INGENIERIA

APUNTES DE VARIABLE COMPLEJA

Ing. Juan Aguilar Pascual
Dr. Guillermo Monsiváis Galindo

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

APUNTES DE

VARIABLE COMPLEJA

ING. JUAN AGUILAR PASCUAL

DR. GUILLERMO MONSIVÁIS GALINDO

AGUILAR PASCUAL, Juan y Guillermo Monsiváis Galindo.
Apuntes de variable compleja. México, UNAM, Facultad de Ingeniería, 2004, 298 p.

Apuntes de variable compleja

Ciudad Universitaria, 04510, México, D.F.
ISBN 970-32-2119-X

Primera edición, 2004.

Impreso y hecho en México.

PRESENTACIÓN

La Facultad de Ingeniería ha decidido realizar una serie de ediciones provisionales de obras recientemente elaboradas por académicos de la institución, como material de apoyo para sus clases, de manera que puedan ser aprovechadas de inmediato por alumnos y profesores. Tal es el caso de los *Apuntes de variable compleja*, elaborados por los profesores Juan Aguilar Pascual y Guillermo Monsiváis Galindo.

Se invita a los estudiantes y profesores a que comuniquen a los autores las observaciones y sugerencias que mejoren el contenido de la obra, con el fin de que se incorporen en una futura edición definitiva.

INTRODUCCIÓN

Estas notas cubren el material que corresponde a la parte de Variable Compleja del curso de Matemáticas Avanzadas que se imparte en la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Se han escrito con la idea de que puedan ser útiles tanto a los profesores como a los alumnos. De acuerdo con el programa de esta materia, la parte de Variable Compleja debe verse en sólo siete semanas (21 horas) y está dirigido a alumnos que estudian por primera vez funciones complejas de variable compleja (aunque se supone que ya han adquirido cierta familiaridad con los números complejos en cursos previos). Por lo tanto, el contenido de programa es en realidad sólo una introducción al tema y contempla únicamente los aspectos más importantes de los que un curso más completo cubriría. Los temas más avanzados que contempla el programa son los conceptos de serie de Laurent, residuos y, en el último subtema, el teorema del residuo. El material se ha presentado de manera que constituya una exposición relativamente autoconsistente de los temas cubiertos. En este sentido, estas notas pueden usarse también como un punto de referencia respecto a la profundidad y extensión con la que debe verse el contenido, a la vez que presentan en forma resumida y selecta sólo lo que corresponde al temario.

El número de hojas que hemos dedicado a cada subtema no es proporcional al tiempo que cada profesor deberá dedicar a cada subtema y se espera que el profesor podrá acortarlo o extenderlo de acuerdo con sus necesidades. Por ejemplo, al subtema de series de Laurent hemos dedicado muchas hojas, pero en la primera parte se discuten muchos conceptos que ya debieron haberse visto en cursos anteriores y por lo tanto, podrá verse relativamente rápido. La razón de haber incluido ese material es que hemos querido dar una presentación coherente y completa y tener a la mano una referencia de resultados ya estudiados. Debe advertirse, sin embargo, que no debe pasarse por alto esa parte y que se dé cuando menos una lectura rápida, prestando atención especial a los puntos en los que las series reales y complejas tienen propiedades diferentes.

Esperamos que estas notas cumplan satisfactoriamente su cometido y estaremos siempre dispuestos a recibir cualquier comentario o sugerencia de nuestros colegas o alumnos que contribuyan a mejorarlas, lo cual agradecemos de antemano muy sinceramente.

Ing. Juan Aguilar Pascual
Dr. Guillermo Monsiváis Galindo

TEMA I

VARIABLE COMPLEJA

PÁGINA

I.1 Funciones de variable compleja.

En esta sección se introducirá el concepto de función de variable compleja, así como algunos tipos de funciones de gran utilidad en el desarrollo de la teoría.

Concepto de función.

Una función de variable compleja opera de manera similar a las funciones reales de variable real, excepto que ahora la función puede operar sobre los números complejos y producir números complejos.

Definición I.1.1. *Sean A y B conjuntos de números complejos. Una* ***función*** *compleja de variable compleja univaluada f definida sobre A (o más brevemente una función univaluada f) es una regla que asigna o asocia a cada número complejo z de A uno y sólo un número complejo w de B.*

Mediante notación de conjuntos la anterior definición se escribe como

$$f: A \to B$$

Al número w también se le denota por $f(z)$, esto es,

$$w = f(z) \text{ [1]} \qquad \ldots (1)$$

y se dice que la función f evaluada en z es igual a w.

A la *Ecuación (1)* se le conoce como *regla de correspondencia*; a z se le llama *variable independiente* y a w *variable dependiente* o *imagen* de z bajo f; z es la *preimagen* o *imagen inversa* de w; A es el *dominio* de definición de la función y B el *codominio*; al conjunto de todos los valores tomados por la función f al evaluarse sobre A se le llama *rango* o *recorrido* de la función o *conjunto imagen* de A bajo f y se le denota por $f(A)$. Evidentemente $f(A)$ es un subconjunto de B.

[1] Estas letras provienen del alemán: z significa "zahl" (*número*) y w significa "wert" (el *valor* correspondiente).

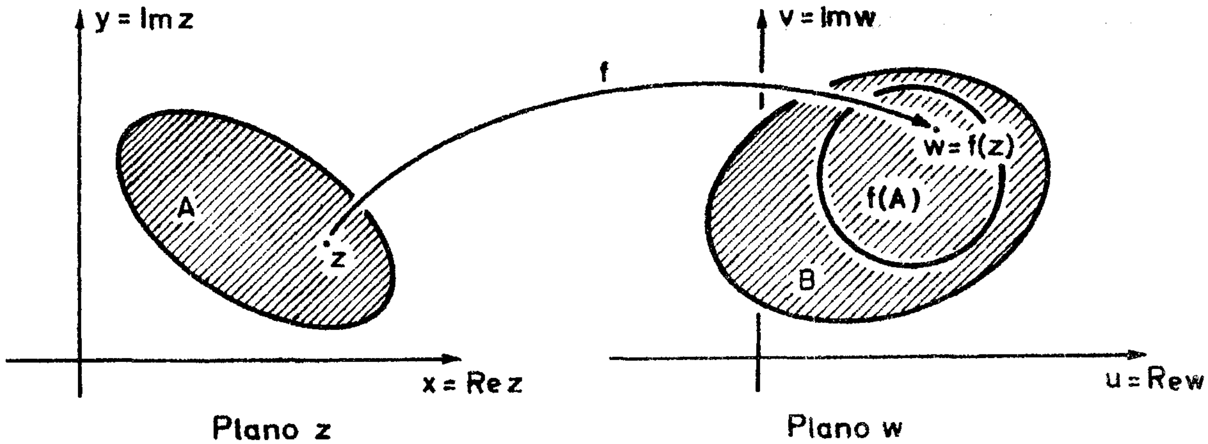

Figura I.1.1. *Representación de una función compleja de variable compleja.*

Los valores que toma variable compleja $z = x + iy$ normalmente representan puntos en el plano de Argand o como un punto que se mueve tomando valores en todo el plano complejo $\mathbb{C}$ (conocido como *plano* z) y los valores correspondientes de la variable $w = u + iv$ como puntos en el *plano* w.

Todo lo mencionado anteriormente se ilustra gráficamente en la *Figura I.1.1.*

Es conveniente hacer notar que para definir una función univaluada es necesario dar tanto su regla de asignación como su dominio de definición. Cuando no se indique explícitamente el dominio, se sobreentenderá que se toma el mayor conjunto posible.

Ejemplo I.1.1. Sea $w = f(z) = z^2$.

El valor de w correspondiente a $z = 2 - i$ o f evaluada en $z = 2 - i$ es

$$\begin{aligned} w = f(2 - i) &= (2 - i)^2 \\ &= 4 - 4i + i^2 \\ &= 3 - 4i \end{aligned}$$

Así, decimos que mediante la regla de correspondencia $f(z) = z^2$ al número complejo $z = 2 - i$ se le asocia un único número complejo $w = 3 - 4i$ o que $w = 3 - 4i$ es la imagen de $z = 2 - i$ bajo $f(z) = z^2$.

El complejo $z = 2 - i$ es un elemento del dominio de f, es decir, $2 - i \in A = D_f$.

El número complejo $w = 3 - 4i$ es un elemento del recorrido de la función f, es decir, $3 - 4i \in f(A) = R_f \subset B$.

Como todo número complejo z se puede elevar al cuadrado de manera única, la función $f(z) = z^2$ es univaluada y su dominio es el conjunto de los números complejos, es decir, $A = D_f = \mathbb{C}$.

Sabemos que para $w = z^2$

$$|w| = |z^2| = |z|^2$$

y

$$\arg(w) = \arg(z^2) = 2\arg(z) \qquad \text{si} \quad z \neq 0$$

Así, $f(z) = z^2$ eleva al cuadrado los módulos y duplica los argumentos. Geométricamente, podemos pensar en que $f(z) = z^2$ hace girar a los puntos z en sentido contrario a las manecillas del reloj duplicando sus argumentos, al mismo tiempo que eleva al cuadrado sus módulos, obteniéndose de esta manera los puntos w.

También, todo número complejo w puede obtenerse elevando al cuadrado un número complejo z, es decir, dada cualquier $w \in \mathbb{C}$ existe alguna z tal que $w = z^2$, por lo que el recorrido de f es $f(A) = \mathbb{C}$.

Como función univaluada de todo el plano z en todo el plano w, $w = z^2$ es *suprayectiva* o *sobre* pero, como para cada $w \neq 0$ hay dos valores de z tales que $w = z^2$, no es *inyectiva* o *uno a uno*.

Mediante una restricción adecuada, la función univaluada $w = z^2$ se vuelve uno a uno. Por ejemplo, es claro que al primer cuadrante en el plano z definido mediante el conjunto

$$A = \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \arg(z) \leq \pi/2 \}$$

$w = z^2$ le asocia todo el semiplano superior en el plano w

$$f(A) = \{ w \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \arg(w) \leq \pi \}$$

Esta función unívoca es sobre y uno a uno, consecuentemente es *biyectiva* porque dada cualquier $w \in f(A)$, existe una y sólo una $z \in A$ tal que $w = z^2$.

Similarmente, al semiplano superior se le asocia biyectivamente la totalidad del plano.

A veces es ilustrativo examinar los efectos de $w = z^2$ en curvas particulares del plano z. Por ejemplo, a $|z| = r$, circunferencia de radio r con centro en el origen en el plano z, se le asocia $|w| = r^2$, circunferencia de radio r^2 con centro en el origen en el plano w. Sin embargo, conforme z recorre la circunferencia $|z| = r$, en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj, un ángulo θ, w recorre la circunferencia $|w| = r^2$, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, un ángulo 2θ. Entonces, cuando z da una vuelta completa, w da dos. En términos vectoriales esto significa que el vector de posición del punto w gira dos veces más rápido que el vector de posición del punto z. ■

En el caso real, cuando para una regla dada f se tiene que a cada valor de la variable independiente le corresponden dos o más valores de la variable dependiente se dice que dicha regla no define a una función sino a una relación. Ahora, a diferencia de lo anterior, si la función f es una regla tal que a cada número complejo del dominio A le corresponden varios números complejos w_1, w_2, ... de B, no diremos que f es una relación, sino que f es una *función multívoca o multivaluada* de z.

Una función multivaluada puede considerarse como una colección de funciones univaluadas; cada miembro de esta colección será llamado una *rama* de la función. Se acostumbra considerar a algún miembro particular de la colección como la *rama principal* de la función multivaluada y el valor de la función correspondiente a esa rama como el *valor principal*.

Ejemplo I.1.2. El caso más típico de una función multivaluada es el de $f(z) = \sqrt{z}$, la raíz cuadrada de z, la cual sabemos está dada por

$$\begin{aligned} w = f(z) &= \sqrt{z} = \sqrt{r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)} \\ &= \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta+2\pi k}{2}\right)\right]; \qquad k = 0,\ 1. \\ &= \begin{cases} \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right)\right] \end{cases} \end{aligned}$$

donde $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ está en la forma polar o trigonométrica, $r = |z| > 0$ (por lo que el dominio de esta función es $A = D_f = \mathbb{C} - \{0\}$) y $\theta = \arg(z)$. Así, w es una función bivaluada de z.

Para el segundo valor de w se tiene

$$w_2 = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right) + i\ \text{sen}\left(\frac{\theta+2\pi k}{2}\right)\right] = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right) + i\ \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right]$$
$$= -\sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\ \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = -w_1$$

por lo que w_1 y w_2 pueden llamarse las funciones raíz cuadrada "positiva" y "negativa" de z.

Más adelante, en esta misma sección, conoceremos a la función exponencial y sus propiedades, con lo cual el desarrollo anterior se simplificará.

Por lo tanto, podemos considerar a w como una colección de de dos funciones unívocas llamadas ramas de la función multivaluada, por medio de restricciones apropiadas de θ. De este modo, por ejemplo, podemos escribir

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}$$

donde tomamos los dos intervalos posibles para θ, dados por

$$-\pi < \theta \leq \pi, \quad \pi < \theta \leq 3\pi$$

y todo el resto de intervalos produce repeticiones de éstos.

El primer intervalo, $-\pi \leq \theta < \pi$, se llama el *intervalo principal* [2] de θ y corresponde a la *rama principal* de la función multívoca. Al valor que toma θ dentro del intervalo principal se denomina *argumento principal* de z.

Cualquier otro intervalo de longitud 2π puede también tomarse, por ejemplo,

$$0 \leq \theta < 2\pi, \quad 2\pi \leq \theta < 4\pi$$

Si se elige $0 \leq \theta < 2\pi$, con lo cual estamos decidiendo cuál de las dos posibles raíces cuadradas obtenemos, entonces se tiene que $0 \leq \theta/2 < \pi$, por lo que $\sqrt{z}$ permanece siempre en el semiplano superior al reducirse los ángulos a la mitad. De la misma forma, si se elige

[2] Algunos autores toman como intervalo principal a $[-\pi, \pi)$ ó $[0, 2\pi)$.

$-\pi < \theta \leq \pi$, se tiene que $-\pi/2 < \theta/2 \leq \pi/2$, por lo que $\sqrt{z}$ toma sus valores en el semiplano de la derecha en lugar del semiplano superior.

Se pueden construir otras ramas de la función raíz cuadrada especificando qu el argumento de z dado por $\theta = \arg(z)$ está en el intervalo $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$. La rama correspondiente, denotada como w_α, es

$$w_\alpha = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\right)$$

donde $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \neq 0$ y $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$.

De esta manera, los valores de la función $\sqrt{z}$ puede obtenerse en cualquier "semiplano".

Comenzando con la rama principal

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\,e^{i\theta/2}, \qquad -\pi < \theta \leq \pi$$

después de que z da una vuelta completa en sentido positivo alrededor del origen, θ aumenta en 2π para dar la otra rama de la función, después de lo cual retornamos a la rama principal.

Puesto que valores diferentes de $f(z)$ se obtienen al encerrar sucesivamente a $z = 0$, a este punto lo llamamos *punto de ramificación*.

Podemos obtener una función unívoca en particular, usualmente la rama principal, restringiendo θ de tal modo que no pueda darse más de una vuelta completa alrededor del punto de ramificación.

En el caso del intervalo principal $-\pi < \theta \leq \pi$ esto se realiza haciendo un corte, llamado *corte de ramificación* o *rama*, sobre la parte no negativa del eje real, cuyo propósito es indicar que no podemos cruzarlo, ya que al hacerlo obtendríamos otra rama de la función.

Si se escoge como intervalo para θ a $[\alpha, \alpha + 2\pi)$, la recta de ramificación que debe tomarse debe ser la semirrecta o "rayo" $r \geq 0$, $\theta = \alpha$, en el plano z con origen en el punto de ramificación.

Más adelante, en esta misma sección, veremos otra función multivaluada muy interesante: la *logaritmo natural*. ■

En lo sucesivo, la palabra *función* significará función univaluada, a menos que se diga lo contrario.

Sean u y v las partes real e imaginaria de w y sean x y y las partes real e imaginaria de z, es decir, $w = u + iv$ y $z = x + iy$. Entonces, puesto que w es una función de z, el valor que tome w (es decir, los que tomen u y v) va a depender de los que tome la variable independiente z (es decir, de los que tomen x y y) y se puede escribir

$$u + iv = f(z) = f(x + iy)$$

Esta ecuación indica que la función f también tiene una parte real y una imaginaria, es decir,

$$f(x + iy) = f_1(x,y) + i f_2(x,y)$$

y que por lo tanto

$$\begin{aligned} u &= f_1(x,y) \\ v &= f_2(x,y) \end{aligned}$$

Así, una función compleja f es equivalente a dos funciones reales f_1 y f_2, dependiendo ambas de las variables reales x y y. Frecuentemente se utiliza un mismo símbolo para denotar a las funciones f_1 y f_2 y su valor en (x,y). Así se escribe

$$f(x + iy) = u(x,y) + i\, v(x,y) \qquad \ldots (2)$$

y

$$\begin{aligned} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \end{aligned} \qquad \ldots (3)$$

Como la representación geométrica del complejo $z = x + iy$ es la misma que la del punto $P(x,y)$ e igualmente con $w = u + iv$ y $P'(u,v)$, la función de la *Ecuación (2)* puede interpretarse como una *transformación*, *aplicación* o *mapeo*

$$T_f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

del plano en sí mismo definido mediante la regla de correspondencia

$$T_f(x,y) = [u(x,y),\ v(x,y)]$$

cuya naturaleza geométrica se determina analizando cómo se transforman algunas regiiones especiales del plano bajo su acción, porque su gráfica no es representable.

Asimismo, dadas las *Ecuaciones (3)*, $P(x,y)$ es un punto en coordenadas cartesianas en el plano xy (plano z) y $P'(u,v)$ es su correspondiente en *coordenadas curvilíneas* en el plano uv (plano w).

Ejemplo I.1.3. Expresar a la función

$$f(z) = z^2$$

en la forma $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$.

Solución. Como $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 \\ &= \left(x^2 - y^2\right) + i(2xy) \end{aligned}$$

de donde

$$u(x,y) = \mathrm{Re}[f(z)] = x^2 - y^2 \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = \mathrm{Im}[f(z)] = 2xy \qquad \blacksquare$$

Ejemplo I.1.4. Obtener las imágenes en el plano w de las rectas paralelas a los ejes real e imaginario en el plano z, bajo la función $w = f(z) = z^2$.

Solución. Como para una recta paralela al eje imaginario $x = \mathrm{Re}(z) = a$, con a constante, se tiene que $z = a + iy$, entonces del *Ejemplo I.1.3* su imagen será

$$u + iv = w = f(a + iy) = \left(a^2 - y^2\right) + i(2ay)$$

de donde se obtienen las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} u = a^2 - y^2 \\ v = 2ay \end{cases}$$

y al eliminar el parámetro y llegamos a

$$v^2 = 4a^2y^2 = 4a^2(a^2 - u) = -4a^2(u - a^2)$$

por lo que la recta $x = a$ se transforma en una parábola en el plano w con vértice en el punto $(a^2, 0)$, eje de la parábola coincidente con el eje real y que se abre hacia la izquierda.

Análogamente a lo anterior, se puede probar que la recta $y = \mathrm{Im}(z) = b$ se mapea en la parábola $v^2 = 4b^2(u + b^2)$.

Vemos así que tanto las rectas verticales como las horizontales se aplican en parábolas. ■

Si se usan coordenadas polares r y θ, en vez de las cartesianas x y y, sabemos que un número complejo no nulo se puede escribirse en la forma polar o trigonométrica

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

o más compactamente en forma exponencial o de Euler como

$$z = r\,e^{i\theta}$$

mediante la ecuación

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

que define el símbolo $e^{i\theta}$ para toda $\theta \in \mathbb{R}$, conocida como *fórmula de Euler* [3].

Así, ahora tenemos que u y v las partes real e imaginaria de $w = f(z)$ van a depender de las variables r y θ, es decir,

$$u + i\,v = f(r\,e^{i\theta})$$

por lo que en este caso se puede escribir

$$u + i\,v = f_1(r, \theta) + i\,f_2(r, \theta) \qquad \dots (4)$$

[3] La elección del símbolo $e^{i\theta}$ quedará justificada en esta misma sección un poco más adelante cuando hablemos de la función exponencial.

Ejemplo I.1.5. Expresar a la función

$$f(z) = z + \frac{1}{z}, \qquad z \in \mathbb{C} - \{0\}$$

en la forma $f(z) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta)$.

Solución. De la fórmula de Euler y mediante algunas operaciones obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= z + \frac{1}{z} = r e^{i\theta} + \frac{1}{r e^{i\theta}} \\ &= r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{1}{r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)} \\ &= r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta}{r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta)} \\ &= r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ &= \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}$$

de donde

$$u(r,\theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta \qquad \text{y} \qquad v(r,\theta) = \left(r - \frac{1}{r}\right)\mathrm{sen}\,\theta$$

Posteriormente, cuando conozcamos más sobre la función exponencial veremos que este ejemplo puede resolverse más fácilmente. ■

Si en cualquiera de las *Ecuaciones (2)* o *(4)* la función v es siempre cero, entonces f es una *función real de variable compleja.*

Algunas funciones elementales.

Función polinomial.

Definición I.1.2. *Una función polinomial es de la forma*

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *son constantes complejas. Si* $a_n \neq 0$, *el entero no negativo* n *es el grado del polinomio.*

Se ve que para cualquier valor complejo z se puede obtener un valor $w = p(z)$ bien definido, realizando sumas, restas y multiplicaciones; de modo que $p(z)$ representa una función de z definida para todo valor complejo z, es decir, definida para todo el plano de los números complejos (el dominio es $\mathbb{C}$).

Cuando $n = 1$ la función polinomial se reduce a

$$p(z) = az + b$$

llamada *función lineal* y cuando $n = 2$ la función polinomial queda como

$$p(z) = az^2 + bz + c$$

en cuyo caso recibe el nombre de *función cuadrática*, y así sucesivamente para otros valores de n.

Ejemplo I.1.6. *Traslación.*

Se llama traslación o "deslizamiento" por el vector $z_0 \in \mathbb{C}$ a la transformación

$$f(z) = z + z_0, \qquad z \in \mathbb{C}$$

obtenida de la función lineal haciendo $a = 1$ y $b = z_0$. Su efecto consiste en desplazar al punto z horizontalmente $\text{Re}(z_0)$ unidades y verticalmente $\text{Im}(z_0)$ unidades. Evidentemente una traslación por el vector $z_0 \in \mathbb{C}$ transforma un conjunto arbitrario $A \subset \mathbb{C}$ en el conjunto trasladado

$$\begin{aligned}
f(A) &= \{ w \in \mathbb{C} \mid w = z + z_0,\ z \in A \} \\
&= \{ u + iv \in \mathbb{C} \mid u + iv = (x + iy) + (x_0 + iy_0),\ x + iy \in A \} \\
&= \{ u + iv \in \mathbb{C} \mid u + iv = (x + x_0) + i(y + y_0),\ x + iy \in A \} \\
&= \{ (x + x_0) + i(y + y_0) \mid x + iy \in A \}
\end{aligned}$$

En particular, el disco con centro en el origen y radio $R > 0$ se transforma en el disco con centro en $z_0 = x_0 + iy_0$ y radio R. ■

Ejemplo I.1.7. *Homotecia.*

Se llama homotecia de razón $\lambda > 0$ a la transformación

$$f(z) = \lambda z, \qquad z \in \mathbb{C}$$

obtenida de la función lineal haciendo $a = \lambda$ y $b = 0$. Cuando $\lambda > 1$ la homotecia recibe el nombre de *dilatación*, mientras que si $\lambda < 1$ recibe el nombre de *contracción*. Finalmente, cuando $\lambda = 1$ nos proporciona la *identidad* de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ en sí mismo, es decir, $f(A) = A$.

Evidentemente, una homotecia de razón $\lambda > 0$ transforma el disco con centro en el origen y radio $R > 0$ en el disco con centro en el origen y radio λR. ■

Ejemplo I.1.8. *Rotación-homotecia.*

Una rotación-homotecia es una transformación de la forma

$$w = az \qquad \text{con} \quad a \neq 0$$

obtenida de la función lineal haciendo $b = 0$. Esta transformación es diferente de la del ejemplo anterior en que el coeficiente de z es una constante real positiva, mientras que en éste otro es una constante compleja no nula.

Primero, observemos que

$$|w| = |az| = |a||z|$$

de modo que el módulo del punto imagen w es el módulo de z multiplicado por la constante positiva $|a|$. El vector que va del origen a w en el plano w tiene magnitud $|a|$ multiplicada por la magnitud del vector que va del origen a z en el plano z, por lo que recibe el nombre de homotecia.

Además,

$$\arg(w) = \arg(az) = \arg(z) + \arg(a)$$

así, el mapeo gira a z en el sentido antihorario un ángulo $\arg(a)$, por lo que recibe el nombre de rotación.

Si $|a| = 1$, la transformación se llama *rotación pura*. En este caso, no hay dilatación ni contracción y el mapeo simplemente gira los puntos un ángulo igual a $\arg(a)$. Si $\arg(a) = \theta$, podemos escribir a la constante a en forma de Euler, con lo cual una rotación pura por un ángulo θ se puede escribir como

$$w = e^{i\theta} z \qquad \blacksquare$$

Función racional o fraccional.

Definición I.1.3. *Una **función racional o fraccional** es de la forma*

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

donde $p(z)$ y $q(z)$ son funciones polinomiales.

De esta forma se obtiene un valor de $w = r(z)$ bien definido, que se calcula realizando las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética, excepto cuando $q(z) = 0$, es decir, cuando z es una raíz de $q(z)$. $r(z)$ define a w como una función racional de la variable z definida en todo el plano de Argand, salvo para los puntos que corresponden a las raíces del denominador. Con símbolos

$$\begin{aligned} D_r &= \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} \mid q(z) = 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid q(z) \neq 0\} \end{aligned}$$

Una función polinomial se puede considerar el caso extremo y especial de una función racional de z cuyo denominador es un polinomio de grado cero.

El caso especial

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde $ad - bc \neq 0$ se llama usualmente *función racional lineal, bilineal o de Möbius.*

La restricción $ad - bc \neq 0$ se introduce para evitar que w sea constante. Puesto que si $c \neq 0$, sumando y restando a/c a w se obtiene

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{a}{c} - \frac{a}{c} + \frac{az+b}{cz+d} \\
&= \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cz+d)}
\end{aligned}
$$

y como $ad - bc \neq 0$, queda descartada la posibilidad de que $w = a/c$. Mientras que si $c = 0$, la restricción obliga a que $a \neq 0$ y $d \neq 0$, pero entonces el caso en el que $w = b/d$ queda también excluido.

Ejemplo I.1.9. *Inversión.*

La transformación

$$
w = f(z) = \frac{1}{z}, \qquad z \in \mathbb{C} - \{0\}
$$

no es lineal, se obtiene de la función de Möbius haciendo $a = d = 0$ y $b = c = 1$.

Esta aplicación envía el interior del disco unidad perforado en el origen, en el exterior del disco unidad $|z| > 1$ y viceversa, dejando invariante la circunferencia unidad. Por esta razón se dice que la función f es una inversión.

Efectivamente, sabemos que

$$
|w| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}
$$

y

$$
\arg(w) = \arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(1) - \arg(z) = -\arg(z)
$$

Como $w = 1/z = \bar{z}/|z|^2$ la imagen del del punto z es el punto w obtenido de la multiplicación de $\bar{z}$ (el conjugado de z) por el número real positivo $|z|^2$. Geométricamente, al punto z se refleja respecto al eje x (eje real del plano z) y luego se le multiplica por $|z|^2$.

Así, para los puntos en el plano z del interior de la circunferencia unitaria sin el origen, es decir, las z tales que $0 < |z| < 1$, se tiene que $|w| = 1/|z| > 1$, que son los puntos exteriores al círculo unitario en el plano w. Los puntos que están sobre la circunferencia unitaria se mapean en puntos sobre ella misma, ya que $|w| = 1/|z| = 1$ si $|z| = 1$. ■

Ejemplo I.1.10. Mostrar que la transformación de Möbius puede escribirse como una sucesión de transformaciones de traslación, rotación-homotecia e inversión.

Solución. Sean las transformaciones de traslación, inversión, rotación-homotecia y traslación definidas respectivamente por

$$\begin{aligned} T_1(z) &= z + \frac{d}{c} \\ T_2(z) &= \frac{1}{z} \\ T_3(z) &= \left(\frac{bc - ad}{c^2}\right) z \\ T_4(z) &= z + \frac{a}{c} \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} T(z) &= (T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1)(z) = (T_4 \circ T_3 \circ T_2)[T_1(z)] \\ &= (T_4 \circ T_3 \circ T_2)\left(z + \frac{d}{c}\right) = (T_4 \circ T_3 \circ T_2)\left(\frac{cz + d}{c}\right) \\ &= (T_4 \circ T_3)\left[T_2\left(\frac{cz+d}{c}\right)\right] = (T_4 \circ T_3)\left[\frac{c}{cz+d}\right] \\ &= T_4\left[T_3\left(\frac{c}{cz+d}\right)\right] = T_4\left[\left(\frac{bc-ad}{c^2}\right)\left(\frac{c}{cz+d}\right)\right] \\ &= T_4\left[\frac{bc-ad}{c(cz+d)}\right] = \frac{bc-ad}{c(cz+d)} + \frac{a}{c} \\ &= \frac{(bc-ad) + a(cz+d)}{c(cz+d)} = \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

la cual es lo que se quería demostrar. ■

Ejemplo I.1.11. Mostrar que una transformación de Möbius mapea circunferencias del plano complejo z en circunferencias del plano w, donde se incluyen las rectas como circunferencias de radio infinito.

Solución. La ecuación de una circunferencia en el plano xy tiene la forma

$$A\left(x^2 + y^2\right) + Dx + Ey + F = 0$$

donde $A, D, E, F \in \mathbb{R}$. Este lugar geométrico es una circunferencia si $A \neq 0$ y una línea recta si $A = 0$ con D y E no ambas cero. La ecuación de la circunferencia en términos de $z = x + iy$, es decir, usando las coordenadas conjugadas $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ y $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} Az\bar{z} + D\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + E\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + F &= 0 \\ Az\bar{z} + \left(\frac{D}{2} + \frac{E}{2i}\right)z + \left(\frac{D}{2} - \frac{E}{2i}\right)\bar{z} + F &= 0 \\ Az\bar{z} + \left(\frac{D}{2} - \frac{E}{2}i\right)z + \left(\frac{D}{2} + \frac{E}{2}i\right)\bar{z} + F &= 0 \\ \alpha z\bar{z} + \delta z + \bar{\delta}\bar{z} + \phi &= 0 \end{aligned}$$

donde $\alpha = A \in \mathbb{R}$, $\delta = \frac{D}{2} - \frac{E}{2}i \in \mathbb{C}$ y $\phi = F \in \mathbb{R}$.

Cuando $\alpha = 0$ la circunferencia degenera en una recta.

Por la transformación de traslación, $w = z + z_0$ o $z = w - z_0$, la ecuación de la circunferencia se convierte en

$$\begin{aligned} \alpha\left(w - z_0\right)\left(\overline{w - z_0}\right) + \delta\left(w - z_0\right) + \bar{\delta}\left(\overline{w - z_0}\right) + \phi &= 0 \\ \alpha\left(w - z_0\right)\left(\bar{w} - \bar{z}_0\right) + \delta\left(w - z_0\right) + \bar{\delta}\left(\bar{w} - \bar{z}_0\right) + \phi &= 0 \\ \alpha w\bar{w} - \left(\alpha\bar{z}_0 + \delta\right)w - \left(\alpha z_0 + \bar{\delta}\right)\bar{w} + \left(\alpha z_0\bar{z}_0 - \delta z_0 - \bar{\delta}\bar{z}_0 + \phi\right) &= 0 \\ \alpha w\bar{w} - \left(\alpha\bar{z}_0 + \delta\right)w - \left(\overline{\alpha\bar{z}_0 + \delta}\right)\bar{w} + \left[\alpha\left|z_0\right|^2 - 2\,Re\left(\delta z_0\right) + \phi\right] &= 0 \end{aligned}$$

que es una circunferencia o una recta en el plano w.

Por la transformación de rotación-homotecia, $w = az$ o $z = \frac{w}{a}$, la ecuación de la circunferencia se aplica en

$$A\left(\frac{w}{a}\right)\overline{\left(\frac{w}{a}\right)} + \delta\left(\frac{w}{a}\right) + \overline{\delta}\,\overline{\left(\frac{w}{a}\right)} + \phi = 0$$

$$A\left(\frac{w}{a}\right)\left(\frac{\overline{w}}{\overline{a}}\right) + \delta\left(\frac{w}{a}\right) + \overline{\delta}\left(\frac{\overline{w}}{\overline{a}}\right) + \phi = 0$$

$$A w\overline{w} + (\delta\overline{a})w + (\overline{\delta}a)\overline{w} + \phi a\overline{a} = 0$$

$$A w\overline{w} + (\delta\overline{a})w + (\overline{\delta}a)\overline{w} + \phi|a|^2 = 0$$

que también es una circunferencia o una recta en el plano w.

Finalmente, por la transformación de inversión, $w = \frac{1}{z}$ o $z = \frac{1}{w}$, la ecuación de la circunferencia se mapea en

$$A\left(\frac{1}{w}\right)\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} + \delta\left(\frac{1}{w}\right) + \overline{\delta}\,\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} + \phi = 0$$

$$A\left(\frac{1}{w}\right)\left(\frac{1}{\overline{w}}\right) + \delta\left(\frac{1}{w}\right) + \overline{\delta}\left(\frac{1}{\overline{w}}\right) + \phi = 0$$

$$\phi w\overline{w} + \overline{\delta}w + \delta\overline{w} + A = 0$$

la cual nuevamente es una circunferencia o una recta en el plano w.

De acuerdo al *Ejemplo I.1.10* toda transformación de Möbius es una composición de traslaciones, rotaciones-homotecias e inversiones, por lo que se tiene lo pedido. ■

Ejemplo I.1.12. *Transformación de Zhukovsky.*

La transformación

$$f(z) = z + \frac{1}{z} \qquad z \in \mathbb{C} - \{0\}$$

la cual ya se abordó un poco en el *Ejemplo I.1.5*, tiene gran cantidad de aplicaciones en hidrodinámica y aerodinámica. Es conocida bajo la denominacion de función de Zhukovsky, por ser este investigador quien primero la utilizó en esos campos de la ciencia.

Determinaremos a continuación la región en la que se transforma el exterior del circulo unitario en el semiplano superior

$$A = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1, \operatorname{Im}(z) \geq 0 \}$$

bajo la acción de f. Como

$$A = \bigcup_{R \geq 1} C_R^+$$

donde

$$C_R^+ = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = Re^{i\theta}, \theta \in [0, \pi] \}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}
f(A) &= \bigcup_{R \geq 1} f\left(C_R^+\right) = \bigcup_{R \geq 1} f\left(Re^{i\theta}\right) \qquad 0 \leq \theta \leq \pi \\
&= \bigcup_{R \geq 1} \{ w \in \mathbb{C} \mid w = Re^{i\theta} + R^{-1}e^{-i\theta} \} \\
&= \bigcup_{R \geq 1} \{ w \in \mathbb{C} \mid w = \left(R + R^{-1}\right)\cos\theta + i\left(R - R^{-1}\right)\operatorname{sen}\theta \} \\
&= \bigcup_{R \geq 1} \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u = \left(R + R^{-1}\right)\cos\theta,\ v = \left(R - R^{-1}\right)\operatorname{sen}\theta \} \\
&= \bigcup_{R \geq 1} \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{u^2}{(R + R^{-1})^2} + \frac{v^2}{(R - R^{-1})^2} = 1 \right\}
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$f\left(C_1^+\right) = [-2, 2]$$

y para cada $R > 1$, $f(C_R^+)$ es la semielipse superior en el plano complejo con centro en 0, semieje mayor $(R + R^{-1}) > 2$ y semieje menor $(R - R^{-1}) > 0$.

Es fácil ver que su unión cuando $R \geq 1$, nos proporciona el semiplano superior del plano complejo. ■

La función exponencial.

Las funciones trigonométricas seno y coseno, así como la función exponencial, ya estudiadas en cálculo elemental, se pueden definir mediante series de potencias como

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

La definición anterior de e^x sugiere que

$$e^{iy} = 1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots$$

para y real. En ea *Subtema 1.7* se verá que esta serie converge. Haciendo operaciones y un reordenamiento de la serie se obtiene

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{i^2y^2}{2!} + \frac{i^3y^3}{3!} + \frac{i^4y^4}{4!} + \frac{i^5y^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \dots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots\right) \end{aligned}$$

Pero esto se reconoce simplemente como $\cos y + i \operatorname{sen} y$, teniéndose así la fórmula de Euler

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

Buscando que la extensión de la exponencial mantenga las propiedades conocidas, y como una de estas es la ley de los exponentes:

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

se requiere que

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

Esto lleva a la

Definición I.1.4. *Si* $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *entonces*

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Por definición, $e^z = e^x$ cuando $y = 0$ por lo que la función exponencial $f(z) = e^z$ es una extensión al plano complejo de la exponencial real $f(x) = e^x$.

De la definición, también es claro que

$$e^z = e^x \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y$$

por lo que la función exponencial queda escrita en la forma $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, donde

$$u(x,y) = e^x \cos y$$

y

$$v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$$

Ejemplo I.1.13. Obtener las imágenes en el plano w de las rectas paralelas a los ejes real e imaginario en el plano z bajo la transformación $w = e^z$.

Solución. Consideremos la recta vertical $x = \operatorname{Re}(z) = a$. De acuerdo a lo apuntado anteriormente, la imagen de esta recta es

$$w = u + i\,v = e^{a+iy} = e^a \cos y + i\, e^a \operatorname{sen} y$$

de donde

$$\begin{cases} u = e^a \cos y \\ v = e^a \operatorname{sen} y \end{cases}$$

obteniéndose

$$\begin{aligned} |w|^2 &= u^2 + v^2 = e^{2a}\cos^2 y + e^{2a}\operatorname{sen}^2 y \\ &= e^{2a}(\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y) = e^{2a} \\ |w| &= e^a \end{aligned}$$

de modo que la recta $x = a$ paralela al eje imaginario se transforma en una circunferencia en el plano w de radio e^a con centro en el origen. Conforme y varía sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$, el punto $z = a + iy$ recorre una vez la recta vertical $x = a$ y el punto $w = u + iv$ da una vuelta completa a la circunferencia cada vez que y varía en 2π. Por lo tanto el punto imagen recorre la circunferencia una infinidad de veces conforme z se mueve sobre la recta $x = a$.

Los puntos de una recta horizontal $y = \operatorname{Im}(z) = b$ se transforman en

$$w = u + iv = e^{x+ib} = e^x \cos b + i e^x \operatorname{sen} b$$

de donde

$$\begin{cases} u = e^x \cos b \\ v = e^x \operatorname{sen} b \end{cases}$$

obteniéndose

$$\begin{aligned} \arg(w) &= \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{e^x \operatorname{sen} b}{e^x \cos b}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}\right) = \tan^{-1}(\tan b) = b \end{aligned}$$

Conforme x varía en el intervalo $(-\infty, \infty)$, e^x lo hace sobre $(0, \infty)$. Por lo tanto, w varía sobre la una semirrecta que emana desde el origen con un ángulo de inclinación b.

Por lo tanto, las rectas verticales se transforman en circunferencias y las rectas horizontales en semirrectas. ■

Algunas de las propiedades importantes de la función exponencial e^z se resumen en el siguiente teorema:

Teorema I.1.1. *Si* $z, w \in \mathbb{C}$, *entonces*

i) $e^0 = 1$

ii) $e^{z+w} = e^z e^w$

iii) $e^z \neq 0 \quad \forall \; z \in \mathbb{C}$

iv) $|e^z| = e^{\text{Re}(z)}$

v) e^z *es periódica, en donde cualquier periodo es de la forma* $2\pi n i$ *con* $n \in \mathbb{I}$.

vi) $e^z = 1$ *si y sólo si* $z = 2\pi n i$ *con* $n \in \mathbb{I}$.

vii) $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$

viii) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

Demostración.

Sean $z = x + iy,\ w = u + iv \in \mathbb{C}$.

i) De la *Definición I.4.4* de función exponencial

$$\begin{aligned} e^0 &= e^{0+0i} \\ &= e^0(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0) = 1 \end{aligned}$$

ii) De la *Definición I.4.4* de función exponencial y efectuando operaciones

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^{(x+iy)+(u+iv)} = e^{(x+u)+i(y+v)} \\ &= e^{x+u}\left[\cos(y+v) + i\,\text{sen}(y+v)\right] \\ &= e^x e^u\left[(\cos y\cos v - \text{sen}\,y\,\text{sen}\,v) + i(\text{sen}\,y\cos v + \cos y\,\text{sen}\,v)\right] \\ &= \left[e^x(\cos y + i\,\text{sen}\,y)\right]\left[e^u(\cos v + i\,\text{sen}\,v)\right] \\ &= e^{x+iy}e^{u+iv} = e^z e^w \end{aligned}$$

iii) Supóngase que $e^z = 0$, entonces

$$\begin{aligned} e^{x+iy} &= 0 \\ e^x(\cos y + i\,\text{sen}\,y) &= 0 \\ e^x\cos y + i\,e^x\,\text{sen}\,y &= 0 \end{aligned}$$

de donde, por la definición de igualdad de números complejos en forma binómica tenemos que

$$\begin{cases} e^x\cos y = 0 \\ e^x\,\text{sen}\,y = 0 \end{cases}$$

como $x \in \mathbb{R}$, sabemos que $e^x \neq 0$, por lo que el par de expresiones anteriores se reducen a

$$\begin{cases} \cos y = 0 \\ \operatorname{sen} y = 0 \end{cases}$$

las cuales son imposible de cumplirse simultáneamente para toda $y \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, la suposición inicial es falsa, por lo que $e^z \neq 0$ para toda z.

iv) De la *Definición I.1.4* de función exponencial y de la definición de módulo de un número complejo tenemos

$$\begin{aligned} |e^z| &= |e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y| = \sqrt{e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\operatorname{sen}^2 y} \\ &= \sqrt{e^{2x}(\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y)} = \sqrt{e^{2x}} = e^x = e^{\operatorname{Re}(z)} \end{aligned}$$

v) e^z es periódica si existe $T = T_1 + iT_2 \in \mathbb{C}$ tal que

$$e^z = e^{z+T}$$

de donde

$$\begin{aligned} e^{x+iy} &= e^{(x+iy)+(T_1+iT_2)} = e^{(x+T_1)+i(y+T_2)} \\ e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y) &= e^{x-T_1}\left[\cos(y+T_2) + i\operatorname{sen}(y+T_2)\right] \\ &= e^x e^{T_1}\left[\cos(y+T_2) + i\operatorname{sen}(y+T_2)\right] \\ \cos y + i\operatorname{sen} y &= e^{T_1}\cos(y+T_2) + i\, e^{T_1}\operatorname{sen}(y+T_2) \\ &= e^{T_1}(\cos y\cos T_2 - \operatorname{sen} y\operatorname{sen} T_2) + i\, e^{T_1}(\operatorname{sen} y\cos T_2 + \cos y\operatorname{sen} T_2) \end{aligned}$$

y de la definición de igualdad de números complejos en forma binómica se obtiene

$$\begin{cases} e^{T_1}\cos T_2 = 1 \\ e^{T_1}\operatorname{sen} T_2 = 0 \end{cases}$$

Como $e^{T_1} \neq 0$ para toda $T_1 \in \mathbb{R}$, entonces las ecuaciones anteriores se simplifican a

$$\begin{cases} e^{T_1} \cos T_2 = 1 \\ \operatorname{sen} T_2 = 0 \end{cases}$$

de la segunda ecuación, $T_2 = n\pi$ con $n \in \mathbb{I}$. Para que también se satisfaga la primera, $T_1 = 0$ y $T_2 = 2\pi n$ con $n \in \mathbb{I}$. Por lo tanto,

$$T = 2\pi n i, \qquad n \in \mathbb{I}$$

y el período mínimo o fundamental (símplemente período) es $2\pi i$.

vi) De los incisos (v), (ii) y (iii),

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi n i} &= e^z \\ e^z e^{2\pi n i} &= e^z \\ e^{2\pi n i} &= 1 \end{aligned}$$

vii) Por los incisos (iii), (ii) e (i),

$$\begin{aligned} e^{-z} &= e^{-z} \frac{e^z}{e^z} = \frac{e^{-z} e^z}{e^z} \\ &= \frac{e^{-z+z}}{e^z} = \frac{e^0}{e^z} = \frac{1}{e^z} \end{aligned}$$

viii) De la *Definición I.1.4* de función exponencial y de la operación de conjugación y sus propiedades

$$\begin{aligned} \overline{e^z} &= \overline{e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)} = \overline{e^x}\ \overline{(\cos y + i \operatorname{sen} y)} \\ &= e^x (\cos y - i \operatorname{sen} y) = e^x e^{-iy} = e^{x-iy} = e^{\bar{z}} \end{aligned}$$

■

Las funciones trigonométricas.

Sea $y \in \mathbb{R}$. Combinando las expresiones

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \qquad \text{y} \qquad e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y$$

mediante sumas y restas se obtiene

$$\operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \qquad \text{y} \qquad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

lo cual sugiere la siguiente definición:

Definición I.1.5. *Para todo número complejo z*

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad y \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Las funciones anteriores reciben el nombre de *seno* y *coseno complejos* respectivamente. El siguiente teorema lista algunas de las propiedades de estas funciones, las cuales, como se observa, son idénticas a las del caso real.

Teorema I.1.2. *Si* $z, w \in \mathbb{C}$, *entonces*

i) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$

ii) $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$

$\cos(-z) = \cos z$

iii) $\operatorname{sen}(z \pm w) = \operatorname{sen} z \cos w \pm \cos z \operatorname{sen} w$

$\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$

Demostración.

i) De las definiciones de funciones seno y coseno dadas por la *Definición I.1.5*, de las propiedades de la función exponencial dadas por el *Teorema I.1.1. (i), (ii)* y realizando algunas operaciones obtenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z &= \left[\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\right]^2 \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2 - \left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz} - e^{2iz} + 2 - e^{-2iz}\right) = 1
\end{aligned}$$

ii) Se demostrará sólo una parte, dejando al lector la demostración de la otra. De la

Definición I.1.5 de función seno

$$\operatorname{sen}(-z) = \frac{1}{2i}\left[e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}\right] = \frac{1}{2i}\left(e^{-iz} - e^{iz}\right)$$
$$= -\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\operatorname{sen} z$$

iii) De la *Definición I.1.5* de funciones seno y coseno tenemos

$$\operatorname{sen}(z + w) = \frac{1}{2i}\left[e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}\right] = \frac{1}{2i}\left(e^{iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw}\right)$$
$$= \frac{1}{4i}\left(e^{iz}e^{iw} + e^{iz}e^{-iw} - e^{-iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw} + e^{iz}e^{iw} - e^{iz}e^{-iw} + e^{-iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw}\right)$$
$$= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\frac{1}{2}\left(e^{iw} + e^{-iw}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\frac{1}{2i}\left(e^{iw} - e^{-iw}\right)$$
$$= \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w$$

Las otras partes pueden demostrarse de manera análoga. ■

Sin embargo, existen algunas propiedades del seno y coseno reales que no son heredadas por sus extensiones complejas. Entre ellas, conviene señalar el hecho de que la primera identidad del teorema anterior, conocida como la *identidad pitagórica*, no implica la acotación de las funciones seno y coseno complejos, como acontece con sus restricciones en el caso real. En efecto, para toda $y \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\operatorname{sen}(iy) = \frac{1}{2i}\left(e^{-y} + e^{y}\right) \qquad \text{y} \qquad \cos(iy) = \frac{1}{2}\left(e^{-y} - e^{y}\right)$$

y por lo tanto,

$$\lim_{y \to \infty} |\operatorname{sen}(iy)| = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \infty} \cos(iy) = \infty$$

Consecuentemente, cuando se efectúen estimaciones que involucren a estas funciones habrá que poner especial énfasis en no extrapolar arbitrariamente todas y cada una de las propiedades que exiben sus restricciones reales. Más adelante, en el *Subtema I.6*, veremos que una función compleja que sea analítica para toda z no puede estar acotada a menos que sea la función constante.

Ejemplo I.1.14. Escribir a las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ en la forma $u(x,y) + i\,v(x,y)$.

Solución. De las definiciones de funciones seno (*Definición I.1.5*) y exponencial (*Definición*

I.1.4) y realizando algunas operaciones se obtiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{-y+ix} - e^{y-ix}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left[e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) - e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x)\right] \\
&= \operatorname{sen} x \left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) + i \cos x \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right) \\
&= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y
\end{aligned}$$

en donde se utilizaron las definiciones de funciones seno y coseno hiperbólicos.

Por lo tanto, para la función $\operatorname{sen} z$ se tiene que

$$u(x,y) = \operatorname{sen} x \cosh y$$

y

$$v(x,y) = \cos x \operatorname{senh} y$$

Análogamente, se puede obtener

$$\cos(z) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$

de donde para la función $\cos z$ tenemos que

$$u(x,y) = \cos x \cosh y \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = -\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$

Estas ecuaciones se utilizan para evaluar las funciones trigonométricas complejas en valores específicos de z en términos de funciones reales que dependen de x o de y. ■

Ejemplo I.1.15. Mostrar que, mediante la transformación $f(z) = \operatorname{sen} z$, líneas paralelas al eje real son tranformadas en elipses y que líneas paralelas al eje imaginario son transformadas en hipérbolas.

Solución. Del *Ejemplo I.1.14* tenemos que una recta vertical $x = \operatorname{Re}(z) = a$, es decir, $z = a + iy$ tiene por imagen a

$$u + iv = w = \operatorname{sen}(a + iy) = \operatorname{sen} a \cosh y + i \cos a \operatorname{senh} y$$

de donde

$$\begin{cases} u = \operatorname{sen} a \cosh y \\ v = \cos a \operatorname{senh} y \end{cases}$$

Puesto que $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$, se obtiene la hipérbola

$$\frac{u^2}{\operatorname{sen}^2 a} - \frac{v^2}{\cos^2 a} = 1$$

suponiendo que $\operatorname{sen} a \neq 0$ y $\cos a \neq 0$.

Como $\cosh y \geq 1$, cuando $\operatorname{sen} a > 0$ y $\cos a \neq 0$, conforme z varía sobre la recta $\operatorname{Re}(z) = a$, $w = u + iv$ varía sobre la rama derecha de esta hipérbola en el plano w. Cuando $\operatorname{sen} a < 0$ y $\cos a \neq 0$, $w = \operatorname{sen} z$ mapea la recta vertical en la rama izquierda de la hipérbola.

Si $\operatorname{sen} a = 0$, $a = n\pi$ con n entero. Entonces

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = (-1)^n \operatorname{senh} y \end{cases}$$

Ahora, v varía desde $-\infty$ hasta ∞ cuando y toma todos los valores reales, por lo que el punto w varía sobre todo el eje imaginario en el plano w.

Si $\cos a = 0$, $a = (2n-1)\pi/2$ con n entero. Entonces

$$\begin{cases} u = (-1)^{n+1} \cosh y \\ v = 0 \end{cases}$$

Ahora, cuando z varía sobre la recta $\operatorname{Re}(z) = a$, el punto w de la imagen varía sobre el intervalo $u \leq -1$ (si n es par) o $u \geq 1$ (si n es impar).

La otra parte de la pregunta puede analizarse de manera parecida. ■

Al igual que en el caso real, en adición a $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ se puede definir la función $\tan z = \operatorname{sen} z / \cos z$ con dominio en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid \cos z \neq 0\}$ y similarmente obtener las otras funciones trigonométricas, que son extensiones a su dominio de definición en el plano complejo de sus versiones de variable real. Estas nuevas funciones tienen las mismas identidades trigonométricas que las del eje real.

Las funciones hiperbólicas.

Para las funciones hiperbólicas, en completa analogía con el caso real, se tiene la siguiente

Definición I.1.6. *Para todo número complejo z*

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad y \qquad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

Igualmente que en el caso de las funciones trigonométricas, algunas propiedades de las funciones hiperbólicas se resumen en el siguiente

Teorema I.1.3. *Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces*

i) $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$

ii) $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z$

$\cosh(-z) = \cosh z$

iii) $\operatorname{senh}(z \pm w) = \operatorname{senh} z \cosh w \pm \cosh z \operatorname{senh} w$

$\cosh(z \pm w) = \cosh z \cosh w \pm \operatorname{senh} z \operatorname{senh} w$

La demostración de este teorema se puede hacer de la misma forma como se demostró el *Teorema I.1.2.*

A diferencia del cálculo de variable real, en el cálculo de variable compleja existen relaciones entre las funciones trigonométricas y las hiperbólicas, las cuales están dadas en el siguiente teorema:

Teorema I.1.4. *Si $z \in \mathbb{C}$, entonces*

i) $\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{senh} z$

ii) $\cos(iz) = \cosh z$

Demostración.

i) De la *Definición I.1.5* de función seno y mediante algunas operaciones se tiene que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(iz) &= \frac{1}{2i}\left[e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}\right] = \frac{1}{2i}\left(-e^{z} + e^{-z}\right)\\ &= \frac{i}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) = i\operatorname{senh} z\end{aligned}$$

en donde se usó la *Definición I.1.6* de función seno hiperbólico.

El otro inciso se demuestra de forma muy parecida. ■

La función logaritmo natural.[4]

Se quiere definir esta función de tal manera que sea una extensión de la correspondiente función real. También se quiere que ésta sea una inversa de la exponencial, sin embargo, siendo ésta periódica su inversa será una función multivaluada. Por lo tanto, si se quiere trabajar con funciones univaluadas, se debe restringir el codominio del logaritmo.

Sabemos que la función exponencial tiene como dominio a $\mathbb{C}$ (ver la *Definición I.1.4*) y que, por el *Teorema I.1.1.(iii),* tiene como recorrido a $\mathbb{C}-\{0\}$, por lo tanto, la función multivaluada **ln** tendrá como dominio a $\mathbb{C}-\{0\}$ y como recorrido a $\mathbb{C}$.

De la definición de la inversa de una función tenemos que para $z \neq 0$

$$w = \ln(z) \qquad \text{si y sólo si} \qquad z = e^{w}$$

y buscaremos a w, con lo cual tendremos una forma explícita para $\ln(z)$, haciendo que se satisfaga la segunda igualdad.

Sean $z = r\,e^{i\theta}$ y $w = u + iv$:

$$\begin{aligned} z &= e^{w}\\ r\,e^{i\theta} &= e^{u+iv} = e^{u}e^{iv}\end{aligned}$$

y de la definición de igualdad de números complejos en forma exponencial

[4] También llamada logaritmo de base e o neperiano, en homenaje a John Néper barón de Merchinson (1550-1617).

$$\begin{cases} e^u = r \\ v = \theta + 2n\pi \end{cases}$$

por lo que

$$\begin{cases} u = \mathrm{L}(r) \\ v = \theta + 2\pi n \end{cases}$$

donde $\mathrm{L}(r)$ es el logaritmo natural usual del número real positivo r. Finalmente,

$$\begin{aligned} w &= \mathrm{L}(r) + i(\theta + 2\pi n) \\ &= \mathrm{L}|z| + i(\theta + 2\pi n) \qquad z \neq 0 \end{aligned}$$

Como θ es cualquier argumento de z, el símbolo $\arg(z)$ contiene a todos los números de la forma $\theta + 2\pi n$ con $n \in \mathbb{I}$ y podemos escribir

$$\ln(z) = \mathrm{L}|z| + i\arg(z)$$

Observamos que hay un número infinito de logaritmos naturales, todos diferentes, de cualquier número complejo z distinto de cero. Los diferentes valores de $\ln(z)$ tienen la misma parte real y sus partes imaginarias difieren por la cantidad $2\pi n$, es decir, dado z, estos valores difieren en múltiplos enteros de $2\pi i$.

Para tener una función logaritmo natural compleja, hay que tener cuidado en la elección del dominio sobre el cual definir el logaritmo natural para que la función sea univaluada, tal como se muestra a continuación.

Teorema I.1.5. *Sea* $A_{y_0} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y_0 \leq y < y_0 + 2\pi\}$ *entonces la función* e^z *manda al conjunto* A_{y_0} *biyectivamente en* $\mathbb{C} - \{0\}$.

Demostración. Primero se demostrará que e^z restringida al conjunto A_{y_0} es inyectiva, es decir, que si $z_1 \neq z_2$ entonces $e^{z_1} \neq e^{z_2}$. O equivalentemente, si $e^{z_1} = e^{z_2}$ entonces $z_1 = z_2$.

$$\begin{aligned} e^{z_1} &= e^{z_2} \\ \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= 1 \end{aligned}$$

De las propiedades de la función exponencial, dadas por el *Teorema I.1.1.(vii),(ii),(vi)* tenemos

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{-z_2} &= 1 \\ e^{z_1-z_2} &= 1 \\ z_1 - z_2 &= 2\pi n i \end{aligned}$$

Como la distancia entre las partes imaginarias de dos puntos cualesquiera en A_{y_0} es menor que 2π, se tiene que $z_1 = z_2$, que es lo que se quería demostrar.

A continuación se demostrará que e^z es suprayectiva es decir, que para cada $w \in \mathbb{C} - \{0\}$, existe una y sólo una $z \in A_{y_0}$ tal que $w = e^z$:

$$\begin{aligned} e^z &= w \\ e^{x+iy} &= w \\ e^x e^{iy} &= |w| \frac{w}{|w|} \end{aligned}$$

de donde

$$e^x = |w| \qquad \text{y} \qquad e^{iy} = \frac{w}{|w|}$$

por lo que

$$x = \mathrm{L}|w|$$

donde $\mathrm{L}|w|$ denota al ya conocido logaritmo natural del número real positivo $|w|$ y

$$\cos y + i \operatorname{sen} y = \frac{1}{|w|}[\operatorname{Re}(w) + i \operatorname{Im}(w)]$$

de donde por igualdad de complejos en forma binómica

$$\begin{cases} \cos y = \dfrac{1}{|w|}\operatorname{Re}(w) \\ \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{|w|}\operatorname{Im}(w) \end{cases}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} &= \frac{\operatorname{Im}(w)}{\operatorname{Re}(w)} \\ \tan y &= \frac{\operatorname{Im}(w)}{\operatorname{Re}(w)} \\ y &= \tan^{-1}\frac{\operatorname{Im}(w)}{\operatorname{Re}(w)} \\ &= \arg(w) \end{aligned}$$

Sabemos que $\arg(w)$ tiene una infinidad de valores, cada uno de los cuales difiere de los otros por un múltiplo entero de 2π, pero sólo uno de estos satisface

$$y_0 \le y < y_0 + 2\pi$$

con lo cual se tiene lo que se quería demostrar.

Por lo tanto, la transformación $e^z : A_{y_0} \to \mathbb{C} - \{0\}$ es biyectiva. ■

Los conjuntos involucrados en este teorema se muestran en la *Figura I.1.2*, donde se observa que la función e^z mapea biyectivamente la franja horizontal entre $y_0 i$ y $(y_0 + 2\pi)i$ en $\mathbb{C} - \{0\}$.

Lo apuntado antes del *Teorema I.1.5* así como la demostración de éste sugiere la siguiente definición.

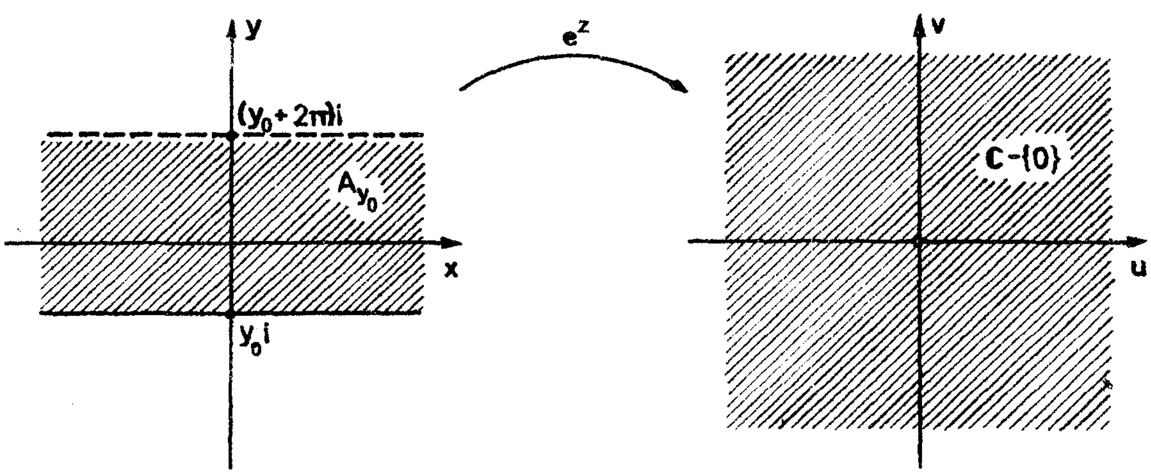

Figura I.1.2. *La función* $e^z : A_{y_0} \to \mathbb{C} - \{0\}$ *es biyectiva.*

Definición I.1.7. *La función* $\ln : \mathbb{C} - \{0\} \to A_{y_0}$, *se define por*

$$\ln(z) = \mathrm{L}|z| + i\arg(z)$$

En ocasiones a esta función se le conoce como "rama de la función logaritmo natural situada en A_{y_0}". El valor de y_0 es arbitrario y para que la función $\ln(z)$ esté bien definida, basta con especificar un intervalo de longitud 2π en el que $\arg(z)$ tome sus valores, lo cual equivale a eligir una rama particular.

La rama particular en la cual $\ln(z)$ es real cuando z es real y positivo, es llamada la *rama principal* del logaritmo natural, la cual se define como

$$\mathrm{Ln}(z) = \mathrm{L}|z| + i\,\mathrm{Arg}(z) \qquad z \neq 0$$

donde $\mathrm{Arg}(z)$, el *argumento principal* de z, se escoge en $(-\pi, \pi]$ llamado el *intervalo principal*. Nótese que de esta manera $\arg(z) = 0$ cuando z es real y positivo. El valor del logaritmo natural calculado de esta forma se denominará *valor principal del logaritmo natural* o *logaritmo natural principal* de $z \neq 0$.

Utilizando el argumento principal, se puede volver a escribir la función logaritmo natural multivaluada como

$$\ln(z) = \mathrm{L}|z| + i[\mathrm{Arg}(z) + 2\pi n], \qquad n \in \mathbb{I}$$

obteniéndose la rama principal con $n = 0$.

Tomemos

$$\ln(z) = \mathrm{L}(r) + i\theta$$

y tomemos algún punto $z_1 \neq 0$ en el plano complejo para el cual $r = r_1$ y $\theta = \theta_1$, así que

$$\ln(z_1) = \mathrm{L}(r_1) + i\theta_1$$

Entonces, después de dar una vuelta completa alrededor del origen, hallamos que al retornar a z_1 ahora $r = r_1$ y $\theta = \theta_1 + 2\pi$, de modo que

$$\ln(z_1) = \mathrm{L}(r_1) + i(\theta_1 + 2\pi)$$

por lo que estamos en otra rama de la función.

Otras vueltas completas alrededor del origen conducen a otras ramas y, a diferencia del caso de la función $\sqrt{z}$ del *Ejemplo I.1.2*, nunca retornamos a la misma rama.

Así, $z = 0$ es un *punto de ramificación.*

Como una generalización, observamos que $\ln(z - a)$ tiene un punto de ramificación en $z = a$.

Ejemplo I.1.16. Puesto que

$$\begin{aligned} |i| &= 1 \\ \arg(i) &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n \qquad n \in \mathbb{I} \end{aligned}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} \ln(i) &= \mathrm{L}|i| + i\arg(i) \\ &= \mathrm{L}(1) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + 2n\right)\pi i \qquad n \in \mathbb{I} \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \ln(-1-i) &= \mathrm{L}|-1-i| + i\arg(-1-i) \\ &= \mathrm{L}\left(\sqrt{2}\right) + i\left(-\frac{3}{4}\pi + 2\pi n\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{L}(2) + \left(-\frac{3}{4} + 2n\right)\pi i \qquad n \in \mathbb{I} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \ln(-1) &= \mathrm{L}|-1| + i\arg(-1) \\ &= \mathrm{L}(1) + i(\pi + 2\pi n) \\ &= (1 + 2n)\pi i \qquad n \in \mathbb{I} \end{aligned}$$

Los logaritmos principales son

$$\mathrm{Ln}(i) = \mathrm{L}|i| + i\,\mathrm{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}\,i$$

$$\mathrm{Ln}(-1-i) = \mathrm{L}|-1-i| + i\,\mathrm{Arg}(-1-i) = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}(2) - \frac{3}{4}\pi\,i$$

y

$$\mathrm{Ln}(-1) = \mathrm{L}|-1| + i\,\mathrm{Arg}(-1) = \pi\,i$$ ■

Obsérvese que para $x \in \mathbb{R}$ con $x > 0$ se tiene que

$$\mathrm{Ln}(x) = \mathrm{L}(x)$$

por lo que la función logaritmo principal **Ln** es una extensión a $\mathbb{C} - \{0\}$ del logaritmo real L, así que a partir de ahora podemos escribir **Ln** en lugar de L. De esta manera,

$$\ln(z) = \mathrm{Ln}|z| + i\arg(z) \qquad z \in \mathbb{C} - \{0\}$$

y

$$\mathrm{Ln}(z) = \mathrm{Ln}|z| + i\,\mathrm{Arg}(z) \qquad z \in \mathbb{C} - \{0\}$$

Posteriormente, se restringirá el dominio del logaritmo a $\mathbb{C} - B$, donde B es una semi-recta que se inicia en 0, es decir,

$$B = \{\, tw \mid t \in \mathbb{R}^+ \,\}$$

con w un número complejo fijo distinto de cero. El objeto de esta restricción es lograr que el logaritmo sea una función continua.

Teorema I.1.6. $\ln(z)$ *es la inversa de la exponencial en el siguiente sentido: para cualquier rama de* $\ln(z)$, *se tiene*

$$e^{\ln(z)} = z \qquad \forall \;\; z \in \mathbb{C} - \{0\}$$

y si se elige la rama situada en A_{y_0}, *entonces*

$$\ln(e^z) = z \qquad \forall \;\; z \in A_{y_0}$$

Demostracion. Dado que $\ln(z) = \mathrm{Ln}|z| + i\arg(z)$, entonces

$$\begin{aligned} e^{\ln(z)} &= e^{\mathrm{Ln}|z| + i\arg(z)} \\ &= e^{\mathrm{Ln}|z|}\, e^{i\arg(z)} \\ &= |z|\, e^{i\arg(z)} = z \end{aligned}$$

ya que $|z|e^{i\arg(z)}$ es la forma exponencial de z.

Notar que en la función $e^{\ln(z)}$ no es necesario indicar la rama de $\ln(z)$ porque la función exponencial es periódica y todos los valores de $\ln(z)$ los manda a la misma z.

Recíprocamente, si $z = x + iy$ y $y_0 \leq y < y_0 + 2\pi$, se tiene que

$$\begin{aligned} \ln(e^z) &= \mathrm{Ln}|e^z| + i\arg(e^z) \\ &= \mathrm{Ln}(e^x) + i\arg(e^x e^{iy}) \\ &= x + i\arg(e^{iy}) \\ &= x + iy = z \end{aligned}$$

puesto que $|e^z| = e^x > 0$ por el *Teorema I.1.1.(iv)* y $\arg(e^x e^{iy}) = \arg(e^{iy}) = y$ por la forma en que se eligió la rama del logaritmo. ■

El logaritmo natural definido en $\mathbb{C} - \{0\}$ tiene propiedades como las del logaritmo natural restringido a la parte positiva del eje real, como se establece en el siguiente resultado.

Teorema I.1.7. *Si* $z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$, *entonces*

i) $\ln(zw) = \ln(z) + \ln(w)$

ii) $\ln\left(\dfrac{z}{w}\right) = \ln(z) - \ln(w)$

iii) $\ln(z^r) = r\ln(z), \quad \forall\ r \in Q$

Demostración.

i) De la definición de logaritmo natural complejo, de las propiedades del módulo y del argumento y de las propiedades del logaritmo natural real tenemos

$$\begin{aligned}
\ln(zw) &= \mathrm{Ln}|zw| + i\arg(zw) \\
&= \mathrm{Ln}(|z||w|) + i[\arg(z) + \arg(w)] \\
&= \mathrm{Ln}|z| + \mathrm{Ln}|w| + i\arg(z) + i\arg(w) \\
&= \mathrm{Ln}|z| + i\arg(z) + \mathrm{Ln}|w| + i\arg(w) \\
&= \ln(z) + \ln(w)
\end{aligned}$$

Las otras partes se demuestran de forma parecida. ■

Las conclusiones del teorema anterior deben ser interpretadas cuidadosamente, ya que el símbolo $\ln(z)$ representa un conjunto infinito de números. Por ejemplo, cuando decimos que $\ln(zw) = \ln(z) + \ln(w)$ significa que cualquier valor de $\ln(zw)$ puede escribirse como una suma de valores de $\ln(z)$ y $\ln(w)$.

Por lo anterior, esta parte del teorema acostumbra escribirse como

$$\ln(zw) = \ln(z) + \ln(w) \text{ (excepto por la adición de un múltiplo entero de } 2\pi i)$$

Ejemplo I.1.17. Calcular $\ln(-1-i)(1-i)$, donde el argumento toma valores en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Solución. Por un lado,

$$\begin{aligned}
(-1-i)(1-i) &= -(1+i)(1-i) \\
&= -(1-i^2) \\
&= -2
\end{aligned}$$

obteniéndose

$$\begin{aligned}
\ln(-1-i)(1-i) &= \ln(-2) \\
&= \mathrm{Ln}\,2 + i\pi
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\ln(-1-i) = \mathrm{Ln}\sqrt{2} + \tfrac{5}{4}\pi i$$

y

$$\ln(1-i) = \operatorname{Ln}\sqrt{2} + \frac{7}{4}\pi i$$

obteniéndose

$$\begin{aligned}\ln(-1-i) + \ln(1-i) &= 2\operatorname{Ln}\sqrt{2} + 3\pi i \\ &= \operatorname{Ln}2 + 3\pi i \\ &= (\operatorname{Ln}2 + \pi i) + 2\pi i\end{aligned}$$

por lo que en este caso $\ln(zw)$ y $\ln(z)+\ln(w)$ difieren en $2\pi i$. ■

Ejemplo I.1.18. Mostrar que la identidad

$$\operatorname{Ln}(zw) = \operatorname{Ln}(z) + \operatorname{Ln}(w)$$

no siempre es válida.

Solución. Sean $z = -\sqrt{3} + i$ y $w = -1 + \sqrt{3}\,i$. Entonces

$$\operatorname{Ln}(zw) = \operatorname{Ln}(-4i) = \operatorname{Ln}4 - \frac{1}{2}\pi i$$

pero

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}(z) + \operatorname{Ln}(w) &= \operatorname{Ln}2 + \frac{5}{6}\pi i + \operatorname{Ln}2 + \frac{2}{3}\pi i \\ &= \operatorname{Ln}4 + \frac{3}{2}\pi i \\ &= \left(\operatorname{Ln}4 - \frac{1}{2}\pi i\right) + 2\pi i\end{aligned}$$

por lo que en este caso $\operatorname{Ln}(zw)$ y $\operatorname{Ln}(z) + \operatorname{Ln}(w)$ difieren en $2\pi i$. ■

Es posible probar que

$$\operatorname{Ln}(zw) = \operatorname{Ln}(z) + \operatorname{Ln}(w) + 2\pi i\, n(z,w)$$

donde $n(z,w)$ [5] tiene uno de los valores -1, 0 ó 1, de acuerdo a la siguiente regla

[5] $n(z,w)$ denota que el valor depende de z y w.

$$n(z,w) = \begin{cases} -1 & si \quad \pi < \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) \leq 2\pi \\ 0 & si \quad -\pi < \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) \leq \pi \\ 1 & si \quad -2\pi < \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) \leq -\pi \end{cases}$$

Así, para el ejemplo anterior se tiene que

$$\operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) = \frac{3}{2}\pi$$

de donde

$$\pi \leq \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) \leq 2\pi$$

por lo que $n(z,w) = -1$, con lo cual

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}(z) + \operatorname{Ln}(w) - 2\pi i &= \operatorname{Ln} 2 + \frac{5}{6}\pi i + \operatorname{Ln} 2 + \frac{2}{3}\pi i - 2\pi i \\ &= \operatorname{Ln} 4 - \frac{1}{2}\pi i \\ &= \operatorname{Ln}(zw) \end{aligned}$$

Funciones trigonométricas inversas.

Las funciones trigonométricas e hiperbólicas fueron expresadas en términos de la función exponencial. Ahora veremos sus inversas. Cuando resolvemos ecuaciones tales como $w = \operatorname{sen} z$ para z, obtendremos fórmulas que involucran al logaritmo natural. Como las funciones trigonométricas e hiperbólicas son todas periódicas, sus inversas necesariamente serán funciones multivaluadas. Las fórmulas para las funciones trigonométricas inversas están dadas por la siguiente

Definición I.1.8. *Para toda* $z \in \mathbb{C}$

i) $\quad \operatorname{sen}^{-1}(z) = -i \ln\left[iz + (1-z^2)^{1/2}\right]$

ii) $\quad \cos^{-1}(z) = -i \ln\left[z + (1-z^2)^{1/2}\right]$

Para ilustrar el procedimiento seguido para su obtención, vamos a determinar la correspondiente a la inversa del seno, pudiéndose obtener las restantes de forma parecida.

Por definición, para cada $z \in \mathbb{C}$, $w = \operatorname{sen}^{-1}(z)$ es el conjunto de números $w \in \mathbb{C}$ tales que

$$\operatorname{sen}(w) = z$$

Usando la *Definición I.1.5* de función seno, de lo que se trata es de determinar el conjunto de soluciones de la ecuación

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z$$

la cual podemos escribir como

$$e^{iw} - 2iz - e^{-iw} = 0$$

Multiplicando ambos lado de esta ecuación por e^{iw} obtenemos

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

la cual es una ecuación cuadrática en términos de e^{iw}, cuyas soluciones son

$$e^{iw} = iz + \left(1 - z^2\right)^{1/2}$$

donde se debe observar que la raíz cuadrada $(1 - z^2)$ es una función bivaluada. Puesto que el segundo miembro de la ecuación anterior nunca se anula, podemos tomar logaritmo natural en ambos lados, obteniendo que para cada $z \in \mathbb{C}$ el conjunto de soluciones buscado es

$$\begin{aligned} iw &= \ln\left[iz + \left(1 - z^2\right)^{1/2}\right] \\ w &= -i \ln\left[iz + \left(1 - z^2\right)^{1/2}\right] \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\operatorname{sen}^{-1}(z) = -i \ln\left[iz + \left(1 - z^2\right)^{1/2}\right]$$

Para construir una rama específica de $\operatorname{sen}^{-1}(z)$, primero debemos elegir una rama de la raíz cuadrada y después seleccionar una rama del logaritmo natural.

De la misma manera se puede deducir las fórmulas para $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$, etc. o las de las *funciones hiperbólicas inversas*.

Ejemplo I.1.19. Obtener $\text{sen}^{-1}(-i)$.

Solución. De la *Definición I.1.8* de seno inverso y de la *Definición I.1.7* de logaritmo natural tenemos que

$$\begin{aligned}
\text{sen}^{-1}(-i) &= -i\ \ln\left[-i^2 + \left(1 - i^2\right)^{1/2}\right] = -i\ \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \\
&= \begin{cases} -i\ \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \\ -i\ \ln\left(1-\sqrt{2}\right) \end{cases} = \begin{cases} -i\left[\text{Ln}\left|1+\sqrt{2}\right| + i\ \arg\left(1+\sqrt{2}\right)\right] \\ -i\left[\text{Ln}\left|1-\sqrt{2}\right| + i\ \arg\left(1-\sqrt{2}\right)\right] \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{Arg}\left(1+\sqrt{2}\right) + 2\pi n - i\,\text{Ln}\left(\sqrt{2}+1\right) & n \in \mathbb{I} \\ \text{Arg}\left(1-\sqrt{2}\right) + 2\pi n - i\,\text{Ln}\left(\sqrt{2}-1\right) & n \in \mathbb{I} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2\pi n - i\,\text{Ln}\left(\sqrt{2}+1\right) & n \in \mathbb{I} \\ (2n+1)\pi - i\,\text{Ln}\left(\sqrt{2}-1\right) & n \in \mathbb{I} \end{cases}
\end{aligned}$$

Como

$$\text{Ln}\left(\sqrt{2}-1\right) = \text{Ln}\,\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}+1} = \text{Ln}\,\frac{1}{\sqrt{2}+1} = -\text{Ln}\left(\sqrt{2}+1\right)$$

se concluye que

$$\begin{aligned}
\text{sen}^{-1}(-i) &= \begin{cases} 2\pi n - i\,\text{Ln}\left(\sqrt{2}+1\right) & n \in \mathbb{I} \\ (2n+1)\pi + i\,\text{Ln}\left(\sqrt{2}+1\right) & n \in \mathbb{I} \end{cases} \\
&= \pi n + i(-1)^{n+1}\,\text{Ln}\left(\sqrt{2}+1\right) \qquad n \in \mathbb{I}
\end{aligned}$$

■

Potencias Complejas.

Se quiere definir z^w, donde $z, w \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$. Se vió que $z = e^{\ln z}$ y si $w \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
z^w &= \left(e^{\ln z}\right)^w \\
&= \left(e^{\ln z}\right)\left(e^{\ln z}\right) \ldots \left(e^{\ln z}\right) \qquad (w \text{ veces}) \\
&= e^{\ln z + \ln z + \ldots + \ln z}
\end{aligned}$$

por lo que $z^w = e^{w \ln z}$. Esto sugiere la siguiente definición para todo número complejo w.

Definición I.1.9. *Si z y w son números complejos arbitrarios con $z \neq 0$ se define*

$$z^w = e^{w \ln z}$$

La función z^w es en general "multivaluada" pero si se selecciona una rama particular del logaritmo natural, entonces z^w será una función univaluada. Los valores que toma la función z^w en las otras ramas están relacionados de manera muy sencilla con los valores que toma z^w en la rama seleccionada de acuerdo al siguiente teorema.

Teorema I.1.8. *Sean $z, w \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$.*

i) *z^w está unívocamente determinada (no depende de la rama del logaritmo que se escoja) si y sólo si $w \in \mathbb{I}$.*

ii) *Si $w = p/q \in Q$ y p/q está en su mínima expresión, entonces z^w toma exactamente q valores, que son las q raices de z^p.*

iii) *Si $w \in \mathbb{R} - Q$ o si $w \notin \mathbb{R}$ entonces z^w toma un número infinito de valores.*

Los casos en que z^w toma valores distintos, éstos difieren por factores de la forma $e^{2\pi n w i}$. Así, si se ha elegido una rama del logaritmo, la rama correspondiente de z^w está dada por $z^w = e^{w \ln z}$ y los otros valores por $z^w = e^{w \ln z + 2\pi n w i}$.

Demostración. Se demostrará sólamente una parte.

i) Primeramente supongamos que $w = k$ donde k es un entero.

Recordando la definición de función logaritmo natural y que la función exponencial tiene período $2n\pi i$ tenemos

$$\begin{aligned} z^k &= e^{k \ln(z)} = e^{k \operatorname{Ln}|z| + ik[\operatorname{Arg}(z) + 2\pi n]} \\ &= e^{\operatorname{Ln}|z|^k + ik \operatorname{Arg}(z)}\, e^{2\pi n i} = |z|^k\, e^{ik \operatorname{Arg}(z)} \end{aligned}$$

la cual es la función univaluada k-ésima potencia de z.

Por otra parte, como

$$z^w = e^{w\ln(z)} = e^{w[\mathrm{Ln}(z)+2\pi ni]} = e^{w\mathrm{Ln}(z)}\, e^{2\pi wni}$$

está unívocamente determinada, entonces

$$e^{w\mathrm{Ln}(z)}\, e^{2\pi nwi} = e^{w\mathrm{Ln}(z)} \qquad \forall \ n \in \mathbb{I}$$

es decir,

$$e^{2\pi nwi} = 1$$

por lo que $w \in \mathbb{I}$ del *Teorema I.1.1.(vi)*. ■

Ejemplo I.1.20. Ilustrar el teorema anterior calculando

i)	$(1+i)^3$	iv)	$i^{\sqrt{2}}$
ii)	$(1+i)^{-3}$	v)	i^i
iii)	$i^{2/3}$		

Solución. De la *Definición I.1.9* de potencia compleja y de la *Definición I.1.7* de función logaritmo natural:

i)

$$(1+i)^3 = e^{3\ln(1+i)} = e^{3\{\mathrm{Ln}|1+i| + i[\mathrm{Arg}(1+i)+2\pi n]\}}$$
$$= e^{3\,\mathrm{Ln}\sqrt{2}+3i(\pi/4+2\pi n)} = e^{\mathrm{Ln}2\sqrt{2}}\, e^{3\pi i/4}\, e^{6\pi in}$$

Como $e^{6\pi in} = 1$ para toda $n \in \mathbb{I}$

$$(1+i)^3 = 2\sqrt{2}\, e^{3\pi i/4} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\ \mathrm{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$= 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -2 + 2i$$

Este único resultado es muy fácil de comprobar mediante el teorema del binomio.

ii)

$$(1+i)^{-3} = e^{-3\ln(1+i)} = e^{-3\{\mathrm{Ln}|1+i| + i[\mathrm{Arg}(1+i)+2\pi n]\}}$$
$$= e^{-3\,\mathrm{Ln}\sqrt{2}-3i(\pi/4+2\pi n)} = e^{\mathrm{Ln}(1/2\sqrt{2})}\, e^{-3\pi i/4}\, e^{-6\pi in}$$

Como $e^{-6\pi i n} = 1$ para toda $n \in \mathbb{I}$

$$(1+i)^{-3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-3\pi i/4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\cos\frac{3\pi}{4} - i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} i$$

Este resultado también es muy fácil de comprobar ya que

$$(1+i)^{-3} = \frac{1}{(1+i)^3} = \frac{1}{-2+2i} = \frac{-2-2i}{(-2+2i)(-2-2i)}$$
$$= \frac{-2-2i}{8} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} i$$

iii)

$$i^{2/3} = e^{\frac{2}{3}\ln(i)} = e^{\frac{2}{3}\{\operatorname{Ln}|i| + i[\operatorname{Arg}(i) + 2\pi n]\}} = e^{\pi i/3} e^{4\pi i n/3} \qquad n \in \mathbb{I}$$
$$= \begin{cases} e^{\pi i/3} \\ e^{\pi i} \\ e^{5\pi i/3} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ -1 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{cases}$$

Para cualquier otro valor de $n \in \mathbb{I}$ se obtiene alguno de los tres valores anteriores, los cuales son las raíces cúbicas de $i^2 = -1$.

iv)

$$i^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln(i)}$$
$$= e^{\sqrt{2}\{\operatorname{Ln}|i| + i[\operatorname{Arg}(i) + 2\pi n]\}} \qquad n \in \mathbb{I}$$
$$= e^{\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} i + 2\pi n i\right)} = e^{\frac{\sqrt{2}\pi}{2} i} e^{2\sqrt{2}\pi n i} \qquad n \in \mathbb{I}$$

Estos son una infinidad de valores de la forma $e^{w \operatorname{Ln} z + 2\pi n w i}$ con $z = i$ y $w = \sqrt{2}$.

v)

$$i^i = e^{i\ln(i)}$$
$$= e^{i\{\operatorname{Ln}|i| + i[\operatorname{Arg}(i) + 2\pi n]\}} \qquad n \in \mathbb{I}$$
$$= e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)} = e^{-\pi/2} e^{-2\pi n} \qquad n \in \mathbb{I}$$

Estos también son una infinidad de valores de la forma $e^{w\operatorname{Ln}z + 2\pi n w i}$ con $z = w = i$. ■

Teorema I.1.9. *Si* $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ *y* $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, *entonces*

i) $\quad z^{w_1} z^{w_2} = z^{w_1 + w_2}$

ii) $\quad \dfrac{z^{w_1}}{z^{w_2}} = z^{w_1 - w_2}$

Demostración.

i) A partir de la *Definición I.1.9* de potencia compleja tenemos

$$\begin{aligned} z^{w_1} z^{w_2} &= e^{w_1 \ln(z)} e^{w_2 \ln(z)} = e^{w_1 \ln(z) + w_2 \ln(z)} \\ &= e^{(w_1 + w_2)\ln(z)} = z^{w_1 + w_2} \end{aligned}$$

El otro inciso se demuestra de manera similar. ■

Ejemplo I.1.21. Ilustrar que la igualdad $\left(z^{w_1}\right)^{w_2} = z^{w_1 w_2}$ no siempre es válida.

Solución. Sean $z = -i$, $w_1 = 2$ y $w_2 = i$. Entonces

$$\begin{aligned} \left(z^{w_1}\right)^{w_2} &= \left[(-i)^2\right]^i = (-1)^i = e^{i\ln(-1)} \\ &= e^{i\{\operatorname{Ln}|-1| + i[\operatorname{Arg}(-1) + 2\pi n]\}} \\ &= e^{-(1+2n)\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^{w_1 w_2} &= (-i)^{2i} = e^{2i\ln(-i)} \\ &= e^{2i\{\operatorname{Ln}|-i| + i[\operatorname{Arg}(-i) + 2\pi n]\}} \\ &= e^{-2(-\pi/2 + 2\pi n)} = e^{(1+4n)\pi} \end{aligned}$$

con lo que se tiene lo pedido. ■

Teorema I.1.10. *Si* $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ *y* $w \in \mathbb{C}$, *entonces* *i)* $\quad (z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w$

ii) $\quad \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^w = \dfrac{z_1^w}{z_2^w}$

Demostración. Se demostrará sólo el primer inciso, dejando al lector la demostración del otro.

De la definición de potencia compleja, de las propiedades del logaritmo natural y de las propiedades de la exponencial tenemos:

$$\begin{aligned}(z_1 z_2)^w &= e^{w\ln(z_1 z_2)} = e^{w(\ln z_1 + \ln z_2)} \\ &= e^{w\ln z_1 + w\ln z_2} = e^{w\ln z_1}\, e^{w\ln z_2} = z_1^w z_2^w\end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. ■

Como en la demostración del teorema anterior se hace uso de las propiedades de la función logaritmo natural, es necesario tomar en cuenta las observaciones hechas al *Teorema I.1.7.*

El *valor principal* de z^w se define como

$$\Pr[z^w] = e^{w\,\mathrm{Ln}(z)} = e^{w[\mathrm{Ln}|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)]}$$

en donde utilizamos la función logaritmo natural principal en lugar de logaritmo natural en la definición de potencia compleja.

Así, del *Ejemplo I.1.20.(v)* tenemos que

$$\Pr[i^i] = e^{-\pi/2}$$

Obsérvese que para cada $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ se verifica que

$$\Pr[a^b] = e^{b\,\mathrm{Ln}(a)} = a^b$$

en el sentido real. Por consiguiente, la parte principal de cualquier potenciación compleja es una extensión a $\mathbb{C} - \{0\}$ de la correspondiente potenciación real.

Se puede definir la función logaritmo para bases reales distintas de e. Así, si $a > 0$, con $a \neq 1$, la *función logaritmo de base* a es la inversa de la función potencia compleja de base a, es decir,

$$w = \log_a z \qquad \text{si y sólo si} \qquad a^w = z$$

La función logarítmca de base a tiene las mismas propiedades que la función logaritmo natural apuntadas en el *Teorema I.1.7.*

La relación entre la función logaritmo de base a y la logaritmo natural se deduce fácilmente. Sea

$$w = \log_a z$$

entonces

$$\begin{aligned} a^w &= z \\ \ln a^w &= \ln z \\ w \ln a &= \ln z \\ w &= \frac{\ln z}{\ln a} \end{aligned}$$

de donde al sustituir w por $\log_a z$ tenemos

$$\log_a z = \frac{\ln z}{\ln a}$$

Esta última expresión es la que, por su facilidad, se utiliza comunmente como la definición de función logaritmo de base a.

La función raíz enésima.

Se definirá ahora la función *raíz enésima* en términos del logaritmo natural.

Definición I.1.10. *La función* ***raíz enésima****, denotada por* $\sqrt[n]{z}$ *se define como* $z^{1/n}$.

De acuerdo con la *Definición I.1.9* de potencia compleja, para $w = 1/n$ donde $n \geq 2$ es un número natural, esta función es igual a

$$\sqrt[n]{z} \equiv z^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln(z)}$$

Por el *Teorema I.1.8*, sabemos que hay n posibles raíces enésimas, dadas por

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} &= e^{\frac{1}{n}[\mathrm{Ln}|z| + i(\mathrm{Arg}z + 2\pi k)]} && k \in \mathbb{I} \\ &= e^{\mathrm{Ln}|z|^{1/n}} e^{i(\mathrm{Arg}z + 2\pi k)/n} \\ &= |z|^{1/n} e^{i\mathrm{Arg}z/n} e^{i(2\pi k/n)} \\ &= \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\mathrm{Arg}z/n} e^{i(2\pi k/n)} && k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

ya que $e^{i(2\pi k/n)}$ tiene valores distintos sólo cuando $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Eligiendo la rama del logaritmo cuya parte imaginaria toma valores en $(-\pi, \pi]$, la raíz enésima de z está dada por

$$\sqrt[n]{z} = e^{\frac{\mathrm{Ln}(z)}{n}} = \; = e^{\frac{1}{n}\{\mathrm{Ln}|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)\}} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\,\mathrm{Arg}(z)/n}$$

y las otras $n-1$ raices se obtienen multiplicando esta raíz por

$$e^{i(2\pi k/n)} \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

con lo que se obtiene la *fórmula de De Moivre* vista en cursos anteriores. Por lo tanto esta definición de raíz en términos del logaritmo es equivalente a la estudiada anteriormente.

Obsérvese que

$$\sqrt[n]{|z|} = w_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

donde

$$w_0 = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\,\mathrm{Arg}(z)/n}, \qquad w_k = w_{k-1}\, e^{2\pi i/n}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

Por lo tanto, toda ellas están sobre la circunferencia de radio $\sqrt[n]{|z|}$ con centro en 0. De hecho, w_0 es el punto de esta circunferencia con argumento $\mathrm{Arg}(z)/n$ y cada una de las restantes $n-1$ raíces se obtienen incrementando sucesivamente el argumento de w_0 por la cantidad fija $2\pi/n$. Específicamente, son los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia de radio $\sqrt[n]{|z|}$ con centro en 0.

Ejercicios propuestos.

1. Obtenga las imágenes en el plano z de las rectas paralelas al eje real en el plano z, bajo la transformación $w = z^2$.

2. Obtenga las imágenes en el plano z de las rectas $x + y = a$ en el plano z, bajo la transformación $w = z^2$.

3. Demuestre que bajo (una rama) de la función $f(z) = \sqrt{z}$, rectas paralelas al eje real son transformadas en hipérbolas.

4. Muestre que el mapeo $w = 1/z$ transforma toda recta en una circunferencia o en una recta y toda circunferencia en una circunferencia o una recta.

5. Muestre que el mapeo $w = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ transforma la semirrecta $\arg(z) = k = cte.$ en una hipérbola con focos en 1 y -1 en el plano w.

6. Pruebe que por la transformación $w = (z-i)/(iz-1)$ la región $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ se aplica en la región $|w| \leq 1$.

7. Demuestre que para toda $z \in \mathbb{C}$
   a) $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$
   b) $e^{-iz} = \cos z - i \operatorname{sen} z$

8. Escriba las siguientes funciones en la forma $u(x,y) + i\,v(x,y)$
   a) e^{z^2}
   b) $e^{1/z}$

9. Determine los valores de z que satisfacen $\overline{e^{iz}} = e^{i\bar{z}}$.

10. Determine, si mediante la transformación $f(z) = \operatorname{sen} z$, líneas paralelas al eje real se

tranforman en elipses.

11. Obtenga las imágenes en el plano w de las rectas paralelas a los ejes real e imaginario en el plano z bajo la transformación $f(z) = \cos z$.

12. Demuestre que para toda $z \in \mathbb{C}$
    a) $\cos(-z) = \cos z$
    b) $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$

13. Demuestre que para toda $z \in \mathbb{C}$
    a) $\operatorname{sen}(2z) = 2 \operatorname{sen} z \cos z$
    b) $\cos(2z) = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$
    c) $\operatorname{sen}^2(z/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$
    d) $\cos^2(z/2) = \frac{1}{2}(1 + \cos z)$

14. Si $\cos z = 2$, calcule
    a) $\cos(2z)$
    b) $\cos(3z)$

15. Demuestre que las funciones $\operatorname{sen}(z)$ y $\cos(z)$ son periódicas.

16. Obtenga los ceros de funciones $\operatorname{sen}(z)$ y $\cos(z)$.

17. Demuestre que la función $f(z) = \operatorname{sen} z$ satisface la relación
$$|f(x+iy)| = |f(x) + f(iy)|$$

18. Sea $z = x + iy$. Pruebe que
$$|\operatorname{senh} y| \le |\operatorname{sen} z| \le \cosh y$$

19. Demuestre que
    a) $1 + \tan^2 z = \sec^2 z$
    b) $1 + \operatorname{ctg}^2 z = \csc^2 z$

20. Demuestre que
    a) $\overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen} \bar{z}$
    b) $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$
    c) $\overline{\tan z} = \tan \bar{z}$

21. Obtenga las raíces de la ecuación $\tan z = z$.

22. Obtenga $u(x,y)$ y $v(x,y)$ tales que $\tan z = u(x,y) + i\,v(x,y)$.

23. Muestre que

$$\left|\tanh\frac{\pi(1+i)}{4}\right| = 1$$

24. Demuestre el *Teorema I.1.3.*

25. Escriba a la función $\ln(z)$ en las formas $u(x,y) + i\,v(x,y)$ y $U(r,\theta) + i\,V(r,\theta)$.

26. Deduzca las expresiones para $\cos^{-1}(z)$, $\tan^{-1}(z)$ y $\operatorname{senh}^{-1}(z)$.

27. Calcule todos los valores de $(1-i)^i$.

28. Demuestre que todos los valores de $(1-i)^{\sqrt{2}\,i}$ están en una línea recta.

29. Si $z = x + iy$, obtenga $\operatorname{Re}(z^z)$ y $\operatorname{Im}(z^z)$.

I.2 Funciones analíticas.

En esta sección analizaremos los conceptos fundamentales de la derivación de funciones de variable compleja y sus principales propiedades. Veremos que las reglas de derivación de una función de una variable compleja son similares a las usadas para derivar una función de una variable real.

Regiones en el plano complejo.

En esta parte estamos interesados en conjuntos de números complejos, o sea, en conjuntos de puntos en el plano complejo y de su proximidad mutua. El conjunto esencial es el de *disco abierto* el cual se define a continuación.

Definición I.2.1. *Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$. El* ***disco abierto*** [1] *de radio r con centro en z_0, denotado como $D_r(z_0)$, está dado por*

$$D_r(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r \}$$

Haciendo algunas operaciones en el conjunto anterior tenemos

$$\begin{aligned} D_r(z_0) &= \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r \} \\ &= \{ x + iy \in \mathbb{C} \mid |(x+iy) - (x_0 + iy_0)| < r \} \\ &= \{ x + iy \in \mathbb{C} \mid |(x - x_0) + i(y - y_0)| < r \} \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r \right\} \\ &= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2 \} \end{aligned}$$

por lo que este conjunto está formado por todos los puntos z en el plano cuya distancia al punto z_0 es menor que r. Nótese que se deben incluir sólamente aquellas z para las cuales se cumple la desigualdad *estricta*, por lo que geométricamente está formado por el "interior" de la circunferencia de radio r con centro en z_0. El disco $D_r(z_0)$ se ilustra en la *Figura I.2.1*.

[1] También llamado entorno o vecindad.

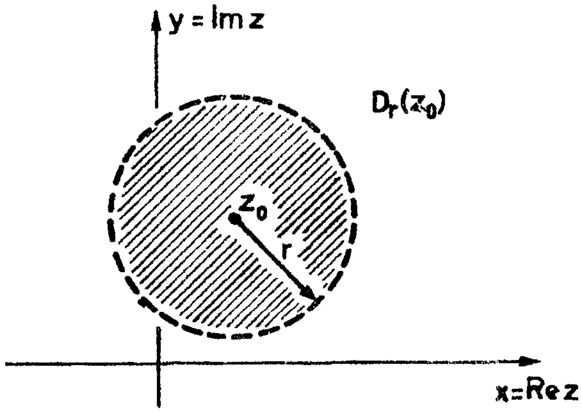

Figura I.2.1. *El disco abierto de radio* $r > 0$ *con centro en* z_0.

Una *vecindad reducida o agujerada* de radio r con centro en z_0, denotada como $D_r^*(z_0)$, es una vecindad de radio r con centro en z_0, cuyo punto central z_0 se ha eliminado, es decir,

$$D_r^*(z_0) = D_r(z_0) - \{z_0\} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r \,\}$$

Con esto, ya podemos definir el concepto de *conjunto abierto.*

Definición I.2.2. *Sea* $A \subset \mathbb{C}$. *Se dice que* A *es un* ***conjunto abierto*** *en* $\mathbb{C}$ *si para cada* $z_0 \in A$ *existe* $r > 0$ *tal que* $D_r(z_0) \subset A$.

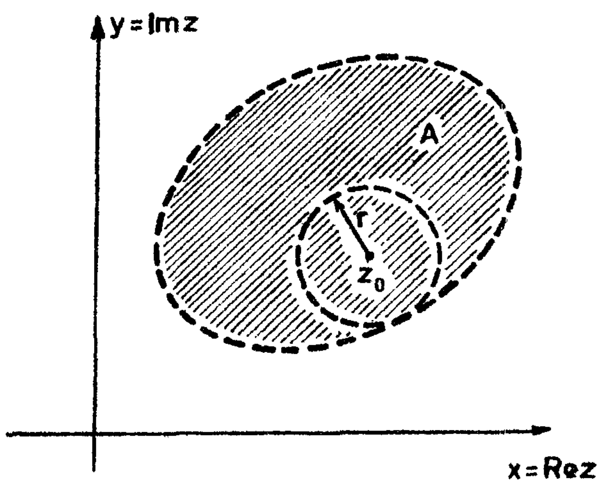

Figura I.2.2. *Conjunto abierto.*

Esto significa que para cada punto del conjunto, siempre existe un disco abierto de un cierto radio alrededor del punto, que se encuentra totalmente contenido en el conjunto.

Es importante darse cuenta que el número $r > 0$ depende del punto z_0, y generalmente r se irá contrayendo conforme z_0 esté más cerca de la "orilla" o "borde" de A. Intuitivamente hablando, un conjunto A es abierto cuando los "puntos frontera" no pertenecen al conjunto A. En la *Figura I.2.2* la línea discontinua *no* está incluida en A.

También debemos establecer por convención que el *conjunto vacío* $\varnothing$ (el conjunto que carece de elementos) es abierto.

Hemos definido disco abierto y conjunto abierto. De nuestra terminología seleccionada parece que un disco abierto también debe ser un conjunto abierto. Pensándolo un poco, nos damos cuenta que esto requiere una pequeña demostración.

Teorema I.2.1. Para toda $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, $D_r(z_0)$ es un conjunto abierto.

Demostración. De acuerdo con la *Definición 1.2.2* de conjunto abierto, para toda $z \in D_r(z_0)$, esto es, las z tales que $|z - z_0| < r$, debemos encontrar una $s > 0$ tal que $D_s(z) \subset D_r(z_0)$. Refiriéndonos a la *Figura I.2.3* vemos que una elección razonable es $s = r - |z - z_0|$; nótese que $s > 0$ y que se hace más pequeño a medida que z se acerca a la "orilla" de $D_r(z_0)$.

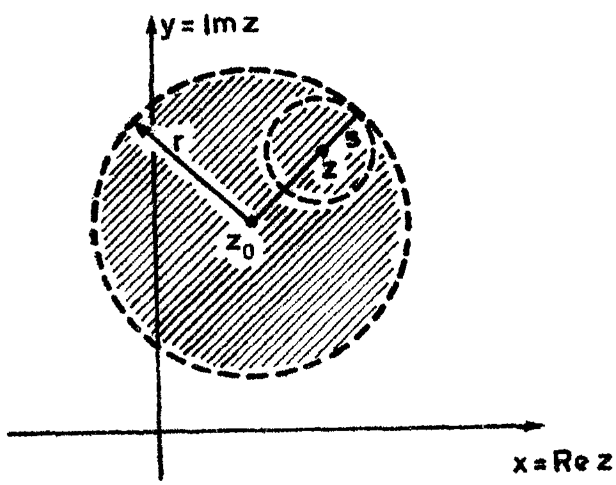

Figura I.2.3. *El disco abierto es un conjunto abierto.*

Para probar que $D_s(z) \subset D_r(z_0)$, sea $z' \in D_s(z)$, esto es, $|z' - z| < s$. Queremos probar que $z' \in D_r(z_0)$ también. Probaremos esto a la luz de la *Definición I.2.1* demostrando que $|z' - z_0| < r$. Esto se hace usando la desigualdad del triángulo.

$$\begin{aligned} |z' - z_0| &= |(z' - z) + (z - z_0)| \\ &\leq |z' - z| + |z - z_0| \\ &< \epsilon + |z - z_0| = r \end{aligned}$$

De aquí $|z' - z_0| < r$. ■

El siguiente ejemplo ilustra algunas técnicas útiles para establecer si un conjunto es abierto o no.

Ejemplo I.2.1. Probar que

$$\begin{aligned} A &= \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \} \\ &= \{ x + iy \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(x + iy) > 0 \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \} \end{aligned}$$

es un conjunto abierto.

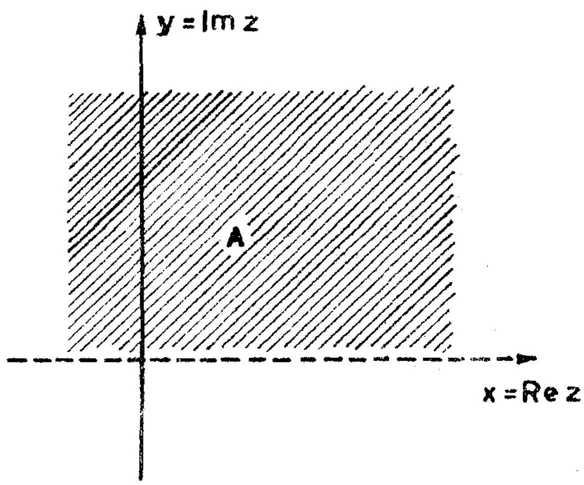

Figura I.2.4. *El conjunto A es abierto.*

Solución. Este conjunto se encuentra dibujado en la *Figura I.2.4.* Intuitivamente, este conjunto es abierto ya que ninguno de los "puntos frontera" $y = 0$ pertenece al conjunto A. Tal argumento será suficiente después de que uno se haya acostumbrado a usar las ideas. Si embargo, primeramente debemos dar todos los detalles.

Para probar que A es abierto, debemos mostrar que para todo punto $z \in A$ existe una $r > 0$ tal que $D_r(z) \subset A$. Si $z = x + iy \in A$, entonces $y > 0$. Elegimos $r = y$. Para probar que $D_r(z) \subset A$, sea $z' \in D_r(z)$, esto es, $|z' - z| < r$. Queremos probar que también $z' = x' + iy' \in A$. Probaremos esto mostrando que $y' > 0$. Si $z' = x' + iy' \in D_r(z)$ tenemos

$$|y' - y| = \sqrt{(y' - y)^2} \leq \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} = |z' - z| < r = y$$

de donde $y' - y < y$ y $y' - y > -y$. La segunda desigualdad implica que $y' > 0$, esto es, $z' = x' + iy' \in A$. De aquí $D_r(z) \subset A$, y por lo tanto, A es abierto. ■

Ahora, introduzcamos formalmente el concepto de *punto frontera* al cual hemos aludido en el *Ejemplo I.2.1*.

Definición I.2.3. *Sea $A \subset \mathbb{C}$. Un punto $z \in \mathbb{C}$ se llama un* ***punto frontera*** *de A si toda vecindad de z contiene al menos un punto en A y al menos un punto que no está en A.*

El que un punto no esté en A significa que está en A^c el complemento de A.

En esta definición z puede o no estar en A; si $z \in A$ entonces z es un punto frontera si toda vecindad de z contiene al menos un punto en A^c (es claro que contiene un punto de A, a saber, z). Similarmente, $z \in A^c$ es un punto frontera si toda vecindad de z contiene al menos un punto de A.

Estaremos particularmente interesados en puntos frontera de conjuntos abiertos. De la definición de conjunto abierto, ningún punto de un conjunto abierto A puede ser un punto frontera de A. Por lo tanto, un punto z es un punto frontera de un conjunto abierto A si y sólo si $z \in A^c$ y toda vecindad de z tiene intersección no vacía con A.

Esto expresa en términos precisos la idea intuitiva de que un punto frontera de A es un punto justo en el "borde" de A. En muchos ejemplos es perfectamente claro cuáles son los puntos frontera.

Al conjunto de todos los puntos frontera de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ abierto o cerrado, denotado como ∂A, se le llama *frontera* de A.

Ejemplo I.2.2. Para $D_r(z_0)$, el disco abierto de radio r con centro en z_0, su frontera es la circunferencia de radio r con centro en $z_0 = x_0 + i\,y_0$

$$\partial D_r(z_0) = C_r(z_0) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r \,\}$$

y para el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ del *Ejemplo I.2.1*, su frontera es

$$\partial A = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0 \,\}$$

los puntos sobre el eje real. ■

Límites de funciones de variable compleja.

Se estudiarán funciones con dominio $A \subset \mathbb{C}$ y con codominio $\mathbb{C}$; estas se llamarán funciones complejas de una variable compleja. Tal como se apuntó en el *Subtema I.1*, también se pueden pensar como funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Usualmente se denotarán estas funciones como

$$f(x + iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

donde u y v son funciones reales de variable vectorial.

Estamos ahora interesados en hallar el *límite* cuando $z \in A$ tiende a un punto del conjunto abierto A o a un punto en ∂A (la frontera de A).

Intuitivamente, para una función $f(z)$ definida en todos los puntos de un conjunto abierto A, la afirmación de que el *límite* de la función, cuando z tiende a z_0, es el número w_0 significa que el punto $f(z)$ puede hacerse tan próximo como se quiera al w_0 si escogemos a z lo suficientemente cercano a z_0, pero distinto a él. Ahora expresaremos la definición de límite en forma precisa.

Definición I.2.4. *Sea $f\colon A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función, con A un conjunto abierto y sea $z_0 \in A$ o $z_0 \in \partial A$. Se dice que el* ***límite*** *de $f(z)$ cuando z tiende a z_0 es $w_0 \in \mathbb{C}$, lo cual se escribe* *como*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

si para toda $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$|f(z) - w_0| < \epsilon$$

siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$ *y* $z \in A$.

Geométricamente, y en términos de discos, esta definición dice que dado cualquier disco $|f(z) - w_0| < \epsilon$ de radio ϵ con centro en w_0 (denotado como $D_\epsilon(w_0)$), existe un disco reducido $0 < |z - z_0| < \delta$ de radio δ con centro en z_0 (denotado como $D_\delta^*(z_0)$), tal que para toda z en $D_\delta^*(z_0)$, su imagen $f(z)$ está en $D_\epsilon(w_0)$. La *Figura I.2.5* ilustra este concepto.

Nótese, no obstante, que aunque todos los puntos en el entorno reducido $D_\delta^*(z_0)$ han de tomarse en consideración, sus imágenes no tienen por qué llenar todo el entorno $D_\epsilon(w_0)$. Si, por ejemplo, $f(z) = w_0$, donde w_0 es una constante compleja, la imagen de z siempre es el centro de ese entorno.

Obsérvese también que una vez hallada una δ, se puede sustituir por cualquier otro número positivo más pequeño.

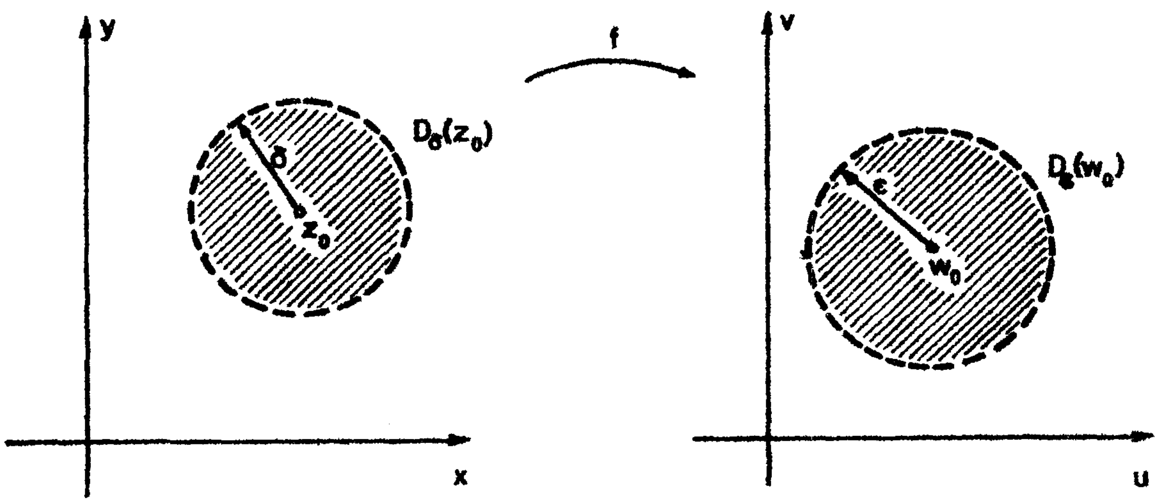

Figura I.2.5. *Interpretación geométrica de* $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$.

La definición de límite para funciones complejas de variable compleja es similar a la definición de límite para funciones reales de variable real. La diferencia principal es que ahora hablamos de un número que está en un disco abierto alrededor de un punto en el plano, mientras que en el caso de las funciones reales hablamos de un numero que está en un intervalo abierto de la recta real.

Sobre la recta real, hay sólo dos maneras de que x se aproxime a x_0: por la izquierda o por la derecha. Sin embargo, en el plano, z se puede aproximar a z_0 a lo largo de una infinidad de trayectorias. A fin de que $f(z)$ tenga el límite w_0 cuando z se aproxima a z_0, es necesario que $f(z)$ se aproxime a w_0 a lo largo de *todas* esas trayectorias, lo cual hace que esta forma de determinar límites no sea práctica, pero sí será útil para averigar cuándo un límite *no* existe, como lo veremos un poco más adelante mediante un ejemplo.

Ejemplo I.2.3. Sean c y z_0 constantes complejas. Mediante la *Definición I.2.4* de límite, probar que

i) $\lim\limits_{z \to z_0} c = c$

ii) $\lim\limits_{z \to z_0} z = z_0$

Solución. El primer requerimiento de la *Definición I.2.4* es que las funciones c y z estén definidas en todo valor de algún conjunto abierto A tal que $z_0 \in A$ o $z_0 \in \partial A$. Como dichas funciones están definidas para toda $z \in \mathbb{C}$, cualquier conjunto abierto que contenga al punto z_0 satisfacerá este requerimiento.

i) Para toda $\epsilon > 0$, debemos probar que existe una $\delta > 0$ talque

$$|c - c| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

$|f(z) - w_0| = |c - c| = 0$ para todo valor de z. Así, dándole a δ cualquier valor positivo la proposición anterior se satisface. Esto prueba lo pedido.

ii) Análogamente al inciso anterior, para toda $\epsilon > 0$, debemos probar que existe una $\delta > 0$ tal que

$$|z - z_0| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

Como $|f(z) - w_0| = |z - z_0|$, queremos encontrar una $\delta > 0$ tal que

$$|z - z_0| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

La proposición anterior se satisface si $\delta = \epsilon$, con lo cual se prueba lo que se quería. ■

Ejemplo I.2.4. Mostrar que si $f(z) = \bar{z}$, entonces $\lim_{z \to z_0} f(z) = \overline{z_0}$, donde z_0 es cualquier número complejo.

Solución. Como f símplemente refleja puntos respecto al eje real, sospechamos que si $\delta = \epsilon$, cualquier vecindad de radio ϵ alrededor de $\overline{z_0}$ contendría la imagen de la vecindad reducida de radio δ alrededor de z_0. Para confirmar esta conjetura, sea ϵ cualquier número positivo y sea $\delta = \epsilon$. Entonces supongamos que $z \in D_\delta^*(z_0) = D_\epsilon^*(z_0)$, lo cual significa que $0 < |z - z_0| < \epsilon$. El módulo del conjugado de un número es igual al módulo del mismo número, así que la última desigualdad implica que $0 < |\overline{z - z_0}| < \epsilon$. Esto es lo mismo que $0 < |\bar{z} - \overline{z_0}| < \epsilon$. Ya que $f(z) = \bar{z}$ y $w_0 = \overline{z_0}$, esto es lo mismo que $f(z) \in D_\epsilon(\overline{z_0})$, lo cual es lo que queríamos mostrar. ■

Ejemplo I.2.5. Sea

$$f(z) = \frac{z^2 + 4}{2(z + 2i)} \qquad D_f = \mathbb{C} - \{-2i\}$$

Demostrar que $\lim_{z \to -2i} f(z) = -2i$.

Solución. Nótese que en este ejemplo, a diferencia de los dos anteriores, $z_0 = -2i \notin D_f$.

Debemos mostrar que para cualquier $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{z^2 + 4}{2(z + 2i)} + 2i \right| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z + 2i| < \delta$$

Puesto que $z \neq -2i$, podemos escribir

$$\frac{z^2 + 4}{2(z + 2i)} = \frac{(z + 2i)(z - 2i)}{2(z + 2i)} = \frac{z - 2i}{2}$$

al cancelar en el numerador y denominador a $z + 2i \neq 0$.

Entonces, debemos mostrar que para cualquier $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\left|\left(\frac{z-2i}{2}\right) + 2i\right| = \left|\frac{z+2i}{2}\right| = \frac{|z+2i|}{2} < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z+2i| < \delta$$

Tomando $\delta = 2\epsilon$ el resultado requerido se deduce. ■

Ejemplo I.2.6. Demostrar que

$$\lim_{z \to 2i} (2x + iy^2) = 4i$$

Solución. Para toda $\epsilon > 0$ debemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|2x + iy^2 - 4i| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - 2i| < \delta$$

Como

$$\begin{aligned} |2x + iy^2 - 4i| &= |2x + i(y^2 - 4)| \\ &\leq |2x| + |y^2 - 4| = 2|x| + |y-2||y+2| \end{aligned}$$

la desigualdad $|2x + iy^2 - 4i| < \epsilon$ se cumplirá si

$$2|x| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad |y-2||y+2| < \frac{\epsilon}{2}$$

la primera de las cuales se satisface obviamente si $|x| < \epsilon/4$. Para obtener condiciones sobre y de modo que se verifique la segunda, restringimos a y de tal manera que $|y-2| < 1$ y vemos que entonces

$$|y+2| = |(y-2)+4| \leq |y-2| + 4 < 5$$

Por lo tanto, si $|y-2| < \text{mín}\{\epsilon/10, 1\}$, donde $\text{mín}\{\epsilon/10, 1\}$ denota al menor de los números $\epsilon/10$ y 1, se sigue que

$$|y-2||y+2| < \left(\frac{\epsilon}{10}\right)5 = \frac{\epsilon}{2}$$

Fácilmente se encuentra ahora un valor conveniente para δ a partir de la condición de que

$|x|$ sea menor que $\epsilon/4$ y que $|y-2|$ sea menor que $\text{mín}\{\epsilon/10, 1\}$:

$$\delta = \text{mín}\left\{\frac{\epsilon}{10}, 1\right\} \qquad \blacksquare$$

Como geométricamente $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ y $z = x + iy = (x, y)$ esta definición es idéntica a la equivalente para funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, todas las propiedades demostradas para dichas funciones siguen siendo válidas en nuestro caso, como por ejemplo, la unicidad y el hecho de que el límite de la suma es la suma de los límites.

Las demostraciones hechas en cálculo real de una variable también sirven para demostrar el siguiente teorema.

Teorema I.2.2. *Cuando* $\text{lím}_{z \to z_0} f(z)$ *existe, es único.*

Demostración. Se hará por contraducción. Supóngase que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{z \to z_0} f(z) = w_2$$

con $w_1 \neq w_2$. Dada $\epsilon > 0$ se puede, por hipótesis, encontrar $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(z) - w_1| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_1$$

y análogamente, encontrar $\delta_2 > 0$ tal que

$$|f(z) - w_2| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_2$$

Sea δ el mínimo entre δ_1 y δ_2, es decir, $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Elegir z de tal manera que $0 < |z - z_0| < \delta$ y $z \in A$. Tal z existe porque z_0 está en A o es un punto frontera de A. Así, usando la desigualdad del triángulo se tiene

$$\begin{aligned} |w_1 - w_2| &= |w_1 - f(z) + f(z) - w_2| \\ &\leq |w_1 - f(z)| + |f(z) - w_2| \\ &\leq |f(z) - w_1| + |f(z) - w_2| \\ &< \epsilon + \epsilon = 2\epsilon \end{aligned}$$

Así, para cada $\epsilon > 0$ se tiene $|w_1 - w_2| < 2\epsilon$. Por lo tanto, $w_1 = w_2$, porque si $w_1 \neq w_2$ se podría tener $\epsilon = |w_1 - w_2|/2$ que llevaría a $|w_1 - w_2| < |w_1 - w_2|$, lo cual es imposible. ■

Ejemplo I.2.7 Demostrar que

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}}$$

no existe.

Solución. Si existe el límite, $z/\bar{z}$ debería aproximarse a un valor definido, digamos c, cuando z se acerque a 0. En particular si z tiende a 0 a lo largo de cualquier trayectoria, entonces, por el *Teorema I.2.2* de unicidad, $z/\bar{z}$ debería tender al valor límite c.

En general,

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{x+iy \to 0+i0} \frac{x+iy}{\overline{x+iy}} = \lim_{x+iy \to 0+i0} \frac{x+iy}{x-iy}$$

Si z tiende a cero a lo largo del eje real de ecuación $\mathrm{Im}(z) = y = 0$, entonces el valor límite es

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{x+i0 \to 0+i0} \frac{x+i0}{x-i0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

Si z tiende a cero a lo largo del eje imaginario de ecuación $\mathrm{Re}(z) = x = 0$, entonces el valor límite es

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{0+iy \to 0+i0} \frac{0+iy}{0-iy} = \lim_{iy \to i0} \frac{iy}{-iy} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{-y} = \lim_{y \to 0} (-1) = -1$$

Puesto que los dos límites son diferentes, $\lim_{z \to 0} z/\bar{z}$ no existe. ■

Si bien la *Definición I.2.4* de límite proporciona un medio para comprobar si un punto w_0 es el límite de una función, no pone en nuestras manos un método para determinar dicho límite; tal es el caso de los ejercicios sobre límites apuntados anteriormente en los *Ejemplos I.2.3, I.2.4, I.2.5 y I.2.6.* Los teoremas sobre límites que presentaremos a continuación permiten calcular muchos límites.

Teorema I.2.3. *Si* $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_1$ *y* $\lim_{z \to z_0} g(z) = w_2$, *entonces*

i) $$\lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = w_1 + w_2$$

ii) $$\lim_{z \to z_0} [c\, f(z)] = c\, w_1 \qquad \forall \quad c \in \mathbb{C}$$

iii) $$\lim_{z \to z_0} [f(z)\, g(z)] = w_1\, w_2$$

iv) $$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{w_1} \qquad si \quad w_1 \neq 0$$

v) $$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_1}{w_2} \qquad si \quad w_2 \neq 0$$

Recuérdese que, por ejemplo, el primer inciso de este teorema se puede enunciar de la siguiente manera:

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = \lim_{z \to z_0} f(z) + \lim_{z \to z_0} g(z)$$

siempre y cuando $\lim_{z \to z_0} f(z)$ y $\lim_{z \to z_0} g(z)$ existan.

Con palabras: *el límite de una suma de funciones es igual a la suma de los límites de las funciones, siempre y cuando existan los límites de cada uno de los sumandos.*

Demostración. Se ilustrará la técnica de demostración probando los dos primeros incisos. Las demostraciones de las otras aseveraciones son sólo un poco más complicadas.

i) Sea $\epsilon > 0$. Como $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_1$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(z) - w_1| < \tfrac{\epsilon}{2} \quad \text{siempre que} \quad z \in A \quad \text{y} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_1$$

Análogamente, como $\lim_{z \to z_0} g(z) = w_2$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|f(z) - w_2| < \tfrac{\epsilon}{2} \quad \text{siempre que} \quad z \in A \quad \text{y} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_2$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces

$$\begin{aligned}\left|[f(z)+g(z)]-(w_1+w_2)\right| &= \left|f(z)-w_1+g(z)-w_2\right| \\ &\leq \left|f(z)-w_1\right|+\left|g(z)-w_2\right| \\ &< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\end{aligned}$$

siempre que $0<|z-z_0|<\delta$ y $z\in A$, con lo que termina la demostración.

ii) Sea $\epsilon>0$ un número dado; debemos encontrar un número $\delta>0$ tal que la desigualdad

$$|cf(z)-cw_1|<\epsilon$$

se cumpla si $0<|z-z_0|<\delta$ y $z\in A$. Si $c=0$, se cumple con cualquier δ, de manera que supondremos $c\neq 0$. Sea $\epsilon'=\epsilon/|c|$; por la definición de límite, existe δ con la propiedad de que

$$|f(z)-w_1|<\epsilon'=\frac{\epsilon}{|c|} \quad \text{siempre que} \quad 0<|z-z_0|<\delta \quad \text{y} \quad z\in A$$

Asi,

$$|cf(z)-cw_1|=|c||f(z)-w_1|<\epsilon$$

siempre que $0<|z-z_0|<\delta$, con lo cual demuestra lo que se quería. ■

Ejemplo I.2.8

a) De las propiedades de los límites dadas por el *Teorema I.2.3. (i), (ii)*, para la función lineal $f(z)=az+b$ tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}(az+b) &= \lim_{z\to z_0}(az)+\lim_{z\to z_0}b \\ &= a\lim_{z\to z_0}z+\lim_{z\to z_0}b \\ &= az_0+b \qquad \forall\ z_0\in\mathbb{C}\end{aligned}$$

ya que del *Ejemplo I.2.3*, $\lim_{z\to z_0}z=z_0$ y $\lim_{z\to z_0}b=b$.

b) De la misma forma, para la función cuadrática $f(z)=az^2+bz+c$ tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{z \to z_0} (az^2 + bz + c) &= \lim_{z \to z_0} (az^2) + \lim_{z \to z_0} (bz) + \lim_{z \to z_0} c \\ &= a \lim_{z \to z_0} z^2 + b \lim_{z \to z_0} z + \lim_{z \to z_0} c \\ &= a z_0^2 + b z_0 + c \qquad \forall \ z_0 \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

ya que por el *Teorema I.2.3.(iii)*

$$\lim_{z \to z_0} z^2 = \lim_{z \to z_0} (zz) = \left(\lim_{z \to z_0} z\right)\left(\lim_{z \to z_0} z\right) = z_0 z_0 = z_0^2$$

Mediante inducción matemática se puede probar que, en general

$$\lim_{z \to z_0} z^n = z_0^n, \qquad \forall \ n \in \mathbb{N}$$

c) Generalizando el *Teorema I.2.3.(i)* tenemos que para la función polinomial $p(z)$

$$\begin{aligned}\lim_{z \to z_0} p(z) &= \lim_{z \to z_0} \left(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0\right) \\ &= \lim_{z \to z_0} \left(a_n z^n\right) + \lim_{z \to z_0} \left(a_{n-1} z^{n-1}\right) + \dots + \lim_{z \to z_0} \left(a_1 z\right) + \lim_{z \to z_0} a_0 \\ &= a_n \lim_{z \to z_0} z^n + a_{n-1} \lim_{z \to z_0} z^{n-1} + \dots + a_1 \lim_{z \to z_0} z + \lim_{z \to z_0} a_0 \\ &= a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0 \\ &= p(z_0) \qquad \forall \ z_0 \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

d) Del *Teorema 1.2.3.(v)* tenemos que para la función racional $r(z) = p(z)/q(z)$

$$\begin{aligned}\lim_{z \to z_0} r(z) &= \lim_{z \to z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\lim_{z \to z_0} p(z)}{\lim_{z \to z_0} q(z)} \\ &= \frac{p(z_0)}{q(z_0)} = r(z_0) \qquad \forall \ z_0 \in \{ z \in \mathbb{C} \mid q(z) \neq 0 \}\end{aligned}$$

es decir, el limite de la función racional cuando z tiende a cualquier z_0 de su dominio es igual a la función evaluada en z_0. ∎

Ejemplo I.2.9. Si en la función racional $r(z) = p(z)/q(z)$ se tiene que $q(z_0) = 0$, el *Teorema I.2.3. (v)* no es aplicable para calcular $\lim_{z \to z_0} r(z) = \lim_{z \to z_0} [p(z)/q(z)]$ porque $\lim_{z \to z_0} q(z) = q(z_0) = 0$. Si además $p(z_0) = 0$ se dice que el límite está *indeterminado* o que se tiene una *indeterminación*. Sin embargo, como p y q pueden factorizarse de la forma

$$p(z) = (z - z_0)P(z) \qquad \text{y} \qquad q(z) = (z - z_0)Q(z)$$

entonces, si $Q(z_0) \neq 0$ el límite puede calcularse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} r(z) &= \lim_{z \to z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)\, P(z)}{(z - z_0)\, Q(z)} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\lim_{z \to z_0} P(z)}{\lim_{z \to z_0} Q(z)} \\
&= \frac{P(z_0)}{Q(z_0)} = R(z_0)
\end{aligned}$$

donde $R(z) = P(z)/Q(z) \neq p(z)/q(z) = r(z)$. ■

El siguiente teorema nos dice el límite de una función de variable compleja $f(z)$ está determinado por los límites de dos funciones reales de dos variables independientes: sus partes real e imaginaria $u(x,y)$ y $v(x,y)$.

Teorema I.2.4. *Sea $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función, con A un conjunto abierto y sea $z_0 \in A$ o $z_0 \in \partial A$. Si $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$, $z_0 = x_0 + i\, y_0$ y $w_0 = u_0 + i\, v_0$, entonces*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

si y sólo si

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \qquad y \qquad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

Para propósitos prácticos, este teorema puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned}\lim_{z \to z_0} f(z) &= \lim_{x+iy \to x_0+iy_0} [u(x,y) + i\,v(x,y)] \\ &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) + i \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)\end{aligned}$$

siempre y cuando $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)$ y $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$ existan.

Demostración. Primero supongamos que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

es cierto. De acuerdo con la *Definición I.2.4* de límite, para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - w_0| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \ \text{ y } \ z \in A$$

Como

$$\begin{aligned} f(z) - w_0 &= [u(x,y) + i\,v(x,y)] - (u_0 + i\,v_0) \\ &= [u(x,y) - u_0] + i[v(x,y) - v_0]\end{aligned}$$

se tiene que

$$|u(x,y) - u_0| = |\mathrm{Re}[f(z) - w_0]| \le |f(z) - w_0| < \epsilon$$

y

$$|v(x,y) - v_0| = |\mathrm{Im}[f(z) - w_0]| \le |f(z) - w_0| < \epsilon$$

siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$ y $z \in A$. Por lo tanto

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

Inversamente, supongamos que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

son ciertas. Entonces para toda $\epsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$|u(x,y) - u_0| < \tfrac{\epsilon}{2} \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_1 \ \text{ y } \ z \in A$$

y

$$|v(x,y) - v_0| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_2 \;\; \text{y} \;\; z \in A$$

Si elegimos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces podemos usar la desigualdad del triángulo y escribir

$$\begin{aligned}
|f(z) - w_0| &= |[u(x,y) + i\,v(x,y)] - (u_0 + i\,v_0)| \\
&= |[u(x,y) - u_0] + i[v(x,y) - v_0]| \\
&\le |u(x,y) - u_0| + |v(x,y) - w_0| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$ y $z \in A$. Por lo tanto,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$ ■

Ejemplo I.2.10. Calcular

$$\lim_{z \to 1+i} [(x^2 - y^2 + 2x - 1) + i(2xy + 2y)]$$

Solución. Sea $f(z) = (x^2 - y^2 + 2x - 1) + i(2xy + 2y)$, entonces por el *Teorema I.2.4*

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to 1+i} f(z) &= \lim_{x+iy \to 1+i} [(x^2 - y^2 + 2x - 1) + i(2xy + 2y)] \\
&= \lim_{(x,y) \to (1,1)} (x^2 - y^2 + 2x - 1) + i \lim_{(x,y) \to (1,1)} (2xy + 2y) \\
&= \mathbf{1 + 4\,i}
\end{aligned}$$

Este resultado es fácil de comprobar porque $f(z) = z^2 + 2z - 1$. ■

Continuidad.

En los cursos de cálculo de funciones reales de una o dos variables independientes, el concepto de función continua está basado en la idea intuitiva de una función cuya gráfica es una curva o superficie sin romper, esto es, una curva o superficie sin "saltos" o "brincos".

Si se examinan ejemplos de funciones f cuyas gráficas estén rotas en algún punto x_0 o (x_0, y_0) y funciones g cuyas gráficas no estén rotas, se ve que la diferencia principal entre ellas es que para una función como g, los valores de $g(x)$ o $g(x,y)$ se acercan más y más a $g(x_0)$ o $g(x_0, y_0)$ conforme x o (x,y) se acercan más a x_0 o (x_0, y_0) respectivamente. La misma idea sirve para funciones de variable compleja, pero la idea de más y más cerca no basta como definición matemática, así que formularemos estos conceptos de manera precisa en términos de límites.

Definición I.2.5. *Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y sea $f: A \to \mathbb{C}$ una función. Se dice que la función f es* ***continua*** *en $z_0 \in A$ si y sólo si*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

y f es continua en A si y sólo si es continua en cada $z_0 \in A$.

Esta definición tiene el mismo significado intuitivo que en cálculo elemental: La condición dada por $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ significa que la función $f(z)$ está más y más cerca de $f(z_0)$ a medida que z está más y más cerca de z_0.

Notar que la igualdad anterior se puede escribir como

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f\left(\lim_{z \to z_0} z\right)$$

lo cual nos indica que para que una función sea continua el símbolo de límite debe poder introducirse dentro del argumento de la función.

Ejemplo I.2.11.

i) Sean $f(z) = c$ y $g(z) = z$, donde c es una constante compleja. Del *Ejemplo I.2.3* tenemos que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} c = c = f(z_0)$$

y

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = \lim_{z \to z_0} z = z_0 = g(z_0)$$

por lo que $f(z) = c$ y $g(z) = z$ son continuas en z_0. Pero como $z_0 \in \mathbb{C}$, dichas funciones son continuas en todo el plano complejo $\mathbb{C}$.

ii) En el *Ejemplo I.2.4* se obtuvo que

$$\lim_{z \to z_0} \bar{z} = \overline{z_0}$$

para toda $z_0 \in \mathbb{C}$, por lo que la función $f(z) = \bar{z}$ es continua en $\mathbb{C}$.

iii) La función

$$f(z) = \frac{z^2 + 4}{2(z + 2i)}, \qquad D_f = \mathbb{C} - \{-2i\}$$

es continua en D_f porque si $z_0 \neq -2i$, entonces

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 + 4}{2(z + 2i)} = \frac{\lim_{z \to z_0} (z^2 + 4)}{\lim_{z \to z_0} [2(z + 2i)]}$$

$$= \frac{\lim_{z \to z_0} (z^2 + 4)}{2 \lim_{z \to z_0} (z + 2i)} = \frac{z_0^2 + 4}{2(z_0 + 2i)}$$

$$= f(z_0)$$

Esta misma función, no es continua en el punto $z_0 = -2i$, es decir, es *discontinua* en dicho punto porque $f(-2i)$ no existe.

Sin embargo, tal como se vió en el *Ejemplo I.2.5*, $\lim_{z \to -2i} f(z) = -2i$ por lo que decimos que la discontinuidad es *eliminable* ya que es posible definir a la función en $z_0 = -2i$ de tal manera que ahora sí sea continua ahí. Esto se hace de la siguiente manera:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2 + 4}{2(z + 2i)} & si \quad z \neq -2i \\ -2i & si \quad z = -2i \end{cases}$$

iv) La función $f(z) = z/\bar{z}$ no es continua en $z = 0$ porque $f(0)$ no existe y como $\lim_{z \to 0} z/\bar{z}$ tampoco existe (ver el *Ejemplo I.2.7*), la discontinuidad no es eliminable, es decir, es *esencial*. ■

Aplicando la *Definición I.2.4* de límite a la *Definición I.2.5* de continuidad en un punto tenemos que $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ si para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \quad \text{y} \quad z \in A$$

Si f es continua en z_0, $f(z_0)$ existe, por lo tanto en la expresión anterior no es necesario que $0 < |z - z_0|$ porque cuando $z = z_0$ dicha expresión es obviamente válida. Tenemos entonces el siguiente teorema, el cual se utiliza como definición de continuidad de una función en un punto utilizando la notación de ϵ y δ.

Teorema I.2.5. *Sea $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función, con A abierto. Decimos que f es continua en $z_0 \in A$ si y sólo si para todo número $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que*

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad \textit{siempre que} \quad |z - z_0| < \delta \quad \textit{y} \quad z \in A$$

Aunque el siguiente es un teorema sobre límites, no se enunció antes porque su demostración requiere del concepto de continuidad. Es el referente al límite de una composición de funciones.

Teorema I.2.6. *Sean $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $g: B \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, donde $f(A) \subset B$, así que $g \circ f$ está definida en A abierto. Si $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ y g es continua en w_0, entonces*

$$\lim_{z \to z_0} (g \circ f)(z) = \lim_{z \to z_0} g[f(z)] = g(w_0)$$

Demostración. Por la continuidad de g en w_0, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que

$$|g(w) - g(w_0)| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad |w - w_0| < \delta' \quad \text{y} \quad w \in f(A)$$

es decir,

$$|g[f(z)] - g(w_0)| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad |f(z) - w_0| < \delta' \;\; \text{y} \;\; z \in A$$

Pero como $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$, para esta $\delta' > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - w_0| < \delta' \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \;\; \text{y} \;\; z \in A$$

Por lo tanto obtenemos

$$|g[f(z)] - g(w_0)| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \;\; \text{y} \;\; z \in A$$

es decir,

$$\lim_{z \to z_0} g[f(z)] = g(w_0)$$

lo cual es lo que se quería demostrar. ■

Recuérdese que el teorema anterior también puede escribirse de la siguiente manera:

$$\lim_{z \to z_0} g[f(z)] = g\left[\lim_{z \to z_0} f(z)\right]$$

siempre y cuando $\lim_{z \to z_0} f(z)$ exista. Esto permite el cálculo de más límites.

Ejemplo I.2.12. Calcular

$$\lim_{z \to z_0} [r(z)]^2, \qquad z_0 \in D_r$$

donde $r(z)$ es la función racional y D_r es su dominio.

Solución. La función $h(z) = [r(z)]^2$ es la composición de las funciones $g(w) = w^2$ y $f(z) = r(z)$, es decir $h(z) = g[f(z)]$, por lo que del teorema anterior

$$\lim_{z \to z_0} [r(z)]^2 = \left[\lim_{z \to z_0} r(z)\right]^2 = [r(z_0)]^2$$

donde se usó el resultado obtenido en el *Ejemplo I.2.8. (d)*. ■

Nuevamente, como en cálculo de variable real, la suma, producto, cociente y composición de funciones continuas produce funciones continuas. Además, la función es continua si y sólo si sus partes real e imaginaria son continuas.

Teorema I.2.7. *Sea A un conjunto abierto. Si $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $g: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son continuas en $z_0 \in A$ y $c \in \mathbb{C}$, entonces*

i) $f+g$ *es continua en* z_0.

ii) cf *es continua en* z_0.

iii) fg *es continua en* z_0.

iv) f/g *es continua en* z_0, *si* $g(z_0) \neq 0$.

Demostración.

i) Como f y g son continuas en z_0, entonces de la *Definición I.2.5* de continuidad tenemos que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \qquad \text{y} \qquad \lim_{z \to z_0} g(z) = g(z_0)$$

de donde al sumar obtenemos

$$\lim_{z \to z_0} f(z) + \lim_{z \to z_0} g(z) = f(z_0) + g(z_0)$$

pero aplicando la propiedad aditiva de los límites (*Teorema I.2.3.(i)*) se tiene que

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = f(z_0) + g(z_0)$$

y de la definición de suma de funciones se llega a

$$\lim_{z \to z_0} (f+g)(z) = (f+g)(z_0)$$

por lo que la función $f+g$ es continua en z_0.

ii) Partiendo de que f es continua en z_0, multiplicando por $c \neq 0$, aplicando el *Teorema I.2.3.(ii)* sobre límites y utilizando la definición de la función cf, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} f(z) &= f(z_0) \\ c \lim_{z \to z_0} f(z) &= cf(z_0) \\ \lim_{z \to z_0} [cf(z)] &= cf(z_0) \\ \lim_{z \to z_0} [(cf)(z)] &= (cf)(z_0) \end{aligned}$$

por lo cual la función cf es continua en z_0.

Las otras partes se demuestran de manera parecida. ■

Ejemplo I.2.13.

i) Como

- del *Ejemplo I.2.11.(i)*, la función $f_0(z) = c$ es continua en $\mathbb{C}$,
- del *Ejemplo I.2.8.(b)*, las funciones $f_n(z) = z^n$, con $n \in \mathbb{N}$, son continuas en $\mathbb{C}$,
- por el *Teorema I.2.7.(ii)* sobre continuidad, las funciones $a_n f_n(z) = a_n z^n$, con $n \in \mathbb{N}$, son continuas en $\mathbb{C}$,

entonces, de la aplicación sucesiva del *Teorema I.2.7.(i)*, la función polinomial $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ es continua en $\mathbb{C}$.

Lo mismo se habría concluído si recordamos que del *Ejemplo I.2.8.(c)*

$$\lim_{z \to z_0} p(z) = p(z_0), \qquad \forall \ z_0 \in \mathbb{C}$$

por lo que, de la *Definición I.2.5* de continuidad, $p(z)$ es continua en todo el plano complejo $\mathbb{C}$.

ii) Sea $r(z) = p(z) / q(z)$ la función racional y sea $z \in D_r$, es decir, z tal que $q(z) \neq 0$. Por el inciso anterior, $p(z)$ y $q(z)$ son continuas en D_r. Entonces, por el *Teorema I.2.7.(iv)*, $r(z)$ es continua en D_r.

Lo mismo se habría concluído si recordamos que del *Ejemplo I.2.8.(d)*

$$\lim_{z \to z_0} r(z) = r(z_0), \qquad \forall \quad z_0 \in D_r$$

por lo que $r(z)$ es continua en todo su dominio. ■

Teorema I.2.8. *Sean $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $g: B \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con A es abierto y $f(A) \subset B$. Si f es continua en z_0 y g es continua en $w_0 = f(z_0)$, entonces la función composición $g \circ f$ es continua en z_0.*

Demostración. Como f es continua en z_0 tenemos que $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ y como g es continua en $w_0 = f(z_0)$, entonces por el *Teorema I.2.6* relativo al límite de una composición de funciones

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} (g \circ f)(z) &= \lim_{z \to z_0} g[f(z)] = g\left[\lim_{z \to z_0} f(z)\right] \\ &= g\left[f(z_0)\right] = (g \circ f)(z_0) \end{aligned}$$

lo cual prueba que $g \circ f$ es continua en z_0. ■

Ejemplo I.2.14. La función $h(z) = [r(z)]^2$, donde $r(z)$ es la función racional, es la composición de las funciones $g(w) = w^2$ y $f(z) = r(z)$, es decir $h(z) = g[f(z)]$. Por el ejemplo anterior, f es continua en toda $z_0 \in D_r$, donde D_r es el dominio de la función racional $r(z)$, y g es continua en toda $w_0 \in f(D_r)$, entonces por el teorema anterior h es continua en toda $z_0 \in D_r$. ■

El siguiente teorema permite averiguar, de una manera muy razonable, la continuidad de funciones de variable compleja $f(z)$ mediante la continuidad de sus partes real e imaginaria $u(x,y)$ y $v(x,y)$.

Teorema I.2.9. *Sea $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función, con A un conjunto abierto y sea $z_0 \in A$. Si $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, entonces f es continua en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$ si y sólo si las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son continuas en el punto (x_0, y_0).*

Demostración. Haciendo $w_0 = f(z_0)$ en *Teorema I.2.4* se tiene

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

es decir, f es continua en z_0, si y sólo si

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \operatorname{Re}[f(z)] = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0) = \operatorname{Re}[f(z_0)]$$

y

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \operatorname{Im}[f(z)] = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0) = \operatorname{Im}[f(z_0)]$$

es decir, si y sólo si $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son continuas en (x_0,y_0). ■

Ejemplo I.2.15. Sabemos que la función exponencial e^z se puede escribir en la forma

$$e^z = e^x \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y = u(x,y) + i\, v(x,y)$$

y como las funciones

$$u(x,y) = e^x \cos y \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$$

son continuas para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, entonces e^z es continua para toda $z_0 = x_0 + i y_0 \in \mathbb{C}$.

Ejemplo I.2.16.

a) Como $f(z) = iz$ y $g(z) = e^z$ son continuas para toda $z_0 \in \mathbb{C}$ (*Ejemplo I.2.13.(i)* y *Ejemplo I.2.15*), entonces por el *Teorema I.2.8*, $(g \circ f) = g[f(z)] = e^{iz}$ también es continua en el mismo conjunto. Lo mismo se puede decir de la función e^{-iz}.

b) Del inciso anterior y por *Teorema I.2.7.(i),(ii)*, las funciones trigonométricas $\operatorname{sen} z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$ y $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ son continuas en $\mathbb{C}$.

Desde luego, este ejemplo podría resolverse si escribimos a las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ en la forma $u(x,y) + i\, v(x,y)$ y aplicamos el *Teorema I.2.9*.

De igual manera se puede proceder para las otras funciones trigonométricas y para las funciones hiperbólicas. ■

Ejemplo I.2.17. Consideremos las dos ramas de la función bivaluada raíz cuadrada $f(z) = \sqrt{z}$ $(z \neq 0)$

$$f_1(z) = |z|^{1/2} e^{i\,\mathrm{Arg}(z)/2} = r^{1/2} e^{i\theta/2}$$

$$f_2(z) = |z|^{1/2} e^{i[\mathrm{Arg}(z)+2\pi]/2} = r^{1/2} e^{i(\theta+2\pi)/2}$$

donde $r = |z|$ y $\theta = \mathbf{Arg}(z)$, así que $-\pi < \theta \leq \pi$.

El eje real negativo se llama un corte de ramificación de las funciones f_1 y f_2. Cada punto en el corte de ramificación es un punto de discontinidad para ambas funciones f_1 y f_2, lo cual mostraremos a continuación.

Sea $z_0 = r_0 e^{i\pi}$ un número real negativo. Calcularemos el límite de la función univaluada f_1 cuando z tiende a z_0 por medio de puntos en el semiplano superior $\{z \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ y el límite cuando z tiende a z_0 por medio de puntos en el semiplano inferior $\{z \mid \mathrm{Im}(z) < 0\}$. En coordenadas polares estos límites están dados por

$$\lim_{(r,\theta)\to(r_0,\pi)} f_1(re^{i\theta}) = \lim_{(r,\theta)\to(r_0,\pi)} \left(r^{1/2} e^{i\theta/2}\right) = i\,r_0^{1/2}$$

y

$$\lim_{(r,\theta)\to(r_0,-\pi)} f_1(re^{i\theta}) = \lim_{(r,\theta)\to(r_0,-\pi)} \left(r^{1/2} e^{i\theta/2}\right) = -i\,r_0^{1/2}$$

Como los dos límites son distintos, la función f_1 es discontinua en z_0.

De la misma forma, f_2 es discontinua en z_0. ■

Ejemplo I.2.18. Como en el ejemplo anterior, tomemos la rama principal de la función logaritmo natural $f(z) = \mathbf{Ln}(z)$ $(z \neq 0)$

$$\mathbf{Ln}(z) = \mathbf{Ln}|z| + i\,\mathbf{Arg}(z) = \mathbf{Ln}(r) + i\theta$$

donde $r = |z|$ y $\theta = \mathbf{Arg}(z)$.

El eje real negativo se llama un corte de ramificación de la función f. Cada punto en el corte de ramificación es un punto de discontinidad para la función f, lo cual mostraremos a continuación.

Sea $z_0 = r_0 e^{i\pi}$ un número real negativo. Calcularemos el límite de la función univaluada f_1 cuando z tiende a z_0 por medio de puntos en el semiplano superior $\{z \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ y el límite cuando z tiende a z_0 por medio de puntos en el semiplano inferior $\{z \mid \mathrm{Im}(z) < 0\}$. En coordenadas polares estos límites están dados por

$$\lim_{(r,\theta) \to (r_0, \pi)} f(r e^{i\theta}) = \lim_{(r,\theta) \to (r_0, \pi)} [\mathrm{Ln}(r) + i\theta] = \mathrm{Ln}(r_0) + i\pi$$

y

$$\lim_{(r,\theta) \to (r_0, -\pi)} f(r e^{i\theta}) = \lim_{(r,\theta) \to (r_0, -\pi)} [\mathrm{Ln}(r) + i\theta] = \mathrm{Ln}(r_0) - i\pi$$

Como los dos límites son distintos, la función f es discontinua en z_0. ■

Obsérvese que de haber definido

$$\mathrm{Ln}(z) = \mathrm{Ln}|z| + i\,\mathrm{Arg}(z); \qquad 0 \le \mathrm{Arg}(z) < 2\pi$$

entonces, la función $\mathrm{Ln}(z)$ sería discontinua en la parte positiva del eje real, lo cual llevaría a una inconsistencia con la definición de logaritmo natural de una función de variable real, ya que ésta es continua en todo su dominio ($x \in \mathbb{R}^+$).

Derivación.

Empezaremos definiendo la derivada de una función de variable compleja de manera similar a la derivada usual de una función de una variable real y aún cuando varias de sus propiedades y, en particular, las reglas para calcularlas son semejantes, el caso complejo es mucho más interesante ya que existen algunos resultados exclusivos de esta teoría.

Definición I.2.6. *Sea $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, donde A es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$. La derivada de la función f en el punto z_0, denotada como $f'(z_0)$, está dada por*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

siempre que el límite exista.

La definición anterior es equivalente, por medio de incrementos, a

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

ya que $\Delta z = z - z_0$.

Otras notaciones para $f'(z_0)$ son

$$\frac{df(z_0)}{dz} \qquad \text{o} \qquad \left.\frac{df}{dz}\right|_{z=z_0}$$

que se leen como la derivada de f respecto a z evaluada en el punto z_0 y evidentemente es en general un número complejo. Como $w = f(z)$, también podemos usar la notación

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}$$

Debemos poner especial cuidado con el cociente de diferencias en la definición de derivada porque el valor del límite cuando $z \to z_0$ se toma para una z arbitraria que se aproxima a z_0 y no a lo largo de una dirección particular, es decir debe ser independiente de la manera en la cual $z \to z_0$. Si podemos encontrar dos curvas que terminen en z_0 a lo largo de las cuales el cociente tienda a distintos valores, entonces dicho cociente *no* tiene límite cuando $z \to z_0$ y f *no* tiene derivada en z_0.

Si $f'(z_0)$ existe, se dirá que la función f es *derivable* en z_0, que f es *complejo-diferenciable* en z_0 o simplemente *diferenciable* en z_0. Además, se dice que f es *analítica* en A si f es derivable para toda $z_0 \in A$. Algunas veces, la palabra *holomorfa* o *regular* es utilizada como sinónimo de analítica. La frase *analítica en* z_0 significa analítica en una vecindad de z_0. Es importante observar que si $f'(z_0)$ existe sólo en un punto aislado z_0, entonces f es derivable en z_0 pero no analítica en z_0.

El que

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

no esté definido en $z = z_0$ es la razón por la cual en la definición de límite se utilizan vecindades reducidas.

Ejemplo I.2.19.

i) Si c es una constante compleja y $f(z) = c$ para toda $z \in \mathbb{C}$, entonces aplicando la *Definición I.2.6* de derivada tenemos

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{c - c}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} 0 = 0$$

Podemos ahora omitir en subíndice en z_0 para obtener $f'(z) = 0$ como una fórmula general o como una nueva función f' que también depende de z, con lo cual hemos mostrado que *la derivada de cualquier función constante es la función constante cero* o simplemente que la derivada de una constante es cero.

ii) Si $f(z) = z$ para toda $z \in \mathbb{C}$, entonces al aplicar la *Definición I.2.6* de derivada tenemos

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} 1 = 1$$

Omitiendo nuevamente el subíndice en z_0 obtenemos $f'(z) = 1$ como una fórmula general, con lo cual hemos mostrado que, para toda $z \in \mathbb{C}$, *la derivada de la función identidad es uno.* ■

Si la función f es analítica en todo el plano complejo, entonces se dice que f es *entera*. Como las funciones del ejemplo anterior son derivables para toda $z_0 \in \mathbb{C}$, son analíticas en $\mathbb{C}$ y, en consecuencia, enteras.

Ejemplo I.2.20. Mostrar que la función $w = f(z) = \bar{z}$ en ningún lugar es derivable.

Solución. Lo que se pide es mostrar que la función no es derivable en todo el plano complejo, es decir, que $f'(z_0)$ no existe para toda $z_0 \in \mathbb{C}$. De la *Definición I.2.6* de derivada

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{x+iy \to x_0+iy_0} \frac{(\overline{x+iy}) - (\overline{x_0+iy_0})}{(x+iy) - (x_0+iy_0)}$$

$$= \lim_{x+iy \to x_0+iy_0} \frac{(x-iy) - (x_0-iy_0)}{(x+iy) - (x_0+iy_0)} = \lim_{x+iy \to x_0+iy_0} \frac{(x-x_0) - i(y-y_0)}{(x-x_0) + i(y-y_0)}$$

Seleccionemos dos formas de aproximarnos al punto $z_0 = x_0 + iy_0$ y calculemos el límite del cociente de diferencias.

Primero, acerquémonos a $z_0 = x_0 + iy_0$ a lo largo de una línea paralela al eje x haciendo que z sea de la forma $z = x + iy_0$:

$$f'(z_0) = \lim_{x+iy_0 \to x_0+iy_0} \frac{(x-x_0) - i(y_0-y_0)}{(x-x_0) + i(y_0-y_0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$$

Ahora, acercándonos al punto $z_0 = x_0 + iy_0$ a lo largo de una línea paralela al eje y haciendo que z sea de la forma $z = x_0 + iy$:

$$f'(z_0) = \lim_{x_0+iy \to x_0+iy_0} \frac{(x_0-x_0) - i(y-y_0)}{(x_0-x_0) + i(y-y_0)}$$

$$= \lim_{iy \to iy_0} \frac{-i(y-y_0)}{i(y-y_0)} = \lim_{y \to y_0} (-1) = -1$$

Los límites a lo largo de las dos trayectorias son diferentes, por lo que no existe valor posible para el límite en la *Definición I.2.6* de derivada. Por lo tanto $f(z) = \bar{z}$ no es derivable en el punto z_0, y como z_0 es arbitrario, f no es derivable en $\mathbb{C}$. ■

El que la función $f(z) = \bar{z}$ no sea derivable en todo $\mathbb{C}$ es un hecho realmente sorprendente ya que las funciones

$$u(x,y) = \text{Re}[f(z)] = \text{Re}(\bar{z}) = \text{Re}(\overline{x+iy}) = \text{Re}(x-iy) = x$$

y

$$v(x,y) = \text{Im}[f(z)] = \text{Im}(\bar{z}) = \text{Im}(\overline{x+iy}) = \text{Im}(x-iy) = -y$$

tienen derivadas parciales de cualquier orden. Por consiguiente, para que una función compleja de una variable compleja sea derivable, va a hacer falta algo más que las derivadas parciales de sus partes real e imaginaria.

Teorema I.2.10. *Si f es derivable en z_0, entonces f es continua en z_0.*

Demostración. Por hipótesis, f es derivable en z_0. Por lo tanto, $f'(z_0)$ existe. Por la anterior *Definición I.2.6* de derivada

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

por lo que $f(z_0)$ debe existir, de otra manera el anterior límite no tiene sentido.

Utilizando la propiedad multiplicativa de los limites, dada por el *Teorema I.2.3*, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0)] &= \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) \right] \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \\
&= f'(z_0) \bullet 0 = 0
\end{aligned}$$

Entonces, de la propiedad aditiva de los límites

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} f(z) &= \lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0) + f(z_0)] \\
&= \lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0)] + \lim_{z \to z_0} f(z_0) \\
&= 0 + f(z_0) = f(z_0)
\end{aligned}$$

por lo que f es continua en z_0. ■

Sin embargo, lo inverso del teorema anterior no siempre es cierto, es decir, como en cálculo elemental, la continuidad de f no implica derivabilidad.

Ejemplo I.2.21. En el *Ejemplo I.2.11.(ii)* se mostró que la función $f(z) = \bar{z}$ es continua en todo lugar pero en ningún lugar es derivable (*Ejemplo I.2.20*). Tales funciones son difíciles de construir en variable real. ■

El siguiente teorema afirma que se pueden usar las reglas usuales del cálculo cuando se derivan funciones analíticas.

Teorema I.2.11. *Si f y g son funciones analíticas en A y $c \in \mathbb{C}$, donde $A \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto, entonces para toda $z \in A$*

i) $f+g$ *es analítica en* A *y*

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$$

ii) cf *es analítica en* A *y*

$$(cf)'(z) = c\,f'(z)$$

iii) fg *es analítica en* A *y*

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

iv) f/g *es analítica en* A *y*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)\,g(z) - g'(z)\,f(z)}{[g(z)]^2} \qquad si \quad g(z) \neq 0$$

Recuérdese que, por ejemplo, la conclusión del inciso (i) del teorema anterior se suele escribir de la forma

$$\frac{d}{dz}[f(z) + g(z)] = \frac{df(z)}{dz} + \frac{dg(z)}{dz}$$

siempre y cuando $df(z)/dz$ y $dg(z)/dz$ existan.

Con palabras: *la derivada de una suma de funciones es igual a las suma de las derivadas de las funciones, siempre y cuando las derivadas de los sumandos existan.*

Demostración. Como f y g son analíticas en A, entonces de la *Definición I.2.6* de derivada

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

y

$$g'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

existen para toda $z_0 \in A$ y consecuentemente también $f(z_0)$ y $g(z_0)$ ya que de otra manera no tendrían sentido los límites anteriores.

i) Aplicando la *Definición I.2.6* de derivada y la propiedad relativa al límite de una suma de funciones (*Teorema I.2.3.(i)*) tenemos

$$\begin{aligned}
(f+g)'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{(f+g)(z) - (f+g)(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) + g(z) - f(z_0) - g(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right] \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\
&= f'(z_0) + g'(z_0)
\end{aligned}$$

por lo que $(f+g)'$ existe para toda $z_0 \in A$, es decir, $f+g$ es analítica en A.

ii) Aplicando la *Definición I.2.6* de derivada y la propiedad relativa al límite de una constante por una función (*Teorema I.2.3.(ii)*) tenemos

$$\begin{aligned}
(cf)'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{(cf)(z) - (cf)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{cf(z) - cf(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \left[c\, \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right] = c \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\
&= c\, f'(z_0)
\end{aligned}$$

por lo que $(f+g)'$ existe para toda $z_0 \in A$, es decir, $f+g$ es analítica en A.

iii) Aplicando la *Definición I.2.6* de derivada y la definición de producto de funciones tenemos

$$
\begin{aligned}
(fg)'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{(fg)(z) - (fg)(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0}
\end{aligned}
$$

Si sumamos y restamos el término $f(z_0)g(z)$ en el numerador y aplicamos las propiedades aditiva y multiplicativa de los límites obtenemos

$$
\begin{aligned}
(fg)'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z) + f(z_0)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z)}{z - z_0} + \frac{f(z_0)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} \right] \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z)}{z - z_0} + \lim_{z \to z_0} \frac{f(z_0)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \, g(z) \right] + \lim_{z \to z_0} \left[f(z_0) \, \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right] \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \to z_0} g(z) + \lim_{z \to z_0} f(z_0) \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}
\end{aligned}
$$

Como g es derivable en z_0, entonces por el *Teorema I.2.10* es continua en z_0, por lo que de la *Definición I.2.5* de continuidad $\lim_{z \to z_0} g(z) = g(z_0)$. Además, utilizando nuevamente la *Definición I.2.6* de derivada se llega a

$$
(fg)'(z_0) = f'(z_0)\, g(z_0) + f(z_0)\, g'(z_0)
$$

por lo que $(fg)'$ existe para toda $z_0 \in A$, es decir, fg es analítica en A.

iv) De la *Definición I.2.6* de derivada y de la definición de cociente de funciones tenemos

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(z) - \left(\frac{f}{g}\right)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{f(z_0)}{g(z_0)}}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{\frac{f(z)g(z_0) - g(z)f(z_0)}{g(z)g(z_0)}}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)g(z_0) - g(z)f(z_0)}{g(z)g(z_0)(z - z_0)}$$

donde $g(z_0) \neq 0$. Si sumamos y restamos el término $f(z_0)g(z_0)$ en el numerador y aplicamos propiedades de los límites obtenemos

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z_0) - g(z)f(z_0) + f(z_0)g(z_0)}{g(z)g(z_0)(z - z_0)}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \left[\frac{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} g(z_0) - f(z_0) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}{g(z)g(z_0)} \right]$$

$$= \frac{\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \to z_0} g(z_0) - \lim_{z \to z_0} f(z_0) \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}{\lim_{z \to z_0} g(z) \lim_{z \to z_0} g(z_0)}$$

Como g es derivable en z_0, entonces es continua en z_0, por lo que de la *Definición I.2.5* $\lim_{z \to z_0} g(z) = g(z_0)$. Además, utilizando nuevamente la *Definición I.2.6* de derivada se llega a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)\, g(z_0) - f(z_0)\, g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}$$

por lo que $(f/g)'$ existe para toda $z_0 \in A$, con $g(z_0) \neq 0$, es decir, f/g es analítica en $A - \{z \mid g(z) = 0\}$. ■

Ejemplo I.2.22. Si n es un entero positivo y $f(z) = z^n$, mostrar que

$$\frac{dz^n}{dz} = n z^{n-1}$$

Solución. Utilizaremos inducción matemática sobre n.

Para $n = 1$ la proposición queda como

$$\frac{dz}{dz} = 1$$

lo cual ya se demostró en el *Ejemplo I.2.19.(ii)*.

Para $n = k$ la proposición queda como

$$\frac{dz^k}{dz} = kz^{k-1}$$

la cual se supone cierta (esta es la hipótesis de inducción).

Para $n = k + 1$ la proposición queda como

$$\frac{dz^{k+1}}{dz} = (k+1)z^k$$

la cual hay que demostrar.

Como $z^{k+1} = z^k z$, al derivar mediante la fórmula para un producto de funciones dada por el *Teorema I.2.11.(iii)*, utilizando el resultado del caso $n = 1$ y la hipótesis de inducción obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\left(z^{k+1}\right) &= \frac{d}{dz}\left(z^k z\right) = \frac{dz^k}{dz} z + z^k \frac{dz}{dz} \\ &= kz^{k-1}z + z^k = kz^k + z^k = (k+1)z^k \end{aligned}$$

con lo cual termina la demostración. ■

Ejemplo I.2.23. Aplicando el *Teorema I.2.11.(ii)*, relativo a la derivada de una constante por una función, y el resultado del ejemplo anterior obtenemos

$$\frac{d}{dz}\left(a_n z^n\right) = a_n \frac{dz^n}{dz} = n a_n z^{n-1}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, donde las a_n son constantes complejas. ■

Ejemplo I.2.24. Mostrar que para toda función polinomial $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ su derivada está dada por

$$p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + n a_n z^{n-1}$$

Solución. Utilizaremos inducción matemática sobre n.

Para $n = 1$ la proposición queda como

$$p'(z) = a_1$$

lo cual hay que demostrar con $p(z) = a_0 + a_1 z$.

Aplicando las propiedades aditiva y de multiplicación por un escalar de la derivada dadas por el *Teorema I.2.11* tenemos

$$\begin{aligned} p'(z) &= \frac{dp(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left(a_0 + a_1 z\right) \\ &= \frac{da_0}{dz} + \frac{d}{dz}\left(a_1 z\right) = \frac{da_0}{dz} + a_1 \frac{dz}{dz} = a_1 \end{aligned}$$

en donde se ha hecho uso de que las derivadas de las funciones constante e identidad son cero y uno respectivamente, tal como se demostró en el *Ejemplo I.2.19*.

Para $n = k$ la proposición queda como

$$p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + k a_k z^{k-1}$$

la cual asumimos como verdadera con $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k$.

Del *Ejemplo I.2.23*

$$\frac{d}{dz}\left(a_{k+1} z^{k+1}\right) = (k+1)\, a_{k+1} z^k$$

el cual sumaremos en ambos miembros de la hipótesis de inducción, obteniendo

$$p'(z) + \frac{d}{dz}\left(a_{k+1} z^{k+1}\right) = a_1 + 2a_2 z + \dots + k a_k z^{k-1} + (k+1) a_{k+1} z^k$$

$$\frac{d}{dz}\left(a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k\right) + \frac{d}{dz}\left(a_{k+1} z^{k+1}\right) = a_1 + 2a_2 z + \dots + (k+1) a_{k+1} z^k$$

y como la suma de derivadas es la derivada de una suma (*Teorema I.2.11.(i)*)

$$\frac{d}{dz}\left(a_0 + a_1 z + \dots + a_{k+1} z^{k+1}\right) = a_1 + 2a_2 z + \dots + (k+1) a_{k+1} z^k$$

$$p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + (k+1) a_{k+1} z^k$$

la cual es la proposición para $n = k+1$ con $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{k+1} z^{k+1}$. ■

Ejemplo I.2.25. Cualquier función racional $r(z) = p(z)/q(z)$ es analítica en $\mathbb{C}$, excepto para aquellos puntos donde el denominador es cero. Efectivamente, aplicando la fórmula para la derivada de un cociente (*Teorema I.2.11.(iv)*) tenemos

$$r'(z) = \frac{p'(z)\,q(z) - p(z)\,q'(z)}{[q(z)]^2}$$

donde $p'(z)$ y $q'(z)$ se calculan utilizando el resultado del ejemplo anterior. ■

También es cierta la regla de la cadena para para derivar una composición de funciones analíticas como afirma el siguiente teorema.

Teorema I.2.12. *Sean A y B conjuntos abiertos en $\mathbb{C}$. Si $f: A \to \mathbb{C}$ y $g: B \to \mathbb{C}$ son analíticas y $f(A) \subset B$, entonces $g \circ f: A \to \mathbb{C}$ es analítica y*

$$(g \circ f)'(z) = g'[f(z)]\, f'(z), \qquad \forall \; z \in A.$$

Si escribimos $w = f(z)$ y $W = g(w)$, de manera que $W = g[f(z)] = (g \circ f)(z)$, entonces también podemos escribir

$$\left.\frac{dW}{dz}\right|_{z=z_0} = \left.\frac{dW}{dw}\right|_{w=w_0=f(z_0)} \left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}$$

Demostración. Empezemos eligiendo un punto específico z_0 en el que exista f'. Sea $w_0 = f(z_0)$ y supongamos que $g'(w_0)$ también existe. Entonces existe un entorno $|w - w_0| < \epsilon$ tal que para todo punto w de él se puede definir la función

$$h(w) = \begin{cases} \dfrac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0) & si \quad w \neq w_0 \\ 0 & si \quad w = w_0 \end{cases}$$

Nótese que, de la definición de derivada,

$$\lim_{w \to w_0} h(w) = 0$$

por lo que $h(w)$ es continua en w_0 y como la composición de funciones continuas es continua

$$\lim_{z \to z_0} h[f(z)] = h(w_0) = 0$$

De la definición de h obtenemos que

$$g(w) - g(w_0) = \left[g'(w_0) + h(w)\right](w - w_0) \qquad \left(|w - w_0| < \epsilon\right)$$

la cual es válida incluso cuando $w = w_0$. Como $f'(z_0)$ existe, en consecuencia f es continua en z_0 y podemos escoger $\delta > 0$ tal que el punto $f(z)$ esté en el entorno $|w - w_0| < \epsilon$, cuando z está en el entorno $|z - z_0| < \delta$. Así pues, es válido sustituir la variable w por $f(z)$ cuando z es un punto cualquiera del entorno $|z - z_0| < \delta$. Esta sustitución mencionada, junto con la de $w_0 = f(z_0)$ nos lleva a

$$\frac{g[f(z)] - g[f(z_0)]}{z - z_0} = \left\{g'[f(z_0)] + h[f(z)]\right\} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$\frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{z - z_0} = \left\{g'[f(z_0)] + h[f(z)]\right\} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Haciendo el límite cuando z tiende a z_0 y de la definición de derivada tenemos

$$\lim_{z \to z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \left\{g'[f(z_0)] + h[f(z)]\right\} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$(g \circ f)'(z_0) = \left\{g'[f(z_0)] + \lim_{z \to z_0} h[f(z)]\right\} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$= g'[f(z_0)]\, f'(z_0)$$

con lo cual el teorema queda demostrado. ■

Ejemplo I.2.26. Para calcular la derivada de $h(z) = [p(z)]^n$, donde $p(z)$ es una función polinomial y $n \in \mathbb{N}$, escribimos $w = f(z) = p(z)$ y $W = g(w) = w^n$, con lo cual

$$\frac{d}{dz}[p(z)]^n = \frac{dw^n}{dw}\frac{dp(z)}{dz} = n\, w^{n-1} p'(z)$$

$$= n[p(z)]^{n-1} p'(z)$$

en donde $p'(z)$ se calcula como en el *Ejemplo I.2.24.* ■

La regla de L'Hôpital.

Cerraremos esta sección con este importante teorema el cual es una extensión al caso complejo de un resultado del cálculo de variable real y cuya demostración pospondremos hasta el *Subtema I.7.*

Teorema I.2.13. *Sean f y g funciones analíticas en z_0. Si $f(z_0) = 0$, $g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$, entonces*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Ejemplo I.2.27. Para la función racional

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z^2+4}{2(z+2i)}$$

del *Ejemplo I.2.24*, sabemos que $p'(z) = 2z$ y $q'(z) = 2$, por lo que p y q son analíticas en $\mathbb{C}$; en particular lo son en $z_0 = -2i$. Como $p(-2i) = q(-2i) = 0$ y $q'(-2i) = 2 \neq 0$, entonces aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{z \to -2i} \frac{z^2+4}{2(z+2i)} = \lim_{z \to -2i} \frac{2z}{2} = \lim_{z \to -2i} z = -2i$$

Este es el límite que se demostró en el *Ejemplo I.2.5*. ■

Ejercicios propuestos.

1. Demostrar que el conjunto
$$A = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > c \,\}$$
es abierto, donde c es una constante real no nula.

2. Sean c y z_0 constantes complejas. Mediante la *Definición I.2.4* de límite, demostrar que
$$\lim_{z \to z_0} (cz) = cz_0$$

3. Demostrar que
$$\lim_{z \to 0} \frac{|z|}{z}$$
no existe.

4. Demostrar, mediante la *Definición I.2.4* de límite, el *Teorema I.2.3. (iii)*.

5. Demostrar, mediante la *Definición I.2.4* de límite, el *Teorema I.2.3. (iv)*.

6. Demostrar, mediante la *Definición I.2.4* de límite, el *Teorema I.2.3. (v)*.

7. Demostrar que
$$\lim_{z \to z_0} |z| = |z_0|$$
para toda $z_0 \in \mathbb{C}$.

8. Demostrar, mediante el *Teorema I.2.4*, el *Teorema I.2.3.(iii)*.

9. Demostrar que

$$\lim_{z \to z_0} e^z = e^{z_0}$$

para toda $z_0 \in \mathbb{C}$.

10. Demostrar que si $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$, entonces

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = |w_0|$$

11. Demostrar que la función $\operatorname{sen} z$ es continua en todo el plano complejo aplicando el *Teorema I.2.9.*

12. Demostrar que si $f(z) = \operatorname{Re}(z)$, entonces en ningún punto existe $f'(z)$.

13. Demostrar que la función $f(z) = |z|^2$ sólo es derivable en $z = 0$.

14. Demostrar que

$$\frac{dz^n}{dz} = n z^{n-1}$$

para toda n entera.

I.3 Ecuaciones de Cauchy-Riemann.

En la sección anterior vimos que calcular la derivada de funciones complejas cuando están escritas en la forma $w = f(z)$ es algo no muy complicado. Pero no todo en la vida es fácil, ya que muchas veces tenemos a la función compleja escrita en la forma

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \qquad \ldots (1)$$

por lo que en esta sección obtendremos un par de ecuaciones que deben satisfacer las partes real e imaginaria u y v de la función dada por la *Ecuación (1)* en el punto (x_0, y_0) para que la función sea analítica en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$. También veremos cómo obtener a $f'(z_0)$, la *derivada* de f en z_0, en términos de las derivadas parciales de u y v en (x_0, y_0).

Teorema I.3.1. *Sea $f: A \to \mathbb{C}$, con A abierto en $\mathbb{C}$. Si $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica en $z_0 = x_0 + i\,y_0 \in A$, entonces las funciones u y v satisfacen las ecuaciones*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad y \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

conocidas como ***ecuaciones de Cauchy-Riemann*** [1].

Demostración. Por hipótesis, el siguiente límite existe

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{x+iy \to x_0+iy_0} \frac{f(x+iy) - f(x_0+iy_0)}{(x+iy) - (x_0 - iy_0)} \\ &= \lim_{x+iy \to x_0+iy_0} \frac{[u(x,y) + i\,v(x,y)] - [u(x_0,y_0) + i\,v(x_0,y_0)]}{(x+iy) - (x_0+iy_0)} \\ &= \lim_{x+iy \to x_0+iy_0} \frac{[u(x,y) - u(x_0,y_0)] + i[v(x,y) - v(x_0,y_0)]}{(x - x_0) + i(y - y_0)} \end{aligned}$$

en particular, aproximándonos a z_0 por la recta $y = y_0$ se tiene que

[1] Llamadas así en honor del matemático francés A. L. Cauchy (1789-1857), quién las descubrió y utilizó, y del matemático alemán G. F. B. Riemann (1826-1866) para quién fueron fundamentales en su desarrollo de la teoría de las funciones de variable compleja.

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{\left[u(x,y_0) - u(x_0,y_0)\right] + i\left[v(x,y_0) - v(x_0,y_0)\right]}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} + i \, \frac{v(x,y) - v(x_0,y_0)}{x - x_0} \right\} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i \, \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)
\end{aligned}
$$

en donde se utilizó el *Teorema I.2.3* sobre límites y la definición de derivada parcial.

Análogamente, aproximándonos a z_0 por la recta $x = x_0$ se obtiene

$$
f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i \, \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)
$$

lo cual se pide demostrar en el *Ejercicio 1*.

Igualando las dos expresiones para $f'(z_0)$

$$
\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i \, \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i \, \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)
$$

de donde por igualdad de complejos se obtiene

$$
\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)
$$

que son las ecuaciones de Cauchy-Riemann. ■

Nótese que la demostración del teorema anterior proporciona las siguientes fórmulas explícitas para $f'(z_0)$:

$$
f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i \, \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad \ldots (2)
$$

$$
f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i \, \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \qquad \ldots (3)
$$

Nótense también algunas implicaciones importantes de este teorema:

- Si f es analitica en $z_0 = x_0 + iy_0$, entonces se satisfacerán las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (x_0, y_0).
- Las ecuaciones de Cauchy-Riemann establecen condiciones necesarias para que f sea analítica en $z_0 = x_0 + iy_0$, es decir, si *no* se satisfacen en (x_0, y_0), entonces automaticamente f no es analítica en z_0.
- Si las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en (x_0, y_0), no se puede *necesariamente* concluir que f es analitica en $z_0 = x_0 + iy_0$.

Ejemplo I.3.1. Dada la función $f(z) = z^2$

a) comprobar el *Teorema I.3.1*,

b) calcular $f'(z)$ mediante la *Ecuación (2)* y la *Ecuación (3)*.

Solución.

a) La función $f(z) = z^2$ es analítica en $\mathbb{C}$ porque $f'(z) = 2z$ existe para toda $z \in \mathbb{C}$. También sabemos que

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

de donde

$$u(x,y) = x^2 - y^2 \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = 2xy$$

Como

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

las funciones u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Ahora, de la *Ecuación (2)* y *Ecuación (3)* para $f'(z)$ tenemos

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2x + i(2y) = 2(x+iy) = 2z$$
$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2x - i(-2y) = 2(x+iy) = 2z$$

como se esperaba. ■

Ejemplo I.3.2. Mostrar que la función $f(z) = \bar{z}$ en ningún punto es analítica.

Solución. Tenemos que

$$f(z) = \bar{z} = \overline{x+iy} = x - iy = u(x,y) + iv(x,y)$$

de donde

$$u(x,y) = x \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = -y$$

Por lo tanto, para todo punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

por lo que las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se satisfacen en todo punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, así concluimos que f en ningún punto es analítica.

Comparar con el *Ejemplo I.2.20.* ■

Ejemplo I.3.3. Mostrar que la función definida como

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(\bar{z})^2}{z} & si \quad z \neq 0 \\ 0 & si \quad z = 0 \end{cases}$$

satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto $(0,0)$, pero *no* es derivable en $z_0 = 0$.

Solución. Como

$$\frac{(\bar{z})^2}{z} = \frac{(\overline{x+iy})^2}{x+iy} = \frac{(x-iy)^2}{x+iy} = \frac{(x^2-y^2)-i(2xy)}{x+iy}$$

$$= \frac{(x^2-y^2)-i(2xy)}{x+iy}\,\frac{x-iy}{x-iy} = \frac{(x^3-3xy^2)+i(y^3-3x^2y)}{x^2+y^2}$$

la función puede escribirse en la forma

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} + i\,\dfrac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2} & si \quad z = x+iy \neq 0+i0 \\ 0 & si \quad z = x+iy = 0+i0 \end{cases}$$

de donde

$$u(x,y) = \frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = \frac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ y

$$u(0,0) = 0 \qquad \text{y} \qquad v(0,0) = 0$$

Calcularemos las derivadas parciales en $(0,0)$ mediante la definición:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

y similarmente,

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 1$$

de donde

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 1 = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)$$

por lo que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto $(0,0)$.

Ahora mostraremos que f *no* es derivable en $z_0 = 0$.

De la *Definición I.2.6* de derivada

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{x+iy \to 0+i0} \frac{f(x+iy)}{x+iy}$$

Si $z = x + iy$ tiende a $0 + i0$ a lo largo del eje x, entonces $y = 0$ y

$$f'(0) = \lim_{x+i0 \to 0+i0} \frac{f(x+i0)}{x+i0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

Pero si hacemos que z tienda a 0 a lo largo de la recta $y = x$, entonces

$$f'(0) = \lim_{x+ix \to 0+i0} \frac{f(x+ix)}{x+ix} = \lim_{x \to 0} \frac{-x-ix}{x+ix} = \lim_{x \to 0} -1 = -1$$

Ya que los dos límites son distintos, concluimos que f no es derivable en el origen y en consecuencia tampoco es analítica ahí mismo. ■

Este último ejemplo reitera que la mera satisfacción de las ecuaciones de Cauchy-Riemann no es suficiente garantia para la derivabilidad de una función. Sin embargo, el siguiente teorema nos da las condiciones suficientes bajo las cuales podemos usar la *Ecuación (2)* o la *Ecuación (3)* para calcular la derivada $f'(z_0)$.

Teorema I.3.2. *Sea $f: A \to \mathbb{C}$, con A abierto en $\mathbb{C}$. Si $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es tal que las funciones u y v tienen primeras derivadas parciales continuas* [2] *y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en A, entonces f es analítica en A.*

Demostración. Δu, el incremento en u, está dado por

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x,y)$$

Si sumamos y restamos el término $u(x, y + \Delta y)$ obtenemos

$$\Delta u = [u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y + \Delta y)] + [u(x, y + \Delta y) - u(x,y)]$$

La derivada parcial $\partial u / \partial x$ existe, por lo que el teorema del valor medio para funciones

[2] Cuando una función real de varias variables tiene primeras derivadas parciales continuas se dice que es de clase C^1.

reales de dos variables implica que existe $x^* \in (x, x + \Delta x)$ tal que se puede escribir el primer término entre paréntesis rectangulares de la derecha de la expresión anterior como

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y + \Delta y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x^*, y + \Delta y)\,\Delta x$$

Además, como $\partial u / \partial x$ es continua, existe una cantidad ϵ_1 tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x^*, y + \Delta y)\,\Delta x = \frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon_1$$

donde $\epsilon_1 \to 0$ cuando $x^* \to x$ y $\Delta y \to 0$. Como el que $\Delta x \to 0$ fuerza a que $x^* \to x$, podemos usar la ecuación

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y + \Delta y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon_1\right)\Delta x$$

donde $\epsilon_1 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$.

Similarmente, para el segundo término entre paréntesis rectangulares del lado derecho tenemos

$$u(x, y + \Delta y) - u(x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \eta_1\right)\Delta y$$

donde $\eta_1 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$.

Utilizando estas dos últimas expresiones en Δu tenemos

$$\Delta u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon_1\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \eta_1\right)\Delta y$$

donde ϵ_1 y η_1 tienden a cero cuando Δx y Δy tienden a cero.

Similarmente, el incremento Δv está relacionado con los incrementos Δx y Δy por medio de la ecuación

$$\Delta v = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \epsilon_2\right)\Delta x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \eta_2\right)\Delta y$$

donde ϵ_2 y η_2 tienden a cero cuando Δx y Δy tienden a cero.

Combinando estas dos últimas ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta w &= \Delta u + i\Delta v\\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon_1\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \eta_1\right)\Delta y + i\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \epsilon_2\right)\Delta x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \eta_2\right)\Delta y\right]\\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y + \epsilon\,\Delta x + \eta\,\Delta y\end{aligned}$$

donde $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2 \to 0$ y $\eta = \eta_1 + i\eta_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$.

Utilizando una de las ecuaciones de Cauchy-Riemann y reacomodando obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta w &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y + \epsilon\,\Delta x + \eta\,\Delta y\\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\,\Delta y) + \epsilon\,\Delta x + \eta\,\Delta y\end{aligned}$$

Dividiendo ambos lados entre $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$ y tomando el límite cuando $\Delta z \to 0$:

$$\lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \lim_{\Delta z \to 0}\left(\epsilon\frac{\Delta x}{\Delta z} + \eta\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)$$

Ya que ϵ tiende a cero porque Δx y Δy también tienden a cero, se obtiene

$$\lim_{\Delta z \to 0}\left|\epsilon\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| = \lim_{\Delta z \to 0}|\epsilon|\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| \le \lim_{\Delta z \to 0}|\epsilon| = 0$$

Similarmente, el límite que involucra a η es cero. Por lo tanto el límite nos queda como

$$\lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dw}{dz} = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

así que la derivada existe y es única, es decir, $f(z)$ es analítica en A.

Si se hubiera utilizado la otra ecuación de Cauchy-Riemann llegaríamos a la otra expresión para la derivada:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dw}{dz} = f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}$$ ■

Ejemplo I.3.4. Mostrar que la función

$$f(z) = \left(x^3 - 3xy^2\right) + i\left(3x^2y - y^3\right)$$

es analítica en $\mathbb{C}$ y calcular su derivada.

Solución. La función está en la forma $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ donde

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = 3x^2y - y^3$$

Como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy^2 = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

las derivadas parciales de u y v son continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann para toda $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, entonces, por el *Teorema I.3.2*, f es analítica para toda $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Calculando la derivada por medio de la *Ecuación (2)* tenemos:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \left(3x^2 - 3y^2\right) + i\,(6xy)$$

Este resultado es fácil de comprobar ya que $f(z) = z^3$. ■

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann son particularmente útiles en la determinación del conjunto de puntos donde una función es analítica.

Ejemplo I.3.5. Determinar los puntos donde la función $f(z) = x^2 + i\,y^2$ es analítica.

Solución. En este caso

$$u(x,y) = x^2 \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = y^2$$

Las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

son continuas y $\partial u / \partial y = -\partial v / \partial x$ se satisface para todo punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pero $\partial u / \partial x = \partial v / \partial y$ si y sólo si $2x = 2y$, por lo que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen cuando $y = x$ y de acuerdo al *Teorema I.3.2* diríamos que f es analítica sólo en los puntos de esta recta. Sin embargo, recordamos que cuando decimos que una función es analítica en un punto z_0, significa que la función es derivable no sólo en z_0 sino en todo punto en una vecindad de z_0. Por lo tanto, f es derivable sólo en los puntos de la recta $y = x$, pero aquí tampoco es analítica porque cualquier vecindad alrededor de un punto sobre la recta contiene puntos que no están sobre dicha recta. ■

El concepto de función derivable para las funciones complejas de variable compleja, que se introdujo en la *Definición I.2.6*, es análogo al de función derivable para las funciones de variables reales. Sin embargo, es necesario tener presente que aunque dichos conceptos son análogos, no son la misma cosa y que su relación exacta es como la establece el teorema que veremos después de recordar brevemente las nociones de derivada y diferencial que se estudiaron en cálculo real.

En particular, nos interesa referirnos a las funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, ya que hemos visto que si f es una función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ se puede escribir en la forma

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

donde $z = x + iy$, y entonces la función

$$\boldsymbol{F}(x,y) = [u(x,y), v(x,y)]$$

es de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Ahora bien, es de todos conocido que una función de este tipo es *diferenciable* en el punto (x,y) si dicha función $\boldsymbol{F}$ está definida en una vecindad de (x,y) y su incremento

$$\Delta \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{F}(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - \boldsymbol{F}(x,y)$$

se puede escribir como

$$\Delta \boldsymbol{F} = D\boldsymbol{F}(x,y)\,(\Delta x, \Delta y)^T + \Phi(x,y,\Delta x,\Delta y)\,(\Delta x,\Delta y)^T$$

donde Φ es una matriz de 2×2 tal que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \Phi = O$$

donde $D\boldsymbol{F}(x,y)$ es la derivada de $\boldsymbol{F}$ evaluada en (x,y), la cual está dada por

$$D\boldsymbol{F}(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

A la matriz $D\boldsymbol{F}(x,y)$ también se le conoce como *matriz jacobiana* de $\boldsymbol{F}$.

También conviene recordar un teorema de cálculo vectorial que nos dice que si todas las derivadas parciales de $\boldsymbol{F}$ son continuas en una vecindad del punto (x_0, y_0) de su dominio, entonces $\boldsymbol{F}$ es diferenciable en (x_0, y_0).

Finalmente, diremos que f es *diferenciable en el sentido real* en (x_0, y_0) si $\boldsymbol{F}$ es diferenciable en dicho punto.

Teorema I.3.3. *Sea $f: A \to \mathbb{C}$, con A abierto en $\mathbb{C}$ y $z_0 = x_0 + i\,y_0 \in A$. Entonces la derivada $f'(z_0)$ existe si y sólo si f es diferenciable en el sentido real en (x_0, y_0) y satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (x_0, y_0).*

Recordemos que, de acuerdo con lo apuntado a continuación de la *Definición I.2.6*, para que f sea analítica en z_0 no basta con que $f'(z_0)$ exista, se requiere que $f'(z)$ exista en una vecindad de z_0.

Ejemplo I.3.6. Mostrar que la función $f(z) = |z|^2$

a) Es diferenciable en el sentido real en cualquier vecindad del origen.
b) Es derivable en el sentido complejo sólo en el origen.
c) No es analítica en el origen.

Solución. La función $f(z)$ puede escribirse en la forma

$$f(z) = |z|^2 = z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

de donde

$$u = x^2 + y^2 \qquad \text{y} \qquad v = 0$$

a) Construyendo la función

$$\boldsymbol{F}(x,y) = [u(x,y), v(x,y)] = (x^2 + y^2, 0)$$

se obtiene

$$D\boldsymbol{F}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como todas las componentes de esta matriz son continuas en $\mathbb{R}^2$, entonces $\boldsymbol{F}$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto, f es diferenciable en el sentido real en toda vecindad del origen.

b) Como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = 0 = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

vemos que en el origen (y sólo ahí) las funciones u y v cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por lo tanto, f es derivable en el sentido complejo sólo en el origen.

Comprobaremos esto calculando la derivada en cero y haciendo ver que en todo punto distinto del origen la derivada no existe.

De la *Definición I.2.6* de derivada, para $z_0 = 0$ obtenemos

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{z\bar{z}}{z} = \lim_{z \to 0} \bar{z} = 0$$

Para $z_0 = x_0 + i\,y_0 \neq 0$, de la misma *Definición I.2.6* de derivada tenemos

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0} \\
&= \lim_{x+iy \to x_0+iy_0} \frac{(x^2+y^2) - (x_0^2+y_0^2)}{(x+i\,y) - (x_0 - i\,y_0)} \\
&= \lim_{x+iy \to x_0+iy_0} \frac{(x - x_0^2) + (y - y_0^2)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}
\end{aligned}
$$

Acercándonos a $z_0 = x_0 + i\,y_0$ por puntos de la forma $z = x + i\,y_0$ (es decir, por puntos sobre la recta $y = y_0$ paralela al eje real) obtenemos

$$
f'(z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0
$$

Acercándonos a $z_0 = x_0 + i\,y_0$ por puntos de la forma $z = x_0 + i\,y$ (es decir, por puntos sobre la recta $x = x_0$ paralela al eje imaginario) obtenemos

$$
f'(z_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{y^2 - y_0^2}{i(y - y_0)} = -i \lim_{y \to y_0} (y + y_0) = -2y_0 i
$$

Los límites a lo largo de estas dos trayectorias son iguales si y sólo si $2x_0 = -2y_0 i$, lo cual requiere que $x_0 = y_0 = 0$. Pero como $z_0 \neq 0$ entonces $x_0 \neq 0$ ó $y_0 \neq 0$ por lo que los dos límites son distintos. Así $f'(z_0)$ no existe para $z_0 \neq 0$.

c) f no es analítica en el origen porque para serlo $f'(z)$ debe existir en una vecindad del origen. ■

Es interesante observar que como

$$
\begin{aligned}
f(z)\,dz &= [u(x,y) + i\,v(x,y)]\,(dx + i\,dy) \\
&= [u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy] + i[v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy]
\end{aligned}
$$

si las partes real e imaginaria de una función $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces las partes real e imaginaria de $f(z)\,dz$, dadas por

$$u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy \qquad \text{y} \qquad v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy$$

son *diferenciales exactas*.

Funciones inversas.

Un teorema básico del análisis real es el teorema de la función inversa. Daremos aquí dos demostraciones de la contraparte compleja de este teorema, la primera de las cuales supone que la derivada de la función es continua y depende del correspondiente teorema para funciones de variables reales y la otra que asume la existencia de f^{-1} analítica. Más adelante veremos que la continuidad de f' es automática [3] y demostraremos el teorema de otra manera que no depende del teorema de variable real.

Teorema I.3.4. ***Teorema de la función inversa.***
Sea $f: A \to \mathbb{C}$ analítica y $f'(z_0) \neq 0$. Entonces su función inversa es analítica y su derivada está dada por

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

donde $w_0 = f(z_0)$.

Una manera sencilla de escribir este teorema es la siguiente. Si $w = f(z)$, entonces $z = f^{-1}(w)$ y

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\dfrac{dw}{dz}}$$

Es conveniente hacer notar que el teorema de la función inversa sólo permite a uno concluir la existencia de una inversa *local* para la función. Es decir, que si f satisface las

[3] Esto es porque si una función es analítica, entonces la función tiene derivadas de todos los órdenes. En particular, al tener segunda derivada, la primera derivada es continua. El teorema respectivo se demostrará posteriormente.

hipótesis del teorema, entonces existe una vecindad U de z_0 y una vecindad V de $f(z_0)$ tal que $f: U \to V$ es biyectiva, por lo que tiene inversa f^{-1} que cumple con las conclusiones del teorema.

Demostración (1). Para la función analítica $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ la matriz de derivadas parciales, después de utilizar las ecuaciones de Cauchy-Riemann, queda como

$$Df(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

que tiene como determinante

$$\begin{aligned} \det[Df(x_0,y_0)] &= \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\right]^2 + \left[\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\right]^2 \\ &= \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\right| \\ &= |f'(z_0)|^2 \end{aligned}$$

Como $f'(z_0) \neq 0$, entonces $\det[Df(x_0,y_0)] \neq 0$, por lo que se puede aplicar el teorema de la función inversa para funciones de variables reales. Así, la matriz de derivadas parciales para la función inversa es

$$\begin{aligned} Df^{-1}(x_0,y_0) &= [Df(x_0,y_0)]^{-1} \\ &= \frac{1}{\det[Df(x_0,y_0)]} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \\ -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si $f^{-1}(z) = s(x,y) + i\,t(x,y)$, entonces su matriz de derivadas parciales tiene la forma

$$Df^{-1}(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial s}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial t}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial t}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

de donde, por comparación

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial s}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{1}{\det[Df(x_0, y_0)]}\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\\
\frac{\partial s}{\partial y}(x_0, y_0) &= \frac{1}{\det[Df(x_0, y_0)]}\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\\
\frac{\partial t}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{-1}{\det[Df(x_0, y_0)]}\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\\
\frac{\partial t}{\partial y}(x_0, y_0) &= \frac{1}{\det[Df(x_0, y_0)]}\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)
\end{aligned}
$$

obteniéndose

$$
\frac{\partial s}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial t}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial s}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial t}{\partial x}(x_0, y_0)
$$

por lo que s y t satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en z_0. Por lo tanto, f^{-1} es complejo-diferenciable. Así, $(f^{-1})'$ existe en $f(z_0)$ y está dada por

$$
\begin{aligned}
(f^{-1})'[f(z_0)] &= \frac{\partial s}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial t}{\partial x}(x_0, y_0)\\
&= \frac{1}{\det[Df(x_0, y_0)]}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\right]\\
&= \frac{\overline{f'(z_0)}}{|f'(z_0)|^2} = \frac{\overline{f'(z_0)}}{f'(z_0)\overline{f'(z_0)}}\\
&= \frac{1}{f'(z_0)}
\end{aligned}
$$

con lo cual se obtiene la conclusión deseada. ■

Demostración (2). Suponiendo que f^{-1} está definida y es analítica, entonces por la regla de la cadena

$$
(f^{-1} \circ f)'(z) = (f^{-1})'[f(z)]\, f'(z)
$$

Y por otro lado

$$\begin{aligned}(f^{-1}\circ f)(z) &= z\\ (f^{-1}\circ f)'(z) &= 1\end{aligned}$$

Igualando las dos expresiones anteriores

$$\begin{aligned}(f^{-1})'[f(z)]\,f'(z) &= 1\\ (f^{-1})'[f(z)] &= \frac{1}{f'(z)}\end{aligned}$$

que es el resultado buscado. ■

Ejemplo I.3.7. Demostrar que

$$\frac{d\sqrt{z}}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

Solución. Una función debe ser unívoca para tener derivada. Entonces, ya que la función $w = \sqrt{z}$ es multívoca, debemos restringirla a una rama de esta función.

Consideremos primero la rama de la función $w = \sqrt{z}$ para la cual $w = 1$ si $z = 1$. En este caso, $z = w^2$, así que por el teorema de la función inversa

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\dfrac{dz}{dw}} = \frac{1}{2w}$$

de donde

$$\frac{d\sqrt{z}}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

Lo mismo se obtiene si consideramos la otra rama de $w = f(z) = \sqrt{z}$ para la cual $w = -1$ si $z = 1$.

Posteriormente repetiremos este ejemplo utilizando coordenadas polares. ■

Conjuntos Conexos.

Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Se desea dar un significado preciso de la aseveración "A consiste de una pieza". Realmente existen varias posibles interpretaciones a esta proposición, pero para este propósito se puede utilizar la siguiente definición.

Definición I.3.1. *Se dice que el conjunto A es **conexo** si y sólo si, para todo $z_1, z_2 \in A$, existe una línea poligonal totalmente contenida en A que une z_1 con z_2.*

En la *Figura I.3.1* se ilustra el caso de un conjunto conexo y uno no conexo.

Definición I.3.2. *Si A es un conjunto abierto y conexo, se le llamará región abierta o simplemente **región**.*

En forma semejante se pueden dar las definiciones de región cerrada, región semiabierta, etc. Sin embargo, cuando se use la palabra región se entenderá región abierta.

Una consecuencia importante de la conexidad se establece en el *Teorema I.3.5.*

Teorema I.3.5. *Sea A una región en $\mathbb{C}$ y $f: A \to \mathbb{C}$ una función analítica. Si $f'(z) = 0$ en A, entonces f es constante en A.*

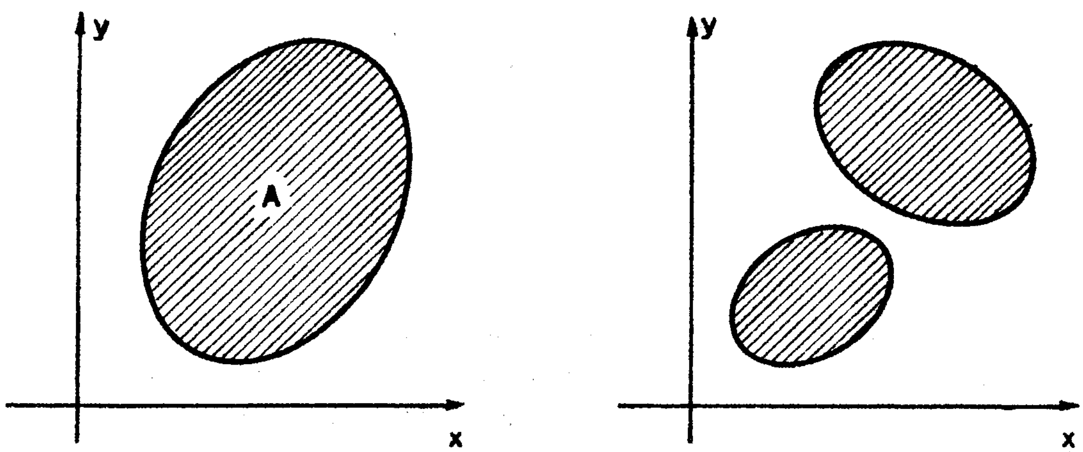

Figura I.3.1. *Conjunto conexo y conjunto no conexo.*

Demostración. Como $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica en A, de la *Ecuación (2)* y *Ecuación (3)* para f'

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ya que por hipótesis $f'(z) = 0$. De aquí

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

en cada puno de A. Por lo tanto podemos concluir que existen constantes reales a y b tales que

$$u(x,y) = a \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = b$$

sobre A por lo que $f(z) = a + bi$, es decir, f es constante en A.

Argumentando un poco más sobre esto último, el que las derivadas parciales de u y v sean siempre iguales a cero significa que

$$\mathbf{grad}\,u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \mathbf{0} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{grad}\,v = \nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \mathbf{0}$$

por lo que las derivadas direccionales de u y v son cero. En consecuencia, u y v son constantes a lo largo de todo segmento de recta contenido en A y como todo par de puntos en A se pueden unir por un conjunto finito de tales segmentos unidos por los extremos, los valores que toman las funciones u y v en esos puntos no cambian. ■

Conformalidad.

Haremos notar un interesante aspecto geométrico que se presenta cuando transformamos una región dada A del plano z en otra región $f(A)$ del plano w, mediante una función analítica, biyectiva y no constante $w = f(z)$. Para esto necesitamos dar antes algunas definiciones necesarias para lograr nuestro objetivo.

Definición I.3.3. *Una* ***curva*** *en el plano complejo es un conjunto de puntos* $z = x + iy$ *tales que*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad a \leq t \leq b$$

donde $x(t)$ *y* $y(t)$ *son funciones reales continuas del parámetro* t.

Las ecuaciones anteriores son llamadas *ecuaciones paramétricas* de la curva. De esta manera, para cada valor de t en el intervalo $[a, b]$ obtenemos un punto z en el plano complejo. Así, una curva en el plano es la imagen de una función compleja de variable real $z: [a, b] \to \mathbb{C}$ con regla de correspondencia

$$z(t) = x(t) + i\,y(t)$$

La curva es *cerrada* si $z(a) = z(b)$ con $a \neq b$. Una curva es *simple* si no se intersecta a sí misma, es decir, es simple si $z(t_1) \neq z(t_2)$ cuando $t_1 \neq t_2$. Cuando la curva es simple, excepto por el hecho de que $z(a) = z(b)$, decimos que la curva es *cerrada simple*, o de *Jordan*.

Definición I.3.4. *La* ***derivada*** *de la función* $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ *en* t, *la cual se denota como* $z'(t)$ *o* $dz(t)/dt$, *está dada por*

$$z'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$$

siempre y cuando $x'(t)$ *y* $y'(t)$ *existan.*

Definición I.3.5. *Una curva definida por* $z: [a, b] \to \mathbb{C}$ *es* ***diferenciable*** *si* $x'(t)$ *y* $y'(t)$, *las derivadas de las componentes de* $z(t)$, *son continuas para toda* $t \in [a, b]$.

Si la función $z: [a, b] \to \mathbb{C}$ representa una curva diferenciable y $z'(t) \neq 0$ en el intervalo $[a, b]$, entonces $z'(t)$, el vector tangente a la curva en el punto $z(t)$, está bien definido para toda $t \in [a, b]$, con ángulo de inclinación $\arg z'(t)$. Además, al girar el vector tangente, lo hace de forma continua mientras el parámetro t varía sobre el intervalo porque $x'(t)$ y $y'(t)$ son continuas. Tales curvas se llaman *suaves* o *lisas*.

Definición I.3.6. *Una curva definida por* $z: [a,b] \to \mathbb{C}$ *es* ***suave*** *o* ***lisa*** *si* $z'(t)$ *es continua y no nula para toda* $t \in [a,b]$.

Ahora ya estamos listos para, por medio de la regla de la cadena (*Teorema I.2.12*), dar una interesante interpretación geométrica de la derivada, la cual consiste en mostrar que cerca de un punto z_0 en el cual $f'(z_0) \neq 0$, la función f es aproximadamente una rotación por $\arg f'(z_0)$ junto con una magnificación por $|f'(z_0)|$. Si $f(z_0) = 0$ la estructura de f es más complicada.

Teorema I.3.6. *Sean* A *un conjunto abierto en* $\mathbb{C}$, $z: [a,b] \to A$ *una curva diferenciable y* $f: A \to \mathbb{C}$ *una función analítica, entonces* $f \circ z$ *es una curva diferenciable y*

$$(f \circ z)'(t) = f'[z(t)]z'(t) \qquad \forall \quad t \in [a,b]$$

Este teorema conlleva la geometría local de las funciones analíticas. Para entenderlo mejor, considérese una curva diferenciable C en una región A contenida en $\mathbb{C}$, definida por $z: [a,b] \to A$ y una función analítica $f: A \to \mathbb{C}$. La función $w(t) = f[z(t)]$ $(a \leq t \leq b)$ define a C^* la curva imagen de C bajo la transformación $w = f(z)$.

Supongamos que C pasa por un punto $z_0 = z(t_0)$ $(a \leq t_0 \leq b)$. De acuerdo con la regla de la cadena

$$w'(t_0) = f'[z(t_0)]\, z'(t_0)$$

Si se supone además que $z'(t) \neq 0$ (por lo que la curva es suave) y $f'[z(t)] \neq 0$ para toda $t \in [a,b]$, se concluye que $w'(t_0) \neq 0$, de donde

$$\arg w'(t_0) = \arg f'[z(t_0)] + \arg z'(t_0)$$

Como $z'(t_0)$ es un vector tangente a la curva C en el punto z_0 y $w'(t_0)$ es un vector tangente a la curva C^* en el punto $w_0 = f(z_0)$, esta ecuación es útil para relacionar las direcciones de las curvas C y C^* en z_0 y w_0 respectivamente.

Concretamente, sea ψ_0 el valor de $\arg f'(z_0)$ y sea θ_0 el ángulo de inclinación de un vector tangente a la curva C en el punto z_0. Entonces θ_0 es un valor de $\arg z'(t_0)$, por lo que la cantidad

$$\phi_0 = \psi_0 + \theta_0$$

es un valor de $\arg w'(t_0)$ y es, por lo tanto, el ángulo de inclinación de un vector tangente a la curva C^* en el punto $w_0 = f(z_0)$. Por lo tanto, el ángulo de inclinación del vector tangente en w_0 difiere del ángulo de inclinación del vector tangente en z_0 por el *ángulo de rotación*

$$\psi_0 = \arg f'(z_0)$$

En otras palabras, ψ_0 es el ángulo que forman los vectores tangentes a C y C^* en z_0 y $w_0 = f(z_0)$ respectivamente y sólo depende del punto z_0 y de la función f.

Así, el efecto de la transformación $w = f(z)$ es el de rotar el ángulo de inclinación del vector tangente a la curva C en el punto z_0 un ángulo $\psi_0 = \arg f'(z_0)$ para obtener el ángulo de inclinación del vector tangente a la curva C^* en el punto w_0. Esta situación se ilustra en la *Figura I.3.2.*

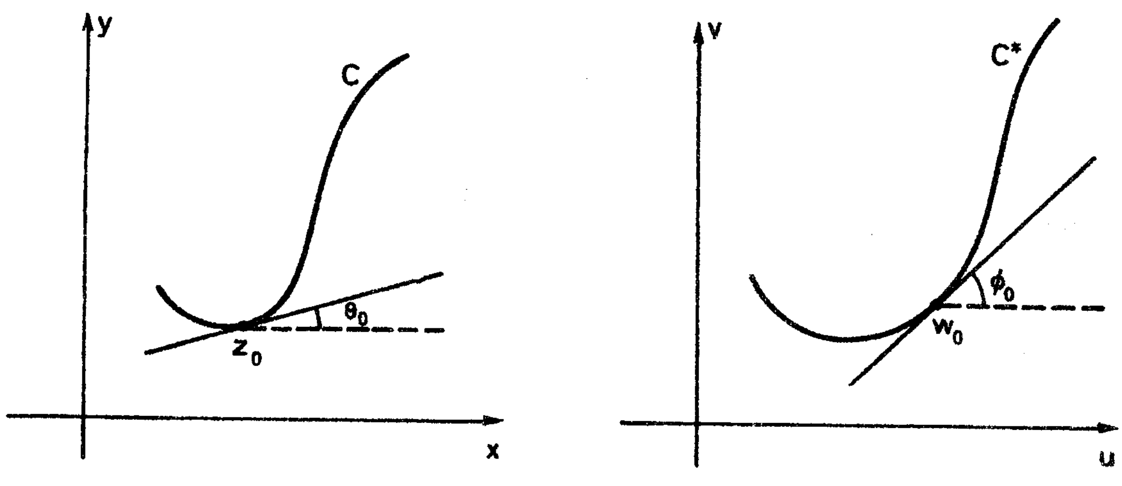

Figura I.3.2. $\psi_0 = \phi_0 + \theta_0$, *donde* f *es analítica y no nula.*

Sean ahora C_1 y C_2 dos curvas suaves que pasan por z_0 y sean θ_1 y θ_2 los ángulos de inclinación de sus respectivos vectores tangentes en z_0. Sabemos por el párrafo anterior que los ángulos de inclinación de los vectores tangentes a las curvas imagen C_1^* y C_2^* en el punto $w_0 = f(z_0)$ son las cantidades

$$\phi_1 = \psi_0 + \theta_1 \qquad \text{y} \qquad \phi_2 = \psi_0 + \theta_2$$

respectivamente. Así que $\phi_2 - \phi_1 = \theta_2 - \theta_1$; por lo tanto, el ángulo $\phi_2 - \phi_1$ desde C_1^* hasta C_2^* es el mismo en *magnitud* y *sentido* que el ángulo $\theta_2 - \theta_1$ desde C_1 hasta C_2. Estos ángulos se han denotado por α en la *Figura I.3.3.*

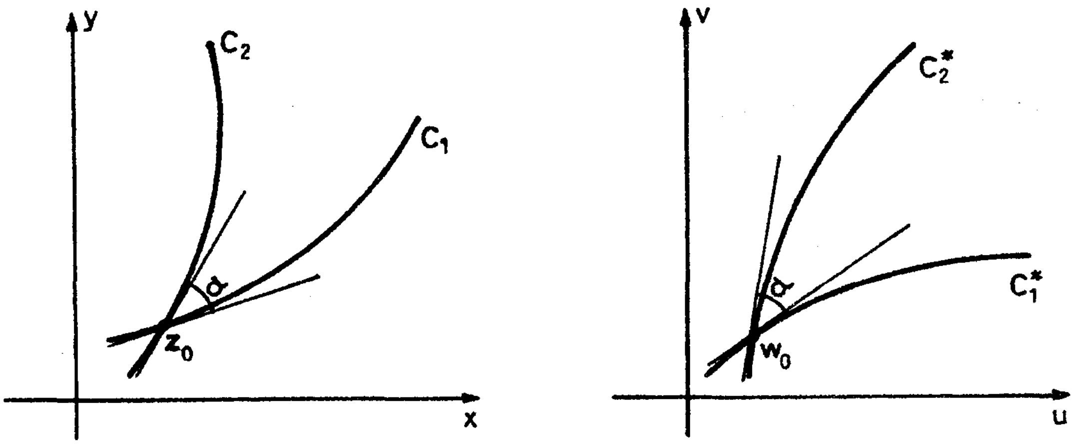

Figura I.3.3. *Una transformación conforme preserva ángulos.*

A esta propiedad de preservar ángulos se le llama *conformalidad*, lo cual resumiremos en la definición y teorema siguientes.

Definición I.3.7. *Una transformación o mapeo $w = f(z)$ es* ***conforme*** *en z_0 si preserva ángulos entre curvas orientadas tanto en magnitud como en sentido.*

Teorema I.3.7. *Sea f una función analítica en una región A y sea z_0 un punto en A. Si $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es conforme en z_0.*

De hecho, la transformación es conforme en un entorno del punto z_0 porque al ser la función f necesariamente analítica en un entorno de z_0, y al ser f' continua en z_0 [4] se deduce que existe un entorno de ese punto en el que $f'(z) \neq 0$.

Otra propiedad que se relaciona con el término conforme en z_0 es el cambio lineal de escala al considerar el módulo de $f'(z_0)$. De la definición de derivada, de las propiedades de los límites y de las propiedades del módulo se tiene

$$|f'(z_0)| = \left| \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$$

Ahora bien, $|z - z_0|$ es la longitud de un segmento de recta que une z_0 con z y $|f(z) - f(z_0)|$ es la longitud de un segmento de recta que une $f(z_0)$ con $f(z)$ en el plano w. Es evidente que si z está cerca del punto z_0

$$|f(z) - f(z_0)| \approx |f'(z_0)|\,|z - z_0|$$

por lo que la distancia $|f(z) - f(z_0)|$ entre las imágenes de los puntos z_0 y z está dada aproximadamente por $|f'(z_0)|\,|z - z_0|$. Por lo tanto, podemos decir que la transformación $f(z)$ cambia distancias pequeñas cerca de z_0 por el *factor de escala* $|f'(z_0)|$. Nótese que $|f'(z_0)|$ representa una dilatación si es mayor que 1 y una contracción si es menor que 1. Esto significa que cualquier segmento de línea que comience en z_0, en el límite es expandido o contraido bajo la transformación f por la razón $|f'(z_0)|$. Dicho de otra manera, el cambio lineal de escala en z_0, efectuado por la transformación $f(z)$ es independiente de la dirección.

Resumiendo, una transformación conforme infinitesimalmente cerca de z_0, es aproximadamente una rotación por un ángulo $\arg f'(z_0)$ seguida de una homotecia por un *factor de escala* $|f'(z_0)|$. Aunque el ángulo de rotación $\arg f'(z)$ y el factor de escala $|f'(z)|$ varian en general de punto a punto, de la contuinuidad de f' concluimos que sus valores son aproximadamente $\arg f'(z_0)$ y $|f'(z_0)|$ en puntos z próximos a z_0. Por lo tanto la imagen de una pequeña región en un entorno de z_0 es "conforme" con la región original en el sentido de que tiene aproximadamente la misma forma. Sin embargo, una región grande puede transformarse en una región que no guarda parecido con la original.

---

[4] Ver la nota al pie de la página 109.

Una transformación $w = f(z)$ es *conforme en* A, o simplemente conforme, si es conforme en todo punto de A. Es decir, f es conforme en A si f es analítica en A y f' no tiene ceros en A. Una transformación que conserva la magnitud del ángulo entre curvas suaves pero no necesariamente el sentido se llama *isogonal*.

Sea f es una función no constante y supongamos que es analítica en z_0. Si $f'(z_0) = 0$, entonces z_0 se llama un *punto crítico* de la transformación $w = f(z)$. En un punto crítico los ángulos no se preservan necesariamente.

Ejemplo I.3.8. La transformación $w = f(z) = z^2$ es conforme en $A = \mathbb{C} - \{0\}$ porque $f'(z) = 2z \neq 0$ para toda $z \in A$. En particular es conforme en el punto $z_0 = 1 + i$, donde se intersectan las semirrectas $x = 1$ $(y \geq 0)$ y $x + y = 2$ $(x \leq 2)$. Denotemos estas semirrectas por C_1 y C_2 respectivamenete, con sentido positivo hacia arriba. Observamos que el ángulo desde C_1 hasta C_2 es $\alpha = \theta_2 - \theta_1 = 3\pi/4 - \pi/2 = \pi/4$.

Como $z = x + iy$, la transformación $w = f(z) = z^2$ se puede escribir como

$$w = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

y como $w = u + iv$, entonces

$$u = x^2 - y^2 \qquad \text{y} \qquad v = 2xy$$

La semirrecta $x = 1$ $(y \geq 0)$ en el plano z se transforma entonces en la curva C_1^*, en el plano w, definida en forma paramétrica por

$$\begin{cases} u = 1 - y^2 \\ v = 2y \end{cases} \qquad 0 \leq y < \infty$$

o en forma cartesiana por

$$v^2 = -4(u - 1), \qquad (v \geq 0)$$

la cual es la mitad superior de una parábola en el plano w.

De la misma forma, la semirrecta $x + y = 2$ $(x \leq 2)$ se transforma en

$$u^2 = -8(v-2), \qquad (u \leq 4)$$

la parte de la parábola a la izquierda de $u = 4$, la cual denotaremos por C_2^*. En el primer caso el sentido positivo de la curva imagen es hacia arriba y en el segundo hacia la izquierda. Las curvas C_1^* y C_2^* se intersectan en el punto $w_0 = u_0 + i\,v_0 = 2i$.

Para la curva C_1^* tenemos

$$m_1 = \left.\frac{dv}{du}\right|_{w_0} = -\left.\frac{2}{v}\right|_{(u,v)=(0,2)} = -1$$

por lo que

$$\phi_1 = \tan^{-1}(-1) = \frac{3}{4}\pi$$

Análogamente, para la curva C_2^* tenemos que $\phi_2 = \pi$, de donde el ángulo entre las curvas imagen en el punto de intersección es $\alpha = \phi_2 - \phi_1 = \pi/4$. ■

Ejemplo I.3.9. La transformación $w = f(z) = \bar{z}$, la cual sabemos es una reflexión respecto al eje real, es isogonal pero no conforme ya que no conserva el sentido de los angulos bajo la transformación.

Sean C_1 y C_2 dos curvas suaves en el plano z definidas por $z_1 : [a_1, b_1] \to A$ y $z_2 : [a_2, b_2] \to A$ respectivamente, donde A es una región contenida en $\mathbb{C}$. Las curvas se intersectan en el punto $z_0 \in A$. El ángulo entre las dos curvas en z_0, medido desde C_1 hasta C_2 es $\alpha = \theta_2 - \theta_1$.

Como $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ y $|\bar{z}| = |z|$, entonces las imágenes C_1^* y C_2^* también son curvas suaves en el plano w definidas por $w_1 = \overline{z_1}$ y $w_2 = \overline{z_2}$ respectivamente, por lo que el ángulo entre ellas, medido desde C_1^* hasta C_2^*, es

$$\phi_2 - \phi_1 = -\theta_2 - (-\theta_1) = -(\theta_2 - \theta_1) = -\alpha$$

Vemos que el sentido del ángulo entre las curvas no se conservó (se invirtió). ■

Ejemplo I.3.10. El punto crítico de la transformación $w = f(z) = z^2$ es $z_0 = 0$, porque $f'(z_0) = 2z|_{z=z_0} = 0$.

Sean C_1 y C_2 dos rayos en el plano z definidos respectivamente por $z = re^{i\theta_1}$ y $z = re^{i\theta_2}$, donde $r \geq 0$. Por lo tanto el ángulo entre los dos rayos, medido desde C_1 hasta C_2 es $\alpha = \theta_2 - \theta_1$.

Como $\arg(z^2) = 2\arg(z)$ y $|z^2| = |z|^2$, entonces las imágenes C_1^* y C_2^* también son rayos en el plano w definidos por $w = r^2 e^{2\theta_1 i}$ y $w = r^2 e^{2\theta_2 i}$ respectivamente, por lo que el ángulo entre ellos, medido de C_1^* hacia C_2^*, es

$$\phi_2 - \phi_1 = 2\theta_2 - 2\theta_1 = 2(\theta_2 - \theta_1) = 2\alpha$$

Vemos que el ángulo entre las curvas se multiplicó por 2 en el punto crítico. ■

Se puede probar que si z_0 es un punto crítico de una transformación $w = f(z)$, existe un entero $k \geq 2$ tal que el ángulo entre cualquier par de curvas que pasen por z_0 queda multiplicado por k bajo la transformación (el entero k es el menor entero positivo tal que $f^{(k)}(z_0) \neq 0$). En nuestro ejemplo $k = 2$ porque $f^{(2)}(0) = 2 \neq 0$.

Ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar.

Recordamos que cuando usamos coordenadas polares (r, θ) para localizar puntos en el plano, es decir, que $z = re^{i\theta}$, es conveniente escribir a una función compleja en la forma

$$f(z) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta) \qquad \ldots (4)$$

donde u y v son funciones reales que dependen de las variables reales r y θ.

Si queremos expresar las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares debe hacerse con cuidado, ya que el cambio a coordenadas polares es un cambio diferenciable sólo si se restringe θ al intervalo *abierto* $(y_0, y_0 + 2\pi)$ de longitud 2π y si se omite el origen $(r = 0)$. Sin tal restricción, θ es discontinua porque salta 2π al cruzar la semirecta

$z = r\,e^{iy_0},\ r > 0$.

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar y las fórmulas para calcular la derivada $f'(z)$ en términos de las derivadas parciales de u y v se obtendrán a continuación. Durante el desarrollo haremos uso de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas cartesianas.

De las ecuaciones de transformación

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

y de la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial x}r\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial v}{\partial y}r\cos\theta$$

Sustituyendo las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

en la derivada parcial $\partial u / \partial r$ tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial x}\operatorname{sen}\theta$$

que al comparar con la derivadas parcial $\partial v / \partial\theta$, nos da

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

la cual es una de las *ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar*.

De manera análoga se obtiene la otra ecuación de Cauchy-Riemann en forma polar:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

lo cual se pide en el *Ejercicio 20.*

De las ecuaciones de transformación

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

y de la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{y}{x^2+y^2} \\ &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{r} - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{y}{r^2} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{y}{x^2+y^2} \\ &= \frac{\partial v}{\partial r}\frac{x}{r} - \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{y}{r^2} = \frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Sustituyendo en la *Ecuación (1)* para $f'(z)$ obtenemos

$$\begin{aligned} f'(z) &= \left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\operatorname{sen}\theta\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\operatorname{sen}\theta\right) \\ &= \cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) - i\operatorname{sen}\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} - i\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \end{aligned}$$

en donde al sustituir las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar se llega a

$$\begin{aligned} f'(z) &= \cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) - i\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) \\ &= (\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = e^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial r} \qquad \ldots (5) \end{aligned}$$

Análogamente puede obtenerse

$$f'(z) = -\frac{i}{r}e^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} \qquad \ldots (6)$$

lo cual se pide en el *Ejercicio 21*.

Todo lo anterior puede resumirse en el siguiente teorema.

Teorema I.3.8. *Sea* $f(z) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta)$ *definida en una región* A *contenida en* $\mathbb{C} - \{z \mid z = r\,e^{iy_0}, r \geq 0\}$. *Si* u *y* v *tienen primeras derivadas parciales continuas en* A *y satisfacen*

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad y \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

conocidas como ***ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar****, entonces la función* f *es analítica en* A *y su derivada* $f'(z)$ *se puede calcular por medio de*

$$f'(z) = e^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial r} \qquad \text{ó} \qquad f'(z) = -\frac{i}{r}e^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

donde $\partial f/\partial r = \partial u/\partial r + i\,\partial v/\partial r$, $\partial f/\partial \theta = \partial u/\partial \theta + i\,\partial v/\partial \theta$ *y* $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Ejemplo I.3.11. Mostrar que si f es la rama principal de $\sqrt{z}$, dada por

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r\,e^{i\theta}} = \sqrt{r}\,e^{i\theta/2}$$

donde el dominio está restringido a $r > 0$ y $-\pi < \theta < \pi$, entonces f es analítica en su dominio y la derivada está dada por

$$f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

Solución. La función f se puede escribir como

$$f(z) = \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2} + i\sqrt{r}\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}$$

de donde

$$u(r,\theta) = \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2} \qquad \text{y} \qquad u(r,\theta) = \sqrt{r}\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}$$

De aquí

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Ya que las derivadas parciales de u y v son continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar en todo punto del dominio, entonces es analítica en dicho dominio y de la *Ecuación (5)*

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial r} = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = e^{-i\theta}\left(\frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{i}{2\sqrt{r}}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{r}}e^{-i\theta}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{r}}e^{-i\theta}e^{i\theta/2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{r}}e^{-i\theta/2} = \frac{1}{2\sqrt{r}\,e^{i\theta/2}} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \end{aligned}$$

Lo mismo se obtiene si f es la otra rama de $\sqrt{z}$ dada por

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r e^{i\theta}} = \sqrt{r}\, e^{i(\theta+2\pi)/2}$$

con el mismo dominio. ■

Funciones armónicas y armónicas conjugadas.

Las funciones armónicas son importantes en matemáticas aplicadas, ingeniería y física. Estas son utilizadas para resolver problemas relacionados con: temperaturas en estado estable o estacionario de láminas delgadas sin fuentes o sumideros de calor y cuyas propiedades térmicas no varíen punto a punto, potenciales electrostáticos bidimensionales en una región del espacio libre de cargas y en flujo de fluidos ideales.

Definición I.3.8. *Sea A una región en $\mathbb{R}^2$ y $\phi: A \to \mathbb{R}$ una función real de dos variables reales x e y, con segundas derivadas parciales continuas* [5] *en A. Se dice que $\phi(x,y)$ es* ***armónica*** *en A si satisface la ecuación*

[5] Una función de este tipo se denomina de clase C^2.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \qquad \forall \ (x,y) \in A$$

La ecuación anterior se conoce como *ecuación de Laplace* [6] bidimensional, por lo que $\phi(x,y)$ es armónica si satisface a la ecuación de Laplace.

La ecuación de Laplace puede escribirse como

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi &= 0 \\ \nabla^2 \phi &= 0 \end{aligned}$$

donde el operador

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

se conoce como *operador de Laplace* o *laplaciano* en $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, $\phi(x,y)$ es armónica si su laplaciano es igual a cero.

El siguiente teorema es fuente de las funciones armónicas a partir de las funciones analíticas.

Teorema I.3.9. *Si la función $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica en una región $A \subset \mathbb{C}$, entonces las funciones u y v son armónicas en $A \subset \mathbb{R}^2$.*

En otras palabras, si una función es analítica, entonces sus partes real e imaginaria son armónicas. Esto es muy importante ya que como conocemos muchas funciones analíticas, con sus partes real e imaginaria tenemos rapidamente soluciones de la ecuación de Laplace.

La demostración del teorema requiere que las funciones u y v tengan segundas derivadas parciales continuas. En el *Subtema I.6* se demostrará que si f es una función analítica en una región A, entonces f tiene derivadas de todos los órdenes en A. Como las derivadas sucesivas de f se pueden escribir en términos de las derivadas parciales de u y

[6] En honor de Pierre-Simon Marqués de Laplace nació en 1749 en Normandía y murió en París en 1827.

v, entonces las derivadas parciales de todos los órdenes de u y v existen. Vamos a aceptar este hecho aquí. Como caso particular, las segundas derivadas parciales de u y v son continuas en A y podremos usar un resultado conocido del cálculo de variables reales.

Demostración. Como f es analítica en A, sus partes real e imaginaria u y v satisfacen a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

las ecuaciones de Cauchy-Riemann para todo $(x,y) \in A$.

Derivando la primera ecuación con respecto a x y la segunda respecto a y obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial x}$$

Sumando las dos ecuaciones anteriores se llega a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial x} = 0$$

ya que al tener u segundas derivadas parciales continuas, entonces por el *Teorema de Schwarz*, las segundas derivadas parciales mixtas

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial x}$$

son iguales. Por lo tanto, u es armónica.

La demostración de que v es armónica se pide en el *Ejercicio 30.* ■

Ejemplo I.3.12. En el *Ejemplo I.2.22* se demostró que la función $f(z) = z^3$ es analítica en todo el plano complejo, por lo que, de acuerdo al *Teorema I.3.9*, sus partes real e imaginaria son funciones armónicas en $\mathbb{R}^2$, tal como comprobaremos a continuación.

La función $f(z) = z^3$ se puede escribir en la forma

$$f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$$

por lo que sus partes real e imaginaria son

$$\mathrm{Re}[f(z)] = u(x,y) = x^3 - 3xy^2 \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Im}[f(z)] = v(x,y) = 3x^2y - y^3$$

Derivando parcialmente a la parte real tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

de donde al sumar llegamos a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$$

por lo que la función u es armónica.

De igual forma se demuestra que v también es armónica. ■

Definición I.3.9. *Si las funciones* $u(x,y)$ *y* $v(x,y)$ *son armónicas en una región* A *y la función* $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ *es analítica en* A, *entonces decimos que* $v(x,y)$ *es una* ***armónica conjugada*** [7] *de* $u(x,y)$.

Por el *Teorema I.3.9* es evidente que si la función $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica en una región A, entonces v es una armónica conjugada de u.

Ejemplo I.3.13. Del *Ejemplo I.3.12* la función $v(x,y) = 3x^2y - y^3$ es una armónica conjugada de $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ ya que ellas son las partes real e imaginaria de la función analítica $f(z) = z^3$.

Sin embargo, u no puede ser una armónica conjugada de v porque la función

$$g(z) = \left(3x^2y - y^3\right) + i\left(x^3 - 3xy^2\right)$$

[7] Es claro que aquí el significado de la palabra *conjugada* es distinto al de conjugado de un número complejo.

no es analítica en ningún punto ya que como

$$\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y - y^3) = 6xy \neq -6xy = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 3xy^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y - y^3) = 3x^2 - 3y^2 \neq -(3x^2 - 3y^2) = -\frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3xy^2)$$

las ecuaciones de Cauchy-Riemann sólo se satisfacen en el origen. ■

De hecho, si dos funciones son armónicas conjugadas una de la otra, ambas han de ser constantes. Esto se pide demostrar en el *Ejercicio 36.*

No obstante, es cierto que si v es armónica conjugada de u en una región A, entonces $-u$ es armónica conjugada de v en A. esto se ve escribiendo

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \qquad \text{y} \qquad g(z) = -i f(z) = v(x,y) - i\,u(x,y)$$

y observando que como $f(z)$ es analítica en A, entonces por el *Teorema I.2.11.(ii)* la función $g(z) = -if(z)$ también es analítica en A.

También es cierto que una armónica conjugada, cuando existe, es única salvo una constante aditiva. En el *Ejercicio 35* se pide demostrar esto.

Se puede demostrar que una función u que es armónica en una región de cierto tipo siempre tiene una armónica conjugada. Así pues, en tales regiones toda función armónica es la parte real de una función analítica. Dichas regiones se definen a continuación.

Definición I.3.10. *Una región A contenida en $\mathbb{C}$ es **simplemente conexa** si toda curva cerrada simple en A encierra solamente puntos de A.*

También se puede definir de la siguiente forma: *Una región A es simplemente conexa si el interior de toda curva cerrada simple contenida en A también está contenido en A.* Intuitivamente, el "interior" de una curva debe ser claro. La expresión precisa de este concepto se basa en el *Teorema de la curva de Jordan*, el cual puede puede enunciarse como: *Toda curva cerrada simple divide al plano en dos regiones mutuamente excluyentes, teniendo a la curva como frontera común. La región que es acotada se llama el interior de la curva, mientras que la otra región es llamada el exterior de la curva.*

Otra definición es la siguiente: *Una región A es simplemente conexa si toda curva* *cerrada en A puede deformarse en A a una curva constante (es decir, a un punto)*. En este caso se dice que la curva es *homotópica* a un punto.

En cualquier caso, una región simplemente conexa es aquella que no tiene "huecos" (agujeros u hoyos), esto se debe a que para una curva cerrada simple que rodea a un hueco: se encierran puntos que no son solamente de A, no todo el interior está contenido en A o no es posible reducirla a un punto en A sin salirse de A. En consecuencia, la región en la cual una función analítica tiene un punto singular *no* es simplemente conexa. Una región que *no* es simplemente conexa se llama *multiplemente conexa*.

En el *Teorema I.3.9* se demostró que si una función es analítica, entonces sus partes real e imaginaria son armónicas. El siguiente teorema nos proporciona un recíproco del anterior. A saber, que toda función armónica es la parte real o la parte imaginaria de una función analítica.

Teorema I.3.10. *Sea $u(x,y)$ una función armónica definida en una región simplemente conexa A. Entonces existe una armónica conjugada $v(x,y)$ definida en A tal que la función $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica en A.*

Demostración. Como f debe ser analítica, $u(x,y)$ y la función $v(x,y)$ buscada deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Integrando la primera ecuación tenemos que

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,s)\,ds + \varphi(x)$$

Pasemos a determinar a $\varphi(x)$. Derivando parcialmente a $v(x,y)$ respecto a x:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,s)\,ds + \varphi(x)\right] \\ &= \int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,s)\,ds + \varphi'(x)\end{aligned}$$

y como $u(x,y)$ es una función armónica:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,s)\, ds + \varphi'(x)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial y}(x,y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \varphi'(x)$$

pero como $v(x,y)$ debe satisfacer la segunda ecuación de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y_0)$$

$$\varphi(x) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(t,y_0)\, dt + C$$

Por lo tanto, una función $v(x,y)$ tal que $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica es

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,s)\, ds - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(t,y_0)\, dt + C$$

Desde luego que también de puede obtener v iniciando la demostración integrando la segunda ecuación de Cauchy-Riemann, lo cual se pide realizar en el *Ejercicio 38.*

Una demostración distinta se dará en el *Subtema I.6.* ■

Por ser f analítica en A, entonces la función

$$h(z) = i f(z) = i\,[u(x,y) + i\,v(x,y)) = -v(x,y) + i\,u(x,y)$$

también es analítica en A. Por lo tanto, toda función armónica es la parte real o la parte imaginaria de una función analítica.

La demostración del teorema anterior nos proporcionan un método para encontrar la armónica conjugada de una función armónica.

Ejemplo I.3.14. Obtener la armónica conjugada de la función armónica

$$u(x,y) = x^2 - y^2 - y$$

Solución. Para que la función $v(x,y)$ sea una armónica conjugada de $u(x,y) = x^2 - y^2 - y$, la función $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ debe ser analítica. Por lo tanto, u y v deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

de donde

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + 1 \qquad \ldots (7)$$

Integrando la primera de las ecuaciones anteriores, considerando a y como variable de integración, tenemos:

$$v(x,y) = \int 2x\,dy + \varphi(x) = 2xy + \varphi(x)$$

Derivando parcialmente a $v(x,y)$ respecto a x e igualando con la segunda ecuación:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x) = 2y + 1$$

$$\varphi'(x) = 1$$

$$\varphi(x) = \int dx = x + C$$

Por lo tanto,

$$v(x,y) = 2xy + x + C$$

en donde se observa que las armónicas conjugadas de u difieren en una constante aditiva.

Otra forma de encontrar a $v(x,y)$ es integrar la segunda ecuación de *(7)* en lugar de integrar la primera:

$$v(x,y) = \int (2y+1)\,dx + \phi(y) = 2xy + x + \phi(y)$$

Derivando parcialmente a $v(x,y)$ respecto a y e igualando con la primera ecuación de *(7)*:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + \phi'(y) = 2x$$

$$\phi'(y) = 0$$

$$\phi(y) = C$$

Por lo tanto,

$$v(x,y) = 2xy + x + C$$

Una forma más de obtener a $v(x,y)$ es integrar las dos ecuaciones de *(7)*:

$$v(x,y) = \int 2x\,dy + \varphi(x) = 2xy + \varphi(x)$$

$$v(x,y) = \int (2y+1)\,dx + \phi(y) = 2xy + x + \phi(y)$$

de donde

$$\varphi(x) = x \quad \text{y} \quad \phi(y) = C$$

ó

$$\varphi(x) = x + C \quad \text{y} \quad \phi(y) = 0$$

por lo que

$$v(x,y) = 2xy + x + C$$

Así, hemos contruido una función analítica

$$f(z) = (x^2 - y^2 - y) + i(2xy + x)$$

tal que $u(x,y) = \mathrm{Re}[f(z)]$.

Este resultado es fácil de comprobar porque $f(z) = z^2 + iz$.

Las funciones

$$g(z) = -if(z) = (2xy + x) - i(x^2 - y^2 - y)$$

$$h(z) = if(z) = -(2xy + x) + i(x^2 - y^2 - y)$$

también son analíticas y en ellas podemos observar que $-u(x,y)$ es una armónica conjugada de $v(x,y)$ y que $u(x,y) = \mathrm{Im}[g(z)]$. Ambas cosas pueden comprobarse siguiendo el procedimiento del ejemplo. ■

Teorema I.3.11. *Sea* $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ *analítica en una región* A *y sean*

$$u(x,y) = \alpha \qquad y \qquad v(x,y) = \beta$$

familias de curvas suaves, donde α *y* β *son constantes reales arbitrarias. Entonces las familias son ortogonales.*

Las familias de curvas $u(x,y) = \alpha$ y $v(x,y) = \beta$ se denominan *curvas de nivel.* El que las familias de curvas sean ortogonales significa que cada miembro de una familia es perpendicular a cada miembro de la otra familia en su punto de intersección. Por el *Teorema I.3.7*, las correspondientes curvas imágenes en el plano w consiste en rectas paralelas a los ejes u y v, por lo que también constituyen familias ortogonales.

Este teorema es importante porque nos permite construir familias de curvas ortogonales a partir de las partes real e imaginaria de funciones analíticas, de las cuales por cierto, conocemos muchas.

Demostración (1). Consideremos un miembro cualesquiera de cada una de las respectivas familias, pueden ser $u(x,y) = \alpha_1$ y $v(x,y) = \beta_1$, donde α_1 y β_1 son constantes particulares.

Derivando a $u(x,y) = \alpha_1$ y $v(x,y) = \beta_1$ respecto a x obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

por lo que las pendientes de las rectas tangentes a $u(x,y) = \alpha_1$ y $v(x,y) = \beta_1$ están dadas por

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}} \qquad \text{y} \qquad m_2 = \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\dfrac{\partial v}{\partial y}}$$

respectivamente. El producto de las pendientes en el punto de intersección (x_0, y_0), después de utilizar las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es

$$m_1 m_2 = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)} \frac{\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)} \frac{\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)} = -1$$

por lo que las curvas son ortogonales.

De la última expresión notamos que se debe cumplir

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$$

por lo que

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0 \qquad \blacksquare$$

Demostración (2). Del cálculo de variables reales sabemos que las familias de curvas

$$u(x,y) = \alpha_1 \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = \beta_1$$

son suaves si sus gradientes no son nulos, es decir, si

$$\textbf{grad}\, u(x,y) = \nabla u(x,y) \neq \mathbf{0} \qquad \text{y} \qquad \textbf{grad}\, v(x,y) = \nabla v(x,y) \neq \mathbf{0}$$

También sabemos que los vectores gradiente ∇u y ∇v son normales (es decir, perpendiculares) a las familias de curvas $u(x,y) = c_1$ y $v(x,y) = c_2$ respectivamente. Por lo tanto, las familias de curvas son ortogonales si los vectores gradiente son perpendiculares, es decir, si su producto punto es cero. Efectivamente,

$$\begin{aligned}\nabla u \bullet \nabla v &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \bullet \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = 0\end{aligned}$$

debido a las ecuaciones de Cauchy-Riemann. $\blacksquare$

Ejemplo I.3.15. Sea $f(z) = z^2$ y suponga que $f(z_0) = a + bi$. Describa las curvas definidas implícitamente en el plano xy por las ecuaciones

$$\mathrm{Re}[f(z)] = a \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Im}[f(z)] = b$$

Demuestre que estas curvas son perpendiculares una de la otra en el punto z_0.

Solución. Como $z = x + iy$, entonces

$$f(z) = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

por lo que las curvas deseadas son las hipérbolas

$$x^2 - y^2 = a \qquad \text{y} \qquad 2xy = b$$

Estas curvas son las curvas de nivel de las funciones

$$u(x,y) = x^2 - y^2 \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = 2xy$$

Los vectores normales a ellas están dadas por

$$\nabla u(x,y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = (2x, -2y) \qquad \text{y} \qquad \nabla v(x,y) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = (2y, 2x)$$

En un punto (x_0, y_0) sobre ambas curvas su producto escalar es

$$\nabla u \bullet \nabla v = (2x_0, -2y_0) \bullet (2y_0, 2x_0) = 4x_0 y_0 - 4x_0 y_0 = 0$$

Los vectores normales son entonces perpendiculares uno del otro en z_0 y de esta manera las curvas lo son también.

Observamos que las curvas $u(x,y) = 0$ y $v(x,y) = 0$ se cortan en el origen pero no son, sin embargo, ortogonales entre sí. Esto se debe a que $f'(0,0) = 0$. ■

Ejemplo I.3.16. Obtener las trayectorias ortogonales a la familia de curvas

$$x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = cte.$$

Solución. Por el *Teorema I.3.11*, buscaremos una función analítica cuya parte real o parte imaginaria sea la función $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$. Como complemento al *Ejemplo I.3.14*, buscaremos una función analítica $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ tal que $v(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$.

Esto requiere que v sea armónica, lo cual es cierto porque

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 12x - 12y^2 - 12x + 12y^2 = 0$$

Para obtener a u, ésta y v deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

por lo que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -12x^2y + 4y^3 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -4x^3 + 12xy^2$$

Integrando la primera ecuación:

$$u(x,y) = \int (-12x^2y + 4y^3)\,dx = -4x^3y + 4xy^3 + \varphi(y)$$

Derivando parcialmente respecto a y e igualando con la segunda ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4x^3 + 12xy^2 + \varphi'(y) = -4x^3 + 12xy^2$$

$$\varphi'(y) = 0$$

$$\varphi(y) = C$$

de donde $u(x,y) = -4x^3y + 4xy^3 + C$. Por lo tanto, las trayectorias ortogonales buscadas son

$$x^3y - xy^3 = \alpha$$

La función $f(z) = (x^3y - xy^3) + i(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$ es analítica ya que $f(z) = iz^4$. ■

Derivación de las funciones elementales.

En esta sección se discutirán las propiedades de la derivabilidad de las funciones elementales discutidas en el *Subtema I.1*.

La función exponencial y la función logaritmo natural.

Teorema I.3.12. *La transformación* $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$ *definida por* $f(z) = e^z$ *es analítica en todo el plano complejo* $\mathbb{C}$ *y*

$$\frac{de^z}{dz} = e^z$$

Demostración. De la definición de función exponencial se tiene

$$e^z = e^x \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y$$

de donde

$$u(x,y) = e^x \cos y \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$$

Derivando parcialmente a u y v

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Como las derivadas parciales de u y v son continuas en $\mathbb{R}^2$ y satisfacen a las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se sigue del *Teorema I.3.2* que f es analítica en $\mathbb{C}$ y de la *Ecuación (2)* que

$$\frac{de^z}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y = e^z$$

con lo cual termina la demostración. ■

Recordemos que una función definida y analítica en todo el plano $\mathbb{C}$ se llama *entera* y que utilizando las reglas dadas por el *Teorema I.2.11* y *Teorema I.2.12*, tal como se utilizaron en cálculo elemental, se puede derivar la función exponencial en combinación con otras funciones diferentes.

Ejemplo I.3.17. Demostrar que $f(z) = e^{(z^2)} + 1$ es entera.

Solución. Las funciones $f_1(z) = e^z$ y $f_2(z) = z^2$ son analíticas en todo el plano complejo, así por la regla de la cadena $f_3(z) = e^{(z^2)}$ es entera y su derivada es $f_3'(z) = 2ze^{(z^2)}$. Además, la función constante $f_4(z) = 1$ también es analítica en todo el plano $\mathbb{C}$ con derivada igual a 0 y como la suma de funciones analíticas es analítica, entonces $f = f_3 + f_4$ es entera y por el *Teorema I.2.11.(i)*.

$$\frac{d\left[e^{(z^2)} + 1\right]}{dz} = 2ze^{(z^2)}$$ ■

En la *Definición I.1.7* se señaló que el dominio de la función $\ln(z)$ es $\mathbb{C} - \{0\}$, sin embargo, para poder tener una función logaritmo natural que sea derivable en todo su dominio se necesita restringir su dominio para que esta función sea continua. En efecto, consideremos por ejemplo la sucesión $e^{i(y_0 - 1/n)}$, la cual converge a e^{iy_0}, entonces si se toma la rama del logaritmo natural con valores de $\arg(z)$ en $[y_0, y_0 + 2\pi)$ se tiene que

$$\ln\left[\lim_{n \to \infty} e^{i(y_0 - 1/n)}\right] = \ln\left(e^{iy_0}\right) = y_0 i$$

En cambio $\ln[e^{i(y_0 - 1/n)}] = i(y_0 - 1/n + 2\pi)$ converge a $(y_0 + 2\pi)i$, es decir,

$$\lim_{n \to \infty} \left\{\ln\left[e^{i(y_0 - 1/n)}\right]\right\} = i(y_0 + 2\pi)$$

En consecuencia

$$\lim_{n \to \infty} \left\{\ln\left[e^{i(y_0 - 1/n)}\right]\right\} \neq \ln\left[\lim_{n \to \infty} e^{i(y_0 - 1/n)}\right]$$

y por lo tanto la función logaritmo natural no es continua en e^{iy_0}, ni tampoco en toda la línea dada por $r e^{iy_0}$, con $r \in (0, \infty)$.

Por consiguiente, se considerarán valores de $\arg(z)$ en el intervalo abierto

$$\{\, x + iy \in \mathbb{C} \mid y_0 < y < y_0 + 2\pi \,\}$$

Definición I.3.11. *A la rama de la función logaritmo natural cuyos valores de* $\arg(z)$ *están en el intervalo abierto* $(-\pi, \pi)$ *se le llama la rama principal.*

Teorema I.3.13. *Sea* $A = \mathbb{C} - \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y = 0, x \leq 0\}$ *entonces, la rama principal del logaritmo natural es analítica en* A *y*

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{Ln} z) = \frac{1}{z}$$

Demostración (1). Por el teorema de la función inversa se sigue que $\operatorname{Ln} z$ es analítica ya que

$$\frac{de^z}{dz} = e^z \neq 0, \qquad \forall \ z \in \mathbb{C}$$

Además

$$\frac{d}{dw}(\operatorname{Ln} w) = \frac{1}{\dfrac{de^z}{dz}} = \frac{1}{e^z}$$

y como $w = e^z$

$$\frac{d}{dw}(\operatorname{Ln} w) = \frac{1}{w}$$

de donde se desprende el resultado. ■

Demostración (2). En coordenadas polares

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} r + i\theta$$

de donde

$$u(r,\theta) = \operatorname{Ln} r \qquad \text{y} \qquad v(r,\theta) = \theta$$

Como

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

las derivadas parciales son continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar en A, por lo que $\mathrm{Ln}\,z$ es analítica en A y de la *Ecuación (5)*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(\mathrm{Ln}\,z) &= (\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ &= \frac{1}{r^2}(x - iy) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

con lo cual termina la demostración. ■

Observación: Teoremas similares se pueden enunciar para otras ramas del logaritmo natural.

Ejemplo I.3.18. Derivar la función $f(z) = \ln(e^z + 1)$ usando la rama principal del logaritmo natural, dando la región apropiada en la cual es analítica.

Solución. De acuerdo al *Teorema I.3.13* esta función es analítica en

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{C} - \{\, z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(e^z + 1) = 0,\ \mathrm{Re}(e^z + 1) \le 0 \,\} \\ &= \mathbb{C} - \{\, x + iy \in \mathbb{C} \mid e^x \,\mathrm{sen}\, y = 0,\ e^x \cos y + 1 \le 0 \,\} \end{aligned}$$

por lo que necesitamos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} e^x \,\mathrm{sen}\, y = 0 \\ e^x \cos y + 1 \le 0 \end{cases}$$

Como $e^x > 0$ para toda x, el sistema queda en la forma

$$\begin{cases} \mathrm{sen}\, y = 0 \\ e^x \cos y \le -1 \end{cases}$$

La primera ecuación se satisface para $y = n\pi$ con $n \in \mathbb{I}$. Para n par la segunda ecuación nos lleva a $e^x \le -1$, la cual no tiene solución y para n impar $e^x \ge 1$, por lo que $x \ge 0$. Por lo tanto

$$A = \mathbb{C} - \{ x+iy \in \mathbb{C} \mid x \geq 0,\ y = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{I} \}$$

Las funciones $f_1(z) = e^z$ y $f_2(z) = 1$ son analíticas en $\mathbb{C}$ y por el *Teorema I.2.11.(i)* la función $f_3(z) = e^z + 1$ también es analítica en $\mathbb{C}$ y por lo tanto analítica en A. Sea $f_4(z) = \ln z$, entonces por la regla de la cadena la función

$$f(z) = (f_4 \circ f_3)(z) = f_4[f_3(z)] = f_4(e^z + 1) = \ln(e^z + 1)$$

es analítica en A con derivada

$$f'(z) = f_4'[f_3(z)]\, f_3'(z) = \frac{1}{e^z+1}\frac{d}{dz}(e^z+1) = \frac{e^z}{e^z+1}$$ ■

Las funciones trigonométricas e hiperbólicas.

Teorema I.3.14. *Las funciones seno y coseno son enteras y*

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{sen} z) = \cos z \quad y \quad \frac{d}{dz}(\cos z) = -\operatorname{sen} z$$

Demostración. De la *Definición I.1.5* de funciones seno y coseno y de las fórmulas para la derivada de una constante por una función y la derivada de una suma de funciones dadas por el *Teorema I.2.11*, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}(\operatorname{sen} z) &= \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\right] = \frac{1}{2i}\frac{d}{dz}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{d}{dz}\left(e^{iz}\right) - \frac{d}{dz}\left(e^{-iz}\right)\right] = \frac{1}{2i}\left(i e^{iz} + i e^{-iz}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \cos z
\end{aligned}$$

La demostración para el la derivada del coseno es análoga. ■

Así como el teorema anterior, se puede demostrar este otro.

Teorema I.3.15. *Las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico son enteras y*

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{senh} z) = \cosh z \qquad y \qquad \frac{d}{dz}(\cosh z) = \operatorname{senh} z$$

La función potencia.

Teorema I.3.16.

i) *Para cualquier rama del logaritmo, la función $f(z) = a^z$ es entera y*

$$\frac{d}{dz}(a^z) = (\ln a)\, a^z$$

ii) *Si se fija una rama del logaritmo, la función $f(z) = z^b$ es analítica en el dominio de la rama del logaritmo especificada y*

$$\frac{d}{dz}(z^b) = b\, z^{b-1}$$

Se sobreentiende que z^b y z^{b-1} usan la misma rama del logaritmo.

Demostración.

i) Sean las funciones $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = (\ln a)\, z$ y $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$ definida por $h(z) = e^z$ ambas analíticas en $\mathbb{C}$, entonces por la regla de la cadena la función $h \circ f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$ definida por

$$f(z) = (h \circ g)(z) = h[g(z)] = h[(\ln a)\, z] = e^{(\ln a) z}$$

también es analítica en $\mathbb{C}$ con derivada

$$f'(z) = h'[g(z)]\, g'(z) = (\ln a)\, e^{(\ln a) z}$$

de donde se obtiene el resultado deseado.

ii) Ahora, por la regla de cadena $z^b = e^{b \ln z}$ es analítica en el dominio de la rama del logaritmo elegida y

$$\frac{d}{dz}(z^b) = \frac{d}{dz}(e^{b\ln z}) = \frac{b}{z}e^{b\ln z} = bz^{-1}e^{b\ln z}$$
$$= be^{-\ln z}e^{b\ln z} = be^{(b-1)\ln z} = bz^{b-1}$$

Obsérvese que z^b es entera si $b \in \mathbb{N}$ y z^b es analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$ si $b \in \mathbb{I} - \{0\}$ y si $b \notin \mathbb{I}$, z^b es analítica en el dominio de alguna rama de logaritmo donde esta función sea analítica. ■

La función raíz enésima.

Un caso de particular importancia en el *Teorema I.3.16* es cuando $b = 1/n$. Se tiene que $f(z) = z^{1/n}$ es analítica en cualquier dominio de analiticidad de alguna rama del logaritmo y para dicha rama

$$\frac{d}{dz}(z^{1/n}) = \frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}$$

Ejemplo I.3.19. Derivar la función $f(z) = \sqrt{e^z + 1}$ dando la región apropiada en la cual la función es analítica.

Solución. La función $f(z) = \sqrt{e^z + 1}$, de acuerdo con la *Definición I.1.9* de potencia compleja, se puede escribir como

$$f(z) = \sqrt{e^z + 1} = (e^z + 1)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\ln(e^z + 1)}$$

En el *Ejercicio I.3.13* se vió que la rama principal de la función $f_1(z) = \ln(e^z + 1)$ es analítica en

$$A = \mathbb{C} - \{\, x + iy \in \mathbb{C} \mid x \geq 0,\ y = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{I} \,\}$$

con derivada $f_1'(z) = e^z/(e^z + 1)$. Como $f_2(z) = 1/2$ es entera, entonces en particular, es analitica en A y por el *Teorema I.2.11*, $f_3(z) = \frac{1}{2}\ln(e^z + 1)$ es analítica en A. Sea

$f_4(z) = e^z$, entonces por la regla de la cadena la función

$$f(z) = (f_4 \circ f_3)(z) = f_4[f_3(z)] = f_4\left[\frac{1}{2}\ln(e^z+1)\right] = e^{\frac{1}{2}\ln(e^z+1)}$$

es analítica en A con derivada

$$f'(z) = f_4'[f_3(z)]\, f_3'(z) = e^{\frac{1}{2}\ln(e^z+1)} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{2}\ln(e^z+1)\right] = \frac{e^z}{2(e^z+1)} e^{\frac{1}{2}\ln(e^z+1)}$$

$$= \frac{e^z}{2(e^z+1)}(e^z+1)^{1/2} = \frac{e^z}{2(e^z+1)^{1/2}} = \frac{e^z}{2\sqrt{e^z+1}}$$

con lo que finalizamos el ejemplo. ■

Ejercicios propuestos.

1. Si $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica en $z_0 = x_0 + i\,y_0$, demostrar que

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

2. Demostrar, mediante fórmulas de derivación, que $f(z) = e^{z^2}$ es analítica en $\mathbb{C}$ y que, en consecuencia, sus partes real e imaginaria satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $\mathbb{R}^2$.

3. Suponer que las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en A abierto. Demostrar que

$$U(x,y) = [u(x,y)]^2 - [v(x,y)]^2 \quad \text{y} \quad V(x,y) = 2\,u(x,y)\,v(x,y)$$

también satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en A.

4. Suponer que las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en A abierto. Demostrar que

$$U(x,y) = e^{u(x,y)} \cos v(x,y) \quad \text{y} \quad V(x,y) = e^{u(x,y)} \operatorname{sen} v(x,y)$$

satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en A.

5. Si $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es una función analítica, demostrar que el campo vectorial

$$\boldsymbol{F}(x,y) = [u(x,y), v(x,y)] = u(x,y)\,\boldsymbol{i} + v(x,y)\,\boldsymbol{j}$$

es solenoidal e irrotacional.

6. Sean f una función analítica en A subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ una función definida en $A^* = \{z \mid \bar{z} \in A\}$. Demostrar que g es analítica en A^*.

7. Sea $f(z)$ una función analítica en una región A. Demostrar que $f(z)$ debe ser constante en A si $f(z)$ es real para toda z en A.

8. Suponer que las funciones $f(z)$ y $\overline{f(z)}$ son analíticas en una región A. Demostrar que $f(z)$ es constante en A.

9. Demostrar que si $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica en una región A y una de las funciones u o v es constante, entonces $f(z)$ es constante en A.

10. Sea f analítica en una región A con $|f(z)|$ constante en A. Demostrar que f es constante en A.

11. Obtener el ángulo de rotación y el factor de escala en un punto $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ (no nulo), bajo la transformación $w = z^n$, donde $n \in \mathbb{N}$.

12. Sea $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es una función analítica en una región A. Si
$$a\,u(x,y) + b\,v(x,y) = c$$
donde a, b, c son constantes rreales no todas nulas, demostrar que f' es constante en A.

13. Sea f analítica en $A = \{z \mid \operatorname{Re} z > 1\}$ y
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 0$$
en A. Demostrar que existe una constante real c y una constante compleja d tales que
$$f(z) = -icz + d$$
en A.

14. Determinar los puntos donde la transformación $w = \operatorname{sen} z$ es conforme.

15. Comprobar la preservación del ángulo entre las rectas $y = x - 1$ y $y = 0$ bajo la transformación $w = 1/z$.

16. Comprobar que el ángulo entre las rectas $x = a$ y $y = b$, donde $a, b \neq 0$ se preserva bajo la transformación $w = z^2$.

17. Considerar la transformacion $w = e^z$. Comprobar que las rectas $x = a$ y $y = b$ se mapean en curvas ortogonales.

18. Sea C una curva suave contenida en una región A donde $w = f(z)$ es una transformación conforme y sea C^* la imagen de C bajo esta transformación. Demostrar que C^* también es una curva suave.

19. Si $f(z)$ es una transformación conforme, demostrar que $g(z) = \overline{f(z)}$ es una transformación isogonal.

20. Si $f(z) = u(r, \theta) + i\, v(r, \theta)$ demostrar que una de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar es

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

21. Si $f(z) = u(r, \theta) + i\, v(r, \theta)$ es analítica, demostrar que

$$f'(z) = -\frac{i}{r}e^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

22. Expresar las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas curvilíneas (ξ, η), donde

$$\begin{cases} x = e^{\xi}\cosh\eta \\ y = e^{\xi}\operatorname{senh}\eta \end{cases}$$

23. Si una función es analítica en una región, demostrar que la parte imaginaria de la función es armónica en la misma región.

24. Determinar una relación entre las contantes reales a, b y c de tal manera que la función

$$\phi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

sea armónica.

25. Obtener todos los polinomios armónicos de la forma

$$\phi(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

26. Si las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son armónicas, demostrar que una combinación lineal de ellas también lo es.

27. Mostrar que las funciones
$$u(x,y) = x^2 - y^2 \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = x^3 - 3xy^2$$
son armónicas, pero su producto no.

28. Si las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son armónicas, mediante un contraejemplo, demostrar que $(u \circ v)(x,y)$ no es armónica.

29. Si la función $u(x,y)$ es armónica en una región A, demostrar que la función $U(x,y) = u(x,-y)$ también es armónica en A.

30. Si la función $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica en una región $A \subset \mathbb{C}$, demostrar que la función v es armónica en $A \subset \mathbb{R}^2$.

31. En el *Teorema I.3.12* se demostró que la función $f(z) = e^z$ es analítica en $\mathbb{C}$. Comprobar que sus partes real e imaginaria satisfacen la ecuación de Laplace.

32. En el *Teorema I.3.14* se demostró que la función $f(z) = \operatorname{sen} z$ es analítica en $\mathbb{C}$. Comprobar que sus partes real e imaginaria son armónicas.

33. Demostrar que las partes real e imaginaria de una función analítica expresada en forma polar, en una región que no contiene al origen, satisface la ecuación de Laplace en forma polar.

34. Comprobar que las funciones expresadas en forma polar
$$u(r,\theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta \qquad \text{y} \qquad v(r,\theta) = \left(r - \frac{1}{r}\right)\operatorname{sen}\theta$$
son armónicas.

35. Si las funciones $v(x,y)$ y $V(x,y)$ son armónicas conjugadas de $u(x,y)$ en una región A, demostrar que v y V difieren a lo sumo en una constante aditiva arbitraria.

36. Si $v(x,y)$ es armónica conjugada de $u(x,y)$ en una región A y además u es armónica conjugada de v, demostrar que u y v deben ser constantes en A.

37. Si $v(x,y)$ una es armónica conjugada de $u(x,y)$, demostrar que su producto
$$\phi(x,y) = u(x,y)\,v(x,y)$$
es una función armónica.

38. Sea $u(x,y)$ una función armónica definida en una región simplemente conexa A. Entonces existe una armónica conjugada

$$v(x,y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(s,y)\,ds + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,t)\,dt + C$$

definida en A tal que la función $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica en A

39. Obtener la función analítica $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ tal que

a) $u(x,y) = y^3 - 3x^2 + 1$

b) $u(x,y) = -\operatorname{sen} y \operatorname{senh} x$

c) $v(x,y) = e^{-y} \operatorname{sen} x$

d) $v(x,y) = 2 \operatorname{sen} x \cosh y$

40. Verificar que la función $u(r,\theta) = \ln r$ es armónica en la región $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$ y deducir la armónica conjugada.

41. Comprobar la ortogonalidad de las familias curvas

$$\operatorname{Re}[f(z)] = \alpha \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Im}[f(z)] = \beta$$

si $f(z) = 1/z$.

42. Repetir el *Ejercicio 41* en coordenadas polares.

43. Encontrar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas

$$2e^{-x} \operatorname{sen} y + x^2 - y^2 = \alpha$$

44. Encontrar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas

$$r^2 \operatorname{sen}(2\theta) = \alpha$$

I.4 Integración de funciones de variable compleja.

En el *Subtema I.2* y *Subtema I.3* definimos la derivada de una función compleja. Toca el turno ahora al problema de la integración de funciones complejas. Las integrales de funciones analíticas es bien comportado y muchas propiedades del cálculo de funciones de variable real se pueden trasladar al caso complejo. Para introducirnos a la integral de una función compleja , empezaremos definiendo la integral de una función compleja de variable *real*.

Definición I.4.1. *Sea $f: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función compleja de variable real. Entonces $f(t) = u(t) + i\,v(t)$, donde u y v son funciones reales de la variable t en $[a,b]$ y se define*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

siempre y cuando las integrales individuales de la derecha existan.

Con palabras, esta definición nos dice que la integral de una función compleja de variable real es igual a la integral de su parte real más la unidad imaginaria i por la integral de su parte imaginaria.

Si las funciones u y v son continuas en el intervalo $[a,b]$, entonces f también es continua en $[a,b]$ y, por lo tanto, todas las integrales apuntadas en la definición existen.

Este tipo de integral generalmente la calculamos encontrando las antiderivadas de las funciones u y v y evaluando las integrales definidas del lado derecho.

De la definición también observamos que

$$\operatorname{Re}\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re}[f(t)]\,dt \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Im}\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Im}[f(t)]\,dt$$

Ejemplo I.4.1. Calcular la integral

$$\int_0^1 (1+it)^3\,dt$$

Solución. Como

$$f(t) = (1+it)^3 = \left(1-3t^2\right) + i\left(3t-t^3\right) = u(t) + i\,v(t)$$

entonces

$$\int_0^1 (1+it)^3\, dt = \int_0^1 (1-3t^2)\, dt + i\int_0^1 (3t-t^3)\, dt$$

$$= (t-t^3)\Big|_0^1 + i\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{4}i$$

Veremos en seguida otra forma de resolver este mismo ejemplo. ■

El *teorema fundamental del cálculo integral* sobre primitivas puede extenderse a las integrales del tipo de la *Definición I.4.1*. Concretamente, supongamos que las funciones

$$f(t) = u(t) + i\,v(t) \qquad \text{y} \qquad F(t) = U(t) + i\,V(t)$$

son continuas en el intervalo $[a,b]$. Si

$$F'(t) = U'(t) + i\,V'(t) = u(t) + i\,v(t) = f(t)$$

para toda $t \in [a,b]$, entonces $U'(t) = u(t)$ y $V'(t) = v(t)$. Por lo tanto, en vista de la *Definición I.4.1*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b u(t)\, dt + i\int_a^b v(t)\, dt = U(t)\Big|_a^b + i\,V(t)\Big|_a^b$$

$$= [\,U(b) - U(a)\,] + i\,[\,V(b) - V(a)\,]$$

$$= [\,U(b) + i\,V(b)\,] - [\,U(a) + i\,V(a)\,]$$

$$= F(b) - F(a) = F(t)\Big|_a^b$$

Retomando el *Ejemplo I.4.1* tenemos que

$$F'(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{4i}(1+it)^4\right] = (1+it)^3 = f(t)$$

entonces

$$\int_0^1 (1+it)^3\, dt = \left[\frac{1}{4i}(1+it)^4\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{4i}\left[(1+i)^4 - 1\right]$$

$$= \frac{1}{4i}(-5) = \frac{5}{4}i$$

que es el mismo resultado obtenido en su momento.

Ejemplo I.4.2. Calcular la integral

$$\int_0^{\pi/2} e^{t-it}\, dt$$

Solución. Necesitamos una función $F(t)$ con la propiedad de que $F'(t) = e^{t-it}$. La función que lo satisface es $F(t) = e^{t-it}/(1-i)$, así

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} e^{t-it}\, dt &= \frac{1}{1-i} e^{t-it}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{1-i}\left(e^{\pi/2-\pi i/2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{1-i}\left(e^{\pi/2}\cos\frac{\pi}{2} - i\, e^{\pi/2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - 1\right) \\
&= -\frac{1}{1-i}\left(i\, e^{\pi/2} + 1\right) = -\frac{1}{2}(1+i)\left(i\, e^{\pi/2} + 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} - 1\right) - \frac{i}{2}\left(e^{\pi/2} + 1\right)
\end{aligned}$$

Este ejemplo ilustra la gran ventaja que tenemos en las operaciones cuando elevamos nuestra mirada hacia el dominio complejo. Si hubiéramos calculado la integral por medio de la *Definición I.4.1* tendríamos que como

$$e^{t-it} = e^t \cos t + i\, e^t \operatorname{sen} t$$

entonces

$$\int_0^{\pi/2} e^{t-it}\, dt = \int_0^{\pi/2} e^t \cos t\, dt + i\int_0^{\pi/2} e^t \operatorname{sen} t\, dt$$

Usando las técnicas del cálculo para evaluar las dos integrales de la derecha ncesitaríamos un largo proceso de integración por partes. Cuando reconocemos estas integrales como las partes real e imaginaria de $\int_0^{\pi/2} e^{t-it} dt$ la solución se obtiene rapidamente:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} e^t \cos t\, dt &= \operatorname{Re}\int_0^{\pi/2} e^{t-it}\, dt = \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} - 1\right) \\
\int_0^{\pi/2} e^t \operatorname{sen} t\, dt &= \operatorname{Im}\int_0^{\pi/2} e^{t-it}\, dt = -\frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} + 1\right)
\end{aligned}$$

Este es uno de los muchos beneficios que tendremos con el conocimiento del análisis complejo. ■

Integral de línea.

Principiaremos haciendo notar que la imagen de una función compleja de variable real $z: [a, b] \to \mathbb{C}$, es decir, una función de la forma

$$z(t) = x(t) + i\,y(t), \qquad \text{para } a \le t \le b$$

es un conjunto de puntos en el plano complejo. Si la función $z(t)$ es continua en $[a, b]$, para lo cual se requiere que las funciones $x(t)$ y $y(t)$ sean continuas para $a \le t \le b$, entonces dichos puntos forman una secuencia continua de puntos, lo que corresponde a nuestra idea intuitiva de una curva continua. Por definición, si $z(t)$ es continua [1], llamaremos *curva continua* C indistintamente a z o a su imagen.

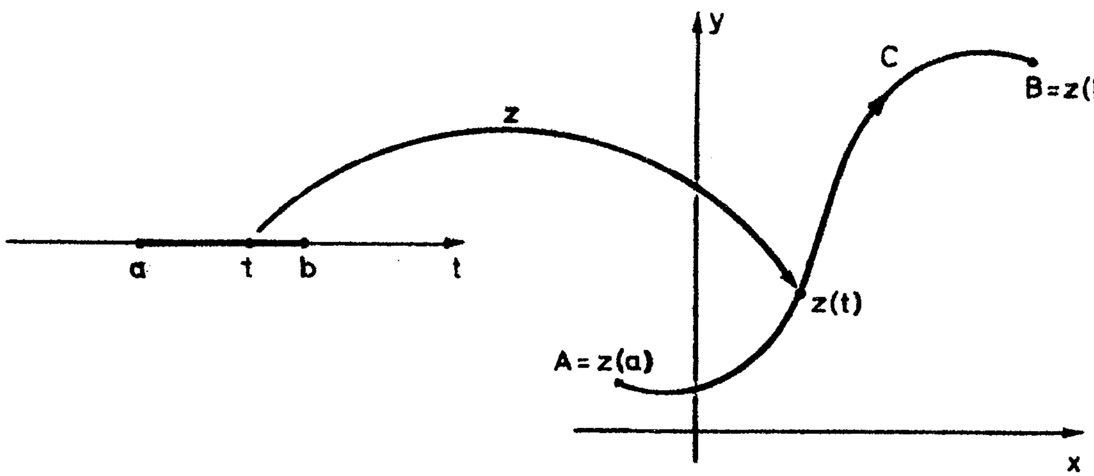

Figura I.4.1. *Una curva C como imagen de una función $z(t)$.*

La ecuación anterior nos recuerda a la función vectorial $\boldsymbol{r}: [a, b] \to \mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{r}(t) = [x(t),\, y(t)] = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j}$$

cuya imagen es la misma curva en el plano xy que antes, sólo que los puntos de la curva se obtienen ahora con el extremo final del vector de posición $\boldsymbol{r}(t)$ a medida que t toma valores

[1] También llamada función de clase C^0.

en el intervalo $[a, b]$.

Recordemos que una curva C es *simple* si no se cruza a sí misma, lo cual significa que $z(t_1) \neq z(t_2)$ siempre que $t_1 \neq t_2$, excepto posiblemente cuando $t_1 = a$ y $t_2 = b$. Una curva C con la propiedad $z(a) = z(b)$ es una *curva cerrada*. Si $z(a) = z(b)$ es el único punto de intersección, entonces decimos que C es una *curva cerrada simple*. A medida que el parámetro t crece del valor a hasta el valor b, el punto $z(t)$ empieza en el *punto inicial* $z(a)$, moviéndose a lo largo de la curva C, y termina en el *punto final* $z(b)$. Si C es simple, entonces $z(t)$ se mueve continuamente desde $z(a)$ hasta $z(b)$ conforme t aumenta y la curva da una *orientación*, la cual indicamos mediante flechas a lo largo de la curva.

Se dice que la función compleja $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ es *derivable* en $[a, b]$ si las funciones $x(t)$ y $y(t)$ son derivables para toda $a \leq t \leq b$. Aquí requerimos que las derivadas laterales de $x(t)$ y $y(t)$ existan en los extremos del intervalo. Como vimos en la *Definición I.3.4*, la derivada $z'(t)$ está dada por

$$z'(t) = x'(t) + i\,y'(t), \qquad a \leq t \leq b$$

Una curva continua C es *diferenciable* o de *clase* C^1 en $[a, b]$ si z' es continua en el intervalo, para lo cual se requiere que x' y y' sean continuas en dicho intervalo. Si además $z'(t) \neq 0$ para toda $t \in [a, b]$, es decir, si $x'(t) \neq 0$ ó $y'(t) \neq 0$ para toda $a \leq t \leq b$, se dice que C es *suave* o *lisa*. Si C es una curva suave, entonces C tiene un vector tangente no nulo en cada punto $z(t)$, el cual está dado por $z'(t)$. Si $x'(t_0) = 0$, entonces el vector tangente a C en el punto $z(t_0)$, dado por $z'(t_0) = i\,y(t_0)$, es vertical. Si $x'(t_0) \neq 0$, entonces la pendiente de la recta tangente está dada por $y'(t_0)/x'(t_0)$. De aquí que para una curva suave su vector tangente $z'(t)$ está definido para todos los valores de $t \in [a, b]$ y es continuo. Por lo tanto, una curva suave no tiene esquinas, picos o cúspides.

Definición I.4.2. *Sea C una curva continua, imagen de la función continua $z: [a, b] \to \mathbb{C}$. Se dice que C es* ***seccionalmente suave*** [2] *si existe una partición $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ del intervalo $[a, b]$ tal que para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $z'(t)$ es continua y no nula en $[t_{i-1}, t_i]$.*

La continuidad de $z'(t)$ en $[t_{i-1}, t_i]$ significa que $z'(t)$ es continua en (t_{i-1}, t_i) y

[2] También llamada suave por tramos, pedazos o trozos.

existen los límites $\lim_{t \to t_{i-1}^+} z'(t)$ y $\lim_{t \to t_i^-} z'(t)$, para toda $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Una curva seccionalmente suave es la que define a un *contorno* o *trayectoria*. Es decir, un contorno C es un número finito de curvas suaves unidas por sus extremos. Si $C_1, C_2, \dots, C_n$ son n curvas suaves tales que el punto final de la curva C_k coincide con el punto inicial de la curva C_{k+1}, para $k = 1, 2, \dots, n-1$, entonces el contorno C lo denotamos mediante la expresión

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

Si $z: [a, b] \to \mathbb{C}$ define a una curva suave C, entonces la longitud de la curva, denotada como $l(C)$, está dada por

$$l(C) = \int_a^b |z'(t)|\, dt$$

Como

$$|z'(t)| = |x'(t) + i\, y'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

la expresión anterior concuerda perfectamente con la forma de calcular la longitud de una curva cuando ésta se da en forma paramétrica.

En el caso general de que C no sea suave pero sí seccionalmente suave, se le puede calcular su longitud separadamente en cada uno de los subintervalos donde es suave y sumar posteriormente las longitudes obtenidas.

Definición I.4.3. *Una curva seccionalmente suave es* ***rectificable*** *si tiene longitud finita.*

Ya estamos ahora listos para definir la integral de una función compleja de variable compleja a lo largo de una curva C, la cual basaremos en términos de la *suma de Riemann* como en el cálculo de variable real. Sea $f(z)$ una función definida en todos los puntos de una curva continua C en el plano complejo $\mathbb{C}$, con punto inicial A y punto final B.

Subdividamos a la curva C en n partes, no necesariamente iguales, por medio de una partición

$$P_n = \{ A = z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = B \}$$

de puntos que van desde A hasta B a lo largo de C. Entre cada par de puntos z_{k-1} y z_k de la partición elijamos un punto ξ_k sobre el arco de curva que los une, en el cual evaluamos a la función y formemos las diferencias $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. Con estos valores construyamos la suma de Riemann para la partición

$$\begin{aligned} S(P_n) &= f(\xi_1)(z_1 - z_0) + f(\xi_2)(z_2 - z_1) + \dots + f(\xi_n)(\xi_n - \xi_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta z_k \end{aligned}$$

Supongamos que cuando el número puntos n en la partición aumente de una forma tal que la más grande de las longitudes $|\Delta z_k|$ tienda a cero, entonces la suma $S(P_n)$ se aproxima a un límite, el cual no depende del modo de la partición. Este límite es el que usaremos para nuestra definición.

Definición I.4.4. *Sea $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función y C una curva continua definida por $z: [a, b] \to A$. La* ***integral de línea de*** f *a lo largo de C, denotada como $\int_C f(z)\,dz$, está dada por*

$$\int_C f(z)\, dz = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta z_k$$

siempre y cuando el límite exista. En tal caso, decimos que f es ***integrable*** *a lo largo de C.*

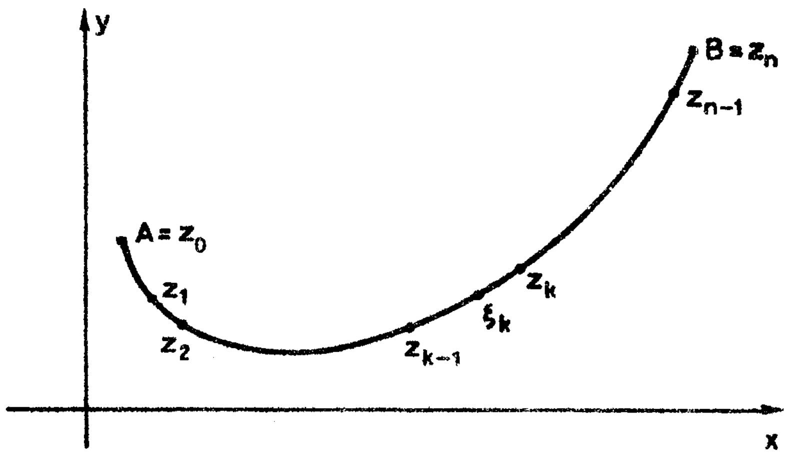

Figura I.4.2. Partición $P_n = \{z_k\}$ de puntos sobre una curva C.

Ejemplo I.4.3. Calcular la integral de línea de $f(z) = z$ a lo largo del segmento de recta que va el origen al punto $1 + i$.

Solución. Subdividamos la recta C en n partes iguales por medio de la partición

$$P_n = \{ 0 = z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = 1 + i \}$$

donde $z_k = \frac{k}{n} + \frac{ki}{n}$ para $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Entre cada par de puntos z_{k-1} y z_k de la partición elegimos

$$\xi_k = z_k = \frac{k}{n} + \frac{ki}{n}$$

sobre el segmento de recta que los une, en donde evaluamos a la función, obteniendo

$$f(\xi_k) = \xi_k = \frac{k}{n} + \frac{ki}{n}$$

y el cálculo de las diferencias da

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = \left(\frac{k}{n} + \frac{ki}{n} \right) - \left[\frac{k-1}{n} + \frac{(k-1)i}{n} \right] = \frac{1}{n} + \frac{i}{n}$$

Con estos valores construimos la suma de Riemann para la partición

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} + \frac{ki}{n} \right)\left(\frac{1}{n} + \frac{i}{n} \right) = \frac{(1+i)^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{(1+i)^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(1+i)^2}{2} \frac{n+1}{n}$$

de donde

$$\int_C z\, dz = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta z_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(1+i)^2}{2} \frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{(1+i)^2}{2} \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} (1+i)^2 = i$$

Un poco más adelante obtendremos este resultado de una manera más fácil. ■

Enunciaremos sin demostración el siguiente teorema sobre existencia.

Teorema I.4.1. *Si $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es continua en A abierto y C es una curva suave en A, entonces f es integrable sobre C.*

En general, obtener el valor de una integral por medio de la *Definición I.4.4* es una tarea que asusta, Afortunadamente, existe una bella teoría que nos permite el cálculo de muchas integrales de línea. Supongamos que se tiene una parametrización de la curva suave C dada por $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ para $a \le t \le b$.

De aquí que la suma de Riemann se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta z_k &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(z_k - z_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f[z(\tau_k)]\,\{[x(t_k) + i\,y(t_k)] - [x(t_{k-1}) + i\,y(t_{k-1})]\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} f[z(\tau_k)]\,\{[x(t_k) - x(t_{k-1})] + i[y(t_k) - y(t_{k-1})]\}
\end{aligned}$$

Para cada $1 \le k \le n$, el teorema del valor medio del cálculo diferencial garantiza que existen $t_k^*, t_{k-1}^{**} \in (t_{k-1}, t_k)$ tales que

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(t_k^*)\,(t_k - t_{k-1}) \qquad \text{y} \qquad y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(t_k^*)\,(t_k - t_{k-1})$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta z_k &= \sum_{k=1}^{n} f[z(\tau_k)]\,\left[x'(t_k^*)(t_k - t_{k-1}) + i\,y'(t_{k-1}^{**})(t_k - t_{k-1})\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} f[z(\tau_k)]\,\left[x'(t_k^*) + i\,y'(t_{k-1}^{**})\right]\,(t_k - t_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f[z(\tau_k)]\,\left[x'(t_k^*) + i\,y'(t_{k-1}^{**})\right]\,\Delta t_k
\end{aligned}$$

de donde

$$\int_C f(z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta z_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f[z(\tau_k)] \left[x'(t_k^*) + i\, y'(t_k^{**})\right] \Delta t_k$$

$$= \int_a^b f[z(t)] \left[x'(t) + i\, y'(t)\right] dt = \int_a^b f[z(t)]\, z'(t)\, dt$$

con lo cual tenemos el siguiente teorema.

Teorema I.4.2. *Sean A un conjunto abierto en $\mathbb{C}$, $f: A \to \mathbb{C}$ una función continua y $z: [a, b] \to A$ una curva suave. Entonces*

$$\int_C f(z)\, dz = \int_a^b f[z(t)]\, z'(t)\, dt$$

Nótese que $f[z(t)]\, z'(t)$ es una función compleja continua de variable real, cuya integral está dada por la *Definición I.4.1*.

Una forma de recordar el teorema anterior es sustituir en la integral a $f(z)$ por $f[z(t)]$ ya que se integra no sobre cualquier z sino unicamente sobre las de la curva $z(t)$, a dz por $z'(t)\, dt$ ya que la diferencial de una función de una sola variable independiente (aunque en este caso sea compleja) es la derivada de la función por la diferencial de la variable independiente y, finalmente, colocar los límites a y b en el símbolo de integración ya que ésta se realiza sobre la variable t .

Nótese también que tanto en la *Definición I.4.4* como en el *Teorema I.4.2* el valor de la integral depende de la curva. En este mismo subtema y en el *Subtema I.5* veremos la condición sobre f para que la integral sea *independiente* de la trayectoria.

Como raramente se utiliza la *Definición I.4.4* para evaluar integrales de línea, salvo en casos sencillos, sino más bien el *Teorema I.4.2*, es la razón por la cual muchos autores utilizan a éste como definición de integral de línea.

Así, para el *Ejemplo I.4.3* la curva C está definida por

$$z(t) = t + i\,t \qquad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 1$$

por lo que

$$\int_C z\,dz = \int_0^1 z(t)\,z'(t)\,dt = \int_0^1 (t+it)(1+i)\,dt$$
$$= \int_0^1 2it\,dt = i\int_0^1 2t\,dt = it^2\Big|_0^1 = i$$

cuyo resultado es el mismo que se obtuvo en su momento.

Ejemplo I.4.4. Calcular la integral de línea

$$\int_C \bar{z}\,dz$$

a lo largo de las siguientes trayectorias:

a) El segmento de recta que va del punto $z = 1$ al punto $z = i$.

b) La parábola $z(t) = (t-1)^2 + it$, para $0 \le t \le 1$.

c) El arco de circunferencia $z(t) = \cos t + i\,\mathrm{sen}\,t$, para $0 \le t \le \pi/2$.

Solución. Se aplicará primero el *Teorema I.4.2* y posteriormente la *Definición I.4.1*.

a) La curva C está definida como

$$z(t) = (1-t) + it \qquad \text{para} \quad 0 \le t \le 1$$

de donde

$$\overline{z(t)}\,z'(t)\,dt = [(1-t) - it](-1+i) = (-1+2t) + i$$

por lo que

$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_0^1 \overline{z(t)}\,z'(t)\,dt = \int_0^1 [(-1+2t) + i]\,dt$$
$$= \int_0^1 (-1+2t)\,dt + i\int_0^1 dt = \left(-t+t^2\right)\Big|_0^1 + i\,t\Big|_0^1 = i$$

b) Para este caso la parábola también va de $z = 1$ al punto $z = i$ y

$$\overline{z(t)}\,z'(t)\,dt = \left[(t-1)^2 - it\right]\left[2(t-1) + i\right]$$
$$= \left(2t^3 - 6t^2 + 7t - 2\right) + i\left(-t^2 + 1\right)$$

por lo que

$$\int_C \bar{z}\, dz = \int_0^1 \overline{z(t)}\, z'(t)\, dt = \int_0^1 \left(2t^3 - 6t^2 + 7t - 2\right) dt + i \int_0^1 \left(-t^2 + 1\right) dt$$

$$= \left(\frac{1}{2}t^4 - 2t^3 + \frac{7}{2}t^2 - 2t\right)\Big|_0^1 + i\left(-\frac{1}{3}t^3 + t\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}i$$

c) En este otro caso el arco de circunferencia tiene los mismos extremos con la misma orientación que las curvas de los incisos anteriores y

$$\overline{z(t)}\, z'(t) = (\cos t - i \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t + i \cos t)\, dt = i$$

por lo que

$$\int_C \bar{z}\, dz = \int_0^{\pi/2} \overline{z(t)}\, z'(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} i\, dt$$

$$= i \int_0^{\pi/2} dt = i\, t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} i$$

Nótese que en los tres incisos la función a integrar no cambia y los extremos inicial y final de las curvas son los mismos, pero los resultados de las integrales fueron diferentes, por lo que no hay otra razón sino que los valores obtenidos son dependientes de las trayectorias en cuestión. ■

Ejemplo I.4.5. Evaluar $\int_a^b z^2\, dz$ a lo largo de las mismas trayectorias del *Ejemplo I.4.4.*

Solución. Se procederá igual que en el *Ejemplo I.4.4.*

a) Primeramente,

$$[z(t)]^2\, z'(t) = [(1-t) + it]^2(-1+i) = \left[(1-2t) + i\left(2t - 2t^2\right)\right](-1+i)$$

$$= \left(-1 + 2t^2\right) + i\left(1 - 4t + 2t^2\right)$$

por lo que

$$\int_C z^2\, dz = \int_0^1 [z(t)]^2\, z'(t)\, dt = \int_0^1 \left(-1 + 2t^2\right) dt + i \int_0^1 \left(1 - 4t + 2t^2\right) dt$$

$$= \left(-t + \frac{2}{3}t^3\right)\Big|_0^1 + i\left(t - 2t^2 + \frac{2}{3}t^3\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$$

b) Nuevamente

$$\begin{aligned}[z(t)]^2\, z'(t) &= \left[(t-1)^2 + it\right]^2 \left[2(t-1) + i\right] \\ &= \left[(t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 4t + 1) + i\,(2t^3 - 4t^2 + 2t)\right]\left[(2t-2) + i\right] \\ &= (2t^5 - 10t^4 + 16t^3 - 14t^2 + 8t - 2) + i\,(5t^4 - 16t^3 + 17t^2 - 8t + 1)\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\int_0^1 z^2\, dz &= \int_0^1 (2t^5 - 10t^4 + 16t^3 - 14t^2 + 8t - 2)\, dt + i\int_0^1 (5t^4 - 16t^3 + 17t^2 - 8t + 1)\, dz \\ &= \left(\frac{1}{3}t^6 - 2t^5 + 4t^4 - \frac{14}{3}t^3 + 4t^2 - 2t\right)\Big|_0^1 + i\left(t^5 - 4t^4 + \frac{17}{3}t^3 - 4t^2 + t\right)\Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i\end{aligned}$$

c) En este caso

$$\begin{aligned}[z(t)]^2\, z'(t)\, dt &= (\cos t + i\,\text{sen}\, t)^2(-\,\text{sen}\, t + i\cos t) \\ &= \left[(\cos^2 t - \text{sen}^2 t) + 2i\,\text{sen}\, t\cos t\right](-\,\text{sen}\, t + i\cos t) \\ &= (-3\,\text{sen}\, t\cos^2 t + \text{sen}^3 t) + i\,(\cos^3 t - 3\,\text{sen}^2 t\cos t)\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\int_C z^2\, dz &= \int_0^{\pi/2} (-3\,\text{sen}\, t\cos^2 t + \text{sen}^3 t)\, dt + i\int_0^{\pi/2} (\cos^3 t - 3\,\text{sen}^2 t\cos t)\, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (\text{sen}\, t - 4\,\text{sen}\, t\cos^2 t)\, dt + i\int_0^{\pi/2} (\cos t - 4\,\text{sen}^2 t\cos t)\, dt \\ &= \left(-\cos t + \frac{4}{3}\cos^3 t\right)\Big|_0^{\pi/2} + i\left(\text{sen}\, t - \frac{4}{3}\text{sen}^3 t\right)\Big|_0^{\pi/2} \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i\end{aligned}$$

En este inciso, todo el trabajo de integración puede evitarse si acudimos a nuestros conocimientos de variable compleja y seguimos un procedimiento como en el *Ejemplo I.4.2*.

La trayectoria se puede escribir como $z(t) = e^{it}$ con lo cual

$$\int_C z^2\, dz = \int_0^{\pi/2} [z(t)]^2\, z'(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} e^{2it}(i\, e^{it})\, dt = \int_0^{\pi/2} (i\, e^{3it})\, dt$$

Como existe $F(t) = \frac{1}{3} e^{3it}$ tal que $F'(t) = i e^{3it}$ entonces

$$\int_C z^2 \, dz = \frac{1}{3} e^{3it} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} \left(e^{3\pi/2} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{3} (1 + i)$$

Aunque como en el *Ejemplo I.4.4*, la función no cambia y los extremos inicial y final de las curvas son los mismos, ahora los resultados de las integrales son iguales, lo cual no es una casualidad. Más adelante veremos la razón de esto. ■

Si C es una trayectoria cerrada simple, parametrizada de tal manera que su interior se conserva a la izquierda conforme se recorre la trayectoria, entonces decimos que C está *orientada positivamente*, en sentido contrario a las manecillas del reloj o sentido positivo. De otra manera, C está *orientada negativamente*, en sentido de las manecillas del reloj o en sentido negativo. Si C está orientada positivamente, entonces $-C$ está orientada negativamente.

Utilizamos el símbolo especial

$$\oint_C f(z) \, dz$$

para distinguir la integración de f alrededor de la curva cerrada C.

Ejemplo I.4.6. Sea C la circunferencia de radio R con centro en $z_0 \in \mathbb{C}$, recorrida en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Evaluar la integral

$$\oint_C (z - z_0)^n \, dz$$

para toda n entera.

Solución. La circunferencia se define por medio de

$$z(t) = z_0 + R e^{it}, \qquad \text{para } \; 0 \le t \le 2\pi$$

Aplicando el *Teorema I.4.2* tenemos

$$\begin{aligned}\oint_C (z-z_0)^n \, dz &= \int_0^{2\pi} \left[z(t)-z_0\right]^n z'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (R\,e^{it})^n (i\,R\,e^{it})\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} i\,R^{n+1}\, e^{i(n+1)t}\, dt\end{aligned}$$

Como existe $F(t) = \frac{R^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)t}$ tal que $F'(t) = i\,R^{n+1}\, e^{i(n+1)t}$, entonces

$$\begin{aligned}\oint_C (z-z_0)^n \, dz &= \frac{R^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)t} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{R^{n-1}}{n+1}\left[e^{2\pi i(n+1)} - 1\right] = 0\end{aligned}$$

ya que $e^{2\pi i(n+1)} = 1$ para todo entero n. Nótese que el resultado anterior sólo es válido para $n \neq -1$.

Para $n = -1$ aplicamos nuevamente el *Teorema I.4.2* y luego la *Definicón I.4.1*, obteniendo

$$\begin{aligned}\oint_C (z-z_0)^{-1} \, dz &= \oint_C \frac{1}{z-z_0}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R\,e^{it}} (i\,R\,e^{it})\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} i\, dt = i\int_0^{2\pi} dt = i\,t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\oint_C (z-z_0)^n \, dz = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq -1 \\ 2\pi i & si \quad n = -1 \end{cases}$$

En este mismo subtema resolveremos este ejemplo de otra manera. ■

La expresión

$$\int_C f(z)\, dz = \int_a^b f[z(t)]\, z'(t)\, dt$$

dada por el *Teorema I.4.2*, que se utiliza para calcular la integral de línea de una función compleja f de variable compleja z a lo largo de una curva C, nos recuerda a esta otra expresión:

$$\int_C \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}(t)]\cdot \boldsymbol{r}'(t)\, dt$$

la cual, a su vez, es la que se utiliza para calcular la integral de línea de un *campo vectorial* $\boldsymbol{F}$ en $\mathbb{R}^2$ a lo largo de una curva C definida por $\boldsymbol{r}(t) = [x(t), y(t)] = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$ para $a \le t \le b$. La analogía es extraordinaria, sin embargo, la relación exacta está dada por el siguiente teorema.

Teorema I.4.3. *Sean $A \subset \mathbb{C}$ abierto, $f: A \to \mathbb{C}$ una función continua y $z: [a,b] \to A$ una curva suave. Entonces*

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C u\, dx - v\, dy + i \int_C v\, dx + u\, dy$$

donde $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ y $z(t) = x(t) + i\, y(t)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} f[z(t)]\, z'(t) &= \{u[z(t)] + i\, v[z(t)]\}\,[x'(t) + i\, y'(t)] \\ &= \{u[z(t)]x'(t) - v[z(t)]y'(t)\} + i\,\{v[z(t)]x'(t) + u[z(t)]y'(t)\} \end{aligned}$$

y usando la *Definición I.4.1* y el *Teorema I.4.2* se obtiene

$$\begin{aligned} \int_C f(z)\, dz &= \int_a^b \{u[z(t)]x'(t) - v[z(t)]y'(t)\}\, dt + i \int_a^b \{v[z(t)]x'(t) + u[z(t)]y'(t)\}\, dt \\ &= \int_C u(x,y)\, dx - v(x,y)\, dy + i \int_C v(x,y)\, dx + u(x,y)\, dy \\ &= \int_C u\, dx - v\, dy + i \int_C v\, dx + u\, dy \end{aligned}$$

donde $dx = x'(t)\, dt$, $dy = y'(t)\, dt$, $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$. ■

El teorema anterior nos indica que una integral sobre una curva C en el plano complejo es igual a una suma de dos integrales de línea del tipo de las que se estudiaron en cursos previos de cálculo, sólo que la segunda integral va multiplicada por i. Es decir,

$$\operatorname{Re}\left[\int_C f(z)\, dz\right] = \int_C u\, dx - v\, dy$$

y

$$\operatorname{Im}\left[\int_C f(z)\, dz\right] = \int_C v\,dx - u\,dy$$

Una forma de recordar facilmente la fórmula dada por el *Teorema I.4.3* es escribir

$$\begin{aligned} f(z)\,dz &= (u + i\,v)(dx + i\,dy) \\ &= (u\,dx - v\,dy) + i(v\,dx + u\,dy) \end{aligned}$$

Ejemplo I.4.7. Calcular, mediante el *Teorema I.4.3*

$$\oint_C \frac{1}{z - 2i}\, dz$$

donde C es la circunferencia de radio uno con centro en $z_0 = 2i$ orientada positivamente.

Solución. La función del integrando $f(z) = 1/(z - 2i)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z - 2i} = \frac{1}{(x + iy) - 2i} = \frac{1}{x + i(y-2)} \\ &= \frac{x - i(y-2)}{x^2 + (y-2)^2} = \frac{x}{x^2 + (y-2)^2} - i\,\frac{y-2}{x^2 + (y-2)^2} \end{aligned}$$

por lo que

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2 + (y-2)^2} \quad \text{y} \quad v(x,y) = -\frac{y-2}{x^2 + (y-2)^2}$$

Aplicando el *Teorema I.4.3* tenemos

$$\oint_C \frac{1}{z - 2i}\, dz = \oint_C \frac{x\,dx + (y-2)\,dy}{x^2 + (y-2)^2} + i \oint_C \frac{-(y-2)\,dx + x\,dy}{x^2 + (y-2)^2}$$

donde las ecuaciones paramétricas de C son

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2 + \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Para la primera integral de la derecha tenemos

$$\oint_C \frac{x\,dx + (y-2)\,dy}{x^2 + (y-2)^2} = \int_0^{2\pi} 0\,dt = 0$$

y para la segunda

$$\oint_C \frac{-(y-2)\,dx + x\,dy}{x^2 + (y-2)^2} = \int_0^{2\pi} dt = t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

Por lo tanto,

$$\oint_C \frac{1}{(z-2i)}\,dz = 0 + 2\pi i = 2\pi i$$

Comparar este procedimiento con el del *Ejemplo I.4.6.* ■

Si continuamos trabajando un poco más la fórmula dada por el *Teorema I.4.3* tenemos que

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy\\ &= \int_C (u,-v)\cdot(dx,dy) + i\int_C (v,u)\cdot(dx,dy)\\ &= \int_C \boldsymbol{F}_1\cdot d\boldsymbol{r} + i\int_C \boldsymbol{F}_2\cdot d\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

donde

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'(t)\,dt = [x'(t), y'(t)]\,dt = [x'(t)\,dt, y'(t)\,dt] = (dx, dy)$$

y $\boldsymbol{F}_1$ y $\boldsymbol{F}_2$ son campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ definidos por

$$\boldsymbol{F}_1(x,y) = [u(x,y), -v(x,y)] \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{F}_2(x,y) = [v(x,y), u(x,y)]$$

A partir de la función de variable compleja $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, se puede construir el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x,y) = [u(x,y), v(x,y)] = u(x,y)\boldsymbol{i} + v(x,y)\boldsymbol{j}$ y por lo apuntado anteriormente

$$\int_C \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r} \neq \int_C f(z)\,dz$$

pero sí es cierto que

$$\int_C \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r} = \text{Re}\int_C \overline{f(z)}\, dz$$

Ejemplo I.4.8. Calcular el trabajo que se realiza el campo de fuerzas

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (1-y,\ x-1)$$

para mover una partícula a lo largo de la recta que va del punto $(1,0)$ hasta el punto $(0,1)$.

Solución. Con el campo vectorial $\boldsymbol{F}$ construimos la función de variable compleja

$$f(z) = (1-y) + i(x+1)$$

y calcularemos la integral

$$\int_C \overline{f(z)}\, dz$$

donde la recta se puede parametrizar como

$$C:\ z(t) = (1-t) + it, \qquad 0 \le t \le 1$$

Del *Teorema I.4.2*, y de la *Definición I.4.1*,

$$\begin{aligned}
\int_C \overline{f(z)}\, dz &= \int_C [(1-y) - i(x+1)]\, dz = \int_0^1 \{[1-y(t)] - i[x(t)+1]\}\, z'(t)\, dt \\
&= \int_0^1 [(1-t) - i(2-t)](-1+i)\, dt = \int_0^1 [1+i(3-2t)]\, dt \\
&= \int_0^1 dt + i\int_0^1 (3-2t)\, dt = t\Big|_0^1 + i\,(3t-t^2)\Big|_0^1 = 1 + 2i
\end{aligned}$$

por lo que el trabajo es igual a

$$W = \text{Re}\int_C \overline{f(z)}\, dz = 1$$

Nótese que $f(z) = iz + (1+i)$. ■

Definición I.4.5. *Dada la curva* $z:[a,b]\to\mathbb{C}$, *se define su* ***opuesta*** $-z:[a,b]\to\mathbb{C}$ *como* $(-z)(t) = z(a+b-t)$, *es decir,* $-z$ *recorre la misma curva que* z *pero en sentido contrario.*

Así, si una curva C se define por

$$z(t) = x(t) + i\,y(t) \qquad \text{para } a \le t \le b$$

entonces su opuesta $-C$ está dada por

$$(-z)(t) = x(a+b-t) + i\,y(a+b-t) \qquad \text{para } a \le t \le b$$

No es la única forma en la cual se puede definir la opuesta de una curva, también puede hacerse por medio de

$$-C:\ (-z)(t) = z(-t) = x(-t) + i\,y(-t) \qquad \text{para } -b \le t \le -a$$

En la siguiente definición vamos a establecer el concepto de descomposición de una curva en suma de curvas, concepto que es intuitivamente obvio.

Definición I.4.6. *Sean* $z_1: [a,b] \to \mathbb{C}$ *y* $z_2: [b,c] \to \mathbb{C}$ *curvas tales que* $z_1(b) = z_2(b)$. *Se define la* ***unión*** *o* ***suma*** $z_1 + z_2: [a,c] \to \mathbb{C}$ *como*

$$(z_1 + z_2)(t) = \begin{cases} z_1(t) & si\ \ t \in [a,b] \\ z_2(t) & si\ \ t \in [b,c] \end{cases}$$

El siguiente teorema establece las principales propiedades de la integral de línea, las cuales son como las establecidas para las integrales de línea de campos vectoriales.

Teorema I.4.4. *Sean* A *una región en* $\mathbb{C}$, $f, g: A \to \mathbb{C}$ *funciones continuas y* C_1, C_2 *curvas en* A *seccionalmente suaves, entonces*

i) $\displaystyle\int_C [f(z) + g(z)]\, dz = \int_C f(z)\, dz + \int_C g(z)\, dz$

ii) $\displaystyle\int_C [k f(z)]\, dz = k \int_C f(z)\, dz \qquad \forall\ k \in \mathbb{C}$

iii) $\displaystyle\int_{-C} f(z)\, dz = -\int_C f(z)\, dz$

iv) $\displaystyle\int_{C_1 + C_2} f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz$

Demostración.

ii) Escribiendo $k = a + bi$, $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ y $dz = dx + i\,dy$ se tiene

$$\begin{aligned} k f(z) &= (a + ib)[u(x,y) + i\,v(x,y)] \\ [k f(z)]\, dz &= [au - bv + i(av + bu)]\,(dx + i\,dy) \\ &= (au - bv)\, dx - (av + bu)\, dy + i\,[(av + bu)\, dx + (au - bv)\, dy] \end{aligned}$$

donde $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$. Aplicando la *Definición I.4.1*:

$$\int_C [k f(z)]\, dz = \int_C (au - bv)\, dx - (av + bu)\, dy + i \int_C (av + bu)\, dx + (au - bv)\, dy$$

Por otro lado, del *Teorema I.4.3*

$$\begin{aligned} k \int_\gamma f(z)\, dz &= (a + ib)\left[\int_C u\,dx - v\,dy + i \int_C v\,dx + u\,dy\right] \\ &= a \int_C u\,dx - v\,dy - b \int_C v\,dx + u\,dy + i\left[a \int_C v\,dx + u\,dy + b \int_C u\,dx - v\,dy\right] \\ &= \int_C (au - bv)\, dx - (av + bu)\, dy + i \int_C (av + bu)\, dx + (au - bv)\, dy \end{aligned}$$

Comparando los dos resultados tenemos lo que se quiere.

iii) Por el *Teorema I.4.2*,

$$\int_{-C} f(z)\, dz = \int_a^b f[z(a + b - t)]\,[-z'(a + b - t)]\, dt$$

y, efectuando el cambio de variable $s = a + b - t$, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-C} f(z)\, dz &= -\int_a^b f[z(s)]\, z'(s)\, s'(t)\, dt \\ &= -\int_a^b f[z(s)]\, z'(s)\, ds = -\int_C f(z)\, dz \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. ■

Si $f(z)$ es una función continua y C es una curva seccionalmente suave formada por la suma o unión de n curvas suaves, entonces

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1+C_2+\dots+C_n} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f[z_k(t)]\, z_k'(t)\,dt$$

Si f no es continua y $z:[a,b] \to \mathbb{C}$ es una curva suave, entonces se puede descomponer el intervalo $[a,b]$ en subintervalos tales que $f[z(t)]\,z'(t)$ sea continuo y luego sumar las integrales en cada subintervalo.

A menos que se especifique otra cosa, se integrará solamente a lo largo de curvas seccionalmente suaves, es decir, a lo largo de contornos.

Ejemplo I.4.9. La curva opuesta al arco parábola

$$C:\ z(t) = (t-1)^2 + i\,t, \quad \text{para} \quad 0 \le t \le 1$$

del *Ejemplo 1.4.4.(b)* es

$$-C:\ z(t) = t^2 + i(1-t), \quad \text{para} \quad 0 \le t \le 1$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\int_{-C} \bar{z}\,dz &= \int_0^1 \left[t^2 - i(1-t)\right](2t-i)\,dt = \int_0^1 (2t^3+t-1) + i\,(t^2-2t)\,dt \\
&= \int_0^1 (2t^3+t-1)\,dt + i\int_0^1 (t^2-2t)\,dt \\
&= \left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{2}t^2 - t\right)\Big|_0^1 + i\left(\frac{1}{3}t^3 - t^2\right)\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}i = -\int_C \bar{z}\,dz
\end{aligned}$$

Como la opuesta también se puede parametrizar de la forma

$$-C:\ z(t) = (t+1)^2 - i\,t, \quad \text{para} \quad -1 \le t \le 0$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int_{-C} \bar{z}\,dz &= \int_{-1}^0 \left[(t+1)^2 + i\,t\right]\left[2(t+1) - i\right]dt = \int_{-1}^0 (2t^3+6t^2+7t+2) + i(t^2-1)\,dt \\
&= \int_{-1}^0 (2t^3+6t^2+7t+2)\,dt + i\int_{-1}^0 (t^2-1)\,dt \\
&= \left(\frac{1}{2}t^4 + 2t^3 + \frac{7}{2}t^2 + 2t\right)\Big|_{-1}^0 + i\left(\frac{1}{3}t^3 - t\right)\Big|_{-1}^0 = -\frac{2}{3}i = -\int_C \bar{z}\,dz
\end{aligned}$$

La curva opuesta al segmento de recta

$$C: \ z(t) = (1-t) + it, \ \text{para} \ 0 \le t \le 1$$

del *Ejemplo I.4.5.(a)* es

$$-C: \ z(t) = t + i(1-t), \ \text{para} \ 0 \le t \le 1$$

por lo que

$$\begin{aligned} [z(t)]^2 z'(t) &= [t + i(1-t)]^2 (1-i) = \left[(2t-1) + i(2t-2t^2)\right](1-i) \\ &= \left(-2t^2 + 4t - 1\right) + i\left(1 - 2t^2\right) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_{-C} z^2 \, dz &= \int_0^1 \left(-2t^2 + 4t - 1\right) dt + i \int_0^1 \left(1 - 2t^2\right) dt \\ &= \left(-\frac{2}{3}t^3 + 2t^2 - t\right)\Big|_0^1 + i\left(t - \frac{2}{3}t^3\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i = -\int_C z^2 \, dz \end{aligned}$$

con lo que terminamos el ejemplo. ■

Ejemplo I.4.10. Calcular la integral

$$\int_C z^2 \, dz$$

donde C está formado por los segmentos de recta que van del punto $(1,0)$ al $(1,1)$ y de éste al $(0,1)$.

Solución. C es seccionalmente suave, pero $C = C_1 + C_2$, donde

$$C_1: \ z_1(t) = 1 + it, \quad 0 \le t \le 1$$

y

$$C_2: \ z_2(t) = (2-t) + i, \quad 1 \le t \le 2$$

son suaves, por lo que

$$\int_C z^2\,dz = \int_{C_1+C_2} z^2\,dz = \sum_{k=1}^{2}\int_{C_k} z^2\,dz = \int_{C_1} z^2\,dz + \int_{C_2} z^2\,dz$$

Ahora

$$\begin{aligned}\int_{C_1} z^2\,dz &= \int_0^1 \left[z_1(t)\right]^2 z_1'(t)\,dt = \int_0^1 i(1+it)^2\,dt\\ &= \int_0^1 \left[-2t + i(1-t^2)\right] dt = \int_0^1 -2t\,dt + i\int_0^1 (1-t^2)\,dt\\ &= -t^2\Big|_0^1 + i\left(t - \tfrac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^1 = -1 + \frac{2}{3}i\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\int_{C_2} z^2\,dz &= \int_1^2 \left[z_2(t)\right]^2 z_2'(t)\,dt = \int_1^2 -\left[(2-t)+i\right]^2 dt\\ &= \int_1^2 \left[(-3+4t-t^2) + i(2t-4)\right] dt\\ &= \int_1^2 (-3+4t-t^2)\,dt + i\int_1^2 (2t-4)\,dt\\ &= \left(-3t+2t^2-\tfrac{1}{3}t^3\right)\Big|_1^2 + i\left(t^2-4t\right)\Big|_1^2 = \frac{2}{3} - i\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_C z^2\,dz = \left(-1+\tfrac{2}{3}i\right) + \left(\tfrac{2}{3} - i\right) = -\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}i$$

Comparar este resultado con el obtenido en el *Ejemplo I.4.5. (a)*. ■

La relación de equivalencia que vamos a establecer a continuación nos permite introducir el concepto de camino orientado.

Definición I.4.7. *Sean* $z:[a,b]\to\mathbb{C}$ *y* $\tilde{z}:[\tilde{a},\tilde{b}]\to\mathbb{C}$ *dos curvas seccionalmente suaves. Se dice que son* ***equivalentes****, lo cual se denota como* $z\sim\tilde{z}$*, o que* $\tilde{z}$ *es una* ***reparametrización*** *de* z*, si existe una función* $\varphi:[a,b]\to[\tilde{a},\tilde{b}]$ *de clase* C^1*, con* $\varphi'(t)>0$*,* $\varphi(a)=\tilde{a}$ *y* $\varphi(b)=\tilde{b}$*, tal que* $z(t)=(\tilde{z}\circ\varphi)(t)$.

Es sencillo comprobar que la relación $\sim$ introducida en esta definición satisface las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva por lo que es, efectivamente, una relación de equivalencia.

Las condiciones $\varphi'(t) > 0$ (es decir, φ es creciente), $\varphi(a) = \tilde{a}$ y $\varphi(b) = \tilde{b}$ significan que $\tilde{z}$ recorre la misma curva, el mismo número de veces y en el mismo sentido en que lo hace z. Este es el significado preciso de la proposición de que z y $\tilde{z}$ representan a la misma curva orientada. También, los puntos de $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ en los cuales $\tilde{z}'$ no existe, corresponden bajo φ a los puntos de $[a, b]$ en los cuales z' no existe. (Esto se debe a que φ tiene una inversa de clase C^1 que es estrictamente creciente.)

El siguiente teorema establece que el valor de una integral de línea es invariante bajo el cambio en la representación paramétrica del contorno, si la reparametrización satisface las condiciones de la *Definición I.4.7.*

Teorema I.4.5. *Sean $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua A abierto y C la curva imagen de $z: [a, b] \to \mathbb{C}$. Si $\tilde{z}$ es una reparametrización de z, entonces*

$$\int_{\tilde{C}} f(z)\, dz = \int_C f(z)\, dz$$

Demostración. Del *Teorema I.4.2,*

$$\int_C f(z)\, dz = \int_a^b f[z(t)]\, z'(t)\, dt$$

pero por la regla de la cadena

$$z'(t) = (\tilde{z} \circ \varphi)'(t) = \tilde{z}'[\varphi(t)]\, \varphi'(t)$$

de donde

$$\int_C f(z)\, dz = \int_a^b f\{\tilde{z}[\varphi(t)]\}\, \tilde{z}'[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt$$

Sea $s = \varphi(t)$ una nueva variable tal que $s = \tilde{a}$ cuando $t = a$ y $s = \tilde{b}$ cuando $t = b$. Entonces

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f[\tilde{z}(s)]\, \tilde{z}'(s)\, ds = \int_{\tilde{C}} f(z)\, dz \qquad \blacksquare$$

Ejemplo I.4.11. Sea

$$C: \quad z(t) = e^{it}, \qquad \text{para} \quad 0 \le t \le \pi/2$$

la curva del *Ejemplo I.4.5.(c)*. Una reparametrización de z es

$$\tilde{C}: \quad \tilde{z}(t) = e^{2it}, \qquad \text{para} \quad 0 \le t \le \pi/4$$

ya que existe una función $\varphi(t) = t/2$ con $\varphi'(t) = 1/2 > 0$ continua, $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(\pi/2) = \pi/4$ tal que

$$z(t) = (\tilde{z} \circ \varphi)(t) = \tilde{z}[\varphi(t)] = e^{2it}\Big|_{t = \varphi(t)} = e^{2i\varphi(t)} = e^{it}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{C}} z^2\, dz &= \int_0^{\pi/4} [\tilde{z}(t)]^2\, \tilde{z}'(t)\, dt = \int_0^{\pi/4} e^{4it}(2i\, e^{2it})\, dt \\
&= \int_0^{\pi/4} (2i\, e^{6it})\, dt = \frac{1}{3} e^{6it}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{3}\left(e^{3\pi i/2} - 1\right) \\
&= -\frac{1}{3}(1 + i) = \int_C z^2\, dz
\end{aligned}$$

el cual es un resultado que ya esperábamos. ■

El siguiente teorema es de gran utilidad para estimar el tamaño de las integrales.

Teorema I.4.6. *Sean $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en A abierto y $z: [a, b] \to A$ una curva seccionalmente suave.*

a)
$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \le \int_C |f[z(t)]|\, |z'(t)|\, dt$$

b) *Si $|f[z(t)]| \le M$ para toda $t \in [a, b]$, entonces*

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \le M\, l(C)$$

donde $l(C)$ es la longitud de la curva C.

Demostración.

a) Supondremos que C es suave. Si C es seccionalmente suave, integramos sobre C sumando las integrales sobre cada pedazo suave de C. Del *Teorema I.4.2*

$$\int_C f(z)\, dz = \int_a^b f[z(t)]\, z'(t)\, dt$$

así que lo que se quiere demostrar es

$$\left|\int_a^b f[z(t)]\, z'(t)\, dt\right| \le \int_a^b |f[z(t)]|\,|z'(t)|\, dt = \int_a^b |f[z(t)]\, z'(t)|\, dt$$

Si f fuera una función con valores reales sabríamos, del cálculo, que este resultado es verdadero, pero aquí f tiene valores complejos, así que debemos probar esta última desigualdad.

Si $\int_C f(z)\, dz = 0$ entonces la desigualdad es obviamente cierta. Si la integral no es cero, escribimos su valor en forma polar, digamos

$$\int_a^b f[z(t)]\, z'(t)\, dt = r_0 e^{i\theta_0}$$

de donde

$$r_0 = e^{-i\theta_0} \int_a^b f[z(t)]\, z'(t)\, dt = \int_a^b e^{-i\theta_0} f[z(t)]\, z'(t)\, dt$$

Tomando la parte real en ambos lados de esta ecuación se obtiene

$$r_0 = \operatorname{Re}(r_0) = \operatorname{Re}\left\{\int_a^b e^{-i\theta_0} f[z(t)]\, z'(t)\, dt\right\} = \int_a^b \operatorname{Re}\left\{e^{-i\theta_0} f[z(t)]\, z'(t)\right\} dt$$

Por otro lado, de las propiedades del módulo tenemos que

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-i\theta_0} f[z(t)]\, z'(t)\right\} \le \left|e^{-i\theta_0} f[z(t)]\, z'(t)\right| = |f[z(t)]\, z'(t)|$$

ya que $|e^{-i\theta_0}| = 1$. Por lo tanto,

$$r_0 = \int_a^b \operatorname{Re}\left\{e^{-i\theta_0} f[z(t)]\, z'(t)\right\} dt \le \int_a^b |f[z(t)]\, z'(t)|\, dt$$

Ya que

$$r_0 = \left| \int_a^b f[z(t)]\, z'(t)\, dt \right|$$

entonces

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| = \left| \int_a^b f[z(t)]\, z'(t)\, dt \right|$$
$$\leq \int_a^b |f[z(t)]\, z'(t)|\, dt = \int_a^b |f[z(t)]|\, |z'(t)|\, dt$$

como queríamos demostrar.

b) Este inciso se sigue del inciso (a) y de la hipótesis:

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq \int_C |f[z(t)]|\, |z'(t)|\, dt$$
$$\leq \int_a^b M\, |z'(t)|\, dt = M \int_a^b |z'(t)| = M\, l(C)$$

con lo que se completa la demostración. ■

Ejemplo I.4.12. Comprobar el *Teorema I.4.6.(a)* para la función y curva del *Ejemplo I.4.5.(c)*.

Solución. Del *Ejemplo I.4.5*:

$$f(z) = z^2$$

y

$$C: \ z(t) = e^{it}, \ \ 0 \leq t \leq 2\pi$$

Por un lado, del mismo *Ejemplo I.4.5*,

$$\oint_C f(z)\, dz = \oint_C z^2\, dz = -\tfrac{1}{3}(1 + i)$$

por lo que

$$\left| \oint_C f(z)\, dz \right| = \tfrac{1}{3}|1 + i| = \tfrac{\sqrt{2}}{3}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\int_a^b |f[z(t)]|\,|z'(t)|\,dz &= \int_0^{2\pi} |[z(t)]^2|\,|z'(t)|\,dz = \int_0^{2\pi} |e^{2it}|\,|i\,e^{it}|\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| = \frac{\sqrt{2}}{3} \le 2\pi = \int_C |f[z(t)]|\,|z'(t)|\,dt$$

que es lo que queriamos mostrar. ■

Ejemplo I.4.13. Demostrar que

$$\left|\int_C \left(x^2 + i\,y^2\right) dz\right| \le \pi$$

donde C es la semicircunferencia derecha de radio 1 con centro en el origen.

Solución. La curva se puede parametrizar como

$$C:\quad z(t) = \cos t + i\,\mathrm{sen}\,t, \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$$

cuya longitud es π, es decir, $l(C) = \pi$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}f(z) &= |x^2 + i\,y^2| = |\cos^2 t + i\,\mathrm{sen}^2 t| \\ &= \sqrt{\cos^4 t + \mathrm{sen}^4 t} \le 1 = M\end{aligned}$$

Del *Teorema I.4.6. (b)*:

$$\left|\int_C \left(x^2 + i\,y^2\right) dz\right| \le \pi$$

■

Se exhibirá ahora un importante método para evaluar integrales, análogo al Teorema Fundamental del Cálculo.

Teorema I.4.7. *Sean $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en una región A y $z: [a, b] \to A$ una curva seccionalmente suave. Si existe una función $F: A \to \mathbb{C}$ analítica tal que $F'(z) = f(z)$,*[3] *entonces*

$$\int_C f(z)\, dz = F[z(b)] - F[z(a)]$$

por lo que la integral es ***independiente de la trayectoria****. En particular, si la trayectoria es cerrada,*

$$\oint_C f(z)\, dz = 0$$

Demostración. Sea C un curva suave. Por el *Teorema I.4.2* y de la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \int_C f(z)\, dz &= \int_a^b f[z(t)]\, z'(t)\, dt = \int_a^b F'[z(t)]\, z'(t)\, dt = \int_a^b (F \circ z)'(t)\, dt \\ &= (F \circ z)(t) \Big|_a^b = (F \circ z)(b) - (F \circ z)(a) = F[z(b)] - F[z(a)] \end{aligned}$$

Como $z(a) = z_0$ y $z(b) = z_1$, el valor de esta integral de línea es $F(z_1) - F(z_0)$, el cual es ciertamente independiente de la trayectoria, en tanto esté contenida en A y una z_0 con z_1. Es decir,

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz = F(z) \Big|_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0)$$

Este resultado es válido también, claro está, cuando C es una curva arbitraria, no necesariamente suave, contenida en A. Concretamente, si C consta de un número finito de curvas suaves C_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, cada C_k yendo de z_{k-1} a z_k, entonces

$$\begin{aligned} \int_C f(z)\, dz &= \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} F(z) \Big|_{z_{k-1}}^{z_k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[F(z_k) - F(z_{k-1}) \right] = F(z_n) - F(z_0) \end{aligned}$$

[3] En el *Subtema I.5* veremos la condición para que esta función exista.

por lo que las integrales de f a lo largo de contornos contenidos en A que unen dos puntos fijos z_0 y z_1 tienen todas el mismo valor.

Ahora, sean z_0 y z_1 dos puntos cualesquiera de una trayectoria cerrada contenida en A y tomemos dos caminos C_1 y C_2 sobre C, ambos con punto inicial z_0 y punto final z_2, tales que $C = C_1 - C_2$. Como ya probamos que la integral es independiente de la trayectoria, entonces

$$\int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{C_2} f(z)\, dz$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(z)\, dz - \int_{C_2} f(z)\, dz &= 0 \\ \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{-C_2} f(z)\, dz &= 0 \\ \int_{C_1 - C_2} f(z)\, dz &= 0 \end{aligned}$$

Esto es, la integral de $f(z)$ a lo largo del contorno cerrado $C = C_1 - C_2$ vale cero. ■

Ejemplo I.4.14. Evaluar

$$\int_C z^3\, dz$$

donde C es el arco de elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ en el primer cuadrante que une $z = 1$ con $z = i/2$.

Solución. Como existe la función analítica $F(z) = z^4/4$ tal que $f(z) = F'(z)$, es decir,

$$z^3 = \frac{d}{dz}\left(\frac{z^4}{4}\right)$$

entonces, gracias al *Teorema I.4.7* no es necesario evaluar la integral mediante una parametrización de la elipse. Así, dicho teorema afirma que

$$\int_C z^3\, dz = \frac{z^4}{4}\Bigg|_1^{i/2} = \frac{1}{4}\left(\frac{i}{2}\right)^4 - \frac{1}{4} = \frac{1}{64} - \frac{1}{4} = -\frac{15}{64}$$

Obsérvese que se pudo haber indicado cualquier otra curva que uniera 1 con $i/2$ y el resultado hubiera sido exactamente el mismo, ya que no se usó para nada la curva dada sino sólo sus extremos. ■

Ejemplo I.4.15. Sea C la circunferencia de radio R con centro en $z_0 \in \mathbb{C}$. Evaluar la integral

$$\oint_C (z - z_0)^n\, dz$$

para toda n entera.

Solución. Primero, sea $n \geq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^n \\ &= \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{n+1}(z - z_0)^{n+1}\right] = \frac{d}{dz}F(z) = F'(z) \end{aligned}$$

que es la derivada de una función analítica, así por el *Teorema I.4.7,*

$$\oint_C (z - z_0)^n\, dz = 0$$

Segundo, sea $n \leq -2$. Entonces nuevamente

$$(z - z_0)^n = \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{n+1}(z - z_0)^{n+1}\right]$$

la cual es analítica en $A = \mathbb{C} - \{z_0\}$. Ya que C está en A, el *Teorema I.4.7* nuevamente muestra que

$$\oint_C (z - z_0)^n\, dz = 0$$

Finalmente, sea $n = -1$. En este caso

$$\frac{1}{z - z_0} = \frac{d}{dz}\left[\ln(z - z_0)\right]$$

pero ahora no podemos aplicar el *Teorema I.4.7* porque $\ln(z - z_0)$ no es analítica sobre toda la trayectoria C alrededor de z_0; sólo es analítica en

$$\mathbb{C} - \{\, x + iy \mid y = \mathrm{Im}(z_0),\ x \le \mathrm{Re}(z_0) \,\}$$

Para calcular la integral procederemos directamente como lo indica el *Teorema I.4.2*. Esto ya se hizo en el *Ejemplo I.4.6* en donde se obtuvo

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0}\, dz = 2\pi i$$

En resumen entonces,

$$\oint_C (z - z_0)^n\, dz = \begin{cases} 0 & si \quad n \ne -1 \\ 2\pi i & si \quad n = -1 \end{cases}$$

Nota. Este resultado es importante y por su utilidad será utilizado posteriormente. ■

Ejemplo I.4.16. Calcular

$$\oint_C \frac{2z}{z^2 + 4}\, dz$$

donde C es la circunferencia $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 2i| = 1 \}$ orientada positivamente.

Solución. La circunferencia se puede parametrizar en la forma

$$z(t) = \cos t + i(2 + \operatorname{sen} t), \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

o también como

$$z(t) = 2i + e^{it}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

De cualquiera de las dos formas, la aplicación inmediata del *Teorema I.4.2* resulta complicada, por lo que para encontrar $F(z)$ analítica en C tal que $F'(z) = 2z/(z^2 + 4)$, descompondremos el integrando en fracciones parciales.

$$\frac{2z}{z^2+4} = \frac{2z}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{z+2i} + \frac{1}{z-2i}$$

así

$$\oint_C \frac{2z}{z^2+4}\,dz = \oint_C \left(\frac{1}{z+2i} + \frac{1}{z-2i}\right) dz$$
$$= \oint_C \frac{1}{z+2i}\,dz + \oint_C \frac{1}{z-2i}\,dz$$

Para la primera integral del lado derecho tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{z+2i}$$
$$= \frac{d}{dz}[\ln(z+2i)] = \frac{d}{dz}F(z) = F'(z)$$

que es la derivada de una función analítica en

$$A = \mathbb{C} - \{\, x+iy \mid y=-2,\ x \le 0 \,\}$$

Como C está en A, entonces por el *Teorema I.4.7*

$$\oint_C \frac{1}{z+2i}\,dz = 0$$

Para la segunda integral,

$$\frac{1}{z-2i} = \frac{d}{dz}[\ln(z-2i)]$$

pero ahora no podemos aplicar el *Teorema I.4.7* porque $\ln(z-2i)$ no es analítica sobre toda la circunferencia C alrededor de $z_0 = 2i$; sólo es analítica en

$$\mathbb{C} - \{\, x+iy \mid y=2,\ x \le 0 \,\}$$

Para calcular la integral hay que utilizar el *Teorema I.4.2*, por lo que del *Ejemplo I.4.15*

$$\oint_C \frac{1}{z - 2i}\, dz = 2\pi i$$

Por lo tanto,

$$\oint_C \frac{2z}{z^2 + 4}\, dz = 0 + 2\pi i = 2\pi i$$

En el *Subtema I.5* resolveremos este mismo ejemplo de otra forma. ■

Ejemplo I.4.17. Probar que no existe una función analítica f definida en $\mathbb{C} - \{0\}$ tal que $f'(z) = 1/z$.

Solución. Si tal f existiera, entonces, usando el *Teorema I.4.7*, se puede concluir que

$$\oint_C \frac{1}{z}\, dz = 0$$

donde C es la circunferencia de radio uno con centro en el origen. Pero por el *Ejemplo I.4.15*,

$$\oint_C \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$$

así, f no existe.

Nota. Aunque $d(\ln z)/dz = 1/z$, esto no contradice el ejemplo porque $\ln z$ no es analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$, es analítica sólo en $\mathbb{C} - \{x + iy \mid y = 0, x \leq 0\}$. ■

El teorema fundamental del cálculo tiene muchas aplicaciones y ramificaciones, una de las cuales es la siguiente demostración de una propiedad de las regiones, la cual ya demostramos en el *Teorema I.3.5*.

Corolario I.4.1. *Sean A una región en $\mathbb{C}$ y $f: A \to \mathbb{C}$ analítica. Si $f'(z) = 0$ para toda $z \in A$, entonces f es constante en A.*

Demostración. Sea C una trayectoria suave en A que une un punto fijo z_0 con otro punto cualquiera z. Por el *Teorema I.4.7*

$$f(z) - f(z_0) = \int_C f(\xi)\, d\xi = 0$$

En consecuencia

$$f(z) = f(z_0)$$

por lo que el valor de f en cualquier punto z de A es el mismo que su valor en z_0, es decir, f es constante en A. ■

Ejercicios propuestos.

1. Calcular de dos maneras distintas la integral
$$\int_0^1 (3t + i)\, dt$$

2. Calcular las siguientes integrales
   a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{senh}(it)\, dt$
   b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} t\, e^{-it}\, dt$

3. Si m y n son enteros, calcular la integral
$$\int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int}\, dt$$

4. Sea
$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos t\right) dt \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$
Obtener $P_0(x)$, $P_1(x)$ y $P_2(x)$. Estos se conocen como los tres primeros *polinomios de Legendre*.

5. Calcular la longitud de la curva
$$C : \; z(t) = \cos^3 t + i \operatorname{sen}^3 t \qquad \text{para } 0 \le t \le 2\pi$$

6. Demostrar que la longitud $l(C)$ de una curva no cambia si se reparametriza.

7. Mediante suma de Riemann calcular la integral

$$\int_C (z+i)\, dz$$

donde C es el segmento de recta que va del origen a $1+i$.

8. Mediante suma de Riemann calcular la integral

$$\int_C (iz)\, dz$$

donde C es el segmento de recta que va del origen a $1+i$.

9. Mediante suma de Riemann calcular la integral

$$\int_C \bar{z}\, dz$$

donde C es el segmento de recta que va del origen a $1+i$.

10. Calcular la integral de $f(z)=z$ a lo largo de las trayectorias definidas en el *Ejemplo I.4.4*, mediante el *Teorema I.4.2* y comprobar el resultado con el *Teorema I.4.7.*

11. Calcular el valor de

$$\int_C \left[(y-x) - 3ix^2\right] dz$$

donde C

a) es el segmento de recta desde $z=0$ a $z=1+i$;

b) consiste en dos segmentos de recta, uno desde $z=0$ a $z=i$ y el otro desde $z=i$ a $z=1+i$.

12. Calcular el valor numérico de

$$\oint_C |z|^2\, dz$$

donde C es el contorno cuadrado con vértices en los puntos 0, 1, $1+i$ e i, orientado en sentido positivo.

13. Calcular

$$\oint_C f(z)\, dz$$

donde $f(z)=\pi\, e^{\pi \bar{z}}$ y C es el contorno del *Ejercicio 12.*

14. Calcular el valor numérico de

$$\oint_C (\bar{z})^2\, dz$$

alrededor de las circunferencias

i) $|z|=1$,

ii) $|z-1|=1$
orientadas en sentido antihorario.

15. Calcular el valor numérico de

$$\oint_C \frac{1}{z}\,dz$$

alrededor de

i) la circunferencia $|z-1|=2$,

ii) el cuadrado con vértices en $1 \pm i$ y $-1 \pm i$,

orientadas en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

16. Calcular , donde C es el arco de la curva $y = x^3$ desde $z = -1 - i$ hasta $z = 1 + i$ y

$$f(z) = \begin{cases} 1 & si \quad y < 0 \\ 4y & si \quad y > 0 \end{cases}$$

17. Calcular la integral

$$\oint_C z^m (\bar{z})^n\,dz$$

donde m y n son enteros y C es la circunferencia $|z| = 1$ orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

18. Calcular el valor de la integral

$$\int_C \bar{z}\,dz$$

usando para C la representación

$$z(t) = \sqrt{4-y^2} + i\,y^2 \qquad (-2 \le t \le 2)$$

19. Calcular, de tres maneras distintas, el valor numérico de

$$\int_C z^2\,dz$$

a lo largo de la cicloide

$$\begin{cases} x = \theta - \operatorname{sen}\theta \\ y = 1 - \cos\theta \end{cases}$$

desde el punto donde $\theta = 0$ hasta el punto donde $\theta = 2\pi$.

20. Sea C el arco de la circunferencia $|z| = 2$ que va de $z = 2$ a $z = 2i$ en el primer cuadrante. Sin calcular la integral, probar que

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^2-1} \right| \le \frac{\pi}{3}$$

21. Sea C el segmento que va de $z = i$ a $z = 1$. Demostrar que

$$\left| \int_C \frac{1}{z^4}\, dz \right| \leq 4\sqrt{2}$$

sin calcular la integral.

I.5 Teorema de la integral de Cauchy.

El teorema de la integral de Cauchy (o brevemente *integral de Cauchy*) establece que dentro de ciertas regiones la integral de una función analítica sobre una trayectoria cerrada simple es cero. Una extensión de este teorema nos permitirá reemplazar integrales sobre ciertas trayectorias complicadas co integrales sobre trayectorias que sean fáciles de evaluar. También demostraremos que el teorema de Cauchy implica que una función analítica tiene una antiderivada. Para empezar, necesitamos recordar algunos conceptos.

Consideraremos solamente curvas seccionalmente suaves a menos que se especifique lo contrario.

Una *curva cerrada simple* es una curva continua que solo se autointersecta en sus puntos finales, es decir, si la cuva está definida por $z:[a,b]\to\mathbb{C}$, entonces la única intersección es $z(a)=z(b)$.

En esta sección hablaremos del "interior" de una curva cerrada simple C de una manera intuitiva. Se demuestra en topología (*Teorema de Jordan*) que una curva cerrada simple divide al plano complejo $\mathbb{C}$ en dos componentes, a la componente acotada se le llama el *interior de* C, denotada como $\operatorname{int} C$, y a la no acotada se le llama el *exterior de* C, denotada como $\operatorname{ext} C$.

La forma mas sencilla de demostrar el teorema de Cauchy es por medio del *Teorema de Green*. Este teorema establece que si A es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ que contiene a una curva C (cerrada simpe seccionalmente suave recorrida en sentido positivo) y a su interior, y si se tienen definidas en A dos funciones reales $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ de clase C^1, resulta que

$$\oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_{\operatorname{int} C\,\cup\, C} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dx\,dy$$

en donde vemos que si

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

es una diferencial exacta, entonces

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$$

y por lo tanto, la integral vale cero.

En el *Teorema I.4.7* vimos que si una función continua f admite una primitiva en una región A, entonces la integral de f a lo largo de cualquier trayectoria cerrada seccionalmente suave C contenida por completo en A tiene valor cero. A continuación presentamos un teorema que da otras condiciones sobre f que garantizan que el valor de la integral de f a lo largo de una trayectoria cerrada simple es cero.

Teorema I.5.1. *Sean C una trayectoria cerrada simple (seccionalmente suave), A una región en $\mathbb{C}$ que contiene a C y a su interior y $f: A \to \mathbb{C}$ una función analítica, entonces*

$$\oint_C f(z)\, dz = 0$$

De manera sencilla, este teorema dice que si f es analítica en C y en su interior, entonces la integral de f a lo largo de C es igual a cero.

Demostración. Escribiendo $f = u + iv$ se tiene que

$$\oint_C f(z)\, dz = \oint_C (u + iv)\,(dx + idy) = \oint_C u\,dx - v\,dy + i \oint_C v\,dx + u\,dy$$

Como se verá después en el *Subtema I.6* si f es analítica, entonces f' es continua (por lo que u y v son de clase C^1) y por lo tanto, se puede aplicar el teorema de Green tanto a la parte real como a la parte imaginaria de la expresión anterior. Así

$$\oint_C f(z)\, dz = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dy + i \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy$$

donde $R = \operatorname{int} C \cup C$. Si utilizamos ahora las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(lo cual equivale a utilizar el hecho de que $u\,dx - v\,dy$ y $v\,dx + u\,dy$ son diferenciales exactas), se obtiene que la integral vale cero. ■

La anterior demostración fue obtenida por el matemático Francés Louis-Augustin Cauchy en 1825. En 1883 el matemático Francés Édouard Goursat (1858-1936) dió una demostración en la que la condición de continuidad sobre f' se puede omitir, por lo que el teorema también se le conoce como *teorema de Cauchy-Goursat.*

Nótese que una vez establecido que el valor de la integral es cero, la orientación de la trayectoria C es irrelevante. Esto es, la conclusión del teorema de Cauchy es válida también si C se toma en sentido negativo, ya que

$$\oint_C f(z)\,dz = -\oint_{-C} f(z)\,dz = 0$$

Si la función f no es analítica en $\operatorname{int} C$, la integral de f a lo largo de C no es cero necesariamente. Por ejemplo, para la circunferencia C de radio uno con centro en el origen y $f(z) = 1/z$ se tiene que f es analítica en todo punto, excepto en $z = 0 \in \operatorname{int} C$ y la integral de f a lo largo de C no es cero. En efecto, como se vió en el *Ejemplo I.4.15*

$$\oint_C \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

Por otro lado, el teorema de Cauchy proporciona condiciones suficientes para que la integral de línea alrededor de una curva cerrada simple sea cero. Estas condiciones no son necesarias; podemos encontrar una función que no satisfaga estas hipótesis pero que, sin embargo, la integral de línea sea cero. Así $f(z) = 1/z^2$, es analítica en todo punto excepto en $z = 0$, por lo que no es analítica en todo el interior de C, pero del mismo *Ejemplo I.4.15*

$$\oint_C \frac{1}{z^2}\,dz = 0$$

El valor cero *no* resulta del teorema de Cauchy sino del hecho de que f tiene una antiderivada $-1/z$ en $\mathbb{C} - \{0\}$.

La demostración de Goursat establece primero el resultado para una función analítica en una trayectoria triangular C positivamente orientada y en su interior, es decir que la integral de la función alrededor del triángulo es cero. Posteriormente, si C es una trayectoria poligonal con orientación positiva, entonces se añaden líneas hasta que el interior del polígono quede subdividido en un número finito de triángulos (positivamente orientados). La integral alrededor de cada triángulo es cero y la suma de todas estas integrales es igual a la integral alrededor del polígono C. Por lo tanto, el teorema también es válido para trayectorias poligonales, donde suponemos que la función es analítica sobre y dentro del polígono. La demostración para una curva cualquiera cerrada simple se realiza aproximando dicha curva con una trayectoria poligonal "suficientemente cerrada". Nosotros omitiremos el desarrollo de todo esto.

Ejemplo I.5.1. Recordamos que las funciones z^n (donde n es un entero positivo), e^z y $\operatorname{sen} z$ son todas enteras (analíticas en $\mathbb{C}$). Por lo tanto, el teorema de Cauchy implica que, para toda trayectoria C cerrada simple seccionalmente suave

$$\oint_C z^n \, dz = 0, \qquad \oint_C e^z \, dz = 0 \qquad \text{y} \qquad \oint_C \operatorname{sen} z \, dz = 0$$

ya que las funciones en cuestión son analíticas en C y en su interior. ■

Ejemplo I.5.2. Sea $f(z) = 1/(z - z_0)^n$, donde n es un entero cualquiera y z_0 es un número complejo fijo, analítica en $A = \mathbb{C} - \{z_0\}$. Si C es una trayectoria cerrada simple seccionalmente suave tal que $z_0 \in \operatorname{ext} C$, entonces f es analítica en C y en su interior. Por lo tanto, el teorema de Cauchy implica que

$$\oint_C \frac{1}{(z - z_0)^n} \, dz = 0 \qquad n \in \mathbb{I}$$

Compárese este ejemplo con el *Ejemplo I.4.15*. ■

En la evaluación de cualquier integral de línea alrededor de una trayectoria cerrada, es importante determinar dónde la función del integrando es analítica. Aún en el caso en el que el integrando no sea analítico en ciertos puntos, sólo debemos preocuparnos por los puntos sobre y en el interior de C para evaluar la integral.

Ejemplo I.5.3. Evaluar

$$\oint_C \tan z \, dz$$

donde C es la circunferencia $|z| = 1$.

Solución. La circunferencia es de radio uno con centro en el origen.

La función $f(z) = \tan z = \operatorname{sen} z / \cos z$ es analítica en $\mathbb{C}$, excepto en los puntos donde $\cos z = 0$, es decir, es analítica en

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} \mid \cos z = 0\} \\ &= \mathbb{C} - \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi,\ n \in \mathbb{I}\right\} \end{aligned}$$

Como

$$\left|\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right| \geq 1 \qquad \forall\ n \in \mathbb{I}$$

ningún punto donde f no es analítica pertenece a C o a su interior, es decir, f es analítica en C (suave cerrada simple) y su interior. Entonces por el teorema de Cauchy

$$\oint_C \tan z \, dz = 0 \qquad \blacksquare$$

Si en éste último ejemplo uno o más de los puntos $z = (n + 1/2)$ con $n \in \mathbb{I}$ están en el interior de C, no podemos utilizar el teorema de Cauchy, por lo que tendríamos que evaluar la integral de alguna otra manera. Por ejemplo, si C fuera la circunferencia $|z| = 2$, los puntos $-\pi/2, \pi/2 \in \operatorname{int} C$ donde f no es analítica. En este caso todavía no tenemos un método sencillo para evaluar la integral. Cuando desarrollemos el *teorema del residuo* en el *Subtema I.8* esta intergal será fácil de evaluar.

Ejemplo I.5.4. Evaluar

$$\oint_C \frac{1}{z^2 - 2z + 2} \, dz$$

si C es la circunferencia de radio uno con centro en el origen.

Solución. El conjunto donde el integrando es analítico son los complejos tales que

$$z^2 - 2z + 2 \neq 0$$

es decir, en

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 - 2z + 2 = 0\} \\ &= \mathbb{C} - \{1 + i,\ 1 - i\} \end{aligned}$$

Ahora bien, como la circunferencia tiene por ecuación $|z| = 1$ y

$$|1+i| = \sqrt{2} > 1 \qquad \text{y} \qquad |1-i| = \sqrt{2} > 1$$

entonces el integrando es analítico en C y su interior ya que $1+i$ y $1-i$, los únicos puntos donde no es analítico, caen en $\operatorname{ext} C$. Por lo tanto, del teorema de Cauchy

$$\oint_C \frac{1}{z^2-2z+2}\, dz = 0 \qquad \blacksquare$$

Ejemplo I.5.5. Calcular

$$\oint_C \frac{2z}{z^2+4}\, dz$$

donde C es la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-2i| = 1\}$ orientada positivamente.

Solución. La circunfernecia es de radio uno con centro en $z_0 = 2i$.

El conjunto donde la función del integrando es analítico es

$$A = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^2+4 = 0\} = \mathbb{C} - \{\pm 2i\}$$

Como

$$|2i-2i| = 0 < 1 \qquad \text{y} \qquad |-2i-2i| = |-4i| = 4 > 1$$

entonces $2i \in \operatorname{int} C$, por lo que el integrando no es analítico en el interior de C, así que no podemos utilizar el teorema de Cauchy.

Descomponiendo el integrando en fracciones parciales,

$$\frac{2z}{z^2+4} = \frac{2z}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{z+2i} + \frac{1}{z-2i}$$

por lo que de la propiedad de la integral de línea dada por el *Teorema I.4.4.(i)*,

$$\oint_C \frac{2z}{z^2+4}\, dz = \oint_C \frac{1}{z+2i}\, dz + \oint_C \frac{1}{z-2i}\, dz$$

Para la primera integral del lado derecho tenemos que $f(z)=1/(z+2i)$ es analítica en $A=\mathbb{C}-\{-2i\}$, en particular, es analítica en C y su interior, entonces por el teorema de Cauchy

$$\oint_C \frac{1}{z+2i}\,dz = 0$$

Para la segunda integral, $f(z)=1/(z-2i)$ no es analítica en $z=2i$, por lo que no podemos hacer uso del teorema de Cauchy ya que $2i \in \operatorname{int} C$, así que para resolverla se utiliza el *Teorema I.4.2*, lo cual ya se hizo en el *Ejemplo I.4.15* obteniéndose

$$\oint_C \frac{1}{z-2i}\,dz = 2\pi i$$

Por lo tanto,

$$\oint_C \frac{2z}{z^2+4}\,dz = 0 + 2\pi i = 2\pi i$$

Comparar con el procedimiento seguido en el *Ejemplo I.4.16*. ■

Ejemplo I.5.6. Evaluar

$$\oint_C \frac{4}{z^3-2z^2+2z}\,dz$$

donde C es la circunferencia de radio uno con centro en el origen orientada en sentido positivo.

Solución. El conjunto donde el integrando es analítico es $A=\mathbb{C}-\{0, 1+i, 1-i\}$ y como $0 \in \operatorname{int} C$ no podemos utilizar el teorema de Cauchy. Descomponiendo el integrando en fracciones parciales

$$\begin{aligned}\frac{4}{z^3-2z^2+2z} &= \frac{4}{z\,[z-(1+i)]\,[z-(1-i)]} \\ &= \frac{2}{z} - \frac{1+i}{z-(1+i)} - \frac{1-i}{z-(1-i)}\end{aligned}$$

por lo que de las propiedades de la integral de línea dadas por el *Teorema I.4.4. (i), (ii)*

$$\oint_C \frac{4}{z^3 - 2z^2 + 2z}\, dz = 2 \oint_C \frac{1}{z}\, dz - (1+i) \oint_C \frac{1}{z-(1+i)}\, dz - (1-i) \oint_C \frac{1}{z-(1-i)}\, dz$$

Para la primera integral, la función $f(z) = 1/z$ no es analítica en $z = 0$, el cual pertenece al interior de C, por lo que no podemos emplear el teorema de Cauchy. Del *Ejemplo I.4.15* tenemos

$$\oint_C \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$$

Para la segunda integral, $f(z) = 1/[z - (1+i)]$ es analítica en $A = \mathbb{C} - \{1+i\}$. Como C y su interior están en A, entonces por el teorema de Cauchy

$$\oint_C \frac{1}{z - (1+i)}\, dz = 0$$

De la misma forma, para la tercera integral,

$$\oint_C \frac{1}{z - (1-i)}\, dz = 0$$

Por lo tanto,

$$\oint_C \frac{4}{z^3 - 2z^2 + 2z}\, dz = 4\pi i + 0 + 0 = 4\pi i$$

En el *Subtema I.6* resolveremos este mismo ejemplo de otra manera. ■

Teorema de la deformación.

Ahora queremos poder reemplazar integrales sobre ciertas trayectorias complicadas con integrales que sean fáciles de evaluar. Si C es una trayectoria cerrada simple que puede "deformarse continuamente" en otra trayectoria cerrada simple $\tilde{C}$ sin que las curvas intermedias pasen por puntos donde f no sea analítica, entonces el valor de la integral de línea de f sobre C es el mismo que el valor de la integral de f sobre $\tilde{C}$. Para ser precisos, establecemos el siguiente teorema.

Teorema I.5.2. *Sea f analítica en una región $A \subset \mathbb{C}$ que contiene una curva C cerrada simple (seccionalmente suave) positivamente orientada, la cual puede ser deformada continuamente en A a otra curva $\tilde{C}$ cerrada simple (seccionalmente suave) positivamente orientada, entonces*

$$\oint_C f(z)\, dz = \oint_{\tilde{C}} f(z)\, dz$$

En topología, esta deformación se expresa diciendo que la curva C es *homotópica* a $\tilde{C}$ en A o que C y $\tilde{C}$ son homotópicas en A. Una definición precisa de homotopía elimina la suposición de que las curvas sean simples.

El teorema de deformación se ilustra en la *Figura I.5.1.* Nótese que f no necesita ser analítica en el interior de C, por lo que el teorema de Cauchy *no* implica que las anteriores integrales valen cero.

Demostración. Cortemos dos arcos pequeños, uno en C y otro en $\tilde{C}$, y formemos las segmentos de recta paralelos L y L^* que conecten a C y $\tilde{C}$, como se muestra en la *Figura I.5.2*, tales curvas pueden dibujarse en practicamente todos los ejemplos. Entonces la parte de la curva C sin el arco que se cortó (a la cual llamaremos C^*), luego la curva L, a continuación $-\tilde{C}^*$ (la parte de $\tilde{C}$ que queda después del arco cortado) y después L^*, en este orden, forman una trayectoria K cerrada simple seccionalmente suave positivamente orientada. En el interior de este contorno f es analítica, por lo que del teorema de Cauchy

$$\oint_K f(z)\, dz = 0$$

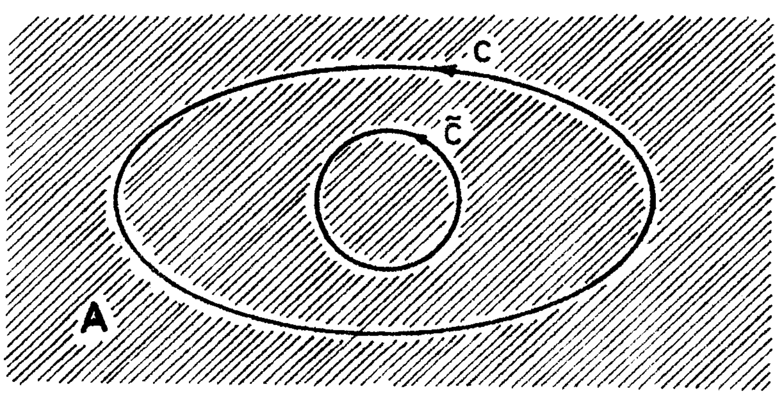

Figura I.5.1. *El teorema de la deformación.*

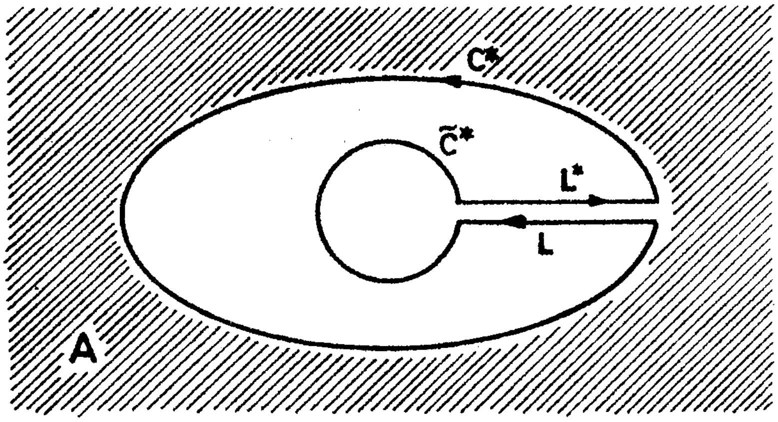

Figura I.5.2. *Curva usada para demostrar el teorema de la deformación.*

y como $K = C^* + L - \tilde{C}^* + L^*$, entonces

$$\oint_{C^* + L - \tilde{C}^* + L^*} f(z)\, dz = 0$$

$$\int_{C^*} f(z)\, dz + \int_L f(z)\, dz + \int_{-\tilde{C}^*} f(z)\, dz + \int_{L^*} f(z)\, dz = 0$$

en donde hemos utilizado una de las propiedades de la integral de línea (*Teorema I.4.4*). Conforme se eligen L y L^* suficientemente cerca, se fusionan en un sólo segmento de recta, por lo que en el límite $L^* = -L$, $C^* = C$ y $\tilde{C}^* = \tilde{C}$, con lo cual la última integral queda como

$$\oint_C f(z)\, dz + \int_L f(z)\, dz + \oint_{-\tilde{C}} f(z)\, dz + \int_{-L} f(z)\, dz = 0$$

$$\oint_C f(z)\, dz + \int_L f(z)\, dz - \oint_{\tilde{C}} f(z)\, dz - \int_L f(z)\, dz = 0$$

después de utilizar otra propiedad de la integral de línea. Como la segunda y cuarta integrales se cancelan obtenemos

$$\oint_C f(z)\, dz - \oint_{\tilde{C}} f(z)\, dz = 0$$

de donde se desprende lo deseado. ■

Este resultado tiene el nombre de teorema de la deformación porque efectivamente estamos deformando C en $\tilde{C}$. Imaginemos una banda elástica extendida alrededor de la figura de C y después deformada de manera continua hasta $\tilde{C}$.

Estableceremos a continuación como un ejemplo, un resultado importante como consecuencia del teorema de deformación. Este resultado aparece muchas veces en el desarrollo de la teoría y es una herramienta útil para el cálculo de integrales sobre trayectorias cerradas.

Ejemplo I.5.7. Sea z_0 un número complejo fijo. Si C es una trayectoria cerrada simple (seccionalmente suave) con orientación positiva tal que $z_0 \in \operatorname{int} C$, calcular

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}\, dz$$

para $n \geq 1$.

Solución. Como $f(z) = 1/(z-z_0)^n$ es analítica en $A = \mathbb{C} - \{z_0\}$, la trayectoria C puede deformarse continuamente en A a la circunferencia $\tilde{C}$ (positivamente orientada) de radio $R > 0$ con centro en z_0 de tal manera que $\tilde{C} \in \operatorname{int} C$. Por lo tanto, el teorema de la deformación implica que la integral de f a lo largo de C tiene el mismo valor que la integral de f a lo largo de $\tilde{C}$, así

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}\, dz = \oint_{\tilde{C}} \frac{1}{(z-z_0)^n}\, dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{si} \quad n = 1 \\ 0 & \text{si} \quad n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

en donde hemos utilizado el resultado del *Ejemplo I.4.15*. ■

Ejemplo I.5.8. Calcular

$$\oint_C \frac{2z}{z^2+9}\, dz$$

donde C es la elipse $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3i| + |z + 3i| = 10\}$ orientada positivamente.

Solución. La elipse tiene centro en el origen, focos en $\pm 3i$, y semieje mayor igual a cinco.

Utilizando descomposición en fracciones parciales tenemos que

$$\oint_C \frac{2z}{z^2+9}\,dz = \oint_C \frac{1}{z+3i}\,dz + \oint_C \frac{1}{z-3i}\,dz$$

Como

$$|\mp 3i - 3i| + |\mp 3i + 3i| = |\mp 6i| = 6 < 10$$

entonces $z_0 = \mp 3i \in \operatorname{int} C$, por lo que no se puede emplear el teorema de Cauchy. Procediendo como en el *Ejemplo I.5.7*, C se puede deformar continuamente en A a la circunferencia $\tilde{C}$ (positivamente orientada) de radio $0 < R < d$ con centro en $z_0 = \mp 3i$, donde d es la menor distancia entre z_0 y la elipse. Del teorema de la deformación

$$\oint_C \frac{1}{z \pm 3i}\,dz = \oint_{\tilde{C}} \frac{1}{z \pm 3i}\,dz = 2\pi i$$

en donde se utilizó el resultado del *Ejemplo I.4.15*.

Por lo tanto

$$\oint_C \frac{2z}{z^2+9}\,dz = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i$$ ■

Ejemplo I.5.9. Calcular

$$\oint_C \frac{2z}{z^2+4}\,dz$$

donde C es la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} \,||z-i| = 2\}$ orientada positivamente.

Solución. La circunferencia es de radio 2 con centro en i.

Utilizando nuevamente descomposición en fracciones parciales como en el *Ejemplo I.5.5* tenemos que

$$\oint_C \frac{2z}{z^2+4}\,dz = \oint_C \frac{1}{z+2i}\,dz + \oint_C \frac{1}{z-2i}\,dz$$

Como $z_0 = -2i \in \operatorname{ext} C$, la función $f_1(z) = 1/(z+2i)$ es analítica sobre C (suave cerrada simple) y su interior, entonces por el teorema de Cauchy

$$\oint_C \frac{1}{z+2i}\,dz = 0$$

Como $f_2(z) = 1/(z-2i)$ no es analítica en el interior de C, entonces no podemos utilizar el teorema de Cauchy. Pero como C se puede deformar continuamente en A a la circunferencia $\tilde{C}$ (positivamente orientada) de radio $0 < R < 1$ con centro en $z_0 = 2i$, al aplicar el teorema de la deformación y el resultado del *Ejemplo I.4.15* obtenemos

$$\oint_C \frac{1}{z-2i}\,dz = \oint_{\tilde{C}} \frac{1}{z-2i}\,dz = 2\pi i$$

Por lo tanto

$$\oint_C \frac{2z}{z^2+4}\,dz = 0 + 2\pi i = 2\pi i$$ ■

En muchos casos, la suposición de simplicidad de la trayectoria puede evitarse viendo la trayectoria como si estuviera formada por dos o más tramos simples, tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo I.5.10. Calcular

$$\oint_C \frac{2}{z^2-1}\,dz$$

donde C es la curva "en forma de ocho" $|z-1||z+1| = 1$ (*lemniscata*) que se muestra en la *Figura I.5.3*.

Solución. Como la curva no es simple, no se puede aplicar el teorema de Cauchy, por lo que veremos a la curva C como si estuviera formada por dos partes que sí sean simples. Sea $C = C_1 + C_2$, donde C_1 es el lóbulo de la izquierda y C_2 es el lóbulo de la derecha, tal como se muestra en la *Figura I.5.4*, entonces del *Teorema I.4.4*

$$\oint_C \frac{2}{z^2-1}\,dz = \oint_{C_1} \frac{2}{z^2-1}\,dz + \oint_{C_2} \frac{2}{z^2+1}\,dz$$

y dado que el teorema de Cauchy, así como el teorema de la deformación se aplican a curvas cerradas positivamente orientadas,

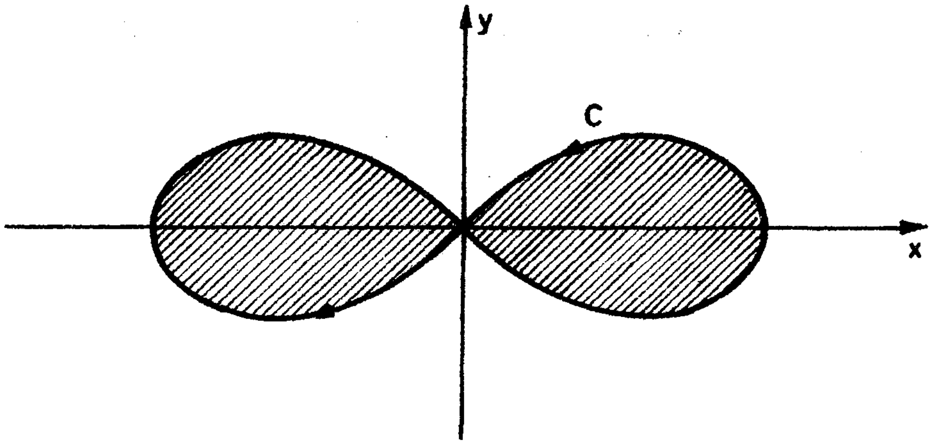

Figura I.5.3. *La curva C del Ejemplo I.5.10.*

$$\oint_C \frac{2}{z^2 - 1}\,dz = -\oint_{-C_1} \frac{2}{z^2 - 1}\,dz + \oint_{C_2} \frac{2}{z^2 - 1}\,dz$$

La función $f(z) = 2/(z^2 - 1)$ no es analítica en $z_0 = \pm 1$ y como

$$|\pm 1 - 1||\pm 1 + 1| = 0 < 1$$

entonces $-1 \in \mathbf{int}(-C_1)$ y $1 \in \mathbf{int}\,C_2$, por lo que no podemos utilizar el teorema de Cauchy en ninguna de las dos integrales.

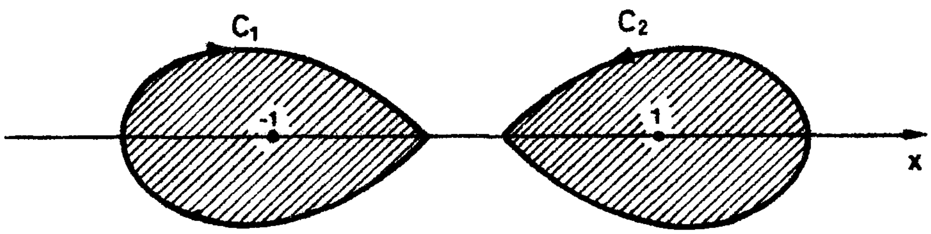

Figura I.5.4. *Descomposición de la curva C en dos curvas simples.*

Descomponiendo la primera integral de la derecha en fracciones parciales tenemos

$$\oint_{-C_1} \frac{2}{z^2 - 1}\, dz = \oint_{-C_1} \frac{1}{z - 1}\, dz - \oint_{-C_1} \frac{1}{z + 1}\, dz$$

Ahora, $f_1(z) = 1/(z-1)$ es analítica en $-C_1$ y su interior, por lo que del teorema de Cauchy

$$\oint_{-C_1} \frac{1}{z - 1}\, dz = 0$$

y por el teorema de la deformación, junto con lo obtenido en el *Ejemplo I.4.15*

$$\oint_{-C_1} \frac{1}{z + 1}\, dz = \oint_{\tilde{C}} \frac{1}{z + 1}\, dz = 2\pi i$$

donde $\tilde{C}$ es una circunferencia (positivamente orientada) de radio $R > 0$ con centro en $z_0 = 1$, tal que $\tilde{C} \in \mathrm{int}(-C_1)$.

Por lo tanto,

$$\oint_{-C_1} \frac{2}{z^2 - 1}\, dz = 0 + 2\pi i = 2\pi i$$

Análogamente, para la segunda integral del lado derecho,

$$\oint_{C_2} \frac{2}{z^2 - 1}\, dz = 2\pi i + 0 = 2\pi i$$

Finalmente tenemos que

$$\oint_{C} \frac{2}{z^2 - 1}\, dz = -2\pi i + 2\pi i = 0$$ ■

Regiones simplemente conexas.

Definición I.5.1. *Una región A en* $\mathbb{C}$ *se dice que es* ***simplemente conexa*** *si toda trayectoria* *cerrada simple* C *en* A *se puede deformar en* A *a una curva constante* $z(t) = z_0 \in A$ *(es decir, a un punto).*

En este caso se dice que C es *homotópica* a un punto o es *constreñible* a un punto.

Intuitivamente A es simplemente conexa si A no tiene "hoyos"; esto se debe a que una trayectoria que rodea un hoyo, no puede reducirse a un punto en A sin salirse de A.

En consecuencia, un disco es simplemente conexo. La región anular entre dos circunferencias no es simplemente conexa. La región en la cual una función tiene una singularidad no es simplemente conexa; como el dominio de la función $f(z) = 1/z$, que es el plano sin el origen, ya que una curva cerrada simple alrededor del origen encierra un punto (el origen) que no está en el conjunto.

Una región que no es simplemente conexa se dice que es *multiplemente conexa*, es decir, una región multiplemente conexa tiene hoyos. A una región que tiene un hoyo se le llama *doblemente conexa*, a una región con dos hoyos *triplemente conexa* y así sucesivamente.

Ejemplo I.5.11. Demostrar que la región anular

$$A = \{ z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3 \}$$

no es simplemente conexa.

Solución. Iniciaremos suponiendo que A es simplemente conexo. La función $1/z$ es analítica en A, entonces por el teorema de Cauchy

$$\oint_C \frac{1}{z}\, dz = 0$$

para toda curva cerrada en A.

Pero si hacemos $z(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, entonces obtendríamos

$$\oint_C \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2e^{it}} \cdot 2ie^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi i$$

lo cual contradice la suposición inicial.

Por lo tanto, A no puede ser simplemente conexo. ■

Aplicando el teorema de Jordan, podemos probar que una región es simplemente conexa si y sólo si, para toda curva cerrada simple C en A, el interior de C también está en A. Esta conclusión es, intuitivamente, bastante obvia. Podemos también aplicar el teorema para probar que el interior de una curva cerrada simple es simplemente conexo.

Por lo tanto, podemos reescribir el teorema de Cauchy en términos de regiones simplemente conexas como sigue.

Teorema I.5.3. *Sea f analítica en una región simplemente conexa $A \subset \mathbb{C}$ y C una trayectoria cerrada simple seccionalmente suave en A, entonces*

$$\oint_C f(z)\, dz = 0$$

En esta forma no se pide que A contenga al interior de C pero se exige que A sea simplemente conexa.

Ejemplo I.5.12.

a) Para el *Ejemplo I.5.1*, las funciones z^n, e^z y $\operatorname{sen} z$ son analíticas en todo el plano complejo $\mathbb{C}$ (región simplemente conexa), entonces para toda trayectoria cerrada simple (seccionalmente suave) en $\mathbb{C}$ el teorema de Cauchy nos dice que

$$\oint_C z^n\, dz = 0, \qquad \oint_C e^z\, dz = 0 \qquad \text{y} \qquad \oint_C \operatorname{sen} z\, dz = 0$$

b) La función $f(z) = 1/(z - z_0)^n$ del *Ejemplo I.5.2* es analítica en $\mathbb{C} - \{z_0\}$, por lo tanto, si C es una trayectoria cerrada simple seccionalmente suave tal que $z_0 \in \operatorname{ext} C$, entonces existe una región simplemente conexa $A \subset \mathbb{C} - \{z_0\}$ donde f es analítica. Así, el teorema de Cauchy implica que

$$\oint_C \frac{1}{(z - z_0)^n}\, dz = 0 \qquad \forall\ n \in \mathbb{I}$$ ■

El teorema de la deformación es una extensión del teorema de Cauchy a regiones doblemente conexas en el siguiente sentido. Queremos evaluar la integral

$$\oint_C f(z)\, dz$$

donde f es analítica en alguna región A excepto en z_0 y C es una curva cerrada simple (seccionalmente suave) positivamente orientada tal que $z_0 \in \operatorname{int} C$. Encerremos a z_0 en una curva cerrada simple (seccionalmente suave) positivamente orientada $\tilde{C}$ tal que $\tilde{C} \in \operatorname{int} C$, como en la *Figura I.5.1* (con lo cual se tiene la región doblemente conexa) y formemos la curva cerrada simple (seccionalmente suave) positivamente orientada K la cual *no encierra a* z_0 como en la *Figura I.5.2*. Como f es analítica en el interior de K, por el teorema de Cauchy

$$\oint_K f(z)\, dz = 0$$

de donde

$$\oint_C f(z)\, dz = \oint_{\tilde{C}} f(z)\, dz$$

tal como se hizo en la demostración del teorema de la deformación.

Podemos extender el teorema de Cauchy a regiones multiplemente conexas con más de un "hoyo". La demostración requiere la realización de varios cortes y es similar ala demostración del teorema de la deformación.

Teorema I.5.4. ***Teorema de Cauchy para regiones multiplemente conexas.***[1]
Sean $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$ trayectorias cerradas simples (seccionalmente suaves) positivamente orientadas, tales que $C_k \subset C$ para $k = 1, 2, \ldots, n$ y $\operatorname{int} C_j \cap \operatorname{int} C_k = \varnothing$ si $j \neq k$. Si f es analitica en cada trayectoria y en cada punto interior a C pero exterior a todas las C_k, entonces

$$\oint_C f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\, dz$$

[1] También llamado *teorema de la deformación generalizado*.

Demostración. Dibujemos las curvas $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_n$ que unen C con $C_1, C_2, \ldots, C_n$, respectivamente, como se muestra en la *Figura I.5.6.(i)*. Sea K la curva dibujada en la *Figura I.5.6.(ii)*. El interior de K es una región donde f es analítica, así que por el teorema de Cauchy

$$\oint_K f(z)\, dz = 0$$

Pero K consiste de $C, -C_1, -C_2, \ldots, -C_n$, y cada $\tilde{C}_k$, con $k = 1, 2, \ldots, n$, es recorrida dos veces en direcciones opuestas, por lo que las contribuciones de estas últimas porciones se cancelan. Por lo tanto

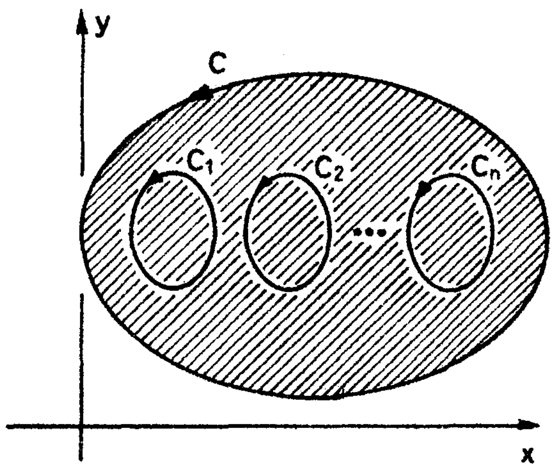

Figura I.5.5. *El teorema de Cauchy para regiones multiplemente conexas.*

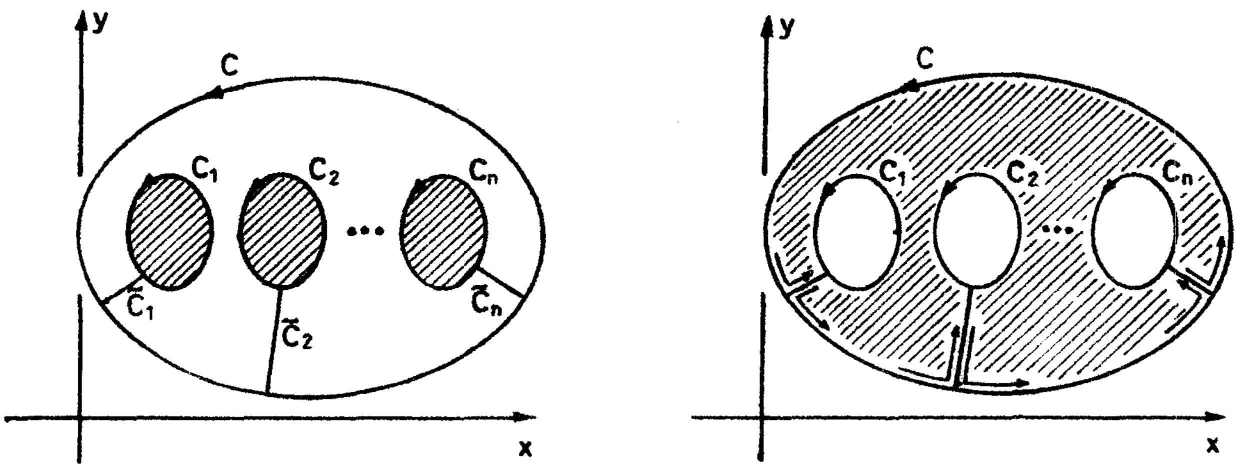

Figura I.5.6. *Trayectoria usada para la demostración del* Teorema I.5.4.

$$\oint_C f(z)\,dz + \oint_{-C_1} f(z)\,dz + \oint_{-C_2} f(z)\,dz + \dots + \oint_{-C_n} f(z)\,dz = 0$$

$$\oint_C f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz = 0$$

de donde se desprende lo que se pedía. ■

Ejemplo I.5.13. Evaluar

$$\oint_C \frac{2i}{z^2+1}\,dz$$

donde C es la circunferencia $|z| = 2$.

Solución. En este caso el denominador del integrando se factoriza en la forma $z^2 + 1 = (z+i)(z-i)$. Consecuentemente, el integrando $f(z) = 2i/(z^2+1)$ no es analítico en $z = \pm i \in \operatorname{int} C$. Ahora rodeamos los puntos $z = i$ y $z = -i$ con las trayectorias circulares $C_1 : |z-i| = 1/2$ y $C_2 : |z+i| = 1/2$ respectivamente, completamente contenidas dentro de C. Del *Teorema I.5.4* podemos escribir entonces

$$\oint_C \frac{2i}{z^2+1}\,dz = \oint_{C_1} \frac{2i}{z^2+1}\,dz + \oint_{C_2} \frac{2i}{z^2+1}\,dz$$

Para la integral sobre C_1 utilizamos descomposición en fracciones parciales, obteniendo

$$\oint_{C_1} \frac{2i}{z^2+1}\,dz = \oint_{C_1} \frac{1}{z-i}\,dz - \oint_{C_1} \frac{1}{z+i}\,dz$$

Del *Ejemplo I.4.15*, la primera integral de la derecha es igual a $2\pi i$ y del teorema de Cauchy la segunda es igual a cero, por lo tanto,

$$\oint_{C_1} \frac{2i}{z^2+1}\,dz = 2\pi i + 0 + 2\pi i$$

Análogamente, para la integral sobre C_2

$$\oint_{C_2} \frac{2i}{z^2 + 1}\, dz = 2\pi i$$

Finalmente,

$$\oint_{C_1} \frac{2i}{z^2 + 1}\, dz = 2\pi i - 2\pi i = 0 \qquad \blacksquare$$

Independencia de la trayectoria y antiderivadas.

Los teoremas en esta sección muestran que, en una región simplemente conexa la integral de una función analítica a lo largo de cualquier trayectoria que une dos puntos en la región, es la misma. Como

Teorema I.5.5 *Sea A una región simplemente conexa en $\mathbb{C}$ y $f: A \to \mathbb{C}$ una función analítica. Si C_1 y C_2 son curvas seccionalmente suaves en A que unen los mismos extremos, entonces*

$$\int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{C_2} f(z)\, dz$$

Demostración. Sea $C = C_2 - C_1$ la cual resulta ser una curva cerrada no necesariamente simple. Entonces por el teorema de Cauchy

$$\oint_C f(z)\, dz = 0$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \oint_{C_2 - C_1} f(z)\, dz &= 0 \\ \int_{C_2} f(z)\, dz + \int_{C_1} f(z)\, dz &= 0 \\ \int_{C_2} f(z)\, dz - \int_{C_1} f(z)\, dz &= 0 \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\int_{C_2} f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz$$ ■

El teorema fundamental del cálculo (*Teorema I.4.7*) muestra que la conclusión del teorema de Cauchy está íntimamente ligada a la existencia de una antiderivada de f, tal como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema I.5.6. *Si A es una región simplemente conexa y $f: A \to \mathbb{C}$ analítica, entonces existe una función $F: A \to \mathbb{C}$ analítica, única salvo una constante, tal que $F'(z) = f(z)$ para toda $z \in A$.*

La función F se llama la *antiderivada* o *primitiva* de f en A.

Demostración. La unicidad se sigue directamente: Si $F_1, F_2: A \to \mathbb{C}$ satisfacen $F_1' = F_2' = f$, entonces del *Teorema I.3.5*, aplicado a la función $g(z) = F_1(z) - F_2(z)$ se tiene que $F_1(z) = F_2(z) + k$, donde k es una constante.

Ahora se define

$$F(z) = \int_{z_1}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

donde z_1 es un punto fijo en A y dicha integral significa integrar f a lo largo de cualquier curva en A que una z_1 con z, esto se puede hacer debido al *Teorema I.5.5*.

Se tiene para $z, z_0 \in A$

$$\begin{aligned}
\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) &= \frac{1}{z - z_0}\left[\int_{z_1}^{z} f(z)\, dz - \int_{z_1}^{z_0} f(z)\, dz\right] - f(z_0) \\
&= \frac{1}{z - z_0}\left[\int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz + \int_{z_1}^{z} f(z)\, dz\right] - f(z_0) \\
&= \frac{1}{z - z_0}\left[\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz - (z - z_0) f(z_0)\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{z - z_0} \left[\int_{z_0}^{z} f(w)\, dw - \int_{z_0}^{z} f(z_0)\, dw \right]$$

$$= \frac{1}{z - z_0} \left\{ \int_{z_0}^{z} [f(w) - f(z_0)]\, dw \right\}$$

Ya que f es continua, dada $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $|w - z_0| < \delta$ implica que $|f(w) - f(z_0)| < \epsilon$. Por lo tanto, si $|z - z_0| < \delta$ es suficientemente pequeña, el segmento de recta que une z_0 con z se encuentra en A, por lo que integrando a lo largo de él se obtiene

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| = \frac{1}{|z - z_0|} \left| \int_{z_0}^{z} [f(w) - f(z_0)]\, dw \right|$$

$$\leq \frac{1}{|z - z_0|} \cdot \epsilon |z - z_0| = \epsilon$$

por el *Teorema I.4.4*. Por lo tanto

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = f(z_0)$$

y así F es analítica con $F'(z_0) = f(z_0)$. ■

Obsérvese que si A no es simplemente conexo, el *Teorema I.5.6* no es cierto. Por ejemplo, si $A = \mathbb{C} - \{0\}$ y $f(z) = 1/z$, no existe F con $F' = f$ en A (ver el *Ejemplo I.4.4*). Sin embargo, en toda región simplemente conexa que no contenga al cero se puede encontrar F.

De la demostración anterior a

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

se le denomina la *integral indefinida* de f y a

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz = F(z_1) - F(z_0) = F(z) \Big|_{z_0}^{z_1}$$

la *integral definida* de f, donde F es una antiderivada de f.

Ejemplo I.5.14. Las funciones del *Ejemplo I.5.1*

$$f_1(z) = z^n, \qquad f_2(z) = e^z \qquad \text{y} \qquad f_3(z) = \operatorname{sen} z$$

donde $n \in \mathbb{N}$, son analíticas en $\mathbb{C}$ simplemente conexo con antiderivadas

$$F_1(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}, \qquad F_2(z) = e^z \qquad \text{y} \qquad F_3(z) = -\cos z$$

respectivamente. Por lo tanto, para toda trayectoria seccionalmente suave C que una los puntos z_1 y z_2

$$\int_C z^n \, dz = \int_{z_1}^{z_2} z^n \, dz = \frac{1}{n+1} z^{n+1} \bigg|_{z_1}^{z_2} = \frac{1}{n+1}\left(z_2^n - z_1^n\right)$$

$$\int_C e^z \, dz = \int_{z_1}^{z_2} e^z \, dz = e^z \bigg|_{z_1}^{z_2} = e^{z_2} - e^{z_1}$$

$$\int_C \operatorname{sen} z \, dz = \int_{z_1}^{z_2} \operatorname{sen} z \, dz = -\cos z \bigg|_{z_1}^{z_2} = \cos z_1 - \cos z_2$$

con lo cual termina el ejemplo. ■

Ejemplo I.5.15. Calcular

$$\int_C \frac{1}{2\sqrt{z}} \, dz$$

donde $\sqrt{z}$ es la rama principal de la función raíz cuadrada y C es el segmento de recta que une 4 con $8 + 6i$.

Solución. Sabemos que si $F(z) = \sqrt{z}$, entonces $F'(z) = 1/2\sqrt{z}$, donde se utilizó la rama principal de la función raíz cuadrada tanto para F como para F'. Notamos que C está contenido en la región simplemente conexa $D_4(6 + 3i)$, el cual es el disco abierto de radio 4 con centro en el punto medio del segmento C. Ya que $f(z) = 1/2\sqrt{z}$ es analítica en

$D_4(4+3i)$

$$\int_C \frac{1}{2\sqrt{z}}\, dz = \int_4^{8+6i} \frac{1}{2\sqrt{z}}\, dz = \sqrt{z}\,\Big|_4^{8+6i}$$

$$= \sqrt{8+6i} - \sqrt{4} = (3+i) - 2 = 1 + i$$

con lo que el ejemplo termina. ■

Ejemplo I.5.16. Sea $A = \{ z = re^{i\theta} \,|\, r > 0, -\pi < \theta < \pi \}$ una región simplemente conexa. Sabemos que $f(z) = 1/z$ es analítica en A y tiene una antiderivada $F(z) = \mathrm{Ln}\, z$, para toda $z \in A$. Si C una trayectoria en A que une el punto z_1 con el punto z_2, entonces

$$\int_C \frac{1}{z}\, dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z}\, dz = \mathrm{Ln}\, z \,\Big|_{z_1}^{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_2 - \mathrm{Ln}\, z_1$$ ■

Ejemplo I.5.17. Mostrar que

$$\int_C \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$$

donde C es la circunferencia de radio uno con centro en el origen orientada positivamente. Denotemos con $\tilde{C}$ a la misma circunferencia pero sin el punto -1. Así, $\tilde{C}$ es el arco de circunfenrencia que une al punto z_1 (sobre C pero en el semiplano inferior y muy cerca del semieje real negativo) y al punto z_2 (en el semiplano superior). La trayectoria $\tilde{C}$ está contenida en la región simplemente conexa A del *Ejemplo I.5.15*. Sabemos que la función $f(z) = 1/z$ es analítica en A y tiene una antiderivada $F(z) = \mathrm{Ln}\, z$, para toda $z \in A$. Por lo tanto, si z_2 tiende a -1 a través de puntos sobre C en el semiplano superior y z_1 tiende a -1 a través de puntos sobre C en el semiplano inferior,

$$\oint_C \frac{1}{z}\, dz = \lim_{z_2 \to -1}\ \lim_{z_1 \to -1} \int_{\tilde{C}} \frac{1}{z}\, dz$$

donde

$$z_2 \in \{ z \in \mathbb{C} \mid z \in C, \mathrm{Im}\, z > 0 \}$$
$$z_1 \in \{ z \in \mathbb{C} \mid z \in C, \mathrm{Im}\, z < 0 \}$$

por lo que

$$\oint_C \frac{1}{z}\, dz = \lim_{z_2 \to -1} \mathrm{Ln} z_2 - \lim_{z_1 \to -1} \mathrm{Ln} z_1 = i\pi - (-i\pi) = 2\pi i \qquad \blacksquare$$

Ejemplo I.5.18. Sea $f(z)$ analítica en una región simplemente conexa A, excepto posiblemente en $z_0 \in A$. Supóngase, sin embargo, que $|f|$ es acotada alrededor de z_0. Mostrar que, para toda curva cerrada simple C que rodea a z_0,

$$\oint_C f(z)\, dz = 0$$

Solución. Sea $\epsilon > 0$ y sea C_ϵ la circunferencia de radio ϵ con centro en z_0. Por el teorema de la deformación,

$$\oint_C f(z)\, dz = \oint_{C_\epsilon} f(z)\, dz$$

Sea $|f(z)| \leq M$ alrededor de z_0. Por lo tanto, del *Teorema I.4.6.(b)*,

$$\left| \oint_{C_\epsilon} f(z)\, dz \right| \leq M \cdot 2\pi\epsilon$$

donde $2\pi\epsilon$ es la longitud de C_ϵ. En consecuencia, para toda $\epsilon > 0$,

$$\left| \oint_C f(z)\, dz \right| \leq M \cdot 2\pi\epsilon$$

Por lo tanto,

$$\oint_C f(z)\, dz = 0 \qquad \blacksquare$$

Ejercicios propuestos.

1. Verificar el teorema de Cauchy para las funciones

   i) $f(z) = z^2 - iz + 1$,

ii) $f(z) = \cos z$,

iii) $f(z) = e^z$,

si C es el cuadrado con vértices en $1 \pm i$, $-1 \pm i$.

2. Verificar el teorema de Cauchy para la función $f(z) = z^3 + iz^2 + z - i$ si C es

i) la circunferencia $|z| = 1$,

ii) la circunferencia $|z - i| = 2$,

iii) la elipse $|z - 3i| + |z + 3i| = 20$.

3. Calcular

$$\oint_C f(z)\, dz$$

donde

i) $f(z) = \dfrac{z}{z+2}$,

ii) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2z + 2}$,

iii) $f(z) = \dfrac{3z^2 - 8z + 4}{z^3 - 4z^2 + 4z - 16}$,

iv) $f(z) = \dfrac{3z^2 - 8iz - 4}{z^3 - 4iz^2 - 4z + 16i}$

y C es la circunferencia de radio uno con centro en el origen.

4. Calcular

$$\oint_C (2xy + 2x)\, dx + (x^2 - y^2 - 2y)\, dy$$

donde C es el triángulo con vértices en 0, 1 e i.
Sugerencia: Calcular primero

$$\oint_C (z^2 + 2iz)\, dz$$

5. Calcular

$$\int_0^{2\pi} e^{\operatorname{sen}\theta} \cos(\theta - \cos\theta)\, d\theta$$

donde C es la circunferencia de radio uno con centro en el origen.
Sugerencia: Calcular primero

$$\oint_C e^{-iz}\, dz$$

6. Sea f una función entera. Evaluar

$$\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r e^{i\theta}\right) d\theta$$

para $k \in \mathbb{I}$, $k \geq 1$.

7. Resolver el *Ejercicio 3.(i)* si C es la circunferencia de ecuación $|z+1| = 2$.

8. Resolver el *Ejercicio 3.(ii)* si C es la circunferencia de ecuación
   i) $|z-1| = 2$,
   ii) $|z| = 2$.

9. Resolver el *Ejercicio 3.(iii)* si C es la circunferencia de ecuación
   i) $|z-2| = 3$,
   ii) $|z| = 3$,
   iii) $|z| = 5$.

10. Si C es la lemniscata $|z||z-2| = 1$, recorrida como en la *Figura I.5.3*, evaluar
$$\oint_C \frac{z-2}{z^2-z}\, dz$$

11. Comprobar que
$$\int_{C_1} z^2\, dz = \int_{C_2} z^2\, dz$$
para dos trayectorias específicas C_1 y C_2 que unen el puntos $1+i$ con 2.

12. Evaluar la integral
$$\int_C (z^3+3)\, dz$$
donde C es la semicircunferencia derecha de radio uno con centro en el origen.

I.6 Fórmulas de la integral de Cauchy.

En esta sección presentaremos un resultado conocido como la *fórmula de la integral de Cauchy* el cual muestra que el valor de una función analítica puede representarse por una cierta integral de línea. La enésima derivada tendrá una similar representación. Como consecuencia podremos establecer el hecho de que las funciones analíticas tienen derivadas de todos los órdenes [1] y se dará una demostración del *teorema fundamental del álgebra*.

Mediante el teorema de deformación se puede generalizar el *Ejemplo I.5.7* de la siguiente manera: Si C es una curva cerrada de forma arbitraria que rodea al punto z_0 un total de m veces, entonces

$$\oint_C (z - z_0)^n \, dz = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq -1 \\ 2\pi i m & si \quad n = -1 \text{ y C se recorre en sentido positivo} \\ -2\pi i m & si \quad n = -1 \text{ y C se recorre en sentido negativo} \end{cases}$$

En particular, si $n = -1$ y si C es una curva cerrada simple $(m = 1)$ de forma arbitraria, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{z - z_0} = \begin{cases} \pm 1 & \text{si} \quad z_0 \in \operatorname{int} C \\ 0 & \text{si} \quad z_0 \in \operatorname{ext} C \end{cases}$$

Fórmula de la integral de Cauchy.

Teorema I.6.1. ***(Fórmula de la integral de Cauchy).***
*Sean f analítica en una región simplemente conexa A, C una trayectoria cerrada simple (positivamente orientada) en A y $z_0 \in$ **int** C. Entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz$$

Esta última fórmula es realmente notable, dice que los valores que toma f sobre C

---

[1] Cuando una función tiene derivadas de todos los órdenes se dice que es de clase C^∞.

determina completamente los valores de f en el interior de C.

Con otras palabras, el teorema de la integral de Cauchy se puede enenciar de la siguiente manera: *Si f es analítica sobre y en el interior de una trayectoria cerrada simple C positivamente orientada y z_0 es un punto en el interior de C, entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Demostración. Se define

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si} \quad z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si} \quad z = z_0 \end{cases}$$

entonces g es analítica en $A - \{z_0\}$ y continua en A. Ahora bien, el teorema de Cauchy se puede generalizar para regiones donde f es analítica excepto posiblemente en un punto, en donde sin embargo f debe ser continua. Aplicando esto a g se obtiene

$$\oint_C g(z)\, dz = 0$$

Por lo cual

$$\oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - f(z_0) \oint_C \frac{1}{z - z_0}\, dz = 0$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - f(z_0)\, 2\pi i = 0$$

de donde se desprende lo que el teorema quería demostrar. ■

Es importante observar que si la fórmula de la integral de Cauchy se escribe en la forma

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

es útil para calcular ciertas integrales sobre trayectorias cerradas simples. Nótese también que en la fórmula anterior, quien debe ser analítica es $f(z)$ y no el integrando $f(z)/(z - z_0)$. El integrando es analítico sólo en $A - \{z_0\}$, por lo que no podemos utilizar el teorema de Cauchy para concluir que la integral es cero. De hecho, por la aparición de $f(z_0)$, la integral usualmente es diferente de cero.

Ejemplo I.6.1. Calcular

$$\oint_{|z|=4} \frac{e^z}{z - \pi i}\, dz$$

donde la circunferencia $|z| = 4$ se recorre una vez en sentido positivo.

Solución. Como $f(z) = e^z$ es analítica en $\mathbb{C}$, $|z| = 1$ es una curva cerrada simple en $\mathbb{C}$ y $z_0 = \pi i \in \operatorname{int} C$, entonces por la fórmula de la integral de Cauchy

$$\oint_{|z|=4} \frac{e^z}{z - \pi i}\, dz = 2\pi i\, f(\pi i) = 2\pi i\, e^z \big|_{z=\pi i} = 2\pi i e^{\pi i}$$

$$= 2\pi i(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi) = -2\pi i \qquad \blacksquare$$

Ejemplo I.6.2. Evaluar

$$\oint_C \frac{4}{z[z-(1+i)][z-(1-i)]}\, dz$$

donde C es la circunferencia de radio uno con centro en el origen, recorrida una vez en sentido positivo.

Solución. La integral puede escribirse en la forma

$$\oint_C \frac{4}{z[z-(1+i)][z-(1-i)]}\, dz = \oint_C \frac{4/([z-(1+i)][z-(1-i)])}{z}\, dz$$

Como la función $f(z) = 4 / ([z-(1+i)][z-(1-i)])$ no es analítica en $1+i$ y $1-i$, entonces es analítica sobre y en el interior de la curva cerrada simple C y $z_0 = 0 \in \operatorname{int} C$, entonces de la fórmula de la integral de Cauchy

$$\oint_C \frac{4}{z[z-(1+i)][z-(1-i)]}\, dz = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i \left.\frac{4}{[z-(1+i)][z-(1-i)]}\right|_{z=0}$$

$$= 2\pi i \frac{4}{(1+i)(1-i)} = 4\pi i$$

Comparar con el *Ejemplo I.5.6.* ■

Ejemplo I.6.3. Evaluar

$$\oint_C \frac{4\, e^{(z^2)}}{z[z-(1+i)][z-(1-i)]}\, dz$$

donde C es la circunferencia de radio dos con centro en el origen, recorrida una vez en sentido positivo.

Solución. Mediante descomposición enfracciones parciales, la integral puede escribirse en la forma

$$I = \oint_C \frac{4\, e^{(z^2)}}{z[z-(1+i)][z-(1-i)]}\, dz$$

$$= 2\oint_C \frac{e^{(z^2)}}{z}\, dz - (1+i)\oint_C \frac{e^{(z^2)}}{z-(1+i)}\, dz - (1-i)\oint_C \frac{e^{(z^2)}}{z-(1-i)}\, dz$$

Para cada integral, la función $f(z) = e^{(z^2)}$ es analítica en $\mathbb{C}$, C es una curva cerrada simple en $\mathbb{C}$ y $z_0 = 0, 1+i, 1-i \in \operatorname{int} C$, por lo que del teorema de la integral de Cauchy

$$I = 4\pi i\, f(0) - 2\pi i\, f(1+i) - 2\pi i\, f(1-i)$$

$$= 4\pi i\, e^{(z^2)}\Big|_{z=0} - 2\pi i(1+i)\, e^{(z^2)}\Big|_{z=1+i} - 2\pi i(1-i)\, e^{(z^2)}\Big|_{z=1-i}$$

$$= 4\pi i\, e^0 - 2\pi i(1+i)e^{(1+i)^2} - 2\pi i(1-i)e^{(1-i)^2}$$

$$= 4\pi i - 2\pi i\left[(1+i)e^{2i} + (1-i)e^{-2i}\right]$$

$$= 4\pi i - 2\pi i\left[\left(e^{2i} + e^{-2i}\right) + i\left(e^{2i} - e^{-2i}\right)\right]$$

$$= 4\pi i[1 - \cos 2 + \operatorname{sen} 2] \qquad \blacksquare$$

Las funciones analíticas son C^{∞}.

La fórmula de la integral de Cauchy proporciona el valor de f en z_0. Ahora la usaremos para mostrar que todas las derivadas de orden superior de f en z_0 también existen.

Teorema I.6.2. ***(Formula de la integral de Cauchy para las derivadas).***[2]
Sean f analítica en una región simplemente conexa A, C una trayectoria cerrada simple en A recorrida en sentido positivo y $z_0 \in \operatorname{int} C$. Entonces

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

donde $f^{(n)}$ denota la enésima derivada de f.

Demostración. Como $f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$, el caso para $n = 0$ se reduce a la fórmula de la integral de Cauchy (*Teorema I.6.1*).

Ahora estableceremos el teorema para el caso $n = 1$. Mediante una extensión a integrales de línea de la *regla de Leibnitz* para derivación bajo el signo de la integral, derivamos respecto a z_0 la fórmula de la integral de Cauchy obteniendo

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{d}{dz_0}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz\right] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\partial}{\partial z_0}\left[\frac{f(z)}{z - z_0}\right] dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\,dz \end{aligned}$$

y la demostración para el caso $n = 1$ queda completa.

Suponemos ahora que la fórmula de la integral de Cauchy para las derivadas es cierta

[2] También conocidas como fórmulas de la integral de Cauchy.

para $n = k$, es decir, que

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz$$

Derivando nuevamente respecto a z_0:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(z_0) &= \frac{d}{dz_0}\left[\frac{k!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz\right] = \frac{k!}{2\pi i} \oint_C \frac{\partial}{\partial z_0}\left[\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\right] dz \\ &= \frac{(k+1)!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+2}}\, dz \end{aligned}$$

que es la fórmula de la integral de Cauchy para las derivadas cuando $n = k + 1$, con lo que la demostración termina. ∎

Ejemplo I.6.4. Sea z_0 un punto cualquiera interior a una trayectoria cerrada simple C con orientación positiva. Calcular

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

para $n \geq 0$.

Solución. Como $f(z) = 1$ es entera, la fórmula de la integral de Cauchy nos dice que

$$\oint_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i\, f(z_0) = 2\pi i$$

mientras que de la fórmula de la integral de Cauchy para las derivadas

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{2\pi i}{n!}(0) = 0$$

por lo que

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Este resultado es el mismo que se obtuvo anteriormente en el *Ejemplo I.5.7.* Obviamente, la técnica utilizada aquí es más fácil. ■

Ejemplo I.6.5. Calcular

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen}(\pi z) + \cos(\pi z)}{(z+1)^4}\, dz$$

donde C es la circunferencia $|z| = 2$, recorrida una vez en sentido antihorario.

Solución. La función $f(z) = \operatorname{sen}(\pi z) + \cos(\pi z)$ es analítica en $\mathbb{C}$, la trayectoria C es cerrada simple en $\mathbb{C}$ y $z_0 = -1 \in \operatorname{int} C$, por lo que de la fórmula de la integral de Cauchy para las derivadas con $n = 3$

$$\begin{aligned} I &= \oint_C \frac{\operatorname{sen}(\pi z) + \cos(\pi z)}{(z+1)^4}\, dz \\ &= \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(-1) = \frac{\pi i}{3} \frac{d^3}{dz^3}\left[\operatorname{sen}(\pi z) + \cos(\pi z)\right]\Bigg|_{z=-1} \\ &= \frac{\pi^4 i}{3}\left[-\cos(\pi z) + \operatorname{sen}(\pi z)\right]\Bigg|_{z=-1} = \frac{\pi^4 i}{3}\left[-\cos(-\pi) + \operatorname{sen}(-\pi)\right] = \frac{\pi^4}{3} i \end{aligned}$$

Con esto termina el ejemplo. ■

Ejemplo I.6.6. Calcular

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2 + \pi^2)^2}\, dz$$

donde C es la circunferencia $|z| = 4$, recorrida una vez en sentido antihorario.

Solución. Como

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2+\pi^2)^2} &= \frac{1}{(z+\pi i)^2 (z-\pi i)^2} \\ &= -\frac{1/(4\pi^3 i)}{z+\pi i} - \frac{1/(4\pi^2)}{(z+\pi i)^2} + \frac{1/(4\pi^3 i)}{z-\pi i} - \frac{1/(4\pi^2)}{(z-\pi i)^2} \end{aligned}$$

la integral puede escribirse en la forma

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}\,dz = -\frac{1}{4\pi^3 i}\oint_C \frac{e^z}{z+\pi i}\,dz - \frac{1}{4\pi^2}\oint_C \frac{e^z}{(z+\pi i)^2}\,dz$$

$$+\frac{1}{4\pi^3 i}\oint_C \frac{e^z}{z-\pi i}\,dz - \frac{1}{4\pi^2}\oint_C \frac{e^z}{(z-\pi i)^2}\,dz$$

Como $f(z)=e^z$ es analítica en $\mathbb{C}$, la curva C es cerrada simple en $\mathbb{C}$ y $z_0=\pm\pi i\in \operatorname{int} C$, entonces de la fórmula de la integral de Cauchy (para la primera y tercera integrales) y de la fórmula de Cauchy de la integral para las derivadas (en el caso de la segunda y cuarta integrales) tenemos que

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}\,dz = 2\pi i\left[-\frac{1}{4\pi^3 i}f(-\pi i) - \frac{1}{4\pi^2}f^{(1)}(-\pi i) + \frac{1}{4\pi^3 i}f(\pi i) - \frac{1}{4\pi^2}f^{(1)}(\pi i)\right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2}e^z\Big|_{z=-\pi i} - \frac{i}{2\pi}\frac{de^z}{dz}\Big|_{z=-\pi i} + \frac{1}{2\pi^2}e^z\Big|_{z=\pi i} - \frac{i}{2\pi}\frac{de^z}{dz}\Big|_{z=\pi i}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\left(e^{\pi i}-e^{-\pi i}\right) - \frac{i}{2\pi}\left(e^{\pi i}+e^{-\pi i}\right) = \frac{i}{\pi^2}\operatorname{sen}\pi - \frac{i}{\pi}\cos\pi = \frac{i}{\pi}$$

En el *Subtema I.8* resolveremos este ejercicio de otra manera. ■

Ahora establecemos dos corolarios importantes del *Teorema I.6.2*.

Corolario I.6.1. ***(Las funciones analíticas son de clase C^∞).***
Si f es analítica en una región A, entonces, para los enteros $n\ge 1$, existen todas las derivadas $f^{(n)}(z_0)$ para $z_0\in A$.

Demostración. Para cada punto $z_0\in A$ existe un disco cerrado $|z-z_0|\le R$ contenido en A. Usamos la circunferencia $C=C_R(z_0)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-z_0|=R\}$ en el *Teorema I.6.2* para mostrar que $f^{(n)}(z_0)$ existe para todos los enteros $n\ge 1$ (y por lo tanto, son analíticas en A). ■

Este resultado es interesante ya que ilustra una gran diferencia entre las funciones reales y complejas. Una función real puede tener la propiedad que f' exista en todo un intervalo, pero f'' en ninguna parte existir. El *Corolario I.6.1* establece que si una función compleja f tiene la propiedad de que f' existe en toda una región A, entonces *todas* las derivadas de f existen en A. También, al existir f', entonces f es continua y al existir f'', entonces f' es continua, y así sucesivamente.

Corolario I.6.2. *Si u es una función armónica en cada punto (x,y) de una región A, entonces las derivadas parciales*

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

son funciones armónicas.

Demostración. Para cada punto $z_0 = x_0 + i\,y_0$ en A existe un disco $D_R(z_0)$ contenido en A. En este disco, existe una conjugada armónica v, así que la función

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

es analítica. Usamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann para obtener

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

para $z \in D_R(z_0)$. Ya que f' es analítica en $D_R(z_0)$, las funciones $\partial u/\partial x$ y $\partial u/\partial y$ son armónicas ahí. Nuevamente, podemos utilizar las ecuaciones de Cauchy-Riemann para obtener

$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - i\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Como f'' es analítica en $D_R(z_0)$ las funciones

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

son armónicas ahí. ■

Desigualdades de Cauchy y el teorema de Liouville.

Teorema I.6.3. *(Desigualdades de Cauchy).*
Sea A una región en $\mathbb{C}$ y $f: A \to \mathbb{C}$ analítica, supóngase también que $D_R(z_0) \subset A$ y $|f(z)| \leq M$, para toda $z \in C$, siendo C la frontera de $D_R(z_0)$, entonces

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!}{R^n} M$$

para toda $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Demostración. Utilizando la fórmula de la integral de Cauchy para las derivadas

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \left|f^{(n)}(z_0)\right| &= \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{R^{n+1}} l(C) = n! \frac{M}{R^n} \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. ■

El siguiente teorema nos muestra que una función entera no constante no puede ser acotada.

Teorema I.6.4. *(Teorema de Liouville).*
Si $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es entera y acotada (lo cual significa que existe una constante M tal que $|f(z)| \leq M$ para toda z), entonces f es constante.

Demostración. Utilizando el *Teorema I.6.3* se tiene que

$$\left|f'(z_0)\right| \leq \frac{M}{R} \qquad \forall\ z_0 \in \mathbb{C} \ \text{ y } \ \forall\ R \in \mathbb{R}$$

por lo cual $f'(z_0) = 0$ y f es constante. ■

Ejemplo I.6.7. Mostrar, mediante un contraejemplo, que el teorema anterior no es cierto en el cálculo de variable real.

Solución. La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ y existe $M = 1$ tal que $|f(x)| = |\operatorname{sen} x| \leq 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$, sin embargo, sabemos bien que f no es constante. ■

Teorema fundamental del álgebra.

Probaremos facilmente el teorema que establece que todo polinomio tiene una raíz compleja, lo cual, de otra manera es muy difícil de hacer.

Teorema I.6.5. *Sea $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ un polinomio con coeficientes complejos de grado mayor o igual a uno, entonces p tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$, es decir, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$.*

Demostración. Si $a_0 = 0$ se ve de inmediato que una raíz de $p(z)$ es $z = 0$ y el teorema queda demostrado. Consideremos ahora el caso $a_0 \neq 0$. Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que $p(z) \neq 0$ para toda z. Entonces, si $z = 0$

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1}{a_0}$$

y si $z \neq 0$

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{z^n}}{a_n + \dfrac{1}{z} a_{n-1} + \ldots + \dfrac{1}{z^{n-1}} a_1 + \dfrac{1}{z^n} a_0}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{z \to \infty} \frac{1}{p(z)} = \frac{0}{a_n} = 0$$

ya que $a_n \neq 0$.

Por lo cual $1/p(z)$ es acotada para toda z y por lo tanto $1/p(z)$ también es entera. Entonces, por el teorema de Liouville $1/p(z)$ y $p(z)$ serían constantes, lo cual sería la contradicción requerida. ■

Existe un recíproco parcial al teorema de Cauchy llamado teorema de Morera.

Teorema I.6.6. *Sea f continua en una región A y supóngase también que $\oint_C f(z) = 0$ para toda curva cerrada C en A, entonces f es analítica en A y existe g analítica en A tal que $f = g'$.*

Demostración. El *Teorema I.5.5* asegura que bajo las hipótesis del teorema existe una función $g: A \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz$$

que es analítica y tal que $g'(z) = f(z)$. Aplicando ahora el *Teorema I.6.2* se concluye que también g' es analítica. Por lo tanto, $f = g'$ también lo es. ■

Corolario I.6.3. *Sea f continua en una región A y analítica en $A - \{z_0\}$, entonces f es analítica en A.*

Demostración. Restringiremos f al disco $D_\varepsilon(z_0)$ que es simplemente conexo. Por el *Ejemplo I.5.3* tenemos que para toda curva que rodee a z_0

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

Obviamente, si z_0 queda fuera de C la igualdad anterior es también cierta. Lo mismo puede decirse si $z \in C$ ya que f es continua y por lo tanto, el valor de $f(z)$ en ese punto no contribuye al valor de la integral. Asi, en cualquier caso

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

cuando C es una curva cerrada en $D_\epsilon(z_0)$. Por lo que aplicando el teorema de Morera se obtiene que f es analítica en $D_\epsilon(z_0)$ y por consiguiente en A. ■

Teorema I.6.7. ***(Propiedad del valor intermedio).***
Sea A una región, f analítica en A y $D(z_0,r) \subset A$, entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta$$

Esta fórmula dice que el valor de f en el centro del disco es el promedio de los valores de f en el círculo.

Demostración. Usando la fórmula de la integral de Cauchy se tiene

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

donde $z(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$, por lo tanto

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)}{re^{i\theta}}\, ire^{i\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta$$

lo cual es lo que se quería demostrar. ■

Teorema I.6.8. *Sea A una región y f analítica en A, supóngase que $|f(z)| \le |f(z_0)|$ para toda $z \in D(z_0,r_0) \subset A$, entonces f es constante en $D(z_0,r_0)$.*

Con el propósito de enunciar una versión más general del teorema anterior, se hace necesario recordar lo siguiente:

a) Se dice que z es un *punto frontera* de A si toda vecindad de z contiene puntos de A y puntos que no son de A.

b) Se dice que z es un *punto interior* de A si existe una vecindad de z contenida totalmente en A.

c) Se dice que z es un *punto exterior* de A si existe una vecindad de z contenida totalmente fuera de A.

d) Al conjunto de todos los puntos frontera de A, denotado por ∂A, se le llama *frontera* de A.

e) A la unión de A y ∂A, denotada como $\overline{A}$, se le llama *cerradura* de A.

A se llama *cerrado* si y sólo si $A = \overline{A}$. Además es fácil ver que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{C - A}$. A es *acotado* cuando puede encerrarse en un disco de radio finito. Finalmente, no es dificil ver que un conjunto es cerrado cuando su complemento es abierto y que A es abierto cuando $\partial A = \overline{A} - A$.

Definición I.6.1. *Sean $\mathscr{E}$ y $\mathscr{F}$ dos subconjuntos de $A \subset \mathbb{C}$.*

i) *Diremos que $\mathscr{E}$ es abierto relativo en A (o abierto respecto a A) si existe un conjunto abierto $X \subset \mathbb{C}$ tal que $\mathscr{E} = X \cap A$.*

ii) *Diremos que $\mathscr{F}$ es cerrado relativo en A (o cerrado respecto a A) si existe un conjunto cerrado $Y \subset \mathbb{C}$ tal que $\mathscr{F} = Y \cap A$.*

Observación: Todo conjunto abierto es abierto relativo de A y todo conjunto cerrado es abierto relativo de A. Sin embargo, lo inverso no es necesariamente cierto.

Lema I.6.1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto conexo. Si $\mathscr{E} \subset A$ es un conjunto no vacío tal que es al mismo tiempo abierto relativo en A y cerrado relativo en A, entonces $\mathscr{E} = A$.*

Lema I.6.2. *Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función continua con dominio D. Si A es cerrado relativo en $R \equiv f(D)$, entonces $f^{-1}(A) \equiv \{z \in D \mid f(z) \in A\}$ es un cerrado relativo de D.*

Teorema I.6.9. *(Del módulo máximo).*
Sea A una región acotada en $\mathbb{C}$ y $f: \overline{A} \to \mathbb{C}$ continua, supóngase también que f es analítica en A y $M = \text{máx}_{z \in \partial A} |f(z)|$. Entonces

i) $|f(z)| \leq M, \quad \forall \ z \in A.$
ii) *Si existe $z \in A$ tal que $|f(z)| = M$, entonces f es constante.*

Demostración. Sea $M' = \text{máx}_{z \in \overline{A}} |f(z)|$.

Caso 1. Supongamos que no existe $a \in A$ tal que $|f(a)| = M'$. Por lo tanto, debe existir una $a \in \partial A$ tal que $|f(a)| = M'$ (porque sabemos que existe alguna $a \in \overline{A}$ tal que $|f(a)| = M'$). Pero entonces debemos tener y por lo tanto, $|f(z)| \leq M$ para toda $z \in A$.

Caso 2. Si existe $a \in A$ tal que $|f(a)| = M'$, se afirma que f es constante. Para demostrar esto sea $B = \{z \in A \mid f(z) = f(a)\}$, se sigue del *Teorema I.6.8* que B es abierto (ya que si $w \in B$, $f(w)$ será mayor o igual que $f(z)$ valuada en cualquier punto del disco $D(w, r_0)$, por lo que del *Teorema I.6.8* se sigue que $f(z)$ es una constante en $D(w, r_0)$ y por lo tanto, el disco también pertenece a B. El valor de r_0 es arbitrario con tal de que $D(w, r_0) \subset A$) concluimos entonces que B es abierto relativo de A. Por otro lado, B es la imagen inversa del conjunto cerrado $\{f(a)\}$, así que aplicando el *Lema I.6.2* se tiene que B es cerrado respecto a A y por lo tanto $B = A$ ya que B resultó ser al mismo tiempo abierto y cerrado respecto a A (ver *Lema I.6.1*). Por consiguiente, f es la constante $f(a)$ en A y $\overline{A}$ por continuidad.

Ahora mencionamos una importante aplicación.

Teorema I.6.10. *(Lema de Schwarz).*
Sea $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ y $f: A \to \mathbb{C}$ analítica, supóngase también que $|f(z)| \leq 1$ para toda $z \in A$ y que $f(0) = 0$, entonces $|f(z)| \leq |z|$ para toda $z \in A$ y $|f'(0)| \leq 1$. Además, si $|f(z_0)| = |z_0|$ para alguna $z_0 \in A$ con $z_0 \neq 0$, entonces

$$f(z) = e^{i\theta} z$$

Funciones Armónicas.

Definición I.6.2. *Sea A una región en $\mathbb{C}$ y $u: A \to \mathbb{R}$ de clase C^2, se dice que u es armónica si su laplaciano es igual a cero, es decir, si*

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Es fácil verificar que si f es analítica en A y $f = u + iv$ entonces u y v son armónicas de clase C^∞. Veremos ahora que el recíproco también es cierto.

Teorema I.6.11. *Sea A una región y sea $u: A \to \mathbb{R}$ una función armónica de clase C^2. Entonces u es de clase C^∞ y, en una vecindad de cada punto $z_0 \in A$, u es la parte real de una función analítica. Si además A es simplemente conexo, existe $f: A \to \mathbb{C}$ analítica tal que $u = \mathrm{Re}(f)$.*

Obsérvese que el resultado también es válido si se sustituye $\mathbf{Re}(f)$ por $\mathbf{Im}(f)$, ya que $\mathbf{Im}(if) = \mathbf{Re}(f)$.

Demostración. Basta demostrar la segunda parte pues localmente siempre existe una vecindad simplemente conexa, por ejemplo, $D_r(z_0)$.

Sea

$$g(z) \equiv \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z)$$

para $z \in A$. Se afirma que g es analítica en A. En efecto, denotando $g = U + iV$, se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

por lo cual

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

y se satisface una de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. También

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$$

de donde

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

por lo tanto, se satisface la segunda ecuación de Cauchy-Riemann. Por consiguiente g es analítica en A.

Finalmente, por el teorema de la antiderivada, existe $f: A \to \mathbb{C}$ analítica tal que $f' = g$. Sea $f = \bar{u} + i\bar{v}$, entonces

$$f' = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - i\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = g = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

por lo que $\bar{u} = u + k$, donde k es constante y $u = \mathrm{Re}(f - k)$.

Definición I.6.2. *Se dice que u y v son armónicas conjugadas si existe f analítica tal que $f = u + iv$.*

Corolario I.6.4. *Sea A una región simplemente conexa en $\mathbb{C}$ y $u: A \to \mathbb{R}$ armónica, entonces u tiene una conjugada en A.*

Obsérvese que las ecuaciones de Cauchy-Riemann implican que la conjugada de u es única salvo una constante aditiva.

Teorema I.6.12. *Sean u y v armónicas conjugadas en una región A. Supóngase también que sobre el subconjunto $\mathcal{L}_1 \subset A$ la función u es igual a la constante C_1 y $\nabla u(x,y) \neq 0$ y que sobre el subconjunto $\mathcal{L}_2 \subset A$ la función v es igual a la constante C_2 y $\nabla v(x,y) \neq 0$. Entonces $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son curvas en A que si se intersectan, lo hacen ortogonalmente.*

Demostración. Del teorema de la función implícita se sigue que los conjuntos de puntos $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ tales que $u(x,y) = C_1$ y $v(x,y) = C_2$ son, en efecto, curvas diferenciables y como sabemos del cálculo que el vector gradiente de una función diferenciable $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es perpendicular a la curva de nivel $f(x,y) = cte.$, basta demostrar que

$$\nabla u \cdot \nabla v = 0$$

Así,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

que se sigue de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Propiedades del valor intermedio y principio del máximo para funciones armónicas.

Teorema I.6.13. *(Del Valor intermedio).*
Sea u armónica en una región A que contiene a $\overline{D_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \le r\}$, entonces

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta$$

Demostración. Primero vamos a demostrar que existe f analítica tal que $u = \mathrm{Re}(f)$ en una vecindad de z_0 que contiene a $\overline{D_r(z_0)}$. Notar que como no se está exigiendo que A sea simplemente conexo no se puede asegurar que exista una tal f definida en todo A (ver el *Teorema I.6.11*).

El conjunto A^c es cerrado y $z_0 \in A$, por lo que existe $w \in A^c$ tal que

$$|z_0 - w| \le |z_0 - z| \qquad \forall \ z \in A^c$$

Como $\overline{D_r(z_0)} \subset A$, se tiene que

$$|z_0 - w| > r$$

Tomando r_1 tal que $|z_0 - w| > r_1 > r$, resulta que $\overline{D_r(z_0)} \subset D_{r_1}(z_0) \subset A$ y como $D_{r_1}(z_0)$ es simplemente conexo, existe f analítica en $D_{r_1}(z_0)$ tal que $\mathrm{Re}(f) = u$ por el *Teorema I.6.11*,

y

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

por el *Teorema I.6.7.*

Tomando la parte real de ambos miembros se obtiene el resultado. ■

Teorema I.6.14. *Sea u armónica en una región A, supóngase que u alcanza un máximo relativo en $z_0 \in A$, es decir, existe $r > 0$ tal que $u(z_0) \geq u(z)$ para toda $z \in D_r(z_0)$, entonces u es localmente constante.*

Obsérvese que si se reemplaza máximo por mínimo se obtiene el mismo resultado. Esto se puede ver tomando $-u$ en lugar de u.

Demostración. Existe f analítica en $D_r(z_0)$ tal que $u = \mathrm{Re}(f)$. Tambien e^f es analítica y

$$|e^{f(z)}| = |e^{u(x,y)}| = e^{u(x,y)}$$

Ahora, los máximos de u ocurren en los mismos puntos que los máximos de e^u pues e^x es creciente. Por consiguiente, por el teorema del módulo máximo para funciones analíticas, e^f es constante en $D_r(z_0)$ y por lo tanto, también lo son e^u y u.

Teorema I.6.15. ***(Módulo máximo para funciones armónicas).***
Sea A una región acotada, $u:\bar{A} \to \mathbb{R}$ continua y $u: A \to \mathbb{R}$ armónica, entonces si $M = \text{máx}_{z \in \partial A}\, u(z)$

i) $u(z) \leq M, \ \forall \ z \in A.$
ii) *Si $u(z) = M$ con $z \in A$, entonces u es constante.*

Para demostrar este teorema se aplica el mismo argumento que se usó para las funciones analíticas (*Teorema I.6.11*).

Observación: También existe el principio del mínimo, es decir, si $m = \text{mín}_{z \in \partial A}\, u(z)$, entonces

i) $u(z) \geq m$, para toda $z \in A$.

ii) Si $u(z) = m$ para alguna $z \in A$, entonces u es constante.

Para demostrar esto basta aplicar el *Teorema I.6.15* a la función $-u$.

Ejercicios propuestos.

1. Calcule la integral
$$\oint_C \frac{dz}{z^2 + 9}$$
si C es una trayectoria cerrada simple recorrida en sentido positivo y
i) los puntos $\pm 3i$ se encuentran ambos fuera de C;
ii) el punto $3i$ se encuentra dentro de C y el punto $-3i$ fuera de ella;
iii) el punto $-3i$ se encuentra dentro de C y el punto $3i$ fuera de ella;
iv) los puntos $\pm 3i$ se encuentran ambos dentro de C.

2. Calcule todos los posibles valores de la integral
$$\oint_C \frac{dz}{z(z^2 - 1)}$$
para diferentes posiciones de la trayectoria cerrada simple positivamente orientada C. Se supone que C no pasa por ninguno de los puntos 0, 1 y -1.

3. ¿Cúantos valores diferentes puede tener la integral
$$\oint_C \frac{dz}{w_n(z)}$$
donde
$$w_n = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n) \qquad z_i \neq z_j$$
y la trayectoria cerrada simple C no pasa por ninguno de los puntos z_i?

4. Calcule la integral
$$\oint_C \frac{z}{z^4 - 1}\, dz$$
donde C está definida por $|z - a| = a$ con orientación positiva y $a > 1$.

5. Calcule la integral

$$\oint_C \frac{e^z}{z^2 + a^2}\, dz$$

donde la trayectoria C, recorrida en sentido antihorario, contiene en su interior a los puntos $|z| \leq a$.

6. Calcule la integral

$$\oint_C \frac{z\, e^z}{(z - a)^3}\, dz$$

si el punto a se encuentra dentro de la trayectoria cerrada simple C recorrida en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

7. Calcule la integral

$$\oint_C \frac{e^z}{z(1 - z)^3}\, dz$$

si la trayectoria cerrada simple C se recorre en sentido positivo y

i) los puntos 0 y 1 se encuentran ambos fuera de C;

ii) el punto 1 se encuentra dentro de C y el punto 0 fuera;

iii) el punto 0 se encuentra dentro de C y el punto 1 fuera;

iv) los puntos 0 y 1 se encuentran ambos dentro de C.

I.7 Series de Taylor y Laurent.

En esta sección veremos que la analiticidad de una función se puede definir en términos de la existencia de una serie de potencias convergente. También se desarrollarán los importantes teoremas de Weierstrass, Taylor y Laurent.

Sucesiones.

El concepto de una sucesión compleja convergente es análogo al de sucesiones reales convergentes estudiadas en cálculo.

Definición I.7.1. *Una sucesión* $\{z_n\}$ *converge a* z *si para toda* $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que si* $n > N$, *entonces* $|z_n - z| < \epsilon$.

Si $\{z_n\}$ converge a z, se dice que el límite de la sucesión $\{z_n\}$ es z y se expresa como

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z \qquad \text{o} \qquad z_n \to z$$

Cuando $\lim_{n \to \infty} z_n$ no existe, se dirá que la sucesión no converge. En particular, si z_n es en promedio creciente (decreciente) y no acotada conforme n crece, entonces se dirá que la sucesión diverge a $+\infty$ $(-\infty)$ o simplemente que la sucesión diverge.

Los límites de las sucesiones tienen las mismas propiedades y se obtienen de las mismas demostraciones que los límites de funciones. Por ejemplo, el límite es único cuando éste existe, y si $z_n \to z$ y $w_n \to w$, entonces

i) $z_n + w_n \to z + w$

ii) $z_n w_n \to z w$

iii) $\dfrac{z_n}{w_n} \to \dfrac{z}{w}$ si $w, w_n \neq 0$

También, $z_n \to z$ si y sólo si $\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z)$ y $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z)$.

En lo que sigue, cuando se hable de una sucesión $\{z_n\}$ se omitirán los paréntesis de llave y se dirá simplemente "sucesión z_n".

Definición I.7.2. *Una sucesión z_n es de **Cauchy** si, para toda $\epsilon > 0$ existe una N tal que $n, m \geq N$ implican que $|z_n - z_m| < \epsilon$.*

Se sabe de los cursos de cálculo que toda sucesión real de Cauchy converge. Ahora bien, si z_n es de Cauchy entonces $\mathbf{Re}(z_n)$ y $\mathbf{Im}(z_n)$ son sucesiones reales de Cauchy y por el hecho de que convergen, podemos concluir que toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$ converge. Además, el recíproco también es cierto y por lo tanto, se tiene que una sucesión compleja es convergente si y sólo si es de Cauchy.

Se debe notar la relación que existe entre las sucesiones y el concepto de continuidad; es decir, $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es continua si y sólo si, para toda sucesión convergente $z_n \to z$ de puntos en A (esto es, $z_n \in A$ y $z \in A$), se tiene $f(z_n) \to f(z)$ (es decir, f es continua si y sólo si $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\lim_{n\to\infty} z_n)$).

Definición I.7.3. *Se dice que la serie **infinita** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (de números complejos) converge a S si la sucesión de sumas parciales (es decir la sucesión $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$) converge a S.*

Se escribe $\sum_{k=1}^{n} a_k \to S$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$ o simplemente $\sum a_k = S$.

Hemos visto que una sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy. En el caso de las series esto se traduce en el siguiente importante criterio de convergencia.

Teorema I.7.1. ***(Criterio de Cauchy para series de números).***
La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si y sólo si para toda $\epsilon > 0$ existe N tal que si $n \geq N$ se tiene

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \epsilon \qquad \forall \ p = 1, 2, \ldots$$

En particular, para $p = 1$ se obtiene el siguiente

Corolario I.7.1. *Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces $a_k \to 0$.*

Notar que como este corolario se deriva del *Teorema I.7.1* restringiendo el valor de p, no podemos asegurar que el recíproco del corolario sea válido (aunque el teorema sí es válido en ambos sentidos). De hecho, se puede ver explícitamente que el recíproco del corolario no es cierto: la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge (ver *Teorema I.7.3*), sin embargo, $1/n \to 0$.

Del *Corolario I.7.1* se deriva también otro corolario llamado la *prueba de la divergencia.*

Corolario I.7.2. *Si $a_k \to a \neq 0$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.*

Definición I.7.4. *La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$* ***converge absolutamente*** *si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge.*

Teorema I.7.2. *Si la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente, entonces converge.*

Demostración. Como la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge, del *Teorema I.7.1* sabemos que dada $\epsilon > 0$, existe N tal que $n > N$ implica que

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \epsilon \quad \forall\, p \in \mathbb{N}, \qquad \forall\, p \in \mathbb{N}$$

pero como

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$$

usando de nuevo el *Teorema I.7.1* se concluye que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. ■

Obsérvese que la utilidad de este teorema consiste en que como la serie es real, se pueden aplicar criterios de convergencia para series reales.

Teorema I.7.3. *(Pruebas o criterios de convergencia para series reales).*

i) *Si* $|r| < 1$, *entonces la serie geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ *converge a* $1/(1-r)$ *y diverge si* $|r| \geq 1$.

ii) *Criterio de comparación.*
Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge,* $b_n \geq 0$ *y* $0 \leq a_n \leq b_n$, *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*
Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *diverge y* $0 \leq c_n \leq d_n$, *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ *diverge.*

iii) *Prueba de la serie* p.
$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ *converge si* $p > 1$ *y diverge si* $p \leq 1$.

iv) *Criterio de la razón.*
Supóngase que $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ *existe y es igual a* L, *entonces*
si $L < 1$ *la serie* $\sum a_k$ *converge absolutamente,*
si $L > 1$ *la serie diverge y*
si $L = 1$ *esta prueba no da información.*

v) *Criterio de la Raíz.*
Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *existe y es igual a* L, *entonces*
si $L < 1$ *la serie* $\sum a_k$ *converge absolutamente,*
si $L > 1$ *la serie diverge y*
si $L = 1$ *esta prueba no da información.*

Convergencia uniforme.

Definición I.7.5. *Sea* $A \subset \mathbb{C}$ *y* $f_n : A \to \mathbb{C}$ *una sucesión de funciones, se dice que* f_n ***converge uniformemente*** *en* A *a la función* f *si para toda* $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que si* $n > N$,

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon \qquad \forall \quad z \in A$$

Definición I.7.6. *Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $g_k : A \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones, se dice que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ **converge uniformemente** en A a la función g, si para toda $\epsilon > 0$ existe N tal que si $n > N$,*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} g_k(z) - g(z) \right| < \epsilon \qquad \forall \ z \in A$$

Es importante enfatizar que para que una sucesión o una serie converjan uniformemente, el número N debe ser independiente de z. En los casos en los que N dependa de z se usa el nombre de *convergencia puntual* o simplemente convergencia.

El criterio de Cauchy para convergencia uniforme se establece en el siguiente teorema.

Teorema I.7.4. *Sea $A \subset \mathbb{C}$.*

a) *Criterio de Cauchy para sucesiones de funciones.*
Una sucesión $f_n(z)$ converge uniformemente en A si y sólo si para toda $\epsilon > 0$ existe N tal que si $n > N$,

$$|f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \epsilon \qquad \forall \ z \in A \qquad y \qquad \forall \ p \in \mathbb{N}$$

b) *Criterio de Cauchy para series de funciones.*
$\sum_{k=1}^{n} g_k(z)$ converge uniformemente en A si para toda $\epsilon > 0$ existe N tal que si $n > N$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z) \right| < \epsilon \qquad \forall \ z \in A \qquad y \qquad \forall \ p \in \mathbb{N}$$

Demostración.

a) Supongamos que para toda $\epsilon > 0$ existe N tal que si $n > N$,

$$|f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall \ z \in A \qquad \text{y} \qquad \forall \ p \in \mathbb{N}$$

Esto implica que para toda $z \in A$ la sucesión $f_n(z)$ es de Cauchy y, por lo tanto, converge.

Sea $f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z)$. También, como $f_n(z)$ converge, se tiene que para toda $z \in A$ existe $p_z \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| f(z) - f_{n+p_z}(z) \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Por consiguiente, si $n > N$

$$\left| f(z) - f_n(z) \right| \leq \left| f(z) - f_{n+p_z}(z) \right| + \left| f_{n+p_z}(z) - f_n(z) \right| < \epsilon \qquad \forall \ z \in A$$

y $f_n \to f$ uniformemente en A.

Ahora, si $f_n \to f$ uniformemente en A, para toda $\epsilon > 0$ existe N tal que si $n > N$

$$\left| f_n(z) - f(z) \right| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall \ z \in A$$

Por lo cual

$$\left| f_n(z) - f_{n+p}(z) \right| \leq \left| f_n(z) - f(z) \right| + \left| f_{n+p}(z) - f(z) \right| < \epsilon \qquad \forall \ z \in A$$

b) La demostración hecha en *a)* aplicada a las sumas parciales de $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ demuestra este caso. ■

La convergencia uniforme es útil en muchos aspectos, uno de los cuales es el siguiente:

Teorema I.7.5. *Sea $f_n : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones continuas que convergen uniformemente en A a una función $f : A \to \mathbb{C}$, entonces f es continua. Análogamente, si $g_n : A \to \mathbb{C}$ son funciones continuas y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge uniformemente en A a una función $g(z)$, entonces g es continua en A.*

Demostración. Como la suma finita de funciones continuas es continua, basta demostrar el teorema para sucesiones. Para esto, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_N(z) - f(z)| \leq \frac{\epsilon}{3} \qquad \forall \; z \in A$$

También, si $z_0 \in A$, f_N es continua en z_0, por lo que existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_N(z) - f_N(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}$$

si $|z - z_0| < \delta$.

Por consiguiente, si $|z - z_0| < \delta$

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| < \epsilon$$

y por lo tanto f es continua. ■

Probablemente el criterio más útil para detectar convergencia uniforme de una serie está dado por el siguiente teorema.

Teorema I.7.6. *(Prueba M de Weierstrass).*
Sea $g_n : A \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones, supóngase también que existe una sucesión de reales no negativos $\{M_n\}$ que satisfacen:

i) $|g_n(z)| \leq M_n$ *para toda* $z \in A$,

ii) $\Sigma_{n=1}^{\infty} M_n$ *converge, entonces* $\Sigma_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ *converge uniforme y absolutamente en* A.

Demostración. Como $\Sigma_{k=1}^{\infty} M_k$ converge, dada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \epsilon \qquad \forall \; n > N \qquad \text{y} \qquad \forall \; p \in \mathbb{N}$$

por lo cual

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |g_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \epsilon \qquad \forall \; z \in A$$

es decir, las hipótesis del criterio de Cauchy se cumplen (*Teorema I.7.4*) por lo que las series $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(z)|$ y $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ convergen uniformemente en A.

Ejemplo I.7.1. Demostrar, como una aplicación del *Teorema I.7.6*, que la serie

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

converge uniforme y absolutamente en el conjunto cerrado (disco cerrado)

$$A_r = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r \}, \qquad r < 1$$

Solución. Aquí $g_n(z) = z^n / n$ y

$$|g_n(z)| = \frac{|z^n|}{n} \leq \frac{r^n}{n} \leq r^n = M_n$$

ya que $|z| < r$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge para $r < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, teniéndose de esta forma la demostración. ■

Es interesante observar que en contraste, $\sum_{n=1}^{\infty} z^n / n$ no converge uniformemente en el disco abierto $D(0,1) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$. Si esto fuera cierto se tendría que $\sum_{n=1}^{\infty} x^n / n$ convergería uniformemente en $[0,1)$, en cuyo caso para toda $\epsilon > 0$ existiría $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$,

$$\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots + \frac{x^{n+p}}{n+p} < \epsilon \qquad \forall \ x \in [0,1) \qquad \text{y} \qquad \forall \ p \in \mathbb{N}$$

Ahora, como la serie armónica diverge, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que para la ϵ y N anteriores

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \ldots + \frac{1}{N+p} > 2\epsilon$$

y también existe $x \in [0,1)$ tal que $x^{N+p} > 1/2$ (basta tomar $x > (1/2)^{1/(N+p)}$).

Por lo tanto (como $x^N > x^{N+i}$)

$$\frac{x^n}{N} + \frac{x^{n+1}}{N+1} \dots + \frac{x^{N+p}}{N+p} > x^{N+p}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{N+p}\right) > \epsilon$$

lo cual es una contradicción a la primera afirmación y por lo tanto la serie no converge uniformamente en $D(0,1)$ (sólo converge puntualmente).

Sin embargo, obsérvese que $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n / n$ es continua en $D(0,1)$, puesto que para toda $z \in D(0,1)$ existe $r > 0$ tal que $z \in D(0,r) \subset A_r$ y como en A_r hay convergencia uniforme el *Teorema I.7.5* nos asegura la continuidad de g.

Teorema I.7.7. *(Weierstrass)*

i) *Sea A una región en $\mathbb{C}$ y f_n una sucesión de funciones analíticas definidas en A. Supóngase también que $f_n \to f$ uniformemente en cualquiere disco cerrado contenido en A, entonces f es analítica en A. Además $f_n' \to f'$ puntualmente en A y uniformemente en cualquier disco cerrado de A.*

ii) *Si la sucesión de funciones analíticas $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es tal que $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge uniformemente a una función $g(z)$ en discos cerrados de A, entonces g es analítica en A. Además $g'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k'(z)$ puntualmente en A y uniformemente en discos cerrados de A.*

Si además este tipo de convergencia es absoluta se llama normal y se dice que las funciones convergen normalmente.

Estas propiedades no son ciertas en el caso real, pues convergencia uniforme no implica que se pueda diferenciar término a término, por ejemplo, si

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{n}} \qquad \text{y} \qquad f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$$

y es fácil ver que dicha convergencia es uniforme en $\mathbb{R}$. Sin embargo

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\, \cos nx \qquad \text{y} \qquad f'(x) = 0$$

y vemos que $f_n'(x)$ no converge a $f'(x)$, por ejemplo, $f_n'(0) = \sqrt{n} \neq f'(0) = 0$.

Teorema I.7.8. *Sea* $\gamma : [a, b] \to A$ *de clase* C^1 *por tramos y* f_n *una sucesión de funciones continuas definidas en* γ *que convergen uniformemente a una función* f *en* γ, *entonces*

$$\int_\gamma f_n(z)\,dz \to \int_\gamma f(z)\,dz$$

También si $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ *converge uniformemente en* γ, *entonces*

$$\int_\gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma g_n(z)\,dz$$

Lo que dice este teorema es que cuando existe convergencia uniforme se pueden intercambiar los signos de límite y de integral.

Demostración. Dada $\epsilon > 0$, existe N tal que si $n > N$,

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

para toda $z \in \gamma$ y

$$\left| \int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz \right| = \left| \int_\gamma (f_n(z)\,dz - f(z)\,dz) \right| \le \int_\gamma |f_n(z) - f(z)|\,|dz| \le \epsilon \cdot l$$

por lo cual se sigue la primera parte del teorema. La segunda consiste en aplicar la primera parte a la sucesión de sumas parciales. ■

Obsérvese que aplicando el Teorema de Weierstrass repetidas veces se obtiene que $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ uniformemente en discos cerrados. Nótese también que el teorema de Weierstrass no supone convergencia uniforme en A, por ejemplo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^n / n$ converge en $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, pero no uniformemente como ya se demostró, sin embargo como converge uniformemente en $A_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le r\}$ para toda r, tal que $0 < r < 1$, es fácil ver que converge uniformemente en cualquier disco cerrado en A. Por lo cual se aplica el Teorema de Weierstrass y $\sum_{n=1}^{\infty} z^n / n$ es analítica en A y su derivada es $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$, la cual converge uniformemente en discos cerrados en A.

Ejemplo I.7.2.

a) Demuestre que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

es analítica en $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ y escriba la serie para $f'(z)$.

b) Calcular

$$\int_{|z|=1/2} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz$$

Solución.

a) Sea $M_n = 1/n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge y

$$\left| \frac{z^n}{n^2} \right| < \frac{1}{n^2} \qquad \forall \ z \in D(0,1)$$

por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} z^n / n^2$ converge en forma absoluta y uniforme en $D(0,1)$.

Por consiguiente el teorema de Weierstrass implica que f es analítica y que

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$$

b) Sea B un disco cerrado en $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ y δ la distancia de B al círculo $|z| = 1$ y $M_n = (1-\delta)^n$.

Como $0 < \delta < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge y como $z \leq M$ para toda $z \in B$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge en forma absoluta y uniforme en B a alguna función $f(z)$, y de nuevo por el teorema de Weierstrass, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ es analítica en $D(0,1)$, por lo tanto

$$\int_{|z|=1/2} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz = \int_{|z|=1/2} \frac{1}{z}\, dz + \int_{|z|=1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) dz$$

$$= \int_{|z|=1/2} \frac{1}{z}\, dz + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{|z|=1/2} z^n\, dz \right) = 2\pi i$$

Series de potencias, Teorema de Taylor

En esta sección demostraremos que f es analítica si y sólo si f se puede expresar localmente como una *serie de potencias*, llamada *serie de Taylor*. Dichas series son de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Esta propiedad es otra instancia donde el cálculo real es distinto al complejo, por ejemplo, la función real

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es de clase C^∞ y $f^{(k)}(0) = 0$ para toda $k \in \mathbb{N}$, lo que implica que $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\, z^n / n! = 0$, sin embargo cerca de 0 la función f no es idénticamente 0, por lo que f no tiene expansión en serie de Taylor alrededor del 0.

Definición I.7.7. *Una **serie de potencias** alrededor del punto z_0 es una serie de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Lema I.7.1. *(Abel).*
Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números complejos y $r_0, M \in \mathbb{R}^+$ tales que $|a_n|\, r_0^n \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces si $r < r_0$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge en forma absoluta y uniforme en $A_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$.

Demostración. Sea $M_n = M(r/r_0)^n$. Como $r/r_0 < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge.

Además,

$$|a_n(z - z_0)^n| \le |a_n| r^n = |a_n| \frac{r^n \cdot r_0^n}{r_0^n} \le M\left(\frac{r}{r_0}\right)^n = M_n$$

por lo que la prueba M de Weierstrass demuestra el resultado. ■

Obsérvese que si existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w - z_0| = r_0$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - z_0)^n$ converge, entonces se satisfacen las hipótesis del lema, ya que como la serie converge

$$|a_n| |w - z_0|^n = |a_n| r_0^n \to 0$$

cuando $n \to \infty$

Teorema I.7.9. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ una serie de potencias, entonces existe un número $R \in [0, \infty]$, llamado radio de convergencia, tal que si $|z - z_0| < R$ la serie converge y si $|z - z_0| > R$ la serie diverge. La convergencia es uniforme y absoluta en discos cerrados de $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$. Al círculo $|z - z_0| = R$ se le llama círculo de convergencia.*

Como consecuencia de este teorema y del teorema de Weierstrass se tiene el siguiente resultado.

Teorema I.7.10. *La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ es analítica para toda z en el interior del círculo de convergencia.*

También el teorema de Weierstrass permite derivar término por término una serie de potencias.

Teorema I.7.11. *Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, donde $z \in D_R(z_0)$ y R es el radio de* *convergencia, entonces* $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n (z - z_0)^{n-1}$ *y el radio de convergencia de esta nueva serie es* R. *Además,* $a_n = f^{(n)}(z_0) / n!$.

Ahora estableceremos dos criterios para encontrar R.

Teorema I.7.12. *Sea* R *el radio de convergencia de* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

i) *Si* $\text{lím}_{n \to \infty} |a_n| / |a_{n+1}|$ *existe o es* ∞, *dicho límite es* R.

ii) *Si* $\text{lím}_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *existe y lo denotamos como* ρ, *entonces* $\rho = 1/R$. *Si* $\rho = 0$, $R = \infty$ *y si* $\rho = \infty$, $R = 0$.

Ejemplo I.7.3.

a) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ tiene radio de convergencia 1, puesto que $a_n = 1$ para toda n y

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$$

b) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n / n!$ tiene radio de convergencia $R = +\infty$, es decir, es una función entera, ya que $a_n = 1/n!$ y

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \to \infty} \frac{(1/n!)}{[1/(n+1)!]} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \to \infty} (n+1) = \infty$$

c) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$ tiene radio de convergencia 0, puesto que

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

cuando $n \to \infty$. ■

No es difícil demostrar que para toda serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$,

$1/R = \text{lím sup} \sqrt[n]{|a_n|}$, donde *lím sup* es el supremo de los puntos de acumulación de $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$. Si $\text{lím} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe, entonces $\text{lím sup} \sqrt[n]{|a_n|} = \text{lím} \sqrt[n]{|a_n|}$ y obtenemos el mismo resultado que el inciso *(ii)* del *Teorema I.7.12.*

Teorema de Taylor.

La discusión sobre series de potencias mostró que estas son funciones analíticas, el recíproco también es cierto, cualquier función analítica es localmente representable por una serie de potencias.

Teorema I.7.13. ***(Taylor).***
Sea f analítica en una región A y $z_0 \in A$. Sea $A_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ un disco abierto de radio r totalmente contenido en A. Entonces para toda $z \in A_r$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

converge en A_r (lo cual implica que el radio de convergencia de la serie es $\geq r$). Además

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

a esta serie se le llama serie de Taylor de la función f alrededor de z_0.

Ejemplo I.7.4. Obtener la serie de Taylor de $f(z) = e^z$ alrededor del origen.

Solución. f es entera y $f^{(n)}(z) = e^z$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $f^{(n)}(0) = 1$ y

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \forall \ z \in \mathbb{C} \qquad \blacksquare$$

A la serie de Taylor alrededor del 0 se le llama *serie de MacLaurin*. Para demostrar el teorema de Taylor se necesita un lema.

Lema I.7.2. *La serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *(serie geométrica) converge en forma absoluta y uniforme en los discos cerrados de radio* $R < 1$ *a la función*

$$\frac{1}{1-z}$$

Demostración. Sea $A_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ y $M^n = R^n$.

$\sum_{n=0}^{\infty} M^n$ converge y $|z^n| = |z|^n \leq R^n$ para toda $z \in A_R$, por lo que $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge en forma absoluta y uniforme en A_R.

A continuación veremos que la función a la que converge es $1/(1-z)$. Sabemos que la sucesión de sumas parciales está dada por

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} z^i = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

y

$$\sum_{i=1}^{\infty} z^i = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}$$

Otro resultado necesario para demostrar el teorema de Taylor es el siguiente:

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ *converge uniformemente en* $B \subset \mathbb{C}$ *y* $h(z)$ *es acotada en* B*, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} h(z)\, g_n(z)$ *converge uniformemente en* B *a* $h(z) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$.

Esto es cierto ya que como $h(z)$ es acotada, $|h(z)| < M$ para toda $z \in B$. Además, dada $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n+p} g_i(z) \right| < \frac{\epsilon}{M}$$

y por lo tanto

$$|g_n(z)\,h(z) + \dots + g_{n+p}(z)\,h(z)| = |g_n(z) + \dots + g_{n+p}(z)|\,|h(z)| \leq M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon$$

para toda $z \in B$ y para toda $p \in \mathbb{N}$.

También se puede demostrar que si las funciones f y g son analíticas en $D_r(0)$ con $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z_n$, entonces

$$f(z)\,g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_n \qquad \forall \quad z \in D_r(0)$$

donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

es decir, las series se pueden multiplicar como polinomios infinitos.

Demostración. (Teorema de Taylor).

Sea $\gamma(t) = z_0 + r' e^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ y $0 < r' < r$. Por la fórmula de la integral de Cauchy si $z \in \operatorname{int}\gamma$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

Reescribiendo $1/(w-z)$ como una serie de potencias en $z - z_0$:

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n$$

Utilizando el *Lema I.7.2* se observa que para z fija esta serie converge uniformemente en la trayectoria γ respecto a la variable w ya que

$$|z - z_0| < |w - z_0| \qquad \forall \quad z \in \operatorname{int}\gamma$$

Por otro lado, sobre la trayectoria γ la función $f(w)/(w - z_0)$ es acotada ya que es una función continua en w. Por el resultado obtenido después del *Lema I.7.2* la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}$$

converge uniformemente en γ respecto a la variable w a la función

$$\frac{f(w)}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{f(w)}{w - z}$$

Finalmente, usando el *Teorema I.7.8* se tiene

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma \frac{f(w)(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw$$

por lo cual

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \cdot \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \end{aligned}$$

Como el radio r' del círculo γ fue arbitrario, la expresión anterior es válida en el disco abierto más grande posible contenido en A alrededor de z_0. ■

Como consecuencia de estos teoremas se tiene que si $A \subset \mathbb{C}$ es una región, entonces $f: A \to \mathbb{C}$ es analítica en A si y sólo si para toda $z_0 \in A$ y para todo $D_r(z) \subset A$, f es representable como una serie de potencias en $D_r(z_0)$. Notar que esto último implica que la representación de una función en serie de potencias alrededor de z_0 es única y coincide con su serie de Taylor alrededor de z_0.

Ejemplo I.7.5.

a) ¿Es posible que una serie de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$ converja en $z=0$, pero diverja en $z=3$?

b) Calcule la serie de $\ln(1+z)$ alrededor de 0 y encontrar el radio de convergencia.

c) Encontrar la serie de Taylor de $z/(z-1)$ alrededor de 0 y su radio de convergencia.

d) Calcule los primeros términos de la serie de Taylor para $e^z/(1-z)$ alrededor del 0.

Solución.

a) Por el *Teorema I.7.9*, el radio de convergencia es cuando menos 2, por lo que debe converger para $z=3$.

b) Si se elige la rama principal del logaritmo, $\ln(1+z)$ es analítica en

$$\mathbb{C} - \{\, z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z < -1,\ \mathrm{Im}\, z = 0 \,\}$$

por lo que el radio de convergencia R es menor o igual a 1.

Ahora bien, sabemos que

$$\begin{array}{lll} f(z) = \ln z, & \text{de donde} & f(0) = 0 \\ f'(z) = \dfrac{1}{z+1}, & \text{de donde} & f'(0) = 1 \\ f''(z) = -\dfrac{1}{(z+1)^2}, & \text{de donde} & f''(0) = -1 \end{array}$$

Inductivamente se tiene

$$f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(z+1)^n}, \qquad n \geq 1$$

de donde

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Por lo tanto la serie de Taylor es

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

Si $z = 1$, la serie es $-\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n / n$, que es una serie de signos alternados convergente, por lo cual $R = 1$.

c) Se demostró que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \qquad |z| < 1$$

y por la unicidad de la serie de Taylor, esta es precisamente la serie de Taylor alrededor de 0 de la función $1/(1-z)$.

Ahora, por el comentario que se dió antes del enunciado de este ejemplo, la serie de Taylor de $z/(z-1)$ es

$$\frac{z}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}$$

Si $z = 1$ esta serie obviamente diverge, por lo que $R = 1$.

d) Como

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{y} \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

nuevamente por el comentario antes del enunciado del ejemplo

$$\begin{aligned} \frac{e^z}{1-z} &= (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots) \cdot \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\right) \\ &= 1 + (z + z) + \left(\frac{z^2}{2} + z^2 + z^2\right) + \left(\frac{z^3}{6} + \frac{z^3}{2} + z^3 + z^3\right) + \ldots \\ &= 1 + 2z + \frac{5}{2} z^2 + \frac{8}{3} z^3 + \ldots \end{aligned}$$

Con esto termina el ejemplo. ■

Serie de Laurent. Clasificación de singularidades.

En esta sección veremos que si f es analítica en $D_r(z_0) - \{z_0\}$, entonces tiene una expansión en serie llamada de *Laurent*. Primero un lema análogo al de Abel.

Lema I.7.3. *Supongamos que el conjunto* $\{|b_n| / r_0^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *está acotado, donde* $b_n \in \mathbb{C}$ *para toda* n *y* $r_0 \in \mathbb{R}^+$, *entonces para toda* $r_1 > r_0$ *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n / (z - z_0)^n$ *converge en forma absoluta y uniforme en* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \geq r_1\}$.

Otro ingrediente necesario para el teorema de Laurent es la fórmula de Cauchy para el anillo.

Lema I.7.4. *Sea* f *analítica en* $A = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, $r_1 < \bar{\rho}_1 < \rho_1 < \rho_2 < \bar{\rho}_2 < r_2$, $B_{\rho_1, \rho_2} = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}$ *y* $z \in B_{\rho_1, \rho_2}$, *entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{1}{w - z}\, dw$$

donde $\gamma_j = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \bar{\rho}_j\}$ *para* $j = 1, 2$. *(*r_1 *puede ser* 0, r_2 *puede ser* ∞*).*

Teorema I.7.14. ***(Laurent)***.
Bajo las hipótesis del Lema I.7.4

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

y converge absolutamente en A *y uniformemente en* B_{ρ_1, ρ_2}. *Esta es la denominada serie de Laurent.*

Corolario I.7.3. *Bajo las hipótesis del teorema de Laurent, si*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \qquad \forall\ z \in A$$

entonces

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw \qquad y \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w)(w - z_0)^{n-1}\, dw$$

donde $\gamma(\theta) = z_0 + r e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ *y* $r_1 < r < r_2$. *Toda expansión de* f *de la forma anterior que converja puntualmente, es igual a la expansión de Laurent, es decir, la expansión de Laurent es única; a los números* a_n *y* b_n *se les llama coeficientes de Cauchy.*

Algunas veces se escribe la expansión de Laurent como

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw$$

Como la expansión en serie de Laurent es única, podemos asegurar que si mediante cualquier método logramos obtener un desarrollo alrededor de z_0, de la forma dada en el *Corolario I.7.3*, que converja uniformemente, necesariamente debe coincidir con el desarrollo de Laurent.

Clasificación de singularidades.

Se estudiará el comportamiento de las funciones que son analíticas en $D_r(z_0) - \{z_0\}$.

Definición I.7.8. *Si* f *es analítica en* $D_r(z_0)$, *excepto en* z_0, *a* z_0 *se le llama singularidad aislada de* f.

En este caso el Teorema de Laurent se aplica y

$$f(z) = \ldots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \ldots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots$$

para toda $z \in D_r(z_0) - \{z_0\}$.

Existen exactamente tres posibilidades excluyentes:

i) $b_k \neq 0$ y $b_l = 0$ para toda $l > k$.

ii) $b_k \neq 0$, para un número infinito de $k's$ (un número finito de ellas puede ser cero).

iii) $b_k = 0$ para toda k.

En el primer caso se dice que la función f tiene un polo de orden k en z_0, en el segundo que f tiene una singularidad esencial en z_0 y en el tercero que z_0 es una singularidad removible de f.

Si el orden de polo es 1, se dice que es un polo simple.

Obsérvese que si f tiene una singularidad removible en z_0, entonces f se puede redefinir en $z = z_0$ de tal forma que f sea analítica en una vecindad de z_0. Basta hacer $f(z_0) = a_0$. En este caso la serie de Laurent es igual a $f(z)$ para toda z en una vecindad de z_0 (inclusive en z_0) y dicha serie de potencias coincide con la serie de Taylor.

Ejemplo I.7.6. Sea $f(z) = (\operatorname{sen} x)/x$. Esta función no está definida en $x = 0$ y la serie de Laurent es

$$\frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots$$

en donde vemos que $a_0 = 1$. Si se define

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

entonces $f(z)$ es igual a su serie para toda x, la cual es analítica por ser una serie de potencias positivas.

Definición I.7.9. *Al número complejo b_1 en la expresión de Laurent de f se le llama residuo de f en z_0.*

Obsérvese que si se integra cada término de la serie de Laurent alrededor de z_0 a lo largo de una trayectoria cerrada γ, el único término que da una contribución diferente de cero es el término $b_1/(z-z_0)$ y el resultado es $2\pi b_1$ (ver el *Ejemplo I.4.3*), razón por la cual a b_1 se le llama residuo.

Definición I.7.10. *Una función analítica en una región A, excepto por polos en dicha región, se le llama meromórfica en A. Cuando se use sólo la palabra meromórfica, significará meromórfica en $\mathbb{C}$..*[1]

Definición I.7.11. *Si f tiene un polo de orden k en z_0, a la expresión*

$$\frac{b_k}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{b_1}{z-z_0}$$

en la serie de Laurent, se le llama la parte principal de f en z_0.

Los residuos son muy útiles para calcular integrales, por ejemplo se tiene el siguiente resultado.

Corolario I.7.4. *Sea f analítica en una región $A-\{z_0\}$, donde z_0 es una singularidad con residuo b_1, si γ es cualquier círculo recorrido en sentido positivo alrededor de z_0 contenido en A, entonces*

[1] Algunos autores ysan la palabra meromorfa en lugar de meromórfica.

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i b_1$$

Más adelante, al ver el *teorema del residuo*, se dará un resultado más general que involucra también el concepto de residuos.

Demostración. Los coeficientes de Cauchy están dados por

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w)\, (w - z_0)^{k-1}\, dw$$

en particular, si $k = 1$, se tiene el resultado. ∎

Ejemplo I.7.7. Calcular la integral

$$\int_{|z|=r} e^{1/z}\, dz$$

Solución.

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \ldots \qquad z \neq 0$$

por lo que 0 es una singularidad esencial y el residuo es 1, por lo cual

$$\int_{|z|=r} e^{1/z}\, dz = 2\pi i$$ ∎

Ahora se establece un criterio para distinguir los diversos tipos de singularidades, este resultado se debe principalmente a Riemann.

Teorema I.7.15. Sea A una región, $z_0 \in A$ y f analítica en $A - \{z_0\}$,

i) z_0 es una singularidad removible de f si y sólo si
   a) $|f(z)| \leq M$ para toda $z \in D_r(z_0) - \{z_0\} \subset A$ o
   b) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe o

c) $\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) = 0$.

ii) z_0 es un polo simple si y solo $\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)$ si existe y no es cero (este límite es b_1).

iii) z_0 es un polo de orden menor o igual a k, o una singularidad removible si y sólo si se satisface una de las siguientes condiciones:

a) existen $M, k \in \mathbb{N}$ tales que $|f(z)| \le M/|z - z_0|^k$ en una vecindad reducida de z_0,

b) $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z)$ existe o

c) $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{k+1} f(z) = 0$.

iv) z_0 es un polo de orden $k \ge 1$ si y sólo si existe $\varphi : U \to \mathbb{C}$ analítica, siendo U una vecindad de z_0 en A y $\varphi(z_0) \ne 0$ tal que $f(z) = \varphi(z)/(z - z_0)^k$.

Ceros de orden k.

Definición I.7.12. *Sea f una función analítica en una región A, se dice que f tiene un cero de orden k en z_0 si $f^{(r)}(z_0) = 0$ para toda $r < k$, $f(z_0) = 0$ y $f^{(k)}(z_0) \ne 0$.*

Observación. f tiene un cero de orden k en z_0 si y sólo si

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z)$$

donde $g(z)$ es analítica en una vecindad de z_0 y $g(z_0) \ne 0$.

Esto es consecuencia de la expansión de f en series de Taylor, en efecto, si f tiene un cero de orden k en z_0, $f(z_0)$ y sus primeras $k - 1$ derivadas valen cero y por lo tanto, los primeros k términos de la serie de Taylor valen cero. Entonces

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k}$$

$$= (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \qquad \text{con} \quad b_n = a_{n+k}$$

y como las series de potencias convergentes representan siempre funciones analíticas, se deduce que

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z)$$

donde g es analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

Recíprocamente, si $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ con $g(z_0) \neq 0$, por la unicidad de las series de Taylor, la serie para f en z_0 se obtiene de la serie para g en z_0 multiplicándola por $(z - z_0)^k$.

Teorema I.7.16. *Sea f una función analítica en una vecindad de z_0, entonces f tiene un cero de orden k en z_0 si y sólo si $1/f$ tiene un polo de orden k en z_0. Además si h es analítica y $h(z_0) \neq 0$, $h(z)/f(z)$ tiene un polo de orden k.*

Singularidades esenciales.

Observación. Si f tiene un polo de orden k en z_0, entonces

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$$

Esto se sigue ya que $f(z) = \varphi(z)/(z - z_0)^k$, donde $\varphi(z)$ es analítica y $\varphi(z_0) \neq 0$, obteniéndose $|f(z)| \geq M/(z - z_0)^k$ para toda $z \in D_r(z_0)$, siendo $D_r(z_0)$ una vecindad reducida de z_0 en donde $\varphi(z) \neq 0$ y $M = \text{ínf}_{z \in D_r(z_0)} |\varphi(z)|$. Entonces

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| \geq \lim_{z \to z_0} \frac{M}{|z - z_0|^k} = \infty$$

El inverso también es cierto y por lo tanto se tiene que una singularidad aislada de f en z_0 es un polo de orden k si y sólo si $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$. Sin embargo en el caso de singularidades esenciales esto no sucede ya que, en general, $|f(z)|$ no tiende a ∞ cuando $z \to z_0$. De hecho, $\lim_{z \to z_0} |f(z)|$ no existe (ver los dos teoremas siguientes).

Teorema I.7.17. *(Picard)*
Sea z_0 una singularidad esencial de la función f y U cualquier vecindad reducida arbitrariamente pequeña de z_0, entonces para toda $w \in \mathbb{C}$, excepto quizá un único valor, la ecuación $f(z) = w$ tiene un número infinito de soluciones z en U.

Notar que esto implica que cerca de una singularidad esencial la función $f(z)$ toma casi todos los valores posibles y por lo tanto $\lim_{z \to z_0} |f(z)|$ no existe. Por ejemplo,

$$\lim_{z \to z_0} e^{-1/z} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{e^{1/z}}$$

no existe.

Una versión más simple del teorema anterior es:

Teorema I.7.18. *(Casorati-Weierstrass)*
Sea z_0 una singularidad esencial de f y w un número complejo arbitrario, entonces existe una sucesión z_n tal que $z_n \to z_0$ y $f(z_n) \to w$.

Ejemplo I.7.8.

a) Encuentre expansiones de Laurent para
   i) $(z+1)/z$, $z_0 = 0$, $r_1 = 0$, $r_2 = \infty$.
   ii) $z/(z^2+1)$, $z_0 = i$, $r_1 = 0$, $r_2 = 2$.

b) Determine el orden del polo de las siguientes funciones.
   i) $(\cos z)/z^2$, .
   ii) $(e^z - 1)/z^2$, $z_0 = 0$.
   iii) $(z+1)/(z-1)$, $z_0 = 0$.

c) Determine cuáles de las siguientes funciones tienen singularidades removibles en $z_0 = 0$.

i) $(\operatorname{sen} z)/z$.

ii) $(e^z)/z$.

iii) $(e^z - 1)^2/z^2$.

iv) $z/(e^z - 1)$.

Solución.

a) i) La función se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{z+1}{z} = \frac{1}{z} + 1$$

Como $(1/z) + 1$ tiene la forma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z_n$ con $C_0 = C_1 = 1$ y $C_n = 0$ para toda $n \neq 0, -1$, por unicidad, $(1/z) + 1$ es la serie de Laurent de la función dada.

ii) Descomponiendo en fracciones parciales

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{z}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{2(z+i)}$$

El primer término ya tiene la forma requerida. Analicemos ahora el segundo. $1/(z+i)$ es analítica cerca de $z_0 = i$ y su desarrollo en serie de Taylor alrededor de $z_0 = i$ es

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i\left(1 + \dfrac{z-i}{2i}\right)} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i}\right)^n$$

lo cual es válido si $|z - i| < |2i| = 2$ (recordar que de acuerdo con Taylor $1/(1+r) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n$ si $|r| < 1$).

Por consiguiente

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{4i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i-z}{2i}\right)^n$$

b) i) z^2 tiene un cero de orden 2 y $\cos 0 = 1$, por lo que (usando el *Teorema I.7.16*)

$$\frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \ldots$$

Por lo tanto, el orden del polo es 2.

ii) Como el numerador en 0 es 0, el *Teorema I.7.16* no se aplica y necesitamos hallar su serie de Laurent

$$\frac{e^z - 1}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots - 1\right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \ldots$$

y por tanto, 0 es un polo simple.

iii) f es analítica en z_0.

c) i) $\lim_{z\to 0}(z\,\mathrm{sen}\,z)/z = \lim_{z\to 0}\mathrm{sen}\,z = 0$ y 0 es una singularidad removible. Alternativamente

$$\frac{\mathrm{sen}\,z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots$$

Por lo tanto, $b_k = 0$ para toda k y la singularidad es removible.

ii) $\lim_{z\to 0}(e^z/z)\,z = 1$ y 0 es un polo simple.

iii) $\lim_{z\to 0}[(e^z - 1)/z]\,z = 0$ y por tanto $(e^z - 1)/z$ tiene una singularidad removible en 0 y también $(e^z - 1)^2/z^2$.

iv) Como

$$\frac{e^z - 1}{z} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \ldots$$

entonces $\lim_{z\to 0}(e^z - 1)/z = 1$ y $\lim_{z\to 0} z/(e^z - 1) = 1$, por lo que la función $z/(e^z - 1)$ tiene una singularidad removible en z_0.

Ejercicios propuestos.

1. Determine el radio de convergencia de cada una de las siguientes series.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$

h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left[3+(-1)^n\right]^n z^n$

j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\cos in) z^n$

k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(n+a^n\right) z^n$

2. Si el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

es R $(0 < R < \infty)$, determine el radio de convergencia de cada una de las siguientes series.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^k c_n z^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) c_n z^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n c_n z^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n^k z^n$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1+z_0^n\right) c_n z^n$

3. Si los radios de convergencia de las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

son R_1 y R_2 respectivamente, determine el radio de convergencia de cada una de las siguientes series.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} z^n$

4. Obtenga, para $|z| < 1$, la suma de caa una de las siguientes series.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$

5. Determine el comportamiento de las siguientes series en la frontera del círculo de convergencia.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{kn}}{n}$

g) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{3n-1}}{\ln n}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n^2}$

6. Desarrolle cada una de las siguientes funciones en serie de Laurent en una vecindad del punto señalado.

a) $f(z) = \frac{1}{z-2}$, en una vecindad del punto $z = 0$.

b) $f(z) = \frac{1}{(z-a)^k}$ $(a \neq 0,\ k \in \mathbb{N})$, en una vecindad del punto $z = 0$.

c) $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$, en vecindades de los puntos $z=0$ y $z=1$.

d) $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ $(0<|a|<|b|)$, en vecindades de los puntos $z=0$ y $z=a$.

e) $f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, en una vecindad del punto $z=2$.

f) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, en una vecindad del punto $z=i$.

g) $f(z)=z^2 e^{1/z}$, en una vecindad del punto $z=0$.

h) $f(z)=e^{1/(1-z)}$, en una vecindad del punto $z=1$.

i) $f(z)=\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, en una vecindad del punto $z=2$.

j) $f(z)=z^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{z-1}$, en una vecindad del punto $z=1$.

k) $f(z)=\operatorname{sen}\dfrac{z}{1-z}$, en una vecindad del punto $z=1$.

l) $f(z)=\cot z$, en una vecindad del punto $z=0$.

7. Desarrolle cada una de las siguientes funciones en serie de Laurent en el anillo indicado.

a) $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ $(0<|a|<|b|)$, en el anillo $|a|<|z|<|b|$.

b) $f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, en el anillo $1<|z|<2$.

c) $f(z)=ctg z$, en el anillo $\pi<|z|<2\pi$.

d) $f(z)=\dfrac{1}{z-2}\ln\dfrac{z-i}{z+i}$, en el anillo $1<|z|<2$.

8. Desarrolle cada una de las siguientes funciones en serie de Laurent para $|z|>1$.

a) $f(z)=e^{z+1/z}$.

b) $f(z)=\operatorname{sen} z \operatorname{sen}\dfrac{1}{z}$.

9. Analice si cada una de las siguientes funciones admite un desarrollo en serie de Laurent en una vecindad del punto indicado.

a) $f(z) = \cos\dfrac{1}{z}, \ z = 0.$

b) $f(z) = \sec\dfrac{1}{z-1}, \ z = 1.$

c) $f(z) = \tanh\dfrac{1}{z}, \ z = 0.$

d) $f(z) = \dfrac{z^2}{\operatorname{sen}\dfrac{1}{z}}, \ z = 0.$

e) $f(z) = \ln z, \ z = 0.$

f) $f(z) = z^{\alpha} \ (\alpha \in \mathbb{R}), \ z = 1.$

10. Obtener los puntos singulares de cada una de las siguientes funciones y analizar la naturaleza de los mismos.

a) $f(z) = \dfrac{1}{z - z^3}$

b) $f(z) = \dfrac{z^5}{(1-z)^2}$

c) $f(z) = \dfrac{e^z}{1 + z^2}$

d) $f(z) = z\, e^{-z}$

e) $f(z) = \dfrac{e^z}{z\left(1 - e^{-z}\right)}$

f) $f(z) = \dfrac{1}{z^3 (2 - \cos z)}$

g) $f(z) = e^{1/z^2}$

h) $f(z) = e^{z/(1-z)}$

i) $f(z) = \dfrac{1}{z - z^3}$

j) $f(z) = \dfrac{e^{1/(z-1)}}{e^z - 1}$

k) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$

l) $f(z) = \tan^2 z$

m) $f(z) = \cot z - \dfrac{1}{z}$

n) $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z - \operatorname{sen} a}$

o) $f(z) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{1-z}$

p) $f(z) = \cot\dfrac{1}{z}$

q) $f(z) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2}$

r) $f(z) = e^{\cot(1/z)}$

I.8 Teorema del residuo

Esta sección está enfocada al teorema del residuo, el cual establece que la integral de una función analítica alrededor de una curva cerrada es igual a $2\pi i$ veces la suma de los residuos de la función dentro de la curva. Se verá la importancia de este teorema especialmente por su aplicación en el cálculo de integrales definidas. Así entonces, como se debe tener un buen manejo de los residuos, la sección inicia con las técnicas para calcular residuos de funciones en singularidades aisladas.

Cálculo de residuos.

Como se vio en la sección anterior, si una función f tiene una singularidad aislada en z_0, entonces f admite una expansión en serie de Laurent que es válida en una vecindad reducida de z_0:

$$f(z) = \ldots + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots$$

donde b_1, el coeficiente del término $\frac{1}{z - z_0}$, se denomina *residuo* de f en z_0, lo cual se escribe como

$$b_1 = \operatorname{Res}(f, z_0)$$

o como

$$b_1 = \operatorname*{Res}_{z = z_0} f(z)$$

Lo que se desea, es desarrollar técnicas para calcular el residuo sin tener que obtener la expansión en serie de Laurent. Desde luego, no debe haber ningún problema si la expansión en serie de Laurent se conoce previamente.

Ejemplo I.8.1. Del desarrollo conocido para e^u, con $u = 1/z$, se tiene que

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots + \frac{1}{n!\, z^n} + \dots$$

de donde, el residuo de f en $z_0 = 0$ es 1, es decir,

$$\operatorname{Res}(f, 0) = 1$$ ■

Particularmente importante es el caso de un polo (en contraste con una singularidad esencial). Para este caso se tienen técnicas bastante sencillas que son fáciles de aplicar si el orden del polo no es demasiado grande.

Si se tiene una función f definida en una región A con una singularidad aislada en z_0, entonces procederemos de la siguiente forma para encontrar el residuo. Primero se verá si es fácil encontrar algunos de los primeros términos en la serie de Laurent. Si es así, el residuo de f en z_0 será el coeficiente de $\frac{1}{z - z_0}$ en la serie. Si no, debemos estimar el orden de la singularidad, verificar que concuerde con las reglas que se desarrollarán en esta sección y calcular el residuo de acuerdo a dichas reglas.

Singularidades removibles

Se demostró en la sección anterior que f tiene una singularidad removible en z_0 si y sólo si

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$$

El siguiente teorema cubre muchos casos importantes y algunas veces puede ser más fácil de usar que el criterio del límite.

Teorema I.8.1. *Si $g(z)$ y $h(z)$ son analíticas y tienen ceros del mismo orden en z_0, entonces*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

tiene una singularidad removible en z_0.

Ejemplo I.8.2.

i) La función

$$f(z) = \frac{e^z}{z - 1}$$

no tiene singularidad en $z_0 = 0$.

ii) La función

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

tiene una singularidad removible en 0 porque $e^z - 1$ y z tienen ceros de orden 1. (Ellos se anulan pero sus derivadas no).

iii) La función

$$f(z) = \frac{z^2}{\operatorname{sen}^2 z}$$

tiene una singularidad removible en $z_0 = 0$ porque tanto el numerador como el denominador tiene ceros de orden 2.

Polos simples

Teorema I.8.2. *Sean g y h analíticas en z_0. Si $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ y $h'(z_0) \neq 0$, entonces*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

tiene un polo simple en z_0 y

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Teorema I.8.3. *Si $g(z)$ tiene un cero de orden k en z_0 y $h(z)$ un cero de orden $k+1$, entonces la función*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

tiene un polo simple con residuo

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = (k+1)\,\frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}$$

Polos dobles

Teorema I.8.4. *Sean g y h analíticas en z_0. Si $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) = 0$ y $h''(z_0) \neq 0$, entonces*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

tiene un polo de orden dos en z_0 con residuo

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = 2\,\frac{g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2}{3}\,\frac{g(z_0)\,h'''(z_0)}{\left[h''(z_0)\right]^2}$$

Teorema I.8.5. *Sean g y h analíticas en z_0. Si $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0, h'(z_0) = 0$ y $h'''(z_0) \neq 0$, entonces $f(z) = g(z)/h(z)$ tiene un polo de orden dos en z_0 con residuo*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = 3\,\frac{g''(z_0)}{h'''(z_0)} - \frac{3}{2}\,\frac{g'(z_0)\,h^{(iv)}(z_0)}{\left[h'''(z_0)\right]^2}$$

Polos de mayor orden

Para polos de orden mayor a dos se pueden desarrollar fórmulas de la misma forma como las precedentes, pero son bastante complicadas. Un método general que puede usarse es el del siguiente teorema.

Teorema I.8.6. *Si f tiene una singularidad aislada en z_0 y k es el menor entero no negativo tal que* $\lim_{z \to z_0}(z - z_0)^k f(z)$ *existe, entonces f tiene un polo de orden k en z_0 y*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{\varphi^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

donde $\varphi(z) = (z - z_0)^{(k)} f(z)$ es analítica en z_0.

Singularidades esenciales

En el caso de una singularidad esencial no existen fórmulas sencillas como las anteriores, por lo que debemos de hacer uso de nuestra habilidad para encontrar el desarrollo en serie de Laurent.

Teorema I.8.7. *(Teorema del residuo).*
Sea $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en una región A, excepto en los puntos $z_1, z_2, \dots, z_n \in A$ y C una trayectoria cerrada simple en A recorrida en sentido positivo que es homotópica a un punto en A y que rodea a los puntos $z_1, z_2, \dots, z_n$, entonces

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_j)$$

donde $\operatorname{Res}(f, z_j)$ *es el residuo de f en z_j.*

En lugar de dar una demostración rigurosa del teorema, vamos a indicar de manera intuitiva porque esto es cierto para curvas simples. Por la fórmula para los coeficientes de

Cauchy se tiene que para la curva cerrada simple $C_k : |z - z_k| = r_k$ que rodea únicamente a la singularidad z_k entonces

$$2\pi i \, b_1(z_k) = \oint_{|z - z_k| = r_k} f(z) \, dz$$

donde, como hemos visto, $b_1(z_k)$ es el residuo de f en z_k. Un resultado análogo se tiene para curvas que rodeen a las otras singularidades. Si ahora se utiliza el teorema de la deformación para deformar y unir estas curvas de tal manera que la curva C se reproduzca (cancelando algunos sectores de las curvas que dan contribuciones con signos contrarios), se obtiene la fórmula del teorema.

Ejemplo I.8.3.

i) Calcular

$$\oint_C \frac{dz}{z^4 + 1}$$

donde C consiste de la porción del eje x de -2 a 2 y la semicircunferencia en el semiplano superior de 2 a -2 centrada en 0.

ii) Calcular

$$\oint_C \frac{1 + z}{1 - \cos z} \, dz$$

donde C es la circunferencia de radio 7 alrededor de cero.

Solución.

i) Los puntos singulares del integrando ocurren en las cuatro raíces de -1:

$$z_1 = e^{\pi i/4}, \quad z_2 = e^{3\pi i/4}, \quad z_3 = e^{5\pi i/4} \quad y \quad z_4 = e^{7\pi i/4}$$

Las únicas singularidades que se encuentran dentro de la trayectoria C son z_1 y z_2. Por lo tanto, por el teorema del residuo

$$\int_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \sum_{j=1}^{2} \operatorname{Res}(f, z_j)$$
$$= 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2)\right]$$

Para calcular $\operatorname{Res}(f, z_1)$ observe que $e^{\pi i/4}$ es un polo simple de la función $1/(z^4+1)$, así que

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{1}{4\left(e^{\pi i/4}\right)^3} = \frac{e^{\pi i/4}}{4e^{\pi i}} = -\frac{1}{4}e^{\pi i/4}$$

Similarmente,

$$\operatorname{Res}(f, z_2) = \frac{1}{4\left(e^{3\pi i/4}\right)^3} = \frac{e^{-\pi i/4}}{4e^{2\pi i}} = \frac{1}{4}e^{-\pi i/4}$$

Por lo tanto

$$\oint_C \frac{dz}{z^4+1} = \frac{2\pi i}{4}\left(e^{-\pi i/4} - e^{\pi i/4}\right) = \pi\,\frac{e^{\pi i/4} - e^{-\pi i/4}}{2i}$$
$$= \pi \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

ii) Las singularidades de $f(z) = (1+z)/(1-\cos z)$ ocurren cuando

$$\begin{aligned} 1 - \cos z &= 0 \\ \cos z &= 1 \\ \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} &= 1 \\ e^{iz} + e^{-iz} &= 2 \\ \left(e^{iz}\right)^2 - 2e^{iz} + 1 &= 0 \\ \left(e^{iz} - 1\right)^2 &= 0 \\ e^{iz} &= 1 \\ z &= 2\pi n \quad \text{para} \quad n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Las únicas singularidades de $f(z)$ que están dentro del círculo de radio 7 son

$$z_1 = -2\pi, \quad z_2 = 0 \quad \text{y} \quad z_3 = 2\pi ,$$

las cuales son polos de orden 2 (usando el *Teorema I.8.4* de esta sección).

Los residuos de estos polos son

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{2}{\cos(-2\pi)} = 2$$
$$\operatorname{Res}(f, z_2) = \frac{2}{\cos 0} = 2$$
$$\operatorname{Res}(f, z_3) = \frac{2}{\cos(2\pi)} = 2$$

Por lo tanto, por el teorema del residuo

$$\oint_C \frac{1+z}{1-\cos z}\, dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2) + \operatorname{Res}(f, z_3)\right] = 12\pi i \qquad \blacksquare$$

Integrales definidas.

El teorema del residuo es muy útil para calcular integrales definidas que no es fácil calcular mediante métodos reales.

Teorema I.8.8. *Sea $f(z)$ analítica en $\mathbb{C}$, excepto por un número finito de polos, los cuales no son reales, supóngase también que*

$$|f(z)| \le \frac{M}{|z|^2}, \qquad \forall \ |z| > R, \qquad \text{con} \ \ R, M \in \mathbb{R}^+$$

y que f toma valores reales en $\mathbb{R}$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum \{\text{Residuos de } f \text{ en el semiplano superior}\}$$
$$= -2\pi i \sum \{\text{Residuos de } f \text{ en el semiplano inferior}\}$$

Corolario I.8.1. *Las hipótesis del* Teorema I.8.8 *se cumplen si*

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

donde $p(z)$ *y* $q(z)$ *son polinomios tales que* $gr(q) \geq 2 + gr(p)$ *y* q *no tiene ceros en el eje real.*

Ejemplo I.8.4. Calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1}\, dx$$

Solución.

El integrando claramente satisface las hipótesis del *Corolario I.8.1*. Las singularidades son

$$\alpha_1 = e^{\pi i/4}, \qquad \alpha_2 = e^{3\pi i/4}, \qquad \alpha_3 = e^{5\pi i/4} \qquad \text{y} \qquad \alpha_4 = e^{7\pi i/4}$$

las cuales son polos simples ya que

$$\lim_{z \to \alpha_j} \frac{z - \alpha_j}{z^4 + 1}; \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$

existe y es distinto de 0.

Estos límites son precisamente los residuos. De acuerdo con el *Teorema I.8.8*, sólo necesitamos calcular los que están en el semiplano superior o en el semiplano inferior. Calculando los primeros tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to \alpha_1} \frac{z - \alpha_1}{z^4 + 1} &= \lim_{z \to \alpha_1} \frac{1}{(z - \alpha_2)(z - \alpha_3)(z - \alpha_4)} \\
&= \frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)} \\
&= \frac{1}{\left(e^{\pi i/4} - e^{3\pi i/4}\right)\left(e^{\pi i/4} - e^{5\pi i/4}\right)\left(e^{\pi i/4} - e^{7\pi i/4}\right)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}(1+1)i} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{i}{(1+i)} = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)$$

y

$$\lim_{z \to \alpha_2} \frac{z-\alpha_2}{z^4+1} = \lim_{z \to \alpha_2} \frac{1}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)}$$

$$= \frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i\left[-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i) + \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)\right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \qquad \blacksquare$$

Integrales trigonométricas definidas.

Teorema I.8.9. *Sea $R(x,y)$ una función racional de x e y y sea f definida como*

$$f(z) = \frac{R\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]}{iz}$$

entonces, si f no tiene polos en el círculo unitario,

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta = 2\pi i \sum \{\text{Residuos de } f \text{ en } |z|<1\}$$

Demostración. Si $z(\theta) = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, con $\theta \in (0, 2\pi)$, entonces por el teorema del residuo

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z_j \in \operatorname{int} C} \operatorname{Res}(f, z_j)$$

Por otro lado, como

$$f(e^{i\theta}) = \frac{1}{i\,e^{i\theta}}\, R\left[\frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right), \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - \frac{1}{e^{i\theta}}\right)\right] = \frac{R(\cos\theta\,,\,\operatorname{sen}\theta)}{ie^{i\theta}}$$

entonces

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, i\,e^{i\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta$$

lo cual demuestra el teorema. ■

Notar que al evaluar R en

$$\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] \quad \text{con} \quad z \neq 0$$

y multiplicar numerador y denominador por una potencia adecuada de z, se obtiene a la función $f(z)$ como una función racional en z, lo que permite determinar fácilmente sus singularidades. (Ver el ejemplo siguiente).

Ejemplo I.8.5. Calcular la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a^2 - 2a\cos\theta}, \qquad a \neq 1$$

Solución. En este caso,

$$R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \frac{1}{1 + a^2 - 2a\cos\theta}$$

entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{iz\left[1 + a^2 - \frac{2a}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]} = \frac{1}{i\left(z + za^2 - az^2 - a\right)} \\ &= \frac{i}{a\left[z^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)z + 1\right]} = \frac{i}{a(z - a)\left(z - \frac{1}{a}\right)} \end{aligned}$$

y los polos no están sobre la curva C.

Si $a < 1$

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{i}{a\left(a - \frac{1}{a}\right)} = \frac{i}{a^2 - 1}$$

y si $a > 1$

$$\operatorname{Res}\left(f, \frac{1}{a}\right) = \frac{i}{a\left(\frac{1}{a} - a\right)} = \frac{i}{1 - a^2}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a^2 - 2a\cos\theta} = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{1 - a^2} & \text{si} \quad a < 1 \\ \dfrac{2\pi}{a^2 - 1} & \text{si} \quad a > 1 \end{cases}$$

con lo cual termina el ejemplo. ■

Ejemplo I.8.6. Calcular las siguientes integrales:

i) $\displaystyle\int_C \frac{e^{ikz}}{z}\,dz$

donde $C = C_1 + C_2 + C_3$, siendo

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\, x + iy \mid -\infty < x \le -\epsilon,\ y = 0 \,\} \\ C_2 &= \{\, re^{i\theta} \mid r = \epsilon,\ \pi \le \theta \le 2\pi \,\} \\ C_3 &= \{\, x + iy \mid \epsilon \le x < \infty,\ y = 0 \,\} \end{aligned}$$

con $\epsilon > 0$.

ii) $\displaystyle\int_{C'} \frac{e^{ikz}}{z}\,dz$

donde $C' = \{ x + iy \mid -\infty < x < \infty, y = t \}$ con $t > 0$.

iii) $P \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x} \, dx.$

El símbolo $P \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ se utiliza para denotar la *parte principal* de la integral y se define como

$$P \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{\varepsilon} f(x) \, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} f(x) \, dx \right)$$

iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$

donde

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} kx}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ k & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

v) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} \, d\omega$

donde

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} \omega k}{\omega} & \text{si} \quad \omega \neq 0 \\ k & \text{si} \quad \omega = 0 \end{cases}$$

Solución.

i) Si $C_4 = \{ r e^{i\theta} \mid r = R,\ 0 \leq \theta \leq \pi \}$ con $R \to \infty$, entonces

$$\int_C \frac{e^{ikz}}{z} \, dz = \int_{C + C_4} \frac{e^{ikz}}{z} \, dz - \int_{C_4} \frac{e^{ikz}}{z} \, dz$$

Si $k > 0$:

$$0 \leq \left| \int_{C_4} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz \right| \leq \int_{C_4} \left| \frac{e^{ikz}}{z} \right| |dz| = \int_0^{\pi} \lim_{R \to \infty} \left| \frac{e^{ikRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}}\, Rie^{i\theta} \right| d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \lim_{z \to \infty} \left| e^{ikR(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)} \right| d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \lim_{z \to \infty} \left| e^{ikR\cos\theta} \right| e^{-kR\,\mathrm{sen}\,\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \lim_{R \to \infty} e^{-kR\,\mathrm{sen}\,\theta}\, d\theta$$

y como $\theta \in [0, \pi]$, entonces k sen $\theta > 0$ (excepto en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$), por lo que al ser el exponente un número negativo que tiende a infinito, el integrando tiende a cero. Por lo tanto,

$$\int_{C_4} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz = 0$$

de donde

$$\int_{C} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz = \int_{C - C_4} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz \qquad \text{si} \quad k > 0$$

Análogamente, si $k < 0$:

$$\int_{C_5} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz = 0$$

donde

$$C_5 = \{ re^{i\theta} \mid r = R,\ \pi \leq \theta \leq 2\pi \} \qquad \text{con} \quad R \to \infty$$

por lo que

$$\int_{\gamma} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz = \int_{C - C_5} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz \qquad \text{si} \quad k > 0$$

Por lo anterior se tiene finalmente que

$$\int_{\gamma} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz = \begin{cases} \displaystyle\int_{C + C_4} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz & \text{si} \quad k > 0 \\ \displaystyle\int_{C - Ca_5} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz & \text{si} \quad k < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\pi i & \text{si} \quad k > 0 \\ 0 & \text{si} \quad k < 0 \end{cases}$$

ii) Si

$$C_6 = \{\, x + iy \mid x = \infty,\ -t \le y \le 0 \,\}$$
$$C_7 = \{\, x + iy \mid x = -\infty,\ -t \le y \le 0 \,\}$$

con $t > 0$, entonces

$$\int_{C'} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz = \int_{C' + C_6 - C - C_7} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz - \int_{C_6 - C - C_7} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz$$

Como

$$\int_{C' + C_6 - C - C_7} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz = 0$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_{C'} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz &= - \int_{C_6 - C - C_7} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz \\ &= - \int_{C_6} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz - \int_{-C} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz - \int_{-C_7} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz \\ &= - \int_{\infty - it}^{\infty} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz - \int_{-C} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz - \int_{-\infty}^{-\infty - it} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz \\ &= - \int_{\infty - it}^{\infty} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz + \int_{C} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz + \int_{-\infty - it}^{-\infty} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz \end{aligned}$$

Calculando por separado las integrales

$$\int_{R - it}^{R} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz \qquad \text{cuando} \quad R \to \pm\infty$$

se tiene

$$0 \leq \left| \int_{R-it}^{R} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz \right| \leq \int_{R-it}^{R} \left| \frac{e^{ikz}}{z} \right| |dz|$$

Usando

$$z = R + i\theta \qquad \text{con} \quad \theta \in [-t, 0]$$

se obtiene

$$\int_{R-it}^{R} \left| \frac{e^{ikz}}{z} \right| |dz| = \int_{-t}^{0} \left| \frac{e^{ik(R+i\theta)}}{R+i\theta}\, i \right| d\theta$$

$$= \int_{-t}^{0} \frac{e^{-k\theta}}{R^2+\theta^2}\, d\theta \leq \int_{-t}^{0} \frac{e^{-k\theta}}{R^2}\, d\theta$$

de donde

$$0 \leq \left| \int_{R-it}^{R} \frac{e^{ikx}}{x}\, dx \right| \leq \int_{-t}^{0} \frac{e^{-k\theta}}{R^2}\, d\theta = -\frac{1}{kR^2} e^{-k\theta} \Big|_{-t}^{0}$$

$$= \frac{e^{kt}-1}{kR^2}$$

el cual tiende a cero cuando $R \to \pm\infty$.

Por lo tanto,

$$\int_{R-it}^{R} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz = 0 \qquad \text{cuando} \quad R \to \pm\infty$$

Finalmente, usando el resultado del inciso (i)

$$\int_{C'} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz = \int_{\gamma} \frac{e^{ikz}}{z}\, dz$$

$$= \begin{cases} 2\pi i & \text{si} \quad k > 0 \\ 0 & \text{si} \quad k < 0 \end{cases}$$

iii)

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{x}\,dx = \int_C \frac{e^{ikz}}{z}\,dz - \int_{-C_2}\frac{e^{ikz}}{z}\,dz$$

Usando

$$z = \epsilon e^{i\theta} \qquad \text{con} \quad \theta \in [\pi\,,\,2\pi]$$

se obtiene para la segunda integral

$$\int_{C_2}\frac{e^{ikz}}{z}\,dz = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{e^{ik\epsilon e^{i\theta}}\epsilon i e^{i\theta}}{\epsilon e^{i\theta}}\,d\theta$$

$$= i\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\pi}^{2\pi} e^{ik\epsilon(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)}\,d\theta$$

$$= i\int_{\pi}^{2\pi} d\theta = \pi i$$

Por lo tanto,

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{x}\,dx = \int_C \frac{e^{ikz}}{z}\,dz - \pi i$$

y del resultado del inciso (i)

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{x}\,dx = \begin{cases} \pi i & \text{si} \quad k > 0 \\ -\pi i & \text{si} \quad k < 0 \end{cases}$$

$$= [2s(k) - 1]\pi i$$

donde $s(k)$ es la *función escalón unitario.*

iv)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x)\,dx$$

$$= P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,kx}{x}\,dx + \lim_{\epsilon\to 0} 2k\epsilon$$

$$= P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,kx}{x}\,dx$$

Como la función $(\cos kx)/x$ es impar,

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos kx}{x}\,dx = 0$$

de donde

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= -i\,P\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\cos kx}{x} + i\,\frac{\operatorname{sen} kx}{x}\right)dx\\ &= -i\,P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{x}\,dx\end{aligned}$$

y por el resultado del inciso (iii)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= -i\begin{cases}\pi i & \text{si } k>0\\ -\pi i & \text{si } k<0\end{cases}\\ &= \begin{cases}\pi & \text{si } k>0\\ -\pi & \text{si } k<0\end{cases}\\ &= [\,2s(k) - 1\,]\pi\end{aligned}$$

v)
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,e^{-i\omega x}\,d\omega &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(P\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,e^{-i\omega x}\,d\omega + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}F(\omega)\,e^{-i\omega x}\,d\omega\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\omega k}{\omega}\,e^{-i\omega x}\,d\omega + \lim_{\epsilon\to 0}2k\epsilon\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\,P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\omega k}{\omega}\,e^{-i\omega x}\,d\omega\\ &= \frac{1}{4\pi i}\,P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega k} - e^{-i\omega k}}{\omega}\,e^{-i\omega x}\,d\omega\\ &= \frac{1}{4\pi i}\,P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(k-x)} - e^{-i\omega(-k-x)}}{\omega}\,d\omega\end{aligned}$$

de donde, usando el resultado del inciso (iii)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,e^{-i\omega x}\,d\omega &= \frac{1}{4\pi i}\,[\,2s(k-x) - 2s(-k-x)\,]\pi i\\ &= \frac{1}{2}\,[\,s(k-x) - s(-k-x)\,]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{cases} 1 & \text{si} \quad -k < x < k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con lo cual el ejemplo termina. ■

Ejemplo I.8.7. Obtener la función $f(x)$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \omega i}{-\omega^2 + 5\omega i + 6} e^{i\omega x}\, d\omega$$

Solución.

Método 1. Factorizando el denominador

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \omega i}{(\omega - 2i)(\omega - 3i)} e^{i\omega x}\, d\omega$$

Descomponiendo en fracciones parciales

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{-i}{\omega - 2i} + \frac{2i}{\omega - 3i} \right] e^{i\omega x}\, d\omega$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-i}{\omega - 2i} e^{i\omega x}\, d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2i}{\omega - 3i} e^{i\omega x}\, d\omega \right]$$

Haciendo $z = \omega - 2i$ y $z = \omega - 3i$ en la primera y segunda integral respectivamente

$$f(x) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty-2i}^{\infty-2i} \frac{e^{i(z+2i)\omega}}{z}\, dz - 2\int_{-\infty-3i}^{\infty-3i} \frac{e^{i(z+3i)\omega}}{z}\, dz \right]$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-2x} \int_{-\infty-2i}^{\infty-2i} \frac{e^{ixz}}{z}\, dz - 2e^{-3x} \int_{-\infty-3i}^{\infty-3i} \frac{e^{ixz}}{z}\, dz \right]$$

de donde, por el *Ejemplo I.8.4.(ii)*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\,(2e^{-3x} - e^{-2x}) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Método 2. Como en el *Ejemplo I.8.4.(i)*, donde C_4 es la semicircunferencia superior de radio R con centro en el origen, si $x > 0$

$$\int_{C_4}\left|\frac{1+\omega i}{(\omega-2i)(\omega-3i)}e^{i\omega x}\,d\omega\right| = \int_{C_4}\left|\frac{1+Rie^{i\theta}}{(Re^{i\theta}-2i)(Re^{i\theta}-3i)}e^{ixRe^{i\theta}}Rie^{i\theta}\,d\theta\right|$$
$$= \int_{C_4}\left|\frac{1+Rie^{i\theta}}{(Re^{i\theta}-2i)(Re^{i\theta}-3i)}e^{-xR\operatorname{sen}\theta}R\,d\theta\right|$$

la cual tiende a cero cuando $R \to \infty$.

Por lo tanto,

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\omega i}{(\omega-2i)(\omega-3i)}e^{i\omega x}\,d\omega$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{C_4}\frac{1+\omega i}{(\omega-2i)(\omega-3i)}e^{i\omega x}\,d\omega$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{C}\frac{1+\omega i}{(\omega-2i)(\omega-3i)}e^{i\omega x}\,d\omega$$

donde C es la trayectoria cerrada formada por el eje x y C_4 cuando $R \to \infty$.

Así, entonces

$$f(x) = -\frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1+\omega i}{\omega-3i}e^{i\omega x}\Big|_{\omega=2i} + \frac{1+\omega i}{\omega-2i}e^{i\omega x}\Big|_{\omega=3i}\right]$$
$$= -\sqrt{2\pi}\,i\left[\frac{1}{i}e^{-2x} - \frac{2}{i}e^{-3x}\right] = \sqrt{2\pi}\,(2e^{-3x} - e^{-2x})$$

por lo que

$$f(x) = \begin{cases}\sqrt{2\pi}\,(2e^{-3x} - e^{-2x}) & \text{si } x > 0\\ 0 & \text{si } x < 0\end{cases}$$ ■

Ejercicios propuestos.

1. Calcular los residuos de cada una de las siguientes funciones en sus puntos singulares aislados.

a) $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - z^5}$

b) $f(z) = \dfrac{z^{2n}}{(1 + z)^n}$, $(n \in \mathbb{N})$

c) $f(z) = \dfrac{z^2 + z - 1}{z^3(z - 1)}$

d) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2(z^2 + 9)}$

e) $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$

f) $f(z) = \cot^3 z$

g) $f(z) = e^{z + 1/z}$

h) $f(z) = \operatorname{sen} \dfrac{z}{z + 1}$

i) $f(z) = \dfrac{1}{z(1 - e^{-z})}$

j) $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{z}}$

l) $f(z) = \dfrac{\tan z}{z^n}$, $(n \in \mathbb{N})$

2. Calcular

$$\operatorname*{Res}_{z = a}[\varphi(z) f(z)]$$

si $\varphi(z)$ es analítica en $z = a$ y $f(z)$ tiene en ese punto:

a) un polo simple de residuo A;

b) un polo de orden k con la parte principal

$$\frac{b_k}{(z - a)^k} + \ldots + \frac{b_1}{z - a}$$

3. Calcular

$$\operatorname*{Res}_{z = a}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right]$$

si:

a) a es un cero de orden n de la función $f(z)$;

b) a es un polo de orden n de la función $f(z)$.

3. Calcular

$$\operatorname*{Res}_{z = a}\left[\varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)}\right]$$

si $\varphi(z)$ es analítica en $z = a$ y:

a) a es un cero de orden n de la función $f(z)$;

b) a es un polo de orden n de la función $f(z)$.

4. Calcular las siguientes integrales considerando qur las trayectorias cerradas se recorren una vez en sentido positivo.

a) $\oint_C \dfrac{dz}{z^4+1}$, donde C es la circunferencia $x^2+y^2=2x$.

b) $\oint_C \dfrac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$, donde C es la circunferencia $|z-2|=\frac{1}{2}$.

c) $\oint_C \dfrac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$, donde C es la circunferencia $|z|=2$.

d) $\oint_C \dfrac{z^3\,dz}{2z^4+1}$, donde C es la circunferencia $|z|=1$.

e) $\oint_C \dfrac{e^z}{z^2(z^2-9)}\,dz$, donde C es la circunferencia $|z|=1$.

f) $\oint_C \operatorname{sen}\dfrac{1}{z}\,dz$, donde C es la circunferencia $|z|=r$.

g $\oint_C \operatorname{sen}^2\dfrac{1}{z}\,dz$, donde C es la circunferencia $|z|=r$.

h) $\oint_C z^n e^{2/z}\,dz$, donde C es la circunferencia $|z|=r$ y $n\in\mathbb{I}$.

5. Calcule las siguientes integrales definidas.

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}$, $(a>1)$.

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2}$, $(a>b>0)$.

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2}$, $(a>0,\ b>0)$.

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$, $(a\in\mathbb{C}$ y $a\neq\pm1)$.

6. Calcule las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx$, $(a>0)$.

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $(n\in\mathbb{N})$.

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}, \quad (a > 0,\ b > 0).$

e) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}\, dx$

f) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^n}, \quad (n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}).$

g) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}\, dx, \quad (n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}).$

BIBLIOGRAFÍA

Complex Analysis
Lars V. Ahlfors
McGraw-Hill
Japón, 1979

Introducción a las Variables Complejas
Peter Colwell, Jerold C. Mathews
Trillas
México, 1976

Functions of One Complex Variable
John B. Conway
Springer-Verlag
USA, 1978

Variable Compleja y Aplicaciones
Ruel V. Churchill, James Ward Brown
McGraw-Hill
México, 1992

Variable Compleja con Aplicaciones
William R. Derrick
Grupo Editorial Iberoamérica
México, 1987

Variable Compleja
Arthur A. Hauser
Fondo Educativo Interamericano
USA, 1973

Análisis Básico de Variable Compleja
Michael J. Hoffman, Jerrold E. Marsden
Trillas
México, 1996

Matemáticas Avanzadas para Ingeniería
Glyn James
Pearson
México, 2002

Introduction to Complex Analysis
Kunihiko Kodaira
Cambridge University Press
USA, 1984

Matemáticas Avanzadas para Ingeniería. Vol. II
Erwin Kreyszig
Limusa
México, 1991

Complex Analysis
Serge Lang
Addison-Wesley
USA, 1977

Curso de Variable Compleja
Norman Levinson, Raymond M. Redheffer
Reverté
España, 1975

Teoría de las Funciones Analíticas. Tomo I
A. I. Markushévich
MIR
URSS, 1978

Complex Analysis for Mathematics and Engineering
John H. Mathews, Rusell W. Howell
Jones and Bartlett Publishers
USA, 2001

Matemáticas Avanzadas para Ingeniería. Vol. II
Peter V. O'Neil
CECSA
México, 1994

Variable Compleja
George Polya, Gordon Latta
Limusa
México, 1991

The Complex Variables Problem Solver
Research & Education Association
USA, 1987

Fundamentals of Complex Analysis
Edward B. Saff, Arthur D. Snider
Prentice-Hall
USA, 1976

Variable Compleja
Murray R. Spiegel
McGraw-Hill
México, 1991

Matemáticas Superiores para Ingeniería
C. Ray Wylie
McGraw-Hill
México, 1994

Advanced Engineering Mathematics
Denins G. Zill, Michael R Cullen
Jones and Bartlett Publishers
USA, 2000

Esta obra se terminó de imprimir
en Octubre de 2008
en el taller de imprenta del
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 300 ejemplares impresos en offset
con papel bond de 75 gramos, de 28 x 21.5 cm.

1a edición 2004

1 reimp. 2005

Universidad Nacional
Autónoma de México

Facultad de Ingeniería