DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

TEMA SELECTOS DE SUCESIONES Y SERIES

(CURSO DE SUPERACIÓN ACADÉMICA)

TEMA: LA MATEMATICA HONRA EL ESPRITU HUMANO.

NOVIEMBRE, 1983.

...o de Minería Calle de Tacuba 5 primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F. Tel.: 521-40-20 Apdo. Postal M-2285

SEMINARIO SOBRE TEMAS SELECTOS DE

SUCESIONES Y SERIES

FACULTAD DE INGENIERIA
U. N. A. M.

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS
PROGRAMA DE SUPERACION DEL PERSONAL ACADEMICO

SEMINARIO SOBRE TEMAS SELECTOS DE SUCESIONES Y SERIES

(Noviembre de 1983)

- A QUIEN VA DIRIGIDO:

A los profesores del Departamento de Matemáticas Básicas.

- OBJETIVO:

Propiciar el análisis y la discusión sobre el tema de Sucesiones y Series, tanto en lo que a su marco teórico se refiere, como a sus aplicaciones, con el fin de trabajar por la superación académica de los docentes que abordan en su cátedra dicho tema matemático.

- DURACION: 18 horas
- FECHAS: 7, 9, 11, 14, 16 y 18 de noviembre
- HORARIO: de 17:00 a 20:00 horas
- LUGAR: Salón 125 del Edificio Anexo de la Facultad de Ingeniería.
- CUPO MAXIMO: 20 participantes
- PROFESORES:
  - ESTEBAN AMBRIZ REYES
  - PABLO GARCIA Y COLOME
  - CARLOS G. VENEGAS ESPINOZA
- COORDINADOR:

ING. PABLO GARCIA Y COLOME

- TEMARIO:
  - Panorama Histórico de las Sucesiones y Series Infinitas.
  - Algebra y Propiedades de las Series.
  - Criterios para la determinación del Carácter de una Serie.
  - Sucesiones y Series de Funciones. Desarrollo en Series de Potencias.
  - Material Didáctico sobre Sucesiones y Series.
  - Aplicaciones. Plenaria (conclusiones).

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

PANORAMA HISTORICO

DE LAS SUCESIONES Y

SERIES

FACULTAD DE INGENIERIA

SERIES INFINITAS

PERSPECTIVA HISTORICA

LAS SERIES INFINITAS, DESDE EL SIGLO XVIII HASTA LA FECHA, SE CONSIDERAN COMO UNA PARTE ESENCIAL DEL CÁLCULO.

SIN EMBARGO, SE CONOCEN ESTUDIOS Y APORTACIONES AL TEMA DE LAS SERIES INFINITAS AÚN ANTES DE LA ERA CRISTIANA.

BASTE CITAR AL ILUSTRE PENSADOR Y FILÓSOFO ARISTÓTELES, QUIEN MÁS DE 300 AÑOS ANTES DE CRISTO, YA RECONOCÍA QUE TODA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA CUYA RAZÓN FUERA MENOR QUE UNO, TENÍA SUMA.

OTRO HECHO DIGNO DE MENCIÓN ES QUE SI LEIBNIZ, EN 1674 OBTUVO LA FAMOSA SERIE DE $\frac{\pi}{4}$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

NECESITABA MÁS DE 100,000 TÉRMINOS PARA LLEGAR AL VALOR DE π CON LA PRECISIÓN ALCANZADA, 200 AÑOS ANTES DE CRISTO, POR ARQUÍMIDES.

HABLANDO NUEVAMENTE DEL SIGLO XVIII, TANTO NEWTON COMO LEIBNIZ SE DIERON CUENTA DE QUE LOS FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA QUE ELLOS AYUDARON A CREAR ESTABAN EXPUESTOS EN FORMA POBRE E INADECUADA.

EN ESPECIAL NEWTON PARECÍA ESTAR CONSCIENTE DE LA SERIEDAD DE LAS DIFICULTADES Y DE LA FALTA DE CONSISTENCIA CONTENIDA EN SUS ESFUERZOS PARA EXPLICAR LAS BASES LÓGICAS DEL CÁLCULO. A PESAR DE QUE HUBO MATEMÁTICOS EN EL SIGLO XVIII QUIENES HICIERON TENTATIVAS PARA SUPLIR EL RIGOR QUE FALTABA, LA MAYOR PARTE DE LOS TALENTOS MATEMÁTICOS DE LA ÉPOCA, ESTABAN OCUPADOS EN LA TAREA DE

LA EXPANSIÓN Y REFINAMIENTO DE LA METODOLOGÍA DEL CÁLCULO EN LUGAR DE PREOCUPARSE SOBRE LA SOLIDEZ DE SUS FUNDAMENTOS LÓGICOS.

LA MAYOR PARTE DE ESTA EXPANSIÓN DE LA METODOLOGÍA DEPENDÍA DIRECTAMENTE DEL USO DE SERIES INFINITAS. EL RIGOR QUE FALTABA FUE FINALMENTE OBTENIDO EN EL SIGLO XVIX EN GRAN PARTE COMO RESPUESTA A LA INCONSISTENCIA Y PARADOJAS EN LA TEORÍA DE LAS SERIES INFINITAS QUE YA NO PODÍAN SEGUIR SIENDO IGNORADAS SI EL DESARROLLO DEL CÁLCULO DEBÍA SEGUIR.

ENTRE LOS MÁS IMPORTANTES CONTRIBUIDORES AL DESARROLLO DE LOS MÉTODOS DEL CÁLCULO ESTABN LOS TRES MATEMÁTICOS SUIZOS JACOBO BERNOULLI (1654-1705), SU HERMANO JOHANN (1667-1748) Y LEONARDO EULER (1707-1783). MUCHOS DE SUS TRABAJOS COMPRENDÍAN LA REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES CON SERIES INFINITAS CON EL OBJETO DE INTEGRARLAS Y DIFERENCIARLAS. EN PARTICULAR, ESTE MÉTODO ERA EL STANDARD PARA TRATAR LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS EN ESE TIEMPO.

LOS DOS HERMANOS BERNOULLI TENÍAN UNA CORRESPONDENCIA REGULAR CON LEIBNIZ Y CADA UNO HIZO UNA CONTRIBUCIÓN AL INTERPRETAR Y COMPLETAR LOS DETALLES EN CÁLCULO QUE LEIBNIZ GARABATEABA EN PAPELES.

HUBO UNA DISPUTA FAMOSA ENTRE AMBOS HERMANOS, CUANDO JOHANN PRESENTÓ ALGUNOS RESULTADOS COMO SUYOS QUE JACOBO LE HABÍA COMUNICADO. CUANDO JACOBO LO SUPO FUE RECÍPROCA SU ACCIÓN Y SE HIZO ACREDITAR ALGUNOS DE LOS TRABAJOS DE JOHANN. TAL VEZ AL FIN SE HIZO JUSTICIA, YA QUE UNO DE LOS MÁS FINOS DESCUBRIMIENTOS DE JOHANN ES AHORA CONOCIDO COMO LA REGLA DE L'HOPITAL, HABIÉNDOSE DADO EL CRÉDITO EN FORMA EQUIVOCADA AL BENEFACTOR DE JOHANN, L'HOPITAL.

Euler fue uno de los matemáticos más prolíficos (sus trabajos llenan más de siete volúmenes) y uno de los más capaces. Tuvo la buena suerte de ser educado en matemáticas por Johann Bernoulli. Euler era dotado de una memoria más que excelente, y a pesar de que estuvo completamente ciego los últimos 17 años de su vida, contrató una secretaria que escribiera sus descubrimientos y más de 400 de sus ensayos fueron escritos durante esos años.

El campo de trabajo de Euler cubría todas las matemáticas conocidas hasta ahora. En 1755 escribió el primer libro razonablemente completo de Cálculo Diferencial y a continuación en 1768-1770 un texto de tres volúmenes en Cálculo Integral.

A través de estos libros populares, sus numerosos ensayos y correspondencia, Euler tuvo una influencia sin límite en el desarrollo del Cálculo.

Durante el siglo XVIII el cálculo era visto esencialmente como una extensión del Algebra hecha ésta por el uso y manipuleo de las series infinitas. Sin embargo, aún Euler, que manejaba todo esto con mayor éxito que ninguno, no tenía método para analizar la convergencia o la divergencia de las series. Y abundaba bastante confusión acerca del papel propio de las series infinitas.

Los conceptos de convergencia y divergencia que existen hoy en día no fueron definidos claramente hasta principio del siglo XIX en los trabajos del gran matemático francés Austin Cauchy y el checoeslovaco Berhard Bolzano. Algunos otros hicieron contribuciones importantes pero estos dos hombres fueron los primeros en dar el concepto de que la suma de una serie era el límite de

LA SUCESIÓN DE SUS SUMAS PARCIALES. EL HECHO DE QUE TRANSCURRIERON 150 AÑOS ENTRE EL USO DE NEWTON DE SU TEOREMA DEL BINOMIO PARA DESARROLLAR UNA FUNCIÓN EN UNA SERIE INFINITA E INTEGRAR TÉRMINO A TÉRMINO Y UNA ACEPTABLE DEFINICIÓN DE LA SUMA DE UNA SERIE, INDICA QUE DUROS FUERON LOS CONCEPTOS DE CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA.

CLASES DE SERIES.- COMO NO TIENE LÍMITE EL NÚMERO DE MANERAS EN QUE PODEMOS TENER UNA SUCESIÓN DE TÉRMINOS DESARROLLÁNDOSE DE ACUERDO CON UNA LEY, RESULTA ILIMITADA LA CLASE DE SERIES O PROGRESIONES QUE PUEDEN FORMARSE. SIN EMBARGO, RESULTA PEQUEÑO EL NÚMERO DE ELLAS QUE HAN MERECIDO UNA ATENCIÓN SERIA EN MATEMÁTICAS. PRIMERO LLAMARON LA ATENCIÓN LAS SERIES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS, DESPUÉS DE LAS CUALES, LOS GRIEGOS HICIERON SURGIR LAS SERIES ARMÓNICAS. EN LA ANTIGUEDAD ESTAS TRES FUERON LAS QUE SE ESTUDIARON. BOETHIUS (C,510) NOS RELATA QUE LOS PRIMEROS GRIEGOS CONOCÍAN ESTAS TRES Y QUE MÁS TARDE OTROS MATEMÁTICOS PROPUSIERON OTRAS TRES QUE NO TIENEN NOMBRES ESPECÍFICOS.

OCASIONALMENTE SE MENCIONÓ OTRA CLASE ESPECIAL DE SERIES, COMO CUANDO STIFEL HABLA DE "LA PROGRESIÓN ASTRONÓMICA" $1, \frac{1}{60}, \frac{1}{3600}, \cdots$ UNA DE LAS POCAS SERIES DECRECIENTES EN LOS PRIMEROS LIBROS EUROPEOS.

LA MAYOR PARTE DE LOS ESCRITORES HINDÚES USARON SOLAMENTE DOS SERIES ELEMENTALES, PERO BRAHMAGUPTA (C,628), MAHAVIRA (C,850) Y BHASKARA (C,1150) CONSIDERARON TODOS LOS CASOS DE LAS SUMAS DE CUADRADOS Y CUBOS. LOS ESCRITORES ARABES Y JUDÍOS TAMBIÉN SE FIJARON EN ESTE TIPO.

TRATADO MEDIEVAL DE SERIES.- EN LOS TRABAJOS MEDIEVALES SE CONSIDERABAN A LAS SERIES ASCENDENTES, AUNQUE AHMES, ARQUÍMIDES Y ALGUNOS ESCRITORES CHINOS USARON DESCENDENTES MUCHO ANTES. LOS ESCRITORES RENACENTISTAS SIGUIERON LA MISMA LÍNEA.

SIN EMBARGO, ANTES DEL SIGLO XVIII SE USÓ LA CLASIFICACIÓN DE NATURAL, NO NATURAL, CONTINUA Y DISCONTINUA, USANDO ESTOS TÉRMINOS EN UNA FORMA BASTANTE LIBRE POR LOS PRIMEROS AUTORES. POR EJEMPLO: LA SERIE 1, 2, 3,... FUE LLAMADA UNA SERIE NATURAL DE LA QUE TENEMOS LA EXPRESIÓN "SERIE NATURAL DE NÚMEROS". UNA PROGRESIÓN DISCONTINUA ERA UNA EN QUE LA DIFERENCIA NO ERA LA UNIDAD.

NOMBRES DE LAS SERIES.- EL NOMBRE GRIEGO DE LAS SERIES USADO POR LOS PRIMEROS PITAGÓRICOS ERA EK'THESIS LITERALMENTE "ALGO QUE SALE", Y EL NOMBRE DE UN TÉRMINO DE LA SERIE ERA HOR'OS LITERALMENTE "UNA FRONTERA" BOETHIUS (C.510) COMO LOS OTROS ESCRITORES LATINOS, USÓ LA PALABRA PROGRESSIO Y SE ACOSTUMBRÓ ASÍ HASTA TIEMPOS MODERNOS.

LOS AUTORES TEUTÓNICOS SIGUIERON SU PLAN DE EVITAR NOMBRES BASADOS EN EL LATÍN Y ASÍ ENCONTRAMOS VARIOS TÉRMINOS USADOS POR LOS MATEMÁTICOS HOLANDESES Y ALEMANES.

EL CAMBIO DE NOMBRE "SERIES" PARECE DEBIDO A LOS ESCRITORES DEL SIGLO XVII. POR EJEMPLO JAMES GREGORY AL ESCRIBIR EN 1671, HABLA DE "SERIES INFINITAS" Y FUE EN CONEXIÓN CON SUCESIONES INFINITAS QUE EL TÉRMINO SE USÓ PRIMERO POR LOS ALGEBRISTAS BRITÁNICOS. YA MÁS TARDE EN 1693, WALLIS EN SU ÁLGEBRA USA LA EXPRESIÓN "PROGRESIONES INFINITAS" POR SERIES INFINITAS.

EXTENSION.- A pesar de que las series eran consideradas como una de las operaciones fundamentales, se le prestó poca atención en los primeros libros impresos. Tzwivel (1505) por ejemplo, tiene solo 32 renglones para progresiones aritméticas y geométricas incluyendo definición y reglas mientras que Huswirt (1501) designa una sola página y Digges (1572) solo dos páginas.

Casi todos los primeros autores limitaron su trabajo a encontrar la suma de las series, aunque algunos dieron una regla para encontrar el último término de una serie aritmética y geométrica. Con estos autores no se justificaba la regla, simplemente se daba. Fue solamente con una simbologia mejor que en el siglo XVII se discutieron los casos, y el desarrollo de las reglas se hizo más simple.

RELACION A LA PROPORCION.- Los autores antiguos conectaron las progresiones con la proporción o más bien con la proporcionalidad para usar un nombre que ya era popular y aplicaron los nombres "aritmética", "geometría" y "armónica" a cada una. Algunos de los primeros libros decían que una proporción es meramente una progresión de cuatro términos.

SERIES ARITMETICAS.- El primer conocimiento que se tiene de una serie aritmética como tal, está en el Papiro Ahmes (c. 1550 A.C.) en donde se dan dos problemas con una sucesión.

CONECCION CON NUMEROS POLIGONALES.- Los griegos conocían la teoría de las series aritméticas, pero la trataban relacionada con los números poligonales. Por ejemplo los primeros cuatro números triangulares son:

3 6 10 15

Es evidente que cada número tringular es la suma de la serie $\sum_{1}^{n} n$ y que los griegos conocían esta regla para la sumatoria.

TRABAJO DE LOS CHINOS SOBRE SERIES.- No se encuentra ningún intento de obtener la suma de una serie aritmética o geométrica en los primeros trabajos chinos. En el Wu-ts'ao Suan-King escrito al principio de la era cristiana, o posiblemente antes, encontramos el siguiente problema:

Hay una mujer que teje 5 pies el primer día, y su tejer disminuye día tras día hasta que en el último día, ella teje un pie. Si ha trabajado 30 días, cuanto ha tejido en total.

El autor desconocido da entonces esta regla: Sume lo que tejió el primer día y el último, tome la mitad de la suma y multiplique por el número de días.

Resulta interesante ver que este antiguo problema chino que encontramos, es como el del segundo caso del Papiro Ahmes, uno de comprende series descendentes.

En Europa la regla para la suma era la misma que en el Oriente, con la diferencia de idiomas y ocasionalmente fue puesto en verso para memorizarse.

La regla para encontrar un término específico fue dada por Cardan en su práctica (1539) y por Clavius en su Epitome (1583).

SERIES GEOMETRICAS.- Los primeros ejemplos de series geométricas encontradas se deben a los Babilonios (c. 2000 A.C.) y aún existen algunas tablas con estos ejemplos. El primer problema sobre este tema que se encontró en las matemáticas egipcias está en el Papiro Ahmes (c. 1550 A.C.).

Es interesante observar que se encontró un problema similar dado por Fibonacci (1202) y que se resolvió en forma bastante semejante.

Los griegos tenían reglas para sumar tales series y Euclides dió una que puede expresarse como sigue:

$$\frac{a_{n+1} - a}{a_n + a_{n-1} + \dots + a_1} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

que equivale a

$$\frac{ar^n - a}{S_n} = \frac{ar - a}{a}$$

de donde saldría nuestra fórmula común

$$S_n = \frac{ar^n - a}{r - 1}$$

Los hindúes mostraron su interés en series geométricas principalmente en los problemas de sumatoria. El problema típico se tomó de Bhaskara (c. 1150).

Los árabes aparentemente obtuvieron la regla de la sumatoria de los griegos y aparece en una forma interesante en el tablero de ajedrez en los trabajos de Alberuni (c. 1000).

LA REGLA EUROPEA MEDIEVAL.- Los escritores medievales aparentemente obtuvieron la regla de los árabes, ya que aparece en Liber Abaci de Fibonacci (1202). El primer tratado moderno del caso se encontró en el Olgorithmus de Integris (1410) de Prosdocimo de Beldamandi. El tratado de Prosdocimo es como sigue:

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = ar^{n-1} + \frac{ar^{n-1} - a}{r - 1}$$

que es un poco más complicado que nuestra fórmula ordinaria. La misma regla se dió por Peurbach. Está dado por Chuquet (1484) en la forma

$$S = \frac{rar^{n-1} - a}{r-1}$$

y este es el plan usado por Simon Jacob (1560), Clavius (1583) y otros. Stifel (1544) dió la regla en la forma

$$S = \frac{(rar^{n-1} - a)a}{ar - a}$$

un método usado por Tartaglia (1556), a pesar de que preferiría el que dió Prosdocimo de Beldamandi.

El tipo común de problemas de rompecabezas de series, que recorre toda la literatura de la materia desde la época de los hindúes hasta el siglo XIX, puede resumirse en el siguiente enunciado

DE BAKER (1568): "UN MERCADER HA VENDIDO 15 YARDAS DE SATTIN, LA PRIMERA YARDA EN 1$ LA SEGUNDA EN 2$ LA TERCERA EN 4$ LA CUARTA EN 8$ Y ASÍ AUMENTANDO DUPLICÁNDOSE EN LA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA" OBTENIÉNDOSE ASÍ EL COSTO REQUERIDO.

OTRO PROBLEMA RELATA LA COMPRA DE ÁRBOLES DE DURAZNO EN EL CUAL EL VALOR DE LOS ÁRBOLES AUMENTA EN UNA SERIE GEOMÉTRICA O EN LA COMPRA DE UN NÚMERO DE CASTILLOS EN EL MISMO PLAN. SE MENCIONAN PROBLEMAS DE ESTA CLASE, MÁS TARDE.

LA PRIMERA SERIE INFINITA QUE SE SUPO QUE FUE SUMADA ES LA DADA POR ARQUÍMIDES (C. 225 A.C.) EN SU CUADRATURA DE LA PARÁBOLA.

LA SERIE SUMADA ES:

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \ldots$$

LA FÓRMULA GENERAL PARA SUMAR SERIES INFINITAS

$$a,\ ar,\ ar^2,\ \ldots\ ar^n,\ \ldots \quad \text{con } r < 1$$

FUE DADA POR VIETA (C. 1590).

SERIES ARMONICAS.- PITÁGORAS Y SU ESCUELA PRESTÓ MUCHA ATENCIÓN AL CULTIVO DE LA MÚSICA, NO SOLO COMO UN MEDIO DE EXCITAR O DOMINAR LAS PASIONES SINO COMO UNA CIENCIA ABSTRACTA. ESTO CONDUJO A Y ESTABA CONECTADO CON EL DESCUBRIMIENTO IMPORTANTE DE LA RELACIÓN DEL TONO CON LA LONGITUD DE LA CUERDA QUE VIBRA Y POR LO TANTO A LA INTRODUCCIÓN DE LA PROPORCIÓN ARMÓNICA QUE ESCRITORES POSTERIORES DESARROLLARON EN SERIES ARMÓNICAS.

SERIES ELEVADAS.- EL PRIMER USO QUE SE HIZO DE SERIES ARITMÉTICAS DE ORDEN ELEVADO FUERON CASOS ESPECIALES. LAS SERIES DE CUADRADOS FUERON LAS PRIMEROS EN LLAMAR LA ATENCIÓN. ARQUÍMIDES USÓ LA GEOMETRÍA PARA DEMOSTRAR QUE

$$3\left[a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \ldots + (na)^2\right]$$

$$= (n+1)(n\,a)^2 + a(a + 2a + 3a + \ldots + n\,a)$$

PARA $a = 1$ ESTO SE REDUCE A

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}\,n\,(n+1)(2n+1)$$

QUE APARECE PRINCIPALMENTE EN EL CODEX ARCERIANUS (SIGLO VI). TAMBIÉN SE ENCUENTRA EN LA LITERATURA HINDÚ COMO PUEDE VERSE EN LOS TRABAJOS DE MAHAVIRA (C. 850).

LA SUMA DE LOS CUBOS APARECE EN EL CODEX ARCERIANUS EN LA FORMA

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3 = \left(\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11\right)^2$$

LOS HINDUES TENÍAN REGLAS PARA ENCONTRAR ESTA SUMA Y APARECEN EN LOS TRABAJOS DE BRAHMAGUPTA (C. 628), MAHAVIRA (C. 850) Y BHASKARA (C. 1150)

SE ENCONTRARON REGLAS SIMILARES ENTRE LOS ÁRABES, Y EN LOS TRABAJOS DE AL-KARKHI (C. 1020).

LOS NUMEROS DE BERNOULLI.- EL CASO DE Σn^m ATRAJO LA ATENCIÓN EN EL SIGLO XVII, PERO LA REGLA SE ENCONTRÓ PRIMERO EN EL ARS CONJECTANDI (1713) DE JACQUES BERNOULLI Y COMPRENDE LO QUE EULER LLAMÓ "LOS NÚMEROS DE BERNOULLI".

RESURGIMIENTO DE SERIES INFINITAS.- El interés en el infinitesimal surge como un elemento de análisis que se manifestó a principios del siglo XVII, involucró la noción de un número infinito de elementos. Debido a esto sin duda, el estudio de las series con un número infinito de términos, ya conocido de los griegos, resurgió y se propuso la idea de un producto con un número infinito de factores.

El primero de estos productos con cierto interés ya ha sido mencionado y se debe a Vieta (1593). Puede expresarse en forma moderna como

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$$

Hay tres periodos generales en el desarrollo posterior de series infinitas:

1) El periodo de Newton y Leibnitz, el de su introducción.
2) El periodo de Euler, su desarrollo formal.
3) El periodo moderno, el de la investigación científica de la validez de series infinitas.

Este tercer periodo que puede designarse como el crítico, empezó en 1812 con la publicación de las celebradas memorias de Gauss.

Cauchy (1821), estudió las series infinitas y elaboró la teoría de convergencia que James Gregory (1668) ya había empezado y a la cual Maclaurin, Euler y Gauss habían hecho ya valiosas contribuciones. El término "serie convergente" se debe a Gregory (1660) y el término "serie divergente" a Nicolas Bernoulli (1713).

ABEL (1826) ESTUDIÓ CUIDADOSAMENTE LAS SERIES

$$1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

CORRIGIENDO ALGUNAS CONCLUSIONES DE CAUCHY Y DANDO UNA SUMATORIA CIENTIFICA DE LAS SERIES PARA VALORES COMPLEJOS DE m Y DE x.

TEOREMA DEL BINOMIO.- EL DESARROLLO DE $(a+b)^n$ PARA CUALQUIER VALOR ENTERO DE n, O AL MENOS UNA FORMA PARA ENCONTRAR LOS COEFICIENTES, FUE CONOCIDA EN EL ESTE, MUCHO ANTES DE QUE APARECIERA EN EUROPA. EL CASO CUANDO $n = 2$ FUE CONOCIDO POR EUCLIDES (c.300 A.C.) PERO UNA EVIDENCIA DE LA GENERALIZACIÓN DE LA LEY PARA OTROS VALORES DE n APARECE PRIMERO, HASTA DONDE SABEMOS, EN EL ALGEBRA DE OMAR KHAYYAN (c. 1100). EL ESCRITOR NO DIÓ LA LEY, PERO ASEGURÓ QUE PODRÍA ENCONTRAR LA 4a, 5a, 6a Y MÁS POTENCIAS DE NÚMEROS POR UNA LEY QUE EL DESCUBRIÓ Y QUE NO DEPENDÍA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS. EL DICE QUE ESTA LEY FUE DADA POR ÉL EN OTRO TRABAJO PERO PARECE QUE NO EXISTE COPIA ALGUNA DE ESTE TRABAJO.

TRIANGULO DE PASCAL.- EN UNO DE LOS TRABAJOS DE CHU SHI-KIE (1303) EL MÁS GRANDE LOS ALGEBRISTAS CHINOS DE SU ÉPOCA, EL ARREGLO TRIANGULAR DE LOS COEFICIENTES ESTÁ DADO DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

CONOCIDO AHORA COMO TRIÁNGULO DE PASCAL.

ESTE ARREGLO TRIÁNGULAR APARECIÓ PRIMERO IMPRESO EN EL TÍTULO DE LA ARITMÉTICA DE APIANUS (1527).

EN LA FORMA

1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

SE ENCONTRÓ PRIMERO EN ARITMÉTICA INTEGRA (1544) DE STIFEL Y APARECE UN AÑO MÁS TARDE EN EL DE NUMERIS ET DEVERSIS RATIONIBUS DE SCHEUBEL (1545). TAMBIÉN APARECE EN LAS EDICIONES DE LA ARTIMÉTICA DE PELETIER.

TARTAGLIA (1556) LO DIÓ COMO DE SU PROPIA INVENCIÓN Y PRONTO DESPUÉS DE SU ÉPOCA SE VOLVIÓ PROPIEDAD COMÚN. BOMBELLI (1572) POR EJEMPLO DIÓ LOS COEFICIENTES DE TODAS LAS POTENCIAS DE $a + b$ HASTA LA SÉPTIMA, USÁNDOLAS PARA ENCONTRAR LAS CORRESPONDIENTES RAÍCES Y OUGHTRED (1631) LOS DIÓ HASTA LA DÉCIMA POTENCIA.

PASCAL HIZO NUMEROSOS DESCUBRIMIENTOS RELACIONADOS CON EL ARREGLO TRIANGULAR Y LOS DIÓ A CONOCER EN SU TRATADO DEL TRIÁNGULO ARITMÉTICO, PUBLICADO EN 1665 Y ENTRE ÉSTOS ESTABA PRINCIPALMENTE NUESTRO TEOREMA DEL BINOMIO (ACTUAL) PARA EXPONENTES ENTEROS Y POSITIVOS. DESPUÉS DE ESTA ÉPOCA EL ARREGLO TRIANGULAR FUE COMÚN TANTO EN EL ESTE COMO EN EL OESTE.

DIFERENCIAS FINITAS.- EL TRATADO DE SERIES POR EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS APARECIÓ EN EL SIGLO XVII. EN 1673 LEIBNIZ LE ESCRIBIÓ A OLDENBURY REFIRIÉNDOSE AL SIGUIENTE ESQUEMA DEL TRATADO DE LAS SERIES DE CUBOS.

0 0 0

6 6 6 6

6 12 18 24 30

1 7 19 37 61 91

0 1 8 27 64 125 216

FÓRMULA DE TAYLOR Y FÓRMULA DE MACLAURIN.

EN 1715 BROOKS TAYLOR PUBLICÓ LA FÓRMULA QUE LLEVA SU NOMBRE Y QUE ES COMO SIGUE

$$f(x+h) = f(x) + h\ f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots$$

NO FUE SINO HASTA 1742 CUANDO COLIN MACLAURIN PUBLICÓ LA FÓRMULA

$$f(x) = f(0) + x\ f'(o) + \frac{x^2}{2!}\ f''(0) + \ldots$$

UNA RELACIÓN QUE SE DEDUCE DE LA ANTERIOR.

SERIES TRIGONOMETRICAS.- EL DESARROLLO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN SERIES ATRAJO PRIMERO LA ATENCIÓN DE MATEMÁTICOS DEL SIGLO XVII. SE DEBEN A JAMES GREGORY (1671) LAS SIGUIENTES:

$$x = \tan\ x - \frac{1}{3}\ \tan^3 x + \frac{1}{5}\ \tan^5 x - \frac{1}{7}\ \tan^7 x + \ldots$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}\ x^3 + \frac{2}{15}\ x^5 + \frac{17}{315}\ x^7 + \ldots$$

$$\sec\ x = 1 + \frac{1}{2}\ x^2 + \frac{5}{24}\ x^4 + \frac{61}{720}\ x^6 + \ldots$$

TAMBIÉN DIÓ LA IMPORTANTE SERIE

$$\text{arc}\ \tan\ x = x - \frac{1}{3}\ x^3 + \frac{1}{5}\ x^5 - \ldots$$

PERO ESTA SE DEDUCE FÁCILMENTE DE LA QUE SE DIÓ PARA TAN X.

NEWTON DIÓ (C, 1669) LA SERIE ANTITRIGONOMÉTRICA PARA arc sen x QUE EN ESCENCIA ES COMO SIGUE

$$\text{arc sen } x = \text{sen}^{-1} x = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + \frac{5}{112} x^7 + \dots$$

SERIES LOGARITMICAS.- LA IDEA DE EXPRESAR UN LOGARITMO CON UNA SERIE PARECE HABER COMENZADO CON GREGORY Y LUEGO HABERSE ELABORADO POR MERCATOR (1667) QUIEN DESCUBRIÓ, PARA UN CASO ESPECIAL AL MENOS LA RELACIÓN

$$\log (1 + a) = a - \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{3} a^3 - \frac{1}{4} a^4 + \dots$$

CON

$$1 \geq a > -1$$

EL VALOR DE LAS CONTRIBUCIONES DE MERCATOR Y GREGORY, FUE RECONOCIDO POR WALLIS EN ENSAYOS QUE EL ESCRIBIÓ DE SUS TRABAJOS.

COMO SE OBSERVA FUERON MUCHOS LOS ESTUDIOSOS QUE A LO LARGO DE LA HISTORIA TUVIERON QUE VER CON LAS SERIES INFINITAS, TANTO EN LO QUE A SU ORIGEN SE REFIERE COMO A SUS MÚLTIPLES APLICACIONES.

HASTA AQUÍ SE HA INTENTADO PRESENTAR UN BREVE PANORAMA HISTÓRICO DE LAS SERIES Y LA FINALIDAD DE ESTE TRABAJO ES MOTIVAR PARA EL ANÁLISIS Y LA PROFUNDIZACIÓN DEL TEMA, SOBRE TODO CONSIDERANDO QUE EN EL VASTO Y HERMOSO CAMPO DE LA INGENIERÍA, TIENE MUCHAS APLICACIONES.

MUCHAS GRACIAS POR SU ATENCION.

20
Infinite Series

Read Euler, read Euler, he is the master of us all.

P. S. LAPLACE

1. *Introduction*

Infinite series were in the eighteenth century and are still today considered an essential part of the calculus. Indeed, Newton considered series inseparable from his method of fluxions because the only way he could handle even slightly complicated algebraic functions and the transcendental functions was to expand them into infinite series and differentiate or integrate term by term. Leibniz in his first published papers of 1684 and 1686 also emphasized "general or indefinite equations." The Bernoullis, Euler, and their contemporaries relied heavily on the use of series. Only gradually, as we pointed out in the preceding chapter, did the mathematicians learn to work with the elementary functions in closed form, that is, as simple analytical expressions. Nevertheless, series were still the only representation for some functions and the most effective means of calculating the elementary transcendental functions.

The successes obtained by using infinite series became more numerous as the mathematicians gradually extended their discipline. The difficulties in the new concept were not recognized, at least for a while. Series were just infinite polynomials and appeared to be treatable as such. Moreover, it seemed clear, as Euler and Lagrange believed, that every function could be expressed as a series.

2. *Initial Work on Infinite Series*

Infinite series, usually in the form of infinite geometric progressions with common ratio less than 1, appear very early in mathematics. Aristotle[1] even recognized that such series have a sum. They appear sporadically among the later medieval mathematicians, who considered infinite series to calculate

1. *Physica*, Book III, Chap. 6, 206b, 3–33.

the distance traveled by moving bodies when the velocity changes from one period of time to another. Oresme, who had considered a few such series, even proved in a tract, *Questiones Super Geometriam Euclidis* (c. 1360), that the harmonic series

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

is divergent by the method used today, namely, to replace the series by the series of lesser terms

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

and to note that the latter series diverges because we can obtain as many groups of terms each of magnitude 1/2 as we please. However, one must not conclude that Oresme or mathematicians in general began to distinguish convergent and divergent series.

In his *Varia Responsa* (1593, *Opera*, 347–435) Vieta gave the formula for the sum of an *infinite* geometric progression. He took from Euclid's *Elements* that the sum of n terms of $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ is given by

$$\frac{s_n - a_n}{s_n - a_1} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Then if $a_1/a_2 > 1$, a_n approaches 0 as n becomes infinite, so that

$$s_\infty = \frac{a_1^2}{a_1 - a_2}.$$

In the middle of the seventeenth century Gregory of Saint Vincent, in his *Opus Geometricum* (1647), showed that the Achilles and the Tortoise paradox could be resolved by summing an infinite geometric series. The finiteness of the sum showed that Achilles would overtake the tortoise at a definite time and place. Gregory gave the first explicit statement that an infinite series represents a magnitude, namely, the sum of the series, which he called the limit of the series. He says the "terminus of a progression is the end of the series to which the progression does not attain, even if continued to infinity, but to which it can approach more closely than by any given interval." He made many other statements that are less accurate and less clear, but he did contribute to the subject and influenced many pupils.

Mercator and Newton (Chap. 17, sec. 2) found the series

$$\log(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots.$$

The observation was made that the series has an infinite value for $x = 2$, whereas, according to the left side, it should yield log 3. Wallis noted this

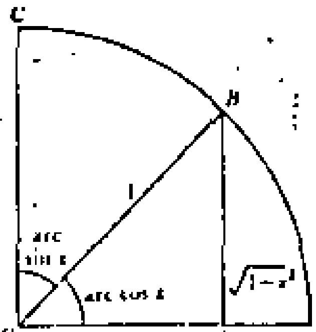


Figure 20.1

difficulty but could not explain it. Newton obtained many other series for algebraic and transcendental functions. Thus, to obtain the series for arc sin x, in 1666, he used the fact (Fig. 20.1) that the area $OBC = (1/2)$ arc sin x, so arc sin $x = \int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dx - x\sqrt{1-x^2}/2$. He got the result by expanding the right side into series, integrating term by term, and combining the two series. He also obtained the series for arc tan x. In his *De Analysi* of 1669 he gave the series for sin x, cos x, arc sin x, and e^x. Some of these he got from others by inverting a series, that is, solving it for the independent variable in terms of the dependent variable. His method of doing this is crude and inductive. Nevertheless, Newton was immensely pleased with his derivation of so many series.

Collins received Newton's *De Analysi* in 1669 and communicated the results on series to James Gregory on December 24, 1670. Gregory answered (Turnbull, *Correspondence*, 1, 52–58 and 61–64) on February 15, 1671 that he had obtained other series, among them

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots.$$

questions that arose from the use of series but had no proof of the binomial theorem. They also accepted unquestioningly that the series was equal to the function that was being expanded.

James Bernoulli in 1702[2] derived the series for sin x and cos x by using expressions he had derived for sin $n\alpha$ in terms of sin α and then letting α approach 0 while n becomes infinite, so that $n\alpha$ approaches x while $n \sin \alpha$, which equals $n\alpha \sin \alpha/\alpha$, also approaches x. Wallis had mentioned in the Latin edition of his *Algebra* (1693) that Newton had given these series again in 1676; Bernoulli noted this remark but failed to acknowledge Newton's priority. Moreover, de Moivre gave a proof of Newton's results in the *Philosophical Transactions* of 1698;[3] though Bernoulli used and referred to this journal in other work, he gave no indication that he was aware through this source of Newton's work.

One of the major uses of series beyond their service in differentiation and integration is to calculate special quantities, such as π and e, and the logarithmic and trigonometric functions. Newton, Leibniz, James Gregory, Cotes, Euler, and many others were interested in series for this purpose. However, some series converge so slowly that they are almost useless for calculation. Thus Leibniz in 1674[4] obtained the famous result

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

However, it would require about 100,000 terms to compute π, even to the accuracy obtained by Archimedes. Likewise, the series for $\log(1+x)$ converges very slowly, so that many terms have to be taken into account to achieve an accuracy of a few decimal places. This series was transformed in various ways to produce more rapidly converging series. Thus James Gregory (*Exercitationes Geometricae*, 1668) obtained

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + \cdots,$$

which proved to be more useful for the calculation of logarithms. The problem of transforming a series into another that converges more rapidly

2. *Opera*, 2, 921–29.
3. Vol. 20, 190–93.
4. *Math. Schriften*, 5, 88–92; also *Acta Erud.*, 1682 = *Math. Schriften*, 5, 118–22.

xpansions are sought are singular points ($f_x = f_y = 0$). In his *Method of Fluxions* Newton published a scheme for determining the forms of the several eries, one for each explicit solution. His method, which uses what is known is Newton's parallelogram, shows how to determine the first few exponents n a series of the form

$$y = a_1x^m + a_2x^{m+n} + a_3x^{m+2n} + \cdots.$$

The coefficients of the series can then be determined by the method of undetermined coefficients. Actually Newton gave only specific examples, from which one must infer the method.

The problem of determining the exponents in each series is troublesome. Taylor, James Stirling, and Maclaurin gave rules; Maclaurin tried to extend and prove them but made no progress. A proof of Newton's method was given independently by Gabriel Cramer and Abraham G. Kästner (1719–1800).

3. *The Expansion of Functions*

One of the problems faced by mathematicians in the late seventeenth and eighteenth centuries was interpolation of table values. Greater accuracy of the interpolated values of the trigonometric, logarithmic, and nautical tables was necessary to keep pace with progress in navigation, astronomy, and geography. The common method of interpolation (the word is Wallis's) is called linear interpolation because it assumes that the function is a linear function of the independent variable in the interval between two known values. However, the functions in question are not linear; and the mathematicians realized that a better method of interpolation was needed.

The method we are about to describe was initiated by Briggs in his *Arithmetica Logarithmica* (1624), though the key formula was given by James Gregory in a letter to Collins (Turnbull, *Correspondence*, 1, 45–48) of November 23, 1670, and independently by Newton. Newton's work appears in Lemma 5 of Book III of the *Principia* and in the *Methodus Differentialis*, which, though published in 1711, was written by 1676. The method uses what are called finite differences and is the first major result in the calculus of finite differences.

Suppose $f(x)$ is a function whose values are known at $a, a + c, a + 2c, a + 3c, \ldots, a + nc$. Let

$$\begin{aligned}\Delta f(a) &= f(a + c) - f(a),\\ \Delta f(a + c) &= f(a + 2c) - f(a + c),\\ \Delta f(a + 2c) &= f(a + 3c) - f(a + 2c),\\ &\cdots\cdots\end{aligned}$$

Further, let

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(a) &= \Delta f(a + c) - \Delta f(a)\\ \Delta^3 f(a) &= \Delta^2 f(a + c) - \Delta^2 f(a),\\ &\cdots\cdots\end{aligned}$$

Then the Gregory-Newton formula states that

$$(1)\qquad f(a + h) = f(a) + \frac{h}{c}\Delta f(a) + \frac{\frac{h}{c}\left(\frac{h}{c} - 1\right)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(a) + \cdots.$$

Newton sketched a proof but Gregory did not.

To calculate a value of $f(x)$ at any value x between the known values, one simply gives h the value $x - a$. This calculated value is not necessarily the true value of the function; what the formula yields is the value of a polynomial in h that agrees with the true function at the special values a, $a + c, a + 2c, \ldots$.

The Gregory-Newton formula was also used to carry out approximate integration. Given a function, say $g(x)$, to be integrated, perhaps in order to find the area under the corresponding curve, one uses the values of $g(x)$ to obtain $g(a), g(a + c), g(a + 2c), \ldots$ and their differences and higher-order differences; these values are substituted in (1). Then (1) gives a polynomial approximation to $g(x)$, and, as Newton points out, since polynomials are readily integrated, one gets an approximation to the desired integral of $g(x)$.

Gregory also applied (1) to the function $(1 + d)^x$. He knew the value of this function at $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Then $f(0) = 1$, $\Delta f(0) = d$, $\Delta^2 f(0) = d^2$, and so on. Thus by letting $a = 0, c = 1$, and $h = x - 0$ in (1), and using the values of $f(0), \Delta f(0), \ldots$ he got

$$(2)\qquad (1 + d)^x = 1 + dx + \frac{x(x - 1)}{1\cdot 2}d^2 + \frac{x(x - 1)(x - 2)}{1\cdot 2\cdot 3}d^3 + \cdots.$$

Thus Gregory obtained the binomial expansion for general x.

The Gregory-Newton interpolation formula was used by Brook Taylor to develop the most powerful single method for expanding a function into an infinite series. The binomial theorem, division of the denominator of a rational function into the numerator, and the method of undetermined coefficients are limited devices. In his *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* (1715), the first publication in which he treated the calculus of finite differences, Taylor derived the theorem that still bears his name and which he had stated in 1712. Incidentally, he praises Newton but makes no mention of Leibniz's work of 1673 on finite differences, though Taylor knew this work. Taylor's theorem was known to James Gregory in 1670 and was discovered independently somewhat later by Leibniz; however, these two men did not publish it. John Bernoulli did publish practically the same result in the *Acta*

Eruditorum of 1694; and though Taylor knew this result he did not refer to it. His own "proof" was different. What he did amounts to letting c be Δx in the Gregory-Newton formula. Then, for example, the third term on the right side of (1) becomes

$$\frac{h(h - \Delta x)}{1 \cdot 2} \frac{\Delta^2 f(b)}{\Delta x^2}. \tag{3}$$

Taylor concluded that when $\Delta x = 0$, this term becomes $h^2 f''(a)/2!$, and so the entire Gregory-Newton formula becomes

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2!} + f'''(a)\frac{h^3}{3!} + \cdots. \tag{4}$$

Of course Taylor's method was not rigorous, nor did he consider the question of convergence.

Taylor's theorem for $a = 0$ is now called Maclaurin's theorem. Colin Maclaurin, who succeeded James Gregory as professor at Edinburgh, gave this special case in his *Treatise of Fluxions* (1742) and stated that it was but a special case of Taylor's result. However, historically it has been credited to Maclaurin as a separate theorem. Incidentally, Stirling gave this special case for algebraic functions in 1717 and for general functions in his *Methodus Differentialis* of 1730.

Maclaurin's proof of his result is by the method of undetermined coefficients. He proceeds as follows. Let

$$f(z) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots. \tag{5}$$

Then

$$\begin{aligned} f'(z) &= B + 2Cz + 3Dz^2 + \cdots \\ f''(z) &= 2C + 6Dz + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Let $z = 0$ in each equation and determine $A, B, C, \cdots$. He did not worry about convergence and proceeded to use the result.

4. *The Manipulation of Series*

James and John Bernoulli did a great deal of work with series. James wrote five papers between 1689 and 1704 that were published by his nephew Nicholas (1695–1726) (John's son) as a supplement to James's *Ars Conjectandi* (1713). Most of the work in these papers is devoted to the use of series representations of functions for the purposes of differentiating and integrating the functions and obtaining areas under curves and lengths of curves. While these applications were a substantial contribution to the calculus, there were no especially novel features. However, some of the methods

he used to sum series are worth noting because they illustrate the nature of mathematical thought in the eighteenth century.

In the first paper (1689),[5] he starts with the series

$$N = \frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \cdots, \tag{6}$$

from which

$$N - \frac{a}{c} = \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \cdots. \tag{7}$$

He now subtracts (7) from (6); in this process each term on the right side of (7) is subtracted from the term above it. This yields

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{1 \cdot 2c} + \frac{a}{2 \cdot 3c} + \frac{a}{3 \cdot 4c} + \cdots. \tag{8}$$

This is a correct result but incorrectly derived, because the original series is divergent. James says that the procedure is questionable and should not be used without some circumspection.

He then considers the ordinary harmonic series and shows that its sum is infinite.[6] He considers the terms

$$\frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n + 2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \tag{9}$$

and says this sum is larger than $(n^2 - n) \cdot (1/n^2)$ because there are $n^2 - n$ terms and each is at least as large as the last. But

$$(n^2 - n) \cdot \left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Hence if we add $1/n$ to (9)

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n + 2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1.$$

Thus, he says, we can go from one group of terms to another, each group having a sum greater than 1. Hence we can obtain a finite number of terms whose sum is as large as we please; and therefore the sum of the whole series must be infinite. Consequently, he also points out, the sum of an infinite series whose "last" term vanishes can be *infinite*; this is contrary to his earlier belief and the belief of many eighteenth-century mathematicians, including Lagrange.

5. *Opera*, 1, 375–402.
6. *Opera*, 1, 392.

John Bernoulli had previously given a different "proof" of the infinite sum of the harmonic series. It runs thus:

$$(10)\qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{3}{3\cdot 4}+\frac{4}{4\cdot 5}+\cdots$$
$$=\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\right)$$
$$+\left(\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\right)+\cdots.$$

Now, using (8), wherein we let a and c be 1, we get from (10) that

[illegible]

[illegible] recognized the need for [illegible] with infinite series. For example, in the second tract (1692),[7] he [illegible] from the formula for a geometrical progression we have [illegible] $= 2$. Then by taking $1/3$ of both sides $1/3 +$ [illegible] $= 2/3$, and by taking $1/5$ of both sides of the original series $1/5 + 1/10 + 1/20 + \cdots = 2/5$, and so on. Hence the sum of the left sides, which is the entire harmonic series, equals the sum of the right sides, or

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\cdots=2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\right).$$

Hence the sum of the odd terms is half the sum of the harmonic series. Then [illegible] is also $1/2$ the harmonic series, so that [illegible] $+ 1/6 + \cdots$.

In the third tract [illegible] he writes

[illegible] $= \frac{l}{m} - \frac{ln}{m^2} + \frac{ln^2}{m^3} - \cdots,$

[illegible]

and when $n = m$,

$$(11)\qquad \frac{l}{2m}=\frac{l}{m}-\frac{l}{m}+\frac{l}{m}-\cdots,$$

which he describes as a not inelegant paradox.

In the second paper on series he replaced the general term by a sum or difference of two other terms, and then performed other operations that lead to specific results. This replacement is correct for absolutely convergent series but not for conditionally convergent ones. Hence he got wrong results which he also described as paradoxes.

One of James's very interesting results deals with the series of reciprocals of the nth powers of the natural numbers, that is, with $1 + 1/2^n + 1/3^n + 1/4^n + \cdots$. James proved that the sum of the odd numbered terms is to the sum of the even numbered terms as [illegible]

[illegible]

$$(12)\qquad 1-1+1-1+\cdots.$$

It seemed clear that by writing the series as

$$(13)\qquad (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

the sum should be 0. It also seemed clear that by writing the series as

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots$$

the sum should be 1. However, if one denotes the sum of (12) by S, then $S = 1 - S$, so that $S = 1/2$; and this is in fact Bernoulli's result in (11). Guido Grandi (1671–1742), a professor of mathematics at the University of Pisa, in his little book *Quadratura Circuli et Hyperbolae* (The Quadrature of Circles and Hyperbolas, 1703), obtained the third result by another method. He set $x = 1$ in the expansion

$$(14)\qquad \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

and obtained

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+\cdots.$$

Grandi therefore maintained that 1/2 was the sum of the series (12). He also argued that since the sum of (12) in the form (13) was 0, he had proved that the world could be created out of nothing.

In a letter to Christian Wolf (1678–1754), published in the *Acta*,[9] Leibniz also treated the series (12). He agreed with Grandi's result but thought it should be possible to obtain it without resorting to his argument. Instead, Leibniz argued that if one takes the first term, the sum of the first two, the sum of the first three, and so forth, one obtains 1, 0, 1, 0, 1, $\cdots$. Thus 1 and 0 are equally probable; one should therefore take the arithmetic mean, which is also the most probable value, as the sum. This solution was accepted by James and John Bernoulli, Daniel Bernoulli, and, as we shall see, Lagrange. Leibniz conceded that his argument was more metaphysical than mathematical but went on to say that there was more metaphysical truth in mathematics than was generally recognized. However, he was probably much more influenced by Grandi's argument than he himself realized. For when, in later correspondence, Wolf wished to conclude that

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 \cdots = \frac{1}{3}$$

$$1 - 3 + 9 - 27 + 81 \cdots = \frac{1}{4}$$

by using an extension of Leibniz's own probability argument, Leibniz objected. He pointed out that series that have sums have decreasing terms, and (12) is at least a limit of series with decreasing terms, as is evident from (14) by letting x approach 1 from below.

Really extensive work on series began about 1730 with Euler, who aroused tremendous interest in the subject. But there was much confusion in his thinking. To obtain the sum of

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$$

Euler argued that since

$$(15) \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3,$$

then when $x = -1$,

$$(16) \qquad \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

so that the sum is 1/2.

Also, when $x = -2$, (15) shows that

$$(17) \qquad \frac{1}{3} = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \cdots;$$

9. *Acta Erud. Supplementum*, 5, 1713, 264–70 = *Math. Schriften*, 5, 382–87.

hence the sum of the right-hand series is 1/3. As a third example, since

$$(18) \qquad \frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots,$$

then for $x = 1$ we have

$$\frac{1}{4} = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots.$$

Again, since

$$\frac{1-x}{(1+x)^2} = (1-x)(1+x)^{-2} = 1 - 3x + 5x^2 - 7x^3 + \cdots,$$

then for $x = 1$ we have

$$(19) \qquad 0 = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots.$$

There are numerous examples of such arguments in his work.

One sees from (18), for $x = -1$, that

$$(20) \qquad \infty = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots.$$

This Euler accepted. Moreover one sees from (15), for $x = 2$, that

$$(21) \qquad -1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots.$$

Since the right-hand side of (21) should exceed the right-hand side of (20), the sum $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$ should exceed ∞. According to (21), it yields -1. Euler concluded that ∞ must be a sort of limit between the positive and negative numbers and in this respect resembles 0.

Apropos of (19), Nicholas Bernoulli (1687–1759) said, in a letter to Euler of 1743, that the sum of this series $1 - 3 + 5 - 7 + \cdots$ is $-\infty(-1)^\infty$. Euler's result of 0 he called an unsolvable contradiction. Bernoulli also noted that from (15) one gets, for $x = 2$,

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots;$$

and from

$$(22) \qquad \frac{1}{1-x-x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots,$$

for $x = 1$ one gets

$$-1 = 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots.$$

The fact that two different series give -1 is also an unsolvable contradiction, for otherwise one could equate the two series.

In one paper Euler did point out that series can be used only for values of x for which they converge. Nevertheless, in the very same paper[10] he concluded that

$$\cdots + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = 0. \tag{23}$$

His argument was that

$$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \cdots$$

and

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots.$$

But the two left sides add up to 0, while the two right sides add up to the original series.

In an earlier paper,[11] Euler started with the series

$$y = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \tag{24}$$

or

$$1 - \frac{x}{y} + \frac{x^3}{3!y} - \frac{x^5}{5!y} + \cdots = 0. \tag{25}$$

By using algebraic considerations applied to (25) as a *polynomial of infinite degree*, and by using the theorem on the relation between roots and coefficients of an algebraic equation, Euler proved that[12]

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots = \frac{\pi^3}{32}$$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\frac{1}{1^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \cdots = \frac{5\pi^5}{1536}$$

$$\frac{1}{1^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{960}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

10. *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 11, 1739, 116–27, pub. 1750 = *Opera*, (1), 14, 350–63.
11. *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 7, 1734/35, 123–34, pub. 1740 = *Opera*, (1), 14, 73–86.
12. He used the symbol p for π until 1737; π had been introduced by William Jones in 1706.

In the same paper, he first gave the product expansion

$$\sin x = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots. \tag{26}$$

His argument was simply that $\sin x$ has the zeros $\pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$ (he discards the root 0), and so like every polynomial must have a linear factor corresponding to each of its roots. (In 1743[13] and in his *Introductio*,[14] he gave another derivation to meet criticism.) He treated the right side of (26) as a polynomial, which he set equal to zero, and again by using the relation between the roots and the coefficients he deduced that

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90},$$

and similar sums for higher even powers in the denominator.

In a later paper[15] Euler obtained one of his finest triumphs,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2n}} = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n},$$

where the B_{2n} are the Bernoulli numbers (see below). The connection with the Bernoulli numbers was actually established by Euler a little later in his *Institutiones* of 1755.[16] He also gave in the 1740 paper the sum $\sum_{\nu=1}^{\infty} (1/\nu^n)$ for the first few odd values of n but got no general expression for all odd n.

Euler also worked on harmonic series, that is, series such that the reciprocals of the terms are in arithmetic progression. In particular he showed[17] how one can sum a finite number of terms of the ordinary harmonic series by using the logarithm function. He starts with

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \cdots. \tag{27}$$

Then

$$\frac{1}{x} = \log\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} - \cdots,$$

13. *Opera*, (1), 14, 138–55.
14. *Opera*, (1), 8, 168.
15. *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 12, 1740, 53–86, pub. 1750 = *Opera*, (1), 14, 407–62.
16. Part II, Chap. 5, §124 = *Opera*, (1), 10, 327.
17. *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 7, 1734/35, 150–61, pub. 1740 = *Opera*, (1), 14, 87–100.

Now let $x = 1, 2, 3, \ldots, n$. These substitutions give

$$\frac{1}{1} = \log 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots$$

$$\frac{1}{2} = \log\frac{3}{2} + \frac{1}{2\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{4\cdot 16} - \frac{1}{5\cdot 32} + \cdots$$

$$\frac{1}{3} = \log\frac{4}{3} + \frac{1}{2\cdot 9} - \frac{1}{3\cdot 27} + \frac{1}{4\cdot 81} - \frac{1}{5\cdot 243} + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n} = \log\frac{n+1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{5n^5} + \cdots.$$

By adding and noting that each log term is a difference of two logarithms, one gets

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \log(n+1) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$$
$$- \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{n^3}\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \cdots + \frac{1}{n^4}\right) - \cdots,$$

or

$$(28) \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \log(n+1) + C,$$

where C represents the sum of the infinite set of finite arithmetic sums. The value of C was calculated approximately by Euler (it depends upon n, but for large n the value of n does not affect the result much) and he obtained 0.577218. This C is now known as Euler's constant and is denoted by γ. A more accurate representation of γ is obtained nowadays as follows. Subtract $\log n$ from both sides of (28). Now $\log(n+1) - \log n = \log(1 + 1/n)$ and this approaches 0 as $n \to \infty$. Hence

$$(29) \qquad \gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right).$$

Incidentally, no simpler form than (29) has been found for Euler's constant, whereas we do have various expressions for π and e. Moreover, we do not know today whether γ is rational or irrational.

In his "De Seriebus Divergentibus"[18] Euler investigated the divergent series

18. *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 5, 1754/5, 205–37, pub. 1760 = *Opera*, (1), 14, 585–617.

$$(30) \qquad y = x - (1!)x^2 + (2!)x^3 - (3!)x^4 + \cdots.$$

Formally this series satisfies the differential equation

$$(31) \qquad x^2y' + y = x.$$

But this differential equation has the integrating factor $x^{-2}e^{-1/x}$, so that

$$(32) \qquad y = e^{1/x}\int_0^x \frac{e^{-1/t}}{t}\,dt$$

is a solution that can be shown by L'Hospital's rule to vanish with x. Euler considered the series (30) to be the series expansion of the function in (32) and (32) as the sum of the series (30). In fact he lets $x = 1$ and obtains

$$1 - 1 + 2! - 3! + 4! - \cdots = e\int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{t}\,dt.$$

The remarkable fact about the series (30) is that it can be used to obtain good numerical values for the function (32) because, given a value of x, if we neglect all terms beyond a certain one, the absolute value of the remainder can be shown to be smaller than the absolute value of the first of the neglected terms. Hence the series can be used to obtain good numerical approximations to the integral. Euler was using divergent series to advantage. The full significance of what these divergent series accomplished was not appreciated for another 150 years. (See Chap. 47.)

Another famous result of Euler's in the area of series should be noted. In *Ars Conjectandi* James Bernoulli, treating the subject of probability, introduced the now widely used Bernoulli numbers. He sought a formula for the sums of the positive integral powers of the integers and gave the following formula without demonstration:

$$(33) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^c = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}B_2n^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{2\cdot 3\cdot 4}B_4n^{c-3}$$
$$+ \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}B_6n^{c-5} + \cdots.$$

This series terminates at the last positive power of n. The $B_2, B_4, B_6, \ldots$ are the Bernoulli numbers

$$(34) \qquad B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_{10} = \frac{5}{66}, \ldots.$$

Bernoulli also gave the recurrence relation, which permits one to calculate these coefficients.

Euler's result, the Euler-Maclaurin summation formula, is a generalization.[19] Let $f(x)$ be a real-valued function of the real variable x. Then (in modern notation) the formula reads

$$(35)\quad \sum_{i=0}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)\,dx - \frac{1}{2}[f(n) - f(0)] + \frac{B_2}{2!}[f'(n) - f'(0)]$$

$$+ \frac{B_4}{4!}[f'''(n) - f'''(0)] + \cdots + \frac{B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)] + R_k$$

where

$$(36)\quad R_k = \int_0^n f^{(2k+1)}(x) P_{2k+1}(x)\,dx.$$

Here n and k are positive integers. $P_{2k+1}(x)$ is the $(2k+1)$th Bernoulli polynomial (which also appears in Bernoulli's *Ars Conjectandi*), which is given by

$$(37)\quad P_k(x) = \frac{x^k}{k!} + \frac{B_1}{1!}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{B_2}{2!}\frac{x^{k-2}}{(k-2)!} + \cdots + \frac{B_k}{k!},$$

wherein $B_1 = -1/2$ and $B_{2k+1} = 0$ for $k = 1, 2, \cdots$. The series

$$(38)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)]$$

is divergent for almost all $f(x)$ that occur in applications. Nevertheless, the remainder R_k is less than the first term neglected and so the series in (35) gives a useful approximation to

$$\sum_{i=0}^{n} f(i).$$

The Bernoulli numbers B_i are often defined today by a relation given later by Euler,[20] namely,

$$(39)\quad t(e^t - 1)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} B_i \frac{t^i}{i!}.$$

Independently of Euler, Maclaurin[21] arrived at the same summation formula (35) but by a method a little surer and closer to that which we use today. The remainder was first added and seriously treated by Poisson.[22]

Euler also introduced[23] a transformation of series, still known and

19. *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 6, 1732/33, 68-97, pub. 1738 = *Opera*, (1), 14, 42-72; and *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 8, 1736, 147-58, pub. 1741 = *Opera*, (1), 14, 124-37.
20. *Opera*, (1), 14, 407-62.
21. *Treatise of Fluxions*, 1742, p. 672.
22. *Mém. de l'Acad. des Sci., Inst. France*, 6, 1823, 571-602, pub. 1827.
23. *Inst. Cal. Diff.*, 1755, p. 281.

used. Given a series $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, he wrote it as $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$. Then by a numbe of formal algebraic steps he showed that

$$(40)\quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}},$$

wherein the Δ^n denotes the nth finite difference (sec. 3). The advantage this transformation, in modern terms, is to convert a convergent series in a more rapidly converging one. However, for Euler, who did not usuall distinguish convergent and divergent series, the transformation could al transform divergent series into convergent ones. If one applies (40) to

$$(41)\quad 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots,$$

then the right side of (40) yields $1/2$. Likewise for the series

$$(42)\quad 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 \cdots$$

(40) gives

$$(43)\quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{8}(1) - \frac{1}{16}(-1) \cdots = \frac{1}{3}.$$

These results are, of course, the same as those Euler got above (see [16] a [17]) by taking the sum of the series to be the value of the function fr which the series is derived.

The spirit of Euler's methods should be clear. He is the great manip lator and pointed the way to thousands of results later established rigorous

One other famous series must be mentioned. In his *Methodus Differentiali* James Stirling gave the series we now write as

$$(44)\quad \log n! = \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + \log\sqrt{2\pi} + \frac{B_2}{1\cdot 2}\frac{1}{n} + \frac{B_4}{3\cdot 4}\frac{1}{n^3} + \cdots$$

$$+ \frac{B_{2k}}{(2k-1)(2k)}\frac{1}{n^{2k-1}} + \cdot$$

which is equivalent to

$$(45)\quad n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,\exp\left[\frac{B_2}{1\cdot 2}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\frac{1}{n^{2k-1}} + \cdots\right].$$

Stirling gave the first five coefficients and a recurrence formula for determ ing the succeeding ones. Though the series for $\log n!$ is divergent, Stirl calculated $\log_{10}(1000!)$, which is 2567 plus a decimal, to ten decimal pla by using only a few terms of his series. De Moivre in 1730 (*Miscella*

24. 1730, p. 135.

Analytica) gave a similar formula. For large n, $n! \sim (n/e)^n\sqrt{2\pi n}$; though given by de Moivre, it is known as Stirling's approximation.

5. *Trigonometric Series*

The eighteenth-century mathematicians also worked extensively with trigonometric series, especially in their astronomical theory. The usefulness of such series in astronomy is evident from the fact that they are periodic functions and astronomical phenomena are largely periodic. This work was the beginning of a vast subject whose full significance was not appreciated in the eighteenth century. The problem that launched the use of trigonometric series was interpolation, particularly to determine the positions of the planets between those obtained by observation. The same series were introduced in the early work on partial differential equations (see Chap. 22) but curiously the two lines of thought were kept separate even though the same men worked on both problems.

By a trigonometric series is meant any series of the form

$$(46) \qquad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

with a_n and b_n constant. If such a series represents a function $f(x)$, then

$$(47) \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

for $n = 0, 1, 2, \ldots$. The attainment of these formulas for the coefficients was one of the chief results of the theory, though we shall say nothing at present about the conditions under which these are necessarily the values of a_n and b_n.

As early as 1729 Euler had undertaken the problem of interpolation; that is, given a function $f(x)$ whose values for $x = n$, n positive and integral, are prescribed, to find $f(x)$ for other values of x. In 1747 he applied the method he had obtained to a function arising in the theory of planetary perturbations and secured a trigonometric series representation of the function. In 1753[25] he published the method he had found in 1729.

First he tackled the problem when the given conditions are $f(n) = 1$ for each n and sought a periodic solution that is 1 for integral x. His reasoning is interesting because it illustrates the analysis of the period. He lets $f(x) = y$, and by Taylor's theorem writes

$$(48) \qquad f(x+1) = y + y' + \frac{1}{2}y'' + \frac{1}{6}y''' + \cdots.$$

25. *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 3, 1750/51, 36–85, pub. 1753 = *Opera*, (1), 14, 463–515.

Since $f(x+1)$ is to equal $f(x)$, y must satisfy the linear differential equation of infinite order

$$(49) \qquad y' + \frac{1}{2}y'' + \frac{1}{6}y''' + \cdots = 0.$$

He now applied his method of solving linear ordinary differential equations of finite order published in 1743 (see Chap. 21). That is, he set up the auxiliary equation

$$(50) \qquad z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \cdots = 0.$$

This equation, in view of the series for e, is

$$e^z - 1 = 0.$$

Next he determines the roots of this last equation. He starts with the equation

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = 1,$$

which is a polynomial of the nth degree. According to a theorem which Cotes (1722) and Euler independently in his *Introductio*[26] had proven, this polynomial has the linear factor z and the quadratic factors

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{z}{n}\right)\cos\frac{2k\pi}{n} + 1, \qquad k = 1, 2, \ldots, < \frac{n}{2}.$$

By virtue of the trigonometric identity for $\sin z$ in terms of $\cos 2z$ these factors are the same as

$$4\left(1 + \frac{z}{n}\right)\sin^2\frac{k\pi}{n} + \frac{z^2}{n^2}.$$

The roots of (50) are not affected if we divide each factor by $4\sin^2 k\pi/n$ (for the respective k), and so the quadratic factors are

$$1 + \frac{z}{n} + \frac{z^2}{4n^2\sin^2\frac{k\pi}{n}}.$$

For $n = \infty$, the term z/n is 0. The quantity $\sin k\pi/n$ is replaced by $k\pi/n$, and so the factors become

$$1 + \frac{z^2}{4k^2\pi^2}.$$

26. Vol. 1, Chap. 14.

To such a factor in the auxiliary equation (50) there correspond the roots $z = \pm i2k\pi$, and hence the integral

$$a_k \sin 2k\pi x + A_k \cos 2k\pi x$$

of (49). The linear factor z mentioned above gives rise to a constant integral. Since $f(0) = 1$ is an initial condition, Euler finally obtains

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \sin 2k\pi x + A_k(\cos 2k\pi x - 1)\}.$$

The coefficients a_k and A_k are still subject to the condition that $f(n) = 1$ for each n.

This paper also contains a result which is formally identical with what came to be called the Fourier expansion of an arbitrary function, as well as the determination of the coefficients by integrals. Specifically Euler showed that the general solution of the functional equation

$$f(x) = f(x - 1) + X(x)$$

is

$$f(x) = \int_0^x X(\xi)\,d\xi + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\pi x \int_0^x X(\xi) \cos 2n\pi\xi\,d\xi$$
$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty} \sin 2n\pi x \int_0^x X(\xi) \sin 2n\pi\xi\,d\xi.$$

Here we have a function expressed as a trigonometric series in the year 1750–51. Euler maintained that his was the most general solution of the interpolation problem. If so, it surely included the representation of polynomials by trigonometric series. But, as we shall see in Chapter 22, Euler denied this in the arguments on the vibrating string and related problems.

In 1754 d'Alembert[27] considered the problem of the expansion of the reciprocal of the distance between two planets in a series of cosines of the multiples of the angle between the rays from the origin to the planets, and here too the definite integral expressions for the coefficients in Fourier series can be found.

In another work Euler obtains trigonometric series representations of functions in a totally different fashion.[28] He starts with the geometric series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n(\cos x + i \sin x)^n, \qquad i = \sqrt{-1}$$

27. *Recherches sur différens points importans du système du monde*, 1754, Vol. II, p. 66.
28. *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 5, 1754/5, 164–204, pub. 1760 = *Opera*, (1), 14, 542–84; see also *Opera*, (1), 15, 435–97, for another method.

and by summing it obtains

$$\frac{1}{1 - a(\cos x + i \sin x)}.$$

He then uses standard formulas to replace powers of $\cos x$ and $\sin x$ by $\cos nx$ and $\sin nx$ (which amounts to de Moivre's theorem) and obtains

$$\frac{1}{1 - a(\cos x + i \sin x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n(\cos nx + i \sin nx).$$

By multiplying numerator and denominator on the left by the complex conjugate of the denominator, separating the $n = 0$ term on the right and putting it on the left side, dividing through by a, and separating real and imaginary parts, he obtains

$$\frac{a \cos x - a^2}{1 - 2a \cos x + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx$$

$$\frac{a \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nx.$$

So far his results are not surprising. He now lets $a = \pm 1$ and obtains, for example,

(51) $$\frac{1}{2} = 1 \pm \cos x + \cos 2x \pm \cos 3x + \cos 4x \pm \cdots.$$

(Actually the series are divergent.) He then integrates and obtains

(52) $$\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots,$$

(which holds for $0 < x < \pi$ and equals 0 for $x = 0$ and π) and

(53) $$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots,$$

(which converges in $-\pi < x < \pi$). An integration of the latter and evaluation at $x = 0$ to determine the constant of integration gives

(54) $$\frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{4} = -\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{16}\cos 4x - \cdots.$$

Euler believed that the latter two series [which are convergent in $(-\pi < x < \pi)$] represent the respective functions for all values of x. Moreover, by successively differentiating (51), Euler deduced that

$$\sin x \pm 2 \sin 2x + 3 \sin 3x \pm \cdots = 0$$
$$\cos x \pm 4 \cos 2x + 9 \cos 3x \pm \cdots = 0$$

and other such equations. Daniel Bernoulli, who had also given expansions such as (52), (53), and (54), recognized that the series represent the functions only for certain ranges of x values.

In 1757, while studying perturbations caused by the sun, Clairaut[29] took a far bolder step. He says he will represent *any* function in the form

$$f(x) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx. \tag{55}$$

He regards the problem as one of interpolation and so uses the function values at the x-values

$$\frac{2\pi}{k}, \quad \frac{4\pi}{k}, \quad \frac{6\pi}{k}, \ldots$$

and after some manipulations obtains

$$A_0 = \frac{1}{k}\sum_{\mu} f\left(\frac{2\mu\pi}{k}\right)$$

$$A_n = \frac{1}{k}\sum_{\mu} f\left(\frac{2\mu\pi}{k}\right)\cos\frac{2\mu n\pi}{k}.$$

By letting k become infinite, Clairaut arrives at

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx, \tag{56}$$

which is the correct formula for the A_n.

Lagrange, in his research on the propagation of sound,[30] obtained the series (51) and defended the fact that the sum is 1/2. Yet neither Euler nor Lagrange commented on the remarkable fact that they had expressed nonperiodic functions in the form of trigonometric series. However, somewhat later they did observe this fact in another connection. D'Alembert had often given the example of $x^{2/3}$ as a function that could not be expanded in a trigonometric series. Lagrange showed him in a letter[31] of August 15, 1768 that $x^{2/3}$ can indeed be expressed in the form

$$x^{2/3} = a + b\cos 2x + c\cos 4x + \cdots.$$

D'Alembert objected and gave counterarguments, such as that the derivatives of the two sides are not equal for $x = 0$. Also, by Lagrange's method one could express $\sin x$ as a cosine series; yet $\sin x$ is an odd function,

29. *Hist. de l'Acad. des Sci.*, Paris, 1754, 545 ff., pub. 1759.
30. *Misc. Taur.*, 1, 1759 = *Œuvres*, 1, 110.
31. *Lagrange, Œuvres*, 13, 116.

whereas the right side would be an even one. The problem was not resolved in the eighteenth century.

In 1777,[32] Euler, working on a problem in astronomy, actually obtained the coefficients of a trigonometric series by using the orthogonality of the trigonometric functions, the method we use today. That is, from

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} \tag{57}$$

he deduced that

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(s)\cos\frac{k\pi s}{l}\, ds.$$

He had first obtained it, in the immediately preceding paper, in a somewhat complicated fashion, then realized that he could obtain it directly by multiplying both sides of (57) by $\cos(\nu\pi x/l)$, integrating term by term, and applying the relations

$$\int_0^l \cos\frac{\nu\pi x}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{if } \nu \neq k \\ l/2 & \text{if } \nu = k \neq 0 \\ l, & \text{if } \nu = k = 0\ . \end{cases}$$

Throughout all of the above work on trigonometric series ran the paradox that, although all sorts of functions were being represented by trigonometric series, Euler, d'Alembert, and Lagrange never abandoned the position that *arbitrary* functions could not be represented by such series. The paradox is partially explained by the fact that the trigonometric series were assumed to hold where other evidence, in some cases physical, seemed to assure this fact. They then felt free to assume the series and deduce the formulas for the coefficients. This issue of whether any function can be represented by a trigonometric series became central.

6. *Continued Fractions*

We have already noted (Chap. 13, sec. 2) the use of continued fractions to obtain approximations to irrational numbers. Euler took up this subject. In his first paper on it,[33] entitled "De Fractionibus Continuis," he derived a number of interesting results, such as that every rational number can be expressed as a finite continued fraction. He then gave the expansions

$$e - 1 = 1 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\cdots,$$

32. *Nova Acta Acad. Sci. Petrop.*, 11, 1793, 114–32, pub. 1798 = *Opera*, (1), 16, Part 1, 333–55.
33. *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 9, 1737, 98–137, pub. 1744 = *Opera*, (1), 14, 187–215.

which had already appeared in a paper by Cotes in the *Philosophical Transactions* of 1714, and

$$\frac{e+1}{e-1} = 2 + \frac{1}{6+}\,\frac{1}{10+}\,\frac{1}{14+}\cdots.$$

He showed substantially that e and e^2 are irrational.

The foundations of a theory of continued fractions were laid by Euler in his *Introductio* (Chap. 18). There he showed how to go from a series to a continued fraction representation of the series, and conversely.

Euler's work on continued fractions was used by Johann Heinrich Lambert (1728–77), a colleague of Euler and Lagrange at the Berlin Academy of Sciences, to prove[34] that if x is a rational number (not 0), then e^x and $\tan x$ cannot be rational. He thereby proved not only that e^x for positive integral x is irrational, but that all rational numbers have irrational natural (base e) logarithms. From the result on $\tan x$, it follows, since $\tan(\pi/4) = 1$, that neither $\pi/4$ nor π can be rational. Lambert actually proved the convergence of the continued fraction expansion for $\tan x$.

Lagrange[35] used continued fractions to find approximations to the irrational roots of equations, and, in another paper in the same journal,[36] he got approximate solutions of differential equations in the form of continued fractions. In the 1768 paper, Lagrange proved the converse of a theorem that Euler had proved in his 1744 paper. The converse states that a real root of a quadratic equation is a periodic continued fraction.

7. *The Problem of Convergence and Divergence*

We are aware today that the eighteenth-century work on series was largely formal, and that the question of convergence and divergence was certainly not taken too seriously; neither, however, was it entirely ignored.

Newton,[37] Leibniz, Euler, and even Lagrange regarded series as an extension of the algebra of polynomials and hardly realized that they were introducing new problems by extending sums to an infinite number of terms. Consequently, they were not quite prepared to face the problems that infinite series thrust upon them; but the apparent difficulties that did arise caused them at least occasionally to bring up these questions. What is especially interesting is that the correct resolution of the paradoxes and other difficulties was often voiced and just as often ignored.

Even some seventeenth-century men had observed the distinction between convergence and divergence. In 1668 Lord Brouncker, treating

34. *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 1761, 265–322, pub. 1768 = *Opera*, 2, 112–59.
35. *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 23, 1767, 311–52, pub. 1769 = *Œuvres*, 2, 539–78, and 24, 1768, 111–80, pub. 1770 = *Œuvres*, 2, 581–652.
36. 1776 = *Œuvres*, 4, 301–32.
37. See the quotation from Newton in Chap. 17, sec. 3.

the relation between $\log x$ and the area under $y = 1/x$, demonstrated the convergence of the series for $\log 2$ and $\log 5/4$ by comparison with a geometric series. Newton and James Gregory, who made much use of numerical values of series to calculate logarithmic and other function tables and to evaluate integrals, were aware that the sums of series can be finite or infinite. The terms "convergent" and "divergent" were actually used by James Gregory in 1668, but he did not develop the ideas. Newton recognized the need to consider convergence but did no more than affirm that power series converge for small values of the variable at least as well as the geometric series. He also remarked that some series can be infinite for some values of x and so be useless, as, for example, the series for $y = \sqrt{ax - x^2}$ at $x = a$.

Leibniz, too, felt some concern about convergence and noted in a letter of October 25, 1713, to John Bernoulli what is now a theorem, that a series whose terms alternate in sign and decrease in absolute value monotonically to zero converges.[38]

Maclaurin, in his *Treatise of Fluxions* (1742), used series as a regular method for integration. He says, "When a fluent cannot be represented accurately in algebraic terms, it is then to be expressed by a converging series." That the terms of a convergent series must continually decrease and become less than any quantity howsoever small that can be assigned he also recognized. "In that case a few terms at the beginning of the series will be nearly equal to the value of the whole." In the *Treatise* Maclaurin gave the integral test (independently discovered by Cauchy) for the convergence of an infinite series: $\sum_n \phi(n)$ converges if and only if $\int_a^\infty \phi(x)$ is finite, provided that $\phi(x)$ is finite and of the same sign for $a \le x \le \infty$. Maclaurin gave it in geometrical form.

Some ideas about convergence were also expressed by Nicholas Bernoulli (1687–1759) in letters to Leibniz of 1712 and 1713. In a letter of April 7, 1713,[39] Bernoulli says the series

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \cdots$$

has no sum when x is negative and numerically greater than 1 if n is fractional and has an even denominator. That is, the (arithmetical) divergence of a series is not the only reason for a series not to have a sum. Thus for $x > 1$ both series

$$(1 - x)^{-1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^2 + \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 + \cdots$$

$$(1 - x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots$$

38. *Math. Schriften*, 3, 922–23. Leibniz also gave an incorrect proof in a letter to John of January 10, 1714 = *Math. Schriften*, 3, 926.
39. Leibniz: *Math. Schriften*, 3, 980–84.

are divergent, but the first series has a possible value and the second an imaginary value. One cannot distinguish the two by examining the series because the *remainders are missing*. However, Nicholas did not set up a clear concept of convergence. In a reply of June 28, 1713, Leibniz[40] uses the term "advergent" for series that converge (roughly in our sense) and agrees that non-advergent series may be impossible or infinitely large.

There is no doubt that Euler saw some of the difficulties with divergent series, and in particular the difficulty in using them for computations, but he certainly was unclear about the concepts of convergence and divergence. He did recognize that the terms must become infinitely small for convergence. The letters described below tell us, indirectly, something of his views.

Nicholas Bernoulli (1687–1759), in correspondence with Euler during 1742–43, had challenged some of Euler's ideas and work. He pointed out that Euler's use in his paper of 1734/35 (see sec. 4) of

$$\sin s = s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \cdots = \left(1 - \frac{s^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{s^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{s^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

does yield

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots,$$

but a proof of the convergence of the basic series in s is missing. In a letter of April 6, 1743,[41] he says he cannot imagine that Euler can believe a divergent series gives the exact value of some quantity or function. He points out that the remainder is lacking. Thus $1/(1 - x)$ cannot equal $1 + x + x^2 + \cdots$ because the remainder, namely, $x^{n+1}/(1 - x)$, is missing.

In another letter of 1743, Bernoulli says Euler must distinguish between a finite sum and a sum of an infinite number of terms. There is no last term in the latter case. Hence one cannot use for infinite polynomials (as Euler did) the relation between the roots and coefficients of a polynomial of finite degree. For polynomials with an infinite number of terms one cannot speak of the sum of the roots.

Euler's answers to these letters of Bernoulli are not known. In writing to Goldbach on August 7, 1745,[42] Euler refers to Bernoulli's argument that divergent series such as

$$+1 - 2 + 6 - 24 + 120 - 720 - \cdots$$

have no sum but says that these series have a definite *value*. He notes that we should not use the term "sum" because this refers to actual addition. He then states the general principle which explains what he means by a

40. *Math. Schriften*, 3, 566.
41. Fuss: *Correspondance*, 2, 701 ff.
42. Fuss: *Correspondance*, 1, 324.

definite value. He points out that the divergent series come from finite algebraic expressions and then says that the value of the series is *the value of the algebraic expression from which the series comes*. In the paper of 1754/55 (sec. 4), he adds, "Whenever an infinite series is obtained as the development of some closed expression, it may be used in mathematical operations as the equivalent of that expression, even for values of the variable for which the series diverges." He repeats the first principle in his *Institutiones* of 1755:

> Let us say, therefore, that the sum of any infinite series is the finite expression, by the expansion of which the series is generated. In this sense the sum of the infinite series $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ will be $1/(1 + x)$, because the series arises from the expansion of the fraction, whatever number is put in place of x. If this is agreed, the new definition of the word sum coincides with the ordinary meaning when a series converges; and since divergent series have no sum in the proper sense of the word, no inconvenience can arise from this terminology. Finally, by means of this definition, we can preserve the utility of divergent series and defend their use from all objections.[43]

It is fairly certain that Euler meant to limit the doctrine to power series.

In writing to Nicholas Bernoulli in 1743, Euler did say that he had had grave doubts as to the use of divergent series but that he had never been led into error by using his definition of sum.[44] To this Bernoulli replied that the same series might arise from the expansion of two different functions and, if so, the sum would not be unique.[45] Euler then wrote to Goldbach (in the letter of August 7, 1745): "Bernoulli gives no examples and I do not believe it possible that the same series could come from two truly different algebraic expressions. Hence it follows unquestionably that any series, divergent or convergent, has a definite sum or value."

There is an interesting sequel to this argument. Euler rested on his contention that the sum of series such as

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 \cdots \tag{58}$$

could be the value of the function from which the series comes. Thus the above series comes from $1/(1 + x)$ when $x = 1$, and so has the value 1/2. However, Jean-Charles (François) Callet (1744–99), in an unpublished memorandum submitted to Lagrange (Lagrange approved it for publication in the *Mémoires* of the Academy of Sciences of Paris but it was never published), pointed out some forty years later that

$$\frac{1 + x + \cdots + x^{m-1}}{1 + x + \cdots + x^{n-1}} = \frac{1 - x^m}{1 - x^n} = 1 - x^m + x^n - x^{n+m} + x^{2n} - \cdots, \tag{59}$$

43. Paragraphs 108–11.
44. *Opera Posthuma*, 1, 536.
45. April 6, 1743; Fuss: *Correspondance*, 2, 701 ff.

Hence for $x = 1$ (and $m < n$), since the left side is m/n, the sum of the right side must also be m/n, where m and n are at our disposal.

Lagrange[46] considered Callet's objection and argued that it was incorrect. He used Leibniz's probability argument thus: Suppose $m = 3$ and $n = 5$. Then the *full* series on the right side of (59) is

$$1 + 0 + 0 - x^3 + 0 + x^5 + 0 + 0 - x^8 + 0 + x^{10} + 0 - \cdots.$$

Now if one takes for $x = 1$, the sum of the first term, the first two, the first three, . . . , then in each five of these partial sums three are equal to 1 and two are equal to 0. Hence the most probable value (mean value) is 3/5; and this is the value of the series in (59) for $m = 3$ and $n = 5$. Incidentally, Poisson, without mentioning Lagrange, repeats Lagrange's argument.[47]

Euler did say that great care should be exercised in the summation of divergent series. He also made a distinction between divergent series and semiconvergent series, such as (58), that oscillate in value as more and more terms are added but do not become infinite. Certainly he recognized the distinction between convergent series and divergent ones. In one case (1747), where he used infinite series to calculate the attraction that the earth, as an oblate spheroid, exerts on a particle at the pole, he says the series "converges vehemently."

Lagrange, too, showed some awareness of the distinction between convergence and divergence. In his earlier writings he was indeed lax on this matter. In one paper[48] he says that a series will represent a number if it converges to its extremity, that is, if its nth term approaches 0. Later, toward the end of the eighteenth century, when he worked with Taylor's series, he gave what we call Taylor's theorem,[49] namely,

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} + R_n$$

where

$$R_n = f^{(n+1)}(x+\theta h)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

and θ is between 0 and 1 in value. This expression for R_n is still known as Lagrange's form of the remainder. Lagrange said that the Taylor (infinite)

46. *Mém. de l'Acad. des Sci., Inst. France*, 3, 1796, 1–11, pub. 1799; this article does not appear in the *Œuvres*.
47. *Jour. de l'École Poly.*, 12, 1823, 404–509. If one insists on using the full *power* series, then Lagrange's argument makes more sense. It can be rigorized by applying Frobenius's definition of summability (Chap. 47, sec. 4).
48. *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 24, 1770 = *Œuvres*, 3, 5–73, p. 61 in particular.
49. *Théorie des fonctions*, 2nd ed., 1813, Chap. 6 = *Œuvres*, 9, 69–85. The mean value theorem of the differential calculus, $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$, is due to Lagrange (1797). Later it was used to derive Taylor's theorem as in modern books.

series should not be used without consideration of the remainder. However, he did not investigate the idea of convergence or the relation of the value of the remainder to the convergence of the infinite series. He thought that one need consider only a finite number of terms of the series, enough to make the remainder small. Convergence was considered later by Cauchy, who stressed Taylor's theorem as primary, as well as the fact that to obtain a convergent series the remainder must approach 0.

D'Alembert, too, distinguished convergent from divergent series. In his article "Série" in the *Encyclopédie* he says, "When the progression or series approaches some finite quantity more and more, and, consequently, the terms of the series, or quantities of which it is composed, go on diminishing, one calls it a convergent series, and if one continues to infinity, it will finally become equal to this quantity. Thus $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \cdots$ form a series which always approaches 1 and which will become equal to it finally when the series is continued to infinity." In 1768 d'Alembert expressed doubts about the use of nonconvergent series. He said, "As for me, I avow that all the reasonings based on series that are not convergent . . . appear to me very suspect, even when the results are in accord with truths arrived at in other ways."[50] In view of the effective uses of series by John Bernoulli and Euler, the doubts such as d'Alembert expressed went unheeded in the eighteenth century. In this same volume d'Alembert gave a test for the absolute convergence of the series $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$; namely, if for all n greater than some fixed value r, the ratio $|u_{n+1}/u_n| < \rho$ where ρ is independent of n and less than 1, the series converges absolutely.[51]

Edward Waring (1734–98), Lucasian professor of mathematics at Cambridge University, held advanced views on convergence. He taught that

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots$$

converges when $n > 1$ and diverges when $n \leq 1$. He also gave (1776) the well-known test for convergence and divergence, now known as the ratio test and attributed to Cauchy. The ratio of the $(n+1)$st to the nth term is formed, and if the limit as $n \to \infty$ is less than 1, the series converges; if greater than 1, the series diverges. No conclusion may be drawn when the limit is 1.

Though Lacroix said several nonsensical things about series in the 1797 edition of his influential *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, he was more cautious in his second edition. Speaking of

$$\frac{a}{a-x} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \cdots,$$

50. *Opuscules mathématiques*, 5, 1768, 183.
51. Pages 171–82.

he says that one should speak of the series as a *development* of the function because the series does not always have the *value* of the function to which it belongs.[52] The series, he says, gives the value of the function only for $|x| < |a|$. He continues with a thought already expressed by Euler, that the infinite series is nevertheless tied in with the function for all x. In any analytical work involving the series we would be right to conclude that we are dealing with the function. Thus if we discover some property of the series, we may be sure this property holds for the function. To perceive the truth of this assertion, it is sufficient to observe that the series verifies the equation that characterizes the function. For example, for $y = a/(a - x)$ we have

$$a - (a - x)y = 0.$$

But if one substitutes the series for y in this last equation, he will see that the series also satisfies it. One knows, Lacroix continues, that it would be the same for any other example; and he points to the great number presented in the text.

It is fair to say that in the eighteenth-century work on infinite series the formal view dominated. On the whole, the mathematicians even resented any limitations, such as the need to think about convergence. Their work produced useful results, and they were satisfied with this pragmatic sanction. They did exceed the bounds of what they could justify, but they were at least prudent in their use of divergent series. As we shall see, the insistence on restricting the use of series to convergent ones won out during most of the nineteenth century. But the eighteenth-century men were ultimately vindicated; two vital ideas that they glimpsed in infinite series were later to gain acceptance. The first was that divergent series can be useful for numerical approximations of functions; the second, that a series may represent a function in analytical operations, even though the series is divergent.

Bibliography

Bernoulli, James: *Ars Conjectandi*, 1713, reprinted by Culture et Civilisation, 1968.
———: *Opera*, 2 vols., 1744, reprinted by Birkhäuser, 1968.
Bernoulli, John: *Opera Omnia*, 4 vols., 1742, reprinted by Georg Olms, 1968.
Burkhardt, H.: "Trigonometrische Reihen und Integrale bis etwa 1850," *Encyk. der math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1914–15, 2, Part 1, pp. 825–1354.
———: "Entwicklungen nach oscillirenden Functionen," *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, Vol. 10, 1908, pp. 1–1804.
———: "Über den Gebrauch divergenter Reihen in der Zeit 1750–1860," *Math. Ann.*, 70, 1911, 169–206.

52. 1810–19, 3 vols.; Vol. 1, p. 4.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, B. G. Teubner, 1898, Vol. 3, Chaps. 85, 86, 97, 109, 110.
Dehn, M., and E. D. Hellinger: "Certain Mathematical Achievements of James Gregory," *Amer. Math. Monthly*, 50, 1943, 149–63.
Euler, Leonhard: *Opera Omnia*, (1), Vols. 10, 14, and 16 (2 parts), B. G. Teubner and Orell Fussli, 1913, 1924, 1933, and 1935.
Fuss, Paul Heinrich von: *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle*, 2 vols., 1843, Johnson Reprint Corp., 1967.
Hofmann, Joseph E.: "Über Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik," *L'Enseignement Mathématique*, (2), 2, 1956, 61–171; also published separately by Institut de Mathématiques, Genève, 1957.
Montucla, J. F.: *Histoire des mathématiques*, A. Blanchard (reprint), 1960, Vol. 3, pp. 206–43.
Reiff, R. A.: *Geschichte der unendlichen Reihen*, H. Lauppsche Buchhandlung, 1889; Martin Sändig (reprint), 1969.
Schneider, Ivo: "Der Mathematiker Abraham de Moivre (1667–1754)," *Archive for History of Exact Sciences*, 5, 1968, 177–317.
Smith, David Eugene: *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, Vol. 1, pp. 85–90, 95–98.
Struik, D. J.: *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*, Harvard University Press, 1969, pp. 111–15, 316–24, 328–33, 338–41, 369–74.
Turnbull, H. W.: *James Gregory Tercentenary Memorial Volume*, Royal Society of Edinburgh, 1939.
———: *The Correspondence of Isaac Newton*, Cambridge University Press, 1959, Vol. 1.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ALGEBRA Y PROPIEDADES DE LAS SERIES

FACULTAD DE INGENIERIA

"LAS LEYES DE LA NATURALEZA SON SOLO PENSAMIENTOS MATEMATICOS DE DIOS".

KEPLER.

C O N T E N I D O

ALGEBRA Y PROPIEDADES DE LAS SERIES

La definición de serie se establece en base a una sucesión, por lo que es conveniente mencionar las operaciones algebraícas con sucesiones.

La sucesiones son una clase particular de funciones por lo cual, las reglas para formar sumas, productos y cocientes de funciones, así como la multiplicación de un número por una función son las siguientes:

Sean las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y c un número real o complejo, se define:

i) $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$

ii) $\{a_n\} \times \{b_n\} = \{a_n \times b_n\}$

iii) $c\,\{a_n\} = \{c\,a_n\}$

iv) Si $\{b_n\} \neq 0$ para todo n de N, entonces

$$\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$$

Con series infinitas se pueden efectuar operaciones algebraícas de adición y substracción, multiplicación de un número por una - serie y multiplicación de series, en forma semejante a las operaciones de funciones polinomiales.

En este tema se estudian dichas operaciones, además, las propiedades de las series respecto a su carácter de convergencia.

1.- IGUALDAD DE SERIES

Para definir las operaciones algebraícas con series y estudiar-las propiedades de las series, es necesario tener presente la - definición de igualdad de series que se enuncia a continuación:

DEFINICION

Las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son iguales, si sus términos [illegible] son iguales, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{si } a_n = b_n \quad \text{para todo } n \text{ de } N$$

EJEMPLO 1.1

Las series $1+1+1+1+\ldots$ y $1+0+1+0+\ldots$ no son iguales pero las series $1+1/2+1/4+1/8+\ldots$ y $1+(1-1/2)+(1/2-1/4)+(1/4-1/8)+\ldots$ si son iguales

EJEMPLO 1.2

Sean las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-3}{K(2n+2)}$

Obtener el valor de K, si las series son iguales

SOLUCION

Se igualan los términos n-ésimos de las series para obtener el valor de K .

$$\frac{1}{n+1} = \frac{-3}{K(2n+2)}$$

$$\frac{K(2n+2)}{n+1} = -3$$

$$2K = -3$$

$$K = -3/2$$

2.- SUPRIMIR O AGREGAR TERMINOS EN UNA SERIE

Una manera en que se pueden alterar las series infinitas sin afectar su convergencia es agregando o quitando términos nulos.

Si reemplazamos la serie $a_1+a_2+a_3+\ldots$

por la serie $a_1+0+a_2+0+a_3+\ldots$

entonces se ve claramente que no se ha alterado la convergencia de la serie, ni su suma, en caso de que converja. De la misma manera se pueden eliminar los términos cero sin que haya efecto alguno.

EJEMPLO 2.1

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left[1- (-1)^n \right]$, cuando n es par $(-1)^n=1$,

de manera que el término de la serie vale cero.

Cuando n es impar, el término n-ésimo es $2^{-n}(2)$.

En consecuencia eliminando los términos iguales a cero, la serie queda en la siguiente forma

$$\frac{2}{2}+\frac{2}{2^3}+\frac{2}{2^5}+ \quad \cdots \quad + \frac{2}{2^{2n-1}} + \cdots$$

que es una serie geométrica con razón 1/4 , por lo que converge.

Otra manera de alterar una serie es suprimir o agregar términos al principio de esta como se indica en el siguiente teorema.

TEOREMA 2.1

El carácter de convergencia o divergencia de una serie, no se altera si se suprimen o se agregan términos al principio de ella.

DEMOSTRACION

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

cuya sucesión de sumas parciales es $\{S_n\}$

suprimiendo sus m primeros términos se tiene

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \cdots + a_{m+n} + \cdots$$

que corresponde a la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n} = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+n} + \dots$$

con sucesión de sumas parciales $\{Z_n\}$

Si $n > m$ el término S_n puede expresarse como

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

donde $\sum_{k=1}^{m} a_k = A$ y $\sum_{k=m+1}^{n} = Z_{n-m}$

es el término (n-m)ésimo de la sucesión $\{Z_n\}$

entonces $S_n = A + Z_{n-m}$ (1)

por lo que $\lim_{n\to\infty} Z_{n-m}$ existe si y sólo si, existe el $\lim_{n\to\infty} S_n$

como $\lim_{n\to\infty} Z_n = \lim_{n\to\infty} Z_{n-m}$

se tendrá que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n}$ es convergente si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Lo que demuestra el teorema en el primer caso.

La demostración es similar si se agregan m términos en vez de suprimirlos.

EJEMPLO 2.2

Si en la serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10n+1}$

se suprimen los 4 primeros términos, se obtiene la serie

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n}{10n+1} = \frac{5}{51} + \frac{6}{61} + \frac{7}{71} + \dots$$

que es divergente de acuerdo con el teorema 2.1

Si ahora a ésta última serie le agregamos cinco términos, se tendrá la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{10+1} = 0 + \frac{1}{11} + \frac{2}{21} + \frac{3}{31} + \dots$$

también divergente

TEOREMA 2.2

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

una serie convergente con suma S

Si $\sum_{n=1}^{m} a_n = A$ entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n} = a_{m+1} \quad a_{m+2} + a_{m+3} + \dots$$

tiene suma $S - A$

DEMOSTRACION

Partimos de la expresión (1) del teorema 2.1 que dice

$$S_n = A + Z_{n-m}$$

obtenemos el límite en ambos miembros

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} A + \lim_{n\to\infty} Z_{n-m}$$

$$S = A + \lim_{n\to\infty} Z_n$$

por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n} = S - A$

con lo que se ha demostrado el teorema.

El siguiente teorema se presenta sin demostración.

TEOREMA 2.3

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

Si $\sum_{n=1}^{m} b_n = B$ entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{m} b_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_{n-m} = b_1 + b_2 + \dots + b_m + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-m} + \dots$$

tiene suma $S + B$

EJEMPLO 2.3

Si en la serie convergente

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots = \frac{1}{2}$$

se suprimen los dos primeros términos, se obtiene la serie

$$\frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \dots + \frac{1}{3^{n+2}} + \dots$$

también convergente, y según teorema 2.2 su suma es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+2}} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

EJEMPLO 2.4

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos \frac{3}{n}\pi + 2}{3^n}$ determinar si es convergente o divergente

SOLUCION

La serie puede escribirse como

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{2}{3^6}+\frac{2}{3^7}+\frac{2}{3^8}+\ \ldots$$

Suprimiendo los cinco primeros términos se tiene

$$\frac{2}{3^6}+\frac{2}{3^7}+\frac{2}{3^8}+\ \ldots$$

ahora agregamos al principio cinco términos de tal manera que tengamos una serie geométrica con $a=\frac{2}{3}$ y $r=\frac{1}{3}$,

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{2}{3^5}+\frac{2}{3^6}+\frac{2}{3^7}+\frac{2}{3^8}+\ \ldots$$

que sabemos es convergente por lo tanto la serie dada es convergente según teorema 2.1

3.- ASOCIACION DE TERMINOS EN UNA SERIE

Una propiedad familiar de el algebra, la propiedad asociativa, dice que los términos de una suma finita pueden ser agrupados en cualquier forma, por ejemplo

$$(a+b+c)+d=(a+b)+(c+d)=a+(b+c+d)$$

esta propiedad también es aplicable a series infinitas convergentes

EJEMPLO 3.1

Sea la serie convergente (condicionalmente)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ \ldots$$

asociando sus términos dos a dos se tiene

$$= (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})+ \ldots$$

$$= \frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+ \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}$$

esta serie también es convergente; el agrupamiento de términos no alteró el carácter de convergencia de la serie, ni su suma; de acuerdo con el siguiente teorema.

TEOREMA 3.1

Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a S, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ obtenida por agrupación de términos también converge a S

DEMOSTRACION

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

una serie convergente, cuya sucesión de sumas parciales es $\{S_n\}$ y sea

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_m + \ldots$$

una serie obtenida al agrupar los términos de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Los elementos de la serie son

$$b_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{j1}$$

$$b_2 = a_{j1+1} + a_{j1+2} + \ldots + a_{j2}$$

$$b_m = a_{j(m-1)+1} + a_{j(m-1)+2} + \ldots + a_{jm}$$

donde $j1 < j2 \ldots < j(m-1) < jm$

si la $\{z_m\}$ es la sucesión de sumas parciales de $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$:

entonces

$$z_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_m.$$

$$z_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_{jm}$$

$$z_m = S_{jm}$$

por lo que

$$\lim_{m\to\infty} z_m = \lim_{m\to\infty} S_{jm} = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

con lo cual queda demostrado que $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ es convergente con suma S .

Si la serie original es divergente, el agrupamiento de términos podría determinar que la serie obtenida fuera convergente, y diferentes agrupamientos podrían converger a diferentes sumas, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.2

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1-1+1-1+1-\ldots$ no converge

pero $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0$ si converge

y $1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 1$ también converge

Si en una serie, cuyo carácter se desconoce, sus términos se agrupan para obtener una serie divergente entonces la serie original es divergente.

Si una serie es propiamente divergente, la agupación de términos, produce una serie propiamente divergente.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice propiamente divergente, si

$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ ó $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$

La asociación de términos de una serie es útil para desarrollar demostraciones del carácter de series, cuando se emplea el criterio de comparación, como en el ejemplo ilustrativo siguiente

EJEMPLO 3.3

Sea la serie hiperarmónica

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p}$$

demostrar que esta serie converge si $p > 1$

SOLUCION

Agrupamos los términos como sigue

$$\text{(A)} \quad \frac{1}{1^p} \; (\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}) + (\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}) + (\frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \dots + \frac{1}{15^p}) + \dots$$

consideremos la serie

$$\frac{1}{1^p} + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \dots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p} + \dots$$

que es una serie geométrica con razón $\frac{2}{2^p}$ el cual es un número positivo menor que 1, por lo tanto la serie es convergente.

Reescribimos los términos de esta misma serie en la siguiente forma

$$\text{(B)} \quad \frac{1}{1^p} + (\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}) + (\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}) + (\frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \dots + \frac{1}{8^p} + \dots$$

al comparar las series (A) y (B) vemos que el grupo de términos en cada conjunto de paréntesis, después del primer grupo, es menor en suma para (A) que para (B); por lo tanto, por la prueba de comparación la serie (A) es convergente.

Como (A) es un agrupamiento de los términos de la serie hiperarmónica, del teorema 3.1 se concluye que la serie hiperarmónica es convergente si $p > 1$.

4.- ADICION Y SUSTRACCION DE SERIES

Dos series se pueden sumar ó restar término a término y dan como resultado otra serie, como se establece en la siguiente definición

DEFINICION 4.1

Sean las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots$$

la suma o resta de ellas se define como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + (a_3 \pm b_3) + \dots$$

La convergencia o divergencia de las series obtenidas de la adición o sustracción de dos series, dependerá del carácter de las series sumando, como lo indican los teoremas siguientes

TEOREMA 4.1

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergentes con suma A y B respectivamente, entonces i) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ es convergente con suma A + B

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ es convergente con suma A − B

DEMOSTRACION

Sean $\{S_n\}$ y $\{Z_n\}$ las sucesiones de sumas parciales de

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ respectivamente}$$

Si $\{W_n\}$ es la sucesión de sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ entonces

$$W_n = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = S_n + Z_n$$

como $\lim_{n\to\infty} S_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} Z_n = B$

se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} W_n = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} Z_n = A + B$$

por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = A + B$$

con lo que se ha demostrado i), en la misma forma demuestra ii)

EJEMPLO 4.1

Demostrar que la serie obtenida de

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$$

converge y encuentre su suma.

SOLUCION

Efectuando la operación de adición se tiene $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{3^{n-1}}\right)$

en donde la primera serie tiene

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad y$$

$$S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

y $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

la serie converge a 1

La segunda serie es geométrica con suma:

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

por lo tanto de acuerdo con el teorema 4.1 la serie dada es - convergente y tiene suma $1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

EJEMPLO 4.2

Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n}{n\cdot 3^n}$ es divergente

SOLUCION

Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3^n}{n\cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{n}\right)$ es convergente

luego como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ es convergente; según teorema 4.1, también lo será $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

como esto es falso la serie dada es divergente

Basta que una de las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sea divergente para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ sea divergente, puesto - que $S + \infty = \infty$

EJEMPLO 4.3

Sean las series divergentes $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)\ n^2$

Si efectuamos la operación de adición obtenemos una serie - - -

convergente, cuya suma es la siguiente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + (-1)\ n^2) = (1-1) + (4-4) + (9-9)+\ldots=0$$

En este ejemplo se puede observar que, si las dos series hubie ran sido del mismo signo la serie obtenida sería divergente, - ya que

$$\lim_{n \to \infty} (n^2+ n^2) = \infty$$

$$\lim_{n \to \infty} (-n^2-n^2) = \infty$$

En una serie absolutamente convergente, el conjunto de los tér minos positivos solos y el conjunto de los términos negativos sólos forman series convergentes, como se puede apreciar en el siguiente ejemplo

EJEMPLO 4.4

Sea la serie $1- \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots$

asociando sus términos dos a dos

$$(1-\frac{1}{2})+ (\frac{1}{3} - \frac{1}{2^2})+(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^3})+\ldots+ (\frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{2^n})+\ldots$$

se tiene

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ en donde se puede observar que

son dos series geométricas que convergen a $\frac{3}{2}$ y 1 respectiva mente. La serie tiene suma $3/2 - 1 = 1/2$.

Si una serie es condicionalmente convergente, el conjunto de - sus términos positivos solos y el conjunto de sus términos ne- gativos solos forman series divergentes.

5.- MULTIPLICACION DE UN NUMERO POR UNA SERIE

DEFINICION 5.1

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ una serie y un número c

El producto del número por la serie es la serie que se obtiene de multiplicar el número por cada uno de los términos de la serie, es decir

$$c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n = c\, a_1 + c\, a_2 + c\, a_3 + \dots$$

Si $C \neq 0$ el carácter de la serie obtenida es el mismo que el de de la serie original, como se establece en el teorema siguiente

TEOREMA 5.1

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie y C un número diferente de cero; la serie $\sum_{n=1}^{\infty} C\, a_n$ es convergente, si y sólo si, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

DEMOSTRACION

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie cuya sucesión de sumas parciales es $\{S_n\}$

Si $\{Z_n\}$ es la sucesión de sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$, entonces

$$Z_n = C\, a_1 + C\, a_2 + C\, a_3 + \dots + C\, a_n$$

$$Z_n = C\, (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$$

$$Z_n = C\, S_n$$

y como $C \neq 0$ el límite de $\{Z_n\}$ existe si y sólo si existe el límite de $\{S_n\}$, lo que demuestra el teorema

TEOREMA 5.2

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente con suma A, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} C\, a_n$ tiene suma CA

DEMOSTRACION

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente con suma A, entonces

$\lim_{n \to \infty} Z_n = C A$, con lo que queda demostrado el teorema

EJEMPLO 5.1

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(2n-1)(2n+1)}$

es siete veces la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ convergente con suma

$\frac{1}{2}$, entonces la serie original

tiene suma $7 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

6.- REORDENACION DE UNA SERIE

A partir de la propiedad conmutativa a+b= b+a, se deduce que los términos en una suma finita pueden ser arreglados en cualquier - orden, sin afectar la suma. En contraste, los términos de una - serie infinita pueden ser arbitrariamente reordenados solamente cuando la serie es absolutamente convergente.

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, cambiando el orden de sus términos obtenemos una nueva serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, que se llama una reordenación de la serie original. Es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si existe una biyección de N sobre N $(n \to f(n))$ tal que $b_n = a_{f(n)}$

En este caso $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$

EJEMPLO 6.1

Una reordenación de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

es la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

en cambio la expreción

$$4 + 16 + 9 + 64 + 25 + 36 + 49 + \dots$$

no es una reordenación de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ ya que su primer término; que es el 1, no aparece.

La reordenación no afecta a la serie convergente y a la serie absolutamente convergente, como lo indican los teoremas siguientes:

TEOREMA 6.1

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos positivos que converge a S, entonces cualquier reordenación de ésta serie converge a S.

DEMOSTRACION

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ una reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

y sea $S_n = \sum_{n=1}^{k}$ y $z_n = \sum_{n=1}^{k} b_n$

si a_m es el término de índice mayor en z_n , entonces $a_m < z_n$

Así pues para cualquier número natural k hay un natural m tal que

$$z_n \leq s_m \leq S$$

Si se hace $b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ($\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge ya que $\{z_n\}$ está superiormente acotado por S), entonces $b \leq S$. Así pues, $b=S$ y esto completa la demostración.

Para el propósito de extender este resultado a una serie absolutamente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, se escribe a_n como la diferencia de dos términos no negativos.

Sean $a_n^+ = \dfrac{|a_n|+a_n}{2}$ y $a_n^- = \dfrac{|a_n| - a_n}{2}$

entonces $a_n = a_n^+ - a_n^-$

como $\pm a_n \leq |a_n|$ se tiene

$$0 \leq a_n^+ \leq |a_n| \quad y \quad 0 \leq a_n^- \leq |a_n|$$

En verdad si a_n es positivo, entonces a_n^+ es a_n y a_n^- es cero

Si a_n es negativo, entonces a_n^+ es cero y a_n^- es $-a_n$

TEOREMA 6.2

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie absolutamente convergente cuya suma es S, entonces cualquier reordenación de esta serie converge a S.

DEMOSTRACION

Consideremos las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$

Estas series son positivas y sus términos son menores o iguales a los términos correspondientes de la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

las mismas series son convergentes y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ una reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, entonces

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^-$ son reordenaciones de las series

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ respectivamente, por ello de acuerdo con el teorema 6.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

por lo tanto, se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = a_n$$

y esto completa la demostración

Una serie condicionalmente convergente se puede reordenar de manera que forme una nueva serie que converja a cualquier número o diverja a $\pm\infty$.

EJEMPLO 6.2

Sea la serie condicionalmente convergente

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots \quad \text{que converge a } S \qquad (A)$$

una reordenación de tal modo que después de un término positivo vayan dos negativos es

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\dots \quad (B)$$

Demostraremos que esta reordenación converge a $\frac{1}{2}$ S

Sean S_n y Z_n las sumas parciales de las series (A) y (B) y S la suma de (A)

Considerese la suma

$$Z_{3n} = \left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\dots\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)$$

sacando a $\frac{1}{2}$ como factor se tiene,

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}\ S_{2n}$$

por consiguiente

$$\lim_{n\to\infty} Z_{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\ S_{2n} = \frac{1}{2}\ S$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} Z_{3n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(Z_{3n}+\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\ S$$

$$\lim_{n\to\infty} Z_{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \left(Z_{3n} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{4n+2} \right) = \frac{1}{2} S$$

De este modo obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = Z_n = \frac{1}{2} S$$

En este ejemplo la serie converge a $\frac{1}{2}$ S y no a S

otra reordenación de la serie armónica con signos alternados como:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

diverge a $+\infty$

EJEMPLO 6.3

La serie condicionalmente convergente

$$1 - 2^{-2/3} + 3^{-2/3} - 4^{-2/3} + \ldots + n^{-2/3} + \ldots$$

se puede reordenar como la suma de dos series

$$(1 + 3^{-2/3} + 5^{-2/3} + \ldots) + (-1)(2^{-2/3} + 4^{-2/3} + 6^{-2/3} + \ldots)$$

ambas son series de términos positivos y divergen a $+\infty$ y $-\infty$ respectivamente por lo que la reordenación es una serie divergente.

TEOREMA 6.3

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie condicionalmente convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergen

DEMOSTRACION

Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ converge, entonces como

$$a_n^- = a_n^+ - a_n \;;\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \text{ converge}$$

luego $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge ya que $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$

lo que contradice el hecho de que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es condicionalmente convergente por lo tanto a_n^+ diverge, de un modo análogo se puede demostrar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ es divergente

Dada una serie condicionalmente convergente, para obtener una reordenación que converja a un número real P, se pueden tomar los primeros términos positivos hasta que su suma sea mayor que P a continuación los primeros términos negativos hasta que su suma resulte inferior a P y así sucesivamente

7.- SUCESION DOBLE

A un conjunto ordenado en forma rectangular, como el de la figura siguiente se le llama sucesión doble

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & \text{3a. columna} & & & & \end{array} \\
 & \left\{\begin{array}{ccccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1k} & \cdots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2k} & \cdots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3k} & \cdots \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4k} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nk} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}\right\} \\
\end{array}$$

4a. fila

Para determinar una sucesión doble hay que dar el elemento que ocupa el puesto correspondiente a la n-ésima fila y k-ésima columna (para todo n=1, 2, 3, ... y k= 1, 2, 3, ...)

A dicho elemento se le llama n,k elemento y la doble sucesión se expresará por. $\{a_{n,k}\}$

Una sucesión doble es una función cuyo dominio es N x N :

$$\{a_{n,k}\} : \quad N \times N \longrightarrow R$$
$$(n,k) \longrightarrow a_{n,k}$$

EJEMPLO 7.1

i) Sea la sucesión doble $A = \{a_{n,k}\}$

donde $a_{n,k} = \frac{1}{n+k-1}$, entonces

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Bmatrix}$$

ii) Si $B = \{a_{n,k}\}$ en donde $a_{n,k} = 2^n \cdot 3^k$, entonces

$$B = \begin{Bmatrix} 6 & 18 & 54 & 162 & \cdots \\ 12 & 36 & 108 & 324 & \cdots \\ 24 & 72 & 216 & 648 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Bmatrix}$$

El límite de una sucesión doble se define en la siguiente forma

Sea una doble sucesión $\{a_{n,k}\}$, si $a_{n,k}$ se acerca a un valor

L cuando n y k crecen infinitamente, entonces se dice que la sucesión tiende a L y se representa con

$$\lim_{n,k\to\infty} a_{n,k} = L$$

es decir, que para todo número real $\epsilon > 0$ existe un número M tal que

$$\left|a_{n,k} - L\right| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad n,k \geq M$$

lo anterior se presenta en la figura siguiente

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \cdots & \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \cdots & \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & \cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\hline
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & L & L \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & L & L & L \\
 & & & & L & L & L
\end{array}\right]$$

Los elementos $a_{n,k}$ tales que $n \geq M$, $k \geq M$ ocupan la zona subrayada y son aproximadamente iguales a L

EJEMPLO 7.2

i) Si $a_{n,k} = \dfrac{1}{n+k-1}$ entonces

$$\lim_{n,k\to\infty} \frac{1}{n+k-1} = 0$$

ii) Si $a_{n,k} = \dfrac{n-k}{n-k}$ entonces el límite no existe

observese que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-k}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}} = 1 \, , \forall \, k \quad \text{fijo}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n-k}{n+k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{n}{k}-1}{\frac{n}{k}+1} = -1 \, , \forall \, n \quad \text{fijo}$$

y $$\lim_{n\to\infty} a_{nn} = \frac{n-n}{n+n} = \frac{0}{2n} = 0 \, , \quad n = k$$

esto se presenta en la figura siguiente

$$\left\{a_{n,k}\right\} = \left\{ \begin{array}{ccccccc} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{4} & -\frac{3}{5} & \cdots & \rightarrow & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{6} & \cdots & \rightarrow & -1 \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{7} & \cdots & \rightarrow & -1 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{6} & \frac{1}{7} & 0 & \cdots & \rightarrow & -1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \searrow & & \\ 1 & 1 & 1 & & 0 & & \end{array} \right\}$$

El valor al que converge una sucesión doble se obtiene de acuerdo con el siguiente:

> TEOREMA 7.1
>
> Sea $\left\{a_{n,k}\right\}$ una sucesión doble que converge a S, si existe el límite: $\lim_{k\to\infty} a_{n,k}$ para cada n fijo, entonces se tiene que
>
> $$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty} a_{n,k}\right) = S$$

Este teorema puede entenderse con ayuda de la figura siguiente:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nk} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow S_1 \\ \rightarrow S_2 \\ \\ \rightarrow S_n \\ \quad \downarrow \\ \quad S \end{array}$$

$$S_n = \lim_{k\to\infty} a_{n,k}\ , \quad S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

DEMOSTRACION

Dado $\epsilon > 0$ existe M_0 tal que

$$|a_{n,k} - S| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad n,\ k \geq M_0$$

Dado $S_n = \lim_{k\to\infty} a_{n,k}$, si $n \geq M_0$, tomando el límite de

$|a_{n,k} - S| < \epsilon$ cuando $k \to \infty$

Se obtiene: $|S_n - S| \leq \epsilon$, es decir $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

EJEMPLOS 7.3

i) Sea $c = \{a_{n,k}\}$, donde $a_{n,k} = \frac{\text{Sen } k}{n}$

obtenemos: $\lim_{n,k\to\infty} \frac{\text{Sen } k}{n} = 0$, pero no existe el límite cuando $k \to \infty$

entonces $\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty} \frac{\text{Sen } k}{n}\right)$ no tiene sentido

ii) Sea $D = \{a_{n,k}\}$ donde $a_{n,k} = \frac{1}{n+k}$

obtenemos $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n+k} = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n+k}\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

De acuerdo con el teorema 7.1 la sucesión doble converge a 0

8.- SERIE DOBLE

Dada una sucesión doble $\{a_{n,k}\}$, por un procedimiento similar al utilizado en el caso de una serie, se obtiene una nueva sucesión doble $\{S(P,q)\}$, en donde

$$S(P,q) = \sum_{n=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_{n,k}$$

A la sucesión doble $\{S(P,q)\}$ se le llama SERIE DOBLE y se denota con:

$$\{S(P,q)\} = \sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k} \qquad \text{(A)}$$

La suma parcial $S(P,q)$ de la serie doble se representa en la figura siguiente, encerrada en un rectangulo.

$$\{a_{n,k}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\boxed{\begin{array}{l} a_{1,1} + a_{1,2} + \ldots + a_{1,q} \\ a_{2,1} + a_{2,2} + \ldots + a_{2,q} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p,1} + a_{p,2} + \ldots + a_{p,q} \end{array}}}^{S\,(p,q)} \begin{array}{l} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{array} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

Si existe el límite siguiente

$$\lim_{p,q \to \infty} S(P,q) = S$$

entonces la serie doble converge a S, ó S es la suma total de la serie doble y se representa con:

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k} = S \qquad \text{(B)}$$

Notese que la expresión $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k}$ a veces representa una sucesión doble como (A) y a veces representa un valor numérico como en el caso (B)

Lo anterior se puede observar en los ejemplos que se presentan a continuación

EJEMPLO 8.1

i) Si $a_{n,k} = \dfrac{1}{2^n\, 3^k}$, entonces

$$S(p,q) = \sum_{n=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2^n 3^k} = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{3^k}$$

como $\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{2^n}$ y $\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{3^k}$ pertenecen a series geométricas - se tiene que

$$s\,(p,q) = (1- \frac{1}{2^p}) \ \frac{1}{2} \ (1- \frac{1}{3^q})$$

ahora obtenemos

$$\lim_{p,q\to\infty} S(p,q) = \frac{1}{2}$$

en este caso $\sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{1}{2^n 3^k} = \frac{1}{2}$ como en (B)

ii) Sea $a_{n,k} = 1$,

$$S(p,q) = \sum_{n=1}^{p} 1 \sum_{k=1}^{q} 1 = p\,q$$

entonces la serie $\sum_{n,k=1}^{\infty} 1 = \left\{ p\cdot q \right\}$

las sucesiones dobles $\left\{a_{n,k}\right\}$, y $\left\{p\cdot q\right\}$ se representan en la siguiente figura:

$$\{a_{n,k}\} \quad y \quad \sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{n,k=1}^{\infty} 1 = \{p\,q\}$$

$$\begin{array}{c} \text{p filas} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots 1 \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots 1 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots 1 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \ldots \\ 3 & 6 & 9 & 12 & \ldots \\ 4 & 8 & 12 & 16 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

q columnas.

como $\{p\,q\}$ diverge a $+\infty$ cuando $p,q \longrightarrow \infty$ entonces

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} 1 = +\infty$$

La convergencia de la serie doble la establecen los siguientes teoremas los cuales se presentan sin demostración

<u>TEOREMAS</u>

8.1) Una serie doble de términos positivos

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k}$$

converge si y sólo si la suma parcial es acotada, es decir, - existe una constante $M > 0$ tal que

$$S(p,q) = \sum_{n=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_{n,k} \leq M \quad \forall \; p,q$$

8.2 Una serie doble $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}$ converge si y sólo si satisface la condición de Cauchy, siguiente.

Dado $\epsilon > 0$ existe M_0 tal que

$$n,k \geq M_0 \text{ implica } \left| \sum_{i=1}^{n+p} \sum_{j=1}^{k+q} a_{i,j} \right| < \epsilon \quad (p,q=1,2,3,\ldots)$$

8.3) Una serie doble converge si converge absolutamente.

Se dice que una serie doble $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k}$ converge absolutamente si la serie $\sum_{n,k=1}^{\infty} \left| a_{n,k} \right|$ converge

EJEMPLO 8.2

Demostrar que la doble serie

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} e^{-(n^2+k^2)} \quad \text{converge}$$

SOLUCION

$$\sum_{n=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} e^{-(n^2+k^2)} = \sum_{n=1}^{p} e^{-n^2} \sum_{k=1}^{q} e^{-k^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2}$$

según teorema 8.1

Aparte tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n^2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n}} = \frac{\frac{1}{e}}{1-1/e} = \frac{1}{e-1}$$

ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ es serie geométrica

como $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2} = \frac{1}{e-1}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} e^{-(n^2+k^2)} \leq \left(\frac{1}{e-1}\right)^2 < +\infty$$

9.- REORDENACION DE UNA SERIE SENCILLA EN UNA DOBLE

El conjunto de todos los números naturales N se pueden reordenar de muchas maneras en forma cuadrada

Dos ejemplos de reordenanación de N en forma cuadrada son los siguientes

EJEMPLO 9.1

i)
$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 6 & 7 & 15 & 16 \\
3 & 5 & 8 & 14 & 17 & \\
4 & 9 & 13 & 18 & & \\
10 & 12 & & & & \\
11 & & & & &
\end{array}$$

ii)
$$\begin{array}{ccccc}
1 & 4 & 9 & 16 & \\
3 & 2 & 8 & 15 & \\
6 & 7 & 5 & 14 & 23 \\
11 & 12 & 13 & 10 & 22 \\
18 & 19 & 20 & 21 & 17
\end{array}$$

En una reordenación de N en forma cuadrada, $f_n(k)$ es el número correspondiente a la n-ésima fila y k-ésima columna . La n-ésima fila es la sucesión $\{f_n(1), f_n(2), \dots f_n(k), \dots\}$ como se puede apreciar en la siguiente figura

$$\begin{array}{r}
\\ \\ \\ \\ \text{n-ésima fila} \cdots \\ \\
\end{array}
\left\{\begin{array}{cccccc}
f_1(1) & f_1(2) & f_1(3) & \dots & f_1(k) & \dots \\
f_2(1) & f_2(2) & f_2(3) & \dots & f_2(k) & \dots \\
f_3(1) & f_3(2) & f_3(3) & \dots & f_3(k) & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
f_n(1) & f_n(2) & f_n(3) & \dots & f_n(k) & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}\right\}$$

f_n es una función uno a uno de N en N:

$$f_n\colon N \longrightarrow f_n(N) \subset N$$

$$k \longrightarrow f_n(k)$$

Dada una reordenación cuadrada de N, una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede reordenarse en serie doble como sigue

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{fn}(k) = \left\{ \begin{array}{l} a_{f1}(1) + a_{f1}(2) + \ldots + a_{f1}(k) + \ldots \\ + a_{f2}(1) + a_{f2}(2) + \ldots + a_{f2}(k) + \ldots \\ + a_{f3}(1) + a_{f3}(2) + \ldots + a_{f3}(k) + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_{fn}(1) + a_{fn}(2) + \ldots + a_{fn}(k) + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

Para establecer la convergencia de estas serie se tiene el siguiente teorema.

TEOREMA 9.1

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie absolutamente convergente.

Dada una reordenación cuadrada de N, $\{fn^{(k)}\}$, entonces:

i) Para cada n fila, la serie (de fila): converge absolutamente

ii) Sean $\sum_{k=1}^{\infty} a_{fn}(k) = S_n \quad (n=1,2,3,\ldots)$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ converge absolutamente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j = S$$

iii) La doble serie $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{fn}(k)$ converge absolutamente y su suma total es S

Este teorema se puede ilustrar en la siguiente figura:

$$
\begin{array}{lcl}
a_{f1}(1) + a_{f1}(2) + \ldots + a_{f1}(k) + \ldots & = & S_1 \\
 & & + \\
a_{f2}(1) + a_{f2}(2) + \ldots + a_{f2}(k) + \ldots & = & S_2 \\
 & & + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
 & & + \\
\boxed{a_{fn}(1) + a_{fn}(2) + \ldots + a_{fn}(k) + \ldots} & = & S_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & + \\
 & & \shortparallel \\
\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots & & \boxed{S}
\end{array}
$$

La demostración de este teorema se puede consultar en la página 195 del libro citado a continuación:

> Yu Takeuchy
> SUCESIONES Y SERIES
> Limusa, México 1980

10.- REORDENACION DE UNA SERIE DOBLE EN UNA SERIE SIMPLE

En el subtema anterior se estudio la reordenación de una serie simple dada en una serie doble, ahora estudiará la reordenación de una serie doble en una serie simple.

Sea f una biyección de $N \times N$ sobre N:

$$
\begin{array}{ll}
f: & N \times N \longrightarrow N \\
 & (n,k) \longrightarrow f(n,k)
\end{array}
$$

Una serie doble $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k}$ será reordenada en una serie simple como sigue:

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j \quad \text{donde} \quad b_{f(n,k)} = a_{n,k}$$

El procedimiento de reordenación se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 10.1

Considerémos la biyección

$$f(n,k) = \begin{cases} k^2 - (n-1) & \text{Si} \quad k > n \\ (n-1)^2 + k & \text{Si} \quad n \geq k \end{cases}$$

La cual se representa en la siguiente figura

$$\begin{array}{cc} & k \text{ columnas} \\ & \begin{array}{cccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \end{array} \\ \text{n filas} \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \\ 2 \to & 3 & 8 & 15 & 24 & \\ 5 \to & 6 \to & 7 & 14 & 23 & \\ 10 \to & 11 \to & 12 \to & 13 & 22 & \\ 17 \to & 18 \to & 19 \to & 20 \to & 21 & \\ 26 \to & 27 & & & & \end{array} \right] \end{array}$$

La serie simple obtenida de esta biyección es:

$$a_{1,1} + a_{2,1} + a_{2,2} + a_{1,2} + a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} + a_{2,3} + \cdots$$

TEOREMA 10.1

Dada una biyección f de $N \times N$ sobre N

Una serie doble $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k}$ converge absolutamente si y sólo si su reordenación por f converge absolutamente. En tal caso se tiene:

(A) $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{j=1}^{\infty} b_j$ donde $b_{f(n,k)} = a_{n,k}$

DEMOSTRACION

Si $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ converge absolutamente, entonces por el teorema 9.1 la doble serie $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k}$ converge absolutamente y tene_ mos la igualdad (A)

De los teoremas 9.1 y 10.1 obtenemos el teorema siguiente:

TEOREMA 10.2

Sea $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k}$ una serie doble

i) Si la serie doble converge absolutamente entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} \quad \text{convergen absolutamente}$$

y $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}\right) = \sum_{n,k=1}^{\infty} a_{n,k} \qquad \text{(A)}$$

donde las series iteradas convergen absolutamente

ii) Si la serie iterada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}|\right)$ ó

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n,k}|\right)$ converge, la doble serie converge absolutamente y se tiene la igualdad (A)

EJEMPLO 10.1

$$\text{Sea} \qquad a_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{Si} \quad n=k+1 \\ -1 & \text{Si} \quad n=k-1 \\ 0 & \text{Si} \quad |n-k| \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \cdots \\ -1 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & -1 & 0 & \cdots \end{bmatrix} = \{a_{n,k}\}$$

Se determina si las series iteradas convergen

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}\right) = -1+0=-1$$

$$y \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{1,k} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{\infty} a_{n,k}\right) = 1 + 0 = 1$$

Observese que las dos series iteradas convergen a valores diferentes, pero

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| a_{n,k} \right| \text{ diverge}$$

11.- PRODUCTO DE DOS SERIES

Una aplicación importante del reordenamiento de una serie doble en una serie simple ocurre en la multiplicación de series.

Dadas dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$

podemos obtener la siguiente doble serie:

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_n b_k \qquad \text{(A)}$$

Si las dos series son convergentes y su suma parcial es A_n y B_n respectivamente, entonces

$$\lim_{n \to \infty} A_n = A \quad \text{y} \quad \lim_{n \to \infty} B_n = B$$

tenemos que $\lim_{n \to \infty} a_n \; b_n = A\,B$ es decir la doble serie converge a $A\,B$

Si la convergencia de ambas series es absoluta, entonces la doble serie (A)

también converge absolutamente ya que

$$\sum_{n=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \left| a_n b_k \right| = \sum_{n=1}^{p} \left| a_n \right| \sum_{k=1}^{q} \left| b_k \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n \right| \sum_{k=1}^{\infty} \left| b_k \right|$$

El teorema 10.1 garantiza que cualquier reordenación de la serie doble (A) en una serie simple converge a $A \cdot B$ y la convergencia es absoluta.

De las múltiples reordenaciones posibles de una serie doble en una serie simple, la establecida por Cauchy con la biyección

$f(n,k) = \frac{(n+k-2)(n+k-1)}{2} + k$ se presenta en la figura siguiente:

$$\begin{array}{l}
a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + a_1b_4 + \dots + a_1b_n + \dots \\
C_1 = \\
a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 + a_2b_4 + \dots + a_2b_n + \dots \\
C_2 = \\
a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 + a_3b_4 + \dots + \\
C_3 = \\
a_4b_1 + a_4b_2 + a_4b_3 + a_4b_4 + \\
C_4 = \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_nb_1 + a_nb_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

La suma parcial de la reordenación es

$$Cn = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1 = \sum_{j=1}^{n} a_j\, b_{n-j+1}$$

entonces la reordenación es la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} Cn = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\, b_{n-j+1} \right) = A \cdot B$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} Cn$ se le llama PRODUCTO DE CAUCHY de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Nótese que el producto de Cauchy es una reordenación y agrupación de términos.

El producto de Cauchy puede expresarse como la multiplicación de dos series en la siguiente forma

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\, b_{n-j+1}\right)$$

EJEMPLO 11.1

Con las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$

efectuar el producto de Cauchy

SOLUCION

$$Cn = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \; \frac{1}{3^{n-j+1}} = \frac{1}{3^{n+1}} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^j$$

a parte la suma parcial de $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ es :

$$\frac{\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]}{1-3/2} = -\,3\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^n\right] = 3\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right]$$

ya que corresponde a una serie geométrica

entonces $\quad Cn = \frac{1}{3^{n+1}} \; 3\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right] = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}$

por lo tanto se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} Cn = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

La serie obtenida converge a $\frac{1}{2}$.

Observese que

$$\sum_{n=1}^{\infty} Cn = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ya que las dos series originales son convergentes.

Si dos series convergen condicionalmente, el producto de Cauchy a veces converge y a veces diverge como se muestra en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 11.2

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ condicionalmente convergente, demostrar que el producto de Cauchy de esta serie con ella misma diverge.

SOLUCION

$$Cn = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^{n-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}\ \sqrt{n-k+1}}$$

pero

$$|Cn| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}\ \sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}\ \sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n}} (\sqrt{n} - 1) = 2 - \frac{2}{\sqrt{n}} \to 2 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

Por lo tanto, el producto de Cauchy $\sum_{n=1}^{\infty} Cn$ diverge

TEOREMA 11.1 (Teorema de Abel)

Dadas dos series convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

Si el producto de Cauchy converge, entonces su suma total es igual a A.B.

TEOREMA 11.2 (Teorema de Mertens)

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$

dos series convergentes, si una de las dos series converge absolutamente, entonces el producto de Cauchy converge a $A \cdot B$

La demostración de estos teoremas se puede consulter en la publicación de Yu Takeuchy " Sucesiones y Series" Tomo I, editorial Limusa México 1980.

12 SERIES TELESCOPICAS

Una propiedad importante de las sumas finitas es la llamada propiedad Telescópica que afirma que

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

Cuando se quiere extender esta propiedad a las series infinitas se han de considerar aquellas series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tales que cada término se puede expresar como una diferencia de forma:

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

Las series que poseen esta característica se definen a continuación:

DEFINICION 12.1

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, si el término a_n se puede expresar como

$a_n = b_n - b_{n+1}$ $\forall$ n, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se conoce como Serie Telescópica.

El comportamiento de las Series Telescópicas está caracterizado por el siguiente teorema:

Teorema 12.1

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números complejos tales que:

$$a_n = b_n - b_{n+1} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge sí y sólo si la sucesión $\{b_n\}$ converge, en cuyo caso tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - L \quad \text{donde} \quad L = \lim_{n \to \infty} b_n$$

Demostracion

Sea S_n la suma parcial n-sima de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Entonces se tiene,en virtud de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

Por lo tanto las sucesiones $\{S_n\}$ y $\{b_n\}$ ambas convergen o ambas divergen y además si $b_n \to L$ cuando $n \to \infty$ entonces $S_n \to b_1 - L$, lo cual demuestra T.2

Observación: De acuerdo a la definición D.2 , toda serie es telescópica, puesto que siempre se puede verificar eligiendo un b_1 arbitrario y haciendo luego $b_{n+1} = b_1 - S_n$ para $n \geq 1$, donde $S_n = a_1 + \ldots + a_n$

EJEMPLO 12.1

Para la serie telescópica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$, obtener el valor de su suma haciendo uso del teorema T.2

SOLUCION

Mediante el método de desarrollo en fracciones parciales se puede obtener que

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

esto es $a_n = b_n - b_{n+1}$ y por lo tanto se verifica. Puesto que $b_1 = 1$ y $L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

EJEMPLO 12.2

Haciendo uso del concepto de serie Telescópica determinar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(\frac{n}{n+1}\right)$$

SOLUCION

$\text{Log}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \log n - \log(n+1)$ y puesto que $\lim_{n\to\infty} \log n \to \infty$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) \text{ diverge}$$

EJEMPLO 12.3

Si x es un entero positivo, se tiene la descomposición

$$\frac{1}{(n+x)(n+x+1)(n+x+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n+x)(n+x+1)} - \frac{1}{(n+x+1)(n+x+2)}\right]$$

para cada $n \in N$. Por lo tanto por la propiedad de las Series Telescópicas, la siguiente serie converge y tiene por suma la indicada a continuación:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+x+1)(n+x+2)} = \frac{1}{2(x+1)(x+2)}$$

La propiedad telescópica de las series es útil también para determinar en algunos casos el término de suma parcial S_n como se ejemplificará a continuación:

EJEMPLO E.2

Hallar la suma parcial de la siguiente serie e investigar su convergencia o divergencia

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$$

SOLUCION

Es fácil comprobar que

$$a_n = \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{(n+1)-1} + \frac{1}{n+1}\right)\right]$$

esto es

$$a_n = b_n - b_{n+1} \quad \text{donde} \quad b_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) \text{ y } b_{n+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n+1)-1} + \frac{1}{n+1}\right]$$

y como sabemos de la propiedad telescópica $S_n = b_2 - b_{n+1}$

entonces tendremos

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2-1} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)\right]$$ que resulta ser la suma

parcial de la serie.

Asimismo como $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{4}$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$

EJEMPLO 12.4

Hallar la suma parcial de la siguiente serie e investigar su convergencia o divergencia.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n x \quad (x \neq 0)$$

SOLUCION

Teniendo en cuenta que $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$ se puede comprobar que:

$$\cos\left(k + 1 - \frac{1}{2}\right) x - \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) x = -2 \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \frac{x}{2}$$

entonces tenemos la suma finita

$$\sum_{k=1}^{n} \left[-2 \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right] = -2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k x =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \left[\underbrace{\cos\left(k - \frac{1}{2}\right) x}_{b_k} - \underbrace{\cos\left(k + 1 - \frac{1}{2}\right) x}_{b_{k+1}}\right]$$

por lo que de acuerdo a

$$-2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k x = -\left[\cos\left(1 - \frac{1}{2}\right) x - \cos\left(n + 1 - \frac{1}{2}\right) x\right] = \cos\left(n + 1 - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(1 - \frac{1}{2}\right) x$$

dividiendo ambos miembros entre $-2 \operatorname{sen}(x/2)$ se obtiene

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k x = \frac{\cos \frac{1}{2} x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x}$$

Evidentemente la serie planteada diverge ya que la sucesión $\{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\}$ es divergente.

EJEMPLO 12.5

Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ hallar la suma parcial S_n y determinar, asimismo la convergencia o divergencia de la serie.

SUGERENCIA

$$(n + 1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

SOLUCION

Teniendo en cuenta el miembro izquierdo de la sugerencia.

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3 - k^3\right] = -\sum_{k=1}^{n}\left[k^3 - (k+1)^3\right]$$

que resulta ser una serie telescópica con

$$b_k = k^3 \quad y \quad b_{k+1} = (k+1)^3$$

entonces de acuerdo a

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3 - k\right] = -\left[1-(n+1)^3\right] = (n+1)^3 - 1$$

Tomando en cuenta ahora el miembro derecho de la sugerencia y haciendo uso de la propiedad de linealdad de las series se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3 - k\right] = (n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

de donde

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - 1 - 3\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1\right]$$

pero $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (lo cual se puede demostrar fácilmente por medio de inducción matemática).

y $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

entonces

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n\right] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Como $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ entonces la serie propuesta es divergente.

A continuación se presenta una tabla donde se muestra un conjunto de series con sus respectivas sumas parciales.

S E R I E	Sn
$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \,(x \neq 0)$	$\dfrac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})x - \operatorname{sen}\frac{1}{2}x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$	$\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$
$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)$	$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n-1)$	$\dfrac{n(2n^2+3n-5)}{6}$
$\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^2$	$\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
$\sum_{n=1}^{\infty} n^3$	$\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$
$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(n+2)$	$\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
$\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2-1)$	$\dfrac{(n-1)n\,(n+1)(n+2)}{2}$
$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(n+2)\ldots(n+j-1)$ $(j \geq 1)$	$\dfrac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+j)}{j}$
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left(\dfrac{a}{n}\right)$	$1-(1-a)(1-\frac{a}{2})(1-\frac{a}{3})\ldots(1-\frac{a}{n})$
$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+j)}$ $(j \geq 1)$	$\dfrac{1}{j}\left[\dfrac{1}{j!} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+j)}\right]$
$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$	$1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$
$\sum_{n=1}^{\infty} (\cos\dfrac{2n+1}{n^2+n})(\operatorname{sen}\dfrac{1}{n^2+n})$	$\dfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen} 2 - \operatorname{sen}\dfrac{2}{n+1}\right]$
$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$	$\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

CONSIDERACION IMPORTANTE.

En las series telescópicas se ve claramente la diferencia entre las series infinitas y las sumas finitas.

Escribiendo en forma desarrollada se tiene

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

que como se ve, se puede obtener suprimiendo los paréntesis y simplificando. Si se hace la misma operación en la serie infinita

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \ldots$$

b_1 permanece y se simplifican b_2, b_3 y así sucesivamente se llega a suprimir cada b_n ; por tanto se simplifican todos los b_n menos b_1, llegándose aparentemente a la conclusión de ser b_1 la suma de la serie. Esta conclusión es falsa en virtud de T.2 , si no es $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Por lo tanto, en las series infinitas no se pueden suprimir los paréntesis en las mismas condiciones que en las sumas finitas.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

CRITERIOS DE CONVERGENCIA

FACULTAD DE INGENIERIA

C O N T E N I D O

" EL QUE NO CONOCE LA MATEMATICA MUERE SIN CONOCER LA VERDAD - CIENTIFICA ".

SCHELBACH.

3.- Criterios de Convergencia

3.1 Generalidades

En teoría, la convergencia o divergencia de una serie Σa_n se decide considerando las sumas parciales Sn y analizando si tienden o no a un límite finito cuando $n\to\infty$. En algunos casos particulares, como por ejemplo la serie geométrica, las sumas parciales Sn se pueden simplificar hasta el punto de poder determinar fácilmente su comportamiento cuando $n\to\infty$. Sin embargo, en la mayoría de los casos esta forma simplificada para Sn no existe y difícilmente se puede establecer la convergencia o divergencia por el método indicado anteriormente. Ya al principio, los que investigaban en este campo, muy especialmente Cauchy y sus contemporáneos, se dieron cuenta de esta dificultad, y obtuvieron unos "criterios de convergencia", con los que eludian la necesidad de un conocimiento explícito de las sumas parciales. Algunos de estos criterios, los más sencillos y más útiles se estudiarán en esta sección haciendo hincapié a la vez en algunas observaciones generales acerca de la naturaleza de estos criterios.

3.2 Clasificación General de los criterios de convergencia.

Los criterios de convergencia se pueden clasificar a grandes rasgos en tres categorias, las cuales son:

a) de condiciones suficientes

b) de condiciones necesarias

c) de condiciones necesarias y suficientes.

Un criterio del tipo (a) se puede expresar simbólicamente como sigue:

" Si C se satisface, entonces Σa_n converge," Donde C indica la condición en cuestión. Los criterios del tipo (b) tienen la forma:

" Si Σa_n converge, entonces C se satisface,"

Mientras que los del tipo (c) se pueden escribir en la forma:

" Σa_n converge si y sólo si C se satisface."

Es común entre los estudiantes que se apliquen los criterios incorrectamente, pues no aprecian la diferencia entre condición necesaria y condición suficiente. Es por lo tanto recomendable que los estudiantes hagan un esfuerzo para lograr esta distinción cuando se aplica un criterio particular en la práctica.

3.3 Condición necesaria para la convergencia.

El criterio de convergencia más sencilo resulta ser una condición necesaria para la convergencia y se expresa como sigue:

> TEOREMA T.3.1 Si la serie Σa_n converge,
> el término enésimo tiende a o, esto es,
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Demostración.

La suma parcial enésima de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es $Sn = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Como $Sn_{-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$, se tiene que $a_n = Sn - Sn_{-1}$

Pero $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. Entonces, la sucesión $\{Sn\}$ tiene un límite, llamado S. Como $\lim_{n\to\infty} Sn = S$ y $\lim_{n\to\infty} Sn_{-1} = S$ se tiene que.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (Sn - Sn_{-1}) = \lim_{n\to\infty} Sn - \lim_{n\to\infty} Sn_{-1} = S - S = 0$$

El Teorema anterior es un ejemplo de un criterio que es del tipo (b) y no del tipo (a). La condición T.3.1 no es suficiente para la convergencia de una serie. Por ejemplo, considérese la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$. El límite del término enésimo es $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$, sin embargo la serie armónica es divergente. La verdadera utilidad de este criterio es que da una condición suficiente para la divergencia, lo cual se establece a continuación.

> Corolario (Prueba de la divergencia)
>
> Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
>
> es divergente.

Esta prueba nos muestra inmediatamente que las siguientes series divergen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 87, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n$$

3.4 Criterios de convergencia para series de términos no negativos.

En este apartado se tratarán las series cuyos términos son no negativos, es decir, series de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ donde $a_n \geq 0$ para toda n. Puesto que las sumas parciales de tales series son monótonas crecientes, se aplicará el teorema para obtener la siguiente condición necesaria y suficiente de convergencia.

> Teorema T.3.2 Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos positivos y existe un número M tal que $S_n < M$ para todo n, entonces la serie converge y su suma S es tal que $S \leq M$. Si no existe M con esta propiedad entonces la serie diverge.

Demostración.

Si $\{S_n\}$ es la sucesión de sumas parciales de una serie de términos positivos, entonces.

$$S_1 < S_2 < \ldots < S_n < \ldots$$

y por lo tanto {Sn} es monótona. Si existe un número M tal que $S_n < M$ para cada n, entonces de acuerdo al teorema (12.9 Swokoski).
(10.1 Apostol)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \leq M$$

para algún número S y por lo tanto la serie diverge

EJEMPLO E.3.1

El teorema anterior se puede aplicar para establecer la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Una cota superior de las sumas parciales se puede obtener haciendo uso de la desigualdad:

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

que es evidentemente cierta para todo $k \geq 1$ puesto que k! es el producto de k-1 factores, cada uno ≥ 2. Por tanto.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$$

Siendo la última serie una serie geométrica. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es por tanto convergente y tiene su suma ≤ 2. Se verá más tarde que la suma de esta serie es e-1, donde e es el número de Euler.

La convergencia del ejemplo anterior se ha establecido por comparación de los términos de la serie dada con los de una serie que se sabe que converge. Esta idea conduce a un criterio llamado criterio de comparación.

3.4.1 Criterio de comparación.

Teorema T.3.3 (Criterio de Comparación)

Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series de términos positivos

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge y $a_n \leq b_n$ para todo entero positivo n, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge y $a_n \geq b_n$ para todo entero positivo n, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración.

Sean S_n y T_n las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente. Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge y su suma es T. Si $a_n \leq b_n$ para todo n, entonces $S_n \leq T_n < T$ y por lo tanto según T.3.2 Σa_n converge. Esto demuestra el inciso (a). Para probar (b), suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge y que $a_n \leq b_n$ - para todo n. Entonces $S_n \geq T_n$ y, como T_n tiende a infinito cuando n tiende a infinito, lo mismo sucede con S_n. Por consiguiente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Como la omisión de un número finito de términos no afecta la convergencia o divergencia de una serie, es suficiente que las condiciones $a_n \geq b_n$ o $a_n \leq b_n$ en T.3.3 se satisfagan a partir del k-ésimo término, donde k - es un entero positivo fijo.

EJEMPLO 3.2

Haciendo uso del criterio de comparación, probar que la siguiente serie converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$$

Solución

Como $$\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

y como la serie p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, la serie dada converge de -- acuerdo a T.3.3

EJEMPLO E.3.3

Determinar si la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$$

converge o diverge.

Solución

Como $\frac{n^2}{n^3+1} > \frac{n^2}{n^3+n^3} = \frac{1}{2n}$ y como la serie armónica $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, la serie dada diverge.

EJERCICIO

Utilizando el criterio de comparación, determinar si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+n^2}{n^3+1}$$

converge o diverge.

Solución

Como $\frac{2n+n^2}{n^3+1} > \frac{n^2}{n^3+1}$ y como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ diverge por el ejemplo -- E.3.3 entonces la serie dada diverge.

DEFINICION D.3.1.

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ domina a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ si $0 \leq c_n \leq d_n$ para todo entero positivo n.

Usando esta terminología, el inciso (a) de T.3.3 afirma que una serie de términos positivos dominada por una serie convergente, también es convergente. El inciso (b) afirma que una serie que domina a una serie - divergente es a su vez divergente.

3.4.2 Criterio de Comparación Mediante el Límite del Cociente.

Teorema T.3.4

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series de términos positivos y si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$$

entonces ambas series convergen ó divergen.

Demostración

Si $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = k > 0$, entonces por la definición de convergencia de una sucesión tomando $\epsilon = \frac{L}{2}$, existe un número N tal que.

$$\frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3k}{2} \quad \text{siempre que} \quad n > N.$$

Esto equivale a

$$\frac{k}{2}\, b_n < a_n < \frac{3k}{2}\, b_n \quad \text{siempre que} \quad n > N.$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, también converge $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2} \right) b_n$ ya que está dominada - por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Aplicando las propiedades (multiplicación de una serie - por un escalar) vemos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k}\right) \left(\frac{k}{2}\right) b_n$ converge.

Inversamente si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ya que está dominada por la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3k}{2}\right) b_n$. Se ha demostrado que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - converge si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. En consecuencia, $\sum_{n=1}^{\infty}$ diverge si y - solo si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

El criterio de Comparación mediante el límite del cociente es sumamente versátil para comparar series algebraicas complejas con series P. - La forma adecuada de obtener la serie P para comparar, consiste en despreciar en la serie en estudio a todos los términos del numerador y del denominador excepto los que son más significativos para la magnitud.

Por ejemplo:

I.- Si la serie en estudio es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+5n+2}$ conviene utilizar la serie P $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, pues para valores grandes de n

$$\frac{1}{3n^2+5n+2} \doteq \left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{n^2}$$

II.- Si la serie en estudio es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{3n^3-5n^2+2}$ conviene utilizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ pues para valores grandes de n, $\frac{2n^2+5}{3n^3-5n^2+2} \doteq \frac{2n^2}{3n^3} = \left(\frac{2}{3}\right)\frac{1}{n}$

III.- Si la serie en estudio es

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{4n^2-2n+1}}$ conviene utilizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, pues para valores grandes de n $\frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{4n^2-2n+1}} \doteq \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{n^{1/2}}$

EJEMPLO E.3.4

Haciendo uso de la prueba del límite de comparación, determinar si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}+5}$$

converge o diverge.

Solución

Se comparará con la serie p convergente.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n^{3/2}+5}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{2n^{3/2}+5} = \frac{1}{2}$$

Entonces de acuerdo al criterio del límite de comparación, como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}+5}$. También lo hace.

EJEMPLO E.3.5

Determinar si la siguiente serie converge o diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{n}+2}{\sqrt{n^3-3n^2+1}}$$

Solución

Como para valores grandes de n.

$$\frac{3\sqrt{n}+2}{\sqrt{n^3-3n^2+1}} \doteq \frac{3\sqrt{n}}{n^{3/2}} \doteq \frac{3}{n}$$

se utilizará la serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ para obtener el límite de comparación.

Entonces $$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3\sqrt{n}+2}{\sqrt{n^3-3n^2+1}}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3\sqrt{n}+2)\,n}{\sqrt{n^3-3n^2+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^{3/2}+2}{\sqrt{n^3-3n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^{3/2}}{n^{3/2}} = 3$$

Por lo tanto la serie dada es divergente.

Un caso particular de T.3.4 resulta ser el siguiente teorema.

Teorema T.3.5 CRITERIO DE COMPARACION POR PASO AL LIMITE

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos, si -

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

La demostración aparece en la Pág. 483 de la Referencia 1.

Definición D.3.2

Se dice que dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de números complejos son asintóticamente iguales si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Esta relación se indica simbólicamente escribiendo $a_n \sim b_n$ cuando $n\to\infty$.

La notación $a_n \sim b_n$ se lee " a_n es asintóticamente igual a b_n " y con ello se quiere indicar que a_n y b_n se comportan de manera análoga -- cuando n crece indefinidamente. Aplicando esta terminología se puede expresar el criterio de comparación por paso al límite de la manera siguiente:

Teorema T.3.6

Dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de términos positivos y asintóticamente iguales o ambas convergen o ambas divergen.

EJEMPLO E.3.6

Determinar si las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+10)}} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$$

divergen o convergen respectivamente.

Solución

Tomando en cuenta que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, se puede comprobar que

$$\frac{1}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n(n+10)}}$$

de igual manera $\frac{1}{n} \sim \operatorname{sen} \frac{1}{n}$ $\left[\text{ya que } \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1\right]$

esto es, las series propuestas son asintóticamente iguales a $\frac{1}{n}$ por lo - que podemos concluir que ambas series son divergentes.

3.4.4 CRITERIO DE LA INTEGRAL

Para aplicar efectivamente los criterios de comparación es preciso disponer de series de comportamiento conocido. Son útiles la serie geomé trica y la serie "P". Sin embargo cuando los criterios de comparación no son aplicables, en algunos casos es posible usar el llamado Criterio de - la Integral, el cual fué demostrado por Cauchy en 1837. En esta prueba,- la serie en estudio es comparada con una integral impropia.

Teorema T.3.7 Criterio de la integral

Sean f una función continua, positiva y decreciente para todo número real $x \geq 1$ y, $a_n = f(n)$ para todo entero positivo n. Entonces.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \longleftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge}$$

Demostración

Suponga $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Entonces $\lim_{n\to\infty} \int_1^{n} f(x)\,dx$

existe y es igual a un numero L. Como $f(x) > 0$, se tiene que

$$\int_1^{n} f(x)\,dx < L \quad \text{para cualquier } n.$$

Pero f no es creciente en el intervalo $[1, n]$. Entonces, los (n-1) rectángulos indicados en la Figura 3.1 tienen una área total menor o igual al área bajo la gráfica de y=f(x) de 1 a n. Esto es

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(n) \leq \int_1^{n} f(x)\,dx < L$$

Observar que la base de cada rectángulo es unitaria.

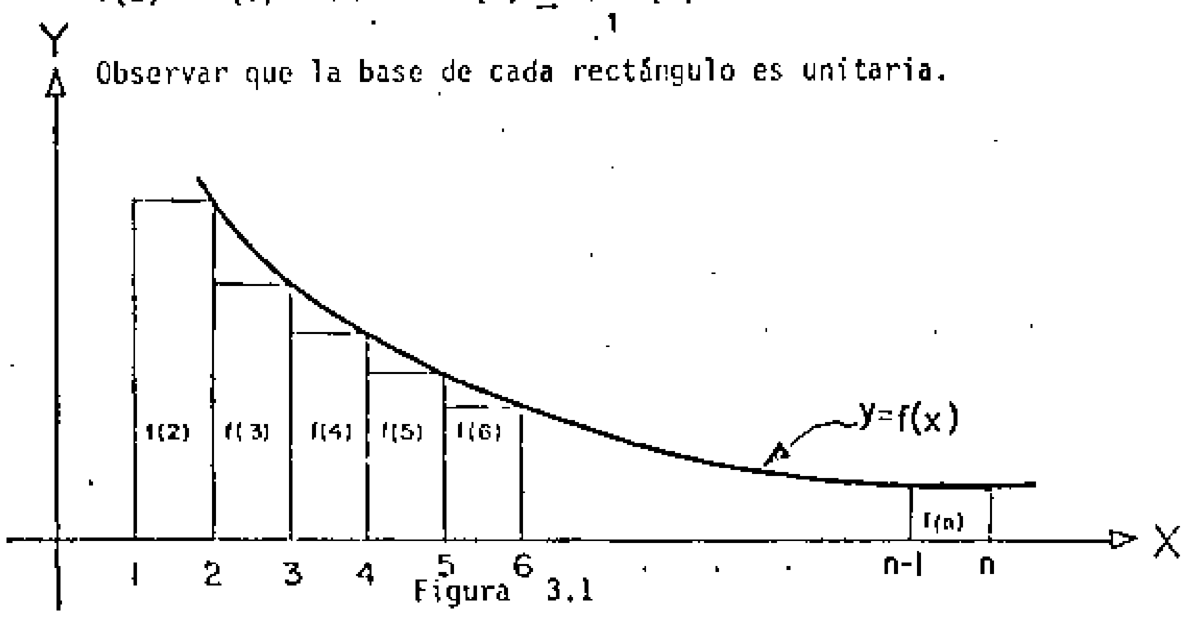


Figura 3.1

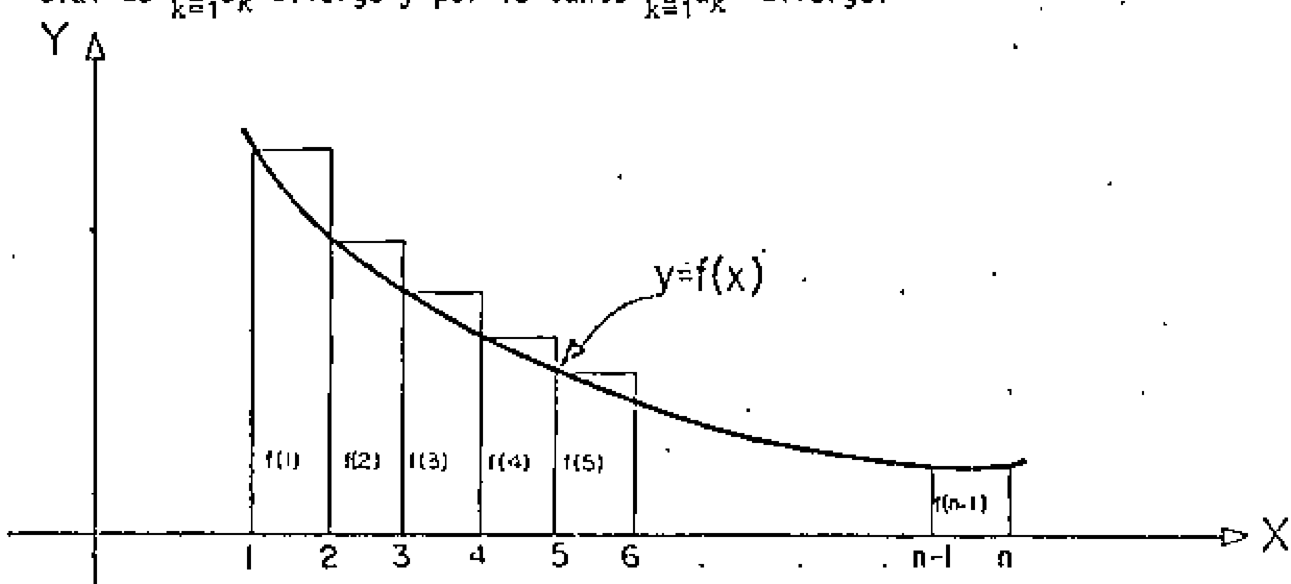
Si hacemos $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, . . ., $a_n = f(n)$ y sumando a ambos miembros - - - $f(1) = a_1$ se obtiene $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \leq f(1) + \int_1^n f(x)dx <$ $f(1) + L$

Esto significa que las sumas parciales de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ están acotadas, y entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

Ahora supongamos que $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge. Como f es decreciente en - $[1, n]$, los (n-1) rectángulos indicados en la figura 3.2 tienen una área total mayor o igual al área bajo la gráfica de $y = f(x)$ de 1 a n. Esto es,

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) \geq \int_1^n f(x)\,dx$$

Pero $\int_1^n f(x)\,dx \longrightarrow +\infty$ cuando $n \to +\infty$. Entonces la enésima suma parcial de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge y por lo tanto $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.



EJEMPLO E.3.7

Usando el criterio de la integral demostrar que la serie - P

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

converge para $p>1$ y diverge para $p \leq 1$. Además, mostrar que para $p>1$,

$$\frac{1}{p-1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < 1 + \frac{1}{p-1}$$

Solución

La función f definida por $f(x)= \frac{1}{x^p}$, donde p es una constante no negativa, es una función continua, positiva y decreciente para $x \geq 1$. Entonces por el criterio de la integral, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge sí y solo si la integral impropia $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ converge, Ahora,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^{\infty} x^{-p}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-p}\,dx$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{b\to+\infty} \left. \dfrac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^b & \text{si } p \neq 1 \\ \lim\limits_{b\to+\infty} \left. \ln x \right]_1^b & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{b\to\infty} \dfrac{b^{1-p}-1}{1-p} & \begin{cases} \text{converge si } p>1 \ (1-p>0) \\ \text{diverge si } p<1 \ (1-p>0) \end{cases} \\ \lim\limits_{b\to+\infty} \ln b & \{ \text{diverge } C\,p=1\} \end{cases}$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p>1$ y diverge si $p\leq 1$. Ahora bien, para establecer que,

$$\frac{1}{p-1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < 1+ \frac{1}{p-1}$$

Nos referimos a las áreas sombreadas en las Figuras 3.3 y 3.4. Combinando las desigualdades mostradas en esas figuras, obtenemos

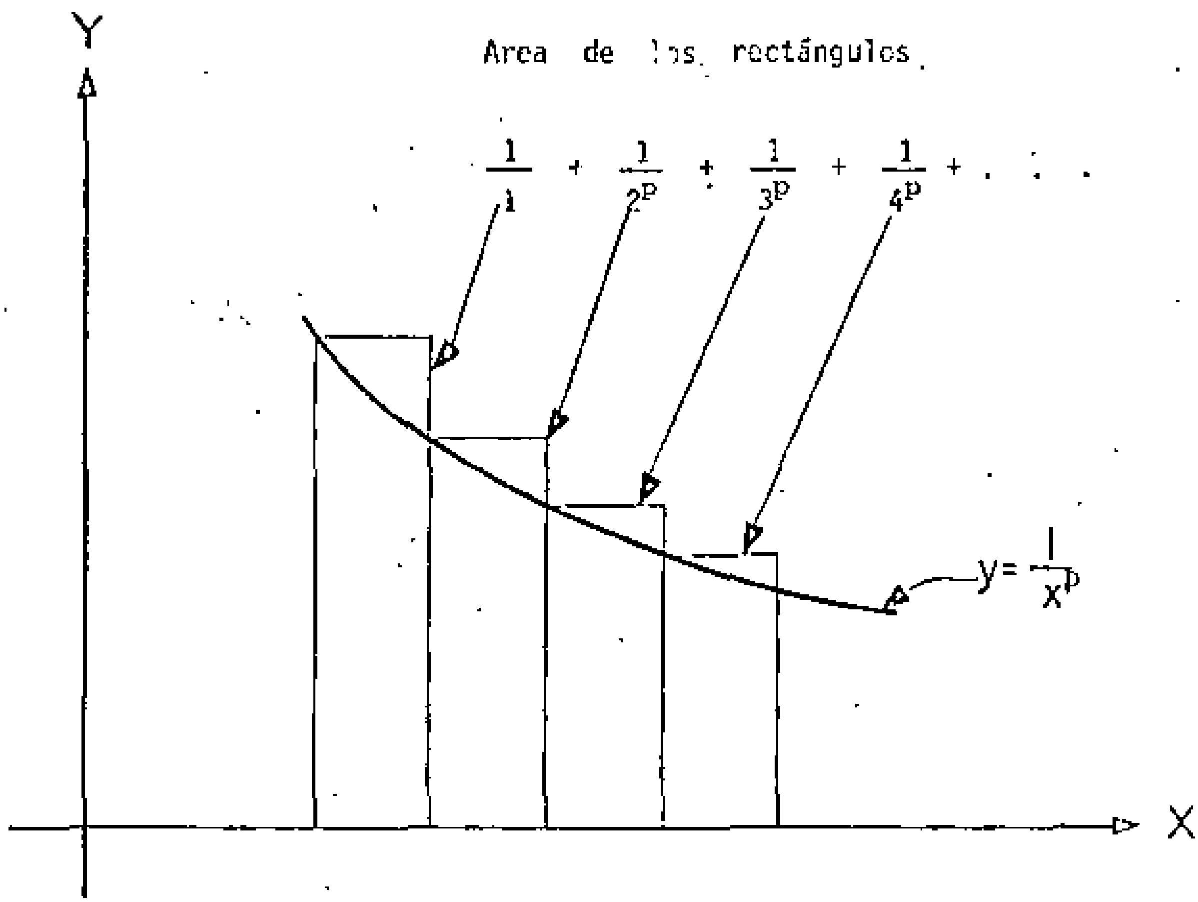
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$$

Para $p > 1$, tenemos

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}.$$

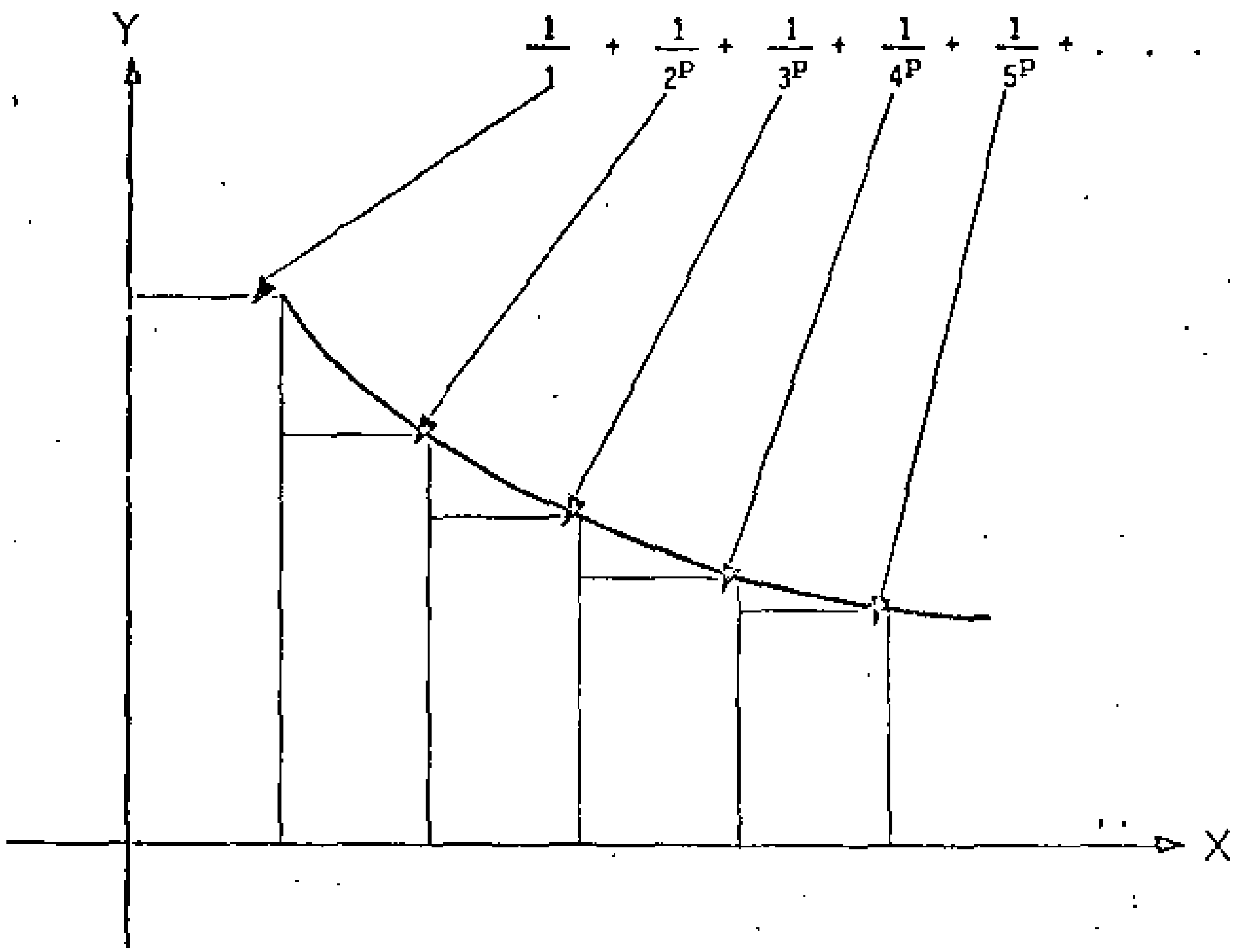
y por lo tanto, se conluye que

$$\frac{1}{p-1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < 1 + \frac{1}{p-1}$$



Area bajo la gráfica = $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Area de los rectángulos.



$$1 + \text{Area bajo la gráfica} = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

La desigualdad (A) establece un par de cotas para la suma de una serie p convergente. Sin embargo la mayoría de las sumas de las series p convergentes permanece como una pregunta sin respuesta. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge para $p > 1$, tiene una suma. En particular cuando $p > 1$ es un entero, existe la suma. Sin embargo, la suma exacta ha sido solo determinada para cualquier entero positivo par y la suma exacta permanece desconocida para p entero positivo impar. En 1752 Euler fue el primero en mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

EJEMPLO E.3.8

Haciendo uso del criterio de la integral, determinar si la serie -- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\mathrm{Ln}\, n)^2}$ converge o diverge.

Solución

La función $f(x) = \frac{1}{x\,(\mathrm{Ln}\, x)^2}$ es continua, positiva, y decreciente - para todo $x \geq 2$. Usando la prueba de la integral, se procede a investigar - la convergencia de la integral impropia $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\mathrm{Ln}\, x)^2}$. En $\int \frac{dx}{x(\mathrm{Ln} x)^2}$ se - hace la sustitución

$$u = \mathrm{Ln}\, x, \quad du = \frac{dx}{x}.$$

Entonces,

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\,(\mathrm{Ln}\, x)^2} = \lim_{b \to +\infty} \left. \frac{-1}{\mathrm{Ln}\, x} \right]_2^b = \left(\lim_{b \to \infty} \frac{-1}{\mathrm{Ln}\, b} \right) + \frac{1}{\mathrm{Ln} 2} = \frac{1}{\mathrm{Ln} 2}$$

Entonces,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\mathrm{Ln}\, n)^2} \quad \text{converge.}$$

EJEMPLO E.3.9.

Usando el criterio de la integral determinar si la siguiente serie -- converge o diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{arc\ tan}\ n}{1+n^2}$$

Solución

$f(x) = \dfrac{\text{arc tan } x}{}$ es continua, y decreciente en $\left[1, +\infty \right)$

ya que $f'(x) = \dfrac{1 - 2x\text{arc tan } x}{} < 0$ para $x > 1$.

La serie converge pues

$$\int_1^{\infty} \frac{\text{arc tan } x}{1 + x^2} \, dx = \left. \frac{(\text{arc tan } x)^2}{2} \right]_1^{\infty} = \frac{(\pi/2)^2}{2} - \frac{(\pi/4)^2}{2} < \infty .$$

Como conclusión interesante del criterio de la integral, es importante observar que este criterio es usualmente aplicable cuando el término enésimo de la serie tiene la estructura de una función positiva, decreciente y cuya antiderivada puede ser fácilmente determinada.

Criterios de la raíz y del cociente para series de términos no negativos.

Usando la serie geométrica con $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ como serie de comparación, Cauchy proporcionó dos criterios útiles conocidos por Criterio de la raíz y criterio del cociente.

3.4.5 Criterio del cociente.

Teorema T.3.8 (Criterio del cociente)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y supóngase que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = L \quad \text{donde} \quad 0 \le L < +\infty$$

a) Si $0 < L < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Si $1 < L < +\infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

c) Si $L = 1$, entonces el criterio no decide y la serie puede ser convergente o divergente.

Demostración

Parte (a): Supongase que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < r$. Si r es un número cualquiera tal que $0 \le L < r < 1^{(2)}$, entonces por la definición de límite existe un $m \in N$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r \text{ siempre que } n \ge m.$$

esto implica que

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} < r$$

$$\frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} < r$$

$$\frac{a_{m+3}}{a_{m+2}} < r$$

$$\vdots$$

de donde $\quad a_{m+1} < a_m\, r$

$$a_{m+2} < a_{m+1}\, r < a_m\, r^2$$

$$a_{m+3} < a_{m+2}\, r < a_{m+1}\, r^2 < a_m\, r^3$$

En consecuencia, a partir del término a_{m+1} los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ son menores que los correspondientes términos de la serie geométrica.

$$a_m\, r + a_m\, r^2 + a_m\, r^3 + \ldots \qquad (3)$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos positivos $L > 0$ y de (II), $0 < r < 1$; por lo que la serie (3) es convergente. Ahora, por el criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Parte (b): Si $L > 1$ ó $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \infty$ cuando $n \to \infty$, existe un $m \in N$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \ \forall \ n \geq m.$$

es decir $\quad a_{n+1} > a_n, \ \forall \ n \geq m.$

Es claro entonces que a_n no tiene a cero cuando $n \to \infty$, por lo que de acuerdo al Corolario de T.3.1 la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Parte (c): Si aplicamos el criterio del cociente a la serie p tenemos -

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$$

para cualquier valor de p.

Pero como se ha demostrado anteriormente cuando $p > 1$ la serie es convergente y cuando $p \leq 1$ es divergente, por lo que L puede ser igual a uno tanto para series convergentes como para series divergentes.

Ahora bien, el hecho de que el cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sea siempre menor que 1 no implica que el límite L sea menor que 1. Por ejemplo, la serie armónica, que diverge, tiene el cociente $\frac{n}{n+1}$, que es siempre menor que 1, pero el límite L es igual a 1. Por otra parte, para la divergencia es suficiente que el cociente sea mayor que 1 para n suficientemente grande, - puesto que entonces $a_{n+1} > a_n$ y a_n no puede tender a o.

Ejemplo E.3.10

Haciendo uso del criterio del cociente, determinar si la - serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!}$$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2 > 1.$$ Entonces la serie diverge.

Criterio de la raíz

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie cuyos términos (a partir de uno de ellos) satisfacen una desigualdad de la forma:

$$0 \leq a_n \leq x^n \qquad \text{donde} \quad 0 < x < 1$$

la aplicación directa del criterio de comparación (T.3.3) expresa que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Las desigualdades anteriores son equivalentes a

$$0 \leq a_n^{1/n} \leq x \quad ;$$

y de aquí el nombre de criterio de la raíz. Si la sucesión $\{a_n^{1/n}\}$ es convergente, el criterio se puede expresar en una forma práctica sin hacer referencia al número x.

> Teorema T.3.9 (Criterio de la raíz)
>
> Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no negativos tales que
>
> $$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow R \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

(a) Si $R<1$, la serie converge.

(b) Si $R>1$, la serie diverge.

(c) Si $R=1$, el criterio no decide.

Demostración

Si $R<1$, elijáse x de manera que $R<x<1$. Entonces $0 \leq a_n^{1/n} \leq x$ se ha de satisfacer $\forall\, n \geq m$ a partir de un $m \in N$. Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge en virtud del criterio de comparación. Esto demuestra (a). Para demostrar (b) se observa que $R>1$ implica $a_n>1$ para una infinidad de valores de n y por tanto a_n no puede tender a o. Por lo cual, en virtud del Corolario de T.3.1 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Esto demuestra (b).

Para demostrar (c), se consideran los dos ejemplos en los que $a_n = \frac{1}{n}$, y $a_n = \frac{1}{n^2}$. En ambos casos, $R = 1$, puesto que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$, pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge mientras que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Ejemplo E.3.11

Haciendo uso del criterio de la raíz, determinar si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(5n+3n^{-1})^n}$$

converge o diverge.

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{5n+3n^{-1}} = \frac{2}{5} < 1$$

entonces la serie converge.

Es importante observar que tanto el criterio de la raíz como el del cociente, en realidad no son más que casos particulares del criterio de comparación. En ambos, cuando se presenta el caso (a) la convergencia se deduce del hecho que la serie en cuestión puede ser dominada por una serie geométrica adecuada $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. La utilidad práctica de estos criterios está en que no se requiere el conocimiento explícito de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ de comparación.

En muchos casos en que el criterio del cociente falla es usual utilizar criterios alternativos conocidos como criterio de Raabe y criterio de Gauss.

3.4.7 Criterio de Raabe.

Teorema T.3.10 (Criterio de Raabe).

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos

si existe un número natural m tal que.

a) $n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1 \quad \forall \; n \geq m$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

b) $n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1 \quad \forall \; n \geq m$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Ejemplo E.3.12

Haciendo uso del criterio de Raabe determinar el carácter de las siguientes series

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$

Solución

a) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \longrightarrow n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

y se puede observar que existe $m=1$ tal que para todo $n \geq m$, $\frac{n}{n+1} < 1$ por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ debido a T.3.10 (b) resulta ser divergente.

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \longrightarrow n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1 - \frac{n^2}{n^2+2n+1}\right) = \frac{2n^2+n}{n^2+2n+1}$

y se puede observar que existe $m=2$ tal que para todo $n \geq m$ $\frac{2n^2+n}{n^2+2n+1} > 1$ por lo que debido a T.3.10 (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ resulta ser convergente.

En el caso de estas dos series el criterio del cociente no decide.

3.4.8 Criterio de Gauss

Teorema T.3.11 (Criterio de Gauss)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos, si existe un $m \geq 1$ y un $S > 1$ y un $M > 0$ tales que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{A}{n} + \frac{f(n)}{n^S} \quad \text{para} \quad n \geq m$$

en donde $|f(n)| \leq M$ para todo n, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $A > 1$ y diverge si $A \leq 1$

Observación: $f(n)$ es una función de n.

En la Referencia (1) (Pags. 491 y 492) se pueden consultar las sugerencias para la demostración de T.3.10 y de T.3.11 respectivamente.

EJEMPLO E.3.13.

Haciendo uso del criterio de Gauss, determinar para que valores de a la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \binom{a}{n} \right| \qquad (a \neq 0)$$

diverge y converge respectivamente.

Solución

Sea $\left| \binom{a}{n} \right| = \dfrac{\left| a\,(a-1) \cdot \cdot \cdot (a-n+1) \right|}{n\,!}$

entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|a-n|}{(n+1)} = \frac{n-a}{n+1} \qquad \text{ya que} \quad n > a$$

Es claro que en este caso el criterio del cociente no decide. Efectuando una descomposición se obtiene.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{a+1}{n+1} = 1 - \frac{a+1}{n} + \frac{a+1}{n(n+1)}$$

finalmente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{a+1}{n} + \frac{\dfrac{a+1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}}{n^2}$$

Comparando con T.3.11 se observa que existen $m = 1$, $S = 2$ y $M = a+2$ tales que.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{A}{n} + \frac{f(n)}{n^s} \qquad \text{para} \quad n \geq m.$$

en donde $A = a + 1$

y $f(n) = \dfrac{a+1}{(1+\frac{1}{n})} = \dfrac{n\,(a+1)}{n+1}$ tal que $|f(n)| \leq M \;\forall\; n$

ya que $\dfrac{a+2}{2} \leq f(n) < a + 2 \quad \forall\; n \in N$.

Ahora bién, de acuerdo a T.3.11, para que la serie converga $A > 1$, - esto es $a+1 > 1 \Longrightarrow a > 0$.

y para que la serie diverga $A \leq 1$, esto es, $a+1 \leq 1 \longrightarrow a \leq 0$.

3.5 Criterios de convergencia para series alternadas.

Hasta ahora se han estudiado series de términos no negativos. En lo que sigue se considerarán series con términos positivos y negativos. El caso más sencillo se presenta cuando los términos de la serie tienen sus signos alternativamente positivos y negarivos.

> **Definición D.3.3**
>
> Las series de la forma
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}\, a_n + \cdots$$
>
> donde cada $a_n > 0$, se denominan series alternadas.

Ejemplos de series alternadas eran conocidos de los primeros investigadores. Uno de estos casos es la serie logarítmica:

$$\log\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n} + \cdots$$

Esta serie converge y su suma es log $(1 + x)$ para $-1 < x \leq 1$. Para x positivo es una serie alternada. En particular, si $x = 1$ se obtiene la fórmula:

$$(5) \qquad \log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$$

que dice que la suma de la serie armónica alternada es log 2. Este resultado es de especial interés teniendo en cuenta que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Intimamente relacionado con (5) es la interesante fórmula

$$(6) \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \cdots$$

descubierta por James Gregory en 1671. Leibniz encontró de nuevo esta fórmula en 1673, Calculando el área del círculo unitario.

Ambas series (5) y (6) son series alternadas de la forma (4) en las que $\{a_n\}$ decrece monótonamente hacia cero. Leibniz observó, en 1705, que esta simple propiedad de a_n implica la convergencia de toda serie alternada.

3.5.1 CRITERIO DE LEIBNIZ.

> **Teorema T.3.12 (Criterio de Leibniz)**
>
> Sea $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, con $a_n > 0 \ \forall\ n \in N$ una serie alternada:
>
> si a) $a_n > a_{n+1} \ \forall\ n \in N$
>
> y b) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$
>
> entonces la serie es convergente.

Sea la serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

Primero consideremos las sumas parciales

$$S_2,\ S_4,\ S_6,\ .\ .\ .\ ,\ S_{2n},\ .\ .\ .$$

que contienen un número par de la serie. Como

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdot \cdot \cdot + a_{2n-1} - a_{2n}$$

y puede expresarse como sigue

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) + \cdot \cdot \cdot + (a_{n-1} - a_n)$$

Entonces, como $a_n > a_{n+1}$, los términos entre paréntesis son todos positi_ vos y la sucesión $\{S_{2n}\}$ es monótona.

Por otra parte, si agrupamos S_{2n} en la forma

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdot \cdot \cdot - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

por el mismo razonamiento vemos que $S_{2n} < a_1$ y la sucesión es acotada. Como $\{S_{2n}\}$ es monótona y acotada, por T.2. tiene límite. Llamémosle L : esto es

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n} = L$$

Solo resta demostrar que tomando un número impar de términos el límite de $\{S_n\}$ es también L.

En efecto

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \qquad\qquad y$$

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \to \infty} S_{2n} + \lim_{n \to \infty} a_{2n+1}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = L + 0 = L$$

y se ha demostrado, entonces, que la sucesión

$\{ S_{2n} \}$ tiene límite, por lo que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ es convergente}$$

EJEMPLO E.3.14

Determinar si las siguientes series alternadas convergen o divergen.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{4n^2-3}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{4n-3}$

Solución

a) Sea

$$a_n = f(n) = \frac{2n}{4n^2-3}$$

se tendrá que demostrar que

i) $a_n > a_{n+1} \quad \forall \; n \in N$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Una manera de probar (i) es mostrar que $f(x) = \frac{2x}{4x^2 - 3}$ es decreciente para $x \geq 1$. Derivando obtenemos

$$f'(x) = \frac{-8x^2 - 6}{(4x^2 - 3)^2} < 0.$$

Se deduce que f es decreciente y por lo tanto $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \in N$.

Para demostrar (ii) se vé que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{4n^2 - 3} = 0$$

Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{4n^2 - 3}$ converge.

b) Como $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{4n - 3} = \frac{1}{2} \neq 0$

según el Corolario de T.3.1 la serie es divergente.

En la parte (a) del ejemplo anterior se usó una derivada para demostrar que $a_n > a_{n+1}$ para todo n. También se puede demostrar directamente verificando que $a_n - a_{n+1} > 0$.

Específicamente, si $a_n = \frac{2n}{4n^2 - 3}$, entonces

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2n}{4n^2 - 3} - \frac{2(n+1)}{4(n+1)^2 - 3}$$

$$= \frac{8n^2 + 8n + 6}{(4n^2-3)(4n^2+8n+1)} \geq 0$$

Para todo $n \in N$. Asimismo se puede demostrar que $a_n \geq a_{n+1}$ verificando que $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

Aproximación del valor de la suma de una serie alternada convergente.

Si una serie infinita converge, entonces se puede usar la enésima suma parcial S_n para estimar la suma S de la serie. En la mayoría de los casos es difícil determinar la precisión de la aproximación. Sin embargo, el siguiente teorema proporciona una manera simple para estimar el error si la serie es alternada.

> Teorema T.3.13
>
> Si $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ es una serie alternada tal que $a_n > a_{n+1} > 0 \;\forall\; n \in N$ y si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces el valor absoluto del error que resulta al estimar la suma S mediante la enésima suma parcial S_n, es menor que a_{n+1}.

Demostración.

Se puede observar que la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ satisface las condiciones del criterio para las series alternadas y por consiguiente tiene una suma S. La serie que se obtiene al omitir los primeros n términos, es decir

$$(-1)^n \; a_{n+1} + (-1)^{n+1} \; a_{n+2} + (-1)^{n+2} \; a_{n+3} + \cdots$$

también satisface las condiciones de T.3. y por lo tanto su suma es R_n. Así

$$S - S_n = R_n = (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots)$$

y $\qquad |R_n| = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots$

Usando el mismo argumento que en la demostración del criterio para las series alternas (T.3.) vemos que $|R_n| < a_{n+1}$. En consecuencia,

$$|S - S_n| = |R_n| < a_{n+1}$$

que es lo que quería demostrar.

EJEMPLO E.3.15

Demostrar que la serie

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!} + \cdots$$

es convergente y calcular además su suma S con una exactitud de cinco cifras decimales.

Solución.

Evidentemente el límite de $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)!}$ cuando $n \to \infty$ es 0 y $a_n > a_{n+1}$ para todo entero positivo n. Por lo tanto, la serie converge según el criterio de Leibniz. Al usar S_4 para estimar la suma S de la serie, obtenemos

$$S \simeq 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040}$$

$$S \simeq 0.84147$$

Según T.3. , el error en esta aproximación es menor que $a_5 = \dfrac{1}{9!} < 0.000003$

Por lo tanto, la aproximación 0.84147 tiene una aproximación de cinco cifras decimales.

Se puede deducir que la suma de la serie dada es igual a sen 1 y por lo tanto sen 1 = 0.84147. Esto ilustra un método para construir tablas trigonométricas.

EJEMPLO E.3.16

Como consecuencia del criterio de Leibniz se puede deducir también un límite importante.

Sea:
$$a_1 = 1, \quad a_2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}, \quad a_3 = \frac{1}{2}, \quad a_4 = \int_2^3 \frac{dx}{x}, \ \ldots,$$

donde, en general,

$$a_{2n-1} = \frac{1}{n} \qquad y \qquad a_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Es fácil comprobar que $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y que $a_n > a_{n+1}$. Por tanto de acuerdo a T.3.12 la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ converge. Su suma se indica por C y su suma parcial enésima por S_n.

La suma parcial $(2n-1)$ se puede expresar como sigue:

$$S_{2n-1} = 1 - \int_1^2 \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} - \int_2^3 \frac{dx}{x} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x} + \frac{1}{n} =$$

reagrupando y aplicando una propiedad de la integral

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{dx}{x}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Puesto que $S_{2n-1} \to C$ cuando $n \to \infty$ se obtiene la siguiente fórmula:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right) = C. \tag{7}$$

El número C definido por este límite se denomina constante de Euler (indicada algunas veces por γ). Igual que π y e, este número aparece en muchas fórmulas analíticas.

Su valor con diez cifras decimales exactas es:

$$C = 0.5772156649$$

Un problema interesante, todavía sin resolver, es averiguar si la constante de Euler es racional o irracional.

La relación (7) también puede expresarse como sigue

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n = C \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

de donde (8) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + C \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty$

dividiendo ambos miembros entre $\log n$ se obtiene que

$$\frac{1 + \frac{1}{2} \ldots + \frac{1}{n}}{\log n} \longrightarrow 1 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

De modo que las sumas parciales de la serie armónica son asintóticamente iguales a $\log n$. Esto es, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \log n \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

La relación (8) no sólo explica por qué la serie armónica diverge, sino que también nos proporciona una idea concreta del crecimiento de sus sumas parciales.

En el próximo ejemplo se utilizará la relación (8) para demostrar que la serie armónica alternada tiene suma igual a $\log 2$.

EJEMPLO E.3.17

Determinar la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

SOLUCION

Sea $S_m = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$ la suma parcial emésima.

Puesto que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ es convergente, entonces S_m tiende a un límite cuando $m \to \infty$, y se va a demostrar ahora que ese límite es $\log 2$.

Cuando m es par, $m=2n$, se pueden separar los términos positivos y negativos obteniendo

$$S_{2n} = S_m = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Aplicando (8) a cada serie, se obtiene

$$S_{2n} = (\log 2n + C) - (\log n + C) \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

haciendo uso de las propiedades de los logaritmos se puede observar que

$$S_{2n} \to \log 2 \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Esto demuestra que la suma de la serie armónica alternada es log 2, esto es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \log 2$$

Convergencia condicional y absoluta.

A pesar de que la serie armónica alternada es convergente $\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)$, la serie que se obtiene sustituyendo cada término por su valor absoluto es divergente. Esto prueba que en general la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no implica la convergencia $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. En sentido contrario se tiene el siguiente teorema:

Teorema T.3.14

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, también converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y se tiene entonces

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| .$$

La demostración aparece en la página 496 de la Referencia 1.

DEFINICION D.3.4.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se llama absolutamente convergente si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Es condicionalmente convergente si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y en cambio $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Un resultado importante se presenta a continuación

Teorema T.3.15

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son absolutamente convergentes, entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha\, a_n + \beta b_n)$ también converge absolutamente; siendo α y β escalares cualesquiera.

La demostración se puede consultar en la página 496 de la Referencia 1.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA DE DIRICHLET Y DE ABEL

Los criterios de convergencia vistos en las secciones anteriores, los cuales fueron desarrollados para series de términos no negativos, también pueden usarse para averiguar la convergencia absoluta de una serie de términos complejos cualesquiera. En esta sección se expondrán dos criterios que se utilizan a menudo para determinar la convergencia en el caso de que una serie no converja absolutamente. Ambos criterios hacen uso de una identidad algebraica llamada fórmula de sumación parcial de Abel, en memoria del matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829). Dicha fórmula es parecida a la de integración por partes y puede enunciarse como sigue.

> **Teorema T.3.16** (Fórmula de sumación de Abel)
>
> Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números complejos y llamemos $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Entonces se tiene la identidad
>
> $$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

DEMOSTRACION

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$A_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k \quad \text{y} \quad A_{k-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}$$

entonces

$$a_k = A_k - A_{k-1} \quad \text{definiendo} \quad A_0 = 0$$

$$k = 1, 2, \ldots, n$$

así que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k b_k - A_{k-1} b_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k \quad (10)$$

pero

$$-\sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k = -A_0 b_1 - A_1 b_2 - A_2 b_3 \cdots \ldots - A_{n-1} b_n$$

$$= -A_1 b_2 - A_2 b_3 - \ldots - A_n b_{n+1} + A_n b_{n+1}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1} \quad \text{ya que} \quad A_0 = 0$$

sustituyendo en (10)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1} ,$$

que resulta ser lo que se quería demostrar.

Si hacemos que $n \to \infty$ en (9) vemos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ converge si convergen simultáneamente la serie $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ y la sucesión $\{A_n b_{n+1}\}$.

Los dos criterios que se presentan a continuación, dan condiciones suficientes para que éstas converjan.

> Teorema T.3.17 (Criterio de Dirichlet)
>
> Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos complejos cuyas sumas parciales forman una sucesión acotada. Sea $\{b_n\}$ una sucesión real decreciente que converge hacia 0. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

DEMOSTRACION

Usando la notacióndel teorema T.3.14 ; por hipótesis, existe un $M > 0$ tal que $|A_n| \leq M$ para todo n. Por consiguiente $A_n b_{n+1} \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$. Para establecer la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, tenemos que demostrar tan sólo que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ es convergente.

Puesto que $b_{n+1} < b_n$ ya que $\{b_n\}$ es decreciente, se tiene la desigualdad

$$|A_k (b_k - b_{k+1})| \leq M (b_k - b_{k+1}) .$$

Pero la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$ es una serie telescópica convergente que domina a $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$.

Esto implica la convergencia absoluta y por tanto la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$.

Para aplicar el criterio de Dirichlet, se necesitan conocer algunos ejemplos de series con sumas parciales acotadas. Naturalmente, toda serie convergente tiene esa propiedad. Un ejemplo importante de serie divergente con sumas parciales acotadas es la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ en la que x es un número complejo con $|x| = 1$ pero $x \neq 1$. El teorema que se presenta a continuación proporciona una cota superior para las sumas parciales de esta serie. Cuando $|x| = 1$, se puede escribir $x = e^{2i\Theta}$, siendo Θ real, y se tiene lo siguiente

> Teorema T.3.18
>
> Para todo Θ real no múltiplo entero de π, se tiene la identidad
>
> (11) $$\sum_{k=1}^{n} e^{2ik\Theta} = \frac{\text{sen } n\,\Theta}{\text{sen } \Theta}\, e^{i(n+1)\Theta},$$
>
> a partir de la cual se obtiene la acotación
>
> (12) $$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{2ik\Theta}\right| \leq \frac{1}{|\text{sen } \Theta|}$$

DEMOSTRACION

Si $x \neq 1$, las sumas parciales de la serie geométrica vienen dadas por la relación conocida

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = x\,\frac{x^n - 1}{x - 1}$$

Haciendo $x = e^{2i\Theta}$ en esa fórmula, donde Θ es real pero no múltiplo entero de π, encontramos

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2ik\Theta} = e^{2i\Theta}\,\frac{e^{2in\Theta} - 1}{e^{2i\Theta} - 1} = \frac{e^{in\Theta} - e^{-in\Theta}}{e^{i\Theta} - e^{-i\Theta}}\, e^{i(n+1)\Theta}$$

$$= \frac{\text{sen } n\,\Theta}{\text{sen } \Theta}\, e^{i(n+1)\Theta}$$

Esto demuestra (11). Para deducir (12), se debe observar que $|\text{sen } n\,\Theta| \leq 1$ y que $|e^{i(n+1)\Theta}| = 1$, por lo que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{2ik\Theta}\right| \leq \frac{1}{|\text{sen } \Theta|}$$

EJEMPLO E.3.19

Supongamos que $\{b_n\}$ es una sucesión decreciente de números reales con límite 0. Tomando $a_n = x^n$ en el criterio de Dirichlet, siendo x complejo, $|x| = 1$, $x \neq 1$, se encuentra que la serie

$$(13) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \qquad \text{converge.}$$

ES IMPORTANTE OBSERVAR QUE EL CRITERIO DE LEIBNIZ PARA SERIES ALTERNADAS ES TAN SOLO EL CASO PARTICULAR EN EL QUE $x = -1$. SI SE TOMA $x = e^{i\Theta}$, SIENDO Θ REAL PERO NO MULTIPLO ENTERO DE 2π, Y CONSIDERANDO LAS PARTES REAL E IMAGINARIA DE (13), SE DEDUCE QUE LAS DOS SERIES TRIGONOMETRICAS

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\Theta \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\Theta$$

CONVERGEN.

En particular cuando $b_n = n^{-\alpha}$, siendo $x > 0$, se obtienen las siguientes series convergentes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\Theta}}{n^{-\alpha}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\Theta}{n^{2}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\Theta}{n^{-\alpha}}$$

Cuando $\alpha > 1$, convergen absolutamente ya que están dominadas por $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$

3.5.3 CRITERIO DE ABEL

> TEOREMA T.3.19 (Criterio de Abel)
>
> Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente de términos complejos y $\{b_n\}$ una sucesión monótona convergente de términos reales. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

DEMOSTRACION

Se utilizará la notación de T.3.16. La convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implica la sucesión $\{A_n\}$ y por tanto la de la sucesión $\{A_n b_{n+1}\}$. Asimismo es una sucesión acotada. El resto de la demostración es semejante a la del criterio de Dirchlet.

EJEMPLO E.3.20

Determinar si la siguiente serie converge o diverge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(4+n)^{3/2}}$$

SOLUCION

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(4+n)^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(4+n)^{3/2}} \cdot \frac{1}{n}$$

se puede comprobar fácilmente por medio del criterio de la integral que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4+n)^{3/2}}$ es convergente por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(4+n)^{3/2}}$ es absolutamente convergente, además como $\{ \frac{1}{n} \}$ es una sucesión monótona convergente se concluye de acuerdo al Criterio de Abel, que la serie dada es convergente.

3.5.4 Criterio M. de Weierstrass.

> TEOREMA T.3.20 (Criterio M. de Weierstrass)
>
> Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$; si existe una sucesión de constantes positivas $M_1, M_2, M_3, \ldots,$ tales que en un cierto intervalo se cumplan las dos condiciones siguientes
>
> a) $|a_n(x)| \leq M_n \quad \forall\, n \in N$
>
> b) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge
>
> entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge absolutamente en el intervalo.

EJEMPLO E.3.21

Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ converge absolutamente.

SOLUCION

Como $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall\, n \in N, \quad x \in R$ y además $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, entonces de acuerdo al Criterio de Weierstrass la serie dada es absolutamente convergente.

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)} \right]^2$ si se aplica el criterio de Raabe;

$$\lim_{n \to \infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left[\frac{\dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)(3(n+1)-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n \cdot 3(n+1)}}{\dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n}} \right]^2$$

$$= \left[\frac{3(n+1) - 2}{3(n+1)} \right]^2 = \left(\frac{3n+1}{3n+3} \right)^2$$

$$\lim_{n \to \infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n \to \infty} n \left[1 - \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2 \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} n \, \frac{9n^2 + 18n + 9 - 9n^2 - 6n - 1}{(3n+3)^2}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{12n^2 + 8n}{9n^2 + 18n + 9}$$

$$= \frac{4}{3} > 1$$

$\therefore \ \Sigma a_n$ es convergente

Universidad Nacional
Autónoma de
México

DESARROLLO EN SERIES DE POTENCIAS

FACULTAD DE INGENIERIA

"NO HAY CIENCIA QUE HABLE DE LAS
ARMONIAS DE LA NATURALEZA CON MAS
CLARIDAD QUE LAS MATEMATICAS"

PAULO CARUS.

1. SERIES DE POTENCIAS

En temas anteriores hemos estudiado series de términos constantes, ahora estudiaremos series cuyos términos son funciones de una variable

Algunas de estas series ya se han visto; como por ejemplo la serie geométrica.

$$1 + r + r^2 + \cdots r^n + \cdots$$

que es una serie con funciones de r, la cual converge cuando $|r| < 1$, diverge para $|r| \geq 1$ y tiene suma igual a $\frac{1}{1-r}$

Si en esta serie ponemos x en lugar de r, tendremos

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} = f(x)$$

para valores de x en el intervalo $(-1, 1)$, en el cual converge la serie.

Un tipo de series de funciones son las series de potencias, las cuales se definen a continuación:

Una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

en la que $a_0, a_1, a_2, \ldots$ son constantes, se llama serie de potencias de x

Análogamente una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

siendo a una constante se le llama serie de potencias de $(x-a)$

- INTERVALO Y RADIO DE CONVERGENCIA

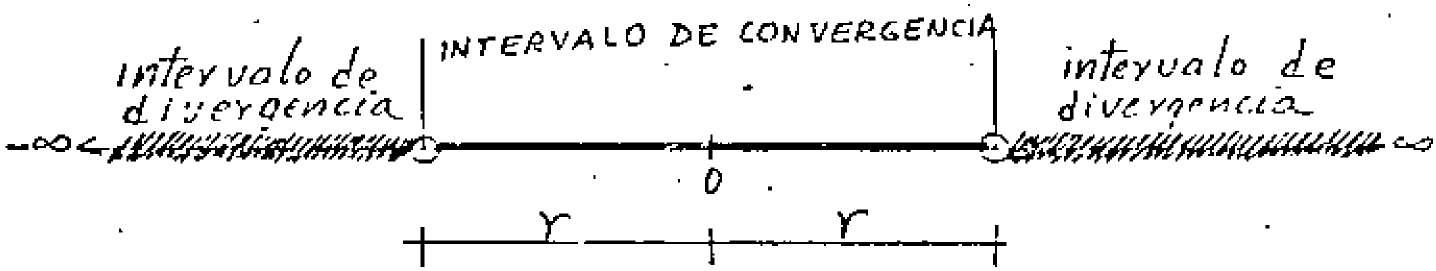
En una serie de potencias la x es una variable; para $x=0$ la serie converge y para otros valores de x la serie puede ser convergente o divergente.

Al conjunto de valores de la x para los cuales la serie de potencias es convergente se le llama intervalo de convergencia y generalmente se determina con el criterio del cociente juntos con otros criterios aplicados al extremo del intervalo.

El intervalo de convergencia de una serie real de potencias de x es uno de los siguientes:

$$(-r, r),\ [-r, r),\ (-r, r]\ \text{ó}\ [-r, r]$$

en donde el número r se llama <u>RADIO DE CONVERGENCIA</u>, el cual se representa en la siguiente figura:



El intervalo de convergencia de una serie real de potencias de $(x-a)$ es uno de los siguientes:

$$(a-r,\ a+r)\ ,\ (a-r,\ a+r]\ ,\ [a-r,\ a+r)\ \text{ó}\ [a-r,\ a+r]$$

como se puede apreciar en la siguiente figura

$\boxed{\text{EJEMPLO 1.1}}$

Determinar los valores de x para los cuales la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n x^n}{n\, 3^n}$$

es absolutamente convergente

SOLUCION

aplicamos el criterio del cociente

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)\, 3^{n+1}} \quad , \quad a_n = \frac{2^n x^n}{n\, 3^n}$$

$$\frac{2^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)\, 3^{n+1}} \, \frac{n\, 3^n}{2^n x^n} = \frac{2 n x}{3(n+1)}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{2 n x}{3(n+1)} \right| = \left| \tfrac{2}{3} x \right| \cdot |1| = \left| \tfrac{2}{3} x \right|$$

$$-1 < \tfrac{2}{3} x < 1$$

$$-\tfrac{3}{2} < x < \tfrac{3}{2}$$

analizamos los extremos del intervalo

para $x = \frac{3}{2}$ la serie se convierte en:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

que es una serie condicionalmente convergente.

para $x = -\frac{3}{2}$ la serie se convierte en:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (-1) = -1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \cdots$$

que es la serie armónica, divergente

La serie de potencias converge si $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ y es absolutamente convergente cuando $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$ o $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

TEOREMA 1.1

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ una serie de potencias

i) Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \neq 0$, entonces el radio de convergencia $r = \frac{1}{L}$ es tal que la serie converge para todo valor de X en el intervalo $|X| < r$ y diverge para toda X en el intervalo $|X| > r$

ii) Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, $\left(r = \frac{1}{0} = \infty\right)$, entonces la serie converge para todo valor de X.

iii) Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, $\left(r = \frac{1}{\infty} = 0\right)$ entonces la serie converge unicamente para $X=0$

DEMOSTRACION

Sea
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \quad \ldots\ldots \quad (A)$$
una serie real de potencias y sea
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n X^n| \quad \ldots\ldots \quad (B)$$
su serie de valores absolutos

i) Si $|X| < r$ entonces, como $\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

se tiene $|X| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$.

por lo que, según el criterio del cociente, la serie (B) converge y del teorema que dice: "Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también es convergente (absolutamente)

Sea ahora $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| > r$, entonces

$$|x| > \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

$$|x| > \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \cdots\cdots \quad (C)$$

Supongamos ahora que la serie

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es convergente, entonces se tendrá que: $\lim_{n\to\infty} a_n x^n = 0$

En consecuencia, existiría un $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$|a_{n+1} x^{n+1}| \leq |a_n x^n| \quad \forall \; n \geq M$$

de donde

$$|x| \leq \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \forall \; n \geq M$$

por lo tanto $|x| \leq \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

lo que contradice (C), por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ es divergente cuando $|x| > r$

ii) Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ entonces

$$|x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad \forall . x \in \mathbb{R}$$

por lo que, según el criterio del cociente y el teorema que dice: "Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, si $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente; la serie (A) converge (absolutamente) para todo valor de x.

iii) La serie es convergente para $x=0$ además, de la prueba i) se tiene que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge, entonces $|x| \leq \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$; por lo que, si $x \neq 0$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{1}{|x|}$$ y la sucesión $\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\}$

sería acotada, en consecuencia, si

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ no puede ser convergente

Esto completa la demostración

<u>El teorema es aplicable a series de potencias de $(x-a)$ reemplazando x por $(x-a)$ y el valor de $x=0$ por $x=a$</u>

<u>Este mismo teorema nada dice en i)</u>

respecto a la convergencia de la serie en los extremos del intervalo $|x| < r$; en los cuales la serie puede ser convergente o divergente como se muestra en los siguientes ejemplos

EJEMPLO 1.2

Determinar el intervalo de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!}$$

SOLUCION

Aplicamos el criterio del cociente

$$a_{n+1} = \frac{x^{2(n+1)}}{2(n+1)!} \quad , \quad a_n = \frac{x^{2n}}{2n!}$$

formamos el cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{2(n+1)}}{2(n+1)!} \, \frac{2n!}{x^{2n}} = \frac{x^2}{n+1}$$

obtenemos el límite cuando $n \to \infty$

$$|x^2| \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = |x^2| \cdot 0 = 0 < 1$$

El radio de convergencia es:

$$r = \frac{1}{L} = \frac{1}{0} = \infty$$

por lo tanto el intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$, es decir la serie converge para todo valor de x.

EJEMPLO 1.3

Obtener el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{100^n} x^n$$

SOLUCION

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{100^{n+1}} \quad , \quad a_n = \frac{n!\, x^n}{100^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{100^{n+1}} \cdot \frac{100^n}{n!\, x^n} = \frac{(n+1)\, x}{100}$$

$$\left|\frac{x}{100}\right| \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

El radio de convergencia es $r = \frac{1}{\infty} = 0$ y el intervalo de convergencia es $|x| = 0$, es decir la serie dada unicamente converge para $x = 0$.

EJEMPLO 1.4

obtener el dominio sobre el cual está definida una función por la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^{2n-1}}{2n-1}$$

SOLUCION

La serie de potencias define una función en su intervalo de convergencia

$$a_{n+1} = \frac{(x+4)^{2(n+1)-1}}{2(n+1)-1} = \frac{(x+4)^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(x+4)^{2n+1}}{2n+1} \frac{2n-1}{(x+4)^{2n-1}} = \frac{(x+4)^2\,(2n-1)}{2n+1}$$

obtenemos el limite

$$(x+4)^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = (x+4)^2$$

$$-1 < x+4 < 1$$

$$-5 < x < -3$$

analizamos los extremos:

Si $x=-5$, la serie dada se convierte en:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$

ya que $(-1)^{2n-1} = -1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

que es divergente de acuerdo con la prueba de la integral.

Si $x=-3$, la serie se convierte en

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ que también es divergente.

Asi la serie de potencias dada define una función en el intervalo $-5 < x < -3$

2. OPERACIONES ALGEBRAICAS CON SERIES DE POTENCIAS

- ADICION Y SUBSTRACCION CON SERIES DE POTENCIAS

Las operaciones de adición y substracción de series de potencias convergentes se efectuan en forma semejante que para series de términos constantes convergentes, sumandose término a término, ya que para cada valor de x una serie de potencias se convierte en una serie de términos constantes.

EJEMPLO 4.1

Efectuar la operación de adición entre las siguientes series:

$$\cos h\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\operatorname{sen} h\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

SOLUCION

Sumando término a término estas series se tiene:

$$\cos h\, x + \operatorname{sen} h\, x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\cosh x + \operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

MULTIPLICACION DE SERIES DE POTENCIAS

El producto de dos series de potencias se efectua en forma similar al producto de dos series de términos constantes, reordenando y agrupando una serie doble de potencias en una serie de potencias sencilla.

El producto de Cauchy para series de potencias se define a continuación

---

DEFINICION 4.1

Dadas las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad y \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

definimos el producto de Cauchy como la serie:

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

donde $c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$

es decir como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \right) x^n$$ para series de potencias de x

y como $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \right) (x-a)^n$$

para series de potencias de $(x-a)$

EJEMPLO 4.2

Dadas las series

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad |x| < 1$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} + \cdots \qquad |x| < 1$$

Hallar los primeros siete términos del producto de Cauchy

SOLUCION

multiplicando término a término, se tiene:

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
1 + x & + \frac{x^2}{2} & + \frac{x^3}{6} & + \frac{x^4}{24} & + \frac{x^5}{120} & + \frac{x^6}{720} & + \cdots \\
 & - \frac{x^2}{2} & - \frac{x^3}{2} & - \frac{x^4}{4} & - \frac{x^5}{12} & - \frac{x^6}{48} & - \cdots \\
 & & & + \frac{x^4}{24} & + \frac{x^5}{24} & + \frac{x^6}{48} & + \cdots \\
 & & & & & - \frac{x^6}{720} & - \cdots \\
\hline
1 + x & + 0x^2 & - \frac{x^3}{3} & - \frac{x^4}{6} & - \frac{x^5}{30} & + 0x^6 & + \cdots
\end{array}
$$

Sumamos:

El producto de cauchy es:

$$e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30} + \cdots$$

TEOREMA 4.1

Si las series de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

convergen para $|x| < r$ entonces el producto de Cauchy converge hacia $f(x)\,g(x)$ para $|x| < r$

La demostración de este teorema aparece en Morrey, University Calculus, página 711

Sobre la base de este teorema vemos que en el ejemplo anterior $e^x \cos x$ es valida para toda x.

DIVISION DE SERIES DE POTENCIAS

DEFINICION

El cociente de dos series de potencias

$$\frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots} \qquad b_0 \neq 0$$

se define como la serie de potencias

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \quad \text{(si hay alguna)},$$

tal que el producto de Cauchy de las series

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ es la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

En el siguiente ejemplo no se aplica esta definición, emplearemos el proceso de la división de dos series como si fueran polinomios.

EJEMPLO 4.3

Emplear las series

$$\operatorname{Sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots \qquad y$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots$$

para obtener tres términos de Tan x

SOLUCION

Efectuamos la división

$$\begin{array}{r|l}
 & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots \qquad |x| < \pi/2 \\
\hline
1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots & x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots \\
 & -x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{24} + \cdots \\
\cline{2-2}
 & \qquad \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \cdots \\
 & \qquad -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6} - \cdots \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad \frac{2x^5}{15} + \cdots
\end{array}$$

$$\operatorname{Tan} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$$

Si las dos series convergen en alguna vecidandad de $x=0$, entonces el cociente de las series existe y converge en alguna vecindad de $x=0$. Desgraciadamente no existe una regla elemental y sencilla para hallar el intervalo de convergencia del cociente.

3.- REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES POR SERIES DE POTENCIAS

Una serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ define una función f cuyo dominio es el intervalo de convergencia de la serie de potencias. Si I es el intervalo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, se dice que f es representada por la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ y se escribe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad \forall\, x \in I$$

Por ejemplo, si f es representada por la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ cuyo intervalo de convergencia es I y si x_0 es un número de I, entonces $f(x_0)$ puede ser obtenido al determinar la suma de la serie

$$f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n + \cdots$$

Esto es, una representación en serie de potencias para una función f, puede ser utilizada para calcular valores de la función.

La función f representada por una serie de potencias tiene propiedades similares a las de un polinomio. A continuación se mencionan tres de dichas propiedades.

Teorema T.3.1

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias en x, la cual tiene un radio de convergencia R no nulo.
Si la función f se define como:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

entonces, para todo número x dentro del intervalo de convergencia de la serie dada:

a) f es continua:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

b) f es derivable:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{dx} a_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$$

c) f es integrable:

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x a_n t^n\,dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

Demostración de b)

Tomemos cualquier valor de x tal que $|x| < R$ y escogemos x_1 de modo que $|x| < |x_1| < R$. Como $a_n x^n$ es convergente en R, existe un número positivo M con la propiedad de que

$$|a_n x_1^n| \le M \quad \text{para todo } n$$

Se tiene la relación

$$\left| n\, a_n x^{n-1}\right| = \left| n\, a_n \frac{x^{n-1}}{x_1^n}\, x_1^n\right| \le n\frac{M}{x_1}\left|\frac{x}{x_1}\right|^{n-1},$$

y se puede aplicar el criterio de comparación a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ya que de acuerdo al criterio de la razón la serie $\frac{M}{x_1}\sum_{n=1}^{\infty} n\left|\frac{x}{x_1}\right|^{n-1}$ converge, pues $L = \left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$.

Por lo tanto también converge $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Además, puesto que x es un número cualquiera del intervalo $(-R, R)$, el intervalo de convergencia de

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ es el mismo que el de $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

■

La demostración de a) y c) se puede consultar en las páginas 601 y 602 del libro Cálculo con Geometría Analítica de Protter/Morrey. 3ªed.

También se puede demostrar que si R es el radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ la serie que se obtiene al integrarla, también tiene como radio de convergencia R.

Se debe tener cuidado con lo establecido anteriormente, ya que si ha dicho que el radio de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ y de } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

es el mismo, esto no implica que su intervalo de convergencia sea el mismo. Por ejemplo, el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ es $[-1, 1)$, mientras que el intervalo de convergencia de su derivada

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \text{ es } (-1, 1).$$

En el caso de una serie funcional cualquiera, la derivación término a término es un asunto más delicado, en cuanto a la conservación de propiedades, que la integración término a término. Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{sen} nx)}{n^2} \quad \text{converge para todo valor de } x$$

ya que es dominada por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. No obstante, la serie obtenida derivando término a término es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos nx)}{n} \ , \text{ y ésta diverge cuando } x = 0.$$

Los ejemplos que se presentan a continuación, proporcionan una herramienta para obtener nuevas representaciones en series de potencias para una representación dada.

EJEMPLO

La serie geométrica $1 + x + x^2 + \cdots$ converge para $-1 < x < 1$ y tiene suma igual a $\frac{1}{1-x}$. Esto es,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad -1 < x < 1$$

Aplicando la parte b) de T.3.1 se tiene que.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + \cdots + n\,x^{n-1} + \cdots$$

cuyo intervalo de convergencia es $-1 < x < 1$ ●

EJEMPLO

Usar la serie geométrica $1 + x + x^2 + \cdots$ para determinar una representación en serie de potencias para

$$\operatorname{Ln}\left[\frac{1}{1-x}\right].$$

Solución

La serie geométrica $1+x+x^2+\cdots$ converge para $-1<x<1$ y tiene suma igual a $\frac{1}{1-x}$. Entonces

$$(1) \qquad \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \qquad -1<x<1$$

Aplicando la parte (c) de T.8.1 debemos integrar la relación anterior.

Se obtiene

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots$$

Pero $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -L_n(1-t)\Big]_0^x = -L_n(1-x) = L_n\frac{1}{1-x}$

entonces

$$L_n\frac{1}{1-x} = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Es fácil verificar que el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{es } -1\le x<1$$

Si tomamos $x=-1$ obtenemos

$$L_n\frac{1}{2} = -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

Como $L_n\frac{1}{2} = -L_n 2$, hemos determinado la suma de la serie armónica alternada. Esto es

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots = L_n 2$$

EJEMPLO

Desarrollar la serie

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

Esta serie es llamada "Serie de Gregory".

Solución.

En la serie geométrica (1), reemplazamos x por $-x^2$. El resultado es

$$(2) \quad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \quad -1 < x < 1$$

Entonces por (c) de T.8.1, podemos integrar (2), obteniendo

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - \cdots)\, dt$$

de donde

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

cuyo radio de convergencia es $R=1$. Para determinar el intervalo de convergencia, tomamos $x=-1$ y $x=1$. En ambos casos se tiene la serie armónica alternada, la cual converge. Por lo que el intervalo de convergencia de la serie de Gregory es $-1 \leq x \leq 1$.

4) Series de Taylor y de Maclaurin.

Supóngase que una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

converge en algún intervalo $-R < x-a < R$ $(R>0)$. Entonces la suma de la serie tiene un valor para cada x en ese intervalo y, por lo tanto, define una función de x. Por consiguiente, podemos escribir

$$f(x) = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + a_3 (x-a)^3 + \cdots \qquad (3)$$

$$a-R < x < a+R$$

Nos preguntamos, ¿cuál es la relación entre los coeficientes $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ y la función f?

Procedemos en forma natural, considerando que el segundo miembro de (3) fuera un polinomio. Haciendo $x=a$ hallamos de inmediato que

$$f(a) = a_0 .$$

Derivando (3), como si el segundo miembro fuera un polinomio, se tiene que

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 (x-a) + 3a_3 (x-a)^2 + 4a_4 (x-a)^3 + \cdots$$

Para $x=a$, resulta

$$f'(a) = a_1 .$$

Continuando de igual forma, se obtiene que la fórmula general para los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ es

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Mas adelante demostraremos que todos los pasos anteriores son válidos cuando la serie es convergente en algún intervalo positivo. Sustituyendo las fórmulas de los coeficientes a_n en la serie de potencias, obtenemos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema T.2.2 (Serie de Taylor)

Si f es una función tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

para todo x en un intervalo abierto que contiene a a, entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \cdots$$

La serie en la conclusión de este teorema se llama la serie de Taylor para $f(x)$ en a. El caso especial $a=0$ es muy importante y por tanto lo enunciamos por separado como un corolario.

Corolario T.2.3 (Serie de Maclaurin)

Si f es una función tal que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ para todo x en un intervalo abierto $(-r, r)$ entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{n}(0)}{n!} x^n + \cdots$$

La serie que aparece en este corolario se llama la serie de Maclaurin para $f(x)$.

EJEMPLO

Desarrollar la función $f(x) = \frac{1}{x}$

en una serie de Taylor alrededor de $x = 1$, suponiendo que tal desarrollo es válido.

Solución

Se tiene

$$f(x) = x^{-1} \qquad f(1) = 1$$
$$f'(x) = (-1)\,x^{-2} \qquad f'(1) = -1$$
$$f''(x) = (-1)(-2)\,x^{-3} \qquad f''(1) = (-1)^2 \cdot 2!$$
$$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(-3)\,x^{-4} \qquad f^{(3)}(1) = (-1)^3 \cdot 3!$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2)\cdots(-n)\,x^{-n-1} \qquad f^{(n)}(1) = (-1)^n \cdot n!$$

Por lo tanto, de T.2.2. con $a=1$, resulta

$$f(x) = \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$$

EJEMPLO

Calcular los seis primeros términos del desarrollo de Maclaurin para la función

$$f(x) = \tan x \;,$$

suponiendo que este desarrollo es válido.

Solución

Se tiene

$f(x) = \tan x$

$f'(x) = \sec^2 x$

$f''(x) = 2\sec^2 x \tan x$

$f^{(3)}(x) = 2\sec^4 x + 4\sec^2 x \tan^2 x$

$f^{(4)}(x) = 8\tan x \sec^2 x \; (2 + 3\tan^2 x)$

$f^{(5)}(x) = 48\tan^2 x \sec^4 x + 8\sec^2 x \,(2 + 3\tan^2 x)(\sec^2 x + 2\tan^2 x)$

Por lo que

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = 0$$

$$\text{y} \qquad f^{(5)}(0) = 16$$

Por lo tanto

$$f(x) = \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$$

Observaciones

Los dos ejemplos anteriores tienen sentido solamente cuando se sabe que las funciones admiten un desarrollo en series de potencias. Existen ejemplos de funciones para las que es posible calcular todas las cantidades $f^{(n)}(x)$ en un valor dado a y, sin embargo, la serie de Taylor alrededor de a no representa a la función.

El ejemplo de $f(x) = \tan x$ nos muestra que no siempre es fácil determinar la ley de las formas de las derivadas sucesivas.

Usualmente la serie de Taylor en $(x-a)$ de una función f se dice que es la "expansión" de Taylor para f alrededor de a; la serie de Maclaurin de una función f se dice que es la expansión de Maclaurin para f.

5) El Teorema de Taylor con Residuo

Si una función f posee sólo un número finito - digamos n - de derivadas, entonces se ve claramente que no es posible representarlo por una serie de Taylor, porque los coeficientes $a_k = f^{(k)}(a)/k!$ no pueden calcularse después de a_n. En tales casos, aún es posible obtener una "versión finita" del desarrollo de Taylor.

Supóngase que $f(x)$ posee n derivadas continuas en algún intervalo que contenga al punto a. Entonces, siempre es posible escribir

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n \qquad (4)$$

perteneciendo x a este intervalo. El miembro de la derecha consta de un polinomio en x de grado n, y de un residuo R_n del que no tenemos aún conocimiento. De hecho, el residuo R_n está definido por la fórmula (4). Por ejemplo, en el caso raro en que f y sus n derivadas se anulen en $x=a$, el "residuo" R_n es precisamente f. El contenido del teorema de Taylor proporciona información útil acerca de la naturaleza de R_n. Este teorema tiene no solamente un gran valor teórico, sino que también se utiliza en aproximaciones y cálculos numéricos.

Teorema T.2.4 (Teorema de Taylor con residuo en forma de derivada)

Supóngase que $f, f', f^{(2)}, \ldots, f^{(n)}, f^{(n+1)}$ son todas continuas en algún intervalo al que pertenecen a y b. Entonces, existe un número ξ entre a y b tal que

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Esto es, el residuo R_n está dado por la fórmula

$$\boxed{R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}}$$

Observaciones

i) Vemos que R_n depende tanto de b como de a; por ello escribimos, en general, $R_n = R_n(a,b)$, para expresar que es una función de dos variables.

ii) En el caso especial $n=0$, obtenemos

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a),$$

que corresponde al teorema del valor medio. Así resulta que esta forma del teorema de Taylor es una generalización directa del teorema del valor medio.

Demostración

En la demostración de T.2.4. se utiliza el teorema de Rolle. Construimos una función $\phi(x)$ que se anula en a y b. Entonces, por el teorema de Rolle, existe un número ξ entre a y b tal que $\phi'(\xi)=0$. El proceso algebraico es muy largo y es conveniente escribir los detalles para los casos $n=1, 2, 3$ a fin de captar la esencia de la demostración. Se utilizará (4) con $x=b$ y entonces:

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)(b-a)}{1!} + \frac{f^{(2)}(a)(b-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(b-a)^n}{n!} + R_n(a,b);$$

expresión en la que deseamos obtener $R_n(a,b)$. Definimos la función

$$\phi(x) = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)(b-x)}{1!} - \frac{f^{(2)}(x)(b-x)^2}{2!}$$

$$- \frac{f^{(3)}(x)(b-x)^3}{3!} - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(x)(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} -$$

$$- \frac{f^{(n)}(x)(b-x)^n}{n!} - R_n(a,b)\frac{(b-x)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}} .$$

La función ϕ fué construida de modo que $\phi(a)=0$ y $\phi(b)=0$, lo cual se puede verificar por sustitución directa. Calculamos la derivada $\phi'(x)$ (utilizando la fórmula de la derivada de un producto donde sea necesario):

$$\phi'(x) = -f'(x) + f'(x) - \frac{f^{(2)}(x)(b-x)}{1!} + \frac{2f^{(2)}(x)(b-x)}{2!}$$

$$- \frac{f^{(3)}(x)(b-x)^2}{2!} + \frac{3f^{(3)}(x)(b-x)^2}{3!} - \frac{f^{(4)}(x)(b-x)^3}{3!} + \cdots$$

$$- \frac{f^{(n+1)}(x)(b-x)^n}{n!} + \frac{R_n(a,b)(n+1)(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}} .$$

Sorprendentemente, todos los términos se eliminan excepto los dos últimos, y obtenemos

$$\phi'(x) = - \frac{f^{(n+1)}(x)(b-x)^n}{n!} + R_n(a,b)(n+1)\frac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}} .$$

Utilizando el teorema de Rolle, sabemos que debe existir un número ξ entre a y b tal que $\phi'(\xi)=0$. Por lo tanto, tenemos

$$0 = - \frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(b-\xi)^n}{n!} + R_n(a,b)(n+1)\frac{(b-\xi)^n}{(b-a)^{n+1}}$$

de donde despejando obtenemos

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

■

Observaciones

i) Si sabemos que $f(x)$ tiene derivadas continuas de todos los órdenes, y si $R_n(a,b) \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces podemos establecer la validez de la serie de Taylor.

ii) En todo caso, R_n mide lo que f difiere de un cierto polinomio de grado n. Si R_n es pequeño, entonces se puede utilizar el polinomio como una expresión aproximada de f.

Cuando utilizamos el teorema de Taylor en el cálculo de funciones mediante los polinomios que la aproximan, los errores pueden provenir de dos fuentes: el error de "redondeo", al expresar cada término en forma decimal. Si deseamos calcular el valor de alguna función $f(b)$ con una aproximación de cuatro decimales, es esencial poder decir con certeza que $f(b)$ está comprendida entre una fracción decimal con cuatro decimales -0.00005 y la misma fracción decimal $+0.00005$. Se ahorra tiempo calculando cada término con dos decimales más de los requeridos. Con frecuencia R_n se aproxima al valor del primer término en la serie omitida, y se puede utilizar este hecho como una orientación para elegir el número de términos. Aunque no sabemos exactamente cómo es R_n, a menudo podemos demostrar que existen dos números m y M tales que

$$m \le f^{(n+1)}(x) \le M \quad \text{para todo } x \text{ entre } a \text{ y } b.$$

Entonces obtenemos para $R_n(a,b)$ la desigualdad

$$\frac{m(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \le R_n(a,b) \le \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

EJEMPLO

Calcular $(1.1)^{1/5}$ con cuatro cifras decimales exactas.

Solución

La clave para la solución, utilizando el teorema de Taylor, es el hecho de que podemos hacer

$$f(x) = (1+x)^{1/5}, \quad a = 0, \quad b = 0.1 .$$

Entonces

$$f(x) = (1+x)^{1/5}, \qquad f(a) = 1 \qquad = 1.000000$$

$$f'(x) = \frac{1}{5}(1+x)^{-4/5}, \qquad f'(a)(b-a) = \frac{1}{5}(0.1)^1 \qquad = 0.020000$$

$$f''(x) = -\frac{4}{25}(1+x)^{-9/5}, \qquad \frac{f''(a)(b-a)^2}{2!} = -\frac{2}{25}(0.1)^2 \qquad = -0.000800$$

$$f'''(x) = \frac{36}{125}(1+x)^{-14/5}, \qquad \frac{f'''(a)(b-a)^3}{3!} = \frac{6}{125}(0.1)^3 \qquad = 0.000048.$$

Para todo x entre 0 y 1 se tiene que

$$0 < (1+x)^{-14/5} < 1 .$$

Por lo tanto, podemos estimar R_n para $n = 2$:

$$0 < R_2 = \frac{36}{125}(1+\xi)^{-14/5}\frac{(b-a)^3}{3!} < \frac{6}{125}(0.1)^3 = 0.000048.$$

Sumando los términos del desarrollo de Taylor hasta $n = 2$, tenemos

$$(1.1)^{1/5} = 1.0192 \text{ aproximadamente.}$$

De hecho sería mas preciso escribir que

$$1.0192 < (1.1)^{1/5} < 1.019248.$$

Observación; en este ejemplo, podríamos haber elegido $f(x) = x^{1/5}$ con $a = 1$, $b = 1.1$. Se obtiene el mismo resultado.

EJEMPLO

Calcular $\sqrt[3]{7}$ con cuatro cifras decimales exactas.

Solución

Hagamos $f(x) = x^{1/3}$, $a = 8$, $b = 7$.

Entonces $b-a = -1$ y

$$f(x) = x^{1/3}, \qquad f(8) = 2 \qquad\qquad = \ \ 2.000000$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, \qquad f'(8)(b-a) = -\frac{1}{12} \qquad = -0.083333$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}, \qquad \frac{f''(8)(b-a)^2}{2!} = -\frac{1}{9\cdot 2^5} \qquad = -0.003472$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{10}{27}x^{-8/3}, \qquad \frac{f^{(3)}(8)(b-a)^3}{3!} = -\frac{5}{81\cdot 2^8} \qquad = -0.000241$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{80}{81}x^{-11/3}, \qquad \frac{f^{(4)}(8)(b-a)^4}{4!} = -\frac{5}{243\cdot 2^{10}} \qquad = -0.000020$$

Podría parecer suficiente utilizar solamente los términos hasta $(b-a)^3$. Sin embargo, calculando la suma de las fracciones decimales dadas, obtenemos 1.912954. Pero el siguiente término es -0.000020 que, si se lo incluye, reduce el valor a 1.912934. Si nos detenemos en el término $(b-a)^3$ y redondeamos, obtendremos 1.9130; mientras que si tomamos en cuenta el término siguiente y redondeamos, obtendremos 1.9129. Por lo tanto, habrá que retener el término $(b-a)^4$ y estimar el residuo R_4. Tenemos

$$f^{(5)}(x) = \frac{880}{243}x^{-14/3} = \frac{880\,x^{1/3}}{243\,x^5}$$

Como estamos considerando el intervalo $7 < x < 8$, vemos que $x^{1/3} < 2$ y $x^5 > (49)(343) = 16807$. Por lo tanto,

$$0 < \frac{f^{(5)}(x)}{5!} < \frac{1760}{(243)(49)(343)(120)} < \frac{1}{270.00} < 0.000009.$$

Puesto que $(b-a)^5 = -1$, concluimos que

$$0.000009 < R_4 < 0$$

$$\sqrt[3]{7} = 1.9129$$

con la aproximación deseada. Realmente, si simplemente mantenemos un decimal más en cada término retenido, vemos que

$$\sqrt[3]{7} = 1.91293$$

con cinco decimales.

Observaciones

En el primer ejemplo no hubo error de redondeo, porque cada fracción decimal dío un valor exacto del término correspondiente. Sin embargo, este no fué el caso en el segundo ejemplo. En general, el error de redondeo en cada término puede ser a lo mas ½ de la última cifra decimal retenida. Los errores de redondeo tienden a compensarse entre sí cuando existe un número muy grande de calculos en un problema dado.

El residuo $R_n(a,b)$ en el teorema de Taylor puede darse en muchas formas. El teorema siguiente, dá el residuo en la forma de una integral.

Teorema T.2.5. (Teorema de Taylor con residuo en forma de integral)

Supóngase que $f, f', f^{(2)}, \ldots, f^{(n)}, f^{(n+1)}$ son continuas en algún intervalo al que pertenecen a y b. Entonces se puede expresar $f(x)$ en la forma

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)(b-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(b-a)^n}{n!} + R_n$$

$$\text{donde } R_n = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n\,dt$$

EJEMPLO

Expresar $L_n(1+x)$ como un polinomio de tercer grado, y estimar el residuo R_n para $0 < x < \frac{1}{2}$.

Solución.

Hacemos

$$f(x) = L_n(1+x), \quad a = 0, \quad b = x,$$

Entonces obtenemos las derivadas sucesivas

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \qquad f''(0) = -1,$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \qquad f^{(3)}(0) = 2,$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}.$$

Por lo tanto

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + R_3 ,$$

con

$$R_3 = -\frac{6}{6}\int_0^x \frac{1}{(1+t)^4}(x-t)^3\,dt .$$

Para una estimación simple, reemplazamos $(1+t)^4$ por su valor mínimo 1, y encontramos

$$|R_3| < \int_0^{1/2} \left(\tfrac{1}{2} - t\right)^3 dt = \frac{1}{64} .$$

6) Validez de los desarrollos de Taylor.

En esta sección se mostrará la forma de establecer la validez del desarrollo en series de potencia para una función para cual existe dicha representación.

EJEMPLO

Demostrar que para todos los valores de a y x, se tiene

$$e^x = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} ;$$

es decir, la serie de Taylor de e^x alrededor de $x=a$ converge hacia e^x para todo a y x.

Demostración

Para simplificar el procedimiento, hagamos $a=0$, siendo análogo la demostración cuando $a \neq 0$. Si hacemos $f(x) = e^x$, entonces $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo n.

Ahora, utilizando el teorema de Taylor con residuo en forma de derivada, tenemos

$$e^{x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k}}{k!} + R_n \quad , \quad \text{donde} \quad R_n = \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!}$$

con ξ entre 0 y x. Si x es positivo, entonces $e^{\xi} < e^{x}$; y si es negativo, entonces $e^{\xi} < e^{0} = 1$. En cualquier caso,

$$|R_n| \leq C \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad , \qquad (5)$$

donde C es el mayor de los números 1 y e^{x}, pero es independiente de n. Si el segundo miembro de (5) es el término general de una serie, entonces, por el criterio de la razón, esa serie es convergente para todo x. El término general de toda serie convergente debe tender a cero y, por lo tanto,

$$C \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty \quad \forall\, x .$$

Concluimos que $R_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, y así queda establecido que

$$e^{x} = e^{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{n}}{n!}$$

■

7) Sucesiones y series de funciones de varias variables.

Las nociones de sucesiones y series de funciones se extienden desde luego, a funciónes de variables múltiples.

Así,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (xy)^n = xy + x^2y^2 + \cdots + x^n y^n + \cdots \qquad (6)$$

es una serie de funciones de dos variables x y y.

Se puede, en particular, considerar la serie de potencias en variables múltiples. Para dos variables, x, y, tal serie de potencias es la serie

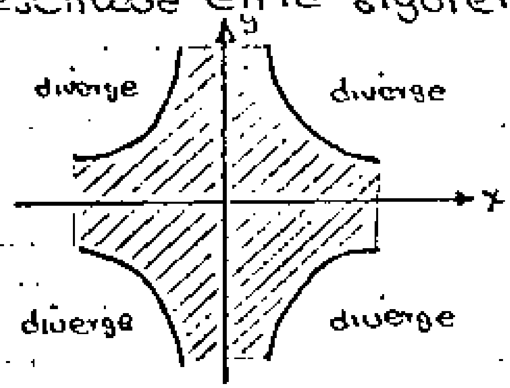
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x,y) = f_0(x,y) + f_1(x,y) + \cdots + f_n(x,y) + \cdots, \qquad (7)$$

donde

$$f_n(x,y) = c_{n,0}\,x^n + c_{n,1}\,x^{n-1}y + \cdots + c_{n,n-1}\,x\,y^{n-1} + c_{nn}\,y^n, \quad (8)$$

las c's son constantes. Luego, f_n es un polinomio homogéneo de grado n en x y y. La serie (6) es un ejemplo de esto, con $f_{2n} = x^n y^n$ y $f_0 = 0$, $f_1 = f_3 = \cdots = 0$.

Esta serie ilustra también el hecho de que los valores (x, y) para los cuales converge una serie de potencias en x y y, forman un grupo más complicado que el intervalo de convergencia para series en x solo. Para (6), la serie converge cuando $|xy| < 1$; esta región se encuentra representada en la siguiente figura.



En general, la región de convergencia puede ser sumamente complicada.

Si una función $F(x,y)$ puede representarse por una serie de potencias en una vecindad del origen, tal como la siguiente:

$$F(x,y) = c_{0,0} + (c_{1,0}x + c_{1,1}y) + (c_{2,0}x^2 + c_{2,1}xy + c_{2,2}y^2) + \cdots,$$

entonces, una diferenciación de término a término (que puede ser justificada) muestra que:

$$F(0,0) = c_{0,0}, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = c_{1,0}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = c_{1,1}, \quad \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = c_{2,0}$$

$$\frac{2}{2!}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = c_{2,1}, \quad \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = c_{2,2}.$$

En general, se encuentra

$$(9)\quad f_n(x,y) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n F}{\partial x^n}x^n + n\frac{\partial^n F}{\partial x^{n-1}\partial y}x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{\partial^n F}{\partial x^{n-2}\partial y^2}x^{n-2}y^2 + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{\partial^n F}{\partial x^{n-k}\partial y^k}x^{n-k}y^k + \cdots + \frac{\partial^n F}{\partial y^n}y^n\right)$$

con todas las derivadas evaluadas en $(0,0)$. Una serie $\sum f_n(x,y)$ en la cual los f_n están dados por (9), se conoce como serie de Taylor en x y y, alrededor de $(0,0)$, y la función $F(x,y)$ que representa, recibe el nombre de analítica en la región correspondiente. La expansión con respecto a un punto general (x_1, y_1) se obtiene por un cambio de origen:

$$F(x,y) = F(x_1,y_1) + \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x-x_1) + \frac{\partial F}{\partial y}(y-y_1)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x-x_1)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x-x_1)(y-y_1) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(y-y_1)^2\right] +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n F}{\partial x^n}(x-x_1)^n + \cdots\right] + \cdots \quad (10)$$

siendo todas las derivadas evaluadas en (x_1, y_1).

El término general de la serie (10) puede interpretarse en función de una diferencial enésima $d^n F$ de la función $F(x,y)$:

$$d^n F = \frac{\partial^n F}{\partial x^n}(x-x_1)^n + \cdots$$

$$= \sum_{r=0}^{n} C_r^n \frac{\partial^n F}{\partial x^r \partial y^{n-r}}(x_1, y_1)(x-x_1)^r (y-y_1)^{n-r};$$

donde los C_r^n, son los coeficientes binomiales.

Para indicar la dependencia de $d_n F$ sobre x_1, y_1 ; y las diferencias $x-x_1$, $y-y_1$, podemos escribir:

$$d^n F = d^n F(x_1, y_1; x-x_1, y-y_1).$$

Cuando $n=1$ y $x-x_1 = dx$, $y-y_1 = dy$, se encuentra

$$d^1 F(x_1, y_1; dx, dy) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = dF;$$

esta es la expresión conocida para la primera diferencial. La serie (10) puede ahora escribirse más concisamente:

$$F(x,y) = F(x_1,y_1) + dF(x_1,y_1; x-x_1, y-y_1)$$

$$+ \frac{1}{2} d^2 F(x_1, y_1; x-x_1, y-y_1) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!} d^n F(x_1, y_1; x-x_1, y-y_1) + \cdots$$

La teoría de las funciones analíticas de variables múltiples se estudia con mayor rigurosidad haciendo uso de la teoría de variable compleja. Como en el caso de una variable, las funciones familiares son "en general", analíticas. Así, se tiene

$$e^x \operatorname{sen} y = y + xy + \frac{3x^2y - y^3}{6} + \cdots,$$

que es convergente para todos los valores de x y y.

El tema de funciones analíticas de variables múltiples no ha sido estudiado intensivamente sino hasta tiempos recientes, y la mayor parte de los libros sobre el tema son muy avanzados. En "Foundations of Potencial Theory" de O.D. Kellogg (Berlín: Springer, 1929) se trato brevemente en las Págs. 135-140. Un tratamiento más avanzado se encuentra en "Theory of Functions of Two Complex Variables", de A. R. Forsyth (Cambridge: Cambridge University Press, 1914).

8) <u>Fórmula de Taylor para funciones de variables múltiples.</u>

Existe una fórmula de Taylor con residuo para funciones de varias variables:

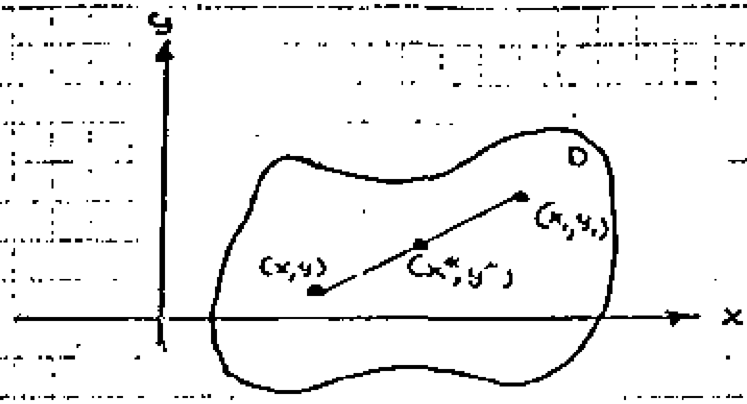
$$F(x,y) = F(x_1,y_1) + dF(x_1,y_1; x-x_1, y-y_1)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!} d^nF(x_1,y_1; x-x_1, y-y_1)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}F(x^*, y^*, x-x_1, y-y_1);$$

$$x^* = x_1 + t^*(x-x_1), \quad y^* = y_1 + t^*(y-y_1), \quad 0 < t^* < 1.$$

El punto (x^*, y^*) se encuentra entre (x_1, y_1) y (x, y) sobre el segmento de la línea que une estos puntos, como en la siguiente figura



Para $n=1$, la fórmula se convierte en

$$F(x,y) = F(x_1, y_1) + (x-x_1)F_x(x^*,y^*) + (y-y_1)F_y(x^*,y^*)$$

que se conoce como la ley del valor medio para funciones de dos variables.

La serie de Taylor o la fórmula de Taylor pueden usarse para estudiar la naturaleza de una función cerca de un punto particular. Como se ha observado antes, los términos lineales dan dF, la mejor "aproximación lineal" a $F(x,y) - F(x_1, y_1)$. Si $dF=0$, los términos cuadráticos

$$\frac{d^2F}{2!}$$

adquieren importancia. En particular, si la expresión cuadrática

$$d^2F = A(x-x_1)^2 + 2B(x-x_1)(y-y_1) + C(y-y_1)^2$$

es positiva, excepto para $x=x_1$, $y=y_1$, entonces $F(x,y)$ tiene un mínimo en (x_1, y_1). Llevando esto más adelante, se pueden encontrar los criterios para máximos y mínimos.

EJEMPLO

Desarrollar $x^2y+3y-2$ en potencias de $x-1$ y $y+2$.

Solución

Aplicando el teorema de Taylor con

$h = x - x_0$, $k = y - y_0$, donde $x_0 = 1$, $y_0 = -2$. Luego

$f(x,y) = x^2y+3y-2$, $f_x = 2xy$, $f_y = x^2+3$, $f_{xx} = 2y$

$f_{xy} = 2x$, $f_{yy} = 0$, $f_{xxx} = 0$, $f_{xxy} = 2$, $f_{xyy} = 0$, $f_{yyy} = 0$

Todas las derivadas superiores son nulas, Así, pues,

$f(1,-2) = -10$, $f_x(1,-2) = -4$, $f_y(1,-2) = 4$, $f_{xx}(1,-2) = -4$

$f_{xy}(1,-2) = 2$, $f_{yy}(1,-2) = 0$, $f_{xxx}(1,-2) = 0$, $f_{xxy}(1,-2) = 2$

$f_{xyy}(1,-2) = 0$, $f_{yyy}(1,-2) = 0$

Por el teorema de Taylor,

$$f(x,y) = f(1,-2) + h f_x(1,-2) + k f_y(1,-2) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left\{ h^2 f_{xx}(1,-2) + 2hk f_{xy}(1,-2) + k^2 f_{yy}(1,-2) \right\}$$

$$+ \frac{1}{3!}\left\{ h^3 f_{xxx}(1,-2) + 3h^2k f_{xxy}(1,-2) + 3hk^2 f_{xyy}(1,-2) + k^3 f_{yyy}(1,-2) \right\}$$

$$+ R_3$$

donde R_3 es el residuo, que en este caso es nulo.

Sustituyendo los valores de las derivadas obtenidas en lo que procede, se tiene

$$x^2y+3y-2=-10-4(x-1)+4(y+2)-2(x-1)^2+2(x-1)(y+2)$$
$$+(x-1)^2(y+2)$$

lo cual se puede verificar, en este caso, por procesos algebraicos

9. SERIE BINOMIAL

El teorema del binomio dice que si m es un entero positivo y a y b son números reales entonces

$$(a+b)^m = a^m + m\,a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}b^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}a^{m-n}b^n + \cdots + b^m$$

Haciendo $a=1$ y $b=x$ se tiene:

$$(1-x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}$$

$$+ \cdots + x^m$$

Separadamente, desarrollemos la función $f(x) = (1+x)^m$ donde m es ahora un número real. Esta función satisface la ecuación diferencial

$$(1+x)\,f'(x) = m\,f(x) \qquad (A)$$

y la condición: $f(0) = 1$

Obtengamos una serie de potencias cuya suma $S(x)$ satisfaga a la ecuación diferencial (A) y a la condición $S(0) = 1$:

$$S(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (B)$$

derivamos (B) y la colocamos en la ecuación diferencial (A)

$$(1+x)(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} =$$

$$= m(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots)$$

Igualamos los coeficientes de las mismas potencias de x en ambos miembros de la igualdad

$$a_1 = m$$

$$a_1 + 2a_2 = m a_1$$

$$m a_n + (n+1) a_{n+1} = m a_n$$

de aquí obtenemos los coeficientes de la serie (B)

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = m$$

$$a_2 = \frac{a_1(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$$

$$a_3 = \frac{a_2(m-2)}{3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n}$$

llevamos estos valores a la expresión (B) teniendose :

$$S(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} x^n \quad (C)$$

Ahora determinemos el intervalo de convergencia de la serie Ⓒ

$$u_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$$

$$u_n = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}$$

Establecemos el siguiente cociente:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+2)(m-n+1)(n-1)!}{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+2)\ n!}x$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n+1}{n}x\right| = |x|$$

por lo tanto el intervalo de convergencia de la serie Ⓒ es $-1<x<1$

La única función que satisface la ecuación diferencial Ⓐ y la condición $S(0) = 1$ es la serie Ⓒ, por lo que, la suma de la serie Ⓒ es idéntica a la función $(1-x)^m$ es decir

$$\boxed{(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n}$$

que es el desarrollo de $(1-x)^m$ en serie de Maclaurin llamada SERIE BINOMIAL

EJEMPLO 2.1.

Si $m=-1$, la representación de $(1+x)^{-1}$ en serie de potencias es la siguiente:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

EJEMPLO 2.2

Si $m = 1/2$, la representación en serie de potencias para $(1+x)^{1/2}$ es:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots$$

EJEMPLO 2.3.

Desarrollar en serie de Maclaurin la función $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$ aplicando el desarrollo de la serie binomial

SOLUCION

La derivada de $\operatorname{sen}^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Para $m = -1/2$ en el desarrollo de la serie binomial se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \tfrac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \cdots$$

sustituimos en esta expresión x por $-x^2$

obteniéndose

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1-\left(\tfrac{1}{2}\right)-x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}(-x^2)^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}(-x^2)^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}(-x^2)^4+\cdots$$

$$= 1+\tfrac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}x^{2n}+\cdots$$

Basandonos en el teorema sobre la integración de las series de potencias, obtenemos para $|x|<1$, lo siguiente:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Sen}^{-1}x = x+\tfrac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\,x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\,(2n+1)}$$

$$+\cdots$$

Esta serie converge en el intervalo $-1\leq x\leq 1$

Colocando $x=1$ obtenemos la formula para calcular el ángulo correspondiente:

$$\operatorname{Sen}^{-1}1 = \frac{\pi}{2} = 1+\frac{1\cdot 1}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\cdots$$

La serie binomial tiene multiples aplicaciones matemáticas, algunas de las cuales se verán en la última sesión.

EJERCICIOS CORRESPONDIENTES A LA SESION No. 4

1. Obtener el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{n+1}$$

2. Dadas las series

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{5x^6}{16} + \cdots$$

$$\text{ang sen } x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots$$

obtener cuatro términos del desarrollo de

$$\frac{\text{ang sen } x}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. Ejercicio. Aproximar con exactitud en las tres primeras cifras decimales (Maclaurin).

$$\int_0^1 \frac{\text{sen } x}{x}\, dx$$

4. Ejercicio. Calcular el siguiente límite utilizando series de potencias (Maclaurin).

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \text{ sen } x}{1 - \cos x}$$

5. Aproximar $\int_0^{0.3} \sqrt[3]{1+x}\, dx$ a 3 cifras decimales empleando el desarrollo de la serie Binomial.

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

QUINTA SESION

"UNA MIRADA HACIA EL MAÑANA"

"SE ADVIERTE, ENTRE LOS MATEMATICOS, UNA IMAGINACION ASOMBROSA ... REPETIMOS: EXISTIA MAS IMAGINACION EN LA CABEZA DE ARQUIMIDES QUE EN LA DE HOMERO.- VOLTAIRE.

LA VERDADERA MISION DE LA UNIVERSIDAD

En cuanto las estructuras sociales latinoamericanas -según se verá- pueden ser tenidas como ineficientes y mal planificadas y como generadoras, por ello, de un orden social injusto, formado por grupos no integrados entre sí, cuyos miembros llevan en su enorme mayoría una vida sin esperanza, sumidos en la miseria y la ignorancia, y en cuanto todo esto ocurre con estrecha vinculación a la dependencia cultural y económica en que estos países están situados respecto de las naciones hegemónicas, debe entenderse que la Universidad Latinoamericana tiene una palabra que decir respecto de este estado de cosas.

Este aspecto de la misión universitaria puede ser analizado desde dos puntos de vista diferentes. De un lado, como parte de la obligación de la Universidad de conocer la realidad; de otro, como una necesidad para su propia subsistencia, conforme a su ser esencial.

Desde el primer punto de vista, la Universidad moderna no puede renunciar al conocimiento de toda la realidad. No puede admitirse hoy que los objetos del conocimiento científico sean aquellos que son externos al hombre que procura captarlos. Una parte muy importante y muy bullente de la realidad actual es precisamente el hombre como tal y el hombre dentro de las estructuras y organizaciones dentro de las cuales ordena su vida social.

Se reconoce hoy la existencia de ciencias sociales, destinadas al conocimiento y análisis científico de la sociedad y de sus instituciones. La sociología, la economía, la ciencia política y la ciencia de la administración, son ciencias que en estos momentos han llegado a su mayoría de edad y que forman parte de ese conjunto de las ciencias sociales, subestimado por algunos universitarios retrógrados, cuyo fin es inquirir, examinar, aquilatar, criticar y buscar soluciones a los problemas que presenta la vida del hombre en sociedad.

Desde que las ciencias sociales se han identificado y definido como áreas del saber positivamente valiosas y trascendentes, nadie podría dudar que es papel de la Universidad, obrando dentro del ámbito de aquéllas, aprehender de modo crítico la experiencia tanto teórica como práctica de las sociedades humanas en su desarrollo histórico y formular principios o pautas que permitan superar las contradicciones sociales a las que antes nos referíamos. A esto debe agregarse que una eficaz prospección de la realidad nacional y un diagnóstico apropiado acerca de los problemas en que se debate el respectivo país, forman parte, induscutiblemente, del quehacer universitario y permiten fundar sobre bases científicas el compromiso social de la Universidad.

Las ciencias sociales modernas han abandonado, por su parte, su antigua tendencia puramente descriptiva de los fenómenos sociales, a cuyo conocimiento se llegaba por el uso de encuestas y estadísticas, muchas veces manipuladas en apoyo de las estructuras vigentes. Apegadas a esta última posición, las ciencias sociales permanecían en la superficie de los fenómenos y, cuando más, a través de meros cortes transversales desligados de la totalidad social, ofrecían una descripción algo más profunda pero carente de vida; esto es, satisfacían un conocimiento parcial, incompleto, de un cuerpo social inerte. Era la visión cuantitativa y superficial de los fenómenos sociales, realizada selectivamente desde el punto de vista de los intereses de la clases dominantes o apta solamente como técnica de control social, en cuanto extraía de las masas populares lo que podría ser necesario para manejarlas mejor.

Hoy día esas ciencias procuran que sus conclusiones científicas fluyan de la realidad social misma, plena de vida, y tratan de penetrar dentro de ésta como en algo dinámico y actuante. Sus enfoques se efectúan conforme a los variados sistemas que se disputan la solución de sus problemas y consideran, asimismo, los cambios posibles, aún aquellos que pueden sobrenir por vía revolucionaria.

Por consiguiente, la tarea de indagar y ponderar los hechos sociales y de preparar soluciones favorables a la vida de los hombres en sociedad, es absolutamente científica y toca a uno de los más importantes sectores de la Universidad.

Podría, tal vez, objetarse que, siendo así, el compromiso social de la Universidad debería quedar restringido únicamente a los sectores de ella encargados de las ciencias sociales. Una objeción de esta especie desconoce, sin embargo, el principio de que en una Universidad moderna se demanda de todo universitario una armónica integración dentro de lo científico y dentro de lo humano, que permita a cada uno una visión totalizadora del mundo, del hombre y de la sociedad. De esta manera, aún aquellos sectores de la Universidad ajenos a las ciencias sociales, no podrían justificar una despreocupación acerca de uno de los problemas más acuciantes de nuestro tiempo en la región latinoamericana y tampoco podrían negar su aporte en el estudio de soluciones sociales dentro de su propia área especializada.

La puesta en práctica de tales objetivos importa, justamente, una muy alta y amplia apreciación de la ciencia como suprema conquista del pensamiento, porque así no solamente se contribuye al conocimiento positivo de la realidad, sino que también se enseña la forma de dominar las fuerzas naturales y sociales con el fin de ponerlas al servicio del bien humano. Es así como se utiliza la ciencia dentro de la sociedad moderna.

En esta forma, las proposiciones para la modelación de una sociedad más justa, dotada de una cultura propia, capaz de salir adelante con sus propios medios para superar su postración económica, su indigencia cultural, su dependencia de poderes foráneos y su desorganización social, caben exactamente dentro de la misión de la Universidad. Y no solamente se trataría de la pura formulación de proposiciones, sino, además, como ya se vio, de inspirar a su pueblo una decisión de transformación profunda de la sociedad de acuerdo con ellas. Porque existe una inseparabilidad lógica entre el conocimiento y la puesta en obra de los cambios que él señala como necesarios.

Desde otro punto de vista, la Universidad Latinoamericana requiere, para el cumplimiento de su cometido científico y docente, como una exigencia de su propio bien y desarrollo, de una transformación de la sociedad que la rodea. Ciertamente que no podrá alcanzar su máximo rendimiento inserta en una sociedad plena de tensiones y antagonismos, dependiente del exterior y sin posibilidades de alcanzar una mediana autonomía económica y cultural. Es obvio que las consecuencias directas de la pobreza de esa sociedad, entre las cuales están en primer término el analfabetismo y las insuficiencias educacionales del pueblo, constituirán un freno para el desarrollo y la expansión de la Universidad. El papel creador de ésta lo asegura solamente una sociedad cuyas estructuras, armonías e independencia permitan que él se despliegue en beneficio colectivo. Colabora a este objeto la Universidad que contribuye a que el país se conozca a sí mismo, salga de su subdesarrollo y, a partir de su voluntad democrática, forje para sí un porvenir justo y autónomo.

He aquí otra razón por la cual debe estimarse como tarea de la Universidad toda, y no solamente de un sector de ella, el asumir un papel dinámico en la activación y estímulo de los necesarios cambios sociales. En el objetivo de estudiar, dar forma e impulsar la firme voluntad de construir una nueva sociedad, corresponde, pues, a la Universidad Latinoamericana un papel fundamental, al cual ella no puede sustraerse.

Oponerse a esto significa un empeño en refugiarse en un anticuado y hoy erróneo concepto de "purismo científico', muy utilizado para encubrir y legitimar la relación de subordinación en que coloca a nuestros países su dependencia cultural y económica. Hemos visto, sin embargo, que ese purismo no es seguido por los sostenedores del status, con mucho rigor, si se trata de fomentar el desarrollo de la economía capitalista o de colaborar en la producción de las más mortíferas armas de guerra.

Admitir ese papel de la Universidad significará contar con una que dé respuesta no sólo en el terreno de las ciencias exactas y naturales y del arte sino también en el plano del saber acerca del hombre, de sus aspiraciones de más alto desenvolvimiento y de organización más perfecta de la vida colectiva.

EDUARDO NOVOA MONREAL.

EN EL CAMPO DOCENTE

Una Universidad comprometida encuentra nuevas vetas para enriquecer su pedagogía, pues su viraje hacia lo social le proporciona nuevas formas de enseñanza.

El estudio de la temática destinada a romper la dependencia, a superar el abatimiento económico y a organizar una economía capaz de dar bienestar a toda la colectividad, pone en contacto a profesores y alumnos con realidades de alta importancia social, susceptibles de una observación directa y aptas para reflexiones originales. El empleo de una correcta metodología en la selección, observación y análisis de los temas, las sugerencias que pueden obtenerse de sus semejanzas y diferencias, la previsión de los efectos de ciertas formas de acción y la búsqueda de formas de aprovechamiento de éstas para los fines de cumplir el compromiso social, pueden contribuir a abrir mentes hasta ahora habituadas a lecturas de textos y estudios abstractos, en escaso contacto con la realidad. Allí pueden revelarse aptitudes creativas o imaginativas que ahora se pierden bajo el fárrago infecundo de disquisiciones teóricas.

Ese será un verdadero aprendizaje de la vida, con plena participación en tareas de interés general, dentro de un plano de cuestionamiento crítico en el que todas las opiniones serán consideradas y con el aliciente del hallazgo de nuevas soluciones que permitirán o facilitarán la creación de una nueva sociedad. Quedarán atrás allí los sistemas didácticos tradicionales, para ser complementados y sobrepasados por una práctica social de un alto valor formativo, que no dejará de ser constrastada con la verdad científica.

Es manifiesto que esta clase de acercamiento a la realidad social habrá de contribuir mucho más que el sistema actual a la formación humana integral de los estudiantes.

Lo anterior demandará una revisión de los currícula, con el fin de incorporar a ellos conocimientos que permitan una aprehensión exacta de los fenómenos sociales, que faciliten el análisis y que orienten hacia la posibilidad de formular soluciones en forma metódica y planificada. Todo esto, como se comprende, dentro del campo en que la especialidad corresponde, cualquiera que sea su área, entre en contacto con la realidad social.

La docencia universitaria deberá transformarse, además, en una docencia permanente, que vuelva a tomar a los científicos, profesores y profesionales egresados de ella, para poner al día sus conocimientos y adaptarlos a las nuevas circunstancias sociales. La idea de una educación permanente se justifica fácilmente dentro de una sociedad de naturaleza cambiante, cuyas prioridades se desplazan constantemente y cuyos problemas se multiplican y complican, y en relación con conocimientos que rápidamente se vuelven obsoletos para ser reemplazados por otros nuevos. Esto exige que los especialistas renueven periódicamente sus conocimientos y adquieran nuevas habilidades y orientaciones científicas.

Otra razón más que apoya esta educación permanente está en la necesidad de que quienes egresaron de la Universidad tradicional se impregnen de los valores, las metas y los conocimientos que puede proporcionar una nueva Universidad comprometida.

Finalmente, debe procurarse que se logre fundir en el universitario el trabajo mental, propio de la elaboración académica, con el trabajo físico. Ellos, como explica Angel Palerm:

> han sido abrupta y casi totalmente escindidos por el desarrollo de los sistemas sociales basados en las clases y en particular por el modo capitalista de producción. Esta concepción de la nueva unidad de la actividad física con la actividad intelectual... debe eliminar la degradación presente del trabajo manual y al mismo tiempo debe suprimir la alienación (¿sobrevaluación?) del trabajo intelectual.
> Las nuevas actividades sociales del universitario darán ocasión a que esta unificación se realice.

EDUARDO NOVOA MONREAL.

APLICACIONES [illegible] SUCESIONES

[illegible]

FACULTAD [illegible] INGENIERIA

"HE AQUI LA MATEMATICA, LA
CREACION MAS ORIGINAL DEL
INGENIO HUMANO".

WHITEHEAD.

APLICACIONES

1) Deducción de la ecuación para estimar el gasto de aceite crudo y el gasto máximo producible de un campo en desarrollo.

2) Representación de un número racional.

3) Cálculo de integrales.

4) Solución de ecuaciones diferenciales.

5) Problema de la pelota rebotante.

6) Gasto en convenciones.

7) Cálculo del número π

8) Aplicaciones a la Geofísica.

9) Aplicaciones a problemas de valores en la frontera en Mecánica de Sólidos.

10) Aplicación en la Biología.

11) Aplicación a la recuperación de oxigeno disuelto en agua.

APLICACIONES DE SERIES

1.

DEDUCCION DE LA ECUACION PARA ESTIMAR EL GASTO DE ACEITE CRUDO Y MAXIMO PRODUCIBLE DE UN CAMPO EN DESARROLLO.

a). Variables que intervienen en la ecuación:

n_e.- Número de equipos de perforación asignados al campo.

$\%e$.- Porcentaje de éxitos. Pozos productores por cada 100 pozos perforados.

q_i.- Gasto de aceite promedio inicial por pozo ($\frac{\text{blo}}{\text{día-pozo}}$).

f_p.- Pozos perforados por equipo por año. ($\frac{\text{pozos perforados}}{\text{equipo - año}}$)

d.- Declinación anual de la producción de aceite del campo, en porciento.

Qmáx.- Gasto máximo de producción de aceite del campo (blo/día)

b). Ecuación.

$$Q_{max} = \frac{n_e \, \%e \, q_i \, f_p}{d}$$

c). Deducción de la ecuación

El periodo de perforación (años) (tiempo requerido para perforar un pozo) es:

$$\Delta t = \frac{1}{f_p}$$

Si t es el tiempo total de perforación en el campo en años, entonces el tiempo adimensional o número de periodos es:

$$\overline{t_n} = \frac{t}{\Delta t}, \quad n \in \text{ números naturales.}$$

El gasto de producción al finalizar el primer periodo, $\overline{t_1}$, es:

$$Q_{\overline{t_1}} = n_e \, \%e \, q_i, \quad \%e \text{ en fracción.}$$

$n_e \%e$ (pozos productores) q_i (bl/día/pozo prod.)

$= n_e \%e\, q_i$ (bl/día).

El gasto de producción al finalizar el segundo período $\overline{t_2}$, es:

$$Qt_2 = n_e \%e\, q_i \left(1 - \frac{d}{f_p}\right) + n_e \%e\, q_i$$

d/f_p = declinación de la producción por periodo d en fracción.

El gasto de producción al finalizar el tercer período, $\overline{t_3}$, es:

$$Qt_3 = n_e \%e\, q_i \left(1 - \frac{d}{f_p}\right)\left(1 - \frac{d}{f_p}\right) + n_e \%e\, q_i \left(1 - \frac{d}{f_p}\right) + n_e \%e\, q_i$$

El gasto de producción al final el "n" ésimo período, $\overline{t_n}$, es:

$$Qtn = n_e \%e\, q_i \left[1 + \left(1 - \frac{d}{f_p}\right) + \left(1 - \frac{d}{f_p}\right)^2 + \ldots \left(1 - \frac{d}{f_p}\right)^{n-1}\right]$$

ó $$Qtn = (n_e \%e\, q_i) \sum_{n=1}^{n} \left(1 - \frac{d}{f_p}\right)^{n-1}$$

El gasto máximo se tendrá cuando $n \to \infty$, es decir:

(1) ... $$Q_{max} = \lim_{n\to\infty} Qtn = (n_e \%e\, q_i) \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} \left(1 - \frac{d}{f_p}\right)^{n-1}$$

pero $\sum_{n=1}^{n} \left(1 - \frac{d}{f_p}\right)^{n-1}$ es el "n" ésimo término de la sucesión de sumas parciales de la serie geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{d}{f_p}\right)^{n-1}$$

Como para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} aR^{n-1}$, $\sum_{n=1}^{n} aR^{n-1} = \frac{a\,(1 - R^n)}{1 - R}$

Entonces: $$\lim \sum_{n=1}^{n} \left(1 - \frac{d}{f_p}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{d}{f_p}\right)^n}{1 - \left(1 - \frac{d}{f_p}\right)} \quad \frac{1}{d/f_p} = \frac{f_p}{d}$$

Sustituyendo en la ecuación (1):

$$\boxed{Q_{max} = \frac{n_e \%e\, q_i\, f_p}{d}}$$

2. APLICACIONES DE SERIES

Una aplicación de series ocurre en el conjunto de los números racionales, al expresar un decimal periódico como el cociente de dos enteros, como se ejemplifica a continuación:

El decimal infinito 1. 1111 . . . representa al límite de la sucesión de números:

$$1,\ 1.1,\ 1.11,\ 1.111,\ . . . ,$$

los cuales representan las sumas parciales de la serie geométrica siguiente

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

por lo tanto $1.1111\ldots = \frac{10}{9}$.

En forma similar 3.1 64 64 64 . . . representa al límite de

$$3.1,\ 3.164,\ 3.16464,\ 3.1646464\ \ldots$$

que es la sucesión de las sumas parciales de la serie

$$3.1 + 64 \times 10^{-3} + 64\times10^{-5} + 64 \times 10^{-7} + \ldots$$

$$= 3.1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{64}{1000}(10^{-2})^n = 3.1 + \frac{54}{1000}\sum_{n=0}^{\infty}(10^{-2})^n$$

$$= 3.1 + \frac{64}{1000} \cdot \frac{61}{1-10^2} = \frac{3133}{990}$$

$$3.1646464\ \ldots = \frac{3133}{990}.$$

3. A veces es cómodo cálcular integrales con ayuda de las series, como en el siguiente ejemplo en el cuál se emplea la serie binomial.

Cálcular la integral elíptica

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\, d\varphi \qquad (k < 1)$$

Desarrollemos el integrando en una serie binomial.

La serie binomal es:

$$(1-x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$$

ponemos $m = 1/2$ y $x = -k^2 \operatorname{sen}^2\varphi$, obteniendose:

$$\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi} = 1 - 1/2\ k^2 \operatorname{sen}^2\varphi - 1/2\ 1/4\ k^4 \operatorname{sen}^4\varphi$$

$$- 1/2\ 1/4\ 3/6\ k^6 \operatorname{sen}^6\varphi$$

Esta serie converge para todos los valores de φ y permite la integración término a término.

Por eso

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\ d\varphi = \varphi - 1/2\ k^2 \int_0^{\varphi} \operatorname{sen}^2\varphi\ d\varphi$$

$$- 1/2\ 1/4\ k^4 \int_0^{\varphi} \operatorname{sen}^4\varphi\ d\varphi - 1/2\ 1/4\ 3/6\ k^6 \int_0^{\varphi} \operatorname{sen}^6\varphi\, d\varphi - \cdots$$

Las integrales del segundo miembro se calculan simplemente

Para $\varphi = \pi/2$ tenemos

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\ \pi/2$$

por consiguiente

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\ d\varphi = \pi/2\left[1 - (1/2)^2k^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\frac{k^6}{5} - \cdots\right]$$

APLICACIÓN DE LAS SERIES DE POTENCIAS A LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

Algunas veces las series de potencias nos permiten obtener soluciones de ecuaciones diferenciales cuando fallan los otros métodos. Algunas de las ideas y técnicas relativas a este tipo de solución se ejemplificará a continuación:

Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden:

$$(1-x^2)y'' = -2y \cdot \qquad (1)$$

Supongamos que existe una solución, sea $y=f(x)$, que se puede expresar por medio de una serie de potencias en un entorno del origen, es decir:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \qquad (2)$$

En primer lugar se han de determinar los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Una manera de proceder es la siguiente: Derivando (2) dos veces, se obtiene

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Multiplicando por $1-x^2$, se obtiene

$$(3) \qquad (1-x^2)\; y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n)(n-1) a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n\right] x^n.$$

Sust. (2) y (3) en (1) se obtiene una ecuación que contiene dos series de potencias, válida en un entorno del origen. Debido al teorema de unicidad, estas series de potencias han de ser iguales término a término, y se pueden igualar los coeficientes de x^n obteniéndose las relaciones:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n = -2a_n$$

despejando a_{n+2}

$$a_{n+2} = \frac{n^2-n-2}{(n+2)(n+1)}a_n = \frac{n-2}{n+2}a_n$$

Estas relaciones permiten determinar $a_2, a_4, a_6, \ldots$ sucesivamente, a partir de a_0. Análogamente, se pueden calcular $a_3, a_5, a_7, \ldots$ a partir de a_1.

Para los coeficientes de índice par se tiene:

$$a_2 = -a_0\,, \quad a_4 = 0\cdot a_2 = 0\,, \qquad a_6 = a_8 = a_{10} = \cdots = 0\,.$$

Los coeficientes impares son:

$$a_3 = \frac{1-2}{1+2}a_1 = \frac{-1}{3}a_1\,, \qquad a_5 = \frac{3-2}{3+2}a_3 = \frac{1}{5}\cdot\frac{(-1)}{3}a_1\,,$$

$$a_7 = \frac{5-2}{5+2}a_5 = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{(-1)}{3}a_1 = \frac{-1}{7\cdot 5}a_1$$

y en general:

$$a_{2n+1} = \frac{2n-3}{2n+1}a_{2n-1} = \frac{2n-3}{2n+1}\cdot\frac{2n-5}{2n-1}\cdot\frac{2n-7}{2n-3}\cdots\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{(-1)}{3}a_1$$

Simplificando los factores comunes se tiene:

$$a_{2n+1} = \frac{-1}{(2n+1)(2n-1)} a_1 .$$

Por tanto la serie correspondiente a y se puede escribir como:

$$y = a_0 (1-x^2) - a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} x^{2n+1} .$$

Es fácil comprobar que el intervalo de convergencia de la serie es

$$-1 < x < 1$$

para ello se puede hacer uso del criterio del cociente. Por la forma como se ha obtenido se puede observar que la serie satisface efectivamente la ecuación diferencial (1).

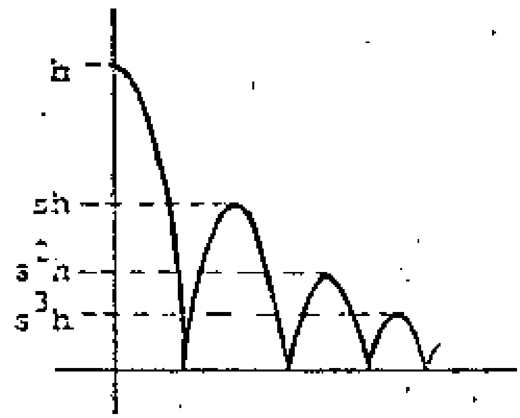
El método que se acaba de describir, se denomina método de los coeficientes indeterminados.

A P L I C A C I O N E S

"LA PELOTA REBOTANTE"

5.

En forma ideal, una pelota que cae desde una altura h, después de un rebote retorna a una altura sh, donde $s < 1$, siendo s independiente de h; como se aprecia en la siguiente figura:



Si la [illegible] nunca es detenida, ¿CONTINUARA SIEMPRE REBOTANDO?. [illegible] de que ésta rebota indefinidamente, pensamos que [illegible] continua así para siempre; pero la paradoja de Zenón [illegible] que este argumento no es confiable, de manera que [illegible] un análisis más cuidadoso.

Para [illegible] el tiempo trascurrido durante la caída desde la altura [illegible] recordemos que la distancia recorrida por un cuerpo [illegible] libremente, en un tiempo t, partiendo del reposo es [illegible] $gt^2/2$, de modo que la pelota cae la distancia h en un [illegible] dada por $h = gt^2/2$, de donde $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

En [illegible] el tiempo transcurrido en subir la altura sh y [illegible] nuevamente a la altura 0 es $2\sqrt{\frac{2sh}{g}}$

.....

Calculando en esta forma el tiempo para cada rebote sucesivo, obtenemos el tiempo que transcurre cuando el número de rebotes tiende a infinito.

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2sh}{g}} + 2\sqrt{\frac{2s^2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2s^3h}{g}} + \dots$$

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(s^{1/2} + s^{2/2} + s^{3/2} + \dots\right)$$

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{s})^n\right]$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{s})^n = s^{1/2} + s^{2/2} + s^{3/2} + \dots$ es geométrica con $a = \sqrt{s}$, razón $= \sqrt{s} < 1$ y suma igual a $\frac{\sqrt{s}}{1-\sqrt{s}}$

Finalmente la pelota realiza todos sus rebotes en la cantidad finita de tiempo siguiente:

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}\left[1 + \frac{2\sqrt{s}}{1-\sqrt{s}}\right] = \sqrt{\frac{2h}{g}}\;\frac{1+\sqrt{s}}{1-\sqrt{s}}$$

APLICACIONES DE SERIES.

5.

Las convenciones realizadas en Acapulco son una fuente de ingresos para el puerto. En realidad, las convenciones contribuyen a la actividad económica del puerto, mucho más que la cantidad gastada ahí por los convencionistas.

Para demostrar lo anterior hagamos las siguientes consideraciones respecto a una convención hipotética:

a).- Los convencionistas visitantes gastan en Acapulco 1,000 000 de pesos

b).- En promedio cada residente de Acapulco gasta 4/5 de su ingreso en el mismo puerto de Acapulco; el 1/5 restante es gastado fuera de Acapulco, ó en ahorrar.

Calcularemos la cantidad total de dinero gastado en Acapulco, como resultado de la convención.

Un millón de pesos es gastado en Acapulco por los convencionistas visitantes, siendo éste el "efecto directo"; entonces los residentes gastan 4/5 de este dinero en el puerto, causando un segundo efecto. Luego 4/5 de estos 4/5 de millón es gastado en el puerto, causando un tercer efecto de $(4/5)^2$ de millón. Continuando en forma semejante n veces, tenemos que:

$$1 + 4/5 + (4/5)^2 + (4/5)^3 + \dots + (4/5)^n \text{ millones}$$

de pesos gastados.

Finalmente el total gastado es:

$$1 + 4/5 + (4/5)^2 + (4/5)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (4/5)^n \text{ millones}$$

de pesos

La expresión anterior es una serie geométrica con $a=1$ y razón $= 4/5 < 1$, por lo tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (4/5)^n = \frac{1}{1-4/5} = 5$$

de manera que el millón de pesos ocasiona que se realicen gastos por 5 millones de pesos.

UNA APLICACION EN BIOLOGIA

10.

En esta aplicación estudiaremos la razón con que ocurre el retinoblastoma, un tipo raro de cáncer en el ojo en niños que a fines del siglo pasado era casi siempre fatal.

Para comenzar necesitamos un término de biología, un "alelo" - --- (alelomorfo) es un gene que da lugar a uno de un par de características contrastantes, tales como liso o rugoso, alto o bajo, etc. Toda persona tiene normalmente dos de estos genes para cada característica un individuo puede tener dos genes "altos", dos genes "bajos" o uno de cada uno. En la reproducción el padre y la madre cada uno da uno de los dos tipos al niño.

La tendencia a desarrollar el retinoblastoma aparentemente depende de un solo alelo dominante, digamos A. Si el correspondiente alelo normal está represntado por a, la razón de mutación de "a" a "A" en cada generación es aproximadamente $m = 0.00002 = 2 \times 10^{-5}$. En este ejemplo ignoraremos la muy poca probable posibilidad de mutación de "A" a "a". Con los cuidados médicos disponibles en 1950 aproximadamente el 70% de los afectados sobrevivieron a pesar de que quedaron ciegos en uno o dos ojos.

Supongamos que los que sobrevivieron reproducen cerca de la mitad de la razón de cambio normal. (Esta suposición está basada en intuición científica).

Entonces, la proporción productiva de personas afectadas es - - - $r = 0.35$. Esta razón es importante ya que considerando que cerca de - 1900, r era aproximadamente 0.

Empezando con 0 casos heredados en una primera generación, para la generación enésima consecutiva tendremos una razón de cambio de

m debido a mutación en la generación n - ésima

mr debido a mutación en la generación $(n-1)$ésima

mr^2 debido a mutación en la generación $(n-2)$ésima

mr^n debido a mutación en la generación cero (original)

Por lo tanto el total de la razón de cambio en la generación enésima es

$$p_n = m + mr + \ldots + mr^n = \frac{m(1-r^{n+1})}{1-r}$$

de donde

$$p = \lim_{n \to \infty} p_n = \frac{m}{1-r} = 3.08 \times 10^{-5}$$

Así, la razón total de personas afectadas será ligeramente más del 50% más alto que la razón de mutación.

Obsérvese que si $r = 0$ entonces $p = m$. Así la enfermedad se ha vuelto más frecuente con los mejores cuidados médicos. A medida que los cuidados médicos mejoran, la frecuencia del gene A aumenta rapidamente al principio, luego en forma más lenta hasta que alcanza un punto de equilibrio. Este se obtiene aproximadamente después de la octava generación.

11. APLICACION A LA RECUPERACION DE OXIGENO DISUELTO EN AGUA

Ec. diferencial de transferencia de O_2 en un agua subsaturada

$$\frac{dC}{dt} = K_g (C_s - C)$$

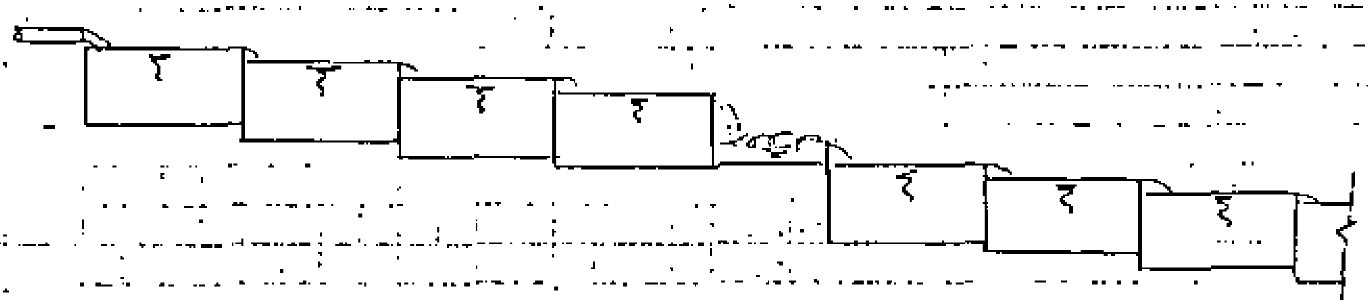
C = concentración de Oxígeno disuelto (OD) en el tiempo "t"
C_s = concentración de saturación

Solución:

$$L \frac{C_s - C}{C_s - C_o} = K_g t$$

C_o = Concentración de OD a la que se inicia el fenómeno
K_g = Constante de transferencia. Depende de la forma en que se desarrolle el fenómeno

Presentación del problema:
Se proyectó una planta acuícola a base de estanques de engorda de alta velocidad (raceways). Estos estanques son simples prismas donde el agua corre del primero al último. El diseño original consiste en unidades de cuatro estanques seguidos de un recuperador de OD.



La razón de estos recuperadores, así como del escalonamiento, es que entre los peces, su comida y los detritus de los mismos consumen el OD contenido originalmente en el agua. En el caso que nos ocupa, medimos experimentalmente este consumo y concluimos que podía considerarse constante a razón de 2 mg/l en cada estanque.

Fue necesario revisar este diseño, que nunca fue calculado desde el punto de vista de intercambio de gases, porque no funcionaba con la eficiencia prevista.

Lo primero que hicimos fue valuar la constante "K_g"; el dispositivo de aeración consistía en láminas acanaladas con perforaciones a través de las cuales goteaba el agua. Dado que, en caída libre

$$v = \frac{dh}{dt} = \sqrt{2gh}$$

entonces

$$\frac{dC}{C_s - C} = \frac{k_g}{\sqrt{2g}}\,\frac{dh}{\sqrt{h}} \Rightarrow L\,\frac{C_s - C}{C_s - C_o} = -\frac{2K_g}{\sqrt{2g}}\sqrt{h}$$

y así, midiendo la recuperación de Oxígeno a diversas alturas de goteo, se llegó a:

$$L\,\frac{C_s - C}{C_s - C_o} = -1.56\sqrt{h} + 0.06 = u < 0$$

Entonces, después de una recuperación cualquiera:

$$C = C_s - (C_s - C_o)\,e^{u}$$

Así, a la entrada de la primera sección:

$$C = C_s$$

A la salida de la misma:

$$C = C_s - 2$$

A la entrada de la segunda sección:

$$C = C_s - \left[C_s - (C_s - 2)\right]e^{u} = C_s - 2e^{u}$$

A la salida de la misma:

$$C = C_s - 2e^{u} - 2 = C_s - 2(e^{u} + 1)$$

A la entrada de la tercera sección:

$$C = C_s - \left\{C_s - \left[C_s - 2(e^{u} + 1)\right]\right\}e^{u} = C_s - 2(e^{u} + 1)\,e^{u}$$

$$C = C_s - 2(e^{2u} + e^{u})$$

Y, a la entrada de la n^{ma} sección:

$$C = C_s - 2\left(e^{(n-1)u} + e^{(n-2)u} + \dots + e^{u}\right)$$

Que es la suma de una serie geométrica de razón $e^{u} < 1$ y converge a:

$$C = C_s - 2\,\frac{1 - e^{(n-1)u}}{1 - e^{u}}\,e^{u}$$

Análogamente, a la salida de la enésima sección

$$C = C_s - 2\,\frac{1 - e^{nu}}{1 - e^{u}}$$

Ambas expresiones tienen límite cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\left[C_s - 2\,\frac{1-e^{(n-1)u}}{1-e^{u}}\,e^{u}\right] = C_s - \frac{2e^{u}}{1-e^{u}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(C_s - 2\,\frac{1-e^{nu}}{1-e^{u}}\right) = C_s - \frac{2}{1-e^{u}}$$

Que en términos prácticos significa que, después de un cierto número de secciones la concentración de O.D no dependerá del número de secciones subsecuentes, porque lo que se consume es prácticamente lo que se recupera.

Así, por ejemplo, para una altura de caída de 50cm, sabiendo que la concentración de saturación es de 7.3 mg/l:

$$u = -1.046$$

y después de 5 secciones; la concentración de entrada a la 6ª es:

$$C = 7.3 - 2\,\frac{1-e^{5u}}{1-e^{u}}\,e^{u} = 6.222 \text{ mg/l}$$

y la concentración de entrada a la 7ª:

$$C = 7.3 - 2\,\frac{1-e^{6u}}{1-e^{u}}\,e^{u} = 6.218 \text{ mg/l}$$

$\Delta OD = 0.004$

Esto permitió demostrar que no hay necesidad de recuperadores especiales después de cada cuatro secciones y que ese espacio podía ocuparse para la producción.

25.* Estimar para qué valores de x la fórmula

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$$

es correcta a dos decimales.

26. Hallar la serie de Maclaurin para $(1+x)^3$. Demostrar que la serie converge para $|x| < 1$.
27. Sean $f(x) = \exp(-1/x^2)$, $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Demostrar que la serie de Maclaurin para $f(x)$ es $0 + 0 + 0 + \ldots$, la cual seguramente converge en todas partes pero da el valor correcto de la función solamente para $x = 0$.

OPERACIONES ALGEBRAICAS CON SERIES DE POTENCIAS

La siguiente lista de series infinitas contiene las series de potencias relativamente más importantes que ocurren en las aplicaciones elementales del cálculo. En cada caso, la serie realmente converge a la función indicada en el intervalo de convergencia. No se espera que el estudiante pueda verificar este hecho en todos los casos, ni tampoco se espera que pueda verificar el intervalo de convergencia en los Números 4, 5, 6, 7 y 15. Sin embargo, debería el estudiante proponerse obtener por sí mismo los coeficientes que se dan en cada caso.

Usaremos este conjunto de series infinitas como un almacén del cual tomar la mayoría de los ejemplos de ésta y la próxima sección.

Algunas series infinitas de referencia

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathfrak{R}$.
2. $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathfrak{R}$.
3. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathfrak{R}$.
4. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots$, $|x| < \pi/2$.
5. $\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \cdots$, $0 < |x| < \pi$.
6. $\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \cdots$, $|x| < \pi/2$.
7. $\csc x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + \frac{31x^5}{15{,}120} + \cdots$, $0 < |x| < \pi$.

8. $\ln(a+x) = \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{a}\right)^n$, $a > 0$, $-a < x \leq a$.
9. $\ln \frac{a+x}{a-x} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x/a)^{2n-1}}{2n-1}$, $a > 0$, $|x| < a$.
10. $(a+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} a^{k-n}x^n$, $|x| < |a|$. (La Serie Binómica.) Esta serie se reduce a un polinomio válido para todos los valores de x si k es un entero no negativo.
11. $\operatorname{Tan}^{-1} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$, $|x| \leq 1$.
12. $\operatorname{Sen}^{-1} x = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1)(3)\cdots(2n-3)x^{2n-1}}{(2)(4)\cdots(2n-2)(2n-1)}$, $|x| \leq 1$.
13. $\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathfrak{R}$.
14. $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathfrak{R}$.
15. $\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \cdots$, $|x| < \pi/2$.
16. $\tanh^{-1} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $|x| < 1$.
17. $\operatorname{senh}^{-1} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(1)(3)\cdots(2n-3)x^{2n-1}}{(2)(4)\cdots(2n-2)(2n-1)}$, $|x| \leq 1$.

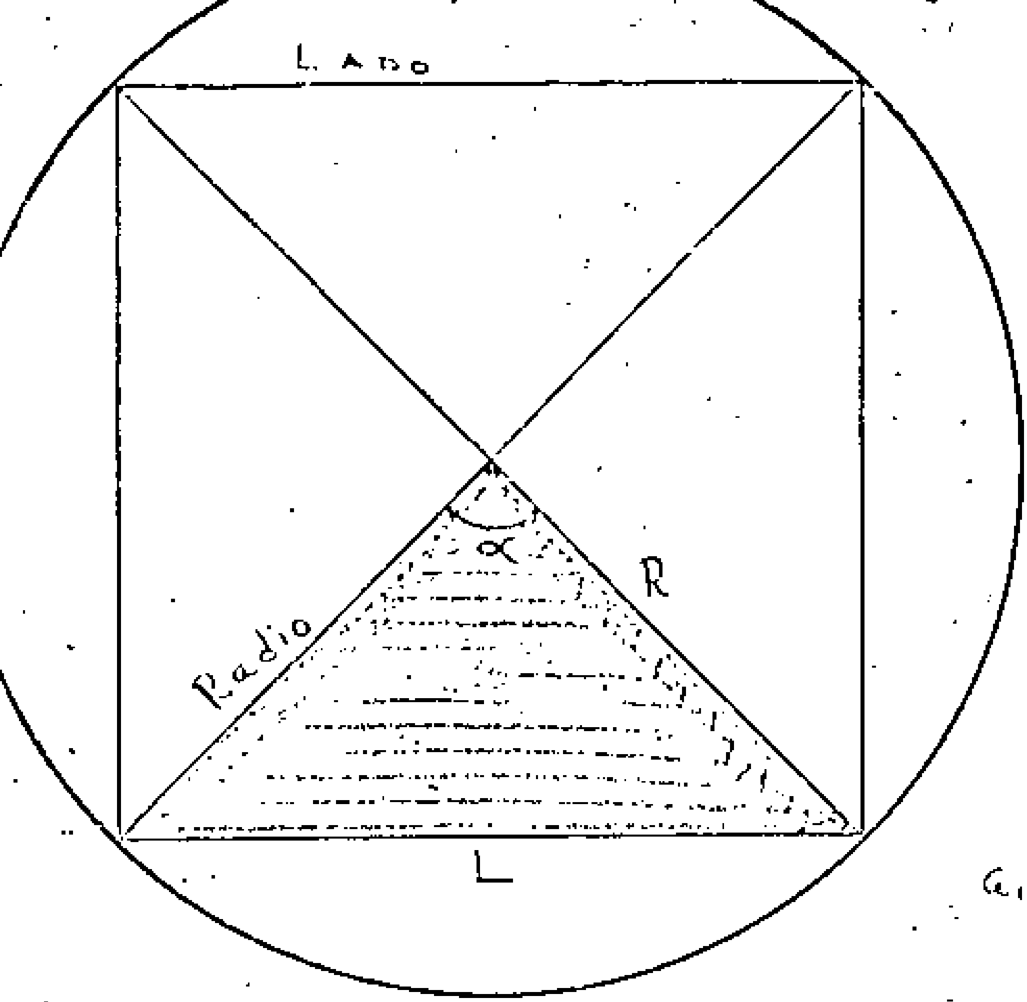
Se ha demostrado en el Cap. 10 que las series convergentes de constantes pueden sumarse término a término para obtener una serie convergente con valor igual a la suma de los valores de las d series. Una proposición correspondiente es válida para la sustracción. Estos resultados se aplican inmediatamente a las series de potencias convergentes, ya que para cada valor fijo de x, una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ se convierte en una serie de constantes.

Ejemplo 11.4a. Sumando las series de potencias en x para $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$, demostrar que se obtiene la serie para e^x. Es ésta una comprobación de la fórmula

$$\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x.$$

Sumando los términos correspondientes, tenemos

$$\cosh x + \operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$



Perimetro = n Lados

Perimetro = $2\pi R$

Radio ; $R = 1/2$

Longitud lado : L

Perimetro calculado a_i:

$$L=\sqrt{R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos\alpha}$$

$$n\alpha = 360°$$

$$\alpha = 360°/n$$

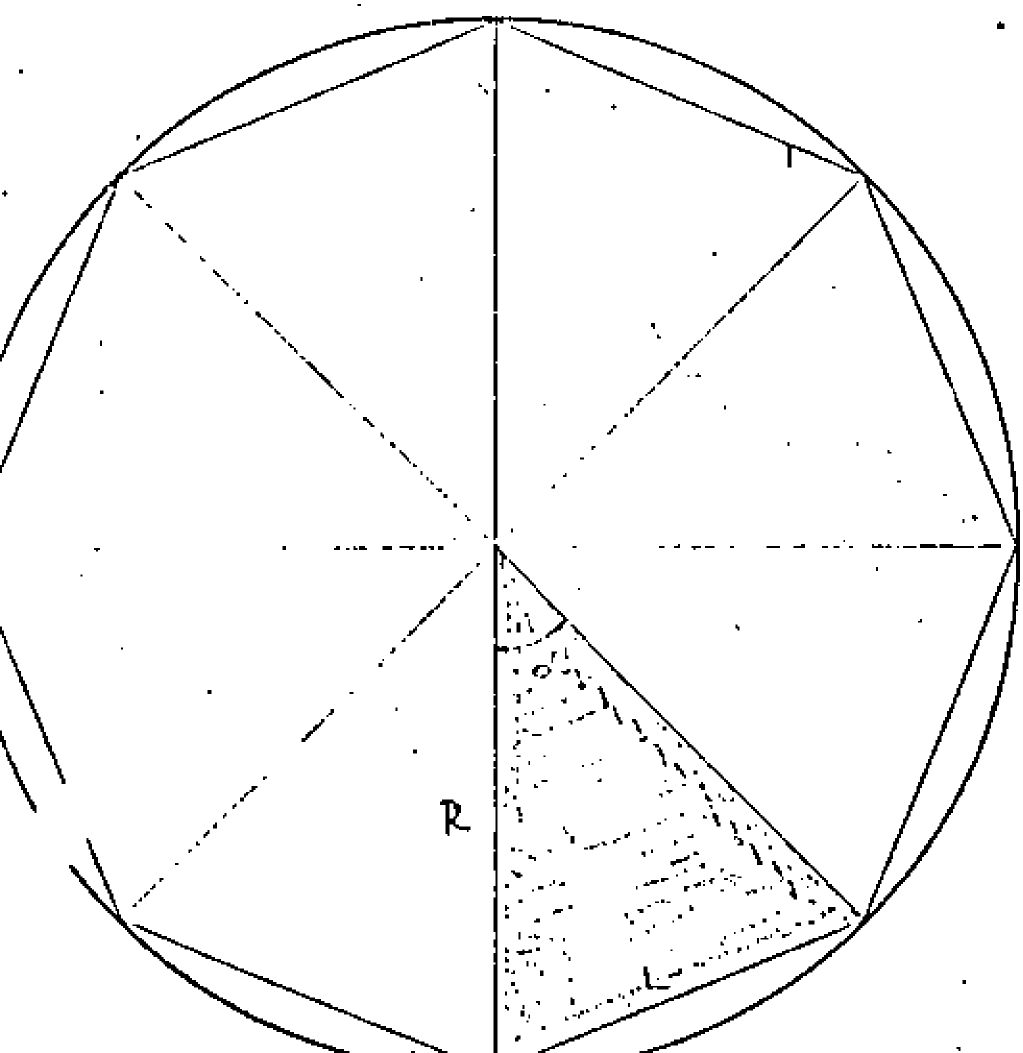
• Para cuatro lados : $n = 4$

$\alpha = 360°/4$ $\quad \alpha = 90°$

$$L=\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-2\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)\cos 90°}$$

$L=\sqrt{\frac{1}{2}}$ $\qquad L=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$a_1 = \frac{4}{2}\sqrt{2}$$



• Para ocho lados $n = 8$

$\alpha = 360°/8 = 45°$

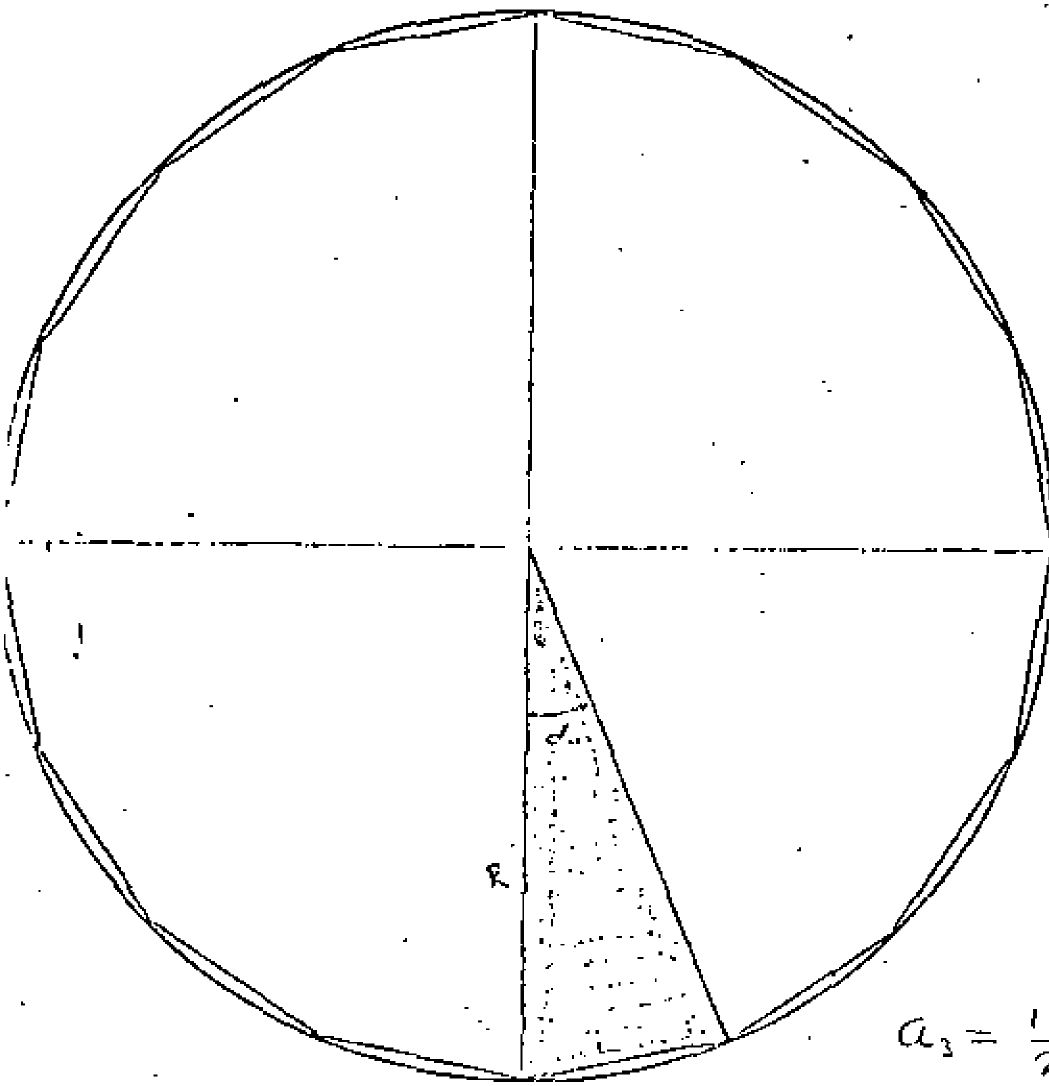
$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$L=\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$L=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

$$L=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$a_2=\frac{8}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$



$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

· Para $n = 16$ Lados

$$\alpha = \frac{360}{16} = 22.5^\circ$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$L = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}$$

$$L = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}}$$

$$L = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$a_3 = \frac{16}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

LADOS	PERIMETRO	a_i	FORMULA
4	2.828427	a_1	$\frac{4}{2}\sqrt{2}$
8	3.061467	a_2	$\frac{8}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
16	3.121445	a_3	$\frac{16}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
32	3.136548	a_4	$\frac{32}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$
64	3.140331	a_5	$\frac{64}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$
128	3.1412775	a_6	$\frac{128}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}$
256	3.1415148	a_7	$\frac{256}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}$
512	3.1415800	a_8	$\frac{512}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}}$
1024	3.1415926	a_9	

APLICACION DE SERIES DE POTENCIAS
EN LA PROSPECCION GEOELECTRICA

EN LA GEOFISICA DE EXPLORACION SE UTILIZAN DIFERENTES METODOS, PARA CONOCER LA DISTRIBUCION DE ALGUNA PROPIEDAD FISICA EN EL SUBSUELO DE FORMA QUE SE PUEDA INFERIR LA COMPOSICIÓN DE LAS CAPAS QUE FORMAN A ÉSTE.

ENTRE LOS METODOS MÁS UTILIZADOS POR SU SENCILLEZ Y BAJO COSTO SE TIENE EL MÉTODO GEOELÉCTRICO DE EXPLORACION, QUE SE - EMPLEA EN LA BÚSQUEDA DE MANTOS DE AGUA, BANCOS DE MATERIAL (GRAVA, ARENA, ETC), INVESTIGACIÓN DE ZONAS CARSTIFICADAS, LOCALIZACIÓN DE VETAS, EN LA ARQUEOLOGÍA, EN LA DETERMINACIÓN DEL FIRME, ETC.

ESTE MÉTODO ESTÁ BASADO EN LA DETERMINACIÓN DE LA - DISTRIBUCIÓN DE PROPIEDADES ELECTRICAS EN EL SUBSUELO Y DE -TAS PROPIEDADES LAS MÁS INVESTIGADAS SON: LA RESISTIVIDAD ELÉCTRICA, LA PERMITIVIDAD ELÉCTRICA, LA PERMEABILIDAD MAGNÉTICA Y EL POTENCIAL ELÉCTRICO.

CADA PROPIEDAD SE ESTUDIA POR UNA VARIANTE DE METODO GEOELÉCTRICO EXISTIENDO UNA GRAN CANTIDAD DE ELLOS. AL ARTE DE - MEDIR LAS PROPIEDADES ELÉCTRICAS DE UN MEDIO DETERMINADO SE LE CONOCE COMO PROSPECCIÓN GEOELECTRICA.

EL MÉTODO TRATADO EN ESTE TRABAJO ES EL CONOCIDO COMO SONDEO ELÉCTRICO VERTICAL (SEV) QUE ES UN MÉTODO INDIRECTO DE - CAMPO UTILIZADO PARA ANALIZAR Y ESTUDIAR LA DISTRIBUCIÓN VERTICAL DE RESISTIVIDADES BAJO UN PUNTO DESEADO.

EN EL SEV, UNA CORRIENTE ELÉCTRICA ES INTRODUCIDA AL TERRENO Y ES MEDIDA LA DIFERENCIA DE POTENCIAL DE TAL FORMA QUE -NOCIDO EL POTENCIAL GENERADO EN EL SUBSUELO Y CONOCIDA LA CORRIENTE SE DETERMINE LA DISTRIBUCION VERTICAL DE RESISTIVIDADES.

PARA EL CASO DE UN MEDIO CUALQUIERA, EL POTENCIAL GENERADO POR LA CORRIENTE ELECTRICA INYECTADA EN EL TERRENO ESTÁ DADO POR:

$$\sigma \bar{\nabla}^2 U + \bar{\nabla} U \cdot \bar{\nabla} \sigma = 0 \qquad (1)$$

DONDE: $\sigma = \frac{1}{\rho}$ CONDUCTIVIDAD ELÉCTRICA

ρ = RESISTIVIDAD ELÉCTRICA

U = POTENCIAL ELÉCTRICO.

PARA EL CASO DE UN MEDIO HOMOGENEO E ISÓTROPO LA CONDUCTIVIDAD ELECTRICA ES CONSTANTE, POR LO TANTO LA ECUACIÓN ANTERIOR QUEDA:

$$\nabla^2 U = 0 \qquad (2)$$

SI SE CONSIDERA UNA FUENTE PUNTUAL DE CORRIENTE, EL POTENCIAL SÓLO VARÍA RADIALMENTE A ESTA FUENTE Y LA ECUACIÓN QUE CUMPLE ESTO ES:

$$U = \frac{\rho I}{2\pi r} \qquad (3)$$

LA ECUACIÓN ANTERIOR ES VÁLIDA PARA UN SEMIMEDIO HOMOGÉNEO E ISÓTROPO CONSIDERANDO QUE EL SEMIMEDIO SUPERIOR TIENE RESISTIVIDAD INFINITA Y LA SUPERFICIE QUE ATRAVIESA LA CORRIENTE ES SEMIESFÉRICA COMO MUESTRA LA FIGURA (1).

POR OTRA PARTE, UN MEDIO ESTRATIFICADO ES UN MEDIO HETEROGÉNEO COMPUESTO DE ZONAS HOMOGÉNEAS E ISÓTROPAS, DE EXTEN-

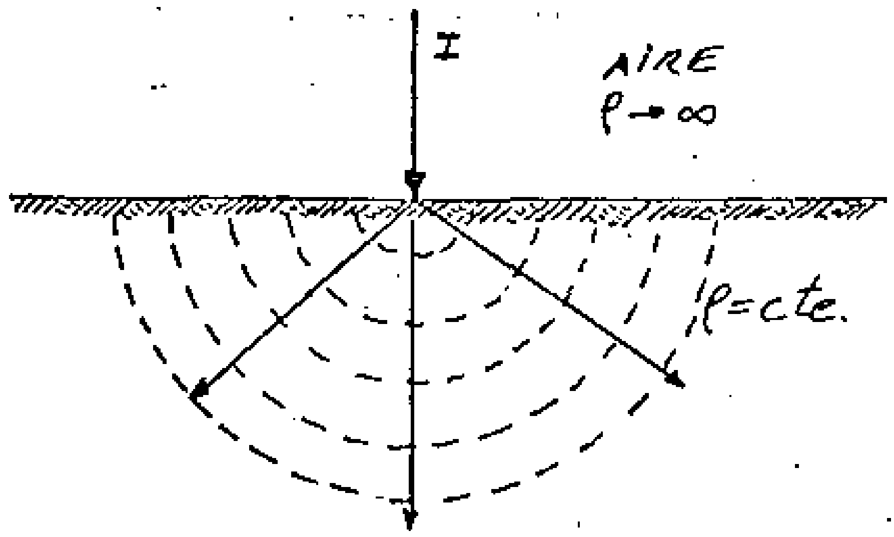


FIGURA 1

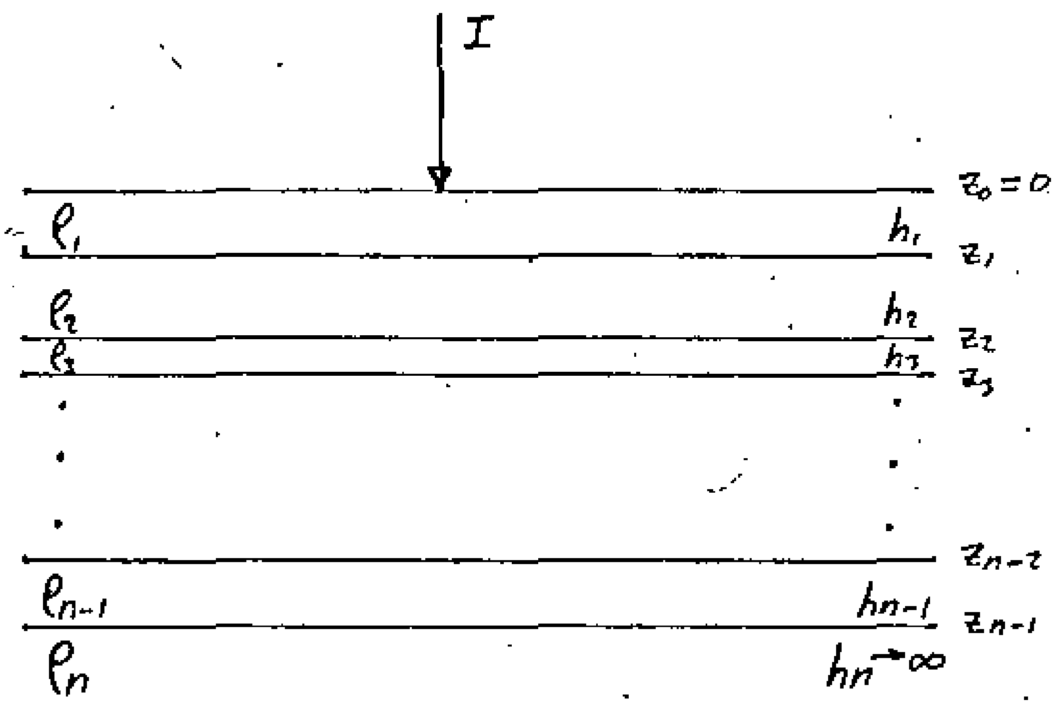


FIGURA 2

$$z_{n-1} = h_1 + h_2 + h_3 + \cdots + h_{n-1}$$

SIÓN LATERAL INDEFINIDA Y CUYAS SUPERFICIES DE SEPARACIÓN SON PARALELAS ENTRE SÍ Y PARALELAS A LA SUPERFICIE PLANA DEL TERRENO (SUPONIENDO QUE LA RESISTIVIDAD DEL AIRE ES INFINITA). A CADA UNA DE ESTAS ZONAS HOMOGÉNEAS E ISÓTROPAS SE LES CONOCE COMO HORIZONTE, CAPA Ó ESTRATO GEOELÉCTRICO DE RESISTIVIDAD ρ_i Y ESPESOR h_i COMO MUESTRA LA FIGURA (2).

EL POTENCIAL PARA UN MEDIO ESTRATIFICADO CUMPLE, EN CADA CAPA, CON LA ECUACIÓN DE LAPLACE, O SEA, EN COORDENADAS CILINDRICAS CUMPLE CON:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \qquad (4)$$

POR SIMETRIA SE TIENE QUE $\partial U / \partial \varphi = 0$, POR LO TANTO,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \qquad (5)$$

POR SEPARACIÓN DE VARIABLES CONSIDERANDO $U = R(r)\,Z(z)$:

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = \lambda^2$$

$$\frac{1}{R}\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR}\frac{dR}{dr} = -\lambda^2 \qquad (6)$$

RESOLVIENDO ESTAS ECUACIONES DIFERENCIALES Y APLICANDO CONDICIONES DE FRONTERA SE OBTIENE EL POTENCIAL PARA UN MEDIO ESTRATIFICADO:

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi}\int_0^{\infty}\left\{1 + 2\theta_1(\lambda)\right\} J_0(\lambda r)\, d\lambda \qquad (7)$$

ESCRITO DE OTRA FORMA

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi}\int_0^{\infty} K(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, d\lambda \qquad (8)$$

O TAMBIEN

$$U_1 = \frac{I}{2\pi}\int_0^{\infty} T(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, d\lambda \qquad (9)$$

DONDE:

ρ_1 = RESISTIVIDAD ELÉCTRICA DE LA PRIMERA CAPA
I = CORRIENTE ELÉCTRICA INYECTADA AL TERRENO
$\theta_1(\lambda)$ = FUNCIÓN KERNEL DE STEFANESCO
$K(\lambda)$ = FUNCIÓN KERNEL DE SLICHTER
$T(\lambda)$ = FUNCIÓN TRANSFORMADA DE RESISTIVIDAD

LAS RELACIONES ENTRE ESTAS FUNCIONES ESTAN DADAS POR:

$$\begin{aligned} K(\lambda) &= 1 + 2\theta_1(\lambda) \\ T(\lambda) &= \rho_1 K(\lambda) = \rho_1 (1 + 2\theta_1(\lambda)) \end{aligned} \qquad (10)$$

$J_0(\lambda r)$ = FUNCIÓN BESSEL DE ORDEN CERO

ESTA ÚLTIMA FUNCIÓN ESTA DADA POR LA SERIE DE POTENCIAS INFINITA:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \cdots$$

LA RELACIÓN QUE EXISTE ENTRE EL POTENCIAL Y LA RESISTIVIDAD APARENTE DEPENDE DEL DISPOSITIVO DE MEDICIÓN UTILIZADO. LOS DISPOSITIVOS DE MEDICIÓN MÁS UTILIZADOS SON:

1) EL DISPOSITIVO INTERELECTRÓDICO DE SCHLUMBERGER
2) " " " WENNER.

EL DISPOSITIVO SCHLUMBERGER SE MUESTRA EN LA FIGURA (3) Y SU RESISTIVIDAD APARENTE ESTÁ DADA POR:

$$\rho_{a,s} = -\frac{2\pi L^2}{I}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=L} \qquad (11)$$

SUSTITUYENDO (7) EN (11) SE OBTIENE

$$\rho_{a,s} = \rho_1 L^2 \int_0^{\infty} \{1 + 2\theta_1(\lambda)\} \lambda J_1(\lambda r) d\lambda \qquad (12)$$

EL DISPOSITIVO WENNER SE MUESTRA EN LA FIGURA (4) Y SU RESISTIVIDAD ESTÁ DADA POR:

$$\rho_{a,w} = 2\pi a \frac{\Delta U}{I} \qquad (13)$$

SI SE CONSIDERA QUE:

$$\Delta U = 2\left[U(a) - U(2a)\right] \qquad (14)$$

SUSTITUYENDO (14) EN (13) Y COMBINADO EL RESULTADO CON (7) SE OBTIENE:

$$\rho_{a,w} = 2a\rho_1 \int_0^{\infty} \{1 + 2\theta_1(\lambda)\}\{J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)\} d\lambda \qquad (15)$$

PARA CALCULAR LA CURVA DE RESISTIVIDADES APARENTES DE ESTOS DOS DISPOSITIVOS EXISTEN DOS MÉTODOS GENERALES:

1) MÉTODOS QUE EMPLEAN LA EXPANSIÓN EN SERIES DE LA FUNCION KERNEL $\theta(\lambda)$
2) MÉTODOS DE FILTRADO LINEAL

LOS MÉTODOS QUE EMPLEAN LA EXPANSIÓN EN SERIES DE LA FUNCIÓN $\theta(\lambda)$ SON:

A) MÉTODO DE ONODERA
B) MÉTODO DE ORELLANA
C) MÉTODO DE VAN DAM
D) MÉTODO DE LIMA LOBATO

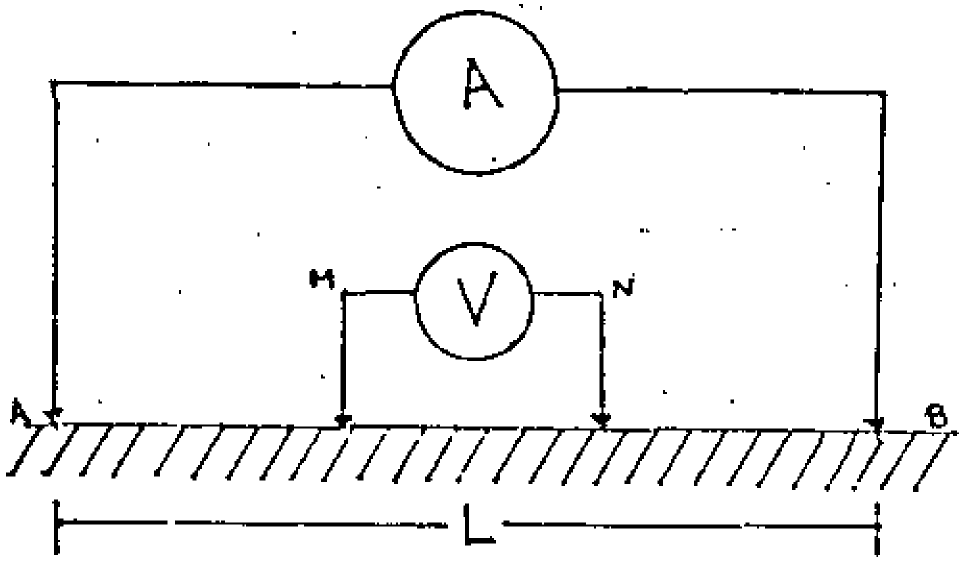
ESTOS MÉTODOS SE BASAN EN LA APROXIMACIÓN DE LA FUNCIÓN KERNEL $\theta(\lambda)$ POR MEDIO DE UNA SERIE FINITA DE TÉRMINOS DE $e^{-2n\lambda}$, ES DECIR,

$$\theta(\lambda) \approx \sum_{n}^{m} Q(n)\, e^{-2n\lambda} \qquad (16)$$

POR LO TANTO, LA ESENCIA DE ESTOS MÉTODOS CONSISTE EN LA FORMA PARTICULAR DE EVALUAR LOS COEFICIENTES $Q(n)$ DE LA EXPANSIÓN EN SERIES DE LA FUNCIÓN KERNEL $\theta(\lambda)$.

METODO DE ONODERA

ESTE METODO CONSISTE EN APROXIMAR LA FUNCIÓN KERNEL POR MEDIO DE UN SISTEMA DE POLINOMIOS ORTOGONALES NORMALIZADOS EMPLEANDO EL MÉTODO DE APROXIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS. PARA ELLO HACIENDO UN CAMBIO DE VARIABLE $z = e^{-2\lambda}$, LA FUNCIÓN $\theta(\lambda)$ ES TRANSFORMADA EN UNA FUNCIÓN $\theta(z)$ DE LA VARIABLE z EN EL INTERVALO $[0,1]$ YA QUE λ ESTÁ DEFINIDA EN UN INTERVALO DE $[0,\infty)$, ES DECIR,



MN → 0

$\therefore \frac{\Delta U_M^N}{\overline{MN}} = \vec{E} = \frac{-1}{\rho}\frac{dU}{dr}$

fig. (3)

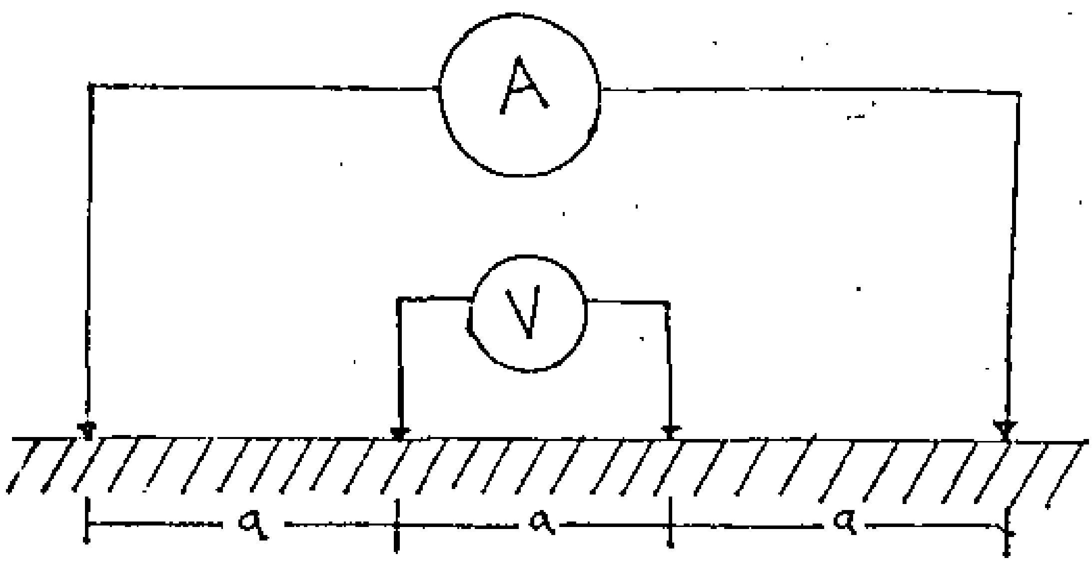


fig (4)

$$\theta(z) \approx \sum_{n}^{m} a_n(2n+1)P_n(z) \qquad (17)$$

DONDE LAS FUNCIONES $P_n(z)$ SON LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE $P_n(X)$ ORTOGONALES EN EL INTERVALO $[-1, 1]$, MODIFICADOS POR LA TRANSFORMACIÓN $X = 2Z-1$ PARA HACERLOS ORTOGONALES EN EL INTERVALO $[0, 1]$ Y MULTIPLICADOS POR EL FACTOR $(2n+1)$ PARA NORMALIZARLOS. LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE ESTÁN DADOS POR LA FÓRMULA DE RODRIGUEZ:

$$P_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dX^n}\left(X^2-1\right)^n \qquad (18)$$

MÉTODO DE ORELLANA Y MOONEY

EN ESTE METODO SE CONSIDERA QUE LA FUNCIÓN KERNEL ESTÁ DADA POR:

$$\theta(z) = \frac{P(z)}{H(z)-P(z)} \qquad (19)$$

DONDE $z = e^{-2\lambda}$, $P(z)$ Y $H(z)$ SON POLINOMIOS EN Z REPRESENTADOS POR:

$$P(z) = \sum_{n}^{N-1} P(h_n)\, z^{h_n} \qquad (20)$$

$$H(z) = \sum_{n}^{N-1} H(h_n)\, z^{h_n} \qquad (21)$$

Y LOS COEFICIENTES $P(h_n)$ Y $H(h_n)$ ESTÁN DADOS POR LAS FORMULAS DE RECURRENCIA FLATHE:

$$P_{j+1}(z) = P_j(z) + H_j(z^{-1})\, K_j\, z^{h_j}$$

$$H_{j+1}(z) = H_j(z) + P_j(z^{-1})\, K_j\, z^{h_j} \qquad (22)$$

$$P_1(z) = 0 \qquad\qquad H_1(z) = 1$$

DE ESTA FORMA ENTONCES, LA FUNCIÓN KERNEL SE PUEDE EXPANDER EN UNA SERIE COMO LA QUE SE MUESTRA:

$$\theta(z) = \sum_{n}^{m} Q(n)\, z^n \qquad (23)$$

DONDE LOS COEFICIENTES $Q(n)$ PUEDEN SER DETERMINADOS - COMBINANDO LAS ECUACIONES (19) Y (20)

$$\sum_{n}^{m} Q(n)\, z^n = \frac{P(z)}{H(z)-P(z)} = \frac{\sum_{n}^{h_{N-1}} P(n)\, z^n}{\left\{\sum_{n}^{h_{N-1}} H(n)\, z^n - \sum_{n}^{h_{N-1}} P(n)\, z^n\right\}} \qquad (24)$$

REALIZANDO EL COCIENTE DE FUNCIONES DEL MIEMBRO DERECHO E IGUALANDO LAS CANTIDADES DE AMBOS MIEMBROS QUE TIENEN LA MISMA POTENCIA DE Z. SIGUIENDO ESTE RAZONAMIENTO ES POSIBLE DETERMINAR LA EXPRESIÓN GENERAL PARA - LOS COEFICIENTES $Q(n)$ COMO:

$$Q(n) = P(n) + \sum_{i=1}^{d} \left[P(i) - H(i)\right] Q(n-i) \qquad (25)$$

DONDE "d" ES EL MENOR DE LOS NUMEROS ENTEROS h_{N-1} O $n-1$.

A. JENJAN. Nov. 1983

APLICACIONES DE LA SERIE DE TAYLOR

<u>Introducción</u> — Este breve apunte tiene por objetivo presentar las aplicaciones de la serie de Taylor al cálculo aproximado de funciones, a la definición de fórmulas numéricas de derivación y, por último, a la deducción de fórmulas de recurrencia para cálculo de funciones. Se presenta una fórmula original de "2º orden" para el cálculo de funciones por medios iterativos..

1) Aplicación al cálculo aproximado de funciones.

Esta aplicación puede encontrarse en varios tratados de series de potencias, aunque es descuidada en términos generales.

Se presenta directamente con un ejemplo.

— Obtener valores aproximados de X para la ecuación:

$$2\cos X = e^{X} \quad , \text{cercanos a } X=0$$

Desarróllense en serie de Taylor ambos miembros, alrededor de X=0

$$\cos X = 1 - \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{4!} - \cdots$$

$$e^{X} = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3!} + \cdots$$

Tómense los primeros términos de cada serie, hasta 2º grado, aplíquense enseguida a la ecuación dada:

$$2\left(1 - \frac{X^2}{2}\right) = 1 + X + \frac{X^2}{2}$$

quedando la ecuación algebráica de 2º grado: $\frac{3}{2}X^2 + X - 1 = 0$

cuya solución es: $X = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$

Esto da 2 valores aproximados para X:
que pueden compararse con valores más precisos:

Las aproximaciones que pueden obtenerse con este procedimiento pueden mejorarse a su vez utilizando las fórmulas con un grado mayor de potencia para X. Es evidente que el esfuerzo para resolver la ecuación algebraica de grado mayor que 2 ó 3 es equivalente a resolver la ecuación trascendente directamente.

2) Fórmulas de derivación
Se obtienen combinando linealmente las series de Taylor.
Hágase un desarrollo alrededor de X_i para incrementos $h = (X_{i+1} - X_i)$, $2h = (X_{i+2} - X_i)$, $-h = (X_{i-1} - X_i)$, etc., quedando:

a) $f(X_{i+1}) = f(X_i) + f'(X_i)h + f''(X_i)\frac{h^2}{2} + f'''(X_i)\frac{h^3}{3!} + f^{IV}(X_i)\frac{h^4}{4!} + \cdots$

b) $f(X_{i+2}) = f(X_i) + 2f'(X_i)h + 2f''(X_i)h^2 + 8f'''(X_i)\frac{h^3}{3!} + 16f^{IV}(X_i)\frac{h^4}{4!} + \cdots$

c) $f(X_{i-1}) = f(X_i) - f'(X_i)h + f''(X_i)\frac{h^2}{2} - f'''(X_i)\frac{h^3}{3!} + f^{IV}(X_i)\frac{h^4}{4!} + \cdots$

d) $f(X_{i-2}) = f(X_i) - 2f'(X_i)h + 2f''(X_i)h^2 - 8f'''(X_i)\frac{h^3}{3!} + 16f^{IV}(X_i)\frac{h^4}{4!} + \cdots$

Combinamos (a) con (b), haciendo $4(a) + (b) \times -1$:

$$4f_{i+1} - f_{i+2} = 3f_i + 2f'_i h - 4f'''_i \frac{h^3}{3!} + \cdots$$

donde $f_i = f(X_i)$, $f_{i+1} = f(X_{i+1})$, etc.

Se observa que se elimina el 2º orden de h, aumentando el orden de error del desarrollo a 3, lo cual aumenta la precisión. Esta fórmula puede escribirse:

$$\Rightarrow \quad f'_i = \frac{1}{2h}\left(-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}\right) + 2f'''_i \frac{h^2}{3!} + \cdots$$

que es una fórmula de 1ª derivada, hacia "adelante", con un orden de precisión de 2 para h.

Análogamente, pueden combinarse las 4 series propuestas para otras derivadas, ahora que ya se sabe cual es la utilidad de dichas series. Por ejemplo, busquemos una fórmula de 2ª derivada utilizando las fórmulas (b) y (c). Hagamos (b) + (c):

$$f_{i+2} + f_{i-2} = 2f(x_i) + 4f''(x_i)h^2 + 32 f^{IV}_i \frac{h^4}{4!} + \cdots$$

Que se escribe.

$$\Rightarrow \quad f''_i = \frac{1}{4h^2}\left(f_{i-2} - 2f_i + f_{i+2}\right) - 8 f^{IV}_i \frac{h^2}{4!} + \cdots$$

que es una fórmula de 2ª derivada con orden de error 2 en h

Este procedimiento, menospreciado en muchos textos, conduce directamente a las fórmulas, con ventajas respecto a la serie de Newton.

3) Deducción de fórmulas de recurrencia.

Este método, que se presta a polémicas de interés coloquial, más que técnico, consiste en truncar la Serie de Taylor y suponer un orden de error. Se despeja enseguida el valor X_{i+1} (que es el próximo a X_i, donde se desarrolla la serie) y se tiene una fórmula de recurrencia, suponiendo que $f(X_{i+1}) \approx 0$ (muy próxima a la raíz buscada)

- Sea $f_{i+1} = f_i + f'_i h + f''_i \frac{h^2}{2} + \ldots$, con $h = (X_{i+1} - X_i)$

tómese $f_{i+1} = f_i + f'_i h$ y despéjese X_{i+1}:

$$h = \frac{f_{i+1} - f_i}{f'_i}$$

$$X_{i+1} = X_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{f'_i} \quad \text{, supóngase } f_{i+1} \approx 0$$

$$\rightarrow \boxed{X_{i+1} = X_i - \frac{f_i}{f'_i}} \quad \text{; converge si } \left|\frac{f_i}{f'_i}\right| < \varepsilon,\ \varepsilon \to 0$$

Esta fórmula es la misma del método de Newton-Raphson, donde se observa que

$$f_{i+1} \approx 0 \quad \text{y} \quad f''_i \frac{h^2}{2} + f''' \frac{h^3}{3!} + \ldots \approx 0 \quad - (\alpha)$$

a) La serie α converge si $\left| f''_i \frac{h^2}{2} \right| < 1$

con lo cual se tiene una condición de convergencia para la fórmula de recurrencia:

$$\boxed{X_{i+1} < X_i \pm \sqrt{\frac{2}{|f''_i|}}}$$

b) una condición de convergencia rigurosa puede obtenerse aplicando el criterio de D'alembert para probar la convergencia de una serie de potencias, pero la condición sería poco práctica para aplicar al método de recurrencia

c) una tercera condición rigurosa haría intervenir a f_{i+1} dado que:

$$f_i + f_i' h \approx 0 \quad , \quad f_{i+1} - f_i'' \frac{h^2}{2} + \dots \approx 0$$

esta tercera condición es igualmente impráctica para fines de cálculo

— Con el mismo principio deduje en 1975 una fórmula de recurrencia de 2° orden:

$$f_{i+1} = f_i + f_i' h + f_i'' \frac{h^2}{2} = 0$$

$$h = \frac{-f_i' \pm \sqrt{f_i'^2 - 2 f_i f_i''}}{f_i''}$$

de donde:

$$\boxed{X_{i+1} = X_i - \frac{f_i'}{f_i''} \pm \sqrt{\left(\frac{f_i'}{f_i''}\right)^2 - 2\frac{f_i}{f_i''}}}$$

converge si se usa la raíz positiva y $\left|\frac{2f_i}{f_i''}\right| < \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$

La fórmula queda lista para usarse exclusivamente con la raíz positiva.

Es evidente que esta fórmula tiene un orden de convergencia mayor que el de Newton-Raphson, obtenido como en el inciso (a) del caso anterior.

La fórmula de 2° orden propuesta aquí fue utilizada en la Tesis Profesional del Ing. Eduardo Solar G., a sugerencia mía [ ], por no haber sido convergentes las fórmulas de Newton-Raphson de primer orden, ni tampoco la llamada de 2° orden propuesta en los apuntes de Métodos Numéricos del Ing. Antonio Olivera S. Aunque esta fórmula de 2° orden es aparatosa, converge en la mayoría de los casos conflictivos donde otras fórmulas fallan, además de ser fácilmente programable.

Obsérvese cómo basta que $\frac{2f_i}{f''_i}$ sea pequeño para asegurar la convergencia, independientemente del valor de $\frac{f'_i}{f''_i}$, la condición de convergencia es muy simple:

-Conclusión- La serie de Taylor puede emplearse en diversos casos de cálculos aproximados, como se ha visto aquí, con gran sencillez, dejando a un lado los aspectos puramente teóricos que contiene y que pueden encontrarse más comúnmente en la literatura de difusión habitual en la Facultad. No se incluyen aquí aspectos relativos a integración aproximada con serie de Taylor, fórmulas de derivación parcial, solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, etc. que serán objeto de un verdadero tratado de aplicaciones de la serie.

fórmulas de interpolación y de extrapolación

Problema de VALORES EN LA FRONTERA

El problema de la elasticidad lineal puede resumirse en los siguientes casos:

Dada la geometría de un cuerpa elástico lineal homogéneo β y

1) Dada la distribución de fuerzas de cuerpo y fuerzas de contacto sobre la frontera, determine la distribución de esfuerzos y desplazamientos interior (PVF, 1a. clase).

2) Dada la distribución de fuerzas de cuerpo y una distribución de desplazamientos prescrita sobre la frontera completa, determine la distribución de esfuerzos y desplazamientos en el interior (PVF, 2a. clase).

3) Dada la distribución de fuerzas de tracción sobre una parte de la frontera de β y una distribución de desplazamientos prescrita sobre el complemento de la frontera, determine la distribución de esfuerzos y desplazamientos en el interior, conociendo también la distribución de fuerzas de cuerpo (PVF, 3a. clase).

El sistema completo de ecuaciones que resuelve cualquiera de los problemas anteriores es el siguiente:

I) Ecuaciones de equilibrio

$$\underline{\tau_{ij,j} + B_i = 0}$$

II) Ecuaciones esfuerzo - deformación

$$\underline{\tau_{ij} = \lambda \varepsilon \quad \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}}$$

III) Relaciones, deformación, desplazamiento

$$\underline{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i})}$$

Uno de los principios más importantes de la elasticidad conocido como principio de la Energía Potencial estacionaria establece lo siguiente:

Un campo de desplazamiento admisible, estando relacionado a través de alguna ley constitutiva a un campo de esfuerzos y que satisface los requerimientos de equilibrio en un cuerpo actuado por un conjunto de cargas estaticamente

La ecuación de Euler, Lagrange para este problema es

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} + kw = q_o$$

En este caso es posible obtener una solución cerrada a esta ecuación. Tal solución es

$$w = \frac{q_o}{k}\left[1 - \frac{\cos h\,\lambda x \cos \lambda (x-L) + \cos h\,\lambda (x-L) \cos \lambda x}{\cos h\,\lambda L + \cos \lambda L}\right]$$

Para comparar se usará ahora el método de Ritz para la funcional (*).

Se empleara una función que satisface un conjunto completo de condiciones de frontera:

$$w_1 = a_1 \ \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

compatibles, debe extremizar la energía potencial con respecto a otros campos de desplazamientos cinemáticamente admisibles.

En otras palabras una condición necesaria y suficiente para que β esté en equilibrio es la que la funcional de energía potencial de éste obtenga un valor extremo (un máximo o un mínimo).

La energía potencial para β toma la siguiente forma:

$$\pi(\beta_i, \tau_i, U_i) = U - \beta_i U_i \, dv - U_i \, ds$$

donde

$$dU = \tau_{ij} \, \delta\varepsilon_{ij} \, dv$$

Al tratar de minimizar π por medio del cálculo variacional se llega a que las condiciones necesarias que debe satisfacer π son

$$\frac{\partial\pi}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\pi}{\partial q_i}\right) = 0$$

son conocidas como ecuaciones diferenciales de Euler Lagrange.

Como quiera que sea la solución a las ecuaciones diferenciales obtenidas es rara vez posible obtenerlas en forma cerrada así que como alternativa a esta situación se tratará de obtener una solución aproximada al problema.

El método funciona como sigue: los campos de desplazamiento pueden aproximarse de la siguiente forma (METODO DE RITZ).

$$\left.\begin{aligned} Un &= \phi_0(x,y,z) + \sum_{i=1}^{n} a_i \, \phi_i(x,y,z) \\ Vn &= \phi_0(x,y,z) + \sum_{i=1}^{n} b_i \, \phi_i(x,y,z) \\ Wn &= \gamma_0(x,y,z) + \sum_{i=1}^{n} c_i \, \gamma_j(x,y,z) \end{aligned}\right\}$$

Las funciones con el subscrito cero satisfacen las condiciones cinemáticas de frontera mientras las otras 3N son cero ahí.

Los coeficientes a_i, b_i y c_i se tratan de determinar de tal forma que la energía potencial sea mínima. Estos son llamados los coeficientes de Ritz.

Se puede demostrar que si $n \to \infty$ en este proceso, entonces U_n, V_n y W_n convergen en la energía a la solución exacta para el problema siempre y cuando las funciones ϕ_i, χ_i y γ_i sean completas |Rudin pag. 331|

La minimización de la energía potencial π se obtiene imponiendo las condiciones

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial a_i} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \pi}{\partial b_i} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \pi}{\partial a_i} = 0. \qquad (= 1, 2, \cdot \cdot n. \end{cases}$$

Esto da 3n ecuaciones para las 3n coeficientes desconocidos.

Ejemplo. La figura muestra una viga simplemente soportada en sus extremos y además con un soporte elástico entre ellos, el cual se idealiza por una serie de resortes.

La fuerza desarrollada por el soporte elástico, por unidad de longitud y por unidad de deflexión en un punto se llama módulo del soporte y se denota por - k.

La destribución de fuerza sobre la viga debida al soporte elástico está dada por kw.

La energía potencial del soporte para una deflexión dada w se calcula por

$$V_{sop} = \int_0^L \left[\int_0^w kw\, dw \right] dx = \int_0^L \frac{1}{2} kw^2 \, dx$$

La energía potencial total para la flexión está dada por

$$\pi = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[w''(x) \right]^2 dx + \frac{1}{2} k \int_0^L w^2 \, dx - q_o \int_0^L w \, dx$$

$$= \int_0^L \left[\frac{EI}{2} (w'')^2 + \frac{1}{2} kw^2 - q_o w \right] dx \qquad (*)$$

Efectuando el proceso de extremización de la funcional con respecto a a_i lleva a la siguiente aproximación.

$$\underline{W_{app}} = \frac{4 q_o L^4 / \pi^5 E I}{1 + kL^4/\pi^4 E I}$$

$$= \frac{16}{\pi^5}\left(\frac{q_o}{k}\right)(L\lambda)^4 \Big/ \left[1 + \frac{4}{\pi^4}(\lambda L)^4\right]\Big\} \operatorname{sen} \frac{\pi X}{L}$$

Incrementando el número de términos de la serie como sigue

$$W_{app} = \sum_{n=1}^{p} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi X}{L}$$

Las funciones $\phi_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi X}{L}\right)$ son las funciones características del operador

$$\left[\frac{d^4}{dx^4} + \frac{k}{EI}\right]$$

para las conclusiones de frontera del problema y además son linealmente independientes.

Como tales, estas son completas en la energía.
Se sabe que las sumas parciales Wp forman una sucesión minimizante para esta funcional cuando los coeficientes se escogen de tal forma que extremizen el valor de la funcional con respecto a las a_i's (esto es, las a_i's son los coeficientes de Ritz).

De aquí, con las a_i's así escogidas se puede decir que

$$\left\{ \lim_{n\to\infty} W_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)_{Ritz} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi X}{L}\right) \equiv \text{sol. ec. dif.} \qquad (**) \right\}$$

Para obtener los coeficientes de Ritz se sustituye (**) en (*), obteniéndose el siguiente resultado

$$\left. \begin{aligned} \Pi = \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \left\{ a_n^2 \left[\left(\frac{EI}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + \frac{kL}{4}\right] - a_n\left(\frac{2q_o L}{n\pi}\right)\right\} \\ + \sum_{n=2,4,6\ldots}^{\infty} \left\{ a_n^2 \left[\left(\frac{EI}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + \frac{kL}{4}\right]\right\} \end{aligned} \right\}$$

Donde se han usado las propiedades de ortogonalidad de las funciones características para llevar a cabo las integraciones.

Notando que $\frac{\partial(\Pi)}{\partial a_n} = 0$

Se obtienen los coeficientes de Ritz para valores impares de n:

$$a_n = \frac{4 q_o L^4/(n^5 \pi^5 EI)}{1 + kL^4/(n^4 \pi^4 EI)}$$

Todas las otras a_n son cero. De acuerdo a esto la solución correcta a la ecuación diferencia está dada por:

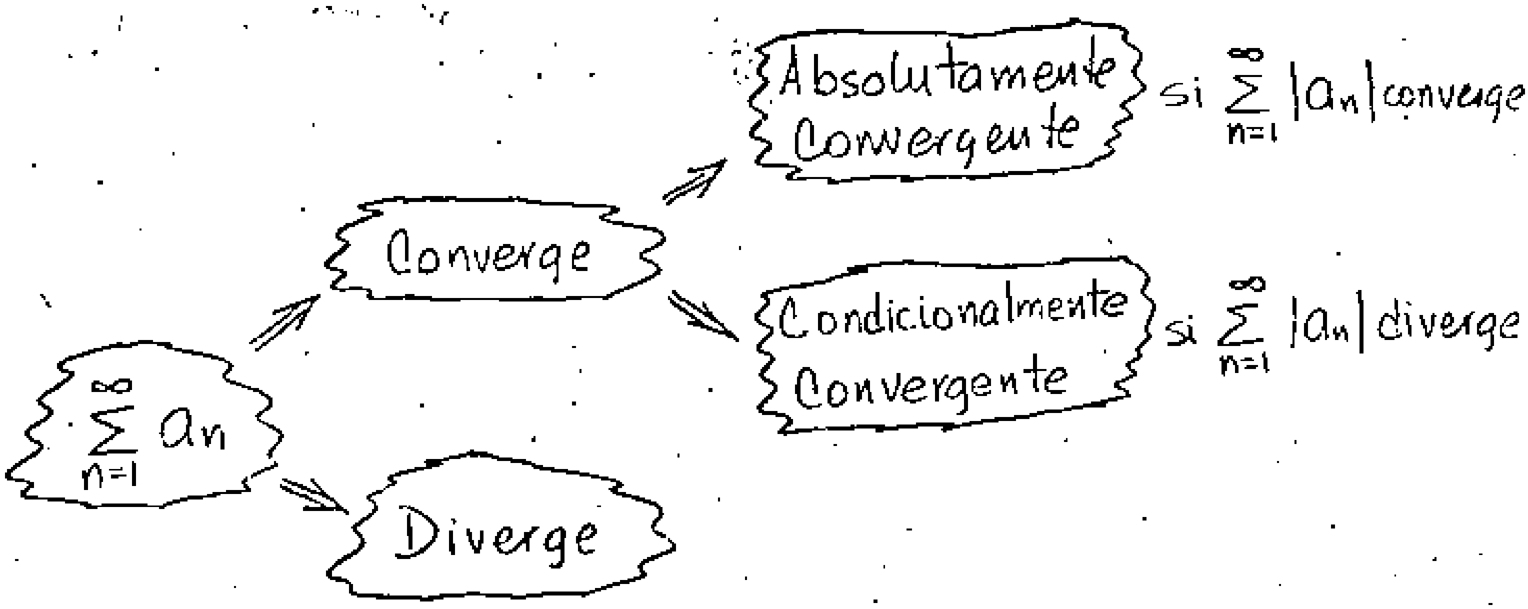
$$W = \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{4 q_o L^4/(n^5 \pi^5 EI)}{1 + kL^4/n^4 \pi^4 EI} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L}$$

Por inspección es claro que los coeficientes de la serie convergen muy rápidamente. Además esta convergencia es uniforme.

La siguiente tabla de resultados muestra los resultados exactos para W en el centro de la viga junto con los resultados aproximados, para n=1 y n=1,3 etc y para un valor dado de RL /EI = 4

$kL^4/EI = 4$	Exacta	n = 1	n = 1,3	n = 1, 3, 5
$\frac{EI\ (L/2)}{q_o L^4}$	0.012505	0.12556	0.012502	0.012506

CUADRO RESUMEN



SERIES IMPORTANTES

1-) SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots \qquad \ldots \quad a \neq 0$$

si $|r| < 1$ converge con $s = \frac{a}{1-r}$

si $|r| \geq 1$ diverge

2-) SERIE ARMONICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

diverge

3.-) SERIE "p"

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

si $p > 1$ converge

si $p \leq 1$ diverge

4.-) SERIE FACTORIAL

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$$

Converge

5.-) SERIE EXPONENCIAL n^n

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

converge

6.-) SERIE TELESCOPICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots$$

converge $s = 1$

RESUMEN DE PRUEBAS PARA LA C. O D. DE SERIES

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si $\lim_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow$ converge

si $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe $\Rightarrow$ diverge

Si $\sum a_n$ es convergente $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ entonces $\sum a_n$ diverge

si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen, entonces $\begin{cases} \sum (a_n+b_n) \text{ converge} \\ \sum c a_n \text{ converge} \\ \sum (a_n-b_n) \text{ converge} \end{cases}$

si $\sum a_n$ diverge $\sum c a_n$ diverge

si $\sum a_n$ converge y $\sum b_n$ diverge $\sum (a_n+b_n)$ diverge

Prueba de la Integral

si f (positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$)

la serie $f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+\ldots$

i) Converge si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge

ii) Diverge si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge

Prueba de la Comparación

si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ (series de términos positivos)

i) si $\sum b_n$ converge y $a_n \leq b_n$ entonces $\sum a_n$ converge

ii) si $\sum b_n$ diverge y $a_n \geq b_n$ entonces $\sum a_n$ diverge

..ueba del límite de la Comparación

si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ (series de términos positivos) y si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$$

entonces los dos convergen o los dos divergen

Prueba de la Serie Alternada

Si $a_k \geq a_{k+1} > 0$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces $\sum(-1)^{n-1} a_n$ converge

Convergencia Absoluta

$\sum a_n$ es absolutamente convergente si $\sum |a_n|$ es convergente

- Si $\sum a_n$ es absolutamente convergente, $\sum a_n$ es convergente

- $\sum a_n$ es condicionalmente convergente si $\begin{cases} \sum a_n & \text{converge} \\ \sum |a_n| & \text{diverge} \end{cases}$

Prueba de la Razón

Sea $\sum a_n$ (con términos no nulos)

i) si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$ $\sum a_n$ es absolutamente convergente

ii) si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ o ∞ $\sum a_n$ es divergente

iii) si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ $\begin{cases} \text{absolutamente convergente} \\ \text{condicionalmente convergente} \\ \text{divergente} \end{cases}$

Prueba de la Raíz

i) si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$ $\sum a_n$ es absolutamente convergente

ii) si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ o ∞ $\sum a_n$ es divergente

iii) si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ $\begin{cases} \text{absolutamente convergente} \\ \text{condicionalmente convergente} \\ \text{divergente} \end{cases}$

R E F E R E N C I A S

1) Apostol Tom M
CALCULUS. Vol. 1
Ed. Reverté S.A.
Barcelona, 1982

2) Grossman Stanley
CALCULUS, 2a. Ed.
Academic Press
Nueva York, 1981

3) Mizrahi Abe y Sullivan Michael
CALCULUS AND ANALYTIC GEOMETRY
Wadsworth Publishing. Company
Belmont, California, 1982

4) Protter Murray y Morrey Charles
CALCULO CON GEOMETRIA ANALITICA, 3a. Ed.
Fondo Educativo Interamericano

5) Solar Eduardo y Speziale Leda
ALGEBRA 1a. PARTE
Facultad de Ingeniería, UNAM
México, D. F., 1981

6) Spiegel Murray R.
CALCULO SUPERIOR
Serie de Compendios Schaum, Mac Graw Hill
México, D.F., 1980

7) Spivak Michael
CALCULUS
Ed. Reverté, S.A.
Barcelona, 1977

8) Swokowski Earl W.
CALCULO CON GEOMETRIA ANALITICA
Wadsworth Internacional Iberoamericana
Belmont, California, 1982