

DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO: "INTRODUCCION A LOS METODOS NUMERICOS, APLICADOS A LA INGENIERIA HIDRAULICA, DEL 26 AL 30 DE NOVIEMBRE DE 1984.

1. M. EN I. POLIPTRO MARTINEZ AUSTRIA (COORDINADOR)
COORDINADOR DE APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA
U.N.A.M.
TEL. 550-52-15 EXT. 4496

2. M. EN I. OSCAR FUENTES MARILES
COORDINADOR DE LA SECCION DE HIDRAULICA
INSTITUTO DE INGENIERIA
U.N.A.M.
TEL. 550-52-15 EXT. 3608 Y 3609



EVALUACION DEL PERSONAL DOCENTE

(1)

CURSO: INTRODUCCION A LOS METODOS NUMERICOS, APLICADOS A LA INGENIERIA HIDRAULICA

FECHA: DEL 26 AL 30 DE NOVIEMBRE, 1984

		DOMINIO DEL TEMA	EFICIENCIA EN EL USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES	MANTENIMIENTO DEL INTERES. (COMUNICACION CON LOS ASISTENTES, AMENIDAD, FACILIDAD DE EXPRESION).	PUNTUALIDAD	
CONFERENCISTA						
1.	M. EN I. POLIOPTRO MARTINEZ AUSTRIA					
2.	M. EN I. OSCAR FUENTES MARILES					
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						
8.						
9.						
ESCALA DE EVALUACION : 1 a 10						

EVALUACION DE LA ENSEÑANZA

(2)

SU EVALUACION SINCERA NOS AYUDARA A MEJORAR LOS PROGRAMAS POSTERIORES QUE DISEÑAREMOS PARA USTED.

TEMA	ORGANIZACION Y DESARROLLO DEL TEMA	GRADO DE PROFUNDIDAD LOGRADO EN EL TEMA	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO EN EL TEMA	UTILIDAD PRACTICA DEL TEMA	
INTRODUCCION					
CONCEPTOS BASICOS DE PROGRAMACION					
SOLUCION DE ECUACIONES EN UNA VARIABLE					
SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES					
SOLUCION DE ECUACIONES DIFENCIALES ORDINARIAS					
SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES					

ESCALA DE EVALUACION: 1 a 10

EVALUACION DEL CURSO

③

CONCEPTO		EVALUACION
1.	APLICACION INMEDIATA DE LOS CONCEPTOS EXPUESTOS	
2.	CLARIDAD CON QUE SE EXPUSIERON LOS TEMAS	
3.	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO CON EL CURSO	
4.	CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO	
5.	CONTINUIDAD EN LOS TEMAS DEL CURSO	
6.	CALIDAD DE LAS NOTAS DEL CURSO	
7.	GRADO DE MOTIVACION LOGRADO CON EL CURSO	

ESCALA DE EVALUACION DE 1 A 10

1. ¿Qué le pareció el ambiente en la División de Educación Continua?

MUY AGRADABLE	AGRADABLE	DESAGRADABLE

2. Medio de comunicación por el que se enteró del curso:

PERIODICO EXCELSIOR ANUNCIO TITULADO DI VISION DE EDUCACION CONTINUA	PERIODICO NOVEDADES ANUNCIO TITULADO DI VISION DE EDUCACION CONTINUA	FOLLETO DEL CURSO

CARTEL MENSUAL	RADIO UNIVERSIDAD	COMUNICACION CARTA, TELEFONO, VERBAL, ETC.

REVISTAS TECNICAS	FOLLETO ANUAL	CARTELERA UNAM "LOS UNIVERSITARIOS HOY"	GACETA UNAM

3. Medio de transporte utilizado para venir al Palacio de Minería:

AUTOMOVIL PARTICULAR	METRO	OTRO MEDIO

4. ¿Qué cambios haría usted en el programa para tratar de perfeccionar el curso?

5. ¿Recomendaría el curso a otras personas?

SI	NO

6. ¿Qué cursos le gustaría que ofreciera la División de Educación Continua?

7. La coordinación académica fue:

EXCELENTE	BUENA	REGULAR	MALA

8. Si está interesado en tomar algún curso intensivo ¿Cuál es el horario más conveniente para usted?

LUNES A VIERNES DE 9 A 13 H. Y DE 14 A 18 H. (CON COMIDAS)	LUNES A VIERNES DE 17 A 21 H.	LUNES, MIÉRCOLES Y VIERNES DE 18 A 21 H.	MARTES Y JUEVES DE 18 A 21 H.

VIERNES DE 17 A 21 H. SABADOS DE 9 A 14 H.	VIERNES DE 17 A 21 H. SABADOS DE 9 A 13 Y DE 14 A 18 H.	OTRO

9. ¿Qué servicios adicionales desearía que tuviese la División de Educación Continua, para los asistentes?

10. Otras sugerencias:



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

CURSO: INTRODUCCION A LOS METODOS NUMERICOS APLICADOS A LA INGENIERIA
HIDRAULICA DIRIGIDO AL PERSONAL PROFESIONAL DE LA SARH DEL 26 AL 30
DE NOVIEMBRE DE 1984 EN MEXICO, D.F.

INTRODUCCION A LOS METODOS NUMERICOS
EN HIDRAULICA

M. EN I. OSCAR FUENTES MARILES
M. EN I. POLIOPTRO MARTINEZ AUSTRIA
NOVIEMBRE DE 1984.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

INTRODUCCION A LOS METODOS NUMERICOS
EN HIDRAULICA

M en I Oscar Fuentes Mariles *
M en I Polioptro Martínez Austria*

*Profesores de la División de Estudios de
Posgrado de la Facultad de Ingeniería

1. INTRODUCCION

El empleo de las computadoras ha contribuido en tan gran medida al desarrollo tecnológico actual, que incluso se ha llegado a llamar a nuestra época la "era de las computadoras". Esta frase se ha convertido en un lugar común y, sin analizar su validéz, podría ilustrar la importancia de estos instrumentos.

Hoy en día casi no existen procesos tecnológicos modernos en los que no intervengan, de manera directa o indirecta, procesos de computación.

Escencialmente, la computadora es una herramienta para quien la usa; en el sentido de que es una extensión de sus propias capacidades. Como en su momento histórico la palanca fué una extensión del brazo que permitía aumentar su fuerza, la computadora puede concebirse (de una manera simplificada) como una extensión del cerebro, que permite aumentar algunas de sus capacidades; básicamente su velocidad de cálculo.

Las computadoras pueden realizar operaciones y procesos lógicos muy sencillos, entre otras funciones; a una velocidad que es imposible para el cerebro humano en condiciones normales. Otra característica importante es que, si bien tienen una memoria limitada, pueden almacenar y recuperar información con gran exactitud.

Las computadoras, como herramienta, no son capaces de responder preguntas por sí mismas - y por supuesto no son capaces de plantearse las - sino que han de ser "programadas". Es decir que es necesario introducir en su memoria un conjunto de instrucciones que definan su operación, de acuerdo al problema de interés.

De acuerdo con esto, al menos en teoría, todo lo que se hace con una computadora podría hacerse sin ella. Sin embargo, la misma tarea que realiza una computadora en unos segundos o minutos puede llevarle a un hombre horas, semanas e incluso meses de trabajo. En términos prácticos o económicos, puede serle imposible realizarla.

El uso de las computadoras no solo permite resolver los problemas de la manera usual, pero con más rapidéz; sino que hace posible resolverlos de una manera más eficiente y precisa y, como se ha dicho anteriormente, en el caso extremo es la única forma práctica de solución. Debido a esto, las computadoras son una herramienta indispensable en la ingeniería moderna.

Por otra parte, el avance de la electrónica ha conducido a la producción de computadoras con cada vez mayor capacidad a precios (y tamaños) cada vez menores. Actualmente se puede conseguir una microcomputadora con 64 kilobytes de capacidad (que antes sería computadora a secas), por un precio de alrededor de 300 dólares. Se prevee que en unos cuantos años más se tendrán microcomputadoras con capacidad de

megabytes.

En estas circunstancias, las computadoras han dejado de ser para los ingenieros una posibilidad limitada a casos especiales, para transformarse en una herramienta cotidiana.

En este momento, y cada vez más en el futuro, los ingenieros deberán ser capaces de incorporar a su práctica profesional las técnicas computacionales. Sin embargo, su uso óptimo no implica solamente el conocimiento del Lenguaje de computación; sino también de técnicas matemáticas especiales, que facilitan el plantear soluciones de una manera más inteligente, haciendo uso de procedimientos lógicos y matemáticos (algoritmos) adecuados.

La mayor parte de los fenómenos que estudia la ingeniería civil quedan representados por modelos matemáticos; esto es, por ecuaciones: algebraicas, diferenciales ordinarias, sistemas de ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, principalmente.

En algunas ocasiones, las ecuaciones resultantes son difíciles de resolver; en otras definitivamente no se conoce solución exacta. Afortunadamente, en el propio campo de las matemáticas se han desarrollado métodos numéricos de solución, los cuales han tenido una gran expansión a raíz de su aplicación en computadoras, y se han producido otros nuevos y cada vez más poderosos.

Sin los métodos numéricos, el uso de las computadoras en ingeniería civil se reduce a las aplicaciones más sencillas, de ahí la importancia de su conocimiento.

El objetivo principal de este texto es presentar al lector los conocimientos fundamentales de los métodos numéricos, y familiarizarlo con su aplicación en microcomputadores.



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

CURSO: INTRODUCCION A LOS METODOS NUMERICOS APLICADOS A LA INGENIERIA
HIDRAULICA DIRIGIDO AL PERSONAL PROFESIONAL DE LA SARH DEL 26 AL 30
DE NOVIEMBRE DE 1984 EN MEXICO, D.F.

SOLUCION DE ECUACIONES
EN UNA VARIABLE

M. EN I. OSCAR FUENTES MARILES
M. EN I. POLIOPTRO MARTINEZ AUSTRIA
NOVIEMBRE DE 1984.

3. SOLUCION DE ECUACIONES EN UNA VARIABLE

3.1 INTRODUCCION

En hidráulica es relativamente común, después del desarrollo algebraico de un problema, llegar a una ecuación en la que la variable dependiente no se puede despejar.

Considérese, por ejemplo, el problema de calcular el tirante en un canal mediante la aplicación de la ecuación de la energía específica.

Supóngase que se tiene un flujo como el que se indica en la figura 1. Se conoce el gasto ($Q = 0.5 \text{ m}^3/\text{s}$) y el tirante en la sección 1 ($y_1 = 0.15 \text{ m}$), y se desea conocer el tirante sobre el escalón, en la sección 2.

Aplicando el principio de conservación de la energía entre ambas secciones:

$$E_1 = E_2 + \Delta Z \quad (1)$$

donde E_1 y E_2 son las energías específicas en las secciones 1 y 2; y ΔZ es la altura del escalón (0.05).

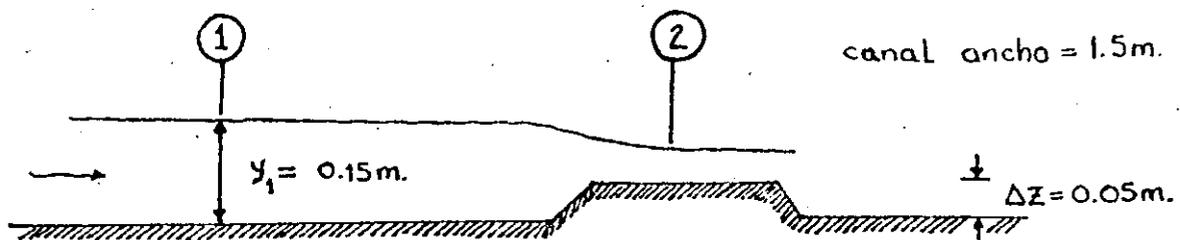


Figura 1.- Flujo sobre un escalón

La energía específica se define como:

$$E = y + \frac{V^2}{2g} \quad (2)$$

y de continuidad:

$$V = \frac{Q}{A} \quad (3)$$

que sustituida en (2) resulta:

$$E = y + \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (4)$$

y como $A = by$; y definiendo el gasto unitario como:

$$q = \frac{Q}{b}$$

donde b es el ancho del canal, la energía específica finalmente puede expresarse como:

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} \quad (5)$$

Con esta expresión, conocido V_1 se calcula E_1 .

Escribiendo la ec. 5 en lugar de E_2 en la expresión 1, se obtiene:

$$E_1 = y_2 + \frac{q^2}{2gy_2^2} + \Delta Z \quad (6)$$

ordenando:

$$y_2 + \frac{q^2}{2gy_2^2} + \Delta Z - E_1 = 0$$

y multiplicando por y_2^2 se obtiene finalmente:

$$y_2^3 + (\Delta Z - E_1)y_2^2 + \frac{q^2}{2g} = 0 \quad (7)$$

La solución de esta ecuación proporciona el tirante y_2 , buscado, puesto que se conocen AZ y q ; y E_1 se puede calcular dado y_1 .

En casos como este, el método de solución más evidente, pero también el más ineficiente, consiste en asignar valores a la variable mediante "tanteos", hasta que se cumpla la ecuación.

Por otra parte, el problema de resolver una ecuación en una sola variable, cuando ésta es implícita, ha sido atacado por los matemáticos desde hace más de un siglo, existen métodos eficientes para computadora; y aún ahora se siguen proponiendo otros nuevos.

El problema puede plantearse sencillamente como; dada la función:

$$f(x) = 0 \quad (8)$$

encontrar los valores X_1, X_2, \dots, X_n que la satisfacen. Estos valores se denominan raíces de la ecuación. En la figura 2 se muestra una interpretación geométrica.

El número de raíces depende de la propia ecuación; pudiendo ser infinito, por ejemplo la ecuación $f(x) = \text{Sen}x = 0$.

A continuación se procederá a presentar algunos de los métodos más usuales para la solución de la ecuación (8).

3.2 METODO DE BISECCION

Considérese el problema de encontrar una raíz de una ecuación como se muestra en la figura 3.a .

Supóngase que se eligen dos valores de X ; a y b , a ambos lados de la raíz, y se toma el promedio de ellos (P_1).

En general el promedio estará más cerca de la raíz que a y b ; aunque casi nunca será, de primer intento su valor exacto. Estando P_1 más cerca de la raíz, puede sustituir a cualquiera de los otros valores a o b , según convenga; y de esta manera cerrar el intervalo en el que se encuentra la solución.

Si se mantiene el requisito de que a y b estén a ambos lados de la raíz, P_1 debe sustituir a uno de ellos, de manera que se cumpla la condición.

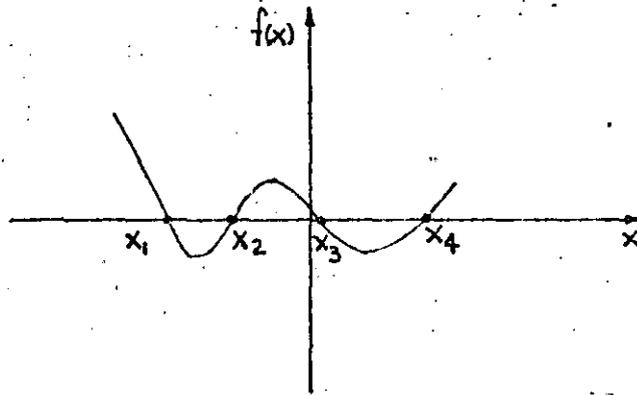


Figura 2.- Raíces x_1, x_2, x_3, x_4 de una función $f(x)$.

En la figura 3.a, si $f(P_1) > 0$, entonces " b " será sustituida por " P_1 "; y si $f(P_1) < 0$ " a " será sustituida por " P_1 ". El nuevo intervalo se muestra en la figura 3.b.

El siguiente promedio, P_2 , se acerca mucho más a la raíz, como puede observarse.

Si se efectúan los pasos anteriores repetidamente, los valores de los promedios P se acercarán paulatinamente a la raíz y, con un número muy grande de estas etapas, se encontrará su valor exacto; sin embargo, en la práctica no se pueden obtener valores exactamente iguales a cero, por lo que se acostumbra aceptar un valor con una cierta toleran-

cia. Es decir que se acepta que la raíz ocurre cuando

$$|\delta(x)| < T$$

donde T es un número muy pequeño (por ejemplo 0.0000001)

Debe notarse que si la pendiente de la curva $\delta(x)$ es contraria a la ilustrada en la figura 3, entonces el criterio para sustituir "a" o "b" por "P", también se invierte, es decir

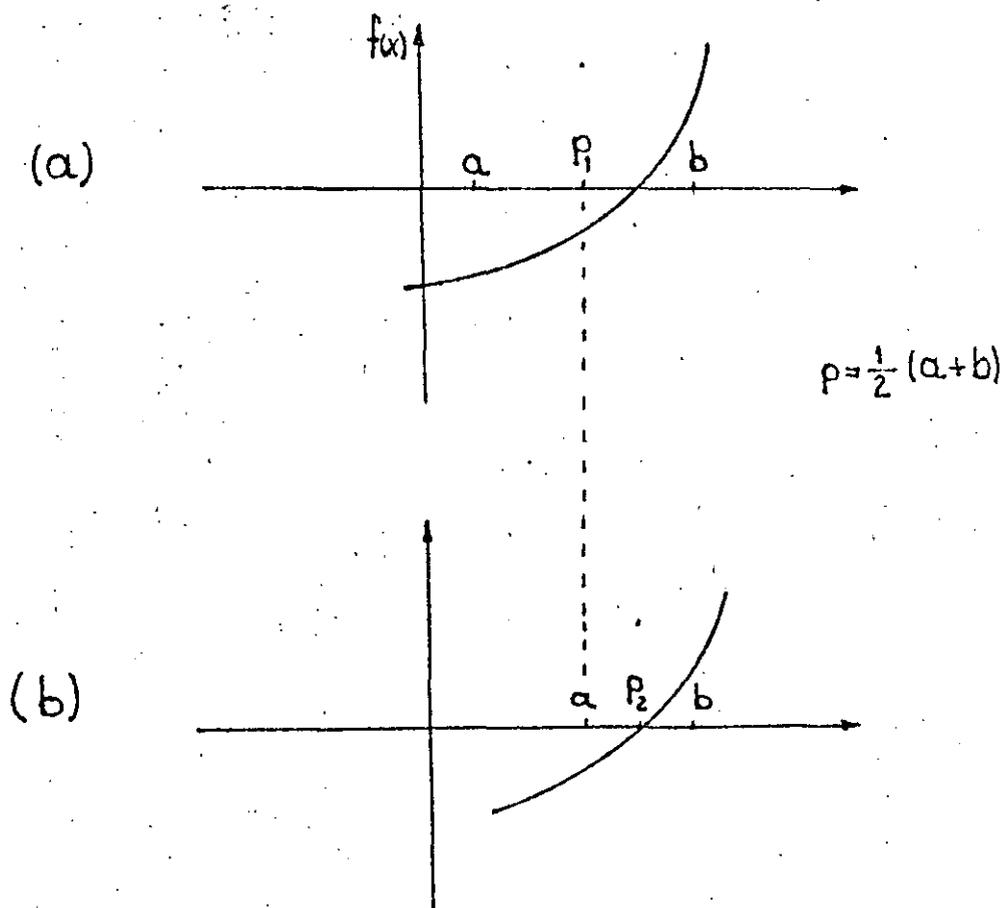


Figura 3.- Representación gráfica de una etapa del método de bisección

que en este caso $b = P$ si $\delta(P) < 0$ y $a = P$ si $\delta(P) > 0$.

El procedimiento descrito sucintamente, se puede organizar de manera sencilla por medio de un algoritmo, como se muestra a continuación.

ALGORITMO DE BISECCION

1. Localize dos valores de X ; que se denominarán a y b ; tales que $\delta(a)\delta(b) < 0$. Defina una tolerancia T .
2. Haga $i = 1$; y entonces $a_i = a$; $b_i = b$
3. Calcule el promedio P_i ; $P_i = (a_i + b_i)/2$
4. Si $|\delta(P_i)| < T$ entonces vaya al paso 9
5. Si $\delta(a) < 0$ vaya al paso 6
Si $\delta(a) > 0$ vaya al paso 7
6. Si $\delta(P_i) < 0$ haga $a_{i+1} = P_i$; $b_{i+1} = b_i$. Vaya al paso 8
Si $\delta(P_i) > 0$ haga $a_{i+1} = a_i$; $b_{i+1} = P_i$. Vaya al paso 8
7. Si $\delta(P_i) > 0$ haga $a_{i+1} = P_i$; $b_{i+1} = b_i$. Vaya al paso 8
Si $\delta(P_i) < 0$ haga $a_{i+1} = a_i$; $b_{i+1} = P_i$. Vaya al paso 8
8. Haga $i = i + 1$ y regrese al paso 3
9. La raíz buscada es P_i . El proceso termina

Una vez conocido el algoritmo, es relativamente sencillo realizar un programa para computadora. El propio algoritmo es ya casi un diagrama de bloques.

En la figura 4 se presenta un diagrama de flujo, concebido didácticamente, para el método de bisección. Es importante observar que, puesto, que se requieren solo los valores de

a_i y b_i de calculos anteriores, en lugar de crear dos arreglos $A(I)$, $B(I)$, que consumirían capacidad de memoria de la computadora inútilmente, se usaron dos variables sin subíndice A , B . Lo propio ocurre con p_i .

Asímismo, en lugar de escribir continuamente la función $f(x)$ de que se trate, se utilizó la posibilidad de definir una función; tal como se enunció en el capítulo anterior.

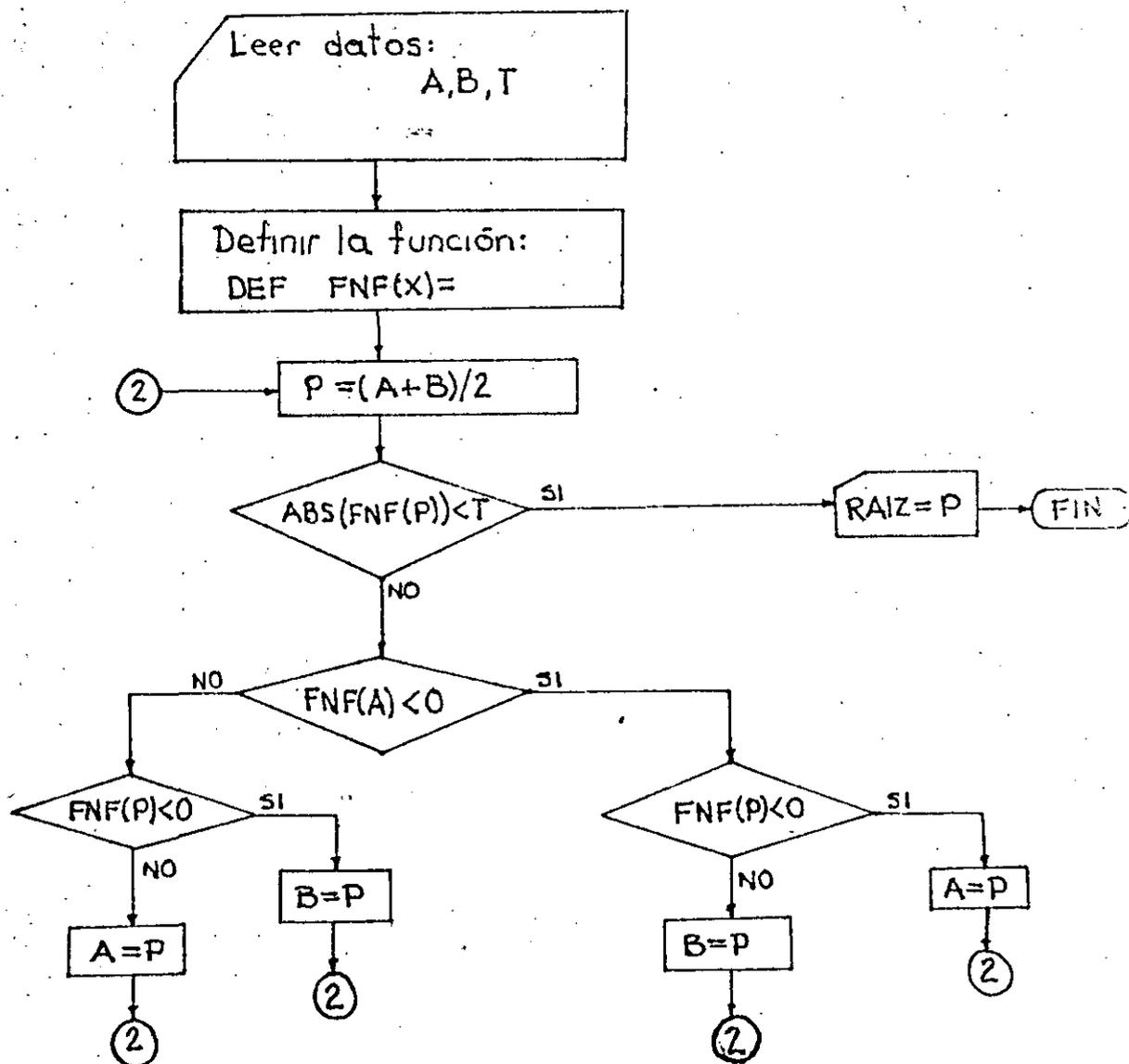


Figura 4.- Diagrama de flujo, método de bisección

El uso de la instrucción DEF FNF, permite además una mayor flexibilidad en el uso del programa, dado que bastará cambiar la función en esta línea del listado para que se pueda resolver con problema diferente.

En la figura 5 se presenta el listado de este programa para el método de bisección, con comentarios suficientes para su empleo.

Para ejemplificar la aplicación de este método, considérese nuevamente el problema de flujo sobre un escalón, planteado en la introducción de este capítulo.

La ecuación para el cálculo del tirante en la sección 2, es la 7:

$$y_2^3 + (\Delta Z - E_1)y_2^2 + \frac{q^2}{2g} = 0 \quad (7)$$

En el ejemplo, se tenían los siguientes datos:

$$Q = 0.5 \text{ m}^3/\text{s} \quad b = 1.5 \text{ m}$$

$$y_1 = 0.15 \text{ m} \quad \Delta Z = 0.10 \text{ m}$$

El gasto unitario será:

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{0.5}{1.5} = 0.333 (\text{m}^3/\text{s})/\text{m}$$

y por la ec 5, la energía específica en la sección 1 valdrá:

$$E_1 = y_1 + \frac{q^2}{2gy_1^2} = 0.45 + \frac{0.333^2}{19.62(0.15)^2} = 0.402$$

sustituyendo este valor en la ec.7, los otros datos y haciendo operaciones, se obtiene finalmente:

$$y_2^3 - 0.352y_2^2 + 0.00566 = 0 \quad (8)$$

una de cuyas soluciones es el tirante buscado.

Para ilustrar el funcionamiento del método de bisección, se procederá a operar el algoritmo inicialmente sin auxilio del programa.

El tirante en la sección 1 es supercrítico, por lo que el tirante sobre el escalón lo será también. El tirante crítico es:

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g}} = 0.224 \text{ m}$$

Entonces el tirante buscado estará en el intervalo:

$$0.15 < y_1 < 0.224$$

por lo que se puede escoger $a = 0.16$; $b = 0.224$

En la tabla 1 se resúmen los cálculos efectuados con el algoritmo del método de bisección. Si se considera aceptable una tolerancia de 0.0001, con el tercer cálculo se obtendría el resultado: $y_2 \approx 0.184$.

Utilizando el programa, el procedimiento sería como sigue:

1. Antes de ejecutar el programa se teclea en la línea 140 la función $\delta(X) = a$ la que se busca raíz en el intervalo a, b .

Iteración	a	b	p	$\delta(p)$
1	0.16	0.224	0.192	-0.0002382
2	0.16	0.192	0.176	0.0002082
3	0.176	0.192	0.184	-0.0000278

$$\delta(p) = p^3 - .352p^2 + .00566$$

$$0.0000278 < 0.0001 \therefore y \approx 0.184$$

Tabla 1 Ejemplo del método de bisección

2. El programa da al usuario información general:

METODO DE BISECCION

ECUACION A RESOLVER

EN LINEA 140

3. El programa pide datos:

INTRODUZCA INTERVALO DE BUSQUEDA

VALOR MINIMO DE BUSQUEDA?

Teclear: 0.16

VALOR MAXIMO DE BUSQUEDA?

Teclear: 0.224

TOLERANCIA?

Teclear: 0.0001

4. El programa informa inicio de proceso y, segundos después, anuncia resultados:

*** SE ENCONTRO SOLUCION***

LA RAIZ ES:

X = 0.184

```

10 REM PROGRAMA PARA SOLUCION D
E ECUACION ALGEBRAICA.
20 REM **METODO DE BISECCION**
30 REM
40 CLEAR @ DISP "*****
**" @ DISP "METODO DE BISECC
ION" @ DISP
50 DISP "ECUACION A RESOLVER:"
@ DISP " EN LINEA 140" @ DIS
P
60 DISP "INTRODUZCA EL INTERVAL
O DE" @ DISP " BUSQUEDA" @ D
ISP @ DISP
70 REM SE PIDEN DATOS.
80 REM
90 DISP "VALOR MINIMO DE BUSQUE
DA";@ INPUT A
100 DISP "VALOR MAXIMO DE BUSQUE
DA";@ INPUT B
110 CLEAR @ DISP "TOLERANCIA";@
INPUT T
120 REM
130 REM EN LA SIGUIENTE LINEA SE
DEFINE LA FUNCION.
140 DEF FNF(X) = X^3-.352*X^2+.0
0566.
150 REM
160 REM SE INICIA PROCESO DE CAL
CULO, SE INFORMA A USUARIO.
170 CLEAR @ BEEP @ DISP "SE INIC
IA PROCESO"
180 P=(A+B)/2
190 IF ABS(FNF(P))<T THEN GOTO 2
90
200 IF FNF(A)<0 THEN GOTO 240
210 IF FNF(B)<0 THEN GOTO 230
220 A=P @ GOTO 180
230 B=P @ GOTO 180
240 IF FNF(B)<0 THEN GOTO 220
250 GOTO 230
260 REM
270 REM SE ENCONTRO RAIZ, Y SE I
NFORMA A USUARIO
280 REM
290 CLEAR @ BEEP @ DISP "*** SE
ENCENTRO SOLUCION ***" @ DIS
P
300 DISP "LA RAIZ ES:" @ DISP "X
=";P
310 DISP "*****"
320 END

```

Figura 5.- Listado de programa método de bisección

Para concluir estas notas sobre el método de bisección conviene mencionar que, si se cumple la restricción de que $f(a)$ y $f(b)$ sean de signos contrarios, el método es siempre convergente, es decir que se aproxima gradualmente a la solución.

Un método no converge cuando se aleja, o no se aproxima, a la solución conforme aumenta el número de iteraciones.

La convergencia es una característica importante del método de bisección, sin embargo es comparativamente lento; es decir que se acerca a la solución con un mayor número de iteraciones que otros métodos.

3.3 METODOS DE FALSA POSICION

El método de falsa posición, o de Regula Falsi, opera de manera similar al de bisección, solamente que en lugar de utilizarse un promedio aritmético para evaluar aproximaciones a la raíz, se emplea una relación de triángulos semejantes.

Considérese que se desea calcular una raíz de una función como se indica en la figura 6, donde se han elegido dos valores de la variable, a y b , tales que se cumple que $f(a)f(b) < 0$.

El punto en que la recta que une a $f(a)$ y $f(b)$ cruza el eje X , se denota por la letra C .

En la figura se pueden definir dos triángulos; el mayor con vértices en $f(a)$, d y $f(b)$; y el menor con vértices

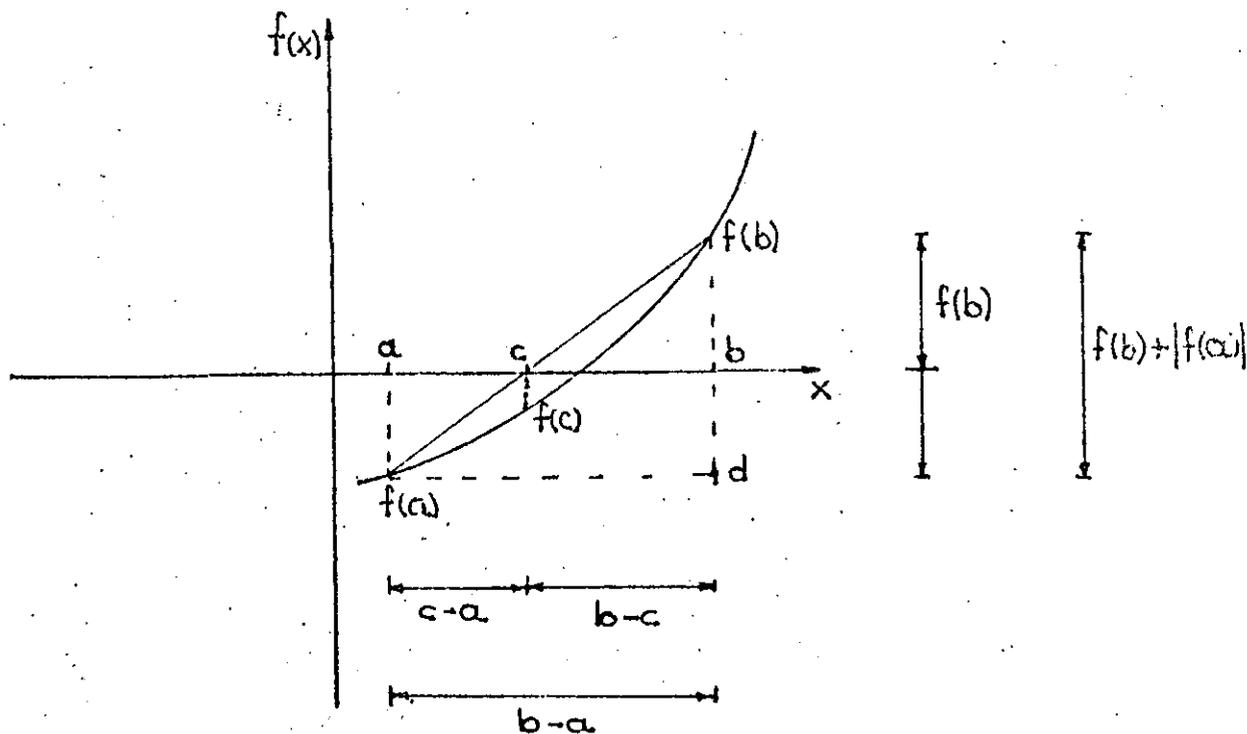


Figura 6.- Geometría de una función para el método de falsa posición

en c , b y $f(b)$. Estos triángulos son semejantes, de manera que se puede plantear la relación:

$$\frac{\delta(b)}{b-c} = \frac{\delta(b) - \delta(a)}{b-a} \quad (9)$$

y despejando el valor de c , se obtiene:

$$c = b - \frac{\delta(b) \cdot (b-a)}{\delta(b) - \delta(a)} \quad (10)$$

Calculado c , se aproxima a la raíz por un procedimiento iterativo similar al del método de bisección; es decir cerrando el intervalo de búsqueda paulatinamente; cuidando de conservar la condición de que $\delta(a)\delta(b) < 0$.

Si $\delta(c)$ es negativa, entonces a se iguala a c ; en caso contrario es b la que adopta el valor de c .

En el caso en que la curva fuera decreciente, es decir que $\delta(a)$ fuera positiva, entonces la ecuación del método es la siguiente:

$$c = a + \frac{\delta(a)(b-a)}{\delta(a) - \delta(b)} \quad (10')$$

El algoritmo del método sería el siguiente:

ALGORITMO METODO DE FALSA POSICION

1. Localice dos valores de X ; que se denominarán a y b , localice tales que $\delta(a) \delta(b) < 0$.

Defina una tolerancia T

2. Calcule $\delta(a)$ y $\delta(b)$

3. Calcule c :

Si $\delta(a) < 0$ con la ecuación 10

Si $\delta(a) > 0$ con la ecuación 10'

4. Calcular $\delta(c)$

5. Si $|\delta(c)| < T$ vaya al paso 9
 Si $|\delta(c)| > T$ continúe

6. Si $\delta(c) < 0$ haga alguna de las siguientes operaciones:

Haga $a = c$ si $\delta(a) < 0$

Haga $b = c$ si $\delta(a) > 0$

y vaya a paso 8

7. Si $\delta(c) > 0$ haga alguna de las siguientes operaciones:

Haga $b = c$ si $\delta(a) < 0$

Haga $a = c$ si $\delta(a) > 0$

continúe

8. Regrese a paso 3

9. Algoritmo terminado: la raíz es C.

Para ilustrar la aplicación de este método, se utilizará una vez más el ejemplo del flujo sobre un escalón.

La ecuación a resolver era la número 8:

$$y_2^3 - 0.352y_2^2 + 0.00566 = 0 \quad (8)$$

y los valores iniciales de cálculo serían:

$$a = 0.16 \quad \text{y} \quad b = 0.224$$

En la tabla 2 se resumen los cálculos efectuados.

Iteración	a	b	f(a)	f(b)	c	f(c)
1	0.16	0.224	0.0007448	-0.0007625	0.1916	-0.000229
2	0.16	0.1916	0.0007448	-0.000229	0.1842	-0.0000325

Tabla 2 Aplicación del método de falsa posición

Si se fija una tolerancia de 0.0001, en el segundo cálculo se habrá encontrado la raíz:

$$y_2 = 0.1842$$

En este cálculo se ha utilizado la ecuación 10'.

El algoritmo de falsa posición es también de sencilla programación. En la figura 7 se presenta un diagrama de flujo, y en la 8 el listado correspondiente. Como en el caso del método de bisección, al utilizar la definición de función por el usuario aumenta la generalidad del programa.

Una corrida típica sería como sigue:

```
PROGRAMA METODO DE FALSA POSICION
```

```
*****
```

```
FUNCION EN LINEA 130
```

```
INTERVALO DE BUSQUEDA
```

```
VALOR MINIMO DE BUSQUEDA?
```

```
0.16
```

```
VALOR MAXIMO DE BUSQUEDA?
```

```
0.224
```

```
TOLERANCIA?
```

```
0.0001
```

SE INICIA EL PROCESO

SE ENCONTRO RAIZ

X= 0.184188

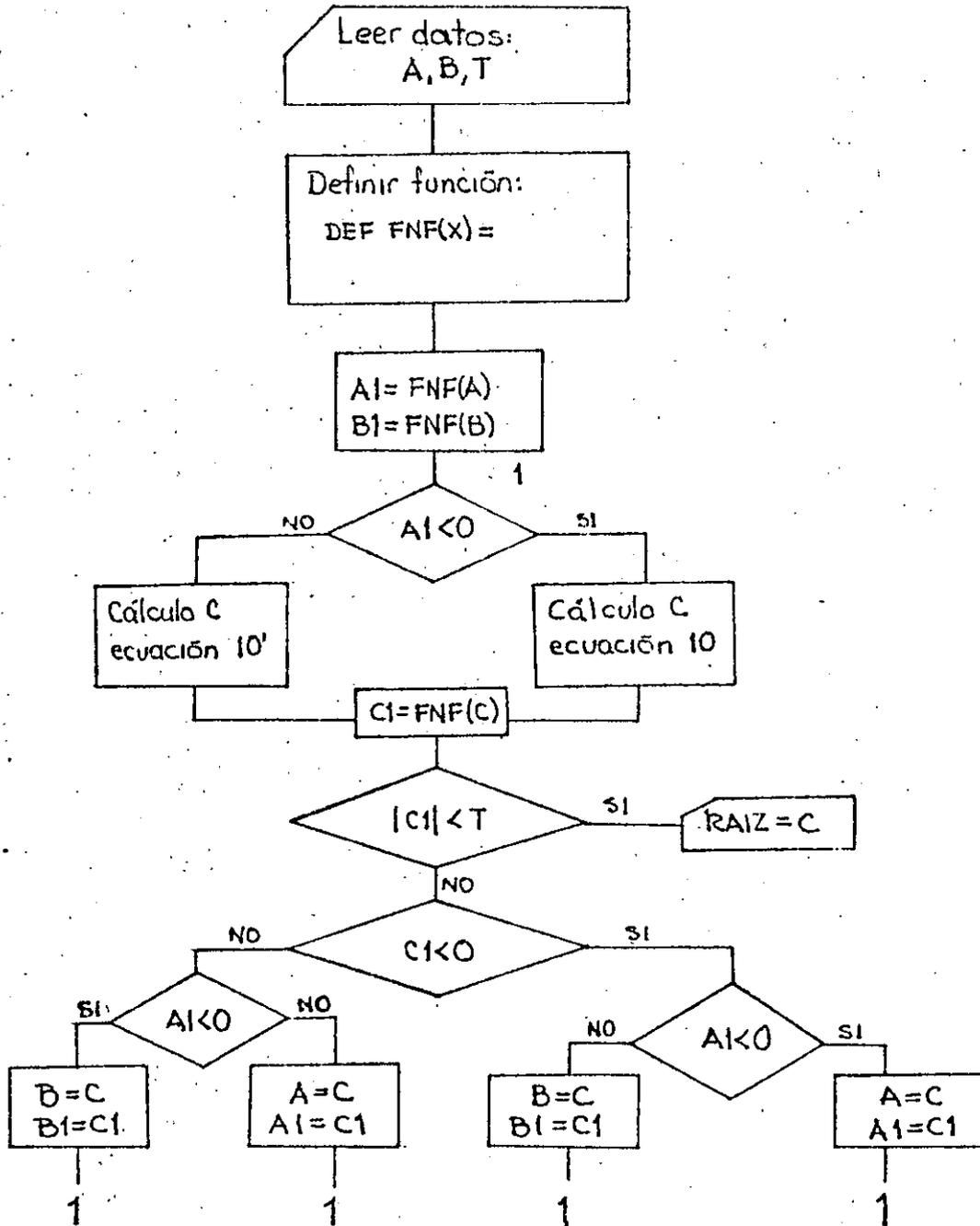


Figura 7 Diagrama de flujo método de falsa posición

```

10 CLEAR @ DISP " PROGRAMA DE F
  ALSA POSICION "
20 DISP " ***** " @ BEEP
30 DISP " FUNCION EN LINEA 130
  "
40 REM SE PIDEN DATOS
50 REM
60 DISP @ DISP "INTERVALO DE BU
  SQUEDA ";@ DISP
70 DISP " VALOR MINIMO DE BUSQU
  EDA ";@ INPUT A
80 DISP " VALOR MAXIMO DE BUSQU
  EDA ";@ INPUT B
90 DISP " TOLERANCIA ";@ INPUT
  T
100 CLEAR
110 DISP " SE INICIA PROCESO " @
  BEEP
120 REM EN LINEA SIGUIENTE SE DE
  FINE FUNCION.
130 DEF FNF(X) = X^3-.352*X^2+.0
  0566
140 A1=FNF(A) @ B1=FNF(B)
150 IF A1<0 THEN C=-(B1*(B-A)/(B
  1-A1)) ELSE C=A+A1*(B-A)/(A1
  -B1)
160 C1=FNF(C)
170 IF ABS(C1)<T THEN GOTO 260
180 IF C1<0 THEN GOTO 220
190 IF A1<0 THEN GOTO 210
200 A=C @ A1=C1 @ GOTO 150
210 B=C @ B1=C1 @ GOTO 150
220 IF A1<0 THEN GOTO 200
230 GOTO 210
240 REM
250 REM SE ESCRIBEN RESULTADOS.
260 CLEAR @ BEEP @ DISP " *****
  ***** "
270 DISP " SE ENCONTRO RAIZ" @ D
  ISP "X=";C
280 DISP "*****"
290 END

```

Figura 8. Listado del programa para método de falsa posición.

El método de falsa posición, al igual que el de bisección, es convergente siempre que se cumpla la condición de que $f(a) f(b) < 0$, y su velocidad de convergencia es del mismo orden.

3.4 METODO DE NEWTON-RAPHSON

Un método muy conocido de solución de ecuaciones en una variable, es el de Newton-Raphson, que utiliza el concepto de derivada.

Considérese una función como se muestra en la figura 9.a; en la que se ha propuesto un valor X_i para la raíz. En términos generales esta primera elección no será la solución, es decir que en X_i la función tendrá un valor $f(X_i)$. En este punto, la derivada, que define la pendiente de la función, valdrá $f'(X_i)$ y esta recta cruzará el eje X en el punto X_{i+1} .

Los vértices X_{i+1} , X_i y $f(X_i)$ forman un triángulo, y la tangente del ángulo α indicado en la figura vale:

$$\tan \alpha = \frac{f(X_i)}{X_i - X_{i+1}} \quad (11)$$

y como $\tan \alpha = f'(X_i)$; se puede escribir:

$$\frac{f(X_i)}{X_i - X_{i+1}} = f'(X_i) \quad (12)$$

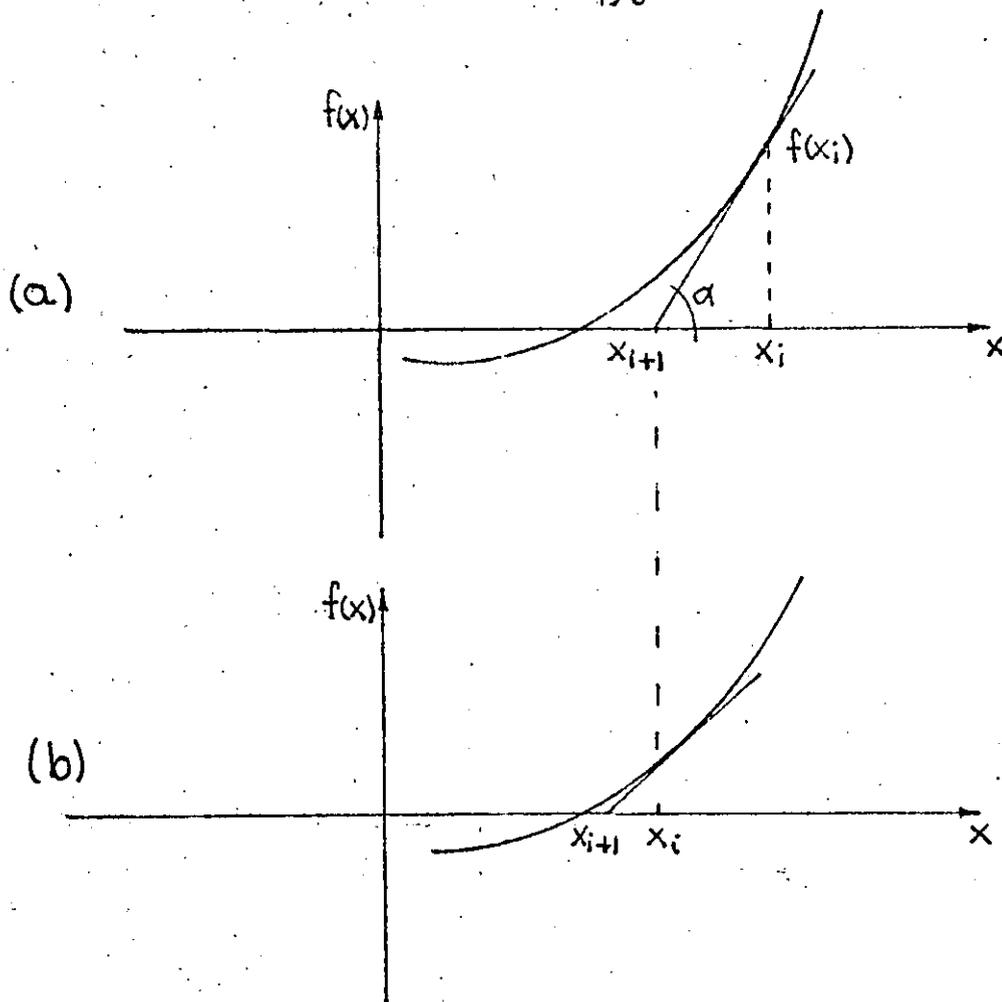


Figura 9 Esquematización de una iteración del método de Newton-Raphson

Despejando a x_{i+1} se obtiene:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (13)$$

Si en la siguiente iteración se sustituye el valor de x_i , por el de x_{i+1} de la anterior, el valor de la función se aproximará más a la raíz, y con un número suficiente de cálculos, se obtendrá la solución, dada una tolerancia.

El algoritmo del método de Newton-Raphson, puesto en forma de diagrama de bloques, se muestra en la figura 10.

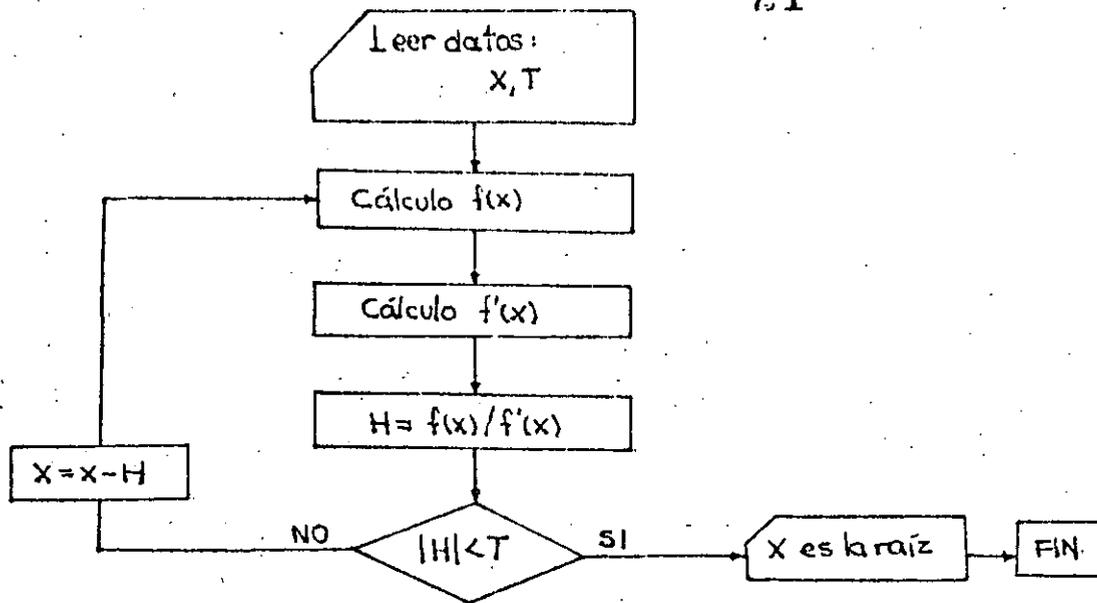


Figura 10.- Diagrama de flujo para el método de Newton-Raphson-

Debe observarse que, contrariamente a los métodos anteriores, solo se requiere un valor inicial para comenzar el cálculo.

Para ilustrar la aplicación de este método, considérese el siguiente problema típico en hidráulica.

PROBLEMA:

Calcular el tirante normal de un canal trapecial, para un gasto $Q = 0.75 \text{ m}^3/\text{s}$, que tiene ancho de plantilla $b = 1.70 \text{ m}$ talud $K = 2$ y pendiente $S_o = 0.001$, y coeficiente de rugosidad $n = 0.10$.

Solución:

De la ecuación de Manning:

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} S_o^{1/2} \quad (14)$$

donde:

R = radio hidráulico

V = velocidad

de la ecuación de continuidad:

$$V = \frac{Q}{A} \quad (15.a)$$

$$y \quad R = \frac{A}{P} \quad (15.b)$$

donde:

A = área hidráulica = $(b + Ky)y$

P = perímetro mojado = $b + 2y \sqrt{1 + K^2}$

Sustituyendo las ecuaciones 15 en las 14 y ordenando:

$$\frac{Qn}{S_o^{1/2}} = \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}}$$

es decir que la función a resolver es:

$$\delta(y) = \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} - \frac{Qn}{S_o^{1/2}} = 0 \quad (16)$$

en la cual A y P son funciones de " y ". Derivando para la aplicación del método de Newton-Raphson:

$$\delta'(y) = A^{5/3} - \left[\frac{2}{3} P^{-5/3} \frac{dP}{dy} \right] + P^{-2/3} \left[\frac{5}{3} A^{2/3} \frac{dA}{dy} \right]$$

y ordenando:

$$\delta'(y) = \frac{A^{2/3}}{P^{2/3}} \left[\frac{5}{3} \frac{dA}{dy} - \frac{2}{3} \frac{A}{P} \frac{dP}{dy} \right] \quad (17)$$

y de las expresiones para área hidráulica y perímetro mojado:

$$\frac{dP}{dy} = 2\sqrt{1 + K^2} \quad (18.a)$$

$$\frac{dA}{dy} = b + 2Ky \quad (18.b)$$

Entonces, la ecuación recursiva del método se puede escribir:

$$y_{i+1} = y_i - \frac{\delta(y)}{\delta'(y)}$$

donde $\delta(y)$ se calcula con la ecuación 17 y $\delta'(y)$ con las ecuaciones 17 y 18.

En la figura 11 se presenta un programa, en lenguaje Basic, para el cálculo del tirante normal con el método de Newton-Raphson. Debe notarse que, por comodidad, en este programa se han definido cuatro funciones; una para el área hidráulica, otra para el perímetro mojado, una más para calcular la función del problema (ec.16), y otra para su derivada (ec. 17).

Ejecutando este programa para los datos del problema se obtendría:

PROGRAMA PARA CALCULO DE TIRANTE NORMAL

METODO DE NEWTON-RAPHSON

GASTO (m³/S)?

0.75

ANCHO DE PLANTILLA (m)?

1.70

TALUD?

2

```

10 CLEAR @ DISP "PROGRAMA CALCULO
DE TIRANTE NORMAL"
20 DISP @ DISP "METODO DE NEWTON
RAPHSON"
30 DISP "*****"
40 REM -ENTRADA DE DATOS-
50 DISP "GASTO(M^3/S)";@ INPUT
Q
60 DISP "ANCHO DE PLANTILLA(M)"
;@ INPUT B
70 DISP "TALUD";@ INPUT K
80 DISP "COEFICIENTE DE MANNING
";@ INPUT N
90 DISP "PROPONGA UN TIRANTE(M)
";@ INPUT Y0
100 DISP " PENDIENTE DEL CANAL";
@ INPUT S
110 DISP "TOLERANCIA";@ INPUT T
120 REM SE DEFINEN FUNCIONES A=(
X)=AREA;P(X)=PERIMETRO M.
130 REM F(Y)=FUNCION A RESOLVER
D(Y)=DERIVADA.
140 DEF FNA(X) = (B+K*X)*X
150 DEF FNP(X) = B+2*X*SQR(1+K^2
)
160 DEF FNF(Y) = (FNA(Y)^5/FNP(Y
)^2)^(1/3)-Q*N/SQR(S)
170 DEF FND(Y) = (FNA(Y)/FNP(Y))
^(2/3)*(5/3*(B+2*K*Y)+2/3*(F
NA(Y)/FNP(Y))*2*SQR(1+K^2))
180 REM SE INICIA ALGORITMO DE N
EWTON-RAPHSON
190 H=FNF(Y0)/FND(Y0)
200 IF ABS(H)<T THEN GOTO 240
210 Y0=Y0-H
220 GOTO 190
230 REM SE ENCONTRO LA RAIZ; SE
INFORMA AL USUARIO
240 CLEAR @ BEEP @ DISP "*****
*****"
250 DISP "TIRANTE NORMAL (M)" @
DISP "Y=";Y0 @ DISP "*****
*****"
260 END

```

Figura 11.- Programa para el cálculo de tirante normal de un canal trapecial, método de Newton-Raphson

COEFICIENTE DE MANNING?

0.10

PROPONGA UN TIRANTE (m)?

0.45

PENDIENTE DEL CANAL?

0.001

TOLERANCIA?

0.000001

TIRANTE NORMAL (m)

Y = 0.9513742

El método de Newton-Raphson es mucho más rápido que los métodos de bisección y falsa posición; sin embargo no siempre es convergente.

El método de Newton-Raphson es convergente si se cumple que:

$$\frac{|\delta(X) \delta''(X)|}{(\delta'(X))^2} < 1 \quad (19)$$

Recomendaciones de tipo cualitativo serían que, si se elige un valor X_0 como punto inicial, se debe cumplir que:

- a) X_0 debe ser suficientemente cercano a la raíz
- b) $\delta''(X_0)$ no debe ser muy grande
- c) $\delta'(X_0)$ no muy próximo a cero

El método de la secante es una variante del método de Newton-Raphson, útil para casos en los que la derivada de la función, cuya raíz se busca, es complicada.

En la figura 12 se presenta la gráfica de una función $f(X)$, a la que se desea calcular la raíz. Se han elegido dos valores X_1 y X_2 ; a los que corresponden valores de la función $f(X_1)$ y $f(X_2)$.

Los valores de X_1 y X_2 no tienen la restricción de que $f(X_1) f(X_2) < 0$.

El arco que une $f(X_1)$ y $f(X_2)$ corta el eje X en un valor X_3 y, como se observa en la figura; se pueden formar dos triángulos semejantes con vértices en X_3 , X_2 , $f(X_2)$ y $f(X_1)$, c, $f(X_2)$. Entonces se puede plantear la relación:

$$\frac{f(X_2) - f(X_1)}{X_2 - X_1} = \frac{f(X_2)}{X_2 - X_3}$$

y despejando X_3 :

$$X_3 = X_2 - \frac{f(X_2)}{f(X_2) - f(X_1)} (X_2 - X_1) \quad (20)$$

Si el valor de X_3 no se aproxima suficientemente a la raíz, se sustituye en X_2 , y se repite el cálculo. Con este procedimiento X_3 se aproximará gradualmente a la solución.

En la figura 13 se presenta un diagrama de bloques del método de la secante. Para ejemplificar su aplicación, considérese un problema de interés en hidráulica: el cálculo del tirante crítico en un canal trapecial.

El tirante crítico se presenta cuando el número de Froude es igual a la unidad, condición que puede escribirse como:

$$\frac{0^2}{9 \cdot 7} = 1$$

(21)

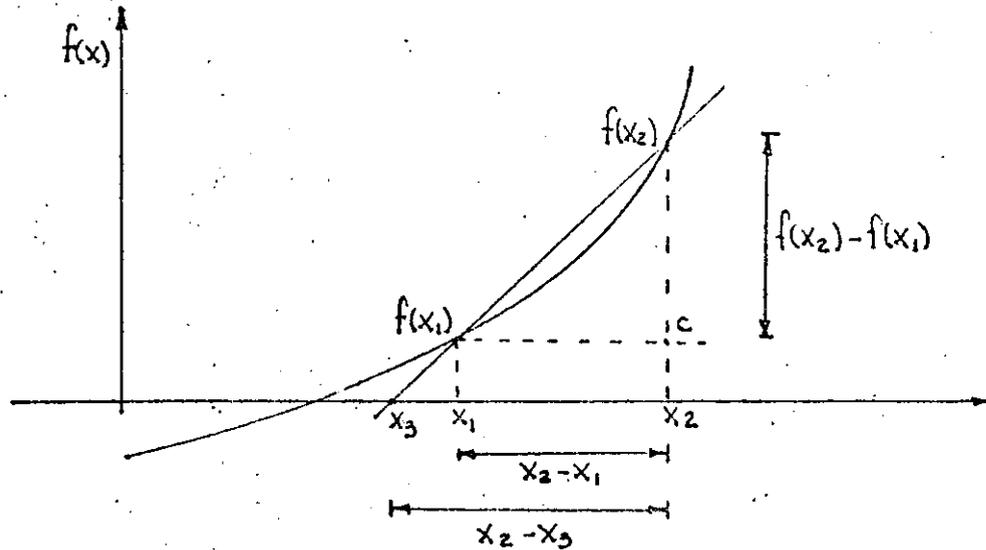


Figura 12.- Esquematzación para el método de la secante

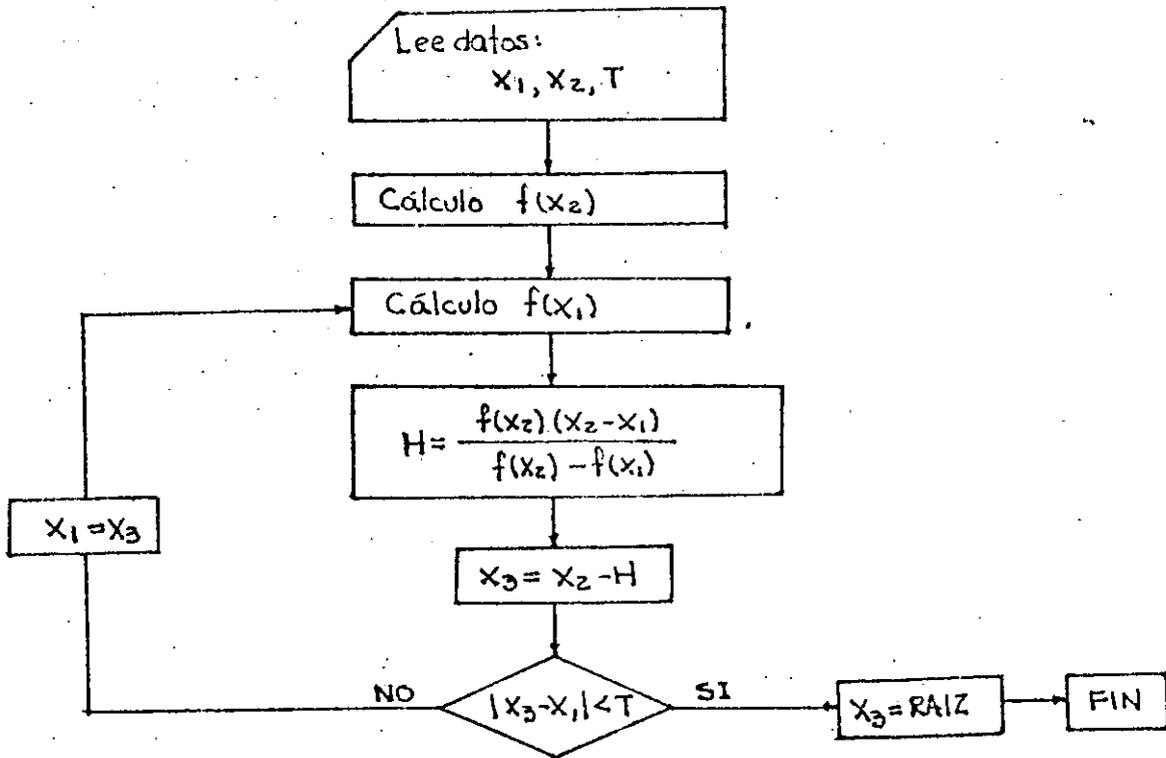


Figura 13.- Diagrama de bloques método de la secante

donde T es el ancho de la superficie libre, que para un canal trapecial está determinada por la ecuación:

$$T = b + 2Ky \quad (22)$$

La ecuación 21 se puede escribir:

$$\frac{A^3}{T} - \frac{Q^2}{g} = 0$$

y sustituyendo las expresiones de A y T :

$$f(y) = \frac{[(b + Ky)y]^3}{b + 2Ky} - \frac{Q^2}{g} = 0 \quad (23)$$

Esta ecuación es la que debe resolverse para encontrar el tirante crítico.

En la figura 14 se presenta un programa para la solución de este problema con el método de la secante.

Utilizando los mismos datos que en el ejemplo de cálculo del tirante normal, la ejecución de este programa sería como sigue:

PROGRAMA CALCULO DE TIRANTE CRITICO
METODO DE LA SECANTE

GASTO (m³/S)?

0.75

ANCHO DE PLANTILLA (m)?

1.70

```

10 CLEAR @ DISP "PROGRAMA CALCULO DE TIRANTE CRITICO"
20 DISP "METODO DE LA SECANTE"
  @ DISP "*****"
30 DISP @ DISP "GASTO(M^3/S)"; @
  INPUT Q
40 DISP "ANCHO DE PLANTILLA(M)"
  ; @ INPUT B
50 DISP "TALUD"; @ INPUT K
60 DISP "PROGRAMA DOS TIRANTES
  Y1,Y2(M)"; @ INPUT Y1,Y2
70 DISP " TOLERANCIA"; @ INPUT T
80 DEF FNF(X) = ((B+K*X)*X)^3/(
  B+2*K*X)-Q^2/9.81
90 F2=FNF(Y2)
100 F1=FNF(Y1)
110 H=F2*(Y2-Y1)/(F2-F1)
120 Y3=Y2-H
130 IF ABS(Y3-Y1)<T THEN GOTO 15
  @
140 Y1=Y3 @ GOTO 100
150 CLEAR @ BEEP @ DISP "*****
  *****"
160 DISP "TIRANTE CRITICO" @ DIS
  P "Y=";Y3
170 DISP "*****" @ BEEP
180 END

```

Figura 14.- Programa para cálculo de tirante crítico, método de la secante

TALUD?

2

PROPONGA DOS TIRANTES Y1, Y2(m)?

0.20, 0.40

TOLERANCIA?

0.0001

TIRANTE CRITICO

Y = 0.2445

Las características del método de la secante son similares a las del método de Newton-Raphson; aunque tiene una velocidad de convergencia ligeramente menor.

Existen otros métodos de solución de ecuaciones algebraicas que pueden encontrarse en textos generales de métodos numéricos .



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

CURSO: INTRODUCCION A LOS METODOS NUMERICOS APLICADOS A LA INGENIERIA
HIDRAULICA DIRIGIDO AL PERSONAL PROFESIONAL DE LA SARH DEL 26 AL 30
DE NOVIEMBRE DE 1984 EN MEXICO, D.F.

CONCEPTOS BASICOS DE PROGRAMACION

M. EN I. OSCAR FUENTES MARILES
M. EN I. POLIOPTRO MARTINEZ AUSTRIA
NOVIEMBRE DE 1984.



El campo de los métodos numéricos es sumamente amplio. Aquí se abordarán los de solución de ecuaciones algebraicas en una variable, sistemas de ecuaciones, ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales parciales.

Los métodos numéricos considerados se aplican a una amplia gama de problemas. Sin embargo, debido a que este trabajo está particularmente dedicado a los ingenieros especialistas en hidráulica, los ejemplos de aplicación corresponden a problemas de esta disciplina.

A continuación se presenta un breve resumen del lenguaje utilizado en la programación de microcomputadores.

2. CONCEPTOS BASICOS DE PROGRAMACION

De entre los varios lenguajes de programación actualmente existentes, algunos de ellos son especialmente útiles para aplicaciones en ingeniería. Destacan las varias versiones de FORTRAN, el PASCAL y el BASIC. Este último es, con ligeras variaciones, el normalmente disponible en los microcomputadores.

De acuerdo a lo anterior, en lo que sigue se presentará un breve resumen de las instrucciones principales del BASIC utilizado en una microcomputadora disponible en nuestro país; la Hewlett-Packard. Previamente se presentarán algunos conceptos sobre diagramas de flujo.

2.2 Diagrama de Flujo

Un programa de computadora supone la ejecución de una secuencia lógica de instrucciones. Excepto en programas muy sencillos, normalmente es necesario (y recomendable) plantear este proceso en términos generales

en forma diagramática, antes de escribir el texto (codificación) del propio programa.

Un primer tipo de diagrama, en el que se enfoca el problema en su forma más general, es el "Diagrama de bloques".

En un diagrama de bloques se dibujan cuadros que, en forma secuencial, describan el funcionamiento del programa. En el interior de estos cuadros se refiere la operación a ejecutar por la computadora.

Por ejemplo, supóngase que se desea hacer un programa para ajustar un conjunto de datos a una recta, por el método de mínimos cuadrados. Un diagrama de bloques podría ser como se indica en la figura 1. Como puede observarse, no se presenta en detalle ninguna de las instrucciones del programa, sino que cada bloque representa más bien una sección de éste, que después puede estar constituida por varias instrucciones.

Luego de haber realizado el diagrama de bloques se procede a hacer un diagrama más pormenorizado de la secuencia de operación del programa; propiamente dicho, se representa el "flujo" completo del programa; por lo que se les llama "diagramas de flujo".

En un diagrama de flujo deben establecerse con claridad, e individualmente, las instrucciones a seguir por la computadora. Para lograr una buena representación, en lugar de usar solamente rectángulos como en los diagramas de flujo, se usan además otras figuras geométricas. En la figura 2 se muestran las más usuales.

En un diagrama de flujo, las instrucciones se unen por medio de flechas, que indican el proceso de ejecu-

ción del programa.

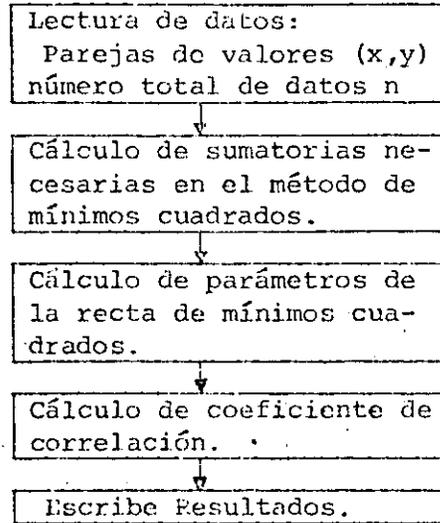
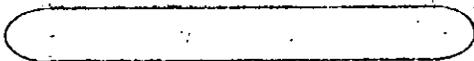


Figura 1.- Ejemplo de diagrama de bloques. Ajuste de una recta de mínimos cuadrados.



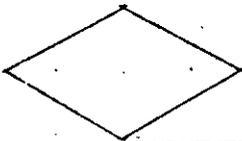
Principio o final del programa



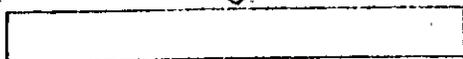
Inicio de una proposición de iteración (FOR).



Lectura o impresión.



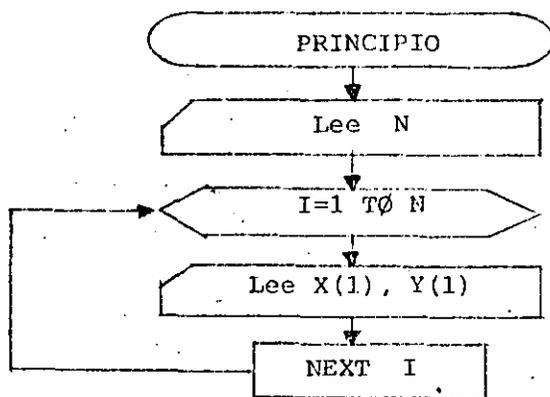
Proposición IF



Otros comandos, operaciones, etc.

Figura 2.- Símbolos principales en un diagrama de flujo.

En la figura 3 se presenta, a modo de ejemplo, el diagrama de flujo que se utilizaría para leer los datos del ejemplo de la figura 1.



continúa el programa

Figura 3.- Diagrama de flujo para la lectura de N valores de una pareja de vectores X_i , Y_i .

El paso siguiente en la elaboración del programa sería la codificación del mismo. Sin embargo, antes de escribir un programa completo, será necesario hacer un breve resumen de los conceptos fundamentales del lenguaje BASIC.

2.2 Variables y proposiciones de asignación aritmética.

En los distintos lenguajes, se pueden encontrar diversos tipos de variables: variables, variables enteras, variables con subíndice y otras. En BASIC, normalmente se consideran solamente variables (a secas, sin distinguir entre enteras y reales) y variables con subíndice.

Los nombres de una variable siempre empiezan con una letra, aunque lo que siga depende de la microcomputadora

en cuestión. La HP 85-A, por ejemplo; solo admite nombres de variables formados por una letra y un número: A1 sería un nombre aceptable; AA sería un nombre inaceptable.

En otras microcomputadoras (como Timex Sinclair), el único requisito es que el nombre de la variable comience con una letra, pudiendo tener cualquier longitud.

Las variables sirven para hacer operaciones entre ellas, de manera que es indispensable hacer proposiciones de asignación aritmética, de la manera común; por ejemplo:

$$a = b + c$$

donde a, b y c son variables. En algunas microcomputadoras (Hewlett-Packard, Apple, etc.) bastará escribir, equivalentemente:

$$A = B + C$$

Sin embargo en otras será necesario escribir antes la instrucción LET; como sigue:

$$\text{LET } A = B + C$$

En ambos casos, la microcomputadora interpreta el signo de igualdad como una instrucción de asignación; esto es asignando el valor de los términos a la derecha a la variable a la izquierda; pero nunca a la inversa. Por esta razón una proposición del tipo

$$B + C = A$$

que en álgebra sería equivalente, es inaceptable en BASIC.

Las variables con subíndice, representan en BASIC a los elementos de vectores, matrices o tensores en álgebra. Se trata solamente de encerrar entre paréntesis el, o los, subíndices que representan cada elemento.

Por ejemplo el noveno elemento de un vector x (X9),

puede escribirse en lenguaje BASIC como $X(9)$. El i -ésimo elemento de un vector X (X_i), se escribiría $X(I)$.

Similarmente, el elemento en la i -ésima columna y el i -ésimo renglón de una matriz, A (a_{ij}), podría representarse por $A(I,J)$.

Algunas microcomputadoras (como HP85-A) solamente admiten variables con dos subíndices, mientras que otras (Timex-Sinclair) admiten un número mayor de subíndices.

Debe quedar claro que en la microcomputadora $A(I,J)$ se interpreta como el elemento a_{ij} de la matriz; como una constante; y no como la matriz misma. De esta manera, la operación:

$$A(I,J) = B(I,J) * C(I,J)$$

no significa que la matriz A sea el producto de dos matrices B y C ; sino específicamente que, dados los valores de I e J , el elemento $A(I,J)$ de la matriz A , es igual al producto del elemento $B(I,J)$ de la matriz B , por el elemento $C(I,J)$ de otra matriz C .

En esta forma, las operaciones entre variables con subíndice se rigen por las reglas de álgebra de números reales; y es posible escribir proposiciones de asignación aritmética como las siguientes:

$$A = B(I,J) + C$$

$$A(I,J) = C + D$$

$$A(3,2) = C(2,5) + D(1)$$

que no podrían interpretarse en términos de cálculo matricial.

Cada asignación de variable requiere de una asignación en la memoria de la microcomputadora. Cuando se trata de una

proposición de una variable sin subíndice, como:

$$A = B + C$$

o

$$A = 3.1416$$

La microcomputadora automáticamente asigna un lugar en su memoria a esta variable, localizando en este el valor que esta adopte (por ejemplo 3.1416).

Sin embargo, cuando se trata de una variable con subíndice, será necesario informar previamente a la microcomputadora cuantos espacios debe asignar en su memoria a cada variable de este tipo. Para lograr esto se usa la proposición DIM. Por ejemplo:

$$\text{DIM } A(10), B(5,5)$$

significa que en el programa se usará un vector con cuando más 10 elementos; y una matriz B con 5 columnas y 5 renglones (25 elementos).

La proposición DIM debe colocarse en el texto del programa antes de que se use cualquiera de las variables con subíndice incluidas, y toda variable con subíndice debe estar incluida en alguna proposición DIM.

A este proceso se le suele llamar "dimensionamiento de variables".

2.3 Operaciones y funciones.

En BASIC se pueden realizar las operaciones aritméticas básicas, utilizando los siguientes símbolos:

- + suma
- resta
- * multiplicación
- / división
- ^ exponenciación

Además se usan los paréntesis, en la misma forma que en la notación aritmética ordinaria. Por ejemplo la expresión algebraica:

$$a = b + \frac{c}{d} + (d+e)^3$$

se escribiría en BASIC:

$$A = B + C/D + (D+E)^3$$

En la escritura de expresiones algebraicas debe cuidarse especialmente el orden en que la microcomputadora realiza las operaciones. Esta jerarquización puede cambiar ligeramente de una a otra marca.

Para la HP85-A el orden de ejecución de las operaciones es el siguiente:

- ^ exponenciación
- *,/ multiplicación o división
- +,- suma o resta

Si se encuentran dos o más símbolos de igual jerarquía, el orden de ejecución es de izquierda a derecha.

Si hay operaciones entre paréntesis, se efectuarán primero éstas, con la prioridad antes citada.

De acuerdo con lo anterior, la operación:

$$x = \frac{(a+b)c}{a+b^3}$$

debe escribirse:

$$X = ((A+B)*C)/(A+B^3)$$

Existe un grupo de funciones definidas en la microcomputadora, tales como el seno, coseno, raíz cuadrada, o logarit

mo de una variable. La simbología utilizada es la siguiente (para HP85-A):

ABS(X)	valor absoluto de x
ACS(X)	arcoseno de x.
ATN(X)	arcotangente de x
COS(X)	coseno de x
COT(X)	cotangente de x
CSC(X)	cosecante de x
EXP(X)	e^x
IP(X)	parte entera de x
LGT(X)	logaritmo de base x
LOG(X)	logaritmo natural de x
PI	3.1416
RND	produce un número pseudoaleatorio entre 0 y 1
SEC(X)	secante
SIN(X)	seno
SQR(X)	raíz cuadrada
TAN(X)	tangente

También se dispone de otras funciones más complejas, que no pueden discutirse en detalle aquí. Sin embargo, entre estas existe una muy importante: la función definida por el usuario.

En determinadas ocasiones se requiere repetir varias veces una operación en el transcurso de un programa. Para evitar el transcribirla continuamente, puede definirse por el usuario, de manera que funcionará exactamente como las definidas en el propio sistema (como el seno o coseno por ejemplo).

Supóngase que se requiere repetir varias veces la opera

ción:

$$y = \text{sen}(x) + 2 \text{cos}(x)$$

solo que cambiando el argumento x de las funciones seno y coseno por, supongamos por caso, otras variables a y b .

En primer término se define la nueva función de la siguiente manera:

$$\text{DEF FNF}(X) = \text{SIN}(X)+2* \text{COS}(X)$$

entonces, en cualquier parte del programa bastará escribir:

$$y = \text{FNF}(A)$$

para calcular esa función con argumento A en lugar de x ; y asignar el valor resultante a Y . Obviamente el argumento puede ser cualquiera, y asignarse a cualquier variable; siempre y cuando no se violen las reglas usuales de operación.

2.4 Lectura e impresión

Dentro del conjunto de instrucciones BASIC, son fundamentales las que permiten la introducción de datos (lectura) y las de extracción (impresión) de resultados o datos de la microcomputadora.

Para introducir datos a la microcomputadora, se usan en BASIC las instrucciones INPUT y READ.

La instrucción INPUT tiene la forma general:

INPUT n_1, n_2, \dots, n_i

donde las n_1, n_2, \dots, n_i son nombres de variables, con subíndice

dice o no.

Cuando en el transcurso de un programa se encuentra una instrucción INPUT, la ejecución se detiene en espera de los valores que se asignarán a las variables incluidas en la instrucción; los cuales serán "tecleados" en el orden especificado en la misma instrucción.

Para leer un arreglo completo de datos, es decir los valores asignados a una variable con subíndice es conveniente utilizar proposiciones de iteración FOR; que cambien automáticamente el valor del subíndice; tal como se indicó en el diagrama de flujo de la figura 3. La codificación de este ejemplo sería como sigue:

```

10 REM CODIFICACION PARA LECTURA DE DOS ARREGLOS
    X(I), Y(I)
20 DIM X(20), Y(20)
30 INPUT N
40 FOR I= 1 TO N
50 INPUT X(I), Y(I)
60 NEXT I

```

En este programa, la instrucción REM no es ejecutable, es decir que la computadora la pasa por alto. Esta instrucción se usa para insertar comentarios en el listado de un programa.

En la línea 20, de acuerdo a lo dicho en el subcapítulo anterior, se dimensionan los arreglos X e Y, y en este caso se les asigna un máximo de 20 elementos a cada uno.

En la línea 30 se pide el valor de la variable N, que es el número de elementos que tendrá cada arreglo (máximo 20).

La línea 40 establece una iteración que repetirá lo pedido en la 50, N veces. En la línea 50 se pide un par de datos, X(I) e Y(I). A cada iteración se introducirá entonces una pareja de valores X(1), Y(1); X(2), Y(2); X(3);; X(N), Y(N)

La otra instrucción utilizada para entrada de datos es READ. En esta instrucción no se detiene la ejecución del programa para teclear valores; sino que éstos se localizan dentro del propio programa en una instrucción DATA. Comparativamente, se puede decir que la instrucción READ busca los valores solicitados en "tarjetas"; cuyo papel lo desempeñan las instrucciones DATA.

La proposición READ tiene la estructura:

READ n_1, n_2, \dots, n_j

donde:

n_1, n_2, \dots, n_j son variables.

La instrucción READ debe ir acompañada de la instrucción DATA:

DATA x_1, x_2, \dots, x_j

donde x_1, x_2, \dots, x_j son los valores que adoptarán las n_1, n_2, \dots, n_j variables en READ; en el mismo orden.

Para la extracción-impresión- de resultados, se usan las proposiciones DISP y PRINT (en HP85-A). Su efecto y modo de operación es el mismo, excepto que la primera activa la pantalla (Display) y la segunda la impresora de papel térmico. En otras microcomputadoras (como Timex-Sinclair) las proposiciones equivalentes son PRINT y LPRINT.

La estructura de una proposición DISP (o PRINT) es como sigue:

DISP $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

donde a_1, a_2, \dots, a_n son variables.

El efecto de esta proposición será que se presenten en pantalla (o impriman si se usa PRINT), los valores de las variables a_i .

Las variables también pueden separarse con punto y coma:

DISP $a_1; a_2; \dots; a_n$

El efecto será que se presentarán en pantalla menos dígitos, pero cabrán mas valores de variables en una sola línea.

El resultado de la proposición DISP será una secuencia de valores; tantos como variables se mencionen en ella. Usada de esta forma, es una escritura "libre", sin formatos.

La proposición DISP (o PRINT), también puede usarse para escribir textos. En este caso su estructura será:

DISP "Texto del letrero. Cualquier combinación de caracteres (menos comillas)"

En algunas circunstancias, es conveniente utilizar algún formato en la escritura. En estas condiciones la estructura de la proposición DISP (o PRINT) será:

DISP USING número de línea en que se describe formato;
variables o textos

Este comando debe ir acompañado de la instrucción IMAGE, donde se incluye el formato.

#línea IMAGE formato

Para generar formatos se usan los siguientes símbolos principales:

- , -se usa para separar especificaciones
- / -se usa para saltar renglones
- " " -se usan para escribir directamente caracteres
- x -se usa para especificar espacios en blanco

Existen otros especificadores para escritura de palabras y números, pero son de uso menor.

Ejemplo:

```
10 DISP USING 100; A,B
100 IMAGE "**", 20X, "**"; 2/. "VARIABLE A:";A,/,
   "VARIABLE B:";B
```

Si se supone $A = 3.1416$ y $B = 9.81$; el resultado de la ejecución de estas líneas será:

```
**
VARIABLE A:      3.1416
VARIABLE B:      9.81
**
```

2.5 Proposiciones iterativas

En el transcurso de un programa, con frecuencia es necesario repetir varias veces una serie de comandos. Para lograr esto sin escribirlas repetidamente, se usa la proposición de iteración FOR...NEXT.

Una proposición de este tipo inicia con un comando FOR, que tiene la siguiente estructura:

```
FOR I = 1 TO N
```

y se cierra el ciclo con:

```
NEXT I
```

El efecto de un ciclo FOR-NEXT será repetir N veces los comandos incluidos entre el FOR y el NEXT; variando el valor de la variable I a cada iteración; así I adopta sucesivamente los valores 1, 2, 3, ..., N.

Como ejemplo, supóngase que se desea efectuar la siguiente sumatoria:

$$F = \sum_{j=1}^N a_j$$

supóngase que en una etapa anterior del programa se han leído o calculado los valores de las a_j variables, y en el programa se encuentran en un arreglo A(I).

En estas condiciones, la sumatoria podría efectuarse sencillamente con el siguiente "FOR...NEXT":

```
40 F = 0
50 FOR J=1 TO N
60 F = F + A(J)
70 NEXT J
```

La proposición 60, repetida N veces en el FOR, irá sumando al valor de F la variable A(1), A(2), ..., A(N). Debe notarse que, dado que se requiere el valor de F desde la primera iteración; este se ha asumido cero antes del "FOR". Se ha

colocado fuera porque de otra manera se le asignaría otra vez cero en cada iteración, y no se lograría la acumulación de valores deseada.

Si se desea, se puede hacer avanzar en un FOR el valor de J (o la variable cualquiera usada en su lugar) a más de una unidad por iteración. Esto se logra escribiendo la proposición como sigue:

```
FOR K = 1 TO N STEP M
```

Al especificar STEP M, la computadora incrementará el valor de K en M unidades en cada iteración.

También es importante resaltar que puede ponerse un ciclo FOR...NEXT, dentro de otro; como se indica esquemáticamente en la siguiente figura; donde las líneas punteadas representan instrucciones cualquiera.

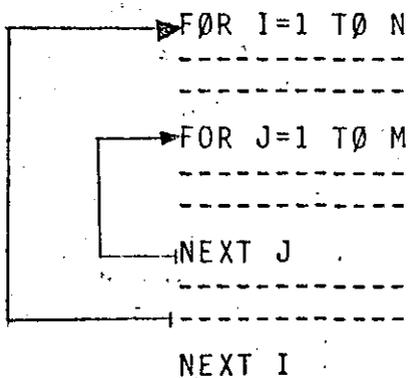


Figura 4.- Ciclos FOR--NEXT "anidados".

A este tipo de configuración se le denomina "FOR anidado". Su modo de operación es el siguiente: Se inicia un ciclo del primer FOR (I=1); al llegar al segundo FOR se ejecu

tan las instrucciones posteriores, y se inicia el segundo ciclo ($I=2$) del FØR externo; en el cual se volverá a ejecutar por completo el FØR interno; y así hasta terminar (N veces) la ejecución del FØR externo.

Para ejemplificar esta forma de operación considérese el caso en que se desea introducir los valores de una matriz A con n columnas y m renglones. En la microcomputadora se colocarán en una variable con doble subíndice $A(I,J)$.

Contrariamente al caso ejemplificado en páginas anteriores, en que se leían vectores $(X(I), Y(I))$; ahora es necesario variar no uno, sino dos subíndices. Es la situación ideal para ciclos FØR...NEXT anidados.

Si se escribe el pequeño programa indicado a continuación, se logrará lo deseado.

```

10 DIM A(30,30)
20 FØR I=1 TØ N
30 FØR J=1 TØ M
40 INPUT A(I,J)
50 NEXT J
60 NEXT I

```

Durante la ejecución del FØR externo se mantiene fijo el número I ; es decir el renglón de la matriz, mientras se varía por completo el número J , que corresponde al número de columna. De esta forma se introducen todos los valores de la matriz, renglón por renglón.

Una precaución importante en el uso de ciclos FØR-NEXT es no cambiar la dirección de ejecución del programa (no

sacarla del ciclo, como se verá a continuación) antes de que se complete el número de iteraciones. Algunas microcomputadoras admiten este tipo de operación; pero con facilidad puede dar origen a errores lógicos en la ejecución (errores que no puede localizar la máquina, sino el usuario solamente).

2.6 Un ejemplo

Con lo dicho hasta aquí se está en condiciones de elaborar el programa completo del ejemplo con que se inició este capítulo; en el que se pretendía calcular una curva de ajuste de mínimos cuadrados a un grupo de datos. El problema, planteado con más precisión, es el siguiente:

Se tiene un grupo de n datos x e y ; a los que se desea encontrar la recta de ajuste de mínimos cuadrados, que tiene la ecuación:

$$y = b + mx \quad -(1)$$

donde las constantes se calculan como:

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad -(2)$$

$$m = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad -(3)$$

con fines didácticos, se asignarán nombres a las diversas sumatorias:

$$S1 = \sum x_i^2 \quad -(4)$$

$$S2 = \sum y_i \quad -(5)$$

$$S3 = \sum X_i \quad \text{-(6)}$$

$$S4 = \sum X_i Y_i \quad \text{-(7)}$$

y los nombres que asumirán las variables en el programa son los siguientes:

N = n - número de datos.

X(I) = X_i ; $i = 1, 2, \dots, n$

Y(I) = Y_i ; $i = 1, 2, \dots, n$

B = b ; constante de la recta de ajuste

M = m ; constante de la recta de ajuste

En la figura 1 se ha presentado el diagrama de bloques del problema. En la figura 5 se presenta el diagrama de flujo correspondiente.

Este diagrama de flujo se ha realizado con fines didácticos, en realidad podría hacerse más eficiente y obtenerse mayor información (medias, desviaciones estándar, coeficientes de correlación). Se recomienda al lector, como ejercicio, su estudio y mejoramiento.

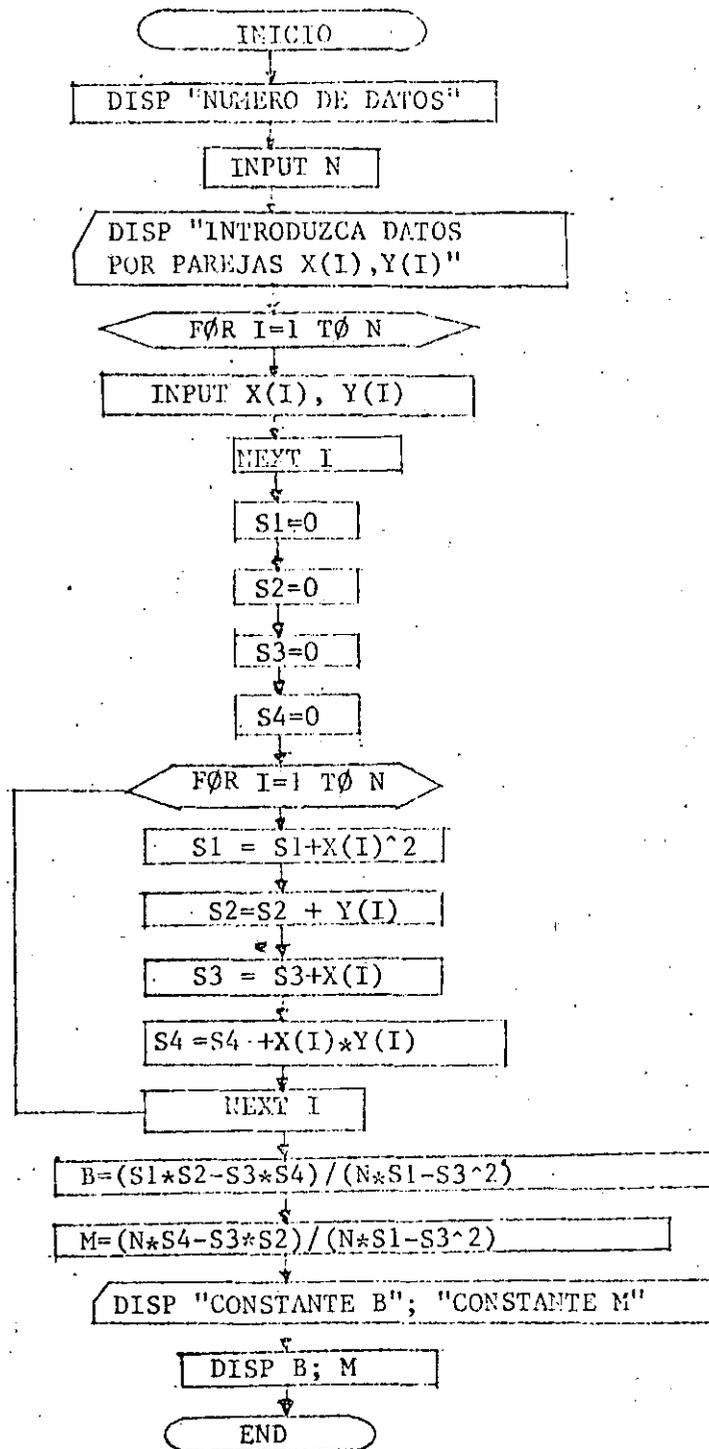


Figura 5. Diagrama de flujo. Cálculo de constantes de una recta de ajuste de mínimos cuadrados.

A continuación se presenta el listado del programa. Se han incluido suficientes comentarios para que sea explícito su modo de operación.

```
5  REM PROGRAMA AJUSTE RECTA DE MINIMOS CUADRADOS
10 REM SE LIMPIA PANTALLA
20 CLEAR
30 REM SE DIMENSIONAN VARIABLES
40 DIM X(50), Y(50)
50 REM SE LEEN DATOS, PRESENTANDO EN PANTALLA TEXTOS.
60 DISP "NUMERO DE DATOS"
70 INPUT N
80 DISP "INTRODUZCA DATOS POR PAREJAS X(I), Y(I)"
90 FOR I=1 TO N
100 INPUT X(I), Y(I)
110 NEXT I
120 REM
130 REM SE ASIGNAN CEROS COMO VALORES INICIALES
140 REM A LAS VARIABLES SUMATORIAS
150 S1 = 0
160 S2 = 0
170 S3 = 0
180 S4 = 0
190 REM
200 REM SE CALCULAN SUMATORIAS
210 REM
220 FOR I=1 TO N
230 S1 = S1 + X(I)^2
240 S2 = S2 + Y(I)
250 S3 = S3 + X(I)
260 S4 = S4 + X(I)*Y(I)
270 NEXT I
280 REM
290 REM SE CALCULAN CONSTANTES RECTA MINIMOS CUADRADOS
```

```

300 REM
310 B = (S1*S2-S3*S4)/(N*S1-S3^2)
320 M = (N*S4-S3*S2)/(N*S1-S3^2)
330 REM
340 REM SE PRESENTAN RESULTADOS
350 REM
360 DISP "CONSTANTE B"; "CONSTANTE M"
370 DISP B; M
380 END

```

Supóngase que se desea calcular una curva de ajuste para los siguientes datos:

<u>i</u>	<u>X</u>	<u>Y</u>
1	3.6	4.7
2	2.8	4.0
3	2.0	3.6
4	1.0	1.5
5	0	0
6	0.25	0.4
7	0.36	0.83
8	2.5	3.8
9	2.1	3.8
10	1.25	2.0

El funcionamiento del programa será como sigue:

Pantalla: NUMERO DE DATOS

?

Teclear: 10

Pantalla: INTRODUCZA DATOS POR PAREJAS X(I), Y(I)

?

Teclear: 3.6, 4.7

?

2.8, 4.0

?

2.0, 3.6
 ?

 ?
 1, 25, 2.0
 Pantalla: CONSTANTE B CONSTANTE M

2.7 Transferencia de control

Con relativa frecuencia en el transcurso de un programa es necesario efectuar transferencias de control, es decir saltar líneas de programa o volver atrás en la secuencia; por ejemplo.

Las principales instrucciones de transferencia de control son GOTO, GOSUB e IF.

El comando más sencillo es GOTO, y su estructura es:

GOTO número de línea

Su efecto es transferir directamente la ejecución del programa al número de línea indicado.

La estructura más simple del comando IF es la siguiente:

IF expresión numérica THEN número de línea o posición ejecutable

El modo de operación de este comando es que, si es verdadera la expresión numérica entre IF y THEN, se ejecuta la segunda parte, localizada después de THEN: se transfiere la ejecución al número de línea indicado; o bien se eje

cuta la proposición escrita.

Si la expresión numérica es falsa, entonces se continúa la ejecución del programa sin cambio alguno.

Ejemplos de proposiciones IF serían:

```
IF A > B THEN 150
IF ABS(A-B) > C THEN C=A
```

El comando IF puede ser complicado, aunque esto depende de la microcomputadora. Para la HP85-A, por ejemplo, se puede escribir:

IF expresión numérica THEN # de línea o proposición ejecutable ELSE # de línea o proposición ejecutable.

el modo de operación es el mismo, excepto que si la expresión numérica es falsa, en lugar de continuar la ejecución del programa en forma secuencial, se efectúa lo indicado después de ELSE.

Un ejemplo de este empleo del IF sería el siguiente:

```
IF A > B THEN 150 ELSE 200
```

En otras microcomputadoras, como Timex Sinclair 2080; se pueden usar proposiciones lógicas para condicionar la ejecución del IF; su estructura es:

IF expresión numérica 1. AND [OR] expresión numérica 2. THEN # línea o proposición.

En el caso de usar AND solo se ejecutará el IF si las expresiones numéricas 1 y 2 son ambas ciertas. Si se usa

OR, se ejecutará si cualquiera de ambas es cierta.

Un ejemplo (Lenguaje en Timex-Sinclair) sería:

```
IF A > B AND C = D THEN LET A = D
```

Nótese que en esta máquina, como se había mencionado antes, se usa LET para proposiciones de asignación aritmética.

En algunas circunstancias se requiere, la ejecución repetida de secciones completas de un programa, solamente que cambiando los valores de algunas variables. Una forma de lograr esto es usando subrutinas.

Una subrutina es de hecho un subprograma, es decir que es una pequeña parte del programa, que se ejecuta cuando se encuentra la instrucción

```
GOSUB número de línea.
```

donde el número de línea será aquel en que se inicie el subprograma.

La diferencia fundamental con una instrucción GOTO, es que en una subrutina, al terminarse de efectuar las instrucciones en él contenidas; cuando se encuentre una instrucción RETURN, el control volverá a la instrucción siguiente a GOSUB en el programa principal.

La estructura de un programa con subrutinas puede ser como se muestra en la figura 6. Las subrutinas, como secciones de un programa o, con más propiedad, como subprogramas, tienen las mismas normas del programa principal, excepto que terminan con el comando RETURN.

En una subrutina se pueden incluir cualquier tipo de instrucciones - lectura, iteración, etc. - pero debe tenerse cuidado con las variables utilizadas, dado que estas son las mismas que en el programa principal.

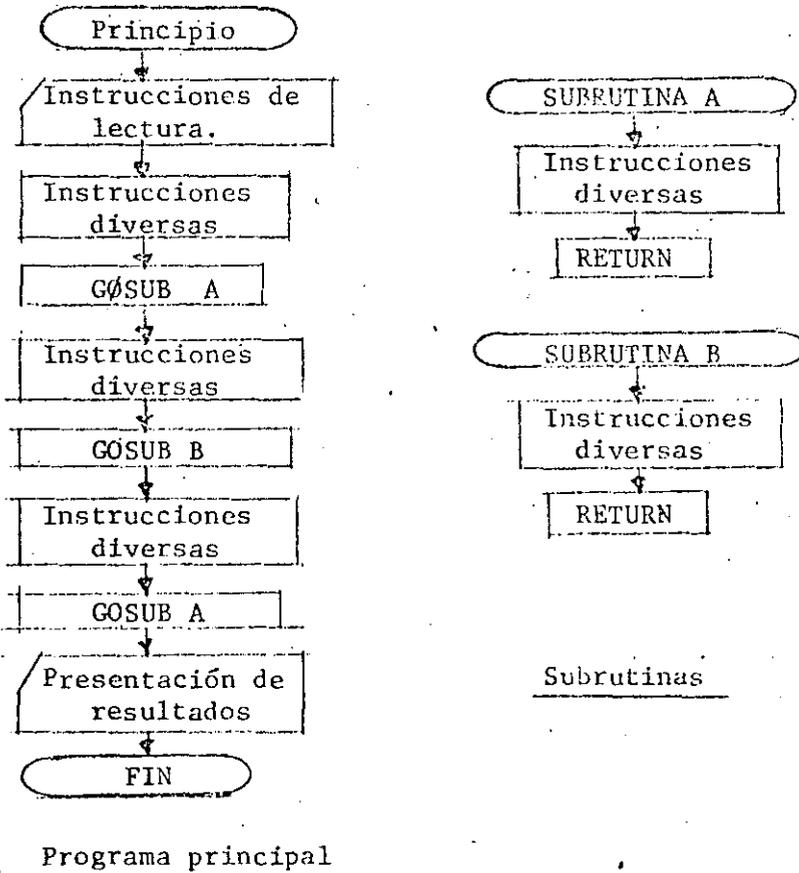


Figura 6. Ejemplo de estructura de un programa con subrutinas.

Las líneas de una subrutina se enumeran secuencialmente como en el programa principal, sin embargo los números de línea deben ser diferentes. De otra manera se confundirán partes del programa principal, siendo sustituidas por subrutinas. Es recomendable, por ejemplo, que si el programa principal ocupa hasta la línea 1000; las líneas de subrutina se enumeren en adelante.

En capítulos posteriores se hará amplio uso de las subrutinas.

2.8 Manejo de archivos

La utilidad de las microcomputadoras estaría muy limitada si no pudieran conservarse y utilizarse con facilidad los programas realizados para ellas; o los archivos de datos que los programas usan y/o generan.

En las microcomputadoras los programas y archivos de datos se graban en cassettes; especiales o comunes según el modelo de cada máquina; o bien en pequeños discos magnéticos, denominados "diskettes".

La HP-85A tiene integrada su propia lectora-grabadora de cassettes, de manera que es sencillo el manejo de archivos. Otras microcomputadoras (como la Timex-Sinclair 2080) operan de manera similar, pero conectadas a grabadoras caseras comunes. Esto tiene ciertas desventajas, sobre todo en calidad de grabación y en la rapidéz de manejo de archivos.

Para leer o grabar programas, en HP85-A se usan las instrucciones LOAD y STORE (en Timex-Sinclair serían LOAD y SAVE).

Una vez que se ha elaborado un programa, y este no tiene errores de sintaxis, se puede grabar en cassette utilizando el comando:

```
STORE "nombre del programa"
```

El nombre del programa deberá contener seis caracteres

máximo (incluidos espacios en blanco).

Cuando se tiene un programa grabado en cassette, y se desea leerlo e introducirlo a la memoria de la computadora para ser usado o corregido, se usa la instrucción:

LOAD "nombre del programa"

Naturalmente, el nombre usado en STORE y LOAD para un programa debe ser el mismo.

En HP85A, cuando se desea borrar un programa grabado en cassette, se usa la instrucción:

PURGE "nombre del programa"

El espacio en la cinta ocupado por el programa quedará disponible para otro programa, con una longitud igual o menor.

Si se desea saber cuales son los programas grabados en un cassette cualquiera, se usa la instrucción.

CAT

y en pantalla se mostrará un catálogo de éstos.

En otras microcomputadoras que usan grabadoras comunes (como Timex Sinclair 2080), es necesario recorrer el cassette completo, y la velocidad es mucho menor.

Aparte de los programas, se pueden grabar y leer archivos de datos, es decir conjuntos de números.

El primer paso para grabar un archivo de datos es

crearlos, para lo cual se usa la instrucción:

```
CREATE "nombre del archivo", número de segmentos de  
cinta, longitud por segmento.
```

El nombre del archivo se emplea de igual manera que en programas. La cinta se considera dividida en segmentos, cada uno de ellos con determinada capacidad de almacenamiento medida en bytes.

Una instrucción típica podría ser como sigue:

```
CREATE "DATOS", 5, 100
```

Esta proposición creará un archivo con nombre DATOS, que tendrá cinco segmentos de cinta con capacidad de 100 bytes cada uno (capacidad total 500 bytes).

Una proposición equivalente sería:

```
CREATE "DATOS", 1, 500
```

Si no se especifica la capacidad de cada segmento, la HP85-A asume que es de 520 bytes.

Por ejemplo la instrucción:

```
CREATE "DATOS", 4
```

crea un archivo de nombre datos con 4 segmentos de cinta de 520 bytes cada uno (2080 bytes en total).

Para tener idea de que capacidad requiere un archivo de datos, en HP85-A cada número consume 8 bytes. Es decir que por cada variable no dimensionada se consumirán 8 by-

tes, y para una variable con subíndice, 8 bytes por el número de elementos dimensionados..

Una matriz cuadrada con 4 elementos consumirá $4 \times 4 \times 8 = 128$ bytes.

Después que se ha creado un archivo de datos, para hacerlo accesible, debe usarse la expresión:

```
ASSIGN # número de 1 a 10 TO "nombre de archivo"
```

Para el ejemplo anterior, se escribiría:

```
ASSIGN # 2 TO "DATOS"
```

con lo que se haría accesible el archivo DATOS; para grabar o leer. Para grabar datos en este archivo, se usa la proposición:

```
PRINT #2 ; variable 1, variable 2,.....
```

donde las variables deben tener valores en la memoria de la computadora; sea calculados o tecleados directamente.

Después de usado el archivo, debe ser cerrado con la proposición:

```
ASSIGN # 2 TO *
```

Un ejemplo de un programa de creación de un archivo de datos podría ser el siguiente:

```
5 REM Se introducen datos a memoria
10 INPUT A, B, C, D
20 REM Se crea archivo
30 CREATE "DATOS", 1, 50
```

```

40 REM Se abre el archivo con número 3
50 ASSIGN #3 TO "DATOS"
60 REM Se graban datos en cassette
70 PRINT #3; A, B, C, D
80 REM Se cierra el archivo
90 ASIGN #3 TO *

```

Es posible grabar un arreglo completo, por ejemplo A(I,J), de una manera muy sencilla; simplemente usando una expresión del tipo:

```
PRINT # número de 1 a 10 ; A(,)
```

Cuando se tiene grabado un grupo de datos y se desea leer su contenido (ponerlo en memoria), se abre el archivo y se usa la instrucción:

```
READ # número de 1 a 10 (con que se abrió el archivo);  
lista de variables.
```

Por ejemplo, para leer los datos del archivo generado en la página anterior, podría usarse el siguiente procedimiento:

```

100 REM Se abre archivo con número 1
120 ASSIGN #1 TO "DATOS"
130 REM Se leen datos
140 READ #1; E, F, F, H
150 REM Se cierra archivo
160 ASSIGN #1 TO *

```

Debe notarse que el número se usó para grabar el programa no debe necesariamente ser el mismo que se usará para leerlo. Asimismo los valores grabados originalmente de

las variables A, B, C y D; son ahora asignados a otras E, F, G, H; es decir se pueden usar otros nombres de variables, sin embargo debe recordarse que los datos serán grabados y leídos en el mismo orden (lectura secuencial).

Existen procedimientos para cambiar el orden de lectura. Se recomienda consultar el manual de la microcomputadora.

El manejo de archivos varía entre las marcas y modelos de microcomputadoras. En la Timex-Sinclair 2080 se graba un archivo de datos sencillamente con la expresión:

```
SAVE "nombre" DATA variable
```

Por ejemplo para grabar un arreglo se usaría:

```
SAVE "DATOS" DATA A()
```

Para leer este mismo archivo se usaría:

```
LOAD "DATOS" DATA A()
```

Con esto, se dan por concluidas estas breves notas sobre programación BASIC. El lenguaje BASIC y en general la operación de las actuales microcomputadoras tiene muchos detalles que solo con una lectura detallada, y puesta en práctica, del manual específico pueden dominarse. En este sentido la enseñanza de este tema es en buena medida un autoaprendizaje. El lenguaje BASIC es, al fin y al cabo, un lenguaje; y solo se "habla" cuando se practica.

En las páginas siguientes, con aplicaciones específicas, se hará amplio uso del BASIC; lo cual será la mejor manera de relacionarse con él; sin embargo se recomienda la lectura de manuales y práctica de programación adicional.



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

CURSO: INTRODUCCION A LOS METODOS NUMERICOS APLICADOS A LA INGENIERIA
HIDRAULICA DIRIGIDO AL PERSONAL PROFESIONAL DE LA SARH DEL 26 AL 30
DE NOVIEMBRE DE 1984 EN MEXICO, D.F.

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

M. EN I. OSCAR FUENTES MARILES
M. EN I. POLIOPTRO MARTINEZ AUSTRIA
NOVIEMBRE DE 1984.

5. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

1

Una ecuación diferencial ordinaria es una ecuación que contiene derivadas ordinarias. Una ecuación tal puede escribirse en términos de diferenciales, pero generalmente no es conveniente a menos que la ecuación contenga solamente la primera derivada.

Se dice que se ha resuelto o integrado una ecuación diferencial que contiene a x , y y derivadas de y respecto a x cuando se ha encontrado una función de x y y que no contiene derivadas, que sustituida en la ecuación diferencial, la reduce a una identidad.

El orden de una ecuación diferencial es igual al de la derivada de más alto orden que hay en ella.

Una ecuación diferencial ordinaria es lineal si contiene x y si y y las derivadas de y respecto a x aparecen a la primer potencia. La forma general de una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n es:

$$b_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + b_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + b_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + b_n(x) y = R(x) \quad (5.1)$$

Por ejemplo, es lineal

$$x^2 \frac{dy}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - 4)y = 5x^4$$

y no es lineal

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - 4)y = 5x^4$$

Para encontrar la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias existen muchos procedimientos analíticos, como son el de separación de variables, factor integrante, variación de parámetros entre otros.

Desafortunadamente, muchas, a caso la mayoría, de las ecuaciones diferenciales que se presentan en la práctica, no pueden ser integradas por métodos analíticos o cuando lo son, el obtener su integral es muy complicado. Sin embargo, ecuaciones del tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y = y_a \text{ en } x = x_a \quad (5.2)$$

pueden ser integradas numéricamente. Para conocer la solución en el intervalo $x_a \leq x \leq x_b$, se puede dividir tal intervalo en N intervalos de ancho Δx (fig 4.1), y al considerar que $x_n = \Delta x n + x_a$, $y_n = y(x_n)$ se plantea la solución de 5.2 como

$$\int_{y_a}^{y_1} dy = \int_{x_a}^{x_1} f(x,y) dx$$

$$y_1 = y_a + \int_{x_a}^{x_1} f(x,y) dx \quad \text{y del mismo modo}$$

$$y_2 = y_1 + \int_{x_1}^{x_2} f(x,y) dx$$

$$y_3 = y_2 + \int_{x_2}^{x_3} f(x,y) dx$$

$$\vdots$$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y) dx$$

$$\vdots$$

$$y_N = y_{N-1} + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x,y) dx$$

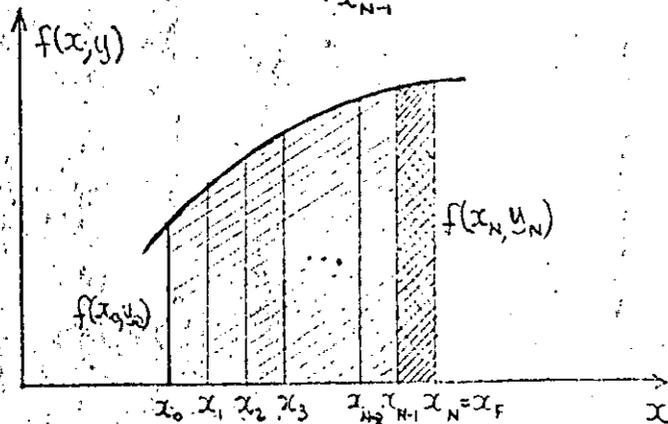
$$(5.3)$$


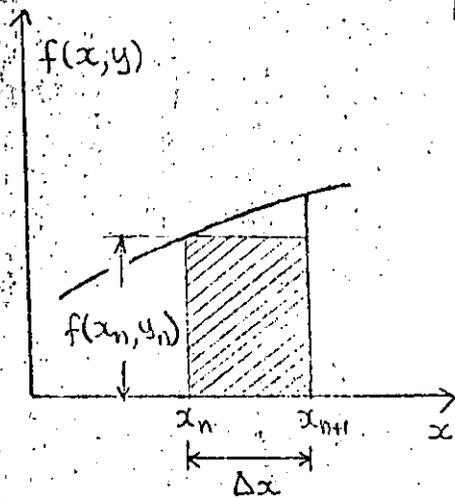
Fig 5.1

De manera que, si se logra evaluar los integrales del desarrollo anterior el problema se habrá resuelto. Aunque no se tiene la ecuación, que permita evaluar y para cualquier x , si se dispone de una colección de valores de y en términos de x , y ello prácticamente es lo que interesa.

Para encontrar cualquiera de los integrales escritos antes, se pueden ocurrir varias formas; ellos tratarán de representar lo mejor posible a la integral y contendrán un determinado error en su concepción, por lo que serán aproximaciones a la integral.

5.1 Método de Euler

Sea la fig 5.2, donde cualquiera de las integrales del desarrollo 5.3 se ha representado por el área sombreada. Así



$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y) dx \approx f(x_n, y_n) \Delta x$$

por lo que

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) \Delta x \quad (5.4)$$

Fig 5.2

la ec. 5.4 permite conocer cualquier y_i ($i \neq 0$) del desarrollo 5.3 y por lo tanto la solución aproximada de la ecuación diferencial.

Notese que el área no cubre toda la integral por lo que el área no considerada corresponde a un error.

5.2 Método de Euler modificado o de Heun.

Tratando de reducir el área de error del método de Euler se intenta representar la integral por el trapecio de la fig 5.3. El mejor trapecio resultaría al tener como lado vertical mayor en la fig 5.3 a y_{n+1} , pero es precisamente y_{n+1} lo que se desea obtener. Sin embargo, se ocurre tener una estimación de y_{n+1} representada como \tilde{y}_{n+1} y valvada a partir del método de Euler (ec. 5.4) que permite obtener una aproximación con menos error de la integral.

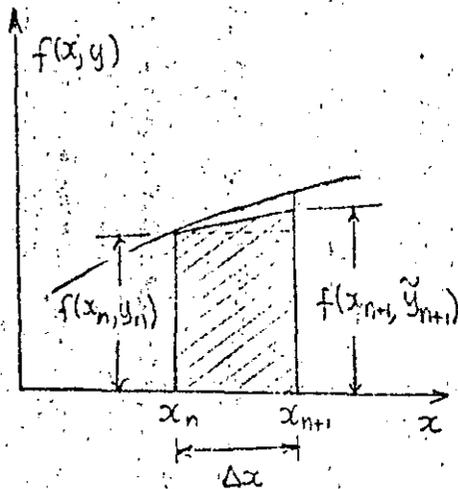


fig 5.3

De este modo

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y) dx \approx \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})}{2} \Delta x$$

En este caso, la solución se escribe

$$y_{n+1} = y_n + \left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) \right] \frac{\Delta x}{2} \quad (5.5)$$

donde

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) \Delta x$$

5.3 Método de Nystrom

Otra forma de estimar el área bajo la curva $f(x,y)$ en el intervalo de interés, consiste en escoger como área a un rectángulo de ancho $2\Delta x$ y de largo a $f(x_n, y_n)$, fig 5.5.

5

Por lo anterior

$$\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(x,y) dx \approx f(x_n, y_n) \cdot 2\Delta x$$

Como la integral abarca dos intervalos Δx , ahora se tiene

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2f(x_n, y_n) \Delta x \quad (5.6)$$

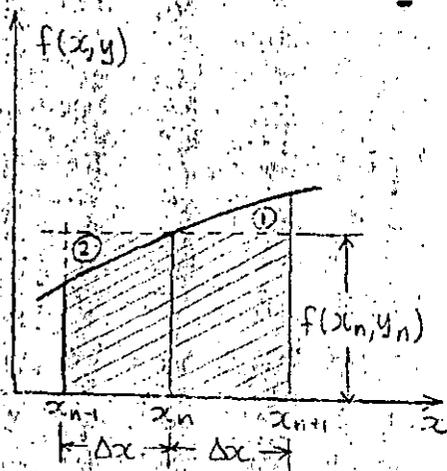


Fig. 5.4

Se observa que esta fórmula trata de compensar el área bajo la curva entre x_{n-1} y x_{n+1} no cubierta con el rectángulo (área identificada con ①) con el área del rectángulo donde $f(x,y)$ es menor a $f(x_n, y_n)$ (área señalada con ②) por lo que es una adecuada representación de la integral.

Este método tiene el inconveniente que no se puede volver y_1 , pero si y_2, y_3, \dots , etc. Para estimar y_1 se recomienda utilizar la ec. 5.5. Una vez conocida y_1 y con la condición inicial y_0 , ya no se tienen limitaciones para utilizar la ec. 5.6.

5.4 Método basado en la serie de Taylor.

El método de Euler o bien lo comentado en el subcapítulo 4.2 hace pensar que una estimación de $f(x_{n+1}, y_{n+1})$ permite representar la integral de una mejor manera. En efecto considerese que la fig. 5.3 ahora se presenta como en la fig. 5.5.

Sea el desarrollo en serie de Taylor

$$y(x+\Delta x) = y(x) + \Delta x y'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} y''(x) + \frac{\Delta x^3}{3!} y'''(x) + \dots$$

si $x = x_n$, $\Delta x = x_{n+1} - x_n$, entonces

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \Delta x y'(x_n) + \frac{\Delta x^2}{2!} y''(x_n) + \frac{\Delta x^3}{3!} y'''(x_n) + \dots \quad (5.7)$$

De acuerdo con la ec. 5.2 se tiene

$$y' = f(x, y)$$

$$y'' = \frac{df}{dx} = f' = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'$$

$$y''' = \frac{df'}{dx} = f''$$

⋮

$$y^{(p)} = \frac{df^{(p-2)}}{dx} = f^{(p-1)}$$

Sustituyendo los resultados anteriores en 5.7

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \Delta x f(x_n, y_n) + \frac{\Delta x^2}{2!} f'(x_n, y_n) + \frac{\Delta x^3}{3!} f''(x_n, y_n) + \dots \quad (5.8)$$

Si se considera que

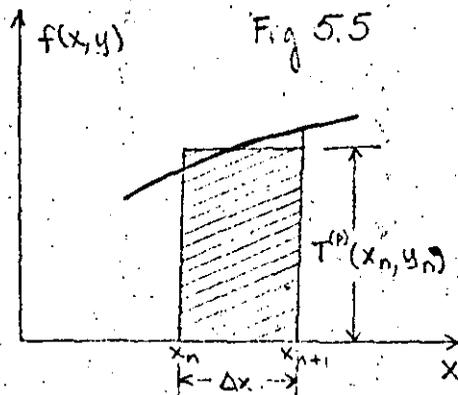
$$T^{(p)}(x_n, y_n) = f(x_n, y_n) + \frac{\Delta x}{2!} f'(x_n, y_n) + \frac{\Delta x^2}{3!} f''(x_n, y_n) + \dots + \frac{\Delta x^{p-1}}{p!} f^{(p-1)}(x_n, y_n) \quad (5.9)$$

la ec (4.8) se puede escribir como

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \Delta x T^{(p)}(x_n, y_n) \quad (5.10)$$

La ec. anterior corresponde al llamado método de Taylor de orden p 'Notese' que el método de Euler corresponde al caso especial en que $p=1$

En la fig 5.5 se muestra que $T^{(p)}(x_n, y_n)$ corresponde a una estimación de la ordenada del área sombreada.



El método de Taylor tiene en ocasiones el inconveniente del cálculo de las derivadas f', f'', f''', \dots las cuales pueden ser difíciles de evaluar o complicadas de calcular.

5.5 Métodos de Runge-Kutta

La dificultad para conocer el valor de las derivadas $f'(x_n, y_n)$, $f''(x_n, y_n)$, $f'''(x_n, y_n)$, ... del método de Taylor, ha sido salvada por Runge (1895) y Kutta (1901) a través de un procedimiento basado en valor varias veces la función $f(x, y)$ obteniendo una precisión equivalente al método de Taylor. A parte de ello, los métodos de Runge-Kutta tienen la ventaja de usar una fórmula de suma pesada, similar a la utilizada en integración numérica, con lo cual se logra una adecuada aproximación de área bajo la curva $f(x, y)$ entre x_n y x_{n+1} .

A continuación se hará la derivación del procedimiento conocido como Runge-Kutta de tercer orden.

El problema consiste en plantear como ecuación del método a

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x (ak_1 + bk_2 + ck_3) \quad (5.11)$$

donde

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (5.12)$$

$$k_2 = f(x_n + m\Delta x, y_n + m\Delta x k_1) \quad (5.13)$$

$$k_3 = f[x_n + p\Delta x, y_n + \Delta x(qk_1 + (p-q)k_2)] \quad (5.14)$$

e interesa conocer los valores de a, b, c, m, p y q . Los cuales son únicos e independientes de la ecuación diferencial por resolver.

Sea el desarrollo de la serie de Taylor 5.7 que incluye hasta términos de tercer orden:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x y_n' + \frac{\Delta x^2}{2} y_n'' + \frac{\Delta x^3}{6} y_n''' \quad (5.15)$$

Según lo planteado en el subcapítulo 5.4, se tiene

$$y' = f$$

$$y'' = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f = f_x + f_y f$$

$$y''' = \frac{df'}{dx} = \frac{d}{dx} (f_x + f_y f) = f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_y (f_x + f_y f)$$

si

$$A = f_x + f_y f \quad (5.16)$$

y

$$B = f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 \quad (5.17)$$

entonces

$$y'' = A$$

$$y''' = B + f_y A$$

y por lo tanto la ec 5.15 también se escribe como

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x f + \frac{\Delta x^2}{2} A + \frac{\Delta x^3}{6} B + \frac{\Delta x^3}{6} f_y A \quad (5.18)$$

En esta última ecuación se entiende que f , f_y , A y B se calculan para $x = x_n$ y $y = y_n$.

Por otra parte, el desarrollo en serie de Taylor de una función de las variables x y y es

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + h f_x(x, y) + k f_y(x, y) + \frac{h^2}{2} f_{xx}(x, y) + hk f_{xy}(x, y) + \frac{k^2}{2} f_{yy}(x, y) \quad (5.19)$$

Así, al desarrollar 5.13 (siendo $h = m\Delta x$ y $k = m\Delta x f$) se tiene

$$k_2 = f + (m\Delta x)f_x + (m\Delta x f)f_y + \frac{(m\Delta x)^2}{2}f_{xx} + (m\Delta x)(m\Delta x f)f_{xy} + \frac{(m\Delta x f)^2}{2}f_{yy}$$

$$k_2 = f + (m\Delta x)(f_x + f_y f) + \frac{(m\Delta x f)^2}{2}(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2)$$

considerando 5.16 y 5.17

$$k_2 = f + (m\Delta x)A + \frac{(m\Delta x)^2}{2}B \quad (5.20)$$

Si ahora se desarrolla 5.14 (siendo $h = p\Delta x$ y $k = \Delta x [qk_1 + (p-q)k_2]$) resulta

$$k_3 = f + (p\Delta x)f_x + [qk_2 + (p-q)k_1]\Delta x f_y + \frac{(p\Delta x)^2}{2}f_{xx} + (p\Delta x^2)[qk_2 + (p-q)k_1]f_{xy} + \Delta x^2 [qk_2 + (p-q)k_1]^2 \frac{f_{yy}}{2}$$

al sustituir en el tercer término la ec. 5.20 y dado que $k_1 = f$ se encuentra

$$k_3 = \underset{\textcircled{1}}{f} + \underset{\textcircled{2}}{(p\Delta x)f_x} + \underset{\textcircled{7}}{[q\{f + (m\Delta x)A + \frac{(m\Delta x)^2}{2}B\} + (p-q)f]}\Delta x f_y + \frac{(p\Delta x)^2}{2}f_{xx} + \underset{\textcircled{4}}{(p\Delta x^2)[qk_2 + (p-q)k_1]}\Delta x f_{xy} + \underset{\textcircled{5}}{(p\Delta x^2)[qk_2 + (p-q)f]}\Delta x f_{xy} + \underset{\textcircled{6}}{[qk_2 + (p-q)k_1]^2} \frac{f_{yy}}{2}$$

Agrupando términos

$$k_3 = \underset{\textcircled{1}}{f} + \underset{\textcircled{2}}{(p\Delta x)(f_x + f_y f)} + \frac{(p\Delta x)^2}{2}(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2) + \underset{\textcircled{7}}{mq\Delta x^2 f_y A} + \dots$$

tomando en cuenta 5.16 y 5.17

$$k_3 = f + (p\Delta x)A + \frac{(p\Delta x)^2}{2}B + mq\Delta x^2 f_y A \quad (5.21)$$

Sustituyendo 5.12, 5.20 y 5.21 en 5.11 se obtiene

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x \cdot (af + bf + b(m\Delta x)A + b \frac{(m\Delta x)^2}{2}B + cf + c(p\Delta x)A + c \frac{(p\Delta x)^2}{2}B + cmq\Delta x^2 f_y A)$$

o bien

10

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x f(a+b+c) + \Delta x^2 A (bm+cp) + \frac{\Delta x^3 B}{2} (bm^2+cp^2) + \Delta x^3 f_y A \cdot cmq \quad (5.22)$$

Al comparar 4.18 y 4.22 se encuentra:

$$a+b+c = 1 \quad (5.23a)$$

$$bm+cp = \frac{1}{2} \quad (5.23b)$$

$$bm^2+cp^2 = \frac{1}{3} \quad (5.23c)$$

$$cmq = \frac{1}{6} \quad (5.23d)$$

como se tienen 6 incógnitas y cuatro ecuaciones independientes se puede dar un valor a dos de las incógnitas; un conjunto de valores usual es $m = \frac{1}{2}$ y $p = 1$. Así 5.23b y 5.23c

$$\frac{1}{2}b + c = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}b + c = \frac{1}{3}$$

restando y despejando a b

$$\frac{1}{4}b = \frac{1}{6}$$

$$b = \frac{2}{3}$$

y por tanto $c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$

considerando los valores de m y c en 5.23d

$$q = \frac{1}{6}(b)(2) = 2$$

y por último según los valores de b y c y la ec. 5.23a

$$a = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

De acuerdo a los valores de a, b, c, m, p y q las ecs. 5.11 a 5.14 resultan ser:

$$\text{donde } y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{6} (k_1 + 2k_2 + k_3) \quad (5.24a)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (5.24b)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{\Delta x}{2}k_1\right) \quad (5.24c)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \Delta x, y_n + 2\Delta x k_2 - \Delta x k_1\right) \quad (5.24d)$$

Las ecs. 5.24 corresponden al método de Runge-Kutta de orden tres.

De manera semejante se pueden deducir las ecuaciones del método de Runge-Kutta de orden cuatro

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (5.25a)$$

donde

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (5.25b)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{\Delta x k_1}{2}\right) \quad (5.25c)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{\Delta x k_2}{2}\right) \quad (5.25d)$$

$$k_4 = f(x_n + \Delta x, y_n + \Delta x k_3) \quad (5.25e)$$

y Runge-Kutta de quinto orden

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x \left(\frac{23}{192} k_1 + \frac{125}{192} k_2 - \frac{81}{192} k_5 + \frac{125}{192} k_6 \right) \quad (5.26a)$$

donde

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (5.26b)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{3} \Delta x, y_n + \frac{1}{3} \Delta x k_1\right) \quad (5.26c)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{2}{5} \Delta x, y_n + \frac{4}{25} \Delta x k_1 + \frac{16}{25} \Delta x k_2\right) \quad (5.26d)$$

$$k_4 = f\left(x_n + \Delta x, y_n + \frac{1}{4} \Delta x k_1 - 3 \Delta x k_2 + \frac{15}{4} \Delta x k_3\right) \quad (5.26e)$$

$$k_5 = f\left(x_n + \frac{3}{2} \Delta x, y_n + \frac{2}{27} \Delta x k_1 + \frac{10}{9} \Delta x k_2 - \frac{50}{81} \Delta x k_3 + \frac{8}{81} \Delta x k_4\right) \quad (5.26f)$$

$$k_6 = f\left(x_n + \frac{4}{5} \Delta x, y_n + \frac{2}{25} \Delta x k_1 + \frac{12}{25} \Delta x k_2 + \frac{2}{15} \Delta x k_3 + \frac{8}{75} \Delta x k_4\right) \quad (5.26g)$$

5.6 Fórmulas de Adams

El desarrollo de Taylor planteado en 5.8 también permite un enfoque distinto para resolver numéricamente la ecuación diferencial ordinaria 5.2. Se ocurre ahora basarse

en la idea de integración numérica. En general se proponen dos clases distintas de ecuaciones, unas donde es explícito el cálculo de y_{n+1} , se llaman cerradas, y las otras en las que se requiere de un método iterativo se denominan abiertas. Ambos casos corresponden a las fórmulas de Adams.

5.6.1 Fórmulas abiertas de Adams

Considere la expresión 5.8

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x f_n + \frac{\Delta x^2}{2!} f_n' + \frac{\Delta x^3}{3!} f_n'' + \dots \quad (5.26)$$

o bien

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x \left(f_n + \frac{\Delta x}{2!} f_n' + \frac{\Delta x^2}{3!} f_n'' + \dots \right) \quad (5.27)$$

si la serie incluye hasta términos de derivadas de primer orden

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x \left(f_n + \frac{\Delta x}{2} f_n' \right) \quad (5.28)$$

Ahora, si f_n' se aproxima por medio de una diferencia hacia atrás (cap. 6):

$$f_n' = \frac{df}{dx} = \frac{f_n - f_{n-1}}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} f_n'' + O(\Delta x)^2 \quad (5.29)$$

sustituyendo 5.29 sin sus términos de segundo orden en 5.28

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \Delta x \left[\frac{3}{2} f_n - \frac{1}{2} f_{n-1} \right]} \quad (5.30)$$

lo cual es la fórmula abierta de Adams de segundo orden

Cuando en la expresión 5.27 se considera hasta la derivada de segundo orden.

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x \left(f_n + \frac{\Delta x}{2} f_n' + \frac{\Delta x^2}{6} f_n'' \right) \quad (5.31)$$

Considerando la ec. 5.29

$$f_n'' = \frac{df'}{dx} = \frac{f_n' - f_{n-1}'}{\Delta x} \quad (5.32)$$

Según 5.29

$$f_{n-1}' = \frac{f_{n-1} - f_{n-2}}{\Delta x} \quad (5.33)$$

Sustituyendo 5.29 y 5.33 en 5.32

$$f_n'' = \frac{f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}}{\Delta x^2} \quad (5.34)$$

Si ahora, en la ec. 5.29 se considera la derivada de segundo orden y esta se sustituye por 5.34

$$f_n' = \frac{f_n - f_{n-1}}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}}{\Delta x^2} \right) + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

Después de simplificar

$$f_n' = \frac{3}{2} f_n - \frac{3}{2} f_{n-1} + \frac{f_{n-2}}{2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \quad (5.35)$$

Si se desprecia el término $\mathcal{O}(\Delta x)^2$ de 5.35 y se sustituyen 5.35 y 5.34 en 5.31 se obtiene

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \left[f_n + \left(\frac{3}{4} f_n - \frac{3}{4} f_{n-1} + \frac{f_{n-2}}{4} \right) + \left(\frac{f_n}{6} - \frac{2f_{n-1}}{6} + \frac{f_{n-2}}{6} \right) \right]$$

o bien

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \left[\frac{23}{12} f_n - \frac{16}{12} f_{n-1} + \frac{5}{12} f_{n-2} \right] \quad (5.36)$$

la cual es la fórmula abierta de Adams de tercer orden

De manera similar se podrá obtener la fórmula abierta de Adams de cuarto orden

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \left[\frac{55}{24} f_n - \frac{59}{24} f_{n-1} + \frac{37}{24} f_{n-2} - \frac{9}{24} f_{n-3} \right] \quad (5.37)$$

Estas expresiones abiertas también se conocen con el nombre de Fórmulas de Adams-Bashforth. Como tienen la desventaja de no iniciarse por sí mismas, es decir para emplear en un principio a 5.30 se conoce f_0 de las condiciones iniciales $y_0 = y(x_0)$ pero no a f_1 , se recomienda utilizarlo a partir de $n=1$, como en este caso no se sabe el valor de f_1 se sugiere aplicar la ec. 5.5 para conocer y_1 y luego con este valor y $x_1 = x_0 + \Delta x$ valor f_1 , definidas f_0 y f_1 ya no habrá dificultad en utilizar la ec. 5.30.

Se recomienda aplicar 5.36 a partir de $n=2$ y valor previamente f_1 y f_2 calculando y_1 y y_2 por medio de las ecs. 5.24. Al igual para usar 5.37 es conveniente empezar con $n=3$ y calcular y_1, y_2 y y_3 por medio de las ecs. 5.25, con ellas se obtienen f_1, f_2 y f_3 .

5.6.2 Fórmulas cerradas de Adams

Sea el desarrollo de la serie de Taylor

$$y(x-\Delta x) = y(x) - \Delta x y'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} y''(x) - \frac{\Delta x^3}{3!} y'''(x) + \dots$$

si $x = x_{n+1}$, $\Delta x = x_{n+1} - x_n$, entonces

$$y(x_n) = y(x_{n+1}) - \Delta x y'(x_{n+1}) + \frac{\Delta x^2}{2!} y''(x_{n+1}) - \frac{\Delta x^3}{3!} y'''(x_{n+1}) + \dots$$

Como en el subcapítulo 5.4, $y_{n+1}' = f_{n+1}$, $y_{n+1}'' = f_{n+1}'$, $y_{n+1}''' = f_{n+1}''$, etc y resolviendo para y_{n+1} , se encuentra

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x \left[f_{n+1} - \frac{\Delta x}{2} f_{n+1}' + \frac{\Delta x^2}{3!} f_{n+1}'' - \frac{\Delta x^3}{4!} f_{n+1}''' + \dots \right] \quad (5.38)$$

Como antes, si se considera hasta la primera derivada

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x \left[f_{n+1} - \frac{\Delta x}{2} f_{n+1}' \right] \quad (5.39)$$

Despreciando los términos de segundo orden, de 5.29 se tiene

$$f_{n+1}' = \frac{f_{n+1} - f_n}{\Delta x} \quad (5.40)$$

Al sustituir 5.40 en 5.39 y simplificando

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x \left[\frac{1}{2} f_{n+1} + \frac{1}{2} f_n \right] \quad (5.41)$$

esta ecuación corresponde a la fórmula cerrada de Adams de segundo orden

5.43
Siguiendo un razonamiento semejante a los del inciso 6.1 se obtienen las fórmulas cerradas de Adams de tercer (5.42) y cuarto orden

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x \left[\frac{5}{12} f_{n+1} + \frac{8}{12} f_n - \frac{1}{2} f_{n-1} \right] \quad (4.42)$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x \left[\frac{9}{24} f_{n+1} + \frac{19}{24} f_n - \frac{5}{24} f_{n-1} + \frac{1}{24} f_{n-2} \right] \quad (4.43)$$

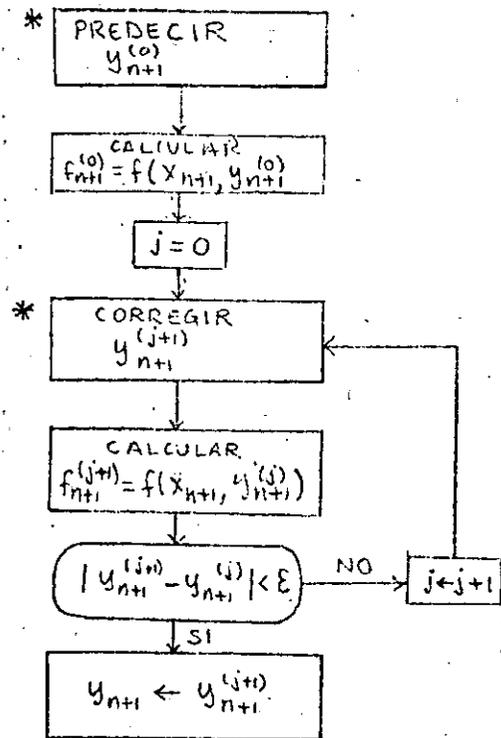
Se observa que en las ecs. cerradas aparte de la dificultad de no iniciarse por sí mismas, ahora no se conoce f_{n+1} , por lo que se propone resolverlas por iteraciones, es decir una vez que ya no hay problema con el principio (ver inciso 5.5.1), se resuelven por aproximaciones sucesivas proponiendo un valor de y_{n+1} , con el cual se valora f_{n+1} y al sustituir en la fórmula cerrada

en cuestión se obtiene y_{n+1} , si este es aproximadamente igual al supuesto se ha encontrado y_{n+1} y se incrementa el valor de n para continuar con el siguiente Δx ; en caso contrario se necesita escoger otro valor de y_{n+1} y se repite el proceso.

5.7 Métodos Predictor-Corrector

Una ventaja de las fórmulas cerradas de Adams es su precisión, sin embargo, en ocasiones el proceso iterativo se hace largo y se contraesta esta ventaja cuando el valor propuesto a y_{n+1} no es muy diferente del correcto el número de iteraciones se reduce en forma importante y nuevamente hace útil la fórmula cerrada.

De esto se desprende la idea de escoger un valor inicial de y_{n+1} adivinado. Para ello se sugiere utilizar una ecuación diferente a la fórmula cerrada. Esta ecuación servirá para "predecir" el valor de y_{n+1} con el cual se comienzan las iteraciones. luego con él se emplea la fórmula cerrada, como en cada iteración se mejora el valor de y_{n+1} , se dice que se está "corrigiendo" este. Por esto a esta clase de procedimientos se les conoce con el nombre de "métodos predictor-corrector". En la fig 5.7 se muestra la forma de utilizar estos métodos.



* se usan las fórmulas predictor-corrector
Fig 5.7

También se ha observado que incluyendo una ecuación que modifique la estimación del predictor, el número de iteraciones se reduce e, inclusive en muchos de los casos sólo se requiere una iteración, para esta variante el diagrama del método predictor-corrector queda como se muestra en la fig 5.7

Entre los métodos predictor-corrector se anotan los siguientes:

Método de Adams

Predictor:

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + \Delta x \left[\frac{55}{24} f_n - \frac{59}{24} f_{n-1} + \frac{37}{24} f_{n-2} - \frac{9}{24} f_{n-3} \right] \quad (5.44)$$

Corrector:

$$y_{n+1}^{(j+1)} = y_n + \Delta x \left[\frac{9}{24} f_{n+1}^{(j)} + \frac{19}{24} f_n - \frac{5}{24} f_{n-1} + \frac{1}{24} f_{n-2} \right] \quad (5.45)$$

(Estas ecuaciones ya fueron discutidas en el subcapítulo 5.6, corresponden a las 5.37 y 5.43)

Método de Milne

Predictor:

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + \Delta x \left[\frac{8}{3} f_n - \frac{4}{3} f_{n-1} + \frac{8}{3} f_{n-2} \right] \quad (5.46)$$

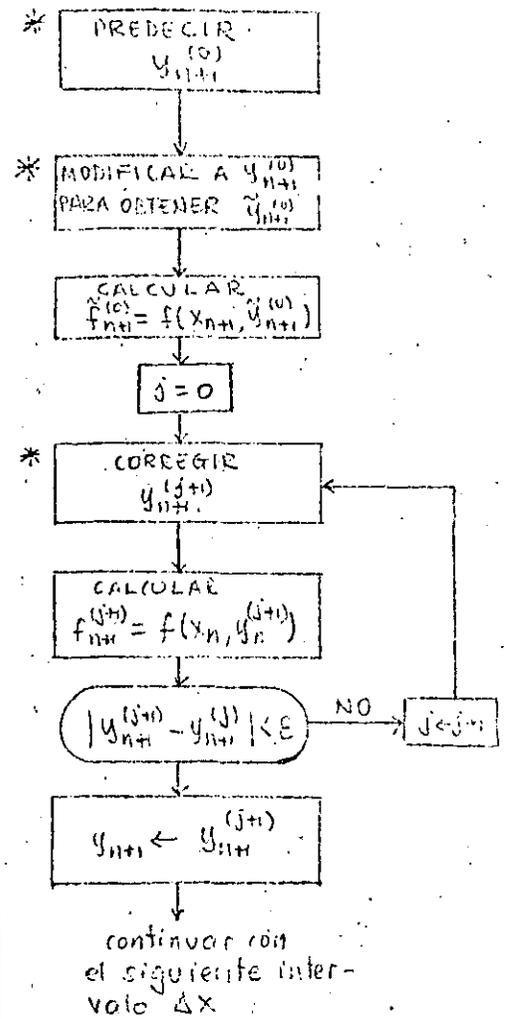
Corrector:

$$y_{n+1}^{(j+1)} = y_n + \Delta x \left[\frac{1}{3} f_{n+1}^{(j)} + \frac{4}{3} f_n + \frac{1}{3} f_{n-1} \right] \quad (5.47)$$

Método de Hamming

Predictor:

$$y_{n+1}^{(0)} = y_{n-3} + \Delta x \left[\frac{8}{3} f_n - \frac{4}{3} f_{n-1} + \frac{8}{3} f_{n-2} \right] \quad (5.48)$$



* Se usan las fórmulas predictor, modificador corrector. Fig. 5.7

Modificador

$$\tilde{y}_{n+1}^{(0)} = y_{n+1}^{(0)} + \frac{112}{121} (y_n - y_n^{(0)}) \quad (5.49)$$

Corrector

$$y_{n+1}^{(j+1)} = \frac{1}{8} (9y_n - y_{n-2}) + \Delta x \left(\frac{3}{8} \tilde{f}_{n+1}^{(j)} + \frac{6}{8} f_n - \frac{3}{8} f_{n-1} \right) \quad (5.50)$$

Se observa que las fórmulas predictoras no se inician por sí mismas (ver comentarios a las fórmulas 5.36 y 5.37). Para disponer de los valores iniciales necesarios para su aplicación se recomienda utilizar los métodos de Runge-Kutta de cuarto orden.

Una de las grandes ventajas de los métodos predictor-corrector estriba en el hecho de que casi siempre se requiere una iteración y que por tanto se requieren menos cálculos que en los métodos de Runge-Kutta (notese que para el método de Adams se requiere calcular $y_{n+1}^{(0)}$ y con este a $f_{n+1}^{(0)}$, mientras que para las ecs 5.25 se necesita valor k_2, k_3 y k_4 implicando más operaciones aritméticas).

También los métodos predictor-corrector tienen un aspecto a su favor en lo referente al cálculo del error que se comete con ellos, pues la forma de determinar este error es muy simple.

5.8 Métodos de parámetros indeterminados

Dentro de esta categoría de procedimientos se agrupan el método basado en el cálculo de variaciones (Ritz) y el de Galerkin.

5.8.1 Método de Ritz

Cuando un alambre doblado en forma de una circunferencia, primero se introduce en una solución jabonosa y luego se extrae, se observa que se forma una delgada película de jabón, for-

mando una superficie. Este experimento inspira el siguiente problema: Dada una curva cerrada encontrar la superficie limitada por la misma de modo tal que su área sea mínima.

En Cálculo Diferencial se trata como encontrar un punto donde la función es máxima o mínima. Ahora no se desea definir un punto, sino una función que cumpla con ciertas condiciones y que haga máxima o mínima una propiedad; esto último se estudia por medio del Cálculo de Variaciones.

Algunos de los problemas del Cálculo de Variaciones consiste en encontrar la función (curva) que une dos puntos dados y que maximiza o minimiza una integral.

Ejemplo

Encontrar el arco $y(x)$ que pasa a través de los puntos $(0,1)$ y $(1,2)$, que minimiza

$$J = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$$

Generalizando lo anterior, se desea encontrar una función $y(x)$ tal que $y_1 = y(x_1)$ y $y_2 = y(x_2)$ de manera que para una función dada $F(x, y, y')$, la integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (5.51)$$

sea máxima o mínima. La integral que toma un valor numérico para ciertas funciones $y(x)$ se llama funcional.

Para encontrar la función $y(x)$ se propone la familia de funciones:

$$Y(x) = y(x) + \epsilon \eta(x) \quad (5.52)$$

dónde $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ (5.53)

entonces

$$Y(x) = y(x) + \epsilon \eta(x) \quad (5.54)$$

$$Y'(x) = y'(x) + \epsilon \eta'(x) \quad (5.55)$$

se observa que para $\epsilon = 0$ se tiene la función que hace mínima a 5.51. Si se reemplaza y y y' en 5.51 respectivamente por Y y Y' , se forma la integral

$$J(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, Y, Y') dx \quad (5.56)$$

Para encontrar un extremo (máximo o mínimo) de $J(\epsilon)$, se deriva respecto a ϵ y se iguala a cero, tal como sucede en el cálculo diferencial, así

$$\frac{dJ(\epsilon)}{d\epsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \epsilon} \right) dx = 0 \quad (5.57)$$

y el mínimo es precisamente cuando

$$\frac{dJ(0)}{d\epsilon} = 0 \quad (5.58)$$

Según 5.54 y 5.55

$$\frac{\partial Y}{\partial \epsilon} = \eta(x) \quad (5.59)$$

$$\frac{\partial Y'}{\partial \epsilon} = \eta'(x) \quad (5.60)$$

considerando 5.59, 5.60, y 5.54 y 5.55 para $\epsilon = 0$, se tiene

$$\frac{\partial J(0)}{\partial \epsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx \quad (5.61)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} \eta dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' dx$$

integrando por partes la segunda integral

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' dx = \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right] dx$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x_2) - \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right] dx$$

por 5.53

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' dx = - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right] dx \quad (5.62)$$

Sustituyendo 5.62 en 5.61

$$J'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right] \right) dx$$

por un teorema de Cálculo Diferencial que dice "Si $\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) G(x) dx = 0$ para $x_2 > x_1$, siendo $G(x)$ continua entre x_1 y x_2 , y $\eta(x_1) = 0$, $\eta(x_2) = 0$; entonces $G(x) = 0$ entre x_1 y x_2 "

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

Esta es la llamada "ecuación diferencial de Euler-Lagrange".

Lo anterior es muy importante porque se afirma que cada funcional tiene asociada una ecuación diferencial de Euler-Lagrange; de tal manera que la función $y(x)$ que hace máxima o mínima a la integral ¡TAMBIÉN ES LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE! En otras palabras, para resolver una ecuación diferencial se puede buscar su funcional y al hacer máximo o mínimo, a este, se encuentra la solución de la ecuación diferencial. Esto último, precisamente proporciona un método de solución de la ecuación diferencial.

Ejemplo

Para resolver la ecuación $-y'' = 1 + y^2$ donde y

hacer mínimo su funcional $J = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$ 22

El método de Ritz se resume en los siguientes pasos:

1. Proponer el funcional asociado a la ecuación diferencial, $y' = f(x, y)$, sea este:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (5.63)$$

$$\text{donde } y(x_1) = y_1 \quad \text{y} \quad y(x_2) = y_2 \quad (5.64)$$

2. Escoger un conjunto de funciones linealmente independientes $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$ tales que $u_0(x)$ satisficiera las condiciones 5.64 y $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ se anulan en (x_1, y_1) y (x_2, y_2) .

3. Formar la ecuación aproximada

$$y = u_0(x) + a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + \dots + a_n u_n(x) \quad (5.65)$$

4. Sustituir 5.65 en 5.63 e integrar. El funcional queda entonces en términos de a_1, a_2, \dots, a_n .

5. Encontrar a_1, a_2, \dots, a_n que hacen mínimo el funcional.

6. Sustituir los valores obtenidos en 5. en la ec 5.65, con lo cual queda definida la solución aproximada.

5.8.2 Método de Galerkin

Como no siempre se dispone del funcional se ha ocurrido otro método basado en el principio de ortogonalidad de funciones, el cual dice que dos funciones linealmente independientes $p(x)$ y $q(x)$ tales que cumplen con

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x)q(x) dx = 0$$

son ortogonales en el intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$.

El método de Galerkin consiste en los siguientes pasos

1. Sean la ecuación diferencial

$$L(y) - f(x) = 0 \quad (5.66)$$

$$y(x_1) = y_1 \quad \text{y} \quad y(x_2) = y_2 \quad (5.67)$$

2. Escoger un conjunto de funciones linealmente independientes, $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ donde $u_0(x)$ satisface las condiciones 5.67 y $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ se anulan en (x_1, y_1) y (x_2, y_2)

3. Se forma la solución

$$y = u_0(x) + a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + \dots + a_n u_n(x) \quad (5.68)$$

4. Sustituyendo 5.68 en 5.66

$$L[u_0(x) + a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + \dots + a_n u_n(x)] - f(x) = R(x)$$

5. Las constantes a_1, a_2, \dots, a_n se encuentran al considerar que $R(x)$ es ortogonal con las funciones $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$. Esto es

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x) u_1(x) dx = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x) u_2(x) dx = 0 \quad (5.69)$$

$$\vdots$$

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x) u_n(x) dx = 0$$

6. Al resolver el sistema de ecuaciones 5.69 se encuentran a_1, a_2, \dots, a_n

7. Sustituir los valores de a_1, a_2, \dots, a_n en 5.68, con lo cual queda definida la solución aproximada.

5.9. Ecuaciones diferenciales de orden mayor a uno.

Una ecuación diferencial de orden mayor a uno o un sistema de ecuaciones diferenciales que involucren algunas derivadas de orden alto, pueden reducirse a un conjunto de ecuaciones de primer orden haciendo un cambio de variable simple. La ecuación de orden n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (5.70)$$

se transforman haciendo

$$y = g_0$$

$$y' = g_1$$

$$y'' = g_1' = g_2$$

$$y''' = g_2' = g_3$$

⋮

$$y^{(n)} = \dots = g_{n-1}' = f(x, y, g_1, g_2, \dots, g_{n-1}) \quad (5.71)$$

Las ecuaciones anteriores se pueden tratar con cualquiera de los métodos descritos. El cálculo se hace en paralelo, se realiza el cálculo para el primer Δx para todas las ecuaciones antes de pasar al siguiente, y así sucesivamente.

En el caso especial del método de Runge-Kutta se especifica para el caso de dos ecuaciones ordinarias de primer orden, el conjunto de ecuaciones siguientes. Ellos corresponden a un método de orden cuatro.

$$\text{Sean} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y, u) \quad (5.72)$$

$$\frac{du}{dx} = h(x, y, u) \quad (5.73)$$

donde y y u son conocidas para $x=x_0$. En particular, las fórmulas de Runge-Kutta se generalizan como sigue:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x \left(\frac{1}{6} k_1 + \frac{1}{3} k_2 + \frac{1}{3} k_3 + \frac{1}{6} k_4 \right) \quad (5.74)$$

$$u_{n+1} = u_n + \Delta x \left(\frac{1}{6} m_1 + \frac{1}{3} m_2 + \frac{1}{3} m_3 + \frac{1}{6} m_4 \right) \quad (5.75)$$

con:

$$k_1 = f(x_n, y_n, u_n) \quad (5.76a)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{1}{2} \Delta x k_1, u_n + \frac{1}{2} \Delta x m_1\right) \quad (5.76b)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{1}{2} \Delta x k_2, u_n + \frac{1}{2} \Delta x m_2\right) \quad (5.76c)$$

$$k_4 = f(x_n + \Delta x, y_n + \Delta x k_3, u_n + \Delta x m_3) \quad (5.76d)$$

y

$$m_1 = h(x_n, y_n, u_n) \quad (5.77a)$$

$$m_2 = h\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{1}{2} \Delta x k_1, u_n + \frac{1}{2} \Delta x m_1\right) \quad (5.77b)$$

$$m_3 = h\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{1}{2} \Delta x k_2, u_n + \frac{1}{2} \Delta x m_2\right) \quad (5.77c)$$

$$m_4 = h(x_n + \Delta x, y_n + \Delta x k_3, u_n + \Delta x m_3) \quad (5.77d)$$

Una consideración de esta fórmula indica como cualquiera de las otras fórmulas de los métodos pueden ser usadas.

5.10 Errores en los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales

En la solución de las ecuaciones diferenciales, se entenderá que la diferencia entre la solución exacta de la ecuación diferencial (por ejemplo, aquella obtenida por métodos analíticos con todas las cifras decimales) menos la solución obtenida con un método numérico con un número limitado de cifras, corresponde al error total $E(t)$.

$$E(x) = S(x) - P(x) \quad (5.78)$$

donde

$S(x)$ es la solución exacta

$P(x)$ es la solución mediante el método numérico con un número limitado de cifras

Introduciendo $Q(x)$, la solución mediante el método numérico con todas las cifras necesarias, en la ec 5.78

$$E(x) = S(x) - Q(x) + Q(x) - P(x)$$

Llamando error de truncado o discretización a $D(x) = S(x) - Q(x)$ y error de redondeo a $R(x) = Q(x) - P(x)$ se tiene

$$E(x) = D(x) + R(x) \quad (5.79)$$

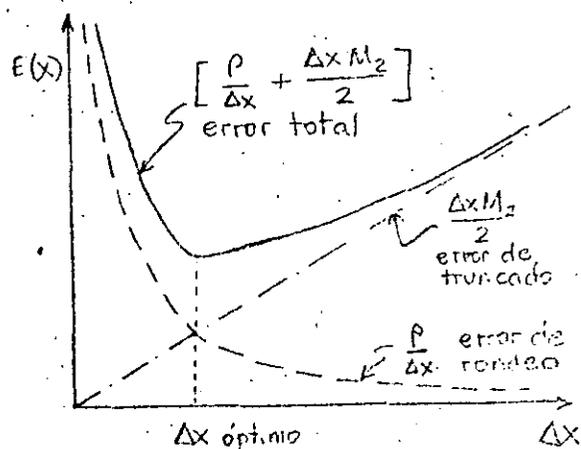


Fig 5.8

En la elección del tamaño del intervalo de integración Δx aparecen involucrados estos errores, ya que, por un lado, al asignar un valor grande a Δx se comete un error de truncado grande (a continuación se discute porque) y si por otra parte se escoge muy pequeño puede haber errores por despreciar cifras decimales (error de redondeo), (fig 5.8).

La elección del valor óptimo de Δx no es sencilla, lo más usado en la práctica es escoger un Δx relativamente pequeño y aplicar el procedimiento numérico, luego se toma otro Δx menor y se utiliza el procedimiento otra vez, si los resultados no difieren mucho se acepta uno de los dos cálculos como bueno; en caso contrario, se escogen otros dos valores de Δx , sino se llega a un resultado adecuado se suspende el cálculo y quizá convenga probar otro método numérico diferente.

En atención al error de truncado, la ec. 5.8 dice:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x y'(x_n) + \frac{\Delta x^2}{2!} y''(x_n) + \frac{\Delta x^3}{3!} y'''(x_n) + \dots$$

Al compararla con la ec del método de Euler, se observa que esta no toma en cuenta los términos de segundo orden en adelante; es decir la ec. 5.8 se ha truncado, y ello implica un error de este tipo.

Según la serie de Taylor, el error de truncado es tal que

$$D(x) \leq \left| \frac{d^2 y(\xi)}{dx^2} \right|_{\max} \frac{\Delta x^2}{2} \quad (5.80)$$

$$x_n \leq \xi \leq x_{n+1}$$

Suponiendo

que $\left| \frac{d^2 y(\xi)}{dx^2} \right|_{\max} = M.$

Así, en el primer intervalo de integración el error de truncado es

$$d_1 = M \frac{\Delta x^2}{2}$$

En el segundo intervalo, vuelve a aparecer un error de truncado sea

$$d_2 = M^{(2)} \frac{\Delta x^2}{2}$$

suponiendo que $M^{(1)} = M^{(2)} = M$ para cualquier iteración.
Se tiene que

$$d_1 = M \frac{\Delta x^2}{2}$$

$$d_1 + d_2 = M \frac{\Delta x^2}{2} + M \frac{\Delta x^2}{2} = M \Delta x^2$$

también

$$d_1 + d_2 + d_3 = \frac{3}{2} M \Delta x^2$$

y así sucesivamente, hasta que en la iteración N ($N > 3$)
el error acumulado

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_N = N \frac{M}{2} \Delta x^2 \quad (5.81)$$

Por otra parte

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = x_0 + 2\Delta x$$

$$x_N = x_{N-1} + \Delta x = x_0 + N\Delta x$$

de esta última ecuación

$$N = \frac{x_N - x_0}{\Delta x} \quad (5.82)$$

Sustituyendo 5.82 en 5.81

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_N = (x_N - x_0) \frac{1}{2} M \Delta x$$

si

$$d_T = d_1 + d_2 + \dots + d_N$$

y

$$M_2 = (x_N - x_0) M$$

entonces el error acumulado de redondeo es

$$d_T = \frac{\Delta x}{2} M_2$$

(5.83)

Y se afirma que en el método de Euler el error acumulado de truncado es proporcional al tamaño del intervalo de integración Δx .

En general se ha notado que este error tratándose de ecuaciones diferenciales ordinarias es más importante.

Se puede demostrar o encontrar en libros sobre el tema, los errores acumulados de truncado para cada uno de los métodos aquí descritos. Según la potencia a la que aparece Δx se dice el "orden del método", que tendría un menor error de truncado mientras mayor sea el orden (Δx^2 , si Δx es menor que 1 es mejor que Δx). En la tabla 5.1 se reporta el orden de algunos de los métodos.

Tabla 5.1

Método	Orden
Euler	1
Euler Modificado	2
Heun	2
Nystrom	2
Serie de Taylor	2, 3, 4, ... según el número de términos
Runge-Kutta	2, 3, 4, 5
Adams	2, 3, 4, 5
Predictor-Corrector	2, 3, 4, 5

} según se especifique

5.11. Ejemplos

Ejemplo 5.11.1

Calcular el tránsito de una avenida a través del almacenamiento mostrado en la fig. 5.9. Se sabe que la avenida es constante e igual $I = 10 \text{ m}^3/\text{s}$ y que el gasto que sale del almacenamiento está dado por la ecuación

$$Q = C_o a \sqrt{2gh} = 5 \sqrt{h} \quad (\text{m}^3/\text{s}) \quad (5.84)$$

La área de la base del almacenamiento es 100 m^2 . El nivel en el almacenamiento al tiempo $t=0$ s tiene una carga $h = 16 \text{ m}$.

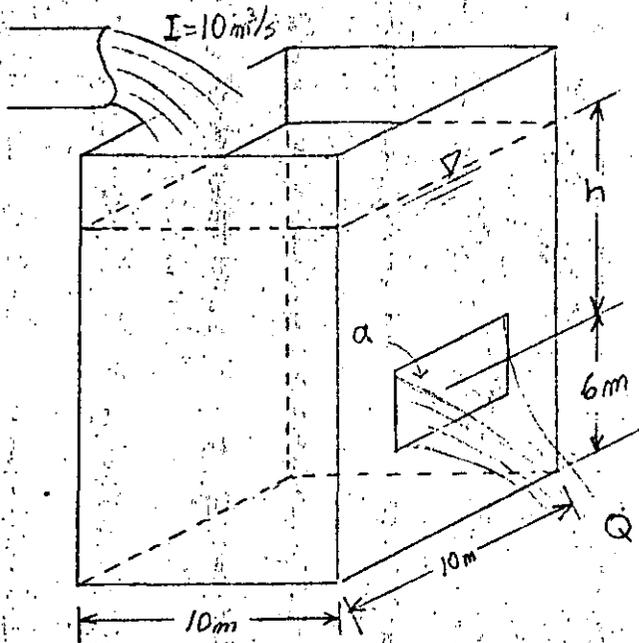


Fig 5.9

Solución:

Se trata de resolver la ecuación de continuidad

$$\frac{dV}{dt} = I - Q$$

como

$$V = Ah + 6$$

así

$$dV = A dh$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{I - Q}{A}$$

sustituyendo valores y la ecuación del gasto de descarga

$$\frac{dh}{dt} = 0.1 - 0.05 \sqrt{h} \quad (5.85)$$

la solución consiste en resolver esta ecuación diferencial ordinaria no lineal.

a) Solucion mediante el método de Euler
 $h_{n+1} = h_n + \Delta t f(t_n, h_n)$; $f(t_n, h_n) = 0.1 - 0.05 \sqrt{h_n}$

n	t _n	h _n	f(t _n , h _n)	h _{n+1}
0	0.0	1.0000	0.0500	1.0500
1	0.1	1.0500	0.0475	1.1000
2	0.2	1.1000	0.0450	1.1500
3	0.3	1.1500	0.0425	1.2000
4	0.4	1.2000	0.0400	1.2500
5	0.5	1.2500	0.0375	1.3000
6	0.6	1.3000	0.0350	1.3500
7	0.7	1.3500	0.0325	1.4000
8	0.8	1.4000	0.0300	1.4500
9	0.9	1.4500	0.0275	1.5000
10	1.0	1.5000	0.0250	1.5500
11	1.1	1.5500	0.0225	1.6000
12	1.2	1.6000	0.0200	1.6500
13	1.3	1.6500	0.0175	1.7000
14	1.4	1.7000	0.0150	1.7500
15	1.5	1.7500	0.0125	1.8000
16	1.6	1.8000	0.0100	1.8500
17	1.7	1.8500	0.0075	1.9000
18	1.8	1.9000	0.0050	1.9500
19	1.9	1.9500	0.0025	2.0000
20	2.0	2.0000	0.0000	2.0000

Listado del programa utilizado

```

100 REM METODO DE EULER (E.F.S.A)
110 PRINT "METODO DE EULER (E.F.S.A)"
120 PRINT "E.F.S.A"
130 PRINT "E.F.S.A"
140 PRINT "E.F.S.A"
150 PRINT "E.F.S.A"
160 PRINT "E.F.S.A"
170 PRINT "E.F.S.A"
180 PRINT "E.F.S.A"
190 PRINT "E.F.S.A"
200 PRINT "E.F.S.A"
210 PRINT "E.F.S.A"
220 PRINT "E.F.S.A"
230 PRINT "E.F.S.A"
240 PRINT "E.F.S.A"
250 PRINT "E.F.S.A"
260 PRINT "E.F.S.A"
270 PRINT "E.F.S.A"
280 PRINT "E.F.S.A"
290 PRINT "E.F.S.A"
300 PRINT "E.F.S.A"
310 PRINT "E.F.S.A"
320 PRINT "E.F.S.A"
330 PRINT "E.F.S.A"
340 PRINT "E.F.S.A"
350 PRINT "E.F.S.A"
360 PRINT "E.F.S.A"
370 PRINT "E.F.S.A"
380 PRINT "E.F.S.A"
390 PRINT "E.F.S.A"
400 PRINT "E.F.S.A"
410 PRINT "E.F.S.A"
420 PRINT "E.F.S.A"
430 PRINT "E.F.S.A"
440 PRINT "E.F.S.A"
450 PRINT "E.F.S.A"
460 PRINT "E.F.S.A"
470 PRINT "E.F.S.A"
480 PRINT "E.F.S.A"
490 PRINT "E.F.S.A"
500 PRINT "E.F.S.A"
510 PRINT "E.F.S.A"
520 PRINT "E.F.S.A"
530 PRINT "E.F.S.A"
540 PRINT "E.F.S.A"
550 PRINT "E.F.S.A"
560 PRINT "E.F.S.A"
570 PRINT "E.F.S.A"
580 PRINT "E.F.S.A"
590 PRINT "E.F.S.A"
600 PRINT "E.F.S.A"
610 PRINT "E.F.S.A"
620 PRINT "E.F.S.A"
630 PRINT "E.F.S.A"
640 PRINT "E.F.S.A"
650 PRINT "E.F.S.A"
660 PRINT "E.F.S.A"
670 PRINT "E.F.S.A"
680 PRINT "E.F.S.A"
690 PRINT "E.F.S.A"
700 PRINT "E.F.S.A"
710 PRINT "E.F.S.A"
720 PRINT "E.F.S.A"
730 PRINT "E.F.S.A"
740 PRINT "E.F.S.A"
750 PRINT "E.F.S.A"
760 PRINT "E.F.S.A"
770 PRINT "E.F.S.A"
780 PRINT "E.F.S.A"
790 PRINT "E.F.S.A"
800 PRINT "E.F.S.A"
810 PRINT "E.F.S.A"
820 PRINT "E.F.S.A"
830 PRINT "E.F.S.A"
840 PRINT "E.F.S.A"
850 PRINT "E.F.S.A"
860 PRINT "E.F.S.A"
870 PRINT "E.F.S.A"
880 PRINT "E.F.S.A"
890 PRINT "E.F.S.A"
900 PRINT "E.F.S.A"
910 PRINT "E.F.S.A"
920 PRINT "E.F.S.A"
930 PRINT "E.F.S.A"
940 PRINT "E.F.S.A"
950 PRINT "E.F.S.A"
960 PRINT "E.F.S.A"
970 PRINT "E.F.S.A"
980 PRINT "E.F.S.A"
990 PRINT "E.F.S.A"
1000 PRINT "E.F.S.A"

```

$$h_{n+1} = h_n + [f(t_n, h_n) + f(t_{n+1}, h_{n+1})] \frac{\Delta t}{2}$$

Método de Euler Modificado
 con $\Delta t = 0.1$
 para $y' = -y$, $y(0) = 1$

n	t _n	h _n	f(t _n , h _n)	f(t _{n+1} , h _{n+1})
1	0.1	0.904837	-0.904837	-0.951229
2	0.2	0.818731	-0.818731	-0.871156
3	0.3	0.740818	-0.740818	-0.798506
4	0.4	0.670320	-0.670320	-0.732267
5	0.5	0.606531	-0.606531	-0.671831
6	0.6	0.548812	-0.548812	-0.616707
7	0.7	0.496585	-0.496585	-0.566311
8	0.8	0.449329	-0.449329	-0.520146
9	0.9	0.406570	-0.406570	-0.477707
10	1.0	0.367879	-0.367879	-0.438563
11	1.1	0.332548	-0.332548	-0.402212
12	1.2	0.299993	-0.299993	-0.368261
13	1.3	0.270044	-0.270044	-0.336327
14	1.4	0.242456	-0.242456	-0.306027
15	1.5	0.217083	-0.217083	-0.277076
16	1.6	0.193768	-0.193768	-0.249201
17	1.7	0.172353	-0.172353	-0.223139
18	1.8	0.152689	-0.152689	-0.198641
19	1.9	0.134527	-0.134527	-0.175461
20	2.0	0.117701	-0.117701	-0.153373

METODO DE EULER MODIFICADO CONT.

n	t _n	h _n	f(t _n , h _n)	f(t _{n+1} , h _{n+1})
21	2.1	0.102155	-0.102155	-0.132242
22	2.2	0.087714	-0.087714	-0.113954
23	2.3	0.075130	-0.075130	-0.097194
24	2.4	0.064161	-0.064161	-0.081759
25	2.5	0.054663	-0.054663	-0.067456
26	2.6	0.046493	-0.046493	-0.054100
27	2.7	0.039419	-0.039419	-0.041528
28	2.8	0.033303	-0.033303	-0.029581
29	2.9	0.028019	-0.028019	-0.018101
30	3.0	0.023541	-0.023541	-0.007039
31	3.1	0.019745	-0.019745	-0.001845
32	3.2	0.016508	-0.016508	0.000000
33	3.3	0.013716	-0.013716	0.000000
34	3.4	0.011264	-0.011264	0.000000
35	3.5	0.009048	-0.009048	0.000000
36	3.6	0.007054	-0.007054	0.000000
37	3.7	0.005269	-0.005269	0.000000
38	3.8	0.003681	-0.003681	0.000000
39	3.9	0.002278	-0.002278	0.000000
40	4.0	0.001047	-0.001047	0.000000

```
10 REM METODO DE EULER MODIFICADO (E.E.S.)
15 DIM X(10)
17 PRINT "INICIO"
20 GOTO 30
30 X(0) = 1
35 X(1) = 1.5
40 REM SE DEFINE LA FUNCION F(T)
45 DEF FN F(T) = 1 - 2 * T * T * T + 4 * T * T - 3 * T
50 REM DATOS INICIALES
55 T = 0
60 PRINT "METODO DE EULER MODIFICADO (E.E.S.)"
65 PRINT "T=0 X(0)=1 X(1)=1.5"
70 PRINT "T=1 X(1)=1.5"
75 PRINT "FIN"
80 END
85 REM SE EMPLEA EL METODO DE EULER MODIFICADO
90 DIM X(10)
95 X(0) = 1
100 X(1) = 1.5
105 X(2) = X(1) + H * F(X(1), 1)
110 X(3) = X(2) + H * F(X(2), 2)
115 X(4) = X(3) + H * F(X(3), 3)
120 X(5) = X(4) + H * F(X(4), 4)
125 X(6) = X(5) + H * F(X(5), 5)
130 X(7) = X(6) + H * F(X(6), 6)
135 X(8) = X(7) + H * F(X(7), 7)
140 X(9) = X(8) + H * F(X(8), 8)
145 X(10) = X(9) + H * F(X(9), 9)
150 PRINT "X(10) = " X(10)
155 END
```

c) Solucion mediante el metodo de Nystrom

$$h_{n+1} = h_{n-1} + 2\Delta t f(t_n, h_n)$$

METODO DE NYSTRÖM

METODO DE NYSTRÖM

n	t _n	h _n	f(t _n , h _n)
0	0.0	0.0	0.0
1	0.1	0.1	0.1
2	0.2	0.4	0.4
3	0.3	0.9	0.9
4	0.4	1.6	1.6
5	0.5	2.5	2.5
6	0.6	3.6	3.6
7	0.7	4.9	4.9
8	0.8	6.4	6.4
9	0.9	8.1	8.1
10	1.0	10.0	10.0
11	1.1	12.1	12.1
12	1.2	14.4	14.4
13	1.3	16.9	16.9
14	1.4	19.6	19.6
15	1.5	22.5	22.5
16	1.6	25.6	25.6
17	1.7	28.9	28.9
18	1.8	32.4	32.4
19	1.9	36.1	36.1
20	2.0	40.0	40.0
21	2.1	44.1	44.1
22	2.2	48.4	48.4
23	2.3	52.9	52.9
24	2.4	57.6	57.6
25	2.5	62.5	62.5
26	2.6	67.6	67.6
27	2.7	72.9	72.9
28	2.8	78.4	78.4
29	2.9	84.1	84.1
30	3.0	90.0	90.0
31	3.1	96.1	96.1
32	3.2	102.4	102.4
33	3.3	108.9	108.9
34	3.4	115.6	115.6
35	3.5	122.5	122.5
36	3.6	129.6	129.6
37	3.7	136.9	136.9
38	3.8	144.4	144.4
39	3.9	152.1	152.1
40	4.0	160.0	160.0
41	4.1	168.1	168.1
42	4.2	176.4	176.4
43	4.3	184.9	184.9
44	4.4	193.6	193.6
45	4.5	202.5	202.5
46	4.6	211.6	211.6
47	4.7	220.9	220.9
48	4.8	230.4	230.4
49	4.9	240.1	240.1
50	5.0	250.0	250.0

```

100 REM METODO DE NYSTRON (C.E. 5.2.2)
110 DIM M(100)
120 M=0
130 PRINT
140 GOTO 150
150 REM INICIA EL METODO
160 PRINT "METODO DE NYSTRON"
170 REM DATO TOMADO DEL METODO DE NYSTRON
180 H=1
190 PRINT "METODO DE NYSTRON"
200 PRINT "METODO DE NYSTRON"
210 PRINT "METODO DE NYSTRON"
220 PRINT "METODO DE NYSTRON"
230 PRINT "METODO DE NYSTRON"
240 PRINT "METODO DE NYSTRON"
250 PRINT "METODO DE NYSTRON"
260 PRINT "METODO DE NYSTRON"
270 PRINT "METODO DE NYSTRON"
280 PRINT "METODO DE NYSTRON"
290 PRINT "METODO DE NYSTRON"
300 PRINT "METODO DE NYSTRON"
310 PRINT "METODO DE NYSTRON"
320 PRINT "METODO DE NYSTRON"
330 PRINT "METODO DE NYSTRON"
340 PRINT "METODO DE NYSTRON"
350 PRINT "METODO DE NYSTRON"
360 PRINT "METODO DE NYSTRON"
370 PRINT "METODO DE NYSTRON"
380 PRINT "METODO DE NYSTRON"
390 PRINT "METODO DE NYSTRON"
400 PRINT "METODO DE NYSTRON"
410 PRINT "METODO DE NYSTRON"
420 PRINT "METODO DE NYSTRON"
430 PRINT "METODO DE NYSTRON"
440 PRINT "METODO DE NYSTRON"
450 PRINT "METODO DE NYSTRON"
460 PRINT "METODO DE NYSTRON"
470 PRINT "METODO DE NYSTRON"
480 PRINT "METODO DE NYSTRON"
490 PRINT "METODO DE NYSTRON"
500 PRINT "METODO DE NYSTRON"
510 PRINT "METODO DE NYSTRON"
520 PRINT "METODO DE NYSTRON"
530 PRINT "METODO DE NYSTRON"
540 PRINT "METODO DE NYSTRON"
550 PRINT "METODO DE NYSTRON"
560 PRINT "METODO DE NYSTRON"
570 PRINT "METODO DE NYSTRON"
580 PRINT "METODO DE NYSTRON"
590 PRINT "METODO DE NYSTRON"
600 PRINT "METODO DE NYSTRON"
610 PRINT "METODO DE NYSTRON"
620 PRINT "METODO DE NYSTRON"
630 PRINT "METODO DE NYSTRON"
640 PRINT "METODO DE NYSTRON"
650 PRINT "METODO DE NYSTRON"
660 PRINT "METODO DE NYSTRON"
670 PRINT "METODO DE NYSTRON"
680 PRINT "METODO DE NYSTRON"
690 PRINT "METODO DE NYSTRON"
700 PRINT "METODO DE NYSTRON"
710 PRINT "METODO DE NYSTRON"
720 PRINT "METODO DE NYSTRON"
730 PRINT "METODO DE NYSTRON"
740 PRINT "METODO DE NYSTRON"
750 PRINT "METODO DE NYSTRON"
760 PRINT "METODO DE NYSTRON"
770 PRINT "METODO DE NYSTRON"
780 PRINT "METODO DE NYSTRON"
790 PRINT "METODO DE NYSTRON"
800 PRINT "METODO DE NYSTRON"
810 PRINT "METODO DE NYSTRON"
820 PRINT "METODO DE NYSTRON"
830 PRINT "METODO DE NYSTRON"
840 PRINT "METODO DE NYSTRON"
850 PRINT "METODO DE NYSTRON"
860 PRINT "METODO DE NYSTRON"
870 PRINT "METODO DE NYSTRON"
880 PRINT "METODO DE NYSTRON"
890 PRINT "METODO DE NYSTRON"
900 PRINT "METODO DE NYSTRON"
910 PRINT "METODO DE NYSTRON"
920 PRINT "METODO DE NYSTRON"
930 PRINT "METODO DE NYSTRON"
940 PRINT "METODO DE NYSTRON"
950 PRINT "METODO DE NYSTRON"
960 PRINT "METODO DE NYSTRON"
970 PRINT "METODO DE NYSTRON"
980 PRINT "METODO DE NYSTRON"
990 PRINT "METODO DE NYSTRON"
1000 PRINT "METODO DE NYSTRON"

```

d) Solución mediante el método de Taylor. (incluye derivado de segundo orden de f)

$$h_{n+1} = h_n + \Delta t \cdot T^{(n)} \quad - \quad 37$$

$$T^p = T^{(n)} = f_n + f'_n \frac{\Delta t}{2} ; f_n = 0.1 - 0.05 \sqrt{h_n} ; f'_n = -0.025 \frac{1}{\sqrt{h_n}}$$

n	t	h	T
1	0.0	0.1000	0.1000
2	0.1	0.1000	0.0950
3	0.2	0.1000	0.0900
4	0.3	0.1000	0.0850
5	0.4	0.1000	0.0800
6	0.5	0.1000	0.0750
7	0.6	0.1000	0.0700
8	0.7	0.1000	0.0650
9	0.8	0.1000	0.0600
10	0.9	0.1000	0.0550
11	1.0	0.1000	0.0500
12	1.1	0.1000	0.0450
13	1.2	0.1000	0.0400
14	1.3	0.1000	0.0350
15	1.4	0.1000	0.0300
16	1.5	0.1000	0.0250
17	1.6	0.1000	0.0200
18	1.7	0.1000	0.0150
19	1.8	0.1000	0.0100
20	1.9	0.1000	0.0050
21	2.0	0.1000	0.0000

THE
 DEPARTMENT OF THE ARMY
 OFFICE OF THE CHIEF OF STAFF
 WASHINGTON, D. C. 20315
 REPORT OF THE CHIEF OF STAFF
 ON THE PROGRESS OF THE
 ARMY'S CONTRIBUTION TO
 THE NATIONAL DEFENSE
 PROGRAM, 1964



f) Solución mediante el método de Runge-Kutta de orden cuatro

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN

t	y	k1	k2	k3	k4
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

MEMORIO DE FONTE-KITTA-DE-CURRIS-GRON-ALTA-
MUNICIPAL

13. 5000730	0.00000000	0.00000000
13. 5000731	0.00000000	0.00000000
13. 5000732	0.00000000	0.00000000
13. 5000733	0.00000000	0.00000000
13. 5000734	0.00000000	0.00000000
13. 5000735	0.00000000	0.00000000
13. 5000736	0.00000000	0.00000000
13. 5000737	0.00000000	0.00000000
13. 5000738	0.00000000	0.00000000
13. 5000739	0.00000000	0.00000000
13. 5000740	0.00000000	0.00000000
13. 5000741	0.00000000	0.00000000
13. 5000742	0.00000000	0.00000000
13. 5000743	0.00000000	0.00000000
13. 5000744	0.00000000	0.00000000
13. 5000745	0.00000000	0.00000000
13. 5000746	0.00000000	0.00000000
13. 5000747	0.00000000	0.00000000
13. 5000748	0.00000000	0.00000000
13. 5000749	0.00000000	0.00000000
13. 5000750	0.00000000	0.00000000
13. 5000751	0.00000000	0.00000000
13. 5000752	0.00000000	0.00000000
13. 5000753	0.00000000	0.00000000
13. 5000754	0.00000000	0.00000000
13. 5000755	0.00000000	0.00000000
13. 5000756	0.00000000	0.00000000
13. 5000757	0.00000000	0.00000000
13. 5000758	0.00000000	0.00000000
13. 5000759	0.00000000	0.00000000
13. 5000760	0.00000000	0.00000000
13. 5000761	0.00000000	0.00000000
13. 5000762	0.00000000	0.00000000
13. 5000763	0.00000000	0.00000000
13. 5000764	0.00000000	0.00000000
13. 5000765	0.00000000	0.00000000
13. 5000766	0.00000000	0.00000000
13. 5000767	0.00000000	0.00000000
13. 5000768	0.00000000	0.00000000
13. 5000769	0.00000000	0.00000000
13. 5000770	0.00000000	0.00000000
13. 5000771	0.00000000	0.00000000
13. 5000772	0.00000000	0.00000000
13. 5000773	0.00000000	0.00000000
13. 5000774	0.00000000	0.00000000
13. 5000775	0.00000000	0.00000000
13. 5000776	0.00000000	0.00000000
13. 5000777	0.00000000	0.00000000
13. 5000778	0.00000000	0.00000000
13. 5000779	0.00000000	0.00000000
13. 5000780	0.00000000	0.00000000
13. 5000781	0.00000000	0.00000000
13. 5000782	0.00000000	0.00000000
13. 5000783	0.00000000	0.00000000
13. 5000784	0.00000000	0.00000000
13. 5000785	0.00000000	0.00000000
13. 5000786	0.00000000	0.00000000
13. 5000787	0.00000000	0.00000000
13. 5000788	0.00000000	0.00000000
13. 5000789	0.00000000	0.00000000
13. 5000790	0.00000000	0.00000000
13. 5000791	0.00000000	0.00000000
13. 5000792	0.00000000	0.00000000
13. 5000793	0.00000000	0.00000000
13. 5000794	0.00000000	0.00000000
13. 5000795	0.00000000	0.00000000
13. 5000796	0.00000000	0.00000000
13. 5000797	0.00000000	0.00000000
13. 5000798	0.00000000	0.00000000
13. 5000799	0.00000000	0.00000000
13. 5000800	0.00000000	0.00000000

```

74 PRINT " "
75 REM EMPIEZA EL METODO
80 FOR N = 0 TO 20
90 GOTO LINE FN F(H(N))
110 M2 = FN F(H(N)) + DT * NI * OVER
120 M3 = FN F(H(N)) + DT * M2 * OVER
130 M4 = FN F(H(N)) + DT * M3 * OVER
140 H(N+1) = H(N) + DT * (M1 + 2 * M2 + 3 * M3 + M4) / 6
150 TN = TN + DT
160 PRINT "H(N) M1 M2 M3 M4"
170 NEXT N
175 END

```

g) Solución mediante la fórmula cerrada de cuarto orden de Adams

METODO DE ADAMS (DT=0.4)

IN	TH	H(N)	F(N)
1	2	15.1111784	0.5095471
2	6	15.1111784	0.5095471
3	10	15.0894229	0.524433652
4	14	14.9144903	0.57613765
5	18	14.44434	0.619141269
6	22	14.40228	0.65254127
7	26	14.2993283	0.670721931
8	30	14.1223958	0.67578617
9	34	13.8473108	0.667182974
10	38	13.7754171	0.655251454
11	42	13.6551447	0.641437522
12	46	13.4337012	0.617671507
13	50	13.2738897	0.5921555821
14	54	13.1000732	0.5610872749
15	58	12.9481239	0.527417515
16	62	12.7832975	0.493112954
17	66	12.6339758	0.4777127712
18	70	12.4739384	0.476694261

METODO DE ADAMS (DT=0.4)

IN	TH	H(N)	F(N)
1	2	14.8444823	0.926409619
2	6	14.4782802	0.990341072
3	10	14.1122957	1.037992145
4	14	13.7754171	1.065710282
5	18	13.4337012	1.0692672503
6	22	13.1000732	1.0510212702
7	26	12.7832975	1.0299119947
8	30	12.4739384	1.000240131
9	34	12.1739521	0.9743731507
10	38	11.8827045	0.950914095
11	42	11.597485	0.930751432
12	46	11.3204357	0.912091244
13	50	11.0516198	0.896019507
14	54	10.792515	0.882137075
15	58	10.5437511	0.870131122
16	62	10.3021971	0.86013017
17	66	10.068200	0.85213101
18	70	9.8412721	0.84613101

EN EL METODO DE...
EN EL METODO DE...
EN EL METODO DE...

EN EL METODO DE...
EN EL METODO DE...
EN EL METODO DE...

EN EL METODO DE...
EN EL METODO DE...
EN EL METODO DE...

EN EL METODO DE...
EN EL METODO DE...
EN EL METODO DE...

EN EL METODO DE...
EN EL METODO DE...
EN EL METODO DE...

EN EL METODO DE...
EN EL METODO DE...
EN EL METODO DE...

EN EL METODO DE...
EN EL METODO DE...
EN EL METODO DE...

EN EL METODO DE...
EN EL METODO DE...
EN EL METODO DE...

h) Solución mediante el método predictor-modificador-corrector de Hamming

MÉTODOS DE HAMMING

TIPO

INICIAL

FINAL

- 13
- 14
- 15
- 16
- 17
- 18
- 19
- 20
- 21
- 22
- 23
- 24
- 25
- 26
- 27
- 28
- 29
- 30
- 31
- 32
- 33
- 34
- 35
- 36
- 37
- 38
- 39
- 40

- 13. 2198520
- 14. 3179210
- 15. 8848110
- 16. 2209470
- 17. 4788300
- 18. 2993880
- 19. 1002857
- 20. 3177382
- 21. 7784170
- 22. 3754190
- 23. 4277010
- 24. 2722890
- 25. 1080780
- 26. 2481240
- 27. 1138990
- 28. 8228780
- 29. 4785660

- 13. 0983580100
- 14. 0983580100
- 15. 0983580100
- 16. 0983580100
- 17. 0983580100
- 18. 0983580100
- 19. 0983580100
- 20. 0983580100
- 21. 0983580100
- 22. 0983580100
- 23. 0983580100
- 24. 0983580100
- 25. 0983580100
- 26. 0983580100
- 27. 0983580100
- 28. 0983580100
- 29. 0983580100
- 30. 0983580100
- 31. 0983580100
- 32. 0983580100
- 33. 0983580100
- 34. 0983580100
- 35. 0983580100
- 36. 0983580100
- 37. 0983580100
- 38. 0983580100
- 39. 0983580100
- 40. 0983580100

MÉTODOS DE HAMMING (OTA 4)

TIPO

INICIAL

FINAL

- 13
- 14
- 15
- 16
- 17
- 18
- 19
- 20
- 21
- 22
- 23
- 24
- 25
- 26
- 27
- 28
- 29
- 30
- 31
- 32
- 33
- 34
- 35
- 36
- 37
- 38
- 39
- 40

- 13. 9790850
- 14. 1002857
- 15. 7784170
- 16. 4277010
- 17. 1080780
- 18. 2481240
- 19. 4785660
- 20. 1788510
- 21. 8228780
- 22. 3754190
- 23. 3177382
- 24. 2722890
- 25. 1080780
- 26. 2481240
- 27. 1080780
- 28. 2481240
- 29. 4785660
- 30. 1788510
- 31. 8228780
- 32. 3754190
- 33. 3177382
- 34. 2722890
- 35. 1080780
- 36. 2481240
- 37. 1080780
- 38. 2481240
- 39. 4785660
- 40. 1788510

- 13. 0983580100
- 14. 0983580100
- 15. 0983580100
- 16. 0983580100
- 17. 0983580100
- 18. 0983580100
- 19. 0983580100
- 20. 0983580100
- 21. 0983580100
- 22. 0983580100
- 23. 0983580100
- 24. 0983580100
- 25. 0983580100
- 26. 0983580100
- 27. 0983580100
- 28. 0983580100
- 29. 0983580100
- 30. 0983580100
- 31. 0983580100
- 32. 0983580100
- 33. 0983580100
- 34. 0983580100
- 35. 0983580100
- 36. 0983580100
- 37. 0983580100
- 38. 0983580100
- 39. 0983580100
- 40. 0983580100

i) obtención de la solución exacta de la ecuación diferencial

$$\frac{dh}{dt} = 0.1 - 0.05\sqrt{h}$$

Por separación de variables

$$\frac{dh}{0.1 - 0.05\sqrt{h}} = dt$$

integrando

$$\int \frac{dh}{0.1 - 0.05\sqrt{h}} = t + C$$

si

$$x = \sqrt{h}$$

$$x^2 = h$$

$$2x dx = dh$$

así

$$\int \frac{dh}{0.1 - 0.05\sqrt{h}} = \int \frac{2x dx}{0.1 - 0.05x} = -2 \int \frac{x dx}{0.05x - 0.1}$$

como

$$\int \frac{x dx}{ax + b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln(ax + b)$$

entonces

$$\begin{aligned} -2 \int \frac{x dx}{0.05x - 0.1} &= -2 \left[\frac{x}{0.05} - \frac{0.1}{0.0025} \ln(0.05x - 0.1) \right] \\ &= -40x + 80 \ln(0.05x - 0.1) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int \frac{dh}{0.1 - 0.05\sqrt{h}} = -40\sqrt{h} - 80 \ln(0.05\sqrt{h} - 0.1) = t + C$$

como $h=16$ para $t=0$

$$C = -0 - 40\sqrt{16} - 80 \ln(0.05\sqrt{16} - 0.1) = 24.206807$$

la solución es

$$t = -24.206807 - 40\sqrt{h} - 80 \ln(0.05\sqrt{h} - 0.1)$$

j.) comparación de los resultados del método de Euler con distintos intervalos de tiempo y la solución exacta

tiempo	$\Delta t=1$	$\Delta t=2$	$\Delta t=3$	$\Delta t=4$	EXACTA
1	15.9				15.90031
2	15.80063	15.8			15.80105
3	15.70188		15.7		15.70280
4	15.60375	15.60251		15.6	15.60498
5	15.50624				15.50777
6	15.40935	15.40751	15.40565		15.41118
7	15.31308				15.31500
8	15.21742	15.21498		15.21006	15.21983
9	15.12237		15.11690		15.12807
10	15.02793	15.02492			15.03592
11	14.93410				14.93738
12	14.84088	14.83730	14.83369	14.83006	14.84443
13	14.74826				14.75009
14	14.65624	14.65311			14.66035
15	14.56483		14.55598		14.56900
16	14.47401	14.46933		14.45987	14.47865
17	14.38378				14.38869
18	14.29415	14.28894	14.28319		14.29933
19	14.20511				14.21055
20	14.11667	14.11093		14.09939	14.12236
21			14.01679		

k) comparación de los resultados del método de Euler Mejorado y la solución exacta. Valores de h .

tiempo	$\Delta t = 1$	$\Delta t = 2$	$\Delta t = 3$	$\Delta t = 4$	EXACTA
1	15.90031				15.90031
2	15.80125	15.80125			15.80125
3	15.70281		15.70283		15.70280
4	15.60498	15.60499		15.60503	15.60498
5	15.50778				15.50777
6	15.41118	15.41120	15.41122		15.41118
7	15.31521				15.31520
8	15.21984	15.21986		15.21994	15.21983
9	15.12508		15.12514		15.12507
10	15.03093	15.03095			15.03092
11	14.93738				14.93733
12	14.84444	14.84447	14.84452	14.84459	14.84443
13	14.75210				14.75209
14	14.66036	14.66039			14.66035
15	14.56921		14.56931		14.56920
16	14.47866	14.47870		14.47885	14.47865
17	14.38871				14.38869
18	14.29934	14.29938	14.29945		14.29935
19	14.21056				14.21055
20	14.12237	14.12242	14.12249	14.12260	14.12236

Ejemplo 5.11.2

51

Encontrar una solución aproximada de la ecuación $y'' + y = x$ la cual pasa por $(0,0)$ y $(1,0)$ sabiendo que tiene asociado el funcional $J = \int_0^1 (y'^2 - y^2 + 2xy) dx$.

Solución (Método de Ritz, subcapítulo 5.8.1)

Sea la solución del tipo $y = u_0(x) + a_1 u_1(x)$, donde $u_0(x) = 0$ y $u_1(x) = x - x^2$, ya que $u_0(x)$ satisface las condiciones $y(0) = 0$ y $y(1) = 0$, y la función $u_1(x)$ es anula en $(0,0)$ y $(1,0)$, es decir $u_1(0) = 0 - 0^2 = 0$ y $u_1(1) = 1 - 1^2 = 0$

$$y = a_1 (x - x^2) \quad \dots (\alpha)$$

Y el problema consiste en encontrar el valor de a_1 .

Con base en la ec. α

$$\left. \begin{aligned} y' &= a_1 (1 - 2x) \\ y'' &= a_1^2 (1 - 2x)^2 = a_1^2 (1 - 4x + 4x^2) \\ y^2 &= a_1^2 (x^2 - 2x^3 + x^4) \\ 2xy &= 2a_1 (x^2 - x^3) \end{aligned} \right\} \dots (\beta)$$

Sustituyendo las ecs. β en el funcional

$$J = \int_0^1 [a_1^2 (1 - 4x + 4x^2) - a_1^2 (x^2 - 2x^3 + x^4) + 2a_1 (x^2 - x^3)] dx$$

Integrando

$$J = a_1^2 \left[x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 \right]_0^1 - a_1^2 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 + 2a_1 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1$$

$$J = a_1^2 \left[1 - 2 + \frac{4}{3} \right] - a_1^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right] + 2a_1 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right]$$

$$J = a_1^2 \left(\frac{1}{3} \right) - a_1^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{10} \right) + a_1 \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{3}{10} a_1^2 + \frac{1}{6} a_1 \quad \dots (\delta)$$

Para hacer mínimo el funcional

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} = 0$$

52

así con base en la ec. 8

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} = 2a_1 \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = 0$$

$$\frac{3}{5} a_1 = -\frac{1}{6}$$

$$a_1 = -\frac{5}{18}$$

entonces, una solución aproximada de la ec. diferencial es

$$y = -\frac{5}{18} (x - x^2)$$

Ejemplo 5.11.3

Encontrar una solución aproximada de la ecuación $y'' + x = 0$ de manera que $y(1) = 0$ y $y(2) = -1$.

Solución (Método de Galerkin, subcapítulo 5.8.2)

Como no se dispone del funcional se procederá mediante el método de Galerkin.

Se propone una solución del tipo $y = u_0(x) + a_1 u_1(x)$ siendo $u_0(x) = 1-x$ y $u_1(x) = 2x - x^2$ pues $u_0(1) = 0$ y $u_0(2) = -1$; y también $u_1(0) = 0$ y $u_1(2) = 0$, de modo que

$$y = (1-x) + a_1 (2x - x^2) \quad \dots (\alpha)$$

Se trata de encontrar el valor de a_1

Con base en la ec. α

$$y' = -1 + a_1(2 - 2x)$$

$$y'' = -2a_1 \quad \dots (\beta)$$

Al sustituir la ec β en la ec. diferencial

$$-2a_1 + x \neq 0$$

$$-2a_1 + x = R(x)$$

Por lo que

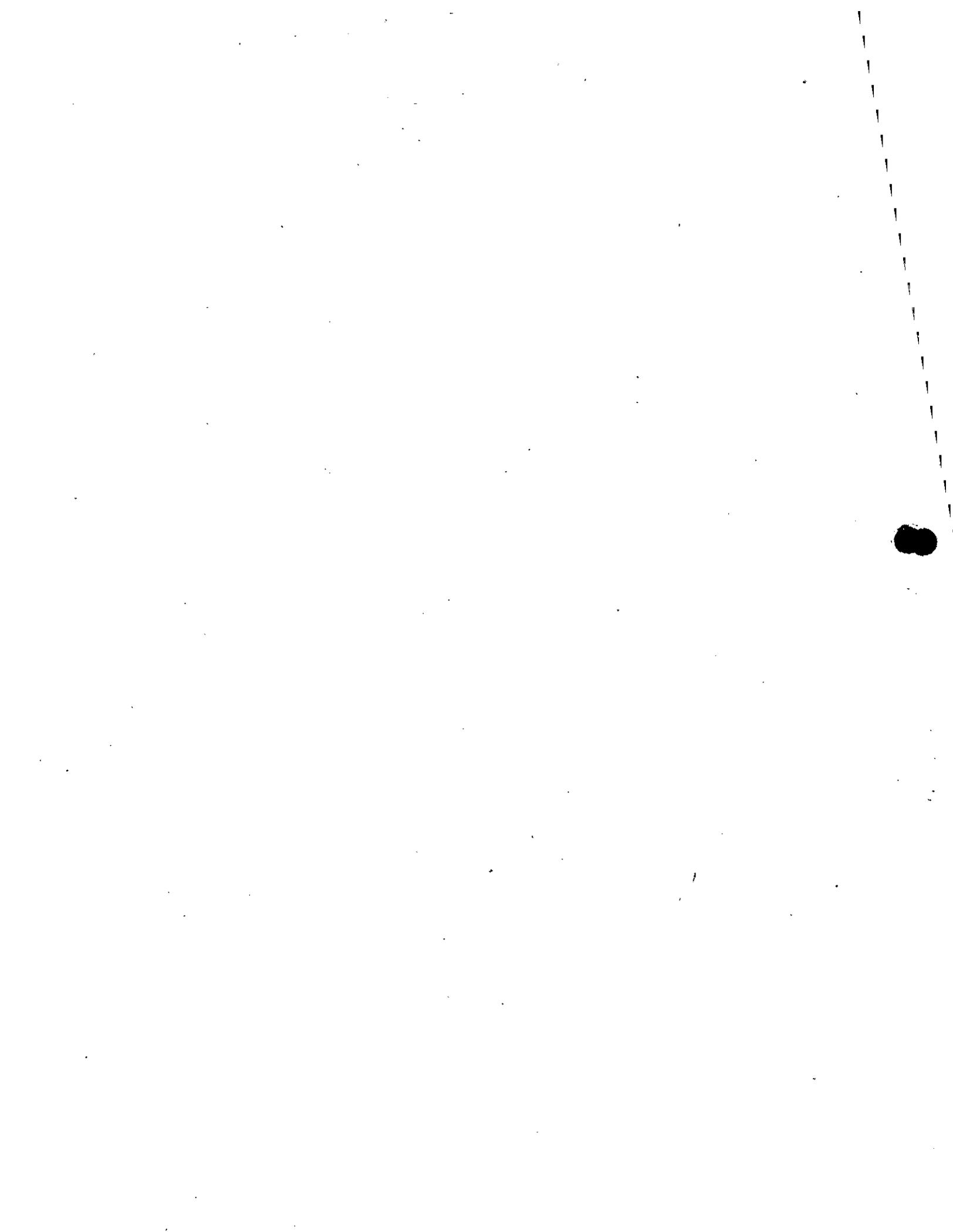
$$\begin{aligned} \int_1^2 R(x) u_1(x) dx &= \int_1^2 (-2a_1 + x) \cdot (2x - x^2) dx \\ &= \int_1^2 (-4a_1x + 2x^2 + 2a_1x^2 - x^3) dx \\ &= \left[-4a_1 \frac{x^2}{2} + (2+2a_1) \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_1^2 \\ &= \left[-4a_1 \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{(2+2a_1)}{3} (8-1) - \left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4} \right) \right] \\ &= -\frac{4}{3} a_1 + \frac{11}{12} = 0 \end{aligned}$$

$$-\frac{4}{3} a_1 = -\frac{11}{12}$$

$$a_1 = \frac{33}{48}$$

por lo que una solución aproximada es

$$y = 1 - x + \frac{33}{48} (2x - x^2)$$





**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

CURSO: INTRODUCCION A LOS METODOS NUMERICOS APLICADOS A LA INGENIERIA
HIDRAULICA ORGANIZADO EN COLABORACION DE LA DIRECCION GENERAL DE CAP-
TACIONES Y CONDUCCIONES DE AGUA DE LA SECRETARIA DE AGRICULTURA Y RE-
CURSOS HIDRAULICOS

SOLUCION NUMERICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

M. EN I. POLIOPTRÓ MARTINEZ AUSTRIA
NOVIEMBRE DE 1984
MEXICO, D.F.



4. SOLUCION NUMERICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

4.1 INTRODUCCION

La solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales es uno de los problemas fundamentales del análisis numérico, no solamente porque existen muchos problemas que, por si mismos conducen a un sistema de este tipo; sino también porque otros métodos numéricos, como los esquemas implícitos de diferencias finitas, quedan finalmente expresados como un conjunto de ecuaciones lineales.

Los sistemas de ecuaciones lineales tienen solución analítica conocida, como se recordará más adelante; y sin embargo también existen varios métodos numéricos de solución, y se producen continuamente otros. La razón de esta situación es que, dada la magnitud de los sistemas a resolver, y su variedad; debe elegirse entre estos el más eficiente para un problema dado; con el fin de minimizar el tiempo de computo.

En este capítulo se presentarán algunos de los métodos numéricos más conocidos de solución de sistemas de ecuaciones lineales; y se ejemplificará su aplicación a un problema importante en hidráulica: la solución de una red de distribución de agua potable.

4.2 SOLUCION ANALITICA DE SISTEMAS LINEALES

Un sistema lineal es un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\text{Ecuación 1: } a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \text{-----} + a_{1n} X_n = b_1$$

$$\text{Ecuación 2: } a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \text{-----} + a_{2n} X_n = b_2 \quad (1)$$

$$\text{Ecuación m: } a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \text{-----} + a_{mn} X_n = b_m$$

Y la solución del sistema son los valores de las variables X_i ; donde $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

El sistema tiene solución única en el caso en que el número de renglones (n) sea igual al de columnas (m); y las ecuaciones sean linealmente independientes. Se dice que el sistema es compatible determinado.

En forma matricial, un sistema de ecuaciones $n \times n$ puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{nz} & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$[A] \bar{X} = \bar{b} \quad (2.a)$$

o en notación tensorial:

$$a_{ij} X_j = b_i$$

donde:

a_{ij} = elemento de la matriz A en el renglón i , columna j

X_j = elemento j del vector \bar{X}

b_i = elemento i del vector \bar{b}

Las operaciones con matrices, y sus propiedades, están definidas como sigue:

1. Adición.

Sean A y B dos matrices del mismo tipo (m, n) , su suma C está dada por:

$$C = A + B$$

o en notación tensorial:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Propiedades:

$$a. A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$b. A + B = B + A$$

c. Existe una matriz W (la matriz nula), tal que:

$$A + W = A$$

2. Multiplicación por un escalar

Sean a, b dos escalares; y A, B dos matrices (m, n) ; la multiplicación de una matriz por un escalar se define como:

$$A = a B$$

$$a_{ij} = a b_{ij}$$

Propiedades:

$$a. b(A + B) = bA + bB$$

$$b. (a + b)A = aA + bA$$

$$c. a \cdot (b A) = (a \cdot b) A$$

$$d. 1 \cdot A = A$$

3. Producto de dos matrices

Sean $A (a_{ij})$ una matriz (m, p) y $B (b_{ij})$ una matriz (p, n) .
Su producto $C : C = A \cdot B$ se define como:

$$C_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Propiedades:

a. El producto es asociativo:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

b. El producto no es conmutativo

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

c. Existe una matriz cuadrada I (la matriz identidad) tal que:

$$I \cdot A = A$$

d. Existen matrices no nulas cuyo producto es la matriz nula

e. El producto es distributivo respecto a la suma:

$$A \cdot (B + C) = AB + AC$$

$$(A + C) \cdot B = A \cdot B + C \cdot B$$

f. El producto por un escalar (a):

$$a(A \cdot B) = A(a \cdot B)$$

La multiplicación de matrices puede ser un cálculo prolongado, dado que cada elemento de la matriz resultado es una sumatoria, que requiere realizar p multiplicaciones y p adiciones. Conviene contar con una subrutina que haga esta p operación; como se muestra en la figura 1.

Para estudiar la solución analítica de un sistema de ecuaciones lineales se requiere recordar previamente algunos conceptos.

Dada una matriz A (m, n); con elementos a_{ij} , su transpuesta A^T (n, m) se obtiene realizando la operación:

$$a_{ij}^T = a_{ji}$$

Es decir intercambiando renglones por columnas de la matriz A .

Una matriz simétrica es una que cumple que $A = A^T$.

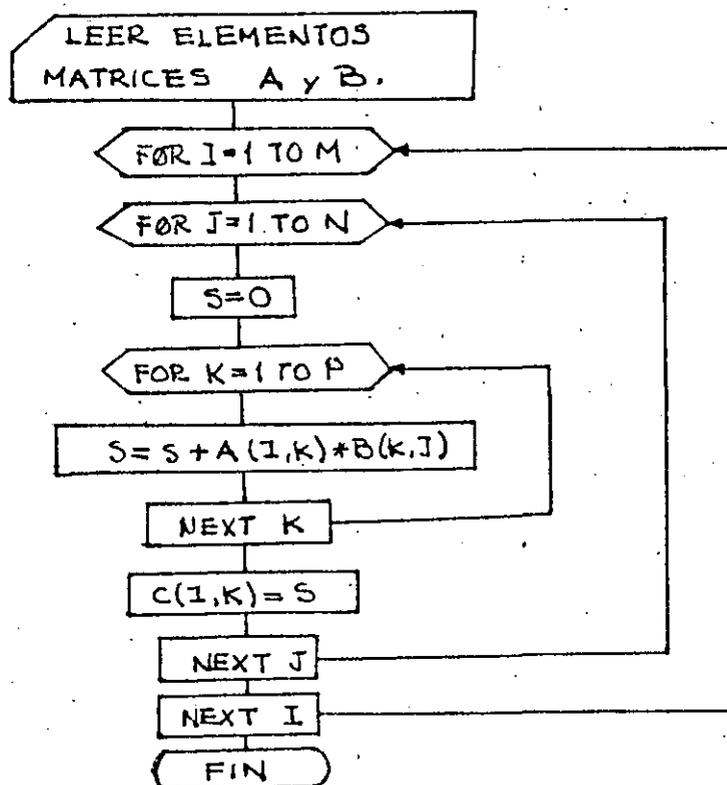


Figura 1. Diagrama de flujo para una subrutina de multiplicación de matrices

Considérese una matriz cuadrada (n, n) , A . Denótese por M_{ij} la submatriz cuadrada que se obtiene quitando a A el i -ésimo renglón y la j -ésima columna.

El determinante de esta submatriz $(|M_{ij}|)$ se denomina "el menor" del elemento a_{ij} de A ; y se define "el cofactor" de a_{ij} , denotado A_{ij} , como el menor con signo dado por la operación:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}| \quad (3)$$

Los cofactores integran una nueva matriz, la matriz de cofactores, que se denotará por A^c .

Se define la matriz adjunta como la transpuesta de la de cofactores: $(A^c)^T$.

Si A es una matriz cuadrada su inversa se denota por A^{-1} ; con la que se cumple:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

y se puede demostrar que:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^c)^T \quad (4)$$

Entonces, si se tiene un sistema lineal $A \cdot \bar{X} = \bar{b}$; este sistema tiene solución (si A es invertible) para cualquier b , dada por:

$$\bar{X} = A^{-1} \cdot \bar{b} \quad (5)$$

o bien, de acuerdo a lo anterior:

$$\bar{X} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^c)^T \cdot \bar{b} \quad (5.a)$$

Si existe esta solución cabría preguntar sobre la necesidad de disponer de métodos numéricos como solución alternativa. Este requerimiento se origina en la gran cantidad de operaciones que se deben efectuar para cumplir con (5.a).

Para resolver el sistema se necesitan:

- a. Determinar $|A|$ requiere $n \cdot n!$ multiplicaciones y adiciones
- b. A^c tiene n^2 términos, y para calcular cada cofactor se requieren $(n-1) \cdot (n-1)!$ multiplicaciones y adiciones
- c. Efectuar la operación $(A^c)^T$ requiere n^2 multiplicaciones

En total se requiere de $n^3(n-1)!$ operaciones; que resulta imposible aún para sistemas pequeños.

4.3 METODO DE GAUSS

Los métodos numéricos de solución de sistemas de ecuaciones lineales se clasifican en dos tipos: directos e indirectos. Los primeros son aquellos en los que la solución se obtiene de manera inmediata, mientras que en los segundos se requieren varias iteraciones.

Los métodos directos aprovechan para la solución las propiedades de un sistema con matriz de coeficientes diagonal o triangular.

Supóngase, en el caso más sencillo, que se tiene un sistema de ecuaciones $A \bar{X} = \bar{b}$; y la matriz A es una matriz diagonal ($a_{ij} = 0$ si $i \neq j$):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Entonces la solución del sistema es muy sencilla; y está dada por:

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad (6)$$

con $i = 1, 2, \dots, n$.

Si se tuviera un sistema de ecuaciones con una matriz de coeficientes triangular superior; el procedimiento de solución sería igualmente inmediato, aunque un poco más laborioso.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

La solución para la variable x_n sería sencillamente:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \quad (7.a)$$

conocido este valor, se puede despejar, para la variable x_{n-1} :

$$x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1, n-1}} \left[b_{n-1} - a_{n-1, n} \cdot x_n \right] \quad (7.b)$$

y así sucesivamente. En general, para la i -ésima variable:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - a_{i,i+1}x_{i+1} - a_{i,i+2}x_{i+2} - \dots - a_{i,n}x_n \right] \quad (8)$$

Este procedimiento se denomina de "vuelta atrás" y, como puede verse, posee características de sencillez y eficiencia que lo hacen muy atractivo. Si un sistema cualquiera de ecuaciones se redujera a la forma triangular superior, entonces el resto del procedimiento de solución sería muy sencillo: Esta es la idea fundamental del método de Gauss.

En la figura 2 se muestra un diagrama de flujo para el procedimiento de "vuelta atrás".

La primera etapa del procedimiento de Gauss, como se ha dicho, consiste en modificar el sistema de ecuaciones de manera que la matriz de coeficientes quede triangular superior. Esto se logra utilizando las siguientes operaciones entre renglones; que no alteran al sistema:

1. El renglón i -ésimo puede multiplicarse por cualquier constante distinta de cero; y usar el resultado en el lugar del original; denotado R_i el i -ésimo renglón; y λ una constante no cero:

$$\lambda R_i \rightarrow R_i$$

2. Puede multiplicarse el j -ésimo renglón por una constante λ y el resultado sumarlo al i -ésimo, substituyendo este último resultado en el renglón i -ésimo.

$$(\lambda R_j + R_i) \rightarrow R_i$$

3. Los renglones R_i y R_j pueden intercambiarse:

$$R_i \leftrightarrow R_j$$

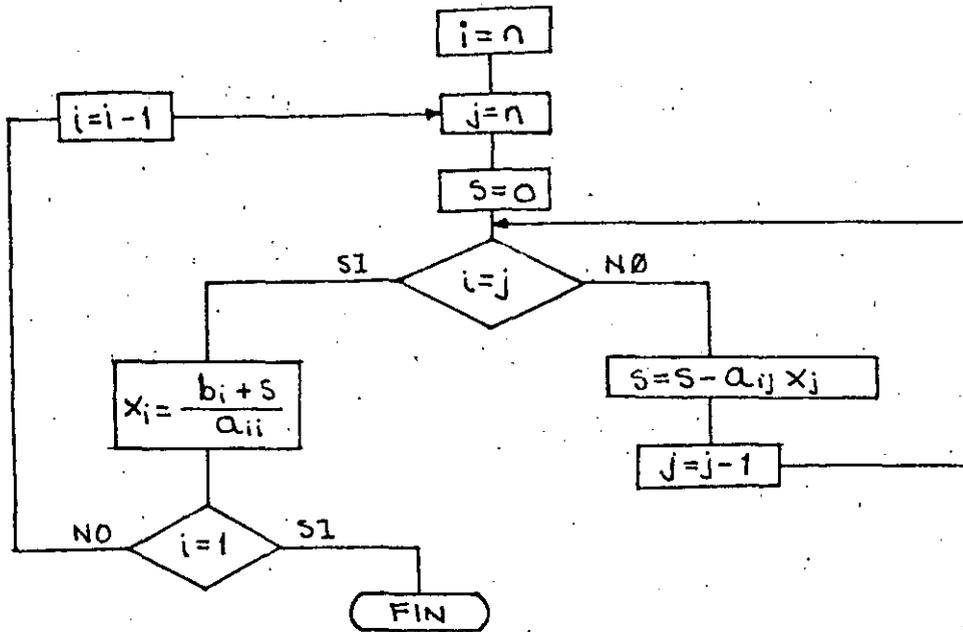


Figura 2. Subrutina del procedimiento de "vuelta atrás"

intercambia por otro renglón, bajo la diagonal principal, que no tenga elemento nulo en esa columna. Si toda la columna, de la diagonal principal hacia abajo, se ha anulado, entonces el sistema no tiene solución única.

El algoritmo del método de Gauss sería el siguiente:

ALGORITMO GAUSS

Para resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}
 a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\
 a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\
 \dots & \\
 \dots & \\
 a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n &= b_n
 \end{aligned}$$

Paso 1. Construya la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline a_n & a_n & a_n & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right]$$

Paso 2. Sea $i = 1$

Paso 3. Si $a_{ii} \neq 0$ vaya a paso 5

Paso 4. Sea p el número de un renglón tal que:

$$a_{ii} = 0, a_{i+1,i} = 0, \dots, a_{p-1,i} = 0 \text{ pero } a_{pi} \neq 0$$

Si existe este renglón p ; efectúe la operación $R_p \leftrightarrow R_i$ y continúe.

Si p no existe, el sistema no tiene solución única y el procedimiento debe detenerse.

Paso 5. Sea $m_{ji} = a_{ji}/a_{ii}$. Para $j = i+1, i+2, \dots, n$; haga las operaciones:

$$(R_j - m_{ji} R_i) \rightarrow R_j$$

Paso 6. Haga $i = i + 1$. Si $i < n$ regrése a paso 3. Si $i = n$ continúe.

Paso 7. Si $a_{nn} = 0$ el sistema no tiene solución única

Si $a_{nn} \neq 0$ aplique el procedimiento de vuelta atrás para encontrar la solución:

$$a. X_n = b_n / a_{nn}$$

$$b. X_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} X_j) / a_{ii} \text{ para } i = n-1, n-2, \dots, 1$$

Paso 8. El procedimiento se ha terminado

En la figura 3 se presenta un listado en lenguaje BASIC para resolver un sistema de ecuaciones con el método de Gauss.

Para ejemplificar claramente el método de solución de Gauss, a continuación se aplicará paso a paso al siguiente sistema sencillo de ecuaciones:

$$3 X_1 + 1.5 X_2 + 4 X_3 = 8$$

$$.21 X_1 + .23 X_2 + X_3 = .83$$

$$2 X_1 + 8 X_2 + 10 X_3 = 47$$

Paso 1. La matriz aumentada quedaría:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1.5 & 4 & 8 \\ .21 & .23 & 1 & .83 \\ 2 & 8 & 10 & 47 \end{array} \right]$$

Paso 2. $i = 1$

Paso 3. $a_{ii} = a_{11} = 3$ entonces se continúa en paso 5

Paso 5. a) Para $j=i+1 = 2$ se tiene: $m_{ji} = m_{21} = a_{ji}/a_{ii} = a_{21}/a_{11}$ es decir:

$$m_{21} = \frac{0.21}{3} = 0.07$$

La operación $(R_j - m_{ji} R_i) \rightarrow R_j$

es entonces: $(R_2 - m_{21} R_1) \rightarrow R_2$

que numericamente:

$$\begin{array}{l}
 R_1: \quad | \quad 3 \quad 1.5 \quad 4 \quad \vdots \quad 8 \quad | \\
 m_{21} R_1: \quad 0.07 \quad | \quad 3 \quad 1.5 \quad 4 \quad \vdots \quad 8 \quad | \\
 - m_{21} R_1: \quad | \quad -0.21 \quad -0.105 \quad -0.28 \quad \vdots \quad -0.56 \quad | \\
 R_2: \quad | \quad 0.21 \quad 0.23 \quad 1 \quad \vdots \quad .83 \quad | \\
 - m_{21} R_1 + R_2 = \quad | \quad 0 \quad 0.125 \quad 0.72 \quad \vdots \quad 0.27 \quad |
 \end{array}$$

Entonces el nuevo renglón 2 es:

$$R_2 = \quad | \quad 0 \quad 0.125 \quad 0.72 \quad \vdots \quad 0.27 \quad |$$

b) Para $j=1+2=3$ se tiene:

$$m_{ji} = m_{31} = \frac{a_{ji}}{a_{ii}} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{2}{3} = 0.6667$$

y la operación $(R_j - m_{ji} R_i) \rightarrow R_j$

es entonces: $(R_3 - m_{31} R_1) \rightarrow R_3$

Numéricamente:

$$\begin{array}{l}
 m_{31} R_1: \quad 0.667 \quad | \quad 3 \quad 1.5 \quad 4 \quad \vdots \quad 8 \quad | \\
 - m_{31} R_1: \quad | \quad -2 \quad -1 \quad -2.667 \quad \vdots \quad -5.333 \quad | \\
 R_3: \quad | \quad 2 \quad 8 \quad 10 \quad \vdots \quad 47 \quad |
 \end{array}$$

$$- m_{31} R_1 + R_3: \quad | \quad 0 \quad 7 \quad 7.333 \quad \vdots \quad 41.6667 \quad |$$

Entonces el nuevo R_3 es:

$$R_3: \quad | \quad 0 \quad 7 \quad 7.333 \quad \vdots \quad 41.6667 \quad |$$

La nueva matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1.5 & 4 & \vdots & 8 \\ 0 & 0.125 & 0.72 & \vdots & 0.27 \\ 0 & 7 & 7.333 & \vdots & 41.6667 \end{array} \right]$$

Paso 6. Se hace $i=i+1 = 1+1 = 2$.

como $i < n$ ($2 < 3$) se regresa al paso 3

Paso 3. $a_{ii} = a_{22} = 0.125 \neq 0$. Se continúa otra vez al paso 5

Paso 5. Para $j = i+1 = 3$

$$m_{ji} = m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{7}{0.125} = 56$$

La operación $(R_j - m_{ji} R_i) \rightarrow R_j$

es: $(R_3 - m_{31} R_2) \rightarrow R_3$

Numericamente:

$$m_{32} R_2: \quad 56 \quad | \quad 0 \quad 0.125 \quad 0.72 \quad \vdots \quad 0.27 \quad |$$

$$- m_{32} R_2: \quad | \quad 0 \quad -7 \quad -40.32 \quad \vdots \quad -15.12 \quad |$$

$$R_3: \begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & 7.333 & 41.667 \\ 0 & 0 & -32.98 & 26.5467 \end{array}$$

Paso 6. Se hace $i=i+1 = 2+1=3$ y como $i=n$; se continúa al paso 7

La matriz aumentada final es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1.5 & 4 & 8 \\ 0 & 0.125 & 0.72 & 0.27 \\ 0 & 0 & -32.98 & 26.5467 \end{array} \right]$$

Paso 7. La aplicación del procedimiento de vuelta atrás permite calcular la solución:

$$x_3 = \frac{26.5467}{-32.98} = -0.805$$

$$x_2 = \frac{(0.27 - 0.72(-.805))}{0.125} = 6.797$$

$$x_1 = \frac{(8 - 4(-.805) - 1.5(6.797))}{3} = 0.3415$$

Paso 8. La solución del sistema es:

$$x_3 = -.805 \quad x_2 = 6.797 \quad x_1 = 0.3415$$

La programación del algoritmo del método de Gauss es relativamente sencilla. En la figura 3 se presenta el listado de un programa en BASIC, y se incluye en las páginas siguientes un breve manual de usuario.

Utilizando este programa los resultados del ejemplo anterior serían:

$$X_1 = 0.3419 \quad X_2 = 6.795 \quad X_3 = -.8047$$

Como puede verse, existe una ligera diferencia respecto al resultado antes obtenido; y se debe a que la computadora opera con un mayor número de cifras decimales. El error cometido se denomina "de redondeo", y está presente en todos los métodos numéricos.

4.4 METODO DE JACOBI

El procedimiento de Gauss, con ser más eficiente en cuanto a tiempo de cálculo que los procedimientos analíticos, puede aún dar origen a pérdidas de eficiencia en determinados casos; por ejemplo cuando la matriz de coeficientes tiene muchos términos nulos.

En situaciones como la anterior se puede utilizar algún método indirecto; que son métodos de naturaleza iterativa, es decir probando a partir de un vector inicial propuesto \bar{X}_0 .

```

5 CLEAR
10 DISP "ESTE PROGRAMA RESUELVE
UN SISTEMA DE N ECUACIONES
CON EL ALGORITMO DE GAUSS
"
15 DISP "*****"
20 DISP "LOS COEFICIENTES DE LA
MATRIZ AUMENTADA SE INTRODUCEN
EN FORMA DE RENGLON"
25 DISP "*****"
30 DISP "TECLEE EL RANGO DE LA
MATRIZ DE COEFICIENTES"
40 DISP "N=?"
50 INPUT N
60 DIM A(20,21),X(20),C(1,21),M
(21)
70 FOR I=1 TO N
80 DISP "TECLEE LOS COEFICIENTES
DEL RENGLON";I
90 FOR J=1 TO N+1
100 DISP "A(";I;"),(";J;")=" @ INP
UT A(I,J)
110 NEXT J
120 NEXT I
130 I=1
140 IF A(I,I)#0 THEN GOTO 260
150 P=1
160 IF A(I,P)#0 THEN GOTO 190
170 IF P>=N THEN GOTO 410
180 P=P+1 @ GOTO 160
190 FOR J=1 TO N+1
200 C(I,J)=A(I,J)
210 NEXT J
220 FOR J=1 TO N+1
230 A(I,J)=A(P,J)
240 A(P,J)=C(I,J)
250 NEXT J
260 FOR J=I+1 TO N
270 M(J)=A(J,I)/A(I,I)
280 NEXT J
285 FOR J=I+1 TO N
290 FOR P=1 TO N+1
292 A(J,P)=A(J,P)-M(J)*A(I,P)
296 NEXT P
298 NEXT J
300 I=I+1
310 IF I<N THEN GOTO 140
320 IF A(I,I)=0 THEN GOTO 410
330 X(N)=A(N,N+1)/A(N,N)
335 FOR I=N-1 TO 1 STEP -1
340 S=0
350 FOR J=I+1 TO N
360 S=S+A(I,J)*X(J)
370 NEXT J
380 X(I)=(A(I,N+1)-S)/A(I,I)
390 NEXT I
400 GOTO 420
410 CLEAR @ DISP "EL SISTEMA NO
TIENE" @ DISP " SOLUCION UNICA" @ GOTO 460

```

Figura 3. Programa método de Gauss

```

420 CLEAR @ DISP "*** LA SOLUCIO
      N DEL SISTEMA ES "
430 FOR I=1 TO N
440 DISP "X(";I;")=";X(I)
450 NEXT I
460 DISP "*****"
      ***" @ END

```

Figura 3. Continuación -----

La idea fundamental de la mayoría de los métodos iterativos consiste en transformar el sistema original:

$$A\bar{X} = \bar{b}$$

en otro con la forma

$$\bar{X}_1 = T\bar{X}_2 + \bar{C} \quad (11)$$

que de manera recursiva quedaría

$$\bar{X}^K = T\bar{X}^{K-1} + \bar{C} \quad (12)$$

siendo K el número de iteración.

Considérese por ejemplo el sistema:

$$10X_1 - 7X_2 + X_3 = 73$$

$$X_1 + 8X_2 - 3X_3 = 23 \quad (13)$$

$$X_1 + 3X_2 - 9X_3 = 57$$

Entonces se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 3 \\ 1 & 8 & -3 \\ 1 & 3 & -9 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 73 \\ 23 \\ 57 \end{bmatrix}$$

Si se despeja en cada ecuación i , la i -ésima variable se obtiene:

$$\begin{aligned} X_1 &= 7.3 + 0.7X_2 - 0.1X_3 \\ X_2 &= 2.875 - .125X_1 + .375X_3 \\ X_3 &= -6.333 + 0.111X_1 + 0.333X_2 \end{aligned} \quad (14)$$

Es decir que en términos de (12), el sistema (14) tiene T y \bar{c} :

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & -0.1 \\ -.125 & 0 & .375 \\ .111 & .333 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 7.3 \\ 2.875 \\ -6.333 \end{bmatrix}$$

y se pueden escribir las ecuaciones recursivas:

$$\begin{aligned} X_1^K &= 7.3 + 0.7X_2^{K-1} - 0.1X_3^{K-1} \\ X_2^K &= 2.875 - .125X_1^{K-1} + .375X_3^{K-1} \\ X_3^K &= -6.33 + .111X_1^K + .333X_2^K \end{aligned} \quad (14.a)$$

El cálculo puede organizarse como se indica en la siguiente tabla; donde se ha tomado como solución inicial propuesta un vector unitario.

Iteración (K)	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	1	1	1
1	7.9	3.125	-5.889
2	10.076	-.3209	-4.4155
3	7.5169	-0.4031	-6.6849
4	7.9403	-0.5714	-5.5121
5	7.45123	-0.1846	-5.6419
6	7.7350	-.1721	-5.5674
7	7.7362	-.1797	-5.5317
8	7.7274	-.1664	-5.5341
9	7.7369	-.1662	-5.5308
10	7.7367	-.1662	-5.530

← Propuesto

Puede observarse que los resultados de las iteraciones 9 y 10 son ya muy similares; por lo que puede detenerse el proceso, y decir que la solución aproximada es:

$$x_1 = 7.7367 \quad x_2 = -.1662 \quad x_3 = -5.53$$

El procedimiento visto hasta aquí se denomina "método de Jacobi", y su algoritmo resulta muy sencillo:

ALGORITMO METODO DE JACOBI

Para resolver el sistema $A\bar{X} = \bar{b}$:

Paso 1. Proponga una solución inicial $\bar{X}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$

Paso 2. Sea $K = 1$

Paso 3. Para $i = 1, 2, 3, \dots, n$ calcule:

$$x_i^K = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_{ij} x_j^{K-1}) + b_i \right\}$$

Paso 4. Si \bar{x}^K es suficientemente exacta, vaya al paso 5; en caso contrario haga $K = K + 1$ y regrese a paso 3

Paso 4. Procedimiento concluido; \bar{x}^K es la solución

Un criterio para establecer que el resultado ya es suficientemente exacto sería que:

$$\| \bar{x}^K - \bar{x}^{K-1} \| < \epsilon \quad (15)$$

donde ϵ es una tolerancia, y el símbolo $\| \cdot \|$ representa la norma del vector.

Con frecuencia conviene utilizar la "norma infinita"; definida como:

$$\| \bar{x} \|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$$

El método de Jacobi, como todos los métodos iterativos no es siempre convergente, es decir que puede alejarse de la solución; por lo que conviene establecer un límite al número de iteraciones. Más adelante se dan criterios de convergencia.

4.5 METODO DE GAUSS-SEIDEL

En el algoritmo de Jacobi puede verse que para calcular x_i^K ; es decir las soluciones en la K -ésima iteración, se usan exclusivamente las de la iteración anterior x_i^{K-1} ; aún cuando algunos x_i^K estén ya calculados.

El método podría mejorarse si para calcular X_i^K se utilizaran los X_{i-1}^K ya calculados anteriormente.

La ecuación iterativa para este cálculo sería:

$$X_i^K = \frac{-\sum_{j=i}^{i-1} (a_{ij} X_j^K) - \sum_{j=i+1}^n (a_{ij} X_j^{K-1}) + b_i}{a_{ii}} \quad (16)$$

Este método es conocido como el de Gauss-Seidel; y su algoritmo, muy semejante al de Jacobi; quedaría como sigue:

ALGORITMO METODO DE GAUSS-SEIDEL

Para resolver el sistema $A\bar{X} = \bar{b}$

Paso 1. Proponga una solución inicial $\bar{X}^0 = (X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0)$

Paso 2. Sea $K = 1$

Paso 3. Para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n$ calcule:

$$X_i^K = \frac{-\sum_{j=i}^{i-1} (a_{ij} X_j^K) - \sum_{j=i+1}^n (a_{ij} X_j^{K-1}) + b_i}{a_{ii}}$$

Paso 4. Si \bar{X}^K es suficientemente exacto continúe a paso 5; en caso contrario haga $K = K + 1$ y regrese a paso 3

Paso 5. Procedimiento concluido

Para ejemplificar la aplicación de este método; considérese el sistema antes resuelto con el método de Jacobi; y que ya en la forma $\bar{X}^K = T\bar{X}^{K-1} + \bar{C}$, está dado por:

$$x_1^K = 7.3 + 0.7 x_2^{K-1} - 0.1 x_3^{K-1}$$

$$x_2^K = 2.875 - 0.125 x_1^{K-1} + 0.375 x_3^{K-1} \quad (14.a)$$

$$x_3^K = -6.333 + 0.111 x_1^K + 0.333 x_2^K$$

El cálculo se organiza en la siguiente tabla:

Iteración K	x_1^K	x_2^K	x_3^K	
0	1	1	1	← Propuesto
1	7.9	2.2625	-4.7027	
2	9.3540	-0.0578	-5.3140	
3	7.7809	-0.0914	-5.4998	
4	7.9599	-0.1824	-5.5102	
5	7.7233	-0.1567	-5.5279	
6	7.7431	-0.1659	-5.5288	
7	7.7368	-0.1654	-5.5293	

Se encuentra la siguiente solución aproximada:

$$x_1 = 7.7368 \quad x_2 = -.1654 \quad x_3 = -5.5293$$

y como puede verse se reduce el número de iteraciones.

Es conveniente antes de seguir adelante establecer criterios para determinar cuando un método será convergente; para lo cual se presentarán algunas definiciones y teoremas, a continuación.

Definición:

Una secuencia $\{\bar{x}^K\}_{K=1}^{\infty}$ de vectores se dice que converge a \bar{x} , con respecto a la norma $\|-\|$, si dado cualquier $\epsilon > 0$, existe

un entero $N(\epsilon)$ tal que:

$$\|\bar{X}^K - \bar{X}\| < \epsilon \quad \text{para todo } K \geq N(\epsilon)$$

Puede demostrarse que cualquier norma cumple esta definición.

La norma infinita de una matriz A está definida como:

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (17)$$

Es decir que la norma infinita de una matriz es la máxima suma de los valores absolutos de los elementos de cada renglón. Por ejemplo la norma infinita de la matriz del ejemplo anterior:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 1 \\ 1 & 8 & -3 \\ 1 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

Se calcula como:

$$\text{Suma en renglón 1: } 10 + 7 + 1 = 18$$

$$\text{Suma en renglón 2: } 1 + 8 + 3 = 12$$

$$\text{Suma en renglón, 3: } 1 + 3 + 9 = 13$$

$$\text{Entonces } \|A\|_{\infty} = 18$$

Se puede demostrar el siguiente teorema:

La secuencia $\{\bar{X}^K\}_{K=0}^{\infty}$, definida por $\bar{X}^K = T\bar{X}^{K-1} + \bar{C}$; para todo $\bar{C} \neq 0$ y $K \geq 1$; converge al vector \bar{X} para cualquier vector inicial \bar{X}^0 ; si $\|T\| < 1$, para cualquier norma.

En el ejemplo anterior:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & -0.1 \\ -.125 & 0 & 0.375 \\ .111 & .333 & 0 \end{bmatrix}$$

es decir que su norma infinita es:

$$\|T\|_{\infty} = 0.8 < 1$$

y por lo tanto el método de Jacobi o Gauss-Seidel convergen para el sistema de ecuaciones.

La revisión de convergencia puede fácilmente introducirse en un programa del algoritmo de Gauss-Seidel.

En la figura 4 se presenta un programa para solución de sistemas de ecuaciones con el método de Gauss-Seidel.

4.6 METODO DE SOBRRERELAJACION (SOR)

Tanto en el procedimiento de Jacobi como en el de Gauss-Seidel existe un vector residual; diferencia entre el vector solución real y el vector de aproximación.

Denótese:

$$e_i^K = (e_{1i}^K, e_{2i}^K, \dots, e_{ni}^K) \quad (18)$$

el vector residual del método de Gauss-Seidel; correspondiente al vector de la K-ésima aproximación:

$$(x_1^K, x_2^K, \dots, x_{i-1}^K, x_i^{K-1}, x_{i+1}^K, \dots, x_n^{K-1}) \quad (19)$$

La i -ésima componente de \bar{e}_i^K es:

$$e_{ii}^K = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^K - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{K-1} - a_{ii} x_i^{K-1} \quad (20)$$

Entonces, se puede demostrar que la ecuación del método de Gauss-Seidel puede escribirse como:

$$x_i^K = x_i^{K-1} + \frac{r_{ii}^K}{a_{ii}} \quad (21)$$

El procedimiento puede hacerse más eficiente si se introduce un factor de peso (w) al segundo sumando del término a la derecha:

$$x_i^K = (1-w)x_i^{K-1} + w \frac{r_{ii}^K}{a_{ii}} \quad (22)$$

y para algunos valores de w la convergencia es mucho más rápida.

Si $w = 1$ se obtienen métodos de relajación
(Gauss-Seidel)

Si $w < 1$ se obtienen métodos de infrareajación

Si $w > 1$ se obtienen métodos de sobrerelajación

Los métodos de sobrerelajación pueden acelerar la convergencia de sistemas que convergen con el método de Gauss-Seidel.

ALGORITMO DEL METODO DE SOBRELAJACION

Para resolver el sistema $A\bar{X} = \bar{b}$

Paso 1. Proponga una solución inicial $\bar{X}^0 = (X_1^0, X_2^0, X_3^0, \dots, X_n^0)$
y un valor de w

Paso 2. Sea $K = 1$

Paso 3. Para todo $i = 1, 2, \dots, n$ calcule:

$$x_i^K = (1 - w)x_i^{K-1} + \frac{w}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^K - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{K-1} \right)$$

Paso 4. Si \bar{x}^K es suficientemente aproximada continúe al paso 5; en caso contrario haga $K = K + 1$ y regrese al paso 3

Paso 5. El procedimiento está concluido

```

2 CLEAR @ DISP "*****
  *****"
5 DISP @ DISP "PROGRAMA PARA S
  OLUCION DE SISTE-MA DE ECUC
  IDNES" @ DISP "*****
  *****"
7 DISP "METODO DE GAUSS-SEIDEL
  " @ DISP "*****
  ***"
10 DIM X(50),A(50,50),B(50),T(5
  0),X1(50),H(50),H1(50)
20 DISP @ DISP "EL RANGO DEL SI
  STEMA ES:"
30 INPUT N
40 DISP @ DISP "ELEMENTOS DE LA
  MATRIZ " @ DISP "DE COEFICI
  ENTES"
50 FOR I=1 TO N
60 FOR J=1 TO N
70 INPUT A(I,J)
80 NEXT J
90 NEXT I
100 DISP "ELEMENTOS DEL VECTOR D
  E" @ DISP "TERMINOS INDEPEND
  IENTES"
110 FOR I=1 TO N
120 INPUT B(I)
130 NEXT I
140 DISP "VALORES INICIALES DE X
  (I)"
150 FOR I=1 TO N
160 INPUT X(I)
170 NEXT I
180 DISP "TOLERANCIA"
190 INPUT E
195 CLEAR @ DISP "*****
  *" @ DISP "PROCEDO A VERIFIC
  AR CONVERGENCIA" @ DISP "***
  ****ESPERE"
196 WAIT 3000
200 FOR I=1 TO N
210 S=0
220 FOR J=1 TO N
230 IF J=I THEN GOTO 250
240 S=S+ABS(A(I,J)/A(I,I))
250 NEXT J
260 T(I)=S
270 NEXT I
290 L1=T(1)
300 FOR I=2 TO N
310 F=L1-T(I)
320 IF F>0 THEN GOTO 340
330 L1=T(I)
340 NEXT I
350 IF L1>1 THEN GOTO 740
355 CLEAR @ DISP "*****
  "
360 CLEAR @ DISP "*****
  @ DISP "EL SISTEMA CONVERGE
  "

```

Figura 4. Programa para solución de sistemas de ecuaciones lineales con el método de Gauss-Seidel

```

370 DISP @ DISP "LA NORMA ES:" ;L
1
375 DISP @ DISP "SE INICIA GAUSS
-SEIDEL" @ DISP "*****
*****ESPERE"
376 WAIT 3000
380 K=1
390 FOR I=1 TO N
400 S=0
410 IF J=I THEN GOTO 450
420 FOR J=1 TO I-1
430 S=S-A(I,J)*X1(J)
440 NEXT J
450 S1=0
460 IF I=N THEN GOTO 500
470 FOR J=I+1 TO N
480 S1=S1-A(I,J)*X(J)
490 NEXT J
500 X1(I)=(S+S1+B(I))/A(I,I)
510 NEXT I
520 C=ABS(X1(1)-X(1))
530 C1=ABS(X1(1))
540 FOR I=2 TO N
550 H(I)=ABS(X1(I)-X(I))
560 H1(I)=ABS(X1(I))
570 NEXT I
580 FOR J=2 TO N
590 G=H(J)-C
600 IF G<0 THEN GOTO 620
610 C=H(J)
620 NEXT J
630 FOR K=2 TO N
640 G1=H1(K)-C1
650 IF G1<0 THEN GOTO 670
660 C1=H1(K)
670 NEXT K
680 D=C/C1
690 IF D<E THEN GOTO 745
700 FOR I=1 TO N
710 X(I)=X1(I)
720 NEXT I
730 K=K+1 @ GOTO 390
740 CLEAR @ DISP "*****" @
DISP "EL SISTEMA NO CONVERG
E" @ GOTO 790
745 CLEAR @ DISP "*****
*****" @ DISP "LA SOLUCI
ON ES:"
750 FOR I=1 TO N
760 DISP "X1( ";I; ")=" ;X1(I)
770 NEXT I
790 DISP "*****
*****" @ END

```

Figura 4.Continuación

