



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**ANÁLISIS CINEMÁTICO Y DINÁMICO DE UN
ROBOT PARALELO TIPO DIAMANTE**

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO MECATRÓNICO

PRESENTA:

GUADALUPE DALIA GARCÍA GÁLVEZ



Director de tesis:

Dr. Edmundo Gabriel Rocha Cózatl

Co- Director de tesis:

M. I. Francisco Cuenca Jiménez

CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO, D.F. FEBRERO 2008

Agradecimientos

A lo largo de la realización de este trabajo pensé que muchas de las cosas que había hecho eran muy difíciles, pero no fue hasta que llegué aquí cuando me di cuenta, de que, en realidad es mas difícil escribir los agradecimientos que el Análisis Cinemático y Dinámico de un Robot Paralelo tipo Diamante.

La dificultad radica en muchos aspectos, el principal es quizá, el hecho de saber cuales son las palabras adecuadas para agradecer todo lo que me han dado y todo lo que tengo, el segundo radica en el número, son tantas a las personas que les tengo que agradecer que no se si quepan en estas hojas, quizá si así lo hiciera, mi tesis seria del doble de tamaño de lo que es ahora. A si que si por algún fatal error se me paso tu nombre, no te ofendas recuerda que como buen Ingeniero hay que optimizar. Afortunadamente el corazón no esta hecho para optimizar y ten por seguro que ahí si aparece tu nombre.

Sin más preámbulos empezaré.....

Dios: *Gracias por que el tamaño de la hoja que me diste me ha permitido escribir mis sueños, gracias por regalarme padres, hermanos, abuelos, primos, tíos, maestros y amigos tan maravillosos como los que me has dado, gracias por cuidarme a lo largo de mi vida...*

Mama y Papa: *Gracias por que toda su vida han confiado en mi, me han apoyado, alentado, corregido, enseñado, pero sobre todo me han amado incondicionalmente. Sus sueños son también un reflejo de los míos, este trabajo no es solo mió sino nuestro, los amo...*

Iván y Eric: *Vivir la vida con ustedes ha estado llena de matices, pero que seria yo sin ustedes? tan diferentes pero tan iguales, ustedes son parte fundamental de mi vida, este trabajo también es nuestro, gracias por todos los momentos que me han regalado, los quiero mucho...*

Abue: *Gracias por toda la ternura, consejos, detalles, el tiempo, pero sobre todo el amor que me has regalado, este trabajo también te lo dedico a tí, te quiero...*

Anel: *La vida no siempre es fácil. Gracias por todos los momentos, las pláticas y el cariño que me has regalado, hoy te comparto una parte de mí vida, como tú muchas veces lo has hecho, te quiero mucho...*

Gracias a toda mi familia por que han sido parte importante de mi vida, abuelos, tíos, primos, sobrinos, en fin todos gracias por ayudarme y alentarme a ser lo que ahora soy, los quiero mucho.

La que considero mi otra familia también se conforma de muchos miembros, aquellos con los que conviví a lo largo de mi vida como estudiante, se que si empezará a mencionarlos desde que entre al Jardín de Niños serian muchos, así que a todos gracias por lo que vivimos juntos en la época en la que nos conocimos.

Dentro de esta familia, hay algunos en especial a los que les debo todo mi agradecimiento y todo mi trabajo

Edmundo: *Gracias por todo lo que me enseñaste, gracias por las charlas, por el tiempo, por la paciencia y la dedicación con la que seguiste mi trabajo, gracias por los regaños, por las sonrisas, por las gomitas, pero sobre todo gracias por tu amistad, Este trabajo también es tuyo, te quiero mucho...*

Francisco: *Gracias por que al igual que Edmundo, tu también fuiste quien oriento este trabajo y una parte de el también es tuya, gracias por todo el conocimiento que me y nos regalas a diario. Eres un excelente Maestro, pero sobre todo un excelente ser humano...*

Manuel: *Quizás la formación del ser humano es la materia mas difícil de enseñar, pero sus habilidades para hacerlo son notables. Gracias por que lo mucho que soy también se lo debo a usted. Lo quiero mucho...*

A mis sinodales: *Gracias por que sus valiosas correcciones y comentarios hicieron de este un mejor trabajo.*

A todos aquellos profesores que tuve la suerte de tener durante mi formación como Ingeniera, gracias por todo su conocimiento.

Otra parte fundamental de esta segunda familia son mis amigos

Ulises: *Gracias, por que una parte de este trabajo también te la debo a ti, gracias por el apoyo que me diste desde que nos conocimos, gracias por tu tiempo, tus enseñanzas, por tu amistad, pero sobre todo por tu amor. Te amo...*

Jesús: *Ulises tu y yo comenzamos el camino juntos, circunstancias nos dieron caminos diferentes, pero no podía dejar de agradecerte y decir que una parte de este trabajo también es tuya, gracias por tu amistad, te quiero mucho...*

A Daniela y Arlem: *Gracias por que además de ser mis mejores amigas fueron como mis hermanas, gracias por su amistad, las quiero mucho...*

A Fernando, Ariana, Mayra, Kevin, Lalo, Fish, Said: *Gracias por ser mis amigos y compañeros durante mi carrera.*

A Iván, Julio, Baboon, Pepe, Jimmy, Gabriel, Edson, Ely de Edson y Arlem: Gracias por esas vacaciones en Puerto, y mas aun gracias por su valiosa amistad, su apoyo y su comprensión, los quiero mucho...

A Doby, Goody, Viviana, Beto, Gus y Magadan: Gracias por enseñarme que la formación integral de un Ingeniero no solo esta en los libros o en las aulas, los quiero...

A todos aquellos amigos que tuve durante mi carrera gracias.

*No me queda más que agradecerle a mi **Alma Mater la UNAM**, que con todo desinterés me hizo lo que soy, te llevo en mi corazón, como lo que eres mi segunda casa, no dudes que haré hasta lo imposible por retribuirte la gran alegría y satisfacción que hoy me regalas.*

*Dalia
Feb, 2008*

Como mención especial, gracias a George Lucas por que me situó *“hace muchos años en una Galaxia muy lejana”....*

A Pois, Ino, Bobby, Negro, Pesca

*A ustedes que son lo que mas quiero en mi vida, gracias por ser parte
de mis sueños, a pesar de mis errores y complicaciones no duden
cuanto los amo.*

*A ustedes les dedico este trabajo con todo mi amor, gracias por hacer
de mi el ser humano que soy.*

Lupita

Índice general

1. Generalidades	1
1.1. Introducción	1
1.2. Objetivos	3
1.2.1. Objetivo General	3
1.2.2. Objetivos Particulares	3
1.3. Marco teórico y Estado del arte	3
1.4. Soluciones al problema de tomar y colocar (Pick and Place)	9
1.4.1. Cadena Cinemática Abierta	11
1.4.2. Cadena Cinemática Cerrada	12
1.5. Manipuladores seriales contra manipuladores paralelos	12
1.6. Clasificación de los Robots Paralelos	15
1.6.1. Robots Planares	17
1.6.2. Movilidad	17
1.7. Metodología para el análisis de robots con cadena cinemática abierta . . .	18
1.8. Metodología para el análisis del robot paralelo considerado en este trabajo	20
2. Estructura Física	21
2.1. Descripción del Robot Paralelo Tipo Diamante	21
2.2. Movilidad del Robot Paralelo	22
3. Análisis Cinemático	25
3.1. Introducción	25
3.2. Análisis Cinemático	25
3.3. Solución Algebraica	26
3.3.1. Cálculo de Posiciones	29
3.3.2. Cálculo de Velocidades	32
3.3.3. Cálculo de Aceleraciones	35
4. Análisis Dinámico por el Método Euler-Lagrange	39
4.1. Introducción	39
4.2. Función Lagrangiana	39
4.3. Posiciones de Centros de Gravedad	41

4.4.	Velocidades de Centros de Gravedad	47
4.5.	Ecuación de Euler-Lagrange	54
4.5.1.	Desarrollando los Términos $\frac{\partial L_i}{\partial \dot{q}_j}$	55
4.5.2.	Desarrollando los términos $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)$	63
4.5.3.	Desarrollando el término $\frac{\partial L}{\partial q_j}$	68
4.5.4.	Fuerzas Generalizadas	77
4.5.5.	Modelo dinámico	81
5.	Simuladores Numéricos	85
5.1.	Introducción	85
5.2.	Simulador programado en <i>Mathematica</i> [©]	85
5.2.1.	Análisis Cinemático Inverso	85
5.2.2.	Análisis Dinámico	90
5.3.	Simulador programado en <i>Matlab con Simulink</i> [©]	90
5.3.1.	Programación del Modelo Dinámico	90
6.	Conclusiones	97
A.	Ecuaciones Auxiliares	101
A.1.	Obtención de θ_{23} en función de \mathbf{q}	101
A.1.1.	Obteniendo $\frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial \dot{q}_j}$	102
A.1.2.	Obteniendo $\frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial \dot{q}_j}$	103
A.2.	Obtención de θ_{45} en función de \mathbf{q}	105
A.3.	Ecuaciones de velocidad del lado derecho	106
B.	Simulador en <i>Mathematica</i>[©]	109
C.	Simulador en <i>Matlab con Simulink</i>[©]	111

Índice de figuras

1.1. Posicionador de Antenas	2
1.2. Primer diseño conceptual de un mecanismo paralelo	6
1.3. Robot paralelo para operaciones de pintado con spray	7
1.4. Plataforma de Gough	7
1.5. Plataforma de Stewart	8
1.6. Simulador de movimiento de Cappel	8
1.7. Instalación para el empaquetado de Pretzels en una industria de pan	9
1.8. SurgiScope en acción en una cirugía robótica en el Laboratorio Humboldt de la Universidad de Berlín	10
1.9. Robots Delta para operaciones de tomar y colocar y perforación	10
1.10. Robot ensamblador basado en la plataforma de Stewart	11
1.11. Robot en CCC tipo diamante	12
1.12. Cadenas cinemáticas	13
1.13. Configuraciones planares de 2 y 3 gdl	17
1.14. Análisis de singularidades y espacio de trabajo	19
2.1. Diseño conceptual del robot tipo Diamante	22
2.2. Esquema del mecanismo para el análisis de movilidad	23
2.3. Cadenas cinemáticas del robot paralelo tipo Diamante	23
3.1. Modelo Cinemático de un Robot Paralelo tipo Diamante	27
3.2. Modelo Cinemático de un Robot Paralelo tipo Diamante	28
4.1. Centros de Gravedad de los cuerpos en el Robot paralelo tipo Diamante	42
4.2. Centros de Gravedad de los cuerpos en el Robot paralelo tipo Diamante	43
4.3. Torques del robot paralelo tipo Diamante	78
4.4. Cuerpos del manipulador paralelo	79
5.1. Graficas del perfil quíntico	87
5.2. Trayectoria semielíptica	87
5.3. Posición articular θ_3	88
5.4. Velocidad angular θ_3	88

5.5. Aceleración angular θ_3	89
5.6. Secuencia en cuatro etapas de la animación del robot paralelo	89
5.7. Simulador de trayectoria del robot paralelo	92
5.8. Diagrama de bloques del subsistema <i>Robot</i>	92
5.9. Pares τ_2 y τ_4 . Recorrido de derecha a izquierda	93
5.10. Pares τ_2 y τ_4 . Recorrido de izquierda a derecha	93
5.11. Seguimiento de la trayectoria del manipulador paralelo	94

Índice de cuadros

1.1. Configuraciones básicas de los robots	5
1.2. Diferencias entre manipuladores en CCA y CCC	13
1.3. Clasificación de los Robots Paralelos de acuerdo a su movimiento	16

Capítulo 1

Generalidades

1.1. Introducción

En general los primates son los seres que cuentan con una mayor capacidad de manipulación, esto se debe a las dos extremidades bien dotadas que poseen para dicho propósito, cabe destacar que algunos de ellos pueden incluso utilizar sus patas con la misma finalidad. Como la propia experiencia nos deja ver el uso de ambas extremidades nos permite y les permite, una mejor manipulación de casi cualquier objeto. Particularmente el hombre puede valerse de una o de ambas extremidades para la manipulación de objetos, pero la posibilidad de manipulación se ve aumentada considerablemente al utilizar los dos brazos simultáneamente.

Un ejemplo de ello lo podemos encontrar en la halterofilia, un levantador de pesas es capaz de levantar un mayor peso si utiliza ambos brazos, y lo mismo sucede en muchas de las actividades que realizamos a diario.

En su búsqueda por hacer la vida más cómoda y satisfactoria, el hombre ha basado muchos de sus experimentos e inventos en la simple observación de la naturaleza y de su misma estructura en sí. Estas consideraciones son las que hacen posible concebir robots denominados paralelos, en vez de solo pensar en robots de tipo seriales.

Un robot paralelo es aquel cuya estructura mecánica está compuesta por una cadena cinemática cerrada, la cual consta de cadenas seriales separadas que se conectan al eslabón fijo (plataforma fija) con el efector final (plataforma móvil) [21].

Como lo menciona Aracil [1] la definición de robot paralelo puede ser mal entendida o puede entrar en conflicto con los desarrollos sobre los robots coordinados que también forman cadenas cinemáticas cerradas. La diferencia radica en que los robots paralelos



Figura 1.1: Posicionador de Antenas

simplifican estas cadenas de tal manera que cada una de ellas dispone, en general, de un único actuador, reduciendo así su complejidad y permitiendo canalizar mejor la energía consumida, sin mencionar las mejores velocidades que puede lograr debido a la misma simplificación

La Figura 1.1 muestra una estructura de cadena cinemática cerrada, utilizada para el posicionamiento de antenas parabólicas cuyo movimiento se logra haciendo variar la longitud de los actuadores lineales que la soportan

En este trabajo se presenta el análisis cinemático y dinámico de un *Robot Paralelo tipo Diamante*, además de la implementación de un simulador, el cual representa el inicio de un proyecto que tiene por objetivo el diseño, construcción y control de un prototipo de Robot Paralelo para operaciones de tomar y colocar.

El manipulador considerado en este trabajo fue propuesto por Huang et al. (en [19] se describe su estructura y se analiza su síntesis), cuenta con dos grados de libertad, actúa sobre un plano vertical y resulta de gran utilidad para las operaciones ya anteriormente mencionadas (*pick and place*). Se ha adoptado el diseño de tipo diamante por la amplia destreza y velocidad que este desarrolla al realizar operaciones de tomar y colocar, según reportan sus diseñadores.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Realizar el análisis cinemático de un robot paralelo y desarrollar su modelo dinámico empleando la metodología Euler-Lagrange, para el posterior estudio y desarrollo de controladores aptos para este tipo de robots.

1.2.2. Objetivos Particulares

1. Obtener el modelo matemático del robot. En este rubro el objetivo es realizar un análisis cinemático, de movilidad y de las trayectorias del mecanismo; además, con auxilio de los resultados obtenidos establecer un modelo dinámico.
2. Implementar simuladores en las paqueterías *Matlab* y *Mathematica* que resuelvan numéricamente las ecuaciones del modelo matemático del robot.

Este trabajo será útil en un futuro para la puesta en marcha de un prototipo considerando que el modelo y el simulador permitirán evaluar el espacio de trabajo y desarrollar leyes de control adecuadas para este manipulador.

1.3. Marco teórico y Estado del arte

Según el Robot Institute of America (RIA), el término robot se define como sigue: *Un robot es un manipulador multifuncional reprogramable diseñado para mover material, partes, herramientas o dispositivos especializados a través de movimientos variables programados para el desarrollo de varias tareas.*[17]

Esta definición data de 1979, época en que se desarrollaban las máquinas de control numérico (CNC) y la teleoperación como campos independientes. Es por ello que la definición incluye el término manipulador, que puede entenderse casi exclusivamente como un dispositivo diseñado para pintar o para mover material o herramientas en una línea de ensamble.

Sin embargo, la robótica abarca un campo de acción más extenso; de hecho, actualmente se distinguen tres tipos de robots: los robots industriales, los utilitarios y los de entretenimiento.

Entre los robots industriales se ha desarrollado una gran cantidad de modelos que incluyen movimientos de rotación y traslación en sus pares cinemáticos. Estos modelos

en muchas ocasiones pueden arreglarse para obtener configuraciones bien definidas en el ámbito de la robótica, como es el caso de la configuración del robot Stanford, el PUMA o el robot SCARA

En la Tabla 1.1 se muestran algunas de las configuraciones en los robots, como son la configuración articulada o antropomórfica (RRR), que incluye tres pares cinemáticos rotacionales; o la configuración esférica (RRP), que tiene dos pares cinemáticos rotacionales que actúan como los ángulos directores de un vector y un par cinemático prismático (de desplazamiento), que define el radio de la esfera.

Otra configuración es la SCARA (RRP), que tiene dos pares cinemáticos rotacionales paralelos, por los que se mueve en un plano. Además, tiene un par cinemático prismático que se desplaza en dirección normal al plano anterior.

La configuración cilíndrica (RPP) actúa con un par cinemático rotacional y dos prismáticas. Las dos pares cinemáticos prismáticos forman un plano de acción que rota por medio del par cinemático rotacional.

Finalmente tenemos la configuración cartesiana (PPP), que logra su desplazamiento a través de ejes coordenados con pares cinemáticos prismáticos.


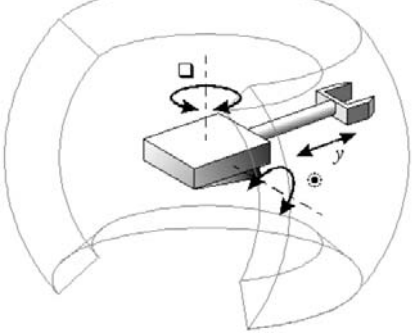
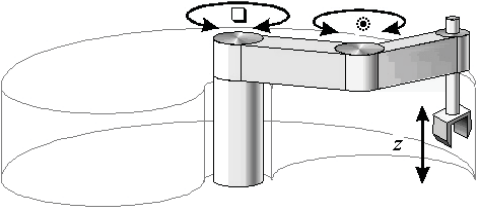
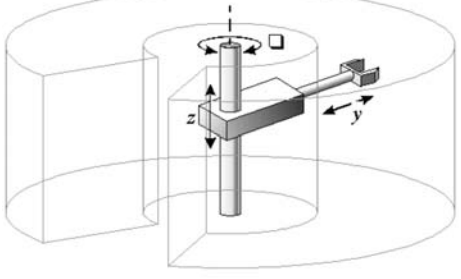
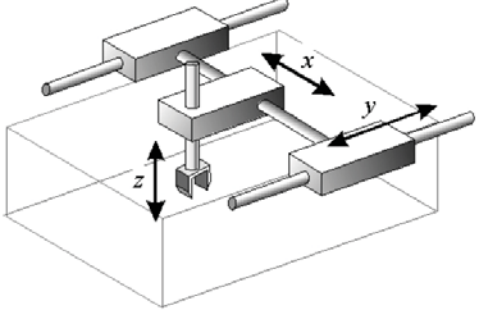
Las configuraciones anteriores son bien conocidas y están perfectamente definidas. De hecho, muchos robots industriales comerciales ocupan estas configuraciones y disponen de software específico para ser operados.

Sin embargo, en ciertos campos como la medicina, la industria automotriz, etc. no siempre es suficiente la utilización de robots con cadena cinemática abierta. Por ello, con mayor frecuencia y con mejores resultados en términos de destreza, velocidad y precisión, se utilizan mecanismos de cadena cinemática cerrada para cierto tipo de operaciones industriales.

La historia ubica a las estructuras paralelas muchos siglos atrás, desde que los primeros geómetras franceses e ingleses realizaron estudios sobre los poliedros y sus aplicaciones.

El primer mecanismo paralelo fue dado a conocer por James E. Gwinnett [5], el cual consistía en una plataforma de movimiento para el entretenimiento humano como se muestra en la Figura 1.2, por desgracia nunca llegó a construirse.

Pocos años después sería William L.V. Pollard, quien presentara un robot de 5 grados de libertad destinado a operaciones de pintado con spray (Figura 1.3). El manipulador consistía en tres brazos de dos eslabones cada uno, los eslabones estaban unidos mediante juntas universales. Los tres actuadores con los que contaba controlaban la posición de la herramienta, en tanto la orientación estaba dada por otros dos actuadores situados en la base que transmitían el movimiento de la herramienta mediante la rotación proporcionada

<p>Configuración Antropomorfica(RRR)</p>	
<p>Configuración Esférica (RRP)</p>	
<p>Configuración SCARA (RRP)</p>	
<p>Configuración cilíndrica (RPP)</p>	
<p>Configuración cartesiana (PPP)</p>	

Cuadro 1.1: Configuraciones básicas de los robots

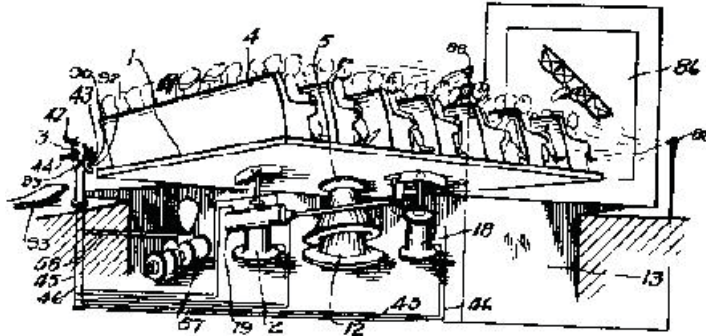


Figura 1.2: Primer diseño conceptual de un mecanismo paralelo

a unos cables flexibles [1].

Estos dos mecanismos son sólo un ejemplo de lo antiguo que ha sido el estudio de los mecanismos paralelos, sin embargo han sido otros manipuladores los que han hecho que la robótica cobrara la importancia que hoy en día tiene.

Uno de ellos fue el que inventó en 1947 el Dr. Eric Gough: una plataforma paralela cuyo diseño consistía en un hexápodo con lados de longitud variable (Figura 1.4). Esta plataforma era utilizada por la compañía Dunlop para comprobar el comportamiento de los neumáticos bajo cargas aplicadas en diferentes ejes, con ello se intentaba simular el proceso de aterrizaje de un avión.

Pero no fue hasta 1965 que surgiría la que hasta hoy es considerada la plataforma paralela más importante, la plataforma de Stewart (Figura 1.5), que se dió a conocer a través de un artículo que describía una plataforma de movimiento de 6 grados de libertad destinada a trabajar como simulador de vuelo [18].

Al mismo tiempo que Stewart realizaba sus trabajos sobre su famosa plataforma el Ingeniero Klaus Cappel realizaba investigaciones también con plataformas paralelas de 6 grados de libertad y sería en 1967 cuando patentara un simulador de movimiento basado en un hexápodo; algunos de sus inventos se muestran en la Figura 1.6.

Sería hasta 1978, cuando el uso de los mecanismos paralelos se reservara solamente a las plataformas en su mayoría de simulación de vuelo, ya que ese año K. H. Hunt sugeriría que los mecanismos de tipo paralelo de los simuladores de vuelo podían ser usados como robots manipuladores. En su trabajo Hunt [6] destaca el hecho de que los manipuladores paralelos requieren de un estudio más detallado en el contexto de las aplicaciones robóticas

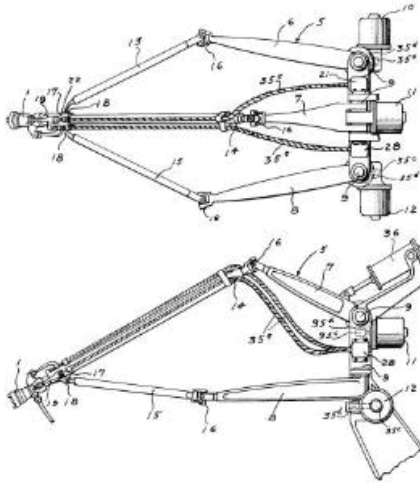


Figura 1.3: Robot paralelo para operaciones de pintado con spray

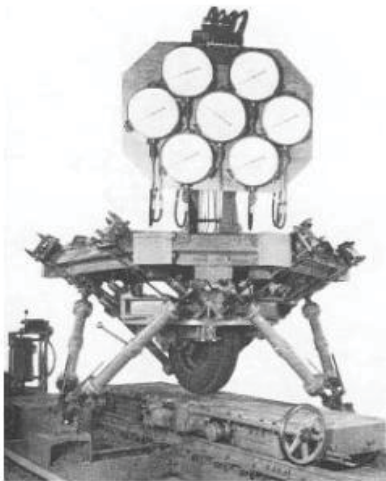


Figura 1.4: Plataforma de Gough

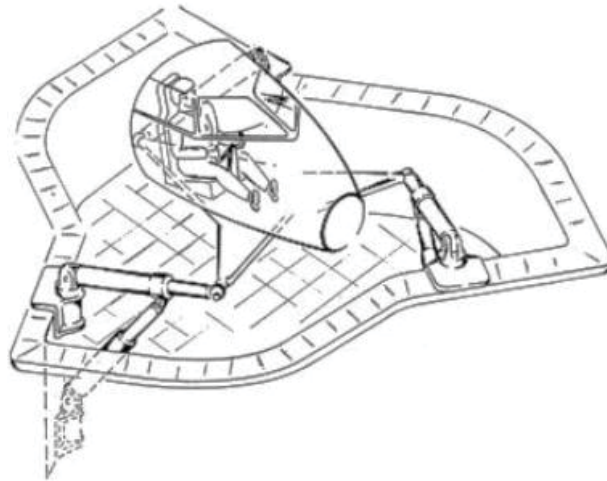


Figura 1.5: Plataforma de Stewart

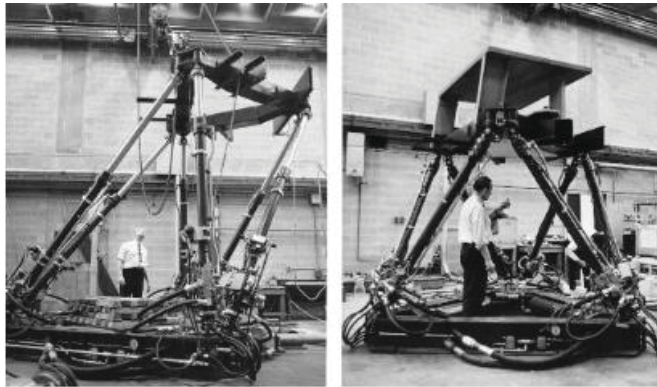


Figura 1.6: Simulador de movimiento de Cappel



Figura 1.7: Instalación para el empaquetado de Pretzels en una industria de pan

a la vista de las ventajas en cuanto a rigidez y precisión respecto a los robots en serie convencionales [1].

En 1979, Mc Callion y Pham [8] propusieron utilizar la plataforma de Stewart como manipulador paralelo para una célula de ensamblaje robotizada, basándose en el hecho de que la posición del efector final resultaba mucho menos sensible a los errores que presentaban los sensores articulares de los robots en serie y además de que la gran rigidez del manipulador paralelo aseguraba que las deformaciones de los actuadores fueran mínimas lo que daba como resultado una mayor precisión en el posicionamiento del manipulador.

En la actualidad las aplicaciones de los manipuladores paralelos empiezan a tener un mayor auge en la industria, en su mayoría la automotriz, pero sin restarles importancia en el campo de la medicina y alimentos, esto quizás debido a las amplias ventajas que presentan con respecto a manipuladores de tipo serial, ejemplos de esto se muestra en las Figuras 1.8 a 1.10.

1.4. Soluciones al problema de tomar y colocar (Pick and Place)

El problema de tomar y colocar ha estado presente desde la invención de los primeros autómatas, pero se ve enfatizado cuando hay que trasladar algún objeto o sustancia peligrosa o muy pesada, o bien, cuando estas acciones son repetitivas, invariables o rutinarias. Para solucionar este problema el hombre ha ideado mecanismos, entre los que se encuen-



Figura 1.8: SurgiScope en acción en una cirugía robótica en el Laboratorio Humboldt de la Universidad de Berlín



Figura 1.9: Robots Delta para operaciones de tomar y colocar y perforación

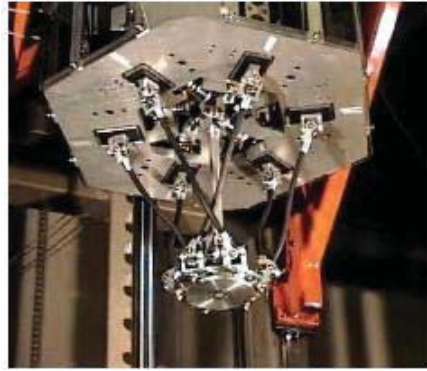


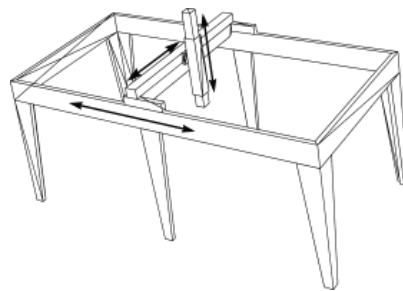
Figura 1.10: Robot ensamblador basado en la plataforma de Stewart

tran los manipuladores de cadena cinemática abierta, y en menor cantidad, pero no menos importantes, los de cadena cinemática cerrada.

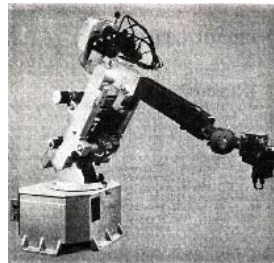
Algunos ejemplos de estas dos configuraciones se analizan a continuación:

1.4.1. Cadena Cinemática Abierta

Las Figuras siguientes ilustran dos configuraciones de robots que levantan y depositan objetos. El primero con tres ejes de movimiento se trata de un robot tipo grúa y el segundo de un brazo articulado donde el mecanismo de sujeción funciona mediante un *gripper* (una tenaza que abre y cierra dependiendo de la posición del actuador para apertura).



Robot tipo grúa



Robot en CCA

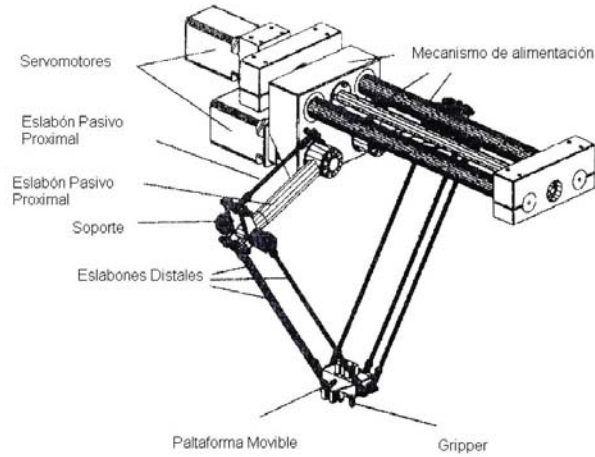


Figura 1.11: Robot en CCC tipo diamante

1.4.2. Cadena Cinemática Cerrada

La Figura 1.11 muestra un robot de cadena cinemática cerrada o robot paralelo. El robot cuenta con ejes de movimiento: dos de rotación que permiten su desplazamiento a lo largo del riel sobre el plano de trabajo y un tercero que permite la traslación.

1.5. Manipuladores seriales contra manipuladores paralelos

El estado del arte presentado en la Sección 1.3 nos ha dado una amplia visión de la gran variedad de aplicaciones para cada uno de los mecanismos, ya sea de cadena cinemática abierta o cadena cinemática cerrada, y a partir de ello hemos podido observar a simple vista las diferencias estructurales que existen de un mecanismo con respecto a otro. En este apartado nos referimos más a fondo a estas y a otras diferencias entre estos dos tipos de manipuladores.

Los motivos por los que en los últimos años se ha planteado la posibilidad de utilizar mecanismos paralelos en lugar de mecanismos seriales para las operaciones de tomar y colocar pueden deducirse mediante la observación del modelo conceptual como se presenta en la Figura 1.12.

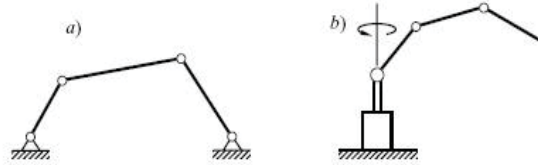


Figura 1.12: Cadenas cinemáticas

Una de las mayores diferencias entre los robots paralelos y los robots seriales es el tipo de cadena cinemática que manejan estos mecanismos. En general podemos distinguir en los robots paralelos una cadena cinemática cerrada (CCC), mientras en los robots seriales suele presentarse más comúnmente una cadena cinemática abierta (CCA). Esto se observa claramente en la Figura 1.12, donde en a) observamos un manipulador de tipo paralelo que forma un lazo cerrado o anillo tal que cada uno sus miembros está enlazado nada más con dos miembros de la misma cadena, mientras que en b) observamos un manipulador de tipo serial con un lazo abierto; esta característica proporciona al robot paralelo una mayor estabilidad y mejora su destreza al actuar como un soporte entre los lazos cinemáticos. Otras diferencias se denotan más puntualmente en la Tabla 1.2, de acuerdo con [1], [19] y [16].

Característica	CCA	CCC
Area de trabajo	Grande	Mediana
Potencia	Mediana	Alta
Velocidad	Mediana	Alta
Destreza	Mediana	Alta

Cuadro 1.2: Diferencias entre manipuladores en CCA y CCC

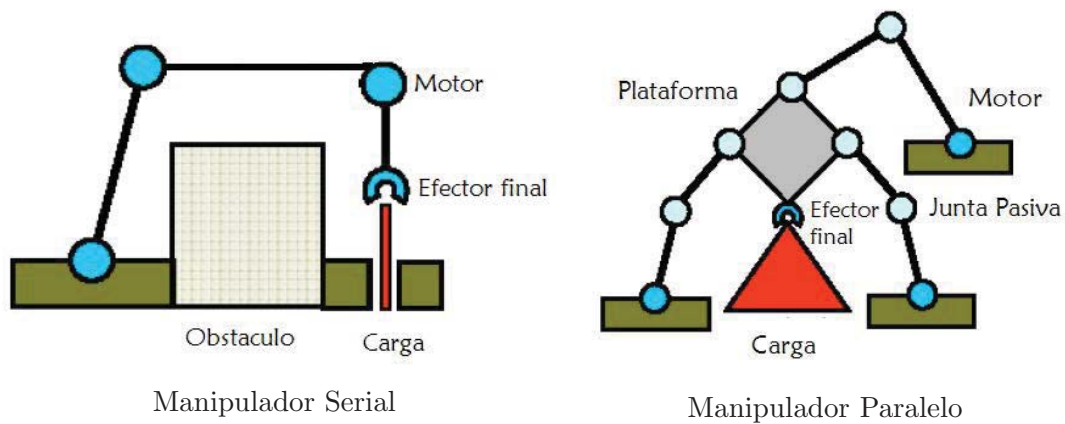
Hablar de una comparación entre un mecanismo paralelo contra un mecanismo serial es hablar de las ventajas y desventajas de uno con respecto a otro. En ese contexto empezaremos denotando las ventajas que presenta un mecanismo paralelo sobre un mecanismo serial.

En un mecanismo serial la potencia demandada por los actuadores es mayor que la requerida por un mecanismo paralelo, esto se debe a que el mecanismo paralelo regularmente lleva sus actuadores sobre la base, lo que implica que estos no deben ser desplazados en el momento de realizar alguna acción, dando por resultado una disminución drástica en la inercia de la parte móvil del mecanismo, lo que visto desde el punto de vista de costo,

es una amplia ventaja debido al ahorro en energía que esto representa.

El hecho de que los actuadores en un mecanismo actúen de manera paralela ofrece otra ventaja, ya que esta característica les permite manipular cargas muy superiores a su propio peso. Por tanto podemos hablar de que la excelente relación carga/potencia que guardan estos mecanismos nos proporciona una alta eficiencia energética y velocidades mayores a las que se pueden obtener con un mecanismo serial [1].

Las estructuras paralelas son mecanismos que ofrecen una alta rigidez con un muy bajo peso, característica que los dota de una precisión muy por encima de la entregada por un manipulador en serie, además de que en comparación con los manipuladores en serie, los manipuladores paralelos presentan elevadas velocidades de operación [1].



Entre las desventajas en el empleo de mecanismos paralelos pueden mencionarse el espacio de trabajo reducido por la interferencia entre las cadenas del mecanismo, la dificultad para obtener su modelo cinemático y dinámico (algunas veces sólo concebible mediante restricciones [3]) y la complejidad del análisis de singularidades [7]. Dado que muchos esquemas de control se basan en el conocimiento del modelo, esa misma dificultad para obtenerlo implica a su vez un reto importante en el diseño del sistema de control.

Por un lado, el problema relacionado con el espacio de trabajo, pensando ya en una aplicación particular, puede llegar a resolverse por medio del apropiado diseño geométrico y mecánico de cada elemento. Sin embargo, el análisis del mecanismo sigue siendo difícil, así como el diseño de un esquema para su control. Es decir, el problema más importante, que es el relacionado con el desempeño del mecanismo en las operaciones de velocidad y precisión para las cuales fue ideado, no puede ser resuelto fácilmente.

1.6. Clasificación de los Robots Paralelos

Existen innumerables configuraciones estructurales para los robots paralelos. Las combinaciones de número de cadenas cinemáticas, el tipo de cadenas, las restricciones de movimiento de las articulaciones, etc., hacen difícil su clasificación sistemática de acuerdo a su estructura.

En este campo de trabajo, Merlet [10] ha sido el autor que más se ha distinguido por sus estudios. En principio y según el tipo de movimientos que son capaces de realizar se pueden distinguir dos grupos; los robots planares y los robots espaciales, aunque Tsai [21] y Cortes [20] mencionan una tercera clasificación de acuerdo al movimiento en su trabajo: los robots esféricos.

Se dice que un manipulador es de tipo planar si todas las partículas del cuerpo describen curvas planas en planos paralelos; por su parte, un manipulador es de tipo esférico si todas las partículas en el cuerpo describen curvas sobre esferas concéntricas. Finalmente, aquellos en los cuales su movimiento no puede ser caracterizado como planar o esférico, son llamados robots espaciales [21]. Ejemplos de ellos se muestran en la Tabla 1.3.

Los manipuladores paralelos también pueden ser clasificados de acuerdo a sus características estructurales como: simétricos y asimétricos [20].

Un manipulador paralelo es llamado *simétrico* si:

- El número de cadenas cinemáticas cerradas (CCC) independientes es igual al número de grados de libertad de la plataforma móvil.

Si un manipulador cumple con esta condición es llamado Completamente Paralelo [21].

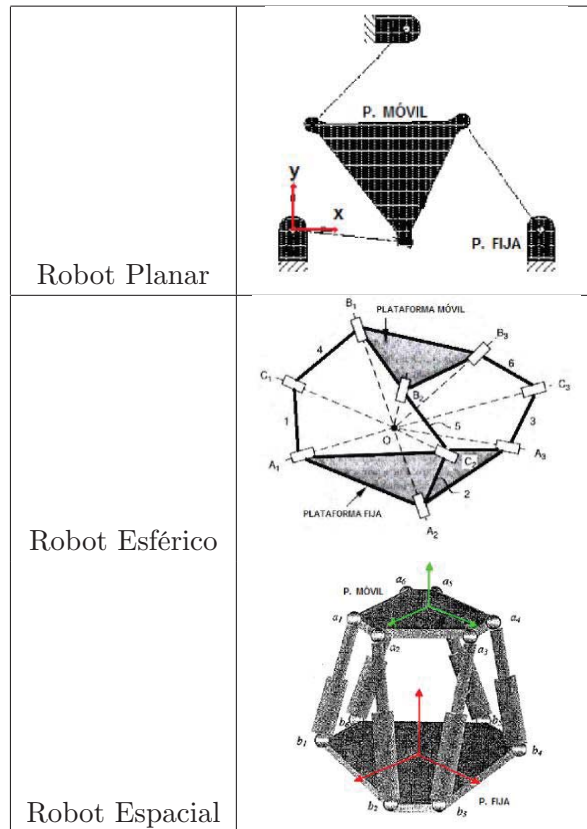
Gozellin [4] caracteriza los manipuladores paralelos por medio de la ecuación (1.1).

$$p(n - 6) = -6 \quad (1.1)$$

donde p representa el número de cadenas, n el número de cuerpos rígidos en la cadena. Earl [2] define un índice de paralelismo d como se muestra en la ecuación (1.2).

$$d = \left(\frac{k}{l - 1} \right) \quad (1.2)$$

donde k representa el número de lazos independientes, es decir, la diferencia entre el número de juntas con un grado de libertad y los cuerpos en movimiento; y l



Cuadro 1.3: Clasificación de los Robots Paralelos de acuerdo a su movimiento

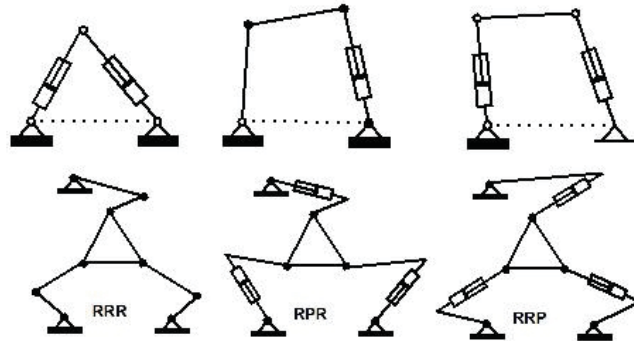


Figura 1.13: Configuraciones planares de 2 y 3 gdl

es el número de grados de libertad del efector final. Este índice varía entre *ceros* y *uno*: *uno* para un manipulador completamente paralelo y *ceros* para un manipulador serial. En ciertos casos un manipulador que no es completamente paralelo puede tener un índice de paralelismo igual a *uno*.

- El tipo y número de articulaciones en todas las CCC independientes están dispuestas en un modelo idéntico.
- El número y localización de las articulaciones actuadoras deben ser los mismos.

Cuando estas condiciones no se cumplen, hablamos de un manipulador *asimétrico*.

1.6.1. Robots Planares

Anteriormente describimos los manipuladores planares como aquellos cuyos movimientos se reducen al plano. Por tanto pueden tener 2 ó 3 grados de libertad, correspondientes al movimiento de traslación en el plano y una rotación sobre un eje perpendicular al mismo. La Figura 1.13 nos presenta algunas de las configuraciones de este tipo de manipuladores.

1.6.2. Movilidad

Se denomina movilidad (M) de una cadena cinemática al número de variables que es necesario utilizar para definir completamente su posición, cuya analogía para los mecanismos es el concepto de Grados de Libertad.

Recordando que un mecanismo es, en sentido estricto, una cadena cinemática en la que hemos fijado uno de sus eslabones podemos definir la movilidad o grados de libertad de un mecanismo como el número de variables que hay que fijar para determinar la posición de dicho mecanismo.

Una forma de determinar el número de grados de libertad de un mecanismo consiste en observar su movimiento –si lo hay–, y determinar empíricamente ese número mínimo y suficiente de variables. Sin embargo, frecuentemente es necesario determinar los grados de libertad de mecanismos que no han sido construidos; para solucionar este problema, desde el siglo pasado se formularon diferentes criterios de movilidad, uno de los más sencillos es el criterio de Gruebler [12], cuya fórmula se muestra en la ecuación (1.3).

$$M = 3L - 2J - 3G \quad (1.3)$$

donde L el número de eslabones, J el número de juntas rotacionales de un grado de libertad y G el número de eslabones fijos.

1.7. Metodología para el análisis de robots con cadena cinemática abierta

Dentro del campo de la robótica, una parte imprescindible a considerar es el problema cinemático y dinámico que plantea el movimiento de las diversas masas que integran los eslabones y los pares cinemáticos. De hecho, se han creado metodologías precisas que ayudan a resolver este tipo de problemas, donde usualmente se soluciona el problema general pero se simplifica para algunas características geométricas propias de un diseño de robot, y más específicamente de un manipulador, como se puede observar en la representación de Denavit–Hartenberg o el análisis de singularidades en posición y en orientación, de uso casi exclusivo en los manipuladores.

Un problema primordial del análisis del movimiento es la cinemática directa, donde se establece la posición de un efector final con base en las variables de los pares cinemáticos (ángulos y desplazamientos). En estos casos se utiliza la representación de Denavit–Hartenberg, que ofrece cuatro transformaciones básicas para cada par cinemático según varios sistemas coordenados bien establecidos.

Por otra parte, se realiza un análisis de la cinemática inversa del mecanismo con la finalidad de encontrar las variables de los pares cinemáticos con base en una posición definida.

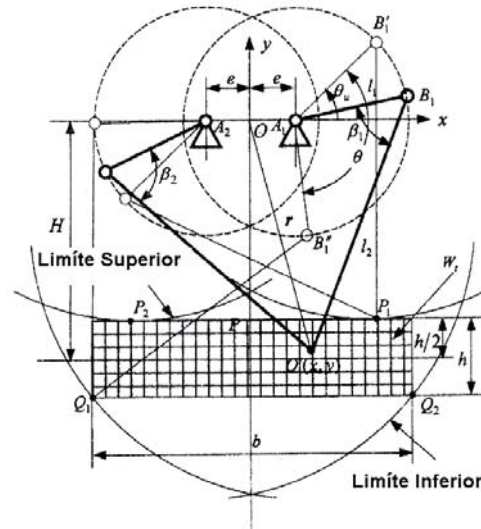


Figura 1.14: Análisis de singularidades y espacio de trabajo

Como tercer paso se obtiene la matriz Jacobiana para el análisis de singularidades, aunque la configuración utilizada hace posible su análisis geométrico, como se observa en la Figura 1.14.

Por otro lado, la dinámica puede analizarse de dos maneras, la primera es el enfoque de Euler – Lagrange, cuyas expresiones incluyen una operación llamada Lagrangiano, que nos da por resultado la diferencia entre la energía cinética y la potencial. Otro enfoque es el planteado por la formulación de Newton – Euler, que analiza el sistema de manera recursiva, aunque de una manera un poco más convencional, es decir que primero se calcula una relación para el primer eslabón, luego para el segundo con respecto al primero, después se hace una recursión de regreso del segundo eslabón y finalmente del primero. Este método permite obtener una matriz que describe la dinámica del mecanismo, imprescindible para el control retroalimentado de los pares cinemáticos.

El análisis anterior nos permitirá restringir las velocidades de los pares cinemáticos e incluso los perfiles de desplazamiento para el mecanismo. Con base en estas consideraciones es posible calcular la fuerza necesaria en el par cinemático para su desplazamiento de manera instantánea.

1.8. Metodología para el análisis del robot paralelo considerado en este trabajo

Muchos autores encuentran la solución analítica de diversos tipos de manipuladores paralelos mediante su geometría y un análisis de cinemática inversa. Basta echar un vistazo a la literatura para ver los análisis de robots, tales como, el robotenis [15], o el propuesto por Cortés para el robot planar para ensamble [20], entre otros, para darse cuenta de ello.

El análisis del robot paralelo tipo diamante propuesto en este trabajo sigue la misma línea, es decir, a través de su geometría (como se muestra en la Figura 1.14), y mediante un análisis cinemático inverso, es posible obtener las variables articulares (θ_j), en función de las variables cartesianas (x, y) del efector final.

El análisis que se contempla en este trabajo, parte de un análisis de la geometría del robot paralelo, lo que arroja los valores de posición, velocidad y aceleración de las variables articulares de nuestro sistema (θ_j) en función de las variables cartesianas (x, y) del efector final, esto es a lo que comúnmente se le conoce como análisis cinemático inverso, donde la única diferencia con un manipulador serial radica, quizás en la complejidad de las expresiones.

Al igual que en los manipuladores de cadena cinemática abierta, la dinámica del manipulador de cadena cinemática cerrada de este trabajo, es también analizada por el método de Euler-Lagrange, donde la función lagrangiana también representa la diferencia entre la energía cinética y potencial.

Tomando en cuenta estas consideraciones es posible determinar un modelo dinámico, cuya simulación numérica nos permita conocer la trayectoria que describe el efector final con base en los pares de entrada.

Capítulo 2

Estructura Física

2.1. Descripción del Robot Paralelo Tipo Diamante

La estructura del *robot tipo diamante* se muestra en la Figura 2.1 y consiste básicamente en un mecanismo de cadena cinemática cerrada de cinco barras, una de las cuales puede considerarse fija para movimientos en el plano, mientras que las otras cuatro barras se agrupan en dos lazos cinemáticos, desde ahora denominados lazo izquierdo y lazo derecho.

De las cuatro barras móviles, las dos próximas a la base se consideran actuadas, es decir, cada una tiene una fuente de energía acoplada a ella, por ejemplo un motor de corriente directa. Las dos barras distales son pasivas (sin actuador acoplado a ellas) y se articulan con el efector final, donde irá ubicado el elemento de sujeción que eventualmente realizará las operaciones de tomar y colocar.

Además del mecanismo principal antes descrito, se incluye una estructura auxiliar que forma dos paralelogramos con un eslabón ternario entre ellos, como se nota en la Figura 2.1. Esta estructura tiene la función de mantener una posición vertical del efector con respecto al piso, lo cual consigue aprovechando la propiedad de paralelismo de los lados opuestos del paralelogramo. Cabe destacar que esta estructura podría ser utilizada en ambos lazos del mecanismo; sin embargo, este caso se omite por simplicidad y para evitar el problema de la fricción por desalineación de los componentes en el sistema físico a construir. De este modo queda definido el modelo conceptual del mecanismo.

Para establecer las medidas de los eslabones utilizamos la teoría desarrollada en [17] referente a la optimización de las longitudes de las barras para evitar trayectorias sobre puntos singulares del mecanismo, es decir en este trabajo no se considera la síntesis del mecanismo. Como anteriormente se mencionó, ésta fue retomada de un estudio realizado

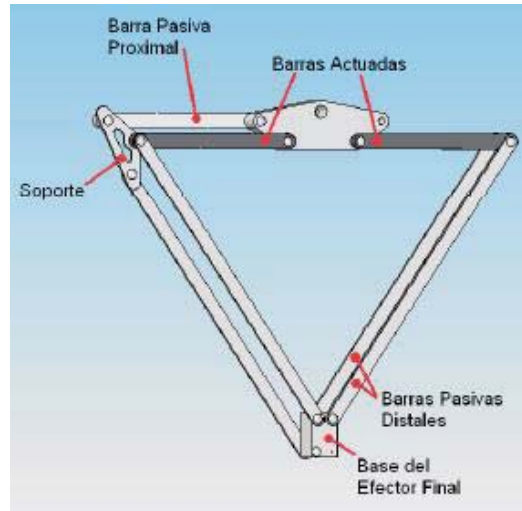


Figura 2.1: Diseño conceptual del robot tipo Diamante

por Huang et al.[19].

El mecanismo propuesto en este trabajo puede ser representado por la Figura 2.2, en la cual está basado el análisis de movilidad que se expone en el siguiente apartado.

2.2. Movilidad del Robot Paralelo

El análisis de movilidad del robot paralelo tipo diamante se realizó utilizando el criterio de Gruebler, con el fin de comprobar que la actuación de dos eslabones (en este caso el 2 y el 4) es suficiente para mover el mecanismo completo. Con base en la Figura 2.2 se denominan los eslabones principales con las letras R_i con $i = 1, \dots, 5$ y los eslabones del mecanismo auxiliar se nombran Q_k con $k = 1, \dots, 4$, siendo Q_1 es el mismo eslabón fijo R_1 ; las juntas rotacionales se denotan a su vez por r_l con $l = 1, \dots, 11$. Finalmente, el eslabón R_f es el elemento terminal, el cual puede ser entendido como un eslabón ternario.

En primer lugar se identifican dos cadenas cinemáticas cerradas, que se denominan I y II (Figura 2.3). La cadena cinemática I consiste en los eslabones $R_1, R_2, R_3, R_f, R_5, R_4, R_1$ y las juntas r_{l_I} con $l_I = 1, \dots, 6$. Por otro lado la cadena cinemática II está formada por los eslabones $Q_1 = R_1, Q_2, Q_3, Q_4, R_f, R_3, R_2, R_1$ y las juntas $r_{l_{II}}$ con $l_{II} = 1, 2, 3, 7, \dots, 11$.

Partiendo de la ecuación (1.3), para la cadena cinemática I, y considerando que $G = 1$ (en ambos casos) se tiene

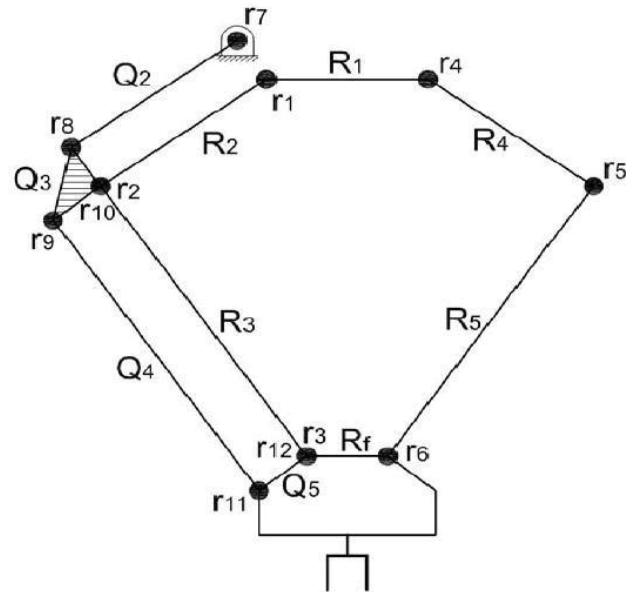


Figura 2.2: Esquema del mecanismo para el análisis de movilidad

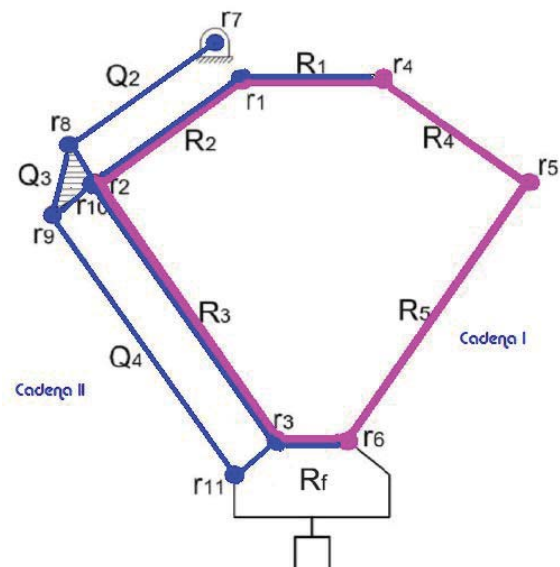


Figura 2.3: Cadenas cinemáticas del robot paralelo tipo Diamante

$$M_I = 3(6) - 2(6) - 3(1) = 3$$

es decir, se tienen tres grados de libertad, estando dos de ellos asociados para los actuadores que se colocarán en los eslabones 2 y 4. Sin embargo, queda aún un tercer grado de libertad, asociado al eslabón final R_f .

Por otro lado, para la cadena cinemática II se obtiene

$$M_{II} = 3(7) - 2(8) - 3(1) = 2$$

Por tanto, se tienen dos grados de libertad. De nuevo, uno de ellos está asociado al movimiento proporcionado por el actuador acoplado al eslabón R_2 y el otro queda asociado, de manera similar a la cadena I, al eslabón final R_f .

Como las dos cadenas cinemáticas están acopladas en la base del elemento final, el grado de libertad asociado al eslabón R_f de parte de las dos cadenas cinemáticas imponen una restricción que hace que el mecanismo completo tenga entonces dos grados de libertad. En conclusión, los actuadores acoplados a los eslabones 2 y 4 son suficientes para mover el mecanismo completo.

Otra forma de verificar esto es aplicando la fórmula de Gruebler (2.1) para el sistema completo,

$$M_{Tot} = 3(9) - 2(11) - 3(1) = 2 \tag{2.1}$$

Particularmente el robot paralelo tipo diamante es un manipulador con índice de paralelismo $d = 1$, asimétrico, planar, ya que presenta dos traslaciones en el plano [13] y con un índice de movilidad (o grados de libertad) $m = 2$.

Capítulo 3

Análisis Cinemático

3.1. Introducción

La cinemática analiza el movimiento de los cuerpos sin importar los efectos externos, fuerzas y/o pares que lo causan; estudia la posición, velocidad, y aceleración de los cuerpos. En el caso de los robots manipuladores, se busca conocer la posición y orientación en el espacio de su efector final, esto, por medio del cálculo de las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración angulares de cada una de los cuerpos que lo conforman (Cinemática Directa). Otra opción es conocer la posición, velocidad y aceleración de cada una de las barras a partir de una posición y orientación de su efector final (Cinemática Inversa).

3.2. Análisis Cinemático

Dentro del estudio de la cinemática de robots, encontramos dos campos de gran importancia: El primero es el de la Cinemática Directa, la cual establece las variables del espacio cartesiano del efector final en función del espacio articular, costituido por las variables de las articulaciones (posición, velocidad lineal y angular, etc.). El otro campo de estudio de la cinemática es el de la Cinemática Inversa, en el cual se describen los valores de las variables cinemáticas de las articulaciones en función de las variables del espacio cartesiano del efector final.

Para nuestro estudio, necesitamos definir una trayectoria como el conjunto de puntos por los cuales atravesará el efector final y el perfil de velocidad como la velocidad que tomará el efector en cada uno de estos puntos.

La relación entre la trayectoria y el perfil de velocidad con la cinemática se explica en

la cinemática inversa, ya que éstos definen posiciones y velocidades de las articulaciones para mover el efector final.

Para el análisis cinemático del mecanismo utilizamos una metodología convencional, basada en el seguimiento de las cadenas cinemáticas desde la base hasta el efector final y apoyada en el trazo de vectores desde la base del mecanismo hasta el efector final.

En el caso del análisis cinemático, las cadenas formadas son, en varias formas, similares a las cadenas de los mecanismos seriales, ya que obtenemos una representación del espacio cartesiano en función de las variables articulares de todas las juntas en la cadena cinemática, y no sólo en las juntas actuadas. Este procedimiento se repite en todos los lazos que integran al mecanismo, en este caso sólo dos, de manera que al final obtenemos una representación del espacio cartesiano en el espacio articular para cada uno de los lazos.

3.3. Solución Algebraica

En las Figuras 3.1 y 3.2 se muestran los esquemas del robot paralelo en configuración diamante, para el análisis cinemático. Con base en ellas y estableciendo un sistema de referencia, se realizó el modelado y el análisis cinemático del robot paralelo.

Como primer paso del análisis cinemático, se establecen los vectores en coordenadas planas de cada elemento del manipulador, con lo que se definen los lazos denominados derecho e izquierdo, además de un vector que parte del origen del marco de referencia hasta el efector final.

$$\begin{array}{lll}
 \text{Lazo Derecho} & \text{Lazo Izquierdo} & \text{Efector final} \\
 \mathbf{R}'_1 = [x_1, 0]^T & \mathbf{R}_1 = [-x_1, 0]^T & \mathbf{R}_p = [0, -y_p]^T \\
 \mathbf{R}_4 = [\mathcal{R}_{\theta_4}] \mathbf{r}_4 & \mathbf{R}_2 = [\mathcal{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}_2 & \mathbf{R}_t = [x, y]^T \\
 \mathbf{R}_5 = [\mathcal{R}_{\theta_5}] \mathbf{r}_5 & \mathbf{R}_3 = [\mathcal{R}_{\theta_3}] \mathbf{r}_3 & \\
 \mathbf{R}'_6 = [-x_6, -y_6]^T & \mathbf{R}_6 = [x_6, -y_6]^T &
 \end{array} \quad (3.1)$$

donde los vectores \mathbf{r}_j se definen como los vectores de posición de cada eslabón con respecto a su propio marco de referencia es decir

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{r}_2 = [x_2, 0]^T & \mathbf{r}_4 = [x_4, 0]^T \\
 \mathbf{r}_3 = [x_3, 0]^T & \mathbf{r}_5 = [x_5, 0]^T
 \end{array}$$

Las longitudes de los eslabones se denotan x_j y para el efector final x, y .

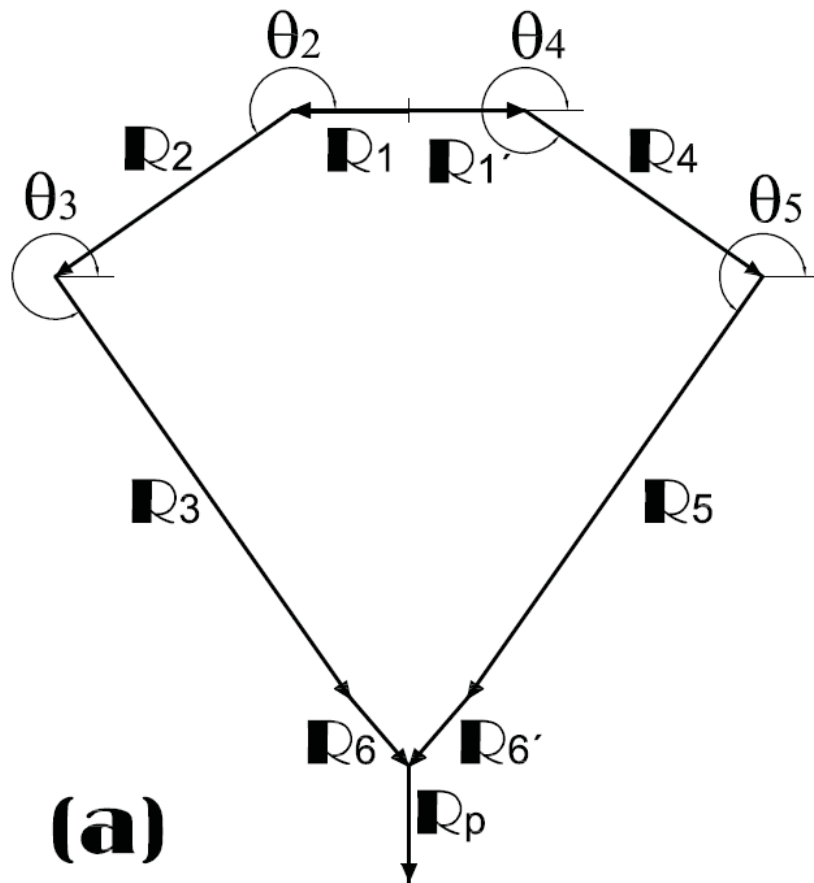


Figura 3.1: Modelo Cinemático de un Robot Paralelo tipo Diamante

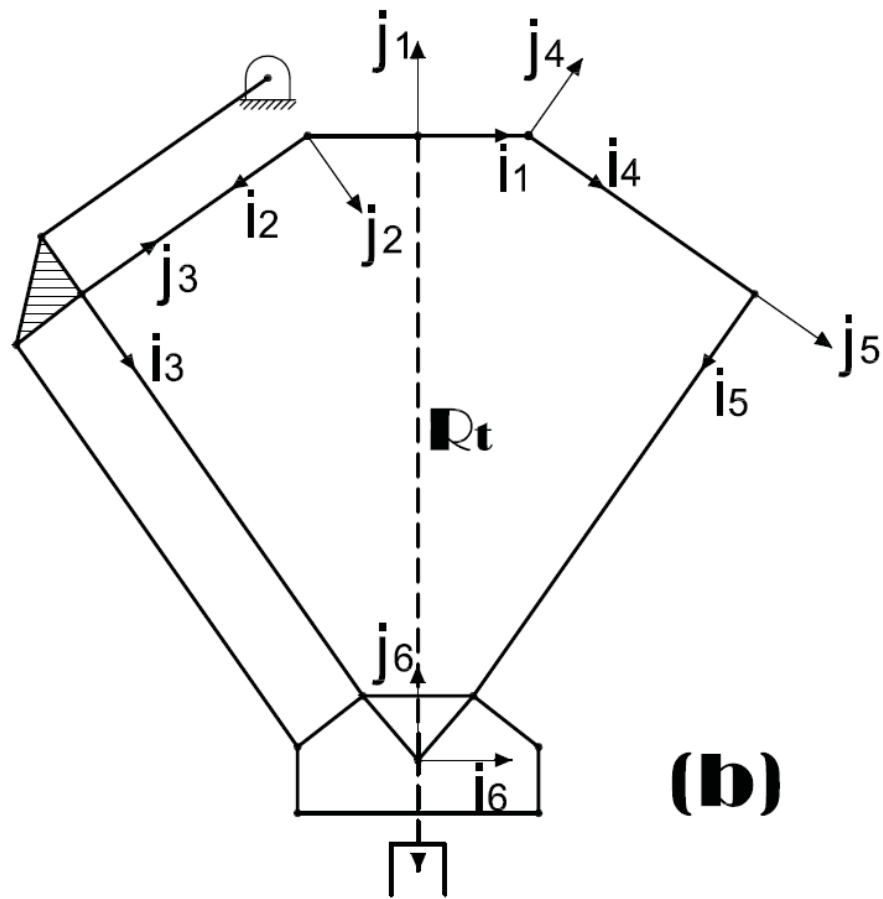


Figura 3.2: Modelo Cinemático de un Robot Paralelo tipo Diamante

Por otro lado la Matriz de Rotación $[\mathcal{R}_{\theta_j}]$ se define como

$$[\mathcal{R}_{\theta_j}] = \begin{bmatrix} c\theta_j & -s\theta_j \\ s\theta_j & c\theta_j \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

para $j = 2, \dots, 5$ y teniendo en cuenta que $\cos\theta_j = c\theta_j$ y $\sin\theta_j = s\theta_j$.

A partir de los vectores de cada elemento del manipulador se establecerán las ecuaciones para cada lazo, que se muestran en el siguiente apartado.

3.3.1. Cálculo de Posiciones

Partiremos de analizar el lado izquierdo del manipulador, donde la ecuación (3.3) es su ecuación de lazo, que nos permitirá calcular los ángulos θ_2 y θ_3 , cuyas derivadas nos darán las ecuaciones de velocidad y aceleración angulares.

Posición Articular θ_2

Para obtener la posición articular θ_2 partiremos de la ecuación de lazo izquierdo la cual está dada por

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_6 + \mathbf{R}_p = \mathbf{R}_t \quad (3.3)$$

si se despeja a \mathbf{R}_3 de la ecuación anterior, se tiene

$$\mathbf{R}_t - (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_6 + \mathbf{R}_p) = \mathbf{R}_3 \quad (3.4)$$

Ahora, calculando la magnitud de cada miembro de la ecuación, se llega a

$$(x + x_1 - x_6 - x_2 c\theta_2)^2 + (y + y_6 + y_p - x_2 s\theta_2)^2 = x_3^2 \quad (3.5)$$

la cual se puede simplificar de la siguiente forma

$$A_1 c\theta_2 + B_1 s\theta_2 + C_1 = 0 \quad (3.6)$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= -2xx_2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_6 \\ B_1 &= 2x_2(y + y_6 + y_p) \\ C_1 &= x_2^2 + (x + x_1 - x_6)^2 - (x_3 - y - y_6 - y_p)(x_3 + y + y_6 + y_p) \end{aligned} \quad (3.7)$$

La solución de la ecuación (3.6) es, de acuerdo con McCarthy [9]

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{B_1}{A_1}\right) \pm \arccos\left(\frac{-C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}\right) \quad (3.8)$$

donde el signo \pm indica las dos formas de ensamblar el lado izquierdo del robot.

Posición Articular θ_3

De nuevo se parte de la ecuación de lazo izquierdo (3.3), pero ahora despejamos \mathbf{R}_2

$$\mathbf{R}_t - (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_6 + \mathbf{R}_p) = \mathbf{R}_2 \quad (3.9)$$

De una manera similar al desarrollo anterior se obtiene la magnitud de cada miembro de la ecuación

$$(x + x_1 - x_6 - x_3 c\theta_3)^2 + (y + y_6 + y_p - x_3 s\theta_3)^2 = x_2^2 \quad (3.10)$$

y se simplifica para llegar a la expresión

$$A_2 c\theta_3 + B_2 s\theta_3 + C_2 = 0 \quad (3.11)$$

donde

$$A_2 = -2x_3(x + x_1 - x_6) \quad (3.12)$$

$$B_2 = 2x_3(y + y_6 + y_p)$$

$$C_2 = x_2^2 + x_3^2 + (x + x_1 - x_6)^2 + (y + y_6 + y_p)^2$$

Como (3.11) tiene la misma forma que (3.6), su solución es

$$\theta_3 = \arctan\left(\frac{B_2}{A_2}\right) \pm \arccos\left(\frac{-C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\right) \quad (3.13)$$

Analizando la parte derecha del manipulador obtenemos las posiciones articulares θ_4 y θ_5 .

Posición Articular θ_4

La posición articular θ_4 se obtiene de la ecuación de lazo derecho (3.14) presentada a continuación

$$\mathbf{R}'_1 + \mathbf{R}_4 + \mathbf{R}_5 + \mathbf{R}'_6 + \mathbf{R}_p = \mathbf{R}_t \quad (3.14)$$

de donde ahora se despeja la variable de interés \mathbf{R}_5

$$\mathbf{R}_t - (\mathbf{R}'_1 + \mathbf{R}_4 + \mathbf{R}'_6 + \mathbf{R}_p) = \mathbf{R}_5 \quad (3.15)$$

Realizando un proceso similar a la obtención de las dos variables articulares anteriores, se calcula la magnitud de los dos miembros de la ecuación

$$(x - x_1 + x_6 - x_4 c\theta_4)^2 + (y + y_6 + y_p - x_4 s\theta_4)^2 = x_5^2 \quad (3.16)$$

ambos se simplifican para llegar a una forma similar a la mostrada en (3.6) y (3.11)

$$A_3 c\theta_4 + B_3 s\theta_4 + C_3 = 0 \quad (3.17)$$

donde

$$\begin{aligned} A_3 &= -2x_4(x - x_1 + x_6) \\ B_3 &= -2x_4(y + y_6 + y_p) \\ C_3 &= x_4^2 + (x - x_1 + x_6)^2 - (x_5 - y - y_6 - y_p)(x_5 + y + y_6 + y_p) \end{aligned} \quad (3.18)$$

La solución a la ecuación anterior es expresada también como

$$\theta_4 = \arctan\left(\frac{B_3}{A_3}\right) \pm \arccos\left(\frac{-C_3}{\sqrt{A_3^2 + B_3^2}}\right) \quad (3.19)$$

Posición Articular θ_5

De manera análoga, si se despeja \mathbf{R}_4 de la ecuación de lazo derecho (3.14) se tiene

$$\mathbf{R}_t - (\mathbf{R}'_1 + \mathbf{R}_5 + \mathbf{R}'_6 + \mathbf{R}_p) = \mathbf{R}_4 \quad (3.20)$$

Obteniendo la magnitud de cada miembro de la ecuación, se llega a

$$x_4^2 = (x - x_1 + x_6 - x_5 \cos(\theta_5))^2 + (y + y_6 + y_p - x_5 \sin(\theta_5))^2 \quad (3.21)$$

y simplificando se llega a la siguiente expresión

$$A_4 c \theta_5 + B_4 s \theta_5 + C_4 = 0 \quad (3.22)$$

donde

$$\begin{aligned} A_4 &= -2x_5(x - x_1 + x_6) \\ B_4 &= -2x_5(y + y_6 + y_p) \\ C_4 &= -x_4^2 + x_5^2 + (x - x_1 + x_6)^2 + (y + y_6 + y_p)^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Cuya solución es

$$\theta_5 = \arctan\left(\frac{B_4}{A_4}\right) \pm \arccos\left(\frac{-C_4}{\sqrt{A_4^2 + B_4^2}}\right) \quad (3.24)$$

Por medio de un análisis de cinemática inversa $\theta_j = f(x, y)$, fue posible la obtención de las posiciones de las variables articulares $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ y θ_5 .

Los cálculos anteriores ofrecen la posición de las articulaciones en función de las coordenadas (x, y) del efector final. Contando ya con las ecuaciones para la posición de cada una de las articulaciones se parte de ellas para calcular las velocidades y las aceleraciones angulares, propias de cada barra.

3.3.2. Cálculo de Velocidades

Por medio de la derivación implícita de cada una de las expresiones de posición se calcularon las velocidades presentadas en esta sección.

Velocidad Articular ω_2

Derivando la ecuación (3.6) con respecto al tiempo se tiene

$$c\theta_2\dot{A}_1 + s\theta_2\dot{B}_1 + \dot{C}_1 + (B_1c\theta_2 - A_1s\theta_2)\omega_2 = 0 \quad (3.25)$$

donde $\dot{\theta}_2 = \omega_2$; A_1 , B_1 y C_1 están definidas anteriormente en (3.6) y dependen de las posiciones (x, y) del efector final.

Despejando la velocidad articular ω_2 y simplificando se tiene

$$\omega_2 = \frac{1}{V_{23}} (V_{21}\dot{x} + V_{22}\dot{y}) \quad (3.26)$$

donde

$$\begin{aligned} V_{21} &= -2(x_1 - x_6 - x_2 c\theta_2 + x) \\ V_{22} &= -2(y_6 + y_p - x_2 s\theta_2 + y) \\ V_{23} &= B_1 c\theta_2 - A_1 s\theta_2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Como puede observarse la velocidad articular ω_2 depende de las posiciones y velocidades del efector final. Las velocidades articulares ω_3 , ω_4 y ω_5 , las cuales se obtendrán a continuación, también cumplen con esta característica.

Velocidad Articular ω_3

Derivando la ecuación (3.11), con respecto al tiempo, la cual contiene la posición articular θ_3 , se tiene

$$c\theta_3 \dot{A}_2 + s\theta_3 \dot{B}_2 + \dot{C}_2 + (B_2 c\theta_3 - A_2 s\theta_3) \omega_3 = 0 \quad (3.28)$$

donde $\dot{\theta}_3 = \omega_3$; A_2 , B_2 , y C_2 están definidas en la ecuación (3.11).

Despejando ω_3 de (3.28) y simplificando se tiene

$$\omega_3 = \frac{1}{V_{33}} (V_{31}\dot{x} + V_{32}\dot{y}) \quad (3.29)$$

donde

$$\begin{aligned} V_{31} &= -2(x_1 - x_6 - x_3 c\theta_3 + x) \\ V_{32} &= 2x_3 s\theta_3 - 2(y_6 + y_p + y) \\ V_{33} &= B_2 c\theta_3 - A_2 s\theta_3 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Velocidad Articular ω_4

Derivando la ecuación (3.17) respecto al tiempo, donde está contenida la posición articular θ_4 y sabiendo que $\dot{\theta}_4 = \omega_4$, la ecuación queda

$$c\theta_4\dot{A}_3 + s\theta_4\dot{B}_3 + \dot{C}_3 + (B_3c\theta_4 - A_3s\theta_4)\dot{\theta}_4 = 0 \quad (3.31)$$

donde A_3 , B_3 , y C_3 están definidas en la ecuación (3.18).

Despejando la velocidad articular ω_4 y simplificando se tiene

$$\omega_4 = \frac{1}{V_{43}} (V_{41}\dot{x} + V_{42}\dot{y}) \quad (3.32)$$

donde

$$\begin{aligned} V_{41} &= 2(x_1 - x_6 + x_4c\theta_4 - x) \\ V_{42} &= -2(y_6 + y_p - x_4s\theta_4 + y) \\ V_{43} &= B_3c\theta_4 - A_3s\theta_4 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Velocidad Articular ω_5

Derivando ahora la ecuación (3.22) con respecto al tiempo, sabiendo que $\dot{\theta}_5 = \omega_5$, la ecuación queda

$$c\theta_5\dot{A}_4 + s\theta_5\dot{B}_4 + \dot{C}_4 + (B_4c\theta_5 - A_4s\theta_5)\dot{\theta}_5 = 0 \quad (3.34)$$

donde A_4 , B_4 , y C_4 están definidas en la ecuación (3.23).

Despejando ω_5 y simplificando se tiene

$$\omega_5 = \frac{1}{V_{53}} (V_{51}\dot{x} + V_{52}\dot{y}) \quad (3.35)$$

donde

$$\begin{aligned} V_{51} &= 2(x_1 - x_6 - x_5c\theta_5 - x) \\ V_{52} &= 2x_5s\theta_5 - 2(y_6 + y_p + y) \\ V_{53} &= B_4c\theta_5 - A_4s\theta_5 \end{aligned} \quad (3.36)$$

En este apartado se calcularon las velocidades articulares de $\theta_2, \theta_3, \theta_4$, y θ_5 , mediante la derivación implícita de las ecuaciones de lazo correspondientes a cada variable. Con este cálculo es posible realizar una segunda derivación implícita para obtener las aceleraciones articulares de cada una de las variables que definen el movimiento del robot paralelo de este trabajo.

Como se puede apreciar cada una de las expresiones de las velocidades articulares (ω_j), son dependientes de las posiciones (x, y) y las velocidades (\dot{x}, \dot{y}) del efector final, por lo que al igual que las posiciones el análisis de velocidades también fue hecho mediante cinemática inversa.

3.3.3. Cálculo de Aceleraciones

Mediante la derivación implícita de las velocidades articulares (ω_j) se obtuvieron las aceleraciones articulares (α_j) de cada una de las variables de interés en nuestro sistema.

Aceleración Articular α_2

Derivando dos veces la ecuación (3.6) con respecto al tiempo y sustituyendo el término $\ddot{\theta}_2 = \alpha_2$ se tiene

$$\begin{aligned} & \left(-2s\theta_2\dot{A}_1 + 2c\theta_2\dot{B}_1 \right) \omega_2 + (-A_1c\theta_2 - B_1s\theta_2) \omega_2^2 + c\theta_2\ddot{A}_1 + \\ & + s\theta_2\ddot{B}_1 + \ddot{C}_1 + (B_1c\theta_2 - A_1s\theta_2) \alpha_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Como ya se mencionó anteriormente, las variables A_1 , B_1 y C_1 están definidas en (3.6) y dependen de las posiciones (x, y) del efector final, condición que se cumple para A_j , B_j y C_j con $j = 1, \dots, 4$

Despejando la aceleración articular α_2 de la ecuación (3.37) y simplificando se tiene

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{-\left(c\theta_2 \left(2\dot{B}_1\omega_2 - A_1^2\omega_2 + \ddot{A}_1 \right) + s\theta_2 \left(-\omega_2 \left(2\dot{A}_1 + B_1\omega_2 \right) + \ddot{B}_1 \right) + \ddot{C}_1 \right)}{B_1c\theta_2 - A_1s\theta_2} \\ &= \frac{H_{21}\ddot{x} + H_{22}\ddot{y} + H_{23}\dot{x}^2 + H_{24}\dot{y}^2 + H_{25}\dot{x}\dot{y}}{B_1c\theta_2 - A_1s\theta_2} \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde

$$\begin{aligned}
H_{21} &= -2(x_1 - x_6 - x_2 c\theta_2 + x) & (3.39) \\
H_{22} &= -2(y_6 + y_p - x_2 s\theta_2 + y) \\
H_{23} &= \frac{-2V_{23}^2 + V_{21}^2 A_1 c\theta_2 + V_{21}(-4V_{23}x_2 + V_{21}B_1) s\theta_2}{V_{23}^2} \\
H_{24} &= -2 + \frac{V_{22}(-4V_{23}x_2 + V_{22}A_1) c\theta_2}{V_{23}^2} + \frac{V_{22}^2 B_1 s\theta_2}{V_{23}^2} \\
H_{25} &= \frac{2V_{21}(2V_{23}x_2 + V_{22}A_1) c\theta_2 + 2V_{22}(-2V_{23}x_2 + V_{21}B_1) s\theta_2}{V_{23}^2}
\end{aligned}$$

Como se puede observar cada una de las variables que se encuentran presentes en la ecuación para la aceleración articular α_2 dependen de la posición (x, y) , de la velocidad (\dot{x}, \dot{y}) y ahora de la aceleración (\ddot{x}, \ddot{y}) del efector final, condición que cumple cada una de las aceleraciones articulares del robot paralelo en este análisis.

Aceleración Articular α_3

Derivando dos veces respecto al tiempo la ecuación (3.11), que contiene a la posición articular θ_3 y sustituyendo $\alpha_3 = \ddot{\theta}_3$ se tiene

$$\begin{aligned}
& \left(-2s\theta_3 \dot{A}_2 + 2c\theta_3 \dot{B}_2 \right) \omega_3 + (-A_2 c\theta_3 - B_2 s\theta_3) \omega_3^2 + c\theta_3 \ddot{A}_2 + \\
& + s\theta_3 \ddot{B}_2 + \ddot{C}_2 + (B_2 c\theta_3 - A_2 s\theta_3) \alpha_3 = 0
\end{aligned} \tag{3.40}$$

despejando la aceleración articular α_3 y simplificando se tiene

$$\alpha_3 = \frac{-\left(c\theta_3 \left(2\dot{B}_2 \omega_3 - A_2 \omega_3^2 + \ddot{A}_2 \right) + s\theta_3 \left(-\omega_3 \left(2\dot{A}_2 + B_2 \omega_3 \right) + \ddot{B}_2 \right) + \ddot{C}_2 \right)}{B_2 c\theta_3 - A_2 s\theta_3} \tag{3.41}$$

Reagrupando términos para simplificar la expresión, se llega a

$$\alpha_3 = \frac{H_{31} \ddot{x} + H_{32} \ddot{y} + H_{33} \dot{x}^2 + H_{34} \dot{y}^2 + H_{35} \dot{x} \dot{y}}{B_2 c\theta_3 - A_2 s\theta_3} \tag{3.42}$$

donde

$$\begin{aligned}
H_{31} &= -2(x_1 - x_6 - x_3 c\theta_3 + x) \\
H_{32} &= -2(y_6 + y_p - x_3 s\theta_3 + y) \\
H_{33} &= \frac{-2V_{33}^2 + V_{31}^2 A_2 c\theta_2 + V_{31}(-4V_{33}x_3 + V_{31}B_2) s\theta_2}{V_{33}^2} \\
H_{34} &= -2 + \frac{V_{32}(4V_{33}x_3 + V_{32}A_2) c\theta_3}{V_{33}^2} + \frac{V_{32}^2 B_2 s\theta_3}{V_{33}^2} \\
H_{35} &= \frac{2V_{31}(2V_{33}x_3 + V_{32}A_2) c\theta_2 + 2V_{32}(-2V_{33}x_3 + V_{31}B_2) s\theta_3}{V_{33}^2}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Aceleración Articular α_4

Derivando dos veces la ecuación (3.17) con respecto al tiempo y sustituyendo $\ddot{\theta}_4 = \alpha_4$ se tiene

$$\begin{aligned}
&\left(-2s\theta_4 \dot{A}_3 + 2c\theta_4 \dot{B}_3\right) \omega_4 + (-A_3 c\theta_4 - B_3 s\theta_4) \omega_4^2 + c\theta_4 \ddot{A}_3 \\
&\quad + s\theta_4 \ddot{B}_3 + \ddot{C}_3 + (B_3 c\theta_4 - A_3 s\theta_4) \alpha_4 = 0
\end{aligned} \tag{3.44}$$

despejando la aceleración articular α_4 y simplificando se tiene

$$\begin{aligned}
\alpha_4 &= \frac{-\left(c\theta_4 \left(2\dot{B}_3 \omega_4 - A_3 \omega_4^2 + \ddot{A}_3\right) + s\theta_4 \left(-\omega_4 \left(2\dot{A}_3 + B_3 \omega_4\right) + \ddot{B}_3\right) + \ddot{C}_3\right)}{B_3 c\theta_4 - A_3 s\theta_4} \\
&= \frac{H_{41} \ddot{x} + H_{42} \ddot{y} + H_{43} \dot{x}^2 + H_{44} \dot{y}^2 + H_{45} \dot{x} \dot{y}}{B_3 c\theta_4 - A_3 s\theta_4}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

donde

$$\begin{aligned}
H_{41} &= 2(x_1 - x_6 + x_4 c\theta_4 - x) \\
H_{42} &= -2(y_6 + y_p - x_4 s\theta_4 + y) \\
H_{43} &= \frac{-2V_{43}^2 + V_{41}^2 A_3 c\theta_4 + V_{41}(-4V_{43}x_4 + V_{41}B_3) s\theta_4}{V_{43}^2} \\
H_{44} &= -2 + \frac{V_{42}(4V_{43}x_4 + V_{42}A_3) c\theta_4}{V_{43}^2} + \frac{V_{42}^2 B_3 s\theta_4}{V_{43}^2} \\
H_{45} &= \frac{2V_{41}(2V_{43}x_4 + V_{42}A_3) c\theta_4 + 2V_{42}(-2V_{43}x_4 + V_{41}B_3) s\theta_4}{V_{43}^2}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Aceleración Articular α_5

Derivando dos veces la ecuación (3.22) con respecto al tiempo y sustituyendo $\ddot{\theta}_5 = \alpha_5$ se tiene

$$\begin{aligned} & \left(-2s\theta_5\dot{A}_4 + 2c\theta_5\dot{B}_4 \right) \omega_5 + (-A_4c\theta_5 - B_4s\theta_5) \omega_5^2 + c\theta_5\ddot{A}_4 + \\ & + s\theta_5\ddot{B}_4 + \ddot{C}_4 + (B_4c\theta_5 - A_4s\theta_4) \alpha_5 = 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

despejando la aceleración articular α_5 y simplificando se tiene

$$\begin{aligned} \alpha_5 &= \frac{-\left(c\theta_5 \left(2\dot{B}_4\omega_5 - A_4\omega_5^2 + \ddot{A}_4 \right) + s\theta_5 \left(-\omega_5 \left(2\dot{A}_4 + B_4\omega_5 \right) + \ddot{B}_4 \right) + \ddot{C}_4 \right)}{B_4c\theta_5 - A_4s\theta_5} \\ &= \frac{H_{16}\ddot{x} + H_{17}\ddot{y} + H_{18}\dot{x}^2 + H_{19}\dot{y}^2 + H_{20}\dot{x}\dot{y}}{B_4c\theta_5 - A_4s\theta_5} \end{aligned} \quad (3.48)$$

donde

$$\begin{aligned} H_{51} &= 2(x_1 - x_6 + x_5c\theta_5 - x) \\ H_{52} &= -2(y_6 + y_p - x_5s\theta_5 + y) \\ H_{53} &= \frac{-2V_{53}^2 + V_{51}^2A_4c\theta_5 + V_{51}(-4V_{53}x_5 + V_{51}B_4)s\theta_5}{V_{53}^2} \\ H_{54} &= -2 + \frac{V_{52}(4V_{53}x_5 + V_{52}A_4)c\theta_5}{V_{53}^2} + \frac{V_{52}^2B_4s\theta_5}{V_{53}^2} \\ H_{55} &= \frac{2V_{51}(2V_{53}x_5 + V_{52}A_4)c\theta_5 + 2V_{52}(-2V_{53}x_5 + V_{51}B_4)s\theta_5}{V_{53}^2} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Como pudo observarse, conforme se avanzó en el análisis las expresiones se fueron haciendo más complejas, es por ello que para las velocidades y aceleraciones se realizaron varias simplificaciones, las cuales nos permiten apreciar de manera más directa como es que las variables articulares de posición, velocidad y aceleración dependen de las variables cartesianas (en este caso (x, y) y (\dot{x}, \dot{y})) del efector final).

Con el cálculo de las posiciones, velocidades y aceleraciones articulares, se concluye el análisis de la cinemática inversa para el robot paralelo de este trabajo. Con base en los resultados obtenidos, el siguiente capítulo tratará el análisis dinámico del robot considerado en este trabajo.

Capítulo 4

Análisis Dinámico por el Método Euler-Lagrange

4.1. Introducción

En este capítulo se tratará el análisis dinámico del robot paralelo tipo diamante por medio del método de Euler-Lagrange. Este método nos permite formular ecuaciones de movimiento en términos de coordenadas generalizadas, es decir aquellas que definen el movimiento de un cuerpo.

4.2. Función Lagrangiana

La función lagrangiana está definida para un sistema mecánico como la diferencia entre la energía cinética (E_K) y la energía potencial (E_P).

$$L = E_K - E_P \quad (4.1)$$

donde la energía cinética E_K del sistema se define como

$$E_K = \frac{1}{2} (m\mathbf{v}_G^T \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}) \quad (4.2)$$

La ecuación anterior tiene dos sumandos; el primero proporciona la energía cinética que involucra el desplazamiento traslacional, relacionada con la velocidad traslacional del centro de gravedad (\mathbf{v}_G), mientras el segundo proporciona la energía cinética involucrada en la rotación y a su vez relacionada con la velocidad rotacional ($\boldsymbol{\omega}$). Para el caso del robot

paralelo analizado, se puede realizar una simplificación al considerar la rotación como un escalar, puesto que los ejes de rotación de las articulaciones siempre son perpendiculares al espacio de trabajo, quedando de la siguiente manera.

$$E_K = \frac{1}{2} (m\mathbf{v}_G^T\mathbf{v}_G + I_G\omega^2) \quad (4.3)$$

Por otro lado, una expresión general de la energía potencial (E_P), es

$$E_P = m\mathbf{g}^T\mathbf{R} \quad (4.4)$$

donde m es la masa para un elemento, \mathbf{g} es el vector de gravedad $([0, -9,81]^T)$ que experimenta el manipulador y \mathbf{R} define la posición absoluta en el espacio cartesiano.

Como puede verse, la energía potencial en este caso considera el cambio de altura de una masa con respecto a un marco de referencia. En el caso más general la energía almacenada en los resortes traslacionales o rotacionales debe ser incluida en E_p .

Para el caso del manipulador paralelo E_P será una suma de nueve términos, ya que considera la masa y posición de cada uno de los elementos del manipulador.

La ecuación de Lagrange está definida como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \quad (4.5)$$

donde q_j representa a las coordenadas generalizadas (x, y), Q_j representa las fuerzas generalizadas que definen el movimiento del cuerpo en estudio, las cuales se representan, en este caso, como pares. Para mayor detalle con respecto a la deducción de la ecuación (4.5) y al método de Euler-Lagrange, consulte [19].

Para el caso de estudio de este trabajo de tesis las ecuaciones antes citadas se describen a continuación

$$L = \sum_{i=2}^9 (E_{K_i} - E_{P_i}) = \sum L_i \quad (4.6)$$

donde i indica número del cuerpo, que de acuerdo a la Figura 3.1 del capítulo anterior, será para $i = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Desarrollando la ecuación (4.6) se tiene

$$L_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{G_i}^T \mathbf{v}_{G_i} + \frac{1}{2} I_{G_i} \omega_i^2 + m_i \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G_i} \quad (4.7)$$

Donde los términos \mathbf{v}_{Gi} , \mathbf{R}_{Gi} , I_{Gi} , indican la velocidad, posición e Inercia de los centros de gravedad de cada elemento del manipulador y $\boldsymbol{\omega}_i$ la velocidad angular, que para los cuerpos 6 y 8 es considerada nula, ya que carecen de rotación.

Para el estudio del manipulador, la función Lagrangiana se calcula con respecto a los centros de gravedad de los nueve cuerpos del manipulador.

A continuación se desarrolla el cálculo de cada uno de los elementos de la ecuación (4.7), para después aplicar la ecuación de Lagrange (4.5) y obtener el modeo dinámico.

4.3. Posiciones de Centros de Gravedad

En las Figuras 4.1 y 4.2 se muestran los vectores de los centros de gravedad de cada eslabón del mecanismo. Los centros de gravedad de los elementos del mecanismo se pueden encontrar por medio de las cadenas cinemáticas definidas en el capítulo anterior, denominadas lazo izquierdo y lazo derecho.

Centro de Gravedad de la Barra 2 (\mathbf{R}_{G2})

Con base en la Figura 4.1 se propone que

$$\mathbf{R}_{G2} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}'_{G2} \quad (4.8)$$

Retomando las definiciones de los vectores en coordenadas planas de cada elemento del manipulador dadas en la ecuación (3.1), sección 3.3, se tiene que

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} -x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = -x_1 \mathbf{i}$$

donde \mathbf{i} representa un vector unitario en dirección del eje x .

Se recuerda que en el capítulo anterior, en la ecuación (3.2), se definió la matriz de rotación de manera general como

$$[\mathcal{R}_{\theta_j}] = \begin{bmatrix} c\theta_j & -s\theta_j \\ s\theta_j & c\theta_j \end{bmatrix}$$

y a los vectores \mathbf{r}_j como los vectores de posición (en algunos casos referidos al centro de gravedad) de cada eslabón con respecto a su propio marco de referencia.

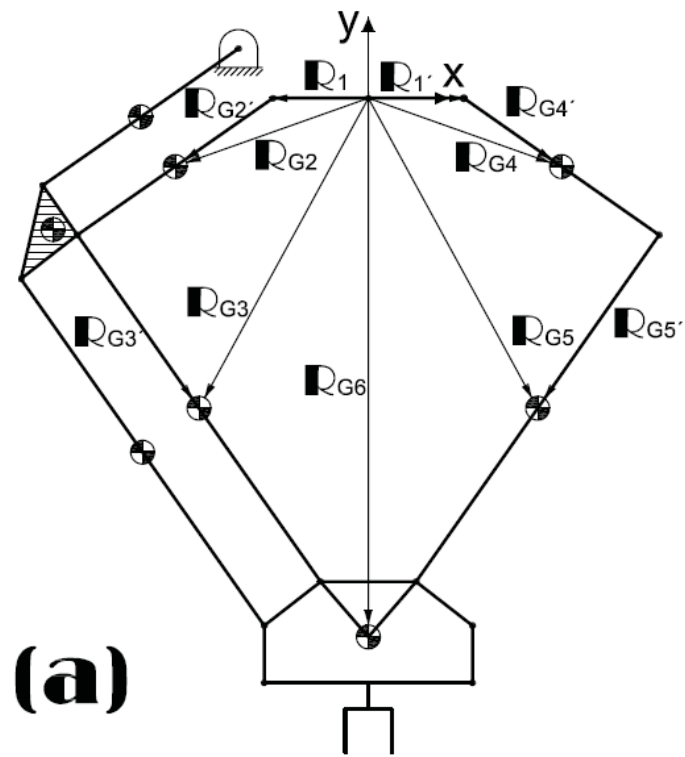


Figura 4.1: Centros de Gravedad de los cuerpos en el Robot paralelo tipo Diamante

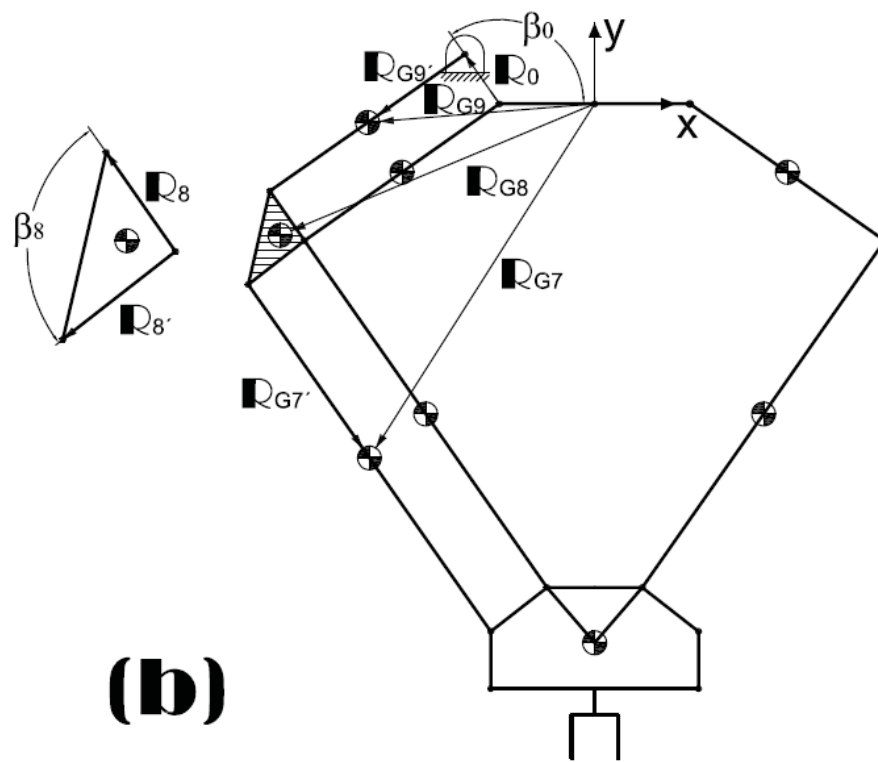


Figura 4.2: Centros de Gravedad de los cuerpos en el Robot paralelo tipo Diamante

$$\begin{aligned}\mathbf{R}'_{G2} &= [\mathcal{R}_{\theta 2}] \mathbf{r}'_{G2}; \\ \mathbf{r}'_{G2} &= \begin{bmatrix} x'_{G2} \\ 0 \end{bmatrix} = x'_{G2} \mathbf{i}\end{aligned}\tag{4.9}$$

En este caso el vector \mathbf{r}'_{G2} está referido al centro de gravedad de la barra dos.

Centro de Gravedad de la Barra 3 (\mathbf{R}_{G3})

Partiendo nuevamente de la Figura 4.1, pero ahora para la barra tres se tiene

$$\mathbf{R}_{G3} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}'_{G3}\tag{4.10}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1 &= \begin{bmatrix} -x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = -x_1 \mathbf{i} \\ \mathbf{R}_2 &= [\mathcal{R}_{\theta 2}] \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_2 &= x_2 \mathbf{i} \\ \mathbf{R}'_{G3} &= [\mathcal{R}_{\theta 2}] \mathbf{r}'_{G3} \\ \mathbf{r}'_{G3} &= x'_{G3} \mathbf{i}\end{aligned}\tag{4.11}$$

Se puede observar que la expresión para \mathbf{R}_2 cambia con respecto al cálculo en la barra anterior. Esto se puede explicar de manera gráfica con la Figura 4.1: Como ahora se quiere llegar al centro de gravedad de la barra tres partiendo desde origen, tendremos que pasar por toda la barra uno, toda la barra dos y la mitad de la barra tres para llegar a dicha posición, es por ello que se contempla al vector \mathbf{r}_2 de manera total y no como \mathbf{r}'_{G2} .

Centro de Gravedad de la Barra 4 (\mathbf{R}_{G4})

Tomando ahora la parte derecha de la Figura 4.1 para llegar al centro de gravedad de la barra cuatro, se tiene

$$\mathbf{R}_{G4} = \mathbf{R}'_1 + \mathbf{R}'_{G4}\tag{4.12}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}'_1 &= \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \mathbf{i} \\
\mathbf{R}'_{G4} &= [\mathcal{R}_{\theta 4}] \mathbf{r}'_{G4}; \\
\mathbf{r}'_{G4} &= \begin{bmatrix} x'_{G4} \\ 0 \end{bmatrix} = x'_{G4} \mathbf{i}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Como puede observarse, a similitud de la barra dos el vector \mathbf{r}'_{G4} , está referido ahora al centro de gravedad de la barra cuatro.

Centro de Gravedad de la Barra 5 (\mathbf{R}_{G5})

Para el caso de la barra cinco se tiene que

$$\mathbf{R}_{G5} = \mathbf{R}'_1 + \mathbf{R}_4 + \mathbf{R}'_{G5} \tag{4.14}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}'_1 &= \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \mathbf{i} \\
\mathbf{R}_4 &= [\mathcal{R}_{\theta 4}] \mathbf{r}_4 \\
\mathbf{r}_4 &= x_4 \mathbf{i} \\
\mathbf{R}'_{G5} &= [\mathcal{R}_{\theta 5}] \mathbf{r}'_{G5} \\
\mathbf{r}'_{G5} &= x'_{G5} \mathbf{i}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Centro de Gravedad de la Barra 6 (\mathbf{R}_{G6})

De igual forma, para la barra seis se tiene que

$$\mathbf{R}_{G6} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_6 \tag{4.16}$$

para

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_3 &= [\mathcal{R}_{\theta 3}] \mathbf{r}_3 \\
\mathbf{r}_3 &= x_3 \mathbf{i} \\
\mathbf{R}_6 &= x_6 \mathbf{i} - y_6 \mathbf{j}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Donde \mathbf{i} representa un vector unitario en dirección del eje x y \mathbf{j} un vector unitario en dirección del eje y .

Centro de Gravedad de la Barra 7 (\mathbf{R}_{G7})

Para el cálculo de los centros de gravedad de las barras siete, ocho y nueve se utilizó la Figura 4.2 ya que, está proporciona una mejor visualización de la estructura auxiliar del robor paralelo.

Con base en la Figura 4.2 para el centro de gravedad de la barra siete se tiene

$$\mathbf{R}_{G7} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}'_8 + \mathbf{R}'_{G7} \quad (4.18)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'_8 &= [\mathcal{R}_{\beta_0+\beta_8}] \mathbf{r}'_8 & (4.19) \\ \mathbf{r}'_8 &= x_8 \mathbf{i} \\ \beta_0 &= 141,68^\circ \\ \beta_8 &= 128,32^\circ \\ \mathbf{R}'_{G7} &= \mathbf{R}'_{G3} \end{aligned}$$

Centro de Gravedad de la Barra 8 (\mathbf{R}_{G8})

Como se observa en la Figura 4.2, la barra ocho es una barra de tipo ternaria, cuyo centro de gravedad está dado por

$$\mathbf{R}_{G8} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}'_{G8} \quad (4.20)$$

Centro de Gravedad de la Barra 9 \mathbf{R}_{G9}

Finalmente para la barra nueve su centro de gravedad es

$$\mathbf{R}_{G9} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}'_{G9} \quad (4.21)$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_0 &= \mathcal{R}[\beta_0] \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}_0 &= x_0 \mathbf{i}\end{aligned}\tag{4.22}$$

$$\mathbf{R}'_{G9} = \mathbf{R}'_{G2}$$

4.4. Velocidades de Centros de Gravedad

La importancia del cálculo de las velocidades radica en que a través de ellas se puede conocer la energía cinética de un cuerpo. En nuestro caso, las velocidades se calcularon para los centros de gravedad considerando, como es usual, que en estos puntos se concentra la masa.

En las Figuras 4.1 y 4.2 se observa la localización de los centros de gravedad para cada elemento del manipulador.

Velocidad del Centro de Gravedad de la Barra 2

Derivando la ecuación (4.8) con respecto al tiempo se obtiene la velocidad del centro de gravedad de la barra dos, cuya expresión es

$$\mathbf{V}_{G2} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}'_{G2}\tag{4.23}$$

Recordando que $\mathbf{R}_1 = -x_1 \mathbf{i}$ y que la derivada de una constante es igual a cero

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{V}'_{G2} = [\mathbf{W}_2] \mathbf{R}'_{G2}\tag{4.24}$$

donde la matriz $[\mathbf{W}_2]$ se expresa como

$$[\mathbf{W}_2] = [\mathcal{R}_{\theta_2}] [\mathcal{R}_{\theta_2}]^T$$

Además, retomando la definición para \mathbf{R}'_{G2} del análisis de posiciones dada en la ecuación (4.9)

$$\mathbf{R}'_{G2} = [\mathcal{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}'_{G2}$$

sustituyendo ambos términos en la ecuación (4.24)

$$\mathbf{V}'_{G2} = \left[\dot{\mathcal{R}}_{\theta_2} \right] [\mathcal{R}_{\theta_2}]^T [\mathcal{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}'_{G2}$$

Aplicando las propiedades de la transpuesta para una matriz de rotación es posible simplificar la expresión anterior mediante la propiedad siguiente

$$[\mathcal{R}_{\theta_2}]^T [\mathcal{R}_{\theta_2}] = [\mathbf{1}]$$

con lo cual la expresión queda como sigue

$$\mathbf{V}'_{G2} = \left[\dot{\mathcal{R}}_{\theta_2} \right] \mathbf{r}'_{G2} \quad (4.25)$$

La definición para una matriz de rotación fue expuesta en el capítulo anterior en la ecuación (3.2). Derivando cada uno de sus elementos con respecto a θ_2 se obtiene

$$[\mathcal{R}_{\theta_2}] = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\dot{\mathcal{R}}_{\theta_2} \right] = \dot{\theta}_2 \begin{bmatrix} -s\theta_2 & -c\theta_2 \\ c\theta_2 & -s\theta_2 \end{bmatrix} = \dot{\theta}_2 \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \theta_2}$$

que si se sustituye en la ecuación (4.25), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{V}'_{G2} &= \dot{\theta}_2 \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \theta_2} \mathbf{r}'_{G2} \\ &= \mathbf{a}_2 \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \theta_2} \mathbf{r}'_{G2} \quad (4.27)$$

En el análisis cinemático realizado en el capítulo anterior, fue posible obtener expresiones de posición, velocidad y aceleración, en este apartado, se hará uso de ellas con la finalidad de expresar todas las velocidades de centros de gravedad de los eslabones en términos de las velocidades \dot{x} \dot{y} del efector final.

De la ecuación (3.26) del capítulo anterior se sabe que

$$\omega_2 = \frac{1}{V_3} (V_1 \dot{x} + V_2 \dot{y})$$

donde ω_2 se expresa de forma vectorial como

$$\omega_2 = \frac{1}{V_3} [V_1, V_2] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$= \mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}} \quad (4.29)$$

y la expresión para \mathbf{b}_2^T esta dada por

$$\mathbf{b}_2^T = \frac{1}{V_3} [V_1, V_2]$$

La posición del efector final es $\mathbf{q} = [x, y]^T$ por lo tanto la velocidad en el mismo punto se expresa como $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{x}, \dot{y}]^T$.

Sustituyendo la ecuación (4.29) en la ecuación (4.26), se obtiene la expresión general de la velocidad en el centro de gravedad de la barra dos

$$\mathbf{V}_{G2} = \mathbf{V}'_{G2} = \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}} \quad (4.30)$$

donde

$$\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -s\theta_2 x'_{G2} \left(\frac{V_1}{V_3}\right) \dot{x} - s\theta_2 x'_{G2} \left(\frac{V_2}{V_3}\right) \dot{y} \\ c\theta_2 x'_{G2} \left(\frac{V_1}{V_3}\right) \dot{x} + c\theta_2 x'_{G2} \left(\frac{V_2}{V_3}\right) \dot{y} \end{bmatrix}$$

Como podemos observar todas las simplificaciones, sustituciones y desarrollos que anteriormente se realizaron para el cálculo de la velocidad en el centro de gravedad de la barra dos, se hicieron con la finalidad de poder expresar la ecuación en términos de la velocidad del efector final. Esta misma condición y mismas operaciones se presentarán en las barras subsecuentes.

Velocidad del Centro de Gravedad de la Barra 3

Derivando la expresión de posición de centro de gravedad de la barra tres dada en la ecuación (4.24)

$$\mathbf{V}_{G3} = \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}'_{G3} \quad (4.31)$$

En este caso se sigue un procedimiento similar al presentado a partir de la ecuación (4.26), es decir se obtiene \mathbf{V}_2 y \mathbf{V}'_{G3} .

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_2 &= \dot{\theta}_2 \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \dot{\theta}_2} \mathbf{r}_2 \\
\mathbf{V}_2 &= \mathbf{a}_3 \dot{\theta}_2 \\
\mathbf{a}_3 &= \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \dot{\theta}_2} \mathbf{r}_2
\end{aligned} \tag{4.32}$$

donde ahora se define un nuevo vector \mathbf{a}_3 y al vector $\mathbf{r}_2 = x_2 \mathbf{i}$, que, como anteriormente se mencionaba, estos cambios se deben a que ahora se trabaja con las expresiones para la barra dos de forma completa y no solo al centro de gravedad.

Para \mathbf{V}'_{G3} tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}'_{G3} &= \dot{\theta}_3 \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_3}]}{\partial \dot{\theta}_3} \mathbf{r}'_{G3} \\
\mathbf{V}'_{G3} &= \mathbf{b}_3 \dot{\theta}_3
\end{aligned} \tag{4.33}$$

con

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'_{G3} &= x'_{G3} \mathbf{i} \\
\mathbf{b}_3 &= \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_3}]}{\partial \dot{\theta}_3} \mathbf{r}'_{G3}
\end{aligned}$$

Si se sustituyen las ecuaciones (4.32) y (4.33) en (4.31) se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{G3} &= \mathbf{a}_3 \dot{\theta}_2 + \mathbf{b}_3 \dot{\theta}_3 \\
&= \mathbf{M}_3 \dot{\boldsymbol{\theta}}_{23}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

donde

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 & \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s\theta_2 x_2 & -s\theta_3 x_{G'3} \\ c\theta_2 x_2 & c\theta_3 x_{G'3} \end{bmatrix}$$

El vector $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{23}$ puede escribirse de la siguiente forma, con la finalidad de poder expresar la velocidad del centro de gravedad de la barra tres en términos de la velocidad del efector final.

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{23} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{V_3} (V_1 \dot{x} + V_2 \dot{y}) \\ \frac{1}{V_6} (V_4 \dot{x} + V_5 \dot{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_1}{V_3} & \frac{V_2}{V_3} \\ \frac{V_4}{V_6} & \frac{V_5}{V_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{23} = \mathbf{N}_3 \dot{\mathbf{q}} \quad (4.36)$$

donde

$$\mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix} \frac{V_1}{V_3} & \frac{V_2}{V_3} \\ \frac{V_4}{V_6} & \frac{V_5}{V_6} \end{bmatrix}$$

Finalmente sustituyendo la ecuación (4.36) en la ecuación (4.34) se llega a la expresión de la velocidad en el centro de gravedad de la barra tres que también depende de la velocidad (\dot{x}, \dot{y}) del efector final.

$$\mathbf{V}_{G3} = \mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3 \dot{\mathbf{q}} \quad (4.37)$$

Velocidad del Centro de Gravedad de la Barra 4

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (4.12)

$$\mathbf{V}_{G4} = \mathbf{V}'_1 + \mathbf{V}'_{G4} \quad (4.38)$$

como $\mathbf{V}'_1 = \mathbf{0}$, entonces

$$\mathbf{V}_{G4} = \mathbf{V}'_{G4}$$

Siguiendo un procedimiento similar al presentado a partir de la ecuación (4.26) obtenemos \mathbf{V}'_{G4}

$$\begin{aligned} \mathbf{V}'_{G4} &= \dot{\theta}_4 \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_4}]}{\partial \theta_4} \mathbf{r}'_{G4} \\ \mathbf{a}_4 &= \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_4}]}{\partial \theta_4} \mathbf{r}'_{G4}; \\ \mathbf{V}_{G4} &= \mathbf{a}_4 \dot{\theta}_4 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Del análisis cinemático del capítulo anterior se obtiene una expresión de $\dot{\theta}_4$ y se sigue un desarrollo similar al realizado en los eslabones anteriores.

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_4 &= \begin{bmatrix} \frac{V_7}{V_9} & \frac{V_8}{V_9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}; \mathbf{b}_4^T = \begin{bmatrix} \frac{V_7}{V_9} & \frac{V_8}{V_9} \end{bmatrix} \\ \dot{\theta}_4 &= \mathbf{b}_4^T \dot{\mathbf{q}}\end{aligned}\quad (4.40)$$

Finalmente sustituyendo la ecuación (4.40) en la ecuación (4.39) se llega a la expresión de la velocidad en el centro de gravedad de la barra cuatro, que depende de la velocidad del efector final.

$$\mathbf{V}_{G4} = \mathbf{a}_4 \mathbf{b}_4^T \dot{\mathbf{q}} \quad (4.41)$$

Velocidad del Centro de Gravedad de la Barra 5

Del análisis de posiciones se retoma la ecuación (4.29) y se deriva con respecto al tiempo, con lo cual se obtiene \mathbf{V}_{G5} .

$$\mathbf{V}_{G5} = \mathbf{V}'_1 + \mathbf{V}_4 + \mathbf{V}'_{G5} \quad (4.42)$$

donde

$$\mathbf{V}'_1 = \mathbf{0}$$

De manera similar a los casos anteriores se obtienen las expresiones para \mathbf{V}_4 y \mathbf{V}'_{G5} , lo que nos lleva a tener a la ecuación (4.42) en términos de $\dot{\theta}_4$ y $\dot{\theta}_5$.

$$\mathbf{V}_4 = \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_4}]}{\partial \theta_4} \mathbf{r}_4 \dot{\theta}_4; \mathbf{V}_4 = \mathbf{a}_5 \dot{\theta}_4 \quad (4.43)$$

$$\mathbf{V}'_{G5} = \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_5}]}{\partial \theta_5} \mathbf{r}_{G'5} \dot{\theta}_5; \mathbf{V}'_{G5} = \mathbf{b}_5 \dot{\theta}_5 \quad (4.44)$$

sustituyendo las ecuaciones (4.43) y (4.44) en (4.42), se llega a

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{G5} &= \mathbf{a}_5 \dot{\theta}_4 + \mathbf{b}_5 \dot{\theta}_5; \\ &= \mathbf{M}_5 \dot{\boldsymbol{\theta}}_{45}\end{aligned}\quad (4.45)$$

donde

$$\mathbf{M}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_5 & \mathbf{b}_5 \end{bmatrix}$$

Al quedar la ecuación (4.42) en términos de $\dot{\theta}_4$ y $\dot{\theta}_5$, es necesario realizar una nueva operación, que permita expresar la velocidad del centro de gravedad de la barra cinco en términos de la velocidad del efector final. Utilizando los resultados del análisis cinemático del capítulo dos se sabe que

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{45} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{V_9} (V_7\dot{x} + V_8\dot{y}) \\ \frac{1}{V_{12}} (V_{10}\dot{x} + V_{11}\dot{y}) \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$= \mathbf{N}_5 \dot{\mathbf{q}} \quad (4.47)$$

donde

$$\mathbf{N}_5 = \begin{bmatrix} \frac{V_7}{V_9} & \frac{V_8}{V_9} \\ \frac{V_{10}}{V_{12}} & \frac{V_{11}}{V_{12}} \end{bmatrix}$$

Finalmente sustituyendo la ecuación (4.47) en (4.45), se obtiene la expresión de la velocidad del centro de gravedad de la barra cinco en términos de la velocidad del efector final ($\dot{\mathbf{q}}$).

$$\mathbf{V}_{G5} = \mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5 \dot{\mathbf{q}} \quad (4.48)$$

Velocidad del Centro de Gravedad de la Barra 6

Con base en la estructura del robot paralelo presentada en la Figura 4.1, se sabe que la velocidad en el centro de gravedad del cuerpo seis es la misma que experimenta el efector final, por tanto

$$\mathbf{V}_{G6} = \dot{\mathbf{q}} \quad (4.49)$$

Velocidad del Centro de Gravedad de la Barra 7

Tomando como base la Figura 4.2 se observa que los elementos tres y siete son paralelos, lo cual nos indica que poseen la misma velocidad, mas no así la misma posición, por tanto tenemos que

$$\mathbf{V}_{G7} = \mathbf{V}_{G3} \quad (4.50)$$

Velocidad del Centro de Gravedad de la Barra 8

La velocidad de la barra ocho, se puede obtener a partir de (4.20), como sigue

$$\mathbf{V}_{G8} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}'_{G8}$$

Puesto que la barra ocho es un cuerpo rígido y no rota, obtenemos finalmente

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{G8} \quad (4.51)$$

Velocidad del Centro de Gravedad de la Barra 9

Nuevamente con base en la Figura 4.2, se observa que los elementos dos y nueve son paralelos, lo cuál nos indica que poseen la misma velocidad, por tanto tenemos que

$$\mathbf{V}_{G2} = \mathbf{V}_{G9} \quad (4.52)$$

Recapitulando, en este apartado se obtuvieron todas las expresiones de posición y velocidad de los centros de gravedad para todos los elementos del manipulador, involucrados con las energías E_K y E_P .

4.5. Ecuación de Euler-Lagrange

De acuerdo a la ecuación (4.5) tenemos que, para encontrar las dos ecuaciones de movimiento del robot es necesario, utilizar la ecuación de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \mathbb{Q}_j$$

donde $j = 1, 2$ y la función de Lagrange (L) consta de nueve elementos

$$L = \sum_{i=2}^9 L_i$$

Por tanto, la ecuación (4.5), se compone de 18 términos, expresados a continuación

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_3}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_4}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_5}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_6}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_7}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_8}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_9}{\partial \dot{q}_j} \right) - \\ & \left(\frac{\partial L_2}{\partial q_j} + \frac{\partial L_3}{\partial q_j} + \frac{\partial L_4}{\partial q_j} + \frac{\partial L_5}{\partial q_j} + \frac{\partial L_6}{\partial q_j} + \frac{\partial L_7}{\partial q_j} + \frac{\partial L_8}{\partial q_j} + \frac{\partial L_9}{\partial q_j} \right) = \mathbb{Q}_j \end{aligned} \quad (4.53)$$

En las siguientes secciones se desarrollarán cada uno de los términos de la ecuación (4.53).

4.5.1. Desarrollando los Términos $\frac{\partial L_i}{\partial \dot{q}_j}$

Término $\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j}$

De la ecuación (4.7), sabemos que

$$L_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{G_i}^T \mathbf{v}_{G_i} + \frac{1}{2} I_{G_i} \omega_i^2 + m_i \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G_i}$$

El primer término de la ecuación (4.53) queda como sigue

$$\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[\frac{1}{2} (m_2 \mathbf{V}_{G_2}^T \mathbf{V}_{G_2}) + \frac{1}{2} I_{G_2} (\omega_2^2) + m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G_2} \right] \quad (4.54)$$

donde \mathbf{V}_{G_2} y ω_2 son funciones de \dot{q}_j , mientras que \mathbf{R}_{G_2} depende de q_j únicamente.

Derivando (4.54) se llega a

$$\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{\partial \mathbf{V}_{G_2}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{V}_{G_2} + \mathbf{V}_{G_2}^T \frac{\partial \mathbf{V}_{G_2}}{\partial \dot{q}_j} \right) + I_{G_2} \omega_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{q}_j} \quad (4.55)$$

simplificando la ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{1}{2} m_2 \left(2 \frac{\partial \mathbf{V}_{G_2}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{V}_{G_2} \right) + I_{G_2} \omega_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{q}_j} \\ &= m_2 \frac{\partial \mathbf{V}_{G_2}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{V}_{G_2} + I_{G_2} \omega_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{q}_j} \end{aligned} \quad (4.56)$$

De las ecuaciones (4.30) y (4.29) para \mathbf{V}_{G_2} y ω_2 respectivamente se tiene que

$$\frac{\partial \mathbf{V}_{G_2}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_j} = \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (\dot{\theta}_2)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_j} = \mathbf{b}_2^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \quad (4.58)$$

Por medio de las propiedades de la transpuesta de una matriz, es posible escribir la expresión (4.57) mediante la propiedad siguiente

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{b}_2 \mathbf{a}_2^T \\ \left(\mathbf{b}_2^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{b}_2 \end{aligned} \quad (4.59)$$

Sustituyendo (4.57) y (4.58) en (4.56) y considerando la propiedad expuesta en (4.59), se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} &= m_2 \left(\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{b}_2 \mathbf{a}_2^T \right) (\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}) + I_{G2} \left(\mathbf{b}_2^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}) \\ &= m_2 \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{A2} \dot{\mathbf{q}} + I_{G2} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{B2} \dot{\mathbf{q}}\end{aligned}\quad (4.60)$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{A2} &= [(\mathbf{b}_2 \mathbf{a}_2^T) (\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2^T)] \\ \mathbf{P}_{B2} &= [\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2^T]\end{aligned}$$

La ecuación (4.60) aún puede ser simplificada como sigue

$$\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T [m_2 \mathbf{P}_{A2} + I_{G2} \mathbf{P}_{B2}] \dot{\mathbf{q}} \quad (4.61)$$

Finalmente, definimos

$$\mathbf{P}_{C2} = [m_2 \mathbf{P}_{A2} + I_{G2} \mathbf{P}_{B2}]$$

con lo que se obtiene el primer término de la ecuación (4.53).

$$\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C2} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.62)$$

Término $\frac{\partial L_3}{\partial \dot{q}_j}$

Para el segundo término de la ecuación (4.53) se tiene

$$\frac{\partial L_3}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[\frac{1}{2} (m_3 \mathbf{V}_{G3}^T \mathbf{V}_{G3}) + \frac{1}{2} I_{G3} (\omega_3^2) + m_3 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G3} \right] \quad (4.63)$$

simplificando y derivando, se llega a la siguiente expresión

$$\frac{\partial L_3}{\partial \dot{q}_j} = m_3 \frac{\partial \mathbf{V}_{G3}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{V}_{G3} + I_{G3} \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{q}_j} \omega_3 \quad (4.64)$$

Sustituyendo las definiciones de las ecuaciones (4.34) y (4.36) para \mathbf{V}_{G3} y $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{23}$ respectivamente se tiene que

$$\frac{\partial \mathbf{V}_{G3}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3 \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_j} = \mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \quad (4.65)$$

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (\dot{\theta}_3)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (\mathbf{j}^T \dot{\theta}_{23})}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (\mathbf{j}^T \mathbf{N}_3 \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_j} \quad (4.66)$$

Utilizando las propiedades de la transpuesta para una matriz, es posible expresar la ecuación anteriores mediante la propiedad siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{j}^T \mathbf{N}_3 \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial (\mathbf{N}_3 \dot{\mathbf{q}})^T \mathbf{j}}{\partial \dot{q}_j} \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{q}_j} &= \left(\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{N}_3^T \right) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (4.67)$$

sustituyendo (4.65), (4.66) y (4.67) en (4.64), se obtiene

$$\frac{\partial L_3}{\partial \dot{q}_j} = m_3 \left(\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{N}_3^T \mathbf{M}_3^T \right) (\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3 \dot{\mathbf{q}}) + I_{G3} \left(\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{N}_3^T \mathbf{j} \right) (\mathbf{j}^T \mathbf{N}_3 \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.68)$$

Simplificando la ecuación (4.68), se llega a una forma similar a la obtenida para el cuerpo dos.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_3}{\partial \dot{q}_j} &= m_3 \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{A3} \dot{\mathbf{q}} + I_{G3} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{B3} \dot{\mathbf{q}} \\ &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T [m_3 \mathbf{P}_{A3} + I_{G3} \mathbf{P}_{B3}] \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{A3} &= [\mathbf{N}_3^T \mathbf{M}_3^T \mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3] \\ \mathbf{P}_{B3} &= [\mathbf{N}_3^T \mathbf{N}_3] \end{aligned}$$

Al igual que en el desarrollo para el cuerpo dos, se define una nueva matriz \mathbf{P}_{C3} como sigue

$$\mathbf{P}_{C3} = [m_3 \mathbf{P}_{A3} + I_{G3} \mathbf{P}_{B3}]$$

con lo que finalmente se obtiene el tercer término de la ecuación (4.53).

$$\frac{\partial L_3}{\partial \dot{q}_j} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C3} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.69)$$

Término $\frac{\partial L_4}{\partial \dot{q}_j}$

Al igual que las barras anteriores se parte de la ecuación (4.7), para generar el cuarto término correspondiente a la ecuación (4.53)

$$\frac{\partial L_4}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[\frac{1}{2} (m_4 \mathbf{V}_{G4}^T \mathbf{V}_{G4}) + \frac{1}{2} I_{G4} (\omega_4^2) + m_4 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G4} \right] \quad (4.70)$$

Simplificando y derivando la ecuación (4.70), se expresa como

$$\frac{\partial L_4}{\partial \dot{q}_j} = m_4 \frac{\partial \mathbf{V}_{G4}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{V}_{G4} + I_{G4} \frac{\partial \omega_4}{\partial \dot{q}_j} \omega_4 \quad (4.71)$$

De las definiciones de las ecuaciones (4.41) y (4.40) para \mathbf{V}_{G4} y $\dot{\theta}_4$ respectivamente, se sabe que

$$\frac{\partial \mathbf{V}_{G4}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (\mathbf{a}_4 \mathbf{b}_4^T \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_j} = \mathbf{a}_4 \mathbf{b}_4^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial \omega_4}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (\dot{\theta}_4)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (\mathbf{b}_4^T \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_j} \quad (4.73)$$

$$\frac{\partial \omega_4}{\partial \dot{q}_j} = \mathbf{b}_4^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \quad (4.74)$$

sustituyendo las ecuaciones (4.72), (4.73) y (4.74) en (4.71), se tiene

$$\frac{\partial L_4}{\partial \dot{q}_j} = m_4 \left(\mathbf{a}_4 \mathbf{b}_4^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) (\mathbf{a}_4 \mathbf{b}_4^T \dot{\mathbf{q}}) + I_{G4} \left(\mathbf{b}_4^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) (\mathbf{b}_4^T \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.75)$$

De manera similar a los desarrollo anteriores se hace uso de la misma propiedad de la traspuesta para una matriz, dicha propiedad nos permite expresar la ecuación (4.75), como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_4}{\partial \dot{q}_j} &= m_4 \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{b}_4 \mathbf{a}_4^T \mathbf{a}_4 \mathbf{b}_4^T \dot{\mathbf{q}} + I_{G4} \left(\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{b}_4 \right) (\mathbf{b}_4^T \dot{\mathbf{q}}) \\ &= m_4 \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{A4} \dot{\mathbf{q}} + I_{G4} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{B4} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{A4} &= [\mathbf{b}_4 \mathbf{a}_4^T \mathbf{a}_4 \mathbf{b}_4^T] \\ \mathbf{P}_{B4} &= \mathbf{b}_4 \mathbf{b}_4^T\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L_4}{\partial \dot{q}_j} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T [m_4 \mathbf{P}_{A4} + I_{G4} \mathbf{P}_{B4}] \dot{\mathbf{q}}$$

Se define, nuevamente una matriz \mathbf{P}_{C4}

$$\mathbf{P}_{C4} = [m_4 \mathbf{P}_{A4} + I_{G4} \mathbf{P}_{B4}]$$

Para finalmente obtener el tercer término de la ecuación (4.53)

$$\frac{\partial L_4}{\partial \dot{q}_j} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C4} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.76)$$

Término $\frac{\partial L_5}{\partial \dot{q}_j}$

Nuevamente se hace uso de la definición expuesta en la ecuación (4.7), para generar la ecuación correspondiente a la barra cinco

$$\frac{\partial L_5}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[\frac{1}{2} (m_5 \mathbf{V}_{G5}^T \mathbf{V}_{G5}) + \frac{1}{2} I_{G5} (\omega_5^2) + m_5 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G5} \right] \quad (4.77)$$

Simplificando y derivando, es posible reescribir la ecuación (4.77) como sigue

$$\frac{\partial L_5}{\partial \dot{q}_j} = m_5 \frac{\partial \mathbf{V}_{G5}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{V}_{G5} + I_{G5} \frac{\partial \omega_5}{\partial \dot{q}_j} \omega_5 \quad (4.78)$$

Considerando las definiciones de las ecuaciones (4.48) y (4.47) para \mathbf{V}_{G5} y $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{45}$ respectivamente, se sabe que

$$\frac{\partial \mathbf{V}_{G5}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5 \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_j} = \mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \quad (4.79)$$

$$\frac{\partial \omega_5}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (\dot{\theta}_5)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (\mathbf{j}^T \dot{\boldsymbol{\theta}}_{45})}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (\mathbf{j}^T \mathbf{N}_5 \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_j} \quad (4.80)$$

ademas, utilizando las propiedades de la transpuesta para una matriz, es posible expresar la ecuación anterior mediante la propiedad siguiente

$$\begin{aligned}\frac{\partial (\mathbf{j}^T \mathbf{N}_5 \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial (\mathbf{N}_5 \dot{\mathbf{q}})^T \mathbf{j}}{\partial \dot{q}_j} \\ \frac{\partial \omega_5}{\partial \dot{q}_j} &= \left(\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{N}_5^T \right) \mathbf{j}\end{aligned}\quad (4.81)$$

Sustituyendo (4.79), (4.80) y (4.81) en (4.78), es posible expresar la ecuación (4.78), como sigue

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_5}{\partial \dot{q}_j} &= m_5 \left(\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{N}_5^T \mathbf{M}_5^T \right) (\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5 \dot{\mathbf{q}}) + I_{G5} \left(\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{N}_5^T \mathbf{j} \right) (\mathbf{j}^T \mathbf{N}_5 \dot{\mathbf{q}}) \\ &= m_5 \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{A5} \dot{\mathbf{q}} + I_{G5} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{B5} \dot{\mathbf{q}}\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{A5} &= [\mathbf{N}_5^T \mathbf{M}_5^T \mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5] \\ \mathbf{P}_{B5} &= [\mathbf{N}_5^T \mathbf{N}_5]\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L_5}{\partial \dot{q}_j} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T [m_5 \mathbf{P}_{A5} + I_{G5} \mathbf{P}_{B5}] \dot{\mathbf{q}}$$

Definiendo nuevamente una matriz \mathbf{P}_{C5}

$$\mathbf{P}_{C5} = [m_5 \mathbf{P}_{A5} + I_{G5} \mathbf{P}_{B5}]$$

es posible obtener el cuarto término de la ecuación (4.53), expresado como

$$\frac{\partial L_5}{\partial \dot{q}_j} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C5} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.82)$$

Término $\frac{\partial L_6}{\partial \dot{q}_j}$

Como anteriormente se mencionó el cuerpo seis carece de rotación, por tanto su expresión para la función lagrangiana es

$$\frac{\partial L_6}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[\frac{1}{2} m_6 \mathbf{V}_{G6}^T \mathbf{V}_{G6} \right] \quad (4.83)$$

Simplificando y derivando la ecuación (4.83), se obtiene

$$\frac{\partial L_6}{\partial \dot{q}_j} = m_6 \frac{\partial \mathbf{V}_{G6}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{V}_{G6}$$

Finalmente, considerando la definición de la ecuación (4.49) y sustituyendo, se obtiene el quinto término de la ecuación (4.53), expresado como

$$\frac{\partial L_6}{\partial \dot{q}_j} = m_6 \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \dot{\mathbf{q}} \quad (4.84)$$

Desarrollando $\frac{\partial L_7}{\partial \dot{q}_j}$

Como anteriormente sucedió en el análisis de posición y velocidad de centros de gravedad, los cuerpos tres y siete comparten características similares, entonces puesto que $\mathbf{V}_{G7} = \mathbf{V}_{G3}$ y $\omega_7 = \omega_3$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_7}{\partial \dot{q}_j} &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T [m_7 \mathbf{P}_{A3} + I_{G7} \mathbf{P}_{B3}] \dot{\mathbf{q}} \\ \frac{\partial L_7}{\partial \dot{q}_j} &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C7} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4.85)$$

donde

$$\mathbf{P}_{C7} = [m_7 \mathbf{P}_{A3} + I_{G7} \mathbf{P}_{B3}]$$

Desarrollando $\frac{\partial L_8}{\partial \dot{q}_j}$

Nuevamente, retomando la definición de la ecuación (4.7) para la barra ocho se tiene

$$\frac{\partial L_8}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[\frac{1}{2} (m_8 \mathbf{V}_8^T \mathbf{V}_8) + \frac{1}{2} I_{G8} (\omega_8^2) + m_8 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G8} \right] \quad (4.86)$$

Como la barra ocho y la barra dos poseen la misma velocidad de traslación y el cuerpo ocho no rota se tiene que

$$\frac{\partial L_8}{\partial \dot{q}_j} = m_8 \frac{\partial \mathbf{V}_2^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{V}_2 \quad (4.87)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_2 &= \mathbf{a}_{2a} \mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{a}_{2a} &= \begin{bmatrix} -s\theta_2 & -c\theta_2 \\ c\theta_2 & -s\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_2}{\partial \dot{q}_j} = \mathbf{a}_{2a} \mathbf{b}_2^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \quad (4.88)$$

Sustituyendo los valores de la ecuación (4.88) en (4.87) y aplicando propiedades de la transpuesta

$$\frac{\partial L_8}{\partial \dot{q}_j} = m_8 \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{b}_2 \mathbf{a}_3^T \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}$$

Finalmente se define un matriz \mathbf{P}_{C8}

$$\mathbf{P}_{C8} = [\mathbf{b}_2 \mathbf{a}_3^T \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_2^T]$$

con lo que se obtiene la función lagrangiana para la barra ocho

$$\frac{\partial L_8}{\partial \dot{q}_j} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C8} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.89)$$

Desarrollando $\frac{\partial L_9}{\partial \dot{q}_j}$

Puesto que $\mathbf{V}_{G9} = \mathbf{V}_{G2}$ y $\omega_9 = \omega_2$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_9}{\partial \dot{q}_j} &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T [m_9 \mathbf{P}_{A2} + I_{G9} \mathbf{P}_{B2}] \dot{\mathbf{q}} \\ \frac{\partial L_9}{\partial \dot{q}_j} &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C9} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4.90)$$

donde

$$\mathbf{P}_{C9} = [m_9 \mathbf{P}_{A2} + I_{G9} \mathbf{P}_{B2}]$$

El término $\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j}$ de la ecuación anterior varía dependiendo del valor del iterador j ; este iterador indica cada una de las coordenadas independientes del sistema, en nuestro caso x y y .

Para

$$\blacksquare \quad j = 1 \quad q_1 = x$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{i} \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\blacksquare \quad j = 2 \quad q_2 = y$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{y}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \mathbf{j} \end{aligned} \quad (4.92)$$

4.5.2. Desarrollando los términos $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)$

En este apartado se obtendrán los términos $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)$, para los nueve cuerpos que integran el manipulador paralelo.

Término $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} \right)$

Tomando en cuenta las ecuaciones (4.91) y (4.92) y como se sabe la derivada de una constante es cero se tiene que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0$$

Derivando la ecuación (4.62) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C2} \dot{\mathbf{q}} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \right) \mathbf{P}_{C2} \dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \frac{d}{dt} (\mathbf{P}_{C2}) \dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C2} \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} \\ &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \dot{\mathbf{P}}_{C2} \dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C2} \ddot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4.93)$$

Si se definen las siguientes variables

$$\begin{aligned} D_{2j} &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C2} \\ K_{2j} &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \dot{\mathbf{P}}_{C2} \end{aligned}$$

se llega finalmente a una expresión que permite apreciar de una manera más sencilla la dependencia con la aceleración y velocidad del efector final.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} \right) = D_{2j} \ddot{\mathbf{q}} + K_{2j} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.94)$$

Término $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_3}{\partial \dot{q}_j} \right)$

Derivando la ecuación (4.69) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_3}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C3} \dot{\mathbf{q}} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \frac{d}{dt} (\mathbf{P}_{C3}) \dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C3} \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} \\ &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \dot{\mathbf{P}}_{C3} \dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C3} \ddot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4.95)$$

si definimos D_{3j} y K_{3j} como sigue

$$D_{3j} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C3}$$

$$K_{3j} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \dot{\mathbf{P}}_{C3}$$

Finalmente se llega a la expresión para el cuerpo tres

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_3}{\partial \dot{q}_j} \right) = D_{3j} \ddot{\mathbf{q}} + K_{3j} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.96)$$

Término $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_4}{\partial \dot{q}_j} \right)$

Derivando la ecuación (4.76) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_4}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C4} \dot{\mathbf{q}} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \frac{d}{dt} (\mathbf{P}_{C4}) \dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C4} \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} \\ &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \dot{\mathbf{P}}_{C4} \dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C4} \ddot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4.97)$$

si definimos D_{4j} y K_{4j} como sigue

$$D_{4j} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C4}$$

$$K_{4j} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \dot{\mathbf{P}}_{C4}$$

Donde, la expresión final para el cuerpo cuatro es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_4}{\partial \dot{q}_j} \right) = D_{4j} \ddot{\mathbf{q}} + K_{4j} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.98)$$

Desarrollando $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_5}{\partial \dot{q}_j} \right)$

Derivando la ecuación (4.82) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_5}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C5} \dot{\mathbf{q}} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \frac{d}{dt} (\mathbf{P}_{C5}) \dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C5} \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} \\ &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \dot{\mathbf{P}}_{C5} \dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C5} \ddot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4.99)$$

si definimos D_{5j} y K_{5j} como sigue

$$D_{5j} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C5}$$

$$K_{5j} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \dot{\mathbf{P}}_{C5}$$

Entonces, la expresión final para el cuerpo cinco es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_5}{\partial \dot{q}_j} \right) = D_{5j} \ddot{\mathbf{q}} + K_{5j} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.100)$$

Término $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_6}{\partial \dot{q}_j} \right)$

Derivando la ecuación (4.84) tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_6}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{d}{dt} \left(m_6 \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \dot{\mathbf{q}} \right) \\
&= m_6 \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \ddot{\mathbf{q}}
\end{aligned} \tag{4.101}$$

Definiendo a D_{6j} como

$$D_{6j} = m_6 \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T$$

se llega a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_6}{\partial \dot{q}_j} \right) = D_{6j} \ddot{\mathbf{q}} \tag{4.102}$$

Desarrollando $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_7}{\partial \dot{q}_j} \right)$

Derivando la ecuación (4.85), se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_7}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C7} \dot{\mathbf{q}} \right) \\
&= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \frac{d}{dt} (\mathbf{P}_{C7}) \dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C7} \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} \\
&= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \dot{\mathbf{P}}_{C7} \dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C7} \ddot{\mathbf{q}}
\end{aligned} \tag{4.103}$$

Si se define, a D_{7j} y K_{7j} como sigue

$$D_{7j} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C7}$$

$$K_{7j} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \dot{\mathbf{P}}_{C7}$$

es posible expresar la ecuación (4.103) como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_7}{\partial \dot{q}_j} \right) = D_{7j} \ddot{\mathbf{q}} + K_{7j} \dot{\mathbf{q}} \tag{4.104}$$

Desarrollando $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_8}{\partial \dot{q}_j} \right)$

Derivando la ecuación (4.89) tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_8}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C8} \dot{\mathbf{q}} \right) \\
 &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \frac{d}{dt} (\mathbf{P}_{C8}) \dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C8} \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} \\
 &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \dot{\mathbf{P}}_{C8} \dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C8} \ddot{\mathbf{q}}
 \end{aligned} \tag{4.105}$$

Si definimos a D_{8j} y K_{8j} como sigue

$$\begin{aligned}
 D_{8j} &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C8} \\
 K_{8j} &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \dot{\mathbf{P}}_{C8}
 \end{aligned}$$

finalmente se llega a la expresión para el cuerpo ocho

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_8}{\partial \dot{q}_j} \right) = D_{8j} \ddot{\mathbf{q}} + K_{8j} \dot{\mathbf{q}} \tag{4.106}$$

Desarrollando $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_9}{\partial \dot{q}_j} \right)$

Derivando la ecuación (4.90) tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_9}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C9} \dot{\mathbf{q}} \right) \\
 &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \frac{d}{dt} (\mathbf{P}_{C9}) \dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C9} \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} \\
 &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C9} \ddot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \dot{\mathbf{P}}_{C9} \dot{\mathbf{q}}
 \end{aligned} \tag{4.107}$$

Si se define

$$D_{9j} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \mathbf{P}_{C9}$$

y

$$K_{9j} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right)^T \dot{\mathbf{P}}_{C9}$$

se llega a la última expresión de la ecuación (4.53)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_9}{\partial \dot{q}_j} \right) = D_{9j} \ddot{\mathbf{q}} + K_{9j} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.108)$$

4.5.3. Desarrollando el término $\frac{\partial L}{\partial q_j}$

Teniendo en mente la definición de la ecuación de Euler-Lagrange, presentada al inicio del capítulo en la ecuación (4.5), se sabe que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \mathbb{Q}_j$$

Una vez que se ha obtenido el primer miembro de la ecuación anterior $\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right)$, el desarrollo siguiente se enfoca en determinar el segundo término $\left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \right)$, para después, sustituir los dieciocho valores correspondientes a la fórmula y obtener el modelo dinámico.

Desarrollando $\frac{\partial L_2}{\partial q_j}$

Recordando que el término L_2 está definido como sigue

$$L_2 = \frac{1}{2} m_2 \mathbf{V}_{G2}^T \mathbf{V}_{G2} + \frac{1}{2} I_{G2} (\omega_2)^2 + m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G2}$$

Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{V}_{G2} = \mathbf{a}_2 \dot{\theta}_2, \quad \omega_2 = \dot{\theta}_2 \quad \text{y} \quad \mathbf{R}_{G2} = [\mathcal{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}'_{G2}$$

se tiene

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{2} m_2 (\mathbf{a}_2 \dot{\theta}_2)^T (\mathbf{a}_2 \dot{\theta}_2) + \frac{1}{2} I_{G2} (\dot{\theta}_2)^2 + m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G2} \\ &= \frac{1}{2} m_2 \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2 (\dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} I_{G2} (\dot{\theta}_2)^2 + m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G2} \\ &= \frac{1}{2} (m_2 \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2 + I_{G2}) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}})^2 + m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G2} \end{aligned}$$

Derivando L_2 con respecto a q_j , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_2}{\partial q_j} &= \frac{1}{2} \left(m_2 \frac{\partial \mathbf{a}_2^T}{\partial q_j} \mathbf{a}_2 + m_2 \mathbf{a}_2^T \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial q_j} \right) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}})^2 + \frac{1}{2} (m_2 \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2 + I_{G2}) 2 (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}) \left(\frac{\partial \mathbf{b}_2^T}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}_2^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial q_j} \right) \\ &\quad + m_2 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}'_{G2}}{\partial q_j} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial q_j} = \left(m_2 \mathbf{a}_2^T \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial q_j} \right) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}})^2 + (m_2 \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2 + I_{G2}) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}) \left(\frac{\partial \mathbf{b}_2^T}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} \right) + m_2 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta 2}]}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} \mathbf{r}'_{G2} \right)$$

Esta expresión puede ser escrita como sigue, teniendo en cuenta las ecuaciones (A.5), (A.8) y (A.9) del apéndice

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_2}{\partial q_j} = & \left(m_2 \mathbf{a}_2^T \left[-([\mathcal{R}_{\theta 2}]) \mathbf{r}'_{G2} \right] \left([\mathbf{J}_{23}]^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right)^T \mathbf{i} \right) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}})^2 \\ & + (m_2 \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2 + I_{G2}) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}) \left(\mathbf{N}_{b2} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right)^T \dot{\mathbf{q}} + m_2 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta 2}]}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} \mathbf{r}'_{G2} \right) \end{aligned}$$

reacomodando algunos términos se obtiene

$$\frac{\partial L_2}{\partial q_j} = \left[\begin{aligned} & \left(m_2 \mathbf{a}_2^T \left[-([\mathcal{R}_{\theta 2}]) \mathbf{r}'_{G2} \right] \left([\mathbf{J}_{23}]^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right)^T \mathbf{i} \right) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{b}_2^T \\ & + (m_2 \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2 + I_{G2}) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}) \left(\mathbf{N}_{b2} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right)^T \end{aligned} \right] \dot{\mathbf{q}} + m_2 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta 2}]}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} \mathbf{r}'_{G2} \right) \quad (4.109)$$

Definiendo \bar{K}'_{2j} y G_{2j} , como sigue

$$\begin{aligned} \bar{K}'_{2j} &= \left(m_2 \mathbf{a}_2^T \left[-([\mathcal{R}_{\theta 2}]) \mathbf{r}'_{G2} \right] \left([\mathbf{J}_{23}]^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right)^T \mathbf{i} \right) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{b}_2^T + (m_2 \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2 + I_{G2}) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}) \left(\mathbf{N}_{b2} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right)^T \\ G_{2j} &= m_2 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta 2}]}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} \mathbf{r}'_{G2} \right) \end{aligned}$$

la expresión (4.109) puede ser reescrita de la siguiente forma

$$\frac{\partial L_2}{\partial q_j} = \bar{K}'_{2j} \dot{\mathbf{q}} + G_{2j} \quad (4.110)$$

Término $\frac{\partial L_3}{\partial q_j}$

Recordando que el término L_3 está definido como sigue

$$L_3 = \frac{1}{2} m_3 \mathbf{V}_{G3}^T \mathbf{V}_{G3} + \frac{1}{2} I_{G3} (\omega_3)^2 + m_3 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G3} \quad (4.111)$$

retomando las definiciones para \mathbf{V}_{G3}^T y ω_3

$$\mathbf{V}_{G3}^T = \mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3 \dot{\mathbf{q}} \text{ y } \omega_3 = \mathbf{j}^T \mathbf{N}_3 \dot{\mathbf{q}} \quad (4.112)$$

Sustituyendo los valores de la ecuación (4.112) en (4.111), se tiene

$$L_3 = \frac{1}{2} m_3 (\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3 \dot{\mathbf{q}})^T (\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3 \dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} I_{G3} (\mathbf{j}^T \mathbf{N}_3 \dot{\mathbf{q}})^2 + m_3 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G3} \quad (4.113)$$

donde \mathbf{M}_3 y \mathbf{N}_3 anteriormente se definieron como sigue

$$[\mathbf{M}_3] = \left[\frac{\partial[\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \theta_2} \mathbf{r}_2, \frac{\partial[\mathcal{R}_{\theta_3}]}{\partial \theta_3} \mathbf{r}'_{G3} \right], \mathbf{N}_3 = [\mathbf{J}_{23}]^{-1} \text{ y } \mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3 = [\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3]$$

Utilizando las propiedades de la transpuesta para una matriz, es posible expresar la ecuación (4.113) mediante la propiedad siguiente

$$(\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3 \dot{\mathbf{q}})^T = \dot{\mathbf{q}}^T [\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3]^T$$

entonces

$$L_3 = \frac{1}{2} m_3 \dot{\mathbf{q}}^T [\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3]^T [\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3] \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} I_{G3} (\mathbf{j}^T \mathbf{N}_3 \dot{\mathbf{q}})^2 + m_3 \mathbf{g}^T (\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}'_{G3})$$

Derivando L_3 con respecto a q_j

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_3}{\partial q_j} &= \frac{1}{2} m_3 \dot{\mathbf{q}}^T \left[\begin{array}{l} \left(\frac{\partial[\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3]^T}{\partial \theta_2} [\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3] + [\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3]^T \frac{\partial[\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3]}{\partial \theta_2} \right) \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} + \\ \left(\frac{\partial[\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3]^T}{\partial \theta_3} [\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3] + [\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3]^T \frac{\partial[\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3]}{\partial \theta_3} \right) \frac{\partial \theta_3}{\partial q_j} \end{array} \right] \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + I_{G3} \mathbf{j}^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}_3}{\partial q_j} \right) \dot{\mathbf{q}} (\mathbf{j}^T \mathbf{N}_3) \dot{\mathbf{q}} + m_3 \mathbf{g}^T \frac{\partial (\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}'_{G3})}{\partial q_j} \\ &= \frac{1}{2} m_3 \dot{\mathbf{q}}^T \left[\mathbf{S}_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} + \mathbf{S}_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial q_j} \right] \dot{\mathbf{q}} + I_{G3} \mathbf{j}^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}_3}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{N}_3}{\partial \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial q_j} \right) \dot{\mathbf{q}} (\mathbf{j}^T \mathbf{N}_3) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + m_3 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial[\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} \mathbf{r}_2 + \frac{\partial \mathcal{R}[\theta_3]}{\partial \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial q_j} \mathbf{r}'_{G3} \right) \end{aligned}$$

donde $[\mathbf{S}_2]$ y $[\mathbf{S}_3]$ se definen como sigue

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}_2] &= \frac{\partial [\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3]^T}{\partial \theta_2} [\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3] + [\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3]^T \frac{\partial [\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3]}{\partial \theta_2} \\ [\mathbf{S}_3] &= \frac{\partial [\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3]^T}{\partial \theta_3} [\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3] + [\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3]^T \frac{\partial [\mathbf{M}_3 \mathbf{N}_3]}{\partial \theta_3} \end{aligned}$$

Agrupando términos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_3}{\partial q_j} = & \left[\frac{1}{2} m_3 \dot{\mathbf{q}}^T \left[\mathbf{S}_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} + \mathbf{S}_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial q_j} \right] + I_{G3} \mathbf{j}^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}_3}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{N}_3}{\partial \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial q_j} \right) \dot{\mathbf{q}} (\mathbf{j}^T \mathbf{N}_3) \right] \dot{\mathbf{q}} \\ & + m_3 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} \mathbf{r}_2 + \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_3}]}{\partial \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial q_j} \mathbf{r}'_{G3} \right) \end{aligned} \quad (4.114)$$

y definiendo \bar{K}_{3j} y G_{3j}

$$\begin{aligned} \bar{K}_{3j} &= \frac{1}{2} m_3 \dot{\mathbf{q}}^T \left[\mathbf{S}_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} + \mathbf{S}_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial q_j} \right] + I_{G3} \mathbf{j}^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}_3}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{N}_3}{\partial \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial q_j} \right) \dot{\mathbf{q}} (\mathbf{j}^T \mathbf{N}_3) \\ G_{3j} &= m_3 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} \mathbf{r}_2 + \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_3}]}{\partial \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial q_j} \mathbf{r}'_{G3} \right) \end{aligned}$$

La ecuación (4.114) es reescrita como sigue

$$\frac{\partial L_3}{\partial q_j} = \bar{K}_{3j} \dot{\mathbf{q}} + G_{3j} \quad (4.115)$$

Desarrollando $\frac{\partial L_4}{\partial q_j}$

Recordando que el término L_4 esta defindo como sigue

$$L_4 = \frac{1}{2} m_4 \mathbf{V}_{G4}^T \mathbf{V}_{G4} + \frac{1}{2} I_{G4} (\omega_4)^2 + m_4 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G4} \quad (4.116)$$

retomando las definiciones para \mathbf{V}_{G4}^T y ω_4

$$\mathbf{V}_{G4} = \mathbf{a}_4 \dot{\theta}_4, \quad \omega_4 = \dot{\theta}_4 \quad \text{y} \quad \mathbf{R}_{G4} = [\mathcal{R}_{\theta_4}] \mathbf{r}'_{G4} \quad (4.117)$$

Sustituyendo los valores de la ecuación (4.117) en (4.116), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_4}{\partial q_j} &= \frac{1}{2} m_4 (\mathbf{a}_4 \dot{\theta}_4)^T (\mathbf{a}_4 \dot{\theta}_4) + \frac{1}{2} I_{G4} (\dot{\theta}_4)^2 + m_4 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G4} \\ &= \frac{1}{2} m_4 \mathbf{a}_4^T \mathbf{a}_4 (\dot{\theta}_4)^2 + \frac{1}{2} I_{G4} (\dot{\theta}_4)^2 + m_4 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G4} \\ &= \frac{1}{2} (m_4 \mathbf{a}_4^T \mathbf{a}_4 + I_{G4}) (\mathbf{b}_4^T \dot{\mathbf{q}})^2 + m_4 \mathbf{g}^T (\mathbf{R}'_1 + [\mathcal{R}_{\theta_4}] \mathbf{r}'_{G4}) \end{aligned}$$

Derivando L_4 con respecto a q_j

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_4}{\partial q_j} &= \frac{1}{2} \left(m_4 \frac{\partial \mathbf{a}_4^T}{\partial q_j} \mathbf{a}_4 + m_4 \mathbf{a}_4^T \frac{\partial \mathbf{a}_4}{\partial q_j} \right) (\mathbf{b}_4^T \dot{\mathbf{q}})^2 + \\
&+ \frac{1}{2} (m_4 \mathbf{a}_4^T \mathbf{a}_4 + I_{G4}) 2 (\mathbf{b}_4^T \dot{\mathbf{q}}) \left(\frac{\partial \mathbf{b}_4^T}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}_4^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial q_j} \right) + m_4 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta 4}]}{\partial q_j} \mathbf{r}'_{G4} \right) \\
&= \left(m_4 \mathbf{a}_4^T \frac{\partial \mathbf{a}_4}{\partial q_j} \right) (\mathbf{b}_4^T \dot{\mathbf{q}})^2 + (m_4 \mathbf{a}_4^T \mathbf{a}_4 + I_{G4}) (\mathbf{b}_4^T \dot{\mathbf{q}}) \left(\frac{\partial \mathbf{b}_4^T}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} \right) + m_4 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta 4}]}{\partial \theta_4} \frac{\partial \theta_4}{\partial q_j} \mathbf{r}'_{G4} \right)
\end{aligned}$$

agrupando términos

$$\frac{\partial L_4}{\partial q_j} = \left[\left(m_4 \mathbf{a}_4^T \frac{\partial \mathbf{a}_4}{\partial q_j} \right) (\mathbf{b}_4^T \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{b}_4^T + (m_4 \mathbf{a}_4^T \mathbf{a}_4 + I_{G4}) (\mathbf{b}_4^T \dot{\mathbf{q}}) \left(\frac{\partial \mathbf{b}_4^T}{\partial q_j} \right) \right] \dot{\mathbf{q}} + m_4 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta 4}]}{\partial \theta_4} \frac{\partial \theta_4}{\partial q_j} \mathbf{r}'_{G4} \right) \quad (4.118)$$

Nuevamente, definiendo

$$\begin{aligned}
\bar{K}_{4j} &= \left(m_4 \mathbf{a}_4^T \frac{\partial \mathbf{a}_4}{\partial q_j} \right) (\mathbf{b}_4^T \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{b}_4^T + (m_4 \mathbf{a}_4^T \mathbf{a}_4 + I_{G4}) (\mathbf{b}_4^T \dot{\mathbf{q}}) \left(\frac{\partial \mathbf{b}_4^T}{\partial q_j} \right) \\
G_{4j} &= m_4 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta 4}]}{\partial \theta_4} \frac{\partial \theta_4}{\partial q_j} \mathbf{r}'_{G4} \right)
\end{aligned}$$

La expresión (4.118), se reescribe como

$$\frac{\partial L_4}{\partial q_j} = \bar{K}_{4j} \dot{\mathbf{q}} + G_{4j} \quad (4.119)$$

Las definiciones para las variables \mathbf{a}_4 , $\frac{\partial \mathbf{a}_4}{\partial q_j}$, \mathbf{b}_4 , $\frac{\partial \mathbf{b}_4}{\partial q_j}$, $\frac{\partial \theta_4}{\partial q_j}$ se encuentran contenidas en el apéndice.

Desarrollando $\frac{\partial L_5}{\partial q_j}$

De acuerdo a la ecuación (4.7), la expresión para la barra cinco será

$$\begin{aligned}
L_5 &= \frac{1}{2} m_5 \mathbf{V}_{G5}^T \mathbf{V}_{G5} + \frac{1}{2} I_{G5} (\omega_5)^2 + m_5 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G5} \\
&= \frac{1}{2} m_5 (\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5 \dot{\mathbf{q}})^T (\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5 \dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} I_{G5} (\mathbf{j}^T \mathbf{N}_5 \dot{\mathbf{q}})^2 + m_5 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G5}
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5] &= \mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5 \\ [\mathbf{M}_5] &= \left[\frac{\partial[\mathcal{R}_{\theta 4}]}{\partial \theta_4} \mathbf{r}_4, \frac{\partial[\mathcal{R}_{\theta 5}]}{\partial \theta_5} \mathbf{r}'_{G5} \right] \\ [\mathbf{N}_5] &= [\mathbf{J}_{45}]^{-1} \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} L_5 &= \frac{1}{2} m_5 ([\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5] \dot{\mathbf{q}})^T (\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5 \dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} I_{G5} (\mathbf{j}^T \mathbf{N}_5 \dot{\mathbf{q}})^2 + m_5 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G5} \\ &= \frac{1}{2} m_5 \dot{\mathbf{q}}^T [\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5]^T [\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5] \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} I_{G5} (\mathbf{j}^T \mathbf{N}_5 \dot{\mathbf{q}})^2 + m_5 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G5} \end{aligned}$$

Derivando L_5 con respecto a q_j

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_5}{\partial q_j} &= \frac{1}{2} m_5 \dot{\mathbf{q}}^T \left(\begin{aligned} &\frac{\partial[\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5]^T}{\partial \theta_4} [\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5] \frac{\partial \theta_4}{\partial q_j} + \frac{\partial[\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5]^T}{\partial \theta_5} [\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5] \frac{\partial \theta_5}{\partial q_j} \\ &+ [\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5]^T \frac{\partial[\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5]}{\partial \theta_4} \frac{\partial \theta_4}{\partial q_j} + [\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5]^T \frac{\partial[\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5]}{\partial \theta_5} \frac{\partial \theta_5}{\partial q_j} \end{aligned} \right) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + I_{G5} \mathbf{j}^T \frac{\partial \mathbf{N}_5}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} (\mathbf{j}^T \mathbf{N}_5 \dot{\mathbf{q}}) + m_5 \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G5}}{\partial q_j} \\ &= \frac{1}{2} m_5 \dot{\mathbf{q}}^T \left[\begin{aligned} &\left(\frac{\partial[\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5]^T}{\partial \theta_4} [\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5] + [\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5]^T \frac{\partial[\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5]}{\partial \theta_4} \right) \frac{\partial \theta_4}{\partial q_j} + \\ &+ \left(\frac{\partial[\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5]^T}{\partial \theta_5} [\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5] + [\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5]^T \frac{\partial[\mathbf{M}_5 \mathbf{N}_5]}{\partial \theta_5} \right) \frac{\partial \theta_5}{\partial q_j} \end{aligned} \right] \dot{\mathbf{q}} + \\ &\quad + I_{G5} \mathbf{j}^T \frac{\partial \mathbf{N}_5}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} (\mathbf{j}^T \mathbf{N}_5) \dot{\mathbf{q}} + m_5 \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G5}}{\partial q_j} \end{aligned}$$

agrupando términos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_5}{\partial q_j} &= \left[\frac{1}{2} m_5 \dot{\mathbf{q}}^T \left[\mathbf{S}_4 \frac{\partial \theta_4}{\partial q_j} + \mathbf{S}_5 \frac{\partial \theta_5}{\partial q_j} \right] + I_{G5} \mathbf{j}^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}_5}{\partial \theta_4} \frac{\partial \theta_4}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{N}_5}{\partial \theta_5} \frac{\partial \theta_5}{\partial q_j} \right) \right] \dot{\mathbf{q}} (\mathbf{j}^T \mathbf{N}_5) \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + m_5 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial \mathbf{R}_{G5}}{\partial \theta_4} \frac{\partial \theta_4}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_{G5}}{\partial \theta_5} \frac{\partial \theta_5}{\partial q_j} \right) \end{aligned} \quad (4.120)$$

Si se definen \bar{K}_{5j} y G_{5j} como sigue

$$\begin{aligned} \bar{K}_{5j} &= \frac{1}{2} m_5 \dot{\mathbf{q}}^T \left[\mathbf{S}_4 \frac{\partial \theta_4}{\partial q_j} + \mathbf{S}_5 \frac{\partial \theta_5}{\partial q_j} \right] + I_{G5} \mathbf{j}^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}_5}{\partial \theta_4} \frac{\partial \theta_4}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{N}_5}{\partial \theta_5} \frac{\partial \theta_5}{\partial q_j} \right) \dot{\mathbf{q}} (\mathbf{j}^T \mathbf{N}_5) \\ G_{5j} &= m_5 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial \mathbf{R}_{G5}}{\partial \theta_4} \frac{\partial \theta_4}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_{G5}}{\partial \theta_5} \frac{\partial \theta_5}{\partial q_j} \right) \end{aligned}$$

la ecuación (4.120) se escribe como

$$\frac{\partial L_5}{\partial q_j} = \bar{K}_{5j} \dot{\mathbf{q}} + G_{5j} \quad (4.121)$$

Desarrollando $\frac{\partial L_6}{\partial q_j}$

De acuerdo a la ecuación (4.7), la expresión para la barra seis será

$$\begin{aligned} L_6 &= \frac{1}{2} m_6 \mathbf{V}_{G6}^T \mathbf{V}_{G6} + m_6 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G6} \\ &= \frac{1}{2} m_6 \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} + m_6 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G6} \end{aligned}$$

Derivando L_6 con respecto a q_j

$$\frac{\partial L_6}{\partial q_j} = m_6 \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \quad (4.122)$$

definiendo a G_{6j} como sigue

$$G_{6j} = m_6 \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j}$$

es posible expresar la ecuación (4.122), como

$$\frac{\partial L_6}{\partial q_j} = G_{6j} \quad (4.123)$$

Desarrollando $\frac{\partial L_7}{\partial q_j}$

Las derivadas para L_7 y L_9 son prácticamente iguales a L_3 y L_2 , ya que los eslabones tienen las mismas dimensiones, aunque las masas y los momentos pueden ser diferentes entre ellos.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_7}{\partial q_j} &= \left[\frac{1}{2} m_7 \dot{\mathbf{q}}^T \left[\mathbf{S}_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} + \mathbf{S}_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial q_j} \right] + I_{G7} \mathbf{j}^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}_3}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{N}_3}{\partial \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial q_j} \right) \dot{\mathbf{q}} (\mathbf{j}^T \mathbf{N}_3) \right] \dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + m_7 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta 2}]}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} \mathbf{r}_2 + \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta 3}]}{\partial \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial q_j} \mathbf{r}'_{G3} \right) \end{aligned} \quad (4.124)$$

Nuevamente definiendo

$$\begin{aligned} \bar{K}_{7j} &= \frac{1}{2} m_7 \dot{\mathbf{q}}^T \left[\mathbf{S}_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} + \mathbf{S}_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial q_j} \right] + I_{G7} \mathbf{j}^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}_3}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{N}_3}{\partial \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial q_j} \right) \dot{\mathbf{q}} (\mathbf{j}^T \mathbf{N}_3) \\ G_{7j} &= m_7 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta 2}]}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} \mathbf{r}_2 + \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta 3}]}{\partial \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial q_j} \mathbf{r}'_{G3} \right) \end{aligned}$$

la expresión final de la ecuación (4.124), es

$$\frac{\partial L_7}{\partial q_j} = \bar{K}_{7j} \dot{\mathbf{q}} + G_{7j} \quad (4.125)$$

Desarrollando $\frac{\partial L_8}{\partial q_j}$

La función lagrangiana para la barra ocho, se expresa como

$$\begin{aligned} L_8 &= \frac{1}{2} m_8 \mathbf{V}_2^T \mathbf{V}_2 + m_8 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_2 \\ &= \frac{1}{2} m_8 (\mathbf{a}_3 \dot{\theta}_2)^T (\mathbf{a}_3 \dot{\theta}_2) + m_8 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_2 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las definiciones para \mathbf{V}_2 y \mathbf{R}_2 , se tiene

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{a}_3 \dot{\theta}_2 \text{ y } \mathbf{R}_2 = [\mathcal{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}_2$$

$$\begin{aligned} L_8 &= \frac{1}{2} m_8 \mathbf{a}_3^T \mathbf{a}_3 (\dot{\theta}_2)^2 + m_8 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_2 \\ &= \frac{1}{2} (m_8 \mathbf{a}_3^T \mathbf{a}_3) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}})^2 + m_8 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_2 \end{aligned}$$

derivando L_8 con respecto a q_j

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_8}{\partial q_j} &= \frac{1}{2} \left(m_8 \frac{\partial \mathbf{a}_3^T}{\partial q_j} \mathbf{a}_3 + m_8 \mathbf{a}_3^T \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial q_j} \right) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (m_8 \mathbf{a}_3^T \mathbf{a}_3) 2 (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}) \left(\frac{\partial \mathbf{b}_2^T}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}_2^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial q_j} \right) + m_8 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial q_j} \mathbf{r}_2 \right) \\ &= \left(m_8 \mathbf{a}_3^T \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial q_j} \right) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}})^2 + m_8 (\mathbf{a}_3^T \mathbf{a}_3) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}) \left(\frac{\partial \mathbf{b}_2^T}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} \right) + m_8 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} \mathbf{r}_2 \right) \\ &= \left(m_8 \mathbf{a}_3^T \left[(-[\mathcal{R}_{\theta_2}]) \mathbf{r}_2 \right] \left([\mathbf{J}_{23}]^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right)^T \mathbf{i} \right) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}})^2 + \\ &\quad + (m_8 \mathbf{a}_3^T \mathbf{a}_3) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}) \left(\mathbf{N}_{b_2} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right)^T \dot{\mathbf{q}} + m_8 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} \mathbf{r}_2 \right) \end{aligned}$$

De acuerdo con la ecuación (4.32)

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \theta_2} \mathbf{r}_2$$

agrupando términos se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_8}{\partial q_j} = & \left[\left(m_8 \mathbf{a}_3^T \left[-([\mathcal{R}_{\theta_2}]) \mathbf{r}_2 \right] \left([\mathbf{J}_{23}]^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right)^T \mathbf{i} \right) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{b}_2^T + (m_8 \mathbf{a}_3^T \mathbf{a}_3) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}) \left(\mathbf{N}_{b2} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right)^T \right] \dot{\mathbf{q}} \\ & + m_8 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} \mathbf{r}_2 \right) \end{aligned}$$

Finalmente se definiendo a

$$\begin{aligned} \bar{K}_{8j} &= \left(m_8 \mathbf{a}_3^T \left[-([\mathcal{R}_{\theta_2}]) \mathbf{r}_2 \right] \left([\mathbf{J}_{23}]^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right)^T \mathbf{i} \right) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{b}_2^T + (m_8 \mathbf{a}_3^T \mathbf{a}_3) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}) \left(\mathbf{N}_{b2} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right)^T \\ G_{8j} &= m_8 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} \mathbf{r}_2 \right) \end{aligned}$$

la expresión simplificada para el cuerpo ocho será

$$\frac{\partial L_8}{\partial q_j} = \bar{K}_{8j} \dot{\mathbf{q}} + G_{8j} \quad (4.126)$$

Desarrollando $\frac{\partial L_9}{\partial q_j}$

Finalmente el ultimo termino de la ecuación (4.53), se obtiene como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_9}{\partial q_j} = & \left[\left(m_9 \mathbf{a}_2^T \left[-([\mathcal{R}_{\theta_2}]) \mathbf{r}'_{G2} \right] \left([\mathbf{J}_{23}]^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right)^T \mathbf{i} \right) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{b}_2^T + \right. \\ & \left. (m_9 \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2 + I_{G9}) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}) \left(\mathbf{N}_{b2} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right)^T \right] \dot{\mathbf{q}} \\ & + m_9 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} \mathbf{r}'_{G2} \right) \end{aligned} \quad (4.127)$$

Definiendo

$$\begin{aligned} K_{9j} &= \left(m_9 \mathbf{a}_2^T \left[-([\mathcal{R}_{\theta_2}]) \mathbf{r}'_{G2} \right] \left([\mathbf{J}_{23}]^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right)^T \mathbf{i} \right) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{b}_2^T + (m_9 \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_2 + I_{G9}) (\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}) \left(\mathbf{N}_{b2} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right)^T \\ G_{9j} &= m_9 \mathbf{g}^T \left(\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} \mathbf{r}'_{G2} \right) \end{aligned}$$

la expresión final para la ecuación (4.127), será

$$\frac{\partial L_9}{\partial q_j} = K_{9j} \dot{\mathbf{q}} + G_{9j} \quad (4.128)$$

4.5.4. Fuerzas Generalizadas

La formulación de la ecuación de Lagrange considera el uso de fuerzas generalizadas contemplando las fuerzas aplicadas externamente, fuerzas y pares de actuadores, de modo que es necesario desarrollar estas expresiones para que sean compatibles con la función lagrangiana y además consistentes con las restricciones mecánicas. Las fuerzas generalizadas se obtienen a partir de la expresión de trabajo virtual.

Trabajo Virtual

El principio de trabajo virtual representa una poderosa herramienta para derivar las ecuaciones estáticas y dinámicas de los sistemas multicuerpos [14]. A diferencia de la mecánica de Newton, el principio de trabajo virtual no requiere considerar las fuerzas de restricción o de acción, solo requiere cantidades de trabajo escalar para definir las ecuaciones estáticas y dinámicas. Este principio establece que si un cuerpo rígido está en equilibrio bajo la acción de varias fuerzas externas y se aplica un desplazamiento arbitrario a partir de la posición de equilibrio, el trabajo realizado por las fuerzas externas durante el desplazamiento será cero. En este apartado se desarrolla el principio de trabajo virtual para encontrar un modelo dinámico. En el uso del principio del trabajo virtual, la importancia de los conceptos de desplazamiento virtual y fuerzas generalizadas deben ser tomados muy en cuenta.

Considerando el caso en el cual los actuadores ejercen una fuerza o torque en las juntas y son aplicados fuerzas y momentos externos al efector final. De acuerdo a la Figura 4.3, se tiene

$$\delta W = \tau_2 \delta \theta_2 + \tau_4 \delta \theta_4 + \mathbf{F}_e^T \delta \mathbf{R}_i \quad (4.129)$$

Considerando que nuestro cuerpo experimenta un torque en el instante en que se toma el objeto se define un momento (\mathbf{M}_e), solo que dicho momento es despreciado, ya que, el trabajo virtual generado es cero, debido a que la plataforma no tiene desplazamiento angular virtual. Además la propia estructura puede soportarlo debido a su diseño, por tanto no tiene influencia sobre los pares τ_2 y τ_4 , \mathbf{F}_e^T representa a la fuerza externa que sufre el manipulador y $\delta \mathbf{R}$ el desplazamiento virtual de cada uno de los cuerpos del manipulador.

En el capítulo dos se definieron ecuaciones para ambos lados del manipulador denominadas lazo izquierdo y lazo derecho, ahora con base en la Figura 4.4, nuevamente se generan ecuaciones de lazo para ambos lados del manipulador, pero escritas de tal forma

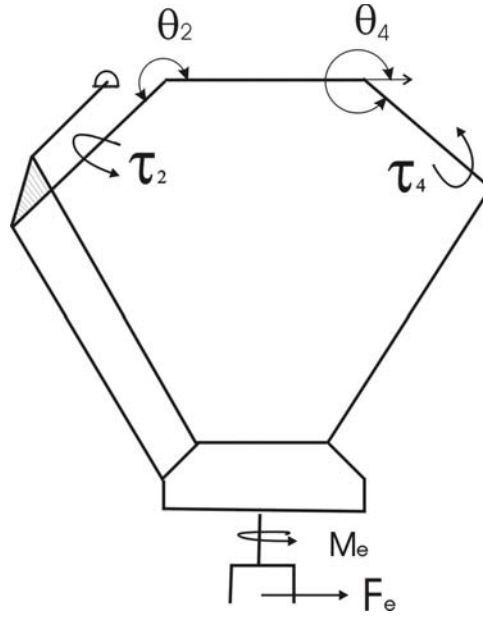


Figura 4.3: Torques del robot paralelo tipo Diamante

que ejemplifican el desplazamiento virtual de todos los elementos de los lazos anteriormente definidos en (3.3) y (3.14).

Así, las ecuaciones son

$$\delta \mathbf{R}_1 + \delta \mathbf{R}_2 + \delta \mathbf{R}_3 + \delta \mathbf{R}_6 + \delta \mathbf{R}_p = \delta \mathbf{R} \quad (4.130)$$

$$\delta \mathbf{R}'_1 + \delta \mathbf{R}_4 + \delta \mathbf{R}_5 + \delta \mathbf{R}'_6 + \delta \mathbf{R}_p = \delta \mathbf{R} \quad (4.131)$$

donde

$$\delta \mathbf{R} = [\delta x, \delta y]^T$$

Como en las barras uno, seis y en el efector final (Figura 4.4), no existe rotación alguna, las ecuaciones (4.130) y (4.131) se simplifican a la forma

$$\left(\left[\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \theta_2} \right] \mathbf{r}_2 \delta \theta_2 \right) + \left(\left[\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_3}]}{\partial \theta_3} \right] \mathbf{r}_3 \delta \theta_3 \right) = \delta \mathbf{R} = \delta \mathbf{q} \quad (4.132)$$

$$\left(\left[\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_4}]}{\partial \theta_4} \right] \mathbf{r}_4 \delta \theta_4 \right) + \left(\left[\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_5}]}{\partial \theta_5} \right] \mathbf{r}_5 \delta \theta_5 \right) = \delta \mathbf{R} = \delta \mathbf{q} \quad (4.133)$$

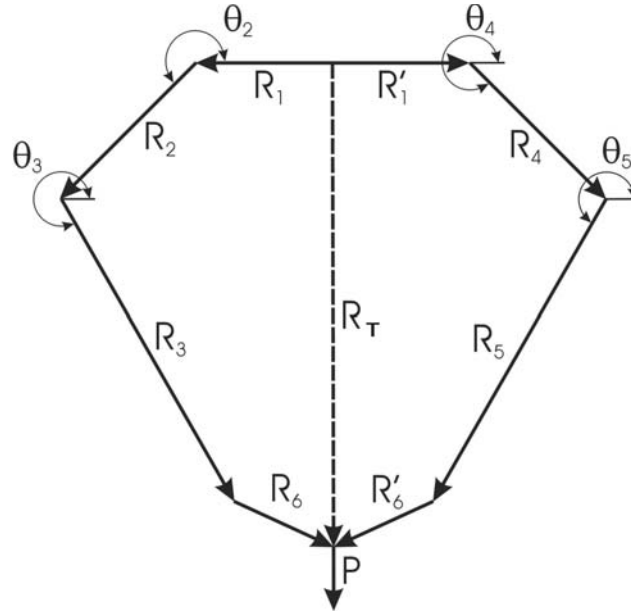


Figura 4.4: Cuerpos del manipulador paralelo

Sustituyendo (4.132) en la ecuación (4.129), se obtiene

$$\begin{aligned} \delta W_{23} &= [\tau_2, \tau_4] \begin{bmatrix} \delta\theta_2 \\ \delta\theta_4 \end{bmatrix} + \mathbf{F}_e^T \left(\left[\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \theta_2} \right] \mathbf{r}_2 \delta\theta_2 + \left[\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_3}]}{\partial \theta_3} \right] \mathbf{r}_3 \delta\theta_3 \right) \\ &= [\tau_2, \tau_4] \begin{bmatrix} \delta\theta_2 \\ \delta\theta_4 \end{bmatrix} + \mathbf{F}_e^T [\mathbf{J}_{23}] \delta\theta_{23} \end{aligned} \quad (4.134)$$

donde

$$[\mathbf{J}_{23}] = \left(\left[\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \theta_2} \right] \mathbf{r}_2 + \left[\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_3}]}{\partial \theta_3} \right] \mathbf{r}_3 \right) \quad (4.135)$$

$$\delta\theta_{23} = \begin{bmatrix} \delta\theta_2 \\ \delta\theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.136)$$

Sustituyendo la ecuación (4.133) en la ecuación (4.129), se llega a

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{W}_{45} &= [\boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{\tau}_4] \begin{bmatrix} \delta \theta_2 \\ \delta \theta_4 \end{bmatrix} + \mathbf{F}_e^T \left(\left[\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta 4}]}{\partial \theta_4} \right] \mathbf{r}_4 \delta \theta_4 \right) + \left(\left[\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta 5}]}{\partial \theta_5} \right] \mathbf{r}_5 \delta \theta_5 \right) \\
&= [\boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{\tau}_4] \begin{bmatrix} \delta \theta_2 \\ \delta \theta_4 \end{bmatrix} + \mathbf{F}_e^T [\mathbf{J}_{45}] \delta \boldsymbol{\theta}_{45}
\end{aligned} \tag{4.137}$$

donde

$$[\mathbf{J}_{45}] = \left(\left[\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta 4}]}{\partial \theta_4} \right] \mathbf{r}_4 \right) + \left(\left[\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta 5}]}{\partial \theta_5} \right] \mathbf{r}_5 \right) \tag{4.138}$$

$$\delta \boldsymbol{\theta}_{45} = \begin{bmatrix} \delta \theta_4 \\ \delta \theta_5 \end{bmatrix} \tag{4.139}$$

A lo largo de los análisis anteriores, se han obtenido todas las variables de interés en términos de las coordenadas del efector final (\mathbf{q}). Tomando en cuenta las definiciones de las ecuaciones (4.132), (4.133), (4.135), (4.136), (4.138) y (4.139), se tiene que

$$[\mathbf{J}_{23}] \delta \theta_{23} = \delta \mathbf{q} \tag{4.140}$$

$$[\mathbf{J}_{45}] \delta \theta_{45} = \delta \mathbf{q}$$

además, si

$$\delta \theta_2 = \mathbf{i}^T \left([\mathbf{J}_{23}]^{-1} \delta \mathbf{q} \right) \tag{4.141}$$

$$\delta \theta_4 = \mathbf{i}^T \left([\mathbf{J}_{45}]^{-1} \delta \mathbf{q} \right)$$

es posible expresar las ecuaciones (4.134) y (4.137) en términos de dichas coordenadas y así llegar a un modelo dinámico.

Sustituyendo las expresiones (4.140) y (4.141) y agrupando las ecuaciones (4.134) y (4.137), se llega a

$$\delta \mathbf{W}_{24} = \boldsymbol{\tau}^T \begin{bmatrix} \mathbf{i}^T \left([\mathbf{J}_{23}]^{-1} \right) \\ \mathbf{i}^T \left([\mathbf{J}_{45}]^{-1} \right) \end{bmatrix} \delta \mathbf{q} + \mathbf{F}_e^T \delta \mathbf{q} \tag{4.142}$$

Agrupando los jacobianos $[\mathbf{J}_{23}]$ y $[\mathbf{J}_{45}]$ en uno solo denominado $[\mathbf{J}_{24}]$ (que contiene todas las variables de interés de nuestro sistema $\theta_2, \theta_3, \theta_4$, y θ_5), como sigue

$$[\mathbf{J}_{24}] = \begin{bmatrix} \mathbf{i}^T \left([\mathbf{J}_{23}]^{-1} \right) \\ \mathbf{i}^T \left([\mathbf{J}_{45}]^{-1} \right) \end{bmatrix}$$

es posible simplificar, la expresión para trabajo virtual como

$$\delta \mathbf{W} = (\boldsymbol{\tau}^T [\mathbf{J}_{24}] + \mathbf{F}_e^T) \delta \mathbf{q}$$

la cual es posible expresar como

$$\delta \mathbf{W} = \mathbb{Q}^T \delta \mathbf{q} \quad (4.143)$$

Por tanto las fuerzas generalizadas \mathbb{Q}_j de la ecuación de Euler-Lagrange (4.5) se obtienen de la siguiente igualdad

$$\mathbb{Q} = [\mathbf{J}_{24}]^T \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F}_e \quad (4.144)$$

4.5.5. Modelo dinámico

Finalmente de la ecuación (4.53) se sabe que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_3}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_4}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_5}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_6}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_7}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_8}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_9}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left(\frac{\partial L_2}{\partial q_j} + \frac{\partial L_3}{\partial q_j} + \frac{\partial L_4}{\partial q_j} + \frac{\partial L_5}{\partial q_j} + \frac{\partial L_6}{\partial q_j} + \frac{\partial L_7}{\partial q_j} + \frac{\partial L_8}{\partial q_j} + \frac{\partial L_9}{\partial q_j} \right) = \mathbb{Q}_j$$

Sustituyendo los valores de \mathbb{Q} en la Ecuación de Euler-Lagrange, los cuales están presentados en las ecuaciones (4.94), (4.96), (4.98), (4.100), (4.102), (4.104), (4.106), (4.108), (4.110), (4.115), (4.119), (4.121), (4.123), (4.125), (4.126), (4.128), respectivamente.

$$\begin{aligned} & \left(D_{2j} \ddot{\mathbf{q}} + K_{2j} \dot{\mathbf{q}} + D_{3j} \ddot{\mathbf{q}} + K_{3j} \dot{\mathbf{q}} + D_{4j} \ddot{\mathbf{q}} + K_{4j} \dot{\mathbf{q}} + D_{5j} \ddot{\mathbf{q}} + K_{5j} \dot{\mathbf{q}} \right. \\ & \quad \left. + D_{6j} \ddot{\mathbf{q}} + D_{7j} \ddot{\mathbf{q}} + K_{7j} \dot{\mathbf{q}} + D_{8j} \ddot{\mathbf{q}} + K_{8j} \dot{\mathbf{q}} + D_{9j} \ddot{\mathbf{q}} + K_{9j} \dot{\mathbf{q}} \right) \\ & \quad - \left(\bar{K}_{2j} \dot{\mathbf{q}} + G_{2j} + \bar{K}_{3j} \dot{\mathbf{q}} + G_{3j} + \bar{K}_{4j} \dot{\mathbf{q}} + G_{4j} + \bar{K}_{5j} \dot{\mathbf{q}} + G_{5j} \right. \\ & \quad \left. + G_{6j} + \bar{K}_{7j} \dot{\mathbf{q}} + G_{7j} + \bar{K}_{8j} \dot{\mathbf{q}} + G_{8j} + \bar{K}_{9j} \dot{\mathbf{q}} + G_{9j} \right) = \mathbb{Q}_j \end{aligned}$$

Factorizando la expresión anterior, se tiene

$$\begin{aligned}
& (D_{2j} + D_{3j} + D_{4j} + D_{5j} + D_{6j} + D_{7j} + D_{8j} + D_{9j}) \ddot{\mathbf{q}} \\
& + \left[\begin{array}{c} (K_{2j} + K_{3j} + K_{4j} + K_{5j} + K_{7j} + K_{8j} + K_{9j}) - \\ (\bar{K}_{2j} + \bar{K}_{3j} + \bar{K}_{4j} + \bar{K}_{5j} + \bar{K}_{7j} + \bar{K}_{8j} + \bar{K}_{9j}) \end{array} \right] \dot{\mathbf{q}} \\
& - (G_{2j} + G_{3j} + G_{4j} + G_{5j} + G_{6j} + G_{7j} + G_{8j} + G_{9j} + \mathbf{F}_e) = \mathbb{Q}_j
\end{aligned}$$

Para visualizar de una manera más sencilla el modelo dinámico el robot paralelo se definen \mathbb{D}_j , \mathbb{K}_j y \mathbb{G}_j como sigue

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_j &= D_{2j} + D_{3j} + D_{4j} + D_{5j} + D_{6j} + D_{7j} + D_{8j} + D_{9j} \\
\mathbb{K}_j &= [(K_{2j} + K_{3j} + K_{4j} + K_{5j} + K_{7j} + K_{8j} + K_{9j}) - (\bar{K}_{2j} + \bar{K}_{3j} + \bar{K}_{4j} + \bar{K}_{5j} + \bar{K}_{7j} + \bar{K}_{8j} + \bar{K}_{9j})] \\
\mathbb{G}_j &= G_{2j} + G_{3j} + G_{4j} + G_{5j} + G_{6j} + G_{7j} + G_{8j} + G_{9j} + \mathbf{F}_e
\end{aligned}$$

con lo que la ecuación anterior, se reduce a la siguiente expresión

$$\mathbb{D}_j \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{K}_j \dot{\mathbf{q}} + \mathbb{G}_j = \mathbb{Q}_j \quad (4.145)$$

En el capítulo uno observamos la estructura del robot paralelo, ahí se definió que con solo actuar en dos puntos al manipulador es posible moverlo en su totalidad, así se tiene que es necesario encontrar el valor de dos pares, entonces para $j = 1$ y $j = 2$

Desarrollando ecuación (4.145) para $j = 1$ y $j = 2$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_1 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{K}_1 \dot{\mathbf{q}} + \mathbb{G}_1 &= \mathbb{Q}_1 \\
\mathbb{D}_2 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{K}_2 \dot{\mathbf{q}} + \mathbb{G}_2 &= \mathbb{Q}_2
\end{aligned} \quad (4.146)$$

que de forma matricial se representa como

$$\begin{bmatrix} \mathbb{D}_1 \\ \mathbb{D}_2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbb{K}_1 \\ \mathbb{K}_2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbb{G}_1 \\ \mathbb{G}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{Q}_1 \\ \mathbb{Q}_2 \end{bmatrix} \quad (4.147)$$

simplificando

$$[\mathbf{D}] \ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K}] \dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{G}] = \mathbf{Q} \quad (4.148)$$

Finalmente substituyendo la ecuación (4.148) en (4.144)

$$[\mathbf{D}] \ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K}] \dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{G} - \mathbf{F}_e] = [\mathbf{J}_{24}]^T \boldsymbol{\tau}$$

con

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\theta) &= [\mathbf{J}_{24}]^{-T} [\mathbf{D}] \\ \mathcal{K} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} & \theta \end{pmatrix} &= [\mathbf{J}_{24}]^{-T} [\mathbf{K}] \\ \mathcal{G}(\theta) &= [\mathbf{J}_{24}]^{-T} [\mathbf{G} - \mathbf{F}_e]\end{aligned}$$

Se llega a la expresión del modelo dinámico que permite obtener el valor de los pares para una trayectoria dada al robot paralelo dentro de su espacio de trabajo.

$$\mathcal{D}\ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{K}\dot{\mathbf{q}} + \mathcal{G} = \boldsymbol{\tau} \quad (4.149)$$

Capítulo 5

Simuladores Numéricos

5.1. Introducción

Los simuladores numéricos son considerados una herramienta importante para comprobar o verificar la validez de un modelo. En este capítulo se presentan los resultados obtenidos de dos simuladores programados en las paqueterías *Mathematica*[©] y *Matlab con Simulink*[©]. En particular, la paquetería *Mathematica* resulta una herramienta más apropiada para las áreas de robótica, mecanismos o de diseño mecánico, mientras que el *Matlab* resulta mas adecuado en las áreas de análisis de sistemas y diseño de controladores.

5.2. Simulador programado en *Mathematica*[©]

La paquetería *Mathematica* se utilizó para resolver y verificar el análisis cinemático desarrollado y presentado en el Capítulo 2. Además, con los datos numéricos obtenidos del análisis cinemático, se programó una animación que permite visualizar la trayectoria que describe el efector final del robot paralelo, propuesta desde un principio. En el caso del análisis dinámico, el simulador permitió obtener de los pares ideales requeridos para el seguimiento de la trayectoria propuesta, con base en el modelo dinámico obtenido en el Capítulo 3.

5.2.1. Análisis Cinemático Inverso

A continuación se presenta el algoritmo programado en *Mathematica*, el cual toma en cuenta el desarrollo presentado en el Capítulo 2.

Algoritmo programado

1. Establecer el tipo de perfil de velocidades.
2. Definir la trayectoria que seguirá el robot.
3. Calcular la velocidad y aceleración de las variables cartesianas (x, y) .
4. Calcular el valor de posición de las variables articulares $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ y θ_5 .
5. Calcular el valor de la velocidad y aceleración angulares.

Particularmente, para el robot paralelo tipo diamante, se estableció un perfil de velocidades quíntico y se definió una trayectoria semielíptica a seguir por el efector final. Conocida la posición del efector final, se calculó su velocidad y su aceleración. Posteriormente se calcularon los valores de las variables articulares del sistema $(\theta_2, \theta_3, \theta_4, \text{ y } \theta_5)$, su velocidad y su aceleración.

Resultados

En este apartado se muestran los resultados gráficos del algoritmo.

- Perfil de velocidades

La Figura 5.1 muestra las gráficas generales de un del perfil de velocidad de tipo quíntico que seguirá el robot paralelo tipo diamante, donde s representa el parámetro del perfil quíntico y t el tiempo en segundos.

- Trayectoria

En este caso se eligió una trayectoria semielíptica (Figura 5.2), por ser ésta una trayectoria típica de las operaciones de tomar y colocar.

- Variables Articulares

En las Figuras 5.3, 5.4 y 5.5 se presentan las gráficas de la posición, velocidad y aceleración de la variable articular θ_3 , mismas que también fueron calculadas para las variables articulares restantes, pero que se omiten por razones de espacio.

- Simulación del seguimiento de la trayectoria

En la secuencia de la Figura 5.6 se observa como es que el manipulador paralelo puede seguir una trayectoria semielíptica dentro de su espacio de trabajo, el cual está definido para este caso en particular, por un rectángulo de 700 (mm) de largo y 150 (mm) de alto.

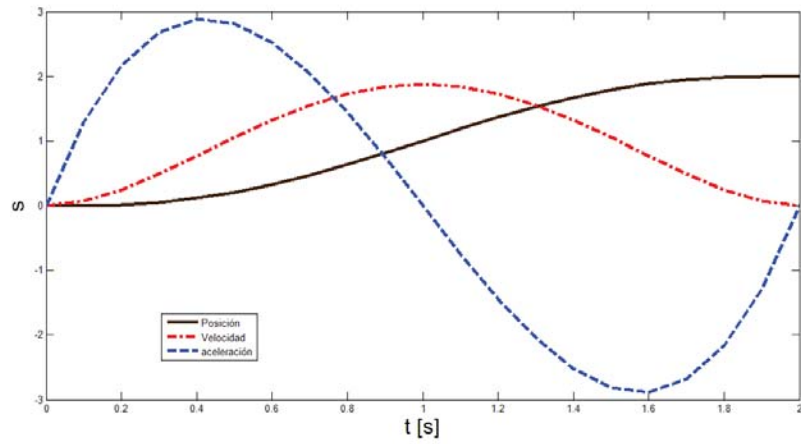


Figura 5.1: Graficas del perfil quintico

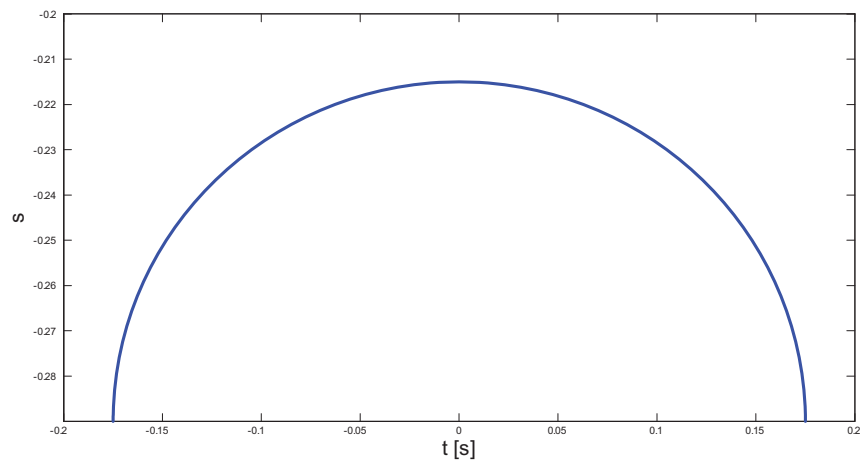
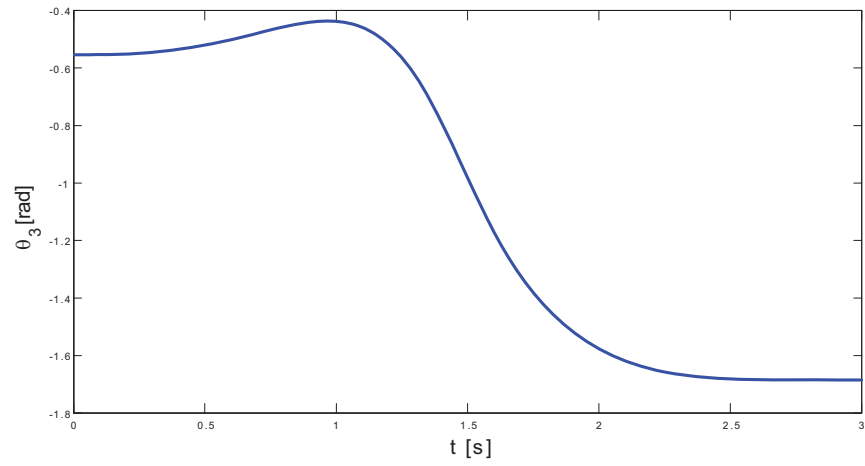
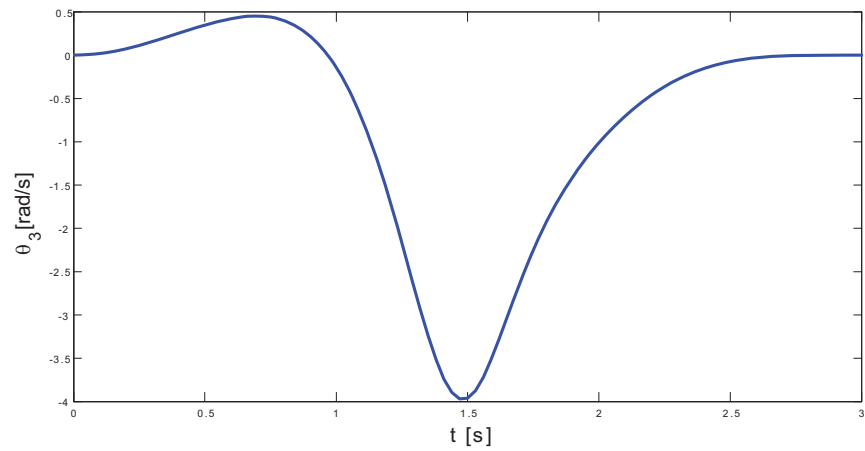


Figura 5.2: Trayectoria semielíptica

Figura 5.3: Posición articular θ_3 Figura 5.4: Velocidad angular θ_3

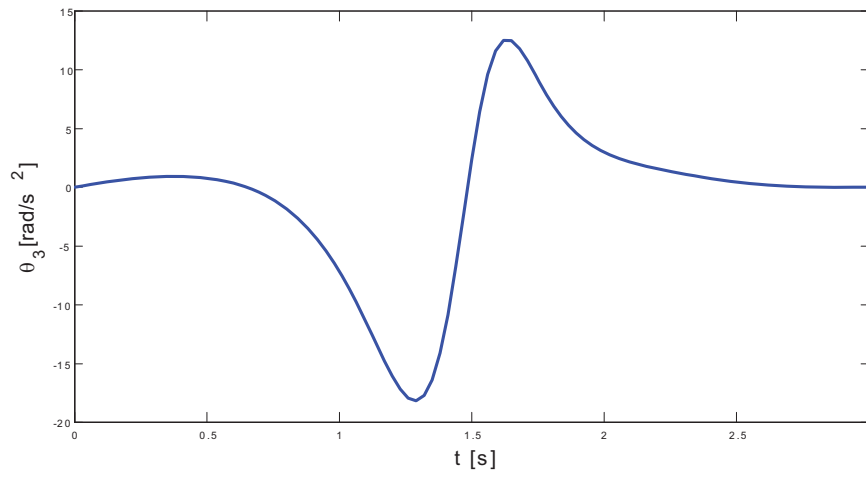
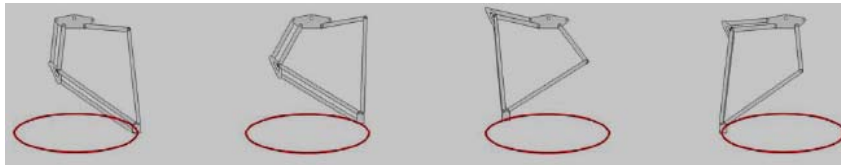
Figura 5.5: Aceleración angular θ_3 

Figura 5.6: Secuencia en cuatro etapas de la animación del robot paralelo

5.2.2. Análisis Dinámico

A partir de los cálculos realizados en el análisis cinemático (velocidades y aceleraciones), se evaluó el modelo dinámico como se muestra en el siguiente algoritmo.

Algoritmo Programado

1. Calcular los jacobianos del sistema (\mathbf{J}_{23} , \mathbf{J}_{45} y \mathbf{J}_{24})
2. Calcular las matrices que conforman el modelo dinámico (\mathcal{D} , \mathcal{K} y \mathcal{G})
3. Calcular el valor de los pares del sistema (τ_2 τ_4)

Mediante este algoritmo, fue posible calcular los pares ideales (τ_2 y τ_4) que deben ser aplicados al robot paralelo para que éste sea capaz de describir la trayectoria semielíptica, con un perfil de velocidad cuántico y para un tiempo no mayor a 3 segundos.

Para mayor detalle de la programación de los algoritmos que constituyen este simulador, consultar el Apéndice B.

5.3. Simulador programado en *Matlab con Simulink*®

Como se mencionó al principio, la paquetería *Matlab* resulta más adecuada en las áreas de análisis de sistemas y diseño de controladores, fue por ello que se optó por este programa para el diseño de un simulador, que nos permitiese observar la trayectoria que sigue el robot paralelo al aplicarle los pares ideales (τ_2 y τ_4), calculados con el simulador hecho en *Mathematica*.

5.3.1. Programación del Modelo Dinámico

Al igual que la segunda parte del simulador programado en *Mathematica*, se tomó como base el modelo dinámico para programar el siguiente algoritmo.

Algoritmo Programado

1. Establecer las condiciones iniciales y finales de tiempo y las condiciones iniciales de x y y .
2. Obtener las variables articulares (θ_j) en función de las variables cartesianas (\mathbf{q}).
3. Calcular el valor de las matrices que conforman el modelo dinámico (\mathcal{D} , \mathcal{K} y \mathcal{G}).

4. Evaluar a $\ddot{\mathbf{q}}$ de la expresión $\ddot{\mathbf{q}} = \mathcal{D}^{-1}(\tau - \mathcal{K} - \mathcal{G})$, del modelo dinámico.
5. Integrar dos veces a $\ddot{\mathbf{q}}$ para obtener la velocidad ($\dot{\mathbf{q}}$) y la posición (\mathbf{q}).
6. Repetir desde el paso dos, pero ahora con los nuevos valores de velocidad y posición.
7. Realizar el ciclo hasta que el tiempo final se alcance.

Simulador

Este algoritmo se programó en la herramienta de *Matlab* denominada *Simulink*, en la cual es posible expresar operaciones e incluso sistemas completos mediante bloques y graficar las señales de entrada y salida de dichos bloques.

Las Figuras 5.7 y 5.8 muestran el esquema gráfico del simulador diseñado a partir del modelo dinámico desarrollado en el Capítulo 3. En la Figura 5.7 se presenta el diagrama principal del simulador, donde se muestra un subsistema denominado *Robot*. El diagrama de bloques correspondiente a ese subsistema se presenta en la Figura 5.8, en donde se hace uso de la función *robot.m*, cuya programación se puede ver en el Apéndice C.

Cabe señalar que en este caso en particular se incluyeron dos bloques de entrada (Par 2 y Par 4), que incluyen los datos obtenidos del simulador programado en *Mathematica*. Sin embargo, en el caso más general de control, éstos pares deben ser calculados por el controlador, de tal forma que se cumplan los objetivos de control de seguimiento.

Resultados

- Pares de entrada

En las Figuras 5.10 y 5.9 se muestran los pares ideales (τ_2 y τ_4), calculados por medio del simulador en *Mathematica* presentado en la sección anterior.

Se considerarán dos casos: (1) cuando el robot paralelo describe la trayectoria semi-elíptica iniciando en el extremo derecho y desplazándose hacia la izquierda, como se ilustra en la Figura 5.6; (2) cuando el robot describe la misma trayectoria pero en sentido contrario, es decir iniciando en el extremo izquierdo y desplazándose hacia la derecha. En la Figura 5.9 se muestran los pares τ_2 y τ_4 , correspondientes al caso uno, mientras que la Figura 5.10 muestra los mismos pares, pero ahora para el caso dos.

- Trayectoria del efector final

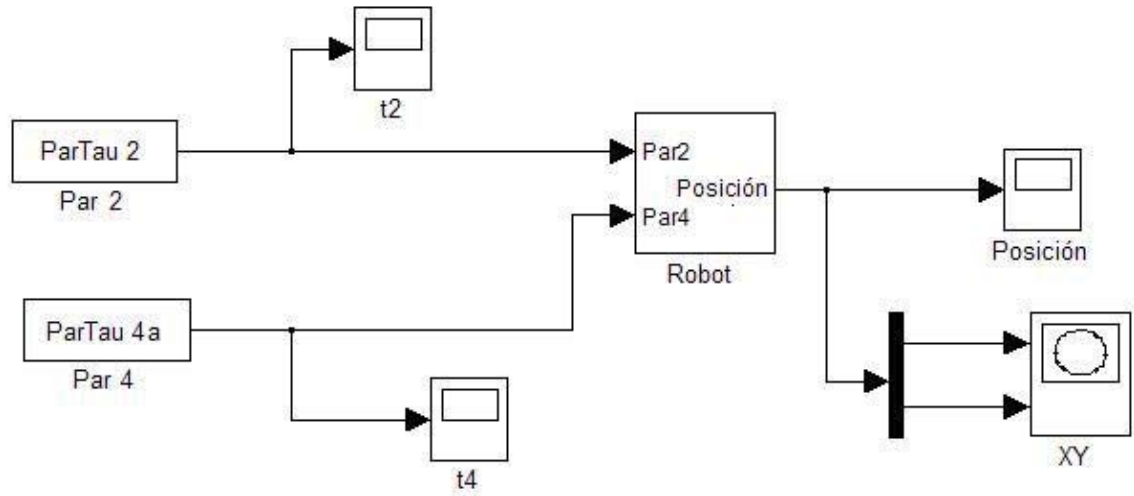


Figura 5.7: Simulador de trayectoria del robot paralelo

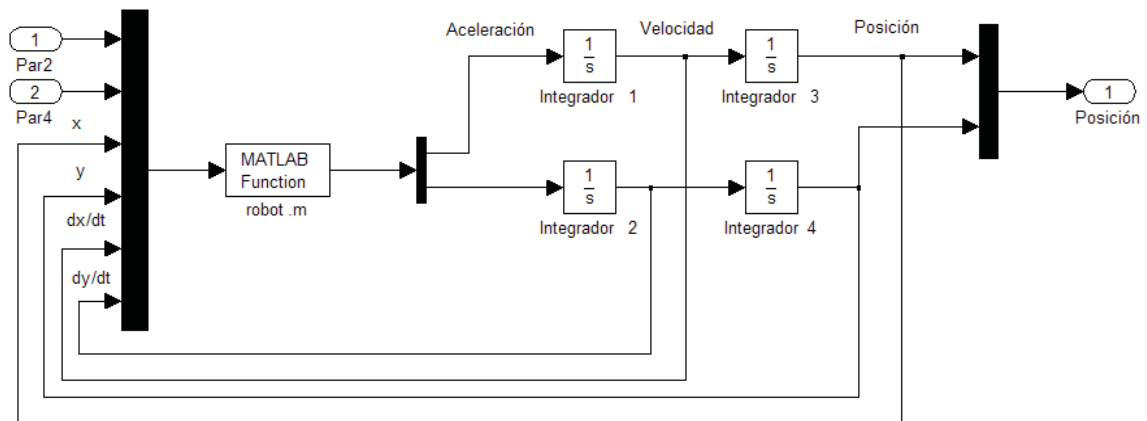
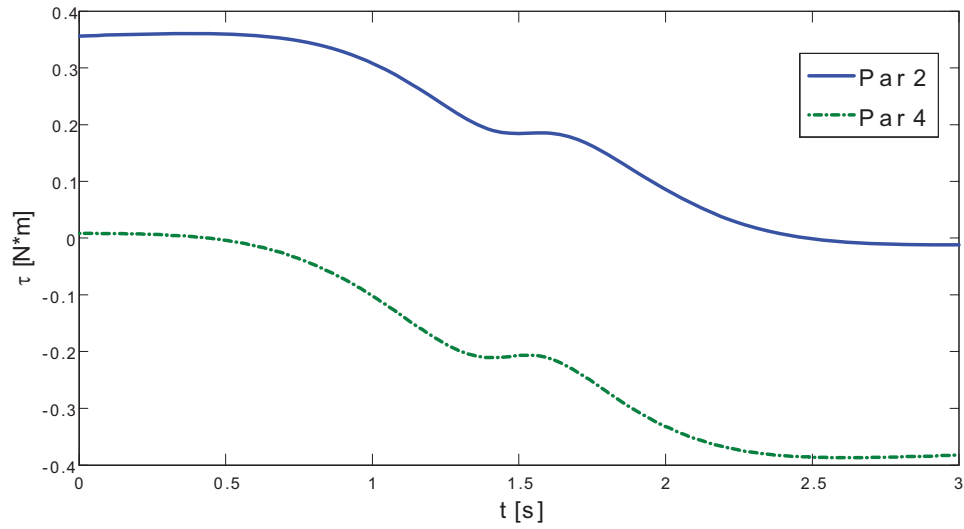
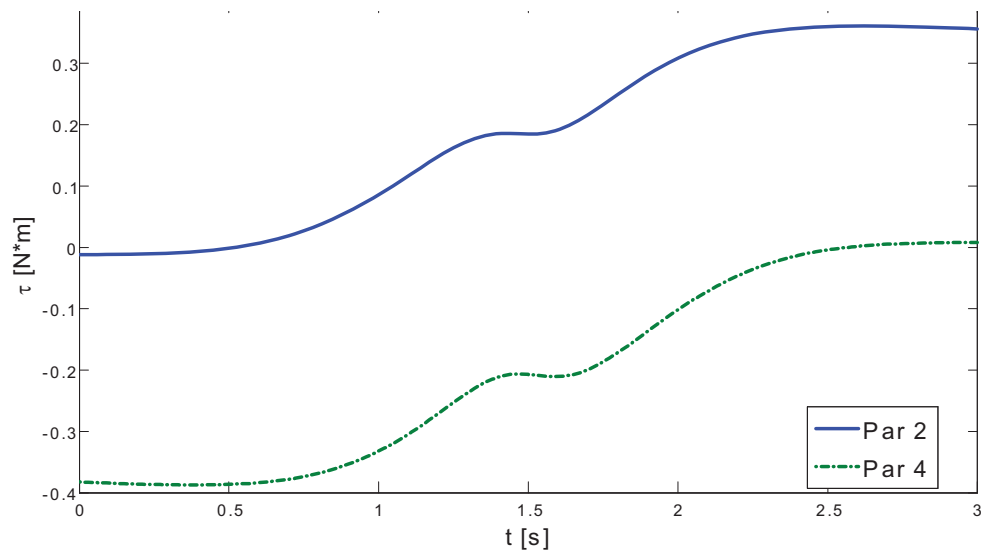


Figura 5.8: Diagrama de bloques del subsistema *Robot*.

Figura 5.9: Pares τ_2 y τ_4 . Recorrido de derecha a izquierdaFigura 5.10: Pares τ_2 y τ_4 . Recorrido de izquierda a derecha

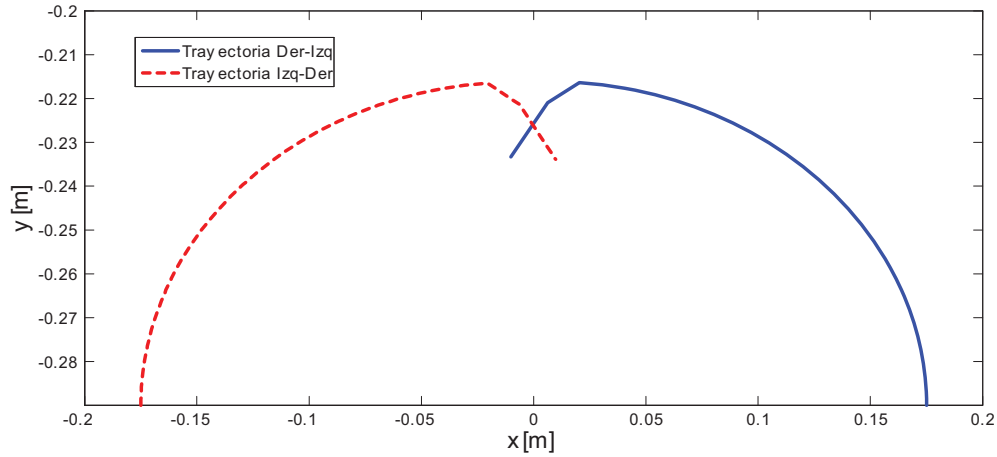


Figura 5.11: Seguimiento de la trayectoria del manipulador paralelo

La implementación de este simulador nos permitió conocer la trayectoria que seguiría el robot paralelo al aplicarle los pares ideales (τ_2 y τ_4). A continuación se presentan los resultados obtenidos para los dos casos anteriormente mencionados: la trayectoria en línea continua, corresponde al caso uno (recorrido de derecha a izquierda) y la trayectoria en línea punteada, al caso dos (recorrido de izquierda a derecha).

Como se puede observar no se describe completamente la trayectoria semielíptica deseada aplicando los pares ideales calculados. En ambos casos la trayectoria descrita se desvía de la deseada aproximadamente a la mitad, lo cual quiere decir que dichos pares no son realmente los adecuados para cumplir el objetivo de seguimiento. A continuación se presenta una breve discusión sobre las posibles razones por las cuales dicho objetivo no se cumple.

El procedimiento seguido hasta ahora corresponde a lo que se conoce como control en lazo abierto (*feedforward*), es decir, calcular los pares a aplicar con base en la trayectoria deseada. En general, este tipo de controladores por sí mismos no logran objetivos de control como el de seguimiento de trayectorias o el de robustez ante perturbaciones, es decir, requieren de un sistema de control más complejo, que en muchos casos incluye un control en lazo cerrado (*feedback*) [11].

La necesidad de incluir un control en lazo cerrado significa que deben existir elementos que realicen una retroalimentación de información sobre la posición del efector final, es decir, se debe dotar al sistema de elementos que le indiquen cuando se está alejando de la

trayectoria deseada.

En los casos presentados no existe esa retroalimentación, por lo que no existe posibilidad de corregir las desviaciones que se presentan y se explica el por qué la trayectoria deseada no es recorrida en su totalidad.

En este mismo sentido, la aportación principal de este simulador, radica en la posibilidad de realizar análisis y diseños de diferentes controladores en lazo cerrado, para encontrar el más adecuado para los objetivos del manipulador considerado en este trabajo.

Capítulo 6

Conclusiones

En la actualidad, los robots paralelos se encuentran en un momento muy importante en el desarrollo tecnológico, si bien no son tan empleados como los mecanismos en serie, cuentan con notables ventajas con respecto a los robots seriales en diversas aplicaciones. Sus ventajas más notorias radican en la gran velocidad que pueden alcanzar, las elevadas cargas que son capaces de desplazar mediante su efector final, y la alta precisión que son capaces de entregar al posicionar un objeto.

Las aportaciones a nivel científico para los robots paralelos han sido principalmente en el diseño y síntesis de las diferentes configuraciones de los mecanismos. Sin embargo, quedan muchos temas por desarrollar, especialmente en campos como el control automático y en el análisis de sistemas dinámicos, donde el estudio de los manipuladores paralelos ha surgido como un tema de investigación actual, interesante y desafiante, dada la complejidad de sus modelos matemáticos

El presente trabajo resulta una aportación para ambas áreas: por un lado, la obtención de un modelo dinámico expresado en la forma de Euler-Lagrange para el manipulador, con el cual se podrán realizar estudios de controlabilidad, observabilidad y otras propiedades; por el otro lado, el diseño de un simulador que nos permita observar el comportamiento de dicho modelo y permita en un futuro probar diferentes esquemas de control para el manipulador considerado. Más en general, esta metodología podrá ser aplicada más tarde para el estudio de manipuladores paralelos de este tipo o con mayor complejidad.

En el Capítulo 2 se realizó un análisis de movilidad desde el punto de vista de grados de libertad, mismo que nos permitió comprobar que con solo actuar los dos eslabones que se conectan a la base es posible mover en su totalidad la estructura del robot paralelo de este trabajo. Este resultado es particularmente importante para la futura construcción

física del mecanismo.

El análisis cinemático del robot paralelo presentado en el Capítulo 3, resultó como se esperaba, más complejo en comparación a un análisis para un manipulador serial. Como en muchos de los análisis cinemáticos hasta ahora realizados en los robots paralelos, éste también se realizó utilizando la geometría y el método de la cinemática inversa, es decir, estas herramientas permitieron obtener las expresiones para las variables articulares en función de las cartesianas de nuestro sistema, lo que equivale a saber como puede ser descrita una trayectoria deseada dentro de un espacio de trabajo definido y con ciertos perfiles de velocidad y aceleración.

Finalmente, los resultados obtenidos de velocidad y aceleración de las variables articulares de nuestro sistema, fueron la base para realizar el análisis dinámico presentado en el Capítulo 4.

Utilizando el método de Euler- Lagrange y conociendo los valores de de velocidad y aceleración de las variables articulares fue posible generar la función Lagrangiana para cada uno de los elementos del manipulador. Se generaron 18 términos cuyo resultado derivó en el modelo dinámico del robot paralelo.

El modelo dinámico obtenido guarda una forma similar a la de un modelo dinámico para un manipulador serial, es decir, se puede llevar a la forma Euler-Lagrange. De esta forma, se alcanza uno de los objetivos de la tesis: llevar el modelo a una forma conocida y estudiada en la literatura del área de control automático y para la cual se han propuesto diversos esquemas de control.

El Capítulo 5 correspondió a la implementación de simuladores, uno en *Mathematica* y el otro en *Matlab*. Para el primero, la solución numérica de las expresiones obtenidas en el análisis cinemático y en el modelo dinámico permitió realizar una simulación con diversas curvas, con la finalidad de evaluar el desempeño del mecanismo, siendo seleccionada una trayectoria semielíptica por ser una trayectoria típica de la operación de tomar y colocar. La parte del simulador correspondiente al modelo dinámico permitió conocer los torques ideales necesarios para describir dicha trayectoria semielíptica con un perfil de velocidad de tipo quíntico dentro de un espacio de trabajo determinado.

Por su parte, el simulador desarrollado en *Matlab* nos permitió verificar el funcionamiento del modelo dinámico; es decir que no existiese ningún error ni de tipo conceptual ni tipo numérico. Sin embargo, lo más interesante del desarrollo de este manipulador radicó en sus resultados gráficos. A través de éstos, fue posible observar que al introducirle los torques ideales (resultado del primer simulador), el manipulador fue incapaz de terminar la trayectoria semielíptica, ya que poco antes de llegar a la mitad, la trayectoria descrita

se desvió de la trayectoria semielíptica deseada.

Estos resultados arrojan una conclusión muy importante en este trabajo: la implantación de un control en lazo abierto, es decir, la aplicación de los pares ideales, resulta insuficiente para el control del seguimiento de una trayectoria en un robot paralelo. Esto abre la puerta a investigaciones futuras sobre el tipo de control en lazo cerrado más adecuado para este tipo de manipuladores.

En general, el estudio de los manipuladores paralelos resulta un poco más complejo que el estudio de manipuladores de tipo serial, sin embargo la creciente necesidad de la industria por abatir costos y mejorar la eficiencia, hacen necesario investigaciones y trabajos como este, que logren posicionar a los paralelos como robots con mayores ventajas y con pocas limitaciones.

Apéndice A

Ecuaciones Auxiliares

Una manera de asegurar la obtención de los elementos para la dinámica de los eslabones consiste en poner éstos en función de las coordenadas generalizadas, por lo cual obtendremos el vector $\boldsymbol{\theta}$ en función del vector de coordenadas generalizadas \mathbf{q} . Esto es

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta} &= \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\theta}_{23}, \boldsymbol{\theta}_{45}) \text{ en función de } \mathbf{q} = \mathbf{q}(x, y) \\ \boldsymbol{\theta} &= \boldsymbol{\theta}(\mathbf{q})\end{aligned}$$

A.1. Obtención de $\boldsymbol{\theta}_{23}$ en función de \mathbf{q}

La ecuación (3.3) presenta la posición del efector final en función de los elementos del lazo izquierdo, como se muestra a continuación

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_6 + \mathbf{R}_p = \mathbf{R}_t$$

Desarrollando la ecuación de posición del lazo izquierdo y derivando con respecto a q_j

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_1 + [\mathcal{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}_2 + [\mathcal{R}_{\theta_3}] \mathbf{r}_3 + \mathbf{R}_6 + \mathbf{R}_p &= \mathbf{R}_t \\
\frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial q_j} + \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial q_j} \mathbf{r}_2 + \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_3}]}{\partial q_j} \mathbf{r}_3 + \frac{\partial \mathbf{R}_6}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_p}{\partial q_j} &= \frac{\partial \mathbf{R}_t}{\partial q_j} \\
\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial q_j} \mathbf{r}_2 + \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_3}]}{\partial q_j} \mathbf{r}_3 &= \frac{\partial \mathbf{R}_t}{\partial q_j} \\
\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} \mathbf{r}_2 + \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_3}]}{\partial \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial q_j} \mathbf{r}_3 &= \frac{\partial \mathbf{R}_t}{\partial q_j} \\
\left[\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \theta_2} \mathbf{r}_2, \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_3}]}{\partial \theta_3} \mathbf{r}_3 \right] \left[\frac{\partial \theta_2}{\partial q_j}, \frac{\partial \theta_3}{\partial q_j} \right]^T &= \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \\
[\mathbf{J}_{23}] \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{23}}{\partial q_j} &= \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \\
[\mathbf{J}_{23}] &= \left[\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \theta_2} \mathbf{r}_2, \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_3}]}{\partial \theta_3} \mathbf{r}_3 \right]
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Despejando $\frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{23}}{\partial q_j}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{23}}{\partial q_j} = [\mathbf{J}_{23}]^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \tag{A.2}$$

Obteniendo $\frac{\partial \theta_2}{\partial q_j}$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{23}}{\partial q_j} \right)^T \mathbf{i} = \left([\mathbf{J}_{23}]^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right)^T \mathbf{i} \tag{A.3}$$

De la misma manera $\frac{\partial \theta_3}{\partial q_j}$

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial q_j} = \left([\mathbf{J}_{23}]^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right)^T \mathbf{j} \tag{A.4}$$

A.1.1. Obteniendo $\frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial q_j}$

La ecuación (4.27) muestra el valor de \mathbf{a}_2

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \theta_2} \mathbf{r}'_{G2}$$

Derivando \mathbf{a}_2 con respecto a q_j

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_2}]}{\partial \theta_2} \mathbf{r}'_{G2} \right) \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} [\mathcal{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}'_{G2} \right) \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} \\
&= (-[\mathcal{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}'_{G2}) \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} \\
&= (-[\mathcal{R}_{\theta_2}] \mathbf{r}'_{G2}) \left([\mathbf{J}_{23}]^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right)^T \mathbf{i}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

A.1.2. Obteniendo $\frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial q_j}$

A partir de la ecuación (4.29) se encuentra la función de \mathbf{b}_2 como

$$\dot{\theta}_2 = \mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}$$

Para esta ecuación habíamos encontrado una expresión para calcular \mathbf{b}_2 , como se muestra en la ecuación siguiente

$$\mathbf{b}_2^T = \frac{1}{V_3} [V_1, V_2]$$

Donde V_1, V_2, V_3 dependen de los ángulos del lazo izquierdo θ_2, θ_3 y de las coordenadas independientes x, y . Esta relación puede ser derivable, según se puede notar, ya que los ángulos están en función de las coordenadas independientes; sin embargo, este cálculo implica la derivación de funciones trigonométricas inversas. Por ello, buscaremos obtener \mathbf{b}_2 en función del tiempo.

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}(\dot{\mathbf{q}})$$

A partir de la ecuación de lazo

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_6 + \mathbf{R}_p = \mathbf{R}_t$$

Derivando con respecto al tiempo

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{R}}_1 + \dot{\mathbf{R}}_2 + \dot{\mathbf{R}}_3 + \dot{\mathbf{R}}_6 + \dot{\mathbf{R}}_p &= \dot{\mathbf{R}}_t \\
[\mathbf{W}_1]\mathbf{R}_1 + [\mathbf{W}_2]\mathbf{R}_2 + [\mathbf{W}_3]\mathbf{R}_3 + [\mathbf{W}_6]\mathbf{R}_6 + [\mathbf{W}_p]\mathbf{R}_p &= \dot{\mathbf{q}}
\end{aligned}$$

Puesto que las únicas barras que rotan entre las citadas son θ_2 y θ_3

$$\begin{aligned} [\mathbf{W}_2]\mathbf{R}_2 + [\mathbf{W}_3]\mathbf{R}_3 &= \dot{\mathbf{q}} \\ [\mathbf{W}_2][\mathbf{R}_{\theta_2}]\mathbf{r}_2 + [\mathbf{W}_3][\mathbf{R}_{\theta_3}]\mathbf{r}_3 &= \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Desarrollando la ecuación anterior

$$\begin{aligned} [\mathbf{W}_2][\mathbf{R}_{\theta_2}]\mathbf{r}_2 + [\mathbf{W}_3][\mathbf{R}_{\theta_3}]\mathbf{r}_3 &= \dot{\mathbf{q}} \\ \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 \\ s\theta_3 & c\theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 s\theta_2 & -\dot{\theta}_2 c\theta_2 \\ \dot{\theta}_2 c\theta_2 & -\dot{\theta}_2 s\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_3 s\theta_3 & -\dot{\theta}_3 c\theta_3 \\ \dot{\theta}_3 c\theta_3 & -\dot{\theta}_3 s\theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \\ \dot{\theta}_2 \begin{bmatrix} -s\theta_2 & -c\theta_2 \\ c\theta_2 & -s\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_3 \begin{bmatrix} -s\theta_3 & -c\theta_3 \\ c\theta_3 & -s\theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7}) \\ \dot{\theta}_2 \begin{bmatrix} -x_2 s\theta_2 \\ x_2 c\theta_2 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_3 \begin{bmatrix} -x_3 s\theta_3 \\ x_3 c\theta_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -x_2 s\theta_2 & -x_3 s\theta_3 \\ x_2 c\theta_2 & x_3 c\theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial[\mathbf{R}_{\theta_2}]}{\partial\theta_2}\mathbf{r}_2 & \frac{\partial[\mathbf{R}_{\theta_3}]}{\partial\theta_3}\mathbf{r}_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{23} &= \dot{\mathbf{q}} \\ [\mathbf{J}_{23}]\boldsymbol{\omega}_{23} &= \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

Obteniendo ω_2 , ω_3 y b_2

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{23} &= [\mathbf{J}_{23}]^{-1} \dot{\mathbf{q}} \\ \omega_2 &= \mathbf{i}^T \left([\mathbf{J}_{23}]^{-1} \dot{\mathbf{q}} \right) = \left(\mathbf{i}^T [\mathbf{J}_{23}]^{-1} \right) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}} \\ \omega_3 &= \mathbf{j}^T \left([\mathbf{J}_{23}]^{-1} \dot{\mathbf{q}} \right) = \left(\mathbf{j}^T [\mathbf{J}_{23}]^{-1} \right) \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{b}_2^T &= \mathbf{i}^T [\mathbf{J}_{23}]^{-1} = \mathbf{b}_2^T(\theta_2, \theta_3) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

De donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial q_j} &= \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial q_j} \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta_2} [\mathbf{J}_{23}]^{-T} \mathbf{i} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial \theta_3} [\mathbf{J}_{23}]^{-T} \mathbf{i} \frac{\partial \theta_3}{\partial q_j} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta_2} [\mathbf{J}_{23}]^{-T} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial \theta_3} [\mathbf{J}_{23}]^{-T} \mathbf{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \theta_3}{\partial q_j} \end{bmatrix} \\
&= [\mathbf{M}_{b2}] \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{23}}{\partial q_j} \\
&= [\mathbf{M}_{b2}] [\mathbf{J}_{23}]^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \\
\frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial q_j} &= [\mathbf{N}_{b2}] \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j}
\end{aligned} \tag{A.9}$$

A.2. Obtención de θ_{45} en función de q

A partir de la ecuación (3.14) para el lado derecho

$$\mathbf{R}'_1 + \mathbf{R}_4 + \mathbf{R}_5 + \mathbf{R}'_6 + \mathbf{R}_p = \mathbf{R}_t$$

Derivando con respecto a q_j

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{R}'_1}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_4}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_5}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}'_6}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_p}{\partial q_j} &= \frac{\partial \mathbf{R}_t}{\partial q_j} \\
\frac{\partial \mathbf{R}_4}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{R}_5}{\partial q_j} &= \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \\
\frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_4}]}{\partial \theta_4} \frac{\partial \theta_4}{\partial q_j} \mathbf{r}_4 + \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_5}]}{\partial \theta_5} \frac{\partial \theta_5}{\partial q_j} \mathbf{r}_5 &= \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \\
\begin{bmatrix} \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_4}]}{\partial \theta_4} \mathbf{r}_4 & \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_5}]}{\partial \theta_5} \mathbf{r}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_4}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \theta_5}{\partial q_j} \end{bmatrix} &= \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \\
[\mathbf{J}_{45}] \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{45}}{\partial q_j} &= \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Obteniendo $\frac{\partial \theta_4}{\partial q_j}$ y $\frac{\partial \theta_5}{\partial q_j}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta_{45}}{\partial q_j} &= [\mathbf{J}_{45}]^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \\
\frac{\partial \theta_4}{\partial q_j} &= \mathbf{i}^T \left([\mathbf{J}_{45}]^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right) \\
\frac{\partial \theta_4}{\partial q_j} &= \mathbf{j}^T \left([\mathbf{J}_{45}]^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right)
\end{aligned} \tag{A.11}$$

A.3. Ecuaciones de velocidad del lado derecho

Derivando la ecuación de posición del lado derecho

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}'_1 + \mathbf{R}_4 + \mathbf{R}_5 + \mathbf{R}'_6 + \mathbf{R}_p &= \mathbf{R}_t \\
[\mathbf{W}'_1] \mathbf{R}'_1 + [\mathbf{W}_4] \mathbf{R}_4 + [\mathbf{W}_5] \mathbf{R}_5 + [\mathbf{W}'_6] \mathbf{R}'_6 + [\mathbf{W}_p] \mathbf{R}_p &= \dot{\mathbf{q}} \\
[\mathbf{W}_4] \mathbf{R}_4 + [\mathbf{W}_5] \mathbf{R}_5 &= \dot{\mathbf{q}} \\
[\mathbf{W}_4] \mathbf{R}_4 + [\mathbf{W}_5] \mathbf{R}_5 &= \dot{\mathbf{q}}
\end{aligned}$$

Como puede observarse, la ecuación anterior es muy similar a la ecuación (A.6), de modo que por simple inspección podemos obtener la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_4}]}{\partial \theta_4} \mathbf{r}_4 & \frac{\partial [\mathcal{R}_{\theta_5}]}{\partial \theta_5} \mathbf{r}_5 \end{array} \right] \omega_{45} &= \dot{\mathbf{q}} \\
[\mathbf{J}_{45}] \omega_{45} &= \dot{\mathbf{q}}
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Obteniendo ω_4 , ω_5 y b_4

$$\begin{aligned}
\omega_{45} &= [\mathbf{J}_{45}]^{-1} \dot{\mathbf{q}} = [\mathbf{N}_5] \dot{\mathbf{q}} \\
\omega_4 &= \mathbf{i}^T \left([\mathbf{J}_{45}]^{-1} \dot{\mathbf{q}} \right) = \left(\mathbf{i}^T [\mathbf{J}_{45}]^{-1} \right) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}_4^T \dot{\mathbf{q}} \\
\omega_5 &= \mathbf{j}^T \left([\mathbf{J}_{45}]^{-1} \dot{\mathbf{q}} \right) = \left(\mathbf{j}^T [\mathbf{J}_{45}]^{-1} \right) \dot{\mathbf{q}} \\
\mathbf{b}_4^T &= \mathbf{i}^T [\mathbf{J}_{45}]^{-1} = \mathbf{b}_4^T (\theta_4, \theta_5)
\end{aligned} \tag{A.13}$$

De donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{b}_4}{\partial q_j} &= \frac{\partial \mathbf{b}_4}{\partial \theta_4} \frac{\partial \theta_4}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{b}_4}{\partial \theta_5} \frac{\partial \theta_5}{\partial q_j} \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta_4} [\mathbf{J}_{45}]^{-T} \mathbf{i} \frac{\partial \theta_4}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial \theta_5} [\mathbf{J}_{45}]^{-T} \mathbf{i} \frac{\partial \theta_5}{\partial q_j} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial \theta_4} [\mathbf{J}_{45}]^{-T} \mathbf{i} \quad \frac{\partial}{\partial \theta_5} [\mathbf{J}_{45}]^{-T} \mathbf{i} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_4}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \theta_5}{\partial q_j} \end{bmatrix} \\
&= [\mathbf{M}_{b4}] \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{45}}{\partial q_j} \\
&= [\mathbf{M}_{b4}] [\mathbf{J}_{45}]^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \\
\frac{\partial \mathbf{b}_4}{\partial q_j} &= [\mathbf{N}_{b4}] \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j}
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Apéndice B

Simulador en *Mathematica*®

En este apartado se presenta un simulador desarrollado en la paquetería Mathematica, el cuál se hizo tomando en cuenta los siguientes parámetros

Para la simulación de la trayectoria se consideró

- Una trayectoria semielíptica descrita en un espacio de trabajo de forma rectangular
- Un perfil de velocidad de tipo quintíco
- Un intervalo de simulación que va de cero a tres segundos

En cuanto al robot se consideraron las siguientes dimensiones de sus barras

Barra	Dimensión [m]
x_1	0,030
x_2	0,122
x_{2g}	0,061
x_3	0,254
x_{3g}	0,127
x_4	0,122
x_{4g}	0,061
x_5	0,254
x_{5g}	0,127
x_6	0,00625
y_6	0,025
y_p	0,01

Para el modelo dinámico se tomó en cuenta lo siguiente

- Material: Nylon de propósito general con densidad $\delta = 1220.00 \left[\frac{Kg}{m^3} \right]$

Considerando este material, las masas de los eslabones del robot y momentos de inercias con respecto al centro de gravedad correspondientes son

Masa [Kg]	Inercia [Kg · m ²]
$m_2 = 0,03586$	$I_{g2} = 198,8E - 6$
$m_3 = 0,06317$	$I_{g3} = 1,417E - 3$
$m_4 = 0,07172$	$I_{g4} = 397,6E - 6$
$m_5 = 0,12634$	$I_{g5} = 2,834E - 3$
$m_6 = 0,05834$	$I_{g6} = 0$
$m_7 = 0,06317$	$I_{g7} = 1,417E - 3$
$m_8 = 0,02157$	$I_{g8} = 0$
$m_9 = 0,03586$	$I_{g9} = 198,8E - 6$

A continuación se presenta el documento completo del código programado para el simulador en *Mathematica* expuesto en le capítulo anterior.

Apéndice C

Simulador en *Matlab con Simulink*©

En esta sección se muestra el simulador desarrollado en la paquetería Matlab con Simulink, para su construcción se utilizaron algunos de los parámetros presentados en el simulador anterior, como las longitudes de las barras, las masas e inercias para el material propuesto, además de los resultados obtenidos a partir del simulador anterior, es decir, los valores de los torques necesarios para describir una trayectoria semielíptica con un perfil de velocidad quintico.

A continuación se presenta el documento completo del código programado para el simulador en *Matlab* expuesto en le capítulo anterior.

Bibliografía

- [1] Aracil, Rafael, Saltaren J. Roque, et al., *Robots paralelos: máquinas con un pasado para una robótica del futuro* Universidad Politecnica de Madrid, Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica industrial, Vol. 3, Número 1, Enero de 2006, pp. 16-28.
- [2] Earl C.F. and Roney J. Some Kinematics structures for manipulators design. *J. of Mechanisms Transmissions and Automation in Design*, 105(1):15-22, March 1983
- [3] G. Liu, Y. Lou, Z. Li. *Singularities of Parallel Manipulators: A Geometric Treatment*. IEEE Trans. On Robotics and Automation, 2003, vol 19, No. 4, pp. 579-594.
- [4] Gosselin, C. *Kinematic Analysis Optimizacion and Programming of a Parallel Robotic Manipulators* Ph. D Thesis, McGill University, Montréal, June 15, 1998
- [5] Gwinnett, J. E. 1931, *Amusement devices* , US Patent N° 1, 789, 680
- [6] Hunt, K.H 1978, *Kinematic geometry of mechanisms*. Clarendon
- [7] J. T. Wen, J. F. O'Brien. *Singularities in Three-Legged Platform-Type Parallel Mechanisms*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2003, vol. 19, No. 4 pp. 720-726.
- [8] Mc Callion, H. and D.T. Pham, 1979, *The analysis of a six degrees of freedom workstation for mechanized assembly*. In *Proc. of 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, Montreal, July. pp 611-616*
- [9] Mc Carthy, Michael, 2003, *Geometric Design of Linkages*, IEEE Trans. On Robotics and Automation, pp. 579-594.
- [10] Merlet, J.P, 2006, *Parallel Robots* Second edition, Springer.

-
- [11] Nise, S. Norman *Sistemas de Controlol para Ingeniería*.
- [12] R. Norton. *Diseño de maquinaria*. McGraw Hill, segunda edición, 2000.
- [13] Rocha-Cózatl, E. G., García Gálvez, G. D., Vargas Olgúin, U., & Vázquez Hernández, J. (2007). *Análisis cinemático de un robot paralelo tipo diamante*. Memorias del XII Congreso Anual de la SOMIM. Durango.
- [14] Shabana A. Ahamed, *Computational Dinamics* Jhon Wiley & Sons, INC. 2001
- [15] Silva Luis A., Arcil R., et al., *RoboTennis: Optimal Design of a Parallel Robot with High Performance* Universidad Politecnica de Madrid.
- [16] Silva Luis A., *Control visual de robots paralelos. Análisis, desarrollo y aplicación a la plataforma robotenis* Tesis Doctoral, Universidad Pilitécnica de Madrid, 2005 .
- [17] Spong, M. Vidyasagar, 2003,. *Robot Dynamics and Control* . John Wiley & Sons, Inc.
- [18] Stewart, D. 1965,. *A plataform whit 6 degress of freedom*. In: *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers. Vol 180 (Part 1,15)*
- [19] T. Huang, Z. Li, M. Li, D. Chetwynd, C. Gosselin. *Conceptual Design and Dimensional Synthesis of a Novel 2-DOF Translational Parallel Robot for Pick-and-Place Operations*. ASME Journal of Mechanical Design, 2004, 126(3) pp. 449-455.
- [20] Tapia, Cortés B, et. al. *Robot Paralelo Planar para Ensamble*, Instituto Tecnológico de Puebla
- [21] Tsai Lung-Wen , 1999, *Robot Analysis, The mechanics of serial and parallel manipulators* John Wiley & Sons, Inc. U.S.A.