DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

TEMAS SELECTOS DE CALCULO INTEGRAL.

(Cursos de Superación Académica)

TEMA: TEMAS SELECTOS DE CALCULO INTEGRAL.

Noviembre, 1983.

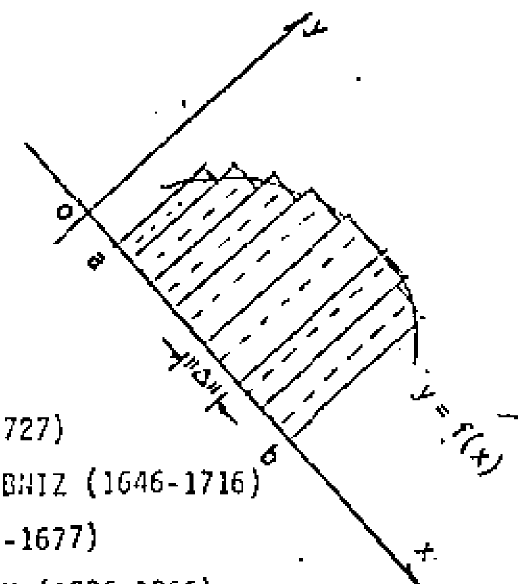
Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

FACULTAD DE INGENIERIA

SEMINARIO DE "TEMAS SELECTOS DE CALCULO INTEGRAL"

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

$$\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = \mathrm{Ln}|x| + ax + \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \cdots$$



Sir Isaac NEWTON (1642-1727)

Wilhelm-Gottfried LEIBNIZ (1646-1716)

Isaac BARROW (1630-1677)

Bernhard RIEMANN (1826-1866)

NOVIEMBRE, 1983

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

SEMINARIO DE TEMAS SELECTOS DE CALCULO INTEGRAL.

P R O G R A M A

8	NOVIEMBRE	17:00 a 18:05	La Integral: aspectos históricos.
		18:05 a 18:10	Receso
		18:10 a 19:15	Algunos métodos de integración no cubiertos en el programa actual - de C.D.I.
10	NOVIEMBRE	17:00 a 18:05	Aplicaciones de la integral a la física, a la mecánica, etc.
		18:05 a 18:10	Receso
		18:10 a 19:15	Aplicaciones de la integral a la estadística, a la economía, etc.
15	NOVIEMBRE	17:00 a 18:05	Prueba de la integral para la - determinación de la convergencia de una serie.
		18:05 a 18:10	Receso
		18:10 a 19:15	Integración numérica.
17	NOVIEMBRE	17:00 a 18:05	Algunas reflexiones sobre el - - mejor método de enseñanza del -- Cálculo Integral.
		18:05 a 18:10	Receso
		18:10 a 19:15	Conclusiones.

HISTORIA DE LA INTEGRAL.

La integración es una operación de cálculo infinitesimal que tiene dos aspectos. Uno es el "método exhaustivo", para calcular áreas y volúmenes usado por Arquímedes.

Un ejemplo de este, es la aproximación del área de un círculo obtenida por la inscripción de un polígono regular de área conocida dentro del círculo, y dividiendo después este polígono en otros mas pequeños. El área de los sucesivos polígonos es calculada con la ayuda de la geometría elemental. El límite de la secuencia de la suma de estas áreas, da el área del círculo. Este proceso es la definición de que una integral es el límite de una suma.

El otro aspecto de la integración es el proceso de encontrar otra función $g(x)$, cuya derivada es $f(x)$. Este aspecto está relacionado con el primero por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral. Ambos procesos son llamados integración.

El método usado por los griegos para determinar el área de un círculo y de un segmento de una parábola, y el volúmen del cilindro cono y esfera fue, el límite de sumas, semejante al método de integración.

Durante la primera mitad del siglo XVII métodos de más ó menos alcances limitados empezaron a surgir en el medio matemático para la construcción de tangentes, determinación de máximos y mínimos, y Para encontrar áreas y volúmenes. En particular Fermat, Pascal, Roberval, Descartes, Huygens y otros discutieron el curso de la tangente a curvas particulares y encontraron áreas circunscritas limitadas para determinadas curvas especiales. Cada problema fue considerado por lo mismo y pocas reglas generales fueron desarrolladas, pero la idéa esencial de la derivada y la integral definida fue comenzada a ser fórmulada.

Con esta herencia matemática Newton y Leibniz, trabajaron independientemente durante la segunda mitad del siglo XVII definiendo - los conceptos de derivadas y de integrales.

El símbolo $\int$ procede del siglo XVII como una estilización de - la letra S, que se utiliza para indicar acción de sumar y el cambio ΔX_k en dx proviene de la notación $\frac{d}{dx}$ de Leibniz.

Una observación importante que deriva de esta notación, es que, se puede usar cualquier letra en lugar de x, sin que cambie el valor de la integral, o sea, se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(r)\,dr$$

Esto es una consecuencia de que el valor de la integral depende unicamente de la función f, y del intervalo de integración a,b Por esta razón las letras x, y, t, r, se llaman a veces variables - mudas.

A continuación mencionaremos a los matemáticos que fueron formando el concepto de la Integral.

ISSAC BARROW

Geómetra, teólogo y elocuente predicador ingles, nacido en Londres en 1630 y murió en Cambrige, el 4 de mayo de 1677.

En 1630 se le confió la catedra que antes pretendia, dió clases de geometría en Gresbiale, y después en Cambrige, donde contaba entre sus discípulos al inmortal Newton, a quien en 1669, cedió su cátedra, para dedicarse a la Teología.

En 1670 publico "Lecciones Geométricas", reimprimiendolas en - 1674. Se le deben además ediciones de algunas obras clásicas, como "Los elementos de Euclides" (1689) y otros tratados de Arquímedes, Teodosio y Apolonio. Contribuyó con sus trabajos al progreso - de la ciencia. Se le considera como inventor del triángulo diferencial y como uno de los primeros geómetras que aplicaron el cálculo a la geometría.

HISTORIA DE RIEMANN (1826 - 1866)

Uno de los matemáticos más eminentes de los tiempos modernos. Fue discípulo de Gauss, Jacobi, Dirichlet, Steiner y Eisentein. A él se debe el procedimiento actual para el estudio de la teoría de funciones, que tiene su origen en su memoria de 1850 sobre funciones algebraicas de una variable compleja. En 1854 escribió sobre los fundamentos de la geometría, también hizo estudios sobre las funciones elípticas, la distribución de números primos, problema que hubo de interesar al ruso Tschebycheff, así como a las modernas escuelas Francesas como la Vallée Poussin. En su celebre memoria de 1857 publicada en el Journal de Crelle, hizo con las Abelianas lo que tiempo atrás hizo Abel con las elípticas. Introdujo es su memoria la superficie que lleva su nombre. Con objeto de uniformizarse en la representación sobre ella, de la función objeto de estudio, pasando de una hoja a otra en las secciones determinadas por los puntos críticos. El problema de la representación conforme, que arranca de la cartografía, fue estudiado por Lambert en el caso de la esféra y el plano, extendido por Draganix al caso de representar sobre el plano las superficies de revolución, introduciendo las funciones de variable compleja; por Gauss al caso de una superficie analítica cualquiera; pero todos estos matemáticos se reducen a representar alrededor de un punto un trozo de la superficie que se desea sobre el plano, la extensión de este trozo depende de la naturaleza de la función que realiza la transformación.

Riemann se propuso el problema de establecer una correspondencia biunívoca continua y conforme, entre dos elementos finitos de superficie, simplemente conexos ambos, problema que se ha reducido a la de una superficie cualquiera finita sobre el círculo que lleva su nombre. El problema de Riemann fué resuelto por este matemático, pero su demostración no es exacta, como demostró Weierstrass. Mas tarde, Schwarz logró demostrar la posibilidad de la demostración, o lo que se llama la existencia de la misma para recintos muy generales. Otra demostración dio Riemann en 1870 en tiempos mas proximos, Poincaré, Koebe, Bieberbach y Carathedory han fundado sus estudios de uniformación de funciones analíticas en la existencia de solución del problema de Riemann.

ISSAC BARROW

Geometra, Teólogo y elocuente predicador ingles, nacido en Londres en 1630 y murió en Cambrige el 4 de mayo de 1677.
Empezó su carrera estudiando lenguas, Teología y Matemáticas. Pretendió una catedra de Griego en Cambrige, pero fue acusado de formar parte de la secta llamada de los Arminianos y como consecuencia se desestimaron sus pretensiones, emprendió una serie de viajes a Francia, Italia, Esmirna y Constantinopla, residiendo algún tiempo en esta última ciudad. De regreso en Inglaterra, en 1660 se le confió la cátedra que antes pretendiera. A los dos años fue a enseñar Geometría a Gresha y mas tarde enseño la asignatura en Cambrige, teniendo el honor de contar entre sus discípulos al inmortal Newton, a quien cedió su catedra en 1669, para dedicarse a la Teología. Fue nombrado capellán de Carlos II (1670) y canciller de la Universidad de Cambrige (1675), perteneció a la Royal society, fundo la biblioteca del colegio de Trinidad y por primera vez resolvió satisfactoriamente el problema teorico de la formación de la imagen en dos lentes.

Publicó Lections Opticae (1669), Lections Geometricae (1670), reimpresas ambas, formando un solo tomo en 1674. Después de su muerte se publicaron Lections Habitae in Schows (1684). Se le deben ademas ediciones de algunas obras clásicas, como los elementos de Euclides (1685) y otros tratados de Arquímedes, Teodosio y Apolonio (1675).

Entre los manuscritos de Davy, que se conservan en el museo

Británico, existe una biografía de Barrow. Contribuyó con sus trabajos al progreso de la ciencia. Se le considera como inventor del Triángulo Diferencial y como uno de los primeros Geómetras que aplicaron el Cálculo a la Geometría.

ISSAC NEWTON (1642 - 1727)

Se debe a Newton la formula del binomio, el método de las Fluxiones, la Ley de la Gravitación Universal y notables trabajos de óptico.

En 1673 Leibniz fué a Londres y expuso allí resultados sobre sus investigaciones que eran conocidas ya por Newton. Con tal motivo se formó ~~Leibniz~~ Royal Society. En 1674 decia Leibniz que tenia conocimiento de métodos generales de análisis basados en series infinitas y solicita informes de los trabajos de Newton. Este contestó el 13 de junio de 1676 exponiendo sus métodos de desarrollo en serie, aumentó por vía de apendice, la fórmula del Binomio, El desarrolló de arc- sen x del que por inversión deducia el de sen x, etc. Leibniz pidió otros permenores el 27 de agosto y el 24 de octubre de 1676 Newton escribe indicando su modo de obtener los desarrollos en serie en carta muy extensa, en la cual hace alusión del problema inverso de las tangentes, explicándolo confusamente con un anagrama con objeto de no descubrirlo por completo. En la respuesta de Leibniz del 21 de junio de 1677 explica el Método Diferencial y resuelve el problema de hallar una curva cuya subtangente es constante, demostrando con ello que conocia la integración.

Newton descubrió la desviación de los Graven en caidas, Desviación originada por la rotación de la tierra.

En mecánica, se debe a Newton el Teorema de las áreas, Que la trayectoria de los cuerpos es una cónica, etc.

En la teoría de ecuaciones algebráicas, se ocupo en los límites de las raíces, descubrio el Teorema de la suma de las potencias enésimas de las raíces, las funciones simétricas, el cálculo del número de raíces imaginarias de una ecuación, etc. Halley inspiró probablemente a Newton que las leyes de Kepler conducían a la ley de la inversa del cuadrado de la distancia, proponiéndole a Newton calcular la forma de la trayectoria, lo que Newton resolvió con suma facilidad. El problema completo de la gravitación .

Newton calculó la atracción de un cuerpo esférico sobre un punto exterior en el primer libro de Principia. Newton señala las leyes fundamentales de la dinámica. En el segundo libro se ocupa del movimiento en un medio resistente, en Hidrostática e Hidrodinámica, con aplicación a las ondas, a las mareas y a la acústica. En el tercer libro se hace una crítica de las hipótesis científicas:

Se ocupa del estudio de planetas y satelites, la teria de las mareas, las desigualdades lunares, la teoria de satélites, en los cometas, en el cálculo de órbitas. La mayor parte de sus descubrimientos debio hacerlos utilizando el método de Fluxiones, pero los presentaba en la forma del más puro clasicismo geométrico de Arquímedes y Apolonio. Halley sufragó los gastos de impresión de los principios, que aparecieron en 1687 como apéndice a su óptica, publicó Newton un Enumeratio Linearum Tertii Ordinis, con una clasificación preliminar de curvas algebráica y trascendentes, estudió de asíntotas, tangentes y puntos singulares.

En otro apéndice al mismo libro se encuentran diversas cuadraturas y rectificaciones. En 1711 publicó su Methodus Differentials donde discute su formula de interpolación. El cálculo de Fluxiones forma parte de un apéndice de su Optica, el cual es identico, salvo a las notaciones, al cálculo infinitesimal, la cantidad variable en la fuente y su velocidad en la variación era denominada Fluxión. Newton aplica el cálculo que acabamos de citar a cuestiones de máximos y mínimos, al trazado de tangentes, curvatura, radio de curvatura y rectificación. No puede afirmarse en modo contundente que Leibniz, con su Cálculo Infinitesimal, cometiera un plagio, ambos genios a la vez inventaron este fundamento al cálculo moderno.

LEIBNIZ (1646 - 1716)

Ocupose en la combinatoria, en la construcción de una máquina de cálculo.

Segun él en 1674 estaba ya en posesión de un invento de cálculo diferencial e integral, pero no se ha podido demostrar que tuviera conocimiento del mismo antes de 1675. De un modo completo lo dio a conocer en 1677, y se publico en 1684. La mayor parte de sus trabajos vieron la luz en las alta eruditorum fundadas por el mismo en 1682. Creó la academia de Berlin en 1700. Desde 1709 hasta 1716 sostuvo con Keil, Newton y otros ingleses una disputa violenta sobre la prioridad de la invención del cálculo infinitesimal, un hecho parece cierto y es que, Leibniz publicó el método antes que Newton. Los partidarios de atribuir a éste el origen del cálculo infinitesimal alegan que la idea del mismo estaba ya contenida en ciertas notas de Newton que llegaron a conocimiento de Leibniz.

Entre los trabajos de Leibniz sobre el cálculo diferencial, merecen citarse:

1.- La notación que es la corriente hoy
2.- Diversas cuestiones de maximos y minimos, cálculo de derivadas, la teoria de las envolventes.

En las memorias de Leibniz, publicadas en 1694, se habla por primera vez de coordenadas y ejes coordenados.

Se ocupó también de diversas cuestiones de mecánica; la curva Isocrona, la Braquistocrona, la ecuación intrínseca de la catenaria etc.

En álgebra desarrolló en serie $\log(1+x)$, sen x, arc sen x, presentó el metodo de desarrollo por coeficientes indeterminados.

GAUSS

Floreció de 1777 a 1855. siendo descubridor de importantes relaciones en la teoría de los números; Se debe a él la demostración del Teorema de que toda ecuación algebráica tiene una raíz de la forma $a+bi$. En 1801 aparecieron sus Disquisitions Aritmeticae, libro cuyo contenido fue rechado por la academia de ciencias de Paris y donde se tienen notabilisimos descubrimientos de la teoria de los numeros. Su habilidad como calculista fué tan asombrosa como su profundidad y golpe de vista. En 1809 apareció la Teoria Motor Corpurum Celestium y otros volumenes que contiene, cálculo de orbitas, trabajos de Geodesia, catastrales etc.

En 1833 apareció su primer volumen sobre magnetismo terrestre. Descubrio el telégrafo (con Weber en 1833).

En 1840 aparecieron las Dioptrische Untersuchunger, en las que expone sistematicamente el paso de la luz a travez de sistemas de lentes

Gauss es especialmente famoso por sus trabajos en aritmética, denominada Reina de las matemáticas. Puede decirse que preparó el camino para la aplicación a la aritmética de la teoría de funciones, con la representación de los numeros por formas cuadráticas binarias que es el punto de partida de la moderna teoria del cuerpo numérico cuadrático, no obstante sus trabajos tienen el espíritu clásico, como en la teoría de las congruencias de primero y segundo orden, que le sirvió para la resolución de ecuaciones binomias y construcción de poligonos regulares de $2^m(2^n+1)$ lados, siendo m y n enteros y

$2^n + 1$ un número primo.

Otro de los timbres de gloria de Gauss es su estudio de la serie Hipergeometrica, de la función Γ, la curvatura de superficies, la representación reducida (escala), la atracción de elipsoides.

Lagrange y Gauss fueron contemporaneos, el primero escribió correcta y lógicamente, a la par de un modo sencillo. Gauss es más conciso en sus demostraciones, pero es tambien lógico y correcto. Sin pecar de exagerados, puede considerarse a Gauss como el Mozart de las matemáticas.

INTEGRACION DE LAS DIFERENCIALES BINOMIAS.

UNA DIFERENCIAL BINOMIA ES UNA EXPRESION DE LA FORMA:

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx \quad ----(1)$$

EN LA CUAL: m, n, p SON RACIONALES Y a, b SON REALES

SI SUPONEMOS PRIMERO QUE 'm' Y 'n' SON FRACCIONARIOS Y HACEMOS:

$x = z^{\alpha}$ DONDE α ES EL M.C.M. DE LOS DENOMINADORES DE m, n.

$dx = \alpha z^{\alpha-1}dz$

POR LO TANTO, LA DIFERENCIAL BINOMIA QUEDA ENTONCES:

$$\alpha z^{m\alpha+\alpha-1}(a+bz^{n\alpha})^p\,dz$$

EN LA QUE $m\alpha+\alpha-1$ Y $n\alpha$ SON ENTEROS.

POR OTRA PARTE, LA DIFERENCIAL BINOMIA (1) SE PUEDE ESCRIBIR:

$$x^m[x^n(ax^{-n}+b)]^p\,dx = x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p\,dx \quad ---(2)$$

DE LO ANTERIOR SE VE QUE SIEMPRE ES POSIBLE QUE EL EXPONENTE DE X DENTRO DEL PARENTESIS SEA POSITIVO.

NO SE PIERDE ENTONCES GENERALIDAD SI SUPONEMOS QUE EN LA DIFERENCIAL BINOMIA (1), m, n SON ENTEROS Y $n>0$.

EXISTEN SOLO TRES CASOS EN QUE SE PUEDE INTEGRAR A LA DIFERENCIAL BINOMIA

PRIMER CASO.-

p ES ENTERO:

I) $p>0$

SE PUEDE DESARROLLAR EL PARENTESIS POR LA FORMULA DEL BINOMIO Y SE OBTIENE UN NUMERO FINITO DE TERMINOS QUE TODOS SE INTEGRAN INMEDIATAMENTE.

II) $p<0$

SE OBTIENE ENTONCES UNA FRACCION RACIONAL QUE SE PUEDE INTEGRAR POR EL METODO YA CONOCIDO.

SEGUNDO CASO:

p ES FRACCIONARIO.

ESTO ES: $p = \frac{r}{s}$ DONDE 'r' Y 'S' SON ENTEROS

SI $\frac{m+1}{n}$ ES ENTERO O CERO, LA DIFERENCIAL BINOMIA (1) QUEDA:

$$x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx \quad --- (3)$$

HACIENDO EL SIGUIENTE CAMBIO DE VARIABLE

$$a+bx^n = Z^s \quad --- (4)$$

ENTONCES $(a+bx^n)^{r/s} = Z^r \quad --- (5)$

DE (4) OBTENEMOS:

$$x = \left(\frac{Z^s-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \quad --- (6)$$

POR LO TANTO:

$$x^m = \left(\frac{Z^s-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} \quad --- \quad (7)$$

DIFERENCIANDO LOS DOS MIEMBROS EN (6)

$$dx = \frac{s}{bn}\left(\frac{Z^s-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} Z^{s-1}\,dz \quad --- (8)$$

LLEVANDO LOS VALORES (5), (7) Y (8) A (3), SE OBTIENE:

$$\frac{s}{bn}\left(\frac{Z^s-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} Z^{r+s-1}\,dZ$$

COMO HEMOS SUPUESTO QUE $\frac{m+1}{n}$ ES ENTERO O CERO, SE OBTIENE UNA FRACCION RACIONAL EN Z QUE PUEDE INTEGRARSE.

TERCER CASO:

p ES FRACCIONARIO

SI EN $x^m(a+bx^n)^{r/s}dx$

SE TIENE $\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s}$ ES ENTERO O CERO.

EN ESTE CASO SE HACE:

$$a+bx^n = x^n Z^s \quad --- (9)$$

POR LO TANTO: $a = x^n(z^s - b)$

$$x^n = a(z^s - b)^{-1} \quad - - - (10)$$

REEMPLAZANDO ESTE VALOR (10) EN (9)

$$a + bx^n = a(z^s - b)^{-1} z^s \quad - - - (11)$$

DE DONDE:

$$(a + bx^n)^{r/s} = a^{r/s}(z^s - b)^{-\frac{r}{s}} z^r \quad - - - (12)$$

DE (10) SE OBTIENE:

$$x = a^{1/n}(z^s - b)^{-\frac{1}{n}} \quad - - - (13)$$

$$x^m = a^{\frac{m}{n}}(z^s - b)^{-\frac{m}{n}} \quad - - - (14)$$

SI EN (13) CALCULAMOS LA DIFERENCIAL DE AMBOS MIEMBROS:

$$dx = -\frac{s}{n} a^{\frac{1}{n}}(z^s - b)^{-\frac{1}{n}-1} z^{s-1}\,dz \quad - - - (15)$$

REEMPLAZANDO (12), (14) Y (15) EN (3):

$$x^m(a + bx^n)^{r/s}dx = -\frac{s}{n} a^{\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}}(z^s - b)^{-\left(\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}+1\right)} z^{r+s-1}\,dz$$

SI $\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s}$ ES ENTERO O CERO SE OBTIENE UNA FRACCION RACIONAL.

ESTOS TRES CASOS SE LLAMAN CONDICION DE INTEGRABILIDAD DE LA DIFERENCIAL BINOMIA. ESTA DEMOSTRADO QUE FUERA DE ESTOS TRES CASOS NO ES POSIBLE EXPRESAR LA INTEGRAL DE LA DIFERENCIAL BINOMIA POR MEDIO DE UN NUMERO FINITO DE FUNCIONES ELEMENTALES O UNA COMBINACION FINITA DE TALES FUNCIONES.

EJEMPLOS:

1) $\int x^5\sqrt{1+x^3}\,dx = I$ COMO $\frac{m+1}{n} = \frac{5+1}{3} = 2$ ES ENTERO.

$$1 + x^3 = z^2 \Rightarrow \sqrt{1+x^3} = z \Rightarrow x^3 = z^2 - 1$$

$$\therefore \quad x = (z^2-1)^{1/3} \qquad x^5 = (z^2-1)^{5/3}$$

$$dx = \frac{1}{3}(z^2-1)^{-2/3}\,2z\,dz$$

ENTONCES:

$$I = \frac{2}{3} \int (Z^2-1)^{5/3} Z (Z^2-1)^{-2/3} Z \, dZ = \frac{2}{3} \int (Z^2-1) Z^2 \, dZ$$

$$I = \frac{2}{3} \int (Z^4 - Z^2) \, dZ = \frac{2Z^5}{15} - \frac{2Z^3}{9} + C$$

POR LO TANTO:

$$\int x^5 \sqrt{1+x^3} \, dx = \frac{2}{15}(1+x^3)^{5/2} - \frac{2}{9}(1+x^3)^{3/2} + C$$

2) $$\int \frac{dx}{x^2(1+x^3)^{3/2}} = \int x^{-2}(1+x^3)^{-3/2} \, dx$$

COMO: $\frac{m+1}{n} = \frac{-2+1}{3} = -\frac{1}{3}$

$$-\frac{1}{3} + \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{-2-9}{6} = -\frac{11}{6}$$

NO CUMPLEN CON LA CONDICION DE SER ENTERO O CERO Y POR LO TANTO NO ES POSIBLE RESOLVER LA INTEGRAL.

3) $$\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)^{1/2}}$$

COMO:

$$\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)^{1/2}} = \int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2} \, dx = I$$

$\frac{m+1}{n} = \frac{-4+1}{2} = -\frac{3}{2}$ NO CUMPLE CON LA CONDICION

$-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{4}{2} = -2$ SI CUMPLE CON LA CONDICION.

POR LO TANTO:

$$1+x^2 = x^2 Z^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{Z^2-1}$$

LLEVANDO ESTE VALOR:

$$1+x^2=\left(\frac{1}{z^2-1}\right)\cdot z^2$$

$$\sqrt[2]{1+x^2}=\left(\frac{z^2}{z^2-1}\right)^{-1/2}=\frac{z^{-1}}{(z^2-1)^{-1/2}}=\frac{(z^2-1)^{1/2}}{z}$$

COMO: $x=\left(\frac{1}{z^2-1}\right)^{1/2} \Rightarrow x^{-4}=\left(\frac{1}{z^2-1}\right)^{-4/2}=\left(\frac{1}{z^2-1}\right)^{-2}=(z^2-1)^2$

$$dx=-\frac{1}{2}(z^2-1)^{-3/2}\,2z\,dz$$

$$I=\int\frac{(z^2-1)^2(z^2-1)^{1/2}}{z}\left[-\frac{1}{2}(z^2-1)^{-3/2}2z\,dz\right]=-\int(z^2-1)\,dz$$

$$=-\int z^2dz+\int dz=-\frac{z^3}{3}+z+C \qquad \text{COMO: } z=\left(\frac{1+x^2}{x}\right)^{1/2}$$

$$I=-\frac{\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{3/2}}{3}+\left(\frac{1+x^2}{x}\right)^{1/2}+C=-\frac{1}{3}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{3/2}+\left(\frac{1+x^2}{x}\right)^{1/2}+C$$

$$I=\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{1/2}\left[-\frac{1}{3}\,\frac{1+x^2}{x^2}+1\right]+C=\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{1/2}\left[\frac{-1-x^2+3x^2}{3x^2}\right]+C$$

$$I=\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{1/2}\left(\frac{2x^2-1}{3x^2}\right)+C$$

4) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2(1+x^3)^{2/3}}$

$$\int\frac{dx}{x^2(1+x^3)^{2/3}}=\int x^{-2}(1+x^3)^{-2/3}dx=I$$

$\frac{m+1}{n}=\frac{-2+1}{3}=-\frac{1}{3}$ NO SE CUMPLE

$-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-1$ SE CUMPLE

$1+x^3=x^3z^3 \Rightarrow x^3(z^3-1)=1 \Rightarrow x^3=\frac{1}{z^3-1}$

$1+x^3=\frac{1}{z^3-1}\cdot z^3$

$$x=\left(\frac{1}{z^3-1}\right)^{1/3}=(z^3-1)^{-1/3} \quad \Rightarrow \quad dx=-\frac{1}{3}(z^3-1)^{-4/3}\,3z^2\,dz$$

$$x^{-2}=(z^3-1)^{2/3}$$

$$(1+x^3)^{-2/3}=\left(\frac{z^3}{z^3-1}\right)^{-2/3}=\frac{(z^3)^{-2/3}}{(z^3-1)^{-2/3}}=\frac{(z^3-1)^{2/3}}{z^2}$$

$$I=\int (z^3-1)^{2/3}\,\frac{(z^3-1)^{2/3}}{z^2}\left[-\frac{1}{3}(z^3-1)^{-4/3}\,3z^2\,dz\right]$$

$$I=-\int (z^3-1)^0\,dz=-z+C \qquad \text{COMO} \quad z=\left(\frac{1+x^3}{x^3}\right)^{1/3}$$

$$I=-\left(\frac{1+x^3}{x^3}\right)^{1/3}+C$$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(1+x^3)^{4/3}}$

$$\int \frac{dx}{x^3(1+x^3)^{4/3}}=\int x^{-3}(1+x^3)^{-4/3}\,dx$$

$\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{-3+1}{3}=-\dfrac{2}{3}$ NO SE CUMPLE.

$-\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{3}=-2$ SE CUMPLE.

$$1+x^3=x^3z^3 \quad \Rightarrow \quad x^3=\frac{1}{z^3-1} \quad \Rightarrow \quad x=\left(\frac{1}{z^3-1}\right)^{1/3}=(z^3-1)^{-1/3}$$

$$1+x^3=\left(\frac{1}{z^3-1}\right)z^3=\frac{z^3}{z^3-1} \quad \Rightarrow \quad (1+x^3)^{-4/3}=\left(\frac{z^3}{z^3-1}\right)^{-4/3}=\frac{(z^3-1)^{4/3}}{z^4}$$

$$dx=-\frac{1}{3}(z^3-1)^{-4/3}\,3z^2\,dz \qquad x^{-3}=z^3-1$$

$$I=\int (z^3-1)\,\frac{(z^3-1)^{4/3}}{z^4}\left[-\frac{1}{3}(z^3-1)^{-4/3}\,3z^2\,dz\right]$$

$$I=-\int \frac{z^3-1}{z^2}\,dz=-\int z\,dz+\int\frac{dz}{z^2}=-\frac{z^2}{2}-\frac{1}{z}+C$$

COMO $z=\left(\dfrac{1+x^3}{x^3}\right)^{1/3}=\dfrac{(1+x^3)^{1/3}}{x}$

$$I=-\frac{1}{2}\left(\frac{1+x^3}{x}\right)^2-\frac{x}{(1+x^3)^{1/3}}+C$$

c) $\int x^5 (8+x^3)^{3/2}\, dx = I$

$\frac{m+1}{n} = \frac{5+1}{3} = 2$ SE CUMPLE.

$8+x^3 = Z^2 \Rightarrow x^3 = Z^2 - 8 \Rightarrow x = (Z^2-8)^{1/3} \Rightarrow x^5 = (Z^2-8)^{5/3}$

$(8+x^3)^{3/2} = (Z^2)^{3/2} = Z^3$

$dx = \frac{1}{3}(Z^2-8)^{-2/3}\, 2Z\, dZ$

$$I = \int (Z^2-8)^{5/3} Z^3 \left[\frac{1}{3}(Z^2-8)^{-2/3} 2Z\, dZ\right]$$

$$I = \int \frac{2}{3}(Z^2-8) Z^4\, dZ = \frac{2}{3}\int (Z^6 - 8Z^4)\, dZ$$

$$I = \frac{2}{3}\left[\frac{Z^7}{7} - \frac{8}{5}Z^5\right] + C$$ COMO $Z = (8+x^3)^{1/2}$

$$I = \frac{2}{3}\left[\frac{(8+x^3)^{7/2}}{7} - \frac{8}{5}(8+x^3)^{5/2}\right] + C$$

$$I = \frac{2}{21}(8+x^3)^{7/2} - \frac{16}{15}(8+x^3)^{5/2} + C$$

$$I = (8+x^3)^{5/2}\left[\frac{2}{21}(8+x^3)^2 - \frac{16}{15}\right] + C$$

DIFERENCIAL BINOMIA.

UNA DIFERENCIAL DE LA FORMA:

$$(1) \qquad x^m(a+bx^n)^p dx$$

SIENDO a Y b CONSTANTE CUALQUIERA Y LOS EXPONENTES m, n, p NUMEROS RACIONALES, SE LLAMA DIFERENCIAL BINOMIA.

HAGAMOS $x = z^{\alpha}$; ENTONCES $dx = \alpha z^{\alpha-1} dz$

Y $$x^m(a+bx^n)^p dx = \alpha z^{m\alpha+\alpha-1}(a+bz^{n\alpha})^p dz$$

SI SE ELIGE UN NUMERO ENTERO α DE MANERA QUE $m\alpha$ Y $n\alpha$ SEAN NUMEROS ENTEROS, VEMOS QUE LA DIFERENCIAL DADA ES EQUIVALENTE A OTRA DE LA MISMA FORMA, DONDE m Y n SE HAN REEMPLAZADOS POR NUMEROS ENTEROS. ADEMAS, LA SUSTITUCION.

$$(2) \qquad x^m(a+bx^n)^p dx = x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p dx$$

TRANSFORMA LA DIFERENCIAL DADA EN OTRA DE LA MISMA FORMA, DONDE $-n$ REEMPLAZA EL EXPONENTE n DE X. POR LO TANTO, CUALQUIERA QUE SEA EN NUMERO ALGEBRAICO DE n, EL EXPONENTE DE X DENTRO DEL PARENTESIS SERA POSITIVO EN UNA DE LAS DOS DIFERENCIAS

CUANDO p ES UN NUMERO POSITIVO, SE PUEDE DESARROLLAR LA POTENCI DEL BINOMIO SEGUN LA FORMULA DE NEWTON E INTEGRAR LA DIFERENCIAL TERMINO A TERMINO. EN LO QUE SIGUE, p SE SUPONE UNA FRACCION, POR TANTO, LA REEMPLAZAMOS POR r/s SIENDO r Y s NUMEROS ENTEROS.

POR CONSIGUIENTE, PODEMOS ENUNCIAR LA SIGUIENTE PROPOSICION: TODA DIFERENCIAL PUEDE REDUCIRSE A LA FORMA

$$x^m(a+bx^n)^{r/s} dx$$

SIENDO m, n, r, s NUMEROS ENTEROS Y, n POSITIVO.

EN ESTE ARTICULO DEMOSTRAREMOS QUE SE PUEDE QUITAR EN (1) EN LOS RADICALES EN LOS SIGUIENTES CASOS:

CASO I. CUANDO $\frac{m+1}{n}$ = UN NUMERO ENTERO O CERO. EN ESTE CASO SE EFECTUA LA SUSTITUCION $a+bx^n = z^s$

CASO II.- CUANDO $\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s}$ = UN NUMERO ENTERO O CERO. EN ESTE CASO SE EFECTUA LA SUSTITUCION $a+bx^n = z^s x^n$

EJEMPLO:

$$\int \frac{x^3\,dx}{(a+bx^2)^{3/2}} = \int x^3 (a+bx^2)^{-3/2}\,dx = \frac{1}{b^2}\,\frac{2a+bx^2}{\sqrt{a+bx^2}} + C$$

SOLUCION EN ESTE CASO $m=3,\ n=2,\ r=-3,\ s=2$

LUEGO $\frac{m+1}{n} = 2$, NUMERO ENTERO. POR CONSIGUIENTE, ESTAMOS EN EL CASO I. Y EFECTUAMOS LA SUSTITUCION $a+bx^2 = Z^2$, DE DONDE

$$x = \left(\frac{Z^2-a}{b}\right)^{1/2} \;;\quad dx = \frac{Z\,dZ}{b^{1/2}(Z^2-a)^{1/2}} \quad \text{y} \quad (a+bx^2)^{3/2} = Z^3$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{(a+bx^2)^{3/2}} = \int \left(\frac{Z^2-a}{b}\right)^{3/2} \cdot \frac{Z\,dZ}{b^{1/2}(Z^2-a)^{1/2}} \cdot \frac{1}{Z^3} = \frac{1}{b^2}\int (1-aZ^{-2})\,dZ$$

$$= \frac{1}{b^2}\,\frac{2a+bx^2}{\sqrt{a+bx^2}} + C$$

CONDICIONES DE RACIONALIZACION DE LA DIFERENCIAL BINOMIA.

a) $$x^m(a+bx^n)^{r/s}\,dx$$

CASO I. SUPONGAMOS QUE $a+bx^n = Z^s$

ENTONCES $(a+bx^n)^{1/s} = Z$, $(a+bx^n) = Z^r$

ADEMAS, $x = \left(\frac{Z^s-a}{b}\right)^{1/n}$, $x^m = \left(\frac{Z^s-a}{b}\right)^{m/n}$

LUEGO, $dx = \frac{s}{bn} Z^{s-1}\left(\frac{Z^s-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dZ$

SUSTITUYENDO EN (a), OBTENEMOS

$$x^m(a+bx^n)^{r/s}\,dx = \frac{s}{bn} Z^{r+s-1}\left(\frac{Z^s-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dZ.$$

EN EL SEGUNDO MIEMBRO DE ESTA EXPRESION ES RACIONAL CUANDO $\frac{m+1}{n}$ ES UN NUMERO ENTERO O CERO.

CASO II. SUPONGAMOS QUE $a+bx^n = z^s x^n$

ENTONCES $x^n = \frac{a}{z^s - b}$, Y $a+bx^n = z^s x^n = \frac{a z^s}{z^s - b}$

LUEGO, $(a+bx^n)^{r/s} = a^{r/s} z^r (z^s - b)^{-r/s}$

ADEMAS, $x = a^{1/n}(z^s-b)^{-1/n}$, $x^m = a^{m/n}(z^s-b)^{-m/n}$

$$dx = -\frac{s}{n} a^{1/n} z^{s-1}(z^s-b)^{-1/n-1}\,dz$$

SUSTITUYENDO EN (a), OBTENEMOS

$$x^m(a+bx^n)^{r/s}dx = -\frac{s}{n} a^{\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}} (z^s-b)^{-\left(\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}+1\right)} z^{r+s-1}\,dz$$

EL SEGUNDO MIEMBRO DE ESTA EXPRESION ES RACIONAL CUANDO $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}$ ES UN NUMERO ENTERO O CERO.

LUEGO QUEDA DEMOSTRADO QUE LOS RADICALES DE LA DIFERENCIAL BINOMIA $x^m(a+bx^n)^{r/s}dx$ PUEDEN QUITARSE EN LOS CASOS ENUNCIADOS EN EL ARTICULO ANTERIOR.

LA INTEGRAL APLICADA A LA FISICA.

. CENTRO MASA DE UNA BARRA.

CONSIDEREMOS UN SISTEMA DE n PARTICULAS SITUADAS A LO LARGO DE UNA LINEA HORIZONTAL, POR EJEMPLO EL EJE X. SEAN $m_1, m_2, \ldots, m_n$ SUS MASAS Y $x_1, x_2, \ldots x_n$ SUS POSICIONES. SI α ES CUALQUIER PUNTO DEL EJE REAL, ENTONCES EL NUMERO $(x_i - \alpha) m_i$ SE LLAMA "MOMENTO" DE LA IESIMA PARTICULA, CON RESPECTO A α, Y LA SUMA:

$$(x_1-\alpha)m_1+(x_2-\alpha)m_2+\cdots\cdots+(x_n-\alpha)m_n \qquad (1)$$

SE LLAMA MOMENTO DEL SISTEMA, CON RESPECTO A α. EL SIGNIFICADO FISICO DE LOS MOMENTOS ES REVELADO POR LA LEY DE LA PALANCA, DESCUBIERTA POR ARQUIMEDES: SI LAS PARTICULAS SON UNIDAS A UNA BARRA SIN PESO, CON FULCRO EN α, LA BARRA ESTARA EN EQUILIBRIO (NO SE MOVERA BAJO LA INFLUENCIA DE LA GRAVEDAD) SI, Y SOLO SI, EL MOMENTO CON RESPECTO A α ES CERO. POR EJEMPLO. EL SISTEMA DE CUATRO PARTICULAS MOSTRADO EN LA FIGURA (a) ESTA EN EQUILIBRIO, MIENTRAS QUE EL DE LA FIGURA (b) NO LO ESTA.

$\alpha = 7$, MOMENTO $= 1(-5)+2(-2)+3\cdot1+3\cdot2=0$

(a)

$\alpha = 6$, MOMENTO $= 1(-4)+2(-1)+3\cdot2+2\cdot4=8$

(b)

. EL PUNTO α RESPECTO AL CUAL EL SISTEMA DE PARTICULAS TIENE MOMENTO CERO SE LLAMA CENTRO MASA DEL SISTEMA. PARA HALLAR EL CENTRO MASA, FIJEMOS LA SUMA (1) IGUAL A CERO. Y DESPEJEMOS α. ESTO DA:

$$\alpha = \frac{x_1m_1+x_2m_2+\cdots+x_nm_n}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n} \qquad (2)$$

EL DENOMINADOR EN (2) ES LA MASA TOTAL.

CONSIDEREMOS AHORA UNA BARRA DELGADA DE DENSIDAD NO UNIFORME. PODEMOS SUPONER QUE LA BARRA YACE SOBRE EL INTERVALO $[a,b]$ DEL EJE X. LA DENSIDAD DE LA BARRA ES UNA FUNCION NO NEGATIVA $f(x)$, $a \le x \le b$, TAL QUE LA MASA DE LA PARTE DE LA BARRA ENTRE $x=\xi$ Y $x=\eta$ ES:

$$\int_{\xi}^{\eta} f(x)\,dx$$

VEASE FIGURA (c). LA INTEGRAL:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ES ENTONCES LA MASA TOTAL DE LA BARRA. ¿COMO DEFINIREMOS EL MOMENTO DE LA BARRA RESPECTO A UN PUNTO α?

DIVIDAMOS LA BARRA EN n SUBINTERVALOS PEQUEÑOS: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. LA PARTE DE LA BARRA ENTRE $x = x_{j-1}$ Y $x = x_j$ TIENE MASA:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx$$

Y COMO PODEMOS CONSIDERAR f COMO CASI CONSTANTE EN EL INTERVALO MUY PEQUEÑO $[x_{j-1}, x_j]$ ESTA MASA ES CASI $m_j = f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$; AQUI ξ_j ES CIERTO PUNTO ENTRE x_{j-1} Y x_j. CONSIDEREMOS LA BARRA COMO UN SISTEMA DE n PARTICULAS, DE MASAS:

$$f(\xi_1)(x_1-x_0),\ f(\xi_2)(x_2-x_1),\ \ldots\ldots,\ f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$$

SITUADOS EN $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots \xi_n$. EL MOMENTO CON RESPECTO A α DE ESTE SISTEMA ES:

$$(\xi_1-\alpha) f(\xi_1)(x_1-x_0) + (\xi_2-\alpha) f(\xi_2)(x_2-x_1) + \cdots\cdots + (\xi_n-\alpha) f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$$

PERO ESTO ES UNA SUMA RIEMANN PARA LA INTEGRAL

$$\int_a^b (x-\alpha) f(x)\, dx \qquad (3)$$

POR TANTO DEFINIMOS (3) COMO EL MOMENTO DE NUESTRA BARRA CON RESPECTO A α.

EL VALOR DE α PARA EL CUAL EL MOMENTO ES CERO SE LLAMA CENTRO MASA. PARA HAYAR EL CENTRO MASA, FIJAMOS LA INTEGRAL EN (3) IGUAL A CERO Y DESPEJAMOS α. COMO:

$$\int_a^b (x-\alpha) f(x)\, dx = \int_a^b x f(x)\, dx - \alpha \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\int_a^b x f(x)\, dx - \alpha \int_a^b f(x)\, dx = 0$$

$$\alpha = \frac{\int_a^b x f(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx} \qquad (4)$$

EJEMPLO:

LA FUNCION DENSIDAD DE UNA BARRA ES $f(x) = 2x$ PARA $0 \le x \le 1$ Y $f(x) = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x$ PARA $1 \le x \le 5$, ¿CUAL ES LA MASA TOTAL? ¿DONDE ESTA EL CENTRO MASA?

RESPUESTA: LA MASA TOTAL ES:

$$\int_0^5 f(x)\, dx = \int_0^1 2x\, dx + \int_1^5 \left(\tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}x\right) dx = x^2\Big]_0^1 + \left(\tfrac{5}{2}x - \tfrac{1}{4}x^2\right)\Big]_1^5 = 5$$

EL NUMERADOR EN CUATRO (4) ES

$$\int_0^5 x f(x)\, dx = \int_0^1 2x^2\, dx + \int_1^5 \left(\tfrac{5}{2}x - \tfrac{1}{2}x^2\right) dx$$

$$= \tfrac{2}{3}x^3\Big]_0^1 + \left(\tfrac{5}{4}x^2 - \tfrac{1}{6}x^3\right)\Big]_0^5 = 10$$

POR CONSIGUIENTE, LA COORDENADA DEL CENTRO DE MASA ES $\alpha = \frac{10}{5} = 2$

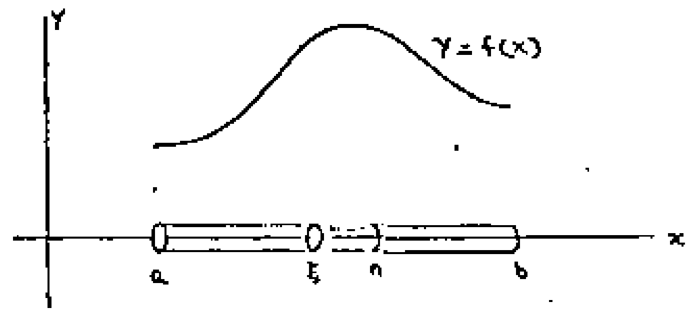


FIGURA (c)

MOMENTO DE INERCIA.

SEA UN SISTEMA DE n MASAS $m_1, m_2, \ldots, m_n$ SITUADOS EN LOS PUNTOS $x_1, x_2, \ldots x_n$, A LO LARGO DEL EJE X. EL NUMERO $m_i (x_i - \alpha)^2$ SE LLAMA MOMENTO DE INERCIA DE LA I-ESIMA PARTICULA, CON RESPECTO A α Y LA SUMA:

$$m_1 (x_1 - \alpha)^2 + m_2 (x_2 - \alpha)^2 + \cdots\cdots + m_n (x_n - \alpha)^2$$

SE LLAMA MOMENTO DE INERCIA DEL SISTEMA CON RESPECTO A α. SI $f(x)$, $a \leq x \leq b$ ES LA FUNCION DENSIDAD DE UNA BARRA, EL MOMENTO DE INERCIA CON RESPECTO A α SE DEFINE COMO:

$$\int_a^b (x-\alpha)^2 f(x)\, dx$$

DETERMINA LA RESISTENCIA DE LA BARRA CON PUNTOS DE APOYO EN α CONTRA UN MOMENTO DE TORSION. EL MOMENTO DE INERCIA SERIA CERO SI TODA LA MASA SE CONCENTRARA EN α; SERIA GRANDE SI HUBIERA MASAS, AUN PEQUEÑAS, MUY ALEJADAS DE α.

BIBLIOGRAFIA: "CALCULO" DE LIPMAN BERS, FRANK KARAL
INTERAMERICANA.

PRESION HIDROSTATICA.

SI UN DEPOSITO DE BASE PLANA SE LLENA DE AGUA HASTA UNA ALTURA h, LA FUERZA RESULTANTE DEBIDA A LA PRESION DEL LIQUIDO QUE CONTIENE ES:

$$F = whA \qquad (a)$$

EN DONDE w ES EL PESO ESPECIFICO DEL AGUA ($1\ Kg/dm^3$) Y A ES EL AREA DEL FONDO DEL DEPOSITO. ES EVIDENTE QUE LAS UNIDADES EN LA ECUACION (a) DEBEN SER CORRESPONDIENTES; ES DECIR h EN DECIMETROS, A EN DECIMETROS CUADRADOS Y F EN KILOGRAMOS. ES DE NOTAR QUE ESTA FUERZA NO DEPENDE DE LA FORMA DEL DEPOSITO, SIENDO IGUAL LA FUERZA SOBRE EL FONDO EN LAS DOS FIGURAS (1) Y (2) PUES EN AMBAS EL AREA DE LA BASE ES LA MISMA Y LAS DOS TIENEN IGUAL ALTURA. LA PRESION, O FUERZA POR UNIDAD DE SUPERFICIE EN EL FONDO DEL DEPOSITO ES:

$$P = wh \quad , \qquad w = 1 \qquad (b)$$

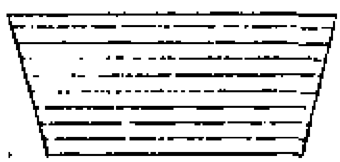


FIGURA 1

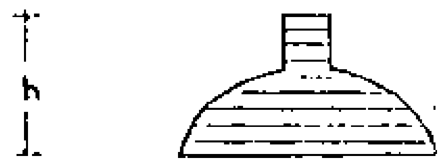


FIGURA 2

CONSIDERANDO AHORA CUALQUIER CANTIDAD DE AGUA, COMO LA CONTENIDA EN UN TANQUE O EN UN DIQUE. DE ACUERDO CON EL PRINCIPIO DE PASCAL, LA PRESION $P = h$ A LA PROFUNDIDAD h EN TAL MASA DE AGUA ES LA MISMA EN TODAS DIRECCIONES. PARA UNA LAMINA HORIZONTAL SUMERGIDA, LA FUERZA HACIA ABAJO QUE ACTUA SOBRE SU CARA SUPERIOR ES LA DADA POR LA ECUACION (a). SI LA LAMINA ESTA SUMERGIDA VERTICALMENTE, LA PRESION SOBRE ELLA SERA DIFERENTE A DISTINTAS PROFUNDIDADES Y LA ECUACION (a) NO ES UTILIZABLE EN LA FORMA QUE SE DA, PUES TENDREMOS DIFERENTES FACTORES h PARA LOS PUNTOS DE LA LAMINA QUE ESTEN A PROFUNDIDADES DIFERENTES. ESTA DIFICULTAD LA SUPERAMOS POR UN METODO YA CONOCIDO; DIVIDAMOS LA LAMINA EN FAJAS ESTRECHAS HORIZONTALES CUYO BORDE SUPERIOR ESTE A LA PROFUNDIDAD h Y EL INFERIOR A LA $h+\Delta h$ A CONTAR DESDE LA SUPERFICIE LIBRE DEL AGUA. SI EL AREA DE ESTA FAJA ES ΔA Y LA FUERZA SOBRE UNA DE SUS CARAS ES ΔF, ENTONCES LA ECUACION (a) SUGIERE QUE SE ESCRIBA

$$h\Delta A \leq \Delta F \leq (h+\Delta h)\Delta A$$

YA QUE LA PRESION VARIARA DESDE h HASTA $h+\Delta h$ EN ESTA FAJA. SI AHORA SUMAMOS LAS FUERZAS PARA TODAS LAS FAJAS Y TOMAMOS EL LIMITE DE ESTA SUMA CUANDO $\Delta h \to 0$, PODEMOS DESPRECIAR LOS INFINITESIMOS DE ORDEN SUPERIOR TALES COMO $\Delta h \Delta A$, Y LLEGAMOS A:

$$F = \lim_{\Delta h \to 0} \sum_{a}^{b} h\Delta A$$

O BIEN

$$F = \int_{h=a}^{h=b} h\,dA = \int_a^b h\,l\,dh \qquad (c)$$

EN DONDE $dA = l\,dh$ (VEASE FIG. 3).

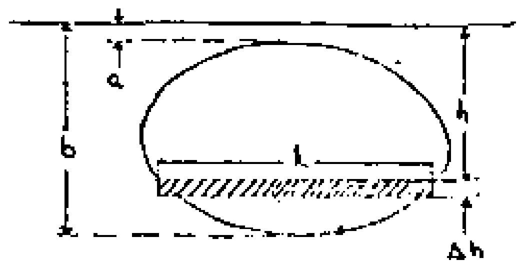


FIG. 3

COMO COROLARIO DE LA ECUACION (c), SI DESIGNAMOS POR $\bar{h}$ LA PROFUNDIDAD DEL CENTRO DE GRAVEDAD DE LA SUPERFICIE A, SE TIENE

$$\bar{h} = \frac{\int h\,dA}{\int dA}$$

DONDE $\bar{h}$: CENTRO DE GRAVEDAD.

O BIEN

$$\int h\,dA = \bar{h} A$$

Y, EN DEFINITIVA, TENEMOS

$$F = \bar{h} A \qquad (d)$$

ESTO SIGNIFICA QUE LA FUERZA TOTAL CON QUE EL LIQUIDO PRESIONA CONTRA UNA CARA DE LA LAMINA (OTRA FUERZA IGUAL Y CONTRARIA PRESIONA SOBRE LA CARA OPUESTA, A MENOS QUE LA LAMINA FORME PARTE DE LA PARED DEL DEPOSITO) ES LA MISMA QUE SI TODA LA SUPERFICIE A ESTUVIERA A LA PROFUNDIDAD $\bar{h}$

TRABAJO

CUANDO UNA FUERZA CONSTANTE F (KILOGRAMOS) ACTUA UNA DISTANCIA "S" (METROS), EL TRABAJO PRODUCIDO (EN KILOGRAMETROS) ES EL PRODUCTO DE LA FUERZA POR LA DISTANCIA:

$$W = Fs \qquad (I)$$

CUANDO LA FUERZA NO ES CONSTANTE, COMO, POR EJEMPLO, CUANDO SE ESTIRA O CONTRAE UN RESORTE, ENTONCES LA ECUACION (I) NO SE PUEDE UTILIZAR DIRECTAMENTE PARA ENCONTRAR EL TRABAJO EFECTUADO. SIN EMBARGO, LA FORMULA (I) PUEDE APROVECHARSE PARA ENCONTRAR APROXIMADAMENTE EL TRABAJO REALIZADO DURANTE UN CORTO INTERVALO, Δs, SI LA FUERZA ES UNA FUNCION CONTINUA DE s. EN TAL CASO PODEMOS APLICAR EL CALCULO INTEGRAL CON EL FIN DE OBTENER EL TRABAJO TOTAL.

PARA ELLO CONSIDEREMOS EL TRABAJO EFECTUADO EN COMPRIMIR UN RESORTE DESDE SU POSICION NATURAL DE LONGITUD L HASTA UNA LONGITUD $3/4\ L$ (FIG. I), SUPONIENDO QUE LA FUERZA QUE SE PRECISA PARA COMPRIMIRLO ESTA DADA POR:

$$F = cx \qquad (II)$$

EN DONDE x ES LA LONGITUD EN QUE HA SIDO COMPRIMIDO Y "c" ES UN FACTOR DE PROPORCIONALIDAD (DENOMINADO CONSTANTE DEL RESORTE). ASI PARA COMPRIMIR EL RESORTE UNA CANTIDAD $L/4$ LA FUERZA HA DE INCREMENTARSE DESDE

$$F_0 = c \times 0 = 0$$

HASTA
$$F_1 = c\,\frac{L}{4}$$

Y ENTONCES EL PUNTO DE APLICACION DE LA FUERZA SE MOVERA DESDE $x = 0$ A $x = L/4$ EN LA FIGURA I. PARA DETERMINAR EL TRABAJO EFECTUADO IMAGINEMOS EL INTERVALO x DESDE "0" A $L/4$ DIVIDIDO EN UN GRAN NUMERO DE SUBINTERVALOS CADA UNO DE LONGITUD Δx. CUANDO EL RESORTE SE COMPRIME LA CANTIDAD Δx DE FORMA QUE SU EXTREMO IZQUIERDO SE MUEVE DESDE x A $x + \Delta x$, LA FUERZA VARIARA DESDE "cx" A $c(x+\Delta x)$, Y COMO ACTUA DURANTE UNA DISTANCIA Δx EL TRABAJO EFECTUADO EN ESTA PEQUEÑA COMPRESION VARIA ENTRE

$$cx\,\Delta x \qquad \text{Y} \qquad c(x+\Delta x)\,\Delta x$$

ASI QUE EL TRABAJO TOTAL ESTARA DADO, APROXIMADAMENTE, POR:

$$W \approx \sum_{x=0}^{L/4} cx\,\Delta x$$

Y ESTA APROXIMACION TIENDE AL VALOR EXACTO W DEL TRABAJO CUANDO Δx TIENDE A CERO, ASI QUE

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=0}^{L/4} c x \Delta x = \int_0^{L/4} c x\, dx = cL^2/32$$

O BIEN

$$W = 1/2\,(cL/4)(L/4)$$

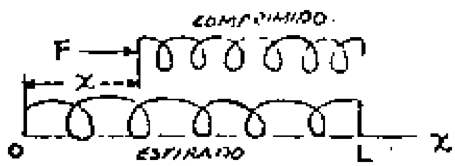


FIGURA I

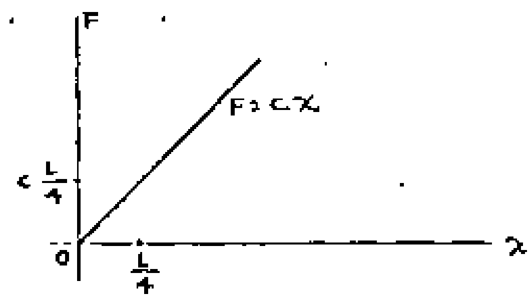


FIGURA II

EN ESTA ULTIMA FORMA, EL FACTOR $1/2\,c(L/4)$ ES LA MITAD DEL VALOR FINAL ALCANZADO POR F CUANDO EL RESORTE SE HA COMPRIMIDO A 3/4 DE SU LONGITUD ORIGINAL Y EL FACTOR $L/4$ ES LA DISTANCIA TOTAL EN LA CUAL HA ACTUADO LA FUERZA. ESTO SUGIERE

$$W = \bar{F} s \qquad (III)$$

COMO EXPRESION APROPIADA PARA MODIFICAR LA ECUACION (I) CUANDO LA FUERZA ES VARIABLE DURANTE EL DESPLAZAMIENTO: $\bar{F}$ REPRESENTA EL VALOR MEDIO DE DICHA FUERZA VARIABLE DURANTE EL DESPLAZAMIENTO TOTAL. SIN EMBARGO, LA DETERMINACION DE $\bar{F}$ EXIGE, EN GENERAL, LA INTEGRACION, DE MODO QUE RESULTA DE IGUAL DIFICULTAD EL APLICAR LOS PRINCIPIOS GENERALES QUE SE DESARROLLAN EN EL EJEMPLO CONSIDERADO COMO APLICAR LA ECUACION (III). EN EFECTO, LA ECUACION (III) DEBE INTERPRETARSE COMO DEFINICION DE $\bar{F}$.

DE MODO TOTALMENTE ANALOGO AL EMPLEADO EN EL ANTERIOR EJEMPLO, SE VE FACILMENTE QUE

$$W = \int_a^b F\, ds. \qquad (IV)$$

DA EL TRABAJO DESARROLLADO POR UNA FUERZA VARIABLE (LA CUAL ACTUA CONSTANTEMENTE EN UNA DIRECCION DADA) CUANDO EL PUNTO DE APLICACION EXPERIMENTA UN DESPLAZAMIENTO DESDE $s=a$ A $s=b$. ESTO CONDUCE AL SIGUIENTE IMPORTANTE TEOREMA DE MECANICA:

SEA F LA FUERZA RESULTANTE DE TODAS LAS FUERZAS QUE ACTUAN SOBRE UNA PARTICULA DE MASA m, SIENDO CONSTANTE LA DIRECCION DE F. ENTONCES PARA F CONSTANTE O VARIABLE, EL TRABAJO EFECTUADO SOBRE LA PARTICULA POR LA FUERZA F ES IGUAL AL INCREMENTO DE LA ENERGIA CINETICA DE LA PARTICULA.

PARA PROBAR ESTE TEOREMA REQUERIMOS:

a) LA ECUACION (IV) QUE NOS DA EL TRABAJO.

b) LA DEFINICION DE ENERGIA CINETICA $T = 1/2\ m v$

c) LA SEGUNDA LEY DE NEWTON $F = m(dv/dt)$

PUESTO QUE

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Y TAMBIEN

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dv}\,\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}\,v$$

POR MEDIO DE LA SEGUNDA LEY DE NEWTON PODEMOS ESCRIBIR LA ECUACION (IV) EN LA FORMA

$$W = \int_{s=a}^{s=b} m v \frac{dv}{ds}\, ds = \int_{v=v_a}^{v=v_b} m v\, dv$$

QUE NOS LLEVA A

$$W = \frac{1}{2} m v^2 \Big]_{v_a}^{v_b} = \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2$$

ES DECIR, EL TRABAJO EFECTUADO POR LA FUERZA F ES LA ENERGIA CINETICA EN b MENOS LA ENERGIA CINETICA EN a, O MAS BREVEMENTE, EL INCREMENTO DE ENERGIA CINETICA.

$$W = \Delta T.$$

BIBLIOGRAFIA: CALCULO INFINITESIMAL Y GEOMETRIA ANALITICA.
GEORGE B. THOMAS.

METODOS ENERGETICOS

a) Análisis para una sola partícula.

Se parte de la Ley de Newton aplicada a una partícula que se mueve relativamente a un sistema inicial, -- por lo cuál se tiene:

$$\overline{F} = m \frac{d^2r}{dt^2} = m \frac{dv}{dt}$$

que multiplicando esta ecuación por dr e integrando desde r_1 hasta r_2 , a lo largo de la trayectoria del movimiento se tiene :

$$\int_{r_1}^{r_2} \overline{F} \cdot dr = m \int_{r_1}^{r_2} \frac{dv}{dt} . dr = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{dv}{dt} . \frac{dr}{dt} . dt$$

Para obtener la última integral, se ha multiplicado y dividido por dt, cambiando así la variable de--- integración dt. Puesto que $dr/dt = V$, por lo cuál se tiene

$$\int_{r_1}^{r_2} \overline{F} \cdot dr = m \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dv}{dt} . v \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (V \cdot V) dt$$

$$= \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} V^2 dt$$

por lo cuál se tiene :

$$\int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr = \frac{1}{2} m (V_2^2 - V_1^2) \text{ .... (1)}$$

Si se tiene una componente escalar de la Ley de Newton, en una dirección, en la dirección x, usando la notación vectorial, puede escribirse:

$$Fx_i = m \frac{dVx}{dt} i$$

Multiplicando escalarmente cada miembro de la ecuación anterior por $dr = dx_i + dy_j + dz_k$ y despues de integrar se tiene :

$$\int_{x_1}^{x_2} Fx \, dx = m/2 \left[(Vx)_2^2 - (Vx)_1^2 \right]$$

Similarmente :

$$\int_{Y_1}^{Y_2} Fy \, dy = m/2 \left[(Vy)_2^2 - (Vy)_1^2 \right]$$

$$\int_{z_1}^{z_2} Fz \, dz = m/2 \left[(Vz)_2^2 - (Vz)_1^2 \right]$$

Consideraciones sobre la potencia.-

La rápidez con que se efectuá el trabajo se le- denomina potencia. Usando la relación W_k para representar el trabajo se tiene:

$$\text{POTENCIA} = \frac{dW_k}{dt}$$

Puesto que dW_k; para cualquier fuerza dada Fi es Fi = dri; puede decirse que la potencia que desarrolla un sistema de fuerzas (n fuerzas), en el tiempo t, con respecto a un sistema de referencia xyz, es :

$$\text{POTENCIA} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Fi \cdot dri}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Fi \cdot Vi$$

dondo:

Vi = es la velocidad del punto de aplicación de la i-ésima fuerza en el tiempo t, visto desde el sistema- de referencia xyz.

Campo de Fuerzas Conservativas.-

El criterio para distinguir un campo de fuerzas- conservativas es el siguiente.:

a) Está dado como función solamente de coordenadas espaciales, es decir, de la forma:

$$F = F\ (XYZ).$$

b) Se puede expresar como gradiente de una función escalar denominada el potencial de fuerza, de la siguiente forma:

$$F = \text{grad } \phi$$

Por lo cuál :

El trabajo efectuado por una fuerza de este tipo sobre una partícula, que se mueve del punto 1 al punto 2- es independiente de la trayectoria y depende solamente de los puntos extremos de este, por lo cuál :

$$W_{1-2} = \int_1^2 F \cdot dr = \int_1^2 (\text{ grad } \phi) \cdot dr = \phi_2 - \phi_1$$

Sí la trayectoria es tal, que la partícula se atraé de regreso a su posición original, se tiene:

$$\oint F \cdot dr = 0$$

Conservación de la Energía Mecánica.-

Considerando el movimiento de una partícula sobre la cuál actuá solamente un campo de fuerzas conservativo se tiene:

$$\int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} \, dt = m \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dv}{dt} \cdot v \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (v \cdot v) \, dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} v^2 dt$$

$$= \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

Empleando la definición de Energía Potencial, se sustituye el primer miembro de la ecuación anterior, de la siguiente manera:

$$(EP)_1 - (EP)_2 = 1/2\ m\ V_2^2 - 1/2\ m\ V_1^2$$

Reordenando términos nos queda:

$$(EP)_1 + 1/2\ m\ V_1^2 = (EP)_2 + 1/2\ m\ V_2^2$$

Ecuación de Trabajo y Energía para un sistema de partículas.-

Para un conjunto general de "n" partículas, considerando la i-ésima partícula y empleando la ecuación (1) se tiene:

$$\int_1^2 F_i \cdot dr_i + \int_1^2 \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} f_{ij} \right) \cdot dr_i = (1/2\ m_i\ Vi^2)_2 - (1/2\ m_i Vi^2)_1$$

en donde:

f_{ij}= Fuerza de la j-ésima partícula sobre la i-ésima partícula.

F_i = Fuerza externa total sobre la i-ésima partícula.

APLICACIONES A LA ESTADISTICA.

¿ Qué es la Estadística ?.

Es un método de investigación. Es el suministro de un conjunto de ideas y herramientas sumamente útiles a la investigación. Estadística es una ciencia; la ciencia de la estadística trata con:

1.) Colección y compendio de datos
2.) Diseño de experimentos y reconocimientos
3.) Medición de la variación, tanto de datos experimentales como de reconocimiento.
4.) Estimación de parámetros de población y suministro de varias medidas de la exactitud y precisión de esas estimaciones.
5.) Ensayo de hipótesis respecto a poblaciones
6.) Estudio de la relación entre dos o más variables.

Conceptos Matemáticos.

Debido a que la teoría de la Estadística está íntimamente asociada con la teoría de probabilidades y que la probabilidad es una rama importante de las matemáticas, se justifica que se use de vez en cuando, "un poco de matemáticas".

Algunas Funciones Importantes.

Definición: La función gamma, representada con $\gamma(p)$ se define como la integral

$$\gamma(p) = \int_0^{\infty} X^{p-1} e^{-x}\, dx$$

para $p > 0$

otra forma de expresar esta función es:

$$\gamma(p) = 2\int_0^{\infty} Y^{2p-1} e^{-y^2}\, dy$$

donde la transformación empleada es: $X = Y^2$

Definición: La función Beta, representada con $\beta(p,q)$ se define como la integral

$$\beta(p,q) = \int_0^{1} X^{p-1} (1-X)^{q-1}\, dx$$

para $p > 0$ y $q > 0$

otra forma de representar esta función:

$$\beta(p,q) = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1} \theta \cdot \cos^{2q-1} \theta \, d\theta$$

donde se empleó la transformación: $X = \operatorname{sen}^2 \theta$

Resumen de la Teoría Básica en Probabilidad y Estadística.

Distribuciones de Probabilidad.

Teorema Para una variable aleatoria continua X,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dy$$

Teorema $F(x)$ tiene las siguientes propiedades:

1.) $F(-\infty) = 0$

2.) $F(\infty) = 1$

3.) $F(X_1) \leq F(X_2)$ si $X_1 < X_2$

Teorema $f(x)$ tiene las siguientes propiedades:

1.) $f(x) \geq 0$

2.) $\sum_{\forall x} f(x) = 1$ si X es una variable aleatoria discreta, ó

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ si X es una variable aleatoria continua

Teorema Para una variable aleatoria continua X,

$$P(a < x \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Definición Si X y Y son variables aleatorias continuas, la función densidad de probabilidad asociada de X y Y se representa con;

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Teorema Para variables aleatorias continuas X y Y

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} ds \int_{-\infty}^{y} f(s,t)\, dt$$

Teorema F(x,y) tiene las siguientes propiedades:

1.) $F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0$

2.) $F(\infty,\infty) = 1$

3.) $F(\infty,y) = F_2(y)$, la cual es función - distribución acumulativa marginal de Y

4.) $F(x,\infty) = F_1(x)$, la cual es función - distribución acumulativa marginal de X

Teorema f(x,y) tiene las siguientes propiedades:

1.) $f(x,y) \geq 0$

2.) $\sum_{\forall x} \sum_{\forall y} f(x,y) = 1$ ó bien,

$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy = 1$

dependiendo de que X y Y sean discretas o continuas.

Teorema Si X y Y son continuas, entonces:

$$P(a < x \leq b,\ c < y \leq d) = \left[F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) - F(a,c)\right] = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\, dy$$

Valores Esperados

Definición $E[\theta(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) \cdot f(x)\, dx$ X continua

Definición $E[\theta(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x,y)\, f(x,y)\, dy$

x,y; continuas

Distribuciones de Muestreo

Parámetros Estadísticos de Orden

Las observaciones respecto a variables aleatorias usualmente ocurren al azar. Sin embargo, en algunos casos se encuentran observaciones ordenadas de acuerdo con su magnitud. Esto puede ocurrir de dos maneras:

1.) Inicialmente las muestras se obtuvieron al azar, pero posteriormente se ordenaron de acuerdo a su magnitud.
2.) Las observaciones que se obtienen son ordenadas por naturaleza según su magnitud.

Como un ejemplo del segundo caso, consideremos un ensayo respecto a la vida o duración de pipetas. La primera observación que surge es la asociada al tubo más débil (o sea el tubo de vida más corta), la segunda observación está asociada al siguiente tubo débil, y así sucesivamente. Ya que tales datos ocurren en aplicaciones industriales, discutiremos a continuación algunas distribuciones de muestreo asociadas con parámetros estadísticos de orden.

Consideremos una población especificada por $f(x)$, $a \le x \le b$. Con u y v designaremos al máximo y mínimo valores, respectivamente, en una muestra al azar de "n" observaciones, extraídas de esa población. Puede demostrarse, que, entonces:

$$g(u,v) = n(n-1)f(u)f(v)\left[F(v) - F(u)\right]^{n-2}$$

$$a \le u \le v \le b \quad \text{-----------} \quad (1)$$

las f.d.p. marginales de u y v son:

$$g_1(u) = nf(u)\left[1 - F(u)\right]^{n-1}$$

$$a \le u \le b \quad \text{-----------} \quad (2)$$

y

$$g_1(v) = nf(v)\left[F(v)\right]^{n-1}$$

$$a \le v \le b \quad \text{-----------} \quad (3)$$

Estas distribuciones son muy útiles cuando se trata con problemas que implican valores extremos.

También son valiosos los parámetros estadísticos de orden cuando se trabaja con el rango de la muestra, $R = v - u = X_n - X_1$

Si en la ecuación (1), hacemos $v = u + R$, obtenemos:

$$g(u,R) = n(n-1)f(u)f(u+R)\left[F(u+R) - F(u)\right]^{n-2} \quad \text{----} \quad (4)$$

Entonces $h(R) = \int_a^{b-R} g(u,R)\, du$

$$0 \le R \le b-a \quad \text{-----------} \quad (5)$$

Deberá notarse que, si en vez de tratar con la distribu---ción asociada del rango y el mayor de los valores de la muestra a saber,

$$g(v,R) = n(n-1) f(v-R) f(v) [F(v) - F(v-r)]^{n-2} \quad \text{- - - -(6)}$$

entonces $h(r) = \int_{a+R}^{b} g(v,R)\, dv \qquad 0 \leq R < b-a \qquad \text{- - - (7)}$

Las ecuaciones (5) y (7) naturalmente, conduciran el mismo resultado.

Bibliografía
Estadística Aplicada
Bernard Ostle
Ed. Limusa

Estadística de Orden.

Teorema Básico:

Por estadísticas de orden entendemos un término genérico que cubre las variables de una muestra aleatoria ordenadas por su magnitud, lo mismo que tales funciones, de tales variables ordenadas.

Seleccionemos una muestra aleatoria de tamaño "n" de una población descrita por la variable aleatoria continua X con función de densidad $f(x)$. Ordenemos las "n" variables de la muestra según su magnitud. Escribamos X_1 para la más pequeña y X_2 para la que sigue en tamaño, ... , X_n para la mayor de todas. Cada uno de estos elementos de la muestra sigue siendo una variable aleatoria al igual que el conjunto de todos ellos.

Podríamos encontrar la función de densidad conjunta ---- $h(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$ de la muestra ordenada $X_1, X_2, \ldots X_n$ o para aclarar lo que posteriormente expondremos, el elemento de probabilidad:

$$h(X_1, X_2, \ldots, X_n)\, dx_1, dx_2, \ldots, dx_n \quad \text{------}(1)$$

Pero conviene a nuestros propósitos posteriores contestar a una pregunta algo más general.. Escribamos un conjunto de enteros $r_1, r_2, \ldots, r_k$ con la propiedad:

$$1 \leq r_1 < r_2 \ \ldots\ldots\ r_k \leq n$$

Y en lugar de (1) encontremos el elemento de probabilidad

$$h(Xr_1, Xr_2, \ldots, Xr_k)\, dx_{r_1}\ dx_{r_2} \ldots dx_{r_k} \quad \text{----}(2)$$

de las estadísticas de orden Xr_1, Xr_2, Xr_3, ... Xr . Por ejemplo para $n = 8$, $r_2 = r_k = 6$, buscamos

$$h(X_3, X_6)\, dx_3\, dx_6$$

$\wedge\ r_1 = 3$

el elemento de probabilidad conjunta de la tercera y sexta Xi -

ordenadas. Nótese que las condiciones necesarias sobre las restantes seis de las ocho variables de la muestra son: X_1 y X_2 menores que X_3, X_4 y X_5 entre X_3 y X_6, X_7 y X_8 mayores que X_6. En general (2) requiere la siguiente fijación de las "n" variables de la muestra:

Número de variables	r_1-1	1	r_2-r_1-1	1	...	
Valor de las variables	$-\infty$				...	
	$x_{r_1}, x_{r_1}+dx_{r_1}$			$x_{r_2}, x_{r_2}+dx_{r_2}$		

$r_k - r_{k-1} - 1$	1	$n - r_k$
	x_{r_k} $x_{r_k}+dx_{r_k}$	$+\infty$

Hay una variable de la muestra en cada uno de Xr_1, $Xr_2, \ldots, Xr_k$ con las siguientes condiciones sobre las otras variables de la muestra: $r_1 - 1$ variables menores que Xr_2 [es decir, ----- $(r_2-1) - (r_1-1) - 1$ variables entre $Xr_2 + dx_{r_1}$ y Xr_2], ..., y finalmente, $n - r_k$ variables mayores que $Xr_k + dx_{r_k}$

La probabilidad de dicha fijación es:

$$\left[\int_{x_{r_1}}^{x_{r_1}+dx_{r_1}} f(x)\,dx \int_{x_{r_2}}^{x_{r_2}+dx_{r_2}} f(x)\,dx \ldots \int_{x_{r_k}}^{x_{r_k}+dx_{r_k}} f(x)\,dx\right] \cdot \left[\left\{\int_{-\infty}^{x_{r_1}} f(x)\,dx\right\}^{r_1-1} \left\{\int_{x_{r_1}+dx_{r_1}}^{x_{r_2}} f(x)\,dx\right\}^{r_2-r_1-1} \ldots \left\{\int_{x_{r_k}+dx_{r_k}}^{\infty} f(x)\,dx\right\}^{n-r_k}\right]$$

El parentesis cuadrado en la primera línea muestra la probabilidad de una variable de la muestra en cada una de $x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots x_{r_k}$ y el paréntesis cuadrado en la segunda línea muestra la probabilidad de r_1-1 variables en la celda indicada (entre $x_{r_1}+dx_{r_1}$ y x_{r_2}), ..., $n - r_k$ variables en la celda indicada (mayores que $x_{r_k} + dx_{r_k}$). Pero "n" variables tomadas "n" a la vez pueden fijarse en

$$\frac{n!}{1!\,1!\ldots\ldots 1!\,(r_1-1)!\,(r_2-r_1-1)!\ldots(n-r_k)!}$$

formadas diferentes e igualmente probables; el elemento de probabilidad requerido (2) es:

$$\frac{n!}{(r_1-1)!(r_2-r_1-1)!\cdots(n-r_k)!} \times \left\{\int_{-\infty}^{x_{r_1}} f(x)\,dx\right\}^{r_1-1} \left\{\int_{x_{r_1}}^{x_{r_2}} f(x)\,dx\right\}^{r_2-r_1-1} \cdots \left\{\int_{x_{r_k}}^{\infty} f(x)\,dx\right\}^{n-r_k} \times f(x_{r_1}) f(x_{r_2}) \cdots f(x_{r_k})\,dx_{r_1}\,dx_{r_2} \cdots dx_{r_k}$$

donde

$\int_{x_{r_1}}^{x_{r_1}+dx_{r_1}} f(x)\,dx$ ha sido reemplazado por $f(x_{r_1})\,dx_{r_1}$,

$\int_{x_{r_1}+dx_{r_1}}^{x_{r_2}} f(x)\,dx$ ha sido reemplazado por

$$\int_{x_{r_1}}^{x_{r_2}} f(x)\,dx \quad \text{etc.}$$

. Aquí y a través de todo este capítulo, nótese que todas -- las f son estrictamente la misma; f se refiere a la función de densidad de la población univariada de la que se toman las muestras. Nótese también que (3) podía ser expresada en forma sencilla y quizá ventajosa en términos de la función de distribución $F(x)$. Por otra parte, nótese que (3) puede considerarse como un término de una función de densidad multinomial conjunta de las variables aleatorias Xr_1, Xr_2, ..., Xr ; los "n" eventos independientes, son una muestra aleatoria de tamaño "n".

La expresión (3) es el resultado básico de la teoría probabilística de las estadísticas de orden. Usando la podemos - encontrar las distribuciones de probabilidad de varias estadísticas de orden importante, tales como Xn, la variable mayor -- en la muestra, Xi, la variable menor en la muestra, $\widetilde{X}$, la variable intermedia de la muestra intermedia ordenada (la mediana) y Xn - Xi, el recorrido de la muestra, como casos especiales de (3).

Teorema de Tolerancia de Wilks

Wilks obtuvo un resultado notable por un simple cambio de las variables. El cambio de las variables aleatorias X_1, X_n - a las variables aleatorias u,v, donde

$$u = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx \quad , \quad v = \int_{x_1}^{x_n} f(x)\,dx$$

La distribución de probabilidad de v (es la proporción - de la población que se encuentra entre los elementos más pequeños y mayores en la muestra) resulta independiente de la función de densidad f(x) que describe la población para recordar esto, probaremos que

$$p(u,v)\,du\,dv = p[u(x_1,x_n), v(x_1,x_n)] \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial v}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} & \frac{\partial v}{\partial x_n} \end{vmatrix}^{-1} dx_1\,dx_n,$$

el inverso jacobiano $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x_1,x_n)}\right|^{-1}$

es preferible a: $\left|\frac{\partial(x_1,x_n)}{\partial(u,v)}\right|$,

en este caso, las derivadas parciales en el inverso se obtienen directamente:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = f(x_1) \;,\quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \;;\quad \frac{\partial v}{\partial x_1} = -f(x_1) \;;\quad \frac{\partial v}{\partial x_n} = f(x_n),$$

y el jacobiano de la transformación de X_1, X_n a u, v es ; $\frac{1}{f(x_1)f(x_n)}$. Por tanto, $f(x_1)\,f(x_n)$ se cancela, y tenemos

$$p(u,v)\,du\,dv = n(n-1)\,v^{n-2}\,du\,dv$$

Integrando respecto a u, con 0 en el límite inferior de u y 1-v su límite superior, obtenemos el elemento de probabilidad de v,

$$g(v)\,dv = n(n-1)\,v^{n-2}(1-v)\,dv \quad - - - - - - - \quad (9)$$

que depende de n, pero no de f(x)

En las aplicaciones prácticas de (9) generalmente deseamos determinar "n" de modo que la probabilidad sea α (alta); de - que al menor una proporción β(alta) de la población quede dentro del recorrido de la muestra. Deseamos encontrar el valor de "n" que satisface

$$\alpha = \int_{\beta}^{1} n(n-1)\,v^{n-2}(1-v)\,dv$$

que se reduce a una solución para "n" de la ecuación traccendente

$$n\beta^{n-1} + (n-1)\beta^{n} = 1 - \alpha \qquad (10)$$

Se han propuesto varias soluciones aproximadas de (10) para n. Dion ha preparado tablas;

Ejemplo:

β	α	n
0.95	0.95	93
0.95	0.99	130
0.99	0.95	473
0.99	0.99	661

Inferencia Estadística

Estimación Puntual

Frontera de Cramér - Rao.

Cramér e independientemente Rao han demostrado que dentro de la clase general de todos los estimadores insesgados de θ, y bajo condiciones bastante amplias, ningun estimador de u, puede tener varianza menor que una cantidad que depende solamente de $f(x;\theta)$ y "n". Este importante resultado que ahora derivamos es:

$$\sigma^{2}(u) \geq \frac{1}{n\,E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)\right)\right]^{2}} \qquad \ldots (A)$$

Sea $X_1, X_2, \ldots X_n$ una muestra aleatoria de $f(X;\theta)$ y sea $u(x_1, x_2, \ldots x_n)$ un estimador insesgado de θ. Por definición:

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, f(x_1, x_2, \ldots x_n;\theta)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2, \ldots x_n)\, f(x_1;\theta)\, f(x_2;\theta) \ldots f(x_n;\theta)\, dx_1 \ldots dx_n$$

Si es posible la diferenciación bajo la integral (con respecto a θ), encontramos:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2, \ldots x_n;\theta) \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{f(x_i;\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta} f(x_i;\theta)\right] f(x_1, \ldots x_n;\theta)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\,,$$

donde el término $f(Xi,\theta)$ se introduce en el denominador para completar la sucesión de términos bajo la suma en el numerador. Luego, se puede escribir:

$$1 = E\left[u \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\theta} \log f(X_i;\theta)\right]$$

Sea ahora u=1; suponiendo que la diferenciación bajo la integral (con respecto a θ) es posible, derivamos la identidad.

$$E(1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n = 1$$

y obtenemos:

$$E\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i;\theta)=0$$

Escribiendo "t" en lugar de la suma:

$$E(ut)=1 \quad , \quad E(t)=0$$

como la covarianza de u y t es

$$cov(u,t) = E(ut) - E(u)E(t) = 1,$$

tenemos

$$\frac{1}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(t)} = \rho^2(u,t) \leq 1$$

donde $\rho(u,t)$ es el coeficiente de correlación lineal de u y t. Encontramos:

$$\sigma^2(u) \geq \frac{1}{\sigma^2(t)}$$

y como $E(t) = 0$

$$\sigma^2(u) \geq \frac{1}{E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\log f(x_i;\theta)\right\}^2}$$

Encontramos ahora una segunda expresión para el segundo -- miembro de A), que, implica solamente operaciones simples - sobre la función de densidad original $f(X;\theta)$. Escribiendo

$$t_i = \frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i;\theta)$$

$$\sigma^2(u) \geq \frac{1}{E\left\{\sum_{i=1}^{n} t_i\right\}^2}$$

tenemos

$$E(t_1+\ldots+t_n)^2 = E(t_1^2)+\ldots+E(t_n^2)+E(\text{términos mixtos})$$

$$= nE\,t^2 + E(\text{términos mixtos})$$

Consideremos un término mixto:

$$E\,\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i;\theta)\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_j;\theta), \qquad i\neq j$$

$$= E\,\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i;\theta)\,E\,\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_j;\theta) \qquad i\neq j$$

pero

$$E\,\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)\cdot f(x;\theta)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}f(x;\theta)\,dx$$

sabemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x;\theta)\,dx = 1$$

si podemos diferenciar (con respecto a θ) bajo la integral y si los límites de X no dependen de θ, tendremos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \theta} f(x;\theta)\, dx = 0$$

y finalmente

$$V^2(u) \geq \frac{1}{nE\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x;\theta)\right)\right\}^2}$$

la desigualdad o frontera de Cramér-Rao. Una forma alternativa valiosa de esta desigualdad se encuentra como sigue:

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \theta} f(x;\theta)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{f(x;\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} f(x;\theta) \right] \right\} f(x;\theta)\, dx$$

abreviando la notación y derivando bajo la integral, obtenemos:

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + f \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log f \right] \right\} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f \right\} f\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\partial \log f}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial^2 \log f}{\partial \theta^2} \right\} f\, dx$$

de donde obtenemos una forma alternativa de la desigualdad de Cramér-Rao en que aparece la segunda derivada de la función densidad:

$$V^2(u) \geq \frac{1}{-nE\left(\frac{\partial^2 \log f(x;\theta)}{\partial \theta^2}\right)} \quad \ldots\ldots \; B$$

El denominador de B ha sido llamado I, la "cantidad de información" sobre θ en $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Nótese que I depende solamente de f y n, y no de algún método particular de estimación.

En ciertas discusiones, la eficiencia de un estimador t se define en relación a la frontera de Cramér-Rao (el segundo miembro de A) . Esto tiene una desventaja. En muchas situaciones puede no ser posible para estadística alguna alcanzar la frontera de Cramér- Rao. Estas restricciones, lo mismo que otras fronteras inferiores de la varianza debidas principalmente a Bhattachayya y a Tuefer, se refieren a Kendall y Stuart,

Pero definamos a la eficiencia en términos de esta frontera o no, el resultado de Cramér- Rao proporciona un método de identificar ciertas estadísticas insesgadas de varianza mínima; en cualquier problema de estimación puntual encontramos la fron tera de Cramér-Rao; si un estimador insesgado que tiene esta va-rianza se conoce, la búsqueda ha terminado.

Nótese que un estimador que tiene la varianza de la frontera inferior de Cramér-Rao es consistente; un estimador así es insesgado y según A, su varianza tiende a o cuando "n" se hace indefinidamente grande.

Dámos tres ejemplos, dejando al lector rectifique la frontera de Cramér-Rao en cada ejemplo:

a) Para X normal, media desconocida λ, varianza desconocida γ^2, la frontera de CR es γ^2/n. El estimador insesgado es $\bar{X}$ y tiene esta varianza. Por tanto $\bar{X}$ es un estimador insesgado de λ de varianza mínima.

b) Para X normal, media desconocida λ, varianza desconocida γ^2, la frontera de CR es $2\gamma^4/n$. El estimador insesgado $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\lambda)^2$ tiene esta varianza. Por tanto, $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\lambda)/n$ es un estimador insesgado de γ^2 de varianza mínima.

c) Para X normal, media desconocida λ, varianza desconocida consideramos el (mejor) estimador insesgado $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2/(n-1)$ — Tiene varianza $2\gamma^4/(n-1)$, mayor que la frontera de CR que, extendiendo el teorema de Cramér-Rao a dos parámetros, es de $2\gamma^4/n$ Ningún estimador insesgado existe con varianza tan pequeña como la frontera de CR.

Posible Unicidad del Estimador Insesgado Mejorado.

El estimador insesgado mejorado (más pequeño) v encontrado anteriormente es a menudo único. Sea t un estimador suficiente de θ, con función de densidad $g(t;\theta)$. Sean tanto $v_1(t)$ como $v_2(t)$ estimadores insesgados de θ que dependen de t,

$$E\{v_1(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(t)\, g(t;\theta)\, dt = \theta$$

c) Consideramos la población de Poisson

$$f(x;\mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} \qquad x=0,1,\ldots\ldots$$

Se ha demostrado que una estadística suficiente para μ es $t = X_1 + \ldots\ldots + X_n$. Sabemos que t misma sigue una distribución de Poisson

$$h(t;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{t}}{t!} \quad - - - - - - - - \quad t=0,1,\ldots,$$

con $\lambda = n\mu$ ¿Es $h(t;\lambda)$ completa? . Tenemos

$$0 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{s(t)e^{-\lambda}\lambda^{t}}{t!}$$

$$= s(0)e^{-\lambda} + s(1)e^{-\lambda}\lambda + s(2)e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} + s(3)e^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{3!} + \ldots$$

para toda λ , ó

$$s(0) + \lambda s(1) + \frac{\lambda^2}{2!}s(2) + \frac{\lambda^3}{3!}s(3) + \ldots = 0 \quad \text{para toda } \lambda,$$

lo que requiere

$$s(0) = s(1) = s(2) = s(3) = \ldots\ldots\ldots = 0,$$

donde $h(t;\lambda) \neq 0$ para alguna λ . Por tanto, hay una solamente, función de t que es un estimador insesgado (de varianza mínima) de μ. En cuanto a su identidad, como

$$E(X_1 + \ldots + X_n) = n\mu = E(t)$$

tenemos $\frac{1}{n}E(t) = \mu$

$\frac{t}{n}$ es el estimador insesgado de varianza mínima de μ

Máxima Verosimilitud

Varianza Asintótica del estimador de máxima verosimilitud.

Ejemplos:

a) Varianza asintótica del estimador de máxima verosimilitud de la varianza V de una distribución normal de media conocida.

El estimador de máxima verosimilitud de V está dado por - B . Para encontrar la varianza en muestras grandes, de este estimador

$$f(x;\lambda,V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} \exp\left[-\frac{1}{2V}(x-\lambda)^2\right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2}\log f(x;\lambda,v)=\frac{1}{2v^2}-\frac{1}{v^3}(x-\lambda)^2$$

$$E\,\frac{\partial^2}{\partial v^2}\log f(x;\lambda,v)=\frac{1}{2v^2}-\frac{v}{v^3}=\frac{1}{2v^2}$$

$$\tau^2(t)=\frac{2v^2}{n}$$

b) Varianza asintótica del estimador de máxima verosimilitud - de la binomial p. El estimador de máxima verosimilitud de p está dado por β . Para encontrar la varianza, en grandes muestras, de este estimador

$$T=\frac{\sum(x_i-\lambda)^2}{n}$$

$$\frac{dL}{dp}=\frac{x}{p}-\frac{(n-x)}{1-p}=0$$

con solución única igual a $\frac{X}{n}$

$$f(x;p)=p^x(1-p)^{1-x}$$

$$\frac{\partial^2\log[f(x);p]}{\partial p^2}=-\frac{x}{p^2}-\frac{1-x}{(1-p)^2}=\frac{1}{pq},$$

$$\tau^2(t)=\frac{pq}{n}$$

que resulta igual a la varianza exacta (para toda n) ya encontrada

c) Varianza asintótica del estimador de máxima verosimilitud del parámetro de Cauchy. Aunque se encontro que para toda el estimador de máxima verosimilitud del parámetro de Cauchy era intratable, la varianza asintótica del estimador de máxima verosimilitud se encuentra facilmente:

$$\log f(X;\theta)=\log\frac{1}{\pi}-\log\left[1+(X-\theta)^2\right],$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(X;\theta)=\frac{-2+2(X-\theta)^2}{[1+(X-\theta)^2]^2}$$

$$E\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(X;\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-2+2(X-\theta)^2}{[1+(X-\theta)^2]^2}\,\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+(X-\theta)^2}\,dx$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int\frac{1-u^2}{(1+u^2)^3}\,du$$

$$\sigma^2\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{pq}{n}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(X_i - \theta)}{1 + (X_i - \theta)^2} = 0$$

que, como se demuestra . . . . . . , se reduce a $\frac{1}{2}$.
Finalmente:

$$\sigma^2(T) = \frac{2}{n}$$

Luego, el estimador de máxima verosimilitud del parámetro de Cauchy (que puede ser determinado sólo aproximadamente) tiene una varianza asintótica igual a $\frac{2}{n}$, mientras que la mediana de la muestra, que se encuentra mucho más facilmente y que, como se hace notar . . . . . , es un estimador insesgado del parámetro de Cauchy, tiene una variación asintótica igual a $\frac{\pi^2}{4n}$, como se hace ver . . . . La eficiencia asintótica de la mediana de la muestra aquí es $\frac{8}{\pi^2}$, casi el 83%.

Los Mejores Estimadores Lineales Insesgados

Multiplicadores indeterminados de Lagrange.

En la sección anterior, encontramos valores de Ci en el estimador T que minimizaban (T), con T sujeta a la condición $E(T) = \theta$. El problema de determinar máximos o mínimos de funciones, dadas ciertas condiciones colaterales sobre las variables de las funciones, se encuentra en muchas áreas de las matemáticas aplicadas. Incluímos aquí, por ello, un breve ejemplo que ilustra un método elegante y sistemático de solución que se debe a — Lagrange.

En el método de Lagrange, el número de ecuaciones a resolver se reducía de n a n-k mediante la sustitución o introducción de nuevos parámetros y se resuelve este conjunto más grande de —ecuaciones. Por ejemplo, para minimizar $E(w,x,y,z,)$ con condi--

diciones colaterales $f(w,x,y,z) = 0$, $g(w,x,y,z) = 0$, con $f \neq g$, tenemos:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial w} dw + \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial y} dy + \frac{\partial H}{\partial z} dz$$
$$df = \frac{\partial f}{\partial w} dw + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$
$$dg = \frac{\partial g}{\partial w} dw + \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz$$

Para que las condiciones colaterales sean diferentes, al menos uno de los 6 jacobianos

$$\left|\frac{\partial(f,g)}{\partial(w,x)}\right|, \quad \left|\frac{\partial(f,g)}{\partial(w,y)}\right|, \quad \left|\frac{\partial(f,g)}{\partial(w,z)}\right|,$$

$$\left|\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\right|, \quad \left|\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}\right|, \quad \left|\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}\right|$$

debe ser distinto de cero. Supongamos que el último jacobiano no se anula. Entonces podemos encontrar dos constantes (multiplicadores indeterminados) a, b tales que (añadiendo las últimas dos columnas

$$\frac{\partial H}{\partial y} dy + a \frac{\partial f}{\partial y} dy + b \frac{\partial g}{\partial y} dy = 0$$
$$\frac{\partial H}{\partial z} dz + a \frac{\partial f}{\partial z} dz + b \frac{\partial g}{\partial z} dz = 0$$

lo que nos da cuatro ecuaciones (las dos condiciones colaterales y las ecuaciones que acabamos de producir) con seis incognitas, w, x, y, z, a y b.

Las dos ecuaciones finales se construyen ahora basándonos en propiedades que aún no hemos usado. Multipliquemos df por a, dg por b y formemos dH + a df + b dg . Sumando las dos primeras columnas y recordando que para que exista un valor extremo de H debe tenerse dh = 0, tenemos.

$$\left(\frac{\partial H}{\partial w} + a \frac{\partial f}{\partial w} + b \frac{\partial g}{\partial w}\right) dw + \left(\frac{\partial H}{\partial x} + a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial g}{\partial x}\right) dx = 0$$

Pero w y x son variables independientes, y, por tanto, lo son dw y dx, y cada uno de los parentesis debe ser cero. Las dos ecuaciones finales.

$$\frac{\partial H}{\partial w} + a \frac{\partial f}{\partial w} + b \frac{\partial g}{\partial w} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial x} + a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

y podemos resolver el sistema en las seis incógnitas. Las seis ecuaciones con las que terminamos se ve que son las que se obtienen al minimizar

$$H = af + bg$$

(cuatro ecuaciones) más las dos condiciones colaterales

P.E. Encuéntrese el valor mínimo de $H = X^2 + Y^2 + Z^2$, con la condición $X+Y+Z = 3k$. Consideramos primero la solución por reducción a dos variables independientes y dos ecuaciones:

$$H = X \quad + Y \quad + (3k - X - Y)$$

$$\frac{\partial H}{\partial X} = 2X - 2(3k - X - Y) = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial Y} = 2Y - 2(3k - X - Y) = 0$$

de donde $X=k$, $Y=k$, y finalmente de las ecuaciones de condición $Z = k$. Como las segundas derivadas son positivas, $H = 3k^2$ es el valor del mínimo de H.

En el método de Lagrange, llegamos a las cuatro variables y las cuatro ecuaciones. En nuestro ejemplo, las cuatro ecuaciones son:

$x + y + z = 3k$; $2z + a = 0$; $2x + a = 0$; $2y + a = 0$
con igual resultado

La representación general del método de Lagrange es evidente. Para minimizar o maximizar

$$H(X_1, X_2, \ldots Xn)$$

donde las "n" variables estan sujetas a m condiciones diferentes $(m < n)$.

$$\phi_i\ (x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

formamos:

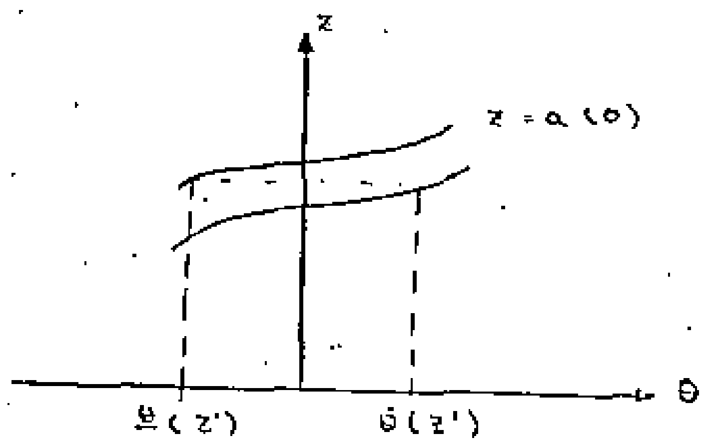
$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + a_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + a_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_i} + \ldots + a_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Hay n+m incógnitas (n variables y m multiplicadores a_i) y n+m ecuaciones (m condiciones , y puede existir una solución única, además de (n ecuaciones diferenciales)

Interpretación Geométrica. Es útil una interpretación geomé-trica de los intervalos de confianza. Sea $f(x;\theta)$ la función de densidad de X; tenemos una variable aleatoria Z con la que podemos probar la hipótesis $H_0: \theta = \theta_0$ de tamaño α, para todo posible valor de θ, siendo la región de rechazo de H_0, las colas de la distribución de Z. Es decir, podemos encontrar a y b en

$$\int_a^b g(z;\theta)\,dz = 1-\alpha$$

para todo valor de θ. Ahora, a y b serán en general funciones de θ. Se grafican $Z=a(\theta)$ y $Z=b(\theta)$ en el plano Z,θ, tal como aparece en la figura. Una muestra observada E da lugar a un valor particular de Z, digamos Z' Dada Z' podemos leer en la figura los valores $a(\theta)$ y $b(\theta)$ que corresponden a Z' y los límites inferior y superior de θ correspondientes a Z' usualmente $a(\theta)$ y $b(\theta)$ son funciones monótonas de θ, luego ha-bra sólo un par de límites $\underline{\theta}(Z')$ y $\overline{\theta}(Z')$ correspondientes a Z'.



Plano Z,θ y funciones $Z= a(\theta)$ y $Z= b(\theta)$

Figura

Ilustramos este argumento geométrico con el primero de los dos ejemplos anteriores. Consideramos una variable normal con media desconocida λ y varianza conocida $\sigma^2=1$. La estadística que utilizamos para hacer la prueba de una hipótesis sobre λ - para todo posible valor de λ es $\bar{x}$; ilustramos la geometría sobre $\bar{x}$ misma aunque la cantidad fundamental (29-4) se había ligado de modo más inmediato con lo que esta sección se discute

$$P[\underline{\Theta}(E) \le \Theta \le \bar{\Theta}(E)/\Theta] = 1-\alpha$$

$$\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} N(\bar{x};\lambda,\tfrac{1}{n})\,d\bar{x} = 1-\alpha = \text{digamos } 0.95$$

$$\frac{a(\lambda)+b(\lambda)}{2} = \lambda$$

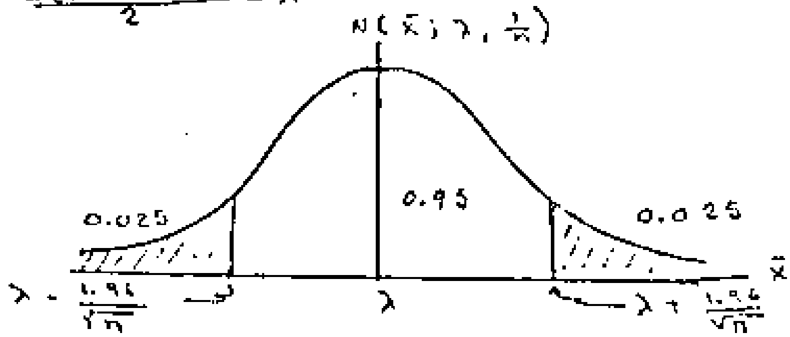


Fig A. Regiones críticas sobre x en una prueba sobre la media normal, varianza 1

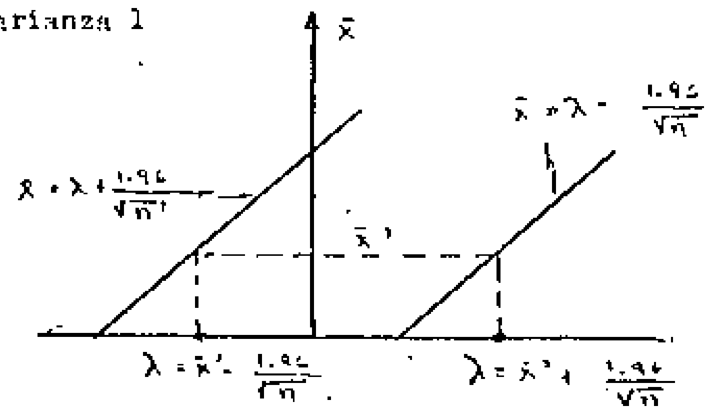


Fig B Plano $\bar{x}$, λ y funciones $b(\lambda)+1.96/\sqrt{n}$ y $a(\lambda) = \lambda - 1.96/\sqrt{n}$ donde, para toda λ, x está normalmente distribuida con media λ y varianza $1/n$. La integral se ilustra en la figura A, donde $b(\lambda) = \lambda + 1.96/\sqrt{n}$ y $a(\lambda) = \lambda - 1.96/\sqrt{n}$

En la figura . estas funciones $a(\lambda)$ y $b(\lambda)$ se muestran en el plano $\bar{x},\lambda$ y los límites de confianza inferior y superior de 0.95 sobre λ, correspondientes a la media de una muestra observada $\bar{x}'$; se ve que son $\bar{\lambda}' + 1.96/\sqrt{n}$ y $\bar{x}' - 1.96/\sqrt{n}$

Bibliografia

INTRODUCCION A LA INFERENCIA ESTADISTICA
Harold Freeman
Ed. Trillas

LA INTEGRAL APLICADA A LA ECONOMIA.

SUPONGAMOS QUE LA FUNCION DE LA DEMANDA DE CIERTO ARTICULO PUEDE APROXIMARSE POR :

$$x(P) = \frac{2.2 - \log P}{0.022} \qquad 1 \leq P \leq e^{2.2}$$

DONDE "X" ES LA CANTIDAD DEMANDADA Y "P" ES EL PRECIO. POR EJEMPLO: SI EL PRECIO ES $1.00, LA CANTIDAD DEMANDADA SERA 100 UNIDADES Y LA RENTA CORRESPONDIENTE SERA $100.00.

DESPEJANDO "P" DE LA ECUACION ANTERIOR SE OBTIENE LA INVERSA DE LA FUNCION DE DEMANDA, A SABER :

$$P(x) = e^{2.2 - 0.22x} \qquad 0 \leq x \leq 100$$

SUPONGAMOS AHORA QUE EL VENDEDOR PRACTICA LO QUE SE CONOCE COMO "DISCRIMINACION PERFECTA DE LOS PRECIOS", VENDIENDO CADA UNIDAD (O FRACCION) A UN PRECIO DIFERENTE; COMO DETERMINA LA INVERSA DE LA FUNCION DE DEMANDA. ESTO EQUIVALE A VENDER LA PRIMERA UNIDAD AL PRECIO P(1), LA SEGUNDA A P(2)... LA UNIDAD 99 A P(99) Y LA UNIDAD 100 A P(100). EN ESTE CASO LA RENTA TOTAL DEL VENDEDOR SERIA.

$$\sum_{n=1}^{100} P(n) = \sum_{n=1}^{100} e^{2.2 - 0.22n}$$

ESTA SUMA ES BASTANTE ENGORROSA DE CALCULAR PERO PUEDE APROXIMARSE POR MEDIO DE UNA INTEGRAL FACIL DE EVALUAR.

PARA AVERIGUAR CUAL ES ESA INTEGRAL, SUPONEMOS QUE EL PRODUCTO ES DIVISIBLE EN UNIDADES FRACCIONALES. SUPONGAMOS QUE SE DIVIDE CADA UNIDAD EN "M" PARTES IGUALES Y EL VENDEDOR VENDE CADA UNA DE LAS 100 "M" PARTES CORRESPONDIENTES AL PRECIO POR UNIDAD ENTERA QUE DETERMINA LA INVERSA DE LA FUNCION DE DEMANDA. ENTERA. QUE DETERMINA

EN ESTE CASO LA RENTA TOTAL SERIA

$$P\left(\frac{1}{M}\right)\frac{1}{M} + P\left(\frac{2}{M}\right)\frac{1}{M} + P\left(\frac{3}{M}\right)\frac{1}{M} + \cdots$$

O EN FORMA ABREVIADA:

$$\sum_{k=1}^{100M} P\left(\frac{k}{M}\right)\frac{1}{M}$$

SI HACEMOS QUE M TIENDA A INFINITO, LA SUMA ANTERIOR TENDERA A

$$\int_0^{100} P(x)\,dx$$

ESTO PUEDE VERSE ESCRIBIENDO LA SUMA COMO:

$$\sum_{k=1}^{N} P(0 + k\Delta x)\Delta x$$

DONDE $\Delta X = 100/100M = 1/M$ Y $N = 100M$. PARA LUEGO EMPLEAR LA DEFINICION DE INTEGRAL Y CONCLUIR QUE:

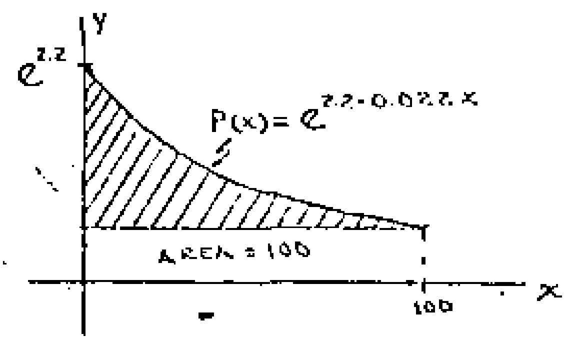
$$\lim_{M\to\infty} \sum_{k=1}^{100M} P\left(\frac{k}{M}\right)\frac{1}{M} = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} P(0 + K\Delta X)\Delta X = \int_0^{100} P(x)\,dx$$

EL LIMITE ANTERIOR EXISTIRÁ PORQUE "P" ES CONTINUA.

POR CONSIGUIENTE, LA RENTA TOTAL $\sum_{n=1}^{100} e^{2.2-0.022n}$, CALCULADA BAJO DISCRIMINACION PERFECTA DE PRECIOS SE PUEDE APROXIMAR POR:

$$\int_0^{100} e^{2.2-0.022x}\,dx$$

ESTA INTEGRAL SE CALCULA FACILMENTE Y SU VALOR ES \$ 364.77. LA DIFERENCIA \$264.77, ENTRE LA RENTA DETERMINADA CON DISCRIMINACION PERFECTA DE PRECIOS Y LA RENTA (\$100.00) CALCULADA EN AUSENCIA DE DISCRIMINACION PERFECTA DE PRECIOS, SE LLAMA SUPERAVIT DEL CONSUMIDOR Y RESULTA UTIL EN EL ANÁLISIS DE LOS "BENEFICIOS" DE PROYECTOS PUBLICOS. EL SUPERAVIT DEL CONSUMIDOR ESTA REPRESENTADO POR EL AREA SOBREADA. LA OTRA RENTA ESTA REPRESENTADA POR EL AREA DEL RECTANGULO INDICADO.



PROBLEMA

UN TENDERO QUE VENDE PRODUCTOS PERECEDEROS BAJO CONDICIONES FLUCTUANTES DE DEMANDA DURANTE UN PERIODO DE UN AÑO ENCARA EL PROBLEMA DE MANTENER UN INVENTARIO ÓPTIMO QUE MAXIMICE SUS GANANCIAS. SUPONGAMOS QUE $P(n)$ REPRESENTA LAS GANANCIAS OBTENIDAS CUANDO LA DEMANDA ES "n" Y QUE $f(n)$ REPRESENTA LA PROBABILIDAD DE QUE LA DEMANDA ESTE ENTRE "0" Y "n". SUPONGAMOS ADEMAS, QUE LAS SUCESIONES CORRESPONDIENTES $\{P(n)\}$ Y $\{f(n)\}$ EXTENDERSE PARA DAR FUNCIONES "P" Y "f" DEFINIDAS EN $[0,\infty)$ DONDE "P" ES CONTINUA Y f' EXISTE Y ES CONTINUA.

BAJO ESAS CONDICIONES, LAS GANANCIAS QUE ESPERA RECIBIR EL TENDERO EN PROMEDIO DURANTE EL AÑO SE APROXIMA POR LA INTEGRAL:

$$\int_0^{\infty} P(y)\,f'(y)\,dy$$

LA DEDUCCION DE ESTA FORMULA COINCIDE CASI AL PIE DE LA LETRA CON :

$$\lim_{b \to \infty} \int_0^b t\,P'(t)\,dt = \int_0^\infty t\,P'(t)\,dt$$

CONCIDEREMOS AHORA UN PROBLEMA ESPECIFICO EN EL QUE EL TENDERO SOLAMENTE PUEDE VENDER SU PRODUCTO DURANTE EL AÑO EN CURSO. SUPONGAMOS QUE EL PRODUCTO LE CUESTA \$10.00 POR UNIDAD Y QUE VENDO CADA UNIDAD A \$19.00. SIN EMBARGO, AL FINAL DEL AÑO LAS UNIDADES NO VENDIDAS (LAS EXCEDENTES) SOLO PUEDEN VENDERSE POR \$6.00 CADA UNA. EL OBJETIVO DEL TENDERO ES ALMACENAR SUFICIENTES UNIDADES X, PARA MAXIMIZAR SU GANANCIA ESPERADA.

BAJO ESTAS CONDICIONES LA FUNCION DE GANANCIAS P ESTARA DADA POR:

$$P(y) = \begin{cases} 9x & \text{SI } y \geq x \\ 9y - 4(x-y) & \text{SI } y < x \end{cases}$$

DONDE "y" ES LA DEMANDA.

LA GANANCIA ESPERADA $E(x)$, EN FUNCION DE LA OFERTA X, SERA:

$$E(x) = \int_0^\infty P(y)\, f'(y)\, dy$$

$$= \int_0^x P(y)\, f'(y)\, dy + \int_x^\infty P(y)\, f'(y)\, dy$$

$$= \int_0^x [9y - 4(x-y)]\, f'(y)\, dy + \int_x^\infty 9x\, f'(y)\, dy$$

UTILIZANDO EL HECHO DE QUE $\int_0^\infty f'(y)\,dy = 1$ LA EXPRESION QUE DA $E(x)$ PUEDE SIMPLIFICARSE A:

$$E(x) = 9x + 13 \int_0^x (y - x)\, f'(y)\, dy$$

EL HECHO DE QUE $\int_0^\infty f'(y)\,dy = 1$ SE DEDUCE DE:

$$\int_0^\infty f'(y)\,dy = \lim_{b \to \infty} \int_0^b f'(y)\,dy = \lim_{b \to \infty} f(y)\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b \to \infty} [f(b) - f(0)] = 1$$

PORQUE SEGUN LAS SUPOSICIONES INICIALES TENEMOS QUE $f(0)=0$ Y POR EL CONTEXTO DE PROBABILIDADES DEBEMOS TENER $\lim_{b\to\infty} f(b)=1$.

UTILIZANDO LA FORMULA:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x (y-x)\,f'(y)\,dy\right] = -f(x)+f(0)$$

PODEMOS DERIVAR E PARA OBTENER:

$$E'(x) = 9-13\,f(x)$$

EN LA MAYORIA DE LOS CASOS, LOS DATOS EMPIRICOS SUGIEREN LA FORMA DE LA FUNCION f

SUPONGAMOS, ENTONCES QUE f ESTA DADA POR:

$$f(y) = 1-e^{-\alpha y}$$

DONDE $\alpha = 0.0005$

ENTONCES: $E'(x) = 9-13(1-e^{-\alpha x}) = -4+13e^{-\alpha x}$

PARA OPTIMIZAR E HACEMOS:

$$-4+13e^{-\alpha x}=0$$

Y OBTENEMOS:

$$x = \frac{1}{\alpha}\log\frac{13}{4} = 2000\,\log\frac{13}{4} = 5129.8$$

COMO $E(5130) > E(5129)$

PODEMOS CONCLUIR QUE LA CANTIDAD DE OFERTA QUE MAXIMIZA LAS GANANCIAS DEL TENDERO ES 5130.

Método Rápido para Calcular Elevaciones de una

Curva Vertical de una Carretera

Dan Hirschfeld. Consoor, Townsend y asociados. Chicago, Illinois.

Entre mas ecuaciones deba usar un ingeniero para llegar a un resultado dado, hay mayor oportunidad de error humano. Los cálculos involucrados también provocan una pérdida de tiempo. Una ayuda - accesible para reducir tanto errores como pérdidas de tiempo, sería una determinación de las elevaciones de las curvas verticales. Esto es cierto aún cuando la mayoría de las oficinas de ingeniería están usando computadoras, pero los resultados, obtenidos deben checarse o bien son impracticos para trabajos pequeños.

Tomando en cuenta que una curva vertical tiene propiedades de una parábola, no existe diferencia con un diagrama de momentos producidos por una carga uniforme actuando en una viga simplemente apoyada. Por lo tanto el diagrama de cortantes de aquella parábola es una linea recta uniendo las dos reacciones. El área bajo el diagrama de cortantes en un intervalo dado es igual al cambio de momento en ese intervalo, como se muestra en los ejemplos.

Usando el área bajo el diagrama de cortante, uno puede calcular - cualquier punto a lo largo de la curva.

Esto eliminará un paso en la determinación de la elevación si se - usará el método tradicional (Calculando la elevación de la tangente, la corrección y finalmente la elevación real.)

Aún mas, se nota que cuando el cortante es igual a cero el momento es máximo, con lo cual se localiza el punto mas alto o mas bajo de la parábola. Para construir un diagrama de cortantes, tiene uno que recordar que la reacción tiene la misma magnitud que el grado. La "ordenada" arriba de la linea horizontal es positiva y abajo de la linea es negativa. Las abcisas tienen unidades de longitud.Las áreas construidas del diagrama de cortantes se suma o se resta dependiendo del problema.

Este método puede ser tan aproximado como el ingeniero desee, solamente aumentando el número de lugares de cálculo.. La aproximación que da la regla de cálculo es normalmente aceptable. Sus aplicaciones numerosas y poco es lo que tiene uno que recordar de las ecuaciones fundamentales de curvas verticales, las cuales, como se sabe, son tediosas. La figura No. 1 muestra aplicaciones de este método rápido para cuatro tipos de curvas parabólicas.

En las gráficas :

PCV = Punto de curvatura vertical

PIV = Punto de intersección vertical

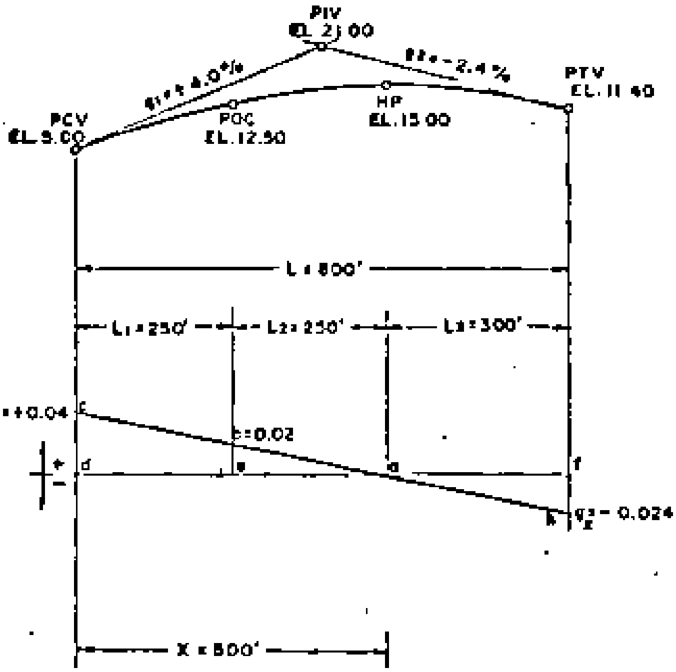
PTV = Punto de tangencia vertical

POC = Punto sobre la curva

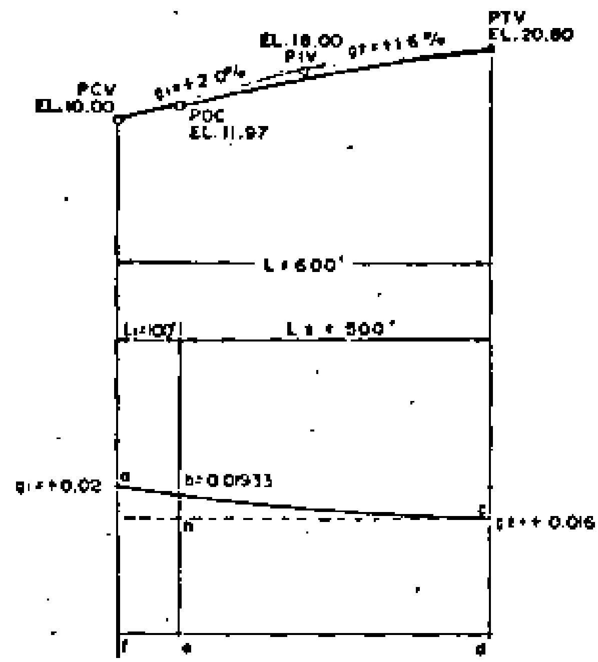
HP = Punto alto

LP = Punto bajo

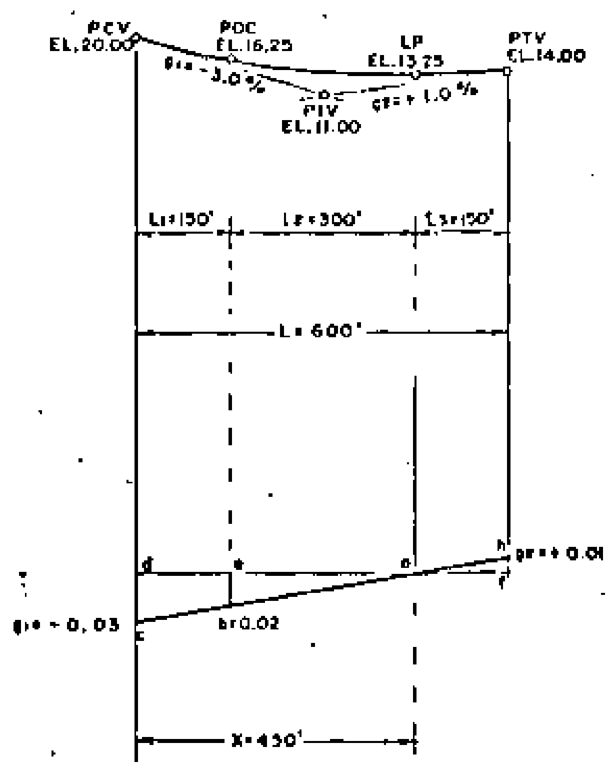
1


PIV
EL. 21.00
g1 = + 4.0%
g2 = - 2.4%
PCV
EL. 5.00
POC
EL. 12.50
HP
EL. 15.00
PTV
EL. 11.40
L = 800'
L1 = 250'
L2 = 250'
L3 = 300'
g1 = + 0.04
b = 0.02
g2 = - 0.024
X = 500'

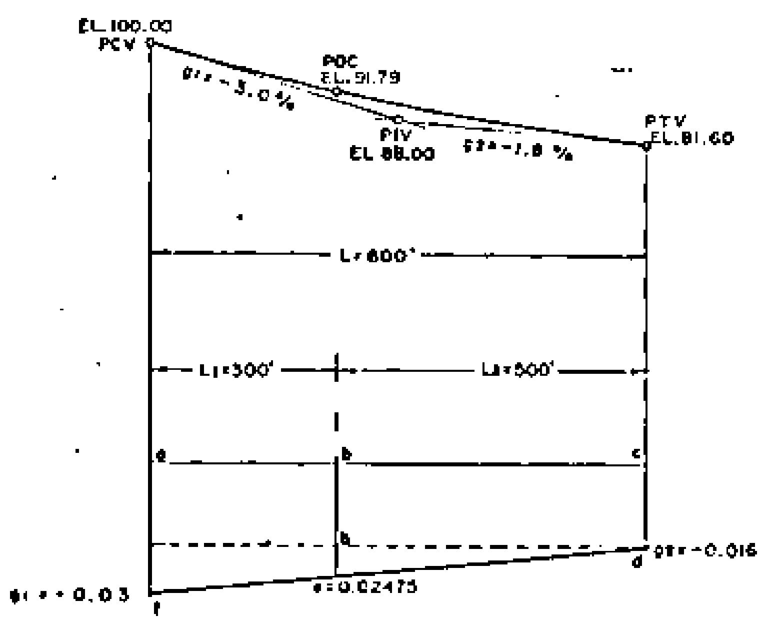
2


PTV
EL. 20.80
EL. 18.00
PIV
g1 = + 2.0%
g2 = + 1.6%
PCV
EL. 10.00
POC
EL. 11.97
L = 600'
L1 = 100'
L2 = 500'
g1 = + 0.02
b = 0.0193
g2 = + 0.016

3


PCV
EL. 20.00
POC
EL. 16.25
LP
EL. 13.25
PTV
EL. 14.00
g1 = - 3.0%
g2 = + 1.0%
PIV
EL. 11.00
L1 = 150'
L2 = 300'
L3 = 150'
L = 600'
g2 = + 0.01
g1 = - 0.03
b = 0.02
X = 450'

4


EL. 100.00
PCV
POC
EL. 91.79
g1 = - 3.0%
PIV
EL. 88.00
g2 = - 1.6%
PTV
EL. 81.60
L = 800'
L1 = 300'
L2 = 500'
g2 = - 0.016
g1 = - 0.03
e = 0.02475

T I P O 1

$$x = \frac{g1\ L}{(g1+g2)} = \frac{(0.04)(800)}{0.064} = 500$$

Determinar la elevación del punto HP

$$\text{área (acd)} = \frac{g1}{2}\ x = \left(\frac{0.04}{2}\right) 500 = 10.00'$$

Elev: HP = Elev: PCV + área (acd) = 5.00 + 10.00 = 15.00'

Determinar la elevación POC

$$\text{Punto b} = \frac{L2}{x}\ g1 = \frac{(250)}{(500)}\ 0.04 = 0.02$$

$$\text{Area (abe)} = \frac{L2}{2}\ b = \frac{(250)}{2}\ 0.02 = 2.5'$$

Elev. POC = Elev. PCV + área (cbed) ó Elev. HP-área (abe) = 15.00 - 2.5 = 12.50'

Checando la elevación POC:

$$\text{Area (afh)} = \frac{g2}{2}\ L_3 = \left(\frac{(0.024)}{(2)}\right) 300 = 3.6'$$

Area (abe) = 2.5'

Elev. POC = Elev. PTV + área (afh) - área (abe) = 11.40 + (3.6-2.5) = 12.50'

T I P O 2

Determinar la elevación PTV

$$\text{área (acdf)} = \frac{(g1 + g2)}{2}\ L = \frac{(0.036)}{2}\ 600 = 10.80'$$

Elev. PTV = Elev. PCV = área (acdf) = 10.00 +10.80 = 20.80'

Determinar la elevación POC

$$\text{Distancia bh} = \frac{L_2}{L}\ (g1 - g2) = \frac{500}{600}\ (0.004) = 0.00333$$

Punto b = g2 + bh = 0.016 + 0.00333 = 0.01933

$$\text{Area (abcf)} = \frac{(g1+b)}{2} \ L1 = \frac{(0.02 + 0.01933)100}{2} = 1.967'$$

Elev. POC + Elev. PVC + área (abcf) = 10.00 + 1.967 = 11.97'

Checando la elevación POC:

$$\text{Area (bcde)} = \frac{(b+g2)}{2} \ L2 = \frac{(0.01933 + 0.016)500}{2} = 8.833'$$

Elev. POC = Elev PTV - área (bcde) = 20.80 - 8.33 = 11.97'

T I P O 3

$$X = \frac{(g1\ L)}{(g1+g2)} = \frac{0.03}{0.05} \ 600 = 450'$$

Determinar la elevación del punto LP

$$\text{Area (adc)} = \frac{g1}{2} x = \frac{0.03}{2} \ 450 = 6.75'$$

Elev. LP = Elev. PCV - área (adc) = 20.00 - 6.75 = 13.25

Determinar la elevación POC

$$\text{Punto b} = \frac{L2}{x} g1 = \frac{(300)}{400} 0.03 = 0.02$$

$$\text{Area (abc)} = \frac{L2}{2} b = \frac{300}{450} 0.02 = 3.00'$$

Elev. POC = Elev. PCV - área (debc) ó Elev. Lp + área (aeb) = 13.25 + 3.00 = 16.25'

Checando la elevación LP:

$$\text{Area (afh)} = \frac{g2}{2} L3 = \frac{(0.01)}{2} \ 150 = 0.75'$$

Elev. LP = Elev. PTV - Area (afh) = 14.00 - 0.75 = 13.25'

T I P O 4

Determinar la elevación PTV

$$\text{Area (acdf)} = \frac{(g1 + g2)}{2} L = \frac{(0.03 + 0.016)}{2} 800 = 18.4'$$

Elev. PTV = Elev. PCV − área (acdf) = 100.00 − 18.14 = 81.6'

Determinar la elevación POC :

$$\text{Distancia eh} = \frac{\frac{L}{2}}{L} (g1 - g2) = \frac{(500)}{(800)} 0.014 = 0.00875$$

Punto e = g2 + eh = 0.00875 + 0.016 = 0.02475

$$\text{Area (abef)} = \frac{g1+e}{2} L_1 = \frac{(0.03+0.02475)}{2} 300 = 8.213'$$

Elev. POC = Elev. PCV − área (abef) = 100.00 − 8.213 = 91.79'

Checando la elevación POC

$$\text{Area (bcde)} = \frac{(g2+e)}{2} L_2 = \frac{(0.016+0.02475)}{2} 500 = 10.188$$

Elev. POC = Elev. PTV + área (bcde) = 81.60 + 10.188 = 91.79'

LA SIGUIENTE PRUEBA, LLAMADA PRUEBA DE LA INTEGRAL, TAMBIEN ES UNA PRUEBA DEL TIPO DE COMPARACION, PERO EN ESTE CASO LA COMPARACION SE REALIZA ENTRE UNA INTEGRAL Y UNA SERIE.

TEOREMA.- SEA Σa_n UNA SERIE DE TERMINOS POSITIVOS NO CRECIENTES.

SEA $f(x)$ UNA FUNCION NO CRECIENTE DEFINIDA PARA $n \geq N$, PARA LA CUAL:

$$f(n) = a_n \qquad n \geq N.$$

... ENTONCES LA SERIE Σa_n Y LA INTEGRAL $\int_N^\infty f(x)\,dx$ AMBAS CONVERGEN O AMBAS DIVERGEN.

DEMOSTRACION: PARA $K \geq N$, EN EL INTERVALO $K \leq x \leq K+1$, SE TIENE:

$$a_k = f(k) \geq f(x) \geq f(k+1) = a_{k+1}$$

INTEGRANDO DESDE K HASTA $K+1$

$$a_k \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq a_{k+1}$$

ENTONCES SE TIENE TANTO

(1) $$\sum_N^{n-1} a_k \geq \int_N^n f(x)\,dx$$

COMO

(2) $$\int_N^n f(x)\,dx \geq \sum_N^{n-1} a_{k+1} = \sum_{N+1}^{n} a_k$$

EN TERMINOS DE LAS SUMAS PARCIALES, LA DESIGUALDAD (1) AFIRMA QUE

$$S_{n-1} - S_{N-1} \geq \int_N^n f(x)\,dx$$

POR SI LA SERIE CONVERGE A UNA SUMA S, ENTONCES $S \geq S_{n-1}$ DE MODO QUE

$$S - S_{N-1} \geq \int_N^n f(x)\,dx$$

PUESTO QUE EL SEGUNDO MIEMBRO ES UNA SUCESION ACOTADA CRECIENTE, LA INTEGRAL CONVERGE.

SI LA INTEGRAL CONVERGE ENTONCES LA DESIGUALDAD (2) IMPLICA QUE

$$\int_N^\infty f(x)\,dx \geq \int_N^n f(x)\,dx \geq S_{n+1} - S_N .$$

O BIEN

$$S_{n+1} \leq A + S_N$$

DE AQUI QUE LAS SUMAS PARCIALES SON ACOTADAS Y LA SERIE CONVERGE.

EJEMPLO: EXAMINEMOS LA SERIE K

$$\sum \frac{1}{n^k} \qquad k > 1$$

SOLUCION: ESCOJASE $f(x) = \frac{1}{x^k}$ Y CONSIDERESE

$$\int_1^n \frac{dx}{x^k} = \int_1^n x^{-k}\,dx = \frac{x^{1-k}}{1-k}\Big|_1^n$$

$$= \frac{n^{1-k}}{1-k} - \frac{1}{1-k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k-1}\frac{1}{n^{k-1}}$$

AHORA BIEN $k-1>0$; DE AQUI QUE

$$\frac{1}{n^{k-1}} \to 0 \qquad \text{CONFORME } n \to \infty$$

POR LO TANTO LA INTEGRAL CONVERGE Y EN CONSECUENCIA, LA SERIE CONVERGE

BIBLIOGRAFIA: CALCULO AVANZADO - WATSON FULKS.

METODOS DE INTEGRACION NUMERICA

En casi todas las ramas de las matemáticas aplicadas se presentan problemas que requieren la evaluación de integrales. Algunas veces es posible encontrar una fórmula cerrada, es decir, una función que puede expresarse como una combinación de Funciones Algebráicas y Trascendentes simples, las cuales pueden valuarse entre sus extremos de integración para determinar el valor de la integral.

Sin embargo, en muchas situaciones prácticas, o bién no se puede encontrar una fórmula cerrada, o bien, en caso de encontrarla es tan complicada que es más difícil valuarla que atacar directamente la integral por otros métodos. En tales casos recurrimos a diversos métodos de integración numérica, en los que partimos de la definición de una integral como el límite de una suma de áreas y trabajamos con métodos que aproximan el valor de esta suma con suficiente precisión.

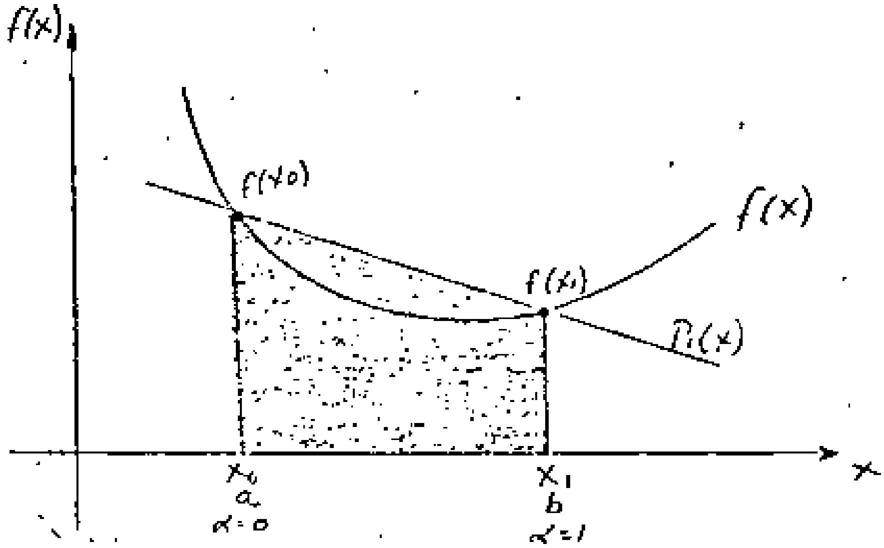
En lo siguiente trataremos de explicar la forma en la que los métodos numéricos nos ayudan a la resolución numérica de las integrales.

Suponemos que nuestra función se aproxima por un polinomio, utilizando el polinomio de interpolación de Newton con espaciamientos constantes. Consideramos además que nuestra función está dada en forma tabular.

$$f(x) \doteq P(x) = f(X_0) + \alpha \Delta f(X_0) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \Delta^2 f(X_0) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \Delta^3 f(x) + \ldots\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \Delta^n f(X_0) \quad \ldots\ldots (1)$$

Consideremos el caso que se muestra en la figura:



tenemos dos puntos :

$X_0 = a$ y $X_1 = b$ y los usaremos para determinar un polinomio de primer grado, aproximado a la función f (x) de (1)

$$P(x) = f(X_0) + \alpha \Delta f(X_0)$$

integrando entre los límites a y b se tiene:

$$\int_a^b P(x)\,dx \doteq \int_{X_0}^{X_1} \left[f(X_0) + \alpha \Delta f(X_0) \right] dx \quad \ldots\ldots (2)$$

haciendo la transformación en la variable de integración recordando que :

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h} \qquad \text{de donde}$$

$x = x_0 + \alpha h$ y $dx = h\,d\alpha$, y que para

$X = X_0$, $\alpha = \frac{X_0 - X_0}{h} = 0$; y para $X = X_1 = X_0 + h$

$$\alpha = \frac{X_0 + h - X_0}{h} = 1, \text{ se tiene :}$$

$$\int_a^b P(x)\,dx = \int_0^1 \left[f(X_0) + \alpha \Delta f(X_0)\right] d\alpha = h\left[\alpha f(X_0) + \frac{\alpha^2}{2} \Delta f(X_0)\right]_0^1$$

$$= h\left[f(X) + \frac{\Delta f(X_0)}{2}\right] \ldots\ldots\ldots (3)$$

dado que :

$$F(X_0) = f(X_1) - f(X_0)$$

sustituyendo en (3)

$$\int_a^b P(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(X_0) + f(X_1)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

si hacemos extensivo a todo el intervalo desde Xo hasta Xn se tendrá

$$\int_{X_1}^{X_2} P(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(X_1) + f(X_3)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\int_{X_2}^{X_3} P(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(X_3) + f(X_4)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\int_{X_{n-1}}^{X_n} P(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(X_{n-1}) + f(X_n)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Sumando las expresiones 4 a 7 se tiene que;

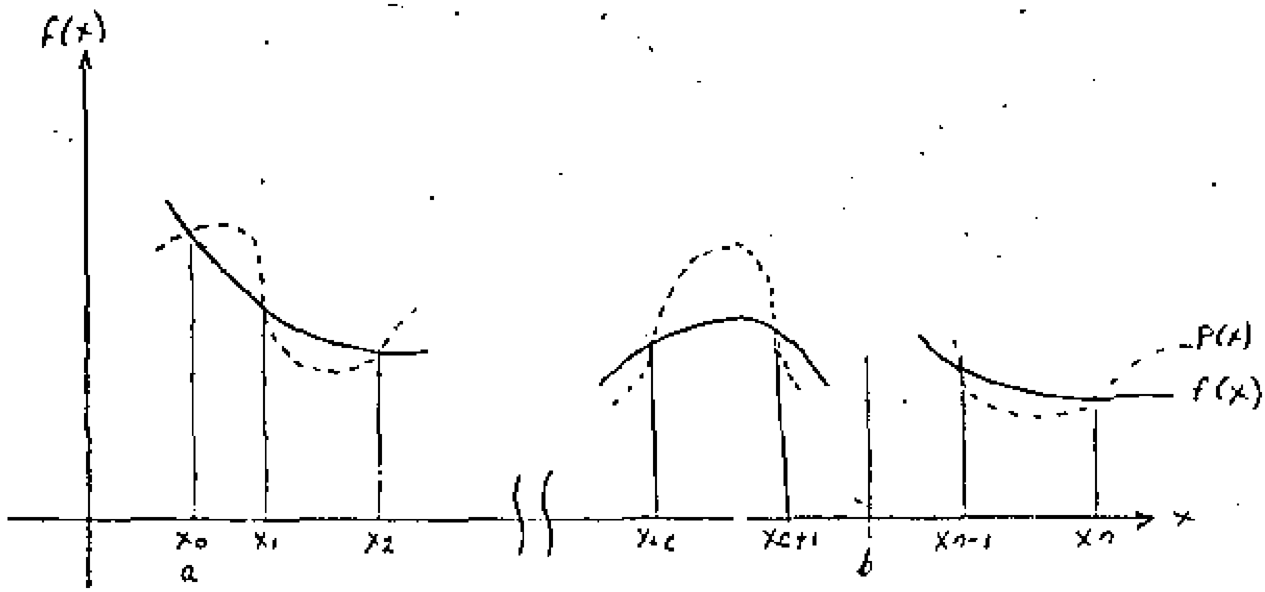
$$\int_{x_0}^{x_n} P(x)\,dx \doteq \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

que se puede reducir a :

$$\int_{x_0}^{x_n} P(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum \begin{smallmatrix}\text{resto de las}\\ \text{ordenadas}\end{smallmatrix}\right] \ldots\ldots (8)$$

fórmula conocida como REGLA TRAPECIAL.

Considerando ahora el caso general. Suponiendo que la gráfica correspondiente representa a los--- n+1 puntos de la tabla



sea a el límite inferior de la integración que coincida con Xo y b el límite superior, por el momento arbitrario, la integral queda definida como:

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \int_{x_0}^b P(x)\,dx$$

$$\int_{x_0}^b P(x)\,dx = h\int_0^{\bar{\alpha}} \Big[f(x_0) + \alpha\,\Delta f(x_0) + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \dots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\Delta^n f(x)\Big]\,d\alpha \quad \dots \text{(I)}$$

donde $\bar{\alpha} = \dfrac{b - x_0}{h}$

Resolviendo la integral de (9)

$$\int_{x_0}^{b} P(x)\,dx = h\Big[\alpha f(x_0) + \frac{\alpha^2}{2}\Delta f(x_0) + \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^2}{4}\right)\Delta^2 f(x_0) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{\alpha^4}{24} - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^2}{6}\right)\Delta^3 f(x_0) + \left(\frac{\alpha^5}{120} - \frac{\alpha^4}{16} + \frac{11\alpha^3}{72} - \frac{\alpha^2}{8}\right)\Delta^4 f(x_0) + \dots\Big]_0^{\bar{\alpha}}$$

$$= h\Big[\bar{\alpha} f(x_0) + \frac{\bar{\alpha}^2}{2}\Delta f(x_0) + \left(\frac{\bar{\alpha}^3}{6} - \frac{\bar{\alpha}^2}{4}\right)\Delta^2 f(x_0) + \dots\dots \quad (10)$$

$$+ \left(\frac{\bar{\alpha}^4}{24} - \frac{\bar{\alpha}^3}{6} + \frac{\bar{\alpha}^2}{6}\right)\Delta^3 f(x_0) + \left(\frac{\bar{\alpha}^5}{120} - \frac{\bar{\alpha}^4}{16} + \frac{11\bar{\alpha}^3}{72} - \frac{\bar{\alpha}^2}{8}\right)\Delta^4 f(x_0)$$

$$+ \dots\Big] \quad \dots\dots\dots\dots \quad (11)$$

De la ecuación 11 podemos obtener una familia de fórmulas de integración. Si el límite superior-- b (el cuál había quedado arbitrario) , se hace coincidir- con algunos puntos, tal que la integración sea a traves-- de "m" intervalos espaciados igualmente, entonces $\bar{\alpha}$ en 11 toma el valor m.

En la regla del trapecio se asumió que $\bar{\alpha} = m = n = 1$ de la misma forma se pueden encontrar fórmulas para m =2,3, etc...

Para el caso en que $\bar{\alpha} = m = 2$ en 11 se- tiene:

$$\int_{x_0}^{x_2} P(x) = h\left[2f(x_0) + 2\Delta f(x_0) + \frac{1}{3}\Delta^2 f(x_0)\right] \quad \dots\dots \quad (12)$$

recordando que $\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$ y que $\Delta^2 f(x_0) = f(x_2) - 2f(x_1) - f(x_0)$, ... sustituyendo en 3 y haciendo operaciones se llega a :

$$\int_{x_0}^{x_2} P(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] \quad \ldots\ldots (13)$$

Si hacemos extensivo a todo el intervalo tomadas dedos en dos se tiene :

$$\int_{x_2}^{x_4} P(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right] \quad \ldots\ldots (14)$$

$$\vdots$$

$$\int_{x_n}^{x_{n-1}} P(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] \quad \ldots\ldots (15)$$

sumando las expresiones 13 a 15 se tiene :

$$\int_{x_0}^{x_n} P(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] \quad \ldots\ldots (16)$$

que se puede escribir como :

$$\int_{x_0}^{x_n} P(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum \text{ordenadas de orden par} + 4\sum \text{ordenadas de orden impar}\right] \quad \ldots\ldots (17)$$

fórmula conocida como <u>SIMPSON DE 1/3</u> .

Para el caso en que $K = m = 3$ de (11) se tiene :

$$\int_{x_0}^{x_3} P(x)\,dx = h\left[3f(x_0) + \frac{9}{2}\,\Delta f(x_0) + \left(\frac{27}{6} - \frac{9}{4}\right)\Delta^2 f(x_0) + \ldots + \left(\frac{81}{24} - \frac{27}{6} + \frac{9}{6}\right)\Delta^3 f(x_0)\right] \ldots\ldots\ldots (18)$$

llevando a (18) los valores de $\Delta f(x_0)$, $\Delta^2 f(x_0)$ y $\Delta^3 f(x_0)$, y haciendo operaciones se tiene :

$$\int_{x_0}^{x_3} P(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right] \ldots (19)$$

si hacemos extensivo a todo el intervalo tomando los puntos de tres en tres se tiene :

$$\int_{x_3}^{x_6} P(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + f(x_6)\right] \ldots\ldots (20)$$

$$\vdots$$

$$\int_{x_{n-3}}^{x_n} P(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[f(x_{n-3}) + 3f(x_{n-2}) + 3f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] \ldots\ldots (21)$$

sumando las expresiones 11 a 13 :

$$\int_{x_0}^{x_n} P(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + 3f(x_4) + \ldots + 2f(x_{n-3}) + 3f(x_{n-2}) + 3f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] \ldots\ldots\ldots (22)$$

que se puede escribir como :

$$\int_{x_0}^{x_n} P(x)\,dx = \frac{3}{8}h\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum \text{ordenadas de orden múltiplo de } 3 + 3\sum \text{resto de las ordenadas}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

fórmula conocida como SIMPSON DE 3/8 .

Si se sigue incrementando el valor de $\bar{\alpha}$ - esto es $\bar{\alpha}$ = 4,5, etc..., se llega a otras fórmulas de-- integración, pero se considera que con las tres antes vistas se cubren las necesidades en cuanto a fórmulas numéricas de integración.

EJEMPLO DE APLICACION

Dada la función definida por la siguiente-- tabla

x	f(x)
1	-4
2	6
3	18
4	32
5	48
6	66
7	86
8	108
9	132

encontrar las integrales definidas en los- intervalos

a) (1,9)

b) (1,6)

a) Como son 8 espaciamientos múltiplos de 2 podemos usar la fórmula de Simpson de 1/3.

$$\int_1^9 P(x)dx = A\frac{1}{3} = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+f(x_n)+2\sum \begin{matrix}\text{ordenadas de}\\ \text{orden par}\end{matrix} + 4\sum \begin{matrix}\text{ordenadas de}\\ \text{orden impar}\end{matrix}\right]$$

$$\int_1^9 P(x)dx = A\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left[-4+132+2(18+48+66)+4(6+32+66+108)\right]$$

$$\int_1^9 P(x)\,dx = A\frac{1}{3} = 426.666\ u^2$$

como 8 también es múltiplo de 1 podemos utilizar la fórmula trapecial que es :

$$\int_1^9 P(x)\,dx = A_T = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_n)+2\sum \begin{matrix}\text{resto de las}\\ \text{ordenadas}\end{matrix}\right]$$

$$\int_1^9 f(x)dx = A_T = \frac{1}{2}\left[-4+132+2(6+18+32+48+66+86+108)\right]$$

$$\int_1^9 f(x)dx = A_T = 428\ u^2.$$

La tabla esta obtenida del polinomio ;

$$P(x) = x^2+7x-12$$

La integral exacta es :

$$\int_1^9 (x^2+7x-12)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}-12x\right]_1^9 = 426.666\ u^2$$

Como puede observarse con la fórmula de Simpson de 1/3 se llega al valor exacto, existiendo u error al aproximar por la trapecial por .314 %.

b) para este caso el número de espaciamiento no es múltiplo de 2 por lo que no se puede usar Simpson de 1/3 ; tampoco es múltiplo de 3, por lo que tampoco se puede usar Simpson de 3/8, por lo tanto dividiremos el intervalo en dos subintervalos, uno de (1,4) y utilizamos Simpson de 3/8 y otro de (4,6) y utilizamos Simpson de 1/3 la suma de los dos resultados nos dará el area total en el intervalo pedido.

Subintervalo (1,4) la tabla es:

x	$f(x)$
1	-4
2	6
3	18
4	32

$$\int_1^4 P(x)\,dx = A\tfrac{3}{8} = \tfrac{3}{8}h\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{\text{múltiplo de } 3}^{\text{ord. de orden impar}} + 3\sum^{\text{restantes ordenadas}}\right.$$

$$\int_1^4 P(x)\,dx = A\tfrac{3}{8} = \tfrac{3}{8}\left[-4 + 32 + 2(6) + 3(6+18)\right] = 37.5\ u^2$$

Para el intervalo (4,6) la tabla es

x	$f(x)$
4	32
5	48
6	64

$$\int_4^6 P(x)\,dx = A\tfrac{1}{3} = \tfrac{h}{3}\left[f(x_0) + (x_n) + 2\sum_{\text{par}}^{\text{ordenadas de orden}} + 4\sum^{\text{ordenadas}}_{\text{ord impar}}\right.$$

$$\int_4^6 P(x)\,dx = A\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3}\left[32 + 64 + 4(48)\right] = 96.667\ u^2$$

$$A\ total = \int_1^4 P(x)\,dx + \int_4^6 P(x)\,dx = 37.5 + 96.667 = 134.167\ u^2$$

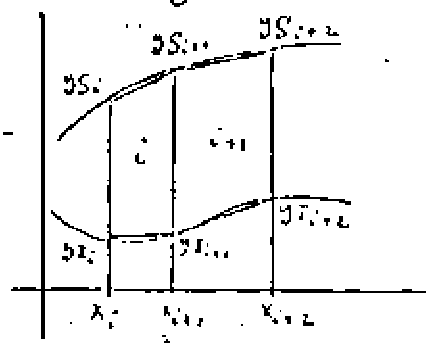
la Integral exacta es:

$$\int_1^6 P(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} - 12x\right]_1^6 = 134.167\ u^2$$

una superficie cualquiera con respecto a un sistema coordenado conocido, además su área. El cálculo se hace considerando siempre líneas rectas limitando la superficie, de manera que si se trata de líneas curvas, el resultado será una aproximación mas o menos buena dependiendo del número de trapecios elementales.

El programa pregunta si el eje de las abscisas ("X") limita o no a la superficie. Si la respuesta es si (S), el programa automáticamente da el valor cero a cada ordenada inferior (YI). Si la respuesta es no (N), la máquina pide este valor en cada etapa. El valor de la ordenada superior (YS) siempre hay que dárselo. No obstante siempre es posible pasar de un caso al otro colocando la bandera 05 o borrándola, respectivamente.

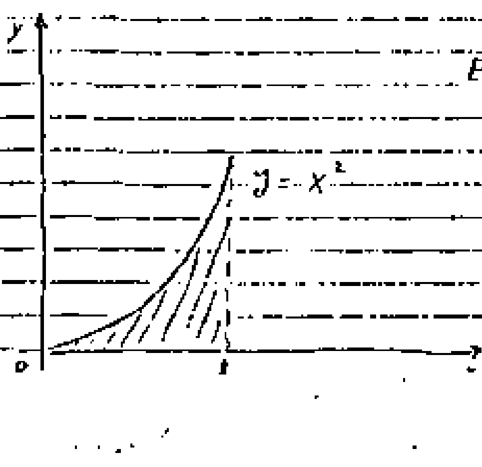
El programa calcula áreas y momentos estáticos de trapecios (o triángulos) adyacentes, de manera que el valor de las coordenadas (i+1) pasa a ocupar el valor i en la iteración siguiente:



Es decir, en el cálculo de las características del trapecio (i), los valores anteriores para la máquina son: X_i, YI_i, YS_i; los valores posteriores son X_{i+1}, YI_{i+1}, YS_{i+1}. Después de su cálculo, automáticamente los valores anteriores para el siguiente cálculo son: X_{i+1}, YI_{i+1}, YS_{i+1} y al darle los nuevos valores: X_{i+2}, YI_{i+2}, YS_{i+2}, la máquina los acomoda como posteriores, y así sucesivamente. No obstante cuando se tienen discontinuidades es posible cortar la secuencia y redefinir tanto los valores anteriores como los posteriores, por medio de XEQ C.

Una vez que la máquina tiene todos los valores para obtener los resultados se ejecuta XEQ A y se obtienen las coordenadas del centroide y el área.

1)



En este caso, el eje X limita al área.

```
LBL "CCCP"
CLRG
CF 05
"X LIMITE S/N ?"
AON
PROMPT
ASTO Y
"N"
ASTO X
AOFF
X=Y?
SF 05
LBL C
"XO?"
PROMPT
STO 00
0
"YI?"
FS? 05
PROMPT
STO 01
"YS?"
PROMPT
STO 02
LBL B
"XI?"
PROMPT
RCL 00
-
STO 03
0
"YI?"
FS? 05
PROMPT
STO 04
"YS?"
PROMPT
STO 05
RCL 02
RCL 01
-
+
RCL 04
-
STO 06
RCL 03
*
2
/
ABS
STO 08
ST+ 07
RCL 05
+
RCL 02
RCL 04
RCL 01
+
RCL 01
*
2
*
+
RCL 02
RCL 05
+
RCL 01
*
3
ST* 06
*
-
RCL 05
X↑2
+
RCL 04
X↑2
-
RCL 06
/
RCL 01
+
RCL 08
*
ST+ 10
RCL 06
3
/
RCL 05
+
RCL 04
-
RCL 06
/
RCL 03
*
RCL 00
+
RCL 08
*
ST+ 09
RCL 03
ST+ 00
RCL 05
STO 02
STO 01
GTO B
LBL A
RCL 09
RCL 07
/
"X="
ARCL X
PROMPT
RCL 10
RCL 07
/
"Y="
ARCL X
PROMPT
"A="
ARCL 07
PROMPT
END
```

Asignación shift sin
Registros 28

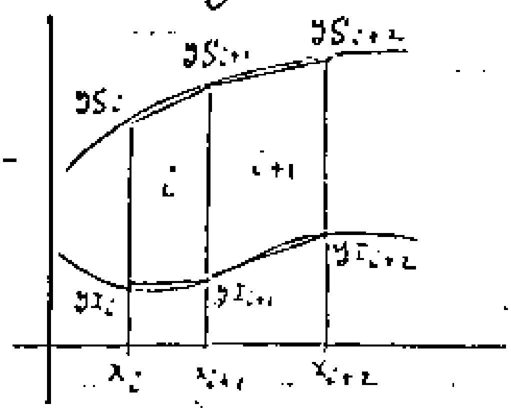
USER

$\boxed{\Sigma+}$	$\boxed{1/x}$	$\boxed{\sqrt{x}}$
A	B	C
Cálculo de las coordenadas del centroide y cálculo del área	Adición de trapecios adyacentes	Reinicio de la secuencia. Adición de trapecios no adyacentes.

una superficie cualquiera con respecto a un sistema coordenado conocido, además su área. El cálculo se hace considerando siempre líneas rectas limitando la superficie, de manera que si se trata de líneas curvas, el resultado será una aproximación más o menos buena dependiendo del número de trapecios elementales.

El programa pregunta si el eje de las abscisas ("X") limita o no a la superficie. Si la respuesta es sí (S), el programa automáticamente da el valor cero a cada ordenada inferior (YI). Si la respuesta es no (N), la máquina pide este valor en cada etapa. El valor de la ordenada superior (YS) siempre hay que dárselo. No obstante siempre es posible pasar de un caso al otro colocando la bandera 05 o borrándola, respectivamente.

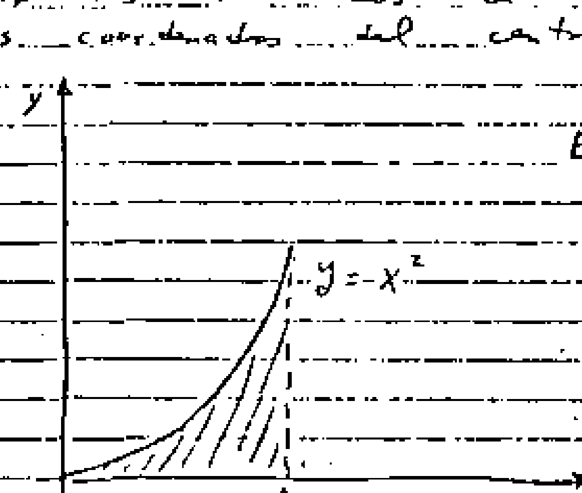
El programa calcula áreas y momentos estáticos de trapecios (o triángulos) adyacentes, de manera que el valor de las coordenadas (i+1) pasa a ocupar el valor i en la iteración siguiente:



Es decir, en el cálculo de las características del trapecio (i), los valores anteriores para la máquina son: X_i, YI_i, YS_i; los valores posteriores son X_{i+1}, YI_{i+1}, YS_{i+1}. Después de ese cálculo, automáticamente los valores anteriores para el siguiente cálculo son: X_{i+1}, YI_{i+1}, YS_{i+1}, y al darle los nuevos valores: X_{i+2}, YI_{i+2}, YS_{i+2}, la máquina los acomoda como posteriores, y así sucesivamente. No obstante cuando se tienen discontinuidades es posible cortar la secuencia y redefinir tanto los valores anteriores como los posteriores, por medio de XEQ C.

Una vez que la máquina tiene todos los valores para obtener los resultados se ejecuta XEQ A y se obtienen las coordenadas del centroide y el área.

1)



En este caso, el eje X limita al área.

XEQ "CCCP"	X LIMITE S/N
5 R/S	X0?
0 R/S	YS?
0 R/S	XI?
0,2 R/S	YS?
0,04 R/S	XI?
0,4 R/S	YS?
0,16 R/S	XI?
0,6 R/S	YS?
0,36 R/S	XI?
0,8 R/S	YS?
0,64 R/S	XI?
1,0 R/S	YS?
1,0 R/S	XI?
XEQ A	X=0,745098039
R/S	Y=0,300705882
R/S	A=0,340000

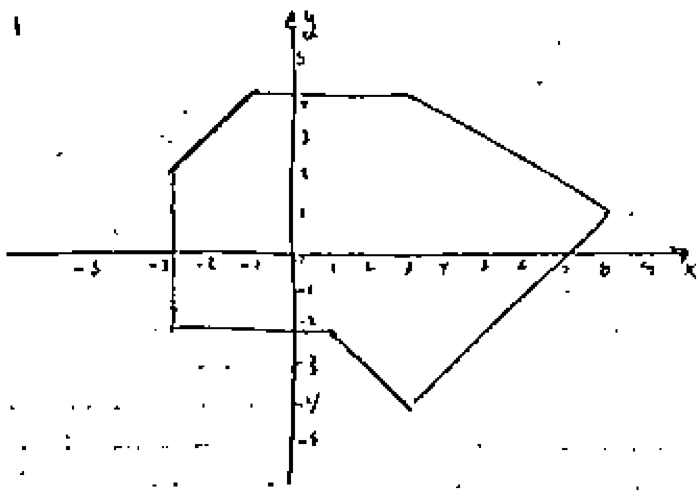
Nota.- Por facilidad se hizo la división en intervalos iguales, pero no es necesario.

El número de cifras significativas lo puede uno fijar al gusto con FIX.

Los valores exactos, obtenidos por fórmula son:

$$\bar{x}=\frac{3}{4}, \quad \bar{y}=\frac{3}{10}, \quad A=\frac{1}{3}$$

2)



Se puede ver que los valores que sirven como datos son:

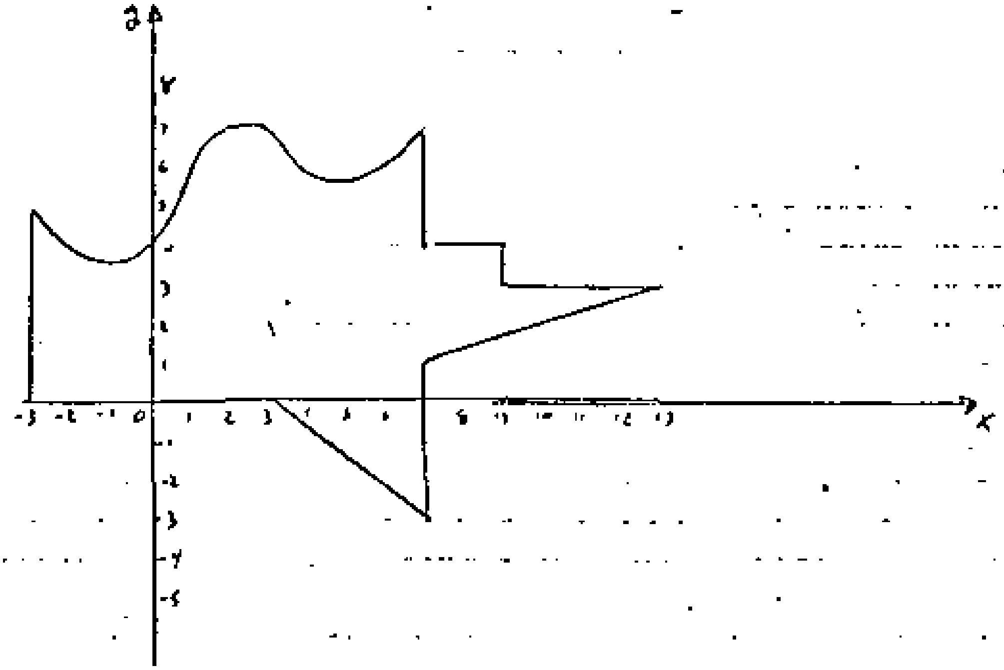
X	YI	YS
-3	-2	2
-1	-2	4
1	-2	4
3	-4	4
8	1	-1

En este caso, para cada X hay dos valores de Y porque "X" no limita la superficie.

Teclas	Tablero
XEQ "CCCP"	X LIMITE S/N
N R/S	X0?
-3 R/S	YI?
-2 R/S	YS?
+2 R/S	XI?
-1 R/S	YI?
-2 R/S	YS?
4 R/S	XI?
⋮	⋮
1 R/S	XI?
XEQ A	X= 1,8333
R/S	Y=0,5476
R/S	A=56,0000

Los valores son exactos porque son tramos rectos.

3)



En este caso, una parte de la superficie la limita el eje X (de -3 a 3) y después no la limita. Además los tramos curvos son de ecuación desconocida, así que los valores se estimarán por medio del papel cuadriculado.

Teclas	Tablero	Comentarios.
XEQ CCCP	A LIMITE S/N?	
S R/S	X0?	La respuesta es S porque en la primera parte, el eje X limita la superficie.
-3 R/S	YE?	
5 R/S	XI?	
-2,5 R/S	YS?	
+4,4 R/S	XI?	Los intervalos son de amplitud irregular.
-2 R/S	YS?	
+3,9 R/S	XI?	Los valores de Y son estimados.
-1,4 R/S	YS?	
+3,8 R/S	XI?	
-1 R/S	YS?	
+3,7 R/S	XI?	
-0,6 R/S	YS?	
+3,7 R/S	XI?	
0 R/S	YS?	
4 R/S	XI?	
0,7 R/S	YS?	
5 R/S	XI?	
1 R/S	YS?	
6 R/S	XI?	
1,5 R/S	YS?	
6,8 R/S	XI?	
2 R/S	YS?	
7 R/S	XI?	
2,8 R/S	YS?	
7,2 R/S	XI?	
3 R/S	YS?	
6,9 R/S	XI?	
SF 05	0,00	A partir de este valor, el eje X no limita la superficie.
3,5 R/S	YI?	

Teclas		Tablero	Comentarios.
-0,3	R/S	YS ?	Es necesario dar 2 valores de Y para cada X.
6,4	R/S	XI ?	
4,0	R/S	YI ?	
-0,7	R/S	YS ?	
5,8	R/S	XI ?	
4,5	R/S	YI ?	
-1	R/S	YS ?	
+5,7	R/S	XI ?	
5	R/S	YI ?	
-1,3	R/S	YS ?	
5,7	R/S	XI ?	
6	R/S	YI ?	
-2,1	R/S	YS ?	
6,1	R/S	XI ?	
7	R/S	YI ?	
-3	R/S	YS ?	
7	R/S	XI ?	
XEQ C		XO ?	En este valor no es posible calcular como trapecios adyacentes se redefinen los valores iniciales
7	R/S	YI ?	
1	R/S	YS ?	
4	R/S	XI ?	
9	R/S	YI ?	
1,8	R/S	YS ?	
4	R/S	XI ?	
XEQ C		XO ?	En este valor no es posible calcular como trapecios adyacentes se redefinen los valores iniciales
9	R/S	YI ?	
1,8	R/S	YS ?	
3	R/S	XI ?	
13	R/S	YI ?	
3	R/S	YS ?	
3	R/S	XI ?	
XEQ A		X = 3,4017	
R/S		Y = 2,5448	
R/S		A = 68,2900	

En cualquier momento se puede ejecutar "A" y el resultado serán las coordenadas del centroide de la figura considerada hasta ese instante así como de su área. En algunas ocasiones es conveniente conocer estos resultados parciales, por ejemplo: cálculo de momentos estáticos parciales en la fórmula de la "escuadría", etc. Para continuar después con el cálculo con trapecios adyacentes, ejecutar B.

TITLE [illegible] PAGE ____ OF ____

TI Programmable Program Record

PROGRAMMER ____________ DATE ____________

Partitioning (Op 17) ______ Library Module ____________ Printer ______ Cards ______

PROGRAM DESCRIPTION

USER INSTRUCTIONS

STEP	PROCEDURE	ENTER	PRESS			DISPLAY
1	COLOCAR EL PROGRAMA EN EL INICIO		RST			0
2	BORRAR LAS MEMORIAS		2nd	CMs		0.
3	INTRODUCIR LIMITE INFERIOR DE LA INTEGRAL	X_0	R/S			X_0
4	INTRODUCIR LIMITE SUPERIOR DE LA INTEGRAL	X_n	R/S			X_n
5	INTRODUCIR n = No. DE INTERVALOS	n	R/S			$(n-1)$*
6	INTRODUCIR LOS DIFERENTES VALORES	y_0	R/S			y_0
	DE y	y_1	R/S			1.
		y_2	R/S			2.
		y_3	R/S			3.
		⋮				
		⋮				
		y_{n-1}	R/S			$n-1$
		y_n	R/S			$Ay_2 \doteq \int$
*	$(n-1)$ DE LA INTEGRAL [illegible]					

USER DEFINED KEYS	DATA REGISTERS (INV EE)		LABELS (Op 08)
A	0	0	
B	1	1	
C	2	2	
D	3	3	
E	4	4	
A'	5	5	
B'	6	6	
C'	7	7	
D'	8	8	
E'	9	9	

FLAGS 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

TITLE ______ PAGE ___ OF ___

PROGRAMMER ______ DATE ______

TI Programmable Coding Form

LOC	CODE	KEY	COMMENTS
000	22	INV	X_0
001	44	SUM	
002	01	01	
003	91	R/S	X_n
004	44	SUM	
005	01	01	$\Rightarrow X_n - X_0$
006	91	R/S	n
007	22	INV	
008	49	2nd Prd	
009	01	01	$\Rightarrow h = \frac{X_n - X_0}{n}$
010	75	−	
011	01	1	
012	95	=	
013	32	x⇌t	$\Rightarrow t = n-1$
014	91	R/S	y_0
015	44	SUM	
016	02	02	
017	91	R/S	$y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$
018	65	×	
019	02	2	
020	95	=	
021	44	SUM	
022	02	02	$\Rightarrow y_0 +$ [illegible]
023	01	1	
024	44	SUM	
025	03	03	counter
026	43	RCL	
027	03	03	(counter)
028	67	2nd x=t	$= n-1$?
029	11	A	Si ⇒ A
030	61	GTO	No ⇒ 17
031	20	1	
032	17	7	
033	76	2nd Lbl	
034	11	A	
035	11	R/S	y_n
036	44	SUM	
037	02	02	$\Rightarrow y_0 + y_n + 2(\Sigma y_1 \ldots y_{n-1})$
038	43	RCL	
039	01	01	h
040	55	÷	÷
041	02	2	2
042	65	×	×
043	43	RCL	$(y_0 + y_n + 2(\Sigma y_1 \ldots y_{n-1}))$
044	02	02	
045	95	=	$= A_{Y_2}$
046	91	R/S	

MERGED CODES

62 | 72 | 83
63 | 73 | 84
64 | 74 | 92

TITLE [illegible] PAGE ____ OF ____

PROGRAMMER ____ DATE ____

TI Programmable Program Record

Partitioning (Op 17) ____ Library Module ____ Printer ____ Cards ____

PROGRAM DESCRIPTION

USER INSTRUCTIONS

STEP	PROCEDURE	ENTER	PRESS			DISPLAY
1	COLOCAR EL PROGRAMA EN EL PASO 065		GTO	65		0.
2	ENTRAR AL MODO LEARN		LRN			065 XX
3	ETIQUETAR LA INTEGRAL		2ND	LBL		066 XX
			A			067 XX
4	INTRODUCIR (f(x)) A INTEGRAR. NO USAR					
	REGISTROS DE MEMORIA DEL 01-04. NI ETI-					
	QUETAS A, B y C.					
5	FINALIZAR f(x) CON $\boxed{INV}\boxed{SBR}$		INV	SBR		XXX XX
6	SALIRSE DEL MODO LEARN		LRN			0.
7	COLOCAR EL PROGRAMA EN EL INICIO		RST			0.
8	BORRAR LAS MEMORIAS		2ND	CMS		0.
9	INTRODUCIR EL LIMITE INFERIOR DE LA INTEGRAL	X_0	R/S			X_0
10	INTRODUCIR EL LIMITE SUPERIOR DE LA INTEGRAL	X_n	R/S			X_n
11	INTRODUCIR n = No. DE INTERVALOS	n	R/S			$A_{y} \doteq \int$

USER DEFINED KEYS: A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'

DATA REGISTERS (INV LIST): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 / 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

LABELS (Op 08)

FLAGS 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

TITLE ______ PAGE ____ OF ____

TI Programmable Coding Form

PROGRAMMER ______ DATE ______

LOC	CODE	KEY	COMMENTS
00	42	STO	Y_0
01	01	01	
02	22	INV	
03	44	SUM	
04	02	02	
05	91	R/S	X_n
06	44	SUM	
07	02	02	$\Sigma X_n - Y_0$
08	91	R/S	n
09	22	INV	
10	49	2nd Prd	
11	02	02	$h = \frac{X_n - Y_0}{n}$
12	75	−	
13	01	1	
14	95	=	
15	32	x⇄t	t = n−1
16	43	RCL	[illegible]
17	01	01	X_0
18	71	SBR	CALCULATE
19	11	A	y_0
20	44	SUM	
21	03	03	Σy_0
22	71	SBR	CALCULATE
23	12	B	y_1, y_2, y_{n-1}
24	65	×	
25	02	2	
26	95	=	[illegible]
27	44	SUM	
28	03	03	$y_0 + 2\Sigma y_1 \ldots y_{n-1}$
29	43	RCL	
30	04	04	INCREMENT
31	67	2nd x=t	= n−1?
32	13	C	SI => C
33	61	GTO	DO => 22
34	00	2	
35	22	2	
36	76	2nd Lbl	
37	13	C	
38	71	SBR	CALCULATE
39	12	B	y_n
40	44	SUM	
41	03	03	$y_0 + y_n + 2\Sigma y_1 \ldots y_{n-1}$
42	43	RCL	
43	02	02	h
44	55	÷	÷
45	02	2	2
46	65	×	×
47	43	RCL	$(y_0 + y_n + 2\Sigma y_1 \ldots y_{n-1})$
48	03	03	
49	95	=	= AY_2
50	91	R/S	
51	76	2nd Lbl	
52	12	B	
53	01	1	
54	44	SUM	
55	04	04	LOOP INDEX
56	43	RCL	
57	02	02	
58	44	SUM	
59	01	01	
60	43	RCL	
61	01	01	$X_0 + (n-1)h$
62	71	SBR	CALCULATE
63	11	A	$y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$
64	92	INV SBR	

MERGED CODES

62 | 72 STO* | 83 GTO*
63 | 73 RCL* | 84
64 | 74 SUM* | 92 INV SBR

TEXAS INSTRUMENTS INCORPORATED

TITLE SIMPSON 1/3 [illegible] PAGE ____ OF ____

TI Programmable Program Record

PROGRAMMER ____________ DATE ____________

Partitioning (Op 17) ______ Library Module ______ Printer ______ Cards ______

PROGRAM DESCRIPTION

USER INSTRUCTIONS

STEP	PROCEDURE	ENTER	PRESS			DISPLAY
1	COLOCAR EL PROGRAMA EN EL INICIO		RST			0
2	BORRAR LAS MEMORIAS		2ND	CMs		0.
3	INTRODUCIR LIMITE INFERIOR DE LA INTEGRAL	X_0	R/S			X_0
4	INTRODUCIR LIMITE SUPERIOR DE LA INTEGRAL	X_n	R/S			X_n
5	INTRODUCIR n = Nº DE INTERVALOS (n = PAR)	n	R/S			n/2 *
6	INTRODUCIR LOS DIFERENTES VALORES	y_0	R/S			y_0
	DE y	y_1	R/S			1.
		y_2	R/S			$2y_2$
		y_3	R/S			2.
		y_4	R/S			$2y_4$
		⋮				
						–
		y_{n-2}	R/S			$2y_{n-2}$
		y_{n-1}	R/S			n/2
		y_n	R/S			$A_{1/3} = \int$
*	n/2 DE LA INTEGRAL ANTERIOR					

USER DEFINED KEYS — A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'

DATA REGISTERS (INV) — 0–9, 0–9

LABELS (Op 08)

FLAGS 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

TITLE ______ PAGE ___ OF ___

PROGRAMMER ______ DATE ______

TI Programmable Coding Form

LOC	CODE	KEY	COMMENTS
00	32	x⇌t	y_0
01	44	SUM	
02	01	01	
03	91	R/S	y_n
04	44	SUM	
05	01	01	⇒ $y_n - y_0$
06	91	R/S	n
07	22	INV	
08	49	2nd Prd	
09	01	01	⇒ $h = \frac{y_n - y_0}{n}$
10	55	÷	
11	02	2	
12	95	=	
13	32	x⇌t	t = n/2
14	91	R/S	y_0
15	44	SUM	
16	02	02	
17	91	R/S	y_1, y_3, y_{impar}
18	65	×	
19	04	4	
20	95	=	
21	44	SUM	
22	02	02	$y_0 + 4\Sigma y_{impar}$
23	01	1	
24	44	SUM	
25	03	03	contador
26	43	RCL	
27	03	03	¿contador
28	77	2nd x≥t	≥ n/2?
29	11	A	SI ⇒ A
30	91	R/S	NO ⇒ $2y_{par}$
31	65	×	
32	02	2	
33	95	=	
34	44	SUM	$y_0 + 4\Sigma_{impar}$
35	02	02	$2\Sigma_{par}$.
36	61	GTO	
37	00	1	
38	17	7	
39	76	2nd LBL	
40	11	A	
41	91	R/S	y_n
42	44	SUM	$y_0 + y_n + \ldots$
43	02	02	$+ 4\Sigma_{impar} + 2\Sigma_{par}$
44	43	RCL	
45	01	01	h
46	55	÷	÷
47	03	3	3
48	65	×	×
49	43	RCL	$(y_0 + y_n +$
50	02	02	$4\Sigma_{impar} + 2\Sigma_{par})$
51	95	=	= Ays
52	91	R/S	

MERGED CODES

62 ▭ ▭ 72 STO ▭ 83 GTO ▭
63 ▭ ▭ 73 RCL ▭ 84 ▭ ▭
64 ▭ ▭ 74 SUM ▭ 92 INV SBR

TEXAS INSTRUMENTS
INCORPORATED

TITLE Simpson ⅓ [illegible] PAGE ____ OF ____

TI Programmable Program Record

PROGRAMMER ____________ DATE ____________

Partitioning (Op 17) ______ Library Module ____________ Printer ______ Cards ______

PROGRAM DESCRIPTION

USER INSTRUCTIONS

STEP	PROCEDURE	ENTER	PRESS			DISPLAY
1	Colocar el programa en el paso 072		GTO	72		0.
2	Entrar al modo (LRN)		LRN			072 XX
3	Etiquetar la integral		2ND	LBL		073 XX
			A			074 XX
4	Introducir (f(x)) a integrar. No usar registros de memoria 01-04. Ni etiquetas A, B, C.					
5	Finalizar f(x) con $\boxed{\text{INV SBR}}$		INV	SBR		XXX XX
6	Salirse del modo LRN		LRN			0.
7	Colocar el programa al inicio		RST			0.
8	Borrar las memorias		2ND	CMS		0.
9	Introducir el límite inferior de la integral	X_0	R/S			X_0
10	Introducir el límite superior de la integral	X_n	R/S			X_n
11	Introducir n = Nº intervalos (entero)	n	R/S			Ans $\doteq$ I

USER DEFINED KEYS	DATA REGISTERS		LABELS (Op 08)
A	0	0	
B	1	1	
C	2	2	
D	3	3	
E	4	4	
A'	5	5	
B'	6	6	
C'	7	7	
D'	8	8	
E'	9	9	

FLAGS 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

TITLE ____________ PAGE ___ OF ___

PROGRAMMER ____________ DATE ____________

TI Programmable Coding Form

LOC	CODE	KEY	COMMENTS
00	42	STO	X_0
01	01	01	
02	22	INV	
03	44	SUM	
04	02	02	
05	91	R/S	X_n
06	44	SUM	
07	02	02	→ $X_n - X_0$
08	91	R/S	n
09	22	INV	
10	44	2ND] [illegible]	
11	02	02	→ $h = \frac{X_n - X_0}{n}$
12	75	−	
13	01	1	
14	95	=	
15	32	x⇄t	t = n−1
16	43	RCL	CON.
17	01	01	X_0
18	71	SBR	CALCULO DE
19	11	A	y_0
20	44	SUM	
21	03	03	→ y_0
22	71	SBR	CALCULO DE
23	12	B	y_{impar}
24	65	×	
25	04	4	
26	95	=	
27	44	SUM	
28	03	03	$y_0 + 4\Sigma y_{impar}$
29	43	RCL	
30	04	04	t CONTADOR
31	67	2ND] x=t	= n−1?
32	13	C	SI => C
33	71	SBR	NO: CALCULO
34	12	B	DE y_{PAR}
35	65	×	
36	02	2	
37	95	=	
38	44	SUM	$y_0 + 4\Sigma y_{impar}$
39	03	03	$+ 2\Sigma y_{par}$
40	61	GTO	
41	02	2	
42	22	2	
43	76	2ND] LBL	
44	13	C	
45	71	SBR	CALCULO DE
46	12	B	y_n
47	44	SUM	$y_0 + y_n +$
48	03	03	$4\Sigma y_{impar} + 2\Sigma y_{par}$
49	43	RCL	
50	02	02	h
51	55	÷	÷
52	03	3	3
53	65	×	×
54	43	RCL	$(y_0 + y_n +$

LOC	CODE	KEY	COMMENTS
55	03	03	$+4\Sigma y_{impar} + 2\Sigma y_{par})$
56	95	=	= A Y3
57	91	R/S	
58	76	2ND] LBL	
59	12	B	
60	01	1	
61	44	SUM	
62	04	04	CONTADOR
63	43	RCL	
64	02	02	
65	44	SUM	
66	01	01	
67	43	RCL	
68	01	01	$X_0 + (n-1)h$
69	71	SBR	CALCULO DE
70	11	A	y_{impar} e y_{par}
71	22	INV] SBR	

MERGED CODES

62 | 72 | 83
63 | 73 | 84
64 | 74 | 92

TEXAS INSTRUMENTS INCORPORATED

TITLE SIMPSON 3/8 DISCRETO PAGE ____ OF ____

TI Programmable Program Record

PROGRAMMER ____________ DATE ____________

Partitioning (Op 17) ______ Library Module ____________ Printer ______ Cards ______

PROGRAM DESCRIPTION

USER INSTRUCTIONS

STEP	PROCEDURE	ENTER	PRESS			DISPLAY
1	COLOCAR EL PROGRAMA AL INICIO		RST			0
2	BORRAR MEMORIAS		2nd	CMs		0.
3	INTRODUCIR LIMITE INFERIOR DE LA INTEGRAL	X_0	R/S			X_0
4	INTRODUCIR LIMITE SUPERIOR DE LA INTEGRAL	X_n	R/S			X_1
5	INTRODUCIR Nº DE INTERVALOS (MULTIPLO DE 3)	n	R/S			n+2
6	INTRODUCIR LOS DIFERENTES VALORES	y_0	R/S			[illegible]
	DE Y	y_1	R/S			1.
		y_2	R/S			n+1
		y_3	R/S			[illegible]
		y_4	R/S			3
		y_5	R/S			n
		y_6	R/S			[illegible]
		y_7	R/S			5
		y_8	R/S			n-1
		⋮				
		y_{n-2}	R/S			$\left(\frac{2n-3}{3}\right)$
		y_{n-1}	R/S			[illegible]
		y_n	R/S			[illegible]

USER DEFINED KEYS: A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'

DATA REGISTERS (INV) 0–9, 0–9

LABELS (Op 08)

FLAGS 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

TITLE ________ PAGE ____ OF ____

PROGRAMMER ________ DATE ________

TI Programmable Coding Form

LOC	CODE	KEY	COMMENTS
00	22	INV	x_0
01	44	SUM	
02	01	01	
03	91	R/S	x_n
04	44	SUM	
05	01	01	$x_n - x_0$
06	91	R/S	n [illegible]
07	22	INV	
08	49	2nd Prd	
09	01	01	$= h = \frac{x_n - x_0}{n}$
10	85	+	
11	02	2	
12	95	=	
13	42	STO	
14	07	07	=(n+2)
15	91	R/S	y_0
16	44	SUM	
17	03	03	
18	02	2	
19	44	SUM	
20	04	04	counter 1
21	32	x⇄t	t = 2
22	91	R/S	$y_1, y_2, \ldots$
23	65	×	
24	03	3	
25	95	=	
26	44	SUM	
27	03	03	$y_0 + 3y_1$ [illegible]
28	01	1	
29	44	SUM	
30	05	05	counter 2
31	43	RCL	
32	05	05	counter 2
33	67	2nd x=t	[illegible]
34	11	A	[illegible]
35	61	GTO	[illegible]
36	00	0	
37	22	2	
38	76	2nd Lbl	
39	11	A	
40	01	1	
41	22	INV	
42	44	SUM	
43	02	02	[illegible]
44	43	RCL	
45	02	02	
46	32	x⇄t	[illegible]
47	02	2	
48	44	SUM	
49	04	04	counter 1
50	43	RCL	
51	04	04	counter 1
52	67	2nd x=t	[illegible]
53	12	B	⇒ to B
54	32	x⇄t	[illegible]
55	91	R/S	$y_2, y_4, \ldots$
56	65	×	
57	02	2	
58	95	=	
59	44	SUM	[illegible]
60	03	03	[illegible]
61	61	GTO	
62	00	2	
63	22	2	
64	76	2nd Lbl	[illegible]
65	12	B	
66	91	R/S	y_n
67	44	SUM	[illegible]
68	03	03	[illegible]
69	43	RCL	
70	01	01	h
71	55	÷	÷
72	08	8	8
73	65	×	×
74	03	3	3
75	65	×	×
76	43	RCL	[illegible]
77	03	03	[illegible]
78	95	=	= A [illegible]
79	91	R/S	

MERGED CODES

62 | 72 STO | 83 GTO
63 | 73 RCL | 84
64 | 74 SUM | 92 INV SBR

TEXAS INSTRUMENTS INCORPORATED

TITLE Simpson 3/8 continuo. PAGE ____ OF ____

PROGRAMMER ________________ DATE ________

TI Programmable Program Record

Partitioning (Op 17) ______ Library Module ______________ Printer ________ Cards ________

PROGRAM DESCRIPTION

USER INSTRUCTIONS

STEP	PROCEDURE	ENTER	PRESS			DISPLAY
1	Colocar el programa en el paso 099		GTO	99		0.
2	Entrar al modo LRN		LRN			099 xx
3	Etiquetar la integral		2nd	Lbl		100 xx
			A			101 xx
4	Introducir (f(x)) a integrar. No usar re-					
	gistros de memoria 01-07. Ni etiquetas					
	A, B, C, y D					
5	Finalizar f(x) con INV SBR		INV	SBR		xxx xx
6	Salirse del modo LRN		LRN			0.
7	Colocar el programa al inicio		RST			0.
8	Borrar memorias		2nd	CMs		0.
9	Introducir el límite inferior de la integral	X_0	R/S			X_0
10	Introducir el límite superior de la integral	X_n	R/S			X_n
11	Introducir nº de intervalos (n = múltiplo de 3)	n	R/S			[illegible]

USER DEFINED KEYS	DATA REGISTERS (INV List)		LABELS (Op 08)
A	0	0	INV lnx CE CLR GTO 2nd
B	1	1	√x 1/x STO RCL SUM yˣ
C	2	2	EE ( ) ÷ GTO ×
D	3	3	SBR − RST + R/S −
E	4	4	[illegible]
A'	5	5	[illegible]
B'	6	6	[illegible]
C'	7	7	[illegible]
D'	8	8	[illegible]
E'	9	9	[illegible]

FLAGS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TITLE ______ PAGE ___ OF ___

PROGRAMMER ______ DATE ______

TI Programmable Coding Form

LOC	CODE	KEY	COMMENTS
00	42	STO	x_0
01	01	01	
02	32	x⇌t	
03	44	SUM	
04	02	02	
05	91	R/S	x_n
06	44	SUM	
07	02	02	→ $x_n - x_0$
08	91	R/S	n [illegible]
09	32	x⇌t	
10	34	2nd [illegible]	
11	02	02	→ $h = \frac{x_n - x_0}{n}$
12	55	÷	
13	02	2	
14	95	=	
15	42	STO	→ (h÷2)
16	03	03	
17	43	RCL	and y_0
18	01	01	calcula
19	71	SBR	y_0
20	11	A	
21	44	SUM	
22	04	04	→ y_0
23	02	2	
24	44	SUM	
25	05	05	contador 1
26	32	x⇌t	= 2
27	71	SBR	$2, y_1, 2, y_3, \ldots, y_{n-1}$
28	12	B	
29	65	×	
30	03	3	
31	95	=	
32	44	SUM	
33	04	04	[illegible]
34	01	1	
35	44	SUM	
36	06	06	contador 2
37	43	RCL	
38	06	06	contador 2
39	67	2nd x=t	= 3, [illegible]
40	13	C	[illegible] C
41	61	GTO	[illegible] 27
42	00	2	
43	27	7	
44	76	2nd Lbl	
45	13	C	
46	01	1	
47	32	x⇌t	
48	44	SUM	
49	03	03	[illegible]
50	43	RCL	
51	03	03	
52	32	x⇌t	[illegible]
53	02	2	
54	44	SUM	
55	05	05	contador 1
56	43	RCL	
57	05	05	contador 1
58	67	2nd x=t	[illegible]
59	14	D	→ S_1 ⇒ D
60	32	x⇌t	[illegible]
61	71	SBR	$2, y_2, \ldots, y_{n-2}$
62	12	B	
63	65	×	
64	02	2	
65	95	=	
66	44	SUM	[illegible]
67	04	04	[illegible]
68	61	GTO	
69	00	2	
70	27	7	
71	76	2nd Lbl	
72	14	D	
73	71	SBR	y_n
74	12	B	
75	44	SUM	[illegible]
76	04	04	[illegible]
77	43	RCL	
78	03	03	h
79	55	÷	÷
80	08	8	8
81	65	×	×
82	03	3	3
83	65	×	×
84	43	RCL	[illegible]
85	04	04	[illegible]
86	95	=	= A [illegible]
87	91	R/S	
88	76	2nd Lbl	
89	12	B	
90	43	RCL	
91	02	02	
92	44	SUM	
93	01	01	
94	43	RCL	
95	01	01	x_0 + [illegible]
96	71	SBR	[illegible]
97	11	A	y
98	92	INV SBR	

MERGED CODES

62	72 STO	83 GTO
63	73 RCL	84
64	74 SUM	92 INV SBR

ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE EL "MEJOR" METODO DE ENSEÑANZA DEL CALCULO INTEGRAL

ING. ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA.

Primero y antes que nada, es necesario decir que no es posible hablar de un "mejor" método de enseñanza. Intervienen tantos y tan diferentes factores que es imposible generalizar. Lo único que se pretende al hacer estas reflexiones es iniciar un intercambio de ideas que pueda conducir a, por lo menos, conocer la problemática tan disímbola y a "aprender" escuchando las experiencias de los demás participantes. Es común escuchar el refrán: "Nadie experimenta en cabeza ajena", pero quizas, si se hace un esfuerzo y se toman las buenas ideas que seguramente surgirán, entonces los participantes podremos constituirnos en la excepción que confirme esta regla.

Por lo pronto y sólo para iniciar con algo, quisiera manifestar mis ideas con la aclaración de que todo lo que se diga aquí se debe tomar como una opinión perteneciente solamente a quien escribe.

Es muy probable que la principal dificultad con que se topa un profesor al abordar el Cálculo Integral, es el miedo que tienen los alumnos hacia este tema. ¿Porqué miedo?

Siempre hay miedo a lo desconocido y si se observa la situación muy generalizada de los cursos de bachillerato, lo que sucede es que la mayoría de los alumnos aprenden el Cálculo Diferencial, aunque no con todo el rigor matemático deseable, pero el Cálculo Integral lo ven muy ligeramente.

Es natural que cuando ingresan a esta Facultad y se les recalca que el curso de Cálculo Diferencial e Integral tiene como uno de sus objetivos el profundizar en los conceptos que deben tener, surge primero el temor al saberse mal preparados, después ese temor se convierte en pavor cuando se inicia la segunda parte del curso faltando escasas semanas para el final.

A esto hay que agregarle la imposibilidad de hacer muchos ejercicios en clase debido otra vez, al factor tiempo.

¡Qué fácil es decir los problemas, pero que difícil resulta proponer soluciones!

Por lo pronto, no faltan las críticas hacia la práctica "inhumana" de algunos profesores, me incluyo entre ellos, de dejar como trabajo obligatorio la solución de un buen número de integrales de uno de los libros conocidos.

La pregunta es: ¿Cómo puede un niño aprender a andar en bicicleta sólo con las explicaciones de su padre o de su hermano mayor? Creo que resulta obvio que ese niño tiene que subirse a la bicicleta, perder el miedo y quizas después de unos raspones y varios días logre "andar en bicicleta".

Ahora bien, ¿cómo puede un alumno aprender a integrar sólo con las explicaciones de su profesor? El alumno tiene que enfrentarse a las integrales, perder el miedo y quizas después de algunos "raspones mentales" y varios días logre "integrar".

Puede ser que la analogía no sea muy afortunada, pero la idea es que para aprender a integrar, hay que integrar. Así de simple.

Sin embargo, en esa misma metáfora he mencionado de nuevo "perder el miedo" ¿Cómo?

Aquí es donde la labor del profesor debe ser decisiva. En el caso del niño él sabe que no está solo. Tiene a su padre a su lado. Pero en el caso del alumno, el profesor muchas veces se convierte no en su apoyo, sino por el contrario en una especie de verdugo que a cada momento le recuerda sus deficiencias y a veces hasta se burla de sus caídas.

En mi opinión, el profesor debe hacerle saber al alumno que no está solo. No debe consentirlo tanto que le exima del trabajo. Pero debe darle confianza. Si el tiempo está en contra y las actividades propias le impiden un trato más personalizado, debe orientar al alumno para que aproveche el recurso tan eficaz como puede ser la asesoría.

Sin embargo, nadie aprende algo si no lo quiere hacer. El niño aprende a andar en bicicleta porque sabe todas las horas de diversión que le esperan. Pero un alumno ¿para que puede querer aprender a integrar?. Algunos profesores, no sólo no le dicen a sus alumnos para que les puede servir esta disciplina, sino que al contrario les indican que el día de mañana, en su trabajo, no se volverán a acordar de "tantas" matemáticas.

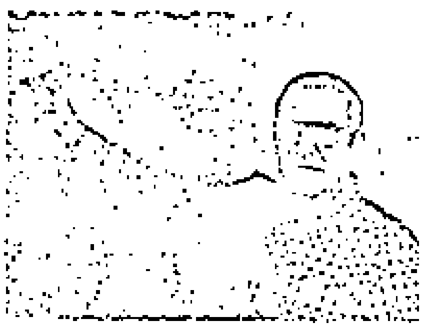
¿No sería mejor, sin engaños, el decirles brevemente algunas de las aplicaciones de los conceptos estudiados? Es natural que se tienen muchas limitaciones: el nivel en el que se encuentran impide profundizar en esos temas de aplicación, no todos van a la misma disciplina de Ingeniería, etc. Pero algo que en lo personal me ha dado buenos resultados, es mencionar los casos reales en los que va una integral como parte de un proyecto. Además me he auxiliado de algunas diapositivas en las que se presentan obras de Ingeniería y si bien no puede uno produndizar, el interés de los alumnos es evidente, aunque no todos vayan hacia la Ingeniería Civil, por ejemplo.

Alguien puede pensar que no puede perder 40 minutos de clase en la exposición de diapositivas, pero creo firmemente que no es pérdida de tiempo, sino una ganancia de interés para que el alumno quiera perder el miedo y quiera aprender.

Finalmente, a mi juicio, el profesor debe siempre estar dispuesto a modificar su técnica de enseñanza. No todos los grupos son iguales y a pesar de los pocos o muchos años de experiencia y no obstante los buenos resultados logrados, nunca debe dejarse de intentar el mejoramiento, sobre todo como en esta estupenda oportunidad escuchando las experiencias y opiniones de otros profesores, jóvenes o viejos, ya que de todos se puede aprender.

Jaime Escalante cree en el trabajo arduo y en el cálculo matemático, e infunde en sus alumnos preparatorianos el afán de llegar a ser lo que deseen.

Por Randy Fitzgerald



La inspiradora misión del profesor Escalante

Orgullo y exaltación reinaban en la Escuela Preparatoria Garfield, de Los Ángeles, el verano pasado, cuando los dieciocho alumnos que se habían presentado al examen nacional de clasificación avanzada para el cálculo en este nivel, que sólo pueden sustentar tres de cada cien, recibieron sus resultados. No sólo tuvo éxito la clase toda de cálculo, sino que siete de ellos merecieron las más altas notas.

Para los pedagogos del Servicio de Pruebas de Educación (ETS, por sus siglas en inglés), con sede en Princeton, Nueva Jersey, que administra el examen, estos resultados eran inexplicables. Descubrieron una pauta de respuestas que parecía estadísticamente extraña, y se informó a catorce de esos dieciocho estudiantes que se había puesto en tela de juicio la validez de sus calificaciones.

Esta insinuación de fraude en gran escala enfureció y escandalizó a los alumnos, padres y maestros de Garfield, centro docente integrado casi en un ciento por ciento por personas de origen hispánico, situado en una zona marginada de Los Ángeles. Varios profesores se opusieron a que los estudiantes volvieran a presentarse, pero el jefe del departamento de matemáticas de Garfield pidió calma, en estos términos:

"Debemos volver a presentarnos al examen", aconsejó Jaime Escalante, de 52 años, quien había enseñado a esos muchachos cuanto sabían de cálculo. "Demostremos que las sospechas del ETS son infundadas".

El 31 de agosto, doce de los estudiantes se sometieron al nuevo examen. No participaron otros dos; uno de ellos había ingresado en el Ejército, y el otro ya estaba inscrito en la Universidad de Columbia. Y una vez más, los doce sustentantes obtuvieron la puntuación óptima.

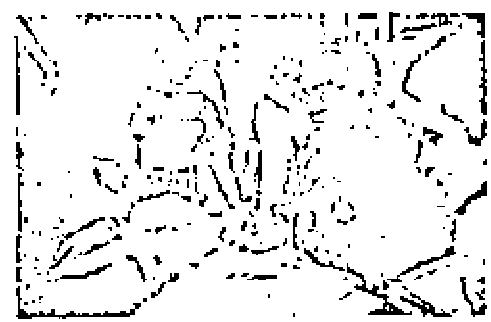
"Los muchachos demostraron que sabían cálculo", reconoció Gregory Anrig, presidente del ETS. "Esto otorga un gran crédito a la escuela y, en particular, al señor Escalante".

Jaime Escalante desarrolló su pasión por la enseñanza en su natal Bolivia. Era a lo que anhelaba dedicarse. Su padre y su madre eran maestros, e inculcaron en él la profunda satisfacción que produce inspirar a las mentes jóvenes.

Durante once años, trabajó de profesor de matemáticas en Bolivia. En 1964, Jaime, su esposa y su hijo inmigraron a Pasadena, California.

El profesor, que no hablaba inglés, consiguió empleo de mozo en un restaurante del lugar, y se inscribió en los cursos nocturnos del Pasadena City College, en inglés, matemáticas y electrónica. En cuanto pasó los exámenes de electrónica, fue a trabajar de técnico en la Burroughs Corporation. Era un empleo bien remunerado, pero él deseaba volver a su primer amor: la enseñanza. Por tanto, prosiguió sus estudios. En 1973 obtuvo la maestría en matemáticas en la Universidad Estatal de California, y recibió después su credencial de maestro. En 1974, con un sueldo considerablemente reducido, lo nombraron instructor de matemáticas en Garfield.

Durante sus primeros años allí, sufrió amarguras. Pocos estudiantes aprovechaban, en clases formadas por muchachos con muy diversas aptitudes y disímbolos intereses. Por ello, a solicitud del director, organizó



El profesor Escalante y sus discípulos de cálculo: "¡Cuando termine mi labor, todos ustedes serán campeones!"

en 1978 un curso especial para alumnos realmente interesados en aprender matemáticas. Los sobrecargó de tareas y los sometió a exámenes diarios. Trabajó con ellos antes y después de las horas normales de clases; les exigió disciplina y sacrificio, y obtuvo espléndidos resultados. En aquel primer año, cinco de sus discípulos se presentaron al examen de clasificación en cálculo, y cuatro pudieron acreditar la materia para pasar a la universidad. Antes, ningún estudiante de Garfield lo había logrado.

Entonces, Escalante empezó a ir a las escuelas secundarias del lugar, en busca de alumnos prometedores, a los que pudiera enseñar cuando llegaran al bachillerato. Para que lo firmaran los estudiantes y sus padres, redactó un contrato en el que prometía asistir a sus clases especiales de cálculo durante una hora y media, después de las horas reglamentarias de clase, cuatro veces por semana, además de las diarias lecciones de cálculo.

La generación de 1980 tuvo diez estudiantes, ocho de los cuales pasaron el examen de clasificación en cálculo. En 1981, catorce de una clase de quince, lograron el pase. Sus discípulos lo llamaron "el Campeón", porque era un creador de campeones.

Con el grupo de 1982, comenzó el primer día de escuela dando a sus dieciocho pupilos una conferencia inspiradora: "El cálculo es para ustedes, en este momento, sólo un nombre. Pero cuando termine mi labor, todos serán campeones. Hagan lo que se espera de ustedes, y yo haré lo que se espera de mí. No hay límites. Llegarán hasta donde se propongan llegar".

Desde aquel primer día, los estudiantes quedaron mesmerizados por la energía, el buen humor y la paciencia del profesor. Se ponía al nivel de ellos. "Pregunten", solía instarlos. "No tengan miedo a hacer preguntas tontas".

Además de las sesiones vespertinas, Jaime Escalante alentó a su clase a acudir a trabajar con él antes de la hora de entrada a la escuela, y a almorzar sobre sus escritorios y hablar de cálculo. Los sábados los llevaba a las universidades de la zona para mostrarles los laboratorios y las computadoras a fin de que vieran cómo podían aplicar sus conocimientos de matemáticas.

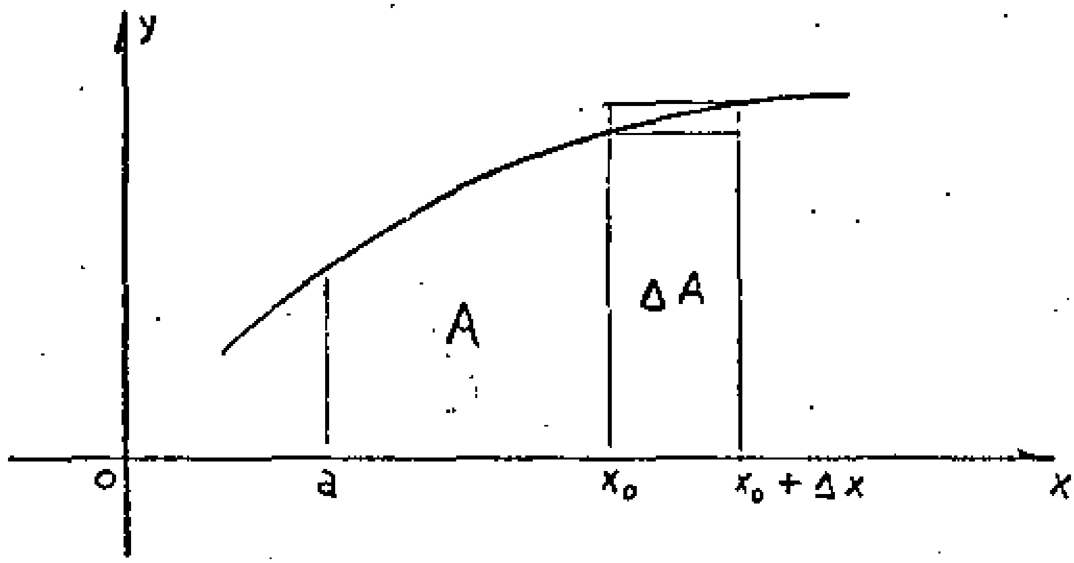
"Mis demás profesores me decían que en la vida no sólo hay matemáticas", relata riendo Josie Richkarday, de dieciocho años. "Pero hay que elegir. Hay que sacrificar muchas cosas. Yo dejé los deportes de pista y campo, el beisbol y los grupos de aliento a los deportistas de la escuela, porque el señor Escalante es uno de esos profesores a los que se encuentra una vez en la vida".

Pero Jaime Escalante sabe que tiene una misión de mayor trascendencia que sólo preparar a sus alumnos en cálculo de nivel medio. Está preparándolos para las realidades económicas de la vida, y les dice que, con "ganas", todo es posible.

La repercusión de un profesor del dinamismo de Escalante va mucho más allá de su aula. Han surgido en Garfield cursos para clasificación avanzada en muchas materias. La presión de los condiscípulos hace aumentar la asistencia y cumplir con las tareas. Se ha elevado el nivel de aspiraciones de toda la escuela.

"Hemos reducido el vandalismo, las pintas en las paredes, el consumo de drogas y el pandillerismo, porque estamos creando un nuevo modelo de papeles", asevera el director de la Escuela Preparatoria Garfield, Henry Gradillas. "Estamos formando a muchachos que, al graduarse, podrán ejercer influencia benéfica. ¡Gracias a Jaime Escalante, estamos formando a campeones!" [illegible]

Sea la función $y = f(x)$ cuya representación gráfica se muestra en la figura:



Considérese el valor de A como el área bajo la curva comprendida entre las rectas $x = a$, $x = x_0$, $y = 0$.

Si se toma un incremento Δx, a éste le corresponderá un ΔA.

Geométricamente se observa de la figura:

$$y_0 \, \Delta x < \Delta A < (y_0 + \Delta y) \, \Delta x \quad . \; . \; . \qquad (1)$$

Dividiendo la desigualdad (1) entre Δx:

$$y_0 < \frac{\Delta A}{\Delta x} < y_0 + \Delta y$$

Por otra parte se sabe que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_0 = y_0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (y_0 + \Delta y) = y_0$$

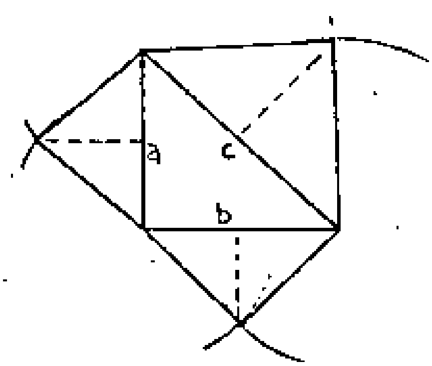
Entonces por un teorema sobre límites:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = y_0$$

Finalmente:

$$D_x A = y_0$$

DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE PITAGORAS A PARTIR DE TRIANGULOS EQUILATEROS CONSTRUIDOS SOBRE LOS LADOS DE UN TRIANGULO RECTANGULO.



$$\frac{1}{2} \text{ sen } 60° \cdot a \cdot a + \frac{1}{2} \text{ sen } 60° \cdot b \cdot b = \frac{1}{2} \text{ sen } 60° \cdot c \cdot c$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$

Esta demostración se menciona en el libro "Científicos Griegos" y corresponde a los Elementos de Geometría de Euclides, teorema 31, libro 60, tomo I.

Tenemos

GH = energía almacenada en megajoules

De la ec. (14.5) y la tabla 14.1

$$\text{Energía almacenada} = \tfrac{1}{2} I\omega^2 = \tfrac{1}{2} M\omega \qquad (14.6)$$

Si M está dado en megajoules-segundo por grado eléctrico y ω en grados eléctricos por segundo, la energía almacenada vendrá dada por la ec. (14.6) en megajoules. En grados eléctricos por segundo, $\omega = 360f$, siendo f la frecuencia en ciclos por segundo (o Hz), se convierte en la

$$GH = \tfrac{1}{2} M(360f)$$

y

$$M = \frac{GH}{180f}, \quad \text{MJ-s/grado eléctrico} \qquad (14.7)$$

Como veremos, posteriormente, H debe determinarse para estudios de estabilidad en régimen transitorio, pero M depende del tamaño y tipo de la máquina, mientras que H no varía mucho según el tamaño.

La constante H tiene un campo de valores relativamente estrecho para cada clase de máquinas, independientemente de sus kVA y velocidad de régimen. En la tabla 14.2 se señalan algunas constantes típicas de inercia.

Si se conoce el valor de WR^2 de la máquina*, H puede determinarse en la forma siguiente. A partir de la ec. (14.5) y utilizando unidades inglesas, tenemos

$$KE = \frac{1}{2}\frac{WR^2}{32.2}\left[\frac{2\pi(\text{rpm})}{60}\right]^2 \quad \text{ft-lb} \qquad (14.8)$$

Pasando de pies-libras a megajoules y dividiendo por el régimen de la máquina en megavolts-amperes, obtenemos

$$H = \frac{\left(\frac{746}{550}\times 10^{-6}\right)\frac{1}{2}\frac{WR^2}{32.2}\left[\frac{2\pi(\text{rpm})}{60}\right]^2}{\text{MVA régimen}} \qquad (14.9)$$

$$H = \frac{2.31\times 10^{-10}\, WR^2(\text{rpm})^2}{\text{MVA régimen}} \qquad (14.10)$$

* La magnitud WR^2 es igual al peso de las partes giratorias de la máquina, teniendo en cuenta también el de la carga, multiplicado por el cuadrado del radio de giro en pies. $WR^2/32.2$ es el momento de inercia en lb-pie².

Tabla 14.2 Constantes de inercia de las máquinas síncronas†

Tipo de máquina	Constante de inercia H, kJ/kVA
Turbogeneradores	
Condensado, 1,800 rpm	6-9
3,600 rpm	4-7
No condensado, 3,600 rpm	3-4
Generadores hidráulicos	
Velocidad baja < 200 rpm	2-3
Velocidad alta > 200 rpm	2-4
Condensadores síncronos§	
Grande	1.25
Pequeño	1.00
Motor síncrono con carga que varía de 1.0 a 5.0 y mayor para volantes grandes	2.00

† Reproducido con permiso de Westinghouse Electric Corporation de "Electrical Transmission and Distribution Reference Book".

‡ La primera figura se aplica a máquinas de pequeña capacidad, en MVA, y la segunda a las mayores.

§ Enfriados por hidrógeno.

Cuando varias máquinas situadas en cierto punto se consideran como una sola, la máquina simple equivalente tiene un régimen igual a la suma del de las diversas máquinas que se consideran, funcionando juntas durante el período transitorio. La constante de inercia M de la máquina equivalente es la suma de las constantes de inercia M de cada una de las máquinas.

14.4 ECUACIÓN DE OSCILACIÓN

Si no se considera el par originado por rozamiento mecánico, por rozamiento del aire y por pérdidas en el núcleo, cualquier diferencia entre el par mecánico y el par electromagnético debe dar lugar a una aceleración o deceleración de la máquina. Si T_s representa el par mecánico en el árbol y T_e, el par electromagnético, y si estos valores se consideran positivos para un generador (esto es, entrada mecánica en el árbol y par eléctrico de salida producido), el par que origina la aceleración es

$$T_a = T_s - T_e \qquad (14.11)$$

y T_a será positivo, denotando aceleración cuando T_s es mayor que T_e. Al utilizar la misma ecuación para un motor, T_s y T_e son ambos negativos para indicar entrada eléctrica y salida mecánica; entonces, T_a es positivo e indica aceleración cuando T_e es mayor que T_s. Para la potencia de aceleración se cumple una ecuación similar, es decir,

$$P_a = P_s - P_e \tag{14.12}$$

en la que P_s es la potencia mecánica en el árbol y P_e la potencia eléctrica desarrollada por el generador. Para un motor, P_s es la diferencia, con signo menos, entre la potencia de salida y las pérdidas mecánicas en el motor, esto es, P_e es el valor, con signo menos, de la potencia eléctrica desarrollada. Si se consideran las pérdidas por rozamiento, aire y pérdidas en el núcleo, incluidas las pérdidas por corrientes de Foucault en el acoplamiento, P_s es el valor, con signo menos, de la potencia de salida, más las pérdidas por rotación del motor y P_s es la entrada de potencia menos las pérdidas por rotación del generador.

Puesto que la potencia es igual al par por la velocidad angular, tendremos

$$P_a = T_a\omega = I\alpha\omega = M\alpha \tag{14.13}$$

La potencia de aceleración, P_a, viene expresada en megavatios, si M se da en megajulios-segundo por grado eléctrico y α, aceleración angular, en grados eléctricos por segundo al cuadrado. La aceleración, en función de la posición angular, θ, del rotor, vale

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{14.14}$$

Como θ varía continuamente con el tiempo, es más conveniente medir la posición angular, respecto a un eje de referencia que gira a la velocidad sincrónica. Si δ es el desplazamiento angular, en grados eléctricos, a partir del eje de referencia que gira sincrónicamente, y ω_s es la velocidad sincrónica en grados eléctricos por segundo

$$\theta = \omega_s t + \delta \tag{14.15}$$

Derivando, respecto de t, obtenemos

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_s + \frac{d\delta}{dt} \tag{14.16}$$

y derivando nuevamente

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\delta}{dt^2} \tag{14.17}$$

De las ecs. (14.13), (14.14) y (14.17), obtenemos

$$M\frac{d^2\delta}{dt^2} = P_a = P_s - P_e \tag{14.18}$$

La ec. (14.18) se denomina ecuación de oscilación. El ángulo δ, para una máquina conectada a una barra infinita, es el ángulo de par utilizado en las ecs. (14.1) y (14.3), puesto que este ángulo es la diferencia entre el ángulo interno de la máquina y el ángulo del sistema giratorio sincrónico de referencia que, en este caso, es la barra infinita. Para un sistema de dos máquinas, son necesarias dos ecuaciones de oscilación, una para cada máquina. El ángulo de par entre las dos máquinas, depende de los ángulos entre cada máquina y el sistema giratorio sincrónico de referencia. Cuando δ de una máquina es constante la máquina se está moviendo a velocidad constante. La velocidad angular se diferencia de la velocidad angular sincrónica por $d\delta/dt$.

El momento angular M de una máquina, no es constante, puesto que varía la velocidad angular; sin embargo, puede considerarse como tal, ya que la velocidad de la máquina no se desvía mucho de la velocidad de sincronismo a menos que se sobrepase el límite de estabilidad. La constante de inercia también designada por H, es realmente constante por definición, ya que es el momento angular a la velocidad de sincronismo. La potencia en el árbol P_s se considera constante para la resolución de la ecuación. Para un generador, esta hipótesis está justificada, aunque la entrada desde el accionamiento está controlada por la acción de los reguladores, porque estos reguladores no actúan hasta que detectan un cambio de velocidad y, en todo caso, su respuesta es relativamente lenta. Los programas para calculadoras digitales pueden tener en cuenta la acción de los reguladores.

En un motor, la carga permanece constante, ya que la velocidad no varía apreciablemente, a menos que se pierda la estabilidad. La potencia eléctrica P_e, viene dada por las ecs. (14.1) o (14.3). La reactancia transitoria se utiliza para determinar las constantes generalizadas del circuito en la ec. (14.1) y X para la ec. (14.3), cuando se desprecia la resistencia. La reactancia transitoria es el valor óptimo que se puede usar, porque el rotor de la máquina cambia continuamente de posición, respecto a la fmm de la corriente del inducido, de forma que el flujo varía sobre la cara del rotor, de manera similar al flujo variable cuando se evalúa la reactancia en el régimen transitorio. E_g y E_m son las tensiones detrás de la reactancia transitoria del generador y del motor. De la ec. (14.3), la ecuación de oscilación se transforma en

$$M\frac{d^2\delta}{dt^2} = P_s - \frac{|E_g|\cdot|E_m|}{|X|}\operatorname{sen}\delta \tag{14.19}$$

o de la ec. (14.4)

$$M\frac{d^2\delta}{dt^2} = P_s - P_{max}\operatorname{sen}\delta \tag{14.20}$$

En un sistema de varias máquinas y, por tanto, de varias ecuaciones de oscilación, no puede intentarse hallar la solución formal de la ecuación. Si el estudio se hace con una calculadora digital, es preciso hallar la solución punto por punto. Incluso para el caso sencillo de una sola máquina y una barra infinita, despreciando la resistencia, sólo es posible la solución formal de la ec. (14.20), si $P_s = 0$ y exige el empleo de integrales elípticas. La solución de los valores de δ para distintos tiempos y, gráficamente, que se representan de δ en función de t. La curva obtenida se llama curva de oscilación. Si la curva de oscilación indica que el ángulo δ empieza a disminuir después de pasar por un máximo, se supone, normalmente, que el sistema no perderá la estabilidad y que las oscilaciones de δ alrededor del equilibrio se harán cada vez más pequeñas, hasta desaparecer.

14.5 CRITERIO DE LA IGUALDAD DE LAS ÁREAS PARA LA ESTABILIDAD

En un sistema en el que una máquina oscila, respecto a una barra infinita, no es necesario representar y estudiar las curvas de oscilación para determinar si el ángulo de par de la [illegible] permanente indefinidamente alrededor de una posición de equilibrio. La ecuación de la ecuación de oscilación, con las hipótesis usuales de P_i constante, red puramente reactiva y fuerzas electromotrices detrás de la reactancia transitoria, demuestra que δ oscila alrededor del punto de equilibrio con amplitud constante, si no se sobrepasa el límite de estabilidad del régimen transitorio. El principio por el que se determina la estabilidad en condiciones de régimen transitorio, sin resolver la ecuación de oscilación, es el criterio de igualdad de áreas. Aunque no es aplicable a sistemas de varias máquinas, este método ayuda a comprender en qué forma influyen ciertos factores en la estabilidad en régimen transitorio de un sistema cualquiera.

[illegible] la deducción del criterio de igualdad de las áreas se hace para una máquina y una barra infinita, puede también adaptarse a un sistema de dos máquinas. La ecuación de oscilación para la máquina conectada a la barra, es

$$M\frac{d^2\delta}{dt^2} = P_i - P_e \tag{14.21}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por $2d\delta/dt$, tenemos

$$2M\frac{d^2\delta}{dt^2}\frac{d\delta}{dt} = 2(P_i - P_e)\frac{d\delta}{dt} \tag{14.22}$$

El primer miembro de la ec. (14.24), puede escribirse en la forma siguiente[1]:

$$M\frac{d(d\delta/dt)^2}{dt} = 2(P_i - P_e)\frac{d\delta}{dt} \tag{14.23}$$

Reagrupando, multiplicando por dt e integrando, tenemos

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 = \int_{\delta_0}^{\delta}\frac{2(P_i - P_e)}{M}\,d\delta \tag{14.24}$$

o bien,

$$\frac{d\delta}{dt} = \sqrt{\int_{\delta_0}^{\delta}\frac{2(P_i - P_e)}{M}\,d\delta} \tag{14.25}$$

en la que δ_0 es el ángulo de par cuando la máquina funciona sincrónicamente antes de que se produzca la perturbación, entonces $d\delta/dt = 0$. El ángulo δ dejará de variar y la máquina volverá a funcionar sincrónicamente después de la perturbación, cuando $d\delta/dt = 0$, o cuando

$$\int_{\delta_0}^{\delta}\frac{2(P_i - P_e)}{M}\,d\delta = 0 \tag{14.26}$$

[1] La nueva forma dada al primer miembro de la ec. (14.23), para obtener la ec. (14.24), puede comprobarse sustituyendo δ por $d\delta/dt$ en la fórmula

$$\frac{dx^2}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

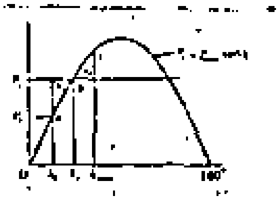


Fig. 14.4. Potencia eléctrica de entrada a un motor en función del ángulo del par δ. Se aumenta bruscamente la carga desde P_0 hasta P_i, oscilando el motor, alrededor de δ_1, entre δ_0 y δ_{max}. Las áreas A_1 y A_2 son iguales.

Como veremos más tarde, la máquina no permanecerá en reposo, respecto a la barra infinita, la primera vez que $d\delta/dt$ se hace igual a cero, pero el hecho de que δ, momentáneamente, deje de variar, puede tomarse como una indicación de estabilidad, lo que corresponde a la interpretación de que la curva de oscilación indica estabilidad cuando el ángulo δ alcanza el máximo y empieza a disminuir.

Algunos de los fenómenos originados por el aumento brusco de la carga mecánica sobre un motor sincrónico, conectado a una barra infinita, pueden predecirse por análisis de la fig. 14.4. La curva sinusoidal P_e es una representación de la potencia de entrada al motor, despreciando la resistencia. La curva P_e se deduce de las ecs. (14.3) y (14.4), siendo $|V_\infty|$ la tensión de la barra infinita, $|E'_{m}|$ la tensión detrás de la reactancia transitoria del motor y X está determinada a partir de la reactancia transitoria del motor más la reactancia del transformador y de la línea o la red, entre el motor y la barra infinita.

Al principio, el motor funciona a la velocidad de sincronismo con un ángulo de par de δ_0 y la potencia mecánica de salida P_0 es igual a la potencia eléctrica de entrada P_e, correspondiente a δ_0. Si se aumenta bruscamente la carga mecánica, de forma que la potencia de salida es P_i, que es mayor que la potencia eléctrica de entrada para δ_0, la diferencia de potencias debe ser compensada por la energía cinética almacenada en el sistema giratorio. Esto puede realizarse solamente a expensas de la disminución de velocidad, lo que da lugar a un aumento del ángulo de par δ. Al aumentar δ, la potencia eléctrica recibida de la barra aumenta hasta que $P_e = P_i$ en el punto b de la curva. En este punto hay equilibrio de las potencias de entrada y salida, de forma que la aceleración es cero, pero el motor está marchando a velocidad menor que la de sincronismo con lo que δ aumenta. El ángulo δ continúa aumentando, pero, después de pasar por el punto b, la potencia eléctrica de entrada P_e es mayor que P_i y la diferencia tiene que ser almacenada en el sistema por aumento de la energía cinética y, por tanto, por aumento de la velocidad. Así, pues, entre los puntos b y c, al aumentar δ, la velocidad aumenta hasta que se alcanza nuevamente la velocidad sincrónica en el punto c en el que el ángulo de par es δ_{max}. En el punto c, P_e es todavía mayor que P_i y la velocidad continúa aumentando, pero δ comienza a disminuir tan pronto como la velocidad del motor sobrepasa la de sincronismo. El valor máximo de δ es δ_{max} en el punto c. Al disminuir δ, se alcanza nuevamente el punto b con velocidad superior a la sincrónica, de manera que δ continúa disminuyendo hasta llegar al punto a. El motor funciona de nuevo sincrónicamente y el ciclo se repite.

El motor oscila alrededor del ángulo δ_1 de equilibrio, entre los ángulos δ_0 y δ_{max}. Si hay amortiguamiento, la oscilación disminuye y se obtiene un funcionamiento estable en δ_1. La tabla 14.3 recoge los cambios de velocidad, ángulo, potencia eléctrica de entrada, potencia mecánica de salida, energía almacenada y aceleración o deceleración al oscilar la

Tabla 14.3 Condiciones variables en un motor síncrono oscilando respecto a una barra infinita por un aumento brusco de carga

Posición en el ciclo (ver fig. 14.5)	Velocidad del motor ω	Ángulo de par δ	Potencia eléctrica P_e	Energía almacenada $\frac{1}{2} I\omega^2 = W$	Fenómeno ocurrido sobre eso
En el punto a	$\omega = \omega_s$ decreciente	$\delta = \delta_0$ creciente	$P_e < P_s$ creciente	$W = W_s$ decreciente	Desaceleración
Desde a hasta b	$\omega < \omega_s$ decreciente	creciente	$P_e < P_s$ creciente	$W < W_s$ decreciente	Desaceleración
En el punto b	$\omega < \omega_s$ mínima	$\delta = \delta_b$ creciente rápido	$P_e = P_s$ creciente	$W < W_s$ mínima	
Desde b hasta c	$\omega < \omega_s$ creciente		$P_e > P_s$ creciente	$W < W_s$ creciente	Aceleración
En el punto c	$\omega = \omega_s$ creciente	$\delta = \delta_{max}$ máximo	$P_e > P_s$ máxima	$W = W_s$ creciente	Aceleración
Desde c hasta b	$\omega > \omega_s$ creciente	decreciente	$P_e > P_s$ decreciente	$W > W_s$ creciente	Aceleración
En el punto b	$\omega > \omega_s$ máxima	$\delta = \delta_b$ decreciente rápidamente	$P_e = P_s$ decreciente	$W > W_s$ máxima	
Desde b hasta a	$\omega > \omega_s$ decreciente		$P_e < P_s$ decreciente	$W > W_s$ decreciente	Desaceleración
En el punto a	Se repite el ciclo anterior				

* ω_s es la velocidad síncrona y velocidad angular [illegible], siendo $W_s = \frac{1}{2} I\omega_s^2$.

máquina. El estudio completo de esta tabla llevará a una mejor comprensión de las perturbaciones transitorias.

La posición variable del motor síncrono, oscilando respecto a una barra infinita, puede mostrarse por medio de una analogía. Consideremos un péndulo oscilando alrededor de un punto de suspensión, pendiente de una estructura fija, como se representa en la fig. 14.5a. Los puntos a y c son los puntos de separación máxima, respecto al punto b de equilibrio. El amortiguamiento llevará finalmente al péndulo al reposo en b. Imaginemos ahora un disco que gira a derechas alrededor del eje del péndulo, como se representa en la fig. 14.5b y superpongamos el movimiento del péndulo al movimiento del disco. Cuando el péndulo se mueve desde a hacia c, la velocidad angular combinada es más lenta que la del disco. Cuando el péndulo se mueve desde c hacia a, la velocidad angular combinada es más rápida que la del disco. En los puntos a y c, la velocidad angular del péndulo sola es nula y la combinada es igual a la del disco. Si la velocidad angular del disco corresponde a la velocidad síncrona del motor y si el movimiento del péndulo representa la oscilación del motor, respecto a una barra infinita, el movimiento de superposición del péndulo sobre el del disco, representa el movimiento angular.

La oscilación máxima del motor hasta un ángulo de par δ_{max} se determina por una interpretación gráfica de la ec. (14.26). Cuando se satisface esta ecuación, se alcanza el

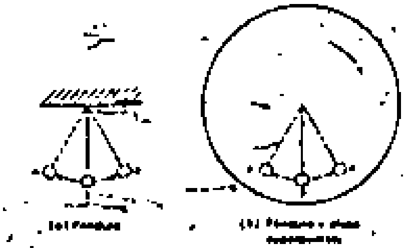


Fig. 14.5 Péndulo y disco giratorio que ilustran la oscilación de un motor respecto a una barra infinita.

valor de δ máximo y $d\delta/dt = 0$. El área sombreada A_1 de la fig. 14.4 es

$$A_1 = \int_{\delta_0}^{\delta_b} (P_s - P_e)\, d\delta \qquad (14.27)$$

De igual forma, el área sombreada A_2 es

$$A_2 = \int_{\delta_b}^{\delta_{max}} (P_e - P_s)\, d\delta \qquad (14.28)$$

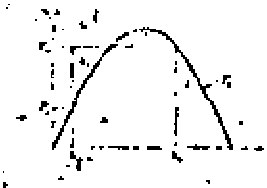
y

$$A_1 - A_2 = \int_{\delta_0}^{\delta_b} (P_s - P_e)\, d\delta - \int_{\delta_b}^{\delta_{max}} (P_e - P_s)\, d\delta \qquad (14.29)$$

$$A_1 - A_2 = \int_{\delta_0}^{\delta_{max}} (P_s - P_e)\, d\delta \qquad (14.30)$$

La ec. (14.26) se satisface y $d\delta/dt = 0$, cuando $A_1 = A_2$. El ángulo de par máximo, δ_m, está situado gráficamente, de forma que A_2 es igual a A_1. El estudio de la tabla 14.3 demuestra que la energía perdida cuando el motor decelera y δ crece hasta δ_b, se recupera cuando se alcanza el valor δ_{max}.

La fig. 14.6 representa una carga bruscamente aplicada que es mayor que la de la fig. 14.4. El área A_1 por encima de P_e y limitada por la curva de P_s, es mayor que A_2 y $d\delta/dt$ no se anula para $\delta = \delta_m$. Por tanto, δ continúa aumentando después de $\delta = \delta_m$. P_e se hace otra vez menor que P_s. El ángulo del par δ continúa aumentando después de δ_m y no hay fuerzas [illegible]. El sistema es inestable [illegible] P_s puede alcanzar un área A_1 [illegible] A_2 [illegible] la igualdad de las áreas. En la fig. 14.7 se representa el incremento máximo permisible de la potencia tomada bruscamente de un motor que, inicialmente, suministra la potencia P_0. Una carga, aplicada bruscamente, mayor que la representada en la figura, no permi-



[illegible] Potencia eléctrica de entrada [illegible] en función del ángulo de [illegible] para un generador [illegible] de carga [illegible] P_0 a P_1.

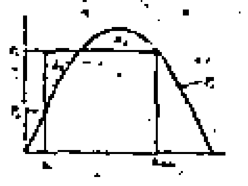


Fig. 14.7 Potencia eléctrica de entrada a un motor, en función del ángulo de par, para el cambio brusco máximo de carga sin pérdida de estabilidad. Las áreas A_1 y A_2 son iguales.

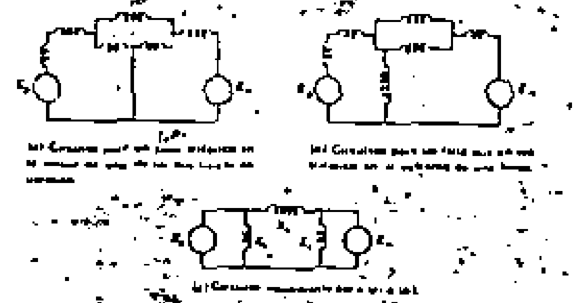
[illegible] que el ángulo de par del motor deja de aumentar antes de que la potencia de carga [illegible] se hace mayor que la potencia máxima, ya que el área, por encima de P_1 se hace [illegible] que A_1.

14.8 OTRAS APLICACIONES DEL CRITERIO DE LA IGUALDAD DE LAS ÁREAS

Aunque el criterio de las áreas iguales puede aplicarse solamente en el caso de una máquina y una barra infinita o en el caso de dos máquinas, es muy útil para comprender lo que [illegible] cuando ocurre una falla. El computador digital es la única vía práctica para determinar la estabilidad de un gran sistema pero, debido a que el criterio de igualdad de áreas es [illegible] de gran ayuda en el entendimiento de la estabilidad transitoria, continuaremos [illegible] brevemente antes de estudiar la determinación de las curvas de oscilación [illegible] con el computador digital.

Cuando un generador suministra potencia a una barra infinita a través de dos líneas de transmisión paralelas, la apertura de una de las líneas puede hacer que el generador pierda el sincronismo, incluso, aunque la carga pueda ser suministrada por la línea [illegible] en condiciones de régimen permanente. Si un corto circuito trifásico ocurre en la barra a la cual están conectadas dos líneas paralelas, ninguna potencia puede transmitirse [illegible] cualquiera de las dos líneas. Sin embargo, si la falla está al final de una de las líneas, [illegible] los disyuntores en ambos extremos de la línea aislarán la falla del sistema y [illegible] que fluya a través de la otra línea paralela.

[illegible] se produce una falla trifásica en un punto de línea de circuito doble, que no [illegible] existe una cierta impedancia [illegible] la falla. Por tanto, se transmitirá cierta potencia mientras dura el falla [illegible] en el sistema. Cualquiera que sea su situación, las fallas de cortocircuito, que no afectan a [illegible] permiten la transmisión de cierta potencia, puesto que pueden estar representadas por la conexión de una impedancia entre el punto de falla y la barra de referencia [illegible] el diagrama de impedancias de secuencia positiva, mayor que para un cortocircuito. Cuanto mayor sea la impedancia puesta en paralelo con la red de secuencia positiva para representar el fallo, mayor será la potencia que podrá transmitirse durante dicho fallo.



(a) Circuito para un [illegible] en la [illegible] de una de las dos líneas de [illegible]

(b) Circuito para un fallo [illegible] en el extremo de una línea

(c) Circuito [illegible] en triángulo

Fig. 14.8 Reducción de la red para la determinación de la estabilidad.

La potencia transmitida durante un fallo puede calcularse después de reducir la red que representa la condición de fallo a un circuito [illegible] entre la tensión interna y la barra infinita. En la fig. 14.8, a y b se representan dos circuitos antes de su reducción. Cualquiera de ellos puede reducirse a la red en triángulo de la fig. 14.8c. La corriente en la reactancia X_2 está retrasada 90°, respecto a la tensión del generador, y la potencia [illegible] La potencia real transmitida es $(|E_g| \cdot |E_m| / X_2)$ sen δ, siendo E_g la tensión detrás de la reactancia transitoria del generador y E_m la tensión de la barra infinita.

Si hay transmisión de potencia durante el fallo, el criterio de igualdad de áreas se aplica en la forma mostrada en la fig. 14.9, en la que P_{max} sen δ es la potencia transmitida antes del fallo, $r_1 P_{max}$ sen δ, la potencia transmitida durante el fallo, y $r_2 P_{max}$ sen δ, la transmitida después de haber sido aislado el fallo por desconexión en el instante en que $\delta = \delta_c$. El ángulo δ_c, se llama ángulo de corte crítico porque es el máximo valor posible de δ para que ocurra el corte sin que exceda el límite de estabilidad transitoria. Un [illegible] de la fig. 14.9 muestra que si el corte ocurre a un valor de δ mayor que δ_c, el área de A_2 encima de la línea horizontal es menor que A_1 debajo de la línea y δ continúa creciendo más allá de δ_{max}. La potencia mecánica que entra al generador es de nuevo más grande que la potencia desarrollada. La velocidad se incrementa aún más, y el generador no puede entrar de nuevo en sincronismo. La cantidad de potencia transmitida

Fig. 14.9 Criterio de la igualdad de las áreas aplicado al aislamiento de un fallo con transmisión de potencia durante el fallo. Las áreas A_1 y A_2 son iguales.

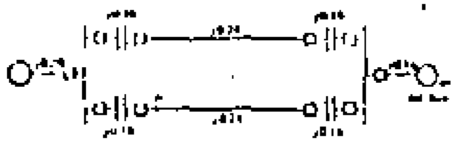


Fig. 14.10 Diagrama unifilar para el ejemplo 14.2

durante la falla, el valor de r_1 para un ángulo de potencia dado [illegible], pequeñas [illegible] ($r_1 P_{max}$) [illegible] en el sistema [illegible]. [illegible] de r_2 [illegible] potencia [illegible] durante la falla y r_2 mayor.

[illegible] las fallas por orden de gravedad [illegible] son las siguientes:

1. De línea simple a tierra
2. De línea a línea
3. De línea doble a tierra
4. Trifásica

La falla de línea simple a tierra es la que se presenta con mayor frecuencia, en tanto que la falla trifásica es la menos frecuente. Para una seguridad o confiabilidad completas, los sistemas deben ser proyectados para la estabilidad en régimen transitorio con fallas trifásicas [illegible] en los puntos peores. Si esto no es práctico desde el punto de vista económico, debe sacrificarse la seguridad un grado, proyectando para la estabilidad en régimen transitorio con fallas de línea doble a tierra.

EJEMPLO 14.2 En el diagrama unifilar de la fig. 14.10 se representa un generador unido, mediante unas líneas de transmisión de alta tensión, paralelas, a un gran sistema metropolitano, que se considera como una barra infinita. Los valores del diagrama son las reactancias por unidad. Al producirse el fallo trifásico [illegible] para el generador [illegible] en el punto P, el dicho generador suministra una potencia de 1.0 por unidad. Supongamos que la tensión detrás de la reactancia transitoria es de 1.25 por unidad para el generador y que la tensión en la barra infinita es de 1.0 por unidad.

Solución. El diagrama de impedancias de secuencia positiva es el representado en la fig. 14.11. Antes del fallo, la impedancia entre el generador y la barra infinita es

$$X = 0.25 + 0.18 + \frac{0.18 + 0.21 + 0.18}{2} = 0.72$$

Después de ser aislado dicho fallo mediante la apertura de los interruptores de los extremos de la línea averiada, la impedancia entre el generador y la barra infinita será

$$X = 0.25 + 0.18 + 0.16 + 0.21 + 0.18 = 1.00$$

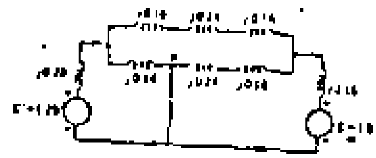


Fig. 14.11 Diagrama de impedancias de secuencia positiva para el ejemplo de la fig. 14.10.

Durante el fallo, el circuito se representa por la red de la fig. 14.12a. La reducción de este circuito a [illegible] se hace a veces por medio de las operaciones matriciales para eliminación de nudos que se estudiaron en la sec. 7.10, o por medio de dos transformaciones Y-Δ. Como el circuito es sencillo y como la única [illegible] la impedancia de [illegible] transformaciones Y-Δ, representadas en la fig. 14.12b, son más sencillas para el cálculo manual que la eliminación matricial de nudos. Los cálculos se efectúan en la forma siguiente

$$X_{a} = \frac{0.56 \times 0.16}{0.56 + 0.16 + 0.40} = \frac{0.0896}{1.12} = 0.080$$

$$X_{b} = \frac{0.40 \times 0.56}{1.12} = \frac{0.224}{1.12} = 0.200$$

$$X_{c} = \frac{0.16 \times 0.40}{1.12} = \frac{0.064}{1.12} = 0.057$$

$$X_{a}' = 0.25 + 0.08 = 0.33$$

$$X_{b}' = 0.20 + 0.16 = 0.36$$

$$X_{12} = \frac{0.34 \times 0.057 + 0.38 \times 0.36 + 0.36 \times 0.057}{0.057} = 2.98$$

No es necesario calcular X_{10} y X_{20}, puesto que éstas, por estar directamente en paralelo con las tensiones del generador y la barra infinita, no pueden absorber potencia real.

Las ecuaciones para la potencia de salida del generador son

Antes del fallo: $$P_{max} \operatorname{sen} \delta = \frac{1.0 \times 1.25}{0.72} \operatorname{sen} \delta = 1.735 \operatorname{sen} \delta$$

Durante el fallo: $$r_1 P_{max} \operatorname{sen} \delta = \frac{1.0 \times 1.25}{2.98} \operatorname{sen} \delta = 0.42 \operatorname{sen} \delta$$

Después del fallo: $$r_2 P_{max} \operatorname{sen} \delta = \frac{1.0 \times 1.25}{1.00} \operatorname{sen} \delta = 1.25 \operatorname{sen} \delta$$

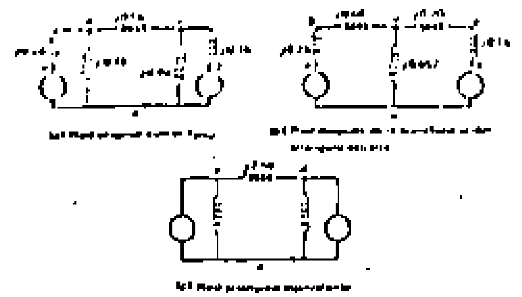


Fig. 14.12 Pasos sucesivos de la reducción del circuito del Fig. 14.7

Por tanto,

$$r_1 = \frac{0.42}{1.715} = 0.212 \qquad r_2 = \frac{1.25}{1.715} = 0.72$$

y de la fig. 14.9 se obtiene que

$$P_e = P_{max} \operatorname{sen} \delta_0 \qquad P_e = r_2 P_{max} \operatorname{sen} \delta_{max}$$

y así

$$\delta_0 = \operatorname{sen}^{-1} \frac{1.0}{1.745} = 35.0° = 0.615 \text{ rad}$$

$$\delta_{max} = 180° - \operatorname{sen}^{-1} \frac{1.0}{1.25} = 126.9° = 2.22 \text{ rad}$$

Para encontrar el ángulo de corte crítico debemos igualar las expresiones para A_1 y A_2 con referencia a la fig. 14.9 y los valores calculados antes

$$A_1 = 1.0(\delta_c - 0.615) - \int_{0.615}^{\delta_c} 0.42 \operatorname{sen} \delta \, d\delta$$

$$A_2 = \int_{\delta_c}^{2.22} 1.25 \operatorname{sen} \delta \, d\delta - 1.0(2.22 - \delta_c)$$

Después de la integración e igualando A_1 y A_2 da

$$A_1 = (0.615 - 0.42)[-\cos\delta_c + \cos 35.2°]$$

$$= 1.25[-\cos 126.9° + \cos\delta_c] - 1.0(2.22 - \delta_c)$$

y resolviendo para δ_c encontramos

$$\delta_c = \cos^{-1} 0.4 = 55.4°$$

En la próxima sección estudiaremos cómo δ puede calcularse como función del tiempo. Podemos obtener una curva de δ contra t en este caso y de ella extraer el ángulo de corte crítico, que es el tiempo para que la máquina avance desde su posición original hasta su ángulo de corte crítico.

14.7 CONSTRUCCION PASO A PASO DE LA CURVA DE OSCILACION

El criterio de igualdad de áreas es muy adecuado para estudiar un sistema de dos máquinas, pero para hallar el tiempo de corte crítico debemos encontrar δ como función de t. Para grandes sistemas dependemos del computador digital, que determina δ contra t para todas las máquinas en las que estamos interesados, y δ puede dibujarse contra t para una máquina a fin de obtener la curva de oscilación de esa máquina. El ángulo δ se calcula como función del tiempo sobre un período lo suficientemente largo para determinar si δ se incrementa sin límite o logra un máximo y comienza a disminuir. Aunque el último resultado generalmente indica estabilidad, en un sistema real donde un cierto número de variables se toman en cuenta puede ser necesario dibujar δ contra t sobre un intervalo suficientemente largo para asegurar que no se incrementará otra vez sin regresar a un valor bajo.

Con la determinación de las curvas de oscilación para varios tiempos de corte, la longitud de los tiempos permitidos pueden calcularse antes de que se produzca el fallo. Los tiempos de interrupción normales y que ahora se conocen son comúnmente cuidar 4, 5, 3 ó 2 ciclos de que la falla ocurre y de este modo la velocidad de los interruptores puede ser especificada. Los cálculos para los fallos deben hacerse de tal manera que se permita la menor transferencia de potencia desde la máquina y para el tipo de falla de la cuerva para la cual se justifique la protección contra las pérdidas de estabilidad.

Existe un cierto número de métodos para la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales de segundo orden por medio de cálculo paso a paso, para incrementos pequeños de la variable independiente. Los métodos más perfeccionados son solamente practicables cuando se dispone de calculadoras digitales. El método utilizado para cálculo manual es necesariamente más sencillo que los recomendados para calculadora digital. En el método manual, el cambio en la posición angular del rotor durante un intervalo de tiempo pequeño se calcula haciendo las siguientes hipótesis previas:

1. La potencia acelerante P_a, calculada al comienzo de un intervalo, es constante desde la mitad del intervalo precedente hasta la mitad del intervalo considerado.

2. La velocidad angular es constante durante un intervalo cualquiera e igual al valor calculado para la mitad del intervalo. Por supuesto ninguna de las hipótesis es cierta, puesto que δ varía continuamente y tanto P_a como ω son funciones de δ. Al disminuir el intervalo de tiempo considerado, la curva de oscilación calculada se aproxima a la verdadera.

La fig. 14.13 nos ayudará a comprender estas hipótesis. La potencia acelerante se calcula para los puntos encerrados en círculos al final de los intervalos $n - 2$, $n - 1$ y n, que son el principio de los intervalos $n - 1$, n y $n + 1$. La curva de escalones de P_a en la

SEMINARIO DE TEMAS SELECTOS DE CALCULO INTEGRAL.

APLICACIONES A LA GEOFÍSICA DE EXPLORACION

INTRODUCCION:

LA EXPLORACION GEOFÍSICA ES AQUELLA PARTE DE LA GEOFÍSICA, QUE EMPLEA TÉCNICAS DE LA FÍSICA EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOLÓGICOS COMO LA BÚSQUEDA DE YACIMIENTOS MINERALES (METÁLICOS O NO), AGUA SUBTERRÁNEA (TANTO PARA USO DOMÉSTICO Y DE RIEGO, COMO PARA ENERGÉTICO) Y PETRÓLEO.

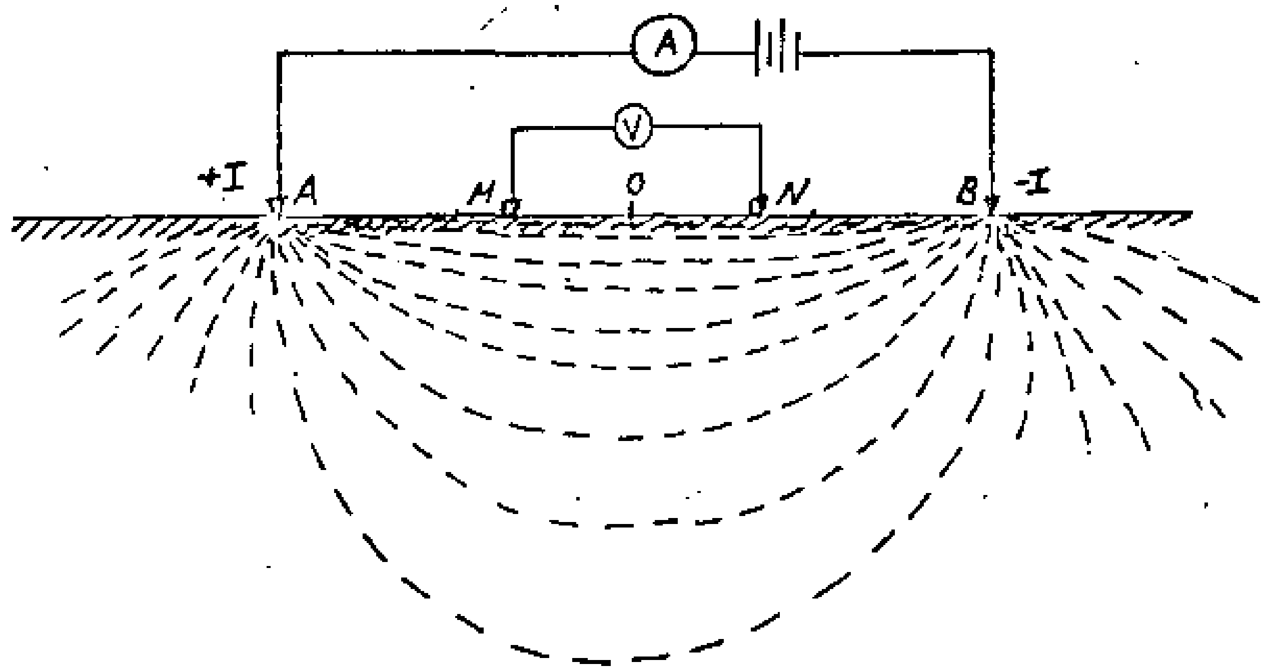
LAS TÉCNICAS DE QUE HECHA MANO SON MUY VARIADAS Y SON CONOCIDAS COMO MÉTODOS GEOFÍSICOS. ESTOS MÉTODOS GEOFISICOS SON EMPLEADOS PARA EL CONOCIMIENTO DEL SUBSUELO, POR MEDIO DE LAS DIFERENTES PROPIEDADES Y FENÓMENOS FÍSICOS QUE OCURREN Ó SON MEDIBLES SOBRE LA SUPERFICIE DE LA TIERRA, O EN PERFORACIONES DE CUALQUIER TIPO.

LOS MÉTODOS GEOFISICOS MAS EMPLEADOS SON: EL MÉTODO SISMICO, EL MÉTODO GRAVIMÉTRICO, EL MÉTODO MAGNÉTICO Y EL MÉTODO ELÉCTRICO.

ESTE TRABAJO PRETENDE ENCONTRAR UNA APLICACIÓN DE LA INTEGRAL EN EL MÉTODO ELÉCTRICO, MÉTODO MUY IMPORTANTE EN LA DETERMINACIÓN DE MENAS METÁLICAS, AGUA, ETC.

LA PROSPECCION ELECTRICA ES EL ARTE DE MEDIR LAS PROPIEDADES ELÉCTRICAS DE LAS ROCAS PARA EL ESTUDIO Y COMPOSICIÓN DE AQUELLOS ESTRATOS DE LA TIERRA QUE SON LO SUFICIENTEMENTE SOMEROS PARA SER EXPLOTADOS POR EL HOMBRE.

LOS FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE ESTE MÉTODO SE BASAN EN LAS LEYES DE MAXWELL YA QUE SE TRABAJA CON UN CAMPO ELÉCTRICO AL INTRODUCIR UNA CORRIENTE ELÉCTRICA EN EL SUBSUELO Y MEDIR LA DIFERENCIA DE POTENCIAL QUE PROVOCA ESTA CORRIENTE. LA MANERA EN QUE SE INTRODUCE ESTA CORRIENTE ES MUY VARIADA, PERO LA MÁS UTILIZADA ES POR MEDIO DE DOS VARILLAS ENTERRADAS VERTICALMENTE Y LA MANERA EN QUE SE MIDE ES POR MEDIO DE OTRAS DOS VARILLAS.



A
V
+I
A
M
O
N
B
-I

LA PRIMERA PREGUNTA QUE SURGE ES ¿CÓMO RELACIONAR LA DISTRIBUCIÓN DE RESISTIVIDAD DEL SUBSUELO CON LA DIFERENCIA DE POTENCIAL CREADA?. ESTA PREGUNTA SERÁ CONTESTADA EN LOS SIGUIENTES PÁRRAFOS PARTIENDO DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL Y BAJO CIERTAS CONDICIONES IDEALES.

II.- POTENCIAL ELÉCTRICO PARA UN MEDIO HOMOGÉNEO E ISÓTROPO. CONSIDERANDO UNA CORRIENTE CONTINUA.

LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA PUNTUAL SON:

$$\overline{\nabla} \times \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\overline{\nabla} \times \overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \qquad (2)$$

LA LEY DE OHM EN FORMA PUNTUAL ESTÁ DADA POR:

$$\overline{J} = \sigma \overline{E} \qquad (3)$$

Y EL PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA CARGA ES:

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{J} = -\frac{\partial q}{\partial t} \qquad (4)$$

DONDE:

$\overline{E}$ = CAMPO ELÉCTRICO

$\overline{D}$ = DESPLAZAMIENTO ELÉCTRICO

$\overline{B}$ = INDUCCIÓN MAGNÉTICA

$\overline{H}$ = CAMPO MAGNÉTICO

$\overline{J}$ = DENSIDAD DE CORRIENTE ELECTRICA

σ = CONDUCTIVIDAD ELÉCTRICA

q = DENSIDAD DE CARGA ELECTRICA

SI SE CONSIDERA QUE LA CORRIENTE ELECTRICA ES CONTINUA (NO VARÍA CON EL TIEMPO) LAS DERIVADAS PARCIALES CON RESPECTO AL TIEMPO SE DESVANECERÁN QUEDANDO LAS ECUACIONES DE MAXWELL DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$\overline{\nabla} \times \overline{E} = 0 \tag{5}$$

$$\overline{\nabla} \times \overline{H} = \overline{J} \tag{6}$$

$$\overline{J} = \sigma \overline{E} \tag{7}$$

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{J} = 0 \tag{8}$$

DE LA ECUACIÓN (5) SE OBSERVA QUE EL ROTACIONAL DEL CAMPO ELÉCTRICO ES CERO EN CORRIENTE CONTINUA. ESTO QUIERE DECIR QUE EL CAMPO ELÉCTRICO ES CONSERVATIVO Y POR LO TANTO, PROVIENE DE UN POTENCIAL ELECTRICO "U":

$$\overline{E} = -\overline{\nabla} U \tag{9}$$

—SUSTITUYENDO (9) EN (7):

$$\overline{J} = -\sigma \overline{\nabla} U \tag{10}$$

Y A SU VEZ (10) EN (8) SE OBTIENE:

$$\overline{\nabla} \cdot (-\sigma \overline{\nabla} U) = 0 \tag{11}$$

PERO, POR IDENTIDAD VECTORIAL SE SABE QUE:

$$\overline{\nabla} \cdot (\phi \overline{\nabla} U) = \phi \overline{\nabla}^2 U + \overline{\nabla} U \cdot \overline{\nabla} \phi \tag{12}$$

POR LO TANTO, APLICANDO (12) EN (11)

$$\sigma \overline{\nabla}^2 U - \overline{\nabla} U \cdot \overline{\nabla} \sigma = 0 \tag{13}$$

ESTA ECUACIÓN ES LA QUE RIGE A LOS METODOS GEOELÉCTRICOS EN CORRIENTE CONTINUA.

SI AHORA CONSIDERAMOS UN SEMIMEDIO HOMOGENEO E ISÓTROPO $\sigma = cte$ ENTONCES LA ECUACIÓN (13) QUEDA:

$$\overline{\nabla}^2 U = 0 \tag{14}$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{E}=0 \qquad (5)$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{H}=\bar{J} \qquad (6)$$

$$\bar{J}=\sigma\bar{E} \qquad (7)$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{J}=0 \qquad (8)$$

DE LA ECUACIÓN (5) SE OBSERVA QUE EL ROTACIONAL DEL CAMPO ELÉCTRICO ES CERO EN CORRIENTE CONTINUA. ESTO QUIERE DECIR QUE EL CAMPO ELÉCTRICO ES CONSERVATIVO Y POR LO TANTO, PROVIENE DE UN POTENCIAL ELECTRICO "U":

$$\bar{E}=-\bar{\nabla}U \qquad (9)$$

SUSTITUYENDO (9) EN (7):

$$\bar{J}=-\sigma\bar{\nabla}U \qquad (10)$$

Y A SU VEZ (10) EN (8) SE OBTIENE:

$$\bar{\nabla}\cdot(-\sigma\bar{\nabla}U)=0 \qquad (11)$$

PERO, POR IDENTIDAD VECTORIAL SE SABE QUE:

$$\bar{\nabla}\cdot(\phi\bar{\nabla}U)=\phi\bar{\nabla}^2U+\bar{\nabla}U\cdot\bar{\nabla}\phi \qquad (12)$$

POR LO TANTO, APLICANDO (12) EN (11)

$$\sigma\bar{\nabla}^2U-\bar{\nabla}U\cdot\bar{\nabla}\sigma=0 \qquad (13)$$

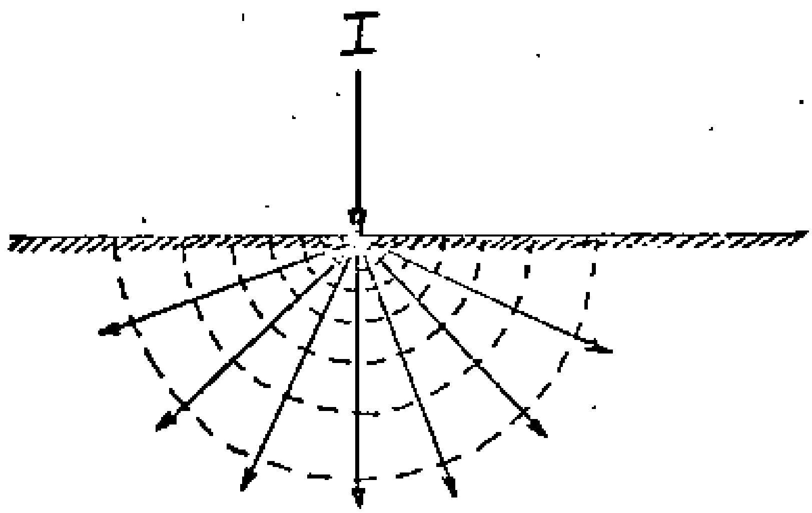
ESTA ECUACIÓN ES LA QUE RIGE A LOS METODOS -- GEOELÉCTRICOS EN CORRIENTE CONTINUA.

SI AHORA CONSIDERAMOS UN SEMIMEDIO HOMOGENEO E ISÓTROPO $\sigma=cte$ ENTONCES LA ECUACIÓN (13) QUEDA:

$$\bar{\nabla}^2U=0 \qquad (14)$$

II.1 FUENTE PUNTUAL

CONSIDERANDO QUE LA FUENTE GENERADORA DE LA CORRIENTE ES UNA SOLA VARILLA (ELECTRODO DE CORRIENTE) SE PUEDE DECIR QUE ES UNA FUENTE PUNTUAL DE CORRIENTE COMO MUESTRA LA FIGURA (2):



DE ACUERDO A ESTA CONSIDERACION EL POTENCIAL SÓLO VARÍA RADIALMENTE, POR LO TANTO, EL LAPLACIANO EN COORDENADAS ESFÉRICAS ES:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

QUEDANDO DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV}{dr}\right) = 0 \qquad (15)$$

INTEGRANDO:

$$r^2 \frac{dV}{dr} = C_1$$

SEPARANDO VARIABLES Y VOLVIENDO A INTEGRAR:

$$V = \frac{C_1}{r} + C_2 \qquad (15)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

PARA DETERMINAR LAS CONSTANTES DE INTEGRACIÓN SE HARÁ USO DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA:

1) EL POTENCIAL EN EL INFINITO SE CONSIDERA CERO, O SEA, SI $r \to \infty$ ENTONCES $U \to 0$, POR LO TANTO,

$$\lim_{r \to \infty} \left(\frac{C_1}{r} + C_2 \right) = 0 \quad \text{TAL QUE} \quad \boxed{C_2 = 0}$$

2) LA DENSIDAD DE CORRIENTE SE DEFINE COMO $J = \frac{I}{A}$, PERO DE LA ECUACIÓN (7) $\bar{J} = -\sigma \bar{\nabla} U$, POR LO TANTO,

$$-\sigma \bar{\nabla} U = \frac{I}{A} \quad \text{O SEA} \quad -\frac{1}{\rho} \bar{\nabla} U = \frac{I}{A}$$

TAL QUE:

$$-\sigma \bar{\nabla} U = -\sigma \frac{d}{dr}(U) = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{dr}\left(\frac{C_1}{r}\right) = +\frac{C_1}{\rho r^2}$$

DE TAL FORMA QUE:

$$\frac{C_1}{\rho r^2} = \frac{I}{A} \qquad (11)$$

COMO SE TRABAJA EN UN SEMIMEDIO Y CONSIDERANDO SIMETRÍA ESFÉRICA, ENTONCES:

$$A = 2\pi r^2$$

POR LO TANTO:

$$\frac{C_1}{\rho r^2} = \frac{I}{2\pi r^2}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

DESPEJANDO C_1:

$$C_1 = \frac{\rho I}{2\pi} \qquad (12)$$

SUSTITUYENDO EN LA ECUACIÓN DEL POTENCIAL:

$$\boxed{U = \frac{\rho I}{2\pi r}} \qquad (13)$$

CONSIDERANDO DOS FUENTES PUNTUALES DE CORRIENTE:

$$U_M = \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad (14)$$

SI SE CONSIDERA UN CUADRIPOLO FUNDAMENTAL:

$$\Delta U_M^N = \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{\overline{AM}} - \frac{1}{\overline{AN}} - \frac{1}{\overline{BM}} + \frac{1}{\overline{BN}}\right) \qquad (15)$$

FUENTE LINEAL:

CUMPLE CON LA ECUACION DE LAPLACE Y POR SIMETRIA DEL PROBLEMA:

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} = 0$$

YA QUE:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

EN COORDENADAS CILINDRICAS.

SUSTITUYENDO:

$$\frac{dU}{dr} = V$$

POR LO TANTO:

$$\frac{dv}{dr} + \frac{1}{r}v = 0$$ Tal que:

$$\frac{dv}{v} + \frac{dr}{r} = 0$$ integrando:

$$\ln V + \ln r = C_1' = \ln C_1$$

$$\ln V = \ln C_1 - \ln r = \ln \frac{C_1}{r}$$

tal que: $V = \frac{C_1}{r}$ pero $V = \frac{dV}{dr}$ $\therefore \Longrightarrow$

$$\frac{dU}{dr} = \frac{C_1}{r}$$ integrando

$$V = C_1 \ln r + C_2$$

Por la primera condición de frontera: $C_2 = 0$ $\therefore$

$V = C_1 \ln r$ y se sabe que $C_1 = \frac{-\rho I}{\pi \ell}$ ya que:

$A = \pi r^2 \ell$ area cilindrica. Por lo tanto:

$$V = \frac{-\rho I}{\pi \ell} \ln r \qquad (16)$$

Para dos fuentes lineales:

$$U_M = \frac{\rho I}{\pi \ell} \ln \frac{r_1}{r_2} \qquad (17)$$

Y con dos receptores:

$$U_M^N = \frac{\rho I}{\pi \ell} \ln \frac{r_1\, r_4}{r_2\, r_2} \qquad (18)$$

Comparando las ecuaciones (13) y (16) se observa claramente que:

$$U_L = \frac{2}{\ell} \int U_P \, dr \qquad (19)$$

traînée $F_x = \int_S p n_x \, dS$ moment de roulis $M_x = \int_S p n_R \, dS$

dérapage $F_y = \int_S p n_y \, dS$ moment de tangage $M_y = \int_S p n_T \, dS$

portance $F_z = \int_S p n_z \, dS$ moment de lacet $M_z = \int_S p n_L \, dS$

n_x, n_y, n_z, n_R, n_T et n_L étant les composantes des vecteurs $\vec{n}(M)$ et $\overrightarrow{CM} \times \vec{n}(M)$.

VI.3.4. – Oscillation du corps dans un fluide au repos. – Dans ce cas, le potentiel se réduit à ϕ_e et si le corps oscille de façon harmonique :

$$p(M) = i\sigma\rho\phi_e$$

ϕ_e est recherché en le décomposant en 6 potentiels correspondant aux 6 mouvements élémentaires du corps $(\vec{X}_C, \vec{\theta}_C)$, ϕ_e étant linéaire par rapport aux déplacements et les coefficients $\phi_x \ldots \phi_L$ du développement étant des fonctions de x, y, z :

$$\phi_e = -i\sigma(\phi_x X_C + \phi_y Y_C + \phi_z Z_C + \phi_R \theta_R + \phi_T \theta_T + \phi_L \theta_L)$$

Ces déplacements s'appellent : X_C le cavalement, Y_C l'embarder, Z_C le pilonnement, θ_R le roulis, θ_C le tangage et θ_L le lacet.

Introduisons le torseur $\vec{\gamma}_C$ des accélérations du centre de carène C, de composantes :

$$\vec{\gamma}_C(-\sigma^2 X_C, -\sigma^2 Y_C, -\sigma^2 Z_C, -\sigma^2 \theta_R, -\sigma^2 \theta_T, -\sigma^2 \theta_L)$$

Il est possible d'écrire le torseur F_{IC} des efforts hydrodynamiques sur l'obstacle dû au potentiel ϕ_e, c'est-à-dire au fluide environnant mis en mouvement par les oscillations du corps immergé :

$$\vec{F}_{IC} = -\rho V [CM_C] \vec{\gamma}_C$$

V étant le volume de carène.

$\vec{F}_{IC}$ apparaît comme un torseur des *inerties ajoutées* ; $[CM_C]$ est la matrice des coefficients d'inertie ajoutée définie de la façon suivante :

$$V[CM_C] =$$

$$\begin{bmatrix}
\int_S \phi_x n_x \, dS & \int_S \phi_y n_x \, dS & \int_S \phi_z n_x \, dS & \int_S \phi_R n_x \, dS & \int_S \phi_T n_x \, dS & \int_S \phi_L n_x \, dS \\
\int_S \phi_x n_y \, dS & \int_S \phi_y n_y \, dS & \int_S \phi_z n_y \, dS & \int_S \phi_R n_y \, dS & \int_S \phi_T n_y \, dS & \int_S \phi_L n_y \, dS \\
\int_S \phi_x n_z \, dS & \int_S \phi_y n_z \, dS & \int_S \phi_z n_z \, dS & \int_S \phi_R n_z \, dS & \int_S \phi_T n_z \, dS & \int_S \phi_L n_z \, dS \\
\int_S \phi_x n_R \, dS & \int_S \phi_y n_R \, dS & \int_S \phi_z n_R \, dS & \int_S \phi_R n_R \, dS & \int_S \phi_T n_R \, dS & \int_S \phi_L n_R \, dS \\
\int_S \phi_x n_T \, dS & \int_S \phi_y n_T \, dS & \int_S \phi_z n_T \, dS & \int_S \phi_R n_T \, dS & \int_S \phi_T n_T \, dS & \int_S \phi_L n_T \, dS \\
\int_S \phi_x n_L \, dS & \int_S \phi_y n_L \, dS & \int_S \phi_z n_L \, dS & \int_S \phi_R n_L \, dS & \int_S \phi_T n_L \, dS & \int_S \phi_L n_L \, dS
\end{bmatrix}$$

Il résulte de ces considérations que l'étude des mouvements harmoniques d'un corps immergé dans un fluide au repos nécessite d'ajouter aux forces classiques (poids, poussée

FRASES CELEBRES.

Recopiladas por el Ing. Esteban Salinas.

Si desarrolláramos una raza de Isaac Newtons, esto no sería progreso. Pues el precio que tuvo que pagar Newton por ser un intelecto supremo fue que era incapaz de amistad, amor, paternidad, y muchas otras cosas deseables. Como hombre fue un fracaso; como monstruo fue soberbio.

Aldous Huxley

Lo más curioso es que todos aquellos que estudian seriamente esta ciencia de los números y las figuras, caen en una especie de pasión, verdaderamente lo que más placer proporciona no es el saber sino el estudiar, no la posesión sino la conquista, no el estar aquí, sino el llegar allá.

Karl Friedrich Gauss.

La ciencia humana consiste más en destruir errores que en descubrir verdades.

Sócrates

Un conocimiento profundo de las cosas no lo obtendremos ni ahora ni nunca, en tanto que no las contemplemos en su crecer desde el principio

Aristóteles (Política)

Todo lo que es importante lo ha dicho antes alguien que no lo descubrió

A. N. Whitehead

Excepto las fuerzas ciegas de la naturaleza, no se mueve nada en el mundo que no sea griego en sus orígenes.

Sir Henry James Sumner Maine

Utilizamos la palabra "moderno" para justificar con frecuencia aquello que no tiene ningún otro mérito.

Marco Almazán

Hay maestros que imparten su ignorancia

Marco Almazán

¡Oh!, no dudemos nunca, nunca acerca de lo que nadie está seguro.

Hilaire Belloc.

Buscad la simplicidad, y desconfiad de ella.

Alfred North Whitehead.

La naturaleza y sus leyes se hallaban juntas en la noche: Dios dijo, "¡Hágase Newton!" y todo fué luz.

Alexander Pope.

¿Porqué pensar? ¿Porqué no tratar de experimentar?

John Hunter

Los grandes matemáticos han actuado sobre el principio de: "Adivinad antes de demostrar" y no cabe duda que casi todos los descubrimientos importantes se hacen de esta forma.

Edward Kasner

El pensamiento es solo un relámpago entre dos largas noches, pero este relámpago lo es todo.

Henri Poincaré