



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**CURSO ORGANIZADO DENTRO DEL PROGRAMA DE SUPERACION
ACADEMICA DE LA DIVISION DE CIENCIAS BASICAS.**

CURSO: " ESTATICA "

**TEMA: I. - "SISTEMAS DE UNIDADES Y RUDIMENTOS DE
ANALISIS DIMENSIONAL...!"**

ABRIL-MAYO 1984

1950

1951

1952

1953

1954

1955

1956

1957

1958

1959

1960

1961

1962

1963

1964

1965

1966

CURSO DE ESTÁTICA

OBJETIVOS Y CONTENIDO.

PROPOSITOS. Impartir un curso de Estática para profesores, que satisfaga los contenidos de los programas vigentes y eleve los conocimientos de los nuevos profesores sobre esta ciencia, aumentando la calidad de la enseñanza correspondiente.

TEMARIO:

I. SISTEMAS DE UNIDADES Y RUDIMENTOS DE ANALISIS DIMENSIONAL,

Objetivo.- Utilizar y relacionar las unidades de la Mecánica en los diferentes sistemas de medición, así mismo traducir fórmulas expresadas en un sistema dado a otro.

Subtemas.-

- I.1- Segunda Ley de Newton.
- I.2- Los sistemas absolutos y los gravitacionales.
- I.3- Transformación de expresiones.
- I.4- Ecuaciones dimensionales y traducción de fórmulas.
- I.5- El Sistema Internacional de Unidades.

II. EQUIVALENCIA Y REDUCCION DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS.

Objetivo.- Conocido un sistema de fuerzas, obtener otro sistema, que produzca los mismos efectos externos que el original, pero expresado en su mínima forma.

Subtemas.-

- II.1- Sistemas de fuerzas.
- II.2- Sistemas equivalentes.
- II.3- Pares de fuerzas.
- II.4- Traslación de una fuerza.
- II.5- Reducción de los sistemas de fuerzas.

III.- EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS

Objetivo.- Dado un problema isostático de equilibrio, plantearlo y resolverlo.

Subtemas.-

- III.1- Descripción de las fuerzas que actúan en un cuerpo.
- III.2- Identificación y arreglo de las fuerzas que actúan en un cuerpo.
- III.3- Fricción.
- III.4- Disposiciones particulares del sistema de fuerzas.
- III.5- Caracterización de los problemas de equilibrio.
- III.6- Sistemas de fuerzas de componentes cualesquiera.
- III.7- Sistemas de fuerzas de componentes paralelos.
- III.8- Sistemas de fuerzas concurrentes.
- III.9- Sistemas de fuerzas de componentes colineales.
- III.10- Cálculo de reacciones en vigas, pórticos, marcos, arcos y armaduras.
- III.11- Armaduras planas inestáticas.
- III.12- Cables.

IV.- PRIMEROS Y SEGUNDOS MOMENTOS

Objetivo.- A partir de los conceptos del centro de un sistema de fuerzas paralelas y de la dinámica de la rotación de los cuerpos rígidos, determinar los primeros y segundos momentos de cuerpos y figuras geométricas.

IV.1.- PRIMEROS MOMENTOS

- IV.1.1- Centro de un sistema de fuerzas paralelas.
- IV.1.2- Centro de gravedad y centro de masa de cuerpos.
- IV.1.3- Momentos estáticos y centroides de volúmenes, de áreas y de líneas.

IV.1.4 Planos y ejes de simetría, ejes centroidales.

IV.2 MOMENTOS DE INERCIA

IV.2.1 Concepto dinámico y definición matemática del momento de inercia de la masa de un cuerpo.

IV.2.2 Momento de inercia o de segundo orden de áreas planas.
Momento polar de inercia de áreas planas.

IV.2.3 Producto de inercia y radios de giro de áreas planas,
Teorema de Steiner o de los ejes paralelos.

IV.2.4 Ejes centroidales y ejes principales.

SISTEMAS DE UNIDADES

INTRODUCCION. - Para cualquier ingeniero el manejar adecuadamente los diferentes sistemas de unidades, de uso más frecuente, representa un apoyo muy importante para la solución de cualquier problema de ingeniería. Lo anterior se evidencia cuando se tiene que manejar manuales o documentos que utilizan, para la solución de problemas específicos, unidades diferentes a las de uso más frecuente en nuestro País, aún más, en la mayoría de las ocasiones las fórmulas que deberán manejarse tienen que ser traducidas para que sean empleadas en determinadas condiciones o con unidades diferentes a las de su planteamiento.

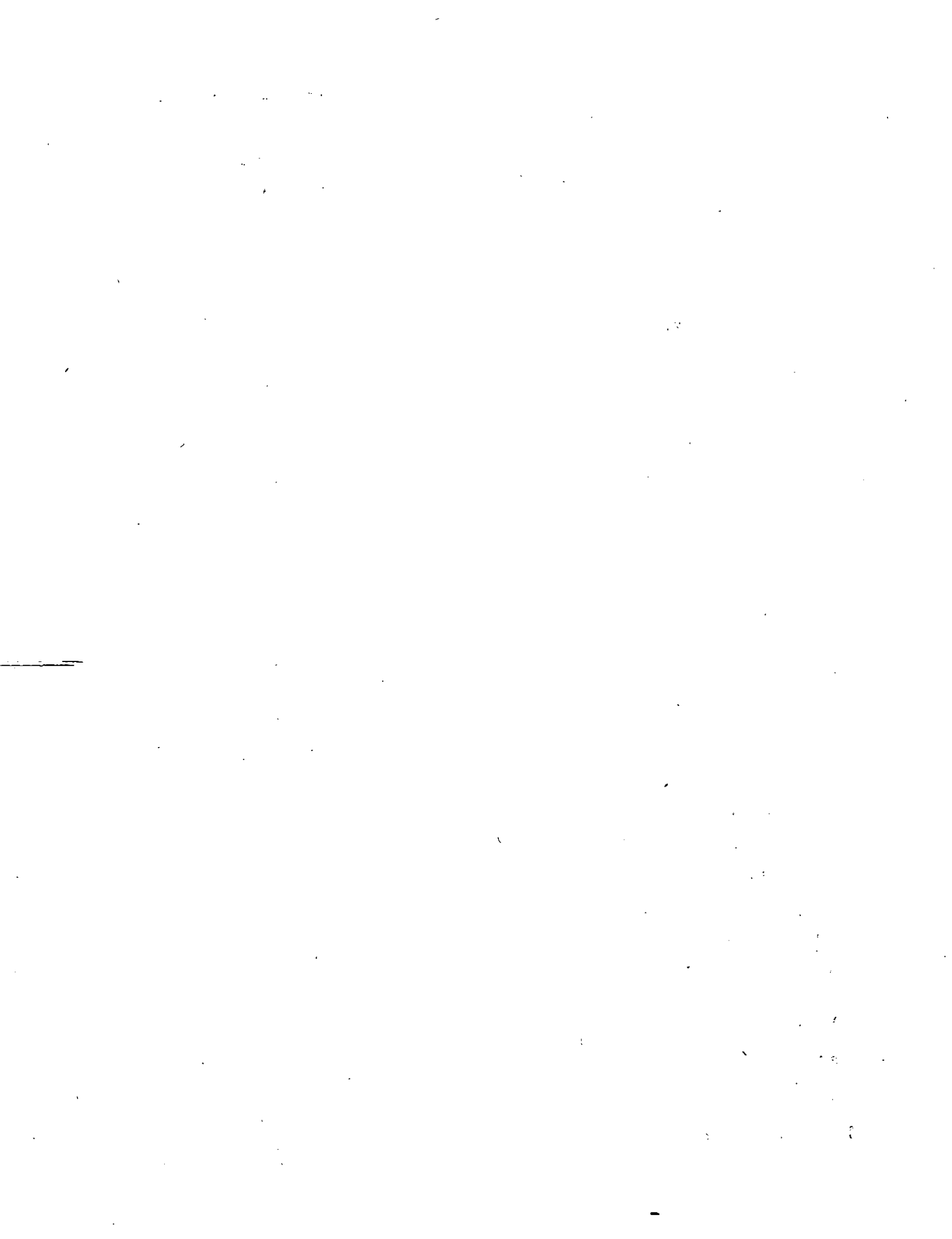
En el desarrollo de éste tema se considera que los conceptos que se relacionan a continuación son conocidos:

- Fuerza
- Masa
- Aceleración
- Tiempo
- Longitud

OBJETIVO. - Dada una fórmula que fue planteada en un sistema de unidades determinado, en caso de que sea necesario, será posible obtener otra, que será utilizable con unidades distintas a las originales.

DESARROLLO. - Con la finalidad de comprender adecuadamente el tema en cuestión, su estudio lo dividiremos en las siguientes partes:

- 1) Segunda Ley de Newton
- 2) Los Sistemas Absolutos y Gravitacionales
- 3) Transformación de Expresiones
- 4) Ecuaciones Dimensionales y Traducción de Fórmulas
- 5) Sistema Internacional de Unidades



1.- Segunda Ley de Newton.- La Mecánica Clásica o Newtoniana se basa en las muy conocidas leyes del movimiento debidas a Newton y se emplean para la solución de problemas de ingeniería ya que, por la naturaleza de los mismos, las variantes que se involucran pueden ser resueltas con las leyes citadas.

Para este tema en particular, nos conformaremos con citar la Segunda Ley:

" Si una fuerza actúa en una partícula material le produce, en su dirección, una aceleración de módulo proporcional a su magnitud".

$$F = \lambda ma$$

donde λ es la constante de proporcionalidad. Es muy importante - hacer notar que dicha constante asume el valor de la unidad y en tonces la expresión indicada toma la forma:

$$F = ma$$

La cual deberá tenerse muy en cuenta cuando se analicen los diferentes sistemas de unidades.

2.- Los Sistemas Absolutos y Gravitacionales.- Para poder distinguir las dimensiones físicas y apreciar las magnitudes, es necesario medir. Para medir se requiere:

- Establecer la magnitud que se trate de estimar.
- Definir el patrón que ha de servir de base en las mediciones.

El concepto básico que permite realizar mediciones es el de la unidad, la cual es una magnitud de la misma especie o dimensiones que las de aquélla que se desea medir.

Existen dos tipos de unidades:

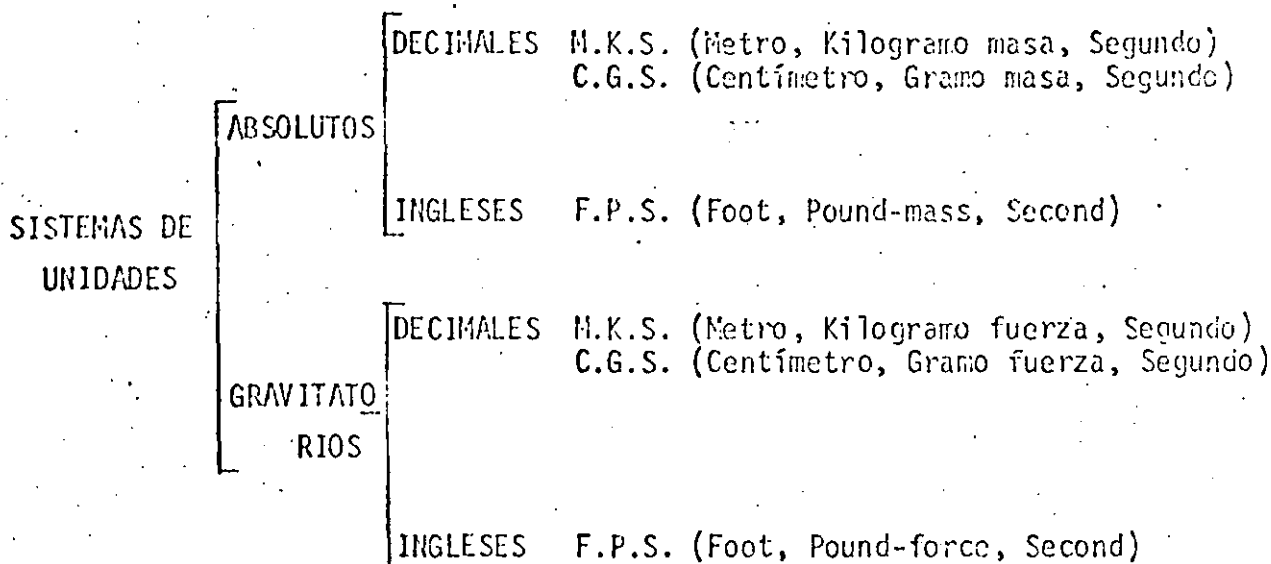
Las llamadas FUNDAMENTALES, que se definen arbitrariamente, y las DERIVADAS, que son consecuencia conceptual de las anteriores.

La Segunda Ley del Movimiento establece una relación fuerza-masa -

que permite definir, independientemente, no más de tres magnitudes unitarias escogidas del conjunto: longitud, masa, fuerza y tiempo.

Desde este punto de vista existen dos enfoques; el primero de ellos acepta como unidades fundamentales las de longitud, masa y tiempo, a partir de las cuales se establecen los sistemas de medidas ABSOLUTOS. Y el segundo de ellos, que parte de definir arbitrariamente las unidades de longitud, fuerza y tiempo, dando por resultado los sistemas GRAVITATORIOS.

En estas condiciones se han establecido los sistemas de unidades siguientes:



Conviene aclarar, por una parte, que también en los sistemas absolutos se dispone de unidades de fuerza y, por la otra, que los sistemas gravitacionales contienen, asimismo unidades de masa; sólo que en tales casos dichas unidades no son elegidas arbitrariamente, sino que se derivan de las fundamentales del sistema correspondiente.

Ahora bien, para definir las unidades derivadas, tanto de los sistemas absolutos como de los gravitacionales, es necesario hacer uso de las dimensiones, las cuales determinan la manera en que deben variar las unidades fundamentales para obtener las derivadas que se requieran.

Así, si las unidades fundamentales: longitud, masa, fuerza y tiempo (mencionadas con anterioridad), se representan por L, M, F y T, respectivamente, tienen como dimensiones correspondientes las siguientes:

CONCEPTO	ABSOLUTOS GRAVITACIONALES	
LONGITUD	$[L^1, M^0, T^0]$	$[L^1, F^0, T^0]$
MASA	$[L^0, M^1, T^0]$	$[L^{-1}, F^1, T^2]^*$
FUERZA	$[L^1, M^1, T^{-2}]$	$[L^0, F^1, T^0]$
TIEMPO	$[L^0, M^0, T^1]$	$[L^0, F^0, T^1]$

* Unidad derivada

Al observar el cuadro anterior, se corrobora lo dicho cuando se afirmó que también existen unidades de fuerza y de masa en los sistemas gravitacionales y absolutos, respectivamente; ambas dimensiones fueron obtenidas a partir de la 2da. Ley del Movimiento debida a Newton, como se muestra a continuación:

1) Unidad de fuerza

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$[L^0, M^1, T^0] [L^1, M^0, T^{-2}]$$

$$\vec{F} [L^1, M^1, T^{-2}]$$

2) Unidad de masa

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$m = \frac{\vec{F}}{\vec{a}}$$

$$\frac{[L^0, F^1, T^0]}{[L^1, F^0, T^{-2}]}$$

$$m [L^{-1}, F^1, T^2]$$

De las expresiones anteriores es muy sencillo obtener las unidades derivadas, en cualesquiera de las tres variantes de sistemas mencionadas (C.G.S., M.K.S., F.P.S.). En efecto:

i) Unidades de fuerza del Sistema Absoluto.

$$\text{C.G.S.} \quad \frac{\text{cm. g}}{\text{s}^2} = \text{dina}$$

$$\text{M.K.S.} \quad \frac{\text{mkg}}{\text{s}^2} = \text{Newton}$$

$$\text{F.P.S.} \quad \frac{\text{ft lb}}{\text{s}^2} = \text{Poundal}$$

ii) Unidades de masa del Sistema Gravitacional.

$$\text{C.G.S.} \quad \frac{\text{gfs}^2}{\text{cm}} = \text{geogramo}$$

$$\text{M.K.S.} \quad \frac{\text{kg}_f \cdot \text{s}^2}{\text{m}} = \text{geokilo}$$

$$\text{F.P.S.} \quad \frac{\text{lb}_f \cdot \text{s}^2}{\text{ft}} = \text{geolibra o slug}$$

Análogamente, podemos obtener otras unidades de gran aplicación en la Ingeniería, tales como las de trabajo y potencia.

De acuerdo a la definición de trabajo (el producto de la fuerza por la distancia recorrida en la dirección de aquélla), se tiene que:

$$\vec{T} = \vec{F}d$$

i) Sistema Absoluto.- Las dimensiones son:

$$\vec{F}d \quad [L; M', T^{-2}] \quad [L', M^0, T^0]$$

$$\vec{T} \quad [L^2, M', T^{-2}]$$

En esos términos, resulta:

$$\text{C.G.S.} \quad \frac{\text{cm}^2 \text{ g}}{\text{s}^2} = \text{erg}$$

$$\text{M.K.S.} \quad \frac{\text{m}^2 \text{ kg}}{\text{s}^2} = \text{Joule}$$

$$\text{F.P.S.} \quad \frac{\text{ft}^2 \text{lb}}{\text{s}^2}$$

ii) Sistema Gravitacional.- En este caso las dimensiones son:

$$\vec{F}d \quad [L^0, F^1, T^0] \quad [L^1, F^0, T^0]$$

$$\vec{T} \quad [L^1, F^1, T^0]$$

De lo que se desprende:

$$\text{C.G.S.} \quad \text{cm gf}$$

$$\text{M.K.S.} \quad \text{m kgf}$$

$$\text{F.P.S.} \quad \text{ft lbf}$$

Las unidades que acabamos de definir también se emplean para medir el momento que produce una fuerza, pero son las pertenecientes al Sistema Gravitacional las que con más frecuencia se utilizan.

Ahora bien, como la potencia es el trabajo realizado en la unidad de tiempo, se tiene:

$$\vec{P} = \frac{\vec{T}}{t} = \frac{\vec{F} d}{t}$$

i) Sistema Absoluto.

Dimensionando

$$\vec{P} \quad [L^1, M^1, T^{-2}] \quad [L^1, M^0, T^0] \quad [L^0, M^0, T^{-1}]$$

$$\vec{P} \quad [L^2, M^1, T^{-3}]$$

De ahí que:

$$\text{C.G.S.} \quad \frac{\text{cm}^2 \text{g}}{\text{s}^3}$$

$$\text{M.K.S.} \quad \frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}^3} = \text{Watt}$$

$$\text{F.P.S.} \quad \frac{\text{ft}^2 \text{lb}}{\text{s}^3}$$

ii) Sistema Gravitacional

$$\vec{P} [L^0, F^1, T^0] \quad [L^1, F^0, T^0] \quad [L^0, F^0, T^{-1}]$$
$$\vec{P} [L^1, F^1, T^{-1}]$$

En estas condiciones:

$$\text{C.G.S.} \quad \frac{\text{cm gf}}{\text{s}}$$

$$\text{M.K.S.} \quad \frac{\text{m kgf}}{\text{s}}$$

$$\text{F.P.S.} \quad \frac{\text{ft lbf}}{\text{s}}$$

Una forma sintetizada y práctica de analizar las unidades se presenta en las tablas 1 y 2 anexas.

TABLA 1
ALGUNAS UNIDADES DE LOS SISTEMAS ABSOLUTOS Y SUS DIMENSIONES

CONCEPTO	UNIDAD SISTEMA M.K.S.	UNIDAD SISTEMA F.P.S.	UNIDAD SISTEMA C.G.S.	DIMENSIONES
LONGITUD	m	ft	cm	$[L^1 M^0 T^0]$
MASA	kg	lb	g	$[L^0 M^1 T^0]$
TIEMPO	s	s	s	$[L^0 M^0 T^1]$
ÁNGULO	Adimensional	Adimensional	Adimensional	$[L^0 M^0 T^0]$
AREA	m ²	ft ²	cm ²	$[L^2 M^0 T^0]$
VOLUMEN	m ³	ft ³	cm ³	$[L^3 M^0 T^0]$
FUERZA	Newton=kg m/s ²	Poundal=lb ft/s ²	Dina=g cm/s ²	$[L^1 M^1 T^{-2}]$
TRABAJO	Joule=Newton.m	lb ft ² /s ²	er=Dina.cm	$[L^2 M^1 T^{-2}]$
POTENCIA	Watt=Joule/s	lb ft ² /s	erg/s	$[L^2 M^1 T^{-3}]$
MOMENTO	Newton.m	Poundal. ft	Dina.cm	$[L^2 M^1 T^{-2}]$
VELOCIDAD	m/s	ft/s	cm/s	$[L^1 M^0 T^{-1}]$
ACELERACION	m/s ²	ft/s ²	cm/s ²	$[L^1 M^1 T^{-2}]$
ESFUERZO	Newton/m ²	Poundal/ft ²	Dina/cm ²	$[L^{-1} M^1 T^{-2}]$
PESO ESPECIFICO	Newton/m ³	Poundal/ft ³	Dina/cm ³	$[L^{-2} M^1 T^{-2}]$

TABLA 2

ALGUNAS UNIDADES DE LOS SISTEMAS GRAVITACIONALES Y SUS DIMENSIONES

CONCEPTO	U	N	I	D	A	D	E	S	DIMENSIONES
	SISTEMA M.K.S.			SISTEMA F.P.S.			SISTEMA C.G.S.		
LONGITUD		m			ft			cm	$[L^1 F^0 T^0]$
FUERZA		kg _f			lb _f (#)			g _f	$[L^0 F^1 T^0]$
TIEMPO		s			s			s	$[L^0 F^0 T^1]$
ANGULO		Adimensional			Adimensional			Adimensional	$[L^0 F^0 T^0]$
AREA		m ²			ft ²			cm ²	$[L^2 F^0 T^1]$
VOLUMEN		m ³			ft ³			cm ³	$[L^3 F^0 T^0]$
MASA		Geokilo=Kg _f s ² /m			Slug=lb _f s ² /ft			g _f s ² /cm	$[L^{-1} F^1 T^2]$
TRABAJO		kg _f ·m			lb _f ·ft			g _f ·cm	$[L^1 F^1 T^0]$
POTENCIA		kg _f ·m/s			lb _f ·ft/s			g _f ·cm/s	$[L^1 F^1 T^{-1}]$
MOMENTO		kg _f ·m			lb _f ·ft			g _f ·cm	$[L^1 F^1 T^0]$
VELOCIDAD		m/s			ft/s			cm/s	$[L^1 F^0 T^{-1}]$
ACELERACION		m/s ²			ft/s ²			cm/s ²	$[L^1 F^0 T^{-2}]$
ESFUERZO		kg _f /m ²			lb _f /ft ²			g _f /cm ²	$[L^{-2} F^1 T^0]$
PESO ESPECIFICO		kg _f /m ³			lb _f /ft ³			g _f /cm ³	$[L^{-3} F^1 T^0]$

Ejemplo 2.-1- Obtenga las unidades de la Constante G de la Gravitación Universal en los Sistemas Absolutos y Gravitacionales; M.K.S, C.G.S y F.P.S. en función de sus unidades fundamentales.

Solución.- Haciendo uso de las dimensiones:

a) En los Absolutos:

$$G = \frac{Fd^2}{m_1 m_2} = \frac{[L^1 M^1 T^{-2}] [L^1 M^0 T^0]}{[L^0 M^1 T^0] [L^0 M^1 T^0]} = \frac{[L^3 M^1 T^{-2}]}{[L^0 M^2 T^0]}$$

$$G = [L^3 M^1 T^{-2}]$$

Así:	C.G.S.	M.K.S.	F.P.S.
	$\frac{\text{cm}^3}{\text{g s}^2}$	$\frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$	$\frac{\text{ft}^3}{\text{lb s}^2}$

b) En los Gravitacionales:

$$G = \frac{Fd^2}{m_1 m_2} = \frac{[L^0 F^1 T^0] [L^2 F^0 T^0]}{[L^{-1} F^1 T^2] [L^{-1} F^1 T^2]} = \frac{[L^2 F^1 T^0]}{[L^{-2} F^2 T^4]}$$

$$G = [L^4 F^{-1} T^{-4}]$$

Así:	C.G.S.	M.K.S.	F.P.S.
	$\frac{\text{cm}^4}{\text{gf s}^4}$	$\frac{\text{m}^4}{\text{kgf s}^4}$	$\frac{\text{ft}^4}{\text{lb}_f \text{ s}^4}$

3.- Transformación de Unidades. - En ocasiones es necesario transformar unidades de un sistema a otras unidades, ya sea del mismo o bien de cualquier otro sistema. Como es obvio, para que dichas transformaciones sea factible llevarlas a cabo se requiere que las unidades de que se trate sean de la misma especie.

Por tal motivo siempre podremos plantear una igualdad que involucre un coeficiente numérico el cual invariablemente será adimensional, esto es, carente de unidades.

En tal virtud, para la transformación de unidades podemos seguir los siguientes pasos:

- Revisar que las unidades que se desea transformar sean de la misma especie y estén elevadas a la misma potencia.
- Plantear una ecuación que involucre una constante.
- Despejar la constante.
- Determinar el valor de la constante, logrando que ésta sea dimensional.

Ejemplo 3.1.- El módulo de elasticidad del acero es $E = 2.1 \times 10^6$ kg_f/cm^2 , indique cual es valor en lb/in^2 y en N/m^2 .

Solución.- Planteando una ecuación tenemos: $2.1 \times 10^6 \frac{\text{kg}_f}{\text{cm}^2} = X \frac{\text{lb}_f}{\text{in}^2}$

y como las unidades de ambos miembros son de la misma especie y están elevadas a la misma potencia podemos despejar:

$$X = 2.1 \times 10^6 \frac{\text{kg}_f}{\text{cm}^2} \frac{\text{in}^2}{\text{lb}_f}$$

y dado que $1 \text{ kg}_f = 2.2 \text{ lb}_f$

$$X = 2.1 \times 10^6 \left(\frac{2.2 \text{ lb}_f}{\text{cm}^2} \right) \frac{\text{in}^2}{\text{lb}_f} = 4.62 \times 10^6 \frac{\text{in}^2}{\text{cm}^2}$$

y finalmente, buscando que X sea adimensional y sabiendo que $1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$ tenemos:

$$X = 4.62 \times 10^6 \frac{(2.54 \text{ cm})^2}{\text{cm}^2} = 29.806 \times 10^6$$

Así:

$$\underline{\underline{2.1 \times 10^6 \frac{\text{kg}_f}{\text{cm}^2} = 29.806 \times 10^6 \frac{\text{lb}_f}{\text{in}^2}}}$$

Similarmente:

$$2.1 \times 10^6 \frac{\text{kg}_f}{\text{cm}^2} = X \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

donde:

$$X = 2.1 \times 10^6 \frac{\text{kg}_f \text{ m}^2}{\text{cm}^2 \text{ N}}$$

y como 1 kg_f = 9.81 Newtons.

$$X = 2.1 \times 10^6 \frac{(9.81 \text{ N}) \text{ m}^2}{\text{cm}^2 \text{ N}} = 20.60 \times 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{cm}^2}$$

y puesto que 1 m = 100 cm.

$$X = 20.60 \times 10^6 \frac{(100 \text{ cm})^2}{\text{cm}^2} = 20.60 \times 10^{10}$$

Entonces:

$$\underline{\underline{2.1 \times 10^6 \frac{\text{kg}_f}{\text{cm}^2} = 20.60 \times 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}}$$

Ejemplo 3.2. - Obtener:

- a) 10 H.P. en $\frac{\text{erg}}{\text{s}}$
- b) 100 $\frac{\text{slug}}{\text{s}}$ en $\frac{\text{geogramos}}{\text{hora}}$
- c) 1 Watt en $\frac{\text{kg}_f \cdot \text{cm}}{\text{hora}}$
- d) $700 \times 10^4 \frac{\text{dinas}}{\text{cm}}$ en $\frac{\text{lb}_f}{\text{in}}$
- e) 150 $\frac{\text{Poundal} \cdot \text{in}}{\text{s}}$ en $\frac{\text{Newton} \cdot \text{m}}{\text{s}}$

Solución .- Procediendo en forma similar al ejercicio anterior, para todos los casos planteados tenemos:

$$a) 10 \text{ H.P.} = X \frac{\text{erg}}{\text{s}}, \quad X = 10 \frac{\text{H.P.} \cdot \text{s}}{\text{erg}}$$

$$\text{y como } 1 \text{ H.P.} = 550 \frac{\text{lb}_f \cdot \text{ft}}{\text{s}}$$

$$X = 5500 \frac{\text{lb}_f \cdot \text{ft}}{\text{dina} \cdot \text{cm}}, \text{ y dado que:}$$

$$1 \text{ ft} = 30.48 \text{ cm}, \quad 1 \text{ dina} = \frac{1}{981} \text{ g}_f \quad \text{y } 1 \text{ lb}_f = 454 \text{ g}_f$$

$$X = 5500 \frac{(454 \text{ g}_f)(30.48 \text{ cm})}{\left(\frac{1}{981} \text{ g}_f\right) \text{ cm}} = 7.466 \times 10^{10}$$

$$b) 100 \frac{\text{slug}}{\text{s}} = X \frac{\text{geogramos}}{\text{hora}}, \quad X = 100 \frac{\text{slug hora}}{\text{s geogramos}}$$

$$\text{si } 1 \text{ slug} = 32.2 \text{ lb} \quad X = 100 \frac{(32.2 \text{ lb}) \text{ hora}}{\text{s geogramos}}$$

$$\text{y ya que: } 1 \text{ hora} = 3600 \text{ seg y } 1 \text{ geogramos} = 981 \text{ g}$$

$$X = 3220 \frac{\text{lb} (3600 \text{ s})}{\text{s } 981 \text{ g}} = 11816.5 \frac{\text{lb}}{\text{g}}$$

$$\text{puesto que } 1 \text{ lb} = 454 \text{ g}$$

$$X = 11816.5 \frac{(454 \text{ g})}{\text{g}} = \underline{\underline{5.36 \times 10^6}}$$

$$c) 1 \text{ watt} = X \frac{\text{kg}_f \cdot \text{cm}}{\text{hora}}, \quad X = \frac{\text{watt} \cdot \text{hora}}{\text{kg}_f \cdot \text{cm}}$$

$$\text{si se sabe que } 1 \text{ watt} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

$$X = \frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{hora}}{\text{s} \cdot \text{kg}_f \cdot \text{cm}} \text{ y con las equivalencias de:}$$

$$1 \text{ kg}_f = 9.81 \text{ N}, \quad 1 \text{ hora} = 3600 \text{ s}, \quad 1 \text{ m} = 100 \text{ cm.}$$

$$X = \frac{\text{N} \cdot (100 \text{ cm}) (3600 \text{ s})}{\text{s} \cdot (9.81 \text{ N}) \text{ cm}} = \underline{\underline{3.669 \times 10^4}}$$

$$d) 700 \times 10^4 \frac{\text{dinas}}{\text{cm}} = X \frac{\text{lb}_f}{\text{in}}, \quad X = 700 \times 10^4 \frac{\text{dinas} \cdot \text{in}}{\text{cm} \cdot \text{lb}_f}$$

Así: $1 \text{ lb}_f = 454 \text{ g}_f$, $1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$, entonces;

$$X = \frac{700 \times 10^4 \text{ dinas} (2.54 \text{ cm})}{\text{cm} (454 \text{ g}_f)} = 3.916 \times 10^4 \frac{\text{dinas}}{\text{g}_f}$$

y conocido que $1 \text{ g}_f = 981 \text{ dinas}$

$$X = 3.916 \times 10^4 \frac{\text{dinas}}{(981 \text{ dinas})} = \underline{\underline{39.91}}$$

$$e) 150 \frac{\text{poundal} \cdot \text{in}}{\text{s}} = X \frac{\text{Newton} \cdot \text{m}}{\text{s}}, \quad X = 150 \frac{\text{Poundal} \cdot \text{in}}{\text{Newton} \cdot \text{m}}$$

y ya que: $1 \text{ in} = .0254 \text{ m}$, $1 \text{ poundal} = \frac{1}{32.2} \text{ lb}_f$

$$X = 150 \frac{(\frac{1}{32.2} \text{ lb}_f) (0.0254 \text{ m})}{\text{Newton} \cdot \text{m}} = 0.1183 \frac{\text{lb}_f}{\text{Newton}}$$

Entonces:

$$1 \text{ lb}_f = 0.454 \text{ kg}_f \quad \text{y} \quad 1 \text{ Newton} = \frac{1}{9.81} \text{ kg}_f$$

Finalmente:

$$X = 0.1183 \frac{(0.454 \text{ kg}_f)}{(\frac{1}{9.81} \text{ kg}_f)} = \underline{\underline{0.5269}}$$

4. Ecuaciones Dimensionales y Traducción de Fórmulas.

En virtud de que todas las ecuaciones básicas que representan los fenómenos físicos deben ser válidas para todos los sistemas de unidades, dichas ecuaciones deben resultar dimensionalmente homogéneas; por lo que todas las ecuaciones derivadas en forma analítica de las leyes fundamentales de la Física deberán ser también dimensionalmente homogéneas.

Por lo anterior, se entiende por ecuación dimensionalmente homogénea a aquella en la cual su expresión no cambia con el uso de los distintos sistemas de unidades; en este caso, todos sus términos y en ambos miembros de la ecuación se deben tener las mismas dimensiones.

Para verificar si una ecuación dada es válida en cualquier sistema de unidades, se deberá hallar la expresión dimensional de las cantidades involucradas en cada uno de los términos de la ecuación y efectuar las operaciones correspondientes a los exponentes de los símbolos L, M y T o de L, F y T, según el caso y comprobar que los exponentes finales de dichos símbolos en todos y en cada uno de los términos resultan iguales.

Ejemplo 4.-1.- Por medio de las expresiones dimensionales compruebe que la siguiente ecuación es dimensionalmente homogénea (correcta). $P + kv = as$, en la que P representa una fuerza, k un peso específico, a un área, s un esfuerzo y v un volumen.

Solución.- Considerando los Sistemas Absolutos:

$P [L^1 M^1 T^{-2}]$, $k [L^{-2} M^1 T^{-2}]$, $v [L^3 M^0 T^0]$
 $a [L^2 M^0 T^0]$, $s [L^{-1} M^1 T^{-2}]$ y ahora sustituyendo en la expresión dada y considerando los exponentes.

$$[L^1 M^1 T^{-2}] + [L^{-2} M^1 T^{-2}] [L^3 M^0 T^0] = [L^2 M^0 T^0] [L^{-1} M^1 T^{-2}]$$

entonces:

$$[L^1 M^1 T^{-2}] + [L^1 M^1 T^{-2}] = [L^1 M^1 T^{-2}]$$

con lo que demostramos que la ecuación es correcta.

Ahora para los sistemas Gravitacionales:

$P [L^0 F^1 T^0]$, $k [L^{-3} F^1 T^0]$, $v [L^3 F^0 T^0]$,
 $a [L^2 F^0 T^0]$, $s [L^{-2} F^1 T^0]$, similarmente al caso anterior:

$$[L^0 F^1 T^0] + [L^{-3} F^1 T^0] [L^3 F^0 T^0] = [L^2 F^0 T^0] [L^{-2} F^1 T^0]$$

así:

$$[L^0 F^1 T^0] + [L^0 F^1 T^0] = [L^0 F^1 T^0]$$

que comprueba lo solicitado.

Ejemplo 4.-2.- La expresión relativista para la energía cinética de una partícula está dada por la expresión:

$$E = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right]$$

en donde m es la masa de la partícula, v es la rapidez de la misma, c es la rapidez de la luz y 1 es un coeficiente adimensional. Si esta expresión es dimensionalmente correcta, determinar la expresión dimensional de E .

Solución.- Desarrollando el segundo miembro resulta:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - mc^2$$

por lo que E , debe tener las mismas dimensiones del segundo término del segundo miembro, o sea que para el Sistema Absoluto es:

$$[E] = [L^0 M^1 T^0] [L^2 M^0 T^{-2}] = \underline{[L^2 M^1 T^{-2}]}$$

y para las Gravitacionales:

$$[E] = [L^{-1} F^1 T^2] [L^2 F^0 T^{-2}] = \underline{[L^1 F^1 T^0]}$$

Ejemplo 4.-3.- La velocidad de los gases en los conductos de la caldera de vapor se calcula por medio de la fórmula $v = Br/3600Ra$, en la que v está en m/s, B en kg_f -hora, R en m^2 , r en m^3/kg_f y a es un número abstracto. Determine las unidades del número 3600.

Solución.- Dado que la ecuación tiene que ser dimensionalmente homogénea, sustituyendo las unidades planteadas tenemos:

$$\frac{m}{s} = \frac{kg_f \cdot \text{hora}}{m^2} \frac{m^3}{kg_f \cdot 1 \cdot U(3600)}$$

despejando las unidades del coeficiente y simplificando

$$U(3600) = \underline{\underline{\text{hora} \cdot s}}$$

En diversas fórmulas empíricas ingenieriles, como la mostrada en el

ejemplo anterior, algunos términos contienen coeficientes numéricos que para cumplir con el requisito de homogeneidad dimensional no pueden ser números abstractos, sino que sus expresiones están obligadas a tener determinados exponentes dimensionales.

Conviene aclarar que se entiende como fórmula empírica a aquella que cambia su expresión con el uso de distintos sistemas de unidades.

Ahora bien, mientras que la aplicación de las ecuaciones físicas establecidas en forma matemática es directa, ya que los coeficientes numéricos que intervienen en sustérminos son números abstractos (adimensionales), y por lo tanto dichas ecuaciones tienen idéntica expresión en cualquier sistema de unidades, el uso de las fórmulas establecidas empíricamente requiere hacer su traducción cuando los datos disponibles correspondientes a las cantidades involucradas en ellas están en unidades de otro sistema diferente al que se utilizó originalmente al estructurarlas, ya que los coeficientes numéricos de sus términos se modifican; es decir, su expresión cambia.

Ejemplo 4.-4.- La expresión $M = 17.2 \text{ b d}^2$, establecida de suerte tal que, M es un momento que se mide en $\text{kg}_f - \text{cm}$, b es un ancho dado en cm y d es un peralte estimado en cm ; desea ser usada de manera tal que M se obtenga en $\text{lb}_f - \text{ft}$, partiendo de b y d medidas en pulgadas.

Solución.- En las condiciones planteadas, y dado que las unidades del primer miembro deben ser iguales a las del segundo, podemos sustituir las unidades y obtener la expresión:

$$\text{kg}_f - \text{cm} = U(17.2) \text{ cm} \cdot \text{cm}^2$$

de la cual obtenemos que:

$$U (17.2) = \frac{\text{kg}_f}{\text{cm}^2}$$

y como la fórmula similar que se desea obtener tendría la forma:

$$M = c \text{ b d}^2,$$

procediendo de igual manera.

$$1b_f - ft = U(c) \text{ in} \cdot \text{in}^2$$

entonces:

$$U(c) = \frac{1b_f - ft}{\text{in}^3}$$

por lo anterior, forzosamente

$$17.2 \frac{\text{kg}_f}{\text{cm}^2} = C \frac{1b_f - ft}{\text{in}^3}$$

y,

$$C = 17.2 \frac{(2.54\text{cm})^3 \text{kg}_f}{\text{cm}^2 (0.454\text{kg}_f) (30.48\text{cm})}$$

$$C = 20.368$$

por lo que la fórmula por usar es:

$$\underline{M = 20.368 b d^2}$$

Ejemplo 4.-5.- La velocidad en $\frac{m}{s}$ de una corriente de agua que fluye por un canal, calculada según el criterio de Manning es:

$$V = \frac{1}{n} r^{2/3} s^{1/2}$$

donde n denota un coeficiente abstracto que mide la rugosidad de las paredes del canal, s también adimensional, es la pendiente del fondo y r el radio hidráulico se mide en metros.

Traduzca la expresión a los sistemas ingleses a condición de que v se mida en ft/s y r en ft.

Solución.- Sustituyendo las unidades para el sistema original.

$$\frac{m}{s} = U(1) \text{ m}^{2/3}$$

así

$$U(1) = \frac{m^{1/3}}{s}$$

y para el sistema ingles

$$\frac{ft}{s} = U(c) \cdot ft^{2/3}$$

entonces $U(c) = \frac{ft^{1/3}}{s}$

por lo anterior,

$$1 \frac{m^{1/3}}{s} = C \frac{ft^{1/3}}{s}$$

y, $C = \frac{m^{1/3}}{ft^{1/3}}$

por lo que $C = \frac{m^{1/3}}{(0.3048m)^{1/3}} = \frac{1}{0.6729} = 1.4861$

Así, la expresión pedida es:

$$V = \frac{1.4861}{n} r^{1/3} s^{1/2}$$

Ejemplo 4.6.- El peso de una armadura de madera, medido en lb_f, está dado por la fórmula

$$w = \frac{P}{65} \left(1 + \frac{L}{30} + \frac{L}{5\sqrt{s}} \right),$$

cuando se conoce L, su claro medido en ft, la distancia centro a centro de armaduras S estimada en ft, la carga P que ha de soportar la armadura medida en lb_f.

Obtener la traducción de la fórmula al sistema M.K.S. Gravitacional.

Solución.- Esta fórmula polinómica debe ser homogénea, en el sentido de que todos sus términos tengan iguales unidades.

En esta virtud, es muy importante señalar que en este tipo de fórmulas existen tantas alternativas para efectuar la traducción como términos existan en ella.

En el ejemplo que nos ocupa podemos hacer las siguientes consideraciones:

- a) Que el coeficiente numérico 65 es adimensional; nótese que también podrían asociársele unidades.
- b) Que el término 1 es abstracto, el denominador 30 está medido en ft y que el coeficiente 5 se encuentra estimado en $\text{ft}^{1/2}$.

Establezcamos entonces:

$$30 \text{ ft} = X \text{ m}$$

$$5 \text{ ft}^{1/2} = y \text{ m}^{1/2}$$

En estas condiciones:

$$X = 30 (0.3048) = 9.144$$

$$y = 5 \sqrt{0.3048} = 2.75$$

Así, la fórmula en el sistema solicitado es:

$$w = \frac{P}{65} \left(1 + \frac{L}{9.144} + \frac{L}{2.75 \sqrt{S}} \right)$$

5.- El Sistema Internacional de Unidades.- Es una versión moderna de los Sistemas Absolutos, que fue adoptado en 1960 por la Conferencia General de Pesas y Medidas. Podemos mencionar que es un sistema completo y armonizado internacionalmente que prevé unidades para medir magnitudes modernas, esto es, conceptos que no estaban previstos en los dos sistemas analizados previamente.

El Sistema Internacional (SI) está integrado por tres clases de unidades: unidades base, unidades suplementarias y unidades derivadas. También utiliza los prefijos SI para la formación de los múltiplos y submúltiplos decimales de estas unidades.

Unidades base son aquéllas en las que se fundamenta la estructura del Sistema Internacional; son siete, correspondiendo a las magnitudes: longitud, masa, tiempo, intensidad de corriente eléctrica, temperatura termodinámica, intensidad luminosa y cantidad de substancia, cuyos nombres son respectivamente: metro, kilogramo, segundo, ampere, kelvin, candela y mol. (véase la tabla 3).

Las unidades derivadas son las que se forman combinando las unidades de base o bien éstas y las suplementarias según expresiones algebraicas que relacionan las magnitudes correspondientes. Muchas de estas expresiones algebraicas pueden ser reemplazadas por nombre y símbolo especiales, los cuales pueden ser utilizados para la formación de otras unidades derivadas. (véase la tabla 4).

Por último, las unidades suplementarias son aquéllas con las cuales no se ha tomado una decisión de si pertenecen a las bases o a las unidades derivadas; corresponden a las magnitudes de ángulo plano y de ángulo sólido y cuyos nombres, respectivamente son: radián y esterradián. (Veáse la tabla 5)

T A B L A 3

UNIDADES DE BASE DEL SISTEMA INTERNACIONAL (SI)

Magnitud	Nombre de la Unidad	Símbolo Internacional de la Unidad	Definición de la Unidad
longitud	metro	m	es la longitud igual a 1650763,73 longitudes de onda en el vacío, de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles $2p_{10}$ y $5d_5$ del átomo del kriptón 86.
masa	kilogramo	kg	es la masa igual a la del prototipo internacional del kilogramo.
tiempo	segundo	s	es la duración de 9192631770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del átomo de cesio 133.
intensidad de corriente eléctrica.	ampere	A	es la intensidad de una corriente constante que mantenida en dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y colocados en el vacío a una distancia de un metro uno del otro producirá entre estos conductores una fuerza igual a 2×10^{-7} newtons por metro de longitud.
temperatura termodinámica	kelvin	K	es la fracción $1/273.16$ de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.
intensidad luminosa	candela	cd	es la intensidad luminosa, en una dirección dada de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia 540×10^{12} hertz y cuya intensidad energética en esa dirección es $1/683$ watt por estereorradián
cantidad de substancia	mol	mol	es la cantidad de substancia que contiene tantas entidades elementales como existen átomos en 0,012 kilogramo de carbono 12.

T A B L A 4

UNIDADES DERIVADAS QUE TIENEN NOMBRE ESPECIAL

Magnitud	Nombre de la Unidad(SI) Derivada	Símbolo	Expresión en Unidades (SI) de Base	Expresión en otras Unidades(SI)
frecuencia	herz	Hz	s^{-1}	
fuerza	newton	N	$m.kg.s^{-2}$	
presión	pascaí	Pa	$m^{-1}.kg.s^{-2}$	N/m ²
trabajo, energía, cantidad de calor.	joule	J	$m^2.kg.s^{-2}$	N.m
potencia, flujo energético	watt	W	$m^2.kg.s^{-3}$	J/s
carga eléctrica, cantidad de electricidad	coulomb	C	$s.A$	
potencial eléctrico, diferencia de potencial, tensión, fuerza electro _{motriz} .	volt	V	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-1}$	W/A
capacidad eléctrica	farad	F	$m^{-2}.kg^{-1}.s^4.A^2$	C/V
resistencia eléctrica	ohm	Ω	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-2}$	V/A
conductancia eléctrica	siemens	S	$m^{-2}.kg^{-1}.s^3.A^2$	A/V
flujo de inducción magnética, flujo magnético.	weber	Wb	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-1}$	V.s
densidad de flujo magnético, inducción magnética	tesla	T	$kg.s^{-2}.A^{-1}$	Wb/m ²
inductancia	henry	H	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-2}$	Wb/A
flujo luminoso	lumen	lm	cd.sr	
luminosidad	lux	lx	$m^{-2}.cd.sr$	lm/m ²
actividad nuclear	becquerel	Bq	s^{-1}	
dosis absorbida	gray	Gy	$m^2.s^{-2}$	

T A B L A 5
UNIDADES SUPLEMENTARIAS

Magnitud	Nombre de la Unidad	Símbolo	Definición de la Unidad
ángulo plano	radián	rad	es el ángulo plano comprendido entre dos radios de un círculo y que interceptan sobre la circunferencia de este círculo, un arco de longitud igual a la del radio.
ángulo sólido	esterradián	sr	es el ángulo sólido que teniendo su vértice en el centro de una esfera corta sobre la superficie de esta esfera una área igual a la de un cuadrado que tiene por lado el radio de la esfera.



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

CURSO ORGANIZADO DENTRO DEL PROGRAMA DE SUPERACION
ACADEMICA DE LA DIVISION DE CIENCIAS BASICAS.

CURSO: " ESTATICA "

TEMA: II.-"EQUIVALENCIA Y REDUCCION DE SISTEMAS DE-
FUERZAS."

ABRIL-MAYO 1984

EQUIVALENCIA Y REDUCCION DE SISTEMAS DE FUERZAS

I. INTRODUCCION

En el contexto de los cursos de Mecánica I y de Estática, los temas de Equivalencia y de Reducción de Sistemas de Fuerzas adquieren particular relevancia, ya que permitirán comprender y analizar adecuadamente los capítulos de Equilibrio, y de Primeros y Segundos Momentos, fundamentales en la preparación de cualquier ingeniero.

Para el estudio de este tema se considera que son conocidos los siguientes conceptos:

- Vector equipolente de una fuerza
- Postulado de Stevinus
- Descomposición ortogonal de una fuerza
- Momento de una fuerza con respecto a un punto y a un eje
- Coordenadas Vectoriales de una fuerza

y que en lo referente al análisis vectorial, se dispone de los conocimientos necesarios para determinar:

- Suma y resta de vectores
- Vectores de posición
- Vectores unitarios
- Productos escalares
- Productos vectoriales

ya que lo anterior permitirá realizar el estudio en cuestión en tres dimensiones y facilitará el entendimiento del mismo.

II. OBJETIVO

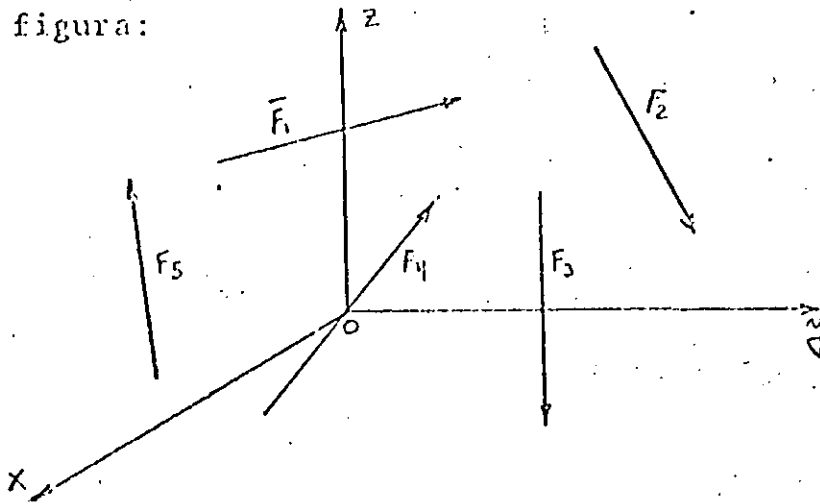
Conocido un sistema de fuerzas, será posible obtener otro sistema, que produzca los mismos efectos externos que el original, pero expresado en su mínima forma.

III. DESARROLLO

Para la mayor comprensión del análisis que nos ocupa, dividiremos el estudio en las siguientes partes:

- 1) Sistemas de Fuerzas
- 2) Sistemas Equivalentes
- 3) Par de fuerzas
- 4) Traslación de una fuerza
- 5) Reducción de Sistemas de Fuerzas

III.1 Sistemas de Fuerzas. - Se entiende por sistema de fuerzas a un conjunto de dos o más fuerzas, como se indica en la figura:



Los Sistemas de Fuerzas generalmente se encuentran aplicados a cualquier estructura, por lo que es de suma importancia, en el caso de la ingeniería, determinar los efectos externos que dicho sistema le provoca a un cierto cuerpo.

Ahora bien, los efectos externos que un sistema de Fuerzas le produce a un cuerpo los podemos dividir en dos:

- | | |
|---------|------------------------------------|
| Efectos | a) Jalón ó empujón - - - \bar{a} |
| | b) Giro o momento - - - \bar{a} |

Obviamente estos dos efectos dan lugar, de acuerdo a la 2da.

Ley del Movimiento debida a Newton, a una cierta aceleración, -
cuyo estudio no es objeto de este tema.

Para determinar el efecto de jalón o empujón basta aplicar -
el Postulado de Stevinus o Regla Generalizada del Paralelogramo,
el cual indica que la fuerza resultante de un cierto sistema de
fuerzas se obtiene mediante la suma vécitorial de todas las fuer-
zas que lo conforman, esto es:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad - - - \text{III.-1-1}$$

obsérvese que lo anterior permite conocer el vector equipolente
de dicha fuerza resultante, a través del cual es posible obte-
ner la magnitud, dirección y sentido del jalón o empujón repre-
sentado.

Es conveniente hacer notar que la expresión anterior no nos
permite conocer un punto de aplicación de la fuerza resultante,
esto es; no sabemos donde se está aplicando el efecto señalado,
por lo que el vector \vec{R} es considerado como un vector libre.

El efecto de giro o momento se puede valuar considerando mo-
mentos de las fuerzas con respecto a cualquier punto en el espa-
cio; como es obvio, el punto con respecto al cual el momento es
mas sencillo de calcular, es el origen, ya que en estas condi-
ciones el momento está dado por la expresión:

$$\vec{M}_o = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{oi} \times \vec{F}_i \quad - - - \text{III.-1-2}$$

en la cual el vector \vec{r}_{oi} siempre será un vector de posición del
origen a cualquier punto de la línea de acción y \vec{F}_i representa
el vector equipolente de las fuerzas involucradas en el sis-
tema.

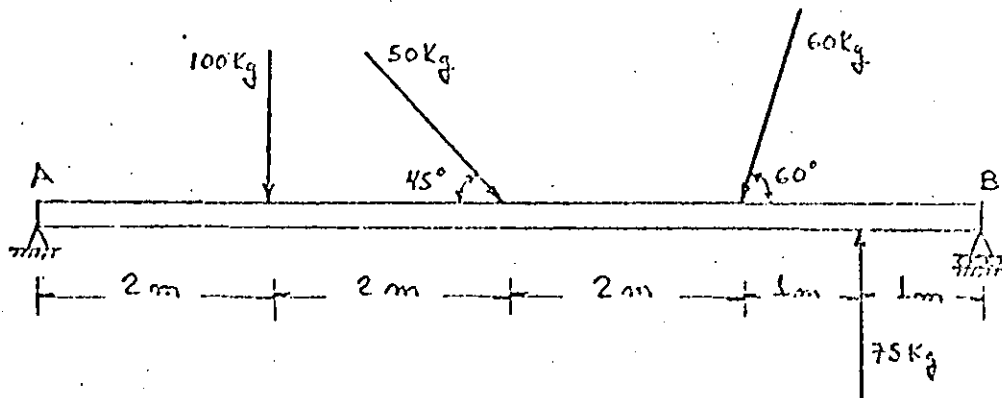
Nótese que el vector \vec{M}_o nos proporciona todas las caracte-
rísticas del efecto de giro o momento; inclusive el punto de

aplicación, ya que dicho vector siempre se ubica en el denominado centro de momentos y en estas condiciones \bar{M}_0 es un vector que siempre pasará por el origen.

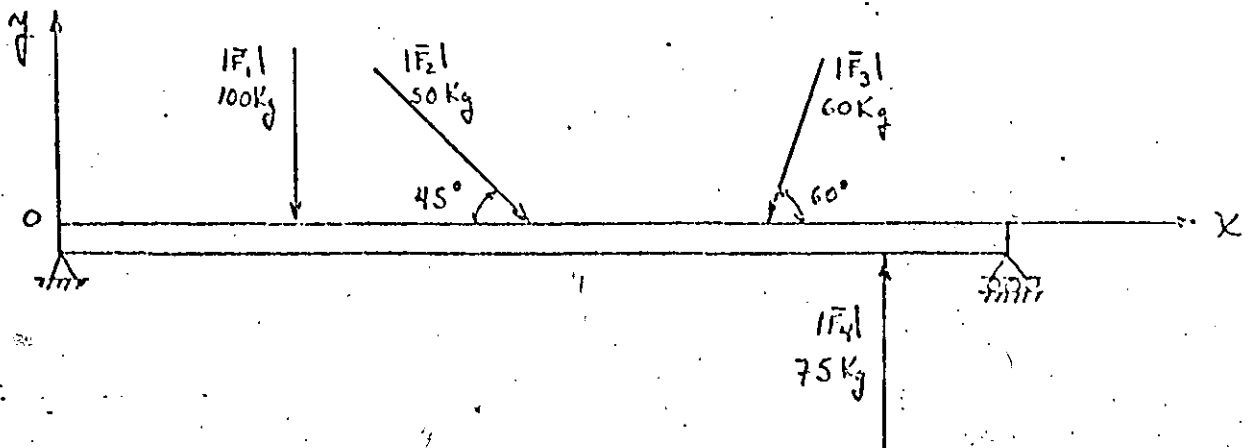
Esta pareja de vectores (\bar{R} , \bar{M}_0) se conoce con el nombre de coordenadas vectoriales del sistema de fuerzas, en este caso se puede presentar la situación en que \bar{R} y \bar{M}_0 no sean perpendiculares, o sea, que no se cumpla que $\bar{R} \cdot \bar{M}_0 = 0$.

Concluyendo, para determinar los efectos externos que un Sistema de Fuerzas le produce a un cuerpo basta con obtener las Coordenadas Vectoriales de dicho Sistema.

Ejemplo III-1-1.- Calcular los efectos externos que, el sistema de fuerzas que se indica, le produce a la viga que se muestra en la figura.



Solución.- Identificando a las fuerzas y ubicando el origen en el punto A; con los ejes respectivos tendremos:



Ahora, obtengamos los vectores equipolentes de las fuerzas.

$$\bar{F}_1 = -100j \text{ [Kg]}$$

$$\bar{F}_2 = 50(\cos 45^\circ i - \cos 45^\circ j) \text{ [Kg]}$$

$$\bar{F}_2 = 35.35i - 35.35j \text{ [Kg]}$$

$$\bar{F}_3 = 60(-\cos 60^\circ i - \cos 30^\circ j) \text{ [Kg]}$$

$$\bar{F}_3 = -30i - 51.96j \text{ [Kg]}$$

$$\bar{F}_4 = 75j \text{ [Kg]}$$

y apliquemos el Postulado de Stevinus (ecuación III.-1-1).

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^4 \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4$$

$$\bar{R} = 5.35i - 112.31j \text{ [Kg]}$$

Calculemos los momentos de las fuerzas con respecto al origen.

$$\bar{M}_0^1 = -200k \text{ [Kg - m]}$$

$$\bar{M}_0^2 = -50 \cos 45^\circ (4)k \text{ [Kg - m]} = -141.42k \text{ [Kg - m]}$$

$$\bar{M}_0^3 = -60 \cos 30^\circ (6)k \text{ [Kg - m]} = -311.76k \text{ [Kg - m]}$$

$$\bar{M}_0^4 = 525k \text{ [Kg - m]}$$

y realizando la sumatoria de momentos (ecuación III.-1-2).

$$\bar{M}_0 = \sum_{i=1}^4 \bar{r}_{0i} \times F_i = \bar{M}_0^1 + \bar{M}_0^2 + \bar{M}_0^3 + \bar{M}_0^4$$

$$\bar{M}_0 = -128.18k \text{ [Kg - m]}$$

Si los expresamos en magnitudes, los efectos son:

a) Jalón o empujón = 112.43 Kg

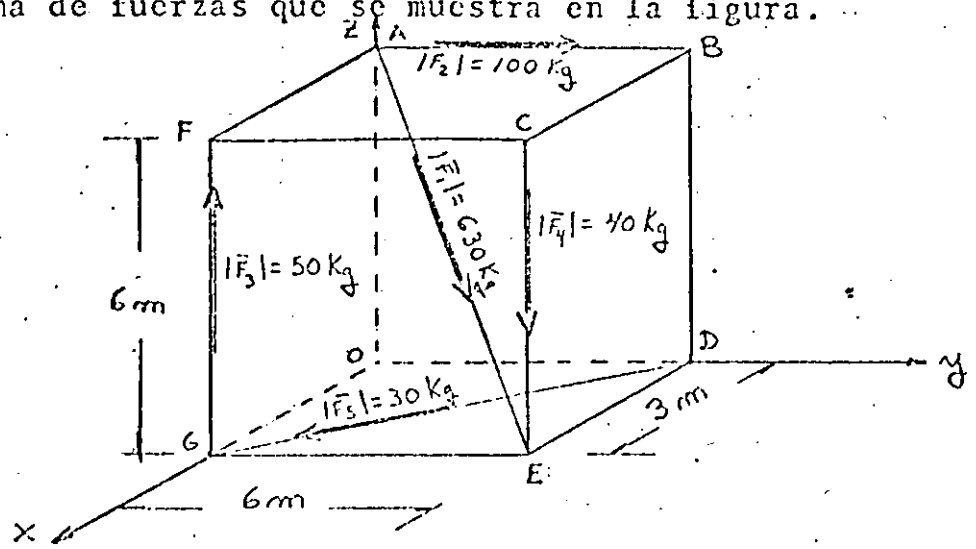
b) Giro o momento = 128.18 Kg - m

y en las direcciones indicadas por los vectores unitarios:

$$\bar{c}_R = 0.0476i - 0.998j$$

$$\bar{c}_M = -k$$

Ejemplo III.-1-2- Obtener las coordenadas vectoriales del sistema de fuerzas que se muestra en la figura.



Solución.- Primeramente calculemos los vectores equipolentes de las fuerzas:

$$\bar{F}_1 = 630 \left[\frac{(3-0)i + (6-0)j + (0-6)k}{\sqrt{9+36+36}} \right] [Kg] = 210i + 420j - 420k [Kg]$$

$$\bar{F}_2 = 100j [Kg]$$

$$\bar{F}_3 = 50k [Kg]$$

$$\bar{F}_4 = -40k [Kg]$$

$$\bar{F}_5 = 30 \left[\frac{(3-0)i + (0-6)j}{\sqrt{9+36}} \right] [Kg] = 13.416i - 26.832j [Kg]$$

Sumando las fuerzas:

$$\bar{R} = 223.41i + 493.16j - 410.00k [Kg]$$

y los momentos con respecto al origen son:

$$\bar{M}_O^1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 6 \\ 210 & 420 & -420 \end{vmatrix} = -2520i + 1260j [Kg-m]$$

$$\bar{M}_O^2 = -600i \text{ [Kg - m]}$$

$$\bar{M}_O^3 = -150j \text{ [Kg - m]}$$

$$\bar{M}_O^4 = -240i + 120j \text{ [Kg - m]}$$

$$\bar{M}_O^5 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 0 \\ 13.416 & -26.832 & 0 \end{vmatrix} = -80.496k \text{ [Kg - m]}$$

y realizando la sumatoria de momentos:

$$\bar{M}_O = -3360i + 1230j - 80.49k \text{ [Kg - m]}$$

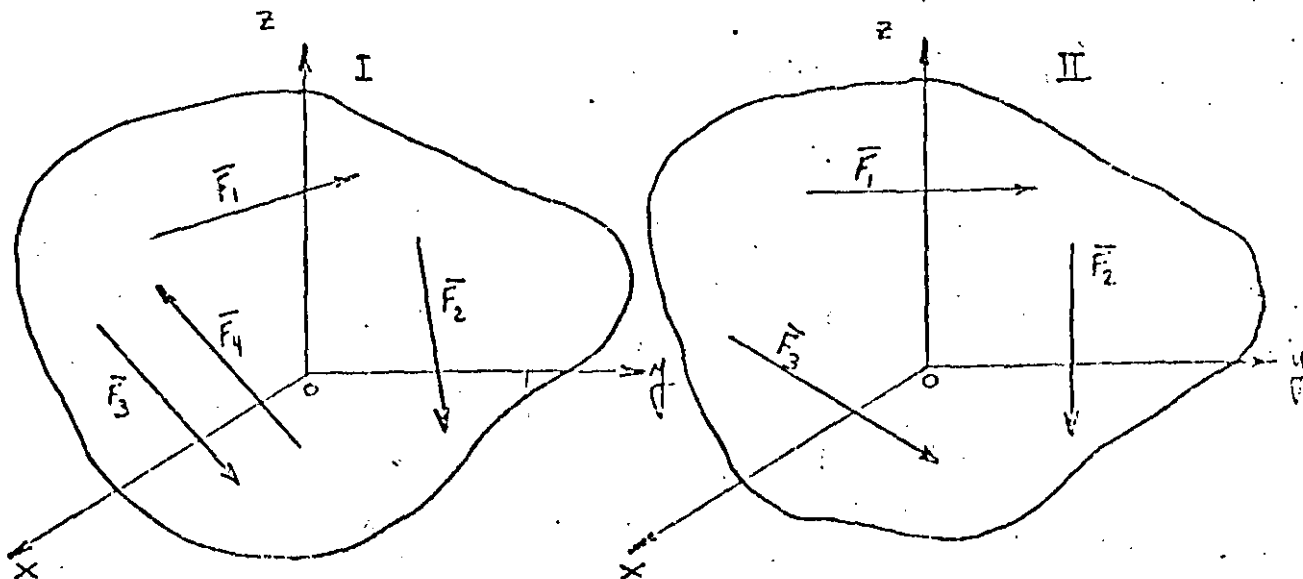
siendo las coordenadas vectoriales solicitadas:

$$(223.41i + 493.16j - 410.00k), (-3360i + 1230j - 80.49k)$$

III.-2- Sistemas Equivalentes.- Se denomina sistemas equivalentes a aquéllos que actuando sobre la misma partícula material o el mismo cuerpo le producen los mismos efectos externos.

Como se analizó en el punto anterior, la evaluación de los efectos externos se lleva a cabo mediante la determinación de las coordenadas vectoriales del sistema de fuerzas de referencia.

Dicho de otra manera, para que dos sistemas de fuerzas sean equivalentes es necesario que sus coordenadas vectoriales sean iguales.



Sean los sistemas I y II actuando en el cuerpo de la figura, como sus coordenadas vectoriales deben ser iguales se debe cumplir que:

$$\bar{R}_I = \bar{R}_{II} \quad . . . \quad III.-2-1$$

$$\bar{M}_O I = \bar{M}_O II \quad . . . \quad III.-2-2$$

o sea que:

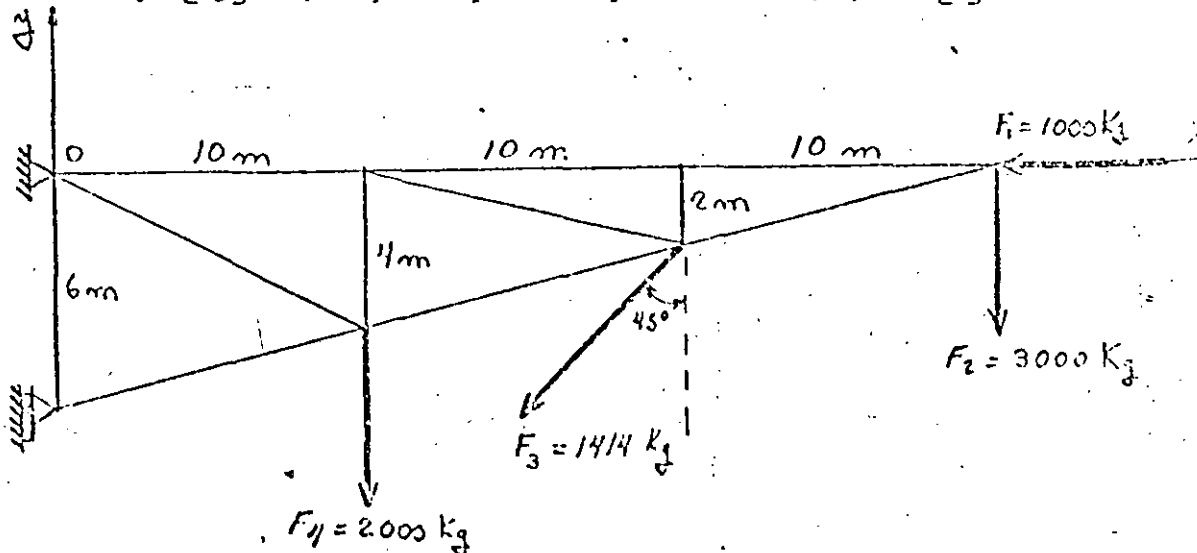
$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \sum_{i=1}^m \bar{F}_i \quad . . . \quad III.-2-3$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{r}_{O_i} \times \bar{F}_i = \sum_{i=1}^m \bar{r}_{O_i} \times \bar{F}_i \quad . . . \quad III.-2-4$$

Obsérvese que el número de elementos de cada sistema puede ser diferente, sin que esta situación intervenga en la equivalencia o no equivalencia de los sistemas.

Resumiendo, para que dos sistemas de fuerzas sean equivalentes es necesario que se cumplan las dos ecuaciones, III.-2-3 y III.-2-4, planteadas.

Ejemplo III.-2-1- Demostrar que el sistema de fuerzas que actúa en la estructura de la figura es equivalente a una fuerza $\bar{F} = -2000i - 6000j$ [Kg] que pasa por el punto P(22,0,0) [m]



Solución.- Considerando al sistema de fuerzas que actúa en la estructura como I, tendremos:

$$\bar{F}_1 = -1000i \text{ [Kg]}$$

$$\bar{F}_2 = -3000j \text{ [Kg]}$$

$$\bar{F}_3 = -1000i - 1000j \text{ [Kg]}$$

$$\bar{F}_4 = -2000j \text{ [Kg]}$$

en estas condiciones

$$\bar{R}_I = -2000i - 6000j \text{ [Kg]}$$

que comparándola con la fuerza \bar{F} del sistema II, observamos que son iguales, por lo que la primera condición de equivalencia se cumple.

En cuanto a momentos:

$$\bar{M}_0^1 = 0 \text{ [Kg - m]}$$

$$\bar{M}_0^2 = -90\,000k \text{ [Kg - m]}$$

$$\bar{M}_0^3 = -20000k - 2000k = -22000k \text{ [Kg - m]}$$

$$\bar{M}_0^4 = -20000k \text{ [Kg - m]}$$

y la sumatoria es:

$$\bar{M}_{0I} = -132\,000k \text{ [Kg - m]}$$

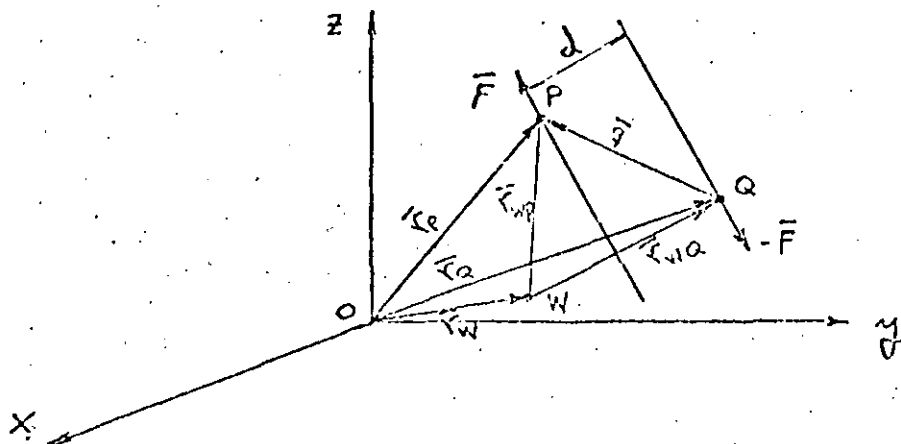
y en cuanto al sistema II:

$$\bar{M}_{0II} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 22 & 0 & 0 \\ -2000 & -6000 & 0 \end{vmatrix} = -132000k \text{ [Kg - m]}$$

por lo que los momentos son iguales y entonces podemos concluir que los sistemas planteados son equivalentes.

III.-3- Par de fuerzas.- Se conoce como par de fuerzas a dos -- fuerzas no colineales, de igual magnitud, misma dirección, senti

dos contrarios y líneas de acción paralelas.



Conforme a la figura, obtendremos los efectos que produce el par de fuerzas mostrado, para ello, determinemos las coordenadas vectoriales.

$$\bar{R} = \bar{F} + (-\bar{F}) = 0$$

$$\bar{M}_O = \bar{m} = \bar{r}_P \times \bar{F} + \bar{r}_Q \times (-\bar{F}) = \bar{r}_P \times \bar{F} - \bar{r}_Q \times \bar{F}$$

$$\bar{M}_O = \bar{m} = (\bar{r}_P - \bar{r}_Q) \times \bar{F} = \bar{q} \times \bar{F}$$

Por curiosidad, valuemos el momento del par de fuerzas con respecto a los puntos P y W.

$$\bar{M}_W = \bar{m} = \bar{r}_{WP} \times \bar{F} + \bar{r}_{WQ} \times (-\bar{F}) = \bar{r}_{WP} \times \bar{F} - \bar{r}_{WQ} \times \bar{F}$$

$$\bar{M}_W = \bar{m} = (\bar{r}_{WP} - \bar{r}_{WQ}) \times \bar{F} = \bar{q} \times \bar{F}$$

$$\bar{M}_Q = \bar{m} = \bar{q} \times \bar{F} + 0 = \bar{q} \times \bar{F}$$

Por todo lo anterior podemos, afirmar, en relación a un par de fuerzas, lo siguiente:

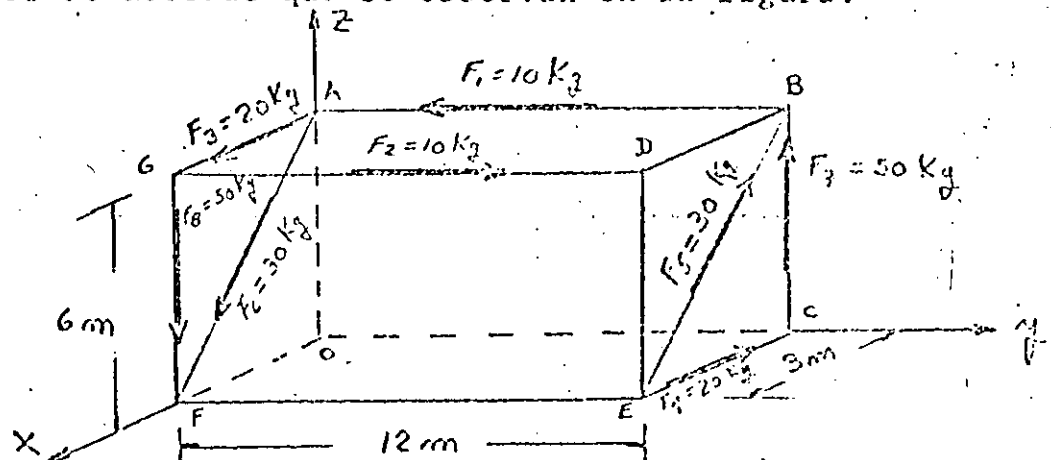
- 1.- El único efecto que produce es el de giro o momento.
- 2.- Su momento es el mismo con respecto a cualquier punto en el espacio.

3.- Su momento se obtiene calculando el momento de una de las fuerzas con respecto a cualquier punto de la línea de acción de la otra fuerza.

4.- Su momento es un vector libre (\vec{m}), con las siguientes características:

- a) Magnitud = $|\vec{F}| \cdot d$
- b). Dirección = Perpendicular al plano del par.
- c) Sentido = Regla de la mano derecha.
- d) Punto de aplicación = Cualquiera.

Ejemplo. - III.- 3.- 1.- Calcular el momento total producido por los pares de fuerzas que se observan en la figura.



SOLUCION. - De la observación de la figura el momento del par formado por F_1 y F_2 puede obtenerse en forma directa.

$$\vec{m}_1 = 30 \hat{k} \quad [\text{Kg-m}]$$

no así los demás pares que tienen que obtenerse realizando el producto vectorial.

$$\vec{m}_2 = \vec{r}_{EG} \times \vec{F}_3, \quad \vec{r}_{EG} = -12 \hat{j} + 3 \hat{k} \quad [\text{m}], \quad \vec{F}_3 = 20 \hat{i} \quad [\text{Kg}]$$

$$\bar{m}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -12 & 6 \\ 20 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +120j + 240k \text{ [Kg} \cdot \text{m]}$$

$$\bar{m}_3 = \bar{q}_{FE} \times \bar{F}_5, \quad \bar{q}_{FE} = 12j, \quad \bar{F}_5 = 30 \frac{-3i+6k}{\sqrt{36+9}} = -13.41i+26.83k \text{ [Kg]}$$

$$\bar{m}_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 12 & 0 \\ -13.41 & 0 & 26.83 \end{vmatrix} = 321.96i + 160.92k \text{ [Kg} \cdot \text{m]}$$

$$\bar{m}_4 = \bar{q}_{FC} \times \bar{F}_7, \quad \bar{q}_{FC} = -3i+12j, \quad \bar{F}_7 = 50k \text{ [Kg]}$$

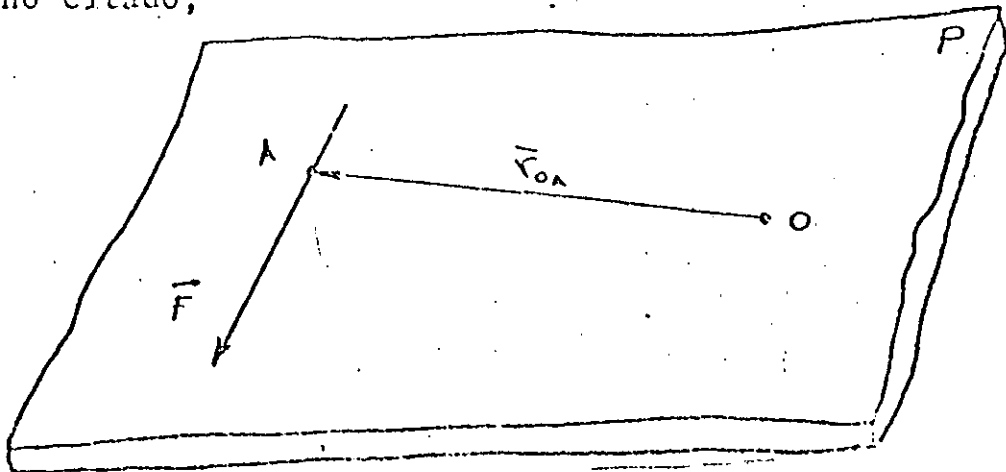
$$\bar{m}_4 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{vmatrix} = 600i + 150j \text{ [Kg} \cdot \text{m]}$$

y realizando la sumatoria, ya que son vectores libres:

$$\bar{m}_{TOTAL} = 921.96i + 270j + 430.92k \text{ [Kg} \cdot \text{m]}$$

III.4.- Traslación de una fuerza.- En ocasiones es necesario trasladar una fuerza de un punto a otro, lo cual tratará de plantearse, sin perder de vista que los efectos externos que se estén ocasionando no pueden alterarse.

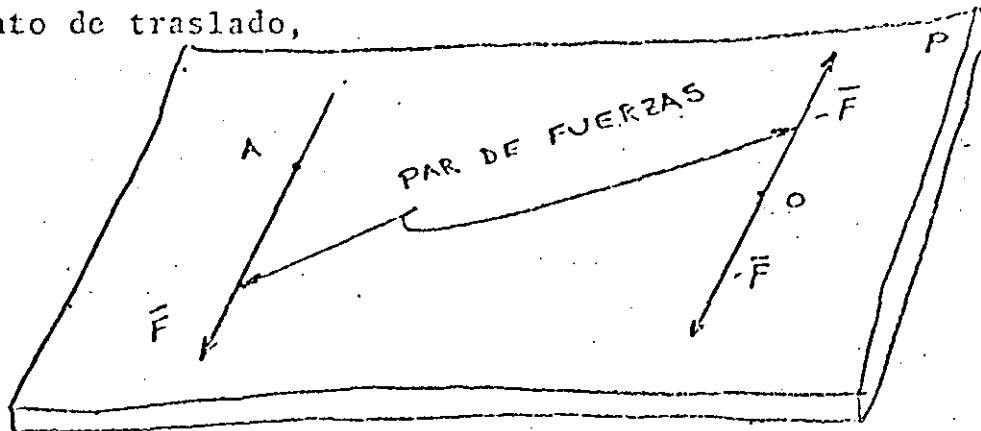
Sea la fuerza \bar{F} , ubicada en el plano P de la figura y que debe ser trasladada al punto O que se indica, también ubicado en el plano citado,



siendo las coordenadas vectoriales:

$$\bar{R} = \bar{F}, \bar{M}_O = \bar{r}_{OA} \times \bar{F}$$

Adicionemos un sistema de fuerzas en equilibrio, el cual no alterará los efectos externos que se están produciendo. Cabe aclarar que el sistema que se adicionará está formado por dos fuerzas colineales, de la misma magnitud y paralelas a la fuerza que debe trasladarse, de sentidos contrarios y pasarán por el punto de traslado,

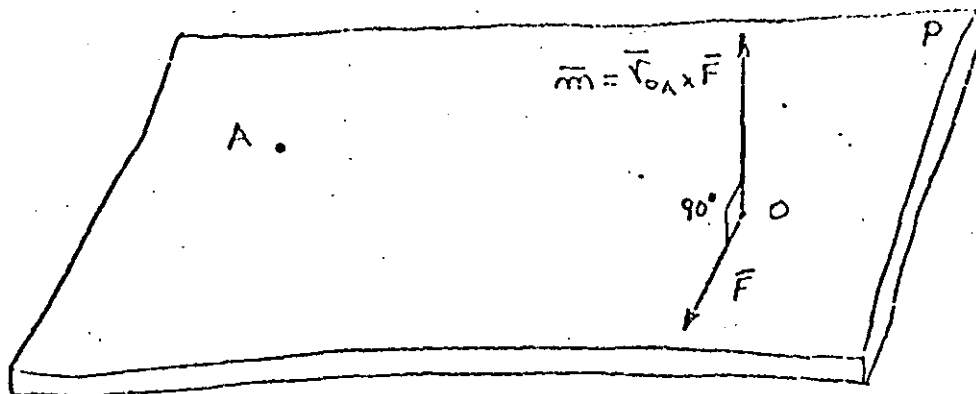


obviamente las coordenadas vectoriales no se alteran.

Si se observa con detalle se ha formado un par de fuerzas, el cual recibe el nombre de par de transporte, cuyo momento es igual al momento de la fuerza \bar{F} con respecto al punto O .

$$\bar{m}_{\text{transp}} = \bar{r}_{OA} \times \bar{F}$$

En base a lo anterior tendremos que la fuerza \bar{F} se encuentra ya en O , pero se ha agregado un par de transporte, y las coordenadas vectoriales no se han modificado ya que:



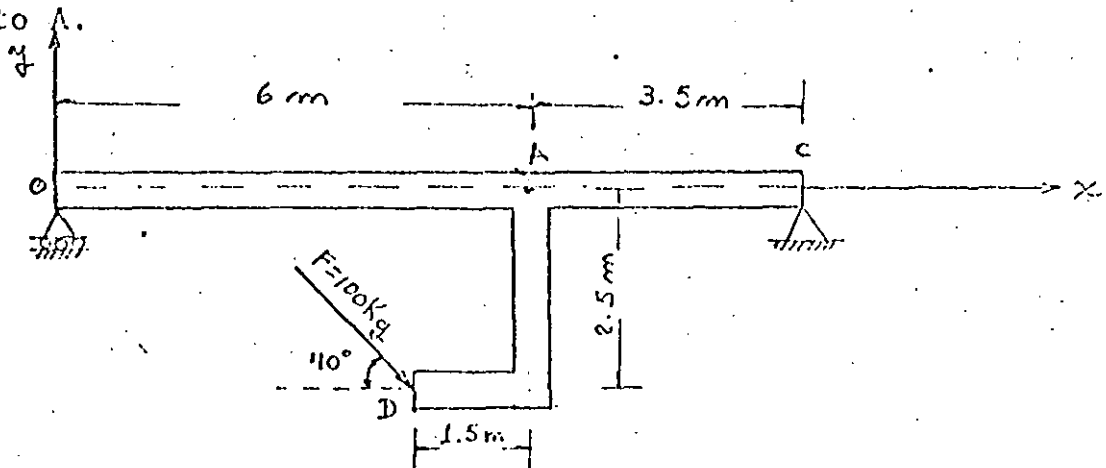
nadas vectoriales no se han modificado ya que:

$$\bar{R} = \bar{F}, \bar{M}_O = \bar{m} = \bar{r}_{OA} \times \bar{F}$$

Resumiendo, para trasladar una fuerza de un punto a otro, es necesario considerar:

- Que la fuerza se traslada conservando su línea de acción paralela.
- Que se incluye un par de transporte
- Que el momento del par de transporte es igual al momento de la fuerza que se desea trasladar con respecto al punto de traslado.
- Que finalmente resulta una fuerza y un momento que son -- perpendiculares.

Ejemplo III.-4-1- Trasladar la fuerza mostrada en la figura, al punto A.



Solución.- Para ello, encontremos el vector equipolente de la fuerza.

$$\vec{F} = 100(\cos 40^\circ \hat{i} - \sin 40^\circ \hat{j}) = 76.60\hat{i} - 64.28\hat{j} \text{ [Kg]}$$

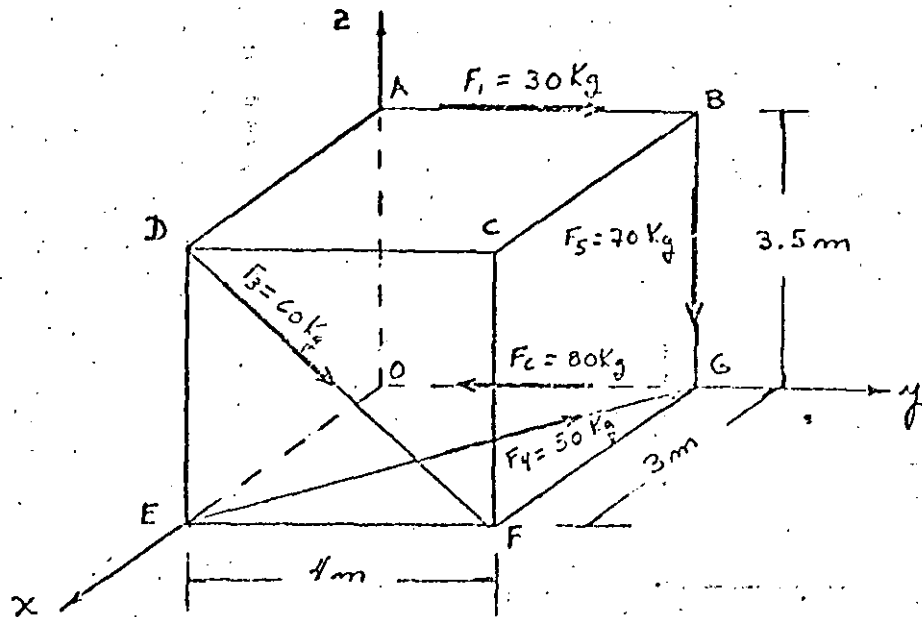
y ahora calculemos su momento con respecto al punto A, que no será otra cosa que el momento del par de transporte.

$$\vec{M}_A^F = \vec{r}_{AD} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1.5 & -2.5 & 0 \\ 76.60 & -64.28 & 0 \end{vmatrix} = (96.42 + 191.5)\hat{k}$$

$$\vec{m} = 287.92\hat{k} \text{ [Kg - m]}$$

Ahora, ya tenemos la fuerza aplicada en A pero con un momento \vec{m} .

Ejemplo III-4-2- Sustituir el sistema de fuerzas que se indica en el croquis, por otro equivalente que pase por el origen.



Solución.- Para sustituir el sistema por uno equivalente que pase por el origen bastará con trasladar cada una de las fuerzas a dicho punto y para ello, como ya es sabido, será suficiente con calcular el momento de cada una de ellas con respecto al punto 0, o lo que es lo mismo, obtendremos los pares de transporte.

Primeramente determinemos los vectores equipolentes:

$$\bar{F}_1 = 30j \text{ [Kg]}$$

$$\bar{F}_2 = -80i \text{ [Kg]}$$

$$\bar{F}_3 = 60 \left(\frac{4j - 3.5k}{\sqrt{16+12.25}} \right) = 45.15j - 39.51k \text{ [Kg]}$$

$$\bar{F}_4 = 50 \left(\frac{-3i + 4j}{\sqrt{16+9}} \right) = -30i + 40j \text{ [Kg]}$$

$$\bar{F}_5 = -70k \text{ [Kg]}$$

$$\bar{F}_6 = -80j \text{ [Kg]}$$

y los momentos con respecto al origen son:

$$\bar{m}_1 = \bar{M}_O^1 = -105i \text{ [Kg - m]}$$

$$\bar{m}_2 = \bar{M}_O^2 = -140j \text{ [Kg - m]}$$

$$\bar{m}_3 = \bar{M}_O^3 = \bar{r}_{OD} \times \bar{F}_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 3.5 \\ 0 & 45.15 & -39.51 \end{vmatrix} = -158.02i + 118.53j + 135.45k \text{ [Kg-m]}$$

$$\bar{m}_4 = \bar{M}_O^4 = \bar{r}_{OE} \times \bar{F}_4 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 0 \\ -30 & 40 & 0 \end{vmatrix} = 120k \text{ [Kg - m]}$$

$$\bar{m}_5 = \bar{M}_O^5 = -280i \text{ [Kg - m]}$$

$$\bar{m}_6 = \bar{M}_O^6 = 0$$

En estas condiciones, el sistema que pasa por el origen es:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^6 \bar{F}_i = -70i + 35.15j - 109.51k \text{ [Kg]}$$

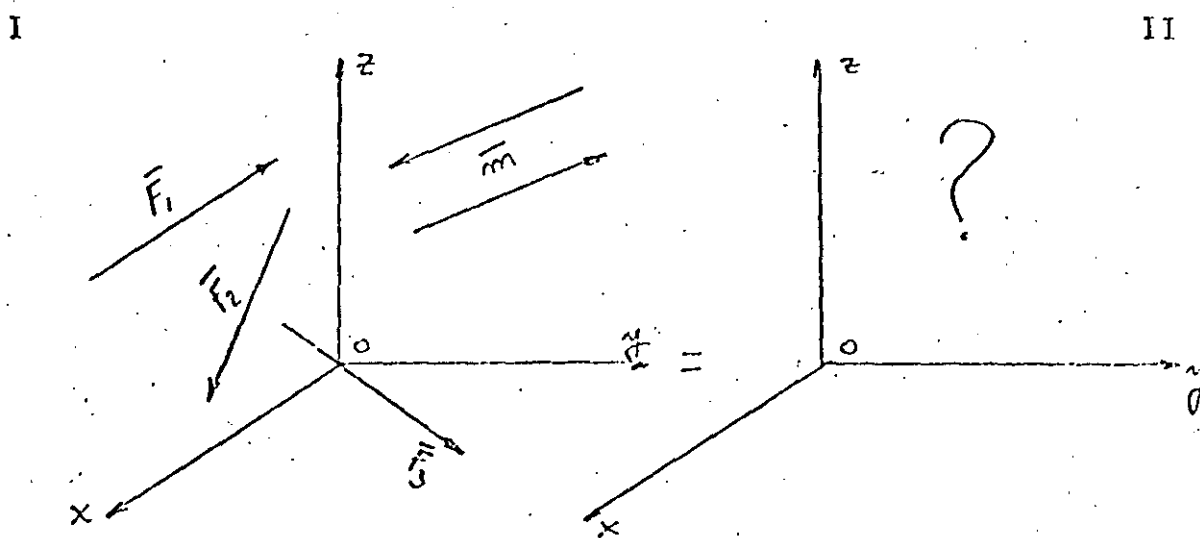
$$\bar{M} = \sum_{i=1}^6 \bar{r}_{Oi} \times \bar{F}_i = -543.02i - 21.47j + 255.45k \text{ [Kg - m]}$$

Una conclusión muy importante de la traslación de una fuerza es que, al obtener las Coordenadas Vectoriales de un sistema de -- Fuerzas, además de valuar los efectos del mismo, lo estamos --- trasladando al origen, o sea, se le está sustituyendo por un - sistema equivalente que pasa por dicho punto.

Cabe aclarar que esta situación es de suma importancia para los casos de reducción de los sistemas de Fuerzas.

III.-5- Reducción de Sistemas de Fuerzas.- Se entiende por reducción de sistemas al encontrar un sistema equivalente al dado pero expresado en su forma mas simple.

Así, si tenemos un sistema de fuerzas (I) como el mostrado en la figura, trataremos de encontrar otro (II), con la menor cantidad de elementos posible, a condición de que produzca los mismos efectos externos que el sistema original, por lo cual necesariamente deberá cumplirse que las coord-



nadas vectoriales de ambos sistemas deben ser iguales.

$$(\bar{R}, \bar{M}_O)_I = (\bar{R}, \bar{M}_O)_{II}$$

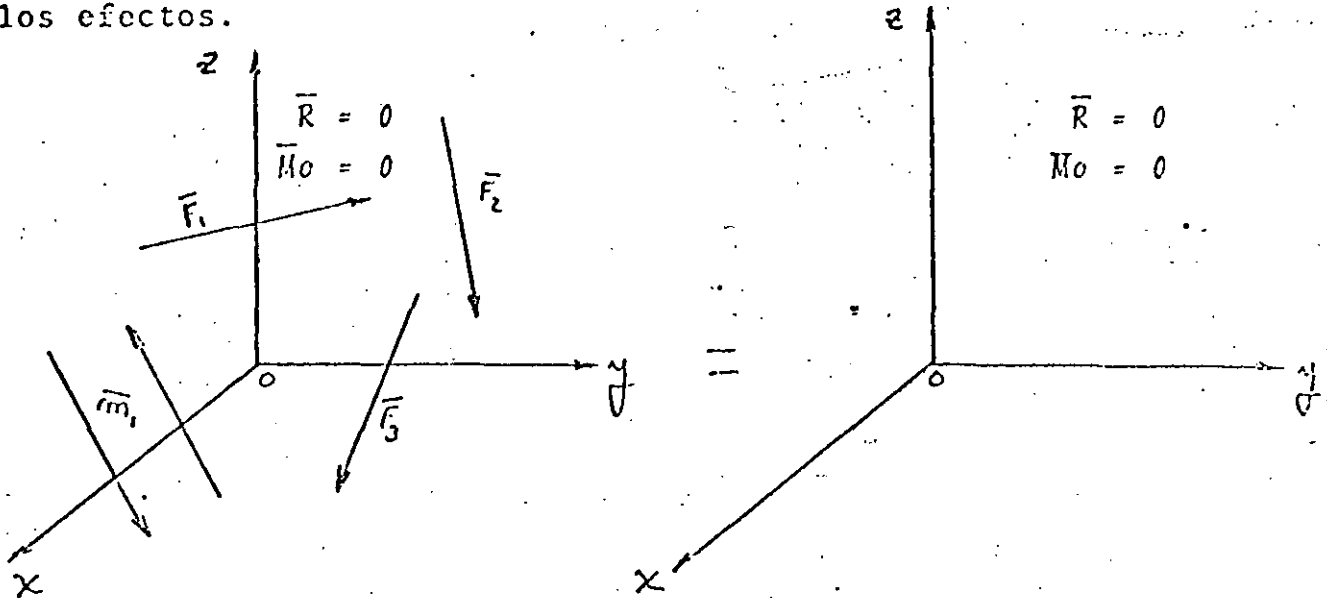
Equilibrio.- De cualquier sistema que se desee reducir, lo primero que tendrá que obtenerse serán sus coordenadas vectoriales, para determinar los efectos que se están produciendo y al mismo tiempo para sustituirlo por un sistema equivalente que pase por el origen.

Sea que al calcular las coordenadas vectoriales de un sistema se tiene que:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0$$

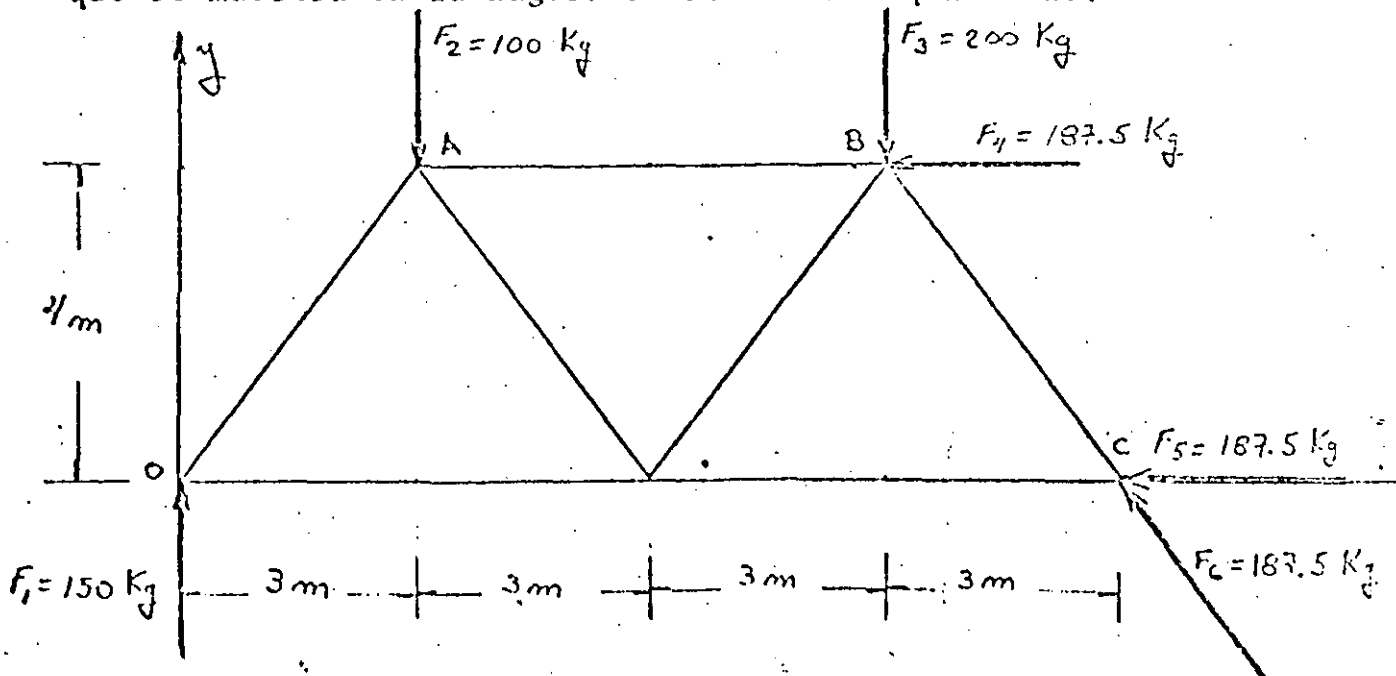
$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{r}_{O_i} \times \bar{F}_i = 0$$

Así, se observa que el sistema original no produce ningún efecto, por lo cual, en el caso del sistema II que se pretende encontrar podemos afirmar que no es necesario colocar ningún elemento pues es la única forma en que no se alterarían los efectos.



Este caso es conocido como Equilibrio, y para el tema que nos ocupa bastará con indicar que el sistema se reduce al equilibrio, ya que dicho tema será analizado detalladamente posteriormente.

Ejemplo. - III. - 5-1. - Demostrar que el sistema de fuerzas que se muestra en la figura se reduce al equilibrio.



Solución

- 1.- Calcularemos los vectores equipolentes y los momentos de cada fuerza con respecto al origen.

$$\bar{F}_1 = 150j \text{ [Kg]}$$

$$\bar{F}_2 = -100j \text{ [Kg]}$$

$$\bar{F}_3 = -200j \text{ [Kg]}$$

$$\bar{F}_4 = -75i \text{ [Kg]}$$

$$\bar{F}_5 = 187.5i \text{ [Kg]}$$

$$\bar{F}_6 = 187.5 \left(\frac{-3i + 4j}{\sqrt{25}} \right) = -112.5i + 150j \text{ [Kg]}$$

$$\bar{M}_0^1 = 0 \text{ [Kg - m]}$$

$$\bar{M}_0^2 = -300k \text{ [Kg - m]}$$

$$\bar{M}_0^3 = -1800k \text{ [Kg - m]}$$

$$\bar{M}_0^4 = 300k \text{ [Kg - m]}$$

$$\bar{M}_0^5 = 0 \text{ [Kg - m]}$$

$$\bar{M}_0^6 = 1800k \text{ [Kg - m]}$$

- 2.- Obtengamos las coordenadas vectoriales del sistema, para ello realicemos la sumatoria de fuerzas y de momentos

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^6 \bar{F}_i = 0i + 0j + 0k \text{ [Kg]}$$

$$\bar{M}_0 = \sum_{i=1}^6 \bar{r}_0^i \times \bar{F}_i = 0i + 0j + 0k \text{ [Kg - m]}$$

- 3.- Podemos concluir con que el sistema se reduce al equilibrio ya que no existe ningún efecto que se esté produciendo.

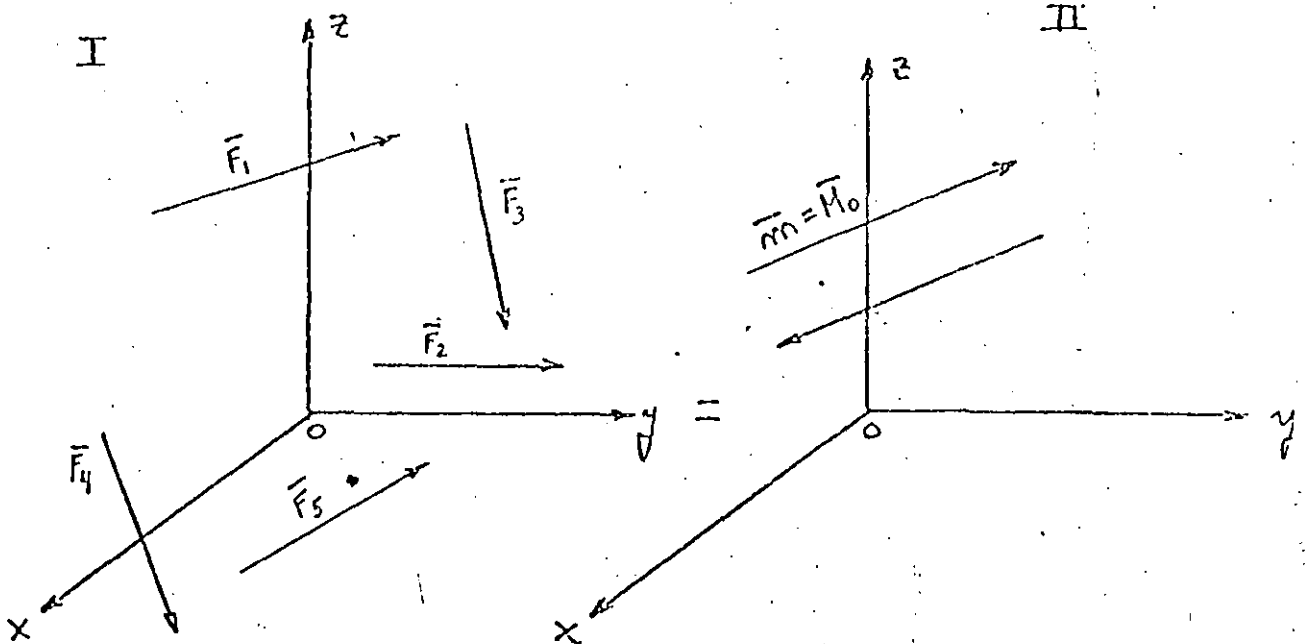
Par de Fuerzas. - Supongamos que las coordenadas vectoriales de un sistema de fuerzas resultaran:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0$$

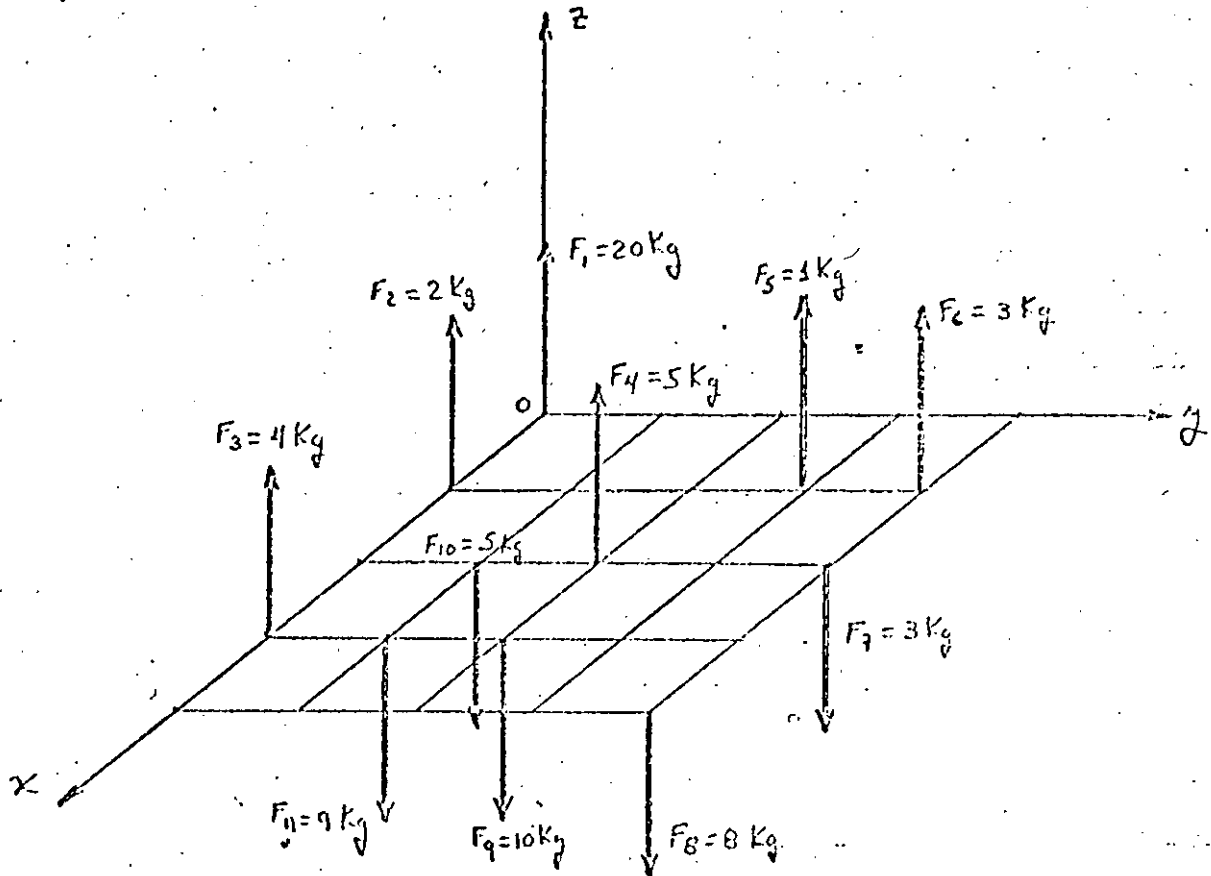
$$\bar{M}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{r}_0 i \times \bar{F}_i \neq 0$$

Lo anterior implica que el único efecto que dicho sistema está produciendo es el de giro o momento y como ya se analizó, el elemento capaz de producir tal efecto sin generar jalón o empujón es un par de fuerzas, por lo cual podemos concluir que el sistema de fuerzas, cuyas coordenadas vectoriales correspondan a las indicadas, se reduce a un par de fuerzas.

De acuerdo a los croquis que se indican, deberá observarse que el momento del par de fuerzas debe ser igual a \bar{M}_0 y que además no será necesario proporcionar ningún punto de aplicación de dicho par ya que su momento es el mismo con respecto a cualquier punto, y se considera como un vector libre.



Ejemplo III-5-2. - Determinar el momento del par de fuerzas al que se reduce el sistema de fuerzas de la figura. (cuadrícula de 1 m por lado).



Solución

1.- Vectores equipolentes y momentos con respecto al origen.

$\vec{F}_1 = 20k \text{ [Kg]}$	$\vec{M}_O^1 = 0 \text{ [Kg - m]}$
$\vec{F}_2 = 2k \text{ [Kg]}$	$\vec{M}_O^2 = -2j \text{ [Kg - m]}$
$\vec{F}_3 = 4k \text{ [Kg]}$	$\vec{M}_O^3 = -12j \text{ [Kg - m]}$
$\vec{F}_4 = 5k \text{ [Kg]}$	$\vec{M}_O^4 = 10i - 10j \text{ [Kg - m]}$
$\vec{F}_5 = k \text{ [Kg]}$	$\vec{M}_O^5 = 3i - j \text{ [Kg - m]}$
$\vec{F}_6 = 3k \text{ [Kg]}$	$\vec{M}_O^6 = 12i - 3j \text{ [Kg - m]}$
$\vec{F}_7 = -3k \text{ [Kg]}$	$\vec{M}_O^7 = -12i + 6j \text{ [Kg - m]}$
$\vec{F}_8 = -8k \text{ [Kg]}$	$\vec{M}_O^8 = -32i + 32j \text{ [Kg - m]}$
$\vec{F}_9 = -10k \text{ [Kg]}$	$\vec{M}_O^9 = -20i + 30j \text{ [Kg - m]}$
$\vec{F}_{10} = -5k \text{ [Kg]}$	$\vec{M}_O^{10} = -5i + 10j \text{ [Kg - m]}$
$\vec{F}_{11} = -9k \text{ [Kg]}$	$\vec{M}_O^{11} = -9i + 27j \text{ [Kg - m]}$

2.- Coordenadas Vectoriales

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0i + 0j + 0k \text{ [Kg]}$$

$$\bar{M}_o = \sum_{i=1}^n \bar{r}_{oi} \times \bar{F}_i = -53i + 77j + 0k \text{ [Kg - m]}$$

3.- Conclusiones.- Evidentemente el sistema de fuerzas se reduce a un par, pues la resultante es nula y el momento del sistema es diferente de cero, y el momento del par de fuerzas al que se reduce el sistema está dado por el vector libre:

$$\bar{m} = -53i + 77j \text{ [Kg - m]}$$

Una Fuerza. En esta ocasión debemos tratar este caso en dos partes ya que cada una de las soluciones que se presentan, -- tienen aspectos diferentes.

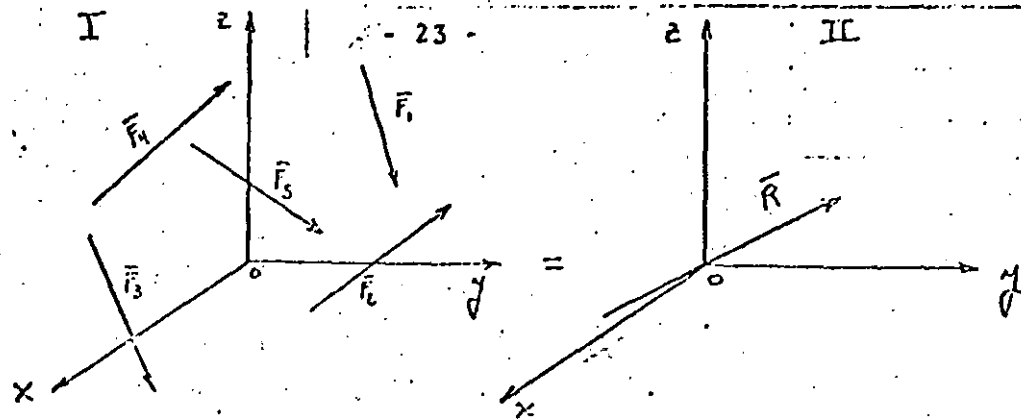
a) Una fuerza que pasa por el origen. Sean las coordenadas vectoriales del sistema:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \neq 0$$

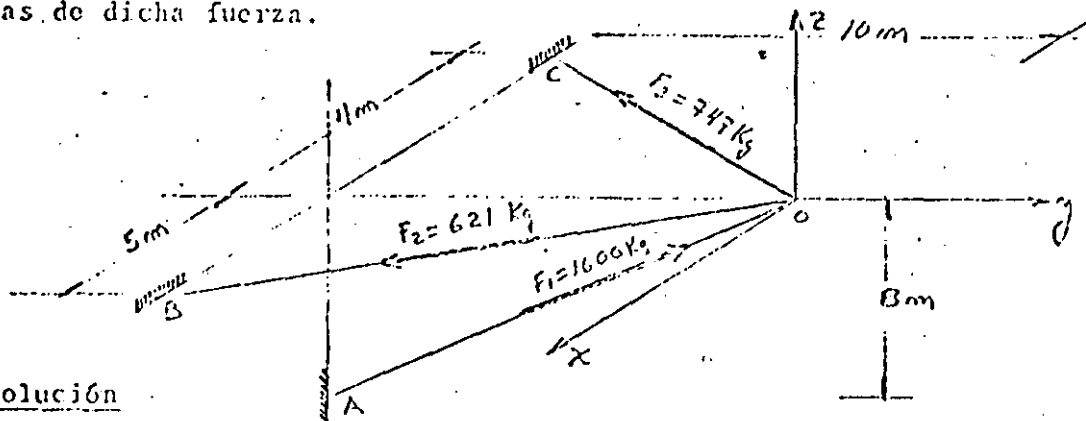
$$\bar{M}_o = \sum_{i=1}^n \bar{r}_{oi} \times \bar{F}_i = 0$$

obviamente el sistema exclusivamente produce efecto de jalón o empujón, por lo que debemos colocar como mínimo sistema -- equivalente a una sola fuerza pero que no produzca momento -- con respecto al origen y la única forma de que ésto se presen -- te es que la línea de acción de la fuerza contenga a dicho -- punto.

Como es claro, el vector equipolente de dicha fuerza resultan -- te nos lo proporciona las coordenadas vectoriales y no es ne -- cesario localizar ningún punto de aplicación de la misma ya -- que, como acordamos, pasará por el origen.



Ejemplo III.-5.-3.- Verificar que el sistema de fuerzas que actúa en el punto O del tornapunta de la figura, se reduce a una sola fuerza que pasa por dicho punto. Obtenga las características de dicha fuerza.



Solución

1.- Determinemos los vectores equipolentes y los momentos con respecto al origen.

$$\vec{F}_1 = 1600 \left(\frac{10j + 8k}{\sqrt{164}} \right) = 124.39j + 999.51k \text{ [Kg]}$$

$$\vec{F}_2 = 621 \left(\frac{5i - 10j}{\sqrt{125}} \right) = 277.71i - 555.43j \text{ [Kg]}$$

$$\vec{F}_3 = 747 \left(\frac{-4i - 10j}{\sqrt{116}} \right) = -277.42i - 693.57j \text{ [Kg]}$$

Como es claro el momento de todas las fuerzas con respecto al origen es nulo.

$$\vec{M}_O^1 = 0 \text{ [Kg-m]} \quad \vec{M}_O^2 = 0 \text{ [Kg-m]} \quad \vec{M}_O^3 = 0 \text{ [Kg-m]}$$

2.- Coordenadas vectoriales.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i = 0i + 0j + 999.51k \text{ [Kg]}$$

$$\bar{M}_0 = \sum_{i=1}^3 \bar{r}_{0i} \times \bar{F}_i = 0i + 0j + 0k \text{ [Kg} \cdot \text{m]}$$

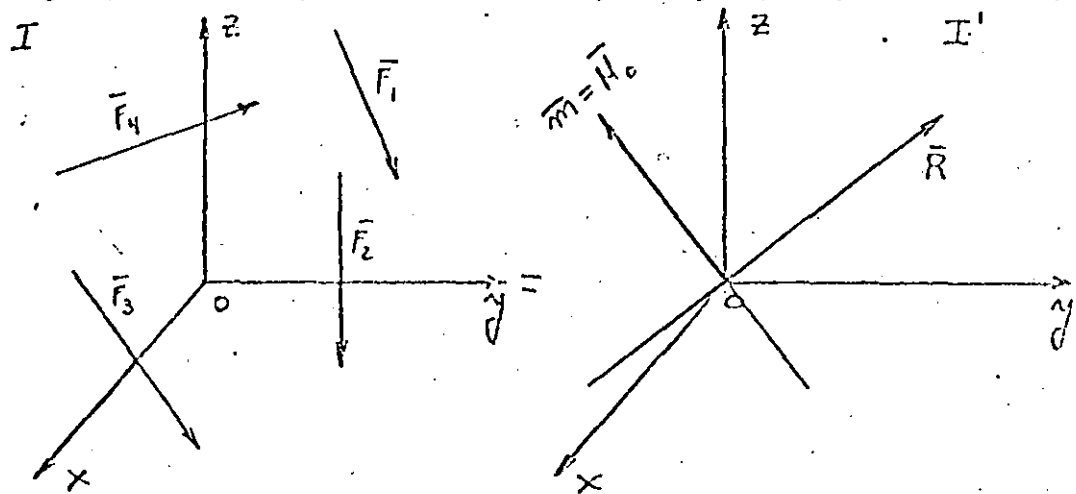
3.- Es claro que el sistema se reduce a una fuerza que pasa por el origen y dicha fuerza es: $\bar{R} = 999.5k \text{ [Kg} \cdot \text{m]} \text{ } 0(0,0,0,0)$

b) Una fuerza que no pasa por el origen. - Cuando las coordenadas vectoriales de un sistema de fuerzas son:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \neq 0$$

$$\bar{M}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{r}_{0i} \times \bar{F}_i \neq 0$$

podemos decir que tenemos un sistema reducido que pasa por el origen; formado por una fuerza y un par, cuyo momento po-

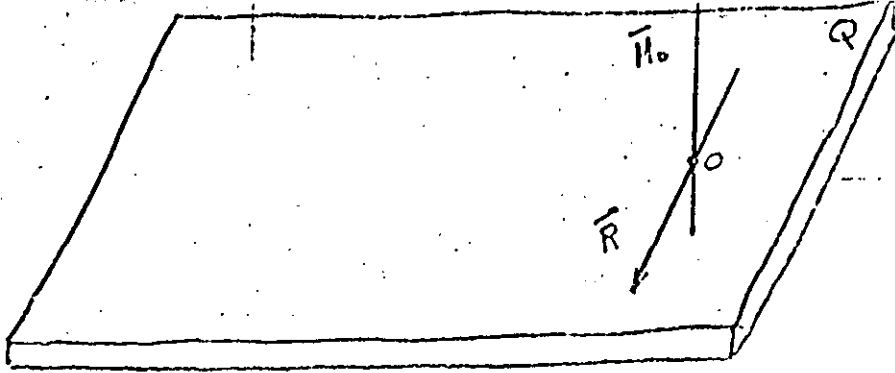


demos considerar aplicado en el origen. Como es claro el sistema produce los dos efectos que hemos referido, en estas condiciones existen dos posibilidades:

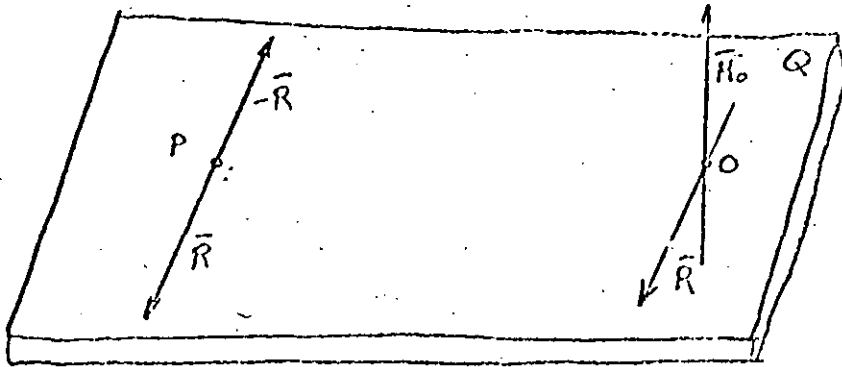
1. Que el momento \bar{M}_0 y la fuerza \bar{R} sean perpendiculares.
2. Que el momento \bar{M}_0 y la fuerza \bar{R} no sean perpendiculares.

analicemos la primera posibilidad.

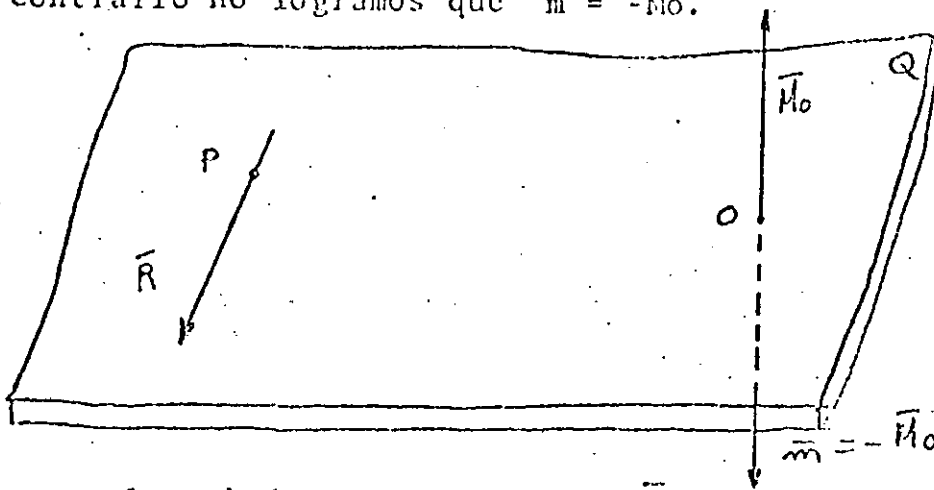
Consideremos un plano Q en el que ubiquemos a la fuerza \bar{R} y dibujemos el momento \bar{M}_0 perpendicular a dicho plano; obsérvese que la línea de acción de ambos vectores contiene al punto O.



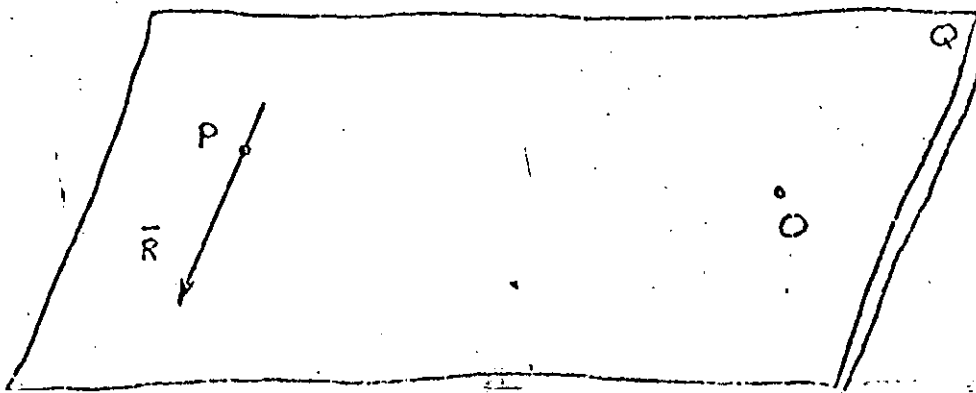
Localicemos un punto P en dicho plano y coloquemos un sistema en equilibrio como se indica.



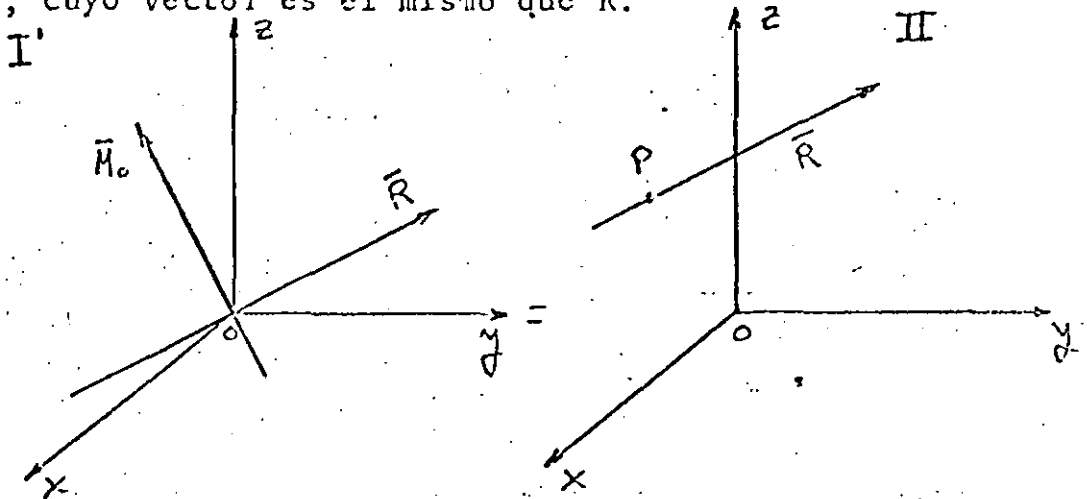
Evidentemente los sistemas son equivalentes y además hemos creado un par de transporte con la peculiaridad que su momento lo podemos hacer igual a \vec{M}_0 , pero de sentido contrario, lo anterior lo logramos ubicando adecuadamente el punto P ya que de lo contrario no logramos que $\vec{m} = -\vec{M}_0$.



Como resulta obvio la sumatoria de \vec{M}_0 y \vec{m} se anula, quedándonos exclusivamente la fuerza \vec{R} pero, como es claro, aplicada en el punto.



Resumiendo, cuando las coordenadas vectoriales de un sistema de fuerzas son diferentes de cero y \bar{R} y \bar{M}_O son perpendiculares, es posible reducir el sistema a una sola fuerza que no pase por el origen, cuyo vector es el mismo que \bar{R} .



De acuerdo al esquema anterior, los sistemas I' y II necesariamente deben ser equivalentes y como se conoce \bar{R} , lo único que cabría aclarar es la localización del punto P, pues bien, dado que, como ya lo mencionamos, los sistemas son equivalentes y por tanto se deben cumplir las ecuaciones correspondientes, es decir:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i i_{I'} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i i_{II} = \bar{R}_{II}$$

evidentemente la ecuación anterior se cumple.

Veamos ahora la expresión de momentos:

$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_O i \times \bar{F}_i i_{I'} = \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_O i \times \bar{R}_i i_{II} = \bar{M}_{OII}$$

ya que exclusivamente tenemos una sola fuerza en el sistema II, su momento con respecto al origen necesariamente debe ser igual a \bar{M}_{OII} , entonces $\bar{M}_O^R = \bar{\rho}_{Op} \times \bar{R} = \bar{M}_{OII}$

naturalmente desconocemos las coordenadas del punto P, pero podemos suponer un punto cualquiera en el espacio $P(X, Y, Z)$ y como

$$\bar{\rho}_{Op} \times \bar{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X & Y & Z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = \begin{aligned} &(yR_z - zR_y)i \\ &-(xR_z - zR_x)j \\ &+(xR_y - yR_x)k \end{aligned}$$

y dado que son vectores, podemos formar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$(yRz - zRy) = Mox \quad \text{III 5.- 1}$$

$$-(xRz - zRx) = Moy \quad \text{III 5.- 2}$$

$$(xRy - yRx) = Moz \quad \text{III 5.- 3}$$

cuya solución nos proporcionará las coordenadas del punto buscado.

Como Mox , Moy y Moz representan los momentos con respecto a los ejes X, Y y Z respectivamente, podemos señalarlos como Mx , My y Mz y si las ecuaciones las expresamos en forma simétrica, podemos indicar:

$$\frac{yRz - Mx}{Ry} = z \quad \text{III 5.- 4}$$

$$\frac{My + xRz}{Rx} = z \quad \text{III 5.- 5}$$

e igualando estas expresiones:

$$\frac{yRz - Mx}{Ry} = \frac{xRz + My}{Rx} = z$$

$$z = \frac{X + \frac{My}{Rz}}{\frac{Rx}{Rz}} = \frac{Y - \frac{Mx}{Rz}}{\frac{Ry}{Rz}} = z$$

ecuación que corresponde a la del llamado "Eje Central" que se define como: "El lugar geométrico de todos los puntos del espacio tridimensional con respecto a los cuales el momento del sistema es de módulo mínimo".

De cualquier manera, como puede proporcionarse cualquier punto de la línea de acción de la fuerza y en virtud de que las fuerzas se pueden considerar como vectores

de tipo deslizante, en lugar de escoger un punto cualquiera $P(X,Y,Z)$, es posible seleccionar el punto en el cual la línea de acción de la fuerza intersekte a cualquiera de los planos coordenados, esto es, $P_1(X,Y,0)$, $P_2(X,0,Z)$ ó $P_3(0,Y,Z)$.

Lo anterior facilitará enormemente el cálculo evitando el resolver un sistema de 3 ecuaciones simultáneas.

Conviene aclarar que deberá analizarse el vector fuerza ya que, dependiendo de la dirección de dicho vector, intersectará o no a los planos coordenados, por lo que es conveniente observar las siguientes posibilidades.

$$\vec{R} = X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k} \quad P_1(x, y, 0), P_2(x, 0, z), P_3(0, y, z)$$

$$\vec{R} = X\hat{i} + Y\hat{j} \quad P_2(x, 0, z), P_3(0, y, z)$$

$$\vec{R} = X\hat{i} + Z\hat{k} \quad P_1(x, y, 0) \quad P_3(0, y, z)$$

$$\vec{R} = Y\hat{j} + Z\hat{k} \quad P_1(x, y, 0) \quad P_2(x, 0, z)$$

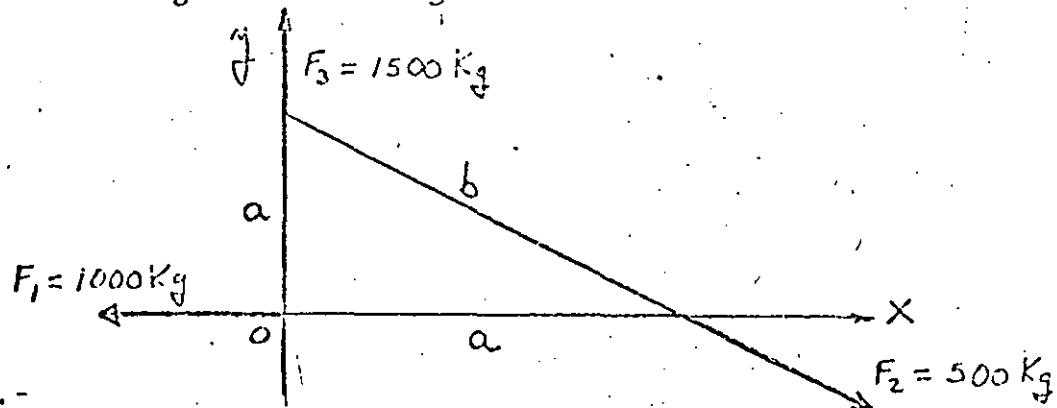
$$\vec{R} = X\hat{i} \quad P_3(0, y, z)$$

$$\vec{R} = Y\hat{j} \quad P_2(x, 0, z)$$

$$\vec{R} = Z\hat{k} \quad P_3(x, y, 0)$$

Concluyendo, para seleccionar el punto de aplicación de la resultante bastará con anular cualquiera de las coordenadas cuando la fuerza tenga componente en esa dirección.

Ejemplo III.5.- 4.- Encontrar la fuerza, y su punto de aplicación correspondiente, a que se reduce el sistema de fuerzas que actúa en el triángulo de la figura.



Solución.-

1.- Vectores equipolentes y momentos con respecto al origen.

$$\vec{F}_1 = -100\hat{i} \text{ [Kg]}$$

$$\vec{M}_o = 0$$

$$\vec{F}_2 = 500(\cos 45^\circ \hat{i} - \cos 45^\circ \hat{j}) = 353.55\hat{i} - 353.55\hat{j} \text{ [Kg]}$$

$$\bar{M}_0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & 0 & 0 \\ 353.55 & 353.55 & 0 \end{vmatrix} = 353.55 a k \text{ [Kg} \cdot \text{m]}$$

$$\bar{F}_3 = 1500 j \text{ [Kg]}$$

2.- Coordenadas Vectoriales

$$\bar{R} = -646.45i + 1146.45 j \text{ [Kg]}$$

$$\bar{M}_0 = 353.55 a k \text{ [Kg} \cdot \text{m]}$$

3.- Perpendicularidad

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_0 = 0$$

Por lo cual es una fuerza que no pasa por el origen.

4.- Selección del punto de aplicación.

$$P(X, 0, Z)$$

5.- Cálculo de $\bar{r}_{op} \times \bar{R}$

$$\bar{r}_{op} \times \bar{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X & 0 & Z \\ -646.45 & 1146.45 & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} -1146.45 Z - 646.45 Z j \\ +1146.45 X k \end{matrix}$$

6.- Igualando momentos: $\bar{r}_{op} \times \bar{R} = \bar{M}_0$

$$-1146.45 Z = 0 \quad - \quad - \quad a$$

$$-646.45 Z = 0 \quad - \quad - \quad b$$

$$1146.45 X = 353.55 a \quad - \quad c$$

De las cuales se obtiene:

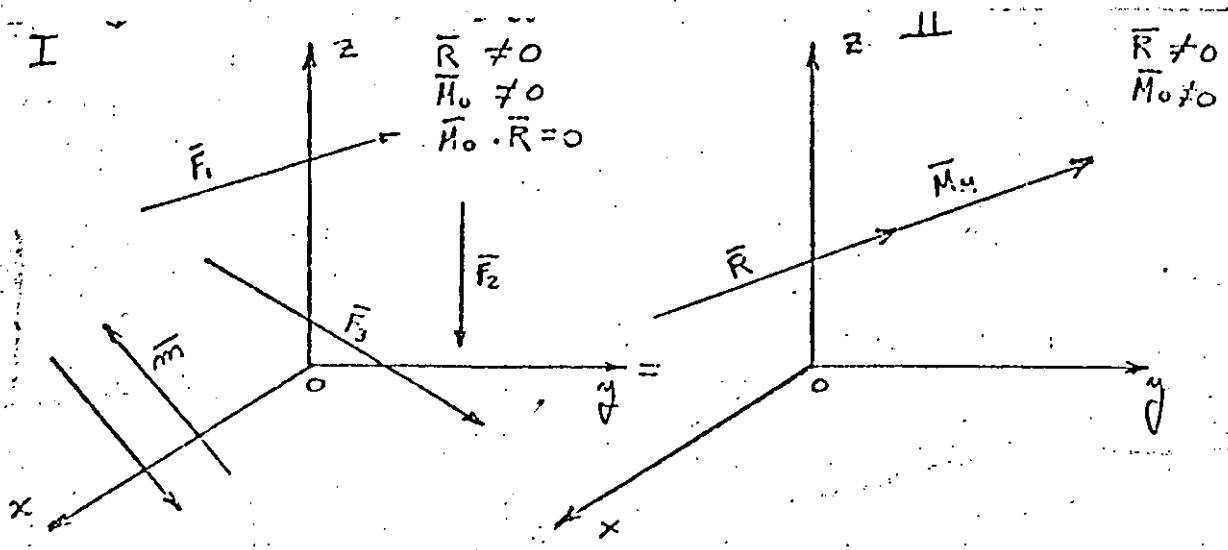
$$Z = 0 \quad X = 0.3084a$$

7.- Conclusiones.- El sistema se reduce a una sola fuerza

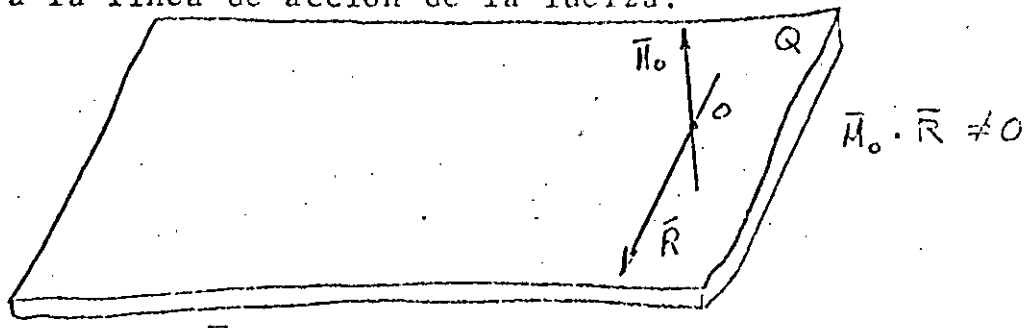
$\bar{R} = -646.45i + 1146.45j \text{ [Kg]}$ y que pasa por el punto

$$P(0.3084a, 0, 0) \text{ [m]}.$$

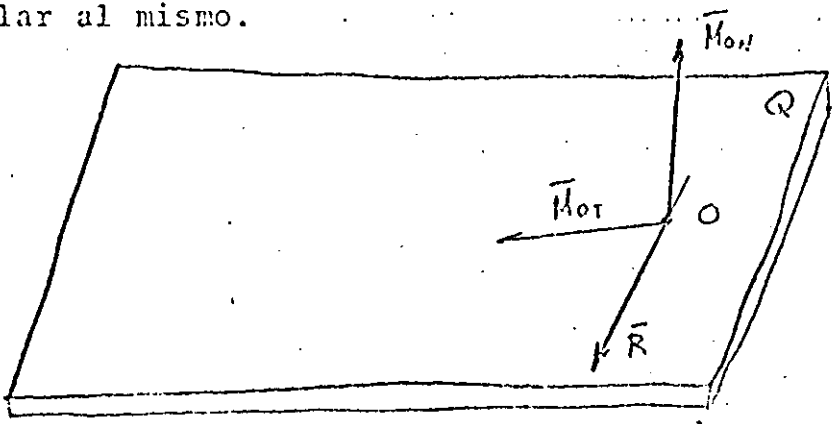
Motor.- Cuando las coordenadas vectoriales de un sistema de fuerzas resultan diferentes de cero y la resultante (\bar{R}) y el momento con respecto al origen (\bar{M}_0) no son perpendiculares entre sí, se dice que la reducción es un motor, entendiéndose éste como una fuerza y un momento, ambos ubicados en la misma línea de acción.



Supongamos que se realiza la primera reducci3n, o sea que obtenemos una fuerza y un momento en el origen, dadas por las coordenadas vectoriales del sistema, y que hacemos pasar un plano Q que contiene a la l3nea de acci3n de la fuerza.

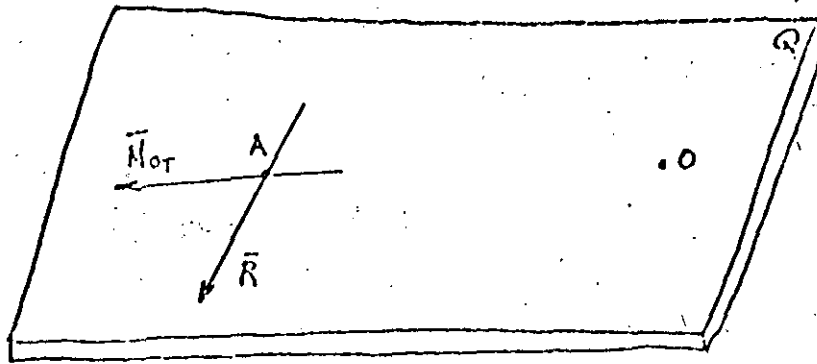


Ahora bien, el momento \bar{M}_0 ser3 descompuesto en dos componentes ortogonales; una contenida en el citado plano Q y la otra perpendicular al mismo.

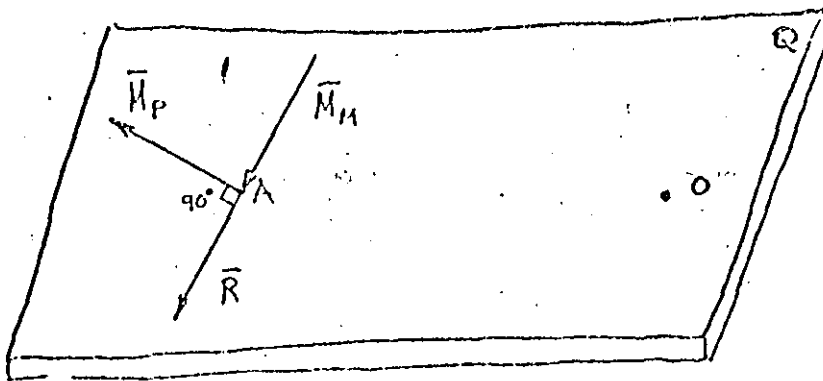


Observese que \bar{M}_{0N} y \bar{R} son ortogonales y que \bar{M}_{0T} y \bar{R} son coplanos, en base a la primera aseveraci3n podemos trasladar la fuerza \bar{R} a un punto (A) del plano Q y lograremos, as3, eliminar el momento \bar{M}_{0N} con la aparici3n del par de transporte.

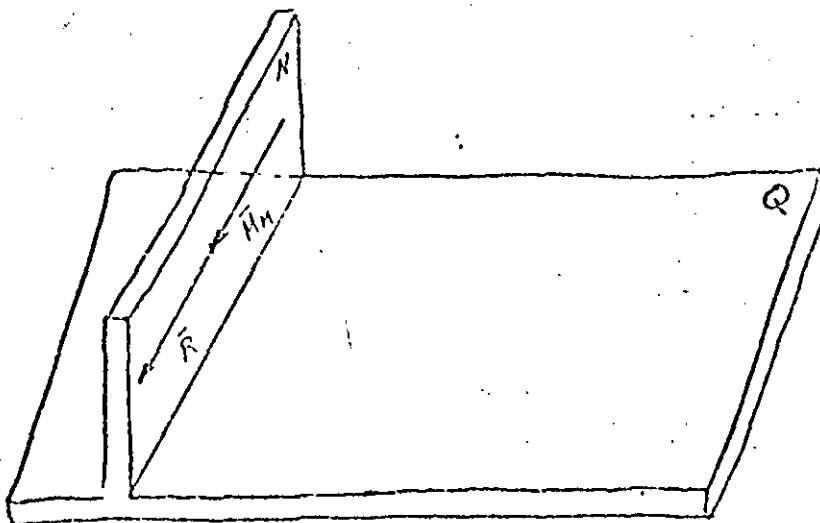
Ahora tenemos a la resultante y a un momento, ambos en el plano Q, localizados en el punto A.



El momento \bar{M}_{OT} es posible descomponerlo nuevamente en forma ortogonal, pero logrando que una de las componentes se encuentre en la línea de acción de \bar{R} , y la otra sea perpendicular a la misma.



Como \bar{R} y \bar{M}_P son ortogonales, si volvemos a trasladar la fuerza, pero ahora en un plano normal al Q lograremos anular a \bar{M}_P , sin embargo no hay forma de eliminar a \bar{M}_M , puesto que cualquier nueva posición de \bar{R} , paralela a su posición actual, producirá un par con un momento, cuya representación será perpendicular a \bar{M}_M y por lo tanto, se descarta la posibilidad de alguna cancelación. La combinación de \bar{R} y \bar{M}_M forma el motor ya mencionado.



Para determinar el momento del motor \bar{M}_M bastará con descomponer ortogonalmente el momento original \bar{M}_0 en dirección de la resultante, lo cual se logra fácilmente con un producto escalar,

$$\bar{M}_M = (\bar{M}_0 \cdot \bar{e}_R) \bar{e}_R$$

en donde \bar{e}_R representa el vector unitario de la resultante.

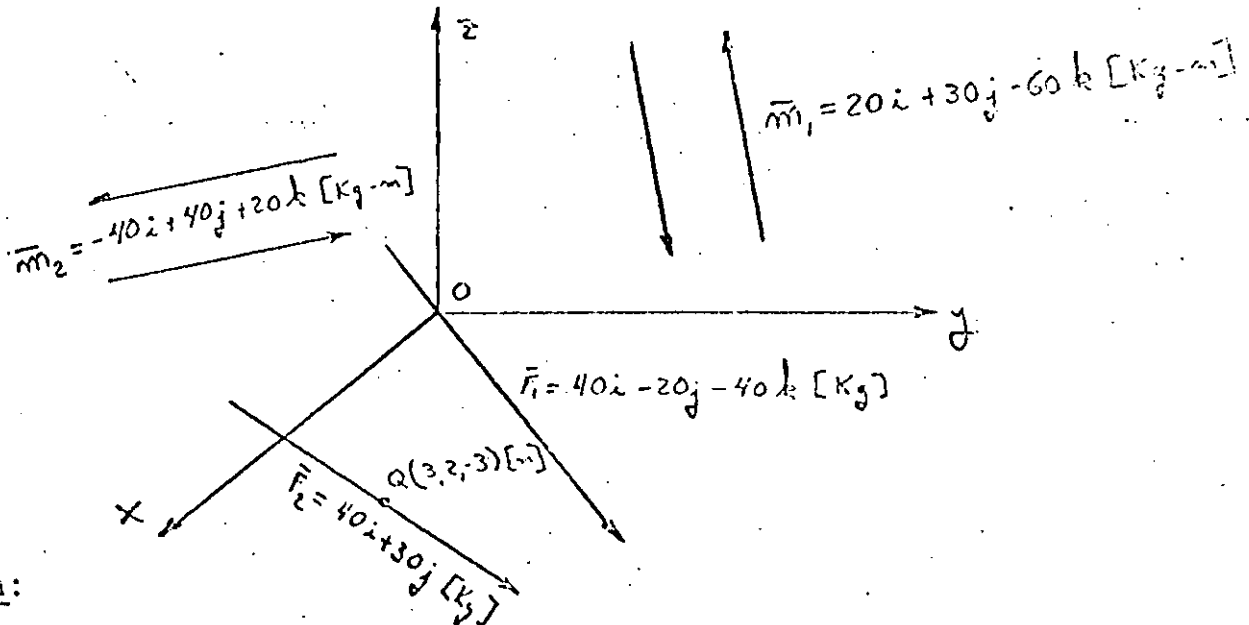
El punto de aplicación del motor se obtendrá en forma similar al de una sola fuerza, con la salvedad de que será necesario sumarse el momento del motor (\bar{M}_M).

$$\bar{r}_{op} \times \bar{R} + \bar{M}_M = \bar{M}_0$$

lo que dará lugar a que la ecuación del eje central sea:

$$\frac{x + \left(\frac{-M_{0y} + M_{My}}{Rz} \right) \frac{-Rx}{Rz}}{\frac{-Rx}{Rz}} = \frac{y + \left(\frac{-M_{0x} + M_{Mx}}{Rz} \right) \frac{Ry}{Rz}}{\frac{Ry}{Rz}} = z$$

Ejemplo III 5.-5.- Dado el sistema de fuerzas que se muestra en la figura, encontrar el motor resultante.



Solución:

1.- Cálculo de momentos con respecto al origen.

$$\bar{M}_0^1 = 0 \quad \bar{M}_0^2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -3 \\ 40 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 90i - 120j + 10k \text{ [Kg - m]}$$

2.- Coordenadas vectoriales.

$$\bar{R} = 80i + 10j - 40k \text{ [Kg]}$$

$$\bar{M}_0 = 70i - 50j - 30k \text{ [Kg - m]}$$

3.- Perpendicularidad

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_0 = 5600 - 500 + 1200 = 6300 \neq 0$$

por lo que el sistema se reduce a un motor.

4.- Cálculo del momento del motor:

$$\bar{M}_M = (\bar{M}_0 \cdot \bar{e}_R) \bar{e}_R$$

$$\bar{e}_R = \frac{8}{9}i + \frac{1}{9}j - \frac{4}{9}k$$

$$\bar{M}_0 \cdot \bar{e}_R = \frac{560}{9} - \frac{50}{9} + \frac{120}{9} = \frac{630}{9} = 70$$

$$\bar{M}_M = 62.22i + 7.77j - 31.11k \text{ [Kg - m]}$$

5.- Selección del punto de aplicación

$$P(x, y, 0)$$

6.- Suma e igualación de momentos.

$$\bar{r}_{op} \times \bar{R} + \bar{M}_M = \bar{M}_0$$

$$\bar{r}_{op} \times \bar{R} \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & 0 \\ 80 & 10 & -40 \end{vmatrix} = (-40y)i + (40x)j + (10x - 8y)k \text{ [Kg-m]}$$

$$(-40y + 62.22) = 70 \quad - \quad - \quad - \quad a$$

$$(40x + 7.77) = -50 \quad - \quad - \quad - \quad b$$

$$(10x - 8y - 31.11) = -30 \quad - \quad - \quad - \quad c$$

De la solución de las ecuaciones a y b obtenemos:

$$x = -1.444$$

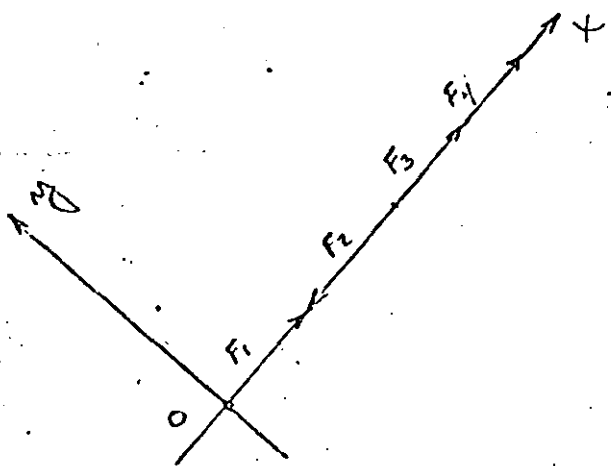
$$y = -0.1945$$

7.- Conclusiones .- El sistema se reduce a un motor formado por una fuerza $\bar{R} = 80i + 10j - 40k$ Kg y un momento

$\bar{M}_M = 62.22i + 7.77j - 31.11k$ [Kg - m] que pasa por el punto $P(-1.444, -0.1945, 0)$ [m].

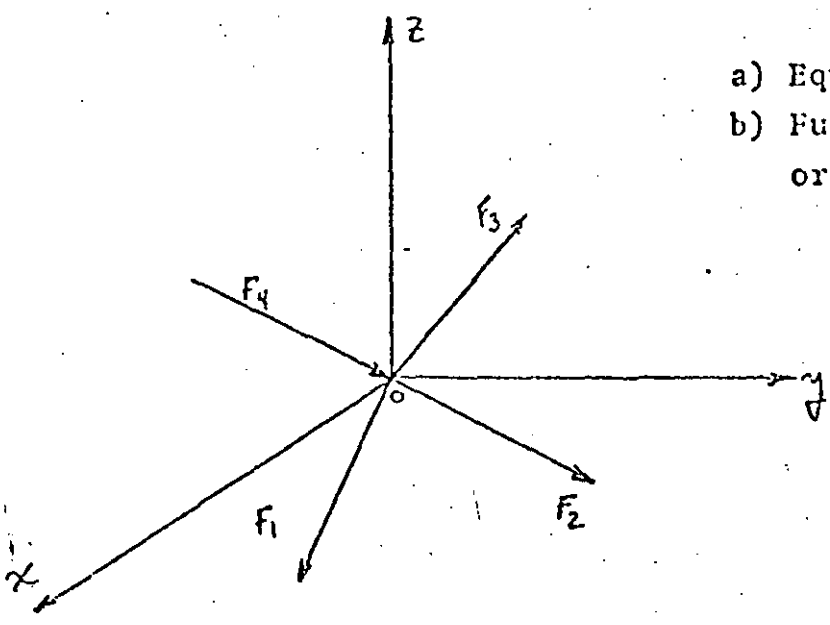
Con el objeto de facilitar la determinación de los distintos casos de reducción, conviene analizar los diferentes sistemas de fuerzas y obtener las posibilidades de reducción para cada uno de ellos.

A.- Sistema de fuerzas colineales.- Es un sistema en el cual todas las fuerzas poseen la misma línea de acción o soporte, por lo que es conveniente ubicar el origen sobre ésta y orientar uno de los ejes en dirección del soporte. En estas condiciones los casos de reducción factibles son:



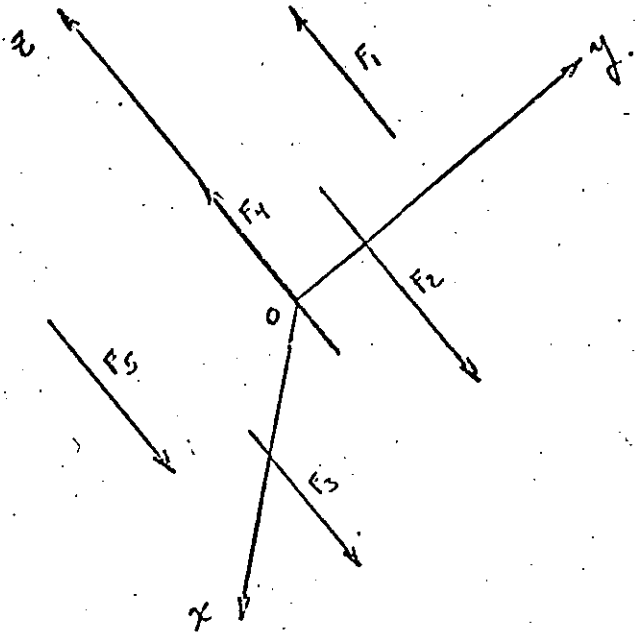
- a) Equilibrio
- b) Fuerza que pasa por el origen.

B.- Sistema de fuerzas concurrentes.- Se denomina así en virtud de que las líneas de acción de las diferentes fuerzas tienen un punto común, por lo cual es conveniente hacer coincidir el origen con dicho punto, presentándose entonces, para dicho sistema, las siguientes posibilidades de reducción:



- a) Equilibrio
- b) Fuerza que pasa por el origen.

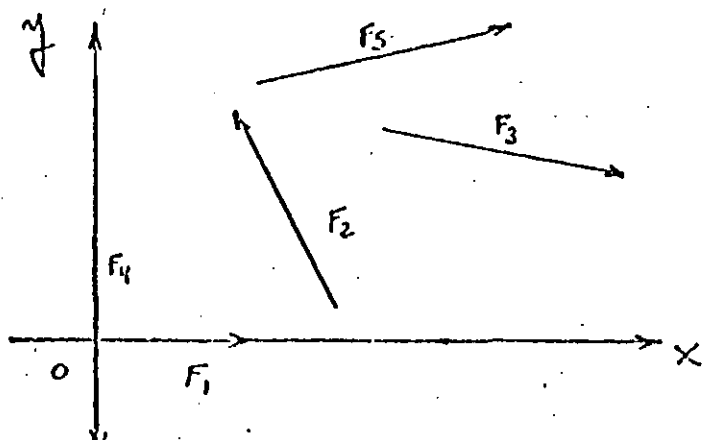
C.- Sistema de fuerzas paralelas.- Obviamente son los sistemas en los cuales los soportes de las fuerzas son paralelas. Así, al ubicar el origen sobre alguna de las fuerzas y al hacer coincidir uno de los ejes con la línea de acción de cualquiera de las fuerzas, los casos de reducción pueden ser:



- a) Equilibrio
- b) Par de fuerzas
- c) Fuerza que pasa por el origen
- d) Fuerza que no pasa por el origen!

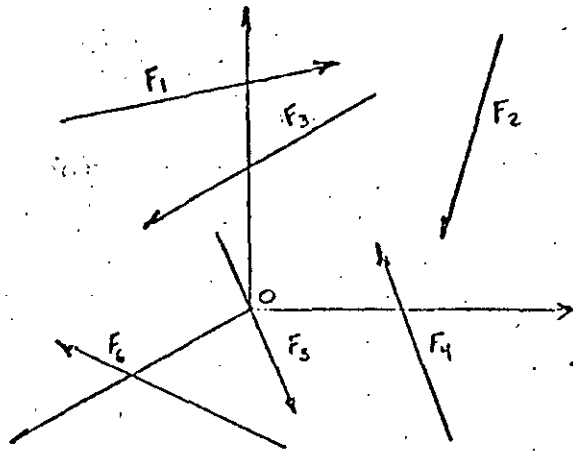
Naturalmente la resultante \bar{R} y el momento \bar{M}_O siempre serán perpendiculares por lo que es imposible la existencia de un motor. Asimismo, la presencia de una fuerza que pase por el origen resulta un caso extraordinario ya que, como la selección del origen es arbitraria, es muy difícil que dicha selección sea tan atinada.

D.- Sistema de fuerzas general en el plano.- Como su nombre lo indica es un sistema que incluye todos los tipos de fuerzas, o dicho de otra manera es un sistema de fuerzas que no son ni concurrentes ni paralelas. Ya que se ubica en un plano no es posible la existencia de un motor dado que la resultante y el momento siempre son perpendiculares. Así, los casos de reducción que pueden presentarse son:



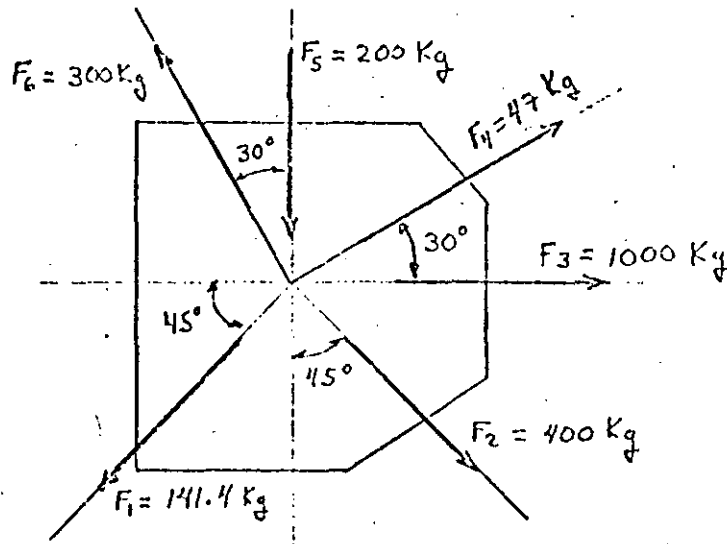
- a) Equilibrio
- b) Par de fuerzas
- c) Fuerza que pasa por el origen (caso extraordinario)
- d) Fuerza que no pasa por el origen.

E.- Sistema de fuerzas general en el espacio.- Este es el único caso que acepta todos los tipos de reducción como posibles y el único factible de presentar un motor ya que la resultante R y el momento pudieran no ser perpendiculares.



- a) Equilibrio
- b) Par de fuerzas
- c) Fuerza que pasa por el origen (caso extraordinario)
- d) Fuerza que no pasa por el origen.
- e) Motor

Ejemplo III 5.-6 - Obtener la resultante del sistema de fuerzas que actúa en la placa de la figura



Solución.- En vista de tenerse un sistema de fuerzas concurrente en el plano, las únicas posibilidades de reducción son el equilibrio y una fuerza que pase por el origen. Para la solución, ubiquemos el origen en el punto de concurrencia y el eje "X" lo hacemos coincidir con la línea de acción de F_3 .

1.- Vectores equipolentes:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= -100\hat{i} - 100\hat{j} \text{ [Kg]} \\ \vec{F}_2 &= 282.8\hat{i} - 282.8\hat{j} \text{ [Kg]} \\ \vec{F}_3 &= 100\hat{i} \text{ [Kg]} \\ \vec{F}_4 &= 40.7\hat{i} + 23.5\hat{j} \text{ [Kg]} \end{aligned}$$

$$\bar{F}_5 = -200j \text{ [Kg]}$$

$$\bar{F}_6 = -150i + 260j \text{ [Kg]}$$

2.- Coordenadas vectoriales.

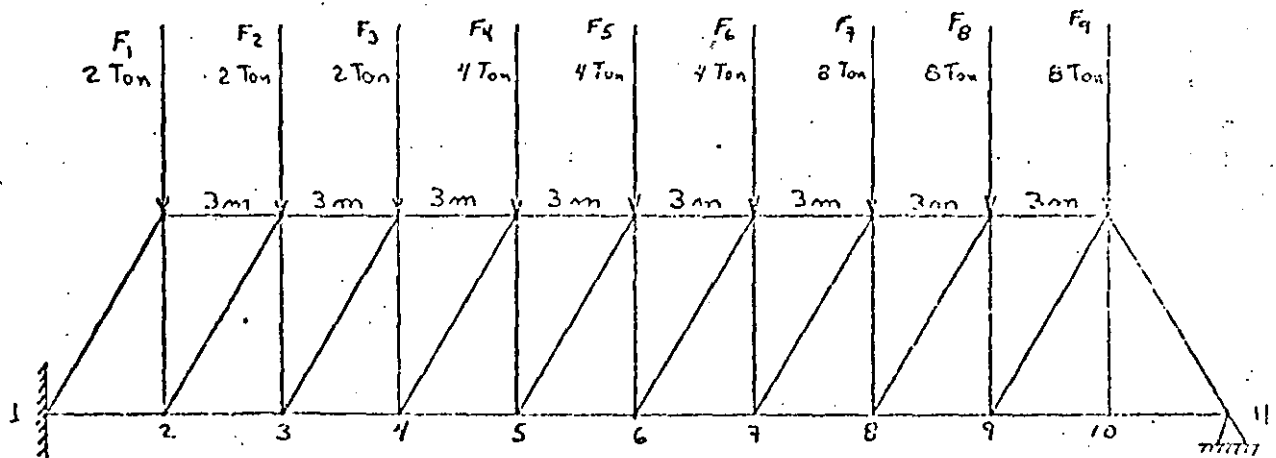
$$\bar{R} = 173.5i - 299.3j \text{ [Kg]}$$

$$\bar{M}_0 = 0$$

3.- Conclusiones.- El sistema se reduce a una fuerza

$$\bar{R} = 173.5i - 299.3j \text{ [Kg]} \text{ que pasa por el origen.}$$

Ejemplo III.5-7- Determinar las características de la resultante del sistema de fuerzas que se aplica a la armadura de la figura:



Solución.- Ya que se tiene un sistema de fuerzas paralelas en el plano y como el sentido de todas las fuerza constitutivas es hacia abajo, la resultante tiene que ser una sola fuerza. Tratemos de encontrar sus características, haciendo coincidir el origen con el punto 6 y tomando el eje "Y" coincidente con F_5 .

1.- Vectores equipolentes y momentos.

$$\bar{F}_1 = -2j \text{ [Ton]}$$

$$\bar{F}_2 = -2j \text{ [Ton]}$$

$$\bar{F}_3 = -2j \text{ [Ton]}$$

$$\bar{F}_4 = -4j \text{ [Ton]}$$

$$\bar{F}_5 = -4j \text{ [Ton]}$$

$$\bar{F}_6 = -4j \text{ [Ton]}$$

$$\bar{F}_7 = -8j \text{ [Ton]}$$

$$\bar{F}_8 = -8j \text{ [Ton]}$$

$$\bar{F}_9 = -8j \text{ [Ton]}$$

$$\bar{M}_0^1 = 24k \text{ [Ton - m]}$$

$$\bar{M}_0^2 = 18k \text{ [Ton - m]}$$

$$\bar{M}_0^3 = 12k \text{ [Ton - m]}$$

$$\bar{M}_0^4 = 12k \text{ [Ton - m]}$$

$$\bar{M}_0^5 = 0 \text{ [Ton - m]}$$

$$\bar{M}_0^6 = -12k \text{ [Ton - m]}$$

$$\bar{M}_0^7 = -48k \text{ [Ton - m]}$$

$$\bar{M}_0^8 = -72k \text{ [Ton - m]}$$

$$\bar{M}_0^9 = -96k \text{ [Ton - m]}$$

2.- Coordenadas vectoriales.

$$\bar{R} = -42j \text{ [Ton]} \quad \bar{M}_o = -162k \text{ [Ton - m]}$$

3.- Perpendicularidad.

$\bar{R} \cdot \bar{M}_o = 0$ por lo que se tiene una fuerza que no pasa por el origen.

4.- Selección del punto de aplicación

$$P (X, 0, Z)$$

5.- Cálculo de $\bar{r}_{op} \times \bar{R}$

$$\bar{r}_{op} \times \bar{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X & 0 & Z \\ 0 & -42 & 0 \end{vmatrix} = 42Zi - 42Xk \text{ [Kg - m]}$$

6.- Igualación de momentos

$$\bar{r}_{op} \times \bar{R} = \bar{M}_o$$

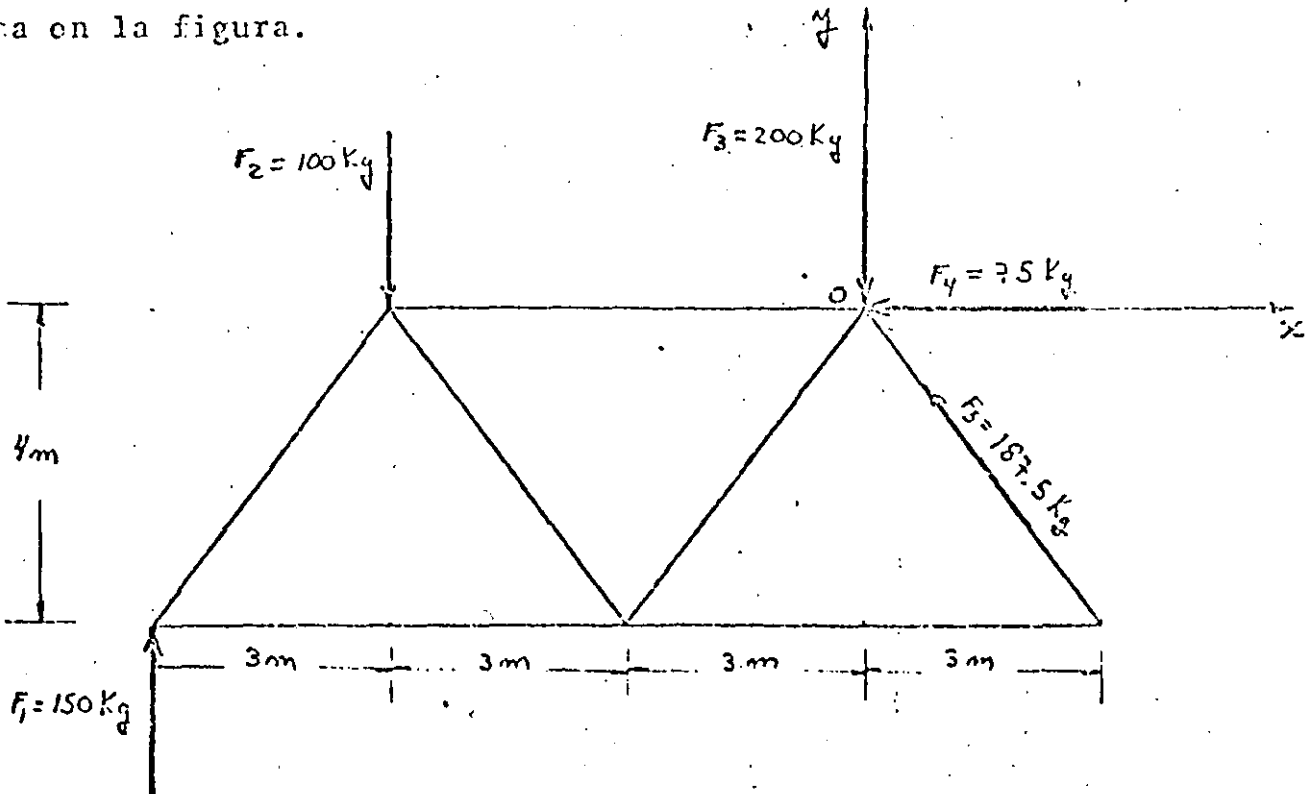
$$42Zi - 42Xk = -162k$$

$$\text{de donde } Z = 0 \quad \text{y } X = 3.857$$

7.- Conclusiones.- El sistema se reduce a una fuerza

$$\bar{R} = -42j \text{ [Ton]} \quad \text{que pasa por } P(3.857, 0, 0) \text{ [m].}$$

Ejemplo. - III 5-8- Encuentre el sistema equivalente mas simple, del sistema de fuerzas que actúa en la porción de armadura que se indica en la figura.



Solución.- Ya que se presenta un sistema de fuerzas general en el plano, las posibilidades son de equilibrio, par de fuerzas y de una sola fuerza.

1.- Vectores equipolentes y momentos.

$$\bar{F}_1 = 150j \text{ [Kg]} \quad \bar{M}_0^1 = -1350k \text{ [Kg - m]}$$

$$\bar{F}_2 = -100j \text{ [Kg]} \quad \bar{M}_0^2 = 600k \text{ [Kg - m]}$$

$$\bar{F}_3 = -200j \text{ [Kg]} \quad \bar{M}_0^3 = 0 \text{ [Kg - m]}$$

$$\bar{F}_4 = -75i \text{ [Kg]} \quad \bar{M}_0^4 = 0 \text{ [Kg - m]}$$

$$\bar{F}_5 = -112.5i + 150j \text{ [Kg]} \quad \bar{M}_0^5 = 0 \text{ [Kg - m]}$$

2.- Coordenadas vectoriales.

$$\bar{R} = -187.5i \text{ [Kg]} \quad \bar{M}_0 = -750k \text{ [Kg - m]}$$

3.- Perpendicularidad.

$\bar{R} \cdot \bar{M}_0 = 0$ entonces tendremos como sistema equivalente a una fuerza que no pasa por el origen.

4.- Selección del punto de aplicación.

$$P (0, y, z)$$

5.- Cálculo de $\bar{r}_{op} \times \bar{R}$

$$\bar{r}_{op} \times \bar{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & y & z \\ -187.5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -187.5zj + 187.5yik \text{ [Kg-m]}$$

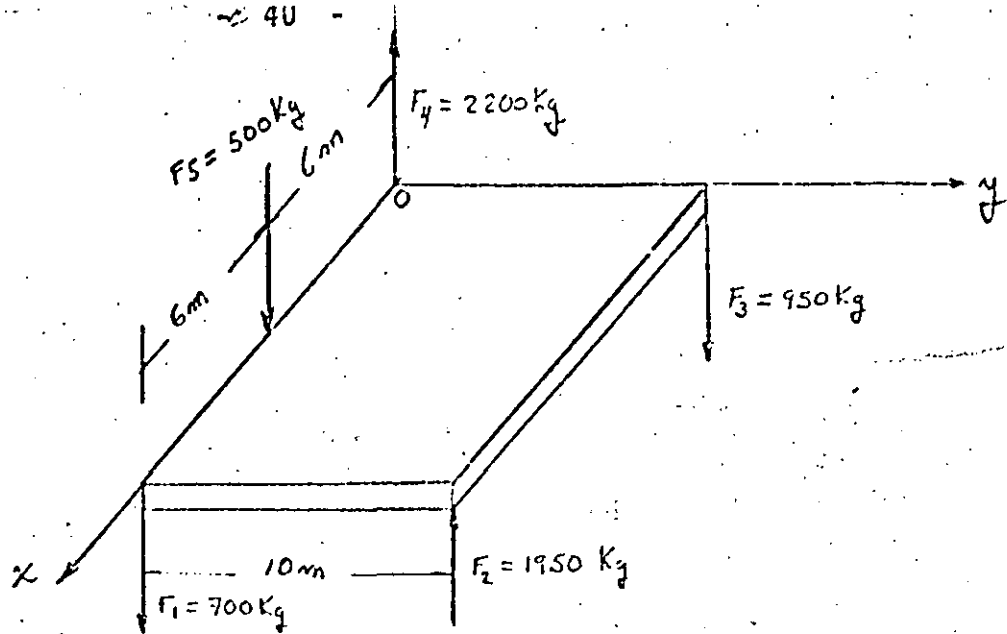
6.- Igualando $\bar{r}_{op} \times \bar{R} = \bar{M}_0$

$$-187.5zj + 187.5yik = -750k$$

$$\text{así, } y = -4 \quad z = 0$$

7.- Conclusiones.- El sistema equivalente más simple es una fuerza $\bar{R} = -187.5i$ que pasa por el punto $P(0, -4, 0)$ [m].

Ejemplo III.-5-9- Sobre una placa rectangular homogénea y rígida, actúan las fuerzas que se indican en el croquis; obtenga el sistema equivalente más simple.



Solución. - Como es un sistema de fuerzas paralelo en el espacio se pudiera tener equilibrio, par de fuerza o una fuerza como casos factibles de equivalencia mas simple.

1.- Vectores equipolentes y momentos.

$$\begin{array}{ll}
 \vec{F}_1 = -700k \text{ [Kg]} & \vec{M}_O^1 = 8400j \text{ [Kg - m]} \\
 \vec{F}_2 = 1950k \text{ [Kg]} & \vec{M}_O^2 = 19500i - 23400j \text{ [Kg - m]} \\
 \vec{F}_3 = -950k \text{ [Kg]} & \vec{M}_O^3 = -9500i \text{ [Kg - m]} \\
 \vec{F}_4 = 2200k \text{ [Kg]} & \vec{M}_O^4 = 0 \text{ [Kg - m]} \\
 \vec{F}_5 = -500k \text{ [Kg]} & \vec{M}_O^5 = 3000j \text{ [Kg - m]}
 \end{array}$$

2.- Coordenadas vectoriales.

$$\vec{R} = 2000k \text{ [Kg]} \quad \vec{M}_O = 10000i - 12000j \text{ [Kg - m]}$$

3.- Perpendicularidad

$\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$ por lo cual tendremos una fuerza que no pasa por el origen.

4.- Selección del punto de aplicación.

$$P(x, y, 0)$$

5.- Cálculo de $\vec{r}_{Op} \times \vec{R}$

$$\vec{r}_{Op} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & 0 \\ 0 & 0 & 2000 \end{vmatrix} = 2000yi - 2000xj \text{ [Kg - m]}$$

6.- Igualación de momentos.

$$\vec{r}_{Op} \times \vec{R} = \vec{M}_O$$

$$2000y = 10\ 000$$

$$y = 5\ \text{m}$$

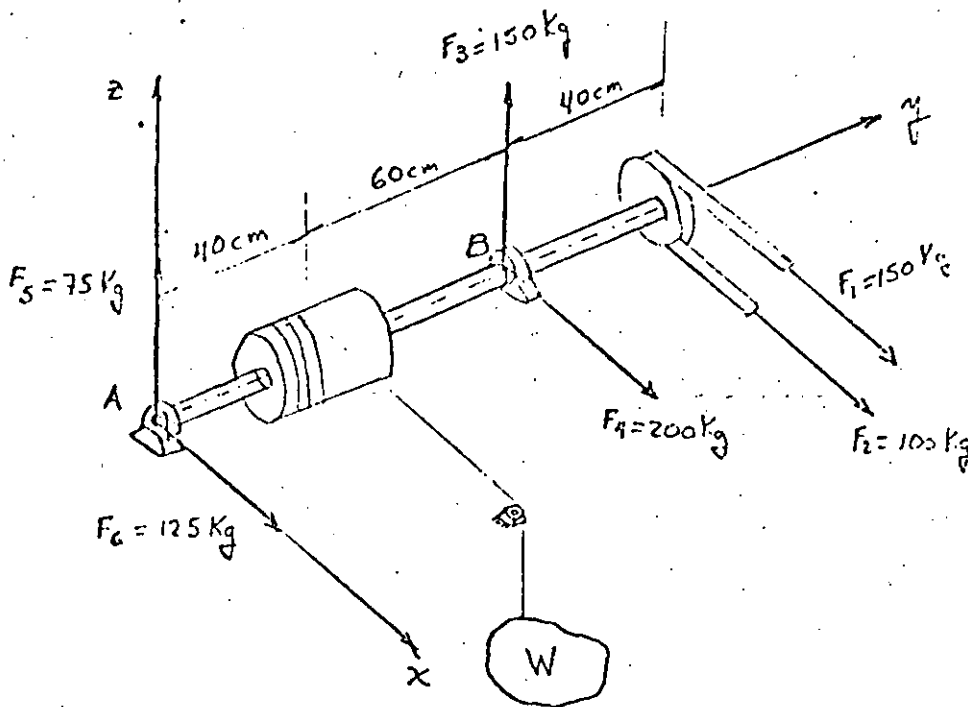
$$-2000x = -12\ 000$$

$$x = 6\ \text{m}$$

7.- Conclusiones.- El sistema solicitado está formado por una sola fuerza $\bar{R} = 2000k$ [Kg] que pasa por el punto $P(6,5,0)$ [m].

Ejemplo III.-5 - 10 .- Un árbol horizontal que descansa sobre dos cojinetes A y B lleva perpendicularmente al eje una polea de radio $r_1 = 20\text{cm}$ y un cilindro de radio $r_2 = 15\text{cm}$.

El árbol se pone en rotación mediante una correa que pasa por la polea; al mismo tiempo se levanta una carga de peso $W = 180\text{ Kg}$. Determinar el sistema equivalente más simple...



Solución.- En este sistema se tienen todas las posibilidades de reducción dado que es un conjunto general de fuerzas en el espacio.

1.- Vectores equipolentes y momentos.

$$\bar{F}_1 = 50i \text{ [Kg]}$$

$$\bar{M}_0^1 = +1000j - 7000k \text{ [Kg-cm]}$$

$$\bar{F}_2 = 100i \text{ [Kg]}$$

$$\bar{M}_0^2 = -2000j - 14000k \text{ [Kg-cm]}$$

$$\bar{F}_3 = 150k \text{ [Kg]}$$

$$\bar{M}_0^3 = 15000i \text{ [Kg-cm]}$$

$$\bar{F}_4 = 200i \text{ [Kg]}$$

$$\bar{M}_0^4 = -20000k \text{ [Kg-cm]}$$

$$\bar{F}_5 = 75k \text{ [Kg]}$$

$$\bar{M}_0^5 = 0 \text{ [Kg-cm]}$$

$$\bar{F}_6 = 125 \text{ [Kg]}$$

$$\bar{M}_0^6 = 0 \text{ [Kg-cm]}$$

2.- Coordenadas vectoriales.

$$\bar{R} = 475i + 225k \text{ [Kg]}$$

$$\bar{M}_0 = 15\ 000i - 1000j - 41000k \text{ [Kg-cm]}$$

3.- Perpendicularidad.

$$\begin{aligned} \bar{R} \cdot \bar{M}_0 &= (475i + 225k) \cdot (15000i - 1000j - 41000k) \\ &= 7\ 125\ 000 + 0 - 9225\ 000 = 2100\ 000. \end{aligned}$$

Por tal motivo el sistema se reduce a un motor.

4.- Momento del motor.

$$\bar{M}_M = (\bar{M}_0 \cdot \bar{e}_R) \bar{e}_R$$

$$\bar{e}_R = \frac{475i + 225k}{\sqrt{225^2 + 50625}} = \frac{475i + 225k}{525.59} = 0.903i + 0.428k$$

$$\bar{M}_0 \cdot \bar{e}_R = 13545 - 17548 = -4003$$

$$\bar{M}_M = -3614i - 1713.28k \text{ [Kg-cm]}$$

5.- Selección del punto de aplicación.

$$P(0, y, z)$$

6.- Cálculo de $\bar{r}_{op} \times \bar{R}$

$$\bar{r}_{op} \times \bar{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & y & z \\ 475 & 0 & 225 \end{vmatrix} = 225yi + 475zj - 475yk$$

7.- Suma e igualación de momentos.

$$\bar{r}_{op} \times \bar{R} + \bar{M}_M = \bar{M}_0$$

$$(225y - 3614)i + 475zj + (-475y - 1713.28)k = 15000i - 1000j - 41000k$$

Así:

$$225y - 3614 = 15000 \quad \rightarrow \quad y = 82.72 \text{ cm}$$

$$475z = 1000 \quad \rightarrow \quad z = 2.105 \text{ cm}$$

8.- Conclusiones.- El sistema se reduce a un motor izquierdo formado por una fuerza $\bar{R} = 475i + 225k$ [Kg] y un momento $\bar{M}_M = -3614i - 1713.28k$ [Kg-cm] cuyo punto de aplicación es $P(0, 82.72, 2.105)$ [cm].



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**CURSO ORGANIZADO DENTRO DEL PROGRAMA DE SUPERACION
ACADEMICA DE LA DIVISION DE CIENCIAS BASICAS.**

CURSO: " ESTATICA "

TEMA: III. - "EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS"

ABRIL-MAYO 1984

III. EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS

OBJETIVO: Dado un problema isostático de equilibrio, plantearlo y resolverlo.

III.1. DESCRIPCIÓN DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN EN UN CUERPO

Las fuerzas pueden ocurrir como una interacción por contacto entre cuerpos o partículas, de acuerdo con la tercera ley de la Mecánica Clásica, o bien, pueden suscitarse a distancia, como lo plantea la ley de la Gravitación Universal.

Asimismo, las fuerzas se distinguen en base a su campo de acción, es decir, se podría hablar de fuerzas concentradas, que se consideran aplicadas en un punto de un cuerpo, y de fuerzas distribuidas, que aparecen aplicadas sobre toda o parte de la superficie de un cuerpo. En rigor, todas las fuerzas son distribuidas, solo que difieren las dimensiones relativas de las superficies sobre las cuales actúan.

Si a un cuerpo se le somete a la acción de fuerzas que lo muevan o tiendan a moverlo, a tal conjunto se le denomina de fuerzas activas, en tanto que aquellas que impiden total o parcialmente el movimiento se llaman fuerzas reactivas.

Supóngase ahora un cuerpo en reposo, sujeto a un sistema activo y otro reactivo de fuerzas. El conjunto total será de fuerzas externas al cuerpo. Ahora bien, como el cuerpo se encuentra en equilibrio, cualquier porción de él aislada como rígida, también estará en equilibrio. Esto significa que, si planteamos inicialmente el DCL (diagrama de cuerpo libre) del cuerpo en estudio, y posteriormente los DCL del mismo cuerpo dividido en dos porciones, en los últimos dos diagramas aparecerán dos fuerzas, una en cada porción, de magnitudes iguales, colineales y directamente opuestas — que constituyen el sistema más simple de fuerzas en equilibrio — de manera tal que mantengan el equilibrio de cada una de las porciones propuestas. Estas dos fuerzas son internas al cuerpo, pero externas para

cada porción de él.

Finalmente, se describirán las fuerzas como constantes, cuando sus características vectoriales permanecen sensiblemente invariantes, en tanto que se llamarán fuerzas variables aquellos que sí modifican tales características en el intervalo de observación de un determinado fenómeno.

III.2. IDENTIFICACION Y ARREGLO DE LAS FUERZAS QUE ACTUAN EN UN CUERPO.

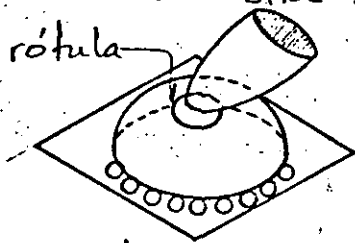
Los problemas de la Mecánica implican siempre interacciones de unos cuerpos con otros. Así, la influencia de la Tierra sobre determinado cuerpo se indica siempre como una fuerza vertical descendente, de acuerdo con la ley de la Gravitación Universal, y se denomina peso del cuerpo, el cual actúa supuestamente aplicado en el centro de gravedad del mismo.

Para el caso del equilibrio, las restricciones que otros cuerpos ejercen sobre el que se analiza son de orden lineal y angular. En razón a que las posiciones y desplazamientos se definen mediante tres y seis coordenadas independientes (longitudes y/o ángulos) para la partícula y para el cuerpo-rígido, respectivamente, se denomina grado de libertad al número de tales coordenadas necesarias para especificar completamente los desplazamientos de cierto cuerpo y que, por ende, es igual al número de restricciones independientes que deben imponerse a tal cuerpo para garantizar su fijación al sistema Tierra. Ese número de restricciones depende de la configuración que asuma el sistema de fuerzas en equilibrio por analizar.

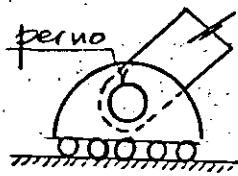
Entre los elementos de sujeción que se utilizan para restringir los cuerpos al equilibrio se cuentan las superficies-lisas y las rugosas, los cables, las barras y los apoyos. De estos últimos, los más comunes utilizados para la sujeción de los cuerpos,

se cuentan:

(a) el apoyo libre o simple, el cual resulta ser incapaz de resistir empujes paralelos al plano de tangencia de las superficies en contacto, así como tampoco giros en torno a eje alguno, por lo que sólo planteará una restricción al desplazamiento lineal en dirección normal al plano de contacto entre éste y el propio apoyo. Se acostumbra indicar el apoyo libre como se muestra a continuación:



En el espacio

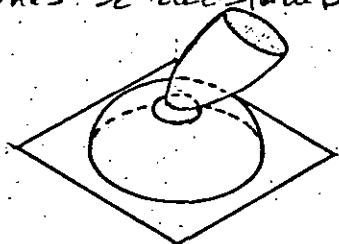


En el plano

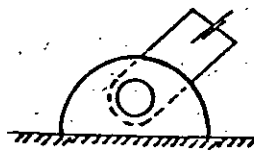


Notación

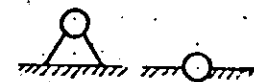
(b) el apoyo articulado o articulación: este tipo de apoyo impide totalmente los desplazamientos lineales del cuerpo en el punto de sustentación, admitiendo, sin embargo, que gire libremente. Si la articulación trabaja en el espacio, se presenta generalmente como una rótula, o bien, como un tornillo o perno si lo hace en el plano. La fuerza reactiva que aparece en este tipo de apoyo habrá que determinarse tanto en magnitud como en dirección. Las articulaciones se acostumbra indicar como sigue:



En el espacio

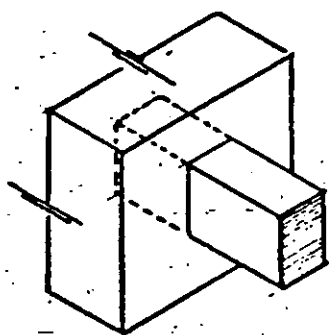


En el plano

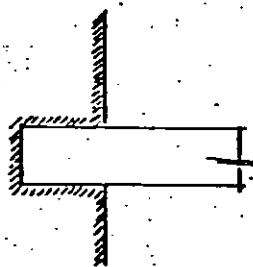


Notación

(c) el apoyo empotrado o empotramiento: este dispositivo de sustentación impide todo desplazamiento, tanto lineal como angular, al cuerpo que sujeta. La representación general del empotramiento es:



En el espacio



En el plano

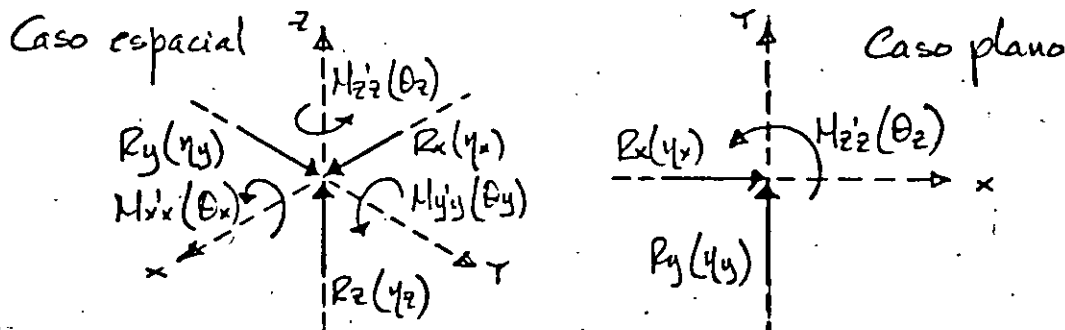


Notación

La tabla siguiente presenta los apoyos antes mencionados, indicando las restricciones que cada tipo plantea al movimiento del cuerpo, así como las incógnitas isostáticas a que dan lugar, tanto en el espacio como en el plano:

TIPO DE APOYO	CASO	RESTRICCIONES AL MOVIMIENTO	COMPONENTES CARTESIANAS DE REACCION	NUMERO DE INCÓGNITAS ESCALARES
Libre o simple	Espacial	η_z	R_z	1
	Plano	η_y	R_y	1
Articulación	Espacial	η_x, η_y, η_z	R_x, R_y, R_z	3
	Plano	η_x, η_y	R_x, R_y	2
Empotramiento	Espacial	$\eta_x, \eta_y, \eta_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$	$R_x, R_y, R_z, M_{\eta_x}, M_{\eta_y}, M_{\eta_z}$	6
	Plano	η_x, η_y, θ_z	R_x, R_y, M_{η_z}	3

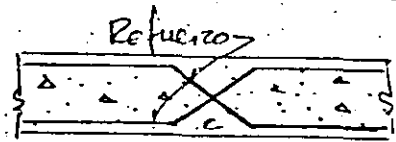
CLAVE DE IDENTIFICACION



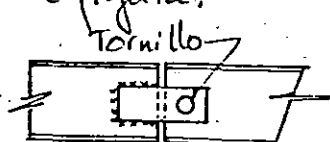
en donde: η_x, η_y, η_z son las componentes de desplazamiento lineal en las direcciones $x'x, y'y$ y $z'z$, respectivamente, $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ son las componentes de desplazamiento angular con respecto a los ejes coordenados,

R_x, R_y, R_z son las componentes de reacción en las direcciones $x'x, y'y$ y $z'z$ y
 $M_{x'}, M_{y'}, M_{z'}$ son las componentes de momento con respecto a los ejes $x'x, y'y$ y $z'z$, respectivamente.

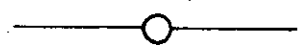
Existen también articulaciones de interconexión entre dos porciones de un mismo cuerpo o estructura, llamadas articulaciones intermedias, las cuales permiten total libertad de giro relativo a las partes que une. Estas uniones se construyen frecuentemente como se indica en la figura:



En concreto reforzado



En acero



Notación

III. 3. FRICCIÓN

Conviene aquí recordar, antes de iniciar el estudio de la fricción, el concepto de diagrama de cuerpo libre (DCL), entendiéndose éste como un esquema aislado representativo de un cuerpo o grupo de cuerpos o porción de un cuerpo, en el que se consignan:

- todas sus dimensiones significativas, y
- todas las fuerzas externas que actúan en él, incluyendo las características conocidas y desconocidas de éstas.

Con respecto a la fricción, Charles Augustin Coulomb (1736-1806) consiguió en su Teoría de las Máquinas Simples:

La causa física de la resistencia opuesta por la fricción al movimiento de superficies que se deslizan una sobre otra, puede ser explicada suponiendo un entrelazamiento de las rugosidades de las superficies que no pueden ser separadas a menos que cedan, se rompan o sean levantadas; o suponiendo que las moléculas de las superficies

en contacto están tan cercanas que desarrollan una cohesión que debe ser vencida para producir el movimiento. Sólo la experimentación puede capacitarnos para determinar la realidad de estas diferentes causas."

De lo anterior se desprende que la fuerza de fricción aparece en todas las superficies que, encontrándose en contacto íntimo, tienden a desplazarse una con respecto a la otra. Esto es, fricción es la resistencia ofrecida al movimiento relativo de una porción de materia con respecto a otra con la cual está en contacto. Se presenta como un conjunto de fuerzas tangenciales a las superficies en contacto.

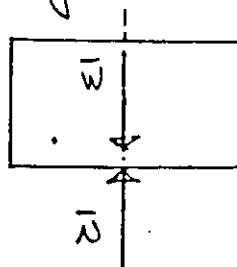
Para cada situación-real en particular, las fuerzas de fricción pueden representar condiciones favorables o desfavorables.

Cuando las superficies en contacto de dos sólidos sin lubricar se encuentran bajo la condición de deslizamiento o de tendencia a deslizarse una sobre otra, se dice que ocurre la fricción en seco. Este fenómeno plantea dos rangos de comportamiento de los sólidos en contacto, a saber:

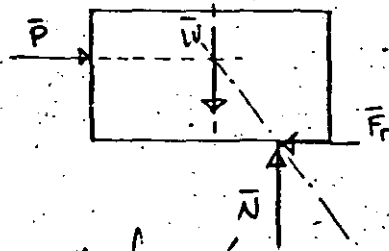
- (a) la fuerza de fricción impide que se produzca el movimiento entre las dos superficies en contacto;
- (b) la fuerza de fricción se opone al movimiento relativo, ya existente, de las superficies en contacto.

En el primer rango, la fuerza de fricción se denomina estática, y para el segundo, se llama fuerza de fricción cinética o dinámica.

La fuerza de fricción depende de la fuerza normal a las superficies y que tiende a conservarlas en contacto, así como de la rugosidad de ellas. Considérese entonces un cuerpo de peso W , apoyado sobre una superficie horizontal rugosa:

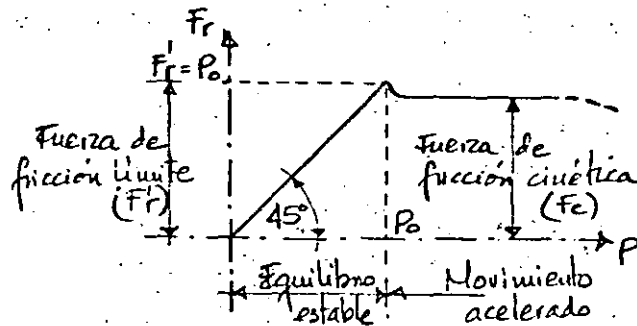


Si al cuerpo anterior se le solicita con una acción externa P que incrementa su valor conforme pasa el tiempo, es decir: $P = P(t)$



donde: F_r = fuerza de fricción.

La generación y desarrollo de la fuerza de fricción se ilustra en la gráfica a continuación:



En ella se observa que:

- (a) si P es nula, F_r también es nula;
- (b) si, a partir del valor nulo, P se incrementa, la fuerza de fricción observada, bajo la condición de reposo del cuerpo, el mismo incremento de tamaño que P ;
- (c) si se continúa incrementando el valor de P , también seguirá aumentando el valor de F_r , hasta llegar al máximo valor que pueda adquirir debido a la naturaleza de las superficies y a las fuerzas normales que las mantienen en contacto. A este valor de la fuerza de fricción se le denomina fuerza de fricción límite F_r' ;
- (d) si se sigue incrementando la fuerza P por encima del valor P_0 , se inicia el movimiento relativo entre las superficies en contacto y la fuerza de fricción no solamente no aumenta, sino que sufre una brusca disminución debida al propio movimiento. En esta situación:

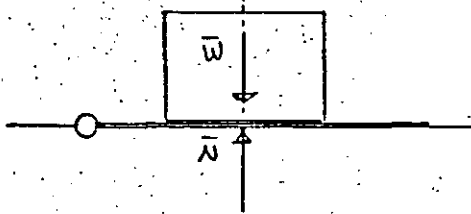
$F_r = F_c$ = fuerza de fricción cinética.

La fuerza de fricción cinética se consideraba constante en los

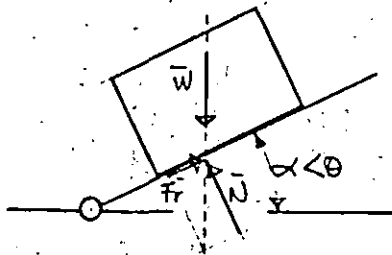
estudios hechos por Coulomb, pero en experimentos posteriores se observó que para velocidades relativas grandes ($v > 3 \frac{m}{s}$) disminuye su valor.

En cuanto a la fuerza de fricción límite, y a fin de determinar su valor para cierto par de materiales en contacto, considérese un plano horizontal y otro abatible, sobre el cual se coloca un cuerpo. En tanto el cuerpo se halle en reposo, se puede establecer:

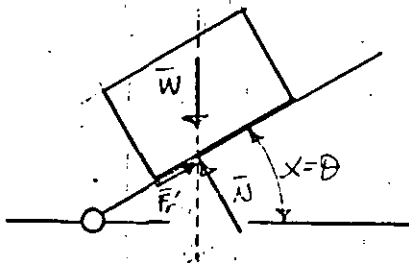
(a) si $\alpha = 0$: $N = W$, y no existirán fuerzas horizontales, por lo que no se genera fuerza de fricción alguna;



(b) si $\alpha > 0$: $N = W \cos \alpha$; $F_r = W \sin \alpha$



(c) si $\alpha = \theta$: $N = W \cos \theta$; $F_r = W \sin \theta$, donde θ corresponde al máximo valor que puede



tomar α sin que se produzca el movimiento relativo entre las superficies en contacto, esto es, para el instante de equilibrio crítico: $F_r = F_r'$

$$y: \frac{F_r'}{N} = \tan \theta$$

donde, por definición: $\mu = \tan \theta$

en que

$\mu =$ coeficiente de fricción estática,

El ángulo definido para esta condición crítica de equilibrio se llama ángulo de reposo entre los materiales ensayados.

Para determinar el coeficiente de fricción estática entre dos materiales se toma el promedio de los valores que asume la tangente

trigonométrica del ángulo de reposo, obtenidos después de realizar un número razonable de ensayos como el recién descrito. De ahí se obtiene un rango de validez para μ , como se consigna a continuación:

<u>Materiales ensayados</u>	<u>μ</u>
Tierra sobre tierra	0,25 - 1,00
Hule sobre concreto	0,60 - 0,90
Metal sobre piedra	0,30 - 0,70
Piedra sobre piedra	0,40 - 0,65
Metal sobre madera	0,20 - 0,60
Metal sobre cuero	0,30 - 0,60
Madera sobre madera	0,25 - 0,50
Madera sobre cuero	0,25 - 0,50
Metal sobre metal	0,15 - 0,60

Después de una amplia experimentación para inferir algunos principios aplicables al fenómeno de la fricción en seco, Coulomb estableció en 1781 las leyes de la fricción, las cuales fueron ratificadas por A.J. Morin en sus experimentos realizados en 1831. Sus enunciados son:

1ª ley: La fuerza de fricción máxima que puede generarse es proporcional a la fuerza normal:

$$F_r \approx N$$

2ª ley: La fuerza de fricción máxima que puede generarse es independiente del tamaño del área de contacto entre las superficies consideradas.

3ª ley: La fuerza de fricción límite es mayor que la fuerza de fricción cinética.

El valor de la fuerza de fricción cinética es función de la fuerza normal y del coeficiente de fricción cinético (μ_c), estableciéndose entonces que:

$$F_c = \mu_c N,$$

donde:

$$\mu_c < \mu$$

en un orden de variación, para rapidez relativamente bajas, del 10 al 20%.

4ª ley: La fuerza de fricción cinética es independiente de la rapidez relativa de deslizamiento de los cuerpos que se encuentran en contacto.

Finalmente, cuando un sólido o un fluido se mueve en el seno de un fluido, la resistencia que se presenta a ese movimiento se denomina fricción viscosa.



Cuando al contacto entre dos sólidos que deslizan se interpone una película de fluido, se dice que las superficies se encuentran lubricadas. En este caso, la fuerza de fricción implícita observa un comportamiento distinto al de la fricción en seco. Al respecto, Thurston estableció, como consecuencia de sus observaciones a tal fenómeno, que la fuerza de fricción viscosa es:

(a) independiente de la presión entre los cuerpos en contacto;
(b) directamente proporcional al área de las superficies de rozamiento;

(c) proporcional al cuadrado de la rapidez relativa de deslizamiento para velocidades moderadas y altas, y aproximadamente proporcional a la rapidez para bajas velocidades;

(d) función de la rugosidad de los sólidos cuando la capa lubricante es delgada, decreciendo la dependencia conforme aumenta el espesor de la capa, y

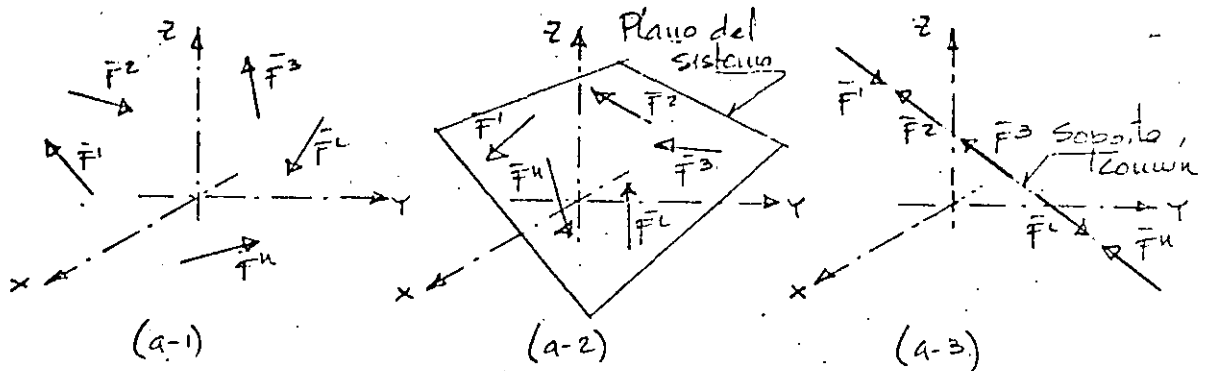
(e) proporcional a la densidad del fluido y relacionada, de alguna manera, a su viscosidad.

III.4. DISPOSICIONES PARTICULARES DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS

Los sistemas de fuerzas pueden clasificarse de diversas formas, entre ellas:

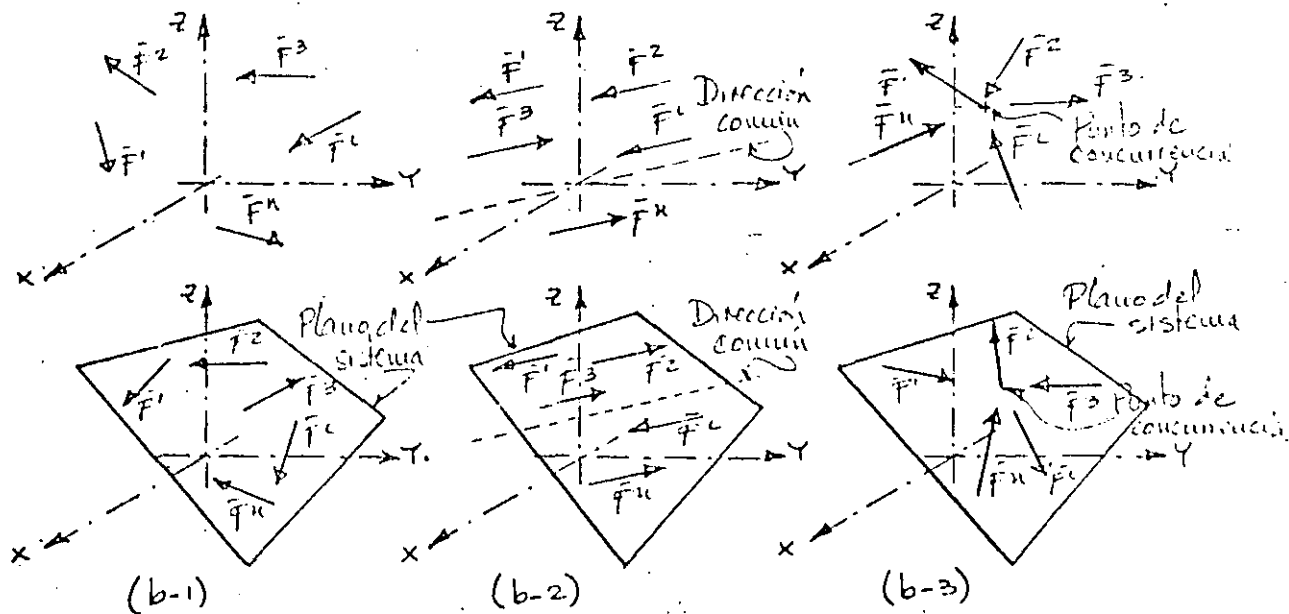
(a) atendiendo al número de dimensiones en que se desarrolla un sistema dado, éste será:

- (a-1) tridimensional o espacial;
- (a-2) bidimensional o plano,
- (a-3) unidimensional o colineal



(b) atendiendo a las ubicaciones y direcciones relativas de las fuerzas que constituyen un sistema de fuerzas, éste podrá ser:

- (b-1) de componentes generales o cualesquiera,
- (b-2) de componentes paralelas, y
- (b-3) de componentes concurrentes.



De la combinación de las alternativas (a) y (b) recién enunciadas, se distinguen siete configuraciones distintas para los sistemas de fuerzas, según se consigna en el cuadro sinóptico a continuación:

SISTEMAS DE FUERZAS	Tridimensionales o espaciales	-	de componentes generales	①
		-	de componentes paralelas	②
		-	de componentes concurrentes	③
	Bidimensionales o planos	-	de componentes generales	④
		-	de componentes paralelas	⑤
		-	de componentes concurrentes	⑥
	Unidimensionales o colineales			⑦

Del cuadro anterior, las configuraciones de los tipos ①, ②, ④ y ⑤ serán las que se identifiquen en problemas del cuerpo rígido, en tanto que las ③, ⑥ y ⑦ corresponden a la Estática de la partícula.

III.5. CARACTERIZACION DE LOS PROBLEMAS DE EQUILIBRIO

Se dice que un sistema de fuerzas está en equilibrio, cuando y sólo cuando el cuerpo o sistema que solicita no sufre modificación alguna en su estado de movimiento original. Esto es, el cuerpo afectado no se acelera.

Desde el punto de vista analítico, se establece el equilibrio como un sistema irreducible de fuerzas tal que sus coordenadas vectoriales son:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}^i = 0 \quad (\text{III.5.1})$$

$$\text{y } \bar{R}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{F}_0^i = 0 \quad (\text{III.5.2})$$

Las ecuaciones (III.5.1) y (III.5.2) son las vectoriales para el caso general del equilibrio, mismas que, bajo un marco cartesiano de

referencia, equivalen al conjunto general de seis ecuaciones escalares del equilibrio, a saber:

$$\sum_{i=1}^n F_x^i = 0 \quad \dots \quad (\text{III.5.3})$$

$$\sum_{i=1}^n F_y^i = 0 \quad \dots \quad (\text{III.5.4})$$

$$\sum_{i=1}^n F_z^i = 0 \quad \dots \quad (\text{III.5.5})$$

$$\sum_{i=1}^n H_{y'x} F^i = 0 \quad \dots \quad (\text{III.5.6})$$

$$\sum_{i=1}^n H_{y'y} F^i = 0 \quad \dots \quad (\text{III.5.7})$$

$$\sum_{i=1}^n H_{z'z} F^i = 0 \quad \dots \quad (\text{III.5.8})$$

Esto es, las ecuaciones de la condición necesaria y suficiente de equilibrio implican un conjunto de ecuaciones escalares independientes, cuyo máximo número es seis, de acuerdo con la disposición de los componentes del sistema. Atendiendo a ello, se identifican tres tipos de problemas de equilibrio en razón a su grado de hiperestaticidad (G), siendo éste igual a la diferencia del número de incógnitas (I) que presenta el problema en estudio, menos el número de ecuaciones escalares independientes requeridas para su solución.

$$\text{Así, si} \quad G = I - E \quad (\text{III.5.9})$$

y:

- $G > 0$, el problema es hiperestático,
- $G = 0$, el problema es isostático, y
- $G < 0$, el problema es hipostático o inestable.

Para resolver problemas de equilibrio, es conveniente observar una secuencia de acción:

(a) hacerse consciente del problema en particular, profusamente enunciándolo,

(b) plantear los diagramas de cuerpo libre pertinentes,

- (c) identificar en los diagramas anteriores, tanto los elementos conocidos como las incógnitas,
- (d) establecer el grado de hiperestaticidad del problema,
- (e) si el problema es isostático, plantear las ecuaciones escalares de solución que provee la Estática para el efecto, y
- (f) finalmente, resolver el sistema de ecuaciones propuesto.

III.6. EQUILIBRIO DEL CUERPO RIGIDO

SISTEMAS DE FUERZAS DE COMPONENTES CUS LESQUIERS

Bajo estas configuraciones, para el caso tridimensional resultan aplicables las seis ecuaciones escalares cartesianas planteadas en el capítulo anterior;

$$\sum_{l=1}^n F_x^l = 0 \quad (\text{III.6.1})$$

$$\sum_{l=1}^n F_y^l = 0 \quad (\text{III.6.2})$$

$$\sum_{l=1}^n F_z^l = 0 \quad (\text{III.6.3})$$

$$\sum_{l=1}^n M_{yx}^l F^l = 0 \quad (\text{III.6.4})$$

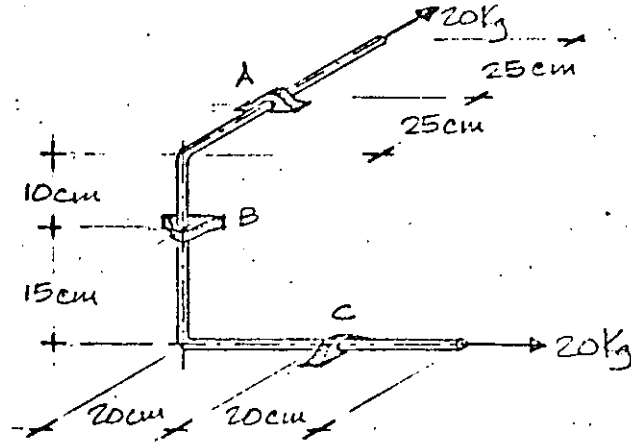
$$\sum_{l=1}^n M_{yz}^l F^l = 0 \quad (\text{III.6.5})$$

$$\sum_{l=1}^n M_{zx}^l F^l = 0 \quad (\text{III.6.6})$$

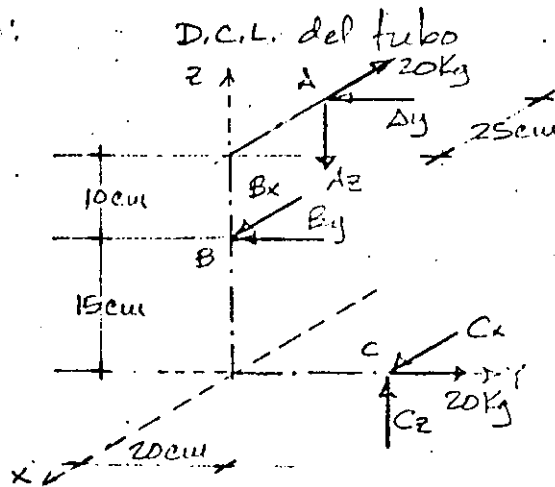
Esto es, un problema de equilibrio, planteado a base de un sistema de fuerzas generales espaciales es isostático cuando y sólo cuando presente seis incógnitas. Los dos casos más frecuentes de incógnitas a determinar para estos sistemas son:

- (a) las magnitudes de seis fuerzas de posiciones y direcciones dadas, y
- (b) la magnitud, dirección y posición de una sola fuerza.

EJEMPLO (III.6.1) En un tubo rígido hueco que tiene dos codos en ángulo recto, se ha insertado un eje flexible, al cual se aplica una tracción de 20 Kg, como se observa en la figura. El conjunto está sostenido por tres anillos (usos de apoyo) en A, B y C, cuyas reacciones son normales al tubo. Determinémoslos.



SOLUCION:



Del D.C.L: $E=6$; $I=6 (\Delta z, \Delta y, B_x, B_y, C_x, C_z)$

por tanto: $G=I-E=0$, y el problema es isostático.

Las ecuaciones de solución:

$$\sum F_x = 0: \quad 0 = -20 + B_x + C_x \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0: \quad 0 = -\Delta y - B_y + 20 \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0: \quad 0 = -\Delta z + C_z \quad (3)$$

$$\sum M_{x'} f = 0: \quad 0 = 25\Delta y + 15B_y + 20C_z \quad (4)$$

$$\sum M_{y'} f = 0: \quad 0 = 15B_x - 20 \cdot 25 - 25\Delta z \quad (5)$$

$$\sum M_{z'} f = 0: \quad 0 = 25\Delta y - 20C_x \quad (6)$$

$$\text{De (1):} \quad B_x = 20 - C_x \quad (7)$$

$$\text{De (7) en (5):} \quad A_z = -8 - 0.6 C_x \quad (8)$$

$$\text{De (6):} \quad A_y = 0.8 C_x \quad (9)$$

$$\text{De (9) en (2):} \quad B_y = 20 - 0.8 C_x \quad (10)$$

$$\text{De (4) y (10) en (4):} \quad C_z = -15 - 0.4 C_x \quad (11)$$

$$\text{De (8) y (11) en (3):} \quad C_x = 35 \text{ Kg}$$

$$\text{En (7):} \quad B_x = -15 \text{ Kg}$$

$$\text{En (8):} \quad A_z = -29 \text{ Kg}$$

$$\text{En (9):} \quad A_y = 28 \text{ Kg}$$

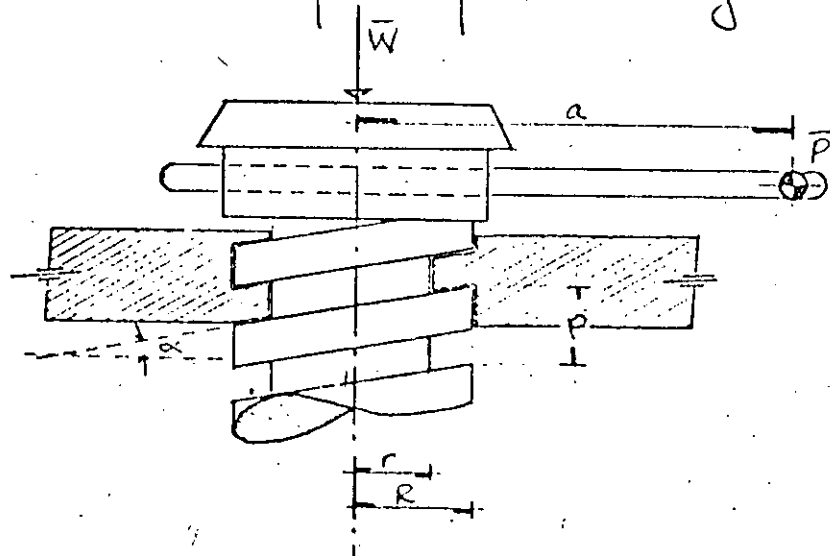
$$\text{En (10):} \quad B_y = -8 \text{ Kg}$$

$$\text{En (11):} \quad C_z = -29 \text{ Kg}$$

Especial interés revisten, dentro del equilibrio de los sistemas espaciales de componentes generales, los casos del tornillo y de los discos.

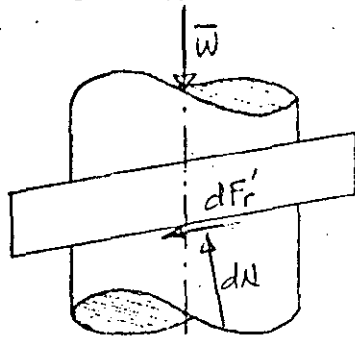
El tornillo es un dispositivo común para subir o bajar cargas pesadas, en el que juega un papel preponderante la fuerza de fricción. En el caso del tornillo de rosca cuadrada se plantean esencialmente dos incógnitas a resolver:

- el valor mínimo de la fuerza horizontal P necesaria para elevar cierta carga W , y
- el menor valor de P para bajar dicha carga.



En la figura: W = carga que se desea bajar o subir,
 p = paso del tornillo,
 α = ángulo de paso del tornillo,
 R = radio exterior de la rosca, y
 r = radio interior de la rosca.

Para plantear el problema, considérese que la rosca del tornillo es un plano inclinado enrollado alrededor de un cilindro, entonces:



$\rho = \frac{1}{2}(R+r)$; es el radio medio del tornillo y

$\tan \alpha = \frac{p}{2\pi \rho}$; de acuerdo con el triángulo correspondiente al desarrollo de un paso del tornillo.

Tomando en cuenta que $\mu = \tan \theta$, y a partir de las condiciones analíticas de equilibrio, para el caso en que la carga quiera ser elevada:

$$P = \frac{W\rho}{a} \tan(\theta + \alpha),$$

expresión que permite valorar la fuerza mínima para provocar el ascenso del tornillo. Análogamente, para iniciar el movimiento descendente, se obtiene que la fuerza a aplicar deberá tener un valor mínimo de:

$$P = \frac{W\rho}{a} \tan(\theta - \alpha),$$

en cuyo caso, el sentido de dFr' en la última figura será el opuesto.

Pasado ahora al estudio de sistemas coplanos de componentes cualesquiera, conviene ubicar el marco de referencia de manera tal que el plano del sistema coincida con uno de los cartesianos, por ejemplo, el plano XOY.

En esa situación, las ecuaciones escalares aplicables para el equilibrio isostático resultan:

$$\sum_{i=1}^n F_x^L = 0 \quad (\text{III. 6.7})$$

$$\sum_{i=1}^n F_y^L = 0 \quad (\text{III. 6.8})$$

$$\sum_{i=1}^n H_{z_2}^L F^L = 0 \quad (\text{III. 6.9})$$

Cuando se trabaja en el plano, no existe diferencia entre las representaciones matemáticas del momento de una fuerza con respecto a un punto, y el momento de la misma medido su tomo a un eje normal al plano del sistema que pase por dicho punto; mas aún; se acostumbra decir que los momentos involucrados se calculan con respecto a dicho punto. En esas condiciones, de la (III. 6.9):

$$\sum_{i=1}^n H_{z_2}^L F^L = \sum_{i=1}^n M_O F^L = 0 \quad (\text{III. 6.10})$$

La frecuencia con que se presentan problemas de equilibrio bidimensional obliga a establecer, en beneficio del aparato de cálculo, otras representaciones de la equivalencia del sistema de fuerzas con el sistema de fuerzas nulo. En el caso resultan convenientes dos grupos de condiciones adicionales, formadas como sigue:

- (a) por una ecuación de proyección y dos de momentos, y
- (b) por tres ecuaciones de momentos.

Sean un sistema de fuerzas coplano general en equilibrio, un marco de referencia XOY en su plano, y un punto A de éste, distinto del origen. El sistema de fuerzas propuesto es equivalente al sistema de fuerzas nulo, luego:

$$\sum_{i=1}^n F_x^L = 0 \quad (\text{III. 6.11})$$

$$\sum_{i=1}^n M_O F^L = 0 \quad (\text{III. 6.12})$$

$$\sum_{i=1}^n H_{A} F^L = 0 \quad (\text{III. 6.13})$$

Si sólo se verifica (III. 6.11), o el sistema de fuerzas está en equilibrio, o se reduce a un par, o tiene fuerza resultante

perpendicular a $x'x$.

Si exclusivamente se verifica (III.6.12), o el sistema de fuerzas está en equilibrio, o se reduce a una sola fuerza que pasa por el origen.

Si únicamente se cumple (III.6.13), o el sistema de fuerzas está en equilibrio, o se reduce a una sola fuerza que pasa por A .

En resumen, aisladamente ninguna de las condiciones anotadas como necesarias es suficiente para concluir el equilibrio del sistema propuesto.

Ahora bien, formando conjuntos de dos condiciones, si se cumplen simultáneamente las (III.6.11) y (III.6.12), o bien, las (III.6.11) y (III.6.13):

(a) el sistema de fuerzas está en equilibrio, o
(b) tiene como resultante una fuerza normal a $x'x$, y que pasa por el centro de momentos respectivo.

Si con ciertas simultáneamente las (III.6.12) y (III.6.13):

(a) el sistema está en equilibrio, o bien,
(b) existe una fuerza resultante de línea de acción definida por los centros de momentos elegidos.

Hasta aquí se concluye que ni aisladamente, ni por parejas, resultan ser suficientes las ecuaciones escalares en estudio.

Finalmente, si se verifican simultáneamente (III.6.11), (III.6.12) y (III.6.13):

(a) el sistema se reduce al equilibrio, o
(b) el sistema tiene como equivalente más simple a una fuerza que, siendo normal a $x'x$, contiene a los centros de momentos implícitos.

Para descartar esta posible ambigüedad, será necesario condicionar la selección de los centros de momentos, de manera que no queden alineados perpendicularmente al eje de proyección seleccionado.

De manera similar se procede al análisis del equilibrio de los sistemas de fuerzas coplano generales por vía de la alternativa de tres ecuaciones escalares de momentos. Así, si los puntos A, B

y C se eligen como centros de momentos, y puesto que el sistema debe estar en equilibrio:

$$\sum_{i=1}^n M_A F^L = 0 \quad (\text{III.6.14})$$

$$\sum_{i=1}^n M_B F^L = 0 \quad (\text{III.6.15})$$

$$\sum_{i=1}^n M_C F^L = 0 \quad (\text{III.6.16})$$

Si se cumple sólo una de las tres expresiones anteriores:

- (a) el sistema está en equilibrio, o bien,
- (b) existe una fuerza resultante que pasa por el centro de momentos implícito.

De la verificación simultánea y exclusiva de dos de las tres ecuaciones de momentos planteadas, se concluirá que:

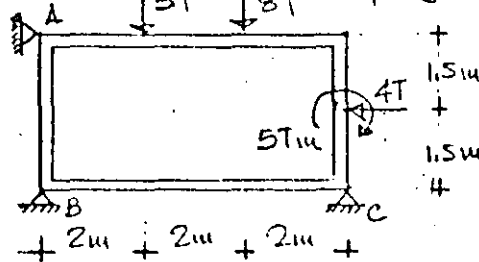
- (a) el sistema de fuerzas está en equilibrio, o
- (b) el sistema se reduce a una fuerza cuyo soporte contiene a los dos puntos seleccionados como centros de momentos.

Finalmente, si se cumplen simultáneamente (III.6.14), (III.6.15) y (III.6.16):

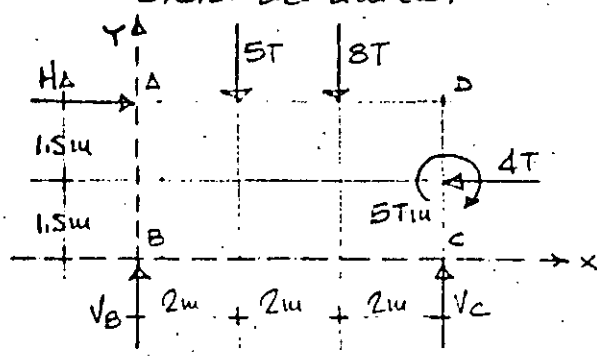
- (a) el sistema en estudio es equivalente al sistema de fuerzas nulo, o
- (b) el sistema tiene como resultante una fuerza que aloja en su soporte a los tres centros de momentos involucrados.

Es decir que la terna de ecuaciones de momentos propuesta garantizará el equilibrio de un sistema de fuerzas coplano general si y sólo si, los puntos, elegidos como centros de momentos, no se encuentren alineados.

EJEMPLO (III.6.2): El anillo rígido indicado en la figura está simplemente apoyado en A , B y C . Calcule las reacciones.



SOLUCION: D.C.L. del anillo:



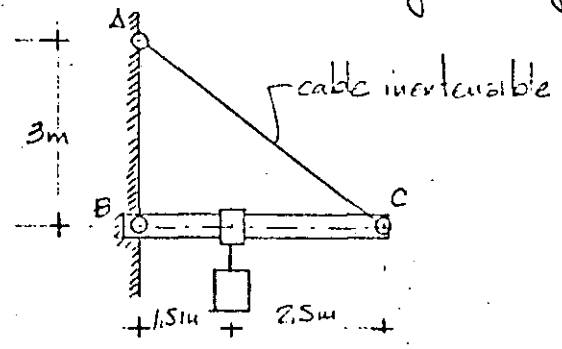
Del D.C.L: $E=3$; $I=3(H_A, V_B, V_C) \therefore G=I-E=0$
 y el problema es isostático.

Las ecuaciones de solución:

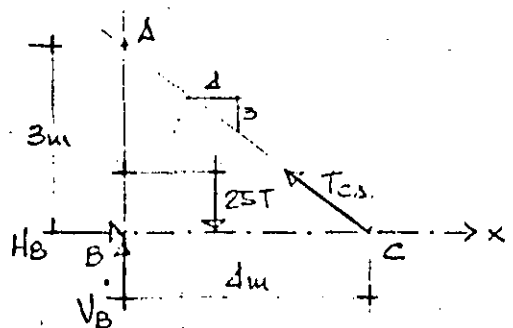
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &: 0 = H_A - 4 & \therefore H_A = 4T \rightarrow \\ \sum M_{DF} = 0 &: 0 = 6V_B - 16 - 20 + 6 + 5 & \therefore V_B = 4.1\bar{6}T \uparrow \\ \sum M_{\Delta F} = 0 &: 0 = -6V_C + 10 + 32 + 6 + 5 & \therefore V_C = 8.8\bar{3}T \uparrow \end{aligned}$$

EJEMPLO (III.6.3): La mensula de la figura soporta una guía viajera que transporta un cuerpo cuyo peso es de 25T.

Calcule la tensión en el cable y la magnitud y dirección de la reacción en B.



SOLUCION: D.C.L. de la barra BC



Del D.C.L: $E=3$; $I=3(H_B, V_B, T_{cs}) \therefore G=0$, y el problema es

isostático.

Las ecuaciones de solución:

$$\sum M_A F = 0: \quad 0 = 3H_B - 37.5$$

$$\therefore H_B = 12.5 T \rightarrow$$

$$\sum M_B F = 0: \quad 0 = 4 \times \frac{3}{5} T_{CA} - 37.5$$

$$\therefore T_{CA} = 15.625 T (\uparrow)$$

$$\sum M_C F = 0: \quad 0 = -4V_B + 62.5$$

$$\therefore V_B = 15.625 T \uparrow$$

Luego, la reacción en B es de magnitud:

$$R_B = \sqrt{(12.5)^2 + (15.625)^2} = 20.0097 T$$

y de dirección:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{15.625}{12.5} = 51^\circ 20'$$

III.7. EQUILIBRIO DEL CUERPO RIGIDO

SISTEMAS DE FUERZAS DE COMPONENTES PARALELAS

Un sistema de fuerzas de componentes paralelas es aquel en el que los soportes de todas ellas resultan ser paralelos a una dirección común, aunque ubicados en posiciones distintas.

Entonces, observando esta disposición particular, conviene asociar un marco de referencia tal que uno de sus ejes coordenados coincida con la dirección común de las componentes del sistema, por ejemplo el z' . En esas condiciones, las ecuaciones escalares del equilibrio para el caso tridimensional son:

$$\sum_{i=1}^n F_z^L = 0 \quad (\text{III.7.1})$$

$$\sum_{i=1}^n M_{y'} F^L = 0 \quad (\text{III.7.2})$$

$$\sum_{i=1}^n M_{x'} F^L = 0 \quad (\text{III.7.3})$$

Por lo tanto, un problema de equilibrio en términos de un sistema de fuerzas paralelas y tridimensional es isostático si contiene tres incógnitas. Entre los casos frecuentes están:

- magnitud y posición de una fuerza, y
- las magnitudes de tres fuerzas de posiciones dadas.

Cabe otra combinación alternativa de ecuaciones de solución para el equilibrio de estos sistemas de fuerzas, a saber, tres ecuaciones de momentos, esto es:

$$\sum_{l=1}^n M_{v_l} F^l = 0 \quad (\text{III.7.4})$$

$$\sum_{l=1}^n M_{y_l} F^l = 0 \quad (\text{III.7.5})$$

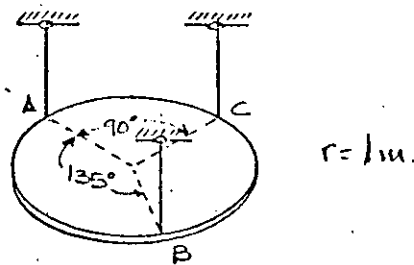
$$\sum_{l=1}^n M_{u_l} F^l = 0 \quad (\text{III.7.6})$$

De la verificación exclusiva de cada expresión anterior se concluye que:

- (a) el sistema está en equilibrio, o bien
- (b) existe una fuerza resultante coplanar con el eje de momentos seleccionado.

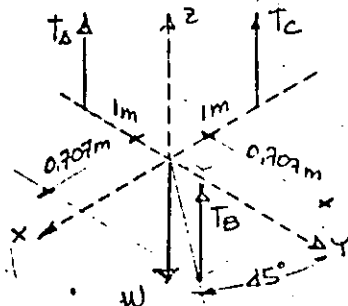
Esto es, las (III.7.4), (III.7.5) y (III.7.6) serán un juego alternativo de solución, si y sólo si, los ejes de momentos elegidos no forman un solo plano.

EJEMPLO (III.7.1): La plataforma circular de la figura pesa $1.5 \frac{\text{T}}{\text{m}^2}$ y está suspendida de tres cables. Calcule la tensión en cada uno de ellos.



SOLUCION:

D.C.L. de la plataforma.



Del D.C.L.: $E=3$; $I=3(T_A, T_B, T_C)$ $\therefore G=0$, y el problema es isostático.

El peso de la plataforma: $W = w \pi r^2 = 4.7124 T \downarrow$

Las ecuaciones de solución:

$$\sum F_z = 0: \quad 0 = T_A + T_B + T_C - 4.7124 \quad (1)$$

$$\sum M_{x'x} F = 0: \quad 0 = 0.707 T_B - T_A \quad (2)$$

$$\sum M_{y'y} F = 0: \quad 0 = -0.707 T_B + T_C \quad (3)$$

De (2) y (3):

$$T_A = T_C = 0.707 T_B \quad (4)$$

De (4) en (1):

$$T_B = 1.952 T \uparrow \quad \text{y} \quad T_A = T_C = 1.380 T \uparrow$$

Si es además el caso en que todas las componentes son paralelas y están contenidas en un solo plano, conviene entonces seleccionar un marco cartesiano tal que uno de sus planos coordenados coincida con el plano del sistema de fuerzas, por ejemplo el xOy , donde uno de los ejes implícitos, vgr. el $y'y'$, sea de la misma dirección común de las componentes. De ahí, las ecuaciones escalares aplicables para problemas de equilibrio resultan:

$$\sum_{k=1}^n F_y^k = 0 \quad (\text{III.7.7})$$

$$\sum_{k=1}^n M_O F^k = 0 \quad (\text{III.7.8})$$

Osea que, para el caso de sistemas de fuerzas coplano paralelas en equilibrio serán admisibles solo dos incógnitas para la solución isostática.

Es factible plantear otra pareja de ecuaciones escalares alternativas para tratar estos problemas. Así, eligiendo dos puntos de momentos A y B en el plano del sistema, y puesto que éste se encuentra en equilibrio, necesariamente:

$$\sum_{k=1}^n M_A F^k = 0 \quad (\text{III.7.9})$$

$$\sum_{k=1}^n M_B F^k = 0 \quad (\text{III.7.10})$$

Recíprocamente, si se cumpliera aisladamente cada una de las (III.7.9) y (III.7.10):

(a) el sistema de fuerzas está en equilibrio, o

(b) existe una fuerza resultante cuyo soporte contiene al centro de momentos involucrado.

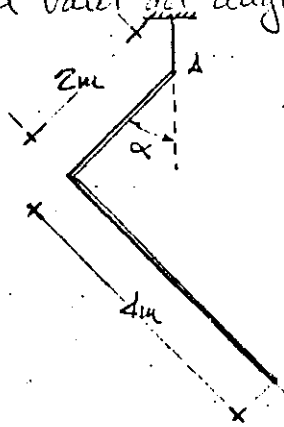
Ahora bien, si (III.7.9) y (III.7.10) son simultáneamente ciertos:

(a) el sistema planteado está en equilibrio, o bien

(b) el sistema se reduce a una fuerza, cuyo soporte aloja a los dos centros de momentos elegidos, y en tal caso la dirección \overline{AB} es paralela a la dirección común de todas las componentes del sistema.

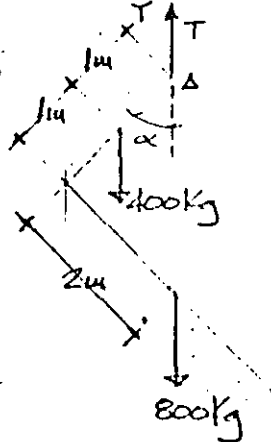
Para evitar esta ambigüedad y garantizar que (III.7.9) y (III.7.10) son necesarias y suficientes para determinar el equilibrio de sistemas coplano paralelos, bastará con evitar que la dirección de la recta que una a los centros de momentos elegidos coincida con la orientación común de las componentes del sistema.

EJEMPLO (III.7.2): La barra de la figura pesa $200 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$, y está suspendida en A por medio de un cable. Encuentre la tensión en éste y el valor del ángulo α de equilibrio.



SOLUCION:

D.C.L. de la barra:



Del D.C.L. $E=2$; $I=2(T, \alpha)$ $\therefore G=0$

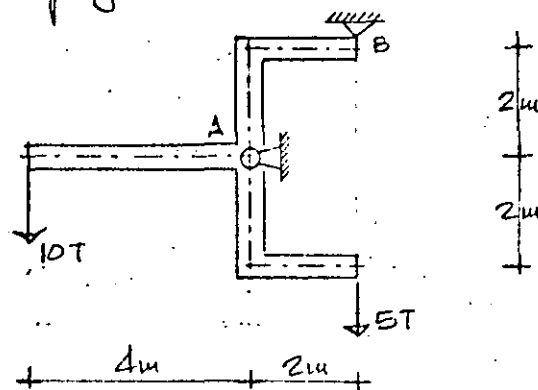
Las ecuaciones de solución:

$$\sum F_y = 0: \quad 0 = T - 400 - 800 \quad \therefore T = 1200 \text{ Kg (t)}$$

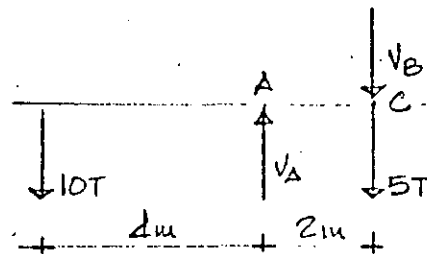
$$\sum M_{\Delta} F = 0: \quad 0 = 400 \times 1 \operatorname{sen} \alpha - 800 \times 2 (\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha)$$

$$5 \operatorname{sen} \alpha = 4 \cos \alpha \quad \therefore \alpha = \tan^{-1} \frac{4}{5} = 38^{\circ} 39'$$

EJEMPLO (III, 7.3): Obtenga las reacciones que se suscitan en los apoyos de la estructura indicada en la figura.



SOLUCION: D.C.L. de la estructura.



Del D.C.L. $E=2$; $I=2(V_A, V_B)$ $\therefore G=0$

Las ecuaciones de solución:

$$\sum M_{\Delta} F = 0: \quad 0 = 10 - 10 - 2V_B \quad \therefore V_B = 15T \downarrow$$

$$\sum M_{C} F = 0: \quad 0 = 60 - 2V_A \quad \therefore V_A = 30T \uparrow$$

III.8. EQUILIBRIO DEL PUNTO SISTEMAS DE FUERZAS CONCURRENTES

Para el estudio del equilibrio de estos sistemas resulta pertinente ubicar el marco cartesiano de referencia de manera que su origen coincida con el punto de concurrencia de las fuerzas que conforman tales sistemas. Esta particular selección del marco simplifica las ecuaciones escalares de equilibrio para el caso de sistemas concurrentes tridimensionales a:

$$\sum_{i=1}^n F_x^i = 0 \quad (\text{III.8.1})$$

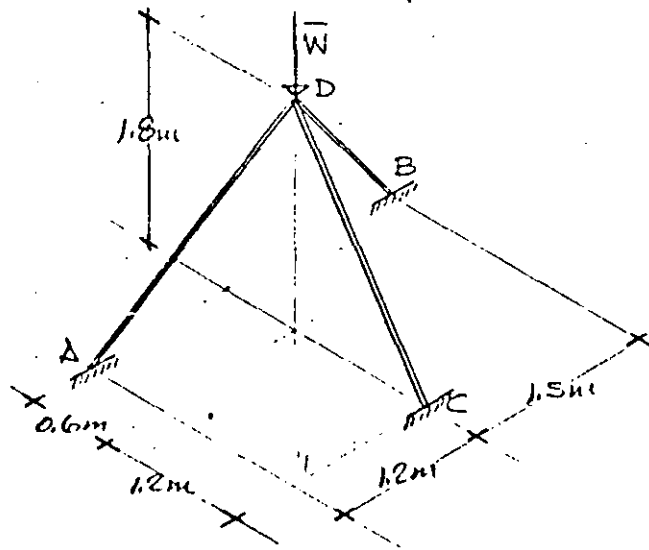
$$\sum_{i=1}^n F_y^i = 0 \quad (\text{III.8.2})$$

$$\sum_{i=1}^n F_z^i = 0 \quad (\text{III.8.3})$$

Es decir que este tipo de configuración de fuerzas planteará problemas isostáticos de equilibrio cuando y sólo cuando contengan tres incógnitas. Frecuentemente se presentan:

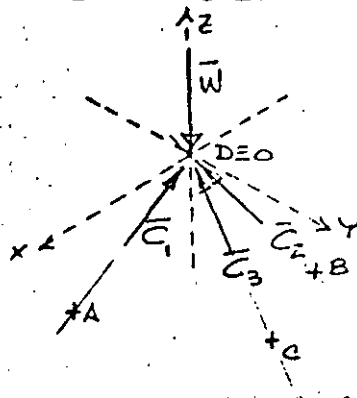
- magnitud y dirección de una sola fuerza, o
- magnitud de tres fuerzas de direcciones dadas.

EJEMPLO (III.8.1); Determine la máxima carga vertical segura W que puede sostener el trípode de la figura, sin que exceda de 1200 kg la carga compresiva en cualquiera de sus partes.



SOLUCION:

D.C.L. del cuerpo D.



Del D.C.L: $E=3$; $I=3(C_1, C_2, C_3)$ $\therefore G=0$

Las direcciones de las fuerzas en las barras:

$$\begin{aligned} \vec{AD} &= -1.2\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j} + 1.8\mathbf{k} \text{ [m]}; & \vec{e}_1 &= \frac{\vec{AD}}{|\vec{AD}|} = -0.5345\mathbf{i} + 0.2673\mathbf{j} + 0.8018\mathbf{k} \\ \vec{BD} &= +1.5\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j} + 1.8\mathbf{k} \text{ [m]}; & \vec{e}_2 &= \frac{\vec{BD}}{|\vec{BD}|} = +0.6202\mathbf{i} + 0.2481\mathbf{j} + 0.7442\mathbf{k} \\ \vec{CD} &= -1.2\mathbf{j} + 1.8\mathbf{k} \text{ [m]}; & \vec{e}_3 &= \frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|} = -0.5547\mathbf{j} + 0.8321\mathbf{k} \end{aligned}$$

Las ecuaciones de solución:

$$\sum F_x = 0: \quad 0 = -0.5345C_1 + 0.6202C_2 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0: \quad 0 = 0.2673C_1 + 0.2481C_2 - 0.5547C_3 \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0: \quad 0 = 0.8018C_1 + 0.7442C_2 + 0.8321C_3 - W \quad (3)$$

$$\text{De (1):} \quad C_2 = 0.8618C_1 \quad (4)$$

$$\text{De (4) en (2):} \quad C_3 = 0.8673C_1 \quad (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{De (1) y (5) en (3):} \\ \text{obten, de (4):} \\ \text{y de (5):} \end{array} \right\} \begin{array}{l} W = 2.1649 C_1 \\ W = 2.5120 C_2 \\ W = 2.4961 C_3 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{por lo tanto, para } C_1 = 1200 \text{ kg} \\ \\ \\ \end{array} \quad W = 2597.82 \text{ kg.}$$

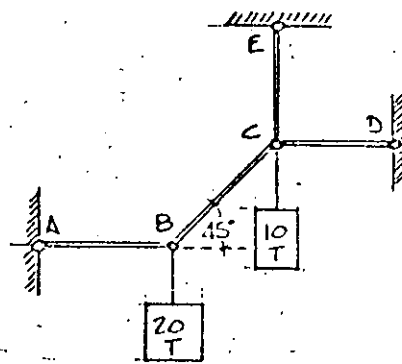
Ahora bien, si el sistema de fuerzas en estudio, además de ser de componentes concurrentes es también coplanar, conviene hacer coincidir el plano del sistema con uno de los coordenados, por ejemplo el xoy. En estas condiciones se contará exclusivamente con dos ecuaciones escalares independientes de equilibrio, éstas serán:

$$\sum_{i=1}^n F_x^L = 0 \quad (\text{III.8.4})$$

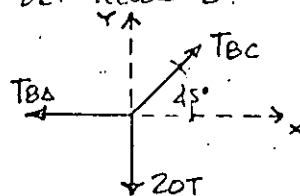
$$\sum_{i=1}^n F_y^L = 0 \quad (\text{III.8.5})$$

O sea, un sistema de fuerzas concurrentes en el plano y en equilibrio será isostático, si y sólo si para su solución plantea exclusivamente dos incógnitas.

EJEMPLO (III. 8, 2): El dispositivo de la figura está formado por cuatro barras de ojo y dos cables, de éstos cuelgan dos cuerpos que pesan $20T$ y $10T$, tal como se indica. Calcule las magnitudes de las fuerzas axiales en las barras.



SOLUCIÓN: D.C.L del nudo B:



Del D.C.L: $E=2$; $I=2(T_{BA}, T_{BC})$; $G=0$

Las ecuaciones de solución:

$$\sum F_x = 0: \quad 0 = -T_{BA} + 0,707 T_{BC} \quad (1)$$

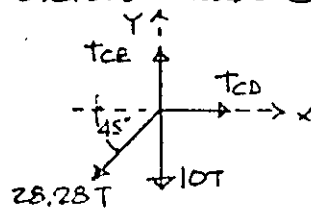
$$\sum F_y = 0: \quad 0 = 0,707 T_{BC} - 20$$

$$\therefore T_{BC} = 28,28T(t)$$

En (1):

$$T_{BA} = 20T(t)$$

D.C.L. del nudo C



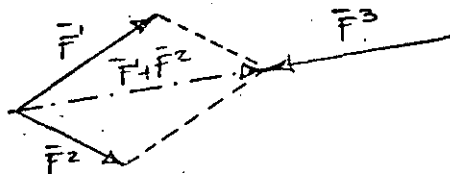
Del D.C.L: $E=2$; $I=2(T_{CD}, T_{CE})$; $G=0$

Las ecuaciones de solución:

$$\sum F_x = 0: \quad 0 = -28,28 \times 0,707 + T_{CD} \quad \therefore T_{CD} = 20T(t)$$

$$\sum F_y = 0: \quad 0 = -28,28 \times 0,707 - 10 + T_{CE} \quad \therefore T_{CE} = 30T(t)$$

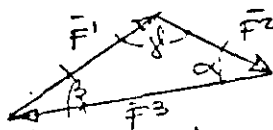
Entre los sistemas de fuerzas coplano concurrentes, aquellas de tres componentes y que están en equilibrio son objeto de una peculiar propiedad geométrica. En efecto, suponiendo un sistema plano de tres fuerzas no paralelas, y en equilibrio, si se componen dos de ellas mediante la regla del paralelogramo, se obtendrá la resultante de dichas fuerzas que, debido al principio general del equilibrio, es de igual magnitud, colineal y opuesta a la tercera componente, como se ilustra a continuación:



Esta propiedad permitió a Bernardo Lamy (1640-1715) postular el siguiente teorema:

"Si tres fuerzas coplanas no paralelas están en equilibrio, son necesariamente concurrentes".

Esto es, para tales conjuntos de fuerzas, su polígono dinámico será cerrado y triangular:



Del polígono anterior, entre magnitudes:

$$\frac{|F^1|}{\text{sen} \alpha} = \frac{|F^2|}{\text{sen} \beta} = \frac{|F^3|}{\text{sen} \gamma}$$

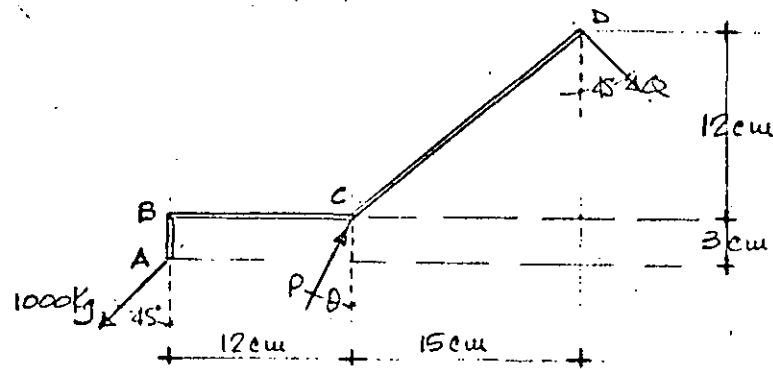
La propiedad geométrica involucrada en el teorema anterior permite introducir una incógnita más en los problemas de equilibrio de tres fuerzas concurrentes, incógnita que puede hallarse por la vía geométrica usando la propiedad de Lamy, o bien, por el uso de la teoría del equilibrio de los sistemas de fuerzas plano generales, descomponiendo una de las fuerzas que intervienen, en dos.

Puesto que la incógnita que puede introducirse en esta clase de sistemas es siempre de solución geométrica, se puede afirmar en el caso general que, un problema de equilibrio planteado a base de un sistema de fuerzas coplano concurrentes es isostático, si y sólo si presenta dos incógnitas, mismas que pueden ser:

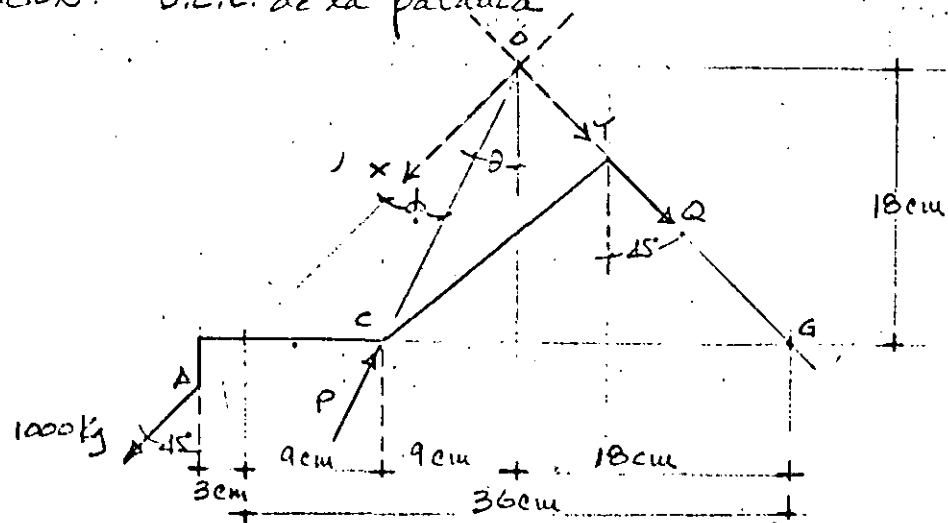
- (a) magnitud y dirección de una fuerza;
- (b) magnitudes de dos fuerzas de direcciones conocidas,
- (c) direcciones de dos fuerzas de magnitudes dadas, o
- (d) magnitud de una fuerza de dirección conocida y dirección de otra de magnitud dada.

Debe marcarse aquí que los casos (c) y (d) recién enunciados no son siempre posibles.

EJEMPLO (III, 8, 3): Encuentre las magnitudes de P , Q y el valor del ángulo θ , si la palanca de la figura está en equilibrio.



SOLUCION: D.C.L. de la palanca



Puesto que las tres fuerzas necesariamente son concurrentes:

$$\tan \theta = \frac{9}{18} \quad \therefore \theta = 26^{\circ} 34'$$

por lo tanto:

$$\phi = 45^{\circ} - \theta = 18^{\circ} 26'$$

Del D.C.L: $E=2$; $I=2(P, Q)$ $\therefore G=0$

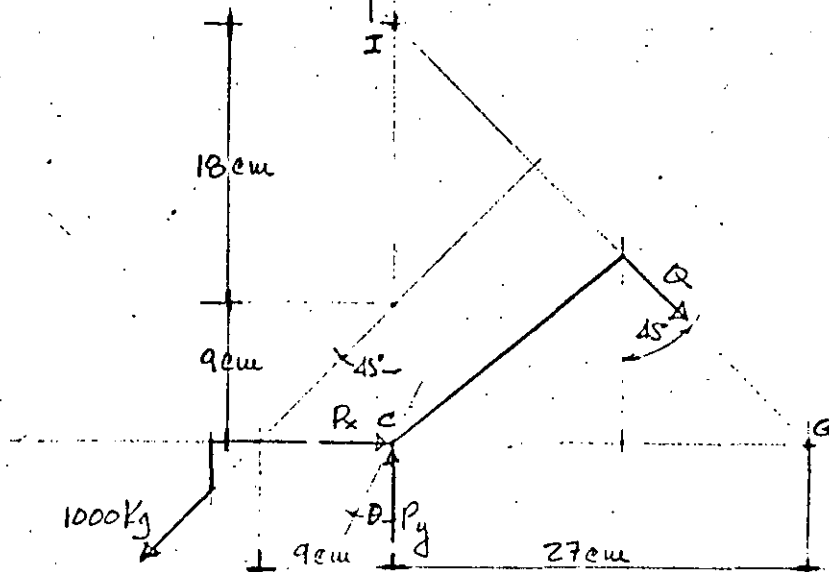
Las ecuaciones de solución:

$$\Sigma F_x = 0: \quad 0 = 1000 - P \cos 18^{\circ} 26' \quad \therefore P = 1054,03 \text{ Kg}$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad 0 = Q - P \sin 18^{\circ} 26' \quad \therefore Q = 333,33 \text{ Kg}$$

EJEMPLO (III.8.4): Resuelva, usando un método alternativo, el problema del ejemplo anterior.

Solución: D.C.L. de la palanca:



Del D.C.L: $E=3$; $I=3(P_x, P_y, \theta)$ $\therefore G=0$

Las ecuaciones de solución:

$$\Sigma M_c F = 0: \quad 0 = (1000 \cos 45^{\circ}) \times 9 - (Q \cos 45^{\circ}) \times 27 \quad \therefore Q = 333,33 \text{ Kg}$$

$$\Sigma M_G F = 0: \quad 0 = (1000 \sin 45^{\circ}) \times 36 - 27 P_y \quad \therefore P_y = 942,80 \text{ Kg}$$

$$\Sigma M_I F = 0: \quad 0 = 27 P_x - (1000 \sin 45^{\circ}) \times 18 \quad \therefore P_x = 471,40 \text{ Kg}$$

De ahí:

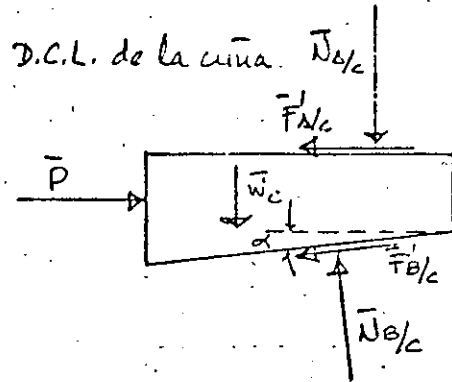
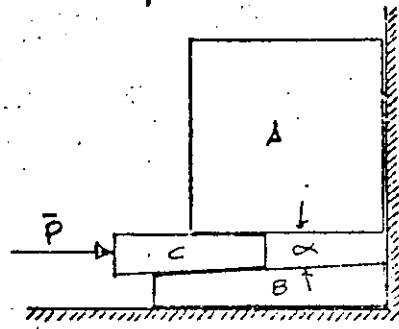
$$P = 100 \sqrt{85,5572 + 22,2218} = 1054,03 \text{ Kg}$$

y

$$\theta = \tan^{-1} \frac{471,40}{942,80} = 26^{\circ} 34'$$

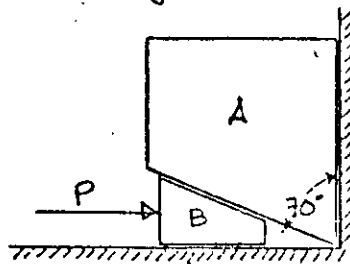
Entre los casos de aplicación de los sistemas de fuerzas coplano concurrentes en equilibrio destacan la fricción en cuñas, bandas y rodamiento.

Las cuñas son dispositivos simples utilizados para levantar o afianzar cargas pesadas.

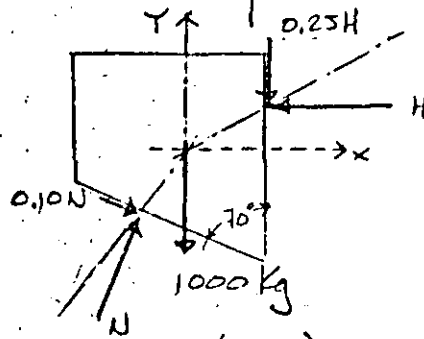


Estas cargas pueden moverse aplicando a la cuña una fuerza considerablemente menor que el peso de la carga. Además, debido a la fricción entre las superficies en contacto, una cuña de forma apropiada permanecerá en su lugar después de haber sido forzada bajo la carga. Las cuñas, por consiguiente, se usan ventajosamente para hacer ajustes menores en la posición de piezas pesadas de maquinaria.

EJEMPLO (III, 8, 5): El cuerpo A pesa 1000 Kg y la cuña B 50 Kg. Con ésta se intenta levantar aquél, aplicando una fuerza horizontal de magnitud P. Sabiendo que los coeficientes de fricción estática entre el cuerpo A y la pared, entre la cuña y el cuerpo A, y entre la cuña y el piso son, respectivamente, 0,25, 0,10 y 0,35. Calcule la magnitud mínima de la fuerza horizontal a aplicar.



SOLUCION: D.C.L. del cuerpo A:



Del D.C.L: $E=2$; $I=2(N, H) \therefore G=0$

Las ecuaciones de solución:

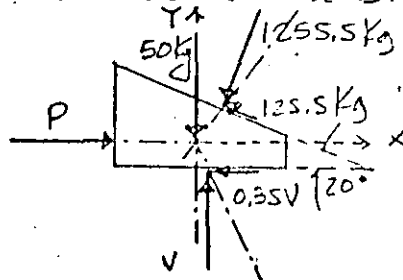
$$\sum F_x = 0: \quad 0 = 0,10N \cos 20^\circ + N \operatorname{sen} 20^\circ - H \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0: \quad 0 = -0,10N \operatorname{sen} 20^\circ + N \cos 20^\circ - 0,25H - 1000 \quad (2)$$

$$\text{De (1):} \quad H = 0,4360N \quad (3)$$

$$\text{De (3) en (2):} \quad N = 1255,5 \text{ Kg}$$

D.C.L. de la cinta B:



Del D.C.L: $E=2$; $I=2(V, P) \therefore G=0$

Las ecuaciones de solución:

$$\sum F_x = 0: \quad 0 = P - 1255,5 \operatorname{sen} 20^\circ - 125,55 \cos 20^\circ - 0,35V \quad (4)$$

$$\sum F_y = 0: \quad 0 = V - 1255,5 \cos 20^\circ + 125,55 \operatorname{sen} 20^\circ - 50 \quad (5)$$

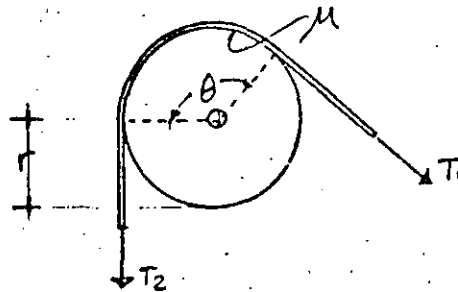
$$\therefore V = 1186,8 \text{ Kg}$$

En (4):

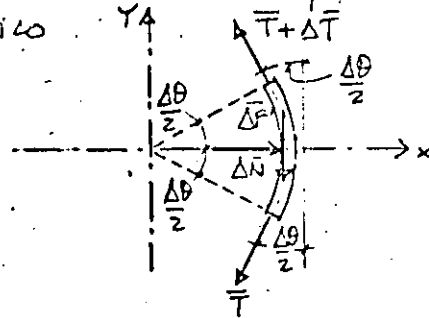
$$P = 962,8 \text{ Kg}$$

Pasando ahora al caso de las bandas, cuando la fricción en una polea o un rodillo sobre el que actúe una banda o correa es mínima, conlleva a que las tensiones en ambos extremos de la banda sean sensiblemente iguales; sin embargo, la existencia de fuerzas friccionadas significativas causa una diferencia entre los valores de ambas

tensiones. Para determinar la relación entre las tensiones de una banda con fricción, considérese la situación ilustrada, en la que la banda está a punto de deslizarse hacia la izquierda, es decir, $T_2 > T_1$:



En esas condiciones, aislando una porción de la banda en la condición de equilibrio crítico:



De acuerdo con la primera ley de fricción en seco:

$$\Delta F' = \mu \Delta N$$

entre $\Delta \theta$, y tomando límites cuando $\Delta \theta \rightarrow 0$:

$$\frac{dF'}{d\theta} = \mu \frac{dN}{d\theta} \quad (1)$$

Las ecuaciones de solución:

$$\sum F_x = 0: \quad 0 = \Delta N - (T + \Delta T) \operatorname{sen} \frac{\Delta \theta}{2} - T \operatorname{sen} \frac{\Delta \theta}{2} \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0: \quad 0 = (T + \Delta T) \operatorname{cos} \frac{\Delta \theta}{2} - T \operatorname{cos} \frac{\Delta \theta}{2} - \Delta F' \quad (3)$$

De (2):

$$\Delta N = (2T + \Delta T) \operatorname{sen} \frac{\Delta \theta}{2}$$

entre $\Delta \theta$:

$$\frac{\Delta N}{\Delta \theta} = (2T + \Delta T) \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta \theta}{2}}{\frac{\Delta \theta}{2}} \quad (4)$$

si $\Delta \theta \rightarrow 0$:

$$\operatorname{sen} \frac{\Delta \theta}{2} \doteq \frac{\Delta \theta}{2}$$

y:

$$\Delta T \rightarrow 0$$

por lo que, en (4):

$$\frac{dN}{d\theta} = T \quad (5)$$

$$\text{De (3):} \quad \Delta T \cos \frac{\Delta \theta}{2} = \Delta F'$$

$$\text{entre } \Delta \theta: \quad \frac{\Delta T}{\Delta \theta} \cos \frac{\Delta \theta}{2} = \frac{\Delta F'}{\Delta \theta} \quad (6)$$

$$\text{si } \Delta \theta \rightarrow 0: \quad \cos \frac{\Delta \theta}{2} \rightarrow 1$$

$$\text{de ahí; en (6):} \quad \frac{dT}{d\theta} = \frac{dF'}{d\theta} \quad (7)$$

$$\text{De (5) y (7) en (1):} \quad \frac{dT}{d\theta} = \mu T$$

$$\text{anagando:} \quad \frac{dT}{T} = \mu d\theta$$

$$\text{integrando:} \quad \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \mu \int_0^{\theta} d\theta$$

$$\text{de ahí:} \quad T_2 = T_1 e^{\mu \theta}$$

EJEMPLO (III. 8.6): Un cabo de un buque se ha pasado dando cuatro vueltas en una bita de un muelle. Si el extremo libre del cable se jala con 40 Kg, calcule la magnitud del tirón que debe dar el buque para que el cable esté a punto de deslizarse en la bita. Considere que el coeficiente de fricción límite vale 0,32.

$$\text{Solucion: Como } \theta = 4 \times 2\pi = 8\pi;$$

$$\mu = 0,32$$

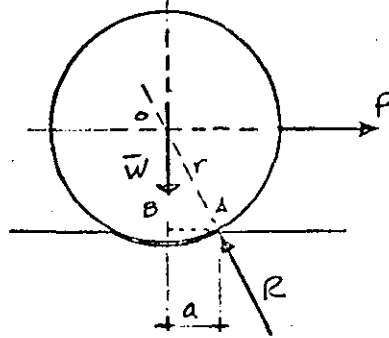
$$T_1 = 40 \text{ Kg}$$

$$T_2 = 40 e^{0,32 \times 8\pi}$$

en fin:

$$T_2 = 124\,412 \text{ Kg}$$

La resistencia al rodamiento es un caso particular de tres fuerzas coplano concurrentes en equilibrio. Para su análisis, considérese un rodillo apoyado sobre una superficie que se deforma a consecuencia del peso del propio rodillo. Este fenómeno se consigna en la figura, donde se identifica la fuerza P con que el cilindro está a punto de librar la depresión, pasando por encima del punto A .



Cuando el rodillo está a punto de rodar hacia la derecha:

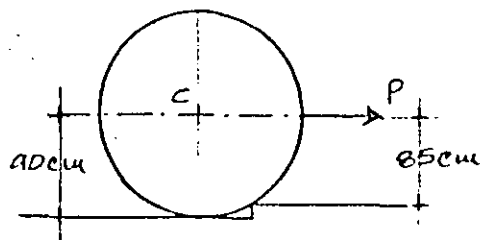
$$\sum M_{\Delta F} = 0: \quad 0 = W |\overline{AB}| - P |\overline{OB}|$$

Como: $|\overline{AB}| = a$ y $|\overline{OB}| = r$

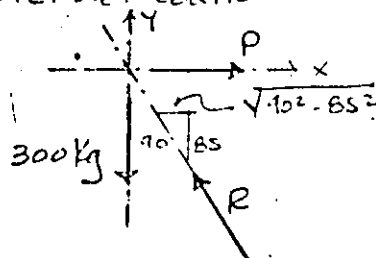
entonces: $P = W \frac{a}{r}$

donde: $P =$ resistencia al rodamiento
 $a =$ coeficiente de rodamiento.

EJEMPLO (III.B.7): El cilindro de la figura es rígido y pesa 300 kg. Calcule la magnitud de la fuerza P , de suerte tal que esté a punto de subir el obstáculo.



SOLUCION: D.C.L. del centro



Del D.C.L: $E=2$; $I=2(P,R)$ $\therefore G=0$

Las ecuaciones de solución:

$$\sum F_x = 0: \quad 0 = P - R \times 0.3287 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0: \quad 0 = R \times 0.9444 - 300$$

$$\therefore R = 317.65 \text{ Kg}$$

$$\text{En (1):} \quad P = 104.41 \text{ Kg}$$

III.9. EQUILIBRIO DEL PUNTO

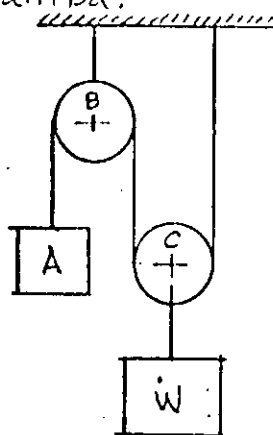
SISTEMAS DE FUERZAS COLINEALES

Para tratar el equilibrio de sistemas de fuerzas colineales conviene referirlo a un marco cartesiano tal que el soporte común de sus componentes coincida con uno de los ejes coordenados, por ejemplo, el $x'x$. En tal entendido, la ecuación escalar del equilibrio es:

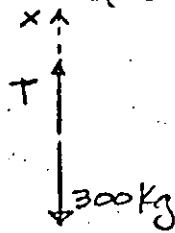
$$\sum_{i=1}^n F_x^i = 0 \quad (\text{IV.9.1})$$

Por tanto, un problema de este tipo será isostático si y solo si involucra una incógnita. Generalmente la incógnita que se presenta en estos casos es la magnitud de una fuerza.

EJEMPLO (III.9.1): El cuerpo A pesa 300Kg. Si todas las superficies en contacto son lisas y los cables inextensibles y sin peso, halle el peso del cuerpo W, de suerte que esté a punto de moverse hacia arriba.



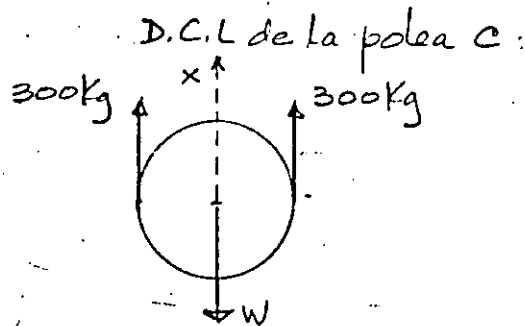
SOLUCION: D.C.L. del cuerpo A:



Del DCL: $E=1$; $I=1(T)$ $\therefore G=0$

La ecuación de solución:

$$\sum F_x = 0 : 0 = T - 300 \quad \therefore T = 300 \text{ Kg}$$



Del DCL (por simetría): $E=1$; $I=1(W)$ $\therefore G=0$

La ecuación de solución:

$$\sum F_x = 0 : 0 = -W + 600 \quad \therefore W = 600 \text{ Kg}$$

III.10. CÁLCULO DE REACCIONES EN ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

Reviste especial importancia, dentro del estudio isostático del equilibrio, la determinación de los componentes de reacción en los apoyos de estructuras simples. Para ello, después de haber discutido en los capítulos antecedentes las distintas configuraciones de sistemas de fuerzas coplanas en equilibrio, y habiendo planteado combinaciones alternativas para las ecuaciones de solución en cada caso, es factible proceder al cálculo de tales reacciones en forma expedita.

Conviene establecer en este punto las definiciones elementales de algunas estructuras isostáticas:

(a) Las vigas son piezas prismáticas de eje centroidal recto y con un cierto plano de simetría.

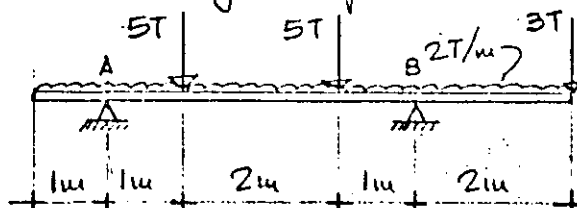
(b) Las vigas Gerber, comunes en estructuras de puentes, son piezas prismáticas de eje recto apoyadas externamente y provistas de articulaciones intermedias. Para ser resueltas vía Estática del Cuerpo Rígido, deberán prescribirse tantas articulaciones intermedias como el grado de hiperestaticidad externo, y éstas serán distribuidas de manera tal que no se forme mecanismo de falla. Puesto que es sabido de antemano que las articulaciones son incapaces de soportar momento alguno, la solución de estas vigas se lleva a cabo a base de varios DCL, limitados por articulaciones o por puntos extremos de las propias vigas.

(c) Los arcos de tres articulaciones (marcos y pórticos) son estructuras cuyo eje centroidal es una curva plana, unida al sistema Tierra mediante dos articulaciones de apoyo, y dotadas además de una articulación intermedia. Para su solución, es suficiente considerar en forma aislada y en equilibrio las porciones de la estructura separadas por la articulación intermedia.

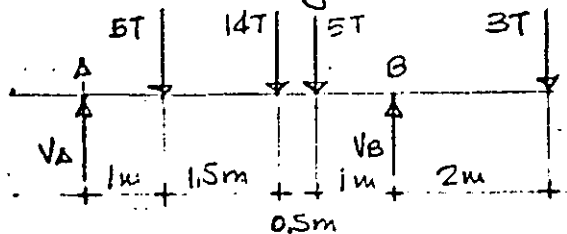
(d) Los anillos triarticulados son estructuras cuyo eje centroidal es una curva plana cerrada, dotadas de tres articulaciones intermedias cuando se hallan apoyadas al sistema Tierra, de manera que pueden ser resueltas externamente con el uso de la Estática.

(e) Las armaduras planas son, en línea general, estructuras trianguladas, cuya estabilidad de ello depende.

EJEMPLO (III.10.1) Determine las componentes de reacción en los apoyos de la viga simple ilustrada:



SOLUCION: D.C.L. de la viga.



Ecuaciones de solución:

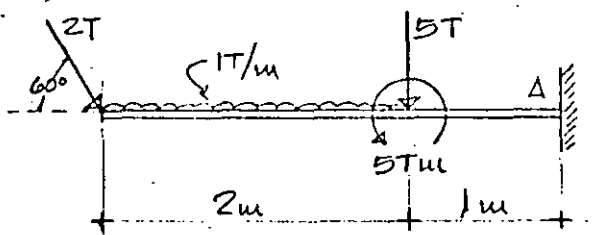
$$\sum M_{\Delta} F = 0: 0 = 5 \times 1 + 14 \times 2.5 + 5 \times 3 - 4V_B + 3 \times 6$$

$$V_B = 18.25T \uparrow$$

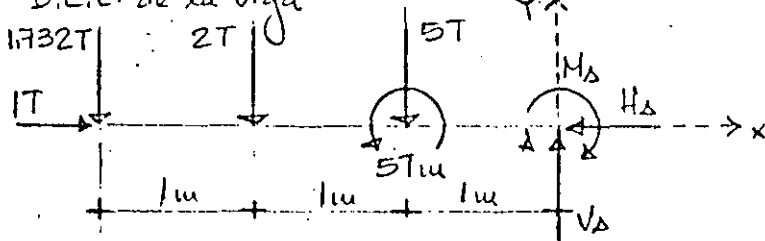
$$\sum M_B F = 0: 0 = 4V_A - 5 \times 3 - 14 \times 1.5 - 5 \times 1 + 3 \times 2$$

$$V_A = 8.75T \uparrow$$

EJEMPLO (III.10.2): Idem (III.10.1)



SOLUCION: D.C.L. de la viga



Ecuaciones de solución:

$$\sum F_x = 0: 0 = -1 + H_A$$

$$\therefore H_A = 1T \leftarrow$$

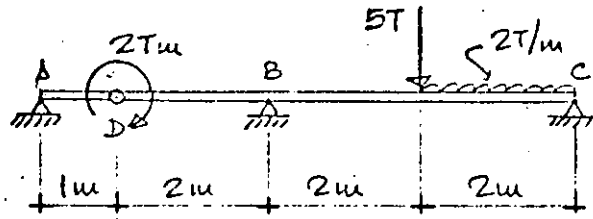
$$\sum F_y = 0: 0 = -1.732 - 2 - 5 + V_A$$

$$\therefore V_A = 8.732T \uparrow$$

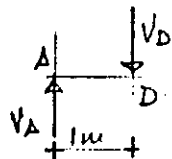
$$\sum M_{\Delta} F = 0: 0 = 3 \times 1.732 + 2 \times 2 + 5 + 5 \times 1 - M_A$$

$$\therefore M_A = 19.196Tm \curvearrowright$$

EJEMPLO (III.10.3): Determine las reacciones en los apoyos de la viga Gerber que se consigna, considerando que el par concentrado obra inmediatamente a lo derecha de la articulación intermedia D.



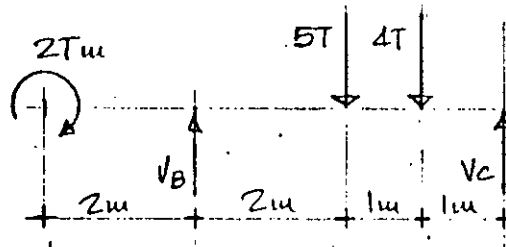
SOLUCION: D.C.L. del tramo \overline{AD} :



Ecuaciones de solución:

$$\begin{aligned} \sum M_D F = 0 & \quad \therefore V_D = 0 \\ \sum M_A F = 0 & \quad \therefore V_A = 0 \end{aligned}$$

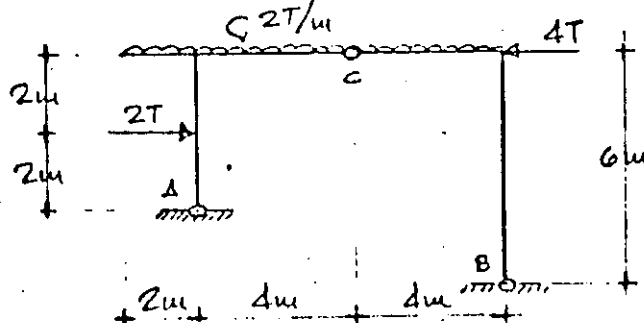
D.C.L. del tramo \overline{BC} :



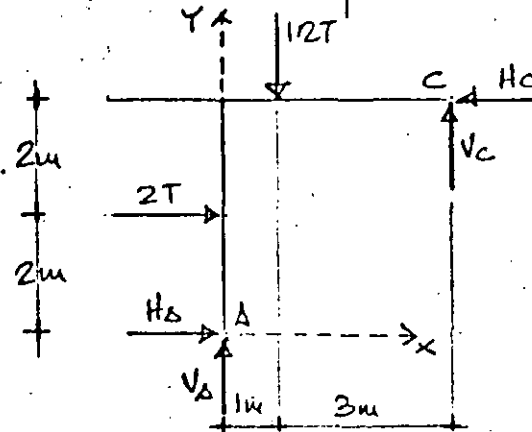
Ecuaciones de solución:

$$\begin{aligned} \sum M_B F = 0: \quad 0 &= 2 + 5 \times 2 + 4 \times 3 - 4V_C & \therefore V_C = 6T \uparrow \\ \sum M_C F = 0: \quad 0 &= 2 + 4V_B - 5 \times 2 - 4 \times 1 & \therefore V_B = 3T \uparrow \end{aligned}$$

EJEMPLO (III.10.4): Determine las componentes de reacción en los apoyos del marco de tres articulaciones que se ilustra:



SOLUCION: D.C.L. de la porción \overline{AC} :



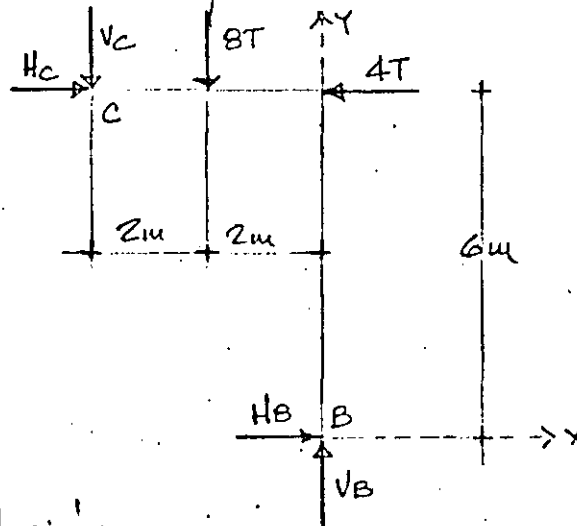
Ecuaciones de solución:

$$\sum M_{\Delta T} = 0: 0 = 4 + 12 - 4V_C - 4H_C \quad (1)$$

$$\sum M_{CF} = 0: 0 = -4H_A + 4V_A - 4 - 36 \quad (2)$$

$$\sum F_x = 0: 0 = H_A + 2 - H_C \quad (3)$$

D.C.L. de la porción \overline{CD} :



Ecuaciones de solución:

$$\sum M_{CF} = 0: 0 = 16 - 6H_B - 4V_B \quad (4)$$

$$\sum M_{BF} = 0: 0 = 6H_C - 4V_C - 16 - 24 \quad (5)$$

$$\sum F_x = 0: 0 = H_C - 4 + H_B \quad (6)$$

De (4) y (5): $H_C = 5,60T$

De (1) : $V_C = -1,60T$

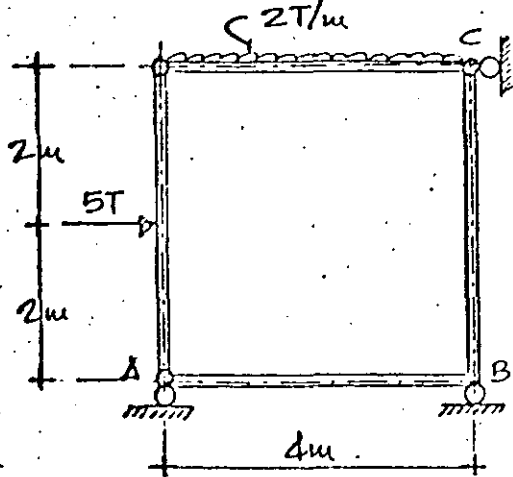
De (3) : $H_A = 3,60T \rightarrow$

De (2) : $V_A = 13,60T \uparrow$

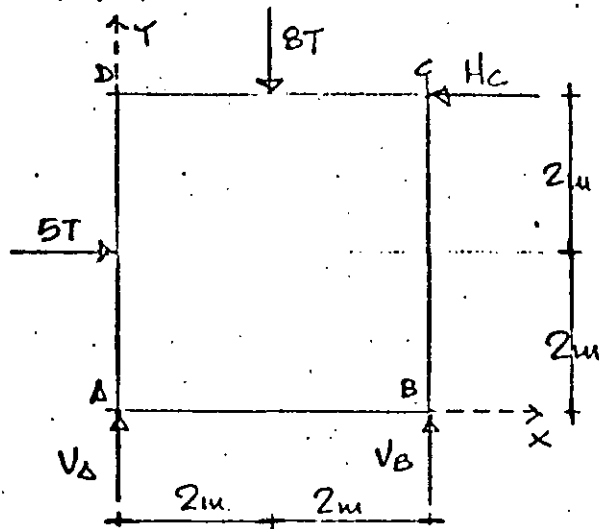
De (6): $H_B = -1,60T \leftarrow$

De (4): $V_B = 6,40T \uparrow$

EJEMPLO (III, 10.5): Calcule las reacciones en los apoyos del anillo trarticulado mostrado en la figura.



SOLUCION: DCL del anillo:



Ecuaciones de solución:

$$\sum F_x = 0: \quad 0 = 5 - H_C$$

$$\therefore H_C = 5T \leftarrow$$

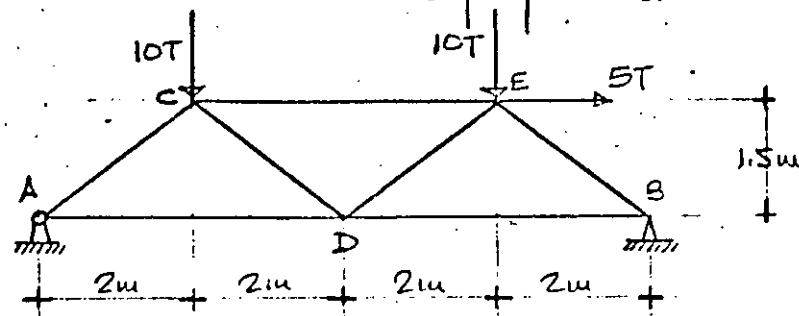
$$\sum M_C F = 0: \quad 0 = 4V_A - 5 \times 2 - 8 \times 2$$

$$\therefore V_A = 6,5T \uparrow$$

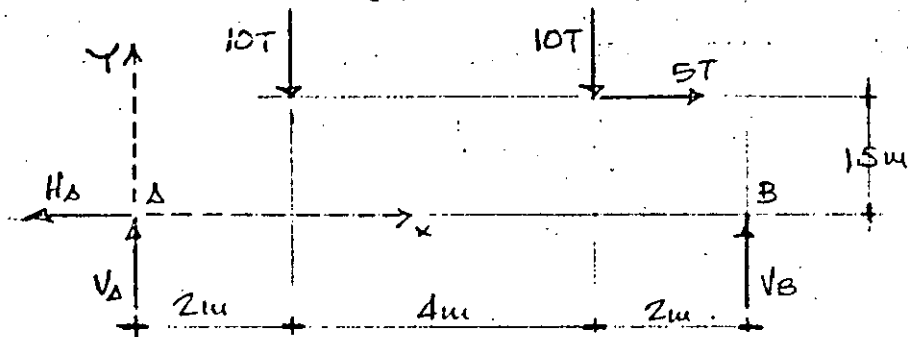
$$\sum M_D F = 0: \quad 0 = -5 \times 2 + 8 \times 2 - 4V_B$$

$$\therefore V_B = 1,5T \uparrow$$

EJEMPLO (III.10.6): Obtenga las reacciones en los apoyos de la armadura propuesta.



SOLUCION: DCL de la armadura:



Ecuaciones de solución:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad 0 = -H_A + 5 & \quad \therefore H_A = 5T \leftarrow \\ \sum M_A F = 0: & \quad 0 = 10 \times 2 + 10 \times 6 + 5 \times 1.5 - 8V_B & \quad \therefore V_B = 10.9375T \uparrow \\ \sum M_B F = 0: & \quad 0 = 8V_A - 10 \times 6 - 10 \times 2 + 5 \times 1.5 & \quad \therefore V_A = 9.0625T \uparrow \end{aligned}$$

III.11. ARMADURAS PLANAS ISOSTATICAS

Como ya fue dicho, las armaduras son estructuras trianguladas; sin embargo, para su estudio deben sujetarse a las siguientes condiciones:

- (a) Condiciones geométricas:
- (a-1) Los ejes centroidales de todas las barras que integran la estructura deberán estar contenidos en un solo plano, que recibe el nombre de plano de la armadura.
 - (a-2) Los ejes centroidales de todas las barras que forman un nudo se cortan en un solo punto, que coincide con el mismo.

(a-3) La estructura debe ser rígida geométicamente, con el empleo de un número mínimo de barras; por tanto, necesariamente:

$$N = 2n - 3$$

donde: n = número de nudos

N = número de barras.

y
(b) Condiciones mecánicas:

(b-1) La totalidad de componentes del sistema externo deberán concentrarse en los nudos de la estructura, y solamente en ellos.

(b-2) El plano del sistema externo de fuerzas que solicite a la estructura, debe coincidir con el plano de ésta.

(b-3) Todas las barras que concurren en un nudo están articuladas perfectamente en tal elemento.

Por otra parte, es pertinente resaltar que si la estructura se encuentra en equilibrio, toda barra de ella lo está bajo la acción de sólo dos fuerzas axiales a la misma y, por ende, cualquier nudo de la armadura se encontrará también en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas coplano concurrentes. Y dado que el conjunto de barras que forma la armadura hace que ésta sea rígida en el sentido de la condición (a-3), forzosamente:

$$2n = N + 3$$

Esto es, se cuenta con $2n$ ecuaciones independientes de Estática para el análisis completo de la armadura.

Los métodos de análisis de las armaduras son de dos clases, los analíticos y los gráficos. Dentro de los primeros está:

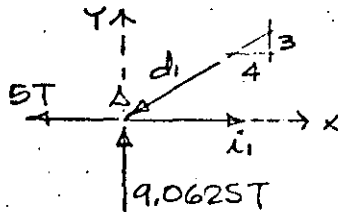
(a) el método racional o de las juntas, que consiste esencialmente en aislar los nudos de la estructura, ordenarlos en forma tal que vayan presentando sucesivamente problemas isostáticos de equilibrio, y resolver éstos vía las ecuaciones de proyección que provee la Estática para el tratamiento de los sistemas de fuerzas coplano concurrentes,

(b) el método de las secciones o de Ritter, que consiste en hacer cortes hipotéticos a la estructura, que intersecten como máximo a tres barras de ella, aislar una de las porciones resultantes (la

más conveniente), y tratarla via sistema de fuerzas coplano general en equilibrio.

EJEMPLO (III.11.1): Halle las fuerzas axiales y diga cuales son sus naturalezas, en cada una de las barras de la armadura del ejemplo (III.10.6).

SOLUCION: DCL del nudo A:



$$\sum F_y = 0:$$

$$0 = 9.0625 - \frac{3}{5}d_1$$

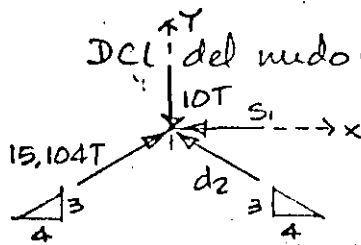
$$\therefore d_1 = 15.104T (c)$$

$$\sum F_x = 0:$$

$$0 = -5 - \frac{4}{5} \cdot 15.104 + i_1$$

$$\therefore i_1 = 17.083T (t)$$

DCL del nudo C:



$$\sum F_y = 0:$$

$$0 = 15.104 \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5}d_2 - 10$$

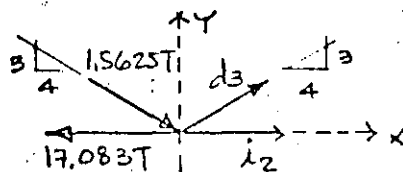
$$\therefore d_2 = 1.5625T (c)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$0 = 15.104 \times \frac{4}{5} - 1.5625 \times \frac{4}{5} - s_1$$

$$\therefore s_1 = 10.833T (c)$$

D.C.L. del nudo D:



$$\sum F_y = 0$$

$$0 = -1.5625 \times \frac{3}{5} + d_3 \times \frac{3}{5}$$

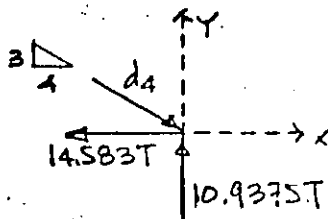
$$\therefore d_3 = 1.5625T (t)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$0 = -17.083 + 2 \times 1.5625 \times \frac{4}{5} + i_2$$

$$\therefore i_2 = 14.583T (t)$$

D.C.L. del nudo B:

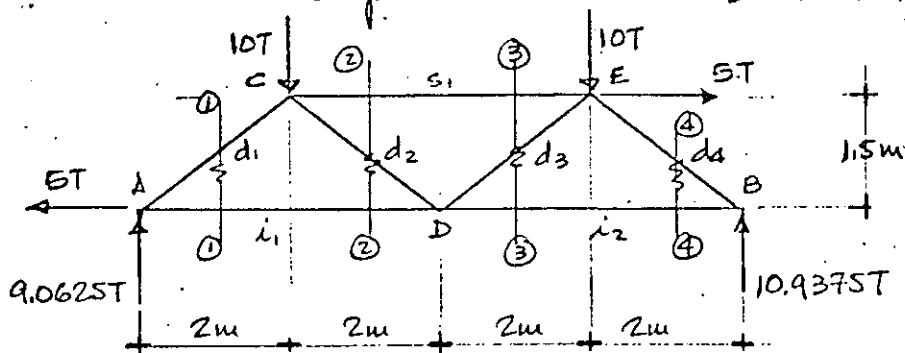


$$\sum F_y = 0$$

$$0 = -\frac{3}{5}d_4 + 10.9375$$

$$\therefore d_4 = 18.2291T (c)$$

EJEMPLO (III, 11, 2): Resuelva la armadura del ejemplo (III, 10, 6) empleando el método de Ritter.

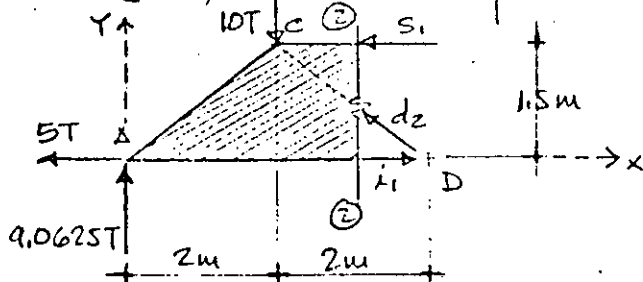


SOLUCION: Sección (1-1) - El DCL de la porción a la izquierda de (1-1) es totalmente equivalente al DCL del nudo A, por lo que:

$$d_1 = 15.104T (c)$$

$$i_1 = 17.083T (t)$$

Sección (2-2): DCL de la porción a la izquierda de (2-2)

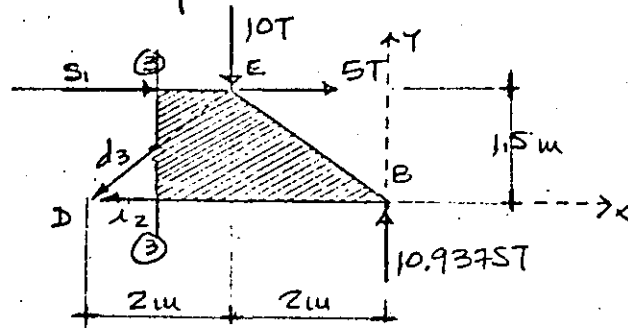


$$\sum F_y = 0: 0 = -0.9375 + \frac{3}{5}d_2 \quad \therefore d_2 = 1.5625T (c)$$

$$\sum H_{\Delta} F = 0: 0 = -20 + 1.5S_1 + 0.9375 \times 4 \quad \therefore S_1 = 10.833T (c)$$

$$\sum H_{CF} = 0: 0 = -25.6250 + 1.5i_1 \quad \therefore i_1 = 17.083T (t)$$

Sección (3-3): D.C.L. de la porción a la derecha de (3-3)



$$\sum F_y = 0: 0 = -10 + 10.9375 - \frac{3}{5} d_3 \quad \therefore d_3 = 1.5625T (t)$$

$$\sum H D F = 0: 0 = 1.5 s_1 + 20 + 7.5 - 43.75 \quad \therefore s_1 = 10.833T (c)$$

$$\sum M E F = 0: 0 = 1.5 i_2 - 21.875 \quad \therefore i_2 = 14.583T (t)$$

Sección (4-4): Como al considerar el DCL de la porción a la derecha de la sección (4-4) se obtiene un D.C.L. análogo al del nodo B, es evidente que una ecuación de proyección en un eje normal al cordón inferior resuelve el problema.

$$\sum F_y = 0: 0 = 10.9375 - \frac{3}{5} d_4 \quad \therefore d_4 = 18.2291T (c)$$

Los métodos ejemplificados presentan ventajas relativas a saber:
 (a) el método de las secciones evita el establecimiento de una secuencia para el cálculo de la fuerza axial en un miembro cualquiera de la estructura,

(b) el método de Ritter conduce a simplificaciones numéricas, pues habilita de cierta libertad para elegir el DCL por considerar, y

(c) el método racional utiliza ecuaciones menos bromosas de plantear.

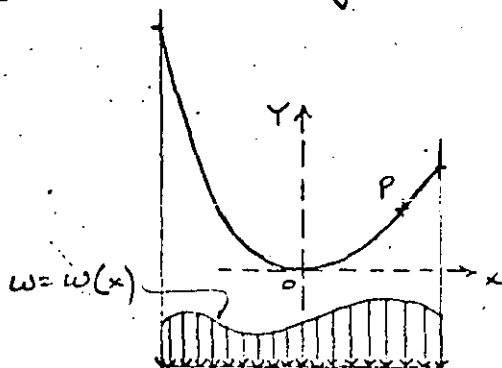
En general, se recomienda usar simultáneamente los dos métodos para obtener mayor expedición numérica de cálculo.

III.12. CABLES

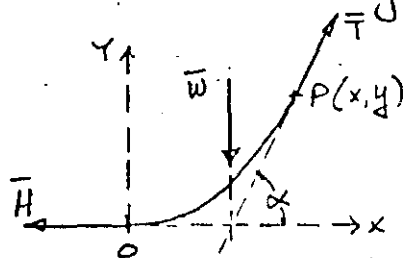
El cable es un elemento estructural deformable no extensible cuya longitud es francamente dominante con respecto a sus demás dimensiones.

Se dice que un cable es flexible si en cualquiera de sus secciones la interacción se limita a una pareja de fuerzas en equilibrio, cuya línea de acción pasa por el centroide de la sección. En estas condiciones, un cable flexible puede considerarse físicamente como una sucesión infinita de articulaciones intermedias.

Considérese ahora un cable flexible, suspendido en dos de sus puntos y sujeto a una carga distribuida continua, como el de la figura:



Distando la porción \overline{OP} del cable, donde o es el punto más bajo de él y por ende, donde la tangente al eje centroidal del cable es horizontal:



Puesto que el cable está en equilibrio, la porción \overline{OP} también lo está bajo las tres fuerzas coplanas y paralelas que se consiguen, y, dado que:

$$\sum F_x = 0:$$

$$H = T \cos \alpha$$

$$\sum F_y = 0:$$

$$w = T \sec \alpha$$

Dividiendo miembro a miembro las dos expresiones anteriores:

$$\tan \alpha = \frac{w}{H}$$

o sea:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{H}$$

(III.12.1)

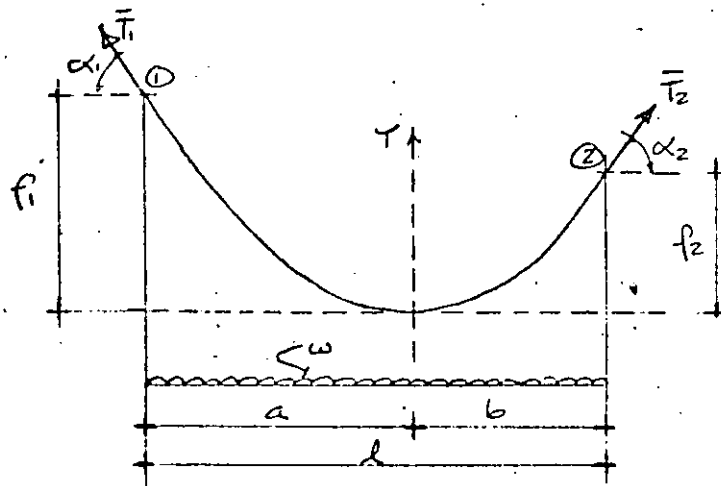
expresión que constituye la ecuación diferencial de todo cable flexible. Además, eliminando de las expresiones originales el parámetro α :

$$T = \sqrt{H^2 + w^2}$$

(II.12.2)

permite determinar la tensión en cualquier punto del cable.

Si el cable flexible se encuentra sujeto a una carga uniformemente repartida según su proyección horizontal se conoce como cable parabólico.



Su ecuación diferencial es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{wx}{H}$$

puesto que

$$w = w(x)$$

Integrando la ecuación diferencial de variables separables:

$$y = \frac{wx^2}{2H} + C$$

Como para $x=0$, $y=0 \rightarrow C=0$, y de ahí, la ecuación cartesiana del eje centroidal del cable parabólico es

$$y = \frac{wx^2}{2H}$$

(II.12.3)

La tensión en cualquier punto del cable vale

$$T = \sqrt{H^2 + w^2 x^2} \quad (\text{III.12.4})$$

y, puesto que los puntos ① y ② son del cable:

$$f_1 = \frac{wa^2}{2H} \quad ; \quad f_2 = \frac{wb^2}{2H}$$

Además:

$$T_1 = \sqrt{H^2 + w^2 a^2} \quad \therefore \alpha_1 = \tan^{-1} \frac{wa}{H}$$

$$T_2 = \sqrt{H^2 + w^2 b^2} \quad \therefore \alpha_2 = \tan^{-1} \frac{wb}{H}$$

Para obtener la longitud del cable:

$$S = S_a + S_b$$

donde:

$$S_a = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Substituyendo términos, integrando y desarrollando la obtención aproximada en base a serie convergente de Maclaurin, entonces:

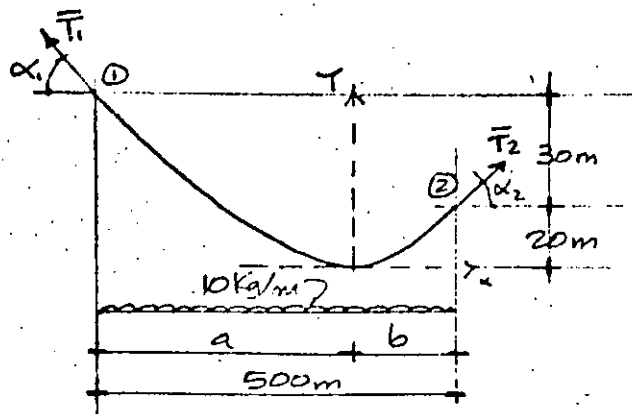
$$S_a = a \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{wa}{H}\right)^2 - \frac{1}{40} \left(\frac{wa}{H}\right)^4 + \frac{1}{112} \left(\frac{wa}{H}\right)^6 - \dots \right]$$

Análogamente:

$$S_b = b \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{wb}{H}\right)^2 - \frac{1}{40} \left(\frac{wb}{H}\right)^4 + \frac{1}{112} \left(\frac{wb}{H}\right)^6 - \dots \right]$$

Las series anteriores convergen rápidamente cuando el argumento $\left(\frac{wa}{H}\right)$ o bien $\left(\frac{wb}{H}\right)$ son números menores que la unidad.

EJEMPLO (III.12.1): Un cable soporta una carga uniformemente repartida de $10 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$, su claro es de 500m y el desnivel entre sus apoyos de 30m. Si el punto más bajo del cable está a 20m del apoyo menos alto, analice totalmente el problema.



SOLUCION:

$$a + b = 500 \quad (1)$$

$$f_1 = \frac{10a^2}{2H} = 50 \quad (2)$$

$$f_2 = \frac{10b^2}{2H} = 20 \quad (3)$$

Entonces:

$$H = 9400 \text{ Kg}$$

$$a = 306 \text{ m}$$

$$b = 194 \text{ m}$$

Las tensiones en los extremos:

$$T_1 = 10^3 \sqrt{9,4^2 + 3,06^2} = 9860 \text{ Kg}$$

$$T_2 = 10^3 \sqrt{9,4^2 + 1,94^2} = 9600 \text{ Kg}$$

y:

$$\alpha_1 = \tan^{-1} 0,326 = 18^\circ 04'$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1} 0,2065 = 11^\circ 40'$$

Finalmente:

$$S_a = 306 \left(1 + \frac{1}{6} (0,326)^2 - \frac{1}{40} (0,326)^4 + \dots \right)$$

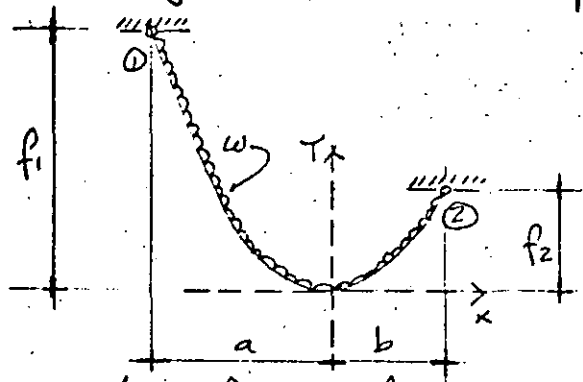
$$= 306 (1 + 0,0176 - 0,0003 + \dots) \doteq 303 \text{ m}$$

$$S_b = 194 \left(1 + \frac{1}{6} (0,2065)^2 - \frac{1}{40} (0,2065)^4 + \dots \right)$$

$$= 194 (1 + 0,0071) \doteq 195 \text{ m}$$

$$\therefore S = S_a + S_b = 503 \text{ m}$$

Considérese ahora un cable flexible suspendido en dos puntos y sujeto a una carga uniformemente repartida según su arco



Su ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ws}{H} \quad (\text{III.12.5})$$

en donde s se mide a partir del punto más bajo y hacia cada uno de los apoyos. Evidentemente:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{ws}{H}\right)^2}$$

expresión de variables separables que integrada y bajo las condiciones de la figura:

$$s = \frac{H}{w} \operatorname{senh} \frac{wx}{H}$$

que proporciona la longitud del cable. Substituyéndola en la (III.12.5):

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{senh} \frac{wx}{H}$$

Integrando:

$$y = \frac{H}{w} \cosh \frac{wx}{H} + C_2$$

si $x=0, y=0,$

$$C_2 = -\frac{H}{w}$$

entonces:

$$y = \frac{H}{w} \left(\cosh \frac{wx}{H} - 1 \right) \quad (\text{III.12.6})$$

que es la ecuación del eje catenoidal de este tipo de cable; llamado catenaria.



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

CURSO ORGANIZADO DENTRO DEL PROGRAMA DE SUPERACION
ACADEMICA DE LA DIVISION DE CIENCIAS BASICAS.

CURSO: " ESTATICA "

TEMA IV. - "PRIMEROS Y SEGUNDOS MOMENTOS."

ABRIL-MAYO 1984

CURSO DE MECANICA PARA PROFESORES

IV PRIMEROS Y SEGUNDOS MOMENTOS

INTRODUCCION

Los temas que se estudian en este capítulo son de gran importancia dentro de cualquier curso de Mecánica, ya que, los primeros momentos o momentos estáticos surgen como consecuencia del estudio del centro de un sistema de fuerzas paralelas y los segundos momentos, o momentos de inercia, quedan establecidos a partir de la dinámica de la rotación de los cuerpos.

Tanto los primeros como los segundos momentos, son temas de constante aplicación en el aprendizaje de muchas asignaturas consecuentes con los cursos de Mecánica, como son los diversos cursos de Análisis y Diseño de Estructuras, Resistencia de materiales, Construcción, Mecánica de Fluidos, Diseño de máquinas, etc.

También debe marcarse la importancia de estos conceptos debido a su aplicación frecuente en las diversas áreas de la ingeniería, en las etapas de análisis y diseño de estructuras y cimentaciones, presas de almacenamiento, tanques y cisternas para depósito de líquidos, plantas industriales, máquinas y gran diversidad de elementos de construcción.

OBJETIVO

A partir de los conceptos del centro de un sistema de fuerzas paralelas y de la dinámica de la rotación de los cuerpos rígidos, determinar los conceptos físicos y matemáticos de los primeros momentos y los momentos de inercia de cuerpos, masas, y figuras geométricas.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO DE LOS TEMAS QUE COMPRENDEN ESTE CAPITULO.

Los dos temas tratados en este capítulo pueden estudiarse separadamente uno del otro, aunque es recomendable seguir el orden de este texto. Para que el estudioso de esta parte de la Mecánica pueda aplicar estos conocimientos en las asignaturas subsecuentes, y en la ingeniería misma, es necesario que comprenda correctamente el significado físico del Centro de un Sistema de Fuerzas paralelas con punto de aplicación y el de momento de inercia de la masa de un cuerpo; esto último como un coeficiente de la resistencia que opone un cuerpo a la rotación y aceleración angulares. Una vez comprendidos estos conceptos físicos, se pueden tratar matemáticamente para lo cual se requieren, como antecedentes indispensables, el Cálculo Diferencial e Integral, así como el Algebra Vectorial.

Para facilitar la comprensión, se divide el estudio de este capítulo

lo en la siguiente forma:

I.- PRIMEROS MOMENTOS

- IV.1.1 Centro de un Sistema de Fuerzas paralelas.
- IV.1.2 Centros de gravedad y de masa de cuerpos.
- IV.1.3 Momentos estáticos y centroides de volúmenes, de areas y de lineas.
- IV.1.4 Planos y ejes de Simetría. Ejes centroidales y principales.

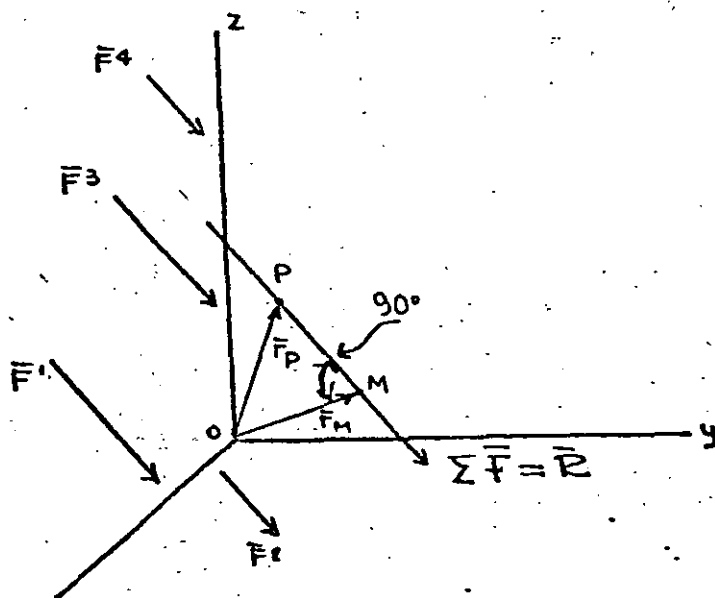
II.- MOMENTOS DE INERCIA

- IV.2 Concepto dinámico y definición matemática del momento de inercia o de segundo orden de areas planas. Momento polar de inercia de areas planas.
- IV.2.3 Producto de inercia y radios de giro de areas planas Teorema de Steiner o de los ejes paralelos.
- IV.2.4 Ejes centroidales y ejes principales.

I.- PRIMEROS MOMENTOS

Para el estudio de este tema daremos por conocidos los conceptos precedentes de la Estática correspondientes al tratamiento vectorial de los sistemas de fuerzas, como son el cálculo de la resultante general de un sistema tridimensional de fuerzas paralelas, al estudio del eje central de un sistema de fuerzas, el teorema del cambio del centro de momentos, el teorema de momentos, así como el uso de las coordenadas vectoriales o Plückerianas.

Se presentan a continuación, como auxilio para este estudio, algunos de los principales conceptos precedentes necesarios.



a) Una fuerza F^* , considerada como vector deslizante o cursor, está unívocamente terminada mediante sus dos coordenadas vectoriales o Plückerianas $[\bar{F}, F_0]$, en donde:

*
 \bar{F} = vector-equipolente de la fuerza.

\vec{F}_0 = momento de la fuerza \vec{F} respecto al origen del sistema coordinado, esto es $\vec{F}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$ (1)

\vec{r} = vector de posición de cualquier punto de la línea de acción del cursor \vec{F}^* , respecto al origen del sistema coordinado (x,y,z)

b) Existe una relación biunívoca entre el cursor \vec{F}^* y sus coordenadas vectoriales; o sea que dado un cursor \vec{F}^* al cual le corresponde una y solo una pareja de coordenadas vectoriales \vec{F} y \vec{F}_0 , la condición recíproca se cumple, ya que la pareja de vectores \vec{F} , \vec{F}_0 , tales que $\vec{F} \cdot \vec{F}_0 = 0$ y $\vec{F} \neq 0$, corresponde a las coordenadas vectoriales de uno y solamente un cursor \vec{F}^*

c) El vector de posición \vec{r}_M , del punto "M" situado en la línea de acción de \vec{F}^* , a la mínima distancia del origen, está definido por la relación:

$$\vec{r}_M = \frac{\vec{F} \times \vec{F}_0}{F^2} \quad (2)$$

d) Un sistema de fuerzas queda definido por sus coordenadas vectoriales:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (3) \text{ llamada también fuerza-suma}$$

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^0 \quad (4) \text{ llamada Momento-Suma}$$

- e) Se llama resultante de un sistema de fuerzas al sistema más simple equivalente al sistema dado y se calcula con la suma vectorial de las fuerzas de ese sistema.
- f) Dos sistemas son equivalentes, cuando producen sobre el cuerpo al cual se aplican iguales efectos externos o motrices y tienen iguales coordenadas vectoriales.
- g) En la reducción de un sistema se llega a los siguientes casos:

caso A.- Equilibrio, si $\vec{R} = 0 = \vec{M}_o$

caso B.- Par de fuerzas, si $\vec{R} = 0, \vec{M}_o \neq 0$

caso C.- Fuerza única, si $\vec{R} \neq 0$ y $\vec{R} \cdot \vec{M}_o = 0$

caso D.- Motor o bicursor, si $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_o \neq 0$ y $\vec{R} \cdot \vec{M}_o \neq 0$

El análisis y estudio de cada uno de los casos anotados se efectuó en el capítulo llamado REDUCCION DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS, interesándonos en este capítulo únicamente el caso (C).

En este último caso existe lo que se llama EJE CENTRAL del sistema, el cual se define como el lugar geométrico de los puntos del espacio donde el momento del sistema es mínimo y coincide con la línea de acción de la resultante del sistema.

El eje central define a su vez el centro del sistema de fuerzas - paralelas. Esta línea contiene al punto M, de la mínima distancia, - por lo que la ecuación vectorial del eje central es:

$$\vec{r} = \vec{r}_m + \beta \vec{R} = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_o}{R^2} + \beta \vec{R} \quad (5)$$

Donde β es un escalar cualquiera .

h) El teorema de momentos establece que: "La suma de los momentos de - las fuerzas \vec{F}_i de un sistema dado, con respecto a un punto Q cual - quiera de un espacio tridimensional, es igual al momento de su re - sultante \vec{R} respecto al mismo punto".

$$\text{Es decir: } \vec{M}_Q = \sum_{i=1}^n (\vec{QP}_i \times \vec{F}_i) = \vec{QM} \times \vec{R} \quad (6)$$

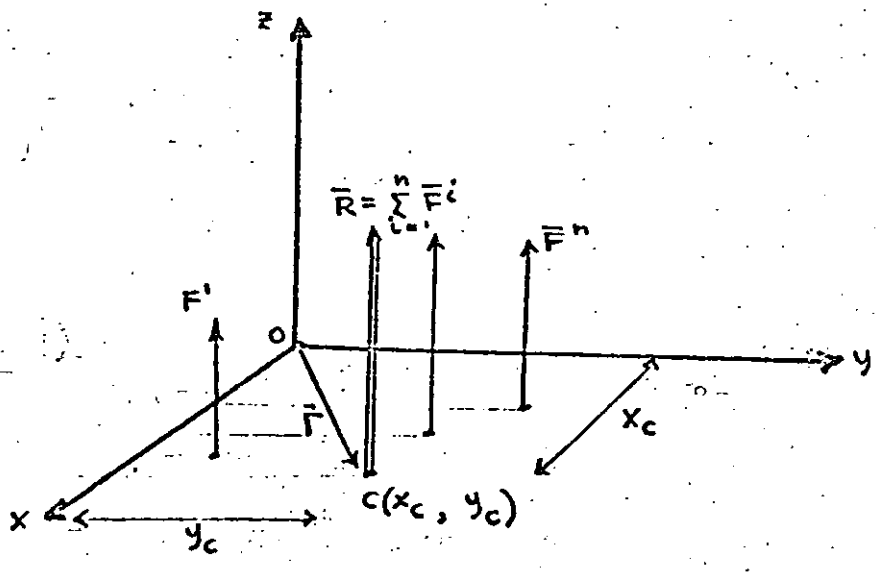
A su vez, el teorema del cambio del centro de momentos puede expre - sarse con la siguiente ecuación:

$$\vec{M}_Q = \vec{M}_o - \vec{OQ} \times \vec{R} \quad (7)$$

Con los antecedentes anteriores puede procederse al estudio del - tema correspondiente a este capítulo.

I.1).- CENTRO DE UN SISTEMA DE FUERZAS PARALELAS

Sea el sistema paralelo tridimensional ($\vec{F}^1, \vec{F}^2, \dots, \vec{F}^n$) aplicadas en el plano xy del sistema (xyz), que por comodidad se hace coincidir el eje z con la dirección de las fuerzas dadas.



Se define CENTRO DEL SISTEMA al punto $(x_c, y_c, 0)$ de aplicación de la resultante \vec{R} .

Esta fuerza \vec{R} se calcula con la suma vectorial de las fuerzas del sistema y su posición se obtiene aplicando el teorema de momentos.

En efecto, calcularemos las coordenadas vectoriales del sistema.

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = F^1 k + F^2 k + \dots + F^n k = \sum_{i=1}^n (F^i) k$$

$$\bar{R}_o = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2 + \dots + \bar{r}_n \times \bar{F}_n$$

Analizando cada una de las dos ecuaciones anteriores se llega a las siguientes conclusiones:

En la primera ecuación, si todas las fuerzas del sistema tienen igual sentido, la suma será de elementos del mismo signo, por lo cual $\bar{R} \neq 0$.

En la segunda ecuación, $\bar{R}_o = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i)$, todos los vectores \bar{r}_i están ubicados en el plano (x,y) y todos los vectores \bar{F}_i son paralelos al eje z, por lo que los vectores momento, por ser perpendiculares a los planos (\bar{r}_i, \bar{F}_i) , nos darán un vector suma $(\sum \bar{F}_o)$ perpendicular a la resultante \bar{R} . Esto es, se verifica la ecuación $\bar{R} \cdot \bar{M}_o = 0$.

Si se cumplen las ecuaciones $\bar{R} \neq 0$ y $\bar{R} \cdot \bar{M}_o = 0$,

Se concluye que, de acuerdo al caso III, indicado anteriormente, el sistema se reduce a fuerza única $\bar{R} \neq 0$

Esta fuerza resultante tiene las siguientes características:

MAGNITUD. - Es la suma escalar de las fuerzas del sistema.

DIRECCION.- La misma que la de dichas fuerzas.

POSICION.- La posición $c(X_c, Y_c, 0)$ se obtiene aplicando el teorema de momentos respecto a los ejes xx' , yy' .

En efecto, apliquemos el teorema de momentos, para lo cual el vector de posición de \vec{R} es $\vec{Oc} = \vec{r}_c = (X_c - 0, Y_c - 0, 0) = (X_c, Y_c, 0)$

De donde:

$$\text{Momento de la Resultante: } R_o = \vec{r}_c \times \vec{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X_c & Y_c & 0 \\ 0 & 0 & R \end{vmatrix} = [(R Y_c) i - (R X_c) j]$$

Suma de momentos de las fuerzas:

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{M}_o &= \vec{F}_o^1 + \vec{F}_o^2 + \dots + \vec{F}_o^n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X_1 & Y_1 & 0 \\ 0 & 0 & F^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ X_2 & Y_2 & 0 \\ 0 & 0 & F^2 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} i & j & k \\ X_n & Y_n & 0 \\ 0 & 0 & F^n \end{vmatrix} = \\ &= (F^1 y_1) i - (F^1 x_1) j + (F^2 y_2) i - (F^2 x_2) j + \dots \\ &\dots (F^n y_n) i - (F^n x_n) j \end{aligned}$$

Igualmente la suma de momentos de las fuerzas con el momento de la resultante y separando los momentos respecto a ambos ejes:

$$X_C = \frac{F^1 x_1 + F^2 x_2 + \dots + F^n x_n}{R} = \frac{F^1 x_1 + F^2 x_2 + \dots + F^n x_n}{F^1 + F^2 + \dots + F^n} \quad (8.)$$

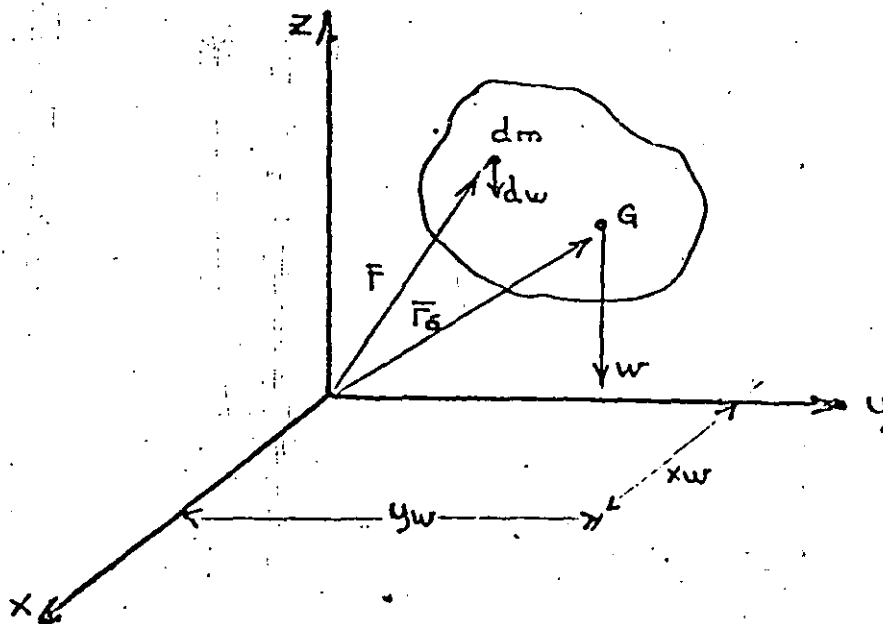
$$Y_C = \frac{F^1 y_1 + F^2 y_2 + \dots + F^n y_n}{R} = \frac{F^1 y_1 + F^2 y_2 + \dots + F^n y_n}{F^1 + F^2 + \dots + F^n} \quad (9)$$

$$Z_C = 0$$

Las ecuaciones anteriores proporcionan las coordenadas del centro del sistema de fuerzas paralelas aplicadas en el plano coordenado (x, y) .

Además, debe observarse que estas ecuaciones son escalares.

1.2 CENTRO DE GRAVEDAD



Sea el cuerpo mostrado en la figura anterior, referido al sistema inercial cartesiano (x, y, z) ; cada partícula del cuerpo es atraída hacia el centro de la tierra por su peso.

Aunque rigurosamente se trata de un sistema concurrente al centro de la tierra, dadas las dimensiones consideremos al sistema como paralelo, con fuerzas de peso de igual sentido, por lo que la resultante sería una sola fuerza, que es el peso total del cuerpo.

Los resultados obtenidos en el estudio del centro de un sistema de fuerzas paralelas son válidos en este caso, pero aceptamos la siguiente notación:

d_p = peso de una partícula del cuerpo.

\bar{r} = vector de posición de la mencionada partícula.

$$\bar{r} = \bar{x} + \bar{y}$$

\bar{r}_G = vector de posición del centro Gravedad "G"

$$\bar{r}_G = (\bar{X}_G, \bar{Y}_G, \bar{Z}_G)$$

Por principio de Stevinus: $\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$

El vector equivalente del peso del cuerpo:

$$\bar{R} = -\bar{W} = \int d\vec{w} = W\vec{k} \quad (10)$$

El momento del sistema de fuerzas correspondiente al peso de las partículas vale:

$\bar{M}_o = \int \bar{r} \times \bar{dw}$ donde las fuerzas \bar{dw} son paralelas al eje de las "z", según la figura anterior.

$$\text{o sea } \bar{M}_o = M_{ox} \bar{i} + M_{oy} \bar{j} + o \bar{k} \quad (11)$$

Comparando las ecuaciones 10 y 11, podemos decir que $\bar{R} \cdot \bar{M}_o = 0$, por lo que en este caso la resultante del sistema general es una sola fuerza.

El punto "G" donde puede considerarse concentrado el peso del cuerpo se denomina el CENTRO DE GRAVEDAD DEL CUERPO.

Llamando \bar{r}_G al vector de posición del centro de gravedad; el teorema de momentos establece que:

$$\bar{r}_G \times \int_o^w \bar{dw} = \int_o^w \bar{r} \times \bar{dw} \quad (12)$$

Si "G" tiene por coordenadas: $(\bar{X}_G, \bar{Y}_G, \bar{Z}_G)$, la ecuación 12 queda:

$$(\bar{X}_G \bar{i} + \bar{Y}_G \bar{j} + \bar{Z}_G \bar{k}) \times (-W \bar{k}) = \int (X \bar{i} + Y \bar{j} + Z \bar{k}) \times (-dW \bar{k})$$

Desarrollando la ecuación, e igualando los coeficientes de los vectores unitarios en ambos miembros se llega a:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_G (W) &= \int x \, d w \\ \bar{Y}_G (W) &= \int y \, d w \\ \bar{Z}_G (W) &= \int z \, d w \end{aligned} \right\} (13)$$

Las ecuaciones 13 expresan lo que se denomina el primer momento del peso del cuerpo.

Despejando:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_G &= \frac{\int x \, d w}{W} = \frac{\int x \, d w}{\int d w} \\ \bar{Y}_G &= \frac{\int y \, d w}{W} = \frac{\int y \, d w}{\int d w} \\ \bar{Z}_G &= \frac{\int z \, d w}{W} = \frac{\int z \, d w}{\int d w} \end{aligned} \right\} (14)$$

Las ecuaciones (14) determinan el centro de gravedad de un cuerpo.

El vector de posición \bar{r}_G del centro de gravedad puede expresarse así:

$$\bar{r}_G = \frac{\int \bar{r} \, d w}{W} \quad (15)$$

Las coordenadas de \bar{r}_G están expresadas en las ecuaciones (14)

CENTRO DE MASA DE UN CUERPO

Este punto queda determinado con la ecuación vectorial $\bar{r}_G = \frac{\int \bar{r} \, dm}{\int dm}$ (16),

la cual es análoga a la ecuación (15)

En forma análoga puede definirse CENTRO DE MASA de un cuerpo, al punto donde se considera concentrada toda su masa. Para determinar dicho punto, también podemos considerar la segunda ley de Newton -- $F = mg$, valor que substituido en cualquiera de las ecuaciones (14) queda:

$$\bar{X}_G = \frac{\int x \, d(mg)}{\int d(mg)} \quad \dots \text{ si } g = \text{ constante :}$$

$$\bar{X}_G = \frac{g \int x \, dm}{g \int dm} = \frac{\int x \, dm}{\int dm} \quad (16)$$

De acuerdo a lo indicado en las ecuaciones 8 y 9 , al simplificarse los vectores unitarios \bar{i} , \bar{j} y \bar{k} , dichas ecuaciones son escalares, por lo cual puede escribirse

$$X_M = \frac{\int x dm}{\int dm}$$

$$Y_M = \frac{\int y dm}{\int dm}$$

$$Z_M = \frac{\int z dm}{\int dm}$$

(17)

COORDENADAS

DEL

CENTRO DE MASA

IV. 1.3.- MOMENTOS ESTATICOS Y CENTROIDES DE VOLUMENES, DE AREAS Y DE LINEAS.

Por lo indicado en el párrafo anterior, las ecuaciones siguientes son escalares, simplificándose notablemente su aplicación.

CENTROIDE DE UN VOLUMEN.-

En el caso de que el cuerpo sea homogéneo, es decir, de densidad constante, la masa puede expresarse mediante la ecuación $m = \rho v$, ó en su forma diferencial $dm = \rho dv$, donde " ρ " es la densidad ó masa específica " v " el volumen y " m " la masa del cuerpo.

La ecuación (16), que define el centro de masa de un cuerpo, - -
también puede escribirse así:

$$\bar{r}_G = \frac{\int \bar{r}(\rho dv)}{\int (\rho dv)} = \frac{\int r dv}{\int dv} \quad (17)'$$

Con la que se determina el centroide de un volumen, siendo sus -
ecuaciones escalares:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \frac{\int x dv}{\int dv} \\ Y_v &= \frac{\int y dv}{\int dv} \\ Z_v &= \frac{\int z dv}{\int dv} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

CENTROIDE DE UNA AREA PLANA

Si el cuerpo mencionado tiene un espesor "e" constante, puede -
expresarse su volumen de la siguiente manera:

$$V = eA$$

y en forma diferencial:

$$dv = e dA$$

Substituyendo este último valor en las ecuaciones (17) y (18) -
y simplificando el valor del espesor constante "e" se llega a :

$$\bar{r}_A = \frac{\int \bar{r} dA}{\int dA} \quad (19)$$

Vector de posición
del centroide de un
area

$$\left. \begin{aligned} x_A &= \frac{\int x dA}{\int dA} \\ y_A &= \frac{\int y dA}{\int dA} \\ z_A &= \frac{\int z dA}{\int dA} \end{aligned} \right\} (20)$$

Ecuaciones escalares
que definen el centroide
de una área

En el caso de que el área sea plana y esté contenida en un plano xy, la tercera de las ecuaciones (20) se anula, bastando las dos primeras para determinar el centroide de un área plana.

CENTROIDE DE UNA LINEA

En este caso, por analogía con los anteriores, se pueden escribir las siguientes ecuaciones:

$$\bar{r}_L = \frac{\int \bar{r} dL}{\int dL} \quad (21)$$

vector de posición
del centroide de una línea

$$x_L = \frac{\int x dL}{\int dL}$$

$$y_L = \frac{\int y dL}{\int dL}$$

$$z_L = \frac{\int z dL}{\int dL}$$

(22) CENTROIDE DE UNA
LINEA

Si la línea es plana, desaparece la 3ª ecuación.

IV.1.4.- PLANOS Y EJES DE SIMETRÍA .

EJES CENTROIDALES

Si una figura es simétrica respecto a un eje, su centroide estará ubicado en dicho eje. Lo anterior resulta claro a partir de la propia definición de primer momento $Q_x = \int y dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n y_i (dA_i)$, en la que

para cada elemento diferencial de área ubicado a una distancia (+y) del eje de simetría siempre existe otro elemento simétrico a una distancia (-y), por lo que el límite de la suma es cero.

$$\text{Esto es } Q_x = \int y dA = 0$$

$$y_A = \frac{0}{A} = 0$$

ó sea el centroide
está en el eje xx'

Análogamente puede establecerse que si una figura es simétrica respecto a dos ejes, su centroide es el punto de intersección de ambos ejes.

También puede decirse que si un volumen dado es simétrico respecto a un plano, su centroide estará en dicho plano; si lo es respecto a dos planos, el centroide queda ubicado en la recta de intersección de ellos y si es simétrico con respecto a tres planos, el centroide es el punto de intersección de ellos. Los ejes que pasan por el centroide, se llaman EJES CENTROIDALES.

Presentamos a continuación algunos problemas de aplicación de los temas tratados anteriormente.

Ejemplo 1.- Dado un sistema de fuerzas paralelas aplicadas en el plano xy , calcule la magnitud, dirección y posición de la resultante. Diga usted cual es el centro del sistema.

Datos:

$$F^1 = 0i + 0j - 3k \text{ (ton)} \quad \text{aplicadas en } (1, 1, 0) \text{ (m)}$$

$$F^2 = 0i + 0j - 5k \text{ (ton)} \quad \text{" " (3, 0, 0) (m)}$$

$$F^3 = 0i + 0j - 4k \text{ (ton)} \quad \text{" " (-2, -1, 0) (m)}$$

$$F^4 = 0i + 0j - 2k \text{ (ton)} \quad \text{" " (-1, 2, 0) (m)}$$

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n F_i = -11k \text{ ton}, \text{ es decir, la resultante es una fuerza-}$$

paralela al eje zz' , dirigida hacia el sentido negativo de dicho eje.

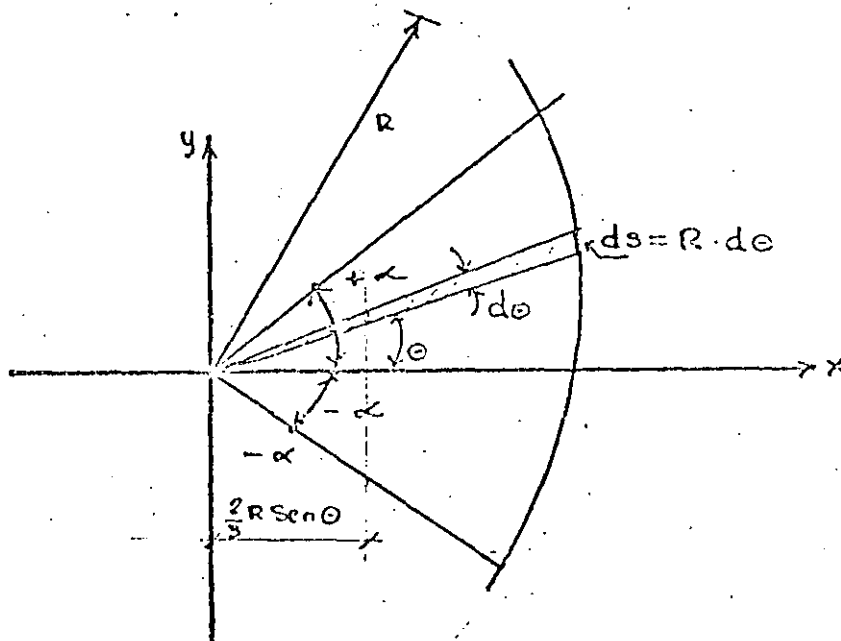
Su posición (x, y, z) se calcula aplicando el teorema de momentos, que en este caso se simplifica así:

$$x_c = \frac{3-15+8-2}{-4} = 1.5\text{m}; \quad y_c = \frac{3+0+4+4}{-4} = -2.75\text{m}$$

$$z_c = 0$$

El centro del sistema es: $C(1.5, -2.75, 0)\text{m}$

Ejemplo 2.- Localice el centroide de un sector circular que subtende un ángulo 2α , como se indica en la siguiente figura.



$$dA = \frac{R \cdot ds}{2} = \frac{R(Rd\theta)}{2} = \frac{R^2}{2} d\theta$$

$$Q_y = \int_{-\alpha}^{+\alpha} x dA = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \left(\frac{2}{3} R \cos\theta \right) \frac{R^2}{2} d\theta = \frac{2}{6} \int_{-\alpha}^{+\alpha} R^3 \cos\theta d\theta$$

$$Q_y = \frac{1}{3} R^3 [\sin\theta]_{-\alpha}^{+\alpha} = \frac{2}{3} R^3 \sin(\alpha)$$

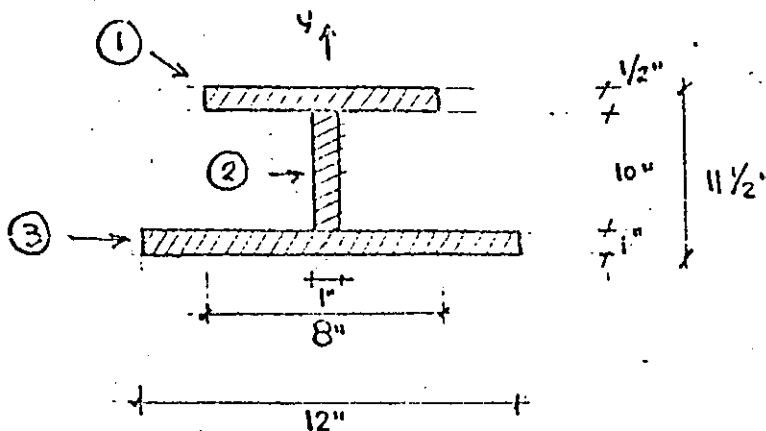
$$\text{área } A = \int_{-\alpha}^{+\alpha} dA = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{R^2 d\theta}{2} = \frac{R^2}{2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta = R^2 \alpha$$

$$x_c = \frac{\frac{2}{3} R^3 \sin \alpha}{R^2 \alpha} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

Resultados: $A = R^2 \alpha$; $Q_y = \frac{2}{3} R^3 (\sin \alpha)$; $x_c = \frac{2}{3} R \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)$

Por simetría $y_c = 0$

Ejemplo 3.- Calcule la posición del centroide de la sección de la siguiente vigueta formada por 3 placas de acero.



$$Q_x (1) = (8" \times \frac{1}{2}") (1" + 10" + \frac{1}{4}") (4) \text{ pulg}^2 (11.25 \text{ pulg}) = 45.0 \text{ pulg}^3$$

$$Q_x (2) = (10 \times 1) (1+5) = (10) (6) = 60.0 \text{ pulg}^3$$

$$Q_x (3) = (12 \times 1) (0.5) = (12) (0.5) = 6.0 \text{ "}$$

$$\Sigma Q_x = 111.0 \text{ pulg}^3$$

$$A_1 = 8 \times \frac{1}{2} = 4.0 \text{ pulg}^2$$

$$A_2 = 10 \times 1 = 10.0 \text{ "}$$

$$A_3 = 12 \times 1 = 12.0 \text{ "}$$

$$\Sigma A = 26.0 \text{ pulg}^2$$

$$Y_{CG} = \frac{\Sigma Q_x}{\Sigma A} = \frac{111.0 \text{ pulg}^3}{26.0 \text{ pulg}^2} = 4.27 \text{ pulg.}$$

$X_{CG} = 0$ por la simetría de la figura respecto al eje yy' .

México, D.F., Ciudad Universitaria, febrero de 1984.

ING. SERGIO BETANCOURT CUEVAS.

IV. 2. MOMENTOS DE INERCIA. —

IV. 2. 1. CONCEPTO DINAMICO Y DEFINICION MATEMATICA. —

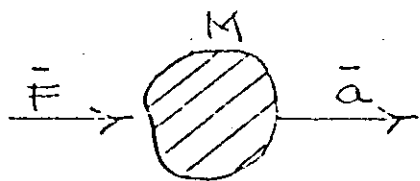
El concepto dinámico del momento de inercia de la masa de un cuerpo se estudia en el capítulo correspondiente a la dinámica de los cuerpos rígidos.

En efecto, en dicha parte de la Mecánica se deduce la ecuación $\bar{M}_T = I_o \bar{\alpha}$, en la que " M_T " es el momento aplicado a un cuerpo, " I_o " es el momento de inercia de su masa respecto a un eje que pasa por "o" y " $\bar{\alpha}$ " es la aceleración angular que M_T le produce a dicho cuerpo. Además $I_o = \sum_{i=1}^n m_i (r_i)^2$, donde m_i es un elemento de masa ubicado a una distancia r_i del eje que pasa por "o".

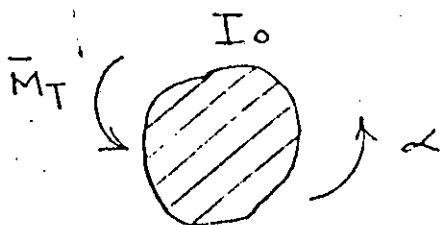
Esta última ecuación puede transformarse, de acuerdo con el cálculo integral, en la forma:

$$I_o = \sum_{i=1}^n m_i (\bar{r}_i)^2 = \int r^2 dm \quad (23)$$

Comparando la primera de las ecuaciones anteriormente citadas con la segunda ley de Newton del movimiento lineal $\bar{F} = m \cdot \bar{a}$, se pueden establecer algunas conclusiones:



$$\bar{F} = M \cdot \bar{a} \quad (a)$$



$$\bar{M}_T = I_o \cdot \bar{\alpha} \quad (b)$$

Las ecuaciones (a) y (b) son semejantes en su estructura, tienen tres términos cada una. En (a) se aplica una fuerza \bar{F} al cuerpo en estudio, el cual sufre una aceleración lineal \bar{a} ; en (b) se aplica un momento M_T y el cuerpo sufre una aceleración angular $\bar{\alpha}$. En el primer caso la masa "M" es un coeficiente de la resistencia que opone el cuerpo al ser acelerado linealmente.

Análogamente, según la ecuación (b), EL MOMENTO DE INERCIA DE LA MASA DE UN CUERPO ES UN COEFICIENTE DE LA RESISTENCIA QUE OPONE UN CUERPO AL SER ACELERADO ANGULARMENTE. Si el cuerpo en estudio no es rígido, además de sufrir aceleraciones podrá ser deformado, por lo que el momento de inercia de un cuerpo medirá, además, la resistencia del cuerpo a sufrir deformaciones angulares.

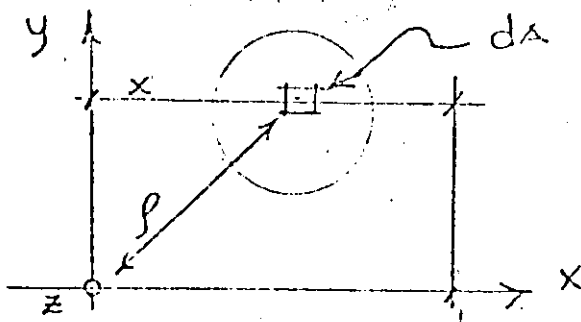
El momento de inercia de la masa de un cuerpo es un concepto que interviene frecuentemente en el análisis y diseño de estructuras y cimentaciones, en el proyecto de máquinas, en la Mecánica de materiales, proyectos hidráulicos, y en general en casi todas las aplicaciones de la Mecánica a la Ingeniería.

Desde el punto de vista matemático, puede definirse a la integral $\int r^2 dm$, como el momento de inercia de la masa de un cuerpo, o el segundo momento. De hecho muchos autores que tratan este tema lo presentan como una definición matemática, sin necesidad de aclarar el significado físico del mismo.

El nombre de MOMENTO DE INERCIA al producto mr^2 fue sugerido primeramente por Euler en 1765 y representado por la letra "I". En el caso de que el cuerpo sea homogéneo y de sección transversal constante, se puede hablar del momento de inercia de un área, como representativo del momento de inercia de la masa del mismo. Desde el punto de vista matemático no existirán estas restricciones, ya que a la integral $\int r^2 dA$ se le puede llamar MOMENTO DE INERCIA DE UN AREA dada.

En las ecuaciones que se presentan a continuación se hará un estudio exclusivamente escalar de estos conceptos.

IV. 2.2 MOMENTOS DE INERCIA O DE SEGUNDO ORDEN DE AREAS PLANAS. MOMENTO POLAR DE INERCIA.



Sea esta figura un área plana ubicada en el plano xy.

El momento de inercia del área con respecto a los ejes x, y; cuyo significado físico se explicó en el capítulo anterior, puede definirse según las ecuaciones siguientes:

$$I_x = \int y^2 dA \quad (24)$$

$$I_y = \int x^2 dA \quad (25)$$

A su vez el MOMENTO POLAR DE INERCIA se define con la sgte. integral $J_z = \int \rho^2 dA$ — (26)

De la figura anterior, puede establecerse que $\rho^2 = x^2 + y^2$, valor que substituído en (26) nos da:

$$J_z = \int_0^A (x^2 + y^2) dA = \int_0^A x^2 dA + \int_0^A y^2 dA$$

ó sea $J_z = I_x + I_y$ — (27)

IV. 2.3 PRODUCTO DE INERCIA Y RADIOS DE GIRO DE AREAS PLANAS. TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS.

Con referencia a la misma figura, se define PRODUCTO DE INERCIA del área respecto a los ejes x, y , a la integral $P_{xy} = \int xy dA$ — (28)

Es conveniente hacer la aclaración que los momentos de inercia I_x, I_y siempre son positivos, lo cual se demostrará por el hecho de que la integral representa el límite de una suma de elementos positivos, es decir, aunque la coordenada correspondiente sea negativa, al elevarse al cuadrado el resultado es positivo y por lo tanto la suma es positiva.

Lo anterior tiene como explicación física al hecho de que todo cuerpo que tenga masa presentará una cierta resistencia a ser acelerado angularmente.

En cambio, el producto de inercia puede ser positivo, negativo o nulo, dependiendo de la propia figura y de los ejes de referencia correspondientes.

RADIOS DE GIRO:

18

A los cocientes siguientes, se les denomina radios de giro:

$$\begin{aligned} \Gamma_x &= \sqrt{\frac{I_x}{A}} \\ \Gamma_y &= \sqrt{\frac{I_y}{A}} \\ \Gamma_z &= \sqrt{\frac{J_z}{A}} \end{aligned} \quad | \quad \text{--- (29) ---}$$

Valores que se establecen a partir de expresiones como $\Gamma_x^2 A = \int_0^A y^2 dA$, para cada uno de los ejes correspondientes.

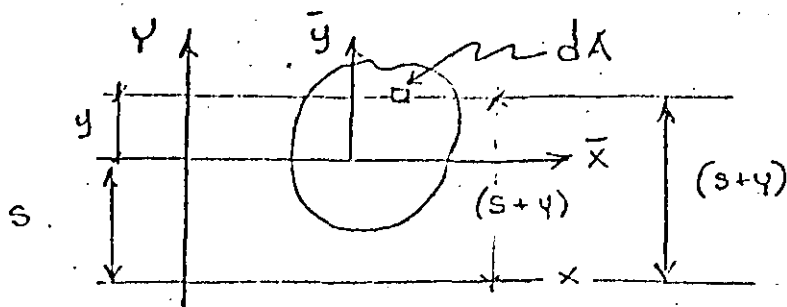
TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS.

Este teorema, también conocido como "Teorema de Steiner", es de gran utilidad para cálculo de los momentos de inercia de áreas, con respecto a ejes que tengan cualquier posición referente a la figura. Es decir puede disponerse para las figuras más usuales, de los momentos de inercia respecto a ejes que pasen por la base, o por el centroide de la figura y aprovechando el teorema de Steiner calcular su momento de inercia respecto a cualquier eje paralelo al eje dado.

Sea el área de la siguiente figura, por cuyo centroide se hacen pasar los ejes centroidales \bar{x} , \bar{y} .

Consideremos un eje cualquiera x , paralelo al eje centroidal \bar{x} ; se desea calcular el momento de inercia

I_x , en función A de la figura, del momento de inercia centroide $I_{\bar{x}}$ y de la distancia " s " entre ambos ejes



La distancia del elemento dA al eje xx' es $(s+y)$; por lo que el momento de inercia respecto a dicho eje vale

$$\int (s+y)^2 dA$$

Desarrollando el binomio dentro de la integral:

$$I_x = \int_0^A (y+s)^2 dA = \int_0^A y^2 dA + \int_0^A s^2 dA + \int_0^A 2sy dA$$

cada una de las tres integrales del segundo miembro de la ecuación anterior significa:

$$\int_0^A y^2 dA = I_{\bar{x}} = \text{momento de inercia centroidal.}$$

$$\int_0^A s^2 dA = A(s)^2 = \text{área, por el cuadrado de la distancia, entre} \\ \text{ambos ejes.}$$

$$\int 2sy dA = 2s \int_0^A y dA = 2s(Q_x) = 2s(0) = 0$$

Por lo que el momento de inercia es:

$$\boxed{I_x = I_{\bar{x}} + As^2} \quad (30) \text{ TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS.}$$

La demostración anterior, respecto al eje xx' puede generalizarse al eje yy' y al momento polar de inercia:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= I_{\bar{x}} + A(s)^2 \\ I_y &= I_{\bar{y}} + A(s)^2 \end{aligned} \right\} \text{ (31)}$$

$$J_z = J_{\bar{z}} + A(r)^2 \quad \text{TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS.}$$

En forma análoga también se establece este teorema

para el producto de inercia.

30

$$P_{xy} = I_{xy} + A(ab) \quad \text{--- (32) PRODUCTO DE INERCIA.}$$

En esta última ecuación a y b son las distancias de los ejes x, y , a los ejes centroidales correspondientes.

Si una superficie está formada por diversas áreas parciales, puede demostrarse el siguiente teorema:

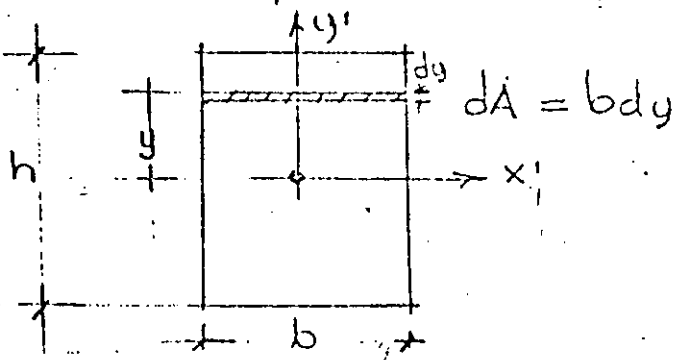
"El momento de inercia de una superficie compuesta por áreas parciales, respecto a un eje cualquiera de su plano es igual a la suma de los momentos de inercia de cada una de las superficies parciales respecto al mismo eje"

$$I_{x \text{ total}} = I_{x(1)} + I_{x(2)} + \dots + I_{x(n)} \quad \text{--- (32)}$$

IV · 2 · 4. EJES CENTROIDALES Y EJES PRINCIPALES.

Ejemplo.— Dado un rectángulo de base b y altura h , en el cual se han hecho pasar los ejes centroidales x', y' , paralelos respectivamente a la base y a la altura, como se indica en la figura. Determinar:

- Los momentos de inercia $I_{x'}$, $I_{y'}$.
- El producto de inercia $P_{x'y'}$ y los radios de giro $r_{x'}$, $r_{y'}$.
- El momento polar de inercia J_z y el radio de giro r_z .



SOLUCION .-

a) Para calcular el valor de $I_{x'}$, se elije el elemento dA indicado en la figura.

$$I_{x'} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 (b dy) = \frac{bh^3}{12}$$

análogamente se llega a $I_{y'} = \frac{b^3h}{12}$

b) Dado que (x', y') son ejes de simetría: $P_{x'y'} = 0$

De la definición de radio de giro:

$$r_{x'}^2 (bh) = I_{x'} = \frac{bh^3}{12} \quad \therefore r_{x'} = \sqrt{\frac{h^2}{12}}$$

$$r_{y'}^2 (bh) = I_{y'} = \frac{b^3h}{12} \quad r_{y'} = \sqrt{\frac{b^2}{12}}$$

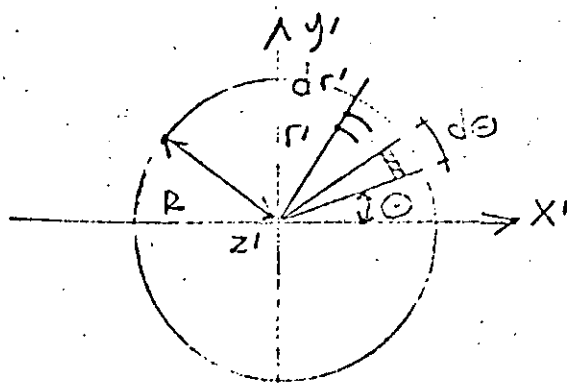
c) Para calcular el momento polar de inercia utilizamos la relación $J_{z'} = I_{x'} + I_{y'}$

o sea

$$J_{z'} = \frac{bh^3}{12} + \frac{b^3h}{12} = \frac{bh}{12} (h^2 + b^2)$$

$$J_{z'} = \frac{bh}{12} (b^2 + h)^2$$

Ejemplo.- Determine los momentos de inercia $I_{x'}$, $I_{y'}$, $J_{z'}$, así como los radios de giro $r_{x'}$, $r_{y'}$, $r_{z'}$ de un círculo de radio R , tal como se muestra en la figura sgte.



Considerando el elemento diferencial indicado en la figura, se tiene la integral:

$$I_{x'} = \int_0^{2\pi} \int_0^R (r' \cos \theta)^2 r' dr' d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2\pi}{4} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi R^4}{4}$$

Por simetría $I_{x'} = I_{y'} = \frac{\pi R^4}{4}$

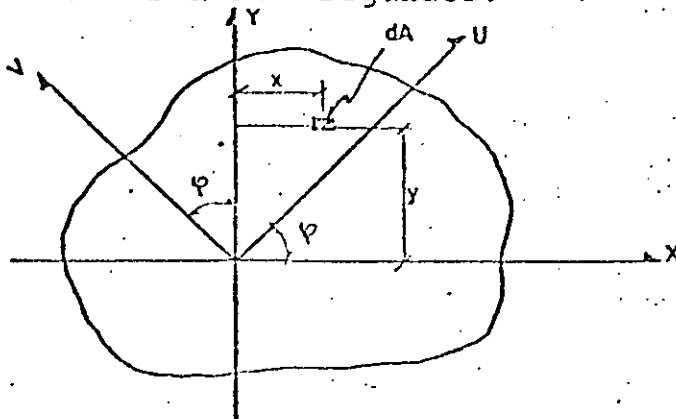
Los radios de giro

$$r_{x'} = r_{y'} = \sqrt{\frac{I_{x'}}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi R^4}{4}}{\pi R^2}} = \sqrt{\frac{R^2}{4}}$$

$$J_{z'} = \frac{\pi R^4}{4} + \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$r_{z'} = \sqrt{\frac{J_{z'}}{A}} = \sqrt{\frac{R^2}{2}}$$

Considerando los ejes "x" e "y" que se cortan en el punto "o" - de un arco plano y los ejes "u" y "v" que se cortan en el mismo punto y forman un ángulo "φ" con los anteriores. A partir de los Momentos de Inercia respecto a los primeros es posible obtener los correspondientes a los segundos.



$$u = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

$$v = y \cos \varphi - x \sin \varphi$$

Momento de Inercia respecto al eje u:

$$I_u = \int v^2 dA = \int (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2 dA = \int (y^2 \cos^2 \varphi - 2y \cos \varphi \sin \varphi + x^2 \sin^2 \varphi) dA$$

$$= \cos^2 \varphi \int y^2 dA + \sin^2 \varphi \int x^2 dA - 2 \sin \varphi \cos \varphi \int xy dA$$

$$I_u = I_x \cos^2 \varphi + I_y \sin^2 \varphi - 2 I_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \quad \dots \dots (1)$$

pero:

$$2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2 \varphi$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2 \varphi}{2} \quad \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2 \varphi}{2}$$

$$I_u = I_x \left(\frac{1 + \cos 2 \varphi}{2} \right) + I_y \left(\frac{1 - \cos 2 \varphi}{2} \right) - I_{xy} (\sin 2 \varphi)$$

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2 \varphi - I_{xy} \sin 2 \varphi \quad \dots \dots (2)$$

Con las expresiones (1) o (2) se puede obtener el valor de I_u en función de $I_x, I_y, I_{xy}, \varphi$.

En la misma forma el momento de inercia respecto al eje "v" es:

$$I_v = \int u^2 dA = \int (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 dA$$

$$= \int (x^2 \cos^2 \varphi + 2xy \cos \varphi \sin \varphi + y^2 \sin^2 \varphi) dA$$

$$= \cos^2 \varphi \int x^2 dA + \sin^2 \varphi \int y^2 dA + 2 \cos \varphi \sin \varphi \int xy dA$$

$$I_v = I_x \sin^2 \varphi + I_y \cos^2 \varphi + 2 I_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \quad \dots \dots (3)$$

pero:

$$2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2 \varphi$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$$

$$x \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$$

or lo tanto:

$$I_v = I_x \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) + I_y \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) + I_{xy} (\sin 2\varphi)$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_y - I_x}{2} \cos 2\varphi + I_{xy} \sin 2\varphi \dots (4)$$

Con las expresiones (3) y (4) podemos obtener I_v en función de I_x, I_y, I_{xy} , y φ .

Sumando las expresiones (2) y (4) se obtiene:

$$I_u + I_v = I_x + I_y = I_p$$

Es decir que para un punto dado de un area, la suma de los momentos de inercia respecto a dos ejes rectangulares es constante e igual al momento polar de inercia.

Además:

$$\begin{aligned} I_{uv} &= \int uv dA = \text{producto de inercia respecto a los ejes "uv"} \\ &= \int ((x \cos \varphi + y \sin \varphi) (y \cos \varphi - x \sin \varphi)) dA \\ &= \int (xy \cos^2 \varphi + y^2 \sin \varphi \cos \varphi - x^2 \cos \varphi \sin \varphi - xy \sin^2 \varphi) dA \\ &= \cos^2 \varphi \int xy dA + \sin \varphi \cos \varphi \int y^2 dA - \cos \varphi \sin \varphi \int x^2 dA - \sin^2 \varphi \int xy dA \\ &= I_{xy} \cos^2 \varphi - I_{xy} \sin^2 \varphi + I_x \sin \varphi \cos \varphi - I_y \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

$$I_{uv} = I_{xy} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) - I_{xy} \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) + I_x \left(\frac{\cos 2\varphi}{2} \right) - I_y \left(\frac{\sin 2\varphi}{2} \right)$$

$$I_{uv} = I_{xy} \cos 2\varphi + \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right) \sin 2\varphi \dots (5)$$

Expresión con la cual se puede obtener I_{uv} en función de: I_x, I_y, I_{xy} .

Observese que al girar los ejes un ángulo 90° se aumenta 2 en 180° y el producto de inercia conservando su valor absoluto cambio de signo.

Ejes Principales

Para un punto dado de un area, es posible obtener un par de ejes. Para los cuales el momento de inercia es máximo y mínimo, dichos ejes se denominan ejes principales. puesto que:

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\varphi - I_{xy} \sin 2\varphi$$

derivando respecto a φ .

$$\frac{du}{d\varphi} = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right) (-2\text{sen}2\varphi) - I_{xy}(2\text{cos}2\varphi)$$

Igualando a cero para obtener los valores máximos y mínimos:

$$-(I_x - I_y)\text{sen}2\varphi - 2I_{xy}\text{cos}2\varphi = 0$$

$$\boxed{\text{Tan } 2\varphi = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}} \quad \dots\dots (6)$$

Con ésta expresión se pueden obtener los valores del ángulo " φ ", los cuales difieren 90° , que nos dan los valores máximo y mínimo del momento de inercia, siendo estos los siguientes:

$$I_{\begin{matrix} \text{max} \\ \text{min} \end{matrix}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{I_x - I_y}{2} \left(\frac{I_y - I_x}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}} \right) \pm I_{xy} \left(\frac{2I_{xy}}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}} \right)$$

$$I_{\begin{matrix} \text{max} \\ \text{min} \end{matrix}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{(I_x - I_y)^2}{2\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}} \pm \frac{2I_{xy}^2}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}$$

$$I_{\begin{matrix} \text{max} \\ \text{min} \end{matrix}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}{2\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}$$

$$I_{\begin{matrix} \text{max} \\ \text{min} \end{matrix}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \frac{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}$$

$$\boxed{I_{\text{max}} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}} \quad \dots\dots (7)$$

$$\boxed{I_{\text{min}} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}} \quad \dots\dots (8)$$

Con estas expresiones podemos obtener los valores máximos y mínimos del momento de inercia del área respecto a ejes que pasan por un punto dado de ella.

Es conveniente observar que para los ejes principales el producto de inercia es nulo; o sea, sustituyendo (8) en (5)

$$I_{uv} = I_{xy} \frac{I_y - I_x}{((I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2)^{1/2}} + \frac{I_x - I_y}{2} \frac{2I_{xy}}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}} = 0$$

Por lo que los ejes de simetría son principales, pero no todos los ejes principales son de simetría.

Círculo de Mohr

De la expresión (2) antes señalada

$$I_u - \frac{I_x + I_y}{2} = \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\varphi - I_{xy} \sin 2\varphi \dots (2)$$

y la expresión (5)

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi \dots (5)$$

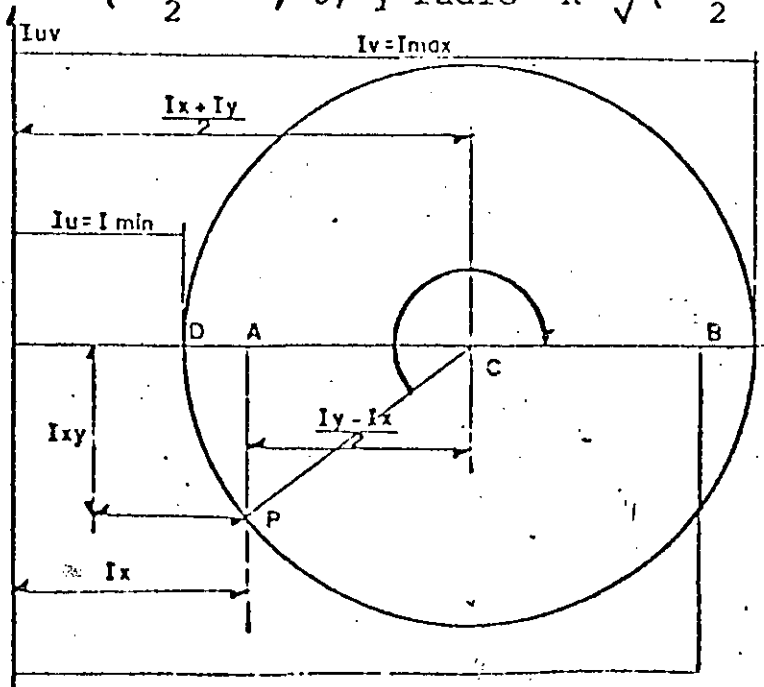
elevando al cuadrado (2) y (5)

$$(I_u - \frac{I_x + I_y}{2})^2 = (\frac{I_x - I_y}{2})^2 \cos^2 2\varphi - (I_x - I_y) I_{xy} \sin 2\varphi \cos 2\varphi + I_{xy}^2 \sin^2 2\varphi$$

$$I_{uv}^2 = (\frac{I_x - I_y}{2})^2 \sin^2 2\varphi + I_{xy}^2 \cos^2 2\varphi$$

$$(I_u - \frac{I_x + I_y}{2})^2 + I_{uv}^2 = (\frac{I_x - I_y}{2})^2 + I_{xy}^2$$

Observando esta expresión podemos ver que se trata de la ecuación de una circunferencia, relacionando las variables I_u y I_{uv} de centro "c" $(\frac{I_x + I_y}{2}, 0)$ y radio $R = \sqrt{(\frac{I_x - I_y}{2})^2 + I_{xy}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$



Punto base P(Ix, Ixy)
Lado base PC

El centro del círculo se encuentra a $\overline{OC} = \overline{AO} + \overline{AC}$

$$\tan 2\psi = \frac{2(8348)}{42222-53088} = \frac{16696}{-10866} = -1.54$$

$$2\psi = \text{ang tan}(-1.54)$$

$$2\psi = -57^{\circ}00' \quad 123^{\circ}00'$$

$$\psi = -28^{\circ}30' \quad 61^{\circ}30'$$

Los valores máximos de los momentos de inercia se obtienen de la siguiente forma:

$$I_{\max} = 41864 + \frac{1}{2} 511225 + 278756000$$

$$I_{\max} = 50220 \text{ cm}^4$$

$$I_{\min} = 41864 - \frac{1}{2} 511225 + 278756000$$

$$I_{\min} = 33508 \text{ cm}^4$$

