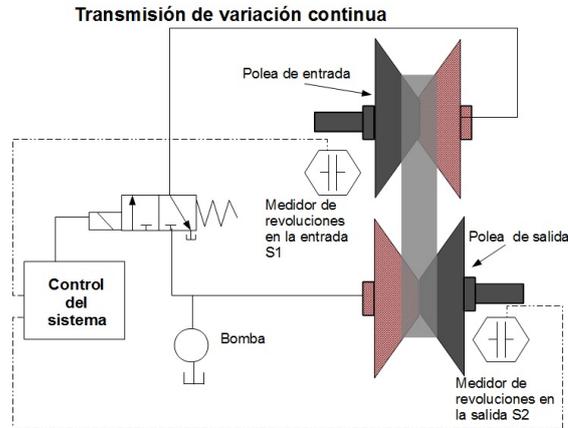


Figura 2.6. Diagrama representativo de la transmisión de variación continua

proporcional a la velocidad angular e inversamente proporcional al par generado por la turbina, esta relación se observa en la siguiente ecuación

$$\omega_s = n\omega_e \quad (2.26)$$

$$T_s = \frac{T_e}{n} \quad (2.27)$$

2.2.2. Transmisión de variación continua

Este sistema se describe en la figura 2.6, la relación de velocidades de la transmisión se controla por medio de dos émbolos hidráulicos. Estos realizan los desplazamientos tanto de la polea de entrada, como de la polea de salida. Los émbolos hidráulicos se controlan por medio de una electroválvula, la cual regula la presión en cada uno de los émbolos. A su vez la electroválvula se controla por medio del voltaje con el que se energiza al solenoide que la dirige [11]. El ajuste de la relación de velocidad se lleva a cabo de la siguiente forma. El control de sistema adquiere una señal de entrada la cual indica la velocidad de salida de la transmisión, esta señal debe de ser comparada con la señal que registra el medidor S2. Cuando esta comparación difiere de cero, se toma la señal del medidor S1 y con ello se calcula

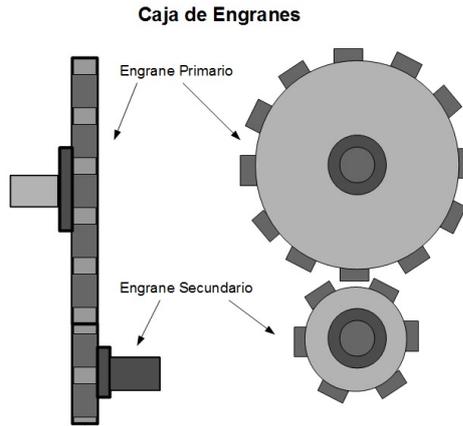


Figura 2.7. Diagrama representativo de la caja de engranes

la relación a la que debe de estar la transmisión. Con esta información se enciende la electro válvula para regular la presión del émbolo que dirige la polea de entrada.

La electroválvula de este sistema y el émbolo de la polea de entrada pueden ser descritos por la siguientes funciones de transferencia, donde la electroválvula es un sistema de segundo orden y el émbolo hidráulico es un sistema de segundo orden con un integrador, véase [11].

$$W_{ev}(s) = \frac{K_q}{\frac{s^2}{\omega_r^2} + \frac{2\xi_r s}{\omega_r} + 1} \quad (2.28)$$

$$W_c(s) = \frac{\frac{1}{A_c}}{s\left(\frac{s^2}{\omega_c^2} + \frac{2\xi_c s}{\omega_c} + 1\right)} \quad (2.29)$$

donde ω_r y ω_c son las frecuencias naturales de oscilación de cada sistema, ξ_r y ξ_c son las constantes de amortiguamiento, A_c es el area donde ejerce presión el cilindro hidráulico y K_q es la ganancia de flujo de la electroválvula.

El rango de operación de la transmisión tiene que situarse alrededor de la velocidad síncrona del generador de forma que se pueda manipular la relación de velocidad de la manera más favorable para el sistema. En este análisis solo se considera a la transmisión de variación continua, como un sistema que tiene

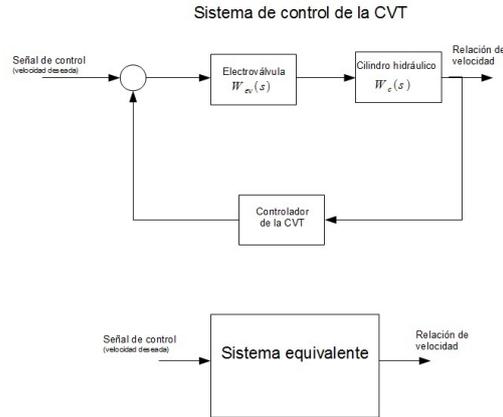


Figura 2.8. Diagrama de bloques del control de una CVT

incorporado un controlador al que solo se le envía la señal de control para que este regule la relación de velocidad a la velocidad deseada. En la figura 2.8 se tiene un ejemplo de cómo se simplifica el diagrama de bloques del sistema de control de la transmisión en un simple bloque con el que se trabajará para alcanzar la relación de velocidad deseada.

En la figura 2.9 se tiene el par T_e , que es la entrada de la transmisión mecánica, y donde la inercia de la misma es J_{cvt} . Esta a su vez hace variar la relación de velocidad de modo que el par de salida sea suficiente para vencer el par eléctrico del generador y su momento de inercia J_g , el modelo que describe este sistema se define por las ecuaciones [12]

$$T_{cvt} = [T_e - J_{cvt}\dot{\omega}_t]\eta \quad (2.30)$$

$$\dot{\eta} = u \quad (2.31)$$

donde

ω_t : es la velocidad angular de entrada a la transmisión.

η : es la relación de velocidad de la transmisión.

u : es la señal de control.

El modelo tiene un integrador para la señal de control con el objetivo de suavizar los cambios rápidos o de tipo escalón de la relación de velocidad.

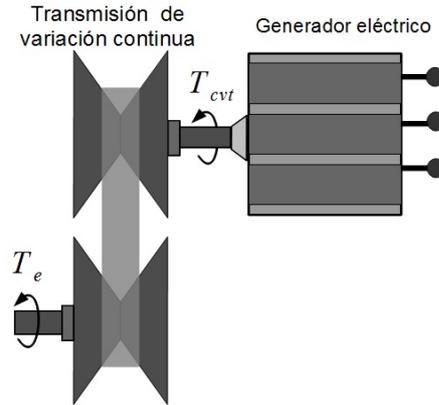


Figura 2.9. Diagrama simplificado de la unión entre la transmisión y el generador eléctrico

2.3. Generador Eléctrico

Para el modelado de máquinas eléctricas existen varias estrategias para representar el comportamiento de dichas máquinas, tanto en estado estacionario como la respuesta transitoria, como por ejemplo, el modelo de la máquina usando solo una función de transferencia o el modelo usando variables de estado. En esta tesis se usará el modelo usando variables de estado debido a que éste sirve para conocer tanto la respuesta transitoria como en estado estacionario de la máquina, además de que se ha demostrado la eficacia de este tipo de modelo para representar la máquina mediante pruebas experimentales[13].

2.3.1. Coordenadas DQ0

Una forma de simplificar el análisis de la máquina de inducción es considerar una máquina con solo dos bobinas en el estator y dos bobinas en el rotor, las cuales se encuentran rotadas un ángulo de 90° entre ellas. Para poder utilizar este modelo es necesario hacer uso de una transformación matemática que permita pasar de un sistema de tres ejes a uno de dos ejes. Esto debido a que la mayoría de los generadores están contruidos para generar voltajes trifásicos, los cuales se pueden representar mediante diagramas fasoriales de tres ejes (ver figura 2.10) [14].

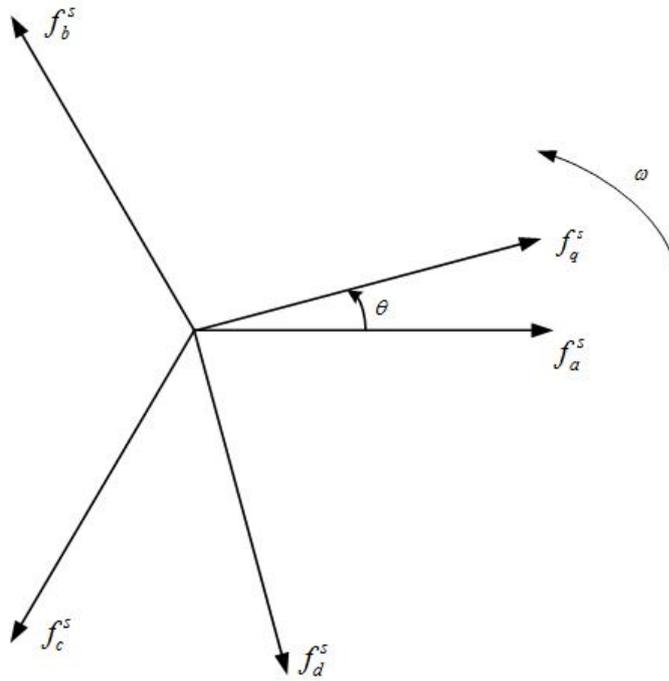


Figura 2.10. Sistema de ejes trifásicos sobre ejes dq

Observando la figura 2.10 podemos obtener la proyección de los ejes a, b y c de un sistema trifásico a los ejes d y q que son ortogonales entre si. La proyección está dada por

$$\begin{bmatrix} f_q^s \\ f_d^s \\ f_o^s \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \sin \theta & \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_a^s \\ f_b^s \\ f_c^s \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Como podemos observar se agrega la variable f_o^s la cual se encarga del desbalance en las variables del sistema de tres ejes. Esta variable no está asociada con el eje arbitrario de referencia dq, sino con las variables abc.

Es importante notar que f_a^s , f_b^s y f_c^s pueden representar funciones dependientes del tiempo y no solo magnitudes en estado estacionario, como los fasores usuales.

La ecuación inversa es la siguiente

$$\begin{bmatrix} f_a^s \\ f_b^s \\ f_c^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 1 \\ \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & 1 \\ \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \frac{1}{2} & \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_q^s \\ f_d^s \\ f_o^s \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Con esta transformación de variables podemos trabajar con un generador de cuatro bobinas y aplicar después los resultados para un generador de 6 bobinas.

2.3.2. El generador de inducción

Dependiendo de la aplicación para la que se use el modelo podemos determinar que representación nos conviene utilizar. En esta tesis se usará un modelo en el que se tienen como variables de estado las corrientes de las bobinas, tanto del estator como del rotor. Existen otras representaciones en donde se toman como variables los flujos de las bobinas [16], pero para la aplicación que se desarrollará en esta tesis no es necesaria esa representación.

Usaremos un modelo de dos bobinas en el estator y dos en el rotor, para de esta manera poder trabajar en coordenadas d y q y después obtener los resultados para un sistema trifásico mediante la matriz de transformación de la ecuación (2.33). La notación que se usará es la que se observa en la figura 2.11, en donde cada bobina se nombra con respecto al eje en el que se encuentra (d ó q) y si pertenece al estator (s) o al rotor (r) [13].

Uno de los conceptos básicos al manejar máquinas de inducción es el de deslizamiento, que es la velocidad angular del rotor con respecto del campo magnético del estator, el cual tiene la misma frecuencia que la frecuencia con la que se excita a los devanados del estator, y está dado por

$$s = \frac{\omega_e - \omega_r}{\omega_e} \quad (2.34)$$

donde

ω_e : velocidad de sincronía, rad/seg

ω_r : velocidad del rotor, rad/seg

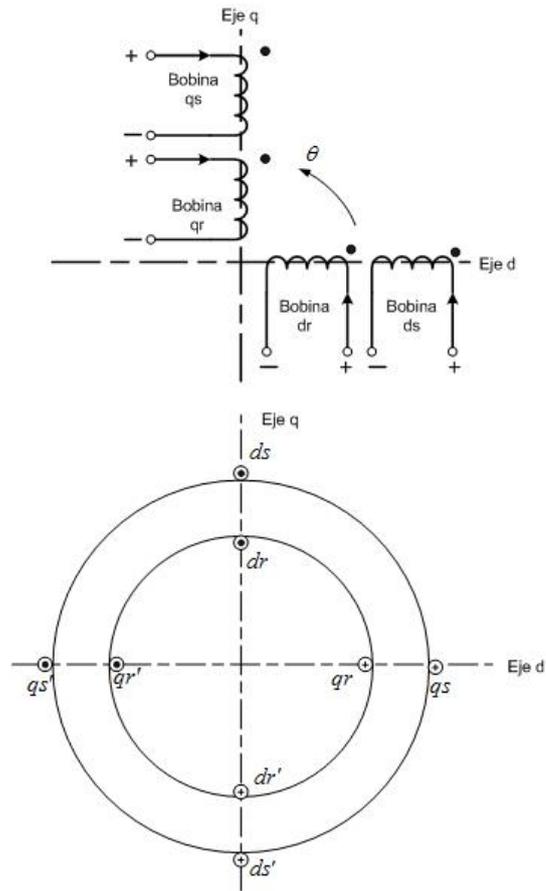


Figura 2.11. Representación de una máquina eléctrica con dos bobinas en el estator y dos el rotor

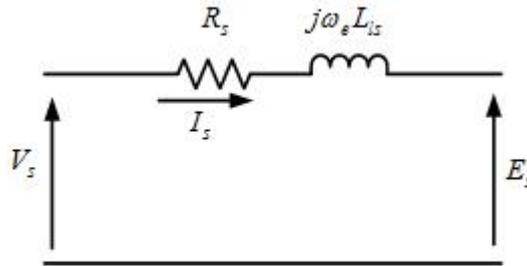


Figura 2.12. Circuito equivalente de cada bobina del estator

Si se desea trabajar la máquina como generador la velocidad del rotor tiene que ser superior a la velocidad de sincronía.

Trabajando solo con las bobinas del estator obtenemos el circuito equivalente. Si suponemos que las bobinas del estator están fabricadas de tal manera que produzcan un campo magnético distribuido senoidalmente, entonces cada bobina se puede modelar como una inductancia y una resistencia en serie, como se muestra en la figura 2.12.

donde

V_s : voltaje del estator [V].

I_s : corriente del estator [A].

R_s : resistencia del devanado del estator [Ω].

L_{ls} : inductancia del devanado del estator [H].

E_s : fem inducida en los devanados del estator debida al campo magnético rotatorio que une al estator y los devanados del rotor [V].

ω_e : frecuencia angular de la corriente del estator [$\frac{rad}{s}$].

De manera similar podemos obtener el circuito equivalente para cada una de las bobinas del rotor, como se muestra en la figura 2.13.

donde

E_r : voltaje inducido en el rotor bloqueado [V].

s : deslizamiento

sE_r : voltaje inducido en el rotor [V].

I_r : corriente del rotor [A].

R_r : resistencia del rotor [Ω].

L_{lr} : inductancia del rotor [H].

$s\omega_e$: frecuencia angular de la corriente del rotor [$\frac{rad}{s}$].

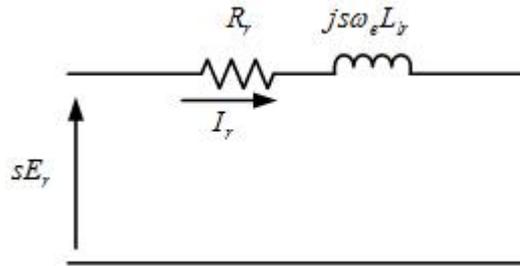


Figura 2.13. Circuito equivalente de cada bobina del rotor

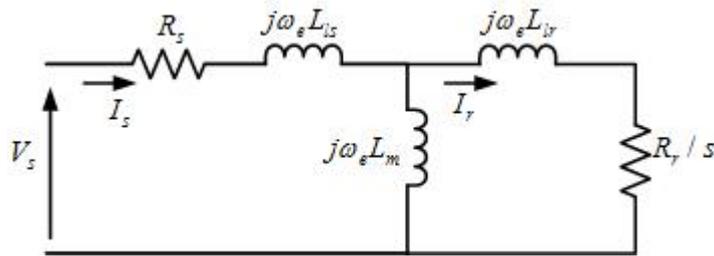


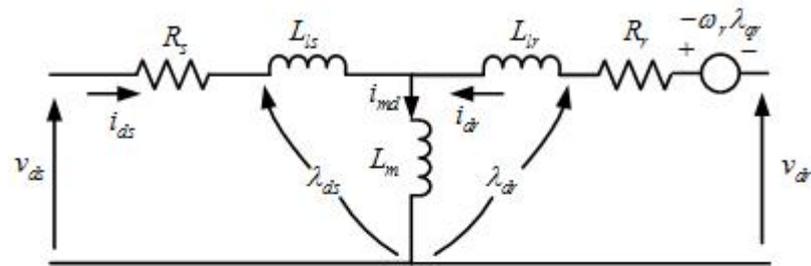
Figura 2.14. Circuito equivalente por fase de la máquina de inducción

Debido a que el voltaje en el rotor se produce por efecto transformador (un campo magnético que induce un voltaje) también se puede hacer la analogía con el transformador y plantear un circuito equivalente. Si se usa la relación apropiada, el voltaje del rotor E_r es entonces proporcional al voltaje del estator E_s . Dividiendo los parámetros del rotor entre el deslizamiento s y refiriendo estos al estator, se unen los circuitos por medio de la inductancia de magnetización L_m como se muestra en la figura 2.14. Más adelante se hablará con mayor detalle de esta inductancia de magnetización.

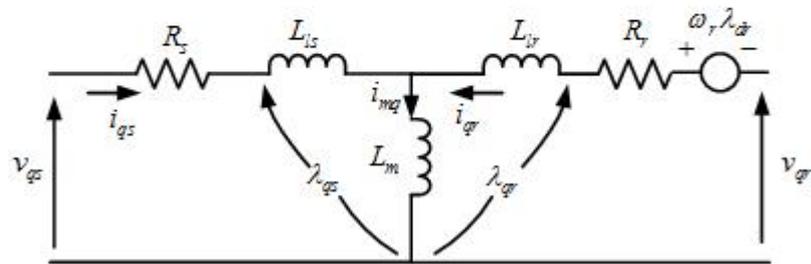
En este modelo, las pérdidas por histéresis y corrientes parásitas son despreciadas, pero esto se puede compensar calculando las pérdidas por medio de la potencia mecánica.

Para trabajar con los ejes d-q, agregamos al circuito anterior los términos $-\omega_r \lambda_{qr}$ y $\omega_r \lambda_{dr}$, que son términos que representan el voltaje llamado de velocidad que ocurre solo en los devanados del rotor. De esta manera el circuito equivalente del cual obtendremos las ecuaciones es el mostrado en la figura 2.15.

Los voltajes v_{dr} y v_{qr} son cero debido a que en un rotor de generador de in-



(a)



(b)

Figura 2.15. (a) Circuito equivalente en el eje d. (b) Circuito equivalente en el eje q

ducción las terminales están cortocircuitadas. Tomando esto en cuenta podemos obtener las ecuaciones que describen al modelo.

Por el lado del estator tenemos las ecuaciones de flujo y de voltaje.

$$\lambda_{ds} = L_{ls}i_{ds} + L_m(i_{ds} + i_{dr}) \quad (2.35)$$

$$\lambda_{qs} = L_{ls}i_{qs} + L_m(i_{qs} + i_{qr}) \quad (2.36)$$

$$v_{ds} = R_s i_{ds} + \frac{d\lambda_{ds}}{dt} \quad (2.37)$$

$$v_{qs} = R_s i_{qs} + \frac{d\lambda_{qs}}{dt} \quad (2.38)$$

De manera similar obtenemos las ecuaciones de flujo y voltaje para el parte rotor

$$\lambda_{dr} = L_m(i_{ds} + i_{dr}) + L_{lr}i_{dr} \quad (2.39)$$

$$\lambda_{qr} = L_m(i_{qs} + i_{qr}) + L_{lr}i_{qr} \quad (2.40)$$

$$v_{dr} = R_r i_{dr} + \frac{d\lambda_{dr}}{dt} + \omega_r \lambda_{qr} \quad (2.41)$$

$$v_{qr} = R_r i_{qr} + \frac{d\lambda_{qr}}{dt} - \omega_r \lambda_{dr} \quad (2.42)$$

Desarrollando las ecuaciones anteriores obtenemos.

$$v_{qs} = R_s i_{qs} + L_{ls} p i_{qs} + L_m p (i_{qs} + i_{qr}) \quad (2.43)$$

$$v_{ds} = R_s i_{ds} + L_{ls} p i_{ds} + L_m p (i_{ds} + i_{dr}) \quad (2.44)$$

$$0 = R_r i_{qr} + L_{lr} p i_{qr} + L_m p (i_{qr} + i_{qs}) - \omega_r L_m i_{ds} - \omega_r L_m i_{dr} - \omega_r L_{lr} i_{dr} \quad (2.45)$$

$$0 = R_r i_{dr} + L_{lr} p i_{dr} + L_m p (i_{dr} + i_{ds}) + \omega_r L_m i_{qs} + \omega_r L_m i_{qr} + \omega_r L_{lr} i_{qr} \quad (2.46)$$

donde $p = \frac{d}{dt}$.

Luego si agrupamos los términos L_{ls} y L_m como

$$L_s = L_{ls} + L_m \quad (2.47)$$

y los términos L_{lr} y L_m como

$$L_r = L_{lr} + L_m \quad (2.48)$$

podemos reescribir las ecuaciones (2.43), (2.44), (2.45) y (2.46) como

$$v_{qs} = (R_s + L_s p)i_{qs} + L_m p i_{qr} \quad (2.49)$$

$$v_{ds} = (R_s + L_s p)i_{ds} + L_m p i_{dr} \quad (2.50)$$

$$0 = L_m p i_{qs} - \omega_r L_m i_{ds} + (R_r + L_r p)i_{qr} - \omega_r L_r i_{dr} \quad (2.51)$$

$$0 = \omega_r L_m i_{qs} + L_m p i_{ds} + \omega_r L_r i_{qr} + (R_r + L_r p)i_{dr} \quad (2.52)$$

Reescribiendo las ecuaciones (2.49), (2.50), (2.51) y (2.52) en forma de matriz obtenemos.

$$\begin{bmatrix} v_{qs} \\ v_{ds} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_s + L_s p) & 0 & L_m p & 0 \\ 0 & (R_s + L_s p) & 0 & L_m p \\ L_m p & -\omega_r L_m & (R_r + L_r p) & -\omega_r L_r \\ \omega_r L_m & L_m p & \omega_r L_r & (R_r + L_r p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{qr} \\ i_{dr} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Separando los términos que contienen derivadas tenemos.

$$\begin{bmatrix} v_{qs} \\ v_{ds} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_r L_m & R_r & -\omega_r L_r \\ \omega_r L_m & 0 & \omega_r L_r & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{qr} \\ i_{dr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_s & 0 & L_m & 0 \\ 0 & L_s & 0 & L_m \\ L_m & 0 & L_r & 0 \\ 0 & L_m & 0 & L_r \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{qr} \\ i_{dr} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Con el propósito de tener como variables de estado las corrientes en las bobinas del estator y del rotor, despejamos el vector de derivadas de corrientes.

$$\begin{aligned}
 p \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{qr} \\ i_{dr} \end{bmatrix} &= \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L_r & 0 & -L_m & 0 \\ 0 & L_r & 0 & -L_m \\ -L_m & 0 & L_s & 0 \\ 0 & -L_m & 0 & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{qs} \\ v_{ds} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \\
 \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -L_r R_s & -L_m^2 \omega_r & L_m R_r & -L_m \omega_r L_r \\ L_m^2 \omega_r & -L_s R_s & L_m \omega_r L_r & L_m R_r \\ L_m R_s & L_s \omega_r L_m & -L_s R_r & L_s \omega_r L_r \\ -L_s \omega_r L_m & L_m R_s & -L_s \omega_r L_r & -L_s R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{qr} \\ i_{dr} \end{bmatrix} & \quad (2.55)
 \end{aligned}$$

donde $L = L_s L_r - L_m^2$.

Finalmente la ecuación (2.55) es nuestro modelo en variables de estado.

Analizando los términos de la ecuación (2.53), podemos observar que los términos de la diagonal de la matriz aparecen debido a la autoinductancia y la resistencia de cada bobina. En las ecuaciones de v_{qs} y v_{ds} solo aparecen los términos de inductancia mutua entre las bobina de su mismo eje. Lo mismo ocurre con las ecuaciones de voltaje en el rotor, donde además aparecen los términos debidos al llamado voltaje de velocidad, que aparece debido al movimiento relativo de las bobinas dentro del campo magnético. Estos términos se inducen por las bobinas del eje opuesto, por lo que aparecen relacionados con las corrientes de los ejes opuestos.

La potencia eléctrica que demanda la máquina de inducción en operación como motor o la potencia entregada por el estator en operación como generador está dada por

$$P_e = \frac{3}{2}(i_{ds}v_{ds} + i_{qs}v_{qs}) \quad (2.56)$$

El par eléctrico T_e que se genera está dado por

$$T_e = \frac{3}{2}P_p L_m (i_{qs}i_{dr} - i_{ds}i_{qr}) \quad (2.57)$$

donde P_p : número de pares de polos de la máquina

La ecuación mecánica en operación como generador es

$$T_m = J \frac{d\omega_m}{dt} + D\omega_m + T_e \quad (2.58)$$

donde

T_m : par mecánico en el eje del rotor [Nm].

ω_m : velocidad angular del rotor [$\frac{rad}{s}$].

D : coeficiente de fricción [$\frac{Nm \cdot rad}{s}$].

J : inercia del rotor [$Kg \cdot m^2$].

La potencia mecánica que requiere el generador está dada por

$$P_m = T_e \omega_m \quad (2.59)$$

2.3.3. Obtención de los parámetros del generador de inducción

Los parámetros del generador de inducción, es decir, R_s, R_r, L_{ls}, L_{lr} y L_m , se obtienen mediante la prueba de rotor bloqueado, la prueba en vacío y la prueba de corriente directa [15]. Aunque cabe mencionar que el valor se debe aproximar de otra manera para poder simular de manera correcta al generador de inducción, como más adelante se explica.

La prueba de rotor bloqueado se realiza aplicando voltaje al estator mientras el rotor está sujeto de forma que no pueda girar. Se mide el voltaje, la corriente y la potencia. Con estos datos se obtienen los valores de las impedancias de dispersión. El voltaje debe ser aplicado a la frecuencia nominal si se desea conocer los valores de reactancia a la frecuencia de trabajo.

La prueba en vacío consiste en aplicar el voltaje nominal a la máquina de inducción dejando girar al rotor de manera libre. Midiendo la corriente se pueden calcular las pérdidas mecánicas. También se obtiene información de la corriente de magnetización.

Para la prueba de corriente directa se debe aplicar un voltaje de directa a los devanados del estator. Al aplicar éste tipo de voltaje no se induce ningún voltaje al rotor y solo tiene efecto la resistencia de los devanados del estator, con lo que podemos calcular dicha resistencia.

Con la información de las distintas pruebas, aplicando las fórmulas básicas de corriente, voltaje y potencia en circuitos trifásicos se obtienen los valores de los distintos parámetros de la máquina de inducción.

2.3.4. Generador de inducción autoexcitado

Cualquier máquina de inducción requiere de una corriente de excitación que magnetice el núcleo, es decir, requiere potencia reactiva. En los generadores de inducción esta potencia puede ser proporcionada por la red eléctrica, pero cuando el generador se encuentra aislado es necesaria otra fuente para la corriente de magnetización, la cual suele ser un grupo de capacitores conectados al estator. Debido a esta característica de autosuficiencia este generador es llamado autoexcitado.

Este tipo de generador es especialmente útil cuando se desea abastecer energía eléctrica en lugares donde no existe fácil acceso a la red eléctrica. Además, también presenta la ventaja de protegerse contra corto circuito, ya que el voltaje se colapsa cuando este ocurre.

Para que se comience a generar energía se deben cumplir varias condiciones, pero las principales son que exista un flujo remanente en el núcleo del generador o que los capacitores tengan una carga inicial. Esto para que el voltaje comience a crecer. Se puede hacer un analogía con un circuito RLC que puede comenzar a oscilar cuando se le aplica un voltaje dependiendo de los parámetros del circuito. En el caso del generador, el voltaje no decrece, bajo ciertas condiciones, debido a que el rotor es la fuente que suministra la energía al sistema de manera constante.

Si se quiere saber el comportamiento de nuestro sistema se debe conocer el polinomio característico de éste y los valores de las raíces de este, las cuales dependen de los parámetros del generador. Analizando dicho polinomio podemos conocer los valores de capacitancia y velocidad de rotor necesarios para que el sistema comience a generar. Las raíces de nuestro sistema deben comenzar con parte real positiva para que el voltaje comience a crecer y en cierto punto las raíces deben hacerse imaginarias para que comience a oscilar. Este comportamiento se logra tomando en cuenta la saturación magnética del material mediante la inductancia

de magnetización L_m .

2.3.5. Inductancia de magnetización

Existen distintos métodos utilizados para representar la inductancia de magnetización, que hace posible el fenómeno de la estabilización del voltaje generado en la máquina de inducción. Esta representación es necesaria para que la generación del voltaje llegue a estabilizarse, el problema que se presenta es que la saturación magnética es un fenómeno no lineal.

Los distintos métodos que se usan para modelar a la inductancia de magnetización van desde aproximaciones con modelos de redes neuronales [17] hasta ajustes mediante curvas de cuarto orden. Debido a la simplicidad y efectividad de este último método, es el que se usará para aproximar el efecto de la inductancia de magnetización.

Primero se deben obtener los valores experimentales de inductancia de magnetización, lo cual se logra haciendo girar el rotor a la velocidad síncrona mientras se alimentan los devanados del estator con un voltaje que va desde el 0% hasta el 120% del voltaje nominal, y se toman mediciones de la corriente en el estator. Con la corriente y el voltaje podemos obtener la impedancia, de la cual separamos el efecto de la resistencia para así obtener solo el efecto de la inductancia de magnetización. En la figura 2.16 se muestra una gráfica típica de los valores de inductancia de magnetización en función del voltaje de fase y la curva que se ajusta a dichos datos. En la figura 2.17 se observa el valor de la inductancia de magnetización en función de la corriente de magnetización.

Analizando la figura 2.16, se observa que conforme aumenta el voltaje también lo hace el valor de la inductancia de magnetización, hasta que en cierto punto comienza a decrecer. Cuando comienza a crecer es una región inestable ya que si en esa región por alguna razón el voltaje decrece también lo hará la inductancia de magnetización lo cual hace que el voltaje sigue disminuyendo continuando así hasta que el voltaje colapsa. En cambio, la región donde la inductancia de magnetización decrece conforme aumenta el voltaje es una región estable, debido a que al disminuir el voltaje, la inductancia de magnetización crece lo que hace que el voltaje crezca y se estabilice. Es por este que existe un voltaje mínimo que asegura que este último se estabilizará.

A pesar de que la curva de inductancia de magnetización en función del voltaje

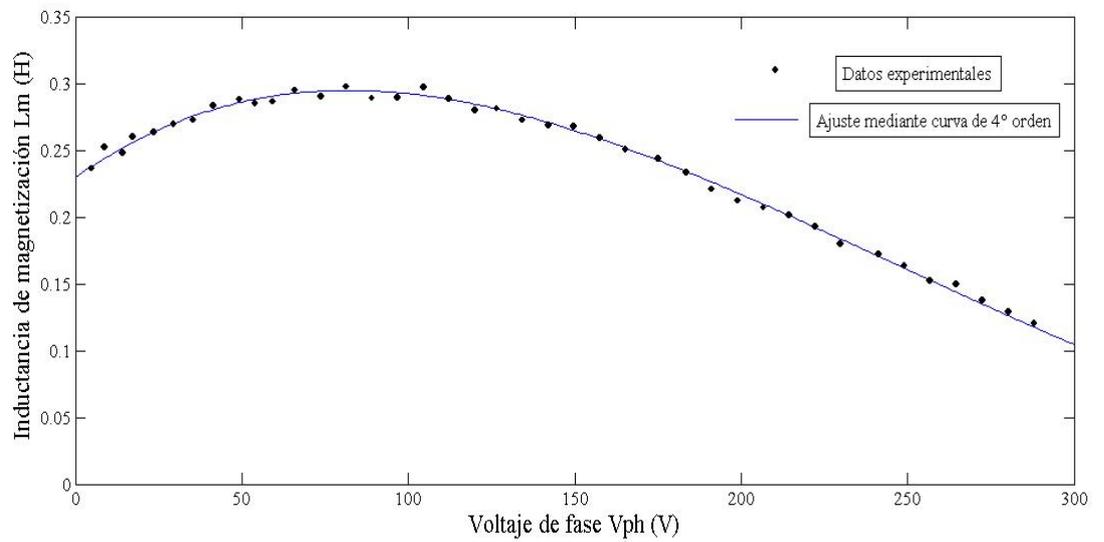


Figura 2.16. Ajuste con curva de 4° orden para la inductancia de magnetización

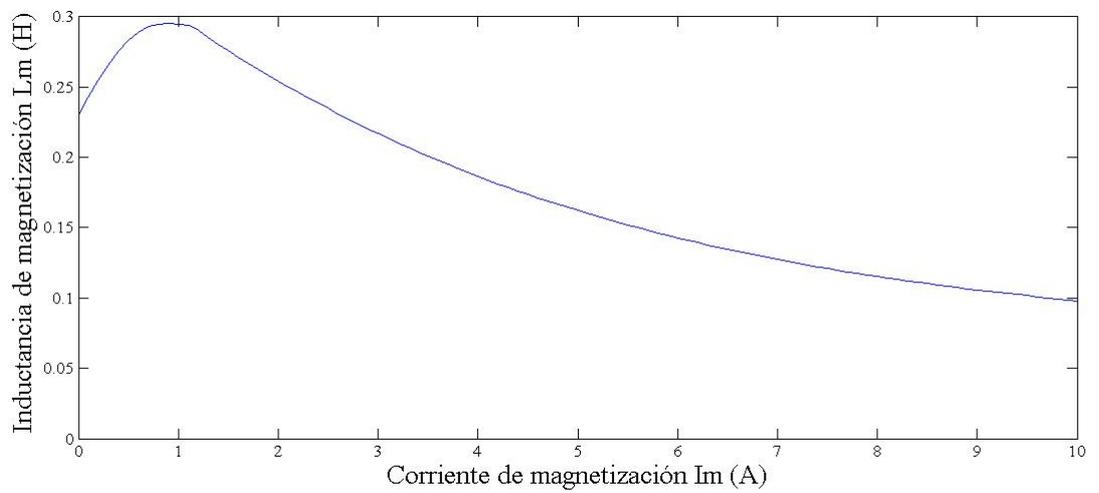


Figura 2.17. Inductancia de magnetización en función de la corriente de magnetización

es útil para analizar el efecto que tiene en el sistema, se usará la curva que ajusta al valor de inductancia de magnetización en función de la corriente de magnetización, por lo que primero debemos calcular la corriente de magnetización. Las componentes de la corriente de magnetización son

$$i_{mq} = i_{qs} + i_{qr} \quad (2.60)$$

$$i_{md} = i_{ds} + i_{dr} \quad (2.61)$$

y el valor rms de la corriente de magnetización se calcula como

$$I_m = \frac{\sqrt{i_{mq}^2 + i_{md}^2}}{\sqrt{2}} \quad (2.62)$$

La curva de la figura 2.17 se obtiene mediante los dos siguientes polinomios

Para $I_m < 1,157A$

$$L_m = 0,063I_m^4 - 0,14I_m^3 + 0,017I_m^2 + 0,125I_m + 0,23 \quad (2.63)$$

Para $I_m \geq 1,157A$

$$L_m = 3,98 \times 10^{-6}I_m^4 - 2,4 \times 10^{-4}I_m^3 + 5,48 \times 10^{-3}I_m^2 - 0,0605I_m + 0,3552 \quad (2.64)$$

De esa manera podemos simular el efecto de la saturación magnética en el generador.

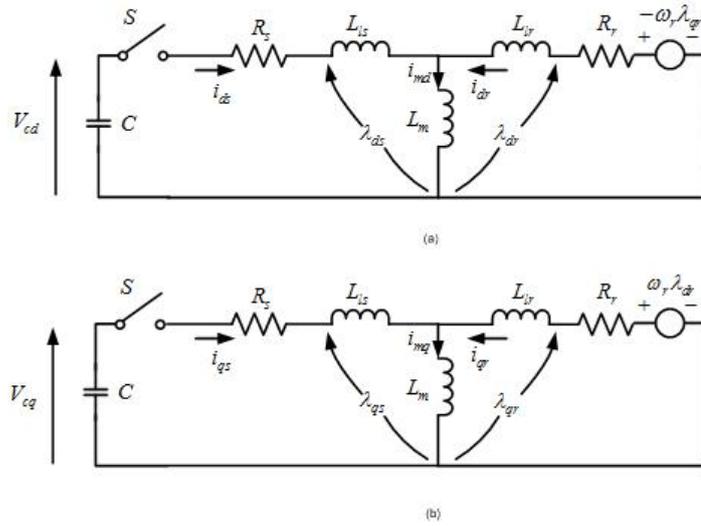


Figura 2.18. Esquema de un generador de inducción representado en coordenadas DQ con capacitores conectados al estator

2.3.6. Modelo del generador de inducción con capacitores conectados al estator

La conexión de los capacitores a los devanados del estator es lo que nos permite lograr el efecto de autoexcitación. Para obtener el modelo partiremos del diagrama de la figura 2.18.

Las ecuaciones resultantes de los circuitos equivalentes son

$$\begin{bmatrix} -V_{cq} \\ -V_{cd} \\ K_{qr} \\ -K_{dr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_s + L_s p) & 0 & L_m p & 0 \\ 0 & (R_s + L_s p) & 0 & L_m p \\ L_m p & -\omega_r L_m & (R_r + L_r p) & -\omega_r L_r \\ \omega_r L_m & L_m p & \omega_r L_r & (R_r + L_r p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{qr} \\ i_{dr} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Donde debemos tomar en cuenta las ecuaciones de los capacitores

$$V_{cq} = \frac{i_{qs}}{pC} + V_{cq0} \quad (2.66)$$

$$V_{cd} = \frac{i_{ds}}{pC} + V_{cd0} \quad (2.67)$$

Donde V_{cq0} y V_{cd0} son los voltajes debidos a la carga inicial en los capacitores.

Si se desea hacer el análisis de la ecuación característica del sistema se deben introducir las ecuaciones (2.66) y (2.67) en la matriz y obtener el polinomio característico.

$$\begin{bmatrix} -V_{cq0} \\ -V_{cd0} \\ K_{qr} \\ -K_{dr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_s p + \frac{1}{pC} & 0 & L_m p & 0 \\ 0 & R_s + L_s p + \frac{1}{pC} & 0 & L_m p \\ L_m p & -\omega_r L_m & R_r + L_r p & -\omega_r L_r \\ \omega_r L_m & L_m p & \omega_r L_r & R_r + L_r p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{qr} \\ i_{dr} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Obteniendo el polinomio característico de este sistema, podemos conocer los valores de capacitancia y velocidad del rotor mínimos necesarios para que el sistema comience a generar.

Nuestro sistema en variables de estado, a partir de la ecuación (2.65) es

$$p \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{qr} \\ i_{dr} \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L_r & 0 & -L_m & 0 \\ 0 & L_r & 0 & -L_m \\ -L_m & 0 & L_s & 0 \\ 0 & -L_m & 0 & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -V_{cq} \\ -V_{cd} \\ K_{qr} \\ -K_{dr} \end{bmatrix} + \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -L_r R_s & -L_m^2 \omega_r & L_m R_r & -L_m \omega_r L_r \\ L_m^2 \omega_r & -L_s R_s & L_m \omega_r L_r & L_m R_r \\ L_m R_s & L_s \omega_r L_m & -L_s R_r & L_s \omega_r L_r \\ -L_s \omega_r L_m & L_m R_s & -L_s \omega_r L_r & -L_s R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{qr} \\ i_{dr} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Se observa que son prácticamente las mismas ecuaciones que en el sistema sin capacitores, solo que en este caso los voltajes en el estator son los voltajes de los capacitores y ahora los voltajes en el rotor no son cero, ya que K_{qr} y K_{dr} representan los voltajes debidos al flujo remanente en el núcleo.

2.3.7. Modelo del generador de inducción con carga y capacitores conectados al estator

Ahora, para el proceso con carga conectada solo hay que analizar el diagrama de la figura 2.19. Se modifican y agregan las ecuaciones necesarias para obtener el modelo. Observando la corriente en la carga las ecuaciones adicionales son

$$i_{Lq} = \frac{V_{cq}}{R_L} \quad (2.70)$$

$$i_{Ld} = \frac{V_{cd}}{R_L} \quad (2.71)$$

$$i_{cq} = i_{qs} - i_{Lq} \quad (2.72)$$

$$i_{cd} = i_{ds} - i_{Ld} \quad (2.73)$$

$$pV_{cq} = \frac{i_{cq}}{C} \quad (2.74)$$

$$pV_{cd} = \frac{i_{cd}}{C} \quad (2.75)$$

Con estas ecuaciones podemos representar al generador de inducción autoexcitado cuando está alimentando una carga resistiva.

De nueva cuenta, si se desean conocer las condiciones de capacitancia y velocidad de rotor mínimos para comenzar a generar con determinada carga, se deben introducir las ecuaciones anteriores a la matriz del sistema y obtener el polinomio característico. Tomando en cuenta la carga, las condiciones para generar cambian dependiendo del valor de esta.

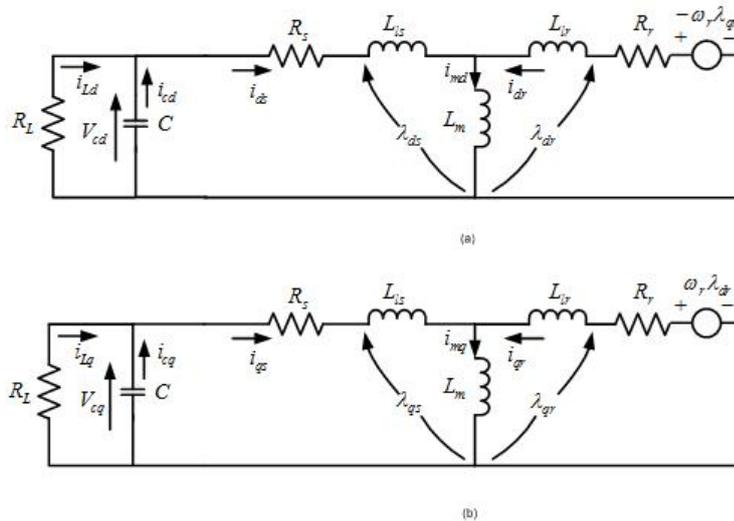


Figura 2.19. Esquema de un generador de inducción representado en coordenadas DQ con capacitores y carga conectados al estator

2.3.8. Simulación del generador de inducción mediante Simulink

Para simular el funcionamiento del generador de inducción autoexcitado se usará una máquina con las siguientes características.

$$\begin{aligned}
 L_{ls} &= 0,012H \\
 L_{lr} &= 0,012H \\
 R_s &= 1,6\Omega \\
 R_r &= 2,75\Omega \\
 C &= 60\mu F
 \end{aligned}$$

En la figura 2.20 se observa el diagrama de bloques usado en Simulink para simular el modelo. En la figura 2.21 se muestra el voltaje en el eje d generado que comienza a crecer hasta alcanzar el estado estable en aproximadamente 400 V. La figura 2.22 muestra en detalle la forma de la onda senoidal generada mientras que en la figura 2.23 se observa la velocidad del rotor usada para generar el voltaje.

Al estabilizarse la frecuencia del voltaje, mostrado en la figura 2.24 es de aproximadamente 51 Hz, ya que el rotor tiene una velocidad un poco mayor a la de sincronía.

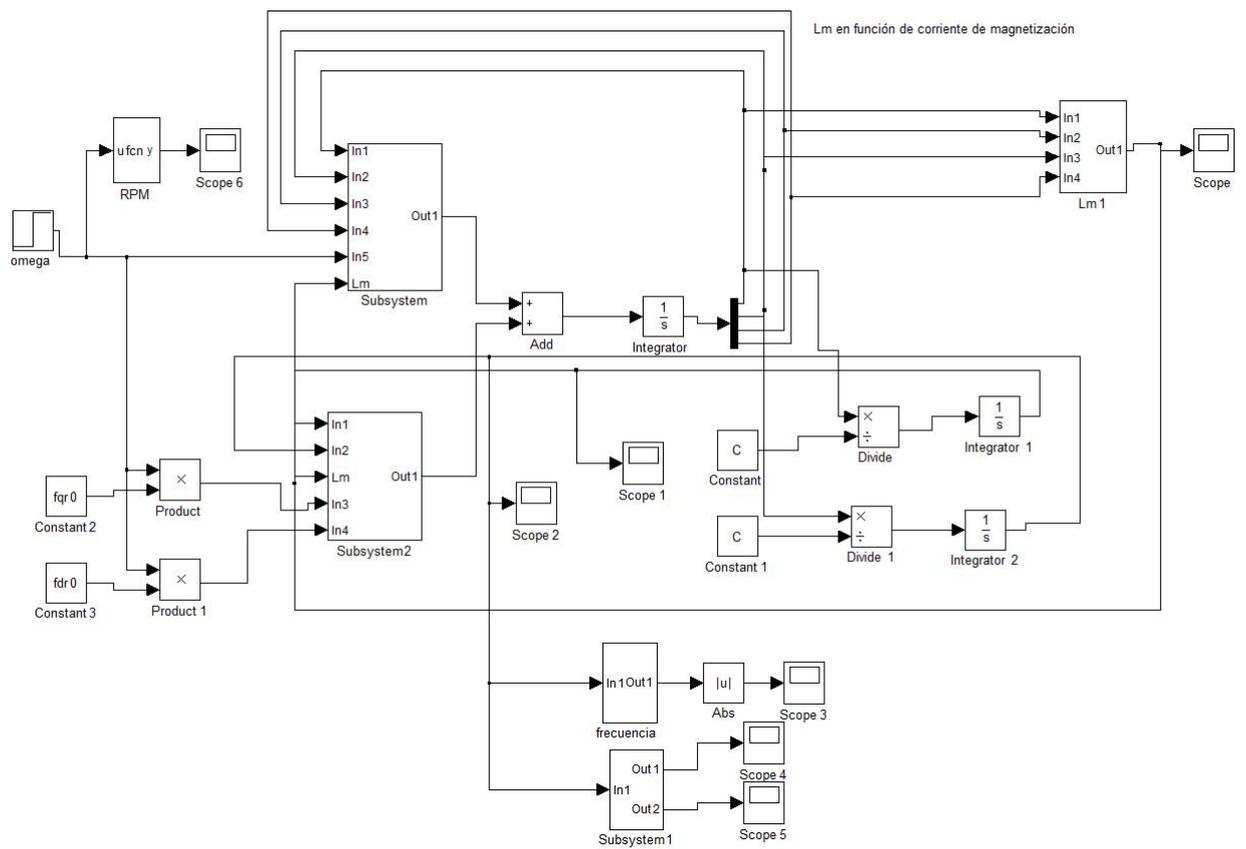


Figura 2.20. Diagrama de bloques usado para la simulación del generador de inducción autoexcitado

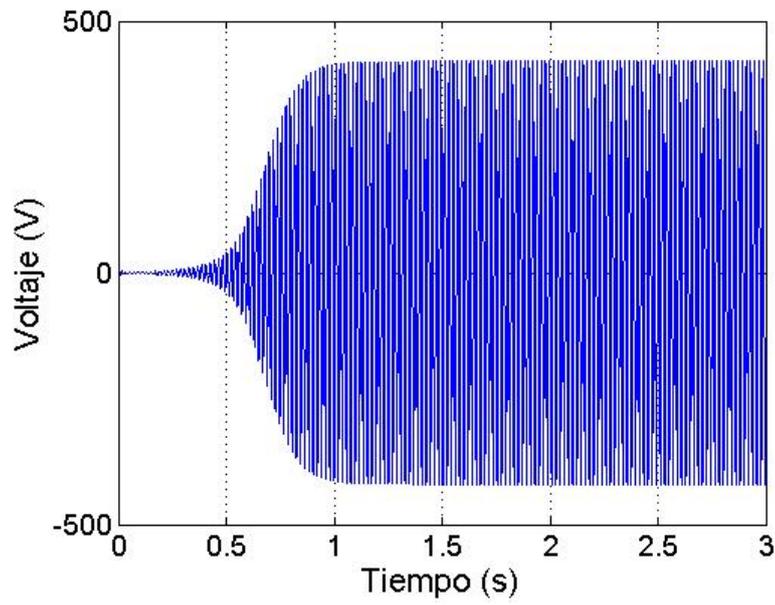


Figura 2.21. Voltaje generado por el generador de inducción autoexcitado

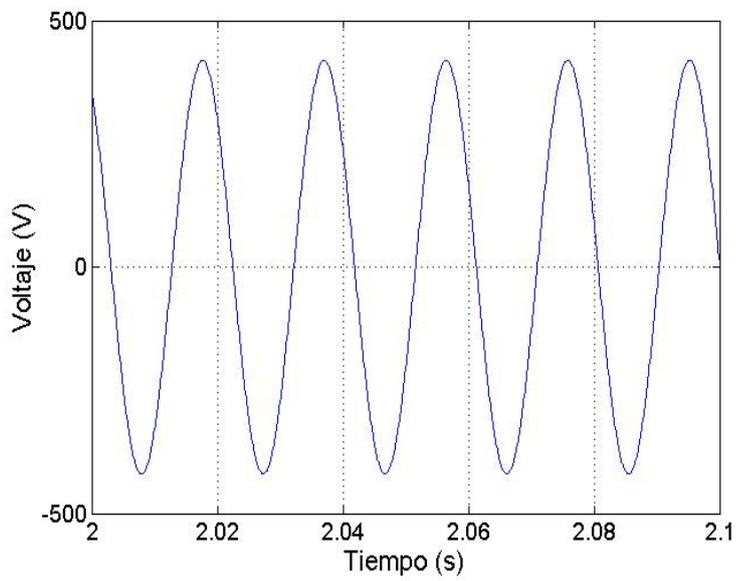


Figura 2.22. Detalle del voltaje generado

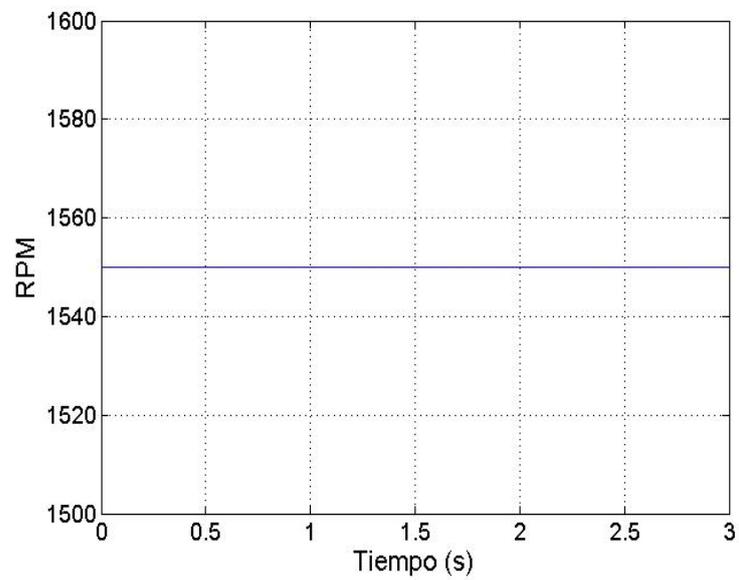


Figura 2.23. Velocidad del rotor de la máquina de inducción

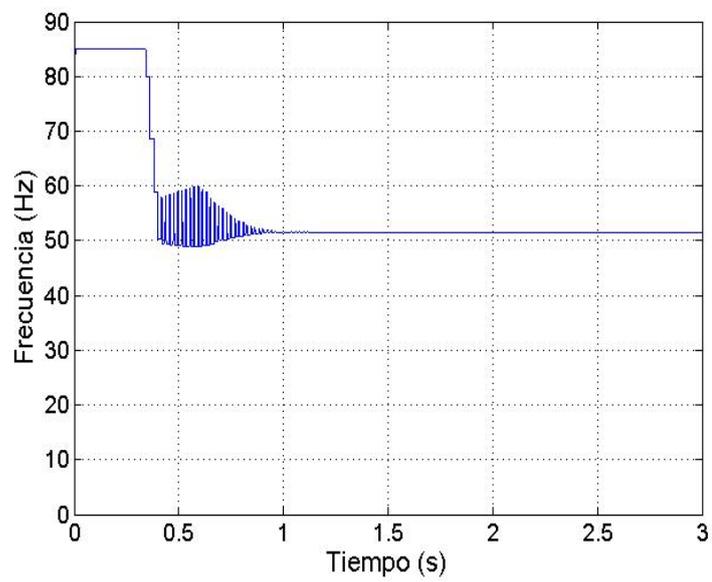


Figura 2.24. Frecuencia del voltaje generado

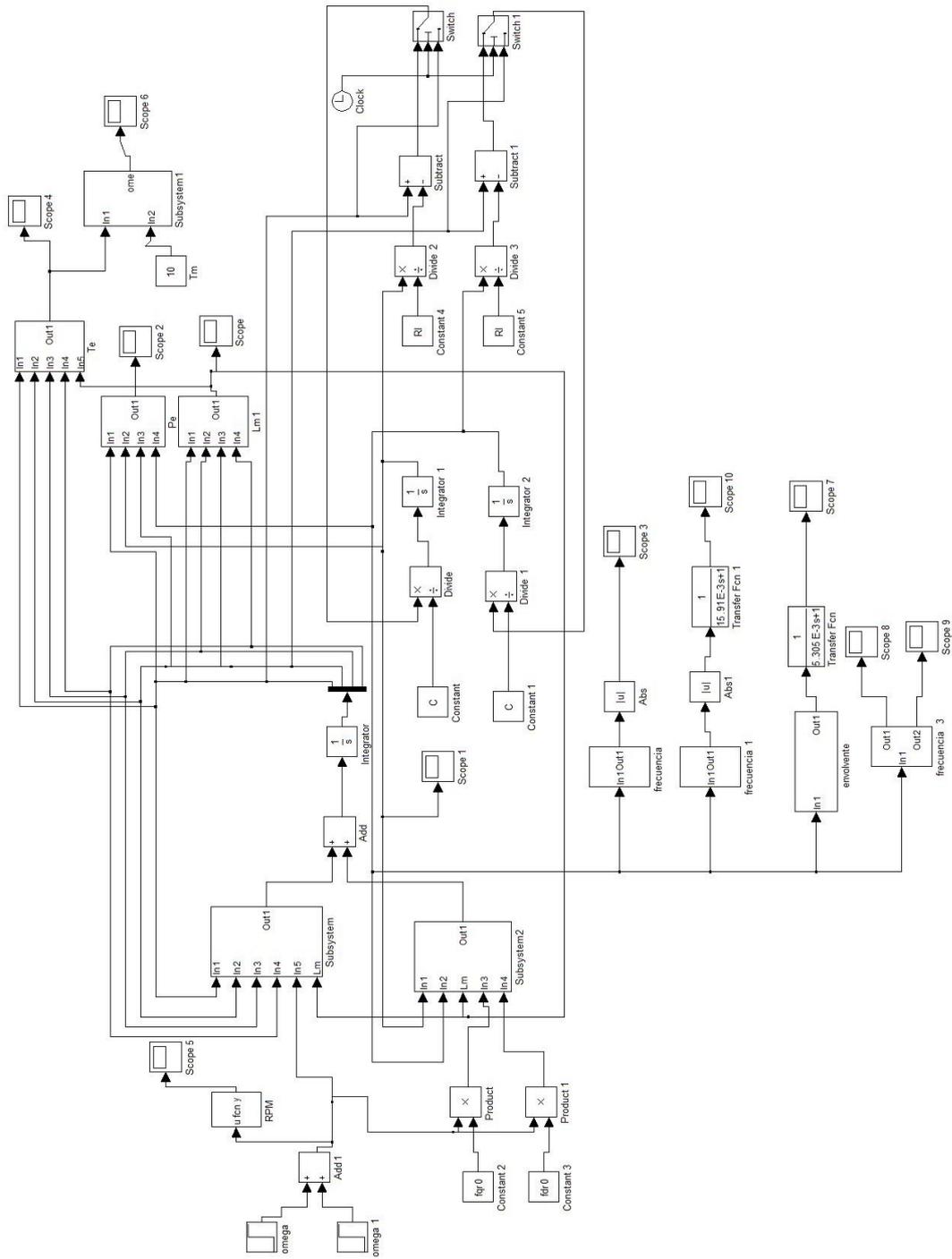


Figura 2.25. Diagrama de bloques de la simulación del generador de inducción autoexcitado con carga

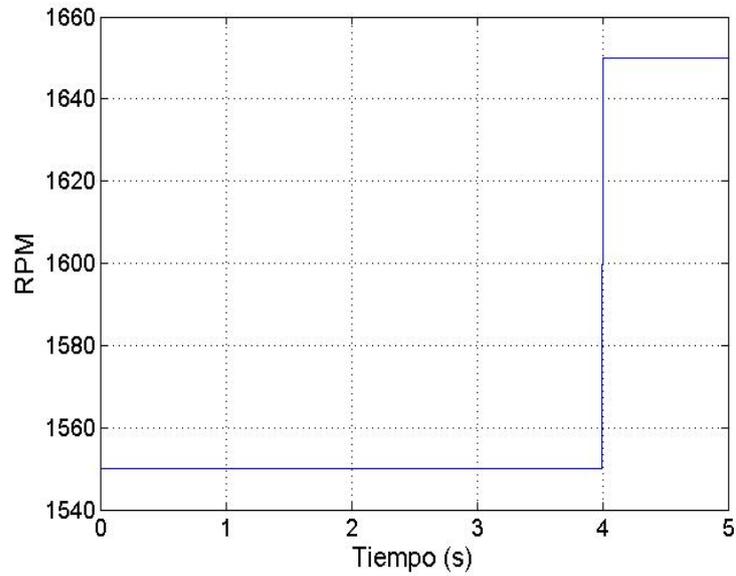


Figura 2.26. Velocidad del rotor del generador de inducción autoexcitado con carga

Para simular el funcionamiento con carga usamos una resistencia de 50Ω . El diagrama de bloques en Simulink se muestra en la figura 2.25. En este caso también se aumenta la velocidad del rotor en $t = 4$ s (figura 2.26) para observar el efecto de este aumento de velocidad. La carga se conecta en $t = 3$ s.

Analizando el voltaje generado de la figura 2.27, se observa como al momento de conectar la carga el voltaje decrece, y observando la frecuencia en la figura 2.28, se nota que esta también disminuye. En $t = 4$ s, cuando se aumenta la velocidad del rotor, el voltaje crece de nuevo, así como la frecuencia de éste.

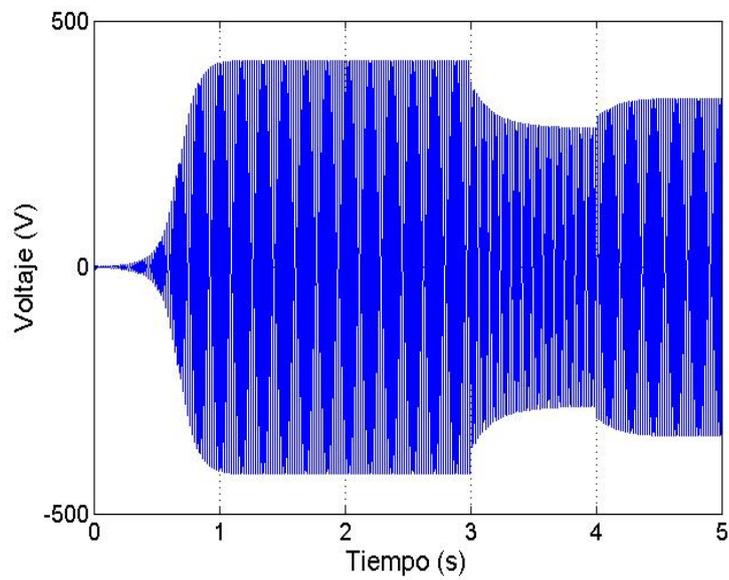


Figura 2.27. Voltaje del generador de inducción autoexcitado

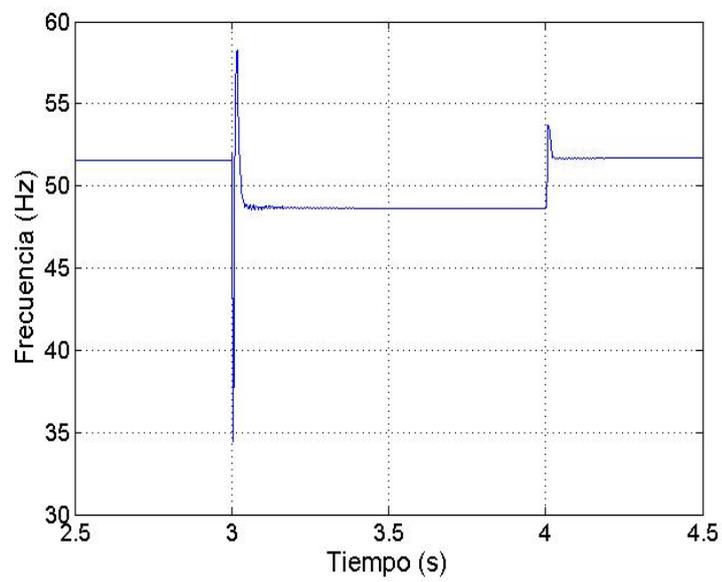


Figura 2.28. Frecuencia del voltaje del generador de inducción autoexcitado

