(1)

EVALUACION DEL PERSONAL DOCENTE

CURSO: "ACTUALIZACION EN MATEMATICAS PARA INGENIEROS" (CALCULO I)

FECHA: DEL 20 AL 25 DE AGOSTO 1984
UNIVERSIDAD DE COLIMA

	CONFERENCISTA	DOMINIO DEL TEMA	EFICIENCIA EN EL USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES	MANTENIMIENTO DEL INTERES. (COMUNICACION CON LOS ASISTENTES, AMENIDAD, FACILIDAD DE EXPRESION).	PUNTUALIDAD	
1.	ING. PABLO GARCIA Y COLOME					
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						
8.						
9.						

ESCALA DE EVALUACION : 1 a 10

EVALUACION DEL CURSO

	CONCEPTO	EVALUACION
1.	APLICACION INMEDIATA DE LOS CONCEPTOS EXPUESTOS	
2.	CLARIDAD CON QUE SE EXPUSIERON LOS TEMAS	
3.	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO CON EL CURSO	
4.	CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO	
5.	CONTINUIDAD EN LOS TEMAS DEL CURSO	
6.	CALIDAD DE LAS NOTAS DEL CURSO	
7.	GRADO DE MOTIVACION LOGRADO CON EL CURSO	

ESCALA DE EVALUACION DE 1 A 10

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ACTUALIZACION EN MATEMATICAS PARA INGENIEROS

EVENTO ORGANIZADO EN COLABORACION DE LA UNIVERSIDAD DE COLIMA A TRAVES DEL CENTRO DE EDUCACION CONTINUA.

C A L C U L O I

AGOSTO, 1984.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ACTUALIZACION EN MATEMATICAS PARA INGENIEROS

EVENTO ORGANIZADO EN COLABORACION DE LA UNIVERSIDAD DE COLIMA A TRAVES DEL CENTRO DE EDUCACION CONTINUA

LIMITES Y CONTINUIDAD

AGOSTO, 1984.

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

I LIMITES Y CONTINUIDAD

LIMITES Y CONTINUIDAD.

.1. CONCEPTOS BASICOS: DESIGUALDADES, VALOR ABSOLUTO, ENTORNOS.

.2. DEFINICION DE LIMITE EN UN PUNTO DE UNA FUNCION REAL DE VARIABLE REAL. INTERPRETACION GEOMETRICA.

.3. LIMITE DE LA FUNCION CONSTANTE Y LA FUNCION IDENTIDAD.

.4. TEOREMAS SOBRE LIMITES.

.5. LIMITES LATERALES.

.6. CONTINUIDAD DE UNA FUNCION EN UN PUNTO. DISCONTINUIDAD REMOVIBLE. TEOREMAS SOBRE FUNCIONES CONTINUAS.

.7. CONTINUIDAD DE UNA FUNCION EN UN INTERVALO.

.8. LIMITES CON APLICACION EN EL CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.

.9. INCREMENTOS. CONCEPTO DE CONTINUIDAD POR MEDIO DE INCREMENTOS Y EQUIVALENCIA CON LA DEFINICION DEL INCISO II.6.

II.1. CONCEPTOS BASICOS. DESIGUALDADES. VALOR ABSOLUTO Y ENTORNOS.

DESIGUALDADES.

Propiedades fundamentales.

1) El sentido de una desigualdad no se altera, si se suma o se resta a ambos miembros la misma cantidad. Si $a > b$, entonces $a \pm c > b \pm c$

Ejemplo 1.- $10 > 8$; $10 \pm 3 > 8 \pm 3$

2) El sentido de una desigualdad no se altera, si ambos miembros se multiplican o se dividen entre la misma cantidad positiva. Si $a > b$ y $c > 0$ entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Ejemplo 2.- $12 > 6$; $12 (2) > 6 (2) \longrightarrow 24 > 12$

$$\frac{12}{3} > \frac{6}{3} \longrightarrow 4 > 2$$

3) El sentido de una desigualdad se invierte si ambos miembros se multiplican o se dividen por la misma cantidad negativa. Si $a > b$ y $c < 0$; entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Ejemplo 3.- $8 > 2$ $8 (-2) < 2 (-2) \longrightarrow -16 < -4$

$$\frac{8}{-2} < \frac{2}{-2} \longrightarrow -4 < -1$$

4) Si se suman miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido, la suma originará una desigualdad del mismo sentido. Si $a > b$ y $c > d$; entonces $a + c > b + d$;

Ejemplo 4.- $14 > 6$ y $3 > 2 \longrightarrow 14 + 3 > 6 + 2 \longrightarrow 17 > 8$

5) Si de tres cantidades, la primera es mayor que la segunda y la segunda mayor que la tercera, entonces la primera es mayor que la tercera. Si $a > b$ y $b > c$; entonces $a > c$.

Ejemplo 5.- $14 > 6$ y $6 > 3 \longrightarrow 14 > 3$

6) Si dos desigualdades entre números positivos, tienen el mismo sentido, se pueden multiplicar miembro a miembro y los productos darán como resul

tado una desigualdad en el mismo sentido. Se a, b, c, d, son todos positivos; y a > b, c > d, entonces ac > bd.

Ejemplo 6.- Si $4 > 2$ y $5 > 3 \longrightarrow 20 > 6$

7) Si en una desigualdad se sustituyen ambos miembros, por sus recíprocos, la desigualdad cambia de sentido. Así si a > b se tendrá que $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Ejemplo 7.- Si $25 > 5 \longrightarrow \frac{1}{25} < \frac{1}{5}$

VALOR ABSOLUTO Y DESIGUALDADES.

Definición.

Si a es un número positivo cualquiera, su valor absoluto será "a" y si a es negativo entonces será "a"; así simbólicamente se representa lo anterior de la manera siguiente:

$$|a| = a \quad \text{si } a > 0, \quad |-a| = a \quad \text{si } a < 0$$

El valor absoluto de cero es cero esto es: $|0| = 0$

Ejemplo 8.- $|3| = 3$; $|7 - 5| = |2| = 2$; $|3 - 8| = |-5| = 5$

Solución de ecuaciones donde intervienen valores absolutos.

Cuando en una igualdad intervienen valores absolutos de expresiones en términos de una variable; la igualdad se cumplirá para dos valores de la variable, esto se debe al concepto de valor absoluto.

Ejemplo 9.- $|3x - 4| = |6 - 2x|$ De acuerdo a la definición existen dos posibilidades:

$$3x - 4 = 6 - 2x \qquad \ldots (A)$$
$$3x - 4 = -6 + 2x \qquad \ldots (B)$$

Así de (A): $5x = 10 \longrightarrow x = 2$
y de (B): $x = -2$

Ahora si en lugar de tener una ... se tiene una desigualdad, entonces al resolver la expresión para determinar los valores x que la satisfacen

se haría como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.- Determine los valores de x que cumplen con:

$$|4x - 2| \leq 6 \qquad \ldots (A)$$

Se escribe (A) como $-6 \leq 4x - 2 \leq 6$; sumando 2 a cada miembro $-4 \leq 4x \leq 8$, por lo tanto los valores de x que satisfacen (A), son los que van de -1 a 2, inclusive.

ENTORNOS.

Se llama entorno o vecindad de un punto " a " en $\mathbb{R}$ al intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}$ en donde δ es la semiamplitud o radio del intervalo. Ver figura 1.

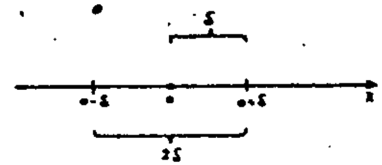


FIG 1

Tal entorno del punto a y radio δ suele también indicarse como:

$$|x - a| < \delta \text{ , o bien como } \mathscr{E}(a, \delta).$$

Se llama " entorno reducido " a aquél en el que se excluye el mismo punto " a ", esto se representa como:

$$\mathscr{E}'(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta \text{ , } x \neq a\} \text{, es decir:}$$

$$0 < |x - a| < \delta$$

II.2. DEFINICION DE LIMITE EN UN PUNTO DE UNA FUNCION REAL DE VARIABLE REAL. INTERPRETACION GEOMETRICA.

LIMITE DE UNA VARIABLE.

Siendo ahora el objeto de estudio el concepto de límite en un punto, de una función real de variable real, es conveniente analizar previamente, el concepto de límite de una variable, análisis que se realizará a continuación. Antes de dar una definición considerénse los siguientes ejemplos.

<u>Ejemplo 11.-</u> Sea x la variable cuyo campo de variabilidad es la sucesión.

$$2 + \frac{1}{2}\ ,\ 2 + \frac{1}{4}\ ,\ 2 + \frac{1}{8}\ ,\ \ldots\ ,\ 2 + \frac{1}{2^n}\ ,\ \ldots$$

Si x va tomando valores cada vez más " avanzados " es evidente que su valor se va acercando a 2; se dice entonces que x, tiende a 2, lo cual se escribe $x \to 2$, o bien que el límite de x es dos escribiéndose esto. $\lim x = 2$

Si $x \to 2$ entonces la diferencia $x - 2$ tiende a cero. Esto puede expresarse indicando que siempre se puede tener $x - 2 < \delta$, donde δ es un número positivo tan pequeño como se quiera.

Si $\delta = 0.1$ basta con tomar a:

$x = 2 + \frac{1}{2^4} = 2 + \frac{1}{16}$ con lo cual se cumple:

$x - 2 < \delta \quad , \quad 2 + \frac{1}{16} - 2 = \frac{1}{16} < 0.1$

Si se hace $\delta = 0.02 = \frac{1}{50}$, tomando $x = 2 + \frac{1}{2^6} = 2 + \frac{1}{64}$ se tiene :

$x - 2 = 2 + \frac{1}{64} - 2 = \frac{1}{64} < \frac{1}{50} = \delta$ etc.

Observese que x no llegará al valor 2, sin embargo, su valor puede estar tan cercano a 2 como se desee.

<u>Ejemplo 12.-</u> Sea un círculo fijo cuya área contante es "a" (figura 2) Considérese incrito en el círculo un polígono rectangular cuyo número de lados va en aumento; obviamente el área v del polígono es variable y al cambiar de valor, este se acerca al número "a" sin llegar a ser $v = a$; es decir $v \to a$ o bien $\lim v = a$.

Para expresar la condición en que se basa este hecho se puede escribir $v - a \to 0$ o bien $| v - a | < \delta$. Siendo δ un número positivo tan pequeño como se quiera.

Es necesario tomar el valor absoluto de la diferencia $v - a$ cuando se compara ésta con el valor de δ porque en el presente caso se tiene siempre que $v - a < 0$. Si no se tomara valor absoluto, no tendría ningún objeto la comparación de un número negativo $v - a$ con cualquier número positivo δ ya que lo que realmente interesa es la comparación entre la magnitud de estas dos cantidades.

En general tomando $| v - a |$ en cualquier caso, si $|v - a| < \delta$ para todo $\delta > 0$ (por pequeño que este sea), se tendrá:

$v \to a$ ó bien $\lim v = a$

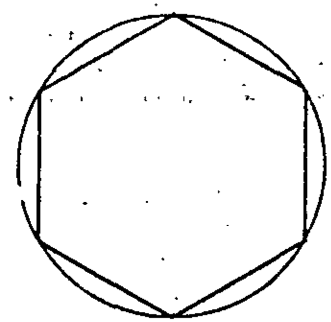


FIG 2

Definición.

" Se dice que la variable x tiende a la constante a , o bien, que el límite de x es a , si para todo número $\delta > 0$ (por pequeño que sea éste) siempre se verifica que $| x - a | < \delta$ "

A continuación se presentará el concepto de Límite en un punto de una función real de variable real. Antes de exponer la definición formal se hará una introducción del concepto para lograr un mejor entendimiento.

<u>NOCION DE LIMITE DE UNA FUNCION REAL DE VARIABLE REAL:</u>

Considérese la función dada por:

$y = f (x) = - x^2 + 8 x - 4$, y concéntrese la atención en una vecindad del valor $x = 3$.

Es necesario considerar la función no solo cuando $x = 3$, sino también cuando x toma valores en diversos entornos del punto $x = 3$.

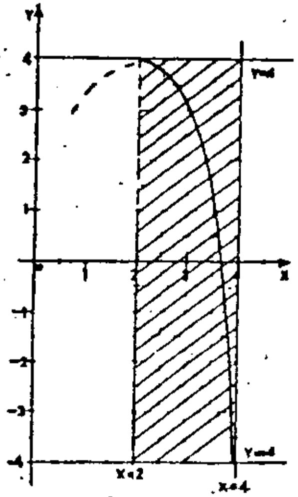


FIG 3

Para ello supóngase que se selecciona el entorno $\phi(3, 1)$ es decir, $2 < x < 4$. La gráfica de la función en este entorno muestra que para $x = 2$ - se tiene $f(2) = 4$ y para $x = 4$, $f(4) = -4$ (Figura 3).

En otras palabras, la gráfica de la función se encuentra en el rectángulo limitado por las rectas $x = 2$, $x = 4$, $y = 4$, $y = -4$. El próximo paso - es seleccionar un entorno de $x = 3$ con menor amplitud, por ejemplo; - - - $\phi(3, 0.5)$ es decir, $2.5 < x < 3.5$. Considerése la gráfica en este entorno. (Figura 4).

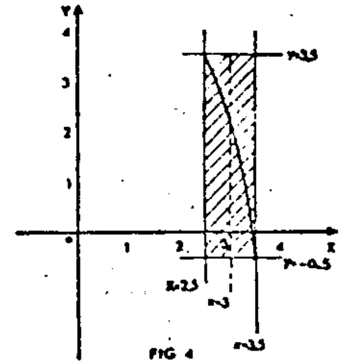


FIG 4

La gráfica se encuentra ahora en el rectángulo limitado por las rectas = 2.5 , $x = 3.5$, $y = -0.5$, $y = 3.5$. Continuando de esta manera, tómese un-entorno aún menor, sea este $\phi(3, 0.1)$ ó sea, $2.9 < x < 3.1$, la gráfica se-encuentra ahora en el rectángulo formado por las rectas $x = 2.9$, $x = 3.1$, -- $y = 2.38$, $y = 1.58$; como muestra amplificadamente, la figura 5.

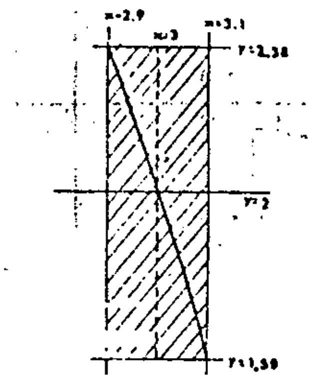


FIG. 5

El punto principal a recalcar es la altura de estos rectángulos. A medida que el ancho de los rectángulos disminuye, la altura también se reduce.

Si se continua tomando ahora el entorno ϕ (3, 0.01) ó sea $2.99 < x < 3.01$, el rectángulo correspondiente que contiene a la gráfica de la función estaría limitado por las rectas $x = 2.99$, $x = 3.01$, $y = 1.9598$. De lo anterior se deduce que a medida que las rectas x = cte. se acercan al valor $x = 3$, las rectas y = cte. se acercan al valor $y = 2$. Es posible que pueda preguntarse cual es el objeto de toda esta complicación en circunstancias que, por sustitución directa en la ecuación se obtiene que $y = 2$, cuando $x = 3$. Obsérvese sin embargo, que en toda la discusión no se ha utilizado este hecho, más aún, se ha evitado toda consideración de lo que sucede cuando $x = 3$.

Así, interesa solamente el comportamiento de " y " cuando x está en algún intervalo alrededor del valor 3.

En casi todas las funciones estudiadas hasta ahora, se distingue entre el comportamiento de la función en un punto, por ejemplo en $x = a$, y su comportamiento en una sucesión de entornos, cada vez más pequeños, de ese punto. Sin embargo, ocurre un cambio sorprendente cuando se estudian funciones cuyo comportamiento no puede determinarse por sustitución directa. Por ejemplo la función:

$$y = f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Está definida para todo valor de x excepto $x = 0$, la sustitución directa en $x = 0$ daría:

$$y = f(0) = \frac{0}{0}$$

lo cual carece totalmente de sentido. No obstante, se verá más adelante, que estudiando una sucesión de intervalos en torno a $x = 0$, que se hagan más y más pequeños, se observa que la altura de los rectángulos que contienen la función se hace también más y más pequeña y se acumula en torno a un valor particular de y. En ningún momento se dice algo acerca de y cuando x es cero; sólo se estudia el valor de y cuando x se hace más y más cercano a cero.

Volviendo al ejemplo de la función $f(x) = -2x^2 + 8x - 4$ se ve que cuando x se aproxima al valor 3, f (x) se aproxima o tiende al valor 2. Se dice entonces que por lo tanto " f (x) tiende a 2 cuando x tiende a 3 " y se abrevia esta proposición así:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 2$$

Si una función está definida para valores de x en torno a un número fijo " a " y si al tender x a " a ", los valores de f (x) se hacen más y más cercanos a un número específico L, esto es:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \ldots\ldots (1)$$

Lo cual se lee " el límite de f (x) cuando x tiende a " a " es L".

Geométricamente esto significa que la sucesión de rectángulos que rodea a " a " y que tienen anchuras más y más pequeñas, tienen también alturas que se hacen cada vez menores y se acumulan en torno al punto (a, L)

Todas las proposiciones anteriores que contienen expresiones como "más cercano", "más pequeño", etc. son bastante imprecisas y solo pretenden dar una idea intuitiva de lo que ocurre.

Considérese ahora la siguente función:

$$y = f(x) = \frac{x - 2}{2\,|x - 2|}$$

que está bien determinada para todo valor de x , excepto $x = 2$, puesto que para $x = 2$ la sustitución directa da; $y = \frac{0}{0}$

La gráfica de la función, (figura 6), es muy simple:

Si $x > 2$, entonces $|x - 2| = x - 2$ y la función toma el valor + 0.5; y si $x < 2$, entonces $|x - 2| = -(x - 2)$, y la función vale − 0.5. Se quiere ahora estudiar el comportamiento de la función cuando x tiende a 2. Seleccionando un entorno para x=2, por ejemplo: ϕ (2, 0.6) o sea: $1.4 < x < 2.6$, se ve que la función está contenida en el rectángulo limitado por las rectas $x = 1.4$, $x = 2.6$, $y = 0.5$, $y = -0.5$, (Figura 7.).

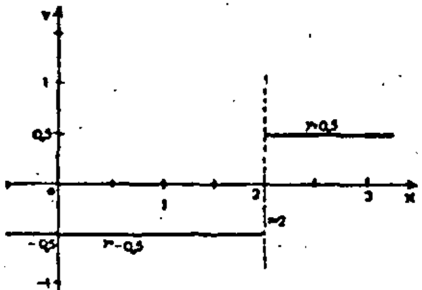


FIG 6

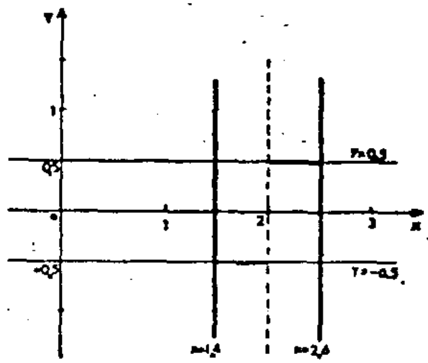


FIG 7

En realidad independientemente de cuán angosto se haga el entorno de $x = 2$, la altura del rectángulo será siempre uno; esto es, no hay límite cuando x tiende a 2 y se dice:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{2 \mid x - 2 \mid} \text{ no existe.}$$

Se estudiarán a continuación diversos ejemplos de funciones, con el objeto de determinar lo que sucede en la vecindad de un valor particular de x, cuando la función no queda definida mediante la sustitución directa de ese valor.

Ejemplo 13.- La función $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 3}{x + 1}$

está definida para todo valor de x, excepto $x = -1$, puesto que en $x = -1$, tanto el numerador como el denominador se anulan ¿Existe $\lim_{x \to -1} f(x)$?

Para tener una idea de lo que sucede, se elabora una tabla de valores, y trazando enseguida la gráfica se obtiene una línea recta con un " agujero " en el punto (- 1, - 5), (figura 8).

x	f (x)
- 2	- 7
- 1	0/0
0	- 3
1	1
2	1

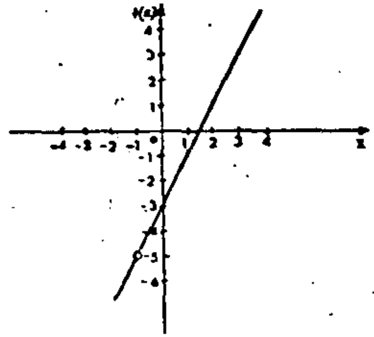


FIG 8

Con una discusión geométrica sobre los rectángulos como la hecha con la función $f(x) = -2x^2 + 8x - 4$, se concluye para este caso que:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -5$$

Sin embargo, es necesario disponer de un método más sistemático, sin necesidad de recurrir a representaciones gráficas y consideraciones intuitivas.

Por ejemplo se puede factorizar el numerador y la función se escribe como:

$$f(x) = \frac{(2x - 3)(x + 1)}{x + 1}$$

Ahora, si $x \neq -1$, se puede simplificar y entonces:

$$f(x) = 2x - 3, \quad \text{si } x \neq -1$$

Esta función tiende a - 5 cuando x tiende a - 1 porque ahora se puede hacer la sustitución directa. Por tanto se concluye que:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -5$$

Obsérvese que en ningún momento se substituye el valor $x = -1$ en la expresión original.

Ejemplo 14.- Encontrar el límite de la función:

$$f(x) = \frac{x-4}{3(\sqrt{x}-2)}, \quad x \neq 4,\ x > 0$$

cuando x tiende a 4.

Obsérvese que no se puede aplicar la sustitución directa, puesto que $f(4) = \frac{0}{0}$, lo cual carece de sentido. Pudiera procederse en forma gráfica al igual que en el ejemplo 13; sin embargo, es posible hacer una transformación algebráica. En efecto, si racionalizamos el denominador, multiplicando la fracción por $\sqrt{x} + 2$, para $x \neq 4$ se tiene

$$\frac{x-4}{3(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{3(x-4)}$$

y simplificando, se tiene:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}+2}{3} \quad \text{si } x \neq 4$$

El límite de esta expresión puede encontrarse por sustitución directa de $x = 4$.

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}+2}{3} = \frac{\sqrt{4}+2}{3} = \frac{4}{3}$$

Ejemplo 15.- Encontrar el límite de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2+x}-1}{x+1}, \quad x \neq -1,\ x \geq -2$$

cuando x tiende a - 1.

Como la sustitución directa da una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, se efectúa una racionalización del numerador.

Así multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{2+x} + 1$, resulta:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2+x}-1)(\sqrt{2+x}+1)}{(x+1)(\sqrt{2+x}+1)} = \frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{2+x}+1)}$$

$$x \neq -1$$

Simplificando queda:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x}+1}, \quad \text{para } x \neq -1,\ x \geq -2.$$

Por lo tanto $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{\sqrt{2+x}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Ejemplo 16.- Encontrar:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}, \quad h \neq 0, \text{ donde } f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

La sustitución directa de $h = 0$, da $\frac{f(4) - f(4)}{0} = \frac{0}{0}$

Sin embargo, $f(4) = \frac{1}{25}$

$$f(4+h) = \frac{1}{(4+h+1)^2} = \frac{1}{(5+h)^2}$$

Por tanto:

$$\frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \frac{\frac{1}{(5+h)^2} - \frac{1}{25}}{h} = \frac{25 - (5+h)^2}{25h(5+h)^2}$$

$$= \frac{-(10h+h^2)}{25h(5+h)^2} = \frac{-h(10+h)}{25h(5+h)^2} = -\frac{(10+h)}{25(5+h)^2}$$

Así,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(10+h)}{25(5+h)^2} = \frac{-10}{25^2} = \frac{-2}{125}$$

Ejemplo 17.- Encontrar el $\lim_{x \to 3} f(x)$, donde $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$,

$x \neq 3$.

Dibujando la gráfica de ésta función en un entorno a $x = 3$, se ve que crece sin límite cuando x tiende a 3, (Figura 9). De acuerdo con la noción de límite antes dada, tómese un intervalo de valores de x en torno a 3 y véase en que rectángulo están contenidos los valores de la función de la figura; se ve claramente que no existen tales rectángulos cualquiera que sea la pequeñez del intervalo escogido alrededor de $x = 3$. En tal caso, se dice que:

$$\lim_{x \to 3} f(x) \quad \text{No existe.}$$

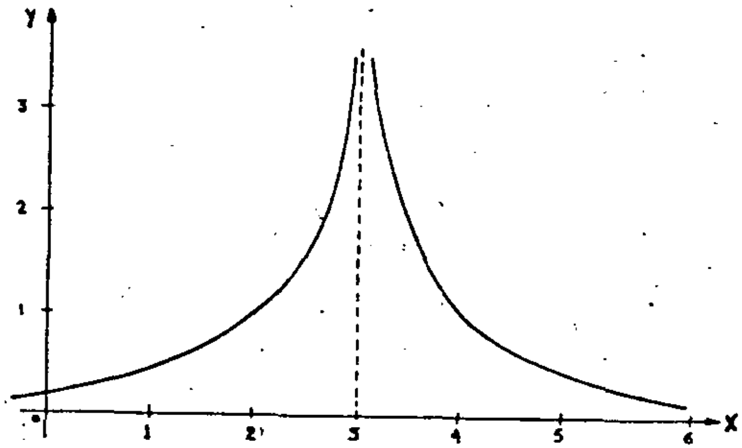


FIG 9

DEFINICION DE LIMITE DE UNA FUNCION.

Anteriormente se presentó la noción de límite de una manera informal, se habló de entornos " pequeños ", de números " cercanos " a otros, de cantidades " acercándose " a cero, etc. Sin embargo estas palabras no matemáticas tienen diferentes significados para cada persona y no pueden ser la base de una estructura matemática, por lo tanto, a continuación se establece la definición formal.-

Definición.- Dados una función f, y los números a y L, se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a " a " es L, si para todo número positivo ε existe un número positivo δ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

La proposición $\lim_{x \to a} f(x) = L$

es una notación abreviada para la definición anterior.

En otras palabras la anterior definición establece que los valores de la función $f(x)$ se aproximan a un límite L a medida que x se aproxima a un número a, si el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y L, se puede hacer tan pequeña como se quiera, tomando x suficientemente cercana a " a " pero no igual a " a "

Es importante darse cuenta que en esta definición nada se menciona acerca del valor de la función cuando $x = a$. Esto es, no es necesario que la función esté definida para $x = a$ para que el $\lim_{x \to a} f(x)$ exista.

Ahora se entrará en detalles acerca de ésta definición y paralelamente se ilustrará la representación geométrica del concepto.

INTERPRETACION GEOMETRICA.

- Recuérdese que $|x - a| < \delta$, es equivalente a la doble desigualdad:

$$a - \delta < x < a + \delta$$

- Esta doble desigualdad expresa que x debe estar contenido en un entorno $V(a, \delta)$.

- La parte de la desigualdad que expresa $0 < |x - a|$ significa simplemente que x no puede tomar el valor " a " es decir, se trata de un entorno reducido del punto " a " ya que se excluye el valor " a " mismo.

- La desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$ que es equivalente a $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, expresa que la función f está por encima de la recta $y = L - \varepsilon$

y por debajo de la recta y = L + ε (figura 10).

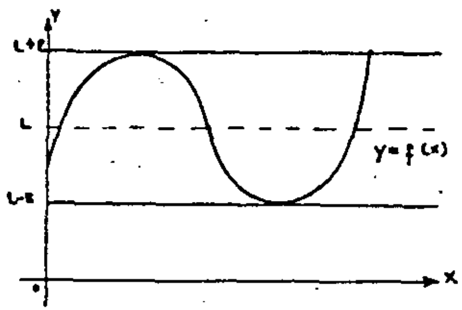


FIG 10

- La definición misma puede ser interpretada como un criterio, dado un número positivo arbitrario, llámesele ε , el creterio consiste en encontrar un número δ tal que f (x) se encuentre entre L - ε y L + ε , siempre que x esté en el entorno reducido de a, $a - \delta < x < a + \delta$; $x \neq a$. Si se puede encontrar tal δ para todo número positivo ε , entonces se dice que f (x) tiene el límite L cuando x tiende a " a ".

Obsérvese que el valor de δ puede ser diferente para diferentes valores de épsilon; además, el criterio debe ser aplicable a todo δ > 0.

La interpretación geométrica expresa, que dada ε , debe ser posible encontrar un δ tal que la función f se encuentre en el rectángulo limitado por las rectas $x = a - \delta$, $x = a + \delta$, $y = L - \varepsilon$ y $y = L + \varepsilon$; (Figura 11). Nada se dice acerca del valor de f cuando x es a.

Es conveniente adquirir cierta práctica para encontrar el δ que corresponde a un ε dado, esto puede empezarse efectivamente partiendo de algunos casos muy simples. Considérese un caso sencillo: sea f (x) = 3x - 2 y tómese a a = 5.

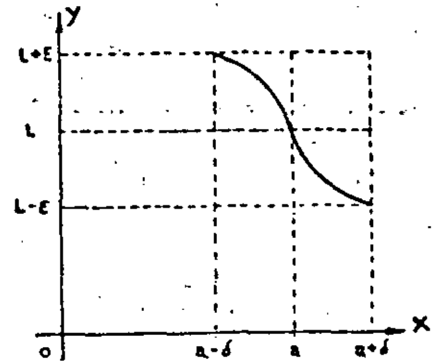


FIG 11

Obténgase el límite de la función en a = 5; para ello utilícese un entorno del punto a, sea este ♦ (5, 1), o sea, 4 < x < 6.

Ahora se formará una tabla con las siguientes columnas:

1.- Valor de x en estudio. . . (a)
2.- Valor contenido en el entorno reducido de "a". . . (x)
3.- Valor absoluto de la diferencia x - a
4.- Valor de la función en x, . . f (x)

Al observar las cuatro primeras columnas de la tabla, se ve que a medida que el intervalo $|x - a|$ tiende a cero, la función tiende al valor 13,- por esto se dice que:

$$\lim_{x \to 5} f (x) = \;\;$$

Aumentándole ahora a la tabla las columas 5 y 6 o sea:

1	2	3	4	5	6
a	x	$\lvert x - a \rvert$	$f(x)$	L	$\lvert f(x) - L \rvert$
5	4.5	0.5	11.5	13	1.5
5	4.9	0.1	12.7	13	0.3
5	4.95	0.05	12.85	13	0.15
5	4.99	0.01	12.97	13	0.03
5	4.995	0.005	12.99	13	0.01
5	4.999	0.001	12.997	13	0.003
	↓	↓	↓		↓
	5	0	13		0

TABLA No. 1.

5.- El valor del límite de la función. . . . (L)

6.- El valor absoluto de la diferencia $f(x) - L$.

Se observa que para cada valor $\lvert x - a \rvert$ de la tabla, existe un valor de $\lvert f(x) - L \rvert$ y ambos tienden a cero.

Lo que se quiere es hacer ver que dado un ε, se puede encontrar un δ tal que:

$$\lvert 3x - 2 - 13 \rvert < \varepsilon \text{ cuando } \lvert x - 5 \rvert < \delta$$

Como $\lvert 3x - 15 \rvert = \lvert 3(x - 5) \rvert$, si se da un ε, se toma simplemente $\delta = \varepsilon/3$; entonces, si $\lvert x - 5 \rvert < \delta = \varepsilon/3$, se encuentra que $3 \lvert x - 5 \rvert < \varepsilon$, que equivale al resultado buscado, $\lvert 3x - 15 \rvert < \varepsilon$

Ejemplo 18.- Trazar una gráfica de $f(x) = \frac{3}{x + 2}$ donde $x \neq -2$, y encontrar un δ tal que $\lvert f(x) - 1/3 \rvert < 0.01$ si $\lvert x - 7 \rvert < \delta$

SOLUCION:

La gráfica está ilustrada en la figura 12. En la definición se tendrá $L = \frac{1}{3}$ y $a = 7$, se debe encontrar un intervalo de x en torno de $a = 7$, tal que la gráfica se encuentre en el rectángulo adecuado. La función decrece monótonamente a medida que se avanza hacia la derecha, y por tanto, al levantar rectas verticales en los puntos en que las rectas $y = 0.34$, $y = 0.32$, cortan a la curva, se obtiene el mayor intervalo posible en el eje x. La intersección de dichas rectas con la curva representativa de la función, se encuentra resolviendo:

$$\frac{3}{x_1 + 2} = L + \varepsilon = 0.343333 \qquad \text{. . . . (A)}$$

$$\frac{3}{x_2 + 2} = L - \varepsilon = 0.323333 \qquad \text{. . . . (B)}$$

y despejando x.

De (A): $3 = 0.343333\,(x_1 + 2)$

$x_1 = 8.737864 - 2 \longrightarrow x_1 = 6.737864$

De (B): $3 = 0.323333\,(x_2 + 2)$

$x_2 = 9.278351 - 2 \longrightarrow x_2 = 7.278351$

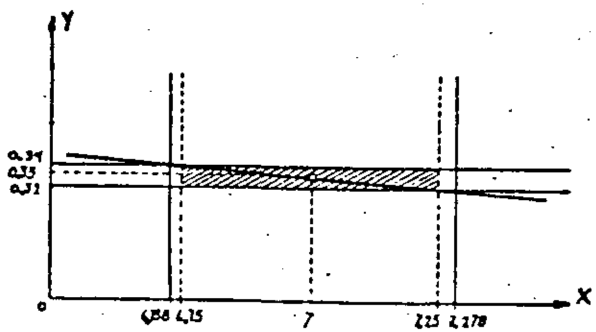


FIG 12

En la figura 13, se muestran estos valores a una escala muy amplificada, puesto que la función decrece monótonamente hacia la derecha, un valor adecuado para δ es 0.25, ya que si la función se encuentra en un rectángulo evidentemente también se encuentra en un rectángulo similar de la misma altura, pero más angosta. En otras palabras, se cumple:

$$\left| f(x) - 1/3 \right| < 0.01 \text{ cuando } 0 < \left| x - 7 \right| < 0.25$$

Ejemplo 19.- Si $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2}$, $a = 2$ y $\varepsilon = 0.01$; $x \neq 2$.-

Determine un número $\delta > 0$, tal que se cumpla la definición de límite.- Dibuje una gráfica aproximada.

SOLUCION:

La función no está definida para $x = 2$, pero para $x \neq 2$.

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2x} - 2)(\sqrt{2x} + 2)}{(x - 2)(\sqrt{2x} + 2)} = \frac{2x - 4}{(x - 2)(\sqrt{2x} + 2)}$$

$$= \frac{2(x - 2)}{(x - 2)(\sqrt{2x} + 2)}$$

$$f(x)\Big/_{x \neq 2} = \frac{2}{\sqrt{2x} + 2} \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{2}{\sqrt{2x} + 2} = \frac{1}{2} = L$$

La gráfica de esta función está dibujada en la figura 13 en donde también se representan las rectas

$$y_1 = L + \varepsilon = 0.51 \quad y \quad y_2 = L - \varepsilon = 0.49$$

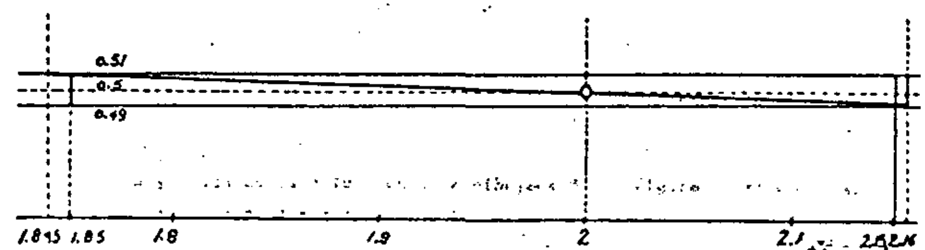


FIG 13

$$\frac{2}{\sqrt{2x_1} + 2} = L + \varepsilon = 0.51 \qquad \ldots\ldots \text{(A)}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2x_2} + 2} = L - \varepsilon = 0.49 \qquad \ldots\ldots \text{(B)}$$

Despejando x de las ecuaciones (A) y (B):

De (A) $\sqrt{2x_1} + 2 = \dfrac{2}{0.51}$; $\sqrt{2x_1} = 1.92157$ por lo tanto $2x_1 = 3.69243$

$x_1 = 1.84621$

De (B) $\sqrt{2x_2} + 2 = \frac{2}{0.49}$; $\sqrt{2x_2} = 2.08163$ por lo tanto $2x_2 = 4.33319$

$x_2 = 2.16660$

Puesto que la función decrece monótonamente hacia la derecha, un valor adecuado para δ es $\delta = 0.15$, ya que $1.846 < 1.85$ y $2.166 > 2.15$

Ejemplo 20.- Demostrar por medio de la definición que:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

SOLUCION:

Se tiene que $L = \frac{1}{2}$ y $a = 1$. Debe demostrarse que para cada $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un $\delta > 0$, tal que:

$$\left| \frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \quad \text{cuando } 0 < |x - 1| < \delta$$

Para formarse una idea del aspecto de la función, se traza la gráfica (figura 14), y de esta se ve que la función es monótonamente creciente. Esto se verifica escribiendo la identidad.

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

Y observando que al crecer x, $1/(x+1)$ decrece, por tanto,

$$1 - \left[1/(x+1) \right] \text{ crece.}$$

Supóngase en primer lugar que $\varepsilon < 1/2$, entonces, $L + \varepsilon < 1$ y $L - \varepsilon > 0$ puesto que $L = \frac{1}{2}$. En seguida se determinan los puntos en que las rectas $y = \frac{1}{2}$; y $y = \frac{1}{2} + \varepsilon$, cortan a la curva, resolviendo las ecuaciones -- (A) y (B).

$$\frac{x}{x+1} = \frac{1}{2} - \varepsilon \qquad \ldots \text{(A)}$$

$$\frac{x}{x+1} = \frac{1}{2} + \varepsilon \qquad \ldots \text{(B)}$$

La ecuación (A) da: $x = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right)(x + 1)$, o sea:

$$\left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) x = \frac{1}{2} - \varepsilon \quad \text{y}$$

$$x = \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon}{\frac{1}{2} + \varepsilon} \equiv x_1$$

Similarmente la ecuación (B) da:

$$x = \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon}{\frac{1}{2} - \varepsilon} \equiv x_2$$

Tomando δ igual a la menor distancia entre 1 y x_1 y entre 1 y x_2. Se puede verificar que $1 - x_1$ es menor que $x_2 - 1$, por tanto:

$$\delta = 1 - x_1 = 1 - \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon}{\frac{1}{2} + \varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{\frac{1}{2} + \varepsilon} = \frac{4\varepsilon}{1 + 2\varepsilon}$$

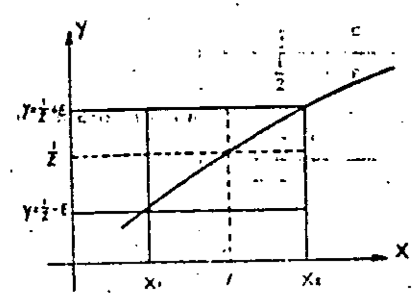


FIG 14

Observación. Si bien la definición básica expresa que debe encontrarse un δ para todo ε, en realidad se observa que una vez encontrado un δ para un determinado ε, se puede emplear el mismo δ para todos los ε mayores. Geométricamente esto significa que una vez que se sabe que la función se encuentra en un rectángulo, evidentemente está contenida en todo rectángulo -- del mismo ancho pero de mayor altura.

II.3. LIMITE DE LA FUNCION CONSTANTE Y LA FUNCION IDENTIDAD.

LIMITE DE LA FUNCION CONSTANTE.

Para determinar el límite de esta función recuérdese que la función -- constante es aquella que no varía, o sea que conserva su mismo valor para todo valor de la variable independiente, es decir:

$$f = \{ (x, f (x)) \mid x \in Df; \;\; f (x) = K \} \qquad \ldots . (A)$$

cuya gráfica se muestra en la siguiente figura.

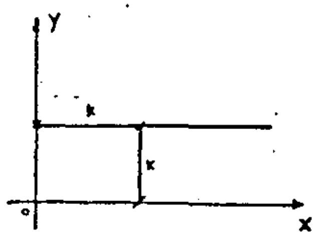


FIG 15

De esta misma gráfica resulta obvio establecer la siguiente proposición:

$$\lim_{x \to a} f (x) = \lim_{x \to a} K = K \qquad \ldots . (B)$$

Para demostrar la proposición (B) se tomará como base a la definición de límite, establecida en el tema anterior II.2.; esto es:

Basta que $\exists$ un $\delta > 0$, tal que para un $\varepsilon > 0$ dado, se cumpla:

$$| f (x) - k | = | k - k | = 0 < \varepsilon \qquad \text{siempre que;}$$
$$0 < | x - a | < \delta$$

como es fácil ver, sea cual fuere el número $\delta > 0$ que se escoja, siempre sucederá que $| f (x) - k |$ es menor que cualquier $\varepsilon > 0$ dado, por pequeño que este sea.

Teorema II. 1.- "Límite de la Función Constante".

Hipótesis: $f (x)$ es una función constante.

Tesis: El límite de $f (x)$ cuando x tiende a un número a cualquiera,- es igual a la constante.

Esto es: Si $f (x) = k$ entonces $\lim_{x \to a} f (x) = \lim_{x \to a} k = k$

LIMITE DE LA FUNCION IDENTIDAD.

Con un proceso análogo al punto anterior, recuérdese que la función identidad es aquella cuyo valor es exactamente el mismo que el que adquiere - la variable independiente, es decir:

$$f = \{ (x, f (x)) \mid x \in Df, \; f (x) = x \}$$

La gráfica se muestra a continuación, en la figura 16.

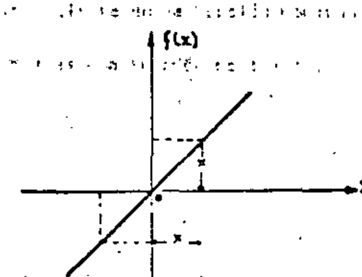


FIG 16

de la gráfica se puede observar que se cumple la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a \qquad \ldots (A)$$

Se comprobará la veracidad de la igualdad (A) recurriendo a la definición de límite . . . ; así debemos encontrar un número $\delta > 0$ para cada $\epsilon > 0$ tal que:

$|f(x) - a| < \epsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

dado que $f(x) = x$ se tiene $|x - a| < \epsilon = \delta$

Por lo que para cualquier $\epsilon > 0$ dado siempre $\exists$ un $\delta = \epsilon > 0$ que cumpla las condiciones establecidas de tal manera que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a$

Teorema II.2. " Límite de la función identidad "

Hipótesis: $f(x)$ es la función identidad.

Tesis: El límite de $f(x)$ cuando x tiende a cualquier número a es igual al número a.

Esto es: Si $f(x) = x$; entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a$

II.4. TEOREMAS SOBRE LIMITES.

En el inciso II.2. del presente capítulo se estableció el concepto de límite de una función y se calcularon numéricamente algunos ejemplos de límites utilizando diversos artificios y manipulaciones algebráicas. El estudiante escéptico se dará cuenta de que cada una de ellas necesita justificarse aún cuando muchas de ellas parecen obvias. Por este motivo, se expondrán a continuación los teoremas sobre límites que sirven de base para el cálculo de límites de funciones. La correspondiente demostración de estos teoremas se presenta en un anexo al presente capítulo.

Teorema II.3.- " Unicidad de los límites. "

Hipótesis: Una función $f(x)$ está definida en un entorno del punto $x = a$.

Tesis: Esta función no puede tener dos límites distintos, cuando x tiende al valor a.

Teorema II.4.-

Hipótesis: Una función $f(x)$ es positiva o nula en un entorno del punto $x = a$.

Tesis: El límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor a, no puede ser negativo.

Teorema II.5.-

Hipótesis: Una función $f(x)$ es negativa o nula en un entorno del punto $x = a$.

Tesis: El límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor a, no puede ser positiva.

Teorema II.6.- " Límite de una suma ".

Hipótesis: $f(x)$ es la suma de un número finito de funciones de x que tienen límite cuando x tiende al número a.

Tesis: $f(x)$ tiene límite cuando x tiende al valor a y dicho límite es igual a la suma de los límites cuando x tiende al número a, de las funciones sumadas.

Esto es: Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$, y si

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1,\ \lim_{x \to a} f_2(x) = L_2,\ \ldots,\ y \lim_{x \to n} f_n(x) = Ln$$

Entonces: $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) \right] = L_1 + L_2 + \ldots + Ln$

Teorema II.7.- "Límite de un producto."

Hipótesis: Una función $f(x)$ es el producto de un número finito de funciones de x que tienen límite cuando x tiende al valor a.

Tesis: El límite de $f(x)$ cuando x tiende al número a existe y es igual al producto de los límites en este punto de las funciones-que se multiplican.

Esto es: si $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$

Y si $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$, ... $\lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$.

entonces: $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)\right] =$

$$= L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot \ldots \cdot L_n$$

Corolario.- El límite en un punto del producto de una constante por una función es igual a la constante multiplicada por el límite de la función en ese punto.

Esto es: $\lim_{x \to a} \left[k\, f(x)\right] = k \lim_{x \to a} f(x)$

Teorema 11.8.- "Límite de un cociente"

Hipótesis: $f(x)$ es el cociente de dos funciones de x que tienen límite cuando x tiende al número a y el límite del denominador no es cero.

Tesis: El límite de $f(x)$ cuando x tiende al número a, existe, y es igual al cociente de los límites de dichas funciones en el punto indicado.

Esto es: si $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$; $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$ y

$\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2 \neq 0$ entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim_{x \to a} f_1(x)}{\lim_{x \to a} f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad ; L_2 \neq 0$$

Teorema 11.9.-

Hipótesis: Dos funciones de x, $f_1(x)$ y $f_2(x)$ tienen los mismos valores para valores iguales de x en un entorno del punto $x = a$ y $f_2(x)$ tiene límite cuando x tiende al número a.

Tesis: La función $f_1(x)$ tiene límite cuando x tiende al número a y este límite es igual al límite de la función $f_2(x)$ en dicho punto.

Esto es: Si $f(x) = f_2(x)$ $\forall x \in a - \delta < x < a + \delta$ y si

$\lim f_2(x) = L$, entonces existe: $\lim_{x \to a} f_1(x) = \lim_{x \to a} f_2(x) = L$

Teorema 11.10.-

Hipótesis: Para un entorno del punto a se tiene que $f_1(x) < f(x) < f_2(x)$, además, $f_1(x)$ y $f_2(x)$ tienen límite cuando x tiende al valor a y sus límites son iguales.

Tesis: El límite cuando x tiende al número a de la función $f(x)$, existe y es igual al límite de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ en el punto considerado.

Esto es: Si $f_1(x) < f(x) < f_2(x)$ $\forall x \in 0 < |x - a| < \delta$

Y si $\lim_{x \to a} f_1(x) = \lim_{x \to a} f_2(x) = L$, entonces existe $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Teorema 11.11.-

Hipótesis: n es un número entero positivo y el límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor $x = a$ es positivo. Si n es positivo, o bien dicho límite es negativo o cero si n es impar positivo.

Tesis: El límite de la raíz enésima de $f(x)$ cuando x tiende al valor $x = a$ es igual a la raíz enésima del límite de $f(x)$ en ese punto.

O sea: Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} =$

$$\sqrt[n]{L}$$

Los siguentes ejemplos ilustran la aplicación de los teoremas anteriores. Para indicar el teorema del límite que se está usando, se hará anotando la abreviatura " T ", seguida por el número del teorema.

Ejemplo 21.- Encontrar el valor de: $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 1)$

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 1) = \lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 2x - \lim_{x \to 2} 1 \qquad \dots\dots (T. II. 6)$$

$$= 4 + 2 \times 2 - 1 \qquad \dots\dots (T. II. 1) \quad \dots\dots (T. II. 7)$$

$$= 7 \qquad \dots\dots (T. II. 2)$$

Ejemplo 22.- Encontrar el $\lim_{x \to -3} \sqrt{\dfrac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3}}$

$$\lim_{x \to -3} \sqrt{\frac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3}} = \sqrt{\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3}} \qquad \dots\dots (T. II. 11)$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x \to -3} (x^2 - 9)}{\lim_{x \to -3} (2x^2 + 7x + 3)}} \qquad \dots\dots (T. II. 8)$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x \to -3} x^2 - \lim_{x \to -3} 9}{\lim_{x \to -3} 2x^2 + \lim_{x \to -3} 7x + \lim_{x \to -3} 3}} \qquad \dots\dots (T. II. 6)$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x \to -3} x \, . \, \lim_{x \to -3} x - \lim_{x \to -3} 9}{2 \lim_{x \to -3} x \, . \, \lim_{x \to -3} x + 7 \lim_{x \to -3} x + \lim_{x \to -3} 3}} \qquad \dots\dots (T. II. 7)$$

$$= \sqrt{\frac{(- 3) (- 3) - 9}{2 (- 3)(- 3) + 7 (- 3) + 3}} \qquad \dots\dots (T. II. 2) \quad \dots\dots (T. II. 1)$$

$$= \sqrt{\frac{9 - 9}{18 - 21 + 3}}$$

$$= \sqrt{\frac{0}{0}} = \frac{0}{0}$$

Lo obtenido representa una indeterminación, lo cual carece de sentido; sin embargo, esto no significa que el límite buscado no existe. La función para la cual se trata de encontrar su límite cuando $x \to -3$, simplemente no está definida para ese valor de x, por lo tanto para $x \neq -3$ se puede utilizar la siguiente trasformación algebraica, apoyándose en el teorema II.9.

$$\frac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{(2x + 1)(x + 3)} = \frac{x - 3}{2x + 1}$$

entonces:

$$\lim_{x \to -3} \sqrt{\frac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3}} = \lim_{x \to -3} \sqrt{\frac{x - 3}{2x + 1}} = \sqrt{\frac{-3 - 3}{-6 + 1}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

Ejemplo 23.- Encontrar el valor de $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

En este problema, al igual que en el ejemplo anterior no es posible aplicar el teorema II.8 al cociente ya que el límite del denominador se anula cuando $x \to -2$. Sin embargo, factorizando el numerador se tiene:

$$\frac{x^3 + 8}{x + 2} = \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2}, \text{ así:} \qquad (T. II. 9)$$

Este cociente es $(x^2 - 2x + 4)$ si $x \neq -2$ (ya que si $x \neq -2$ se puede dividir numerador y denominador entre $(x + 2)$. Entonces la solución a este problema se toma la siguiente forma:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \lim_{x \to -2} (x^2 - 2x + 4) \text{ , siendo } x \neq -2$$

$$= \lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 2x + \lim_{x \to -2} 4 \qquad (T. II. 6)$$

$$= \lim_{x \to -2} x \, . \, \lim_{x \to -2} x - 2 \lim_{x \to -2} x + 4 \qquad (T. II. 7) \quad (T. II. 1)$$

$$= (- 2) (- 2) - 2 (- 2) + 4 \qquad (T. II. 2)$$

$$= 12$$

II.5 LIMITES LATERALES.

Al estudiarse el concepto de límite de una función $\lim_{x \to a} f(x)$, se hizo especial mención de que interesa analizar los valores que pueda tomar la variable independiente x en un intervalo abierto que contiene al valor " a " pero no en " a " misma, esto es, en valores de x próximos a " a " que sean mayores que " a " o menores que " a " (es decir en un entorno reducido de " a "). Sin embargo, supóngase por ejemplo, que se tiene la función:

$$f(x) = \frac{5}{\sqrt{x-3}}$$

Ya que f (x) no está definida para x < 3, la función no se define en cualquier intervalo abierto que contenga a 3. De aquí, se puede considerar:

$$\lim_{x \to 3} = \frac{5}{\sqrt{x-3}} \qquad \text{no existe .}$$

Sin embargo, si x está restringida a valores mayores que 3, el valor de $\sqrt{x-3}$ se puede hacer tan cercano a cero como se quiera tomando x suficientemente cercano a 3, pero mayor que 3.

En un caso como este se hace que x se aproxime a 3 por la derecha, y entonces se considera El Límite Lateral por la Derecha, el cual se define formalmente a continuación.

LIMITE LATERAL POR LA DERECHA.

Considerénse una cierta función y = f (x) donde x está definida en el intervalo abierto (a, a + h), donde h ∈ ℝ y h > 0, según se observa en la Figura 17.

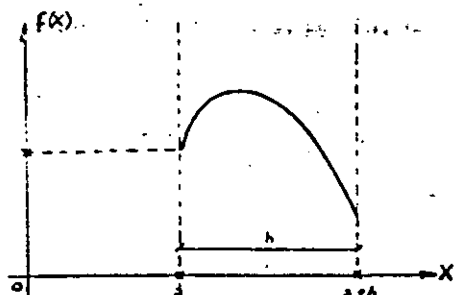


FIG 17

Se dice que el límite de f (x) cuando x se aproxima a " a " por la derecha es L_1, y se denota:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1 \qquad \ldots .(A)$$

Si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que:

$$\left| f(x) - L \right| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < x - a < \delta \qquad \ldots .(B)$$

Nótese que en (B) no hay barras de valor absoluto para x - a, ya que si x > a, x - a > 0

Se sigue de la expresión (A) para el ejemplo analizado, que

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{5}{\sqrt{x-3}} \to \infty$$

Si al considerar el límite de la función, la variable independiente x está restringida a valores menores que un número " a ", decimos que x se aproxima a " a " por la izquierda, entonces el límite se llama límite lateral por la izquierda.

LIMITE LATERAL POR LA IZQUIERDA.

Considerénse ahora la misma función y = f (x), pero " x " en cambio definida en el intervalo (a - h, a), donde h ∈ ℝ y h > 0, según se muestra en la Figura 18.

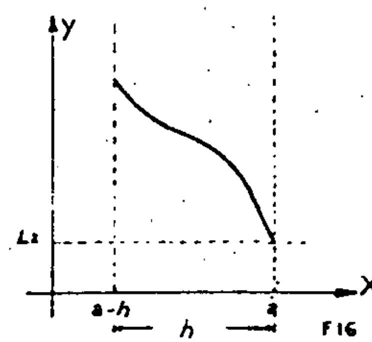


FIG 18

Se dice que el límite de f (x) cuando x se aproxima a " a " por la izquierda es L_2, y se denota:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2 \qquad (c)$$

Si para cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que:

$$\left| f(x) - L \right| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < a - x < \delta \qquad (D)$$

Se puede ahora llamar al $\lim_{x \to a} f(x)$, Límite Bilateral o no dirigido, para distinguirlo de los límites laterales.

Teorema 11.12.-

Hipótesis: f (x) tiene límite cuando x tiende al valor a y este límite es el número L.

Tesis: Los límites cuando x tiende al número a por la izquierda y por la derecha, existen y ambos son iguales al número L.

La interpretación geométrica de lo anterior se muestra a continuación donde puede observarse que x puede tender al número " a " bien sea por la derecha o bien por la izquierda de " a ", teniéndose para ambos casos la posibilidad de que los límites sean diferentes ($L_1 \neq L_2$). Ver figura 19.

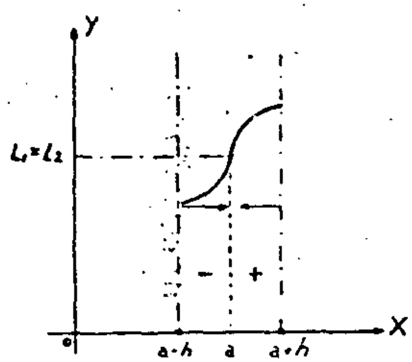


FIG 19(a)

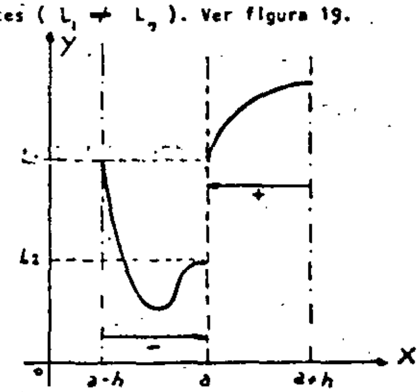


FIG 19(b)

En la figura 19(a) $L_1 = L_2$: $\lim_{x \to a} f(x) = L_1 = L_2$, en cambio la figura 19(b) $L_1 \neq L_2$, por lo tanto:

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ no existe.}$$

Ejemplo 24.- Sea h una función definida por:

$$h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 3 \\ 10 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

a) Trazar la gráfica de h.

b) Encontrar el $\lim_{x \to 3} h(x)$, si existe.

SOLUCION:

a) Un dibujo de la gráfica se muestra a continuación en la figura 20.

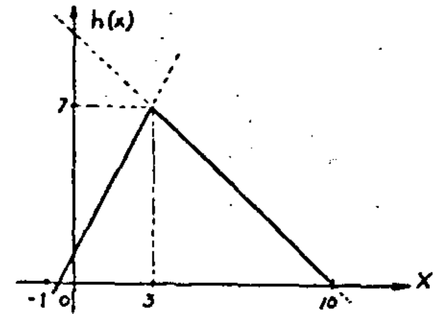


FIG 20

b) $\lim_{x \to 3^-} h(x) = \lim_{x \to 3^-} (2x + 1) = 7 = L_2$

$\lim_{x \to 3^+} h(x) = \lim_{x \to 3^+} (10 - x) = 7 = L_1$

Según el Teorema 11.12., como $L_1 = L_2$, $\lim_{x \to 3} h(x)$ existe y es igual a 7

Ejemplo 25.- Sea g una función definida por:

$$g(t) = \begin{cases} 4 + t^2 & \text{si } t < -2 \\ 5 & \text{si } t = -2 \\ 12 - t^2 & \text{si } t > -2 \end{cases}$$

Trazar la gráfica de g, y encontrar $\lim_{t \to -2} g(t)$

SOLUCION:

La gráfica de la función g es la que se muestra abajo en la figura 21

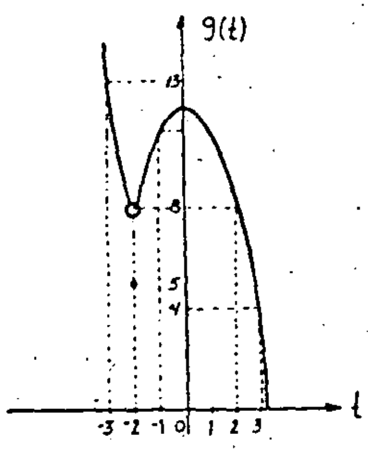


FIG 21

$$\lim_{t \to -2^+} g_+(t) = \lim_{t \to -2^+} (12 - t^2) = 8 = L_1$$

$$\lim_{t \to -2} g_-(t) = \lim_{t \to -2} (4 + t^2) = 8 = L_2$$

Por lo tanto por el teorema 11.12, $\lim_{x \to -2} g(t)$ existe y es igual a 8.

Nótese que $g(-2) = 5$, lo cual no afecta al $\lim_{t \to -2} g(t)$

Ejemplo 26.- Considérese la siguiente función f, definida por:

$$f(r) = \begin{cases} r + 2 & ; \quad -3 < r \leq 1 \\ \frac{1}{2} r^2 - 3 & \quad 1 < r \leq 4 \end{cases}$$

Investigar si existe $\lim_{r \to 1} f(r)$ y trazar la gráfica de $f(r)$

SOLUCION:

$$\lim_{r \to 1^+} f(r) = \lim_{r \to 1^+} \left(\frac{1}{2} r^2 - 3\right) = \frac{-5}{2} = L_1$$

$$\lim_{r \to 1^-} f(r) = \lim_{r \to 1^-} (r + 2) = 3 = L_2$$

Por lo tanto como $L_1 \neq L_2$, $\lim_{r \to 1} f(r)$ no existe. Ver figura 22.

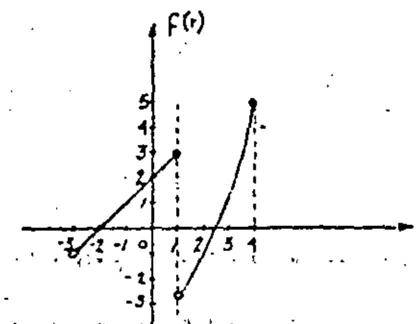


FIG 22

NOTA: Los círculos negros pertenecen a la gráfica, no así los blancos.

Ejemplo 27.- Para la siguiente función dada por tres reglas de correspondencia, determinar los límites de dicha función para los puntos en que $x = -2$ y $x = 5$. Hacer un dibujo de la gráfica de la función.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{para } -4 \le x \le -2 \\ -3 & \text{para } -2 < x \le 5 \\ 2x - 13 & \text{para } 5 < x < 10 \end{cases}$$

SOLUCION:

Se puede iniciar con el trazo de la gráfica de $f(x)$ para una mejor visualización del problema, tal y como se ilustra en la figura 23.

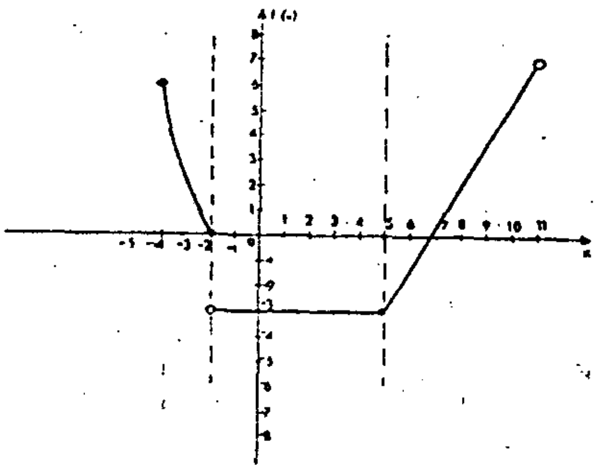


Fig 23

a) Viendo si se cumple el teorema 11.12. si $a = -2$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (-3) = -3 = L_1$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (x^2 + 3x + 2) = 4 - 6 + 2 = 0 = L_2$$

Por lo tanto como $L_1 \neq L_2$, $\lim_{x \to -2} f(x)$ no existe.

b) Para $a = 5$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} (2x - 13) = -3 = L_1$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} (-3) = -3 = L_2$$

por lo tanto como $L_1 = L_2 = -3$, el límite existe y vale:

$$\lim_{x \to 5} f(x) = -3$$

11.6. CONTINUIDAD DE UNA FUNCION EN UN PUNTO. DISCONTINUIDAD REMOVIBLE. TEOREMAS SOBRE FUNCIONES CONTINUAS.

En el inciso 11.2. se analizó el significado de límite de una función en un punto y se escribió su definición con la expresión (1) que se repite a continuación:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \ldots (A)$$

Recordando también que no es necesario tomar en cuenta el valor de la función f, cuando $x = a$; de hecho, para muchas expresiones la función no está siquiera definida en $x = a$.

En ese mismo inciso, en el ejemplo 13, se consideró la función f definida por la ecuación:

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} = \frac{(2x - 3)(x + 1)}{x + 1}$$

Ahí mismo se observó que tal función está definida para todos los valores de x, excepto $x = -1$, para el cual tanto el numerador como el denominador de la función se anulan. Un dibujo de la gráfica de todos los puntos de la recta $y = 2x - 3$, excepto el $(-1, -5)$ se muestra en la figura 8.

En ella, precisamente, hay una notable " interrupción " en el punto $(-1, -5)$ y se dirá entonces que la función <u>f es discontinua</u> para cuando-

$x = -1$.

En cambio si se define $f(-1) = 5$, la función queda ahora definida para todos los valores de x, pero aún hay un " salto " en la gráfica, y la función sigue siendo discontinua en ese mismo valor, según se muestra en la figura 24.

Si embargo, si se define que $f(-1) = -5$, entonces se dice que la función f es continua para todos los valores de x.

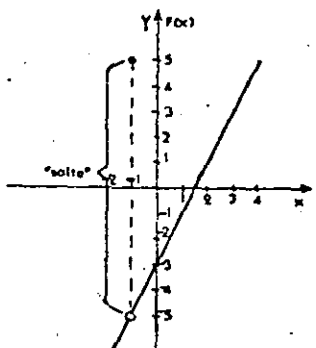


FIG 24

Definición: Se dice que la función f es continua en el valor $a \in Df$, siempre y cuando se cumpla lo siguiente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \text{(B)}$$

El que se cumpla la definición anterior implica que se cumpla las siguientes condiciones:

1) Que $f(a)$ esté definida.

2) Que exista $\lim_{x \to a} f(x)$

3) Que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Basta con que una de las tres expresiones anteriores se cumpla para que la condición (B) no se cumpla, por lo tanto, la función f no sea continua en el valor a. La condición (B) es necesaria y suficiente para que la función $y = f(x)$ sea continua en a.

Ejemplo 28.- Sea f definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ 5 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

Trazar su gráfica e investigar si es continua en el punto donde $x = -2$

SOLUCION:

En la figura 25, se muestra un dibujo de la gráfica de la función, en la cual hay un salto en el punto donde $x = -2$

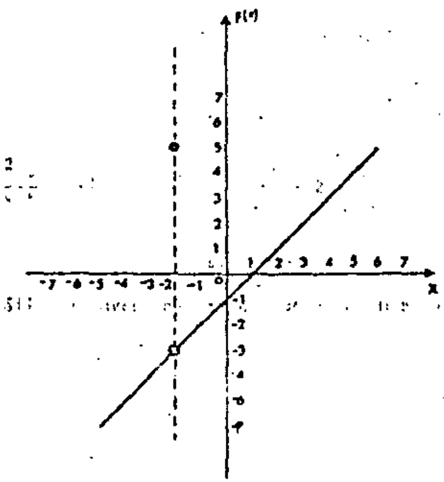


Fig 25

Investigando paso a paso la condición de continuidad para $x = -2$

$f(-2) = 5$ $\therefore$ por lo tanto se satisface la primera condición.

$\lim_{x \to -2} f(x) = -3$ $\therefore$ por lo tanto se satisface la segunda condición.

Pero, como $f(-2) \neq \lim_{x \to -2} f(x)$, la tercera condición no se satisface.

Así, se concluye que f es discontinua cuando $x = -2$

Ejemplo 29.- Considérese la siguente función:

$$g(x) = \frac{x + 3}{x^2 + x - 6}$$

Investíguese si existe algún punto de discontinuidad en dicha función.

SOLUCION:

En la figura 26 se muestra un dibujo de la gráfica de la función g.

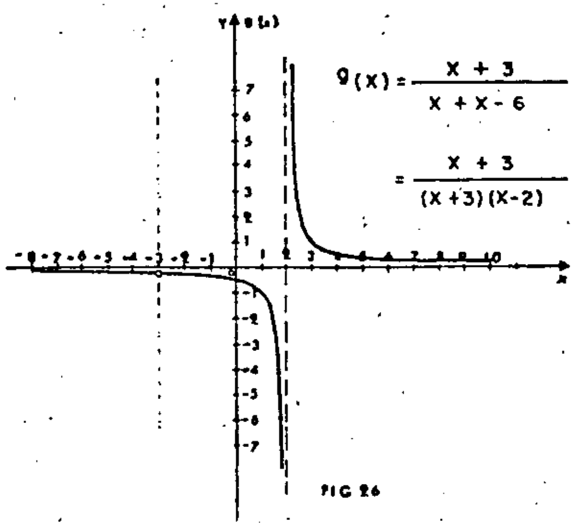


FIG 26

Analizando la función g, se observa que ésta no se encuentra definida para $x = -3$, por tanto.

$$g(x) = \frac{1}{x - 2}, \text{ para } x \neq -3$$

Esto se ve claramente como una interrupción en la gráfica de g, cuando $x = -3$, y así, al no cumplirse la condición (B), se concluye que tal función es discontinua para cuando $x = -3$.

Sin embargo, existe otro punto de discontinuidad, ya que cuando $x = 2$, el denominador de la función g, se anula no quedando definida para ese valor. Nuevamente se concluye que dicha función no es continua al no cumplirse la condición (B) ahora para $x = 2$. Este último caso, también se puede verificar observando el comportamiento de $g(x)$ en la figura 26.

Ejemplo 30.- Sea h definida por:

$$h(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ -\frac{x}{2} - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Trazar su gráfica, e investigar si se cumple la condición de continuidad, en el punto donde $x = 2$.

SOLUCION:

En la figura 27, se encuentra representada gráficamente la función h, se observa que para $x = 2$, hay una interrupción en dicha gráfica.

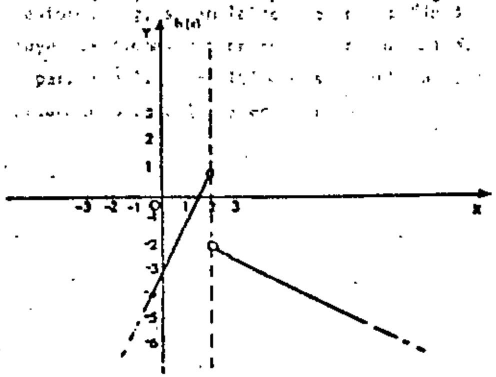


FIG 27

Ahora investigando paso a paso la condición de continuidad para $x = 2$, se tiene:

$f(2) = 2(2) - 3 = 1$, por lo tanto satisface la primera condición.

$$\lim_{x \to 2^-} h(x) = \lim_{x \to 2^-} (2x - 3) = 4 - 3 = 1$$

$$\lim_{x \to 2^+} h(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(-\frac{x}{2} - 1\right) = -1 - 1 = -2$$

ya que $\lim_{x \to 2^-} h(x) \neq \lim_{h \to 2^+} h(x)$, se concluye que $\lim_{x \to 2} h(x)$ no existe; entonces la segunda condición no se satisface y h es discontinua para $x = 2$.

Ejemplo 31.- Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 7 & \text{si } x \leq 4 \\ kx - 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Encontrar el valor de la constante k que hace que la función sea continua para $x = 4$.

SOLUCION:

Para que $f(x)$ sea continua para $x = 4$, debe cumplirse la condición de continuidad.

$f(4) = 3(4) + 7 = 19$ por lo tanto se cumple la primera condición.

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (3x + 7) = 12 + 7 = 19$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} (kx - 1) = 4k - 1$$

Para que se cumpla la segunda condición, debe cumplirse que:

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x) \text{, o sea}$$

$4k - 1 = 19$ por lo tanto $k = 5$, así $\lim_{x \to 4} f(x) = f(4)$

y $f(x)$ es continua en $x = 4$.

DISCONTINUIDAD REMOVIBLE:

En los ejemplos anteriores, se han analizado funciones que presentan discontinuidad para algún punto.

Si se analiza detenidamente para cada caso, la causa que origina dicha discontinuidad, se podrá observar que cuando la discontinuidad se origina porque $f(a) \nexists$, siendo "a" el punto de discontinuidad, existiendo $\lim_{x \to a} f(x)$; o bien existiendo $f(a)$ y existiendo $\lim_{x \to a} f(x)$ estos no son iguales; o sea: $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$. En esta situación la discontinuidad se menciona como " Discontinuidad Removible", pues basta con definir $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ para que la discontinuidad se elimine.

Pero se ha de recalcar que en esta forma se estaría definiendo, de manera absoluta; una " nueva función "; siendo la " nueva " función idéntica a la anterior, excepto en el punto $x = a$.

En el caso que la discontinuidad sea originada por la no existencia del $\lim_{x \to a} f(x)$; entonces esta discontinuidad es irremovible y no se podrá eliminar de ninguna manera.

Ejemplo 32.- Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ 5 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

estudiado en el ejemplo 28. Indicar si la discontinuidad del punto en que $x = -2$ es removible y en caso afirmativo removerla.

SOLUCION:

En el ejemplo 28, se puede observar (figura 25) que la función f (x) presenta " un salto " para $x = -2$. Así mismo se puede ver que la función cumple para $x = -2$, las dos primeras partes de la condición de continuidad, es decir:

1.- $f(x)$ está definida para $x = -2$ y vale $f(-2) = 5$

2.- $\lim_{x \to 2}$ existe y vale: $L = -3$

Pero la tercera parte, no se cumple, puesto que:

3.- $\lim_{x \to -2} f(x) \neq f(-2)$

$$-3 \neq 5$$

La discontinuidad si es removible, puesto que basta con definir $f(-2) = -3$, y también se cumplirá la tercera parte, quedando la función continua para $x = -2$ si:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ -3 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

Ejemplo 33.- Sea la función:

$$g(x) = \frac{x + 3}{x^2 + x - 6}$$

estudiada en el ejemplo 29. Indicar si la discontinuidad del punto en que $x = 2$ es removible y en caso de serlo, removerla.

SOLUCION:

La función $g(x)$ no cumple con la primera parte, tal como se vió en el ejemplo 29.

Analizando la función para la segunda parte:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x + 3}{x^2 + x - 6} \quad \text{no existe.}$$

Obviamente, la función tiene una discontinuidad irremovible, puesto que no es posible definir la función en $x = 2$ y que sea igual al valor del límite, puesto que el límite no existe.

TEOREMAS SOBRE FUNCIONES CONTINUAS.

Las funciones continuas tienen un buen número de propiedades importantes, algunas de las cuales son consecuencia de las propiedades de los límites. Aplicando la definición de discontinuidad y los teoremas de límites antes vistos, se tienen los siguientes teoremas sobre funciones continuas en un punto.

Teorema II.13.-

Hipótesis: f y g son dos funciones continuas en $x = a$.

Tesis: (1) $f + g$ es continua en $x = a$

(2) $f - g$ es continua en $x = a$

(3) $f \cdot g$ es continua en $x = a$

(4) $f \div g$ es continua en $x = a$, siempre que $g(a) \neq 0$.

Se demostrará la parte (1) de este teorema, para ilustrar el tipo de demostración requerida para cada parte, ya que f y g son continuas en a, de la definición de continuidad, se tiene:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{A}$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a) \tag{B}$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (A) y (B), y del teorema II.8 se tiene:

$$\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = f(a) + g(a) \tag{c}$$

La ecuación (C) es la condición para que f + g sea continua en x = a, la cual proporciona la demostración del teorema II.13.1.

Teorema II.14. Una función polinomial es continua en todo punto.

Para demostrar este teorema, considérese la función polinomial f, definida por:

$$f(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-1} x + b_n,\ b_0 \neq 0$$

donde n es un entero no negativo y $b_0, b_1, \dots, b_n$, son números reales. Con aplicaciones sucesivas de los teoremas de límites, se puede demostrar que si a es cualquier número, entonces:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b_0 a^n + b_1 a^{n-1} + b_2 a^{n-2} + \dots + b_{n-1} a + b_n$, de donde se sigue que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Teorema II.15.

Hipótesis: $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ es una función racional.

Tesis: f (x) es continua para todo su dominio siempre que $h(x) \neq 0$

Este teorema se demostrará en base a que f es una función racional, la cual puede ser expresada como el cociente de dos funciones polinomiales. Así, f puede estar definida por:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Donde g y h son dos funciones polinomiales y el dominio de f consiste de todos los números ℝ excepto aquellos para los cuales $h(x) = 0$.

Si a es cualquier número en el dominio de f, entonces $h(a) \neq 0$; así por el teorema II.6.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} g(x)}{\lim\limits_{x \to a} h(x)} \qquad (D)$$

Ya que g y h son funciones polinomiales, por el teorema II.14., son continuas en a, y así $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$ y $\lim\limits_{x \to a} h(x) = h(a)$. Consecuentemente, de la ecuación (D) :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{g(a)}{h(a)}$$

II.7. CONTINUIDAD DE UNA FUNCION EN UN INTERVALO.

Con los conceptos enunciados en el inciso anterior, es posible analizar la continuidad de cualquier función real de variable real en el punto en que se desee. Sin embargo, para muchos problemas será interesante investigar los intervalos en los cuales una función sea continua. El concepto de continuidad de una función en un intervalo puede expresarse mediante las siguientes definiciones.

Definición.- La función f es continua en el intervalo abierto (a, b) si y solo si es continua para todo valor de x que esté dentro del intervalo (a, b).

Definición.- La funcion f es continua en el intervalo cerrado [a, b] si y sólo si es continua para todo valor de x que este dentro del intervalo abierto (a, b); así como continua por la derecha en a* y continua por la izquierda en b**.

* La función f es continua por la derecha en a, si y sólo si:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

** La función f es continua por la izquierda en b, si y sólo si:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

De acuerdo con las definiciones anteriores, para investigar la continuidad de una función en un intervalo, es necesario el análisis en todos los puntos de ese intervalo. Este trabajo será, lógicamente, engorroso, impráctico y, dada su magnitud imposible. Sin embargo, apoyándose en los teoremas sobre continuidad, estudiados en el inciso anterior, el problema se reduce a analizar solamente los valores en los cuales no se cumplan las hipótesis de los teoremas, o bien aquellas en las que haya duda, por ejemplo en donde haya cambio de regla de correspondencia.

Ejemplo 34.- Sea $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ determinar los intervalos para los cuales la función g es continua.

SOLUCION:

La función en estudio es una función racional y de acuerdo al Teorema II.15., será continua para todo valor de x, excepto aquellos que anulen al denominador. De manera que igualando a cero el denominador:

$$x^2 - 4 = 0$$
$$x = \pm 2$$

Para $x = -2$ ó $x = 2$, la función g no es continua. Entonces, los intervalos en los que sí es continua son:

$$(-\infty, -2), (-2, 2) \text{ y } (2, +\infty)$$

Ejemplo 35.- Para que valores de x, la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & , -1 < x < 1 \\ 2x - 4 & , 1 \leq x < 2 \\ 5 - x^2 & , 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

es continua ? Dibujar su gráfica.

SOLUCION:

Apoyándose en los teoremas sobre funciones continuas puede fácilmente deducirse que f (x) es continua en los intervalos $(-1, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, 3)$. Sin embargo, los únicos valores dudosos están en $x = 1$ y $x = 2$.

Analizando los puntos dudosos:

a) en $x = 1$

$$f(1) = 2(1) - 4 = -2$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 3) = 1 - 3 = -2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x - 4) = 2 - 4 = -2$$

por lo tanto como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x - 4)$, entonces $\lim f(x)$ existe.

Finalmente, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

por lo tanto se cumple la condición de continuidad, y así se concluye que la función f es continua en $x = 1$.

b) En $x = 2$

$$f(2) = 5 - (2)^2 = 1$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2x - 4) = 4 - 4 = 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (5 - x^2) = 5 - 4 = 1$$

por lo tanto como $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe.

Por esto último, se concluye que f no es continua cuando $x = 2$. En la figura 28, aparece la gráfica de dicha función.

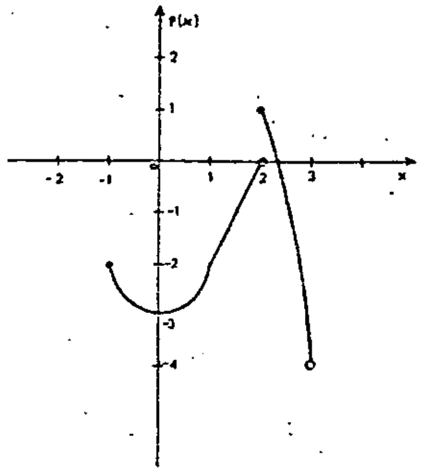


FIG 28

Ejemplo 36 - Analizar la continuidad de la función h (t) indicando los valores para los cuales sea discontinua y los intervalos donde sea continua. Dibuje la gráfica.

$$h(t)=\begin{cases}\cot t & \text{si } -\pi < t \leq -\dfrac{\pi}{2}\\ \operatorname{sen} t + 1 & \text{si } -\dfrac{\pi}{2} < t \leq 0\\ e^{t} & \text{si } 0 < t < +\infty\end{cases}$$

SOLUCION:

Las expresiones que forman la regla de correspondencia, representan algunas de las funciones trascendentes estudiadas en el capítulo I. De acuerdo a lo estudiado, se puede afirmar:

a) La función cotangente es continua, excepto en los puntos en que $t = \pm n\pi$, en donde n es un número entero positivo. Para este problema, la primera expresión no presenta ningún punto de discontinuidad porque su intervalo de definición no incluye a los valores señalados.

b) La función seno siempre es continua.

c) La suma de la función seno más la función constante t = 1, también es continua, de acuerdo con el teorema II.13.

d) La función exponencial $h(t) = e^{t}$ es continua siempre.

e) Los únicos valores dudosos son cuando $t = -\frac{\pi}{2}$ y cuando $t = 0$

Análisis de los puntos dudosos:

a) cuando $t = -\frac{\pi}{2}$

h (t) está definida por medio de la primera expresión y vale:

$$h\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \cot\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0$$

entonces se cumple la primera parte de la definición:

$$\lim_{t \to \frac{-\pi}{2}^{-}} h(t) = \lim_{t \to \frac{-\pi}{2}^{-}} \cot t = 0$$

$$\lim_{t \to \frac{-\pi}{2}^{+}} h(t) = \lim_{t \to \frac{-\pi}{2}^{+}} \operatorname{sen} t + 1 = 0$$

Por lo tanto el límite existe y vale $\lim_{t \to -\frac{\pi}{2}} h(t) = 0$

y la segunda parte se cumple.

La tercera parte se cumple, puesto que:

$$\lim_{t \to \frac{-\pi}{2}} h(t) = h\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0$$

Entonces la función h (t) es continua para $t = \frac{-\pi}{2}$

b) Cuando t = 0.

h (t) no está definida puesto que ningun intervalo de definición de las tres expresiones incluye el valor t = 0. Al no cumplirse la primera parte, la función h (t) no es continua para t = 0.

Es de hacerse notar que el límite en ese punto si existe, como lo puede comprobar el alumno, es decir los límites laterales son iguales.

$$\lim_{t \to 0^-} h(t) = \lim_{t \to 0^+} h(t) = 1$$

Sin embargo, al no poder igualar el valor del límite, que si existe, con el valor de la función en ese punto, por no estar definida, la condición de continuidad no se cumple y la función $h(t)$ es discontinua en ese punto.

Resumiendo:

$h(t)$ es continua para los siguientes intervalos:

$$(-\pi,\ 0)\ y\ (0, +\infty)$$

o bien:

$h(t)$ es discontinua para $t = 0$.

La gráfica de la función puede observarse en la figura 29.

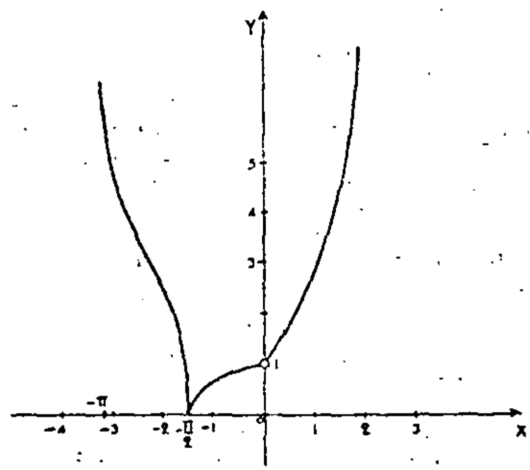


FIG 29

II.8. LIMITES CON APLICACION EN EL CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.

Se tratará en este tema la obtención de los límites de ciertas funciones que tienen posterior aplicación no solamente en este curso, sino en otras materias de matemáticas.

Estos límites no se pueden obtener por sustitución directa, y así su valor tendrá que obtenerse por otro medio.

Ha de quedar claro que los casos que se tratarán no son los únicos de este tipo de límites, pero su obtención se analiza debido a la aplicación que tendrán en temas posteriores.

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x}$

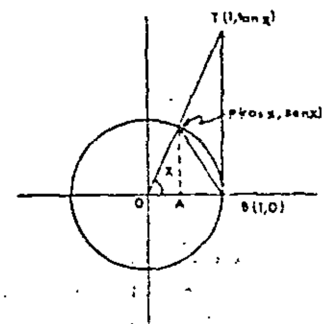


FIG 30

Haciendo $f(x) = \text{sen } x$, se ve que $f(0)$ no está definida, sin embargo se demostrará que su límite existe.

Supóngase $0 < x < \pi/2$

Refiriendose a la figura 30, la cual muestra un círculo de radio unitario cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$ y en el cual se puede distinguir el sector circular BOP cuyo ángulo central, medido en radianes es x, y cuya área está determinada por $\frac{1}{2} r^2 x$; Así si s unidades cuadradas es el área del sector BOP, entonces $S = \frac{1}{2} x$.

También se observan la cuerda BP y la tangente BT en el punto B.

Llámese k_1 al área del triángulo OBP, donde $k_1 = \frac{1}{2}$ sen x, y k_2 al área del triángulo OBT, donde $k_2 = \frac{1}{2}$ tan x.

Por geometría elemental se tiene:

$$k_1 < S < k_2;\ \text{esto es: } \frac{1}{2} \text{sen } x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x. \qquad (A)$$

o sea: $\operatorname{sen} x < x < \tan x$ (B)

y dividiendo (B) entre sen x, queda:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\tan x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

de donde: $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$ (C)

Por otra parte: $1 - \cos x = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 + \cos x}$

o sea: $1 - \cos x = \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cos x}$

Como $1 > \cos x > 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cos x} < \operatorname{sen}^2 x$

por lo tanto $1 - \cos x < \operatorname{sen}^2 x$

De (A) : $\operatorname{sen}^2 x < x^2$; ya que $\operatorname{sen} x > 0$ y $x > 0$

por lo tanto: $1 - \cos x < \operatorname{sen}^2 x < x^2 \Rightarrow 1 - x^2 < \cos x$: llevado a (C)

$$1 - x^2 < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \qquad \text{(D)}$$

Tomando límite cuando $x \to 0$, se tiene:

$$\lim_{x \to 0} (1 - x^2) < \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \lim_{x \to 0} 1$$

$$1 < \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \text{(E)}$$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$; recordando que $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ se tiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right] =$$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$ por lo tanto $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

3) $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} kx}{x} = \lim_{x \to 0} k \frac{\operatorname{sen} kx}{kx} = k \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} kx}{kx} =$$

$$= k \cdot 1 = k \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} kx}{x} = k$$

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \cos x} =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

5) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$$

por lo tanto $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

6) $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x \cdot \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} = 0 . 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x} = 0$$

7) $$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 \cdot x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}$$

Para este límite se presentan los siguientes 3 casos:

a) $n = m$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + bn} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots a_n}{x^n}}{\frac{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n}{x^n}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_n}{x^n}} = \frac{a_0}{b_0}$$

por lo tanto: $\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \frac{a_0}{b_0}$ si $n = m$

b) $n < m$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_0}{x^{m-n}} + \frac{a_1}{x^{m-n+1}} + \dots + \frac{a_n}{x^m}}{\frac{b_0}{1} + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}}$$

$$= \frac{0}{b} = 0$$

por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = 0, \text{si } n < m.$$

c) $n > m$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots \frac{a_n}{x^n}}{\frac{b_0}{x^{n-m}} + \frac{b_1}{x^{n-m+1}} + \dots \frac{b_m}{x^n}}$$

$$= \frac{a_0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 n^{m-1} + \dots + b_m} \to \infty, \text{ si } n > m$$

es decir, el límite no existe si $n > m$.

8) $\lim_{m\to\infty} (1 + \frac{1}{m})^m$

Desarrollando el binomio:

$$(1 + \frac{1}{m})^m = 1^m + \frac{m\, 1^m}{1!} (\frac{1}{m}) + \frac{m(m-1)}{2!} 1^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}$$

$$1^{m-3} (\frac{1}{m})^3 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \frac{m-1}{m} + \frac{1}{3!} (\frac{m-1}{m})(\frac{m-2}{m}) + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} (1 - \frac{1}{m}) + \frac{1}{3!} (1 - \frac{1}{m})(1 - \frac{2}{m}) + \dots$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} (1 + \frac{1}{m})^m = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e$$

por lo tanto $\lim_{m\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^m = e$

9) $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$, tomando $x = \frac{1}{m}$; $x \to 0 \Rightarrow m \to \infty$

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{m\to\infty} (1 + \frac{1}{m})^m = e$$

10) $\lim_{\beta\to 0} \frac{L(1+\beta)}{\beta}$; como $\frac{L(1+\beta)}{\beta} = L(1+\beta)^{1/\beta}$

$$\longrightarrow \lim_{\beta\to 0} \frac{L(1+\beta)}{\beta} = \lim_{\beta\to 0} L(1+\beta)^{1/\beta} = \lim_{\beta\to 0} (1+\beta)^{1/\beta}$$

Del límite 8) se tiene $\lim (1+\beta)^{1/\beta} = e$

por lo tanto: $\lim_{\beta\to 0} \frac{L(1+\beta)}{\beta} = L\ e = 1$

V.4 REGLA DE L'HÔPITAL. FORMAS INDETERMINADAS.

Cuando una función $y = f(x)$, toma una de las siguientes formas para un determinado valor de x;

$$f(x) = \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^{0},\ \infty^{0},\ 1^{\infty},$$

se dice que la función $y = f(x)$ toma una forma indeterminada.

Hasta el momento, en el Capítulo II en el cálculo de algunos límites cuando resultaba $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, se vieron varios casos en los cuales se mostró la forma de como eliminar dicha indeterminación. Es decir, dada una función $y = f(x)$, si para algún valor de la variable independiente, el límite de la función toma una de las dos formas anteriores de indeterminación, ya sea $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, se ha visto como conocer el valor de dicho límite, mediante una transformación o procedimiento algebraico.

Sin embargo, una de las aplicaciones de la derivada, es precisamente poder eliminar dicha indeterminación en una forma más sencilla, a través de la regla de L' Hôpital, la cual se describe a continuación:

Regla de L'Hôpital:

Dada la fracción : $\frac{f(x)}{g(x)}$, si $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$, se presenta en el cociente una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, para $x = a$.

El problema que se plantea consiste en encontrar;

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Para ello, se hará uso del siguiente teorema:

Teorema V. 6 Regla de L'Hôpital

Hipótesis: 1).- Sean $y = f(x)$ y $y = g(x)$, dos funciones derivables en el intervalo abierto I, excepto posiblemente en el número $a \in I$.

2).- Para toda $x \neq a$ en I, $g'(x) \neq 0$.

3). $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

4). $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Tésis: Se cumple que:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

El Teorema anterior es válido si los límites a los que se hace mención son todos límites derechos o límites izquierdos.

Demostración:

Para la demostración del Teorema anterior, se distinguen tres casos:

1). $x \to a^{+}$

2). $x \to a^{-}$

3). $x \to a$

Solución:

Tomando $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $f'(x) = \dfrac{1}{3x^{2/3}}$ $a = 27$, $b = 28$ y aplicando (5) queda:

$$\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{27} + (28 - 27) = \frac{1}{3x_1^{2/3}} \quad ; 27 < x_1 < 28$$

Esto es:

$$\sqrt[3]{28} = 3 + \frac{1}{3x_1^{2/3}} \qquad (a)$$

Pero como $27 < x_1 \longrightarrow \dfrac{1}{3x_1^{2/3}} < \dfrac{1}{3(27)^{2/3}} = \dfrac{1}{3(9)} = \dfrac{1}{27}$

$3 + \dfrac{1}{3x_1^{2/3}} < 3 + \dfrac{1}{27}$, luego por (a)

$$3 < \sqrt[3]{28} < 3 + \frac{1}{27}$$

Para ejemplificar una aplicación del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial expresado en la ecuación (6) se da el siguiente:

Ejemplo 8.-

Demostrar que $\sqrt{101} - \sqrt{100} < \dfrac{1}{20}$

Solución:

Sea $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 100$, $h = 1$, entonces $a + h = 101$

$f(a+h) = \sqrt{101}$, $f(a) = \sqrt{100}$

Como $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(a + h\theta) = f'(100 + \theta) = \dfrac{1}{2\sqrt{100+\theta}}$; $0<\theta<1$

Aplicando (6) : $\sqrt{101} = \sqrt{100} + \dfrac{1}{2\sqrt{100+\theta}}$; $0 < \theta < 1$

Esto es: $\sqrt{101} - \sqrt{100} = \dfrac{1}{2\sqrt{100+\theta}}$

Pero: $\dfrac{1}{2\sqrt{100+\theta}} < \dfrac{1}{2\sqrt{100}} = \dfrac{1}{20}$, luego:

$\sqrt{101} - \sqrt{100} < \dfrac{1}{20}$ Q.D.

Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial para dos funciones:

Este teorema conocido también como Teorema de Cauchy, es fundamental para estudiar la Regla de L'Hopital que se ve en el siguiente tema.

Teorema V.5 De Cauchy.

Hipótesis. Sean $y = f(x)$, $y = g(x)$ dos funciones que cumplen con las condiciones:

1). $y = f(x)$, $y = g(x)$ son continuas en el intervalo $[a, b]$

2). $y = f(x)$, $y = g(x)$ son derivables en el intervalo (a, b)

3). $g'(x) \neq 0$ para todo valor de x en (a, b).

Tésis: Existe un valor x_1 en el intervalo abierto (a, b) para el cual

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - f(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} \; ; a < x_1 < b \qquad (7)$$

Demostración: Conviene primeramente hacer ver que $g(b) \neq g(a)$ para que la expresión (7), tenga sentido.

En efecto evidentemente la función $y = g(x)$ cumple con las condiciones de la Hipótesis del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial en el intervalo $[a; b]$, luego se tiene:

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(x_1); \; a \leq x_1 < b$$

Pero $g'(x) \neq 0 \; \forall \; x \in (a, b) \rightarrow g'(x_1) \neq 0$

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} \neq 0 \rightarrow g(b) - g(a) \neq 0 \rightarrow g(b) \neq g(a)$$

Ahora bien, considérese la función auxiliar:

$$\phi(x) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \left[g(x) - g(a) \right] - \left[f(x) - f(a) \right] \quad (8)$$

Como puede observarse, $\phi(a) = \phi(b) = 0$, entonces la función (8) -

Analizando la demostración del primer caso, se observa que en las condiciones del Teorema no se supone que $y = f(x)$ y $y = g(x)$ están definidos en " a ", por tal motivo, considerando que:

$$\begin{array}{llll} & \text{para } x \neq a & y = f(x) \quad y \quad y = g(x) & \\ y & \text{para } x = a & y = f(a) = 0 \ y \ y = g(a) = 0 & (1) \end{array}$$

Sea " b " el punto extremo derecho del intervalo abierto I dado en las condiciones del Teorema. Puesto que $y = f(x)$ y $y = g(x)$, son ambas derivables en I, excepto posiblemente en " a ", se concluye que $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son ambas derivables en el intervalo $(a, x]$, donde $a < x \leq b$.

Así que, $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son ambas continuas en el intervalo $(a, x]$. Las funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son también continuas a la derecha de " a " ya que:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0 = f(a)$$

$$y \quad \lim_{x \to a^+} g(x) = 0 = g(a) \qquad (2)$$

Por lo tanto, $y = f(x)$, y $y = g(x)$, son continuas en el intervalo cerrado $[a, x]$. Así, $y = f(x)$, y $y = g(x)$ satisfacen las tres condiciones del Teorema de Cauchy para dos funciones en el intervalo $[a, x]$. Luego, se cumple que:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} \qquad (3)$$

donde x_1 es un número tal que $a < x_1 < x$.

Teniendo en cuenta las expresiones (1) y (2), se tiene que:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} \qquad (4)$$

Ya que $a < x_1 < x$, se sigue que cuando $x \to a^+$, $x_1 \to a^+$, por lo tanto:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} = \lim_{x_1 \to a^+} \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} \qquad (5)$$

Pero por las condiciones del teorema, el límite en el lado derecho de la expresión (5), es L. Por consiguiente:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Q.D.

lo cual prueba el caso (1).

La demostración del caso (2), es similar a la anterior, y la demostración del caso (3) está basada en los resultados de los casos (1) y (2) y se dejan al estudiante como ejercicio.

El Teorema V. 6, se conoce con el nombre de Regla de L'Hôpital.

De esta manera, queda visto que la regla es aplicable para la forma $\frac{0}{0}$, asimismo, también resulta aplicable para la forma $\frac{\infty}{\infty}$, sin embargo su demostración, no se presenta en este capítulo, dado que cae fuera del alcance del curso.

En conclusión, cabe mencionar que la regla de L'Hôpital, sólo es aplicable cuando se presentan las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo 9.

Encontrar $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x}$

Solución:

Sustituyendo en la expresión $x = 0$, se obtiene que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = \frac{0}{0};$$

la cuál es una indeterminación que puede eliminarse mediante el empleo de la regla de L'Hôpital, de esta manera considerando la expresión anterior, como un cociente de dos funciones se tiene que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

por lo tanto, aplicando la regla de L'Hôpital resulta:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sec^2 x}$$

finalmente, tomando el límite se obtiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1} = 1$$

por lo que,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

Ejemplo 10 Calcular:

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 + 1}$$

Solución:

Al buscar el límite de F (x) cuando $x \to \infty$, se obtiene:

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

La indeterminación anterior, puede eliminarse empleando para ello la regla de L'Hôpital y considerando a F (x), como un cociente de dos funciones, de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

por lo tanto:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Finalmente:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

En algunas ocasiones, puede suceder que después de haber aplicado la regla de L'Hôpital, a una indeterminación, ésta persista es decir, que se tenga:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0} \text{ ó } \frac{\infty}{\infty}$$

En este caso, la regla de L'Hôpital puede aplicarse tantas veces como sea necesario hasta que se haya eliminado la indeterminación, o sea:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(a)}{g''(a)}$$

donde:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(a)}{g''(a)}$$

el procedimiento anterior se conoce con el nombre de generalización de la regla de L'Hôpital.

Ejemplo 11

Dada la función:

$$F(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{1 - \cos x}$$

encontrar $\lim_{x \to 0} F(x)$

Solución:

Considerando a F (x) como el cociente de dos funciones, es decir,

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{1 - \cos x}$$

tomando el límite de F (x) cuando $x \to 0$, se tiene:

$$\lim_{x \to 0} F(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$$

la cual es una indeterminación en la que resulta aplicable la regla de L'Hôpital, con la que se obtiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}$$

como puede observarse, la indeterminación persiste una vez que se ha aplicado la regla, de esta manera, volviendo a aplicar la regla por segunda vez, resulta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos x}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1-0}{1} = \frac{1}{2}$$

Finalmente, se obtiene que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{1-\cos x} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 12.

Dada la función: $F(x) = \frac{L\,x}{\csc x}$

Hallar: $\lim_{x\to 0} F(x)$

Solución:

Considerando a la función $F(x) = \frac{L\,x}{\csc x}$ como un cociente de dos funciones, es decir:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L\,x}{\csc x}$$

Y tomando límites cuando $x \to 0$, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{L\,x}{\csc x} = \frac{-\infty}{\infty}$$

dado que: $L\,x \to -\infty$ si $x \to 0^+$

y $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \infty$ si $x = 0$

Entonces para eliminar la indeterminación, se hace uso de la regla de L'Hôpital, teniendo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{L\,x}{\csc x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x}$$

como: $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ y $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

se tiene que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{L\,x}{\csc x} = \lim_{x\to 0} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x} = \frac{0}{0}$$

Volviendo a aplicar la regla de L'Hôpital, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\operatorname{sen} x\cos x}{(-x\operatorname{sen} x + \cos x)} = \frac{0}{1} = 0$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to 0} \frac{L\,x}{\csc x} = 0$$

Tal como puede apreciarse, los ejemplos anteriores, muestran la aplicación de la regla de L'Hôpital, en los casos en que únicamente se presentan indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$

DETERMINACION DEL VALOR DE LA FORMA $0\cdot\infty$

Si una función $F(x)$, considerada como el producto de dos funciones, $F(x) = f(x)\cdot g(x)$, toma la forma indeterminada $0\cdot\infty$, para un valor de x, la función dada puede escribirse en la forma:

$$F(x) = f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Esto se hace con el objeto de llegar a obtener una de las formas vistas anteriormente y de esta manera poder aplicar la regla de L'Hôpital.

Ejemplo. 13

Calcular: $\lim_{x\to 0^+} x\,L\,x$

Solución:

Considerando, a $\lim_{x\to 0^+} x\,Lx$ como:

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to 0^+} x\,L\,x$$

donde: $f(x) = x$ y $g(x) = L\,x$

se obtiene que: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,L\,x = 0\cdot\infty$

Por lo tanto, haciendo:

$$\lim_{x\to 0^+} x\,L\,x = \lim_{x\to 0^+} \frac{L\,x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

La forma de la indeterminación anterior, permite el empleo de la regla de L'Hôpital, es decir:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{L\,x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

Por lo cual $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,L\,x = 0$

DETERMINACION DEL VALOR DE LA FORMA $\infty - \infty$

Si una función $F(x)$, considerada como la diferencia de dos funciones $F(x) = f(x) - g(x)$, toma la forma indeterminada $\infty - \infty$, para un valor de "x", en general es posible transformarla en una fracción que tomará la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, mediante algún procedimiento algebraico y de esta manera, es posible aplicar la regla de L'Hôpital, y encontrar un valor determinado.

Ejemplo. 14

Calcular $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{L\,x} \right)$

Solución:

Considerando a $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{L\,x} \right)$ como:

$$\lim_{x\to 1} F(x) = \lim_{x\to 1} \left[f(x) - g(x) \right] = \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{L\,x} \right)$$

y tomando límite cuando $x\to 1$, resulta:

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{L\,x} \right) = \infty - \infty$$

Para eliminar la indeterminación anterior, se requiere de una transformación del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, las cuales, mediante el empleo de la regla de L'Hôpital, pueden eliminarse.

De esta manera, tomando como factor común a $\frac{1}{(x-1)\,L\,x}$, resulta que:

$$\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{L\,x} \right) = \frac{1}{(x-1)\,L\,x} \left(x\,L\,x - [x-1] \right)$$

por lo que,

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{L\,x} \right) = \lim_{x\to 1} \frac{x\,L\,x - (x-1)}{(x-1)\,L\,x} = \frac{0}{0}$$

La indeterminación anterior permite aplicarse la regla de L'Hôpital, con lo que se obtiene:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\,L\,x - (x-1)}{(x-1)\,L\,x} = \lim_{x\to 1} \frac{x\left(\frac{1}{x}\right) + L\,x - 1}{(x-1)\left(\frac{1}{x}\right) + L\,x}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{L\,x}{1 - \frac{1}{x} + L\,x} = \frac{0}{0}$$

Como se observa después de aplicar la regla de L'Hôpital, la indeterminación persiste, por lo que aplicándola nuevamente resulta:

$$\lim_{x\to 1} \frac{L\,x}{1 - \frac{1}{x} + L\,x} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1+x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x(1+x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}$$

por lo tanto:

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{L\,x} \right) = \frac{1}{2}$$

Ejemplo. 15.

Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$

Solución:

Considerando a $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cot x - \frac{1}{2}\right)$ como:

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0}\left[f(x) - g(x)\right] = \lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{2}\right)$$

tomando límites cuando $x\to 0$, resulta:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cot x - \frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{2}\right) = \infty - \infty$$

Puesto que para la indeterminación anterior no existe un procedimiento que permita eliminarla directamente, se debe buscar alguna transformación algebraica mediante la cual sea posible obtener una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, y de esta forma, poder aplicar la regla de L'Hôpital.

Así pues, si se toma como factor común de la expresión anterior a $\frac{\cot x}{x}$ se obtiene:

$$\cot x - \frac{1}{x} = \frac{\cot x}{x}\left(x - \frac{1}{\cot x}\right), \text{ pero como:}$$

$\tan x = \frac{1}{\cot x}$, se tiene que:

$$\cot x - \frac{1}{x} = \frac{1}{x\tan x}\left(x - \tan x\right) = \frac{x - \tan x}{x \tan x}$$

Ahora bien, obteniendo el límite de la última expresión:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x - \tan x}{x\tan x} = \frac{0}{0}$$

Por lo tanto, la indeterminación anterior, permite el empleo de la regla de L'Hôpital; así pues:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \tan x}{x\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \sec^2 x}{\tan x + x\sec^2 x}$$

Pero como: $\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ y $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

Se tiene que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1 - \sec^2 x}{\tan x + \sec^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{x}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen} x\cos x + x}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\cos^2 x - 1}{\operatorname{sen} x\cos x + x}$$

Simplificando la última expresión y utilizando las sustituciones trigonométricas siguientes,

$\cos^2 x - 1 = \operatorname{sen}^2 x$

$2\operatorname{sen} x\cos x = \operatorname{sen} 2x$

se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{\operatorname{sen} x\cos x + x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} 2x + x} = \frac{0}{0}$$

Volviendo a aplicar la regla de L'Hôpital, y tomando el límite se tiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} 2x + x} = \lim_{x\to 0}\frac{4\operatorname{sen} x\cos x}{2\cos 2x + 1} = \frac{0}{3} = 0$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(\cot - \frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{4\operatorname{sen} x\cos x}{2\cos 2x + 1} = 0$$

DETERMINACION DE VALOR DE LAS FORMAS 0^0, ∞^0, 1^∞.

Si una función $\phi(x)$ puede expresarse en la forma $f(x)^{g(x)}$, puede suceder que para algún valor x_0 de x, se obtenga que:

$f(x_0) = 0$, $g(x_c) = 0$ quadando la forma 0^0

o bien:

$f(x_0) = 1$, $g(x_0) =$ quedando la forma 1^∞

o también:

$f(x_0) =$, $g(x_0) = 0$ quedando la forma ∞^0

Entonces, para poder determinar un valor que permita eliminar la indeterminación para cualquiera de las tres formas anteriores, se emplea el procedimiento que a continuación se explica:

Sea la función $\phi(x) = f(x)^{g(x)}$

Tomando logaritmos naturales en ambos miembros de la expresión anterior y aplicando las propiedades de los logaritmos, se obtiene que:

$$L\ \phi(x) = g(x)\ L\ f(x)$$

Por lo que en cada uno de los casos anteriores, al logaritmo natural de la función, $\phi(x)$, tomará la forma indeterminada $0 \cdot \infty$. De esta manera determinando el valor de esta forma por el procedimiento correspondiente visto anteriormente, se obtiene el límite del logaritmo de la función $\phi(x)$.

De tal forma que, si el límite toma el valor " a ", es decir si:

$$\lim_{x \to x_0} L\ \phi(x) = a$$

entonces: $\lim_{x \to x_0} \phi(x) = e^a$

Ejemplo. 16.

Calcular: $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Solución:

Considerando la expresión anterior como:

$$\lim_{x \to \infty} \phi(x) = \lim_{x \to \infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

buscando el límite, se obtiene:

$$\lim_{x \to \infty} \phi(x) = 1$$

Esta indeterminación conduce al empleo del proceso descrito anteriormente para eliminarla, así pues, tomando logaritmos naturales y aplicando las propiedades de los logaritmos se obtiene:

$$\lim_{x \to \infty} L\ \phi(x) = \lim_{x \to \infty} x\ L\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

de donde:

$$\lim_{x \to \infty} x\ L\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \infty \cdot 0$$

El método para resolver dicha indeterminación (inciso V. 4), indica que hay que considerar el límite anterior como el producto de dos funciones tratando de llegar a obtener una indeterminación $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, para poder aplicar la regla de L'Hôpital.

Así pues, siguiendo dicho proceso resulta:

$$\lim_{x \to \infty} x\ L\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{L\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Calculando el límite de la última expresión se obtiene:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

Aplicando ahora la Regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x}}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

buscando el límite resulta:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

De esta manera,

$$\lim_{x \to \infty^+} L\ \phi(x) = \lim_{x \to \infty^+} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

Como el límite que se busca es $\lim \phi(x)$, finalmente queda:

$$\lim_{x \to \infty^+} \phi(x) = \lim_{x \to \infty^+} f(x)^{g(x)} = e^1 = e$$

Ejemplo. 17

Calcular: $\lim\limits_{x \to \infty} x^{e^{-x}}$

Solución:

Considerando a $\lim\limits_{x \to \infty} x^{e^{-x}}$ como:

$$\lim_{x \to \infty} \phi(x) = \lim_{x \to \infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to \infty} x^{e^{-x}} = \infty^{*}$$

tomando logaritmos,

$$\lim_{x \to \infty} L\,\phi(x) = \lim_{x \to \infty} e^{-x}\, L\,x = 0 \cdot \infty$$

Aplicando el método para eliminar dicha indeterminación, se tiene que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L\,x}{\left(\frac{1}{e^{-x}}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{L\,x}{e^{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Utilizando la regla de L'Hôpital y calculando el límite se obtiene,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L\,x}{e^{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x\,e^{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Así, pues, se tiene que:

$$\lim_{x \to \infty} L\,\phi(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{L\,x}{e^{x}} = 0$$

Finalmente,

$$\lim_{x \to \infty} \phi(x) = \lim_{x \to \infty} f(x)^{g(x)} = \lim x^{e^{-x}} = e^{0} = 1$$

Ejemplo. 18

Hallar $\lim\limits_{x \to 0^{+}} x^{\text{sen}\,x}$

Solución:

Si $\lim\limits_{x \to 0^{+}} \phi(x) = \lim\limits_{x \to 0^{+}} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0^{+}} x^{\text{sen}\,x} = 0$

Tomando logaritmos: $L\,x^{\text{sen}\,x} = \text{sen}\,x\,L\,x \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^{+}} L\,x^{\text{sen}\,x} = \lim\limits_{x \to 0^{+}} \text{sen}\,x\,L\,x$

$$\lim_{x \to 0^{+}} L\,\phi(x) = \lim_{x \to 0^{+}} \frac{L\,x}{\frac{1}{\text{sen}\,x}} = -\frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0^{+}} L\,\phi(x) = \lim_{x \to 0^{+}} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\text{sen}^{2} x}} = -\lim_{x \to 0^{+}} \frac{\text{sen}^{2} x}{x \cos x} = \frac{0}{0}$$

Aplicando nuevamente la regla:

$$\lim_{x \to 0^{+}} L\,\phi(x) = -\lim_{x \to 0^{+}} \frac{2\,\text{sen}\,x \cos x}{\cos x - x\,\text{sen}\,x} = -\frac{2(0)}{1-0} = 0$$

Luego $\lim\limits_{x \to 0^{+}} \phi(x) = \lim\limits_{x \to 0^{+}} x^{\text{sen}\,x} = e^{0} = 1$

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ACTUALIZACION EN MATEMATICAS PARA INGENIEROS

EVENTO ORGANIZADO EN COLABORACION DE LA UNIVERSIDAD DE COLIMA A TRAVES DEL CENTRO DE EDUCACION CONTINUA

SUCESIONES Y SERIES

AGOSTO, 1984.

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

II SUCESIONES Y SERIES

VII. 1 SUCESIONES

Con el objeto de introducir el concepto de sucesión analicemos el siguiente caso.

Supóngase que un banco decide pagar el 100% de interés anual. Esto es, si alguien decide invertir un peso en dicho banco, al cabo de un año tendrá.

$$1+1=2 \text{ pesos}$$

Si el banco efectuara la composición de interés semestralmente, al inversionista le iría mejor, pues al cabo de medio año tendría

$$1+\frac{1}{2} \text{ pesos}$$

cantidad sobre la cual se pagaría el otro 50% de interés. Esto es, durante el segundo semestre ganaría

$$(1+\frac{1}{2})\ (\frac{1}{2}) \text{ pesos}$$

por lo que al final del año tendría

$$(1+\frac{1}{2})+(1+\frac{1}{2})(\frac{1}{2})=(1+\frac{1}{2})^2=2.25 \text{ pesos}$$

Ahora bien, si la composición de interés se efectúa tres veces al año, el peso del inversionista se convertirá al final del año en

$$(1+\frac{1}{3})^3 = 2.37 \text{ pesos}$$

y si la composición se efectúa cuatro veces al año, en:

$$(1+\frac{1}{4})^4 = 2:44 \text{ pesos}$$

En general, si se compone la inversión n veces en un año, por cada peso invertido se obtendrá al final del año

$$(1+\frac{1}{n})^n \text{ pesos}$$

El análisis anterior puede resumirse en la siguiente tabla

Número de composiciones en un año.	Cantidad recuperable por cada peso al finalizar el año.
1	$(1+1)^1 = 2$
2	$(1+\frac{1}{2})^2 = 2.25$
3	$(1+\frac{1}{3})^3 = 2.37$
4	$(1+\frac{1}{4})^4 = 2.44$
.	.
.	.
.	.
n	$(1+\frac{1}{n})^n$
.	.
.	.
.	.

Como se ve, hemos establecido una función

$$f:N \to R$$

definida por

$$f(n)=(1+\frac{1}{n})^n$$

que asocia a cada número natural n (número de veces que se compone el interés en un año) un número real $(1+\frac{1}{n})^n$ (cantidad que se recupera anualmente).

A partir de esta función, podemos formar la colección de términos

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots$$

o sea

$$2,\ 2.25,\ 2.37,\ 2.44,\ \ldots,\ (1+\frac{1}{n})^n,\ \ldots$$

a la que llamaremos sucesión infinita y que, en forma abreviada, denotaremos con

$$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$$

Definición.

Una sucesión infinita es una colección ordenada de términos

$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$

formada a partir de una función f cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.

A f(n) se le llama término enésimo de la sucesión.

En forma abreviada, representaremos con $\{f(n)\}$ a la sucesión cuyo término enésimo es f(n).

Ejemplo VII. 1

Las siguientes son sucesiones infinitas:

a) $\{n^2\} = 1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2, \ldots$

b) $\{\frac{3}{n}\} = 3, \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{3}{n}, \ldots$

c) $\{(-1)^{n+1}n\} = 1, -2, 3, -4, \ldots, (-1)^{n+1}n, \ldots$

d) $\{\frac{(2i)^n}{n!}\} = 2i, -2, -\frac{4}{3}i, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{(2i)^n}{n!}, \ldots$

Obsérvese que la definición no excluye la posibilidad de que los términos de la sucesión sean números complejos, como en el caso d) del ejemplo anterior. Empero, en lo que sigue trabajaremos con sucesiones de números reales, a menos que se indique otra cosa.

Volvamos ahora al ejemplo del interés bancario. Como se puede ver en la tabla, a medida que aumenta el número de composiciones de interés en un año, aumenta la cantidad que el inversionista recupera. Sin embargo, podemos preguntarnos: ¿Existe alguna cantidad máxima recuperable por cada peso invertido aunque el número de composiciones por año sea tan grande como se quiera?

Para responder a esto, veamos que sucede con el término $(1+\frac{1}{n})^n$ a medida que n aumenta:

n	$(1+\frac{1}{n})^n$
1	2
2	2.25
3	2.37
.	.
.	.
.	.
24	2.6637
.	.
.	.
.	.
365	2.7146
.	.
.	.
.	.
8,760	2.7181
.	.
.	.
.	.
525,600	2.7182

Vemos que $(1+\frac{1}{n})^n$ crece cada vez más lentamente (por ejemplo al cambiar n de 8,760 a 525,600, sólo cambia la cuarta cifra decimal), lo que nos lleva a pensar que hay un límite para el crecimiento de $(1+\frac{1}{n})^n$. Dicho límite es el número irracional

$$e = 2.7182818284 \ldots$$

Entonces, la cantidad recuperable por cada peso invertido nunca será mayor que "e" pesos, por grande que sea el número de composiciones efectuadas anualmente.

La discusión anterior se resume en la expresión

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$$

y por ello decimos que la sucesión $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ tiene límite (el número e), lo cual representamos mediante

$$\lim \{(1+\frac{1}{n})^n\}=e$$

Límite de una sucesión.

En general, diremos que una sucesión $\{f(n)\}$ tiene límite si, a medida que n crece, f(n) se acerca a un cierto valor fijo L. Esto es:

si $n \to \infty$, entonces $f(n) \to L$

En este caso decimos que la sucesión $\{f(n)\}$ es convergente (converge a L).

Este concepto puede expresarse formalmente en la siguiente

> Definición.
>
> Una sucesión $\{f(n)\}$ tiene límite L si, para todo número $\xi > 0$, por pequeño que sea, existe un número M tal que
>
> $|f(n)-L| < \xi$ para todo $n > M$
>
> Simbolizamos esto mediante
>
> $$\lim_{n\to\infty} f(n)=L$$

Ejemplo VII. 2.

Demostrar que la sucesión

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n} \ldots$$

tiene límite L=0.

Requerimos para ello demostrar que siendo $\xi > 0$ existe un M tal que

$$|\frac{1}{n}-0|<\xi \qquad \forall n>M$$

Como $|\frac{1}{n}-0|=|\frac{1}{n}|=\frac{1}{n}$ por ser n siempre positivo, tenemos

$$\frac{1}{n} < \xi$$

de donde

$$n>\frac{1}{\xi}$$

por tanto, $\forall\xi>0$ existe un número $M=\frac{1}{\xi}$ tal que

$$|\frac{1}{n}-0| < \epsilon \qquad \forall n>M.$$

quedando demostrado.

- -

No todas las sucesiones son convergentes. Por ejemplo, la sucesión

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2, \ldots$$

no tiene límite ya que

si $n\to\infty$, entonces $n^2\to\infty$.

Para calcular el límite de una sucesión convergente, pueden emplearse los teoremas básicos sobre límites que el estudiante ya conoce para el caso de funciones. Por ejemplo, para calcular el límite de la sucesión

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \ldots, \frac{n+1}{3n}, \ldots$$

podemos proceder de la siguiente manera:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{3} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 3} = \frac{1+0}{3} = \frac{1}{3}$$

Como ejercicio adicional demostraremos, en base a la definición, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3}$$

En efecto, como

$$\left|\frac{n+1}{3n}-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{n+1-n}{3n}\right| = \left|\frac{1}{3n}\right| = \frac{1}{3n}$$

se cumplirá que

$$\left|\frac{n+1}{3n}-\frac{1}{3}\right| < \xi$$

si y sólo si

$$\frac{1}{3n} < \xi$$

es decir si

$$n > \frac{1}{3\xi}$$

por lo que, $\forall \xi > 0$ existe un número $M = \frac{1}{3\xi}$ tal que

$$\left|\frac{n+1}{3n}-\frac{1}{3}\right| < \xi \qquad \forall n > M.$$

- -

Sucesiones monótonas.

Si analizamos la sucesión

$$\{(n-1)!\} = 1,\ 1,\ 2,\ 6,\ 24,\ \ldots,\ (n-1)!,\ \ldots$$

vemos que cada término es mayor o igual que el anterior, por lo que diremos que la sucesión es creciente. Por el contrario, si en una sucesión cada término es menor o igual que el anterior, diremos que la sucesión es decreciente, como en el siguiente caso:

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

Definición.

Sea $\{f(n)\}$ una sucesión:

1) Si $f(n+1) \geq f(n)$, $\forall n \in N$, la sucesión es creciente.

2) Si $f(n+1) \leq f(n)$, $\forall n \in N$, la sucesión es decreciente.

A una sucesión creciente o decreciente se le llama monótona.

Ejemplo VII. 3.

a) La sucesión del problema de interés bancario

$$2,\ 2.25,\ 2.37,\ 2.44,\ \ldots$$

es una sucesión monótona creciente.

b) No siempre es posible definir una sucesión mediante una sola regla de correspondencia. Por ejemplo, la sucesión

$$1,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{7},\ \ldots$$

se puede formar a partir de las reglas:

$$f(2n-1) = \frac{1}{2n-1} \quad \text{y} \quad f(2n) = \frac{1}{2n-1}$$

Esta es una sucesión monótona decreciente.

c) La sucesión

$$\left\{(-1)^n \left(\frac{1}{n}\right)\right\} = -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{5},\ \ldots$$

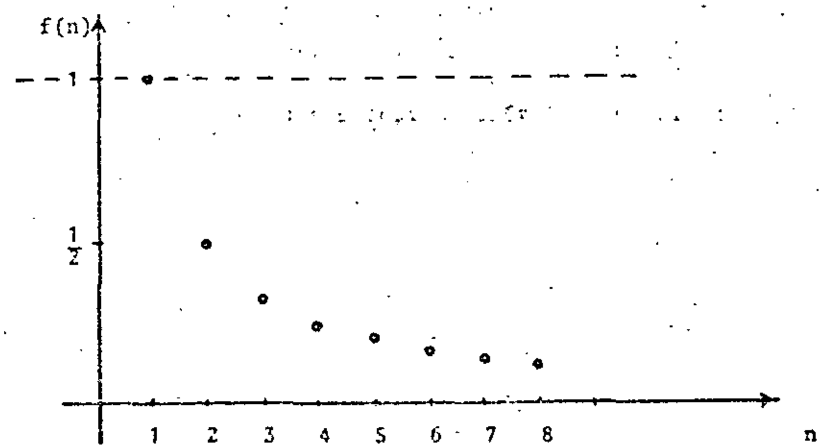
no es monótona ya que no es creciente y tampoco decreciente.

- -

Para la sucesión

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

podemos construir la siguiente gráfica



donde puede apreciarse claramente que todo término de la sucesión es menor o igual que 1, por lo que diremos que 1 es una cota superior de la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$.

Por otra parte, como todo término de la sucesión es mayor que cero, este número es una cota inferior de $\{\frac{1}{n}\}$.

Definición.

1) El número real p es una cota superior de la sucesión $\{f(n)\}$ si:

$$f(n) \le p, \quad \forall n \in N.$$

2) El número real q es una cota inferior de la sucesión $\{f(n)\}$ si:

$$f(n) \ge q, \quad \forall n \in N.$$

Una sucesión se dice acotada si tiene una cota inferior y una cota superior.

De acuerdo con esto, la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$, que como vimos es monótona, es además acotada.

Teorema VII. 1.

Toda sucesión monótona acotada tiene límite (es convergente).

Demostración.

Probaremos el teorema para sucesiones monótonas crecientes:

Sea $\{f(n)\}$ una sucesión acotada. Como $\{f(n)\}$ admite una cota superior, por el axioma del supremo tiene una mínima cota superior a la que llamaremos L. Si $\xi>0$, $L-\xi$ no puede ser una cota superior de $\{f(n)\}$; por tanto algún término de la sucesión es mayor que $L-\xi$, o sea

$$f(k)>L-\xi \quad \text{para algún } k\in N \quad \ldots\ldots (1)$$

Como $\{f(n)\}$ es creciente:

$$f(n) \ge f(k), \quad \forall n>k$$

y, por (1):

$$f(n) > L-\xi \quad \forall n>k \quad \ldots\ldots (2)$$

Por otra parte, como L es una cota superior

$$f(n) \le L \quad \forall n\in N \quad \ldots\ldots (3)$$

de (2) y (3)

$$L-\xi < f(n) \le L \quad \forall n>k$$

restando L

$$-\xi < f(n)-L \le 0 \quad \forall n>k$$

lo que implica

$$|f(n)-L| < \xi \quad \forall n>k$$

con lo que hemos demostrado la existencia del límite, que es precisamente la mínima cota superior L.

La demostración es similar si $\{f(n)\}$ es decreciente.

- -

Ejemplo VII. 4

a) Ya hemos visto que $\{\frac{1}{n}\}$ es monótona y acotada, por lo que según el teorema anterior tiene límite. Esto concuerda con lo obtenido en el ejemplo VII.2, donde se demostró que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 .$$

b) Consideremos la sucesión

$$\frac{-1}{\lfloor 2}, \frac{-1}{\lfloor 3}, \frac{-1}{\lfloor 4}, \ldots, \frac{-1}{\lfloor(n+1)}, \ldots$$

Esta es una sucesión monótona creciente ya que $f(n+1)>f(n)$ $\forall n\in N$, como se demuestra a continuación:

$$\frac{-1}{L(n+2)} > \frac{-1}{L(n+1)}$$

$$-L(n+1) > -L(n+2)$$

$L(n+1) < L(n+2)$ lo cual es evidente.

Por otra parte, la sucesión es acotada ya que

1) $\frac{-1}{L2}$ es una cota inferior, pues por ser creciente

$f(n) \geq \frac{-1}{L2} \quad \forall n \in N$

2) Como $L(n+1) > 0 \quad \forall n \in N$, entonces $\frac{-1}{L(n+1)}$ es siempre negativo y cualquier número positivo es una cota superior de la sucesión $\{\frac{-1}{L(n+1)}\}$.

En base a lo anterior, del teorema VII. 1 se concluye que la sucesión tiene límite.

Se deja al estudiante la obtención de dicho límite.

- -

VII. 2 SERIES.

Una forma interesante de introducir el concepto de serie nos la proporciona la siguiente paradoja, debida al filósofo griego Zenón de Elea (siglo V A.C.):

"Un corredor no puede alcanzar nunca la meta porque siempre ha de recorrer la mitad de una distancia antes de recorrer la distancia total. Es decir, cuando haya recorrido la primera mitad, tendrá que recorrer la otra mitad. Cuando haya recorrido la mitad de esta última, le quedará todavía la cuarta parte; cuando haya recorrido la mitad de esta cuarta parte, le quedará la octava parte, y así sucesivamente."

Analicemos con más detalle esta situación:

Si suponemos que el corredor se desplaza a velocidad constante y le lleva t segundos recorrer la primera mitad del trayecto, el tiempo en que recorre la distancia total será

$$t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} + \ldots + \frac{t}{2^{n-1}} + \ldots \qquad (1)$$

La idea de la paradoja es que la suma de un número infinito de términos, como (1), no puede ser un número finito, por lo que el corredor no podría alcanzar la meta en un tiempo finito. Sin embargo, sabemos que si el corredor se desplaza a velocidad constante y emplea t segundos en recorrer la primera mitad, llegará a la meta en 2t segundos. Podemos por ello suponer que:

$$t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} + \ldots + \frac{t}{2^{n-1}} + \ldots = 2t \qquad (2)$$

con lo que hemos asignado a la suma infinita (1), que llamaremos serie, un valor finito 2t, esperando que la igualdad (2) sea válida -

en algún sentido.

La expresión (2) puede representarse como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{2^{n-1}} = 2t \qquad (3)$$

Definición.

Una serie es la suma de un número infinito de términos:

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$

Obsérvese que los términos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ constituyen una sucesión.

Otro ejemplo de serie lo tenemos al interpretar la expresión decimal del número racional $\frac{1}{3}$:

0.333 ...

cuyo significado es

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots + \frac{3}{10^n} + \ldots \qquad (4)$$

por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{1}{3} \qquad (5)$$

No siempre es posible asignar a una serie un valor finito como lo hicimos en (3) y (5). Por ejemplo, la serie

$$1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2 + \ldots \qquad (6)$$

carece de un valor finito como suma total.

A las series (1) y (4) se les llama convergentes, mientras que (6) se dice que es divergente.

Antes de establecer una definición formal de convergencia y divergencia de series, volvamos al análisis de la paradoja de Zenón.

A partir de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{2^{n-1}} = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} + \ldots + \frac{t}{2^{n-1}} + \ldots \qquad (1)$$

podemos formar la sucesión de sumas parciales

$$S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots, S_n, \ldots$$

donde

$$S_1 = t$$

$$S_2 = t + \frac{t}{2}$$

$$S_3 = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4}$$

$$\vdots$$

$$S_n = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \ldots + \frac{t}{2^{n-1}}$$

Vemos que el término general S_n de la sucesión de sumas parciales, es la suma de los n primeros términos de la serie (1), y en el límite:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} S_n$$

para calcular este límite observemos que

$$S_1 = t = (2-1)\,t$$

$$S_2 = t + \frac{t}{2} = (2 - \frac{1}{2})t$$

$$S_3 = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} = (2 - \frac{1}{4})t$$

y, como puede demostrarse por inducción matemática, el término general de la sucesión de sumas parciales es:

$$S_n = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \ldots + \frac{t}{2^{n-1}} = (2 - \frac{1}{2^{n-1}})t$$

por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (2-\frac{1}{2^{n-1}})t = 2t$$

Con esto vemos que la expresión (2)

$$t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} + \ldots + \frac{t}{2^{n-1}} + \ldots = 2t$$

es válida si interpretamos la suma del número infinito de términos.

$$t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} + \ldots + \frac{t}{2^{n-1}} + \ldots$$

como el límite de la sucesión

$$\{t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \ldots + \frac{t}{2^{n-1}}\}$$

Definición.

Sea

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$$

una serie, y sea $\{S_n\}$ una sucesión (llamada de sumas parciales) tal que

$$S_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n.$$

Si existe un número real S tal que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

se dice que la serie es convergente y tiene suma S, en cuyo caso se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

Una serie no convergente se dice que es divergente.

Nótese que la "suma" de una serie convergente es el límite de una sucesión de sumas parciales y no se puede obtener mediante una suma ordinaria de términos, puesto que éstos son un número infinito.

Para las series convergentes, el símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

se utiliza para indicar tanto la serie como su suma, a pesar de ser dos conceptos distintos (la suma representa un número y por tanto no puede ser convergente ni divergente).

Ejemplo VII. 5.

a) Para el caso de la serie (4):

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots + \frac{3}{10^n} + \ldots$$

se tiene que

$$S_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots + \frac{3}{10^n} = \frac{1}{3}(1-\frac{1}{10^n})$$

(Demuéstrelo)

Como

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}(1-\frac{1}{10^n}) = \frac{1}{3}$$

la serie converge y su suma es $\frac{1}{3}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{1}{3}$$

b) Para el caso de la serie (6):

$$1+4+9+\ldots+n^2+\ldots$$

el término general de la sucesión de sumas parciales es

$$S_n = 1+4+9+\ldots+n^2 = \frac{n}{6}(2n^2+3n+1)$$

(Demuéstrelo)

En este caso, el límite de $\{S_n\}$ no existe, ya que a medida que n crece, $\frac{n}{6}(2n^2+3n+1)$ tiende a infinito. En ocasiones es to se simboliza mediante

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{6}(2n^2+3n+1)=\infty$$

En consecuencia, la serie (6) es divergente.

- -

En los casos anteriores, hemos obtenido una expresión simplificada para la suma de los primeros n términos de la serie, que permite calcular con facilidad el límite. Sin embargo, esto no es siempre posible. De hecho, en la mayoría de los casos no existe una expresión simplificada de S_n, por lo que estudiaremos otros métodos para determinar la convergencia o divergencia de una serie.

Condición necesaria para la convergencia de una serie.

Observemos que en las series convergentes

$$t+\frac{t}{2}+\frac{t}{4}+\frac{t}{8}+\ldots+\frac{t}{2^{n-1}} \qquad (1)$$

y

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\ldots+\frac{3}{10^n}+\ldots \qquad (4)$$

el término general tiende a cero, a medida que n crece; es decir:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t}{2^{n-1}}=0 \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{3}{10^n}=0$$

Este hecho se presenta siempre que una serie es convergente.

Teorema VII. 2

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0$$

Demostración.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente y sea $\{S_n\}$ la sucesión de sumas parciales.

Como la serie es convergente

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n) = L \qquad (1)$$

y también

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}) = L \qquad (2)$$

restando (2) de (1)

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n) - \lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}) = 0$$

por las propiedades de los límites

$$\lim_{n\to\infty}((a_1+a_2+\ldots+a_n)-(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}))=0$$

por tanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Este teorema establece una condición necesaria para la convergencia de una serie. Sin embargo, dicha condición no es suficiente; en otras palabras, el hecho de que $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ no implica que la serie sea convergente.

La verdadera utilidad del teorema VII. 2 es que permite establecer el siguiente:

Corolario (prueba de divergencia)

Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Ejemplo VII. 6.

a) Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n+1}$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1} = 2 \neq 0$$

por lo que la serie es divergente.

b) Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es claro que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

En este caso el teorema VII. 2 no nos permite decidir si la serie converge o diverge.

c) En el caso de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

se tiene un caso análogo al b).

Posteriormente demostraremos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, llamada serie armónica, es divergente; mientras que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.

Propiedades de las series.

Las series tienen ciertas propiedades que vale la pena mencionar antes de estudiar diferentes criterios que nos faciliten el trabajo de establecer el carácter de convergencia o divergencia de una serie:

1) El carácter de convergencia o divergencia de una serie no cambia si todos sus términos se multiplican por una constante diferente de cero.
2) El carácter de convergencia o divergencia de una serie no cambia si se agrega o suprime un número finito de términos.
3) El carácter de convergencia o divergencia de una serie de términos POSITIVOS no cambia si sus términos se agrupan de cualquier manera.
4) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series CONVERGENTES, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n+\beta b_n)$ es también convergente $\forall \alpha,\beta \in R$ y su suma está dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n+\beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Se deja al estudiante la demostración de las propiedades 1) a 3). Para una demostración de la propiedad 4) puede consultarse la referencia 1 pág. 471.

VII. 3 CRITERIOS DE CONVERGENCIA.

Podemos demostrar que la serie armónica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

es divergente, agrupando sus términos en la siguiente forma:

$$(1)+(\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8})+(\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{10}+\ldots+\tfrac{1}{16})+\ldots \qquad (1)$$

Observemos que cada uno de los términos entre paréntesis de esta serie, es mayor o igual que los de la serie divergente:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots \qquad (2)$$

ya que

$$1 \geq 1$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} \geq \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16} \geq \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$

En consecuencia, la suma de los términos de (1) será mayor que la suma de los términos de (2). Como la suma de los términos de (2) tiende a infinito cuando $n\to\infty$ (por ser esta serie divergente), entonces, la suma de los términos de (1) también tiende a infinito, por lo que la serie armónica es divergente.

El método aquí empleado, conocido como criterio de comparación, puede formalizarse como sigue:

Criterio de comparación.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie términos positivos ($a_n \geq 0$, $\forall n \in N$) cuyo carácter queremos conocer:

I) Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es una serie CONVERGENTE de términos positivos y $a_n \leq c_n$, $\forall n \in N$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es CONVERGENTE.

II) Si $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ es una serie DIVERGENTE de términos positivos y $a_n \geq d_n$, $\forall n \in N$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es DIVERGENTE.

Demostración.

I) Sea: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n$

el término general de la sucesión de sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, y sea:

$$Z_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$$

el de $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Como $a_n \leq c_n$, $\forall n \in N$, entonces:

$$S_n \leq Z_n$$

Además, por ser $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ convergente, existe el límite de (Z_n) al que llamaremos L:

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = L$$

En consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} S_n \leq L$$

Por otra parte, como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos positivos

$$S_n > 0$$

Por tanto existe un número real S entre cero y L tal que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

por lo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

II) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ una serie divergente

y sea $a_n \geq d_n$, $\forall n \epsilon N$.

Si suponemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente, por la parte I) del criterio de comparación se tiene que

$a_n \geq d_n \quad \forall n \epsilon N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} d_n$ es convergente, lo cual contradice la hipótesis.

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Es claro que, para poder utilizar este criterio se requiere comparar con series de carácter conocido. Entre las series que más se emplean para comparar están las series geométricas y las series "p", que trataremos a continuación.

Serie geométrica.

Una serie geométrica es de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$$

Vemos que cada término es igual al anterior multiplicado por un factor fijo q llamado razón. La convergencia o divergencia de este tipo de series depende del valor de la razón q, como veremos:

La suma de los n primeros términos de la serie es:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} \qquad (1)$$

Multiplicando esta expresión por q:

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n \qquad (2)$$

Restando (2) de (1):

$$S_n(1-q) = a - aq^n$$

de donde

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

Este límite depende del valor de q y se pueden destacar tres casos:

a) Si $|q|<1$, entonces: $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$$

y en consecuencia la serie es convergente y su suma es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$$

b) Si $|q|>1$, entonces: cuando $n\to\infty$, $q^n\to\infty$ ó $q^n\to-\infty$, por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

no existe y, en consecuencia, la serie es divergente.

c) Si $|q|=1$, entonces $q=1$ ó $q=-1$.

Para $q=1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + a + a + \ldots$$

y la serie es divergente.

Para $q=-1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a - a + a - a + \ldots$$

y la serie es también divergente.

(Demuéstrelo)

Resumiendo:

La serie geométrica : $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ converge si y sólo si $\lvert q\rvert<1$.

Ejemplo VII. 7.

a) Para determinar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n-1}+1} = \frac{4}{2} + \frac{4}{4} + \frac{4}{10} + \frac{4}{28} + \ldots \qquad (1)$$

podemos emplear la serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \ldots \qquad (2)$$

cuya razón es $q = \frac{1}{3}$, por lo que es convergente.

Comparando estas dos series vemos que

$$\frac{4}{2} < 4$$

$$\frac{4}{4} < \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{10} < \frac{4}{9}$$

$$\vdots$$

y en general: $\dfrac{4}{3^{n-1}+1} < \dfrac{4}{3^{n-1}}$

Empleando el criterio de comparación, se concluye que la serie (1) es convergente.

b) Para determinar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n}{3^n} \qquad (1)$$

veamos si las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n} \qquad (2)$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \qquad (3)$$

son convergentes.

Para analizar la serie (2), utilicemos la serie geométrica convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Por las propiedades de las series convergentes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{3}{5} \sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{3}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n}$$

de aquí que la serie (2) es convergente.(propiedad 1) de las series).

Para la serie (3), utilicemos la serie geométrica convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

Como esta serie es convergente, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \qquad (4)$$

también es convergente.

Comparando (3) con (4):

$$\frac{n}{3^n} < \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \forall n \in N \qquad \text{(Demuéstrelo)}$$

Por el criterio de comparación, la serie (3) también es convergente.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ son series convergentes, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n}{3^n}$$

es convergente (propiedad 4)).

- -

Serie P.

Una serie p es de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

La convergencia o divergencia de este tipo de series depende del valor de p. Podemos considerar tres casos:

a) Si p>1, agrupemos los términos como sigue:

$$1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \dots \qquad (1)$$

y consideremos la serie

$$1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \dots$$

que es una serie geométrica con a=1 y $q = \frac{2}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}$. Como p>1,

q es un número positivo menor que 1 y la serie es convergente. Los términos de esta serie pueden ser escritos en la forma

$$1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right) + \dots \qquad (2)$$

Vemos que, cada uno de los términos entre paréntesis de la serie (1) es menor o igual que su correspondiente de la serie convergente (2), por lo que, del criterio de comparación se sigue que (1) es convergente.

b) Si p=1, la serie p es la serie armónica y, como vimos, es divergente.

c) Si p<1, cada término de la serie p es mayor o igual que su correspondiente de la serie armónica, y por el criterio de comparación la serie p es divergente.

Resumiendo:

$$\boxed{\text{La serie p: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge si y sólo si } p>1.}$$

Ejemplo VII. 8.

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ del ejemplo VII. 6 es una serie p, con p=2, y por tanto convergente.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$

es una serie p divergente (p= 1/2).

b) Analicemos el caso de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots \qquad (1)$$

comparándola con la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots \qquad (2)$$

Observamos que

$$1 = 1$$
$$\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{6} > \frac{1}{9}$$
$$\frac{1}{24} < \frac{1}{16}$$
$$\frac{1}{120} < \frac{1}{25}$$

y se puede demostrar por inducción matemática que:

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in N \ \text{ y } \ n \geq 4$$

Se dice por esto que la serie (2) "domina" a la serie (1) a partir de n=4. Vale la pena entonces observar que:

Basta con que las desigualdades

$$a_n \leq c_n$$
y
$$a_n \geq d_n$$

del criterio de comparación se cumplan a partir de un cierto valor de n, para que dicho criterio siga siendo aplicable (ya que podemos suprimir un número finito de términos en las series sin alterar su carácter de convergencia o divergencia).

Por ello, podemos concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es una serie convergente.

Otra forma de demostrarlo es la siguiente:

Multiplicando por 3 la serie (2), obtenemos la serie convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2} = 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{9} + \frac{3}{16} + \frac{3}{25} + \ldots \qquad (3)$$

Comparando ahora las series (1) y (3), vemos que:

$$1 < 3$$
$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$
$$\frac{1}{6} < \frac{3}{9}$$
$$\frac{1}{24} < \frac{3}{16}$$
$$\frac{1}{120} < \frac{3}{25}$$

y, como se puede demostrar por inducción matemática:

$$\frac{1}{n!} < \frac{3}{n^2}, \quad \forall n \in N$$

Podemos entonces concluir, basados en el criterio de comparación tal como se enunció originalmente, que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es convergente.

- -

En ocasiones, el criterio de comparación es de difícil aplicación práctica (dicha dificultad estriba en encontrar la serie que servirá de comparación). Por esto, introduciremos otro criterio conocido como criterio del cociente o de d'Alembert.

Criterio de d'Alembert.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos.

Calculemos: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

I) Si $L<1$, la serie es convergente.

II) Si $L>1$ ó $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \infty$ cuando $n\to\infty$, la serie es divergente.

III) Si $L=1$, el criterio no decide.

Demostración.

I) Si $L<1$, elijamos un número real q tal que

$$L<q<1. \qquad (1)$$

De acuerdo con la definición de límite, existe un $m\in N$ tal que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \qquad \forall n>m.$$

por lo que

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} < q$$

$$\frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} < q$$

$$\frac{a_{m+3}}{a_{m+2}} < q$$

$$\vdots$$

De donde:

$$a_{m+1} < a_m\, q$$

$$a_{m+2} < a_{m+1}\, q < a_m\, q^2$$

$$a_{m+3} < a_{m+2}\, q < a_{m+1} q^2 < a_m\, q^3$$

En consecuencia, a partir del término a_{m+1}, los términos de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ son menores que los correspondientes términos de la serie geométrica.

$$a_m\, q + a_m\, q^2 + a_m\, q^3 + \ldots \qquad (2)$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos positivos, $L\geq 0$ y de (1): $0<q<1$, y la serie (2) es convergente.

Por el criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

II) Si $L>1$ ó $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \infty$ cuando $n\to\infty$, existe un $m\in N$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \qquad \forall n\geq m.$$

es decir:

$$a_{n+1} > a_n, \qquad \forall n\geq m.$$

Es claro entonces que a_n no tiende a cero cuando $n\to\infty$, por lo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

III) Si aplicamos el criterio a la serie p tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$$

para cualquier valor de p.

Pero ya hemos demostrado que cuando $p>1$ la serie es convergente y cuando $p\leq 1$ divergente, quedando comprobado que L puede ser igual a uno tanto para series convergentes como para divergentes, por lo que en este caso el criterio no decide.

Ejemplo VII. 9.

a) Aplicando el criterio de d'Alembert a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ se obtiene:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{n!(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

y la serie es convergente.

b) Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n(n+1)n!}{n!\ (n+1)n^n} = (1+\frac{1}{n})^n$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$$

y la serie es divergente.

c) Con ayuda del criterio de d'Alembert, resulta sencillo demostrar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n}{3^n}$$

del ejemplo VII. 7.

En efecto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5+(n+1)}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{5+n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n+6}{n+5}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{n+6}{n+5} = \frac{1}{3}$$

por lo que la serie converge.

- -

Series alternadas.

Los criterios de comparación y de d'Alembert no son aplicables a series tales como

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

que llamaremos series de signos alternados o, simplemente, series alternadas.

En general, una serie alternada es de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

donde $a_n > 0$, $\forall n \in N$.

Existe un criterio que establece una condición suficiente para la convergencia de este tipo de series, llamado criterio de Leibniz.

Criterio de Leibniz.

La serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

donde $a_n > 0$ $\forall n \in N$, es convergente si:

$$a_n > a_{n+1}, \quad \forall n \in N \quad y \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Demostración

Sea la serie alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

Si n es un número par, el término general de la sucesión de sumas parciales:

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{n-1} - a_n$$

puede agruparse en la siguiente forma:

$S_n = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{n-1} - a_n)$

Como $a_n > a_{n+1}$, los términos entre paréntesis son todos positivos y la sucesión $\{S_n\}$ es creciente.

Por otra parte, si agrupamos S_n en la forma:

$S_n = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{n-2} - a_{n-1}) - a_n$

por el mismo razonamiento vemos que $S_n < a_1$, y la sucesión es acotada.

Como $\{S_n\}$ es monótona y acotada, tiene límite, llamémosle L:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L \qquad \text{(si n es par).}$$

Nos resta demostrar que tomando un número impar de términos, el límite de la sucesión de sumas parciales es también L.

En efecto:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \qquad \text{(si n es par)}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

Por hipótesis: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$,

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = L + 0 = L$$

Hemos demostrado que la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ tiene límite, por lo que dicha serie es convergente.

Ejemplo VII. 10

a) Mediante el criterio de Leibniz se puede demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots$$

es convergente, ya que:

1) $1 > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \frac{1}{16} > \cdots$

o bien: $\dfrac{1}{n^2} > \dfrac{1}{(n+1)^2} \quad \forall n \in N$

por lo que: $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in N$

y 2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

b) Para la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

se tiene que

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in N$$

y como:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

por el criterio de Leibniz la serie es convergente.

En el ejemplo anterior se demostró que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

es convergente. Sin embargo, la serie que se obtiene reemplazando cada término por su valor absoluto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

es divergente (serie armónica).

Se dice por ello que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ es una serie condicionalmente convergente.

Por otra parte, tanto la serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots$$

como la que se obtiene reemplazando cada término por su valor absoluto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$$

son series convergentes, por lo que se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ es una serie absolutamente convergente.

Estos conceptos no sólo son aplicables a series alternadas, sino también a series de signos cualesquiera. En lo que sigue, cuando hablemos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se entenderá que a_n puede tener cualquier signo, y representaremos mediante $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ a la serie que se forma reemplazando los términos de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ por sus respectivos valores absolutos.

Teorema VII. 3.
Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n\rvert$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también es convergente.

Demostración.

Sean $S_n = a_1+a_2+\ldots+a_n$

y $Z_n = |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$

Entonces:

$$S_n+Z_n = (a_1+|a_1|)+(a_2+|a_2|)+\ldots+(a_n+|a_n|)$$

De aquí que, como $a_n+|a_n|\geq 0$, $\forall n\in N$, la sucesión $\{S_n+Z_n\}$ es monótona creciente y tiene cota inferior (cualquier número negativo).

Por otra parte, como $a_n\leq|a_n|$ implica que $a_n+|a_n|\leq 2|a_n|$, podemos escribir

$$S_n+Z_n \leq 2|a_1|+2|a_2|+\ldots+2|a_n|,$$

y como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, la sucesión $\{S_n+Z_n\}$ tiene una cota superior $(2\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|)$.

En consecuencia la sucesión $\{S_n+Z_n\}$ es monótona y acotada, por lo que existe el límite:

$$\lim_{n\to\infty} (S_n+Z_n)$$

Además, por hipótesis, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente y existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} Z_n$$

De aquí que, por propiedades de los límites

$$\lim_{n\to\infty} (S_n+Z_n) - \lim_{n\to\infty} Z_n = \lim_{n\to\infty} (S_n+Z_n-Z_n) = \lim_{n\to\infty} S_n$$

también existe, lo que demuestra que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Ejemplo VII. 11.

Podemos determinar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n\sqrt{n}} = 0.54 - 0.15 - 0.19 - 0.08 + 0.03 + \ldots$$

(donde n está en radianes), analizando la serie de valores absolutos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(n)}{n\sqrt{n}} \right|$$

Dado que $|\cos(n)| \leq 1$, $\forall n \epsilon N$, es claro que

$$\left| \frac{\cos(n)}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}, \quad \forall n \epsilon N \qquad (1)$$

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

es una serie p, con p = 3/2, converge.

De la expresión (1), por el criterio de comparación concluímos que

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(n)}{n\sqrt{n}} \right|$ es convergente, y, por el teorema VII. 3

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n\sqrt{n}}$ es también convergente.

Definición.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se llama absolutamente convergente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Obsérvese que, según el teorema VII. 3, toda serie absolutamente convergente es convergente.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n\sqrt{n}}$, del ejemplo anterior, es absolutamente convergente, al igual que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$.

Definición.

Una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para la cual $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, se llama condicionalmente convergente.

Son ejemplos de series condicionalmente convergentes la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ ya estudiada, y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{\sqrt{n+1}}$, como el estudiante puede comprobar.

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ACTUALIZACION DE MATEMATICAS PARA INGENIEROS

EVENTO ORGANIZADO EN COLABORACION DE LA UNIVERSIDAD DE COLIMA A TRAVES DEL CENTRO DE EDUCACION CONTINUA

CALCULO INTEGRAL

AGOSTO' 1984.

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

III INTEGRAL DE RIEMANN

INTEGRAL DEFINIDA E INTEGRAL INDEFINIDA.

OBJETIVOS.

OBJETIVO GENERAL:

El alumno comprenderá los fundamentos del cálculo integral de funciones de una sola variable independiente.

Al terminar este capítulo, el alumno será capaz de:

1. Definir partición de un intervalo.
* 2. Definir norma de una partición.
* 3. Determinar una función escalonada que aproxime los valores de una función continua en un intervalo dado.
* 4. Dada una función escalonada en un intervalo, calcular el valor de la suma de Riemann.
5. Calcular el área bajo la curva, empleando series del tipo: Σm, Σm^2, Σm^3
* 6. Explicar el concepto de Integral Definida, mediante la suma de Riemann, de una función continua de una variable independiente.
7. Explicar las condiciones que hacen una función integrable en un intervalo.
* 8. Explicar, mediante una figura, la interpretación geométrica de la Integral Definida de una función continua.
9. Explicar tres o más aplicaciones diferentes de la Integral Definida.
* 10. Explicar cada una de las propiedades básicas de la Integral Definida.
11. Demostrar el Teorema del Valor medio del Cálculo Integral.
* 12. Explicar, con un diagrama, la representación del Teorema del Valor Medio.
13. Para una función derivable y continua dentro de un intervalo, demostrar el Teorema Fundamental del Cálculo Integral.
14. Dadas unas funciones $f(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, . . ., $F_n(x)$ distinguir cuales de las $F_i(x)$, $(i = 1, 2, . . ., n)$ son antiderivadas de $f(x)$.
* 15. Encontrar el valor de una Integral Indefinida por medio del Teorema Fundamental del Cálculo Integral.
* 16. Dada una función integrable en un intervalo, calcular, usando la Regla de Barrow, el valor de su Integral definida en ese intervalo.

* OBJETIVOS ESENCIALES.

INTEGRAL DEFINIDA

E

INTEGRAL INDEFINIDA

INDICE.

INTEGRAL DEFINIDA E INTEGRAL INDEFINIDA.

V.1 INTERVALO, PARTICION, NORMA.

Iniciaremos nuestro estudio del Cálculo Integral planteándonos el siguiente problema: Determinar el área comprendida entre la curva dada por la función $f: \{x, y \mid x \in R,\ y = f(x)\}$, las rectas $x = a$ y $x = b$, y el eje x (área bajo la curva).

Gráficamente se representa de la siguiente manera:

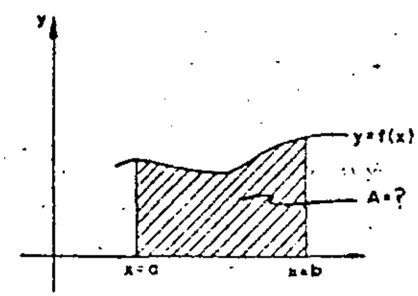


Figura V.1

Para la formulación precisa de este problema y para su solución es necesario recordar y definir algunos conceptos auxiliares.

Se llama intervalo cerrado a aquel conjunto $\{x \mid x \in R \text{ y } a \leq x \leq b\}$; este intervalo puede dividirse en n subintervalos cuyos puntos frontera x_o, x_1, x_2, x_3 ... x_{n-1}, x_n están sujetos a la siguiente condición:

$$a = x_o < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Así, por ejemplo, el intervalo [1, 3.5] se puede dividir arbitrariamente en cuatro subintervalos de la siguiente manera:

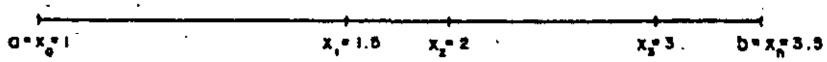


Figura V.2

y se cumple que:

$1 < 1.5 < 2 < 3 < 3.5$

En general si se representan los subintervalos sobre la recta númerica ó eje x, queda:

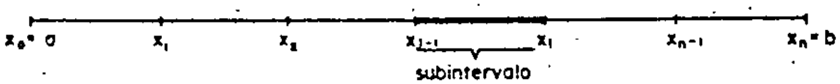


Figura V.3

A los n subintervalos así formados se les definirá como la partición P del intervalo [a, b]; el subintervalo iésimo semiabierto será: $[x_i, x_{i-1})$

Por lo tanto definiremos como norma de una partición P, y se representará por $\mathcal{E}$, a la longitud del subintervalo mas grande de los subintervalos cerrados $[x_i - x_{i-1}]$.

Con las bases anteriores ya estamos listos para definir una función escalonada S (x) de la siguiente manera:

Una función s (x) cuyo dominio es el intervalo cerrado [a, b] se llama escalonada si existe una partición P para la cual S (x) permanece constante en cada uno de los n subintervalos semiabiertos de P.

Ejemplo V. 1

Un empleado postal tiene la siguiente tabla para el cobro de timbres postales; represente a la función gráficamente.

Solución:

Peso (gr.)	Timbres ($)
[0,20)	0.20
[20,50)	0.50
[50,100)	1.00
[100,120]	3.00

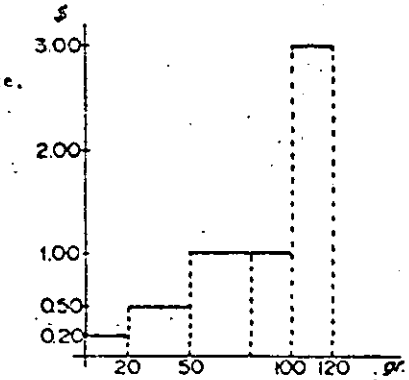


Figura V.4

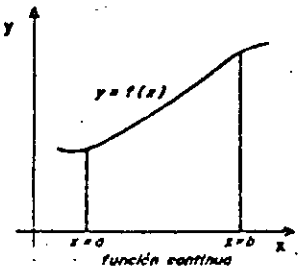
La función representada es una función escalonada pues cumple con la definición ya que:

El intervalo [0,120] se dividió en cuatro subintervalos [0,20), [20,50), [50,100), [100,120] correspondiendo en cada caso los valores constantes 0.20, 0.50, 1.0 y 3.0, respectivamente.

Los anteriores conceptos nos van a servir para determinar una función escalonada que aproxime los valores de una función continua en un intervalo dado, como se explica a continuación.

Si suponemos que ξ_i representa cualquier punto del intervalo cerrado $[x_{i-1}, x_i]$, en cada subintervalo del intervalo cerrado [a, b], podremos encontrar un valor ξ_i y a cada ξ_i le corresponderá un valor de la función $y = f(x)\big|_{x=\xi_i} = f(\xi_i)$ de tal forma que en la función continua $y = f(x)$, originalmente planteada, la podemos representar aproximadamente como la función escalonada $f(\xi_i)$, como se observa en la figura V.5.

Con este proceso podremos resolver en forma aproximada el problema planteado originalmente, que era encontrar el área bajo la curva de la figura V.1 o la figura V.5.a; si en su lugar calculamos el área de la figura V.5.b, ambas tenderán a ser iguales mientras mayor número de subintervalos haya, o sea mientras menor sea la norma de la partición.



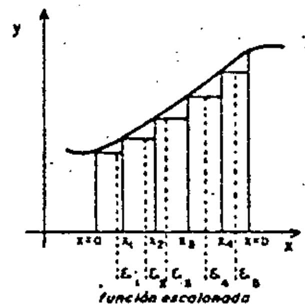


Figura V.5

El área bajo la función escalonada $f(\xi_i)$ para $\xi_i \in [a, b]$ entre las rectas $x = a$ y $x = b$ se puede determinar como se ilustra en la figura siguiente.

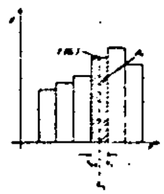


Figura V. 6

El área del rectángulo i será igual a: $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = A_i$ el área total será : $A_t = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, que es la solución aproximada al problema planteado.

V.2 SUMA DE RIEMANN.

A la expresión indicada en el párrafo anterior: $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ ó $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$, se le llama " Suma de Riemann ".

Ejemplo V. 2

Encontrar un valor de la Suma de Riemann para la función continua $y = f(x) = 1 + x$ en el intervalo cerrado $[1, 10]$

Solución:

En este caso $[a, b] = [1, 10]$; dividamos el intervalo en 9 subintervalos iguales, de amplitud 1, y construyamos una función escalonada, como se muestra en la figura siguiente:

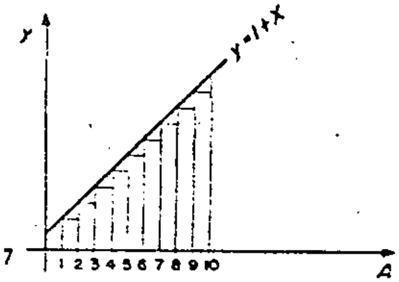


Figura V.7

$$A_T = \sum_{i=1}^{9} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =$$
$$= 2(1) + 3(1) + 4(1) + \dots + 10(1)$$
$$= \underline{54}$$

Si el número de subintervalos fuera mayor, el resultado sería mas aproximado al área bajo la curva.

V. 3 INTEGRAL DEFINIDA, FUNCION INTEGRABLE.

A continuación definiremos lo que representa que una función continua -- $y = f(x)$ sea integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$

Definición: La función $y = f(x)$ es integrable en $x \in [a, b]$; si existe un número L que satisfaga:

$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x - L \right| < \varepsilon$ tal que $\varepsilon > 0$ y prefijado, y además :

$|x_i - x_{i-1}| < \delta$ también $\delta > 0$ pequeño y prefijado entonces: .

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

En el momento en que $\Delta \to 0$, $x_{i-1} \to x_i$ y $f(\xi_i)$ tienda a $f(x)$, también se puede decir que el número de subintervalos tiende a infinito.

Al $\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x = L$ se le llama integral definida de la función continua $y = f(x)$ en el intervalo cerrado $[a, b]$ y se le representa por $\int_a^b f(x)\,dx$, es decir:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

Recuérdese que Δ representa la norma; al hacer tender ésta a cero, se garantiza que todos los demás intervalos tienden a cero, por lo que la integral definida no depende de los subintervalos $\Delta_i x$.

Recordemos también que si $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$; entonces se satisfacen las siguientes condiciones:

$f(c)$ existe $\qquad c \in [a, b]$

$\lim_{x \to c} f(x)$ existe

$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Conviene aclarar que en la expresión $\int_a^b f(x)\,dx$, x representa la variable de integración, $f(x)$ se llama integrando o función integrable, " a " límite inferior, " b " límite superior y el símbolo $\int$ se llama signo de integración.

Ejemplo V. 3

Encontrar el área bajo la curva $y = x^2$ limitada por las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Solución:

Al intervalo $[0, 2]$, con amplitud igual a $2 - 0 = 2$, dividámoslo en n subintervalos iguales $\Delta_i x = \frac{2}{n}$ . . . . (1)

entonces:

$$a = 0 < \frac{2}{n} < \frac{4}{n} < \frac{6}{n} < \dots < \frac{2}{n}k < \dots < 2 = b$$

El área del késimo rectángulo será:

$A_k = f(\xi_k)\,\Delta_i x$; pero $\xi_k = \frac{2}{n}k$.

por lo tanto $f(\xi_k) = f\left(\frac{2}{n}k\right)$; $A_k = f\left(\frac{2}{n}k\right)\Delta_i x$ . . . . (2)

como $f(x) = x^2$, entonces $f\left(\frac{2}{n}k\right) = \frac{4}{n^2}k^2$ . . . . (3)

Sustituyendo (1) y (3) en (2) queda:

$$A_k = \frac{4}{n^2}k^2\,\frac{2}{n} = \frac{8}{n^3}k^2$$

El área total será:

$$A_T = \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{8}{n^3}k^2$$

pero $\frac{8}{n^3}$ es independiente de k por lo que puede salir de la sumatoria, quedando:

$$A_T = \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \qquad \dots\dots (4)$$

el problema ahora se reduce a encontrar el valor de $\sum_{k=1}^{n} k^2$, que por inducción Matemática se puede demostrar que es igual a:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = A_k \qquad \dots\dots (5)$$

sustituyendo (5) en (4) queda:

$$A_T = \frac{8}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{k=1}^{n}\frac{8}{n^3}A_k \qquad \dots\dots (6)$$

desarrollando y simplificando se obtiene:

$$A_T = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

como se conoce que $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$

entonces $\lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} A_k$ . . . . (7)

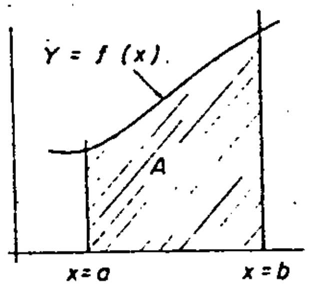
sustituyendo (6) en (7) queda:

$$\lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right) = \frac{8}{3}$$

por lo tanto $\int_0^2 x^2\, dx = \underline{\frac{8}{3}}$

V.4 INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

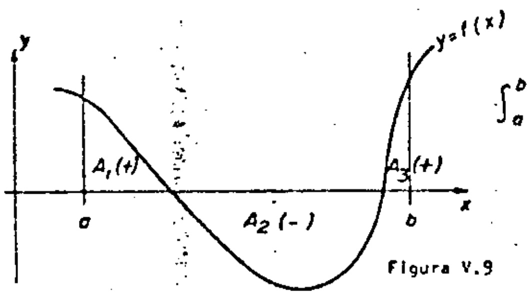
Se puede afirmar que la integral definida de la función continua - - - - $y = f(x)$, geométricamente representa el área abajo de la propia curva - - $y = f(x)$, limitada por las rectas $y = 0$, $x = a$ y $x = b$, como se muestra en la figura.



$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

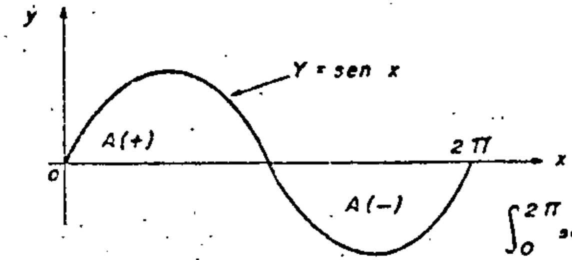
Figura V. 8

Obsérvese también que la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ da las sumas algebraicas de las áreas bajo la curva y no el área total en valor absoluto, según se ejemplifica en las siguientes figuras:



$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$$

Figura V.9



$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = A - A = 0$$

Figura V.10

Ejemplo V.4

Calcular geométricamente la siguiente integral definida:

$$I = \int_1^3 (3 - 2x)\,dx.$$

Solución:

En este caso $y = 3 - 2x$; si la representamos gráficamente queda:

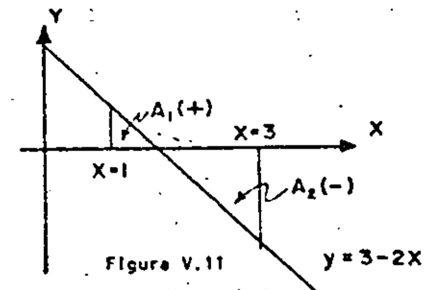


Figura V.11

Intersección con el eje x; $y = 0$ por lo tanto $0 = 3 - 2x$, donde ---

$x = \frac{3}{2} = 1.5$ para $x = 1$, $y = 1$

para $x = 3$, $y = -3$

Las áreas serán:

$$A_1 = (1.5 - 1.0)\ 1/2 = 0.25$$

$$A_2 = (3 - 1.5)\ 3/2 = 2.25$$

Por lo tanto $A_T = A_1 - A_2 = 0.25 - 2.25 = -\underline{\underline{2}}$

De donde: $\int_1^3 (3 - 2x)\, dx = -\underline{\underline{2}}$

Ejemplo V.5

Calcular la siguiente integral, usando la interpretación geométrica:

$$I = \int_0^T (V_o + g\,t)\, dt$$

en que V_o = rapidez inicial.

g = aceleración de la gravedad.

V_o, g pueden considerarse constantes.

Solución:

En este caso la función integrable es:

$f(t) = V_o + g\,t$, la representación gráfica de dicha función es:

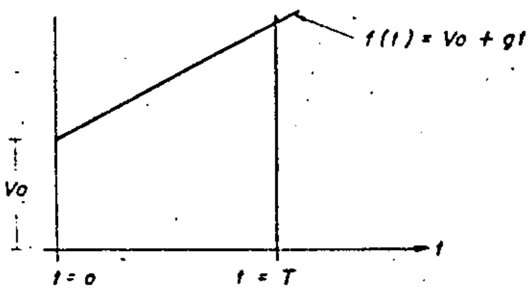


Figura V.12

Como la integral definida de la función $f(t) = V_o + g\,t$ en el intervalo cerrado $[0, T]$ representa el área bajo la curva; la solución será:

$$A = \frac{\text{Base menor} + \text{Base mayor}}{2}\ \text{Altura}$$

o sea: $A = \dfrac{V_o + (V_o + g\,T)}{2}\ (T \quad 0) = V_o T + \dfrac{g\,T^2}{2}$

por lo tanto: $I = \int_0^T (V_o + g\,t)\, dt = \underline{V_o T + \dfrac{g\,T^2}{2}}$

V. 5 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

A continuación se dan algunas propiedades de la integral definida; todas ellas se puedan demostrar a partir de su definición.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$; entonces:

1.- $\int_a^b dx = b - a$

2.- $\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$; k = constante.

3.- $\int_a^b k\, dx = k\,(b - a)$; k = constante.

4.- $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

5.- $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$

6.- $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$; $c \in [a, b]$

7.- $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$,

es decir, la integral de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de las funciones

8.- Si $f(x) \geq g(x)$ para $x \in [a, b]$ se cumple que:

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx.$$

9.- Si $k > 0$, se cumple que:

$$\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx = k \int_a^b f(x)\, dx.$$

10.- Si $c \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x - c)\, dx$$

Ahora demostraremos a manera de ejemplos algunas de las propiedades y el resto se dejarán al alumno.

Ejemplo V.6

Demostrar que: $\int_a^b k\,d\,x = k\,(b-a)$.

Solución:

De la definición de la integral definida puede escribirse:

$$\int_a^b k\,d\,x = \lim_{\substack{\Delta\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x)\,\Delta_i\,x$$

en este caso $f(x) = k$

Dividamos al intervalo $[b-a]$ en n subintervalos, quedará:

$$\Delta_i\,x = \frac{b-a}{n}$$

entonces: $a = x_0 < a + \frac{b-a}{n} < a + 2\,\frac{b-a}{n} < a + 3\,\frac{b-a}{n} < \cdots$

$\cdots < a + k\,\frac{b-a}{n} < \cdots < a + n\,\frac{b-a}{n} = b.$

del área del késimo rectángulo será: $A_k = f(x_k)\,\Delta_i\,x$

$$A_k = [\Delta_i\,x]\,f\left[a + k\,\frac{(b-a)}{n}\right] = k\,\Delta_i\,x$$

por lo tanto $\sum_{i=1}^{n} f(x)\,\Delta_i\,x = \sum_{k=1}^{n} k\,\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} k =$

$$= \frac{b-a}{n}\,nk = k\,(b-a)$$

de donde $\lim_{\substack{\Delta\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x)\,\Delta_i\,x = \lim_{\substack{\Delta\to 0\\ n\to\infty}} k\,(b-a) = k\,(b-a)$

pues k, b y a son independientes de Δ o de n.

Ejemplo V.7

Interpretar geométricamente la siguiente propiedad:

$$\int_a^b f(x)\,d\,x = \int_a^c f(x)\,d\,x + \int_c^b f(x)\,d\,x\ ;\ c \in [a, b]$$

Solución:

Sea la función $y = f(x)$ y representémosla gráficamente en un sistema X Y:

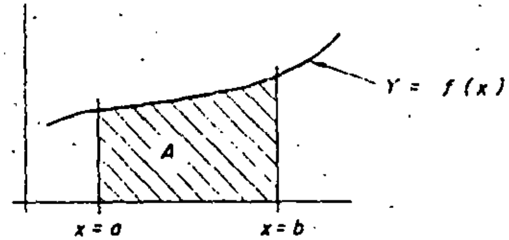


Figura V.13

la $\int_a^b f(x)\,d\,x$ geométricamente representa el área bajo la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ como se ve en la figura V.13.

Si c es una abscisa comprendida en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces: $\int_a^c f(x)\,d\,x$, representa el área A_1 bajo la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = a$, y $x = c$, como se puede ver en la figura V. 14 y $\int_c^b f(x)\,dx$ representa el área A_2 bajo la misma curva, pero entre las rectas $y = 0$, $x = c$, $x = b$.

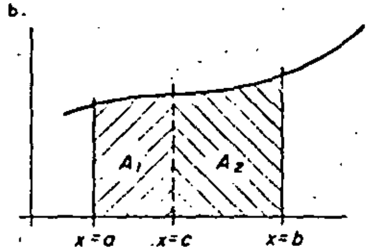


Figura V.14

Se puede observar que:

$$A_1 + A_2 = A_T$$

por lo que: $\int_a^b f(x)\,d\,x = \int_a^c f(x)\,d\,x + \int_c^b f(x)\,d\,x.$

V.6 TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO INTEGRAL.

Si la función $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe un número $c \in [a, b]$ tal que haga que:

$$\int_a^b f(x)\,d\,x = f(c)\,(b-a)$$

Demostración: Sea la función $y = f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[a, b]$; llamemos m al valor mínimo de la función y a M al valor máximo, así:

$$M = f(x_M) \; ; \; \forall \, x_M \in [a, b]$$

$$m = f(x_m) \; ; \; \forall \, x_m \in [a, b]$$

gráficamente queda:

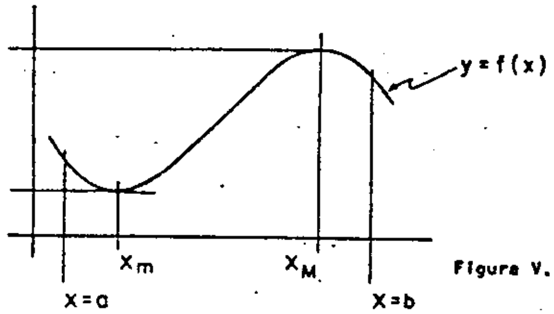


Figura V. 15.

se puede afirmar que: $m \leq f(x) \leq M, \; \forall \, x \in [a, b]$; también se puede decir que: $\int_a^b m \, dx = m\,(b - a)$ en base a la propiedad 3 y $\int_a^b M \, dx = M\,(b - a)$; en base a la propiedad 8 se afirma lo siguiente:

$$\int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx$$

ya que: $m \leq f(x) \leq M$

es decir: $m\,(b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M\,(b - a)$

dividiendo todos los miembros de la expresión anterior por $(b - a)$ y observando que la diferencia resulta positiva ya que $b > a$, se obtiene:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{b - a} \leq M$$

pero $m = f(x_m)$ y $M = f(x_M)$ por lo que:

$$\therefore \; f(x_m) \leq \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{b - a} \leq f(x_M).$$

Dado que $f(x)$ es continua $\forall \, x \in [a, b]$, debe tener todos los valores comprendidos entre m y M; como $\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx$ es uno de estos valores, entonces debe existir, por lo menos, un valor de $c \in [a, b]$ tal que:

$$m \leq f(c) \leq M$$

o sea: $$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx$$

es decir:

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(c)\,(b - a)$$ que es lo que se quería demostrar.

Por otra parte, se puede interpretar geométricamente el Teorema del Valor medio del Cálculo Integral, basándose en la interpretación geométrica de la Integral Definida.

El teorema expresa que: $\int_a^b f(x) \, dx = f(c)\,(b - a)$ es decir, asegura la existencia de un rectángulo de base $(b - a)$ y altura $f(c)$ que representa la misma área que la de $\int_a^b f(x) \, dx$, como se ilustra en la figura V. 16.

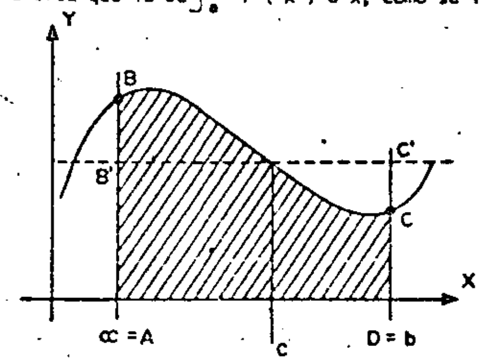


Figura V. 16

o sea. $\text{Area}_{ABCD} = \text{Area}_{AB'C'D}$

pero $\text{Area}_{ABCD} = \int_a^b f(x) \, dx$

y $\text{Area}_{AB'C'D} = (b - a)\, f(c)$.

Obsérvese también que este teorema asegura por lo menos la existencia -

de un valor de c. A la ordenada f (c) se le llama ordenada media.

Ejemplo V.8

Determinar el valor de $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x \, d\, x.$

Solución:

Representemos gráficamente las funciones :

$f(x) = x^2$, $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(x)\, g(x) = x^2 \operatorname{sen} x$

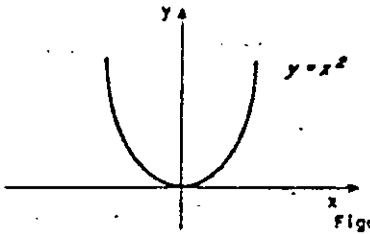


Figura V. 17

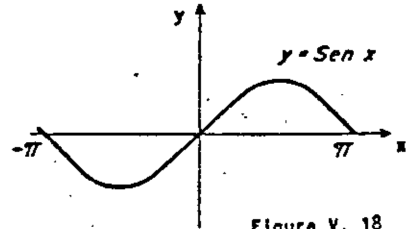


Figura V. 18

por lo tanto x^2 sen x quedará:

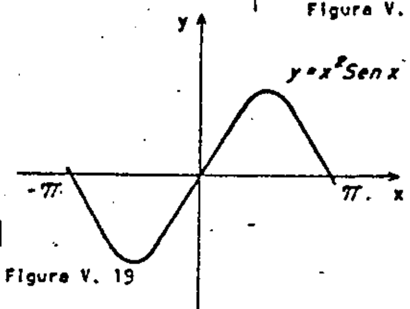


Figura V. 19

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x = f(c)\ [b - a]$$

obsérvese que el origen divide a la figura en dos partes iguales, ∴

$c = 0$ y $f(c) = 0$

por lo tanto $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x = 0\left[\pi - (-\pi)\right] = 0$

Ejemplo V. 9

Determinar la integral $\int_2^8 (3 + x)\, d\, x$, así como la ordenada media f (c).

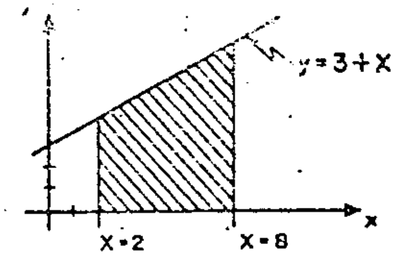


Figura V. 20

Solución:

Como $\int_2^8 (3 + x)\, d\, x$ representa el área bajo la curva quedará

para $x = 2$, $y = 5$

si : $x = 8$ $y = 11$

por lo que el área del trapecio será:

$$A = \frac{5 + 11}{2}\ 6 = 48$$

como $A = \int_{a=2}^{b=8} (3 + x)\, d\, x$

entonces: $\int_2^8 (3 + x)\, d\, x = 48$

Apliquemos ahora el Teorema del Valor Medio que dice:

$$\int_a^b f(x)\, d\, x = f(c)\ [b - a]$$

sustituyendo queda:

$$\int_2^8 (3 + x)\, d\, x = f(c)\,[8 - 2] = 48$$

por lo tanto:

$$6\, f(c) = 48$$

donde $f(c) = 8$ y representa el valor promedio (ordenada media), entonces $f(c) = 3 + c = 8$, por lo que $c = 5$.

Ejemplo V. 10

Utilizando el Teorema del Valor Medio, encontrar c y f (c) de la siguiente integral:

$$\int_{-1}^{5} f(x)\, d\, x \text{ si } f(x) = \begin{cases} 1 + x & -1 \le x \le 2 \\ 5 - x & 2 \le x \le 5. \end{cases}$$

Solución:

Si representamos gráficamente la función queda:

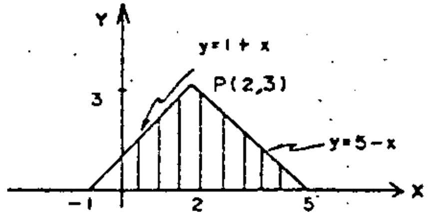


Figura V. 21

El valor de $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$, geométricamente representa el área bajo la curva por lo que es igual a 9.

Por otro lado, el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral establece:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,[b-a] \quad \forall c \in [a, b]$$

es decir:

$$\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = 9 = f(c)\,[b-a]$$

en este caso: $[a, b] = [-1, 5]$ y $b - a = 5 - (-1) = 6$

por lo que:

$$9 = f(c)\,6 \quad \text{por lo tanto } f(c) = \frac{9}{6} = 1.5$$

pero $f(x) = 1 + x$ para $-1 \le x \le 2$

y $f(x) = 5 - x$ para $2 \le x \le 5$

por lo tanto $1 + c_1 = 1.5$ donde $c_1 = 0.5$

$5 - c_2 = 1.5$ donde $c_2 = 3.5$

es decir, en este caso existen dos valores de c (0.5 y 3.5) que aseguran la existencia de un rectángulo de base $(b - a) = 6$ y altura $f(c) = 1.5$ que representa la misma área que la de la $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$.

V.7 INTEGRAL DEFINIDA CON LIMITE SUPERIOR VARIABLE.

Hemos representado a la integral definida de la función continua $f(x)$ en el intervalo cerrado $[a, b]$ con la expresión $\int_a^b f(x)\,dx$; también conocemos que geométricamente corresponde al área bajo la curva $y = f(x)$ entre las rectas $y = 0$, $x = a$ y $x = b$; hagamos ahora un cambio de variable, es decir $x = u$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du$ y estudiemos la segunda integral. Supongamos que el extremo superior es variable, o sea $b = x$; entonces el área obtenida para cada valor de x será distinta, lo que significa que es función de x, es decir:

$$A = A(x) = F(x)$$

$$A(x) = \int_a^x f(u)\,du = F(x); \; x \in [a, b]$$

Podemos concluir que la $\int_a^x f(u)\,du$ define a la función $F(x)$, cuyo dominio es el mismo que el de la función $f(u)$, es decir todo valor de $x \in [a, b]$.

Gráficamente se representa de la siguiente manera:

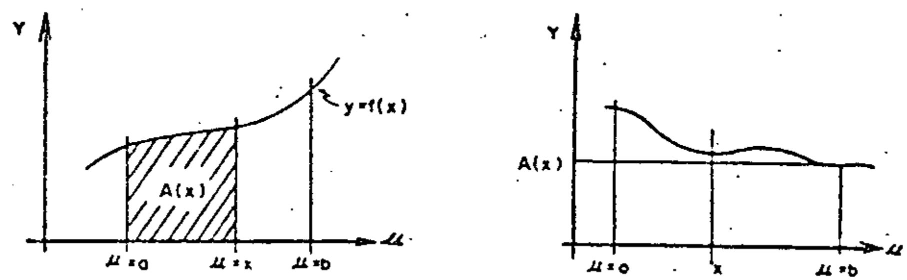


Figura V. 22

Ejemplo V. 11

Encontrar el valor de la siguiente integral y representarla gráficamente:

$$\int_0^x (x + 2)\,dx = F(x)$$

Solución:

Como $\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^x (x + 2)\,dx$ entonces:

$f(x) = x + 2$; $\quad a = 0$

$\qquad\qquad\qquad\quad b = x$

si representamos gráficamente $f(x)$ queda:

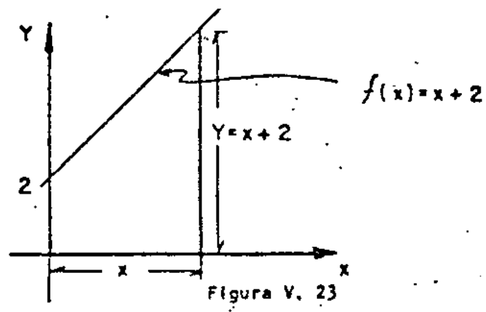


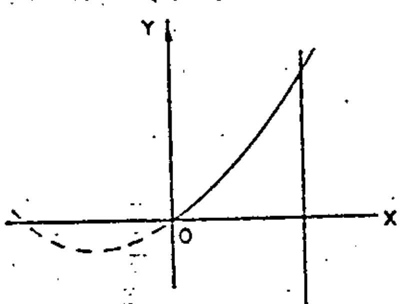
Figura V. 23

Se conoce que la integral representa el área bajo la curva entre $f(x)$, $y = 0$, y $x = a$, $x = b$, entonces quedará:

$$A = \frac{2 + (x+2)}{2} x = \frac{4 + x}{2} x = 2x + \frac{x^2}{2}$$

por lo tanto; $A = 2x + \frac{x^2}{2}$

Si a su vez representamos esta última función en un sistema de ejes coordenados X Y quedará:



$$y = 2x + \frac{x^2}{2}$$

$$2y = x^2 + 4x + 4 - 4$$

$$2y = (x+2)^2 - 4$$

$$(x+2)^2 = 2(y+2)$$

Figura V. 24

que es la ecuación de una parábola con vértice en $(-2, -2)$ simétrica con respecto a un eje paralelo al eje Y y cóncava hacia arriba; nótese que en todo caso solo interesa el intervalo $[0, x]$ en que $x \geq 0$.

V. 8 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO INTEGRAL.

Ya hemos obtenido integrales definidas con límite superior variable, las cuales tienen la siguiente expresión:

$$\int_a^x f(u)\,du = F(x)$$

Enunciemos y demostremos ahora el teorema fundamental del cálculo integral a partir de la expresión anterior:

TEOREMA:

Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y sea $x \in [a, b]$; si $F(x)$ es la función definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,du \quad \dots\dots \quad (1)$$

entonces : $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$.

Demostración: Hagamos $x = x + \Delta x$, entonces (1) queda:

$$\int_a^{x+\Delta x} f(u)\,du = F(x + \Delta x) \quad \dots\dots \quad (2)$$

Pero por una de las propiedades de la integral definida se sabe que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \dots \quad (3)$$

$$\forall\ c \in [a, b]$$

entonces:

$$\int_a^{x+\Delta x} f(u)\,du = \int_a^x f(u)\,du + \int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du \quad \dots \quad (4)$$

ya que $x \in [a, x + \Delta x]$; despejando de (4) a $\int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du$:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du = \int_a^{x+\Delta x} f(u)\,du - \int_a^x f(u)\,du \quad \dots\dots \quad (5)$$

sustituyendo (1) y (2) en (5).

$$\int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du = F(x + \Delta x) - F(x) \quad \dots\dots \quad (6)$$

pero $F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x)$ o sea:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du = \Delta F(x) \quad \dots\dots \quad (7)$$

como $f(u)$ es una función continua se puede aplicar a (5) el teorema del valor medio del cálculo integral, es decir:

$$\int_{x}^{x+\Delta x} f(u)\,du = f(c)\Big[(x+\Delta x) - x\Big] = f(c)\Big[\Delta x\Big],\ \forall c \in \Big[x,\ x+\Delta x\Big] \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Igualando (7) y (8):

$$\Delta F(x) = f(c)\,\Delta x \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Dividiendo a (9) por Δx:

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(c) \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Ahora tomemos el límite de la expresión (10) cuando

$\Delta x \to 0$; es decir, cuando $(x + \Delta x) \to x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

pero cuando $\Delta x \to 0$; $f(c) \to f(x)$,

puesto que: $c \in \Big[x,\ x + \Delta x\Big]$ entonces:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(x) \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

por otro lado $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx}$ $\quad \ldots\ldots \quad (13)$

de donde se puede concluir, igualando (12) y (13) que:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad \text{l. q. q. d.}$$

Geométricamente se puede representar de la siguiente manera:

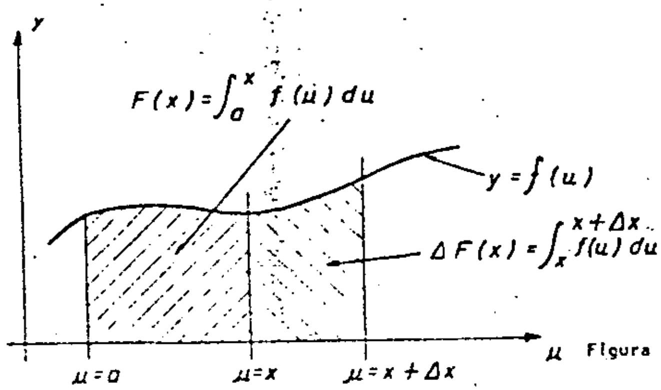


Figura V. 25

El teorema del valor medio queda expresado como sigue:

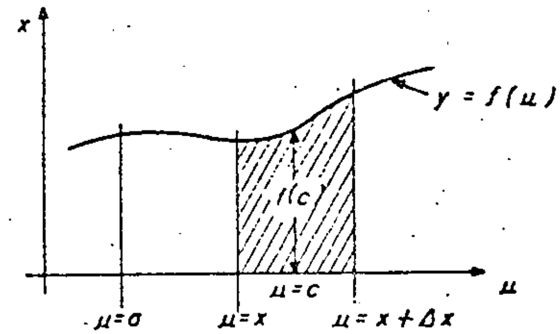


Figura V. 26

pero al ir haciendo mas pequeño Δx entonces $f(c)$ se aproxima a $f(x)$, como se ve en el siguiente diagrama:

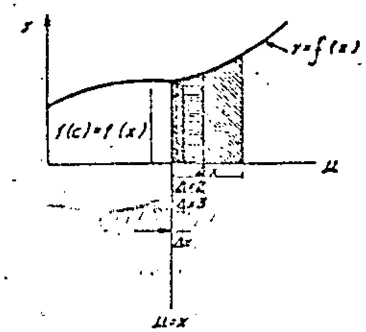


Figura V. 27

V. 9 RELACION ENTRE LA INTEGRACION Y LA DERIVACION DE UNA FUNCION CONTINUA.

A continuación discutiremos más ampliamente el teorema fundamental del cálculo integral; se estableció que si se tiene $\int_a^x f(u)\,du = F(x)$; entonces:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

Utilizando teoría de conjuntos lo anterior se puede expresar de la siguiente manera:

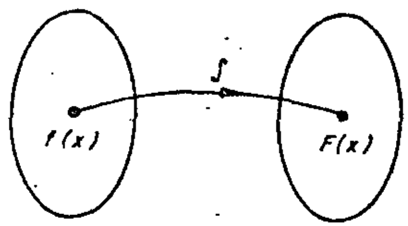


Figura V. 28

Es decir, mediante una transformación se llega al concepto de integral obteniéndose un valor F (x), pero también se ha determinado que:

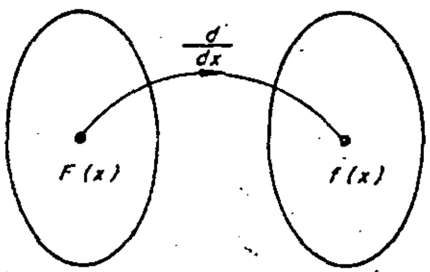


Figura V. 29

por tanto:

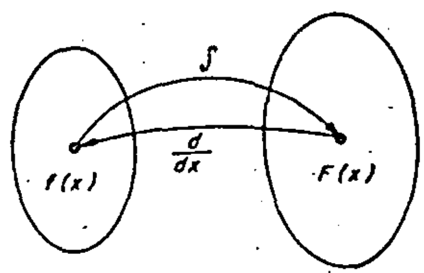


Figura V. 30

Como se ve la integración y la derivación son " transformaciones inversas ", es decir: $\int_a^x f(u)\,du = F(x)$ es " antiderivada " de f (x) - La antiderivada mas general de f (x) es F (x) + C, donde C es una constante arbitraria, con lo que formalmente podemos definir que si F (x) es una antiderivada de f (x), entonces la expresión F (x) + C se llama integral indefinida de f (x), que se expresa $\int f(x)\,dx$.

De acuerdo con lo anterior, el problema de calcular el resultado de la operación $\int f(x)\,dx$, se concreta a buscar una función F (x) tal que: F' (x) = f (x), es decir, tal que F (x) sea la antiderivada de f (x).

Ejemplo V. 12

Calcular la siguiente integral: $\int x^5\,dx$

Solución:

En este caso $f(x) = x^5$

F (x) puede ser:

$\frac{x^6}{6}$ ya que $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^6}{6}\right) = x^5 = f(x)$

$\frac{x^6}{6} + 5$ ya que $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^6}{6} + 5\right) = x^5 = f(x)$

$\frac{x^6}{6} + 2$ ya que $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^6}{6} + 2\right) = x^5 = f(x)$

$\frac{x^6}{6} + c$ ya que $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^6}{6} + c\right) = x^5 = f(x)$

en que c es una constante,

por lo tanto: $\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C$ en forma general.

$\frac{x^6}{6} + c$ es la antiderivada mas general de la función $f(x) = x^5$.

Ejemplo V. 13

Resolver la siguiente integral:

$\int \text{sen}\,x\,dx$

Solución:

Como f (x) = sen x entonces F (x) puede ser:

$-\cos x$ ya que $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \text{sen}\,x = f(x)$

$) \quad -\cos x + c$ ya que $\frac{d}{dx} \quad (-\cos x + c) = \operatorname{sen} x = f(x)$

por lo tanto $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$ en forma general.

Ejemplo V. 14

Calcular la integral: $\int e^x \, dx$

Solución:

Como $f(x) = e^x$ entonces:

$$F(x) = e^x \text{ ya que } \frac{d}{dx} \quad e^x = e^x.$$

o en forma general:

$$F(x) = e^x + c \text{ ya que } \frac{d}{dx} \left[e^x + c \right] = e^x$$

por lo tanto $\int e^x \, dx = e^x + c$

A toda función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ para $\forall x \in [a, b]$, se le llama función primitiva de $f(x)$; se puede afirmar que si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ entonces $F(x) + c$ también lo es.

A la constante arbitraria " c " se le llama constante de integración y como se ha visto, es una cantidad independiente de la variable de integración x.

Como la constante de integración " c " es arbitraria, se puede concluir que la $\int f(x) \, dx$ tiene un número infinito de soluciones que difieren sólo en la constante de integración.

Conviene aclarar que para un problema dado el valor de la constante de integración se puede determinar si se conocen algunas condiciones particulares del problema como se ilustra en el ejemplo siguiente:

Ejemplo V. 15

Un punto material se mueve sobre el eje x de acuerdo a la siguiente rapidez:

$v = 3 + 5t$ en que v en $\frac{m}{seg}$ y t en seg ; determinar la ecuación que representa el desplazamiento x, si se conoce que el movimiento comienza a partir del origen.

Solución:

$$v = \frac{dx}{dt}; \quad dx = v \, dt; \quad x = \int v \, dt$$

para $v = 3 + 5t$

por lo tanto $\int v \, dt = \int (3 + 5t) \, dt = 3 \int dt + 5 \int t \, dt$.

Así

$$x = 3t + \frac{5}{2} \quad t^2 + c$$

Con el fin de conocer para este caso la constante de integración se sabe que si $x = 0$, $t = 0$ o sea:

$$0 = 0 + 0 + c \quad \text{de donde } c = 0$$

y la ecuación del desplazamiento será:

$$\boxed{x = 3t + 2.5t^2}$$

V. 10 REGLA DE BARROW

A continuación veremos un método para calcular la integral definida conocido como Regla de Barrow.

Teorema:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $F(x)$ es otra función también continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ tal que :

$$F'(x) = f(x)$$

entonces:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) \quad F(a)$$

Demostración: Hagamos $h(x) = \int_a^x f(u) \, du$, es decir:

$h(x)$ es la antiderivada de $f(u)$ o sea $h(x) = F(x) + C$

Si $x = a$ entonces la $\int_a^x f(u) \, du = \int_a^a f(u) \, du = 0$

por lo tanto: $h(x) \Big|_{x=a} = 0; \quad 0 = F(a) + C$

de donde $C = -F(a)$

hagamos ahora $x = b$, entonces:

$$\int_a^{x=b} f(u)\,du = F(x) + C \Big|_{x=b} = F(b) + C;$$

pero $C = -F(a)$

por lo tanto $\int_a^b f(u)\,du = F(b) - F(a) = F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$

que es lo que se quería demostrar.

Ejemplo V. 16

Calcular $\int_2^4 (3x^3 - 2x^2 + 5)\,dx$

Solución:

En base a los teoremas sobre integrales se puede afirmar que:

$$I = \int_2^4 (3x^3 - 2x^2 + 5)\,dx = \int_2^4 3x^3\,dx - \int_2^4 2x^2\,dx + \int_2^4 5\,dx$$

encontrando ahora unas funciones $F(x)$ tales que $F'(x) = f(x)$ se obtiene:

$$I = 3\,\frac{x^4}{4}\Big]_2^4 - 2\,\frac{x^3}{3}\Big]_2^4 + 5x\Big]_2^4$$

Utilizando ahora la regla de Barrow queda:

$$I = \frac{3}{4}\left[4^4 - 2^4\right] - \frac{2}{3}\left[4^3 - 2^3\right] + 5\left[4 - 2\right]$$

$$I = \frac{3}{4}(256 - 16) - \frac{2}{3}(64 - 8) + 5(2)$$

$$I = \frac{3}{4}(240) - \frac{2}{3}(56) + 10$$

$$I = 180 - 37.3 + 10 = 190 - 37.3$$

Por lo tanto:

$$I = 152.7$$

Ejemplo V. 17

Calcular el área definida por la curva $y = 4x - x^2$, el eje x, y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

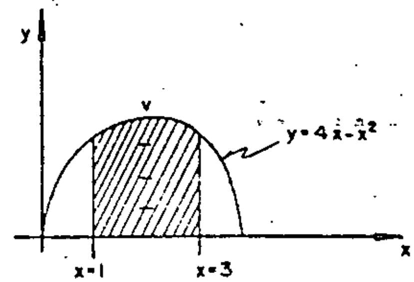


Figura V. 31

Solución:

Si $y = 4x - x^2$

$-y = x^2 - 4x + 4 - 4$

$-y + 4 = (x - 2)^2$

$-(y - 4) = (x - 2)^2$

que es la ecuación de una parábola, simétrica con respecto a un eje paralelo al eje Y con vértice en v (2, 4) y cóncava hacia abajo.

De la interpretación geométrica, se conoce que:

$\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área bajo la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ (eje X), $x = a$ y $x = b$ por lo que se puede afirmar que:

$\int_1^3 (4x - x^2)\,dx$ representa el área bajo la curva $y = 4x - x^2$ el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$; a continuación calcularemos el valor de la integral definida basándonos en las propiedades de la integral y en la regla de Barrow de la siguiente manera:

$$\int_1^3 (4x - x^2)\,dx = 4\int_1^3 x\,dx - \int_1^3 x^2\,dx.$$

pero: $4\int_1^3 x\,dx = 4\,\frac{x^2}{2}\Big]_1^3 = 2x^2\Big]_1^3 = 2(9 - 1) = 16$

y: $-\int_1^3 x^2\,dx = -\frac{x^3}{3}\Big]_1^3 = -(9 - \frac{1}{3}) = -\frac{26}{3}$

por lo tanto $\int_1^3 (4x - x^2)\,dx = 16 - \frac{26}{3} = \frac{48 - 26}{3} = \frac{22}{3}$

$$\boxed{\text{Area} = \frac{22}{3}\ u^2}$$

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ACTUALIZACION EN MATEMATICAS PARA INGENIEROS

EVENTO ORGANIZADO EN COLABORACION CON LA UNIVERSIDAD DE COLIMA A TRAVES DEL CENTRO DE EDUCACION CONTINUA

DESARROLLO EN SERIES

AGOSTO, 1984.

IV DESARROLLOS DE SERIES

VII. 4 SERIES DE POTENCIAS.

Existen series cuyos términos no necesariamente son constantes; por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \ldots \qquad (1)$$

que llamaremos serie de potencias de x.

Es claro que para cada valor de x, la serie (1) es una serie de términos constantes. Veamos algunos casos.

Si $x = \frac{1}{2}$, se tiene la serie convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})^n}{n+1} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{32} + \ldots$$

Si x = -3, se tiene la serie divergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n+1} = 1 - \frac{3}{2} + 3 - \frac{27}{4} + \ldots$$

Nótese que hemos tomado $x^0 = 1$ aún cuando x pueda valer cero, por conveniencia para la notación. Es claro que para x=0 se tiene un serie convergente.

Como vemos, no para todos los valores de x se obtienen series convergentes. Es importante entonces saber para que valores de x la serie (1) converge.

Ya que para ciertos valores de x se obtienen series alternadas, analicemos la serie de valores absolutos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n+1} \right| \qquad (2)$$

Aplicando el criterio de d'Alembert, la serie (2) converge para todo valor de $x \neq 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{n+2} \right|}{\left| \frac{x^n}{n+1} \right|} < 1$$

Es decir:

$$\lim_{n\to\infty} |x| \left| \frac{n+1}{n+2} \right| < 1$$

o bien:

$$|x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \right| < 1 \qquad \text{(ya que x no depende de n)}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, la serie (2) converge para toda x tal que:

$$|x| < 1$$

En consecuencia, del teorema VII. 3, la serie (1) es convergente (absolutamente convergente) para valores de x tales que:

$$|x| < 1 \qquad \text{o bien:} \qquad -1 < x < 1.$$

Para $|x| = 1$, el criterio de d'Alembert no es aplicable, pues:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{n+2} \right|}{\left| \frac{x^n}{n+1} \right|} = 1$$

y debemos analizar por separado los casos cuando x=1 y x=-1.

Para x 1 se tiene la serie divergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

y para x=-1 se tiene la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

que es convergente (condicionalmente convergente).

Ejemplo VII. 12.

a) Obtengamos el intervalo de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{3^n(n+1)^2} = 1 + \frac{x-5}{12} + \frac{(x-5)^2}{81} + \dots$$

Se tiene que

$$|x-5| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^n(n+1)^2}{3^{n+1}(n+2)^2} \right| < 1$$

implica que

$$|x-5| \left(\tfrac{1}{3}\right) < 1$$

o bien

$$|x-5| < 3$$

por lo que r=3 es el radio de convergencia, y la serie converge absolutamente para todo valor de x en el intervalo:

$$-3 < x-5 < 3$$

es decir

$$2 < x < 8.$$

Analicemos la serie en los extremos del intervalo. Para x=8 se tiene la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^n(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

que es convergente (serie p, con p=2).

Para x=2 se tiene la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

que es absolutamente convergente (ver serie anterior).

En resumen, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{3^n(n+1)^2}$ es convergente para todo valor de x en el intervalo:

$$2 \le x \le 8$$

Observe que en este caso la convergencia de la serie en los puntos extremos del intervalo es absoluta.

b) La siguiente serie converge únicamente para el valor x=-3:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(x+3)^n = 1+(x+3)+2!(x+3)^2+\dots$$

ya que, para $x \neq -3$:

$$|x+3| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = |x+3| \lim_{n\to\infty} (n+1) > 1$$

y por el criterio de d'Alembert la serie diverge.

c) La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

converge para todo valor de x, ya que

$$|x| \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = |x|\cdot 0 = 0 < 1, \quad \forall x.$$

- -

Conviene mencionar que, si

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

es una serie de potencias con intervalo de convergencia $|x-a|<r$, entonces:

a) La serie puede derivarse término a término en dicho intervalo, y la serie obtenida

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n (x-a)^{n-1}$$

tiene el mismo intervalo de convergencia.

b) La serie puede integrarse término a término en dicho intervalo, y la serie obtenida

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$$

tiene el mismo intervalo de convergencia.

VII. 5 DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIE DE POTENCIAS.

Una función puede desarrollarse en serie de potencias de x siguiendo varios procedimientos. Por ejemplo, para la función

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

prolongando indefinidamente la división

$$\begin{array}{r|l} & 1 + x + x^2 \\ \hline 1-x & 1 \\ & \underline{-1 + x} \\ & \quad x \\ & \quad \underline{-x + x^2} \\ & \qquad x^2 \\ & \qquad -x^2 + x^3 \end{array}$$

se obtendría que

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

Obsérvese que para $x=3$ la expresión anterior conduce a un resultado absurdo:

$$\frac{1}{1-3} = 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots$$

ya que dicho valor está fuera del intervalo de convergencia de la serie ($|x|<1$).

En cambio, para valores de x dentro del intervalo de convergencia, podemos aproximar la función tomando un número finito de términos sin cometer un error "apreciable".

Por ejemplo, tomando los cuatro primeros términos

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \doteq 1 + x + x^2 + x^3 , \quad \text{si} \quad |x|<1$$

para los valores de $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0$, se tiene:

x	$\frac{1}{1-x}$	$1+x+x^2+x^3$
$\frac{1}{2}$	2	1.875
$\frac{1}{4}$	1.333...	1.328
0	1	1

En muchas ocasiones se tiene una función cuya expresión es difícil de manejar y puede resultar conveniente sustituirla por un polinomio en x de grado n, lo cual se puede lograr si la función se desarrolla en una serie de potencias y se toman los términos necesarios para obtener la aproximación deseada.

Serie de Taylor.

Sea f(x) una función, y busquemos expresarla en la forma:

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+\dots \qquad (1)$$

Para obtener los coeficientes a_n podemos proceder en la siguiente forma:

Haciendo en (1) x=a, se obtiene

$$f(a)=a_0$$

que es el primer coeficiente. Para obtener los restantes, tomemos las derivadas sucesivas de (1) en el intervalo de convergencia de la serie:

$$f'(x) = a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+4a_4(x-a)^3+\dots$$

$$f''(x) = 2a_2+2\cdot 3a_3(x-a)+3\cdot 4a_4(x-a)^2+\dots$$

$$f'''(x) = 2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4(x-a)+\dots$$

$$f^{IV}(x) = 2\cdot 3\cdot 4a_4+\dots$$

. . . .

. . . .

$$f^{(n)}(x) = n!\,a_n+\dots$$

Haciendo en estas expresiones x=a, obtenemos:

$$a_1= f'(a)$$

$$a_2= \frac{f''(a)}{2!}$$

$$a_3= \frac{f'''(a)}{3!}$$

$$a_4= \frac{f^{IV}(a)}{4!}$$

$$\vdots$$

$$a_n= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Llevando estos resultados a (1), se obtiene la expresión:

$$\boxed{f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!}+\dots+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}+\dots}$$

conocida como fórmula de Taylor.

Toda función que admita derivadas de cualquier orden en un intervalo abierto (x_1, x_2) puede ser expresada según esta fórmula para toda x en dicho intervalo.

Ejemplo VII. 13.

Para desarrollar en serie de Taylor la función f(x)=Lx en potencias de (x-1), calculemos:

$f(x) = Lx$	$f(1) = 0$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f'(1) = 1$
$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f''(1) = -1$
$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$	$f'''(1) = 2$
$f^{IV}(x) = \frac{-6}{x^4}$	$f^{IV}(1) = -6$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}$	$f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!$

por lo que:

$$L(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\dots+(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}+\dots (1)$$

Como es fácil verificar, esta serie es absolutamente convergente en el intervalo

$$|x-1|<1$$

y condicionalmente convergente para uno de los extremos ($x=2$); en consecuencia, la expresión (1) no es válida para x fuera de este intervalo

Se acostumbra decir que (1) es un desarrollo en serie de Taylor de la función Lx en un entorno de $x=1$.

Es posible aproximar el logaritmo natural de un número x, dentro del intervalo de convergencia, mediante el polinomio de tercer grado:

$$Lx = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \qquad 0<x\leq 2.$$

Calculemos, por ejemplo, el logaritmo de 1.5:

$$L1.5 \doteq (1.5-1) - \frac{(1.5-1)^2}{2} + \frac{(1.5-1)^3}{3} = 0.4166$$

Es claro que tomando más términos de la serie se obtiene una mejor aproximación.

Tomando cinco términos:

$$Lx = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} \qquad 0<x\leq 2.$$

para $x=1.5$ se tendrá

$$L\ 1.5 = 0.4073$$

que se aproxima más al valor real $L\ 1.5 = 0.405465\dots$

- -

Si en la serie de Taylor hacemos $a=0$, obtenemos:

$$\boxed{f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\frac{x^3}{3!}+\dots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+\dots}$$

Expresión que nos permite desarrollar la función en una serie de potencias de x. Esta serie se conoce con el nombre de serie de Maclaurin.

Ejemplo VII. 14.

Para desarrollar la función e^x en serie de Maclaurin, calculemos:

$$\begin{array}{llll} f(x) = e^x & & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & & f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x & & f''(0) = 1 \\ \vdots & & \vdots \\ f^{(n)}(x) = e^x & & f^{(n)}(0) = 1 \end{array}$$

por lo que:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

o sea:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (1)$$

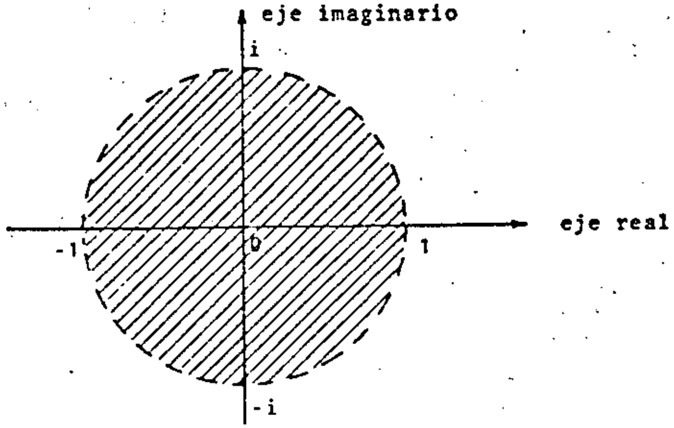
Como vimos en el ejemplo VII. 12, c), la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

converge para todo valor de x, por lo que la expresión (1) es válida $\forall\ x \in R$.

En forma análoga, pueden obtenerse los desarrollos en serie de Maclaurin de las funciones senx y cosx:

sentada en el plano de Argand por la región:



que recibe el nombre de círculo de convergencia. El radio de convergencia $r=1$ es el radio de dicho círculo.

Para toda $x \varepsilon C$ en el interior del círculo de convergencia, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ es absolutamente convergente.

En el caso general, la región de convergencia

$$|x-a| < r$$

está representada en el plano complejo por un círculo de radio r con centro en $x=a$.

Fórmula de Euler.

Considerando que x puede tomar valores complejos, en la expresión:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

podemos hacer $x=\theta i$ obteniendo:

$$e^{\theta i} = 1 + \theta i + \frac{(\theta i)^2}{2!} + \frac{(\theta i)^3}{3!} + \frac{(\theta i)^4}{4!} + \frac{(\theta i)^5}{5!} + \frac{(\theta i)^6}{6!} + \dots$$

o bien:

$$e^{\theta i} = 1 + i\,\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\,\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\,\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \qquad (1)$$

Por otra parte, de las funciones ya desarrolladas:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \qquad (2)$$

y

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

por lo que:

$$i \operatorname{sen} \theta = i\theta - i\,\frac{\theta^3}{3!} + i\,\frac{\theta^5}{5!} - i\,\frac{\theta^7}{7!} + \dots \qquad (3)$$

Por las propiedades de las series convergentes, de las expresiones (1), (2) y (3) se concluye que:

$$\boxed{e^{\theta i} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta}$$