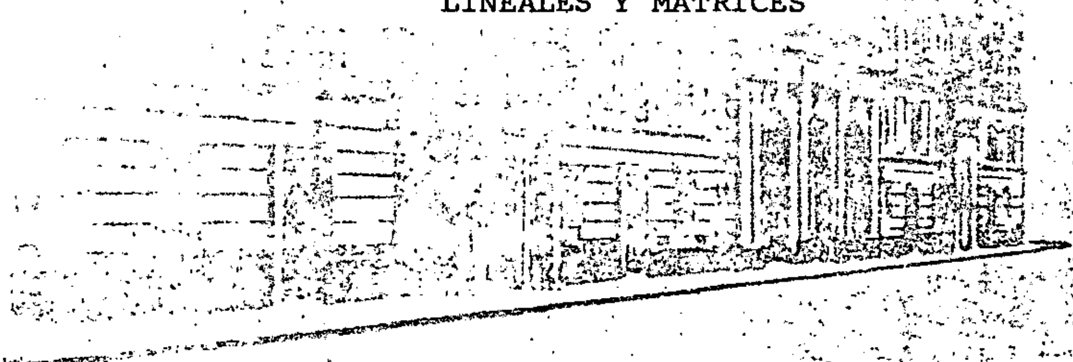
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ACTUALIZACION EN MATEMATICAS PARA INGENIEROS

EVENTO ORGANIZADO EN COLABORACION DE LA UNIVERSIDAD DE COLIMA A TRAVES DEL CENTRO DE EDUCACION CONTINUA

SISTEMAS DE ECUACIONES

LINEALES Y MATRICES



AGOSTO, 1984

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES

INTRODUCCION

Consideramos el siguiente ejemplo:

Una industria fabrica tres tipos de productos (llamémosles A, B y C) y cuenta con un total de 50 obreros que trabajan 8 hr. diarias. Es decir, dispone de un total de 400 horas-hombre al día.

Para fabricar un producto del tipo A, se requieren 20 horas-hombre ; para uno del tipo B, 100 y para uno del tipo C, 40.

En condiciones normales, no existen restricciones de materia prima ni de maquinaria y los obreros estan capacitados para intervenir en la fabricación de cualquiera de los productos.

Se quiere saber, que cantidad de productos A, B y C pueden fabricarse diariamente empleando la totalidad de horas-hombre disponible.

Podemos entonces plantear el modelo matemático siguiente:

Si x_1, x_2 y x_3 representan el número de productos A, B y C que se fabrican diariamente, entonces $20x_1$, $100x_2$ y $40x_3$ serán, el número de horas-hombre empleadas diariamente en fabricar todos los productos A, B y C.

Como se desean emplear las 400 horas-hombre disponibles, los valores de x_1, x_2 y x_3 deben ser tales que

$$20x_1+100x_2+40x_3=400 \quad . . . . . . (1)$$

Expresiones como ésta, reciben el nombre de ecuaciones lineales.

Una respuesta al problema podría ser fabricar 4 productos del tipo A, 2 del tipo B y 3 del tipo C, ya que, al sustituir estos valores en la expresión (1), se verifica la igualdad. Entonces, diremos que

$$x_1=4, \quad x_2=2, \quad x_3=3$$

es una solución de la ecuación (1).

Sin embargo, podemos notar que esta solución no es única ya que los valores

$$x_1=7, \quad x_2=1, \quad x_3=4,$$

también satisfacen la ecuación (1), por lo que constituyen otra solución.

Generalizando, la ecuación (1) es una expresión del tipo

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b \quad . . . . . . (2)$$

a la que llamaremos ecuación lineal.

A las constantes a_1, a_2, ..., a_n se les llama coeficientes, a b término independiente y a x_1, x_2, ..., x_n incógnitas o variables. Vemos que las incógnitas aparecen todas elevadas a la primera potencia, de ahí el nombre de ecuación lineal.

IV.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Regresando al ejemplo anterior, supongamos que por razones de demanda los productos B y C deben fabricarse en cantidades iguales.

Entonces, se tiene la restricción adicional $x_2=x_3$, que expresada en la forma (2) queda

$$0x_1+x_2-x_3=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Ahora el problema consiste en encontrar una solución que satisfaga, simultáneamente, las ecuaciones (1) y (3), por lo que las dos soluciones que antes encontramos no son útiles.

Si se fabrican 6 productos del tipo A y 2 de los tipos B y C, vemos que se satisfacen simultáneamente las ecuaciones (1) y (3). Entonces diremos que

$$x_1=6, \quad x_2=2, \quad x_3=2$$

es una solución del sistema

$$\left.\begin{array}{l} 20x_1+100x_2+40x_3=400 \\ 0x_1+\quad x_2-\quad x_3=\ \ 0 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (4)$$

el cual consta de 2 ecuaciones con tres incógnitas.

Definición.

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones de la forma (2) que deben resolverse simultáneamente.

En general, un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, definido sobre el campo de los números complejos, es de la forma

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

donde $a_{ij} \in C$ son los coeficientes, x_i las incógnitas y $b_i \in C$ los términos independientes.

Definición.

Una solución del sistema de ecuaciones (5) es un conjunto ordenado de n valores que satisface simultáneamente a todas las ecuaciones.

Una forma de obtener soluciones.

Tal vez, la técnica fundamental para encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, sea la de eliminación. El proceso consiste en transformar el sistema original en un nuevo sistema de ecuaciones que puede resolverse fácilmente. El nuevo sistema, deberá tener las mismas soluciones que el original y en este caso diremos que ambos sistemas son equivalentes.

Para obtener el nuevo sistema se hace uso de las siguientes transformaciones, que reciben el nombre de "Transformaciones elementales" y consisten en:

1) Intercambiar dos ecuaciones.

2) Multiplicar una ecuación por un número $k\neq 0$

3) Multiplicar una ecuación por un número $k\neq 0$ y sumar el resultado a otra ecuación del sistema.

No es difícil aceptar que el sistema original y el nuevo sistema son equivalentes. Sin embargo, el estudiante puede consultar la referencia 1 pag. 414 para una demostración.

Podemos ilustrar la técnica mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo IV.1.

$$\begin{aligned} 2x_2+2x_3&=6\\ x_1-2x_2+x_3&=1\\ -x_1+x_2+5x_3&=10 \end{aligned}$$

si intercambiamos las dos primeras ecuaciones (con el objeto de que x_1 aparezca en la primera ecuación) obtenemos

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3&=1\\ 2x_2+2x_3&=6\\ -x_1+x_2+5x_3&=10 \end{aligned}$$

si sumamos la primera ecuación a la tercera obtenemos

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3&=1\\ 2x_2+2x_3&=6\\ 0-x_2+6x_3&=11 \end{aligned}$$

si multiplicamos la segunda ecuación por $\frac{1}{2}$ y sumamos el resultado a la tercera obtenemos

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3&=1\\ 2x_2+2x_3&=6\\ 0+7x_3&=14 \end{aligned}$$

dividiendo las ecuaciones dos y tres entre 2 y 7 respectivamente:

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3&=1\\ x_2+x_3&=3\\ x_3&=2 \end{aligned}$$

De la tercera ecuación inmediatamente vemos que $x_3=2$ y sustituyendo este valor en la segunda ecuación se encuentra que $x_2=1$. Finalmente, al sustituir en la primera ecuación se encuentra que $x_1=1$, por lo que la solución del sistema es

$$x_1=1, \quad x_2=1, \quad x_3=2$$

- -

Ahora bien, hay sistemas de ecuaciones que admiten más de una solución; un ejemplo lo tenemos en el sistema

$$\left.\begin{aligned} 20x_1+100x_2+40x_3&=400\\ 0x_1+\ x_2-\ x_3&=0 \end{aligned}\right\} \ldots . \ (4)$$

que empleamos como introducción. La solución que habíamos mencionado es

$$x_1=6 \qquad x_2=2 \qquad x_3=2$$

y el estudiante puede comprobar que

$$x_1=13 \qquad x_2=1 \qquad x_3=1$$

es otra solución. A este tipo de sistemas, que tienen más de una solución, se les llama indeterminados.

También hay sistemas que no admiten solución. Por ejemplo, resulta evidente que el sistema

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=1\\ x_1+x_2&=3 \end{aligned}$$

no tiene solución, puesto que no existen dos números cuya suma sea 1 y 3 a la vez. A este tipo de sistemas se les llama incompatibles (o inconsistentes).

En general, de acuerdo con la existencia y tipos de solución, los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican en:

$$\begin{cases} \text{Compatibles (tienen solución)} & \begin{cases} \text{Determinados (una solución)} \\ \text{Indeterminados (más de una solución)} \end{cases} \\ \text{Incompatibles (no tienen solución)} & \end{cases}$$

Más adelante, y con ayuda de otros conceptos que trataremos, podremos determinar si un sistema tiene solución o no la tiene, y si esta es única o no lo es.

IV.2 MATRICES.

El estudio de los sistemas de ecuaciones realizado en la sección precedente, puede servir como una introducción natural al concepto de matriz. En el proceso de construcción de un sistema equivalente, puede advertirse que no es necesario escribir las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ya que realmente sólo se opera con los coeficientes a_{ij} y con los términos independientes b_i.

Si analizamos el ejemplo IV.1, vemos que el sistema

$$\begin{aligned} 2x_2+2x_3&=6 \\ x_1-2x_2+x_3&=1 \\ -x_1+x_2+5x_3&=10 \end{aligned}$$

queda completamente determinado al conocer el valor y la posición de cada uno de los coeficientes y términos independientes. Esta información se puede presentar convenientemente en el siguiente arreglo

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 10 \end{bmatrix} \quad \ldots\ (6)$$

al cual se le llama MATRIZ.

Este arreglo en particular, consta de 12 elementos (números) dispuestos en 3 renglones y 4 columnas, por lo que diremos que la matriz es de orden 3x4.

Definición.

Una matriz de orden mxn sobre el campo de los números complejos, es un arreglo rectangular

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \ldots\ldots (7)$$

con m renglones y n columnas, donde los $a_{ij} \in C$ se llaman sus elementos.

Comunmente, se representa a las matrices con letras mayúsculas y a sus elementos con letras minúsculas. En forma abreviada la matriz (7) puede expresarse como

$A=(a_{ij})$ donde $i=1,2,\ldots,m$ y $j=1,2,\ldots,n$

Los subíndices i, j indican, respectivamente, el renglón y la columna en que se encuentra el elemento a_{ij}. Así por ejemplo, a_{23} representa al elemento que se encuentra en el segundo renglón y tercera columna de la matriz A.

Dada la importancia de la posición que guardan los elementos en el arreglo, decimos que dos matrices son iguales si son del mismo orden y sus elementos correspondientes son iguales. A esto obedece la siguiente

Definición.

Sean $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ dos matrices del mismo orden, entonces:

$$A=B \iff a_{ij}=b_{ij} \quad \forall\ i,j$$

Haciendo referencia nuevamente al ejemplo IV. 1, podemos efectuar con los renglones de la matriz (6) transformaciones equivalentes a las efectuadas con las ecuaciones del sistema.

El proceso sería entonces el que se ilustra a continuación

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 10 \end{bmatrix} \ldots\ldots (6)$$

$$M_I=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

hemos intercambiado los dos primeros renglones.

$$M_{II}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

hemos sumado el primer renglón al tercero.

$$M_{III}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

multiplicando el segundo renglón por $\frac{1}{2}$, lo hemos sumado al tercero

$$M_{IV}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

hemos dividido el segundo y tercer renglón entre 2 y 7 respectivamente

La última matriz (M_{IV}) representa el sistema equivalente

$$x_1-2x_2+x_3=1$$
$$x_2+x_3=3$$
$$x_3=2$$

cuya solución puede obtenerse fácilmente.

La matriz M_{IV}, se dice que está en forma escalonada o que es una matriz escalonada. En general, una matriz es escalonada si el primer elemento distinto de cero de cada renglón, es igual a 1 y el número de ceros anteriores a dicho elemento aumenta de renglón a renglón. Las siguientes matrices son escalonadas:

$$M=\begin{bmatrix}1&3&6\\0&1&5\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad N=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad P=\begin{bmatrix}1&2&3&4&1\\0&0&1&5&2\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Transformaciones elementales por renglón.

Las transformaciones efectuadas con los renglones de la matriz M, para obtener finalmente la matriz M_{IV}, se llaman "transformaciones elementales por renglón" y como hemos visto, pueden ser de tres tipos:

1) Intercambio de dos renglones.

2) Multiplicación de un renglón por un número $k\neq0$.

3) Multiplicación de un renglón por un número $k\neq0$ y suma del resultado a otro renglón de la matriz.

Utilizando las transformaciones elementales por renglón, es posible transformar cualquier matriz en una matriz escalonada.

Definición.

Diremos que dos matrices son equivalentes, si cualquiera de ellas puede obtenerse a partir de la otra efectuando un número finito de transformaciones elementales por renglón.

En el ejemplo anterior tenemos que las matrices M, M_I, M_{II}, M_{III} y M_{IV} son equivalentes.

Ejemplo IV.2

Sea la matriz $A=\begin{bmatrix}2&4&2&8&-2\\4&8&4&16&-4\\3&-3&9&1&1\\1&-1&3&\frac{1}{3}&4\end{bmatrix}$

transformar a la matriz A en una matriz escalonada equivalente utilizando transformaciones elementales por renglón.

Solución:

Dividiendo entre 2 el primer renglón de A obtenemos

$$A_I=\begin{bmatrix}1&2&1&4&-1\\4&8&4&16&-4\\3&-3&9&1&1\\1&-1&3&\frac{1}{3}&4\end{bmatrix}$$

Multiplicando por -4 el primer renglón y sumando al 2o. renglón de A_I obtenemos

$$A_{II}=\begin{bmatrix}1&2&1&4&-1\\0&0&0&0&0\\3&-3&9&1&1\\1&-1&3&\frac{1}{3}&4\end{bmatrix}$$

Multiplicando por -3 el primer renglón y sumando al 3er. renglón de A_{II} obtenemos

$$A_{III}=\begin{bmatrix}1&2&1&4&-1\\0&0&0&0&0\\0&-9&6&-11&4\\1&-1&3&\frac{1}{3}&4\end{bmatrix}$$

Multiplicando por -1 el primer renglón y sumando al 4o. renglón de A_{III} obtenemos

$$A_{IV}=\begin{bmatrix}1&2&1&4&-1\\0&0&0&0&0\\0&-9&6&-11&4\\0&-3&2&-\frac{11}{3}&5\end{bmatrix}$$

Intercambiando el segundo renglón con el cuarto renglón de A_{IV} obtenemos

$$A_V=\begin{bmatrix}1&2&1&4&-1\\0&-3&2&-\frac{11}{3}&5\\0&-9&6&-11&4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Multiplicando por -3 el segundo renglón y sumando al tercer renglón de A_V obtenemos

$$A_{VI}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -\frac{11}{3} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dividiendo entre -3 el segundo renglón de A_{VI} obtenemos

$$A_{VII}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{9} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dividiendo entre -11 el tercer renglón de A_{VII} obtenemos

$$A_{VIII}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{9} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz A_{VIII} es una matriz escalonada.

- -

Al hablar de las transformaciones elementales, hemos hecho énfasis en el término "por renglón". Esto obedece a que existen transformaciones, análogas a las aquí descritas, efectuadas con las columnas de una matriz. En este capítulo no se justificará la existencia de dichas transformaciones y tampoco serán utilizadas. El estudiante interesado en saber más acerca de esto, puede consultar la referencia 3 pag. 141, una vez que haya terminado el capítulo.

48

Rango de una matriz.

Definición.

Si transformamos una matriz A en una matriz escalonada B, el número de renglones de la matriz B con al menos un elemento distinto de cero se llama RANGO DE LA MATRIZ A y se representa con R(A). El mismo rango se asigna a la matriz B.

De acuerdo con esta definición, cuando dos matrices son equivalentes ambas tienen el mismo rango. Las matrices A, A_I,..., A_{VIII} del ejemplo IV.2 son todas de rango 3.

El concepto de rango de una matriz, juega un papel muy importante en la teoría de sistemas de ecuaciones lineales que veremos más adelante. El estudiante puede darse cuenta que la definición de rango, tal como se enuncia aquí, proporciona a la vez un método para obtenerlo.

IV.3. PRODUCTO DE MATRICES.

Consideremos nuevamente el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 20x_1+100x_2+40x_3= 400 \\ 0x_1+\quad x_2-\quad x_3= \quad 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

podemos formar las matrices

$$A=\begin{bmatrix} 20 & 100 & 40 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \bar{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \bar{b}=\begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde hemos reunido los coeficientes(en A),las incógnitas (en $\bar{x}$) y los términos independientes (en $\bar{b}$) que aparecen en el sistema.

Con ayuda de estas matrices, podemos expresar el sistema (4) como

$$A\bar{x}=\bar{b} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

siempre y cuando demos una definición adecuada para el producto - $A\bar{x}$.

La matriz producto $A\bar{x}$, debe ser de orden 2x1 para poder establecer la igualdad con $\bar{b}$. Además, por igualdad de matrices, los elementos correspondientes de $A\bar{x}$ y $\bar{b}$ deben ser iguales.

Sabemos que la igualdad entre matrices

$$\begin{bmatrix} 20x_1+100x_2+40x_3 \\ 0x_1+\quad x_2-\quad x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se satisface si y sólo si

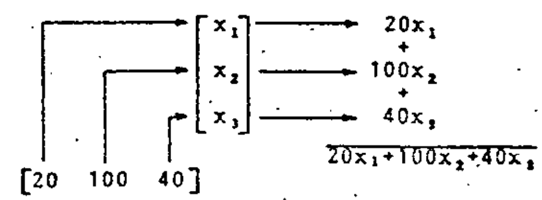
$$20x_1+100x_2+40x_3=400$$
$$0x_1+\quad x_2-\quad x_3= 0$$

que son precisamente las condiciones que establece el sistema (4). Por tanto

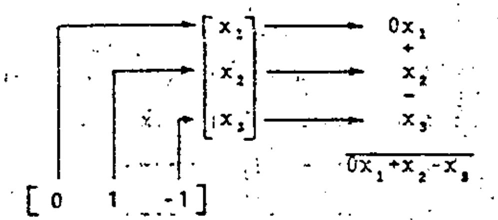
$$A\bar{x}=\begin{bmatrix} 20x_1+100x_2+40x_3 \\ 0x_1+\quad x_2-\quad x_3 \end{bmatrix} \quad \ldots. \ (9)$$

A la matriz $A\bar{x}$ expresada en (9) le llamaremos "el producto de las matrices A y $\bar{x}$" (en ese orden). Veamos como puede obtenerse la matriz $A\bar{x}$, a partir de las matrices A y $\bar{x}$:

El primer elemento de $A\bar{x}$, es igual a la suma de los productos de los elementos del primer renglón de A por los elementos de la única columna de $\bar{x}$. En forma esquemática:



El segundo elemento de $A\bar{x}$, es igual a la suma de los productos de los elementos del segundo renglón de A por los elementos de la única columna de $\bar{x}$. En forma esquemática:



En forma similar, obtengamos el producto de las matrices

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad y \qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$$

con el objeto de establecer una definición general.

El producto será la matriz

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} \end{bmatrix}$$

donde observamos que:

1o.) El elemento que se encuentra en el primer renglón primera columna de la matriz producto, es la suma:

$$a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}=\sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1}$$

2o.) El elemento que se encuentra en el segundo renglón primera columna de la matriz producto, es la suma:

$$a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}=\sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k1}$$

Generalizando, el elemento que se encuentra en el renglón i, columna j, de una matriz producto AB, es la suma:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

donde n es el número de columnas de la matriz A y el número de renglones de la matriz B, que deberá ser el mismo para que pueda efectuarse el producto.

Definición.

Sean: $A=(a_{ij})$ $(i=1, 2, \ldots, m$ y $j=1, 2, \ldots, n)$

y $B=(b_{ij})$ $(i=1, 2, \ldots, n$ y $j=1, 2, \ldots, p)$

dos matrices de orden mxn y nxp respectivamente.

El producto AB es una matriz

$C=(c_{ij})$ $(i=1, 2, \ldots, m$ y $j=1, 2, \ldots, p)$

de orden mxp cuyos elementos están dados por

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Ejemplo IV.3

Para ilustrar la definición, obtengamos el producto de las matrices

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \quad y \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

que es una matriz C de orden 2x4 tal que

$c_{11}= 2-9+1= -6$

$c_{12}= 0-3+3= 0$

$c_{13}= -4+0-4= -8$

$c_{14}= 2-3-3= -4$

$c_{21}= -1+12-1= 10$

$c_{22}= 0+4-3= 1$

$c_{23}= 2+0+4 = 6$

$c_{24}= -1+4+3= 6$

entonces, la matriz producto es

$$AB=\begin{bmatrix} -6 & 0 & -8 & -4 \\ 10 & 1 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que el elemento que se encuentra en el renglón i columna j de la matriz producto AB, se obtiene efectuando el producto escalar del renglón i de A por la columna j de B.

Por ejemplo, el elemento c_{13} es el producto

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = -4+0-4= -8=c_{13}$$

- -

Podemos concluir, en base a la definición, que podemos efectuar el producto AB sólo cuando el número de columnas de A es

igual al número de renglones de B. En este caso, diremos que las matrices A y B son conformables para la multiplicación.

En general, la multiplicación de las matrices NO es conmutativa. Incluso, en muchas ocasiones se tiene que dos matrices A y B son conformables para multiplicarse en ese orden (es decir puede obtenerse el producto AB), mientras que no son conformables para multiplicarse en el orden contrario (no puede obtenerse el producto BA). Por tal motivo, es necesario precisar el orden en que las matrices se van a multiplicar. Para el caso del producto AB, diremos que A premultiplica a B, o bien que B postmultiplica a A

Ejemplo IV. 4.

Dada las matrices

$$R=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, \quad S=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}, \quad T=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

obtener:
a) RS
b) SR
c) TS
d) ST

Solución:

$$\text{a)}\quad RS=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -3\\ 12 & -7\end{bmatrix}$$

(Las matrices R y S son de orden 2x2, por lo que les llamaremos matrices cuadradas y diremos simplemente que son de orden 2)

$$\text{b)}\quad SR=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -4\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

En este caso, pudieron obtenerse tanto el producto RS como el producto SR, debido a que ambas matrices son cuadradas y del mismo orden. Sin embargo, notamos que $RS \neq SR$ pues, como se mencionó, el producto de matrices no es una operación conmutativa.

$$\text{c)}\quad TS=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & -2\\ 9 & -5\end{bmatrix}$$

$$\text{d)}\quad ST=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$ no se puede efectuar, ya que el número de columnas de S (2) es diferente del número de renglones de T (3). En otras palabras, S y T no son conformables para la multiplicación.

Obsérvese que, aunque pudo obtenerse el producto TS, no fué posible obtener ST, lo cual resalta la importancia de especificar claramente el orden en que se desea multiplicar dos matrices.

- -

Definición.

Si una matriz A es de orden nxn, diremos que A es una matriz cuadrada de orden n.

Ejemplo IV. 5.

Para las matrices

$$M=\begin{bmatrix}i\\ -i\\ i\end{bmatrix} \qquad N=\begin{bmatrix}-i, & 1, & i\end{bmatrix} \qquad P=\begin{bmatrix}i+\alpha & i & -1\\ p_{21} & -i & 1\\ -i & 1+\beta & p_{33}\end{bmatrix}$$

encontrar los valores de α, β, p_{21}, p_{33} de tal forma que se verifique la igualdad

$$MN = P$$

Solución:

Primero obtenemos

$$MN = \begin{bmatrix} 1 & i & -1 \\ -1 & -i & 1 \\ -i & 1 & i \end{bmatrix}$$

Por otra parte, como $MN=P$,

$$\begin{bmatrix} 1 & i & -1 \\ -1 & -i & 1 \\ -i & 1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i+\alpha & i & -1 \\ p_{21} & -i & 1 \\ -i & 1+\beta & p_{33} \end{bmatrix}$$

$i+\alpha=1 \therefore \underline{\alpha=1-i}$

$\underline{p_{21}=-1}$

$1+\beta=1 \therefore \underline{\beta=0}$

$\underline{p_{33}=i}$

- -

Teorema IV.1

La multiplicación de matrices (cuando puede efectuarse) es asociativa.

Demostración.

Sean $A=(a_{ij})_{mxn}$, $B=(b_{jk})_{nxp}$ y $C=(c_{kr})_{pxq}$ tres matrices cualesquiera de orden mxn, nxp, pxq respectivamente. Queremos probar que

$$(AB)\,C = A\,(BC)$$

De la definición de producto:

$$AB = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\; b_{jk}\right)_{mxp}$$

donde los índices libres son $i=1,2,\ldots,m$ y $k=1,2,\ldots,p$, y la matriz es de orden mxp. (Los índices libres son los que indican el renglón y la columna del nuevo elemento).

Aplicando ahora la definición de producto a las matrices $(AB)_{mxp}$ y C_{pxq}:

$$(AB)C = \left(\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}\right) c_{kr}\right)_{mxq}$$

multiplicando C_{kr} por cada una de las sumas del paréntesis, obtenemos:

$$(AB)C = \left(\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}\, c_{kr}\right)\right)_{mxq}$$

donde los índices libres son $i=1,2,\ldots,m$ y $r=1,2,\ldots,q$ y la matriz es de orden mxq.

En forma análoga obtenemos:

$$A(BC) = \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ij}\, b_{jk}\, c_{kr}\right)\right)_{mxq}$$

Dado que el orden de la suma es arbitrario.

$$\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}\, c_{kr}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ij}\, b_{jk}\, c_{kr}\right) \;\forall\; i, r$$

Por lo tanto queda demostrado que

$$(AB)C = A(BC)$$

Se recomienda al estudiante consultar el apéndice I de la referencia 3 para obtener habilidad en el manejo y comprensión de los símbolos de Σ(suma) y $\Sigma\Sigma$ (doble suma), y hacer la demostración completa de este teorema para el caso particular de las matrices cuadradas de orden dos.

Ejemplo IV. 6.

Verificar la propiedad asociativa para el producto, con las matrices.

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 1-i\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Solución. Debemos verificar que

$$(AB)C=A(BC)$$

$$AB=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 1-i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1-i\end{bmatrix}$$

$$(AB)C=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 7-3i & \frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\end{bmatrix}$$

Por otro lado:

$$(BC)=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 1-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 8-3i & \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\,i\end{bmatrix}$$

$$A(BC)=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 8-3i & \frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 7-3i & \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\,i\end{bmatrix}$$

por lo que

$$(AB)C=A(BC)$$

- -

Matriz Identidad.

Si con las matrices

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad y \quad B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

efectuamos el producto IB vemos que

$$IB=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}=B$$

Si con la misma matriz I efectuamos el producto IA, donde A es una matriz con 3 renglones y cualquier número de columnas, obtenemos siempre que IA=A. A la matriz I le llamamos matriz identidad de orden 3 y la representamos mediante I_3.

En general, a la matriz cuadrada

$$I_n=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}_{nxn}$$

le llamaremos matriz identidad de orden n.

Esta matriz puede expresarse en forma abreviada como

$$I_n=(\delta_{ij}) \quad \text{donde} \begin{cases}\delta_{ij}=1 & \text{si } i=j\\ \delta_{ij}=0 & \text{si } i\neq j\end{cases}$$

Teorema IV.2

Para toda matriz A de orden mxn se tiene que:

$$I_mA = A$$

$$A\,I_n = A$$

Demostración

Sean $I_m=(\delta_{ij})_{mxm}$ y $A=(a_{jk})_{mxn}$

De la definición de producto:

$$I_mA = \left(\sum_{j=1}^{m} \delta_{ij}a_{jk}\right)_{mxn}$$

donde los índices libres son $i=1,2,\dots,m$ y $k=1,2,\dots,n$.

Como $\delta_{ij}=0 \ \forall\ i\neq j$:

$$I_mA=\left(\sum_{j=1}^{m} \delta_{jj}a_{jk}\right)_{mxn}$$

donde ahora, los índices libres son $j=1,2,\ldots,m$ y $k=1,2,\ldots,n$.

Como $\delta_{jj}=1 \;\forall j$:

$$I_m A = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk}\right)_{m\times n}$$

Como j es un índice libre

$$I_m A = (a_{jk})_{m\times n} = A$$

La segunda parte del teorema se demuestra en forma similar.

Matrices elementales.

El resultado de efectuar un número finito de transformaciones elementales por renglón a una matriz A de orden mxn, puede obtenerse también si premultiplicamos A por una cierta matriz cuadrada de orden m.

Para mostrar lo anterior, consideremos por separado cada una de las tres transformaciones elementales por renglón.

1) Intercambio de renglones.

Supongamos que tenemos una matriz A de mxn y que efectuamos el intercambio de sus renglones i y j. Llamemos a la matriz así obtenida matriz B.

Si por otro lado, tomamos la matriz identidad de orden m (I_m) e intercambiamos sus renglones i y j, obtendremos una nueva matriz que llamaremos $I_m^{(i,j)}$.

Si ahora efectuamos el producto $I_m^{(i,j)}A$, se obtiene la matriz B.

Ejemplo IV. 7.

Sea $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\\ 5 & 6\end{bmatrix}$

54

intercambiamos sus renglones 1 y 3 para obtener la matriz

$$B=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

Por otro lado, consideremos la matriz

$$I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

e intercambiemos sus renglones 1 y 3 para obtener

$$I_3^{(1,3)}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Efectuando el producto $I_3^{(1,3)}A$, tenemos:

$$I_3^{(1,3)}A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\\ 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\ 1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

vemos entonces que, $I_3^{(1,3)}A$ es igual a B.

- -

2) Multiplicación de un renglón por un número $k\neq 0$.

Supongamos que tenemos una matriz A de mxn y que multiplicamos su renglón i por el escalar $k\neq 0$. Llamemos a la matriz así obtenida matriz B.

Si por otro lado, tomamos la matriz identidad de orden m (I_m) y multiplicamos su renglón i por el escalar $k\neq 0$ obtendremos una nueva matriz que llamaremos $I_m^{k(i)}$.

Si ahora efectuamos el producto $I_m^{k(i)}A$, se obtiene la ma triz B.

Ejemplo IV. 8.

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 10 & 20 \end{bmatrix}$

multipliquemos el segundo renglón por 3 para obtener la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 15 & 30 & 60 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, consideremos la matriz

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y multipliquemos su segundo renglón por 3 para obtener

$$I_2^{3(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto $I_2^{3(2)}A$, obtenemos:

$$I_2^{3(2)}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 10 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 15 & 30 & 60 \end{bmatrix}$$

vemos entonces que, $I_2^{3(2)}A$ es igual a B.

- -

3) Multiplicación de un renglón por un número $k \neq 0$, sumando el resultado a otro renglón diferente.

Supongamos que tenemos una matriz A de mxn en la que multiplicamos su renglón i por el escalar $k \neq 0$ y el resultado lo sumamos al renglón $j \neq i$. Llamemos a la matriz así obtenida, matriz B.

Si por otro lado, tomamos la matriz identidad de orden - m (I_m), multiplicamos su renglón i por el escalar $k \neq 0$ y el resultado lo sumamos al renglón j, obtendremos una nueva matriz que llamaremos $I_m^{k(i,j)}$.

Si ahora efectuamos el producto $I_m^{k(i,j)}A$, se obtiene la matriz B.

Ejemplo IV. 9

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$

multipliquemos el primer renglón por 2 y sumemos al cuarto renglón para obtener la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$$

Por otro lado consideremos la matriz

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

multiplicando el primer renglón por 2 y sumando al cuarto renglón obtenemos

$$I_4^{2(1,4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto $I_4^{2(1,4)}A$, obtenemos:

$$I_4^{2(1,4)}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$$

vemos entonces que, $I_4^{2(1,4)}A$ es igual a B.

- -

Definición.

A las matrices $I_m^{(i,j)}$, $I_m^{k(i)}$, $I_m^{k(i,j)}$ se les llama matrices elementales correspondientes a las transformaciones elementales 1, 2, 3, respectivamente.

Vemos ahora que, cada transformación elemental puede ser llevada a cabo premultiplicando, la matriz dada, por la matriz elemental que se obtiene efectuando en I, la misma transformación elemental.

Ejemplo IV. 10.

Hallar la matriz P, de orden 3, tal que transforme a la matriz A en una matriz escalonada (es decir, que el producto PA sea una matriz escalonada).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 6 & 1 \\ 2 & \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix}$$

Solución.

En la siguiente tabla aparece una secuencia de transformaciones elementales que transforma a la matriz A en una matriz escalonada, las correspondientes matrices elementales y el resultado de efectuar estas transformaciones sobre A.

Transformación.	Matriz elemental correspondiente.
Intercambio de los renglones 1 y 2	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Multiplicación del primer renglón por 2	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Multiplicación del renglón 1 por -2 y sumar al renglón 3.	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Multiplicación del renglón 2 por $\frac{167}{7}$ y sumar al renglón 3.	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{167}{7} & 1 \end{bmatrix}$
Multiplicación del renglón 3 por $-\frac{7}{362}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{362} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 6 & 1 \\ 2 & \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix} = A$$
$$\downarrow$$
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 12 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 12 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -\frac{167}{7} & -4 \end{bmatrix}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 12 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{362}{7} \end{bmatrix}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 12 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{(matriz escalonada)}$$

El mismo resultado que se obtiene al aplicar la secuencia de transformaciones, puede obtenerse premultiplicando por las respectivas matrices elementales.

Efectuando estos productos con la secuencia que marca la tabla y dado que la multiplicación es asociativa, podemos escribir:

$$
\left[\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{-7}{362}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{167}{7} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right]\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ \frac{1}{2} & 6 & 1\\ 2 & \frac{1}{7} & 0\end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 12 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matriz}\\ \text{escalón}}}
$$

La matriz P buscada, será el producto de las cinco matrices elementales.

Sin embargo, para obtener la matriz P no es necesario multiplicar las cinco matrices elementales; bastará con efectuar la misma secuencia de transformaciones elementales sobre la matriz I (referencia 1, pag. 452).

Las siguientes transformaciones sobre I conducen a la matriz P (las transformaciones son las de la tabla).

$$
\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ \frac{167}{7} & -4 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ \frac{167}{362} & \frac{14}{181} & \frac{-7}{362}\end{bmatrix} = P
$$

Para comprobar, efectuemos el producto PA

$$
PA = \begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ \frac{167}{362} & \frac{14}{181} & \frac{-7}{362}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ \frac{1}{2} & 6 & 1\\ 2 & \frac{1}{7} & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 12 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

- -

Una situación interesante, se presenta en el caso de las matrices cuadradas de orden n cuyo rango es también n, las cuales pueden transformarse en la matriz identidad I_n.

Estas matrices son equivalentes a una matriz escalonada de la forma

$$
\begin{bmatrix}1 & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n}\\ 0 & 1 & a_{23} & \cdot & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n}\\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1,n}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (10)
$$

donde todos los elementos a_{ij} tales que $i=j$ (a los que se llama elementos de la diagonal principal) son iguales a 1. Es decir, $a_{11}=a_{22}=a_{33}=\ldots=a_{nn}=1$.

Mostraremos ahora que, una matriz de este tipo, se puede transformar en una matriz identidad I_n mediante una secuencia de transformaciones elementales.

En efecto, si el último renglón de la matriz (10) lo multiplicamos por $-a_{1n}$ y lo sumamos al primer renglón, luego lo multiplicamos por $-a_{2n}$ y lo sumamos al segundo renglón, etc., obtenemos la matriz.

$$
\begin{bmatrix}1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & 0\\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a_{3,n-1} & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

Si ahora, el penúltimo renglón de esta nueva matriz lo multiplicamos por $-a_{1,n-1}$ y lo sumamos al primer renglón, luego lo multiplicamos por $-a_{2,n-1}$ y lo sumamos al segundo renglón, etc., obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al final de este proceso se obtendrá la matriz identidad

Ejemplo IV. 11.

Usando transformaciones elementales, transformaremos la matriz escalón

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en una matriz identidad:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Este procedimiento puede aplicarse a cualquier matriz escalonada arbitraria.

- -

Sin embargo, es importante notar que una matriz cuadrada de orden n, en forma escalonada y cuyo rango sea menor que n, no podrá nunca transformarse en una matriz identidad. Esto se debe a que una matriz de este tipo, tendrá siempre en su último renglón únicamente ceros.

Así mismo, una matriz no cuadrada tampoco podrá transformarse en una matriz identidad (ya que ésta es una matriz cuadrada).

Matriz Inversa.

Con lo que hemos visto hasta ahora, sabemos que si se tiene una matriz cuadrada A de orden n y rango n, es posible (mediante una serie de transformaciones elementales) transformarla primero en una matriz escalonada y luego en la matriz identidad I_n.

También se vió anteriormente, que el efecto de una sucesión finita de transformaciones elementales sobre cualquier matriz A, puede obtenerse premultiplicando A por una cierta matriz P. Por lo que, el efecto de toda la secuencia de transformaciones utilizadas para llevar la matriz A a la matriz I_n, se puede obtener premultiplicando A por una cierta matriz P.

Podemos entonces enunciar el siguiente

Teorema IV. 3.

Si A es una matriz cuadrada de orden n y rango n, existe una matriz P tal que

$$PA = I_n$$

No es difícil demostrar[1] que dicha matriz P, cumple también con

$$AP = I_n$$

aunque la multiplicación de matrices no sea conmutativa.

Puesto que la matriz I_n, es el elemento idéntico para la

(1) El estudiante puede obtener una demostración, a partir de la demostración del teorema 10-4-9 de la referencia 1 (pags. 454 y 455).

multiplicación en el conjunto de las matrices cuadrades de orden n, resulta adecuada la siguiente

Definición.

Si A y P son dos matrices cuadradas de orden n tales que

$$PA = AP = I_n$$

a la matriz P le llamaremos matriz inversa de A.

Si una matriz A tiene inversa, diremos que es no singular y a su inversa la representaremos con A^{-1}. Se puede demostrar que la inversa A^{-1} de una matriz A es única y también que (referencia 1 pag. 444) el producto de dos matrices no singulares es una matriz no singular.

Dado que una matriz cuadrada de orden n y rango menor que n no puede transformarse en una matriz identidad, no existe ninguna matriz P tal que

$$PA = I_n$$

En consecuencia, estas matrices no tienen inversa. A las matrices que no tienen inversa les llamaremos matrices singulares.

Con los conceptos tratados hasta ahora, el estudiante debe poder demostrar el siguiente

Teorema IV. 4.

Si A es una matriz de orden mxn, existe su inversa A^{-1} si y solo si

$$m = n = R(A).$$

Ejemplo IV. 12.

Investigue si la siguiente matriz tiene inversa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & \frac{7}{2} & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{8}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

Vamos a transformar A en una matriz escalón

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & \frac{7}{2} & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{8}{5} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{11}{2} & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{8}{5} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{11}{2} & 1 \\ 0 & 10 & -11 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{8}{5} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{11}{2} & 1 \\ 0 & 10 & -11 & 0 \\ 0 & 4 & -\frac{22}{5} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{10} & \frac{1}{5} \\ 0 & 10 & -11 & 0 \\ 0 & 4 & -\frac{22}{5} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{10} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -\frac{22}{5} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{10} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{10} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{10} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vemos que la matriz escalonada tiene tres renglones diferentes de cero, en consecuencia $R(A)=3$. Entonces, A es una matriz singular (no existe A^{-1}).

- -

Para obtener la matriz inversa de una matriz no singular, haremos uso del siguiente teorema.

Teorema IV. 5.

La inversa de una matriz A no singular se puede obtener si aplicamos a I, la misma secuencia de transformaciones elementales por renglón que se utilizan para transformar la matriz A en la matriz I.

Demostración

Sabemos que podemos transformar la matriz A en I mediante una cierta secuencia de transformaciones elementales. Entonces, existe una secuencia de matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_{k-1}, E_k$ tales que

$$E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = I$$

si llamamos P al producto de las matrices elementales

$$P = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1$$

podemos escribir

$$PA = I$$

además, sabemos que

$$AP = I$$

Es decir; P es la inversa de A.

Como I es el idéntico para el producto

$$P = PI$$

entonces

$$P = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 I$$

lo cual nos indica que P se obtiene a partir de I, efectuando en orden las transformaciones elementales que corresponden a E_1, E_2, $\ldots$ E_{k-1} y E_k

Ejemplo IV. 13.

Investigar si la siguiente matriz tiene inversa y en caso afirmativo hallarla.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución:

Aplicaremos el proceso descrito en el teorema IV.5. La primera columna de la siguiente tabla, describe la secuencia de transformaciones elementales por renglón, utilizada para transformar la matriz A en la matriz I. La segunda columna, muestra las matrices obtenidas a partir de A con la aplicación de estas transformaciones. La tercera columna, muestra las matrices obtenidas a partir de I con la aplicación de las mismas transformaciones.

Transformaciones	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = A$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$
Intercambio del primero y segundo renglones	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Suma del primer renglón al tercero	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
Multiplicación del segundo renglón por $\frac{1}{2}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
Suma del segundo renglón al tercero	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$
Multiplicación del ter		

cer renglón por $\frac{1}{7}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

Hasta ahora hemos transformado a la matriz A en una matriz escalonada. Vemos que el rango es 3 e igual al orden de la matriz, por lo tanto la matriz A tiene inversa.

Continuando el proceso:

Multiplicación del tercer renglón por -1 y sumar al segundo renglón	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{6}{14} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$
Multiplicación del tercer renglón por -1 y sumar al primer renglón	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{14} & \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{6}{14} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$
Multiplicación del segundo renglón por 2 y sumar al primer renglón	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$	$\begin{bmatrix} \frac{11}{14} & \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{6}{14} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} = A^{-1}$

La matriz que se encuentra al final de la segunda columna, es la matriz identidad, en consecuencia, por el teorema IV. 5, la matriz que se encuentra al final de la tercera columna es la inversa de A. Por lo que:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{14} & \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{6}{14} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Podemos comprobar el resultado efectuando el producto:

$$A^{-1}\ A = \begin{bmatrix} \frac{11}{14} & \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{6}{14} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

- -

En ocasiones, en lugar de hacer una tabla como la del -- ejemplo anterior, se trabaja con un arreglo que contiene a la matriz A en el lado izquierdo y a la matriz I en el lado derecho. Se -- efectúan las mismas transformaciones en ambas matrices, hasta que se obtenga la matriz I en el lado izquierdo. La matriz que resulta en el lado derecho es A^{-1}.

En forma esquemática:

$$\left[A \;\vdots\; I \right] \rightarrow \ldots \rightarrow \left[I \;\vdots\; A^{-1} \right]$$

4) $\forall$ A ε (M), $\exists$ -A ε (M) tal que A+(-A)= -A+A =0

5). A+B = B+A

6). A(B+C) = AB+AC y (B+C)A = BA + CA

Las propiedades 1 a 5, se han tratado ya para el caso general de matrices de orden mxn. La propiedad distributiva (6) la demostraremos a continuación.

Demostración.

Sean $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ y $C=(c_{ij})$ tres matrices cualesquiera de orden n.

De la definición de suma

$B+C=(b_{ij}+c_{ij})$

De la definición de producto

$A(B+C)=(a_{ij})(b_{ij}+c_{ij})$

$A(B+C)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{ij}+c_{ij})$

Como la multiplicación es distributiva sobre la suma en C y por las propiedades de la suma

$A(B+C)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij}$

De la definición de producto: A(B+C) = AB+AC.

La segunda parte se demuestra en forma análoga.

La propiedad distributiva del producto sobre la suma de matrices, tanto por la izquierda como por la derecha, puede generalizarse (referencia 3 pág. 26) de la siguiente forma:

A(B+C)=AB+AC y (B+C)A=BA+CA siempre y cuando las operaciones indicadas puedan ser efectuadas.

Definiremos la resta o sustracción de matrices, a partir de la suma, como

A-B=A+(-B)

lo cual equivale simplemente a restar de los elementos de A, los correspondientes de B. Resulta claro según la definición que, para que dos matrices sean conformables para la resta deben serlo para la suma.

Ejemplo IV. 15.

Para las matrices

$$A=\begin{bmatrix} 3i & -3 \\ 5 & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -i & -1 \\ 3 & -i \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & i \end{bmatrix}$$

a) Obtener A-B

b) Obtener A-C

Solución

a) $$A-B=\begin{bmatrix} -4+3i & -7 \\ 5+i & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

b) A-C no puede efectuarse.

Producto por un escalar.

Definición. Sean: $A=(a_{ij})$ una matriz de orden mxn y $\alpha \varepsilon$ C un escalar. El producto α por A, que representaremos mediante αA, es la matriz $\alpha A=(\alpha a_{ij})$

IV. 4. SUMA DE MATRICES.

Definición.

Sean $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ dos matrices del mismo orden mxn. La adición o suma $A+B$ de dichas matrices es una nueva matriz $C=(c_{ij})$ de orden mxn tal que

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

Es decir, los elementos de la matriz C son las sumas de los elementos correspondientes de A y B.

Ejemplo IV. 14.

Dadas las matrices

$$A=\begin{bmatrix}5 & 7\\ 0 & 4\\ -1 & 3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}-4 & -3\\ 2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

a) Obtener A+B

b) Obtener C+D

Solución

a)
$$A+B=\begin{bmatrix}5 & 7\\ 0 & 4\\ -1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -3\\ 2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5-4 & 7-3\\ 0+2 & 4+1\\ -1+1 & 3+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 0 & 5\end{bmatrix}$$

b) No puede efectuarse la suma C+D dado que las matrices no son del mismo orden, en estos casos se dice que las matrices no son conformables para la suma.

- -

Propiedades de la suma de matrices.

El estudiante puede demostrar las siguientes propiedades. Sean A, B y C tres matrices del mismo orden (mxn), se cumple siempre que:

1.- $(A+B)+C=A+(B+C)$ la suma es asociativa

2.- $A+B = B+A$ la suma es conmutativa

3.- Existe una matriz $0=(c_{ij})$ (donde $c_{ij}=0\ \forall\ i, j$) de orden mxn, a la que llamaremos matriz nula, tal que

$$A+0=0+A=A$$

4.- Para toda matriz $A=(a_{ij})$ de orden mxn, existe una matriz a la que llamaremos simétrica de A y representaremos con $-A$, tal que

$$A+(-A)=(-A)+A=0$$

(fácilmente se puede comprobar que la simétrica de $A=(a_{ij})$ es $-A=(-a_{ij})$)

De la definición de suma y las propiedades anteriores, vemos que el conjunto de las matrices del mismo orden forman un grupo abeliano.

Un caso particular, es el de las matrices cuadradas de orden n. El conjunto (M) de estas matrices, con las operaciones de suma y producto, forma un anillo con unidad (no conmutativo), ya que,

$\forall A, B, C \in (M)$ se cumple siempre que:

1) $A + B \in (M)$

$AB \in (M)$

2) $(A+B)+C= A+(B+C)$

$(AB)C= A(BC)$

3) $\exists\ 0 \in (M)$ tal que $A+0= 0+A=A$

$\exists\ I_n \in (M)$ tal que $A I_n=I_n A=A$

Ejemplo IV. 16.

Sean $\alpha = 3i$ y $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ i & 3 \\ 1 & 2+i \end{bmatrix}$

el producto αA es la matriz

$$\alpha A = \begin{bmatrix} 0 & -3i \\ -3 & 9i \\ 3i & -3+6i \end{bmatrix}.$$

- -

El estudiante puede fácilmente demostrar que esta operación tiene las siguientes propiedades.

Sean A y B dos matrices del mismo orden y α, β dos números complejos, se cumple siempre que:

1.- $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

2.- $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

3.- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

4.- $1 \cdot A = A$

Transpuesta de una matriz.

Definición.

Sea la matriz A de orden mxn. Llamaremos "transpuesta de A" y la representaremos mediante A^T, a la matriz de orden nxm cuyos renglones son las columnas de A y cuyas columnas son los renglones de A.

es decir:

si $A = (a_{ij})$ entonces $A^T = (a_{ji})$

Se puede demostrar (referencia 3 pag. 33) que

$(AB)^T = B^T A^T$

65

Ejemplo IV. 17.

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

obtener $(AB)^T$ y $B^T A^T$.

Solución

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \end{bmatrix} \therefore \text{ se}$$

comprueba que $(AB)^T = B^T A^T$.

- -

Ecuaciones matriciales.

Ejemplo IV. 18.

Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ [illegible] & [illegible] \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtener una matriz x tal que

$Ax - B^T = C + Dx$

Solución

En este caso tenemos una ecuación entre matrices, donde la incógnita es la matriz x. Este tipo de ecuaciones pueden resolverse empleando las propiedades de las operaciones que hemos definido, siempre y cuando la ecuación haya sido planteada correctamente.

Para el caso que nos ocupa, x debe ser tal que

$Ax-B^T=C+Dx$

sumando en ambos miembros $-Dx$:

$-Dx+(Ax-B^T)=-Dx+(C+Dx)$	
$-Dx+(Ax-B^T)=-Dx+(Dx+C)$	La suma es conmutativa.
$-Dx+Ax-B^T=(-Dx+Dx)+C$	La suma es asociativa.
$-Dx+Ax-B^T=0+C$	$-Dx$ es el inverso para la suma de Dx.
$-Dx+Ax-B^T=C$	La matriz nula es el idéntico para la suma.
$(-Dx+Ax-B^T)+B^T=C+B^T$	Sumando en ambos miembros B^T.
$-Dx+Ax+(-B^T+B^T)=C+B^T$	La suma es asociativa.
$-Dx+Ax+0=C+B^T$	$-B^T$ es el inverso para la suma de B^T.
$-Dx+Ax=C+B^T$	La matriz nula es el idéntico para la suma.
$(-D+A)x=C+B^T$	La multiplicación es distributiva sobre la suma.
$(-D+A)^{-1}((-D+A)x)=(-D+A)^{-1}(C+B^T)$	Suponiendo que existe $(-D+A)^{-1}$ premultiplicamos ambos miembros por dicha matriz.
$((-D+A)^{-1}(-D+A))x=(-D+A)^{-1}(C+B^T)$	Por asociatividad del producto.
$I_2x=(-D+A)^{-1}(C+B^T)$	Por la definición de matriz inversa.

Finalmente, como I_2 es el idéntico para el producto y por la conmutatividad de la suma

$x=(A-D)^{-1}(C+B^T)$

Lo que hemos hecho es despejar la incógnita x de la ecuación matricial, justificando los pasos de dicho despeje. Pueden omitirse estas justificaciones y algunos pasos que se consideren obvios, con el objeto de hacer mas corto el proceso.

Sin embargo, el estudiante debe tener cuidado al despejar una incógnita de una ecuación matricial, ya que existen diferencias entre las propiedades de las operaciones con matrices y con números reales.

Efectuemos las operaciones indicadas en la última expresión:

$$C+B^T=\begin{bmatrix}2 & -1 & 4\\ 0 & -3 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 3 & -5\\ -1 & 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$A-D=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

Veamos si efectivamente existe $(A-D)^{-1}$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc}-2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}-2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$\therefore\ (A-D)^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

Por lo que, la incógnita x puede obtenerse como:

$$x=(A-D)^{-1}(C+B^T)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-5 & -5 & 3\\ 2 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

Finalmente, la matriz pedida es

$$x= \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- -

La principal diferencia entre las matrices y los números reales es que, mientras que podemos sumar o multiplicar dos números cualesquiera, no siempre podemos hacerlo con las matrices. Suponiendo que pueden efectuarse las operaciones indicadas, enlistamos a continuación las principales diferencias entre las propiedades de las operaciones con números y con matrices:

1) La multiplicación de números es conmutativa; la multiplicación de matrices no lo es.

2) Si definimos $A^2=AA$, el desarrollo matricial $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ es en general falso (como consecuencia de 1). El desarrollo correcto es $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$.

3) El producto de dos números diferentes de cero nunca es cero, pero el producto de dos matrices diferentes de la matriz nula puede ser igual a cero (la matriz nula).

Por ejemplo, si

$$A= \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad B= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

se tiene que $AB=0$

4) La ley cancelativa para el producto se verifica en los números, pero no en las matrices.

Esto es, si $a, b \in R$ y $a\neq 0$

$$(ab = ac) \implies (b=c)$$

pero en las matrices

$$(AB = AC) \;\not\Longrightarrow\; (B=C)$$

Por ejemplo, con las matrices A y B del ejemplo anterior tenemos que

$AB = A0$ pero $B\neq 0$, por lo que no podemos cancelar A.

Nota. Aunque $(AB=AC) \not\Longrightarrow (B=C)$, sí se cumple que

$$(B=C) \implies (AB=AC) \quad \forall A.$$

Antes de pasar a la sección siguiente, es conveniente aclarar que aunque hemos definido matriz como un arreglo de números (reales o complejos), el concepto de matriz puede generalizarse como "un arreglo de números, funciones u operadores". En el siguiente capítulo y en cursos posteriores se verá la utilidad de dicha extensión.

IV. 5. SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES.

Como vimos al inicio de la sección IV. 3, podemos representar el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 20x_1+100x_2+40x_3=400 \\ 0x_1+\quad x_2-\quad x_3=0 \end{array}\right\} \ldots (4).$$

mediante la expresión matricial

$$A\bar{x}=\bar{b}$$

A esta ecuación matricial, donde $\bar{x}$ es la matriz incógnita o indeterminada, se le conoce como "forma matricial del sistema de ecuaciones (4)".

La matriz

$$A=\begin{bmatrix} 20 & 100 & 40 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

recibe el nombre de "matriz de coeficientes del sistema", y a las matrices

$$\bar{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad y \quad \bar{b}=\begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se les llama "vector de incógnitas" y "vector de términos independientes" respectivamente.

En general, la forma matricial del sistema

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}$$

$$A\bar{x}=\bar{b}$$

donde la matriz de coeficientes es la matriz de mxn:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

el vector de incógnitas es la matriz de nx1:

$$\bar{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

y el vector de términos independientes es la matriz de mx1:

$$\bar{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Es claro que resolver la ecuación matricial $A\bar{x}=\bar{b}$ es equivalente a resolver el sistema, por lo que una solución de dicho sistema será una matriz columna de n renglones

$$\bar{k}=\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \qquad (k_i \in C)$$

tal que $A\bar{k}=\bar{b}$.

Definiremos una matriz más para el sistema, a la que llamaremos "matriz ampliada" del sistema, la cual juega un papel importante en el estudio teórico de los sistemas de ecuaciones.

Definición.

La matriz ampliada de un sistema de ecuaciones, que representaremos con $(A, \bar{b})$, es la mátriz de orden $m\times(n+1)$ que resulta de aumentar, a la matriz de coeficientes, el vector de términos independientes.

Entonces, la matriz ampliada del sistema es:

$$(A,\bar{b}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Sistemas incompatibles.

Si analizamos el sistema

$$x_1+x_2+x_3=6$$
$$x_1+2x_2-x_3=1$$
$$x_1+x_2+x_3=-5$$

vemos que las ecuaciones 1a. y 3a. no pueden satisfacerse simultáneamente, ya que no existen tres números x_1, x_2, x_3 cuya suma sea igual a 6 y -5 a la vez. El sistema es entonces incompatible.

Veamos que sucede con los rangos de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad (A,\bar{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Al efectuar solamente transformaciones por renglón, es posible determinar a la vez los rangos de las matrices A y $(A, \bar{b})$ operando sobre la matriz ampliada, la cual contiene a la matriz A.

Transformaremos entonces en una matriz escalón el siguiente arreglo.

$$\begin{array}{c} A \\ \underbrace{\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right]}_{(A,\bar{b})} \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

De la última matriz vemos que

$R(A) = 2$

y $R(A, \bar{b}) = 3$

es decir $R(A) < R(A, \bar{b})$, que es una característica de todos los sistemas incompatibles.

Sabemos que el sistema es incompatible porque las ecuaciones 1a. y 3a. no admiten solución simultánea. Daremos otra prueba de la incompatibilidad de dicho sistema:

La última matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

representa el siguiente sistema equivalente

$$x_1+x_2+x_3=6$$
$$0x_1+x_2-2x_3=-5$$
$$0x_1+0x_2+0x_3=1$$

donde vemos que no existen valores para x_1, x_2, x_3 que satisfagan la 3a. ecuación. Esto implica que el sistema equivalente no tiene solución y en consecuencia el sistema original tampoco.

Conviene hacer la siguiente observación.

El rango de la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, es igual al rango de la matriz de coeficientes o mayor en una unidad, por lo que:

$$R(A) \leq R(A, \bar{b})$$

En efecto, sea un sistema de m ecuaciones con n incógnitas

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \dots\ +a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \dots\ +a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ \dots\ +a_{mn}x_n=b_m \end{matrix}\right\} \dots\dots (11)$$

cuya matriz de coeficientes es:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \dots\dots (12)$$

y cuya matriz ampliada es:

$$(A,\bar{b})=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \dots (13)$$

Sea el rango de la matriz de coeficientes $R(A)=r$. Efectuando en $(A,\bar{b})$ las mismas transformaciones que se efectúan para llevar la matriz A a su forma escalonada, obtendremos la matriz:

$$\text{r renglones}\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\ \dots\\0\end{matrix}}\right.\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & d_m \end{bmatrix}$$

continuando con el proceso, hasta transformar esta matriz en una matriz escalonada obtendremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & e \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots (14)$$

donde $\left\{\begin{matrix} c_{ij}=1 & \text{si} & j=k \\ c_{ij}=0 & \text{si} & j<k \end{matrix}\right\}$ para algún $k \geq i$.

Existen entonces sólo dos posibilidades:

a) Si $e=0$, $R(A,\bar{b})=r=R(A)$

b) Si $e\neq 0$, podemos dividir el $r+1$ ésimo renglón entre e, obteniendo:

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots (15)$$

de donde $R(A,\bar{b}) = r+1 = R(A)+1$

Entonces $R(A) < R(A,\bar{b})$.

Por tanto, hemos demostrado que $R(A) \leq R(A,\bar{b})$.

> Teorema IV. 6.
>
> Si en un sistema de ecuaciones lineales
>
> $R(A) < R(A,\bar{b})$
>
> entonces el sistema es incompatible.

Demostración

Si $R(A) < R(A, \bar{b})$, la matriz ampliada del sistema (11) puede transformarse en la matriz (15). En esta última, el r+1 ésimo renglón representa la ecuación

$0x_1+0x_2+ \dots +0x_n= 1$

de un sistema equivalente.

Obviamente, esta ecuación no se satisface para ningún conjunto de valores $x_1, x_2, \dots, x_n$, por lo que el sistema es incompatible.

Ejemplo IV. 19.

Investigue si el siguiente sistema de ecuaciones tiene solución

$2x_1+3x_2+5x_3= 2$

$6x_1+9x_2+15x_3= 1$

Transformemos la matriz de coeficientes en una matriz escalonada

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 9 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 6 & 9 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad R(A)=1$

Transformemos ahora la matriz ampliada en una matriz escalonada

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 6 & 9 & 15 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 6 & 9 & 15 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R(A,\bar{b})= 2$

Como $R(A) < R(A,\bar{b})$, el sistema no tiene solución.

Obsérvese que se hubiera llegado a la misma conclusión de haber trabajado directamente con la matriz ampliada.

- -

Sistemas compatibles determinados.

Analicemos primeramente el caso particular de los sistemas de n ecuaciones con n incógnitas, en los cuales la matriz de coeficientes es de rango n.

Un sistema de n ecuaciones con n incógnitas tiene la forma

$$\begin{array}{l} a_{11}\ x_1 + \dots + a_{1n}\ x_n = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + \dots + a_{2n}\ x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ x_1 + \dots + a_{nn}\ x_n = b_n \end{array}$$

En este caso, la matriz de coeficientes es la matriz cuadrada de orden n

$$A= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

y si además $R(A)=n$, por el teorema IV. 4 existe su inversa A^{-1}

El sistema puede escribirse como

$A\bar{x}=\bar{b}$

Premultiplicando ambos miembros por A^{-1}

$$A^{-1}(A\bar{x}) = A^{-1}\bar{b}$$
$$(A^{-1}A)\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$$
$$I\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$$
$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$$

Entonces, la matriz columna $\bar{x}$ que satisface la ecuación $A\bar{x}=\bar{b}$ puede ser obtenida con sólo efectuar el producto $A^{-1}\bar{b}$.

Puesto que el producto $A^{-1}\bar{b}$ define una única solución $\bar{x}$, podemos concluir que

> Un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, tal que la matriz de coeficientes tiene rango n, es compatible determinado y su solución puede obtenerse como:
>
> $$\bar{x}=A^{-1}\bar{b}$$

Ejemplo IV. 20.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$3x_3-5+2x_2=-x_1$$
$$2x_1+4x_3= 11+x_2$$
$$-x_2+ x_3= 3$$

Solución

Ordenando el sistema tenemos

$$x_1+2x_2+3x_3=5$$
$$2x_1-x_2+4x_3=11$$
$$-x_2+ x_3=3$$

que en forma matricial puede expresarse como:

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

donde: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$, $\bar{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$, $\bar{b}=\begin{bmatrix}5\\ 11\\ 3\end{bmatrix}$

Investiguemos si existe la inversa de A:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}\overbrace{\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{matrix}}^{A} & \overbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}^{I}\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -5 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 1\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7}\end{array}\right]$$

En este paso, vemos que $R(A)=3$, por lo que existe A^{-1}

Continuando con el proceso

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7}\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{15}{7}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7}\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc}\overbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}^{I} & \overbrace{\begin{matrix}-\frac{3}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{11}{7}\\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7}\\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7}\end{matrix}}^{A^{-1}}\end{array}\right]$$

Entonces

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{11}{7}\\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7}\\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7}\end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix}3 & -5 & 11\\ -2 & 1 & 2\\ -2 & 1 & -5\end{bmatrix}$$

En consecuencia, la solución es $\bar{x}=A^{-1}\bar{b}$

de donde

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix}3 & -5 & 11\\ -2 & 1 & 2\\ -2 & 1 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 11\\ 3\end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-7\\ 7\\ -14\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$$

o sea $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$

- -

Veamos ahora cuáles son los rangos de A y $A,\bar{b}$ para el sistema del ejemplo anterior:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \overset{}{1} & 2 & 3 & 5\\ 2 & -1 & 4 & 11\\ 0 & -1 & 1 & 3\end{array}\right]}_{(A,\bar{b})}\!\overbrace{}^{A}\quad\quad\quad\quad \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & -5 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 3\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & -1 & 1 & 3\\ 0 & -5 & -2 & 1\end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -7 & -14\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right]$$

De la última matriz vemos que

$R(A)=3$

$R(A,\bar{b})=3$

es decir $R(A)=R(A,\bar{b})$

Además, $R(A)=R(A,\bar{b})=n$, que es una característica de los sistemas compatibles determinados.

> Teorema IV. 7.
>
> Si en un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas
>
> $R(A)=R(A,\bar{b})=n$
>
> entonces el sistema es compatible determinado.

Demostración.

Si $R(A)=R(A,\ \bar{b})=n$, la matriz ampliada del sistema (11) puede transformarse en la matriz

$$\begin{array}{c} n \\ \text{renglones} \end{array}\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \cdots\cdots & c_{1n} & d_1\\ 0 & 1 & \cdots\cdots & c_{2n} & d_2\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & d_n\\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que representa al sistema equivalente

73

$$\begin{aligned} x_1+c_{12}x_2+\ \ldots\ +c_{1n}x_n&=d_1\\ x_2+\ \ldots\ +c_{2n}x_n&=d_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\\ x_n&=d_n \end{aligned}$$

ya que las ecuaciones representadas por los renglones $n+1,\ \ldots,\ m$ son todas de la forma

$0x_1+0x_2+\ \ldots +\ 0x_n=0$

y se satisfacen para cualquier conjunto de valores $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$.

El sistema equivalente tiene n ecuaciones con n incógnitas, y el rango de su matriz de coeficientes es también n, por lo que es compatible determinado.

Ejemplo IV. 21.

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2&=6\\ x_1-\ x_2&=1\\ 4x_1+\ x_2&=7 \end{aligned}$$

Solución

Calculemos los rangos de A y $(A,\bar{b})$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 6\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 7\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 7\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & 2\\ 0 & -\frac{5}{3} & -1\\ 0 & -\frac{5}{3} & -1\end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & 2\\ 0 & 1 & \frac{3}{5}\\ 0 & -\frac{5}{3} & -1\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & 2\\ 0 & 1 & \frac{3}{5}\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

vemos que $R(A)=R(A,\bar{b})=n=2$, por lo que el sistema es compatible determinado.

Resolviendo el sistema equivalente

$$x_1+\frac{2}{3}x_2=2$$
$$x_2=\frac{3}{5}$$

obtenemos la solución

$$x_1=\frac{8}{5}$$
$$x_2=\frac{3}{5}$$

- -

<u>Sistemas compatibles indeterminados.</u>

Volvamos nuevamente al sistema

$$\left.\begin{matrix} 20x_1+100x_2+40x_3=400 \\ 0x_1+\quad x_2-\quad x_3=\ \ 0 \end{matrix}\right\}\ldots\ldots(4)$$

para el que, al inicio del capítulo, dimos las soluciones

a) $x_1=6,\quad x_2=2,\quad x_3=2$

y b) $x_1=13,\quad x_2=1,\quad x_3=1$

Veamos ahora cuales son los rangos de A y $(A,\bar{b})$:

Dividiendo entre 20 el primer renglón de la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 20 & 100 & 40 & 400 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

En consecuencia

$$R(A)=R(A,\bar{b})=2$$

si en el sistema equivalente

$$x_1+5x_2+2x_3=20$$
$$x_2-x_3=0$$

damos a x_3 el valor de $x_3=2$, tendremos

$$x_1+5x_2+4=20$$
$$x_2-2=0$$

De la segunda ecuación

$$x_2=2$$

y, sustituyendo en la primera ecuación

$$x_1=6$$

con lo que hemos obtenido la solución a).

Si en el sistema equivalente hacemos ahora $x_3=1$, obtenemos la solución b).

En general, haciendo $x_3=k$ (una constante arbitraria) en el sistema equivalente, obtenemos

$$x_1+5x_2+2k=20$$
$$x_2-k=0$$

De la segunda ecuación

$$x_2=k$$

y, sustituyendo en la primera

$$x_1+5k+2k=20 \Longrightarrow x_1=20-7k$$

con lo que podemos dejar la solución en función de k como

$$\left.\begin{matrix} x_1=20-7k \\ x_2=k \\ x_3=k \end{matrix}\right\}\ldots\ldots(16)$$

A la expresión (16) le llamaremos solución general del sistema (4), ya que, para cualquier valor de k, los valores de x_1, x_2, x_3 dados por dicha expresión constituyen una solución del sistema.

Recordemos que el sistema (4) nos representa el problema de encontrar el número (x_1, x_2, x_3) de objetos de diferentes tipos (A, B, C) que se pueden fabricar, por lo que la solución está restringida a valores enteros no negativos (0, 1, 2 ...) de dichas incógnitas. Entonces, de (16), es fácil observar que k puede tomar únicamente los valores 0, 1 y 2 ($k \geq 3$ haría x_1 negativo).

Tenemos por tanto un sistema indeterminado con tres soluciones (para k=0, 1, 2).

Sin embargo, si consideramos un problema en el que las incógnitas x_1, x_2 y x_3 pueden tomar cualquier valor, tendremos un sistema indeterminado con un número infinito de soluciones (una para cada valor real de k).

Considerando nuevamente los rangos de A y $(A, \bar{b})$ y el número de incógnitas n, vemos que, para el sistema del ejemplo anterior

$$R(A)= R(A, \bar{b}) < n$$

que es una característica de los sistemas compatibles indeterminados.

Teorema IV. 8

Si en un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$R(A)=R(A, \bar{b})=r$

y $r < n$

entonces el sistema es compatible indeterminado

Demostración

Si $R(A)=R(A, \bar{b})=r$ y $r < n$

la matriz ampliada del sistema (11) puede reducirse a la forma (14), donde e=0.

Los primeros r renglones de dicha matriz son tales que su primer elemento distinto de cero es igual a uno y el número de ceros anteriores a dicho elemento aumenta de renglón a renglón.

Si llamamos $z_1, z_2, \ldots, z_r$ a las incógnitas cuyos coeficientes son los elementos mencionados, podemos ordenar el sistema equivalente en la forma

$$z_1+p_{12}z_2+ \ldots + p_{1r}z_r=d_1-p_{1,r+1}z_{r+1}-\ldots-p_{1n}z_n$$
$$z_2+ \ldots + p_{2r}z_r=d_2-p_{2,r+1}z_{r+1}-\ldots-p_{2n}z_n$$
$$- - - - - - - - - - - - - - - - -$$
$$z_r=d_r-p_{r,r+1}z_{r+1}-\ldots-p_{rn}z_n$$

Si asignamos valores arbitrarios a las incógnitas z_{r+1}, $z_{r+2}, \ldots, z_n$ trasladadas a los segundos miembros, el sistema es compatible determinado en las incógnitas $z_1, z_2, \ldots, z_r$.

Ahora bien, como a $z_{r+1}, z_{r+2}, \ldots, z_n$ podemos asignarles un número infinito de valores arbitrarios, el sistema además de ser compatible es indeterminado.

Ejemplo IV. 22

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_1+x_2+x_3-2x_4-x_5= 1$$
$$3x_1+3x_2-x_3+x_4+4x_5= 4$$
$$x_1+x_2+5x_3-9x_4-8x_5= 0$$

Solución.

Calculamos primero los rangos de A y $(A, \bar{b})$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -7 & -7 & -1 \end{array}\right] \to$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como $R(A)=R(A,\bar{b})=2=r$ el sistema es compatible.

Como $r < n$, $(2 < 5)$, el sistema es indeterminado.

Tenemos ahora el sistema equivalente

$$x_1+x_2+x_3-2x_4-x_5= 1$$
$$x_3-\frac{7}{4}x_4-\frac{7}{4}x_5= -\frac{1}{4}$$

Las dos incógnitas que dejamos en el sistema equivalente son x_1 y x_3, ya que sus coeficientes son los primeros elementos distintos de cero en los renglones de la última matriz. En consecuencia, trasladamos las tres incógnitas restantes a los segundos miembros de las ecuaciones.

Asignando a x_2, x_4, x_5 los valores $x_2=k_1$, $x_4=k_2$ y $x_5=k_3$ tenemos el sistema

$$x_1+x_3=1-k_1+2k_2+k_3$$
$$x_3= -\frac{1}{4}+\frac{7}{4}k_2+\frac{7}{4}k_3$$

Sustituyendo x_3 en la primera ecuación obtenemos finalmente

$$x_1=\frac{1}{4}(5-4k_1+k_2-3k_3)$$
$$x_2=k_1$$
$$x_3=\frac{1}{4}(-1+7k_2+7k_3)$$
$$x_4=k_2$$
$$x_5=k_3$$

que es la solución general del sistema.

Si por ejemplo hacemos

$$k_1=1,\quad k_2=1,\quad k_3=0$$

obtenemos la solución particular.

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=1,\ x_3=\frac{3}{2},\ x_4=1,\ x_5=0$$

Otra solución particular sería

$$x_1=\frac{5}{4},\ x_2=0,\ x_3=-\frac{1}{4},\ x_4=0,\ x_5=0$$

que se obtuvo para los valores

$$k_1=k_2=k_3=0$$

- -

Los resultados obtenidos en esta sección, pueden resumirse en el siguiente cuadro

$$\begin{array}{c}\text{Sistemas de ecuaciones lineales}\\ A\bar{x}=\bar{b}\end{array} \begin{cases} \begin{array}{l}\text{Compatibles}\\ R(A)=R(A,\bar{b})=r\end{array} \begin{cases} \begin{array}{c}\text{Determinados}\\ r=n\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{Indeterminados}\\ r<n\end{array} \end{cases} \\ \begin{array}{l}\text{Incompatibles}\\ R(A)<R(A,\bar{b})\end{array} \end{cases}$$

Las condiciones que aparecen en el cuadro, fueron enunciadas en los teoremas IV. 6, IV. 7 y IV. 8 como condiciones suficientes. No es difícil probar que dichas condiciones son también necesarias.

De los ejemplos utilizados en el desarrollo de esta sección, se ve que un proceso conveniente para obtener soluciones de sistemas de ecuaciones lineales es el siguiente:

1) Se obtienen los rangos de A y $(A, \bar{b})$ trabajando directamente con la matriz ampliada.
2) Se clasifica el sistema en base al cuadro anterior.
3) De ser compatible, se trabaja con el sistema equivalente representado por la matriz escalonada que se obtuvo al calcular los rangos.
4) Se trasladan n-r incógnitas a los segundos miembros de las --

ecuaciones, de tal forma que se obtenga un sistema compatible determinado en r incógnitas.

5) Se resuelve el sistema obtenido en 4 por cualquier método (matriz inversa, sustitución, etc.)

Ejemplo IV. 23.

Resolver el siguiente sistema

$$-4x_1+x_2-4x_3-10x_4+22x_5+4x_6=-9$$
$$x_1+2x_3+4x_4-5x_5-x_6=2$$
$$-2x_1+2x_2+4x_3+5x_4+13x_5+4x_6=-3$$
$$3x_1-2x_2-2x_3+3x_4-21x_5+3x_6=15$$
$$5x_1+10x_3+20x_4-25x_5-5x_6=10$$
$$x_1-x_2-2x_3-x_4-6x_5+x_6=2$$

obtengamos los rangos:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} -4 & 1 & -4 & -10 & 22 & 4 & -9 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & -5 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 5 & 13 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & -2 & 3 & -21 & 3 & 15 \\ 5 & 0 & 10 & 20 & -25 & -5 & 10 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -6 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & -5 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -4 & -10 & 22 & 4 & -9 \\ -2 & 2 & 4 & 5 & 13 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & -2 & 3 & -21 & 3 & 15 \\ 5 & 0 & 10 & 20 & -25 & -5 & 10 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -6 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & 13 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & -9 & -6 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & 13 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & -9 & -6 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

De esta matriz podemos observar que

$R(A)=R(A,\bar{b})=4$ (sistema compatible).

Tenemos entonces $r=4$

y $n=6$ (número de incógnitas), por lo que el sistema en cuestión es compatible indeterminado.

El sistema equivalente que representa la última matriz es:

$$x_1+2x_3+4x_4-5x_5-x_6=2$$
$$x_2+4x_3+6x_4+2x_5=-1$$
$$x_4-x_5+2x_6=3$$
$$x_5=-2$$

Como se dijo anteriormente, debemos despejar $n-r=2$ incógnitas, dejando del lado izquierdo aquellas cuyo coeficiente es el primer uno de cada renglón de la matriz escalonada (x_1, x_2, x_4, x_5):

$$x_1+4x_4-5x_5=2-2x_3+x_6$$
$$x_2+6x_4+2x_5=-1-4x_3$$
$$x_4-x_5=3-2x_6$$
$$x_5=-2$$

Dando valores arbitrarios a x_3 y x_6;

$x_3=k_1$

$x_6=k_2$

obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} x_1 \quad +4x_4-5x_5&=2-2k_1+k_2\\ x_2+6x_4+2x_5&=-1-4k_1\\ x_4-\ x_5&=3-2k_2\\ x_5&=-2 \end{aligned}$$

Este sistema es de la forma

$A\bar{x}=\bar{b}$

donde

$$A=\begin{bmatrix}1&0&4&-5\\0&1&6&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}_{4\times 4} \qquad \bar{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_4\\x_5\end{bmatrix}_{4\times 1} \qquad \bar{b}=\begin{bmatrix}2-2k_1+k_2\\-1-4k_1\\3-2k_2\\-2\end{bmatrix}_{4\times 1}$$

y podemos resolverlo utilizando la matriz inversa de A, como

$\bar{x}=A^{-1}\bar{b}$

Como es fácil verificar:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&-4&1\\0&1&-6&-8\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Por tanto

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-4&1\\0&1&-6&-8\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2-2k_1+k_2\\-1-4k_1\\3-2k_2\\-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-2k_1+k_2-4(3-2k_2)-2\\-1-4k_1-6(3-2k_2)-8(-2)\\3-2k_2-2\\-2\end{bmatrix}$$

finalmente

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12-2k_1+9k_2\\-3-4k_1+12k_2\\1-2k_2\\-2\end{bmatrix}$$

Entonces, la solución general del sistema original es:

$x_1=-12-2k_1+9k_2$
$x_2=-3-4k_1+12k_2$
$x_3=k_1$
$x_4=1-2k_2$
$x_5=-2$
$x_6=k_2$

$\forall\ k_1,\ k_2 \in R.$

- -

Ejemplo IV. 24.

Sea el sistema

$$\begin{aligned} x+y+z&=6\\ x-2z&=-4\\ 3x+2y&=8\\ 5x+2y+\beta z&=0 \end{aligned}$$

¿Qué valores puede tomar β para que la solución del sistema sea única? Dando a β uno de esos valores resuélvase el sistema.

Solución.

La solución del sistema es única para aquellos valores de β que hagan $R(A)=R(A,\bar{b})=n$

Reduciendo la matriz ampliada a su forma escalonada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & \beta & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -10 \\ 0 & -1 & -3 & -10 \\ 0 & -3 & -5+\beta & -30 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5+\beta & -30 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4+\beta & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 4+\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

De la última matriz vemos que

Si $4+\beta=0$, $R(A)=R(A,\bar{b})=2$ (compatible indeterminado)

Si $4+\beta\neq 0$, $R(A)=R(A,\bar{b})=3$ (compatible determinado)

por tanto, el sistema tiene solución única $\forall\ \beta \in R,\ \beta \neq -4$.

Si $\beta\neq -4$, de la última matriz se tiene el sistema equivalente

$$x+y+z=6$$
$$y+3z=10$$
$$(4+\beta)z=0$$

cuya solución es

$$x=-4, \quad y=10, \quad z=0$$

- -

Sistemas homogéneos.

A los sistemas de ecuaciones lineales de la forma

$$a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n = 0$$
$$a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_{2n}\ x_n = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}\ x_1 + a_{m2}\ x_2 + \ldots + a_{mn}\ x_n = 0$$

Se les llama sistemas homogéneos.

La representación matricial de un sistema homogéneo es

$A\bar{x}=0$ (donde 0 es la matriz nula de orden mx1)

Estos sistemas son siempre compatibles puesto que admiten la solución

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=0$$

llamada solución trivial. Además, en un sistema homogéneo se tiene siempre que

$$R(A)=R(A,\bar{b})$$

puesto que agregando una columna de ceros no puede elevarse el rango de una matriz.

Si $R(A)=n$, el sistema solo admite la solución trivial ya que la solución de la ecuación

$$A\bar{x}=0$$

es $\quad x=A^{-1}0=0$.

Si $R(A)<n$, el sistema es indeterminado y admite otras soluciones además de la trivial, las cuales pueden obtenerse mediante cualquiera de los procedimientos vistos anteriormente.

IV. 6. DETERMINANTES.

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{array}\right\} \dots (17)$$

cuya matriz de coeficientes es

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Para eliminar x_2 por sustracción multipliquemos la primera ecuación por a_{22} y la segunda por a_{12}, con lo que resulta el sistema equivalente.

$$a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2=a_{22}b_1$$
$$a_{12}a_{21}x_1+a_{12}a_{22}x_2=a_{12}b_2$$

restando la segunda ecuación de la primera

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2$$

si $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \quad \dots (18)$$

En forma similar podemos obtener

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \quad \dots (19)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (17), los valores de x_1 y x_2 dados por las expresiones (18) y (19), puede comprobarse fácilmente que se trata de una solución.

El común denominador de las expresiones (18) y (19) está expresado en términos de los elementos de la matriz A de coeficientes. A este número se le conoce como determinante de la matriz A y se le representa con det (A). Se dice que es un determinante de segundo orden, por ser la matriz de orden 2.

Para designar al determinante de la matriz A se emplea la siguiente notación

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \dots (20)$$

donde hemos reemplazado los paréntesis rectangulares por barras verticales para distinguir al determinante de la matriz. Es importante subrayar que, mientras que la matriz es un arreglo de números, el determinante es un número perfectamente definido por la matriz cuadrada.

Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=(-2)(5)-(3)(-1)=-10+3=-7$$

Los numeradores de las expresiones (18) y (19) tienen la misma forma que el denominador, o sea, también son determinantes de segundo orden.

De acuerdo con la expresión (20) que define al determinante de segundo orden, podemos escribir

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

El numerador de la primera expresión es el determinante de una matriz que se obtiene a partir de la matriz A, sustituyendo la columna de coeficientes de x_1 por el vector de términos independientes. El numerador de la segunda expresión es el determinante de otra matriz, que se obtiene también a partir de A, reemplazando ahora la columna de coeficientes de x_2 por el vector de términos - independientes.

A la regla sugerida por estas expresiones para resolver un sistema de ecuaciones se le conoce como regla de Cramer y obviamente es aplicable siempre y cuando det (A) $\neq 0$

Consideremos ahora el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{array}\right\} \ldots\ldots (21)$$

cuya matriz de coeficientes es

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Mediante un proceso similar al empleado para el sistema (17), encontramos que los valores de las incógnitas que satisfacen el sistema son

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{13}b_2a_{32}+a_{12}a_{23}b_3-a_{13}a_{22}b_3-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}} \quad (22)$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+a_{13}a_{21}b_3+b_1a_{23}a_{31}-a_{13}b_2a_{31}-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}} \quad (23)$$

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+b_1a_{21}a_{32}+a_{12}b_2a_{31}-b_1a_{22}a_{31}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}} \quad (24)$$

Al común denominador de las expresiones (22), (23) y (24)

se le conoce como determinante de la matriz A y es un determinante de tercer orden. La expresión que define al determinante de tercer orden es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (25)$$

Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} =(1)(5)(0)+(0)(2)(1)+(-3)(-4)(-2)-(-3)(5)(1)-(0)(-4)(0)-(1)(2)(-2)=0+0-24+15-0+4=-5$$

De acuerdo con la expresión (25), podemos escribir la solución del sistema como sigue

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

con lo que resulta lógico tratar de generalizar la regla de Cramer para el caso de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Sin embargo, requerimos de una definición para el determinante de orden n.

Definición de determinante.

Queremos generalizar la definición de determinante para un n arbitrario, en base a las expresiones (20) y (25) que definen a los determinantes de orden 2 y 3, respectivamente.

Sin embargo, no es posible hacer esto del mismo modo (es decir, resolviendo en forma general un sistema de ecuaciones lineales), pues a medida que aumenta n, los cálculos se hacen más complicados y, siendo n arbitrario, son prácticamente irrealizables.

Estableceremos una ley general examinando los determinantes de segundo y tercer orden, y tomaremos esta como definición para el determinante de orden n. Antes, definiremos los conceptos de permutación y clase de una permutación que necesitaremos para ello.

Las permutaciones de los n números del conjunto {1,2,3, ...,n} son las diferentes maneras en que pueden ser arreglados.

Por ejemplo, las permutaciones de los números 1,2,3, son los arreglos

1, 3, 2
2, 3, 1
3, 2, 1
1, 2, 3
2, 1, 3
3, 1, 2

El conjunto de todas las permutaciones de n números, está formado por n! arreglos o permutaciones y se representa por S_n.

Llamaremos permutación principal a aquella en la que los números aparecen en el orden natural.

En el ejemplo anterior tenemos 3!=6 permutaciones, donde la permutación principal es 1, 2, 3.

Consideremos una permutación arbitraria $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de los números 1, 2, ..., n. Diremos que dicha permutación es de clase par o impar según exista un número par o impar de inversiones en el orden natural, es decir; parejas (α_1, α_k) tales que α_1 precede a α_k en la permutación y $\alpha_k < \alpha_1$. A la permutación principal le asignaremos la clase par.

Para las permutaciones del ejemplo tenemos que:

1, 3, 2 es de clase impar ya que existe una pareja, la pareja (3, 2), tal que 3 precede a 2 en la permutación y 2<3.

2, 3, 1 es de clase par ya que existen dos parejas, (2,1) y (3,1), tales que 2 precede a 1 y 1<2; 3 precede a 1 y 1<3

3, 2, 1 es de clase impar ya que existen tres parejas, (3,2), (3,1) y (2,1), tales que 3 precede a 2 y 2<3; 3 precede a 1 y 1<3; 2 precede a 1 y 1<2.

1, 2, 3 es de clase par (por definición).

Procediendo en forma análoga vemos que:

2, 1, 3 es de clase impar.

3, 1, 2 es de clase par.

Recordando la expresión que define al determinante de 2o. orden

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

observamos que:

a) El determinante es la suma algebraica de dos (2!) productos.

b) Cada producto tiene dos factores.

c) En cada producto hay elementos de todos los renglones (y uno sólo de cada renglón).

d) En cada producto hay elementos de todas las columnas (y uno sólo de cada columna).

e) Si los elementos se escriben de tal manera que los primeros índices formen una permutación principal, se antepone un signo + al producto en que los segundos índices forman una permutación de clase par y un signo - al producto en que los segundos índices forman una permutación de clase impar.

Recordando la expresión que define al determinante de 3er. orden

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (25)$$

observamos que:

a) El determinante es la suma algebraica de seis (3!) productos.

b) Cada producto tiene 3 factores

c) En cada producto hay elementos de todos los renglones (y uno sólo de cada renglón).

d) En cada producto hay elementos de todas las columnas (y uno sólo en cada columna).

e) Si los elementos se escriben de tal manera que los primeros índices formen una permutación principal, se antepone un signo + a los productos en que los segundos índices forman una permutación de clase par y un signo - a los productos en que los segundos índices forman una permutación de clase impar.

Generalizando, para el determinante de orden n se tendrá:

a) El determinante es la suma algebraica de n! productos.

b) Cada producto tiene n factores.

c) En cada producto hay elementos de todos renglones (y uno sólo de cada renglón).

d) En cada producto hay elementos de todas las columnas (y uno sólo de cada columna).

e) Si los elementos se escriben de tal manera que los primeros índices formen una permutación principal, se antepone un signo + a los productos en que los segundos índices forman una permutación de clase par y un signo - a los productos en que los segundos índices forman una permutación de clase impar.

Establezcamos ahora la ley que define al determinante de orden n:

Consideremos la matriz cuadrada de orden n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

y un producto de n de sus elementos

$$a_{1\alpha_1} \quad a_{2\alpha_2} \quad \cdots \quad a_{n\alpha_n}$$

tomados de tal manera que haya elementos de todos sus renglones (y uno sólo de cada renglón), y que haya elementos de todas sus columnas (y uno sólo de cada columna).

Los factores de este producto están ordenados de tal modo que los primeros índices forman una permutación principal. La sucesión de los segundos índices forman una permutación.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

de los números 1, 2, ... n. Para esta permutación definiremos

$\varepsilon=+1$ si la permutación es de clase par

$\varepsilon=-1$ si la permutación es de clase impar

Formemos el producto provisto de signo

$$\varepsilon\, a_{1\alpha_1} \quad a_{1\alpha_2} \quad \dots \quad a_{n\alpha_n} \qquad (26)$$

Como el conjunto S_n de todas las permutaciones de n números está formada por n! arreglos, podemos formar n! productos del tipo (26).

El determinante de la matriz A se define como la suma de estos n! productos dotados de signo (a los cuales se les llama términos del determinante).

Definición.

$$\boxed{\det(A)=\sum_{S_n} \varepsilon \quad a_{1\alpha_1} \quad a_{2\alpha_2} \quad \dots \quad a_{n\alpha_n}} \quad \dots\dots(27)$$

De la definición anterior se concluye que:

1) Para obtener todos los términos del desarrollo de un determinante, basta con escribir el término principal (multiplicando los elementos sobre la diagonal principal) y a partir de éste obtener todos los demás dejando fijos los primeros índices y permutando de todas las maneras posibles los segundos índices.

2) Como de los segundos índices hay n! permutaciones, la mitad de clase par y la mitad de clase impar, habrá n! términos en el desarrollo del determinante, la mitad con signo + y la mitad con signo -.

3) Los signos + y - se asignan según la permutación de los segundos índices sea de clase par o impar.

Ejemplo IV. 25.

Obtener el desarrollo del determinante de 2o. orden a partir de la definición

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

De acuerdo con lo anterior, el término principal será

$a_{11} \quad a_{22}$

Dejamos fijos los primeros índices y permutamos los segundos de todas las maneras posibles:

12 clase par → +

21 clase impar → -

El desarrollo será entonces:

$\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

- -

Ejemplo IV. 26.

Obtener el desarrollo del determinante de 3er. orden, a partir de la definición

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Término principal: $a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33}$.

Dejando fijos los primeros índices, las permutaciones de los segundos índices son:

1 2 3	clase par	→	+
1 3 2	clase impar	→	-
2 1 3	clase impar	→	-
2 3 1	clase par	→	+
3 1 2	clase par	→	+
3 2 1	clase impar	→	-

el desarrollo será:

$$\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}$$

\- -

<u>Cálculo de determinantes.</u>

Si (M) representa al conjunto de las matrices cuadradas de orden n con elementos en C, podemos definir la función

$$\det: (M) \to C$$

que asigna a la matriz $A \in (M)$ el escalar específico $\det(A) \in C$.

Tal función queda definida por la expresión (27) que representa una suma de $n!$ productos de elementos de A.

El empleo de dicha expresión para el cálculo de determinantes no se acostumbra en la práctica por resultar demasiado laborioso, a cambio se han desarrollado métodos más sencillos que conducen a los mismos resultados. Tres de dichos métodos trataremos en esta sección.

Regla de Sarrus.

La regla de Sarrus indica que para obtener el valor de un determinante de 2o. orden, al producto de los elementos de la diagonal principal (lineas llenas) se resta el producto de los elementos de la "diagonal secundaria" (lineas punteadas). Así tendremos que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

que coincide con el desarrollo según la definición.

por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = (3)(-3)-(-5)(4)=-9+20=11$$

La regla de Sarrus indica que para obtener el valor de un determinante de 3er. orden, a los productos de los elementos de la diagonal principal y paralelas a ella (lineas llenas) se restan los productos de los elementos de la diagonal secundaria y paralelas a ella (líneas punteadas). Para observar mejor éstos productos, se pueden escribir el primero y segundo renglón inmediatamente después del tercero. Así tenemos que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+$$
$$+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-$$
$$-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}$$

que coincide con el desarrollo según la definición.

Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = (3)(5)(4)+(1)(-5)(4)+(-3)(2)(2)-(4)(5)(-3)-$$
$$-(2)(1)(4)-(3)(-5)(2)=110$$

Vale la pena subrayar que la regla de Sarrus se ha enunciado exclusivamente para los determinantes de 2o. y 3er. orden.

Es frecuente tender a generalizar esta regla para calcular determinantes de orden mayor, sin embargo; el estudiante puede fácilmente demostrar que al aplicar la regla de Sarrus a un determinante de orden superior al tercero, se obtiene un desarrollo que no coincide con la definición. El método que veremos a continuación es aplicable a un determinante de cualquier orden.

Desarrollo por cofactores.

Volviendo al ejemplo IV. 26, el resultado obtenido para el determinante de 3er. orden según la definición es:

$$\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+$$
$$+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

factorizando los elementos del primer renglón tenemos:

$$\det(A)=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})$$
$$+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

de acuerdo con la definición de determinante de 2o. orden podemos escribir:

$$\det(A)=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

para determinar los signos de los términos hacemos:

$$\det(A)=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$
$$+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \ldots.(27)$$

donde los exponentes de (-1) son la suma de los índices del elemento del primer renglón.

A la expresión (27) se le llama desarrollo por cofactores del determinante respecto a su primer renglón.

Se recomienda al estudiante hacer el desarrollo del mismo determinante respecto a alguno de los renglones o columnas restantes. Es obvio que el resultado de ambos desarrollos es numéricamente igual a $\det(A)$.

En la expresión (27) puede observarse que, los determinantes que multiplican a los elementos del primer renglón, pueden obtenerse eliminando en el determinante original, el renglón y la columna donde se encuentra el elemento correspondiente.

Por ejemplo, el determinante que multiplica al elemento a_{12} puede obtenerse suprimiendo el primer renglón y la segunda columna del determinante original

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

a este determinante se le llama el menor de a_{12} y lo representaremos con M_{12}.

Generalizando, daremos la siguiente

<u>Definición.</u>

Se llama menor del elemento a_{ij} de un determinante de orden n, al determinante de orden n-1 que se obtiene al suprimir, en el determinante original, el renglón i y la columna j.

Al menor de a_{ij} lo representaremos con M_{ij}.

De acuerdo con esta notación, la expresión (27) puede escribirse como

$$\det(A)=(-1)^{1+1}a_{11}M_{11}+(-1)^{1+2}a_{12}M_{12}+(-1)^{1+3}a_{13}M_{13}.$$

o bien, en forma condensada

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{3}(-1)^{1+j}\,a_{1j}\,M_{1j}$$

Si elegimos el renglón k, para desarrollar por cofactores el determinante de 3er. orden, dicho desarrollo está expresado por

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{3}(-1)^{k+j}a_{kj}\,M_{kj}$$

y si elegimos la columna k, por

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{4}(-1)^{i+k}a_{ik}M_{ik}$$

En general. Si A es una matriz cuadrada de orden n:

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}M_{kj} \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}M_{ik} \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

donde $k \in N$ y $1<k<n$

Definición.

Llamamos cofactor del elemento a_{ij} al determinante $(-1)^{i+j}M_{ij}$, al que representamos con A_{ij}.

Con ayuda de esta definición, el método sugerido por las expresiones (28) y (29) (al que se llama "método de desarrollo por cofactores") puede enunciarse como sigue:

El valor de un determinante puede obtenerse efectuando la suma de los productos de los elementos de una cualquiera de sus líneas (renglón o columna) por sus respectivos cofactores.

Ejemplo IV. 27

Calcular el determinante de la matriz A por el método de desarrollo por cofactores.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

Solución

Primero, debemos elegir un renglón o una columna para efectuar el desarrollo. Analizando la matriz, vemos que es conveniente elegir alguna de las siguientes líneas:

2o. Renglón

3er. Renglón

1a. Columna

3a. Columna

87

ya que cada una de ellas tiene un elemento nulo y el producto de dicho elemento por su respectivo cofactor será igual a cero. Esto simplifica el trabajo al cálculo de sólo tres determinantes de 3er. orden.

Desarrollando por cofactores según el 2o. renglón:

$\det(A)=1A_{21}-3A_{22}+0A_{23}-6A_{24}$

Los cofactores A_{ij} se obtienen como

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

Desarrollando por la regla de Sarrus los menores M_{21}, M_{22} y M_{24} obtenemos:

$$M_{21}=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-6-40-14+4+60+14=18 \quad \therefore \quad A_{21}=-18$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-12-10+1+28=7 \quad \therefore \quad A_{22}=7$$

$$M_{24}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix}=-28-1+10+8=-11 \quad \therefore \quad A_{24}=-11$$

finalmente

$\det(A)=-18-3(7)-6(-11)=27$

- -

En el caso general, el desarrollo por cofactores transforma el problema de calcular un determinante de orden n en el de calcular n determinantes de orden n-1. Cada uno de éstos determinantes puede desarrollarse a su vez por cofactores, obteniéndose menores de orden n-2 y así sucesivamente. Se acostumbra continuar el proceso hasta obtener menores de orden 3 o de orden 2, los cuales pueden resolverse empleando la regla de Sarrus.

Propiedades elementales.

Los determinantes tienen ciertas propiedades que es útil conocer. Son de interés principalmente las condiciones bajo las cuales un determinante es nulo; así como las transformaciones que, efectuadas en la matriz, no alteran el valor del determinante o le producen una alteración fácilmente calculable.

Estas propiedades, llamadas propiedades elementales, se demuestran a partir de la definición[2] y son las que a continuación se enlistan. En lo que sigue, por una linea deberá entenderse un renglón o una columna.

1) Si una línea está constituida por ceros, el determinante es nulo.
2) Si dos líneas paralelas son proporcionales, el determinante es nulo. (En particular, si dos líneas paralelas son iguales, el determinante es nulo).
3) Si se intercambian dos líneas paralelas cualesquiera, el determinante sólo cambia de signo.
4) Si se multiplican todos los elementos de una linea por un número k, el valor del determinante queda multiplicado por k.
5) El valor del determinante no cambia, si se intercambian renglones por columnas y viceversa. Es decir:

$$\det(A)=\det(A^T)$$

6) El valor de un determinante no cambia, si a los elementos de una de sus líneas, se suman los elementos correspondientes a otra línea paralela multiplicados por un número k.

(2) El estudiante puede consultar la demostración en la referencia 2 pags. 35 a 39.

Un método de condensación.

El método de desarrollo por cofactores, aunque aplicable a determinantes de cualquier orden, puede resultar en ocasiones demasiado laborioso. Si regresamos al ejemplo IV. 27, vemos que al elegir el 2o. renglón en lugar del 1o., nos hemos evitado el cálculo de un determinante de 3er. orden.

Si en una línea cualquiera de un determinante, todos los elementos excepto uno fueran nulos, sin duda escogeríamos dicha línea para efectuar el desarrollo. El método que propondremos a continuación se basa en esta idea y consiste en:

a) Elegir la línea que contenga el mayor número de ceros.
b) Aplicar reiteradamente la propiedad (6) hasta reducir a cero todos los elementos de dicha línea excepto uno. (Si todos los elementos se reducen a cero, el determinante es nulo por la propiedad (1)).
c) Desarrollar por cofactores según dicha línea.
d) Repetir el proceso hasta obtener un determinante de segundo o tercer orden.

Ejemplo IV. 28

Calcular el determinante de la matriz A empleando el método de condensación.

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A)=\begin{array}{c}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} (3) & (2) & (1) & & * \\ & & & & \uparrow \end{array}\end{array} = \begin{vmatrix} 13 & 9 & 6 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 10 & 6 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Eligiendo el 2o. renglón, la columna * que sirve como pivote se ha multiplicado por 3, 2 y 1 se ha sumado a las columnas que se indican.

Desarrollando por cofactores según el segundo renglón, tenemos:

$$\det(A)=-(-1)\begin{vmatrix} 13 & 9 & 6 & -1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ 10 & 6 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}\begin{array}{l} (1) \\ * \leftarrow \\ (1) \\ (-1) \end{array} = -(-1)\begin{vmatrix} 14 & 14 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ 11 & 11 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Se ha aplicado nuevamente el método eligiendo ahora la cuarta columna y tomando el segundo renglón * como pivote. Desarrollando ahora por cofactores según la cuarta columna, tendremos:

$$\det(A)=-(-1)(1)\begin{array}{c}\begin{vmatrix} 14 & 14 & 8 \\ 11 & 11 & 5 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} (3) & * & (3) \\ & \uparrow & \end{array}\end{array} = -(-1)(1)\begin{vmatrix} 56 & 14 & 50 \\ 44 & 11 & 38 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando nuevamente por cofactores según el 3er. renglón:

$$\det(A)=-(-1)(1)(-(-1))\begin{vmatrix} 56 & 50 \\ 44 & 38 \end{vmatrix}$$

Desarrollando este último determinante por la regla de Sarrus:

$$\det(A)=-(-1)(1)(-(-1))((56)(38)-(50)(44))=-72$$

- -

Cálculo de la inversa por medio de la adjunta.

Con la ayuda de los determinantes, podemos obtener la inversa de una matriz empleando un método diferente al expuesto en la sección IV. 3. Antes daremos la siguiente

Definición.

Se llama matriz adjunta de la matriz cuadrada A, a la matriz que se obtiene de A^T al sustituir sus elementos por sus respectivos cofactores.

A la matriz adjunta de A la representaremos con A^*. Entonces, si A es la matriz cuadrada de orden n

$$A=(a_{ij})$$

la transpuesta de A es

$$A^T=(a_{ji})$$

y la adjunta de A es

$$A^*=(A_{ji})$$

Ejemplo IV. 29

Obtener la adjunta de la matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Obtengamos primero la transpuesta

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

La adjunta es:

$$A^* = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

desarrollando los determinantes obtenemos finalmente:

$$A^* = \begin{bmatrix} -7 & 4 & -8 \\ 7 & -14 & -7 \\ -7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- -

Se puede demostrar que la inversa de una matriz A, puede obtenerse mediante la relación

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^* \quad \ldots\ldots(30)$$

de esta relación vemos que

$$\exists\, A^{-1} \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

En consecuencia:

1) Si A es una matriz cuadrada de orden n, no singular, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) $\exists\, A^{-1}$

   b) $R(A) = n$

   c) $\det(A) \neq 0$

2) Si A es una matriz cuadrada de orden n, singular, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) $\nexists\, A^{-1}$

   b) $R(A) < n$

   c) $\det(A) = 0$

Empleando la relación (30), podemos obtener la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

del ejemplo IV. 29

En efecto, como

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$$

existe A^{-1}.

Del resultado del ejemplo IV. 29

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^* = -\frac{1}{35} \begin{bmatrix} -7 & 4 & -8 \\ 7 & -14 & -7 \\ -7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para comprobar efectuemos el producto $A\,A^{-1}$:

$$A\,A^{-1} = -\frac{1}{35} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 4 & -8 \\ 7 & -14 & -7 \\ -7 & -1 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{35} \begin{bmatrix} -35 & 0 & 0 \\ 0 & -35 & 0 \\ 0 & 0 & -35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- -

Regla de Cramer.

Otra de las aplicaciones de los determinantes, la encontramos en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. La definición de determinante dada por la expresión (27), permite generalizar la regla de Cramer [3] enunciada al principio de esta -

(3) La demostración de esta afirmación puede consultarse en la referencia 2 pags. 50 a 54.

sección como sigue:

> Sea el sistema de n ecuaciones con n incógnitas
>
> $$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1$$
> $$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2$$
> $$\cdots\cdots\cdots$$
> $$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n$$
>
> cuya matriz de coeficientes es
>
> $$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
>
> Siempre y cuando $\det(A)\neq 0$, el valor de las incógnitas x_i que satisfacen al sistema está dado por
>
> $$x_i=\frac{\det(Ai)}{\det(A)}$$
>
> donde A_i es la matriz que se obtiene, a partir de A, reemplazando la columna formada con los coeficientes de x_i por el vector de términos independientes.

Ejemplo IV. 30.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones empleando la regla de Cramer

$$x_1+2x_2+x_3=2$$
$$3x_1+x_2-2x_3=1$$
$$4x_1-3x_2-x_3=3$$

Solución

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix}=-1-16-9-(4-6+6)=-26-4=-30$$

$$\det(A_1)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix}=-30$$

$$\det(A_2)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$\det(A_3)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}=-30$$

Por lo tanto

$$x_1=\frac{-30}{-30}=1$$

$$x_2=\frac{0}{-30}=0$$

$$x_3=\frac{-30}{-30}=1$$

- -

Es importante notar que este método sólo se aplica directamente en los casos en los que m=n=r.

Sin embargo, si recordamos lo expuesto en la sección -- IV. 5, podemos siempre reducir un sistema arbitrario a un nuevo sistema en donde m=n=r y en este aplicar la regla de Cramer.

Ejemplo IV. 31

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones aplicando la regla de Cramer.

51

$$x_1+x_2+x_3=3$$
$$-x_1+x_2+2x_3=4$$

Solución

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right]$$

$R(A)=R(A,\bar{b})=2=r$ el sistema es compatible

$2<3$, $(r<n)$ el sistema es indeterminado

Trasladando a los segundos miembros la incógnita x_3 y - - asignando el valor de k obtenemos

$$x_1+x_2=3-k$$
$$-x_1+x_2=4-2k$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2$$

$$\det(A_1)=\begin{vmatrix} 3-k & 1 \\ 4-2k & 1 \end{vmatrix}=-1+k$$

$$\det(A_2)=\begin{vmatrix} 1 & 3-k \\ -1 & 4-2k \end{vmatrix}=7-3k$$

$$\therefore \quad x_1=\frac{-1+k}{2}$$

$$x_2=\frac{7-3k}{2}$$

$$x_3=k \qquad \forall k \in R.$$

Una solución particular es por ejemplo

$$x_1=-\frac{1}{2}$$
$$x_2=\frac{7}{2}$$
$$x_3=0$$

la cual se obtuvo haciendo $k=0$

- -

BIBLIOGRAFIA

1) Pierce Beaumont.
The algebraic foundations of Mathematics.
Editorial Addison Wesley. 1963.

2) A. G. Kurosch
Curso de Algebra Superior
Editorial MIR. Moscú, 1968

3) Franz E. Hohn
Algebra de Matrices
Editorial Trillas, S. A. 1970

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ACTUALIZACION EN MATEMATICAS PARA INGENIEROS

EVENTO ORGANIZADO EN COLABORACION DE LA UNIVERSIDAD DE COLIMA A TRAVES DEL CENTRO DE EDUCACION CONTINUA.

A L G E B R A

AGOSTO, 1984.

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

ACTUALIZACION EN MATEMATICAS PARA INGENIEROS

EVENTO ORGANIZADO EN COLABORACION DE LA UNIVERSIDAD DE COLIMA A TRAVES DEL CENTRO DE EDUCACION CONTINUA

C O N J U N T O S

AGOSTO, 1984.

CONJUNTOS

POR

ARTURO DELGADO R.

Profesor de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la U. N. A. M.

CONJUNTOS. (o clases). Introducción: La teoría de los conjuntos es hoy en día básica en el estudio de casi todas las ramas de las matemáticas: teoría de probabilidades, análisis matemático, circuitos eléctricos, lógica matemática, etc.

El establecimiento de la teoría de los conjuntos se atribuye a Georg Cantor (1845-1918).

El concepto de "conjunto, no se define en forma precisa. Para explicar lo que se entiende por conjunto, se da la idea intuitiva:

Un conjunto es una colección o agregado de objetos bien definidos, los cuales deben poseer una propiedad o atributo característico que no deje lugar a duda si dicho objeto pertenece o no a la colección*

Ejemplo: Los ex-presidentes de la República mexicana; otro ejemplo de conjunto podría ser el de los números primos mayores que 18 y menores que 211; etc.

Los elementos de un conjunto pueden quedar definidos al enumerar éstos; por ejemplo: el conjunto constituido por los tres números: 2, 5, 9,; etc.

Pueden, en otros casos, distinguirse los elementos de un conjunto, citando una propiedad común a todos ellos; por ejemplo: el conjunto de los números pares.

* Obsérvese que no se exige homogeneidad, cada objeto definido en un conjunto dado se denomina "elemento" del conjunto.

De lo anterior se infiere que los conjuntos pueden tener un número finito o infinito de elementos.

Notación. Se acostumbra designar los conjuntos con letras mayúsculas.

Los elementos de un conjunto se distinguen con letras minúsculas.

Cuando un conjunto queda definido al enumerar sus elementos, se escribe:

$$A = \{a,e,i,o,u\} = \{e,u,a,o,i\}, \text{ etc.}$$

$$B = \{2,5,9\} = \{2,9,5\} = \{9,5,2\}, \text{ etc.}$$

Para indicar que el elemento 5 está en el conjunto B se anota:

$$5 \in B$$

Si un elemento no está en un conjunto dado, se denota:

$$8 \notin B$$

Cuando el conjunto se define expresando una propiedad común de todos sus elementos, se emplea una línea vertical | (o a veces dos puntos :) cuyo significado es "tal que"

Ejemplos:

$$C = \{x \mid x > 25\}$$

$D = \{l \mid l$ es un libro de la Biblioteca Nacional$\}$

Subconjunto. Se dice que el conjunto P es un "subconjunto" del conjunto R, si cada elemento de P es también elemento de R. La misma idea se expresa diciendo que P está contenido en R; o bien, que R contiene a P. (P está incluido en R). La noción de subconjunto se expresa en forma simbólica como sigue:

$$P \subseteq R$$

$$R \supseteq P$$

Si el conjunto P tiene menos elementos que el conjunto R, se dice que P es un subconjunto "propio" de R, y ello se indica:

$$P \subset R$$

Ejemplo: sea: A el conjunto de letras del alfabeto castellano; siendo B el conjunto de vocales del mismo alfabeto, podemos entonces escribir

$$A \supset B \quad \text{o} \quad B \subset A$$

Después de dar estas definiciones preliminares, enfocaremos nuestra atención a la elaboración de definiciones y reglas que nos permitan construir una álgebra de conjuntos.

Igualdad.- Se afirma que dos conjuntos A y B son iguales si, y sólo si, ambos conjuntos consisten de los mismos elementos; esto es, cada elemento de A pertenece a B y viceversa. Ejemplo

$$A = \{a,b,c\} \; ; \; B = \{x,y,z\} = \{x,z,y,z,z,y,z\}$$

Si $A = B$, debe tenerse que el elemento a de A es exactamente el mismo que alguno de los elementos de B; así por ejemplo puede tenerse: $a = z$; $b = x$; $c = y$

Una técnica usual para demostrar la igualdad de dos conjuntos consiste en hacer ver que se cumplan las dos condiciones siguientes:

Si $A \subset B$; además $B \subset A$, entonces $A = B$

Conjunto vacío (ó nulo).- Conjunto vacío es aquel conjunto que no contiene elementos. El conjunto vacío se representa con el símbolo ϕ. Ejemplo:

$\phi = \{$seres humanos vivos mayores de 1000 años$\}$

Obsérvese que $\phi \neq \{\phi\}$; puesto que el conjunto ϕ del primer miembro, por definición, no contiene ningún elemento; en tanto que el conjunto $\{\phi\}$ del segundo miembro contiene un elemento.

El conjunto vacío ϕ se considera como un subconjunto de cualquier conjunto sea cual fuere este último. $\phi \subseteq A$, para todo A, Conjunto universal (ó universo).- El conjunto universal es el conjunto del cual se derivan todos los subconjuntos que pueden intervenir en un problema particular. Designaremos el conjunto universal con el símbolo $\bar{U}$.

El propósito del conjunto $\bar{U}$ es el de evitar paradojas.

Ejemplo:

Si consideramos como universo el conjunto de números reales, se tiene por ejemplo: $\ln 1 = 0$; en tanto que el logaritmo natural de un número negativo no existe. En cambio, si el universo lo constituye el conjunto de números complejos, se encuentra lo siguiente:

$$[illegible] -1) = i\pi$$

Cuando se presen[illegible] [illegible]ignar valores a una variable x en una ecuació[illegible] [illegible] [illegible]é valores de x son admisibles; este conjunto de valores [illegible]ituye el universo.

Obsérvese que el conjunto $\bar{U}$ puede ser considerado como un subconjunto de sí mismo. Otra observación: $\phi \subseteq A \subseteq \bar{U}$; para todo A.

Conjunto potencia.- Sea A un conjunto constituido por un número n de elementos. El conjunto potencia de A es el conjunto cuyos elementos son precisamente cada uno de los 2^n subconjuntos que es factible formar al combinar los n elementos del conjunto A.

El conjunto vacío ϕ, y el conjunto universal $\bar{U}$ deben formar parte de los 2^n subconjuntos elementos del conjunto potencia; en efecto:

Sea C_n^r $\binom{n}{r}$ las combinaciones de n objetos tomados en subconjuntos de r objetos ($r = n$). El número total posible de subconjuntos que resultan es:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = (1 + 1)^n = 2^n$$

donde: $\binom{n}{0}$ nos da el conjunto vacío ϕ en tanto que $\binom{n}{n}$ da el conjunto universal $\bar{U}$.

Notación: El conjunto potencia de A se designa 2^A. Ejemplo: Sea $A = \{a, b\}$

$$2^A = \{\phi\ \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

Definición simbólica de conjunto potencia:

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$$

Ejemplos: 1) Si $A \subset B$ y $B \subset A$, demostrar que $A = B$

Solución:

Si $x \in A \rightarrow x \in B$, puesto que $A \subset B$

Por otro lado:

Si $x \in B \rightarrow x \in A$, ya que $B \subset A$

$\rightarrow$ A y B tienen los mismos elementos $\rightarrow$ $A = B$

2) Si $A \subset B$ y $B \subset C$, demostrar que $A \subset C$

Debemos hacer ver que cada elemento en A está también en C.

Solución:

Si $x \in A \rightarrow x \in B$, ya que $A \subset B$; pero por ser $B \subset C \rightarrow x \in C$; luego $x \in A \rightarrow x \in C$, por lo cual se deduce que $A \subset C$

3) Si $A \subset B$ y $B \subseteq C$, demostrar que $A \subset C$.

Puesto que $A \subset B$ y $B \subseteq C$, resulta que, cuando más, $A \subseteq C$

Pero si $A = C$; siendo por hipótesis $B \subseteq C$, $\rightarrow B \subseteq A$, lo cual contradice la hipótesis de que $A \subset B$; por lo cual $A \neq C$ resultando, por lo tanto, $A \subset C$

4) Determinar el conjunto potencia 2^A; siendo: $A = \{\{a,b\},c\}$.

Solución

Puesto que el conjunto A tiene 2 elementos: $\{a,b\}$ y $c \rightarrow 2^A$ contendrá $2^2 = 4$ elementos:

$$2^A = \{\phi \quad \{\{a, b\}\} \quad \{c\} \quad \{\{a, b\}, c\}\}$$

5) Diga si las siguientes afirmaciones son correctas o incorrectas:

a) $\phi = \{0\}$

b) $0 = \{\phi\}$

c) $\{x\} \subset \{\{x\}\}$

d) $\{x\} \in \{\{x\}\}$

e) $\subset \{\{x\}\}$

f) $\{\{x\},\{y\}\} \subset \{\{x\}, \{x, y\}\}$

Solución:

a) Incorrecto: ϕ no tiene elementos; $\{0\}$ tiene un elemento.

b) Incorrecto: 0 no es un conjunto

c) Incorrecto: elemento $\neq$ conjunto (ver inciso d)

d) Correcto: $\{x\}$ es elemento del conjunto $\{\{x\}\}$

e) Correcto: $\phi \subseteq A$, para todo conjunto A

f) Incorrecto: $\{y\} \notin \{\{x\};\{x, y\}\}$

6) Si a,b,c son elementos cualesquiera, determinar qué relación debe existir entre ellos, de modo que sea cierta la igualdad:

$$\{\{a,b\}\} = \{\{a,b,c\}, \{c,b\}\}$$

Dado que el conjunto del 1er. miembro está constituido por un solo elemento que es el conjunto a,b , para que pueda verificarse la igualdad, debe tenerse que en el segundo miembro:

$$\{a,b,c\} = \{c,b\}$$

debiendo estos dos conjuntos ser iguales al conjunto $\{a,b\}$ del primer miembro:

$$\{a,b\} = \{a,b,c\} = \{c,b\}$$

por lo cual debe tenerse que $a = c$

$$\{a,b\} = \{a,b,a\} = \{a,b\}$$

En conclusión: si $a = c$:

$$\{\{a,b\}\} = \{\{a,b,c\}, \{c,b\}\}$$

Operaciones con conjuntos.-

Unión.- Se entiende por "unión" de dos conjuntos A y B, el conjunto C que resulta al considerar C constituido por los elementos que pertenecen á A ó á B ó a ambos.

Notación: $C = A \cup B$

Ejemplo: sean $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{3,4,5\}$

$$C = A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$$

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ó } x \in B\}$$

Intersección.- Dados los conjuntos A y B, el conjunto "intersección" D tiene por elementos aquellos que son comunes a A y a B:

Notación: $D = A \cap B$

$D = A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}$.

Ejemplo: $A = \{a,b,c,d\}$; $B = \{c,d,e\}$

$$D = A \cap B = \{c,d\}$$

Conjuntos ajenos (ó desunidos).- Dos conjuntos A y B son ajenos si no tienen ningún elemento común; esto es, si su intersección es el conjunto vacío: $A \cap B = \phi$. Ejemplo:

$$A = \{1,2,3\}; \quad B = \{5,6\}.$$

$$A \cap B = \phi$$

Diferencia.- La "diferencia" E de dos conjuntos A y B es el conjunto cuyos elementos están en A y no pertenecen á B

Notación: E = A-B

$$E = A-B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$

Ejemplo: $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{3,4,5\}$

$E = A-B = \{1,2\}$

Complemento.- El "complemento" del conjunto A es el conjunto A', cuyos elementos son los elementos del universo, que no pertenecen a A. (otra notación: $A' = \bar{A} = A^c$)

$$A' = \bar{U}-A = \{x | x \in \bar{U}, x \notin A\}$$

Ejemplo: Sean $\bar{U} = \{a,e,i,o,u\}$; $A = \{a,e\}$

$A' = \{i,o,u\}$

Los conceptos de unión e intersección pueden generalizarse para más de dos conjuntos:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

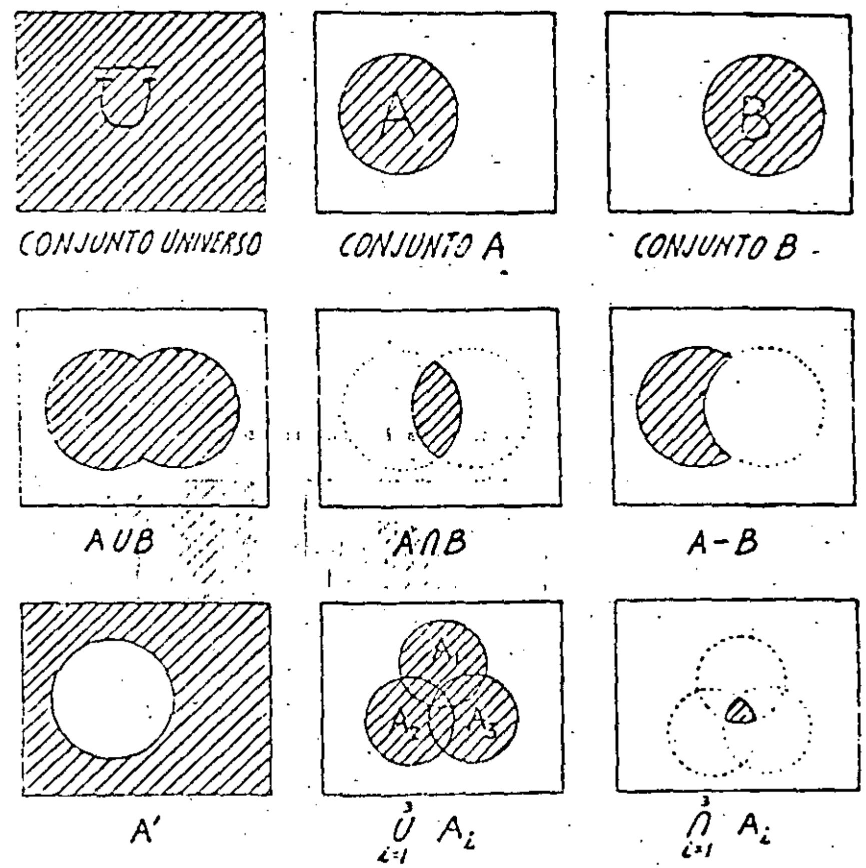
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

$$\bigcup_{S} A_i = \{x | x \in A_i \text{ para al menos una } i \in S\}$$

$$\bigcap_{S} A_i = \{x | x \in A_i \text{ para toda } i \in S\}$$

siendo el conjunto de subconjuntos $\{A_i | i \in S\}$

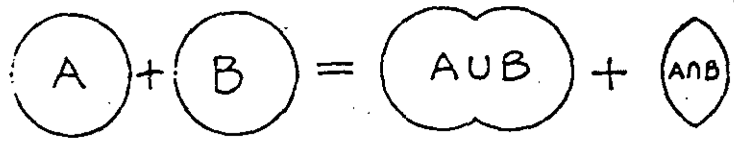
Diagramas de Venn (ó de Euler).- Son esquemas en los cuales los conjuntos se representan como áreas planas.



<u>Fórmulas generales para relacionar número de elementos en conjuntos.</u>- Relacionaremos el número de elementos que hay en dos conjuntos A y B, con el número de elementos en los conjuntos $A \cup B$ y $A \cap B$.

Designemos al número de elementos que hay en un conjunto, digamos el conjunto A como $n\,A$. ($n\,A$ es un número, no un conjunto)

Establezcamos la siguiente igualdad entre áreas:



ó sea:

$$n\,A + n\,B = n(A \cup B) + n(A \cap B)$$

Problema: Todos los alumnos de una clase de gimnasia se inscriben para practicar natación (N) ó atletismo (A), ó ambos. Si hay 200 alumnos en la clase, y en la lista de inscritos en natación hay 104 nombres; en tanto que para atletismo hay inscritos 130 ¿cuántos alumnos se inscribieron para practicar ambos deportes?

Solución: a) Empleando la fórmula

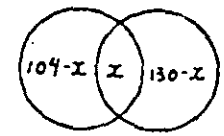
$$n(N \cup A) = 200$$

$$nN = 104; \quad nA = 130$$

$$n\,N + n\,A = n(N \cup A) + n(N \cap A)$$

$$\therefore \quad n(N \cap A) = 104+130-200 = 34$$

b) con auxilio de diagrama de Venn.



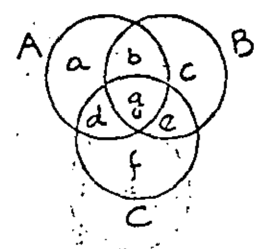
$$(104-x)+x+(130-x) = 200$$

$$234-x = 200$$

$$x = 34 = n(N \cap A)$$

Comprobar, para 3 conjuntos A, B, C, la siguiente fórmula:

$nA+nB+nC = n(A \cup B \cup C)+n(A \cap B)+n(A \cap C)+n(B \cap C)-n(A \cap B \cap C)$ comprobación:



$$nA = a + b + d + g$$

$$nB = b + c + e + g$$

$$nC = d + e + f + g$$

$$nA+nB+nC =$$

$$= a+2b+c+2d+2e+f+3g =$$

$$= (a+b+d+g)+(b+c+e+g)+(d+e+f+g) =$$

$$= (a+b+c+d+e+f+g)+(b+g)+(d+g)+(e+g)-g$$

$$= n(A \cup B \cup C)+n(A \cap B)+n(A \cap C)+n(B \cap C)-n(A \cap B \cap C)$$

Formula general para relacionar el número de elementos que existen en m conjuntos:*

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{C_m^1} n\,A_i - \sum_{i<j}^{C_m^2} n(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{i<j<k}^{C_m^3} n(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{p+1} \sum_{i<j<\ldots<p}^{C_m^p} n(A_i \cap \ldots \cap A_p) +$$

$$\ldots + (-1)^{m+1} \sum_{i<j<\ldots<m}^{C_m^m} n(A_i \cap \ldots \cap A_m)$$

Donde:

$$1 < p < m;\ i,j,k\ldots = 1,2,3,\ldots,m$$

C_m^p número de combinaciones de m objetos tomados p a p.

$$C_m^p = C_m^{m-p}$$

$$C_m^p = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{p!}$$

$p! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(p-1)p$

$C_m^m = C_m^0 = 1$, para toda $m = 0,1,2,\ldots$

* La fórmula se demuestra por inducción matemática en la segunda parte de estas notas.

Ejemplos:

i) $m = 3$

Solución:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = nA_1 + nA_2 + nA_3 - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) +$$

$$+ n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Resultado que concuerda con el último problema, si $A_1 = A$; $A_2 = B$; $A_3 = C$.

ii) $m = 4$

Solución:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = nA_1 + nA_2 + nA_3 + nA_4 - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_1 \cap A_4) -$$

$$- n(A_2 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_4) - n(A_3 \cap A_4) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) +$$

$$+ n(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

iii) $m = 5$ [illegible]

Solución

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) = nA_1 + nA_2 + nA_3 + nA_4 + nA_5 -$$

$$- n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_1 \cap A_4) - n(A_1 \cap A_5) - n(A_2 \cap A_3) -$$

$$- n(A_2 \cap A_4) - n(A_2 \cap A_5) - n(A_3 \cap A_4) - n(A_3 \cap A_5) - n(A_4 \cap A_5) +$$

[illegible]

[illegible]

$+n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)+n(A_1 \cap A_2 \cap A_4)+n(A_1 \cap A_2 \cap A_5)+n(A_1 \cap A_3 \cap A_4)+$

$+n(A_1 \cap A_3 \cap A_5)+n(A_1 \cap A_4 \cap A_5)+n(A_2 \cap A_3 \cap A_4)+n(A_2 \cap A_3 \cap A_5)+$

$+n(A_2 \cap A_4 \cap A_5)+n(A_3 \cap A_4 \cap A_5)-n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)-$

$-n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5)-n(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5)-n(A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)-$

$-n(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)+n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$

Observaciones:

1) El número de términos que debe tener el desarrollo de cada suma $\sum^{C^p_m}$ es precisamente C^p_m. Por ejemplo, la suma

$\sum_{1<j}^{C^2_m}$ tiene $C^2_m = \frac{m(m-1)}{1.2} = \frac{m^2-m}{2}$ términos.

2) Todos los términos que provienen del desarrollo de cualquier suma $\sum$, deben tener el mismo signo.

3) Los signos de las diversas sumas $\sum$, son alternados, y existen m sumas $\sum$ en el segundo miembro.

4) El número total de términos que se obtienen al desarrollar todas las sumas $\sum$ del segundo miembro es 2^m-1. Por ejemplo, en el desarrollo para $m = 5$ se obtuvieron: $2^5-1 = 32-1 = 31$ términos.

5) El último término del desarrollo puede escribirse:

$$\sum_{1<2<\dots<m}^{C^m_m} n(A_1 \cap \dots \cap A_m) = n\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right)$$

6) La asociatividad de $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ y de $\bigcap_{i=1}^{m} A_i$ se demuestra más adelante.

Problema: En una bolsa hay 50 objetos, de los cuales:

14 son de color gris : $nG = 14$

13 son radiactivos : $nR = 13$

9 son en forma de cubo : $nC = 9$

5 son grises y reactivos : $n(G \cap R) = 5$

7 son grises y cúbicos : $n(G \cap C) = 7$

4 son radiactivos y cúbicos : $n(R \cap C) = 4$

3 son grises, radiactivos y cúbicos : $n(G \cap R \cap C) = 3$

¿Cuántos objetos no son ni grises, ni radiactivos, ni cubicos?

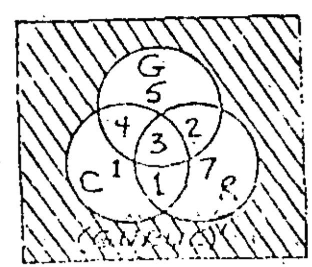
Solución: a) Se busca : $x = n(G \cup R \cup C)' \rightarrow x = n(U - G \cup R \cup C)$

$\therefore$ aplicando la fórmula: $14+13+9 = n(G \cup R \cup C)+5+7+4-3$

$\rightarrow n(G \cup R \cup C) = 23.$

$\rightarrow x = 50-23 = 27$

b) Empleando diagramas de Venn:



$n(G \cup R \cup C) =$

$= 4+5+3+2+1+7+1 =$

$= 23$

$U = 50$

$\rightarrow n(G \cup R \cup C)' = 50-23=27$

$\therefore$ <u>27</u> objetos (de los 50) no son, ni grises, ni radiactivos, ni cúbicos.

<u>Algunos métodos empleados para demostrar relaciones entre conjuntos.</u>- Aun cuándo para establecer la validez de una ecuación entre conjuntos es suficiente y basta con emplear una, cualquiera de las técnicas que se detallarán a continuación, sucede, en algunos casos, que un método en particular resulta, para determinados estudiantes, más claro o expedito que los otros métodos.

Para ilustrar los diversos métodos, nos referimos a un ejemplo concreto: supongamos que se desea probar la veracidad de la ecuación $A - B = A \cap B'$

1^{er} método: A partir de las definiciones:

$$A-B = \{x|x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

$$= \{x|x \in A \text{ y } x \in B'\}$$

$$= A \cap B'$$

2^{o} método: Haciendo ver que $A-B \subset A \cap B'$; además $A \cap B' \subset A-B \rightarrow A-B = A \cap B'$.

a) Sea $x \in A-B$

$\rightarrow x \in A, x \notin B \rightarrow x \in B'$

$x \in A$ y $x \in B' \rightarrow x \in A \cap B'$

$\rightarrow A-B \subset A \cap B'$ ... (1)

b) Sea $x \in A \cap B'$

$\rightarrow x \in A$ y $x \in B'$

$\rightarrow x \in A$ y $x \notin B \rightarrow x \in A-B$

$\rightarrow A \cap B' \subset A-b$ .... (2)

de (1) y (2) resulta: $A-B = A \cap B'$

3^{er} método: Construyendo una "tabla de verdad".- Dado que un elemento x sólo puede "estar" o "no estar" en un determinado conjunto; indicamos con V (Verdad) en la tabla si x "está" en el conjunto, y con una F (Falso) si x "no está" en el conjunto.

Las combinaciones posibles para conjuntos A y B son las siguientes:

V ↗ V → VV
V ↘ F → VF

F ↗ V → FV
F ↘ F → FF

Se demuestra que la igualdad entre los dos miembros de una ecuación entre conjuntos queda establecida si las columnas correspondientes a cada miembro de la ecuación que en la tabla de verdad tie nen las mismas entradas (V ó F) en los renglones correspondientes.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in B'$	$x \in A-B$	$x \in A \cap B'$
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F

1ª Observación: Una tabla de verdad debe tener 2^n renglones; siendo n el número de conjuntos diferentes involucrados en la proposición que se desea demostrar (en el ejemplo anterior, los conjuntos son A y B; por lo tanto $n = 2$; $2^n = 4$ renglones).

2ª Observación.- Las ecuaciones que relacionan operaciones entre conjuntos, en general, no admiten demostración mediante el diagrama de Venn, ya que un diagrama de Venn no puede incluir todas las situaciones posibles, como lo hace, por ejemplo, una tabla de verdad.

Más adelante se presentan ejemplos que ilustran lo expuesto en la 2ª observación.

Principio de "dualidad".- Si se intercambian las operaciones $\cap$ por $\cup$; cambiando asimismo los conjuntos $\bar{U}$ por ϕ en cualquier expresión entre conjuntos, la expresión que resulta se denomina "dual" de la expresión original.

Ejemplo: sea la ecuación:

$$(A \cap \bar{U}) \cap (\phi \cup A') = \phi$$

la dual es:

$$(A \cup \phi) \cup (\bar{U} \cap A') = \bar{U}$$

"Si ciertos axiomas implican sus propios duales, entonces el dual de cualquier teorema que es consecuencia de los axiomas es también consecuencia de los axiomas".

Por lo anterior, dado cualquier teorema y su demostración, el dual del teorema puede ser demostrado de manera análoga, usando el dual de cada paso sucesivo de la demostración original.

De modo que, si un teorema es verdadero, también lo es el dual de ese mismo teorema

LEYES DEL ALGEBRA DE CONJUNTOS

	LEY	DUAL
1.- IDEMPOTENCIA	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
2.- CONMUTATIVIDAD	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
3.- ASOCIATIVIDAD	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4.- DISTRIBUTIVIDAD	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5.- IDENTIDAD	$A \cup \phi = A$ $A \cup \bar{U} = \bar{U}$	$A \cap \bar{U} = A$ $A \cap \phi = \phi$
6.- COMPLEMENTO	$A \cup A' = \bar{U}$ $\bar{U}' = \phi$	$A \cap A' = \phi$ $\phi' = \bar{U}$
7.- DE MORGAN	$A' \cup B' = (A \cap B)'$	$A' \cap B' = (A \cup B)'$
8.- INVOLUCION	$(A')' = A$	

Enseguida daremos un ejemplo en el que se ilustra cómo, mediante la aplicación de los mismos razonamientos, es factible deducir de una ley y, en forma paralela, la dual.

Supongamos que se desea, a partir de la ley de idempotencia, deducir la ley de identidad, así como su dual:

$A = A \cup A$	hipótesis	$A = A \cap A$
$= (A \cup A) \cap \bar{U}$	de 5	$= (A \cap A) \cup \phi$
$= (A \cup A) \cap (A \cup A')$	de 6	$= (A \cap A) \cup (A \cap A')$
$= A \cup (A \cap A')$	de 4	$= A \cap (A \cup A')$
$= A \cup \phi$	de 6	$= A \cap \bar{U}$
$A = A \cup \phi$	Identidad	$A = A \cap \bar{U}$

Se comprueba que los pasos seguidos en la transformación de la columna de la izquierda son precisamente los duales de cada uno de los pasos seguidos en la deducción realizada en la columna derecha.

Obsérvese asimismo que no todas las leyes del álgebra listadas en la tabla de la página anterior son independientes.

Como ejercicio, demostraremos la ley

3.- Asociatividad:

1er. método:

$A\cup(B\cup C) = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\cup C\}$

$= \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B \text{ ó } x \in C\}$

$= \{x \mid (x \in A \text{ ó } x \in B) \text{ ó } x \in C\}$

$= (A\cup B)\cup C$

2o. método:

a) Sea $x \in A\cup(B\cup C)$

$\rightarrow x \in A \text{ ó } x \in B\cup C \rightarrow x \in B \text{ ó } x \in C$

o sea $x \in A \text{ ó } x \in B \text{ ó } x \in C$

Si $x \in A \rightarrow x \in A\cup B \rightarrow x \in (A\cup B)\cup C$

Si $x \in B \rightarrow x \in A\cup B \rightarrow x \in (A\cup B)\cup C$

Si $x \in C \rightarrow x \in C\cup(A\cup B) \rightarrow x \in (A\cup B)\cup C$ (de 2)

$\rightarrow A\cup(B\cup C) \quad (A\cup B)\cup C$ ...(1)

b) Si $x \in (A\cup B)\cup C$

$x \in A\cup B \text{ ó } x \in C$

$\rightarrow x \in A \text{ ó } x \in B \text{ ó } x \in C$

Si $x \in A \rightarrow x \in A\cup(B\cup C)$

Si $x \in B \rightarrow x \in (B\cup C) \rightarrow x \in A\cup(B\cup C)$

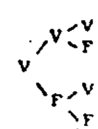
Si $x \in C \rightarrow x \in (B\cup C) \rightarrow x \in A\cup(B\cup C)$

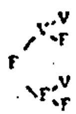
$\rightarrow (A\cup B)\cup C \subset A\cup(B\cup C)$ ...(2)

de (1) y (2): $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C) = A\cup B\cup C$

3er método

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in A\cup B$	$x \in (A\cup B)\cup C$	$x \in B\cup C$	$x \in A\cup(B\cup C)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F





Ejercicios.- Con base en las leyes del álgebra de conjuntos, demostrar:

1.- $A' \cap B' \cap C' = (AUBUC)'$

$A' \cap B' \cap C' = (A' \cap B') \cap C'$ (de 3)

$= [(A' \cap B')' U (C')']'$ (de 7)

$= [(AUB) UC]'$ (de 7 y 8)

$= (AUBUC)'$ (de 3)

2.- $AU(A' \cap B) = AUB$

$AU(A' \cap B) = (AUA') \cap (AUB)$ (de 4)

$= \bar{U} \cap (AUB)$ (de 6)

$= AUB$ (de 5)

3.- $[(A'UB) \cap (CUA')]' = A \cap (B'UC')$

$[(A'UB) \cap (CUA')]' = [(A'UB) \cap (A'UC)]'$ (de 2)

$= [A'U(B \cap C)]'$ (de 4)

$= (A')' \cap (B \cap C)'$ (de 7)

$= A \cap (B \cap C)'$ (de 8)

$= A \cap (B'UC')$ (de 7)

4.- $(AUB) U (A'UB') = \bar{U}$

$(AUB) U (A'UB') = (AUA') U (BUB')$ (de 2 y 3)

$= \bar{U} \cup \bar{U}$ (de 6)

$= \bar{U}$ (de 1)

5.- Con base en la fórmula dada anteriormente: $nA+nB = n(AUB)+n(A \cap B)$, deducir la fórmula para relacionar el número de elementos en tres conjuntos: $nA+nB+nC$.

Solución:

Por asociatividad: $n(AUBUC) = n(AU(BUC))$

por la fórmula dada para 2 conjuntos:

$n(AU(BUC)) = nA+n(BUC)-n[A \cap (BUC)]$

aplicando nuevamente la misma fórmula:

$n(AU(BUC)) = nA+nB+nC-n(B \cap C)-n(A \cap (BUC))$

de la distributividad:

$n(A \cap (BUC)) = n[(A \cap B) U (A \cap C)]$

aplicando la fórmula para 2 conjuntos a este último:

$$n(A\cup B\cup C) = nA+nB+nC-n(B\cap C)-n(A\cap B)-$$

$$-n(A\cup C)+n\left[(A\cap B)\cap(A\cap C)\right]$$

$$= nA+nB+nC-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

o bien:

$$nA+nB+nC = n(A\cup B\cup C)+n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C)$$

6.- En una encuesta efectuada a un grupo de 100 estudiantes universitarios acerca de qué idioma extranjero estaban estudiando en ese semestre, se obtuvieron las siguientes respuestas:

Idioma:	Número de estudiantes:
Francés (F)	26
Inglés (I)	48
Inglés (I) y Ruso (R)	8
Francés, pero no Ruso	23
Solamente Francés	18
Francés e Inglés	8
Ningún idioma	24

Se pregunta:

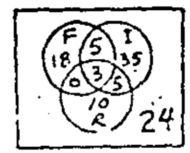
i) ¿Cuántos cursan Ruso? $nR = ?$

ii) ¿Cuántos toman Francés y Ruso, pero no llevan Inglés?

iii) ¿Cuántos cursan Francés y Ruso o Inglés, o ambos?

Solución:

Del diagrama de Venn:



i) $nR = 18$

ii) $n(F\cap R\cap I') = 0$

iii) $n(F\cap(R\cup I)) = 8$

7.- Se tienen 3 objetos: A, B, C, y se sabe que ninguno de los 3 pesa más de 1 kg ni menos de 0.5 kg. Para determinar con exactitud el peso que tiene cada uno de los objetos, se emplea una balanza; pero ésta únicamente registra, con precisión, pesos entre 1 y 2 kg.

El problema consiste en determinar, con la balanza dada, con absoluta precisión, el peso de cada uno de los 3 objetos, efectuando únicamente 3 pesadas en la balanza.

Solución: Para poder emplear la balanza, deberán pesarse 2 objetos conjuntamente.

Nomenclatura: $\bar{U} = \{A, B, C\}$

nA = peso de A

nB = peso de B

nC = peso de C

$n\bar{U}$ = peso conjunto de los 3 objetos.

$S_1 = \{B,C\}$; $S_2 = \{A,C\}$; $S_3 = \{A,B\}$.

nS_1 = peso de B y C juntos = $nB+nC$

nS_2 = peso de A y C juntos = $nA+nC$

nS_3 = peso de A y B juntos = $nA+nB$

Resulta entonces:

$S_1 \cup S_2 = S_2 \cup S_3 = S_3 \cup S_1 = \bar{U}$

$S_1 \cap S_2 = C$

$S_2 \cap S_3 = A$

$S_3 \cap S_1 = B$

Hemos visto que:

$$nS_1 + nS_2 = n(S_1 \cup S_2) + n(S_1 \cap S_2)$$

$$= n\bar{U} + nC$$

$$nS_1 + nS_2 = n\bar{U} + nC \quad \ldots (1)$$

$$nS_1 + nS_3 = n\bar{U} + nB \quad \ldots (2)$$

$$\underline{nS_2 + nS_3 = n\bar{U} + nA} \quad \ldots (3)$$

$$2(nS_1 + nS_2 + nS_3) = 3n\bar{U} + nA + nB + nC = 4n\bar{U}$$

$$\rightarrow n\bar{U} = \frac{1}{2}(nS_1 + nS_2 + nS_3). \quad (4)$$

(4) en (3):

$$nS_2 + nS_3 = \frac{1}{2}(nS_1 + nS_2 + nS_3) + nA$$

Simplificando, y despejando nA se obtiene la primera de las siguientes 3 ecuaciones; las 2 siguientes resultan de manera análoga:

$$nA = \frac{1}{2}(nS_2 + nS_3 - nS_1) \qquad \text{(de (4) y (3))}$$

$$nB = \frac{1}{2}(nS_1 + nS_3 - nS_2) \qquad \text{(de (4) y (2))}$$

$$nC = \frac{1}{2}(nS_1 + nS_2 - nS_3) \qquad \text{(de (4) y (1))}$$

8.- Al director de una escuela secundaria mixta (coeducacional) se le presentan los siguientes datos estadísticos tendientes a reflejar el efecto de la práctica de los deportes en el aprovechamiento académico de los alumnos:

La muestra consistió de 100 alumnos, 50 hombres y 50 mujeres. Pasó año el 60 %, del cual 28 son mujeres y 32, hombres.
De los 100 que constituyen la muestra, 56 practican deporte y, de estos 56, hay 36 hombres y 20 mujeres. Se observa que de los 60 aprobados, 34 son deportistas, y de estos 34, hay 30 hombres.

El director pregunta: ¿Cuántas mujeres no-deportistas no pasaron año?

1ª Solución:

$n\bar{U} = 100;$ $nH = nM = 50;$ $nA = 60;$

$n(A \cap M) = 28;$ $n(A \cap H) = 32;$ $nD = 56$

$n(D \cap H) = 36;$ $n(D \cap M) = 20;$ $n(A \cap D) = 34;$

$n(A \cap D \cap H) = 30;$ INCOGNITA: $N(M \cap D' \cap A')$

pero: $n(M \cap D' \cap A') = n(H' \cap D' \cap A')$

del problema 1.- anterior:

$$n(H'\cap D'\cap A') = n(HUDUA)'$$

pero $n(HUDUA)' = n\bar{U}-n(HUDUA)$

del problema 5.- Anterior:

$$n(HUAUD) = nH+nA+nD-n(H\cap A)-n(H\cap D)-n(A\cap D)+n(H\cap A\cap D)$$

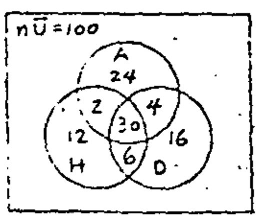
$$= 50+60+56-32-36-34+30$$

$$= 94$$

$n(M'\cap D'\cap A') = n\bar{U}-n(HUDUA) = 100-94 = 6$

o sea: El número de mujeres, que no practican deporte y que reprobaron el año es 6.

El diagrama de Venn correspondiente a este problema es como sigue:

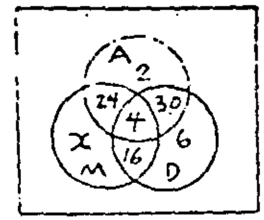


$n(HUAUD) = 94$

2ª Solución:

$$n(MUAUD) = nM+nA+nD-n(M\cap A)-n(MUD)-n(A\cap D)+n(M\cap A\cap D)$$

Donde se conocen todos los datos del segundo miembro. Para completar los datos, puede recurrirse al siguiente diagrama de Venn:



$\therefore n(MUAUD) = x+82$

$\therefore x+82 = 50+60+56-28-20-34+4$

$x+82 = 170-82 = 88$

$x = 6$

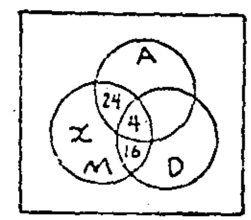
3ª Solución:

Del diagrama de Venn se observa que:

$nM = x+n(A\cap M)+n(M\cap D)-n(M\cap A\cap D)$

$50 = x+28+20-4 = x+44$

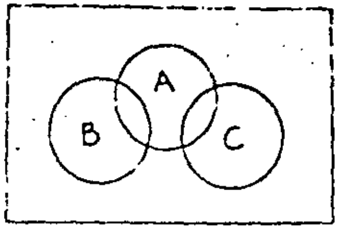
$\therefore x = 6$



Dibujar diagramas de Venn, tales que verifiquen las siguientes ecuaciones:

1.- $A\cap B\cap C = (B-C)\cap(A\cap C)$

Solución:



Del diagrama:

$A \cap B \cap C = \phi$

$B - C = B$

$\rightarrow (B-C) \cap (A \cap C) = B \cap A \cap C$

$\rightarrow (B-C) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$

2.- $A \cap B \cap C = A \cap A'$

Solución:

Dado que $A \cap A' = \phi$; (para cualquier A) $\rightarrow$ que para que se verifique la ecuación en 2, basta que $A \cap B \cap C = \phi$; como sucede, por ejemplo, en el diagrama de Venn del problema 1.- anterior (existen muchos más posibilidades)

3.- $A-(B-C) = (A-B) \cup C$ ...(1)

Transformando el 1^{er} miembro de (1):

$A-(B-C) = A \cap (B-C)'$; (demostrado por 3 métodos)

$= A \cap (B \cap C')'$, (por la misma razón de antes)

$= A \cap (B' \cup C)$; (por De Morgan)

$= (A \cap B') \cup (A \cap C)$; (por distributividad)

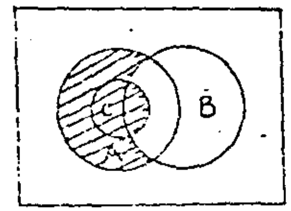
$= (A-B) \cup (A \cap C)$ ...(2)

Comparando los 2^{os} miembros de (1) y (2), siendo iguales los 1^{os} miembros:

Si $A \cap C = C \rightarrow (1) = (2)$

pero $A \cap C = C \rightarrow C \subseteq A$.

De ahí que el diagrama de Venn apropiado puede ser el siguiente:



Del diagrama:

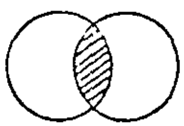
$A-(B-C) = (A-B) \cup C$

Es muy importante observar que las 3 fórmulas dadas <u>no</u> tienen validez general, como puede demostrarse, por ejemplo, construyendo las tablas de verdad correspondientes a cada caso.

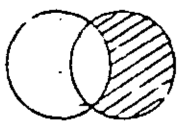
Problema: Colocar los paréntesis necesarios en el segundo miembro de modo que resulte cierta la siguiente igualdad para todo conjunto A, B:

$$A-[B-(A\cap B)] = A-B-B-A$$

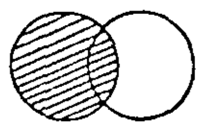
Solución: Dado que el conjunto del primer miembro sí está bien definido, se podrá tener idea de qué conjunto representa si nos auxiliamos de diagramas de Venn:



$A\cap B$



$B-(A\cap B)$



$A-[B-(A\cap B)]$

Por lo que parece ser que $A-[B-(A\cap B)] = A$.

Lo que puede comprobarse (demostrarse) con una tabla de verdad (para todo A, B)

$x\in$ A	B	$A\cap B$	$B-(A\cap B)$	$A-[B-(A\cap B)]$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	F
F	F	F	F	F

$\rightarrow A = A-[B-(A\cap B)]$

Volviendo ahora al segundo miembro: y observando que $B-B=\phi$

$A-[(B-B)-A] = A-[\phi-A] = A-\phi = A.$

Por lo cual, la igualdad propuesta se verifica para todo conjunto A, B, si:

$$A-[B-(A\cap B)] = A-[(B-B)-A]$$

Obsérvese que no funciona ninguna de las siguientes posibilidades de colocación de paréntesis en el segundo miembro:

$$(A-B)-(B-A) = A-B \neq A$$

$$[A-(B-B)]-A = \phi \neq A$$

$$[(A-B)-B]-A = (A-B)-A = \phi \neq A$$

$$A-[B-(B-A)] = A-B \neq A$$

Teorema: La condición necesaria y suficiente para que un conjunto B sea el complemento de otro conjunto A, es que se verifiquen simultáneamente las dos condiciones siguientes:

a) $A \cap B = \phi$

y b) $A \cup B = \bar{U}$; (b) es la dual de a))

Demostración: condición necesaria:

Hipótesis: $B = A'$

$$A \cap B = A \cap A' = \phi$$

asimismo: si $B = A' \rightarrow A \cup B = A \cup A' = \bar{U}$

condicion suficiente

Hipótesis: $A \cap B = \phi$, y $A \cup B = \bar{U}$

$B = B \cap \bar{U}$

$= B \cap (A \cup A')$

$= (B \cap A) \cup (B \cap A')$

$= (A \cap B) \cup (B \cap A')$

de la hipotesis: $A \cap B = \phi$

$\rightarrow B = \phi \cup (B \cap A')$

$= (A' \cap A) \cup (A' \cap B)$

$= A' \cap (A \cup B)$

de la hipótesis: $A \cup B = \bar{U}$

$B = A' \cap \bar{U}$

$\rightarrow B = A'$

Problema.- Con base en el teorema anterior, demostrar la ley de De Morgan:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

Bastará hacer ver que:

a) $(A \cup B) \cup (A' \cap B') = \bar{U}$

ó b) $(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \phi$

puesto que si hacemos $A \cup B = C$; $A' \cap B' = D$

$$C \cup D = \bar{U} \rightarrow C' = D$$

$$\text{ó } C \cap D = \phi \rightarrow C' = D$$

Demostración de a)

$$(A \cup B) \cup (A' \cap B') = \left[(A \cup B) \cup A' \right] \cap \left[(A \cup B) \cup B' \right]$$

$$= \left[A' \cup (A \cup B) \right] \cap \left[A \cup (B \cup B') \right]$$

$$= \left[(A' \cup A) \cup B \right] \cap \left[A \cup (B \cup B') \right]$$

$$= \left[\bar{U} \cup B \right] \cap \left[A \cup \bar{U} \right]$$

$$= \bar{U} \cap \bar{U} = \bar{U}$$

$$\rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$$

Aplicación de la teoría de conjuntos a razonamientos lógicos.-

Supongamos que se establece la siguiente relación entre varios conjuntos

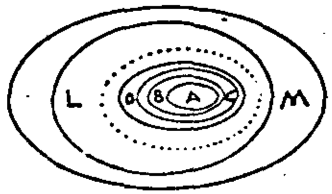
$A \subset B$

$B \subset C$

$C \subset D$

$\cdots$

$L \subset M$



La conclusión es: $A \subset M$

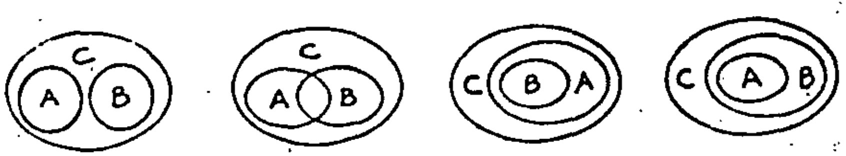
Debe observarse que la conclusión anterior es válida únicamente si cada conjunto aparece no más de una vez del lado derecho o del lado izquierdo.

No puede concluirse nada concreto acerca de los conjuntos A y B en el siguiente ejemplo:

$A \subset C$

$B \subset C$

En todos los casos siguientes se cumplen las condiciones dadas:

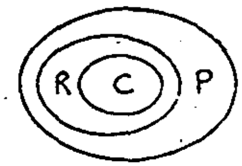


Las leyes de los conjuntos y el uso de diagramas de Venn pueden conducir a la determinación de la validez de ciertos tipos de razonamientos, como se ilustra en los ejemplos dados a continuación:

1.- Determinar si es válido el siguiente razonamiento:

Premisas: { Todos los cuadrados son rectángulos.
Todos los rectángulos son paralelogramos.

Conclusión: { Por lo tanto, todos los cuadrados son paralelogramos.



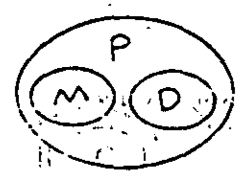
$C \subset R \subset P$

$\therefore$ el razonamiento es válido

2.- ¿Es válido el siguiente razonamiento?

Premisas: { Algunos problemas se resuelven matemáticamente
Algunos problemas son difíciles

Conclusión: { Por lo tanto, algunos problemas matemáticos son difíciles.



Aun cuando la conclusión es correcta, ésta se obtiene de un razonamiento falso (ó inválido).

Empleando las leyes de conjuntos es posible demostrar que los conjuntos M y D del problema anterior no necesariamente tienen intersección. Del diagrama:

$$P \cup M = P; \; P \cup D = P$$

$$(P \cup M) \cap (P \cup D) = P \cap P = P$$

$$\therefore \quad P \cup (M \cap D) = P \;\ldots(1)$$

Sabemos además que $P \cup \emptyset = P \ldots(2)$

Comparando (1) y (2) vemos que

$M \cap D$ puede ser $\emptyset$

$\therefore$ M y D no necesariamente tienen intersección.

3.- Analizar el siguiente razonamiento

Premisas: Todos los niños son felices; Gentes felices no asesinan

Conclusión: Por lo tanto, ningún niño es asesino

Del diagrama podemos concluir que el razonamiento es válido:

Analíticamente: $N \cap F = N$; $F \cap A = \phi$

$N = N \cap F$

$N \cap A = (N \cap F) \cap A$

$= N \cap (F \cap A)$

$N \cap A = N \phi$

$N \cap A = \phi$

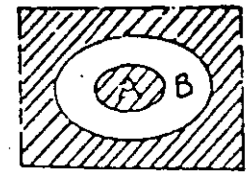
$\Rightarrow$ No existen gentes que sean simultáneamente niños y asesinos

$\Rightarrow$ ningún niño es asesino:

Expresión de A B en función de las operaciones unión e intersección

Dado que es válida la conclusión A C si se sabe que A B y B C, conviene expresar el símbolo en función de la unión e intersección de dos conjuntos.

Supongamos que A B; lo cual se indica mediante el siguiente diagrama de Venn:



Puede afirmarse que, si $A \subset B$, las áreas rayadas en el diagrama no se superponen. Esta condición es equivalente a:

$$A \cap B' = \phi$$

Puesto que la recíproca tambien es cierta, se concluye que:

$$A \subset B \leftrightarrow A \cap B' = \phi \quad ..(1)$$

así mismo, de ..(1)

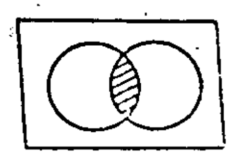
$$B' \subset A' \leftrightarrow B' \cap (A')' = \phi$$

$$B' \subset A' \leftrightarrow A \cap B' = \phi \quad ...(2)$$

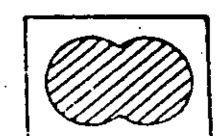
de (1) y (2)

$$A \subset B \leftrightarrow B' \subset A' \quad ...(3)$$

Por otro lado:



$A \cap B \neq A \Rightarrow A \not\subset B$

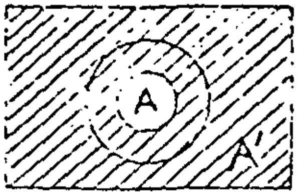


$A \cup B \neq B \Rightarrow A \not\subset B$

$$A \subset B \leftrightarrow A \cap B = A \qquad \ldots (4')$$

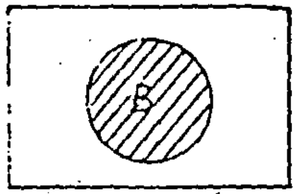
$$A \subset B \leftrightarrow A \cup B = B \qquad \ldots (5)$$

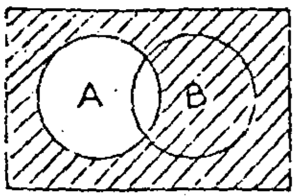
También: $A \subset B \leftrightarrow A' \cup B = \bar{U}$ ...(6) (dual de (1))



$A' \cup B = \bar{U}$

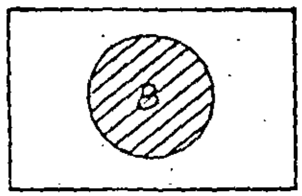
$\rightarrow A \subset B$





$A' \cup B \neq \bar{U}$

$\rightarrow A \not\subset B$



Demostraciones analíticas:

1.- Se afirma que $A \subset B \leftrightarrow A \cap B = A$

Demostración:

1ª parte: hipótesis: $A \subset B$

$\rightarrow$ si $x \in A \rightarrow x \in B$; por lo cual, si $x \in A$ y $x \in B \rightarrow$
$x \in A \cap B \rightarrow A \subset A \cap B$ ...(i)

por otro lado, si $x \in A \cap B \rightarrow x \in A$ y $x \in B$
$\rightarrow x \in A \rightarrow A \cap B \subset A$ ...(ii)

de (i) y (ii) resulta: $A \cap B = A$

2ª parte: hipótesis: $A \cap B = A$

Demostración: si $A \cap B = A \rightarrow A \subset A \cap B$ ...(α)

pero, para todo $A, B \subset \bar{U}$: $A \cap B \subset B$ ...(β)

de (α) y (β) se concluye que $A \subset B$

2.- Demostrar que $A \cap B = A \rightarrow A \cap B' = \phi$

en efecto: $A \rightarrow A \cap B \rightarrow A \cap B' = (A \cap B) \cap B' =$

$= A \cap (B' \cap B) = A \cap \phi = \phi$

$\therefore$ $A \cap B = A$ equivale a $A \cap B' = \phi$

3.- Demostrar que $A \cap B' = \phi \rightarrow A' \cup B = \bar{U}$.

Aplicando la ley de De Morgan a $A \cap B' = \phi$ se obtiene: $A' \cup B = \bar{U}$.

4.- Demostrar que $\phi = A \cap B' \rightarrow A \cup B = B$.

$\phi \cup B = (A \cap B') \cup B = (A \cup B) \cap (B' \cup B) = (A \cup B) \cap \bar{U} = A \cup B$

$\therefore$ $\phi = A \cap B'$ equivale a $A \cup B = B$

En resumen:

$$A \subset B \Leftrightarrow \begin{cases} B' \subset A' \\ A \cap B' = \phi \\ A \cap B = A \\ A \cup B = B \\ A' \cup B = \bar{U} \end{cases}$$

Problema:

¿Qué conclusiones pueden derivarse de las siguientes proposiciones?

a) Todos los estudiantes inscritos en deportes juegan o beisbol o futbol (o ambos).

b) No es permitido jugar beisbol y ser además miembro del equipo de natación.

c) Los que no forman parte del equipo de natación, deben practicar atletismo.

Solución: Definamos los siguientes conjuntos:

$\bar{U}$ = Todos los estudiantes inscritos en deportes

B = Conjunto que juega beisbol.

F = Conjunto que juega futbol.

N = Conjunto en el equipo de natación.

A = Conjunto en el equipo de atletismo.

Simbólicamente, las proposiciones dadas se escriben:

a) $B \cup F = \bar{U}$

b) $B \cap N = \phi$

c) $N' \subset A$

Hemos visto que a) y b) son equivalentes a:

a) $B \cup F = \bar{U} \equiv B' \subset F$ ó $F' \subset B$

b) $B \cap N = \phi \equiv B \subset N'$ ó $N \subset B'$

de lo cual tomamos:

$$\left.\begin{array}{l} a)\ F' \subset B \\ b)\ B \subset N' \end{array}\right\} \rightarrow F' \subset N' \text{ ó } N \subset F$$

$$\left.\begin{array}{l} b)\ B \subset N' \\ \text{de}\quad c)\ N' \subset A \end{array}\right\} \rightarrow B \subset A$$

puesto que

$$\left.\begin{array}{l} F' \subset B \\ B \subset A \end{array}\right\} \rightarrow F' \subset A$$

En resumen, las conclusiones son:

1.- $F' \subset N' = N \subset F$

Todos los miembros del equipo de natación juegan futbol.

2.- $B \subset A$

Todos los que juegan beisbol están en el equipo de atletismo.

3.- $F' \subset A$

Todos los que no juegan futbol están en el equipo de atletismo.

<u>Teorema</u>.- Dos conjuntos A y B son iguales si, y sólo si, se verifica una, cualquiera, de las dos condiciones que se expresan a continuación:

a) $(A-B) \cup (B-A) = \phi$

ó b) $(A \cap B') \cup (A' \cap B) = \phi$

Demostración de b)

Hipótesis: $(A \cap B') \cup (A' \cap B) = \phi$

Para que la unión de dos conjuntos pueda ser igual al conjunto ϕ es necesario que cada conjunto sea ϕ, puesto que $\phi \cup \phi = \phi$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow A \cap B' = \phi \rightarrow A \subset B \\ A' \cap B = \phi \rightarrow B \subset A \end{array}\right\} A = B$$

Recíprocamente:

Hipótesis $A = B$

$$(A \cap B') \cup (A' \cap B) = (A \cap A') \cup (A' \cap A) =$$

$$= \phi \cup \phi = \phi$$

Problema: Con base en el último teorema, demostrar que en el problema anterior, es factible

Solución: Debemos buscar bajo [illegible] se verifica la ecuación:

$$(N \cap F') \cup (N' \cap F) = \phi$$

De la 1ª conclusión obtenida:

$$N \subset F \rightarrow N \cap F' = \phi$$

$$\therefore \phi \cup (N' \cap F) = \phi$$

$$\rightarrow N' \cap F = \phi$$

lo anterior se verifica si $F \subset N \rightarrow F$ puede ser igual a N

B = A	F = N

Del diagrama se comprueba que se cumplen todas las condiciones dadas y las conclusiones obtenidas, esto es:

$$\left.\begin{array}{l} B \cup F = U \\ B \cap N = \phi \\ N' \subset A \end{array}\right\} \text{DATOS}$$

$$\left.\begin{array}{l} N \subset F \\ B \subset A \\ F' \subset A \end{array}\right\} \text{CONCLUSIONES}$$

Pares ordenados.- Sean dos elementos: a y b; si designamos como primer elemento a uno de ellos, digamos a, y al elemento b como segundo, tendremos definido un par ordenado, el que se representa como: (a, b).

Igualdad.- Dos pares ordenados son iguales si, y sólo si, sus primeros elementos son iguales; siendo asimismo iguales sus segundos elementos; esto es: $(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c, b = d$

Observaciones:

1.- $(2, 3) \neq (3, 2)$

2.- Los pares ordenados pueden estar constituidos con el primer elemento igual al segundo: $(a, a) = (5, 5)$

$$(b, b) \neq (1, 2)$$

Los puntos del plano coordenado son ejemplos conocidos de pares ordenados.

Se da como definición de par ordenado la siguiente:

$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$; en donde $\{a,b\}$ es un conjunto (par no ordenado), y el conjunto $\{a\}$ determina cuál de los elementos del conjunto $\{a,b\}$ debe considerarse como primer elemento del par.

Con base en la definición anterior, se demostrarán algunas de las afirmaciones hechas anteriormente:

I.- $(a,b) = (c,d) \longleftrightarrow a = c;\ b = d$

II.- $(a,b) \neq (b,a)$, si $a \neq b$

III.- Si un par ordenado tiene sus dos coordenadas iguales, resulta $(a,a) = \{\{a\}\}$

Demostraciones:

I.- a) Hipótesis: $(a,b) = (c,d)$

Se demostrará que $a = c;\ b = d$.

En efecto: $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$; asimismo: $(c,d) = \{\{c\},\{c,d\}\}$

por hipótesis: $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$ ...(1)

i) si $a = b \rightarrow \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a\},\{a,a\}\} = \{\{a\},\{a\}\} = \{\{a\}\}$

(con lo cual queda demostrada la afirmación III). de (1)

$\rightarrow \{\{c\},\{c,d\}\} = \{\{a\}\},\ \rightarrow \{\{c\}\} = \{\{a\}\};\ \rightarrow \{c\} = \{a\},\ \rightarrow a = c.$

puesto que si $a = b \rightarrow b = a$, se obtiene asimismo $b = d$

ii) si $a \neq b$, resulta que, por tener ambos miembros de la igualdad (1) el mismo número de elementos, $\rightarrow c \neq d$; obteniéndose de (1) que:

$$\{a\} \in \{\{c\},\{c,d\}\}$$

puesto que: $\{a\} \neq \{c,d\} \rightarrow \{a\} = \{c\}$

$\rightarrow a = c$

Por otro lado, de (1):

$$\{a,b\} \in \{\{c\},\{c,d\}\}$$

pero $\{a,b\} \neq \{c\}$

$\rightarrow \{a,b\} = \{c,d\}$

puesto que resultó $a = c$, $\rightarrow b = d$; ya que $a \neq b$; con lo cual se completa la demostración de la parte I a)

I.-b) Hipótesis: $a = c;\ b = d$

Se demostrará que $(a,b) = (c,d)$

En efecto, de la hipótesis resultan:

$\{a\} = \{c\}$; $\{a,b\} = \{c,d\}$

$\therefore \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$

$\rightarrow (a,b) = (c,d)$

II.- Hipótesis $a \neq b$; conclusión: $(a,b) \neq (b,a)$.

Por definición:

$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$; $(b,a) = \{\{b\},\{b,a\}\}$

si: $a \neq b$, $\rightarrow \{a\} \neq \{b\}$, $\rightarrow \{\{a\},\{a,b\}\} \neq \{\{b\},\{b,a\}\}$

$\rightarrow (a,b) \neq (b,a)$

Obsérvese que lo anterior se verifica aun cuando: $\{a,b\} = \{b,a\}$, para toda a, b.

Producto cartesiano de conjuntos.- Dados dos conjuntos A y B, el "producto cartesiano" de A y B es el conjunto cuyos elementos son todos los pares ordenados (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Ejemplo: Sea $A = \{a,b\}$; $B = \{x, y, z\}$

$A \times B = \{(a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z)\}$

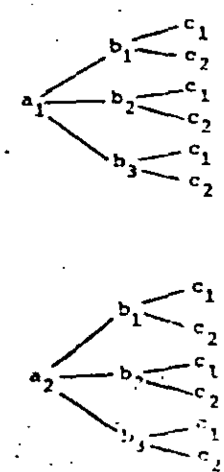
Obsérvese que: $n(A \times B) = nA \times nB$; en el ejemplo: $nA = 2$; $nB = 3 \rightarrow nA \times nB = 6 \rightarrow n(A \times B) = 6$

La definición anterior puede generalizarse para formar productos

cartesianos de cualquier número de conjuntos:

$A \times B \times \ldots \times N = \{(a,b,\ldots,n) \mid a \in A, b \in B, \ldots, n \in N\}$

Ejemplo: Sean: $A = \{a_1,a_2\}$; $B = \{b_1,b_2,b_3\}$; $C = \{c_1,c_2\}$



resultan 12 ternas ordenadas

$nA \times nB \times nC = n(A \times B \times C) = 12$

$A \times B \times C = \{(a_1b_1c_1)(a_1b_1c_2)(a_1b_2c_1)(a_1b_2c_2)\ldots\ldots(a_2b_3c_1)(a_2b_3c_2)\}$

Ejercicios:

1.- Demostrar que: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

a) $A \times (B \cap C) = \{(x,y) \mid x \in A,\ y \in B \cap C\}$

$= \{(x,y) \mid x \in A,\ y \in B \text{ y } y \in C\}$

$= \{(x,y) \mid (x,y) \in A \times B \text{ y } (x,y) \in A \times C\}$

$= (A \times B) \cap (A \times C)$

otro método:

b) Sea $(x,y) \in A \times (B \cap C)$

$\rightarrow x \in A,\ y \in B \cap C$

$\rightarrow x \in A,\ y \in B$ y $y \in C$

$\rightarrow (x,y) \in (A \times B)$ y $(x,y) \in (A \times C)$

$\rightarrow (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

$\rightarrow A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C) \ldots (1)$

Sea $(x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

$\rightarrow (x,y) \in A \times B$ y $(x,y) \in A \times C$

$\rightarrow x \in A$ y $y \in B$ y C

$\rightarrow x \in A$ y $y \in B \cap C$

$\rightarrow (x,y) \in A \times (B \cap C)$

$\rightarrow (A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C) \ldots (2)$

de (1) y (2):

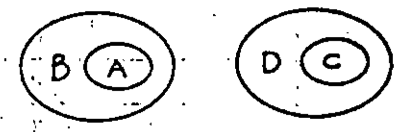
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

c) Tabla de verdad:

$x \in A$	$y \in B$	$y \in C$	$y \in B \cap C$	$(x,y) \in A \times (B \cap C)$	$(x,y) \in A \times B$	$(x,y) \in A \times C$	$(x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	F	F	F	V	F
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

2.- Demostrar que si $A \subset B$ y $C \subset D \rightarrow (A \times C) \subset (B \times D)$

a) Sea $(x,y) \in A \times C$



$\rightarrow x \in A$ y $y \in C$

pero, por hipótesis: $A \subset B$ y $C \subset D$

$\rightarrow$ si $x \in B$ y $y \in D \rightarrow (x,y) \in B \times D$

$\rightarrow$ si $(x,y) \in (A \times C) \rightarrow (x,y) \in (B \times D)$

$\rightarrow (A \times C) \subset (B \times D)$

otro método:

b) $(A \times C) \subset (B \times D)$

$\Rightarrow \quad (A \times C) \cup (B \times D) = B \times D$

$\Leftarrow \quad (A \times C) \cap (B \times D) = A \times C$

pag 48

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
				de 1 y 3						de 5 y 10
$x \in A$	$x \in B$	$y \in C$	$y \in D$	$(x,y) \in$	$(x,y) \in B \times D$				$\bigcup_{i=6}^{9} C_i$	$(x,y) \in$
$x \in B$	$x \notin A$	$y \in D$	$y \notin C$	$A \times C$	1 y 3	1 y 4	2 y 3	2 y 4		$(A \times C) \cup (B \times D)$
V	V	V	V	V	V				V	V
V	V	V	F	V	V				V	V
V	V	F	V	F	F	V			V	V
V	V	F	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V				V	V
V	F	V	F	V	V				V	V
V	F	F	V	F	F	V			V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	V		V	V
F	V	V	F	F	F	F	V		V	V
F	V	F	V	F	F	F	F	V	V	V
F	V	F	F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	F	V	F	F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

La tabla nos demuestra que

$(A \times C) \cup (B \times D) = B \times D$

$\Rightarrow (A \times C) \subset (B \times D)$

Algunos libros de referencia:

1.- "Sets, logic and axiomatic theories". R. R. Stoll, (Edit. Freeman) 1961.

2.- "Introduction to logic and sets". R. R. Christian. (Edit. Blaisdell) 1965.

3.- "Introduction to the foundation of mathematics". R.L. Wilder, (Edit. Wiley) 1952.

4.- "Set theory and related topics". S. Lipschutz, (Edit. Schaum) 1964.

5.- "Notas sobre conjuntos y números" J. Salazar R. (Edit. C.F.E.) 1967.

6.- "Foundations of modern mathematics". L. Mehlenbacher (Edit. Prindle, Weber & Schmidt) 1967.

7.- "The algebraic foundations of mathematics" R. A. Beaumont R. S. Pierce, (Edit. Addison-We y) 1963.

8.- "Introducción a la teoría de conjuntos" L. Oubiña (Edit. Univ. de Buenos Aires). 1969

9.- "Conjuntos" Aplicaciones matemáticas a la administración. Ariel Kleiman y Elena K. de Kleiman. (Edit. Limusa-Wiley, S.A., México) 1972.

EL SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES

por

EDUARDO SOLAR GONZALEZ

LEDA SPEZIALE DE GUZMAN

profesores de la División de Ciencias Básicas

de la Facultad de Ingeniería de la U. N. A. M.

CAPITULO I EL SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES

CONTENIDO

CAPITULO I   EL SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES

INTRODUCCION

Es difícil precisar cuándo aparecen en la historia los primeros números, pero tenemos la certeza de que éstos fueron los llamados números naturales (1, 2, 3,...), los cuales surgieron de la necesidad de contar.

Tan pronto como el hombre dejó de ser nómada para dedicarse a la agricultura y al comercio, tuvo necesidad de desarrollar formas cada vez mejores para contar y para representar los números. El estudio de cómo tales formas han evolucionado hasta convertirse en las actuales merecería por sí solo un libro completo.

El hombre primitivo requería únicamente de los primeros números naturales para contar. Sin embargo, con el advenimiento de la civilización hubo de utilizar números más y más grandes, hasta que los antiguos griegos dieron el salto al audaz concepto de infinito, noción que requirió de un alto grado de abstracción por ir más allá de toda experiencia física.

Curiosamente, el paso de los enteros positivos a los negativos resultó más difícil. Los números negativos aparecieron como soluciones de ecuaciones tan pronto como los matemáticos se ocuparon del álgebra. Los griegos, más preocupados por la geometría que por el álgebra, descartaron los números negativos al no poder representarlos gráficamente y adaptarlos a su geometría; mientras que los chinos y los hindúes, por el contrario, reconocieron la existencia de números negativos aún antes de la era cristiana. Los números negativos, sin embargo, no fueron incorporados completamente al cuerpo de las matemáticas sino hasta 1545 con la publicación de la obra de Girolamo Cardano, "Ars Magna".

Los números racionales (o fracciones) son más antiguos que los números negativos. Estos números aparecen en los más primitivos escritos matemáticos como el papiro Rhind, obra legada por la cultura egipcia.

Los números irracionales tienen también una larga historia. La necesidad de estos números se había presentado ya a los antiguos griegos en sus estudios geométricos; sin embargo, no se encontraron métodos satisfactorios para la construcción de estos números a partir de los racionales sino hasta el siglo XIX con los trabajos de Richard Dedekind. Fue en este siglo cuando los matemáticos lograron dar unidad y fundamento lógico al estudio de los números.

En el año de 1889, Giuseppe Peano propuso cinco axiomas o postulados que caracterizan completamente al conjunto de los números naturales; estos cinco postulados se utilizaron como punto de partida para una construcción total del sistema de los números reales.

Actualmente, el estudio de los números reales se puede emprender desde dos puntos de vista fundamentalmente distintos.

Uno de ellos es el conocido como "método constructivo", en el cual se estudian primero los números naturales y a partir de ellos se introducen los enteros, que a su vez sirven como base para definir los números racionales; por último, introduciendo los números irracionales, se completa la construcción.

El otro punto de vista es el llamado "enfoque axiomático", en el cual los números reales se definen como entes que satisfacen un conjunto de propiedades ya conocidas.

El enfoque axiomático aprovecha, por así decirlo, los resultados de esfuerzos de generaciones de matemáticos, para tomarlos como punto de partida. El método constructivo, por el contrario, se identifica más con la evolución histórica de las matemáticas. Las propiedades que en el segundo enfoque se aceptan como axiomas, en el método constructivo constituyen teoremas y por tanto deben ser demostradas.

La presentación que aquí haremos se asemeja más al método constructivo, pues creemos que esto contribuye a la comprensión de los conceptos fundamentales. Sin embargo, no nos preocuparemos demasiado por cubrir ciertos aspectos formales de la construcción, pues ello podría desviar la atención hacia aspectos que no son de importancia fundamental en una primera aproximación al estudio de los números. El lector interesado en los aspectos formales puede recurrir a las referencias (1) y (2) que, esperamos, le dejarán satisfecho.

I.1 CONTAR

Seguramente todos los que estudien este libro sabrán contar, pero quizá muy pocos se habrán preguntado qué es contar.

Contar es, en esencia, comparar.

El primer paso hacia contar lo constituye la noción de pluralidad o

cantidad, noción primitiva que poseen ya inteligencias poco desarrolladas, como las de algunos animales. Los números vienen después y constituyen un patrón o referencia para establecer la comparación entre cantidades.

Un pequeño de dos años que juega con tres esferas en su cuna percibe cuando se le esconde alguna de ellas; esto es, posee la noción de cantidad, aunque no sabe contar.

Si las esferas con que el niño juega fueran diez, en lugar de tres, difícilmente percibiría cuando una de ellas le fuera escondida. Sin embargo, si comparara las esferas con cada uno de sus dedos, seguramente se daría cuenta cuando faltara alguna. ¡Estaría contando¡

El proceso de contar, así pues, se fundamenta en el de "aparear"; proceso al que los matemáticos llaman "establecer una correspondencia uno a uno".

Para abundar sobre este concepto, consideremos un salón donde hay sillas y personas. Para saber si la cantidad de sillas es igual a la de personas bastará con pedir a éstas que se sienten. Si sobran sillas o personas sabremos que hay más de las primeras o más de las segundas, pero si no sobran sillas y todas las personas están sentadas diremos que hay tantas sillas como personas, esto es, existe una "correspondencia uno a uno" entre el conjunto de sillas y el conjunto de personas que se encuentran en el salón.

Para contar, sin embargo, se requiere además seleccionar un patrón que nos sirva como referencia para comparar. Este patrón es la llamada "escala de los números naturales" que todos conocemos:

1, 2, 3, 4, 5, ...

Cuando contamos un conjunto de objetos, lo que hacemos es poner en co rrespondencia uno a uno los objetos que contamos con los primeros números naturales, a partir del uno; el último número con el que establecemos la correspondencia nos indica la cantidad de objetos que tiene el conjunto. Así, si deseamos contar las letras de la palabra "ALGEBRA", establecemos la correspondencia:

A	L	G	E	B	R	A			
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

y encontramos que tiene siete letras.

Cabe resaltar que la palabra "siete" es un nombre que se ha asignado al número, de la misma manera que el carácter "7" es un símbolo que se utiliza para representarlo. Los símbolos que se emplean para representar números se llaman numerales.

Es importante no confundir al número, que es una idea abstracta, con su nombre o con su numeral, que no son más que una palabra o un símbolo que se emplean para distinguirlo. El número siete, por ejemplo, constituye una idea única; aunque en diferentes lenguas y épocas se hayan empleado otras palabras y numerales para referirse a ella; como la palabra "seven" en inglés y el numeral "VII" en la numeración romana.

I.2 LOS NUMEROS NATURALES

A continuación definiremos los números naturales, las operaciones de adición y multiplicación y algunos otros conceptos relacionados con ellos. El lector podrá preguntarse, no sin razón, cuál es el objeto de definir conceptos "tan conocidos". Una respuesta es que estamos tratando de construir el sistema de los números reales, y para ello necesitamos partir de bases sólidas definidas formalmente. Con esta idea buscamos definiciones que nos permitan demostrar propiedades de los números; propiedades que les dan unidad y gracias a las cuales podemos hablar de ellos como un sistema.

La tarea que ahora emprendemos puede parecer algo ardua, especialmente porque estamos en la etapa de tratar de establecer los conceptos más básicos. Sirva de consuelo notar que no fué sino hasta 1889, siglos después de que todo mundo usaba números y hacía operaciones con ellos, cuando un matemático — Peano— fué capaz de plantear las ideas que ahora nos ocupan.

- Postulados de Peano

Los cinco axiomas a que nos referimos en la introducción y que definen al conjunto de los números naturales, son los siguientes:

I.2.1 DEFINICION (Postulados de Peano)

El conjunto N de los números naturales es tal que:

i) $1 \in N$.

ii) Para cada $n \in N$ existe un único $n^* \in N$, llamado el siguiente de n.

iii) Para cada $n \in N$ se tiene que $n^* \neq 1$.

iv) Si $m, n \in N$ y $m^* = n^*$, entonces $m = n$.

v) Todo subconjunto de S de N que tenga las propiedades:

a) $1 \in S$.

b) $k \in S$ implica que $k^* \in S$

es el mismo conjunto N

Los postulados i) a v) coinciden con algunas de las propiedades que intuitivamente aceptamos para los números naturales; empero, la importanci de estos postulados estriba en que son suficientes para deducir, a partir de ellos, todas las propiedades de los números naturales.

El primero de estos postulados establece que el número uno (que se considera conocido) es un número natural.

El segundo nos indica que si elegimos un número natural, sea cual fuere éste, a dicho número corresponde uno y sólo un número natural llamado su "siguiente".

El postulado iii) arroja como consecuencia que el número uno es el primer número natural, puesto que no es el siguiente de ninguno.

El postulado iv) nos dice que dos números naturales cuyos siguientes sean iguales son, en realidad, el mismo número. De este postulado y de la unicidad del siguiente, establecida en el postulado ii), se sigue también que dos números naturales diferentes tienen diferentes siguientes.

El postulado v) nos dice que podemos alcanzar cualquier número natural partiendo del uno y recorriendo los siguientes uno a uno hasta llegar al número natural deseado. Este postulado, conocido a menudo como "principio de inducción", es el fundamento del método de demostración por Inducción Matemática que trataremos posteriormente.

Como el lector se habrá dado cuenta, los postulados de Peano establecen las propiedades "intrínsecas", por llamarles de alguna manera, de los números naturales; otras propiedades son las algebraicas, que seguramente el lector ya conoce, las cuales son consecuencia de la introducción de las operaciones con números naturales, de las que no nos hemos ocupado aún.

- La adición en N

I.2.2 DEFINICION

i) $n + 1 = n^*$, para todo $n \in N$

ii) $n + m^* = (n + m)^*$, siempre que $n + m$ esté definido

La definición anterior puede parecernos en principio extraña; sin embargo, recordemos que sólo podemos apoyarnos en los postulados de Peano para establecerla, ya que dichos postulados constituyen el fundamento que hemos elegido para desarrollar el sistema de los Números Naturales.

Para ilustrar el empleo de la definición I.2.2 en el cálculo de una suma, obtengamos el valor de 8 + 3 siguiendo paso a paso la definición.

Para poder aplicar ii), escribimos

$$8 + 3 = 8 + 2^*$$

puesto que 3 es el siguiente de 2. Ahora, de ii) se sigue que

$$8 + 3 = (8 + 2)^*$$

Puesto que la definición no nos dice cual es el valor de 8 + 2 aplicamos nuevamente ii), para lo cual hacemos

$$8 + 3 = (8 + 1^*)^*$$

puesto que 2 es el siguiente de 1. Entonces, de ii) tenemos que

$$8 + 3 = ((8 + 1)^*)^*$$

Ahora podemos ya aplicar el inciso i) de la definición, de donde

$$8 + 3 = ((8^*)^*)^*$$

Como $8^* = 9$, $9^* = 10$ y $10^* = 11$, queda

$$8 + 3 = (9^*)^*$$
$$8 + 3 = 10^*$$
$$8 + 3 = 11$$

con lo que obtenemos el resultado que el lector ya conocía.

□

Como puede verse en el ejemplo anterior la definición I.2.2 es recursiva, y además nos dice que para sumar n + m debemos recorrer m números naturales consecutivos a partir de n.

La adición, así definida, satisface las siguientes propiedades, que seguramente ya son del conocimiento del lector.

I.2.3 TEOREMA

Para todo $m, n, p \in N$:

i)	$m + n \in N$	cerradura
ii)	$m + (n + p) = (m + n) + p$	asociatividad
iii)	$m + n = n + m$	conmutatividad
iv)	si $m + p = n + p$, entonces $m = n$	cancelación

DEMOSTRACION

i) Sea m un número natural y formemos el conjunto

$$S = \{n \mid n \in N \text{ y } (m + n) \in N\}$$

esto es: un elemento del conjunto S es un número natural n que al sumarse con m da como resultado otro número natural.

Para demostrar la propiedad de cerradura bastará con probar que S es el conjunto de todos los números naturales, lo que haremos apoyándonos en el quinto postulado de Peano como sigue.

I) $m + 1 = m^*$, por i) de la definición I.2.2

$m + 1 \in N$, por ii) de la definición I.2.1.

Luego $1 \in S$.

II) Sea $k \in S$; es decir: $k \in N$ y $m + k \in N$ ---- (1)

Como $m + k \in N$, del inciso ii) de I.2.1

$$(m + k)^* \in N$$

y del inciso ii) de I.2.2

$$m + k^* \in N \qquad \text{---- (2)}$$

Además, como $k \in N$, del inciso ii) de I.2.1

$$k^* \in N \qquad \text{---- (3)}$$

Finalmente, de (1), (2) y (3) se tiene que

$k \in S$ implica que $k^* \in S$.

Con lo que hemos probado que S es el conjunto de todos los números naturales.

Las propiedades ii) y iii) pueden demostrarse en forma análoga; para una demostración de iv) puede consultarse la referencia 2 pág. 96.

□

Inducción Matemática

La idea fundamental bajo la cual se desarrolló la demostración anterior puede generalizarse para cualquier enunciado relativo a los números naturales. Las demostraciones así realizadas reciben el nombre de "demostraciones por inducción matemática" y su desarrollo general, con fundamento en el quinto postulado de Peano, es el siguiente:

Sea P(n) una proposición enunciada para todos los números naturales, y sea

$$S = \{n \mid n \in N \text{ y } P(n) \text{ es verdadera}\}$$

Para demostrar que P(n) es verdadera para todos los números naturales, bastará con probar que $S = N$; para lo cual hacemos lo siguiente:

I) Verificar que P(1) es verdadera (esto equivale a verificar que $1 \in S$).

II) Demostrar que si P(k) es verdadera entonces P(k + 1) es verdadera (esto equivale a demostrar que $k \in S \Rightarrow (k + 1) \in S$).

A partir de I) y II), y del quinto postulado de Peano, podemos concluir que P(n) es verdadera para todo $n \in N$.

I.2.4 EJEMPLOS

a) Consideremos el conjunto de los números impares

$\{x \mid x = 2n - 1, n \in N\} = \{1,3,5,7,9,\ldots\}$

Si sumamos sus dos primeros elementos obtenemos

$1 + 3 = 4$

Este resultado puede también expresarse como

$1 + 3 = 2^2$

De manera semejante

$1 + 3 + 5 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

Esto nos hace suponer que la suma de los n primeros números impares es igual a n^2. Es decir:

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ ---- $P(n)$

La generalización anterior, representada por $P(n)$, se obtuvo del análisis de tres casos particulares, los que fueron extrapolados con ayuda del supuesto "sentido común"; sin embargo, hasta ahora sólo podemos asegurar que la proposición $P(n)$ es verdadera para $n = 2$, $n = 3$ y $n = 4$. Para tener la certeza de que $P(n)$ se cumple sin importar cual sea el número natural n, haremos la demostración, por inducción matemática, del siguiente enunciado:

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, para todo $n \in N$.

Demostración

I) Para $n = 1$, el primer miembro de $P(n)$ tiene sólo un término y $P(1)$ es

$1 = (1)^2$

Por tanto $P(1)$ es verdadera.

II) A partir de que $P(k)$ es verdadera debemos concluir que $P(k + 1)$ es también verdadera.

Suponemos entonces que $P(k)$ es verdadera; es decir:

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ ---- (1)

(donde el primer miembro representa la suma de los k primeros números impares).

Como $P(k + 1)$ es

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) = (k + 1)^2$ ---- (2)

(donde el primer miembro representa la suma de los $k + 1$ primeros números impares), debemos demostrar que esta igualdad es verdadera partiendo de la expresión (1); lo cual puede hacerse de la siguiente manera:

Sumando en ambos miembros de (1) el número $2(k + 1) - 1$, que es el número impar siguiente de $2k - 1$, tenemos

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2(k + 1)-1) = k^2 + (2(k + 1)-1)$

(donde el primer miembro también representa la suma de los $k + 1$ primeros números impares). Esta expresión puede escribirse como

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1$

o también como

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) = (k + 1)^2$

que coincide con la expresión (2), por lo que $P(k + 1)$ es verdadera.

Con lo anterior hemos demostrado que si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k + 1)$ es verdadera y la prueba termina $\square$

b) Como otro ejemplo demostraremos ahora el siguiente enunciado:

$n^2 + n$ es un número par, $\forall\, n \in N$

Demostración

I) $P(1)$ dice que

$1^2 + 1$ es un número par

$P(1)$ es verdadera ya que $1^2 + 1 = 2$ y 2 es un número par.

II) Hipótesis: P(k) es verdadera; por lo que

$k^2 + k$ es un número par

Por otra parte

$$(k+1)^2 + (k+1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1$$
$$= k^2 + k + 2k + 2$$
$$(k+1)^2 + (k+1) = (k^2 + k) + 2(k+1)$$

Como $(k+1) \in N$, $2(k+1)$ es un número par y, de la expresión anterior, $(k+1)^2 + (k+1)$ será un número par si $k^2 + k$ es par.

En consecuencia, de la hipótesis se sigue que

$(k+1)^2 + (k+1)$ es un número par

Hemos demostrado que si P(k) es verdadera entonces P(k + 1) es verdadera y la prueba termina.

$\square$

- La multiplicación en N

En forma similar a como se hizo para la adición, la multiplicación puede definirse como sigue.

I.2.5 DEFINICION

i) $n \cdot 1 = n$

ii) $n \cdot m^* = (n \cdot m) + n$

La multiplicación, así definida, satisface las propiedades que se resumen en el siguiente Teorema.

I.2.6 TEOREMA

Para todo m, n, p $\in$ N:

i)	$m \cdot n \in N$	cerradura
ii)	$m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$	asociatividad
iii)	$m \cdot n = n \cdot m$	conmutatividad
iv)	si $m \cdot p = n \cdot p$, entonces $m = n$	cancelación

Las propiedades i) a iii) pueden demostrarse directamente por inducción matemática y su demostración se deja al lector como ejercicio. Para una demostración de la propiedad iv) puede consultarse la referencia 2 pág. 96.

Tomadas simultáneamente, las operaciones de adición y multiplicación satisfacen la siguiente ley distributiva.

I.2.7 TEOREMA

Para todo m, n, p $\in$ N:

$m \cdot (n + p) = (m \cdot n) + (m \cdot p)$

DEMOSTRACION

Sean n y p dos números naturales, y consideremos el enunciado

$m \cdot (n + p) = (m \cdot n) + (m \cdot p)$, $\forall\, m \in N$,

el cual, por el inciso iii), del teorema I.2.6, es equivalente a

$(n + p) \cdot m = (n \cdot m) + (p \cdot m)$, $\forall\, m \in N$,

que demostraremos por inducción matemática.

I) P(1) dice que $(n + p) \cdot 1 = (n \cdot 1) + (p \cdot 1)$, y es verdadera ya que

$(n + p) \cdot 1 = n + p$ por i) de I.2.5

$(n + p) \cdot 1 = (n \cdot 1) + (p \cdot 1)$ por i) de I.2.5

II) Hipótesis: $P(k)$ es verdadera, esto es

$$(n + p)\cdot k = (n \cdot k) + (p \cdot k)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(n + p) \cdot (k + 1) &= (n + p) \cdot k^* && \text{por i) de I.2.2}\\
&= (n + p) \cdot k + (n + p) && \text{por ii) de I.2.5}\\
&= (n \cdot k) + (p \cdot k) + (n + p) && \text{por hipótesis}\\
&= n \cdot k + (p \cdot k + n) + p && \text{por ii) de I.2.3}\\
&= n \cdot k + (n + p \cdot k) + p && \text{por iii) de I.2.3}\\
&= (n \cdot k + n) + (p \cdot k + p) && \text{por ii) de I.2.3}\\
&= (n \cdot k^*) + (p \cdot k^*) && \text{por ii) de I.2.5}\\
(n + p) \cdot (k + 1) &= n \cdot (k + 1) + p \cdot (k + 1) && \text{por i) de I.2.2}
\end{aligned}$$

Con lo que hemos probado que si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k + 1)$ es verdadera, lo cual completa la demostración. □

Orden en N

Cuando hablamos de cantidades es frecuente efectuar comparaciones y decimos, por ejemplo, que cierta cantidad es menor que otra. Puesto que los números naturales nos sirven para expresar cantidades, es necesario definir la relación "menor que" en N.

Decimos, por ejemplo, que 3 es menor que 5. Si observamos que existe un número natural, en este caso el 2, tal que

$3 + 2 = 5$

podemos establecer, a partir de la suma, una definición para la relación "menor que", que coincida con la idea intuitiva que de ella tenemos.

I.2.8 DEFINICION

Dados dos números naturales n y m, decimos que n es menor que m, lo que representamos mediante $n < m$, si

$$\exists\, x \in N \text{ tal que } n + x = m.$$

Los números naturales satisfacen la siguiente propiedad, llamada Ley de Tricotomía.

I.2.9 TEOREMA

Si m y n son números naturales cualesquiera, entonces se verifica una y sólo una de las siguientes proposiciones:

i) $n < m$

ii) $n = m$

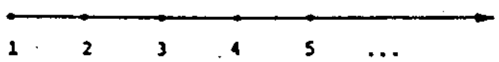
iii) $m < n$

Para una demostración, el lector puede consultar la referencia 3 pág. 36

La definición I.2.8 y el teorema I.2.9, establecen un orden en el conjunto N ya que:

$1 + 1 = 2$	por lo que	$1 < 2$
$2 + 1 = 3$	por lo que	$2 < 3$
$3 + 1 = 4$	por lo que	$3 < 4$
$4 + 1 = 5$	por lo que	$4 < 5$
⋮		⋮

y podemos representar gráficamente a los números naturales como puntos igualmente espaciados sobre una recta, a la que llamamos recta numérica:



En ella, cuando $m < n$ se tendrá que el punto que representa a m se encuentra a la izquierda del que representa a n.

Con base en I.2.8 puede demostrarse que la relación "menor que" en N tiene las siguientes propiedades.

I.2.10 TEOREMA

Para todo $m, n, p \in N$:

i) $m < n \Longrightarrow m + p < n + p$

ii) $m < n \Longrightarrow mp < np$

iii) $m < n$ y $n < p \Longrightarrow m < p$

En ocasiones resulta más cómodo emplear la relación "menor que" en el sentido inverso; esto es, decir que un número es mayor que otro, por lo que estableceremos la siguiente definición.

I.2.11 DEFINICION

Dados dos números naturales m y n, decimos que m es mayor que n, lo que representamos mediante $m > n$, si $n < m$.

Es claro que la relación "mayor que" tiene propiedades análogas a las establecidas en el teorema I.2.10.

I.2.12 EJERCICIOS

1) Demostrar que para todo $m, n, p \in N$:

a) $m + (n + p) = (m + n) + p$

b) $1 + n = n + 1$

c) $m + n = n + m$

2) Demostrar que para todo $m, n, p \in N$:

a) $m \cdot n \in N$

b) $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$

c) $m \cdot n = n \cdot m$

3) Demostrar que si $m, n \in N$ entonces $m + n \neq m$

4) Demostrar que para todo $m, n \in N$:

a) $m^* + n = m + n^*$

b) $m^* \cdot n \neq m \cdot n^*$; si $m \neq n$

c) $m^* + n^* = [(m + n)^*]^*$

5) Demostrar que si $n \in N$ entonces:

a) $m + m = 2m$

b) $\underbrace{m + m + \dots + m}_{n \text{ sumandos}} = n \cdot m$

6) Si $n, p \in N$ se define

$$p^n = \underbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{n \text{ factores}}$$

Demostrar que para todo $m, n, p, q \in N$:

a) $p^m \cdot p^n = p^{m+n}$

b) $(p^m)^n = p^{m \cdot n}$

c) $(p \cdot q)^n = p^n \cdot q^n$

7) Demostrar que para todo $m, n, p \in N$:

a) $m < n \Longrightarrow m + p < n + p$

b) $m > n \Longrightarrow m \cdot p > n \cdot p$

c) $m < n$ y $n < p \Longrightarrow m < p$

I.3 LOS NUMEROS ENTEROS

El sistema de los números naturales, con la operación de adición, manifiesta su primera deficiencia tan pronto como empezamos a plantear ecuaciones en dicho sistema, ya que una ecuación del tipo

$n + x = m$; con $m, n \in N$ - - - - (A)

puede tener solución en N o no tenerla.

Por ejemplo, la solución de la ecuación

$3 + x = 7$

es el número que sumado a 3 nos arroja como resultado 7. En este caso, el número natural cuatro satisface la condición pedida; sin embargo, si consideramos la ecuación

$3 + x = 1$

encontraremos que no existe número natural alguno que la satisfaga.

Esta deficiencia crea la necesidad de ampliar el conjunto de los números naturales. Surgen así los números negativos y el cero que, con los naturales, constituyen el conjunto de los números enteros.

- La diferencia de números naturales

I.3.1 DEFINICION

Sea la ecuación:

$n + x = m$; con $m, n \in N$

A su solución; es decir, al número x que sumado a n nos da como resultado m, lo llamaremos la diferencia $m - n$.

Según el teorema I.2.9 para $m - n$ se presentan tres casos:

i) $n < m$

Este es el único caso en que la ecuación (A) tiene solución en N, lo cual es consecuencia inmediata de la definición I.2.8, por lo que $m - n$ es un número natural.

ii) $n = m$

En este caso la ecuación (A) no tiene solución en N y toma la forma

$n + x = n$

En consecuencia $m - n$ no es un número natural, lo definimos como el cero y lo representamos con 0.

iii) $m < n$

En este caso, como en el anterior, la ecuación (A) no tiene solución en N, por lo que $m - n$ tampoco es un número natural; lo definimos como un número entero negativo y lo representamos con $-(n - m)$, donde $(n - m) \in N$.

Así, por ejemplo, la solución de la ecuación

$3 + x = 1$

es el número que sumado a 3 nos da como resultado 1. A dicho número, que es un entero negativo, lo representamos con -2.

Como vimos, el "número" m - n no es siempre un número natural, por lo que el concepto de número tal y como lo hemos manejado hasta ahora resulta ya demasiado restrictivo. A partir de aquí consideraremos como números a todos los entes matemáticos que resulten de la ampliación progresiva del conjunto N, por lo que la palabra número tendrá una acepción cada vez más amplia.

De acuerdo con lo anterior, a los números que se obtienen mediante la diferencia de dos números naturales les llamaremos números enteros y al conjunto que forman lo representaremos con Z. Esto es:

I.3.2 DEFINICION

$$Z = \{x \mid x = m - n;\ m, n \in N\}$$

Es claro que el subconjunto Z^+ de Z, definido por

$$Z^+ = \{x \mid x = m - n;\ m, n \in N;\ m > n\}$$

al cual se le conoce como "conjunto de los enteros positivos", es precisamente el conjunto de los números naturales, por lo que

$$N \subset Z$$

- La igualdad en Z.

Como consecuencia de la definición I.3.1, un número entero puede ser expresado en la forma m - n de una infinidad de maneras distintas.

Por ejemplo, el número x = - 2 puede expresarse como 1 - 3 ya que es solución de la ecuación

$$3 + x = 1$$

Es claro, sin embargo, que dicho número puede además expresarse como 2 - 4, ya que también es solución de

$$4 + x = 2$$

así como de muchas otras ecuaciones del tipo $m + x = n$, con $m, n \in N$.

Debido a esto es necesario establecer un criterio que nos permita decidir si dos números enteros expresados como la diferencia de dos naturales son iguales o no lo son. Dicho criterio es el siguiente.

I.3.3 DEFINICION

Sean $a = m - n$, $b = p - q$ dos números enteros, con $m, n, p, q \in N$. Entonces:

$$a = b \quad \text{si} \quad m + q = n + p$$

Así, con base en esta definición podemos concluir que $a = 1 - 3$ y $b = 2 - 4$ representan al mismo número entero, ya que

$$1 + 4 = 3 + 2$$

y se satisface la igualdad en N que requiere I.3.3 para establecer la igualdad en Z.

- La adición en Z.

Como $N \subset Z$, la adición en Z debe producir los mismos resultados que la adición en N cuando los enteros que se suman son positivos, lo que conduce a la siguiente definición:

I.3.4 DEFINICION

Sean $a = m - n$, $b = p - q$ dos números enteros, con $m, n, p, q \in N$. El número $a + b$ se define como:

$$a + b = (m + p) - (n + q).$$

Cabe hacer notar que, en la definición anterior, el símbolo + que está a la izquierda del signo igual representa la adición de números enteros (la cual se está definiendo), mientras que el símbolo + que está a la derecha representa la adición de números naturales.

Para ilustrar el empleo de la definición I.3.4 calcularemos a continuación la suma 8 + 3. Con objeto de hacer notar la diferencia entre las operaciones de adición en Z y en N, en la discusión que sigue representaremos estas operaciones con dos símbolos diferentes:

$\oplus$ para la adición en Z

$+$ para la adición en N

Los números enteros 8 y 3 pueden expresarse como

$$8 = 9 - 1$$

$$3 = 7 - 4$$

y aplicando I.3.4 tenemos

$$8 \oplus 3 = (9 + 7) - (1 + 4)$$

De la definición I.2.2 se sigue que

$$8 \oplus 3 = 16 - 5$$

es decir; es el número que sumado a 5 da como resultado 16, por lo que

$$8 \oplus 3 = 11.$$

Cabe hacer notar que, como 8 y 3 son también números naturales, el mismo resultado debería obtenerse empleando directamente la definición I.2.2. En efecto, en el ejemplo ilustrativo de I.2.2. se obtuvo que

$$8 + 3 = 11$$

□

Como el lector habrá notado, en I.3.4 hemos definido la adición en Z a partir de la adición en N y la definición de número entero.

La definición I.3.4 nos permite demostrar las propiedades que comúnmente empleamos cuando tratamos con la adición de números enteros, algunas de las cuales se resumen en el siguiente teorema. Cabe hacer notar que la adición en Z satisface todas las propiedades que establecimos para la adición en N, sin embargo, la adición en Z cuenta con otras propiedades adicionales, como la existencia de un elemento idéntico y la existencia de elementos inversos.

I.3.5 TEOREMA

Para todo $a, b, c \in Z$:

i)	$a + b \in Z$	cerradura
ii)	$a + (b + c) = (a + b) + c$	asociatividad
iii)	$a + b = b + a$	conmutatividad
iv)	si $a + c = b + c$, entonces $a = b$	cancelación
v)	$a + 0 = a$	elemento idéntico
vi)	$\exists -a \in Z$ tal que $a + (-a) = 0$	elementos inversos

DEMOSTRACION

Se demostrarán únicamente i), v) y vi)

i) Sean $a = m - n$ y $b = p - q$, dos números enteros cualesquiera.

De la definición I.3.4

$$a + b = (m + p) - (n + q)$$

como $m, n, p, q \in N$, del inciso i) de I.2.3

$$(m + p) \in N \text{ y } (n + q) \in N$$

por lo que, de I.3.2

$$(m + p) - (n + q) \in Z$$

En consecuencia

$a + b \in Z$, como se quería.

v) Se definió el cero como el número x tal que

$$n + x = n, \text{ con } n \in N$$

por lo que puede expresarse como

$$0 = n - n$$

Entonces, si $a = m - n$ es un número entero

$$a + 0 = (m - n) + (n - n)$$

De la definición I.3.4

$$a + 0 = (m + n) - (n + n)$$

Por lo que $a + 0$ es tal que

$$(n + n) + (a + 0) = m + n$$

Ahora, por las propiedades ii), iii) y iv) de I.3.5 se tiene que

$$n + [n + (a + 0)] = m + n$$

$$[n + (a + 0)] + n = m + n$$

$$n + (a + 0) = m$$

En consecuencia

$$a + 0 = m - n$$

Esto es

$a + 0 = a$, como se quería.

vi) Sea $a = m - n$ un número entero. Dicho número es tal que

$n + a = m$, con $m, n \in N$.

En consecuencia, la solución de la ecuación

$m + x = n$, con $m, n \in N$

será el número $x = n - m$ que, por I.3.2, es un número entero.

Consideremos ahora la suma

$a + x = (m - n) + (n - m)$

De la definición I.3.4

$a + x = (m + n) - (n + m)$

y por el inciso iii) de I.2.3

$a + x = (m + n) - (m + n)$

En consecuencia

$a + x = 0$

Luego, existe $x \in Z$ tal que $a + x = 0$

y la prueba termina.

□

A dicho número x (que como se ve en la prueba depende de a) se le denomina "el inverso de a para la suma" y se le representa con $-a$.

La sustracción en Z puede definirse ahora a partir de la adición y de vi) de I.3.5, de la siguiente manera.

I.3.6 DEFINICION

Sean $a, b \in Z$, el número $a - b$ se define como

$a - b = a + (-b)$

y puede demostrarse que esta operación tiene la propiedad de cerradura; esto es

$a - b \in Z;\ \forall\, a, b \in Z$.

- La multiplicación en Z

En forma similar a como se hizo para la adición, la multiplicación en Z puede definirse como sigue

I.3.7 DEFINICION

Sean $a = m - n$, $b = p - q$ dos números enteros, con $m, n, p, q \in N$. El número $a \cdot b$ se define como

$a \cdot b = (m \cdot p + n \cdot q) - (n \cdot p + m \cdot q)$

El símbolo · que está a la izquierda del signo igual representa la multiplicación en Z (la cual se está definiendo), mientras que los símbolos · y + que están a la derecha representan la multiplicación y la adición de números naturales. Como puede verse, la multiplicación en Z quedó definida a partir de la multiplicación y la adición en N y la definición de número entero.

La multiplicación, así definida, satisface las propiedades enunciadas a continuación.

I.3.8 TEOREMA

Para todo a, b c ε Z:

i) $a \cdot b \in Z$ — cerradura

ii) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ — asociatividad

iii) $a \cdot b = b \cdot a$ — conmutatividad

iv) si $a \cdot c = b \cdot c$ y $c \neq 0$, entonces $a = b$ — cancelación

v) $a \cdot 1 = a$ — elemento idéntico

DEMOSTRACION

Se demostrarán únicamente las propiedades iii) y v).

iii) Sean $a = m - n$ y $b = p - q$ dos números enteros cualesquiera

$a \cdot b = (m - n) \cdot (p - q)$	
$= (mp + nq) - (np + mq)$	por I.3.7
$= (mp + nq) - (mq + np)$	por iii) de I.2.3
$= (pm + qn) - (qm + pn)$	por iii) de I.2.6
$= (p - q) \cdot (m - n)$	por I.3.7
$a \cdot b = b \cdot a$	como se quería

v) En i) de I.2.2 se definió

$$n + 1 = n^*$$

por lo que el número 1 puede expresarse como

$$1 = n^* - n, \ \forall n \in N$$

Entonces, si $a = m - n$ es un número entero

$a \cdot 1 = (m - n) \cdot (n^* - n)$	
$= (mn^* + nn) - (nn^* + mn)$	por I.3.7
$= [(mn + m) + nn] - [(nn + n) + mn]$	por ii) de I.2.5
$a \cdot 1 = [(mn + nn) + m] - [(mn + nn) + n]$	por ii) y iii) de I.2.3

por lo que, $a \cdot 1$ es tal que

$$[(mn + nn) + n] + (a \cdot 1) = (mn + nn) + m$$

y, de ii) de I.3.5

$$(mn + nn) + [n + (a \cdot 1)] = (mn + nn) + m$$

En consecuencia, de iii) y iv) de I.3.5

$$n + (a \cdot 1) = m$$

Es decir

$$a \cdot 1 = m - n$$

$$a \cdot 1 = a$$

y la prueba termina □

Como el lector habrá notado, en la demostración anterior hemos omitido el símbolo · en una parte del proceso. Debido a que esta omisión es usual en los libros de matemáticas y facilita la escritura, en adelante nosotros también omitiremos el símbolo $\cdot$ en la multiplicación, así como algunos otros símbolos que no son indispensables pero que hemos empleado anteriormente para enfatizar los primeros conceptos.

Tomadas simultáneamente, la adición y la multiplicación satisfacen la siguiente propiedad distributiva.

I.3.9 TEOREMA

Para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

$$a(b + c) = ab + ac$$

DEMOSTRACION

Sean $a = m - n$, $b = p - q$, $c = r - s$, tres números enteros cualesquiera. Entonces

$$a(b + c) = (m - n)\left[(p - q) + (r - s)\right]$$

$$= (m - n)\left[(p + r) - (q + s)\right] \qquad \text{por I.3.4}$$

$$= \left[m(p + r) + n(q + s)\right] - \left[n(p + r) + m(q + s)\right] \qquad \text{por I.3.7}$$

$$= \left[(mp + mr) + (nq + ns)\right] - \left[(np + nr) + (mq + ms)\right] \qquad \text{por I.2.7}$$

$$= \left[(mp + nq) + (mr + ns)\right] - \left[(np + mq) + (nr + ms)\right] \qquad \text{por ii) y iii) de I.2.3}$$

$$= \left[(mp + nq) - (np + mq)\right] + \left[(mr + ns) - (nr + ms)\right] \qquad \text{por I.3.4}$$

$$= (m - n)(p - q) + (m - n)(r - s) \qquad \text{por I.3.7.}$$

$$a(b + c) = ab + ac$$

con lo que concluye la demostración. □

La introducción del cero y los negativos trae como consecuencia la aparición de algunas propiedades adicionales para la multiplicación en $\mathbb{Z}$, propiedades de las que no disponíamos para la multiplicación en $\mathbb{N}$, algunas de las cuales se enuncian en el siguiente teorema:

I.3.10 TEOREMA

Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$:

i) $a \cdot 0 = 0$

ii) $(-a)(b) = -(ab)$ primera regla de los signos

iii) $(-a)(-b) = ab$ segunda regla de los signos

DEMOSTRACION

Se demostrarán únicamente i) y ii)

i) $0 + 0 = 0$ por v) de I.3.5

$a(0 + 0) = a \cdot 0$ multiplicando por $a \in \mathbb{Z}$

$a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0$ por I.3.9

$a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$ por v) de I.3.5

$$a \cdot 0 + a \cdot 0 = 0 + a \cdot 0 \qquad \text{por iii) de I.3.5}$$

$$a \cdot 0 = 0 \qquad \text{por iv) de I.3.5}$$

ii) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
(-a)(b) + ab &= (b)(-a) + ba && \text{por iii) de I.3.8} \\
&= b(-a + a) && \text{por I.3.9} \\
&= b\,[a + (-a)] && \text{por iii) de I.3.5} \\
&= b \cdot 0 && \text{por vi) de I.3.5} \\
(-a)(b) + ab &= 0 && \text{por i) de I.3.10} \\
ab + (-a)(b) &= 0 && \text{por iii) de I.3.5}
\end{aligned}
$$

De esta última expresión se sigue que $(-a)(b)$ es el inverso de ab para la suma; esto es

$$(-a)(b) = -(ab)$$

como se quería.

□

- Orden en $\mathbb{Z}$

Para los números enteros podemos también definir la relación "menor que", como una generalización de la que hemos definido para los naturales.

I.3.11 DEFINICION

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$:

i) $a < b$ si $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $a + n = b$

ii) $a > b$ si $b < a$

Los números enteros también satisfacen la Ley de Tricotomía, enunciada para los números naturales en el teorema I.2.9; y la relación "menor que" tiene en $\mathbb{Z}$ las siguientes propiedades

I.3.12 TEOREMA

Para todo $a,b,c \in \mathbb{Z}$:

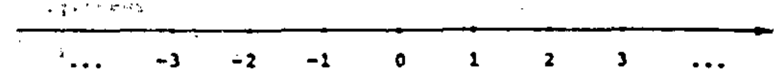
i) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

ii) $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
$a < b$ y $c < 0 \Rightarrow ac > bc$

iii) $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$

cuya demostración se deja al lector como ejercicio.

Los números enteros quedan representados también en la recta numérica como puntos igualmente espaciados, sólo que ahora la recta se extiende indefinidamente en ambos sentidos



Si $a < b$ se tendrá que el punto que representa a a estará a la izquierda del que representa a b.

Como ahora la recta se extiende en ambos sentidos no tiene un punto inicial, como sucede para los números naturales, por lo que se considera como punto de referencia el punto que representa al cero. Los números que se encuentran representados a la derecha de dicho punto se dice que son "positivos" y los que están a la izquierda "negativos".

I.3.13 DEFINICION

Sea $a \in Z$:

a es positivo si $a > 0$

a es negativo si $a < 0$

En particular, el cero no es positivo ni negativo.

Al conjunto Z^+ que se definió a continuación de I.3.2 como:

$Z^+ = \{x \mid x = m - n;\ m, n \in N;\ m > n\}$

se le conoce como el conjunto de los "enteros positivos". Puede demostrarse que todo elemento de dicho conjunto es positivo en el sentido que establece la definición I.3.13; esto es:

$x \in Z^+$ si y sólo si $x \in Z$ y $x > 0$.

I.3.12 EJERCICIOS

1) Demostrar a partir de I.3.3 que para todo $m, n \in N$:

a) $m - m^* = n - n^*$

b) $m^* - n \neq m - n^*$

2) Demostrar que para todo $a, b, c \in Z$:

a) $a + b = b + a$

b) $a + c = b + c \Rightarrow a = b$

3) Demostrar que si $a, b, c \in Z$ entonces:

a) $a - b \in Z$

b) $a + (b - c) = (a + b) - c$

c) $-(a + b) = -a - b$

4) Demostrar que para todo $a, b \in Z$:

a) $-1 \cdot a = -a$

b) $(-a)(-b) = ab$

5) Demostrar que si $a, b, c \in Z$ entonces:

a) $a(b - c) = ab - ac$

6) Demostrar que si $a, b, c \in Z$:

a) $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$

b) $a - b < a + b$, si $b > 0$

c) $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$

$a < b$ y $c < 0 \Rightarrow ac > bc$

I.4 LOS NUMEROS RACIONALES

Al inicio de la sección I.3 planteamos una ecuación del tipo

$n + x = m$; con $m, n \in N$ - - - - (A)

y vimos que los números naturales son insuficientes para proporcionar soluciones en todos los casos. Esta deficiencia se superó construyendo el conjunto Z, en el cual siempre hallamos solución a una ecuación de tal tipo.

El conjunto de los números enteros, sin embargo, también presenta deficiencias. En efecto, si planteamos ahora una ecuación en términos de la multiplicación como

$bx = a$; con $a, b \in Z$ - - - - (B)

encontramos que no siempre tiene solución en Z.

Por ejemplo, la solución de la ecuación

$3x = 12$

es el número entero 4, que multiplicado por 3 nos da como resultado 12. Sin embargo, si consideramos la ecuación

$3x = 7$

encontramos que no existe un número entero que multiplicado por 3 dé como resultado 7.

Esta deficiencia crea la necesidad de ampliar ahora el conjunto de los números enteros con lo que surgen los números fraccionarios. Estos números junto con los enteros forman el conjunto de los números racionales.

- **El cociente de números enteros.**

I.4.1 DEFINICION

Sea la ecuación:

$bx = a$; con $a, b \in Z$

A su solución; es decir, al número x que multiplicado por b nos da como resultado a, le llamaremos el cociente de a entre b y lo representaremos con $\frac{a}{b}$.

Como el lector recordará de sus cursos elementales de aritmética, un entero $b \neq 0$ se dice factor de un entero a si existe un $c \in Z$ tal que

$bc = a$

Así, para el cociente $\frac{a}{b}$ podemos distinguir tres casos:

i) b es factor de a.

Este es el único caso en que la ecuación (B) tiene solución en Z, por lo que $\frac{a}{b}$ es un número entero.

ii) b no es factor de a y $b \neq 0$.

En este caso la ecuación (B) no tiene solución en Z, por lo que $\frac{a}{b}$ no es un número entero y decimos que es un número fraccionario.

Así, por ejemplo, la solución de la ecuación

$3x = 7$

es el número que multiplicado por 3 nos da como resultado 7. A dicho número lo representamos con $\frac{7}{3}$ y es un número fraccionario.

iii) $b = 0$.

Este es un caso que merece especial atención, en virtud de que $\frac{a}{b}$ no está definido.

En efecto; si $a \neq 0$, $\frac{a}{b}$ no existe; ya que no hay un número que multiplicado por cero dé como resultado un número diferente de cero.

Por otra parte, si $a = 0$, $\frac{a}{b}$ no está determinado; ya que cualquier número multiplicado por cero da como resultado el cero.

En cualquier caso, el número $\frac{a}{b}$ con $b = 0$ no está definido.

De acuerdo con lo anterior, a los números que se obtienen como el cociente de dos números enteros a, b con $b \neq 0$ les llamaremos números racionales y al conjunto que forman lo representaremos con Q. Esto es:

I.4.2	DEFINICION
	$Q = \{x \mid x = \frac{a}{b},\ a, b \in Z,\ b \neq 0\}$

Es claro que el subconjunto de Q definido por

$\{x \mid x = \frac{a}{b},\ a, b \in Z,\ b = 1\}$

es precisamente el conjunto de los números enteros, por lo que

$Z \subset Q$

- La igualdad en Q

Seguramente el lector ha manejado ya ampliamente los números racionales en forma de "quebrados", y se habrá dado cuenta que la expresión de un número racional en la forma $\frac{a}{b}$ no es única.

Por ejemplo, el número por el que debemos multiplicar 12 para obtener 28 puede representarse como

$\frac{28}{12}$, $\frac{-14}{-6}$, $\frac{7}{3}$, etc.

donde la última se conoce como su "mínima expresión".

En general, si $x = \frac{a}{b}$ es un número racional con $a, b \in Z$ y $b > 0$, si el único factor común de a y b es el número uno decimos que $\frac{a}{b}$ es la mínima expresión del número racional x.

De manera recíproca, si $x = \frac{a}{b}$ es un número racional y $k \neq 0$ es un número entero, $\frac{ka}{kb}$ representa también al número x.

De acuerdo con lo anterior, resulta natural considerar que dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales cuando

$a = kc$ y $b = kd$

o cuando

$c = ka$ y $d = kb$

para algún $k \in Z$, $k \neq 0$.

Si se cumple alguna de estas dos condiciones se tendrá que

$ad = bc$

y viceversa, lo que conduce a la siguiente definición

I.4.3 DEFINICION

Sean $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ dos números racionales, con $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ y $b,\ d \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \text{si} \qquad ad = bc$$

la cual establece la igualdad de números racionales en términos de la igualdad de números enteros.

- La adición en Q

I.4.4 DEFINICION

Sean $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ dos números racionales, donde $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ y $b,d \neq 0$.

El número $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ se define como

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

La adición en Q, así definida, tiene las propiedades que se enuncian a continuación

I.4.5 TEOREMA

Para todo $x,\ y,\ z \in Q$:

i) $x + y \in Q$	cerradura
ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$	asociatividad
iii) $x + y = y + x$	conmutatividad
iv) si $x + z = y + z$, entonces $x = y$	cancelación
v) $x + 0 = x$	elemento idéntico
vi) $\exists\ -x \in Q$ tal que $x + (-x) = 0$	elementos inversos

DEMOSTRACION

Se demostrará únicamente vi)

Sea $x = \frac{a}{b}$, con $a,\ b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$

Por vi) de I.3.3, $\exists\ -a \in \mathbb{Z}$ y de I.4.2, $\frac{-a}{b} \in Q$.

Ahora

$$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{ab + (-a)b}{b \cdot b} \qquad \text{por I.4.4}$$

$$= \frac{ba + b(-a)}{b \cdot b} \qquad \text{por iii) de I.3.8}$$

$$= \frac{b[a + (-a)]}{b \cdot b} \qquad \text{por I.3.9}$$

$$= \frac{[a + (-a)]}{b} \qquad \text{por I.4.3}$$

$$= \frac{0}{b} \qquad \text{por vi) de I.3.5}$$

$$= \frac{0}{1} \qquad \text{por I.4.3}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = 0$$

Con lo que $-x = \frac{-a}{b}$ y la prueba termina. □

La sustracción en Q puede definirse ahora a partir de la adición y de vi) de I.4.5, de la siguiente manera:

I.4.6 DEFINICION

Sean $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d} \in Q$, el número $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ se define como

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{-c}{d}$$

Como consecuencia de i) de I.4.5, la sustracción es cerrada en Q; esto es

$\forall\, x, y \in Q$: $x - y \in Q$.

- La Multiplicación en Q

I.4.7 DEFINICION

Sean $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ dos números racionales, donde $a, b, c, d, \in Z$ y $b, d \neq 0$.

El número $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ se define como

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

La multiplicación en Q, así definida, satisface las propiedades que establece el siguiente teorema.

I.4.8. TEOREMA

Para todo $x, y, z \in Q$:

i) $xy \in Q$	cerradura
ii) $x(yz) = (xy)z$	asociatividad
iii) $xy = yx$	conmutatividad
iv) si $xz = yz$ y $z \neq 0$, entonces $x = y$	cancelación
v) $x \cdot 1 = x$	elemento idéntico
vi) si $x \neq 0$ $\exists$ $x^{-1} \in Q$ tal que $xx^{-1} = 1$	elementos inversos

DEMOSTRACION

Demostraremos a continuación i), ii) y vi)

i) Sean $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ dos números racionales, con lo que $a, b, c, d, \in Z$ y $b, d \neq 0$

De I.4.7 se sigue que

$$xy = \frac{ac}{bd}$$

donde $ac \in Z$ y $bd \in Z$ por i) de I.3.8.

Para demostar que $xy \in Q$ se requiere además probar que $bd \neq 0$. Esto lo haremos a continuación empleando un método de demostración indirecta conocido como prueba por contradicción o por reducción al absurdo.

Supongamos que $bd = 0$. Entonces

$bd = b \cdot 0$ por i) de I.3.10

$db = 0 \cdot b$ por iii) de I.3.8

Como $b \neq 0$, de iv) de I.3.8 se sigue que

$d = 0$

lo cual contradice la condición $d \neq 0$ establecida por $y \in Q$. En consecuencia la hipótesis $bd = 0$ es falsa por lo que

$bd \neq 0$

como se quería.

ii) Sean $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$, $z = \frac{e}{f}$, tres números racionales

$x(yz) = \frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$

$= \frac{a}{b}\left(\frac{ce}{df}\right)$ por I.4.7

$= \frac{a(ce)}{b(df)}$ por I.4.7

$= \frac{(ac)e}{(bd)f}$ por ii) de I.3.8

$= \left(\frac{ac}{bd}\right)\frac{e}{f}$ por I.4.7

$= \left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\frac{e}{f}$ por I.4.7

$x(yz) = (xy)x$ como se quería.

vi) Sea x un número racional diferente de cero; esto es

$x = \frac{a}{b}$ con $a, b \in Z$, $a, b \neq 0$

Como $a, b \in Z$ y $a \neq 0$, por I.4.2 $\exists\ \frac{b}{a} \in Q$.

Ahora

$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = \frac{ab}{ba}$ por I.4.7

$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = \frac{ab}{ab}$ por iii) de I.3.8

De v) de I.3.8: $\frac{a}{a} = 1$; por lo que

$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = 1$

Entonces $x^{-1} = \frac{b}{a}$ y la prueba termina. □

Al número x^{-1} (que como se ve en la prueba depende de x) se le denomina el "inverso de x para la multiplicación". Cabe enfatizar aquí que todo número racional, con excepción del cero, tiene un inverso multiplicativo en Q.

La división en Q puede definirse ahora a partir de la multiplicación y de vi) de I.4.8, de la siguiente manera.

I.4.9 DEFINICIÓN

Sean $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ dos números racionales y $\frac{c}{d} \neq 0$

El número $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ se define como

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Como consecuencia de i) de I.4.8, la división en Q satisface la si -

guiente propiedad

$\forall x, y \in Q, y \neq 0: x \div y \in Q.$

Por otra parte, puede demostrarse que los teoremas I.3.9 y I.3.10 también son válidos para los números racionales; esto es

I.4.10 TEOREMA

Para todo $x, y, z \in Q$:

$x(y + z) = xy + xz$

I.4.11 TEOREMA

Para todo $x, y \in Q$:

i) $x \cdot 0 = 0$

ii) $(-x)(y) = -(xy)$

iii) $(-x)(-y) = xy$

- Orden en Q

Todo número racional puede expresarse como una fracción con denominador positivo, ya que

$$\frac{a}{b} = \frac{(-1)a}{(-1)b} = \frac{-a}{-b}$$

Así, si $b > 0$ el denominador de $\frac{a}{b}$ es positivo; mientras que si $b < 0$, $\frac{a}{b}$ puede expresarse como $\frac{-a}{-b}$ donde $-b$ es positivo.

Con ayuda de este resultado podemos establecer la relación "menor que" en Q a partir de la relación "menor que" en Z, de la siguiente manera.

I.4.12 DEFINICION

Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q$, donde $b, d \in Z^+$:

i) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si $ad < bc$

ii) $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ si $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$

Como consecuencia de esta definición y de la Ley de Tricotomía en Z, la relación "menor que" en Q satisface también dicha ley, así como las siguientes propiedades

I.4.13 TEOREMA

Para todo $x, y, z \in Q$:

i) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$

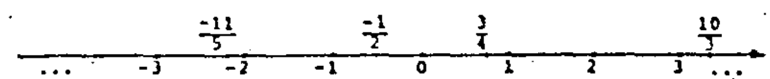
ii) $x < y$ y $z > 0 \Rightarrow xz < yz$

$x < y$ y $z < 0 \Rightarrow xz > yz$

iii) $x < y$ y $y < z \Rightarrow x < z$

En forma similar a como se definió en Z, diremos que un número $x \in Q$ es positivo si $x > 0$ y es negativo si $x < 0$.

Los elementos de Q pueden también ser representados en la recta numérica, donde si $x < y$, el punto que representa a x se encuentra a la izquierda del que representa a y



Los números racionales poseen una propiedad conocida como "densidad", según la cual entre dos números racionales diferentes siempre hay otro número racional; como lo establece el siguiente teorema.

I.4.14 TEOREMA

Para todo $x, y \in Q$, con $x < y$, $\exists\, z \in Q$ tal que:

$$x < z < y$$

DEMOSTRACION

Como $x < y$

$x + y < y + y$ — por i) de I.4.13

$\frac{1}{2}(x + y) < \frac{1}{2}(y + y)$ — por ii) de I.4.13

$\frac{1}{2}(x + y) < y$ — - - - (1)

Además, de $x < y$

$x + x < y + x$ — por i) de I.4.13

$\frac{1}{2}(x + x) < \frac{1}{2}(y + x)$ — por ii) de I.4.13

$\frac{1}{2}(x + x) < \frac{1}{2}(x + y)$ — por iii) de I.4.5

$x < \frac{1}{2}(x + y)$ — - - - (2)

Por lo tanto, de (1) y (2) se sigue que $z = \frac{1}{2}(x + y)$ es tal que

$x < z < y$

Además, por la cerradura de Q para la adición y la multiplicación, se tiene que $\frac{1}{2}(x + y) \in Q$, con lo que concluye la demostración. □

Cabe hacer notar que los números naturales y los enteros no poseen la propiedad de densidad.

- Expresión decimal de un número racional

Hemos definido al número racional $\frac{a}{b}$ como el cociente de los números enteros a y b, siempre que $b \neq 0$. Si consideramos el número racional $\frac{7}{4}$, por ejemplo, y efectuamos la división de 7 entre 4 como se acostumbra en la aritmética, obtendremos

$$\frac{7}{4} = 1.75$$

A 1.75 se le conoce como la expresión decimal del número racional $\frac{7}{4}$.

Todo número racional tiene una expresión decimal, por ejemplo

$$\frac{3}{8} = 0.375$$

$$\frac{7}{33} = 0.212121\ldots$$

$$\frac{149}{132} = 1.12878787\ldots$$

Se dice que una expresión decimal es periódica cuando un dígito o grupo de dígitos se repite indefinidamente a partir de un cierto lugar a la derecha del punto decimal; ya sea desde el principio, como en 0.212121..., o empezando más adelante, como en 1.12878787...

De acuerdo con esto, una expresión decimal que aparentemente termina como 0.375, también es periódica ya que puede escribirse como 0.375000...

En general, con respecto a la expresión decimal de un número racional podemos establecer el siguiente enunciado.

I.4.15 TEOREMA

Todo número racional tiene una expresión decimal periódica.

Para demostrar I.4.15 requeriremos de otro teorema conocido como el "Algoritmo de la división para números enteros", que trataremos a continuación.

Como hemos visto, la ecuación $3x = 7$ no tiene solución en Z, ya que no existe un número entero x que multiplicado por 3 dé como resultado 7.

A cambio, podemos encontrar los números enteros 2 y 1 tales que

$$3(2) + 1 = 7$$

En general, siempre es posible hallar esos dos números de acuerdo con lo que establece el siguiente teorema.

ALGORITMO DE LA DIVISION PARA NUMEROS ENTEROS[†]

Dados dos números enteros a y b, con $b > 0$, existen dos enteros únicos q y r, con $0 \leq r < b$, tales que

$$a = bq + r$$

Los números a, b, q y $r \in Z$ reciben el nombre de dividendo, divisor, cociente y residuo respectivamente. Cabe hacer notar que aquí el término "cociente" tiene una interpretación más restringida que la que empleamos al inicio de la sección I.4; ya que aquí el cociente es siempre un número entero.

† El estudiante puede consultar la demostración en la referencia 4, pág. 25.

La relación $a = bq + r$; que está planteada en términos de números enteros exclusivamente, puede ser enunciada en Q como

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$$

expresión que nos recuerda la forma como llevamos a cabo el proceso de dividir en la aritmética; esto es, obteniendo un cociente y un residuo.

Antes de pasar a la demostración de I.4.15 recordaremos el significado de la notación decimal y su relación con el algoritmo de la división para anteros a través de un ejemplo:

La expresión

$$1.1287878787...$$

representa la suma

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{8}{10^5} + \frac{7}{10^6} + \frac{8}{10^7} + \frac{7}{10^8} + \dots$$

Así, si buscamos la expresión decimal del número $\frac{149}{132}$ podemos proceder de la siguiente manera

o) Para obtener la parte entera vemos que

$149 = 132(1) + 17$, donde $0 \leq 17 < 132$

entonces

$$\frac{149}{132} = 1 + \frac{17}{132}$$

1) Para la primera cifra decimal vemos que

$10 \times 17 = 170 = 132(1) + 38$, donde $0 \leq 38 < 132$

por lo que $\frac{17}{132} = \frac{1}{10} + \frac{38}{10 \times 132}$

entonces

$$\frac{149}{132} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{38}{10 \times 132}$$

ii) Para la segunda cifra decimal

$10 \times 38 = 380 = 132(2) + 116$, donde $0 \leq 116 < 132$

por lo que $\frac{38}{10 \times 132} = \frac{2}{10^2} + \frac{116}{10^2 \times 132}$

entonces

$$\frac{149}{132} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{116}{10^2 \times 132}$$

iii) Para la tercera

$10 \times 116 = 1160 = 132(8) + 104$, donde $0 \leq 104 < 132$

por lo que $\frac{116}{10^2 \times 132} = \frac{8}{10^3} + \frac{104}{10^3 \times 132}$

entonces

$$\frac{149}{132} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{104}{10^3 \times 132}$$

iv) Para la cuarta

$10 \times 104 = 1040 = 132(7) + 116$, donde $0 \leq 116 < 132$

por lo que $\frac{104}{10^3 \times 132} = \frac{7}{10^4} + \frac{116}{10^4 \times 132}$

entonces

$$\frac{149}{132} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{116}{10^4 \times 132}$$

v) Para la quinta

$10 \times 116 = 1160 = 132(8) + 104$, donde $0 \leq 104 < 132$

por lo que $\frac{116}{10^4 \times 132} = \frac{8}{10^5} + \frac{104}{10^5 \times 132}$

entonces

$$\frac{149}{132} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{8}{10^5} + \frac{104}{10^5 \times 132}$$

Podemos ver que la relación $a = bq + r$ establecida en el paso iii) se ha presentado nuevamente en el paso v); ésto se debe a que el residuo obtenido en ii) se ha repetido en el paso iv). Como consecuencia de ello, los cocientes obtenidos en los pasos iii) y v) se repetirán indefinidamente. Esto es

$$\frac{149}{132} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{8}{10^5} + \frac{7}{10^6} + \frac{8}{10^7} + \frac{7}{10^8} + \ldots$$

o bien

$$\frac{149}{132} = 1.12878787\ldots$$

por lo que la expresión decimal de $\frac{149}{132}$ es periódica.

Consideremos ahora un número racional positivo $\frac{a}{b}$, con $a, b > 0$:

o) Por el algoritmo de la división para enteros, existen $q_0, r_0 \in Z$ tales que

$a = b\,q_0 + r_0$, donde $0 \leq r_0 < b$

entonces $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_0}{b}$

i) Ahora, como $r_0 \in Z$ tenemos que $10r_0 \in Z$ y existen $q_1, r_1 \in Z$ tales que

$10r_0 = b\,q_1 + r_1$, donde $0 \leq r_1 < b$

por lo que $\frac{r_0}{b} = \frac{q_1}{10} + \frac{r_1}{10 \times b}$

entonces $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{r_1}{10 \times b}$

ii) Ahora, como $r_1 \in Z$ tenemos que $10r_1 \in Z$ y existen $q_2, r_2 \in Z$ tales que

$10r_1 = b\,q_2 + r_2$, donde $0 \leq r_2 < b$

por lo que $\frac{r_1}{10 \times b} = \frac{q_2}{10^2} + \frac{r_2}{10^2 \times b}$

entonces $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \frac{r_2}{10^2 \times b}$

iii) Ahora, como $r_2 \in Z$ tenemos que $10r_2 \in Z$ y existen $q_3, r_3 \in Z$ tales que

$10r_2 = b\, q_3 + r_3$, donde $0 \leq r_3 < b$

por lo que $\frac{r_2}{10^2 \times b} = \frac{q_3}{10^3} + \frac{r_3}{10^3 \times b}$

entonces $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \frac{q_3}{10^3} + \frac{r_3}{10^3 \times b}$

En consecuencia, la expresión decimal de $\frac{a}{b}$ será

$\frac{a}{b} = q_0 . q_1\, q_2\, q_3 \ldots$

El proceso puede continuarse indefinidamente; sin embargo, como los residuos $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$ son números enteros tales que $0 \leq r_i < b$, a lo más podrán existir b residuos diferentes. Cuando alguno de los residuos obtenidos se presenta por segunda vez se inicia el segundo ciclo del período, el cual se repite indefinidamente.

Si $\frac{a}{b}$ es negativo, entonces escribimos $\frac{a}{b} = - \frac{-a}{b}$ donde $\frac{-a}{b}$ es positivo y por tanto tiene una expresión decimal periódica.

Esto completa la demostración de I.4.15.

□

El recíproco del teorema I.4.15 también es válido; es decir:

I.4.16 TEOREMA

Toda expresión decimal periódica representa a un número racional.

La demostración de este teorema esta fundamentada en el concepto de límite, por lo que no la haremos aquí.† Sin embargo, presentamos a continuación un ejemplo que muestra la idea bajo la cual puede obtenerse un número racional como cociente de enteros a partir de su expresión decimal.

Consideremos la expresión decimal

1.40666...

Buscamos dos números enteros a,b tales que

$\frac{a}{b} = 1.40666\ldots$

Como tenemos dos dígitos antes de presentarse el período por primera vez, multiplicamos por 10^2 para obtener

$$10^2 \frac{a}{b} = 140.666\ldots \qquad (i)$$

En vista de que el período consta de un dígito, multiplicamos la expresión (i) por 10^1 para obtener

$$10^3 \frac{a}{b} = 1406.666\ldots \qquad (ii)$$

Puesto que la parte decimal de estas dos últimas expresiones es la misma, restando (i) de (ii) obtenemos un número entero; esto es

$$10^3 \frac{a}{b} - 10^2 \frac{a}{b} = 1406 - 140$$

$$(10^3 - 10^2) \frac{a}{b} = 1266$$

$$900 \frac{a}{b} = 1266$$

por lo que

$$\frac{a}{b} = \frac{1266}{900} = \frac{211}{150}$$

† El lector interesado puede consultarla en la referencia 3 pág. 64.

I.4.16 EJERCICIOS

1) Demostrar a partir de I.4.3 que si a, b, k son números enteros diferentes de cero, entonces:

   a) $\frac{a}{ka} = \frac{b}{kb}$

   b) $\frac{ka}{b} \neq \frac{a}{kb}$

2) Demostrar que para todo $x, y \in Q$:

   a) $x + y \in Q$
   b) $x + 0 = x$
   c) $x - y \in Q$

3) Demostrar que para todo $x, y \in Q$:

   a) $xy = yx$
   b) $x \cdot 1 = x$
   c) $x \cdot 0 = 0$

4) Demostrar que si $x, y \in Q$:

   $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $y = 0$

5) Sean $x, y \in Q$, demostrar que

   a) Si $y \neq 0$: $x \div y \in Q$.
   b) En general: $x \div (y \div z) \neq (x \div y) \div z$.
   c) Si $z \neq 0$: $(y \div z)x = (xy) \div z$

6) Sean $x, y, z \in Q$. Demostrar que:

   a) $x + z < y + z \iff x < y$

   b) si $z > 0$: $xz < yz \iff x < y$
      si $z < 0$: $xz < yz \iff x > y$

7) a) Empleando el algoritmo de la división para números enteros, hallar la expresión decimal de: $\frac{12}{11}, \frac{5}{6}, \frac{3}{13}$

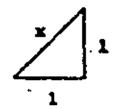
   b) Expresar cada uno de los siguientes decimales periódicos como el cociente de dos números enteros: 0.73333333..., 1.77272727..., 1.25925925...

I.5 LOS NUMEROS REALES

Consideremos ahora la ecuación

$$x^2 = 2 \qquad \text{- - - - (C)}$$

que se presenta al tratar de obtener la magnitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son de longitud unitaria:



$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

Esta ecuación no tiene solución en Q, ya que no existe un número racional x tal que su cuadrado sea igual a 2, como demostraremos a continuación. A dicho número; esto es, al número cuyo cuadrado es igual a 2, se le representa mediante el símbolo $\sqrt{2}$.

Antes de demostrar que este número no es racional probaremos el siguiente resultado importante

I.5.1 LEMA

Si a^2 es un número par y $a \in Z$, entonces a es un número par

En efecto:

Si a es un número impar es de la forma

$a = 2n + 1$, donde $n \in Z$

entonces, su cuadrado

$$a^2 = (2n+1)(2n+1) = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$$

es de la forma

$$a^2 = 2m + 1, \text{ donde } m \in Z$$

y es por tanto un número impar.

En consecuencia, si a^2 es par a no puede ser impar; por lo que, si $a \in Z$ entonces a es un número par, lo que demuestra el lema.

Demostraremos ahora el siguiente teorema

I.5.2 TEOREMA

El número x tal que $x^2 = 2$ no es un número racional

DEMOSTRACION. (por reducción al absurdo)

Supongamos que x es un número racional; esto es, existen dos números enteros p y q tales que la mínima expresión de x es

$$x = \frac{p}{q}.$$

Como x es tal que $x^2 = 2$, entonces $(\frac{p}{q})^2 = 2$ por lo que

$$p^2 = 2q^2 \qquad ---- (1)$$

Como $q \in Z$, $q^2 \in N$ y p^2 es un número par. En consecuencia, de I.5.1, p es un número par y es de la forma

$$p = 2n, \text{ donde } n \in Z \qquad ---- (2)$$

de (1) y (2) se sigue que

$$(2n)^2 = 2q^2$$

o sea

$$2n^2 = q^2$$

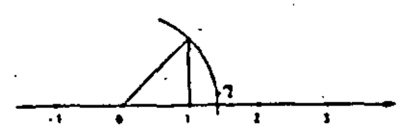
Por lo que q^2 es un número par. En consecuencia, de I.5.1, q es un número par y es de la forma

$$q = 2m, \text{ donde } m \in Z \qquad ---- (3)$$

De (2) y (3), p y q tienen como factor común al número 2, por lo que $\frac{p}{q}$ no es la mínima expresión de x, lo cual contradice la hipótesis. Concluimos entonces que x no es un número racional, lo que demuestra el teorema. $\square$

Como vimos en la sección anterior los números racionales tienen representación en la recta numérica, y en virtud de la densidad de Q (Teorema I.4.14) podría pensarse que estos son suficientes para "llenar" la recta; es decir, que todos los puntos de la recta corresponden a algún número racional, lo cual es falso.

Desde la antigüedad los geómetras griegos se dieron cuenta que no todos los puntos de la recta corresponden a números racionales. Por ejemplo, la siguiente construcción geométrica permite localizar a $\sqrt{2}$ en la recta numérica.



Existen muchos otros números que, como $\sqrt{2}$, tienen representación en la recta numérica y no son racionales. A este tipo de números se les conoce como números irracionales.

Como consecuencia de los teoremas I.4.15 y I.4.16, los números irracionales tienen expresión decimal no periódica, característica que los distingue de los números racionales.

Los números irracionales pueden ser de dos tipos: los que son solución de alguna ecuación algebraica con coeficientes enteros (como $\sqrt{2}$) a los que se llama irracionales algebraicos, y los que no son solución de una ecuación de tal tipo, a los que se llama irracionales trascendentes. Como ejemplo de estos últimos tenemos los números π y e de relevante importancia en las matemáticas.

En la sección I.3 se construyeron los números enteros a partir de los naturales, y en la I.4 los racionales a partir de los enteros, de tal forma que

$$N \subset Z \subset Q$$

La construcción de los números irracionales a partir de los racionales cae fuera del alcance de este libro, por lo que no se hará aquí.†

Al conjunto que contiene tanto a los números racionales como a los irracionales se le conoce como el conjunto de los números reales y se le representa con R.

Este conjunto viene a satisfacer la necesidad de un conjunto de números que represente a todos los puntos de la recta; es decir, a cada número real corresponde un punto de la recta y viceversa.

† El estudiante puede consultarla en cualquiera de las referencias 1 a 3.

Al conjunto de los números irracionales se le representa comúnmente con Q', por lo que podemos escribir

$$R = Q \cup Q'$$

y

$$\emptyset = Q \cap Q'$$

y se cumple además que

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

- Propiedades de las operaciones en R

A partir de la construcción formal de los números irracionales es posible definir las operaciones de adición y multiplicación para los números reales, de tal forma que se conserven las propiedades que estas operaciones tienen en Q. En virtud de que no hemos desarrollado aquí dicha construcción omitiremos también las correspondientes definiciones de las operaciones, aceptando que tienen las propiedades que se enuncian a continuación.

I.5.3 TEOREMA

Para todo x, y, $z \in R$:

i) $x + y \in R$
$xy \in R$ — cerradura

ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$
$x(yz) = (xy)z$ — asociatividad

iii) $x + y = y + x$
$xy = yx$ — conmutatividad

iv) $x + 0 = x$
$x \cdot 1 = x$ — elemento idéntico

v) $\exists -x \in R$ tal que $x + (-x) = 0$
$\exists x^{-1} \in R$ tal que $xx^{-1} = 1$, si $x \neq 0$ — elementos inversos

vi) $x(y + z) = xy + xz$ — distributividad

Como consecuencia de las propiedades establecidas en el teorema I.5.3 se pueden deducir todas las propiedades algebraicas del sistema de los números reales; en particular las que enunciaremos a continuación, cuya demostración se deja al lector como ejercicio.

I.5.4 TEOREMA

Para todo x, $y \in R$:

i) $x \cdot 0 = 0$

ii) $(-x)(y) = -(xy)$

iii) $(-x)(-y) = xy$

A partir de I.5.3 pueden también definirse las operaciones de sustracción y división en R como sigue.

I.5.5 DEFINICION

Sean x, y dos números reales

i) El número $x - y$ se define como: $x - y = x + (-y)$

ii) Si $y \neq 0$ el número $x \div y$ se define como: $x \div y = xy^{-1}$

Cabe hacer notar que el resultado de efectuar la división de x entre y, que denotamos mediante $x \div y$, coincide con el concepto de "cociente" establecido en la definición I.4.1; ya que, de I.5.5

$$x \div y = xy^{-1}$$

Entonces

$$(x \div y)(y) = (xy^{-1})y = x(y^{-1}y) = x \cdot 1 = x.$$

por lo que $x \div y$ es el número que multiplicado por y nos da como resultado x; es decir $\frac{x}{y}$.

Debido a que esta última forma presenta mayores ventajas en el manejo de las expresiones algebraicas, en adelante usaremos el símbolo $\frac{x}{y}$ para representar también al número $x \div y$.

- Orden en R

A partir de la construcción formal de los irracionales se puede definir también la relación "menor que" en R, de tal forma que si x, y son números reales tales que $x < y$ entonces el punto que representa a x en la recta numérica se encuentra a la izquierda del que representa a y. Aceptaremos también que dicha relación conserva las propiedades que tiene en Q; es decir

I.5.6 TEOREMA

Si $x, y \in R$ entonces se verifica una y sólo una de las siguientes proposiciones:

i) $x < y$

ii) $x = y$

iii) $y < x$

I.5.7 TEOREMA

Para todo $x, y, z \in R$:

i) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$

ii) $x < y \;\; y \;\; z > 0 \Rightarrow xz < yz$
$x < y \;\; y \;\; z < 0 \Rightarrow xz > yz$

iii) $x < y \;\; y \;\; y < z \Rightarrow x < z$

También se definen en R la relación "mayor que" y los términos "positivo" y "negativo", de la misma manera que se definen en Q; es decir:

$x > y$ si $y < x$
x es positivo si $x > 0$
x es negativo si $x < 0$

La relación "menor que", sus propiedades y conceptos relacionados son de gran utilidad para describir y manejar intervalos de valores para variables reales. En particular, las propiedades enunciadas por el teorema I.5.7 nos permiten "despejar" una variable en una relación de desigualdad, cuando esto es posible, como veremos en los ejemplos que se presentan a continuación.

I.5.8 EJEMPLOS

a) Obtener el intervalo de valores de x para los que se satisface la siguiente desigualdad.

$$\frac{2x - 3}{x + 2} < \frac{1}{3} \quad \text{con } x \neq -2$$

Solución

Lo primero que se ocurre es multiplicar por 3 y por $x + 2$ ambos miembros de la desigualdad, pero como no conocemos el valor de x no sabemos si $x + 2$ es positivo o negativo, por lo que debemos considerar dos casos:

Caso 1) $x + 2 > 0$	Caso 2) $x + 2 < 0$
multiplicando por $x + 2$ y por 3:	multiplicando por $x + 2$ y por 3:
$3(2x - 3) < x + 2$	$3(2x - 3) > x + 2$
o sea:	o sea:
$6x - 9 < x + 2$	$6x - 9 > x + 2$
sumando 9 y restando x en ambos miembros	sumando 9 y restando x en ambos miembros
$5x < 11$	$5x > 11$
multiplicando por $\frac{1}{5}$	multiplicando por $\frac{1}{5}$
$x < \frac{11}{5}$	$x > \frac{11}{5}$

Como $x + 2 > 0$, $x > -2$

y se obtiene finalmente:

$$-2 < x < \frac{11}{5}$$

Como $x + 2 < 0$, $x < -2$

Por tanto, no existen valores de x que satisfagan simultáneamente:

$$x < -2$$

y

$$x > \frac{11}{5}$$

La solución de la desigualdad propuesta es el conjunto de valores de x tales que:

$$-2 < x < \frac{11}{5}$$

b) Obtener el conjunto de valores de x para los cuales se satisface la siguiente desigualdad:

$\frac{3}{x} < 5$ con $x \neq 0$

Caso 1) $x > 0$

$3 < 5x \therefore \frac{3}{5} < x$ con $x > 0$

luego $\frac{3}{5} < x < \infty$

Caso 2) $x < 0$

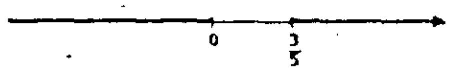
$\frac{3}{x} < 5 \therefore 3 > 5x$ y $\frac{3}{5} > x$ con $x < 0$

luego $-\infty < x < 0$

El conjunto buscado es:

$\{x \mid x \in R \text{ y } \frac{3}{5} < x < \infty\} \cup \{x \mid x \in R \text{ y } -\infty < x < 0\}$

O bien, gráficamente:



- **Propiedad de completitud.**

Los teoremas I.5.3 a I.5.7 nos muestran que el sistema de los números reales tiene las mismas propiedades algebraicas y de orden que el sistema de los números racionales; sin embargo, sabemos que el sistema de los números reales es más amplio y versátil puesto que en R podemos resolver ecuaciones como $x^2 = 2$, para las cuales no existe solución en Q. Cabe preguntarse entonces si los números reales tienen alguna propiedad adicional que no satisfagan los números racionales. Tal propiedad existe y se le conoce como "propiedad de completitud".

Antes de enunciar la propiedad de completitud es conveniente introducir algunos conceptos e ilustrarlos a través de ejemplos.

I.5.9 DEFINICION

Sea S un subconjunto de R. Un elemento $t \in R$ es una cota superior de S si:

$$x \leq t, \ \forall x \in S$$

De la definición anterior se deduce que si t es una cota superior de S, cualquier otro número real mayor que t será también una cota superior de S.

Si un conjunto tiene cotas superiores se dice que está acotado superiormente.

I.5.10 DEFINICION

Sea S un subconjunto de R. Un elemento $m \in R$ se llama elemento máximo de S si:

i) $x \leq m, \forall x \in S$

y

ii) $m \in S$.

lo que denotamos mediante $\max S = m$.

Es decir; un elemento es máximo de un conjunto S si es una cota superior de S y además pertenece a S.

A diferencia de las cotas superiores, el elemento máximo de un conjunto, si existe, es único.

En efecto; sean m y m' dos elementos máximos de S. Como $m \in S$ y m' es máximo

$$m \leq m'$$

por otra parte, como $m' \in S$ y m es máximo

$$m' \leq m$$

en consecuencia

$$m' = m$$

como se quería.

Como puede demostrarse fácilmente, el elemento máximo de un conjunto es la menor de sus cotas superiores.

Es posible, sin embargo, hallar conjuntos acotados superiormente para los cuales no existe elemento máximo; para tales conjuntos se tiene un concepto que sustituye al de máximo en el sentido de "la menor de las cotas superiores". Tal concepto es el de supremo que se define a continuación.

I.5.11 DEFINICION

Sea S un subconjunto de R. Un elemento $p \in R$ se llama supremo de S si:

i) $x \leq p, \forall x \in S$

y

ii) $q \in R$ y $x \leq q, \forall x \in S \Rightarrow p \leq q$

lo que denotamos mediante $\sup S = p$.

Es decir; un elemento p es el supremo de un conjunto S si p es una cota superior de S y ningún número menor que p es cota superior de S.

En forma similar a como se hizo para el máximo se puede demostrar que el supremo de un conjunto, si existe, es único.

Cabe resaltar aquí que la única diferencia entre los conceptos de elemento máximo y supremo de un conjunto S, estriba en que el máximo debe ser un elemento del conjunto S mientras que el supremo puede ser un elemento de S o no serlo.

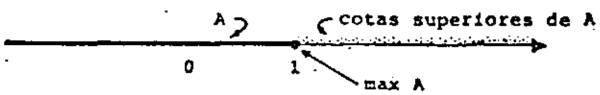
I.5.12 EJEMPLOS

a) Sea $A = \{x \mid x \in R,\ x \leq 1\} \subset R$

Este conjunto está acotado superiormente.

Su elemento máximo es el 1.

Su supremo es también el 1.

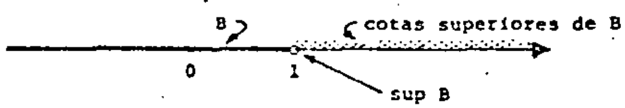


b) Sea $B = \{x \mid x \in R,\ x < 1\} \subset R$

Este conjunto está acotado superiormente.

No tiene elemento máximo

Su supremo es el 1.



> **I.5.13 TEOREMA (completitud de R)**[†]
>
> Todo subconjunto no vacío de R que está acotado superiormente tiene un supremo que pertenece a R.

† El lector puede consultar la demostración en la referencia 2 pág. 251.

Este teorema, cuya demostración omitiremos, nos garantiza la existencia de una mínima cota superior para cualquier conjunto de números reales acotado superiormente, y establece además que la mínima cota es un número real; es decir, que pertenece a R.

La propiedad de completitud permite establecer el concepto de continuidad en R, el cual es de importancia fundamental en el estudio del cálculo.

Para mostrar que los números racionales no poseen la propiedad de completitud establecida para los reales en el teorema I.5.17, consideremos el siguiente ejemplo que se inicia buscando una aproximación al valor de $\sqrt{2}$ mediante expresiones decimales con un número finito de cifras:

Recordemos que el símbolo $\sqrt{2}$ representa a un número x tal que $x^2 = 2$. Así, para una primera aproximación vemos que

$$(1)^2 = 1 \quad \text{y} \quad (2)^2 = 4$$

por lo que

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

En consecuencia, si deseamos aproximarnos "por la izquierda" al valor de $\sqrt{2}$, la primera aproximación será 1.

Para obtener ahora una aproximación con una cifra decimal, observamos que

si $x =$	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
entonces $x^2 =$	1.21	1.44	1.69	1.96	2.25

por lo que

$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$

y la siguiente aproximación será 1.4.

Para obtener una aproximación con dos cifras decimales observamos que

si x =	1.41	1.42
entonces x^2 =	1.9881	2.0164

por lo que

$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$

y la aproximación será ahora 1.41.

Para tres y cuatro cifras decimales obtendríamos, respectivamente

si x =	1.411	1.412	1.413	1.414	1.415
entonces x^2 =	1.990921	1.993744	1.996569	1.999396	2.002225

y

si x =	1.4141	1.4142	1.4143
entonces x^2 =	1.99967881	1.99996164	2.00024449

y el proceso podría continuarse indefinidamente en virtud de que, por I.4.15 y I.4.16, la expresión decimal de $\sqrt{2}$ es no periódica.

Conviene hacer hincapié en que las aproximaciones obtenidas anteriormente, es decir

1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142

son expresiones decimales con un número finito de cifras y, por tanto, son números racionales.

Consideremos ahora el conjunto S que consta de las aproximaciones de $\sqrt{2}$ que pueden obtenerse mediante el proceso que hemos descrito anteriormente; es decir:

$S = \{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, \ldots\}$

Por construcción, el conjunto S tiene las siguientes características

1) Cada aproximación es mayor que la anterior
2) S contiene un número infinito de elementos
3) $S \neq \emptyset$, $S \subset Q$ y S está acotado superiormente

Las propiedades enunciadas en el punto 3) satisfacen las condiciones del teorema I.5.13 al reemplazar en él R por Q, sin embargo la conclusión no sería válida ya que S no tiene un supremo en Q. Es claro que $\sqrt{2}$ es la mínima cota superior de S y $\sqrt{2} \notin Q$.

Como consecuencia de lo anterior vemos que el conjunto de los números racionales carece de la propiedad de completitud.

- Valor absoluto de un número real.

Dado que existe una correspondencia uno a uno entre los puntos de la recta y los números reales, cabe esperar que el concepto geométrico de distancia entre dos puntos tenga su equivalente en el conjunto de los números reales. Dicho concepto, especialmente útil para el cálculo, puede ser introducido con ayuda del valor absoluto de un número

real, que definiremos a continuación

I.5.14 DEFINICION

Sea x un número real. El valor absoluto de x, que representaremos con $|x|$, se define como

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Así, por ejemplo

$|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, ya que $\frac{1}{2} > 0$

$|0| = 0$, ya que $0 = 0$

$|-7| = 7$, ya que $-7 < 0$

En general el valor absoluto de $x \in R$ será un número real no negativo; es decir, positivo o cero. Las principales propiedades del valor absoluto se enuncian en el siguiente teorema

I.5.15 TEOREMA

Para todo $x, y \in R$:

i) $|x| \geq 0$. Además $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $|xy| = |x| \cdot |y|$

iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$

DEMOSTRACION

La propiedad i) es consecuencia inmediata de la definición I.5.14.

La propiedad ii) puede demostrarse fácilmente a partir del teorema I.5.4. La propiedad iii), conocida como "desigualdad del triángulo", se demuestra a continuación.

1) Si $x = 0$ o $y = 0$ la igualdad es obvia.

2) Si $x > 0$ y $y > 0$ tenemos que $x + y > 0$, por lo que
$$|x + y| = x + y = |x| + |y|$$
y se satisface la igualdad.

3) Si $x < 0$ y $y < 0$ tenemos que $x + y < 0$, por lo que
$$|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) = |x| + |y|$$
y se satisface la igualdad.

4) Nos queda por considerar el caso en que x, y tienen signos contrarios. Supongamos $x > 0$ y $y < 0$:

Si $y = -x$, $x + y = 0$ y la desigualdad es obvia.

Si $y < -x$, $x + y < 0$, por lo que
$$|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) = -|x| + |y| < |x| + |y|$$

Si $y > -x$, $x + y > 0$, por lo que
$$|x + y| = x + y = x - (-y) = |x| - |y| < |x| + |y|$$

con lo que hemos demostrado iii) de I.5.15

A partir de la definición I.5.14 y de la representación de los números reales como puntos de la recta, se observa que mientras más grande es $|x|$ más lejos del origen se encuentra el punto que representa a x. Debido a esto, al número $|x|$ se le conoce como la distancia de x al cero.

De acuerdo con lo anterior, si α es un número real positivo se tendrá que un punto x está situado entre $-\alpha$ y α cuando (y solamente cuan - do) $|x| < \alpha$. Esta idea puede generalizarse a través del siguiente teorema.

I.5.16 TEOREMA

Sea $\alpha \in R$ con $\alpha \geq 0$; $\forall x \in R$ se tiene que:

$$|x| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x \leq \alpha$$

DEMOSTRACION

i) Sea $|x| \leq \alpha$ $\quad$ --- (1)

De la definición I.5.14 se sigue que

$|x| = x$ o $|x| = -x$, $\forall x \in R$

Por lo que:

a) Si $|x| = x$, de (1)

$|x| \leq \alpha \implies x \leq \alpha$ $\quad$ --- (2)

b) Si $|x| = -x$, de (1)

$|x| \leq \alpha \implies -x \leq \alpha \implies x \geq -\alpha$ $\quad$ --- (3)

por tanto, de (2) y (3) se sigue que

$|x| \leq \alpha \implies -\alpha \leq x \leq \alpha$, $\forall x \in R$.

ii) Supongamos ahora que $-\alpha \leq x \leq \alpha$ $\quad$ --- (4)

a) Si $x \geq 0$, $|x| = x$ y de (4)

$|x| \leq \alpha$ $\quad$ --- (5)

b) Si $x < 0$, $|x| = -x$ y de (4)

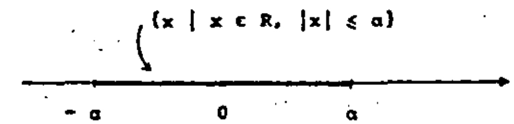
$-\alpha \leq -|x| \implies \alpha \geq |x|$ $\quad$ --- (6)

por lo que, de (5) y (6) se tiene que

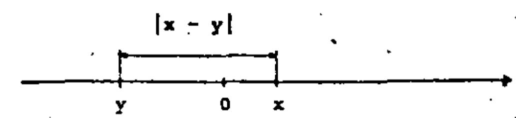
$-\alpha \leq x \leq \alpha \implies |x| \leq \alpha$, $\forall x \in R$.

y la demostración queda completa.

El teorema I.5.16 tiene la siguiente interpretación geométrica:



Con ayuda del valor absoluto, la distancia entre dos números reales cualesquiera x, y puede definirse como el número real no negativo $|x - y|$. A continuación se ilustra geométricamente el caso en que $x > 0$, $y < 0$:



I.5.17 EJERCICIOS

1) Demostrar a partir de I.5.3 que, si $x, y, z \in R$:

a) $x + z = y + z \implies x = y$

b) $xz = yz \implies x = y$, si $z \neq 0$.

c) $x \cdot 0 = 0$

d) $(-x)(y) = -(xy)$

e) $xy = 0 \implies x = 0$ o $y = 0$

2) Sean $x, y, z \in R$, demostrar que:

a) $x - y \in R$

b) $\frac{x}{y} \in R$, si $y \neq 0$

c) $x(y - z) = xy - xz$

d) $x(\frac{y}{z}) = \frac{xy}{z}$, si $z \neq 0$

3) Para cada una de las siguientes desigualdades, determinar el conjunto de valores de x que la satisfacen

a) $\frac{2 - x}{3} < 2(x - 2)$

b) $2 > \frac{x + 4}{x}$

c) $\frac{3x + 7}{x - 3} + 2 < 3$

4) De manera similar a como se hizo en I.5.9, el concepto de cota inferior se define como sigue:

Si $S \subset R$, un elemento $f \in R$ es una cota inferior de S si $x \geq f$, $\forall x \in S$. Además un conjunto que tiene cotas inferiores se dice que está acotado inferiormente.

Para cada uno de los conjuntos del ejercicio anterior decir si están acotados superiormente, inferiormente o de ambas maneras.

5) De manera similar a como se hizo en I.5.10 y I.5.11 se definen los conceptos de máximo e ínfimo de un conjunto.

Para cada uno de los conjuntos del ejercicio 3 hallar su máximo, mínimo, supremo e ínfimo, si existen.

6) Sean $x, y \in R$, demostrar que:

a) $|x| = 0 \iff x = 0$

b) $|xy| = |x| \cdot |y|$

c) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, si $y \neq 0$

d) $|x - y| = |y - x|$

7) Para cada una de las siguientes afirmaciones, demostrar su validez o dar un contraejemplo en caso de ser falsa:

a) $x \leq 3 \implies |x| \leq 3$

b) $|x| \leq 5 \implies -3 \leq x \leq 4$

c) $|x - 2| < 1 \iff 1 < x < 3$

d) $|x + 1| < 3 \iff -2 < x < 2$

I.6 MAS SOBRE INDUCCION MATEMATICA

Tan pronto como propusimos el primer teorema de la sección I.2 fue necesario recurrir a la inducción matemática para poder demostrarlo, ya que nos encontrábamos en los inicios de la construcción del sistema de los números reales y no disponíamos de más elementos para realizar la prueba que las propiedades que definen a los números naturales, es decir, los postulados de Peano. Es por ello que todas las propiedades de las operaciones en N debieron demostrarse por inducción matemática.

Al pasar a la sección I.3 definimos las operaciones en Z a partir de las operaciones en N, por lo que sus propiedades pudieron demostrarse a partir de las propiedades en N sin recurrir a la inducción matemática.

A partir de dicha sección, y debido a que nuestro interés fundamental era el de establecer las principales propiedades algebraicas de los diferentes sistemas de números, no fue necesario volver a utilizar la demostración por inducción. Sin embargo, existen otras proposiciones importantes en dichos sistemas, así como en otros que se tratarán más adelante, las cuales sólo pueden ser demostradas por inducción matemática.

Debido a su importancia como método de demostración, en esta sección presentaremos algunas observaciones y ejemplos adicionales que esperamos contribuyan a una mejor comprensión del método y que permitan su utilización en un contexto más amplio que el de la sección I.2.

Empezaremos por señalar que el nombre no es muy afortunado, ya que la palabra "inducción" suele asociarse al proceso que consiste en obtener una conclusión a partir del análisis de varios casos particulares, proceso que nada tiene que ver con el método de demostración que nos ocupa.

Mediante un proceso como el anteriormente descrito, al que se conoce como razonamiento inductivo, podemos llegar a proponer un enunciado de carácter general a partir del análisis de varios casos particulares (como se hizo con P(n) en el ejemplo I.2.4 - a), pero nunca a demostrarlo.

A diferencia del razonamiento inductivo, el cual sólo puede asegurar la validez de la conclusión para los casos particulares de los cuales fue obtenido, el método de demostración por inducción matemática nos garantiza la validez de la conclusión para todos los casos.

Como hemos visto, una prueba por inducción matemática consta de dos partes cualitativamente diferentes:

I) Una verificación: P(1) es cierta.

II) La demostración de una implicación: P(k) es cierta $\Longrightarrow$ P(k+1) es cierta.

El papel que juegan estas dos partes en la prueba es similar al que se describe en la siguiente situación.

Supongamos que estamos frente a una escalera que tiene una infinidad

de peldaños y que deseamos tener la seguridad de que podemos llegar a cualquiera de sus peldaños. Esta seguridad nos la pueden proporcionar los dos hechos siguientes:

1) Podemos subir al primer peldaño.

2) Estando en un peldaño cualquiera podemos subir al siguiente.

En efecto: por 1) podemos situarnos en el primer peldaño. Estando en el primer peldaño, por 2) podemos situarnos en el segundo. Estando en el segundo peldaño, por 2) (nuevamente) podemos situarnos en el tercero, y así sucesivamente podemos llegar a cualquiera de ellos.

En una prueba por inducción la parte I nos garantiza que existe un valor para el cual la proposición es cierta, mientras que la parte II nos dice que si la proposición es cierta para un valor entonces será cierta para el siguiente valor (aunque esta parte no garantiza que exista un valor para el cual la proposición sea cierta).

Puesto que la primera parte de una prueba por inducción es una simple verificación, usualmente la dificultad de la prueba estriba en demostrar la implicación de la segunda parte, lo cual requiere en algunos casos de una buena dosis de ingenio; empero, ambas partes son indispensables para la prueba. A continuación presentamos un ejemplo en el que puede demostrarse la implicación y, sin embargo, la proposición es falsa.

Sea

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n^2 + n + 1 \qquad --- P(n)$$

y supongamos que P(k) es cierta; esto es:

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2k = k^2 + k + 1$$

sumando en ambos miembros 2(k + 1):

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \ldots + 2k + 2(k + 1) &= (k^2 + k + 1) + 2(k + 1) \\ &= k^2 + k + 1 + 2k + 2 \\ &= (k^2 + 2k + 1) + (k + 1) + 1 \end{aligned}$$

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)^2 + (k + 1) + 1$$

con lo que hemos demostrado que si P(k) es cierta entonces P(k + 1) es cierta; sin embargo, la prueba por inducción no puede completarse ya que no es posible hallar un valor para el cual la proposición sea cierta (demuéstrelo).

Hay proposiciones que aunque no se cumplen para todos los números naturales son válidas a partir de un cierto valor. Tal es el caso de la siguiente proposición

$$\text{si } x \in R \text{ y } x > 0, \text{ entonces } (x + 1)^n > x^n + 1 \qquad ---- P(n)$$

puesto que para n = 1

$$(x + 1)^1 = x^1 + 1$$

y la proposición no se cumple.

Para n = 2 tenemos que

$$(x + 1)^2 > x^2 + 1$$

ya que

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

y, como x > 0, 2x > 0; por lo que

$$x^2 + 2x + 1 > x^2 + 1$$

de donde

$$(x + 1)^2 > x^2 + 1$$

y la proposición es válida para n = 2.

Del análisis de P(n) puede verse que a medida que n aumenta $(x + 1)^n$ crece más rápidamente que $x^n + 1$ por lo que, como la proposición fue válida para n = 2, cabe esperar que seguirá siendo válida para valores de n mayores que dos.

En efecto, demostraremos a continuación que la validez de P(k) implica la validez de P(k + 1). Hipótesis: P(k) es cierta, luego

$$(x + 1)^k > x^k + 1$$

Como x > 0, multiplicando por x + 1 tenemos

$$(x + 1)^k (x + 1) > (x^k + 1)(x + 1)$$

Esto es

$$(x + 1)^{k+1} > x^{k+1} + x^k + x + 1$$

Ahora, como x > 0 se tendrá que $x^k + x > 0$, por lo que

$$x^{k+1} + x^k + x + 1 > x^{k+1} + 1$$

En consecuencia

$$(x + 1)^{k+1} > x^{k+1} + 1$$

por lo que P(k + 1) es cierta.

Finalmente, como la proposición es cierta para n = 2, de lo anterior se sigue que también es cierta para cualquier valor mayor que dos.

Como vimos en el ejemplo anterior, es posible utilizar la inducción matemática para demostrar la validez de una proposición a partir de

un valor fijo n_0. En estos casos la parte I de la prueba consistirá en verificar que la proposición es cierta para el valor n_0, la parte II consistirá nuevamente en demostrar que la validez de $P(k)$ implica la de $P(k+1)$, teniendo en cuenta que ahora k es mayor o igual que n_0, y la conclusión será que la proposición es cierta para todo valor de n mayor o igual que n_0.

I.6.1 EJERCICIOS

1) Demostrar por inducción matemática que las siguientes fórmulas son válidas para todo número natural n:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, ¿qué representa aquí n?

c) $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$, $\forall\, a, q \in R$.

2) Obsérvese que:

$$1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3$$

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) = 4$$

proponer una ley general y demostrarla por inducción matemática.

3) Hallar la fórmula que simplifica el producto

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

y demostrarla por inducción.

4) Para cada una de las siguientes proposiciones, hallar el menor valor de n para el cual se cumple y demostrarla por inducción matemática:

a) $\dfrac{n^3 - n}{3} \in N$.

b) $n! > n^2$, donde $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$, $\forall\, n \in N$ y $0! = 1$

c) $(x+1)^n > nx^2 + nx + 1$, $\forall\, x \in R$, $x > 0$.

5) Demostrar por inducción matemática las siguientes propiedades del valor absoluto:

a) $|x^n| = |x|^n$, $\forall\, n \in N$

b) $|a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n| = |a_1|\,|a_2|\,|a_3| \ldots |a_n|$; $\forall\, n \in N$, $n \geq 2$

c) $|a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n|$; $\forall\, n \in N$, $n \geq 2$

6) Demostrar por inducción matemática las siguientes relaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen}(\theta + n\pi) = (-1)^n \operatorname{sen}\theta$; $n = 0, 1, 2, \ldots$

b) $\operatorname{sen}\left[\theta + (2n-1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^{n-1}\cos\theta$; $\forall\, n \in N$

I.7 REFERENCIAS

1.- E. G. H. Landau
The Foundations of Analysis
Chelsea Publishing Co.
Nueva York, 1951.

2.- Ross Beaumont y Richard Pierce
The Algebraic Foundations of Mathematics
Addison Wesley Publishing Co.
Massachusetts, 1963.

3.- Frank Ayres
Algebra Moderna
Serie Schaum, Mc Graw Hill
México, 1969

4.- Marie Weiss y Roy Dubisch
Algebra Superior
Limusa Wiley
México, 1967

NUMEROS COMPLEJOS

por

EDUARDO SOLAR GONZALEZ

LEDA SPEZIALE DE GUZMAN

profesores de la División de Ciencias Básicas

de la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M.

CAPITULO II NUMEROS COMPLEJOS

CONTENIDO

CAPITULO II NUMEROS COMPLEJOS

INTRODUCCION

Los números complejos aparecen en el horizonte de las matemáticas con la introducción de los números imaginarios. Estos surgieron en el álgebra como consecuencia de una necesidad, de la misma manera que los números negativos.

Girolamo Cardano, eminente matemático italiano del siglo XVI, fué el primero en reconocer la verdadera importancia de las raíces negativas al establecer la teoría general de las ecuaciones de tercero y cuarto grado. Se dió cuenta de la necesidad de números negativos y llegó a hablar incluso de raíces cuadradas de números negativos aunque, al parecer, no llegó a precisar el concepto de número imaginario.

Rafael Bombelli, también italiano, continuó la obra de Cardano y, en una obra publicada en 1572, señaló que los números imaginarios eran indispensables para la solución de ecuaciones de la forma $x^2 + c = 0$, donde c es un número positivo.

Los números imaginarios fueron atacados a partir de entonces, fueron declarados por muchos como "imposibles" o "inexistentes", por el mero hecho de no poder relacionarlos con experiencias de su vida cotidiana.

Pero una ecuación como $x^2 + 1 = 0$ no iba a quedarse sin solución. Las matemáticas requerían de los imaginarios para desarrollarse y, finalmente, éstos se impusieron.

Un número imaginario representa una idea abstracta pero muy precisa. La respuesta a la pregunta: ¿Qué número al ser multiplicado por sí mismo es igual a -1? sólo puede concebirse con la ayuda del imaginario más conocido, al que Euler representó con el símbolo i que todavía se emplea.

II.1 FORMA BINOMICA

Una vez aceptada la existencia de i como un número tal que $i \times i = -1$, un número imaginario queda definido como todo aquel de la forma bi, donde b es cualquier número real. Por ejemplo:

$3i,\ -7i,\ \frac{1}{5}i,\ \sqrt{2}i$

son números imaginarios.

Los imaginarios, con las mismas reglas de operación que los números reales, y considerando $i^2 = -1$, proporcionan soluciones a toda ecuación de la forma $x^2 + c = 0$, donde c es un número positivo.

Por ejemplo, las soluciones de la ecuación

$x^2 + 25 = 0$

son los números $5i$ y $-5i$ puesto que:

$$(5i)^2 = (5i)(5i) = 25i^2 = 25(-1) = -25$$

y

$$(-5i)^2 = (-5i)(-5i) = 25i^2 = 25(-1) = -25$$

En general, las soluciones de la ecuación

$$x^2 + c = 0, \quad \text{con} \quad c > 0,$$

son los números imaginarios $\sqrt{c}\, i$ y $-\sqrt{c}\, i$, donde $\sqrt{c} \in R$.

Por otra parte si tenemos una ecuación como

$$x^2 + 4x + 13 = 0$$

y aplicamos la fórmula general de la ecuación de segundo grado, obtenemos

$$x = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm 3i$$

y nos encontramos con que cada una de las soluciones es la "suma" de un número real con un número imaginario, lo cual debe interpretarse como un nuevo tipo de número. Surgen así los números complejos cuyo conjunto, que representamos con C, se define como sigue

II.1.1 DEFINICION

$$C = \{z \mid z = a + bi,\ a, b \in R,\ i^2 = -1\}$$

Así, por ejemplo, $-2 + 3i$, $-2 - 3i$, $1 + \sqrt{5}i$, $\frac{1}{2} - \pi i$ son números complejos.

Para manejar los números complejos necesitamos saber cuándo dos de

ellos son iguales, por lo que establecemos la siguiente definición

II.1.2 DEFINICION

Sean $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ dos números complejos con $a, b, c, d \in R$, entonces

$$z_1 = z_2 \quad \text{si} \quad a = c \quad \text{y} \quad b = d$$

Como puede verse la igualdad en C requiere de dos igualdades entre números reales. Así, si $a \neq c$ o $b \neq d$ se tendrá que $z_1 \neq z_2$.

- La adición y la multiplicación en C.

Las operaciones de adición y multiplicación de números complejos se definen, en términos de la adición y multiplicación de números reales, de la manera siguiente

II.1.3 DEFINICION

Sean $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ dos números complejos, donde $a, b, c, d \in R$.

i) el número $z_1 + z_2$ se define como

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

ii) el número $z_1 z_2$ se define como

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Estas operaciones tienen las siguientes propiedades

II.1.4 TEOREMA

Para todo $z_1, z_2, z_3 \in C$:

i) $z_1 + z_2 \in C$

$z_1 z_2 \in C$ — cerradura

ii) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

$z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ — asociatividad

iii) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

$z_1 z_2 = z_2 z_1$ — conmutatividad

iv) $z_1 + (0 + 0i) = z_1$

$z_1 (1 + 0i) = z_1$ — elemento idéntico

v) $\exists - z_1 \in C$ tal que $z_1 + (- z_1) = 0 + 0i$

si $z_1 \neq 0 + 0i$ $\exists z_1^{-1} \in C$ tal que

$z_1 z_1^{-1} = 1 + 0i$ — elementos inversos

vi) $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ — distributividad

DEMOSTRACION

Se demostrarán únicamente i), iii) y v)

i) Sean $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ dos números complejos

$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ — por i) de II.1.3

como $a, b, c, d \in R$ de i) de I.5.3 $(a + c), (b + d) \in R$

por lo que, de II.1.1

$(a + c) + (b + d)i \in C$

en consecuencia

$z_1 + z_2 \in C$ como se quería

Por otra parte

$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$ — Por ii) de II.1.3

Como $a, b, c, d \in R$, de i) de I.5.3 se tiene que

$(ac - bd), (ad + bc) \in R$

por lo tanto, de II.1.1

$(ac - bd) + (ad + bc)i \in C$

y en consecuencia

$z_1 z_2 \in C$ como se quería

iii) Sean $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ dos números complejos

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di)$$

$= (a + c) + (b + d)i$ — por i) de II.1.3

$= (c + a) + (d + b)i$ — por iii) de I.5.3

$= (c + di) + (a + bi)$ — por i) de II.1.3

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

Además

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di)$$

$= (ac - bd) + (ad + bc)i$ — por ii) de II.1.3

$= (ca - db) + (cb + da)i$ — por iii) de I.5.3

$= (c + di)(a + bi)$ — por ii) de II.1.3

$z_1 z_2 = z_2 z_1$

v) Sea $z_1 = a + bi$ un número complejo, con $a, b \in R$

De v) de I.5.3 $\exists - a, - b \in R$, y en consecuencia

$(- a) + (- b)i \in C$ — por II.1.1

Sumando este número a z_1 se obtiene

$(a+bi)+[(-a)+(-b)i] = [a+(-a)] + [b+(-b)]i$ — por i) de II.1.3

$(a+bi)+[(-a)+(-b)i] = 0 + 0i$ — por v) de I.5.3

con lo que $- z_1 = (- a) + (- b)i$

Sea ahora $z_1 = a + bi$ con $a, b \in R$ y $a, b \neq 0$

$\Rightarrow \exists \frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \in R$, y de II.1.1

$$\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i \in C$$

Aplicando ii) de II.1.3

$$(a + bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\right) = \left(\frac{a\,a}{a^2+b^2} - \frac{b\,(-b)}{a^2+b^2}\right) + \left(\frac{a\,(-b)}{a^2+b^2} + \frac{b\,a}{a^2+b^2}\right)i$$

$$= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} + \frac{ab-ab}{a^2+b^2}i$$

$$(a + bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\right) = 1 + 0i$$

con lo que $z_1^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$

y termina la demostración. □

De acuerdo con II.1.1 un número complejo es de la forma

$z = a + bi$, con $a, b \in R$

En particular, si $b = 0$ el número complejo queda como

$z = a + 0i$

que puede ser considerado como el número real a, ya que la correspondencia

$a + 0i \longrightarrow a$

se conserva a través de las operaciones de adición y multiplicación.

En efecto, sean

$a + 0i \longrightarrow a$

y $c + 0i \longrightarrow c$

$(a + 0i) + (c + 0i) = (a + c) + 0i \longrightarrow a + c$

y $(a + 0i)(c + 0i) = (ac) + 0i \longrightarrow ac$

De manera semejante, a todo número complejo de la forma $0 + bi$ lo podemos considerar como el número imaginario bi.

De acuerdo con lo anterior, tanto el conjunto de los números reales como el conjunto de los números imaginarios son subconjuntos de C.

Con la definición formal del conjunto de los números complejos y de las operaciones de adición y multiplicación en C, podemos ahora verificar que el número complejo $x_1 = -2 + 3i$ es una solución de la ecuación

$x^2 + 4x + 13 = 0$

Para ello, consideramos que $4 = 4 + 0i$ y $13 = 13 + 0i$, y sustituimos $x_1 = -2 + 3i$ en el miembro izquierdo de la ecuación, obteniendo

$$(-2 + 3i)^2 + (4 + 0i)(-2 + 3i) + (13 + 0i)$$

de ii) de II.1.3 tenemos

$[(4 - 9) + (-6 - 6)i] + [(-8 + 0) + (12 + 0)i] + (13 + 0i) =$

$= (-5 - 12i) + (-8 + 12i) + (13 + 0i)$

y de i) de II.1.3

$(-5 - 8 + 13) + (-12 + 12 + 0)i = 0 + 0i$

$= 0$ como queríamos □

Como veremos más adelante, un número complejo puede ser representado en varias formas. A la forma $a + bi$, que hemos estado manejando, se le conoce como forma binómica debido a su apariencia de binomio.

Cuando un número complejo z está expresado en forma binómica, es decir como

$z = a + bi$

a los números reales a y b se les conoce, respectivamente, como parte real y parte imaginaria de z. Algunas veces se emplea para esta idea la siguiente notación:

$R(z) = a$

$I(z) = b$

- El conjugado de un número complejo

II.1.5 DEFINICION

Sea $z = a + bi$ un número complejo

El conjugado de z, que representaremos con $\overline{z}$, se define como

$\overline{z} = a - bi$

El conjugado tiene las propiedades que se enuncian en el siguiente teorema

II.1.6 TEOREMA

Para todo $z_1, z_2 \in C$:

i) $\overline{\overline{z}}_1 = z_1$

ii) $z_1 = \overline{z}_1 \iff z_1 \in R$

iii) $z_1 + \overline{z}_1 \in R$

iv) $z_1 \overline{z}_1 \in R$

v) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

vi) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$

DEMOSTRACION

Se demostrarán únicamente ii), iii) y vi)

ii) Sea $z_1 = a + bi$ un número complejo

Probaremos primero que $z_1 = \overline{z}_1 \implies z_1 \in R$

$z_1 = \overline{z}_1 \implies a + bi = a - bi$ por II.1.5

$b = - b$ por II.1.2

por lo que $b = 0$

$\therefore z_1 = a + 0i = a \in R$

Ahora probaremos que $z_1 \in R \implies z_1 = \overline{z}_1$

$z_1 = a + 0i$

$\overline{z}_1 = a - 0i$ por II.1.5

$\overline{z}_1 = a + 0i$, ya que el cero es igual a su inverso aditivo

$z_1 = \overline{z}_1$ por II.1.2

Por lo tanto queda demostrado que

$z_1 = \overline{z}_1 \iff z_1 \in R$

iii) Sea $z_1 = a + bi$ un número complejo

$\overline{z}_1 = a - bi$ por II.1.5

$z_1 + \overline{z}_1 = (a + a) + (b - b)i$ por i) de II.1.3

$= 2a + 0i$

$z_1 + \overline{z}_1 = 2a \in R$

vi) Sean $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ dos números complejos

$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a + bi)(c + di)}$

$= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i}$ por ii) de II.1.3

$= (ac - bd) - (ad + bc)i$ por II.1.5

$\overline{z_1 z_2} = (ac - bd) + (- ad - bc)i$

$\overline{z_1 z_2} = [ac - (-b)(-d)] + [a(-d) + (-b)c]i$

$= (a - bi)(c - di)$ por ii) de II.1.3

$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ por II.1.5

y la prueba termina.

□

- La sustracción y la división en C.

La sustracción y la división en C se definen a partir de la adición y la multiplicación en C, respectivamente, y de v) de II.1.4, de la siguiente manera

> II.1.7 DEFINICION
>
> Sean $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ dos números complejos, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$
>
> i) el número $z_1 - z_2$ se define como
>
> $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$
>
> ii) si $z_2 \neq 0 + 0i$ el número $\frac{z_1}{z_2}$ se define como
>
> $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \, z_2^{-1}$

De la definición anterior se pueden obtener las siguientes fórmulas de uso práctico

de v) de II.1.4 $-(c + di) = (-c) + (-d)i$

de i) de II.1.7 $(a + bi) - (c + di) = (a + bi) + [(-c) + (-d)i]$

y de i) de II.1.3 $\boxed{(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i}$

que es la fórmula que se emplea para la sustracción.

De v) de II.1.4 $(c + di)^{-1} = \frac{c}{c^2 + d^2} + \frac{-d}{c^2 + d^2} i$

de ii) de II.1.7 $\frac{a + bi}{c + di} = (a + bi).\left(\frac{c}{c^2 + d^2} + \frac{-d}{c^2 + d^2} i\right)$

y de ii) de II.1.3 $\boxed{\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i}$

que es la fórmula que se emplea para la división.

Así, si $z_1 = 1 + 8i$ y $z_2 = 2 + i$

$z_1 - z_2 = (1 - 2) + (8 - 1)i$

$z_1 - z_2 = -1 + 7i$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 8}{4 + 1} + \frac{16 - 1}{4 + 1} i$

$= \frac{10}{5} + \frac{15}{5} i$

$\frac{z_1}{z_2} = 2 + 3i$

El resultado de la división puede también obtenerse multiplicando dividendo y divisor por el conjugado del divisor y considerando a los números complejos como binomios, como puede verse a continuación

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 8i}{2 + i}$

$= \frac{(1 + 8i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)}$

$= \frac{2 - i + 16i - 8i^2}{2^2 - i^2}$

$= \frac{(2 + 8) + 15i}{4 + 1}$

$= \frac{10}{5} + \frac{15}{5} i$

$\frac{z_1}{z_2} = 2 + 3i$, que coincide con el resultado obtenido antes.

En general, todas las operaciones con números complejos expresados en forma binómica pueden efectuarse considerándolos como si fueran binomios, tomando en cuenta que las potencias de i superiores a uno deben reducirse de acuerdo a lo siguiente:

$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$$
$$i^4 = i^3 i = (-i)i = 1$$
$$i^5 = i^4 i = (1)i = i$$
$$i^6 = i^5 i = ii = -1$$
$$\vdots$$

y en adelante los valores se repiten periódicamente.

II.1.8 EJEMPLOS

Sean $z_1 = -5 - 2i$, $z_2 = -1 + i$

a) $z_1 + z_2 = (-5 - 2i) + (-1 + i) = -5 - 1 - 2i + i = -6 - i$

b) $z_1 - z_2 = (-5 - 2i) - (-1 + i) = -5 - 2i + 1 - i = -4 - 3i$

c) $z_1 z_2 = (-5 - 2i)(-1 + i) = 5 - 5i + 2i - 2i^2 = 5 - 5i + 2i + 2$

$z_1 z_2 = 7 - 3i$

d) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-5 - 2i}{-1 + i} = \dfrac{(-5 - 2i)(-1 - i)}{(-1 + i)(-1 - i)} = \dfrac{5 + 2i + 5i + 2i^2}{(-1)^2 - (i)^2}$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(5 - 2) + (2 + 5)i}{1 + 1} = \dfrac{3 + 7i}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{2}i$

II.1.9 EJERCICIOS

1) Demostrar que para todo $z_1, z_2, z_3 \in C$

a) $z_1 + (0 + 0i) = z_1$

b) $z_1(1 + 0i) = z_1$

c) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

2) Demostrar que para todo $z_1, z_2 \in C$

a) $\overline{z}_1 = -z_1 \Longleftrightarrow R(z) = 0$

b) $z_1 \overline{z}_1 \in R$

3) Demostrar que las operaciones con números complejos pueden efectuarse considerándolos como binomios; es decir, que considerándolos como binomios se obtienen los mismos resultados que con las expresiones II.1.3 y las fórmulas de uso práctico que se emplean para la sustracción y la división.

4) Obtener todos los valores $x, y \in R$ que satisfacen las siguientes igualdades

a) $\dfrac{x + yi}{x - yi} = x + yi$

b) $(x + yi)^2 = (x - yi)^2$ donde $z^2 = zz$

5) Si $z_1 = -i$, $z_2 = 3$, $z_3 = \sqrt{2} - i$, $z_4 = -2 + 3i$ obtener el resultado de las siguientes operaciones

a) $\dfrac{z_2}{z_1} - z_3$

b) $\dfrac{\overline{z}_1 z_2}{z_1 \overline{z}_1}$

c) $\dfrac{z_3 - z_4}{z_3} + \overline{z}_3 z_4$

6) Expresar el resultado de las siguientes operaciones en la forma $a + bi$

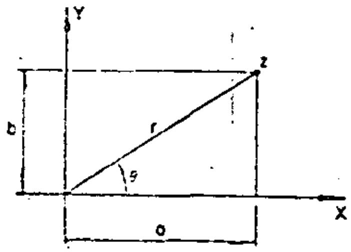
a) $\dfrac{i^2 + i^4 + i^6}{i^3 + i^5 + i^7}$

b) $\dfrac{(\overline{2 - i}) + (2 + i)(1 + i)}{(2 - 4i)(2 + i)}$

c) $\dfrac{(1 - 3i)(4 - i)^2 + (4 - i)(-1 + 5i)}{(4 - i)i}$

II.2 FORMA POLAR O TRIGONOMETRICA

A cada pareja ordenada de números reales (a,b) corresponde uno y sólo un número complejo a + bi y viceversa, por lo que podemos representar a dicho número complejo como un punto de coordenadas (a,b) en el plano cartesiano, donde su parte real a queda representada en el eje x, y su parte imaginaria b en el eje y.



A esta representación de los números complejos en el plano se le conoce como "Diagrama de Argand", y a los ejes x, y se les llama, respectivamente, "eje real" y "eje imaginario".

El punto de coordenadas (a,b) también está determinado por los parámetros (r,θ) de la figura, conocidos como coordenadas polares del punto.

Las coordenadas cartesianas (a,b) se obtienen a partir de las polares (r,θ) mediante las siguientes fórmulas de transformación

$$\left.\begin{aligned} a &= r\cos\theta \\ b &= r\,\text{sen}\,\theta \end{aligned}\right| \quad ---- \text{(A)}$$

En consecuencia, el número complejo z = a + bi puede también expresarse como

$$z = (r\cos\theta) + (r\,\text{sen}\,\theta)i$$

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

que es la llamada forma polar o trigonométrica del número complejo z. Podemos emplear una abreviatura para simplificar esta última expresión, ya que en ambas funciones trigonométricas se trata del mismo ángulo. Usaremos entonces la expresión "cis θ" para representar al factor cos θ + i sen θ, con lo que podemos escribir z = r cis θ. Formalizaremos lo anterior mediante la siguiente definición

II.2.1 DEFINICION

$$r\ \text{cis}\ \theta = (r\cos\theta) + (r\,\text{sen}\,\theta)i$$

En consecuencia, para expresar el número complejo z = a + bi en forma polar escribiremos

$$z = r\ \text{cis}\ \theta$$

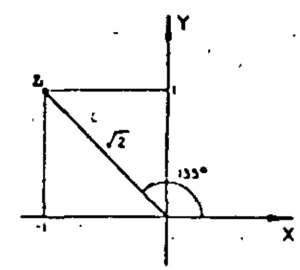
donde las coordenadas polares (r,θ) se obtienen a partir de las cartesianas (a,b) mediante las expresiones:

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta &= \text{ang tan}\,\frac{b}{a} \end{aligned}\right| \quad ---- \text{(B)}$$

Así, por ejemplo, si tenemos el número complejo

$$z_1 = -1 + i$$

y queremos expresarlo en forma polar, aplicando las expresiones (B) obtenemos



$$r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2}$$

$$r = \sqrt{2}$$

$$\theta = \text{ang tan}\,\frac{1}{-1}$$

$$\theta = 135°$$

de donde $z_1 = \sqrt{2}\ \text{cis}\ 135°$

Si tenemos ahora un número complejo en forma polar

$z_2 = 2 \text{ cis } 240°$

y queremos expresarlo en forma binómica, aplicando las expresiones (A) obtenemos

$a = 2 \cos \theta$

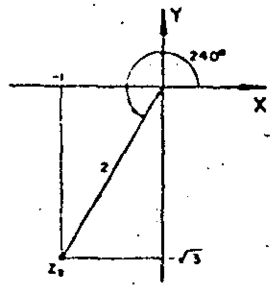
$= 2(-\frac{1}{2})$

$a = -1$

$b = 2 \text{ sen } \theta$

$= 2(-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$b = -\sqrt{3}$



y finalmente $z_2 = -1 - \sqrt{3}\, i$

En la forma polar al número real r, que es una distancia y por tanto un número no negativo, se le conoce como el "módulo" del número complejo, y al ángulo θ como su "argumento". Para el caso particular del número 0 + 0i, su módulo es cero y su argumento se considera arbitrario.

Consideremos el caso de los números complejos $z_1 = 2 \text{ cis } 120°$ y $z_2 = 2 \text{ cis } 480°$.

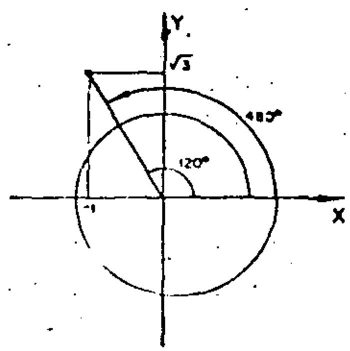
Al transformarlos a la forma binómica encontramos que

$z_1 = -1 + \sqrt{3}\, i$ y

$z_2 = -1 + \sqrt{3}\, i$

por lo que, de II.1.2

$z_1 = z_2$



En general, si tenemos dos números complejos expresados en forma polar con módulos iguales y argumentos que difieran un múltiplo entero de 360°, dichos números quedarán representados en el plano por el mismo punto; en consecuencia, en su forma binómica tendrán la misma parte real y la misma parte imaginaria, por lo que serán iguales, como lo establece el siguiente teorema.

II.2.2 TEOREMA

Sean $z_1 = r_1 \text{ cis } \theta_1$ y $z_2 = r_2 \text{ cis } \theta_2$:

$z_1 = z_2 \iff r_1 = r_2$ y $\theta_1 = \theta_2 + k\,(360°)$

con k = 0, 1, 2, 3, ...

DEMOSTRACION

i) Sean $z_1 = r_1 \text{ cis } \theta_1$

$z_2 = r_2 \text{ cis } \theta_2$

por II.2.1

$z_1 = (r_1 \cos \theta_1) + (r_1 \text{ sen } \theta_1) i$

$z_2 = (r_2 \cos \theta_2) + (r_2 \text{ sen } \theta_2) i$

Entonces, si $z_1 = z_2$ de II.1.2 se tiene que

$$\left.\begin{aligned} r_1 \cos \theta_1 &= r_2 \cos \theta_2 \\ r_1 \text{ sen } \theta_1 &= r_2 \text{ sen } \theta_2 \end{aligned}\right| \quad ---- (1)$$

elevando al cuadrado

$r_1^2 \cos^2 \theta_1 = r_2^2 \cos^2 \theta_2$

$r_1^2 \text{ sen}^2 \theta_1 = r_2^2 \text{ sen}^2 \theta_2$

sumando miembro a miembro las igualdades y factorizando

$$r_1^2\,(\cos^2\theta_1 + \text{sen}^2\,\theta_1) = r_2^2\,(\cos^2\theta_2 + \text{sen}^2\,\theta_2)$$

por lo que

$$r_1^2 = r_2^2$$

como $r_1,\ r_2 \geq 0$ se sigue que

$$r_1 = r_2 \qquad - - - - (2)$$

sustituyendo este resultado en (1) obtenemos

$$\cos\theta_1 = \cos\theta_2$$

y

$$\text{sen}\,\theta_1 = \text{sen}\,\theta_2$$

por lo que, de la trigonometría

$$\theta_1 = \theta_2 + k(360°),\ \text{con } k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad - - - - (3)$$

En consecuencia, de (2) y (3) se tiene que

$$z_1 = z_2 \Rightarrow r_1 = r_2 \quad \text{y} \quad \theta_1 = \theta_2 + k(360°),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

ii) Sean ahora $r_1 = r_2$ y $\theta_1 = \theta_2 + k(360°)$, con $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Entonces por la periodicidad de las funciones seno y coseno

$$r_1\cos\theta_1 = r_2\cos\theta_2$$

$$r_1\,\text{sen}\,\theta_1 = r_2\,\text{sen}\,\theta_2$$

y de II.1.2

$$(r_1\cos\theta_1) + (r_1\,\text{sen}\,\theta_1)i = (r_2\cos\theta_2) + (r_2\,\text{sen}\,\theta_2)i$$

esto es

$$r_1\,\text{cis}\,\theta_1 = r_2\,\text{cis}\,\theta_2$$

y finalmente

$z_1 = z_2$ con lo que termina la demostración. □

Como consecuencia de II.2.2 un número complejo puede tener más de un

argumento. Llamaremos "argumento principal" del número complejo, al ángulo θ tal que

$$0° \leq \theta < 360°$$

Así, como ejemplo tenemos que el argumento principal de

$$z_1 = \sqrt{2}\,\text{cis}\,750° \quad \text{es} \quad \theta_1 = 30°$$

ya que $750° = 30° + 2(360°)$ y $0° \leq 30° < 360°$

y el argumento principal de $z_2 = 2\,\text{cis}\,360°$ es $\theta_2 = 0°$

- La multiplicación y la división de números complejos en forma polar.

Una de las ventajas del manejo de números complejos en su forma polar, es la sencillez con que pueden efectuarse algunas operaciones, entre ellas la multiplicación y la división que se reducen a multiplicar módulos y sumar argumentos en el primer caso, y a dividir módulos y restar argumentos en el segundo. Así, por ejemplo, si

$$z_1 = 6\,\text{cis}\,120° \quad \text{y} \quad z_2 = 2\,\text{cis}\,40°$$

tenemos que

$$z_1 z_2 = (6)(2)\,\text{cis}\,(120° + 40°) = 12\,\text{cis}\,160°$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2}\,\text{cis}\,(120° - 40°) = 3\,\text{cis}\,80°.$$

Formalizaremos lo anterior mediante el siguiente teorema.

II.2.3 TEOREMA

Sean $z_1 = r_1\,\text{cis}\,\theta_1$ y $z_2 = r_2\,\text{cis}\,\theta_2$, entonces:

i) $z_1 z_2 = r_1 r_2\,\text{cis}\,(\theta_1 + \theta_2)$

ii) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\,\text{cis}\,(\theta_1 - \theta_2)$

DEMOSTRACION

i) Sean $z_1 = r_1 \text{ cis } \theta_1$ y $z_2 = r_2 \text{ cis } \theta_2$

esto es

$$z_1 = (r_1 \cos\theta_1) + (r_1 \operatorname{sen}\theta_1)i$$

$$z_2 = (r_2 \cos\theta_2) + (r_2 \operatorname{sen}\theta_2)i$$

de ii) de II.1.3

$$z_1z_2 = \left[(r_1\cos\theta_1)(r_2\cos\theta_2) - (r_1\operatorname{sen}\theta_1)(r_2\operatorname{sen}\theta_2)\right] + \left[(r_1\cos\theta_1)(r_2\operatorname{sen}\theta_2) + (r_1\operatorname{sen}\theta_1)(r_2\cos\theta_2)\right]i$$

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + r_1r_2(\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2)i$$

de las identidades trigonométricas

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2$$

$$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2$$

tenemos que

$$z_1z_2 = r_1r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + r_1r_2 \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)i$$

esto es

$$z_1z_2 = r_1r_2 \text{ cis } (\theta_1 + \theta_2)$$ como queríamos.

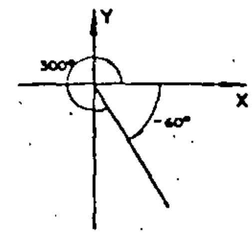
De manera semejante puede demostrarse la parte ii). □

Al efectuar la división de números complejos en forma polar, puede suceder que el argumento del divisor sea mayor que el del dividendo y en ese caso se tendrá que el resultado es un número complejo con argumento negativo. Los argumentos negativos deben interpretarse como ángulos medidos en el otro sentido; esto es, en el que giran las manecillas del reloj.

Un argumento negativo está fuera del intervalo $0° \leq \theta < 360°$, así,

para obtener el argumento principal correspondiente deberá sumarse 360° tantas veces como se requiera para quedar dentro de dicho intervalo.

Ejemplo



$$\frac{3 \text{ cis } 40°}{5 \text{ cis } 100°} = \frac{3}{5} \text{ cis } (-60°)$$

$$= \frac{3}{5} \text{ cis } (-60° + 360°)$$

$$\frac{3 \text{ cis } 40°}{5 \text{ cis } 100°} = \frac{3}{5} \text{ cis } 300°$$

- Potencias y raíces de números complejos

> **II.2.4 DEFINICION**
>
> Sean $z \in C$ y $n \in N$
>
> La potencia enésima de z, que representaremos con z^n, se define como
>
> $$z^n = \underbrace{zzz \ldots z}_{n \text{ factores}}$$

Con la definición anterior

$$z^2 = zz$$

si $z = r \text{ cis } \theta$

$$z^2 = rr \text{ cis } (\theta + \theta) = r^2 \text{ cis } (2\theta)$$

De manera semejante

$$z^3 = zzz$$

$$= z^2z$$

$$z^3 = [r^2 \text{ cis } (2\theta)][r \text{ cis } \theta]$$

$z^3 = r^2 r \text{ cis } (2\theta + \theta)$

$z^3 = r^3 \text{ cis } (3\theta)$

En general, cuando el número complejo está en forma polar podemos obtener sus potencias naturales con la llamada fórmula de De Moivre, que se expresa en el siguiente teorema y cuya demostración se deja al lector como ejercicio.

II.2.5 TEOREMA

Para todo número natural n:

$(r \text{ cis } \theta)^n = r^n \text{ cis } (n\theta)$

II.2.6 EJEMPLOS

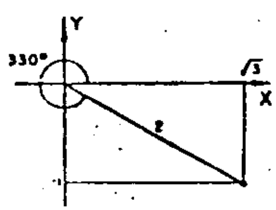
Sean $z_1 = \sqrt{2} \text{ cis } 70°$ y $z_2 = 3 \text{ cis } 225°$

a) $z_1^2 = (\sqrt{2})^2 \text{cis } (2 \times 70) = 2 \text{ cis } 140°$

b) $z_2^3 = (3)^3 \text{ cis } (3 \times 225) = 27 \text{ cis } 675 = 27 \text{ cis } 315°$

c) $z_2^4 = (3)^4 \text{ cis } (4 \times 225) = 81 \text{ cis } 900 = 81 \text{ cis } 180°$

Si un número complejo está en forma binómica, generalmente es más fácil obtener sus potencias transformándolo a la forma polar y aplicando el teorema II.2.5, como se ilustra a continuación



d) Obtener $(\sqrt{3} - i)^3$

$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$

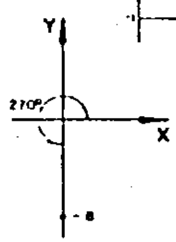
$\theta = \text{ang tan } \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = 330°$

$\sqrt{3} - i = 2 \text{ cis } 330°$

$(\sqrt{3} - i)^3 = 8 \text{ cis } 990°$

$= 8 \text{ cis } 270°$

$(\sqrt{3} - i)^3 = -8i$



e) Obtener la cuarta potencia de $\left[\dfrac{z_3 + z_2}{z_4}\right] \bar{z}_1$, donde:

$z_1 = \sqrt{2} \text{ cis } 90°$, $z_2 = 3 + 3\sqrt{3}i$, $z_3 = 2 \text{ cis } 60°$ y $z_4 = -2$.

Para sumar los números z_3 y z_2 pasamos z_3 a forma binómica

$z_3 = 2 \text{ cis } 60° = 2 \cos 60° + (2 \text{ sen } 60°)i = 1 + \sqrt{3}i$

entonces

$z_3 + z_2 = (1 + \sqrt{3}i) + (3 + 3\sqrt{3}i) = 4 + 4\sqrt{3}i$

ahora

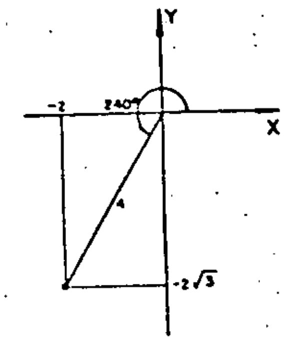
$\dfrac{z_3 + z_2}{z_4} = \dfrac{4 + 4\sqrt{3}i}{-2} = -2 - 2\sqrt{3}i$

para este número

$r = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$

$\theta = \text{ang tan } \dfrac{-2\sqrt{3}}{-2} = 240°$

$\therefore \dfrac{z_3 + z_2}{z_4} = 4 \text{ cis } 240°$



por otra parte

$z_1 = \sqrt{2} \text{ cis } 90° = 0 + \sqrt{2}i$

por lo que $\bar{z}_1 = 0 - \sqrt{2}i = \sqrt{2}\text{cis } 270°$

así

$\left[\dfrac{z_3 + z_2}{z_4}\right]\bar{z}_1 = (4\text{cis}240°)(\sqrt{2}\text{cis}270°) = 4\sqrt{2}\text{cis}510° = 4\sqrt{2}\text{cis}150°$

y finalmente la cuarta potencia buscada es

$(4\sqrt{2}\text{cis}150°)^4 = (4\sqrt{2})^4 \text{ cis } (4 \times 150°) = 1024\text{cis}600° = 1024\text{cis}240°$

□

II.2.7 DEFINICION

Sean $z \in C$ y $n \in N$

Si $\omega^n = z$ decimos que ω es raíz enésima de z, y lo representamos mediante $\omega = \sqrt[n]{z}$.

Para obtener una expresión que nos permita calcular las raíces de un número complejo, consideremos los números

$$z = r \text{ cis } \theta \quad y \quad \omega = \rho \text{ cis } \alpha$$

si ω es raíz enésima de z, entonces

$$(\rho \text{ cis } \alpha)^n = r \text{ cis } \theta$$

por lo que, de II.2.5

$$\rho^n \text{ cis } n\alpha = r \text{ cis } \theta$$

En consecuencia, de II.2.2

$$\rho^n = r$$

y

$$n\alpha = \theta + k\,(360°), \text{ con } k = 0, 1, 2$$

es decir

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

y

$$\alpha = \frac{\theta + k\,(360°)}{n}$$

en donde hemos representado con $\sqrt[n]{r}$ al número real no negativo cuya enésima potencia es igual a r.

Por lo que

$$\omega = \sqrt[n]{r} \text{ cis } \frac{\theta + k\,(360°)}{n}, \text{ con } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Veamos ahora qué valores toma el argumento de ω para los valores de $k = 0, 1, 2, \ldots$

para $k = 0$

$$\omega_0 = \sqrt[n]{r} \text{ cis } \frac{\theta}{n}$$

para $k = 1$

$$\omega_1 = \sqrt[n]{r} \text{ cis } \frac{\theta + 360°}{n} = \sqrt[n]{r} \text{ cis } \left[\frac{\theta}{n} + \frac{360°}{n}\right]$$

$\vdots$

para $k = n - 1$

$$\omega_{n-1} = \sqrt[n]{r} \text{ cis } \frac{\theta + (n-1)360°}{n} = \sqrt[n]{r} \text{ cis } \left[\frac{\theta}{n} + \frac{(n-1)360°}{n}\right]$$

para $k = n$

$$\omega_n = \sqrt[n]{r} \text{ cis } \frac{\theta + n(360°)}{n} = \sqrt[n]{r} \text{ cis } \left[\frac{\theta}{n} + 360°\right]$$

y de II.2.2 $\omega_n = \omega_0$

para $k = n + 1$

$$\omega_{n+1} = \sqrt[n]{r} \text{ cis } \frac{\theta + (n+1)360°}{n} = \sqrt[n]{r} \text{ cis } \left[\frac{\theta}{n} + \frac{360°}{n} + 360°\right]$$

y de II.2.2 $\omega_{n+1} = \omega_1$

De lo anterior podemos observar que la raíz enésima de un número complejo no es única y que existen exactamente n raíces diferentes correspondientes a los valores de $k = 0, 1, \ldots, (n - 1)$, ya que

$$\omega_n = \omega_0$$
$$\omega_{n+1} = \omega_1$$
$$\omega_{n+2} = \omega_2$$
$$\vdots$$

De esta manera hemos demostrado el siguiente teorema

II.2.8 TEOREMA

Para todo número natural n:

$$\sqrt[n]{r \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{r} \text{ cis } \frac{\theta + k\,(360°)}{n}$$

$$\text{con } k = 0, 1, 2, \ldots, (n - 1)$$

Estas n raíces quedan representadas en el Diagrama de Argand por n puntos sobre una circunferencia con centro en el origen y radio igual a $\sqrt[n]{r}$.

II.2.11 EJERCICIOS

1) Obtener la forma polar de los siguientes números complejos

$z_1 = 2 - 2i,\ z_2 = -3,\ z_3 = 5i,\ z_4 = -2i,\ z_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2) Obtener la forma binómica de los siguientes números complejos

$z_1 = \text{cis } 150°,\ z_2 = 4 \text{ cis } 210°,\ z_3 = 2\sqrt{2} \text{ cis } 315°$

3) Demostrar por inducción matemática que para todo $n \in N$

$(r \text{ cis } \theta)^n = r^n \text{ cis } (n\theta)$ (fórmula de De Moivre)

4) Efectuar las siguientes operaciones

a) $\dfrac{(1 - i) - (3 + i)}{2 \text{ cis } 120°}$

b) $(1 - i)^4 \cdot \dfrac{2 \text{ cis } 60°}{-\sqrt{3} + i}$

5) Obtener $z \in C$ tal que

$4z = 2\bar{z} + (\sqrt{3} - i)^4 \left(\frac{1}{8} \text{ cis } 30°\right)$

6) a) Determinar las soluciones de la ecuación

$z^4 + \alpha^4 = 0$ para cualquier $\alpha \in R$

b) Determinar los valores de $\alpha \in R$ para los que $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 1 - i$ son soluciones de la ecuación y obtener las otras soluciones.

II.3 FORMA DE EULER O EXPONENCIAL

En el siglo XVIII, el matemático suizo Leonard Euler estableció la relación

$e^{\theta i} = \cos\theta + i \text{ sen } \theta \quad \forall\ \theta \in R$

que nos permite escribir el número complejo $z = r \text{ cis } \theta$ en la forma

$z = re^{\theta i}$

conocida como forma de Euler o forma exponencial; en la cual r es el módulo y θ el argumento expresado en radianes.

Por ejemplo, la forma de Euler de los números complejos $z_1 = 2 \text{ cis } 225°$, $z_2 = 3 \text{ cis } 180°$ y $z_3 = \sqrt{2} \text{ cis } 60°$ es:

$z_1 = 2e^{\frac{5\pi}{4}i}$, $z_2 = 3e^{\pi i}$ y $z_3 = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{3}i}$

Con base en el teorema II.2.2 podemos establecer la relación de igualdad entre números complejos expresados en forma de Euler, de acuerdo con el siguiente teorema

II.3.1 TEOREMA

Sean $z_1 = r_1 e^{\theta_1 i}$, $z_2 = r_2 e^{\theta_2 i}$;

$z_1 = z_2 \iff r_1 = r_2$ y $\theta_1 = \theta_2 + k\ (2\pi)$

con $k = 0, 1, 2, \ldots$

- Operaciones con números complejos en forma de Euler.

Los teoremas II.2.3, II.2.5 y II.2.8, establecidos para los números complejos en forma polar, tienen expresiones análogas para los números complejos expresados en forma de Euler, las cuales se presentan a continuación

$$(r_1e^{\theta_1 i})(r_2e^{\theta_2 i}) = (r_1r_2)e^{(\theta_1 + \theta_2)i}$$

$$\frac{r_1e^{\theta_1 i}}{r_2e^{\theta_2 i}} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{(\theta_1 - \theta_2)i}$$

$$(re^{\theta i})^n = r^n\, e^{n\theta i}$$

$$\sqrt[n]{re^{\theta i}} = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{\theta + k(2\pi)}{n} i} \qquad \text{con } k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1)$$

Estas fórmulas nos permiten efectuar operaciones de multiplicación y división directamente en la forma exponencial, así como obtener potencias y raíces de números complejos expresados en dicha forma.

II.3.2 EJEMPLOS

Dados $z_1 = \sqrt{3}\, e^{\frac{\pi}{2}i}$, $z_2 = e^{\pi i}$, $z_3 = 8e^{3i}$, $z_4 = 5e^{\frac{4}{3}\pi i}$

efectuar las siguientes operaciones:

a) z_1z_2 b) $\frac{z_1}{z_2}$ c) $(z_3)^{\frac{2}{3}}$ d) $\frac{z_1 + z_2}{z_4}$

Solución

a) $z_1z_2 = (\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i})(e^{\pi i}) = \sqrt{3}\, e^{\frac{3}{2}\pi i}$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}\, e^{\frac{\pi}{2}i}}{e^{\pi i}} = \sqrt{3}\, e^{-\frac{\pi}{2}i} = \sqrt{3}\, e^{\frac{3}{2}\pi i}$

ya que el argumento principal θ, en radianes, es tal que $0 \leq \theta < 2\pi$

c) $(z_3)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(8e^{3i})^2} = \sqrt[3]{64\, e^{6i}} = \sqrt[3]{64}\, e^{\frac{6 + k(2\pi)}{3}i}$

con $k = 0,\ 1,\ 2$

$$(z_3)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64}\, e^{\frac{6 + k(2\pi)}{3}i} = \left|\begin{array}{ll} 4\, e^{2i} & \text{con } k = 0 \\ 4\, e^{(2 + \frac{2}{3}\pi)i} & \text{con } k = 1 \\ 4\, e^{(2 + \frac{4}{3}\pi)i} & \text{con } k = 2 \end{array}\right.$$

d) Para efectuar la adición indicada en el numerador, transformaremos los números z_1 y z_2 a su forma binómica y, posteriormente, la suma $z_1 + z_2$ a la forma de Euler.

$$z_1 = \sqrt{3}\, e^{\frac{\pi}{2}i} = (\sqrt{3} \cos \tfrac{\pi}{2}) + (\sqrt{3} \operatorname{sen} \tfrac{\pi}{2})i = 0 + \sqrt{3}\, i$$

$$z_2 = e^{\pi i} = (\cos \pi) + (\operatorname{sen} \pi)i = -1 + 0i$$

$$z_1 + z_2 = -1 + \sqrt{3}\, i = 2\, e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

Ahora, efectuando la división obtenemos

$$\frac{z_1 + z_2}{z_4} = \frac{2\, e^{\frac{2}{3}\pi i}}{5\, e^{\frac{4}{3}\pi i}} = \frac{2}{5}\, e^{-\frac{2}{3}\pi i} = \frac{2}{5}\, e^{\frac{4}{3}\pi i}$$

□

- **Logaritmo natural de un número complejo.**

Una vez que hemos manejado la expresión $e^{\theta i}$ podemos aceptar la existencia de exponentes complejos. Esto nos permite generalizar el concepto de logaritmo para el caso de los números complejos, como sigue

II.3.3 DEFINICION

Sea $z \in C$

El logaritmo natural de z, que representaremos con $L(z)$, se define como

$$L(z) = w \quad \text{si} \quad e^w = z$$

A partir de esta definición deduciremos una fórmula para la obtención de logaritmos de números complejos

Sean $z = r\,e^{\theta i}$ y $w = a + bi$

si $w = L(z)$, entonces por II.3.3

$e^{w} = z$; es decir

$e^{a + bi} = r\,e^{\theta i}$

$e^{a}\,e^{bi} = r\,e^{\theta i}$

En consecuencia, de II.3.1

$e^{a} = r$

y

$b = \theta + k(2\pi)$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$

Es decir

$a = Lr$

y

$b = \theta + 2k\pi$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$

En donde Lr representa el logaritmo natural del número real no negativo r.

Con lo anterior hemos demostrado el siguiente teorema

II.3.4 TEOREMA

Si $z = r\,e^{\theta i}$, entonces:

$L(z) = Lr + (\theta + 2k\pi)i$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$

Así, por ejemplo, el logaritmo natural del número complejo $z = 2\,e^{\frac{\pi}{3}i}$ es:

$L(z) = L(2) + (\frac{\pi}{3} + 2k\pi)i$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$

Es decir

$L(z) = L(2) + \frac{6k + 1}{3}\pi i$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$

Esta expresión representa a una infinidad de números complejos, uno para cada valor de k, esto es:

$L(2) + \frac{\pi}{3}i$, para $k = 0$

$L(2) + \frac{7}{3}\pi i$, para $k = 1$

$L(2) + \frac{13}{3}\pi i$, para $k = 2$

$\vdots \qquad \vdots$

Cuando nos interesa un solo logaritmo, en general se considera el que corresponde al argumento principal del número; es decir, al que se obtiene con $k = 0$ cuando $0 \leq \theta < 2\pi$. A este logaritmo se le conoce como "logaritmo principal".

II.3.5 EJEMPLOS

Obtener el logaritmo principal de cada uno de los siguientes números:

a) cis 45° b) $-\sqrt{3} - i$ c) -4

Solución

a) $L(\text{cis } 45°) = L(e^{\frac{\pi}{4}i}) = L(1) + \frac{\pi}{4}i = 0 + \frac{\pi}{4}i \doteq 0.7854\,i$

b) $L(-\sqrt{3} - i) = L(2\,e^{\frac{7}{6}\pi i}) = L(2) + \frac{7}{6}\pi i \doteq 0.6932 + 3.6652\,i$

c) $L(-4) = L(4\,e^{\pi i}) = L(4) + \pi i \doteq 1.3863 + 3.1416\,i$

El argumento correspondiente a un número real negativo es π, por lo que su logaritmo natural no es un número real; es por esto que cuando se considera el logaritmo natural como una función real de variable real no está definida para números negativos.

II.3.6 EJERCICIOS

1) Efectuar las siguientes operaciones

a) $1 - e^{-\pi i}$ b) $\dfrac{1 - e^{\frac{\pi}{2}i}}{1 + e^{\frac{\pi}{2}i}}$ c) $i + e^{2\pi i}$

2) Representar en el Diagrama de Argand las soluciones de la ecuación

$$\frac{4 - 4i}{z^{\frac{1}{4}}} = 2\,e^{\pi i}$$

3) Dados $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$, $z_3 = e^{2\pi i}$, $z_4 = 8 \text{ cis } 30°$

obtener los números $z \in C$, que satisfacen a la ecuación

$$z_1 + z_2 = \frac{z_3 z_4}{z^{\frac{1}{2}}}$$

4) Obtener todos los valores de $x, y \in R$ tales que:

a) $x + yi = xe^{yi}$

b) $e^{x + yi} = -1$

5) Obtener todos los números $z \in C$ tales que:

a) $z = \sqrt[3]{(-9)(3\,e^{\frac{\pi}{2}i})}$

b) $z = L\left[\dfrac{(1 + i) + \sqrt{2} \text{ cis } 45°}{-\sqrt{2}}\right]$